

Alexander Grundler

**Zuverlässigkeitsnachweis von Systemen
durch Komponenten- und Systemtests
unter Berücksichtigung von Vorkenntnissen**

D 93
ISBN 978-3-948308-13-1

Institut für Maschinenelemente

Antriebs-, Dichtungs-, Schienenfahrzeug- u. Zuverlässigkeitstechnik

Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 9
70569 Stuttgart
Tel. (0711) 685 – 66170

Prof. Dr.-Ing. A. Nicola

Zuverlässigkeitsnachweis von Systemen durch Komponenten- und Systemtests unter Berücksichtigung von Vorkenntnissen

Von der Fakultät für Konstruktions-, Produktions- und
Fahrzeugtechnik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Alexander Grundler, M. Sc.
aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Hanss

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Januar 2024

Meiner Familie

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Maschinenelemente der Universität Stuttgart.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche, ehemaliger Ordinarius und Direktor des Instituts für Maschinenelemente, welcher mir diese Arbeit ermöglichte. Sein mir entgegengebrachtes Vertrauen, die gewährte wissenschaftliche Freiheit und sein stets offenes Ohr bildeten die Basis für die tägliche Institutsarbeit und haben wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.

Einen herzlichen Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Hanss des Instituts für Technische und Numerische Mechanik für die Übernahme des Mitberichts und die kritische Durchsicht meiner Arbeit.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Gundelsweiler für die Übernahme des Prüfungsvorsitzenden.

Mein großer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Martin Dazer, Bereichsleiter des Fachbereichs Zuverlässigkeitstechnik am Institut für Maschinenelemente, welcher mich fortwährend unterstützt hat. Ohne seine wertvollen Anregungen und das freundschaftliche Miteinander wäre die Arbeit so nicht möglich gewesen.

Ganz herzlich danke ich zudem allen aktiven und ehemaligen MitarbeiterInnen des Instituts für Maschinenelemente für das kollegiale, familiäre Miteinander und das einzigartige Arbeitsklima. Weiter danke ich allen StudienarbeiterInnen die mich bei der Bearbeitung der Themen unterstützt haben.

Stuttgart, im Januar 2024

Alexander Grundler

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	V
Kurzfassung	XI
Abstract	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Problemstellung	1
1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit	2
2 Stand der Forschung und Technik	5
2.1 Grundlagen der Statistik	5
2.1.1 Grundbegriffe und Maßzahlen	5
2.1.2 Statistische Verteilungen	7
2.1.3 Vertrauensbereiche	11
2.1.4 Hypothesentests	12
2.1.5 Zentraler Grenzwertsatz	15
2.1.6 Satz von Bayes	16
2.2 Zuverlässigkeitstechnik	17
2.2.1 Grundbegriffe und Definitionen	17
2.2.2 Methoden der Zuverlässigkeitstechnik	19
2.2.3 Vertrauensbereiche in der Zuverlässigkeitstechnik	23
2.2.4 Systemzuverlässigkeit und deren Berechnung	27
2.2.5 Zuverlässigkeitstests	30
2.2.6 Berücksichtigung von Vorkenntnissen	32
2.2.7 Probability of Test Success	34
2.2.8 Zuverlässigkeitstestplanung	35

3 Forschungsbedarf und Zielsetzung	41
3.1 Bewertung bestehender Ansätze und Forschungsbedarf	41
3.2 Forschungsziel	42
4 Probability of Test Success als Trennschärfe eines Zuverlässigkeitstests	45
4.1 Zuverlässigkeitsnachweistest als Hypothesentest	45
4.2 Berechnung der Probability of Test Success als Trennschärfe	47
4.2.1 Allgemeine Berechnungsmethode	48
4.2.2 Analytische und exakte Berechnung bei Success-Run Tests	50
4.2.3 Analytische und approximative Berechnung bei End-of-Life Tests	53
4.3 Vergleich der Berechnungsmethoden	59
4.3.1 Vergleich für Success-Run Tests	59
4.3.2 Vergleich für End-of-Life Tests	59
4.4 Zusammenfassung und Fazit	63
5 Vorkenntnis für den Zuverlässigkeitsnachweis	65
5.1 Vorkenntnisse aus bestehenden Informationen	65
5.1.1 Ableiten von Vorkenntnis aus Versuchen	67
5.1.2 Ableiten von Vorkenntnis aus Lebensdauerberechnungen	69
5.2 Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes	71
5.2.1 Zuverlässigkeitsverteilung als Vorkenntnis	71
5.2.2 Ausfallverteilung als Vorkenntnis	72
5.2.3 Mehrere Quellen der Vorkenntnis	73
5.3 Unsicherheit in der Vorkenntnis	75
5.4 Anwendbarkeit von Vorkenntnis	75
5.5 Zusammenfassung und Fazit	76
6 Planung der Zuverlässigkeitstests von Systemen als Hypothesentests	79
6.1 Berechnung der Probability of Test Success bei Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes	79
6.1.1 Success-Run Test	79
6.1.2 Allgemeine Berechnung bei End-of-Life Tests	80
6.1.3 Analytische und approximative Berechnung bei End-of-Life Tests	81
6.2 Berücksichtigung der Systemstruktur	82

6.2.1	Systemdefinition	83
6.2.2	Berechnung der Probability of Test Success	84
6.2.3	Vergleich der Berechnungsmethoden bei End-of-Life Tests	91
6.3	Berücksichtigung von Unsicherheit in der Vorkenntnis	92
6.3.1	Berechnung der Probability of Test Success	92
6.3.2	Vergleich der Berechnungsmethoden bei End-of-Life Tests	97
6.4	Testplanung für einen effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit	99
6.4.1	Berechnung der Probability of Test Success	99
6.4.2	Vorgehen und Auswahl des Zuverlässigkeitstests	106
6.5	Zusammenfassung und Fazit	107
7	Untersuchung der Einflüsse auf die Probability of Test Success	109
7.1	Einfluss der Berücksichtigung von Vorkenntnis über den Satz von Bayes	109
7.1.1	Bei End-of-Life Tests	109
7.1.2	Bei Success-Run Tests	111
7.2	Einfluss der Berücksichtigung der Systemstruktur	111
7.2.1	Prüflingsaufteilung bei Tests von Subsystemen, Komponenten oder Bauteilen	112
7.2.2	Einfluss der Systemebene des Tests	116
7.2.3	Einfluss der Systemebene bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes	119
7.3	Einfluss der Unsicherheit in der Vorkenntnis	120
7.3.1	Änderung der Probability of Test Success bei Berücksichtigung der Unsicherheit	121
7.3.2	Einfluss der Unsicherheit bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes	123
7.3.3	Einfluss der Unsicherheit bei mehreren Systemelementen	125
7.3.4	Einfluss der Unsicherheit bei mehreren Systemelementen und zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes	129
7.4	Zusammenfassung und Fazit	132
8	Anwendungsbeispiel Synchronmaschine	135
8.1	Systembeschreibung	135
8.2	Anforderungen	136
8.2.1	Anforderungen an das System	137

8.2.2 Anforderungen an den Zuverlässigkeitsnachweis	137
8.3 Verfügbare Vorkenntnisse	137
8.4 Zuverlässigkeitstestplanung	138
8.4.1 Success-Run Tests	138
8.4.2 End-of-Life Tests	139
8.4.3 Identifikation des effizientesten Tests	141
8.5 Zusammenfassung und Fazit	142
9 Zusammenfassung und Ausblick	143
Literaturverzeichnis	147
A Berechnung der Probability of Test Success von End-of-Life Tests reiner Parallelsysteme	163
B Vergleich der Berechnungsmethoden der Probability of Test Success bei End-of-Life Tests	166
C Untersuchungen zum Einfluss der Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes auf die Probability of Test Success	168

Nomenklatur

Abkürzungen

Allg.	Allgemein
AM	Ausfallmode
Anal.	Analytisch
BC	Bias korrigierter Perzentil-Bootstrap-Vertrauensbereich
BC _a	Bias korrigierter und beschleunigter Bootstrap-Vertrauensbereich
Ber.	Berechnung
bspw.	Beispielsweise
Cov	Kovarianz
det	Determinante einer Matrix
DOE	Design of Experiments (statistische Versuchsplanung)
Elektro.	Elektronik
EoL	End-of-Life
etc.	et cetera
FMEA	Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse
HALT	Highly Accelerated Limit Test
Komp.	Komponente
l.	links
Leistungselekt.	Leistungselektronik
MAP	Maximum-a-posteriori-Schätzung
MCS	Monte-Carlo Simulation
MLE	Maximum Likelihood Methode
Momentenm.	Momentenmethode
PSM	Permanentmagnet-Synchronmotor
r.	rechts
Sim.	Simulation
SR	Success-Run

Stichpr.-Q.	Stichprobenquantil
sym.	symmetrisch
Sys.	System
Var	Varianz
Wickl.	Wicklung
z. B.	Zum Beispiel

Indizes

0	Wahrer Wert, der Vorkenntnis zugeordnet
1	Dem aktuellen Test zugeordnet, Der/dem ersten Komponente/Element zugeordnet
2	Der/dem zweiten Komponente/Element zugeordnet
.	Bei . ausgewertet
A	Ereignis A zugeordnet
α	Zur Irrtumswahrscheinlichkeit α
ber.	Berechnet
D	Dauerfestigkeit
ges	Gesamt
H_0	Unter Gültigkeit der Nullhypothese
H_1	Unter Gültigkeit der Alternativhypothese
i	Laufvariable
j	Laufvariable
k	Rang eines statistischen Moments Anzahl an Erfolgen in der Binomialverteilung, Anzahl Ausfälle
komb.	Aus zwei weiteren Werten kombinierter Wert
Kombi.	Resultierende aus mehreren Kombinierten
l	Ausfallmode l zugehörig
max	Maximum
min	Minimum
n	Dem Stichprobenumfang n entsprechend
n_0	Dem Stichprobenumfang n_0 entsprechend
n_{post}	Dem Stichprobenumfang n_{post} entsprechend
$n+n_0$	Dem Stichprobenumfang $n + n_0$ entsprechend

o	Obere Grenze des Vertrauensbereichs
p	Aus der Vorkenntnis bekannt oder berechnet (prior)
Parallel	Dem Parallelsystem zugehörig
post	Nach Anwendung des Satz von Bayes (posterior)
prüf	Dem Test entsprechend
q	Kennzeichnet das Quantil des Merkmals zum Anteil q
r	Kennzeichnet einen bestimmten Wert (Referenz)
R_s	Bei der geforderten Zuverlässigkeit ausgewertet, der geforderten Zuverlässigkeit entsprechend
rel	Relativ
s	Kennzeichnet den geforderten Wert (Soll)
Serie	Dem Seriensystem zugehörig
Σ	Aufgrund der Unsicherheit kombinierter Wert
SR	Success-Run
Sys	System
u	Untere Grenze des Vertrauensbereichs
v	Verhältnis
VB	Vertrauensbereich

Lateinische Buchstaben

A	Zufallsereignis, Parameter der Betaverteilung
a	Faktor des BC_a Bootstrap-Vertrauensbereich
B	Parameter der Betaverteilung
b	Formparameter der Weibullverteilung
\bar{b}	Mittelwert der berechneten Formparameter der Weibullverteilung
$\mathcal{B}(\cdot; \cdot)$	Betaverteilung
C	Aussagewahrscheinlichkeit, Konfidenz (Confidence)
D	Schädigung
$E[\cdot]$	Erwartungswert
$F(\cdot)$	Verteilungsfunktion, Ausfallverteilung, Unzuverlässigkeit, Ausfallwahrscheinlichkeit

$f(\cdot)$	Dichtefunktion
$F^{-1}(\cdot)$	Umkehrfunktion von F
	Quantilsfunktion der Verteilung F
f_{H_0}	Nullverteilung
f_{H_1}	Alternativverteilung
G	Empirische Verteilung der Bootstrap-Statistik
g	Funktion
H_0	Nullhypothese
H_1	Alternativhypothese
h_n	Relative Häufigkeit
I	Fisher Informationsmatrix
$I(\cdot)$	Fisher Information
k	Anzahl Ausfälle, Rang eines statistischen Moments, Anzahl
K	Anzahl an Ausfallmoden
k	Exponent der Wöhlerlinie
\mathcal{K}	Kosten des Tests
\mathcal{K}_n	Prüflingskosten
\mathcal{K}_P	Der Laufzeit proportionale Kosten des Tests
L	Likelihoodfunktion, Likelihood
L_V	Lebensdauerverhältnis
m	Anzahl rechtszensierter Ausfallzeiten Anzahl der Blöcke der parallel getesteten Prüflinge
m_k	statistisches Moment k -ter Ordnung
$M\{\cdot\}$	Operator der Mellin-Transformation
$M^{-1}\{\cdot\}$	Operator der Rücktransformation der Mellin-Transformation
n	Stichprobenumfang
N	Lastwechsel
$\mathcal{N}(\cdot; \cdot)$	Normalverteilung
$\mathcal{N}_{\log}(\cdot; \cdot)$	Logarithmische Normalverteilung
o	Logarithmisches Lebensdauerquantil, Anzahl Ausfallmoden zu welchen keine Vorkenntnisse, zusätzlich berücksichtigt werden
P	Wahrscheinlichkeit

p	Wahrscheinlichkeit, Laufvariable
\mathcal{P}	Parametervektor
P_{ts}	Probability of Test Success
q	Anteil eines Quantils
R	Zuverlässigkeit, Überlebenswahrscheinlichkeit
r	Raffungsfaktor
s	Sicherheitsabstand, Argument des Bildbereichs der Mellin-Transformation
S	Last
T	Skalenparameter der Weibullverteilung
t	Lebensdauer(-merkmal), (Ausfall-)Zeit
\bar{t}	Mittelwert der Lebensdauerwerte
t_0	Ausfallfreie Zeit der dreiparametrischen Weibullverteilung
\mathbf{V}	Varianz-Kovarianzmatrix
$\mathcal{W}(\cdot; \cdot)$	Weibullverteilung
\mathcal{W}^{-1}	Umkehrfunktion der Weibullverteilung, Quantilsfunktion
X	Zufallsvariable
x	Realisierte Zufallsvariable, Anzahl Ausfälle
\bar{x}	Mittelwert von x
y	Realisierte Zufallsvariable
z	Anzahl Zensierungen
z_0	Faktor der Bias-Korrektur

Griechische Buchstaben

α	Irrtumswahrscheinlichkeit statistischer Fehler vom Typ I
β	Betafunktion nach Euler statistischer Fehler vom Typ II
Γ	Gammafunktion nach Euler
Δ	Effektstärke
Δ_{krit}	Signifikante Effektstärke entsprechend C
θ	Eine Statistik

θ_{-i}	Statistik des Jackknife-Resamplings
κ	Tatsächliche Anzahl Ausfälle
λ	Ausfallrate
Λ	Log-Likelihoodfunktion
μ	Lageparameter der Normalverteilung
σ	Standardabweichung
τ	Teststatistik des Zuverlässigkeitstests
ϕ	Parameter einer Verteilung, Parametervektor
Φ	Verteilungsfunktion der Normalverteilung
Φ^{-1}	Umkehrfunktion der Normalverteilung, Quantilsfunktion
Φ_{\log}	Verteilungsfunktion der logarithmischen Normalverteilung
Φ_{\log}^{-1}	Umkehrfunktion der logarithmischen Normalverteilung, Quantilsfunktion

Kurzfassung

Zentraler Gegenstand dieser Arbeit ist der Nachweis der Zuverlässigkeit von Systemen und die Planung der dazu notwendigen Tests. Selbst einfache Produkte können durch mehrere Ursachen und Mechanismen ausfallen und besitzen dazu meist mehrere Komponenten und Subsysteme. Diese Arbeit behandelt die Planung von Tests für den effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit, welche die Systemstruktur und die Komponenten mit der Kombination von Tests dieser Elemente berücksichtigt. Dazu wird die Probability of Test Success¹ als zentrale, objektive Bewertungsmetrik verwendet. Sie ist fähig, die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Zuverlässigkeitsnachweis anzugeben und erlaubt damit beispielsweise auch die Frage nach dem erforderlichen Stichprobenumfang bei ausfallbasierten Tests zu beantworten. Durch die vorgenommene Einordnung der Probability of Test Success in den statistischen Kontext eines Hypothesentests kann die Probability of Test Success auch als Trennschärfe verstanden werden. Dadurch werden Berechnungsmethoden entwickelt, die diesen Kontext ausnutzen. Ebenso ermöglicht dies die notwendige Erweiterung auf Systeme mit mehreren Ausfallmoden sowie die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis und die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes. Ein ganzheitliches Vorgehen zeigt auf, wie im individuellen Fall der effizienteste Test identifiziert werden kann. Das heißt ein Test, welcher sowohl den Nachweis mit hoher Wahrscheinlichkeit erbringt, als auch die gesetzten Grenzen bezüglich des zur Verfügung stehenden Budgets einhält und die Ressourcen dabei möglichst effizient einsetzt. Untersuchungen zeigen, dass sich daraus ein grundsätzliches Verständnis zu den Tests, der Vorkenntnis und den Systemen ableiten lässt. Beispielsweise sind ausfallfreie Tests auf Komponentenebene den ausfallbasierten Tests aus statistischer Sicht fast immer unterlegen. Zudem verhält sich der Effekt von hohem Aufwand auf die Güte des Tests bei ausfallbasierten und ausfallfreien Tests gegensätzlich. Werden bei einem ausfallbasierten Test mehr Prüflinge verwendet, so steigt die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Nachweis. Bei den ausfallfreien Tests sinkt dagegen die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Nachweis. Das bedeutet, dass ausfallfreie Testverfahren nur dann mit hoher Wahrscheinlichkeit einen Nachweis erbringen können, wenn die dabei gewonnene Aussage von schlechter statistischer Güte ist. Zudem sind sie unfähig, Zuverlässigkeitsnachweise für Systeme zu erbringen, welche die Anforderung nur wenig übererfüllen. Werden die Komponenten des Systems ausfallbasiert getestet, um den Nachweis zu erbringen, so ermöglichen die entwickelten Methoden eine optimale Aufteilung der Prüflinge zu berechnen. Neben der Auswahl der Testart erlaubt diese Arbeit demnach die Untersuchung der optimalen Testgestaltung, sodass der Nachweis mit größtmöglicher Wahrscheinlichkeit erbracht werden kann. Hierzu zählen auch Kombinationen verschiedener Testtypen und Komponenten des Systems. Es lassen sich beispielsweise ausfallbasierte Komponententests mit ausfallfreien Dauerlauf tests auf Systemebene kombinieren und hinsichtlich deren Eignung für den Zuverlässigkeitsnachweis bewerten. Durch die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels des Satzes von Bayes lassen sich Testaufwände

¹ Erfolgswahrscheinlichkeit eines Tests

einsparen. Die Bewertung solcher Tests ist durch die erarbeiteten Methoden ebenso möglich und stellt sicher, dass der effizienteste Test zum Nachweis der Zuverlässigkeit gefunden werden kann. Weitere Untersuchungen ergeben ergänzende Erkenntnisse. Die Anwendung des ganzheitlichen Verfahrens am Fallbeispiel eines Synchronmotors demonstriert zusätzlich den Nutzen der entwickelten Methoden und Prozesse. Die Arbeit leistet damit einen Beitrag zur umfassenden und statistisch fundierten Planung von Zuverlässigkeitstests zum Nachweis von Systemen. Sie konzentriert sich dabei auf die statistischen Aspekte und erlaubt den objektiven Vergleich und Bewertung von Tests verschiedener Systemebenen und Arten, sowie Kombinationen davon zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit. Um möglichst effiziente Tests zu ermöglichen, wird eine Methode mit dem Satz von Bayes integriert. Die Güte der Planung selbst wird durch die Berücksichtigung der Unsicherheit der Eingangsdaten mitbewertet.

Abstract

System Reliability Demonstration using Component and System Tests with Consideration of Prior Knowledge

The main subject of this thesis is the reliability demonstration of systems and the planning of test runs required for this purpose. Even simple products can fail due to several causes and mechanisms while also consisting of several components and subsystems. The planning of tests for the efficient demonstration of system reliability, which considers the system structure and the components, and the combination of tests of these, respectively, is covered in this work. For this purpose, the Probability of Test Success is used as a key objective assessment metric. It is capable of providing the probability for a successful reliability demonstration and thus also, for example, the calculation of the required sample size for failure-based tests. By placing the Probability of Test Success in the statistical context of a hypothesis test, it can also be understood as the statistical power and, as a consequence, adapted, simpler calculation methods are developed for it. Likewise, this allows the necessary extension to systems with multiple failure modes as well as the consideration of uncertainty in prior knowledge and the additional consideration of prior knowledge with Bayes' theorem. A holistic procedure reveals how the most efficient test can be identified in an individual case. That is, a test that both surely provides the demonstration and adheres to the set limits with respect to the available budget while using the resources as efficiently as possible. Studies show that fundamental understanding can be derived from this. For example, failure-free tests at the component level are almost always inferior to failure-based tests from a statistical point of view. In addition, the effect of high effort and high reward is opposite for failure-based and failure-free testing. If more test items are used in a failure-based test, the probability of a successful demonstration increases. In contrast, for failure-free tests, the probability of a successful demonstration decreases. This means that failure-free test procedures can only provide reliability demonstrations with a high probability if the information obtained in the process is of poor statistical quality. Moreover, they are unable to provide reliability demonstrations for systems that only slightly exceed the requirement. If the components of the system are tested based on failures in order to provide the demonstration, the developed methods allow for a calculation of an optimal partitioning of the test items. Accordingly, in addition to the selection of the type of test, this work allows the study of the optimal test design so that the demonstration can be performed with the highest possible probability. This includes combinations of different test types and components of the system. For example, failure-based component tests can be combined with failure-free endurance tests at the system level and evaluated with respect to their suitability for reliability demonstration. By additionally considering prior knowledge by means of Bayes' theorem, test efforts can be reduced. The evaluation of such tests is also possible with the developed methods and ensures that the most efficient test for reliability demonstration can be found. Further investigations yield additional general findings, and the application of the holistic procedure to a case study additionally demonstrates the usefulness

of the developed methods and processes. This thesis thus contributes to a comprehensive and statistically valid planning of reliability tests for the validation of systems. It focuses on the statistical aspects and allows the objective comparison and assessment of tests of different system levels and types, as well as combinations thereof, for the demonstration of system reliability. To enable the most efficient testing possible, a method is integrated using Bayes' theorem. The quality of the planning itself is co-assessed by taking into account the uncertainty of the input data.

Kapitel 1

Einleitung

Heutige Produkte sind meist durch vielfältige Funktionen gekennzeichnet. Insbesondere im digitalen Zeitalter mit vielfach vernetzten Produkten, sind komplexe Produkte oft notwendig, um erfolgreich am Markt bestehen zu können. Komplexe Produkte spiegeln sich jedoch in einer ebenso großen Vielfalt an möglichen Ausfallursachen wider, welche die Herausforderungen in der Absicherung vergrößern. Doch auch herkömmliche und einfachere Produkte besitzen oft bereits mehr als eine Ausfallursache, die es zu beherrschen gilt. In Kombination mit dem stetig steigenden Marktdruck und steigenden Kundenanforderungen gilt es, diese Herausforderungen mit wissenschaftlichen Methoden zu überwinden. Die Zuverlässigkeit lässt sich dabei mit entsprechenden Tests bestimmen. Bei der Auswahl und Gestaltung solcher Tests ist dem Zielkonflikt aus Genauigkeit, Kosten und Zeit zu begegnen, welcher die Testplanung erschwert. Eine objektive Bewertung der verschiedenen Tests bezüglich des Nachweises der Systemzuverlässigkeit ist dabei von Nöten, um teure Entwicklungsschleifen und Tests mit wenig Aussicht auf Erfolg zu vermeiden.

1.1 Motivation und Problemstellung

Die physische Erprobung der Produkte ist für die Feststellung der tatsächlichen Zuverlässigkeit und den Abgleich mit den Anforderungen vor Markteintritt unverzichtbar. Um dabei eine möglichst genaue Aussage zu gewinnen, ist mit einer möglichst großen Stichprobe zu testen. Diese statistische Forderung steht jedoch im Kontrast zu den Möglichkeiten eines Unternehmens. So sind die verfügbaren Ressourcen immer begrenzt und die Erprobung sollte bestenfalls in kurzer Zeit abgeschlossen sein. Aus diesem Grund wurden Verfahren entwickelt, die es erlauben, Vorkenntnisse zusätzlich zu berücksichtigen und den Testaufwand zu senken. Zusätzlich steht grundsätzlich eine Vielzahl an verschiedenen Tests zur Verfügung, die zur Erprobung und dem Zuverlässigkeitsnachweis genutzt werden können. Das Konzept der Probability of Test Success¹ wurde erstmals von Dazer et al. [1-3] eingeführt und erlaubt es, die notwendigen Tests so zu planen, dass diese ein Maximum an Erfolgswahrscheinlichkeit haben und gleichzeitig mit den zur Verfügung stehenden Ressourcen umsetzbar sind. Es handelt sich demnach um eine objektive Bewertung der Tests, welche somit die Planung maßgeblich unterstützt. Allerdings erlaubt es dieses Konzept aktuell nicht, Tests von Systemen mit mehr als einer Ausfallmode zu bewerten. Zudem können die gegebenenfalls vorhandenen Vorkenntnisse nicht zusätzlich in den Nachweis einfließen und die unweigerlich

¹ Erfolgswahrscheinlichkeit eines Tests

in der Vorkenntnis vorhandene Unsicherheit bleibt unberücksichtigt. Auch wenn die Größe der Probability of Test Success als Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet wird, so lässt sie bisher den korrekten statistischen Kontext vermissen. Die Grundlage für eine statistisch fundierte Planung von Tests für den Zuverlässigkeitsnachweis ist mit der Probability of Test Success geschaffen, sie ist jedoch nicht auf reale Produkte anwendbar und es werden nicht alle zur Verfügung stehenden Informationen für den Nachweis verwendet.

1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit

Um den effizienten Zuverlässigkeitsnachweis bei Systemen zu befähigen, sollen die dazu notwendigen Tests objektiv bewertet werden können. Dabei ist zunächst der statistische Kontext der Probability of Test Success herzustellen. Um die Planung von realen Systemen mit mehreren Ausfallmoden zu ermöglichen, müssen die Systemstruktur sowie die verschiedenen Systemebenen mit berücksichtigt werden. Zusätzliche Berücksichtigung von Vorkenntnis sowie deren Unsicherheit erlauben dabei den Testaufwand zu reduzieren und damit möglichst effiziente Tests sicherzustellen. Letztlich ist das Erarbeitete in einem ganzheitlichen Verfahren zur Bewertung und Identifikation des effizientesten Tests zum Nachweis der Zuverlässigkeit von Systemen zu manifestieren.

Um diese Ziele zu erreichen, wird zunächst der aktuelle Stand der Forschung und Technik in Kapitel 2 erläutert. Die Bewertung der vorgestellten Methoden und daraus abgeleitete Forschungslücke zusammen mit dem konkretisierten Ziel der Arbeit sowie der Arbeitshypothese werden in Kapitel 3 vorgestellt. In Kapitel 4 wird der statistische Kontext der Probability of Test Success als Trennschärfe eines Zuverlässigkeitsnachweistests hergestellt. Mit diesem Kontext lassen sich neue Berechnungsmethoden entwickeln, welche ebenso in diesem Kapitel vorgestellt werden. Dabei basiert die allgemeine Berechnung auf einem Bootstrap-Ansatz und die analytische Berechnung nutzt die asymptotischen Eigenschaften des Schätzers des Lebensdauerquantils. Die zur Planung der Tests und der Bewertung mittels der Probability of Test Success benötigten Vorkenntnis wird in Kapitel 5 vorgestellt. Dabei wird aufgezeigt wie diese aus bereits durchgeführten Versuchen abgeleitet und aus Lebensdauerberechnungen erzeugt werden kann. Zudem werden zwei Arten von Vorkenntnissen definiert, die unterschiedliche Verwendungen zulassen. Mittels des neuen Kontexts und den neuen Berechnungsmethoden zur Bewertung der Tests, lässt sich das Konzept in Kapitel 6 um die zusätzliche Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes, der Berücksichtigung mehrerer Ausfallmoden sowie der Systemstruktur und der Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis entwickeln. Diese Aspekte werden zu einem gemeinsamen Verfahren verküpft, mit welchem es möglich ist den effizientesten Test zum Nachweis der Zuverlässigkeit zu identifizieren. In Kapitel 7 werden die Einflüsse auf die Probability of Test Success und damit den Zuverlässigkeitsnachweis anhand von Untersuchungen herausgearbeitet und damit die entwickelten Methoden verifiziert. Es ergeben sich grundsätzliche Erkenntnisse, welche für die Planung der Tests pauschale Gültigkeit besitzen. Um das entwickelte Verfahren weiter bewerten zu können, wird dieses in Kapitel 8 anhand des Fallbeispiels eines Permanentmagnet-Synchronmotors angewandt, was die Vorgehensweise validiert und aufzeigt, dass die erarbeiteten Erweiterungen und Methoden der Probability of Test Success zur Bewertung unerlässlich sind. Schließlich gibt Kapitel 9 eine Zusammenfassung der Arbeit und die wesentlichen Erkenntnisse wieder sowie einige Hinweise zu potentiellen weiterführenden Forschungsarbeiten. Der Aufbau der Arbeit ist in Abbildung 1.1 grafisch dargestellt.

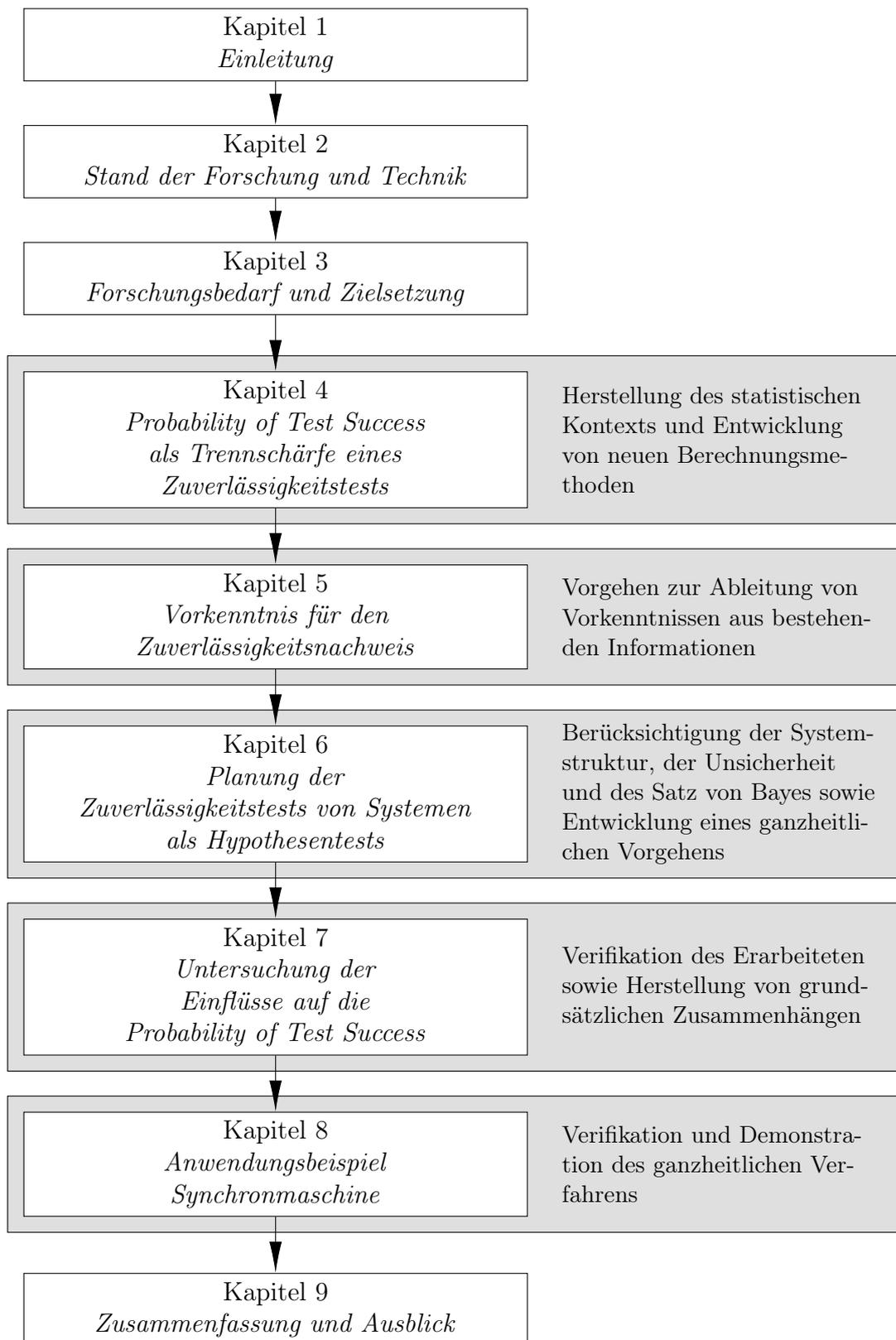


Abbildung 1.1: Aufbau der Arbeit.

Kapitel 2

Stand der Forschung und Technik

In diesem Kapitel werden der Stand der Forschung und Technik sowie Grundlagen der Statistik und der Zuverlässigkeitstechnik vorgestellt. Die dabei dargestellten Theorien, Methoden und Begriffe bilden die Basis für diese Arbeit und werden für eine verbesserte Anschauung an den benötigten Stellen der jeweiligen Kapitel um ergänzende Informationen erweitert.

2.1 Grundlagen der Statistik

Die Statistik beschreibt das Wissenschaftsgebiet, welches sich mit der Theorie und den Methoden zum Umgang, zur Beschreibung und zur Auswertung von zufallsabhängigen Ereignissen beschäftigt. Im Folgenden werden diesbezüglich für diese Arbeit grundlegenden Themen dargelegt.

2.1.1 Grundbegriffe und Maßzahlen

Die Statistik befasst sich mit zufälligen Ereignissen. Zufall bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das Ereignis eintreten kann, aber nicht muss. Dies steht im Kontrast zu deterministischen Ereignissen, welche lediglich das sichere Ereignis und das unmögliche Ereignis zulassen [4–8].

Wird ein Experiment mit solch einem Zufallsereignis A mehrfach durchgeführt, so kann durch den Quotienten aus der Anzahl n_A der eingetretenen Ereignisse und der Gesamtzahl der Durchführungen n die **relative Häufigkeit** $h_n(A)$ gebildet werden [5]:

$$h_n(A) = \frac{n_A}{n} \quad (2.1)$$

Würde dieses Experiment unter gleichen Bedingungen unendlich oft durchgeführt, also $n \rightarrow \infty$, so bildete diese relative Häufigkeit die **Wahrscheinlichkeit** $P(A) \in [0, 1]$ des beschriebenen Ereignisses A ab [4, 6, 9]. Die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff [4] verallgemeinert den Begriff und erweitert das ursprünglich von von Mises [9], Bernoulli [10] und Laplace [11] dargestellte Verständnis, welches wiederum auf den Arbeiten von Cardano [12], Pascal und Fermat [13] sowie Huygens [14] aufbaut. Die axiomatische Definition ist die heute gültige und kommt streng genommen ohne den Übergang zur relativen Häufigkeit aus.

Der Übergang von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit ist durch das **Gesetz der großen Zahlen** möglich. Dieses besagt, dass das Verhältnis aus der Anzahl der Ereignisse und der Anzahl der Experimentdurchführungen (relative Häufigkeit) bei einer großen Anzahl Durchführungen ($n \rightarrow \infty$) gegen das tatsächlich zugrundeliegende Verhältnis (Wahrscheinlichkeit P) konvergiert [10, 15].

Wird das Ereignis durch eine Zahl beschrieben, so spricht man von einer **Zufallsvariablen** X , wobei eine Realisierung derselben durch die Variable x ausgedrückt wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zufallsvariable den bestimmten Wert x_r annimmt wird durch $P(X = x_r)$ ausgedrückt. Die Zufallsvariable kann diskreter oder kontinuierlicher Natur sein ($X \in \mathbb{N}$ oder $X \in \mathbb{R}$) [8, 16].

Die Wahrscheinlichkeit für beliebige Werte x wird durch Verteilungsfunktionen beschrieben. Dabei ist

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2.2)$$

die **Verteilungsfunktion** der Zufallsvariablen X und

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = P(X = x) \quad (2.3)$$

die zugehörige **Dichtefunktion** [5, 17].

Um die Form und Lage der Verteilung zu beschreiben existieren **statistische Momente**. Das k -te Moment m_k ist über folgendes Integral definiert [16]:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx \quad (2.4)$$

Dabei ist das erste Moment m_1 der **Erwartungswert** $E[X]$ der Zufallsvariablen X . Er beschreibt die Lage beziehungsweise den Schwerpunkt der Verteilung, also den Wert, der am ehesten zu erwarten ist [11]:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (2.5)$$

Werden die weiteren Momente über die Differenz zum Erwartungswert gebildet, so handelt es sich um die **zentrierten Momente** [17]. Das zweite zentrierte Moment ist die **Varianz**

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx, \quad (2.6)$$

welche die Abweichung der einzelnen Beobachtungswerte zum Erwartungswert beschreibt [17]. Um die Einheit der Zufallsvariablen zu erhalten, ist die **Standardabweichung** σ als Quadratwurzel der Varianz definiert [5, 18]:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (2.7)$$

Weitere Parameter sind beispielsweise die Schiefe, als auf die Standardabweichung normiertes drittes zentrales Moment und die Wölbung, auch Kurtosis genannt [17]. Neben den natürlichen Momenten existieren gegebenenfalls auch reelle und komplexe, also $k \in \mathbb{R}$ oder $k \in \mathbb{C}$ in Gleichung 2.4. Sind alle Momente bekannt, so ist die Verteilung eindeutig bestimmt [17].

Die **empirischen Momente** berechnen sich aus den beobachteten Realisierungen der Zufallsvariablen X . Dabei beschreibt der **arithmetische Mittelwert** \bar{x} das Mittel der n beobachteten Werte x_i [5]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.8)$$

Die **empirische Standardabweichung** $\hat{\sigma}$ berechnet sich über [5]:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.9)$$

Der Wert zu welchem ein gewisser Anteil der auftretenden Werte kleiner oder gleich groß ist, wird **Quantil** x_q zum Anteil q – oder **Perzentil**, wenn der Anteil in Prozent ausgedrückt ist – genannt. Mittels der Verteilungsfunktion lässt es sich wie folgt bestimmen [5]:

$$x_q = F^{-1}(q) \text{ beziehungsweise } F(x_q) = q \quad (2.10)$$

Dabei ist $F^{-1}(q)$ die Umkehrfunktion der Verteilung $F(x)$. Der **Median** ist der Wert, zu welchem 50 % der beobachteten Werte darunter und 50 % darüber liegen ($q = 0,5$). Im Gegensatz zum Mittelwert und der Standardabweichung, ist er weniger empfindlich gegenüber Ausreißern [5].

2.1.2 Statistische Verteilungen

Die für diese Arbeit relevanten statistischen Verteilungen werden im Folgenden vorgestellt. Es handelt sich um die Normalverteilung, Binomialverteilung, Betaverteilung und die Weibullverteilung.

Normalverteilung

Die Normalverteilung wurde erstmals von Gauß in [19] als Verteilung von Messfehlern eingeführt. Ihr wird in vielen Bereichen der Wissenschaften und Technik eine bedeutende Rolle zuteil, da sie fähig ist viele natürliche Zufallsereignisse zu beschreiben. So wird sie beispielsweise häufig in der Messtechnik, dem Qualitätswesen und der Produktionstechnik verwendet und spielt in bedeutenden Sätzen der Statistik eine zentrale Rolle [5] (siehe auch Kapitel 2.1.5). Es handelt sich um eine symmetrische Verteilung, welche allen Werten von $-\infty$ bis $+\infty$ eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Durch diese Eigenschaften ist sie jedoch für den praktischen Einsatz eingeschränkt, wie beispielsweise der Beschreibung von Produktausfallzeiten, welche nur positive Werte annehmen können [5]. Die Dichtefunktion $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$ sind in der Form von Fisher über den Lageparameter μ und die Varianz σ^2 beziehungsweise Standardabweichung σ folgendermaßen definiert [20]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.11)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2.12)$$

Aufgrund der Symmetrie ist der Lageparameter identisch mit dem Erwartungswert, dem Median und dem Modalwert [5]. Die kontinuierliche Verteilungsfunktion lässt sich aufgrund des Integrals nicht analytisch berechnen, weswegen oftmals eine numerisch approximative Lösung verwendet wird [21]. Ist eine Zufallsvariable X normalverteilt mit den Parametern μ und σ , so wird zur vereinfachten Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ verwendet. Die Verteilungsfunktion wird auch mit Φ und deren Umkehrfunktion mit Φ^{-1} abgekürzt. In Abbildung 2.1 ist der Verlauf der Normalverteilung für verschiedene Parameter dargestellt.

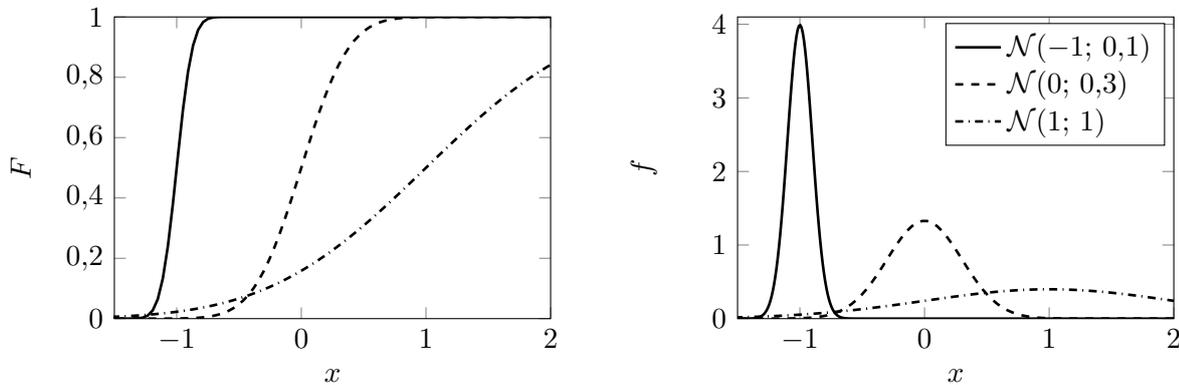


Abbildung 2.1: Verlauf der Verteilungsfunktion $F(x)$ und der Dichtefunktion $f(x)$ der Normalverteilung für verschiedene Werte der Parameter μ und σ .

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung wird verwendet um die Wahrscheinlichkeit anzugeben mit welcher bei einem Experiment mit n Durchläufen k Erfolge erzielt werden. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Erfolges bekannt beziehungsweise festgelegt. Bernoulli führte die diskrete Verteilung in [10] ein. Sie resultiert aus einer sequenziellen Durchführung von Bernoulli-Experimenten [22] mit Zurücklegen, welche lediglich einen Erfolg oder Misserfolg als Ausgang haben können und ist durch die folgenden Gleichungen definiert [5, 17]:

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.13)$$

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (2.14)$$

Die Parameter der Verteilung sind n und p . Die Anzahl an Erfolgen k ist das Argument und wird hier als die Realisierung der in diesem Fall diskreten Zufallsvariablen X verwendet. Da es sich um eine diskrete Verteilung handelt, können die Wahrscheinlichkeiten lediglich für ganzzahlige Werte von k und n berechnet werden ($k, n \in \mathbb{N}$) [5]. Beispiele für den Verlauf sind in Abbildung 2.2 dargestellt.

Betaverteilung

Bereits Bayes leitete die Betaverteilung her um damit die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs im Bernoulli-Experiment zu beschreiben [23]. Also die Wahrscheinlichkeit selbst, statt die Anzahl der Erfolge, wie bei der Binomialverteilung. Es handelt sich um eine kontinuierliche

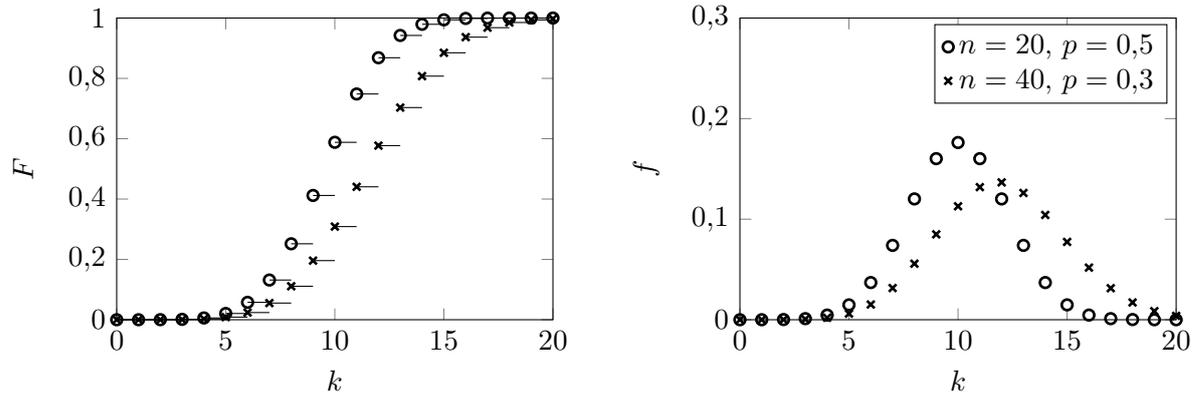


Abbildung 2.2: Beispiele der Verteilungsfunktion $F(k)$ und der Dichtefunktion $f(k)$ der Binomialverteilung für verschiedene Werte der Parameter n und p .

Verteilung mit einem eingeschränkten Definitionsbereich von $x \in [0, 1]$. Sie wird mittels zweier positiver Parameter A und B folgendermaßen beschrieben [24, 25]:

$$f(x) = \frac{x^{A-1}(1-x)^{B-1}}{\beta(A; B)} \quad \forall x \in [0, 1] \vee A, B > 0 \quad (2.15)$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\chi^{A-1}(1-\chi)^{B-1}}{\beta(A; B)} d\chi \quad \forall x \in [0, 1] \vee A, B > 0 \quad (2.16)$$

Für $A, B < 1$ gilt $x \in (0, 1)$. Dabei ist die Betafunktion nach Euler [25, 26] mit

$$\beta(A; B) = \int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1} dx \quad A, B > 0 \quad (2.17)$$

definiert und kann, ähnlich der Binomialkoeffizienten, durch die Gammafunktion $\Gamma(\cdot)$ [27] ausgedrückt werden [7]:

$$\beta(A; B) = \frac{\Gamma(A) \cdot \Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} \quad (2.18)$$

Ist das Argument der Gammafunktion ganzzahlig, so gilt die folgende Beziehung zur Fakultät [25]: $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Die Betaverteilung ist damit eng mit der Binomialverteilung verwandt und kann bei ganzzahligen Parametern A und B sogar durch die Binomialverteilung ausgedrückt werden [25]:

$$\int_p^1 \frac{\chi^{A-1} \cdot (1-\chi)^{B-1}}{\beta(A; B)} d\chi = \sum_{i=0}^{A-1} \binom{A+B-1}{i} p^i (1-p)^{A+B-1-i} \quad (2.19)$$

Das Integral auf der linken Seite wird dabei von p bis 1, statt von 0 bis p gebildet. Dies liegt am Parameter p in der Binomialverteilung (Gleichung 2.13) der das Komplement zum Argument x der Betaverteilung (Gleichung 2.15) darstellt. Für diese Beziehung kann $A = n - k$

und $B = k + 1$ festgehalten werden (siehe auch Kapitel [2.2.3](#)). Der Erwartungswert und die Varianz der Betaverteilung lassen sich auf einfache Weise wie folgt bestimmen [\[25\]](#):

$$E[X] = \frac{A}{A + B} \quad (2.20)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{A \cdot B}{(A + B + 1) \cdot (A + B)^2} \quad (2.21)$$

Ist die Zufallsvariable X betaverteilt, wird vereinfacht auch $X \sim \mathcal{B}(A; B)$ geschrieben. Die Umkehrfunktion wird mit $\mathcal{B}^{-1}(A; B)$ gekennzeichnet. Beispiele für die vielfältigen Formen der Betaverteilung, sind in [Abbildung 2.3](#) dargestellt. Beispielsweise ergibt sich für $\mathcal{B}(1; 1)$ die Gleichverteilung.

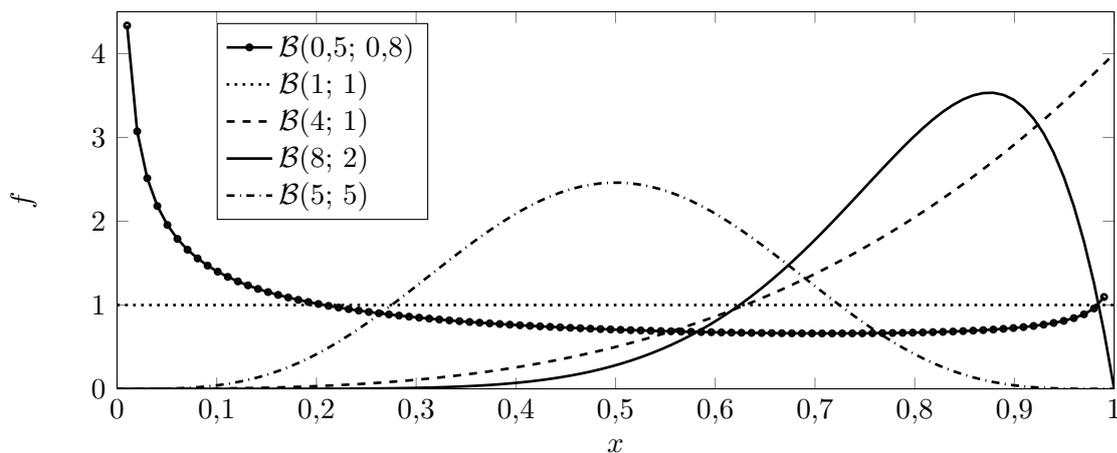


Abbildung 2.3: Beispiele der Dichtefunktion $f(x)$ der Betaverteilung für verschiedene Werte der Parameter A und B .

Weibullverteilung

Die Weibullverteilung ist nach dem schwedischen Ingenieur und Mathematiker Waloddi Weibull benannt [\[28, 29\]](#) und ist eine Verteilung die sehr flexibel positive Zufallsvariablen beschreiben kann. Sie eignet sich sehr gut um die Ausfallzeiten von technischen Produkten zu beschreiben und ist die am häufigsten verwendete Verteilung der Zuverlässigkeitstechnik (siehe Kapitel [2.2](#)) [\[5\]](#). Als asymptotische Extremwertverteilung [\[7\]](#) kann sich der Ausfall des schwächsten Glieds einer Kette vorgestellt werden, welches die Weibullverteilung beschreibt [\[5\]](#). Sie wird in eine zwei- und eine dreiparametrische Form unterschieden und ist durch den Skalenparameter T (auch charakteristische Lebensdauer genannt), den Formparameter b und den Schwellenparameter t_0 (auch ausfallfreie Zeit genannt) festgelegt. Dabei ist die zweiparametrische Verteilung durch einen Schwellenparameter von $t_0 = 0$ definiert. Die Dichte- und Verteilungsfunktionen lauten [\[5, 29\]](#):

$$f(t) = \frac{b}{T - t_0} \left(\frac{t - t_0}{T - t_0} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t - t_0}{T - t_0} \right)^b} \quad \forall t - t_0 \geq 0 \quad (2.22)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t - t_0}{T - t_0} \right)^b} \quad \forall t - t_0 \geq 0 \quad (2.23)$$

In diesen Gleichungen wurde die Variable t als Zufallszahl verwendet, da dies aufgrund der zu beschreibenden Ausfallzeiten der Zuverlässigkeitstechnik sehr üblich ist [5]. Der Skalenparameter T ist das 63,2 % Perzentil der Verteilung und der Formparameter b beschreibt gleichzeitig die Form und die Streuung. Er ist nicht dimensionsbehaftet, weswegen die absolute Streuung der Verteilung bei größer werdendem T und gleichbleibendem b zunimmt. Für einen größer werdenden Formparameter nimmt die Streuung ab. Für $b = 1$ ergibt sich die Exponentialverteilung und für $b = 3,5$ ergibt sich näherungsweise eine Normalverteilung [5]. Zur vereinfachten Schreibweise wird auch $X \sim \mathcal{W}(T; b)$ verwendet, wenn die Zufallsvariable X weibullverteilt ist mit zwei Parametern. Die Umkehrfunktion wird mit $\mathcal{W}^{-1}(T; b)$ gekennzeichnet. In Abbildung 2.4 wird die Flexibilität der Weibullverteilung ersichtlich.

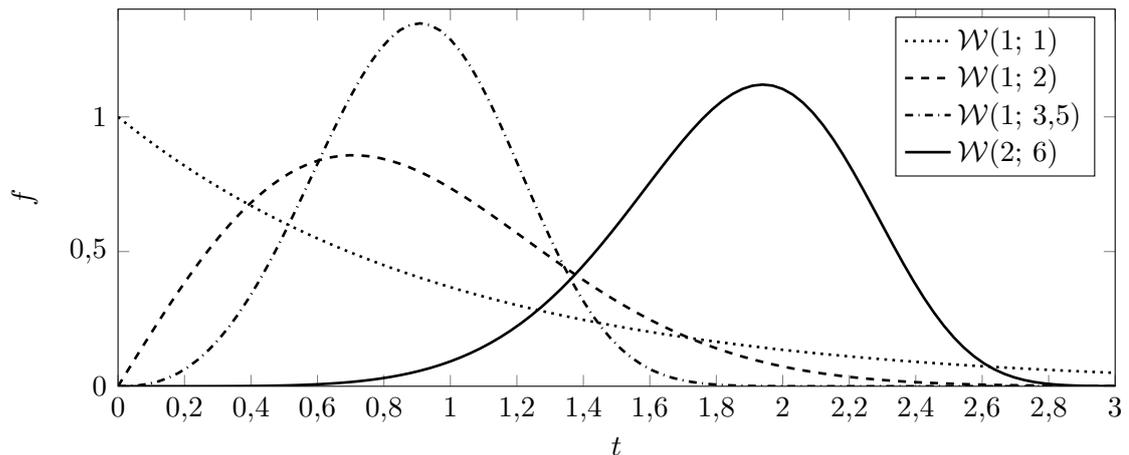


Abbildung 2.4: Beispiele der Dichtefunktion $f(t)$ der Weibullverteilung für verschiedene Werte der Parameter T und b .

2.1.3 Vertrauensbereiche

Die in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Maßzahlen, Begriffe und Verteilungen dienen der deskriptiven Statistik, das heißt sie beschreiben die beobachteten Werte der **Stichprobe** durch ein Modell. Dabei beschreiben sie nur diese beobachtete Stichprobe und keine weitere. Die schließende Statistik dagegen zieht einen Schluss von der Stichprobe auf die **Grundgesamtheit** aus der die Stichprobe entstammt [5, 7]. Bei diesem Schluss ist verschiedenen Unsicherheiten zu begegnen. Zum einen ist es unsicher, welche Werte die streuende Zufallsvariable annimmt und zum anderen ist die Kenntnis über die Statistik durch die Größe der Stichprobe begrenzt. Entsprechend diesem Aspekt, werden Unsicherheiten kategorisiert: Die **aleatorische Unsicherheit** beschreibt die unveränderliche, systematisch inhärente Unsicherheit. Die **epistemische Unsicherheit** beschreibt dagegen die Unsicherheit, welche aufgrund der Beobachtung resultiert. Erstere ist die durch die Statistik zu beschreibende Größe und letztere die veränderbare und deswegen zu minimierende [30, 31]. Werden Zufallsexperimente wiederholt mit demselben Stichprobenumfang durchgeführt, dann ist insbesondere bei kleinen Stichproben damit zu rechnen, dass von Stichprobe zu Stichprobe unterschiedliche Ergebnisse vorliegen. Um diesem Umstand zu begegnen, ist statt einem einzigen Wert der Statistik (beispielsweise der Mittelwert) ein Intervall anzugeben, wessen Grenzen mit einer gewissen **Aussagewahrscheinlichkeit** C den wahren Wert der Grundgesamtheit einschließen. Dieses Intervall wird **Vertrauensbereich** genannt

¹ In englischer Sprache confidence level genannt

und die Wahrscheinlichkeit, dass die Grenzen den wahren Wert der Grundgesamtheit nicht einschließen wird **Irrtumswahrscheinlichkeit** α genannt und ist das direkte Komplement der Aussagewahrscheinlichkeit [5].

Der Vertrauensbereich lässt sich in einen einseitigen und einen zweiseitigen Vertrauensbereich einteilen (siehe Abbildung 2.5). Der einseitige Vertrauensbereich wird wiederum in

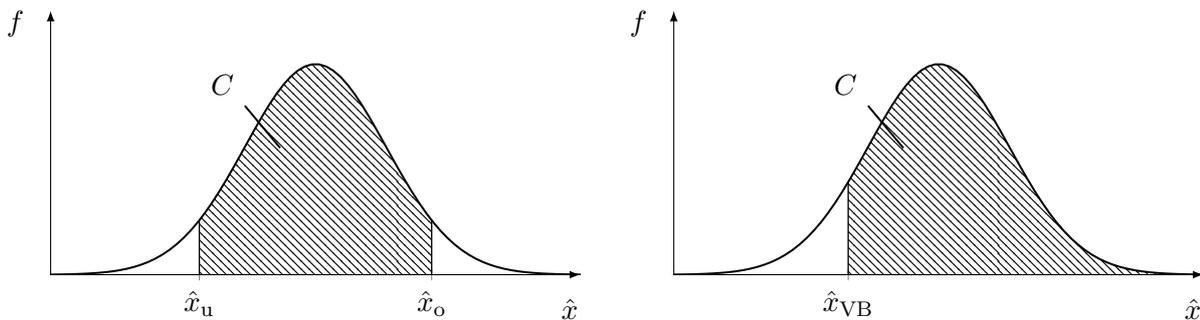


Abbildung 2.5: Beidseitiger und rechtsseitiger Vertrauensbereich.

einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Vertrauensbereich unterschieden. Soll beispielsweise der Vertrauensbereich des Mittelwerts \bar{x} einer Zufallsvariablen X beschrieben werden, so ist bei bekannter Verteilung $f(\bar{x})$ des Mittelwerts der **zweiseitige Vertrauensbereich** zur Aussagewahrscheinlichkeit C mit den Intervallgrenzen \bar{x}_u und \bar{x}_o folgendermaßen definiert:

$$C = P(\bar{x}_u \leq \bar{x} \leq \bar{x}_o) = \int_{\bar{x}_u}^{\bar{x}_o} f(\bar{x})d\bar{x} \quad (2.24)$$

Der **linksseitige Vertrauensbereich** mit dem Intervall $(-\infty, \bar{x}_{VB}]$ als

$$C = P(\bar{x} \leq \bar{x}_{VB}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}_{VB}} f(\bar{x})d\bar{x} \quad (2.25)$$

und der **rechtsseitige Vertrauensbereich**, mit dem Intervall $[\bar{x}_{VB}, +\infty)$ als

$$C = P(\bar{x} \geq \bar{x}_{VB}) = \int_{\bar{x}_{VB}}^{+\infty} f(\bar{x})d\bar{x}. \quad (2.26)$$

Die Breite des Vertrauensbereichs ist maßgeblich durch die Verteilung der Zufallsvariable (aleatorische Unsicherheit) und den Stichprobenumfang (epistemische Unsicherheit) beeinflusst. Exemplarisch ist in Abbildung 2.6 die Vertrauensbereichsbreite des beidseitigen Vertrauensbereichs des Mittelwerts \bar{x} für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $C = 90\%$ bei einer mit $\mathcal{N}(1; 0,5)$ und $\mathcal{N}(1; 0,2)$ normalverteilten Zufallsvariable in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs n dargestellt. Die Methoden zur Bestimmung dieser Intervalle, als auch der Bestimmung der Parameter der Verteilungen, werden in den Kapiteln 2.2.3 und 2.2.2 vorgestellt. Die Bestimmung der Verteilung des Mittelwerts von normalverteilten Zufallsvariablen wird zudem in Kapitel 2.1.5 behandelt.

2.1.4 Hypothesentests

Um Aussagen, Theorien und Zusammenhänge basierend auf beobachteten Daten zu überprüfen und zu bewerten, existieren Hypothesentests, die die formulierten Hypothesen mit

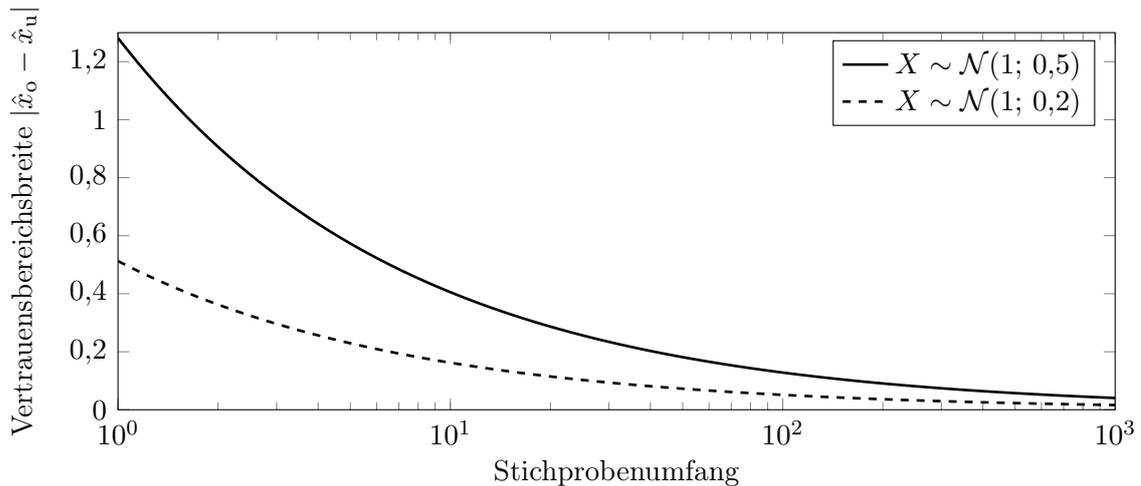


Abbildung 2.6: Vertrauensbereichsbreite des Mittelwerts in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für unterschiedlich normalverteilte Zufallsvariablen X und $C = 90\%$.

Wahrscheinlichkeiten für deren Gültigkeit für die Grundgesamtheit versehen können [16, 32–34].

Bereits im 18. Jahrhundert beschäftigten sich Arbuthnot [35] und Laplace [36] mit dem Test von Hypothesen. Dabei wurde das Verhältnis der Bevölkerung von Frauen und Männern an gewissen Orten untersucht. Während Fisher im 20. Jahrhundert für die maßgeblich durch ihn entwickelte statistische Versuchsplanung (Design of Experiments, DOE) [32] eine objektive Methode zur Bewertung der statistischen Effekte benötigte, entwickelte er den Signifikanztest [37]. Parallel entwickelten Neyman und Pearson die Hypothesentests, welche das heutige Konzept der Hypothesentests darstellt und im Vergleich zum Ansatz von Fisher um wichtige Aspekte, wie beispielsweise dem Fehler von Typ II und der Trennschärfe erweiterte [38–40]. Diese Begriffe werden im Folgenden erläutert.

Hypothesentests werden als Entscheidungsgrundlage verwendet, um mit Hilfe der getesteten Stichprobe eine Aussage über die Grundgesamtheit machen zu können. Analog der Überlegung zum Vertrauensbereich muss der Unsicherheit, welche die Stichprobe mit sich bringt, Rechnung getragen werden, sodass das Risiko einer Falschaussage quantifiziert werden kann. Damit ein Hypothesentest durchgeführt werden kann, müssen zunächst die zu untersuchenden Hypothesen formuliert werden. Dabei bildet die **Nullhypothese** H_0 die Ausgangslage ab, welche der Abwesenheit der zu untersuchenden Eigenschaft entspricht. Dem gegenüber steht die **Alternativhypothese** H_1 , welche die gegenteilige Aussage enthält, also die eigentlich zu untersuchende Hypothese darstellt. Die mittels der Stichprobe gesammelten Daten können Evidenzen gegen die Nullhypothese liefern, sodass man zu dem Schluss kommt, diese abzulehnen und stattdessen die Alternativhypothese annimmt. Wichtig ist, dass die Hypothesen niemals bewiesen werden können, sondern lediglich verworfen, oder nicht verworfen werden können [8, 16].

Um die Hypothesen zu testen bedarf es einer **Teststatistik**, welche das Verhalten bezüglich der Hypothesen in einem skalaren Wert wiedergibt. Aus der Streuung dieser Teststatistik unter Gültigkeit der beiden Hypothesen, ergibt sich ein Ablehnungs- und ein Annahmehereich der beiden Hypothesen, siehe Abbildung 2.7. Dieser wiederum ergibt sich aus den akzeptierten Irrtumswahrscheinlichkeiten. Aufgrund der zwei Hypothesen existieren zwei Fehlerarten: Der **Fehler von Typ I** α beschreibt die fälschlicherweise Ablehnung der Null-

hypothese, wenn diese eigentlich wahr ist. Der **Fehler von Typ II** β beschreibt die falsche Annahme der Nullhypothese, wenn diese nicht wahr ist [8, 16].

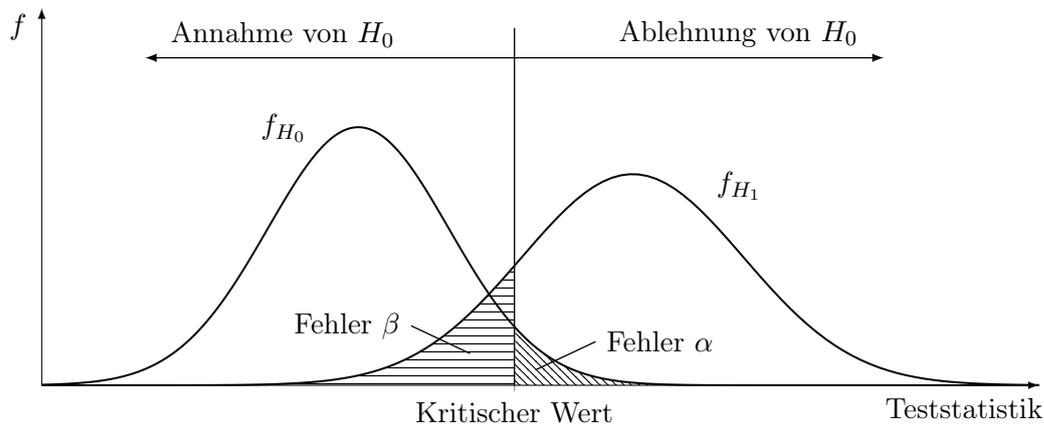


Abbildung 2.7: Verteilungen der Teststatistik unter Gültigkeit der Null- und der Alternativhypothese sowie einseitige Annahme- und Ablehnungsbereiche.

Da nicht beide Fehlerarten gleichzeitig kontrolliert und eingestellt werden können, wird üblicherweise der Fehler von Typ I festgelegt, er wird auch Signifikanzniveau genannt. Dieser entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit des Vertrauensbereichs und ist damit das Komplement zur Aussagewahrscheinlichkeit [16]:

$$C = P(H_0 \text{ nicht ablehnen, wenn } H_0 \text{ wahr ist}) = 1 - \alpha \quad (2.27)$$

Mit den Randbedingungen des Tests, insbesondere dem Stichprobenumfang und der resultierenden Verteilung der Teststatistik kann die Wahrscheinlichkeit für Fehler von Typ II berechnet werden. Das Komplement dazu stellt die **Trennschärfe** des Tests dar und beschreibt die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese korrekterweise abzulehnen [16, 33]:

$$\text{Trennschärfe} = P(H_0 \text{ ablehnen, wenn } H_1 \text{ wahr ist}) = 1 - \beta \quad (2.28)$$

Die Trennschärfe wird auch Sensitivität, Güte, Macht oder Teststärke genannt und wird in der englischen Sprache häufig mit statistical power bezeichnet [33]. In Tabelle 2.1 sind die Zusammenhänge dargestellt.

Tabelle 2.1: Zusammenhänge der Fehlerarten bei Hypothesentests.

	H_0 ist wahr	H_1 ist wahr
Annahme von H_0	Richtige Entscheidung: C	Fehler von Typ II: β
Ablehnung von H_0	Fehler von Typ I: α	Richtige Entscheidung: Trennschärfe

Für einige Problemstellungen wurden spezielle Hypothesentest entworfen, wie beispielsweise der t-Test [41] zur Untersuchung auf Mittelwertsunterschiede und der F-Test [42] zur Untersuchung bezüglich der Varianz zweier normalverteilter Stichproben. Ein Überblick über die statistischen Hypothesentests kann in [8, 16, 33] gewonnen werden.

Zur Planung von Hypothesentests ist insbesondere der Stichprobenumfang interessant. Da die maximal akzeptierte Irrtumswahrscheinlichkeit α lediglich den Fehler von Typ I kontrolliert, bedarf es den Stichprobenumfang so festzulegen, dass ein gewisser Wert von β

nicht überschritten wird. In anderen Worten: die Wahrscheinlichkeit die Alternativhypothese aufzudecken, also die postulierte Hypothese tatsächlich zu entdecken, soll ausreichend hoch sein. Dazu wird die Abhängigkeit der Trennschärfe vom Stichprobenumfang dargestellt [16, 33]. Wichtig ist dabei, dass die Trennschärfe immer für eine gewisse **Effektstärke** gültig ist. Das heißt sie gibt Auskunft über die Entdeckungswahrscheinlichkeit der Alternativhypothese bei einer angenommenen Lage der Teststatistik unter Gültigkeit der Alternativhypothese [6, 16, 33, 43]. Der typisch S-förmige Verlauf der Trennschärfe ist beispielhaft in Abbildung 2.8 in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für verschieden normalverteilte Zufallsvariablen dargestellt. Es soll in diesem Beispiel untersucht werden, ob der Mittelwert größer 1 ist. Es ist zu sehen, dass die Trennschärfe mit der Größe Effektstärke ansteigt.

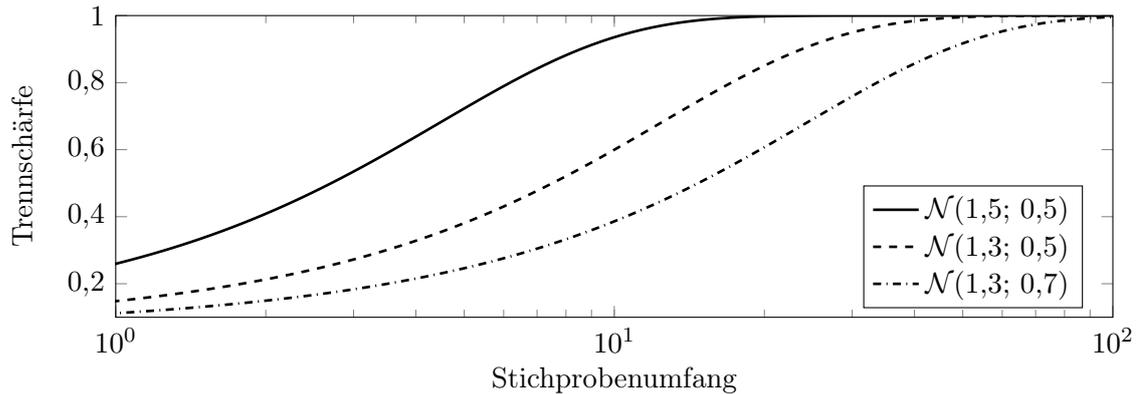


Abbildung 2.8: Beispielhafte Verläufe der Trennschärfe in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für $H_0 : \mu \leq 1$, $H_1 : \mu > 1$ sowie $\alpha = 5\%$ und unterschiedlich normalverteilte Zufallsvariablen.

Außerdem fällt sie bei größerer Streuung ab. Die Effektstärke ist hier durch die Lage der Normalverteilung, also μ , gegeben und die Streuung durch die Standardabweichung, also σ . Zudem sorgt ein größerer Stichprobenumfang für einen Anstieg der Trennschärfe. Je größer die Stichprobe ist, desto sicherer kann eine Hypothese überprüft werden.

2.1.5 Zentraler Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Verteilung der normierten Summe (zum Beispiel der Mittelwert) von unabhängigen Zufallsvariablen im Grenzfall von unendlich vielen Durchführungen gegen eine Normalverteilung konvergieren. Der Satz ist wertvoll, da die Zufallsvariablen selbst nicht normalverteilt sein müssen. Damit können Theorien und Methoden, welche nur für normalverteilte Daten gültig sind, auch für andere Verteilungsarten verwendet werden. Zudem ist er zusammen mit dem Gesetz der großen Zahlen die Basis für die Konstruktion von approximativen Vertrauensbereichen mittels der Fisher-Information, siehe Kapitel 2.2.3 und [6, 16, 20, 44–46].

Der Satz in der Formulierung von Lindeberg-Lévy [45, 47] besagt, dass identisch verteilte und unabhängige Zufallszahlen mit $E[X] = \mu$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2 < +\infty$ mit einer gegen Unendlich strebenden Anzahl Durchführungen $n \rightarrow +\infty$ bewirken, dass die Variable $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma}$ gegen die Standardnormalverteilung mit $\mathcal{N}(0; 1)$ konvergiert, also [45]

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0; 1). \quad (2.29)$$

Mit den Beziehungen $E[\bar{x}] = E[X]$ und $\text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}(X)/n$, kann damit die Verteilung als Normalverteilung geschrieben werden [45]:

$$\bar{x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}\left(E[\bar{x}]; \sqrt{\text{Var}(\bar{x})}\right) \quad (2.30)$$

Während das Gesetz der großen Zahlen von der Konvergenz einer Statistik (beispielsweise des Mittelwerts) gegen eine Konstante spricht, beschreibt der zentrale Grenzwertsatz wie diese Statistik dorthin verteilt ist. Der Satz ermöglicht es demnach approximative Verteilungen für Statistiken einer Stichprobe zu bestimmen.

2.1.6 Satz von Bayes

Die voran angeführten Begriffe und Theorien sind durch das frequentistische Wahrscheinlichkeitsverständnis nach von Mises, Venn, Neyman, Pearson und Fisher [6, 9, 48] motiviert. Wonach die Wahrscheinlichkeit auch als relative Häufigkeit von wiederholt beobachteten Ereignissen verstanden werden kann. Dem gegenüber stehen Ereignisse, welche lediglich ein einziges Mal beobachtet werden können, aber dennoch eine gewisse Wahrscheinlichkeit aufweisen. Hierbei stößt die Vorstellung der frequentistischen Wahrscheinlichkeit (auch objektive Wahrscheinlichkeit genannt) an eine Grenze. Die bayessche Vorstellung der Wahrscheinlichkeit hingegen entspricht dem Grad der persönlichen Überzeugung für das Eintreten des Ereignisses [49-51]. Dadurch ist der bayessche Wahrscheinlichkeitsbegriff (auch subjektive Wahrscheinlichkeit genannt) von der relativen Häufigkeit und der Beobachtung der Ereignisse losgelöst. Die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit von Kolmogoroff [4] bedarf hingegen keiner Interpretation, weswegen sowohl die frequentistische, als auch die bayessche Interpretation möglich ist.

Die bayessche Vorstellung der Wahrscheinlichkeit kommt im Satz von Bayes zur Anwendung. Dieser ist nach dem Mathematiker und Pfarrer Thomas Bayes benannt und wurde posthum von Richard Price veröffentlicht [23]. Er beschreibt die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der beobachteten Ereignisse (Evidenzen) unter Gültigkeit einer Vorkenntnis über das Eintreten der Ereignisse. Das heißt es wird die bestehende – also vor der Durchführung eines Experiments bekannte – Information durch die Beobachtungen aus dem Experiment aktualisiert. Die Informationen vor dem Experiment werden als a-priori Information oder Vorkenntnis bezeichnet und die durch Anwendung des Satz von Bayes um die Ergebnisse aus dem Experiment präzisierten Informationen werden a-posteriori Informationen bezeichnet. Der Satz von Bayes ist für kontinuierliche Zufallsvariablen folgendermaßen definiert [5, 23, 52, 53]:

$$f(x|y) = \frac{f(y|x) \cdot f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x) \cdot f(x) dx} \quad (2.31)$$

Dabei ist $f(x)$ die a-priori-Dichte der Vorkenntnis, $f(y|x)$ die bedingte Dichte der Beobachtungen y und $f(x|y)$ die a-posteriori-Dichte.

Der Satz von Bayes findet in vielen Bereichen Anwendung, beispielsweise bei künstlichen neuronalen Netzen [54], Data-Mining [55], Entscheidungstheorie [56] und der Zuverlässigkeitstechnik [5, 53, 57] (siehe Kapitel 2.2.6). Die Zusammenhänge des Satz von Bayes sind in Abbildung 2.9 dargestellt.

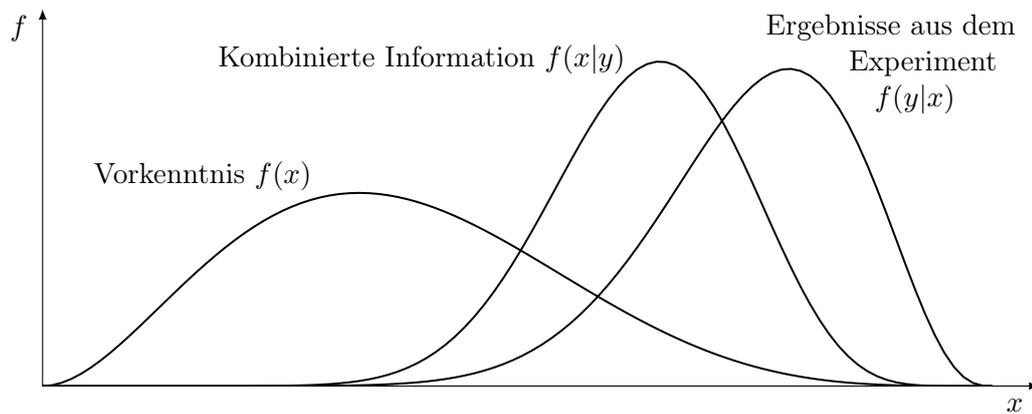


Abbildung 2.9: Zusammenhänge des Satz von Bayes.

2.2 Zuverlässigkeitstechnik

Die Zuverlässigkeitstechnik verwendet Elemente und Methoden der Statistik um die Funktionsfähigkeit von Produkten zu beschreiben, festzustellen und zu prognostizieren. Die für die vorliegende Arbeit relevanten Begriffe, Methoden und Theorien werden im Folgenden vorgestellt. Dabei liegt besonderes Augenmerk auf den Methoden zur Auswertung und Planung von Zuverlässigkeitstests.

2.2.1 Grundbegriffe und Definitionen

Nach [5, 58, 59] beschreibt die **Zuverlässigkeit** $R(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt unter festgelegten Randbedingungen über einen bestimmten Zeitraum t nicht ausfällt. Ein **Ausfall** stellt dabei den Übergang von der Funktionsfähigkeit zur Funktionsunfähigkeit dar und ist für jedes Produkt individuell definiert. Die Zeitspanne t bis zum Ausfall wird **Lebensdauer** genannt. Die Verteilung dieser Lebensdauer wird durch eine Verteilungsfunktion beschrieben, dabei ist die Verteilungsfunktion $F(t)$ die **Ausfallwahrscheinlichkeit** (auch Ausfallverteilung genannt) und $f(t)$ die **Ausfallwahrscheinlichkeitsdichte** (auch Ausfalldichte genannt). Die Zuverlässigkeit (auch Überlebenswahrscheinlichkeit genannt) ist das direkte Komplement zur Ausfallwahrscheinlichkeit und definiert als [5]:

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2.32)$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeitsdichte beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls zur Lebensdauer t (siehe Gleichung [2.3]). Die Ausfallwahrscheinlichkeit beschreibt den Anteil aller Produkte, welche maximal die Lebensdauer t erreicht haben. Also die Wahrscheinlichkeit maximal die Lebensdauer t zu erreichen. Die Zuverlässigkeit stellt damit die Wahrscheinlichkeit dar mindestens die Lebensdauer t zu erreichen [5]. Werden die zum aktuellen Zeitpunkt ausfallenden Einheiten auf die noch intakten Einheiten bezogen, so erhält man die **Ausfallrate** $\lambda(t)$ [5]:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.33)$$

Sie beschreibt das Ausfallrisiko des Produkts zum Zeitpunkt t und wird verwendet um die sogenannte Badewannenkurve [5] abzubilden, siehe Abbildung [2.10]. Diese teilt die möglichen

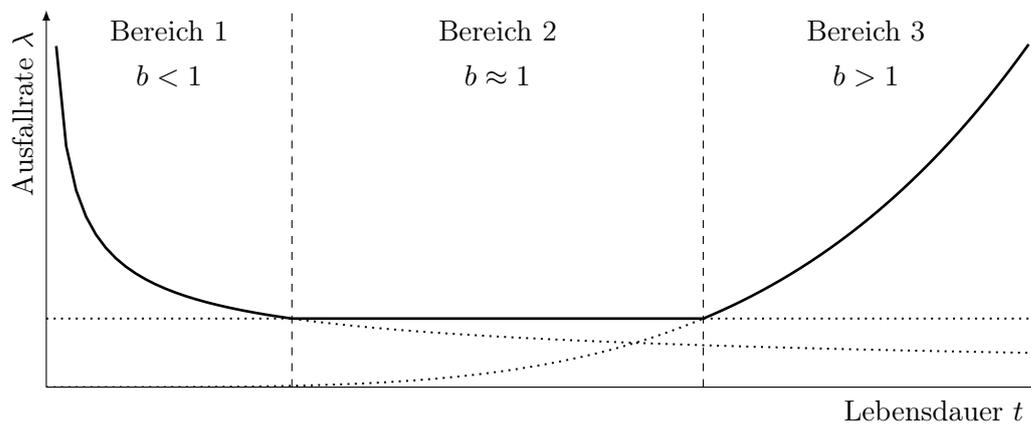


Abbildung 2.10: Badewannenkurve [5].

Ausfälle in drei Arten ein. Die Frühausfälle in Bereich 1 sind durch eine fallende Ausfallrate charakterisiert, da es sich um Fertigungs-, Werkstoff- oder Montagefehler handelt, welche üblicherweise nach deren Entdeckung abgestellt werden. Im zweiten Bereich findet sich eine nahezu konstante Ausfallrate wieder. Es handelt sich um Zufallsausfälle, welche beispielsweise durch Bedienfehler, Schmutzpartikel, oder Wartungsfehler entstehen. Dem zweiten Bereich anschließend folgt Bereich 3, in welchem die Ausfallrate wieder ansteigt. Dies ist der Bereich in welchem Verschleiß- und Ermüdungsausfälle vorherrschen. Die drei Bereiche der Badewannenkurve spiegeln sich auch im Formparameter b der Weibullverteilung wider. Im ersten Bereich ist er kleiner Eins, im zweiten ungefähr gleich Eins und im dritten größer Eins [5].

Um die Anforderungen an ein Produkt bezüglich der Zuverlässigkeit zu formulieren, wird ein **Zuverlässigkeitsziel** gestellt. Dieses Ziel besteht aus einer **geforderten Zuverlässigkeit** R_s , einer **geforderten Lebensdauer** t_s und einer **geforderten Aussagewahrscheinlichkeit** C_s . Die Zuverlässigkeit und die Lebensdauer beschreiben das Verhalten des Produkts selbst, wohingegen die Aussagewahrscheinlichkeit die Güte der im Nachweis gewonnenen Aussage fordert. Da es sich um Mindestanforderungen handelt, ist das Ziel ebenso erfüllt, wenn die Zuverlässigkeit, Lebensdauer oder Aussagewahrscheinlichkeit den jeweiligen Zielwert übersteigen. Demzufolge beschreibt die geforderte Aussagewahrscheinlichkeit einen rechtsseitigen Vertrauensbereich [5].

Der Ausfall eines Produkts kann mehrere Ursachen haben. Es können verschiedene Mechanismen involviert sein, die dazu führen, dass eine Funktion des Produkts nicht weiter erfüllt werden kann. Beispielsweise verschleßen Bremsbeläge bei Benutzung, wodurch bei vollständiger Abnutzung des Bremsbelags die Bremsfunktion nicht weiter erfüllt werden kann. In Stahlkonstruktionen können sich Risse ausbilden, wachsen und schließlich zu einem Strukturversagen führen, sofern die Belastung eine dafür ausreichende Höhe erreicht. Diese unterschiedlichen Ausfälle eines Produkts, werden **Ausfallmoden** (AM) genannt und die dabei involvierten Mechanismen **Ausfallmechanismen** [53, 60, 61].

Ist mehr als eine Ausfallmode für den Ausfall des Produkts dominierend, so gilt es die Zuverlässigkeit des Produkts über die **Systemzuverlässigkeit** zu beschreiben. Hierzu ist gesondertes Vorgehen und sind besondere Methoden notwendig, denn die Ausfallverteilungen wie beispielsweise die Weibullverteilung (siehe Kapitel 2.1.2) sind nur fähig die Ausfälle einer einzigen Ausfallmode zu beschreiben [5, 53] (siehe Kapitel 2.2.4). Eine Sammlung dieser und weiterer Begriffe mit Bezug zur Zuverlässigkeit findet sich in [61].

2.2.2 Methoden der Zuverlässigkeitstechnik

Um die vorgestellten Maßzahlen, Parameter und Verteilungen zur Beschreibung der Zuverlässigkeit eines Produkts zu bestimmen, bedarf es verschiedener Methoden, die im Folgenden vorgestellt werden.

Die Schätzung einer Ausfallverteilung zur Bestimmung der Zuverlässigkeit oder dem entsprechenden Lebensdauerquantil, basiert auf dem Satz von Gliwienko-Cantelli [62, 63]. Er besagt, dass die Schätzung der tatsächlich zugrundeliegenden Verteilungsfunktion möglich ist, da die aus den Stichproben gewonnenen empirischen Verteilungsfunktionen [8] gegen diese konvergieren und ist damit eine Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen [15, 64].

Das **Medianrangverfahren** zur Schätzung der Parameter einer Verteilung basiert auf den Rangverteilungen [5, 65]. Dabei werden über theoretische Überlegungen die Verteilungen der Ausfallwahrscheinlichkeit der jeweiligen Ranggrößen der Stichprobe bestimmt. Der Median dieser Verteilung der jeweiligen Ranggröße bildet die Ausfallwahrscheinlichkeit der sortierten Ausfallzeiten der Stichprobe [5]. Üblicherweise wird dazu die Approximation nach Benard angewandt, welche eine Näherung an den Median der Betaverteilung mit $\mathcal{B}(i; n - i + 1)$ darstellt [66]:

$$F_i \approx \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \quad (2.34)$$

Die geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten F_i der Ränge i der Stichprobe vom Umfang n , bilden zusammen mit den beobachteten Lebensdauern t_i der Stichprobe Wertepaare. Diese Wertepaare werden mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [8, 67] dazu verwendet die Parameter der Ausfallverteilung zu bestimmen. Nachteil dieser Methode ist, dass Durchläufer – also Prüflinge, dessen Versuch vor deren Ausfall abgebrochen wird – lediglich durch ein Zeitintervall statt mit der exakten Laufzeit Berücksichtigung finden können, weswegen in der Praxis meist andere Schätzverfahren angewandt werden [5]. Sollen Durchläufer berücksichtigt werden, so wird die Rangzahl i künstlich angepasst, siehe [5].

Im Gegensatz zum überbestimmten Gleichungssystem, welches die Methode der kleinsten Fehlerquadrate löst, löst die **Momentenmethode** nach Pearson [68, 69] ein einfach bestimmtes Gleichungssystem. Es werden die ersten k statistischen Momente (vergleiche Kapitel 2.1.1) der Verteilung genutzt um die k gesuchten Parameter der Verteilung zu bestimmen. Dazu werden die Momente aus der Beobachtung bestimmt, beispielsweise durch Berechnung der empirischen Momente [5]. Diese Momente werden den theoretischen Momenten der Verteilung gleichgesetzt, sodass die gesuchten Parameter berechnet werden können. Der einfachen Anwendung steht die je nach Verteilung schlechte Anpassungsgüte gegenüber, da nur die ersten k Momente berücksichtigt werden. Außerdem ist auch hier die Berücksichtigung von zensierten Ausfallzeiten nicht direkt möglich.

Bereits Laplace, Gauß und Edgeworth nutzten das Konzept der Maximum Likelihood [70–72]. Jedoch war es Fisher, welcher ihr den Namen **Maximum Likelihood Methode** (MLE¹) gab [73, 74]. Dabei sollen jene Parameterwerte der Verteilung gefunden werden, welche die beobachteten Daten am wahrscheinlichsten wiedergeben. Die Wahrscheinlichkeit genau die vorliegenden Werte der Stichprobe zu beobachten, kann durch das Produkt der

¹ In englischer Sprache: maximum likelihood estimation

Auftretenswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Werte berechnet werden und entspricht dem Produktgesetz der Wahrscheinlichkeiten [4, 5, 8]:

$$L(\phi) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \phi) \quad (2.35)$$

Die Auftretenswahrscheinlichkeiten sind durch die Werte der Dichtefunktion $f(t_i)$ bei den n beobachteten Werten t_i gegeben. Das Produkt $L(\phi)$ wird **Likelihoodfunktion** genannt und ist sowohl von den festen Werten t_i , als auch den Parametern ϕ der Verteilung abhängig. Da die Anzahl der Parameter je nach Verteilung verschieden sein kann, ist ϕ hier als Parametervektor zu verstehen. Werden die Parameterwerte variiert, so ändert sich der Wert der Likelihoodfunktion. Es sind die Parameter zu wählen, zu welchen die Likelihoodfunktion ihr Maximum erreicht. In einigen Fällen, kann dieses Maximum analytisch bestimmt werden [75]. Dazu wird die Likelihoodfunktion logarithmiert. Es ändert sich das Maximum dadurch nicht. Aus dem Produkt erhält man damit eine Summe, welche nach den k Parametern abgeleitet werden kann. Das Maximum findet sich an den Stellen, zu welchen die k partiellen Ableitungen verschwinden [5, 75, 76]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_1} \ln(L(\phi)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_1} \ln(f(t_i; \phi)) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial \phi_k} \ln(L(\phi)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_k} \ln(f(t_i; \phi)) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Häufig ergibt sich jedoch kein analytisch bestimmbarer Ausdruck für die gesuchten Parameter, weswegen Gleichung 2.36 über geeignete Optimierungsalgorithmen auf numerisch approximative Weise gelöst wird [75, 77]. Aufgrund der Struktur der Algorithmen, wird oftmals jedoch die negative logarithmierte Likelihoodfunktion, die sogenannte negative **Loglikelihoodfunktion** minimiert [75]. Ein Vorteil dieser Schätzmethode ist, dass sich auch rechtszensierte Ausfallzeiten (Durchläufer) mit deren exakten Werten berücksichtigen lassen. Dazu wird die Likelihoodfunktion folgendermaßen erweitert [5, 75]:

$$L(\phi) = \prod_i f(t_i; \phi) \cdot \prod_j R(t_j; \phi) \quad (2.37)$$

Die ausgefallenen Einheiten sind mit i und die Durchläufer sind mit j gekennzeichnet. Statt der Dichtefunktion muss für die Durchläufer die Zuverlässigkeit $R(t_j)$, also die Überlebenswahrscheinlichkeit verwendet werden. Die Likelihoodfunktion lässt sich zudem um die Berücksichtigung von linkszensierten Ausfallzeiten und intervallzensierten Ausfallzeiten erweitern [78, 79]. Ein Nachteil hingegen ist, dass bei kleinen Stichproben der Weibullformparameter b leicht überschätzt wird und infolgedessen auch der Skalenparameter T sehr leicht unterschätzt wird. Um dem entgegenzuwirken, existieren Verzerrungs-Korrekturen, wie beispielsweise das Verfahren nach Hirose und Ross oder Resampling-basierte Verfahren [80-83]. Die MLE kann auch als Spezialfall der Maximum-a-posteriori-Schätzung (MAP) mit Gleichverteilungen der Parameter als Vorkenntnis hergeleitet werden [84]. Sie ist demnach sowohl aus frequentistischer, als auch bayes'scher Sicht zugänglich.

Die **Monte-Carlo Simulation** (MCS) wurde maßgeblich von Metropolis, M. Rosenbluth, A. Rosenbluth, E. Teller und A. Teller [85] beeinflusst. Sie wird hauptsächlich zur Opti-

mierung, numerischen Integration und zur Erzeugung von Zufallszahlen aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen eingesetzt [86]. In der Zuverlässigkeitstechnik wird die MCS meist verwendet um Zufallszahlen zu erzeugen, welche bestimmten Verteilungen folgen. Dabei ist es unerheblich, ob diese Verteilungen nicht oder nur schwer analytisch beschreibbar sind. Die generierten Zufallszahlen können beispielsweise verwendet werden um Statistiken oder Maßzahlen zu bestimmen, wie beispielsweise die Ausfallverteilung von System [87, 88], siehe Kapitel 2.2.4. Ausgang ist eine zufällige Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ welche entsprechend der bekannten Zusammenhänge der Verteilung übersetzt wird. Diese Zufallszahl kann real erzeugt werden, beispielsweise mittels eines Würfels oder durch Beobachtung des atmosphärischen Rauschens [89]. Da die Simulationen jedoch zuallermeist in Computern durchgeführt werden, werden die Zufallszahlen dort durch sogenannte Pseudozufallszahlengeneratoren erzeugt [90, 91]. Es handelt sich dabei nicht weiter um echte Zufallszahlen, da sie statt durch Zufallsprozesse durch Algorithmen erzeugt werden. Aus diesem Grund werden sie **Pseudozufallszahlen** genannt. Näherungsweise kann der Einfluss dadurch jedoch in den meisten Simulationen vernachlässigt werden [92]. Zufallszahlen entsprechend einer gewünschten Verteilung können entweder mittels der **Inversionsmethode** oder der **Verwerfungsmethode** generiert werden [91, 93]. Die Inversionsmethode nutzt dabei die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion $F^{-1}(q)$ um die erzeugte Pseudozufallszahl q direkt in eine Zufallszahl der Verteilung $F(t)$ zu übersetzen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Umkehrfunktion existiert und gefunden werden kann. Anderenfalls kommt die Verwerfungsmethode zum Einsatz, welche Zufallszahlen in der Fläche erzeugt, die von der Dichtefunktion $f(t)$ und dem Merkmal t aufgespannt wird. Liegt die Zahl oberhalb des Graphen von $f(t)$, so wird sie verworfen. Liegt sie unterhalb, so wird sie als eine Zufallszahl der Verteilung $F(t)$ angenommen [88, 93]. Die beiden Methoden sind in Abbildung 2.11 veranschaulicht.

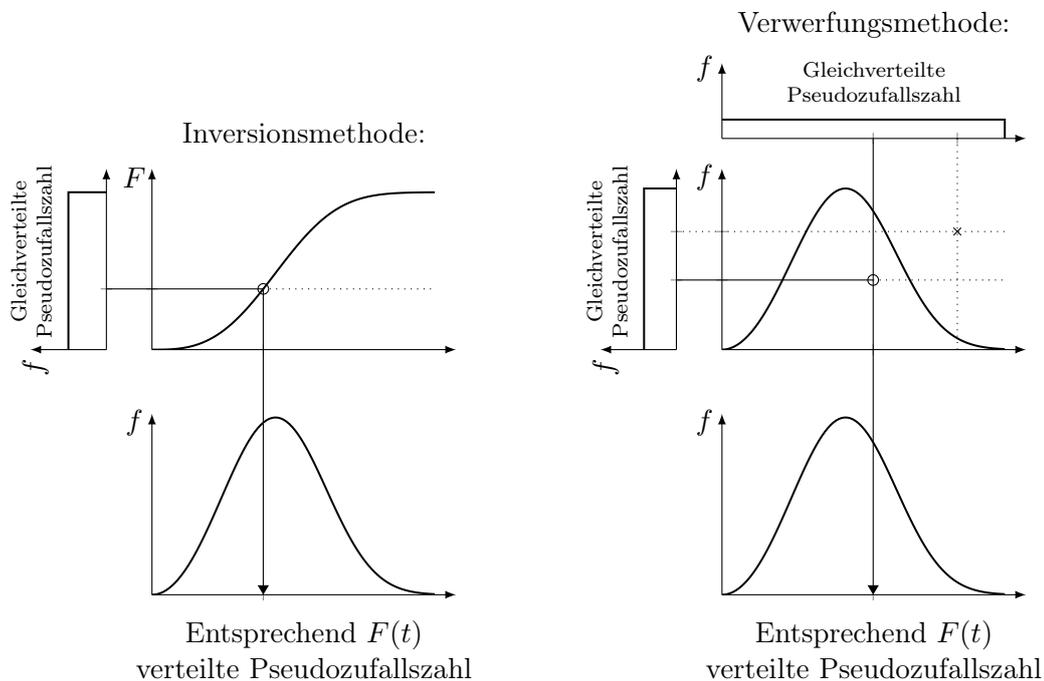


Abbildung 2.11: Inversions- und Verwerfungsmethode zur Erzeugung von Zufallszahlen, die der Verteilung $F(t)$ entsprechen.

Mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes lassen sich für bestimmte Fälle die Verteilungen von Statistiken asymptotisch bestimmen. So ist beispielsweise die Verteilung des Mittel-

werts einer Stichprobe bekannt [45], siehe Kapitel 2.1.5. Bei komplexeren Problemen und anderen Statistiken kann es jedoch sein, dass diese Verteilung nicht bekannt ist. Um diese Verteilung dennoch schätzen zu können, existiert die **Bootstrap-Methode**. Sie wurde erstmal von Efron [94] vorgestellt und bedient sich der Methode des Resamplings. Dabei werden durch wiederholtes, zufälliges Ziehen mit Zurücklegen aus der ursprünglichen Stichprobe neue, künstliche Bootstrap-Stichproben derselben Größe erzeugt, zu welchen jeweils die entsprechende Statistik gebildet wird. Über diese Statistiken, lässt sich beispielsweise die Verteilung der Statistik schätzen. Grundsätzlich wird zwischen **nicht-parametrischem Bootstrap** und **parametrischem Bootstrap** unterschieden [95]. Dabei nutzt das nicht-parametrische Bootstrap die empirische Verteilung der Stichprobe, das heißt es tauchen in den **Bootstrap-Stichproben** exakt dieselben Werte wie in der ursprünglichen Stichprobe auf. Das parametrische Bootstrap nutzt eine parametrische Verteilung. Das heißt es wird zunächst eine Verteilung bestimmt, beispielsweise mittels MLE und anschließend aus dieser über die Inversions- oder Verwerfungsmethode neue Bootstrap-Stichproben erzeugt. Vorteil des nicht-parametrischen Bootstrap ist, dass keine Verteilungsannahme getroffen werden muss wohingegen der parametrische Bootstrap den gesamten Bereich der Verteilung besser abbilden kann, für den Fall, dass die ursprüngliche Stichprobe diesen nur schlecht wiedergibt und sich beispielsweise auf einen Randbereich konzentriert [94, 96, 97]. Das allgemeine Vorgehen der beiden Bootstrap-Methoden ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Angewendet wird

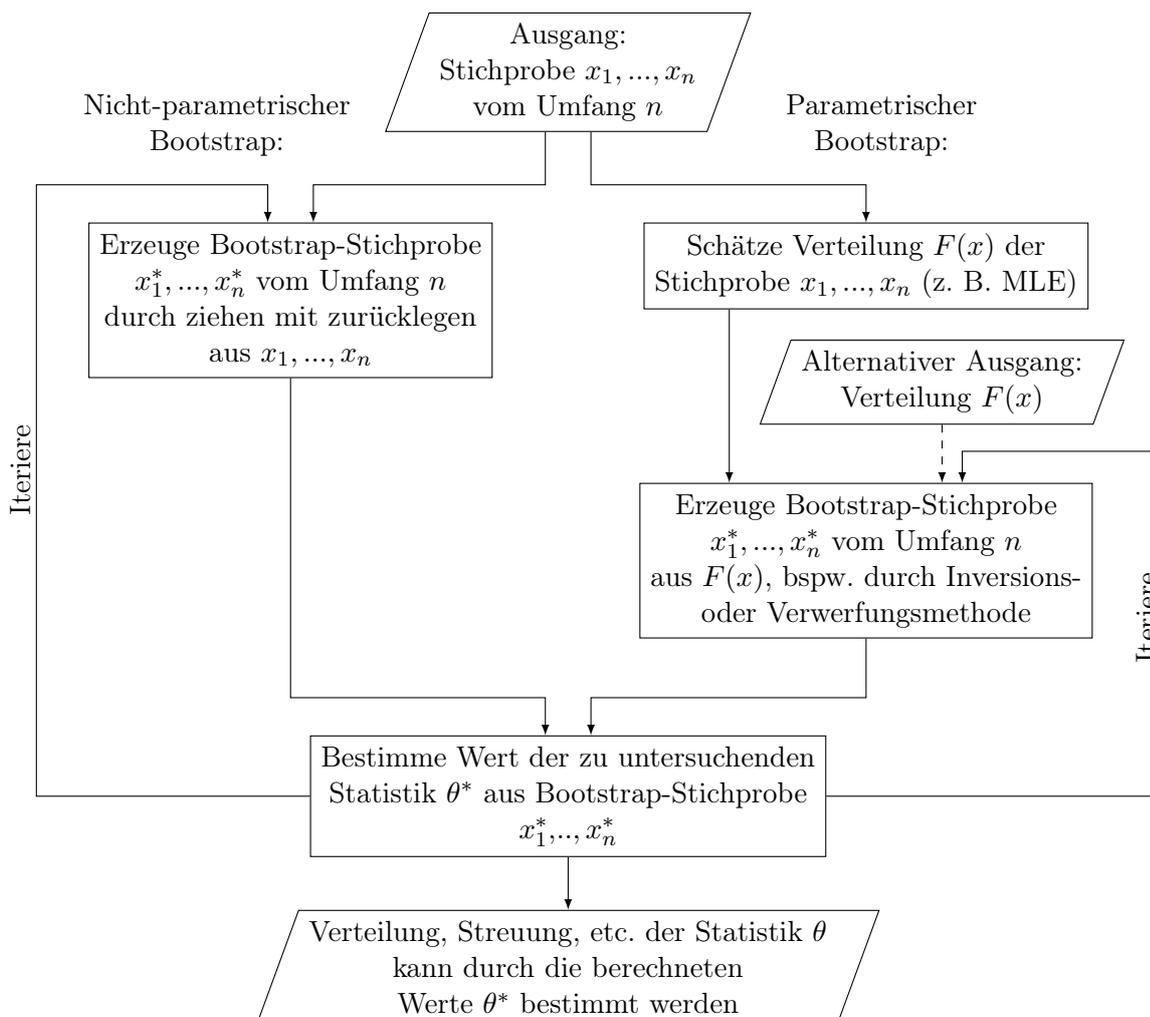


Abbildung 2.12: Vorgehen des nicht-parametrischen und des parametrischen Bootstraps.

die Bootstrap-Methode beispielsweise um Vertrauensbereiche für Statistiken oder Parameter zu bilden [98], siehe Kapitel 2.2.3, die Standardabweichung von Statistiken zu schätzen [99, 100] oder die Verzerrung von Schätzern (im Englischen: Bias) zu bestimmen [97].

2.2.3 Vertrauensbereiche in der Zuverlässigkeitstechnik

Bei der Auswertung von Zuverlässigkeitstests kann lediglich eine Aussage über die Stichprobe des Tests getroffen werden. Üblicherweise ist jedoch eine Aussage über die nicht getesteten Einheiten, also über die Grundgesamtheit gewünscht. Hierzu müssen Vertrauensbereiche berechnet werden (siehe Kapitel 2.1.3). Insbesondere für einen Zuverlässigkeitsnachweis ist der Vertrauensbereich beziehungsweise die Aussagewahrscheinlichkeit von besonderer Bedeutung. Denn eine Zuverlässigkeitsaussage, welche nur zu einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit zutrifft, ist nicht zu gebrauchen. Dies schlägt sich auch im Zuverlässigkeitsziel durch die Forderung der Mindestaussagewahrscheinlichkeit nieder. Zur Berechnung des Vertrauensbereichs stehen verschiedene Methoden zur Verfügung [5].

Der **Beta-Binomial-Vertrauensbereich** folgt den Überlegungen zu den Verteilungen der Ordnungsstatistiken aus dem Medianrangverfahren (siehe Kapitel 2.2.2). Es wird dieselbe Beta-Verteilung mit den Parametern $A = i$ und $B = n - i + 1$ zur Beschreibung der Ausfallwahrscheinlichkeit F_i des jeweiligen Rangs i der Stichprobe vom Umfang n verwendet. Jedoch wird statt des Medians der Ausfallwahrscheinlichkeit das der gewünschten Aussagewahrscheinlichkeit C entsprechende Quantil genutzt. Dazu wird die Beta-Verteilung selbst verwendet, da die Approximation aus Gleichung 2.34 nicht verwendet werden kann. Die linksseitige Vertrauensbereichsgrenze der Ausfallwahrscheinlichkeit des i -ten Ranges berechnet sich damit wie folgt [5]:

$$F_{i,u} = \mathcal{B}^{-1}(C; i; n - i + 1) \quad (2.38)$$

Dabei bestimmt $\mathcal{B}^{-1}(q; A; B)$ das Quantil zum Anteil q der Beta-Verteilung mit Parametern A und B . Da die Grenzen des Vertrauensbereichs jeweils nur für die festen beobachteten Werte t_i der Stichprobe bestimmt werden können, wird eine Vertrauensbereichsangabe der Zuverlässigkeit für Lebensdauern ungleich dieser Werte erschwert. Denn die Vertrauensbereichsgrenzen für Werte zwischen den Stichprobenwerten müssen geeignet interpoliert werden [101].

Die **Fisher-Information** ist benannt nach Ronald A. Fisher [74] und beschreibt die Menge an Information, die eine Zufallszahl X über einen Parameter ϕ enthält, der die Verteilung $F(x; \phi)$ derselben beschreibt. Die Fisher-Information beschäftigt sich damit, wie sich die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Beobachtungen verändert, wenn die Parameter ϕ der Verteilung geändert werden. Die Likelihoodfunktion aus Gleichung 2.35 beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Beobachtungen. Die Veränderung dieser Wahrscheinlichkeit bezüglich der Parameter ϕ ist durch die partiellen Ableitungen der Likelihoodfunktion beschrieben, siehe Gleichung 2.36. Dies wird bei der MLE ausgenutzt, denn das Maximum der Wahrscheinlichkeit befindet sich in einem Punkt zu welchem die Veränderungen Null sind. Die partiellen Ableitungen der Loglikelihoodfunktion wird auch Score-Funktion genannt [102, 103]. Die Fisher-Information $I(\phi)$ der Parameter ϕ ist definiert als die Varianz der Score-Funktion bezüglich der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X , also der Varianz der partiellen Ableitungen der Loglikelihoodfunktion $\ln(L(\phi))$ nach den Parametern ϕ [74]:

$$I(\phi) = \text{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \ln(L(\phi)) \right)^2 \right] \quad (2.39)$$

Da die allermeisten Verteilungen mehr als einen Parameter besitzen, existieren k partielle Ableitungen und die Fisher-Information nimmt die Form einer symmetrischen Matrix der Größe $k \times k$ an, mit den Einträgen [104]:

$$[I(\phi)]_{i,j} = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \ln(L(\phi)) \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \phi_j} \ln(L(\phi)) \right) \right] \quad (2.40)$$

Diese Matrix wird **Fisher-Informationsmatrix** genannt [104]. Unter Regularitätsbedingungen [105] ist diese Matrix die Kovarianzmatrix der Score-Funktion und kann als Krümmung der Loglikelihoodfunktion verstanden werden [104, 106, 107]. Die Unterscheidung zwischen erwarteter und beobachteter Fisher-Information sowie deren jeweilige Eignung für die MLE, kann [108] entnommen werden.

Mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen und einer Taylorreihenentwicklung der Likelihoodfunktion um den wahren Wert des Parameters ϕ_0 , erhält man die Varianz der Parameterschätzung der MLE $\hat{\phi}$ als Kehrwert der Fisher-Information [44]:

$$\text{Var} \left(\sqrt{n} (\hat{\phi} - \phi_0) \right) = \frac{1}{I(\phi_0)} \quad (2.41)$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz (siehe Kapitel 2.1.5) gilt damit für die asymptotische Verteilung des geschätzten Parameters $\hat{\phi}$ der MLE-Schätzung (vergleiche Gleichung 2.30) [44]:

$$\hat{\phi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \left(\phi_0; \sqrt{\frac{1}{nI(\phi_0)}} \right) \quad (2.42)$$

Da der wahre Wert ϕ_0 nicht bekannt ist, sondern durch die MLE geschätzt wird, wird für diese Verteilung vereinfachend $\hat{\phi} \approx \phi_0$ und $I(\hat{\phi}) \approx I(\phi_0)$ verwendet [44]. Damit lässt sich der approximative **Fisher-Vertrauensbereich** des Parameters ϕ bilden [44, 60]:

$$\left[\Phi^{-1} \left(\frac{1-C}{2}; \hat{\phi}; \sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\phi})}} \right), \Phi^{-1} \left(1 - \frac{1-C}{2}; \hat{\phi}; \sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\phi})}} \right) \right] \quad (2.43)$$

Der hier dargestellte Vertrauensbereich ist der zweiseitige Vertrauensbereich für die Aussagewahrscheinlichkeit C . $\Phi^{-1}(q; \mu; \sigma)$ stellt das Quantil zum Anteil q der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ dar. Handelt es sich um mehr als einen Parameter, so bildet sich der Vertrauensbereich mit Hilfe der Fisher-Informationsmatrix aus Gleichung 2.40. Werden Vertrauensbereiche von beispielsweise der Lebensdauer, der Zuverlässigkeit, oder anderen Statistiken benötigt, so müssen sie aus diesen Parametern berechnet werden. Der so gebildete Vertrauensbereich ist in zweierlei Hinsicht approximativ: Zum einen werden zur Schätzung der Varianz die durch die MLE geschätzten Parameter statt der tatsächlichen verwendet und zum anderen ist die Normalverteilung aus den Gleichungen (2.42) und (2.43) lediglich für $n \rightarrow +\infty$ gültig, was in der praktischen Anwendung niemals der Fall ist. Die tatsächliche Verteilung, die durch die Normalverteilung aus Gleichung 2.43 approximiert wird, kann also eine andere Lage und eine andere Standardabweichung haben. Außerdem sind die damit berechneten zweiseitigen Vertrauensbereiche immer symmetrisch und weisen keine Schiefe auf. Dies widerspricht der Vorstellung, dass manche Probleme nach asymmetrischen Vertrauensbereichen verlangen. Untersuchungen zeigen jedoch, dass der Fisher-Vertrauensbereich bezüglich der Zuverlässigkeit dennoch meist eine gute Treffsicherheit besitzt [109].

Die Methoden der **Bootstrap-Vertrauensbereiche**, welche erstmals von Efron [110] vorgestellt wurden, sind nicht auf den zentralen Grenzwertsatz und die Konstruktion von Vertrauensbereichen über die Normalverteilung angewiesen. Dafür werden über den Bootstrap-Algorithmus durch ziehen mit zurücklegen neue Bootstrap-Stichproben erzeugt, welche bezüglich der zu untersuchenden Statistik ausgewertet werden. Die dabei erhaltenen Werte dieser Statistik werden dann verwendet um Vertrauensbereiche zu konstruieren. Dabei wird aus der über das Bootstrap erhaltenen empirischen Verteilung \hat{G} direkt der Vertrauensbereich zur untersuchenden Statistik θ (beispielsweise ein Lebensdauerquantil) gebildet [98]. Die Berechnung mittels der Vertrauensbereiche der Parameter ϕ der Verteilung ist dazu nicht notwendig. Der **Perzentil-Bootstrap-Vertrauensbereich** wertet also direkt die empirische Verteilung $\hat{G}(\theta^*)$ aus, indem das der gewünschten Aussagewahrscheinlichkeit C entsprechende Quantil gebildet wird [110, 111]:

$$\left[\hat{G}^{-1} \left(\frac{1-C}{2} \right), \hat{G}^{-1} \left(1 - \frac{1-C}{2} \right) \right]. \quad (2.44)$$

Dabei ist \hat{G}^{-1} die Umkehrfunktion von \hat{G} und der hier dargestellte Vertrauensbereich der zweiseitige Vertrauensbereich. Um eine etwaig vorhandene Verzerrung der Lage der Verteilung $\hat{G}(\theta^*)$, einen sogenannten Bias, zu korrigieren, entwickelte Efron den **Bias korrigierten Perzentil-Bootstrap-Vertrauensbereich** (BC), welcher eine Korrektur vornimmt, sofern der Median von $\hat{G}(\theta^*)$ ungleich der ursprünglichen Schätzung der Statistik $\hat{\theta}$ ist [111]. Um diese Methode noch weiter zu optimieren, entwickelte Efron den **Bias korrigierten und beschleunigten Bootstrap-Vertrauensbereich** (BC_a) [112]. Dieser führt neben der Bias-Korrektur z_0 des BC Bootstrap-Vertrauensbereichs noch einen Beschleunigungsfaktor a ein, welcher die relative Änderung der Standardabweichung der transformierten Statistik beschreibt [112]. Die zweiseitigen Vertrauensbereiche berechnen sich damit über [98, 112]:

$$\left[\hat{G}^{-1} \left(\Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + \Phi^{-1} \left(\frac{1-C}{2} \right)}{1 - a \cdot \left(z_0 + \Phi^{-1} \left(\frac{1-C}{2} \right) \right)} \right) \right), \right. \\ \left. \hat{G}^{-1} \left(\Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{1-C}{2} \right)}{1 - a \cdot \left(z_0 + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{1-C}{2} \right) \right)} \right) \right) \right] \quad (2.45)$$

Mit der Konstante der Bias-Korrektur als [112]

$$z_0 = \Phi^{-1} \left(\hat{G} \left(\hat{\theta} \right) \right) \quad (2.46)$$

und dem Beschleunigungsfaktor [112, 113]

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(-i)} \right)^3}{6 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \left(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(-i)} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (2.47)$$

für den nicht-parametrischen Fall.

Die Variablen $\hat{\theta}_{(-i)}$ sind die Statistiken der Jackknife-Resample¹ [113-115] und $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ der Mittelwert dieser. In diesem Fall bezeichnet Φ die Standardnormalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$, $\sigma = 1$ und Φ^{-1} deren Umkehrfunktion. Vergleicht man die Fisher-Vertrauensbereiche mit dem BC_a Bootstrap-Vertrauensbereich, so ist letzterer für viele Probleme asymptotisch korrekt zweiter Ordnung, wohingegen der Fisher-Vertrauensbereich lediglich asymptotisch korrekt erster Ordnung ist [116]. Um die BC_a -Vertrauensbereiche noch weiter zu verfeinern, wurden die **ABC-Vertrauensbereiche**² entworfen. Sie verwenden zwar den Ansatz der BC_a -Vertrauensbereiche, kommen jedoch ohne Resampling, also ohne MCS, aus, indem sie durch einen weiteren Parameter, welcher die Nichtlinearität der Bootstrapverteilung \hat{G} beschreibt, die Vertrauensbereiche approximativ konstruieren [98, 117, 118]. Allerdings ist die Methode der ABC-Vertrauensbereiche aktuell lediglich für Verteilungen der Exponentialfamilie konstruiert, weswegen sie in der Zuverlässigkeitstechnik mit der häufig verwendeten Weibullverteilung nicht zur Anwendung kommt. Die ABC-Vertrauensbereiche finden heute auch wegen der gestiegenen Rechenkapazitäten weniger Beachtung. Die Bootstrap-Vertrauensbereiche sind allgemein durch ihre einfache Anwendbarkeit und hohe Flexibilität für viele Anwendungen in der Zuverlässigkeitstechnik von Vorteil [119]. Insbesondere die Perzentil-Bootstrap-Vertrauensbereiche erwiesen sich für den Vertrauensbereich der Zuverlässigkeit als gute Wahl mit ausreichend guter Überdeckungswahrscheinlichkeit [120, 121]. Nachteil der Bootstrap-Vertrauensbereiche ist die hohe Rechenleistung, welche für die meist hohen Iterationszahlen notwendig ist. Häufig werden 1000 oder mehr Iterationen für eine ausreichende Genauigkeit der Vertrauensbereiche empfohlen [98]. Weitere Ausführungen zum Bootstrap-Verfahren und den damit konstruierten Vertrauensbereichen kann [98, 111, 113, 122-126] entnommen werden.

Zu den Beta-Binomial-, Fisher- und den Bootstrap-Vertrauensbereichen können auch mittels der Likelihoodfunktion sogenannte Likelihood-Quotienten-Vertrauensbereiche gebildet werden, welche jedoch in der Zuverlässigkeitstechnik seltener Anwendung finden [127].

Neben den hier beschriebenen Vertrauensbereichen im frequentistischen Sinne, können auch, basierend auf dem Satz von Bayes (Gleichung 2.31), Kreditabilitätsintervalle [75] berechnet und angegeben werden. Hierbei ist zu beachten, dass dabei die Interpretation anders erfolgt. Aufgrund der a-priori-Dichte der Vorkenntnis, schwankt der Parameter selbst und die Kreditabilitätsgrenzen, welche ihn einschließen sind fest. Wohingegen bei Vertrauensbereichen der Parameter fest ist, aber die bestimmten Vertrauensbereichsgrenzen schwanken [75]. Da die Kreditabilitätsintervalle für die vorliegende Arbeit nicht relevant sind, wird auf eine ausführlichere Erläuterung verzichtet.

Vertrauensbereiche können in der Zuverlässigkeit für Parameter einer Ausfallverteilung, der Zuverlässigkeit, der Lebensdauer, als auch Lebensdauermodellparametern und weiteren Größen gebildet werden [128]. Dabei wird die Güte der Vertrauensbereiche über die Deckungswahrscheinlichkeit (im Englischen coverage probability) angegeben. Sie beschreibt mit welcher Wahrscheinlichkeit der Vertrauensbereich die wahren Werte beinhaltet und wird meist über Monte-Carlo Methoden berechnet. Die Güte der Vertrauensbereiche unterscheidet sich je nach Anwendung stark und kann zudem nur für synthetische Szenarien berechnet werden [109, 113, 123].

¹ Jackknife Stichproben werden durch zufälliges wegnehmen eines oder mehrerer Werte aus der Ursprungsstichprobe erzeugt. Sie werden hauptsächlich für die Bestimmung der Verzerrung eines Schätzers verwendet. Aus ihnen entwickelte sich die Bootstrap-Methoden. Erstmals vorgestellt in [114, 115].

² Approximate Bootstrap Confidence

2.2.4 Systemzuverlässigkeit und deren Berechnung

Eine Ausfallverteilung, wie beispielsweise die Weibullverteilung, kann nur eine Ausfallmode beschreiben. Da jedoch meist mehrere Ausfallmoden und mehrere Ausfallursachen für das Ausfallverhalten des Produkts verantwortlich sind, muss zur Beschreibung der Produktzuverlässigkeit – also der Systemzuverlässigkeit des Produktes – nach Ausfallmoden unterschieden werden [5, 87].

Die Ausfallmoden eines Produkts können beispielsweise über Versuche mit stark erhöhten Lasten (HALT [5]), eine Fehlermöglichkeits- und -einflussanalyse, eine Fehlerbaumanalyse oder auch Vorversuche identifiziert werden [5, 129-131]. Sind die Ausfallmoden identifiziert, ist festzustellen, wie diese zusammenwirken. So kann in einer parallelen Struktur erst dann ein Ausfall des Systems hervorgerufen werden, wenn alle Komponenten (Moden) einen Ausfall hervorrufen. In einer seriellen Struktur hingegen wird ein Systemausfall hervorgerufen sobald einer der Ausfallmoden für einen Ausfall sorgt. Dabei kann eine Komponente mehrere Ausfallmoden besitzen. Diese logischen Zusammenhänge gehen auf die Boole'sche Algebra zurück [132-135] und werden mit sogenannten **Zuverlässigkeits-Blockschaltbildern** beschrieben [5, 53, 87]. Neben den zwei Grundstrukturen der Parallel- und der Serienstruktur können auch beliebige Kombinationen und Verschaltungen dieser auftreten. Beispiele solcher Blockschaltbilder sind in Abbildung 2.13 zu sehen. Zudem gibt es Sonderformen wie

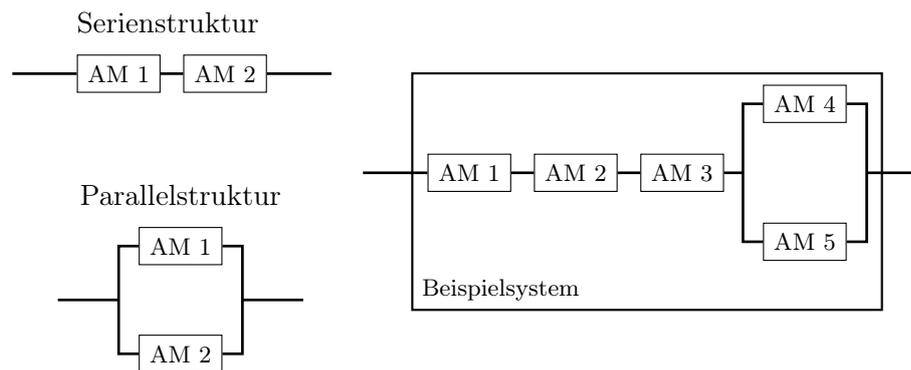


Abbildung 2.13: Grundstrukturen der Zuverlässigkeits-Blockschaltbilder: Parallelstruktur und Serienstruktur sowie Beispiel einer Verschaltung der Ausfallmoden (AM) mit diesen zu einem System.

beispielsweise Systeme, welche erst dann einen Ausfall erfahren, wenn k der insgesamt n Komponenten der Einheit ausgefallen sind (im Englischen k out of n systems genannt) [53, 136]. Die Ausfallmoden stellen aus zuverlässigkeitstechnischer Sicht die unterste Ebene in einem System dar. Theoretisch können für ein Produkt beliebige Subsysteme definiert werden, welche wieder für sich mit den Theorien und Methoden der Systemzuverlässigkeit behandelt werden können. Typische Subsysteme sind dabei Bauteile, Komponenten, Baugruppen oder physische Subsysteme. Diese Einteilung ist insbesondere in der Testplanung relevant [57].

Im Seriensystem müssen alle Ausfallmoden überleben, sodass das System nicht ausfällt. Für die Berechnung der Systemzuverlässigkeit R_{Sys} bedeutet das mit dem Produktgesetz der Wahrscheinlichkeiten, dass die Einzelzuverlässigkeiten der Ausfallmoden R_i multipliziert werden müssen [5, 53]:

$$R_{\text{Sys}}(t) = \prod_i R_i(t) \quad (2.48)$$

Bei einem Parallelsystem hingegen fällt das System erst aus, wenn alle Komponenten ausgefallen sind. Das heißt es müssen die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Komponenten (Moden) F_i multipliziert werden. Das Komplement dieser Systemausfallwahrscheinlichkeit F_{Sys} ergibt die Systemzuverlässigkeit [5, 53]

$$R_{\text{Sys}}(t) = 1 - F_{\text{Sys}} = 1 - \prod_i F_i(t) = 1 - \prod_i (1 - R_i(t)). \quad (2.49)$$

Wird die Systemzuverlässigkeit über Zuverlässigkeitstests bestimmt, so ist der Vertrauensbereich zu berücksichtigen. Die Beziehungen aus den Gleichungen (2.48) und (2.49) sind jedoch nur für die Erwartungswerte der Wahrscheinlichkeiten gültig [87]. Würden Zuverlässigkeitswerte eines Vertrauensbereichs, welche nicht dem Erwartungswert entsprechen, multipliziert werden, so würde man eine falsche Systemzuverlässigkeit berechnen [137]. Die konstruierten und berechneten Verteilungen welche verwendet werden um die Vertrauensbereiche beispielsweise über die Fisher-Information oder über den Beta-Binomial-Vertrauensbereich zu bilden (siehe Kapitel 2.2.3), werden **confidence distributions** [138] genannt. Also im Grunde Verteilungen, die die Streuung aufgrund der epistemischen und aleatorischen Unsicherheit beschreiben. Wird damit die Zuverlässigkeit beschrieben, so handelt es sich um **Zuverlässigkeitsverteilungen**. Um die Systemzuverlässigkeit mit Aussagewahrscheinlichkeit korrekt zu berechnen, werden diese Zuverlässigkeitsverteilungen der jeweiligen Ausfallmoden entsprechend der logischen Systemstruktur mittels der Boole'schen Algebra zur Zuverlässigkeitsverteilung des Systems verknüpft. Aus dieser lässt sich die Systemzuverlässigkeit entsprechend einer gewünschten Aussagewahrscheinlichkeit berechnen.

Handelt es sich um ein Seriensystem mit zwei Ausfallmoden, so bildet sich die Verteilung der Systemzuverlässigkeit $f(R_{\text{Sys}})$ nach einer Koordinatentransformation aus den Zuverlässigkeitsverteilungen der beiden Ausfallmoden f_1 und f_2 nach Gleichung 2.48 über folgendes Integral [137, 139]:

$$f(R_{\text{Sys}}) = \int_0^1 \frac{1}{x} f_1\left(\frac{R_{\text{Sys}}}{x}\right) f_2(x) dx \quad (2.50)$$

Handelt es sich stattdessen um ein Parallelsystem, so kann die Gleichung analog für die Ausfallwahrscheinlichkeiten verwendet werden. Besitzt das System mehr als zwei Ausfallmoden und ist die Systemstruktur komplexer, so ist Gleichung 2.50 gegebenenfalls sequentiell anzuwenden. Um die Verteilung der Systemzuverlässigkeit zu berechnen, stehen verschiedene Methoden zur Verfügung.

Die **Mellin-Transformation** [140] ist für eine Funktion $f(x)$ mit ausschließlich positivem Argument definiert als [139]

$$M\{f\}(s) = y(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (2.51)$$

$M\{f\}(s) = y(s)$ ist die Mellin-transformierte von $f(x)$. Die Rücktransformation aus dem komplexen Bildbereich ($s \in \mathbb{C}$) ist durch [139]

$$M^{-1}\{y\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} y(s) ds \quad (2.52)$$

gegeben. Es handelt sich dabei um ein Linienintegral entlang einer vertikalen Linie in der komplexen Zahlenebene. Die Konstante c ist aus dem Streifen zu wählen, in welchem $y(s)$ analytisch existiert. Die Mellin-Transformation besitzt also nicht in jedem Fall ei-

ne analytische Lösung, was die Anwendung über den analytischen Weg einschränkt. Es existieren jedoch numerisch lösbare, approximative Verfahren [141]. Vorteil der Mellin-Transformation ist, dass die Faltung zweier Funktionen im Bildbereich als Produkt der beiden transformierten Funktionen dargestellt werden kann. Dies bewirkt, dass sich die Faltung aus Gleichung 2.50 als die Rücktransformation zweier miteinander multiplizierter Mellin-transformierter Funktionen beschreiben lässt [139, 142]. Mittels der Mellin-Transformation lässt sich also die Zuverlässigkeitsverteilung eines Seriensystems mit einer beliebigen Anzahl an Ausfallmoden i folgendermaßen berechnen [139]:

$$f(R_{\text{Sys}}) = M^{-1} \left\{ \prod_i M \{f_i\} (s) \right\} (R_{\text{Sys}}) \quad (2.53)$$

Sind Parallelstrukturen im System vorhanden, so ist die entsprechende Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeit zu verwenden. Die Mellin-Transformation ermöglicht demnach eine exakte Lösung für die Zuverlässigkeitsverteilung des Systems, sofern die analytischen Lösungen existieren. Werden für die Zuverlässigkeitsverteilungen der Ausfallmoden Betaverteilungen verwendet, so kann die Zuverlässigkeitsverteilung des Systems mit Hilfe der Meijer'schen G-Funktion [143] berechnet werden. Sind die Parameter der Betaverteilungen ganzzahlig, so lässt sich sogar ein analytisch geschlossener Ausdruck finden [142, 144].

Die **Momentenmethode** verwendet direkt die Beziehungen der Erwartungswerte der Zuverlässigkeit beziehungsweise der Ausfallwahrscheinlichkeit aus den Gleichungen (2.48) und (2.49). Da es sich bei den Momenten einer Verteilung um die Erwartungswerte der potenzierten Zufallsvariable handelt und beim ersten Moment gar um den Erwartungswert der Zufallsvariablen selbst, können die Boole'schen Beziehungen auf die Momente angewandt werden. Die Momente der Zuverlässigkeitsverteilung des Systems lassen sich demnach durch Produktbildung aus den Momenten der Zuverlässigkeitsverteilungen der Ausfallmoden berechnen. Es werden die ersten k Momente verwendet um die k Parameter der Verteilung der Zuverlässigkeit des Systems zu bestimmen [53]. Werden Betaverteilungen als Zuverlässigkeitsverteilungen gewählt, so lassen sich die Parameter der Betaverteilung des Systems mittels der Momentenmethode als geschlossene Gleichungen darstellen [145-148]. Dies liegt in der einfachen Berechnung der Momente der Betaverteilung begründet, siehe Gleichungen (2.20) und (2.21). Die Gleichungen für die Zuverlässigkeitsverteilung des Systems als Betaverteilung $\mathcal{B}(A_{\text{Sys}}; B_{\text{Sys}})$ eines reinen Seriensystems mit Betaverteilungen $\mathcal{B}(A_i; B_i)$ der Zuverlässigkeitsverteilungen der Ausfallmoden i lauten [146]:

$$E[R_{\text{Sys}}] = \prod_i \frac{A_i}{A_i + B_i} \quad (2.54)$$

$$\text{Var}(R_{\text{Sys}}) = \prod_i \frac{A_i \cdot (A_i + 1)}{(A_i + B_i)(A_i + B_i + 1)} - \left(\prod_i \frac{A_i}{A_i + B_i} \right)^2 \quad (2.55)$$

$$A_{\text{Sys}} = \frac{(1 - E[R_{\text{Sys}}]) (E[R_{\text{Sys}}])^2}{\text{Var}(R_{\text{Sys}})} - E[R_{\text{Sys}}] \quad (2.56)$$

$$B_{\text{Sys}} = A_{\text{Sys}} \frac{1 - E[R_{\text{Sys}}]}{E[R_{\text{Sys}}]} \quad (2.57)$$

Das Integral aus Gleichung 2.50 lässt sich auch über eine **Monte-Carlo Simulation** berechnen. Dazu wird mittels der Inversions- oder Verwerfungsmethode aus den Zuverlässigkeitsverteilungen der Ausfallmoden Zufallszahlen erzeugt und entsprechend der Systemstruktur

nach den Gleichungen (2.48) und (2.49) zur Systemzuverlässigkeit verknüpft. Durch mehrfache Wiederholung erhält man dadurch eine empirische Verteilung der Zuverlässigkeit des Systems. Mit diesen diskreten Werten der Systemzuverlässigkeit können dann beispielsweise über eine MLE die Parameter der Zuverlässigkeitsverteilung des Systems bestimmt werden. Zum Beispiel als Betaverteilung [87].

Die Momentenmethode und die MCS stellen eine approximative Lösung dar. Insbesondere die Momentenmethode kann je nach gewählter Verteilung starke Unterschiede in der Approximationsgüte aufweisen. Wird eine Betaverteilung gewählt, so ist die Approximationsgüte im Kontext der Systemzuverlässigkeit jedoch meist ausreichend gut [25, 149]. Die Mellin-Transformation hingegen stellt eine exakte Lösung dar, da sie durch ihre Definition alle Momente der Verteilung berücksichtigt, sogar die komplexen. Ist die Transformation nicht analytisch lösbar, muss sie auf approximative Weise gelöst werden. Die Momentenmethode berücksichtigt lediglich die ersten k Momente und die MCS konvergiert gegen die exakte Lösung der Mellin-Transformation. Die Momentenmethode und die MCS finden in der Zuverlässigkeitstechnik die häufigste Anwendung, da sie lediglich einfache Rechenoperationen erfordern und geringen Implementationsaufwand darstellen [87]. Zudem handelt es sich bei der exakten Lösung aus der Mellin-Transformation nicht weiter um dieselbe Verteilung wie die der Ausfallmoden. Bei der Momentenmethode und der MCS kann der Verteilungstyp jedoch frei gewählt werden, was bei der weiteren Verwendung der Information einen Vorteil darstellen kann. Ein Beispiel einer Verteilung der Systemzuverlässigkeit, berechnet mit den drei Methoden ist in Abbildung 2.14 zu sehen. Hierbei liegen die Lösungen der MCS und der Mellin-Transformation sehr dicht beieinander.

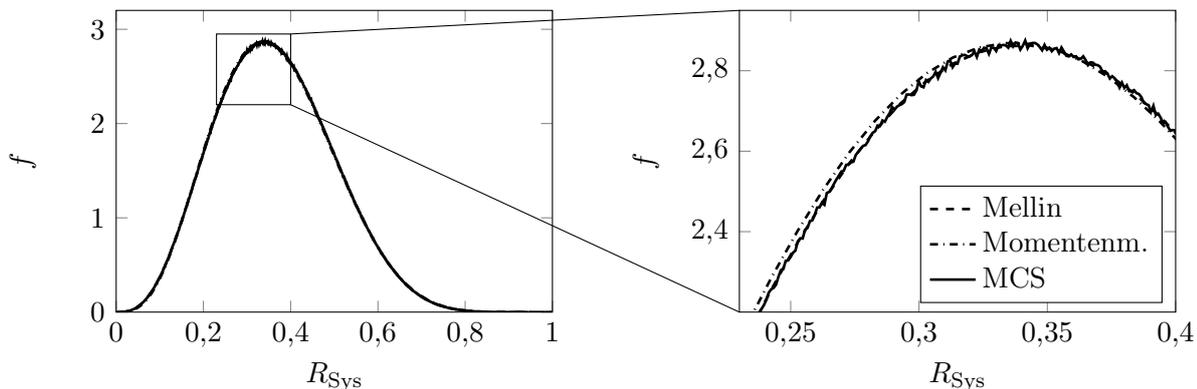


Abbildung 2.14: Verteilung der Systemzuverlässigkeit $f(R_{\text{Sys}})$ für ein reines Seriensystem mit drei Ausfallmoden und $f_1(R_1) = \mathcal{B}(9; 3)$, $f_2(R_2) = \mathcal{B}(8; 3)$, $f_3(R_3) = \mathcal{B}(4; 2)$. Berechnet mit der Mellin-Transformation (exakte Lösung), der Momentenmethode mit Betaverteilung und der MCS mit Betaverteilung (empirisch, 100 Millionen Iterationen und 1.000 Klassen).

In der Literatur sind darüberhinaus weitere Methoden und Verfahren beschrieben, welche jedoch meist für bestimmte Randbedingungen und Annahmen konstruiert und somit nicht allgemein anwendbar sind. Eine Übersicht ist beispielsweise in [150-153] zu finden.

2.2.5 Zuverlässigkeitstests

Um die Zuverlässigkeit, das Ausfallverhalten sowie die Lebensdauer von Produkten zu bestimmen, zu prognostizieren und nachzuweisen sind entsprechende Tests notwendig. Hierzu

stehen zwei wesentliche Grundformen zur Verfügung: ausfallbasierte Tests und ausfallfreie Tests [5, 53, 101].

Die **ausfallbasierten Tests** werden auch **End-of-Life Tests (EoL Test)** genannt, da sie Ausfallzeiten liefern und damit Auskunft über die Lebensdauer, also das Ende des Produktlebens, geben. Bei einem **vollständigen EoL Test** werden alle Prüflinge solange betrieben, bis sie ausfallen. Er liefert bei n Prüflingen n Ausfallzeiten und besitzt damit den größten Informationsgehalt aller Zuverlässigkeitstests [5, 53]. Demgegenüber stehen **zensierte EoL Tests** welche nach verschiedenen Mustern den Test einiger Prüflinge vor deren Ausfall abbrechen. Dadurch entstehen Zensierungen die den Informationsgehalt verringern aber eine Aufwandsreduktionen bedeuten können, da nicht alle Prüflinge bis zum Ende deren Laufzeit betrieben werden müssen [60, 154]. Wird der EoL Test nach einer festen Zeit abgebrochen, ist zwar die Anzahl der zensierten Prüflinge ungewiss, jedoch die Testzeit fest und damit gut planbar. Solch ein Test wird **Typ I zensierter EoL Test** genannt [5]. Wird dagegen nach einer vorgegebenen Anzahl an Ausfällen abgebrochen, ist zwar der Informationsgehalt durch die Anzahl an zensierten Prüflingen kontrolliert, jedoch ist die Laufzeit des Tests ungewiss. Dieser Test wird **Typ II zensierter EoL Test** genannt [5]. Zudem kann für manche Prüflinge die Laufzeit nur durch ein Intervall angegeben werden, sogenannte Intervallzensierungen. Die Zensierungsarten können beliebig kombiniert sein [153]. Aufgrund der Ausfälle der EoL Tests kann eine Ausfallverteilung mit den Methoden aus Kapitel 2.2.2 und 2.2.3 geschätzt und basierend darauf die Zuverlässigkeit prognostiziert oder nachgewiesen werden. Ist die Lebensdauer des Produkts sehr groß, so können die Ausfälle der Prüflinge nicht praktikabel beobachtet werden. Durch eine gegenüber der Feldbelastung erhöhten Last können die Ausfallzeiten der Prüflinge jedoch verkürzt werden. Um die dabei gewonnenen Informationen auf das Feldniveau zu übertragen, werden die Prüflinge bei **beschleunigten EoL Tests** auf zwei oder mehr Lastniveaus verteilt. Dadurch kann ein Lebensdauermodell bestimmt werden, welches wiederum eine Schätzung der Ausfallverteilung für das Feldlastniveau erlaubt [101]. Ein Überblick über die verschiedenen Lebensdauermodelle sowie Zuverlässigkeitstests mit Lebensdauermodellen ist in [101, 155, 156] gegeben.

Werden im Test alle Prüflinge zensiert, spricht man von **ausfallfreien Tests**, welche auch **Success-Run Tests (SR Tests)** genannt werden. Bei diesen Tests werden alle Prüflinge bis zu einer festgelegten Laufzeit betrieben und der Test anschließend abgebrochen. Dadurch wird eine hohe Planbarkeit erreicht, da die Laufzeit des Tests und die Informationsgüte, bei Bestehen des Tests, bereits im Voraus bekannt ist [5, 53]. Da keine Ausfälle geplant sind, kann keine Ausfallverteilung geschätzt werden und es wird stattdessen direkt die Mindestzuverlässigkeit bei geforderter Lebensdauer bestimmt. Aus diesem Grund werden die SR Tests häufig für den Zuverlässigkeitsnachweis angewandt und sind in der Industrie weit verbreitet [5]. Es werden die Überlegungen und die Verwandtschaft der Binomialverteilung und der Betaverteilung verwendet, siehe Kapitel 2.1.2 und 2.1.2. Es resultiert eine Betaverteilung als Zuverlässigkeitsverteilung bei geforderter Lebensdauer mit $\mathcal{B}(n; 1)$, sofern die Prüflinge bis zur geforderten Lebensdauer betrieben wurden und tatsächlich kein Ausfall aufgetreten ist. Werden die Prüflinge bis zu einer Laufzeit $t_{\text{prüf}}$ abweichend der geforderten Lebensdauer t_s betrieben, so wird mit einem **Lebensdauer Verhältnis** $L_V = \frac{t_{\text{prüf}}}{t_s}$ [5, 157] die Zuverlässigkeitsverteilung anhand eines angenommenen Weibullformparameters b umgerechnet. Werden die Prüflinge zudem bei einer von der Feldbelastung abweichenden Last betrieben und ist das entsprechende Lebensdauermodell bekannt, so wird die durch diese abweichende Belastung veränderte Ausfallzeit durch einen **Raffungsfaktor** r [5, 101] berücksichtigt. Für einen SR Test mit Stichprobenumfang n und unterschiedlichen Laufzeiten und Lasten der Prüflinge i , resultiert eine Betaverteilung mit $\mathcal{B}\left(\sum_i (L_{V,i} \cdot r_i)^b; 1\right)$ [5, 158, 159]. Sollten

während des Tests Ausfälle auftreten, so können diese in der Auswertung berücksichtigt werden. Allerdings handelt es sich bei der resultierenden Zuverlässigkeitsverteilung nicht weiter um eine Betaverteilung. Stattdessen kann die Zuverlässigkeitsverteilung folgendermaßen beschrieben werden [160]:

$$f(R) = \frac{R^{\sum_i (L_{V,i} r_i)^b} \prod_j (1 - R^{(L_{V,j} r_j)^b})}{\int_0^1 R^{\sum_i (L_{V,i} r_i)^b} \prod_j (1 - R^{(L_{V,j} r_j)^b}) dR} \quad (2.58)$$

wobei i die Prüflinge ohne Ausfall und j die Prüflinge mit Ausfall kennzeichnet. Die Lebensdauererhältnisse L_V halten die jeweilige Laufzeit der Prüflinge fest und die Raffungsfaktoren r die Lebensdaueränderung aufgrund der jeweiligen Lasten. Wird der SR Test also mit zur geforderten Lebensdauer abweichenden Laufzeit betrieben oder eine abweichende Last verwendet, so ist ein Weibullformparameter notwendig um die Ergebnisse auszuwerten. Werden viele Ausfälle beobachtet, so ist eine Schätzung der Ausfallverteilung vorzuziehen. Der einfachen Planbarkeit (siehe Kapitel 2.2.8) steht der gegebenenfalls sehr große erforderliche Stichprobenumfang sowie das Risiko einer falschen Annahme des Weibullformparameters gegenüber [5, 161]. Untersuchungen von Dazer et al. [1] zeigen zudem, dass unbeschleunigte SR Tests für Systeme mit einem Ausfallmechanismus über einen weiten Anwendungsbereich deutliche Nachteile bezüglich eines Zuverlässigkeitsnachweises im Vergleich zu den EoL Tests aufweisen.

Die verschiedenen Zuverlässigkeitstests mit ihren unterschiedlichen Varianten und Ausprägungen bieten je nach Ziel und Randbedingungen der Tests unterschiedliche Vor- und Nachteile, welche jeweils individuell abzuwägen und zu bewerten sind. Wie diese Bewertung und Planung von Zuverlässigkeitstests vorgenommen werden kann, ist in den Kapiteln 2.2.7 und 2.2.8 dargelegt.

2.2.6 Berücksichtigung von Vorkenntnissen

Um hohe Zuverlässigkeitsziele nachzuweisen, benötigen die Zuverlässigkeitstests häufig hohe Aufwände. Da diese Aufwände in Form von Zeit, Kosten oder Prüflingen dann oft nicht realisierbar sind, werden Vorkenntnisse berücksichtigt, welche eine Aufwandsreduktion oder eine Präzisierung der Zuverlässigkeitsinformation zum Ziel haben. Die Ansätze basieren auf dem Satz von Bayes (siehe Kapitel 2.1.6), womit sich Informationen der Vorkenntnis mit Informationen aus aktuellen Versuchen kombinieren lassen. Die Vorkenntnis kann aus Vorgängern, ähnlichen Anwendungen, Komponententests, Vorversuchen, Prototypenversuchen, Lebensdauerberechnungen, Expertenaussagen und Weiterem gewonnen werden. Meist muss die Vorkenntnis für die Verwendung entsprechend aufgearbeitet werden [2, 5, 162, 163].

Das Verfahren nach Beyer und Lauster [157] berücksichtigt einen einzelnen Wert der Zuverlässigkeit, welcher einer Aussagewahrscheinlichkeit von 63,2% entsprechen muss. Diese Vorkenntnis wird mit den Informationen aus einem SR Test kombiniert, wodurch der Stichprobenumfang theoretisch reduziert werden kann. Ein Lebensdauererhältnis sowie während des SR Tests auftretende Ausfälle können zusätzlich berücksichtigt werden. Eine Erweiterung um beliebige Aussagewahrscheinlichkeiten und einen Raffungsfaktor ist ebenso möglich [159, 164]. Kleyner et al. [165], Savchuk und Martz [166] sowie Krolo [162] verwenden eine Betaverteilung als Zuverlässigkeitsverteilung der Vorkenntnis. In der Methode nach Kleyner et al. wird die Betaverteilung und eine Gleichverteilung gegeneinander gewichtet, um

den Übergang zur nicht vorhandenen Vorkenntnis zu modellieren. Die Gleichverteilung ist dabei über den gesamten Definitionsbereich der Zuverlässigkeit $R \in [0, 1]$ aufgespannt und repräsentiert den Fall der nicht vorhandenen Vorkenntnis, da alle Zuverlässigkeiten gleichermaßen zugelassen werden. Savchuk und Martz verwenden mehrere Quellen der Vorkenntnis und kombinieren diese zunächst über eine Gewichtung, sodass eine Mischverteilung aus Betaverteilungen entsteht, die anschließend als Vorkenntnis im Satz von Bayes verwendet werden kann. Die Vorgehensweisen nach Kleyner et al. und Savchuk und Martz verwenden zwar Gewichtungsfaktoren, geben jedoch nicht an, wie diese zu quantifizieren sind. Das Verfahren nach Krolo [162] erlaubt die Berücksichtigung von Vorkenntnis als Betaverteilung und beschreibt wie diese Betaverteilung in bestimmten Fällen gewonnen werden kann. Sowohl SR Tests als auch EoL Tests werden dabei über einen Ansatz nach der Approximation von Benard [66] umgerechnet. Berechnungsergebnisse lassen sich dagegen über eine synthetische Rechteckverteilung berücksichtigen. Dadurch wird ausschließlich ein einzelner Wert der Zuverlässigkeit als Ergebnis der Berechnung verwendet. Eine Aussagewahrscheinlichkeit ist bereits durch die synthetische Rechteckverteilung zugewiesen [167]. Schweizer stellt eine Methode vor, wie sich Streubereiche der Parameter in der Zuverlässigkeitssimulation über eine MCS integrieren lassen, sodass eine Betaverteilung als Vorkenntnis abgeleitet werden kann. Diese kann wiederum mit der Zuverlässigkeitsverteilung aus einem EoL Test kombiniert werden [168, 169]. Kececioglu verwendet statt einer Betaverteilung eine Triangular2-Verteilung welche ihren Sprung beim Wert der Vorkenntnis über die Zuverlässigkeit besitzt. Die zugewiesene Aussagewahrscheinlichkeit wird dabei mit einem Vertrauensgrad in diese Information gleichgesetzt und kann beliebig gewählt werden [170]. Maisch stellt in [171] ein Verfahren vor, welches die Berücksichtigung von Vorkenntnis von Komponententests ermöglicht, um Systemtests zu präzisieren. Dabei wird entweder eine Betaverteilung oder eine Rechteckverteilung verwendet.

Werden EoL Tests durchgeführt, so kann die Schätzung des Skalenparameters T der Weibullverteilung ebenfalls über den Satz von Bayes mit verfügbarer Vorkenntnis kombiniert werden. Das Weibayes Verfahren [29] nutzt dabei die Vorkenntnis über den Weibullformparameter b und nimmt an, dass dieser auch für die aktuellen Versuche unveränderlich anwendbar ist. Dies lässt sich sowohl über den Satz von Bayes, als auch über eine MLE herleiten, wobei in beiden Fällen der Formparameter als fest angenommen wird. Romer [172] erweiterte den Weibayes Ansatz um die Möglichkeit neben den Ausfallzeiten des Versuchs auch aus Lebensdauerberechnungen erzeugte Skalenparameter zu berücksichtigen. Weitere Methoden zur Berücksichtigung von Vorkenntnissen in der Zuverlässigkeitstechnik konzentrieren sich dabei entweder auf die Parameterschätzung der Ausfallverteilung oder die Kombination der Vorkenntnis mit der Zuverlässigkeitsverteilung des SR Tests. Ein Überblick darüber sowie die Anwendung des Satz von Bayes in anderen Bereichen der Zuverlässigkeitstechnik kann [57, 142, 173] entnommen werden.

Der Satz von Bayes setzt voraus, dass die kombinierten Informationen derselben Grundgesamtheit entstammen [23]. Die meisten Verfahren vernachlässigen diesen Umstand jedoch. Die Verfahren nach Beyer und Lauster [157], Kleyner et al. [165], Savchuk und Martz [166] sowie Kececioglu [170] verwenden eine Art Gewichtungsfaktor, der je nach Verfahren unterschiedlich interpretiert ist, jedoch ebendiesem Umstand begegnen soll und die Vorkenntnis nur zu einem gewissen Anteil übernimmt. Krolo führt in [174] einen Transformationsfaktor Φ ein, welcher durch Multiplikation mit den Parametern der Betaverteilung die Vorkenntnis in ihrer Wirkung in der kombinierten Information abschwächt. Die Betaverteilung $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ lautet in transformierter Form dann $\mathcal{B}(\Phi A_0; \Phi(B_0 - 1) + 1)$ [162]. Nachteil des so formulierten Transformationsfaktors ist, dass dieser nicht erwartungstreu ist und dadurch die Information der Vorkenntnis hin zu schlechteren Werten der Zuverlässigkeit verschiebt

[160]. Krolo führt zudem Methoden ein, mit welchen der Transformationsfaktor bestimmt werden kann. Dazu wird die Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse oder der systematische Abgleich der Umgebungsabstraktion des Versuchs für die Bestimmung verwendet [162]. Hitziger erweitert die Möglichkeit der Quantifizierung um eine Bestimmung aus Expertenwissen mittels Fuzzy-System [175] und einem Kolmogoroff-Smirnoff-Test [4, 176], welcher die Ähnlichkeit der Grundgesamtheiten der beiden zu kombinierenden Informationen bewertet [177]. Schweizer stellt zudem eine Methode vor, welche die Quantifizierung des Transformationsfaktors für Zuverlässigkeitsverteilungen aus Berechnungen ermöglicht [168]. Guida und Pulcini [178] hingegen stellen ein Verfahren vor, das die Übertragbarkeit der Vorkenntnis im Sinne eines Zuverlässigkeitswachstumsmodells [173] als eine Betaverteilung fasst und auch die Unsicherheit des notwendigen Weibullformparameters b als Intervallangabe berücksichtigt. All diese Verfahren zur Berücksichtigung der Anwendbarkeit der Vorkenntnis auf den aktuellen Fall bieten Möglichkeiten die Unsicherheit diesbezüglich zu minimieren. Aufgrund der gegebenenfalls sehr großen Auswirkungen bezüglich des Ausfallverhaltens von nur kleinen Änderungen des Produkts oder der Produktion [179], bleibt jedoch die Kritik bestehen, die Berücksichtigung der Vorkenntnis auf diese Weise mache den Zuverlässigkeitsnachweis angreifbar [180].

2.2.7 Probability of Test Success

Um verschiedene Zuverlässigkeitstests objektiv bewerten zu können, stellen Dazer et al. in [154] und [2] die Erfolgswahrscheinlichkeit vor, welche in [146] und [181] Probability of Test Success genannt wird. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher ein Zuverlässigkeitstest unter gegebenen Randbedingungen ein gestelltes Zuverlässigkeitsziel nachweisen wird [2]. Dazer schlägt eine MCS vor, um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Hierzu wird der zu bewertende Test durch Ziehen von Ausfallzeiten entsprechend der Ausfallverteilung des Produkts simuliert, indem die gegebenenfalls vorhandenen Zensierungen der Ausfallzeiten und auch der entsprechende Stichprobenumfang des Tests berücksichtigt werden. Durch das Gesetz der großen Zahlen [10] und einer großen Anzahl an Simulationsdurchläufen, lässt sich damit der Anteil der erfolgreichen Tests bestimmen und als Approximation an die Erfolgswahrscheinlichkeit verwenden [2]. Ob ein Test erfolgreich ist, ist durch die Erfüllung des Zuverlässigkeitsziels bestimmt. Die **Probability of Test Success** P_{ts} nach Dazer ist damit bestimmt als [2]:

$$P_{ts} \approx \frac{\text{Anzahl der erfolgreichen simulierten Tests}}{\text{Gesamtanzahl der simulierten Tests}} \quad (2.59)$$

Damit wurde erstmals eine objektive Bewertungsgröße geschaffen, welche fähig ist, Zuverlässigkeitstests jeglicher Art hinsichtlich deren Ziel – dem Zuverlässigkeitsnachweis – zu bewerten. Die Berechnung mittels der MCS ist zudem so flexibel, dass sie ohne Weiteres auf noch unbekannte Testarten angepasst und somit grundsätzlich jeder Zuverlässigkeitstest bewertet werden kann. Der Binomialansatz der SR Tests [5] ermöglicht jedoch auch eine direkte Berechnung der P_{ts} . Für einen erfolgreichen SR Test mit einem Stichprobenumfang n dürfen maximal k Prüflinge ausfallen, um das Zuverlässigkeitsziel nachzuweisen. Üblicherweise wird kein Ausfall zugelassen. Ist die Ausfallwahrscheinlichkeit F_p aus Vorkenntnis bekannt, so kann die P_{ts} eines SR Tests auch über folgenden Binomialansatz berechnet werden [2, 161, 182]:

$$P_{ts} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (1 - F_p)^{n-i} (F_p)^i \quad (2.60)$$

Für die Berechnung der P_{ts} ist demnach immer eine Vorkenntnis über das Ausfallverhalten beziehungsweise die Zuverlässigkeit des Produkts notwendig. Im Gegensatz zur Berücksichtigung von Vorkenntnis über den Satz von Bayes wird diese Vorkenntnis jedoch nur zur Bewertung der Tests verwendet und fließt nicht in die eigentliche Testauswertung ein.

Neben der Anwendung auf EoL Tests in vollständiger und zensierter Art [154] untersuchte Dazer insbesondere den Vergleich zwischen SR Tests und EoL Tests [1]. Dabei zeigt sich, dass SR Tests für Produkte mit einer einzigen dominanten Ausfallmode im unbeschleunigten Fall den EoL Tests im Kontext der P_{ts} meist deutlich unterlegen sind. Dies steht im Widerspruch zur sehr häufigen Anwendung des SR Tests in der industriellen Praxis und zeigt großes Optimierungspotential auf. Es zeigt sich auch, dass je nach Prüflingsverfügbarkeit, Prüflingskosten und Prüfstandskosten sowie zur Verfügung stehenden Testzeit zensierte EoL Tests Vorteile aufweisen können [2]. Auch intervallzensierte EoL Tests können untersucht werden [79]. Herzig erweitert das Konzept der P_{ts} auf beschleunigte Tests. Dabei werden die Prüflinge auf unterschiedliche Lastniveaus aufgeteilt und zusammen mit der Schätzung der Ausfallverteilung die Parameter des Lebensdauermodells bestimmt. Er stellt fest, dass die Aufwandsreduktion der beschleunigten EoL Tests die Reduktion der P_{ts} aufgrund der Extrapolation des dabei bestimmten Lebensdauermodells auf das Feldlastniveau überwiegen [183]. Häufig stellen die beschleunigten EoL Tests die den Restriktionen in Zeit und Budget entsprechenden Tests mit der höchsten P_{ts} dar [184]. Es lässt sich mittels der P_{ts} dabei nicht nur der günstigste Zuverlässigkeitstests identifizieren, sondern auch die dafür notwendige Prüflingaufteilung und Lastniveauhöhen [3, 181, 185]. Die Untersuchungen sind dabei jedoch immer auf Systeme mit einer einzigen Ausfallmode beschränkt. Die für die Praxis relevanten Systeme mit mehreren Ausfallmoden und deren vielfältigen logischen Zusammenhänge werden nicht betrachtet. Zudem wird die P_{ts} über den MCS Ansatz nach Dazer berechnet, welcher eine Einordnung der Größe der P_{ts} in den statistischen Kontext vermissen lässt.

Die Berechnung der P_{ts} entsprechend der MCS nach Dazer zeigt für weibullverteilte Ausfallzeiten, dass für kleine Stichprobenumfänge bei EoL Tests größere Werte erzielt werden können, als für größere Stichprobenumfänge. Dabei wurde die MLE als Schätzer und der Fisher-Vertrauensbereich für den Zuverlässigkeitsnachweis verwendet. Dies widerspricht der Erwartung: So müsste durch einen größeren Stichprobenumfang ein engerer Vertrauensbereich resultieren, was zu einer größeren Wahrscheinlichkeit der Erfüllung des Zuverlässigkeitsziels führt. Dazer erklärt diesen Widerspruch durch die unkorrigierte MLE Schätzung der Parameter, die bei kleinen Stichprobenumfängen den Weibullformparameter überschätzt und die vergrößerte Streuung des Vertrauensbereichs bei kleinen Stichprobenumfängen [2]. Dieses Verhalten wird auch in den erweiterten Berechnungsmethoden bei beschleunigten Tests nach Herzig [181] nicht korrigiert.

2.2.8 Zuverlässigkeitstestplanung

Die Zwecke der Zuverlässigkeitstests sind vielfältig. So können beispielsweise Konstruktionsvarianten bezüglich der Lebensdauer und Zuverlässigkeit miteinander verglichen werden, Materialien und entsprechende Zulieferer sowie Produktionsmethoden verifiziert und weitere einstellbare Randbedingungen der Eigenschaften des Produkts und der Produktion bewertet werden. Insbesondere während der Entwicklung bedarf es die Zuverlässigkeit zu bewerten und zu bestimmen. Ist hierzu die Identifikation von Ausfallverteilungen gefordert, müssen Tests geplant werden, welche diese Ausfallverteilungen möglichst gut schätzen können. Besteht die Hauptaufgabe darin, die geforderte Zuverlässigkeit nachzuweisen, so

ist nicht zwingend eine Schätzung der Ausfallverteilung notwendig, sondern lediglich der Zuverlässigkeit bei entsprechend geforderter Lebensdauer mit Aussagewahrscheinlichkeit. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf dem Zuverlässigkeitsnachweis, weswegen sich die Vorstellungen auf die Planung dieses Nachweises konzentrieren. Die jeweiligen Ziele, Randbedingungen und Anforderungen an einen Zuverlässigkeitstest müssen individuell in der Planung berücksichtigt werden. Die Planung umfasst dabei die Feststellung der notwendigen Aufwände und die Aufteilung dieser Aufwände auf verschiedene Testarten und gegebenenfalls Systemkomponenten [153, 154, 186, 187].

Zum Nachweis der Zuverlässigkeit werden häufig SR Tests durchgeführt. Dies liegt hauptsächlich darin begründet, dass der Aufwand der Tests sehr einfach zu planen ist. Für ein Zuverlässigkeitsziel mit geforderter Zuverlässigkeit R_s , geforderter Lebensdauer t_s und geforderter Aussagewahrscheinlichkeit C_s kann mit Hilfe von Gleichung 2.58 der erforderliche Stichprobenumfang n bei einer gewissen Anzahl zugelassener Ausfälle, einem Lebensdauererhältnis und bestimmtem Raffungsfaktor pro Prüfling, berechnet werden. Häufig wird ein festes Lebensdauererhältnis für alle Prüflinge verwendet und keine Ausfälle zugelassen. Durch die Verwandtschaft der Binomial- und der Betaverteilung [65] lässt sich die in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs resultierende Zuverlässigkeitsverteilung $\mathcal{B}(n \cdot (r \cdot L_V)^b; 1)$ nutzen und der geforderte Stichprobenumfang direkt berechnen [5, 159]:

$$n = \frac{\ln(1 - C_s)}{(r \cdot L_V)^b \cdot \ln(R_s)} \quad (2.61)$$

Hierzu muss der Stichprobenumfang auf den nächsten ganzzahligen Wert aufgerundet werden. Für ein Zuverlässigkeitsziel von $R_s = 95\%$, $t_s = 300.000$ km, $C_s = 90\%$ müssten nach Gleichung 2.61 $n = 45$ Prüflinge 300.000 km überleben um das Ziel nachzuweisen. Würden die Prüflinge bei einem Weibullformparameter von $b = 2$ hingegen bis 450.000 km geprüft werden, also $L_V = 1,5$, würden $n = 20$ Prüflinge ausreichen. Ist zudem ein Lebensdauermodell bekannt, kann ein Raffungsfaktor verwendet werden welcher auf den erforderlichen Stichprobenumfang einen ähnlichen Einfluss hat [5].

Um hohe erforderliche Stichprobenumfänge oder lange Testzeiten zu reduzieren, kann über den Satz von Bayes bereits in der Planung Vorkenntnis berücksichtigt werden. Der Ansatz nach Beyer und Lauster [157] in seiner erweiterten Form [159] kann Vorkenntnis über die Zuverlässigkeit bei geforderter Lebensdauer $R_0(t_s)$ mit Aussagewahrscheinlichkeit C_0 berücksichtigen. Durch die Annahme eines zugrundeliegenden SR Tests ohne Ausfälle, wird Gleichung 2.61 zu [159]:

$$n = \frac{\ln(1 - C_s)}{(r \cdot L_V)^b \cdot \ln(R_s)} - \frac{\ln(1 - C_0)}{\ln(R_0)} \quad (2.62)$$

Die Vorkenntnis reduziert hierbei direkt den erforderlichen Stichprobenumfang n . Übersteigt die Information aus der Vorkenntnis das Zuverlässigkeitsziel, so ist nach diesem Vorgehen der Nachweis bereits erbracht und keine weiteren Prüflinge müssten getestet werden. Das zeigt sich auch durch negative Werte für n in Gleichung 2.62. Dieser Fall wird im Vorgehen nach Beyer und Lauster sowie der Erweiterung nicht betrachtet, denn in der praktischen Anwendung sollten dennoch Prüflinge getestet werden, auch wenn die Vorkenntnis den Nachweis theoretisch bereits erbringt. Der Ansatz nach Krolo [162] bereitet die Vorkenntnis als Betaverteilung $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ auf und plant den SR Test ebenfalls über den Stichprobenumfang n nach Anwendung des Satz von Bayes. Die resultierende Zuverlässigkeitsverteilung ist

erneut eine Beta-Verteilung mit $\mathcal{B}\left(A_0 + n \cdot (L_V \cdot r)^b; B_0\right)$, für den Fall dass keine Ausfälle zugelassen werden. Der durch Berücksichtigung dieser Vorkenntnis noch erforderliche Stichprobenumfang des SR Tests ohne Ausfall lässt sich durch lösen der folgenden Gleichung nach n ermitteln [162, 163]:

$$R_s \stackrel{!}{=} \mathcal{B}^{-1}\left(1 - C_s; A_0 + n \cdot (L_V \cdot r)^b; B_0\right) \quad (2.63)$$

Hierbei ist ebenso eine Vorkenntnis denkbar, welche das Zuverlässigkeitsziel übersteigt und demnach keine weiteren Prüflinge mehr notwendig wären. Eine Vorkenntnis, welche dazu führt, dass mehr Prüflinge notwendig sind, ist auch möglich. Die Verfahren nach Kleyner et al. [165], Savchuk und Martz [166] und Kececioglu [170] gehen grundsätzlich ähnlich vor. Allerdings ist die resultierende Zuverlässigkeitsverteilung jeweils eine Sonderform und nicht weiter eine Verteilung bekannten Typs. Diese Verfahren lassen sich jedoch unter gewissen Voraussetzungen ineinander überführen [162]. Die Berücksichtigung der Vorkenntnis nach Maisch [171] basiert wiederum auf dem Ansatz nach Krolo. Es wird jedoch die Vorkenntnis zunächst von der Komponentenebene auf die Systemebene entsprechend der Systemstruktur aggregiert, um dort eine SR Testplanung durchzuführen, welche wiederum analog zum Verfahren nach Krolo ist. Nachteil aller dieser Verfahren zur Planung von SR Tests besteht darin, dass die Tests in der Durchführung fehlschlagen können. Das ist dann der Fall, wenn mehr Ausfälle auftreten als zugelassen. Es ist dann abzuwägen, ob zusätzliche Prüflinge zum Einsatz kommen, oder gar die Testart zu wechseln ist. Meist ist dies mit hohem Aufwand verbunden.

Die Schätzung der Ausfallverteilung eines EoL Tests kann ebenso verwendet werden, um einen Zuverlässigkeitsnachweis zu führen. Die Planung des EoL Tests ist jedoch komplexer, da kein direkter analytischer Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und einem erbrachten Nachweis besteht. Meeker und Escobar [60] schlagen ein der SR Testplanung ähnliches Vorgehen vor. Es wird die Zuverlässigkeitsverteilung bei geforderter Lebensdauer abgeschätzt, welche entstehen würde, sollte ein gewisser Stichprobenumfang n im EoL Test verwendet werden. Dazu wird die Verteilungsannahme des entsprechenden Vertrauensbereichs (siehe Kapitel 2.2.3) bezüglich der Zuverlässigkeit verwendet. Wird beispielsweise der Fisher-Vertrauensbereich zugrundegelegt, so lässt sich der erforderliche Stichprobenumfang über die asymptotische Normalverteilung des zentralen Grenzwertsatzes der MLE berechnen [188]. Notwendig ist dazu eine Vorkenntnis über die Ausfallverteilung des Produkts. Nachteil dieser Methoden ist, dass sich die Vertrauensbereiche von Stichprobe zu Stichprobe unterscheiden und man nicht sicher sein kann, dass mit dem berechneten Stichprobenumfang der Nachweis erbracht werden wird. Hinzu kommt, dass die dabei verwendete Vorkenntnis mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, welche die Planung unsicher machen könnte. Dieser Umstand wird jedoch nur erwähnt und nicht adressiert [60]. Weitere Ansätze zur Planung von EoL Tests sind sehr beschränkt bezüglich der Ausfallverteilung oder der Zensurierung. Guo et al. [189] diskutieren die Genauigkeit von vollständigen EoL Tests, wobei als Bewertungskriterium die Vertrauensbereichsbreite bei einem bestimmten Lebensdauerquantil verwendet wird. Für $n \rightarrow \infty$ wird das Bewertungsmaß zu 1, da der Vertrauensbereich mit dem Median zusammenfällt. Je näher die Bewertung an 1 ist, desto genauer ist der entsprechende EoL Test. Zur Bestimmung des Stichprobenumfangs werden MCS durchgeführt, welche die Abhängigkeit zwischen dem Stichprobenumfang und einer gewissen Intervallbreite herstellen. Hamada [57] beschreibt, wie sowohl SR Tests als auch EoL Tests basierend auf einer maximal akzeptierten Vertrauensbereichsbreite geplant werden können. Dabei wird zusätzlich die bayes'sche Vorstellung von Wahrscheinlichkeiten verwendet. Zur Identifikation eines Tests, welcher die Anforderungen erfüllt, wird ein genetischer Optimie-

rungsalgorithmus verwendet. Huang und Wu [190] untersuchen Typ I zensierte EoL Tests mit exponentialverteilterm Ausfallverhalten [5]. Andere Verteilungen wie beispielsweise die Weibullverteilung sind nicht untersucht. Vlcek et al. [191] vergleichen das Potential zur Einsparung von Testzeit von verschiedenen zensierten EoL Tests. Dazu werden die Tests mittels einer MCS simuliert und bezüglich der mittleren Testzeit ausgewertet und verglichen. Die mittlere Testzeit von Typ II zensierten EoL Tests wird auch von Hsieh [192] untersucht. Dabei wird die Binomialverteilung zum Vergleich der Zeiten verwendet und dabei die Vorteile von Typ II zensierten EoL Tests in Abhängigkeit der Zensierung und Weibullformparameter herausgearbeitet. Arizono et al. [193] stellt eine Methode vor, welche über eine MCS die Planung von zensierten Tests zur Schätzung von mittleren Ausfallzeiten unterstützt. Dabei wird sowohl der statistische Fehler von Typ I, als auch der Fehler von Typ II berücksichtigt, was einen Vergleich verschiedener Testkonfigurationen ermöglicht. Durch die Beschränkung auf mittlere Ausfallzeiten ist die Methode jedoch nicht für die Planung von Tests für den Zuverlässigkeitsnachweis geeignet. In der Arbeit von Ahmed und Chateauaneuf [194] liegen die Kosten von Zuverlässigkeitstests im Fokus. Dabei werden durch verschiedene Kostenmodelle Tests hinsichtlich deren Kosten bewertet, was einen Vergleich zwischen Tests und die Identifikation eines Optimums für den aktuellen Fall erlaubt. Wahrscheinlichkeiten und Unsicherheiten fließen dabei über Schätzungen der Belastung und der Belastbarkeit sowie des Stichprobenumfangs ein. Die Untersuchungen setzen dabei alle eine Vorkenntnis bezüglich des Ausfallverhaltens des Produkts voraus. Die Methode nach Lu et al. [195] ermöglicht die Identifikation eines optimalen Tests für den Zuverlässigkeitsnachweis. Dieser erfolgt durch ein Pareto-Optimum welches auf einer Bewertung durch die statistischen Fehler von Typ I und Typ II aufbaut. Jedoch bedienen sich Lu et al. dabei eines Ansatzes mit dem Satz von Bayes und einer sogenannten indifference region¹ [57]. Dies hat zur Folge, dass Kreditabilitätsintervalle statt Vertrauensbereiche verwendet werden und der Wert der geforderten Zuverlässigkeit keine direkte Verwendung findet. Dadurch ist dieser Ansatz vom Zuverlässigkeitsziel losgelöst. Zudem werden lediglich SR Tests betrachtet. Wilson und Farrow [196] erweiterten diesen Ansatz für EoL Tests.

Die Zuverlässigkeitstestplanung mit Hilfe der P_{ts} erlaubt eine Bewertung jeglicher Tests und ist damit nicht an eine Testart gebunden [1-3, 79, 146-148, 154, 161, 181, 183-185, 197, 198]. Sie liefert die Wahrscheinlichkeit für den erfolgreichen Ausgang des Tests, nämlich den Zuverlässigkeitsnachweis. Damit wird eine Aussage über die Erfolgchance des Tests (SR oder EoL) erreicht. Es lässt sich damit zunächst unabhängig der Methode zur Bildung des Vertrauensbereichs, die Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Zuverlässigkeitsnachweises beispielsweise in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs angeben, siehe Abbildung 2.15. Damit ist ein wesentlicher Nachteil der Methoden der Zuverlässigkeitstestplanung behoben und auch für den EoL Test ein Zusammenhang zwischen gewünschtem Zuverlässigkeitsnachweis und Stichprobenumfang geschaffen.

Zwar stellt Maisch [171] vor, wie SR Tests auf Systemebene geplant werden können, jedoch werden in diesem letzten Schritt auf Systemebene mit einem SR Test die Ausfallmoden und die Systemstruktur nicht adressiert. Zudem stellt Maisch vor, wie Vorkenntnis als Betaverteilung bei der Auswertung eines EoL Tests berücksichtigt werden kann. Wie dieser EoL Test geplant werden kann, wird nicht behandelt. Zur Planung von Tests eines Systems wird in weiteren Ansätzen das Zuverlässigkeitsziel des Systems auf die Komponenten im System zugewiesen [199, 200]. Dabei wird die Systemstruktur verwendet um die notwendige Änderung der geforderten Zuverlässigkeit auf die Komponenten zu errechnen, sodass die Zuverlässigkeit des Systems erreicht werden kann. Yadav et al. [201] stellen einen An-

¹ Indifferenzgebiet in welchem die Fälle in gleichem Maße möglich sind

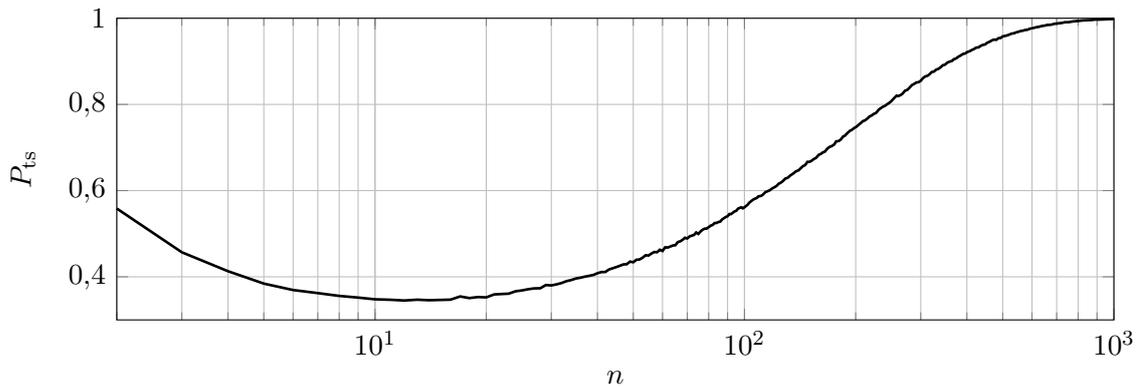


Abbildung 2.15: P_{ts} in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs n eines vollständigen EoL Test mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und $R_s = C_s = 90\%$, $t_s = 0,4251$. Berechnet mittels MCS und Fisher-Vertrauensbereich nach [2]. Es wurden 100.000 Iterationen pro Rechnung verwendet. Für ein besseres Verständnis des Verlaufs wurden die Kurven zwischen den diskreten Werten interpoliert.

satz vor, welcher Systemnachweise behandelt. Dabei werden sowohl die Systemstruktur als auch die Zuverlässigkeits- und die Funktionsanforderungen in den Fokus gerückt. Um die Nachweise durchzuführen, werden jedoch lediglich SR Tests berücksichtigt, die durch eine Aufteilung des Systemziels auf die Systemkomponenten geplant werden. Dabei wird nicht betrachtet wie die Aussagewahrscheinlichkeit der Testergebnisse der Komponententests zusammenwirken. So kann beispielsweise eine sehr hohe Aussagewahrscheinlichkeit der einen Komponente die niedrige einer anderen aufwiegen. Zudem wird kein Zusammenspiel der Tests von verschiedenen Ebenen betrachtet und keine ganzheitliche Planung von Zuverlässigkeitstests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit untersucht. Die Zuverlässigkeitsziele an die Komponenten sind zudem eventuell losgelöst von der vermuteten, tatsächlichen Zuverlässigkeit, welche im Entwicklungsprozess beispielsweise berechnet und zugewiesen wird. Eine Betrachtung wie alleinig die Aufwände der jeweiligen Tests kombiniert zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit beitragen können, ohne einzelne Zuverlässigkeitsziele mit Aussagewahrscheinlichkeit für die Komponenten vorzuschreiben, findet nicht statt. Hamada [57] verwendet einen genetischen Algorithmus um Testaufwände so aufzuteilen, dass sich eine gewünschte Vertrauensbereichsbreite der Systemzuverlässigkeit ergibt. Verwendet wird dabei Vorkenntnis über die Komponentenzuverlässigkeiten in Form von SR Tests. Die Streuung der Vertrauensbereichsbreite bezüglich der Stichproben werden dabei jedoch nicht betrachtet.

Die Planung beschleunigter EoL Tests ist nicht Bestandteil dieser Arbeit, weswegen auf eine Ausführung diesbezüglich verzichtet wird. Ein Überblick sowie die Planung von beschleunigten EoL Tests mit P_{ts} kann der Arbeit von Herzig [181] entnommen werden.

Kapitel 3

Forschungsbedarf und Zielsetzung

Im Folgenden werden die bestehenden Ansätze, Methoden und Vorgehensweisen bewertet. Darauf aufbauend wird die Forschungslücke aufgezeigt, woraus sich der Forschungsbedarf ableiten und schließlich das Ziel dieser Arbeit formulieren lässt.

3.1 Bewertung bestehender Ansätze und Forschungsbedarf

Bestehende Ansätze zur Planung von Tests für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit sind auf ausgewählte Szenarien beschränkt. So konzentrieren sie sich hauptsächlich auf die Planung von SR Tests und der Reduktion der damit verbundenen Aufwände. EoL Tests sind nur in den Ansätzen nach Meeker und Escobar [60], Hamada [57] und Wilson und Farrow [196] thematisiert. Dabei wird jedoch der Fehler vom Typ II missachtet und stattdessen in [60] ein Genauigkeitsfaktor verwendet; oder die Planung ist vom frequentistischen Kontext der Zuverlässigkeitsanforderung losgelöst wie in [57, 196]. Ein objektiver Vergleich aller möglicher Testarten über eine einheitliche Bewertung wird nur im Ansatz nach Dazer [1, 2, 154] mittels der eingeführten Größe der Erfolgswahrscheinlichkeit P_{ts} ermöglicht. Der korrekte statistische Kontext wird jedoch nicht erarbeitet, weswegen mögliche Potentiale nicht identifiziert und erschlossen werden und statistische Zusammenhänge nicht hergestellt werden. Zudem ist diese Größe ausschließlich für die Betrachtung einer einzigen Ausfallmode formuliert, was bei realen Produkten selten der Fall ist. Sie besitzen meist viele Ausfallmoden, die gemeinsam über eine Systemstruktur für den Systemausfall verantwortlich sind.

Die Planung von SR Tests erfolgt nach dem Binomialansatz [5], welcher unterschiedliche Prüfzeiten und erhöhte Lasten durch ein Lebensdauerverhältnis und einen Raffungsfaktor berücksichtigen kann. Die Erweiterungen zur Reduktion des Testaufwands nach Kleyner et al. [165, 202], Beyer und Lauster [157], Krolo [158, 162, 174], Savchuk und Martz [166], Kececioğlu [170] sowie Guida und Pulcini [203] erlauben zwar zusätzliche Berücksichtigung von Vorkenntnis, hinterfragen aber meist nicht die Eignung des Tests für den vorliegenden Fall des tatsächlichen Produktverhaltens und des Zuverlässigkeitsziels. Produkte mit mehreren dominanten Ausfallmoden werden nicht betrachtet.

Die Planung von EoL Tests erfolgt in [57, 60, 189] indem der Stichprobenumfang für unzensierte, Typ I und Typ II zensierte Tests so moduliert wird, dass eine gewünschte Vertrauensbereichsbreite erreicht wird. Die Streuung der Vertrauensbereiche zwischen den Stichproben

gleichen Umfangs wird jedoch nicht berücksichtigt, weswegen diese Ansätze als unvollständig angesehen werden können. Dieser Umstand wird in [1, 2, 154] durch die Belegung dieser Unsicherheit mit einer Wahrscheinlichkeit, der P_{ts} beseitigt. Der Ansatz lässt jedoch eine fundierte statistische Einordnung vermissen. Zudem werden lediglich technische Produkte mit einer einzigen dominanten Ausfallmode adressiert. Die Planung von Tests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit werden nicht betrachtet. Außerdem wird die bei diesen Betrachtungen verwendete Information über das Ausfallverhalten immer als fest angenommen. Eine mögliche Unsicherheit dieser Information wird nicht thematisiert und die Vorkenntnis lässt sich nicht zusätzlich über den Satz von Bayes berücksichtigen.

Mit der Planung von Tests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit beschäftigen sich die Ansätze von Maisch [171] und Yadav et al. [201]. Dabei wird jedoch die Zuverlässigkeitsanforderung an das System auf die Komponenten aufgeteilt. Diese Aufteilung erfolgt so, dass die bestehenden Methoden zur Planung von Nachweistests einzeln für die Komponenten angewandt werden können. Zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit ist diese Aufteilung jedoch nicht zwingend notwendig. Eine Betrachtung ohne diese Aufteilung sowie die in der Planung bereits kombinierte Betrachtung verschiedener Tests sowie der Aggregation der Informationen zur Systemzuverlässigkeit um den Nachweis des Systems zu erbringen, existiert nicht. So ist kein direkter und objektiver Vergleich zwischen Komponententests und Systemtests möglich. Außerdem werden lediglich SR Tests auf Systemebene geplant. Eine Betrachtung des Testrisikos im Sinne der P_{ts} erfolgt nicht. Der Ansatz nach Hamada [57] verfolgt für die Systemzuverlässigkeit ein ähnliches Ziel wie die bestehenden Ansätze zur Planung von EoL Tests. Es werden durch genetische Algorithmen die Kombination der Testaufwände von SR Tests identifiziert, die eine gewünschte Vertrauensbereichsbreite auf Systemebene herstellt. Die Streuung der Vertrauensbereiche bezüglich der Stichproben sowie eine Betrachtung für EoL Tests werden nicht berücksichtigt. Ein Ansatz zur Betrachtung kombinierter Tests, indem EoL und SR Tests auf gegebenenfalls verschiedenen Systemebenen durchgeführt werden, existiert nicht.

Forschungsbedarf besteht demnach bezüglich der Planung von SR und EoL Tests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit. Insbesondere bedarf es dabei der Möglichkeit beliebige Systemstrukturen mit mehreren Ausfallmoden zu berücksichtigen. Eine Möglichkeit Tests verschiedener Arten und verschiedener Systemelemente objektiv zu bewerten und dadurch diese Tests zu planen, besteht dabei nicht. Notwendige Vorkenntnis zur Planung wird zwar mit dem Satz von Bayes als auch mit der Planung der P_{ts} verwendet. Möglichkeiten zur kombinierten Betrachtung mit P_{ts} und der Berücksichtigung über den Satz von Bayes existieren jedoch nicht. Zudem wird die der Vorkenntnis innewohnenden Unsicherheit nicht betrachtet und der statistische Kontext der P_{ts} wurde nicht erarbeitet. Demnach ist es mit den bestehenden Arbeiten nicht möglich Tests realer Produkte so zu planen, dass die Systemzuverlässigkeit auf effiziente Weise nachgewiesen werden kann.

3.2 Forschungsziel

Basierend auf dem vorgenannten Forschungsbedarf lässt sich das übergeordnete Forschungsziel formulieren:

Forschungsziel

Die Planung von Tests für den effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit realer Produkte ermöglichen.

Die folgende **Arbeitshypothese** wird verwendet um das Forschungsziel zu erreichen:

Das Konzept der Probability of Test Success lässt sich auf die Planung von Tests für den Nachweis der Zuverlässigkeit von Systemen mit mehreren Ausfallmoden anwenden. Es ermöglicht damit die objektive Bewertung hinsichtlich eines erfolgreichen Zuverlässigkeitsnachweises sowie die Identifikation notwendiger Testaufwände. Dadurch kann sichergestellt werden, dass reale Produkte erprobt werden können, welche aus mehreren Komponenten und Systemelementen bestehen. Eine Erweiterung um die Kombination mit dem Satz von Bayes stellt sicher, dass es sich um effiziente Tests handelt und die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis ermöglicht eine statistisch abgesicherte Entscheidung bezüglich der Testkonfiguration. Um diese Betrachtungen zu ermöglichen, kann die Größe der Probability of Test Success in den statistischen Kontext eines Hypothesentests eingeordnet werden.

Aus der Verbindung von Forschungsziel und Arbeitshypothese lassen sich die folgenden **Teilziele** ableiten:

1. Einordnung der P_{ts} in den statistischen Kontext.
2. Ermöglichung der Planung effizienter Tests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit realer Produkte mit mehreren Ausfallmoden.

Die Arbeit legt dabei den Fokus auf technische Produkte, welche eine Zuverlässigkeit besitzen, die von einem Betriebsmerkmal, wie beispielsweise einer Laufzeit oder Zyklenzahl, abhängig ist. Die Betrachtung konzentriert sich also auf den Betriebszeitraum des Produktes. Produkte welche nur einmalig eingesetzt werden können und Produkte welche durch Reparatur in den betriebsfähigen Zustand zurückgesetzt werden, sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit

Kapitel 4

Probability of Test Success als Trennschärfe eines Zuverlässigkeitstests

Die Probability of Test Success P_{ts} wird in diesem Kapitel als Trennschärfe des Zuverlässigkeitstests bezüglich dem Zuverlässigkeitsnachweis eingeführt. Dazu werden die notwendigen Hypothesen, Definitionen und Statistiken vorgestellt. Basierend auf diesem Konzept werden Berechnungsmethoden entwickelt und anschließend verglichen.

4.1 Zuverlässigkeitsnachweistest als Hypothesentest

Die Produktentwicklung – mit all den Berechnungen und Lebensdauerabschätzungen sowie der Gestaltung des Produkts selbst – sollte neben den Haupt- und Nebenfunktionen auch die gestellte Zuverlässigkeitsanforderung für die entsprechenden Einsatzbedingungen sicherstellen [5, 187, 204]. Ohne die Erfüllung dieser Anforderungen jedoch konkret beobachtet zu haben, können sie nicht als erfüllt angenommen werden. Aus diesem Grund kann eine Hypothese über das Zuverlässigkeitsziel formuliert werden. Diese Hypothese muss durch entsprechend durchgeführte Zuverlässigkeitstests entweder verworfen oder bestätigt werden. Ein Zuverlässigkeitsnachweistest kann demnach als Hypothesentest betrachtet werden. Das durch den Test erhaltene Lebensdauerquantil t_{R_s} bei geforderter Zuverlässigkeit R_s muss größer oder gleich der geforderten Lebensdauer t_s sein. Da ein Test nur Informationen liefern kann, welche die Hypothese über die Abwesenheit eines zu untersuchenden Phänomens ablehnen [38, 43, 205], repräsentiert die Nullhypothese H_0 die Nicht-Erfüllung des gestellten Zuverlässigkeitsziels. Ziel des Tests ist es Informationen zu sammeln, sodass die Nullhypothese abgelehnt werden kann. Da die Trennschärfe eines Tests der Entdeckung der Alternative entspricht, repräsentiert die Alternativhypothese H_1 die Erfüllung des Zuverlässigkeitsziels. Demnach sind die in einem Zuverlässigkeitsnachweistest zu verwendenden Hypothesen die folgenden [146–148, 161]:

$$H_0 : t_{R_s} < t_s \quad (4.1)$$

$$H_1 : t_{R_s} \geq t_s \quad (4.2)$$

Da die Erfüllung des Zuverlässigkeitsziels nicht ohne einen erfolgreichen Test angenommen werden kann, sind die in der Qualitätstechnik sowie der Produktionstechnik häufig verwendeten Begriffe des Produzenten- und Konsumentenrisikos [206–208] hier in ihrer üblichen Definition nicht anwendbar.

Das Signifikanzniveau zu welchem die Nullhypothese abgelehnt werden soll, ist durch den maximal akzeptierten Fehler α vom Typ I vorgegeben. Dieser entspricht der Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese abzulehnen, obwohl diese eigentlich wahr ist. Die geforderte Aussagewahrscheinlichkeit C_s eines Zuverlässigkeitsnachweistests ist das Komplement des geforderten Signifikanzniveaus, da sie die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass die Nullhypothese korrekterweise als wahr angenommen wird, also das Produkt das Zuverlässigkeitsziel tatsächlich nicht erreicht. Die geforderte Aussagewahrscheinlichkeit stellt demnach sicher, dass die aus dem Test erhaltene Information bezüglich der Zuverlässigkeit mit der eingestellten Wahrscheinlichkeit korrekt ist. Der Fehler vom Typ II beschreibt dagegen die Wahrscheinlichkeit β , dass die Nullhypothese fälschlicherweise nicht abgelehnt wurde. Er ist abhängig von der Testart, dem Stichprobenumfang, dem tatsächlichen Wert des Lebensdauerquantils, der Ausfallverteilung, der Stichprobenstreuung und der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit. Das Komplement des Fehlers vom Typ II ist die Trennschärfe und beschreibt die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese für, einen gewissen Wert der Effektstärke, korrekterweise abzulehnen [43]. Im Kontext der Zuverlässigkeitsnachweistests beschreibt die Trennschärfe demnach die Wahrscheinlichkeit des Tests das Zuverlässigkeitsziel nachzuweisen. Da die nach den Gleichungen 4.1 und 4.2 definierten Hypothesen für einen Zuverlässigkeitsnachweistest immer identisch sind, kann die Probability of Test Success P_{ts} als Trennschärfe verstanden werden. Eine alleinige Berücksichtigung der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit für die Planung von Zuverlässigkeitstests ist demnach unzureichend, da die Untersuchung hinsichtlich der Eignung des Tests auf das aktuelle Szenario vernachlässigt wird [1-3, 146, 147, 161]. Diese Erkenntnis ergibt sich dabei aus dem hergestellten statistischen Kontext.

Da die Trennschärfe – und damit die P_{ts} – immer nur für eine gewisse Effektstärke [43], also einen gewissen Wert des tatsächlichen Lebensdauerquantils des Produkts, angegeben werden kann und sich die Entdeckungswahrscheinlichkeit der Alternativhypothese mit der Effektstärke ändert, muss eine geeignete Größe entworfen werden, die die Effektstärke bei Zuverlässigkeitsnachweistests angeben kann. Zu diesem Zweck wird der Sicherheitsabstand verwendet, welcher von Dazer et al. [1] eingeführt wurde. Er beschreibt den anteiligen Abstand zwischen der geforderten t_s und der tatsächlichen Lebensdauer des Produkts entsprechend der Vorkenntnis t_p , jeweils bei geforderter Zuverlässigkeit. Er ist definiert als:

$$s \equiv 1 - \frac{t_s}{t_p} \quad (4.3)$$

Der Sicherheitsabstand ist gleich Null, wenn die Vorkenntnis besagt, dass die geforderte Lebensdauer gleich der tatsächlichen Lebensdauer ist. Wird diese Größe verwendet, kann die Effektstärke Δ wie folgt formuliert werden:

$$\Delta \equiv t_p - t_s = s \cdot t_p \quad (4.4)$$

Um die Aussagewahrscheinlichkeit C sowie die Probability of Test Success P_{ts} zu berechnen, müssen die Verteilungen der Teststatistik unter Gültigkeit der Null- und der Alternativhypothese bestimmt werden. Mit dem Sicherheitsabstand aus Gleichung 4.3 und der Effektstärke aus Gleichung 4.4, kann die Teststatistik τ eines Zuverlässigkeitsnachweistests definiert werden als

$$\tau \equiv t_{R_s} - t_s. \quad (4.5)$$

Sie ist so gewählt, da sie die Differenz des Lebensdauerquantils aus dem Test zum Erwartungswert des Lebensdauerquantils unter Gültigkeit der Nullhypothese ($\tau = 0$ für $t_{R_s} = t_s$) entsprechend der Vorkenntnis über die Ausfallverteilung angibt.

Die Verteilung der Teststatistik unter Gültigkeit der Nullhypothese $f_{H_0}(\tau)$ wird hier Nullverteilung genannt und die Verteilung der Teststatistik unter Gültigkeit der Alternativhypothese $f_{H_1}(\tau)$ wird Alternativverteilung genannt. Die Alternativverteilung ist durch die Vorkenntnis über die Ausfallverteilung und das Verhalten des Tests bezüglich der Erzeugung von Ausfallzeiten definiert. Für eine ganzheitliche statistische Testplanung wird damit ersichtlich, dass eine Vorkenntnis der Ausfallverteilung notwendig ist, da damit die Effektstärke bestimmt wird. Die Alternativverteilung $f_{H_1}(\tau)$ kann durch Verschiebung der confidence distribution [138] der Lebensdauerquantile unter Gültigkeit der Alternativhypothese H_1 ermittelt werden. Sie muss um die geforderte Lebensdauer t_s verschoben werden, siehe Gleichung 4.5. Die Verteilung der Teststatistik ist vom Stichprobenumfang, dem Test und der Ausfallverteilung des Produkts abhängig. Zur Berechnung der Nullverteilung muss die Ausfallverteilung unter Gültigkeit der Nullhypothese H_0 verwendet werden, also $s = 0$ (Effektstärke von Null, $\Delta = 0$). Wird die Ausfallverteilung durch eine Weibullverteilung beschrieben, muss der Weibullformparameter b erhalten bleiben, da er mit der Ausfallmode verknüpft ist (siehe [5]). Der Skalenparameter T hingegen wird entsprechend der Gültigkeit der Nullhypothese angepasst. Mit der Nullverteilung $f_{H_0}(\tau)$ kann die signifikante Effektstärke Δ_{krit} entsprechend der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit C_s berechnet werden. Damit kann in Verbindung mit der Alternativverteilung $f_{H_1}(\tau)$ die Probability of Test Success P_{ts} , die Trennschärfe des zu untersuchenden Tests, bestimmt werden. Die dazu erforderlichen Gleichungen lauten wie folgt:

$$C_s = 1 - \alpha = \int_{-\infty}^{\Delta_{\text{krit}}} f_{H_0}(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

$$P_{\text{ts}} \equiv 1 - \beta = \int_{\Delta_{\text{krit}}}^{+\infty} f_{H_1}(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

Die Verteilungen können parametrische oder parameterfreie (empirische) Verteilungen sein, beispielsweise wenn eine MCS verwendet wird. Die P_{ts} ist damit durch die Gleichungen 4.1 bis 4.7 definiert und der statistische Zusammenhang hergestellt.

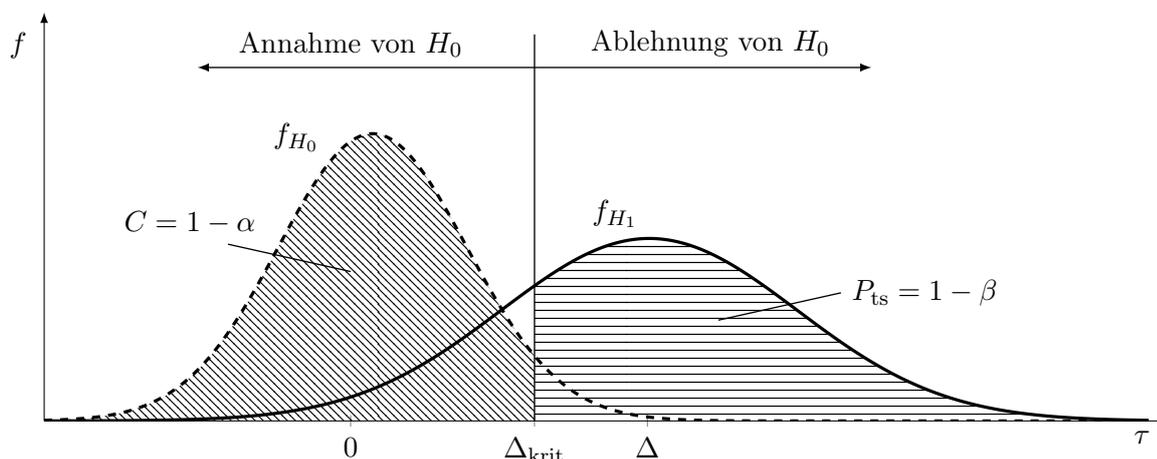
Um die P_{ts} für einen bestimmten Zuverlässigkeitstest korrekt angeben zu können, ist die richtige Effektstärke zu verwenden. Die Effektstärke ist durch die Ausfallzeiten des Produkts (beziehungsweise dessen Zuverlässigkeit) bestimmt. Die richtige Effektstärke muss demnach aus einer Information über die voraussichtlichen Ausfallzeiten (beziehungsweise Zuverlässigkeit) des Produkts abgeleitet werden. Hierzu ist Vorkenntnis über das Produkt und dessen Ausfallverteilung (beziehungsweise Zuverlässigkeit) notwendig. Die Beziehungen zwischen den Hypothesen, der Aussagewahrscheinlichkeit und der Probability of Test Success sind in Tabelle 4.1 dargestellt. Die beiden Verteilungen aus den Gleichungen 4.4 und 4.5 sind in Abbildung 4.1 zusammen mit den relevanten Parametern veranschaulicht.

4.2 Berechnung der Probability of Test Success als Trennschärfe

Durch den vorgestellten Ansatz des Zuverlässigkeitsnachweistests als Hypothesentest lässt sich die P_{ts} entsprechend diesem Kontext berechnen. Um die P_{ts} für einen bestimmten Zuverlässigkeitstest bestimmen zu können, müssen die Verteilungen der Teststatistik τ unter Gültigkeit von H_0 (Nullverteilung) und H_1 (Alternativverteilung) sowie die Integrale aus den Gleichungen 4.6 und 4.7 berechnet werden. Im Folgenden werden drei Berechnungsmetho-

Tabelle 4.1: Interpretation der Aussagewahrscheinlichkeit, der Probability of Test Success und den Hypothesen im Kontext der Zuverlässigkeitsnachweistests.

Nullhypothese	$H_0 : t_{R_s} < t_s$	Die Zuverlässigkeitsanforderung ist nicht erfüllt
Alternativhypothese	$H_1 : t_{R_s} \geq t_s$	Die Zuverlässigkeitsanforderung ist erfüllt
Aussagewahrscheinlichkeit	$C = 1 - \alpha$	Wahrscheinlichkeit H_0 korrekterweise anzunehmen Wahrscheinlichkeit, dass die Zuverlässigkeitsaussage des Tests korrekt ist
Probability of Test Success	$P_{ts} = 1 - \beta$	Wahrscheinlichkeit des Tests das Zuverlässigkeitsziel korrekterweise nachzuweisen


 Abbildung 4.1: Nullverteilung f_{H_0} , Alternativverteilung f_{H_1} , Aussagewahrscheinlichkeit C und Probability of Test Success P_{ts} als Funktionen der Teststatistik $\tau = t_{R_s} - t_s$.

den vorgestellt, welche je nach Anwendung Vor- und Nachteile bieten können. Ein Vergleich mit der Berechnungsmethode mittels MCS nach Dazer [2], welche die Betrachtung als Hypothesentest nicht vornimmt und allein auf dem Gesetz der großen Zahlen beruht wird unter anderem in Kapitel 4.3 vorgestellt.

4.2.1 Allgemeine Berechnungsmethode

Aufgrund der potentiell sehr komplexen Muster, zu welchen die Ausfall- und Laufzeiten der Prüflinge bei den verschiedenen Zuverlässigkeitstests erzeugt werden können, den Unterschieden zwischen den Zuverlässigkeitstests und der großen Anzahl an möglichen Konfigurationen der Tests, soll eine allgemeine Berechnungsmethode sehr flexibel sein um alle Szenarien abdecken zu können. Um diese Flexibilität zu erreichen wird ein Bootstrap-Ansatz [97] verwendet (vergleiche Kapitel 2.2.2), da dieser keinerlei analytische Untersuchungen und

Berechnungen erfordert um die P_{ts} für den jeweils vorliegenden Test berechnen zu können. Die Bootstrap-Methode wird verwendet um die Null- und Alternativverteilung aus den Gleichungen [4.6](#) und [4.7](#) und Abbildung [4.1](#) zu schätzen. Da diese Verteilungen f_{H_0} und f_{H_1} so in empirischer, verteilungsfreier Form bestimmt werden, wird nicht nur die Varianz, sondern auch die gesamte Form der Verteilungen und alle statistischen Momente berücksichtigt. Es muss also keine Annahme über die Verteilungen getroffen werden. Die Basis für die Berechnung bildet Vorkenntnis über das Ausfallverhalten des Produkts. Aus ihr werden die Verteilungen der Ausfallzeiten unter Gültigkeit der beiden Hypothesen abgeleitet.

End-of-Life Tests

Für EoL Tests müssen im ersten Schritt des Bootstrap-Ansatzes n Pseudozufallszahlen der Ausfallzeiten aus der Ausfallverteilung $F(t)$, welche durch die Vorkenntnis bekannt ist, erzeugt werden. Der Stichprobenumfang und das Muster, nach welchem diese Ausfallzeiten und deren Zensierungen erzeugt werden, muss dem Zuverlässigkeitsnachweistest entsprechen, für welchen die P_{ts} berechnet wird. Die Ausfallverteilung $\hat{F}(t)$ dieser Bootstrap-Stichprobe wird beispielsweise über eine MLE geschätzt und daraus die Lebensdauer bei geforderter Zuverlässigkeit \hat{t}_{R_s} berechnet. Da die Ausfallverteilung der Vorkenntnis die Effektstärke Δ bestimmt und mit der Alternativhypothese H_1 verknüpft ist und dieser entspricht (sofern $s > 0$), kann ein Wert der Teststatistik unter Gültigkeit der Alternativhypothese $\hat{\tau}_{H_1}$ erhalten werden, indem von dieser berechneten Lebensdauer die geforderte Lebensdauer subtrahiert wird:

$$\hat{\tau}_{H_1} = \hat{t}_{R_s} - t_s = \hat{F}^{-1}(1 - R_s) - t_s \quad (4.8)$$

Werte der Teststatistik unter Gültigkeit der Nullhypothese H_0 können auf ähnliche Weise berechnet werden. Allerdings muss dazu die verwendete Ausfallverteilung der Nullhypothese H_0 entsprechen. Das bedeutet, dass der Sicherheitsabstand kleiner, oder im Grenzfall, gleich Null sein muss, also $s \leq 0$. Sollte diese Ausfallverteilung durch Vorkenntnis bekannt sein, kann sie direkt verwendet werden. Sie kann jedoch auch aus der Vorkenntnis über die Ausfallverteilung des Produkts (gültig für H_1 für $s \geq 0$) berechnet werden. Dazu werden die aus $F(t)$ erzeugten Ausfallzeiten mit $(1 - s)$ multipliziert, so dass der Grenzfall $s = 0$ erreicht ist. Für die transformierte Verteilung ist damit $t_p = t_s$. Diese multiplikative Transformation stellt sicher, dass die Form der Ausfallverteilung $F(t)$ erhalten bleibt. Dies ist notwendig, denn die Form der Ausfallverteilung ist für die Ausfallmode charakteristisch [5](#) und die Ausfallmode soll sowohl unter Gültigkeit der Null- als auch der Alternativhypothese dieselbe sein. Sofern es sich um eine Weibullverteilung handelt, wird dadurch der Formparameter b auch in der transformierten Verteilung erhalten bleiben. Um die bereits erzeugten Bootstrap-Stichproben der Teststatistik zu verwenden, können die folgenden Gleichungen genutzt werden um die Werte der Teststatistik unter Gültigkeit der Nullhypothese H_0 zu berechnen:

$$\hat{\tau}_{H_0} = (1 - s) \hat{t}_{R_s} - t_s = t_s \cdot \left(\frac{\hat{F}^{-1}(1 - R_s)}{F^{-1}(1 - R_s)} - 1 \right) = t_s \cdot \left(\frac{\hat{t}_{R_s}}{t_p} - 1 \right) \quad (4.9)$$

Wobei der Wert des Sicherheitsabstandes s mit t_p aus $t_p = F^{-1}(1 - R_s)$ der Vorkenntnis verwendet werden muss. Diese Gleichung gilt für eine Bootstrap-Stichprobe. Es werden mehrfach Ausfallzeiten aus der Ausfallverteilung der Vorkenntnis erzeugt. Diese werden verwendet um die Lebensdauerquantile \hat{t}_{R_s} aus der damit geschätzten Verteilung zu bestimmen und dann so transformiert, dass Werte der Teststatistik $\hat{\tau}_{H_1}$ und $\hat{\tau}_{H_0}$ unter Gültigkeit beider Hypothesen erhalten werden. Durch das Gesetz der großen Zahlen, lassen sich damit die

Integrale aus den Gleichungen [4.6](#) und [4.7](#) berechnen. Der Ansatz ist also ähnlich einem Perzentil-Bootstrap-Vertrauensbereich. Der Wert der kritischen, signifikanten Effektstärke Δ_{krit} aus Gleichung [4.6](#) wird über

$$C_s \stackrel{!}{=} \frac{\text{Anzahl von } \hat{\tau}_{H_0} \leq \Delta_{\text{krit}}}{\text{Gesamtzahl der Iterationen}} \quad (4.10)$$

berechnet. Mit diesem Wert kann die P_{ts} von vollständigen oder beliebig zensierten EoL Tests folgendermaßen berechnet werden:

$$P_{\text{ts}} = \frac{\text{Anzahl von } \hat{\tau}_{H_1} \geq \Delta_{\text{krit}}}{\text{Gesamtzahl der Iterationen}} \quad (4.11)$$

Da die Lage der Nullverteilung von $\hat{\tau}_{H_0}$ und der Alternativverteilung von $\hat{\tau}_{H_1}$ fest mit den Hypothesen verknüpft ($s < 0$ und $s \geq 0$), jedoch eventuell durch die verwendeten Schätzer der Quantile verzerrt sind (zum Beispiel Verzerrung der MLE [80](#)), werden die beiden berechneten Verteilungen verschoben, sodass deren Median genau den beiden Hypothesen entspricht, also $\text{median}(\hat{\tau}_{H_0}) = 0$ und $\text{median}(\hat{\tau}_{H_1}) = t_p - t_s$. Dadurch wird durch den Bootstrap-Ansatz lediglich die Form und Streuung der beiden Verteilungen bestimmt. Die Lage ist jedoch durch die Hypothesen vorgegeben. Soll die P_{ts} eines zensierten EoL Tests berechnet werden, so müssen die Bootstrap-Stichproben entsprechend zensiert werden. Wird beispielsweise eine MLE zur Schätzung der Ausfallverteilung verwendet, können die Zensierungen für die Schätzung vollständig berücksichtigt werden.

Success-Run Tests

Das Vorgehen um die P_{ts} für einen SR Test zu berechnen, ist weniger komplex, da lediglich die Ausfälle gezählt werden müssen um einen Erfolg des Tests im Sinne eines Zuverlässigkeitsnachweises zu attestieren. Die gleichen Bootstrap-Stichproben welche aus $F(t)$ erzeugt werden, können verwendet werden um die P_{ts} eines SR Tests mit einem Maximum an k zugelassenen Ausfällen zu berechnen:

$$P_{\text{ts}} = \frac{\text{Anzahl Bootstrap-Stichproben mit } \kappa \leq k}{\text{Gesamtzahl der Iterationen}} \quad (4.12)$$

Die tatsächliche Anzahl an Ausfällen, welche vor Ende der Laufzeit des SR Tests auftreten ist hier κ . Das Vorgehen zur Berechnung der P_{ts} mittels der allgemeinen Berechnungsmethode ist in [Abbildung 4.2](#) dargestellt.

4.2.2 Analytische und exakte Berechnung bei Success-Run Tests

Während die allgemeine Berechnungsmethode für alle Testarten und Konfigurationen verwendet werden kann um die P_{ts} zu berechnen, erlaubt der SR Test auch eine exakte Berechnung in geschlossener Form ohne den Bootstrap-Ansatz zu verwenden. Da ein SR Test keine Schätzung der Ausfallverteilung erlaubt, aber stattdessen eine Zuverlässigkeitsverteilung für die geforderte Lebensdauer t_s in Form einer Binomial- oder Betaverteilung bestimmt werden kann, müssen die Hypothesen aus den Gleichungen [4.1](#) und [4.2](#) folgendermaßen umformuliert werden:

$$H_0 : R(t_s) < R_s(t_s) \quad (4.13)$$

$$H_1 : R(t_s) \geq R_s(t_s) \quad (4.14)$$

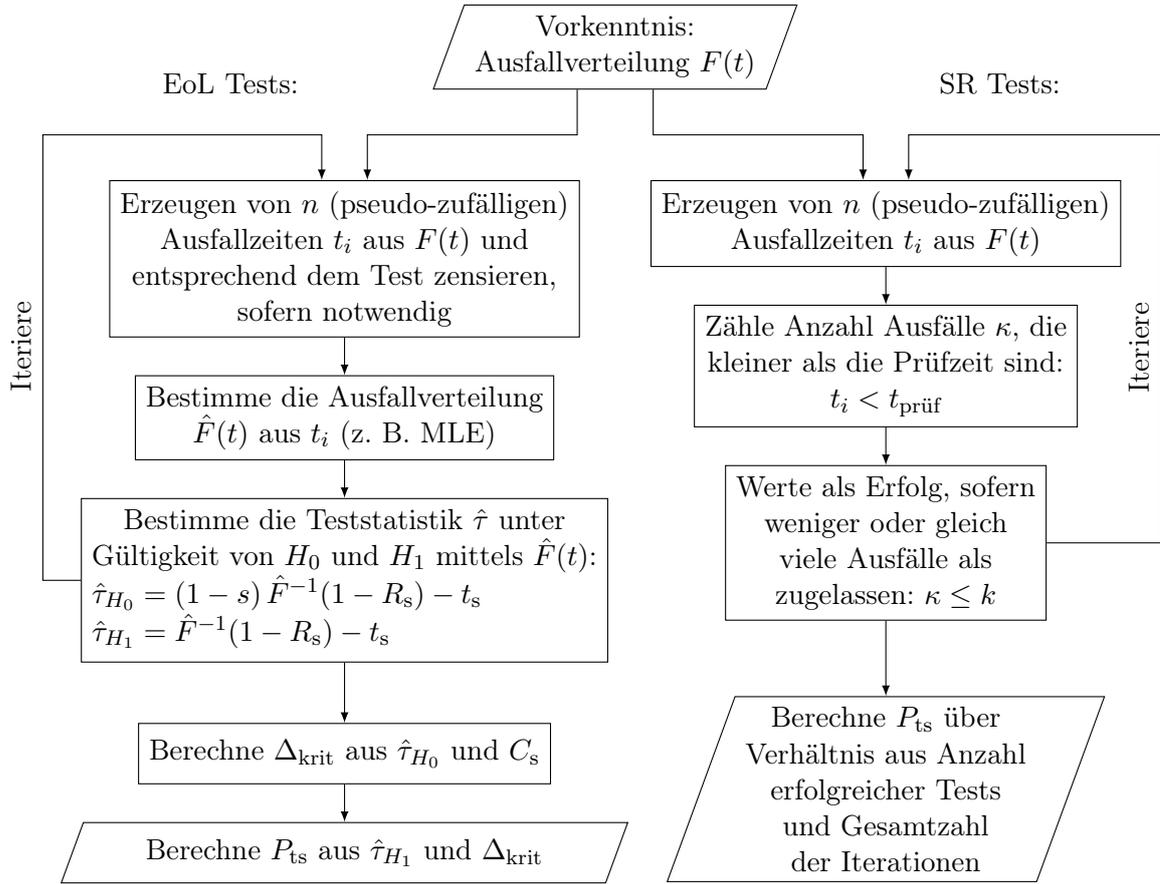


Abbildung 4.2: Vorgehen der allgemeinen Berechnungsmethode der Probability of Test Success P_{ts} von EoL und SR Tests.

Hierbei ist die bestimmte Zuverlässigkeit $R(t_s)$ bei geforderter Lebensdauer t_s die entscheidende Größe für einen erfolgreichen (entspricht H_1) oder gescheiterten (entspricht H_0) Nachweis des Zuverlässigkeitsziels. Für einen Stichprobenumfang von n kann die erreichte Aussagewahrscheinlichkeit C des SR Tests für die geforderte Zuverlässigkeit R_s über die folgende Binomialverteilung berechnet werden [5]:

$$C = 1 - \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (R_s)^{n-i} (1 - R_s)^i \quad (4.15)$$

Dies gilt, sofern die Laufzeit der Prüflinge identisch mit der geforderter Lebensdauer ist und maximal k Prüflinge während des Tests ausfallen. Der Binomialansatz nimmt an, dass der Parameter der Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung gleich dem Komplement der geforderten Zuverlässigkeit R_s ist. Dies entspricht der Nullhypothese aus Gleichung 4.13 für den Grenzfall von $s = 0$. In Analogie zu Gleichung 4.15 und den Integralen aus den Gleichungen 4.6 und 4.7 kann die P_{ts} eines SR Tests über folgende Binomialverteilung analytisch und exakt berechnet werden:

$$P_{ts} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (R_p)^{n-i} (1 - R_p)^i \quad (4.16)$$

Statt der geforderten Zuverlässigkeit wird hier die Zuverlässigkeit bei der geforderten Lebensdauer entsprechend der Vorkennntnis $R_p(t_s) = 1 - F(t_s)$ als das Komplement des Parameters der Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung verwendet. Ist die Zuverlässigkeit

entsprechend der Vorkenntnis größer oder gleich der geforderten $R_p(t_s) \geq R_s(t_s)$, entspricht dies der Alternativhypothese aus Gleichung 4.14. Durch die Verwandtschaft zwischen der Binomial- und der Betaverteilung [65], können die Gleichungen 4.15 und 4.16 auch als Betaverteilungen geschrieben werden:

$$C = \int_{R_s}^1 \frac{R^{n-k-1} \cdot (1-R)^k}{\beta(n-k; k+1)} dR \quad (4.17)$$

$$P_{ts} = \int_0^{R_p} \frac{R^{n-k-1} \cdot (1-R)^k}{\beta(n-k; k+1)} dR \quad (4.18)$$

Es handelt sich in beiden Fällen um dieselbe Betaverteilung $\mathcal{B}(n-k; k+1)$, da die resultierende Zuverlässigkeitsverteilung einzig durch die Anzahl der Überlebenden und der ausgefallenen Prüflinge definiert ist. Da es sich um dieselbe Verteilung handelt und sich die Aussagewahrscheinlichkeit und die Probability of Test Success nur in den Integralgrenzen unterscheiden, ist direkt ersichtlich, dass die P_{ts} zum Komplement der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit wird wenn sich die geforderte Zuverlässigkeit der tatsächlichen annähert, also $P_{ts} \rightarrow 1 - C_s$ für $R_p \rightarrow R_s$ beziehungsweise $s \rightarrow 0$. In der Planung von SR Tests wird Gleichung 4.15 verwendet um den erforderlichen Stichprobenumfang zu berechnen, sodass das Zuverlässigkeitsziel erreicht werden kann. Also ist die resultierende Zuverlässigkeitsverteilung bereits in der Planung festgelegt (eine Betaverteilung in den Gleichungen 4.17 und 4.18). Aus diesem Grund kann der SR Test nur dann akzeptable Werte der P_{ts} (zum Beispiel $P_{ts} \gg 50\%$) erreichen, wenn eine entsprechende Überdimensionierung bezüglich der Zuverlässigkeit erreicht ist. Diese Überdimensionierung ist in der Regel nicht gewünscht, da das Produkt das Zuverlässigkeitsziel zwar erreichen, jedoch nicht unnötig übersteigen soll. Diese Erkenntnis ist ganz wesentlich für den Umgang mit SR Tests und wird durch den hier hergestellten statistischen Kontext ermöglicht. Die Zusammenhänge der Verteilung (Gleichungen 4.17 und 4.18) und die relevanten Parameter sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

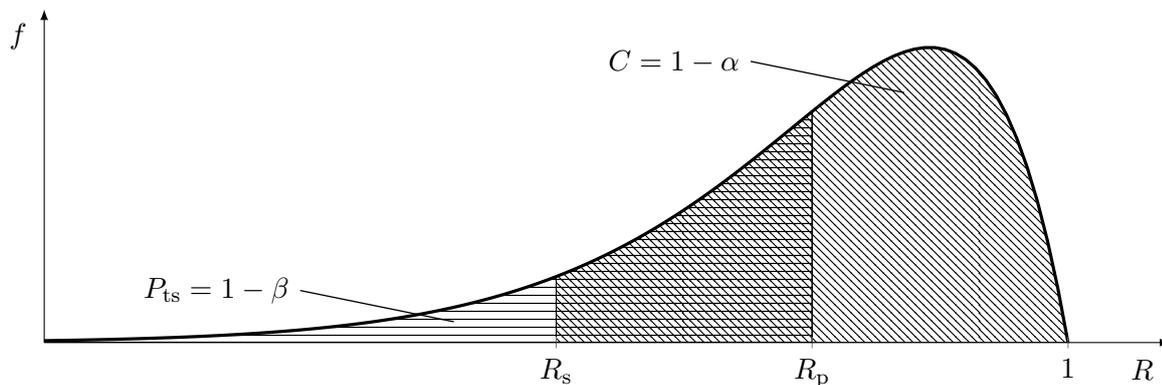


Abbildung 4.3: Betaverteilung des SR Tests und entsprechende Integrale der Aussagewahrscheinlichkeit C und Probability of Test Success P_{ts} .

Für beschleunigte SR Tests und jene mit einem Lebensdauerverhältnis können die Gleichungen [4.17](#) und [4.18](#) um einen Raffungsfaktor und ein Lebensdauerverhältnis erweitert werden (siehe auch Gleichung [2.58](#)):

$$g(R) = R^{\sum_{i=1}^{n-k} (L_{V,i} \cdot r_i)^b} \cdot \prod_{j=1}^k \left(1 - R^{(L_{V,j} \cdot r_j)^b}\right) \quad (4.19)$$

$$C = \int_{R_s}^1 \frac{g(R)}{\int_0^1 g(R) dR} dR \quad (4.20)$$

$$P_{ts} = \int_0^{R_p} \frac{g(R)}{\int_0^1 g(R) dR} dR \quad (4.21)$$

Dazu wird ein Weibullformparameter b benötigt, welcher aus der Vorkenntnis verwendet werden kann. Die Integranden in den Gleichungen [4.17](#) und [4.18](#) sind nicht weiter Beta-Verteilungen, da die Exponenten des Produkts nicht weiter zur Form der Beta-Verteilung passen. Es handelt sich jedoch weiter um dieselbe Verteilung in den Gleichungen [4.20](#) und [4.21](#), welche mit numerischen Mitteln berechnet werden kann.

4.2.3 Analytische und approximative Berechnung bei End-of-Life Tests

Die allgemeine Berechnungsmethode kann durch den Bootstrap-Ansatz zeitaufwendig und mit viel Rechenleistung verbunden sein. Beispielsweise wenn viele verschiedene Tests und ein großer Parameterraum untersucht werden sollen. Außerdem ist die Anzahl an Iterationen direkt mit der Genauigkeit und dem Rechenaufwand verknüpft. Um dennoch eine schnelle und einfach zu implementierende Berechnungsmethode für die P_{ts} zu ermöglichen, wird im Folgenden eine approximative, analytische Berechnungsmethode für EoL Tests vorgestellt, welche in vielen Fällen eine ausreichende Genauigkeit aufweist und auf einen Bootstrap-Ansatz oder eine MCS verzichtet.

Um die Verteilungen von τ_{H_0} und τ_{H_1} ohne Bootstrap oder MCS bestimmen zu können, wird der zentrale Grenzwertsatz (siehe Kapitel [2.1.5](#)) verwendet. Viele statistische Größen sind im Grenzfall für einen unendlich großen Stichprobenumfang normalverteilt. Für endliche Stichprobenumfänge kann die Normalverteilung als Approximation an die Verteilung der statistischen Größe verwendet werden. Auch wenn die Lebensdauer von technischen Produkten nicht normalverteilt ist, so kann die Verteilung eines bestimmten Quantils der Lebensdauer durch eine Normalverteilung angenähert werden. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Verteilung des Stichprobenquantils einer bekannten Verteilung $F(t)$, also das empirisch gebildete Quantil, normalverteilt mit den Parametern [20](#), [45](#)

$$\mu = F^{-1}(q) \quad (4.22)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{q \cdot (1 - q)}{n \cdot f(F^{-1}(q))^2}}. \quad (4.23)$$

Wobei das q -Quantil der Verteilung $F(t)$ aus deren Umkehrfunktion gebildet wird: $F^{-1}(q)$. $f(t)$ ist die Dichtefunktion von $F(t)$ und n der Stichprobenumfang. Mit der Teststatistik aus Gleichung [4.5](#) und dem asymptotischen Verhalten aus den Gleichungen [4.22](#) und [4.23](#) können

die approximativen Verteilungen von τ_{H_0} und τ_{H_1} folgendermaßen als Normalverteilungen bestimmt werden:

$$\tau_{H_0} \sim \mathcal{N} \left(0; \sqrt{\frac{R_s \cdot (1 - R_s)}{n \cdot f_0(t_s)^2}} \right) \quad (4.24)$$

$$\tau_{H_1} \sim \mathcal{N} \left(t_p - t_s; \sqrt{\frac{R_s \cdot (1 - R_s)}{n \cdot f(t_p)^2}} \right) \quad (4.25)$$

Dabei ist $f_0(t)$ die entsprechend H_0 verschobene Verteilung aus der Vorkenntnis $f(t)$ und $t_p = F^{-1}(1 - R_s)$. Handelt es sich bei der Vorkenntnis der Ausfallverteilung um eine Weibullverteilung mit Skalenparameter T , so kann der Parameter T_0 der Verteilung $f_0(t)$ über

$$T_0 = (1 - s) T = \frac{t_s}{t_p} T \quad (4.26)$$

bestimmt werden. Der Formparameter ist identisch mit dem der Verteilung $F(t)$, also $b_0 = b$. Mittels dem zentralen Grenzwertsatz, den Gleichungen [4.24](#) und [4.25](#) kann die Probability of Test Success P_{ts} eines EoL Tests folgendermaßen approximativ über Normalverteilungen bestimmt werden:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi \left(\underbrace{\Phi^{-1} \left(C_s; 0, \sqrt{\frac{R_s \cdot (1 - R_s)}{n \cdot f_0(t_s)^2}} \right)}_{=\Delta_{\text{krit}}}; t_p - t_s, \sqrt{\frac{R_s \cdot (1 - R_s)}{n \cdot f(t_p)^2}} \right) \quad (4.27)$$

Es wird dazu mit der Normalverteilung der Teststatistik (des Stichprobenquantils) unter Gültigkeit der Nullhypothese aus Gleichung [4.24](#) der kritische Wert der Teststatistik Δ_{krit} bestimmt, welcher der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit C_s entspricht. Mit diesem Wert wird der Fehler β über die Normalverteilung der Teststatistik unter Gültigkeit der Alternativhypothese aus Gleichung [4.25](#) bestimmt, welcher das Komplement der Probability of Test ist. Hierbei wird das Lebensdauerquantil als das Stichprobenquantil bestimmt. Es wird also davon ausgegangen, dass keine Schätzung der Ausfallverteilung beispielsweise über eine MLE stattfindet. Dies bedeutet auch, dass Zensierungen nur sehr eingeschränkt berücksichtigt werden können.

Um die nach der Durchführung des Tests stattfindende MLE der Ausfallverteilung abzubilden sowie die Berücksichtigung von Zensierungen zu ermöglichen, kann eine weitere Approximation gefunden werden. Dabei wird die asymptotische Eigenschaft der MLE verwendet, welche ebenso auf dem zentralen Grenzwertsatz, der Fisher- beziehungsweise der Varianz-Kovarianz-Matrix als auch einer Taylorreihenentwicklung beruht. Dies ermöglicht die Berechnung der P_{ts} in approximativer Weise für EoL Tests in vollständiger und zensierter Weise für den Fall, dass die Ausfallverteilung mittels der MLE bestimmt wird. Es wird kein Bootstrap und keine MCS benötigt. Die Log-Likelihood Λ der Weibullverteilung lautet [60](#)

$$\Lambda(T, b) = (n - m) (\ln(b) - b \ln(T)) + \sum_{i=1}^{n-m} \left((b - 1) \ln(t_i) - \left(\frac{t_i}{T} \right)^b \right) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{t_j}{T} \right)^b \quad (4.28)$$

mit $n - m$ unzensierten Ausfallzeiten t_i und m rechtszensierten Ausfallzeiten t_j . Die Likelihood kann für linkszensierte sowie intervallzensierte Ausfallzeiten erweitert werden. Die

Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{V} ist die Inverse der Fisher Informationsmatrix \mathbf{I} [60]. Da \mathbf{I} symmetrisch positiv definit ist, kann ihre Inverse \mathbf{V} folgendermaßen berechnet werden

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \text{Var}(T) & \text{Cov}(T, b) \\ \text{Cov}(b, T) & \text{Var}(b) \end{bmatrix} = \mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} & -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T \partial b} \\ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b \partial T} & -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b^2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{I})} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T \partial b} \\ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b \partial T} & -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T \partial b}\right)^2} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T \partial b} \\ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b \partial T} & -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

mit

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} = \frac{b}{T^2} \left(n - m - (b + 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{T} \right)^b \right) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b^2} = \frac{m - n}{b^2} - \sum_{i=1}^{n-m} \left(\ln \left(\frac{t_i}{T} \right) \right)^2 \cdot \left(\frac{t_i}{T} \right)^b + \sum_{j=1}^m \left(\ln \left(\frac{t_j}{T} \right) \right)^2 \cdot \left(\frac{t_j}{T} \right)^b \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T \partial b} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b \partial T} = \frac{m - n}{T} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \left(1 + b \ln \left(\frac{t_i}{T} \right) \right) \cdot \left(\frac{t_i}{T} \right)^b \quad (4.32)$$

Die Summen in den Gleichungen 4.30 und 4.32 werden sowohl über die unzensierten Ausfallzeiten t_i als auch die zensierten Ausfallzeiten t_j gebildet. Deswegen wird nur ein Summationsindex i verwendet.

Mittels einer linearen Taylorreihenentwicklung (siehe z. B. [60, 209]) kann die Varianz der MLE Schätzung der Quantilsfunktion der Weibullverteilung $t_q = T (-\ln(1 - q))^{1/b}$ zur Berechnung des Lebensdauerquantils durch Folgendes approximiert werden:

$$\begin{aligned} \text{Var}(t_q) &= \left(\frac{\partial t_q}{\partial T} \right)^2 \text{Var}(T) + \left(\frac{\partial t_q}{\partial b} \right)^2 \text{Var}(b) + 2 \frac{\partial t_q}{\partial T} \frac{\partial t_q}{\partial b} \text{Cov}(T, b) \\ &= (-\ln(1 - q))^{2/b} \text{Var}(T) + \frac{T^2}{b^4} \ln(-\ln(1 - q))^2 (-\ln(1 - q))^{2/b} \text{Var}(b) \\ &\quad - \frac{2T}{b^2} \ln(-\ln(1 - q)) (-\ln(1 - q))^{2/b} \text{Cov}(T, b). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nach dem asymptotischen Verhalten der MLE und dem zentralen Grenzwertsatz unter gewissen Regularitätsbedingungen¹ (siehe [60, 210]) folgt die Variable t_q ungefähr einer Normalverteilung

$$t_q \sim \mathcal{N} \left(T (-\ln(1 - q))^{1/b}; \sqrt{\text{Var}(t_q)} \right). \quad (4.34)$$

Die so verwendete Varianz des Lebensdauerquantils $\text{Var}(t_q)$ ergibt sich aus den beobachteten Ausfallzeiten t_i und t_j , welche in den Gleichungen 4.30 bis 4.32 wieder zu finden sind. Da jedoch entgegen dem Ansatz mittels der MCS keine Ausfallzeiten erzeugt werden sollen, können diese über die Vorkenntnis der Ausfallverteilung $F(t)$ geschätzt werden. Unter Ver-

¹ Die Log-Likelihood muss dreifach differenzierbar sein, die erwarteten Werte von allen ersten und zweiten Ableitungen existieren und die dritten Ableitungen müssen durch eine Funktion beschränkt sein dessen Erwartungswert endlich ist.

wendung der Ordnungstatistiken [65], ist der Median einer jeden Ausfallzeit als Funktion des Stichprobenumfangs folgendermaßen bestimmt:

$$t_i = F^{-1}(\mathcal{B}^{-1}(0.5; i, n - i + 1)) \quad (4.35)$$

Die häufig im Medianrangverfahren angewandte Approximation an den Median einer Beta-Verteilung nach Benard [66] kann auch hier verwendet werden. Für eine Weibullverteilung als Vorkenntnis der Ausfallverteilung können die Ausfallzeiten demnach folgendermaßen approximiert werden:

$$t_i \approx T \cdot \left(-\ln \left(1 - \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \right) \right)^{1/b} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (4.36)$$

Dabei können zensierte Ausfallzeiten mittels den Gleichungen [4.35] und [4.36] und dem entsprechenden Zensierungsschema erzeugt werden. Grundsätzlich ließe sich hier statt der synthetischen Ausfallzeiten auch die erwartete Varianz-Kovarianz-Matrix der Weibullverteilung verwenden (siehe beispielsweise [211]). Die erwartete Varianz-Kovarianz-Matrix ist jedoch weniger flexibel bezüglich alternativer Ausfallverteilungen und Zensierungen, da sie für jeden Fall erneut aufgestellt werden müsste. Zudem werden die Ausfallzeiten ohnehin beispielsweise für die Abschätzung der vom Test benötigten Zeit benötigt. Die Verteilung des Lebensdauerquantils aus Gleichung [4.34] entspricht der Alternativhypothese H_1 aus Gleichung [4.2]. Demnach ist die angenäherte Verteilung des Lebensdauerquantils t_{R_s, H_1} unter Gültigkeit der Alternativhypothese

$$t_{R_s, H_1} \sim \mathcal{N}(T(-\ln(R_s))^{1/b}; \sigma_{H_1}) \quad (4.37)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{H_1} = & \left((-\ln(R_s))^{2/b} \text{Var}(T) + \frac{T^2}{b^4} \ln(-\ln(R_s))^2 (-\ln(R_s))^{2/b} \text{Var}(b) \right. \\ & \left. - \frac{2T^2}{b^2} \ln(-\ln(R_s)) (-\ln(R_s))^{2/b} \text{Cov}(T, b) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

unter Verwendung der Gleichungen [4.29], [4.30], [4.31] und [4.32] mit den Parametern der Weibullverteilung der Vorkenntnis sowie den synthetischen Ausfallzeiten aus Gleichung [4.35] oder [4.36] und $q = 1 - R_s$ in Gleichung [4.33]. Die Verteilung des Lebensdauerquantils unter Gültigkeit der Nullhypothese t_{R_s, H_0} wird mit der Weibullverteilung mit dem transformierten Skalenparameter T_0 aus Gleichung [4.26] und den entsprechend damit berechneten synthetischen Ausfallzeiten über Gleichung [4.35] oder [4.36] berechnet

$$t_{R_s, H_0} \sim \mathcal{N}(t_s; \sigma_{H_0}) \quad (4.39)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{H_0} = & \left((-\ln(R_s))^{2/b} \text{Var}(T_0) + \frac{T_0^2}{b^4} \ln(-\ln(R_s))^2 (-\ln(R_s))^{2/b} \text{Var}(b) \right. \\ & \left. - \frac{2T_0^2}{b^2} \ln(-\ln(R_s)) (-\ln(R_s))^{2/b} \text{Cov}(T_0, b) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

wobei auch die Varianzen und Kovarianzen in Gleichung [4.29] mit dem transformierten Skalenparameter T_0 ausgewertet werden müssen, sodass sie Gültigkeit für die Nullhypothese

besitzen. Mit den Gleichungen [4.37](#) bis [4.40](#) lassen sich die Verteilungen der Lebensdauerquantile unter Gültigkeit der beiden Hypothesen bestimmen. Um die Null- und Alternativverteilungen der Teststatistik zu erhalten, ist lediglich die geforderte Lebensdauer von den Werten der Lebensdauerquantile zu subtrahieren. Die Null- und Alternativverteilungen entsprechen also den Verteilungen der Lebensdauerquantile unter Gültigkeit der beiden Hypothesen. Sie sind jedoch bezüglich der Lage verschoben. Für die Nullverteilung ergibt sich dabei $\mu = 0$ und für die Alternativverteilung ergibt sich entsprechend der Vorkenntnis $\mu = T(-\ln(R_s))^{1/b} - t_s$. Damit kann die Probability of Test Success P_{ts} eines vollständigen oder zensierten EoL Tests folgendermaßen approximativ berechnet werden:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi\left(\underbrace{\Phi^{-1}\left(C_s; 0, \sigma_{H_0}\right)}_{=\Delta_{\text{krit}}}; T(-\ln(R_s))^{1/b} - t_s, \sigma_{H_1}\right) \quad (4.41)$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass das Lebensdauerquantil über eine MLE Schätzung der Ausfallverteilung bestimmt wird. Hierbei sind beliebige Zensierungen möglich. Aufgrund des multiplikativen Zusammenhangs zwischen den Ausfallzeiten bei Gültigkeit der Alternativhypothese und der Nullhypothese, ist dieser Zusammenhang auch für die entsprechenden Lebensdauerquantile gültig und damit ebenso für die Beziehung zwischen Alternativverteilung und Nullverteilung. Aus diesem Grund besteht entsprechend Gleichung [4.26](#) folgende Beziehung der Standardabweichungen der Alternativ- und Nullverteilung:

$$\sigma_{H_0} = (1 - s) \cdot \sigma_{H_1} = \frac{t_s}{T} (-\ln(R_s))^{-1/b} \sigma_{H_1}. \quad (4.42)$$

Es kann also auf eine explizite Berechnung der Standardabweichung der Nullverteilung verzichtet werden, da sich diese direkt aus der der Alternativverteilung berechnen lässt. Für die Berechnung der P_{ts} lässt sich schreiben:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(C_s; 0, \frac{t_s}{T} (-\ln(R_s))^{-1/b} \sigma_{H_1}\right); T(-\ln(R_s))^{1/b} - t_s, \sigma_{H_1}\right). \quad (4.43)$$

Wird statt der Quantilsfunktion der Weibullverteilung wie in Gleichung [4.33](#) der natürliche Logarithmus des Quantils verwendet, also $o = \ln(t_q) = \ln(T) + \frac{\ln(-\ln(1-q))}{b}$, so kann die Varianz analog zu Gleichung [4.33](#) durch folgendes approximiert werden:

$$\begin{aligned} \text{Var}(o) &= \left(\frac{\partial o}{\partial T}\right)^2 \text{Var}(T) + \left(\frac{\partial o}{\partial b}\right)^2 \text{Var}(b) + 2 \frac{\partial o}{\partial T} \frac{\partial o}{\partial b} \text{Cov}(T, b) \\ &= \frac{\text{Var}(T)}{T^2} + (\ln(-\ln(1-q)))^2 \frac{\text{Var}(b)}{b^4} \\ &\quad - \frac{2}{b^2} \left(\frac{\ln(-\ln(1-q))}{T}\right) \text{Cov}(T, b) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Variable $o = \ln(t_q)$ folgt nach dem zentralen Grenzwertsatz ebenso einer Normalverteilung, also: $o = \ln(t_q) \sim \mathcal{N}\left(\ln(t_q); \sqrt{\text{Var}(o)}\right)$. Durch den Logarithmus von o und dessen Normalverteilung, folgt das Quantil t_q hier dann einer logarithmischen Normalverteilung:

$$t_q \sim \mathcal{N}_{\log}\left(\ln(t_q); \sqrt{\text{Var}(o)}\right) \quad (4.45)$$

Mit $\mathcal{N}_{\log}(\mu; \sigma)$ als logarithmische Normalverteilung [60]. Auch hier können die Gleichungen 4.29 bis 4.31 sowie 4.35 und 4.36 verwendet werden um die benötigten Terme zu bestimmen. Die angenäherte Verteilung des Lebensdauerquantils t_{R_s, H_1} unter Gültigkeit der Alternativhypothese ist damit dann

$$t_{R_s, H_1} \sim \mathcal{N}_{\log}(\ln(t_p); \sigma_{H_1}^*) \quad (4.46)$$

mit

$$\sigma_{H_1}^* = \left(\frac{\text{Var}(T)}{T^2} + (\ln(-\ln(R_s)))^2 \frac{\text{Var}(b)}{b^4} - \frac{2}{b^2} \left(\frac{\ln(-\ln(R_s))}{T} \right) \text{Cov}(T, b) \right)^{1/2}. \quad (4.47)$$

Das Lebensdauerquantil unter Gültigkeit der Nullhypothese t_{R_s, H_0} muss ebenso die verschobene Verteilung mit T_0 aus Gleichung 4.26 verwenden:

$$t_{R_s, H_0} \sim \mathcal{N}_{\log}(\ln(t_s); \sigma_{H_0}^*) \quad (4.48)$$

mit

$$\sigma_{H_0}^* = \left(\frac{\text{Var}(T_0)}{T_0^2} + (\ln(-\ln(R_s)))^2 \frac{\text{Var}(b)}{b^4} - \frac{2}{b^2} \left(\frac{\ln(-\ln(R_s))}{T_0} \right) \text{Cov}(T_0, b) \right)^{1/2} \quad (4.49)$$

Mit diesen Gleichungen kann die P_{ts} eines beliebig zensierten EoL Tests berechnet werden, für den Fall, dass das Lebensdauerquantil der Weibullverteilung mittels MLE bestimmt wird und das logarithmierte Quantil zugrunde gelegt wird. Die P_{ts} berechnet sich näherungsweise durch:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi_{\log} \left(\Phi_{\log}^{-1}(C_s; 0, \sigma_{H_0}^*); \ln(T(-\ln(R_s))^{1/b} - t_s), \sigma_{H_1}^* \right) \quad (4.50)$$

Mit $\Phi_{\log}^{-1}(q; \mu, \sigma)$ als Inverse der logarithmischen Normalverteilung. Die Ausführungen über die analytisch approximative Berechnung der P_{ts} mittels der logarithmischen Normalverteilung sollen hier als Hinweis dienen. Denn manche Autoren empfehlen die Verwendung des Logarithmus [60, 153]. Dabei wird argumentiert, dass die Lebensdauern durch diese Transformation nur positive Werte annehmen können. Für die Berechnung der P_{ts} ist dies jedoch weniger relevant. Außerdem verwenden einige kommerzielle Programme das logarithmierte Lebensdauerquantil um den Fisher-Vertrauensbereich zur Weibullschätzung anzugeben. Die damit berechneten Werte der P_{ts} unterscheiden sich jedoch kaum von denen durch Gleichung 4.41 berechneten. Es bedarf allerdings einer Begründung für die Wahl des Logarithmus, weswegen in dieser Arbeit die allgemeinere Form aus Gleichung 4.41 vorgezogen wird.

Die Approximationen der Gleichungen 4.27 und 4.41 sowie 4.50 sind Näherungen in vielfacher Hinsicht; zum Einen approximieren die Gleichungen die gewünschte Verteilung des Lebensdauerquantils beziehungsweise dessen Logarithmus durch eine Normalverteilung, was für kleine und endliche Stichprobenumfänge nicht gültig ist; zum Anderen werden die verwendeten Ausfallzeiten durch die Überlegungen der Ordnungsstatistiken und zusätzlich über die Approximation nach Benard erzeugt. Dem gegenüber steht die einfach umzusetzende Implementierung. Denn die meisten Tabellenkalkulationsprogramme besitzen bereits implementierte Funktionen für Berechnungen mit der Normal- und Lognormalverteilung. Zudem ist diese approximative Berechnung von Nutzen, wenn eine große Zahl von Testszenerien untersucht werden soll.

4.3 Vergleich der Berechnungsmethoden

Die vorgestellten Berechnungsmethoden für die P_{ts} können je nach Anwendungsfall unterschiedliche Vorteile aufweisen. Um sie zu vergleichen und die Unterschiede sowie Vorteile in der Anwendung aufzuzeigen, werden im Folgenden Werte der P_{ts} mit allen Methoden berechnet. Zudem werden diese Methoden, welche den Ansatz eines Hypothesentests verwenden, mit der ursprünglich von Dazer vorgeschlagenen Methode [2] verglichen. Der Fokus liegt dabei auf den vollständigen und rechtszensierten EoL Tests sowie den SR Tests.

4.3.1 Vergleich für Success-Run Tests

Um die P_{ts} für einen SR Test zu berechnen, kann die allgemeine Berechnungsmethode, die exakte Berechnungsmethode sowie die Methode der Test Simulation nach Dazer [2] verwendet werden. Da beim SR Test keine Schätzung der Ausfallverteilung stattfindet und kein Vertrauensbereich nach gegebenenfalls verschiedenen Methoden bestimmt werden muss, fallen die allgemeine Berechnungsmethode und die Methode der Test Simulation hier zusammen. Da keine Verzerrungen von Schätzern auftreten können konvergiert die allgemeine Berechnungsmethode zur exakten Berechnung. Dies kann Abbildung 4.4 für das Zuverlässigkeitsziel von $R_s = C_s = 90\%$ mit $n = 22$ und $k = 0$ entnommen werden. Hier ist zu erkennen, dass

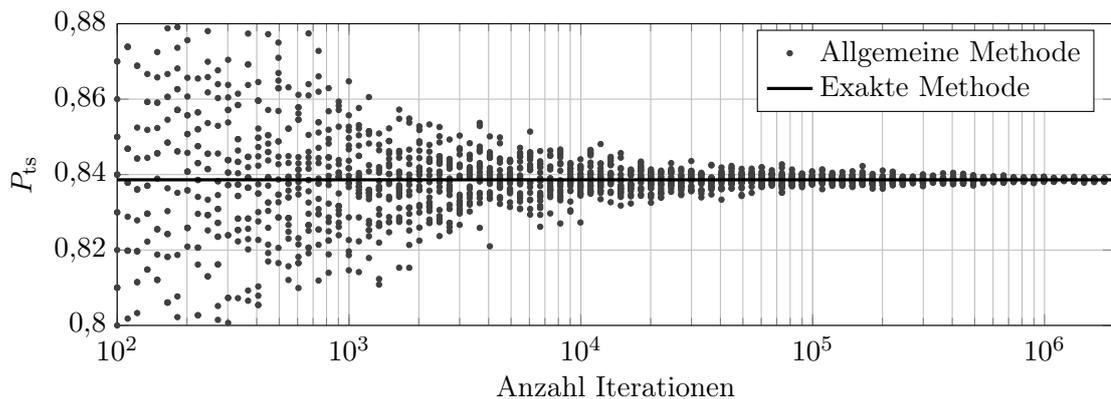


Abbildung 4.4: P_{ts} des SR Tests für $R_s = C_s = 90\%$ mit $n = 22$ und $k = 0$. Berechnet mit der allgemeinen Berechnungsmethode mit verschiedenen Iterationszahlen und der exakten Berechnungsmethode.

die allgemeine Berechnungsmethode für ansteigende Iterationszahlen gegen die exakte Lösung aus der exakten Berechnungsmethode konvergiert. Bereits 100.000 Iterationen genügen hier um eine ausreichende Genauigkeit zu erreichen. Die Vorkenntnis über die Ausfallverteilung ist hier weibullverteilt mit $\mathcal{W}(1; 3)$. Die geforderte Lebensdauer beträgt $t_s = 0,2$ ($s = 0,577$). Auch für andere Szenarien, sowie Zuverlässigkeitsziele, Vorkenntnisse, Anzahl erlaubter Ausfälle und Stichprobenumfänge zeigt sich dieses Bild. Für die Berechnung der P_{ts} eines SR Tests ist demnach immer die exakte Berechnungsmethode nach Gleichung 4.18 oder 4.21 zu verwenden, zumal auf eine Bootstrap-Methode verzichtet werden kann.

4.3.2 Vergleich für End-of-Life Tests

Für EoL Tests können die folgenden Methoden zur Berechnung der P_{ts} verwendet werden:

- Allgemeine Berechnungsmethode (Allg. Methode);
- Analytisch und approximative Berechnungsmethode (Anal. Methode);
- Berechnungsmethode nach Dazer (Test Sim. Methode).

Sie werden im Folgenden untersucht und verglichen.

In Abbildung 4.5 ist die P_{ts} für einen vollständigen EoL Test zu sehen. Es wird sowohl die Bestimmung des Lebensdauerquantils mittels MLE, als auch über das parameterfreie Stichprobenquantil abgebildet. Es ist zu erkennen, dass die allgemeine Berechnungsmethode und

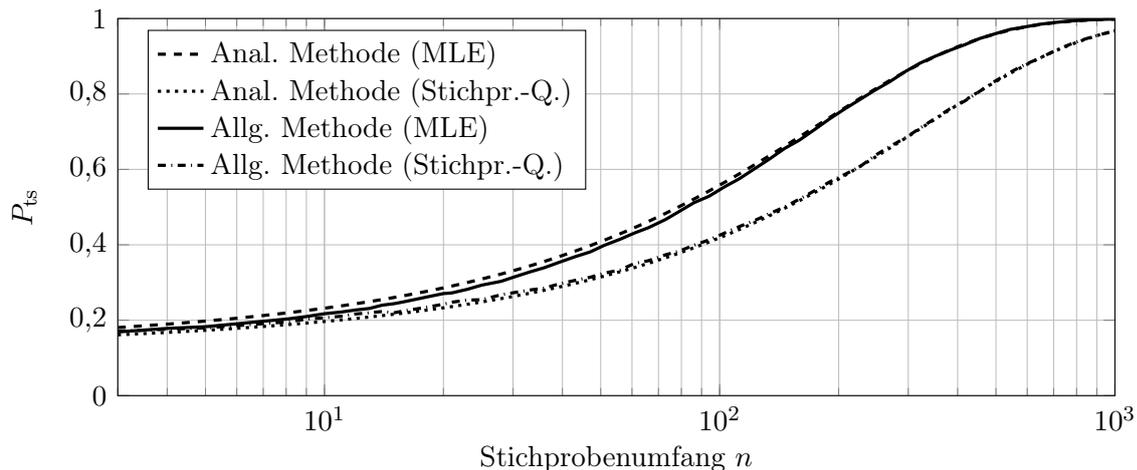


Abbildung 4.5: P_{ts} des EoL Tests für $R_s = C_s = 90\%$, $s = 0,1$ und weibullverteilte Vorkenntnis mit $b = 3$. Berechnet für das Lebensdauerquantil als Stichprobenquantil (Stichpr.-Q.) und durch eine MLE geschätzt (MLE).

die analytische Berechnung eine sehr gute Übereinstimmung zeigen. Das zeigt sich sowohl für das Stichprobenquantil als auch das Lebensdauerquantil mittels MLE. Beide Approximationen können für die praktische Anwendung gut verwendet werden um beispielsweise die Größenordnung des erforderlichen Stichprobenumfangs zu bestimmen. Der Unterschied in der P_{ts} zwischen der Berechnung mit dem Stichprobenquantil und dem Quantil über die MLE liegt in der Natur dieser Schätzer begründet. Die MLE nutzt die Informationen aller Ausfallzeiten, wohingegen das Stichprobenquantil hauptsächlich die Anzahl der Ausfallzeiten berücksichtigt. In Abbildung 4.6 und 4.7 ist die P_{ts} für die allgemeine Berechnungsmethode, die analytische Berechnungsmethode und die Methode der Test Simulation für die Parameter n und s dargestellt. Es wird hier für alle Berechnungen die MLE als Schätzer für die Ausfallverteilung zugrundegelegt, aus der die Lebensdauerquantile bestimmt werden. Es wird also Gleichung 4.41 für die analytische Berechnung verwendet. Für jede Berechnung wurden 100.000 Iterationen für die allgemeine und die Test Simulation Methode verwendet. Die analytische Berechnungsmethode zeigt sehr gute Übereinstimmung mit der allgemeinen Berechnungsmethode. Die Methode der Test Simulation mit Verwendung des Fisher-Vertrauensbereichs zeigt jedoch eine deutliche Abweichung zu den anderen Methoden. Insbesondere wenn die Änderung der P_{ts} über dem Stichprobenumfang n betrachtet wird (siehe Abbildung 4.6), kann für $n < 20$ eine deutlich größere P_{ts} als bei der allgemeinen und der analytischen Berechnungsmethode beobachtet werden. Dies ist durch die Verzerrung der MLE Schätzung des Weibullformparameters b begründet, welcher diesen für kleine Stichprobenumfänge deutlich überschätzt. Der Effekt wird durch die MCS der Test Simulation Methode verstärkt [2]. Bei sehr großen Stichprobenumfängen zeigen

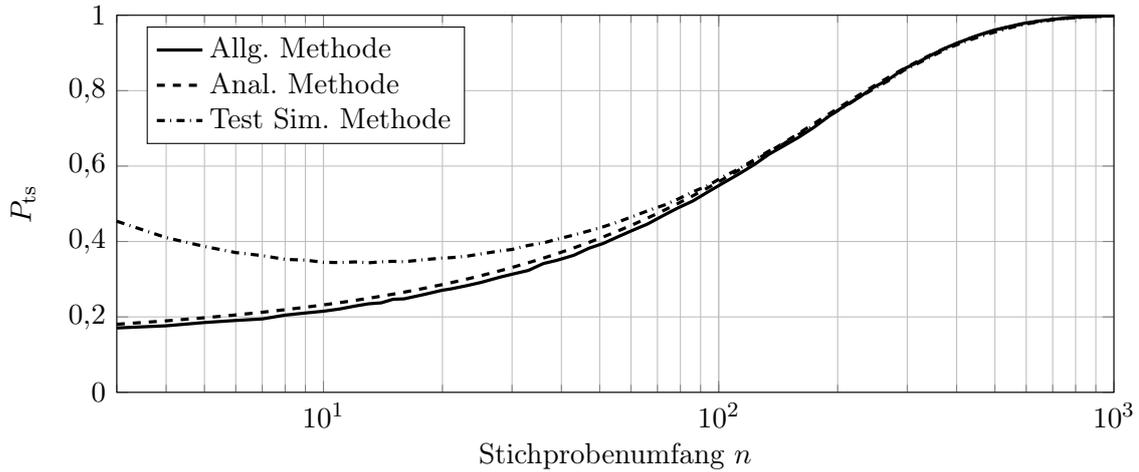


Abbildung 4.6: P_{ts} des vollständigen EoL Tests für $R_s = C_s = 90\%$, $s = 0,1$ und weibullverteilte Vorkenntnis mit $b = 3$. Alle Methoden basieren auf der MLE.

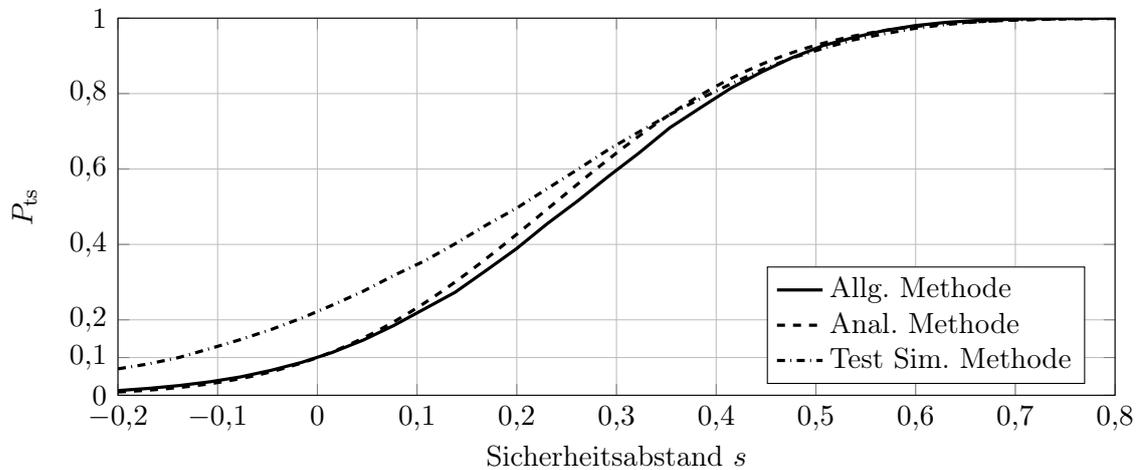


Abbildung 4.7: P_{ts} des vollständigen EoL Tests für $R_s = C_s = 90\%$, $n = 10$ und weibullverteilte Vorkenntnis mit $b = 3$. Alle Methoden basieren auf der MLE.

jedoch alle drei Methoden eine sehr gute Übereinstimmung. Ab einem Stichprobenumfang von $n > 200$ ist die Verzerrung der MLE Schätzung nicht weiter bemerkbar. Zudem kann durch diese Übereinstimmung der Ansatz des Hypothesentests verifiziert werden, welcher der allgemeinen Berechnungsmethode und der analytischen Berechnungsmethode zugrunde liegt. Betrachtet man die Werte der P_{ts} bezüglich einer Änderung des Sicherheitsabstandes s in Abbildung 4.7, so kann ein ähnliches Verhalten festgestellt werden. Die allgemeine Berechnungsmethode zeigt gute Übereinstimmung mit der Test Simulation Methode für große Sicherheitsabstände ($s > 0,5$) und die analytische Berechnungsmethode zeigt eine sehr gute Näherung. Für einen Sicherheitsabstand von $s = 0$ – was bedeutet, dass die Effektstärke identisch Null ist $\Delta = 0$ – ist die Trennschärfe das Komplement des gewählten Signifikanzniveaus (vergleiche Kapitel 2.1.4). Im Falle der P_{ts} bedeutet dies, dass sie für diesen Fall das Komplement zur geforderten Aussagewahrscheinlichkeit bildet, also $P_{ts} = 1 - C_s$ für $s = 0$ (vergleiche Kapitel 4.1). Das kann auch in Abbildung 4.1 sowie den Gleichungen 4.6 und 4.7 abgelesen werden, für den Fall, dass beide Verteilungen f_{H_0} und f_{H_1} identisch sind. Sowohl die allgemeine Berechnungsmethode als auch die analytische Berechnungsmethode spiegeln dieses Verhalten wider und geben $P_{ts} = 10\%$ für $s = 0$ zurück, da $C_s = 90\%$, wie in Abbildung 4.7 zu sehen ist. Die Berechnungsmethoden sind demnach diesbezüglich

verifiziert. Die Methode der Test Simulation hingegen zeigt dieses Verhalten nicht. Es ist ein deutlicher Versatz zu den Werten der beiden anderen Berechnungsmethoden zu sehen. Auch in Abhängigkeit von R_s , C_s und b zeigt sich eine gute Übereinstimmung der allgemeinen und der analytischen Berechnungsmethode wohingegen die Methode der Test Simulation auch dabei deutliche Abweichungen zeigt, siehe Anhang [B](#).

Die analytische Berechnungsmethode zeigt auch für zensierte EoL Tests eine gute Übereinstimmung mit der allgemeinen Berechnungsmethode. Wird der Zensierungsanteil festgehalten und der Stichprobenumfang variiert, siehe [Abbildung 4.8](#), ist dieses Verhalten für einen Zensierungsanteil von 30 % bestätigt. Die Methode der Test Simulation zeigt hier deutliche Abweichungen. Auch für die Variation des Zensierungsanteils für einen Stichprobenumfang von $n = 40$ in [Abbildung 4.9](#) zeigt sich das gleiche Bild zwischen den drei Berechnungsmethoden. Die Test Simulation Methode zeigt große Abweichungen in zensierten EoL Tests

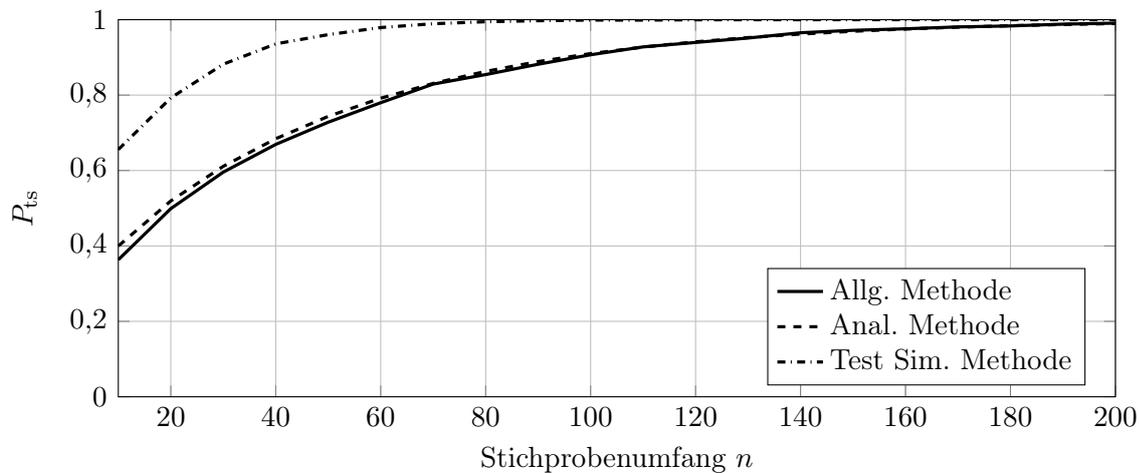


Abbildung 4.8: P_{ts} des zensierten EoL Tests für $R_s = C_s = 90\%$, $s = 0,2$ und weibullverteilte Vorkennnis mit $b = 3$ sowie einem Zensierungsanteil von 30 %.

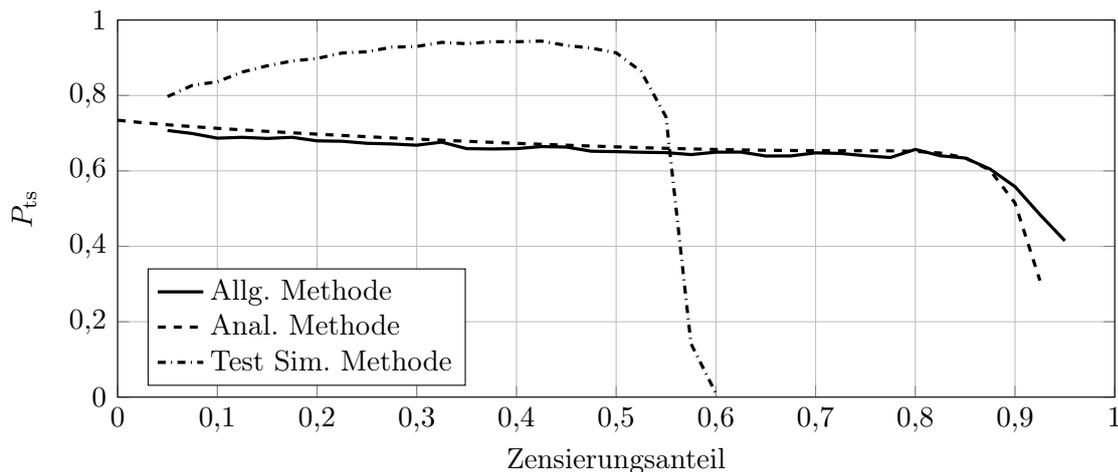


Abbildung 4.9: P_{ts} des zensierten EoL Tests für $R_s = C_s = 90\%$, $s = 0,2$ und weibullverteilte Vorkennnis mit $b = 3$ sowie veränderlichen Zensierungsanteilen für einen Stichprobenumfang von $n = 40$.

vergleichen mit den beiden anderen Berechnungsmethoden. Diese zeigen zueinander eine sehr gute Übereinstimmung für nahezu alle Zensierungsanteile und Stichprobenumfänge, die hier untersucht wurden.

4.4 Zusammenfassung und Fazit

Es wurde gezeigt, dass ein Zuverlässigkeitsnachweistest als Hypothesentest verstanden werden kann. Die dazu notwendigen Hypothesen sowie Größen und Gleichungen wurden entsprechend eingeführt. In diesem statistischen Kontext, ist die Probability of Test Success P_{ts} identisch mit der Trennschärfe eines solchen Tests. Zudem deckt sich die Definition mit der ursprünglichen Beschreibung der P_{ts} nach Dazer [2]. Der statistische Kontext der P_{ts} ist damit hergestellt und ermöglicht die Entwicklung von speziellen Berechnungsmethoden, die den Ansatz des Hypothesentests verwenden. Außerdem erlaubt es, das grundsätzliche Verständnis der Zuverlässigkeitstests zu erweitern: Der SR Test ist ausschließlich dann von Erfolgchancen $> 50\%$ gesegnet, wenn das Produkt stark überdimensioniert ist. Trifft das Produkt genau die gestellte Zuverlässigkeitsanforderung, kann der SR Test lediglich eine P_{ts} von $P_{ts} = 1 - C_s$ aufweisen. In jedem Falle ist eine Betrachtung mittels der P_{ts} notwendig, denn nur so können beide statistischen Fehler in der Planung berücksichtigt werden. Zur Berechnung der P_{ts} wurden drei Methoden vorgestellt, die diesen Ansatz des Hypothesentests nutzen. Die allgemeine Berechnungsmethode kann jegliche Testarten abbilden, da sie einen sehr flexiblen Bootstrap-Ansatz verfolgt. Die analytische und exakte Methode für SR Tests basiert auf dem Binomialansatz des SR Tests. Für die Berechnung bei EoL Tests wurde zudem eine analytische und approximative Methode eingeführt, welche auf dem zentralen Grenzwertsatz beruht und auf eine MCS beziehungsweise Bootstrap-Methode verzichtet. Stattdessen werden die asymptotischen Eigenschaften der MLE und des Lebensdauerquantils ausgenutzt. Die drei Methoden wurden gegeneinander und mit dem Ansatz nach Dazer verglichen. Der Vergleich zeigt, dass die analytische und approximative Methode für die meisten Anwendungen eine sehr gute Näherung darstellt. Werden sehr genaue Werte benötigt, so ist die allgemeine Berechnungsmethode vorzuziehen, da die Genauigkeit durch die Iterationszahl einstellbar ist. Sowohl für die MLE, als auch die Stichprobenquantilsbestimmung kann die analytische und approximative Methode bei EoL Tests verwendet werden. In beiden Fällen zeigt sie über alle Stichprobenumfänge hinweg, selbst bei kleinen ($n < 10$), eine gute Übereinstimmung mit der allgemeinen Methode. Bei sehr stark zensierten EoL Tests ($> 90\%$ des Stichprobenumfangs) ist die allgemeine Berechnungsmethode der analytischen vorzuziehen, da nur sie die Zensierungen korrekt abbilden kann. Doch auch bei moderaten Zensierungen ($< 90\%$ des Stichprobenumfangs) liefert die analytische Methode sehr gute Übereinstimmungen. Bei SR Tests sollte immer die analytische und exakte Methode gewählt werden, da sie immer exakte Werte bei minimalem Berechnungsaufwand liefert. Die Berechnung der P_{ts} bei SR Tests zeigt auch, was der Ansatz nach Dazer und der Hypothesentestansatz gemein haben. So fallen die Berechnungsmethoden von Dazer und die allgemeine zusammen und liefern identische Werte, die sich den Werten der exakten Berechnung annähern. Der Ansatz des Hypothesentests erlaubt nicht nur die statistische Einordnung der Probability of Test Success, sondern auch die vorgestellten Berechnungsmethoden mit den genannten Vorteilen gegenüber dem Ansatz nach Dazer. Die Erkenntnisse und Eigenschaften der Berechnungsmethoden sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Tabelle 4.2: Zusammenfassung des Vergleichs der Berechnungsmethoden für die P_{ts} .

Berechnungsmethode	Eigenschaften
Allgemeine Berechnungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> • Für alle Tests anwendbar • Größte Genauigkeit • Größte Flexibilität • Testkosten und -zeit können berechnet werden • Hoher Rechenaufwand wegen Bootstrap-Ansatz • Hohe Genauigkeit, aber unnötig hoher Rechenaufwand für SR Tests • Approximativ
Analytische und approximative Berechnungsmethode für EoL Tests	<ul style="list-style-type: none"> • Sehr einfache Berechnung • Sehr einfach implementierbar • Sehr gute Näherung bereits bei kleinen Stichprobenumfängen • Gute Näherung für kleine Stichprobenumfänge • Gute Näherung für zensierte und unzensierte Tests
Analytische und exakte Berechnungsmethode für SR Tests	<ul style="list-style-type: none"> • Exakte Berechnung, keine Approximation • Sehr schnelle Berechnung • Einfachste Implementierung • Bei SR Tests immer die beste Methode
Berechnungsmethode nach Dazer	<ul style="list-style-type: none"> • Gut für sehr große Stichprobenumfänge • Starke Verzerrungen bei EoL Tests • Sehr gut für SR Tests (identisch mit allgemeiner Methode) • Ungeeignet für EoL Tests mit starken Zensierungen

Kapitel 5

Vorkenntnis für den Zuverlässigkeitsnachweis

Vorkenntnis ist für einen effizienten Zuverlässigkeitsnachweis unerlässlich. So kann beispielsweise der vielfach verwendete SR Test ohne valide Vorkenntnis nicht ausgewertet werden wenn von der geforderten Lebensdauer abweichende Prüfzeiten vorliegen. Auch die fundierte Planung von EoL Tests erfordert zwingend Vorkenntnis über das prognostizierte Ausfallverhalten des Produkts. Neben der Verwendung der Vorkenntnis durch die P_{ts} , kann die Vorkenntnis auch als zusätzliche Information über die Lebensdauer beziehungsweise die Zuverlässigkeit im Nachweis mit einfließen. Dabei wird der Satz von Bayes verwendet, welcher Informationen aus der Vorkenntnis gleichbedeutend zu den Informationen aus dem Test behandelt; wohingegen bei der Verwendung der Vorkenntnis mittels der P_{ts} die Vorkenntnis lediglich zur Bewertung der Tests verwendet wird. Eine anschließende Auswertung des durchgeführten Tests erfährt dabei keinen Einfluss durch die Vorkenntnis. Um die Vorkenntnis in diesen beiden Fällen verwenden zu können, muss sie jedoch zunächst in geeigneter Form vorliegen. Im Folgenden wird deshalb vorgestellt, wie Vorkenntnis aus bereits durchgeführten Versuchen und aus Lebensdauerberechnungen abgeleitet werden kann und so für die Verwendung mittels der P_{ts} als auch mittels des Satzes von Bayes genutzt werden kann. Zudem wird die Kombination verschiedener Vorkenntnisse als auch deren Unsicherheiten thematisiert. Abschließend wird die Anwendung der Vorkenntnis kommentiert.

5.1 Vorkenntnisse aus bestehenden Informationen

Technische Produkte sind niemals gänzlich neu. Es existiert immer ein gewisser Grad an Ähnlichkeit zu einem bereits bestehenden Produkt. Häufig sind beispielsweise Komponenten mit angepasster Peripherie direkt übernommen. Mindestens jedoch ist das Funktionsprinzip bekannt und aus einer ähnlichen Anwendung übernommen. Die Produktentwicklung findet also immer mit einer gewissen Übernahme aus vorherigen Produktgenerationen, ähnlichen Produkten oder ähnlichen Konzepten statt [212-215]. Durch diese Übernahme und Ähnlichkeit bestehen Informationen und Wissen über das Produktverhalten. So besteht beispielsweise aus Lebensdauerberechnungen, die während der Entwicklung durchgeführt wurden, Kenntnis über das Ausfallverhalten des Produkts. Zudem könnten Prototypentests durchgeführt worden sein oder es sind Felddaten des Vorgängerprodukts bekannt. Es bestehen die folgenden Quellen von Vorkenntnissen:

- Bestehende Daten, wie zum Beispiel Felddaten,
- Prototypentests,
- Lebensdauerberechnungen,
- Expertenwissen,
- Zuverlässigkeitstests ähnlicher Produkte,
- Zuverlässigkeitstests an Vorgängerprodukten,
- Lebensdauertests von Komponenten,
- Tests der Zulieferer und
- bereits durchgeführte Tests des zu untersuchenden Produkts.

Die Informationen liegen üblicherweise in unterschiedlicher Form vor. So können beispielsweise Prototypentests, Zuverlässigkeitstests, Tests der Zulieferer und die Komponententests Ausfallzeiten liefern, welche eine Schätzung der Ausfallverteilung erlauben. Wenn lediglich zensierte Daten vorliegen, so kann nur die Zuverlässigkeit selbst geschätzt werden. Aus Expertenaussagen kann gegebenenfalls nicht ohne Weiteres eine quantifizierte Aussage gewonnen werden [177, 216, 217]. Aus diesem Grund sind Expertenaussagen über die Zuverlässigkeit und Lebensdauer kein Gegenstand dieser Arbeit. Die meisten Quellen von Vorkenntnis können jedoch in eine Zuverlässigkeitsaussage übersetzt werden. Hierbei kann zwischen zwei Typen unterschieden werden: Sind keine Ausfälle bekannt und können der Information keine zugewiesen werden, so kann die Schätzung der Zuverlässigkeit in einer Zuverlässigkeitsverteilung, beispielsweise als Betaverteilung, gefasst werden. Wurden jedoch Ausfälle beobachtet, so kann eine Ausfallverteilung geschätzt werden, beispielsweise eine Weibullverteilung. Die zu unterscheidenden Typen an Vorkenntnis über die Zuverlässigkeit sind demnach die folgenden beiden:

1. Vorkenntnis ohne Ausfälle (Typ SR Test), **Zuverlässigkeitsverteilung**: Eine Verteilung der Zuverlässigkeit als confidence distribution, zum Beispiel eine Betaverteilung welche für eine gewisse Lebensdauer des Produkts gültig ist.
2. Vorkenntnis mit Ausfällen (Typ EoL Test), **Ausfallverteilung**: Eine Stichprobe mit Ausfällen (und gegebenenfalls Zensierungen) oder direkt eine Ausfallverteilung, zum Beispiel eine Weibullverteilung und ein Stichprobenumfang n_0 , welcher genutzt wurde um die Verteilung ursprünglich zu schätzen.

Zur Nutzung dieser beiden Typen von Vorkenntnissen ist jeweils ein anderer Umgang in der Planung von Zuverlässigkeitsnachweistests notwendig. Insbesondere bei der Planung eines EoL Tests mit Hilfe der P_{ts} , muss Vorkenntnis vom Typ des EoL Tests vorliegen, denn es ist eine Schätzung der Ausfallverteilung notwendig. Dies ist zusammenfassend in Tabelle 5.1 dargestellt.

Tabelle 5.1: Die beiden Typen von Vorkenntnis und deren Zusammenhänge mit den planbaren Testtypen.

		Typ des zu planenden Tests	
		SR Test	EoL Test
Typ der Vorkenntnis	SR Test (Zuverlässigkeitsverteilung)	✓	×
	EoL Test (Ausfallverteilung)	✓	✓

5.1.1 Ableiten von Vorkenntnis aus Versuchen

Wurden Zuverlässigkeitstests durchgeführt, deren Information als Vorkenntnis genutzt werden soll, so können diese Tests entsprechend den Ausführungen aus den Kapiteln [2.2.2](#) und [2.2.5](#) ausgewertet werden. Bei Vorkenntnis ohne Ausfälle liegt eine Betaverteilung $\mathcal{B}(A; B)$ vor (alternativ eine Zuverlässigkeitsverteilung nach Gleichung [2.58](#) aus Kapitel [2.2.5](#)). Bei Vorkenntnis mit Ausfällen liegt eine Ausfallverteilung – wie beispielsweise eine Weibullverteilung $\mathcal{W}(T; b)$ – mit Stichprobenumfang n_0 vor. An Stelle der Ausfallverteilung kann auch direkt die Stichprobe mit den Ausfällen als Vorkenntnis verwendet werden, da bei der Berechnung der P_{ts} auch das nicht-parametrische Bootstrap-Verfahren verwendet werden kann, siehe Kapitel [2.2.2](#) und [4.2.1](#).

Liegt eine Betaverteilung zu einer Lebensdauer t_1 vor, die von der geforderten oder zu analysierenden t_s abweicht, also $f(R(t_1)) = \mathcal{B}(A; B)$, so kann diese mittels eines Weibullformparameters b wie folgt umgerechnet werden:

$$f(R(t_s)) = \frac{R\left(\frac{t_1}{t_s}\right)^{b(A-1)} \cdot \left(1 - R\left(\frac{t_1}{t_s}\right)^b\right)^{B-1}}{\int_0^1 R\left(\frac{t_1}{t_s}\right)^{b(A-1)} \cdot \left(1 - R\left(\frac{t_1}{t_s}\right)^b\right)^{B-1} dR} \quad (5.1)$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn der Formparameter bekannt ist und auch sicher für den vorliegenden Fall angewendet werden kann. Ähnlich zu Gleichung [2.58](#) erhält man hier eine Zuverlässigkeitsverteilung, die keiner bekannten Form entspricht, jedoch trotzdem als Vorkenntnis verwendet werden kann. Für den Fall, dass ein SR Test zu abweichender Lebensdauer vorliegt, kann der Quotient der beiden Lebensdauern als Lebensdauer Verhältnis verwendet werden.

Die Vorkenntnis, welche eine Aussage über die Ausfallverteilung erlaubt, ist die wertvollere der beiden Typen, da sie Aussagen über die Zuverlässigkeit für alle Lebensdauern ermöglicht. Wird jedoch nur eine Zuverlässigkeitsverteilung benötigt, so kann auch aus dieser Vorkenntnis des Typs EoL eine Zuverlässigkeitsverteilung für eine bestimmte Lebensdauer in Form einer Betaverteilung gewonnen werden. Dies ist insbesondere bei der Planung eines SR Tests mit dem Satz von Bayes relevant, siehe Kapitel [5.2](#). Ist die Ausfallverteilung und ein Stichprobenumfang der Vorkenntnis bekannt, können über ein parametrisches Bootstrap-Verfahren (siehe Kapitel [2.2.2](#)) Bootstrap-Stichproben erzeugt werden (beispielsweise 10.000). Wird zu diesen Bootstrap-Stichproben die Ausfallverteilung geschätzt – beispielsweise mittels MLE die Parameter einer Weibullverteilung – so kann pro Bootstrap-Stichprobe eine Zuverlässigkeit zur geforderten Lebensdauer berechnet werden. Diese Zuverlässigkeiten können verwendet werden um, beispielsweise mittels MLE, die Parameter

der gesuchten Betaverteilung als Zuverlässigkeitsverteilung bei der geforderten Lebensdauer zu bestimmen. Dieses Verfahren ist Abbildung 5.1 schematisch dargestellt. Liegt als Vorkenntnis eine Stichprobe vor, so kann auch das nicht-parametrische Bootstrap-Verfahren angewandt werden.

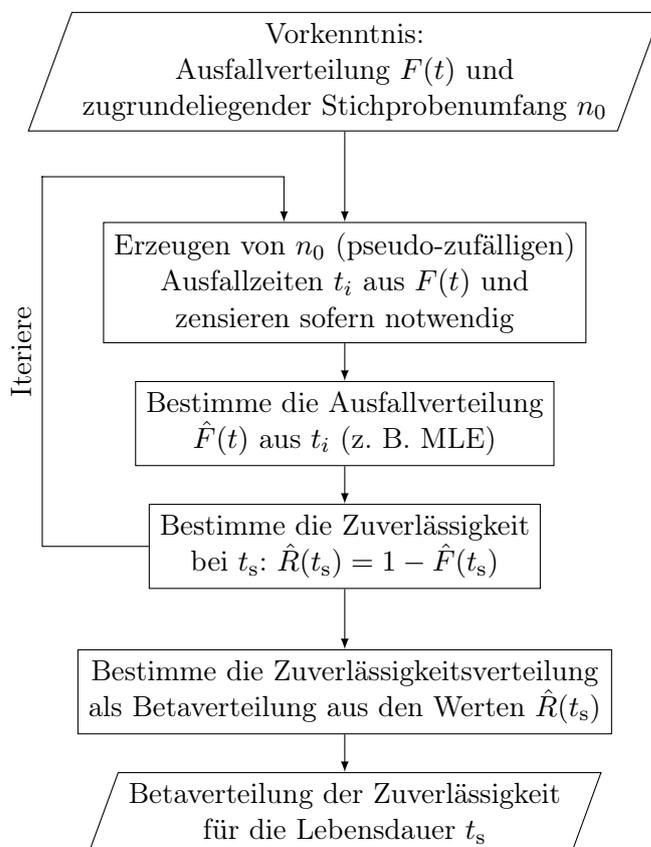


Abbildung 5.1: Vorgehen um eine Betaverteilung als Zuverlässigkeitsverteilung für eine bestimmte Lebensdauer zu schätzen, für den Fall, dass eine Ausfallverteilung vorliegt.

Gegebenenfalls tritt die Situation ein, in welcher zwar eine Ausfallverteilung aus Vorkenntnis bekannt ist, jedoch kein zugrundeliegender Stichprobenumfang bestimmt werden kann. Dies ist beispielsweise bei unzureichender Dokumentation oder bei zensierten Informationen des Herstellers oder Zulieferers der Fall. Für solch unsichere Informationen könnte ein sehr konservativer Ansatz gewählt werden: Für Informationen über die Ausfallverteilung muss mindestens ein Stichprobenumfang vorgelegen haben, der so groß war wie die Anzahl der Parameter der geschätzten Ausfallverteilung. Dieser kann bei Unkenntnis angenommen werden. Ist lediglich ein Zuverlässigkeitswert R_p aus der Vorkenntnis bekannt und keine Ausfälle, so kann zum Beispiel über $n = \ln(0,5)/\ln(R_p)$ (vergleiche [159]) der Stichprobenumfang konservativ bestimmt werden. Mit Hilfe dieses Stichprobenumfangs kann dann die Betaverteilung mit $\mathcal{B}(n; 1)$ bestimmt werden, siehe auch Kapitel 2.2.5. Dies ist zwar sehr konservativ, empfiehlt sich jedoch einer anderen Annahme vorzuziehen, da alle Annahmen mit größerem Stichprobenumfang einer weiteren Argumentation und Information bedürfen.

5.1.2 Ableiten von Vorkenntnis aus Lebensdauerberechnungen

Lebensdauerberechnungen werden während der Produktentwicklung üblicherweise unterstützend eingesetzt. Dabei ist es wichtig die Lebensdauer abzuschätzen, sodass bereits in frühen Entwicklungsstadien abgesehen werden kann ob das Produkt den Anforderungen an den Einsatz beim Kunde gerecht werden kann [5, 218, 219]. Ein typisches Lebensdauermodell für strukturelles Versagen ist die Wöhlerlinie [218]. Für thermisch bedingtes Versagen, wie beispielsweise bei Elektronikbauteilen oder Kunststoff, kommt häufig das Arrheniusmodell zum Einsatz [53]. Eine Übersicht über typische Lebensdauermodelle in der Zuverlässigkeitstechnik ist in [219] gegeben. Neben diesen entwicklungsbegleitenden Aktivitäten sind Lebensdauerberechnungen gegebenenfalls die einzige Quelle für Lebensdauerabschätzungen. Beispielsweise kann bei Hochvoltbatterien, wie sie in Fahrzeugen zum Einsatz kommen, das Versagen per Definition eines gewissen Gesundheitszustands eintreten [160]. Dieser Gesundheitszustand ist jedoch eine Größe, welche sich aus mehreren Einzelgrößen berechnet und nicht direkt gemessen wird. Dabei können Messungen der Belastungsgrößen aus dem Feld und Messungen der Belastbarkeit an einzelnen Zellen der Batterie zu einer Aussage des Gesundheitszustandes führen.

Liefert die Berechnung nur einen Zuverlässigkeitswert zur Lebensdauer¹, so kann keine Vorkenntnis über die Ausfallverteilung gewonnen werden und es kann lediglich eine Betaverteilung nach Kapitel 5.1.1 und 2.2.5 konstruiert werden. Sind jedoch die zugrundeliegenden Versuche oder der zugehörige Stichprobenumfang des Lebensdauermodells bekannt, so kann eine Ausfallverteilung gewonnen werden. Grundsätzlich ist das Vorgehen dabei ähnlich zu der Auswertung eines EoL Tests, beziehungsweise dem Vorgehen aus Kapitel 5.1.1, siehe auch [160, 163, 220-222]. Die Berechnungen an der Wöhlerlinie oder dem Arrheniusmodell arbeiten mit Schadensakkumulationshypothesen [218], welche die entstehende Schädigung pro Laststufe nach einem Modell aufsummieren, wie beispielsweise linear nach Miner elementar [223]. Das Resultat der Berechnung ist demnach eine erreichte Schädigung für eine gewisse Lebensdauer, welche dem berechneten Lastkollektiv zugeordnet wird. Durch die Annahme, dass der Ausfall mit der Überlebenswahrscheinlichkeit der Wöhlerlinie eintritt, kann eine Lebensdauer zur Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet werden. Sind die zugrundeliegenden Versuche der Parametrisierung des Wöhlermodells bekannt, so können sie verwendet werden um die zugehörigen relativen Schädigungen zu bestimmen. Beispielsweise nach Miner elementar:

$$D_{\text{rel}} = \frac{N_i}{N_{\text{ber}}} = \frac{N_i}{N_D} \left(\frac{S_i}{S_D} \right)^k \quad (5.2)$$

Wobei S die Last und N die Schwingspiele der Punkte i aus der Berechnung (ber) und des Dauerfestigkeitspunktes (N_D, S_D) mit der Wöhlersteigung k ist. Diese relativen Schädigungen können verwendet werden um eine Verteilung der Schädigungen zu schätzen (beispielsweise Weibullverteilung mittels MLE). Die Überlebenswahrscheinlichkeiten, die diese Verteilung beschreibt können dann als Zuverlässigkeit aufgefasst werden und es ist damit ein kontinuierlicher Zusammenhang zwischen berechneter Schädigung und Zuverlässigkeit hergestellt. Um für die berechnete Schädigung D^* des relevanten Kollektivs eine Zuverlässigkeitsverteilung als Vorkenntnis zu erhalten, kann das Bootstrap-Verfahren aus Kapitel 5.1.1 verwendet werden, siehe auch Abbildung 5.1. Soll stattdessen eine Ausfallverteilung als Vorkenntnis verwendet werden, so ist dies auch mit dieser geschätzten Ausfallverteilung, beziehungsweise alternativ auch direkt mit den Werten der relativen Schädigung, möglich. Es bedarf dazu allerdings einer Übersetzung zwischen Schädigung und Lebensdauer, welche in

¹ bei Wöhlerlinien oft Überlebenswahrscheinlichkeit genannt

jedem Fall individuell zu wählen ist. Das Vorgehen ist in Abbildung 5.2 grafisch dargestellt.

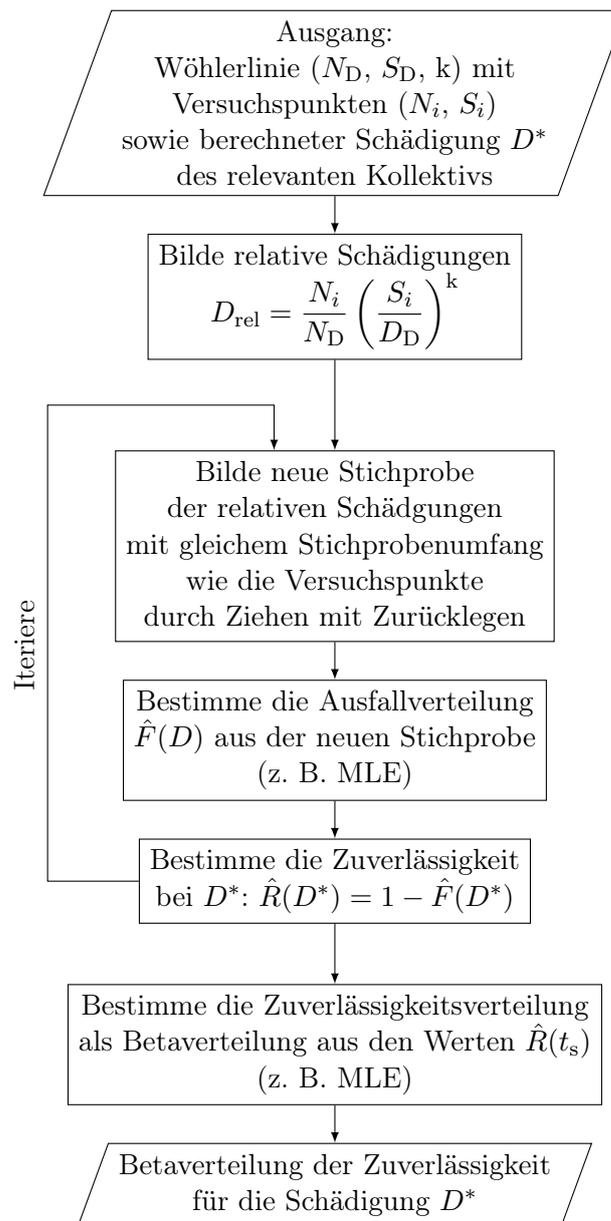


Abbildung 5.2: Vorgehen um eine Betaverteilung als Zuverlässigkeitsverteilung für eine bestimmte Schädigung zu schätzen, für den Fall, dass die Versuchspunkte des Wöhlermodells vorliegen.

Sind mehrere Stichprobenumfänge involviert, wie beispielsweise bei einer Berechnung des Gesundheitszustandes in Bezug auf den akkumulierten Energiedurchsatz einer Hochvolt-batterie, siehe [160], so muss ein doppeltes Bootstrap-Verfahren angewandt werden. Dabei wird im ersten Schritt eine Bootstrap-Stichprobe durch nicht-parametrisches Bootstrap erzeugt und die entsprechende Ausfallverteilung zum Beispiel mit MLE geschätzt. Mittels dieser Ausfallverteilung kann dann durch Verwendung des zweiten Stichprobenumfangs mit parametrischen Bootstrap erneut eine Bootstrap-Stichprobe erzeugt werden, zu welcher wieder eine Ausfallverteilung geschätzt wird. Durch mehrfache Iteration, zum Beispiel 100.000 Mal, können so viele Parameterwerte der Ausfallverteilung erhalten werden, welche die Streuung aufgrund der beiden Stichprobenumfänge beschreibt. Diese können dann für

das Ableiten einer Zuverlässigkeitsverteilung als Betaverteilung verwendet werden, indem sie bei der relevanten Lebensdauer ausgewertet werden. Sind die involvierten Stichprobenumfänge ungefähr gleich groß, so kann vereinfachend als konservative Annahme auch ein einfaches Bootstrap-Verfahren mit dem kleineren (oder kleinsten) Stichprobenumfang gerechnet werden. Grundsätzlich kann das Verfahren auch für Fälle erweitert werden in welchen mehr als zwei Stichprobenumfänge relevant sind. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass die Bootstrap-Iterationen grundsätzlich größer ausfallen müssen. Es empfiehlt sich für jedes durchgeführte Bootstrap-Verfahren eine Konvergenzanalyse bezüglich der Iterationszahl durchzuführen.

5.2 Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes

Die Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes für den Nachweis der Zuverlässigkeit wird im Folgenden beschrieben. Dabei wird zunächst erläutert wie sich die Informationen aus den verschiedenen Quellen verknüpfen lassen um anschließend die Kombination mit Informationen aus aktuellen Versuchen zu ermöglichen und damit den Zuverlässigkeitsnachweis zu führen. Wurde ein Zuverlässigkeitstest durchgeführt, so lassen sich die Ergebnisse mit den Informationen aus der Vorkenntnis durch den Satz von Bayes verknüpfen. Es kann zwischen sechs Fällen unterschieden werden, welche im Folgenden vorgestellt werden.

5.2.1 Zuverlässigkeitsverteilung als Vorkenntnis

Die Vorkenntnis in Form einer Zuverlässigkeitsverteilung nach Typ eines SR Tests liegt wie in Kapitel [2.2.8](#) beschrieben als Betaverteilung, als Binomialverteilung oder bei aufgetretenen Ausfällen mit einem Lebensdauer Verhältnis beziehungsweise Raffungsfaktor als Verteilung nach Gleichung [2.58](#) vor. Die Ergebnisse eines SR Tests liegen ebenfalls in einer der drei Verteilungen vor.

Liegt die Vorkenntnis in Form einer Betaverteilung mit $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ vor und die Ergebnisse aus dem durchgeführten SR Test als Binomialverteilung mit dem Stichprobenumfang n_{SR} und Anzahl Ausfällen x , so ergibt sich die a-posteriori Zuverlässigkeitsverteilung, welche die kombinierte Information beschreibt, erneut als Betaverteilung mit $\mathcal{B}(A_0 + n_{SR}; B_0 + x)$. Handelt es sich um einen reinen SR Test ohne Ausfälle, jedoch mit Raffungsfaktoren r_i und unterschiedlichen Laufzeiten (also Lebensdauer Verhältnisse $L_{V,i}$) der Prüflinge, so können diese in Verbindung mit einem bekannten Weibullformparameter b ebenso berücksichtigt werden als Betaverteilung der a-posteriori Zuverlässigkeitsverteilung mit $\mathcal{B}(A_0 + \sum_i^{n_{SR}} (L_{V,i} r_i)^b; B_0 + 1)$, siehe auch Gleichung [2.58](#) und Kapitel [2.2.8](#). Wobei der Index i hier die Prüflinge des durchgeführten SR Test durchläuft. Wurde dagegen die Zuverlässigkeitsverteilung aus dem Zverlässigkeitstest ebenfalls als Betaverteilung $\mathcal{B}(A_1; B_1)$ gewonnen, so ergibt die Anwendung des Satz von Bayes wieder eine Betaverteilung mit $\mathcal{B}(A_0 + A_1 - 1; B_0 + B_1 - 1)$ als Zuverlässigkeitsverteilung der kombinierten Information. Traten bei einer der beiden Zuverlässigkeitsinformationen Ausfälle auf und wurde gleichzeitig eine Raffung oder ein Le-

bensdauerverhältnis verwendet (siehe Gleichung 2.58) so ist der Satz von Bayes in seiner ursprünglichen Form nach Gleichung 2.31 anzuwenden und es resultiert

$$f_{\text{post}}(R) = \frac{f_1(R) \cdot f_0(R)}{\int_0^1 f_1(R) \cdot f_0(R) dR}. \quad (5.3)$$

Wobei $f_0(R)$ die Zuverlässigkeitsverteilung der Vorkenntnis darstellt und $f_1(R)$ die Zuverlässigkeitsverteilung aus dem aktuellen SR Test. Die Lösung von Gleichung 5.3 muss in den meisten Fällen numerisch erfolgen, da das Integral im Nenner nicht analytisch lösbar ist (siehe dazu auch 25). Handelt es sich bei dem aktuellen Versuch um einen EoL Test, so ist für diesen eine Betaverteilung abzuleiten wie in Kapitel 5.1.1 erläutert. Die Kombination mit der Vorkenntnis aus einem SR Test ist dann wie beschrieben möglich.

5.2.2 Ausfallverteilung als Vorkenntnis

Handelt es sich bei der Vorkenntnis um eine Ausfallverteilung, wie es bei einem EoL Test der Fall ist, so kann diese Information sowohl auf der Ebene der Ausfallverteilung mit den Ergebnissen aus einem aktuellen EoL Test kombiniert werden, als auch auf der Ebene der Zuverlässigkeitsverteilung mit Ergebnissen aus einem aktuellen SR Test. In letzterem Fall ist die Ausfallverteilung (oder Stichprobe) der Vorkenntnis nach dem in Kapitel 5.1.1 beschriebenen Vorgehen zu einer Betaverteilung abzuleiten, sodass anschließend mit der vorliegenden Zuverlässigkeitsverteilung wie im vorherigen Abschnitt beschrieben kombiniert werden kann.

Handelt es sich bei dem aktuellen Versuch um einen EoL Test, so muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Bei einem Fall handelt es sich um die Kenntnis der gesamten Stichprobe mit Ausfallzeiten und im anderen Fall liegt die Information zur Ausfallverteilung wie beispielsweise eine Weibullverteilung mit der Information zum ursprünglichen Stichprobenumfang n_0 vor. Wenn die Stichprobe bekannt ist, kann deren Likelihoodfunktion L_0 als Verteilung der Vorkenntnis bezüglich der Parameter der Ausfallverteilung zusammen mit der Likelihoodfunktion aus dem aktuellen EoL Test L_1 in einer MAP Schätzung¹ verwendet werden. Dadurch ergibt sich folgender Ausdruck für die resultierende Likelihoodfunktion, welche die kombinierte Information darstellt:

$$L_{\text{post}} \propto L_1 \cdot L_0 = \prod_{i=1}^{n_1-z_1} f(t_i) \prod_{j=1}^{z_1} R(t_j) \cdot \prod_{l=1}^{n_0-z_0} f(t_l) \prod_{m=1}^{z_0} R(t_m) \quad (5.4)$$

Die hier dargestellten Likelihoodfunktionen beinhalten den Term rechtsenzierter Stichproben (vergleiche Gleichung 2.37), können jedoch für beliebige Zensierungen erweitert werden. Hierbei sind n_0 und z_0 der Stichprobenumfang und die Anzahl an rechtsenzierten Laufzeiten der Vorkenntnis und analog n_1 und z_1 die des aktuellen EoL Tests. Für eine zweiparametrische Weibullverteilung lautet die Gleichung dann:

$$\begin{aligned} L_{\text{post}}(T, b) &\propto L_1(T, b) \cdot L_0(T, b) \\ &= \prod_{i=1}^{n_1-z_1} \frac{b}{T} \left(\frac{t_i}{T}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t_i}{T}\right)^b} \prod_{j=1}^{z_1} e^{-\left(\frac{t_j}{T}\right)^b} \cdot \prod_{l=1}^{n_0-z_0} \frac{b}{T} \left(\frac{t_l}{T}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t_l}{T}\right)^b} \prod_{m=1}^{z_0} e^{-\left(\frac{t_m}{T}\right)^b} \end{aligned} \quad (5.5)$$

¹ siehe dazu auch Kapitel 2.2.2 beziehungsweise 84, 224

Die MAP repräsentiert hier die Anwendung des Satz von Bayes indem die Likelihoodfunktion der Vorkenntnis als a-priori-Verteilung über die Parameter der Ausfallverteilung mit der Likelihoodfunktion aus dem aktuellen EoL Test aktualisiert werden. Die Kombination der Informationen findet demnach über eine Multiplikation der beiden Likelihoodfunktionen statt. Die Normierungskonstante, wie sie im Satz von Bayes vorkommt (vergleiche Gleichung 2.31) wird hier nicht benötigt, da die gesuchten Parameter durch das Maximum von L_{post} bestimmt sind und sich dieses Maximum durch einen multiplikativen Faktor nicht ändert. Das ist der Grund weswegen die beiden Gleichungen 5.4 und 5.5 als proportionaler Ausdruck formuliert sind. Durch die einfache Multiplikation der beiden Likelihoodfunktionen, ist die Anwendung der MAP hier identisch mit einer MLE Schätzung der Parameter, wenn die Stichprobe aus der Vorkenntnis mit der Stichprobe aus dem aktuellen EoL Test zusammengenommen ausgewertet wird. Dies erleichtert die Anwendung, da kein weiterer Implementierungsaufwand notwendig ist. Liegt die Vorkenntnis jedoch als Ausfallverteilung mit zugrundeliegendem Stichprobenumfang n_0 vor, so kann diese Kombination der Stichproben nicht ohne Weiteres vorgenommen werden. Um dennoch eine Stichprobe für diese Kombination zu erhalten, kann ein approximativer Ansatz als Schätzung der erwarteten Ausfallzeiten dienen. Der vorgeschlagene Ansatz ist recht pragmatischer Natur, sollte jedoch eine gute Näherung an die tatsächlichen Ausfallzeiten darstellen. Er wird in ähnlicher Weise auch im vorgestellten Ansatz aus Kapitel 4.2.3 verwendet um die analytische und approximative Berechnung der P_{ts} für EoL Tests zu ermöglichen. Die Werte der Ausfallzeiten t_i^* der hierbei erzeugten synthetischen Stichprobe werden entsprechend der Verteilung der Ordnungsstatistiken berechnet. Es wird die Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Ordnungsstatistiken genutzt, wie in der Methode zur Berechnung der Beta-Binomial Vertrauensbereiche (vergleiche Kapitel 2.2.3). Für den bekannten Stichprobenumfang n_0 und der bekannten Ausfallverteilung $F_0(t)$ der Vorkenntnis können damit die synthetischen Ausfallzeiten t_i^* als

$$t_i^* = F_0^{-1}(\mathcal{B}(0,5; i, n_0 - i + 1)) \approx F_0^{-1}\left(\frac{i - 0,3}{n_0 + 0,4}\right) \quad (5.6)$$

berechnet werden. Hier wurde zusätzlich die Approximation an den Median der Betaverteilung nach Benard verwendet¹. Für eine zweiparametrische Weibullverteilung können die synthetischen Ausfallzeiten als

$$t_i^* \approx T_0 \left(-\ln \left(1 - \frac{i - 0,3}{n_0 + 0,4} \right) \right)^{1/b_0} \quad (5.7)$$

bestimmt werden. Dabei sind die Parameter T_0 und b_0 dieser Weibullverteilung der Vorkenntnis ebenso durch den Subskript 0 gekennzeichnet. Sollte bekannt sein, dass in der ursprünglichen Stichprobe der Vorkenntnis Zensierungen vorhanden waren, so sollten diese ebenso in dieser synthetischen Stichprobe abgebildet werden. Diese synthetische Stichprobe kann dann analog in den Gleichungen 5.4 und 5.5 verwendet werden.

5.2.3 Mehrere Quellen der Vorkenntnis

Sollten mehrere Quellen der Vorkenntnis vorliegen, so sind diese gegebenenfalls mit dem Satz von Bayes zu kombinieren, bevor sie mit den Ergebnissen aus dem aktuellen Test kombiniert werden. Zuvor sollten diese jedoch entsprechend den Ausführungen aus Kapitel 5.1

¹ Siehe Kapitel 2.2.2 beziehungsweise Gleichung 2.34 oder [66]

in eine Zuverlässigkeitsverteilung oder eine Ausfallverteilung beziehungsweise Stichprobe überführt werden. Sind beispielsweise mehrere Zuverlässigkeitsverteilungen als Vorkenntnis (Typ SR Test) vorhanden, so sind diese mit dem beschriebenen Vorgehen für den Fall einer Zuverlässigkeitsverteilung als Vorkenntnis zu kombinieren, siehe auch Tabelle 5.2. Die Anwendung sollte dabei sequentiell erfolgen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle, da der Satz von Bayes keine der Informationen bevorzugt behandelt. Liegen mehrere Ausfallverteilungen beziehungsweise Stichproben als Vorkenntnis vor (Typ EoL Test), so ist entsprechend dem beschriebenen Vorgehen bei Ausfallverteilungen als Vorkenntnis vorzugehen, sodass eine einzige Ausfallverteilung erhalten werden kann.

Liegen jedoch eine Zuverlässigkeitsverteilung und eine Ausfallverteilung als Vorkenntnis vor (Typ SR Test und EoL Test), so ist gesondert vorzugehen. Dabei ist es unerheblich, ob die Zuverlässigkeitsverteilung oder die Ausfallverteilung bereits aus mehreren Quellen kombiniert wurde. Es muss jedoch unterschieden werden, ob die Vorkenntnis mit den Ergebnissen aus einem vorliegenden EoL Test oder einem SR Test kombiniert werden soll. Handelt es sich um einen EoL Test, so kann lediglich die Vorkenntnis über die Ausfallverteilung mittels der beschriebenen MAP Schätzung mit der Stichprobe aus dem aktuellen EoL Test kombiniert werden. Die Vorkenntnis in Form der Zuverlässigkeitsverteilung kann ausschließlich für eine festgelegte Lebensdauer einfließen. Dazu ist die Vorkenntnis der Ausfallverteilung mit dem Ergebnis aus dem vorliegenden EoL Test zu kombinieren. Anschließend kann aus dieser Ausfallverteilung mittels dem beschriebenen Bootstrap-Verfahren eine Betaverteilung abgeleitet werden, welche dann entsprechend für die relevante Lebensdauer als Zuverlässigkeitsverteilung kombiniert werden kann. Wurde ein SR Test durchgeführt so muss aus der Ausfallverteilung zunächst eine Betaverteilung als Zuverlässigkeitsverteilung bei geforderter Lebensdauer abgeleitet werden. Diese kann dann mit der Zuverlässigkeitsverteilung aus der zweiten Vorkenntnis kombiniert werden, sodass diese kombinierte Zuverlässigkeitsverteilung schließlich mit der Zuverlässigkeitsverteilung aus dem aktuellen SR Test kombiniert werden kann.

Ein Überblick über die verschiedenen Fälle zur Kombination der Vorkenntnis mit Ergebnisse aus einem aktuellen Versuch für den Zuverlässigkeitsnachweis kann Tabelle 5.2 entnommen werden.

Tabelle 5.2: Kombinationsmöglichkeiten der Berücksichtigung der beiden Typen der Vorkenntnis und deren resultierende Zuverlässigkeitsverteilungen bei kombinierter Information.

		Typ des Tests mit dem die Vorkenntnis kombiniert werden soll	
		SR Test	EoL Test
Typ der Vorkenntnis	SR Test	Kombiniere die Betaverteilung der Vorkenntnis $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ mit dem SR Test vom Umfang n und Ausfällen k zur Betaverteilung mit $A_{\text{post}} = A_0 + n - k$ $B_{\text{post}} = B_0 + k$	Leite eine Betaverteilung $\mathcal{B}(A; B)$ aus der gewonnenen Ausfallverteilung nach Abbildung 5.1 ab und kombiniere mit der Betaverteilung $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ der Vorkenntnis zu: $A_{\text{post}} = A_0 + A - 1$ $B_{\text{post}} = B_0 + B - 1$
	EoL Test	Erzeuge Betaverteilung $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ der Vorkenntnis aus Ausfallverteilung der Vorkenntnis nach Abbildung 5.1 und kombiniere mit dem SR Test vom Umfang n und Ausfällen k : $A_{\text{post}} = A_0 + n - k$ $B_{\text{post}} = B_0 + k$	Kombiniere die (synthetische) Stichprobe der Vorkenntnis mit der Stichprobe aus dem EoL Test und werte gemeinsam aus.

5.3 Unsicherheit in der Vorkenntnis

Die Zuverlässigkeit selbst beschreibt eine Unsicherheit, nämlich die aleatorische Unsicherheit der Funktionstüchtigkeit des Produkts, also das inhärente Zufallsereignis der Funktionstüchtigkeit bei einer gewissen Lebensdauer. Aufgrund der Unsicherheit wird es mit einer Wahrscheinlichkeit beschrieben. Die Schätzung der tatsächlich zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeit der Funktionstüchtigkeit kann nicht exakt erfolgen. Diese Unzulänglichkeit der Beobachtung wird epistemische Unsicherheit genannt. Bei der Schätzung der aleatorischen Unsicherheit (Wahrscheinlichkeit) ist immer eine epistemische Unsicherheit zugegen, weswegen die beiden Unsicherheiten vermischt sind.

Da die Vorkenntnis im Kontext der Zuverlässigkeit und deren Absicherungsmaßnahmen den in Kapitel 5.1 vorgestellten Typen entspricht, also einer Information über die Zuverlässigkeit selbst (Typ SR Test: Zuverlässigkeitsverteilung) oder einer Information über die Ausfallverteilung (Typ EoL Test: Ausfallverteilung oder gesamte Stichprobe), handelt es sich um die aleatorische Unsicherheit. Also die Unsicherheit über die Ausfallzeit, beziehungsweise Zuverlässigkeit. Die Unsicherheit über die korrekte Bestimmung dieser Unsicherheit muss zusätzlich berücksichtigt werden. Dabei wird bereits durch die Verteilung der Zuverlässigkeit, welche durch die Zuverlässigkeitsverteilung der Vorkenntnis des Typs SR Test beschrieben wird, diese epistemische Unsicherheit beschrieben. Denn statt eines einzigen Werts der Zuverlässigkeit werden mehrere Werte mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten zugelassen, welche die Gegebenheiten aus der Beobachtung wiedergeben. Die Information über die Ausfallverteilung, wie bei einer Vorkenntnis vom Typ eines EoL Tests, hat ebensolch eine Unsicherheit, welche durch den Vertrauensbereich wiedergegeben wird. Wird dieser in der weiteren Verarbeitung berücksichtigt, ist die Unsicherheit der Vorkenntnis ebenso berücksichtigt.

In den vorgestellten Methoden zur Berücksichtigung von Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes wird bereits die Streuung der Zuverlässigkeit in Form einer Zuverlässigkeitsverteilung und die Streuung der Ausfallzeiten in Form der Ausfallzeiten der Stichprobe selbst berücksichtigt. Die epistemische Unsicherheit der Vorkenntnis ist in diesen Methoden also bereits enthalten. Die bisher vorgestellten Ansätze zur Verwendung der Vorkenntnis mittels der P_{ts} hingegen verwendet immer einen scharfen Wert der Vorkenntnis, das heißt einen einzigen Wert der Zuverlässigkeit und der Lebensdauer sowie der Parameter der Ausfallverteilung. Die zur Berücksichtigung der Unsicherheit notwendigen Erweiterungen werden in Kapitel 6 vorgestellt. Die beiden Typen der Vorkenntnis in sicherer und unsicherer Form sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Die epistemische Unsicherheit in der Vorkenntnis kann also durch die Angabe der Zuverlässigkeitsverteilung (zum Beispiel eine Betaverteilung beim Typ SR Test) oder des ursprünglichen Stichprobenumfangs der Ausfallverteilung (bei Vorkenntnis vom Typ EoL Test), wie sie in Kapitel 5.1 für die beiden Typen der Vorkenntnis festgelegt wurden, bestimmt werden.

5.4 Anwendbarkeit von Vorkenntnis

Der Satz von Bayes kombiniert Informationen, welche derselben Grundgesamtheit entsprechen. Dies bedeutet, dass die Ausfallzeiten oder Zuverlässigkeiten, welche mit ihm kombiniert werden zwingend derselben Konstellation aus Produktbelastbarkeit und Produktbelastung und derselben Ausfallmode entsprechen müssen. Dies ist in der praktischen Anwen-

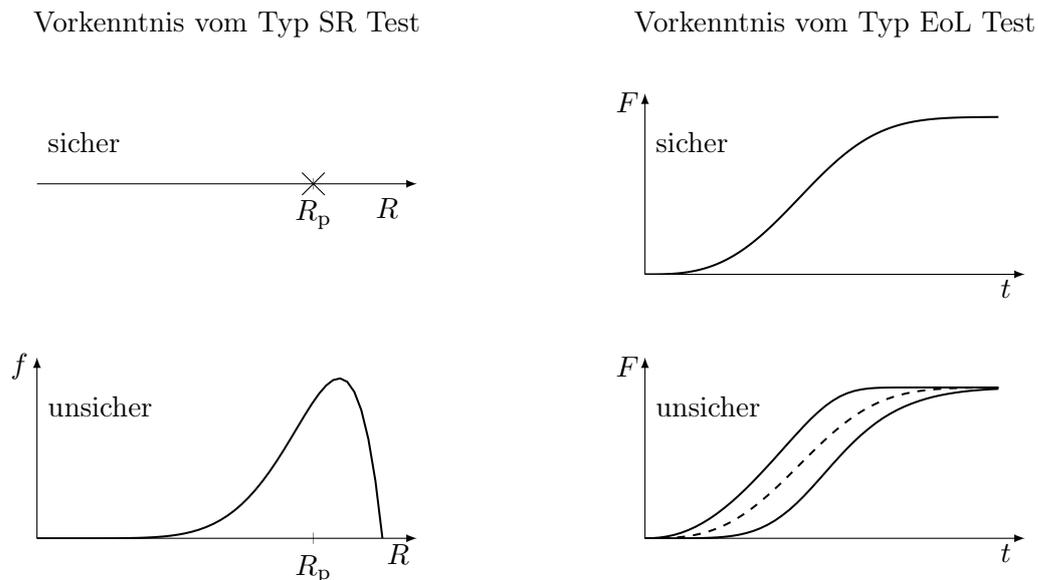


Abbildung 5.3: Vorkenntnisse der Typen SR Test (Zuverlässigkeitsverteilung) und EoL Test (Ausfallverteilung) in sicherer Form (oben) und mit epistemischer Unsicherheit (unten).

dung jedoch für die meisten Vorkenntnisse nicht der Fall. Aus diesem Grund ist es für die Methoden, welche den Satz von Bayes verwenden von essentieller Bedeutung die Anwendbarkeit der Vorkenntnis genau zu prüfen. Denn würde eine falsche Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes für den Zuverlässigkeitsnachweis verwendet werden, können die Folgen für den Feldeinsatz der Produkte erheblich sein. Aus diesem Grund existieren beispielsweise die Ansätze von Kleyner et al. [165] sowie Krolo und Hitziger [162, 177], siehe auch Kapitel 2.2.6. Die Quantifizierung und Formulierung der in diesen Ansätzen vorgestellten Faktoren zur Anwendbarkeit gestaltet sich jedoch schwierig. Insbesondere sollten qualitative Merkmale der Produkte und der Belastungssituation mit in die Bewertung der Anwendbarkeit einfließen. Deswegen ist die Anwendbarkeit der Vorkenntnis in dieser Arbeit vorausgesetzt und nicht Gegenstand der Untersuchungen.

Im Gegensatz dazu steht die Verwendung der Vorkenntnis zur Berechnung der P_{ts} ohne Berücksichtigung über den Satz von Bayes. Da die Vorkenntnis dabei lediglich zur Planung und Bewertung eines Tests verwendet wird, wiegen die Folgen deutlich weniger schwer. Denn der Nachweis würde dennoch ausschließlich mit Informationen geführt werden, die dem Einsatz im Feld entsprechen.

5.5 Zusammenfassung und Fazit

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie sich die für den Nachweis der Zuverlässigkeit notwendige Vorkenntnis aus bestehenden Quellen, wie bereits durchgeführten Versuchen und Lebensdauerberechnungen, ableiten lässt. Da die Vorkenntnis entweder Informationen über die Zuverlässigkeit selbst oder die Ausfallverteilung beinhalten kann, wurden zwei Typen der Vorkenntnis eingeführt: die Vorkenntnis vom Typ einer Zuverlässigkeitsverteilung und die Vorkenntnis vom Typ einer Ausfallverteilung. Beide Typen ermöglichen unterschiedliche Verwendung bezüglich der Kombination mit den Informationen aus SR und EoL Tests.

Zudem lassen sich mehrere Quellen der Vorkenntnis kombinieren. Sind diese von unterschiedlichem Typ, so müssen Zwischenschritte durchgeführt werden, wie beispielsweise die Ableitung von Zuverlässigkeitsverteilungen aus Ausfallverteilungen mittels Bootstrap. Um die epistemische Unsicherheit der Vorkenntnisse zu berücksichtigen, wurde vorgestellt, wie sich diese bei Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes im Nachweis einbinden lässt. Ein wichtiger Aspekt bei der zusätzlichen Verwendung von Vorkenntnis ist, dass diese auf den jeweils vorliegenden Fall anwendbar ist.

Kapitel 6

Planung der Zuverlässigkeitstests von Systemen als Hypothesentests

In diesem Kapitel wird vorgestellt, wie sich effiziente Zuverlässigkeitstests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit planen lassen. Dazu werden Berechnungsverfahren entwickelt, die die Bestimmung der P_{ts} bei Tests von Systemen oder deren Elementen erlauben, die mehrere Ausfallmoden besitzen. Um die Vorkenntnis und deren Unsicherheit zusätzlich im Nachweis und der Bewertung mittels der P_{ts} einzubinden, können die Berechnungsmethoden entsprechend weiterentwickelt werden. Neben einer allgemeinen Berechnungsmethode werden auch analytische erarbeitet, die die P_{ts} gut approximieren und gleichzeitig eine einfache Berechnung erlauben. Abschließend wird das Vorgehen zur Planung der Tests unter Berücksichtigung dieser Aspekte vorgestellt.

6.1 Berechnung der Probability of Test Success bei Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes

Die Berechnung der P_{ts} für den Fall, dass die verfügbare Vorkenntnis im Nachweis der Zuverlässigkeit mittels des Satz von Bayes einfließt, wird im Folgenden behandelt. Dabei ist zwischen dem SR und dem EoL Test zu unterscheiden.

6.1.1 Success-Run Test

Für einen SR Test ändert sich die Berechnung der P_{ts} nicht, denn die Berechnung gibt die Wahrscheinlichkeit für das Überleben eines gewissen Stichprobenumfangs bei bekannter Überlebenswahrscheinlichkeit der Prüflinge wieder. Die Berücksichtigung der Vorkenntnis führt jedoch lediglich zu einer Verringerung des notwendigen Stichprobenumfangs bei gleichbleibendem Zuverlässigkeitsziel, siehe dazu auch Kapitel [2.2.8](#). Dies bedeutet, dass die Berechnung der P_{ts} unverändert nach Gleichung [4.16](#) beziehungsweise [4.18](#) durchgeführt werden kann. Es ändert sich dabei lediglich der Stichprobenumfang. Beispielsweise nach Gleichung [2.62](#) beziehungsweise nach Kombination aller Vorkenntnisse nach Kapitel [5.2.3](#)

und Lösung von Gleichung [2.63](#) unter Verwendung der resultierenden Zuverlässigkeitsverteilung.

6.1.2 Allgemeine Berechnung bei End-of-Life Tests

Bei einem EoL Test muss zwischen den beiden Arten der Vorkenntnis unterschieden werden. Vorkenntnisse nach Art eines SR Tests beinhalten lediglich Informationen über die Zuverlässigkeit des Produkts bei einer gewissen Lebensdauer. Der EoL Test hingegen liefert Informationen über das gesamte Ausfallverhalten. Für die Berechnung der P_{ts} muss abgeschätzt werden, wo die Ausfälle wahrscheinlich liegen mögen. Aus diesem Grund ist für die Berechnung der P_{ts} für einen EoL Test zwingend Vorkenntnis über das Ausfallverhalten notwendig. Vorkenntnis aus einem SR Test genügt nicht.

Die allgemeine Berechnungsmethode aus Kapitel [4.2.1](#) dient hier als Grundlage und wird um die Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes angepasst. Grundsätzlich wird bei der Auswertung eines Tests jene durch den Test erzeugte Stichprobe entsprechend der MAP um die gegebenenfalls synthetische Stichprobe (Gleichung [5.6](#) oder [5.7](#)) der Vorkenntnis erweitert, siehe Gleichung [5.4](#). Die anschließende MLE Schätzung dieser kombinierten Stichprobe liefert die Ausfallverteilung bei Berücksichtigung der Vorkenntnis. Dies findet sich so nicht analog in der allgemeinen Berechnung wieder, denn die Iterationen des Bootstrap-Ansatzes aus Kapitel [4.2.1](#) dienen dazu die Streuung zwischen den Stichproben abzubilden und damit die Varianz des gewünschten Quantils unter Gültigkeit der beiden Hypothesen zu schätzen. Die hier kombinierte Stichprobe beinhaltet jedoch den Anteil aus der Vorkenntnis, welcher fest ist und nicht variiert. Aus diesem Grund erzeugt er auch keine Stichprobenstreuung. Lediglich die noch ungewissen Ausfallzeiten des noch nicht durchgeführten Tests sorgen für Streuung in der kombinierten Stichprobe. Diesem Umstand ist Rechnung zu tragen indem die Varianz des Quantils der kombinierten Stichprobe Var_{komb} aus zwei Schätzungen berechnet wird. Auf der einen Seite steht die Varianz des Quantils einer Stichprobe vom Umfang $n+n_0$ der kombinierten Stichprobe Var_{n+n_0} , welche die Varianz des Quantils aus dem Test darstellt. Um diese um den korrekten Anteil der nicht streuenden, festen Stichprobe der Vorkenntnis zu reduzieren, wird zunächst die Varianz des Quantils einer Stichprobe vom Umfang n_0 der Vorkenntnis Var_{n_0} berechnet, welche die zweite Varianz darstellt. Um diese beiden Varianzen zu kombinieren und damit effektiv die Varianz Var_{n+n_0} zu reduzieren, werden die beiden Verteilungen der Quantile, die diese Varianzen beschreiben durch den Satz von Bayes kombiniert. Dieser stellt dabei eine Multiplikation der beiden Verteilungen (entsprechend $n+n_0$ und n_0) dar, welche auch als die gegenseitige Gewichtung der beiden Verteilungen verstanden werden kann, siehe Gleichung [2.31](#). Die Varianz der resultierenden Quantilsverteilungen Var_{komb} berechnet sich damit über

$$\text{Var}_{\text{komb}} = \frac{\text{Var}_{n+n_0} \cdot \text{Var}_{n_0}}{\text{Var}_{n+n_0} + \text{Var}_{n_0}}. \quad (6.1)$$

Die Gleichung kommt aus der Anwendung des Satz von Bayes auf zwei Normalverteilungen zustande wobei die resultierende Verteilung ebenso wieder eine Normalverteilung darstellt, dessen Varianz obige Beziehung zu den Ausgangsverteilungen besitzt [225](#). Die Normalverteilung wurde gewählt, da die Quantilsverteilung asymptotisch einer Normalverteilung folgt, siehe Kapitel [4.2.3](#). Für die Berechnung der Varianzen Var_{n_0} und Var_{n+n_0} wird in jeder Iteration durch parametrisches Bootstrap, also unter Verwendung der Ausfallverteilung der Vorkenntnis $F(t)$, Stichproben vom Umfang $n+n_0$ und vom Umfang n_0 erzeugt. Um Rechenaufwand zu sparen, kann dabei vereinfachend die kleinere Stichprobe eine Untermenge der

6.1. Berechnung der Probability of Test Success bei Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes

größeren bilden. Bei großen Iterationszahlen wird die dadurch erzeugte Vereinfachung ausgeglichen. Zu diesen Stichproben werden die Ausfallverteilungen geschätzt, mit welchen jeweils die Quantile berechnet werden können. Die Stichproben der Quantile erhält man durch mehrfaches Iterieren. Die gewünschte Stichprobe des Quantils entsprechend dem ursprünglichen Umfang $n + n_0$ mit der korrigierten, kombinierten Varianz Var_{komb} berechnet sich dann über folgende Transformation der Werte der Quantile $t_{R_s,i}$ welche aus den Bootstrap-Stichproben vom Umfang $n + n_0$ berechnet wurden:

$$t_{R_s,i,\text{komb}} = \bar{t}_{R_s} + (t_{R_s,i} - \bar{t}_{R_s}) \sqrt{\frac{\text{Var}_{\text{komb}}}{\text{Var}_{n+n_0}}} = \bar{t}_{R_s} + (t_{R_s,i} - \bar{t}_{R_s}) \sqrt{\frac{\text{Var}_{n_0}}{\text{Var}_{n+n_0} + \text{Var}_{n_0}}}. \quad (6.2)$$

Dabei wird das Verhältnis aus gewünschter Varianz (Var_{komb}) und berechneter Varianz der Stichprobe in der Quadratwurzel verwendet, da so Standardabweichungen mit der korrekten Einheit verwendet werden. Die Variable \bar{t}_{R_s} stellt den arithmetischen Mittelwert der Stichprobe der Quantile dar. Die so korrigierte Stichprobe kann im Weiteren wie in der allgemeinen Berechnungsmethode aus Kapitel 4.2.1 zunächst zur Bildung der empirischen Nullverteilung f_{H_0} durch die bekannte Transformation aus Gleichung 4.9 und zur Alternativverteilung f_{H_1} verwendet werden. Aus f_{H_0} wird der kritische Wert der Teststatistik entsprechend C_s gebildet und anschließend damit nach Gleichung 4.11 die P_{ts} berechnet. Der entsprechende Ablauf ist in Abbildung 6.1 grafisch dargestellt. Es sei hier angemerkt, dass diese so konstruierte Methode für den Grenzübergang $n \rightarrow 0$ gegebenenfalls keine korrekten Werte der P_{ts} wiedergibt, da dabei alleinig die Stichprobe der Vorkenntnis für den Nachweis verantwortlich wäre und demnach keine Varianz des Quantils zur Folge hätte. Aus diesem Grund sollte die Methode bestenfalls erst für Werte ab $n > 3$ verwendet werden. Da die Vorkenntnis jedoch niemals alleinig die Zuverlässigkeit nachweisen sollte, stellt dies keine Einschränkung für die praktische Anwendung dar.

6.1.3 Analytische und approximative Berechnung bei End-of-Life Tests

Die analytische und approximative Berechnungsmethode ist ähnlich wie die allgemeine Berechnungsmethode anzupassen, um die Vorkenntnis zusätzlich mittels des Satz von Bayes zu berücksichtigen. Dabei werden die Varianzen der Lebensdauerquantile jedoch nicht über einen Bootstrap-Ansatz sondern aus dem asymptotischen Verhalten der MLE berechnet. Die Quantilsverteilungen resultieren dabei wie in Kapitel 4.2.3 als Normalverteilungen und die Standardabweichung der kombinierten Quantilsverteilung σ_{komb} berechnet sich wie in Gleichung 6.1 zu:

$$\sigma_{\text{komb}} = \sqrt{\frac{\sigma_{n+n_0}^2 \cdot \sigma_{n_0}^2}{\sigma_{n+n_0}^2 + \sigma_{n_0}^2}}. \quad (6.3)$$

Dabei berechnen sich die Standardabweichungen σ_{n+n_0} und σ_{n_0} entsprechend den Gleichungen 4.28 bis 4.33 und 4.39, wobei jeweils mit synthetischen Stichproben nach Gleichung 4.35 oder 4.36 vom Umfang $n + n_0$ und n_0 unter Gültigkeit von H_1 zu rechnen ist. Damit kann die P_{ts} als

$$P_{\text{ts}} \approx 1 - \Phi \left(\Phi^{-1} \left(C_s; 0, \frac{t_s}{T} (-\ln(R_s))^{-1/b} \sigma_{\text{komb}} \right); T (-\ln(R_s))^{1/b} - t_s, \sigma_{\text{komb}} \right) \quad (6.4)$$

bestimmt werden.

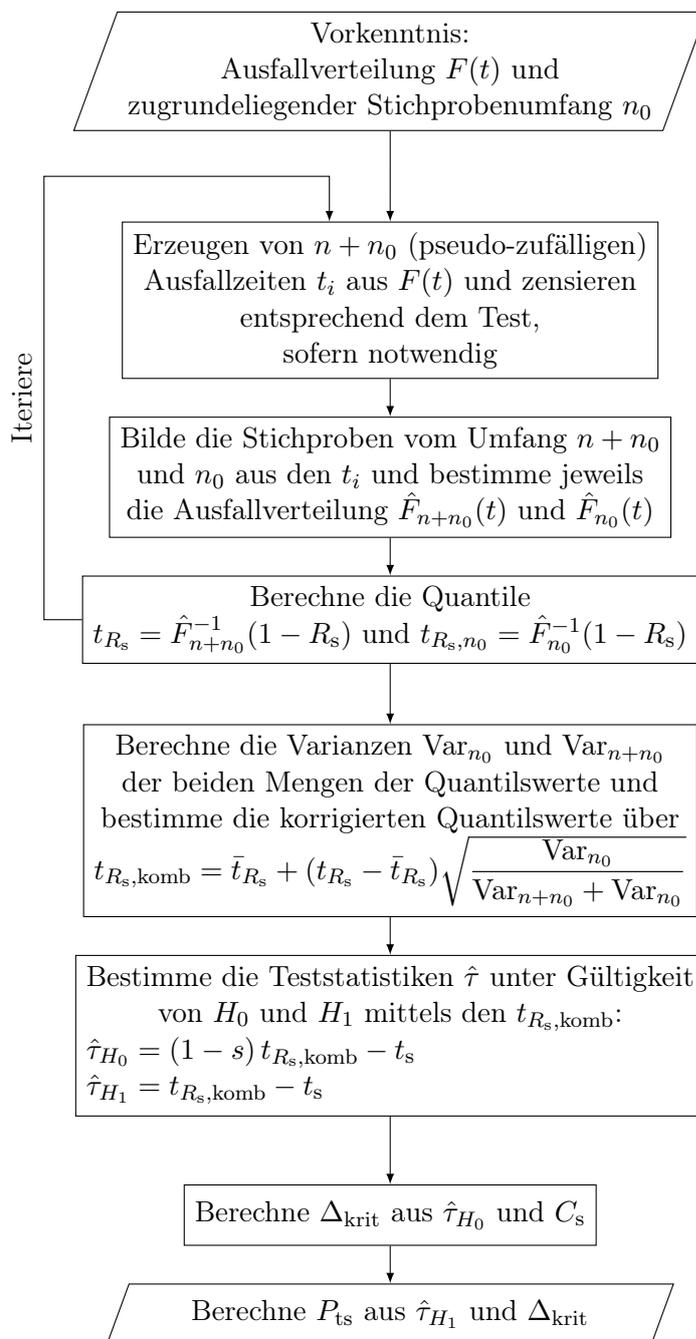


Abbildung 6.1: Vorgehen der allgemeinen Berechnungsmethode für die P_{ts} eines EoL Tests bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkennntnis mit dem Satz von Bayes.

6.2 Berücksichtigung der Systemstruktur

Heutige Produkte sind meist durch eine hohe Vielfalt an Funktionen gekennzeichnet. Die Entwicklung von komplexen Produkten ist oft unumgänglich, sodass ein Unternehmen erfolgreich am Markt teilnehmen kann. Die hohe Komplexität solcher Produkte spiegelt sich jedoch in einer nicht minder hohen Anzahl potentieller Fehlermoden wider, welche besondere Herausforderungen bezüglich der Absicherung und des Zuverlässigkeitsnachweises darstellen. Doch auch bereits weniger komplexe Produkte besitzen zumeist viele Komponenten, welche potentiell ausfallen können. Eine Berücksichtigung der Systemstruktur und damit ganzheit-

liche Betrachtung des Systems bereits in der Planungsphase der Zuverlässigkeitstests ist demnach unumgänglich für einen erfolgreichen Nachweis der Systemzuverlässigkeit. Hierbei ist es von besonderer Bedeutung die Ausfallmoden in ihrer Wirkung und Wechselwirkung im System zu berücksichtigen.

6.2.1 Systemdefinition

Um die Zuverlässigkeit eines Systems nachzuweisen muss klar definiert sein, welche Elemente zum System gehören. Mit Systemelementen sind dabei die Subsysteme, Komponenten oder Bauteile gemeint. Die physischen Komponenten eines Systems besitzen in der Regel jeweils mindestens eine Ausfallmode, weswegen das System dahingehend zu analysieren ist. Die Kenntnis aller potentieller Fehler sowie deren Verknüpfung und Auswirkung auf das Systemverhalten kann beispielsweise über eine Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse (FMEA) oder Fehlerbaumanalyse (siehe [5]) erfolgen. Die für das System relevanten Ausfallmoden müssen in einem Zuverlässigkeitsblockschaltbild festgehalten werden, sodass die gemeinsame Wirkung auf das System klar und der logische Zusammenhang zwischen den Ausfallmoden definiert ist, siehe auch Kapitel 2.2.4. In dieser Arbeit werden ausschließlich Systeme behandelt, welche unabhängige Ausfallmoden besitzen. Eine Abhängigkeit dieser untereinander wird demnach nicht modelliert. Die Zuverlässigkeitsanforderung an das System, bestehend aus Zuverlässigkeit R_s , Lebensdauer t_s und Aussagewahrscheinlichkeit C_s , ist durch Tests des Systems, der Subsysteme, der Komponenten und der Bauteile oder Kombinationen dieser nachzuweisen. Dabei ist es unerheblich, welche dieser Systemelemente getestet werden, sofern der Nachweis erbracht wird. Je nach System und Systemstruktur existieren dazu verschiedene Möglichkeiten. So können beispielsweise verschiedene Subsysteme oder Baugruppen definiert und getestet werden. Da für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit alle Tests herangezogen werden, ist die P_{t_s} gemeinsam für alle Tests zu bestimmen.

Da theoretisch unendlich viele Ausfallmoden für einen Systemausfall verantwortlich sein können, bedarf es meist einer Auswahl um nur die tatsächlich relevanten Ausfallmoden des Systems abzubilden. Um die Relevanz für das System bereits im Voraus bewerten zu können, bedarf es einer Abschätzung oder Vorkennntnis der Ausfallverteilungen. Dabei können diese auch relativ zu den Ausfallmoden im System formuliert werden. Die Auswahl ist auch im Hinblick auf die Möglichkeiten der Absicherung wichtig, denn eine Ausfallmode, welche nur in extrem seltenen Fällen für einen Systemausfall verantwortlich ist, wird sich in der Absicherung meist durch einen sehr großen Aufwand widerspiegeln. Denn um beispielsweise Systemausfälle beobachten zu können, sind meist sehr lange Laufzeiten notwendig und meist sehr große Stichprobenumfänge, da die anderen Ausfallmoden diese stark zensieren können, sofern es sich hauptsächlich um ein Seriensystem handelt. Eine objektive Bewertung der Anteile der Ausfallmoden am Systemausfall kann durch die Berechnung der Auftretenswahrscheinlichkeit des Systemausfalls aufgrund der jeweiligen Ausfallmode erreicht werden [146]. Ist die Auftretenswahrscheinlichkeit eines Ausfalls des Systems aufgrund einer bestimmten Ausfallmode nun insgesamt oder zumindest bis zur geforderten Lebensdauer t_s sehr klein, so kann sie gegebenenfalls als Null angenähert werden und damit nicht weiter als Ausfallmode des Systems in der Absicherung betrachtet werden. Sollten sich Änderungen am System oder den Belastungen ergeben, so sollte diese Betrachtung selbstverständlich erneut durchgeführt werden. Die durch die Vereinfachung entstandene Unsicherheit kann beispielsweise durch eine leicht erhöhte Zuverlässigkeitsanforderung des Systems im Verhältnis zur tatsächlich gewünschten ausgeglichen werden.

6.2.2 Berechnung der Probability of Test Success

Im Gegensatz zu Produkten oder Komponenten mit einer einzigen Ausfallmode, können bei Systemen mit mehreren Subsystemen, Baugruppen, Komponenten und Bauteilen mehr als ein Test verwendet werden um die Systemzuverlässigkeit nachzuweisen. Da die P_{ts} den Nachweis der Systemzuverlässigkeit abbilden soll, ist sie gemeinsam für alle Tests zu bestimmen. Für die Berechnung ist zwischen den beiden Testarten EoL und SR sowie deren Kombination zu unterscheiden, da auch hier die exakte Berechnung des SR Tests zur Anwendung kommen kann. Wichtig ist, dass neben der Kenntnis der Systemstruktur und Ausfallmoden auch Vorkenntnis bezüglich aller relevanter Ausfallmoden vorliegt. Für reine SR Tests genügt dabei Vorkenntnis in Form des SR Tests. Bei ausfallbasierten Tests hingegen ist die Kenntnis der Ausfallverteilung notwendig. Die Berechnungen bedienen sich des in Kapitel 4 vorgestellten Ansatzes eines Hypothesentests. Dabei schätzen die Methoden die Alternativverteilung $f_{H_1}(\tau)$ und Nullverteilung $f_{H_0}(\tau)$ des Systems um daraus die P_{ts} berechnen zu können.

Allgemeine Berechnung bei EoL Tests

Die allgemeine Berechnungsmethode ist grundsätzlich sehr ähnlich wie die in Kapitel 4.2.1 vorgestellte für Systeme mit einer einzigen Ausfallmode. Mittels Bootstrap werden Ausfallzeiten generiert um daraus wiederum Lebensdauerquantile des Systems unter Gültigkeit der beiden Hypothesen (Gleichungen 4.1 und 4.2) zu erhalten, also Werte der Alternativverteilung $f_{H_1}(\tau)$ und der Nullverteilung $f_{H_0}(\tau)$ des Systems (siehe Abbildung 4.1). Zusammen mit den Gleichungen 4.6 und 4.7 kann damit die P_{ts} für den Systemnachweis berechnet werden. Um die benötigten Lebensdauerquantile des Systems entsprechend des Tests zu erhalten, werden Ausfallzeiten aus allen Ausfallmoden generiert. Aus diesen Ausfallzeiten sind dann gegebenenfalls zensierte Stichproben der Ausfallmoden zu bilden. So wird beispielsweise bei einem Systemtest entsprechend dem Stichprobenumfang n für alle Ausfallmoden Stichproben dieser Größe erzeugt. Die Ausfallzeiten des Systems ergeben sich dann aus den n kleinsten Ausfallzeiten. Die Stichproben zur Auswertung der Ausfallverteilungen der Ausfallmoden werden aus dieser Systemstichprobe gebildet indem die Ausfälle der jeweiligen Ausfallmode als unzensierte Ausfallzeiten auftreten und die übrigen als zensierte. Werden im Test dagegen ausschließlich einzelne Ausfallmoden angesprochen, so erhält man unzensierte Stichproben unterschiedlicher Größe für die jeweiligen Ausfallmoden. Das Lebensdauerquantil t_{R_s} des Systems wird dabei aus der Systemausfallverteilung $F_{Sys}(t)$ bestimmt, indem die aus den Stichproben bestimmten Ausfallverteilungen der Ausfallmoden $F_l(t)$ entsprechend der Systemstruktur verknüpft werden (Siehe Kapitel 2.2.4). Bei einem reinen Seriensystem und weibullverteilten Ausfallmoden ergibt sich die Systemzuverlässigkeit $R_{Sys}(t)$ zu

$$R_{Sys}(t) = \prod_l R_l(t) = e^{-\sum_l \left(\frac{t}{T_l}\right)^{b_l}}. \quad (6.5)$$

Dabei sind die Weibullparameter T_l und b_l die der jeweiligen Ausfallmoden. Die Ausfallverteilungen (beziehungsweise Zuverlässigkeit) der Ausfallmoden $F_l(t)$ werden mittels den Ergebnissen der durchgeführten Tests geschätzt. Dabei bestimmt die Testebene maßgeblich die Zensierung dieser Information. Wird beispielsweise das Gesamtsystem getestet, so können Ausfallzeiten erhalten werden, die potentiell allen Ausfallmoden zugeordnet werden können. Also können Informationen über alle Ausfallmoden erhalten werden. Diese sind jedoch ge-

gebenenfalls stark zensiert, da ein Ausfall aufgrund einer Ausfallmode eine Zensierung für alle anderen Ausfallmoden bedeutet, sofern es sich um ein Seriensystem handelt. Bei einem Test eines Bauteils können zwar nur Informationen über die Ausfallmoden erhalten werden, welche in diesem Bauteil vorhanden sind und im Test angesprochen werden, dafür ist die Information deutlich weniger bis garnicht zensiert. Sofern das Bauteil nur eine Ausfallmode besitzt, ist die Information bei einem unzensierten EoL Test auch gänzlich unzensiert, siehe auch Abbildung 6.2. Der Ablauf zur allgemeinen Berechnung der P_{ts} bei Systemen zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Wichtig ist dabei, dass die Stichproben zur Auswertung der Ausfallverteilungen der Ausfallmoden entsprechend der Systemebene der Tests und der Systemstruktur nach Abbildung 6.2 erfolgt.

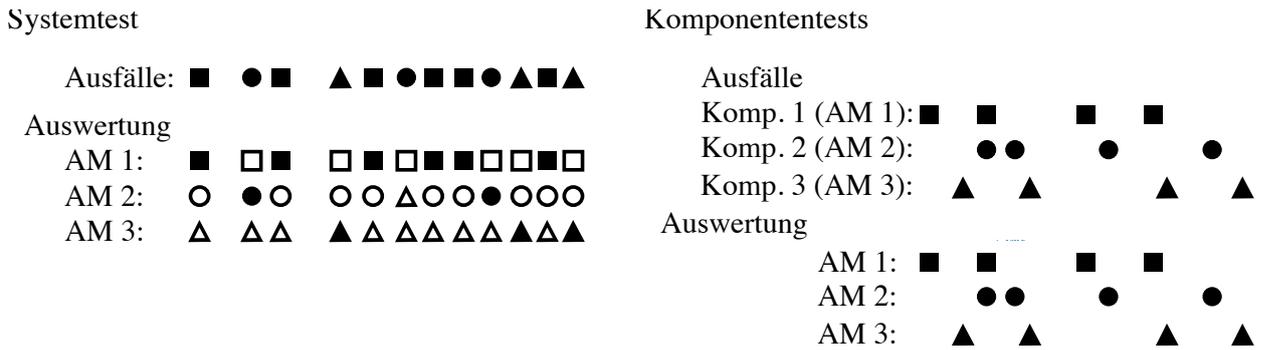


Abbildung 6.2: Beispielhaftes Verhalten zwischen Ausfallzeiten und Zensierung für einen Systemtest und Komponententests eines Seriensystems. Das hier betrachtete System besitzt drei Ausfallmoden, welche jeweils einer der insgesamt drei Komponenten zugeordnet werden kann. Die vollen Symbole kennzeichnen Ausfallzeiten, wobei die leeren Symbole rechtsenzierte Laufzeiten darstellen.

Analytische und approximative Berechnung bei EoL Tests

Der in Kapitel 4.2.3 vorgestellte Ansatz zur analytischen Berechnung der P_{ts} kann auf Tests zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit übertragen werden. Es sind dazu jedoch einige Anpassungen notwendig. Die Ausfallverteilung des Systems setzt sich entsprechend der Systemstruktur aus den jeweiligen Ausfallverteilungen der Ausfallmoden zusammen (siehe beispielsweise Gleichung 6.5). Aus diesem Grund ist die Varianz-Kovarianz-Matrix höherer Dimension, nämlich entsprechend der Summe der Parameter aller Ausfallverteilungen der Ausfallmoden. Werden die K Ausfallverteilungen der Ausfallmoden alle jeweils mit einer zweiparametrischen Weibullverteilung beschrieben, so hat die Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{V} die Dimension $2K$, also $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2K}$. Sind die Ausfallmoden unabhängig voneinander, sind die Kovarianzen der Parameter zweier unterschiedlicher Ausfallmoden gleich Null. Dies hat zur Folge, dass die Einträge der Varianz-Kovarianz-Matrix analog den Gleichungen 4.28 bis 4.32 berechnet werden können. Dies entspricht außerdem dem Vorgehen der Testauswertung: Die Ausfallzeiten werden den Ausfallmoden zugeordnet und anschließend separat die Parameter der Ausfallverteilungen dieser Ausfallmoden bestimmt. Anschließend werden die Ausfallverteilungen entsprechend der Systemstruktur multiplikativ zur Systemausfall-

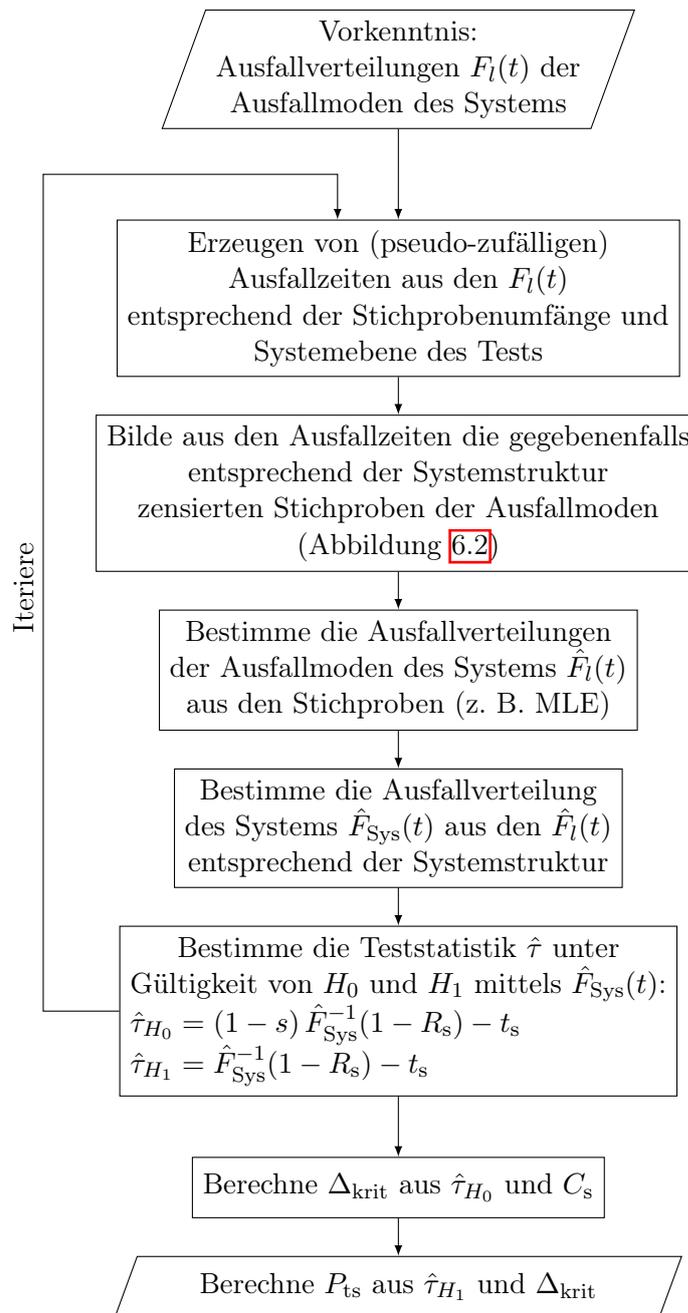


Abbildung 6.3: Vorgehen der allgemeinen Berechnungsmethode für die P_{ts} von EoL Tests bei Systemen mit mehreren Ausfallmoden, Komponenten, Bauteilen, Baugruppen und Subsystemen.

verteilung verknüpft. Die Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{V} setzt sich dann aus den jeweiligen Varianz-Kovarianz-Matrizen \mathbf{V}_l der K Ausfallmoden wie folgt zusammen

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{V}_l & \cdots & \mathbf{0} \\ \text{sym.} & & & & \ddots & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{V}_K \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Diese Matrix ist für Operationen mit dem Parametervektor \mathcal{P} gültig, welcher alle Parameter der Ausfallverteilungen in der entsprechenden Reihenfolge enthält. Handelt es sich ausschließlich um zweiparametrische Weibullverteilungen, so lautet dieser Vektor beispielsweise $\mathcal{P} = [T_1, b_1, \dots, T_l, b_l, \dots, T_K, b_K]$.

Die allgemeine Form zur Berechnung der Varianz der Quantilsfunktion t_q analog zu Gleichung 4.33 lautet

$$\text{Var}(t_q) = \left[\frac{\partial t_q}{\partial \mathcal{P}} \right]' \mathbf{V} \left[\frac{\partial t_q}{\partial \mathcal{P}} \right]. \quad (6.7)$$

Wobei $\left[\frac{\partial t_q}{\partial \mathcal{P}} \right]$ den stehenden Vektor der partiellen Ableitungen der Quantilsfunktion nach allen Parametern entsprechend dem Parametervektor \mathcal{P} beschreibt. Wird Gleichung 6.7 ausmultipliziert so erhält man für zweiparametrische Weibullverteilungen der Ausfallmoden den folgenden Ausdruck

$$\text{Var}(t_q) = \sum_{l=1}^K \left(\left(\frac{\partial t_q}{\partial T_l} \right)^2 \text{Var}(T_l) + 2 \frac{\partial t_q}{\partial T_l} \cdot \frac{\partial t_q}{\partial b_l} \text{Cov}(T_l, b_l) + \left(\frac{\partial t_q}{\partial b_l} \right)^2 \text{Var}(b_l) \right). \quad (6.8)$$

Die Terme der Varianzen $\text{Var}(T_l)$, $\text{Var}(b_l)$ und Kovarianzen $\text{Cov}(T_l, b_l)$ können mit den Gleichungen 4.29 bis 4.32 sowie 4.35 oder 4.36 berechnet werden, indem die entsprechenden Werte der Parameter der Ausfallverteilung der Ausfallmoden, welche durch die Vorkenntnis gegeben sind, eingesetzt werden. Dies gilt ebenso für die Terme der partiellen Ableitungen.

Da die Quantilsfunktion nicht als explizite Gleichung geschrieben werden kann, müssen die Ableitungen in $\left[\frac{\partial t_q}{\partial \mathcal{P}} \right]$ durch implizite Differentiation gefunden werden. Hierzu empfiehlt es sich die Systemgleichung der Zuverlässigkeit in logarithmierter Form zu verwenden; für ein reines Seriensystem mit Weibullverteilungen also die folgende Gleichung:

$$\ln(1 - q) = - \sum_{l=1}^K \left(\frac{t_q}{T_l} \right)^{b_l} \quad (6.9)$$

Werden alle Ausfallverteilungen durch zweiparametrische Weibullverteilungen beschrieben, so lauten die partiellen Ableitungen für das Seriensystem

$$\frac{\partial t_q}{\partial T_l} = \frac{b_l t_q \cdot \left(\frac{t_q}{T_l} \right)^{b_l}}{T_l \cdot \sum_{p=1}^K b_p \cdot \left(\frac{t_q}{T_p} \right)^{b_p}} \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial t_q}{\partial b_l} = - \frac{t_q \cdot \ln \left(\frac{t_q}{T_l} \right) \left(\frac{t_q}{T_l} \right)^{b_l}}{\sum_{p=1}^K b_p \cdot \left(\frac{t_q}{T_p} \right)^{b_p}}. \quad (6.11)$$

Zusammen mit Gleichung [6.8](#) erhält man den folgenden Ausdruck für ein reines Seriensystem

$$\text{Var}(t_q) = \sum_{l=1}^K \left(\frac{t_q \cdot \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{\sum_{p=1}^K b_p \cdot \left(\frac{t_q}{T_p}\right)^{b_p}} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{b_l}{T_l}\right)^2 \text{Var}(T_l) - 2\frac{b_l}{T_l} \ln\left(\frac{t_q}{T_l}\right) \text{Cov}(T_l, b_l) + \left(\ln\left(\frac{t_q}{T_l}\right)\right)^2 \text{Var}(b_l) \right). \quad (6.12)$$

Die asymptotische Normalverteilung des Lebensdauerquantils des Systems t_q lässt sich in gleicher Weise bestimmen wie beim Fall einer einzigen vorherrschenden Ausfallmode und lautet

$$t_q \sim \mathcal{N}\left(t_q; \sqrt{\text{Var}(t_q)}\right). \quad (6.13)$$

Hierbei muss jedoch t_q aus der Systemgleichung bestimmt werden. Da diese nicht explizit nach t_q aufgelöst werden kann, kann diese beispielsweise durch numerisch approximative Verfahren gelöst werden. Ein einfacher Newton-Raphson-Algorithmus [226](#) genügt jedoch um beispielsweise die Nullstelle des folgenden Ausdrucks zu bestimmen, wenn ein reines Seriensystem vorliegt:

$$1 - q - e^{-\sum_{l=1}^K \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}. \quad (6.14)$$

Die Verteilung des Lebensdauerquantils bei Gültigkeit der Alternativhypothese lautet damit

$$t_{R_s, H_1} \sim \mathcal{N}(t_p; \sigma_{H_1}) \quad (6.15)$$

mit

$$\sigma_{H_1} = \left(\sum_{l=1}^K \left(\frac{t_p \cdot \left(\frac{t_p}{T_l}\right)^{b_l}}{\sum_{p=1}^K b_p \cdot \left(\frac{t_p}{T_p}\right)^{b_p}} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{b_l}{T_l}\right)^2 \text{Var}(T_l) - 2\frac{b_l}{T_l} \ln\left(\frac{t_p}{T_l}\right) \text{Cov}(T_l, b_l) + \left(\ln\left(\frac{t_p}{T_l}\right)\right)^2 \text{Var}(b_l) \right) \right)^{1/2}. \quad (6.16)$$

Wobei t_p beispielsweise mittels Gleichung [6.14](#) sowie $q = 1 - R_s$ und die notwendigen Ausfallzeiten der jeweiligen Ausfallmoden mittels Gleichung [4.35](#) oder [4.36](#) bestimmt werden. Es handelt sich bei t_p also um das Lebensdauerquantil aus der Vorkenntnis welches der geforderten Zuverlässigkeit entspricht. Wird das Gesamtsystem getestet, so sind diese Ausfallzeiten für die jeweiligen Ausfallmoden entsprechend der Systemstruktur zu zensieren. Da die Ausfallmoden durch Multiplikation zum System verknüpft werden und die Beziehung zwischen Alternativ- und Nullverteilung ebenso multiplikativ erfolgt, kann die asymptoti-

sche Verteilung der Lebensdauerquantile bei Gültigkeit der Nullhypothese folgendermaßen beschrieben werden:

$$t_{R_s, H_0} \sim \mathcal{N}\left(t_s; (1-s)\sigma_{H_1}\right) = \mathcal{N}\left(t_s; \frac{t_s}{t_p} \cdot \sigma_{H_1}\right). \quad (6.17)$$

In Analogie zu Gleichung [4.43](#) lässt sich damit die P_{ts} für den Systemnachweis wie folgt berechnen:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(C_s; 0, \frac{t_s}{t_p}\sigma_{H_1}\right); t_p - t_s, \sigma_{H_1}\right). \quad (6.18)$$

Die entsprechenden Gleichungen für ein reines Parallelsystem können Anhang [A](#) entnommen werden. Bei Systemen, welche sich sowohl aus Serien- als auch Parallelsystemen zusammensetzen, ist die Systemgleichung entsprechend der Systemstruktur in Analogie zu Gleichung [6.9](#) aufzustellen und entsprechende partielle Ableitungen zu bilden. Es werden also lediglich die Terme in $\left[\frac{\partial t_q}{\partial P}\right]$ durch die jeweils gültigen ausgetauscht, denn die Parameter der Ausfallmoden werden auch hier unabhängig voneinander bestimmt.

Berechnung bei SR Tests

Werden die SR Tests mit dem Gesamtsystem durchgeführt, so sind die Gleichungen zur Berechnung identisch mit jenen, welche bei nur einer einzigen vorherrschenden Ausfallmode verwendet werden. Es können also die Gleichungen [4.16](#), [4.18](#) oder [4.21](#) für die Berechnung verwendet werden. Einzig der Wert der Zuverlässigkeit aus der Vorkenntnis R_p muss entsprechend der Systemstruktur aus der Vorkenntnis über die Ausfallverteilungen der Ausfallmoden berechnet werden. Bei einem reinen Seriensystem mit weibullverteilten Ausfallmoden ist

$$R_p = e^{-\sum_{l=1}^K \left(\frac{t_s}{T_l}\right)^{b_l}}. \quad (6.19)$$

Werden jedoch Subsysteme, Komponenten oder Bauteile in separaten SR Tests getestet, so ist die Berechnung der P_{ts} anzupassen. Dabei ist die Systemstruktur, welche die Verknüpfung der jeweiligen Ausfallmoden der getesteten Subsysteme, Komponenten oder Bauteile zum Gesamtsystem bestimmt, bei der Berechnung der P_{ts} unerheblich. Denn der Zuverlässigkeitsnachweis auf Systemebene kann nur dann erbracht werden, wenn alle SR Tests erfolgreich sind. Wird bereits bei einem der SR Tests die Anzahl an zugelassenen Ausfällen überschritten, so kann der Systemnachweis nicht erbracht werden. Dieser Zusammenhang entspricht einer Multiplikation aller Überlebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen SR Tests. Da die P_{ts} ebendiese Wahrscheinlichkeiten bei SR Tests beschreibt, können die Gleichungen [4.16](#), [4.18](#) oder [4.21](#) für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P_{ts,1}, \dots, P_{ts,l}, \dots, P_{ts,K}$ der K SR Tests verwendet werden, also

$$P_{ts} = \prod_{l=1}^K P_{ts,l}. \quad (6.20)$$

Die Systemstruktur ist jedoch für die Bestimmung der notwendigen Stichprobenumfänge der einzelnen SR Tests gefragt. Diese müssen so bestimmt werden, dass die resultierende Zuverlässigkeitsverteilung auf Systemebene das Zuverlässigkeitsziel erfüllen kann. Dazu können die entsprechend des Stichprobenumfangs entstehenden Betaverteilungen der einzelnen

SR Tests beispielsweise durch eine Berechnungsmethode aus Kapitel [2.2.4](#) zur Systemzuverlässigkeitsverteilung verknüpft werden und die Erfüllung des Zuverlässigkeitsziels überprüft werden [\[146-148\]](#). Dabei ist es nicht notwendig das Zuverlässigkeitsziel des Systems auf die Subsysteme, Komponenten oder Bauteile des Systems aufzuteilen, denn einzig die Erfüllung des Zuverlässigkeitsziels des Systems ist relevant. Eine Aufteilung schränkt dabei lediglich den Lösungsraum an Testkonfigurationen ein, siehe auch Kapitel [7.2.1](#)

Allgemeine Berechnung bei Kombination von EoL und SR Tests

Sollen für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit Tests verschiedener Systemebenen verwendet werden, so können beispielsweise Komponententests als EoL Tests durchgeführt werden und Systemtests als SR Tests. Um solch eine Kombination und andere zu planen und bewerten zu können, kann ebenso die P_{ts} verwendet werden. Es kann dazu zwischen EoL Tests und SR Tests unterschieden werden. Die EoL Tests liefern dabei Informationen über die jeweilige Ausfallverteilung der Ausfallmoden, welche durch den Test angesprochen werden. Um die Informationen mehrerer EoL Tests zu kombinieren, sind diese auf der Ebene der Ausfallmoden mittels des Satz von Bayes, wie in Kapitel [5.2](#) beschrieben, zu kombinieren. Also als gemeinsame Auswertung als eine Stichprobe pro Ausfallmode. Anschließend kann diese gemeinsame Stichprobe (oder Ausfallverteilung) als Vorkenntnis verwendet werden. Werden dagegen SR Tests durchgeführt, so liefern diese Informationen in Form einer Zuverlässigkeitsverteilung für die Komponente, das Subsysteme oder das Bauteil, welches getestet wird. Mehrere SR Tests sind entsprechend des Satz von Bayes ebenso mit den Methoden aus Kapitel [5.2](#) zu kombinieren.

Werden sowohl EoL Tests als auch SR Tests durchgeführt, so sind für die aus den EoL Tests gewonnenen Informationen über die Ausfallmoden der Systemelemente der Systemebene, welche in den SR Tests involviert sind, Zuverlässigkeitsverteilungen abzuleiten. So können diese mit den Zuverlässigkeitsverteilungen der SR Tests kombiniert werden. Um eine Systemaussage zu erhalten, werden die Zuverlässigkeitsverteilungen dieser Systemebene auf die oberste Systemebene aggregiert nach den Methoden aus Kapitel [2.2.4](#). Werden neben EoL Tests zusätzlich auf verschiedenen Systemebenen (beispielsweise Subsysteme und Gesamtsystem) SR Tests durchgeführt, so sind die Informationen der Zuverlässigkeitsverteilungen der SR Tests der höheren Systemebenen zusätzlich mit den aggregierten Zuverlässigkeitsverteilungen entsprechend des Satz von Bayes zu kombinieren.

Um die P_{ts} zu berechnen, sind bei der Kombination von EoL und SR Tests die Hypothesen in der Zuverlässigkeitsebene nach den Gleichungen [4.13](#) und [4.14](#) wie beim SR Test zu verwenden. Hierzu ist als Zuverlässigkeitsverteilung $f_{\text{Sys,Kombi}}(R)$ die resultierende des Gesamtsystems für die geforderte Lebensdauer als Verteilung $g(R)$ in den Gleichungen [4.15](#) und [4.16](#) zu verwenden.

Um die notwendigen Stichprobenumfänge der Tests zu identifizieren, können entsprechend der gewünschten P_{ts} die erforderlichen Umfänge gefunden werden. Dabei ist je nach Systemstruktur und Typ sowie Anzahl der Tests ein mehrdimensionales Optimierungsproblem zu lösen, da jeder Test seinen eigenen Stichprobenumfang besitzt und die Tests sich bezüglich der P_{ts} gegenseitig beeinflussen. Werden jedoch ausschließlich EoL Tests verwendet, so kann Information über die Verteilung der Lebensdauerquantile gewonnen werden und die Gleichungen [4.6](#) und [4.7](#) mit den Formulierungen über die Lebensdaueranforderung können zum Einsatz kommen.

6.2.3 Vergleich der Berechnungsmethoden bei End-of-Life Tests

Um die beiden für den EoL Test verfügbaren Berechnungsmethoden zu vergleichen, ist in den Abbildungen [6.4](#) und [6.5](#) die P_{ts} für reine Seriensysteme mit verschiedener Anzahl Komponenten, wovon jede eine einzigen Ausfallmode besitzt, dargestellt. Abbildung [6.4](#) zeigt die EoL Tests der Komponenten mit gleicher Aufteilung der Prüflinge und Abbildung [6.5](#) zeigt die EoL Tests des Gesamtsystems. Dabei wurden jeweils vier verschiedene Systeme vergli-

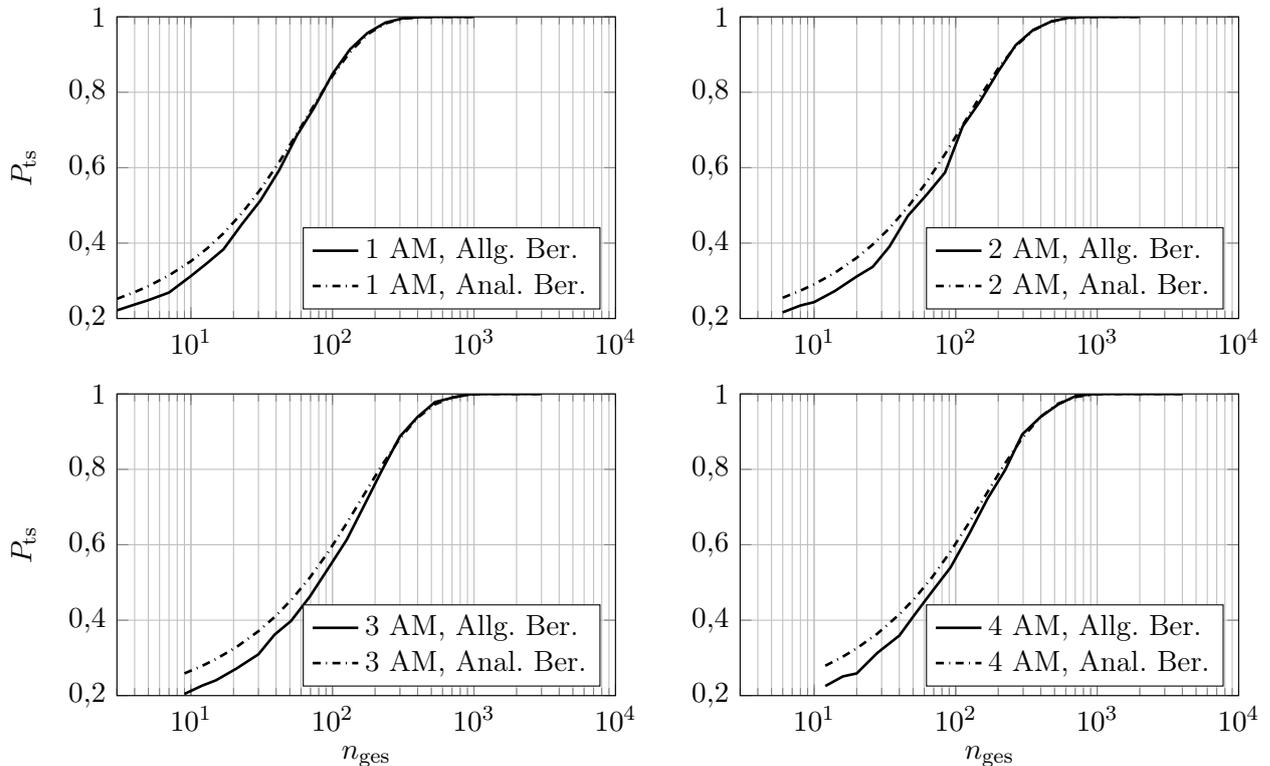


Abbildung 6.4: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge n für den unzensierten EoL Test der Komponenten bei verschiedenen Seriensystemen. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $s = 19,26\%$.

chen, wovon das erste System lediglich eine einzige Ausfallmode besitzt, das zweite System zwei, das dritte drei und das vierte vier. Die vier zugehörigen Ausfallverteilungen lauten wie folgt: $\mathcal{W}(1; 3)$, $\mathcal{W}(1; 2,5)$, $\mathcal{W}(2; 2)$, $\mathcal{W}(0,8; 3,5)$. Für die allgemeine Berechnungsmethode wurden jeweils 10.000 Iterationen verwendet. Vergleicht man die die Kurven der P_{ts} der Komponententests, so ist zu erkennen, dass die analytische und approximative Berechnungsmethode eine gute Übereinstimmung mit der allgemeinen Berechnungsmethode besitzt. So sind die Abweichungen der P_{ts} für kleine Stichprobenumfänge im einstelligen Prozentbereich und für größere Stichprobenumfänge nahezu Null. Hieraus kann geschlussfolgert werden, dass die analytische und approximative Methode ein sehr guter Ersatz für die beliebige genaue allgemeine Berechnungsmethode darstellt. Die Kurven der P_{ts} des Gesamtsystemtests hingegen zeigen deutliche Abweichungen auf. Dies ist in den für die Auswertung der Ausfallmoden teilweise stark zensierten Stichproben des Seriensystems begründet. Die MLE besitzt dabei eine starke Verzerrung der Schätzung des Weibullformaparameters [\[227\]](#), welche sich hier ebenso zeigt. Die analytische und approximative Berechnungsmethode hingegen besitzt keine solche Verzerrung. Für die Berechnung sollte dieser Unterschied bestenfalls berücksichtigt werden. Grundsätzlich sollte die allgemeine Berechnungsmethode der analyti-

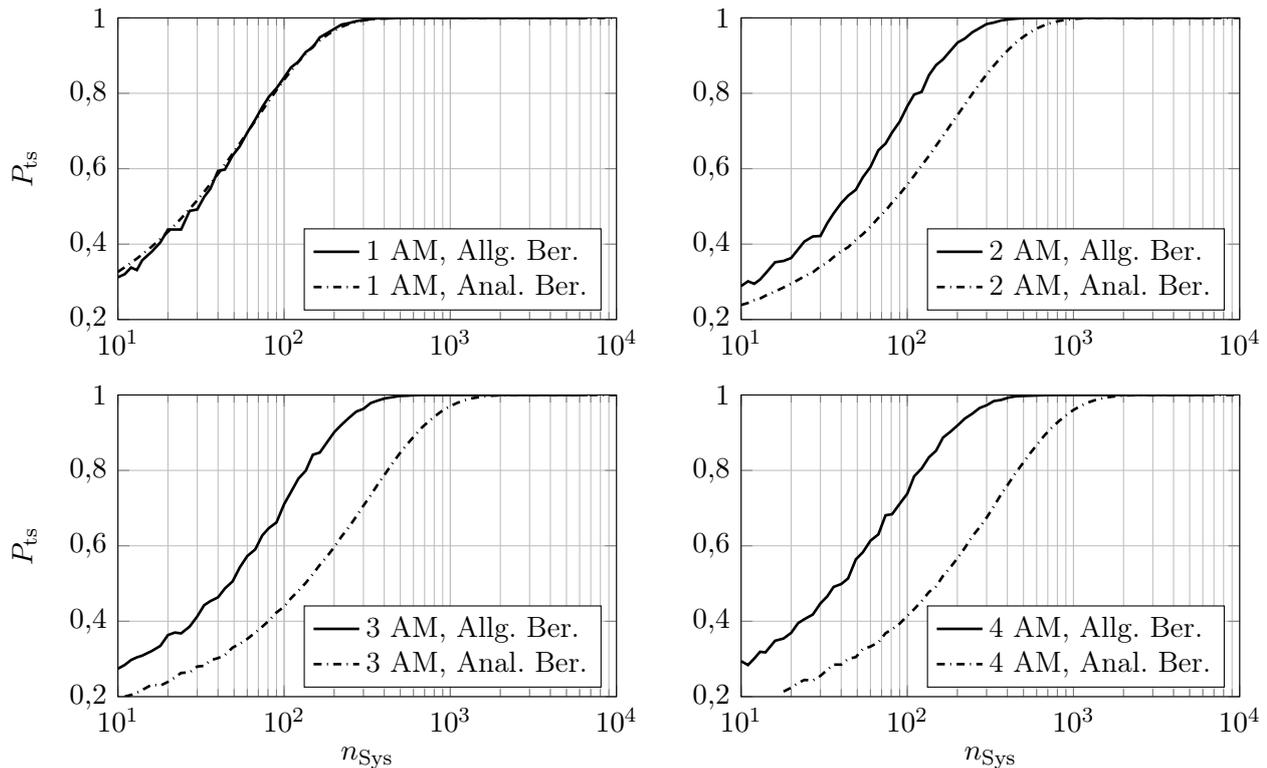


Abbildung 6.5: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge n für den unzensierten EoL Test des Gesamtsystems bei verschiedenen Seriensystemen. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $s = 19,26\%$.

schen und approximativen vorgezogen werden und gegebenenfalls eine Verzerrungskorrektur, wie beispielsweise in [211] vorgestellt, implementiert werden. Bei einem Parallelsystem wird diese Abweichung nicht auftreten, da dort keine Zensierungen vorhanden sind.

6.3 Berücksichtigung von Unsicherheit in der Vorkenntnis

Informationen sind grundsätzlich mit Unsicherheit behaftet. Die Vorkenntnis über die Zuverlässigkeit und die Ausfallverteilung im speziellen sind demnach ebenso mit Unsicherheiten behaftet. Um diese in den Betrachtungen der Zuverlässigkeitsabsicherung berücksichtigen zu können, werden im Folgenden Methoden und Verfahren vorgestellt und die Berechnung der P_{ts} für diesen Fall entwickelt.

6.3.1 Berechnung der Probability of Test Success

Um die P_{ts} berechnen zu können, muss die epistemische Unsicherheit der Vorkenntnis abgebildet werden. Es muss also die Streuung der Zuverlässigkeit (Vorkenntnis vom Typ SR Test) oder die Streuung der Parameter der Ausfallverteilung (Vorkenntnis vom Typ EoL Test) welche aufgrund der Unsicherheit der Beobachtung bei deren Bestimmung entstanden ist, bestimmt werden. Die Unsicherheit der Vorkenntnis bildet demnach die Güte der Vor-

kenntnis ab. Ist die Güte unendlich hoch, so würde die Unsicherheit verschwinden und die Zuverlässigkeit, beziehungsweise die Parameter der Ausfallverteilung könnten als einzelner, scharfer Wert angegeben werden.

Zur Berechnung der P_{ts} mit Unsicherheit der Vorkenntnis ist zwischen dem EoL Test und dem SR Test zu unterscheiden. Außerdem kann neben einer allgemeinen Berechnungsmethode, welche grundsätzlich fähig ist jegliche Gegebenheiten abzubilden, auch eine analytische Berechnung entwickelt werden. Sie werden nachfolgend vorgestellt.

Allgemeine Berechnung bei EoL Tests

Voraussetzung für die Berechnung der P_{ts} bei EoL Tests ist eine Vorkenntnis vom Typ EoL Test. Das heißt eine Ausfallverteilung mit Angabe des ursprünglichen Stichprobenumfangs, oder die Angabe der ursprünglichen Stichprobe in Form von Ausfallzeiten selbst. Die hier angeführten Methoden und Verfahren sind für die zweiparametrische Weibullverteilung formuliert. Grundsätzlich lassen sich diese aber auch für andere Verteilungen anwenden.

Zur allgemeinen Berechnung der P_{ts} soll grundsätzlich wieder jener Bootstrap-Ansatz verwendet werden, welcher in Kapitel [4.2.1](#) vorgestellt wurde. Um jedoch die Streuung der Parameter der Ausfallverteilung zu bestimmen und in die Berechnung zu integrieren, wird der Ansatz zu einem doppelten Bootstrap-Ansatz erweitert. Dabei wird in einem ersten Schritt aus der Ausfallverteilung eine Bootstrap-Stichprobe vom Umfang der Vorkenntnis n_0 erzeugt. Dies kann parametrisch oder nicht-parametrisch erfolgen. Diese Stichprobe wird dann verwendet um die Parameter der Ausfallverteilung zu bestimmen, welche dann wiederum erneut verwendet werden um eine weitere Bootstrap-Stichprobe von Umfang n und Zensierung des zu planenden und zu bewertenden Tests zu erzeugen. Durch dieses doppelte Vorgehen, werden beide Stichprobenumfänge (n_0 und n) berücksichtigt und die entsprechende Streuung und Unsicherheit dieser kombinierten Umfänge können abgebildet werden. Die weitere Berechnung erfolgt wie im Falle von sicherer Vorkenntnis. Der erweiterte Ablaufplan dazu ist in [Abbildung 6.6](#) abgebildet. Aufgrund des hier doppelt angewandten Bootstrap-Verfahrens, ist die Anzahl der Iterationen höher zu wählen als im einfacheren Fall ohne Unsicherheit. Idealerweise wird in jedem Fall eine Untersuchung der Konvergenz bezüglich der Iterationszahl durchgeführt.

Analytische und Approximative Berechnung bei EoL Tests

Die in Kapitel [4.2.3](#) beschriebenen Ansätze, Verfahren und Methoden verwenden die asymptotische Verteilung des Lebensdauerquantils um die P_{ts} in analytischer Weise zu berechnen. Dabei werden die asymptotischen Standardabweichungen σ_{H_0} und σ_{H_1} unter Gültigkeit der beiden Hypothesen mittels des Zentralen Grenzwertsatzes und einer Taylorreihenapproximation aus den Gleichungen [4.38](#) und [4.40](#) bestimmt. Die Verteilungen der Lebensdauerquantile für die beiden Fälle ergeben sich dann nach den Gleichungen [4.37](#) und [4.39](#) als Normalverteilung. Dabei werden die Lagen μ_{H_0} und μ_{H_1} dieser Verteilungen über die Vorkenntnis bestimmt, denn sie werden direkt durch die definierten Hypothesen festgelegt und sind unabhängig der Überlegungen zum Zentralen Grenzwertsatz und dem Stichprobenumfang. Im Falle der Vorkenntnis ohne Unsicherheit ist dies unter Gültigkeit der Alternativhypothese im Falle einer zweiparametrischen Weibullverteilung beispielsweise $\mu_{H_1} = T(-\ln(R_s))^{1/b}$, siehe auch Gleichung [4.37](#). Aufgrund der Unsicherheit in der Vorkenntnis kann jedoch nicht weiter ein einziger Wert für die Parameter der Ausfallverteilung angegeben werden, was

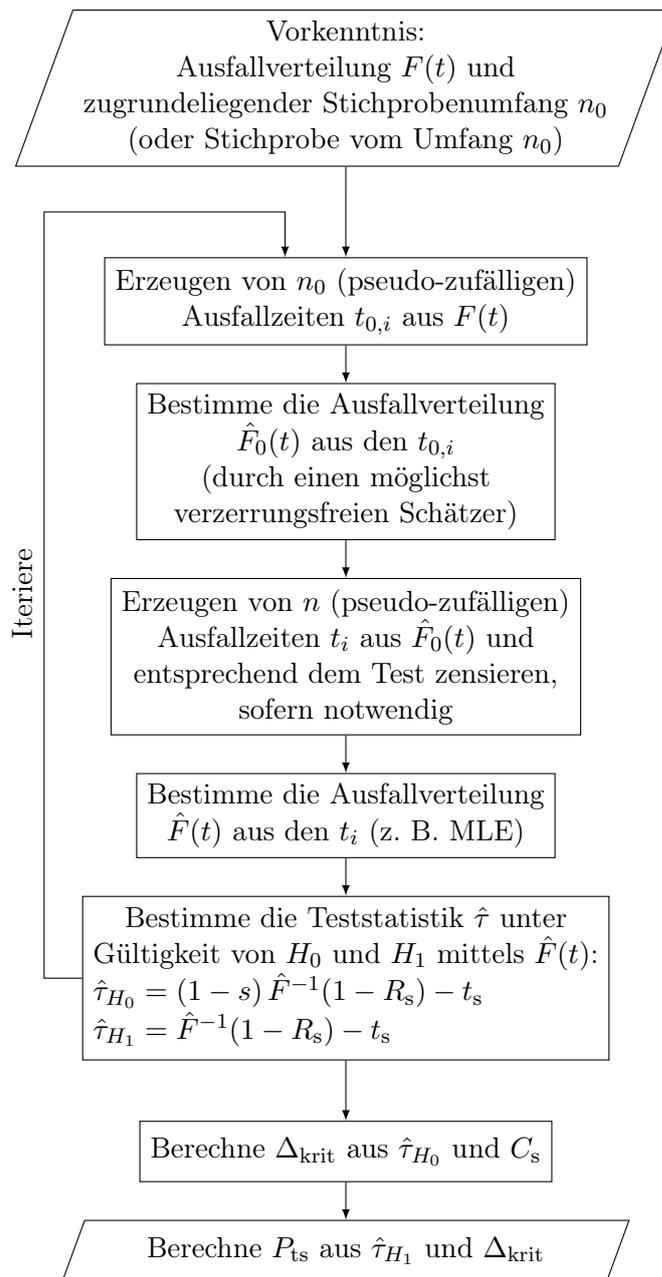


Abbildung 6.6: Vorgehen der allgemeinen Berechnungsmethode der Probability of Test Success P_{ts} von EoL Tests bei Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis.

zur Folge hat, dass auch die Lage des Lebensdauerquantils streut. Mit demselben Ansatz wie er in Kapitel 4.2.3 verwendet wird, kann jedoch auch hierbei die Streuung über den Zentralen Grenzwertsatz und Taylorreihenapproximation als Normalverteilung bestimmt werden. Dazu muss lediglich der Stichprobenumfang n_0 welcher der Vorkenntnis zugrunde liegt verwendet werden. Damit ergibt sich die asymptotische Normalverteilung der Lage des Lebensdauerquantils unter Gültigkeit der Alternativhypothese μ_{H_1} als:

$$\mu_{H_1} \sim \mathcal{N} \left(T(-\ln(R_s))^{1/b}; \sigma_{H_1, n_0} \right). \quad (6.21)$$

mit

$$\sigma_{H_1, n_0} = \left((-\ln(R_s))^{2/b} \text{Var}(T) + \frac{T^2}{b^4} \ln(-\ln(R_s))^2 (-\ln(R_s))^{2/b} \text{Var}(b) - \frac{2T^2}{b^2} \ln(-\ln(R_s)) (-\ln(R_s))^{2/b} \text{Cov}(T, b) \right)^{1/2} \quad (6.22)$$

bei einer zweiparametrischen Weibullverteilung. Dabei ist Gleichung 6.22 analog zu Gleichung 4.38 formuliert. Wichtig ist dabei jedoch, dass die Varianzen und Kovarianzen in dieser Gleichung mittels den synthetischen Ausfallzeiten (Gleichungen 4.36 oder 4.37) entsprechend n_0 , statt n bestimmt werden. Die Beziehungen zwischen der Likelihood, deren Ableitungen und den Varianzen sowie Kovarianzen aus den Gleichungen 4.29 bis 4.32 sind weiterhin gültig. Die Parameter der Weibullverteilung T und b sind auch hier die der Vorkenntnis (ohne Unsicherheit). Die Lage der asymptotischen Verteilung der Lage des Lebensdauerquantils (Gleichung 6.21) ist dabei identisch mit der Lage des Lebensdauerquantils, für den Fall es würde keine Unsicherheit berücksichtigt werden. Bei dem hier vorliegenden Fall, dass der Lageparameter einer Normalverteilung wieder normalverteilt ist, spricht man auch von einer Mischverteilung und die resultierende Verteilung ist wieder eine Normalverteilung [228]. Dabei entspricht die Lage der resultierenden Verteilung jener der Verteilung, die den streuenden Lageparameter beschreibt. Die Varianzen hingegen werden addiert, was bedeutet, dass die resultierende Standardabweichung σ_Σ die geometrische Summe der Standardabweichungen der beiden Verteilungen ist. Damit ist die asymptotische Normalverteilung des Lebensdauerquantils für die Gültigkeit der Alternativhypothese mit Berücksichtigung der Unsicherheit der Vorkenntnis folgendermaßen bestimmt:

$$t_{R_s, H_1} \sim \mathcal{N}(t_p; \sigma_{\Sigma, H_1}) = \mathcal{N}\left(T (-\ln(R_s))^{1/b}; \sqrt{\sigma_{H_1, n_0}^2 + \sigma_{H_1}^2}\right) \quad (6.23)$$

mit

$$\sigma_{\Sigma, H_1} = \sqrt{\sigma_{H_1, n_0}^2 + \sigma_{H_1}^2}. \quad (6.24)$$

Aufgrund der Beziehung aus Gleichung 4.42 ergibt sich die asymptotische Normalverteilung der Lage des Lebensdauerquantils μ_{H_0} für die Gültigkeit von H_0 zu:

$$\mu_{H_0} \sim \mathcal{N}(t_s; (1-s) \cdot \sigma_{H_1, n_0}) = \mathcal{N}\left(t_s; \frac{t_s}{T} (-\ln(R_s))^{-1/b} \sigma_{H_1, n_0}\right). \quad (6.25)$$

Die Standardabweichung der Lage des Lebensdauerquantils unter Gültigkeit der Nullhypothese kann demnach entweder analog zu Gleichung 6.22 mit den Parametern der nach Gleichung 4.26 verschobenen Ausfallverteilung berechnet werden oder einfacher aus der Standardabweichung unter Gültigkeit der Alternativhypothese, also

$$\sigma_{H_0, n_0} = (1-s) \cdot \sigma_{H_1, n_0} = \frac{t_s}{T} (-\ln(R_s))^{-1/b} \sigma_{H_1, n_0}. \quad (6.26)$$

Entsprechend Gleichung 6.23 gilt analog für die Gültigkeit der Nullhypothese die folgende asymptotische Verteilung:

$$t_{R_s, H_0} \sim \mathcal{N}(t_s; \sigma_{\Sigma, H_0}) \quad (6.27)$$

mit

$$\sigma_{\Sigma, H_0} = \sqrt{\sigma_{H_0, n_0}^2 + \sigma_{H_0}^2} = \frac{t_s}{T} (-\ln(R_s))^{-1/b} \sqrt{\sigma_{H_1, n_0}^2 + \sigma_{H_1}^2} = (1-s) \cdot \sigma_{\Sigma, H_1}. \quad (6.28)$$

Hierbei sind die Werte der Standardabweichungen aufgrund der Unsicherheit in der Vorkenntnis σ_{H_1, n_0} und σ_{H_0, n_0} entsprechend den hier vorgestellten Gleichungen [6.22](#) und [6.26](#) zu bestimmen. Die Standardabweichungen σ_{H_1} und σ_{H_0} , welche aufgrund des Stichprobenumfangs des Tests resultieren, sind dagegen nach den Gleichungen [4.38](#) und [4.40](#), wie in Kapitel [4.2.3](#) vorgestellt, zu berechnen. Mit diesen Gleichungen lässt sich die P_{ts} eines EoL Tests unter Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis folgendermaßen berechnen:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(C_s; 0, \sigma_{\Sigma, H_0}\right); T(-\ln(R_s))^{1/b} - t_s, \sigma_{\Sigma, H_1}\right). \quad (6.29)$$

Da auch hier die Beziehung aus Gleichung [4.42](#) zwischen den Standardabweichungen der beiden Hypothesen gültig ist, kann die P_{ts} auch einfacher als

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(C_s; 0, \frac{t_s}{T}(-\ln(R_s))^{-1/b} \sigma_{\Sigma, H_1}\right); T(-\ln(R_s))^{1/b} - t_s, \sigma_{\Sigma, H_1}\right). \quad (6.30)$$

berechnet werden, siehe auch Gleichung [6.28](#).

Die hier dargestellten Vorgehen und Gleichungen sind für den Fall, dass das Lebensdauerquantil über die Parameter der Ausfallverteilung bestimmt werden. Die Parameter sind wiederum durch eine MLE Schätzung aus der Stichprobe des Tests bestimmt. Zudem sind diese für die zweiparametrische Weibullverteilung formuliert. Der Grundsatz der hier vorgestellten Überlegungen lässt sich jedoch auch auf den Fall der Quantilsbestimmung als Stichprobenquantil sowie die Beschreibung des Lebensdauerquantils als Lognormalverteilung, wie in Kapitel [4.2.3](#) beschrieben, übertragen. Dazu muss lediglich die Standardabweichung entsprechend den Gleichungen aus Kapitel [4.2.3](#) für den Stichprobenumfang der Vorkenntnis n_0 berechnet werden und mit der Standardabweichung entsprechend des Stichprobenumfangs des Tests n , wie beschrieben, geometrisch addiert werden zu $\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{n_0}^2 + \sigma_n^2}$, siehe Gleichungen [6.24](#) und [6.28](#).

Anhand der hier vorgestellten Gleichungen wird ersichtlich, dass die P_{ts} bei EoL Tests mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis maximal den Wert erreichen kann, welcher dem Stichprobenumfang der Vorkenntnis bei einer Rechnung ohne Unsicherheit entspricht, siehe die Gleichungen [6.24](#) und [6.28](#). Für die Praxis bedeutet dies, dass die P_{ts} bei Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis immer kleiner ausfallen wird, als wenn die Unsicherheit nicht berücksichtigt werden würde. Außerdem würde ein Stichprobenumfang, welcher größer als jener der Vorkenntnis ist $n > n_0$, zu keinem Anstieg der P_{ts} führen. Was das für die praktische Anwendung bedeutet, wird in Kapitel [7](#) weiter thematisiert.

Berechnung bei SR Tests

Die Berechnung der P_{ts} ist in der allgemeinen Berechnung nicht inkludiert, da sie entsprechend den nachfolgenden Gleichungen in exakter und analytischer Weise berechnet werden kann. Soll die Unsicherheit in der Vorkenntnis berücksichtigt werden, muss die Vorkenntnis gegebenenfalls zunächst in eine geeignete Form übersetzt werden. Liegt die Vorkenntnis in Form eines SR Tests als Betaverteilung vor, so kann sie direkt verwendet werden. Im Falle einer Vorkenntnis in Form eines EoL Tests, also einer Ausfallverteilung muss diese ebenfalls in eine Betaverteilung übersetzt werden. Dies kann entsprechend des in Kapitel [5.1.1](#) vorgestellten Bootstrap-Verfahrens geschehen.

Der Ansatz aus Gleichung [4.16](#) mittels der Binomialverteilung kann hier nicht weiter verwendet werden, denn der Parameter der Erfolgswahrscheinlichkeit, welcher in diesem Kontext die

Ausfallwahrscheinlichkeit ist, ist nicht weiter ein einziger Wert, sondern streut entsprechend der Beta-Verteilung der Vorkenntnis (entspricht der Unsicherheit). Dies entspricht jedoch der Vorstellung, welche die Beta-Binomialverteilung beschreibt. Es kann demnach die P_{ts} bei Vorkenntnis in Form einer Beta-Verteilung $\mathcal{B}(A; B)$ folgendermaßen berechnet werden um die Unsicherheit in der Vorkenntnis zu berücksichtigen [229]:

$$P_{ts} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \frac{\beta(B+i, A+n-i)}{\beta(B, A)}. \quad (6.31)$$

Dabei beschreibt die Beta-Verteilung mit den Parametern A und B die Zuverlässigkeitsverteilung zur geforderten Lebensdauer. Im geplanten SR Test mit dem Stichprobenumfang n werden dabei maximal k Ausfälle zugelassen.

6.3.2 Vergleich der Berechnungsmethoden bei End-of-Life Tests

Im Folgenden werden die allgemeine Berechnungsmethode und die analytische und approximative Berechnungsmethode für EoL Tests an Beispielen verglichen um die wesentlichen Unterschiede herauszuarbeiten. Für ein Zuverlässigkeitsziel von $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ und einer Vorkenntnis über die Ausfallverteilung mit $\mathcal{W}(1; 3)$ ergibt sich für verschiedene Stichprobenumfänge n des unzensierten EoL Tests und variierende Stichprobenumfänge der Vorkenntnis n_0 das in Abbildung 6.7 dargestellte Bild der Werte der P_{ts} für die beiden Berechnungsmethoden. Hierbei ist zu erkennen, dass die analytische und ap-

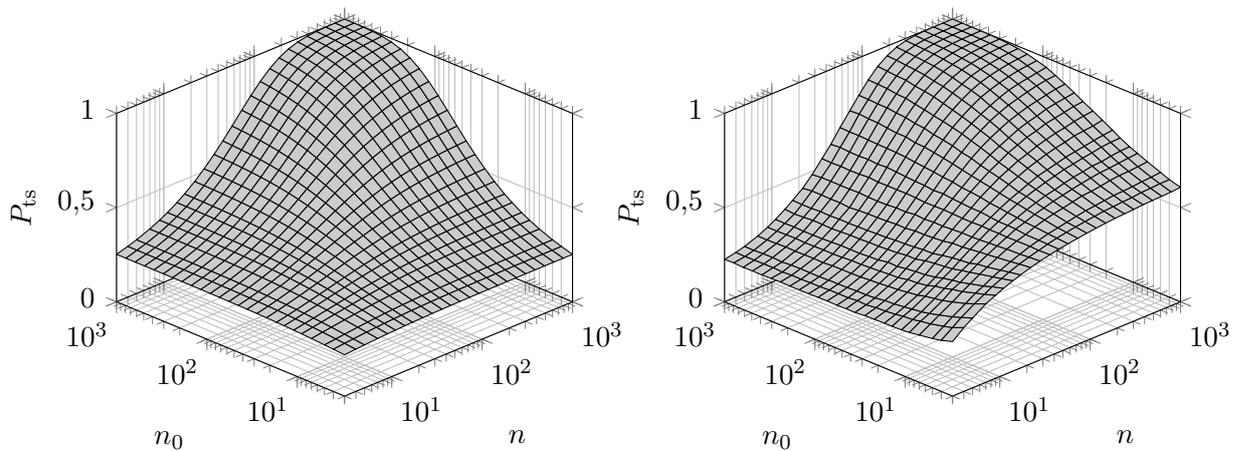


Abbildung 6.7: Werte der P_{ts} eines unzensierten EoL Tests bei Berücksichtigung der Unsicherheit berechnet mit der analytischen und approximativen Methode (links) und der allgemeinen Methode (rechts). Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1; 3)$.

proximative Berechnungsmethode ein zur Diagonalen der Achse der Stichprobenumfänge symmetrisches Bild liefert. Dies deckt sich mit der Vorstellung, dass sich durch eine Erhöhung der Stichprobenumfänge n im Test eine schlechte Güte der Vorkenntnis in Form eines niedrigen zugrundeliegenden Stichprobenumfangs n_0 nicht ausgleichen lässt. Das heißt der Stichprobenumfang der Vorkenntnis n_0 gibt die maximale P_{ts} vor, sie kann nicht über diesen Wert anwachsen, auch nicht wenn $n \rightarrow \infty$. Dies ist bei der allgemeinen Berechnungsmethode nicht der Fall. Es ist zu sehen, wie die Werte der P_{ts} auch mit steigendem n über den eigentlich maximal möglichen Wert ansteigen. Dieses Verhalten kann durch

die Verzerrung der MLE Schätzung bezüglich des Weibullformparameters b erklärt werden. Für kleine Stichprobenumfänge n_0 wird dabei im ersten Bootstrap-Schritt der Formparameter etwas überschätzt. Dies hat zur Folge, dass die im zweiten Schritt des Bootstraps, bei der Erzeugung der Bootstrap-Stichprobe der Größe n die Ausfallzeiten weniger streuen als gewünscht um die Unsicherheit korrekt abzubilden. Die damit erneut geschätzten Weibullparameter werden dann bei kleinen n erneut überschätzt. Es verstärkt sich also durch diesen doppelten Bootstrap-Ansatz die Überschätzung des Formparameters aufgrund der Verzerrung der MLE. Folglich ist die damit abgebildete Streuung des Lebensdauerquantils unter Gültigkeit der beiden Hypothesen zu klein, was wiederum in vergrößerten Werten der P_{ts} resultiert. Dieser Sachverhalt ist beispielhaft in Abbildung 6.8 dargestellt. Da bei

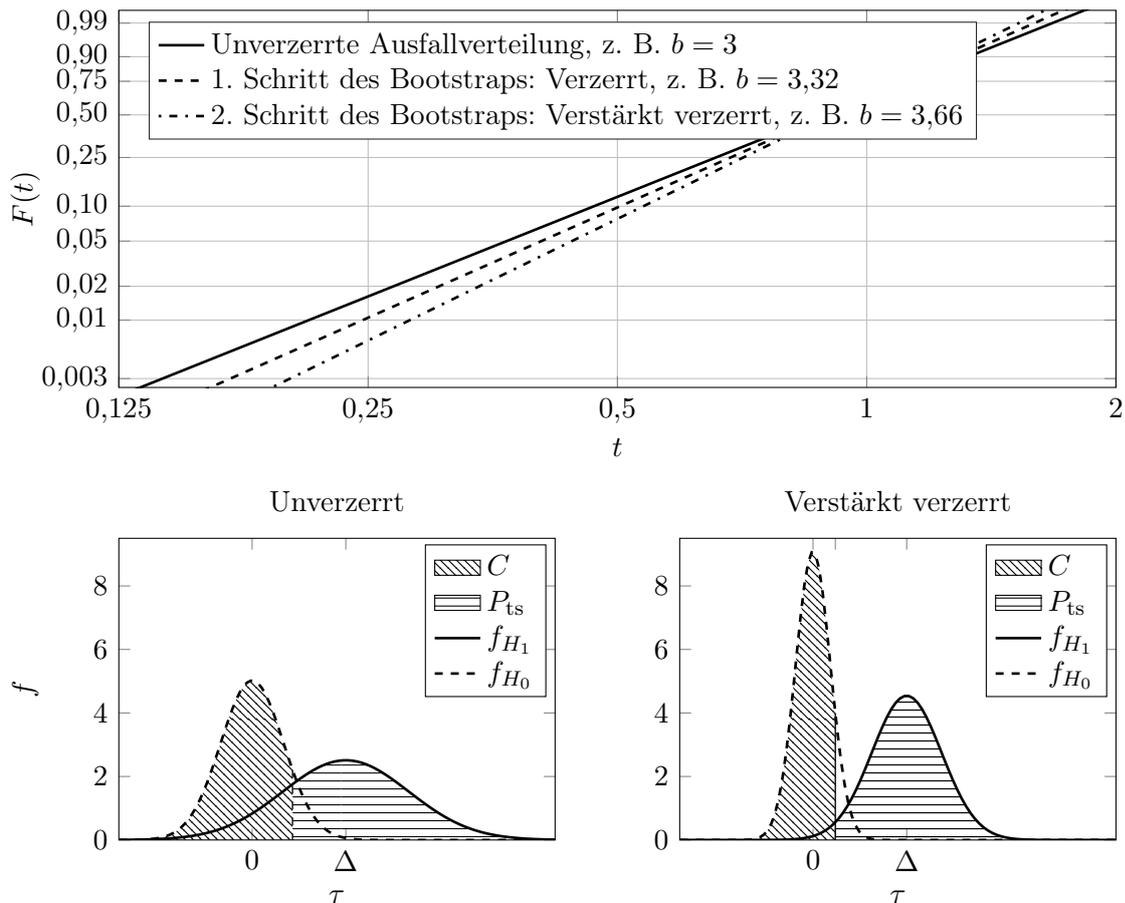


Abbildung 6.8: Effekt der verstärkten Verzerrung der Schätzung des Weibullformparameters und dessen Wirkung auf die Größe der P_{ts} bei der Berechnung mittels der allgemeinen Methode zur Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis. Die P_{ts} steigt im verzerrten Fall an, da die Überlappung der Null- und Alternativverteilungen abnimmt.

der analytischen Berechnung die Schätzung der Unsicherheit (Streuung) der Vorkenntnis und des zu analysierenden Tests getrennt voneinander stattfindet, ist dieses Phänomen der verstärkten Verzerrung nicht vorhanden. Um diese Überschätzung der P_{ts} möglichst zu unterbinden, empfiehlt es sich mindestens für die Bootstrap-Stichproben des ersten Schritts, zur Schätzung der Streuung der Parameter der Ausfallverteilung (siehe Abbildung 6.6), einen verzerrungsfreien beziehungsweise korrigierten Schätzer zu verwenden. Ein Überblick über die korrigierten MLE Schätzer kann in [80, 109] gewonnen werden.

6.4 Testplanung für einen effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit

Für einen effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit bedarf es mögliche Tests objektiv zu bewerten. Hierbei gilt es sowohl die Systemstruktur als auch die Vorkenntnis in umfassender und korrekter Weise zu berücksichtigen. Um dies zu ermöglichen, werden im Folgenden die beschriebenen Ansätze zur Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes, als auch die Berücksichtigung der Vorkenntnis über die Bewertung der P_{ts} inklusive Systemstruktur und Unsicherheit kombiniert.

6.4.1 Berechnung der Probability of Test Success

Sowohl bei der kombinierten Berücksichtigung der Vorkenntnis, der Systemstruktur als auch der Unsicherheit in der Vorkenntnis kann nach der Testart unterschieden werden um die P_{ts} zu berechnen. Neben einer allgemeinen Berechnungsmethode für EoL Tests, kann auch eine analytische entwickelt werden. Bei ausschließlichem Einsatz von SR Tests, kann die P_{ts} exakt berechnet werden, wohingegen bei einer Kombination der beiden Testarten wieder auf eine approximative Methode zurückgegriffen werden muss.

Allgemeine Berechnung bei EoL Tests

Die allgemeine Berechnung für den Fall, dass für den Systemnachweis ausschließlich Tests durchgeführt werden, welche ausreichend viele Ausfälle erzeugen, sodass die Schätzung einer Ausfallverteilung möglich ist, kann durch die Kombination der bereits beschriebenen Vorgehen erreicht werden. Das Vorgehen ist in Abbildung [6.9](#) dargestellt und im Folgenden erläutert: (1) Im ersten Schritt werden dabei je Ausfallmode Bootstrap-Stichproben vom Umfang $n_{l,0}$ und $n_{l,0} + n$ erzeugt. (2) Damit werden jeweils Ausfallverteilungen bestimmt und anschließend Systemlebensdauerquantile bei der geforderten Zuverlässigkeit gebildet um die Unsicherheit in der Vorkenntnis pro Ausfallmode abschätzen zu können. (3) Die entsprechend $n_{l,0}$ je Ausfallmode geschätzten Ausfallverteilungen werden dann verwendet um Ausfallzeiten vom Umfang n des Tests und entsprechend der Systemebene der Tests und der Systemstruktur zu erzeugen. (4) Diese Ausfallzeiten werden den jeweiligen Ausfallmoden zugeordnet, sodass sich gegebenenfalls zensierte (je nach Systemebene des Tests und Systemstruktur) Stichproben der Ausfallmoden ergeben. Soll die Vorkenntnis zusätzlich mittels des Satz von Bayes einfließen, so ist in diesem Schritt jeder den Ausfallmoden zugeordneten Stichproben noch die dem Stichprobenumfang der Vorkenntnis $n_{l,0}$ für die jeweilige Ausfallmode entsprechende Ausfallzeiten aus den geschätzten Ausfallverteilungen zu erzeugen (entspricht parametrischem Bootstrap) und hinzuzufügen, sodass man die Stichprobe vom Umfang $n + n_{l,0}$ erhält. (5) Die damit wiederum geschätzten Ausfallverteilungen der Ausfallmoden werden entsprechend der Systemstruktur zur Ausfallverteilung des Systems verknüpft. (6) Mit der Ausfallverteilung des Systems kann dann das Lebensdauerquantil bestimmt werden. Um die notwendige Korrektur der Quantilswerte vornehmen zu können, werden die in (2) gebildeten Systemlebensdauerqauntile verwendet. Durch mehrfaches Iterieren dieses Vorgehens, erhält man eine empirische Verteilung der Lebensdauerquantile: für

die Stichprobe des Tests mit Berücksichtigung der Unsicherheit auf Basis von $n+n_{l,0}$ und auf Basis der Umfänge $n+n_{l,0}$ und $n_{l,0}$ ohne Berücksichtigung der Unsicherheit. (7) Die Quantilswerte müssen dann entsprechend den Überlegungen aus Kapitel 6.1 korrigiert werden um der reduzierten Streuung aufgrund der eigentlich starren Ausfallzeiten der Stichprobe der Vorkenntnis Rechnung zu tragen. Dazu werden die Quantilswerte nach Gleichung 6.2 transformiert, wobei die dazu benötigten Varianzen durch die zusätzlich bestimmten Quantilswerte entsprechend der Umfänge $n+n_{l,0}$ und $n_{l,0}$ bestimmt werden. (8), (9), (10) Die so korrigierten Werte der Lebensdauerquantile des Systems können im Weiteren durch die bereits bekannten Rechenschritte zu Werten der Teststatistik unter Gültigkeit der beiden Hypothesen transformiert und anschließend zur Berechnung der P_{ts} verwendet werden.

Kann nicht jede Vorkenntnis der Ausfallmoden zusätzlich mit dem Satz von Bayes berücksichtigt werden, sondern nur bei einigen ausgewählten, so kann die Korrektur über die Varianzen nicht wie beschrieben vorgenommen werden. In diesem Fall ist die Korrektur analog auf die Varianz der Parameter der Ausfallverteilungen anzuwenden. Dies ermöglicht nämlich, dass jede Ausfallmode separat korrigiert wird und deswegen auch Schätzungen der Ausfallverteilungen der Ausfallmoden, zu welchen keine Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes berücksichtigt werden soll, unangetastet bleibt. Dazu sind in der Bootstrap-Iteration statt der Lebensdauerquantile des Systems, lediglich die Parameter der Ausfallverteilungen für die Stichprobengrößen n , $n+n_0$ und n_0 zu berechnen. Auch hier ist für die Stichprobengröße n das doppelte Bootstrap anzuwenden, sofern die Unsicherheit mit berücksichtigt werden soll. Als Resultat der Bootstrap-Iterationen erhält man dann Stichproben der Parameter der Ausfallverteilungen, welche dann analog zu Gleichung 6.2 mit den Varianzen dieser korrigiert werden können. Am Beispiel des i . Werts des Weibullformparameters $b_{l,i}$ einer Ausfallverteilung l lautet die Gleichung dann

$$b_{l,i,\text{komb}} = \bar{b}_l + (b_{l,i} - \bar{b}_l) \sqrt{\frac{\text{Var}_{\text{komb}}}{\text{Var}_{n+n_0}}} = \bar{b}_l + (b_{l,i} - \bar{b}_l) \sqrt{\frac{\text{Var}_{n_0}}{\text{Var}_{n+n_0} + \text{Var}_{n_0}}}. \quad (6.32)$$

Wobei die Varianzen der Parameter (hier b) aus den durch das Bootstrap erzeugten empirischen Stichproben berechnet werden. Jene Ausfallmoden, für welche keine Vorkenntnis zusätzlich berücksichtigt werden soll, wird nicht durch diese Gleichung behandelt. Die in dieser Gleichung genannten Varianzen sind selbstverständlich die den im Subskript genannten Stichprobenumfängen entsprechenden Varianzen der durch das Bootstrap berechneten Parameter der Ausfallverteilung. Dies wird für alle Parameter der Ausfallverteilungen durchgeführt. Die anschließende Aggregation der daraus gebildeten Ausfallverteilungen zur Systemausfallverteilung erlaubt die Berechnung der Lebensdauerquantile des Systems, woraus wiederum die Null- und Alternativverteilung wie gewohnt berechnet werden kann um schließlich die P_{ts} zu berechnen.

Soll nur die Unsicherheit berücksichtigt werden, jedoch die Vorkenntnis nicht zusätzlich über den Satz von Bayes, so ist lediglich pro Iteration die Ausfallverteilung der Ausfallmoden entsprechend n_0 neu zu schätzen und mit diesen Ausfallverteilungen die Stichprobe des Tests vom Umfang n zu erzeugen und basierend darauf das Lebensdauerquantil zu bestimmen. Es sind dann keine weiteren Lebensdauerquantile zu berechnen, da keine Korrektur der Streuung vorgenommen werden muss. Soll dagegen die Unsicherheit außer Acht gelassen werden und nur die Vorkenntnis zusätzlich mittels des Satz von Bayes berücksichtigt werden, so muss keine Schätzung der Unsicherheit erfolgen und es können direkt die Ausfallverteilungen der Vorkenntnis verwendet werden. Für die Korrektur der Lebensdauerquantile ist dann

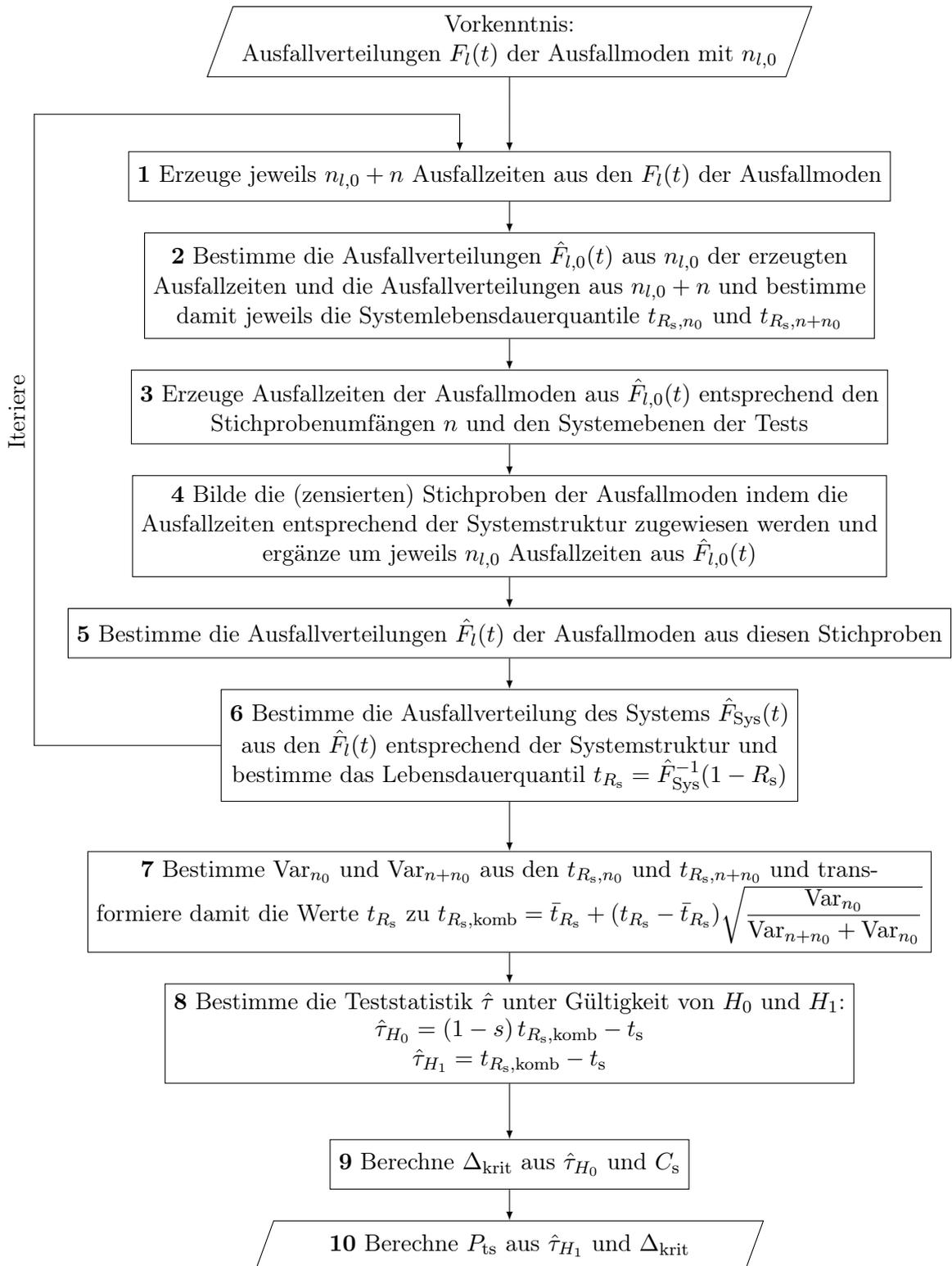


Abbildung 6.9: Vorgehen der allgemeinen Berechnungsmethode der Probability of Test Success P_{ts} von EoL Tests bei Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes, der Systemstruktur und der Unsicherheit in der Vorkenntnis.

lediglich ein weiteres Lebensdauerquantil des Systems auf Basis der Stichproben vom Umfang n_0 zu bestimmen, denn die auf Basis des Umfangs $n+n_0$ ist bereits durch die Stichprobe des Tests selbst bestimmt.

Analytische und approximative Berechnung bei EoL Tests

Auch die Ansätze zur analytischen Berechnung der P_{ts} in den jeweiligen Fällen, lassen sich kombinieren. So lässt sich die P_{ts} von EoL Tests für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit unter Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes, der Systemstruktur sowie der Unsicherheit in der Vorkenntnis in analytischer Weise berechnen. Für die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes sind die Standardabweichungen der Null- und Alternativverteilung des Systems statt mit dem Stichprobenumfang des Tests n , mit dem erweiterten Stichprobenumfang $n_{\text{post}} = n + n_0$ zu berechnen (je Ausfallmode). Dazu werden die Gleichungen aus Kapitel [6.2.2](#) verwendet. Da die Standardabweichungen bei Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes zusätzlich korrigiert werden müssen, müssen zusätzlich die Standardabweichungen der Verteilungen für die Stichprobenumfänge n_0 der Vorkenntnis berechnet werden. Wichtig ist dabei zu berücksichtigen, dass jede Ausfallmode einen anderen zugrundeliegenden Stichprobenumfang n_0 besitzen kann, welcher entsprechend verwendet werden muss. Aufgrund der aus den Einzelvarianzen der Ausfallmoden additiv gebildeten Varianz des Lebensdauerquantils des Systems, können die Varianzanteile der jeweiligen Ausfallmoden entsprechend einzeln korrigiert werden. Aus Gleichung [6.16](#) wird dann

$$\sigma_{H_1} = \sqrt{\sum_l^{K-o} \frac{\sigma_{l,n_{\text{post}}}^2 \cdot \sigma_{l,n_0}^2}{\sigma_{l,n_{\text{post}}}^2 + \sigma_{l,n_0}^2} + \sum_l^o \sigma_{l,n}^2}. \quad (6.33)$$

mit

$$\sigma_{l,n_{\text{post}}} = \sigma_{H_1} |_{n=n_{\text{post}}} = \left(\left(\frac{t_p \cdot \left(\frac{t_p}{T_l}\right)^{b_l}}{\sum_{p=1}^K b_p \cdot \left(\frac{t_p}{T_p}\right)^{b_p}} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{b_l}{T_l}\right)^2 \text{Var}(T_l) - 2 \frac{b_l}{T_l} \ln \left(\frac{t_p}{T_l}\right) \text{Cov}(T_l, b_l) + \left(\ln \left(\frac{t_p}{T_l}\right)\right)^2 \text{Var}(b_l) \right) \right)^{1/2} \quad (6.34)$$

sowie

$$\sigma_{l,n_0} = \sigma_{H_1} |_{n=n_0} \quad (6.35)$$

und

$$\sigma_{l,n} = \sigma_{H_1} |_{n=n}. \quad (6.36)$$

Wobei die Gleichungen zur Berechnung der Standardabweichungen $\sigma_{l,n_{\text{post}}}$, σ_{l,n_0} und $\sigma_{l,n}$ identisch sind. Lediglich die dabei verwendeten Varianzen und Kovarianzen werden entsprechend den Stichprobenumfängen n_{post} , n_0 und n berechnet. Die Variable t_p ist wie in Gleichung [6.16](#) das Lebensdauerquantil des Systems entsprechend der Vorkenntnis und R_s . Von den K Ausfallmoden im System wird bei $K - o$ die Vorkenntnis über den Satz von Bayes berücksichtigt und bei o Ausfallmoden nicht. Die Standardabweichung des Lebensdauerqua-

tils des Systems unter Gültigkeit der Nullhypothese und Berücksichtigung von Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes berechnet sich nach

$$\sigma_{H_0} = (1 - s) \cdot \sigma_{H_1} = \frac{t_s}{t_p} \cdot \sigma_{H_1} \quad (6.37)$$

und σ_{H_1} aus Gleichung [6.33](#).

Um zusätzlich die Unsicherheit der Vorkenntnis zu berücksichtigen, werden mit selbigen Gleichungen die Standardabweichungen der Lage der Null- und Alternativverteilung σ_{H_0, n_0} und σ_{H_1, n_0} berechnet. Dabei werden ebenfalls die Stichprobenumfänge der Vorkenntnis n_0 verwendet. Jedoch werden diese nicht korrigiert, also in Gleichung [6.33](#) $o = K$ und $n = n_0$ gesetzt). Es handelt sich hier zwar von der Interpretation um andere Werte, als jene, welche zur Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes berechnet werden, mathematisch unterscheiden sich diese jedoch nicht, weswegen die Werte gegebenenfalls nur ein Mal berechnet werden müssen. Um die Unsicherheit der Vorkenntnis zu berücksichtigen, müssen die Standardabweichungen geometrisch addiert werden, entsprechend den Gleichungen [6.24](#) und [6.28](#). Kombiniert berechnen sich die Standardabweichungen der Null- und Alternativverteilung bei Berücksichtigung der Unsicherheit und zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes über folgende Gleichungen:

$$\sigma_{\Sigma, H_1} = \sqrt{\sigma_{H_1}^2 + \sigma_{H_1, n_0}^2} = \sqrt{\sum_l^{K-o} \frac{\sigma_{l, n_{\text{post}}}^2 \cdot \sigma_{l, n_0}^2}{\sigma_{l, n_{\text{post}}}^2 + \sigma_{l, n_0}^2} + \sum_l^o \sigma_{l, n}^2 + \sum_l^K \sigma_{l, n_0}^2} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma, H_0} &= \sqrt{\sigma_{H_0}^2 + \sigma_{H_0, n_0}^2} = (1 - s) \sqrt{\sigma_{H_1}^2 + \sigma_{H_1, n_0}^2} \quad (6.39) \\ &= (1 - s) \sqrt{\sum_l^{K-o} \frac{\sigma_{l, n_{\text{post}}}^2 \cdot \sigma_{l, n_0}^2}{\sigma_{l, n_{\text{post}}}^2 + \sigma_{l, n_0}^2} + \sum_l^o \sigma_{l, n}^2 + \sum_l^K \sigma_{l, n_0}^2} \\ &= (1 - s) \cdot \sigma_{\Sigma, H_1}. \end{aligned}$$

Die P_{ts} berechnet sich dann nach Gleichung [6.29](#) oder [6.30](#).

Bei manchen Systemen mit kleinen Stichprobenumfängen auf Gesamtsystemebene kann es sein, dass nicht ausreichend Ausfälle für eine Auswertung der Ausfallverteilungen der Ausfallmoden möglich ist. Zudem kann es sein, dass die gegebenenfalls resultierende starke Zensurierung der zugeordneten Stichproben einzelner Ausfallmoden zu einer Likelihood führen, dessen Maximum großen Abstand zum festen Wert der Verteilungsparameter der Vorkenntnis hat. Dies kann mit den vorgestellten Gleichungen dazu führen, dass die Log-Likelihood Λ aus Gleichung [4.28](#) bei diesen Werten Werte aufweist, die dazu führen, dass unplausible, nämlich negative Varianzen berechnet werden. Hierbei kann beispielsweise dadurch Abhilfe geschaffen werden, dass statt der festen Werte der Verteilungsparameter aus der Vorkenntnis, die dem Maximum in diesem Fall entsprechenden verwendet werden. Im Sinne einer approximativen Abschätzung der Varianz der Lebensdauerquantile ist dies eine vertretbare Vereinfachung.

Berechnung bei SR Tests

Soll ein SR Test auf Gesamtsystemebene durchgeführt werden, so kann Gleichung [6.31](#) unverändert verwendet werden. Wichtig dabei ist, dass die Betaverteilung der Vorkenntnis für die Gesamtsystemebene und die geforderte Lebensdauer gültig ist. Gegebenenfalls muss diese

dazu zunächst beispielsweise mittels der Momentenmethode (siehe Kapitel [2.2.4](#)) aus den Betaverteilungen der Ausfallmoden zur Zuverlässigkeitsverteilung des Systems kombiniert werden.

Sollen mehrere SR Tests an Subsystemen, Bauteilen oder Komponenten durchgeführt werden, so sind zunächst die notwendigen Stichprobenumfänge zu bestimmen, welche es grundsätzlich ermöglichen das Zuverlässigkeitsziel auf Gesamtsystemebene nachzuweisen. Ist die Vorkenntnis in Form einer Betaverteilung für die jeweils relevante Systemebene des Tests gebildet, so kann sie entsprechend Gleichung [6.31](#) verwendet werden. Die P_{ts} aller Tests für den Systemnachweis berechnet sich dann entsprechend Gleichung [6.20](#) aus dem Produkt dieser Wahrscheinlichkeiten. Die Anwendung des Satz von Bayes resultiert also in einer Reduktion der erforderlichen Stichprobenumfänge, wohingegen die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis durch die Verwendung der Betaverteilung statt eines einzelnen Werts der Zuverlässigkeit umgesetzt wird. Da für den Systemnachweis alle durchzuführenden SR Tests bestehen müssen, ist die P_{ts} für den Systemnachweis mittels mehrerer SR Tests durch das Produkt der einzelnen Überlebenswahrscheinlichkeiten der SR Tests gegeben und die P_{ts} berechnet sich ebenso nach Gleichung [6.20](#).

Berechnung bei Kombination von EoL und SR Tests

Um die Kombination von EoL Tests mit SR Tests für den Systemnachweis abzubilden und die P_{ts} berechnen zu können während die Unsicherheit und die Vorkenntnis zusätzlich mit dem Satz von Bayes berücksichtigt wird, kann ein Vorgehen angewandt werden das dem in Kapitel [6.2.2](#) vorgestellten ähnlich ist. Die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis in Form eines EoL Tests mittels des Satz von Bayes, erfordert die Kombination der Stichproben der Ausfallmoden wie in Kapitel [6.1](#) beschrieben, wobei die Stichprobe der zu bewertenden EoL Tests mittels des doppelten Bootstrap-Ansatzes aus Kapitel [6.3.1](#) erzeugt werden müssen um die Unsicherheit in der Vorkenntnis abzubilden. Sind die jeweiligen Ausfallverteilungen ausgewertet, so müssen diese entsprechend der Systemstruktur auf die jeweilige Systemebene aggregiert werden, zu welcher SR Tests durchgeführt werden sollen. Im Gegensatz der bisher angeführten, analytischen Berechnungen der SR Tests, ist hier wieder ein iterativer und approximativer Ansatz, ähnlich wie in Abbildung [4.2](#) notwendig. Dazu wird ein doppelter Bootstrap durchgeführt, um Ausfallzeiten entsprechend des Stichprobenumfangs der SR Tests der jeweiligen Systemkomponente mit Berücksichtigung der Unsicherheit der Vorkenntnis zu erhalten. Die Ausfallzeiten, welche dabei vor geplantem Ende des Tests auftreten, werden für die Auswertung des SR Tests als Ausfälle mit entsprechendem Lebensdauerverhältnis gewertet (siehe Gleichung [2.58](#)). Es ist also zwingend notwendig Vorkenntnis zu allen Ausfallmoden in Form von Ausfallverteilungen vorliegen zu haben. Ist neben der Vorkenntnis über die Ausfallverteilung noch Vorkenntnis in Form einer Zuverlässigkeitsverteilung vorhanden, so kann dieses mit dem Satz von Bayes in der jeweiligen Systemebene einfließen. Die resultierenden Beta- oder Binomialverteilungen der SR Tests werden dann mit den Betaverteilungen aus den EoL Tests kombiniert, um anschließend entsprechend der Systemstruktur auf die Gesamtsystemebene aggregiert zu werden. Dort wird anhand der resultierenden Zuverlässigkeitsverteilung überprüft, ob das Zuverlässigkeitsziel des Systems erreicht wurde. Durch mehrfache Iteration kann mit Gleichung [2.59](#) die P_{ts} bestimmt werden. Der Gesamtprozess ist in Abbildung [6.10](#) schematisch aufgezeigt.

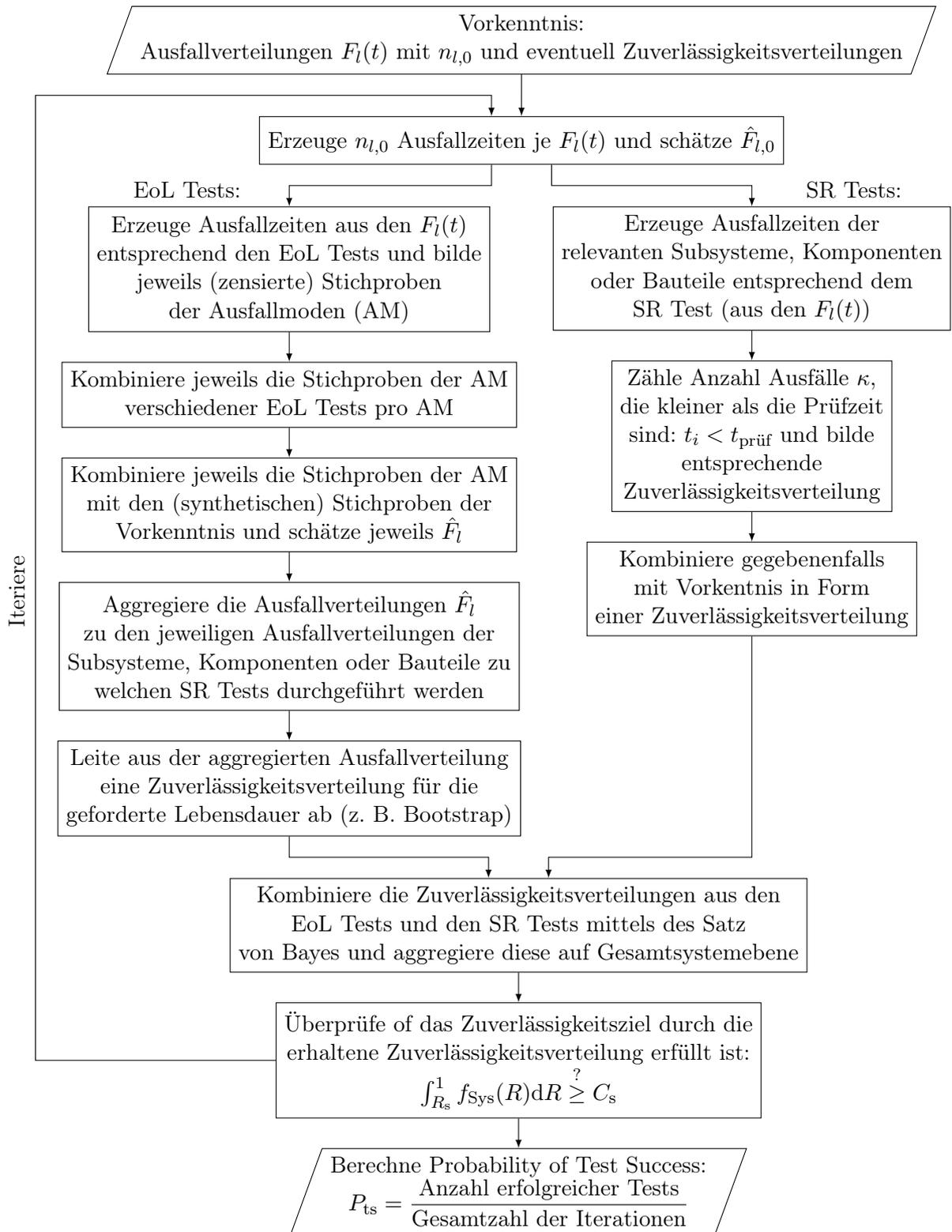


Abbildung 6.10: Vorgehen der allgemeinen Berechnungsmethode der Probability of Test Success P_{ts} bei der Kombination von EoL und SR Tests bei Berücksichtigung der Vorkennnis mit dem Satz von Bayes, der Systemstruktur und der Unsicherheit in der Vorkennnis.

6.4.2 Vorgehen und Auswahl des Zuverlässigkeitstests

Nachdem in den vorherigen Kapiteln beschrieben wurde, wie die P_{ts} von Zuverlässigkeitstests berechnet werden kann, wird im Folgenden beschrieben, wie vorzugehen ist, um den effizientesten Zuverlässigkeitstest auszuwählen. Dabei wird sowohl die Vorkenntnis zusätzlich durch den Satz von Bayes, als auch deren Unsicherheit berücksichtigt. Aufgrund der Systemstruktur, ist es möglich eine Vielzahl von Tests und Kombinationen von Tests durchzuführen um einen Systemnachweis zu führen. Um alle möglichen Optionen in schlanker Weise bewerten und berücksichtigen zu können, können beispielsweise die vorgestellten analytischen und approximativen Berechnungsverfahren verwendet werden.

Zu Beginn muss das System mit dessen Systemgrenzen und Randbedingungen, wie Belastungen, klar definiert sein. Zudem müssen die Anforderungen an das Produkt in Form des Zuverlässigkeitsziels, bestehend aus R_s und t_s festgelegt sein. Ebenso wie die Anforderungen an den Nachweis in Form der minimalen Probability of Test Success $P_{ts,min}$ und minimalen Aussagewahrscheinlichkeit C_s . Um die Tests durchzuführen, ist die Kenntnis der Testinfrastruktur, der Testmannschaft, der Verfügbarkeit der Prüflinge von Bedeutung. Sind diese Größen bekannt, kann das System weiter untersucht werden. Dabei gilt es alle Subsysteme, Komponenten, Bauteile und deren zugehörige Ausfallmoden zu identifizieren. Wichtig ist dabei, dass alle für das System und dessen Ausfall relevanten Ausfallmoden identifiziert werden und deren logische Beziehungen bezüglich des Systemausfalls in einer Zuverlässigkeits-Systemstruktur erkannt sind. Um die Ausfallmoden selbst zu identifizieren und deren Relevanz beziehungsweise Kritikalität bewerten zu können, kann unterstützend beispielsweise eine FMEA durchgeführt und Auftretenswahrscheinlichkeiten der Ausfallmoden abgeschätzt werden (siehe Kapitel [6.2](#)). Zu den identifizierten Subsystemen, Komponenten und Bauteilen bedarf es diese bezüglich deren Testmöglichkeit zu bewerten, sodass ein geschlossenes Bild bezüglich aller Systemelemente bezüglich eines Tests entsteht. Nachdem die Ausfallmoden identifiziert sind, gilt es alle möglichen Vorkenntnisquellen zu identifizieren und den Ausfallmoden zuzuweisen sowie die Vorkenntnis entsprechend aufzubereiten. Dabei kann beispielsweise ein Bootstrap-Verfahren, wie in Kapitel [5.1.2](#) beschrieben, durchgeführt werden um aus Berechnungsergebnissen Vorkenntnis ableiten zu können, oder eventuell benötigte Zuverlässigkeitsverteilungen aus vorliegenden EoL Tests ableiten zu können. Hierbei sollte auch die Unsicherheit der Vorkenntnis, also dessen jeweilig zugrundeliegender Stichprobenumfang n_0 festgestellt werden. Ist er nicht bereits durch die Vorkenntnis selbst bekannt, so könnten konservative Ansätze, wie in Kapitel [5.1.1](#) beschrieben, herangezogen werden. Zu den Stichprobenumfängen müssen die Vorkenntnisse auch bezüglich deren Anwendbarkeit und Berücksichtigung mittels des Satz von Bayes bewertet werden. Sind all diese Informationen gesammelt, so kann die P_{ts} für die gewünschten Testarten und deren Konfigurationen berechnet werden. Dabei sollten sie bestenfalls für alle technisch umsetzbaren Tests berechnet werden. Insbesondere gilt es dabei die Stichprobenumfänge zu modulieren und für Subsystem-, Komponenten-, und Bauteiltests die bezüglich der P_{ts} optimalen Prüflingsaufteilung zu identifizieren. Diese Berechnungen können zunächst durch die weniger rechenintensiven analytischen Berechnungsmethoden durchgeführt werden. Dabei können bereits Tests mit zu kleinen Werten der P_{ts} aussortiert werden und Regionen mit vielversprechend hoher P_{ts} identifiziert werden, für welche im Anschluss mit den allgemeinen Berechnungsmethoden erneut die P_{ts} berechnet wird um eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Letztlich kann so der erfolgsversprechendste und damit effizienteste Test identifiziert werden indem jener ausgewählt wird, welcher den größten Wert in der P_{ts} bezüglich der Aufwände in Form des Stichprobenumfangs aufweist. Dieses Vorgehen lässt sich zusammenfassend also folgendermaßen festhalten:

0. Systemdefinition: Systemgrenzen, Belastungen
 Anforderungen an das System: R_s, t_s
 Anforderungen an den Nachweis/Test: $C_s, P_{ts, \min}$
 Kenntnis über: Testinfrastruktur, Testmannschaft, Prüfungsverfügbarkeit etc.
1. Identifikation aller Systemelemente: Subsysteme, Komponenten, Bauteile
 Bewertung der Systemelemente bezüglich der Möglichkeit eines Tests
2. Identifikation aller relevanter Ausfallmoden und deren logischen Zusammenhänge im System: Systemstruktur
3. Identifikation aller Vorkenntnisquellen und Zuweisung zu Ausfallmoden
 Aufbereitung der Vorkenntnisse und Feststellung der Unsicherheit der Vorkenntnis
 Bewertung der Vorkenntnisse bezüglich Anwendbarkeit (insbesondere mit dem Satz von Bayes)
4. Identifikation aller technisch möglichen Tests
 Berechnung der P_{ts} für alle Tests
 (Gegebenenfalls mit optimaler Prüflingsaufteilung)
5. Identifikation von umsetzbaren Tests
 Vorauswahl möglicher effizienter Tests
6. Berechnung der P_{ts} mit großer Genauigkeit für die ausgewählten Tests
7. Identifikation des effizientesten Tests durch maximalen Wert von P_{ts} bezüglich der Aufwände beziehungsweise des Stichprobenumfangs

Gegebenenfalls ist es in der Anwendung praktikabel neben den Bewertungsgrößen unter Berücksichtigung der Unsicherheit der Vorkenntnis auch die Bewertungsgrößen ohne die Berücksichtigung der Unsicherheit zu berechnen, denn letztlich beschreibt die Unsicherheit die Unzulänglichkeit der Beobachtung. Diese Unsicherheit ist im Produktverhalten also tatsächlich nicht vorhanden, sondern haftet allein der Beobachtung an. Eine Berechnung ohne diese Unsicherheit lässt damit gegebenenfalls die tatsächlich erwartete P_{ts} besser abschätzen. Mehr dazu in Kapitel [8](#).

6.5 Zusammenfassung und Fazit

Der Nachweis der Systemzuverlässigkeit kann auf vielfältige Weise erfolgen. Dabei ist zwischen verschiedenen Testarten sowie Systemebenen zu wählen und die richtigen Stichprobenumfänge einzustellen. Um dabei einen effizienten Nachweis zu ermöglichen, wurde gezeigt, wie sich die Bewertung der möglichen Tests mit der P_{ts} darstellen lässt. Dazu wurde zunächst aufgezeigt, wie die hierbei notwendige Vorkenntnis sowohl für die Berechnung der P_{ts} , als auch zur Berücksichtigung mit dem Satz von Bayes verwendet werden kann. Berechnungsmethoden wurden entwickelt, die die Berechnung der P_{ts} bei kombinierter Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes, mit Unsicherheit und der Systemstruktur, ermöglichen. Zudem wurden approximative und analytische Berechnungsmethoden vorgestellt, die die schnelle Berechnung erlauben, welche notwendig ist, um die geeigneten Tests zu identifizieren. Es stellte sich heraus, dass die Unsicherheit in der Vorkenntnis zu einer Reduktion der möglich erreichbaren P_{ts} führt und sogar einen Maximalwert vorgibt, weswegen in der

Anwendung die P_{ts} gegebenenfalls nur ergänzend mit Unsicherheit berechnet werden sollte. Durch die damit mögliche objektive Bewertung der Zuverlässigkeitstests und deren Vergleich gegeneinander kann sichergestellt werden, dass die Zuverlässigkeit von Systemen möglichst effizient nachgewiesen wird. Dabei stellt die P_{ts} sicher, dass der Nachweis erbracht wird und die aufgewendeten Ressourcen dabei höchst effektiv eingesetzt werden. Die verfügbare Vorkenntnis fließt dabei in umfassender Weise ein, da sie als zusätzliche Information über den Satz von Bayes berücksichtigt wird.

Kapitel 7

Untersuchung der Einflüsse auf die Probability of Test Success

Die entwickelten Methoden und Vorgehen zur Berechnung der P_{ts} sowie zum effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit ermöglichen viele Untersuchungen. Nachfolgend soll durch einige exemplarische Untersuchungen ein Verständnis der Einflüsse auf den Zuverlässigkeitsnachweis gewonnen werden. Dazu wird im speziellen der Einfluss auf die P_{ts} untersucht, da diese die Eignung der Tests bezüglich des Zuverlässigkeitsnachweises wiedergibt. Zunächst wird der Einfluss der Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes untersucht, anschließend die Berücksichtigung der Systemstruktur. Abschließend wird der Einfluss der Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis untersucht. Als Stellvertreter der Testarten werden ausschließlich unzensierte EoL Tests und SR Tests ohne zugelassene Ausfälle untersucht. Da es sich bei den meisten technischen Produkten um reine Seriensysteme handelt, werden im Folgenden ausschließlich diese untersucht. Auch wenn sich einige der Erkenntnisse übertragen lassen, sind die Aussagen demnach auf Seriensysteme beschränkt.

7.1 Einfluss der Berücksichtigung von Vorkenntnis über den Satz von Bayes

Sofern die Zuverlässigkeitsaussage der Vorkenntnis positiv genug ist, hat die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes bei gleichem Stichprobenumfang des Tests n zur Folge, dass die P_{ts} ansteigt. Aus diesem Grund kann dadurch der Testaufwand reduziert werden um dieselbe P_{ts} zu erreichen.

7.1.1 Bei End-of-Life Tests

In Abbildung [7.1](#) ist beispielhaft für ein System mit einer Ausfallmode mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und dem Zuverlässigkeitsziel $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ die Veränderung der P_{ts} bei Variation der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis n_0 und eines unzensierten EoL Tests n dargestellt. Hierbei wurde sowohl die allgemeine Berechnungsmethode als auch die analytisch approximative Berechnungsmethode verwendet. Zum einen ist dabei zu sehen, dass die beiden Berechnungsmethoden eine sehr gute Übereinstimmung zeigen. Zum anderen

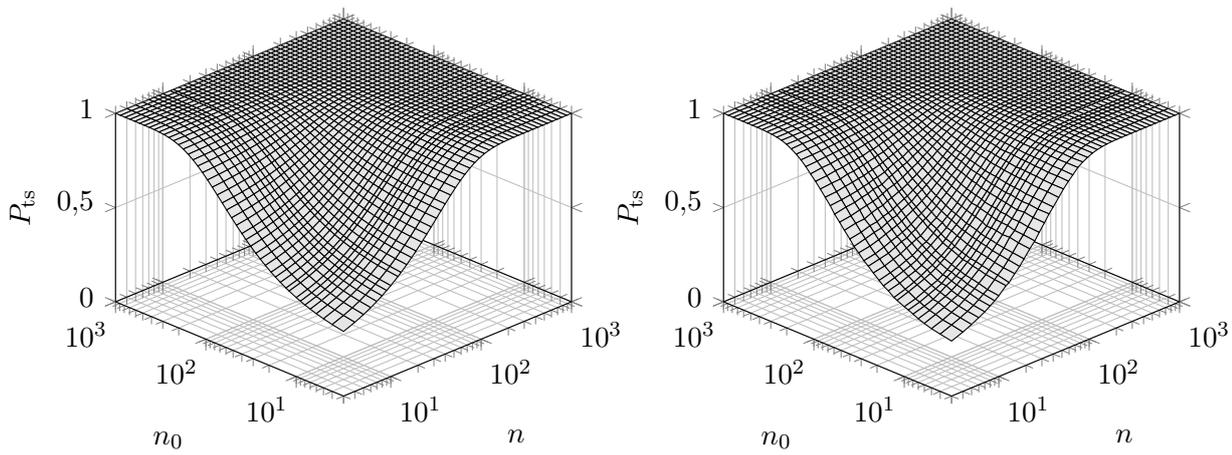


Abbildung 7.1: Werte der P_{ts} eines unzensierten EoL Tests bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes, berechnet mit der analytischen und approximativen Methode (links) und der allgemeinen Methode (rechts). Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1; 3)$.

kann eine Symmetrie bezüglich der n - und n_0 -Achsen-Halbierenden erkannt werden, welche bedeutet, dass die beiden Stichprobenumfänge denselben Effekt auf die P_{ts} haben. Das heißt die Steigerung der P_{ts} durch eine Erhöhung des Stichprobenumfangs des Tests n , wird ebenso durch ein in gleichem Maße erhöhten Stichprobenumfang n_0 der Vorkenntnis erreicht werden. Die Stichprobe der Vorkenntnis ist demnach gleichbedeutend mit der Stichprobe des Tests. Dies bestätigt zusätzlich die Ausführungen aus Kapitel 5.2 und die Erkenntnisse aus den Gleichungen 5.4 und 5.5 der angewandten MAP.

In Abbildung 7.2 wurde die Lebensdaueranforderung $t_s = (1 - s)F^{-1}(R_s)$ moduliert. Es

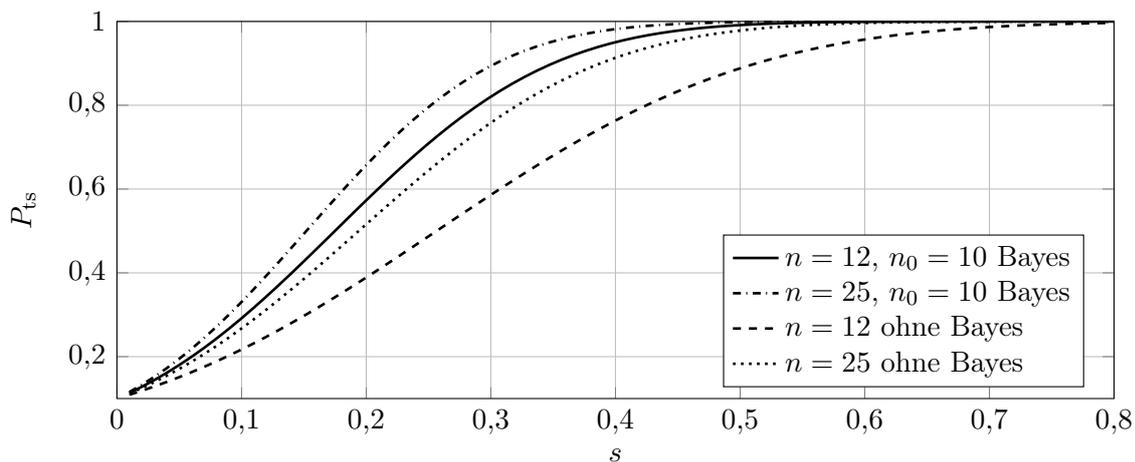


Abbildung 7.2: Werte der P_{ts} eines unzensierten EoL Tests in Abhängigkeit des Sicherheitsabstandes s mit zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1; 3)$.

wurden dabei zwei Fälle der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis und des Tests berechnet und zudem die P_{ts} ohne Berücksichtigung der Vorkenntnis dargestellt. Es ist zu sehen, dass

die zusätzliche Berücksichtigung auch hier eine höhere P_{ts} zur Folge hat. Weitere Zusammenhänge sind Anhang C zu entnehmen.

7.1.2 Bei Success-Run Tests

Bei einem SR Test reduziert die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis direkt den notwendigen Stichprobenumfang und die P_{ts} ist lediglich von der Ausfallverteilung und dem Stichprobenumfang abhängig, siehe Gleichung 4.16. Das Zuverlässigkeitsziel fließt zwar bei der Berechnung des notwendigen Stichprobenumfangs ein, taucht in Gleichung 4.16 jedoch nicht auf. Zur Berechnung des notwendigen Stichprobenumfangs bei Berücksichtigung einer Vorkenntnis in Form einer Betaverteilung kann Gleichung 2.63 verwendet werden. In Abbildung 7.3 ist die mögliche Vorkenntnis für ein Beispiel mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und dem Zuverlässigkeitsziel $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ moduliert. Bei der Vorkenntnis handelt es sich hier um eine Betaverteilung $\mathcal{B}(A_0; B_0)$. Der Vorstellung entsprechend, ist zu sehen, dass die

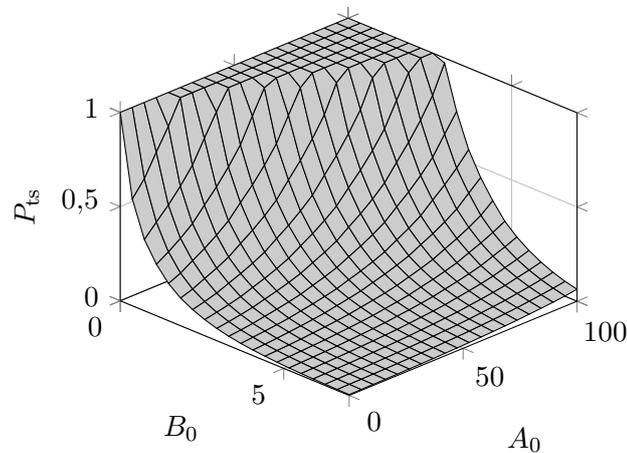


Abbildung 7.3: Werte der P_{ts} eines SR Tests bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ und die Vorkenntnis als Betaverteilung $\mathcal{B}(A_0; B_0)$ mit $\mathcal{W}(1; 3)$.

P_{ts} mit steigendem A_0 der Betaverteilung der Vorkenntnis stark zunimmt. Ebenso nimmt die P_{ts} bei steigendem B_0 ab. Dies ist hauptsächlich durch die damit verbundene Änderung des notwendigen Stichprobenumfangs begründet, denn durch eine Zunahme der „Gutteile“ der Vorkenntnis A_0 , sind weniger Prüflinge notwendig um das Zuverlässigkeitsziel zu erfüllen und folglich müssen weniger Prüflinge die Testzeit überleben, womit die Wahrscheinlichkeit des Bestehens des Tests ansteigt: Die P_{ts} nimmt zu. Genau gegenteilig dazu verhält es sich wenn der Parameter B_0 der Vorkenntnis zunimmt, denn die „Ausfälle“ der Vorkenntnis müssen durch weitere Überlebende im Test ausgeglichen werden, die Wahrscheinlichkeit, dass all diese zusätzlichen Prüflinge tatsächlich überleben, sinkt mit deren Zunahme: Die P_{ts} nimmt ab.

7.2 Einfluss der Berücksichtigung der Systemstruktur

Die Systemstruktur muss – ausgenommen bei einem reinen SR Test auf Gesamtsystemebene – beim Systemzuverlässigkeitsnachweis ohnehin berücksichtigt werden. Denn so sind gewon-

nene Zuverlässigkeitsinformationen des Systems getrennt nach Ausfallmoden auszuwerten. Im Folgenden werden die Einflüsse auf den Systemnachweis exemplarisch untersucht, welche sich durch die Betrachtung der berücksichtigten Systemstruktur in der Planung ergeben.

7.2.1 Prüflingsaufteilung bei Tests von Subsystemen, Komponenten oder Bauteilen

Die Testkonfiguration hat bei festem Zuverlässigkeitsziel und fester Systemstruktur sowie Ausfallverteilungen der Ausfallmoden den größten Einfluss auf die P_{ts} . Im Gegensatz zu in der Praxis üblichen Aufteilung der Systemanforderung auf die Einzelkomponenten [199, 200, 230], können durch die Betrachtung mittels der P_{ts} die Stichprobenumfänge der Subsysteme, Komponenten oder Bauteile so gewählt werden, dass sich die größtmögliche Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Systemzuverlässigkeitsnachweis einstellt. Eine Aufteilung ist so dann also nicht weiter notwendig, denn der Fokus liegt einzig auf dem Zuverlässigkeitsziel des Gesamtsystems. Da theoretisch unendlich viele Systemstrukturen möglich sind, sollen im Folgenden die Effekte der Prüflingsaufteilungen auf die P_{ts} der beiden Grundformen des reinen Seriensystems und des reinen Parallelsystems vorgestellt werden.

Bei einem reinen Seriensystem wird der Systemausfall aufgrund der multiplikativen Verknüpfung der Zuverlässigkeit der Ausfallmoden maßgeblich durch die Ausfallmode mit der geringsten Zuverlässigkeit bei t_s beeinflusst. Im Gegensatz dazu wird der Systemausfall bei reinen Parallelsystemen wegen der multiplikativen Verknüpfung der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Ausfallmoden maßgeblich durch die Ausfallmode mit der größten Zuverlässigkeit beeinflusst, da das System erst durch den letzten Ausfall ausfällt. Um die Aufteilung der Prüflinge auf die verschiedenen Tests hinsichtlich einer maximalen P_{ts} zu identifizieren, kann die P_{ts} in Abhängigkeit der Stichprobengrößen berechnet werden. Das Maximum kann dabei durch einen geeigneten Optimierungsalgorithmus gefunden werden indem beispielsweise die maximal mögliche Anzahl Prüflinge insgesamt oder die entstehenden Gesamtkosten als obere Schranke festgehalten werden (siehe auch Kapitel 6.4). Alternativ, kann bei einfachen Systemen auch die P_{ts} über der Prüflingsaufteilung aufgetragen werden. Dies ist beispielhaft in Abbildung 7.4 für ein reines Serien- und ein reines Parallelsystem für EoL Tests auf Komponentenebene mit einer Gesamtprüflingszahl von $n_{ges} = 40$ dargestellt. In diesem Beispiel bestehen beide Systeme aus lediglich zwei Ausfallmoden, welche direkt in den Komponententests angesprochen werden. Die Stichprobenumfänge dieser sind n_1 und n_2 wobei die Ausfallmoden in beiden Systemen durch die Weibullverteilungen $\mathcal{W}_1(0,6; 3)$ und $\mathcal{W}_2(1; 3)$ bestimmt sind. Das Zuverlässigkeitsziel ist $R_s = 95\%$ mit $C_s = 90\%$, wobei die Lebensdaueranforderungen als $t_{s,Serie} = 0,146$ für das Seriensystem und $t_{s,Parallel} = 0,387$ für das Parallelsystem gewählt wurde um ähnliche Werte der maximalen P_{ts} in diesem Beispiel zu erreichen. Die Überlegungen zum Einfluss auf den Systemausfall bei Serien- und Parallelsystemen spiegeln sich hier wider: Um die maximale P_{ts} zu erreichen, ist beim Seriensystem die Ausfallmode mit der kleineren Zuverlässigkeit – und damit die kritischere für das System – mehr zu testen, also $n_1 > n_2$ und für das Optimum hier: $n_1 = 30$ und $n_2 = 10$. Beim Parallelsystem ist ebenso die kritischere Ausfallmode im System – nämlich Ausfallmode 2 – mehr zu testen. Das Optimum wird dabei durch $n_2 > n_1$ erreicht und hier konkret mit den Stichprobenumfängen $n_1 = 9$ und $n_2 = 31$. Werden also EoL Tests auf Komponentenebene durchgeführt, so erhält man bei einer Konfiguration, welche die maximale P_{ts} garantiert, auch die bessere Schätzung für die kritischere Ausfallmode im System.

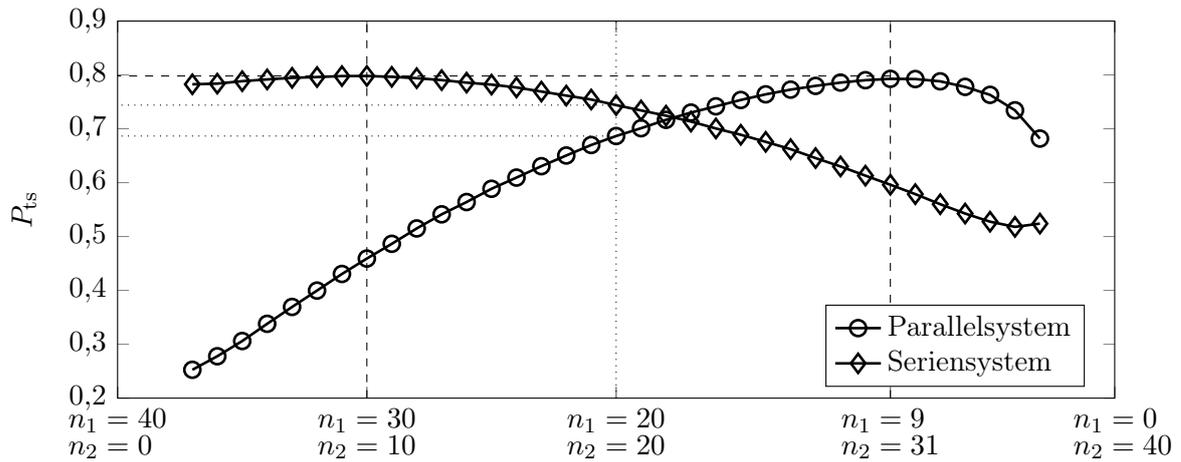


Abbildung 7.4: P_{ts} verschiedener EoL Test von Komponenten für ein reines Seriensystem und ein reines Parallelsystem mit jeweils zwei Ausfallmoden und einer Gesamtprüflingsanzahl von $n_{ges} = n_1 + n_2 = 40$.

Da bei SR Tests die P_{ts} sowohl bei Serien- als auch bei Parallelsystemen durch Gleichung [6.20](#) berechnet wird, ist der qualitative Verlauf der P_{ts} über der Prüflingaufteilung identisch. Beispielhaft ist dies in [Abbildung 7.5](#) dargestellt. Die Stichprobenumfänge wurden dabei

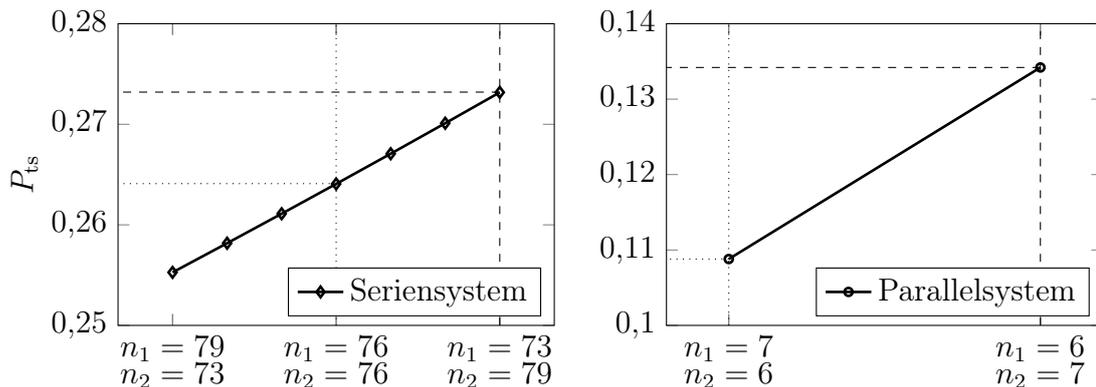


Abbildung 7.5: P_{ts} verschiedener SR Tests von Komponenten für ein reines Seriensystem (links) und ein reines Parallelsystem (rechts) mit jeweils zwei Ausfallmoden.

so gewählt, dass das Systemzuverlässigkeitsziel durch die SR Tests erfüllt werden kann. Es handelt sich dabei um dieselben Systeme wie jene zu [Abbildung 7.4](#) mit ebendiesen Zuverlässigkeitszielen. Wegen der wesentlichen Unterschiede in den logischen Zusammenhängen zwischen dem Serien- und dem Parallelsystem erfordern die SR Tests des Seriensystems deutlich größere Stichprobenumfänge, nämlich $n_{ges} = 152$, im Vergleich zum Parallelsystem mit $n_{ges} = 13$. Dies liegt hauptsächlich daran, dass die Stichprobenumfänge des SR Tests einzig aus den Werten der geforderten Zuverlässigkeit und der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit bestimmt werden, wenn wie hier kein Lebensdauerverhältnis verwendet wird (Kombination aus den Gleichungen [2.48](#), [2.49](#) und [6.20](#)). Bei den SR Tests sind nur sehr kleine Abweichungen von der gleichen Aufteilung der Prüflinge möglich, sodass das Systemzuverlässigkeitsziel noch immer erfüllt ist. Für das Parallelsystem kann für die Komponententests lediglich zwischen 6 und 7 Prüflingen variiert werden, wohingegen beim Seriensystem zwischen 73 und 79 Prüflingen pro Komponententest bei gleicher Gesamtprüf-

lingszahl n_{ges} variiert werden kann. Im Gegensatz zu EoL Komponententests, welche dann die maximale P_{ts} liefern, wenn der systemkritischsten Ausfallmode der größte Testaufwand (Stichprobenumfang) zukommt, liefern die SR Komponententests dann die maximale P_{ts} , wenn der Ausfallmode mit der kleinsten Zuverlässigkeit der größte Testaufwand zukommt (sofern überhaupt variiert werden kann). Dies ist für den Fall von Parallelsystemen gegebenenfalls nicht erwünscht, denn so kann nicht gleichzeitig eine maximale Erfolgswahrscheinlichkeit und eine genaue Aussage über die systemkritischste Ausfallmode erreicht werden. Beim EoL Test ist dies immer möglich.

Neben den Komponenten kann auch das Gesamtsystem getestet werden. In den Abbildungen 7.6 und 7.7 sind die Werte der P_{ts} für EoL Tests auf Komponentenebene und auf Systemebene über der Gesamtprüflingszahl n_{ges} für zwei weitere Beispielsysteme aufgetragen. Es handelt sich dabei um ein reines Seriensystem und ein reines Parallelsystem, welche

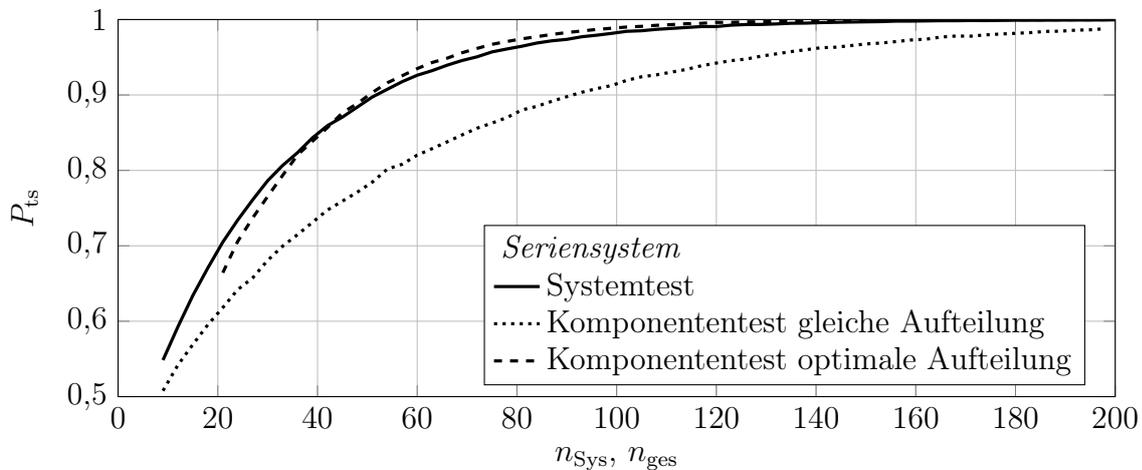


Abbildung 7.6: P_{ts} verschiedener EoL Tests des reinen Seriensystems: Gesamtsystemtest (n_{Sys}), sowie Komponententests mit unterschiedlicher Gesamtprüflingszahl n_{ges} . Mit gleicher und optimaler Aufteilung der Prüflinge.

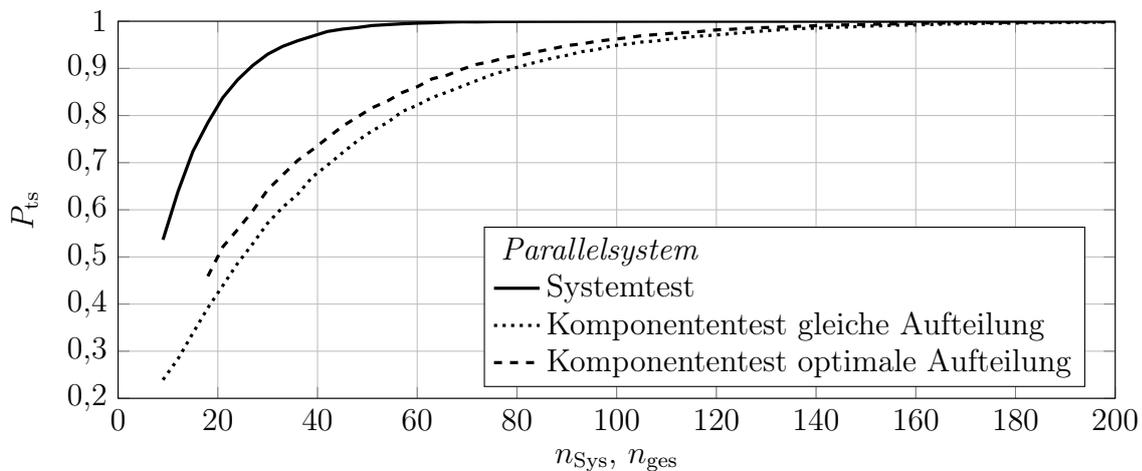


Abbildung 7.7: P_{ts} verschiedener EoL Tests des reinen Parallelsystems: Gesamtsystemtest (n_{Sys}), sowie Komponententests mit unterschiedlicher Gesamtprüflingszahl n_{ges} . Mit gleicher und optimaler Aufteilung der Prüflinge.

beide dieselben Ausfallmoden $\mathcal{W}(1,5; 1,2)$, $\mathcal{W}(2; 2)$ und $\mathcal{W}(1; 3)$ beinhalten. Das Zuverlässigkeitsziel ist $R_s = 95\%$ und $C_s = 90\%$ mit der geforderten Lebensdauer von $t_s = 0,0464$ beim Seriensystem und $t_s = 0,7566$ beim Parallelsystem. Sowohl die gleiche Aufteilung der Prüflinge zwischen den drei Komponenten, als auch die optimale Aufteilung entsprechend einer maximierten P_{ts} ist neben der P_{ts} bei Systemtests aufgetragen. Es ist zu sehen, dass die optimale Aufteilung einen deutlichen Zuwachs der P_{ts} erreichen kann und dabei ähnliche Werte wie der Gesamtsystemtest bei gleicher Gesamtprüflingszahl erreichen kann. Der Gesamtsystemtest hat den Vorteil, dass ein Prüfling für die Auswertung aller Ausfallmoden verwendet werden kann, die Komponententests hingegen nur für die Ausfallmoden, welche in der getesteten Komponente vorherrschen. Im Gegensatz dazu sind die Stichproben welche beim Gesamtsystemtests zur Auswertung der Ausfallmoden verwendet werden zensiert und zwar in solcher Weise, wie es die Systemstruktur vorgibt. Bei den Komponententests kann die Anzahl an Ausfällen für die Auswertung einer bestimmten Ausfallmode genau eingestellt werden, was dazu führen kann, dass die P_{ts} bei den Komponententests eines Seriensystems sogar die des Gesamtsystemtests übersteigt, trotz dem, dass die Prüflinge des Gesamtsystemtests hier quasi dreifach verwendet werden können, siehe Abbildung 7.6. Beim Parallelsystem zeigt der Gesamtsystemtest durchgehend deutlich höhere Werte der P_{ts} . Dies liegt daran, dass ein Systemausfall erst dann eintritt, wenn alle Komponenten ausgefallen sind. Deswegen liefert ein Prüfling des Gesamtsystems immer Informationen über die Ausfallzeiten von allen Ausfallmoden (in diesem Beispiel des reinen Parallelsystems). Dieser Effekt ist umso stärker, je mehr einzelne Ausfallmoden im System vorhanden sind.

Da die Stichprobenumfänge beim SR Test durch das Zuverlässigkeitsziel bestimmt sind und in diesem Beispiel keine Lebensdauererhältnisse erlaubt sind und auch keine Ausfälle zugelassen werden, lassen sich die Werte der P_{ts} nicht über dem Stichprobenumfang auftragen. Es sind die Werte als Balkendiagramm für die drei Fälle aus Gesamtsystemtest, Komponententest mit gleicher Prüflingaufteilung und optimaler Aufteilung in Abbildung 7.8 für das reine Seriensystem und das reine Parallelsystem aufgetragen. Die drei Fälle haben deutlich unterschiedliche notwendige Stichprobenumfänge. Der zum Nachweis erforderliche Stichpro-

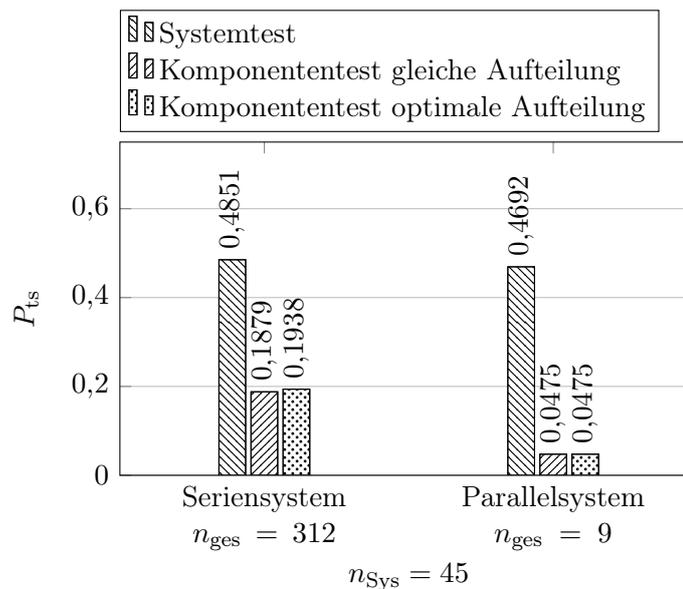


Abbildung 7.8: P_{ts} der SR Tests des Serien- und des Parallelsystems für Gesamtsystemtests als auch Komponententests mit gleicher und optimaler Aufteilung.

benumfang des Parallelsystem erlaubt keine andere Aufteilung als die gleiche Aufteilung, da nur drei Prüflinge pro Komponente notwendig sind um das Ziel nachweisen zu können. Eine

Änderung auf zwei Prüflinge bei einem Komponententest würde solch ein schlechtes Ergebnis erzeugen, dass keine noch so große Prüflingszahl bei einer anderen Komponente das in der kombinierten Systemaussage aufwiegen könnte. Beide Systeme zeigen grundsätzlich kleine Werte der P_{ts} wobei die Komponententests nochmals deutlich niedrigere Werte liefern als die Systemtests. Dies liegt in den deutlich größeren Stichprobenumfängen begründet, wobei jeder Prüfling für einen erfolgreichen Nachweis überleben muss. Allerdings kann keiner der SR Tests für den Systemnachweis bei diesen Beispielsystemen empfohlen werden, denn alle liefern maximale Werte von $P_{ts} < 50\%$. Hinzu kommt, dass die Komponententests des Seriensystems eine Gesamtprüflingszahl von $n_{ges} = 312$ erfordern, wohingegen die Komponententests des Parallelsystems lediglich drei Prüflinge pro Komponente, also $n_{ges} = 9$ erfordern.

Die hier betrachteten Fälle und Bewertungen der Tests und deren Konfiguration sind alleinig durch statistische Maßstäbe getrieben. In der Praxis sind jedoch die verfügbaren Prüflinge eingeschränkt, die Kosten des Systems, der Subsysteme, Komponenten und Bauteile unterscheiden sich (auch untereinander). Hinzu kommen Prüfstandsverfügbarkeiten und -möglichkeiten, die die möglichen Tests dahingehend beschränken können sowie die Identifikation des effizientesten Tests verändern. Diese Aspekte werden in Kapitel 8 weiter thematisiert.

7.2.2 Einfluss der Systemebene des Tests

Grundsätzlich werden während der Produktentwicklung die Belastbarkeiten der Elemente des Systems festgelegt. Mindestens durch deren physische Gestalt und die Wahl der Materialien. Dabei wird auch oft die Anforderung des Systems auf dessen Elemente aufgeteilt. Werden diese Überlegungen im Nachweis entsprechend übernommen, so resultiert für jedes Systemelement ein eigenes Zuverlässigkeitsziel, bestehend aus Zuverlässigkeit, Lebensdauer und Aussagewahrscheinlichkeit. Diesem Ansatz entgeht jedoch die Tatsache, dass die auf die Elemente aufgeteilte Aussagewahrscheinlichkeit die Tests stark einschränkt. Denn die Aufteilung des Systemzuverlässigkeitsziels ist unbestimmt und muss bezüglich der Aussagewahrscheinlichkeit entweder auf alle Elemente gleich aufgeteilt werden, oder nach einem sinnvollen Ansatz ungleich. Bei der Berücksichtigung des hier vorgestellten Ansatzes mittels der P_{ts} ist dieses Aufteilen nicht notwendig und es gibt nur noch eine sinnvolle Lösung. Im Sinne eines Nachweises der Systemzuverlässigkeit sollten nämlich alle Tests welche diesem Nachweis dienlich sein sollten, gemeinsam betrachtet werden. Dazu ist keine Aufteilung der Ziele notwendig. Der Fokus sollte dabei einzig auf dem Zuverlässigkeitsziel des Systems liegen. Dies wird durch die Betrachtung und Planung mit der P_{ts} ermöglicht. Zusammen mit dem beschriebenen Vorgehen gibt sie die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Nachweis wieder, der sich zusammen aus allen Tests ergibt. Es wird also kein Ziel für die einzelnen Elemente des Systems vorgegeben, sondern untersucht, wie die Tests der Elemente zusammen fähig sind den Systemzuverlässigkeitsnachweis zu erbringen.

Die bei den Tests gewählte Systemebene, also ob eine Komponente oder das Gesamtsystem getestet wird, hat einen wesentlichen Einfluss auf den Systemnachweis. Um dies zu verdeutlichen, wird hier anhand eines einfachen Beispielsystems, bestehend aus lediglich zwei Komponenten und drei Ausfallmoden, die P_{ts} für Tests auf Komponentenebene mit einem Test auf Systemebene verglichen und die wesentlichen Unterschiede sowie Vor- und Nachteile herausgearbeitet. Dabei besitzt Komponente 1 zwei Ausfallmoden mit $F_1 = \mathcal{W}(1; 3)$ und $F_2 = \mathcal{W}(1,2; 2,8)$ wohingegen Komponente 2 nur eine Ausfallmode mit $F_3 = \mathcal{W}(2; 2)$ zugeordnet ist. Die beiden Komponenten bilden über eine serielle Verknüpfung das System.

Es ist in Abbildung 7.9 dargestellt. Um zu untersuchen, wie sich unzensierte EoL Tests des Gesamtsystems und der Komponenten verhalten, wurde die P_{ts} in Abhängigkeit verschiedener Stichprobenumfänge berechnet, siehe Abbildung 7.10. Dabei ist die Anzahl der

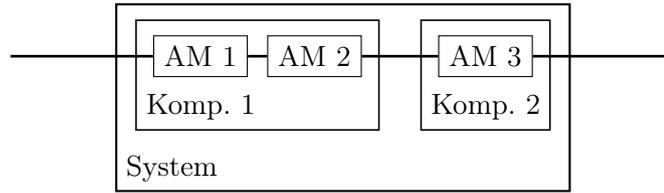


Abbildung 7.9: Systemstruktur des Beispielsystems mit dessen Komponenten (Komp.) und Ausfallmoden (AM).

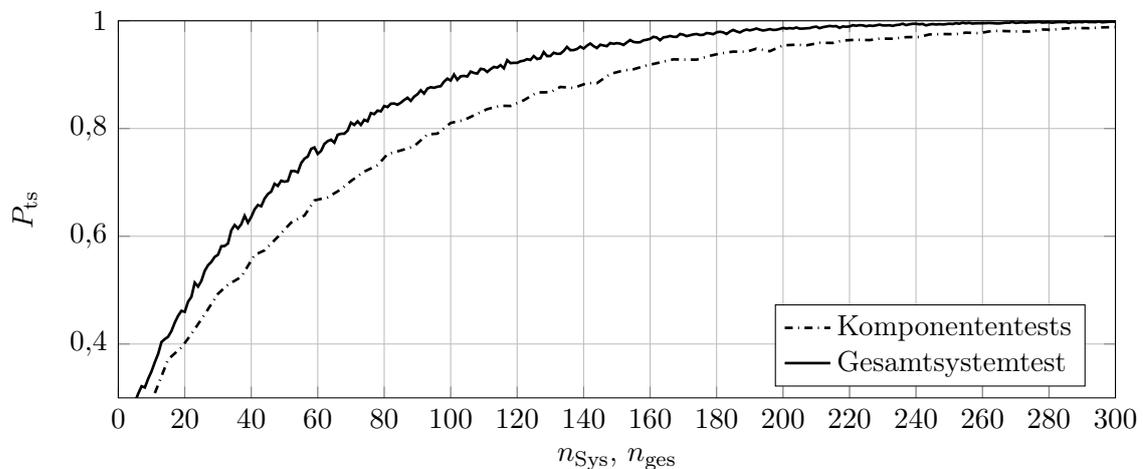


Abbildung 7.10: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge n für den unzensierten EoL Test des Gesamtsystems und der Komponenten. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,2$.

Prüflinge im Gesamtsystemtest n_{Sys} und die Anzahl aller Prüflinge in den Komponententests $n_{\text{Ges}} = n_1 + n_2$. Die Prüflingsaufteilung der Komponententests wurde anhand der maximal erzielbaren P_{ts} bestimmt und berechnet sich damit zu $n_1 \stackrel{!}{=} 2,7n_2$ (berechnet mit $n_{\text{Ges}} = 200$ und $t_s = 0,2$, siehe auch Kapitel 7.2.1). Es ist zu sehen, dass der Gesamtsystemtest die höhere der beiden P_{ts} Verläufe aufweist. Dies liegt darin begründet, dass die Prüflinge des Gesamtsystemtests für die Auswertung aller Ausfallmoden verwendet werden können. Die dazu aus der Stichprobe der Ausfälle des Gesamtsystems gebildeten Stichproben der Ausfallmoden sind jedoch entsprechend der Auftretenswahrscheinlichkeit der Ausfallmoden im System zensiert, da es sich um ein Seriensystem handelt. Beim Komponententest hingegen können die Prüflinge n_1 lediglich zur Auswertung von AM 1 und 2 verwendet werden und die Prüflinge n_2 sogar ausschließlich für AM 3. Aufgrund der zwei Ausfallmoden in Komponente 1, ist der Komponententest trotz der optimalen Aufteilung vom Nachteil eines Systemtests begleitet, da die Ausfallmoden 1 und 2 nicht frei angesprochen werden können und damit die Schätzung der Ausfallmoden nur mit zensierten Stichproben erfolgen kann. Der SR Test hingegen gibt lediglich einen Wert der P_{ts} zurück, da ohne erlaubte Ausfälle nur eine einzige Gesamtprüflingsanzahl zum Erreichen des Zuverlässigkeitsziels möglich ist. Dabei werden für den SR Test des Gesamtsystems $n_{\text{Sys}} = 45$ Prüflinge benötigt, wohingegen beim Komponententest in Summe 152 Prüflinge nötig sind und bei $n_1 = 73$ und $n_2 = 79$

die dabei maximale P_{ts} erreicht werden kann. Hierbei profitiert der SR Test davon, dass bei Komponente 1 zwei Ausfallmoden gleichzeitig angesprochen werden, denn für den Fall dreier Komponenten mit jeweils einer Ausfallmode würden in Summe 312 Prüflinge benötigt werden. Für die Werte der P_{ts} berechnen sich auf Gesamtsystemebene $P_{ts} = 33,02\%$ und für die Komponententests $P_{ts} = 15,6\%$. Damit wird ersichtlich, dass der SR Test grundsätzlich nicht für Komponententests bei Seriensystemen geeignet ist. Auf Gesamtsystemebene hingegen kann er gegebenenfalls Vorteile gegenüber dem EoL Test besitzen, da er keine Auswertung nach den Ausfallmoden erfordert und bei moderaten Anforderungen gegebenenfalls von kleineren Aufwänden begleitet ist. In diesem Beispiel jedoch nicht, denn in beiden Fällen erreicht er eine P_{ts} deutlich kleiner 50%. In Abbildung 7.11 ist die P_{ts} über dem Sicherheitsabstand s dargestellt. Dabei ist neben den erzielbaren Werten der P_{ts} beim SR Test auf

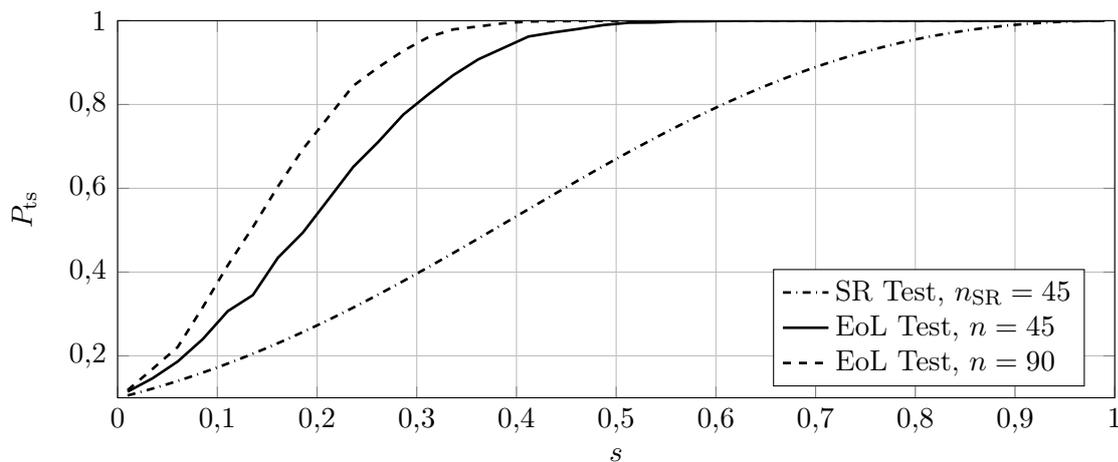


Abbildung 7.11: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Sicherheitsabstands s für SR und EoL Tests des Gesamtsystems. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$.

Gesamtsystemebene auch die P_{ts} des EoL Tests auf Gesamtsystemebene dargestellt. Dabei erkennt man, dass der SR Test erst ab einem Sicherheitsabstand von $s > 0,4$ akzeptable Werte der $P_{ts} > 50\%$ erreicht, wohingegen der EoL Test bei gleichem Stichprobenumfang bereits ab $s > 0,2$ den Systemnachweis ermöglicht. Zum Vergleich wurde für den EoL Test der Stichprobenumfang ebenfalls zu 45 festgehalten. Dieser ließe sich jedoch im Gegensatz zum SR Test größer wählen, was noch größere Werte der P_{ts} zur Folge hätte. Der SR Test würde bei einem größeren Stichprobenumfang kleine Werte der P_{ts} liefern. Dies ist am Beispiel eines EoL Tests mit $n = 90$ ebenfalls in Abbildung 7.11 dargestellt. Der EoL Test ist demnach dem SR Test bei Seriensystemen statistisch grundsätzlich überlegen. Insbesondere, wenn der Systemnachweis durch Tests von Subsystemen, Komponenten, oder Bauteilen erfolgen soll. Jedoch auch wenn der Nachweis durch den Test des Gesamtsystems geführt werden soll, zeigt der EoL Test deutliche statistische Vorteile auf. So können beispielsweise grundsätzlich Systeme mit deutlich kleineren Sicherheitsabständen s durch einen EoL Test nachgewiesen werden, denn durch eine Erhöhung des Stichprobenumfangs können auch für kleine s gute Werte der P_{ts} erreicht werden. Einzig die nicht notwendige Trennung nach Ausfallmoden beim SR Test und dessen Auswertung stellt einen Vorteil dar. Hinzu kommt, dass der SR Test durch die potentiell kürzeren Laufzeiten Vorteile bezüglich der Testkosten und der benötigten Testzeit aufweisen kann. Mehr dazu in Kapitel 8.

7.2.3 Einfluss der Systemebene bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes

Die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis kann, wie bereits in Kapitel 5.2 thematisiert, zu einer Steigerung der P_{ts} führen. Beispielhaft ist in Abbildung 7.12 die P_{ts} desselben Systems wie im vorherigen Abschnitt 7.2.2 bei Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes in Abhängigkeit des Sicherheitsabstands s dargestellt. Sowohl der EoL Test,

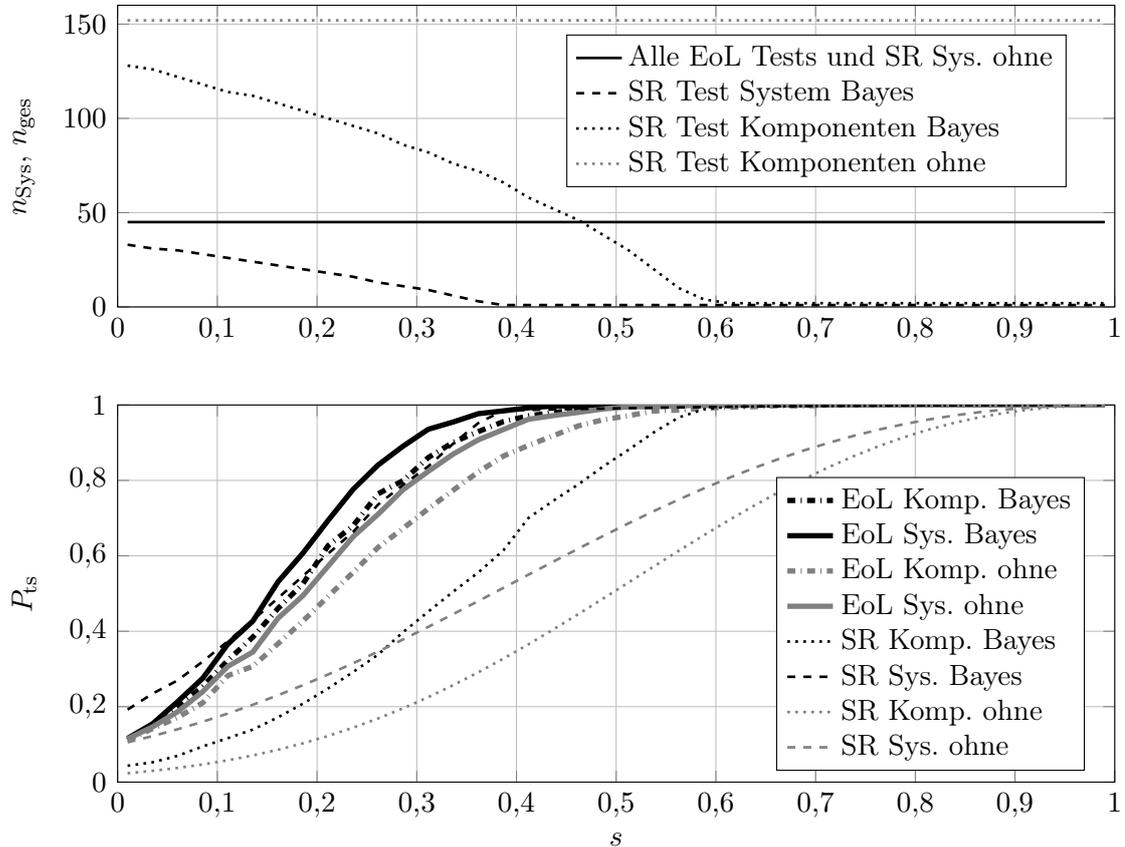


Abbildung 7.12: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Sicherheitsabstands s für EoL und SR Tests des Gesamtsystems und der Komponenten (unten) und deren zugehörige Stichprobenumfänge (oben). Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$, wobei Vorkenntnis über die drei Ausfallmoden mit jeweils $n_0 = 6$ über den Satz von Bayes berücksichtigt wurde. Die Fälle ohne zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis sind ebenso dargestellt.

als auch der SR Test gewinnen durch die zusätzliche Berücksichtigung von Vorkenntnis auf Gesamtsystem- und auf Komponentenebene an P_{ts} . Die Vorkenntnis über die Ausfallmoden wurde dabei jeweils mit $n_0 = 6$ berücksichtigt. Zu erkennen ist, dass der SR Test durch die Vorkenntnis stärker profitiert als der EoL Test. Dies ist darin begründet, dass es sich bei der Vorkenntnis um eine nach Typ des EoL Tests handelt, sprich eine Ausfallverteilung mit Stichprobenumfang n_0 . Diese Ausfallverteilung enthält wertvolle Informationen über die tatsächliche Lage der Ausfallzeiten, welche der SR Test selbst nicht liefern kann. Sie fließen jedoch über die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis auch im SR Test ein und in der Folge steigt die P_{ts} stark an. Beim EoL Test hingegen ist durch die Ausfallzeiten aus dem Test die Information über die tatsächliche Lage bereits enthalten, weswegen die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis als Ausfallverteilung hier einen weniger großen Gewinn bezüglich der P_{ts} bedeutet.

Die bereits in Kapitel [6.2](#) thematisierte Prüflingsaufteilung beim Test der Komponenten ist abhängig von der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes. Dies entspricht der Vorstellung, dass die Stichproben der Vorkenntnis und die des Tests gleichbedeutend sind. Wird also Vorkenntnis zusätzlich berücksichtigt, so ersetzt diese einen Teil der für ein Optimum notwendigen Stichprobenumfänge. Folglich ändern sich die für ein Maximum der P_{ts} notwendigen Stichprobenumfänge. Dies hat auch zum Effekt, dass die optimale Aufteilung in diesem Fall nicht weiter unabhängig des Stichprobenumfangs des Tests ist, denn der Anteil, welchen die Stichprobe der Vorkenntnis ersetzt, ändert sich mit dem Stichprobenumfang des Tests. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts ist in [Abbildung 7.13](#) für ein Seriensystem mit zwei Ausfallmoden identischer Verteilung $\mathcal{W}(1; 3)$ und $\mathcal{W}(1; 3)$ die optimale Prüflingsaufteilung in Abhängigkeit des Gesamtstichprobenumfangs des unzensierten EoL Tests dargestellt. Es ist zu sehen, wie Ausfallmode 1 aufgrund

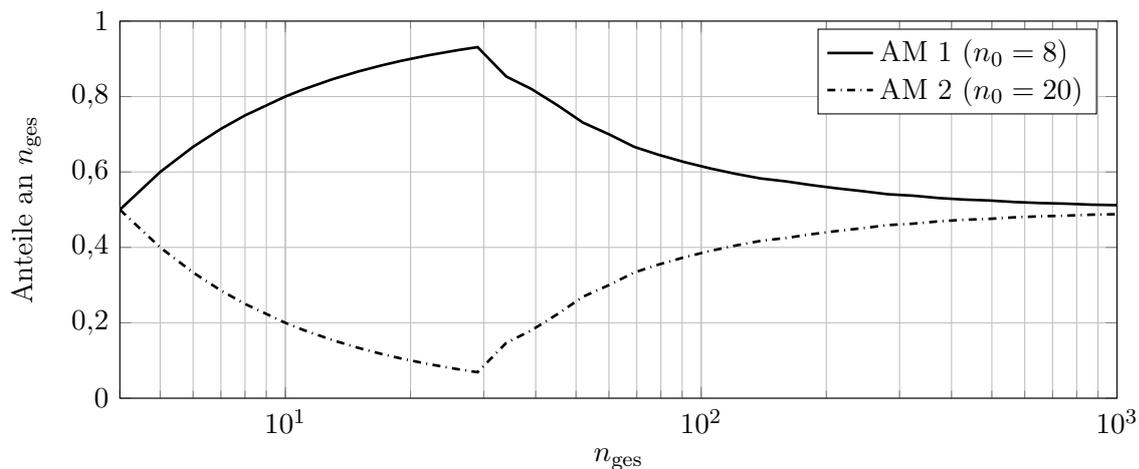


Abbildung 7.13: Änderung der Optimalen Prüflingsaufteilung beim EoL Test der Komponenten eines Seriensystem mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und $\mathcal{W}(1; 3)$ und $n_{0,1} = 8$, $n_{0,2} = 20$. Dargestellt über dem Gesamtstichprobenumfang $n_{ges} = n_1 + n_2$ bei einem Zuverlässigkeitsziel von $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ und $t_s = 0,25$. Berechnet mit der analytischen und approximativen Methode.

des kleineren Stichprobenumfangs der Vorkenntnis zunächst ein größerer Stichprobenumfang der Vorkenntnis zugeordnet werden muss um das Maximum der P_{ts} zu erreichen. Da es sich um zwei identische Ausfallmoden handelt, ist die optimale Aufteilung ohne zusätzliche Berücksichtigung mittels des Satz von Bayes eine Gleichaufteilung. Dies ist ebenso bei sehr kleinen und bei sehr großen Gesamtstichprobeumfängen zu sehen.

7.3 Einfluss der Unsicherheit in der Vorkenntnis

Die notwendige Vorkenntnis zur Planung von Zuverlässigkeitstests ist unweigerlich mit Unsicherheit behaftet. Diese liegt in den Unzulänglichkeiten der Beobachtung der Information der Vorkenntnis. Es handelt sich hauptsächlich um die epistemische Unsicherheit, welche jedoch mit der System inhärenten aleatorischen Unsicherheit vermischt ist.

7.3.1 Änderung der Probability of Test Success bei Berücksichtigung der Unsicherheit

Die Berechnung der P_{ts} unter Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis birgt Potential, da damit die Güte der Vorkenntnis indirekt bewertet wird. Grundsätzlich sinkt die P_{ts} wenn die Unsicherheit bei EoL Tests berücksichtigt wird, da die Lebensdauerquantile größere Streuungen aufweisen. Beispielhaft ist dies anhand eines einfachen Systems mit einer Ausfallmode mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und $n_0 = 10$ sowie $n_0 = 30$ in Abbildung 7.14 dargestellt. Im Vergleich zur Berechnung ohne die Berücksichtigung der Unsicherheit, findet eine starke Reduktion statt. Die Werte der P_{ts} unter Berücksichtigung der Vorkenntnis streben ein

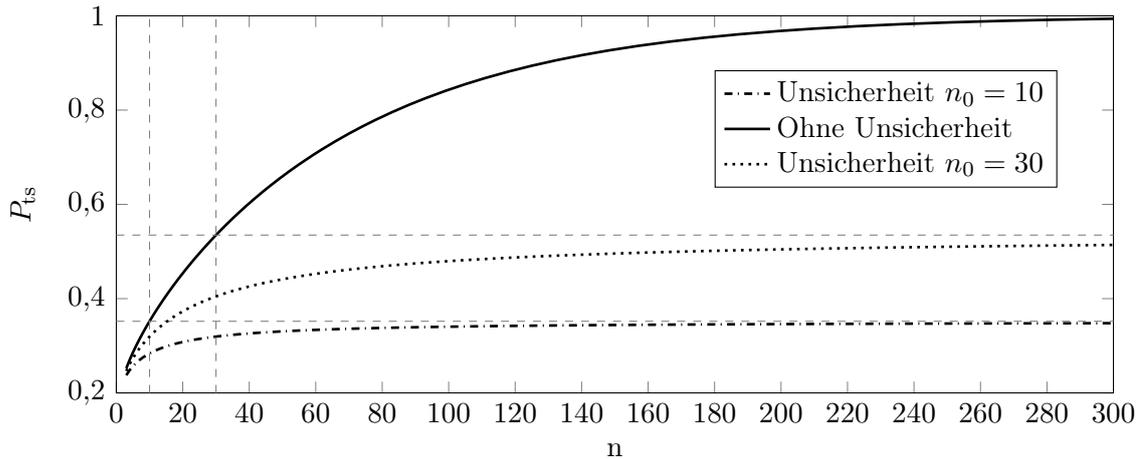


Abbildung 7.14: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs n für einen unzensierten EoL Test mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis, welche durch $\mathcal{W}(1; 3)$ und $n_0 = 10$ beziehungsweise $n_0 = 30$ gegeben ist. Dargestellt ist auch der Fall ohne Unsicherheit. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$.

Maximum an. Wie bereits in Kapitel 6.3 erwähnt, kann hier in Abbildung 7.14 beispielhaft erkannt werden, dass dieses Maximum genau dem P_{ts} -Wert der Berechnung ohne Berücksichtigung der Vorkenntnis bei einem Stichprobenumfang von $n = 10$ beziehungsweise $n = 30$ beträgt. Der Stichprobenumfang der Vorkenntnis begrenzt die maximal erreichbare P_{ts} . Bei solch einfachen Systemen mit lediglich einer einzigen Ausfallmode ist dies recht anschaulich, bei komplexeren Systemen allerdings weniger, mehr dazu in Kapitel 7.3.3. Für die Praxis bedeutet dies, dass die Unsicherheit berücksichtigt werden sollte. Allerdings sollte diese Rechnung immer zusammen mit einer Berechnung ohne Berücksichtigung der Unsicherheit gemacht werden, denn diese repräsentiert eher die zu erwartende Erfolgswahrscheinlichkeit. Wie sich die Berücksichtigung der Unsicherheit zusammen mit der zusätzlichen Berücksichtigung über den Satz von Bayes verhält, wird im nächsten Abschnitt thematisiert.

Im Gegensatz zum EoL Test gibt es beim SR Test keine grundsätzliche Tendenz bezüglich eines Absinkens oder eines Anstiegs der P_{ts} aufgrund der Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis. Denn so ist es, dass für sehr große Werte der P_{ts} ein Absinken zu verzeichnen ist, wohingegen bei kleinen Werten der P_{ts} ein Anstieg vorhanden ist. Dies kann durch die gesteigerte Streuung der Zuverlässigkeit erklärt werden, welche durch die Betaverteilung der Vorkenntnis beschrieben wird. Bei großen Werten der Zuverlässigkeit resultieren potentiell große Werte der P_{ts} . Aufgrund der Streuung der Zuverlässigkeit jedoch sind mehr Werte der Zuverlässigkeiten kleiner als größer im Vergleich zu jenem Wert, welchen man

ohne Unsicherheit berechnen würde. Denn bewegen sich die Werte der Zuverlässigkeit bereits nahe dem maximalen Wert, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es noch größere Werte gibt klein. Genau umgekehrt verhält es sich für kleine Werte der P_{ts} : Hier steigen die Werte an, wenn die Unsicherheit mit berücksichtigt wird. Dies liegt ebenso daran, dass die Wahrscheinlichkeit noch kleinere Werte der Zuverlässigkeit zu erhalten abnimmt, je näher die Werte an das Minimum, also die Definitionsgrenzen rücken.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Verhalten der P_{ts} bei Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis für den EoL Test und dem SR Test liegt also im eingeschränkten Definitionsbereich der Zuverlässigkeit selbst begründet. Sie ist auf das Intervall $R \in [0, 1]$ beschränkt, wohingegen die bei der Berechnung der P_{ts} bei EoL Tests relevante Größe, der Teststatistik τ beziehungsweise dem Lebensdauerquantil t_{R_s} keine solche Einschränkung vorhanden ist und die zunehmende Streuung grundsätzlich weniger eingeschränkt ist. Einzig die Einschränkung, dass Lebensdauern nur Werte größer Null annehmen können herrscht hier vor, beschränkt das Verhalten der P_{ts} jedoch nicht signifikant.

Um den Einfluss der Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis bei der Berechnung der P_{ts} eines SR Tests zu veranschaulichen, wurden in Abbildung 7.15 verschiedene Fälle dargestellt. Dabei sorgen die unterschiedlichen Sicherheitsabstände s dafür, dass große oder kleine Zuverlässigkeiten relevant sind, was die beiden beschriebenen Fälle einer steigenden und einer absinkenden P_{ts} aufgrund der Unsicherheit herbeiführt. Zusätzlich sind auch die P_{ts} -Werte bei Berechnung ohne Unsicherheit als waagerechte Linie dargestellt, gegen welche die Verläufe jeweils konvergieren. In diesem Beispiel handelt es sich um ein Zuverlässig-

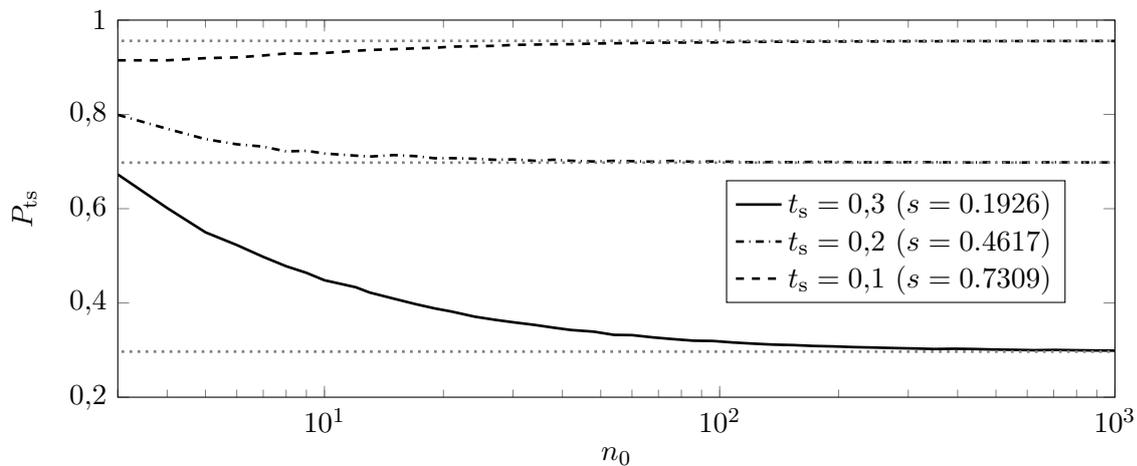


Abbildung 7.15: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs der Vorkenntnis n_0 für einen SR Test mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis, welche durch $\mathcal{W}(1; 3)$ gegeben ist. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$, also $n_{SR} = 45$.

sigkeitsziel von $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ und als Vorkenntnis mit $\mathcal{W}(1; 3)$, wobei die benötigte Betaverteilungen entsprechend n_0 nach dem in Kapitel 5.1.1 vorgestellten Bootstrap-Ansatz berechnet wurden. Zu bemerken ist, dass der Anstieg der P_{ts} hier deutlicher ausgeprägt ist, als das Absinken für große Sicherheitsabstände.

7.3.2 Einfluss der Unsicherheit bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes

Wie bereits behandelt, resultiert die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes darin, dass Prüflinge des Tests ersetzt werden können, wenn die Vorkenntnis positiv genug ist. Die zusätzlich berücksichtigte Vorkenntnis ist demnach gleichbedeutend zu den Informationen aus dem Test, siehe auch Abbildung 7.1. Zudem wurde im vorherigen Abschnitt aufgezeigt, dass die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis bei EoL Tests zu einem Absinken der P_{ts} führt und diese durch den Stichprobenumfang n_0 begrenzt. Die maximal erreichbare P_{ts} ist damit die, welche sich theoretisch ohne Berücksichtigung der Unsicherheit bei $n = n_0$ ergeben würde. Die kombinierte Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis und der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes hat damit zur Folge, dass das Maximum der P_{ts} durch n_0 bestimmt ist (Effekt der Unsicherheit) und, dass dieses Maximum immer erreicht ist, denn n und n_0 sind gleichbedeutend (Effekt des Satz von Bayes). Das hat zum Effekt, dass der Stichprobenumfang der Vorkenntnis n_0 alleinig den Wert der P_{ts} bestimmt. Denn für $n > n_0$ sorgt der Effekt der Unsicherheit dafür, dass die P_{ts} auf das Maximum entsprechend n_0 begrenzt ist. Für $n < n_0$ dagegen, sorgt der Effekt der zusätzlichen Berücksichtigung mit dem Satz von Bayes dafür, dass das Maximum der P_{ts} trotzdem erreicht ist, denn da n und n_0 gleichbedeutend ist, ist der effektive Stichprobenumfang immer so groß, dass das Maximum sicher erreicht wird, nämlich mindestens n_0 . Die P_{ts} ist also nicht weiter vom Stichprobenumfang des Tests n abhängig. Um dies zu veranschaulichen wurde in Abbildung 7.16 die P_{ts} des unzensierten EoL Tests exemplarisch in Abhängigkeit von n und n_0 berechnet für den Fall, dass die Vorkenntnis mit $\mathcal{W}(1; 3)$ über den Satz von Bayes für den Nachweis, als auch die Unsicherheit in der Vorkenntnis berücksichtigt wird. Dabei ist eindeutig zu sehen, dass sich die P_{ts} mit n nicht ändert.

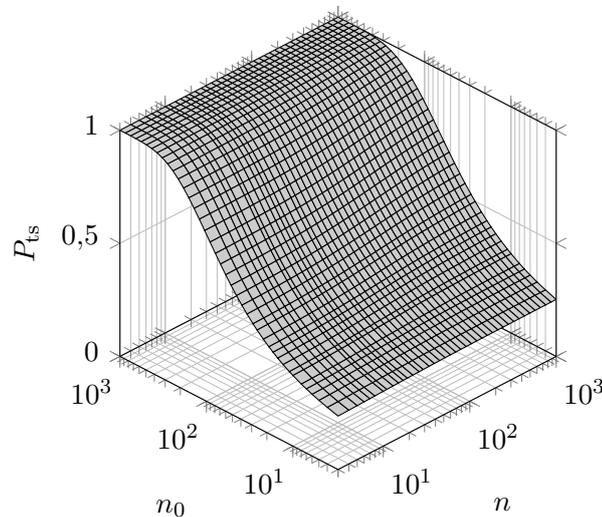


Abbildung 7.16: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs n für einen unzensierten EoL Test mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis, welche durch $\mathcal{W}(1; 3)$ und $n_0 = 10$ gegeben ist. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$.

Wird Vorkenntnis über den Satz von Bayes im Zuverlässigkeitsnachweis verwendet, so bedeutet dies, dass eine höhere Zuverlässigkeit, eine höhere Lebensdauer oder mit einer größeren Aussagewahrscheinlichkeit nachgewiesen werden kann, als wenn keine Vorkenntnis zusätzlich

berücksichtigt werden würde. Es ist demnach in jedem Fall ein Gewinn zu verzeichnen. Die Unsicherheit in der Vorkenntnis ist jedoch nicht weiter relevant, sobald der Test durchgeführt wurde und der Nachweis erbracht wird. Für die praktische Anwendung der Testplanung mit der P_{ts} bedeutet dies, dass die Unsicherheit immer mit betrachtet werden sollte, jedoch zusätzlich die P_{ts} ohne Berücksichtigung der Unsicherheit berechnet werden sollte. Bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes sollte dabei sogar der Wert der P_{ts} verwendet werden, welcher sich ohne Berücksichtigung der Unsicherheit ergibt. Jener mit Berücksichtigung der Unsicherheit kann dabei beispielsweise als untere Schranke beziehungsweise worst case der P_{ts} betrachtet werden.

Bei SR Tests hingegen sind die Zusammenhänge etwas einfacher. Denn die Testkonfiguration ist bereits durch das Zuverlässigkeitsziel manifestiert. Die Berechnung der P_{ts} ist also zunächst losgelöst vom Zuverlässigkeitsnachweis. Wie im vorherigen Abschnitt [7.3](#) thematisiert, bewirkt die Berücksichtigung der Unsicherheit sowohl einen Abfall, als auch einen Anstieg der P_{ts} , wohingegen die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes einen kleineren erforderlichen Stichprobenumfang zur Folge hat, was die P_{ts} ansteigen lässt. Die Anstiege und die Absenkungen der P_{ts} sind nach wie vor vorhanden, jedoch durch die Effekte des Satzes von Bayes überlagert. Zur Veranschaulichung ist selbiges Beispiel aus [Abbildung 7.15](#) bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes für $t_s = 0,35$, also $s = 5,8\%$ in [Abbildung 7.17](#) dargestellt. Die dabei sich ändernden notwendigen Stichprobenumfänge sind ebenso dargestellt. Sie sind der Grund für den

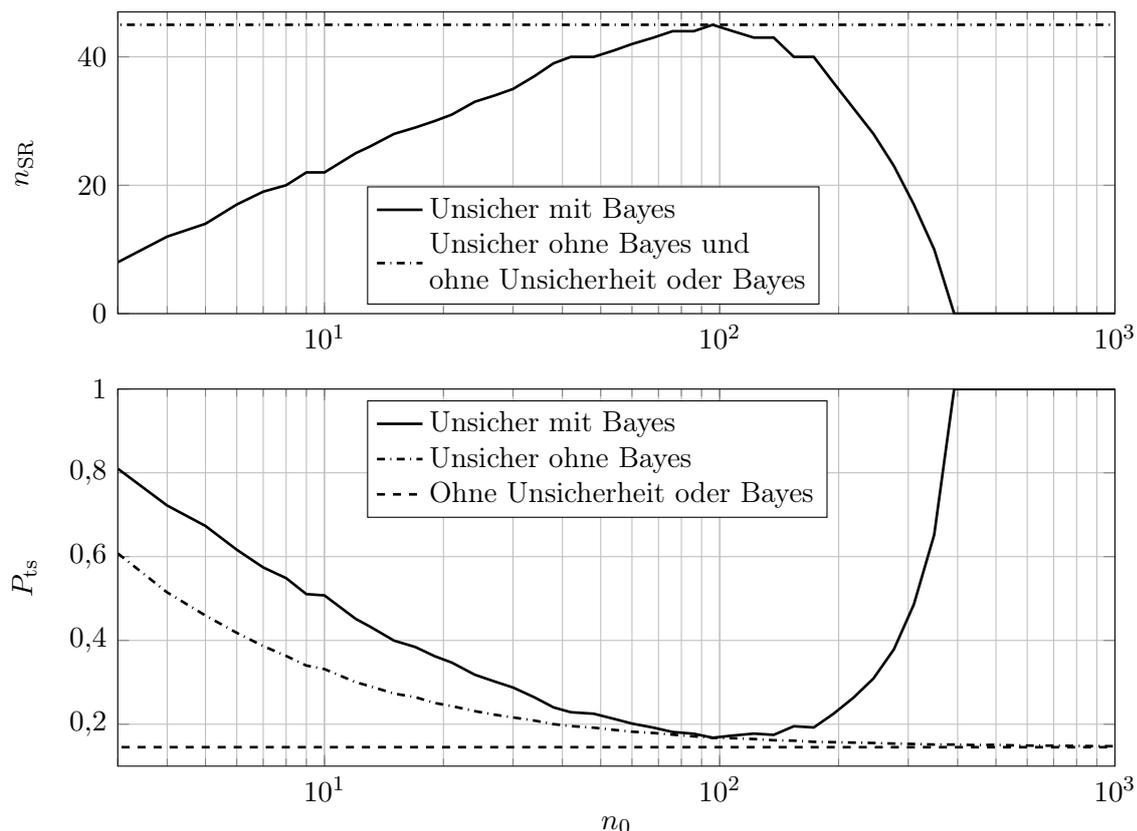


Abbildung 7.17: Werte der P_{ts} eines SR Tests (unten) für verschiedene Fälle der Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis und zusätzlicher Berücksichtigung über den Satz von Bayes und erforderliche Stichprobenumfänge n_{SR} (oben). Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit t_s und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1; 3)$.

Anstieg der P_{ts} gegenüber dem Fall mit alleiniger Berücksichtigung der Unsicherheit. Es ist zu erkennen, dass sich die P_{ts} bei Berücksichtigung der Unsicherheit und dem Satz von Bayes an die Werte der P_{ts} bei alleiniger Berücksichtigung der Unsicherheit annähern, welche sich wiederum an den Fall ohne Berücksichtigung oder dem Satz von Bayes annähern. Allerdings ist durch die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes eine erhebliche Reduktion des Stichprobenumfangs möglich, weswegen die P_{ts} zusätzlich ansteigt. Ab einem Stichprobenumfang der Vorkenntnis von $n_0 = 100$ steigt die P_{ts} sogar nochmals an, da durch die zusätzliche Berücksichtigung mit dem Satz von Bayes bereits ein großer Anteil des Nachweises erbracht ist. Ab $n_0 = 400$ ist theoretisch sogar gar kein SR Test mehr notwendig, da der Nachweis bereits vollständig allein durch die Vorkenntnis erbracht wird. Dies ist für die praktische Anwendung jedoch irrelevant, da ein Nachweis niemals allein basierend auf Vorkenntnis erbracht werden sollte.

7.3.3 Einfluss der Unsicherheit bei mehreren Systemelementen

Die Erkenntnisse bezüglich Systemen mit lediglich einer Ausfallmode lassen sich nicht ohne Weiteres auf Systeme mit mehreren Ausfallmoden übertragen, da sich die Systemausfallverteilung aus der Schätzung mehrerer Ausfallverteilungen berechnet. Die Streuung des Systemlebensdauerquantils ist also von mehreren Größen abhängig, welche jeweilig ein eigener Stichprobenumfang der Vorkenntnis n_0 zugeordnet werden kann.

Im Folgenden wird zunächst die Berücksichtigung der Unsicherheit der Vorkenntnis bei EoL Tests untersucht. Dazu wird ein Seriensystem mit zwei Komponenten und zwei Ausfallmoden mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und $\mathcal{W}(2; 1,5)$ beispielhaft verwendet. Um das Optimum des Verhältnisses der Stichprobenumfänge beim Test der beiden Komponenten zu identifizieren, wurden verschiedene Kombinationen der Stichprobenumfänge für $n_{ges} = 40$ berechnet. Dabei wurden verschiedene Situationen der Unsicherheit in der Vorkenntnis über die Ausfallverteilungen untersucht, die Ergebnisse sind in Abbildung [7.18](#) dargestellt. Es ist zu sehen, dass sich das Optimum der Prüflingsaufteilung durch die Unsicherheit nicht ändert. Auch ändert es sich nicht, wenn die Unsicherheit bezüglich einem der beiden Ausfallmoden deutlich größer ist als beim anderen. Einzig der Wert der maximal erzielbaren P_{ts} ändert sich. Demnach hat die Unsicherheit keinen Einfluss auf das Optimum der Prüflingsaufteilung. Es ist in Abbildung [7.18](#) zudem bereits zu erkennen, dass die Unsicherheit von Ausfallmode 2 einen größeren Einfluss auf die P_{ts} hat als die von Ausfallmode 1. Dies entspricht dem Optimum der Prüflingsaufteilung, welches ebenso Ausfallmode 2 einen größeren Stichprobenumfang zuordnet, nämlich $n_2 \stackrel{!}{=} 2,484n_1$. Um einen umfassenderen Blick auf die Einflüsse der Unsicherheit der Vorkenntnis zu erlangen, ist in Abbildung [7.19](#) die P_{ts} für EoL Tests der Komponenten und des Gesamtsystems über den Stichprobenumfängen der Vorkenntnisse $n_{0,1}$ und $n_{0,2}$ aufgetragen. Dabei ist ebenfalls zu sehen, dass die Unsicherheit der Vorkenntnis von Ausfallmode 2, also $n_{0,2}$ den größeren Einfluss auf die P_{ts} besitzt. Dies ist durch die größere Kritikalität von Ausfallmode 2 für das System begründet. Denn so ist beispielsweise die Auftretenswahrscheinlichkeit bei geforderter Lebensdauer $t_s = 0,1$ von Ausfallmode 2 mit 1,11 % größer als die von Ausfallmode 1 mit 0,099 %. Um dies zusätzlich zu veranschaulichen, ist in Abbildung [7.20](#) die P_{ts} in Abhängigkeit der beiden Unsicherheiten der Vorkenntnisse für ein Seriensystem dargestellt, bei welchem beide Ausfallmoden eine identische Ausfallverteilung besitzen, nämlich $\mathcal{W}(1; 3)$. Dieses System zeigt ein symmetrisches Bild bezüglich $n_{0,1}$ und $n_{0,2}$, was zeigt, dass der Einfluss der Unsicherheit auf die P_{ts} an die Kritikalität der Ausfallmode im System geknüpft ist. Vereinfachend lässt sich schlussfolgern, dass für jene Ausfallmode, welche die kleinsten Ausfallzeiten aufweist, sowohl der größte Stichprobenum-

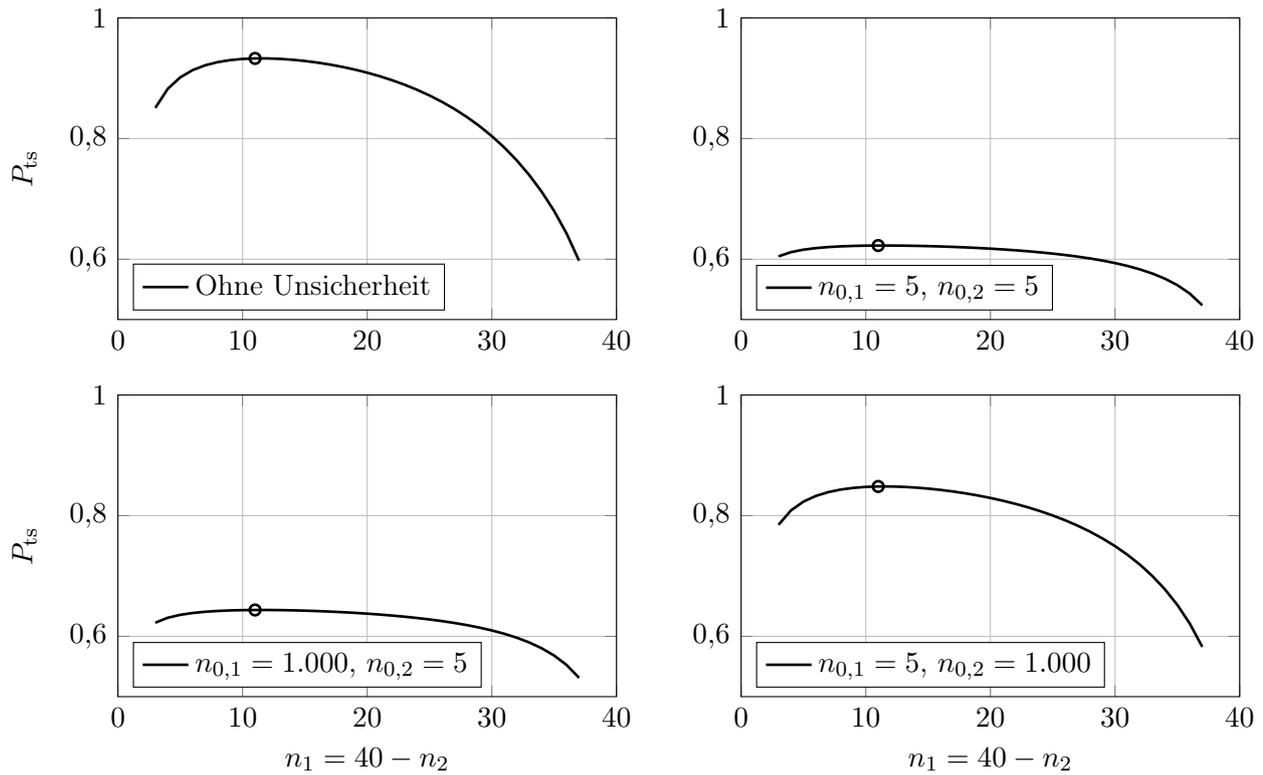


Abbildung 7.18: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Stichprobenumfänge des unzensierten EoL Tests der Komponenten des Beispielsystems mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis für verschiedene Unsicherheiten der Ausfallmoden. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,1$.

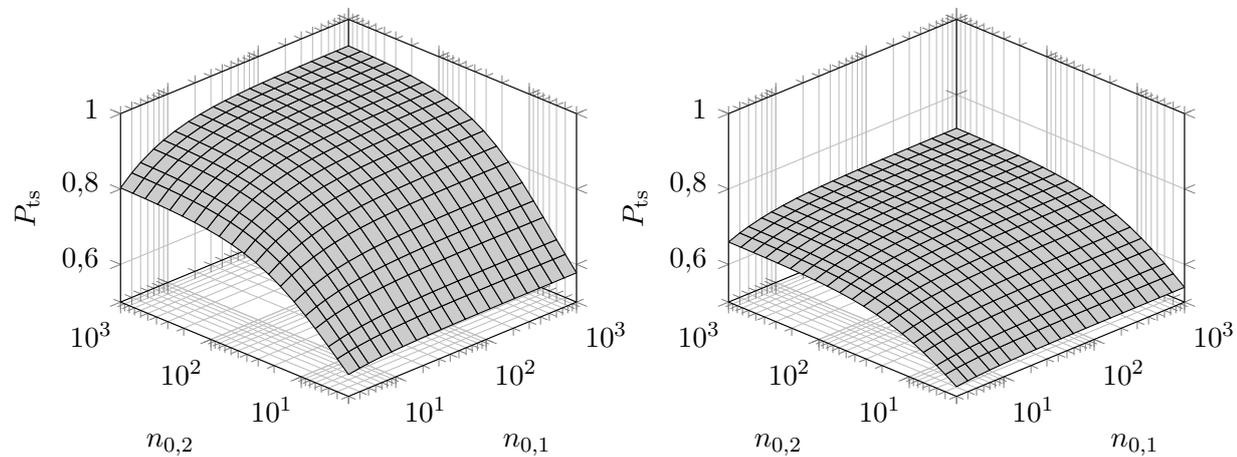


Abbildung 7.19: Werte der P_{ts} des unzensierten EoL Tests der Komponenten (links) und des Gesamtsystems (rechts) in Abhängigkeit des Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,1$.

fang zukommen sollte um eine hohe P_{ts} zu erzielen als auch die Vorkenntnis in möglichst großer Güte, also mit möglichst kleiner Unsicherheit vorliegen sollte.

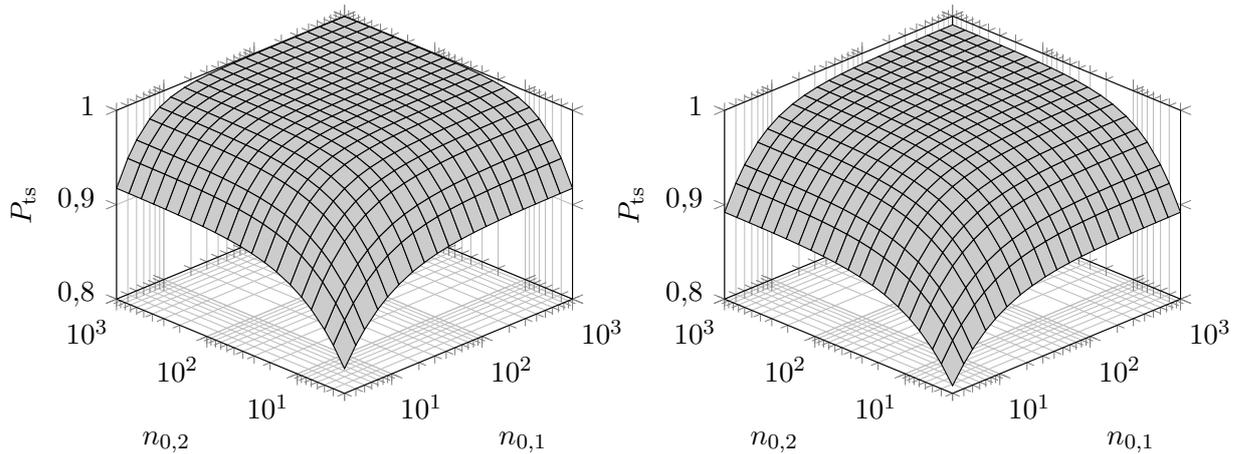


Abbildung 7.20: Werte der P_{ts} des unzensierten EoL Tests der Komponenten (links) und des Gesamtsystems (rechts) in Abhängigkeit des Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis (gleiche AM). Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,1$.

Bei SR Tests ist im Gegensatz zum EoL Test die optimale Prüflingsaufteilung weniger frei, denn die Stichprobenumfänge sind durch das zu erreichende Zuverlässigkeitsziel beschränkt. Wie bereits im vorherigen Abschnitt ausgeführt, können die Stichprobenumfänge bei einem System mit zwei Komponenten und dem Zuverlässigkeitsziel von $R_s = 95\%$ mit $C_s = 90\%$ zwischen 73 und 79 variieren, so dass sich in Summe $n_{ges} = 152$ Prüflinge ergeben. Zudem wurde in Kapitel [7.2.1](#) ausgeführt, dass beim Seriensystem die für das System weniger kritische Ausfallmode mehr Prüflinge zugewiesen werden sollen um das Maximum der P_{ts} zu erreichen. Für das Seriensystem mit $\mathcal{W}(1; 3)$ und $\mathcal{W}(2; 1,5)$ bedeutet dies also für die optimale Prüflingsaufteilung: $n_1 = 79$ und $n_2 = 73$. Auch beim SR Test zeigt sich dabei kein Einfluss der Unsicherheit auf die optimale Prüflingsaufteilung. Außerdem sorgt die Unsicherheit in der Vorkenntnis, wie im Falle eines einfachen Systems mit nur einer Ausfallmode, sowohl für ein Absinken, als auch einen Anstieg der P_{ts} für große Unsicherheiten. Dies ist für das Seriensystem mit $s = 0,6$ in [Abbildung 7.21](#) dargestellt wobei in diesem Fall ein Anstieg zu sehen ist.

Die P_{ts} der SR Tests der Komponenten als auch des Gesamtsystems ist in [Abbildung 7.22](#) dargestellt. Hier ist zu sehen, dass die SR Tests der Komponenten deutlich kleinere Werte der P_{ts} aufweisen als der Gesamtsystemtest. Beide Testebenen jedoch zeigen einen Anstieg der P_{ts} aufgrund der Unsicherheit in den Vorkenntnissen. Allerdings zeigt die Unsicherheit der Vorkenntnis von Ausfallmode 2 einen wesentlich größeren Einfluss auf die P_{ts} als jene von Ausfallmode 1. Dies ist wiederum in der größeren Kritikalität von Ausfallmode 2 begründet, welche bereits beim EoL Test ein ähnliches Verhalten aufwies. Für das Seriensystem mit zwei identischen Ausfallmoden als $\mathcal{W}(1; 3)$, womit beide Ausfallmoden zu gleichen Teilen für einen Systemausfall verantwortlich sind, ist in [Abbildung 7.23](#) dargestellt. Dabei ist wieder ein bezüglich der Unsicherheiten der Vorkenntnis der Ausfallmoden symmetrisches Bild der P_{ts} zu sehen. Allerdings ist ebenso ein leichter Anstieg der P_{ts} bei Abnahme der Unsicherheit, also für größere $n_{0,1}$ und $n_{0,2}$ zu sehen. Dieser Anstieg wiederum ist hierbei durch die größeren involvierten Zuverlässigkeiten begründet. Die größeren Zuverlässigkeitswerte resultieren, da die Zuverlässigkeitsanforderung identisch zu der des Systems aus [Abbildung 7.22](#) gehalten ist, das Seriensystem mit den identischen Ausfallmoden aus [Abbildung 7.23](#) allerdings größere Lebensdauern aufweist und deswegen statt $s = 0,6$ für

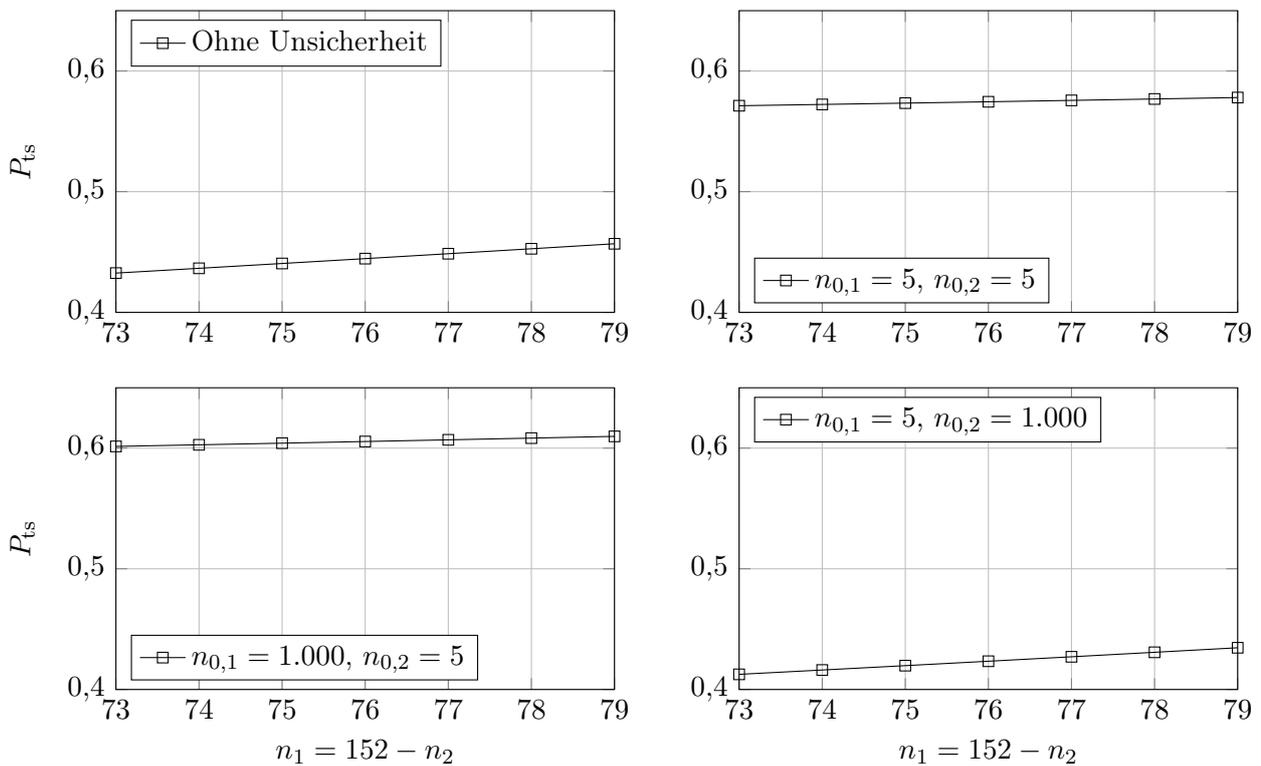


Abbildung 7.21: Werte der P_{ts} in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs des SR Tests der Komponenten des Beispielsystems mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis für verschiedene Unsicherheiten der Ausfallmoden. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,0921$ ($s = 0,6$).

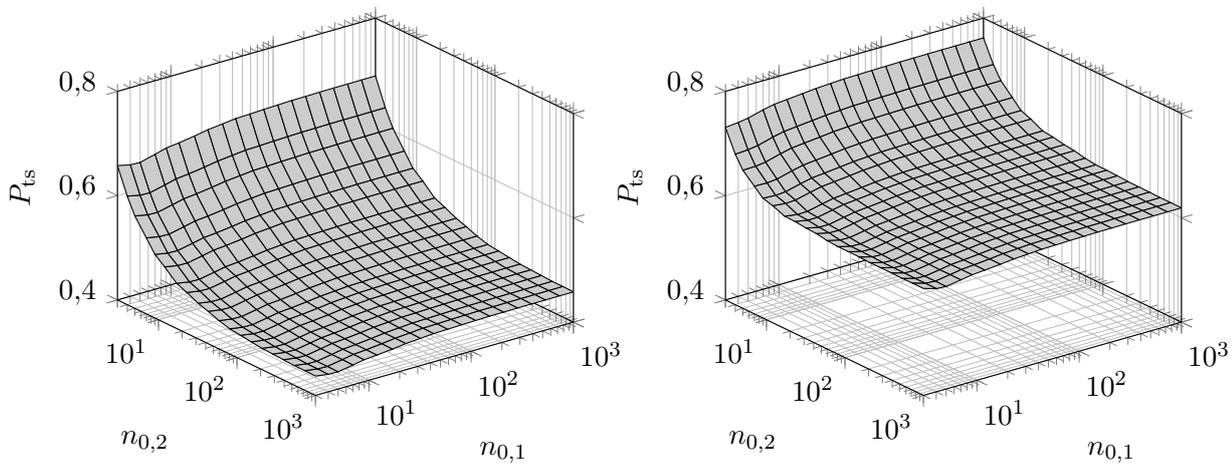


Abbildung 7.22: Werte der P_{ts} des SR Tests der Komponenten (links) und des Gesamtsystems (rechts) in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,0921$ ($s = 0,6$).

dieses System $s = 0,295$ gilt. Damit zeigt sich ein analoges Verhalten zu den beobachteten Zusammenhängen bei einfachen Systemen mit lediglich einer Ausfallmode.

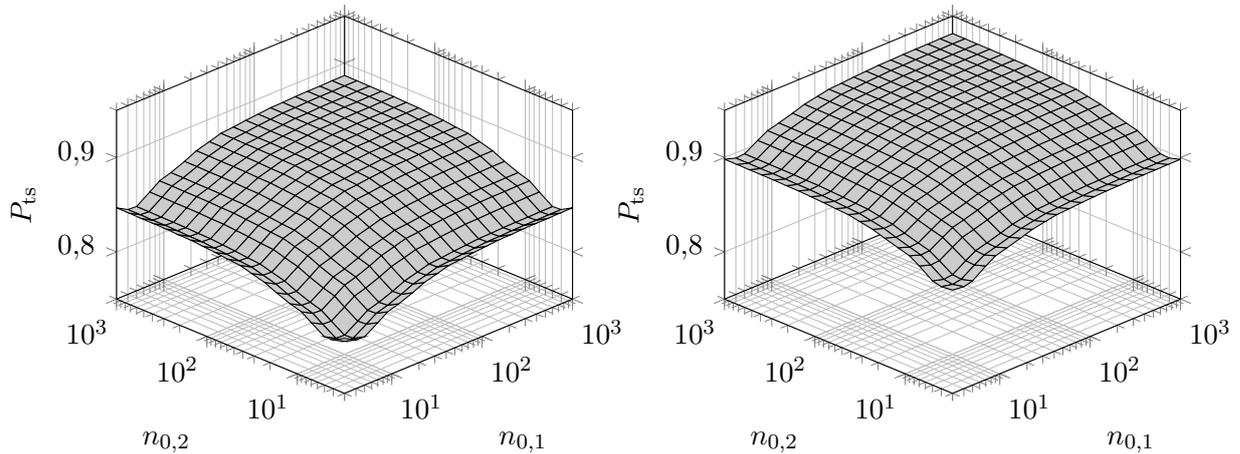


Abbildung 7.23: Werte der P_{ts} des SR Tests der Komponenten (links) und des Gesamtsystems (rechts) in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,0921$ ($s = 0,6$) und das Seriensystem besitzt zwei identische Ausfallmoden mit $\mathcal{W}(1; 3)$.

7.3.4 Einfluss der Unsicherheit bei mehreren Systemelementen und zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes

Im Folgenden wird das Verhalten untersucht, wenn sowohl die Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes, als auch deren Unsicherheit bei Systemen mit mehreren Ausfallmoden berücksichtigt wird. Dazu werden die in Kapitel [6.4](#) vorgestellten Verfahren und Berechnungsmethoden angewandt. Zunächst werden die Einflüsse auf den vollständigen EoL Test untersucht. Hierzu wird erneut das reine Seriensystem mit zwei Ausfallmoden aus den vorherigen Abschnitten verwendet. Es besitzt zwei Ausfallmoden mit den Verteilungen $\mathcal{W}(1; 3)$ und $\mathcal{W}(2; 1,5)$. Für die Komponententest wird dabei die bekannte P_{ts} -optimale Prüflingsaufteilung von $n_2 \stackrel{!}{=} 2,484n_1$ verwendet. In [Abbildung 7.24](#) ist die P_{ts} in Abhängigkeit der Gesamtprüflingszahl und der Summe der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis der beiden Ausfallmoden aufgetragen. Die Stichprobenumfänge der Vorkenntnis $n_{0,1}$ und $n_{0,2}$ wurden jeweils in gleichem Maße erhöht. Die Unsicherheit der beiden Ausfallmoden ist in dieser Abbildung demnach immer identisch. Die Summe der beiden berechnet sich zu $\Sigma n_0 = n_{0,1} + n_{0,2}$. Es ist zu erkennen, dass, analog zu den Erkenntnissen bei Systemen mit einer einzigen Ausfallmode, die P_{ts} praktisch nicht weiter von den Stichprobenumfängen des Tests n abhängig ist. Dies lässt sich ebenso durch die Beschränkung der P_{ts} aufgrund der Unsicherheit in der Vorkenntnis als auch der Anhebung der effektiven Stichprobenumfänge aufgrund des Satz von Bayes, was das Maximum der P_{ts} immer erreichen lässt, erklären. Zwar ist ein leichter Anstieg der P_{ts} zwischen $n = 10$ und $n = 1.000$ zu erkennen; er ist für die praktische Anwendung jedoch unbedeutend. Wichtig zu bemerken ist, dass die Werte der P_{ts} bei den Tests der Komponenten und dem Test des Gesamtsystems identisch sind. Dies liegt daran, dass die Vorkenntnis mit der Unsicherheit n_0 zusammen mit der Systemstruktur allein verantwortlich für die Berechnung der P_{ts} sind. Da diese Information in der Ebene der Ausfallmoden einfließt, ist die Art des Tests – ob Komponententest oder Systemtest – unerheblich, denn beispielsweise die Zensierungen, welche beim Gesamtsystemtest für die Auswertung der Ausfallverteilungen der Ausfallmoden auftreten, sind nicht relevant. Um

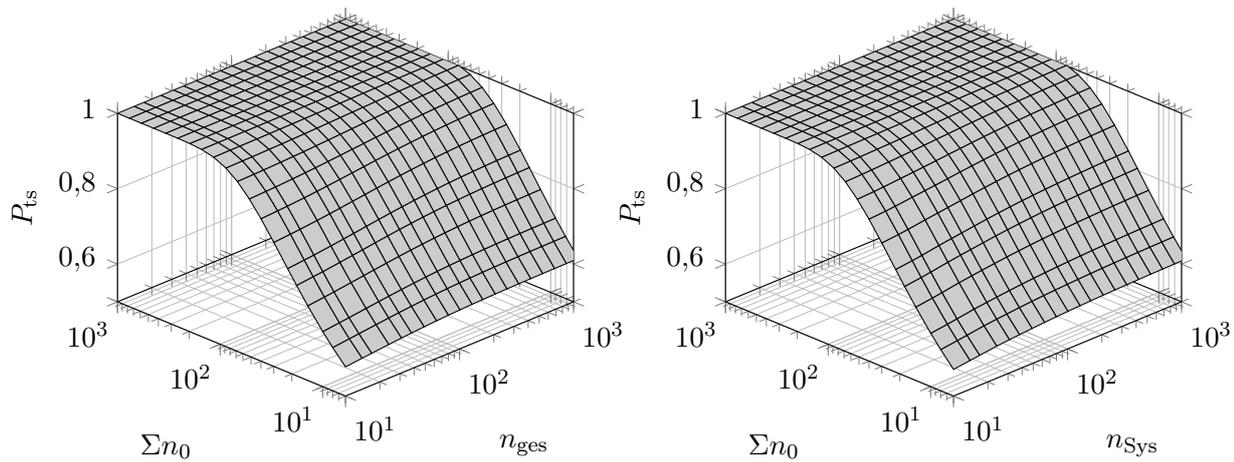


Abbildung 7.24: Werte der P_{ts} des unzensierten EoL Tests der Komponenten (links) und des Gesamtsystems (rechts) in Abhängigkeit der Summe der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis sowie der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,0921$ ($s = 0,6$).

ungleiche Unsicherheiten bezüglich der Ausfallmoden zu untersuchen, ist in [Abbildung 7.25](#) die P_{ts} in Abhängigkeit von $n_{0,1}$ und $n_{0,2}$ für feste Gesamtstichprobenzahlen der Tests aufgetragen. Da die Stichprobenumfänge der Tests ohnehin praktisch keinen Einfluss haben, gibt diese Abbildung ein gutes Bild der Einzeleinflüsse der Unsicherheiten der Vorkenntnisse. Es

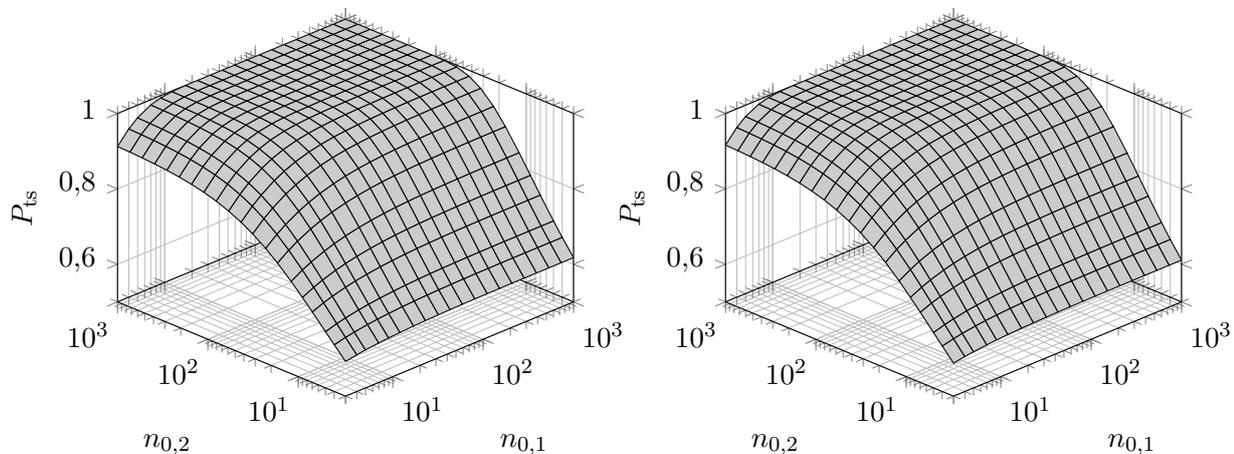


Abbildung 7.25: Werte der P_{ts} des unzensierten EoL Tests der Komponenten (links) und des Gesamtsystems (rechts) in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis sowie der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes. Die Stichprobenumfänge der EoL Tests betragen $n_{ges} = 30$ und $n_{sys} = 30$. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,0921$ ($s = 0,6$).

ist zu erkennen, dass Ausfallmode 2 – die kritischere im System – den größeren Einfluss auf die P_{ts} zeigt. Dies deckt sich mit den Erkenntnissen aus den vorherigen Abschnitten. Zudem zeigt sich ein analoges Bild zu [Abbildung 7.19](#). Allerdings sind die Werte der P_{ts} aufgrund der zusätzlichen Berücksichtigung mit dem Satz von Bayes angehoben, da durch die Kombination mit der Unsicherheit in der Vorkenntnis lediglich die Stichprobenumfänge

der Vorkenntnis relevant sind und dadurch analog zu Abbildung 7.24 die Werte der P_{ts} von Komponententests und Gesamtsystemstests nahezu identisch sind.

Um den Einfluss bei SR Tests zu untersuchen, sind in Abbildung 7.26 die Werte der P_{ts} für den gleichen Fall wie in Abbildung 7.22 berechnet. Jedoch ist diesmal die Unsicherheit der Vorkenntnis berücksichtigt und sie fließt zusätzlich über den Satz von Bayes ein. Dadurch ändern sich auch die erforderlichen Stichprobenumfänge, welche ebenso dargestellt sind. Es wurden bei den Komponententests immer die optimale Prüflingsaufteilung gewählt, was in diesem Fall bedeutet, dass Ausfallmode 1 mehr Prüflinge als Ausfallmode 2 zugeordnet werden. Auch hier zeigt sich erneut der stärkere Einfluss der Unsicherheit der kritischeren

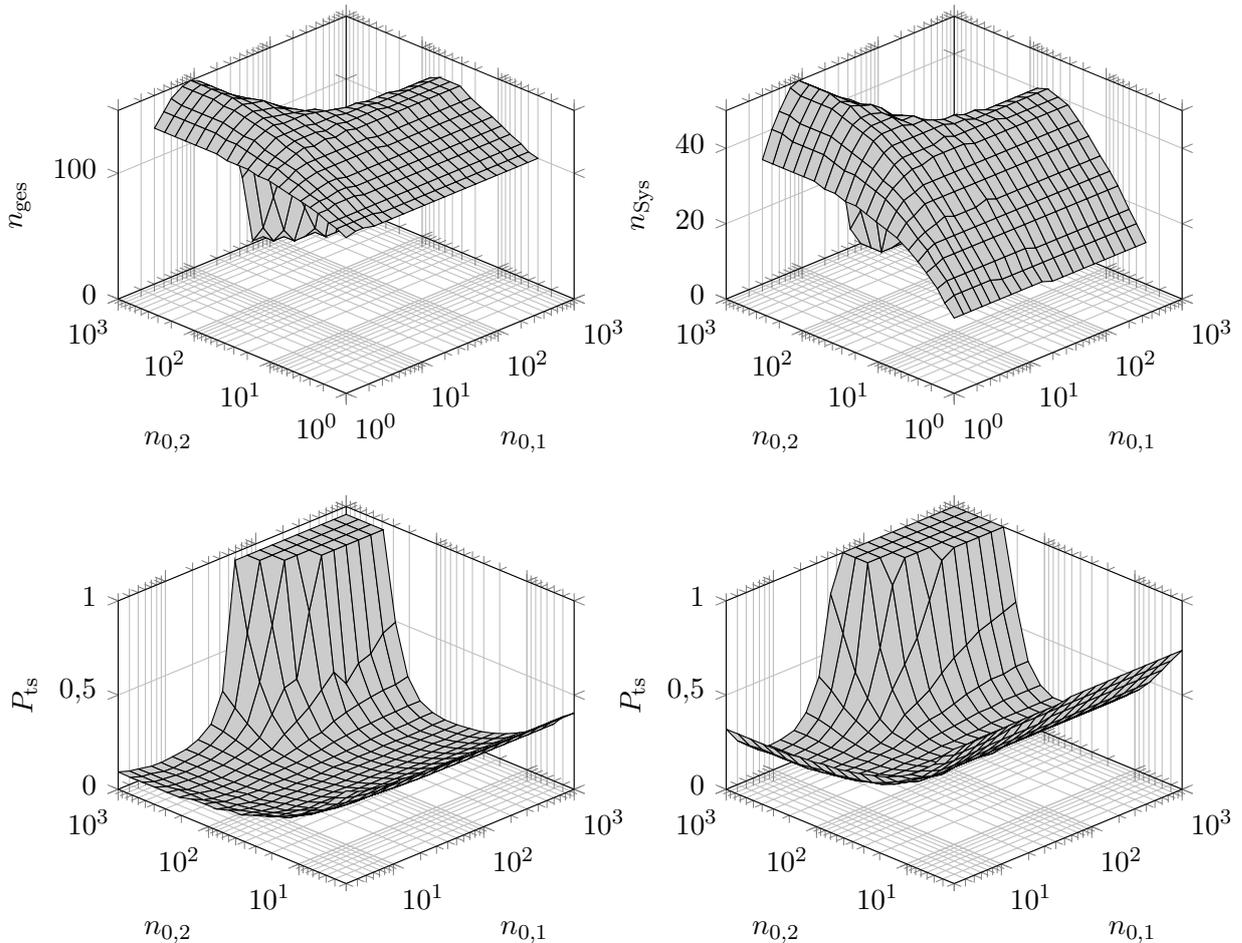


Abbildung 7.26: Werte der P_{ts} des SR Tests der Komponenten (links unten) und des Gesamtsystems (rechts unten) in Abhängigkeit der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis mit Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis und zusätzlicher Berücksichtigung über den Satz von Bayes. Die notwendigen Stichprobenumfänge sind oben dargestellt. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,0921$ ($s = 0,6$).

Ausfallmode 2. Außerdem ist ein starker Anstieg der P_{ts} zu erkennen, welcher durch die Reduktion der erforderlichen Stichprobenumfänge aufgrund der durch den Satz von Bayes berücksichtigten Vorkenntnis stammt.

7.4 Zusammenfassung und Fazit

Die entwickelten Verfahren und Methoden zur Bewertung und Planung von Zuverlässigkeitstests wurden hier angewandt und die Einflüsse auf die P_{ts} untersucht. Dazu wurde anhand von exemplarischen Fällen die Einflüsse der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes, die Berücksichtigung der Systemstruktur als auch die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis untersucht. Zudem wurden die Kombinationen all dieser untersucht.

Dabei ergaben sich einige für die Praxis wichtige Erkenntnisse. So wurde bestätigt, dass die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes bedeutet, dass die dabei berücksichtigte Stichprobe gleichbedeutend mit einer Stichprobe aus dem Test ist. Das bedeutet, dass die Stichprobe der Vorkenntnis direkt Testaufwand ersetzen kann. In der Folge steigt die P_{ts} für alle Testarten, sofern die Vorkenntnis positiv genug ist, das heißt, dass sie nicht dem Zuverlässigkeitsziel widerspricht. Dabei stimmt die analytische Berechnungsmethode sehr gut mit der allgemeinen Berechnungsmethode überein. Auch bei der Berechnung der P_{ts} bei EoL Tests der Komponenten liefern die beiden Methoden gleiche Werte. Bei EoL Tests des Gesamtsystems hingegen, lässt sich in einigen Fällen eine Abweichung der beiden Methoden feststellen; weswegen hierbei im jeweiligen Anwendungsfall die Approximationsgüte der analytischen Methode untersucht werden sollte. In etablierten Methoden zum Nachweis der Systemzuverlässigkeit mittels Tests von Subsystemen, Komponenten oder Bauteilen wird das Zuverlässigkeitsziel des Systems auf die Systemelemente aufgeteilt. Dabei kann die geforderte Aussagewahrscheinlichkeit der einzelnen Tests grundsätzlich beliebig auf die Systemelemente aufgeteilt werden. Wird jedoch das hier vorgestellte Verfahren angewandt, so ist diese Aufteilung des Systemziels auf die Systemelemente nicht notwendig. Durch die gemeinsame Betrachtung und Bewertung steht immer das Systemziel im Fokus und die Zuverlässigkeitstests werden gemeinsam bewertet. Dabei ergibt sich eine optimale Aufteilung der Testaufwände auf die verschiedenen Systemelemente. So ließ sich bei EoL Tests von Subsystemen, Komponenten oder Bauteilen eine optimale Prüflingsaufteilung finden, die eine deutliche Steigerung der P_{ts} zur Folge hat. Diesem Optimum folgend sollte die kritischste Ausfallmode im System grundsätzlich am meisten Testaufwand erfahren. Das heißt, wenn die größtmögliche P_{ts} erzielt werden soll, so erhält man dabei auch die meiste Information zur kritischsten Ausfallmode im System. Dem gegenüber steht die optimale Aufteilung bei SR Tests. Aufgrund der Natur des SR Tests, fordert dieser, dass für ein Maximum der P_{ts} die Ausfallmode im System, den meisten Testaufwand erfährt die am unkritischsten ist, also im System zuletzt für einen Ausfall sorgen würde. Hinzu kommt, dass in vielen Fällen beim SR Test die Prüflingszahlen keine Variationen zulassen, da sonst das Systemziel nicht weiter erreicht werden könnte. Diese optimalen Aufteilungen ändern sich auch durch die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis nicht, jedoch wenn die Vorkenntnis zusätzlich mittels des Satz von Bayes berücksichtigt wird.

Bezüglich der Vergleiche zwischen EoL Tests auf Gesamtsystemebene und EoL Tests auf Subsystem-, Komponenten- oder Bauteilebene ergab sich, dass der Test des Gesamtsystems dahingehend statistisch wertvoller ist, als der Test von Systemelementen, da jeder Prüfling für die Auswertung jeder Ausfallmode im Seriensystem verwendet werden kann. Dabei sind die zu den Ausfallmoden zugewiesenen Stichproben jedoch teils stark zensiert. Die separaten Tests von Systemelementen hingegen liefern für die meisten Ausfallmoden genau so viele Ausfälle wie gewünscht. Dabei zeigte sich unter anderem, dass die Prüflingsaufteilung bei Tests von Subsystemen, Komponenten oder Bauteilen so gewählt werden kann, dass ein maximaler Wert der P_{ts} sichergestellt ist. Dafür lassen sie sich allerdings nur für die Aus-

fallmoden verwenden, welche in den getesteten Systemelemente vorhanden sind. Aufgrund der möglichen optimalen Aufteilung der Prüflinge zwischen den Systemelementen ergibt sich je nach Ausfallmoden und Systemstruktur beim EoL Test eine Präferenz für den Gesamtsystemtests oder den Test von Systemelementen. Beim SR Test hingegen ergibt sich bei Seriensystemen immer eine niedrigere P_{ts} für die Tests der Systemelemente. Dies liegt in den dabei wesentlich größeren erforderlichen Stichprobenumfängen begründet. Aus diesem Grund ist der EoL Test dem SR Test hier statistisch grundsätzlich überlegen und der SR Test sollte meist ausschließlich für einen Test des Gesamtsystems oder zumindest großer Subsysteme verwendet werden. Denn nur auf oberster Systemebene kann der SR Test den Vorteil ausspielen, keine Auswertung getrennt nach Ausfallmoden vornehmen zu müssen. Die Verwendung eines Lebensdauerverhältnisses verändert zwar die erforderlichen Stichprobenumfänge, die Qualität der Tests bleibt davon jedoch unberührt. Bei Parallelsystemen ist dieser Unterschied nicht so stark ausgeprägt. Hinzu kommt, dass der EoL Test deutlich kleinere Sicherheitsabstände s nachweisen kann, sowohl auf Gesamtsystemebene, als auch beim Test der Systemelemente. Der SR Test benötigt dagegen immer große Sicherheitsabstände s , um Werte der P_{ts} von $> 50\%$ zu erreichen. Hinzu kommt, dass größerer Aufwand in Form von mehr Prüflingen oder längeren Testzeiten beim SR Test zu einer kleineren P_{ts} führt. Der Aufwand und Nutzen ist demnach genau gegenläufig. Beim EoL Test hingegen bedeutet mehr Aufwand, beispielsweise in Form von größeren Stichproben, immer eine größere P_{ts} .

Wird Vorkenntnis vom Typ EoL, also die Kenntnis einer Ausfallverteilung beziehungsweise einer Stichprobe und diese Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes zusätzlich verwendet, so profitiert der SR Test davon deutlich stärker als der EoL Test. Dies liegt darin begründet, dass der SR Test selbst keine Information zur Lage der Ausfallzeiten, beziehungsweise zur tatsächlichen Lage der Zuverlässigkeit liefern kann. Die Vorkenntnis in Form eines EoL Tests hingegen schon und deswegen kann solch eine Vorkenntnis eine deutliche Einsparung beim SR Test bedeuten. Der EoL Test hingegen liefert bereits selbst eine Information zur Lage der Ausfallzeiten. Der Informationsgewinn ist demnach geringer, wenn noch zusätzlich Informationen zur Lage einfließen.

Die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis führt beim EoL Test immer zu einer Abnahme der P_{ts} , da die Streuung der Lebensdauerquantile zunimmt. Zudem kann die P_{ts} nicht weiter über einen bestimmten Wert anwachsen. Die maximale P_{ts} ist dabei durch die der Vorkenntnis zugrunde liegenden Stichprobenumfänge n_0 bestimmt. Je größer diese sind, desto größer ist die maximal erreichbare P_{ts} . Beim SR Test hingegen kann die Berücksichtigung der Unsicherheit sowohl zu einer Abnahme, als auch zu einer Zunahme der P_{ts} führen. Dabei ist für die meisten typischen Fälle eine Zunahme zu verzeichnen, welche bei großer Unsicherheit am größten ist. Wird zusätzlich die Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes berücksichtigt, so äußert sich dies beim EoL Test dadurch, dass die P_{ts} nicht weiter vom Stichprobenumfang des Tests n abhängig ist. Dies liegt darin begründet, dass durch die maximale P_{ts} aufgrund der Unsicherheit die P_{ts} durch eine Steigerung des Stichprobenumfangs des Tests nicht weiter anwachsen kann. Durch die berücksichtigte Vorkenntnis mittels des Satz von Bayes kommt hinzu, dass immer mindestens ein effektiver Stichprobenumfang erreicht wird, der die maximale P_{ts} erreichen lässt. In der Folge ändert sich die P_{ts} praktisch nur dann, wenn sich die Stichprobenumfänge der Vorkenntnis n_0 ändern. Für die praktische Anwendung bedeutet dies, dass die P_{ts} ohne die Unsicherheit berechnet werden sollte und die Berücksichtigung der Unsicherheit lediglich als untere Grenze zu verstehen ist. Bei SR Tests hingegen äußert sich die kombinierte Berücksichtigung der Unsicherheit und dem Satz von Bayes meist durch eine doppelte Zunahme der P_{ts} . Denn die Unsicherheit kann zu einer Zunahme führen und die Abnahme der erforderlichen Stichprobenumfänge aufgrund des Satz von Bayes führen nochmals zu einer Zunahme der P_{ts} . Bezüglich der Unsicherheit der

Vorkenntnis hat jene Unsicherheit der Ausfallmode den größten Einfluss auf die P_{ts} , welche auch den größten Einfluss auf den Systemausfall hat. Das gilt sowohl für EoL Tests als auch für SR Tests.

Die Einflüsse auf die P_{ts} sind vielfältig. Hauptsächliche Unterschiede sind dabei durch die Testart selbst gegeben, die sich bezüglich der optimalen Prüflingsaufteilung, der Berücksichtigung der Unsicherheit und beim Verhalten bezüglich einer Steigerung des Testaufwands gegensätzlich verhalten. Einzig bei der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis mittels dem Satz von Bayes ist bei beiden Testarten eine Steigerung der P_{ts} zu verzeichnen. Für die Praxis bedeutet dies, dass der SR Test nur in speziellen Fällen gegenüber dem EoL Test aus statistischer Sicht einen Vorteil bieten kann. Für die bei technischen Systemen meist üblichen parallelen Strukturen ist der Nachteil des SR Tests so nicht so stark gegeben. Bei reinen Parallelsystemen findet keine Zensierung der Informationen der Ausfallmoden für deren Auswertung statt. Das hat zum Effekt, dass der Systemtest gegenüber dem Komponententest einen deutlichen Vorteil aufweisen kann, da ein Prüfling immer für alle Ausfallmoden verwendet werden kann.

Zu bemerken bleibt, dass in der praktischen Anwendung logistische und monetäre als auch zeitliche Aspekte die Wahl des besten Tests mit beeinflussen werden.

Kapitel 8

Anwendungsbeispiel Synchronmaschine

Im Folgenden wird das vorgestellte Verfahren zur Testplanung für einen effizienten Nachweis der Systemzuverlässigkeit an einem fiktiven Beispiel eines Permanentmagnet-Synchronmotors (PSM) angewandt. Dabei werden die im vorherigen Kapitel erzeugten Erkenntnisse mit einfließen.

8.1 Systembeschreibung

Bei dem zu untersuchenden System handelt es sich um einen PSM, wie er beispielsweise in rein elektrischen Kraftfahrzeugen als Traktionsmotor zum Einsatz kommt. Die hier vorgestellten Informationen und Daten dienen der Anschauung der Anwendung der erarbeiteten Methoden und Verfahren dieser Arbeit und sind deswegen hypothetischer Natur. Zudem sind die Zusammenhänge und das System im Sinne der Anschauung vereinfachend dargestellt. Abweichungen zum tatsächlichen Verhalten typischer Motoren aus der Industrie sind demnach möglich. Die Basis der hier dargestellten Zusammenhänge bilden [\[231-233\]](#).

Das betrachtete System wird durch die physischen Komponenten definiert und abgegrenzt. Damit besteht der Elektromotor für diese Betrachtung aus sechs Komponenten: Gehäuse, Stator (mit Wicklungen und Elektroblechen), Rotor (mit Permanentmagneten, Welle und Elektroblechen), Leistungselektronik, Kugelrollenlager links und Kugelrollenlager rechts.

Durch Expertenwissen sowie eine durchgeführte FMEA stehen die möglichen systemrelevanten Ausfallmoden fest und können folgendermaßen den Komponenten zugeordnet werden:

- Leistungselektronik: Bonddrahtablösung im Transistor (AM 1) und Versagen der Kondensatoren (AM 2)
- Stator mit Wicklungen: Wicklungsversagen durch unzureichende Isolation (AM 3)
- Lager links: Lagerschaden (AM 4)
- Lager rechts: Lagerschaden (AM 5)

Da jeder der Ausfallmoden direkt zum Ausfall des Systems führt, handelt es sich um eine Serienstruktur und das Blockschaltbild des Systems kann, wie in [Abbildung 8.1](#) dargestellt, festgelegt werden.

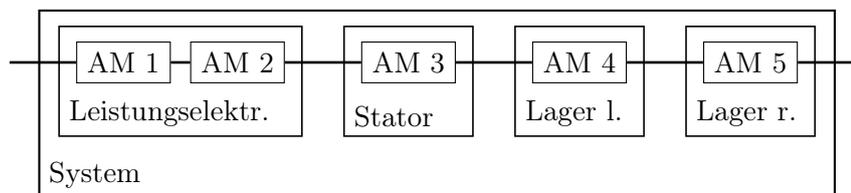


Abbildung 8.1: Systemstruktur der PSM mit den Komponenten und Ausfallmoden (AM).

Aufgrund der vorhandenen Testinfrastruktur sowie der Systemstruktur, können die folgenden Systemelemente auf den fünf unterschiedlichen Prüfständen getestet werden:

- Gesamtsystem mit allen Systemelementen auf dafür vorgesehenem Motorprüfstand
- Stator und Rotor gemeinsam auf einem Wicklungsprüfstand
- Leistungselektronik auf einem Elektronikprüfstand
- Lager einzeln auf einem Lagerprüfstand

Dabei stellt der Wicklungsprüfstand eigene Lager und eine eigene Leistungselektronik zur Verfügung, welche die Lebensdauern der PSM weit übertreffen. Die Lager sind im Motor als identisch angenommen, weswegen diese quasi gemeinsam getestet werden können. Um die Kosten der Tests zu beziffern, können Kostenmodelle aufgestellt werden. Dabei sind die zu den Prüflingen proportionalen Kosten \mathcal{K}_n sowie die zu den Laufzeiten proportionalen Kosten \mathcal{K}_P in Tabelle 8.1 aufgelistet. Bei allen Prüfständen wird erst nachdem der letzte

Tabelle 8.1: Parameter der Testkostenmodelle der verschiedenen Prüfstände.

	Prüflingskosten \mathcal{K}_n in €	Laufzeitkosten \mathcal{K}_P in €/h	Blockgröße
Motorprüfstand	600	4	20
Wicklungsprüfstand	200	4	30
Elektronikprüfstand	300	4	15
Lagerprüfstand	50	1,5	50

Prüfling des jeweiligen Blocks die Ziellaufzeit erreicht oder ausgefallen ist, gerüstet und der nächste vollständige Block in Betrieb genommen. Es ist anzumerken, dass hier vereinfachend angenommen wird, dass die auf den Prüfständen aufgebrachten Lasten immer den Feldlasten entsprechen. Eine erhöhte Last zur Testzeitverkürzung wird nicht in Betracht gezogen. Eine Besonderheit bei den Lagerprüfständen ist, dass die Lager bei gleichem Ausfallmechanismus mit der doppelten Drehzahl der Feldbelastung getestet werden können, was dazu führt, dass die Testzeiten halbiert werden.

8.2 Anforderungen

Die Anforderungen lassen sich in die Anforderungen an das System und an den Nachweis aufteilen. Dabei stellen die Systemanforderungen die Werte der Zuverlässigkeit dar, die durch einen Test mit definierten Anforderungen nachgewiesen werden sollen.

8.2.1 Anforderungen an das System

Die neuen Mobilitätskonzepte, wie beispielsweise fahrerlose Shuttles und Busse sowie automatisierter Individualverkehr erfahren größere Laufzeiten, als der herkömmliche Individualverkehr. Die Anforderungen an das System sind demnach hoch und das Zuverlässigkeitsziel lautet: $R_s = 93\%$ mit $t_s = 4.000$ h.

8.2.2 Anforderungen an den Zuverlässigkeitsnachweis

Die aus dem Test gewonnene Information, mit welcher das Zuverlässigkeitsziel nachgewiesen wird, soll eine gewissen Güte aufweisen, weswegen eine Aussagewahrscheinlichkeit von $C_s = 90\%$ gefordert wird. Außerdem soll der durchgeführte Test mit großer Wahrscheinlichkeit einen erfolgreichen Nachweis haben. Deswegen ist der Mindestwert der Probability of Test Success zu $P_{ts,min} = 80\%$ festgelegt. Für die Durchführung der Tests steht ein Budget von 1.750.000 € zur Verfügung. Die Budgetgrenze von $K_{max} = 1.750.000$ € darf also nicht überschritten werden und das aufgewendete Budget sollte möglichst effizient eingesetzt werden.

Mit der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit ist das Risiko doch ein System auszuliefern, das die gestellten Anforderungen der Zuverlässigkeit und Lebensdauer nicht erfüllt minimiert. Wohingegen die geforderte $P_{ts,min}$ das Risiko eines Testausgangs, welcher dem System eine Zuverlässigkeit oder Lebensdauer attestiert, welche die Vorgaben nicht erfüllen, obwohl das System diese in der Realität erfüllt, minimiert.

8.3 Verfügbare Vorkenntnisse

Bezüglich der Ausfallmoden gilt es alle verfügbaren Quellen der Vorkenntnis zu identifizieren und gegebenenfalls aufzubereiten oder zu übersetzen. Zu den genannten Ausfallmoden im System wurden die in Tabelle [8.2](#) gelisteten Vorkenntnisse gesammelt. Bezüglich der

Tabelle 8.2: Identifizierte Vorkenntnisse über die Ausfallmoden.

Ausfallmode	Quelle	Stichprobenumfang n_0	Verwendung Bayes
AM 1 Bonddrahtablösung	EoL Versuche an Vorgängerprodukten	31	Nein
AM 2 Kondensatoren	EoL Versuche an Vorgängerprodukten	23	Nein
AM 3 Wicklungen	EoL Versuche an ähnlichen Systemen	17	Nein
AM 4 & AM 5 Lager	EoL Versuche an denselben Lagern	29	Ja

Ausfallmoden der Leistungselektronik wurden bereits an Vorgängerprodukten mit nahezu identischem Aufbau und nahezu identischen Lasten EoL Tests durchgeführt, die für den vorliegenden Fall eine gute Abschätzung der Ausfallverteilung liefern. Sie können jedoch nicht über den Satz von Bayes berücksichtigt werden, da die Ähnlichkeit der Vorgängerprodukte zu gering ist. Bei der Vorkenntnis zur Ausfallmode der Wicklungsisolation wurden EoL Tests bereits bei ähnlichen Anwendungen durchgeführt, was ebenso eine Schätzung

der Ausfallverteilung erlaubt, jedoch keine Übernahme der Testergebnisse mittels des Satz von Bayes. Bei den bereits durchgeführten Lagerversuchen kamen bei einer sehr ähnlichen Anwendung mit nahezu identischer Last die gleichen Lager zum Einsatz. Die Testergebnisse dürfen für diese Ausfallmoden also auch mit dem Satz von Bayes übernommen werden.

Aus den gesammelten Vorkenntnissen ergeben sich die in Tabelle 8.3 gelisteten Ausfallverteilungen in Form von zweiparametrischen Weibullverteilungen. Dabei wurden beispielsweise bei den Lebensdauerberechnungen, die in Kapitel 5.1.2 beschriebene Auswertung verwendet um die Ausfallverteilung zu erhalten. Bezüglich der Prüfstände ergeben sich die in Tabelle

Tabelle 8.3: Identifizierte Vorkenntnisse über die Ausfallmoden.

Ausfallmode	Ausfallverteilung	Stichprobenumfang der Vorkenntnis n_0
AM 1	$\mathcal{W}(63.298 \text{ h}; 3,59)$	31
AM 2	$\mathcal{W}(64.120 \text{ h}; 3,5)$	23
AM 3	$\mathcal{W}(63.903 \text{ h}; 3)$	17
AM 4 & AM 5	$\mathcal{W}(96.207 \text{ h}; 1,5)$	29

8.4 gelisteten, möglichen Tests mit deren jeweilig angesprochenen Ausfallmoden. Da die beiden Lager identisch sind, können die Informationen welche zu den Lagern erzeugt werden doppelt für jeweils Ausfallmoden 4 und 5 verwendet werden.

Tabelle 8.4: Prüfstände, deren getestete Komponenten und die dabei angesprochenen Ausfallmoden.

	Getestete Systemelemente	angesprochene Ausfallmoden
Motorprüfstand	Gesamtsystem	Alle
Wicklungsprüfstand	Stator und Rotor	AM 3
Elektronikprüfstand	Leistungselektronik	AM 1 & 2
Lagerprüfstand	Lager links und rechts	AM 4 & 5 jeweils einzeln

8.4 Zuverlässigkeitstestplanung

Im Folgenden werden SR Tests und EoL Tests mittels der P_{ts} bewertet um anschließend den besten Test zum Nachweis der Zuverlässigkeit zu identifizieren.

8.4.1 Success-Run Tests

Die Planung von SR Tests ist wenig aufwendig, da die notwendigen Stichprobenumfänge durch das Zuverlässigkeitsziel bestimmt sind. Beim Test des Gesamtsystems auf dem Motorprüfstand ergibt sich damit ein erforderlicher Stichprobenumfang von $n_{SR,erf} = 32$. Dieser Stichprobenumfang kann auch nicht weiter durch die Berücksichtigung der Vorkenntnis der beiden Ausfallmoden der Lager reduziert werden, da für die weiteren Ausfallmoden leider keine Vorkenntnis berücksichtigt werden kann. Eine Aggregation der Zuverlässigkeitsverteilung von Ausfallmode 4 und 5 mit Gleichverteilungen der Zuverlässigkeitsverteilungen der

übrigen Ausfallmoden ergäbe eine Verteilung, welche solch schlechte Zuverlässigkeiten des Systems attestierte, sodass der erforderliche Stichprobenumfang steigt statt abnimmt. Bei Tests auf den Komponentenprüfständen, also dem Wicklungs-, Elektronik- und Lagerprüfstand hingegen kann die Vorkenntnis einfließen und es findet eine Reduktion des erforderlichen Stichprobenumfangs statt. Die dazu mittels dem Bootstrap-Ansatz aus der Ausfallverteilung und dem Stichprobenumfang von $n_0 = 29$ bei $t_s = 4.000$ h abgeleitete Beta-Verteilung der Zuverlässigkeit von Ausfallmode 4 und 5 lautet $\mathcal{B}(191,52; 1,75)$. Damit ergibt sich bei den drei Prüfständen ein erforderlicher Gesamtstichprobenumfang von $n_{\text{SR,ges,erf}} = 159$ (ohne Vorkenntnis: 279). Mit einer optimalen Aufteilung von $n_{\text{Wickl.}} = 73$, $n_{\text{Elektro.}} = 79$ und $n_{\text{Lager}} = 7$ ergibt sich damit eine P_{ts} von 97,4% (gerechnet ohne Unsicherheit). Im Vergleich zur optimalen Aufteilung ohne Vorkenntnis mit $n_{\text{Wickl.}} = 90$, $n_{\text{Elektro.}} = 99$ und $n_{\text{Lager}} = 90$ ergibt sich eine P_{ts} von 32,2% (ohne Unsicherheit). Also ein deutlicher Anstieg in der P_{ts} , da die Vorkenntnis der Lager berücksichtigt werden kann und so die zugehörigen Ausfallmoden (die kritischsten im System) quasi nicht weiter erprobt werden müssen. Auch hier erkennt man erneut, dass eine Vorkenntnis in Form eines EoL Tests bei einem SR Test einen deutlichen Gewinn in der P_{ts} verzeichnen kann. Trotz der Tatsache, dass beim Lagerprüfstand die Prüflinge bei der Auswertung doppelt verwendet werden können und beim Elektronikprüfstand zwei Ausfallmoden gleichzeitig angesprochen werden, ist der Stichprobenumfang von $n_{\text{SR,ges,erf}} = 159$ zu groß um tatsächlich realisiert werden zu können. Denn die Kosten belaufen sich auf 2.491.650 € und überschreiten damit die Kostengrenze deutlich. Der Test des Gesamtsystems auf dem Motorprüfstand dagegen erreicht Kosten in Höhe von 531.200 € und erfüllt damit die Budgetgrenze. Allerdings erreicht dieser lediglich eine P_{ts} von 57,46% und sollte vorerst zurückgestellt werden.

8.4.2 End-of-Life Tests

Im ersten Schritt der Planung des EoL Tests soll die optimale Prüflingaufteilung gefunden werden, die sich bei Tests auf dem Wicklungs-, Elektronik- und Lagerprüfstand für EoL Tests ergeben. Dazu wird die approximative und analytische Berechnungsmethode eingesetzt, da sie eine schnelle Rechnung erlaubt. Da die Prüflingaufteilung nicht von der Unsicherheit abhängt, findet die Rechnung ohne Berücksichtigung der Unsicherheit statt. Die optimale Prüflingaufteilung ist abhängig des Gesamtstichprobenumfangs und in Abbildung 8.2 dargestellt. Auch aufgrund der Abhängigkeit vom Stichprobenumfang sind hier Millionen von Kombinationen für eine erschöpfende Suche zu berechnen. Dies ermöglicht nur die analytische und approximative Berechnungsmethode in adäquater Rechenzeit. Dabei ist zu sehen, dass wie erwartet der kritischsten Ausfallmode, welche durch den Lagerprüfstand abgedeckt wird, der größte Anteil zugeteilt wird. Dieser steigt mit steigendem Gesamtstichprobenumfang, da der Anteil am Gesamtstichprobenumfang der durch die Vorkenntnis bereits berücksichtigt ist, sinkt. Mit diesen Prüflingaufteilungen, können die Werte der P_{ts} berechnet werden. Da in diesem Fall bereits kleine Stichprobenumfänge ausreichend große Werte der P_{ts} erzielen, kann hier direkt mit der allgemeinen Berechnungsmethode gerechnet werden. Sie sind zusammen mit den Werten des Gesamtsystemtests auf dem Motorprüfstand in Abbildung 8.3 eingezeichnet. Aufgrund der Erkenntnisse aus Kapitel 7 bezüglich der Berechnung der P_{ts} unter Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis, werden die Werte der P_{ts} unter Berücksichtigung der Unsicherheit lediglich ergänzend berechnet. Sie sind ebenfalls in Abbildung 8.3 dargestellt. Dabei ist zu sehen, dass die Komponentenprüfstände deutlich von der optimalen Aufteilung der Prüflinge profitieren, denn die Werte der P_{ts} sind größer als jene des Motorprüfstands. Da die Forderung nach einem Systemnachweis mit mindestens $P_{ts} = 80\%$ lautet, kommen damit sowohl der EoL Test des Motorprüfstands

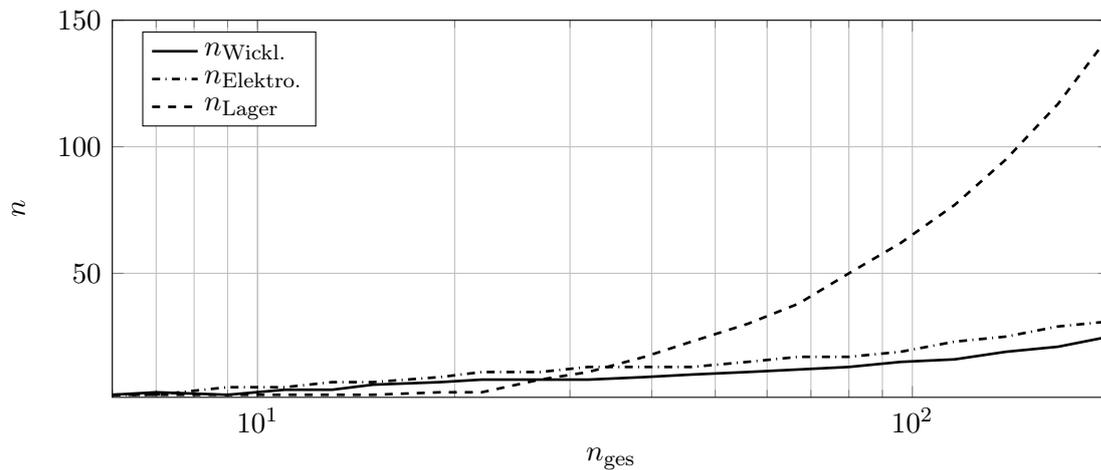


Abbildung 8.2: Stichprobenumfänge der drei Prüfstände, sodass sich die maximale P_{ts} bei EoL Tests einstellt.

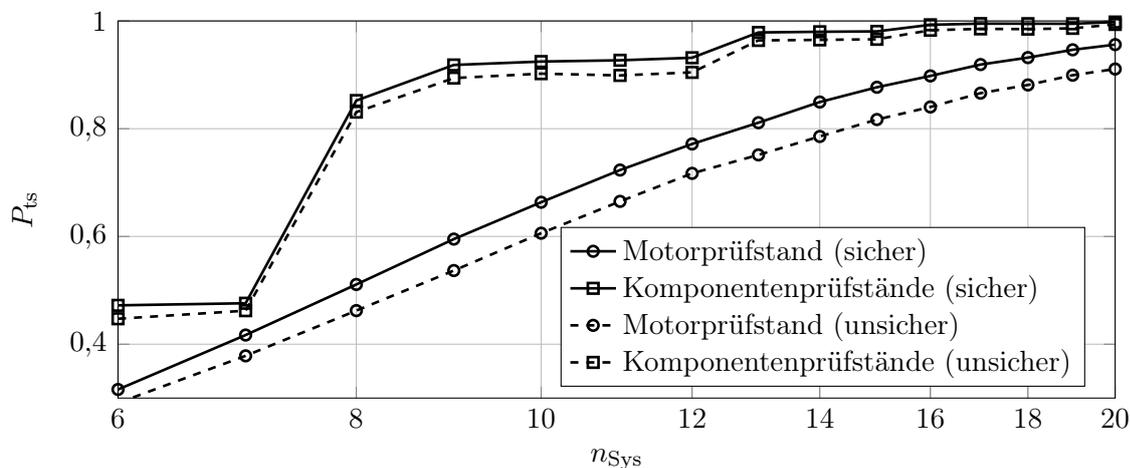


Abbildung 8.3: P_{ts} der Komponentenprüfstände und des Motorprüfstands über dem Gesamtstichprobenumfang. Mittels der allgemeinen Berechnungsmethode in unsicherer und sicherer Form berechnet (jeweils 50.000 Iterationen).

mit $n_{Sys} = 13$, als auch die EoL Tests auf den Komponentenprüfständen mit $n_{ges} = 8$ beziehungsweise $n_{Wickl.} = 2$, $n_{Elektro.} = 4$ und $n_{Lager} = 2$ in Frage. Dabei ist zu sehen, dass die beiden EoL Tests sogar im schlechtesten Fall mit Berücksichtigung der Unsicherheit die Forderung nach der P_{ts} fast noch erfüllen. Die Erfüllung der Mindest- P_{ts} allein reicht jedoch nicht aus, es muss daneben die Kostengrenze eingehalten werden. Diese ist als Median für die zwei Fälle in [Abbildung 8.4](#) eingezeichnet. Die Grenzen sind eingezeichnet und es ist zu sehen, dass nur der EoL Test auf dem Komponentenprüfstand mit $P_{ts} = 85,2\%$ und Kosten von 1,34 Millionen € alle Anforderungen einhalten kann. Der Gesamtmotortest erreicht bei höheren Kosten von 1,69 Millionen € eine etwas niedrigere P_{ts} von 81,1%. Um die Kosten etwas zu reduzieren, können die EoL Tests zensiert werden. Um zu untersuchen, welche Zensierung dabei sinnvoll ist, sind in [Abbildung 8.5](#) für den Motorprüfstand die P_{ts} und die Kosten als Median eingezeichnet. Hier ist zu sehen, dass durch die Zensierung die Schätzung der Ausfallverteilungen stark verschlechtert wird, was sich in einer starken Reduktion der P_{ts} -Werte zeigt. Außerdem führt die Zensierung nur zu einer moderaten Reduktion der im Test benötigten Kosten. Aus diesem Grund können keine Zensierten EoL Tests in Betracht

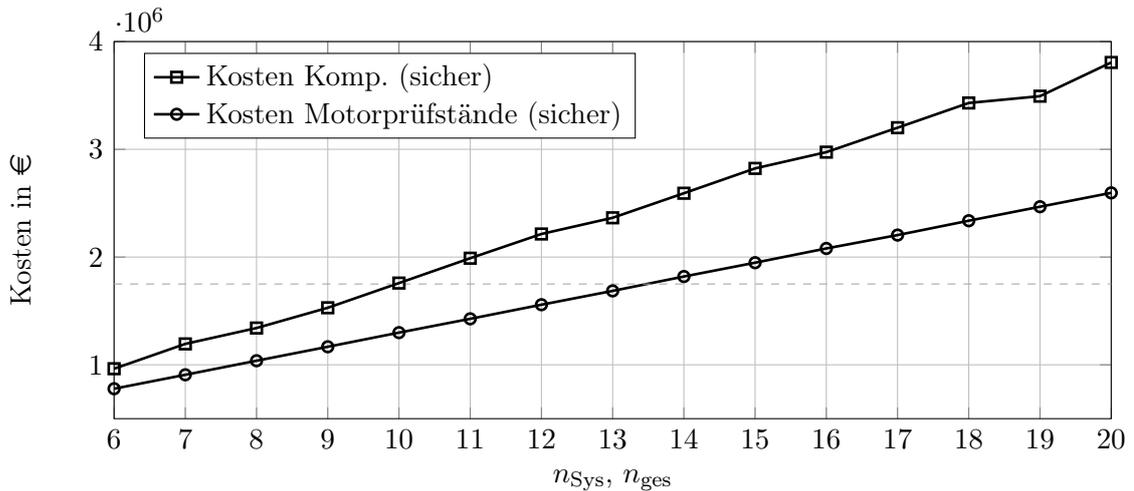


Abbildung 8.4: Kosten der Komponentenprüfstände und des Motorprüfstands über dem Gesamtstichprobenumfang. Mittels der allgemeinen Methode berechnet (jeweils 50.000 Iterationen).

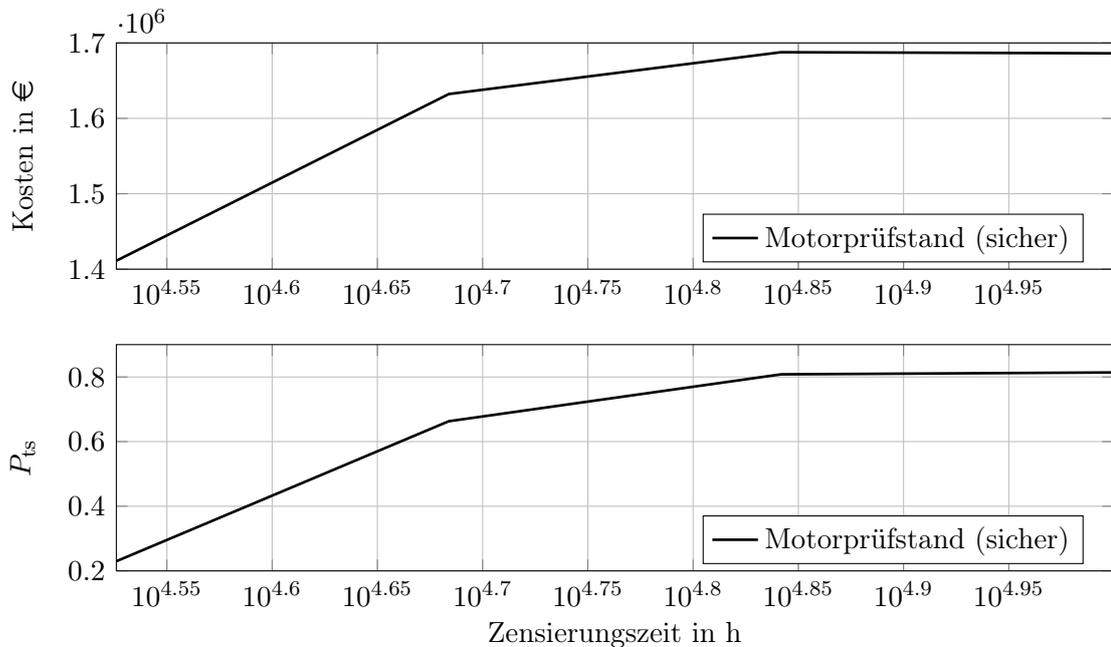


Abbildung 8.5: Werte der P_{ts} (unten) und der Kosten (Oben) des Motorprüfstands in Abhängigkeit der Zeitzensierung für einen Stichprobenumfang von $n = 13$. Mittels der allgemeinen Methode berechnet (jeweils 50.000 Iterationen).

gezogen werden, da ein zensierter Test erst dann die gewünschte P_{ts} erreicht, wenn bereits die Kosten auf demselben Niveau liegen, wie beim unzensierten Test.

8.4.3 Identifikation des effizientesten Tests

Um die Effizienz der EoL Tests auf Gesamtsystemebene, auf Komponentenebene und dem SR Test auf Gesamtsystemebene zu bewerten, wird die berechnete P_{ts} durch die entstehenden Kosten geteilt. Dabei ergibt sich für die beiden EoL Tests

$P_{ts, \text{EoLKomp}, \mathcal{K}} = 6,357 \cdot 10^{-5} \text{ \%/€}$ und $P_{ts, \text{EoLSys}, \mathcal{K}} = 4,811 \cdot 10^{-5} \text{ \%/€}$ wohingegen der SR Test auf Gesamtsystemebene $P_{ts, \text{SRSys}, \mathcal{K}} = 1,082 \cdot 10^{-4} \text{ \%/€}$ verzeichnen kann. Obwohl der SR Test die Anforderungen nicht erfüllen kann, so wäre er der effizienteste Test. Hinsichtlich der Effizienz lediglich auf Platz drei ist der EoL Test auf dem Motorprüfstand. Da der Komponententest alle Anforderungen erfüllen kann und hinsichtlich der Effizienz auf Platz Zwei liegt, ist es jener welcher für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit zu wählen ist.

8.5 Zusammenfassung und Fazit

Das hier untersuchte Fallbeispiel des Zuverlässigkeitsnachweises eines Elektromotors mit Leistungselektronik zeigte, dass die entwickelten und vorgestellten Methoden gut geeignet sind um einen effizienten Zuverlässigkeitsnachweis bei Systemen sicherzustellen. Dabei wurde das System analysiert, Ausfallmoden identifiziert, Vorkenntnisse gesammelt und aufbereitet. Die entwickelten Methoden zur Berechnung der P_{ts} kamen hier alle zum Tragen. So eignete sich die analytische Berechnungsmethode hervorragend, um große Parameterbereiche zu untersuchen. In diesem Falle half sie dabei die optimale Prüflingsaufteilung bei Tests auf den Komponentenprüfständen zu identifizieren. Nur durch die dadurch einfache und schnelle Rechnung konnten die notwendigen Kombinationen untersucht werden. Die optimale Prüflingsaufteilung hat zum Effekt, dass die P_{ts} bei den Komponentenversuchen massiv ansteigt. Eine detaillierte Untersuchung der vielversprechendsten Tests ermöglichte dabei die allgemeine Berechnung. Sie zeigte auf, dass die EoL Tests der Komponenten und der Test des Gesamtsystems fähig sind, die Anforderungen an den Nachweis zu erfüllen. Der SR Test kann die Anforderungen an den Test nicht erfüllen. Da der Komponententest hinsichtlich der notwendigen Kosten effizienter ist, als der Test auf dem Motorenprüfstand, ist dies hier der beste Test, um die Systemzuverlässigkeit nachzuweisen.

Die Anwendung der P_{ts} in der Testplanung ist demnach essentiell. Nur durch diese objektive Bewertung wird es möglich, Tests hinsichtlich deren Eignung des Zuverlässigkeitsnachweises auszuwählen. Die Effizienz aus dem Quotienten aus P_{ts} und den Kosten ermöglicht dabei die notwendigen Aufwände in die Bewertung zusätzlich mit einfließen zu lassen.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Die Entwicklung von technischen Produkten muss sicherstellen, dass die Funktionalität über die gewünschte Nutzungsdauer gewährleistet ist. Dies bedeutet, dass die damit gestellte Zuverlässigkeitsanforderung erfüllt werden muss. Um sie zu überprüfen werden Zuverlässigkeitsnachweistests durchgeführt. Die Herausforderungen sind dabei vielfältig: So muss der Nachweis zum einen sicherstellen, dass er die notwendige statistische Güte aufweist um den Nachweis überhaupt erbringen zu können, sprich geeignet sein um das gewünschte Ergebnis zu erzielen und zum anderen mittels der zur Verfügung stehenden Ressourcen umsetzbar sein. Sehr häufig werden in der Industrie für den Zuverlässigkeitsnachweis Success-Run Tests eingesetzt, welche durch ihre einfache Planbarkeit bestechen. Diese sind jedoch wenig flexibel und meist beruht die dabei gewonnene Aussage, auf dessen Basis der Zuverlässigkeitsnachweis geführt wird, auf weiteren Annahmen, die der Test selbst nicht bestätigen kann. Schlägt der Test fehl und weist er die geforderte Zuverlässigkeit nicht nach, so wird meist das Produkt selbst angepasst und die dabei resultierenden Entwicklungsschleifen führen zu erhöhten Kosten und gegebenenfalls einer späteren Produkteinführung. Eine Anpassung des Tests oder gar eine Bewertung dessen Eignung bezüglich des Nachweises wird selten in Betracht gezogen.

Die Probability of Test Success ist fähig die notwendige Bewertung verschiedener Testkonfigurationen und -arten bezüglich deren Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Zuverlässigkeitsnachweises vorzunehmen. Dadurch wird ermöglicht, dass der Test mit der besten Eignung ausgewählt werden kann. Außerdem erlaubt die Probability of Test Success die Analyse der Änderung oder Erweiterung eines Tests, sollte dieser wider Erwarten nicht erfolgreich sein. Dies ist im Gegensatz zu einer Produktänderung ein großer Vorteil. Aktuelle Konzepte sind jedoch nur fähig Produkte mit einer einzigen Ausfallmode zu betrachten. Dies stellt eine starke Einschränkung dar, denn so sind insbesondere aktuelle, hochvernetzte Produkte durch eine Vielfalt an Funktionen und Komponenten gekennzeichnet und in der Folge herrschen oft viele Ausfallmoden vor. Außerdem kann die Unsicherheit der notwendigen Eingangsdaten der Untersuchung mit Bewertung der Probability of Test Success nicht berücksichtigt werden. In der Praxis übliche Konzepte zur Reduktion des Testaufwands, welche bereits gewonnene Informationen zur Zuverlässigkeit des Produkts berücksichtigen, können mit aktuellen Konzepten ebenso nicht bewertet werden. Zudem vermissen diese eine statistische Einordnung der Probability of Test Success.

Die vorliegende Arbeit nutzt die Probability of Test Success und entwickelt Methoden um Tests realer Systeme mit mehreren Subsystemen, Komponenten, Bauteilen und Ausfallmoden bewerten zu können. Zusätzlich wird die Unsicherheit der notwendigen Vorkenntnis

berücksichtigt und außerdem zusätzlich die Vorkenntnis über den Satz von Bayes. Hierzu wurde zunächst die Probability of Test Success selbst betrachtet und in den statistischen Kontext eingeordnet. Es zeigte sich, dass die Probability of Test Success als Trennschärfe des Zuverlässigkeitstests verstanden werden kann. Da die Aussagewahrscheinlichkeit bereits in der Zuverlässigkeitsanforderung genannt ist, vervollständigt die Probability of Test Success damit als Trennschärfe des Tests das statistische Bild. Die Aussagewahrscheinlichkeit stellt dabei das Komplement zum statistischen Fehler erster Art dar, also dem Risiko eine falsche Aussage zu gewinnen – das Produkt erfüllt die Anforderungen tatsächlich nicht, obwohl der Test diese attestiert – wohingegen die Probability of Test Success das Komplement zum statistischen Fehler zweiter Art darstellt, also dem Risiko eines fehlgeschlagenen Nachweises, obwohl das Produkt die Anforderungen tatsächlich erfüllt. Diese Einordnung ermöglichen zudem vereinfachte Berechnungsmethoden für die Probability of Test Success, welche ebenso erarbeitet wurden. Dabei beruht die allgemeine Berechnungsmethode auf einem erweiterten Bootstrap-Ansatz mit Resampling-Methode, was die Darstellung beliebig komplexer Tests ermöglicht. Die analytische und approximative Berechnungsmethode erlaubt eine über die Varianz-Kovarianz-Matrix sowie einer Taylorreihenapproximation die asymptotischen Eigenschaften der Quantil-Schätzmethoden auszunutzen um so eine einfache und schnelle analytische Berechnung basierend auf der Normalverteilung zu ermöglichen. Bei ausfallfreien Tests, wie dem Success-Run Test, ist stets eine analytische Berechnung möglich. Die zusätzliche Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes resultiert bei ausfallbasierten Tests, den End-of-Life Tests, in einer der Maximum-a-Posteriori-Schätzung ähnlichen Erweiterung des Stichprobenumfangs. Um der durch die starre Vorkenntnis reduzierten Streuung der Lebensdauerquantile Rechnung zu tragen, werden die Varianzen über einen mit dem Satz von Bayes berechneten Korrekturfaktor reduziert. Um die notwendige Vorkenntnis aus bereits durchgeführten Versuchen und Lebensdauerberechnungen ableiten zu können, wurden entsprechende Methoden entwickelt. Komplexe Systeme mit mehreren Ausfallmoden und Systemebenen bedürfen beim Nachweis der Systemzuverlässigkeit der Besonderheit, dass die Auswertung der Testdaten bei ausfallbasierten Tests getrennt nach Ausfallmoden erfolgen muss. Dies hat zur Folge, dass die Berechnung der Probability of Test Success dies ebenso abbildet. Um die Betrachtung um der Unsicherheit der Eingangsdaten zu erweitern, wurde zunächst die Unsicherheit als epistemische Unsicherheit identifiziert, welche mit der aleatorischen Unsicherheit, also der System-inhärenten Unsicherheit bezüglich des Produktausfalls, vermischt ist. Zur Berücksichtigung dieser in der Bewertung mittels der Probability of Test Success, wurden die Berechnungsverfahren zum einen um ein doppeltes Bootstrap-Verfahren erweitert und zum anderen wurde die resultierende Mischverteilung des Lebensdauerquantils in der analytischen Berechnung identifiziert. Die Kombination der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes, der Berücksichtigung mehrerer Ausfallmoden und der Systemstruktur, sowie der Unsicherheit in der Vorkenntnis, wurden in einem ganzheitlichen Verfahren umgesetzt. Dieses ermöglicht ein einheitliches Vorgehen zur Identifikation des möglichen und effizientesten Tests für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit. Es wird sichergestellt, dass der ausgewählte Test eine hohe Wahrscheinlichkeit hat den gewünschten Nachweis zu erbringen und die eingesetzten Ressourcen möglichst effektiv zu verwenden. Damit wird der Zielkonflikt der Testplanung aus Genauigkeit und Kosten aktiv entschärft und Kombinationen von Tests, welche bisher nicht für den Nachweis der Zuverlässigkeit in Betracht gezogen werden konnten, ermöglicht.

Untersuchungen der Einflüsse auf die Probability of Test Success haben gezeigt, dass die Stichprobe der Vorkenntnis gleichbedeutend mit der Stichprobe des durchgeführten Tests ist, wenn die Vorkenntnis zusätzlich über den Satz von Bayes berücksichtigt wird. Dies hat zum Effekt, dass die Berücksichtigung mit dem Satz von Bayes aktiv Erprobungsaufwand

ersetzen kann und damit die Probability of Test Success in der Folge stark ansteigen kann. Die Berücksichtigung der Systemstruktur in den Tests zeigt, dass beim Nachweis mittels Komponententests eine optimale Prüflingsaufteilung unter diesen Komponenten gefunden werden kann, die die Probability of Test Success maximiert. Mit diesem Ansatz lässt sich also der Systemnachweis erbringen, Komponententests planen und durchführen, ohne das Systemziel auf die Einzelemente im System aufteilen zu müssen. Im Gegensatz zu herkömmlichen Methoden ist dies ein großer Vorteil, denn die Aufteilung schränkt die möglichen Komponententests stark ein. Der Anstieg der Probability of Test Success durch die optimale Aufteilung ist dabei maßgeblich durch die vorherrschenden Ausfallmoden und die Systemstruktur beeinflusst. Wobei bei ausfallbasierten Tests der kritischsten Ausfallmode für den Systemausfall am meisten Prüflinge zugeordnet werden sollten und bei ausfallfreien Tests der Ausfallmode mit der geringsten Kritikalität. Durch die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis ändert sich dieses Optimum nicht, durch die zusätzliche Berücksichtigung mittels des Satz von Bayes hingegen schon. Die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis hat bei ausfallbasierten Tests grundsätzlich den Effekt, dass die Probability of Test Success abfällt und nicht über einen Maximalwert ansteigen kann. Dieser Maximalwert entspricht der Probability of Test Success wie sie ohne Unsicherheit mit dem Stichprobenumfang der Vorkenntnis berechnet werden würde. Bei kleinem zugrundeliegenden Stichprobenumfang der Vorkenntnis, also schlechter Güte der Vorkenntnis, hat dies zur Folge, dass die Probability of Test Success sehr stark begrenzt ist. Hinzu kommt, dass die gleichzeitige Berücksichtigung der Vorkenntnis mit Unsicherheit und zusätzlich über den Satz von Bayes zu einer praktischen Unabhängigkeit der Probability of Test bezüglich des Stichprobenumfangs des Tests führt. Sie ist also nur noch von der Vorkenntnis und deren Stichprobenumfang abhängig und wird nicht durch den eigentlichen Test beeinflusst. Dies liegt darin begründet, dass die Unsicherheit die Probability of Test Success auf einen Maximalwert begrenzt und der Satz von Bayes dafür sorgt, dass dieser Maximalwert immer erreicht wird. Da der Maximalwert durch den Stichprobenumfang der Vorkenntnis bestimmt ist, ist die Probability of Test Success nur noch von diesem abhängig. Aufgrund dieser Erkenntnis wird empfohlen die Unsicherheit nur ergänzend zu berücksichtigen, als eine Art worst case oder Robustheit des Tests. Bei ausfallfreien Tests hingegen hat die Berücksichtigung der Unsicherheit den Effekt, dass die Probability of Test Success sowohl ansteigen, als auch absinken kann. Je größer die Unsicherheit ist, desto größer ist dieser Effekt. Bei sehr großer Zuverlässigkeit des Systems ist eher ein Abfallen zu verzeichnen, wohingegen bei kleiner bis großer Zuverlässigkeit eher ein Anstieg zu erkennen ist. Die ausfallbasierten Tests verhalten sich diesbezüglich gegenteilig zu den ausfallfreien Tests. Dies zeigt sich auch beim Testaufwand. Wird bei einem ausfallbasierten Test mehr Aufwand investiert, beispielsweise durch eine größere Stichprobe, so steigt auch die Güte des Tests und die Probability of Test Success. Die Wahrscheinlichkeit für einen Nachweis ist demnach größer. Bei ausfallfreien Test hingegen ist dies anders. Wird hier eine größere Stichprobe eingesetzt, so steigt zwar die Güte der Aussage, welche man erhalten würde, die Probability of Test Success sinkt jedoch. Ein Success-Run Test kann demnach nur dann eine hohe Erfolgswahrscheinlichkeit besitzen, wenn die statistische Güte der Aussage, die damit generiert wird, schlecht ist oder das Produkt die Zuverlässigkeitsanforderung stark übererfüllt, es also sehr stark überdimensioniert ist. Diese Erkenntnis ist auch durch die in dieser Arbeit vorgenommenen statistischen Einordnung der Probability of Test Success analytisch beschreib- und belegbar. Die Unsicherheit in der Vorkenntnis hat bei jener Ausfallmode den größten Einfluss auf die Probability of Test Success, welche die kritischste für den Systemausfall darstellt.

Das entwickelte, ganzheitliche Vorgehen zur Planung von effizienten Tests für den Nachweis der Systemzuverlässigkeit wurde an einem Fallbeispiel eines Permanentmagnet-

Synchronmotors durchgeführt. Dabei zeigte sich das Potential des Verfahrens, den Zuverlässigkeitsnachweis sicherzustellen. So sind beispielsweise die Success-Run Tests ungeeignet für den Nachweis, da der Success-Run Test auf Komponentenebene aufgrund der sehr hohen erforderlichen Stichprobenumfänge sehr teuer wird und der Success-Run Test auf Gesamtsystemebene eine zu niedrige Erfolgswahrscheinlichkeit, also Probability of Test Success besitzt. Im Gegensatz zu den End-of-Life Tests dagegen ist der Success-Run Test auf Gesamtsystemebene der, welcher die Ressourcen am effizientesten einsetzt, besäße er eine ausreichende Probability of Test Success. Die Anforderungen werden sowohl vom End-of-Life Test der Komponenten, als auch vom End-of-Life Test des Gesamtsystems erfüllt. Dabei zeigt der Komponententest eine höhere Erfolgswahrscheinlichkeit und geringere Kosten.

Ausfallbasierte Tests sind in der Regel von sehr langen Testzeiten und meist von hohen Kosten begleitet. Aus diesem Grund werden in der Industrie gegebenenfalls beschleunigte Tests durch eine Laststeigerung eingesetzt. Um die Testplanung weiter zu optimieren, ist die zusätzliche Berücksichtigung von solch beschleunigten Tests bei Systemen mit mehreren Ausfallmoden und Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes und deren Unsicherheit notwendig. Erste Ansätze bei einer Ausfallmode und ohne Unsicherheit bei fehlender zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis, finden sich in den Arbeiten von Herzig [181]. Hierbei muss ein Kompromiss der Lasthöhe getroffen werden, denn die Ausfallmoden, die der beschleunigte Test anspricht werden in unterschiedlichem Maße beschleunigt. Zusätzlich dazu wäre eine Erweiterung um die Bewertung von Degradationstests und beschleunigten Degradationstests sehr hilfreich um alle möglichen Testarten abdecken zu können. Die in den Berechnungsmethoden eingesetzten Schätzverfahren sind verzerrt. Dies zeigte sich insbesondere beim doppelten Bootstrap-Ansatz zur Berücksichtigung der Unsicherheit. Hierzu könnte eine umfassende Untersuchung möglicher Verzerrungskorrekturen die Bestimmung der Probability of Test Success verbessern. Zudem entsprechen die Bootstrap-Ansätze in der allgemeinen Berechnung einem Perzentil-Bootstrap-Vertrauensbereich. Die Einflüsse von BC_a , ABC oder anderen Bootstrap-Verfahren könnten hier zusätzlich untersucht werden. Außerdem könnte die erwähnte erwartete Fisher-Informationsmatrix für die typischen Ausfallverteilungen, wie der Weibullverteilung, hinsichtlich der analytischen und approximativen Berechnung der Probability of Test Success, anstatt der hier verwendeten synthetischen Stichproben, weiter untersucht werden. Dabei besteht die Herausforderung in der Erweiterung auf mehrere Ausfallmoden, der zusätzlichen Berücksichtigung der Vorkenntnis mit dem Satz von Bayes und dessen notwendigen Varianzkorrektur, sowie der Berücksichtigung der Unsicherheit in der Vorkenntnis, welche in einer Mischverteilung resultiert. Der Vorteil der erwarteten Fisher-Informationsmatrix könnte jedoch die Unabhängigkeit von ganzzahligen Stichprobenumfängen sein, welche die theoretischen Untersuchungen erweitern. Bezüglich der optimalen Aufteilung der Prüflinge für eine maximale Probability of Test Success ließe sich damit gegebenenfalls eine allgemein gültige analytische Gleichung herleiten. Eine Erweiterung der Möglichkeit des Zuverlässigkeitsnachweises bei Systemen mit wesentlichem Softwareanteil und Vernetzung, würde die Testplanung zudem wesentlich bereichern.

Literaturverzeichnis

- [1] DAZER, M. ; BRAUTIGAM, D. ; LEOPOLD, T. ; BERTSCHE, B. : *Optimal Planning of Reliability Life Tests Considering Prior Knowledge*. In: *2018 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, IEEE, 2018. – ISBN 978-1-5386-2870-6
- [2] DAZER, M. : *Zuverlässigkeitstestplanung mit Berücksichtigung von Vorwissen aus stochastischen Lebensdauerberechnungen*, Universität Stuttgart, Diss., 2019
- [3] DAZER, M. ; HERZIG, T. ; GRUNDLER, A. ; BERTSCHE, B. : *R-OPTIMA : Optimal Planning of Reliability Tests*. In: SILVA GOMES, J. F. (Hrsg.); MEGUID, S. A. (Hrsg.): *Proceedings IRF2020: 7th International Conference Integrity-Reliability-Failure*, 2020, S. 695–702
- [4] KOLMOGOROFF, A. : *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin : Springer-Verlag, 1933. – ISBN 9783642495960
- [5] BERTSCHE, B. ; DAZER, M. : *Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau*. Springer-Verlag, 2022. – ISBN 9783662650233
- [6] BEICHELT, F. E.; MONTGOMERY, D. C.: *Teubner-Taschenbuch der Stochastik*. 1. Wiesbaden : B. G. Teubner Verlag, 2003. – ISBN 9783322800688
- [7] HEDDERICH, J. ; SACHS, L. : *Angewandte Statistik*. Berlin : Springer-Verlag, 2018. – ISBN 9783662566565
- [8] FAHRMEIR, L. ; KÜNSTLER, R. ; PIGEOT, I. ; TUTZ, G. : *Statistik: Der Weg zur Datenanalyse*. 6. Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. – ISBN 9783540212324
- [9] MISES, R. von: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*. Leipzig : Deuticke, 1931
- [10] BERNOULLI, J. ; BERNOULLI, N. (Hrsg.): *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*. Basel, 1713
- [11] LAPLACE, P.-S. : *Théorie analytique des probabilités*. Paris : Courcier, 1812
- [12] CARDANO, G. ; HUGUETAN, J. A. (Hrsg.); RAVAUD, M. A. (Hrsg.): *Opera Omnia*. Lyon, 1663
- [13] SCHNEIDER, I. : *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1988
- [14] HUYGENS, C. : *No Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae*. 1657

- [15] ETEMADI, N. : *An elementary proof of the strong law of large numbers*. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 55 (1981), S. 119–122. – ISSN 0044-3719
- [16] STELAND, A. : *Basiswissen Statistik: Kompaktkurs für Anwender aus Wirtschaft, Informatik und Technik*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. – ISBN 9783540742043
- [17] SPANOS, A. : *Probability Theory and Statistical Inference: Econometric Modeling with Observational Data*. Cambridge University Press, 1999
- [18] PEARSON, K. : *III. Contributions to the mathematical theory of evolution*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 185 (1894), S. 71–110
- [19] GAUSS, C. F.: *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae*. Göttingen : Apud Henricum Dieterich, 1823
- [20] FISHER, R. : *Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficients in Samples from an Indefinitely large Population*. In: *Biometrika* 10 (1915), Nr. 4, S. 507–521
- [21] BROPHY, A. L.; WOOD, D. L.: *Algorithms for fast and precise computation of the normal integral*. In: *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers* 21 (1989), Nr. 4, S. 447–454. – ISSN 0743–3808
- [22] USPENSKY, J. V.: *Introduction to Mathematical Probability*. New York, London : McGraw-Hill Book Company, 1937
- [23] BAYES, M. ; PRICE, M. : *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S.* In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53 (1763), S. 370–418. – ISBN 02607085
- [24] GINI, C. : *Considerazioni Sulle Probabilità Posteriori e Applicazioni al Rapporto dei Sessi Nelle Nascite Umane*. In: *Studi Economico-Giuridici della Università de Cagliari* (1911), S. 5–41
- [25] GUPTA, A. K.; NADARAJAH, S. : *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*. Boca Raton : CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018
- [26] BINET, J. P. M.: *Memoire sur les intégrales définies euleriennes, et sur leur application a la theorie des suites, ainsi qu'a l'evaluation des fonctions des grands nombres*. In: *Journal de L'Ecole Royale Polytechnique* (1839), Nr. Tome XVI, S. 123–343
- [27] LEGENDRE, A.-M. : *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures*. Paris : Courcier, 1811
- [28] WEIBULL, W. : *A statistical distribution function of wide applicability*. In: *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), S. 293–297. – ISBN 0021–8936
- [29] ABERNETHY, R. B.: *The new Weibull handbook*. 2006. – ISBN 1092101101
- [30] LINDLEY, D. V.: *The philosophy of statistics*. In: *Journal of the Royal Statistical Society Series D: The Statistician* 49 (2000), Nr. 3, S. 293–337. – ISSN 0039–0526

- [31] KIUREGHIAN, A. D.; DITLEVSEN, O. : *Aleatory or epistemic? Does it matter?* In: *Structural Safety* 31 (2009), Nr. 2, S. 105–112. – ISSN 0167–4730
- [32] SIEBERTZ, K. ; BEBBER, D. van; HOCHKIRCHEN, T. : *Statistische Versuchsplanung*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2010. – ISBN 9783642054921
- [33] LEHMANN, E. L.; ROMANO, J. P.: *Testing Statistical Hypotheses*. 3. New York : Springer-Verlag, 2005. – ISBN 0387988645
- [34] MONTGOMERY, D. C.: *Design and Analysis of Experiments*. 10. John Wiley & Sons, 2020. – ISBN ISBN: 978–1–119–49244–3
- [35] ARBUTHNOTT, J. : *II. An argument for divine providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society* 27 (1710), Nr. 328, S. 186–190
- [36] LAPLACE, P.-S. : *Mémoire sur les probabilités des causes par les événements*. In: *Oeuvres complètes de Laplace*. Paris : Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1780. – ISSN 1000–9000, S. 383–485
- [37] FISHER, R. A.: *The Design of Experiments*. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1935
- [38] NEYMAN, J. ; PEARSON, E. S.: *IX. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 231 (1933), Nr. 694-706, S. 289–337
- [39] LEHMANN, E. L.: *The fisher, Neyman–Pearson theories of testing hypotheses: One theory or two?* In: *Journal of the American Statistical Association* 88 (1993), Nr. 424, S. 1242–1249. – ISSN 1537–274X
- [40] LENHARD, J. : *Models and Statistical Inference: The Controversy between Fisher and Neyman-Pearson*. In: *The British Journal for the Philosophy of Science* 57 (2006), S. 69–91. – ISSN 00070882, 14643537
- [41] STUDENT: *The Probable Error of a Mean*. In: *Biometrika* 6 (1908), Nr. 1, S. 1–25
- [42] PHILLIPS, P. C. B.: *The True Characteristic Function of the F Distribution*. In: *Biometrika* 69 (1982), Nr. 1, S. 261–264
- [43] COHEN, J. : *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. 2. New York : Lawrence Erlbaum Associates, 1988. – ISBN 0805802835
- [44] BOBKOV, S. G.; CHISTYAKOV, G. P.; GÖTZE, F. : *Fisher information and the central limit theorem*. In: *Probability Theory and Related Fields* 159 (2012), Nr. 1-2. – ISSN 0178–8051
- [45] DASGUPTA, A. : *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*. New York : Springer-Verlag, 2008. – ISBN 9780387781884
- [46] MISES, R. von: *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. In: *Mathematische Zeitschrift* 4 (1919), Nr. 1, S. 1–97
- [47] LINDBERG, J. W.: *Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. In: *Mathematische Zeitschrift* 15 (1922), S. 211–225

- [48] VENN, J. : *The Logic of Chance: An Essey on the Foundations and Province of the Theory of Probability, with Especial Reference to its Logical Bearings and its Applications to Moral and Social Science, and to Statistics*. 3. London : Macmillan and Co., 1888
- [49] COX, R. T.: *Probability, Frequency and Reasonable Expectation*. In: *American Journal of Physics* 14 (1946), Nr. 1, S. 1–13. – ISSN 0002–9505
- [50] JAYNES, E. T.: *Bayesian methods: General Background*. In: JUSTICE, J. H. (Hrsg.): *Maximum Entropy and Bayesian Methods in Applied Statistics*. Calgary : Cambridge University Press, 1985, S. 1–25
- [51] FINETTI, B. de: *Theory of Probability: a Critical Introductory Treatment*. Hoboken : John Wiley & Sons, 2017. – ISBN 9781119286370
- [52] KOCH, K.-R. : *Einführung in die Bayes-Statistik*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2000. – ISBN 9783642624759
- [53] BIROLINI, A. : *Reliability engineering*. 8. Berlin : Springer-Verlag, 2017. – ISBN 9781420003161
- [54] GOAN, E. ; FOOKES, C. : *Bayesian Neural Networks : An Introduction and Survey*. In: *Case Studies in Applied Bayesian Data Science: CIRM Jean-Morlet Chair 1* (2018), S. 45–87
- [55] HECKERMAN, D. : *Bayesian Networks for Data Mining*. In: *Data Mining and Knowledge Discovery* 1 (1997), S. 79–119
- [56] SAHAMI, M. ; DUMAIS, S. ; HECKERMAN, D. ; HORVITZ, E. : *A Bayesian Approach to Filtering Junk E-Mail*. In: *AAAI'98 Workshop on Learning for Text Categorization* (1998)
- [57] HAMADA, M. S.; WILSON, A. G.; REESE, C. S.; MARTZ, H. F.: *Bayesian Reliability*. New York : Springer-Verlag. – ISBN 9780387779485
- [58] *DIN 40041:1990-12, Zuverlässigkeit - Begriffe*. Dezember 1990
- [59] *VDI 4001 Blatt 3: Formailisierte Begriffsmodellierung der Zuverlässigkeit*. Oktober 2014
- [60] MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A.; PASCUAL, F. G.: *Statistical Methods for Reliability Data*. 2. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto : Wiley, 2022. – 659 S. – ISBN 9781118115459
- [61] *VDI 4001 Blatt 2: Terminologie der Zuverlässigkeit*. Juli 2006
- [62] GLIWENKO, W. I.: *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità*. In: *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* 4 (1933), S. 92–99
- [63] CANTELLI, F. P.: *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità*. In: *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* 4 (1933), S. 421–424
- [64] TOPSØE, F. : *On the Glivenko-Cantelli Theorem*. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 14 (1970), S. 239–250

- [65] DAVID, H. A.; NAGARAJA, H. N.: *Order Statistics*. 3. Hoboken : John Wiley & Sons, 2003
- [66] BENARD, A. ; BOS-LEVENBACH, E. C.: *Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier*. In: *Statistica Neerlandica* 7 (1953), sep, Nr. 3, S. 163–173. – ISSN 0039–0402
- [67] LEGENDRE, A.-M. : *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris : Firmin Didot, 1805
- [68] PEARSON, K. : *On the Systematic Fitting of Curves to Observations and Measurements*. In: *Biometrika* 1 (1902), Nr. 3, S. 265–303
- [69] PEARSON, K. : *On the Systematic Fitting of Curves to Observations and Measurements: Part II*. In: *Biometrika* 2 (1902), Nr. 1, S. 1–23. – ISSN 0006–3444
- [70] EDGEWORTH, F. Y.: *On the Probable Errors of Frequency-Constants*. In: *Journal of the Royal Statistical Society* 71 (1908), Nr. 3, S. 499–512
- [71] EDGEWORTH, F. Y.: *On the Probable Errors of Frequency-Constants*. In: *Journal of the Royal Statistical Society* 71 (1908), Nr. 4, S. 651–678
- [72] HALD, A. : *On the History of Maximum Likelihood in Relation to Inverse Probability and Least Squares*. In: *Statistical Science* 14 (1999), Nr. 2, S. 214–222. – ISSN 0883–4237
- [73] FISHER, R. A.: *On the 'Probable Error' of a Coefficient of Correlation Deduced from a Small Sample*. In: *Metron* 1 (1921), S. 3–32
- [74] FISHER, R. A.: *On the mathematical foundations of theoretical statistics*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of Mathematical of Physical Character* 222 (1922), Nr. 594-604, S. 309–368
- [75] HELD, L. ; BOVÉ, D. S.: *Applied Statistical Inference: Likelihood and Bayes*. Bd. 9783642378. Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. – ISBN 9783642378874
- [76] FISHER, R. A.: *On an absolute criterion for fitting frequency curves*. In: *Messenger of Mathematics* 41 (1912), S. 155–160. – ISSN 0883–4237
- [77] GILL, P. E.; MURRAY, W. ; WRIGHT, M. H.: *Practical Optimization*. London : Academic Press Limited, 1981. – ISBN 0122839501
- [78] ODELL, P. M.; ANDERSON, K. M.; D'AGOSTINO, R. B.: *Maximum Likelihood Estimation for Interval-Censored Data Using a Weibull-Based Accelerated Failure Time Model*. In: *Biometrics* 48 (1992), Nr. 3, S. 951–959
- [79] DAZER, M. ; GRUNDLER, A. ; HERZIG, T. ; ENGERT, D. ; BERTSCHE, B. : *Effect on Interval Censoring on the Probability of Test Success in Reliability Demonstration*. In: *2021 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, 2021. – ISSN 2577–0993
- [80] TEVETOGLU, T. ; BERTSCHE, B. : *Bias corrected weibull parameter estimation and impact on confidence bounds*. In: *30th European Safety and Reliability Conference, ESREL 2020 and 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference, PSAM 2020*, 2020. – ISBN 9789811485930

- [81] ROSS, R. : *Bias and standard deviation due to Weibull parameter estimation for small data sets*. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 3 (1996), Nr. 1, S. 28–42. – ISSN 1070–9878
- [82] CHEN, M. ; ZHANG, Z. ; CUI, C. : *On the Bias of the Maximum Likelihood Estimators of Parameters of the Weibull Distribution*. In: *Mathematical and Computational Applications* 22 (2017). <http://dx.doi.org/10.3390/mca22010019>. – DOI 10.3390/mca22010019. – ISSN 2297–8747
- [83] GENSCHEL, U. ; MEEKER, W. Q.: *A Comparison of Maximum Likelihood and Median-Rank Regression for Weibull Estimation*. In: *Quality Engineering* 22 (2010), Nr. 4, S. 236–255
- [84] BERGER, J. O.: *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. 2. New York : Springer-Verlag, 1985. – ISBN 9780387775005
- [85] METROPOLIS, N. ; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. : *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*. In: *The Journal of Chemical Physics* 21 (1953), Nr. 6, S. 1087–1092
- [86] RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. 3. Hoboken : John Wiley & Sons, 2017. – ISBN 9781118632161
- [87] ZIO, E. : *The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*. 2013. – 204 S. – ISBN 978–1–4471–4587–5
- [88] *VDI 4008 Blatt 6: Monte-Carlo-Simulation*. April 1999
- [89] MARANGON, D. G.; VALLONE, G. ; VILLORESI, P. : *Random bits, true and unbiased, from atmospheric turbulence*. In: *Scientific Reports* 4 (2014). – ISSN 2045–2322
- [90] VIEGA, J. : *Practical Random Number Generation in Software*. In: *Proceedings - Annual Computer Security Applications Conference, ACSAC* (2003), S. 129–140. – ISBN 0769520413
- [91] NEUMANN, J. von: *Various techniques used in connection with random digits*. In: *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series* 12 (1951), S. 36–38
- [92] BIRD, J. J.; EKÁRT, A. ; FARIA, D. R.: *On the effects of pseudorandom and quantum-random number generators in soft computing*. In: *Soft Computing* 24 (2020), Nr. 12, S. 9243–9256. – ISSN 1433–7479
- [93] DEVROYE, L. : *Non-Uniform Random Variate Generation*. New York : Springer-Verlag, 1986. ISSN 0162–1459
- [94] EFRON, B. : *Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife*. In: *The Annals of Statistics* 7 (1979), Nr. 1, S. 1–26
- [95] LEE, S. M. S.: *Optimal Choice Between Parametric and Non-Parametric Bootstrap Estimates*. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 115 (1994), S. 335–363. – ISSN 1469–8064
- [96] BICKEL, P. J.; FREEDMAN, D. A.: *Some Asymptotic Theory for the Bootstrap*. In: *The Annals of Statistics* 9 (1981), Nr. 6, S. 1196–1217

- [97] EFRON, B. ; TIBSHIRANI, R. J.: *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall / CRC Press LLC, 1998. – ISBN 0–412–04231–2
- [98] DiCICCO, T. J.; EFRON, B. : *Bootstrap Confidence Intervals*. In: *Statistical Science* 11 (1996), Nr. 3, S. 189–228. – ISBN 9783319019307
- [99] EFRON, B. : *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans* / Division of Biostatistics, Stanford University. Stanford : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1980. – Forschungsbericht
- [100] JIAO, J. ; HAN, Y. : *Bias Correction with Jackknife, Bootstrap, and Taylor Series*. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 66 (2020), Nr. 7, S. 4392–4418. – ISSN 1557–9654
- [101] NELSON, W. B.: *Accelerated testing : statistical models, test plans and data analyses*. Hoboken : John Wiley & Sons, 2004. – 624 S. – ISBN 9780471697367
- [102] FISHER, R. A.: *A System of Scoring Linkage Data, with Special Reference to the Piep Factors in Mice*. In: *The American Naturalist* 80 (1946), Nr. 794, S. 568–578
- [103] PICKLES, A. : *An Introduction to Likelihood Analysis*. Norwich : Geo Books, 1985
- [104] LY, A. ; MARSMAN, M. ; VERHAGEN, J. ; GRASMAN, R. ; WAGENMAKERS, E.-J. : *A Tutorial on Fisher information*. In: *Journal of Mathematical Psychology* 10 (2017), S. 1–59. – ISSN 1096–0880
- [105] LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. : *Theory of Point Estimation*. 2. New York : Springer-Verlag, 1998. – ISBN 0387985026
- [106] CRAMÉR, H. : *A contribution to the theory of statistical estimation*. In: *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 29 (1946), S. 85–94
- [107] NORDSTRÖM, K. : *The Concentration Ellipsoid of a Random Vector Revisited*. In: *Econometric Theory* 7 (1991), Nr. 3, S. 397–403. – ISBN 0266466600004
- [108] EFRON, B. ; HINKLEY, D. V.: *Assessing the Accuracy of the Maximum Likelihood Estimator : Observed Versus Expected Fisher Information*. In: *Biometrika* 65 (1978), Nr. 3, S. 457–482
- [109] TEVETOGLU, T. ; BERTSCHE, B. : *On the Coverage Probability of Bias-Corrected Confidence Bounds*. In: *2020 Asia-Pacific International Symposium on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM 2020)*, 2020. – ISBN 9781728171029
- [110] EFRON, B. : *Nonparametric Standard Errors and Confidence Intervals*. In: *The Canadian Journal of Statistics* 9 (1981), Nr. 2, S. 139–158. ISBN 0305624042000
- [111] EFRON, B. ; TIBSHIRANI, R. J.: *Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy*. In: *Statistical Science* 1 (1986), Nr. 1, S. 54–77
- [112] EFRON, B. : *Better bootstrap confidence intervals*. In: *Journal of the American Statistical Association* 82 (1987), Nr. 397, S. 171–185. – ISSN 1537–274X
- [113] JUNG, K. ; LEE, J. ; GUPTA, V. ; CHO, G. : *Comparison of Bootstrap Confidence Interval Methods for GSCA Using a Monte Carlo Simulation*. In: *Frontiers in Psychology* 10 (2019). – ISSN 1664–1078

- [114] QUENOUILLE, M. H.: *Notes on Bias in Estimation*. In: *Biometrika* 43 (1956), Nr. 3, S. 353–360
- [115] TUKEY, J. W.: *Bias and Confidence in Not-Quite Large Sample*. In: *Annals of Mathematical Statistics* 29 (1958), S. 614
- [116] EFRON, B. : *Bootstrap Confidence Intervals for a Class of Parametric Problems*. In: *Biometrika* 72 (1985), Nr. 1, S. 45–58
- [117] DICICCIO, T. J.; MARTIN, M. A.; YOUNG, G. A.: *Fast and Accurate Approximate Double Bootstrap Confidence Intervals*. In: *Biometrika* 79 (1992), Nr. 2, S. 285–295
- [118] EFRON, B. : *Jackknife-After-Bootstrap Standard Errors and Influence Functions*. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 54 (1992), Nr. 1, S. 83–127
- [119] BARBIERO, A. : *Confidence Intervals for Reliability of Stress-Strength Models in the Normal Case*. In: *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 40 (2011), Nr. 6, S. 907–925. – ISSN 0361–0918
- [120] RODRIGUES, A. B.; SILVA, M. d. G.: *Confidence Intervals Estimation for Reliability Data of Power Distribution Equipments Using Bootstrap*. In: *IEEE Transactions on Power Systems* 28 (2013), Nr. 3, S. 3283–3291. – ISSN 0885–8950
- [121] MÜLLER, F. ; ZEILER, P. ; BERTSCHE, B. : *Bootstrap-Monte-Carlo-Simulation von Zuverlässigkeit und Aussagewahrscheinlichkeit bei periodischer Instandhaltung*. In: *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research* 81 (2017), Nr. 4, S. 383–393. – ISBN 1001001702206
- [122] DICICCIO, T. ; EFRON, B. : *More accurate confidence intervals in exponential families*. In: *Biometrika* 79 (1992), Nr. 2, S. 231–245. – ISSN 0006–3444
- [123] PUTH, M.-T. ; NEUHÄUSER, M. ; RUXTON, G. D.: *On the variety of methods for calculating confidence intervals by bootstrapping*. In: *Journal of Animal Ecology* 84 (2015), S. 892–897. – ISSN 1365–2656
- [124] EFRON, B. ; NARASIMHAN, B. : *The Automatic Construction of Bootstrap Confidence Intervals*. In: *Journal of Computational and Graphical Statistics* 29 (2020), Nr. 3, S. 608–619. – ISSN 1061–8600
- [125] BERTSIMAS, D. ; STURT, B. : *Computation of exact bootstrap confidence intervals: Complexity and deterministic algorithms*. In: *Operations Research* 68 (2020), Nr. 3, S. 949–964. – ISSN 1526–5463
- [126] YOUNG, T. M.; PERHAC, D. G.; GUESS, F. M.; LEÓN, R. V.: *Bootstrap confidence intervals for percentiles of reliability data for wood-plastic composites*. In: *Forest Products Journal* 58 (2008), Nr. 11, S. 106–114. – ISSN 0015–7473
- [127] OWEN, A. B.: *Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals for a Single Function*. In: *Biometrika* 75 (1988), Nr. 2, S. 237–249
- [128] LEE, Y.-L. ; MAKAM, S. ; MCKELVEY, S. ; LU, M.-W. : *Durability Reliability Demonstration Test Methods*. In: *Procedia Engineering* 133 (2015), S. 31–59. – ISSN 1877–7058

- [129] HERING, E. ; SCHLOSKE, A. : *Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse: Methode zur vorbeugenden, systematischen Qualitätsplanung unter Risikogesichtspunkten*. Wiesbaden : Springer-Verlag, 2019. – ISBN 9783658120030
- [130] LIU, H.-C. : *FMEA using uncertainty theories and MCDM methods*. Singapore : Springer-Verlag, 2016. – ISBN 9789811014666
- [131] PANCHAL, D. ; CHATTERJEE, P. ; PAMUCAR, D. ; TYAGI, M. : *Reliability and Risk Modeling of Engineering Systems*. Cham : Springer-Verlag, 2021. – ISBN 9783030701505
- [132] BOOLE, G. : *An Invesitgation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Londn : Walton and Maberly, 1854
- [133] SCHRÖDER, E. F. W. K.: *Vorlesungen über die Algebra der Logik: Erster Band*. Leipzig : Teubner Verlag, 1890
- [134] SCHRÖDER, E. F. W. K.: *Vorlesungen über die Algebra der Logik: zweiter Band*. Leipzig : Teubner Verlag, 1905
- [135] SCHRÖDER, E. F. W. K.: *Vorlesungen über die Algebra der Logik: Dritter Band*. Leipzig : Teubner Verlag, 1895
- [136] THOMPSON, W. E.; HAYNES, R. D.: *On the Reliability, Availability and Bayes Confidence Intervals for Multicomponent Systems*. In: *Naval Research Logistics Quarterly* 27 (1980), Nr. 3, S. 345–358. – ISSN 0028–1441
- [137] ZEILER, P. ; BERTSCHE, B. : *Component reliability allocation and demonstration test planning based on system reliability confidence limit*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2015)*, 2015. – ISBN 9781138028791, S. 1805–1811
- [138] NEYMAN, J. : *Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 236 (1937), Nr. 767, S. 333–380. – ISSN 1364–503X
- [139] EPSTEIN, B. : *Some Applications of the Mellin Transform in Statistics*. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 19 (1948), Nr. 3, S. 370–379. – ISSN 0003–4851
- [140] MELLIN, H. : *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale*. In: *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* 22 (1897), Nr. 2
- [141] LUKE, Y. L.: *The Special Functions and Their Approximations*. Bd. II. New York, London : Academic Press, 1969
- [142] MARTZ, H. F.; WALLER, R. A.: *Bayesian Reliability Analysis*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore : John Wiley & Sons, 1982
- [143] MEIJER, C. S.: *Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte*. In: *Nieuw Arch. Wiskunde* 18 (1936), Nr. 4
- [144] SPRINGER, M. D.; THOMPSON, W. E.: *The Distribution of Products of Beta, Gamma and Gaussian Random Variables*. In: *SIAM Journal of Applied Mathematics* 18 (1970), Nr. 4, S. 721–737

- [145] BARTHOLDT, M. ; GRUNDLER, A. ; BOLLMANN, M. ; BERTSCHE, B. : *Assurance of the System Reliability of a Gearbox Considering Prior Knowledge*. In: *Proceedings of International Design Conference, DESIGN 3* (2018), Nr. 1988, S. 965–974. – ISBN 9789537738594
- [146] GRUNDLER, A. ; DAZER, M. ; BERTSCHE, B. : *Reliability-Test Planning Considering Multiple Failure Mechanisms and System Levels – an Approach for Identifying the Optimal System-Test Level, Type, and Configuration with Regard to Individual Cost and Time Constraints*. In: *2020 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, 2020
- [147] GRUNDLER, A. ; DAZER, M. ; HERZIG, T. ; BERTSCHE, B. : *Considering Multiple Failure Mechanisms in Optimal Test Design*. In: SILVA GOMES, J. F. (Hrsg.); MEGUID, S. A. (Hrsg.): *Proceedings IRF2020: 7th International Conference Integrity-Reliability-Failure*, 2020, S. 673–682
- [148] GRUNDLER, A. ; DAZER, M. ; HERZIG, T. ; BERTSCHE, B. : *Efficient System Reliability Demonstration Tests Using the Probability of Test Success*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2021)*, 2021. – ISBN 9789811820168, S. 1654–1661
- [149] KOTTAS, J. F.; LAU, H.-S. : *On Estimating Parameters for Beta Distributions*. In: *Decision Sciences* 9 (2007), Nr. 3, S. 526–531
- [150] TIAN, X. : *Comprehensive Review of Estimating System-Reliability Confidence-Limits from Component-Test Data*. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium. 2002 Proceedings (Cat. No.02CH37318)*, 2002. – ISBN 0780373480, S. 56–60
- [151] WILLITS, C. J.; DIETZ, D. C.; MOORE, A. H.: *Series-System Reliability-Estimation Using Very Small Binomial Samples*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 46 (1997), Nr. 2, S. 296–302. – ISSN 0018–9529
- [152] SPALL, J. C.: *System Reliability Estimation and Confidence Regions from Subsystem and Full System Tests*. In: *Proceedings of the American Control Conference, IEEE*, 2009. – ISBN 9781424445240, S. 5067–5072
- [153] YANG, G. : *Life Cycle Reliability Engineering*. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2007. – ISBN 9780471715290
- [154] DAZER, M. ; STOHRER, M. ; KEMMLER, S. ; BERTSCHE, B. : *Planning of reliability life tests within the accuracy, time and cost triangle*. In: *2016 IEEE Accelerated Stress Testing & Reliability Conference (ASTR)*, IEEE, 2016. – ISBN 978-1-5090-1880-2, S. 1–9
- [155] JAKOB, F. ; KIMMELMANN, M. ; BERTSCHE, B. : *Selection of acceleration models for test planning and model usage*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 66 (2017), Nr. 2, S. 298–308. – ISSN 0018–9529
- [156] KECECIOGLU, D. B.: *Reliability & Life Testing Handbook. 2*. Lancaster : DEStech Publications, 1994. – ISBN 1932078037
- [157] BEYER, R. ; LAUSTER, E. : *Statistische Lebensdauerprüfpläne bei Berücksichtigung von Vorkenntnissen*. In: *Qualität und Zuverlässigkeit*, 35, Heft 2 (1990), S. 93–98

- [158] KROLO, A. ; RZEPKA, B. ; BERTSCHE, B. : *Application of Bayes statistics to reduce sample-size, considering a lifetime-ratio*. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium. 2002 Proceedings (Cat. No.02CH37318)* Bd. 00, 2002. – ISBN 0-7803-7348-0, S. 577-583
- [159] GRUNDLER, A. ; BARTHOLDT, M. ; BERTSCHE, B. : *Statistical test planning using prior knowledge—advancing the approach of Beyer and Lauster*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2018)*, 2018, S. 809-814
- [160] GRUNDLER, A. ; GÖLDENBOTH, M. ; STOFFERS, F. ; DAZER, M. ; BERTSCHE, B. : *Effiziente Zuverlässigkeitsabsicherung durch Berücksichtigung von Simulationsergebnissen am Beispiel einer Hochvolt-Batterie*. In: GMBH, V. W. (Hrsg.): *VDI-Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2021*. Nürtingen : VDI Verlag, 2021. – ISBN 978-3-18-092377-2
- [161] GRUNDLER, A. ; DAZER, M. ; BERTSCHE, B. : *Effect of Uncertainty in Prior Knowledge on Test Planning for a Brake Caliper using the Probability of Test Success*. In: *2021 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, 2021
- [162] KROLO, A. : *Planung von Zuverlässigkeitstests mit weitreichender Berücksichtigung von Vorkenntnissen*, Universität Stuttgart, Diss., 2004
- [163] GRUNDLER, A. ; BOLLMANN, M. ; OBERMAYR, M. ; BERTSCHE, B. : *Berücksichtigung von Lebensdauerberechnungen als Vorkenntnis im Zuverlässigkeitsnachweis*. In: GMBH, V. W. (Hrsg.): *VDI-Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2019*, VDI Verlag, 2019. – ISBN 978-3-18-092345-1
- [164] BARTHOLDT, M. ; GRUNDLER, A. : *Lernen aus Erfahrungen*. In: *Qualität und Zuverlässigkeit* 64 (2019), S. 52-55
- [165] KLEYNER, A. ; BHAGATH, S. ; GASPARINI, M. ; ROBINSON, J. ; BENDER, M. : *Bayesian techniques to reduce the sample size in automotive electronics attribute testing*. In: *Microelectronics Reliability* 37 (1997), Nr. 6, S. 879-883. – ISSN 0026-2714
- [166] SAVCHUK, V. P.; MARTZ, H. F.: *Bayes Reliability Estimation Using Multiple Sources of Prior Information: Binomial Sampling*. 43 (1994), Nr. 1, S. 138-144
- [167] KROLO, A. : *Zuverlässigkeitsnachweis anhand von Tests unter Berücksichtigung von Vorinformationen*. In: GMBH, V. W. (Hrsg.): *VDI-Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2002*, VDI Verlag, 2002. – ISSN 0083-5560, S. 341-359
- [168] SCHWEIZER, V. : *Berücksichtigung und Bewertung streuender Einflussgrößen in der Zuverlässigkeitssimulation*, Universität Stuttgart, Diss., 2017
- [169] SCHWEIZER, V. ; BARTHOLDT, M. ; BERTSCHE, B. : *Considering Confidence Levels in Reliability Simulation*. In: *2016 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, 2016. – ISBN 9781509002481
- [170] SCHNEIDER, H. ; KECECIOGLU, D. : *Reliability Life Testing Handbook*. In: *Technometrics* 36 (1994), feb, Nr. 1, S. 111. – ISBN 1932078029
- [171] MAISCH, M. : *Zuverlässigkeitsorientiertes Erprobungskonzept für Nutzfahrzeuggetriebe unter Berücksichtigung von Betriebsdaten*, Universität Stuttgart, Diss., 2007

- [172] ROMER, A. ; BERTSCHE, B. ; KURFESS, J. : *Reducing Test Specimen Size for Reliability Determination by Combining Lifetime Calculation and Prior Information, as Exemplified by Hydraulic Pumps*. In: *18th ISSAT International Conference Reliability & Quality in Design*. Boston, 2012
- [173] LIU, J. ; HUANG, L. ; ZHOU, R. ; VOLMER, M. : *Reliability Growth Test Planning and Verification of Commercial Vehicles*. In: *Automotive Innovation 2* (2019), Nr. 4, S. 328–337. – ISSN 2522–8765
- [174] KROLO, A. ; BERTSCHE, B. : *An approach for the advanced planning of a reliability demonstration test based on a Bayes procedure*. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2003.*, 2003, S. 288–294
- [175] ZADEH, L. A.: *Fuzzy Sets*. In: *Information and Control* 8 (1965), S. 338–353
- [176] SMIRNOFF, N. W.: *On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples*. In: *Bull. Universite Moskov Ser. Internat. Sect. A2* (1939), S. 3–19
- [177] HITZIGER, T. : *Übertragbarkeit von Vorkenntnissen bei der Zuverlässigkeitstestplanung*, Universität Stuttgart, Diss., 2007
- [178] GUIDA, M. ; PULCINI, G. : *Automotive reliability inference based on past data and technical knowledge*. In: *Reliability Engineering and System Safety* (2002). – ISSN 0951–8320
- [179] KEMMLER, S. ; EIFLER, T. ; BERTSCHE, B. ; HOWARD, T. J.: *Robust reliability or reliable robustness?* In: GMBH, V. W. (Hrsg.): *VDI-Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2015*, VDI Verlag, 2015, S. 87–97
- [180] GENEST, C. ; ZIDEK, J. V.: *Combining Probability Distributions: A Critique and an Annotated Bibliography*. In: *Statistical Science* 1 (1986), Nr. 1, S. 114–148
- [181] HERZIG, T. : *Anforderungsgerechte Produktauslegung durch Planung effizienter beschleunigter Zuverlässigkeitstests*, Universität Stuttgart, Diss., 2021
- [182] DAZER, M. ; GRUNDLER, A. ; BENZ, A. ; ARNDT, M. ; MELL, P. : *Pitfalls of Zero Failure Testing for Reliability Demonstration*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2022)*. Singapore : Research Publishing Services, 2022. – ISBN 978–981–18–5183–4, S. 1639–1646
- [183] HERZIG, T. ; DAZER, M. ; GRUNDLER, A. ; BERTSCHE, B. : *Cost- and Time-Effective Planning of Accelerated Reliability Demonstration Tests - A New Approach of Comparing the Expenditure of Success Run and End-of-Life Tests*, 2019. – ISBN 9781538665541
- [184] HERZIG, T. ; DAZER, M. ; BERTSCHE, B. : *Zuverlässigkeitsabsicherung ressourcenschonender Produkte durch effiziente Erprobungsplanung*. In: *Stuttgarter Symposium für Produktentwicklung*. Stuttgart, 2019
- [185] HERZIG, T. ; DAZER, M. ; GRUNDLER, A. ; BERTSCHE, B. : *Integrating Accelerated Life Tests into Optimal Test Planning*. In: SILVA GOMES, J. A. (Hrsg.); MEGUID, S. A. (Hrsg.): *Proceedings IRF2020: 7th International Conference Integrity-Reliability-Failure.*, 2020, S. 665–672

- [186] GUO, H. ; LIAO, H. : *Methods of Reliability Demonstration Testing and Their Relationships*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 61 (2012), Nr. 1, S. 231–237. – ISSN 0018–9529
- [187] ALBERS, A. ; MANDEL, C. ; YAN, S. ; BEHRENDT, M. : *System of systems approach for the description and characterization of validation environments*. In: *Proceedings of International Design Conference, DESIGN*, 2018. – ISBN 9789537738594, S. 2799–2810
- [188] MEEKER, W. Q.; NELSON, W. : *Weibull Variances and Confidence Limits by Maximum Likelihood for Singly Censored Data*. In: *Technometrics* 19 (1977), Nr. 4, S. 473–476. – ISSN 1537–2723
- [189] GUO, H. ; POHL, E. ; GEROKOSTOPOULOS, A. : *Determining the Right Sample Size for Your Test : Theory and Application*. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS) 2013* (2013)
- [190] HUANG, S.-R. ; WU, S.-J. : *Reliability Sampling Plans Under Progressive Type-I Interval Censoring Using Cost Functions*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 57 (2008), Nr. 3, S. 445–451. – ISSN 0018–9529
- [191] VLCEK, B. L.; HENDRICKS, R. C.; ZARETSKY, E. V.: *Monte Carlo Simulation of Sudden Death Bearing Testing*. In: *Tribology Transactions* 47 (2004), apr, Nr. 2, S. 188–199. – ISSN 1040–2004
- [192] HSIEH, H. K.: *Average Type-II Censoring Times for the 2-Parameter Weibull Distribution*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 43 (1994), Nr. 1, S. 91–96
- [193] ARIZONO, I. ; KAWAMURA, Y. ; TAKEMOTO, Y. : *Reliability tests for Weibull distribution with variational shape parameter based on sudden death lifetime data*. In: *European Journal of Operational Research* 189 (2008), Nr. 2, S. 570–574. – ISSN 0377–2217
- [194] AHMED, H. ; CHATEAUNEUF, A. : *Optimal Number of Tests to Achieve and Validate Product Reliability*. In: *Reliability Engineering and System Safety* 131 (2014), S. 242–250. – ISSN 0951–8320
- [195] LU, L. ; LI, M. ; ANDERSON-COOK, C. M.: *Multiple Objective Optimization in Reliability Demonstration Tests*. In: *Journal of Quality Technology* 48 (2016), Nr. 4, S. 326–342. – ISSN 0022–4065
- [196] WILSON, K. J.; FARROW, M. : *Assurance for Sample Size Determination in Reliability Demonstration Testing*. In: *Technometrics* 63 (2021), oct, Nr. 4, S. 523–535. – ISSN 0040–1706
- [197] DAZER, M. ; LEOPOLD, T. ; BERTSCHE, B. : *Optimale Lebensdauertestplanung durch Berücksichtigung von Vorkenntnissen aus stochastischen Betriebsfestigkeitssimulationen*. In: GMBH, V. W. (Hrsg.): *VDI Berichte: VDI-Kongress SIMVEC 2016 - Simulation und Erprobung in der Fahrzeugentwicklung*. Baden-Baden : VDI Verlag, 2016. – ISSN 0083–5560, S. 777–788

- [198] HERZIG, T. ; DAZER, M. ; GRUNDLER, A. ; BERTSCHE, B. : *Evaluation of Optimality Criteria for Efficient Reliability Demonstration Testing*. In: *30th European Safety and Reliability Conference, ESREL 2020 and 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference, PSAM 2020*, 2020. – ISBN 9789811485930
- [199] AGREE: *Reliability of military electronic equipment* / Office of the Assistant Secretary of Defense, Research and Engineering. Washington DC. : Superintendent of documents, U. S. Government Printing Office, 1957. – Forschungsbericht
- [200] ARINC, R. C.; ALVEN, W. H.: *Reliability Engineering*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964
- [201] YADAV, O. P.; SINGH, N. ; GOEL, P. S.: *Reliability demonstration test planning: A three dimensional consideration*. In: *Reliability Engineering & System Safety* 91 (2006), aug, Nr. 8, S. 882–893. – ISSN 0951–8320
- [202] KLEYNER, A. ; ELMORE, D. ; BOUKAI, B. : *A Bayesian Approach to Determine Test Sample Size Requirements for Reliability Demonstration Retesting after Product Design Change*. In: *Quality Engineering* 27 (2015), Nr. 3, S. 289–295. – ISBN 0898–2112
- [203] GUIDA, M. ; PULCINI, G. : *Automotive reliability inference based on past data and technical knowledge*. In: *Reliability Engineering and System Safety* 76 (2002), Nr. 2, S. 129–137. – ISSN 0951–8320
- [204] KIRCHNER, E. : *Werkzeuge und Methoden der Produktentwicklung: Von der Idee zum erfolgreichen Produkt*. Berlin : Springer-Verlag, 2020. – ISBN 9783662617618
- [205] NEYMAN, J. ; PEARSON, E. S.: *On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference : Part I*. In: *Biometrika* 20A (1928), Nr. 1, S. 175–240
- [206] *MIL-STD-1916: Department of Defense Test Method Standard*. In: *Department of Defense, United States of America* (1996)
- [207] JOHN, P. W. M.: *Statistical Methods in Engineering and Quality Assurance*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990
- [208] PYZDEK, T. ; KELLER, PAUL, A. (Hrsg.): *Quality Engineering Handbook*. 2. New York, Basel : Marcel Dekker, Inc., 2003. – ISBN 0824746147
- [209] TAYLOR, B. : *Methodus Incrementorum: Directa & Inversa*. London : Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino, 1715. – ISBN 9780415475976
- [210] GREENE, W. H.: *Econometric Analysis*. 5. New Jersey : Prentice Hall, 2003. – ISBN 0130661899
- [211] MAKALIC, E. ; SCHMIDT, D. F.: *Maximum likelihood estimation of the Weibull distribution with reduced bias*. In: *Statistics and Computing* 33 (2023), Nr. 3. ISBN 1573–1375

- [212] ALBERS, A. ; REISS, N. ; BURSAC, N. ; RICHTER, T. : *IPeM - Integrated Product Engineering Model in Context of Product Generation Engineering*. In: *Procedia CIRP* Bd. 50, The Author(s), 2016. – ISSN 2212–8271, S. 100–105
- [213] ALBERS, A. ; BURSAC, N. ; RAPP, S. : *PGE – Produktgenerationsentwicklung am Beispiel des Zweimassenschwungrads*. In: *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research* 81 (2017), Nr. 1, S. 13–31. – ISBN 1001001602100
- [214] ALBERS, A. ; FAHL, J. ; HIRSCHTER, T. ; ENDL, M. ; EWERT, R. ; RAPP, S. : *Model of PGE-Product Generation Engineering by the Example of Autonomous Driving*. In: *Procedia CIRP* Bd. 91, Elsevier B.V., 2020. – ISSN 2212–8271, S. 665–677
- [215] ALBERS, A. ; RAPP, S. ; FAHL, J. ; HIRSCHTER, T. ; REVFI, S. ; SCHULZ, M. ; STÜRMLINGER, T. ; SPADINGER, M. : *Proposing a Generalized Description of Variations in Different Types of Ssystems by the Model of PGE - Product Generation Engineering*. In: *Proceedings of the Design Society: DESIGN Conference* Bd. 1, 2020. – ISSN 2633–7762, S. 2235–2244
- [216] HITZIGER, T. ; BERTSCHE, B. : *An approach to determine uncertainties of prior information - The transformation factor*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2005)* 1 (2005), S. 843–849. ISBN 0415383420
- [217] HITZIGER, T. ; BERTSCHE, B. ; KROLO, A. : *An Advanced Reliability Test Procedure for Gear-Wheels Considering Results Known from Different Gear Transmission Ratios*. In: SPITZER, C. (Hrsg.); SCHMOCKER, U. (Hrsg.); DANG, V. N. (Hrsg.): *Probabilistic Safety Assessment and Management*. London : Springer-Verlag, 2013. – ISBN 978–0–85729–410–4, S. 1894–1899
- [218] HAIBACH, E. : *Betriebsfestigkeit*. 3. Wiesbaden : Springer-Verlag, 2006. – 759 S. – ISBN 3–540–29363–9
- [219] JAKOB, F. : *Nutzung von Vorkenntnissen und Raffungsmodellen für die Zuverlässigkeitsbestimmung*, Universität Stuttgart, Diss., 2017
- [220] GÖLDENBOTH, M. ; GRUNDLER, A. ; DAZER, M. : *Reliability Demonstration of the Entirety of Cells from a High-Voltage Battery Using Prior Knowledge of Degradation Simulations*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2022)*. Singapore : Research Publishing Services, 2022. – ISBN 978–981–18–5183–4, S. 1936–1943
- [221] GOLDENBOTH, M. ; GRUNDLER, A. ; BERTSCHE, B. : *Reliability Demonstration Within the Framework of Event-Based Endurance Testing considering prior knowledge*. In: *2020 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, IEEE, 2020. – ISBN 978–1–7281–3690–5, S. 1–6
- [222] BENZ, A. ; GRUNDLER, A. ; DAZER, M. ; BERTSCHE, B. : *Deriving Prior Knowledge from Lifetime Simulations for Reliability Demonstration while Considering the Uncertainty of the Lifetime Model*. In: *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2021)*. Singapore : Research Publishing Services, 2021. – ISBN 978–981–18–2016–8, S. 466–472
- [223] MINER, M. A.: *Cumulative Damage in Fatigue*. In: *Journal of Applied Mechanics* 12 (1945), Nr. 3, S. 159–164. – ISSN 0021–8936

- [224] COUSINEAU, D. ; HÉLIE, S. : *Improving maximum likelihood estimation using prior probabilities: A tutorial on maximum a posteriori estimation and an examination of the weibull distribution*. In: *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology* 9 (2013), Nr. 2, S. 61–71
- [225] SMITH III, J. O.: *Spectral Audio Signal Processing*. W3K Publishing, 2011. – ISBN 978-0-9745607-3-1
- [226] RAPHSO, J. : *Analysis Aequationum Universalis Seu Ad Aequationes Algebraicas Resolvendas Methodus Generalis, & Expedita, Ex Nova Infinitarum Serierum Methodo, Deducta Ac Demonstrata*. London : Typis Tho. Braddyll, Prostant Venales Apud Johannem Taylor, 1697
- [227] CORDEIRO, G. M.; KLEIN, R. : *Bias correction in ARMA models*. In: *Statistics & Probability Letters* 19 (1994), feb, Nr. 3, S. 169–176. – ISSN 0167-7152
- [228] GNEITING, T. : *Normal scale mixtures and dual probability densities*. In: *Journal of Statistical Computation and Simulation* 59 (1997), Nr. 4, S. 375–384. – ISBN 0094965970881
- [229] GRUNDLER, A. ; DAZER, M. ; BERTSCHE, B. : *Efficient Reliability Demonstration using the Probability of Test Success and Bayes Theorem*. In: *Proceedings of the Probabilistic Safety Assessment and Management Conference (PSAM 16)*. Honolulu, 2022
- [230] SAINTIS, L. ; CASTANIER, B. ; KOBI, A. ; GUÉRIN, F. ; MÉLOT, M. ; MINGOT, G. ; GRIMMÉ, M. ; BLANCHON, C. ; BUBUIS, P. : *The Application of Reliability Allocation Methodology, from Preliminary Test Data, to Design a Definitive Test Plan. Application to Mechanical Heart Replacement Technology*. In: *Proceedings of the 30th European Safety and Reliability Conference and the 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference* (2019), S. 2575–2581. ISBN 9789811127243
- [231] MADONNA, V. ; GIANGRANDE, P. ; HARIKUMARAN, J. ; BUTICCHI, G. ; GALEA, M. : *System-Level Reliability Assessment of Short Duty Electric Drives for Aerospace*. In: *IEEE Transactions on Transportation Electrification* 7 (2021), Nr. 3, S. 1888–1900. – ISSN 2332-7782
- [232] HARIKUMARAN, J. ; BUTICCHI, G. ; MIGLIAZZA, G. ; MADONNA, V. ; GIANGRANDE, P. ; COSTABEBER, A. ; WHEELER, P. ; GALEA, M. : *Failure modes and reliability oriented system design for aerospace power electronic converters*. In: *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society* 2 (2021), Nr. December 2020, S. 53–64. – ISSN 2644-1284
- [233] SHEN, T. : *Diagnosis of the Powertrain Systems for Autonomous Electric Vehicles*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Diss., 2021

Anhang A

Berechnung der Probability of Test Success von End-of-Life Tests reiner Parallelsysteme

Die logarithmierte Quantilsfunktion des reinen Parallelsystems in impliziter Form lautet bei zweiparametrischen Weibullverteilungen

$$\ln(q) = - \sum_{l=1}^K \ln \left(1 - e^{-\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} \right). \quad (\text{A.1})$$

Hieraus lassen sich die partiellen Ableitungen der Quantilsfunktion t_q bilden:

$$\frac{\partial t_q}{\partial T_l} = \frac{b_l \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{T_l \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1 \right) \sum_{l=1}^K \frac{b_l \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{t_q \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1 \right)}} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial t_q}{\partial b_l} = \frac{\ln \left(\frac{t_q}{T_l}\right) \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{\left(1 - e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} \right) \sum_{l=1}^K \frac{b_l \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{t_q \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1 \right)}}. \quad (\text{A.3})$$

Zusammen mit Gleichung [6.8](#) erhält man den folgenden Ausdruck für ein reines Parallelsystem

$$\text{Var}(t_q) = \sum_{l=1}^K \left(\frac{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{\sum_{l=1}^K \frac{b_l \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{t_q \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)}} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{b_l}{T_l \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)} \right)^2 \text{Var}(T_l) - 2 \frac{b_l \ln\left(\frac{t_q}{T_l}\right)}{T_l \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)^2} \text{Cov}(T_l, b_l) + \left(\frac{\ln\left(\frac{t_q}{T_l}\right)}{\left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)} \right)^2 \text{Var}(b_l) \right). \quad (\text{A.4})$$

Die asymptotische Normalverteilung des Lebensdauerquantils des Systems t_q lautet

$$t_q \sim \mathcal{N}\left(t_q; \sqrt{\text{Var}(t_q)}\right). \quad (\text{A.5})$$

Hierbei muss t_q aus der Systemgleichung bestimmt werden. Beispielsweise über die Bestimmung der Nullstelle des folgenden Ausdrucks

$$q - 1 = \prod_l^K \left(1 - e^{-\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} \right). \quad (\text{A.6})$$

Die Verteilung des Lebensdauerquantils bei Gültigkeit der Alternativhypothese lautet damit

$$t_{R_s, H_1} \sim \mathcal{N}(t_p; \sigma_{H_1}) \quad (\text{A.7})$$

mit

$$\sigma_{H_1} = \left(\sum_{l=1}^K \left(\frac{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{\sum_{l=1}^K \frac{b_l \left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}}{t_q \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)}} \right)^2 \cdot \left(\frac{b_l}{T_l \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)} \text{Var}(T_l) - 2 \frac{b_l \ln\left(\frac{t_q}{T_l}\right)}{T_l \left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)^2} \text{Cov}(T_l, b_l) + \left(\frac{\ln\left(\frac{t_q}{T_l}\right)}{\left(e^{\left(\frac{t_q}{T_l}\right)^{b_l}} - 1\right)} \right)^2 \text{Var}(b_l) \right) \right)^{1/2}. \quad (\text{A.8})$$

In Analogie zu Gleichung [4.43](#) lässt sich damit die P_{ts} für den Systemnachweis wie folgt berechnen:

$$P_{ts} \approx 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(C_s; 0, \frac{t_s}{t_p} \sigma_{H_1}\right); t_p - t_s, \sigma_{H_1}\right). \quad (\text{A.9})$$

Anhang B

Vergleich der Berechnungsmethoden der Probability of Test Success bei End-of-Life Tests

Die analytische Berechnungsmethode zeigt gute Übereinstimmung mit der allgemeinen Berechnungsmethode für variierende geforderte Zuverlässigkeiten R_s , siehe Abbildung [B.1](#). Die Test Simulation Methode zeigt ein abweichendes Verhalten, indem die P_{ts} in diesem Beispiel nahezu konstant ist. In Abbildung [B.2](#) sind die Werte der P_{ts} in Abhängigkeit der geforderten

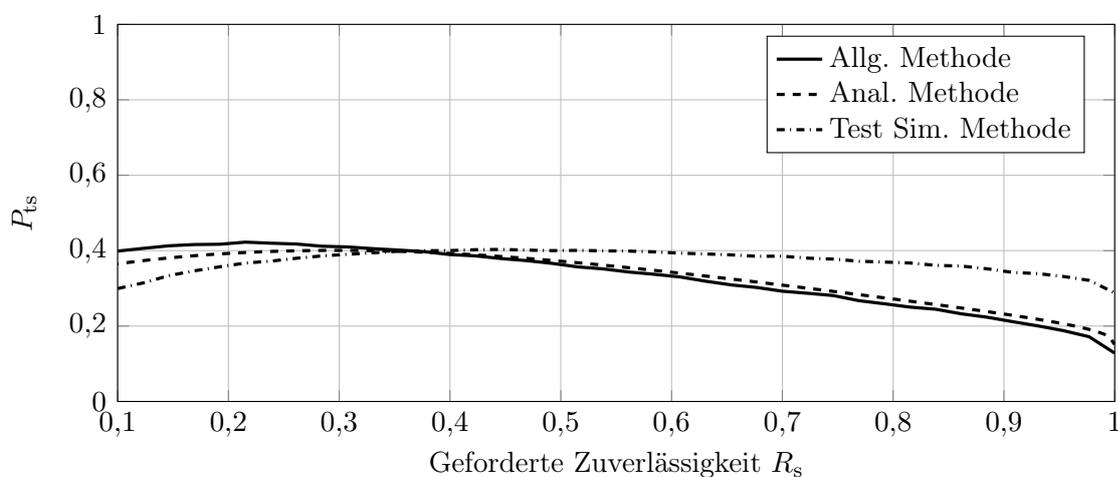


Abbildung B.1: P_{ts} des vollständigen EoL Tests für $C_s = 90\%$, $n = 10$, $s = 0,1$ und weibullverteilte Vorkenntnis mit $b = 3$. Alle Methoden basieren auf der MLE.

Aussagewahrscheinlichkeit C_s dargestellt. Ähnlich zum Verhalten in Abbildung [B.1](#), zeigt die analytische Berechnungsmethode eine sehr gute Übereinstimmung mit der allgemeinen Berechnungsmethode. Die Methode der Test Simulation zeigt hier nur kleine Abweichungen. Die analytische Berechnungsmethode zeigt auch in Abbildung [B.3](#) bezüglich der Abhängigkeit vom Weibullformparameter b der Vorkenntnis eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten der allgemeinen Berechnungsmethode. Die Test Simulation Methode zeigt auch hier eine deutliche Abweichung.

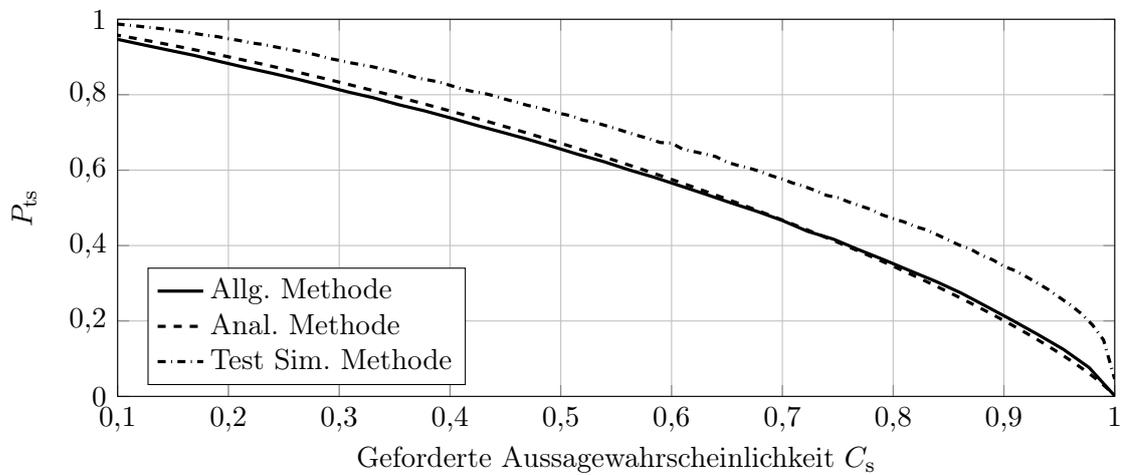


Abbildung B.2: P_{ts} des vollständigen EoL Tests für $R_s = 90\%$, $n = 10$, $s = 0,1$ und weibullverteilte Vorkenntnis mit $b = 3$. Alle Methoden basieren auf der MLE.

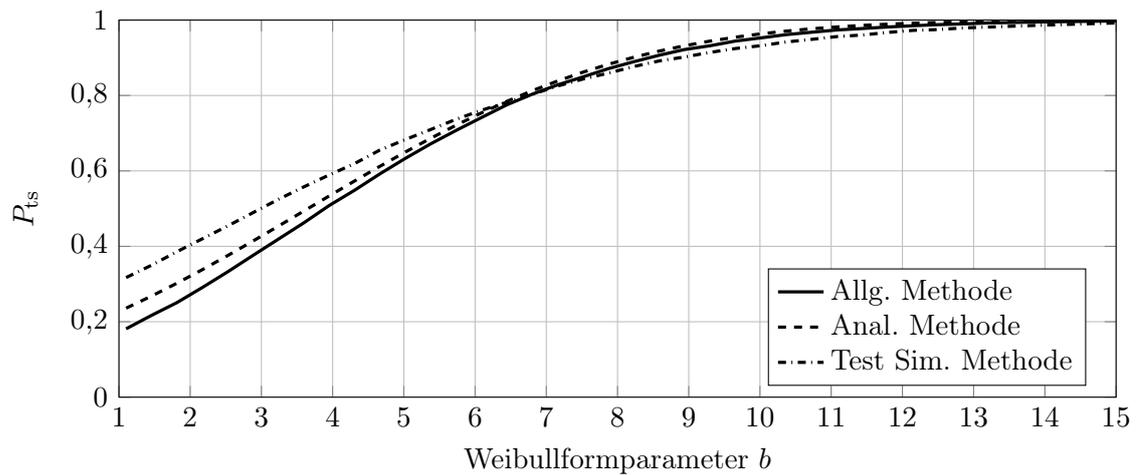


Abbildung B.3: P_{ts} des vollständigen EoL Tests für $R_s = C_s = 90\%$, $n = 10$ and $s = 0,2$. Der Weibullformparameter b der Vorkenntnis wird variiert. Alle Methoden basieren auf der MLE.

Anhang C

Untersuchungen zum Einfluss der Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes auf die Probability of Test Success

In den Abbildungen [C.1](#), [C.2](#) und [C.3](#) wird jeweils die Lebensdaueranforderung $t_s = (1 - s)F^{-1}(R_s)$, die Zuverlässigkeitsanforderung R_s , die geforderte Aussagewahrscheinlichkeit C_s und der Weibullformparameter b der Vorkenntnis moduliert. Es wurden dabei jeweils zwei Fälle der Stichprobenumfänge der Vorkenntnis und des Tests berechnet und zudem die P_{ts} ohne Berücksichtigung der Vorkenntnis dargestellt. Es ist zu sehen, dass die zusätzliche Berücksichtigung eine höhere P_{ts} zur Folge hat. Außerdem ist zu sehen, dass die Werte bezüglich R_s und b einen s-förmigen Verlauf haben. Bezüglich der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit C_s hingegen ist ein rein degressives Verhalten festzustellen.

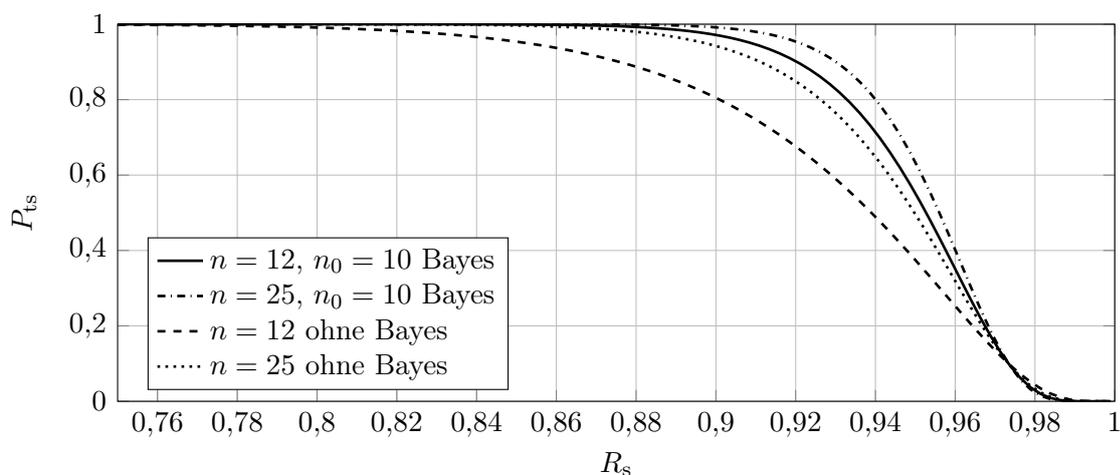


Abbildung C.1: Werte der P_{ts} eines unzensierten EoL Tests in Abhängigkeit der Zuverlässigkeitsanforderung R_s bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1, 3)$.

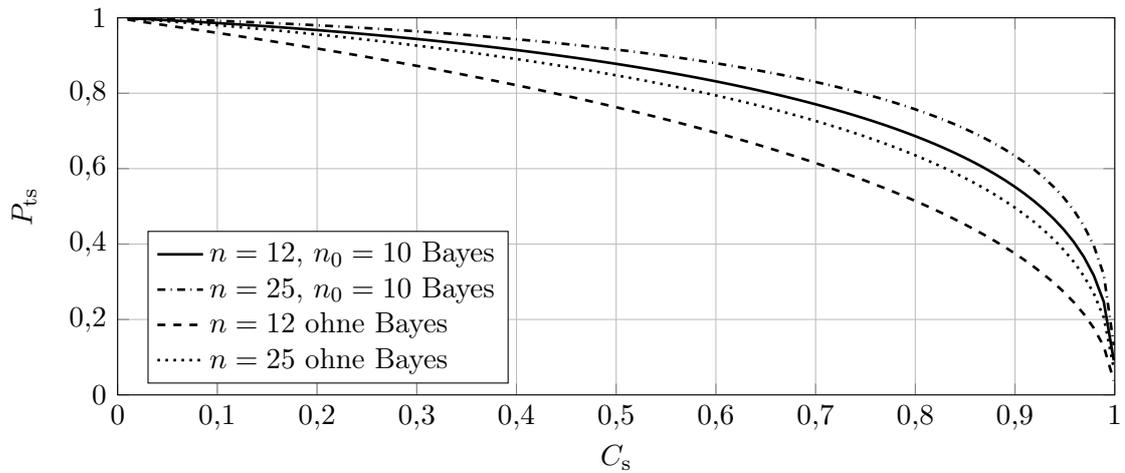


Abbildung C.2: Werte der P_{ts} eines unzensierten EoL Tests in Abhängigkeit der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit C_s bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$ mit $t_s = 0,3$ und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1,3)$.

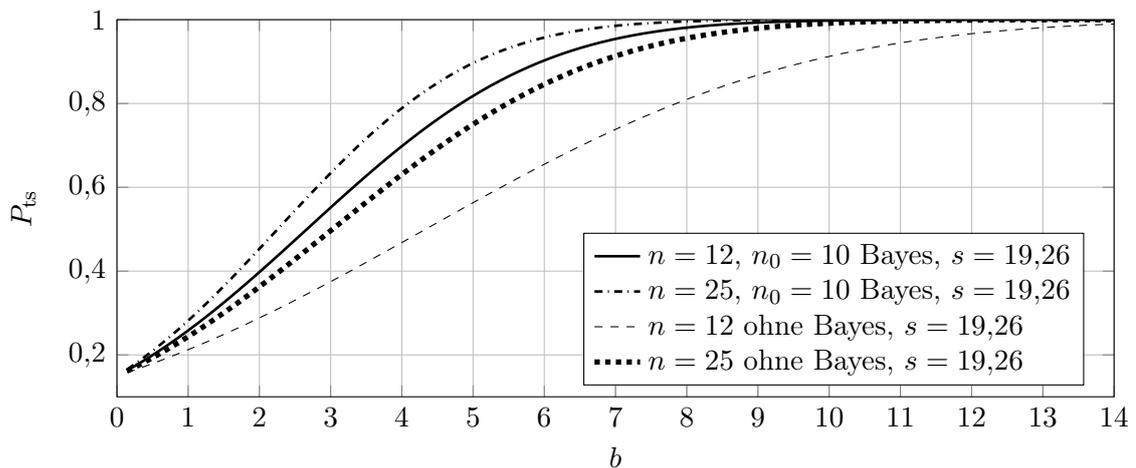


Abbildung C.3: Werte der P_{ts} eines unzensierten EoL Tests in Abhängigkeit des Weibullformparameters b bei zusätzlicher Berücksichtigung der Vorkenntnis über den Satz von Bayes. Das Zuverlässigkeitsziel beträgt $R_s = 95\%$, $C_s = 90\%$ mit $t_s = 0,3$ und die Vorkenntnis $\mathcal{W}(1,b)$.

Liste der bisher erschienenen Berichte aus dem IMA:

Nr.	Verfasser	Titel
1	H.K. Müller	Beitrag zur Berechnung und Konstruktion von Hochdruckdichtungen an schnellaufenden Wellen
2	W. Passera	Konzentrisch laufende Gewinde-Wellen-Dichtung im laminaren Bereich
3	K. Karow	Konzentrische Doppelgewindewellendichtung im laminaren Bereich
3	F.E. Breit	Die Kreiszyinderschalendichtung: Eine Axialspaltdichtung mit druckabhängiger Spaltweite
	W. Sommer	Dichtungen an Mehrphasensystemen: Berührungsfreie Wellendichtungen mit hochviskosen Sperrflüssigkeiten
4	K. Heitel	Beitrag zur Berechnung und Konstruktion konzentrisch und exzentrisch betriebener Gewindewellendichtungen im laminaren Bereich
5	K.-H. Hirschmann	Beitrag zur Berechnung der Geometrie von Evolventenverzahnungen
6	H. Däuble	Durchfluß und Druckverlauf im radial durchströmten Dichtspalt bei pulsierendem Druck
7	J. Rybak	Einheitliche Berechnung von Schneidrädern für Außen- und Innenverzahnungen. Beitrag zu Eingriffsstörungen beim Hohlrad-Verzahn mittels Schneidräder
8	D. Franz	Rechnergestütztes Entwerfen von Varianten auf der Grundlage gesammelter Erfahrungswerte
9	E. Lauster	Untersuchungen und Berechnungen zum Wärmehaushalt mechanischer Schaltgetriebe
10		Festschrift zum 70. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. K. Talke
11	G. Ott	Untersuchungen zum dynamischen Leckage- und Reibverhalten von Radialwellendichtringen
12	E. Fuchs	Untersuchung des elastohydrodynamischen Verhaltens von berührungsfreien Hochdruckdichtungen
13	G. Sedlak	Rechnerunterstütztes Aufnehmen und Auswerten spannungsoptischer Bilder
14	W. Wolf	Programmsystem zur Analyse und Optimierung von Fahrzeuggetrieben
15	H. v. Eiff	Einfluß der Verzahnungsgeometrie auf die Zahnfußbeanspruchung innen- und außenverzahnter Geradstirnräder
16	N. Messner	Untersuchung von Hydraulikstangendichtungen aus Polytetrafluoräthylen
17	V. Schade	Entwicklung eines Verfahrens zur Einflanken-Wälzprüfung und einer rechnergestützten Auswertemethode für Stirnräder
18	A. Gührer	Beitrag zur Optimierung von Antriebssträngen bei Fahrzeugen
19	R. Nill	Das Schwingungsverhalten loser Bauteile in Fahrzeuggetrieben
20	M. Kammüller	Zum Abdichtverhalten von Radial-Wellendichtringen
21	H. Truong	Strukturorientiertes Modellieren, Optimieren und Identifizieren von Mehrkörpersystemen
22	H. Liu	Rechnergestützte Bilderfassung, -verarbeitung und -auswertung in der Spannungsoptik
23	W. Haas	Berührungsfreie Wellendichtungen für flüssigkeitsbespritzte Dichtstellen
24	M. Plank	Das Betriebsverhalten von Wälzlagern im Drehzahlbereich bis 100.000/min bei Kleinstmengenschmierung
25	A. Wolf	Untersuchungen zum Abdichtverhalten von druckbelastbaren Elastomer- und PTFE-Wellendichtungen
26	P. Waidner	Vorgänge im Dichtspalt wasserabdichtender Gleitringdichtungen
27	Hirschmann u.a.	Veröffentlichungen aus Anlaß des 75. Geburtstags von Prof. Dr.-Ing. Kurt Talke
28	B. Bertsche	Zur Berechnung der Systemzuverlässigkeit von Maschinenbau-Produkten
29	G. Lechner;	Forschungsarbeiten zur Zuverlässigkeit im Maschinenbau
	K.-H.Hirschmann;	
	B. Bertsche	
30	H.-J. Prokop	Zum Abdicht- und Reibungsverhalten von Hydraulikstangendichtungen aus Polytetrafluoräthylen
31	K. Kleinbach	Qualitätsbeurteilung von Kegelradsätzen durch integrierte Prüfung von Tragbild, Einflankenwälzabweichung und Spielverlauf
32	E. Zürn	Beitrag zur Erhöhung der Meßgenauigkeit und -geschwindigkeit eines Mehrkoordinatentasters
33	F. Jauch	Optimierung des Antriebsstranges von Kraftfahrzeugen durch Fahrsimulation
34	J. Grabscheid	Entwicklung einer Kegelrad-Laufprüfmaschine mit thermografischer Tragbilderfassung
35	A. Hölderlin	Verknüpfung von rechnerunterstützter Konstruktion und Koordinatenmeßtechnik
36	J. Kurfess	Abdichten von Flüssigkeiten mit Magnetflüssigkeitsdichtungen
37	G. Borenius	Zur rechnerischen Schädigungsakkumulation in der Erprobung von Kraftfahrzeugteilen bei stochastischer Belastung mit variabler Mittellast
38	E. Fritz	Abdichtung von Maschinenspindeln
39	E. Fritz; W. Haas;	Berührungsfreie Spindelabdichtungen im Werkzeugmaschinenbau. Konstruktionskatalog
	H.K. Müller	

Nr.	Verfasser	Titel
40	B. Jenisch	Abdichten mit Radial-Wellendichtringen aus Elastomer und Polytetrafluorethylen
41	G. Weidner	Klappern und Rasseln von Fahrzeuggetrieben
42	A. Herzog	Erweiterung des Datenmodells eines 2D CAD-Systems zur Programmierung von Mehrkoordinatenmeßgeräten
43	T. Roser	Wissensbasiertes Konstruieren am Beispiel von Getrieben
44	P. Wäschle	Entlastete Wellendichtringe
45	Z. Wu	Vergleich und Entwicklung von Methoden zur Zuverlässigkeitsanalyse von Systemen
46	W. Richter	Nichtwiederholbarer Schlag von Wälzlageeinheiten für Festplattenlaufwerke
47	R. Durst	Rechnerunterstützte Nutprofilentwicklung und clusteranalytische Methoden zur Optimierung von Gewindewerkzeugen
48	G.S. Müller	Das Abdichtverhalten von Gleitringdichtungen aus Siliziumkarbid
49	W.-E. Krieg	Untersuchungen an Gehäuseabdichtungen von hochbelasteten Getrieben
50	J. Grill	Zur Krümmungstheorie von Hüllflächen und ihrer Anwendung bei Werkzeugen und Verzahnungen
51	M. Jäckle	Entlüftung von Getrieben
52	M. Köchling	Beitrag zur Auslegung von geradzahnten Stirnrädern mit beliebiger Flankenform
53	M. Hildebrandt	Schadensfrüherkennung an Wälzkontakten mit Körperschall-Referenzsignalen
54	H. Kaiser	Konstruieren im Verbund von Expertensystem, CAD-System, Datenbank und Wiederholteil-suchsystem
55	N. Stanger	Berührungsfrei abdichten bei kleinem Bauraum
56	R. Lenk	Zuverlässigkeitsanalyse von komplexen Systemen am Beispiel PKW-Automatikgetriebe
57	H. Naunheimer	Beitrag zur Entwicklung von Stufenlosgetrieben mittels Fahrsimulation
58	G. Neumann	Thermografische Tragbilderfassung an rotierenden Zahnrädern
59	G. Wüstenhagen	Beitrag zur Optimierung des Entlasteten Wellendichtrings
60	P. Brodbeck	Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Bauteilzuverlässigkeit und zur Systemberechnung nach dem Booleschen Modell
61	Ch. Hoffmann	Untersuchungen an PTFE-Wellendichtungen
62	V. Hettich	Identifikation und Modellierung des Materialverhaltens dynamisch beanspruchter Flächen-dichtungen
63	K. Riedl	Pulsationsoptimierte Außenzahnpumpen mit ungleichförmig übersetzenden Radpaaren
64	D. Schwuchow	Sonderverzahnungen für Zahnpumpen mit minimaler Volumenstrompulsation
65	T. Spörl	Modulares Fahrsimulationsprogramm für beliebig aufgebaute Fahrzeugtriebstränge und Anwendung auf Hybridantriebe
66	K. Zhao	Entwicklung eines räumlichen Toleranzmodells zur Optimierung der Produktqualität
67	K. Heusel	Qualitätssteigerung von Planetengetrieben durch Selektive Montage
68	T. Wagner	Entwicklung eines Qualitätssysteminformationssystems für die Konstruktion
69	H. Zelßmann	Optimierung des Betriebsverhaltens von Getriebeentlüftungen
70	E. Bock	Schwimmende Wellendichtringe
71	S. Ring	Anwendung der Verzahnungstheorie auf die Modellierung und Simulation des Werkzeug-schleifens
72	M. Klöpfer	Dynamisch beanspruchte Dichtverbindungen von Getriebegehäusen
73	C.-H. Lang	Losteilgeräusche von Fahrzeuggetrieben
74	W. Haas	Berührungsfreies Abdichten im Maschinenbau unter besonderer Berücksichtigung der Fang-labyrinth
75	P. Schiberna	Geschwindigkeitsvorgabe für Fahrsimulationen mittels Verkehrssimulation
76	W. Elser	Beitrag zur Optimierung von Wälzgetrieben
77	P. Marx	Durchgängige, bauteilübergreifende Auslegung von Maschinenelementen mit unscharfen Vorgaben
78	J. Kopsch	Unterstützung der Konstruktionstätigkeiten mit einem Aktiven Semantischen Netz
79	J. Rach	Beitrag zur Minimierung von Klapper- und Rasselgeräuschen von Fahrzeuggetrieben
80	U. Häussler	Generalisierte Berechnung räumlicher Verzahnungen und ihre Anwendung auf Wälzfräse-herstellung und Wälzfräsen
81	M. Hüsges	Steigerung der Tolerierungsfähigkeit unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten
82	X. Nastos	Ein räumliches Toleranzbewertungssystem für die Konstruktion
83	A. Seifried	Eine neue Methode zur Berechnung von Rollenlagern über lagerinterne Kontakt-Beanspruchungen
84	Ch. Dörr	Ermittlung von Getriebebelastkollektiven mittels Winkelbeschleunigungen
85	A. Veil	Integration der Berechnung von Systemzuverlässigkeiten in den CAD-Konstruktionsprozeß
86	U. Frenzel	Rückenstrukturierte Hydraulikstangendichtungen aus Polyurethan
87	U. Braun	Optimierung von Außenzahnpumpen mit pulsationsarmer Sonderverzahnung
88	M. Lambert	Abdichtung von Werkzeugmaschinen-Flachführungen
89	R. Kubalczyk	Gehäusegestaltung von Fahrzeuggetrieben im Abdichtbereich

Nr.	Verfasser	Titel
90	M. Oberle	Spielbeeinflussende Toleranzparameter bei Planetengetrieben
91	S. N. Dogan	Zur Minimierung der Losteilgeräusche von Fahrzeuggetrieben
92	M. Bast	Beitrag zur werkstückorientierten Konstruktion von Zerspanwerkzeugen
93	M. Ebenhoch	Eignung von additiv generierten Prototypen zur frühzeitigen Spannungsanalyse im Produktentwicklungsprozess
94	A. Fritz	Berechnung und Monte-Carlo Simulation der Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit technischer Systeme
95	O. Schrems	Die Fertigung als Versuchsfeld für die qualitätsgerechte Produktoptimierung
96	M. Jäckle	Untersuchungen zur elastischen Verformung von Fahrzeuggetrieben
97	H. Haiser	PTFE-Compounds im dynamischen Dichtkontakt bei druckbelastbaren Radial-Wellendichtungen
98	M. Rettenmaier	Entwicklung eines Modellierungs-Hilfssystems für Rapid Prototyping gerechte Bauteile
99	M. Przybilla	Methodisches Konstruieren von Leichtbauelementen für hochdynamische Werkzeugmaschinen
100	M. Olbrich	Werkstoffmodelle zur Finiten-Elemente-Analyse von PTFE-Wellendichtungen
101	M. Kunz	Ermittlung des Einflusses fahrzeug-, fahrer- und verkehrsspezifischer Parameter auf die Getriebelastkollektive mittels Fahrsimulation
102	H. Ruppert	CAD-integrierte Zuverlässigkeitsanalyse und -optimierung
103	S. Kilian	Entwicklung hochdynamisch beanspruchter Flächendichtverbindungen
104	A. Flaig	Untersuchung von umweltschonenden Antriebskonzepten für Kraftfahrzeuge mittels Simulation
105	B. Luo	Überprüfung und Weiterentwicklung der Zuverlässigkeitsmodelle im Maschinenbau mittels Mono-Bauteil-Systemen
106	L. Schuppenhauer	Erhöhung der Verfügbarkeit von Daten für die Gestaltung und Berechnung der Zuverlässigkeit von Systemen
107	J. Ryborz	Klapper - und Rasselgeräuschverhalten von Pkw- und Nkw- Getrieben
108	M. Würthner	Rotierende Wellen gegen Kühlschmierstoff und Partikel berührungsfrei abdichten
109	C. Gitt	Analyse und Synthese leistungsverzweigter Stufenlosgetriebe
110	A. Krolo	Planung von Zuverlässigkeitstests mit weitreichender Berücksichtigung von Vorkenntnissen
111	G. Schöllhammer	Entwicklung und Untersuchung inverser Wellendichtsysteme
112	K. Fronius	Gehäusegestaltung im Abdichtbereich unter pulsierendem Innendruck
113	A. Weidler	Ermittlung von Raffungsfaktoren für die Getriebeerprobung
114	B. Stiegler	Berührungsfreie Dichtsysteme für Anwendungen im Fahrzeug- und Maschinenbau
115	T. Kunstfeld	Einfluss der Wellenoberfläche auf das Dichtverhalten von Radial-Wellendichtungen
116	M. Janssen	Abstreifer für Werkzeugmaschinenführungen
117	S. Buhl	Wechselbeziehungen im Dichtsystem von Radial-Wellendichtring, Gegenlaufläche und Fluid
118	P. Pozsgai	Realitätsnahe Modellierung und Analyse der operativen Zuverlässigkeitskennwerte technischer Systeme
119	H. Li	Untersuchungen zum realen Bewegungsverhalten von Losteilen in Fahrzeuggetrieben
120	B. Otte	Strukturierung und Bewertung von Eingangsdaten für Zuverlässigkeitsanalysen
121	P. Jäger	Zuverlässigkeitsbewertung mechatronischer Systeme in frühen Entwicklungsphasen
122	T. Hitziger	Übertragbarkeit von Vorkenntnissen bei der Zuverlässigkeitstestplanung
123	M. Delonga	Zuverlässigkeitsmanagementsystem auf Basis von Felddaten
124	M. Maisch	Zuverlässigkeitsorientiertes Erprobungskonzept für Nutzfahrzeuggetriebe unter Berücksichtigung von Betriebsdaten
125	J. Orso	Berührungsfreies Abdichten schnelllaufender Spindeln gegen feine Stäube
126	F. Bauer	PTFE-Manschettendichtungen mit Spiralrille - Analyse, Funktionsweise und Erweiterung der Einsatzgrenzen
127	M. Stockmeier	Entwicklung von Klapper- und rasselgeräuschfreien Fahrzeuggetrieben
128	M. Trost	Gesamtheitliche Anlagenmodellierung und -analyse auf Basis stochastischer Netzverfahren
129	P. Lambeck	Unterstützung der Kreativität von verteilten Konstrukteuren mit einem Aktiven Semantischen Netz
130	K. Pickard	Erweiterte qualitative Zuverlässigkeitsanalyse mit Ausfallprognose von Systemen
131	W. Novak	Geräusch- und Wirkungsgradoptimierung bei Fahrzeuggetrieben durch Festradentkopplung
132	M. Henzler	Radialdichtungen unter hoher Druckbelastung in Drehübertragern von Werkzeugmaschinen
133	B. Rzepka	Konzeption eines aktiven semantischen Zuverlässigkeitsinformationssystems
134	C.G. Pflüger	Abdichtung schnelllaufender Hochdruck-Drehübertrager mittels Rechteckring und hocheffizient strukturierter Gleitfläche
135	G. Baitinger	Multiskalenansatz mit Mikrostrukturanalyse zur Drallbeurteilung von Dichtungsgegenläufigen Flächen

Nr.	Verfasser	Titel
136	J. Gäng	Berücksichtigung von Wechselwirkungen bei Zuverlässigkeitsanalysen
137	C. Maisch	Berücksichtigung der Ölalterung bei der Lebensdauer- und Zuverlässigkeitsprognose von Getrieben
138	D. Kirschmann	Ermittlung erweiterter Zuverlässigkeitsziele in der Produktentwicklung
139	D. Weber	Numerische Verschleißsimulation auf Basis tribologischer Untersuchungen am Beispiel von PTFE-Manschettendichtungen
140	T. Leopold	Ganzheitliche Datenerfassung für verbesserte Zuverlässigkeitsanalysen
141	St. Jung	Beitrag zum Einfluss der Oberflächencharakteristik von Gegenaufläufen auf das tribologische System Radial-Wellendichtung
142	T. Prill	Beitrag zur Gestaltung von Leichtbau-Getriebegehäusen und deren Abdichtung
143	D. Hofmann	Verknüpfungmodell zuverlässigkeitsrelevanter Informationen in der Produktentwicklung mechatronischer Systeme
144	M. Wacker	Einfluss von Drehungleichförmigkeiten auf die Zahnradlebensdauer in Fahrzeuggetrieben
145	B. Jakobi	Dichtungsgeräusche am Beispiel von Pkw-Lenkungen – Analyse und Abhilfemaßnahmen
146	S. Kiefer	Bewegungsverhalten von singulären Zahnradstufen mit schaltbaren Koppelungseinrichtungen
147	P. Fietkau	Transiente Kontaktberechnung bei Fahrzeuggetrieben
148	B. Klein	Numerische Analyse von gemischten Ausfallverteilungen in der Zuverlässigkeitstechnik
149	M. Klaiber	Betriebs- und Benetzungseigenschaften im Dichtsystem Radial-Wellendichtung am Beispiel von additiven synthetischen Schmierölen
150	A. Baumann	Rasselgeräuschminimierung von Fahrzeuggetrieben durch Getriebeöle
151	M. Kopp	Modularisierung und Synthese von Zuverlässigkeitsmethoden
152	M. Narten	Abdichten von fließfettgeschmierten Getrieben mit Radialwellendichtungen – Reibungsminimierung durch Makrostrukturierung der Dichtungsgegenaufläufen
153	P. Schuler	Einfluss von Grenzflächeneffekten auf den Dichtmechanismus der Radial-Wellendichtung
154	A. Romer	Anwendungsspezifischer Zuverlässigkeitsnachweis auf Basis von Lastkollektiven und Vorwissen
155	A. Daubner	Analyse, Modellierung und Simulation von Verschleiß auf mehreren Skalen zur Betriebsdauervorhersage von Wellendichtringen aus PTFE-Compound
156	J. Rowas	Ökologischer Einsatz der Traktionsarten im System Bahn
157	D. J. Maier	Sensorlose online Zustandserfassung von Vorschubantriebskomponenten in Werkzeugmaschinen
158	J.-P. Reibert	Statisches Abdichten auf nicht idealen Dichtflächen in der Antriebstechnik
159	M. Sommer	Einfluss des Schmierfetts auf das tribologische System Radial-Wellendichtung – Betriebsverhalten und Funktionsmodell
160	W. Haas	Basics der Dichtungstechnik
161	U. Nißler	Dichtheit von Hydraulikstangendichtringen aus Polyurethan
162	S. M. Neuberger	Entwicklung einer gasgeschmierten Gleitringdichtung für den Einsatz im Verbrennungsmotor
163	W. Goujavin	Strömungsmechanische Untersuchungen zur Funktionsweise von Manschettendichtungen aus PTFE-Compounds mit Rückförderstrukturen
164	K. Mutter	Simulation der Zuverlässigkeit von Gesamtfahrzeugfunktionen am Beispiel Fahrkomfort
165	S. Sanzenbacher	Reduzierung von Getriebegeräuschen durch Körperschallminderungsmaßnahmen
166	O. Koller	Zuverlässigkeit von Leistungsmodulen im elektrischen Antriebsstrang
167	M. Remppis	Untersuchungen zum Förderverhalten von Dichtsystemen mit Radial-Wellendichtringen aus Elastomer
168	M. Baumann	Abdichtung drallbehafteter Dichtungsgegenaufläufen – Messung, Analyse, Bewertung und Grenzen
169	M. Schenk	Adaptives Prüfstandsverhalten in der PKW-Antriebstrangerprobung
170	J. Gölz	Manschettendichtringe aus PTFE-Compounds, Funktionsmechanismus von PTFE-Manschettendichtungen und Entwicklung von Rückförderstrukturen für beidseitig drehende Wellen
171	J. Kümmel	Schmutzabdichtung mittels Fettgefüllter Berührungsfreier Wellendichtungen
172	S. Bader	Gehäusedichtungen unter korrosiver Last
173	J. Juskowiak	Beanspruchungsgerechte Bestimmung des Weibull-Formparameters für Zuverlässigkeitsprognosen
174	F. Jakob	Nutzung von Vorkenntnissen und Raffungsmodellen für die Zuverlässigkeitsbestimmung
175	N. P. Tonius	Klauenschaltelemente in Stufenautomatgetrieben
176	V. Schweizer	Berücksichtigung und Bewertung streuender Einflussgrößen in der Zuverlässigkeitssimulation
177	F. Bosch	Abdichtung trockener Stäube mit fettgefüllten berührungsfreien Wellendichtungen
178	M. Botzler	Präventive Diagnose abnutzungsabhängiger Komponentenausfälle
179	C. Fehrenbacher	Förderverhalten im Dichtsystem Radial-Wellendichtung

Nr.	Verfasser	Titel
180	B. Heumesser	Optimierung des Klapper- und Rasselgeräuschverhaltens bei Doppelkupplungsgetrieben
181	A. Eipper	Einfluss transienter Betriebsbedingungen auf den RWDR im System Radial-Wellendichtung
182	Alexander Buck	Einfluss der Oberflächenrauheit auf den Verschleiß an Hydraulikstangendichtungen
183	Andrea Buck	Simulation und Optimierung der Instandhaltung unter Berücksichtigung sich ändernder Belastungen mittels Petrinetzen
184	St. Kemmler	Integrale Methodik zur Entwicklung von robusten, zuverlässigen Produkten
185	T. Rieker	Modellierung der Zuverlässigkeit technischer Systeme mit stochastischen Netzverfahren
186	M. Bartholdt	Kunden- und kostenorientierte Zuverlässigkeitszielermittlung
187	V. Warth	Systematische Synthese und Bewertung von Stufenlosgetrieben
188	N. Nowizki	Funktionale Sicherheit und Zuverlässigkeit in frühen Phasen der Produktentwicklung
189	F. Schiefer	Additive Fertigung von Radial-Wellendichtungen
190	M. Dazer	Zuverlässigkeitstestplanung mit Berücksichtigung von Vorwissen aus stochastischen Lebensdauerberechnungen
191	J. Totz	Funktionsuntersuchungen an Dichtsystemen mit weichgeschliffenen Dichtungsgegenläufflächen und Radial-Wellendichtungen aus NBR
192	M. Stoll	Entwicklung und Funktionsanalyse rückenstrukturierter Manschettendichtungen aus PTFE-Compound
193	N. Dakov	Elastohydrodynamische Simulation von Wellendichtungen am Beispiel der PTFE-Manschettendichtung mit Rückförderstrukturen
194	Z. Beslic	Modellierung der Schadensdegradation Zahnradgrübchen bei Fahrzeuggetrieben
195	St. Jetter	Zuverlässigkeitsprognose mechanischer Komponenten auf Basis simulierter Betriebsfestigkeit
196	O. R. Orozco	Availability of Particle Accelerators: requirements, prediction methods and optimization
197	V. Schramm	Dependable System Development Methodology and Case Study for the LHC Beam Loss Monitoring System at CERN
198	J. Gröber	Zuverlässigkeitsanalyse neuartiger mechatronischer Systeme
199	K. Lucan	Methodische Ermittlung von repräsentativen Lastkollektiven am Beispiel der Nutzfahrzeugbremse
200	F. Müller	Realitätsnahe Modellierung, Simulation und Analyse der operativen Zuverlässigkeits- und Verfügbarkeitskennwerte technischer Systeme mit Vertrauensbereich
201	A. Ostertag	Zuverlässigkeit, Sicherheit und Nachhaltigkeit adaptiver Tragwerke
202	A. Kremer	Statistische Versuchsplanung in der Lebensdauererprobung mit Vertrauensintervallen
203	T. Herzig	Anforderungsgerechte Produktauslegung durch Planung effizienter beschleunigter Zuverlässigkeitstests
204	M. Henss	Methodik zur Konzeption, Analyse und Modellierung von Lösungen im Prognostic and Health Management (PHM)
205	Y. Gretzinger	Steigerung der nutzbaren Restlebensdauer von Zahnradern durch eine adaptive Betriebsstrategie
206	A.J. Köhler	Nachweis der Wirksamkeit zeitdiskreter technischer Sicherheitsmechanismen am Beispiel des automatisierten Fahrens
207	S. Skorsetz	Methode zur Übertragbarkeit von Kraftschlussmessungen an Rollenprüfständen unterschiedlicher Skalierung
208	H. Tavakolinik	Beurteilung der Realisierbarkeit der virtuellen Kupplung in Bezug auf Abstandsregelung
209	F. Long	Realitätsnahe Modellierung und Analyse der Verfügbarkeit von Produktionssystemen in Industrie 4.0
210	S. Imle	Modelling and optimization of safety and availability for subsea all-electric Xmas Trees
211	P. van Bergen	Methode zum simulationsbasierten Nachweis der funktionalen Sicherheit fehlertoleranter Systeme
212	M. Diesch	Verknüpfung von Zuverlässigkeitstechnik und Prognostic and Health Management mittels virtueller Sensoren