

Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart genehmigte Habilitationsschrift

von

Dr.-Ing. Stefan Diebels

aus

Neuss

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

1. Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm

2. Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt

Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart
Lehrstuhl II, Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

Bericht Nr. II-4 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II,
Universität Stuttgart, 2000

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

© Stefan Diebels

Institut für Mechanik (Bauwesen)

Lehrstuhl II

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

70 569 Stuttgart

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise
auf fotomechanischem Wege zu vervielfältigen.

Vorwort

Das Interesse an der Theorie Poröser Medien wurde bereits während meiner Anstellung als Wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers an der TH Darmstadt geweckt. Auf dieser Basis entstand die vorliegende Arbeit in der Zeit von 1995 bis 1999 während meiner Tätigkeit als Akademischer Rat am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Ehlers für die Unterstützung und Motivation, die er mir in all den Jahren zukommen ließ. Viele Details dieser Arbeit konnte ich mit ihm in ausführlichen Diskussionen klären. Für die Übernahme des Hauptberichts sei ihm ebenfalls gedankt.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm und Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt für die bereitwillige Übernahme der Korreferate. Die Diskussionen, die sie mit mir geführt haben, fanden in einer offenen Atmosphäre statt. Dabei konnten einige Details unter anderen Gesichtspunkten beleuchtet werden. Damit haben Herr Prof. Ramm und Herr Prof. Haupt zur Abrundung der Arbeit beigetragen.

Schließlich danke ich auch allen Kollegen und Mitarbeitern am Institut für die gute Zusammenarbeit und das fruchtbare Arbeitsklima, das zur Anfertigung der vorliegenden Arbeit unerlässlich war. Insbesondere danke ich Herrn Dr.-Ing. Wolfram Volk und Herrn Dr.-Ing. Peter Ellsiepen für die anregenden Diskussionen und ihre Bereitschaft, sich in die abstrakten Probleme der erweiterten Kontinuumstheorien hineinzusetzen.

Mein ganz besonderer Dank aber gebührt meiner Familie, ohne deren Verständnis und aktive Unterstützung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Stuttgart, im März 2000

Stefan Diebels

„Um etwas zu finden mußst du erst einmal suchen“, sagte Thorin immer zu den jugendlichen Zwergen. „Du findest ganz sicher etwas, wenn du nur suchst, allerdings nicht immer das, was du gesucht hast.“ Und so war es auch hier.

J. R. R. Tolkien, *Der Hobbit*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kinematik	15
2.1	Das Konzept der Volumenanteile	15
2.2	Bewegung	17
2.3	Mikrobewegung	22
2.4	Klassische Deformations- und Verzerrungstensoren	24
2.5	Erweiterte Deformations- und Verzerrungstensoren	27
2.6	Krümmungstensoren	30
2.7	Kompatibilitätsbedingung	32
2.8	Geschwindigkeitsgradient und Kreiseltensor	33
2.9	Parameterlinien und natürliche Basissysteme	37
2.10	Deformationstensoren und natürliche Basis	40
2.11	Cosserat-Deformationstensoren und natürliche Basis	43
2.12	Krümmungstensoren in der natürlichen Basis	46
3	Bilanzgleichungen	49
3.1	Allgemeine Bilanzstruktur	49
3.2	Massenbilanz	56
3.3	„Bilanz“ der Mikroträgheit	58
3.4	Impulsbilanz	61
3.5	Drallbilanz	63
3.6	Energiebilanz	66
3.7	Entropiebilanz	69
4	Auswertung des Entropieprinzips	73
4.1	Vorbemerkungen	73
4.2	Evolutionsgleichung für die Volumenanteile	78
4.3	Prozeßvariablen und Auswirkungsfunktionen	80
4.4	Formulierung der Entropiebilanz	82
4.5	Materialfunktionen für die freie Energie	85
4.6	Auswertung im Gleichgewicht	88
4.7	Auswertung in der Nähe des Gleichgewichts	92
4.8	Zusammenstellung der Resultate	96

5	Vier Modelltypen	99
5.1	Das kompressible Modell	99
5.2	Das hybride Modell vom Typ I	101
5.3	Das hybride Modell vom Typ II	104
5.4	Das inkompressible Modell	107
5.5	Resultate	109
6	Konkretisierung der Modelle	111
6.1	Einschränkende Annahmen	111
6.2	Das Festkörperskelett	112
6.2.1	Materialgesetze für das Festkörperskelett	112
6.2.2	Abhängigkeit von der Porosität	120
6.2.3	Das Konzept der effektiven Spannung	125
6.3	Das Porenfluid	128
6.3.1	Zustandsgleichungen für kompressible Fluide	128
6.3.2	Nichtgleichgewichtsgrößen des Fluids	132
7	Numerische Umsetzung und Beispiele	137
7.1	Die Modellgleichungen	137
7.2	Schwache Formulierung der Modellgleichungen	142
7.3	Beispiele	145
7.3.1	Zug- und Druckversuch	145
7.3.2	Eindimensionaler Konsolidationsversuch	150
7.3.3	Schubversuch	153
7.3.4	Biegeversuch	156
8	Schlußbemerkungen	159
A	Gebräuchliche Symbole	163
B	Literatur	169
C	Lebenslauf	187

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schneebeli-Medium vor und nach der Belastung	3
1.2	Makromodell mit unterschiedlichen mikroskopischen Strukturen	7
1.3	Lokalisierung in Scherbändern	9
2.1	Mikrostruktur und repräsentatives Elementarvolumen	16
2.2	Referenzkonfiguration und Bewegung	19
2.3	Deformationsgradient und Linienelemente	22
2.4	Deformationsgradient und Mikrobewegung	23
2.5	Polare Zerlegung des Deformationsgradienten	25
2.6	Deformationsgradient, Metrik und natürliche Basis	41
2.7	<i>Cosserat</i> -Konfigurationen	45
3.1	Materieller Körper und physikalische Größe	52
6.1	Geometrie zur Bestimmung der effektiven Parameter (1)	122
6.2	Geometrie zur Bestimmung der effektiven Parameter (2)	123
6.3	Materialparameter in Abhängigkeit vom Volumenanteil	124
6.4	Druck und Dichte nach unterschiedlichen Zustandsgleichungen (1)	130
6.5	Druck und Dichte nach unterschiedlichen Zustandsgleichungen (2)	131
7.1	Drainierter und undrainierter Zugversuch	147
7.2	Kraft-Verschiebungs-Diagramm im drainierten Zugversuch	148
7.3	Querverschiebung im drainierten Zugversuch	148
7.4	Kraft-Verschiebungs-Diagramm im undrainierten Zugversuch	149
7.5	Porendruck im undrainierten Zugversuch	150
7.6	Querverschiebung im undrainierten Zugversuch	150
7.7	Eindimensionales Konsolidationsproblem	151
7.8	Absenkung nach einem Belastungssprung	152
7.9	Absenkung bei steigender Belastung	153
7.10	Konfigurationen für den Schubversuch	154
7.11	Gesamtrotation im Schubversuch	155
7.12	Momentenspannungen im Schubversuch	155
7.13	Schubspannungen im Schubversuch	156
7.14	Konfiguration des Biegeversuchs	157
7.15	Maßstabeffekt beim Biegeversuch	157

Tabellenverzeichnis

3.1	Bezeichnungen in den allgemeinen Bilanzen	53
3.2	Bilanzrelationen für die Mischung	55
3.3	Bilanzrelationen für die Konstituierenden	55
6.1	Effektive Materialparameter und Anfangsvolumenanteil	121
7.1	Modellgleichungen	140
7.2	Werte der verwendeten Materialparameter	146

Kapitel 1:

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine erweiterte Kontinuumstheorie zur Beschreibung von Mehrphasenmaterialien entwickelt und angewandt. Dazu werden die allgemeinen Materialgleichungen, die sich aus thermodynamischen Überlegungen ergeben, spezifiziert. Das vorgeschlagene Modell wird numerisch umgesetzt und anhand von exemplarischen Beispielen auf seine physikalische Plausibilität untersucht.

Die Mechanik ist seit jeher ein Bindeglied zwischen der Mathematik, der Physik und den Ingenieurwissenschaften. Als theoretischer Überbau hat sich die Kontinuumsmechanik (vgl. z. B. Truesdell & Toupin, 1960; Becker & Bürger, 1975; Altenbach & Altenbach, 1994) etabliert. Sie stellt als phänomenologische Theorie Ansätze zur Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens von materiellen Körpern zur Verfügung. Die Eigenschaften der betrachteten Körper werden innerhalb der Kontinuumsmechanik anhand von Versuchen charakterisiert, die auf der makroskopischen Ebene durchgeführt werden. Man betrachtet also nicht die Mikroebene, d. h. einzelne Moleküle, Kristalle oder Körner, sondern erfaßt das Verhalten der Körper auf einem Maßstab, der wesentlich größer als eine charakteristische Kornabmessung ist und auf dem Inhomogenitäten aus dem Gefüge in der Regel nicht spürbar sind. Die Bezeichnungen *Mikroebene* und *Makroebene* sagen in diesem Zusammenhang allerdings nichts über die absolute Größenordnung aus, vielmehr dienen sie der Unterscheidung: Die Beschreibung des Verhaltens von materiellen Körpern im Rahmen der Kontinuumsmechanik findet auf der Makroebene statt, die kleinskaligen Strukturen der Mikroebene werden daher nicht aufgelöst. Die Kontinuumsmechanik als phänomenologische Theorie besteht aus drei „Bausteinen“:

1. Die *Kinematik* beschreibt die Bewegung und Deformation eines materiellen Körpers.
2. Die *Bilanzgleichungen* repräsentieren die Erhaltungssätze der Mechanik. Genau wie die Kinematik besitzen sie axiomatischen Charakter.
3. Die *Konstitutivtheorie* beschreibt das stoffspezifische Verhalten und ist notwendig, um das aus der Kinematik und den Bilanzgleichungen resultierende Gleichungssystem zu schließen.

Die Materialgleichungen, die aus makroskopischen Versuchen mit üblicherweise homogenen Randbedingungen ermittelt werden, können sehr komplexe Strukturen aufweisen. Da das Verhalten einzelner Teilkörper auf der Mikroebene oft einfacher zu

modellieren ist, hat man sich vor allem in den letzten Jahren darum bemüht, das makroskopische Verhalten aus dem Aufbau der Mikrostruktur zu begründen. Der als *Homogenisierung* bekannte Prozeß ist z. B. in den Arbeiten von Hill (1965) oder Suquet (1985, 1987) beschrieben. Typische Probleme, die mit Homogenisierungsmethoden behandelt werden, sind die Bestimmung der effektiven Moduli von Verbundwerkstoffen und die Beschreibung inelastischen Werkstoffverhaltens von Polykristallen. Dabei werden in der Regel periodische Strukturen betrachtet, über die eine Mittelung durchgeführt wird. Je nachdem, ob man dabei von homogenen Spannungsverteilungen innerhalb der Mikrostruktur oder von homogenen Deformationsverteilungen ausgeht, ergeben sich aus der Homogenisierung die oberen und unteren Schranken der effektiven Moduli nach Voigt (1889) bzw. nach Reuss (1929). Aufgrund der gestiegenen Computerleistung haben sich in den letzten Jahren auch numerische Homogenisierungsmethoden etablieren können (Schröder, 1996; Miehe *et al.*, 1999).

Außer der Möglichkeit, den Einfluß der Mikrostruktur auf die Makroebene direkt durch einen Homogenisierungsprozeß zu studieren, kann der Mikrostruktur durch eine erweiterte Kontinuumstheorie Rechnung getragen werden. Eine sehr allgemeine Erweiterung der Standardformulierung stellt dabei die *mikromorphe Theorie* dar, die von Twiss & Eringen (1971) und Eringen & Kafadar (1976) vertreten wird. In ihr repräsentiert jeder materielle Punkt des Kontinuums als Träger der physikalischen Eigenschaften und als kleinste betrachtete Einheit selbst wiederum ein Kontinuum mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Die Mittelung über diese Mikrokontinua weist Ähnlichkeiten mit den Homogenisierungsprozessen auf und führt auf eine Kontinuumstheorie mit erweiterter Kinematik und notwendigerweise mit erweiterter Konstitutivtheorie. Aufgrund der Komplexität findet die mikromorphe Theorie allerdings bisher keine Anwendungen. Wesentlich weiter verbreitet ist ein Sonderfall der mikromorphen Theorie: Betrachtet man den materiellen Punkt nicht als „Kontinuum im Kontinuum“, sondern als mikroskopischen Starrkörper, so gelangt man zur mikropolaren Theorie (Eringen, 1964; Eringen & Suhubi, 1964; Kafadar & Eringen, 1971; Eringen & Kafadar, 1976). Im Rahmen der mikropolaren Theorie besitzt der materielle Punkt die sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers, nämlich drei Translationen entlang der Koordinatenlinien und drei Rotationen um die Koordinatenachsen. Diesen Bewegungsmöglichkeiten sind entsprechende Kräfte zugeordnet: Mit den Translationen korrespondieren (Kraft-)Spannungen, mit den Rotationen Momentenspannungen (*couple stresses*). Damit wird deutlich, daß die mikropolare Theorie identisch mit der *Cosserat*-Theorie ist, die zu Beginn des Jahrhunderts von den Brüdern Cosserat (1909) eingeführt wurde. Die Drehung der materiellen Punkte wird dabei anhand eines an die materiellen Punkte angehefteten starren Vektordreibeins gemessen. Diese Vektoren, die sich nicht wie Tangentenvektoren an materielle Linien bewegen, heißen *Direktoren*. Eine weitere Bezeichnung, die man in

der Literatur für eine Kontinuumstheorie mit einer um rotatorische Freiheitsgrade erweiterten Kinematik findet, lautet daher *Direktor-Theorie*.

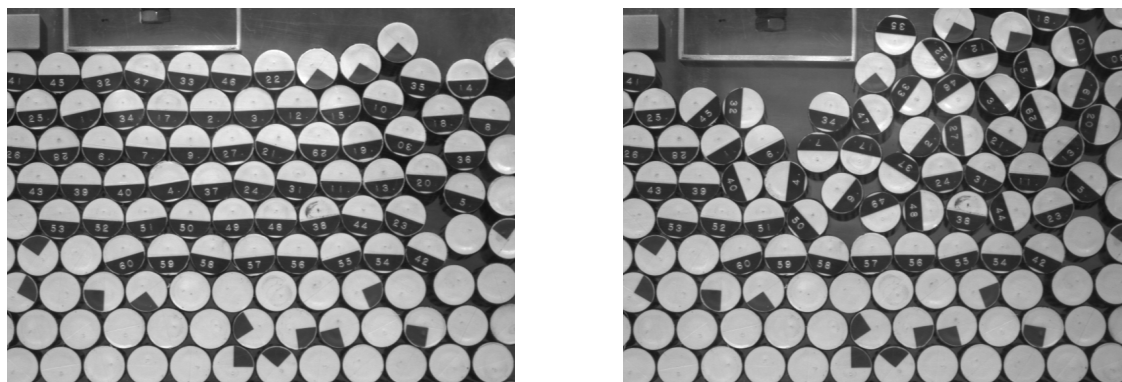


Abbildung 1.1: Schneebeli-Medium vor und nach der Belastung

Während es auf die Arbeit der Cosserat-Brüder (1909) lange keine Resonanz gab, ist die *Cosserat*-Theorie in den späten fünfziger Jahren wiederentdeckt und angewandt worden. Zu den Arbeiten, die diesen Gedanken der erweiterten Theorie aufgreifen, gehören die Arbeiten von Günther (1958), Eringen & Truesdell (1958) und Schaefer (1967). Die rotatorischen Freiheitsgrade können dabei in eleganter Weise genutzt werden, um die Verdrehung von Querschnittsflächen in Balken oder Platten zu beschreiben. Neben diesen Möglichkeiten zur Modellierung von Linien- und Flächen-tragwerken wurde die Theorie auch zur Beschreibung von Fluiden (Eringen, 1964) und von elastischen Festkörpern (Eringen & Suhubi, 1964; Suhubi & Eringen, 1964; Besdo, 1974) herangezogen. Weitere Anwendungen finden sich in der Beschreibung von Versetzungen (Schaefer, 1969), in der Behandlung von Blockstrukturen mittels einer Kontinuumstheorie (Besdo, 1985a, 1985b, 1991; Horn, 1994) und in der theoretischen Beschreibung des *Schneebeli*-Mediums. Dabei ist das Schneebeli-Medium als Modellmaterial aufzufassen (Rossi, 1983). Es besteht aus einer großen Anzahl von Walzen, die in Abhängigkeit der Reibungsverhältnisse aufeinander rollen und gleiten können. Anhand der Markierungen auf den Partikeln wird deutlich, daß es Bereiche gibt, in denen sich die Partikel sowohl translatorisch als auch rotatorisch bewegen. Abbildung 1.1 zeigt ein solches Medium vor und nach der Belastung durch die Absenkung des Stempels. Mittels der *Cosserat*-Theorie ist der Versuch unternommen worden, das Verhalten des Schneebeli-Mediums im Bereich plastischer Verformungen theoretisch zu erfassen und mit *Couette*-Scherexperimenten zu vergleichen (Bogdonova-Bontcheva & Lippmann, 1975; Becker & Lippmann, 1977; Becker & Hauger, 1982). Zastrau (1981) bemerkt zur Anwendung der mikropolaren Theorie: „Eine *Cosserat*- oder Direktortheorie ist hierbei also nichts anderes als ein mathematisches Hilfsmittel zur kontinuierlichen Beschreibung realer Diskontinua, um eine phänomenologische Beschreibung mit herkömmlichen Mitteln der Differential- und

Integralrechnung zu gestatten.“

Weitere Anwendungen findet die *Cosserat*-Theorie bei der Beschreibung von Reinstaluminium, bei dem sich Drehungen der Kristalle experimentell feststellen lassen (Diepolder, 1989), und bei der Modellierung von porösen Biomaterialien, wie etwa Knochen (Lakes, 1986, 1995). Lakes war in der Lage, den Maßstabseffekt, der an porösen Strukturen beobachtet werden kann, mit Hilfe einer mikropolaren Theorie zu erfassen und die zusätzlichen Parameter aus experimentell gewonnenen Daten zu ermitteln. Während die Standardformulierung eine Zunahme der Biegesteifigkeit eines Balkens mit der dritten Potenz der Balkenhöhe prognostiziert, stellte Lakes fest, daß dieser Zusammenhang bei sehr schlanken, porösen Balken nicht mehr zutrifft. Wesentlich ist dabei das Verhältnis von der Balkenhöhe zur Größe der Poren, die in den von Lakes untersuchten Biomaterialien vorhanden sind.

Neben diesen physikalisch motivierten Anwendungen wurde in den vergangenen Jahren die mikropolare Theorie auch zur *Regularisierung* von *Scherbandproblemen* herangezogen (de Borst, 1991; Steinmann & Willam, 1991; Dietsche *et al.*, 1993; Tejchman & Wu, 1993). Scherbänder treten bei Materialien mit Entfestigung auf und sind dadurch gekennzeichnet, daß sich Dehnungen in schmalen Bereichen ansammeln. Man spricht auch von *Lokalisierung*. Dieser Effekt kann zwar bereits mit einer Standardformulierung der Kontinuumsmechanik beschrieben werden, allerdings stellt man bei numerischen Untersuchungen dieses Problems im Rahmen der Methode der Finiten Elemente fest, daß die gewonnenen Ergebnisse stark von der Ausrichtung und Feinheit der Diskretisierung abhängen. Die numerische Behandlung des Lokalisierungsproblems ist im mathematischen Sinn ein schlecht gestelltes Problem. Eine *Cosserat*-Theorie behebt dieses Defizit und liefert netzunabhängige Lösungen.

Die Regularisierung des Scherbandproblems kann aber auch durch andere Erweiterungen der Standardformulierung erreicht werden. Gängige Ansätze sind die sogenannten *Integralkontinua* und die *Gradientenkontinua*. Im Gegensatz zur *Cosserat*-Theorie mit zusätzlichen Freiheitsgraden bleibt in beiden Fällen das Verschiebungsfeld die einzige Primärvariable, aber die konstitutiven Ansätze werden erweitert. Beim Integralkontinuum hängen die Materialgleichungen nicht nur von den Deformationsmaßen am betrachteten materiellen Punkt ab, sondern auch von den Werten an benachbarten Punkten in der Umgebung des betrachteten materiellen Punktes. Daher ergeben sich Integralgleichungen zur Ermittlung der Konstitutivgrößen, wie z. B. der Spannungen. Aus diesem Grund wird das Integralkontinuum auch als *nicht-lokales Kontinuum* bezeichnet. Entsprechende Formulierungen nicht-lokalen elastischen Verhaltens finden sich z. B. bei Kröner (1967), bei Eringen (1972) und bei Eringen & Edelen (1972). In neueren Arbeiten ist das Integralkontinuum auch zur Regularisierung von Scherbandproblemen genutzt worden (Pijaudier-Cabot *et al.*, 1988; Bazant & Pijaudier-Cabot, 1998). Das Gradientenkontinuum ist im strengen Sinn ein lokales Kontinuum. Es kann allerdings durch Reihenentwicklung aus dem

Integralkontinuum abgeleitet werden (Mühlhaus & Aifantis, 1991). Hier werden die Deformationsmaße, die in der Standardformulierung aus dem (ersten) Deformationsgradienten hergeleitet werden, um höhere Gradienten erweitert (Coleman & Hodgdon, 1985; Aifantis, 1984, 1987). Damit kann das Gradientenkontinuum ebenfalls die räumliche Verteilung der Deformation besser erfassen als die Standardformulierung. Beide Ansätze, sowohl das Integral- als auch das Gradientenkontinuum, stellen also Erweiterungen der Standardformulierung auf der Seite der Konstitutivtheorie dar und benötigen in Zuordnung zu den höheren Deformationsmaßen auch höhere Spannungstensoren (*hyper stresses*), die den Momentenspannungen der *Cosserat*-Theorie vergleichbar sind. Die Gemeinsamkeit mit der mikropolaren Theorie und die Ursache für die Regularisierung sind darin zu sehen, daß die angesprochenen Erweiterungen der Standardformulierung über eine zweite Längenskala verfügen, die sog. *interne Länge*. Sie legt im wesentlichen die Dicke der berechneten Scherbänder fest; z. B. entwickelt Volk (1999) einen exponentiellen Zusammenhang zwischen der Scherbanddicke in einem mikropolaren Plastizitätsmodell und der internen Länge. Ein Überblick über erweiterte Kontinuumsmodelle findet sich in dem Buch von Mühlhaus (1995). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird allerdings nur noch das Konzept der mikropolaren Theorie weiterverfolgt.

Die bisher beschriebenen Ansätze der erweiterten Kontinuumstheorie gehen von einphasigen Materialien aus: Es werden nur Festkörper oder Fluide beschrieben. In der Praxis treten allerdings häufig Probleme auf, bei denen Mischungen behandelt werden müssen. Typische Anwendungen finden sich in der Geotechnik, in der Petroindustrie, in der Biomechanik und bei der Beschreibung fluidgefüllter künstlicher oder natürlicher Schäume. In diesen Anwendungen ist ein Festkörperskelett mit einem oder mit mehreren Porenfluiden gefüllt. Das Verhalten sowohl der festen als auch der fluiden Phase beeinflußt dabei das makroskopische Verhalten eines solchen Mischungskörpers. Zwar gestattet die Kontinuumsmechanik die Beschreibung von Festkörpern und von Fluiden jeweils auf den Teilgebieten, auf denen die einzelnen Stoffe vorliegen, aber in diesem Fall kann die Kopplung zwischen den beteiligten Konstituierenden nur über die Berandung der Poren erzielt werden. Die Kopplung besteht also in der Formulierung eines geeigneten Randwertproblems. Das führt in zweierlei Hinsicht zu Schwierigkeiten bei der Handhabung: Zum einen ist die *Mikroskala*, die man zur Beschreibung der Porenstruktur benötigt, wesentlich kleiner als die *Makroskala*, auf der die Probleme formuliert werden, die in den praktischen Anwendungen von Interesse sind. Zum anderen ist bei natürlichen Stoffen die tatsächliche Porengeometrie nicht bekannt, so daß das entsprechende Randwertproblem nicht korrekt formuliert werden kann.

Die Mechanik bietet grundsätzlich zwei alternative Zugänge zur Lösung dieser Probleme an:

1. Die erste Möglichkeit besteht in der Durchschnittsbildungstheorie. Dabei wer-

den die heterogenen Eigenschaften gemittelt, die man auf der Mikroskala findet, z. B. in Bereichen mehrerer Korndurchmesser oder Poren. Das Ergebnis einer solchen Theorie sind Gleichungen, mit denen das makroskopische Verhalten durch Mittelwerte von mikroskopischen Größen beschrieben wird. Das kleinste betrachtete Element, über das die Mikrostruktur sinnvoll gemittelt werden kann, ist das repräsentative Elementarvolumen (*REV*) (Bear, 1972; Bear & Bachmat, 1991). Abbildung 1.2 zeigt die Mikrostruktur einiger unterschiedlicher Materialien und das zugehörige *REV*. Ein entsprechender Mittelungsansatz wird von Hassanizadeh & Gray (1979a, 1979b), von de Boer *et al.* (1991) und von Plischka (1992) vorgestellt. Grundsätzlich ist der Zugang mittels Durchschnittsbildungstheorie vergleichbar mit der Homogenisierungstheorie, die bereits oben angesprochen wurde. Allerdings sind die in der Durchschnittsbildungstheorie angestellten Überlegungen in der Regel von allgemeinerem Charakter, weil erstens grundsätzlich keine Aussagen über geometrische Formen des Porenraums, wie z. B. Periodizität, getroffen und zweitens sowohl die Mehrphasigkeit als auch die Relativbewegung zwischen den Konstituierenden in Betracht gezogen werden.

2. Die zweite Möglichkeit besteht in einer Erweiterung der Ideen, die der phänomenologischen Kontinuumsmechanik zugrunde liegen. Einen solchen Ansatz stellt die Mischungstheorie dar, deren moderne Fassung auf Truesdell (1957) zurückgeht und ausführlich von Truesdell & Toupin (1960), Müller (1968) oder Bowen (1976) diskutiert wird. Hier geht man davon aus, daß in „irgendeiner Form“ ein Mittelungsprozeß ausgeführt wurde, ohne sich Gedanken über die tatsächliche Ausführung der Mittelung der Mikrostruktur zu machen. Wesentlich ist dabei, daß die einzelnen Konstituierenden jetzt über das gesamte Kontrollvolumen „verschmiert“ werden. Man spricht von *superponierten Kontinua*: An jedem Raumpunkt der aktuellen Konfiguration liegen materielle Punkte aller Konstituierenden vor. Für alle beteiligten Konstituierenden werden eigene Bewegungsfunktionen und Bilanzgleichungen postuliert. Die Wechselwirkung zwischen den unterschiedlichen Konstituierenden wird in den Bilanzen als zusätzlicher Produktionsterm berücksichtigt, der in makroskopischen Größen formuliert werden kann. Das „verschmierte“ Modell kommt somit ohne detaillierte Kenntnis der Mikrostruktur aus.

Abbildung 1.2 zeigt neben der Mikrostruktur verschiedener Materialien das gemittelte Makromodell mit dem *REV*: Das makroskopische Verhalten einer Mischung wird dann anhand von Experimenten auf der Makroskala bestimmt, ohne dabei detailliert auf die Mikrostruktur einzugehen. Die zugehörige Konstitutivtheorie muß allerdings so erweitert werden, daß damit auch die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilen der Mischung erfaßt und beschrieben werden können. Die Basis

zur Formulierung einer makroskopischen Theorie für Mischungen bilden Truesdells (1984) *metaphysische Prinzipie*, die auf Seite 49 angegeben sind und zur Herleitung der Bilanzgleichungen herangezogen werden.

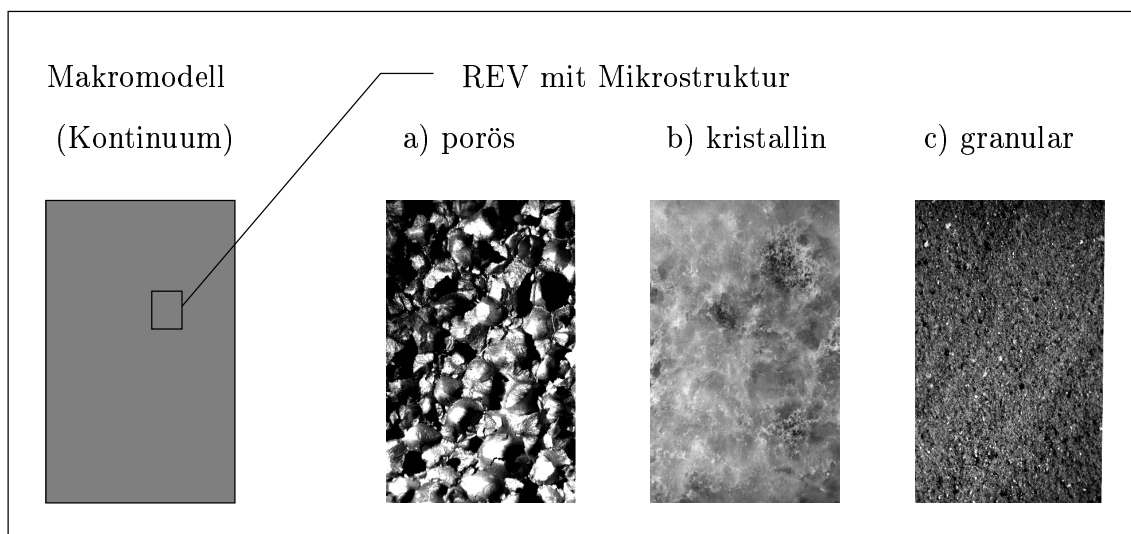


Abbildung 1.2: Makromodell mit unterschiedlichen mikroskopischen Strukturen

Die von Truesdell (1957), Truesdell & Toupin (1960) und Bowen (1976) formulierte Mehrphasentheorie kann zur Modellierung von Mischungen herangezogen werden. Sie beschreibt die lokale Zusammensetzung nur über die Partialdichten und benötigt keine zusätzlichen Variablen. In dieser Form ist sie vor allem zur Beschreibung von Mischungen aus fluiden Konstituierenden geeignet. Die in der Abbildung 1.2 gezeigten Materialien bestehen jedoch aus einem porösen Skelett, das mit einem oder mehreren Porenfluiden gefüllt sein kann. Die Volumenanteile stellen dabei als strukturbeschreibende Parameter maßgebliche Größen dar. Sie geben an, welcher Anteil des Mischungsvolumens von welcher der Konstituierenden eingenommen wird. Führt man in der Mischungstheorie das Konzept der Volumenanteile ein, so gelangt man zur *Theorie Poröser Medien (TPM)*. Die theoretische Formulierung der *TPM* geht auf die Arbeiten von Bowen (1980, 1982) zurück. Er führt die Volumenanteile als innere Variablen zur Beschreibung der lokalen Zusammensetzung von Mischungen ein. Einen detaillierten historischen Überblick über die Entstehung der *TPM* geben Ehlers (1989b) und de Boer (1995, 1998). Die Ursprünge der Theorie sind bei Fillunger (1913) zu finden. Bowen hat allerdings die *TPM* formuliert, ohne die Arbeiten Fillungers zu kennen. Die Arbeiten von de Boer & Ehlers (1986) und von Ehlers (1989a, 1989b) sind in konsequenter Fortsetzung der Arbeiten Bowens zu sehen.

Im Rahmen der *TPM* konnte bisher das Verhalten gesättigter poröser Festkörperskelette mit linearem und nicht-linearem elastischen Verhalten, mit elastisch-plastischen sowie mit viskosen Eigenschaften erfolgreich beschrieben werden. Außer dem quasi-statischen Verhalten, das z. B. im Konsolidationsvorgang beobachtet wird, wur-

de mit Hilfe der *TPM* auch das Verhalten poröser Materialien unter dynamischen Lasten untersucht (de Boer *et al.*, 1993; Diebels & Ehlers, 1995, 1996a; Ehlers & Diebels, 1995; Liu, 1995; Breuer, 1997, 1998, 1999). Dabei kam das Modell mit inkompressiblen Konstituierenden¹ (Bowen, 1980; Ehlers, 1993a, 1993b) zum Einsatz, in dem alle Konstituierenden eine konstante effektive Dichte besitzen. Volumendehnungen sind in diesem Modell nur durch Porositätsänderungen möglich. Die Formulierung der *TPM* für mikroskopisch kompressible Konstituierende wurde in den letzten Jahren ebenfalls untersucht. In diesen Bereich fallen die Arbeiten von Bowen (1982), von Ehlers (1993a, 1993b), von Bluhm (1995, 1997, 1997a), von Svendsen & Hutter (1995) und von Diebels (1998a, 1998b, 1999).

Zur Beschreibung poröser Körper hat sich als Alternative zur *TPM* und in Fortführung der Arbeiten Terzaghis (1923) die *Biotsche Theorie* etabliert. Diese von einigen *Ad-hoc*-Annahmen geprägte Theorie wurde von Biot (1941, 1953, 1955) entwickelt und ist in den Anwendungen weit verbreitet (z. B. Zienkiewicz, 1984; Zienkiewicz *et al.*, 1990a, 1990b). Eine Abgrenzung der *TPM* gegenüber der *Biotschen Theorie* wurde von Ehlers & Kubik (1994) vorgenommen. Wesentlich ist, daß im linearen Grenzfall kleiner Deformationen und bei Vernachlässigung der künstlichen Massenkopplungen in der *Biotschen Theorie* die beiden Ansätze übereinstimmen und daher in vielen Fällen zu vergleichbaren Resultaten führen.

Eine dritte Möglichkeit zur Modellierung poröser Festkörperskelette ist durch die „*void theory*“ gegeben, die von Goodman & Cowin (1972), Nunziato & Cowin (1979), Cowin & Nunziato (1983) und Passman *et al.* (1984) vertreten wird. Im Gegensatz zur *TPM* wird in der „*void theory*“ anstelle einer Evolutionsgleichung zur Bestimmung der Volumenanteile in einem kompressiblen Modell die „*balance of equilibrated forces*“ als zusätzliche Gleichung eingeführt. Genau wie auch Teile der *Biotschen Theorie*, entspricht diese Gleichung einer *Ad-hoc*-Annahme.

Wegen der klaren Struktur und wegen der wenigen axiomatischen Annahmen zu ihrer Herleitung wird im weiteren der *TPM* zur Beschreibung von Mehrphasensystemen der Vorzug eingeräumt.

Kombiniert man die Ansätze der *Cosserat*-Theorie mit der *TPM*, so gelangt man zur *Mikropolaren Theorie Poröser Medien (MTPM)*. Eine solche Theorie gestattet in Kombination mit den entsprechenden Stoffmodellen die Bearbeitung von Fragestellungen aus dem Bereich der Geotechnik, bei denen es zu Scherbandbildung kommt. Dazu zählen z. B. der Grund- und der Böschungsbruch, vgl. Terzaghi &

¹Vereinfachend wird das Modell mit inkompressiblen Konstituierenden als das *inkompressible Modell* bezeichnet, entsprechend wird ein Modell, in dem alle Konstituierenden kompressibel sind, als *kompressibles Modell* bezeichnet. Sind die beteiligten Konstituierenden zum Teil kompressibel, zum Teil inkompressibel, bezeichnet man das Modell als *hybrid*.

Jelinek (1954), die mit der *MTPM* erfolgversprechend reproduziert werden können (Ehlers & Volk, 1997, 1998; Ehlers *et al.*, 1998; Diebels *et al.*, 1998a; Volk, 1999). Genau wie auch bei nichtporösen Materialien stellt man fest, daß die Scherbandbildung zu einem schlecht gestellten Problem führt, dessen Lösungen eine starke Netzabhängigkeit aufweisen. Eine Regularisierung kann zwar innerhalb der *TPM* durch die Berücksichtigung eines viskosen Porenfluids bewirkt werden, allerdings ist die *Cosserat*-Theorie zur Regularisierung wesentlich effektiver (Ehlers & Volk, 1998; Diebels *et al.*, 1998a). Als Beispiel für diese Problemklasse zeigt Abbildung 1.3 die Entstehung von Scherbändern bei einem Böschungsbruch, der durch Aushubarbeiten verursacht wird. Zur Modellierung dieses Problems reicht es allerdings aus, das Festkörperskelett mit mikropolaren Eigenschaften zu versehen, um zu netzunabhängigen Lösungen zu gelangen.



Abbildung 1.3: Lokalisierung in Scherbändern

Eine andere Anwendungsmöglichkeit der *MTPM* kann z. B. in der Beschreibung der Durchströmung von Gewebe mit Blut bestehen, also einer Anwendung im Bereich der Biomechanik. Blut ist eine Suspension: In dem flüssigen Blutplasma werden Partikel mitgeführt, wie etwa die Blutplättchen und die weißen und roten Blutkörperchen, die während der Bewegung rotieren können. Aufgrund dieses Aufbaus kann Blut als mikropolares Fluid betrachtet werden. In einer solchen Anwendung stehen dann die mikropolaren Eigenschaften der fluiden Phase im Vordergrund. Andere mikropolare Fluide sind Polymerlösungen, die aus langkettigen Molekülen bestehen, oder Flüssigkristalle, die eine innere Orientierung besitzen. In dem Fall, daß auch elektro-magnetische Kräfte berücksichtigt werden, kann auch Wasser als mikropolares Fluid aufgefaßt werden.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, im Rahmen der *Rationalen Mechanik* ei-

ne Theorie zu formulieren, die die Mikrostruktur einer Mischung sowohl durch die zusätzlichen Freiheitsgrade einer mikropolaren Theorie als auch durch die Beachtung der Mehrphasigkeit erfaßt. Während die materialunabhängigen Gleichungen der Kinematik und die Bilanzgleichungen für eine beliebige Anzahl von Konstituierenden angegeben werden, werden die Materialgleichungen für eine gesättigte, binäre Mischung formuliert. Beide Konstituierende des gesättigten Zweiphasenmodells werden zunächst als mikropolar eingeführt. Neben der Formulierung der Kinematik mikropolarer Mischungen und der zugehörigen Bilanzgleichungen (Diebels & Ehlers, 1996b) ist ein wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit der Entwicklung der entsprechenden Konstitutivtheorie gewidmet (Diebels, 1998a, 1998b, 1999). Um dabei die wesentlichen Strukturen herausarbeiten zu können, wird hier nur der einfachste Fall betrachtet, nämlich ein elastisches Festkörperskelett, das mit einem viskosen Porenfluid gesättigt ist. Neben den allgemeinen Betrachtungen, die eine thermodynamisch verträgliche Struktur der Konstitutivgleichungen liefern, wird ein spezielles Modell mit einem mikropolaren Festkörperskelett und einem nicht-polaren Porenfluid entwickelt. Dieses Modell wird mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode numerisch umgesetzt und auf einige einfache Anfangsrandwertprobleme angewandt.

Damit ergibt sich die folgende Gliederung der vorliegenden Arbeit: In Kapitel 2 wird das Konzept der superponierten Kontinua und der Volumenanteile eingeführt. Aus der Bewegung, die die Translation der materiellen Punkte beschreibt, und der Mikrobewegung, die die Rotation der materiellen Punkte erfaßt, werden dann die Deformations- und Verzerrungstensoren hergeleitet. Dazu werden Linienelemente und Direktoren in der aktuellen Konfiguration und in der Referenzkonfiguration verglichen. Zusätzlich werden im Rahmen der erweiterten Kinematik die Krümmungstensoren und die Deformationsgeschwindigkeitstensoren eingeführt. Eine anschauliche Interpretation der Kinematik mikropolarer Körper kann in der Darstellung der Deformationstensoren in einer konvektiven Basis angegeben werden.

Im Anschluß daran werden in Kapitel 3 die Bilanzgleichungen für mikropolare Konstituierende diskutiert. Die in der klassischen Kontinuumsmechanik bekannten Bilanzen für Masse, Impuls, Drall und Energie folgen dabei aus den entsprechenden Axiomen der Massen-, Impuls-, Drall- und Energieerhaltung. Aus *Truesdells metaphysischen Prinzipien* (Truesdell, 1984) folgt, daß bei der Formulierung der Bilanzgleichungen für die einzelnen Konstituierenden Wechselwirkungen zu berücksichtigen sind, die einen möglichen Austausch der jeweiligen physikalischen Größe zwischen den Konstituierenden beschreiben. Darüber hinaus wird die von Eringen (1964) eingeführte „Bilanz der Mikroträgheit“ als kinematische Beziehung interpretiert, die die Starrheit der materiellen Punkte auf der Mikroebene wiedergibt. Es zeigt sich, daß diese kinematische Aussage die Struktur einer Bilanz aufweist, was den von Eringen eingeführten Begriff „Bilanz der Mikroträgheit“ erklärt. Als Hilfsmittel wird zur Behandlung der einzelnen Bilanzgleichungen eine allgemeine Bilanz

angegeben. An ihr werden die Strukturen erarbeitet, die alle Bilanzen aufweisen, so daß die konkreten Bilanzen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie durch einfache Identifikation der beteiligten Größen aus der allgemeinen Bilanz folgen. Schließlich werden gemäß *Truesdells* metaphysischen Prinzipien durch Summation der Partialbilanzen der einzelnen Konstituierenden die Bilanzen der Mischung als Ganzes hergeleitet. Aus dem Vergleich dieser Ergebnisse mit den Bilanzen eines Einphasenkontinuums lassen sich Zusammenhänge zwischen den Partialgrößen und den entsprechenden Größen der Mischung sowie zwischen den Wechselwirkungsgrößen der einzelnen Konstituierenden ableiten. Damit wird gewährleistet, daß die Mischung als Ganzes über die notwendigen Erhaltungseigenschaften verfügt.

Um Aussagen über die Struktur der Konstitutivgleichungen zu erhalten, wird in Kapitel 4 der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für eine binäre, mikropolare Mischung formuliert und ausgewertet. An dieser Stelle gehen zum ersten Mal konkrete Materialannahmen ein: Zur Festlegung des Variablensatzes werden für das Festkörper skelett elastisches und für das Porenfluid viskoses Verhalten angenommen. Die Deformationen werden in ihrer Größe nicht eingeschränkt, so daß die Resultate auch bei endlichen Verformungen Gültigkeit besitzen.

Da die Volumenanteile als interne Variablen eingeführt werden, liegen zu ihrer Bestimmung keine Bilanzgleichungen vor. Die notwendigen Evolutionsgleichungen haben daher konstitutiven Charakter. Bei der Auswertung des Entropieprinzips ergeben sich somit auch Einschränkungen für die Evolutionsgleichungen der Volumenanteile.

Während in den Modellen mit mikroskopisch inkompressiblen Konstituierenden nach Svendsen & Hutter (1995) die Sättigungsbedingung eine Zwangsbedingung darstellt, die die Einführung eines *Lagrangeschen* Multiplikators in den Materialgleichungen unumgänglich macht, fehlen in den Modellen mit kompressiblen Konstituierenden Gleichungen für die Entwicklung der Volumenanteile. In den inkompressiblen Modellen, die z. B. von Bowen (1980), de Boer & Ehlers (1986) und Ehlers (1989b) behandelt werden, entarten die Massenbilanzen zu Volumenbilanzen, die direkt die Entwicklung der Volumenanteile vorschreiben. Der *Lagrange*-Parameter in einem solchen Modell kann als Porenfluiddruck identifiziert werden. Er stellt eine Zwangskraft dar und garantiert die Einhaltung der Sättigungsbedingung. Falls nur das Porenfluid kompressibel ist, ergibt sich der Porendruck aus der Zustandsgleichung für das Fluid; er ist dann z. B. als Funktion der effektiven Fluidichte und der Temperatur gegeben. In diesem Fall ist das Problem unter Einbeziehung der Sättigungsbedingung und der Volumenbilanz des inkompressiblen Festkörpers ohne weitere Annahmen lösbar. Da für kompressible Konstituierenden die Massenbilanzen nicht zu Volumenbilanzen degenerieren, müssen in dem Fall, daß beide Konstituierenden kompressibel sind, Evolutionsgleichungen für die Volumenanteile im Rahmen der Konstitutivtheorie vorgeschrieben werden (Bowen, 1982, Ehlers, 1993a, 1993b,

Svendsen & Hutter, 1995, Diebels, 1998a, 1999). Gibt man zwei unabhängige Evolutionsgleichungen vor, so ist wie im inkompressiblen Modell die Einführung eines *Lagrange*-Parameters notwendig, der als Sättigungsdruck bezeichnet wird. Zieht man jedoch die Sättigungsbedingung mit in Betracht, so benötigt man nur eine konstitutiv vorgegebene Evolutionsgleichung, um das System zu schließen. Dieser Weg wird hier beschrieben. Die verwendete Form der Evolutionsgleichung wird aus der Massenbilanz motiviert, die für inkompressible Konstituierenden in den Sonderfall der Volumenbilanz übergeht. Allgemeine Ansätze für die Evolutionsgleichungen werden von Svendsen & Hutter (1995) behandelt. Anstelle einer Evolutionsgleichung für die Volumenanteile kann auch die „balance of equilibrated forces“ benutzt werden, die in der Theorie nach Godman & Cowin (1972) und Nunziato & Cowin (1979) postuliert wird.

Das Entropieprinzip wird hier unter Berücksichtigung einer vorgegebenen Form der Entwicklungsgleichung für die Volumenanteile für ein gesättigtes Zweiphasenmodell nach dem Formalismus von Coleman & Noll (1963) ausgewertet. Die Einbeziehung plastischen Materialverhaltens in diese Überlegungen ist grundsätzlich möglich, aber bereits im Fall nicht-polarer Materialien mit einem erheblichen Aufwand verbunden. Details zur Modellierung plastischen Materialverhaltens gesättigter Zweiphasenmaterialien finden sich bei Ehlers (1989a, 1989b, 1991, 1993a, 1993b). Um im Rahmen dieser Arbeit zunächst das Zusammenspiel der *TPM* mit der *Cosserat*-Theorie herauszuarbeiten, wird auf die Betrachtung plastischen Materialverhaltens verzichtet. Aus diesem Grund wird auch auf die komplexe Art der Auswertung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik nach Liu (1972) und Liu & Müller (1984) verzichtet.

In Kapitel 5 werden die allgemeinen Resultate aus dem Entropieprinzip spezialisiert. Dazu werden die vier Modelltypen untersucht, die sich ergeben, wenn man in einem Zweiphasen-Modell kompressibles und inkompressibles Materialverhalten der Konstituierenden voraussetzt und miteinander kombiniert. Mit Hilfe der von Ehlers (1989a) vorgeschlagenen konstitutiven Trennung der Phasen werden die allgemeinen Ergebnisse vereinfacht.

Die so vereinfachten Modelle dienen in Kapitel 6 zur Formulierung konkreter Materialgleichungen. Für ein elastisches, mikropolares Festkörperskelett werden in Anlehnung an das für kompressible Körper erweiterte *Neo-Hooke*-Gesetz eine freie Energiefunktion und eine finite Spannungs-Dehnungsbeziehung angegeben, die in das erweiterte *Neo-Hooke*-Gesetz der Standardformulierung übergeht, wenn die Mikrobewegung und die Kontinuumsrotation aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten übereinstimmen. Allerdings werden im Fall eines mikroskopisch kompressiblen Festkörperskeletts zwei unterschiedliche Arten von Volumendehnungen beobachtet, nämlich zum einen solche, die mit makroskopischen Deformationen in Verbindung stehen, und zum anderen solche, die lediglich zu einer Porositätsände-

rung führen. Weiterhin folgen aus der postulierten freien Energiefunktion die Momentenspannungen durch Differentiation nach den Krümmungstensoren.

Durch eine Kopplung von Krümmung und Volumendehnung wird erreicht, daß bei gegebener Krümmung die Momentenspannungen mit zunehmender Kompression wachsen. Dieser Sachverhalt entspricht der physikalischen Anschauung, nach der für die Momentenspannungen Reibeffekte auf der Mikroebene zwischen den einzelnen Körnern maßgeblich sind. Der Ansatz ist dann in Analogie zur *Coulombschen* Reibung zu sehen.

Für das Porenfluid werden isotherme Zustandsgleichungen angegeben, die einen Zusammenhang zwischen der realen Dichte und dem Druck herstellen. Ferner wird diskutiert, unter welchen Umständen die Extraspannung im Fluid gegenüber der Wechselwirkungskraft zwischen dem Fluid und dem Festkörper vernachlässigbar ist.

Das Kapitel 7 beschäftigt sich mit der numerischen Umsetzung des Modells im Rahmen der Methode der finiten Elemente. Dazu werden die beherrschenden Bilanzgleichungen in eine schwache Formulierung überführt und die Feldgrößen durch Ansatzfunktionen approximiert. Mit einem geeigneten Integrationsverfahren kann das aus der Ortsdiskretisierung resultierende System von differential-algebraischen Gleichungen in der Zeit integriert werden. Einige Beispiele zeigen das Verhalten des Modells in unterschiedlichen Belastungssituationen und untermauern seine Plausibilität. Weiterhin ergeben sich Ansätze zur Identifikation der in dem Modell enthaltenen Materialparameter.

Eine Zusammenfassung und Schlußbemerkungen in Kapitel 8 runden die Arbeit ab.

Kapitel 2:

Kinematik

2.1 Das Konzept der Volumenanteile

Mischungen aus N unterschiedlichen, nicht mischbaren Stoffen können mit Hilfe der Mischungstheorie beschrieben werden (Truesdell & Toupin, 1960; Truesdell, 1984; Müller, 1968; Bowen, 1976). Innerhalb der makroskopischen Sichtweise der Mischungstheorie werden die einzelnen Konstituierenden¹ nicht auf den Teilgebieten des Mischungskörpers beschrieben, auf denen sie mikroskopisch vorliegen, sondern es wird angenommen, daß Partikel aller Konstituierenden gleichzeitig an allen Raumpunkten existieren, die von der Mischung eingenommen werden. Diese makroskopische Modellierung setzt entweder einen tatsächlichen oder zumindest einen gedachten Homogenisierungs- oder Mittelwertbildungsprozeß voraus, der die vorliegende Mikrostruktur des Mischungskörpers in das makroskopische Modell überführt (Hassanizadeh & Gray, 1979a, 1979b; de Boer *et al.*, 1991; Plischka, 1992). Da nach einer Homogenisierung die einzelnen Phasen nicht mehr getrennt nebeneinander vorliegen, sondern gemeinsam das gesamte Mischungsvolumen einnehmen, spricht man auch von superponierten Kontinua. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.1 für eine binäre Mischung veranschaulicht. Das repräsentative Elementarvolumen (*REV*) stellt dabei den kleinsten Bereich dar, der innerhalb der makroskopischen Theorie erfaßt werden kann (Baer, 1984).

Ergänzt man die Mischungstheorie um das Konzept der Volumenanteile, so entsteht die Theorie Poröser Medien (*TPM*) (Bowen, 1980, 1982; de Boer & Ehlers, 1986; Ehlers, 1989b). Die Volumenanteile sind dabei als innere Variablen zu verstehen, die herangezogen werden, um in der makroskopischen Theorie die lokale Zusammensetzung der Mischung zu beschreiben. Dies ist insbesondere dann notwendig, wenn ein poröses Festkörperskelett modelliert werden soll, das mit einem oder mehreren Porenfluiden gesättigt ist. Die Mischungstheorie kommt ohne das Konzept der Volumenanteile aus, da sie primär zur Beschreibung fluider Mischungen herangezogen wird, die keine innere Struktur aufweisen.

Das Volumen V , das von einer Mischung φ mit N Konstituierenden φ^α ($\alpha = 1, \dots, N$) beansprucht wird, setzt sich aus der Summe der Partialvolumina V^α zu-

¹Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden für die einzelnen Stoffe, aus denen eine Mischung zusammengesetzt ist, die Begriffe Phase, Komponente und Konstituierende synonym verwandt.

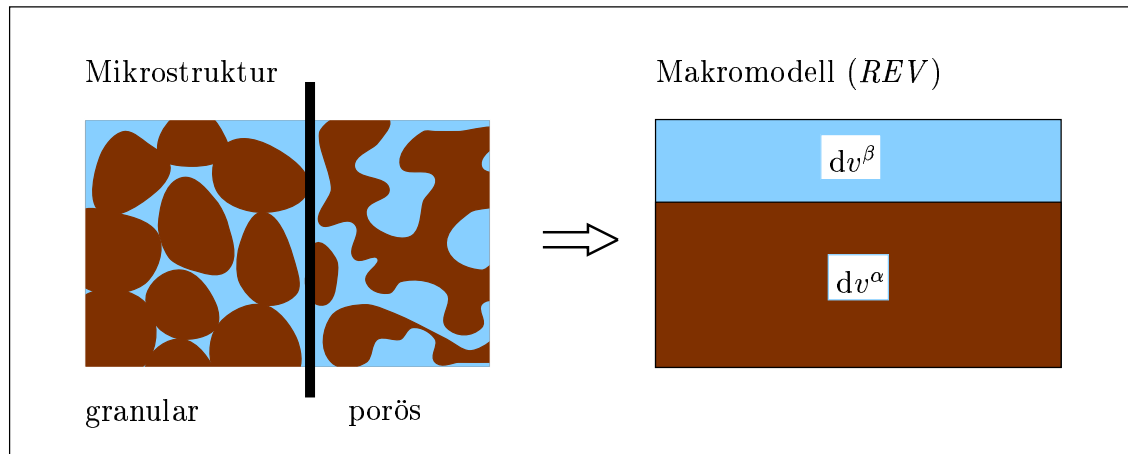


Abbildung 2.1: Mikrostruktur und repräsentatives Elementarvolumen

sammen, die jeweils von den einzelnen Konstituierenden φ^α eingenommen werden. Dabei ergibt sich das Volumen V aus der Integration über die Volumenelemente dv des Mischungskörpers \mathcal{B} ; die Partialvolumina V^α der einzelnen Komponenten φ^α ergeben sich aus der Integration über die Volumenelemente dv der Partialkörper \mathcal{B}_α :

$$V = \int_{\mathcal{B}} dv = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathcal{B}_\alpha} dv =: \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathcal{B}} dv^\alpha. \quad (2.1)$$

Der Einfachheit halber werden im weiteren an den Summenzeichen die Summationsgrenzen nicht angegeben, sofern die Summation über alle N Konstituierenden φ^α der Mischung φ durchzuführen ist.

Die Volumenanteile n^α werden als lokales Verhältnis der Partialvolumina dv^α zum Mischungsvolumen dv eingeführt:

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv}. \quad (2.2)$$

Sie geben an, welcher Anteil eines Volumenelementes der Mischung von der Konstituierenden φ^α eingenommen wird. Für die weiteren Überlegungen wird davon ausgegangen, daß die Mischung gesättigt ist. Das bedeutet, daß alle Raumpunkte des Mischungskörpers \mathcal{B} mit Materie belegt sind, so daß es keine Leerstellen gibt. In diesem Zusammenhang hat der Begriff „gesättigt“ eine andere Bedeutung als in vielen Anwendungen aus den Bereichen der Geotechnik oder der Grundwasserhydraulik. Dort wird der Begriff der Sättigung auf das Porenwasser bezogen: Der gesättigte Porenraum beinhaltet nur Porenwasser, während ein teilgesättigter oder ungesättigter Bereich außer Porenwasser auch ein Porengas, z. B. Luft oder Wasserdampf, enthält. Aus der Gleichung (2.1) folgt zusammen mit der Definition der Volumenanteile (2.2)

die Sättigungsbedingung:

$$\sum_{\alpha} n^{\alpha} = 1. \quad (2.3)$$

Mit Hilfe der Volumenanteile n^{α} können weiterhin zwei unterschiedliche Dichten definiert werden. Die reale oder effektive Dichte $\rho^{\alpha R}$ bezieht ein Massenelement dm^{α} der Phase φ^{α} auf das tatsächlich von φ^{α} belegte Volumenelement dv^{α} :

$$\rho^{\alpha R} = \frac{dm^{\alpha}}{dv^{\alpha}}. \quad (2.4)$$

Im Gegensatz dazu bezieht die Partialdichte das gleiche Massenelement dm^{α} auf das von der gesamten Mischung belegte Volumenelement dv :

$$\rho^{\alpha} = \frac{dm^{\alpha}}{dv}. \quad (2.5)$$

Mit der Definition der Volumenanteile (2.2) ergibt sich zwischen den beiden Dichtefunktionen der Zusammenhang:

$$\rho^{\alpha} = n^{\alpha} \rho^{\alpha R}. \quad (2.6)$$

Für eine inkompressible Konstituierende wird die effektive Dichte als konstant angenommen:

$$\rho^{\alpha R} = \text{konst.} \quad (2.7)$$

Der Begriff der Inkompressibilität wird dabei in einem mikroskopischen Sinn verstanden. Aus dem Zusammenhang (2.6) folgt jedoch, daß auch in diesem Fall die Partialdichte ρ^{α} veränderlich ist, da der Volumenanteil n^{α} variieren kann.

2.2 Bewegung

Im Rahmen der *TPM* folgt jede Konstituierende φ^{α} innerhalb der Mischung ihrer eigenen Bewegung:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t). \quad (2.8)$$

Dabei ordnet die vektorwertige Bewegungsfunktion $\boldsymbol{\chi}_{\alpha}$ zur Zeit t jedem materiellen Punkt X^{α} der Konstituierenden φ^{α} eine aktuelle Position \mathbf{x} zu. Der materielle Punkt X^{α} wird dazu mit Hilfe seines Ortsvektors \mathbf{X}_{α} in der Referenzkonfiguration

identifiziert. Zur Referenz- oder Anfangszeit t_0 befindet sich der Punkt X^α somit an der Position \mathbf{X}_α :

$$\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t_0). \quad (2.9)$$

Nach dem Konzept der superponierten Kontinua wird der Raumpunkt \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration gleichzeitig von materiellen Punkten aller Konstituierenden belegt. Da die materiellen Punkte der einzelnen Konstituierenden ihren eigenen Bewegungsfunktionen $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ folgen, stammen sie in der Regel aus unterschiedlichen Anfangspositionen. Abbildung 2.2 veranschaulicht diesen Sachverhalt für eine Zweikomponentenmischung. Die materiellen Punkte der beiden Phasen φ^α und φ^β beginnen ihre Bewegung an unterschiedlichen Positionen \mathbf{X}^α und \mathbf{X}^β in der Referenzkonfiguration und besetzen zur Zeit t gemeinsam den Raumpunkt \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration.

Unter dem Begriff des materiellen Punktes ist im kontinuumsmechanischen Kontext die kleinste betrachtete Einheit zu verstehen, die als Träger der physikalischen Eigenschaften anzusehen ist. Insbesondere mit der Einführung der Mikrobewegung im nächsten Abschnitt wird klar, daß materielle Punkte im Rahmen einer makroskopischen Kontinuumstheorie zwar durch mathematische Punkte im *Euklidischen* Anschauungsraum repräsentiert werden, daß sie aber bei einer mikroskopischen Betrachtung durchaus über eine Ausdehnung verfügen.

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Konstituierenden φ^α ergeben sich durch Differentiation der Bewegung (2.9) nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t}, \\ \ddot{\mathbf{x}}_\alpha &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

In den Gleichungen (2.10) sind die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ und die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}_\alpha$ in Abhängigkeit von den Ortsvektoren \mathbf{X}_α der Referenzkonfiguration und der Zeit t dargestellt. Man spricht in diesem Fall von der *Lagrangeschen* Darstellung oder von der materiellen Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes und des Beschleunigungsfeldes (Becker & Bürger, 1975; Haupt, 1993), da über den Ortsvektor \mathbf{X}_α der Referenzkonfiguration der direkte Bezug zum materiellen Punkt X^α hergestellt wird.

Die *Eulersche* oder räumliche Darstellung der beiden Felder ergibt sich unter der Annahme, daß die Bewegungsfunktion (2.9) zu jedem festen Zeitpunkt t ein-eindeutig ist. In diesem Fall kann die Bewegungsfunktion eindeutig invertiert werden. Physikalisch bedeutet die Ein-Eindeutigkeit, daß an einem Raumpunkt \mathbf{x} nur genau ein materieller Punkt X^α der Konstituierenden φ^α vorliegen kann und daß dieser Punkt aus genau einer Ausgangslage \mathbf{X}_α in der Referenzkonfiguration gestartet ist. Für

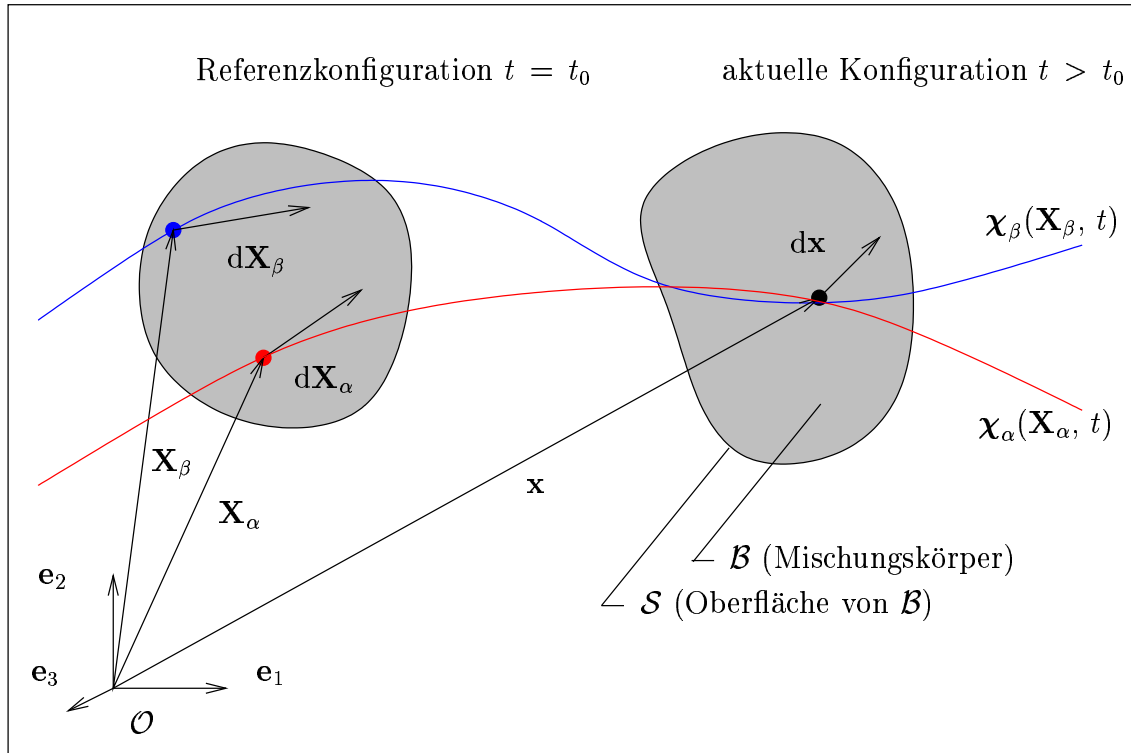


Abbildung 2.2: Referenzkonfiguration und Bewegung

jede einzelne Konstituierende φ^α liegen also die gleichen Verhältnisse vor, wie man sie aus der Kontinuumsmechanik von Einphasenmaterialien kennt. Im Rahmen des hier verwendeten Konzeptes der superponierten Kontinua können allerdings materielle Punkte unterschiedlicher Komponenten der Mischung an einem Punkt \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration vorliegen. Mit Hilfe der inversen Bewegung bezüglich des Ortsvektors \mathbf{x} ,

$$\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (2.11)$$

können die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auf die Ortsvektoren der aktuellen Konfiguration \mathbf{x} bezogen werden (räumliche oder *Eulersche* Darstellung):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{x}}_\alpha(\boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \\ (\mathbf{v}_\alpha)'_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(\boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dem Symbol $(\cdot)'_\alpha$ kommt die Bedeutung der materiellen Zeitableitung zu, die der Bewegung der Phase φ^α folgt.

Das Konzept der materiellen Zeitableitung läßt sich auf beliebige Feldfunktionen, die bezüglich der aktuellen Konfiguration parameterisiert sind, übertragen. Durch

Anwendung der Kettenregel der Differentiation findet man für die Darstellung der materiellen Zeitableitung eines beliebigen, räumlich dargestellten Feldes $\Psi(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{d_\alpha}{dt}\Psi(\mathbf{x}(\mathbf{X}_\alpha, t), t) = \Psi'_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \text{grad}\Psi \cdot \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.13)$$

Der Operator $\text{grad}(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial\mathbf{x}$ bildet die partielle Ableitung bezüglich der Ortsvektoren \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration und wird als räumlicher Gradient bezeichnet.

Die materielle oder totale Zeitableitung Ψ'_α stellt somit die Änderung von Ψ dar, die ein Beobachter feststellt, der sich mit dem materiellen Punkt X^α bewegt. Die materielle Zeitableitung teilt sich in zwei Terme auf: Der sogenannte lokale Anteil $\partial\Psi/\partial t$ beschreibt die Änderung von Ψ an einem festgehaltenen Ort \mathbf{x} , der konvektive Anteil $\text{grad}\Psi \cdot \mathbf{v}_\alpha$ entsteht aufgrund der Bewegung der materiellen Punkte in einem inhomogenen Feld. Verschwindet der lokale Anteil von (2.13), so heißt das Feld Ψ stationär; verschwindet der Gradient von Ψ , so ist Ψ homogen.

Während in der Festkörpermechanik vorwiegend die *Lagrangesche* Darstellung Verwendung findet, wird in der Strömungsmechanik die *Eulersche* Darstellung bevorzugt. Die Berechnung der Beschleunigung aus der *Eulerschen* Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes ist dabei ohne die explizite Kenntnis der Bewegungsfunktion möglich. Dazu bildet man die totale Zeitableitung des räumlichen Geschwindigkeitsfeldes (2.12)₁ und beachtet, daß sich die Position \mathbf{x} , die der materielle Punkt X^α zur Zeit t einnimmt, durch die Bewegung ändert. Man findet für die Beschleunigung in der *Eulerschen* Darstellung

$$(\mathbf{v}_\alpha)'_\alpha = \frac{\partial\mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\text{grad}\mathbf{v}_\alpha)\mathbf{v}_\alpha. \quad (2.14)$$

Bildet man die Ableitung der Bewegungsfunktion (2.8) nach den Ortsvektoren \mathbf{X}_α der Referenzkonfiguration einer Konstituierenden φ^α , so erhält man den Deformationsgradienten zur Bewegung χ_α :

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial\chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial\mathbf{X}_\alpha} = \text{Grad}_\alpha\chi_\alpha = \text{Grad}_\alpha\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Der materielle Gradient $\text{Grad}_\alpha(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial\mathbf{X}_\alpha$ kennzeichnet die Ableitung nach den Ortsvektoren der Referenzkonfiguration.

Der inverse Deformationsgradient \mathbf{F}_α^{-1} ergibt sich durch Invertierung von \mathbf{F}_α oder als Ableitung der inversen Bewegung nach den Ortsvektoren der aktuellen Konfiguration:

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \frac{\partial\chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial\mathbf{x}} = \text{grad}\chi_\alpha^{-1} = \text{grad}\mathbf{X}_\alpha. \quad (2.16)$$

Die Ein-Eindeutigkeit der Bewegungsfunktion und die Invertierbarkeit des Deformationsgradienten sind sichergestellt, wenn die Determinante des Deformationsgradienten nicht verschwindet:

$$\det \mathbf{F}_\alpha \neq 0. \quad (2.17)$$

Sowohl der Deformationsgradient (2.15) als auch der inverse Deformationsgradient (2.16) können über Gradienten des Verschiebungsvektors

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{x} - \mathbf{X}_\alpha \quad (2.18)$$

dargestellt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= \mathbf{I} + \text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \\ \mathbf{F}_\alpha^{-1} &= \mathbf{I} - \text{grad} \mathbf{u}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die wesentliche Eigenschaft des Deformationsgradienten besteht darin, daß er materielle Linienelemente $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration auf Linienelemente $d\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration im Sinne einer linearen Abbildung transformiert (Becker & Bürger, 1975; Haupt, 1993):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha. \quad (2.20)$$

Aufgrund der Invertierbarkeit von \mathbf{F}_α ergibt sich mit dem inversen Deformationsgradienten (2.16)

$$d\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Ein materielles Linienelement ist dabei definiert als Tangentenvektor an eine materielle Linie einer Konstituierenden φ^α im materiellen Punkt X^α . In Abbildung 2.3 ist ein solches Linienelement in der Referenzkonfiguration und in der aktuellen Konfiguration dargestellt. Man sieht, daß die Abbildung der Linienelemente zwischen den beiden Konfigurationen sowohl eine Drehung als auch eine Streckung enthält.

Aufgrund der Eigenschaft, Vektoren der Referenzkonfiguration auf Vektoren der aktuellen Konfiguration abzubilden, wird der Deformationsgradient als Zweifeldtensor bezeichnet. In der natürlichen Basisdarstellung, die in Abschnitt 2.9 behandelt wird, wird die Bezeichnung besonders deutlich. Aus dem Deformationsgradienten lassen sich alle weiteren Deformations- und Verzerrungsmaße der klassischen Kontinuumsmechanik ableiten.

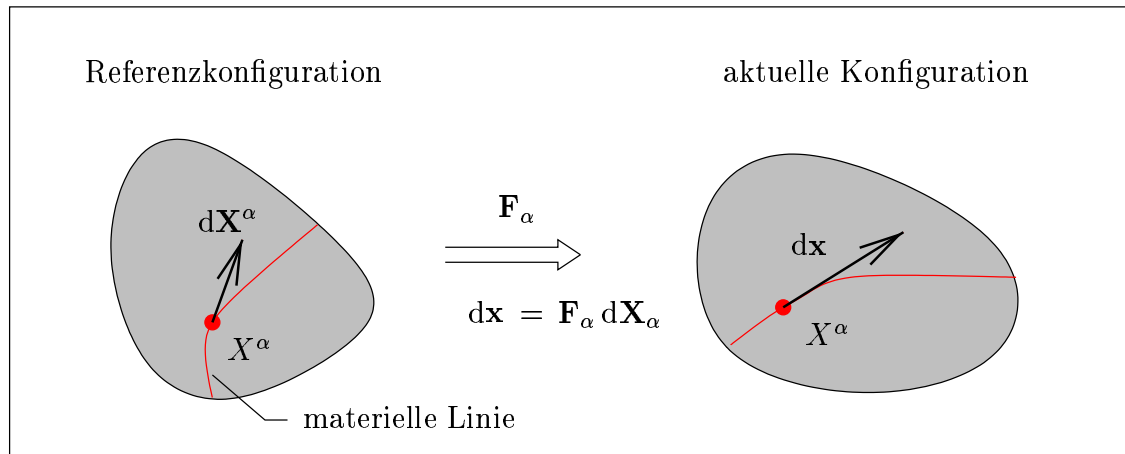


Abbildung 2.3: Deformationsgradient und Linienelemente

2.3 Mikrobewegung

Die im vorherigen Abschnitt eingeführten Bewegungsfunktionen χ_α und die daraus abgeleiteten Größen Geschwindigkeit, Beschleunigung und Deformationsgradient beschreiben in der klassischen Kontinuumstheorie eindeutig den Bewegungszustand der materiellen Punkte. Die materiellen Punkte als Träger der physikalischen Eigenschaften besitzen im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik keine Ausdehnung und werden als mathematische Punkte betrachtet. In einer solchen Theorie bleibt die Mikrostruktur unberücksichtigt.

Eine Möglichkeit, den diskontinuierlichen Aufbau auf der Mikroebene (z. B. von Granulaten, aber auch von polykristallinen Stoffen mit Korngrenzen) im Rahmen einer Kontinuumstheorie zu beschreiben, liegt in einer geänderten Betrachtungsweise der materiellen Punkte. Neben den drei translatorischen Freiheitsgraden der klassischen Formulierung kann man zusätzlich rotatorische Freiheitsgrade einführen. In diesem Fall werden die materiellen Punkte nicht mehr als mathematische Punkte ohne Ausdehnung betrachtet, sondern als Mikrostarrkörper mit sechs Freiheitsgraden, nämlich drei Translationen entlang der Koordinatenrichtungen und drei Rotationen um die jeweiligen Koordinatenachsen. Eine solche Theorie, die auch Drehungen der materiellen Punkte zulässt, geht auf die Gebrüder *Cosserat* (1909) zurück, und wird deshalb als *Cosserat*-Theorie, als Direktortheorie oder als mikropolare Theorie bezeichnet (Eringen, 1964; Eringen & Suhubi, 1964; Besdo, 1974; Eringen & Kafadar, 1976).

Eine weitere Verallgemeinerung der Kontinuumstheorie über die *Cosserat*-Theorie hinaus stellt die mikromorphe Theorie dar (Eringen & Suhubi, 1964; Suhubi & Eringen, 1964; Eringen & Kafadar, 1976). In ihr werden die materiellen Punkte nicht mehr als starre, sondern als deformierbare Körper aufgefaßt. Jeder materielle Punkt

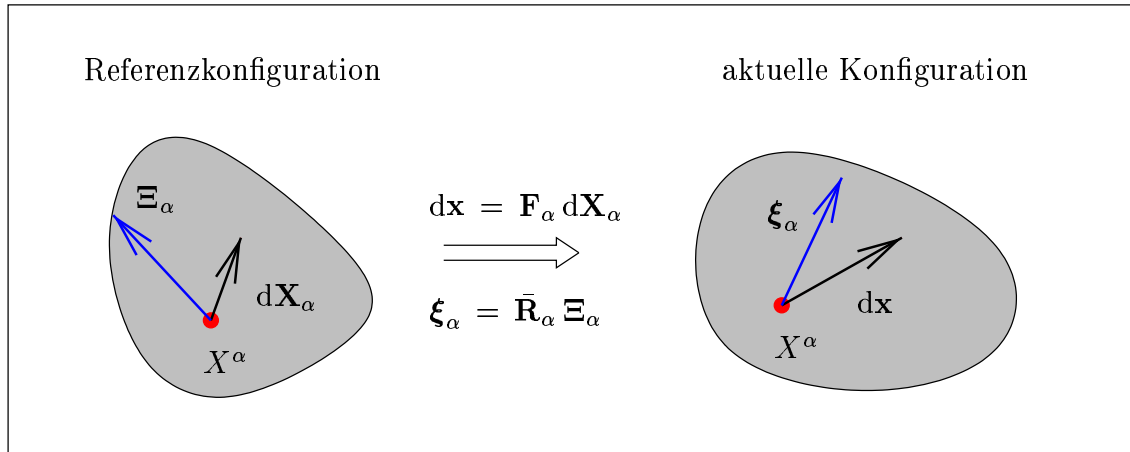


Abbildung 2.4: Deformationsgradient und Mikrobewegung

einer mikromorphen Theorie repräsentiert demzufolge ein Mikrokontinuum und besitzt unendlich viele Freiheitsgrade. Neben der Möglichkeit, die Mikrostruktur über eine erweiterte Kinematik innerhalb eines Makromodells zu berücksichtigen, kann man auch Erweiterungen ausschließlich auf der konstitutiven Ebene vornehmen und gelangt so zu Gradienten- oder zu Integralkontinua. Einen Überblick dazu gibt z. B. Brinkgreve (1994). Die weiteren Ausführungen in der vorliegenden Arbeit bleiben jedoch auf die mikropolare Theorie beschränkt.

Die gegenüber dem klassischen Kontinuum zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade einer mikropolaren Theorie werden durch Direktoren beschrieben. Darunter versteht man eine starre Triade von Vektoren, die an einen materiellen Punkt X^α „angeheftet“ ist. Die Direktoren bewegen sich aber nicht wie materielle Linienelemente. Im Fall einer mikropolaren Theorie führen die Direktoren eine Drehung aus, die durch einen eigentlich orthogonalen Tensor $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ dargestellt werden kann. Dieser Tensor wird als Mikrobewegung bezeichnet und dreht die Direktoren Ξ_α der Referenzkonfiguration in Direktoren ξ_α der aktuellen Konfiguration (Eringen, 1964, Eringen & Suhubi, 1964; Eringen & Kafadar, 1976):

$$\xi_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) \Xi_\alpha. \quad (2.22)$$

In Abbildung 2.4 sind sowohl die materiellen Linienelemente als auch die Direktoren für eine Konstituierende dargestellt. Man sieht, daß die materiellen Linienelemente bei der Abbildung aus der Referenz- in die Momentankonfiguration sowohl ihre Länge als auch ihre Orientierung ändern, während die Direktoren sich nur drehen. Bei der Bewegung ändert sich deshalb der Winkel, der zwischen den Linienelementen und den Direktoren eingeschlossen ist.

Da die Mikrobewegung eine reine Drehung ist, gilt:

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\mathbf{R}}_\alpha = \mathbf{I}, \quad \det \bar{\mathbf{R}}_\alpha = 1. \quad (2.23)$$

Dabei bedeutet $(\cdot)^T$ die Transposition eines Tensors zweiter Stufe. Da $\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T = \bar{\mathbf{R}}_\alpha^{-1}$ ist, existiert in jedem Fall die Umkehrabbildung, die die Direktoren $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ der aktuellen Konfiguration in Direktoren $\boldsymbol{\Xi}_\alpha$ der Referenzkonfiguration abbildet:

$$\boldsymbol{\Xi}_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\xi}_\alpha. \quad (2.24)$$

Die Gleichungen (2.22) und (2.24) sind analog zu den Gleichungen (2.20) und (2.21) zu sehen. Genau wie der Deformationsgradient \mathbf{F}_α ist die Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ ein Zweifeldtensor, der Vektoren der Referenzkonfiguration auf Vektoren der aktuellen Konfiguration abbildet.

Spezielle Identifikationen der Direktoren können genutzt werden, um neben der Referenz- und der Momentankonfiguration weitere Konfigurationen einzuführen (Besdo, 1974, Steinmann, 1992, 1994; Diebels & Ehlers, 1996b). Solche Identifikationen werden in Abschnitt 2.11 im Zusammenhang mit den natürlichen Basisvektoren diskutiert.

2.4 Klassische Deformations- und Verzerrungstensoren

Der Deformationsgradient \mathbf{F}_α bildet gemäß (2.20) Linienelemente $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration auf Linienelemente $d\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration ab. Aufgrund dieser Transporteigenschaft lassen sich die Deformations- und Verzerrungsmaße klassischer Kontinua aus dem Deformationsgradienten ableiten.

Die polare Zerlegung ermöglicht es, jeden regulären Tensor eindeutig in einen orthogonalen Tensor und einen symmetrisch positiv definiten Tensor aufzuspalten. Für den Deformationsgradienten gilt somit (Becker & Bürger, 1975; Haupt, 1993)

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_\alpha. \quad (2.25)$$

Wenn die materiellen Linienelemente entlang der Hauptachsen von \mathbf{U}_α und \mathbf{V}_α ausgerichtet sind, stellt der eigentlich orthogonale Tensor \mathbf{R}_α eine Drehung der Linienelemente dar, während die positiv definiten Tensoren $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha^T$ und $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha^T$ jeweils einer reinen Streckung dieser Linienelemente entsprechen. Gemäß ihrer Stellung in der Zerlegung (2.25) heißen \mathbf{U}_α rechter *Cauchy*scher Strecktensor und \mathbf{V}_α linker *Cauchy*scher Strecktensor. Setzt man die beiden möglichen Varianten der polaren Zerlegung (2.25) in (2.20) ein, so sieht man, daß es sich bei der Zerlegung

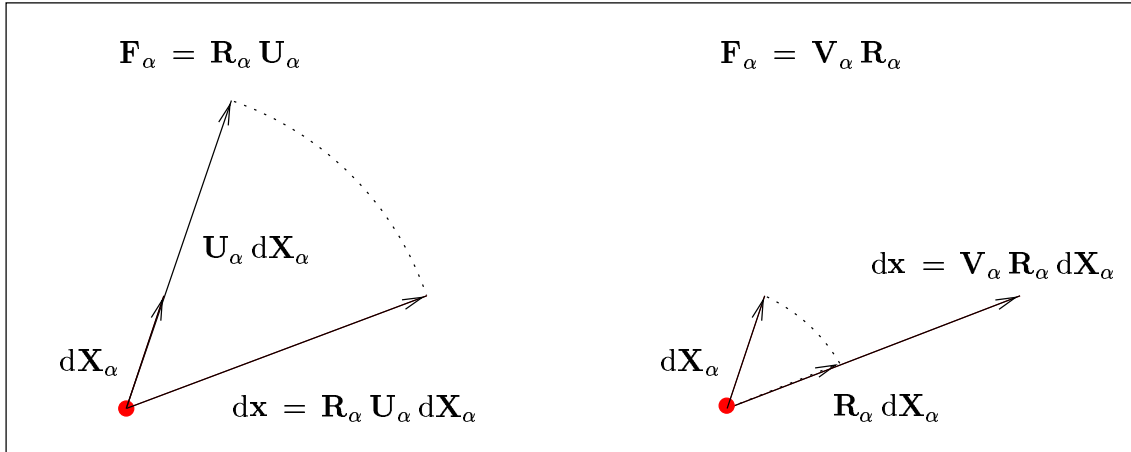


Abbildung 2.5: Polare Zerlegung des Deformationsgradienten

$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}_\alpha$ um die Hintereinanderschaltung der Streckung \mathbf{U}_α und der Drehung \mathbf{R}_α handelt, während in der Version $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_\alpha$ die Linienelemente erst mit \mathbf{R}_α gedreht und dann mit \mathbf{V}_α gestreckt werden. Abbildung 2.5 veranschaulicht diese beiden Möglichkeiten der polaren Zerlegung gemäß (2.25). Desweiteren besteht zwischen den beiden Strecktensoren der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\alpha &= \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_\alpha, \\ \mathbf{V}_\alpha &= \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}_\alpha \mathbf{R}_\alpha^T. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Der linke *Cauchy'sche* Strecktensor \mathbf{V}_α entsteht also aus der Vorwärtsrotation des rechten *Cauchy'schen* Strecktensors \mathbf{U}_α .

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der orthogonale Tensor \mathbf{R}_α der polaren Zerlegung nichts mit der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ der mikropolaren Theorie zu tun hat. Vielmehr ist \mathbf{R}_α das eindeutige Ergebnis der polaren Zerlegung, während $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ die zusätzlichen Freiheitsgrade der erweiterten Kontinuumstheorie beschreibt.

Weitere Deformationstensoren ergeben sich, wenn man das Transportverhalten der Quadrate von Linienelementen untersucht. Eine Möglichkeit besteht darin, das Produkt $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ durch Linienelemente $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration auszudrücken. Gemäß (2.20) gilt:

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha =: d\mathbf{X}_\alpha \cdot \mathbf{C}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha. \quad (2.27)$$

Der Tensor

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha \quad (2.28)$$

heißt in der Literatur rechter *Cauchy-Green-Deformationstensor* und drückt das Quadrat von Linienelementen ds^2 der aktuellen Konfiguration durch Linienelemente $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration aus. Somit stellt \mathbf{C}_α ein Deformationsmaß der Referenzkonfiguration dar. Unter Berücksichtigung der Orthogonalität von \mathbf{R}_α und der Symmetrie von \mathbf{U}_α gemäß der polaren Zerlegung (2.25) folgt

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha^2. \quad (2.29)$$

Bezieht man sich umgekehrt auf die Linienelemente $d\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration, so ergibt sich für Quadrate der Linienelemente der Referenzkonfiguration

$$dS_\alpha^2 = d\mathbf{X}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \mathbf{F}_\alpha^{-1} d\mathbf{x} =: d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.30)$$

Der hochgestellte Index $(\cdot)^{T-1}$ bezeichnet die Inverse eines transponierten Tensors zweiter Stufe. In (2.30) definiert man den linken *Cauchy-Green-Deformationstensor* als

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T, \quad (2.31)$$

und es folgt aus der polaren Zerlegung (2.25)

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha^2. \quad (2.32)$$

Im Gegensatz zu \mathbf{C}_α stellt \mathbf{B}_α ein Deformationsmaß der aktuellen Konfiguration dar.

Die Deformationstensoren nehmen in der undeformierten Konfiguration den Wert der Identität \mathbf{I} an. Als Verzerrungstensoren führt man jedoch Maße ein, die für den undeformierten Zustand den Wert $\mathbf{0}$ liefern. Diese Eigenschaft ergibt sich, wenn man die Differenz der Quadrate von Linienelementen in der aktuellen Konfiguration und in der Referenzkonfiguration betrachtet. Bezieht man sich dabei auf die Linienelemente der Referenzkonfiguration, so findet man:

$$ds^2 - dS_\alpha^2 = d\mathbf{x}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha - d\mathbf{X}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha = d\mathbf{X}_\alpha \cdot (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}) d\mathbf{X}_\alpha. \quad (2.33)$$

Der Tensor

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}) \quad (2.34)$$

wird als *Greenscher* oder als *Green-Lagrangescher Verzerrungstensor* bezeichnet und bezieht sich auf die Linienelemente der Referenzkonfiguration. Transportiert man

andererseits die Differenz der Quadrate von Linienelementen auf die aktuelle Konfiguration,

$$ds^2 - dS_\alpha^2 = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha^{-1}) d\mathbf{x}, \quad (2.35)$$

so führt das auf die Definition des *Almansischen* oder des *Euler-Almansischen* Verzerrungstensors

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha^{-1}). \quad (2.36)$$

Die Einführung des Faktors $1/2$ in (2.34) und (2.36) geschieht lediglich aus Konventionsgründen, um im Fall einer Linearisierung der Verzerrungstensoren die klassischen Ingenieurdehnmaße zu erhalten.

Aus der Definition der Deformationstensoren (2.28) und (2.31) ergibt sich mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F}_α der folgende Zusammenhang zwischen den Verzerrungstensoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\alpha, \\ \mathbf{A}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \mathbf{E}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mit dem Vorwärtstransport $\mathbf{F}_\alpha^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}_\alpha^{-1}$ wird aus dem Verzerrungstensor \mathbf{E}_α der Referenzkonfiguration der Verzerrungstensor \mathbf{A}_α der aktuellen Konfiguration. Die Umkehrabbildung $\mathbf{F}_\alpha^T(\cdot)\mathbf{F}_\alpha$ heißt Rückwärtstransport. In der englischsprachigen Literatur finden sich für die beiden Transporte die Begriffe „push forward“ und „pull back“.

Auf die Einführung weiterer Deformations- und Verzerrungstensoren vom *Karni-Reiner*-Typ und logarithmischer Deformationsmaße zur Beschreibung des klassischen Kontinuums wird im folgenden verzichtet, weil sie für die weiteren Ausführungen nicht benötigt werden.

2.5 Erweiterte Deformations- und Verzerrungstensoren

Während die Deformationstensoren der Standardformulierung über die Quadrate von Linienelementen ds^2 bzw. dS_α^2 hergeleitet werden, basieren die Deformationstensoren des *Cosserat*-Kontinuums auf den Skalarprodukten zwischen Direktoren Ξ_α und Linienelementen $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration bzw. zwischen Direktoren ξ_α und Linienelementen $d\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration. Der sogenannte erste *Cosserat*-Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ entsteht, wenn man das Skalarprodukt von aktuellen

Direktoren ξ_α und Linienelementen $d\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration mit Hilfe von (2.20) und (2.22) durch die entsprechenden Referenzgrößen ausdrückt:

$$\xi_\alpha \cdot d\mathbf{x} = \Xi_\alpha \cdot \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha =: \Xi_\alpha \cdot \bar{\mathbf{U}}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha. \quad (2.38)$$

Der erste *Cosserat*-Deformationstensor ist durch (2.38) als

$$\bar{\mathbf{U}}_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha \quad (2.39)$$

definiert. Da sich $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ auf die Direktoren Ξ_α und auf die Linienelemente $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration bezieht, stellt der erste *Cosserat*-Deformationstensor einen Tensor der Referenzkonfiguration dar.

Alternativ zu (2.38) kann man das Produkt von Direktoren und Linienelementen der Referenzkonfiguration durch die entsprechenden Größen der aktuellen Konfiguration ausdrücken. Es folgt

$$\Xi_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha = \xi_\alpha \cdot \bar{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} d\mathbf{x} =: \xi_\alpha \cdot \bar{\mathbf{V}}_\alpha^{-1} d\mathbf{x}, \quad (2.40)$$

wobei sich der Deformationstensor $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ auf die aktuelle Konfiguration bezieht und folgendermaßen definiert ist:

$$\bar{\mathbf{V}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T. \quad (2.41)$$

Die Auflösung der beiden Ausdrücke (2.39) und (2.41) nach dem Deformationsgradienten \mathbf{F}_α liefert in Analogie zur polaren Zerlegung (2.25):

$$\mathbf{F}_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha \bar{\mathbf{U}}_\alpha = \bar{\mathbf{V}}_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha. \quad (2.42)$$

An dieser Stelle sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Deformationstensoren $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ und $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ des *Cosserat*-Kontinuums im Gegensatz zu den Strecktensoren \mathbf{U}_α und \mathbf{V}_α aus der polaren Zerlegung im allgemeinen nicht symmetrisch sind. Nach (2.42) besteht zwischen den beiden *Cosserat*-Deformationstensoren der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\mathbf{V}}_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha, \\ \bar{\mathbf{V}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha \bar{\mathbf{U}}_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T, \end{aligned} \quad (2.43)$$

der formal die gleiche Struktur aufweist wie der Zusammenhang zwischen den Strecktensoren nach (2.26).

Setzt man die polare Zerlegung (2.25) in die Definitionen der beiden *Cosserat*-Deformationstensoren gemäß (2.39) bzw. (2.41) ein, so ergibt sich, daß $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ und $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$

die Differenzrotation aus der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ und der Kontinuumsrotation \mathbf{R}_α sowie die Strecktensoren \mathbf{U}_α bzw. \mathbf{V}_α der polaren Zerlegung beinhalten. Definiert man die freie Rotation als Differenzrotation zwischen den Direktoren und den materiellen Linienelementen durch die Hintereinanderschaltung von \mathbf{R}_α im Sinn einer Vorwärtsdrehung und $\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T$ im Sinn einer Rückwärtsrotation,

$$\mathbf{R}_\alpha^* = \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha, \quad (2.44)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_\alpha &= \mathbf{R}_\alpha^* \mathbf{U}_\alpha, \\ \bar{\mathbf{V}}_\alpha &= \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_\alpha^{*T}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sind die Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ und die Kontinuumsrotation \mathbf{R}_α identisch, so wird nach (2.44) die freie Rotation \mathbf{R}_α^* zur Identität, und die *Cosserat*-Deformationstensoren sind mit den symmetrischen Strecktensoren aus der polaren Zerlegung identisch. Aufgrund der Orthogonalität der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ existiert jedoch auch im allgemeinen Fall ein Zusammenhang zwischen den *Cosserat*-Deformationstensoren und den *Cauchy-Green*-Deformationstensoren. Einsetzen von (2.42) in (2.28) und (2.31) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\alpha &= \mathbf{U}_\alpha^2 = \bar{\mathbf{U}}_\alpha^T \bar{\mathbf{U}}_\alpha, \\ \mathbf{B}_\alpha &= \mathbf{V}_\alpha^2 = \bar{\mathbf{V}}_\alpha \bar{\mathbf{V}}_\alpha^T. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Analog zum klassischen Kontinuum können auch für *Cosserat*-Kontinua aus den Deformationstensoren Verzerrungstensoren konstruiert werden, die in der undefor mierten Konfiguration zu null werden. Hierzu wird die Differenz von Produkten von Direktoren und Linienelementen auf verschiedenen Konfigurationen betrachtet:

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot d\mathbf{x} - \boldsymbol{\Xi}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\Xi}_\alpha \cdot (\bar{\mathbf{U}}_\alpha - \mathbf{I}) d\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{V}}_\alpha^{-1}) d\mathbf{x}. \quad (2.47)$$

Dadurch können die beiden Verzerrungsmaße

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_\alpha &= \bar{\mathbf{U}}_\alpha - \mathbf{I}, \\ \bar{\mathbf{A}}_\alpha &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{V}}_\alpha^{-1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

definiert werden. Dabei stellt $\bar{\mathbf{E}}_\alpha$ einen Verzerrungstensor vom *Green-Lagrangeschen* Typ dar, der auf die Referenzkonfiguration bezogen ist, und $\bar{\mathbf{A}}_\alpha$ einen Verzerrungstensor vom *Euler-Almansischen* Typ, der sich auf die aktuelle Konfiguration bezieht.

Auf die formale Einführung des Faktors $1/2$ wie bei den Verzerrungstensoren \mathbf{E}_α und \mathbf{A}_α kann hier verzichtet werden, da dieser Faktor im Rahmen der Linearisierung entsteht und somit die Ingenieurdehnmaße als linearer Sonderfall enthalten sind². Mit Hilfe der Definition der Deformationstensoren nach (2.39) und (2.41) kann man das Transportverhalten der beiden Verzerrungstensoren zwischen der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration angeben:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha^{T-1} \bar{\mathbf{E}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} = \bar{\mathbf{R}}_\alpha \bar{\mathbf{E}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}, \\ \bar{\mathbf{E}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\mathbf{A}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Im Vergleich mit dem Vorwärtstransport und dem Rückwärtstransport der Standardformulierung (2.37) stellt man fest, daß innerhalb der *Cosserat*-Theorie das erste Basissystem der Verzerrungstensoren mit Hilfe der Mikrobewegung von einer zur anderen Konfiguration transportiert wird. Diese Eigenschaft liegt darin begründet, daß die Verzerrungstensoren der mikropolaren Theorie einen Vergleich zwischen Direktoren und Linienelementen beinhalten, während in der Standardformulierung Quadrate von Linienelementen verglichen werden.

2.6 Krümmungstensoren

Neben den *Cosserat*-Deformationstensoren $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ und $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ muß ein weiteres Deformationsmaß konstruiert werden, das die räumliche Änderung der Mikrobewegung beschreibt (Eringen & Kafadar, 1976; Steinmann, 1994; Volk, 1999):

$${}^R\mathcal{K}_\alpha = (\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \text{Grad}_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha)^{\overset{3}{\bar{\mathbf{E}}}}.\tag{2.50}$$

²Aus der formalen Linearisierung (Volk, 1999) ergibt sich mit dem Drehvektor $\bar{\varphi}_\alpha$

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha^{\text{lin}} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{E}}^{\overset{3}{\bar{\varphi}}}_\alpha$$

und mit dem Verschiebungsgradienten \mathbf{H}_α

$$\bar{\mathbf{E}}_\alpha^{\text{lin}} = \mathbf{H}_\alpha + \bar{\mathbf{E}}^{\overset{3}{\bar{\varphi}}}_\alpha.$$

Die entsprechenden symmetrischen und antimetrischen Anteile berechnen sich dann als

$$\begin{aligned}\text{sym } \bar{\mathbf{E}}_\alpha^{\text{lin}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\alpha^T) = \mathbf{E}_\alpha^{\text{lin}}, \\ \text{skw } \bar{\mathbf{E}}_\alpha^{\text{lin}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}_\alpha - \mathbf{H}_\alpha^T) - \bar{\mathbf{E}}^{\overset{3}{\bar{\varphi}}}_\alpha.\end{aligned}$$

Der hochgestellte, unterstrichene Index $(\cdot)^i$ gibt dabei die Stufe des resultierenden tensoriellen Ausdrucks an (de Boer, 1982). ${}^R\mathcal{K}_\alpha^3$ wird als zweiter *Cosserat*-Deformationstensor oder als Krümmungstensor bezeichnet. Um Verwechslungen mit dem Deformationstensor $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ auszuschließen, der in der Literatur nicht über einen eigenen Namen verfügt, wird im folgenden nur der Begriff des Krümmungstensors benutzt. Durch die Ausnutzung der Identität

$$\text{Grad}_\alpha(\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\mathbf{R}}_\alpha) = \mathbf{0}^3 \quad (2.51)$$

kann die Schiefsymmetrie des dreistufigen Krümmungstensors ${}^R\mathcal{K}_\alpha^3$ bezüglich der ersten zwei Basissysteme gezeigt werden:

$${}^R\mathcal{K}_\alpha^3 = -({}^R\mathcal{K}_\alpha^3)^{12T}. \quad (2.52)$$

Das Symbol $(\cdot)^{ijT}$ gibt an, daß in der Basisdarstellung des entsprechenden Tensors das i -te und das j -te Basissystem vertauscht werden. Gleichwertig dazu können die Vertauschungen auch im Koeffizientenschema vorgenommen werden. Von den ursprünglich 27 Koeffizienten eines dreistufigen Tensors sind in diesem Fall nur noch neun voneinander unabhängig. Somit ist analog zur Bildung des axialen Vektors zu einem schiefssymmetrischen zweistufigen Tensor (de Boer, 1982; Klingbeil, 1989) auch hier eine Verjüngung auf ein zweistufiges Krümmungsmaß mit dem Permutations- oder *Ricci*-Tensor \mathbf{E}^3 möglich. Der resultierende zweistufige Krümmungstensor

$${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha = -\frac{1}{2}(\mathbf{E}^3 {}^R\mathcal{K}_\alpha^3)^2 \quad (2.53)$$

stellt daher den axialen Tensor zu ${}^R\mathcal{K}_\alpha^3$ dar und besitzt keine Symmetrieeigenschaften mehr. Er beinhaltet aber aufgrund seiner Konstruktion die gleiche Information wie der dreistufige Krümmungstensor ${}^R\mathcal{K}_\alpha^3$. Wie später anhand der natürlichen Basisdarstellung noch gezeigt wird, ist ${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ ein Tensor, der sich auf die gleiche Basis bezieht wie der Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ der Referenzkonfiguration. Die Einführung eines Krümmungstensors, der sich wie $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ auf die aktuelle Konfiguration bezieht, ist ebenfalls möglich:

$${}^3\mathcal{K}_\alpha = \left[((\text{grad } \bar{\mathbf{R}}_\alpha)^{23T} \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T)^3 \right]^T = -(\bar{\mathbf{R}}_\alpha \text{grad } \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T)^3. \quad (2.54)$$

Das zweite Gleichheitszeichen in (2.54) gilt aufgrund der Orthogonalität von $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ und folgt aus einer Identität analog zu (2.51). Auch dieser dreistufige Krümmungstensor

ist schiefsymmetrisch bezüglich der ersten beiden Basissysteme und kann daher mit Hilfe des *Ricci*-Tensors auf einen zweistufigen Krümmungstensor verjüngt werden:

$$\bar{\mathcal{K}}_\alpha = -\frac{1}{2}(\mathbf{E}^3 \mathcal{K}_\alpha)^2. \quad (2.55)$$

In der natürlichen Basisdarstellung läßt sich leicht zeigen, daß zwischen den beiden Krümmungstensoren der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha {}^R \bar{\mathcal{K}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}, \\ {}^R \bar{\mathcal{K}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\mathcal{K}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha \end{aligned} \quad (2.56)$$

besteht (Eringen & Kafadar, 1976; Steinmann, 1994; Volk, 1999). Die beiden Krümmungstensoren zweiter Stufe ${}^R \bar{\mathcal{K}}_\alpha$ und $\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ verfügen also über dasselbe Transportverhalten zwischen den Konfigurationen wie die Verzerrungstensoren $\bar{\mathbf{E}}_\alpha$ und $\bar{\mathbf{A}}_\alpha$. In der absoluten Schreibweise folgt die Aussage (2.56), wenn man für die zweistufigen Krümmungstensoren die Ausdrücke (2.53) und (2.55) einsetzt und beachtet, daß die Drehung eines zweistufigen Tensors und die Bildung des zugehörigen axialen Vektors vertauschbar sind: Der gedrehte axiale Vektor zum Ausgangstensor und der axiale Vektor zum gedrehten Tensor sind identisch.

Neben den beiden hier eingeführten zweistufigen Krümmungstensoren ${}^R \bar{\mathcal{K}}_\alpha$ und $\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ können weitere Krümmungstensoren eingeführt werden, die sich auf andere Konfigurationen beziehen (Steinmann, 1994; Volk, 1999).

2.7 Kompatibilitätsbedingung

Zwischen den Krümmungstensoren und dem Gradienten der Deformationstensoren besteht innerhalb der *Cosserat*-Theorie ein Zusammenhang, der als Kompatibilitätsbedingung bezeichnet wird. Diese Kompatibilitätsbedingung ist von theoretischem Interesse und spielt in der mikropolaren Plastizitätstheorie eine entscheidende Rolle (Ehlers & Volk, 1997a, 1997b, Volk, 1999). Für eine Verschiebungsformulierung im Rahmen der Elastizitätstheorie wird die Kompatibilitätsbedingung jedoch nicht benötigt. Ferner erfordert die detaillierte Behandlung der Kompatibilitätsbedingung für finite Deformationen die Einführung weiterer Deformationstensoren vom *Karman-Reiner*-Typ. Daher sei hier nur auf die allgemeine Formulierung der Kompatibilitätsbedingung im Rahmen einer geometrisch nichtlinearen Theorie durch Ehlers *et al.* (1998a, 1998b) und Volk (1999) hingewiesen. Im Fall der geometrisch linearen Theorie wurde die Kompatibilitätsbedingung bereits von Nowacki (1969) angegeben, vgl. Nowacki (1986).

2.8 Geschwindigkeitsgradient und Kreiseltensor

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient stellt die Änderungsgeschwindigkeit von materiellen Linienelementen dar. Aus dem Zusammenhang (2.20) folgt durch materielle Zeitableitung

$$d\dot{\mathbf{x}}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha d\mathbf{X}_\alpha \quad (2.57)$$

und weiterhin, wenn man den Transport zwischen Linienelementen der Referenz- und der aktuellen Konfiguration berücksichtigt,

$$d\dot{\mathbf{x}}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} d\mathbf{x} =: \mathbf{L}_\alpha d\mathbf{x}. \quad (2.58)$$

Der Tensor

$$\mathbf{L}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} \quad (2.59)$$

heißt räumlicher Geschwindigkeitsgradient. Er entsteht durch formalen Vorwärtstransport des materiellen Geschwindigkeitsgradienten

$$(\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha = \text{Grad}_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad (2.60)$$

auf die aktuelle Konfiguration, so daß der räumliche Geschwindigkeitsgradient auch als

$$\mathbf{L}_\alpha = \text{grad } \mathbf{v}_\alpha \quad (2.61)$$

berechnet werden kann. Da in dieser Darstellung der Gradient bezüglich der aktuellen Position \mathbf{x} gebildet wird und das Geschwindigkeitsfeld in der *Eulerschen* Darstellung benutzt wird, ergibt sich \mathbf{L}_α als Tensor der Momentankonfiguration.

Wie jeder andere Tensor kann auch der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L}_α in seinen symmetrischen und seinen schiefssymmetrischen Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{W}_\alpha. \quad (2.62)$$

Der symmetrische Anteil

$$\mathbf{D}_\alpha = \text{sym } \mathbf{L}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T) \quad (2.63)$$

wird als Deformationsgeschwindigkeitstensor oder kurz als Deformationsgeschwindigkeit bezeichnet, der schiefssymmetrische Anteil

$$\mathbf{W}_\alpha = \text{skw } \mathbf{L}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_\alpha - \mathbf{L}_\alpha^T) \quad (2.64)$$

heißt Drehgeschwindigkeitstensor bzw. Wirbeltensor. Während der zum Wirbeltensor gehörende axiale Vektor

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{W}_\alpha^T = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}_\alpha \quad (2.65)$$

die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes liefert, beschreibt die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D}_α die zeitliche Änderung der Quadrate von materiellen Linienelementen. Mit (2.58) folgt:

$$(\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx})'_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} + \mathbf{dx} \cdot \mathbf{L}_\alpha \mathbf{dx} = \mathbf{dx} \cdot 2 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{dx}. \quad (2.66)$$

Die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D}_α stellt daher die zentrale Größe für die Formulierung von viskosen Stoffgesetzen dar. So besteht etwa für ein *Newtonsches* Fluid ein linearer Zusammenhang zwischen den Reibungsspannungen und der Deformationsgeschwindigkeit (Prandtl, 1965; Schlichting, 1982).

Neben der Zerlegung (2.62) ist noch eine weitere Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten möglich (Volk, 1999). Mit einer unsymmetrischen Deformationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Delta}_\alpha$ und dem schiefsymmetrischen Kreiseltensor $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\alpha &= \boldsymbol{\Delta}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \\ \boldsymbol{\Delta}_\alpha &= \mathbf{R}_\alpha (\mathbf{U}_\alpha)'_\alpha \mathbf{U}_\alpha^{-1} \mathbf{R}_\alpha^T, \\ \boldsymbol{\Omega}_\alpha &= (\mathbf{R}_\alpha)'_\alpha \mathbf{R}_\alpha^T \end{aligned} \quad (2.67)$$

Der Vorteil dieser Zerlegung wird im Vergleich mit der mikropolaren Deformationsgeschwindigkeit deutlich. Weiterhin bestehen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\alpha &= \text{sym } \boldsymbol{\Delta}_\alpha = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Delta}_\alpha + \boldsymbol{\Delta}_\alpha^T), \\ \mathbf{W}_\alpha &= \boldsymbol{\Omega}_\alpha + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Delta}_\alpha - \boldsymbol{\Delta}_\alpha^T). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Durch die Bildung der materiellen Zeitableitung des *Greenschen* Verzerrungstensor \mathbf{E}_α kann eine Verzerrungsgeschwindigkeit der Referenzkonfiguration angegeben werden. Aus der Definition (2.34) ergibt sich durch Differentiation direkt der Zusammenhang mit der Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D}_α :

$$\mathbf{D}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{T-1} (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}. \quad (2.69)$$

Über den Vorwärtstransport von $(\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha$ auf die aktuelle Konfiguration kann auch die *Lie-* bzw. die *Oldroyd-*Ableitung des *Almansischen* Verzerrungstensors definiert werden. Damit ergibt sich dann

$$(\mathbf{A}_\alpha)^\Delta_\alpha = \mathbf{D}_\alpha \quad (2.70)$$

mit

$$(\dots)_\alpha^\Delta = (\dots)'_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T (\dots) + (\dots) \mathbf{L}_\alpha. \quad (2.71)$$

Die *Lie*-Ableitung kann dabei als zeitliche Änderung von \mathbf{A}_α in einem mitbewegten Koordinatensystem interpretiert werden.

Analog zu (2.57) läßt sich über die materielle Zeitableitung der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ die Änderungsgeschwindigkeit von Direktoren $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ der aktuellen Konfiguration bestimmen. Es ergibt sich durch die materielle Zeitableitung von (2.22) und der Annahme, daß die Direktoren der Referenzkonfiguration in der Zeit konstant sind, der Zusammenhang

$$(\boldsymbol{\xi}_\alpha)'_\alpha = (\bar{\mathbf{R}}_\alpha)'_\alpha \bar{\boldsymbol{\Xi}}_\alpha \quad (2.72)$$

und, wenn man sich mit der inversen Mikrobewegung wiederum auf die Direktoren $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ der aktuellen Konfiguration selbst bezieht,

$$(\boldsymbol{\xi}_\alpha)'_\alpha = (\bar{\mathbf{R}}_\alpha)'_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \boldsymbol{\xi}_\alpha =: \bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha. \quad (2.73)$$

Dabei wird die Größe

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha = (\bar{\mathbf{R}}_\alpha)'_\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \quad (2.74)$$

in der Literatur als mikropolarer Kreiseltensor bezeichnet. Aufgrund der Orthogonalität der Mikrobewegung folgt wie bei der Herleitung der Krümmungstensoren

$$(\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\mathbf{R}}_\alpha)'_\alpha = \mathbf{0}, \quad (2.75)$$

so daß auch der mikropolare Kreiseltensor schiefsymmetrisch ist:

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha = -\bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha^T. \quad (2.76)$$

Der zum mikropolaren Kreiseltensor axiale Vektor

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{E} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha^T \quad (2.77)$$

stellt die Winkelgeschwindigkeit dar, mit der sich die Direktoren $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ drehen.

Mit den Beziehungen (2.59) und (2.74) ist es möglich, die Zeitableitungen des *Cosserat*-Verzerrungstensors vom *Green-Lagrangeschen* Typ zu berechnen. Es ergibt sich

$$(\bar{\mathbf{E}}_\alpha)'_\alpha = (\bar{\mathbf{U}}_\alpha)'_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T (\mathbf{L}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha) \mathbf{F}_\alpha =: \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\boldsymbol{\Delta}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha. \quad (2.78)$$

In Analogie zur unsymmetrischen Deformationsgeschwindigkeit $\Delta_\alpha = \mathbf{L}_\alpha - \Omega_\alpha$ stellt die Differenz zwischen dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten und dem mikropolaren Kreiseltenor eine verallgemeinerte Deformationsgeschwindigkeit oder *Cosserat*-Deformationsgeschwindigkeit dar:

$$\bar{\Delta}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha - \bar{\Omega}_\alpha. \quad (2.79)$$

Diese Größe ist in der Materialtheorie viskoser, mikropolarer Materialien von Bedeutung und ersetzt dort die symmetrische Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D}_α der Standardformulierung. Die *Cosserat*-Deformationsgeschwindigkeit $\bar{\Delta}_\alpha$ ist jedoch im Gegensatz zu \mathbf{D}_α nicht symmetrisch. So wie die *Cosserat*-Theorie mit (2.42) im Vergleich zur polaren Zerlegung eine weitere Möglichkeit der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten anbietet, führt sie ebenfalls auf eine weitere additive Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}_α :

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{W}_\alpha = \Delta_\alpha + \Omega_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha + \bar{\Omega}_\alpha. \quad (2.80)$$

Die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten in einen Deformationstensor und in eine Rotation führt in der *Cosserat*-Theorie genau wie in der Standardformulierung auf eine additive Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten in die *Cosserat*-Deformationsgeschwindigkeit und in den mikropolaren Kreiseltenor.

Die materielle *Cosserat*-Verzerrungsgeschwindigkeit $(\bar{\mathbf{E}}_\alpha)'_\alpha$ entspricht nach (2.78) dem Rücktransport von $\bar{\Delta}_\alpha$ auf die Referenzkonfiguration. Fordert man ebenfalls in Analogie zum klassischen Kontinuum, daß eine verallgemeinerte *Lie*- oder *Oldroyd*-Ableitung des mikropolaren Verzerrungstensors $\bar{\mathbf{A}}_\alpha$ der aktuellen Konfiguration existiert, so daß diese mit der verallgemeinerten Deformationsgeschwindigkeit $\bar{\Delta}_\alpha$ übereinstimmt,

$$(\bar{\mathbf{A}}_\alpha)^\blacktriangle := \bar{\mathbf{R}}_\alpha (\bar{\mathbf{E}}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} = \bar{\Delta}_\alpha, \quad (2.81)$$

dann kann man durch den Vergleich der materiellen Zeitableitung von $\bar{\mathbf{A}}_\alpha$ mit (2.81) die Berechnungsvorschrift für die verallgemeinerte *Lie*-Ableitung angeben:

$$(\bar{\mathbf{A}}_\alpha)^\blacktriangle = (\bar{\mathbf{A}}_\alpha)'_\alpha + \bar{\Omega}_\alpha^T \bar{\mathbf{A}}_\alpha + \bar{\mathbf{A}}_\alpha \mathbf{L}_\alpha. \quad (2.82)$$

Im Vergleich zur *Lie*-Ableitung der Standardformulierung tritt hier wiederum der mikropolare Kreiseltenor an die Stelle des Geschwindigkeitsgradienten. Dieser Unterschied ist konsistent mit dem gegenüber der Standardformulierung geänderten Transportverhalten zwischen der aktuellen Konfiguration und der Referenzkonfiguration, da das eine Basissystem mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F}_α und das andere Basissystem mit der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ transportiert wird. Um die verallgemeinerte *Lie*-Ableitung von der *Lie*-Ableitung der Standardformulierung zu unterscheiden,

wird anstelle des üblichen Symbols $(\cdot)^\Delta$ (Ehlers, 1989b) das Symbol $(\cdot)^\blacktriangle$ mit einem ausgefüllten Dreieck (Volk, 1999) verwandt.

Neben den Zeitableitungen der Verzerrungstensoren wird zur Beschreibung visko-ser Materialeigenschaften die Zeitableitung der Krümmungstensoren benötigt. Die materielle Zeitableitung des dreistufigen Krümmungstensors liefert

$${}^R(\mathcal{K}_\alpha)^\blacktriangle_\alpha = [\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T ((\text{Grad}_\alpha \bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha)^{\overset{23}{T}} \bar{\mathbf{R}}_\alpha)^{\overset{23}{T}}]^\blacktriangle_\alpha. \quad (2.83)$$

Dabei bedeutet die Transposition $(\cdot)^{\overset{ij}{T}}$ eine Vertauschung des i -ten mit dem j -ten Basissystem gegenüber der Indizierung der Koeffizienten (de Boer, 1982). Für die Ableitung des zweistufigen Krümmungstensors ergibt sich durch formal gleiches Vorgehen wie bei (2.56) durch Vorwärtstransport auf die aktuelle Konfiguration ein Zusammenhang mit dem räumlichen Gradienten der Winkelgeschwindigkeit $\text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha$ (Eringen & Kafadar, 1976):

$$({}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha)^\blacktriangle_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha^T (\text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha) \mathbf{F}_\alpha. \quad (2.84)$$

2.9 Parameterlinien und natürliche Basissysteme

In vielen Fällen erweist es sich als günstig, zur Beschreibung und vor allem zur Interpretation der Deformation konvektive Koordinaten einzuführen. Dabei handelt es sich um ein körperfestes Koordinatensystem, das sich wie materielle Linien mit dem Körper deformiert. Die Punkte der Referenzkonfiguration werden dabei ein-eindeutig durch die Angabe von drei Parametern Θ_α^i , $i = 1, 2, 3$, identifiziert. Die Variation jeweils eines Parameters bei festgehaltenen anderen Parametern gestattet die Einführung von drei Parameterlinien, die zur Beschreibung des gesamten Körpers genutzt werden können. Im Fall eines Mischungskörpers können für jede Konstituierende φ^α unterschiedliche Parameterlinien eingeführt werden, die als besondere materielle Linien der jeweiligen Konstituierenden durch deren Bewegung aus der Referenzkonfiguration in die aktuelle Konfiguration transportiert werden. Zwischen den Parametern Θ_α^i und den Ortsvektoren \mathbf{X}_α der materiellen Punkte in der Referenzkonfiguration besteht der funktionale Zusammenhang

$$\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha(\Theta_\alpha^1, \Theta_\alpha^2, \Theta_\alpha^3). \quad (2.85)$$

Da der Zusammenhang als ein-eindeutig angenommen wird, kann die Beziehung (2.85) invertiert werden. Man erhält die Werte der Parameter in Abhängigkeit von der Position:

$$\Theta_\alpha^i = \Theta_\alpha^i(\mathbf{X}_\alpha). \quad (2.86)$$

Die Tangentenvektoren an die drei Parameterlinien bilden ein Basissystem und werden als natürliche oder konvektive Basis bezeichnet (Laugwitz, 1977; de Boer, 1982; Klingbeil, 1989). Die natürlichen Basisvektoren in der Referenzkonfiguration ergeben sich als Tangentenvektoren an die Parameterlinien durch Ableitung der Ortsvektoren \mathbf{X}_α nach den Parametern Θ_α^i :

$$(\mathbf{h}_\alpha)_i = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha(\Theta_\alpha^1, \Theta_\alpha^2, \Theta_\alpha^3)}{\partial \Theta_\alpha^i}. \quad (2.87)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß die natürlichen Basisvektoren weder normiert sind noch senkrecht aufeinander stehen, es handelt sich vielmehr um beliebige, schiefwinklige Basen.

Berücksichtigt man, daß zwischen den Ortsvektoren \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration und den Ortsvektoren \mathbf{X}_α der Referenzkonfiguration durch die Bewegungsfunktion (2.8) ein ein-eindeutiger Zusammenhang besteht, so ergibt sich auch zwischen den Ortsvektoren der aktuellen Konfiguration und den Parameterlinien ein ein-eindeutiger Zusammenhang. Damit können die natürlichen Basisvektoren der aktuellen Konfiguration als Tangentenvektoren an die Parameterlinien im deformierten Zustand angegeben werden:

$$(\mathbf{a}_\alpha)_i = \frac{\partial \mathbf{x}(\Theta_\alpha^1, \Theta_\alpha^2, \Theta_\alpha^3)}{\partial \Theta_\alpha^i}. \quad (2.88)$$

Aufgrund der Kettenregel der Differentiation gilt außerdem

$$(\mathbf{a}_\alpha)_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \Theta_\alpha^i} = \mathbf{F}_\alpha (\mathbf{h}_\alpha)_i. \quad (2.89)$$

Weil die Differentiale der Parameter $d\Theta_\alpha^i$ als kontravariante Größen eingeführt wurden, sind die natürlichen Basisvektoren per Definition kovariante Vektoren. Da sich die natürlichen Basisvektoren mit materiellen Punkten der Konstituierenden φ^α bewegen, können sie als ausgezeichnete materielle Linienelemente $d\mathbf{x}$ angesehen werden. Diese Eigenschaft zeigt sich auch im direkten Vergleich von (2.89) mit (2.20). Zur Interpretation der Deformations- und Verzerrungsmaße wird von dieser Tatsache noch Gebrauch gemacht.

Neben den kovarianten oder natürlichen Basisvektoren können außerdem für jede Konstituierende φ^α auch kontravariante oder duale Basisvektoren $(\mathbf{h}_\alpha)^i$ der Referenzkonfiguration und $(\mathbf{a}_\alpha)^i$ der Momentankonfiguration eingeführt werden. Aufgrund der Dualität der ko- und der kontravarianten Basisvektoren stehen diese jeweils paarweise senkrecht aufeinander. Somit gilt für die Skalarprodukte zwischen

Basisvektoren unterschiedlicher Varianz:

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}_\alpha)_i \cdot (\mathbf{h}_\alpha)^j &= \delta_i^j, \\ (\mathbf{a}_\alpha)_i \cdot (\mathbf{a}_\alpha)^j &= \delta_i^j.\end{aligned}\tag{2.90}$$

Das *Kronecker*-Symbol δ_i^j nimmt den Wert Eins an, wenn i und j gleich sind, und es nimmt den Wert Null an, wenn i und j unterschiedlich sind:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}\tag{2.91}$$

Außerdem können die dualen Basisvektoren aus der Ableitung der Parameterlinien nach den Ortsvektoren bestimmt werden. Es ergibt sich für die kontravarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration

$$(\mathbf{h}_\alpha)^i = \frac{\partial \Theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{X}_\alpha}\tag{2.92}$$

und für die kontravarianten Basisvektoren der aktuellen Konfiguration

$$(\mathbf{a}_\alpha)^i = \frac{\partial \Theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{x}}.\tag{2.93}$$

Im Gegensatz zum Skalarprodukt von Basisvektoren unterschiedlicher Varianz, das gemäß (2.90) das *Kronecker*-Symbol ergibt, liefern Skalarprodukte zwischen kovarianten Vektoren die natürliche oder kovariante Metrik:

$$\begin{aligned}(h_\alpha)_{ij} &= (\mathbf{h}_\alpha)_i \cdot (\mathbf{h}_\alpha)_j, \\ (a_\alpha)_{ij} &= (\mathbf{a}_\alpha)_i \cdot (\mathbf{a}_\alpha)_j.\end{aligned}\tag{2.94}$$

Die Metrik wird auch als „shifter“ (Marsden & Hughes, 1983) bezeichnet, weil mit ihr die Varianz von Vektoren geändert werden kann und dadurch die Indices ihre Stellung an dem entsprechenden Symbol ändern:

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}_\alpha)_i &= (h_\alpha)_{ij} (\mathbf{h}_\alpha)^j, \\ (\mathbf{a}_\alpha)_i &= (a_\alpha)_{ij} (\mathbf{a}_\alpha)^j.\end{aligned}\tag{2.95}$$

Analog zu (2.94) ergibt sich die duale oder kontravariante Metrik aus dem Skalarprodukt der kontravarianten Basisvektoren:

$$\begin{aligned}(h_\alpha)^{ij} &= (\mathbf{h}_\alpha)^i \cdot (\mathbf{h}_\alpha)^j, \\ (a_\alpha)^{ij} &= (\mathbf{a}_\alpha)^i \cdot (\mathbf{a}_\alpha)^j\end{aligned}\tag{2.96}$$

mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}_\alpha)^i &= (h_\alpha)^{ij} (\mathbf{h}_\alpha)_j, \\ (\mathbf{a}_\alpha)^i &= (a_\alpha)^{ij} (\mathbf{a}_\alpha)_j.\end{aligned}\tag{2.97}$$

Verlangt man vom Einheitstensor \mathbf{I} (Fundamentaltensor 2. Stufe), daß er Vektoren identisch abbildet, so ergeben sich je nach Darstellung des Vektors unterschiedliche Koeffizientendarstellungen des Einheitstensors bezüglich der natürlichen Basisvektoren:

$$\mathbf{I} = \delta_i^j \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}_j = \delta_j^i \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j = h_{ij} \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j = h^{ij} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j.\tag{2.98}$$

2.10 Deformationstensoren und natürliche Basis

Interpretiert man die natürlichen Basisvektoren $(\mathbf{h}_\alpha)_i$ und $(\mathbf{a}_\alpha)_i$ als spezielle Lienelemente in der Referenzkonfiguration und in der aktuellen Konfiguration, so können die Transporteigenschaften des Deformationsgradienten gut mit Hilfe der natürlichen Basisvektoren veranschaulicht werden. Durch Anwendung der Kettenregel der Differentiation folgt aus (2.15) mit der Definition der natürlichen Basis der aktuellen Konfiguration (2.88) und der dualen Basis der Referenzkonfiguration (2.92) für den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta_\alpha^i} \otimes \frac{\partial \Theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^i,\tag{2.99}$$

für den inversen Deformationsgradienten ergibt sich analog:

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \Theta_\alpha^i} \otimes \frac{\partial \Theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{h}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^i.\tag{2.100}$$

Da in der natürlichen Basisdarstellung des Deformationsgradienten Basisvektoren sowohl der Referenzkonfiguration als auch der aktuellen Konfiguration auftreten, wird der bereits angesprochene Zweifeldcharakter des Deformationsgradienten in der Darstellung (2.99) besonders deutlich. Wendet man den Deformationsgradienten \mathbf{F}_α im Sinn der linearen Abbildung auf die Basisvektoren $(\mathbf{h}_\alpha)_i$ der Referenzkonfiguration an, so werden durch die natürliche Basisdarstellung die Transporteigenschaften (2.20) und (2.89) nochmals bestätigt:

$$\mathbf{F}_\alpha (\mathbf{h}_\alpha)_i = \left((\mathbf{a}_\alpha)_j \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j \right) (\mathbf{h}_\alpha)_i = (\mathbf{a}_\alpha)_i.\tag{2.101}$$

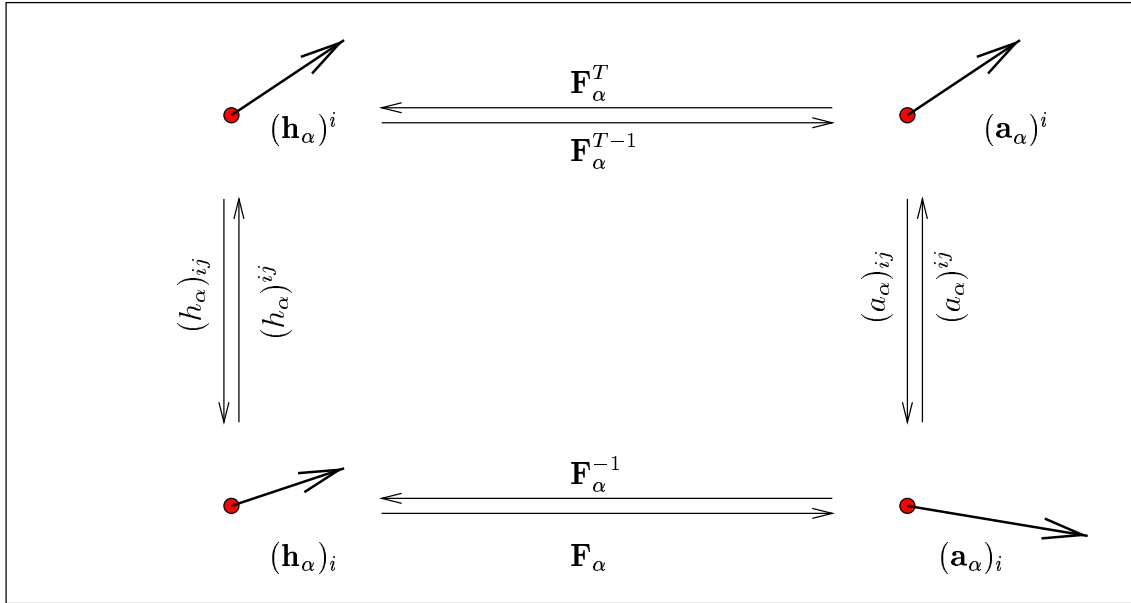


Abbildung 2.6: Deformationsgradient, Metrik und natürliche Basis

Der entsprechende kovariante Rücktransport von Vektoren der aktuellen Konfiguration auf die Referenzkonfiguration wird durch den inversen Deformationsgradienten geleistet. Auch dies lässt sich in der natürlichen Basisdarstellung einfach zeigen:

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1}(\mathbf{a}_\alpha)_i = \left((\mathbf{h}_\alpha)_j \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^j \right) (\mathbf{a}_\alpha)_i = (\mathbf{h}_\alpha)_i. \quad (2.102)$$

Kontravariante oder duale Vektoren werden durch den transponierten Deformationsgradienten und seine Inverse von einer auf die andere Konfiguration abgebildet:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{T-1}(\mathbf{h}_\alpha)^i &= \left((\mathbf{a}_\alpha)^j \otimes (\mathbf{h}_\alpha)_j \right) (\mathbf{h}_\alpha)^i = (\mathbf{a}_\alpha)^i, \\ \mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{a}_\alpha)^i &= \left((\mathbf{h}_\alpha)^j \otimes (\mathbf{a}_\alpha)_j \right) (\mathbf{a}_\alpha)^i = (\mathbf{h}_\alpha)^i. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Die Transporteigenschaften des Deformationsgradienten zwischen den einzelnen Konfigurationen sind in Abbildung 2.6 sowohl für kovariante als auch für kontravariante Vektoren dargestellt.

Durch Einsetzen der Basisdarstellung (2.99) des Deformationsgradienten in (2.28) und (2.31) gelangt man zur Darstellung der Deformationstensoren \mathbf{C}_α und \mathbf{B}_α in natürlichen Basissystemen der Referenzkonfiguration bzw. der aktuellen Konfiguration. Aus den Definitionen der Deformationstensoren \mathbf{C}_α und \mathbf{B}_α ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha = (a_\alpha)_{ij} \left((\mathbf{h}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j \right), \\ \mathbf{B}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T = (h_\alpha)^{ij} \left((\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)_j \right). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Aus der Darstellung (2.104) wird ersichtlich, daß \mathbf{C}_α ein kontravarianter Tensor der Referenzkonfiguration ist, während \mathbf{B}_α einen kovarianten Tensor der aktuellen Konfiguration darstellt. Die Bezeichnung der Varianz eines Tensors richtet sich dabei nach der Varianz der zugehörigen Tensorbasis (Ehlers, 1989)³. Beide Deformationstensoren beziehen nach (2.104) jeweils die Metrik der einen Konfiguration auf die Basis der anderen Konfiguration.

Da der *Almansische* Verzerrungstensor \mathbf{A}_α mit dem inversen Deformationstensor \mathbf{B}_α^{-1} gebildet wird, ist er genau wie der *Lagrangesche* Verzerrungstensor \mathbf{E}_α auf eine kontravariante Tensorbasis bezogen. Die Darstellung der Verzerrungstensoren in natürlichen Basissystemen liefert somit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\alpha &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[(a_\alpha)_{ij} - (h_\alpha)_{ij}][(\mathbf{h}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j], \\ \mathbf{A}_\alpha &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha^{-1}) = \frac{1}{2}[(a_\alpha)_{ij} - (h_\alpha)_{ij}][(\mathbf{a}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^j].\end{aligned}\tag{2.105}$$

Der *Lagrangesche* Verzerrungstensor besitzt nach (2.105) die kontravariante Tensorbasis der Referenzkonfiguration, und der *Almansische* Verzerrungstensor ist auf die kontravariante Basis der aktuellen Konfiguration bezogen. Das Koeffizientenschema beider Verzerrungstensoren ist gleich. Es stellt gerade die Differenz der Metriken beider Konfigurationen dar. Man erhält also mit (2.105) neben der Interpretation der Verzerrungstensoren als Differenz der Quadrate von materiellen Linienelementen auch eine differentialgeometrische Interpretation als Differenz von Metriken.

Durch Transport der kontravarianten Basissysteme zwischen der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration mit dem transponierten Deformationsgradienten \mathbf{F}_α^T , wie in Abbildung 2.6 dargestellt, gelangt man über die Basisdarstellung zum kontravarianten Vorwärtstransport und zum kontravarianten Rückwärtstransport der Verzerrungstensoren:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\alpha, \\ \mathbf{A}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \mathbf{E}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}.\end{aligned}\tag{2.106}$$

Dieser Zusammenhang wurde bereits in (2.37) aufgrund der Definition der Verzerrungstensoren angegeben. Die Darstellung in den natürlichen Basissystemen verdeutlicht die Transporteigenschaften (2.106).

³Dies weicht von der Bezeichnungsweise z. B. nach Marsden & Hughes (1983) ab, die die Bezeichnung nach der Stellung der Indices an den Koeffizienten ausrichten.

2.11 Cosserat-Deformationstensoren und natürliche Basis

Da die Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ genau wie der Deformationsgradient \mathbf{F}_α Vektoren der Referenzkonfiguration auf die aktuelle Konfiguration abbildet, handelt es sich ebenfalls um einen Zweifeldtensor, so daß die Basisdarstellung der Mikrobewegung von folgender Form ist:

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha = (\bar{R}_\alpha)^i_j (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j. \quad (2.107)$$

Dabei kann man das Koeffizientenschema $(\bar{R}_\alpha)^i_j$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit den Basisvektoren der Referenzkonfiguration zusammenfassen, indem man die Summation über den Index j ausführt. Dies führt zur Definition von neuen Basissystemen

$$(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)^i := (\bar{R}_\alpha)^i_j (\mathbf{h}_\alpha)^j \quad (2.108)$$

und zur Darstellung der Mikrobewegung in der Form

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha = (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)^i. \quad (2.109)$$

Eine gleichwertige Alternative besteht darin, in (2.107) die Summation über den Index i auszuführen, so daß man zur Darstellung

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha = (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_j \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j \quad (2.110)$$

für die Mikrobewegung gelangt. Dabei sind die Basen $(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_j$ folgendermaßen definiert:

$$(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_j := (\bar{R}_\alpha)^i_j (\mathbf{a}_\alpha)_i. \quad (2.111)$$

Über die Dualitätsforderungen

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)^i \cdot (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_j &= \delta_j^i, \\ (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^i \cdot (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_j &= \delta_j^i, \end{aligned} \quad (2.112)$$

sind dann analog zu (2.90) die kovarianten Basisvektoren $(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_j$ und die kontravarianten Basisvektoren $(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^i$ definiert. Zu beachten ist an dieser Stelle, daß die neu eingeführten Basisvektoren keine Tangentenvektoren an Parameterlinien darstellen, sie sind vielmehr als Abkürzung für die in (2.107) auftretende Summe zu verstehen. Dies führt insbesondere bei der Berechnung der zugehörigen *Christoffel*-Symbole zum Verlust der Symmetrieeigenschaften.

Aus den beiden unterschiedlichen Darstellungen (2.109) und (2.110) des Zweifeldtensors $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ ergibt sich das Transportverhalten der Mikrobewegung in den beiden gleichwertigen Formen

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_\alpha)_i &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i, \\ (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_i &= \bar{\mathbf{R}}_\alpha (\mathbf{h}_\alpha)_i. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Im direkten Vergleich mit (2.22) folgt, daß durch die erste Wahl die Direktoren $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ der aktuellen Konfiguration mit den natürlichen Basisvektoren $(\mathbf{a}_\alpha)_i$ der aktuellen Konfiguration identifiziert werden. Die in (2.108) definierten Basisvektoren $(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$ sind dann als Referenzdirektoren zu interpretieren. Diese Interpretation wurde bereits von Besdo (1974) angegeben. Da die Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ eine reine Rotation darstellt, die natürlichen Basisvektoren $(\mathbf{a}_\alpha)_i$ der aktuellen Konfiguration aber ihre Länge verändern, sind durch diese Wahl auch die Längen der Referenzdirektoren $\boldsymbol{\Xi}_\alpha = (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$ veränderlich. Dies ist z. B. bei der Berechnung des mikropolaren Kreiseltensors $\bar{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha$ in der natürlichen Basisdarstellung zu berücksichtigen, da (2.72) die zeitliche Konstanz der Referenzdirektoren voraussetzt. Für die hier getroffene Wahl $\boldsymbol{\xi}_\alpha = (\mathbf{a}_\alpha)_i$ muß dann die Berechnungsvorschrift für den Kreiseltensor spezifiziert werden. Die zweite Wahl identifiziert die Direktoren $\boldsymbol{\Xi}_\alpha$ der Referenzkonfiguration mit den entsprechenden Basisvektoren $(\mathbf{h}_\alpha)_i$. In diesem Fall sind die Referenzdirektoren zeitlich konstant. Die aktuellen Direktoren $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ sind demgemäß mit den Basisvektoren $(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_i$ zu identifizieren.

Neben den beiden in der klassischen Kontinuumsmechanik üblichen Konfigurationen, der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration, kann man aufgrund der beiden Darstellungen der Mikrobewegung (2.109) und (2.110) zwei weitere Konfigurationen einführen (Steinmann, 1992, 1994; Diebels & Ehlers, 1996b), die im weiteren als vorrotierte und rückrotierte *Cosserat*-Konfiguration oder als $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ - und $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ -Konfiguration (Volk, 1999) bezeichnet werden. Diese zusätzlichen Konfigurationen sind in der Abbildung 2.7 zusammen mit der Referenz- und der Momentankonfiguration dargestellt. Es ergeben sich die folgenden Interpretationen:

1. Nach der ersten Wahl sind die Referenzdirektoren $\boldsymbol{\Xi}_\alpha = (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$ Elemente der rückrotierten *Cosserat*-Konfiguration; sie werden durch die Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ auf die aktuelle Konfiguration abgebildet. Aufgrund der Orthogonalität der Mikrobewegung und mit Hilfe von (2.113)₁ zeigt man, daß die rückrotierte *Cosserat*-Konfiguration die Geometrie der aktuellen Konfiguration besitzt. Das äußert sich darin, daß die Metrik beider Konfigurationen übereinstimmt:

$$(a_\alpha)_{ij} = (\bar{h}_\alpha)_{ij}. \tag{2.114}$$

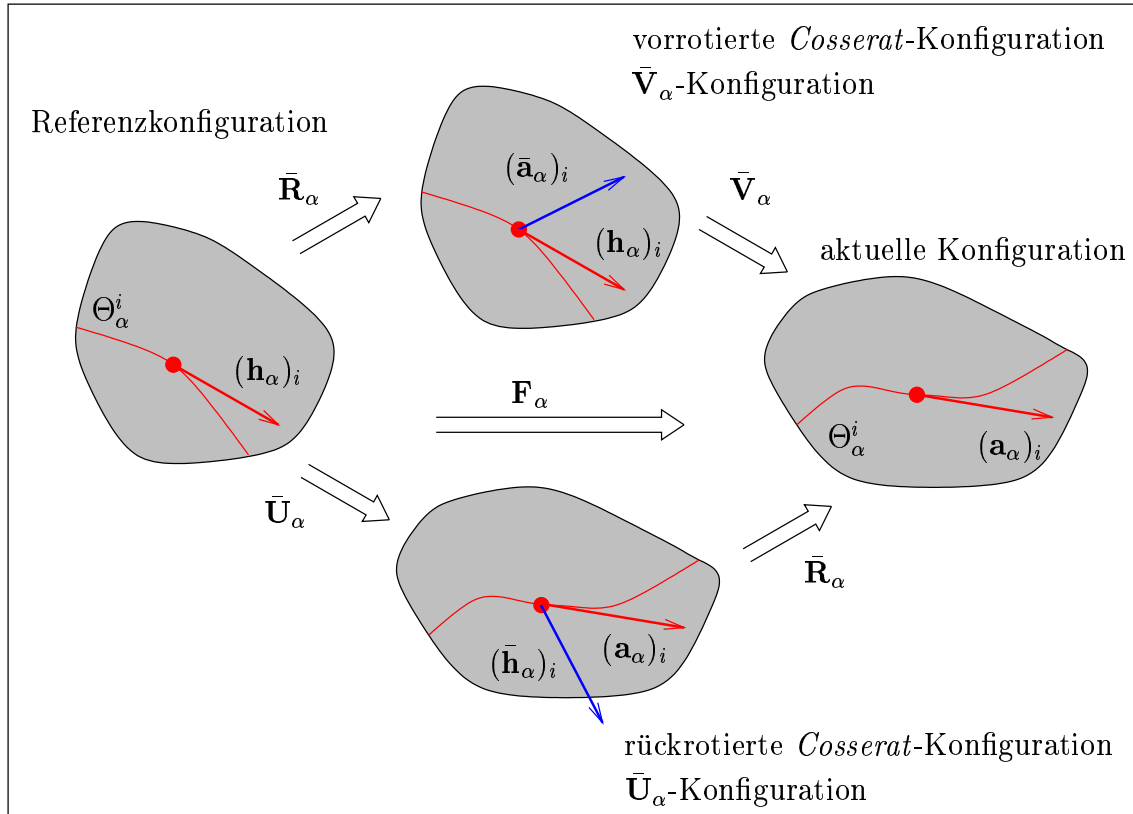


Abbildung 2.7: Cosserat-Konfigurationen

Die rückrotierte *Cosserat*-Konfiguration nimmt für die Direktoren die Stellung einer Referenzkonfiguration ein, so daß $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ auch in der Interpretation als Zweifeldtensor den Charakter einer Größe der Referenzkonfiguration behält.

2. Folgt man der zweiten Möglichkeit, so sind die aktuellen Direktoren $\xi_\alpha = (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_i$ Elemente der vorrotierten *Cosserat*-Konfiguration; sie entstehen durch Abbildung der referentiellen Basisvektoren mit Hilfe der Mikrobewegung. In diesem Fall stimmt die Geometrie der Referenzkonfiguration mit der Geometrie der vorrotierten *Cosserat*-Konfiguration überein:

$$(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_{ij} = (\mathbf{h}_\alpha)_{ij}. \quad (2.115)$$

Für die Direktoren stellt die vorrotierte *Cosserat*-Konfiguration eine aktuelle Konfiguration dar. Auch in der Interpretation als Zweifeldtensor bleibt $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ ein Maß der aktuellen Konfiguration.

In Abbildung 2.7 wird dieser Sachverhalt veranschaulicht. Außerdem ergibt sich durch die Einführung der beiden *Cosserat*-Konfigurationen eine neue Interpretation der *Cosserat*-Deformationstensoren als Zweifeldtensoren. Setzt man nämlich die Basisdarstellungen des Deformationsgradienten (2.99) und der Mikrobewegung (2.109)

bzw. (2.110) in die Definition der *Cosserat*-Deformationstensoren $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ und $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ ein, so ergeben sich für die beiden Deformationstensoren folgende Basisdarstellungen:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}_\alpha &= (a_\alpha)_{ij} (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j = (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^i, \\ \bar{\mathbf{V}}_\alpha &= (h_\alpha)^{ij} (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_j = (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^i.\end{aligned}\tag{2.116}$$

Der *Cosserat*-Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ als Zweifeldtensor bildet also die Basisvektoren $(\mathbf{h}_\alpha)_i$ der Referenzkonfiguration auf die Basisvektoren $(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$ der rückrotierten *Cosserat*-Konfiguration ab, während der *Cosserat*-Deformationstensor $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ die Direktoren $(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_i$ der vorrotierten *Cosserat*-Konfiguration auf die Basisvektoren der aktuellen Konfiguration abbildet. Beide Deformationstensoren beinhalten dabei sowohl eine Streckung als auch eine Drehung.

2.12 Krümmungstensoren in der natürlichen Basis

Um die Krümmungstensoren in der natürlichen Basisdarstellung angeben zu können, benötigt man die Ableitungen sowohl der Basisvektoren $(\mathbf{a}_\alpha)_i$ und $(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^i$ der aktuellen Konfiguration als auch der Vektoren $(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$ und $(\mathbf{h}_\alpha)^i$ der rückrotierten *Cosserat*-Konfiguration. Die Ableitungen können mittels der *Christoffel*-Symbole angegeben werden, wenn man sich wiederum auf die Basis selbst bezieht:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{a}_\alpha)_i}{\partial\Theta_\alpha^j} &= (\gamma_\alpha)_{ij}{}^k (\mathbf{a}_\alpha)_k, & \frac{\partial(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^i}{\partial\Theta_\alpha^j} &= -(\gamma_\alpha)_{kj}{}^i (\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^k, \\ \frac{\partial(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i}{\partial\Theta_\alpha^j} &= (\bar{\Gamma}_\alpha)_{ij}{}^k (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_k, & \frac{\partial(\mathbf{h}_\alpha)^i}{\partial\Theta_\alpha^j} &= -(\bar{\Gamma}_\alpha)_{kj}{}^i (\mathbf{h}_\alpha)^k.\end{aligned}\tag{2.117}$$

Weil die Basisvektoren $(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$ nicht als Tangentenvektoren an Parameterlinien eingeführt wurden, handelt es sich nicht mehr um zweite Ableitungen des Ortsvektors nach den Parametern Θ_α^i . Die *Christoffel*-Symbole $(\bar{\Gamma}_\alpha)_{ij}{}^k$ sind daher nicht symmetrisch in den beiden vorderen Indizes (Besdo, 1974; Diebels & Ehlers, 1996b; Volk, 1999).

Der dreistufige Krümmungstensor ${}^R\mathcal{K}_\alpha^3$ gemäß der Definition (2.50) hat dann die folgende Darstellung in der natürlichen Basis

$${}^R\mathcal{K}_\alpha^3 = \left((\gamma_\alpha)_{kj}{}^l - (\bar{\Gamma}_\alpha)_{kj}{}^l \right) (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_l \otimes (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)^k \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^j.\tag{2.118}$$

Daraus ergibt sich der zweistufige Krümmungstensor ${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ durch eine Verjüngung der vorderen beiden Basissysteme mit dem Permutationstensor $\overset{3}{\mathbf{E}}$ (Fundamentaltensor 3. Stufe oder *Ricci*-Tensor) in der Basisdarstellung

$$\overset{3}{\mathbf{E}} = \frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{\bar{h}_\alpha}} (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i \otimes (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_j \otimes (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_k, \quad (2.119)$$

wobei

$$\bar{h}_\alpha = \det[(\bar{h}_\alpha)_{ij}] = \det[(a_\alpha)_{ij}] = a_\alpha \quad (2.120)$$

die Determinante der kovarianten Metrik der aktuellen Konfiguration darstellt. Das Permutationssymbol ε^{ijk} nimmt abhängig von den Werten der Indizes die Werte 0, 1 oder -1 an:

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k = 1, 2, 3/2, 3, 1/3, 1, 2 : \text{gerade Permutation,} \\ -1 & i, j, k = 3, 2, 1/2, 1, 3/1, 3, 2 : \text{ungerade Permutation,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.121)$$

Es ergibt sich somit die folgende Koeffizientendarstellung für den zweistufigen Krümmungstensor

$${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha = -\frac{\varepsilon^{ijk}}{2\sqrt{\bar{h}_\alpha}} \left((\gamma_\alpha)_{km}{}^l - (\bar{\Gamma}_\alpha)_{km}{}^l \right) (\bar{h}_\alpha)_{jl} (\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^m. \quad (2.122)$$

Da sich ${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ in der natürlichen Basisdarstellung auf die gleichen Basisvektoren bezieht wie der *Cosserat*-Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_\alpha$, entnimmt man (2.122), daß es sich bei ${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ ebenfalls um ein referentielles Maß handelt, das bezüglich der Referenz- und der rückrotierten *Cosserat*-Konfiguration darstellbar ist. Stellt man den Krümmungstensor $\overset{3}{\mathcal{K}}_\alpha$ in den natürlichen Basissystemen dar, so findet man analog

$$\overset{3}{\mathcal{K}}_\alpha = \left((\gamma_\alpha)_{kj}{}^l - (\bar{\Gamma}_\alpha)_{kj}{}^l \right) (\mathbf{a}_\alpha)_l \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^k \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^j \quad (2.123)$$

und nach einer entsprechenden Verjüngung mit dem Permutationstensor

$$\bar{\mathcal{K}}_\alpha = -\frac{\varepsilon^{ijk}}{2\sqrt{a_\alpha}} \left((\gamma_\alpha)_{km}{}^l - (\bar{\Gamma}_\alpha)_{km}{}^l \right) (a_\alpha)_{jl} (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^m. \quad (2.124)$$

Die Basis in (2.124) entspricht der natürlichen Basisdarstellung des Deformationstensors $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ nach (2.116). Dieser Ausdruck zeigt, daß $\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ ein Krümmungstensor der

aktuellen Konfiguration ist. Berücksichtigt man weiterhin, daß die aktuelle Konfiguration und die rückrotierte *Cosserat*-Konfiguration die gleiche Geometrie und somit die gleiche Metrik besitzen,

$$(a_\alpha)_{ij} = (\bar{h}_\alpha)_{ij}, \quad (2.125)$$

so unterscheiden sich die Ausdrücke (2.122) und (2.124) nur in den Basissystemen.

Damit wird anhand der Basisdarstellungen (2.122) und (2.124) das in (2.56) angegebene Transportverhalten sofort ersichtlich, denn der Transport von ${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha$ auf die aktuelle Konfiguration führt mit den Eigenschaften des Deformationsgradienten \mathbf{F}_α und der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ zum Krümmungstensor $\bar{\mathcal{K}}_\alpha$.

Kapitel 3:

Bilanzgleichungen

3.1 Allgemeine Bilanzstruktur

Im vorangegangenen Kapitel wurden die kinematischen Grundlagen mikropolarer Mischungen behandelt, im vorliegenden Kapitel werden die Bilanzgleichungen zusammengestellt. Sie repräsentieren die Erhaltungssätze der Mechanik und stellen einen axiomatischen Zusammenhang dar zwischen der Änderung von physikalischen Größen des Körpers \mathcal{B} wie Masse, Impuls, Drall etc. und deren Fluß über den Rand \mathcal{S} des Körpers sowie ihrer Zufuhr und Produktion im Inneren des Körpers \mathcal{B} . Die Bilanzgleichungen für Einphasenmaterialien können der Literatur entnommen werden, z. B. Truesdell & Toupin (1960), Becker & Bürger (1975), Eringen & Kafadar (1996), Haupt (1995).

Die Bilanzgleichungen für Mischungen und Mehrphasenkontinua wurden von Truesdell & Toupin (1960), Bowen (1976), de Boer & Ehlers (1986), Ehlers (1989b, 1993a, 1993b, 1996) und anderen behandelt. Die Grundlage zur Formulierung der Bilanzgleichungen für Mischungen bilden *Truesdells metaphysische Prinzipie* (Truesdell, 1984), die wie die Bilanzgleichungen einen axiomatischen Charakter haben:

1. *„All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.“*

Alle Eigenschaften der Mischung müssen mathematische Konsequenzen der Eigenschaften der Konstituierenden sein.

2. *„So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.“*

Um die Bewegung einer Konstituierenden zu beschreiben, kann man diese gedanklich vom Rest der Mischung trennen, vorausgesetzt, man beachtet die Einwirkung der anderen Konstituierenden.

3. *„The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body.“*

Die Bewegung der Mischung wird von denselben Gleichungen beherrscht wie die Bewegung eines Einphasenmaterials.

Die Mischung ist also genau die Summe aller Teile, und alle Eigenschaften der Mischung müssen aus den Eigenschaften der Konstituierenden folgen. Insbesondere soll das Schnittprinzip der Mechanik für die einzelnen Konstituierenden gelten: Um die Bewegung einer Konstituierenden zu beschreiben, wird diese aus der Mischung herausgeschnitten. Die Wechselwirkungen mit den anderen Konstituierenden müssen dabei explizit berücksichtigt werden. Die Formulierung der Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Konstituierenden ist genau wie die Formulierung von Materialgesetzen für die Spannungen Aufgabe der Materialtheorie. Schließlich soll sich die Mischung als Ganzes wie ein einphasiges Material verhalten. Im Rahmen der hier beschriebenen makroskopischen Theorie „weiß“ die Mischung also nicht, daß sie mikroskopisch aus unterschiedlichen Konstituierenden besteht.

Die im weiteren vorgestellten Bilanzen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie basieren auf Axiomen, also auf Aussagen, die auf Beobachtungen beruhen und nicht widerlegt werden konnten. Im Rahmen einer Theorie sind die Axiome, die deren Grundlage bilden, nicht beweisbar; sie bilden vielmehr das Fundament, auf dem die Theorie aufbaut. Alternativ zur axiomatischen Einführung der unterschiedlichen Bilanzgleichungen können auch andere Axiome benutzt werden, aus denen die Bilanzgleichungen entwickelt werden können. Eine Möglichkeit besteht in der Forderung einer Energiebilanz in Verbindung mit gewissen Invarianzforderungen (Zastrau, 1981), aus denen wiederum die anderen Bilanzgleichungen folgen. Eine andere Möglichkeit ergibt sich zumindest im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik mit der Einführung des *Boltzmann*-Axioms, aus dem die Drallbilanz als Konsequenz der Impulsbilanz folgt.

Vergleicht man die unterschiedlichen Bilanzgleichungen miteinander, so findet man in allen Gleichungen dieselbe Struktur. Dies führt zu dem Konzept der allgemeinen Bilanzgleichung („Masterbilanz“), das sich sowohl in der Kontinuumstheorie für Einphasenmaterialien (Truckenbrodt, 1980; Haupt, 1995) als auch in der Theorie Poröser Medien (Diebels & Ehlers, 1996b; Ehlers, 1996) als vorteilhaft zur Herleitung der speziellen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie erwiesen hat. Dabei wird von der folgenden Struktur Gebrauch gemacht, die alle Bilanzgleichungen aufweisen: Die Änderung einer beliebigen physikalischen Größe Ψ innerhalb eines materiellen Körpers \mathcal{B} wird hervorgerufen durch drei unterschiedliche Prozesse, nämlich durch

1. den Ausfluß $\phi \cdot \mathbf{n}$ der entsprechenden Größe über den Rand \mathcal{S} des Körpers mit dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} (Nahwirkung),
2. die Zufuhr σ innerhalb des Körpervolumens, wobei die Ursache für die Zufuhr außerhalb des Körpers zu suchen ist (Fernwirkung), und
3. die Produktion $\hat{\Psi}$ ebenfalls innerhalb des Körpervolumens. Im Gegensatz zur Zufuhr ist die Ursache der Produktion im Fall superponierter Kontinua aber

innerhalb des Mischungskörpers selbst zu suchen¹.

In Abbildung 3.1 werden diese Zusammenhänge verdeutlicht.

Nach dem dritten metaphysischen Prinzip hat die Struktur der Bilanzen für die Mischung als Ganzes die gleiche Form wie die Bilanzen eines Einphasenkontinuums. Somit führt die allgemeine, globale Bilanz (Truckenbrodt, 1980; Haupt, 1995) der Mischung für skalarwertige physikalische Größen Ψ und für vektorwertige physikalische Größen $\mathbf{\Psi}$ zu den folgenden Gleichungen, wenn ein Produktionsterm berücksichtigt wird (Diebels & Ehlers, 1996b; Ehlers, 1996):

$$\begin{aligned} \text{Änderung von } \Psi &= \text{Ausfluß} + \text{Zufuhr} + \text{Produktion} \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \Psi \, dv &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{B}} \sigma \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\Psi} \, dv, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{\Psi} \, dv &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{\Phi} \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{\Psi}} \, dv. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die linke Seite von (3.1) beschreibt die zeitliche Änderung der physikalischen Größe Ψ , $\mathbf{\Psi}$ innerhalb des Körpers \mathcal{B} , während die rechte Seite die jeweiligen Ursachen für die Änderung angibt. Unter der Annahme, daß die vorliegenden Felder hinreichend stetig und stetig differenzierbar sind, kann man mit Hilfe des Transporttheorems für Volumenelemente oder des *Reynoldsschen* Transporttheorems

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \Psi \, dv = \int_{\mathcal{B}} (\dot{\Psi} + \Psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) \, dv \quad (3.2)$$

die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauschen. Der Punkt $(\cdot)\dot{}$ = $d(\cdot)/dt$ bedeutet dabei die totale Zeitableitung bezüglich der Geschwindigkeit der Mischung (baryzentrische Geschwindigkeit). Außerdem kann das Oberflächenintegral über den (Aus-)Fluß $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}$ mit dem *Gaußschen* Integralsatz

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \, dv \quad (3.3)$$

¹Im Rahmen der klassischen Thermodynamik wird als Ursache der Produktion eine Wechselwirkung des betrachteten Körpers mit der „Welt“ gesehen. Eine Produktion tritt dabei allerdings nur in der Entropiebilanz auf. In den Partialbilanzen für alle beteiligten Größen tritt eine Produktion auf, die die Wechselwirkung von φ^α mit den anderen Konstituierenden φ^β , $\alpha \neq \beta$, beschreibt. Im Rahmen einer mikroskopischen Betrachtungsweise entspricht das ebenfalls einer Wechselwirkung mit der Umgebung von φ^α .

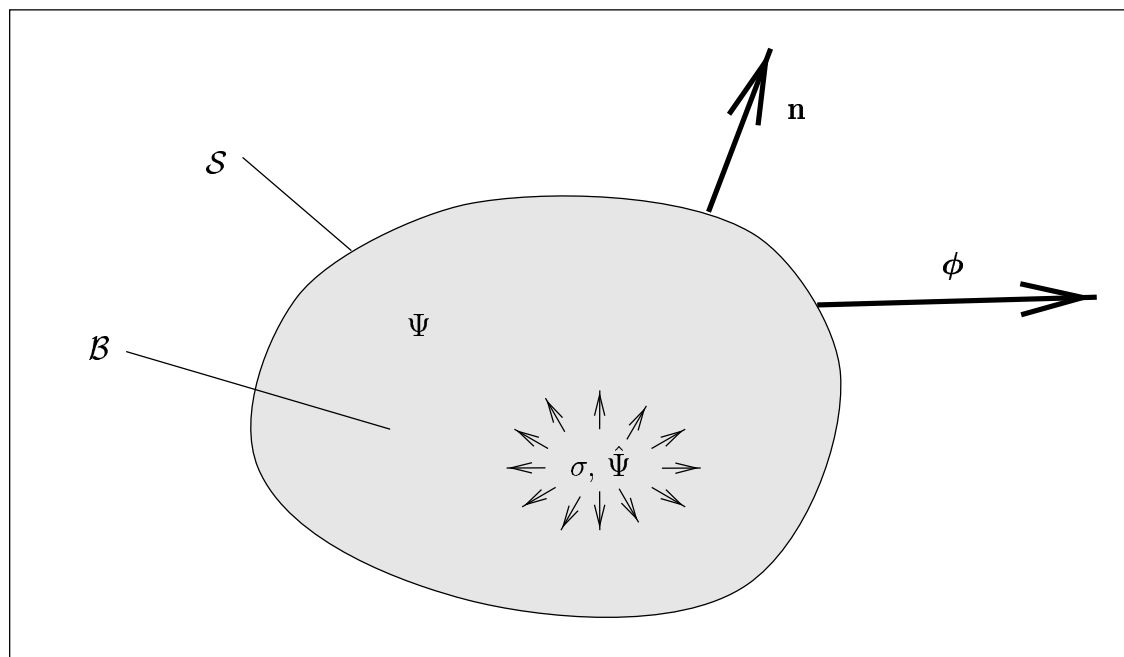


Abbildung 3.1: Materieller Körper und physikalische Größe

in ein Volumenintegral umgeformt werden. Die lokale Form der Bilanzgleichungen entsteht dann aus der Forderung, daß im Grenzfall eines beliebig kleinen Volumens der Integrand selbst verschwindet, wenn die Felder stetig und stetig differenzierbar sind:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} + \Psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{div} \phi + \sigma + \hat{\Psi}, \\ \dot{\Psi} + \Psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{div} \Phi + \sigma + \hat{\Psi}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Eine alternative Darstellung der lokalen Bilanzen erhält man, wenn man die materielle Zeitableitung durch den lokalen und den konvektiven Anteil ausdrückt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \operatorname{div}(\phi - \Psi \dot{\mathbf{x}}) + \sigma + \hat{\Psi}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \operatorname{div}(\Phi - \Psi \otimes \dot{\mathbf{x}}) + \sigma + \hat{\Psi}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Die in den allgemeinen Bilanzen (3.4) oder (3.5) auftretenden Größen und ihre Bedeutung sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Die Identifikation dieser allgemeinen Größen zur Konstruktion der konkreten Bilanzen wird in den nächsten Abschnitten detailliert diskutiert.

Unter Zugrundelegung der metaphysischen Prinzipie erhält man analog zu (3.1) die

Mischungsgrößen		Partialgrößen	
Ψ, Ψ	physikalische Größe	Ψ^α, Ψ^α	physikalische Größe
ϕ	Flußvektor von Ψ	ϕ^α	Flußvektor von Ψ^α
Φ	Flußtensor von Ψ	Φ^α	Flußtensor von Ψ^α
σ, σ	Zufuhr von Ψ, Ψ	$\sigma^\alpha, \sigma^\alpha$	Zufuhr von Ψ^α, Ψ^α
$\hat{\Psi}, \hat{\Psi}$	Produktion von Ψ, Ψ	$\hat{\Psi}^\alpha, \hat{\Psi}^\alpha$	Produktion von Ψ^α, Ψ^α

Tabelle 3.1: Bezeichnungen in den allgemeinen Bilanzen

Struktur der Bilanzen für die einzelnen Konstituierenden φ^α in globaler Form

$$\begin{aligned}
 \frac{d_\alpha}{dt} \int_B \Psi^\alpha dv &= \int_S \phi^\alpha \cdot \mathbf{n} da + \int_B \sigma^\alpha dv + \int_B \hat{\Psi}^\alpha dv, \\
 \frac{d_\alpha}{dt} \int_B \Psi^\alpha dv &= \int_S \Phi^\alpha \mathbf{n} da + \int_B \sigma^\alpha dv + \int_B \hat{\Psi}^\alpha dv.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Daraus ergibt sich unter der Annahme von Stetigkeit und Differenzierbarkeit sowie durch Anwendung des *Gaußschen* Integralsatzes und des *Reynoldsschen* Transporttheorems die lokale Form

$$\begin{aligned}
 (\Psi^\alpha)'_\alpha + \Psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \phi^\alpha + \sigma^\alpha + \hat{\Psi}^\alpha, \\
 (\Psi^\alpha)'_\alpha + \Psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \Phi^\alpha + \sigma^\alpha + \hat{\Psi}^\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Die auftretenden materiellen Zeitableitungen beziehen sich in diesem Fall auf die Bewegung der Konstituierenden φ^α ; sie werden mit dem Symbol $(\cdot)'_\alpha$ gekennzeichnet. Die in den Partialbilanzen (3.7) auftretenden Größen haben die gleiche Bedeutung wie die Größen in der allgemeinen Bilanz der Mischung. Sie beziehen sich nur auf die Konstituierende φ^α und nicht auf die Mischung φ . Dies ist durch den hochgestellten Index α gekennzeichnet. In Tabelle 3.1 ist die Bedeutung der Partialgrößen angegeben.

Nach den metaphysischen Prinzipien, die der Mischungstheorie und der *TPM* zugrunde liegen, ist die Mischung nicht mehr als die Summe ihrer Konstituierenden. Da die physikalischen Größen Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie volumenspezifische Größen sind, sind die Mischungsgrößen durch die Summe der Partialgrößen der einzelnen Konstituierenden gegeben. Aus diesem Grund folgen die Bilanzen der Mischung auch aus der Summe der Partialbilanzen. Summiert man die Partialbilanzen über alle Konstituierenden φ^α und vergleicht das Resultat der Summation

mit den Bilanzen der Mischung φ als Ganzes, so ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen den Partialgrößen und den Mischungsgrößen (Diebels & Ehlers, 1996b; Ehlers, 1996):

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \sum_{\alpha} \Psi^{\alpha}, & \Psi &= \sum_{\alpha} \Psi^{\alpha}, \\
 \phi &= \sum_{\alpha} (\phi^{\alpha} - \Psi^{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha}), & \Phi &= \sum_{\alpha} (\Phi^{\alpha} - \Psi^{\alpha} \otimes \mathbf{d}_{\alpha}), \\
 \sigma &= \sum_{\alpha} \sigma^{\alpha}, & \sigma &= \sum_{\alpha} \sigma^{\alpha}, \\
 \hat{\Psi} &= \sum_{\alpha} \hat{\Psi}^{\alpha}, & \hat{\Psi} &= \sum_{\alpha} \hat{\Psi}^{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Zu bemerken ist, daß die physikalischen Größen Ψ^{α} , ihre Zufuhr σ^{α} und ihre Produktion $\hat{\Psi}^{\alpha}$ additiv sind, während die Flußterme ϕ und Φ zusätzlich zu den Flußtermen der einzelnen Konstituierenden auch noch die Relativbewegung zwischen der Konstituierenden φ^{α} und der Mischung φ enthalten. Dabei wird die Relativbewegung durch die Diffusionsgeschwindigkeit

$$\mathbf{d}_{\alpha} = \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{x}} \tag{3.9}$$

beschrieben, die aus der Differenz der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_{\alpha}$ der Konstituierenden φ^{α} und der baryzentrischen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ gebildet wird. Die baryzentrische Geschwindigkeit wird dabei als dichtegewichteter Mittelwert der Geschwindigkeiten eingeführt:

$$\rho \dot{\mathbf{x}} = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}. \tag{3.10}$$

Hierbei stellen $\rho = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha}$ die Dichte der Mischung und ρ^{α} die Partialdichte der Konstituierenden dar. Der Zusammenhang (3.10) ergibt sich automatisch bei der Diskussion der Impulsbilanzen.

Zur Herleitung der einzelnen Bilanzen aus der allgemeinen Bilanz ist die Identifikation von Ψ , ϕ , σ und $\hat{\Psi}$ für die Mischungsgrößen in der Tabelle 3.2 und für die Partialgrößen in der Tabelle 3.3 zusammengestellt (Diebels & Ehlers, 1996b; Ehlers, 1996). Die in einer mikropolaren Theorie gegenüber der Standardformulierung zusätzlich auftretenden Terme in der Drallbilanz und in der Energiebilanz stehen in den Tabellen jeweils in separaten Zeilen. Eine detaillierte Diskussion und eine Identifikation der einzelnen Terme aus den zugrunde liegenden Axiomen schließen sich in den nächsten Abschnitten an.

Beim Vergleich der Einträge in den beiden Tabellen wird deutlich, daß mit Ausnahme der Entropiebilanz die Produktionsterme für die Mischung verschwinden, während

	Ψ, Ψ	ϕ, Φ	σ, σ	$\hat{\Psi}, \hat{\Psi}$
Masse	ρ	$\mathbf{0}$	0	0
Impuls	$\rho \dot{\mathbf{x}}$	\mathbf{T}	$\rho \mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall mikropolar	$\mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{x}}$ $+\rho \bar{\Theta} \bar{\omega}$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}$ $+\mathbf{M}$	$\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}$ $+\rho \mathbf{c}$	$\mathbf{0}$
Energie mikropolar	$\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ $+\frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \rho \bar{\Theta} \bar{\omega}$	$\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{q}$ $+\mathbf{M}^T \bar{\omega}$	$\rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \rho r$ $+\rho \mathbf{c} \cdot \bar{\omega}$	0
Entropie	$\rho \eta$	$-\varphi_\eta$	σ_η	$\hat{\eta}$

Tabelle 3.2: Bilanzrelationen für die Mischung

	Ψ^α, Ψ^α	ϕ^α, Φ^α	$\sigma^\alpha, \sigma^\alpha$	$\hat{\Psi}^\alpha, \hat{\Psi}^\alpha$
Masse	ρ^α	$\mathbf{0}$	0	$\hat{\rho}^\alpha$
Impuls	$\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha$	\mathbf{T}^α	$\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$	$\hat{\mathbf{s}}^\alpha$
Drall mikropolar	$\mathbf{x} \times \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha$ $+\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}^\alpha$ $+\mathbf{M}^\alpha$	$\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$ $+\rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha$	$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$
Energie mikropolar	$\rho^\alpha \varepsilon^\alpha$ $+\frac{1}{2} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha$ $+\frac{1}{2} \bar{\omega}_\alpha \cdot \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha$	$(\mathbf{T}^\alpha)^T \dot{\mathbf{x}}_\alpha$ $-\mathbf{q}^\alpha$ $+(\mathbf{M}^\alpha)^T \bar{\omega}_\alpha$	$\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha$ $+\rho^\alpha r^\alpha$ $+\rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha \cdot \bar{\omega}_\alpha$	$\hat{\varepsilon}^\alpha$
Entropie	$\rho^\alpha \eta^\alpha$	$-\mathbf{q}^\alpha / \vartheta^\alpha$	$\rho^\alpha r^\alpha / \vartheta^\alpha$	$\hat{\eta}^\alpha$

Tabelle 3.3: Bilanzrelationen für die Konstituierenden

sie in den Partialbilanzen durchweg auftreten. Die Ursache dafür findet sich im zweiten der metaphysischen Prinzipie: Durch die Einführung der Produktionsgrößen in den Bilanzen kann die Wechselwirkung zwischen den Konstituierenden beschrieben werden: Die Massenproduktion $\hat{\rho}^\alpha$ beschreibt Phasenübergänge zwischen den einzelnen Konstituierenden der Mischung, z. B. das Gefrieren von Wasser zu Eis, die Impuls- und Drallproduktionen sind als Wechselwirkungskräfte und Wechselwirkungsmomente zwischen den Konstituierenden interpretierbar, und die Energieproduktion kann als Wärmeaustausch zwischen den Konstituierenden gedeutet werden.

Diese Interpretationen lassen erkennen, daß die einzelnen Produktionsterme nicht beliebig gewählt werden können, sondern der Bedingung (3.8)₄ genügen müssen, damit für die Mischungsbilanzen die Erhaltungseigenschaften von Masse, Impuls, Drall und Energie gewährleistet sind.

3.2 Massenbilanz

Das Axiom der Massenerhaltung besagt, daß sich die Masse in einem geschlossenen System nicht ändert; insbesondere ändert sich die Masse eines materiellen Körpers nicht:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \, dv = 0. \quad (3.11)$$

Somit ergibt sich die Massenbilanz der Mischung durch die Identifikation der physikalischen Größe Ψ mit der Mischungsdichte ρ . Fluß-, Zufuhr- und Produktionsterme sind nicht vorhanden, so daß die lokale Form der Massenbilanz gemäß (3.4) lautet:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.12)$$

Integriert man die lokale Massenbilanz ausgehend von einer Referenzdichte ρ_0 , so erhält man mit

$$(\det \mathbf{F})^\cdot = (\det \mathbf{F}) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.13)$$

den Zusammenhang

$$\rho = \rho_0 \det \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.14)$$

Im Fall materiell konstanter Dichte, $\dot{\rho} = 0$, ergibt sich aus (3.12) die Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.15)$$

Aus der integrierten Form der Massenbilanz (3.14) folgt für den inkompressiblen Fall

$$\det \mathbf{F} = 1. \quad (3.16)$$

Im Rahmen der *TPM* kommen diese Annahmen jedoch selten vor. In der Regel bezieht sich der Begriff der Inkompressibilität hier auf die effektive Dichte $\rho^{\alpha R}$ einer Konstituierenden und nicht auf die Partialdichte ρ^α oder auf die Mischungsdichte ρ .

Betrachtet man die Massenbilanz für die Konstituierenden φ^α , so ist das Axiom der Massenerhaltung um einen Produktionsterm zu erweitern. Die Masse einer Konstituierenden bleibt demnach nicht konstant, sondern kann durch Massenaustausch zwischen den einzelnen Komponenten der Mischung verändert werden. Dadurch können Prozesse, wie z. B. Schmelzen von Eis und Gefrieren von Wasser, aber auch chemische Reaktionen, die zur Umwandlung einer Konstituierenden in eine andere führen, modelliert werden.

Identifiziert man nach Tabelle 3.3 die physikalische Größe Ψ^α mit der Partialdichte ρ^α und berücksichtigt den Massenproduktionsterm $\hat{\rho}^\alpha$, so ergibt sich aus der lokalen Form der allgemeinen Bilanz (3.7) die Partialmassenbilanz der Phase φ^α :

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \mathbf{x}'_\alpha = \hat{\rho}^\alpha. \quad (3.17)$$

Dabei ist die materielle Ableitung $(\cdot)'_\alpha$ bezüglich der Bewegung der Konstituierenden φ^α nach (2.13) zu bilden. Die Massenproduktion, die mikroskopisch durch Massenaustausch zwischen den einzelnen Konstituierenden verursacht wird, führt zu einer Produktion von Partialvolumen bei einer bestimmten effektiven Dichte:

$$\hat{\rho}^\alpha = \hat{n}^\alpha \rho^{\alpha R}. \quad (3.18)$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Begriff der Inkompressibilität im mikroskopischen Sinn verwandt. Für eine materiell inkompressible Phase bleibt daher die effektive Dichte $\rho^{\alpha R}$ konstant. Änderungen der Partialdichte $\rho^\alpha = n^\alpha \rho^{\alpha R}$ sind dann immer noch durch Änderungen der Volumenanteile möglich. Die Massenbilanz (3.17) reduziert sich im Fall der Inkompressibilität zu einer Volumenbilanz (Ehlers, 1989b; Svendsen & Hutter, 1995; Diebels & Ehlers, 1996a) der Form

$$(n^\alpha)'_\alpha + n^\alpha \operatorname{div} \mathbf{x}'_\alpha = \hat{n}^\alpha \quad (3.19)$$

mit der in (3.18) eingeführten Volumenproduktion \hat{n}^α .

Vergleicht man die Massenbilanz der Mischung (3.12) mit der Summe der Partialmassenbilanzen der einzelnen Konstituierenden (3.17), dann wird nach (3.8) der Zusammenhang zwischen den Mischungs- und den Partialgrößen deutlich:

1. Die Summe der Partialdichten entspricht der Mischungsdichte:

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho^\alpha. \quad (3.20)$$

Da sich sowohl die Mischungsdichte ρ als auch die Partialdichten ρ^α auf das Mischungsvolumen dv beziehen, spiegelt (3.20) die Tatsache wider, daß die Masse der Mischung gerade durch die Summe der Massen der einzelnen Konstituierenden gegeben ist.

2. Die Summe der Diffusionsmassenströme verschwindet:

$$\mathbf{0} = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha}. \quad (3.21)$$

Die Diffusionsmassenströme führen aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der einzelnen Konstituierenden nur zu einer Umverteilung von Masse innerhalb des Mischungsvolumens. Sie gestatten aber keine Massenänderungen, da für die Mischung als Ganzes die Massenerhaltung vorausgesetzt wurde. Die Beziehung (3.21) folgt auch aus den Definitionen der baryzentrischen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ nach (3.10) und der Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{d}_{α} nach (3.9).

3. Die Summe der Dichteproduktionen verschwindet:

$$0 = \sum_{\alpha} \hat{\rho}^{\alpha}. \quad (3.22)$$

Diese Beziehung muß ebenfalls erfüllt sein, damit trotz Produktion von Partialmassen die Massenerhaltung für die gesamte Mischung gewährleistet ist. So muß z. B. beim Schmelzprozeß von Eis die Abnahme der Eismasse innerhalb der Mischung durch die gleichzeitige Zunahme der Wassermasse bilanziert werden.

3.3 „Bilanz“ der Mikroträglichkeit

Ein starrer Körper wird durch seine Masse und durch die Massenverteilung in Form des Massenträgheitstensors charakterisiert. Im Rahmen der *Cosserat*-Theorie benötigt man also neben der Dichte eine weitere Größe, die die Form der als Starrkörper angenommenen materiellen Punkte beschreibt. Sie wird als Mikroträglichkeit bezeichnet. Die in diesem Zusammenhang von Eringen (Eringen, 1964) eingeführte „Bilanz“ der Mikroträglichkeit stellt allerdings keine Bilanzgleichung im Sinne der übrigen Bilanzen dar, weil ihr kein Axiom zugrunde liegt. Sie ist vielmehr eine kinematische Aussage, die besagt, daß sich die materiellen Punkte eines mikropolaren Materials wie mikroskopische Starrkörper verhalten, d. h. die materiellen Punkte ändern ihre Form nicht. Dieser Ansatz führt zu der Aussage, daß die Mikroträglichkeit sich nur durch die Drehung der Hauptträgheitsachsen des materiellen Punktes verändert: Die Zeitableitung der Mikroträglichkeit bezüglich eines mitrotierenden Koordinatensystems ist null.

Ausgehend von der Tatsache, daß der materielle Punkt in der mikropolaren Theorie als „Mikrostarrkörper“ interpretiert wird, weist man den materiellen Punkten der Konstituierenden φ^{α} einen dichtebezogenen Trägheitstensor oder einen Volumenträgheitstensor Θ^{α} zu, der die geometrische Form des mikroskopischen Starrkörpers

beschreibt. Der Volumenträgheitstensor wird repräsentiert durch einen symmetrisch positiv definiten Tensor $\bar{\Theta}^\alpha$ und ändert sich nur durch die Drehung, die der materielle Punkt aufgrund der Mikrobewegung ausführt, d. h. die Hauptträgheitsachsen ändern ihre Orientierung, aber der Abstand von zwei Punkten innerhalb des Mikrostarrrkörpers bleibt konstant. In einem mit den Direktoren rotierenden Koordinatensystem bleibt also die Mikroträgheit konstant, und die mikropolare *Green-Naghdi*-Ableitung verschwindet (Volk, 1999):

$$(\bar{\Theta}^\alpha)^\diamond = (\bar{\Theta}^\alpha)'_\alpha - \bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha - \bar{\Theta}^\alpha \bar{\Omega}_\alpha^T = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Dieser Sachverhalt läßt sich auch durch Rückrotation des Volumenträgheitstensors $\bar{\Theta}^\alpha$ auf die Referenzkonfiguration ausdrücken. Das rückrotierte Volumenträgheitsmoment bleibt demnach konstant (Eringen & Kafadar, 1976):

$$(\bar{\mathbf{R}}_\alpha^T \bar{\Theta}^\alpha \bar{\mathbf{R}}_\alpha)'_\alpha = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

Daraus ergibt sich die materielle Änderung der Mikroträgheit zu

$$(\bar{\Theta}^\alpha)'_\alpha = 2 \text{sym}(\bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha). \quad (3.25)$$

Ein Massenträgheitstensor oder kurz die Mikroträgheit entsteht aus dem Volumenträgheitstensor $\bar{\Theta}^\alpha$ durch Multiplikation mit der Partialdichte ρ^α , wenn man voraussetzt, daß die Partialdichte innerhalb des Mikrostarrrkörpers konstant ist. Unter Beachtung der Massenbilanz (3.17) folgt dann die „Bilanz“ der Mikroträgheit in einer Form, wie sie von Eringen (1964) und Eringen & Kafadar (1976) für einphasige Materialien angegeben wird:

$$(\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \text{div } \mathbf{x}_\alpha = 2 \text{sym}(\rho^\alpha \bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha) + \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha. \quad (3.26)$$

Vergleicht man diese Aussage mit der Struktur der allgemeinen Bilanz, so kann man den ersten Term $2 \text{sym}(\rho^\alpha \bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha)$ der linken Seite als Zufuhrterm und den zweiten Term $\hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha$ als Produktionsterm interpretieren. Da von Eringen (1964) und Eringen & Kafadar (1976) nur einphasige Materialien behandelt werden, tritt der Produktionsterm in diesen Arbeiten nicht auf. Die Mikroträgheit $\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha$ ändert sich nach (3.26) durch die Zufuhr, die ihre Ursache in der Drehung der Hauptachsen der materiellen Punkte hat, und durch eine Produktion von Mikroträgheit aufgrund von Massenaustauschprozessen mit den anderen Konstituierenden.

Im Rahmen der allgemeinen Bilanz ergibt sich im Vergleich von (3.26) mit der

tensoriellen Erweiterung von (3.7) die folgende Identifikation:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\Theta}^{\alpha} &= \rho^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha}, \\
\overset{3}{\Phi}_{\Theta}^{\alpha} &= \overset{3}{\mathbf{0}}, \\
\sigma_{\Theta}^{\alpha} &= 2 \operatorname{sym}(\rho^{\alpha} \bar{\Omega}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha}), \\
\hat{\Psi}_{\Theta}^{\alpha} &= \hat{\rho}^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha} =: \hat{\Theta}^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Damit ist es sofort möglich, die entsprechenden Größen für die Mischung gemäß einer tensoriellen Verallgemeinerung von (3.8) durch rein formales Vorgehen anzugeben und somit aus der Summe der „Partialbilanzen“ die „Bilanz“ der Mikroträgheit der Mischung zu erhalten:

$$(\rho \bar{\Theta})^{\cdot} + \rho \bar{\Theta} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \overset{3}{\Phi}_{\Theta} + \sigma_{\Theta} + \hat{\Psi}_{\Theta}. \tag{3.28}$$

Zwischen den Partial- und den Mischungsgrößen bestehen die folgenden Zusammenhänge:

1. Die Mikroträgheit der Mischung ist die Summe der Partialmikroträgheiten:

$$\rho \bar{\Theta} = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha}. \tag{3.29}$$

2. Ein Fluß von Mikroträgheit der Mischung existiert nur aufgrund von Diffusion:

$$\overset{3}{\Phi}_{\Theta} = - \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha} \otimes \mathbf{d}_{\alpha}. \tag{3.30}$$

3. Die Zufuhr der Mikroträgheit resultiert aus den Drehungen der Trägheitsachsen aller materiellen Punkte in einem *REV*:

$$\sigma_{\Theta} = \sum_{\alpha} 2 \operatorname{sym}(\rho^{\alpha} \bar{\Omega}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha}). \tag{3.31}$$

4. Mikroträgheit wird durch Massenproduktion $\hat{\rho}^{\alpha}$ erzeugt:

$$\hat{\Theta} = \sum_{\alpha} \hat{\rho}^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha}. \tag{3.32}$$

Falls aber die Partikel aller Konstituierenden die gleiche Mikroträgheit besitzen, $\bar{\Theta}^{\alpha} = \bar{\Theta}$, verschwindet $\hat{\Theta}$, da $\sum_{\alpha} \hat{\rho}^{\alpha} = 0$ ist.

Obwohl die in diesem Abschnitt hergeleiteten Ergebnisse die Struktur einer Bilanz besitzen und die „Bilanz“ der Mikroträgheit in diesem Zusammenhang entwickelt wird, fehlt ein entsprechendes Axiom. Diese Tatsache wird sich in den Überlegungen zur Energiebilanz noch bemerkbar machen, wenn man die Ergebnisse der einzelnen Konstituierenden auf die Mischung als Ganzes Überträgt. Aufgrund dieser Sonderstellung der „Bilanz“ der Mikroträgheit sind die entsprechenden Größen zur Identifikation der physikalischen Größen im Rahmen der allgemeinen Bilanz nicht in den Tabellen 3.2 und 3.3 vermerkt. Weiterhin können die formal aus der Bilanzstruktur abgeleiteten Größen (3.29), (3.30), (3.31) und (3.32) nur als Abkürzungen aufgefaßt werden, so daß die Definitionen der entsprechenden Mischungsgrößen keine Restriktionen liefern, wie das bei den anderen Bilanzgleichungen der Fall ist.

Da in der *TPM* keine einzelnen Partikel betrachtet werden, sondern implizit eine Mittelung der Eigenschaften über ein *REV* vorausgesetzt wird, wird im weiteren die Mikroträgheit durch einen isotropen Tensor wiedergegeben:

$$\bar{\Theta}^\alpha = \bar{\theta}^\alpha \mathbf{I}. \quad (3.33)$$

Diese Annahme ist zutreffend, wenn mikroskopisch im *REV* eine statistische Verteilung der ansonsten beliebig geformten Partikel vorliegt. Eine anisotrope Mikroträgheit kann sich folglich nur dann ergeben, wenn mikroskopisch eine Ausrichtung der Partikel im *REV* vorliegt, wie es etwa bei Blockstrukturen der Fall sein kann. Dann ist allerdings auch mit einem makroskopisch anisotropen Verhalten zu rechnen, das im Rahmen der Materialtheorie ebenfalls durch anisotrope Gesetze berücksichtigt werden muß.

Mit der Annahme (3.33) ist die „Bilanz“ der Mikroträgheit (3.25) bzw. (3.26) identisch erfüllt. Nach (3.27)₄ kann sich der Mikrotragheitstensor einer Konstituierenden nur noch ändern, wenn die Dichteproduktion $\hat{\rho}^\alpha$ von Null verschieden ist.

3.4 Impulsbilanz

Das dritte *Newtonsche* Axiom oder die Impulserhaltung besagt, daß die Änderung des Impulses eines Körpers durch die an ihm angreifenden Kräfte verursacht wird. Die entsprechende *Eulersche* Gleichung lautet:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} da. \quad (3.34)$$

Die angreifenden Kräfte lassen sich dabei in zwei Gruppen einteilen: zum einen sind es die Fernwirkungskrafte $\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dv$, die ihre Wirkung im Inneren des Körpers entfalten, zum anderen die Oberflächen- oder Nahwirkungskrafte $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} da$, die über die

Oberfläche durch Kontakt in den Körper eingeleitet werden. Die Spannungsvektoren \mathbf{t} können dabei durch den Spannungstensor \mathbf{T} und den Oberflächennormaleneinheitsvektor \mathbf{n} ausgedrückt werden. Nach dem *Cauchy*-Theorem besteht der lineare Zusammenhang

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n}. \quad (3.35)$$

Mit der Identifikation der Fluß- und Zufuhrgrößen nach Tabelle 3.2 entspricht die physikalische Größe Ψ dem Impuls $\rho \dot{\mathbf{x}}$, der Flußtensor Φ dem *Cauchy*schen Spannungstensor \mathbf{T} und die Zufuhr σ den Fernwirkungskräften $\rho \mathbf{b}$. Somit ergibt sich aus der allgemeinen Bilanz die lokale Form der Impulsbilanz der Mischung zu

$$(\rho \dot{\mathbf{x}})^\cdot + \rho \dot{\mathbf{x}} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (3.36)$$

Die Anwendung der Produktregel auf den ersten Term und die Berücksichtigung der Massenbilanz (3.12) liefern die bekannte Form der Impulsbilanz

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (3.37)$$

Analog erhält man die Impulsbilanz für die Konstituierenden φ^α unter Berücksichtigung einer Impulsproduktion $\hat{\mathbf{s}}^\alpha$:

$$(\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha)^\cdot + \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{s}}^\alpha. \quad (3.38)$$

Auch in diesem Fall kann durch Ausdifferentiation des ersten Terms und durch die Berücksichtigung der Massenbilanz (3.17) eine Vereinfachung erzielt werden. Die so reduzierte Impulsbilanz für eine Konstituierende lautet dann

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha. \quad (3.39)$$

Dabei bezeichnet

$$\hat{\mathbf{p}}^\alpha = \hat{\mathbf{s}}^\alpha - \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad (3.40)$$

die direkte Impulsproduktion.

Zwischen den Mischungsgrößen und den Partialgrößen besteht gemäß der allgemeinen Bilanz der folgende Zusammenhang:

1. Der Impuls der Mischung setzt sich additiv aus den Partialimpulsen zusammen:

$$\rho \dot{\mathbf{x}} = \sum_{\alpha} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha. \quad (3.41)$$

Außerdem entspricht (3.41) der Definition der baryzentrischen Geschwindigkeit nach (3.10). Die baryzentrische Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ entsteht also auf natürliche Art und Weise aus der Impulsbilanz.

2. Der Spannungstensor der Mischung setzt sich aus der Summe von Partialspannungen und Diffusionstermen zusammen:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha} (\mathbf{T}^{\alpha} - \rho^{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} \otimes \mathbf{d}_{\alpha}). \quad (3.42)$$

Berücksichtigt man die Definition der Diffusionsgeschwindigkeit (3.9) und außerdem die Tatsache, daß nach (3.21) die Summe der Diffusionsmassenströme verschwindet, so kann (3.42) umformuliert werden:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha} (\mathbf{T}^{\alpha} - \rho^{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha} \otimes \mathbf{d}_{\alpha}). \quad (3.43)$$

Damit wird deutlich, daß der Diffusionsanteil, der durch die Relativbewegung entsteht, die gleiche Struktur hat wie die *Reynolds*-Spannungen der Turbulenztheorie, die durch die turbulenten Schwankungsbewegungen gegenüber der Hauptströmung hervorgerufen werden. Eine Diskussion der *Reynolds*-Spannungen und ihrer Modellierung findet sich z. B. bei Rodi (1979) oder Hinze (1987).

3. Die Volumenkräfte sind additiv:

$$\rho \mathbf{b} = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \mathbf{b}^{\alpha}. \quad (3.44)$$

4. Die Konstituierenden dürfen untereinander zwar Impuls austauschen, eine Impulsproduktion für die Mischung als Ganzes ist jedoch nicht zugelassen:

$$\mathbf{0} = \sum_{\alpha} \hat{\mathbf{s}}^{\alpha} = \sum_{\alpha} (\hat{\mathbf{p}}^{\alpha} + \hat{\rho}^{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}). \quad (3.45)$$

3.5 Drallbilanz

Nach dem Axiom der Drallbilanz wird eine Dralländerung durch die an dem Körper angreifenden Momente verursacht:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{x}} + \rho \bar{\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}}) dv = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{c}) dv + \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{x} \times \mathbf{t} + \mathbf{m}) da. \quad (3.46)$$

Dabei besteht der volumenbezogene Drall bezüglich des Ursprungs aus dem Drall $\mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{x}}$ aufgrund des Impulses eines materiellen Punktes und aus dem lokalen Drallvektor der Mikrostarrkörper $\rho \bar{\Theta} \bar{\omega}$ (mikropolarer Drallvektor oder Spin), der durch die Mikroträgheit $\rho \bar{\Theta}$ und durch die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ verursacht wird. Die Zufuhrterme bestehen sowohl aus den Momenten $\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}$ der Volumenkräfte bezüglich des Ursprungs als auch aus den Volumenmomenten $\rho \mathbf{c}$, die am materiellen Punkt angreifen. Der Fluß wird durch die Momente der Spannungsvektoren $\mathbf{x} \times \mathbf{t}$ und durch Momentenspannungsvektoren \mathbf{m} auf der Körperoberfläche verursacht. Zwischen den Momentenspannungsvektoren \mathbf{m} und dem Momentenspannungstensor \mathbf{M} besteht, genau wie bei den Spannungen, der Zusammenhang

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \mathbf{n}. \quad (3.47)$$

Im Fall nicht-polarer Kontinua verschwinden der mikropolare Drallvektor $\rho \bar{\Theta} \bar{\omega}$, die Momentenspannungen \mathbf{M} und die Volumenmomente $\rho \mathbf{c}$ identisch. Aus der Drallbilanz folgt unter diesen Voraussetzungen die Symmetrie des *Cauchy*-Spannungstensors.

Mit der Identifikation der Größen nach Tabelle 3.2 entsteht aus der allgemeinen Bilanz die Drallbilanz der Mischung

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{x}} + \rho \bar{\Theta} \bar{\omega})' + (\mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{x}} + \rho \bar{\Theta} \bar{\omega}) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \\ = \operatorname{div}(\mathbf{x} \times \mathbf{T} + \mathbf{M}) + \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

die unter Ausnutzung der Massenbilanz (3.12), der „Bilanz“ der Mikroträgheit (3.28) und der Impulsbilanz (3.37) zu

$$\rho \bar{\Theta} \dot{\bar{\omega}} = \mathbf{I} \times \mathbf{T} + \operatorname{div} \mathbf{M} + \rho \mathbf{c} - [\operatorname{div} \bar{\Phi}_{\Theta} + \sigma_{\Theta} + \hat{\Psi}_{\Theta}] \bar{\omega} \quad (3.49)$$

vereinfacht werden kann. Eine Änderung des Spins erfolgt also über den schiefssymmetrischen Anteil der Spannungen, hier ausgedrückt durch den zweifachen axialen Vektor des Spannungstensors, durch Momentenspannungen und Volumenmomente sowie durch die Änderung der Mikroträgheit. Dabei entsteht der letzte Summand auf der rechten Seite nur dadurch, daß die Zeitableitung des Spins ausdifferenziert wurde und daß von der „Bilanz“ der Mikroträgheit Gebrauch gemacht wurde.

Man findet mit der entsprechenden Identifikation nach Tabelle 3.3 die Drallbilanz der Konstituierenden φ^{α} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \rho^{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} + \rho^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha})'_{\alpha} + (\mathbf{x} \times \rho^{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} + \rho^{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} = \\ = \operatorname{div}(\mathbf{x} \times \mathbf{T}^{\alpha} + \mathbf{M}^{\alpha}) + \mathbf{x} \times \rho^{\alpha} \mathbf{b}^{\alpha} + \rho^{\alpha} \mathbf{c}^{\alpha} + \hat{\mathbf{h}}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dabei wird die Drallproduktion $\hat{\mathbf{h}}^\alpha$ eingeführt.

Die mit der Massenbilanz (3.17), der „Bilanz“ der Mikroträgheit (3.26) und der Impulsbilanz (3.39) vereinfachte Form der Drallbilanz der Konstituierenden lautet:

$$\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha (\bar{\omega}_\alpha)_\alpha' = \mathbf{I} \times \mathbf{T}^\alpha + \operatorname{div} \mathbf{M}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha - 2 [\operatorname{sym}(\rho^\alpha \bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha)] \bar{\omega}_\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha. \quad (3.51)$$

Die direkte Drallproduktion $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$ ergibt sich dabei zu

$$\hat{\mathbf{m}}^\alpha = \hat{\mathbf{h}}^\alpha - \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{s}}^\alpha - \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha. \quad (3.52)$$

Vergleicht man die Mischungsgrößen mit der Summe der Partialgrößen, so entstehen unter Beachtung der Restriktionen aus der Impulsbilanz (3.41) bis (3.45) die folgenden Zusammenhänge:

1. Der mikropolare Drallvektor ist additiv:

$$\rho \bar{\Theta} \bar{\omega} = \sum_\alpha \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha. \quad (3.53)$$

2. Die Momentenspannungen der Mischung beinhalten genau wie die Spannungstensoren der Mischung nach (3.42) Diffusionsanteile, die hier durch die Diffusion des Dralls $\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha$ hervorgerufen werden:

$$\mathbf{M}^\alpha = \sum_\alpha (\mathbf{M}^\alpha - \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha). \quad (3.54)$$

3. Die volumenbezogenen Momente sind additiv:

$$\rho \mathbf{c} = \sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha. \quad (3.55)$$

4. Für die Mischung als Ganzes gilt die Drallerhaltung, so daß ein Drallaustausch unter den Konstituierenden zwar möglich ist, insgesamt aber kein Drall produziert wird:

$$\mathbf{0} = \sum_\alpha \hat{\mathbf{h}}^\alpha = \sum_\alpha (\hat{\mathbf{m}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha). \quad (3.56)$$

Bei dieser Darstellung wird berücksichtigt, daß nach (3.45) $\sum_\alpha \hat{\mathbf{s}}^\alpha = \mathbf{0}$ ist.

3.6 Energiebilanz

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik verlangt die Energieerhaltung. Demzufolge ändert sich die Energie eines Körpers nur durch die an ihm verrichtete mechanische und thermische Leistung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_B (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \rho \bar{\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) dv &= \\
 &= \int_B (\rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{c} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} + \rho r) dv + \\
 &+ \int_S (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{m} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{q}) da.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Die spezifische Energie besteht dabei aus der inneren Energie $\rho \varepsilon$, aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ der Translationsbewegung und aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2} \rho \bar{\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}$ der Rotationsbewegung. Durch die angreifenden Volumenkräfte $\rho \mathbf{b}$ und Volumenmomente $\rho \mathbf{c}$ im Körperinneren sowie durch die Kraft- und Momentenspannungen \mathbf{t} und \mathbf{m} auf der Körperoberfläche wird mechanische Leistung verrichtet. Thermische Leistung wird durch Wärmezufuhr ρr (äußere Fernwirkung) und durch den Wärmefluß $-\mathbf{q}$ über die Körperoberfläche hinweg verrichtet. Das negative Vorzeichen des Wärmeflusses entspricht der Konvention, den Wärmefluß als Zufluß entgegen der äußeren Normalen \mathbf{n} positiv zu zählen.

Mit der entsprechenden Identifikation der Größen nach Tabelle 3.2 lautet die lokale Form der Energiebilanz der Mischung:

$$\begin{aligned}
 (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \rho \bar{\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) \cdot + \\
 + (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \rho \bar{\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \\
 = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}^T \bar{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{q}) + \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{c} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} + \rho r.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Unter Berücksichtigung der Bilanzen für Masse (3.12), Mikroträgheit (3.28), Impuls (3.37) und Drall (3.49) ergibt sich als reduzierte Bilanzgleichung die Bilanz der inneren Energie in der Form

$$\begin{aligned}
 \rho \dot{\varepsilon} &= \mathbf{T} \cdot \bar{\boldsymbol{\Delta}} + \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} \bar{\boldsymbol{\omega}} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \\
 &+ \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot [\operatorname{div} \overset{3}{\mathbf{\Phi}}_{\Theta} + \boldsymbol{\sigma}_{\Theta} + \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\Theta}] \bar{\boldsymbol{\omega}}.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Dabei wurde von der Identität

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{T}) \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T} \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}} \tag{3.60}$$

Gebrauch gemacht (de Boer, 1982). Die *Cosserat*-Deformationsgeschwindigkeit $\bar{\Delta} = \mathbf{L} - \bar{\Omega}$, die bei der Bildung der Spannungsleistung in (3.59) in natürlicher Weise auftritt, wurde bereits in (2.79) eingeführt.

Mit einer Energieproduktion $\hat{\varepsilon}^\alpha$ läßt sich die lokale Form der Energiebilanz für die Konstituierende φ^α angeben:

$$\begin{aligned}
& (\rho^\alpha \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha \cdot \bar{\omega}_\alpha)'_\alpha + \\
& + (\rho^\alpha \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha \cdot \bar{\omega}_\alpha) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \\
& = \operatorname{div}(\mathbf{T}^{\alpha T} \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \mathbf{M}^{\alpha T} \bar{\omega}_\alpha - \mathbf{q}) + \\
& + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha \cdot \bar{\omega}_\alpha + \rho^\alpha r^\alpha + \hat{\varepsilon}^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Zieht man die anderen hier bereits behandelten Bilanzen heran, erhält man schließlich die Bilanz der inneren Energie für die Phase φ^α in der Form

$$\begin{aligned}
\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha)'_\alpha & = \mathbf{T}^\alpha \cdot \bar{\Delta}_\alpha + \mathbf{M}^\alpha \cdot \operatorname{grad} \bar{\omega}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{q}^\alpha + \rho^\alpha r^\alpha \\
& + \bar{\omega}_\alpha \cdot [\operatorname{sym}(\rho^\alpha \bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha) \bar{\omega}_\alpha] + \hat{\varepsilon}^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Die direkte Energieproduktion ist dabei durch

$$\hat{\varepsilon}^\alpha = \hat{\varepsilon}^\alpha - \hat{\rho}^\alpha \varepsilon^\alpha - \frac{1}{2} \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \frac{1}{2} \bar{\omega}_\alpha \cdot \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha - \hat{\mathbf{p}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \hat{\mathbf{m}}^\alpha \cdot \bar{\omega}_\alpha \tag{3.63}$$

gegeben.

Zwischen den Mischungsgrößen und den Größen der Konstituierenden bestehen die folgenden Zusammenhänge, die unter Beachtung der Resultate (3.41) bis (3.45) aus der Impulsbilanz und der Resultate (3.53) bis (3.56) aus der Drallbilanz hergeleitet werden:

1. Die innere Energie der Mischung setzt sich nicht nur aus der Summe der inneren Partialenergien zusammen, sondern beinhaltet auch die kinetische Energie der translatorischen und der rotatorischen Diffusionsbewegung. Diese zusätzlichen Anteile sind mit der *Brownschen* Molekularbewegung vergleichbar, die mikroskopisch als Ursache der Temperatur interpretiert werden kann. Im Fall von Granulaten spricht man bei solchen Diffusionstermen auch von der granularen Temperatur. Für die innere Energie ergibt sich

$$\rho \varepsilon = \sum_\alpha (\rho^\alpha \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\delta}_\alpha \cdot \bar{\delta}_\alpha). \tag{3.64}$$

In Analogie zur Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{d}_α bezeichnet $\bar{\delta}_\alpha$ die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten zwischen Partikeln der Konstituierenden φ^α und der Mischung φ :

$$\bar{\delta}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}. \quad (3.65)$$

2. Der Wärmefluß

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \sum_\alpha (\mathbf{q}^\alpha - \mathbf{T}^{\alpha T} \mathbf{d}_\alpha - \mathbf{M}^{\alpha T} \bar{\delta}_\alpha) + \\ &+ \sum_\alpha (\rho^\alpha \varepsilon^\alpha \mathbf{d}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha (\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha) \mathbf{d}_\alpha + \frac{1}{2} (\bar{\delta}_\alpha \cdot \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\delta}_\alpha) \mathbf{d}_\alpha) \\ &+ (\overset{3}{\Phi}_\Theta^T \bar{\omega}) \bar{\omega} \end{aligned} \quad (3.66)$$

setzt sich aus den Wärmeflüssen der einzelnen Konstituierenden und aus Diffusionsanteilen zusammen. Die Diffusionsanteile entsprechen hier dem Transport von innerer Energie und von kinetischer Energie der translatorischen und der rotatorischen Diffusionsbewegung. Die Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{d}_α ist für diesen Transport verantwortlich. Der Term in der dritten Zeile beinhaltet zwar den Fluß der Mikroträgheit der Mischung, doch dieser Term stellt nur eine Abkürzung dar und existiert lediglich aufgrund der Diffusion von Mikroträgheit der einzelnen Konstituierenden. Daher ist er mit den anderen Diffusionstermen vergleichbar und tritt auf der rechten Seite der Gleichung auf. Ein entsprechender Term in der baryzentrischen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ tritt in Kombination mit $\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha$ auf. Er verschwindet aber aufgrund der Restriktion (3.21) aus der Massenbilanz. Die entsprechende Restriktion für die Mikroträgheit fehlt, da der „Bilanz“ der Mikroträgheit kein Axiom zugrunde liegt. Vielmehr wurden die Summenrelationen zur Definition der Mischungsgrößen herangezogen.

3. Die Wärmezufuhr

$$\rho r = \sum_\alpha (\rho^\alpha r^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha \cdot \bar{\delta}_\alpha) \quad (3.67)$$

der Mischung berücksichtigt neben den Wärmezufuhrtermen der einzelnen Konstituierenden auch die Leistung, die durch die Diffusionsbewegung an den Volumenkräften und an den Volumenmomenten erbracht wird.

4. Für die Mischung als Ganzes gilt die Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_\alpha \hat{e}^\alpha = \sum_\alpha (\hat{e}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \varepsilon + \frac{1}{2} \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{\omega}_\alpha \cdot \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha \cdot \bar{\omega}_\alpha). \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.7 Entropiebilanz

Die Entropiebilanz nimmt unter den Bilanzgleichungen eine Sonderrolle ein. Im Gegensatz zu den anderen bisher betrachteten Bilanzen dient die Entropiebilanz im allgemeinen nicht zur Bestimmung von Änderungen physikalischer Größen, sondern bestimmt die Richtung eines thermodynamischen Prozesses. In der Formulierung als zweiter Hauptsatz der Thermodynamik wird daher aus der Entropiebilanz eine Ungleichung.

Aus der Erfahrung weiß man, daß sich mechanische Energie vollständig in thermische Energie umwandeln läßt, die Rückgewinnung mechanischer Energie aus thermischer Energie hingegen ist nie vollständig (Baehr, 1984; Hutter, 1995). Dieses Prinzip der Irreversibilität wird im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zum Ausdruck gebracht, allerdings ist die „richtige“ Formulierung dieses Prinzips von Anfang an von Irrtümern und Mißverständnissen geprägt gewesen (Truesdell, 1971; Dreyer & Weiss, 1997). Ein wesentlicher Streitpunkt in der Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik betrifft die Wahl des Entropieflusses (Müller, 1967, 1973; Hutter, 1977).

Mit noch nicht näher spezifiziertem Entropiefluß φ_η , einer Entropiezufuhr σ_η und einer Entropieproduktion $\hat{\eta}$ lautet die Entropiebilanz der Mischung:

$$(\rho\eta)^\cdot + \rho\eta \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = -\operatorname{div} \varphi_\eta + \sigma_\eta + \hat{\eta} \quad (3.69)$$

oder, unter Berücksichtigung der Massenbilanz,

$$\rho \dot{\eta} = -\operatorname{div} \varphi_\eta + \sigma_\eta + \hat{\eta}. \quad (3.70)$$

Dabei wird der Entropiefluß genau wie der Wärmefluß als Zufluß positiv gezählt. Das Prinzip der Irreversibilität besagt nun, daß die Entropieproduktion $\hat{\eta}$ in einem abgeschlossenen System für einen zulässigen thermodynamischen Prozeß niemals negativ ist. Das führt zu der Forderung

$$\hat{\eta} \geq 0. \quad (3.71)$$

Unter dem Begriff des thermodynamischen Prozesses versteht man dabei die Lösung der Feldgleichung, also der Bilanzen in Kombination mit den entsprechenden konstitutiven Gleichungen unter Beachtung der Randbedingungen des Problems.

Für die einzelnen Konstituierenden ergibt sich analog

$$(\rho^\alpha \eta^\alpha)^\cdot_\alpha + \rho^\alpha \eta^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}^\alpha}{\vartheta^\alpha} \right) + \frac{\rho^\alpha r^\alpha}{\vartheta^\alpha} + \hat{\eta}^\alpha, \quad (3.72)$$

bzw. durch Einsetzen der Massenbilanz

$$\rho^\alpha (\eta^\alpha)'_\alpha = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}^\alpha}{\vartheta^\alpha}\right) + \frac{\rho^\alpha r^\alpha}{\vartheta^\alpha} + \hat{\eta}^\alpha - \hat{\rho}^\alpha \eta^\alpha. \quad (3.73)$$

Hier werden der Entropiefluß φ_η^α und die Entropiezufuhr σ_η^α als *a priori* getroffene konstitutive Annahmen bereits konkretisiert und über die Temperatur ϑ^α mit dem Wärmefluß $-\mathbf{q}^\alpha$ und der Wärmezufuhr $\rho^\alpha r^\alpha$ in Verbindung gebracht. Dieser Ansatz ist in der klassischen Thermodynamik üblich (Baehr, 1984; Hutter, 1995). Eine Diskussion dieses Ansatzes und der Auswirkung auf den Entropiefluß und die Entropiezufuhr der Mischung findet sich bei Ehlers (1989b, 1996).

Die Entropieproduktionen der einzelnen Konstituierenden beschränkt man in der Regel nicht, da dies zu restriktiv wäre, vielmehr beschränkt man sich im Rahmen des Prinzips der Irreversibilität auf die Forderung (3.71).

Der Zusammenhang zwischen den Mischungsgrößen und den Partialgrößen ergibt sich auch hier aus den allgemeinen Zusammenhängen (3.8):

1. Die Entropie der Mischung setzt sich additiv aus den Partialentropien der einzelnen Konstituierenden zusammen:

$$\rho \eta = \sum_\alpha \rho^\alpha \eta^\alpha. \quad (3.74)$$

2. Der Entropiefluß der Mischung resultiert aus den Flüssen der einzelnen Konstituierenden, die bereits als Wärmefluß durch Temperatur angesetzt worden sind, und aus den entsprechenden Diffusionsanteilen

$$\varphi_\eta = \sum_\alpha \left(\frac{\mathbf{q}^\alpha}{\vartheta^\alpha} + \rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{d}_\alpha \right). \quad (3.75)$$

Besonders die Berücksichtigung der Diffusionsanteile in (3.75) hat in der Literatur längere Zeit zu Diskussionen geführt. Einige Bemerkungen dazu sind in (Ehlers, 1989b, 1994, 1996) gegeben. Durch die Ausnutzung der allgemeinen Bilanzstrukturen entstehen die Diffusionsterme im Entropieflußvektor der Mischung hier direkt aus den Summenrelationen (3.8).

3. Die Entropiezufuhr der Mischung ist die Summe der partialen Zufuhrterme, die ebenfalls *a priori* durch das Verhältnis von Wärmezufuhr zu Temperatur angenommen werden:

$$\sigma_\eta = \sum_\alpha \frac{\rho^\alpha r^\alpha}{\vartheta^\alpha}. \quad (3.76)$$

4. Schließlich ergibt sich die Entropieproduktion als Summe der Partialproduktionen:

$$\hat{\eta} = \sum_{\alpha} \hat{\eta}^{\alpha} \geq 0. \quad (3.77)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik kann für abgeschlossene Systeme in der oben gegebenen Form nur für die Mischung als Ganzes formuliert werden. Die Forderung (3.71) bzw. (3.77) ist somit zur Erfüllung des Prinzips der Irreversibilität notwendig und hinreichend.

Ziel der weiteren Untersuchungen ist es nun, die konstitutiven Gleichungen derart zu wählen, daß eine Verletzung des Prinzips der Irreversibilität ausgeschlossen ist. Mit der Form (3.73) der Entropiebilanz gelangt man in der Materialtheorie jedoch nicht zu aussagekräftigen Resultaten. Vielmehr ist es notwendig, die Entropiebilanz in die *Clausius-Duhem*-Ungleichung zu überführen. Dazu wird im Sinne einer freien *Helmholtz*schen Energie die Größe ψ^{α} eingeführt, die als Differenz zwischen der inneren Energie und dem Produkt von Temperatur und Entropie definiert ist:

$$\psi^{\alpha} := \varepsilon^{\alpha} - \vartheta^{\alpha} \eta^{\alpha}. \quad (3.78)$$

In der klassischen Gleichgewichtsthermodynamik entsteht die freie Energie durch eine *Legendre*-Transformation. Diese Eigenschaft wird hier nicht vorausgesetzt, vielmehr wird ψ^{α} im Sinne einer Abkürzung eingeführt. Ersetzt man in der Entropiebilanz (3.73) die Entropie η^{α} durch die Beziehung (3.78) und berücksichtigt dabei die Energiebilanz (3.62), so entsteht folgende Form der Entropiebilanz für die Konstituierende φ^{α} :

$$\begin{aligned} -\frac{\rho^{\alpha}(\psi^{\alpha})'_{\alpha}}{\vartheta^{\alpha}} - \frac{\rho^{\alpha}\eta^{\alpha}(\vartheta^{\alpha})'_{\alpha}}{\vartheta^{\alpha}} &= -\frac{1}{\vartheta^{\alpha}}(\mathbf{T}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{L}}_{\alpha} + \mathbf{M}^{\alpha} \cdot \text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{(\vartheta^{\alpha})^2} \text{grad } \vartheta^{\alpha} \cdot \mathbf{q}^{\alpha} + \hat{\eta}^{\alpha} - \frac{1}{\vartheta^{\alpha}}(\hat{\varepsilon}^{\alpha} + \hat{\rho}^{\alpha} \boldsymbol{\Theta}^{\alpha} - \hat{\rho}^{\alpha} \eta^{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die *Clausius-Duhem*-Ungleichung der Mischung entsteht nun durch Summation der Partialbilanzen (3.79) unter Beachtung der Bedingung (3.77). Diese Ungleichung wird im nächsten Kapitel im Rahmen der Materialtheorie herangezogen, um Rückschlüsse auf die Struktur der Konstitutivgleichungen ziehen zu können. Insbesondere können die Konstitutivgleichungen dergestalt formuliert werden, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für alle möglichen thermodynamischen Prozesse erfüllt ist.

Kapitel 4:

Auswertung des Entropieprinzips

4.1 Vorbemerkungen

Durch die Kinematik und die Bilanzen allein kann das thermomechanische Verhalten von Kontinua nicht beschrieben werden. Die in den vorangegangenen Kapiteln zusammengestellten Ergebnisse haben vielmehr einen allgemeinen Charakter und müssen durch Annahmen bezüglich des Materialverhaltens ergänzt werden. Die Größen, für die zusätzliche Gleichungen gefordert werden, heißen Auswirkungsfunktionen. Sie hängen zunächst in beliebiger Form von einem Satz von Prozeßvariablen ab. Durch diese Wahl wird festgelegt, welche Eigenschaften des untersuchten Kontinuums beschrieben werden können. Typische Materialklassen werden mit den Begriffen elastisch, plastisch, viskos oder mit Kombinationen davon beschrieben. Die Formulierung von Materialgesetzen geschieht im Rahmen der *Rationalen Mechanik* nicht willkürlich, sondern folgt zunächst einigen Prinzipien, die der physikalischen Anschauung entspringen und die sich in den letzten Jahrzehnten bewährt haben:

1. *Determinismus* – Die Auswirkungsfunktionen sind eindeutig bestimmt (Noll, 1958). Diese Voraussetzung ist notwendig, damit das Problem überhaupt gelöst werden kann.
2. *Äquipräsenz* – Alle Auswirkungsfunktionen hängen vom vollständigen Satz der Prozeßvariablen ab (Truesdell, 1949). Mit dieser Arbeitshypothese versucht man, aus den nachfolgenden Prinzipien möglichst allgemeine Resultate zu erhalten und nicht von Anfang an zu eingeschränkten Aussagen zu gelangen, weil man *a priori* für eine der Auswirkungsfunktionen eine Abhängigkeit ausgeschlossen hat.
3. *Lokale Wirkung* – Die Auswirkungsfunktionen hängen nur von den Werten der Prozeßvariablen am Punkt \mathbf{x} sowie von deren Ableitungen an dieser Stelle ab (Noll, 1958). Der Einfluß der Umgebung eines Punktes wird dann auf einen kleinen Bereich beschränkt und durch eine *Taylor*-Reihe approximiert. Das Konzept der lokalen Wirkung schließt Gradientenkontinua ein, Integralkontinua fallen jedoch nicht in diese Klasse.
4. *Bezugsinvarianz* oder *materielle Objektivität* – Der Standpunkt des Beobachters darf keinen Einfluß auf das Verhalten des Systems haben (Noll, 1955).

5. *Prinzip der Dissipation* – Die Auswirkungsfunktionen müssen so formuliert sein, daß eine mögliche Verletzung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik ausgeschlossen ist (Coleman & Noll, 1963).

Den folgenden Materialeigenschaften wird oft ein ähnlicher Stellenwert eingeräumt. Sie werden dann von Anfang an mit in die Formulierung von Materialgleichungen mit einbezogen:

1. *Schwindendes Gedächtnis* – Weiter in der Zeit zurückliegende Ereignisse haben einen geringeren Einfluß auf die Auswirkungsfunktionen als das aktuelle Geschehen. Die allgemeinen Geschichtsfunktionale können deshalb durch *Taylor*-Reihen approximiert werden.
2. *Materielle Symmetrie* – Die Auswirkungsfunktionen müssen materielle Symmetrien widerspiegeln, insbesondere müssen isotrope Materialien durch isotrope Auswirkungsfunktionen beschrieben werden.

In diesem Kapitel wird das Entropieprinzip in der Form der *Clausius-Duhem*-Ungleichung für ein gesättigtes Zweiphasen-Modell formuliert. Grundsätzlich bieten sich bei der Auswertung des Entropieprinzips zwei Alternativen an: Die erste, einfachere geht zurück auf Coleman & Noll (1963), die zweite, aufwendigere Form der Auswertung geht auf Liu (1972) und Liu & Müller (1984) zurück.

Im Fall der hier im weiteren verfolgten Auswertung des Entropieprinzips nach Coleman & Noll geht man davon aus, daß die freie Energie, die in (3.78) definiert wurde, eine explizite Funktion der Prozeßvariablen ist und nur implizit vom Ort \mathbf{x} und von der Zeit t abhängt. Die Wahl der Prozeßvariablen hängt dabei von der zu beschreibenden Materialklasse ab. Ganz allgemein besteht die Menge der Prozeßvariablen aus Ableitungen der Bewegungsfunktion und der Temperatur. Durch die Anwendung der Kettenregel der Differentiation auf die materielle Zeitableitung der freien Energie in der *Clausius-Duhem*-Ungleichung treten zusätzliche Zeit- und Ortsableitungen der Prozeßvariablen auf, die mit den restlichen Termen der Ungleichung in Verbindung gebracht werden können. Unter geeigneten mathematischen Voraussetzungen liefert der Satz von Liu (1972) ein notwendiges Kriterium zur Entwicklung von Einschränkungen der funktionalen Abhängigkeiten. Für eine gesättigte Mischung von viskosen Fluiden wird dies im Rahmen der Auswertung gemäß Liu & Müller von Bauer (1997) unter mathematisch-formalen Gesichtspunkten diskutiert. Die Überlegungen in diesem Kapitel folgen jedoch weniger dem mathematisch-formalen Vorgehen nach Liu & Müller als vielmehr dem einfacheren Vorgehen nach Coleman & Noll und einer Argumentation, die der physikalischen Anschauung entstammt. Das Vorgehen orientiert sich in weiten Bereichen an der Auswertung des Entropieprinzips für eine Zweiphasenmischung, wie sie von Ehlers (1989b, 1993a, 1993b) gegeben wurde.

Im Fall von Zwangsbedingungen, die an einen Prozeß gestellt werden, wie z. B. inkompressibles Materialverhalten bei Einphasenmaterialien oder Sättigung im Fall von Mischungen (Svendsen & Hutter, 1995; Bauer, 1997), ist es notwendig, das Entropieprinzip zu modifizieren. Dazu existieren grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze: Eine Möglichkeit besteht in der Wahl reduzierter Mengen für die Prozeßvariablen, so daß die Zwangsbedingung *a priori* erfüllt ist. Die andere Möglichkeit liegt in der expliziten Berücksichtigung der Zwangsbedingungen, die dann mit einem *Lagrangeschen* Multiplikator versehen und vor der Auswertung dem Entropieprinzip zugeschlagen werden. Die Ansätze für die Prozeßvariablen müssen zur Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung in diesem Fall nicht verändert werden; vielmehr können die Multiplikatoren derart bestimmt werden, daß die Zwangsbedingungen erfüllt sind.

An dieser Stelle zeigt sich auch der Unterschied zwischen den beiden grundsätzlichen Möglichkeiten der Auswertung des Entropieprinzips: Ein thermodynamischer Prozeß wird als Lösung der Feldgleichungen, also der Bilanzgleichungen in Kombination mit den Konstitutivgleichungen, verstanden. Bei der Auswertung nach Coleman & Noll geht man davon aus, daß die Feldgleichungen für einen thermodynamischen Prozeß immer erfüllt sind. Die Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung führt dann zu Konstitutivgleichungen, die eine Verletzung des Entropieprinzips immer ausschließen. Im Gegensatz dazu werden bei der Auswertung nach Liu & Müller die Bilanzgleichungen als Zwangsbedingung angesehen, die einen beliebigen thermodynamischen Prozeß einschränken. Daher werden die Bilanzen mit *Lagrangeschen* Multiplikatoren versehen und zum Entropieprinzip hinzuaddiert. Im Rahmen der Auswertung müssen dann die zusätzlichen Multiplikatoren bestimmt werden, was den Aufwand der Auswertung deutlich erhöht (Müller, 1973; Bauer, 1997). Der Vorteil der Auswertung nach Liu & Müller ist jedoch darin zu sehen, daß in vielen Fällen Ergebnisse erzielt werden, die von allgemeinerem Charakter sind, als dies bei der Auswertung nach Coleman & Noll der Fall ist.

Hier wird bewußt die einfachere Form der Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung angewandt, da die damit erzielten Resultate noch so allgemein sind, daß sie erst nach einer Reihe weiterer Vereinfachungen und Annahmen zu einer Berechnung konkreter Randwertprobleme geeignet sind. Solange die durch die einfachere Form der Auswertung erhaltenen Resultate ausreichend sind, um die gewünschte Klasse von Prozessen beschreiben zu können, erscheint es nicht sinnvoll, den Aufwand bei der Auswertung des Entropieprinzips zu steigern, um anschließend im Rahmen zusätzlicher Annahmen die erweiterten Ergebnisse wieder einzuschränken.

In diesem Kapitel wird das Entropieprinzip für eine gesättigte Zweiphasen-Mischung formuliert und ausgewertet. Die Sättigungsbedingung stellt dabei nach Svendsen & Hutter (1995) und Bauer (1997) eine Zwangsbedingung an den Prozeß dar, die sich darin äußert, daß es eine Gleichung mehr gibt als freie Variablen vorhanden sind,

wenn für jeden Volumenanteil eine eigene Evolutionsgleichung vorgegeben wird. Das System ist somit überbestimmt. Das führt dazu, daß in der Auswertung nach Liu & Müller ein Multiplikator unbestimmt bleibt, der als zusätzlicher Freiheitsgrad zur Erfüllung der Zwangsbedingung herangezogen werden kann.

In der hier vorgestellten Auswertung des Entropieprinzips nach Coleman & Noll wird die Erfüllung der Sättigungsbedingung durch den gewählten Ansatz gewährleistet, d. h. für den Volumenanteil des Festkörpers wird eine Evolutionsgleichung motiviert, während die Evolutionsgleichung für den Volumenanteil des Fluids in Abhängigkeit von $(n^S)'_S$ so festgelegt wird, daß die Sättigungsbedingung immer erfüllt ist. Die physikalische Motivation dieses Vorgehens ist darin begründet, daß die Porenstruktur der Mischung durch das poröse Festkörperskelett festgelegt wird. Das Porenfluid füllt diese Struktur aus, verfügt aber selbst nicht über eine entsprechende Mikrostruktur. Dem Fluid werden somit Änderungen der Porosität des Festkörperskeletts aufgezwungen. Die Wechselwirkung des Fluids mit dem Porenraum erfolgt über den Porendruck, der sich bei Volumenänderungen im Fluid aufbaut.

Berücksichtigt man zwei unabhängige Evolutionsgleichungen für beide Volumenanteile, so muß man zur Sicherstellung der Sättigungsbedingung einen *Lagrange*-Multiplikator einführen und die inkrementelle Form der Sättigungsbedingung zusammen mit dem *Lagrange*-Multiplikator zur *Clausius-Duhem*-Ungleichung addieren. Die Ergebnisse beinhalten den zusätzlichen *Lagrange*-Parameter, der erst durch ein Randwertproblem bestimmt werden kann und als Sättigungsdruck bezeichnet wird. Dieses Vorgehen wird von Diebels (1999) angewandt und führt für ein kompressibles Zweiphasen-Modell zu den selben Ergebnissen, die in den folgenden Abschnitten direkt hergeleitet werden.

Zur Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung sollen hier die zugrunde gelegten Annahmen für eine Zweiphasen-Mischung zusammengestellt werden:

1. Das betrachtete Modell ist ein Zweiphasenmodell. Es besteht aus einem porösen, kompressiblen Festkörperskelett φ^S und einem kompressiblen, viskosen Porenfluid φ^F :

$$\varphi = \varphi^S + \varphi^F. \quad (4.1)$$

Neben dem kompressiblen Modell werden in den Abschnitten 5.2 und 5.3 noch die sogenannten hybriden Modelle, in denen eine der beiden Konstituierenden inkompressibel ist, und im Abschnitt 5.4 das inkompressible Modell behandelt.

2. Der Porenraum ist vollständig mit Materie gefüllt. Die Sättigungsbedingung

$$n^S + n^F = 1 \quad (4.2)$$

stellt dabei eine Zwangsbedingung dar, deren Einhaltung bei der Lösung der Feldgleichungen garantiert werden muß.

3. Beide Konstituierenden werden zunächst als mikropolar betrachtet. Dabei wird allerdings davon ausgegangen, daß der Volumenträgheitstensor der einzelnen Konstituierenden ein isotroper Tensor ist:

$$\bar{\Theta}^\alpha = \bar{\theta}^\alpha \mathbf{I}. \quad (4.3)$$

Diese Annahme findet ihre Begründung in der Homogenisierung, die der *TPM* zugrunde liegt. Sofern die Ausrichtung der einzelnen Partikel innerhalb der Mikrostruktur statistisch verteilt ist, muß die Homogenisierung ein isotropes Makrogefüge liefern. Ist dies nicht der Fall, so ist für alle makroskopischen Größen mit anisotropem Verhalten zu rechnen. Dies soll aber in der vorliegenden Betrachtung ausgeschlossen werden.

Mit der Annahme (4.3) reduziert sich die „Bilanz“ der Mikroträgheit in der Form (3.25) auf eine triviale Aussage:

$$(\bar{\Theta}^\alpha)'_\alpha = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

4. Für beide Konstituierenden wird die Existenz einer freien Energie in der Form

$$\psi^\alpha = \varepsilon^\alpha - \vartheta^\alpha \eta^\alpha \quad (4.5)$$

angenommen. Eine *Legendre*-Transformation wie in der klassischen Gleichgewichtsthermodynamik wird an dieser Stelle noch nicht vorausgesetzt, vielmehr wird (4.5) als Abkürzung eingeführt, aus der sich allerdings für die Gleichgewichtsgrößen gewisse Potentialeigenschaften ergeben.

5. Phasenumwandlungen zwischen den beiden Konstituierenden sollen ausgeschlossen sein. Diese Annahme ist zutreffend, wenn es sich bei dem untersuchten Skelett um ein Material handelt, das mit dem Porenhalt nicht reagiert. Sonderfälle wie die Behandlung von wassergesättigtem Eis oder die Modellierung der Korrosion eines Metallschaums sind somit von der weiteren Behandlung ausgeschlossen. Es gilt

$$\hat{\rho}^\alpha = 0. \quad (4.6)$$

6. Die letzte Annahme betrifft die Temperatur ϑ^α der einzelnen Konstituierenden. Hier wird angenommen, daß für alle Konstituierenden eine gemeinsame Temperatur ϑ vorliegt:

$$\vartheta^\alpha = \vartheta > 0. \quad (4.7)$$

Wenn die betrachteten physikalischen Prozesse langsam genug ablaufen, kommt es zwischen den beteiligten Konstituierenden immer zu einem Temperaturengleich. Ausnahmefälle sind z. B. Mischungen von extrem leichten und extrem schweren Molekülen, die bei Stößen kaum Energie austauschen (Alts, 1992). Hingegen ist für die Durchströmung poröser Materialien insbesondere für geomechanische oder bodenmechanische Probleme die Annahme einer Temperatur ϑ für beide Konstituierenden in der Regel zutreffend, da diese Prozesse langsam ablaufen. In diesem Fall ist es nicht nötig, die Energieaustauschtermen der einzelnen Konstituierenden zu betrachten, sondern es genügt, die Energiebilanz der Mischung zu untersuchen.

Mit den zusammengestellten Annahmen 1. – 6. läßt sich die Entropiegleichung für ein Zweiphasenmodell $\alpha \in \{S, F\}$ als Summe der Einzelbilanzen (3.79) folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=S, F} \rho^\alpha (\psi^\alpha)'_\alpha + \sum_{\alpha=S, F} \mathbf{T}^\alpha \cdot \bar{\Delta}_\alpha + \sum_{\alpha=S, F} \mathbf{M}^\alpha \cdot \text{grad } \bar{\omega}_\alpha - \\ & - \rho \eta \dot{\vartheta} - \boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \text{grad } \vartheta - \hat{\mathbf{p}}^F \cdot \mathbf{w}_F - \hat{\mathbf{m}}^F \cdot \bar{\boldsymbol{\nu}}_F = \vartheta \sum_{\alpha=S, F} \hat{\eta}^\alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei werden die Sickergeschwindigkeit

$$\mathbf{w}_F = \dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S, \quad (4.9)$$

als Differenz zwischen der Fluid- und der Festkörpergeschwindigkeit und die Sickerwinkelgeschwindigkeit

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_F = \bar{\boldsymbol{\omega}}_F - \bar{\boldsymbol{\omega}}_S \quad (4.10)$$

als Differenz der Winkelgeschwindigkeiten zwischen den Konstituierenden eingeführt.

Die oben definierten Größen Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{d}_α und Diffusionswinkelgeschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{\delta}}_\alpha$ treten in der weiteren Darstellung nur noch randständig auf. Da das Festkörperskelett dem porösen Material die Struktur aufprägt, wird die Festkörperbewegung als Referenzbewegung aufgefaßt, so daß die Ersetzung von \mathbf{d}_α und $\bar{\boldsymbol{\delta}}_\alpha$ durch \mathbf{w}_F und $\bar{\boldsymbol{\nu}}_F$ eine natürliche Konsequenz ist. Im Fall von fluiden Mischungen kann in der Regel nur die baryzentrische Bewegung als Bezugsgröße verwendet werden, da i. d. R. keine der Konstituierenden vor den anderen ausgezeichnet ist.

4.2 Evolutionsgleichung für die Volumenanteile

Da die Volumenanteile als interne Variablen zur Beschreibung der Mikrostruktur eingeführt wurden, gibt es für sie keine Bilanzgleichungen. Im Rahmen einer *a prio-*

ri gewählten Konstitutivgleichung soll nun eine Form der Evolutionsgleichung für den Volumenanteil n^S motiviert werden. Beim weiteren Vorgehen wird diese Evolutionsgleichung bei der Auswertung des Entropieprinzips explizit berücksichtigt. Die Evolutionsgleichung für das Fluid folgt aus der Sättigungsbedingung, so daß diese direkt Eingang in die Modellbildung findet. Wie bereits oben erwähnt, ist diese Art des Vorgehens in der Mikrostruktur des betrachteten porösen Materials begründet: Der Porenraum wird durch den Festkörper definiert, die Veränderungen der Porosität resultieren aus volumetrischen Deformationen des Festkörpers. Das Fluid, das die Poren vollständig ausfüllt, kann auf Porositätsänderungen nur über den hydrostatischen Spannungszustand reagieren und beeinflusst so die Porositätsänderung indirekt.

Ausgangspunkt der Überlegungen zur Motivation einer Evolutionsgleichung für den Volumenanteil n^S ist die zugehörige Massenbilanz in der Form

$$(\rho^S)'_S + \rho^S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S = 0. \quad (4.11)$$

Berücksichtigt man, daß Änderungen der Partialdichte $\rho^S = n^S \rho^{SR}$ zum einen durch Änderungen der effektiven Dichte ρ^{SR} und zum anderen durch Änderungen des Volumenanteils n^S hervorgerufen werden, so kann man (4.11) in der folgenden Weise umformulieren:

$$\begin{aligned} & \rho^{SR} \left((n^S)'_S + z^S n^S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \right) + \\ & + n^S \left((\rho^{SR})'_S + (1 - z^S) \rho^{SR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dabei bezeichnet z^S eine noch nicht näher spezifizierte Funktion der Prozeßvariablen, die angibt, welcher Anteil der Partialdichteänderungen durch Volumenanteilsänderungen und welcher Anteil durch Änderungen der effektiven Dichte verursacht wird. Damit ergeben sich als sinnvolle Grenzen die Werte 0 und 1 für den Faktor z^S :

$$0 \leq z^S \leq 1. \quad (4.13)$$

Der Grenzfall $z^S = 0$ beschreibt das Verhalten bei konstantem Volumenanteil, der Grenzfall $z^S = 1$ entspricht dem Fall materieller Inkompressibilität $\rho^{SR} = \text{konst.}$

Aus der Sichtweise der Materialtheorie sind ρ^{SR} und n^S für die Auswertung des Entropieprinzips als Prozeßvariablen unabhängig voneinander. Das motiviert den (hinreichenden) konstitutiven Ansatz, daß in (4.12) die beiden Summanden getrennt voneinander verschwinden. Es ergeben sich somit aus (4.12) zum einen die Form der gesuchten Evolutionsgleichung für den Volumenanteil

$$(n^S)'_S + z^S n^S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S = 0 \quad (4.14)$$

und zum anderen eine Gleichung zur Bestimmung der effektiven Dichte

$$(\rho^{SR})'_S + (1 - z^S) \rho^{SR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S = 0 \quad (4.15)$$

in Abhängigkeit der freien Funktion z^S . Die Evolutionsgleichung (4.14) ist so konzipiert, daß für ein elastisches Festkörperskelett durch die Deformation des Porenraums keine Dissipation verursacht wird. Wie später noch gezeigt wird, kann (4.14) nach einer geeigneten Wahl der Funktion z^S in eine Zustandsgleichung überführt werden.

Eine Alternative zu der Zerlegung der Partialmassenbilanz in eine Evolutionsgleichung für den Volumenanteil und in eine Bilanz für die effektive Dichte besteht in der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen Teil, der zu Änderungen der Porenstruktur führt, und in einen anderen Teil, der mikroskopische Dichteänderungen verursacht. Dieses Vorgehen ist konzeptionell der Plastizitätstheorie entlehnt und wird von Bluhm (1997a, 1997b) und von Bluhm & de Boer (1997) vertreten. Da bei geeigneter Wahl der Funktion z^S die Evolutionsgleichung (4.14) für den Festkörpervolumenanteil integriert werden kann, führt der hier gewählte Ansatz auf formal ähnliche Resultate wie der Ansatz, der auf der multiplikativen Zerlegung der Deformation beruht. Anstelle der Evolutionsgleichung tritt dann eine Funktion, die den aktuellen Wert des Volumenanteils n^S in Abhängigkeit der anderen Prozeßvariablen darstellt, so daß n^S zu einer Zustandsvariablen wird. In diesem Fall wird durch Porositätsänderungen keine Dissipation verursacht.

Aus der Ableitung der Sättigungsbedingung erhält man unter Berücksichtigung von (4.14) die entsprechende Evolutionsgleichung für den Volumenanteil der Fluidphase

$$(n^F)'_F = z^S n^S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S - \operatorname{grad} n^S \cdot \mathbf{w}_F. \quad (4.16)$$

Bei diesem Vorgehen wird deutlich, daß die Porosität durch die Festkörperbewegung bestimmt wird, da die Evolutionsgleichung für n^F nur über die Sättigungsbedingung motiviert wird.

4.3 Prozeßvariablen und Auswirkungsfunktionen

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der *Clausius-Duhem*-Ungleichung (4.8) kann zur Einschränkung der Konstitutivgleichungen, die das Materialverhalten beschreiben, genutzt werden. Dazu ist es notwendig, für das Materialverhalten der Konstituierenden konkrete Annahmen zu treffen. Für die folgenden Überlegungen wird elastisches Verhalten für das Festkörperskelett und viskoses

Verhalten für das Porenfluid gefordert. Das führt zu dem nachstehenden Satz von Prozeßvariablen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{ & \bar{\mathbf{U}}_S, \nabla \bar{\mathbf{U}}_S, {}^R \bar{\mathcal{K}}_S, \nabla {}^R \bar{\mathcal{K}}_S, \rho^{FR}, \text{grad } \rho^{FR}, \bar{\Delta}_F, \\ & \text{grad } \bar{\omega}_F, \mathbf{w}_F, \bar{\mathbf{v}}_F, n^S, \text{grad } n^S, \vartheta, \text{grad } \vartheta \}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Abkürzend steht dabei

$$\nabla(\dots) = \text{Grad}_S(\dots) \quad (4.18)$$

für den Gradienten bezüglich der Referenzkonfiguration des Festkörpers.

Das elastische Verhalten des Festkörpers wird durch den *Cosserat*-Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_S$ und den Krümmungstensor ${}^R \bar{\mathcal{K}}_S$ bestimmt. Die zweiten Gradienten $\nabla \bar{\mathbf{U}}_S = \text{Grad}_S \bar{\mathbf{U}}_S$ und $\nabla {}^R \bar{\mathcal{K}}_S = \text{Grad}_S {}^R \bar{\mathcal{K}}_S$ treten nur der Vollständigkeit halber im Satz der Prozeßvariablen auf, da Mischungen grundsätzlich als Kontinua zweiten Grades zu behandeln sind (Cross, 1973; Bowen, 1976; Ehlers, 1989b). Das elastische Verhalten des kompressiblen Porenfluids wird im Rahmen der Theorie zweiten Grades durch die reale Dichte ρ^{FR} und deren räumlichen Gradienten $\text{grad } \rho^{FR}$ beschrieben. Durch die Ausnutzung der Isotropieeigenschaften von Fluiden zweiten Grades zeigt Ehlers (1989b), daß diese Wahl ausreichend zur Beschreibung des elastischen Verhaltens kompressibler Fluide ist. Ferner wird das viskose Verhalten durch die *Cosserat*-Deformationsgeschwindigkeit $\bar{\Delta}_F$ sowie durch den Gradienten der Winkelgeschwindigkeit $\text{grad } \bar{\omega}_F$ erfaßt. Die Wechselwirkungen in der Impuls- und in der Drallbilanz zwischen den beiden Konstituierenden werden durch die Differenzgeschwindigkeiten \mathbf{w}_F und $\bar{\mathbf{v}}_F$ modelliert. Desweiteren wird die Struktur des porösen Mediums durch einen der Volumenanteile, hier n^S , und durch dessen Gradienten charakterisiert. Der Volumenanteil $n^F = 1 - n^S$ ist dann durch die Sättigungsbedingung festgelegt und tritt deshalb nicht im Satz der unabhängigen Prozeßvariablen auf. Zur Erfassung thermischer Einflüsse werden die Temperatur ϑ und deren Gradient $\text{grad } \vartheta$ in den Variablensatz aufgenommen.

Im Rahmen der Konstitutivtheorie werden die sogenannten Auswirkungsfunktionen bestimmt. Sie sind vom gewählten Materialverhalten abhängig und können als Funktionen der gewählten Prozeßvariablen formuliert werden. Der Satz der Auswirkungsfunktionen lautet für das betrachtete mikropolare Zweiphasenmodell

$$\mathcal{R} = \{ \eta^\alpha, \varphi_\eta^\alpha, \psi^\alpha, \mathbf{T}^\alpha, \mathbf{M}^\alpha, \hat{\mathbf{p}}^F, \hat{\mathbf{m}}^F, (n^S)'_S \} \quad (4.19)$$

und besteht aus den Entropien η^α und den Entropieflußvektoren φ_η^α , aus den freien Energien ψ^α sowie aus den Partialspannungen \mathbf{T}^α und Partialmomentenspannungen \mathbf{M}^α der beiden Konstituierenden. Auch der Impulsaustauschterm $\hat{\mathbf{p}}^F$ und der

Drallaustauschterm $\hat{\mathbf{m}}^F$ müssen modelliert werden. Die entsprechenden Austauschgrößen $\hat{\mathbf{p}}^S$ und $\hat{\mathbf{m}}^S$ für den Festkörper sind durch die Zwangsbedingungen (3.45) und (3.56) aus der Impulsbilanz und der Drallbilanz der Mischung zu bestimmen und daher nicht Bestandteil von \mathcal{R} . Außerdem wird $(n^S)'_S$ in den Satz der Antwortfunktionen aufgenommen. Letztendlich muß die thermodynamische Konsistenz von (4.14) garantiert werden. Eine zweite Evolutionsgleichung für den Volumenanteil n^F wird nicht postuliert; sie ergibt sich direkt aus der inkrementellen Form der Sättigungsbedingung (4.16).

4.4 Formulierung der Entropiebilanz

Nimmt man an, daß die freien Energiefunktionen ψ^α explizit nur von den Prozeßvariablen (4.17) abhängen, so kann die *Clausius-Duhem*-Ungleichung in der Form (4.8) ausgewertet werden, um Einschränkungen für die Auswirkungsfunktionen zu erhalten. Dabei sind die Abhängigkeiten vom Ort \mathbf{x} oder von der Zeit t nur implizit über die Feldeigenschaft der Prozeßvariablen gegeben.

Die materiellen Zeitableitungen der freien Energiefunktionen ψ^α , die in (4.8) auftreten, werden als totale Ableitungen über die Kettenregel ausgedrückt. Dabei ergibt sich mit dem Variablensatz (4.17)

$$\begin{aligned} (\psi^\alpha)'_\alpha &= \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \cdot (\bar{\mathbf{U}}_S)'_\alpha + \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \nabla \bar{\mathbf{U}}_S} \cdot (\nabla \bar{\mathbf{U}}_S)'_\alpha + \dots \\ &\dots + \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \text{grad } \vartheta} \cdot (\text{grad } \vartheta)'_\alpha. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Im folgenden werden die in (4.20) auftretenden materiellen Zeitableitungen von Festkörpergrößen wie dem Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_S$ oder dem Krümmungstensor ${}^R\bar{\mathcal{K}}_S$ bezüglich der Festkörperbewegung dargestellt, die Ableitung von Fluidgrößen wie der Dichte ρ^{FR} werden bezüglich der Fluidbewegung beschrieben. Ableitungen der Temperatur, die für beide Konstituierenden als gleich angenommen wird, werden bezüglich der Schwerpunktbewegung ausgedrückt. Aus (4.8) folgt für das untersuchte Zweiphasen-Modell mit (4.20) dann die folgende Form der *Clausius-Duhem*-Ungleichung

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_S \cdot & \left[\mathbf{T}^S - \bar{\mathbf{R}}_S \left(\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right) \mathbf{F}_S^T \right. \\ & + z^S n^S \left(\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right) \mathbf{I} \\ & \left. + z^S n^S \left(\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^F \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \right) \mathbf{I} \right] + \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$(\nabla \bar{\mathbf{U}}_S)'_S \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \nabla \bar{\mathbf{U}}_S} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \nabla \bar{\mathbf{U}}_S} \right] + \quad (4.22)$$

$$\nabla \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \cdot \left[-\rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \nabla \bar{\mathbf{U}}_S} \otimes \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{w}_F \right] + \quad (4.23)$$

$$\text{grad } \bar{\omega}_S \cdot \left[\mathbf{M}^S - \bar{\mathbf{R}}_S \left(\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial R \bar{\mathcal{K}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial R \bar{\mathcal{K}}_S} \right) \mathbf{F}_S^T \right] + \quad (4.24)$$

$$(\nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S)'_S \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S} \right] + \quad (4.25)$$

$$\nabla \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S \cdot \left[-\rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S} \otimes \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{w}_F \right] + \quad (4.26)$$

$$(\text{grad } \rho^{FR})'_F \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \rho^{FR}} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \rho^{FR}} \right] + \quad (4.27)$$

$$\text{grad grad } \rho^{FR} \cdot \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \rho^{FR}} \otimes \mathbf{w}_F \right] + \quad (4.28)$$

$$(\bar{\Delta}_F)'_F \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\Delta}_F} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right] + \quad (4.29)$$

$$\text{grad } \bar{\Delta}_F \cdot \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\Delta}_F} \otimes \mathbf{w}_F \right] + \quad (4.30)$$

$$(\text{grad } \bar{\omega}_F)'_F \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right] + \quad (4.31)$$

$$\text{grad grad } \bar{\omega}_F \cdot \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \otimes \mathbf{w}_F \right] + \quad (4.32)$$

$$(\ddot{\mathbf{x}}_F - \ddot{\mathbf{x}}_S) \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{w}_F} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right] + \quad (4.33)$$

$$\text{grad } \mathbf{x}'_F \cdot \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{w}_F} \otimes \mathbf{w}_F + \text{grad } \mathbf{x}'_S \cdot \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \mathbf{w}_F} \otimes \mathbf{w}_F + \quad (4.34)$$

$$((\bar{\omega}_F)'_F - (\bar{\omega}_S)'_S) \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\nu}_F} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right] + \quad (4.35)$$

$$\text{grad } \bar{\omega}_F \cdot \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\nu}_F} \otimes \mathbf{w}_F + \text{grad } \bar{\omega}_S \cdot \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\nu}_F} \otimes \mathbf{w}_F + \quad (4.36)$$

$$(\text{grad } n^S)'_S \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } n^S} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } n^S} \right] + \quad (4.37)$$

$$\text{grad grad } n^S \cdot \left[-\rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } n^S} \otimes \mathbf{w}_F \right] + \quad (4.38)$$

$$\dot{\vartheta} \cdot \left[-\rho \eta - \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \vartheta} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \vartheta} \right] + \quad (4.39)$$

$$(\text{grad } \vartheta) \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right] + \quad (4.40)$$

$$\text{grad grad } \vartheta \cdot \left[-\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} \otimes \mathbf{d}_S - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \otimes \mathbf{d}_F \right] + \quad (4.41)$$

$$\mathcal{D} \geq 0 \quad (4.42)$$

mit der sogenannten Restungleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \bar{\Delta}_F \cdot \left[\mathbf{T}^F + \rho^S \rho^{FR} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} + \rho^F \rho^{FR} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{w}_F} \otimes \mathbf{w}_F \right] + \\ & \text{grad } \bar{\omega}_F \cdot \left[\mathbf{M}_F + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\nu}_F} \otimes \mathbf{w}_F \right] - \hat{\mathbf{p}}^F \cdot \mathbf{w}_F - \hat{\mathbf{m}}^F \cdot \bar{\nu}_F - \\ & \text{grad } \vartheta \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}_\eta + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \vartheta} \mathbf{d}_S + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \vartheta} \mathbf{d}_F \right] - \\ & \mathbf{w}_F \cdot \left[\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^F \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \text{grad } n^S - \\ & \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{w}_F - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathcal{K}}_S} \cdot \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{w}_F + \\ & \mathbf{w}_F \cdot \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } \rho^{FR}. \geq 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in der *Clausius-Duhem*-Ungleichung Formelnummern für die einzelnen Summanden vergeben worden, auf die im weiteren verwiesen wird. Während die Restungleichung \mathcal{D} gemäß (4.43) eine Funktion in den Prozeßvariablen $\bar{\Delta}_F$, $\text{grad } \bar{\omega}_F$, \mathbf{w}_F , $\bar{\nu}_F$ und $\text{grad } \vartheta$ ist, treten in den Teilausdrücken (4.21) bis (4.41) Orts- und Zeitableitungen der Prozeßvariablen nur linear auf, wobei allerdings die Zuordnungen gemäß (4.34) und (4.36) nicht zwingend sind. Vielmehr werden die Terme (4.34) im Rahmen einer nicht-polaren Theorie von de Boer & Ehlers (1986) und Ehlers (1989b) mit den Ausdrücken zusammengefaßt,

die die Festkörper- und die Fluidspannungen enthalten. Zur weiteren Auswertung sind dann Symmetriebedingungen notwendig, die für den Sonderfall $\mathbf{w}_F = \mathbf{0}$ ausgewertet werden können. Da das Vorgehen von de Boer & Ehlers und von Ehlers nicht auf die mikropolare Theorie übertragen werden kann, weil die entsprechenden Symmetriebedingungen fehlen und somit die Schlußweise nicht angewandt werden kann, werden die Terme (4.34) und (4.36) separat behandelt, was grundsätzlich zu strengeren Anforderungen an die Ergebnisse führt. Weiterhin zeigt sich, daß die Terme jeweils so kombiniert werden können, daß als Ableitungen von Prozeßvariablen die Größen $\text{grad } \mathbf{w}_F$ und $\text{grad } \bar{\omega}_F$ entstehen. Im Vergleich zu den Resultaten von de Boer und Ehlers ergeben sich erst Abweichungen in Bereichen weit weg vom thermodynamischen Gleichgewicht.

Die Auswertung des Entropieprinzips folgt nun den Standardargumenten. An einem festen Raumpunkt zu einem festen Zeitpunkt sind die Werte der Prozeßvariablen bestimmt, ihre Ableitungen können allerdings aufgrund der Prozeßführung beliebige Werte annehmen. Demnach müssen die Terme, die mit Ableitungen der Prozeßvariablen auftreten, jeweils für sich verschwinden. Wäre das nicht der Fall, so könnte durch eine geeignete Wahl der Orts- und Zeitableitungen der Prozeßvariablen, also bedingt durch die Prozeßführung, die *Clausius-Duhem*-Ungleichung verletzt werden. Wenn nach dieser Argumentation die Teilausdrücke (4.21) bis (4.41) jeweils für sich verschwinden, dann kann nur die Restungleichung (4.43) für Werte größer als Null sorgen:

$$\mathcal{D} \geq 0. \tag{4.44}$$

Formal wird dieser Sachverhalt, der hier im Rahmen der Auswertung nach Coleman & Noll (1963) physikalisch motiviert ist, durch den Satz von Liu (1972) ausgedrückt. Als Folge des Satzes von Liu ergeben sich aus der *Clausius-Duhem*-Ungleichung die gleichen Konsequenzen, es verschwinden nämlich die Ausdrücke, die linear in den Ableitungen der Prozeßvariablen sind, und man erhält die Aussage, daß $\mathcal{D} \geq 0$ ist. Die formale Anwendbarkeit dieses Satzes auf Mischungen viskoser Fluide wurde von Bauer (1997) untersucht.

4.5 Materialfunktionen für die freie Energie

Verlangt man im Rahmen der üblichen Argumentation, daß die Teilausdrücke (4.21) bis (4.41) jeweils für sich zu Null werden, so ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

Aus (4.21) folgen die Festkörperspannung

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^S &= \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - \\ &- z^S n^S \left[\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^F \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

und aus (4.24) die Momentenspannung

$$\mathbf{M}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T. \quad (4.46)$$

In beiden Fällen werden die Größen $\partial \psi^S / \partial \bar{\mathbf{U}}_S$ und $\partial \psi^S / \partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S$, die sich auf die Referenzkonfiguration und auf die rückrotierte *Cosserat*-Konfiguration beziehen, durch den Vorwärtstransport mittels $\bar{\mathbf{R}}_S(\cdot) \mathbf{F}_S^T$ auf die aktuelle Konfiguration bezogen. Für die Entropie ergibt sich schließlich aus (4.39)

$$\rho \eta = -\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \vartheta} - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \vartheta}. \quad (4.47)$$

In den Ausdrücken (4.45), (4.46) und (4.47) erkennt man die Eigenschaften der *Legendre*-Transformation wieder, die zu einer Zuordnung von Kraft- und Deformationsgrößen sowie von Temperatur und Entropie führt. Da die Kraftgrößen durch die Differentiation der freien Energiefunktion nach den Deformationstensoren entstehen, besitzen sie im Vergleich zu den kinematischen Größen die duale Varianz.

Aus den Beziehungen (4.22) und (4.23) folgt

$$\frac{\partial \psi^S}{\partial \nabla \bar{\mathbf{U}}_S} = \frac{\partial \psi^F}{\partial \nabla \bar{\mathbf{U}}_S} = \mathbf{0} \quad (4.48)$$

und aus (4.25) und (4.26)

$$\frac{\partial \psi^S}{\partial \nabla {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} = \frac{\partial \psi^F}{\partial \nabla {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

Die freien Energiefunktionen ψ^S und ψ^F hängen somit nicht von den Gradienten des Deformationstensors und des Krümmungstensors ab. Die Ursache dafür liegt in der Tatsache, daß zu diesen kinematischen Größen keine dualen Kraftgrößen eingeführt wurden. Desweiteren folgt aus den Beziehungen (4.29) und (4.30)

$$\frac{\partial \psi^S}{\partial \Delta_F} = \frac{\partial \psi^F}{\partial \Delta_F} = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

und aus (4.31) und (4.32)

$$\frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} = \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} = \mathbf{0}. \quad (4.51)$$

Eine Abhängigkeit der freien Energiefunktionen von der verallgemeinerten Deformationsgeschwindigkeit des Fluids und von dem Gradienten der Winkelgeschwindigkeit der Fluiddirektoren ist also ausgeschlossen.

Kombiniert man im weiteren (4.33) mit (4.34), so entsteht ein Term der Form

$$\text{grad } \mathbf{w}_F \cdot \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{w}_F} = 0. \quad (4.52)$$

Da der Gradient der Sickergeschwindigkeit selbst keine Prozeßvariable ist, kann gefolgert werden, daß (4.52) ebenfalls gelten muß. Als Konsequenz können ψ^S und ψ^F nicht von der Sickergeschwindigkeit abhängen. Die gleiche Argumentation, angewandt auf die Ausdrücke (4.35) und (4.36), führt auf

$$\text{grad } \bar{\nu}_F \cdot \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\nu}_F} = 0, \quad (4.53)$$

so daß in ψ^α auch keine Abhängigkeit von der Differenzwinkelgeschwindigkeit $\bar{\nu}_\alpha$ auftreten darf. Folgt man jedoch der Argumentation von de Boer & Ehlers (1986) und Ehlers (1989b), so kann im Rahmen einer nicht-polaren Theorie zumindest eine Abhängigkeit der freien Energie von der Sickergeschwindigkeit außerhalb des Gleichgewichts zugelassen werden. Allerdings beschränken sich die folgenden Untersuchungen auf den Bereich in der Nähe des Gleichgewichts. Die hier abgeleiteten Resultate unterscheiden sich dann nicht von denen von de Boer & Ehlers und von Ehlers.

Weitere Folgerungen aus den Gleichungen (4.27), (4.37) und (4.40) lauten:

$$\begin{aligned} \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \rho^{FR}} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \rho^{FR}} &= \mathbf{0}, \\ \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } n^S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } n^S} &= \mathbf{0}, \\ \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } \vartheta} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Die verbleibenden Teilausdrücke (4.28), (4.38) und (4.41) beinhalten zweite Gradienten von Skalaren, die aufgrund der Vertauschbarkeit der Ableitungen symmetrisch

sind. Die auftretenden Skalarprodukte verschwinden also, wenn die zugehörigen Faktoren schiefsymmetrisch sind:

$$\begin{aligned} \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \rho^{FR}} \otimes \mathbf{w}_F &= -\mathbf{w}_F \otimes \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \rho^{FR}}, \\ \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } n^S} \otimes \mathbf{w}_F &= -\mathbf{w}_F \otimes \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \text{grad } n^S}, \\ \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} \otimes \mathbf{w}_F &= -\mathbf{w}_F \otimes \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Zusammenfassend ergeben sich damit die folgenden möglichen Abhängigkeiten für die freien Energiefunktionen

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, \rho^{FR}, \text{grad } \rho^{FR}, n^S, \text{grad } n^S, \vartheta, \text{grad } \vartheta). \quad (4.56)$$

4.6 Auswertung im Gleichgewicht

Das thermodynamische Gleichgewicht ist dadurch bestimmt, daß in der Restungleichung das Gleichheitszeichen gilt. Die Dissipation ist dann minimal. Aus der Untersuchung des Gleichgewichtszustands und der Zustände in der Nähe des Gleichgewichts können weitere Schlüsse gezogen werden.

Bevor die konkrete Auswertung der Restungleichung \mathcal{D} im Gleichgewicht durchgeführt wird, sind Umformungen von (4.43) notwendig. Dazu müssen zwei weitere Annahmen getroffen werden. Zum einen soll die Potentialeigenschaft (4.47) für jede einzelne Konstituierende gelten:

$$\rho^\alpha \eta^\alpha = -\rho^\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \vartheta}. \quad (4.57)$$

Aufgrund der Additivität der Entropie nach (3.74) kann das nicht als Einschränkung empfunden werden. Zum anderen wird der innere Anteil des Wärmeflusses als Summe der Partialwärmeflüsse eingeführt:

$$\mathbf{q}^I = \mathbf{q}^S + \mathbf{q}^F. \quad (4.58)$$

Mit (4.57) und (4.58) kann die Restungleichung (4.43) anstelle des Entropieflusses φ_η mit dem anschaulicheren Wärmefluß \mathbf{q}^I formuliert werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \bar{\Delta}_F \cdot \left[\mathbf{T}^F + \rho^S \rho^{FR} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} + \rho^F \rho^{FR} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} \right] + \\ &\quad \mathbf{M}^F \cdot \text{grad } \bar{\omega}_F - \hat{\mathbf{p}}^F \cdot \mathbf{w}_F - \hat{\mathbf{m}}^F \cdot \bar{\nu}_F - \frac{1}{\vartheta} \text{grad } \vartheta \cdot \mathbf{q}^I - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{w}_F \cdot \left[\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^F \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \text{grad } n^S - \\
& \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{w}_F - \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial R \bar{\mathcal{K}}_S} \cdot \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{w}_F + \\
& \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } \rho^{FR}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Definiert man das thermodynamische Gleichgewicht durch das Verschwinden der inneren Dissipation,

$$\mathcal{D} = 0, \tag{4.60}$$

so gilt im Fall des thermodynamischen Gleichgewichts in der *Clausius-Duhem*-Ungleichung das Gleichheitszeichen. Hinreichend für das Verschwinden der Restungleichung und somit für die Schaffung des Gleichgewichts sind die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_F &= \mathbf{0}, \\
\text{grad } \bar{\omega}_F &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{w}_F &= \mathbf{0}, \\
\bar{\nu}_F &= \mathbf{0}, \\
\text{grad } \vartheta &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Wie bei Ehlers (1989b) gezeigt wird, können die Bedingungen (4.55) im Gleichgewicht ausgewertet werden, um weitere Rückschlüsse auf die möglichen Abhängigkeiten der freien Energiefunktionen zu ziehen. Dazu werden die Schiefsymmetriebedingungen (4.55) nach der Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F abgeleitet. Man erhält dann z. B.

$$\begin{aligned}
& \rho^S \frac{\partial^2 \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta \otimes \partial \mathbf{w}_F} \otimes \mathbf{w}_F + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} \otimes \mathbf{I} = \\
& - \mathbf{I} \otimes \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} - \mathbf{w}_F \otimes \rho^S \frac{\partial^2 \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta \otimes \partial \mathbf{w}_F}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Wertet man diese Beziehung im Gleichgewicht, also für $\mathbf{w}_F = \mathbf{0}$, aus, so folgt

$$\left. \frac{\partial \psi^S}{\partial \text{grad } \vartheta} \right|_{\mathcal{D}=0} = \mathbf{0}. \tag{4.63}$$

Im Gleichgewicht kann die freie Energiefunktion ψ^S nicht vom Temperaturgradienten abhängen. Aufgrund von (4.54) erhält man dieses Ergebnis auch für die freie Energie des Fluids. Anhand der gleichen Überlegung kann man zeigen, daß im Gleichgewicht die freien Energiefunktionen ψ^S und ψ^F auch nicht von $\text{grad } n^S$ und $\text{grad } \rho^{FR}$ abhängen. Damit wird der Gleichgewichtszustand allein durch die Variablen $\bar{\mathbf{U}}_S$, ${}^R\bar{\mathcal{K}}_S$, ρ^{FR} , n^S und ϑ beschrieben.

Um aus der Dissipationsungleichung weitere Informationen zu erhalten, wird ein gestörter Zustand in der Nähe des Gleichgewichts betrachtet. Die Größe der Störung wird dabei durch den Größenordnungsparameter ι beschrieben, so daß die Nichtgleichgewichtsvariablen nach (4.61) folgendermaßen dargestellt werden können:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_F &= \iota \bar{\Delta}_F^*, \\ \text{grad } \bar{\omega}_F &= \iota \text{grad } \bar{\omega}_F^*, \\ \mathbf{w}_F &= \iota \mathbf{w}_F^*, \\ \bar{\nu}_F &= \iota \bar{\nu}_F^*, \\ \text{grad } \vartheta &= \iota \text{grad } \vartheta^*.\end{aligned}\tag{4.64}$$

Die mit dem Stern gekennzeichneten Größen charakterisieren somit die Richtung, in die der thermodynamische Prozeß abläuft. Im Grenzfall $\iota \rightarrow 0$ gelangt man zum Gleichgewicht nach (4.60). Da außerdem im Gleichgewicht die Dissipation minimal sein soll, muß die Restungleichung an dieser Stelle einen Extremwert aufweisen:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \iota} \right|_{\iota=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \iota^2} \right|_{\iota=0} &> 0.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Die erste Bedingung liefert den gesuchten Extremwert, die zweite garantiert, daß es sich dabei um ein Minimum handelt. Aus der zweiten Bedingung (4.65)₂ folgen Hinweise auf die Wertebereiche von Materialparametern.

Kennzeichnet man im folgenden den Gleichgewichtszustand $\iota = 0$ durch einen tiefgestellten Index $(\cdot)_0$, so findet man für die Ableitung der Dissipationsungleichung (4.65) im Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_F^* &\cdot \left[\mathbf{T}_0^F + \rho^S \rho^{FR} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} + \rho^F \rho^{FR} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} \right] + \\ \text{grad } \bar{\omega}_F^* &\cdot \mathbf{M}_0^F + \\ \mathbf{w}_F^* &\cdot \left[- \left(\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^F \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right) \text{grad } n^S - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right)^\perp - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial^R \bar{\mathcal{K}}_S} \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S \right)^\perp - \\
& - \hat{\mathbf{p}}_0^F + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } \rho^{FR} \Big] + \\
& \bar{\mathbf{v}}_F^* \cdot \left(-\hat{\mathbf{m}}_0^F \right) + \\
& \text{grad } \vartheta^* \cdot \left(-\frac{1}{\vartheta} \mathbf{q}_0^I \right) = \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \iota} \right|_{\iota=0} = 0. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen für die Erfüllung von (4.66) für beliebige Werte der Nichtgleichgewichtsvariablen erhält man, wenn die einzelnen Summanden verschwinden. Dann ergeben sich die Gleichgewichtsspannungen \mathbf{T}_0^F des Fluids zu

$$\mathbf{T}_0^F = -\rho^S \rho^{FR} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} - \rho^F \rho^{FR} \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} =: -n^F p^{FR} \mathbf{I}. \tag{4.67}$$

Der effektive Fluiddruck p^{FR} ist dabei durch die Ableitungen der freien Energien nach der effektiven Dichte bestimmt:

$$p^{FR} = (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}}. \tag{4.68}$$

Genau wie für die Festkörperspannungen (4.45) und die Festkörpermomentenspannungen (4.46) stellen die freien Energiefunktionen für den thermodynamischen Druck, also für den Gleichgewichtsanteil der Fluidspannungen, ein Potential dar. Die zugehörige Gleichgewichtsimpulsproduktion hat nach (4.66) die folgende Struktur

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{p}}_0^F &= - \left(p^{FR} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right) \text{grad } n^S + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } \rho^{FR} \\
&\quad - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right)^\perp - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial^R \bar{\mathcal{K}}_S} \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S \right)^\perp
\end{aligned} \tag{4.69}$$

und wird durch die Gradienten der Gleichgewichtsvariablen mit Ausnahme des Temperaturgradienten bestimmt. Die Gleichgewichtsmomentenspannungen, die Gleichgewichtsmomentenproduktion und der Gleichgewichtswärme fluß müssen verschwinden:

$$\mathbf{M}_0^F = \mathbf{0}, \tag{4.70}$$

$$\hat{\mathbf{m}}_0^F = \mathbf{0}, \tag{4.71}$$

$$\mathbf{q}_0^I = \mathbf{0}. \tag{4.72}$$

4.7 Auswertung in der Nähe des Gleichgewichts

Da die Auswertung der Restgleichung (4.43) in einem beliebigen Zustand außerhalb des Gleichgewichts im allgemeinen nicht möglich ist, beschränken sich die weiteren Untersuchungen auf Zustände in der Nähe des Gleichgewichts. Dann ist eine *Taylor*-Reihenentwicklung der Restgleichung in den Nichtgleichgewichtsvariablen möglich. Eine formale Entwicklung in den Variablen $\bar{\Delta}_F$, $\text{grad } \bar{\omega}_F$, \mathbf{w}_F , $\bar{\nu}_F$ und $\text{grad } \vartheta$ ist dabei um den Gleichgewichtszustand so durchzuführen, daß die auftretenden Ableitungen der Antwortfunktionen nach den Nichtgleichgewichtsvariablen jeweils im Gleichgewicht, also an der Stelle $\iota = 0$, zu berechnen sind. Somit liefert die *Taylor*-Entwicklung bis zum linearen Glied für die Fluidspannungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^F &= \mathbf{T}_0^F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta, \end{aligned} \quad (4.73)$$

für die Momentenspannungen des Fluids

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^F &= \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta, \end{aligned} \quad (4.74)$$

für die Impulsproduktion

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}^F &= \mathbf{p}_0^F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \\ &+ \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta, \end{aligned} \quad (4.75)$$

für die Momentenproduktion

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}^F &= \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \\ &+ \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta \end{aligned} \quad (4.76)$$

und schließlich für den inneren Anteil des Wärmeflusses

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^I &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dabei sind die Gleichgewichtsgrößen \mathbf{T}_0^F und $\hat{\mathbf{p}}_0^F$ gemäß (4.67) und (4.69) definiert, die Gleichgewichtsanteile \mathbf{M}_0^F der Fluidmomentenspannungen, $\hat{\mathbf{m}}_0^F$ des Momentenaustauschs und \mathbf{q}_0^I des Wärmeflusses verschwinden nach (4.70) bis (4.72). Sowohl die Gleichgewichtsgrößen als auch die in (4.73) bis (4.77) auftretenden Ableitungen können noch in beliebiger Weise von den Gleichgewichtsvariablen

$$\mathcal{S}_0 = \{\bar{\mathbf{U}}_S, \nabla \bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S, \rho^{FR}, \text{grad } \rho^{FR}, n^S, \text{grad } n^S, \vartheta\} \quad (4.78)$$

abhängen. Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen folgt mit den Entwicklungen (4.73) – (4.77) aus der Restungleichung \mathcal{D} durch formales Einsetzen:

$$\begin{aligned} & \bar{\Delta}_F \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta \right] + \\ \text{grad } \bar{\omega}_F \cdot & \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta \right] - \\ \mathbf{w}_F \cdot & \left[\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta \right] - \\ \bar{\nu}_F \cdot & \left[\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta \right] - \\ \text{grad } \vartheta \cdot & \left[\left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \bar{\Delta}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \text{grad } \bar{\omega}_F \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \mathbf{w}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \bar{\nu}_F + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 \text{grad } \vartheta \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Hinreichende Bedingungen zur Erfüllung von (4.79) ergeben sich wieder aus der Forderung, daß die einzelnen Summanden größer oder gleich null sind, da die

Nichtgleichgewichtsvariablen beliebige, voneinander unabhängige Werte annehmen können. Diese Eigenschaften sind gewährleistet, wenn die folgenden Tensoren zweiter bzw. vierter Stufe positiv definit sind:

$$\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\Delta}_F}, \frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F}, -\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \mathbf{w}_F}, -\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \bar{\nu}_F}, -\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \text{grad } \vartheta}. \quad (4.80)$$

Die in (4.79) auftretenden quadratischen Formen liefern dann immer positive Werte. Die restlichen Terme verschwinden identisch, wenn die folgenden Symmetriebedingungen garantiert werden:

$$\mathbf{T}_2^4 := \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 = - \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0^T, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{T}_3^3 := \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0^T \right)^T, \quad (4.82)$$

$$\mathbf{T}_4^3 := \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0^T \right)^T, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{T}_5^3 := \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0^T \right)^T, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{M}_2^3 := \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0^T \right)^T, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{M}_3^3 := \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0^T \right)^T, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{M}_4^3 := \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0^T \right)^T, \quad (4.87)$$

$$\mathbf{P}_2 := \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 = - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0^T, \quad (4.88)$$

$$\mathbf{P}_3 := \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 = - \left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0^T, \quad (4.89)$$

$$\mathbf{M}_2 := \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}^F}{\partial \text{grad } \vartheta} \right)_0 = - \left(\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0^T. \quad (4.90)$$

Zur Begründung weiterer Vereinfachungen werden die Ergebnisse für Einphasenmaterialien herangezogen. Bei einem *Newtonschen* Fluid werden die Extra-

spannungen durch die Deformationsgeschwindigkeit bestimmt. Für ein mikropolares, viskoses Fluid werden die Extraspannungen als Funktion der *Cosserat*-Deformationsgeschwindigkeit $\bar{\Delta}_F$ und die Extramomentenspannungen als Funktion des Winkelgeschwindigkeitsgradienten $\text{grad } \bar{\omega}_F$ angesetzt (Eringen, 1964). Analog wird der Wärmefluß nach dem *Fourierschen* Wärmeleitgesetz als proportional zum Temperaturgradienten $\text{grad } \vartheta$ angenommen. Legt man in Erweiterung dieser Ansätze zugrunde, daß der Extraimpuls austausch durch die Sickergeschwindigkeit und der Drallaustausch durch die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten bestimmt werden, so ergibt sich eine „natürliche“ Zuordnung von Nichtgleichgewichtsvariablen und Auswirkungsfunktionen durch die positiv definiten Tensoren nach (4.80), die in den angesprochenen Sonderfällen auf die bekannten linearen Materialgesetze führen. Im Rahmen der Gleichungen (4.81) bis (4.90) sind mehr Abhängigkeiten möglich als durch die „natürliche“ Zuordnung gegeben sind, allerdings ist dann eine Kopplung zwischen den verschiedenen Auswirkungsfunktionen in der Art notwendig, daß die geforderten Symmetriebedingungen eingehalten werden. Das hat zur Folge, daß z. B. im Fall einer vollständigen thermo-mechanischen Kopplung der Wärmefluß von kinematischen Nichtgleichgewichtsvariablen abhängen kann. Wenn man diesen Fall zuläßt, dann müssen auch die Spannungen, die Momentenspannungen und die Impuls- und Drallaustauschsterme vom Temperaturgradienten abhängen, da sonst die notwendigen Symmetrieeigenschaften verletzt werden.

Der Einfachheit halber wird im folgenden von der „natürlichen“ Zuordnung Gebrauch gemacht, und die Möglichkeiten weiterer Kopplungen in den Extragrößen werden *a priori* vernachlässigt. Die Nichtgleichgewichtsanteile der Materialgesetze sind dann nur noch durch die positiv definiten Tensoren nach (4.80) bestimmt.

4.8 Zusammenstellung der Resultate

In diesem Abschnitt werden in Kurzform die Resultate der vorangegangenen Abschnitte zusammengestellt. Aus dem Entropieprinzip können die folgenden Einschränkungen für die Formulierung von mikropolaren Materialgesetzen für eine gesättigte Zweikomponentenmischung abgeleitet werden. Da eine Auswertung des Prinzips der Irreversibilität für beliebige Zustände nicht möglich ist, ist die Gültigkeit der Ergebnisse auf die Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts beschränkt.

- **Freie Energie beider Konstituierenden:**

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, \rho^{FR}, \text{grad } \rho^{FR}, n^S, \text{grad } n^S, \vartheta, \text{grad } \vartheta). \quad (4.91)$$

Im Gleichgewicht gilt:

$$\psi_0^\alpha = \psi_0^\alpha(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, \rho^{FR}, n^S, \vartheta). \quad (4.92)$$

Da sich die folgenden Untersuchungen auf das Gleichgewicht oder auf die Nähe des Gleichgewichts beschränken, wird nicht mehr zwischen ψ^α und ψ_0^α unterschieden. Es werden vereinfachend die reduzierten Abhängigkeiten nach (4.92) zugrundegelegt.

- **Entropie:**

$$\rho^\alpha \eta^\alpha = -\rho^\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \vartheta}. \quad (4.93)$$

- **Festkörperspannungen:**

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - z^S n^S [p^{FR} + p^{KR}] \mathbf{I} \quad (4.94)$$

mit dem effektiven Fluidruhedruck

$$p^{FR} = (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \quad (4.95)$$

und dem Konfigurationsdruck

$$p^{KR} = \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S}. \quad (4.96)$$

Der Term $\rho^F \bar{\mathbf{R}}_S (\partial \psi^F / \partial \bar{\mathbf{U}}_S) \mathbf{F}_S^T$ in (4.94) kann als Hydrationsspannung interpretiert werden (Schreyer Bennethum *et al.*, 1998). Er wird wichtig, wenn man

z. B. das Schwellen von Ton oder von hydrophilen Polymeren beschreibt. Terme dieser Art existieren nur in solchen Modellen, bei denen das Prinzip der Äquipräsens konsequent angewandt wird und Mischungen als Kontinua höheren Grades behandelt werden; in diesem Fall ist die Berücksichtigung von $\nabla \bar{\mathbf{U}}_S$ im Variablensatz notwendig.

- **Fluidspannungen:**

$$\mathbf{T}^F = -n^F p^{FR} \mathbf{I} + \overset{4}{\mathbf{T}}_1 \bar{\Delta}_F \quad (4.97)$$

mit

$$\overset{4}{\mathbf{T}}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{T}^F}{\partial \bar{\Delta}_F} \right)_0 \quad \text{positiv definit.} \quad (4.98)$$

- **Festkörpermomentenspannungen:**

$$\mathbf{M}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial R \bar{\mathcal{K}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial R \bar{\mathcal{K}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T. \quad (4.99)$$

- **Fluidmomentenspannungen:**

$$\mathbf{M}^F = \overset{4}{\mathbf{M}}_1 \text{grad } \bar{\omega}_F \quad (4.100)$$

mit

$$\overset{4}{\mathbf{M}}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}^F}{\partial \text{grad } \bar{\omega}_F} \right)_0 \quad \text{positiv definit.} \quad (4.101)$$

- **Interaktionskraft:**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}^F &= - \left[p^{FR} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \text{grad } n^S + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } \rho^{FR} \\ &\quad - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left[\left(\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right)^\perp + \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial R \bar{\mathcal{K}}_S} \nabla^R \bar{\mathcal{K}}_S \right)^\perp \right] + \mathbf{P}_1 \mathbf{w}_F \end{aligned} \quad (4.102)$$

mit

$$- \mathbf{P}_1 = - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^F}{\partial \mathbf{w}_F} \right)_0 \quad \text{positiv definit.} \quad (4.103)$$

- **Interaktionsmoment:**

$$\hat{\mathbf{m}}_F = \mathbf{M}_1 \bar{\nu}_F \quad (4.104)$$

mit

$$- \mathbf{M}_1 = - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}_F}{\partial \bar{\nu}_F} \right)_0 \quad \text{positiv definit.} \quad (4.105)$$

- **Wärmefluß:**

$$\mathbf{q}^I = \mathbf{Q} \operatorname{grad} \vartheta \quad (4.106)$$

mit

$$-\mathbf{Q} = - \left(\frac{\partial \mathbf{q}^I}{\partial \operatorname{grad} \vartheta} \right)_0 \quad \text{positiv definit.} \quad (4.107)$$

Die hier zusammengestellten Ergebnisse der Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung sind zum Teil notwendig, zum Teil hinreichend zur Erfüllung des Entropieprinzips. Grundsätzlich besitzen sie noch einen hohen Grad von Allgemeinheit, so daß in vielen Fällen weitere Vereinfachungen dieser Resultate vorgenommen werden müssen, um zu anwendbaren Modellen zu gelangen. In einem ersten Schritt sind dazu in den Gleichungen (4.97) bis (4.106) nur die „natürlichen“ Zuordnungen in den Nichtgleichgewichtsgrößen berücksichtigt worden. Weitere Vereinfachungen und Konkretisierungen der allgemeinen Ergebnisse werden in den nächsten Kapiteln diskutiert.

Kapitel 5:

Vier Modelltypen

5.1 Das kompressible Modell

Die Ergebnisse der Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung wurden in Abschnitt 4.8 zusammengestellt. Sie sind noch von sehr allgemeiner Natur und geben lediglich eine Form der Konstitutivgleichungen an, die sicherstellt, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzt wird. Zur Modellbildung müssen diese Ergebnisse jedoch konkretisiert werden. Bevor im nächsten Kapitel ein spezielles Modell vorgestellt wird, sollen hier einige Reduktionen der allgemeinen Ergebnisse durchgeführt werden. Ein wesentlicher Schritt dabei ist die konstitutive Trennung der Konstituierenden (Ehlers, 1989a), ein anderer Schritt die Berücksichtigung von materiell konstanter Dichte, also materieller Inkompressibilität einzelner Konstituierenden. Davon sind allerdings nur die Gleichgewichtsanteile betroffen, so daß in diesem Kapitel die Nichtgleichgewichtsgrößen, die die Dissipation verursachen, gegenüber den Ergebnissen des vorangegangenen Kapitels nicht weiter modifiziert werden.

Bei der Auswertung der Entropieungleichung wurde von Anfang an das Äquipräsensprinzip angewandt, so daß sich Abhängigkeiten der freien Energiefunktion einer Konstituierenden vom gesamten Satz der Gleichgewichtsvariablen ergeben. Dabei wird zugelassen, daß die freie Energie des Festkörperskeletts von der Fluidichte ρ^{FR} und die freie Energie des Fluids von den Deformationstensenoren des Festkörpers abhängen. Schließt man diese Kopplung aus, ergibt sich ein vereinfachtes Modell aus den allgemeinen thermodynamisch zulässigen Resultaten des letzten Abschnitts, vgl. auch Ehlers (1989b, 1993a, 1993b). Demnach hängt die freie Energie ψ^α nur von den Gleichgewichtsvariablen der jeweiligen Konstituierenden φ^α und von der Temperatur ϑ ab. Da die Volumenanteile über die Sättigungsbedingung gekoppelt sind, bleibt der Festkörpervolumenanteil n^S in beiden freien Energiefunktionen als Variable erhalten. Damit ergeben sich anstelle von (4.91) die reduzierten Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned}\psi^S &= \psi^S(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, n^S, \vartheta), \\ \psi^F &= \psi^F(\rho^{FR}, n^S, \vartheta).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Bowen (1980, 1982) hat diese reduzierte Form der Abhängigkeiten von Anfang an gefordert und den vollen Variablensatz nur in den Interaktionstermen berücksichtigt. Mit diesem Ansatz sind jedoch *a priori* Effekte wie Hydratationsspannungen (Schreyer

Bennethum *et al.*, 1998) ausgeschlossen.

Durch die Vereinfachung, die die konstitutive Trennung der Phasen mit sich bringt, ergeben sich die folgenden reduzierten Beziehungen für die Spannungen im Festkörper:

$$\mathbf{T}^S = \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \mathbf{F}_S^T - z^S n^S [p^{FR} + p^{KR}] \mathbf{I} \quad (5.2)$$

mit den Gleichgewichtsspannungen im Fluid

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} = -n^F p^{FR} \mathbf{I} \quad (5.3)$$

und dem Konfigurationsdruck

$$p^{KR} = \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S}. \quad (5.4)$$

Die Momentenspannungen des Festkörpers berechnen sich im vereinfachten Modell nach

$$\mathbf{M}^S = \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathcal{K}}_S} \mathbf{F}_S^T, \quad (5.5)$$

während die Gleichgewichtsmomentenspannungen des Fluids unverändert

$$\mathbf{M}_0^F = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

bleiben. Schließlich liefert das mit dem Konzept der konstitutiven Trennung der Konstituierenden vereinfachte Modell die Gleichgewichtsanteile des Impulsaustauschs in der Form

$$\hat{\mathbf{p}}_0^F = - \left[p^{FR} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \text{grad } n^S. \quad (5.7)$$

Unverändert bleiben die Gleichgewichtsanteile

$$\hat{\mathbf{m}}_0^F = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

des Drallaustausches und des Wärmeflusses

$$\mathbf{q}_0^I = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Die Nichtgleichgewichtsanteile der Fluidspannungen und der Fluidmomentenspannungen, der Impuls- und der Drallproduktion sowie des Wärmeflusses bleiben von der konstitutiven Trennung der Phasen unbeeinflusst.

Die hier vorgestellten Resultate weichen insofern von denen von Ehlers (1989b, 1993a, 1993b) ab, als hier bereits spezielle Formen der Evolutionsgleichungen für die Volumenanteile zugrunde gelegt wurden.

In den nächsten Abschnitten wird dargestellt, welche Änderungen der Resultate sich ergeben, wenn man von der Annahme der Inkompressibilität einzelner Phasen Gebrauch macht. Grundsätzlich beinhaltet das kompressible Modell drei Arten von Kompressibilitäten: Neben den Kompressibilitäten des reinen Festkörpermaterials und des Fluids existiert auch noch eine Strukturkompressibilität des Skeletts, die durch die Deformation des Porenraums hervorgerufen wird. Je nachdem, in welchem Verhältnis die einzelnen Kompressibilitäten zueinander stehen, können die einzelnen Konstituierenden als materiell inkompressibel angenommen werden.

5.2 Das hybride Modell vom Typ I

Das von Ehlers (1993a, 1993b) als hybrides Modell vom Typ I bezeichnete Modell besteht aus einem mikroskopisch kompressiblen Festkörper und einem inkompressiblen Porenfluid. Solche Modelle sind zwar mathematisch zulässig, aber in den wenigsten Fällen physikalisch sinnvoll, da in der Regel die Kompressibilität der fluiden Phase mindestens von der Größenordnung der Festkörperkompressibilität oder größer ist. Der Vollständigkeit halber werden hier die Ergebnisse für das hybride Modell vom Typ I dargestellt.

Wenn das Porenfluid mikroskopisch inkompressibel ist, so ist seine effektive Dichte konstant und somit keine Prozeßvariable mehr:

$$\rho^{FR} = \text{konst.} \quad (5.10)$$

Bei der Auswertung des Entropieprinzips entfallen dann die Ableitungen der freien Energien nach der effektiven Fluidichte:

$$\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \rho^{FR}} \equiv 0. \quad (5.11)$$

Weiterhin kann in diesem Fall die Evolutionsgleichung des Fluidvolumenanteils nicht aus der Sättigungsbedingung bestimmt werden, sie folgt für konstante reale Dichte vielmehr direkt aus der Partialmassenbilanz, die zu einer Volumenbilanz degeneriert:

$$(n^F)'_F + n^F \operatorname{div} \mathbf{x}'_F = 0. \quad (5.12)$$

Setzt man weiter voraus, daß die Evolutionsgleichung (4.14) für den Volumenanteil n^S des Festkörpers gültig bleibt, dann ist die Erfüllung der Sättigungsbedingung in

der Regel nicht mehr gewährleistet. Die inkrementelle Form

$$(n^S)'_S + (n^F)'_F + \text{grad } n^S \cdot \mathbf{w}_F = 0 \quad (5.13)$$

der Sättigungsbedingung wird daher mit einem *Lagrange*-Parameter P multipliziert und zur *Clausius-Duhem*-Ungleichung addiert. Dadurch erscheinen drei neue Terme in der *Clausius-Duhem*-Ungleichung, nämlich

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_S &\cdot z^S n^S P \mathbf{I}, \\ \bar{\Delta}_F &\cdot n^F P \mathbf{I} \quad \text{und} \\ \mathbf{w}_F &\cdot P \text{grad } n^S, \end{aligned} \quad (5.14)$$

die bei der Festkörperspannung \mathbf{T}^S , bei der Fluidspannung \mathbf{T}^F und beim Impulsaustausch $\hat{\mathbf{p}}^F$ auftreten, wenn man sie nach den entsprechenden Kriterien einsortiert. Folgt man der Argumentation der Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung, so stellt man fest, daß von der zusätzlichen Berücksichtigung vom (5.14) im Entropieprinzip nur die Gleichgewichtsanteile betroffen sind. Im folgenden werden, ohne auf die Details einzugehen, die Ergebnisse zusammengestellt. Es ergeben sich die Festkörperspannungen anstelle von (4.94) im hybriden Modell vom Typ I zu

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - z^S n^S \left[P + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \mathbf{I}, \quad (5.15)$$

und anstelle von (4.97) folgt mit den getroffenen Annahmen die Gleichgewichtsspannung des Porenfluids

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F P \mathbf{I}. \quad (5.16)$$

Der *Lagrange*-Parameter P kann anhand eines Randwertproblems als Druck in der inkompressiblen Flüssigkeit φ^F interpretiert werden und ersetzt den Porendruck p^{FR} , der für ein kompressibles Fluid aus einer Zustandsgleichung folgt. Die Momentenspannungen im Festkörperskelett

$$\mathbf{M}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T \quad (5.17)$$

und die Gleichgewichtsmomentenspannungen im Fluid

$$\mathbf{M}_0^F = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

bleiben gegenüber dem vollständig kompressiblen Modell unverändert. Schließlich erhält man noch die Gleichgewichtsanteile des Impulsaustauschs

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_0^F &= -\left(P + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S}\right) \text{grad } n^S \\ &\quad - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S\right)^\perp - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} \nabla {}^R \bar{\mathcal{K}}_S\right)^\perp, \end{aligned} \quad (5.19)$$

des Momentenaustauschs

$$\hat{\mathbf{m}}_0^F = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

und des Wärmeflusses

$$\mathbf{q}_0^I = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

Die Ergebnisse (5.15) bis (5.21) enthalten nur die Annahme eines inkompressiblen Porenfluids und die damit verbundene Streichung der effektiven Fluiddichte ρ^{FR} aus der Liste der Prozeßvariablen. Sie berücksichtigen außerdem die inkrementelle Form der Sättigungsbedingung in Kombination mit einem *Lagrange*-Parameter P bei der Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung. Im direkten Vergleich mit den Ausdrücken (5.2), (5.3) und (5.7) stellt man fest, daß im Fall eines inkompressiblen Porenfluids der Fluiddruck p^{FR} durch den *Lagrange*-Parameter P ersetzt werden muß.

Aus diesen Ergebnissen resultiert durch die Anwendung des Prinzips der konstitutiven Trennung der Konstituierenden das vereinfachte hybride Modell vom Typ I. Die freien Energiefunktionen weisen in diesem Fall noch die folgenden reduzierten Abhängigkeiten auf:

$$\begin{aligned} \psi^S &= \psi^S(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R \bar{\mathcal{K}}_S, n^S, \vartheta), \\ \psi^F &= \psi^F(n^S, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Damit vereinfacht sich die Darstellung der Spannungen des Festkörpers zu

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - z^S n^S [P + p^{KR}] \mathbf{I}. \quad (5.23)$$

Der Konfigurationsdruck p^{KR} ergibt sich nach (5.4). Für die Gleichgewichtsspannungen des Fluids erhält man unverändert

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F P \mathbf{I}, \quad (5.24)$$

für die Momentenspannungen im Festkörper

$$\mathbf{M}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathcal{K}_S} \right] \mathbf{F}_S^T, \quad (5.25)$$

für die Gleichgewichtsmomentenspannungen des Fluids

$$\mathbf{M}_0^F = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

und für den Gleichgewichtsanteil des Impulsaustausches

$$\hat{\mathbf{p}}_0^F = -P \operatorname{grad} n^S. \quad (5.27)$$

Der Momentenaustausch und der innere Anteil des Wärmeflusses verschwinden im Gleichgewicht. Die Nichtgleichgewichtsgrößen werden durch die Annahme materiell konstanter Fluidichte nicht beeinflusst.

Der unbestimmte *Lagrange*-Parameter P wird im hybriden Modell vom Typ I zu einer Zwangskraft; er folgt aus den Randbedingungen für die Fluidspannungen und nicht, wie der Fluiddruck p^{FR} im Fall eines kompressiblen Porenfluids, aus einer Zustandsgleichung.

Das hybride Modell vom Typ I aus einem kompressiblen Skelett und einem inkompressiblen Fluid wird in dieser Arbeit nicht näher untersucht. Weiterführende Untersuchungen dazu finden sich z. B. bei Bluhm (1995, 1997a, 1997b).

5.3 Das hybride Modell vom Typ II

Im Gegensatz zu dem hybriden Modell vom Typ I besteht das hybride Modell vom Typ II (Ehlers, 1993a, 1993b) aus einem materiell inkompressiblen, porösen Festkörperskelett, das mit einem kompressiblen Fluid gesättigt ist. Die Kompressibilität des Festkörpermateriale wird also gegenüber der Strukturkompressibilität des porösen Skeletts und gegenüber der Kompressibilität des Fluids vernachlässigt. Alle volumetrischen Dehnungen des Festkörperskeletts werden durch Änderungen des Porenvolumens aufgefangen.

Da im folgenden nur noch das hybride Modell vom Typ II betrachtet wird, wird es kurz hybrides Modell genannt. Für das hybride Modell steht die Forderung nach konstanter effektiver Festkörperdichte im Vordergrund:

$$\rho^{SR} = \text{konst.} \quad (5.28)$$

Aus der Massenbilanz des Festkörpers wird damit eine Evolutionsgleichung für die Volumenanteile, die mit der Evolutionsgleichung für n^S (4.14) nur für

$$z^S \equiv 1 \quad (5.29)$$

übereinstimmt. Die so resultierende Volumenbilanz kann sofort integriert werden. Man erhält mit einem Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S

$$n^S = n_{0S}^S \det \mathbf{F}_S^{-1} = n_{0S}^S \det \bar{\mathbf{U}}_S^{-1}. \quad (5.30)$$

Das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Definition (2.39) des Deformationstensors $\bar{\mathbf{U}}_S$ und aus der Orthogonalität der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_S$. In diesem Fall kann der Volumenanteil n^S direkt durch die Determinante des Deformationstensors ersetzt werden und stellt demzufolge keine unabhängige Prozeßvariable dar. Streicht man daher die Volumenanteile aus der Liste der Prozeßvariablen, so ergeben sich für die freien Energiefunktionen die zulässigen Abhängigkeiten

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, \rho^{FR}, \vartheta). \quad (5.31)$$

Aus den allgemeinen Beziehungen folgen unter diesen Annahmen die Festkörperstressungen

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - n^S \left[\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \right] \mathbf{I}. \quad (5.32)$$

Da der Volumenanteil n^S nicht mehr als eigenständige Prozeßvariable in Erscheinung tritt, entfällt im Vergleich zum kompressiblen Modell der Konfigurationsdruck p^{KR} in den Spannungsbeziehungen für das mikroskopisch inkompressible Festkörperskelett. Von den ursprünglich zwei Kompressibilitäten bleibt nur noch die Strukturkompressibilität erhalten.

Die Gleichgewichtsspannungen des Fluids lauten

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F \left[\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \right] \mathbf{I} = -n^F p^{FR} \mathbf{I}. \quad (5.33)$$

Analog zum kompressiblen Modell folgert man für den Fluiddruck:

$$p^{FR} = \frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}}. \quad (5.34)$$

Weiterhin erhält man für die Momentenspannungen des Festkörpers

$$\mathbf{M}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial {}^R\bar{\mathcal{K}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial {}^R\bar{\mathcal{K}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T \quad (5.35)$$

und für die Momentenspannungen des Fluids im Gleichgewicht

$$\mathbf{M}_0^F = \mathbf{0}. \quad (5.36)$$

Für die Impulsproduktion findet man

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_0^F = & - \left[\frac{\rho^S \rho^{FR}}{n^F} \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} + (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \right] \text{grad } n^S + \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } \rho^{FR} \\ & - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right)^\perp - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} \nabla {}^R \bar{\mathcal{K}}_S \right)^\perp. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Wie beim kompressiblen Modell ist die Momentenproduktion im Gleichgewicht

$$\hat{\mathbf{m}}_0^F = \mathbf{0}, \quad (5.38)$$

und auch der innere Anteil des Wärmeflusses im Gleichgewicht verschwindet:

$$\mathbf{q}_0^I = \mathbf{0}. \quad (5.39)$$

Weitere Vereinfachungen ergeben sich durch die Anwendung des Konzepts der konstitutiven Trennung der Variablen. Allerdings kann in diesem Fall die Abhängigkeit der freien Energie des Fluids von der Festkörperdeformation nicht vollständig gestrichen werden. Man muß vielmehr berücksichtigen, daß der Volumenanteil n^S durch die Determinante der Festkörperdeformation bestimmt ist. Bevor die Abhängigkeit der freien Energie des Fluids von der Festkörperdeformation gestrichen wird, muß die eingangs fallengelassene explizite Abhängigkeit vom Volumenanteil n^S wiederhergestellt werden, denn gemäß (5.30) sind n^S und $\bar{\mathbf{U}}_S$ nicht unabhängig voneinander. Zur Berücksichtigung dieses Zusammenhanges kann im Sinne eines Variablentauschs die Ableitung

$$\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} = \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \frac{dn^S}{d\bar{\mathbf{U}}_S} \quad (5.40)$$

unter Zuhilfenahme von

$$\frac{dn^S}{d\bar{\mathbf{U}}_S} = n_{0S}^S \frac{d(\det \bar{\mathbf{U}}_S)^{-1}}{d\bar{\mathbf{U}}_S} = -n^S \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1} = -n^S \bar{\mathbf{R}}_S^T \mathbf{F}_S^{T-1} \quad (5.41)$$

berechnet werden (Ehlers, 1993b). In der Materialfunktion für die freie Energie des Fluids kann mit (5.40) die Abhängigkeit von $\bar{\mathbf{U}}_S$ durch eine Abhängigkeit von n^S ersetzt werden. Damit bestehen für die freien Energien im vereinfachten hybriden Modell die folgenden Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} \psi^S &= \psi^S(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R \bar{\mathcal{K}}_S, \vartheta) \\ \psi^F &= \psi^F(n^S, \rho^{FR}, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Schließlich ergeben sich im vereinfachten hybriden Modell die Festkörperspannungen

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - n^S \left[(\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \mathbf{I}, \quad (5.43)$$

die Fluidspannungen im Gleichgewicht

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \mathbf{I} \quad (5.44)$$

und die Impulsproduktion im Gleichgewicht

$$\hat{\mathbf{p}}_0^F = -(\rho^{FR}) \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}} \text{grad } n^S + \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left[\left(n^S \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1} \right) \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right]^\perp. \quad (5.45)$$

Die Momentenspannungen für den Festkörper bestimmen sich gemäß

$$\mathbf{M}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathcal{K}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T. \quad (5.46)$$

Die Gleichgewichtsanteile der Fluidmomentenspannungen, der Momentenproduktion und des Wärmeflusses verschwinden auch in diesem Fall, die Nichtgleichgewichtsanteile bleiben unverändert.

5.4 Das inkompressible Modell

Inkompressible Zweiphasenmodelle für poröse Medien sind in der Literatur mehrfach behandelt worden, z. B. von Bowen (1980), de Boer & Ehlers (1986) und Ehlers (1989b). Im Fall, daß beide Konstituierenden inkompressibel sind, folgen Evolutionsgleichungen für beide Volumenanteile aus den jeweiligen Massenbilanzen unter der Annahme konstanter effektiver Dichten. Aus

$$\rho^{\alpha R} = \text{konst.} \quad (5.47)$$

folgt

$$(n^\alpha)'_\alpha = -n^\alpha \text{div } \mathbf{x}'_\alpha. \quad (5.48)$$

Für den Festkörper folgt die Evolutionsgleichung (5.48) für $z^S \equiv 1$, für das Fluid stellt sie genau wie im hybriden Modell vom Typ I in Kombination mit der Sättigungsbedingung eine Zwangsbedingung dar. Damit die beiden Evolutionsgleichungen mit der Sättigungsbedingung verträglich sind, ist die Formulierung mit Hilfe

eines *Lagrange*-Parameters unumgänglich. Genau wie beim hybriden Modell vom Typ I wird die inkrementelle Form der Sättigungsbedingung zum Entropieprinzip addiert. Zur Herleitung der weiteren Resultate kann direkt auf den Ergebnissen des hybriden Modells vom Typ I aufgesetzt werden.

Da für ein inkompressibles Festkörperskelett der Volumenanteil n^S durch den Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_S$ ausgedrückt werden kann, ergeben sich die möglichen Abhängigkeiten der freien Energiefunktionen in der folgenden Form:

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, \vartheta). \quad (5.49)$$

Dann folgt für die Festkörperspannungen

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - n^S P \mathbf{I}, \quad (5.50)$$

für die Fluidspannungen im Gleichgewicht

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F P \mathbf{I} \quad (5.51)$$

und für die Gleichgewichtsimpulsproduktion:

$$\hat{\mathbf{p}}_0^F = -P \text{grad } n^S - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right)^\perp - \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial {}^R\bar{\mathcal{K}}_S} \nabla {}^R\bar{\mathcal{K}}_S \right)^\perp. \quad (5.52)$$

Der *Lagrange*-Parameter P , der in den Ausdrücken (5.50) bis (5.52) auftritt, ist eine Zwangskraft, die aus den Randbedingungen des Problems zu bestimmen ist und als Porenfluiddruck interpretiert werden kann. Unter Berücksichtigung von (5.41) folgt für die Festkörperspannungen des reduzierten Modells

$$\mathbf{T}^S = \bar{\mathbf{R}}_S \left[\rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \right] \mathbf{F}_S^T - n^S \left[P + \rho^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \right] \mathbf{I}, \quad (5.53)$$

für die Fluidgleichgewichtsspannungen

$$\mathbf{T}_0^F = -n^F P \mathbf{I} \quad (5.54)$$

und für die Impulsproduktion im Gleichgewicht

$$\hat{\mathbf{p}}_0^F = -P \text{grad } n^S + \rho^F \mathbf{F}_S^{T-1} \left[n^F \frac{\partial \psi^F}{\partial n^S} \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1} \nabla \bar{\mathbf{U}}_S \right]^\perp. \quad (5.55)$$

Die Resultate für die Momentenspannungen, für die Momentenproduktion und für den Wärmefluß bleiben, wie die Resultate für die Nichtgleichgewichtsanteile der Fluidspannungen und der Impulsproduktion, unverändert.

Für nicht-polare Materialien ist das inkompressible Modell in unterschiedlichen Varianten erfolgreich numerisch umgesetzt worden. Insbesondere wurde für das Festkörperskelett elastisches Verhalten (Diebels & Ehlers, 1995, 1996a; Ehlers & Eipper, 1997, 1999; Eipper, 1998), plastisches Verhalten (Diebels & Ehlers, 1994; Diebels *et al.*, 1996a; Ehlers *et al.*, 1997) und viskoplastisches Verhalten (Diebels *et al.*, 1998b, 1998c; Ellsiepen, 1999) zugrunde gelegt. Lokalisierungsuntersuchungen mit einem mikropolaren, elastisch-plastischen Festkörperskelett wurden von Ehlers & Volk (1997a, 1997b, 1998), von Diebels *et al.* (1998a) und von Volk (1999) ebenfalls im Rahmen eines inkompressiblen Modells durchgeführt.

5.5 Resultate

In diesem Kapitel wurden die allgemeinen Resultate, die sich aus der Diskussion der *Clausius-Duhem*-Ungleichung ergaben, für vier mögliche Modelltypen spezialisiert. Dabei zeigte sich, daß im Rahmen der gewählten Strukturen die materielle Inkompressibilität des Festkörperskeletts durch Streichen der unabhängigen Prozeßvariablen n^S aus dem allgemeinen Variablensatz und durch die Wahl $z^S \equiv 1$ garantiert werden konnte. Im Fall eines inkompressiblen Porenfluids dagegen war es notwendig, sowohl die Dichte ρ^{FR} aus dem Satz der Prozeßvariablen zu streichen als auch einen *Lagrange*-Parameter P zur Sicherstellung der Sättigungsbedingung einzuführen. Dabei übernahm der *Lagrange*-Parameter die Rolle des Porenfluiddrucks, der im Fall eines kompressiblen Fluids aus einer Zustandsgleichung folgt.

Durch die Anwendung des Prinzips der konstitutiven Trennung der Phasen konnten die allgemeinen Ergebnisse im Rahmen physikalischer Plausibilität weiter vereinfacht werden. Außerdem stellte sich heraus, daß die mikropolaren Eigenschaften der Konstituierenden, die sich in den Momentenspannungen \mathbf{M}^α und in der Drallkopplung $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$ äußern, von der Kompressibilität der Konstituierenden nicht beeinflußt werden, d. h. die Konstitutivgesetze für \mathbf{M}^α und $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$ ändern sich nicht, wenn für die einzelnen Konstituierenden materielle Inkompressibilität angenommen wird. Die im vorliegenden Kapitel zusammengestellten Ergebnisse werden im nächsten Kapitel konkretisiert, um zu einem praktisch anwendbaren Modell zu gelangen. Dazu werden konkrete Formen für die freien Energien entwickelt. Weiterhin werden dort Ansätze zur Modellierung der Nichtgleichgewichtsgrößen diskutiert.

Kapitel 6:

Konkretisierung der Modelle

6.1 Einschränkende Annahmen

Im weiteren werden die vereinfachten kompressiblen, hybriden und inkompressiblen Modelle näher betrachtet, wobei auf die Diskussion thermischer Effekte der Einfachheit halber verzichtet wird. Dadurch entfällt in den freien Energiefunktionen die Abhängigkeit von der Temperatur. Desweiteren soll die grundsätzlich mögliche Abhängigkeit der freien Energie ψ^F des Fluids vom Volumenanteil n^S ausgeschlossen werden, da das Fluid im Gegensatz zum Festkörper nicht über eine Mikrostruktur verfügt. Vielmehr füllt das Fluid den ihm zur Verfügung stehenden Porenraum vollständig aus. Die Interaktion des Fluids mit dem Porenraum des Festkörpers geschieht dabei über den Porendruck und den Impuls- und Drallaustausch zwischen den beiden Konstituierenden.

Für das isotherme, vereinfachte kompressible Modell bleiben nur noch die folgenden Abhängigkeiten bestehen:

$$\begin{aligned}\psi^S &= \psi^S(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, n^S), \\ \psi^F &= \psi^F(\rho^{FR}).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Die Gleichgewichtsanteile der Antwortfunktionen ergeben sich dann gemäß den Überlegungen des vorherigen Kapitels. Entgegen dem bisherigen formalen Vorgehen erfordert die Konkretisierung der konstitutiven Gleichungen Kenntnisse über das spezielle Materialverhalten. Die Wahl konkreter Materialgleichungen kann somit keinen allgemeinen Charakter mehr haben und nicht aus übergeordneten Prinzipien abgeleitet werden. Vielmehr werden im Rahmen der zulässigen Strukturen Ansätze für die freien Energien gewählt, die sich in der Literatur zur Modellierung bestimmter Phänomene bereits bewährt haben, bzw. solche, die der physikalischen Anschauung entsprechen. Um den Einfluß der Mikropolarität zu erfassen, müssen diese Ansätze allerdings erweitert werden. Als weitere Annahme wird vorausgesetzt, daß sich beide Konstituierenden isotrop verhalten. Für das Fluid ist diese Forderung per Definition erfüllt, für das Festkörperskelett stellt die Isotropie eine einschränkende Forderung dar, die allerdings in vielen Fällen in guter Näherung erfüllt ist. Die Modellierung anisotroper Strukturen ist zwar grundsätzlich möglich, erfordert aber die Einführung von zusätzlichen Strukturtenoren zur Beschreibung der ausgezeichneten Richtungen.

6.2 Das Festkörperskelett

6.2.1 Materialgesetze für das Festkörperskelett

Das Festkörperskelett soll sich gemäß den bisherigen Annahmen elastisch verhalten. Das einfachste konstitutive Gesetz zur Beschreibung von Elastizität ist das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz, das einen linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und dem linearisierten Verzerrungstensor herstellt. Im Rahmen einer mikropolaren Formulierung dagegen wird als Erweiterung des *Hookeschen* Gesetzes ein linearer Zusammenhang zwischen den Kraftgrößen und den linearisierten Deformationstensenoren gefordert. Der allgemeine thermodynamisch konsistente Ansatz für die Spannungen und für die Momentenspannungen lautet im Rahmen einer linearen Theorie (Marin, 1998; Martinez & Quintanilla, 1998):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_E^S &= \alpha_1 \bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} + \alpha_2 (\bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}})^T + \alpha_3 (\bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \\
&+ \beta_1 {}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}} + \beta_2 ({}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}})^T + \beta_3 ({}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \\
\mathbf{M}^S &= \beta_1 \bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} + \beta_2 (\bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}})^T + \beta_3 (\bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \\
&+ \gamma_1 {}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}} + \gamma_2 ({}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}})^T + \gamma_3 ({}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Die linearisierten Verzerrungstensenoren ergeben sich durch eine formale Linearisierung der entsprechenden finiten Maße (Volk, 1999) zu

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} &= \text{Grad}_S \mathbf{u}_S + \overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_S, \\
{}^R \bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}} &= \text{Grad}_S \bar{\boldsymbol{\varphi}}_S,
\end{aligned} \tag{6.3}$$

wobei $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_S$ den zu $\bar{\mathbf{R}}_S$ gehörenden Drehvektor¹ bezeichnet, der aus der *Euler-Rodriguez*-Formel ermittelt werden kann. Die Materialparameter α_i , β_i und γ_i sind in einem linearen Modell konstant. Anhand des ebenen Verzerrungszustandes kann man zeigen, daß der allgemeine Ansatz (6.2) zu Widersprüchen führt, solange die Parameter β_i ungleich null sind. Mit $\beta_i = 0$ entfallen die Kopplungen sowohl zwischen Spannungen und Krümmungen als auch zwischen Momentenspannungen und Verzerrungen. Man erhält dann die linearen Materialgesetze, die von Nowacki (1969, 1986) und Lakes (1986) vorgeschlagen wurden. Im ebenen Fall treten die beiden Terme mit den Parametern γ_2 und γ_3 nicht auf, so daß man die von de Borst (1991)

¹In der finiten Theorie ist $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_S$ nur ein Pseudovektor, da die Additionseigenschaft fehlt.

und Ehlers & Volk (1997a, 1997b, 1998) angegebenen Zusammenhänge findet:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E^S &= 2\mu^S \text{sym } \bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} + 2\mu_c^S \text{skw } \bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} + \lambda^S (\bar{\mathbf{E}}_S^{\text{lin}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \\ \mathbf{M}^S &= 2\mu_c^S (l_c^S)^2 {}^R\bar{\mathcal{K}}_S^{\text{lin}}.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Neben den klassischen *Laméschen* Konstanten μ^S und λ^S treten zusätzlich die Parameter μ_c^S zur Gewichtung des schiefsymmetrischen Verzerrungsanteils und die interne Länge l_c^S auf.

Die Ansätze (6.4) der linearen Theorie sind nur für kleine Verschiebungen, kleine Verzerrungen, kleine Drehwinkel und kleine Krümmungen gültig. In diesem Abschnitt wird eine nichtlineare Erweiterung von (6.4) hergeleitet, die für beliebige Deformationszustände gültig ist.

Ansätze zur Beschreibung finiter Elastizität von nicht-polaren Materialien sind im Fall von inkompressiblem Materialverhalten das Neo-*Hooke*-Modell (Treloar, 1943), das *Mooney-Rivlin*-Modell (Mooney, 1940; Rivlin, 1948a, 1948b) oder das in den Eigenwerten des Deformationstensors formulierte *Ogden*-Modell (Ogden, 1972a, 1972b). Um jedoch den Einfluß der Volumendehnungen kompressibler Materialien zu erfassen, wird Gesetzen, die aus den o. g. Modellen resultieren, ein volumetrischer Term additiv hinzugefügt. So haben z. B. Blatz & Ko (1962) eine Erweiterung des Neo-*Hooke*-Modells vorgenommen, für das *Mooney-Rivlin*-Modell und für das *Ogden*-Modell (Ogden, 1972b) wurden ebenfalls volumetrische Terme angegeben. Diese Erweiterungen der Materialgesetze für inkompressibles Verhalten können die Volumendehnung letztendlich auf zwei unterschiedliche Arten beinhalten: Zum einen kann man den für inkompressibles Verhalten formulierten Materialgesetzen ohne weitere Modifikation einen volumetrischen Term hinzufügen. Die Invarianten des Ansatzes beinhalten allerdings ebenfalls volumetrische Terme, wenn die Inkompressibilitätsbedingung aufgegeben wird. Zum anderen kann man die verwendeten Invarianten modifizieren, so daß der erweiterte Ansatz in einen deviatorischen und einen volumetrischen Term zerfällt. Die Separation der Einflüsse von Schub und Kompression führt zu einer multiplikativen Aufspaltung der Deformationstensenoren in isochore und volumetrische Anteile (Penn, 1970). Das ursprünglich für inkompressibles Materialverhalten angesetzte Modell wird dann für den isochoren Anteil übernommen, während der Zusatzterm nur den volumetrischen Anteil berücksichtigt. In frühen Versionen (Fong & Penn, 1975; Peng & Landel, 1975) wurde allerdings ein weiterer Koppelterm zwischen den isochoren und den volumetrischen Anteilen in der freien Energiefunktion berücksichtigt. Ehlers & Eipper (1998) zeigen, daß eine vollständige Entkopplung im Bereich großer Deformationen zu physikalisch fragwürdigen Resultaten führt: Eine Zunahme der Längsdehnung eines Stabes führt bei der Verwendung solcher vollständig entkoppelter Gesetze im Bereich großer Dehnungen zu einer unphysikalischen Aufweitung des Querschnitts und damit zu

negativen „lokalen“ Querdehnraten. Diese Schwierigkeit tritt nicht auf, wenn man auf die völlige Entkopplung isochorer und volumetrischer Anteile in Form der multiplikativen Aufspaltung der Deformationstensoren verzichtet. Daher wird für die weiteren Überlegungen das um einen volumetrischen Term erweiterte Neo-*Hooke*-Modell gewählt, das von den oben angeführten Modellen die einfachste Struktur hat und sich auch numerisch als robust erwiesen hat. Das ebenfalls häufig verwendete *Ogden*-Modell scheidet für weitere Untersuchungen aus, da nichtsymmetrische Deformationstensoren nicht notwendigerweise über reelle Eigenwerte verfügen.

Damit stehen zwei Rahmenpunkte zur Formulierung eines mikropolaren Materialgesetzes fest. Bei Linearisierung muß sich das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz (6.4) ergeben, und für den Fall, daß die mikropolaren Freiheitsgrade nicht aktiv sind, soll eine Abwärtskompatibilität zum volumetrisch erweiterten Neo-*Hooke*-Modell der Standardformulierung gewährleistet sein.

Wenn man bei der Erweiterung der inkompressiblen Materialgesetze die Deformationstensoren nicht in volumetrische und isochore Teile aufspaltet, tritt vor dem Volumenterm in dem erweiterten Neo-*Hooke*-Gesetz die *Lamé*-Konstante λ^S anstelle des Kompressionsmoduls k^S auf. Das Neo-*Hooke*-Modell der Standardformulierung kann für den gewichteten *Cauchy*-Spannungstensor (*Kirchhoff*-Spannungstensor) in der Form

$$J_S \mathbf{T}_E^S = \mu^S (\mathbf{B}_S - \mathbf{I}) + \lambda^S \frac{dW^S(J_S)}{dJ_S} \mathbf{I} \quad (6.5)$$

angegeben werden. Dabei bezeichnet

$$J_S = \det \mathbf{F}_S \quad (6.6)$$

die Determinante des Deformationsgradienten und repräsentiert die finite Volumendehnung. Der volumetrische Erweiterungsterm in der freien Energiefunktion ist durch $W^S(J_S)$ gegeben. Diskussion und Gegenüberstellung möglicher Erweiterungsterme finden sich bei Doll & Schweizerhof (1997). Dabei zeigt sich, daß neben weiteren von Doll & Schweizerhof entwickelten Funktionen die beiden häufig in der Literatur vertretenen Ansätze

$$\begin{aligned} W^S(J_S) &= \frac{1}{4} [(J_S - 1)^2 + (\ln J_S)^2], \\ W^S(J_S) &= \theta^{-2} [\theta \ln J_S + J_S^{-\theta} - 1], \quad \theta < -1 \end{aligned} \quad (6.7)$$

allen geforderten Kriterien genügen. Diese physikalisch motivierten Kriterien werden später in diesem Kapitel noch diskutiert. Der Ansatz (6.7)₁ findet sich zum Beispiel in den Arbeiten von Simo & Taylor (1982), van den Bogert & de Borst (1990), Liu & Mang (1996), die zweite Möglichkeit (6.7)₂ wird von Ogden (1972b), Simo &

Taylor (1991) und Miehe (1994) vorgeschlagen. Beide Ansätze wurden erfolgreich zur Beschreibung kompressiblen Materialverhaltens genutzt. Sie versagen allerdings bei der Beschreibung von porösen Materialien, wenn das Matrixmaterial als materiell inkompressibel angenommen wird. In diesem Fall existiert ein *Kompressionspunkt*: Wenn die Volumendehnungen so groß werden, daß alle Poren geschlossen sind, muß sich das Matrixmaterial makroskopisch inkompressibel verhalten. Zur Erfassung des Kompressionspunktes wird von Ehlers & Eipper (1997, 1999) und von Eipper (1998) der folgende volumetrische Erweiterungsterm vorgeschlagen:

$$W^S(J_S) = (1 - n_{0S}^S)^2 \left[\frac{J_S - 1}{1 - n_{0S}^S} - \ln \frac{J_S - n_{0S}^S}{1 - n_{0S}^S} \right]. \quad (6.8)$$

Der Ansatz (6.8) erfüllt die gleichen Kriterien wie die beiden Erweiterungsterme nach (6.7). Durch die Einführung des Kompressionspunktes gehen die Druckspannungen bereits gegen unendlich, wenn alle Poren geschlossen sind, und nicht erst dann, wenn der Körper auf einen Punkt komprimiert wird.

Für das weitere Vorgehen wird isotropes Verhalten des Festkörperskeletts angenommen, d. h. eine Drehung des Materials vor der Belastung ändert die Belastungsantwort nicht. Die freie Energie des Festkörpers ist dann eine isotrope Funktion ihrer Argumente. Für beliebige orthogonale Tensoren $\mathbf{Q}(t)$ gilt in diesem Fall

$$\psi^S(\bar{\mathbf{U}}_S, {}^R\bar{\mathcal{K}}_S, n^S) = \psi^S(\mathbf{Q}\bar{\mathbf{U}}_S\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}{}^R\bar{\mathcal{K}}_S\mathbf{Q}^T, n^S). \quad (6.9)$$

In der Literatur sind isotrope Funktionen ausführlich behandelt worden (Smith, 1971; Spencer, 1971; Wang, 1970a, 1970b), wobei durch die Einführung von zusätzlichen Strukturtenoren auch anisotropes Materialverhalten innerhalb des Konzepts isotroper Funktionen beschrieben werden kann (Boehler, 1987; Horz, 1994). Mit Hilfe der Darstellungssätze isotroper Funktionen kann die freie Energie durch die Invarianten von $\bar{\mathbf{U}}_S$ und ${}^R\bar{\mathcal{K}}_S$ beschrieben werden. Zur Erweiterung des Neo-*Hooke*-Gesetzes werden die folgenden Invarianten des Deformationstensors benötigt:

$$\begin{aligned} \text{II}_U &:= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}_S \cdot \bar{\mathbf{U}}_S, \\ \text{III}_U &:= \det \bar{\mathbf{U}}_S = J_S, \\ \text{IV}_U &:= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}_S \cdot \bar{\mathbf{U}}_S^T. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Zur Erweiterung des *de Borst*schen Ansatzes (6.4) in den nichtlinearen Bereich genügt die Invariante

$$\text{II}_K := \frac{1}{2} {}^R\bar{\mathcal{K}}_S \cdot {}^R\bar{\mathcal{K}}_S \quad (6.11)$$

des Krümmungstensors (Steinmann, 1994).

Die freie Energiefunktion wird nun so konstruiert, daß für die Spannungen eine Verallgemeinerung des Neo-*Hooke*-Gesetzes mit einem unsymmetrischen Term erfolgt. Ein solcher Ansatz berücksichtigt, daß die Spannungen unendlich groß werden, wenn der Körper auf einen Punkt komprimiert oder unendlich gedehnt wird. Für einen mikroskopisch kompressiblen, porösen Festkörper müssen zwei volumetrische Dehnungen in die Modellierung eingehen. Zum einen kann das Material Volumendehnungen erleiden, in dem der makroskopische Deformationszustand verändert wird. Die beschreibende Variable ist J_S . Zum anderen können Änderungen der Porosität ohne eine Veränderung der makroskopischen Deformation zu Volumendehnungen führen. Dieser Effekt wird im weiteren durch n_{0S}^S/n^S berücksichtigt. Falls das Festkörperskelett inkompressibel ist, sind nach (5.30) beide Dehnungen gleich. Die Modellierung kann dann vollständig über J_S geschehen, vgl. (6.8).

Weiterhin müssen die Momentenspannungen in Betracht gezogen werden. Der Ansatz von Steinmann (1994) für die Momentenspannungen berücksichtigt nur die geometrische Nichtlinearität. Da jedoch die mikrophysikalische Ursache der Momentenspannungen in den Reibkräften zwischen den einzelnen Partikeln zu suchen ist, müssen bei gleichen Krümmungen die Momentenspannungen mit wachsender Kompression zunehmen. Eine entsprechende mikroskopische Interpretation findet sich bei Volk (1999). Aus diesem Grund wird die zweite Invariante der Krümmungen in der freien Energiefunktion mit einer Funktion $f(J_S)$ gewichtet. Damit können die mikroskopischen Reibgesetze zwischen den einzelnen Partikeln in der Makrotheorie in die Modellierung einbezogen werden. Folgende Funktion zur Modellierung der freien Energie wird im weiteren zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned} \rho_{0S}^S \psi^S &= \mu^S (\mathbb{I}_U - \ln J_S - 3/2) + \mu_c^S (\mathbb{I}_U - \mathbb{I}_V) \\ &+ \lambda^S [\alpha W^S(J_S) + (1 - \alpha) W^S(n_{0S}^S/n^S)] \\ &+ \mu_c^S (l_c^S)^2 f(J_S) \mathbb{I}_K + P_0 J_S. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dabei beschreibt der erste Term den Schubeinfluß analog zum Modell der Standardformulierung, der zweite Term berücksichtigt den Einfluß des unsymmetrischen Deformationstensors, und der dritte Term erfaßt die Volumendehnung. Der Einfachheit halber wird für beide vorhandenen volumetrischen Terme der gleiche funktionale Zusammenhang über die Funktion W^S gewählt. Man sieht, daß durch die Einführung des Faktors α im Modell zwei verschiedene Kompressibilitäten auftreten. Weiterhin wird der Term $P_0 J_S$ eingeführt, um in der Referenzkonfiguration ein konstantes Druckfeld zu erzeugen, das keine Deformationen hervorruft. Das ist notwendig, damit in der Referenzkonfiguration ein kompressibles Fluid mit endlicher Dichte existieren kann.

Führt man Spannungen und Momentenspannungen der Form

$$\tilde{\mathbf{T}}_E^S = \rho_{0S}^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} = J_S \bar{\mathbf{R}}_S^T \mathbf{T}_E^S \mathbf{F}_S^{T-1} \quad (6.13)$$

und

$$\tilde{\mathbf{M}}^S = \rho_{0S}^S \frac{\partial \psi^S}{\partial {}^R \bar{\mathcal{K}}_S} = J_S \bar{\mathbf{R}}_S^T \mathbf{M}^S \mathbf{F}_S^{T-1}, \quad (6.14)$$

ein, so liefert die Differentiation von (6.12) nach dem Deformationstensor $\bar{\mathbf{U}}_S$ die Spannungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_E^S &= \mu^S (\bar{\mathbf{U}}_S - \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1}) + \mu_c^S (\bar{\mathbf{U}}_S - \bar{\mathbf{U}}_S^T) + \alpha \lambda^S \frac{dW^S}{dJ_S} J_S \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1} \\ &+ \mu_c^S (l_c^S)^2 J_S \frac{df(J_S)}{dJ_S} \mathbb{I}_K \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1} + J_S P_0 \bar{\mathbf{U}}_S^{T-1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

und die Differentiation nach ${}^R \bar{\mathcal{K}}_S$ die Momentenspannungen

$$\tilde{\mathbf{M}}^S = \mu_c^S (l_c^S)^2 f(J_S) {}^R \bar{\mathcal{K}}_S. \quad (6.16)$$

Beide Größen sind Zweifeldtensoren und beziehen sich wie $\bar{\mathbf{U}}_S$ und $\bar{\mathcal{K}}_S$ auf die rückrotierte *Cosserat*-Konfiguration und auf die Referenzkonfiguration. Sie haben daher den Charakter referentieller Größen und sind mit den *Piola-Kirchhoff*-Spannungen der Standardformulierung vergleichbar. Der entsprechende Vorwärtstransport auf die aktuelle Konfiguration mit $\bar{\mathbf{R}}_S(\cdot) \mathbf{F}_S^T$ liefert die gewichteten *Cauchy*-Spannungen

$$\begin{aligned} J_S \mathbf{T}_E^S &= \mu^S (\mathbf{B}_S - \mathbf{I}) + \mu_c^S (\mathbf{B}_S - (\bar{\mathbf{V}}_S^T)^2) + \alpha \lambda^S J_S \frac{dW^S(J_S)}{dJ_S} \mathbf{I} \\ &+ \mu_c^S (l_c^S)^2 J_S \frac{df(J_S)}{dJ_S} \mathbb{I}_K \mathbf{I} + J_S P_0 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6.17)$$

und die gewichteten Momentenspannungen

$$J_S \mathbf{M}^S = \mu_c^S (l_c^S)^2 f(J_S) \mathcal{K}_S \mathbf{B}_S. \quad (6.18)$$

Die Funktion $f(J_S)$ wird im Fall eines kompressiblen Festkörperskeletts ohne Kompressionspunkt als

$$f(J_S) = J_S^{-m}, \quad m \geq 0 \quad (6.19)$$

gewählt. Damit ist sichergestellt, daß mit zunehmender Kompression die Koppelung zwischen den Partikeln und damit die Übertragung von Momentenspannungen

steigt. Über den Exponenten m kann die Funktion $f(J_S)$ noch angepaßt werden. Für den Grenzfall $m = 0$ ergibt sich der Ansatz nach Steinmann (1994) mit konstantem Faktor vor den Krümmungen im Gesetz für die Momentenspannungen. Genau wie im Materialgesetz für die Extraspannungen muß $f(J_S)$ für ein mikroskopisch inkompressibles Skelett um den Kompressionspunkt erweitert werden. Ein solcher Ansatz kann z. B. lauten:

$$f(J_S) = \left(\frac{1 - n_{0S}^S}{J_S - n_{0S}^S} \right)^m. \quad (6.20)$$

Die maximale Kopplung ergibt sich im Grenzfall $J_S \rightarrow n_{0S}^S$.

Sowohl die freie Energie als auch die Spannungen und Momentenspannungen unterliegen einschränkenden Bedingungen, die physikalisch motiviert sind. Eine Diskussion dieser Bedingungen findet sich u. a. bei Reese (1994), Doll & Schweizerhoff (1997) oder Eipper (1998). Die Ergebnisse sind hier kurz zusammengestellt:

1. Im undeformierten Zustand nehmen sowohl die freie Energie als auch die Spannungen und die Momentenspannungen den Wert Null an, wenn das Druckfeld P_0 verschwindet.

Wenn noch keine Deformation stattgefunden hat, gilt

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_{S0} &= \mathbf{I}, \\ {}^R\bar{\mathcal{K}}_{S0} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dementsprechend ergibt sich mit $P_0 = 0$

$$\begin{aligned} \rho_{0S}^S \psi_{0S}^S &= 0 \quad \text{für} \quad W^S(1) = 0, \\ \tilde{\mathbf{T}}_{E0S}^S &= \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \left. \frac{dW^S}{dJ_S} \right|_{J_S=1} = 0, \\ \tilde{\mathbf{M}}_{0S}^S &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die volumetrischen Erweiterungsterme nach (6.7) und (6.8) sind so konstruiert, daß die beiden Bedingungen (6.22)₁ und (6.22)₂ eingehalten werden.

Der zusätzliche Term $P_0 \mathbf{I}$ dient zu Erfassung eines konstanten Druckfeldes in der Referenzkonfiguration. Die Notwendigkeit eines solchen Terms ergibt sich, wenn im Rahmen des kompressiblen oder des hybriden Modells ein Anfangsdruck vorhanden sein muß, damit in der Referenzkonfiguration die Fluidichte ρ_{0S}^{FR} von Null verschieden ist. Bei reinen Festkörpern tritt diese Schwierigkeit nicht auf.

Damit sich in diesem Fall die Mischung als Ganzes in der Referenzkonfiguration mit dem Umgebungsdruck p_0 im Gleichgewicht befindet, muß

$$-\frac{1}{3}(\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^F) \cdot \mathbf{I} = p_0 \quad (6.23)$$

gelten. Da der Fluiddruck p^{FR} in der Referenzkonfiguration gleich dem Umgebungsdruck p_0 ist und das Festkörperskelett noch keine Deformationen aufweist, ergibt sich

$$P_0 = n_{0S}^S (z_{0S}^S - 1) p_0. \quad (6.24)$$

Dabei kann man sich vorstellen, daß die Referenzkonfiguration aus einer fiktiven Referenzkonfiguration mit Umgebungsdruck $p_0 = 0$ durch eine isotrope Kompression entsteht. Die Spannungen, die dabei hervorgerufen werden, sind gerade gleich P_0 . Allerdings werden die Festkörperdeformationen, die mit dieser Kompression verknüpft sind, vernachlässigt. Alle weiteren Verformungen werden relativ zur tatsächlichen Referenzkonfiguration gemessen.

2. Um einen kompressiblen Körper unendlich weit auseinanderzuziehen oder auf einen Punkt zusammenzudrücken, muß unendlich viel Energie aufgewendet werden. Weiterhin sind unendlich große Zug- bzw. Druckspannungen notwendig, um diese Grenzzustände zu erreichen.

Diese Bedingungen werden mit den volumetrischen Erweiterungstermen (6.7) erfüllt. Für einen mikroskopisch inkompressiblen, porösen Körper existiert ein Kompressionspunkt. Dieser ist erreicht, wenn alle Poren geschlossen sind. Gegenüber einer weiteren Kompression verhält sich ein solcher Körper dann inkompressibel. Der Kompressionspunkt inkompressibler, poröser Festkörper kann mit dem von Ehlers & Eipper (1997, 1999) und Eipper (1998) eingeführten volumetrischen Term nach (6.8) erfaßt werden.

Da \mathbb{I}_K immer größer oder gleich null ist, muß die Ableitung df/dJ_S im Kompressionsbereich $J_S < 1$ negativ sein. Dies wird durch die Ansätze (6.19) bzw. (6.20) ebenfalls garantiert. Für den Extensionsbereich nimmt mit steigender Dilatanz der Einfluß des Koppelterms ab.

3. Bezüglich der Krümmungen existiert keine Begrenzung, positive und negative Krümmungen sind in der Verzerrungsenergiefunktion als gleichwertig anzusehen. Mit dem gewählten Ansatz ist garantiert, daß die Momentenspannungen mit wachsenden Krümmungen ebenfalls beliebig anwachsen. Die Funktion f ist so geartet, daß sie mit zunehmender Volumenkompression $J_S \rightarrow 0$ zunimmt und mit zunehmender Volumenvergrößerung $J_S \rightarrow \infty$ abnimmt. Mikroskopisch kann die Funktion f mit Normalkräften in Verbindung gebracht werden, die zwischen den Körnern durch die Kompression der Probe auftreten.

Interpretiert man weiterhin die Momentenspannungen als Resultat von Tangentialkräften zwischen den einzelnen Partikeln, so erhöht eine Zunahme der Normalkräfte die übertragbaren Tangentialkräfte und die damit verbundenen Momentenspannungen (vgl. Volk, 1999).

4. Um Stabilität des Materialverhaltens zu gewährleisten, muß die freie Energie eine polykonvexe Funktion ihrer Argumente sein.
5. Führt man schließlich eine Linearisierung der Materialgesetze (6.15) für die Spannungen und (6.16) für die Momentenspannungen durch, so ergibt sich das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz (6.4).
6. Da in dem Ansatz (6.12) über den volumetrischen Anteil eine explizite Abhängigkeit vom Volumenanteil n^S vorhanden ist, ergibt sich für das kompressible Festkörperskelett der folgende Konfigurationsdruck

$$p^{KR} = \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S} = - \frac{(1 - \alpha) \lambda^S n_{0S}^S}{2 J^S (n^S)^2} \left(\frac{n_{0S}^S}{n^S} - 1 + \frac{n^S}{n_{0S}^S} \ln \frac{n_{0S}^S}{n^S} \right). \quad (6.25)$$

Im Fall des hybriden oder des inkompressiblen Modells ist $J^S = n_{0S}^S/n^S$, und der Konfigurationsdruck tritt nicht explizit auf. Vielmehr kombinieren sich die beiden volumetrischen Terme zu $\lambda^S W^S(J_S)$.

Damit erfüllen die gewählte freie Energiefunktion und die daraus abgeleiteten konstitutiven Beziehungen für die Spannungen und die Momentenspannungen alle erforderlichen physikalischen Beziehungen. Daß außerdem eine Abwärtskompatibilität zum Neo-*Hooke*-Gesetz besteht, wenn die zusätzlichen Freiheitsgrade der *Cosserat*-Theorie nicht aktiv sind, erkennt man an der Darstellung der Spannungen bezüglich der aktuellen Konfiguration (6.17). Wenn die mikropolaren Freiheitsgrade inaktiv sind, wird $\bar{\mathbf{V}}_S = \mathbf{V}_S$ und somit symmetrisch. Der Term mit dem Vorfaktor μ_c^S verschwindet, und (6.17) geht über in das volumetrisch erweiterte Neo-*Hooke*-Gesetz der Standardformulierung. Für die Wahl $f(J_S) \equiv 1$ wurde das Materialgesetz (6.17) von Diebels (1998a, 1998b) bereits erfolgreich auf inkompressible, mikropolare Festkörper angewandt.

6.2.2 Abhängigkeit von der Porosität

Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie hat Gassmann (1951) einen linearen Zusammenhang zwischen dem Volumenanteil und den Materialparametern des Matrixmaterials einer porösen Struktur angegeben. Die Parameter μ^S , μ_c^S und λ^S werden durch formale Erweiterung dieses Ansatzes durch die effektiven Parameter des nicht-porösen Materials und durch den Anfangsvolumenanteil in der Form

$$\mu^S = n_{0S}^S \mu^{SR}, \quad \mu_c^S = n_{0S}^S \mu_c^{SR}, \quad \lambda^S = n_{0S}^S \lambda^{SR} \quad (6.26)$$

n_{0S}^S	μ^S/μ^{SR}	λ^S/λ^{SR}
0,39	0,39	0,52
0,59	0,57	0,61
0,70	0,64	0,65
0,77	0,70	0,71

Tabelle 6.1: Effektive Materialparameter und Anfangsvolumenanteil

angegeben werden. Breuer (1998) entwickelt für die *Lamé*-Konstanten einen komplizierteren Zusammenhang mit der Porosität. Dazu postuliert er analog zu (6.26) für den Elastizitätsmodul und für die Querdehnzahl eine lineare Abhängigkeit von der Porosität. Der hier vorgestellte Ansatz sowie der Ansatz nach Breuer (1998) sind im Bereich kleiner Porositäten sicherlich hinreichend gute Näherungen, bei kleinen Festkörperanteilen jedoch muß ein allgemeinerer Zusammenhang formuliert werden, der nur aus detaillierten Untersuchungen der Mikrostruktur ermittelt werden kann. In der Homogenisierungstheorie für Verbundwerkstoffe entspricht (6.26) einer oberen Schranke für effektive Moduli (*Voigtsche* Schranke). Eine gewisse Ähnlichkeit zur Schädigungstheorie ist ebenfalls zu erkennen, in der die Materialparameter mit der Schädigungsvariablen gewichtet werden (Lemaitre, 1996). Da hier allerdings nur ein einfacher, linearer Zusammenhang angenommen wird, werden Spannungskonzentrationen, wie sie um Hohlräume und an Reißflanken auftreten (Niemann, 1981), mit diesem Konzept nicht erfaßt. Da die Zusammenhänge (6.26) Ergebnisse einer linearen Betrachtung sind, gelten sie streng nur für konstante Volumenanteile. Das äußert sich darin, daß nur der Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S eingeht, und nicht der aktuelle Wert n^S .

Die Konstitutivgesetze (6.17) und (6.18) sind so gewählt, daß die auftretenden Parameter direkt aus einer linearen Theorie übernommen werden können. Der Vorteil einer solchen Formulierung ist darin zu sehen, daß die Materialparameter anhand von Versuchen mit kleinen Deformationen und einer entsprechenden Auswertung gemäß einer linearen Theorie bestimmt werden können. Somit können z. B. die *Lamé*-Konstanten μ^S und λ^S durch einen einfachen Zug- oder Druckversuch mit Messung der Querkontraktion ermittelt werden. Zur Untermauerung des Ansatzes (6.26) wird im folgenden ein Experiment numerisch durchgeführt: Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die von PANDAS (Ellsiepen, 1997) automatisch generierte Vernetzung einiger poröser Festkörper. Das Verhalten des Matrixmaterials ist kompressibel und linear-elastisch; die Poren sind leer. Die abgebildeten porösen Strukturen werden im ebenen Verzerrungszustand einer definierten Absenkung der Oberfläche unterworfen. Durch

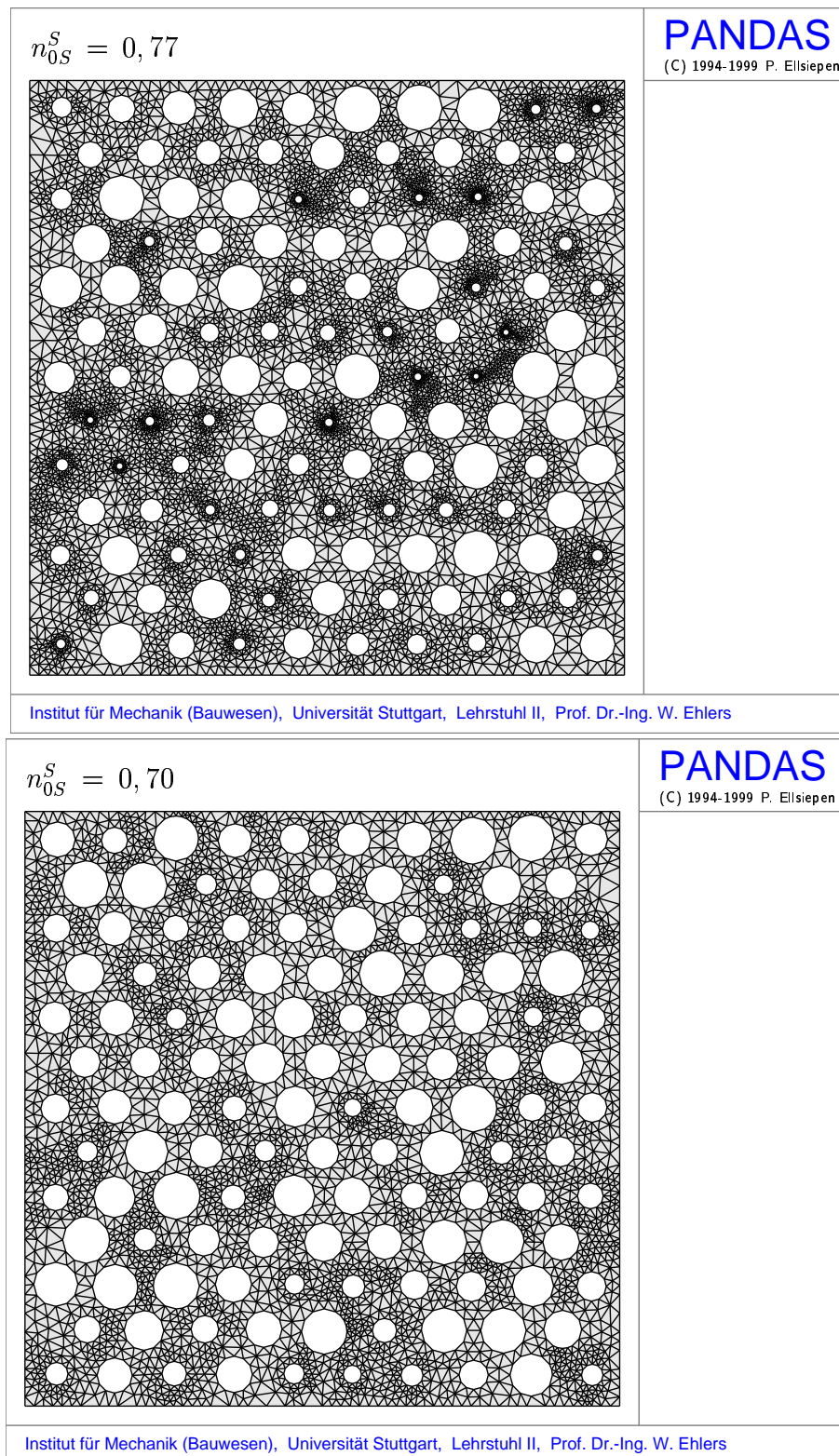


Abbildung 6.1: Geometrie zur Bestimmung der effektiven Parameter (1)

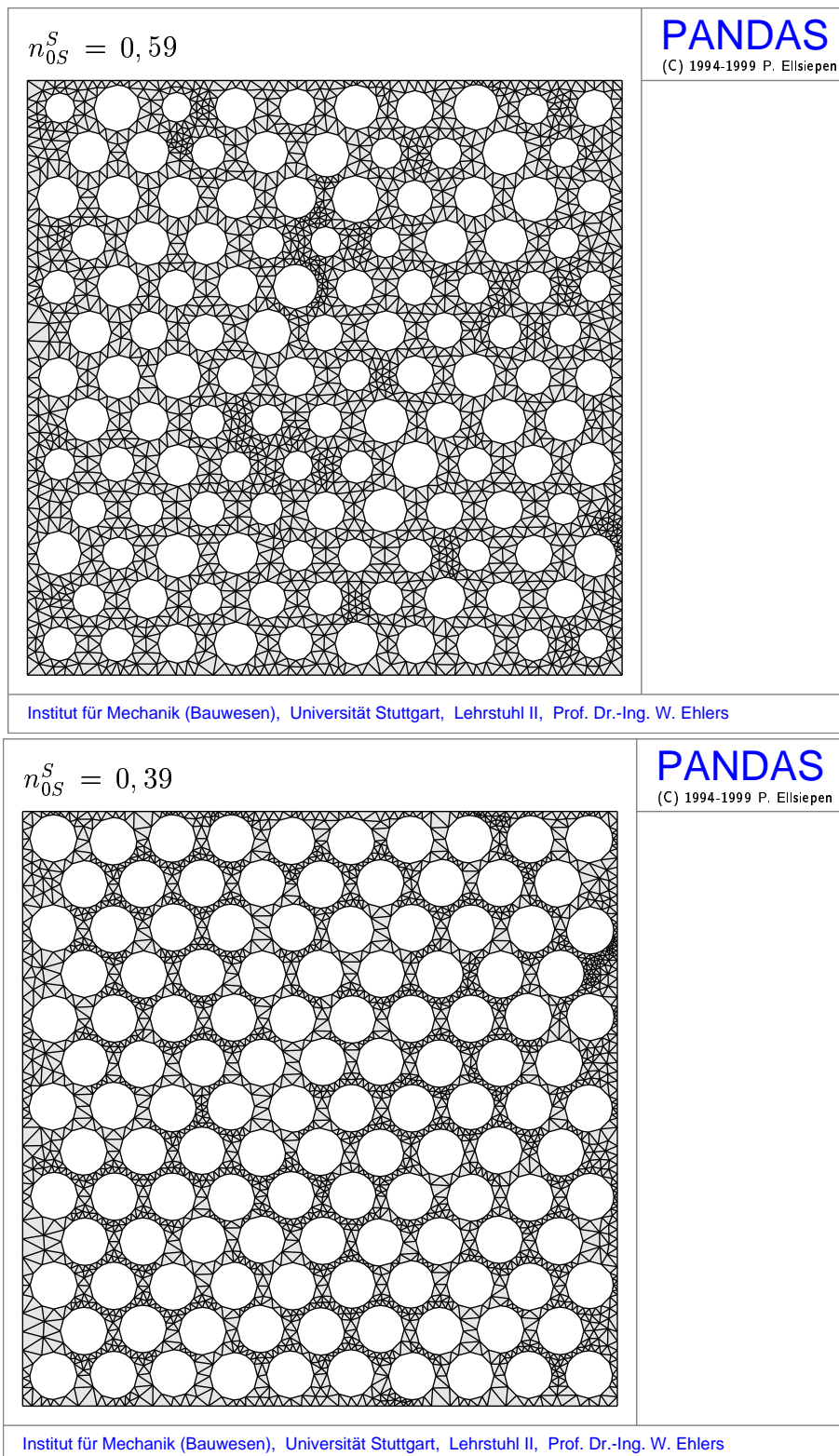


Abbildung 6.2: Geometrie zur Bestimmung der effektiven Parameter (2)

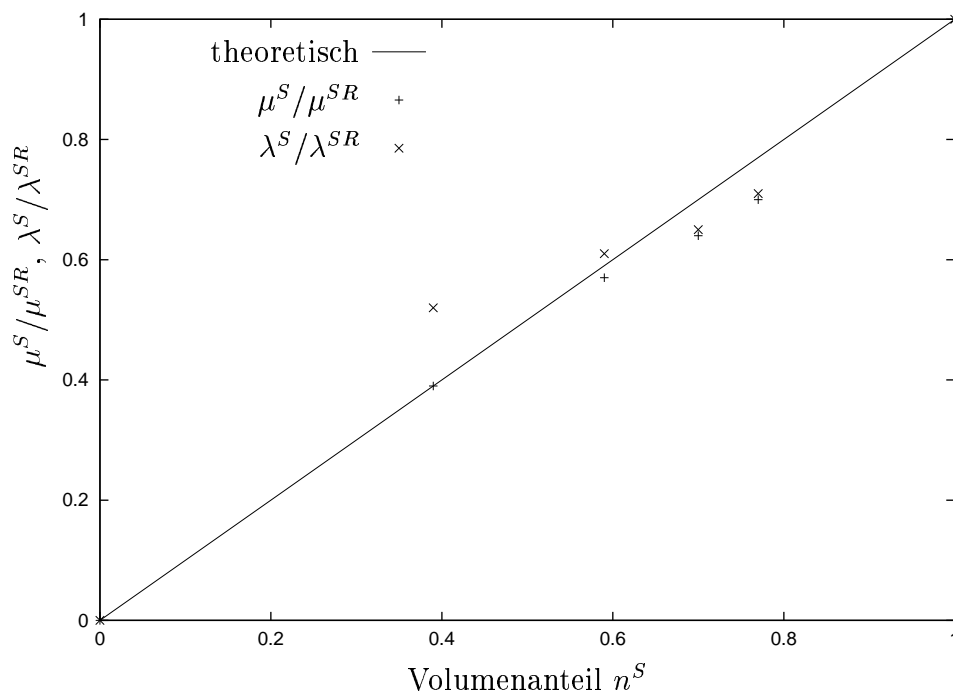


Abbildung 6.3: Materialparameter in Abhängigkeit vom Volumenanteil

starre seitliche Berandungen wird dabei die makroskopische Querdehnung behindert. Dies führt zu einem mehrachsigen Spannungszustand. Die mit der Methode der finiten Elemente berechneten Spannungen lassen sich über die gesamte Struktur mitteln und dienen dann zur Bestimmung der effektiven Materialparameter in Abhängigkeit vom Ausgangsvolumenanteil n_{0S}^S und von den effektiven Parametern λ^{SR} und μ^{SR} des elastischen Matrixmaterials. Der entsprechende Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S ist sowohl in den Abbildungen bei den einzelnen FE-Netzen als auch in Tabelle 6.1 angegeben. Unter der Annahme homogener Verhältnisse, die in einem solchen Versuch makroskopisch vorliegen sollen, können dann aus dem verallgemeinerten *Hookeschen* Gesetz die effektiven Parameter in Abhängigkeit vom Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S errechnet werden.

Das Resultat dieser Berechnungen ist in Tabelle 6.1 und in Abbildung 6.3 dargestellt. Daraus wird ersichtlich, daß die Annahme der linearen Abhängigkeit der effektiven Parameter vom Volumenanteil eine zufriedenstellende Näherung darstellt, wobei allerdings die Schätzwerte für die erste *Lamé*-Konstante μ^S besser liegen als für die zweite Konstante λ^S . Weitere Untersuchungen im Rahmen der Mikrostruktur gehen über den Umfang dieser Arbeit hinaus. Um genauere Aussagen über das Zusammenspiel der effektiven Materialparameter und der mikroskopischen Struktur des Porenraums zu treffen, sind weitreichende Experimente notwendig, die sich nicht nur auf den einfachen hier zugrunde gelegten Kompressionsversuch mit Querdehnungsbehinderung beschränken, sondern auch andere Belastungsfälle, z. B. Schub,

mit einbeziehen. Eng mit dieser Untersuchung verbunden ist auch die Frage nach der Größe eines repräsentativen Elementarvolumens (Bear, 1972; Bear & Bachmat, 1991), das für eine Homogenisierung notwendig ist. Motiviert durch die hier vorgestellten Resultate wird für die weiteren Untersuchungen der Ansatz (6.26) zugrunde gelegt.

6.2.3 Das Konzept der effektiven Spannung

Bislang ist die Funktion z^S , die bei der Aufspaltung der Massenbilanz in eine Gleichung für die reale Dichte ρ^{SR} und in eine Evolutionsgleichung für den Volumenanteil n^S aufgetreten ist, nicht bestimmt worden. Eine Bestimmung von z^S ist mit dem Konzept der effektiven Spannung möglich. Terzaghi (1923) stellte fest, daß die Spannung in einem fluidgesättigten, porösen Festkörperskelett von zwei Anteilen bestimmt wird, nämlich zum einen vom Porenwasserdruck, der im Inneren der Hohlräume herrscht, und zum anderen von den Spannungen, die als Kontaktkräfte zwischen den einzelnen Körnern des Skelettes gedeutet werden können. Erweiterungen dieses Ansatzes berücksichtigen dabei die Porosität explizit (Fillunger, 1930; Terzaghi, 1945; Biot, 1955). Bezieht man außerdem die mikroskopische Kompressibilität des Festkörperskelettes mit in das Prinzip der effektiven Spannungen ein, so geht das Verhältnis der mikroskopischen Kompressibilität des Matrixmaterials und der makroskopischen Matrixkompressibilität in den Zusammenhang ein (Biot, 1941; Gassmann, 1951; Skempton, 1962; Nur & Byerlee, 1971; Bishop, 1973). Bei kleinen Porositäten ergeben sich damit gute Übereinstimmungen zu Versuchen an Sandstein (Nur & Byerlee, 1971). Mit steigender Porosität nimmt jedoch der Fehler zu, so daß von Šuklje (1969) anhand theoretischer Überlegungen im Rahmen einer linearen Betrachtung schließlich der folgende Zusammenhang vorgeschlagen wurde:

$$\sigma = \sigma' + \left[1 - (1 - n^F) \frac{k^S}{k^{SR}} \right] p^{FR}, \quad (6.27)$$

wobei σ für den (hydrostatischen) Gesamtdruck und σ' für den effektiven (hydrostatischen) Druck stehen. Der Kompressionsmodul des porösen Skeletts wird dabei mit k^S bezeichnet, der des Matrixmaterials mit k^{SR} . Anhand von Versuchen an Balsaholz haben Lade & de Boer (1997) diesen Zusammenhang verifiziert. Weitere Untersuchungen zum Konzept der effektiven Spannungen finden sich bei de Boer & Ehlers (1990), de Boer (1996) und Bluhm & de Boer (1996).

Mit dem Ansatz (5.2) ergibt sich die hydrostatische Spannungsantwort des Festkörpers zu

$$p^S = -\frac{1}{3} \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{I} = z^S n^S p^{FR} + p_E^S. \quad (6.28)$$

Darin ist die effektive Spannung

$$p_E^S = z^S n^S \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S} - \frac{1}{3} \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \mathbf{F}_S^T \cdot \mathbf{I}. \quad (6.29)$$

Sie stellt demnach die Spannung dar, die mit Deformationen des Festkörperskelettes verbunden ist und aus der freien Energiefunktion ψ^S bestimmt wird, während der erste Term in (6.28) aus dem Fluiddruck folgt.

Mit (5.3) ergibt sich der Fluiddruck zu

$$p^F = -\frac{1}{3} \mathbf{T}_0^F \cdot \mathbf{I} = n^F p^{FR}. \quad (6.30)$$

Die hydrostatische Gesamtspannung berechnet sich als Summe aus (6.28) und (6.30) zu

$$p = p^S + p^F = (n^F + z^S n^S) p^{FR} + p_E^S. \quad (6.31)$$

Der Vergleich von (6.31) mit dem Prinzip der effektiven Spannung in der Form (6.27) ergibt die Identifikation

$$1 - n^S \frac{k^S}{k^{SR}} = n^F + z^S n^S \quad (6.32)$$

oder, wenn man nach z^S auflöst:

$$z^S = 1 - \frac{k^S}{k^{SR}}. \quad (6.33)$$

Mit Hilfe des Prinzips der effektiven Spannung kann also der Faktor z^S , der bei der Motivation der Evolutionsgleichung eine entscheidende Rolle spielt, bestimmt werden. Berücksichtigt man im weiteren noch den Zusammenhang zwischen dem Kompressionsmodul und den beiden *Laméschen* Konstanten μ^S und λ^S ,

$$k^S = \lambda^S + \frac{2}{3} \mu^S, \quad (6.34)$$

so ergibt sich unter der Annahme der linearen Abhängigkeit der effektiven Parameter vom Anfangsvolumenanteil für den Kompressionsmodul

$$k^S = n_{0S}^S k^{SR}. \quad (6.35)$$

Der Faktor z^S ist demnach im geometrisch linearen Bereich durch die einfache Funktion

$$z_{0S}^S = 1 - n_{0S}^S = n_{0S}^F \quad (6.36)$$

bestimmt. Erweitert man den vorliegenden Ansatz in den Bereich großer Verformungen, indem man in (6.36) den Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S durch den aktuellen Wert n^S ersetzt, so ergibt sich die gesuchte Funktion zu

$$z^S = 1 - n^S = n^F. \quad (6.37)$$

Für die Evolutionsgleichung (4.14) des Volumenanteils n^S erhält man gemäß obiger Überlegungen den Zusammenhang:

$$(n^S)'_S + (1 - n^S) n^S \operatorname{div} \mathbf{x}'_S = 0. \quad (6.38)$$

Berücksichtigt man, daß zwischen der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes und der Determinante des Deformationsgradienten der Zusammenhang

$$(\det \mathbf{F}_S)'_S = (\det \mathbf{F}_S) \operatorname{div} \mathbf{x}'_S \quad (6.39)$$

besteht, so kann die Gleichung (6.38) mit Hilfe der Trennung der Veränderlichen integriert werden. Man erhält zunächst

$$\frac{(n^S)'_S}{(1 - n^S) n^S} = - \frac{(\det \mathbf{F}_S)'_S}{\det \mathbf{F}_S}. \quad (6.40)$$

Die Integration von (6.40) vom Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S im undeformierten Zustand $\mathbf{F}_S = \mathbf{I}$ und $\det \mathbf{F}_S = 1$ zu einem beliebigen Zustand n^S und \mathbf{F}_S liefert mit Hilfe der Integraltafel nach Bronstein & Semendjajew (1984)

$$n^S = \frac{n_{0S}^S}{n_{0S}^S(1 - \det \mathbf{F}_S) + \det \mathbf{F}_S}. \quad (6.41)$$

Genau wie im Fall des inkompressiblen Festkörperskelettes kann der aktuelle Wert des Volumenanteils n^S nach (6.41) direkt aus der Determinante des Deformationsgradienten und einem Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S berechnet werden. Der Volumenanteil n^S ist demnach keine unabhängige Variable mehr. Die postulierte Evolutionsgleichung (6.38) kann in eine Zustandsgleichung überführt werden, die nur vom aktuellen Wert der Volumendehnung $\det \mathbf{F}_S$ abhängt. Daran wird ersichtlich, daß der gewählte Ansatz keine Dissipation verursacht und daher mit der Annahme elastischen Verhaltens des Festkörpers verträglich ist.

Verzichtet man auf die Annahme des vorherigen Abschnitts, daß die Materialparameter linear vom Anfangsvolumenanteil abhängen, und auf die einfache Erweiterung von (6.36) in den nichtlinearen Bereich, und läßt stattdessen eine allgemeine

Abhängigkeit des Verhältnisses k^S/k^{SR} als Funktion von n^S zu, so tritt an die Stelle von $z^S = n^F$ eine beliebige Funktion $F(n^S)$. Anstelle von (6.40) muß dann

$$\frac{(n^S)'_S}{F(n^S) n^S} = - \frac{(\det \mathbf{F}_S)'_S}{\det \mathbf{F}_S} \quad (6.42)$$

integriert werden, so daß auch in allgemeineren Fällen eine direkte funktionale Abhängigkeit zwischen dem Volumenanteil n^S und der Determinante des Deformationsgradienten hergestellt werden kann.

6.3 Das Porenfluid

6.3.1 Zustandsgleichungen für kompressible Fluide

Unter der getroffenen Annahme

$$\psi^F = \psi^F(\rho^{FR}) \quad (6.43)$$

berechnet sich der effektive Druck im Fluid gemäß (5.3) zu

$$p^{FR} = (\rho^{FR})^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^{FR}}. \quad (6.44)$$

Ein Fluid, das durch eine Zustandsgleichung der Form $p^{FR} = f(\rho^{FR})$ beschrieben wird, bezeichnet man als barotrop. In der Literatur (Batchelor, 1967; Bear, 1972; Häfner *et al.*, 1992) findet man als Zustandsgleichung barotroper Fluide den Ansatz

$$\rho^{FR} = \rho_0^{FR} \exp(\kappa^{FR} (p^{FR} - p_0^{FR})) \quad (6.45)$$

mit der Kompressibilität κ^{FR} . Ein allgemeinerer Ansatz als (6.45) geht auf Muskat (1937) zurück und lautet

$$\rho^{FR} = \rho_0^{FR} \left(\frac{p^{FR}}{p_0^{FR}} \right)^m \exp(\kappa^{FR} (p^{FR} - p_0^{FR})). \quad (6.46)$$

Für die Wahl $m = 0$ ergibt sich das Gesetz (6.45), für die Wahl $m = 1$ und $\kappa^{FR} = 0$ erhält man in Analogie zum idealen Gasgesetz ein proportionales Verhalten von Druck und Dichte. Beide Ansätze (6.45) und (6.46) sind so konstruiert, daß in einem Bezugszustand mit der Dichte ρ_0^{FR} der Druck p_0^{FR} angenommen wird. Paßt man im weiteren die Parameter der Ansätze so an, daß auch die Steigung im Bezugspunkt (ρ_0^{FR}, p_0^{FR}) mit der Steigung des idealen Gasgesetzes für den isothermen Fall

$$\frac{p^{FR}}{\rho^{FR}} = \frac{p_0^{FR}}{\rho_0^{FR}} \quad (6.47)$$

übereinstimmt, so ergeben sich die in den Abbildungen 6.4 und 6.5 dargestellten Verhältnisse. Man erkennt daran, daß der Ansatz nach Muskat für $m > 1$ nicht mehr ein-eindeutig ist. Die *Lambertsche W-Funktion* (Corless *et al.*, 1996; Jeffrey *et al.*, 1996), die bei der Invertierung von (6.46) entsteht, besitzt zwei reelle Äste.

Da ein überlineares Verhalten für den Druck als Funktion der Dichte plausibel erscheint, scheiden die beiden oben zitierten isothermen Zustandsgleichungen zur Beschreibung des Fluidverhaltens aus. Der Ansatz (6.45) führt nach einer Invertierung auf eine logarithmische Funktion, so daß kleine Druckänderungen bereits zu großen Dichteänderungen führen. Ein ähnliches unterlineares Verhalten zeigt auch der Ansatz (6.46) nach Muskat, wenn der Parameter $m < 1$ gewählt wird. Für $m > 1$ ergibt sich zwar das gewünschte überlineare Verhalten, aber für größere Drücke nimmt die Dichte wieder ab, so daß (6.46) in diesem Fall zu unphysikalischen Resultaten führt.

Eine Alternative zu den beiden oben diskutierten Ansätzen stellt das *van der Waals-Fluid* dar. Für den isothermen Fall $\vartheta = \text{konst.}$ lautet die Zustandsgleichung nach *van der Waals* (Baehr, 1984; Hutter, 1995)

$$p^{FR} = \frac{1}{\kappa^{FR}} \left(\frac{1}{\rho^{FR}} - \frac{1}{\rho_{max}^{FR}} \right)^{-1} - a (\rho^{FR})^2. \quad (6.48)$$

Das *van der Waals-Fluid* entsteht aus einer Erweiterung des idealen Gases, wenn man das Eigenvolumen der Moleküle und die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen berücksichtigt. Der erste Effekt führt auf die Konstante ρ_{max}^{FR} , der zweite auf die Konstante a . Genau wie der volumetrische Erweiterungsterm (6.8) in der freien Energiefunktion des materiell inkompressiblen Festkörpers weist das *van der Waals-Fluid* einen Kompressionspunkt auf: An der Stelle $\rho^{FR} = \rho_{max}^{FR}$ besitzt die Funktion (6.48) einen Pol, der dazu führt, daß eine weitere Kompression nur mit unendlich großen Drücken möglich ist. Im Bereich zwischen dem Ursprung und dem Pol liefert (6.48) jedoch das erwartete, überlineare Verhalten. Die Parameter der Zustandsgleichung (6.48) lassen sich so anpassen, daß in der Abbildung 6.5 der Wert und die Tangente im Bezugspunkt mit denen der anderen Zustandsgleichungen übereinstimmen. Die maximale Dichte ist in der Darstellung willkürlich zu $15 \rho_0^{FR}$ gewählt. Der einzige Nachteil der Zustandsgleichung (6.48) besteht darin, daß eine Invertierung der *van der Waals-Zustandsgleichung* das Lösen eines kubischen Polynoms erfordert, was z. B. analytisch mit der *Cardanoschen Formel* (Bronstein & Semendjajew, 1984) vollzogen werden kann.

Das qualitative Verhalten der *van der Waals-Zustandsgleichung* entspricht der physikalischen Anschauung und kann unter anderem genutzt werden, um ein Porenfluid zu modellieren, das selbst wiederum eine Mischung aus einer inkompressiblen Flüssigkeit und einem kompressiblen Gas darstellt, z. B. Grundwasser mit gelöster Luft. Wird eine solche fluide Mischung hydrostatisch belastet, so kann nur der kom-

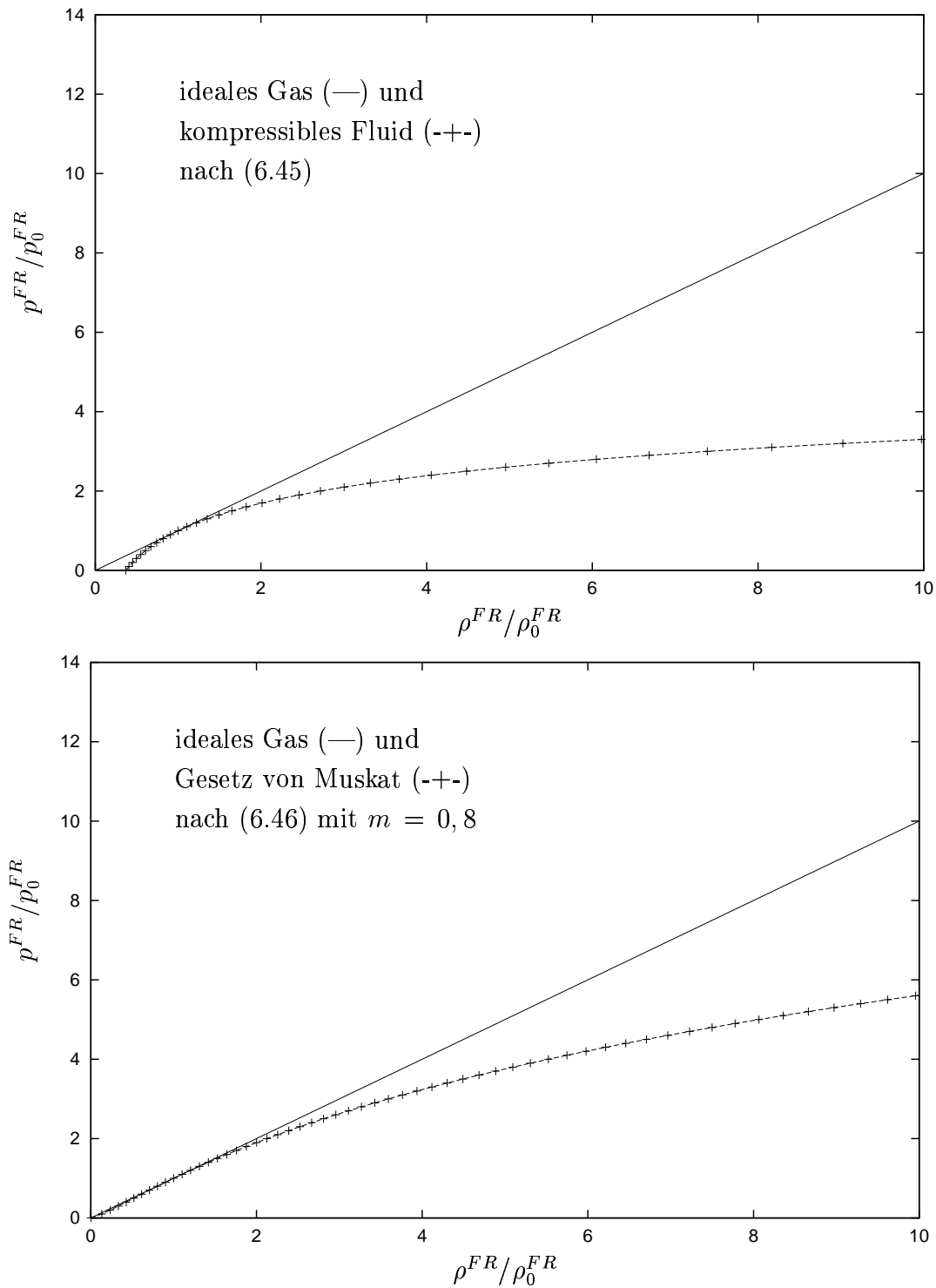


Abbildung 6.4: Druck und Dichte nach unterschiedlichen Zustandsgleichungen (1)

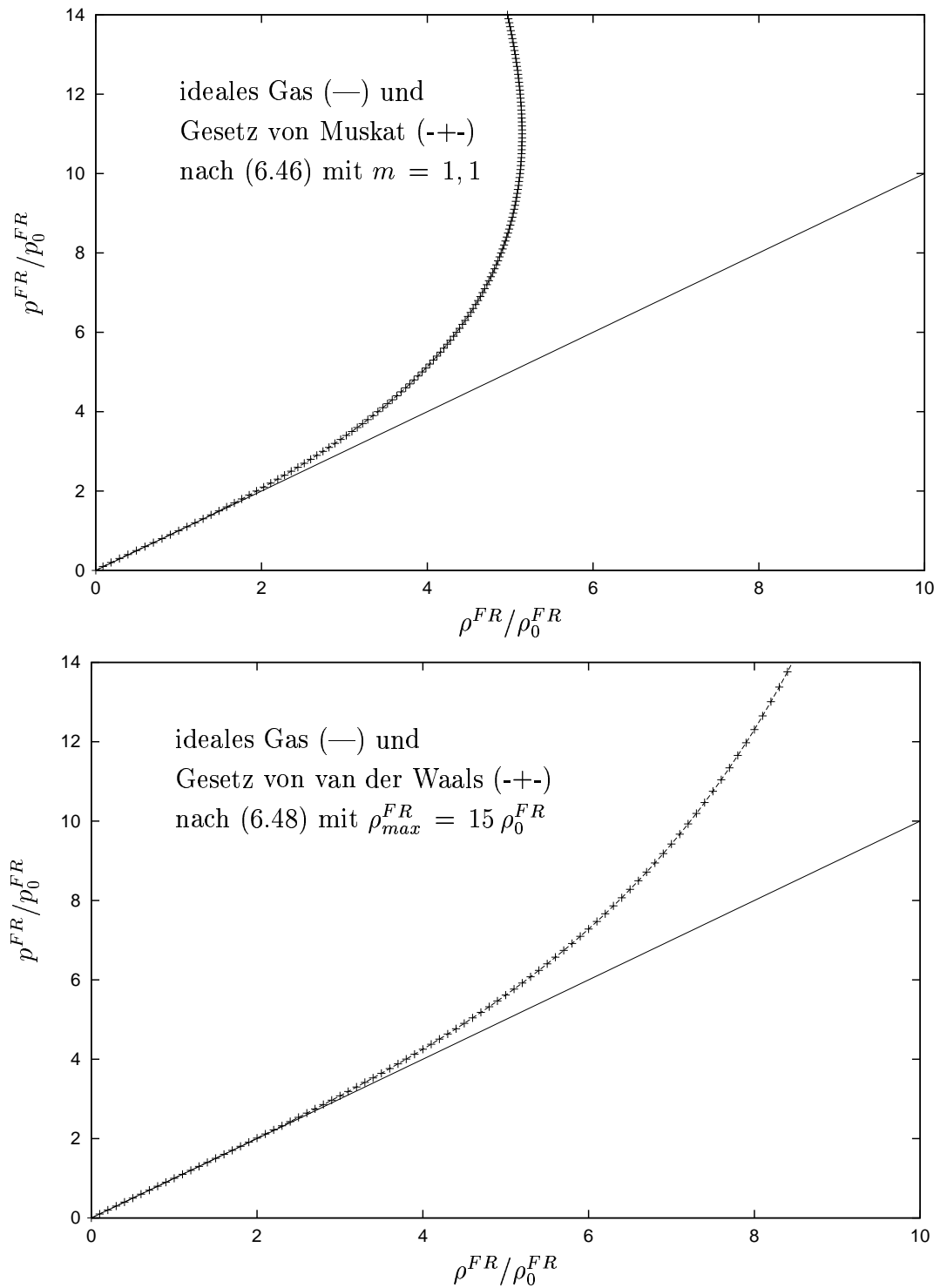


Abbildung 6.5: Druck und Dichte nach unterschiedlichen Zustandsgleichungen (2)

pressible Anteil mit Volumendehnungen auf die Druckerhöhung reagieren. Ist das Volumen des kompressiblen Anteils der fluiden Mischphase unter hinreichend hohen Drücken auf nahezu null zusammengedrückt, verhält sich das Mischungsfluid wie eine inkompressible Flüssigkeit. Dieser Zustand wird für $\rho^{FR} = \rho_{max}^{FR}$ erreicht. Weitere Volumendehnungen sind dann nicht mehr möglich. Ein solcher Ansatz wird im Detail von Ehlers *et al.* (1999) diskutiert.

6.3.2 Nichtgleichgewichtsgrößen des Fluids

Zur Erfassung der viskosen Eigenschaften des Fluids müssen noch die Reibungsspannungen oder die Extraspannungen modelliert werden. Aus den Betrachtungen der Restungleichung in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts folgen die Ansätze (4.97) und (4.100) für die viskosen Fluidspannungen und die Fluidmomentenspannungen. Diese sind bereits vereinfacht, so daß die Extraspannungen nur von der verallgemeinerten Deformationsgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{D}}_F$ und die Momentenspannungen nur von dem Gradienten der Winkelgeschwindigkeit $\text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F$ abhängen:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E^F &= \mathbf{T}_1^4 \bar{\mathbf{D}}_F, \\ \mathbf{M}^F &= \mathbf{M}_1^4 \text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F.\end{aligned}\tag{6.49}$$

Dies entspricht der in Abschnitt 4.6 als „natürlich“ bezeichneten Zuordnung zwischen den Nichtgleichgewichtsvariablen und den Antwortfunktionen. Für ein *Newtonsches* oder linear viskoses Fluid sind die Tensoren \mathbf{T}_1^4 und \mathbf{M}_1^4 konstant und Vielfache der vierstufigen Fundamentaltensoren. Unter dieser Annahme lassen sich die Ansätze (6.49) in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E^F &= \mu_1^F \text{sym } \bar{\mathbf{D}}_F + \mu_2^F \text{skw } \bar{\mathbf{D}}_F + \mu_3^F (\bar{\mathbf{D}}_F \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \\ \mathbf{M}^F &= \mu_4^F \text{sym grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F + \mu_5^F \text{skw grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F + \mu_6^F (\text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}\end{aligned}\tag{6.50}$$

schreiben, wobei insgesamt sechs Viskositätsparameter μ_i^F , $i = 1, \dots, 6$ auftreten. Berücksichtigt man im weiteren noch die in der Strömungsmechanik viskoser Fluide übliche *Stokessche* Annahme, so treten keine Volumenzähigkeiten auf (Prandtl, 1965; Schlichting, 1982). Zwischen den Viskositäten μ_1^F und μ_3^F besteht dann der Zusammenhang

$$\mu_3^F = -\frac{1}{3} \mu_1^F.\tag{6.51}$$

Überträgt man die *Stokessche* Annahme aus rein formalen Gründen auch auf die Momentenspannungen, so ergibt sich weiterhin

$$\mu_6^F = -\frac{1}{3} \mu_4^F.\tag{6.52}$$

und anstelle von (6.50) tritt

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E^F &= \mu_1^F \text{sym } \bar{\mathbf{D}}_F^D + \mu_2^F \text{skw } \bar{\mathbf{D}}_F \\ \mathbf{M}^F &= \mu_4^F \text{sym } (\text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F)^D + \mu_5^F \text{skw grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F.\end{aligned}\quad (6.53)$$

Die deviatorischen Anteile eines Tensors zweiter Stufe sind dabei als

$$(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3} \text{tr}(\cdot) \mathbf{I} \quad (6.54)$$

definiert.

Aus dem Ansatz (6.53) läßt sich für die Durchströmung eines porösen Festkörpers eine vollständige Vernachlässigung der Fluid-Extraspansungen motivieren. Dies ist z. B. in der Grundwasserhydraulik üblich. Dort wird in der Regel der Zusammenhang zwischen der Sickergeschwindigkeit und dem Porendruck durch das *Darcysche* Filtergesetz oder durch Verallgemeinerungen davon hergestellt (Häfner *et al.*, 1985, 1992). Das Filtergesetz stellt dabei eine Konstitutivannahme dar.

Der Grund für die Vernachlässigung der Extraspansung liegt in der Größenordnung, die diese im Vergleich zu der Impulsinteraktion besitzt. Neben den Extraspansungen wird auch die Interaktion zwischen den beiden Konstituierenden durch die Viskosität beeinflusst, denn in der *Darcy*-Permeabilität werden die Effekte aus der Porenraumgeometrie und aus der Viskosität des Fluids zusammengefaßt. Bei einer Steigerung der Viskosität des Fluids nimmt die Kraft zu, die bei der Durchströmung des Porenraums auf den Festkörper übertragen wird. Der einfachste Fall zur Beschreibung der Interaktion ergibt sich, wenn der Extraterm nur von der Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F abhängt:

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = \mathbf{P}_1 \mathbf{w}_F. \quad (6.55)$$

Auch das entspricht der „natürlichen“ Zuordnung. Der Tensor \mathbf{P}_1 kann in diesem Fall als Durchlässigkeitstensor oder als inverser Permeabilitätstensor gedeutet werden. Seine Werte hängen von der Struktur des Porenraums und von der Viskosität des Porenfluids ab. Ansätze der Form (6.55) haben sich bei der Beschreibung nicht-polarer Zweiphasenmodelle sowohl im isotropen als auch im anisotropen Durchströmungsfall bewährt (Eipper, 1998). Für die Extrainteraktionskraft im Rahmen isotroper Durchströmung wird der folgende, in der Literatur übliche Ansatz gewählt (de Boer & Ehlers, 1986; Ehlers, 1989b):

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = - \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F. \quad (6.56)$$

Dabei bezeichnet γ^{FR} die reale Wichte des Fluids, und k^F ist der *Darcysche* Permeabilitätsbeiwert, der in diesem Fall noch explizit von der Porosität n^F abhängen

kann (Eipper, 1998). Bei Vernachlässigung der Extraspannungen und der Beschleunigungsterme führt der Ansatz (6.56) in Kombination mit der Impulsbilanz für das Fluid direkt auf das *Darcysche* Filtergesetz.

Stellt man die Impulsproduktion (6.56) mittels der intrinsischen Permeabilität

$$K^S(n^F) = \frac{\mu_1^F}{\gamma_{FR}} k^F(n^F) \quad (6.57)$$

dar, so ergibt sich

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = - \frac{(n^F)^2 \mu_1^F}{K^S} \mathbf{w}_F. \quad (6.58)$$

Die beiden Resultate (6.53) für die Fluidextraspannungen und (6.58) für die Extrainteraktionskraft können nun in die Impulsbilanz für das Fluid eingesetzt werden. Mit der für die *Navier-Stokes*-Gleichung typischen Entdimensionierung (Prandtl, 1965; Schlichting, 1982) mit einer Bezugslänge L und einer Bezugsgeschwindigkeit V ergibt sich das Verhältnis der Zähigkeitskräfte aus den Extraspannungen zu den Extra-Interaktionskräften in Form einer dimensionslosen Zahl Π zu

$$\Pi = \frac{K^S}{(n^F)^2 L^2} = \frac{\text{Zähigkeitskraft}}{\text{Interaktionskraft}}. \quad (6.59)$$

Ist Π groß gegenüber 1, so dominiert die Zähigkeitskraft, für kleine Werte von Π dominiert die Interaktionskraft. Dabei wird implizit vorausgesetzt, daß die Fluidgeschwindigkeit und die Sickergeschwindigkeit von gleicher Größenordnung sind. Unter Berücksichtigung, daß n^F etwa von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ ist, muß der charakteristische Längenmaßstab L von der Größenordnung $\mathcal{O}(\sqrt{K^S})$ sein, damit die beiden Kräfte gleich groß sind. Für gegebene intrinsische Permeabilitäten K^S ergibt sich damit ein kritischer Längenmaßstab L in der Form

$$L \approx \sqrt{K^S}, \quad (6.60)$$

bei dessen Unterschreitung die viskosen Zähigkeitskräfte gegenüber den Extrainteraktionskräften dominant werden. Im Rahmen der hier gewählten makroskopischen Beschreibung wird aber die Länge L , die repräsentativ für den beobachteten Prozeß ist, wesentlich größer sein als eine interne Länge $\sqrt{K^S}$, die zur Beschreibung der Porenstruktur maßgeblich ist.

Diese einfache Betrachtung auf der Basis der Entdimensionierung der Impulsbilanz des Fluids legt den Schluß nahe, daß die Vernachlässigung der Extraspannungen in einer makroskopischen Betrachtungsweise in den meisten Fällen gerechtfertigt ist. Die Fluidviskosität wird dann nur in Form der Extrainteraktionskraft gemäß (6.56) bzw. (6.58) berücksichtigt.

Entdimensioniert man weiterhin die Drallbilanz des Fluids, so kann man zeigen, daß bei einer Vernachlässigung der Extraspannungen auch die mikropolaren Eigenschaften des Fluids nicht mehr sinnvoll beschrieben werden können. Geht man dazu von einem vereinfachten Ansatz für die Momentenspannungen im Fluid von der Form

$$\mathbf{M}^F = \mu_2^F (l_c^F)^2 \text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}}_F \quad (6.61)$$

aus und verlangt außerdem, daß der Maßstab W für die Winkelgeschwindigkeit mit dem Geschwindigkeitsmaßstab V über die interne Länge l_c^F verknüpft ist,

$$V = \mathcal{O}(l_c W), \quad (6.62)$$

so findet man, daß die Momentenspannungen im Vergleich zum axialen Vektor des Spannungstensors von der Größenordnung

$$\frac{\mathcal{O}(\text{div } \mathbf{M}^F)}{\mathcal{O}(\mathbf{I} \times \mathbf{T}^F)} = \mathcal{O}(l_c^F/L) \quad (6.63)$$

sind. Vernachlässigt man also die Fluidextraspannung, so sind auch die Momentenspannungen vernachlässigbar, sofern die interne Länge l_c^F kleiner oder höchstens von derselben Größe wie die charakteristische Länge L des Problems ist. Eine mögliche Drallproduktion kann dann nur noch durch die Berücksichtigung dynamischer Effekte kompensiert werden. Aus diesem Grund wird in dem quasistatischen Modell, das im nächsten Kapitel behandelt wird, die Mikropolarität nur für das Festkörperskelett berücksichtigt.

Kapitel 7:

Numerische Umsetzung und Beispiele

7.1 Die Modellgleichungen

Exemplarisch für die vorgestellten Zweiphasenmodelle wird in diesem Kapitel ein Modell behandelt, das aus einem mikropolaren, elastischen Festkörperskelett besteht, dessen Porenraum mit einem nicht-polaren, viskosen Fluid gesättigt ist. Die zur numerischen Umsetzung des Modells benötigten Gleichungen werden für den quasi-statischen Fall in diesem Abschnitt zusammengestellt. Zunächst werden beide Konstituierenden als kompressibel behandelt; die erforderlichen Änderungen für das hybride und das inkompressible Modell werden dann tabellarisch in Tabelle 7.1 angegeben.

Mit der Identifikation nach (6.37)

$$z^S = 1 - n^S \quad (7.1)$$

kann die Evolutionsgleichung (4.14) für n^S , beginnend mit einem Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S in der Referenzkonfiguration, integriert werden. Man erhält

$$n^S = \frac{n_{0S}^S}{n_{0S}^S(1 - \det \mathbf{F}_S) + \det \mathbf{F}_S}. \quad (7.2)$$

Die Porosität ergibt sich aus der Sättigungsbedingung (4.2)

$$n^F = 1 - n^S. \quad (7.3)$$

Wie in der Festkörpermechanik üblich, kann auch die Massenbilanz für das Festkörperskelett integriert werden. Mit der Referenzdichte ρ_{0S}^S findet man

$$\rho^S = \rho_{0S}^S \det \mathbf{F}_S^{-1}. \quad (7.4)$$

Im Gegensatz dazu bestimmt sich die Partialdichte des Fluids aus der effektiven Dichte ρ^{FR} und aus dem Volumenanteil n^F gemäß

$$\rho^F = n^F \rho^{FR}. \quad (7.5)$$

Dabei ist die effektive Dichte durch eine Zustandsgleichung mit dem Fluiddruck verbunden. Vereinfachend wird hier ein ideales Gas behandelt. Dann gilt entsprechend (6.47)

$$\rho^{FR} = \frac{\rho_{0S}^{FR}}{p_{0S}^{FR}} p^{FR}. \quad (7.6)$$

Wenn man, wie es im letzten Kapitel diskutiert worden ist, die Extraspannungen des nicht-polaren Fluids vernachlässigt, ist mit dem Porendruck der gesamte Spannungszustand festgelegt. Es ergibt sich

$$\mathbf{T}^F = -n^F p^{FR} \mathbf{I}. \quad (7.7)$$

Der Einfluß der Fluidviskosität wird dann nur über den Impulsaustausch zwischen dem Festkörper und dem Porenfluid berücksichtigt. Mit (6.56) folgt dann

$$\hat{\mathbf{p}}^F = p^{FR} \text{grad } n^F - \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F. \quad (7.8)$$

Nach dem Konzept der effektiven Spannungen (5.2) zerfällt der Spannungstensor für das Festkörperskelett in einen Anteil, der vom Porendruck abhängt, und in einen anderen Anteil, der aus der freien Energiefunktion ψ^S abgeleitet werden kann:

$$\mathbf{T}^S = -z^S n^S (p^{FR} + p^{KR}) \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S. \quad (7.9)$$

Dabei ist

$$p^{KR} = \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial n^S} \quad (7.10)$$

der Konfigurationsdruck aufgrund von Porositätsänderungen, und

$$\mathbf{T}_E^S = \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathbf{U}}_S} \mathbf{F}_S^T \quad (7.11)$$

sind die Extraspannungen. Differenziert man gemäß (5.5) die freie Energie nach dem Krümmungstensor, so erhält man die Momentenspannungen des mikropolaren Festkörperskeletts:

$$\mathbf{M}^S = \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S \frac{\partial \psi^S}{\partial \bar{\mathcal{K}}_S} \mathbf{F}_S^T. \quad (7.12)$$

Für ein kompressibles Festkörperskelett kann ψ^S im Rahmen elastischen Verhaltens z. B. durch die Ansätze (6.12) und (6.7)₁ angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\rho_{0S}^S \psi^S &= \mu^S (\mathbb{I}_U - \ln J_S - 3/2) + \mu_c^S (\mathbb{I}_U - N_U) \\
&+ \alpha \lambda^S W^S(J_S) + (1 - \alpha) \lambda^S W^S(n_{0S}^S/n^S) \\
&+ \mu_c^S (l_c^S)^2 f(J_S) \mathbb{I}_K + P_0 J_S, \quad (7.13) \\
W^S(J_S) &= \frac{1}{4} [(J_S - 1)^2 + (\ln J_S)^2], \\
f(J_S) &= J_S^{-m}, \quad m \geq 0.
\end{aligned}$$

Wenn der Deformationszustand des Festkörpers sowie der Druck und die Sickergeschwindigkeit des Fluids bekannt sind, können die Beziehungen (7.1) bis (7.12) ausgewertet werden. Als weitere Gleichungen zur Behandlung des Randwertproblems stehen noch die Massenbilanz des Fluids

$$(\rho^F)'_F + \rho^F \operatorname{div} \mathbf{x}'_F = 0, \quad (7.14)$$

die quasi-statischen Impulsbilanzen

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^\alpha = \mathbf{0} \quad (7.15)$$

für beide Konstituierenden und die Drallbilanz

$$\operatorname{div} \mathbf{M}^S + \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S = \mathbf{0} \quad (7.16)$$

des Festkörpers zur Verfügung. Diese Gleichungen werden jetzt so umgeformt, daß sie mit einem effizienten und stabilen Algorithmus numerisch gelöst werden können (Diebels & Ehlers, 1996a; Diebels *et al.*, 1998b, 1998c, 1999; Ehlers *et al.*, 1999; Ellsiepen, 1999). Dazu wird im Rahmen einer modifizierten *Eulerschen* Beschreibung die Bewegung des Fluids relativ zum deformierten Festkörper angegeben. In der Massenbilanz (7.14) muß in konsequenter Weise die materielle Zeitableitung bezüglich der Fluidbewegung durch die Zeitableitung bezüglich der Festkörperbewegung ausgedrückt werden. Berücksichtigt man weiterhin die Evolutionsgleichung für den Volumenanteil n^S gemäß (4.14) und die Definition der Sickergeschwindigkeit $\mathbf{w}_F = \mathbf{x}'_F - \mathbf{x}'_S$, so ergibt sich aus (7.14) mit den entsprechenden Umformungen

$$n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} (n^F + z^S n^S) \operatorname{div} \mathbf{x}'_S + \operatorname{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) = 0. \quad (7.17)$$

In (7.17) kann die Sickergeschwindigkeit mit Hilfe der quasi-statischen Impulsbilanz des Fluids eliminiert werden. Kombiniert man nämlich die Konstitutivgesetze für

kompressibel	hybrid (Typ II)	inkompressibel
$z^S = n^F$	$z^S = 1$	
$n^S = n_{0S}^S / [n_{0S}^S (1 - \det \mathbf{F}_S) + \det \mathbf{F}_S]$	$n^S = n_{0S}^S \det \mathbf{F}_S^{-1}$	
$\rho^S = \rho_{0S}^S \det \mathbf{F}_S^{-1}$	$\rho^S = n^S \rho^{SR}$	
	$n^F = 1 - n^S$	
	$\rho^{FR} = f(p^{FR})$	$\rho^{FR} = \text{const.}$
	$\rho^F = n^F \rho^{FR}$	
$\mathbf{T}^S = -z^S n^S (p^{FR} + p^K) \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S$	$\mathbf{T}^S = -n^S p^{FR} \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S$	
	$\mathbf{T}^F = -n^F p^{FR} \mathbf{I}$	
$p^{KR} = \rho^S \partial \psi^S / \partial n^S$		
$p^{FR} = (\rho^{FR})^2 (\partial \psi^F / \partial \rho^{FR})$		
$\mathbf{T}_E^S = \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S (\partial \psi^S / \partial \bar{\mathbf{U}}_S) \mathbf{F}_S^T$		
$\mathbf{M}^S = \rho^S \bar{\mathbf{R}}_S (\partial \psi^S / \partial \bar{\mathbf{K}}_S) \mathbf{F}_S^T$		
$n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} (n^F + z^S n^S) \text{div} \mathbf{x}'_S +$ $+ \text{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) = 0$	$n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} \text{div} \mathbf{x}'_S +$ $+ \text{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) = 0$	$\text{div} (\mathbf{x}'_S + n^F \mathbf{w}_F) = 0$
$\text{div} (\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^F) + (\rho^S + \rho^F) \mathbf{b} = \mathbf{0}$	$\text{div} (\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^F) + (\rho^S + \rho^F) \mathbf{b} = \mathbf{0}$	
$\text{div} \mathbf{T}^F + \rho^F \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^F = \mathbf{0}$	$\text{div} \mathbf{T}^F + \rho^F \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^F = \mathbf{0}$	
$\text{div} \mathbf{M}^S + \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S = \mathbf{0}$	$\text{div} \mathbf{M}^S + \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S = \mathbf{0}$	

Tabelle 7.1: Modellgleichungen

den Impulsaustausch und für die Fluidspannungen mit der Impulsbilanz (7.15), so ergibt sich das *Darcysche* Filtergesetz in der Form

$$n^F \mathbf{w}_F = \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\rho^{FR} \mathbf{b} - \text{grad } p^{FR}). \quad (7.18)$$

Verwendet man im folgenden anstelle der Impulsbilanz des Festkörpers die Summe beider Impulsbilanzen,

$$\text{div}(\mathbf{T}^F + \mathbf{T}^S) + (\rho^F + \rho^S) \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (7.19)$$

so kann das Problem in den Verschiebungen \mathbf{u}_S und den Verdrehungen $\bar{\varphi}_S$ des Festkörpers und im Porendruck p^{FR} formuliert werden. Tabelle 7.1 gibt einen Überblick über die entsprechenden Modellgleichungen zur Behandlung des kompressiblen Modells. Dort sind auch die entsprechenden Gleichungen für die Behandlung des hybriden und des inkompressiblen Modells aufgeführt.

Die numerische Behandlung der Modellgleichungen basiert auf der Methode der finiten Elemente (FEM). Diese Methode wurde aus den Variationsformulierungen der Festkörpermechanik entwickelt und hat sich in den letzten Jahren als universelles Werkzeug der numerischen Mechanik erwiesen. Detaillierte Erläuterungen der FEM finden sich in den Standardwerken, z. B. Zienkiewicz & Taylor (1989a), Bathe (1990), Schwarz (1991) und Braess (1997). Die FEM hat sich sowohl bei der Behandlung von Festkörperproblemen als auch bei der Berechnung von Problemen aus der Strömungsmechanik (Zienkiewicz & Taylor, 1989b) und bei der Behandlung von volumengekoppelten Problemen (Zienkiewicz, 1984a, 1984b; Buchmaier, 1985; Pisarsky, 1992; Diebels & Ehlers, 1996a; Ehlers & Ellsiepen, 1998a, 1998b; Lewis & Schrefler, 1998, Ellsiepen, 1999; Volk, 1999) als geeignete und flexible Methode bewährt.

Einen allgemeinen Zugang zur FEM findet man mit der Methode der gewichteten Residuen, die auch anwendbar ist, wenn keine Variationsformulierung der beschreibenden Modellgleichungen vorliegt. Im nächsten Abschnitt wird das Vorgehen für die hier verwendeten quasi-statischen Modelle beschrieben. Eine Erweiterung auf den dynamischen Fall ist grundsätzlich möglich und wurde für Modelle mit nicht-polaren, inkompressiblen Konstituierenden durchgeführt (Ehlers & Diebels, 1995; Diebels & Ehlers, 1996a; Breuer, 1997, 1998, 1999).

7.2 Schwache Formulierung der Modellgleichungen

Im vorliegenden quasi-statischen Modell kann mit dem *Darcyschen* Gesetz (7.18) die Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F eliminiert werden. Die verbleibenden Primärvariablen sind die Festkörperverschiebung $\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S$, der Pseudodrehvektor $\bar{\varphi}_S$ des mikropolaren Festkörpers, der über die *Euler-Rodriguez*-Formel mit der Mikrobewegung $\bar{\mathbf{R}}_S$ in Verbindung steht, und der Porendruck p^{FR} . Zur Bestimmung dieser drei Feldgrößen stehen die Impulsbilanz der Mischung (7.19), die Drallbilanz des Festkörpers (7.16) und die Massenbilanz des Fluids (7.17) zur Verfügung. Um die schwache Formulierung der drei Gleichungen zu erhalten, werden sie mit Testfunktionen multipliziert und über ein Volumen V mit Rand ∂V integriert. Für die Impulsbilanz (7.19) ergibt sich mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \left[\operatorname{div}(\mathbf{T}^F + \mathbf{T}^S) + (\rho^F + \rho^S) \mathbf{b} \right] dv = 0. \quad (7.20)$$

Wendet man auf den ersten Term die Produktregel an, so kann man mit Hilfe des *Gaußschen* Integralsatzes ein Oberflächenintegral erzeugen, das den zur Impulsbilanz gehörenden Randbedingungen entspricht:

$$\int_V \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^F + \mathbf{T}^S) dv - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\rho^F + \rho^S) \mathbf{b} dv = \int_{\partial V} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} da. \quad (7.21)$$

Dabei ist \mathbf{t} der gesamte Spannungsvektor auf dem Rand ∂V des betrachteten Mischungsvolumens. Analog erhält man aus der Drallbilanz (7.16) die schwache Form mit einer Testfunktion $\delta \bar{\varphi}$ zu

$$\int_V \operatorname{grad} \delta \bar{\varphi} \cdot \mathbf{M}^S dv - \int_V \delta \bar{\varphi} \cdot \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S dv = \int_{\partial V} \delta \bar{\varphi} \cdot \mathbf{m} da. \quad (7.22)$$

Das Oberflächenintegral beinhaltet den Momentenspannungsvektor \mathbf{m} auf der Oberfläche ∂V . Die Testfunktionen sind in Anlehnung an das Prinzip der virtuellen Verrückungen mit dem Symbol δ gekennzeichnet und können als infinitesimale Verschiebungen und Verdrehungen gedeutet werden. Da auf Randstücken mit vorgegebenen Verschiebungen oder vorgegebenen Verdrehungen keine Variationen zugelassen sind, müssen die entsprechenden Testfunktionen auf diesen Randstücken verschwinden.

Mit einer Testfunktion δp für den Druck p^{FR} lautet die schwache Formulierung der Massenbilanz (7.17)

$$\begin{aligned} \int_V \delta p \left[n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} (n^F + z^S n^S) \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \right] dv - \\ - \int_V \operatorname{grad} \delta p \cdot n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F dv = - \int_{\partial V} \delta p n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} da. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Die Sickergeschwindigkeit unter dem Volumenintegral in der zweiten Zeile der Gleichung (7.23) kann mit (7.18) eliminiert werden. Das Oberflächenintegral stellt einen gewichteten Massenfluß durch die Oberfläche ∂V dar und entspricht somit ebenfalls einer Randbedingung, die in natürlicher Weise für das Fluid auf drainierten Rändern vorgegeben werden kann. Eine detaillierte Herleitung der schwachen Form der Gleichungen für den dynamischen Fall findet sich z. B. bei Diebels & Ehlers (1996a).

Im Rahmen der Methode der finiten Elemente werden die gesuchten Feldgrößen \mathbf{u}_S , $\bar{\varphi}_S$ und p^{FR} durch Ansatzfunktionen approximiert. Geht man für ebene Probleme von einer Diskretisierung der Feldgrößen auf einem Netz von Dreiecken (Triangulierung) aus, so werden wie beim *Taylor-Hood-Element* für das *Stokes-Problem* (Braess, 1997) und wie bei der Implementierung inkompressibler Einphasenprobleme (Zienkiewicz & Taylor, 1989a) quadratische Ansätze für die Verschiebungen und lineare Ansätze für die Verdrehungen und für den Porendruck gewählt. Im nicht-polaren Fall wurde von Zienkiewicz (1984a) gezeigt, daß für Zweiphasensysteme ein solcher Ansatz den Patch-Test erfüllt. Entsprechende Element-Formulierungen mit quadratischen Verschiebungsansätzen und linearen Druckansätzen finden sich auch bei Diebels & Ehlers (1996a), bei Ehlers & Ellsiepen (1998a, 1998b) und bei Lewis & Schrefler (1998). Die Hinzunahme linearer Ansätze für die Drehungen hat in den Beispielen von Ehlers & Volk (1997a, 1997b, 1998) und bei Volk (1999) zu stabilen Diskretisierungen des inkompressiblen Zweiphasenmodells mit mikropolarem Festkörper geführt. Verzichtet man auf die Wahl unterschiedlicher Ordnungen der Ansatzfunktionen für die unterschiedlichen Freiheitsgrade, so ist eine Druckstabilisierung der Diskretisierung erforderlich. Diese kann durch eine geeignete Wahl der Testfunktionen im Rahmen eines *Petrov-Galerkin-Verfahrens* erreicht werden. Stabilisierte Finite Elemente werden vor allem in der Strömungsmechanik inkompressibler Flüssigkeiten mit Erfolg eingesetzt (Brooks & Hughes, 1982; Franca & Frey, 1992; Franca *et al.*, 1992; Tezduyar *et al.*, 1992). Für Zweiphasen-Modelle gibt es ebenfalls erfolgversprechende Ansätze, die durch Anwendung von *Petrov-Galerkin-Verfahren* auf die Wahl unterschiedlicher Ansätze verzichten können und alle Freiheitsgrade mit den gleichen Ansätzen beschreiben (Murad & Loula, 1994; Ehlers *et al.*, 1999; Ellsiepen, 1999). Für die im weiteren vorgestellten Beispiele werden allerdings im Rahmen eines Standard-*Galerkin-Verfahrens* quadratische Verschiebungsansätze

mit linearen Druck- und Rotationsansätzen kombiniert, vgl. Ehlers & Volk (1997a, 1997b, 1998) und Volk (1999). Die gewählten Testfunktionen entsprechen dabei den Ansatzfunktionen. Für die verwendeten Sechs-Knoten-Dreiecks-Elemente (*Taylor-Hood-Elemente*) ergibt sich dann für die Feldgrößen in einem Element

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_S^e &= \sum_{i=1}^6 \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_S^i(t), \\ \bar{\varphi}_S^e &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_S^i(t), \\ p^{FRe} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i(\mathbf{x}) p^{FRi}(t). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Dabei stellen die \mathbf{Q}_i quadratische und die \mathbf{R}_i lineare Ansatzfunktionen dar, die aufgrund der schwachen Form der Modellgleichungen stetig über die Elementgrenzen verlaufen müssen. Die Knotenfreiwerte sind durch \mathbf{u}_S^i , $\bar{\varphi}_S^i$ und p^{FRi} gegeben. Sortiert man für ein Netz mit N Knoten alle Knotenfreiheitsgrade in den Vektor

$$\mathbf{u} = ((\mathbf{u}_S^1, \bar{\varphi}_S^1, p^{FR1}), \dots, (\mathbf{u}_S^N, \bar{\varphi}_S^N, p^{FRN}))^T \quad (7.25)$$

und die schwache Form der Impuls-, der Drall- und der Massenbilanz pro Knoten in den Vektor

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad (7.26)$$

so stellt (7.26) ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen in der Zeit dar. Der Einfachheit halber ist die materielle Ableitung bezüglich der Festkörperbewegung mit $(\cdot)'$ abgekürzt. Da die Zeitableitungen der Verschiebungen und des Porendrucks nur in der Massenbilanz auftreten, ist die Matrix $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}'$ singulär. Das System (7.26) stellt demnach einen Satz von differential-algebraischen Gleichungen (DAE) dar (Brenan *et al.*, 1989; Hairer *et al.*, 1989; Hairer & Wanner, 1991), der mit einem geeigneten Verfahren in der Zeit integriert werden kann. Diebels & Ehlers (1996a) haben dazu in der Standardformulierung das implizite *Euler*-Verfahren verwandt, Breuer (1997, 1999) benutzt zur Integration der dynamischen Gleichungen das *Newmark*-Verfahren, und von Diebels *et al.* (1998b, 1998c, 1999), von Ehlers & Ellsiepen (1998a, 1998b) sowie von Ellsiepen (1999) werden zur Behandlung von Mehrphasenproblemen mit plastischem Verhalten des Festkörperskeletts *Runge-Kutta*-Verfahren mit Schrittweitensteuerung benutzt. Weitere Details zur schrittweitengesteuerten Zeitintegration eines Zweiphasenmodells mit viskoplastischer Festkörpermatrix und zur Ortsadaptivität bei Mehrphasenproblemen finden sich bei Ellsiepen (1999).

Bei der Diskretisierung von (7.26) mit dem impliziten *Euler*-Verfahren werden die Zeitableitungen durch einen Rückwärtsdifferenzenquotienten approximiert. Bezeichnet der hochgestellte Index n den aktuellen, bereits berechneten Zeitschritt und der

Index $n+1$ den neuen, zu berechnenden Zeitschritt, so lautet die zeitdiskrete Version des Systems (7.26)

$$\mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)/\Delta t) = \mathbf{0} \quad (7.27)$$

oder, wenn man das System inkrementell formuliert,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}/\Delta t) &= \mathbf{0}, \\ \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n. \end{aligned} \quad (7.28)$$

In jedem Zeitschritt ist also ein nichtlineares Gleichungssystem mit dem *Newton*-Verfahren für die Freiheitsgrade \mathbf{u}^{n+1} auf der neuen Zeitstufe bzw. für das Inkrement $\Delta \mathbf{u}$ zu lösen. Bei der dazu notwendigen konsistenten Linearisierung muß man beachten, daß die in der schwachen Form auftretenden Integrale und die auftretenden Differentialoperatoren vom Verschiebungszustand abhängen, da die Grundgleichungen bezüglich der aktuellen Konfiguration des Festkörpers formuliert wurden. Das Vorgehen bei der konsistenten Linearisierung wird u. a. von Wriggers (1988) und Eipper (1998) erläutert. Mathematisch entspricht dies der Bildung der *Jacobi*-Matrix, wobei alle Abhängigkeiten berücksichtigt werden. Für die hier behandelte Problemklasse sind die auftretenden Matrizen unsymmetrisch.

Die in den nächsten Abschnitten zusammengestellten Beispiele wurden mit dem Programmsystem *PANDAS* (Ellsiepen, 1997) berechnet, das am Lehrstuhl II des Instituts für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart entwickelt wurde.

7.3 Beispiele

7.3.1 Zug- und Druckversuch

Als erstes Beispiel wird ein einaxialer Zug- und Druckversuch behandelt. Dabei wird eine 20 cm lange und 10 cm breite Probe verschiebungsgesteuert gezogen bzw. gedrückt. Unter der Annahme idealer Drainage und bei hinreichend kleiner Belastungsgeschwindigkeit baut sich während dieses Versuchs kein Porendruck auf, so daß aufgrund der einaxialen Belastung der Deformationszustand homogen bleibt. Die rotatorischen Freiheitsgrade der *Cosserat*-Theorie werden bei diesem Versuch nicht aktiviert. Die entsprechende Konfiguration ist in Abbildung 7.1 skizziert. Unter diesen Voraussetzungen stellt der Zugversuch das einfachste Beispiel dar, das als Test des „Standardanteils“ des Materialgesetzes herangezogen werden kann.

Da sich in der x_2 -Richtung keine Spannungen aufbauen, stellt die entsprechende Komponente des Materialgesetzes eine implizite Funktion für die Querverschiebung

Lamé-Konstanten	μ^S	1,33 MN/m ²
	μ_c^S	0,67 MN/m ²
	λ^S	1,33 MN/m ²
interne Länge	l_c^S	0,01 m
Koppelparameter	m	2
Parameter für den Konfigurationsdruck	α	0, 0,5, 1
Anfangsvolumenanteil	n_{0S}^S	0,7
Festkörperdichte	ρ_{0S}^{SR}	3000 kg/m ³
Fluiddichte	ρ_{0S}^{FR}	1000 kg/m ³ (inkompr. Fluid: Wasser)
Konstante im Gasgesetz	$R \vartheta$	0,1 MNm/kg (kompr. Fluid: feuchte Luft)
Permeabilität	k^F	$1 \cdot 10^{-4}$ m/s (z. B. Porenstruktur von Feinsand)

Tabelle 7.2: Werte der verwendeten Materialparameter

u_{S2} in Abhängigkeit von der Längsverschiebung u_{S1} dar. Für die in einem verschiebungsgesteuerten Versuch vorgegebene Axialverlängerung u_{S1} kann diese Funktion mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens nach dem zugehörigen Wert der Querverschiebung u_{S2} gelöst werden. Aus der Komponente in x_1 -Richtung folgt dann die zugehörige Spannung in Längsrichtung und, wenn man über die Breite der Probe integriert, die entsprechende Kraft zur Deformation der Probe. Dieses Verfahren wurde bereits von Ehlers & Eipper (1998) bei der Untersuchung von hyperelastischen Materialgesetzen angewandt.

Die Last-Verschiebungskurven des beschriebenen drainierten Zugversuchs sind sowohl für den Zug- als auch für den Druckbereich in der Abbildung 7.2 dargestellt. Die verwendeten Materialparameter haben exemplarischen Charakter und sind für das verwendete Modellmaterial in Tabelle 7.2 zusammengestellt. Bei einer Ausgangslänge von $l_0 = 20$ cm entspricht eine Längsverschiebung von $\Delta l = 40$ cm einer Verdreifachung der Ausgangslänge oder einer Axialdehnung von $\varepsilon = \Delta l/l_0 = 200\%$.

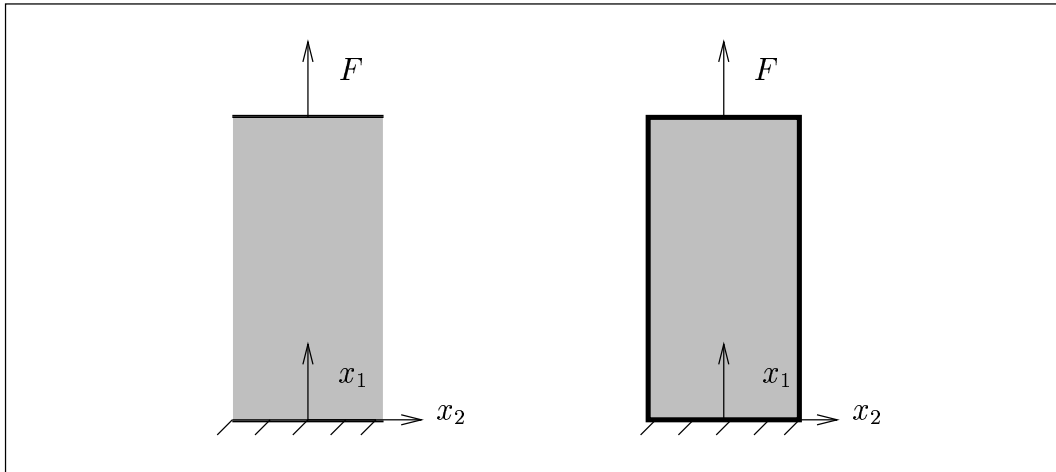


Abbildung 7.1: Drainierter und undrainierter Zugversuch

Eine Verschiebung von $\Delta l = -18$ cm im Druckbereich bewirkt eine Kompression der Probe auf 10 % der Ausgangshöhe oder $\varepsilon = -90\%$. Abbildung 7.2 zeigt die Last-Verschiebungskurven für das inkompressible Modell und für das kompressible Modell, wobei zum einen die volumetrischen Spannungen vollständig durch die Strukturkompressibilität erbracht ($\alpha = 1$) und zum anderen vollständig durch den Konfigurationsdruck getragen wurden ($\alpha = 0$). Der qualitative Verlauf der drei gezeigten Kurven ist in allen Fällen ähnlich; größere Abweichungen zeigen sich allerdings im Kompressionsbereich: Das inkompressible Modell erfordert deutlich größere Kräfte zur Verkürzung der Probe auf eine vorgegebene Länge, als es im kompressiblen Modell der Fall ist. Die Ursache dafür ist durch den Kompressionspunkt gegeben, der im inkompressiblen Modell dafür sorgt, daß keine weitere Kompression nach Schließen der Poren möglich ist. Mit der Annäherung an den Kompressionspunkt streben die benötigten Druckkräfte gegen unendlich. Im Gegensatz dazu kann im kompressiblen Modell auch das Matrixmaterial selbst komprimiert werden, so daß mit unendlichen Drücken theoretisch eine Kompression der Probe auf das Volumen null erreicht wird.

Die zugehörigen Querverschiebungen sind in der Abbildung 7.3 dargestellt. Definiert man wie Ehlers & Eipper (1998) in Anlehnung an die lineare Theorie eine „lokale“ Querdehnzahl ν^S als Verhältnis von Querdehnung zu Längsdehnung, so sieht man, daß diese immer positiv ist. Eine Verlängerung des Stabes führt also immer zu einer Verjüngung in Querrichtung, während eine Verkürzung immer zu einer Vergrößerung der Querschnittsfläche führt. Ehlers & Eipper (1998) zeigen, daß dieser physikalisch plausible Zusammenhang nicht immer von hyperelastischen Gesetzen wiedergegeben wird. Abweichungen davon treten bei Materialgesetzen mit einer vollständigen Entkopplung von isochoren und volumetrischen Anteilen in der freien Energiefunktion

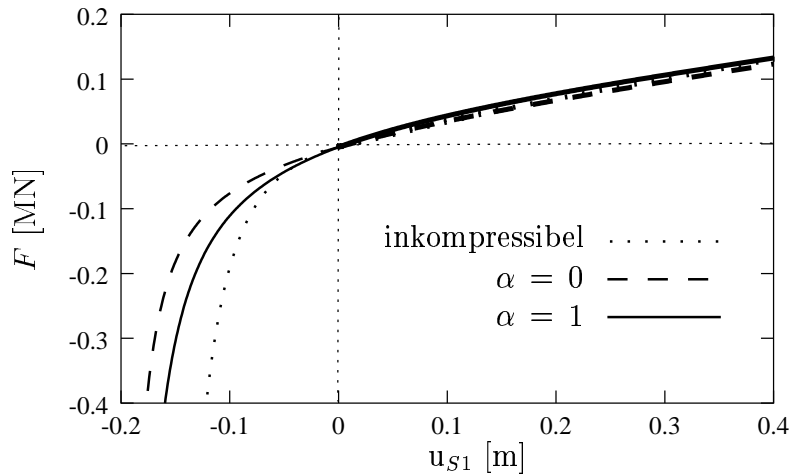


Abbildung 7.2: Kraft-Verschiebungs-Diagramm im drainierten Zugversuch

auf. Im Gegensatz zu den Last-Verschiebungskurven sind für die Querverschiebungen in Abbildung 7.3 jedoch deutliche Unterschiede zwischen den drei untersuchten Fällen zu sehen. Die kleinste Querdehnung ergibt sich im Zugbereich für das kompressible Modell, wenn nur der Konfigurationsdruck aktiv ist ($\alpha = 0$). Das inkompressible Modell und das kompressible Modell mit Strukturkompressibilität weisen größere Querdehnungen auf. Die maximalen Werte der Querdehnung werden im Kompressionsbereich wiederum vom inkompressiblen Modell vorhergesagt. Die Ursache ist ebenfalls auf den Kompressionspunkt zurückzuführen. Da die Poren bei großen negativen Dehnungen fast geschlossen sind, muß sich die Probe nahezu inkompressibel verhalten, so daß die Längenänderung vollständig durch eine entsprechende Querverschiebung kompensiert werden muß, um die geforderte Volumenkonstanz in der Nähe des Kompressionspunkts zu garantieren.

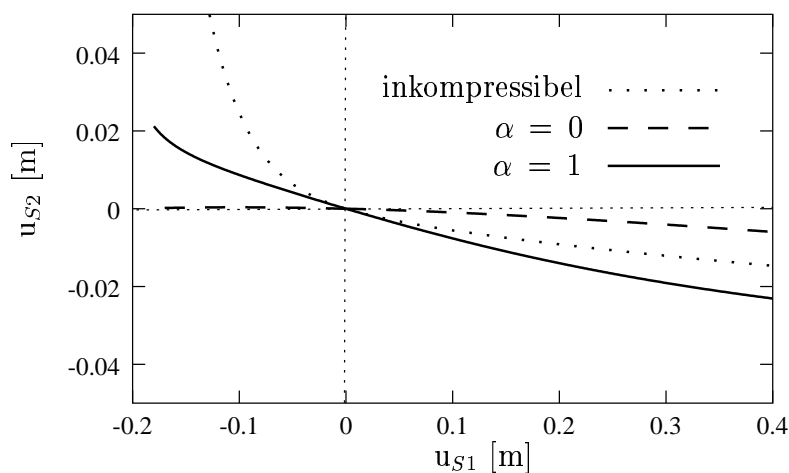


Abbildung 7.3: Querverschiebung im drainierten Zugversuch

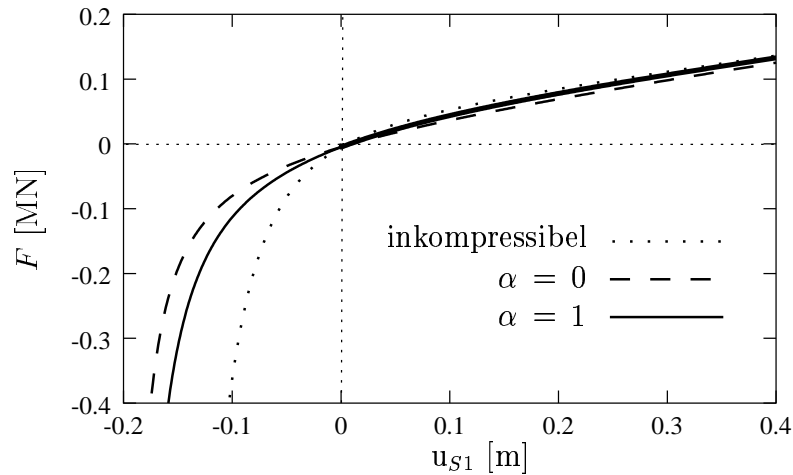


Abbildung 7.4: Kraft-Verschiebungs-Diagramm im undrainierten Zugversuch

Führt man den gleichen Versuch an einer undrainierten Probe durch, so ändern sich die Last-Verschiebungskurven nur unwesentlich (Abbildung 7.4). Da allerdings aufgrund des inkompressiblen Porenfluids im inkompressiblen Modell keine volumetrische Deformation des Porenraums mehr möglich ist, steigen im Druckbereich die erforderlichen Kräfte betragsmäßig schneller an. Der Aufbau des Porendrucks innerhalb der Probe ist in Abbildung 7.5 dargestellt. Man stellt zum einen fest, daß der Druck in der inkompressiblen Flüssigkeit immer betragsmäßig größer ist als der Druck in einem kompressiblen Fluid, der ja nur durch Volumendehnungen des Porenraums hervorgerufen werden kann, der dann zu volumetrischen Dehnungen des Porenfluids führt; zum anderen ergibt sich für das inkompressible Fluid ein deutlicher Unterdruck (Sog) im Zugbereich, während als Grenzfall im kompressiblen Fluid der Porendruck höchstens bis auf den Wert Null absinken kann, weil sonst die Dichte des Fluids nach dem Materialgesetz negativ würde. In Abbildung 7.6 sieht man außerdem, daß der Porendruck die Querdeformation der Probe unterstützt, so daß grundsätzlich größere Werte für die Querverschiebungen u_{s2} erreicht werden, als dies im drainierten Zug-Versuch der Fall ist.

Das vorgeschlagene Modell zeigt im Zugversuch ein physikalisch plausibles Verhalten. Eine Aufweitung einer Probe unter Zug, wie sie von Ehlers & Eipper (1998) für einige hyperelastische Gesetze beobachtet wurde, tritt nicht auf. Die wesentlichen Unterschiede in den Last-Verschiebungs-Kurven zwischen dem inkompressiblen und dem kompressiblen Modell ergeben sich im Druckbereich durch die Beachtung des Kompressionspunkts für materiell inkompressibles Matrixmaterial. Etwas größer als in den Last-Verschiebungs-Kurven fallen die Unterschiede im Querdehnverhalten aus. Da allerdings das kompressible Modell über zwei Kompressibilitäten verfügt, können hier die Kurven in einem gewissen Bereich durch die Wahl des Parameters α in den Grenzen $[0, 1]$ angepaßt werden. Die Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ sind in

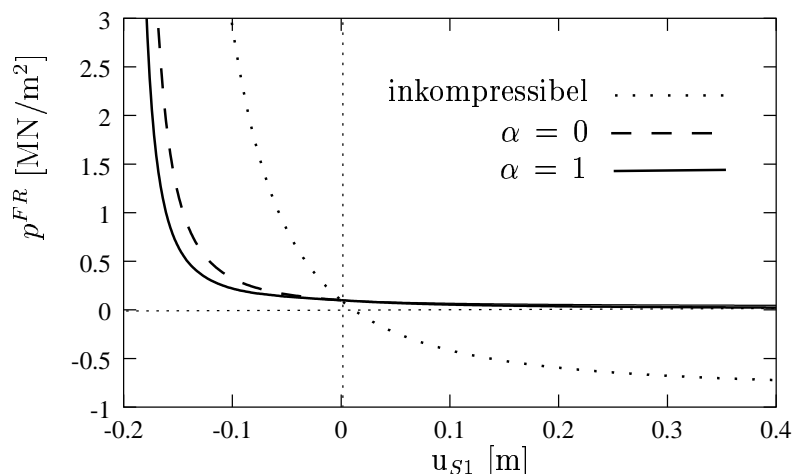


Abbildung 7.5: Porendruck im undrainierten Zugversuch

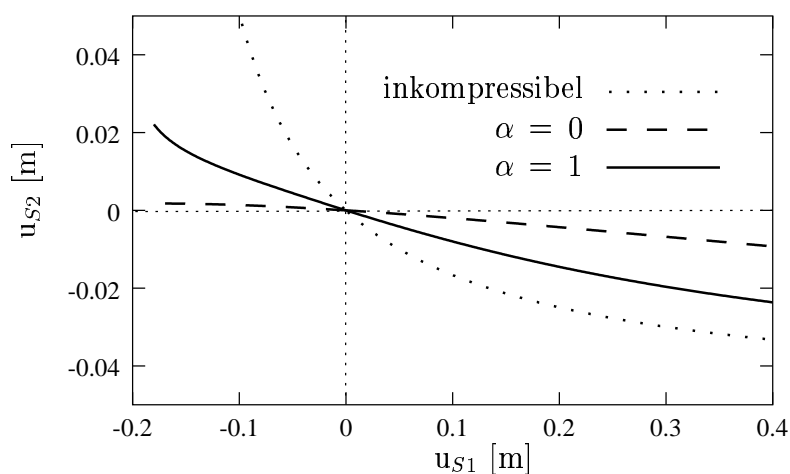


Abbildung 7.6: Querverschiebung im undrainierten Zugversuch

den Abbildungen dargestellt.

Der Zugversuch stellt bei zusätzlicher Messung der Querdehnung eine Möglichkeit dar, die Parameter μ^S , λ^S und α zu ermitteln, die den Standardanteil des Materialgesetzes für die Spannungen bestimmen.

7.3.2 Eindimensionaler Konsolidationsversuch

Das zweite untersuchte Beispiel ist das eindimensionale Konsolidationsproblem. Dabei wird eine im Ausgangszustand 1 m hohe Probe einaxial belastet. Der belastete Rand ist drainiert und verschiebbar, alle anderen Berandungen sind undrainiert und starr gelagert (Abbildung 7.7). Dieses eindimensionale Randwertproblem entspricht

einem unendlich ausgedehnten Streifen unter homogener Belastung. In diesem Fall ergibt sich ein in vertikaler Richtung inhomogener Spannungs- und Deformationszustand. Die Ursache dafür ist im Porendruck zu sehen, der sich zunächst bei einer Belastung der Probe aufbaut und eine Sickerströmung durch den oberen drainierten Rand der Probe in Gang setzt. Wenn das Fluid aus dem Festkörperskelett ausgeflossen ist, ist der Konsolidationsvorgang abgeschlossen. Dann muß der Festkörper die gesamte aufgebrachte Last tragen und sich dementsprechend deformieren. Der Spannungszustand ist nach Abschluß der Konsolidation homogen. Für eine Probe mit den in Tabelle 7.2 angegebenen Parametern wird zunächst in einem Intervall von 1 s eine Flächenlast von $0,1 \text{ MN/m}^2$ aufgebracht, die anschließend konstant gehalten wird. In Abbildung 7.8 ist die Oberflächenabsenkung über der Zeit für das inkompressible, für das hybride und für das kompressible Modell mit $\alpha = 0,5$ aufgetragen.

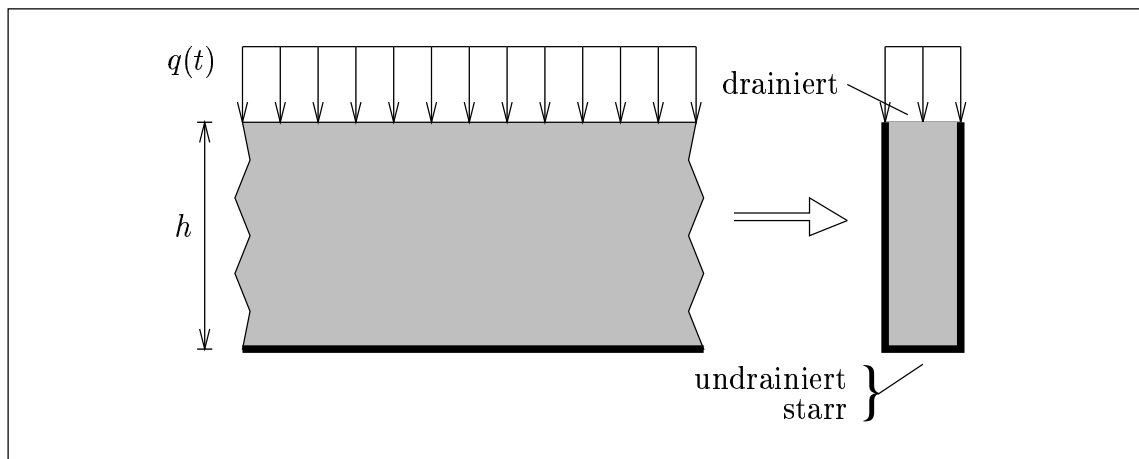


Abbildung 7.7: Eindimensionales Konsolidationsproblem

Während die beiden Modelle mit dem kompressiblen Porenfluid sofort nach der Lastaufbringung eine Setzung zeigen und im Bereich der konstanten Last zu zeitlich nahezu konstanten Verschiebungen führen, zeigt das inkompressible Modell ein ausgeprägtes zeitabhängiges Verhalten. Die Ursache für diesen Effekt liefert das inkompressible Porenfluid. In einem kompressiblen Fluid kann sich der Porendruck, der durch die äußere Belastung hervorgerufen wird, nur durch Volumendehnungen des Porenraums aufbauen. In diesem Fall deformiert sich das Festkörperskelett sofort, so daß sowohl das Fluid als auch der Festkörper von Anfang an an der Lastabtragung beteiligt sind. Im Gegensatz dazu trägt das inkompressible Fluid anfangs die gesamte Last durch den Porendruck, der allerdings nicht mit einer Deformation des Fluids und damit mit einer Deformation des Porenraums verbunden ist. Der Porendruck ist in diesem Fall allein durch die Randbedingung festgelegt. Erst durch

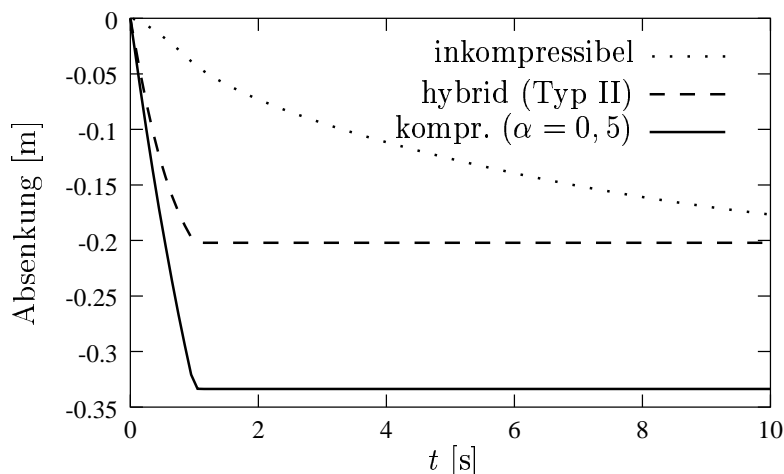


Abbildung 7.8: Absenkung nach einem Belastungssprung

die Sickerströmung, die durch den Porendruck in Gang gebracht wird, kann sich der Porenraum und damit der Festkörper deformieren. Durch die zunehmende Deformation übernimmt das Skelett einen Teil der Last. Dadurch wird der Porendruck abgebaut, bis schließlich die gesamte Last durch das Festkörperskelett getragen wird. Die Zeitskala dieses Prozesses wird maßgeblich durch die Permeabilität k^F bestimmt.

An Abbildung 7.8 wird deutlich, daß sich das hybride und das inkompressible Modell unter kleinen Lasten vor allem durch ihr Zeitverhalten unterscheiden. Während das hybride Modell durch das kompressible Porenfluid instantane Setzungen zuläßt, muß im inkompressiblen Modell erst das Porenfluid aus dem Skelett ausfließen, bevor eine Festkörperdeformation sichtbar wird. Für lange Zeiten wird jedoch der Porendruck abgebaut. Dann führen beide Modelle auf den gleichen Endwert der Deformationen, der allein durch die Eigenschaften der Matrix bestimmt ist. Im Gegensatz dazu prognostiziert das kompressible Modell eine größere Setzung unter derselben Last. Das korreliert mit den Ergebnissen des Zugversuchs, in dem ebenfalls ein weicherer Verhalten der kompressiblen Festkörpermatrix im Druckbereich gefunden wurde. Die Ursache dafür ist in der Kompressibilität des Matrixmaterials zu sehen.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß das kompressible und das hybride Modell im Bereich kurzer Zeiten und kleiner Lasten ein qualitativ ähnliches Verhalten aufweisen, das durch die Deformation des Porenfluids geprägt ist. Man kann auf dieser kurzen Zeitskala von undrainiertem Verhalten sprechen. In diesem Bereich sind die Unterschiede zum inkompressiblen Modell sehr groß. Nach Abschluß des Konsolidationsvorgangs wird die Größe der Oberflächenabsenkung allein durch die Eigenschaften des Festkörpers bestimmt, so daß sich die Ergebnisse aus dem hybriden und dem inkompressiblen Modell einander annähern und deutlich von denen des kompressiblen Modell abweichen.

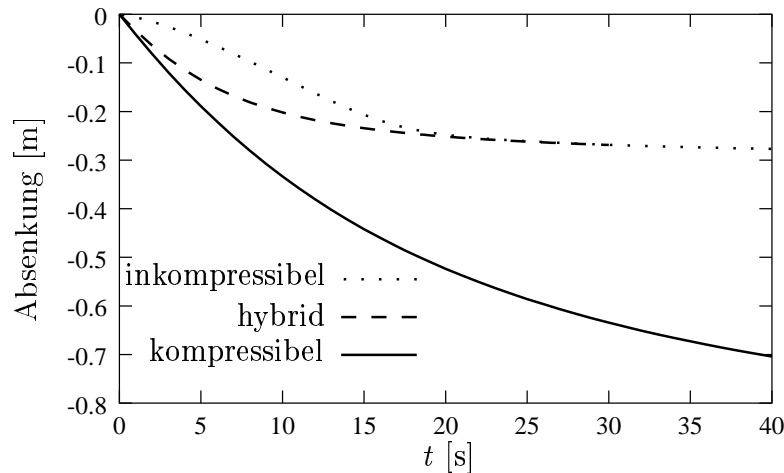


Abbildung 7.9: Absenkung bei steigender Belastung

Diese qualitativen Aussagen erhält man auch, wenn man die Oberflächenbelastung linear in der Zeit steigert. Die entsprechenden Setzungskurven sind in Abbildung 7.9 über der Zeit aufgetragen. Bei einer Probenhöhe von anfangs 1 m und einer Ausgangsporosität von $n_{0S}^F = 30\%$ ist der Kompressionspunkt sowohl des hybriden als auch des inkompressiblen Modells bei einer Absenkung der Oberfläche von 30 cm erreicht. Der Effekt des Kompressionspunktes ist in Abbildung 7.9 klar zu erkennen, trotz einer kontinuierlichen Laststeigerung nehmen die Deformationen in den beiden Modellen nach ca. 20 s nur noch unmerklich zu. Der Kompressionspunkt ist allerdings noch nicht erreicht, aber die notwendigen Kräfte für weitere Deformationen steigen stark an. Im Gegensatz dazu erhöht sich in dem Modell mit dem kompressiblen Festkörper die Deformation mit jeder Laststeigerung. Hier kann das Volumen mit hinreichend großen Kräften vollständig zusammengedrückt werden.

7.3.3 Schubversuch

Während in den beiden vorangegangenen Beispielen eindimensionale Probleme behandelt wurden, bei denen die rotatorischen Freiheitsgrade der *Cosserat*-Theorie keine Rolle spielen, wird nun der Einfluß der Rotationen untersucht. Das einfachste Beispiel, bei dem Rotationen eine Rolle spielen, ist der Schubversuch. Die untersuchte Geometrie ist in Abbildung 7.10 dargestellt. Die Materialparameter sind Tabelle 7.2 entnommen. Um Randeffekte weitestgehend auszuschließen, werden die Feldgrößen in einem Schnitt in der Mitte der Probe betrachtet.

Hält man bei der Durchführung des Versuchs die Oberfläche auf einer konstanten Höhe und schert die Probe, so ergibt sich in der Standardformulierung eine lineare Verteilung der Horizontalverschiebung über die Probenhöhe. Die zugeordnete Ver-

drehung, die sich in diesem Fall aus dem Rotationstensor \mathbf{R} der polaren Zerlegung ergibt, ist über die gesamte Probenhöhe konstant.

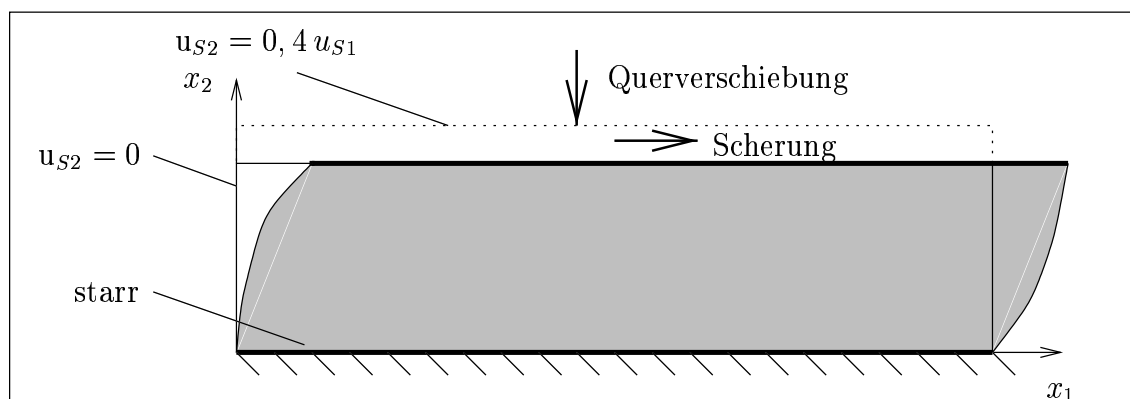


Abbildung 7.10: Konfigurationen für den Schubversuch

In dem hier betrachteten Schubproblem sind als Randbedingungen für die Mikrobewegungen die Rotationen am oberen und unteren Rand der Probe festgehalten, die Partikel sind also fest mit dem Rand verbunden. Die 1 m hohe Probe wird horizontal um $u_{S1} = 0,5$ m geschert. Eine Vertikaldehnung ist durch die Randbedingungen behindert. Das Profil der Gesamtrotation ist in Abbildung 7.11 als gestrichelte Linie dargestellt. Man sieht deutlich den Grenzschichtcharakter der mikropolaren Theorie, der bei den gewählten Parametern stark ausgeprägt ist. In der Nähe der Ränder wird der Verlauf des Drehwinkels durch die Randvorgaben stark beeinflusst. Allerdings klingt dieser Einfluß ins Innere der Probe schnell ab, und das Profil geht in einen konstanten Verlauf über, wie man ihn aus der Standardformulierung erwartet. Der entscheidende Parameter für die Grenzschichtdicke ist die interne Länge l_c^S . Je kleiner diese ist, desto dünner ist die Grenzschicht. Die Standardformulierung erhält man in dem Grenzfall $l_c^S = 0$. Für die aufgebrachte Gleitung ergibt sich dann aus der polaren Zerlegung eine Kontinuumsrotation von $\varphi = 0,245$. In der Standardformulierung verschwinden die Momentenspannungen. Zur Erfüllung der Drallbilanz ist dann ein symmetrischer Spannungstensor notwendig. Randbedingungen für die Rotationen können aber nicht mehr unabhängig von den Verschiebungsvorgaben erfolgen: Die *Cosserat*-Theorie stellt damit für kleine Werte der internen Länge l_c^S ein singular gestörtes Problem dar. Der singuläre Charakter wird dadurch verursacht, daß mit dem Verschwinden der Momentenspannungen in der Drallbilanz die höchsten Ableitungen der Mikrobewegung entfallen.

In einer zweiten Versuchsdurchführung wird eine anfänglich 1,2 m hohe Probe auf 1 m Höhe vertikal um 20 cm gestaucht und gleichzeitig um 0,5 m horizontal geschert. Die Endabmessungen der deformierten Probe entsprechen damit denen der ersten

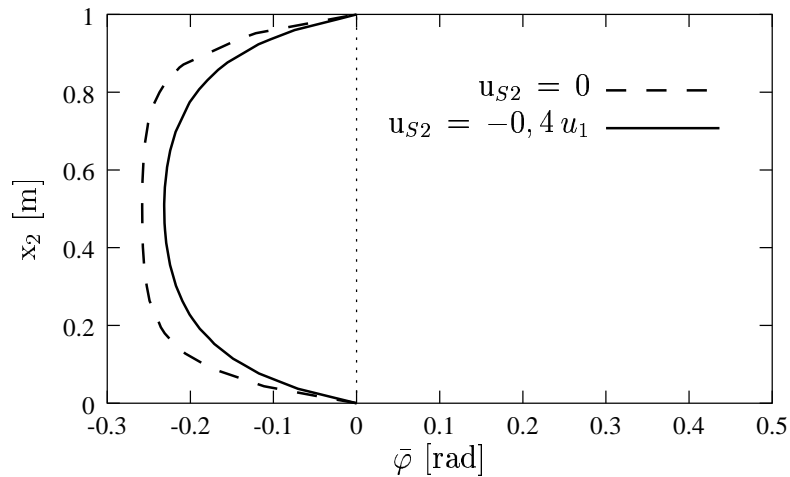


Abbildung 7.11: Gesamttrotation im Schubversuch

Versuchsdurchführung. Der Unterschied zwischen den beiden Versuchen ist darin zu sehen, daß im zweiten Versuch Volumendehnungen auftreten. Diese aktivieren die Funktion $f(J_S)$ des Koppelmechanismus zwischen Krümmungen und Volumendehnung. Dadurch wird die „effektive“ interne Länge vergrößert: Die Grenzschichtdicke nimmt zu, und der Einfluß der Nullrandbedingungen für $\bar{\varphi}$ auf die Lösung im Inneren wächst, so daß schließlich der Maximalwert der freien Rotation abnimmt. In beiden untersuchten Fällen bleibt allerdings der Verlauf der Horizontalverschiebung nahezu linear über die Höhe der Probe verteilt.

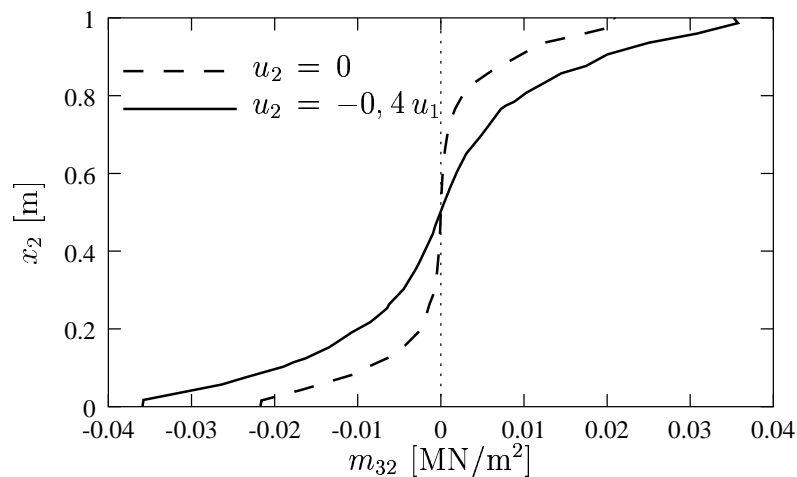


Abbildung 7.12: Momentenspannungen im Schubversuch

Abbildung 7.12 zeigt für beide Versuchsvarianten den Verlauf der Momentenspannungen m_{32} . Genau wie die freie Rotation zeigen auch die Momentenspannungen einen ausgeprägten Grenzschichtcharakter, der mit zunehmender „effektiver“ inter-

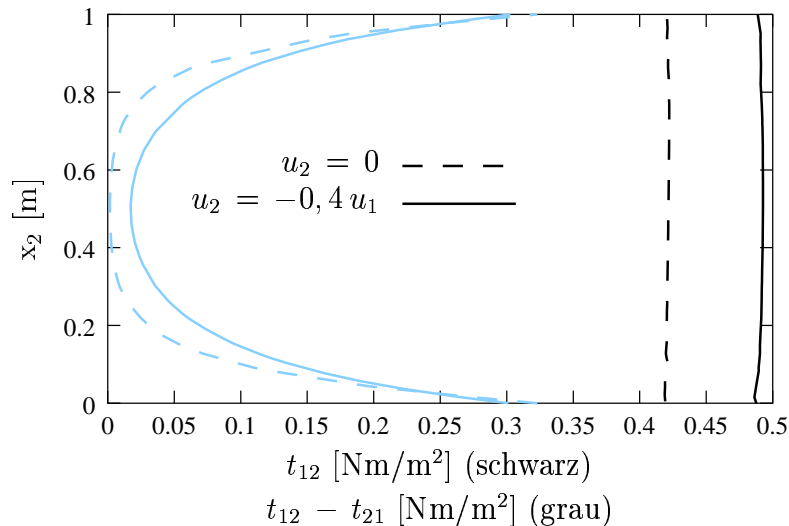


Abbildung 7.13: Schubspannungen im Schubversuch

ner Länge abnimmt. Die Maximalwerte der Momentenspannungen steigen mit zunehmender interner Länge. Den gleichen Effekt registriert man auch für die Schubspannungsverteilung (Abbildung 7.13). Während hier der Verlauf über die Probenhöhe fast konstant ist, wächst allerdings mit zunehmender „effektiver“ interner Länge der Wert der Schubspannungen an. Die Kopplung zwischen den Volumendehnungen und den Krümmungen in der freien Energiefunktion führt damit zu dem Effekt, daß im Fall von zunehmender Kompression höhere Schubspannungen übertragen werden. Den gleichen Effekt findet man auch für den schiefssymmetrischen Anteil der Spannungen.

Damit stellt der Schubversuch eine Möglichkeit dar, Aussagen über die Parameter der mikropolaren Theorie zu erhalten. Dazu kann man entweder die Schubspannungen in Anhängigkeit einer zusätzlich aufgebrauchten Volumendehnung messen, oder man muß in der Lage sein, die Grenzschicht in den Versuchen sichtbar zu machen.

Die Resultate des Schubversuchs sind mit dem inkompressiblen Modell unter drainierten Bedingungen berechnet, so daß sich kein nennenswerter Porendruck aufbaut. Die Ergebnisse der anderen Modelle weisen ein qualitativ ähnliches Verhalten auf.

7.3.4 Biegeversuch

Als letztes Beispiel wird ein Biegeversuch behandelt. Lakes (1986, 1995) benutzte eine mikropolare Theorie, um den Maßstabseffekt zu modellieren, den er im Biegeversuch an porösen Biomaterialien feststellte. Aus dem Effekt, daß sich die Biegesteifigkeit bei kleinen Proben nicht mit der dritten Potenz der Balkenhöhe verändert, bestimmte Lakes die zusätzlichen *Cosserat*-Parameter seines theoretischen Ansatzes.

Hier soll nachvollzogen werden, ob sich solche Effekte mit dem vorgeschlagenen Modell abbilden lassen.

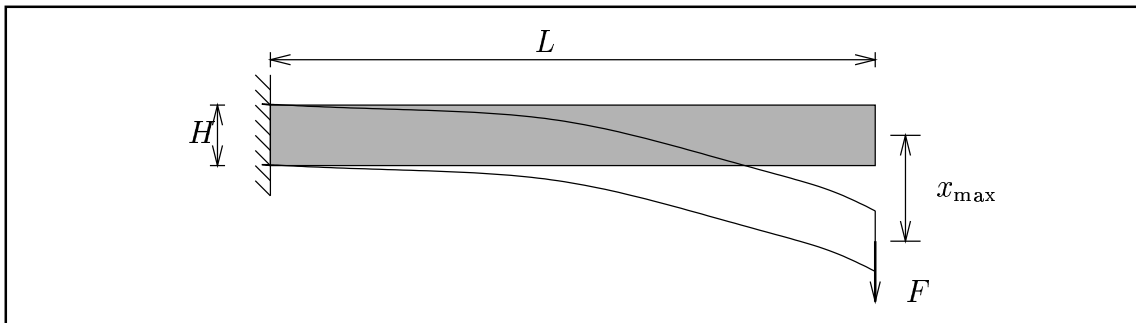


Abbildung 7.14: Konfiguration des Biegeversuchs

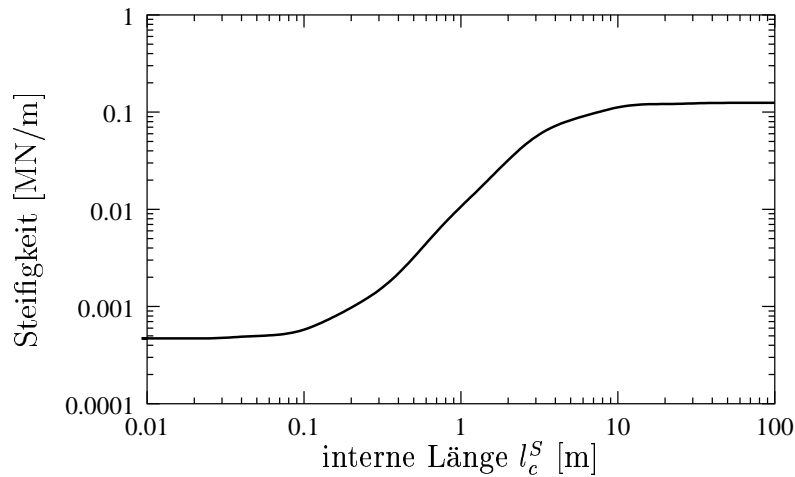


Abbildung 7.15: Maßstabseffekt beim Biegeversuch

Dazu wird ein einseitig eingespannter Balken mit konstanten Abmessungen und mit einem Schlankheitsverhältnis (Höhe zu Länge) von 1:10 durch eine Einzelkraft am freien Ende auf Biegung belastet (Abbildung 7.14). Definiert man die Steifigkeit des Balkens im Bereich kleiner Deformationen durch das Verhältnis der angreifenden Kraft F zur erzielten Auslenkung x_{\max} , $c = F/x_{\max}$, so ergibt sich in Abhängigkeit der gewählten internen Länge l_c^S die doppeltlogarithmische Kurve gemäß Abbildung 7.15. Man sieht, daß die Steifigkeit in einem weiten Bereich kleiner interner Längen nicht von deren Wert beeinflusst wird. In einem Übergangsbereich ergibt sich jedoch eine Abhängigkeit nach einem Potenzgesetz. Dieser Bereich erstreckt sich mit den gewählten Parametern über zwei Zehnerpotenzen. Erst für sehr große Werte von l_c^S geht die Kurve wieder in einen konstanten Verlauf über. Daraus kann man

folgern, daß im Bereich mittlerer interner Längen ein ausgesprochener Maßstabseffekt vorliegt, weil die Lösung nicht nur vom Verhältnis der Querschnittshöhe H zur Balkenlänge L , sondern auch von einem weiteren Geometrieparameter, nämlich vom Verhältnis l_c^S zu H , abhängig ist. In welcher Größenordnung der Maßstabseffekt tatsächlich beobachtet werden kann, hängt daher stark von den Materialparametern ab.

Da die Steifigkeit c in Abhängigkeit der makroskopischen Balkenabmessungen L und H leicht bestimmt werden kann, ist die Auswertung des beobachteten Maßstabeffekts eine einfache Möglichkeit, Zugang zu den *Cosserat*-Parametern zu bekommen.

Kapitel 8:

Schlußbemerkungen

Die vorliegende Arbeit erweitert die Theorie Poröser Medien um die rotatorischen Freiheitsgrade der *Cosserat*-Theorie mit dem Ziel, Effekte aus der Mikrostruktur im Rahmen eines makroskopischen Modells detaillierter zu erfassen und in ein konsistentes Konzept einmünden zu lassen. Dazu wurden Konzepte aus älterer und neuerer Literatur hinsichtlich der gestellten Aufgabe aufgegriffen und kritisch ausgewertet. Ergebnis dieser Analyse ist die Feststellung, daß in der Regel die in der Literatur dokumentierten Untersuchungen entweder nur die Mehrphasigkeit oder nur die Mikropolarität berücksichtigen. Diese bisher disjunkt entwickelten Ansätze führten nicht zu einer generellen Beschreibungsmöglichkeit der Problematik. Im Rahmen dieser Arbeit wurden sie daher in ihren Grundzügen entfaltet und zu einer schlüssigen integrativen Theorie weiterentwickelt; das Ergebnis ist die Mikropolare Theorie Poröser Medien (*MTPM*).

Jede der beteiligten Konstituierenden erhält dabei auf Grund des Konzeptes der superponierten Kontinua eine eigene erweiterte Kinematik, nämlich ein eigenes Translations- und Rotationsfeld. Damit ergeben sich unsymmetrische Deformationstensoren und Krümmungstensoren.

Truesdells metaphysische Prinzipie bilden die Grundlage zur Formulierung der benötigten Bilanzgleichungen sowohl für die einzelnen Konstituierenden als auch für die Mischung als Ganzes. Die Bilanzen besitzen dabei die gleiche Struktur wie die eines Einphasenkontinuums; Wechselwirkungen zwischen den Konstituierenden werden als zusätzliche Produktionsterme berücksichtigt. Damit die üblichen Erhaltungseigenschaften für Masse, Impuls, Drall und Energie für die gesamte Mischung sichergestellt werden können, unterliegen diese Produktionsterme gewissen Einschränkungen. Die erforderlichen Erweiterungen der Bilanzen zur Erfassung der mikropolaren Freiheitsgrade betreffen die Drall- und Energiebilanzen. Wenn rotatorische Freiheitsgrade vorhanden sind, ist es erforderlich, in der Drallbilanz sowohl den mikropolaren Drallvektor (Spin) als auch Momentenspannungen und Volumenmomente zuzulassen. Außerdem sind in der Energiebilanz die entsprechenden rotatorischen Anteile der kinetischen Energie und die Leistung der Momentenspannungen und der Volumenmomente in Betracht zu ziehen. Weiterhin ist die Einführung einer Mikroträgheit notwendig. Sie beschreibt mikroskopisch die Geometrie des materiellen Punktes als Träger der physikalischen Eigenschaften. In diesem Rahmen werden die materiellen Punkte als Mikrostrarrkörper angesehen. Aus dieser Annahme wird die „Bilanz der Mikroträgheit“ hergeleitet. Obwohl die „Bilanz der Mikroträgheit“

keine Bilanz im eigentlichen Sinne darstellt, weist sie doch die gleiche Struktur auf wie die übrigen Bilanzen. Damit kann aus der allgemeinen Bilanz für die Konstituierenden formal eine „Bilanz der Mikroträchtigkeit“ der Mischung entwickelt werden. Sie wird allerdings nur zur Definition der entsprechenden Mischungsgrößen herangezogen und enthält keine zusätzlichen Restriktionen, wie es bei den „echten“ Bilanzen der Fall ist.

Neben diesen Ergebnissen, die für Mischungen mit einer beliebigen Anzahl von Konstituierenden gelten, werden für eine gesättigte, binäre Mischung aus einem elastischen Festkörper und einem viskosen Porenfluid thermodynamisch konsistente Konstitutivgleichungen entwickelt. Da in der Theorie Poröser Medien die Volumenanteile als interne Variablen eingeführt werden, ist eine Evolutionsgleichung für den Festkörpervolumenanteil ebenfalls Bestandteil dieser Konstitutivtheorie. Der Volumenanteil für das Fluid folgt dann aus der Sättigungsbedingung. Dieser Ansatz wird bei der Auswertung des Entropieprinzips eingearbeitet. Als Resultat der durchgeführten Untersuchungen zerfallen die Spannungen und der Impulsaustausch in jeweils einen Anteil, der vom Porendruck abhängig ist, und in einen weiteren Anteil, die sogenannten Extragrößen, die von den Deformationstensoren abhängen. Eine solche Struktur ist in der *TPM* üblich und führt auf das Konzept der effektiven Spannung. Mit Hilfe dieses Konzeptes wird der Ansatz für die Evolutionsgleichung des Festkörpervolumenanteils konkretisiert.

Für die Momentenspannungen und für den Drallaustausch ergibt sich eine solche Aufspaltung nicht. Dies legt den Schluß nahe, daß die beiden hier betrachteten Erweiterungen der klassischen Einphasenkontinuumsmechanik, zum einen die *TPM*, zum anderen die Einführung der unabhängigen rotatorischen Freiheitsgrade, „additiv“ sind, so daß sich die Strukturen der *TPM* und der *Cosserat*-Theorie überlagern. Wechselwirkungen zwischen rotatorischen und volumetrischen Größen können nur durch ganz spezielle Kopplungen in den Materialgesetzen herbeigeführt werden; sie werden nicht durch die Struktur der zugrunde liegenden Gleichungen erzwungen.

Durch die Berücksichtigung materiell kompressiblen und inkompressiblen Materialverhaltens der einzelnen Konstituierenden sind in einem binären Modell insgesamt vier verschiedene Modelltypen möglich, nämlich das kompressible Modell, die hybriden Modelle und das inkompressible Modell. Das kompressible Modell verfügt über eine zusätzliche Evolutionsgleichung für den Volumenanteil des Festkörpers. Die zusätzlichen Parameter, die in dieser Gleichung auftreten, können mit Hilfe des Konzeptes der effektiven Spannungen identifiziert werden. Falls jedoch der Festkörper materiell inkompressibel ist, geht die Evolutionsgleichung in die Volumenbilanz über, die sich für eine konstante effektive Dichte aus der Massenbilanz ergibt. Während im kompressiblen Modell das Festkörperskelett über zwei Kompressibilitäten verfügt, sind das hybride und das inkompressible Modell dadurch gekennzeichnet, daß Volumendehnungen nur durch Änderungen des Porenraums her-

vorgerufen werden können.

Im Gegensatz zu den beiden Modellvarianten mit einem kompressiblen Porenfluid, in denen der Fluiddruck durch eine Zustandsgleichung in Abhängigkeit von der effektiven Dichte und von der Temperatur bestimmt ist, erfordert ein inkompressibles Porenfluid die Einführung eines *Lagrange*-Multiplikators. Er wird aus den Randbedingungen ermittelt und übernimmt die Rolle eines unbestimmten Druckfeldes. In diesen Modelltypen sind Volumendehnungen des Porenraums nur möglich, wenn das Porenfluid aussickert.

Als Anwendungsbeispiel dieser immer noch sehr allgemeinen Resultate wird ein quasi-statisches Modell konkretisiert, das aus einem mikropolaren elastischen Festkörperskelett und einem nicht-polaren viskosen Porenfluid besteht. Die Vernachlässigung der Mikropolarität der fluiden Phase kann aus einer Dimensionsbetrachtung motiviert werden. Das elastische Verhalten des Skeletts wird dabei durch ein verallgemeinertes Neo-*Hooke*-Gesetz beschrieben, das durch Streichen eines un-symmetrischen Terms in das Neo-*Hooke*-Gesetz der Standardformulierung überführt werden kann. Die in porösen Materialien möglichen großen Volumendehnungen werden durch einen volumetrischen Erweiterungsterm berücksichtigt. Im Fall inkompressiblen Festkörperverhaltens verfügt dieser Erweiterungsterm über einen Kompressionspunkt, so daß nach Schließen der Poren keine weitere Kompression möglich ist. Für die Momentenspannungen wird ein Ansatz entwickelt, der eine Kopplung mit den Volumendehnungen vorsieht. Wenn die Körner des Festkörpers fester aneinander gedrückt werden, können bei gleicher Krümmung höhere Momentenspannungen übertragen werden. Im Fall einer Linearisierung geht der Ansatz für die Spannungen in das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz über, und für die Momentenspannungen ergibt sich der in der Literatur übliche lineare Ansatz.

Anhand von einigen Elementarversuchen lassen sich die Anwendbarkeit dieses Modells und seine physikalische Plausibilität demonstrieren. Es zeigt sich, daß in Versuchen mit einachsigen Deformationszuständen (Zug- und Konsolidationsversuch) die zusätzlichen Freiheitsgrade der *Cosserat*-Theorie nicht aktiviert werden, während sie im Schubversuch und im Biegeversuch eine wesentliche Rolle spielen. Damit lassen sich anhand der diskutierten Versuche auch Ideen zur Parameteridentifikation entwickeln: Während die Parameter des Standardanteils der Theorie aus einachsigen Versuchen mit den herkömmlichen Methoden bestimmt werden können, können in einem zweiten Schritt die zusätzlichen *Cosserat*-Parameter aus den mehrachsigen Versuchen durch Ausnutzung des Grenzschichteffektes im Schubversuch oder durch Ausnutzung des Maßstabeffektes im Biegeversuch ermittelt werden.

Eine nächste Aufgabe innerhalb des hier entwickelten Konzeptes könnte es sein, die Parameter des vorgestellten Modells aus entsprechenden Versuchen mit Hilfe inversen Rechnens zu bestimmen; eine theoretische Weiterentwicklung könnte darin

bestehen, plastisches Verhalten für das Festkörperskelett mit in die Modellierung einzubeziehen. Metallische Schäume, Böden und Granulate weisen nämlich bereits unter geringen Beanspruchungen plastische Dehnungen auf. Zur Lösung dieser Problemstellung führen die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten und der Mikrobewegung in elastische und plastische Anteile, die Berücksichtigung der so erweiterten Kinematik bei der Auswertung des Entropieprinzips und die Einbeziehung des schiefsymmetrischen Spannungsanteils und der Momentenspannungen in die Fließbedingung und in die Fließregel.

Neben diesen Untersuchungen, die in direktem Zusammenhang mit der makroskopischen Modellierung stehen, bietet es sich an, Simulationen auf der Mikroebene durchzuführen. Dazu können Partikelmethode (Molekulardynamik, Diskrete-Elemente-Methode) herangezogen werden, mit denen das Verhalten einzelner Partikel eines granularen Materials beschrieben werden kann. Um die Ergebnisse solcher Modelle mit denen aus Makromodellen vergleichen zu können ist es notwendig, eine Homogenisierung durchzuführen, also die Mikrogrößen über ein Elementarvolumen zu mitteln.

Anhang A:

Gebräuchliche Symbole

\mathbf{A}_α	<i>Almansischer</i> Verzerrungstensor
$\bar{\mathbf{A}}_\alpha$	<i>Cosserat</i> -Verzerrungstensor der aktuellen Konfiguration
$(\mathbf{a}_\alpha)_i$	natürliche Basisvektoren der aktuellen Konfiguration
$(\mathbf{a}_\alpha)^i$	duale Basisvektoren der aktuellen Konfiguration
$(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)_i$	Basisvektoren der vorrotierten <i>Cosserat</i> -($\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ -)Konfiguration
$(\bar{\mathbf{a}}_\alpha)^i$	duale Basisvektoren der vorrotierten <i>Cosserat</i> -($\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ -)Konfiguration
$(a_\alpha)_{ij}$	natürliche Metrik der aktuellen Konfiguration
$(a_\alpha)^{ij}$	duale Metrik der aktuellen Konfiguration
\mathcal{B}	materieller Körper
\mathbf{B}_α	linker <i>Cauchy-Green</i> -Deformationstensor
\mathbf{b}^α	eingeprägte Beschleunigung (äußere Fernwirkung)
\mathbf{C}_α	rechter <i>Cauchy-Green</i> -Deformationstensor
\mathbf{c}^α	eingeprägte Winkelbeschleunigung (äußere Fernwirkung)
\mathbf{D}_α	Deformationsgeschwindigkeit
\mathbf{d}_α	Diffusionsgeschwindigkeit
dm^α	Massenelement
dv^α	Volumenelement
$d\mathbf{X}_\alpha$	Linienelement in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Linienelement in der aktuellen Konfiguration
\mathbf{E}_α	<i>Greenscher</i> Verzerrungstensor
$\bar{\mathbf{E}}_\alpha$	<i>Cosserat</i> -Verzerrungstensor der Referenzkonfiguration
$\overset{3}{\mathbf{E}}$	Permutationstensor
\hat{e}^α	totale Energieproduktion

\mathbf{F}_α	Deformationsgradient
$(\mathbf{h}_\alpha)_i$	natürliche Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$(\mathbf{h}_\alpha)^i$	duale Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)_i$	Basisvektoren der rückrotierten <i>Cosserat</i> - $(\bar{\mathbf{U}}_\alpha)$ -Konfiguration
$(\bar{\mathbf{h}}_\alpha)^i$	duale Basisvektoren der rückrotierten <i>Cosserat</i> - $(\bar{\mathbf{U}}_\alpha)$ -Konfiguration
$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$	totale Drallproduktion
$(h_\alpha)_{ij}$	natürliche Metrik der Referenzkonfiguration
$(h_\alpha)^{ij}$	duale Metrik der Referenzkonfiguration
$(\bar{h}_\alpha)_{ij}$	Metrik der rückrotierten <i>Cosserat</i> - $(\bar{\mathbf{U}}_\alpha)$ -Konfiguration
\mathbf{I}	Identitätstensor 2. Stufe
J_S	<i>Jacobi</i> -Determinante des Festkörperskeletts
$\overset{3}{\mathcal{K}}_\alpha$	dreistufiger Krümmungstensor der aktuellen Konfiguration
${}^R\overset{3}{\mathcal{K}}_\alpha$	dreistufiger Krümmungstensor der Referenzkonfiguration
\mathcal{K}_α	Krümmungstensor der aktuellen Konfiguration
${}^R\bar{\mathcal{K}}_\alpha$	Krümmungstensor der Referenzkonfiguration
K^S	intrinsische Permeabilität
k^F	<i>Darcy</i> -Permeabilitätskoeffizient
k^S	Kompressionsmodul des porösen Festkörpers
k^{SR}	effektiver Kompressionsmodul
\mathbf{L}_α	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
l_c^S	interne Länge
\mathbf{M}^α	Momentenspannungstensor der aktuellen Konfiguration
$\tilde{\mathbf{M}}^\alpha$	Momentenspannungstensor der Referenzkonfiguration
$\hat{\mathbf{m}}^\alpha$	direkte Drallproduktion
\mathbf{n}	Oberflächennormaleneinheitsvektor
n^α	Volumenanteil

\hat{n}^α	Volumenanteilproduktion
P	<i>Lagrange</i> -Parameter
$\hat{\mathbf{p}}^\alpha$	direkte Impulsproduktion
p^{FR}	Porenfluiddruck
p^{KR}	Konfigurationsdruck
\mathbf{q}^α	Wärmezufußvektor (äußere Nahwirkung)
\mathbf{q}^I	innerer Anteil des Wärmezufusses
\mathbf{R}_α	Rotationstensor aus der polaren Zerlegung
$\bar{\mathbf{R}}_\alpha$	Mikrobewegung
r^α	spezifische Wärmezufuhr (äußere Fernwirkung)
\mathcal{S}	Oberfläche eines materiellen Körpers
$\hat{\mathbf{s}}^\alpha$	totale Impulsproduktion
\mathbf{T}^α	<i>Cauchy</i> -Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{T}}^\alpha$	Spannungstensor der Referenzkonfiguration
\mathbf{U}_α	rechter <i>Cauchy</i> -Strecktensor
$\bar{\mathbf{U}}_\alpha$	<i>Cosserat</i> -Deformationstensor der Referenzkonfiguration
\mathbf{u}_α	Verschiebungsvektor
$V, \partial V$	Volumen mit Rand ∂V
\mathbf{V}_α	linker <i>Cauchy</i> -Strecktensor
$\bar{\mathbf{V}}_\alpha$	<i>Cosserat</i> -Deformationstensor der aktuellen Konfiguration
\mathbf{W}_α	Drehgeschwindigkeits- oder Wirbeltensor
W^S	volumetrischer Anteil der Verzerrungsenergiefunktion
X^α	materieller Punkt
\mathbf{X}_α	Ortsvektor von X^α in der Referenzkonfiguration von φ^α
\mathbf{x}	Ortsvektor der aktuellen Konfiguration
$\dot{\mathbf{x}}$	baryzentrische Geschwindigkeit

$\dot{\mathbf{x}}_\alpha$	Geschwindigkeit von φ^α
$\ddot{\mathbf{x}}_\alpha$	materielle Beschleunigung von φ^α
$(\Gamma_\alpha)_{ij}^k$	<i>Christoffel</i> -Symbol der Referenzkonfiguration
$(\bar{\Gamma}_\alpha)_{ij}^k$	<i>Christoffel</i> -Symbol der rückrotierten <i>Cosserat</i> -($\bar{\mathbf{U}}_\alpha$ -)Konfiguration
$(\gamma_\alpha)_{ij}^k$	<i>Christoffel</i> -Symbol der aktuellen Konfiguration
Δ_α	unsymmetrische Deformationsgeschwindigkeit
$\bar{\Delta}_\alpha$	<i>Cosserat</i> -Deformationsgeschwindigkeit
δ_i^j	<i>Kronecker</i> -Symbol
ε^{ijk}	Permutationssymbol
ε^α	innere Energiedichte
$\hat{\varepsilon}^\alpha$	direkte Energieproduktion
ϕ^α, Φ^α	Ausfluß einer physikalischen Größe
φ	Mischung
φ^α	Konstituierende α
φ_η^α	Entropieflußvektor
ι	Größenordnungsparameter
Ψ^α, Ψ^α	physikalische Größe
$\hat{\Psi}^\alpha, \hat{\Psi}^\alpha$	Produktion von Ψ^α, Ψ^α
μ^S, λ^S	<i>Lamé</i> -Konstanten
μ_c^S	zusätzliche Elastizitätskonstante (mikropolare Medien)
η^α	Entropie
$\hat{\eta}^\alpha$	totale Entropieproduktion
ρ	Mischungsdichte
ρ^α	Partialdichte
$\rho^{\alpha R}$	effektive Dichte
$\hat{\rho}^\alpha$	Partialdichteproduktion

$\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha$	Mikroträgheit
$\sigma^\alpha, \boldsymbol{\sigma}^\alpha$	Zufuhr einer physikalischen Größe
σ_η	Entropiezufuhr
$\bar{\Theta}^\alpha$	Volumenträgheitstensor
ϑ	absolute Temperatur
$\boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)$	Bewegungsfunktion von φ^α
Ξ_α	Direktor der Referenzkonfiguration
ξ_α	Direktor der aktuellen Konfiguration
Ω_α	Kreiseltensor
$\bar{\Omega}_\alpha$	mikropolarer Kreiseltensor
$\boldsymbol{\omega}_\alpha$	Winkelgeschwindigkeit
$\bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha$	Winkelgeschwindigkeit der Direktoren
(\dots)	totale Zeitableitung bezüglich der Mischungsbewegung
$(\dots)'_\alpha$	materielle Zeitableitung bezüglich der Bewegung von φ^α
$(\dots)^\Delta_\alpha$	obere <i>Lie</i> - oder <i>Oldroyd</i> -Ableitung
$(\dots)^\blacktriangle_\alpha$	verallgemeinerte obere <i>Lie</i> -Ableitung (<i>Cosserat</i>)
$(\dots)^\blacklozenge_\alpha$	verallgemeinerte <i>Green-Naghdi</i> -Ableitung (<i>Cosserat</i>)
$(\dots)^T$	Transposition eines zweistufigen Tensors
$(\dots)^{ijT}$	Transposition bezüglich i und j eines Tensors höherer Stufe
$(\dots)_0$	Gleichgewichtsgröße
$(\dots)_{0S}$	Größe in der Referenzkonfiguration des Festkörpers
$\det(\dots)$	Determinante
$\operatorname{div}(\dots)$	Divergenz zu $\operatorname{grad}(\dots)$
$\operatorname{Grad}_\alpha(\dots)$	Gradient bezüglich \mathbf{X}_α
$\operatorname{grad}(\dots)$	Gradient bezüglich \mathbf{x}
$\operatorname{rot}(\dots)$	Rotation bezüglich $\operatorname{grad}(\dots)$

$\text{skw}(\dots)$	schiefsymmetrischer Anteil eines zweistufigen Tensors
$\text{sym}(\dots)$	symmetrischer Anteil eines zweistufigen Tensors
$\mathbb{I}_A, \mathbb{IV}_A$	Invarianten eines Tensors \mathbf{A}

Anhang B:

Literatur

- E. C. Aifantis (1984): On the microstructural origin of certain elastic models. *ASME J. Engr. Materials and Tech.* **106**, 326–330.
- E. C. Aifantis (1987): The physics of plastic deformation. *Int. J. Plasticity* **3**, 211–247.
- J. Altenbach & H. Altenbach (1994): *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- T. Alts (1992): *Thermomechanik von Mischungen*. Vorlesungsunterlagen, TH Darmstadt.
- H. D. Baehr (1984): *Thermodynamik*. Springer-Verlag, Berlin.
- G. K. Batchelor (1967): *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- K. J. Bathe (1990): *Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin.
- G. Bauer (1997): *Thermodynamische Betrachtung einer gesättigten Mischung*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.
- Z. P. Bazant & G. Pijaudier-Cabot (1998): Non local continuum damage, localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.* **55**, 287–294.
- J. Bear (1988): *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications.
- J. Bear & Y. Bachmat (1991): *Introduction to Modelling of Transport Phenomena in Porous Media*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- E. Becker & W. Bürger (1975): *Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- M. Becker & W. Hauger (1982): Granular material – an experimental realization of a plastic Cosserat continuum? In O. Mahrenholtz & A. Sawczuk (eds.), *Mechanics of Inelastic Media and Structure*, pp. 23–39. Warszawa - Poznań.
- M. Becker & H. Lippmann (1977): Plane plastic flow of granular model material. Experimental setup and results. *Arch. Mech.* **29**, 829–846.

D. Besdo (1974): Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mech.* **20**, 105–131.

D. Besdo (1985a): Inelastic behaviour of plane frictionless block-systems described as Cosserat media. *Arch. Mech.* **37**, 603–619.

D. Besdo (1985b): Zur Beschreibung von ebenen Blockstrukturen als Cosserat-Kontinua. *ZAMM* **65**, T124–T125.

D. Besdo (1991): A numerical Cosserat-approach predicting the statical stability of a plane frictionless block-structure and its stability. In O. Brüller, V. Mannl & J. Najar (eds.), *Advances in continuum mechanics*, pp. 122–142. Springer-Verlag, Berlin.

M. A. Biot (1941): General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* **12**, 155–164.

M. A. Biot (1955): Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.* **26**, 182–185.

A. W. Bishop (1973): The influence of an undrained change in stress on the pore pressure in porous media of low compressibility. *Géotechnique* **23**, 435–442.

P. J. Blatz & W. L. Ko (1962): Application of finite elasticity theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology* **6**, 223–251.

J. Bluhm (1995): A model for liquid saturated compressible porous solids. In W. Walther (Hrsg.), *Beiträge zur Mechanik (Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Reint de Boer)*, pp. 41–50. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen **66**, Universität-GH Essen.

J. Bluhm (1997a): *A consistent model for saturated and empty porous media*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen **74**, Universität-GH-Essen.

J. Bluhm (1997b): Zur Berücksichtigung der Kompressibilität des Festkörpers bei porösen Materialien. *ZAMM* **77**, S39–S40.

J. Bluhm & R. de Boer (1996): Effective stress – a clarification. *Arch. Appl. Mech.* **66**, 479–492.

J. Bluhm & R. de Boer (1997): The volume fraction concept in the porous media theory. *ZAMM* **77**, 563–577.

J. P. Boehler (1987): Representations for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions. In J. P. Boehler (ed.), *Applications of tensor functions in solid*

-
- mechanics*, CISM Courses and Lectures No. 292, pp. 31–53. Springer-Verlag, Wien.
- R. de Boer (1982): *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin.
- R. de Boer (1995): Highlights in the historical development of the porous media theory – toward a consistent macroscopic theory. *Appl. Mech. Rev.* **49**, 201–262.
- R. de Boer (1998): Theory of porous media – past and present. *ZAMM* **78**, 441–466.
- R. de Boer & W. Ehlers (1986): *Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme, Teil I*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, **40**, Universität-GH-Essen.
- R. de Boer & W. Ehlers (1990): The development of the concept of effective stress. *Acta Mech.* **83**, 77–92.
- R. de Boer, W. Ehlers, S. Kowalski & J. Plischka (1991): *Porous media – a survey of different approaches*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen **54**, Universität-GH-Essen.
- R. de Boer, W. Ehlers & Z. Liu (1993): One-dimensional transient wave propagation in fluid saturated incompressible porous media. *Arch. Appl. Mech.* **63**, 59–72.
- N. Bogdonova-Bontcheva & H. Lippmann (1975): Rotationssymmetrisches ebenes Fließen eines granularen Modellmaterials. *Acta Mech.* **21**, 93–113.
- P. A. J. van den Bogert & R. de Borst (1990) Constitutive aspects and finite element analysis of 3-d rubber specimens in compression and shear. In G. N. Pande & J. Middleton (eds.), *NUMETA 90: Numerical methods in engineering: Theory and Applications*, pp. 870–877. Elsevier Applied Science, Swansea.
- R. de Borst (1991): Numerical modelling of bifurcation and localization in cohesive-frictional materials. *Pageoph.* **137**, 368–390.
- R. M. Bowen (1976): Theory of mixtures. In A. C. Eringen (ed.), *Continuum Physics*, Vol III – Mixture and EM Field Theories, pp. 1–127. Academic Press, New York.
- R. M. Bowen (1980): Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* **18**, 1129–1148.
- R. M. Bowen (1982): Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* **20**, 697–735.
- D. Braess (1997): *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in*

der Elastizitätstheorie. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage.

K. E. Brenan, S. L. Campbell & L. R. Petzold (1989): *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Systems*. Elsevier, New York.

S. Breuer (1997): Dynamic response of a fluid saturated elastic porous solid. *Arch. Mech.* **49**, 771.

S. Breuer (1998): *Numerical Simulation of the Behaviour of a Fluid Saturated Elastic Porous Solid*. Shaker Verlag, Aachen.

S. Breuer (1999): Quasi-static and dynamic behavior of saturated porous media with incompressible constituents. *Transport in Porous Media* **34**, 285-303.

R. B. J. Brinkgreve (1994): *Geomaterial Models and Numerical Analysis of Softening*. CIP-Gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.

I. N. Bronstein & K. A. Semendjajew (1984): *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harry Deutsch, Thun.

A. N. Brooks & T. J. R. Hughes (1982): Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **32**, 199-259.

R. F. Buchmaier (1985): *Zur Berechnung von Konsolidationsproblemen bei nichtlinearem Stoffverhalten*. Baugrundinstitut Stuttgart, Mitteilung 23, Stuttgart.

B. D. Coleman & M. L. Hodgdon (1985): On shear bands in ductile materials. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **90**, 219-249.

B. D. Coleman & W. Noll (1963): The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **13**, 167-178.

R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey & D. E. Knuth (1996): On the Lambert W-function. *Advances in Computational Mathematics* **5**, 329-359.

E. Cosserat & F. Cosserat (1909): *Théorie des corps déformable*. A. Hermann et Fils, Paris.

S. C. Cowin & J. W. Nunziato (1983): Linear elastic materials with voids. *J. Elasticity* **13**, 125-147.

J. J. Cross (1973): Mixtures of fluids and isotropic solids. *Arch. Mech.* **25**, 1025-1039.

S. Diebels (1998a): Constitutive modelling of micropolar porous media. In J.-F. Thi-

mus et al. (ed.), *Poromechanics – A Tribute to Maurice A. Biot*, pp. 71–76. A. A. Balkema, Rotterdam.

S. Diebels (1998b): Ein mikropolares Materialgesetz für poröse Festkörper. *ZAMM*, submitted.

S. Diebels (1999): A micropolar theory of porous media: Constitutive modelling. *Transport in Porous Media* **34**, 193–208.

S. Diebels & W. Ehlers (1994): Ein numerisches Modell zur Behandlung elastisch-plastischer Konsolidationsvorgänge. In O. T. Bruhns (Hrsg.), *Große Plastische Formänderungen*, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 93, pp. 167–170. Ruhr-Universität Bochum.

S. Diebels & W. Ehlers (1995): Dynamik poröser Medien. *ZAMM* **75**, S151–S152.

S. Diebels & W. Ehlers (1996a): Dynamic analysis of a fully saturated porous medium accounting for geometrical and material nonlinearities. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **39**, 81–97.

S. Diebels & W. Ehlers (1996b): On basic equations of multiphase micropolar materials. *Technische Mechanik* **16**, 77–88.

S. Diebels, W. Ehlers, D. Mahnkopf & W. Volk (1996): Elastoplastisches Stoffverhalten beim Konsolidationsproblem. *ZAMM* **76** (Suppl. 5), 119–120.

S. Diebels, W. Ehlers & W. Volk (1998a): On the regularization of shear band phenomena in liquid-saturated and empty soils based on fluid viscosity and micropolar solid rotations. In A. Brillard & J. F. Ganghoffer (eds.), *Nonlocal Aspects in Solid Mechanics, Proceedings of the EUROMECH Colloquium 378*, pp. 58–63, University of Mulhouse – CNRS, Mulhouse.

S. Diebels, P. Ellsiepen & W. Ehlers (1998b): Zeitintegration viskoplastischer Zweiphasenmodelle. In O. T. Bruhns (Hrsg.), *Große Plastische Formänderungen*, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 114, pp. 145–148. Ruhr-Universität Bochum.

S. Diebels, P. Ellsiepen & W. Ehlers (1998c): *A Two-Phase Model for Viscoplastic Geomaterials*, D. Besdo & R. Bogacz (eds.): *Dynamics of Continua*, pp. 103–112, Shaker Verlag, Aachen.

S. Diebels, P. Ellsiepen & W. Ehlers (1999): Error-controlled Runge-Kutta time integration of a viscoplastic hybrid two-phase model. *Technische Mechanik* **16**, 19–27.

W. Diepolder (1989): *Das Cosserat-Kontinuum als Strukturmodell für plastische Korndrehungen*. Dissertation, Technische Universität München.

A. Dietsche, P. Steinmann & K. Willam (1993): Micropolar elastoplasticity and its role in localization. *Int. J. Plasticity* **9**, 813–831.

S. Doll & K. Schweizerhof (1997): *On the development of volumetric strain energy functions*. Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 1997-5, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität Karlsruhe.

W. Dreyer & W. Weiss (1997): *Geschichten der Thermodynamik und obskure Anwendungen des zweiten Hauptsatzes*. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Preprint No. 330, Berlin.

W. Ehlers (1989a): On thermodynamics of elasto-plastic porous media. *Arch. Mech.* **41**, 73–93, 1989.

W. Ehlers (1989b): *Poröse Medien – Ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen **45**, Universität-GH-Essen.

W. Ehlers (1991): Toward finite theories of liquid-saturated elasto-plastic porous solids, *Int. J. Plasticity* **7**, 443–475.

W. Ehlers (1993a): Compressible, incompressible and hybrid two-phase models in porous media theories. In Y. C. Angel (ed.): *Anisotropy and Inhomogeneity in Elasticity and Plasticity*, AMD-Vol. 158, pp. 25–38. ASME.

W. Ehlers (1993b): Constitutive equations for granular materials in geomechanical context. In K. Hutter (ed.), *Continuum mechanics in environmental sciences and geophysics*, CISM Courses and Lectures No. 337, pp. 313–402. Springer-Verlag, Wien.

W. Ehlers (1994): *Materialtheorie*. Vorlesungsunterlagen, TH Darmstadt.

W. Ehlers (1996): Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. *Technische Mechanik* **16**, 63–76.

W. Ehlers & S. Diebels (1995): Dynamic deformations in the theory of fluid-saturated porous solid materials. In D. F. Parker & A. H. England (eds.), *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity, and Nonlinearity in Solid Mechanics*, pp. 241 – 246. Kluwer Academic Publishers.

W. Ehlers, S. Diebels & D. Mahnkopf (1997): Theoretical and numerical aspects of elasto-plastic porous media models. In R. Helmig, W. Jäger, W. Kinzelbach, P. Kna-

ber & G. Wittum (eds.), *Modelling and Computation in Environmental Sciences*, Notes on Numerical Fluid Mechanics **59**, pp. 121–132. Vieweg Verlag, Braunschweig.

W. Ehlers, S. Diebels & W. Volk (1998a): Deformation and compatibility for elasto-plastic micropolar materials with applications to geomechanical problems. *J. Phys. IV France* **8**, Pr8–127–Pr8–134.

W. Ehlers, S. Diebels & W. Volk (1998b): Die Bedeutung der Kompatibilitätsbedingung für mikropolare, elastisch-plastische Reibungsmaterialien. In O. T. Bruhns (Hrsg.), *Große Plastische Formänderungen*, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 114, pp. 23–26. Ruhr-Universität Bochum.

W. Ehlers & G. Eipper (1997): Finite Elastizität bei fluidgesättigten hochporösen Festkörpern. *ZAMM* **77**, S79–S80.

W. Ehlers & G. Eipper (1998): The simple tension problem at large volumetric strains computed from hyperelastic material laws. *Acta Mech.* **130**, 17–27.

W. Ehlers & G. Eipper (1999): Finite elastic deformations in liquid-saturated and empty porous solids. *Transport in Porous Media* **34**, 179–191.

W. Ehlers & P. Ellsiepen (1998a): PANDAS: Ein FE-System zur Simulation von Sonderproblemen der Bodenmechanik. In P. Wriggers, U. Meißner, E. Stein und W. Wunderlich (Hrsg.), *Finite Elemente in der Baupraxis – FEM '98, Modellierung, Berechnung und Konstruktion*, pp. 391–400, Ernst & Sohn, Berlin.

W. Ehlers & P. Ellsiepen (1998b): Zeit- und ortsadaptive Verfahren zur Berechnung von Scherbändern in porösen Materialien. In R. Mahnken (Hrsg.): *Theoretische und numerische Methoden in der angewandten Mechanik mit Praxisbeispielen – Festschrift anlässlich der Emeritierung von Prof. Dr.-Ing. E. Stein*, pp. 99–106, Universität Hannover.

W. Ehlers, P. Ellsiepen, P. Blome, D. Mahnkopf & B. Markert (1999): *Theoretische und numerische Studien zur Lösung von Rand- und Anfangswertproblemen in der Theorie Poröser Medien*, Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) Nr. 99-II-1, Universität Stuttgart.

W. Ehlers & H. Kubik (1994): On finite dynamic equations for fluid-saturated porous media. *Acta Mech.* **105**, 101–117.

W. Ehlers & W. Volk (1997a): On shear band localization phenomena induced by elasto-plastic consolidation of fluid-saturated soils. In D. J. R. Owen, E. Oñate & E. Hinton (eds.), *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, Vol. 2, pp. 1657–1664. CIMNE, Barcelona.

- W. Ehlers & W. Volk (1997b): On shear band localization phenomena of liquid-saturated granular elasto-plastic solid materials accounting for fluid viscosity and micropolar solid rotations. *Mech. Cohesive-Frictional Mater.* **2**, 301–320.
- W. Ehlers & W. Volk (1998): On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar solid materials. *Int. J. Solids Struct.* **35**, 4597–4617.
- G. Eipper (1998): *Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluid-gesättigten porösen Festkörpern*. Dissertation, Bericht Nr. II-1, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- P. Ellsiepen (Hrsg.) (1997): *PANDAS – Benutzer- und Referenzhandbuch*, Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) Nr. 97-II-9. Universität Stuttgart.
- P. Ellsiepen (1999): *Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien*. Dissertation, Bericht Nr. II-3, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- J. L. Ericksen & C. Truesdell (1958): Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **1**, 295–323.
- A. C. Eringen (1964): Simple microfluids. *Int. J. Engng. Sci.* **2**, 205–217.
- A. C. Eringen & C. B. Kafadar (1976): Polar field theories. In A. C. Eringen (ed.), *Continuum Physics*, Vol IV – Polar and nonlocal field theories, pp. 1–73. Academic Press, New York.
- A. C. Eringen (1972): Linear theory of non local elasticity and dispersion of plane waves. *Int. J. Engng. Sci.* **10**, 425–435.
- A. C. Eringen & D. G. B. Edelen (1972): On non local elasticity. *Int. J. Engng. Sci.* **10**, 233–248.
- A. C. Eringen & E. S. Suhubi (1964): Nonlinear theory of simple micro-elastic solids – I. *Int. J. Engng. Sci.* **2**, 189–203.
- P. Fillunger (1913): Der Auftrieb in Talsperren. *Österr. Wochenschr. f. öffentlichen Baudienst* **19**, 532–556, 567–570.
- P. Fillunger (1930): Auftrieb und Unterdruck in Staumauern. *Proc. 2nd Trans. World Power Conf.* **9**, 323–329.
- J. T. Fong & R. W. Penn (1975): Construction of a strain-energy function for an isotropic elastic material. *Transactions of the Society of Rheology* **19**, 99–113.

-
- L. P. Franca & S. L. Frey (1992): Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **99**, 209–233.
- L. P. Franca, S. L. Frey & T. J. R. Hughes (1992): Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **95**, 253–276.
- F. Gassmann (1951): Über die Elastizität poröser Medien. *Vierteljahresschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* **96**, 1–23.
- M. A. Goodman & S. C. Cowin (1972): A continuum theory for granular materials. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **44**, 249–266.
- W. Günther (1958): Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* **10**, 195–213.
- F. Häfner, D. Sames & H.-D. Voigt (1992): *Wärme- und Stofftransport – Mathematische Methoden*. Springer-Verlag, Berlin.
- F. Häfner, H. D. Voigt, H.-F. Bamberg & M. Lauterbach (1985): *Geohydrodynamische Erkundung von Erdöl-, Erdgas- und Grundwasserlagerstätten*, Heft 1. Wissenschaftlich-Technischer Informationsdienst vom Zentralen Geologischen Institut Berlin.
- E. Hairer, C. Lubich & M. Roche (1989): *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta-Methods*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- E. Hairer & G. Wanner (1991): *Solving Ordinary Differential Equations II — Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag, Berlin.
- S. M. Hassanizadeh & W. G. Gray (1979a): General conservation equations for multiphase systems: 1. Averaging procedure. *Advances in Water Resources* **2**, 25–40.
- S. M. Hassanizadeh & W. G. Gray (1979b): General conservation equations for multiphase systems: 2. Mass, momentena, energy, and entropy equations. *Advances in Water Resources* **2**, 191–208.
- P. Haupt (1993): Foundations of continuum mechanics. In K. Hutter (ed.), *Continuum mechanics in environmental sciences and geophysics*, CISM Courses and Lectures No. 337, pp. 1–77. Springer-Verlag, Wien.
- P. Hill (1965): A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys.*

Solids **13**, 213–222.

J. O. Hinze (1987): *Turbulence*. McGraw-Hill, New York.

M. Horz (1994): *Linear-elastische Wellen in vordeformierten Medien*. Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, Bericht 2/1994.

K. Hutter (1977): The foundations of thermodynamics, its basic postulates and implications. A review of modern thermodynamics. *Acta Mech.* **27**, 1–54.

K. Hutter (1995): *Fluid- und Thermodynamik*. Springer-Verlag, Berlin.

D. J. Jeffrey, D. E. G. Hare & R. M. Corless (1996): Upwinding the branches of the Lambert W function. *The Mathematical Scientist* **21**, 1–7.

C. B. Kafadar & A. C. Eringen (1971): Micropolar media – I: The classical theory. *Int. J. Engng. Sci.* **9**, 271–305.

E. Klingbeil (1989): *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Wissenschaftsverlag, Zürich, 2. Auflage.

E. Kröner (1967): Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int. J. Solids Struct.* **3**, 731–742.

P. Lade & R. de Boer (1997): The concept of effective stress for soil, concrete and rock. *Géotechnique* **47**, 61–78.

R. S. Lakes (1986): Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Struct.* **22**, 55–63.

R. S. Lakes (1995): Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In H.-B. Mühlhaus (ed.), *Continuum Models for Materials with Microstructure*, pp. 1–25. John Wiley and Sons, Chichester.

D. Laugwitz (1977): *Differentialgeometrie*. B. G. Teubner, Stuttgart.

J. Lemaitre (1996): *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2nd ed.

R. W. Lewis & B. A. Schrefler (1998): *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, Chichester, 2nd ed.

C. H. Liu & H. A. Mang (1996): A critical assessment of volumetric strain energy functions for hyperelasticity at large strains. *ZAMM* **76**, 305–306.

-
- I-S. Liu (1972): Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **46**, 131–148.
- I-S. Liu & I. Müller (1984): Thermodynamics of mixtures of fluids. In C. Truesdell (ed.), *Rational Thermodynamics (2nd ed.)*, pp. 264–285. Springer-Verlag, New York.
- Z. Liu (1995): Acceleration waves in saturated poroelastic solids. In W. Walter (ed.), *Beiträge zur Mechanik (Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Reint de Boer)*, pp. 271–282. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen **66**, Universität-GH Essen.
- M. Marin (1998): Asymptotic equipartition of energies in thermoelasticity of dipolar bodies. In A. Brillard & J. F. Ganghoffer (eds.), *Proceedings of the EUROMECH Colloquium 378: Nonlocal aspects in solid mechanics*, pp. 77–82. University of Mulhouse, Mulhouse, France.
- J. E. Marsden & T. J. R. Hughes (1983): *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, New York.
- F. Martinez & R. Quintanilla (1998): Existence and uniqueness of solutions in micropolar viscoelastic bodies. In A. Brillard & J. F. Ganghoffer (eds.), *Proceedings of the EUROMECH Colloquium 378: Nonlocal aspects in solid mechanics*, pp. 83–87. University of Mulhouse, Mulhouse, France.
- C. Miehe (1994): Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **37**, 1981–2004.
- C. Miehe, J. Schröder & J. Schotte (1999): Computational homogenization analysis in finite plasticity. Simulation of texture development in polycrystalline materials. *Comput. Methods Appl. Mech.* **171**, 387–418.
- M. Mooney (1940): A theory of large elastic deformations. *J. Appl. Phys.* **11**, 582–592.
- H.-B. Mühlhaus (ed.) (1995): *Continuum Models for Materials with Microstructure*. John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- H.-B. Mühlhaus & E. C. Aifantis (1991): A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solid Struct.* **28**, 845–857.
- I. Müller (1967): On the entropy inequality. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **29**, 118–141.
- I. Müller (1968): A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **28**, 1–39.

- I. Müller (1973): *Thermodynamik – Grundlagen der Materialtheorie*. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf.
- M. A. Murad & A. F. D. Loula (1994): On stability and convergence of finite element approximations of Biot's consolidation problem. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **37**, 645–667.
- M. Muskat (1937): *The flow of homogeneous fluids through porous media*. McGraw-Hill, New York.
- G. Niemann (1981): *Maschinenelemente, Band I, Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen*. Springer-Verlag, Berlin.
- W. Noll (1955): On the continuity of the solid and fluid states. *J. Rat. Mech. Anal.* **4**, 3–81.
- W. Noll (1958): A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **2**, 197–226.
- W. Nowacki (1969): *Teoria niesymetrycznej sprężystości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1969.
- W. Nowacki (1986): *Theory of asymmetric elasticity*. Pergamon Press, Oxford.
- J. W. Nunziato & S. C. Cowin (1979): A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **72**, 175–201.
- A. Nur & J. D. Byerlee (1971): An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. *J. Geophys. Research* **76**, 6414–6419.
- R. W. Ogden (1972a): Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. London A* **326**, 565–584.
- R. W. Ogden (1972b): Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. London A* **328**, 567–583.
- S. L. Passman, J. W. Nunziato & E. K. Walsh (1984): A theory of multiphase mixtures. In C. Truesdell (ed.), *Rational Thermodynamics (2nd ed.)*, pp. 286–325. Springer-Verlag, New York.
- S. T. J. Peng & R. F. Landel (1975): Stored-energy function and compressibility of compressible rubberlike materials under large strain. *J. Appl. Phys.* **46**, 2599–2604.

-
- R. W. Penn (1970): Volume changes accompanying the extension of rubber. *Transactions of the Society of Rheology* **14**, 509–517.
- G. Pijaudier-Cabot & Z. P. Bazant (1988): Comparison of various models for strain-softening. *Engng. Comp.* **5**, 141–150.
- L. Pisarsky (1992): *Zur Berechnung nichtmonoton beanspruchter wassergesättigter Tonböden*. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Bericht Nr. 91-65, Braunschweig.
- J. Plischka (1992): *Die Bedeutung der Durchschnittsbildungstheorie für die Theorie poröser Medien*. Dissertation, Universität-GH-Essen.
- L. Prandtl (1965): *Strömungslehre*. Vieweg, Braunschweig, 6. Auflage.
- J. H. Prevost (1982): Nonlinear transient phenomena in saturated porous media. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **20**, 3–18.
- J. H. Prevost (1985): Wave propagation in fluid-saturated porous media: An efficient finite element procedure. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **4**, 183–202.
- S. Reese (1994): *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.
- A. Reuss (1929): Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM* **9**, 49–58.
- R. S. Rivlin (1948a): Large elastic deformations of isotropic materials. *Proc. R. Soc. London A* **195**, 463–473.
- R. S. Rivlin (1948b): Large elastic deformations of isotropic materials. *Proc. R. Soc. London A* **242**, 173–195.
- W. Rodi (1993): *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics – A State-of-the-art Review*. IAHR AIRH Monograph Series, A. A. Balkema, Rotterdam, 3. Auflage.
- P. Rossi (1983): *Kinematische Modelluntersuchungen von ebenen Grundbauproblemen*. Diplomarbeit am Institut für Grundbau und Bodenmechanik, Universität Stuttgart, 1983.
- C. Sansour & H. Bednarczyk (1995): The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **120**, 1–32.
- H. Schaefer (1967): Das Cosserat-Kontinuum. *ZAMM* **47**, 485–498.

- H. Schaefer (1969): Eine Feldtheorie der Versetzungen im Cosserat-Kontinuum. *ZAMP* **20**, 891–899.
- H. Schlichting (1982): *Grenzschichttheorie*. G. Braun, Karlsruhe, 8. Auflage.
- L. Schreyer Bennethum, M. A. Murad & J. H. Cushman (1998): Macroscale thermodynamics and the chemical potential for swelling porous media. *Transport in Porous Media*, submitted.
- J. Schröder (1996): *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Bericht Nr.: I-1, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Universität Stuttgart.
- H. R. Schwarz (1991): *Methode der Finiten Elemente*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- J. C. Simo & R. L. Taylor (1982): Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **35**, 107–118.
- J. C. Simo & R. L. Taylor (1991): Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **85**, 273–310.
- B. R. Simon, O. C. Zienkiewicz & D. K. Paul (1986): Evaluation of u - w and u - π finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one-dimensional models. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* **10**, 461–482.
- A. W. Skempton (1962): Effective stress in soils, concrete and rock. *Conf. on Pore Pressure and Suction in Soils*, pp. 4–16, Butterworths, London.
- G. F. Smith (1971): On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors, and vectors. *Int. J. Engng. Sci.* **9**, 899–916.
- A. J. M. Spencer (1971): Theory of invariants. In A. C. Eringen (ed.), *Continuum Physics*, Vol 1 – Mathematics, pp. 239–353. Academic Press, New York.
- P. Steinmann (1992): *Lokalisierungsprobleme in der Plasto-Mechanik*. Dissertation, Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- P. Steinmann (1994): A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.* **31**, 1063–1084.
- P. Steinmann & K. Willam (1991): Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity. In O. Brüller, V. Mannl & J. Najjar (eds.), *Advances in continuum mechanics*, pp. 296–313. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

-
- E. S. Suhubi & A. C. Eringen (1964): Nonlinear theory of micro-elastic solids – II. *Int. J. Engng. Sci.* **2**, 389–404.
- L. Šuklje (1969): *Rheological Aspects of Soil Mechanics*. Wiley-Interscience, London, 1969.
- P. M. Suquet (1985): Approach by homogenization of some linear and nonlinear problems in solid mechanics. In J. P. Boehler (ed.), *Plastic behavior of anisotropic solids*, pp. 77–117, Proceedings of the CNRS International Colloquium 319.
- P. M. Suquet (1987): Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In E. Sanchez-Palencia & A. Zaoui (eds.), *Homogenization Techniques for composite media*, Lecture Notes in Physics **272**, pp. 193–278, Springer Verlag.
- B. Svendsen & K. Hutter (1995): On the thermodynamics of a mixture of isotropic materials with constraints. *Int. J. Engng. Sci.* **33**, 2021–2054.
- J. Tejchman & W. Wu (1993): Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum. *Acta Mech.* **99**, 61–74.
- K. Terzaghi (1923): Zur Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien* **132**, 125–138.
- K. Terzaghi (1945): Stress conditions for the failure of saturated concrete and rock. *Proceedings of the American Society for Testing Materials* **45**, 777–801.
- K. Terzaghi & R. Jelinek (1954): *Theoretische Bodenmechanik*. Springer-Verlag, Berlin.
- T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray & R. Shih (1992): Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **95**, 221–242.
- L. R. G. Treloar (1943): II: The elasticity of a network of long-chain-molecules. *Trans. Faraday Soc.* **39**, 241–246.
- E. Truckenbrodt (1980): *Strömungsmechanik*, Bd. 1. Springer-Verlag, Berlin.
- C. Truesdell (1949): A new definition of a fluid, II. The Maxwellian fluid. *U.S. Naval Res. Lab. Rep. No. P-3553*, §19.
- C. Truesdell (1957): Sulle basi della termomeccanica. *Rend. Lincei (8)* **22**, 33–38, 158–166.

- C. Truesdell (1971): *The tragicomedy of classical thermodynamics*, CISM Courses and Lectures No. 70. Springer-Verlag, Wien.
- C. Truesdell (1984): Thermodynamics of diffusion. In C. Truesdell (ed.), *Rational Thermodynamics (2nd ed.)*, pp. 219–236. Springer-Verlag, New York.
- C. Truesdell & R. A. Toupin (1960): The classical field theories. In S. Flügge (ed.), *Handbuch der Physik III/1*, pp. 226–793. Springer-Verlag, Berlin.
- R. J. Twiss & A. C. Eringen (1971): Theory of mixtures for micromorphic materials - I: Balance laws. *Int. J. Engng. Sci.* **9**, 1019–1044.
- W. Voigt (1889): Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. *Wied. Ann.* **38**, 573–587.
- W. Volk (1999): *Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien*. Dissertation, Bericht Nr. II-2, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- C.-C. Wang (1970a): A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions. Part I. Scalar-valued isotropic functions. *Arch. Rat. Mech. Anal* **36**, 166–197.
- C.-C. Wang (1970b): A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions. Part II. Vector-valued isotropic functions, symmetric tensor-valued functions, and skew-symmetric tensor-valued functions. *Arch. Rat. Mech. Anal* **36**, 198–223.
- P. Wriggers (1988): *Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Bericht-Nr. F 88/4.
- B. Zastrau (1981): *Zur Berechnung orientierter Kontinua – Entwicklung einer Direktorthorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Fortschrittberichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 4 (Bauingenieurwesen) Nr. 60, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- O. C. Zienkiewicz (1984a): Coupled problems and their numerical solution. In R. W. Lewis, P. Bettess & E. Hinton (eds.), *Numerical Methods in Coupled Systems*. Wiley, New York.
- O. C. Zienkiewicz (1984b): Dynamic behaviour of saturated porous media: The generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* **8**, 71–96.

O. C. Zienkiewicz, A. H. C. Chan, M. Pastor, D. K. Paul & T. Shiomi (1990a): Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. I. Fully saturated problems. *Proc. R. Soc. Lond.* **A 429**, 285–309.

O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor (1989a): *The Finite Element Method*, 1. Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill, London, 4. Auflage.

O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor (1989b): *The Finite Element Method*, 2. Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity. McGraw-Hill, London, 4. Auflage.

O. C. Zienkiewicz, Y. M. Xie, B. A. Schrefler, A. Ledesma & N. Bićanić (1990b): Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. II. Semi-saturated problems. *Proc. R. Soc. Lond.* **A 429**, 311–321.

Anhang C: Lebenslauf

Lebenslauf

Stefan Diebels, Hanweiler Straße 26, 71 404 Korb,
geboren am 13. Juni 1965 in Neuss,
verheiratet seit dem 05. Juni 1989 mit Marie-Louise Diebels, geb. Brans,
zwei Kinder: Anja, geb. 29.06.1993, Markus, geb. 22.01.1996

August 1971 - Januar 1972
Besuch der Grundschule Dormagen-Delhoven

Januar 1972 - Juli 1975
Besuch der Grundschule Dormagen-Mitte

September 1975 - Mai 1984
Besuch des Norbert-Gymnasiums Knechtsteden

29. Mai 1984
Allgemeine Hochschulreife

Juni 1984 - August 1984
Studienvorbereitendes Praktikum bei der Rhein-Braun AG,
Betriebswerkstatt Garzweiler

Oktober 1984 - September 1987
Studium des Maschinenbaus an der Technischen Hochschule Darmstadt

11. Juni 1987
Abschluß des Vordiploms

Oktober 1987 - Juni 1989
Studium der Mechanik an der Technischen Hochschule Darmstadt

20. Juni 1989
Abschluß des Hochschulstudiums als Diplom-Ingenieur
der Fachrichtung Mechanik

Juli 1989 - März 1992
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der
Technischen Hochschule Darmstadt bei Prof. Kolmban Hutter, Ph. D.

26. Februar 1992

Promotion zum Doktor-Ingenieur

Titel der Dissertation: *Interne Wellen — ein Modell, das Nichtlinearität, Dispersion, Corioliseffekte und variable Topographie berücksichtigt*

Referenten: Prof. Kolumban Hutter, Ph. D., und Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers

April 1992 - Februar 1995

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der

Technischen Hochschule Darmstadt bei Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

seit 1. März 1995

Akademischer Rat am Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, an der Universität Stuttgart bei Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

11. Februar 2000

Habilitation im Fach Mechanik

Titel der Habilitationsschrift: *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers, Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm und Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt

Titel des Habilitationsvortrags: *Wellenausbreitung in mechanischen Systemen*

Bisher in dieser Reihe erschienen:

- II-1 G. EIPPER: Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern, Juni 1998.
- II-2 W. VOLK: Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat-Theorie, Mai 1999.
- II-3 P. ELLSIEPEN: Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien, Juli 1999.
- II-4 S. DIEBELS: Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien, März 2000.