

Analyse eines Vielstrahl-Wellenleiters zur Übertragung hoher Mikrowellenleistungen

Von der Fakultät Elektrotechnik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Lars Empacher
aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr. rer. nat. U. Schumacher
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Landstorfer
Tag der Einreichung: 14. Oktober 1998
Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juni 1999

Institut für Plasmaforschung
Universität Stuttgart
1999

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den optischen Eigenschaften eines Vielstrahl-Wellenleiters. Hier wird zur Übertragung mehrerer Millimeterwellenstrahlen anstelle von mehreren separaten Leitungen ein einziges Spiegelsystem verwendet.

Ein solches System kann beispielsweise eingesetzt werden in Anlagen für die Elektronen-Zyklotron-Resonanz-Heizung (ECRH), einer effektiven Methode zur Heizung von magnetisch eingeschlossenen Plasmen bei Fusionsexperimenten. Hierbei müssen mehrere Millimeterwellenstrahlen von typisch 70-200 Gigahertz und Leistungen im Megawattbereich über Entfernungen von circa 30-100 Metern mit Spiegelleitungen oder überdimensionierten Hohlleitern übertragen werden.

Der Vielstrahl-Wellenleiter ist eine elegante Alternative zum konservativen Design mit vielen einzelnen Übertragungsleitungen, da der erforderliche Aufwand bei sehr geringen Einbußen in der Abbildungsqualität und der vollen Breitbandigkeit der quasioptischen Leitungen erheblich reduziert ist. Die Anzahl der erforderlichen Spiegel sinkt drastisch und damit der Aufwand und der Preis sowohl für die Struktur-Materialien, wie auch bei der Justierung. Die insgesamt erforderliche Spiegelfläche wird ebenfalls deutlich kleiner. Dieser Aspekt wird insbesondere bei den in Zukunft notwendigen wassergekühlten Systemen wichtig.

In dieser Arbeit werden zunächst die Grundlagen der optischen Übertragung von elektromagnetischer Strahlung beschrieben. Anschließend werden konfokale Vielstrahlspiegelsysteme mit Hilfe von numerischen Methoden, die auf der kirchhoffschen Beugungstheorie beruhen, untersucht. Als Alternative dazu wurden analytische Ausdrücke für die Modenwandlung bzw. die Übertragungsverluste in solchen Systemen hergeleitet.

Günstige optische Eigenschaften ergeben sich, wenn vier Spiegel gleicher Brennweite konfokal angeordnet werden. Wenn die Spiegel entweder die Ecken eines Quadrates bilden oder in Zick-Zack-Anordnung stehen, dann egalisieren sich die jeweiligen Strahldeformationen, welche bei jeder einzelnen Reflexion an gekrümmten Spiegeln unvermeidlich sind. Bei zwei Spiegeln ist dies nur in Sonderfällen, d. h. für spezielle Falschmoden und Strahlparameter möglich. Bei den 4-Spiegel-Anordnungen konnte sowohl der kreuzpolarisierte Beitrag, d. h. das Übersprechen auf den kreuzpolarisierten Kanal, wie auch die Verluste in der fundamentalen Nutzmode genau quantifiziert werden. Damit lassen sich die Parameter der Spiegelleitung im Rahmen ihrer Randbedingungen optimieren und insbesondere die Form der Spiegeloberfläche. Es ergibt sich, dass für die Spiegeloberfläche weder der Einzelstrahl-Spiegel, noch geometrisch-optische Überlegungen zum bestmöglichen Ergebnis führen, sondern dass nur eine entsprechend dem erarbeiteten Formalismus optimierte Oberfläche für die Spiegel die geringsten Übertragungsverluste liefert.

Die ermittelten analytischen Ergebnisse wurden an jeder Stelle mit numerischen Rechnungen verglichen. Diese wiederum wurden verifiziert mit Niederleistungs-Messungen im Labor-experiment. Die Übereinstimmung ist in beiden Fällen sehr gut.

Bei dem im Bau befindlichen Stellarator-Experiment W7-X soll erstmals eine solche Übertragungsleitung eingesetzt werden, die jeweils fünf Strahlen von je einem Megawatt Leistung bei 140 Gigahertz und einen weiteren Strahl mit 70 Gigahertz zusammenfasst. Durch den Vielstrahl-Wellenleiter ergibt sich eine Reduktion der Spiegelfläche um mehr als 50% bei vernachlässigbaren Verlusten aufgrund von Modenkonzersion ($< 0.2\%$).

Der Vielstrahlwellenleiter erlaubt es außerdem, gleichzeitig verschiedene gaußsche Moden phasenrichtig zu übertragen. Eine solche Modenmischung erhält man beispielsweise bei der Analyse des Wellenfeldes am Ausgangsfenster der Millimeterwellenquelle. Ist die Ordnung dieser Moden nicht allzu hoch, dann wird diese im Allgemeinen abgeflachte Leistungsverteilung direkt auf das entsprechende Fenster am Plasmatorus abgebildet. Für andere Fälle wurde ein Verfahren entwickelt, wie es sich im letzten Kapitel dieser Arbeit findet, mit welchem eine beliebige paraxiale Strahlung in einen ordentlichen gaußschen Strahl umgewandelt werden kann.

Wegen der günstigen Übertragungseigenschaften und des kompakten Aufbaus kann der Vielstrahl-Wellenleiter auch für viele Niederleistungsanwendungen interessant werden. Im Bereich der Fusionsforschung ist beispielsweise eine Verwendung als Signalleitung für die ortsauflösende Plasma-Diagnostik mittels Elektron-Zyklotron-Emission denkbar oder aber jede andere Anwendung, bei welcher es auf kompakte, vielkanalige und verlustarme Übertragung ankommt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung, Zielsetzung	6
2 Grundlagen der Millimeterwellen-Ausbreitung im Freiraum	8
2.1 Maxwell's Gleichungen	8
2.2 Fundamentale Lösung der Wellengleichung	9
2.2.1 Ebene Wellen.....	9
2.2.2 Gaußsche Strahlen	10
2.3 Gaußsche Optik.....	17
2.3.1 Propagation von gaußschen Wellen.....	17
2.3.2 Modenkopplung	18
2.3.3 Überlapp-Integrale	19
2.3.4 Phasenplatte.....	21
2.3.5 ABCD-Formalismus	22
2.3.6 Konfokale Anordnung.....	23
2.4 Rechenverfahren für die Freiraumpropagation.....	25
2.4.1 Finite-Differenzen-Verfahren.....	25
2.4.2 Zerlegung in ebene Wellen.....	26
2.4.3 Zerlegung in gaußsche Moden	28
2.4.4 Fresnel-kirchhoffsches Integral	28
3 Vielstrahl-Wellenleiter.....	30
3.1 Prinzip.....	31
3.2 Parameter, Konfigurationen, Wertebereiche.....	32
3.2.1 Brennweite.....	33
3.2.2 Strahlversetzung	33
3.2.3 Strahltaile	33
3.2.4 Spiegeloberfläche.....	36
3.2.5 Spiegelgeometrie.....	39
3.3 Numerische Ergebnisse.....	41
3.3.1 Ein Spiegel	42
3.3.2 Zwei Spiegel	46
3.3.3 Vier Spiegel.....	49
3.3.4 1-2-4 Spiegel im Vergleich	54
3.4 Analytische Rechnungen.....	56
3.4.1 Methode.....	56
3.4.2 Modenrekursion durch geeignete Spiegel-Konfiguration.....	58
3.4.3 Weg eines 'echten' Strahles	61
3.4.4 Kopolarisierte Falschmoden.....	65
3.4.5 Kreuzpolarisation.....	68
3.5 Vergleich von analytischen und numerischen Ergebnissen	69
3.6 Transmission einer Modenmischung.....	72
3.7 Fazit aus den Untersuchungen	73

4 Messungen	75
4.1 Messaufbau	76
4.2 Ergebnisse	77
5 Wendelstein 7-X	86
5.1 Übersicht über die geplante ECRH-Anlage	86
5.2 Vielstrahl-Wellenleiter	88
5.2.1 Wahl der Parameter	88
5.2.2 Übertragungs-Eigenschaften	90
5.3 Gyrotron-Anpassoptik	93
5.3.1 Verfahren	93
5.3.2 Theorie	94
5.3.3 Infrarot-Aufnahmen	95
5.3.4 Strahlrekonstruktion und Spiegeldesign	99
5.4 Zusammenfassung zur ECRH-Anlage an W7-X	101
6 Literatur	102
7 Anhang	105
7.1 Überlapp-Integrale	105
7.2 Analytische Ergebnisse	108
7.2.1 Q-Konfiguration	108
7.2.2 Z-Konfiguration	110

1 Einleitung, Zielsetzung

Eines der großen, aktuellen Probleme der Menschheit ist die langfristige Versorgung mit Energie. Es besteht im Wesentlichen Konsens, dass nur die anteilige Nutzung mehrerer, verschiedener Quellen zur Lösung führt. Dabei könnte in Zukunft die *Kernfusion* mit *magnetisch eingeschlossenen Plasmen* einen erheblichen Beitrag leisten. Zur Zeit befinden sich die Anlagen noch im Experimentstadium, d. h. die Aufrechterhaltung der Kernverschmelzungs-Reaktionen, wie man sie auch in unserer Sonne findet, muss zur Zeit noch von außen unterstützt werden. Eine effektive und flexible Methode, dem circa 10^8 Kelvin heißen Plasma Energie zuzuführen, ist die *Elektron-Zyklotron-Resonanz-Heizung* (ECRH). Hierbei wird die Leistung im Bereich einiger Megawatt in Form von elektromagnetischen Wellen ins Plasma eingestrahlt und von den Elektronen, welche um die Magnetfeldlinien gyrieren, absorbiert. Aus der Stärke des toroidalen Magnetfeldes von einigen Tesla ergibt sich für diese Elektron-Zyklotron-Resonanz eine Frequenz von typisch 70 bis 200 Gigahertz, was einer Wellenlänge von wenigen Millimetern entspricht.

Experimente dieser Art werden seit langer Zeit erfolgreich am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP) in Garching bei München durchgeführt. Insbesondere die Fusionsexperimente vom Typ *Stellarator* sind unbedingt auf die Heizung mit Millimeterwellen (mm-Wellen) angewiesen. Mit den am Garchinger Stellarator W7-AS gewonnenen Erfahrungen wird zur Zeit in Greifswald (Mecklenburg-Vorpommern) das Nachfolge-Experiment Wendelstein 7-X (W7-X) gebaut. Hierfür ist eine mm-Wellen-Heizleistung von 10 Megawatt erforderlich.

Als Quellen für diese hohe Strahlungsleistung werden *Gyrotrons* [Fly-88] eingesetzt. Da die Entwicklung dieser Quellen selber noch ein aktuelles Forschungsgebiet ist, sind dadurch viele technische Randbedingungen gegeben. So kann zum Beispiel im Dauerstrichbetrieb 'nur' bis zu circa einem Megawatt mm-Wellenleistung [Thu-98] erzeugt werden. Außerdem ist der Platzbedarf der Quellen so groß, dass sie nicht direkt beim Torusgefäß stehen können. Es sind also für die geforderte Leistung mehrere Transmissionsleitungen zur Übertragung von Höchstleistungsmillimeterwellen notwendig. Diese müssen möglichst verlustfrei sein, denn jedes Prozent an verlorener Leistung bedeutet, dass irgendwo 10 kWatt Leistung deponiert wird, welche mit zusätzlichem Aufwand abgeführt werden muss.

Bislang werden für diese Übertragung stark überdimensionierte Hohlleiter oder Spiegelleitungen verwendet, wobei bei einem Strahldurchmesser von typisch 10 bis 100 Wellenlängen die Regeln der *gaußschen Optik* benutzt werden müssen. Anstatt wie bislang mehrere separate Leitungen zu bauen, soll bei W7-X erstmals das neue Konzept des *Vielstrahl-Wellenleiters* verwendet werden. Sechs voneinander unabhängige Strahlen aus verschiedenen Quellen werden dabei gemeinsam über ein System von vier überdimensionierten Spiegeln geleitet. Dadurch verringert sich die Zahl der nötigen Spiegel drastisch. Damit verbunden sind viele

Vereinfachungen, wie zum Beispiel ein wesentlich geringerer Aufwand für die Justierung, weniger Platzbedarf und nicht zuletzt deutlich reduzierte Kosten.

Diese Vorteile erkaufte man sich jedoch mit erheblichem zusätzlichem Design-Aufwand. So können die Spiegel, bzw. deren Oberfläche nicht für jeden einzelnen Strahl separat optimiert werden. Bereits bei einer herkömmlichen Übertragungsleitung, wenn also jeder Spiegel nur von einem Strahl verwendet wird, kommt es bei jeder gekrümmten Spiegelfläche zu Modenkonzersion, d. h. zu einer Verformung des Strahles. Die Amplituden- und die Phasenverteilung des einlaufenden und des reflektierten Strahles lassen sich nicht exakt aufeinander abbilden. Beim Vielstrahl-Wellenleiter werden außerdem Bereiche der Oberfläche von zwei oder mehr Strahlen gleichzeitig benutzt, sodass es zu erheblichen Abbildungsfehlern kommen kann. Es handelt sich hierbei um eine Problematik, die in der geometrischen Optik unter *sphärischer Aberration* und *Coma* geführt wird.

Die Auslegung eines Vielstrahl-Wellenleiters für die breitbandige Übertragung hoher Millimeterwellenleistungen ohne Einbußen in der Abbildungsqualität erfordert deshalb eine sehr detaillierte Analyse der Übertragungseigenschaften mit den Regeln der Wellenoptik und eine Optimierung der Spiegelformen und -anordnungen.

Der optimierte Vielstrahl-Wellenleiter könnte neben der Plasmaheizung auch in anderen Bereichen Anwendung finden. Insbesondere lassen sich dadurch Systeme konstruieren, die viele parallele Strahlen abbilden, wie sie z. B. in der Radio-Astronomie oder der Mikrowellen-Diagnostik benötigt werden.

In dieser Arbeit werden zunächst die Grundlagen der gaußschen Optik im Kapitel 2 wiederholt, um dann im Kapitel 3 auf die Gegebenheiten und Parameter eines Vielstrahl-Wellenleiters einzugehen. Hier werden numerische und vor allem analytische Ergebnisse für die Qualität eines Strahles am Ende einer solchen Wellenleitung erarbeitet. Im Kapitel 4 werden Messungen vorgestellt, die an einem Vielstrahl-Wellenleiter im Labormaßstab aufgenommen wurden, um dann im Kapitel 5 die Ergebnisse auf die Gegebenheiten bei W7-X anzuwenden.

2 Grundlagen der Millimeterwellen-Ausbreitung im Freiraum

2.1 Maxwell's Gleichungen

Grundlage einer Arbeit, welche sich mit elektromagnetischen Wellen beschäftigt, bilden die Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\
 \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= \rho \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Für die Behandlung der Ausbreitung im Vakuum vereinfachen sich die Gleichungen erheblich:

- Raumladungsdichte $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = 0$
- Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$
- Magnetische Permeabilität $\mu(\mathbf{x}, t) = \mu_0$
- Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0$

Damit sind die Maxwell-Gleichungen homogen. Das bedeutet, wenn $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ und $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ jeweils Lösungen der Gleichungen für das elektrische Feld \mathbf{E} und das Magnetfeld \mathbf{H} sind, dann ist auch eine beliebige lineare Superposition $(q_1 \cdot \mathbf{E}_1 + q_2 \cdot \mathbf{E}_2, q_1 \cdot \mathbf{H}_1 + q_2 \cdot \mathbf{H}_2)$ mit q_j komplex eine Lösung daraus. Diese Eigenschaft gilt auch für alle weiteren Lösungen der elektromagnetischen Feldgleichungen in dieser Arbeit. Es lohnt insbesondere die Bemerkung, dass die Gleichungen bereits an dieser Stelle, vor der Abspaltung der Zeitabhängigkeit, homogen sind. Das bedeutet, dass auch eine Überlagerung von Wellen mit verschiedenen Frequenzen möglich ist.

Die Felder sind explizit von Ort und Zeit abhängig. Alle Vorgänge, die z. B. eine Übertragungsleitung betreffen, können als quasistationär angesehen werden in Relation zu der schnellen, oszillierenden Zeitabhängigkeit. Diese kann abgespalten werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) \cdot e^{i\omega t} \tag{2}$$

wobei mit \mathbf{F} eines der Felder \mathbf{E} oder \mathbf{H} gemeint ist. Da nur der Realteil von \mathbf{F} eine physikalische Bedeutung hat, kann ebenso gut der dazu konjugiert komplexe Faktor $\exp(-i\omega t)$ verwendet werden. Das hier verwendete Vorzeichen ist lediglich Konvention. Wenn verschiedene Frequenzen übertragen werden, dann werden die Felder mit der entsprechenden Zeitabhängigkeit separat gerechnet. Mit all diesen Vereinfachungen ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E}' &= i\omega\mu_0\mathbf{H}' \\ \operatorname{rot}\mathbf{H}' &= -i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}'\end{aligned}\quad (3)$$

Im Folgenden wird ausschließlich mit den *zeitunabhängigen* Feldern $\mathbf{E}'(\mathbf{x})$ und $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ gerechnet, weshalb der Einfachheit halber der Strich weggelassen wird. Setzt man die Gleichungen ineinander ein, dann ergibt sich mit der Vektoridentität $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$ die *vektorielle Helmholtz-Gleichung*

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0 \quad (4)$$

wobei der Betrag des Wellenvektors $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c}$ vorgegeben ist. Jede der drei Ortskomponenten erfüllt für sich die *skalare Helmholtz-Gleichung*:

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad (5)$$

2.2 Fundamentale Lösung der Wellengleichung

Wegen der Homogenität der zugrundeliegenden Maxwell-Gleichungen muss nicht das gesamte elektromagnetische Problem auf einmal gelöst werden. Es kann vielmehr versucht werden, die Lösung aus einer Reihe von fundamentalen Lösungen zusammenzusetzen. Wir wollen uns also zunächst mit solchen fundamentalen Wellenfeldern beschäftigen.

Im Allgemeinen ist das elektromagnetische Feld an einem gegebenen Querschnitt bekannt. Gesucht wird die sich ausbreitende Welle an einem anderen Querschnitt, oder aber im gesamten Halbraum in Richtung der Wellenausbreitung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird das Koordinatensystem so definiert, dass die Ebene mit bekannter Verteilung zusammenfällt mit der Ebene $z = 0$. Das mathematische Problem ist also die Lösung der Helmholtz-Gleichung (5) mit gegebener Randbedingung.

$$F(x, y, z = 0) = F_0(x, y) \quad (6)$$

Der Betrag des Wellenvektors $k = \omega/c$ ist ein fester Parameter.

2.2.1 Ebene Wellen

2.2.1.1 Skalarer Fall

Eine spezielle Lösung der Helmholtz-Gleichung ist die *ebene Welle*

$$F(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (7)$$

wenn der Betrag des Wellenvektors \mathbf{k} gleich der Größe k ist. Die Amplitude $A_{\mathbf{k}}$ ist beliebig und im Allgemeinen komplex.

Mit der Gleichung soll eine Welle beschrieben werden, welche sich ausbreitet in den Halbraum $z > 0$ hinein. Die z -Komponente des Wellenvektors ist demnach positiv. Es ergibt sich

$$k_z > 0 \wedge |\mathbf{k}| = k \Rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (8)$$

Durch (k_x, k_y) ist somit eine Richtung im Raum bestimmt. Jedes Wertepaar repräsentiert eine ebene Welle. Für $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ wird k_z imaginär, die vormals alternierende e-Funktion klingt exponentiell ab binnen k_z^{-1} und trägt nichts zur Wellenausbreitung bei.

Jede Linearkombination aus diesen ebenen Wellen ist wiederum eine Lösung. Der allgemeinste Fall ist

$$F(\mathbf{x}) = \iint_{k_x, k_y} A(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk_x dk_y \quad (9)$$

Das *Spektrum* $A(k_x, k_y)$ ist für den gesamten Halbraum konstant und durch die Randbedingung eineindeutig bestimmt.

$$F_0(x_0, y_0) = F(x_0, y_0, z_0 = 0) = \iint_{k_x, k_y} A(k_x, k_y) \cdot e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)} dk_x dk_y \quad (10)$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt mit Hilfe einer (inversen) Fouriertransformation, wie z. B. in Gleichung (52). Jedes Wellenfeld ist somit als Spektrum aus ebenen Wellen darstellbar.

2.2.1.2 Vektorfeld

Die ebene Welle (7) löst die skalare Gleichung (5). Betrachtet man die damit verbundene Lösung der Vektorgleichung, so müssen zusätzlich die maxwellschen Beziehungen (1) erfüllt sein. Es ergibt sich, dass \mathbf{k} , \mathbf{E} und \mathbf{H} aufeinander senkrecht stehen müssen.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$$

Zu einem gegebenen Wellenvektor \mathbf{k} existieren so unendlich viele Wellenfelder, bei denen jeweils der E-Feld-Vektor an jeder Stelle in dieselbe Richtung zeigt, und das H-Feld die Vektoren zu einem rechtwinkligen Dreiein ergänzt. Da später wieder mit Linearkombinationen gerechnet wird, ist es sinnvoll, aus diesen Ausrichtungsmöglichkeiten zwei Sonderfälle zu nehmen, aus denen sich alle anderen Fälle kombinieren lassen. Das sind zum Beispiel die Fälle mit verschwindender y-Komponente des elektrischen Feldes, und andererseits die Felder mit $E_x = 0$. Es gibt dann zwei voneinander völlig unabhängige Spektren $A^x(k_x, k_y)$ und $A^y(k_x, k_y)$ [Leh-90].

2.2.2 Gaußsche Strahlen

2.2.2.1 Skalare Lösung

Neben den ebenen Wellen bilden die gaußschen Strahlen ebenfalls ein Fundamentalsystem zur Beschreibung eines Wellenfeldes. Die Basisfunktion der ebenen Welle $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ ist unendlich im (Halb-) Raum ausgebreitet und lässt sich nicht normieren. Erst durch eine geeignete Kombination von Basisfunktionen, bei der unendlich viele Funktionen nötig sind, wird das

Wellenfeld lokalisiert. Die gaußschen Strahlen sind im Gegensatz dazu besser an das physikalische Problem angepasst. Das Wellenpaket ist von vornherein um die z-Achse herum lokalisiert. Das bedeutet gleichzeitig eine Einschränkung der Allgemeinheit. Die Helmholtz-Gleichung wird nur noch in ihrer paraxialen Näherung gelöst. Zur weiteren Vereinfachung spaltet man die wesentliche Abhängigkeit von der z-Koordinate ab:

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) \cdot e^{-ikz} \quad (11)$$

Der übrige Ausdruck $u(\mathbf{x})$ wird weiterhin als Feldstärke bezeichnet, insbesondere als Abgrenzung zur Leistung, welche proportional zu u^2 ist. Die Abhängigkeit in z-Richtung kann über den Bereich einer Wellenlänge vernachlässigt werden. Mit dieser *paraxialen Näherung*

$$|\partial_z u| \ll |iku| \quad (12)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial_x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial_y^2} u + 2(-ikz) \frac{\partial}{\partial_z} u = 0 \quad (13)$$

Die einfachste nichttriviale Lösung dieser Gleichung ist eine *gaußsche Mode* mit Taille in der xy-Ebene [Sie-71]:

$$u_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \cdot e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2R}} \cdot e^{i\Theta} \quad (14)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} w &= w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} \\ R &= R(z) = z \cdot \left(1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right) \\ \Theta &= \Theta(z) = \arctan \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Mit λ ist Wellenlänge gemeint, und die immer wieder auftretende Größe

$$z_{\text{Rayleigh}} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

heißt *Rayleigh-Länge*. Diese ist das typische Längenmaß, auf dem Veränderungen des Strahles in Ausbreitungsrichtung vorkommen. In der transversalen Richtung ist die Funktion offensichtlich nur von x^2+y^2 abhängig, also rotationssymmetrisch um die z-Achse. Der erste Exponentialausdruck drückt die wesentliche Amplitudenabhängigkeit aus. Die Feldstärke ist um die z-Achse herum normalverteilt. Die Breite dieser Verteilung heißt *Strahlradius* w . Dieser Radius nimmt mit wachsendem Abstand von der $z=0$ -Ebene zu, d. h. der Strahl

divergiert. Die schmalste Stelle heißt *Strahltaille*, ebenso wie der Radius an diesem Querschnitt. Diese Größe w_0 ist ein wichtiger Parameter zur Beschreibung der gaußschen Strahlen.

In Gleichung (14) beschreibt der erste Faktor die Abnahme der Amplitude auf der Strahlachse $x = y = 0$ mit wachsendem Abstand von der Taille. Nicht zuletzt muss die Gesamtleistung normiert bleiben, d. h. bei breiter werdender Gaußverteilung muss der Maximalwert abnehmen. Der zweite Exponentialfaktor, mit dem rein imaginären Exponenten, hat den Betrag 1 und ist für die Phase, d. h. die Wellenfront zuständig. Die Punkte mit gleicher Phase liegen auf Kugelflächen mit dem *Krümmungsradius* R . Mit dem Exponenten $(x^2+y^2)/2R$ bzw. mit $x^2/2R$ ist genau genommen eine parabelförmige Wellenfront beschrieben, und nicht eine kreisförmige [Kra-90], aber die Bedingung für die paraxiale Näherung beinhaltet unter anderem $R \gg w$. Oder, anders gesagt, in Bereichen, in welchen das Paraboloid von der Kugel abweicht, ist die Amplitude bereits auf vernachlässigbar kleine Werte abgesunken.

Der hintere Exponentialfaktor spielt für den einfachen, fundamentalen gaußschen Strahl noch keine große Rolle. Die Phasenfront ist gegenüber einer parallel verlaufenden, ebenen Welle $u(x,y,z) \equiv 1$ um einen kleinen Betrag verschoben: Haben die ebene Welle und der gaußsche Strahl im Bereich der Taille dieselbe Phaselage, dann sind sie im Fernfeld, d. h. im Abstand einiger Rayleigh-Längen, um $\pi/2$ phasenverschoben.

Neben diesem fundamentalen gaußschen Strahl gibt es Variationen, welche ebenfalls Lösungen der Helmholtz-Gleichung sind. Zum einen darf die Physik natürlich nicht von der mathematischen Beschreibung abhängen. Das heißt, die Mitte der Strahltaille muss nicht mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen. Von den möglichen Translationen und Rotationen soll aber lediglich eine Verschiebung in z -Richtung um z_0 berücksichtigt werden.

Die obige Funktion läßt sich einfach aufspalten in einen Teil, welcher nicht von der y -Koordinate abhängig ist, und in einen zweiten völlig symmetrischen Teil, welcher nicht von der x -Koordinate abhängig ist. Es zeigt sich, dass die Helmholtz-Gleichung (13) auch erfüllt ist, wenn die Parameter z_0 und w_0 in den beiden senkrechten Richtungen unterschiedlich sind. In einem Längsschnitt ($y = 0$) sieht man dann z. B. eine Taille bei $z = z_{0x}$ mit $w_0 = w_{0x}$, im anderen Schnitt ($x = 0$) ist die schmalste Stelle an der Position z_{0y} mit $w_0 = w_{0y}$.

$$u(x,y,z) = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_x}} \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_y}} \cdot e^{-\frac{x^2}{w_x^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{w_y^2}} \cdot e^{-ik\frac{x^2}{2R_x}} \cdot e^{-ik\frac{y^2}{2R_y}} \cdot e^{i\frac{1}{2}\Theta_x} \cdot e^{i\frac{1}{2}\Theta_y} \quad (16)$$

mit

$$w_x = w_{0x} \sqrt{1 + \hat{z}_x^2}, \quad R_x = \frac{\pi w_{0x}^2}{\lambda} \cdot (\hat{z}_x + \hat{z}_x^{-1})$$

$$\Theta_x = \arctan \hat{z}_x, \quad \hat{z}_x = \frac{z - z_{0x}}{z_{\text{Rayleigh}}} = \frac{\lambda(z - z_{0x})}{\pi w_{0x}^2}$$

und den analogen y -Größen.

Dieser Strahl besitzt einen *Astigmatismus*. Die Punkte gleicher Amplitude an verschiedenen Querschnitten betrachtet bilden nun im Allgemeinen keine Kreise mehr mit Radius w , sondern Ellipsen mit den Halbachsen w_x und w_y . Die Fläche mit Punkten gleicher Phase sind nicht mehr Kugeln, sondern Ellipsoide. Für den Fall $z_{0x} \neq z_{0y}$, im Bereich zwischen den Taillen, läuft der Strahl in der einen Querrichtung zusammen, auf die Taille zu, während in der anderen Richtung die Mode bereits divergiert. Hier sind die Phasenfronten Hyperboloide. Die Phasenverschiebungen der beiden Komponenten gegenüber der ebenen Welle addieren sich.

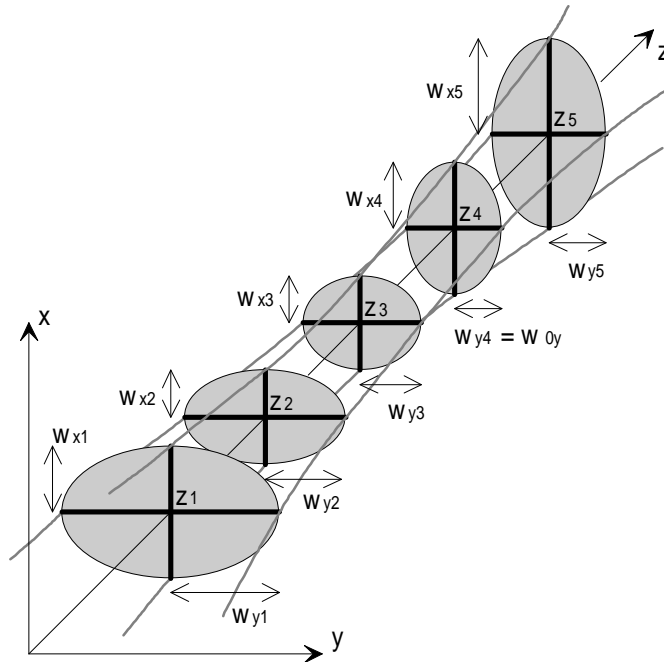


Abb. 1: Querschnitte durch einen astigmatischen gaußschen Strahl. Die Taille in y -Richtung befindet sich bei $z_{0y} = z_4$, in x -Richtung gilt $z_2 < z_{0x} < z_3$

2.2.2.2 Vektorfelder

Wie bei der ebenen Welle wird durch die skalare Lösung (16) auch ein Feld von Vektoren beschrieben, welches an jeder Stelle im Wesentlichen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht. In der Optik ist das üblicherweise die elektrische Feldstärke. Alternativ kann auch das magnetische Feld oder das Vektorpotential verwendet werden. Mit der obigen Einschränkung liegt der Vektor in der xy -Ebene. Alle möglichen Orientierungen lassen sich wiederum zusammensetzen aus den zwei Fällen mit einerseits $E_y(\mathbf{x}) = 0$ und andererseits $E_x(\mathbf{x}) = 0$, den

beiden *Polarisationsrichtungen*. Abgesehen vom Faktor $e^{i\omega t}$, welcher ja bei allen Feldgrößen abgespalten wurde, ist im ersten Fall die x-Komponente des elektrischen Feldes

$$E_x(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \cdot e^{-ik_z z} \quad (17)$$

und im zweiten Fall

$$E_y(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \cdot e^{-ik_z z}. \quad (18)$$

Die dritte Vektorkomponente, das elektrische Feld *in* Ausbreitungsrichtung, lässt sich berechnen aus der Quellenfreiheit im Freiraum unter der Verwendung der paraxialen Näherung (12). Die Ableitung in z-Richtung wird dabei ausschließlich durch den abgespaltenen Faktor $e^{-ik_z z}$ bestimmt, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z(\mathbf{x}) = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \quad (19)$$

Setzt man hier die Formeln für die Felder im fundamentalen gaußschen Strahl (16) ein, so ergibt sich

$$E_z = \left(-\frac{x}{R_x} + i \frac{x}{R_x \hat{z}_x} \right) \cdot E_x. \quad (20)$$

Der erste Ausdruck resultiert aus der gekrümmten Wellenfront und ist in Phase mit dem Feld der Haupt-Polarisationsrichtung E_x . Der zweite Teil ist dazu um $\lambda/4$ phasenverschoben. Er sorgt dafür, dass die Feldlinien geschlossen bleiben, obwohl die Amplitude nach außen hin abnimmt. Feldlinienbilder hierzu finden sich z. B. in [Aro-92].

Das zugehörige Magnetfeld ergibt sich aus dem Induktionsgesetz (1).

$$H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y, \quad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x, \quad H_z = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (21)$$

Alles zusammen betrachtet ergibt, dass ähnlich wie bei der ebenen Welle die Hauptkomponente des magnetischen Feldes und des elektrischen Feldes jeweils senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Der Betrag der Feldkomponenten längs der Strahlachse ist in der Größenordnung um den Faktor w/R kleiner. Diese Wellenform wird deshalb als *transversal elektromagnetische Mode* (kurz: TEM) bezeichnet. Die hier beschriebene einfachste Form trägt in Bezug auf die Moden höherer Ordnung den Index null-null, also TEM_{00} .

2.2.2.3 Gauß-hermitesche Moden

In den letzten Kapiteln wurde die gaußsche Glockenkurve mit einem sphärischen Phasenfaktor als Lösung der Helmholtz-Gleichung diskutiert. Es sei nochmals wiederholt, dass (16) die Darstellung eines einfach astigmatischen gaußschen Strahles niedrigster Ordnung darstellt. Auf den allgemeinen Astigmatismus soll hier nicht eingegangen werden [Arn-69]. Wohl aber müssen die Moden höherer Ordnung eingeführt werden. Da sie bei der Übertragung eines gaußschen Strahles meist unerwünscht sind, werden sie in dieser Arbeit auch als *Falschmoden* bezeichnet.

Die Funktion für die Feldstärke von Strahlen mit einfachem Astigmatismus kann im rechtwinkligen Koordinatensystem separiert werden gemäß

$$u(x, y, z) = u_x(x, z) \cdot u_y(y, z) \quad (22)$$

Es ist ausreichend, nur eine der transversalen Richtungen zu betrachten, also z. B. die x-Richtung. Der Index x wird weggelassen. Die Feldstärkeverteilung in der anderen Querrichtung wird analog beschrieben.

Die gaußschen Moden höherer Ordnung haben wie die Fundamentalmode an jedem Querschnitt eine sphärische Phasenfront, die Amplitude nimmt ebenfalls exponentiell ab, ist aber mit einem einfachen Polynom multipliziert. Für diese Spezialfälle bleibt das Strahlprofil bei der Propagation in z-Richtung bis auf eine Skalierung konstant. Für das gewählte kartesische Koordinatensystem sind dies die *hermiteschen Polynome* $H_n(q)$ mit $q = \sqrt{2} \cdot x/w$ im Argument. Damit ergibt sich die Feldstärkeverteilung [Sie-71] zu

$$u(x, z) = H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{w}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{w^2}} \cdot e^{-ik\frac{x^2}{2R}} \cdot e^{i\frac{1}{2}\Theta_n} \quad (23)$$

mit denselben Abkürzungen für w und R wie in (15). Außerdem ist die Phasenverschiebung bezüglich einer ebenen Welle um den Faktor n größer:

$$\Theta_n = n \cdot \Theta_0 = n \cdot \arctan \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \quad (24)$$

Diese hermiteschen Polynome ergeben sich aus dem Orthogonalisierungsverfahren mit dem für die gaußschen Moden notwendigen Skalarprodukt, was dem Überlappintegral (30) entspricht. Sie lassen sich sowohl direkt als auch rekursiv berechnen [Bro-87]. Die ersten Elemente der Reihe sind

$$H_0(q) = 1, \quad H_1(q) = 2q, \quad H_2(q) = 4q^2 - 2, \quad H_3(q) = 8q^3 - 12q$$

Der Index beschreibt die Ordnung des Polynoms bzw. die Zahl der Nullstellen, d. h. Stellen im gaußschen Strahl mit verschwindender Amplitude und 180° Phasensprung. Neben der Orthogonalität muss auch eine Normierung definiert sein. Diese ergibt sich ganz automatisch aus der Physik, indem man die übertragene Leistung betrachtet. Die komplette (zwei-

dimensionale) Funktion für die Feldstärkeverteilung der *gauß-hermiteschen Mode n-ter Ordnung* ist damit

$$u_n(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n! 2^n w_0} \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{w^2}} \cdot e^{-ik\frac{x^2}{2R}} \cdot e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\Theta_0} \quad (25)$$

Der Radius w_0 bezeichnet wiederum den Wert an der Taille, während der Index an der Phasenverschiebung Θ den Wert der fundamentalen Mode bedeutet. Für verschiedene Werte von n unterscheidet sich der hintere Phasenfaktor in (25). Dies spielt wie beim TEM_{00} eine geringe Rolle bei der Propagation einer einzelnen Mode, wird jedoch wichtig, wenn man eine Linearkombination aus verschiedenen Moden betrachtet. Die Moden verschieben sich relativ zueinander, und durch die Addition der Amplituden im komplexen Raum ergeben sich bei verschiedenen z -Werten völlig unterschiedliche Profile.

Die gesamte 3-dimensionale Funktion für die komplexe Amplitude vereinfacht sich, wenn man den Ausdruck (16) für die fundamentale Mode abspaltet:

$$u_{mn}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} m! n!}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \cdot e^{i(m\Theta_x + n\Theta_y)} \cdot u_{00}(\mathbf{x}) \quad (26)$$

Alle diese Funktionen TEM_{mn} mit w_0 und z fest und verschiedenen Indizes (m, n) bilden *ein System von gaußschen Moden*. Diese haben also ein diskretes Spektrum, im Gegensatz zu den ebenen Wellen, deren Wellenvektor kontinuierliche Einstellmöglichkeiten für die Raumrichtung hat.

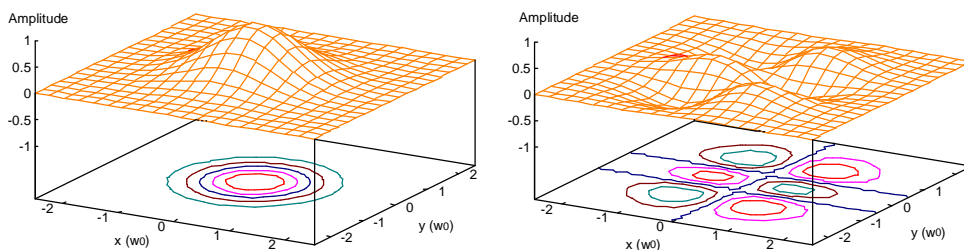


Abb. 2: Feldstärkeamplitude der gauß-hermiteschen Moden TEM_{00} (links) und TEM_{12} (rechts)

2.2.2.4 Gauß-laguerresche Moden

Die gauß-hermiteschen Moden ergeben sich, wenn man das Problem der skalaren Helmholtz-Gleichung mit der paraxialen Näherung vereinfacht und eine Separation vornimmt in die zwei zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Koordinaten. Die Separation des Problems lässt sich auch in die radiale und die azimuthale Koordinate durchführen. Man erhält dann ein anderes System von Moden, welche an dieses Koordinatensystem angepasst sind. Es handelt sich um die gauß-laguerreschen Moden [Kog-66].

$$u_{pm}(r, \phi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0m})(m+p)!}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} r}{w}\right)^m \cdot L_p^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \cdot e^{i(2p+m)\Theta_0} \cdot \cos(m\phi) \cdot u_{00} \quad (27)$$

Die Fundamentalmode u_{00} ist dieselbe wie in den vorangegangenen Kapiteln und nimmt in Zylinderkoordinaten eine einfache Form an:

$$u_{00} = u_{00}(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2}} \cdot e^{-i\frac{kr^2}{2R}} \cdot e^{i\Theta_0} \quad (28)$$

Die Abkürzungen für w , R und Θ sind gleich wie in (15).

Die azimutale Abhängigkeit ist durch den trigonometrischen Faktor $\cos(m\phi)$ oder alternativ $\sin(m\phi)$ festgelegt. Für $m=0$ sind die Moden rotationssymmetrisch, und im Normierungsfaktor ergibt sich $\delta_{0m}=1$, in allen anderen Fällen ist das Kronecker-Symbol gleich null. Der radiale Index p zählt die Nullstellen in radialer Richtung, also Ringe ohne Feldstärke. Sie stammen her von dem *laguerreschen Polynom* L_p^m [Bro-87]. Die ersten Glieder dieser Reihe sind

$$\begin{aligned} L_0^0(q^2) &= 1, & L_1^0(q^2) &= -q^2 + 1, & L_2^0(q^2) &= \frac{1}{2}q^4 - 2q^2 + 1 \\ L_0^1(q^2) &= 1, & L_1^1(q^2) &= -q^2 + 2, & L_2^1(q^2) &= \frac{1}{2}q^4 - 3q^2 + 3 \end{aligned}$$

Sowohl die gauß-hermiteschen als auch die gauß-laguerreschen Moden bilden ein vollständiges System zur Darstellung eines Wellenfeldes, das sich paraxial in z -Richtung ausbreitet. Es lassen sich also alle Strahlen, also auch insbesondere die Moden eines Systems, ausdrücken als eine Linearkombination aus Moden eines anderen Systems.

Offensichtlich sind die laguerreschen Polynome angepasst an Zylinderkoordinaten und an Strahlen mit einer entsprechenden Symmetrie. Bei der Behandlung von Spiegelleitungen (im Gegensatz zu Linsen) erhält man unweigerlich eine Unsymmetrie bei jedem Spiegel. Es gibt jeweils eine Richtung parallel und eine senkrecht zur Einfallsebene. Die hermiteschen Moden sind im Allgemeinen die bessere Wahl für diese Probleme.

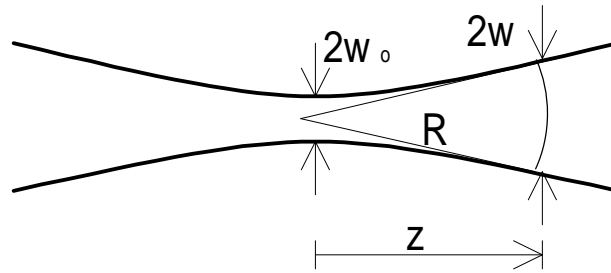
2.3 Gaußsche Optik

Bevor über reale Spiegelleitungen mit Effekten wie Modenkonversion gesprochen werden kann, muss die idealisierte Übertragung eines einzelnen gaußschen Strahles diskutiert werden. Es handle sich um einen rotationssymmetrischen Strahl, der paraxial entlang der z -Achse läuft und über ideale Linsen fokussiert wird.

2.3.1 Propagation von gaußschen Wellen

Im Kapitel über die Lösungen der Helmholtz-Gleichung wird die allgemeine Form eines gaußschen Strahles beschrieben. Sind am Querschnitt $z=0$ alle Punkte in derselben Phasenlage, das bedeutet also eine ebene Phasenfront, und ist der Strahlradius an dieser

Stelle w_0 gegeben, dann lässt sich mit den Formeln (15) an jedem anderen Querschnitt z der Strahlradius w und der Krümmungsradius R der Phasenfront berechnen.



Mit den zwei Größen Position und Strahlradius an der Taille ist also die Mode komplett bestimmt. Die Abbildung ist eineindeutig, d. h. es kann von jeder axialen Position bei bekannter Krümmung der Phasenfront und bekanntem Strahlradius auf die Taille zurückgerechnet werden, und dann wieder zu jedem beliebigen Querschnitt. Im Kapitel 2.3.5 'ABCD-Formalismus' wird eine elegante aber weniger übersichtliche Methode vorgestellt, um zwischen den Strahlquerschnitten hin- und herzurechnen.

2.3.2 Modenkopplung

Die gaußschen Moden sind ein vollständiges System zur Beschreibung von paraxialen Strahlen. Das bedeutet, man kann jedes (paraxiale) Wellenfeld als eine Linearkombination aus den Moden eines Systems darstellen. Zunächst einmal teilt man das zu untersuchende Vektorfeld in die zwei Polarisationsrichtungen auf. Die beiden Fälle werden getrennt voneinander behandelt, und für die Analyse reicht es aus, lediglich mit skalaren Feldern zu rechnen.

Für die Wahl des Modensystems hat man noch einige freie Parameter, als da sind die Taille des fundamentalen Strahles mitsamt ihrer Position in drei Ortskoordinaten. Die Wahl geeigneter Größen ist sehr wichtig, damit mit möglichst wenigen Moden die Beschreibung der Welle ausreichend gut ist.

Nicht nur aus Gründen der Rechnerkapazität sind allzu große Indizes, also allzu hohe Ordnungen der Moden ungeeignet. Um die paraxiale Näherung nicht zu verletzen, darf die Ordnung der Mode nicht größer als $2(w_0/\lambda)^2$ sein [Mar-93].

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legt man das Koordinatensystem in die Taille der gaußschen Strahlen. Die Basisvektoren nehmen dann die Form (26) an. Bei der Analyse einer gegebenen Feldverteilung $u(\mathbf{x})$ ist die Darstellung in folgender Form gesucht:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} c_{mn} \cdot u_{mn}(\mathbf{x}) \quad (29)$$

Bei der Definition der gaußschen Moden wurden die Vorfaktoren so gewählt, dass jede Mode gerade die Leistung 1 überträgt, was über den Poynting-Vektor definiert ist. Unter Verwendung des geeigneten Skalarproduktes

$$\langle u^* u_{kl} \rangle \equiv \frac{\int u^*(\mathbf{x}) \cdot u_{kl}(\mathbf{x}) \cdot dx dy}{\sqrt{\int |u(\mathbf{x})|^2 dx dy} \sqrt{\int |u_{kl}(\mathbf{x})|^2 dx dy}} \quad (30)$$

ergibt sich wegen der Orthonormalität der hermiteschen Polynome

$$\langle \text{TEM}_{mn}^* \text{TEM}_{kl} \rangle = \delta_{mk} \cdot \delta_{nl} \quad (31)$$

der Anteil c_{mn} der verschiedenen Moden relativ einfach:

$$c_{mn} = \langle u^* \text{TEM}_{mn} \rangle \quad (75)$$

Der Linearkoeffizient c_{00} oder auch das Betragsquadrat $|c_{00}|^2$ wird als *gaußscher Anteil* bezeichnet. Dieser Modenanteil c_{mn} kann auch interpretiert werden als *Koppelkonstante*. Kommt z. B. das zu analysierende Feld aus einem Hohlleiter und die anschließende Leitung kann nur die Mode TEM_{mn} transportieren, dann ist $|c_{mn}|^2$ die übertragene Leistung.

Die Zerlegung eines Strahles in seine Modenanteile dient auch zur Beurteilung der Qualität von optischen Komponenten. Zum einen, darauf soll hier nicht weiters eingegangen werden, kommt es zu dissipativen Verlusten, weil z. B. eine Spiegeloberfläche nicht ideal leitet, oder eine Linse einen Teil der Leistung absorbiert. Andererseits kann es aber auch zu Verzerrungen der Amplituden- oder Phasenverteilung kommen. Oft ist eine fundamentale gaußsche Mode die optimale Übertragungsart für elektromagnetische Strahlung. Bei optischen Elementen, welche im Allgemeinen nicht ideal sind, wird die fundamentale Mode etwas verformt. In der geometrischen Optik wird dies mit *Abbildungsfehlern* beschrieben. In der gaußschen Optik führt man zur Quantifizierung dieser Verzerrungen eine Modenanalyse des Strahles durch. Es ergibt sich dann neben dem nicht mehr 100-prozentigen TEM_{00} -Beitrag ein mehr oder weniger großer Anteil an Falschmoden. Es hat also eine *Modenkonzersion* stattgefunden.

2.3.3 Überlapp-Integrale

Häufig wird nicht ein beliebiges Wellenfeld in Moden zerlegt, sondern ein Strahl, der einen großen fundamentalen Anteil (eindimensional: TEM_0) beinhaltet. Dies kann z. B. durch leichte Modenkonzersion einer ursprünglich reinen TEM_0 entstanden sein, oder aber es handelt sich bei dem zu analysierenden Wellenfeld um eine reine Fundamentalmode aus einem anderen, versetzten Koordinatensystem. Für diesen zweiten Fall kann man die Verluste in der Fundamentalmode [Joy-84] und auch die Falschmodenanteile geschlossen hinschreiben und teilweise das auftretende Integral explizit lösen. Die ausführlichen Formeln stehen u. a. im Anhang.

Anschaulich ist, dass eine fundamentale Mode aus einem um den Betrag d transversal versetzten System neben dem Überlapp mit TEM_0 im Wesentlichen an die Mode TEM_1 ankoppelt (Abb. 3/links). Kommt die zu analysierende Fundamentalmode zentral, aber mit leicht abweichendem Strahlradius $w \neq w_0$, dann wird vor allem die niedrigste symmetrische

Falschmode TEM_2 erzeugt (Abb. 3/rechts). Ein leicht um den Winkel β verkippter Strahl erzeugt unsymmetrische Falschmoden, also v. a. TEM_1 (Abb. 4/links) während ein Strahl mit gekrümmter Phasenfront ($R \neq \infty$) an die Mode TEM_2 koppelt (Abb. 4/rechts).

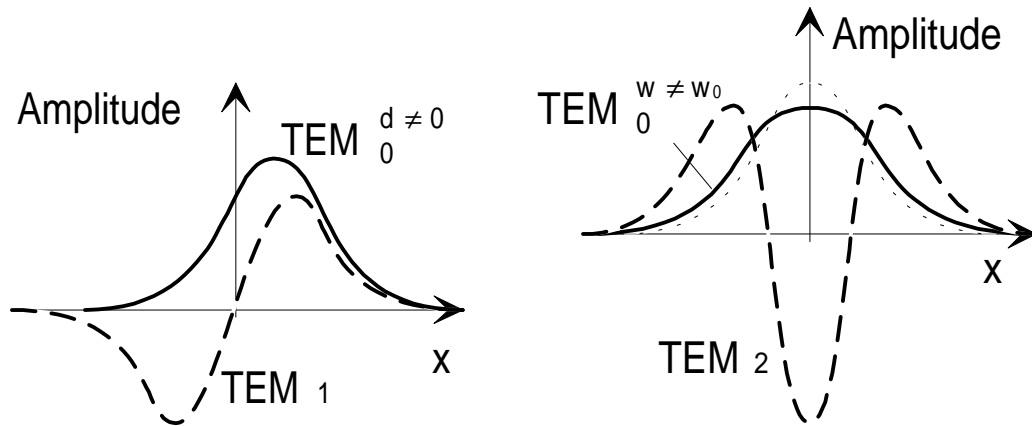


Abb. 3: Links: Überlapp einer leicht seitlich versetzten fundamentalen gaußschen Mode mit der Falschmode TEM_1 . Rechts: Überlapp zweier gaußscher Moden TEM_0 und TEM_2 mit leicht unterschiedlicher Taille

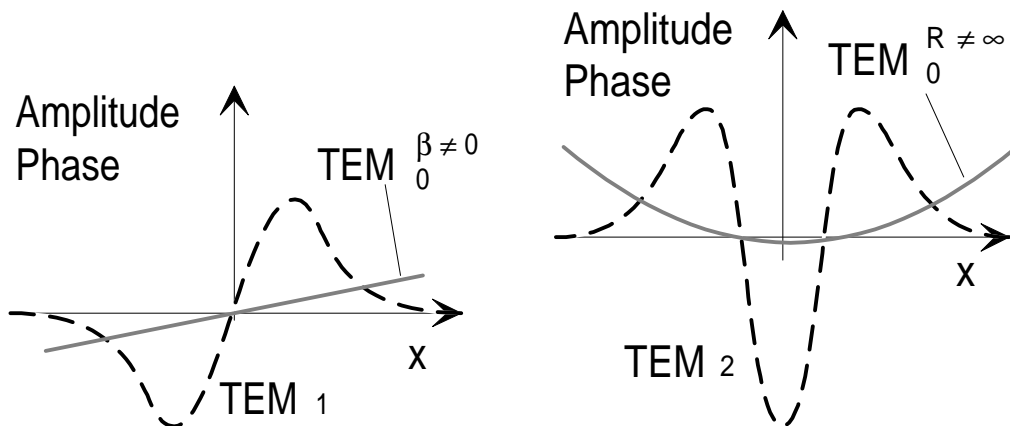


Abb. 4: Links: Überlapp einer fundamentalen gaußschen Mode TEM_0 mit einer Mode TEM_1 , die leicht gegeneinander verkippt sind. Rechts: Überlapp einer gaußschen Mode mit endlichem Krümmungsradius mit der niedrigsten symmetrischen Falschmode TEM_2 . In diesen Bildern wird die Phasefront der einen mit der Amplitudenverteilung der anderen Wellen miteinander verglichen. Obwohl dies nicht ganz korrekt ist, dient es der Anschauung

Zur quantitativen Behandlung muss das Überlapp-Integral berechnet werden:

$$\left\langle TEM_0^{\beta \neq 0, R \neq \infty, w \neq w_0, d \neq 0} * TEM_n \right\rangle = \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} e^{-\frac{(x-d)^2}{w^2}} e^{-ik\frac{x^2}{2R}} e^{-ik\beta x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n! 2^n w_0} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2}{w_0^2}} dx \quad (33)$$

Dieses Integral ist nicht geschlossen lösbar. Wenn sich allerdings nicht gleich alle vier Parameter des zu analysierenden Strahles unterscheiden von denen des Sollstrahles, dann ist die explizite Lösung teilweise möglich [Kog-64].

In vielen Fällen und insbesondere für diese Arbeit darf davon ausgegangen werden, dass die Abweichungen der Parameter des gaußschen Strahles von den Soll-Parametern relativ klein sind:

$$\begin{aligned} |w - w_0| &\ll w_0 \\ |d| &\ll w_0 \\ |\mathbf{R}^{-1}| &\ll \frac{\lambda}{w_0^2} \\ |\beta| &\ll \frac{\lambda}{w_0} \end{aligned}$$

Man kann daher zur Lösung des Integrals (33) eine Taylor-Entwicklung mit diesen ‘kleinen Größen’ als Entwicklungs-Parameter durchführen.

Es hat sich als Überlapp mit der fundamentalen Mode TEM_0 ergeben:

$$\begin{aligned} \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0, \mathbf{R} \neq \infty, w \neq w_0, d \neq 0} * \text{TEM}_0 \rangle &\approx \\ 1 - i \frac{1}{8} k w_0^2 \mathbf{R}^{-1} - \frac{3}{128} k^2 w_0^4 \mathbf{R}^{-2} - i \frac{1}{8} k w_0 \mathbf{R}^{-1} (w - w_0) + i \frac{1}{2} k d \beta & \quad (34) \\ - \frac{1}{2 w_0^2} d^2 - \frac{1}{4 w_0^2} (w - w_0)^2 - \frac{1}{8} k^2 w_0^2 \beta^2 + \text{Terme höherer Ordnung} & \end{aligned}$$

Überlapp mit der niedrigsten unsymmetrischen Mode TEM_1 :

$$\begin{aligned} \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0, \mathbf{R} \neq \infty, w \neq w_0, d \neq 0} * \text{TEM}_1 \rangle &\approx \\ \frac{d}{w_0} - i \frac{1}{2} k w_0 \beta + i \frac{1}{8} k w_0 d \mathbf{R}^{-1} - \frac{3}{16} k^2 w_0^3 \beta \mathbf{R}^{-1} - \frac{1}{w_0^2} d^2 - \frac{d(w - w_0)}{w_0^2} & \quad (35) \\ + \text{Terme höherer Ordnung} & \end{aligned}$$

Überlapp mit der symmetrischen Mode TEM_2 :

$$\begin{aligned} \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0, \mathbf{R} \neq \infty, w \neq w_0, d \neq 0} * \text{TEM}_2 \rangle &\approx \\ -i \frac{1}{4\sqrt{2}} k w_0^2 \mathbf{R}^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{w - w_0}{w_0} + \text{Terme höherer Ordnung} & \quad (36) \end{aligned}$$

Sind alle oben eingeführten Abweichungen gleich null, dann sind die Überlapp-Integrale erwartungsgemäß exakt eins (für die fundamentale Mode) bzw. null.

2.3.4 Phasenplatte

Für die gaußsche Optik sind neben den Moden TEM_{xy} auch Elemente zur Fokussierung der naturgemäß divergierenden Strahlen nötig. Im Gegensatz zum idealen gaußschen Strahl

existiert der ideale Spiegel bzw. die ideale Linse nicht. Zur idealisierten Beschreibung dient die sogenannte *Phasenplatte*. Sie ist infinitesimal dünn, steht senkrecht im Strahlengang und verschiebt die Phasenfront der ankommenden Welle beim Durchgang um einen nur vom Ort, nicht aber von der Amplitude abhängigen Wert. Bei einer realen Linse geschieht dies durch eine (üblicherweise) kürzere Wellenlänge innerhalb des Linsenmaterials. Beim Spiegel —zum Beispiel ein konvexer Reflektor unter senkrechtem Einfall— hat die Randzone einen kürzeren Weg zurückzulegen als die Phasenfront auf der Strahlachse. Die nötige Phasenverschiebung $\Delta\varphi$, um eine divergierende sphärische Front mit Radius R_{in} überzuführen in einen konvergierenden Strahl mit Radius R_{out} , ist

$$\Delta\varphi(x, y) = k \frac{x^2 + y^2}{2f} \quad (37)$$

mit der sogenannten *Brennweite*

$$f = \left(\frac{1}{R_{\text{in}}} + \frac{1}{R_{\text{out}}} \right)^{-1} \quad (38)$$

Die Amplitude bleibt bei der Reflexion gleich, also auch der Strahlradius $w_{\text{in}} = w_{\text{out}}$. Diese geometrischen Verhältnisse sind in Abb. 5 skizziert.

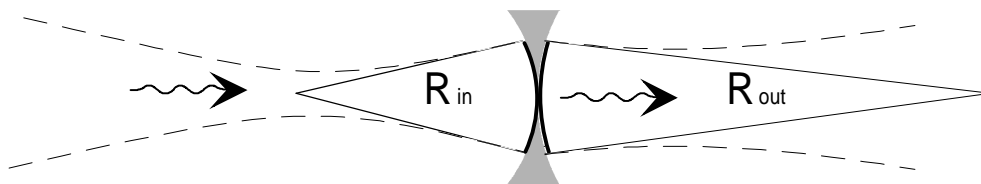


Abb. 5: *Gaußscher Strahl beim Durchgang durch eine fokussierende Phasenplatte. Bei gleichbleibender Amplitudenverteilung bekommen die äußeren Bereiche einen 'Vorsprung' gegenüber dem Bereich nahe der Strahlachse*

2.3.5 ABCD-Formalismus

Im Kapitel über gaußsche Optik wird die Propagation eines gaußschen Strahles im Freiraum beschrieben. Kennt man die Strahlparameter (w_1, R_1, Θ_1) an einem ersten Querschnitt z_1 , dann lassen sich Position und Größe der Taille errechnen und daraus die Parameter (w_2, R_2, Θ_2) an jeder beliebigen anderen Position z_2 . Die Formeln gelten für die fundamentale Mode ebenso wie für Moden höherer Ordnung.

Im vorangegangenen Kapitel wird andererseits die Transformation $(w_1, R_1) \rightarrow (w_2, R_2)$ dieser Parameter beim Durchgang durch eine Phasenplatte beschrieben, deren Phasenverschiebung quadratisch mit dem Abstand zum Spiegelzentrum zunimmt. Beide Operationen lassen sich mit einem einfachen Formalismus zusammenfassen [Kog-65]. Dazu führt man zwei neue Variablen u und v ein.

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot e^{-i\Theta}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot e^{-i\Theta} \cdot \frac{1}{R} \left(1 - i \frac{R\lambda}{\pi w^2} \right) \quad (39)$$

Die Umkehrtransformation ist eindeutig. Indem man nicht den Krümmungsradius R betrachtet, sondern dessen Kehrwert, vermeidet man Singularitäten bei einer ebenen Phasenfront.

$$w = |\mathbf{u}|, \quad R^{-1} = \operatorname{Re} \left(\frac{v}{u} \right) \quad (40)$$

Die Strahlen können achsensymmetrisch sein, oder die Strahlparameter können auch getrennt betrachtet werden für die beiden Querrichtungen. Bei der Propagation um die Strecke d transformieren sich die beiden neu definierten Größen wie folgt:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + d \cdot v_1 \\ v_2 &= v_1 \end{aligned} \quad (41)$$

Die Phasenverschiebung durch eine Phasenplatte der Brennweite f bedeutet

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \\ v_2 &= -\frac{1}{f} u_1 + v_1 \end{aligned} \quad (42)$$

Die beiden Transformationen sind linear und lassen sich in Matrix-Schreibweise formulieren.

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Eine Aneinanderreihung von optischen Elementen, d. h. von Phasenplatten und Propagationstrecken, wird in dieser Beschreibung zur Matrix-Multiplikation, beispielsweise eine einfache Linse. Zunächst propagiert die Mode von der Startebene um eine Strecke d_1 , dann durchläuft sie die Phasenplatte der Brennweite f , und von dort um die Strecke d_2 bis zur Zielebene. Die gesamte Abbildungsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - d_2/f & f - f \left(1 - d_1/f \right) \left(1 - d_2/f \right) \\ -1/f & 1 - d_1/f \end{pmatrix} \quad (44)$$

2.3.6 Konfokale Anordnung

Ein Sonderfall bei den gaußschen Abbildungen ist die *konfokale Anordnung*. Sie entspricht der *teleskopischen Anordnung* aus der geometrischen Optik. Hierbei ist der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Phasenplatten gleich der Summe der Brennweiten. Die Startebene (analog: Gegenstandsebene) hat den Abstand zum ersten fokussierenden Element entsprechend dessen Brennweite, ebenso die Zielebene (Bildebene) hinter der letzten Phasenplatte.

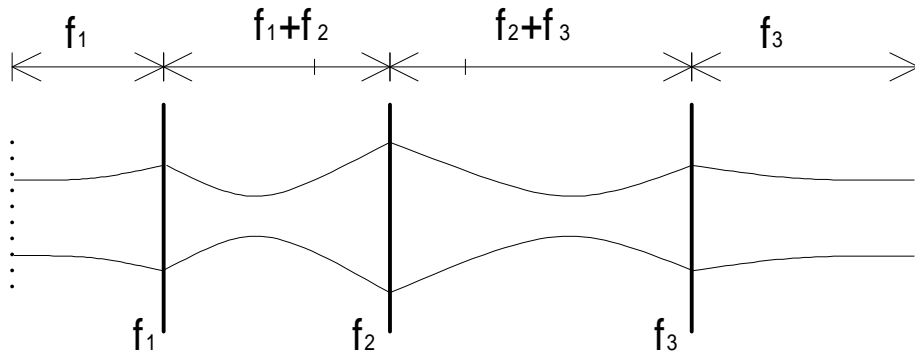


Abb. 6: Konfokale Anordnung von Phasenplatten

Die vereinfachten Verhältnisse spiegeln sich z. B. in den Formeln des ABCD-Formalismus wieder. Zunächst wird nur eine Phasenplatte betrachtet. Sie habe die Brennweite f . Die Abstände sind dann ebenfalls f . Ein gaußscher Strahl habe seine Taille w_0 in der Startebene, der Krümmungsradius ist wegen der ebenen Phase singulär. Dadurch wird die Größe v rein imaginär. Die Transformationen (39) und (44) vereinfachen sich zu

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ -i \frac{\lambda}{\pi w_0} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Die Rücktransformation von u_2 und v_2 zu den physikalischen Größen R und w ergibt wie am Start eine ebene Phasenfront, unabhängig von der Brennweite. Die Taille ist

$$w_{01} = \frac{\lambda f}{\pi w_0} \quad (46)$$

Schließen sich hier konfokal weitere Phasenplatten an mit derselben Brennweite, dann ergibt sich jeweils immer wieder eine ebene Phase. Nach zwei Platten, sowie nach beliebig geradzahlig vielen, ist die Taille gleich dem Anfangswert $w_{02} = w_0$. Dieses Ergebnis ist *unabhängig von der Wellenlänge*, wodurch eine breitbandige Übertragung möglich ist. Außerdem gilt dies nicht nur für die gaußsche Mode der niedrigsten Ordnung. Auch alle höheren Moden werden phasenrichtig abgebildet. Da sich jeder beliebige paraxiale Strahl durch gaußsche Moden darstellen läßt, wird damit auch jedes beliebige paraxiale Wellenfeld eins zu eins abgebildet! Für sehr kleine Wellenlängen, d. h. in der geometrischen Optik ist diese günstige Eigenschaft als teleskopische Abbildung bekannt:

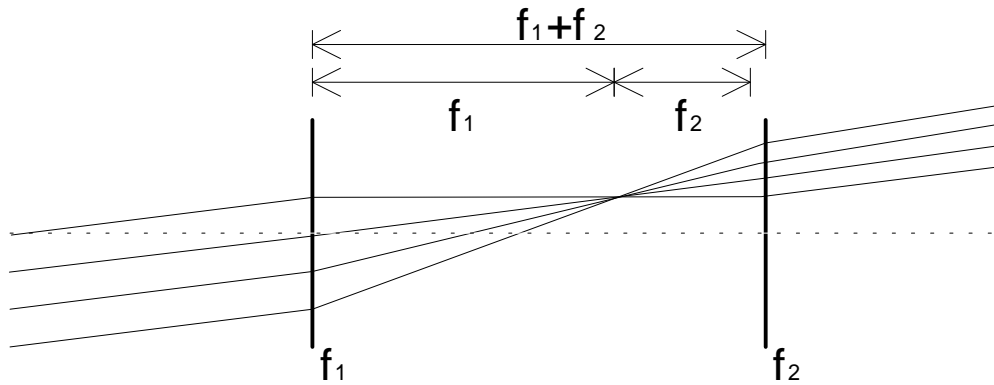


Abb. 7: Konfokale Anordnung von Phasenplatten

Die Einschränkung bei größeren Wellenlängen ergibt sich durch die Paraxialität. Bei der Zerlegung eines komplizierten Wellenfeldes ergeben sich sehr schnell gaußsche Moden von solch hoher Ordnung, dass die paraxiale Beschreibung nicht mehr erlaubt ist.

2.4 Rechenverfahren für die Freiraumpropagation

Bislang wurde von elektromagnetischen Wellen nur in Form von gaußschen Strahlen gesprochen. Diese sind für eine Übertragungsleitung sehr geeignet. Als fokussierende Elemente dienen Phasenplatten, deren Phasenverschiebung quadratisch mit dem Abstand vom Zentrum zunimmt. Im Allgemeinen hat man aber kompliziertere Wellenfelder, und die Reflexionsspiegel haben ebenfalls nicht die Eigenschaft der idealen Phasenplatte. Es sind daher zusätzlich zum ABCD-Formalismus Verfahren nötig, um die Propagation eines allgemeinen Wellenfeldes zu berechnen. Typischerweise ist das Feld an einem Querschnitt des Strahles gegeben, und gesucht ist das Feld an einem anderen Querschnitt. Im Folgenden sind einige Verfahren mit ihren Vor- und Nachteilen aufgeführt.

2.4.1 Finite-Differenzen-Verfahren

Das Finite-Differenzen-Verfahren ist eine sehr direkte Lösung der maxwellschen Gleichungen (1). Es werden lediglich Raum und Zeit diskretisiert ($\rightarrow \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$), wodurch die Differentialoperatoren zu Differenzenquotienten werden [Ito-89]. Die Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt darin, dass die Ortsauflösung dabei deutlich kleiner sein muss als die Wellenlänge. Da das elektrische wie auch das magnetische Feld an jedem Ort gespeichert werden muss, die Wellenlänge aber deutlich kleiner ist als die geometrische Ausdehnung des Feldes, ergibt sich eine sehr große Datenmenge. Um diese numerisch zu verarbeiten, sollte man prüfen, ob sich das Problem nicht um eine der transversalen Richtungen reduzieren lässt. Nimmt man also translatorische Symmetrie z. B. in y -Richtung an, und beschränkt sich auf Felder mit wenig gekrümmter Phasenfront, dann reduzieren sich die maxwellschen Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} B_y &= \frac{\partial}{\partial x} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_x \\
\frac{\partial}{\partial t} E_x &= -c^2 \frac{\partial}{\partial z} B_y \\
\frac{\partial}{\partial t} E_z &= c^2 \frac{\partial}{\partial x} B_y
\end{aligned} \tag{47}$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{48}$$

Bei der Diskretisierung wird aus der Ortsableitung von E_x und E_z ein Differenzenquotient,

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x(t, n_x, n_z) = \frac{E_x(t, n_x, n_z + 1) - E_x(t, n_x, n_z - 1)}{2\Delta z} \tag{49}$$

und die Integration über die Zeit wird zur Summe.

$$B_y\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, n_x, n_z\right) = B_y\left(t - \frac{1}{2}\Delta t, n_x, n_z\right) + \Delta t \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} E_z(t, n_x, n_z) - \frac{\partial}{\partial z} E_x(t, n_x, n_z) \right] \tag{50}$$

$$E_x\left(t + \Delta t, n_x, n_z\right) = E_x\left(t, n_x, n_z\right) - \Delta t \cdot c^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} B_y\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, n_x, n_z\right)$$

Bei den hier gezeigten Formeln wird der Rechenaufwand bei gleichbleibender Genauigkeit dadurch verringert, indem die Zeitintervalle bei B und E zwar gleich groß, aber um $\Delta t/2$ versetzt sind.

Man könnte vermuten, dass die enorme Datenmenge viel redundante Information beinhaltet. Dies ist aber nur teilweise der Fall, da keine Aussage über die Frequenz gemacht worden ist (außer $\Delta x \ll \lambda$). Die Gleichungen sind direkt für die Lösung von (1), also vor der Abspaltung einer konstanten Zeitabhängigkeit geeignet. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass in (48) die lokale, ortsabhängige Lichtgeschwindigkeit eingesetzt wird. Man kann also auch einen Strahl beim Durchgang durch ein inhomogenes Medium mit $\epsilon = \epsilon(x, y)$ berechnen. Dies macht u. a. die Beschreibung von Linsen möglich, während reflektierende Flächen durch Definition geeigneter Randbedingungen in das Problem eingefügt werden.

Alle weiteren hier aufgeführten Verfahren sind numerisch weniger aufwendig, lösen aber lediglich die paraxiale Helmholtz-Gleichung (13), d. h. sie beschränken sich auf Strahlen mit fester Frequenz in einem Medium mit konstantem Brechungsindex.

2.4.2 Zerlegung in ebene Wellen

Im Kapitel über ebene Wellen wurde bereits erwähnt, dass sich jedes elektromagnetische Feld $F(x, y)$ zerlegen lässt in ein Spektrum $A(k_x, k_y)$ aus ebenen Wellen:

$$F(\mathbf{x}) = \iint_{k_x, k_y} A(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_x dk_y \quad (51)$$

Dies kann man sich für die Berechnung der Propagation zunutze machen, da die Entwicklung dieser fundamentalen Wellen im Raum sehr einfach zu beschreiben ist. Man muss dafür zunächst das Spektrum explizit berechnen, was mit Hilfe einer inversen Fouriertransformation geschehen kann:

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{x_0, y_0} F(x_0, y_0) \cdot e^{+i(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0 = A(k_x, k_y) \quad (52)$$

Diese Zerlegung eines Wellenfeldes ist also in jedem Fall möglich. Das Spektrum ist für den gesamten Raum, also für jede z -Koordinate gleich. Man kann aber, um das Fast Fourier Verfahren (FFT) anwenden zu können, die einzelnen Komponenten des Spektrums mit einem k -abhängigen Phasenfaktor multiplizieren. Dies entspricht dann der Propagation der ebenen Wellen auf der Strecke von $z = z_1$ nach $z = z_2$, die dabei lediglich eine gegenseitige Phasenverschiebung erfahren.

$$A^{z=z_2}(k_x, k_y) = A^{z=z_1}(k_x, k_y) \cdot \exp\left(-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cdot (z_2 - z_1)\right) \quad (53)$$

Dieses Verfahren zur Berechnung der Wellenpropagation kann auch für kurze Abstände $|z_2 - z_1|$ der Querschnittflächen verwendet werden. Es geht zunächst von linear polarisierten Wellen aus, wobei es für andere Polarisierungen leicht auf zwei verschiedene Spektren A_x und A_y erweitert werden kann. Der große Vorteil liegt in der enormen Schnelligkeit durch Verwendung des FFT-Algorithmus [Coo-65].

Reflektierende Flächen werden bei diesem Formalismus separat behandelt. Aus den maxwellschen Gleichungen lassen sich Randbedingungen herleiten, wie sich ein elektromagnetisches Feld an einer ideal leitenden Oberfläche verhält: Längs der Oberfläche darf es kein resultierendes elektrisches Feld geben, während hingegen die Komponente des Magnetfeldes senkrecht zur Oberfläche verschwinden muss. Diese Randbedingung lässt sich erfüllen, wenn zum Feldstärkevektor \mathbf{E}_i des einfallenden elektromagnetischen Feldes ein zweites elektrisches Feld

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_i + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i)\mathbf{n} \quad (54)$$

existiert, wobei \mathbf{n} der normierte Normalenvektor der leitenden Oberfläche ist. Das magnetische Feld \mathbf{H}_i erzeugt eine reflektierte Welle mit

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_i - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_i)\mathbf{n} \quad (55)$$

Zumindest lokal kann aus den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{H} sowohl des einfallenden Wellenfeldes, wie auch der reflektierten Felder ein Wellenvektor \mathbf{k} definiert werden. Dieser k -Vektor behält bei der Reflexion seinen Betrag bei und wird lediglich reflektiert gemäß

$$\mathbf{k}_r = \mathbf{k}_i - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i)\mathbf{n} \quad (56)$$

Diese Richtungsänderung entspricht genau dem, was man von der geometrischen (Strahlen-) Optik her gewöhnt ist.

2.4.3 Zerlegung in gaußsche Moden

Ganz analog wie die Zerlegung in ebene Wellen kann auch die Analyse nach gaußschen Moden zur Berechnung der Strahlpropagation verwendet werden. Man kennt die Gesetze jeder einzelnen Mode und synthetisiert dann an einer beliebigen anderen Stelle die propagierten Wellenfelder zum Gesamtstrahl. Man muss dafür ein im Prinzip beliebiges Fundamentalsystem von Moden definieren, wählt es aber derart, dass möglichst wenige Moden zur Darstellung des Wellenfeldes ausreichend sind. Bei einer ungeeigneten Wahl sind dafür sehr viele Moden notwendig, mit hohen Indizes. Diese bedeuten einerseits einen höheren Rechenaufwand, da zur Analyse jeweils eine Integration durchgeführt werden muss, andererseits verletzen allzu hohe Moden die Paraxialität.

In der Praxis gibt es keine Vorteile gegenüber dem zuletzt beschriebenen Verfahren, bei welchem das Feld in ebene Wellen zerlegt wird.

2.4.4 Fresnel-kirchhoffsches Integral

Für diese Arbeit wurde ein Verfahren zur Berechnung der Wellenpropagation verwendet, das auf dem Huygensschen Prinzip [Kon-86] beruht. Es verbindet ganz zwanglos die Reflexion an Spiegeln mit der Propagation im Freiraum.

Das anfängliche Wellenfeld \mathbf{H} ist numerisch bekannt oder analytisch berechenbar auf einer Fläche, die quer zur Ausbreitungsrichtung der Welle liegt und die den gesamten Strahl umfaßt. Diese Fläche (Normalenvektor \mathbf{n}_s) denkt man sich ideal leitend, und das Wellenfeld induziert dort einen Oberflächenstrom \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_s) = 2 \mathbf{n}_s \times \mathbf{H}(\mathbf{x}_s) \quad (57)$$

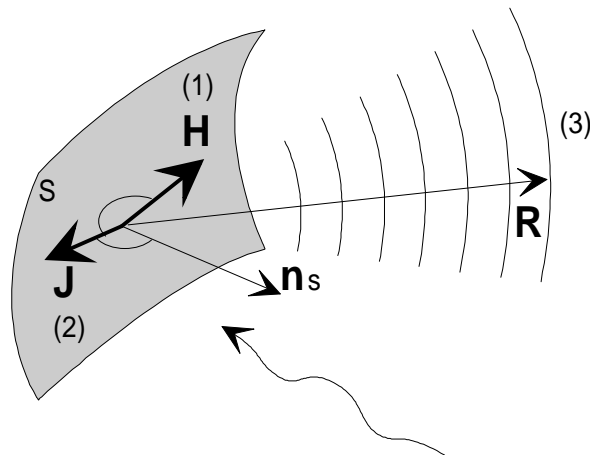


Abb. 8: Ein elektromagnetisches Wechselfeld (1) induziert auf einer leitenden Fläche Oberflächenströme (2), welche wiederum Kugelwellen (3) abstrahlen

Diese Oberflächenströme strahlen wiederum eine elektromagnetische Welle ab. Das gesamte Wellenfeld lässt sich an jeder beliebigen Stelle \mathbf{x} als Summe über viele Kugelwellen berechnen, welche als Zentrum die Punkte \mathbf{x}_s der Spiegeloberfläche haben:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \iint_{\text{Spiegel}} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{R} \cdot \frac{e^{ikR}}{4\pi R} dx_s dy_s \quad (58)$$

mit $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$, $R = |\mathbf{R}|$

Der oszillierende Strom induziert sozusagen ein magnetisches Wechselfeld, das jeweils auf der folgenden Spiegeloberfläche berechnet wird. Für die numerische Berechnung müssen die Oberflächen diskretisiert werden. Hierbei muss ein sinnvoller Punktabstand des Rechenetzes gefunden werden. Ist der Abstand der Punkte kleiner als eine halbe Wellenlänge, dann erhält man mit Sicherheit keine numerischen Probleme, rechnet aber eventuell genauer als nötig. Wenn die folgende Fläche hinreichend weit entfernt ist, dann wird auch mit einer wesentlich größeren Einteilung das richtige Ergebnis erzielt. Es müssen beim abgestrahlten Feld lediglich Nebenmaxima vermieden werden, wie man sie z. B. von Gitterstrukturen her kennt.

Ein großer Vorteil dieser Rechenmethode ist die vektorielle Behandlung der Felder. Bei keinem anderen Verfahren kann derart leicht eine gekrümmte, reflektierende Fläche implementiert werden, wobei auch die Berechnung von Veränderungen der Polarisierung möglich ist.

Wegen der einfachen Anpassung an das gestellte Problem wurden die numerischen Rechnungen aus Kapitel 3.3 der vorliegenden Arbeit mit diesem Verfahren durchgeführt.

3 Vielstrahl-Wellenleiter

Für einen Vielstrahl-Wellenleiter sind viele Anwendungen denkbar. Neben der Elektron-Zyklotron-Resonanz-Heizung (ECRH) von Fusionsplasmen [Erc-94], welche u. a. im Kapitel über das Experiment ‘Wendelstein 7-X’ beschrieben wird, ist er für jeden Einsatz geeignet, bei dem mehrere gaußsche Strahlen übertragen werden müssen, ohne dass sich deren jeweilige Form wesentlich ändern darf.

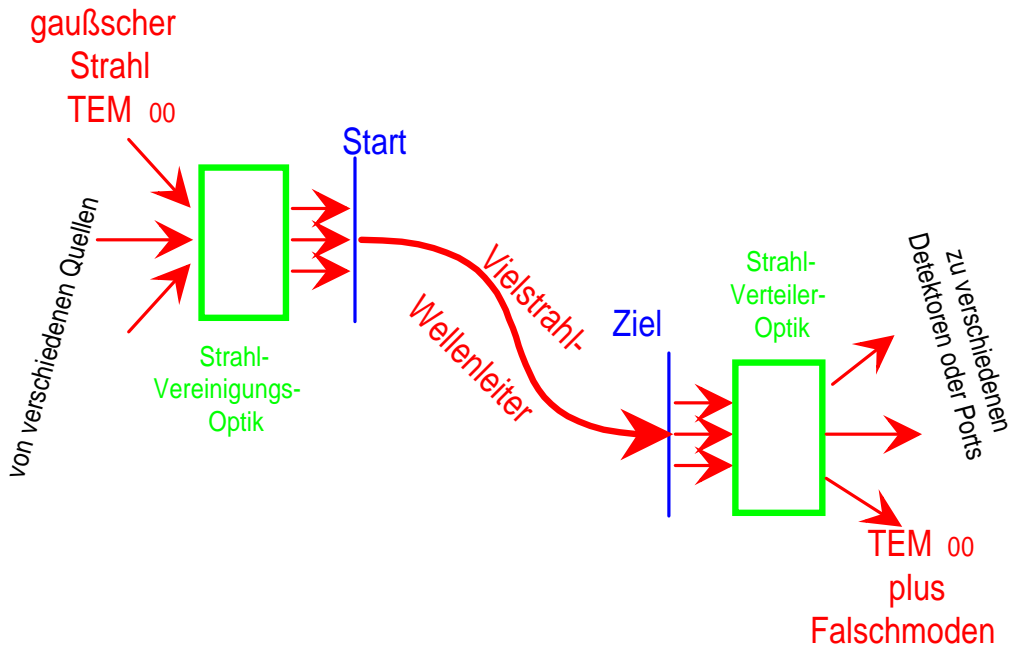


Abb. 9: Aufgabe eines Vielstrahl-Wellenleiters: Mehrere gaußsche Strahlen sollen möglichst ohne Verzerrungen (=Falschmoden) und unabhängig voneinander übertragen werden.

Dies ist bei allen abbildenden Systemen der Fall, bei welchen mit Millimeterwellen gearbeitet wird, also zum Beispiel in der Radio-Astronomie oder der Mikrowellendiagnostik. Sind hier mehrere Strahlen bzw. Signale zu übertragen, so wird bislang für jeden Kanal eine eigene Leitung verwendet. In der Diagnostik handelt es sich dabei im Allgemeinen um Hohlleiter, während in der ECRH wegen hoher Leistungen nur mit stark überdimensionierten Hohlleitern oder mit Freiraumübertragungstrecken gearbeitet werden kann. Im letzten Fall wird üblicherweise eine gaußsche Mode der niedrigsten Ordnung (TEM_{00}) mit Spiegeln ca. 10 bis 100 Meter übertragen, wobei der Strahl wegen der natürlichen Divergenz in gewissen Abständen zwangsläufig wieder gebündelt werden muss. Durch die gekrümmte Spiegeloberfläche ergibt sich bei jeder der Reflexionen eine Deformation des Strahles, die jedoch durch eine optimierte Oberflächenform minimiert werden kann.

3.1 Prinzip

Beim Vielstrahl-Wellenleiter werden gleich mehrere Strahlen über ein gemeinsames System von Spiegeln geleitet. Um die verschiedenen Strahlen gleichzeitig einzukoppeln, müssen sie zu Beginn deutlich voneinander getrennt sein. Im Phasenraum betrachtet haben sie denselben k -Vektor, aber belegen unterschiedliche Volumina. Auf der Leitung dürfen sie sich durchdringen, da die maxwellschen Gleichungen im Vakuum homogen sind. Hier stimmen die Ortskoordinaten überein, aber die k -Vektoren müssen ausreichend voneinander abweichen. Am Ende der Übertragung sind die Strahlen wieder parallel, aber örtlich getrennt, um sie auf verschiedene Detektoren oder sonstige Targets zu führen. Oder, in anderen Worten, an jedem Querschnitt durch den Strahlengang ist das Überlappintegral (30) sehr klein gegenüber eins.

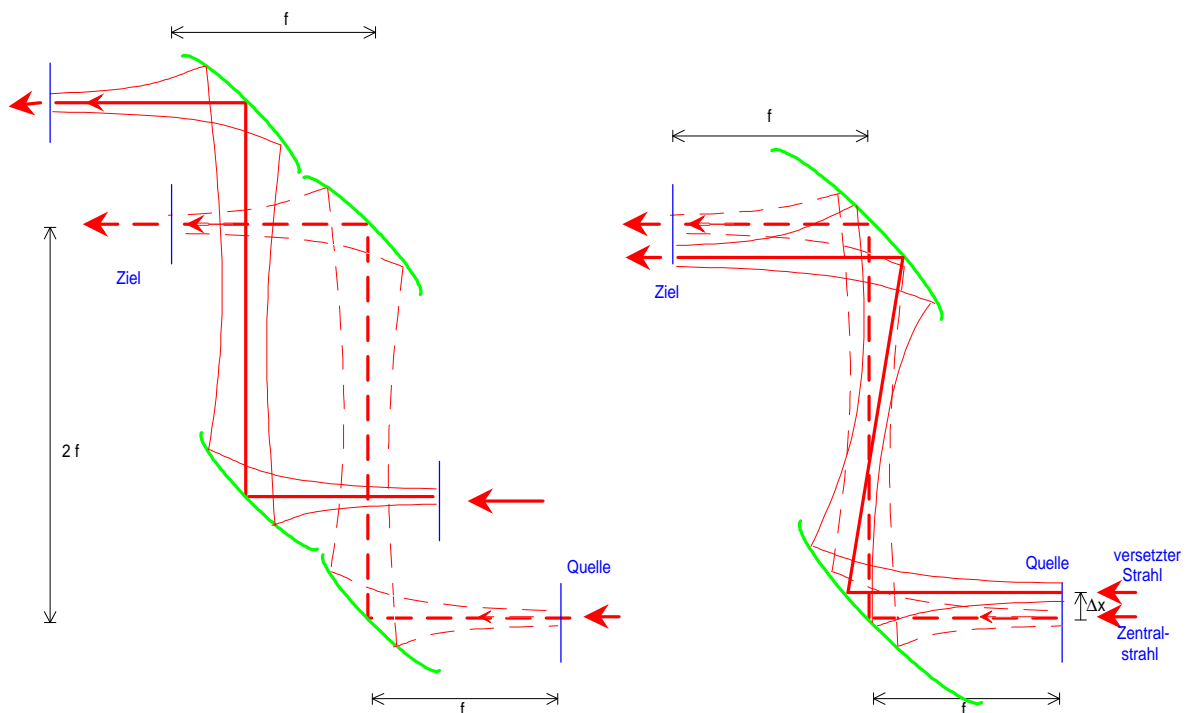


Abb. 10: Prinzip des Vielstrahl-Wellenleiters. Statt konventionell für jeden Strahl eine eigene Spiegelleitung zu bauen (links), werden gleichzeitig mehrere Strahlen über überdimensionierte Spiegel geführt (rechts). Die Strahlen benützen dieselben Stellen der Spiegeloberfläche und durchdringen sich. Nach zwei Spiegeln sind sie wieder getrennt

In der Skizze (Abb. 10) erkennt man eine solche Anordnung. Dabei starten parallel zum Zentralstrahl, aber seitlich versetzt, ein oder mehrere andere Strahlen. Wie in Kapitel 3.2.3 gezeigt wird, müssen die Spiegel dafür etwas überdimensioniert sein. In der Skizze erkennt man, dass nur zwei anstelle von vier Spiegeln verwendet werden. Es lassen sich auch drei oder noch mehr Strahlen auf diese Art anordnen, wodurch sich die Anzahl der eingesetzten Spiegel auf ein Drittel usw. reduziert. Damit verbunden ist eine erhebliche Verringerung des Aufwandes, denn bei Einzelleitungen gilt:

- Jeder Spiegel benötigt eine separate Spiegelhalterung.
- Jeder einzelne Spiegel muss justiert werden.
- Im Dauerstrich-ECRH-Betrieb benötigt jeder Spiegel ein Kühlsystem.

Hingegen ist beim Vielstrahl-Wellenleiter

- die Leitung wesentlich kompakter.
- die gesamte zu bearbeitende Spiegelfläche deutlich reduziert.

Diesen Vorteilen steht gegenüber, dass die Spiegeloberfläche von mehreren Strahlen gleichzeitig genutzt wird. Dadurch kann sie nicht gleichzeitig optimal an jeden einzelnen der Strahlen angepasst werden. Es ergeben sich verstärkt Strahldeformationen (= Anregung von Falschmoden), und zwar umso mehr, je weiter der versetzte Strahl vom Zentrum entfernt ist. Es zeigt sich jedoch, dass diese Konversion in Falschmoden durch geeignete Anordnung der Spiegel kompensiert werden kann. Außerdem lässt sich die exakte Form der Spiegeloberfläche in Hinblick auf minimale Verluste der Randstrahlen optimieren.

3.2 Parameter, Konfigurationen, Wertebereiche

In den folgenden Kapiteln wird untersucht, wie groß die erzeugten Falschmodenanteile am Ende eines Vielstrahl-Wellenleiters sind, welcher nach dem Prinzip von Abb. 10 aufgebaut ist. Die Anordnung lässt sich leicht auf vier Spiegel erweitern. Voruntersuchungen zeigen, dass nur eine konfokale Anordnung der Spiegel zu guten Ergebnissen führt. Das Design der Übertragungsleitung ist damit von der Frequenz weitgehend unabhängig und automatisch für breitbandige Anwendungen geeignet. Deshalb ist im Folgenden die Wellenlänge ebenfalls als ein freier Parameter aufgeführt. Jede der Größen wird in der Praxis durch Randbedingungen eingeschränkt sein. Das Design wird durch die folgenden Parameter bestimmt:

- Brennweite f
- Strahl- Versetzung Δx bzw. Δy
vom Zentralstrahl ($\Delta x = \Delta y = 0$) aus gemessen
- Strahltaile w_0
- Wellenlänge λ
- Spiegeloberfläche \cong Parabelparameter p
- Anzahl und Anordnung der Spiegel

Die Untersuchung beschränkt sich außerdem auf Anordnungen mit rechten Winkeln. Dies ergibt eine günstige Geometrie und hat auch optische Vorteile. Ein Spiegel unter größerem Winkel gegenüber der Spiegelnormalen, also flacherem Einfall, hat eine kleinere effektive Querschnittsfläche ($\sim \cos(\alpha)$), und außerdem ergibt sich durch die größere Spiegelkrümmung ein größerer Anteil an erzeugten Falschmoden. Bei kleinerem Einfallswinkel wird dagegen der gesamte Weg durch den Wellenleiter länger. Alle Ergebnisse lassen sich auch auf nicht rechte Winkel übertragen, solange sie immer gleich sind.

3.2.1 Brennweite

Durch die konfokale Anordnung und den festen Einfallswinkel ist gleichzeitig mit der Brennweite auch die Geometrie der Spiegel teilweise festgelegt. Der Abstand der Startebene zum ersten Spiegel, genauer gesagt zum Zentrum des ersten Spiegels ist gleich der Brennweite des Spiegels. Bei mehreren Spiegeln ist der jeweilige Abstand gleich der Summe der beiden Brennweiten, also gleich $2 \cdot f$.

Mit der Größe f ist im Folgenden die Brennweite im Mittelpunkt des Spiegels gemeint, wie sie vom Zentralstrahl gesehen wird. Sie ist im Allgemeinen nicht gleich der Brennweite, welche von den versetzten Strahlen gesehen wird. Diese Größen werden dann als *lokale Brennweite* bezeichnet und mit Indizes versehen.

3.2.2 Strahlversetzung

Neben den üblichen Parametern des Wellenleiters ist beim Vielstrahl-Wellenleiter zusätzlich die Versetzung des Strahles zu berücksichtigen. Man sieht in Abb. 11 schematisch die Anordnung des Zentralstrahles, sofern er existiert, und einen versetzten Strahl. Der Zentralstrahl entspricht der Versetzung $\Delta x = \Delta y = 0$. Er trifft die Spiegel jeweils unter 45° . Durch die Reflexion am ersten Spiegel ist eine Richtung ausgezeichnet. Per Definition misst die y -Koordinate aus der Einfallsebene heraus, x läuft in der Einfallsebene. Die Versetzung ist positiv oder negativ und in der Größenordnung einiger Strahltaillen.

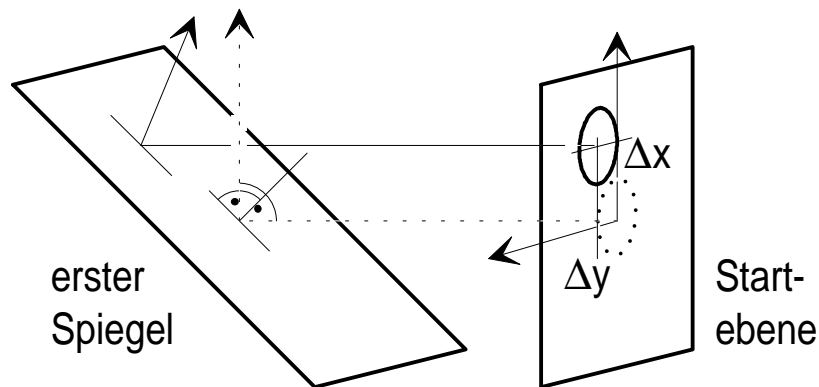


Abb. 11: Definition der Strahlversetzung: Die x -Koordinate verläuft innerhalb der Einfallsebene des Zentralstrahles, die y -Koordinate verläuft senkrecht dazu, parallel zur Ebene des ersten Spiegels

3.2.3 Strahltaille

Die Strahltaille w_0 ist der Radius der Strahlen in der Startebene. In der Praxis wird die Taille der gleichzeitig zu übertragenden Strahlen gleich groß sein. Um mehrere mm-Wellenstrahlen gleichzeitig in die Übertragungsleitung einkoppeln zu können, müssen die verschiedenen Strahlen am Beginn der Leitung ausreichend voneinander getrennt sein. Die normalverteilte

Leistungsverteilung reicht theoretisch bis ins Unendliche. Typisch rechnet man aber mit $q = 2$ Strahltaillen für die radiale Ausdehnung des gaußschen Strahles [Edi-90]. Der Durchmesser beträgt also $2 \cdot qw_0 = 4w_0$. Innerhalb dieses Radius sind dann 99.966% der Leistung enthalten. Es ergibt sich also als Bedingung für die Trennung zweier Strahlen

$$\sqrt{(\Delta x_1 - \Delta x_2)^2 + (\Delta y_1 - \Delta y_2)^2} \geq 4w_0 \quad (59)$$

Das Überlappintegral zweier benachbarter Strahlen ist dann $3 \cdot 10^{-4}$, was einer Übersprechdämpfung von -70 dB entspricht.

Eine ökonomisch wichtige Größe für die Dimensionierung eines Wellenleiters ist neben der Anzahl auch die Größe der Spiegel. Je größer die Spiegel sind, desto aufwendiger und teurer sind Herstellung und Montage, aber desto weniger Abschneideverluste muss man in Kauf nehmen. Während die Spiegelfläche quadratisch mit dem Durchmesser ansteigt, sinkt der zusätzliche Nutzen exponentiell ab. Der einzelne Strahl habe an der Position des Spiegels den Radius w_s , wobei sich w_s aus den Formeln für die gaußschen Strahlen berechnet. Ein sinnvolles Maß für die Abschneideverluste erhält man, wenn der Durchmesser des Spiegels mindestens $2 \cdot qw_s$ beträgt. Durch die Projektion des schräg einfallenden Strahles muss der Spiegel in Richtung der Einfallsebene noch zusätzlich um den Faktor $1/\cos(45^\circ) = \sqrt{2}$ größer sein.

Bei der Spiegeldimensionierung für den Vielstrahl-Wellenleiter muss sowohl der aufgrund von Divergenz vergrößerte Strahl (gestrichelter Strahlquerschnitt) als auch die anfängliche Versetzung berücksichtigt werden. Der Querschnitt in der Startebene ist mit dem durchgehenden Kreis skizziert.

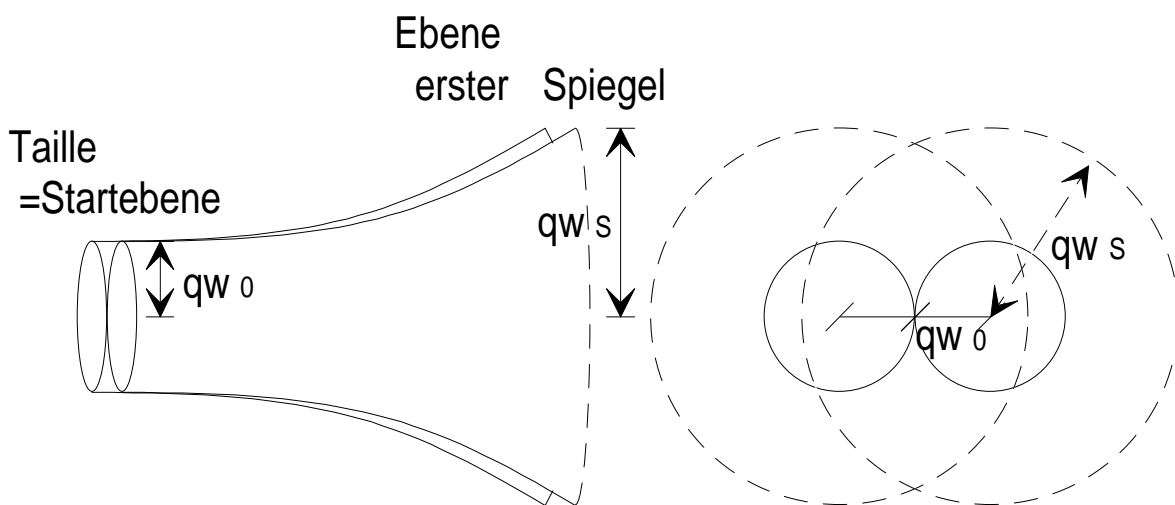


Abb. 12: Skizze zur Berechnung des nötigen Durchmessers der Spiegel. Die zwei Strahltaillen müssen zu Beginn ausreichend voneinander getrennt sein und divergieren auf dem Weg zum Spiegel

Beim einfachsten Fall laufen zwei Strahlen über das Spiegelsystem. Die Versetzung der Strahlen aus der Mitte muss $q \cdot w_0$ betragen, um die Strahlen getrennt einkoppeln zu können. Die Mindestgröße des Spiegels d ist dann

$$d = 2 \cdot [q \cdot w_0 + q \cdot w_s] \quad (60)$$

Bei der konfokalen Anordnung ist

$$w_s = w_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda(z_0 - z_{\text{Spiegel}})}{\pi w_0^2} \right)^2} = w_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (61)$$

Durch Ableiten der Spiegelgröße d nach der Taille w_0 errechnet man die bezüglich minimaler Spiegelgröße optimierte Strahltaile

$$\frac{\partial d}{\partial w_0} = 0 \Rightarrow w_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} \quad (62)$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von q , gilt also auch dann, wenn man mehr Strahlverluste toleriert. Bei ungeradzahlig vielen Strahlen nebeneinander, also wenn zum Beispiel wie in Abb. 13 die Strahlen in n Ringen um den Zentralstrahl herum angeordnet sind, ist der nötige Durchmesser für die Spiegel

$$d = 2 \cdot [n \cdot 2 \cdot q w_0 + q w_s] = 2 \cdot \left[n \cdot 2 \cdot q w_0 + q w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} \right)^2} \right] \quad (63)$$

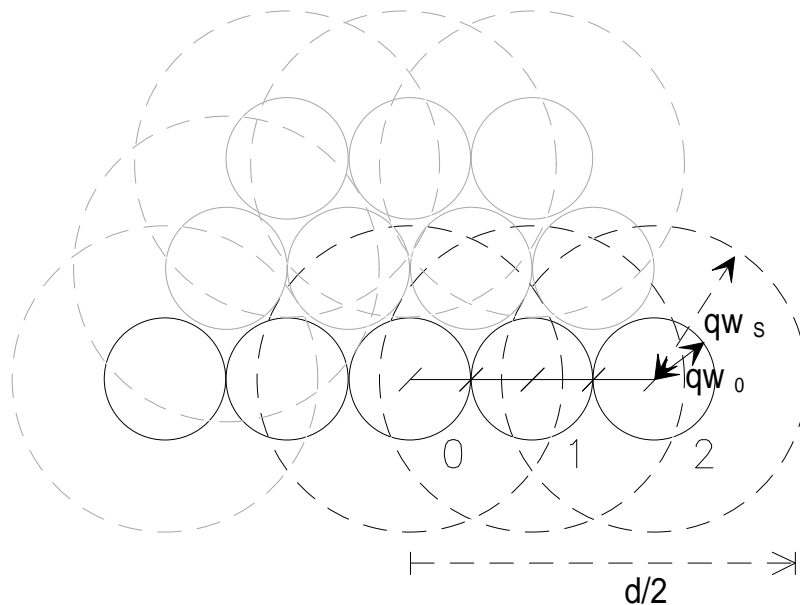


Abb. 13: Skizze zur Berechnung der nötigen Spiegelgröße, wenn die Strahlen in zwei Ringen um das Zentrum angeordnet sind. Im Ring $n=1$ können 6, im Ring $n=2$ weitere 12 Strahlen angeordnet werden

Die Spiegelgröße d hat ein Minimum für

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda f}{\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{4n^4 + 8n^2 - 2n^2 - 1}}{4n^2 - 1} \quad (64)$$

Insbesondere ergibt sich für den Fall der herkömmlichen Spiegelleitung $n = 0$ das Ergebnis

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} \quad (65)$$

Bei großen Anordnungen ($n \geq 2$) genügt dagegen zur Minimierung der Spiegelgröße die vereinfachte Formel

$$w_0 \approx \sqrt{\frac{\lambda f}{2n\pi}} \quad (66)$$

Mit Hilfe dieser Größen kann man leicht abschätzen, wie sich durch die Verwendung der Vielstrahl-Anordnung nicht nur die Anzahl der Spiegel, sondern auch die gesamte zu bearbeitende Spiegeloberfläche A reduziert:

$$\frac{A_{\text{Vielstrahl-Spiegel}}}{\text{Zahl d. Strahlen} \cdot A_{\text{Einzel-Spiegel}}} = \frac{3}{4n(n+1)} \quad (67)$$

Mit wachsendem n , also durch Anordnung von vielen Strahlen um das Zentrum herum, sinkt dieser Kostenfaktor drastisch, wohingegen aber mit der damit verbundenen Strahl-Versetzung Δx bzw. Δy die erzeugten Falschmoden ansteigen.

In diesem Zusammenhang sollte nicht unerwähnt bleiben, dass für alle Betrachtungen die gaußsche Strahlenoptik verwendet wird und dafür Paraxialität vorausgesetzt wird. Das bedeutet, dass die Strahltaile nicht zu klein gewählt werden darf. Mit

$$w_0 \geq \frac{10}{2\pi} \lambda \quad (68)$$

ist man auf der sicheren Seite [Mar-93].

3.2.4 Spiegeloberfläche

Mehrere Arbeiten haben gezeigt, dass für die Übertragung einzelner gaußscher Strahlen als Spiegeloberfläche ein Ausschnitt aus einem Ellipsoid ('off-axis') die geringsten Verluste mit sich bringt [Mur-87, Vin-95]. Zunächst ist nicht klar, ob dieses Ergebnis der herkömmlichen Transmissionsleitung auch für den Vielstrahl-Wellenleiter die optimale Lösung ist. Selbstverständlich spielt bei der Untersuchung der Modenkonzersion die Form der Spiegeloberfläche eine Rolle. Es zeigt sich im Folgenden, dass alle sinnvollen Oberflächen mit nur einem Parameter p beschrieben werden können.

Die einfachste Funktion zur Beschreibung einer Spiegeloberfläche mit der Brennweite f ist

$$z_s(x_s, y_s) = \frac{\cos(\alpha)}{4f_x} x_s^2 + \frac{1}{4\cos(\alpha)f_y} y_s^2 \quad (69)$$

In unserem Fall ist $f_x = f_y = f$ und aus 45° Einfallswinkel ergibt sich $\cos(\alpha) = 1/\sqrt{2}$. Es handelt sich also um ein Paraboloid mit zwei unterschiedlichen Krümmungsradien in Richtung parallel und senkrecht zur Einfallsebene. Erst in Termen höherer (vierter) Ordnung unterscheidet sich die Taylor-Entwicklung der toroidalen Spiegeloberfläche von diesem Paraboloid.

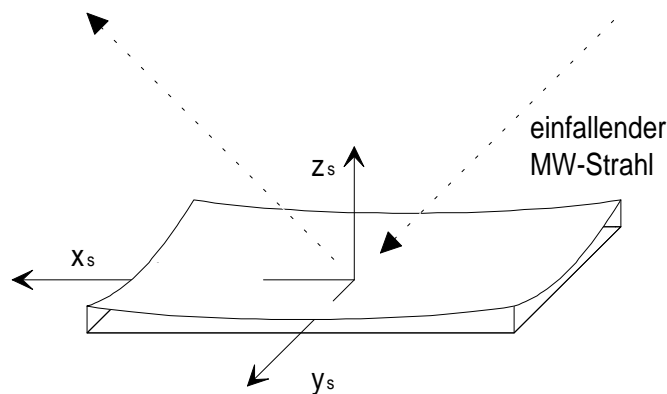


Abb. 14: Koordinatensystem für die Beschreibung der Oberflächenfunktion der Spiegel

Diese Oberflächenfunktion für einen Spiegel der Brennweite f ist für viele Anwendungen ausreichend.

Macht man eine Taylor-Entwicklung der Oberflächenfunktion, so ist der Kleinheitsparameter x_s/f . Während die Brennweite f gleich dem halben Abstand der Spiegel ist, und damit in der Größenordnung der Länge der Übertragungsleitung ist, sind x_s und y_s kleiner als der halbe Durchmesser des Spiegels, welcher einigen Strahltaillen entspricht. Die Entwicklung der Oberflächenfunktion einschließlich der nächst höheren (dritten) Ordnung ist somit ausreichend.

Bei der Übertragung eines einzelnen gaußschen Strahles ist der Ausschnitt aus einem Ellipsoid ('off-axis') die Spiegeloberfläche mit minimaler Modenkonzersion. Die Funktion, welche die Oberfläche ausreichend gut definiert, ist

$$z_s(x_s, y_s) = \frac{1}{4\sqrt{2}f} x_s^2 + \frac{\sqrt{2}}{4f} y_s^2 + \frac{p}{16f^2} (x_s^3 + 2x_s y_s^2) \quad (70)$$

mit

$$p = f \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{out}}} - \frac{1}{r_{\text{in}}} \right) = \frac{1 - \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} \right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (71)$$

Es ergab sich dasselbe Ergebnis bei der Berechnung, welche die Spiegeloberfläche an die Phasenlage der ein- und der auslaufenden Wellenfront anpasst. Neben der Brennweite geht hier noch der Krümmungsradius des einfallenden bzw. des ausgehenden gaußschen Strahles mit ein, wobei die aus der geometrischen Optik vertraute Beziehung gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r_{\text{in}}} + \frac{1}{r_{\text{out}}} \quad (72)$$

Der Radius r_{in} des einfallenden Strahles ist positiv definiert, wenn der Strahl divergiert. Dagegen ist r_{out} positiv, wenn der Strahl konvergiert, d. h. wenn hinter dem Spiegel eine reelle Strahltaile existiert. Aus Symmetriegründen ist klar, dass in z_s (Gleichung (70)) keine ungeraden Potenzen von y_s auftreten können. Für den symmetrischen Fall $r_{\text{in}} = r_{\text{out}}$ verschwindet der Parabelparameter p , und es ergibt sich wieder der Ausschnitt des Torus als Oberfläche.

Das Ellipsoid ist die optimale Oberfläche für den Zentralstrahl. Es ist jedoch leicht klar, dass dies nicht auch die optimierte Oberfläche für einen versetzten Strahl sein muss. Man denke sich den gaußschen Strahl durch seine Strahlachse repräsentiert oder aber einen Strahl mit so kurzer Wellenlänge, dass er auf dem Weg zum Spiegel nur vernachlässigbar wenig divergiert. Diese Geraden folgen dann den Gesetzen der geometrischen Optik. Anfangs parallel verlaufende (geometrische) Strahlen treffen nach dem ersten Spiegel nicht wieder im Brennpunkt zusammen. Dies ist ein Anzeichen für eine Fehlanpassung am Ende des Wellenleiters, wobei aber mit den weiteren Spiegeln eine Korrektur geschehen kann. Die Auswirkungen werden später quantitativ diskutiert.

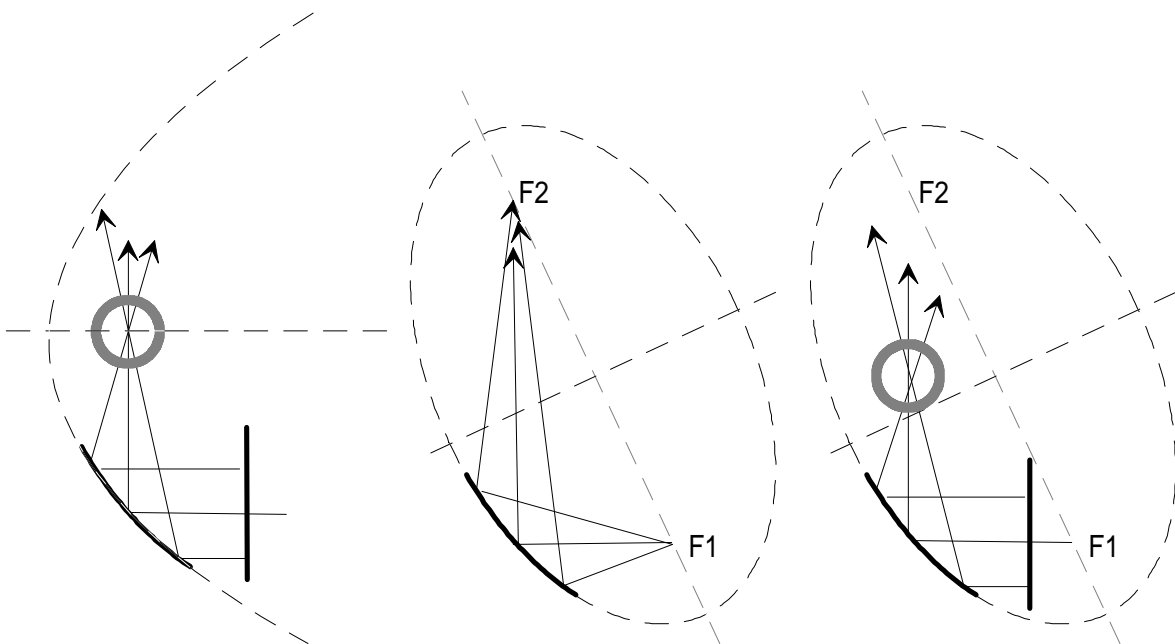


Abb. 15: Geometrisch optische Eigenschaften der Parabel und der Ellipse. Die Parabel vereinigt parallel einfallende Strahlen im Brennpunkt (links). Die Ellipse vereinigt aus dem Brennpunkt F_1 kommende Strahlen in F_2 (mitte), aber parallel einfallende Strahlen werden nicht exakt gebündelt (rechts)

Das Ellipsoid ist diejenige Oberfläche, welche (geometrische) Strahlen, die von einem Brennpunkt F_1 kommen, so reflektiert, dass sie im Brennpunkt F_2 wieder zusammentreffen. Im Gegensatz dazu ist die Fläche, welche parallel einfallende Strahlen auf einen Punkt bündelt, das Paraboloid, außerhalb des Scheitels, also *off-axis* betrieben (siehe Abb. 15). Da in diesem Bild der geometrischen Optik keine Eigenschaften des gaußschen Strahles enthalten sind, ist das Paraboloid durch die Brennweite (und den Reflexionswinkel 90°) eindeutig definiert. Die Entwicklung dieses Paraboloides um den Mittelpunkt des Spiegels ist gleich der Funktion (70) mit dem Parabelparameter $p = 1$. Die möglichen Spiegeloberflächen bis zu Termen dritter Ordnung lassen sich also zusammenfassen zu (70), wobei sich für bestimmte Werte von p Sonderfälle ergeben:

p	Spiegelform	
0	on-axis Paraboloid	Symmetrischer Fall, oder Ellipsoid mit $f = z_{\text{Rayleigh}}$, $r_{\text{in}} = r_{\text{out}}$
1	off-axis Paraboloid	Angepasst an die geometrische Optik
$1 - \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2}\right)^2$ $1 + \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2}\right)^2$	off-axis Ellipsoid	Angepasst an den Zentralstrahl

3.2.5 Spiegelgeometrie

Der einfachste Vielstrahl-Wellenleiter besteht aus nur einem Spiegel. Für eine Übertragungsleitung in der untersuchten Form ist dies nicht geeignet, da sich alle Strahlen an dem einen Punkt treffen, an welchem sie wieder ausgekoppelt werden sollen. In der Abb. 16 sind die Spiegel asymmetrisch skizziert ($p \neq 0$). Man erkennt, wie sich die jeweilige Orientierung bezüglich der Einfallsrichtung ändert. Es gibt jeweils eine Seite, aus der die Strahlen (fast) parallel einfallen bzw. in der sie weglaufen. Für den Fall des Paraboloides $p = 1$ ist das die Seite mit der etwas geringeren Krümmung. Auf der anderen Seite treffen sich alle Strahlen nach ungefähr einer Brennweite.

In der Richtung senkrecht zur Zeichenebene sind die Spiegel symmetrisch.

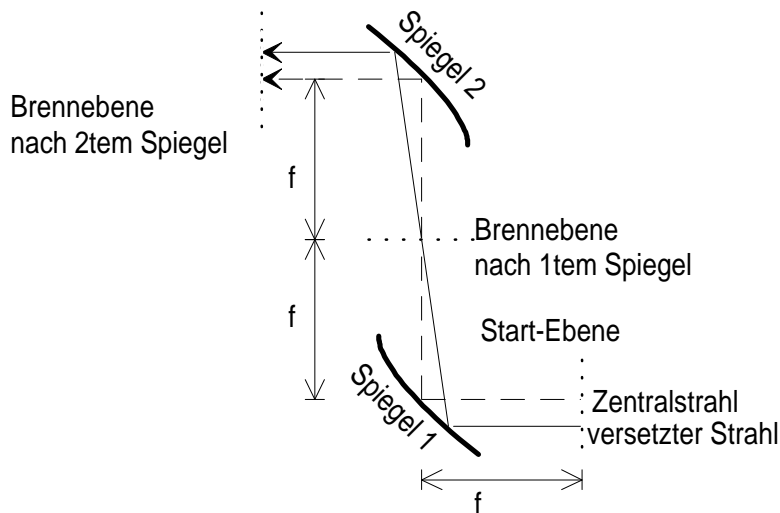


Abb. 16: Konfokale Anordnung der zwei ersten Spiegel im Vielstrahl-Wellenleiter. Im Brennpunkt hinter dem ersten Spiegel kreuzen sich alle parallel einfallenden Strahlen, hinter zwei Spiegeln sind sie wieder getrennt. Die gaußschen Strahlen sind durch ihre Strahlachse repräsentiert

Bei zwei hintereinander gekoppelten Spiegeln werden die verschiedenen Strahlen wieder getrennt. Hierfür gibt es zwei Konfigurationen. Bei der Zick-Zack-Anordnung, wie in Abb. 16 oder Abb. 17/links zu sehen, werden die Strahlen zunächst nach rechts und am zweiten Spiegel nach links abgelenkt. In der alternativen Anordnung (Abb. 17/rechts) wird zweimal nach rechts abgelenkt. Die anderen Möglichkeiten gehen durch Spiegelung aus den ersten beiden hervor.

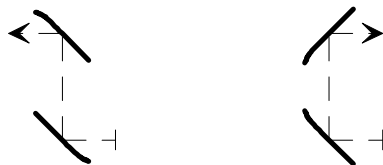


Abb. 17: Skizze der zwei möglichen Anordnungen bei zwei Spiegeln unter 90° Reflexionswinkel

Für die Konstruktion einer Übertragungsleitung ist unter Umständen jede der hier gezeigten Spiegelgeometrien ungeeignet. Man kann jedoch, ohne die optischen Eigenschaften zu beeinflussen, zusätzliche Planspiegel verwenden. Damit spiegelt sich natürlich die Orientierung der gesamten folgenden Anordnung.

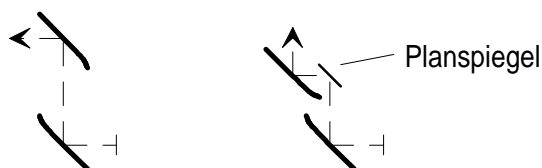


Abb. 18: Eine Spiegelleitung (links) kann durch zusätzliche Planspiegel (rechts) beliebig gefaltet werden. Die gesamte nachfolgende Geometrie ist dann spiegelbildlich anzuordnen

Bei der Verwendung von vier Spiegeln gibt es bereits $\frac{1}{2} \cdot 2^4 = 8$ verschiedene Anordnungen (Abb. 19). Es wird sich zeigen, dass insbesondere die erste Anordnung ((a) Zick-Zack) und die letzte ((h) Quadrat) gute Übertragungseigenschaften haben.

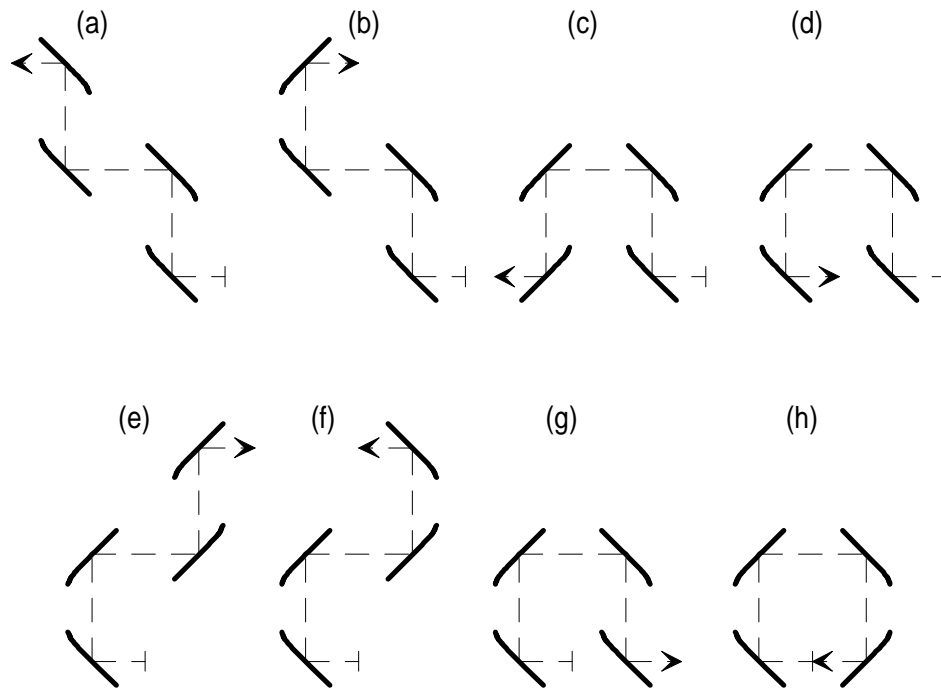


Abb. 19: Skizze der acht möglichen Anordnungen bei vier Spiegeln unter 90° Reflexionswinkel.

Im Folgenden wird zur Unterscheidung die Anordnung (a) mit 'Z' bezeichnet, die Anordnung (h) mit 'Q' (für Quadrat), und die Anordnung (c) mit einem großen griechischen Omega 'Ω'.

3.3 Numerische Ergebnisse

Um die optischen Eigenschaften der Vielstrahl-Übertragung zu untersuchen, wurde ein Computer-Programm entwickelt. Es berechnet die Ausbreitung einer paraxialen elektromagnetischen Welle. Die Rechnung basiert auf dem Huygensschen Prinzip (siehe Kapitel 2.4.4 'Rechenverfahren'). Die analytische Berechnung der Modenwandlung ist im Allgemeinen nicht möglich, sondern nur bei einzelnen Spiegeln und nur in den einfachsten Fällen [Vin-95].

Die Eingabe-Parameter des Fortran-Programms (w_0 , Δx , Δy , λ , p , f) sind im letzten Kapitel ausführlich beschrieben. Es kann an jedem beliebigen Querschnitt die Verteilung der Welle betrachtet werden. Man kann dabei trennen in die Vektorkomponente mit der 'richtigen' Polarisationsrichtung und der dazu um 90° gedrehten Polarisation. Erstere heißt *kopolarisiert* und ist für alle Fälle viel größer als der *kreuzpolarisierte* Anteil. Zur quantitativen Untersuchung der Strahldeformationen ist die Ausgabe als Zerlegung in Falschmoden hilfreich.

Allerdings müssen dafür die Parameter der erwarteten gaußschen Mode sehr genau bekannt sein.

Als Ergebnis kann vorweggenommen werden, dass sich auf empirischem Weg trotz der einfachen zugrundeliegenden Physik und trotz des einfachen Aufbaus keine allgemeine Formel finden lässt, welche die Abhängigkeit von den Eingangs-Parametern beschreibt. Ausnahme hierbei ist die Strahlversetzung: Der Zentralstrahl ($\Delta x = \Delta y = 0$) hat jeweils den kleinsten Falschmodenanteil. Er dient als Referenz für die zusätzlichen Modenverluste aufgrund der Versetzung. Durch den Zentralstrahl sind auch die ‘Soll-Parameter’ der gaußschen Strahlen definiert.

Für die Untersuchungen wurden von einem typischen Fall ausgehend einzelne Parameter variiert. Dieser Standardfall ist:

Brennweite	$f = 1000\text{mm}$	(73)
Wellenlänge	$\lambda = 2.14\text{mm}$	
Strahltaile	$w_0 = 20\text{mm}$	
Spiegelform	$p = 0$	
Strahlversetzung	$\Delta x = \pm 100\text{mm}, \Delta y = 0\text{mm}$	

In den Bildunterschriften ist meist die Längeneinheit mm weggelassen. Das komplette Problem lässt sich linear skalieren. Man erhält also dieselben Ergebnisse für eine beliebige

Wellenlänge λ mit

$$f = 470\lambda, \quad w_0 = 9.4\lambda, \quad \Delta x = \pm 47\lambda .$$

3.3.1 Ein Spiegel

Ein einzelner Spiegel, der in der beschriebenen Weise von mehreren Strahlen gleichzeitig benutzt wird, ist für Übertragungsleitungen ungeeignet, da sich alle Strahlen ungefähr an derselben Stelle in der Brennebene treffen. Die Strahlen können nicht alle gleichzeitig ausgekoppelt werden. Abgesehen davon ergibt sich nach dem ersten Spiegel eine relativ große Strahldeformation. Die Quantifizierung dieser Verluste ist schwierig, da der Strahl schräg auf die Messebene fällt, und diese Soll-Strahlparameter, auf deren Basis die Modenzerlegung beruht, immer neu festgelegt werden müssen.

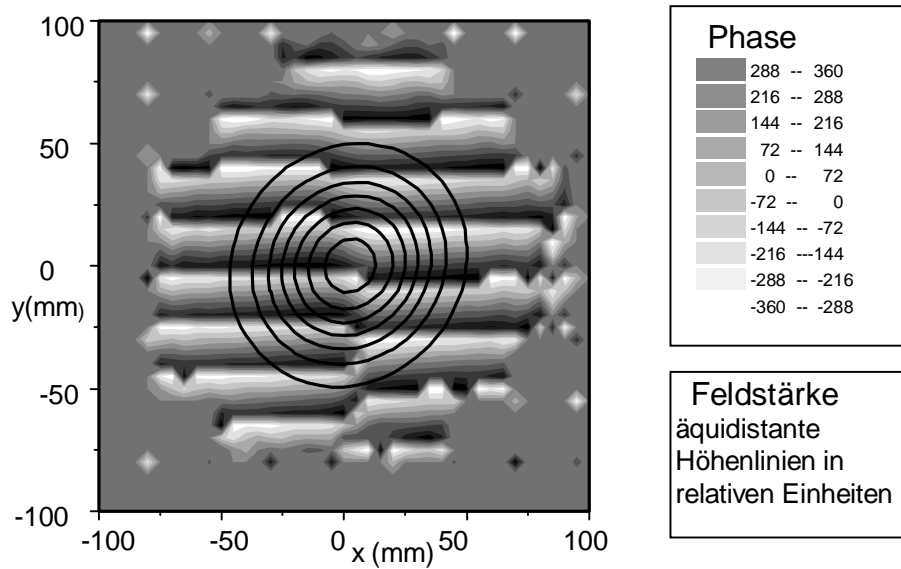


Abb. 20: Phase und Leistung des mm-Wellenstrahles nach einem Spiegel, $f=1000$, $w_0=20$, $\Delta x=0$, $\Delta y=100$, $p=0$

In Abb. 20, der Darstellung von der ersten Brennebene, erkennt man an dem gestreiften Phasenbild deutlich die schräg einfallende Welle. Eine etwaige gekrümmte Phasenfront könnte man in dieser Darstellung relativ schlecht erkennen, da sie im Gegensatz dazu viel schwächer ist. Als Höhenlinien geplottet sieht man die Amplitudenverteilung.

Erst wenn man die Messebene wie in der Abb. 21 an die Welle angepasst verkippt, ist die Zerlegung in Falschmoden sinnvoll. In der folgenden Tabelle ist das Ergebnis der Modenzersetzung nach (75) aufgelistet:

P_{kopol}	0	1	2	n_x
0	.806	.176	.006	.0
1	0	0	.0	.0
2	.008	.002	.0	.0
n_y	3	0	.0	.0

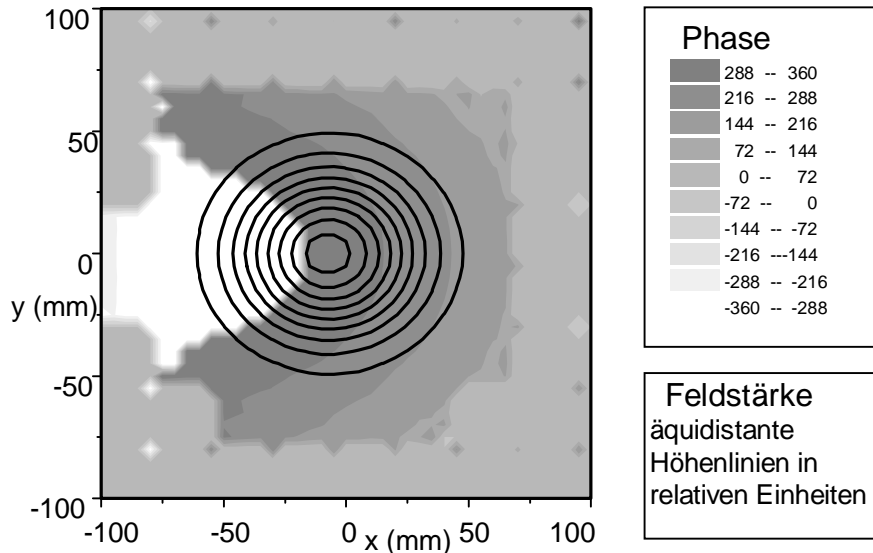


Abb. 21: Falschmodenanteile, Phase und Leistung des mm-Wellenstrahles nach einem Spiegel, $\Delta x=100$, $\Delta y=0$. Die Messebene liegt weitestgehend senkrecht zur Strahlachse

Man erkennt am numerischen Ergebnis dreierlei:

1. Die Feldverteilung ist symmetrisch zu $y = 0$.

Wegen des zu $y = 0$ symmetrischen Aufbaus (hier: $\Delta y = 0$), können nur Falschmoden mit geradem y -Index angeregt werden.

2. Der Strahl trifft nicht direkt durch den Mittelpunkt.

3. Die Welle hat eine gekrümmte Phasenfront, d. h. keine Taille in dieser Ebene.

Es lässt sich aber eine Spiegeloberfläche konstruieren, welche für jede Strahlversetzung eine ebene Phase liefert. Allerdings trifft dieser Strahl dann weiterhin schräg auf die Brennebene und außerdem nicht mittig durch den Brennpunkt.

Die abgebildete Rechnung wurde für den Fall $p = 0$ durchgeführt, das bedeutet als Spiegeloberfläche ein Toroid. Wie von den Regeln der Strahlenoptik zu erwarten ist, trifft der Strahl ausschließlich für das off-axis installierte Paraboloid, also $p = 1$ durch den Brennpunkt. Trägt man den Schwerpunkt der Leistung über dem Parabelparameter auf (Punkte in Abb. 22), so zeigt sich, dass die Position des gaußschen Strahles sehr gut übereinstimmt mit dem analytisch berechneten Treffpunkt eines 'echten Strahles', im Sinne der Strahlenoptik (durchgezogene Linien). Die Abhängigkeit von der Strahlversetzung Δx und Δy ist in niedrigster Ordnung quadratisch (Abb. 23 und Abb. 24), sowohl für das Paraboloid ($p = 1$) als auch für die anderen Oberflächen.

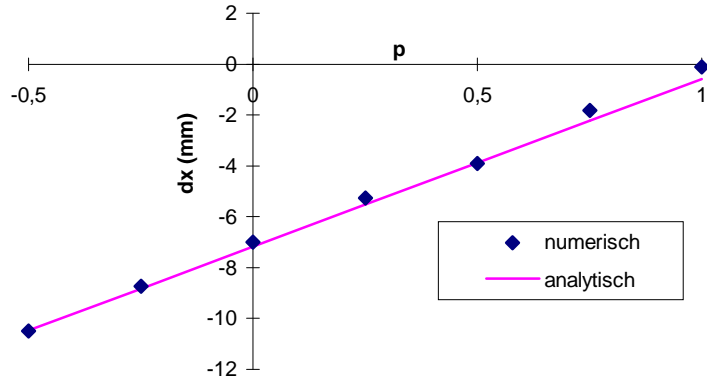


Abb. 22: Strahlposition in der Brennebene hinter dem ersten Spiegel. Versetzung in Abhängigkeit vom Parabelparameter p , $\Delta x=100$, $\Delta y=0$

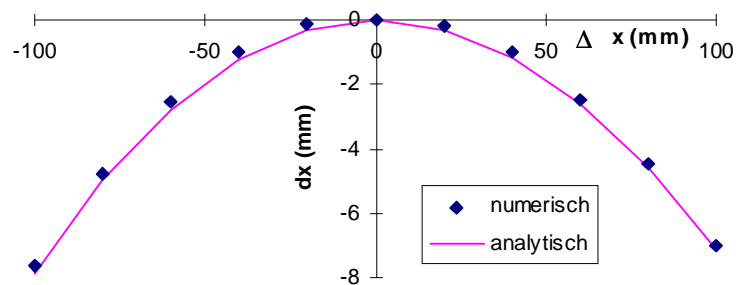


Abb. 23: Strahlposition in der Brennebene hinter dem ersten Spiegel. Versetzung in Abhängigkeit von Δx , $p=0$, $\Delta y=0$

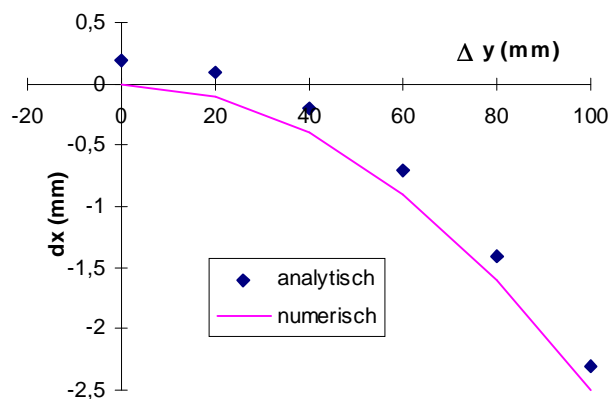


Abb. 24: Strahlposition in der Brennebene hinter dem ersten Spiegel. Versetzung in Abhängigkeit von Δy , $p=0$, $\Delta x=0$. Das Ergebnis ist symmetrisch zur $\Delta y=0$ -Achse

Da nach nur einem Spiegel die Parameter der TEM_{00} bereits in niedrigster Ordnung nicht mehr mit dem Zentralstrahl übereinstimmen, ist eine Zerlegung in Moden höherer Ordnung wenig sinnvoll. Lediglich beim Zentralstrahl lohnt die genaue Untersuchung der Falschmodenanteile.

Es treten im Wesentlichen vier zusätzliche Moden auf (Abb. 25). Es ergibt sich, dass der off-axis ellipsoidale Spiegel die geringsten Verluste mit sich bringt. Dies ist auch theoretisch und geometrisch begründet [Mur-87].

$$\begin{aligned}
 P_{\text{kopol30}} &= \frac{3}{4} \frac{1}{8} \left(\frac{w_s}{f} \right)^2 & \text{mit } w_s &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} \right)^2} \\
 P_{\text{kopol12}} &= \frac{1}{4} \frac{1}{8} \left(\frac{w_s}{f} \right)^2 \\
 P_{\text{kreuz01}} &= \frac{2}{8} \left(\frac{w_s}{f} \right)^2
 \end{aligned} \tag{76}$$

Für diesen Sonderfall stimmen die numerisch errechneten Modenanteile genau mit den theoretischen Werten überein. Aus Gründen der Symmetrie sind kopolarisierte Moden nur mit geradem y-Index (senkrecht zur Einfallsebene) zu erwarten. Die kreuzpolarisierten Falschmoden müssen im Gegensatz dazu einen ungeraden y-Index haben. Bei Variation des Parabelparameters p vom optimalen Ellipsoid ausgehend wächst jeder der Falschmodenanteile an. Zusätzlich wird die Mode TEM_{10} , kopolarisiert erzeugt. Sie bedeutet im Wesentlichen, dass der Strahl leicht in x -Richtung versetzt wird. Der kreuzpolarisierte Anteil bleibt fast konstant und ist also nur von der Krümmung des Spiegels in niedrigster Ordnung (= der Brennweite) abhängig.

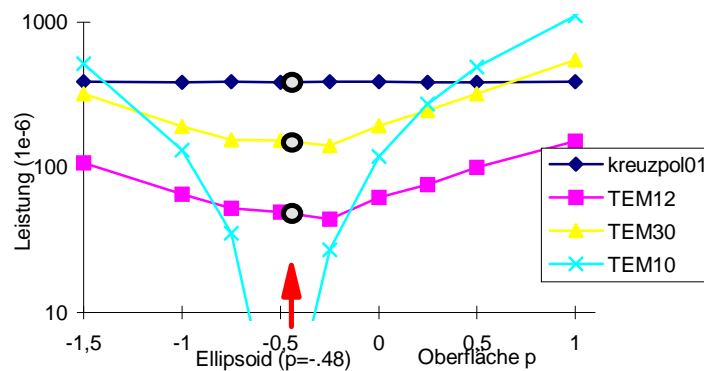


Abb. 25: Falschmodenanteile des Zentralstrahles nach dem ersten Spiegel bei Variation des Oberflächenparameters p . Das off-axis-Ellipsoid ist hierfür der optimale Spiegel. Eingezeichnet sind auch die analytischen Werte für das Ellipsoid

3.3.2 Zwei Spiegel

Für die Anordnung von zwei Spiegeln gibt es bei den obigen Randbedingungen zwei mögliche Konfigurationen. In beiden Fällen ändern die Strahlen ihre Orientierung zueinander. In der Z-Konfiguration landet der in $(\Delta x, \Delta y)$ gestartete Strahl bei $(-\Delta x, -\Delta y)$ zuzüglich sehr kleiner Abweichungen. Bei der alternativen Anordnung ist der Strahl nahe bei $(-\Delta x, \Delta y)$. Alle abgebildeten Schaubilder haben den jeweils erwarteten Auftreffpunkt als Ursprung.

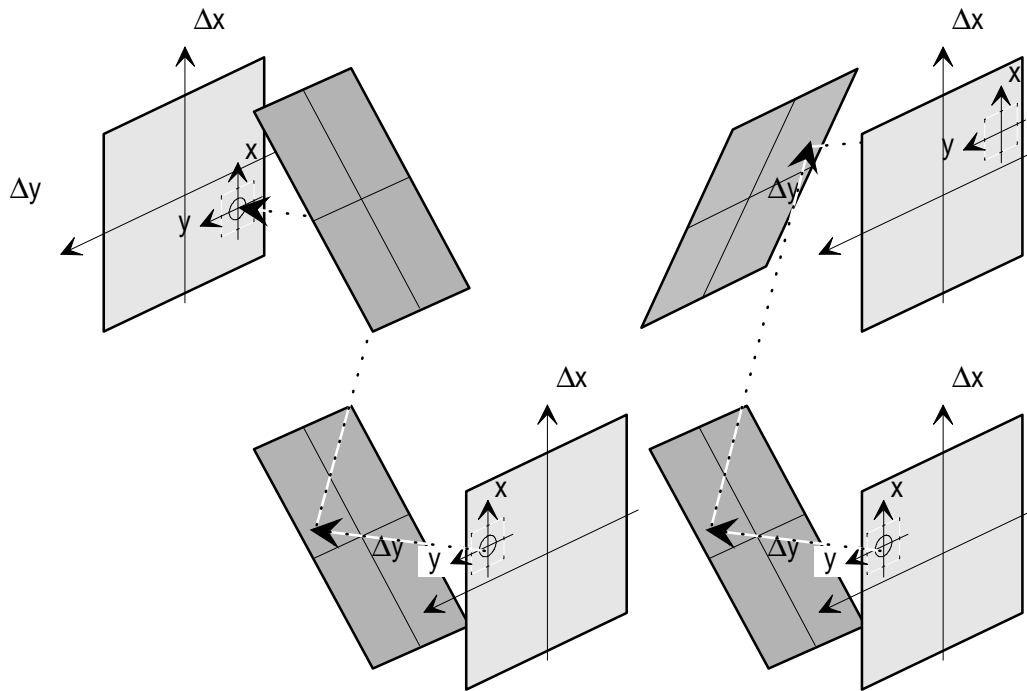
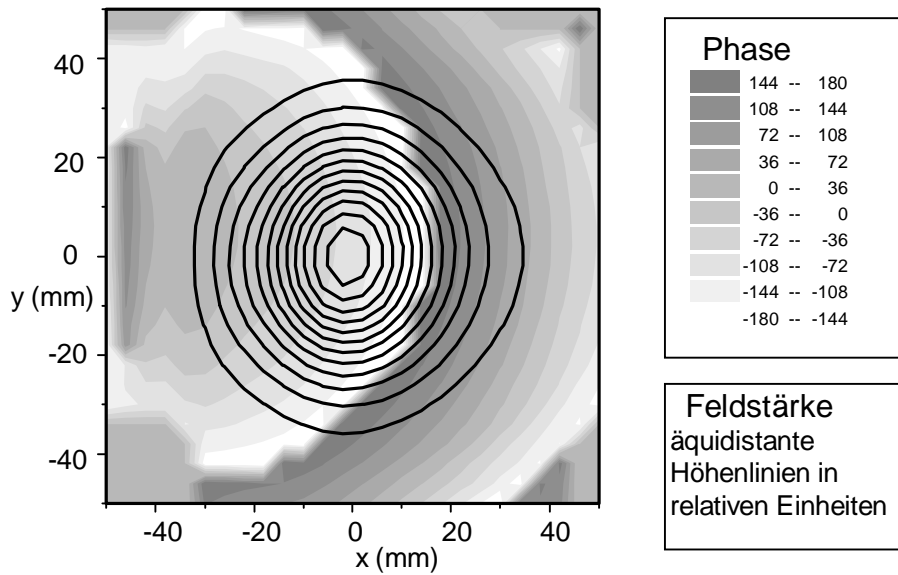


Abb. 26: Definition der Koordinatensysteme für die Darstellung der Mikrowellenfelder in der zweiten Brennebene. links: Z-Konfiguration, rechts: Q-Konfiguration

Für die Z-Konfiguration ergibt das numerische Experiment, dass der Strahl zwar sehr genau die richtige Position trifft, jedoch unter schrägem Einfallswinkel. Dies gilt für alle Spiegelflächen mit dem Oberflächenparameter p . Ein Beispiel dafür sieht man in Abb. 27.



P_{kopol}	0	1	2	n_x
0	.457	.319	.117	.034
1	.005	.005	.002	.0
2	.018	.017	.004	.001
n_y 3	.006	.0	.0	.0

Abb. 27: Phase, Leistung und Falschmodenanteile des mm-Wellenstrahles nach 2 Spiegeln, Z-Konfiguration, $p=p_{\text{ellipse}}$, $\Delta x=-100$, $\Delta y=20$

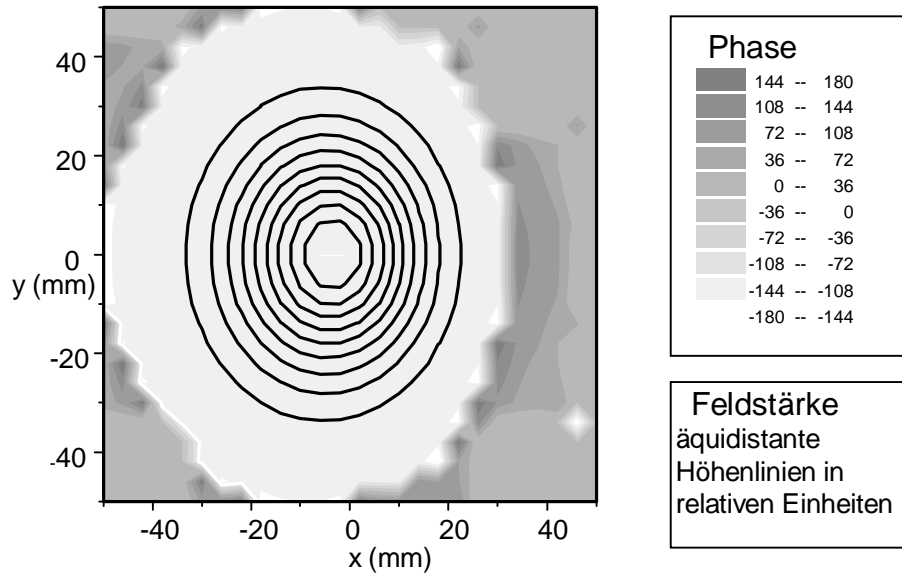
Die schräge Phase erkennt man auch, wenn man nicht die Leistung der Falschmode betrachtet, sondern den komplexen Amplitudenfaktor. Beim Bilden des Betragsquadrats geht die Information über die Phasenlage verloren. So ist zum Beispiel in der Ebene nach zwei Spiegeln in Z-Konfiguration ($\Delta x = 100$, $\Delta y = 0$) die Leistung der Falschmoden wie folgt:

P_{kopol}	0	1	2	n_x
0	.824	.123	.014	.003
1	0.	0.	0.	0.
2	.026	.003	.0	.0
n_y 3	0.	0.	0.	0.

Die Amplitude der TEM_{10} ist mit $0.02-i0.35$ fast rein imaginär. Der Schwerpunkt der Leistungsverteilung liegt nahe dem erwarteten Wert bei $(-100.4, 0.0)$, und die zweiten Momente der Verteilung sind $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 20.4$ und $\sqrt{\langle y^2 \rangle} = 22.2$. Die leichte transversale Versetzung ist für den Realteil der Amplitude zuständig. Dies ergibt sich qualitativ oder auch quantitativ aus dem ersten Summanden der rechten Seite von Gleichung (35). Der vom Betrag her wesentlich größere Imaginärteil weist hin auf die schräge Phasenfront ((35), zweiter Summand).

Die beiden dargestellten Fälle lassen ein sehr generelles Ergebnis erkennen. Die anfängliche Versetzung nach $+\Delta x$ bringt bei sonst gleichen Parametern kleinere Verluste mit sich als dieselbe Versetzung nach $-\Delta x$.

Die zur Z-Konfiguration alternative Spiegelanordnung heißt in Hinblick auf die Ergänzung zum Quadrat durch zwei weitere Spiegel *Q-Konfiguration*. Man erkennt an der folgenden Abbildung, dass der Strahl eine ebene Phasenfront hat, aber versetzt und elliptisch verformt auf der Messebene ankommt.



P_{kopol}	0	1	2	n_x
0	.936	.056= $ -.24-i\cdot 0.004 ^2$.001	.0
1	0.	0.	0.	0.
2	.004	.0	.0	.0
n_y 3	0.	0.	0.	0.

Abb. 28: Phase, Leistung und Falschmodenanteile des mm-Wellenstrahles nach 2 Spiegeln, *Q-Konfiguration*, $p=0$, $\Delta x=100$, $\Delta y=0$. Das Zentrum liegt bei $\langle x \rangle = 95.6$, $\langle y \rangle = 0.0$

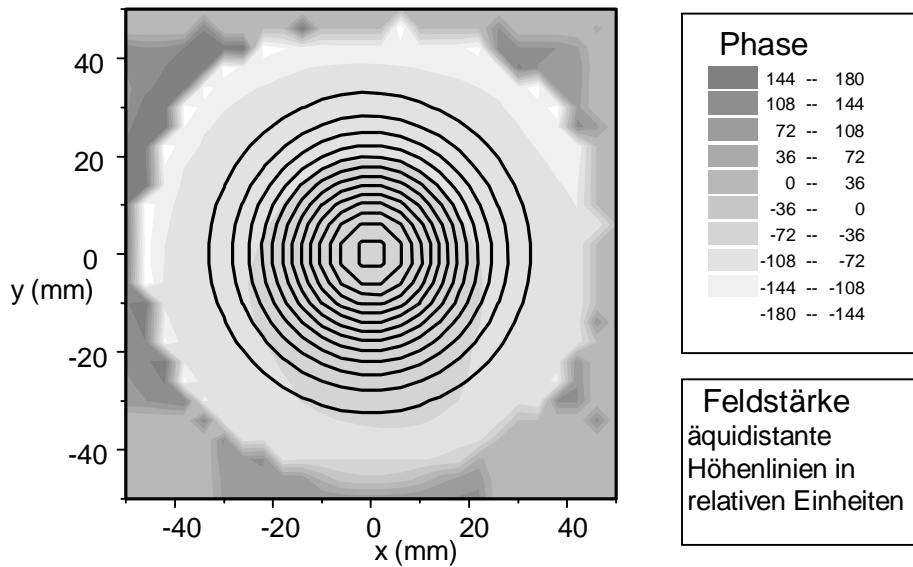
Bei den Falschmodenanteilen muss man wiederum den komplexen Amplitudenwert betrachten, um die Phase zu erkennen. Im Gegensatz zur Z-Konfiguration ist hier der Anteil TEM_{10} fast reell, was auf die transversale Versetzung in x-Richtung hindeutet.

3.3.3 Vier Spiegel

Von den acht möglichen Anordnungen wurden insbesondere drei untersucht: Die Zick-Zack-förmige und die quadratische Konfiguration, da hier jeweils nur sehr kleine Verluste auftreten, und im Vergleich dazu eine weitere, die am ehesten einem großen griechischen Omega gleicht (Abb. 19 (c)).

Bei den günstigen Anordnungen ergibt sich, dass der Falschmodenanteil um ca. zwei Zehnerpotenzen geringer ist als nach nur zwei Spiegeln. Nahezu 100% der Leistung stecken für die gewählten Parameter in der fundamentalen Mode TEM_{00} . In Abb. 29 ist das Ergebnis der Rechnung für die Ausgangsebene nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration dargestellt. Es ergibt

sich eine ebene Phasenfront bei einer zentrierten, rotationssymmetrischen Leistungsverteilung. Der Vergleich mit Abb. 28 zeigt deutlich eine Reduktion der Strahldeformation.



$P_{\text{kopol}}(10^{-5})$	0	1	2	n_x
0	99611	6	143	1
1	43	2	5	0
2	120	0	0	0
n_y 3	9	0	0	0

Abb. 29: Phase, Leistung und Falschmodenanteile des mm-Wellenstrahles nach 4 Spiegeln in Q-Konfiguration, $p=0$, $\Delta x=0$, $\Delta y=100$. Der Strahl ist nahezu identisch dem Strahl am Beginn der Leitung

Wenn man die verschiedenen kopolarisierten Modenanteile aufsummiert, ergibt sich nicht exakt 1. Die anderen Polarisationsrichtungen dürfen nicht vernachlässigt werden. Die Analyse der beiden anderen Vektorkomponenten ergibt hauptsächlich die Leistungsanteile

$$P_{\text{kreuz01}} = 4 \cdot 10^{-5}$$

und formal

$$P_{\text{längs10}} = 28.8 \cdot 10^{-5} = |0.001 - i \cdot 0.017|^2$$

Der kreuzpolarisierte Anteil ist relativ klein. Dafür muss aber die Vektorkomponente *in* Ausbreitungsrichtung genauer untersucht werden. Der ‘Leistungsanteil’ ergibt sich, wenn man die longitudinale Komponente des Magnetfeldes mit dem normalen Formalismus verrechnet, also das Betragsquadrat des Überlappintegrals bildet. Diese ‘Mode’ trägt real keine Leistung. Sie ist auch in der paraxialen Näherung zu vernachlässigen und verschwindet für $\lambda \rightarrow 0$. Allerdings fehlt dieser kleine Anteil bei der beschriebenen Berechnung in der Leistungsbilanz. Analog zu (20) kann diese Komponente aus der Quellenfreiheit der Felder errechnet werden:

$$H_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} \cdot \frac{2\sqrt{2}x}{w} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} (-\sin kz) \cdot \frac{\lambda}{2\pi w} \quad (77)$$

Der Unterschied dieses Ausdruckes zu dem für die Amplitude der Hauptpolarisationsrichtung ist das hermitesche Polynom erster Ordnung H_1 , eine Phasenverschiebung und der Faktor $\lambda/(2\pi w)$. Da die Mode TEM_{00} ja ungefähr die Leistung 1 transportiert, ergibt das Betragsquadrat mit guter Genauigkeit für die obigen Parameter den Wert der numerischen Rechnung.

$$P_{\text{längs}10} = 1.0 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi w_0} \right)^2 = \left(\frac{2.14\text{mm}}{2\pi \cdot 20\text{mm}} \right)^2 = 29.0 \cdot 10^{-5}$$

Dieselbe Geometrie mit denselben Parametern, aber mit einer um 90° gedrehten anfänglichen Polarisationsrichtung ergibt folgende Falschmodenanteile:

$P_{\text{kopol}} (10^{-5})$	0	1	2	n_x
0	99600	6	140	1
1	44	2	6	0
2	122	0	0	0
n_y 3	10	0	0	0

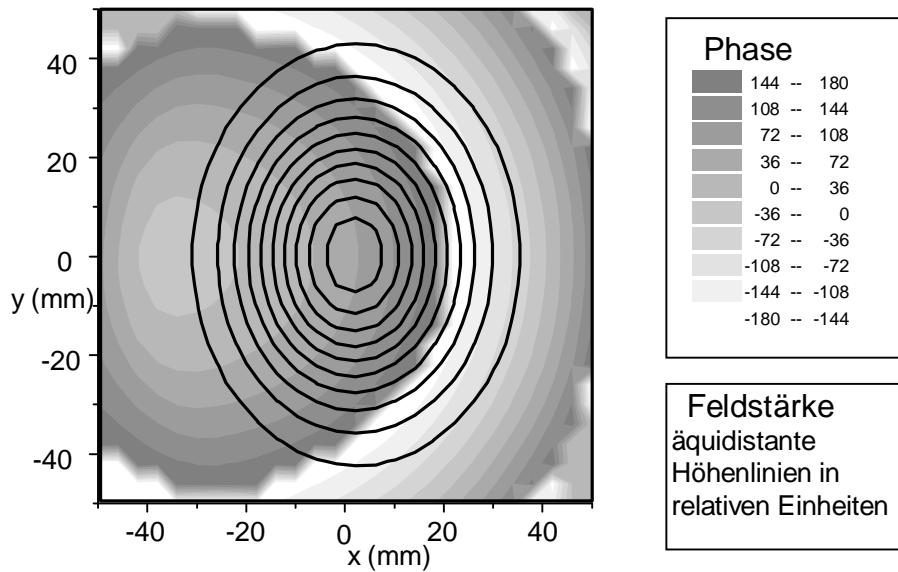
Die Werte entsprechen denen aus Abb. 29, das heißt, die Strahleigenschaften sind *von der Polarisation unabhängig*. Lediglich die Leistung der longitudinalen Komponente steckt nun in der Mode mit Index 01 statt 10. Aus den zwei Fällen lässt sich jede beliebige Polarisation konstruieren, sie spielt demnach für den Falschmodenanteil keine Rolle.

In der zweiten geeigneten Konfiguration aus vier Spiegeln, der Zick-Zack-Anordnung, ergeben sich ebenso gute Ergebnisse. Für $\Delta x^2 + \Delta y^2 < 100^2$ liegt der Anteil an der Fundamentalmode über 99.5%. Die Falschmoden verteilen sich bei $p = 0$, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 100$ wie folgt:

$P_{\text{kopol}} (10^{-5})$	0	1	2	n_x
0	-	345	0	0
1	0	0	0	0
2	37	1	0	0
n_y 3	0	0	0	0

Das Spektrum unterscheidet sich jedoch deutlich von demjenigen der Q-Konfiguration. (Abb. 29). Während dort vernehmlich die symmetrischen Moden TEM_{02} und TEM_{20} erzeugt werden, was auf einen nichtangepassten Strahlradius hindeutet (Abb. 3/rechts), ergibt sich bei der Z-Konfiguration vor allem die Falschmode TEM_{10} , d. h. eine transversale Versetzung (Abb. 3/links).

Was dagegen eine 'nicht geeignete' Spiegel-Konfiguration (in Abb. 30: Omega) bedeutet, zeigt Abb. 30, der direkte Vergleich, welcher mit denselben Strahlparametern gerechnet wurde.



$P_{\text{kopol}} (10^{-5})$	0	1	2	n_x
0	47411	27907	7873	3068
1	0	0	0	0
2	5182	2892	838	351
n_y 3	0	0	0	0

$P_{\text{kreuz}} (10^{-5})$	0	1	2	n_x
0	0	0	0	0
1	152	89	23	8
2	0	0		0
n_y 3	51	28	7	3

Abb. 30: Phase, Leistung und Falschmodenanteile des mm-Wellenstrahles nach 4 Spiegeln, Ω -Konfiguration, $p=0$, $\Delta x=100$, $\Delta y=0$. Eine ungeeignete Anordnung aus 4 Spiegeln verschlechtert die Strahleigenschaften

Die Leistung in den Falschmoden liegt um zwei Größenordnungen höher als bei den ‘geeigneten’ Anordnungen. Der Schwerpunkt der Leistungsverteilung ist nur relativ leicht verschoben gegen die Sollposition.

Der große Falschmodenanteil ergibt sich aber auch ohne die detaillierte Modenanalyse, wenn man das zweite Moment der Leistungsverteilung berechnet. Die Breite der Verteilung ist gegeben durch

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 21.5\text{mm} \quad \text{und} \quad \sqrt{\langle y^2 \rangle} = 27.9\text{mm}$$

statt jeweils 20mm am Beginn der Spiegelkombination. Bereits für den Zentralstrahl ($\Delta x = \Delta y = 0$), bzw. für eine herkömmliche Leitung mit *einem* Strahl pro Spiegel, ergibt diese Geometrie 99.3% in der Mode TEM_{00} , wobei der Großteil der fehlenden Leistung (0.45%) in die kreuzpolarisierte Mode TEM_{01} gewandelt wird.

Beim oben definierten ‘Standardfall’, von dem ausgehend die Parameter variiert werden, wird der gaußsche Strahl am Start nur in Δx -Richtung verschoben, nicht aber nach Δy . An vielen Stellen dieser Arbeit wird nur die Versetzung in die Δx -Richtung diskutiert. Auf den folgenden vier Schaubildern erkennt man, dass der Leistungsverlust nicht nur vom Betrag des Abstandes zum Zentrum abhängt: Bei gegebenem maximalen Verlust lässt die Q-Konfiguration eine

größere Strahlversetzung in Δx -Richtung zu, bei der Z-Konfiguration ist dagegen $|\Delta y_{\max}| > |\Delta x_{\max}|$.

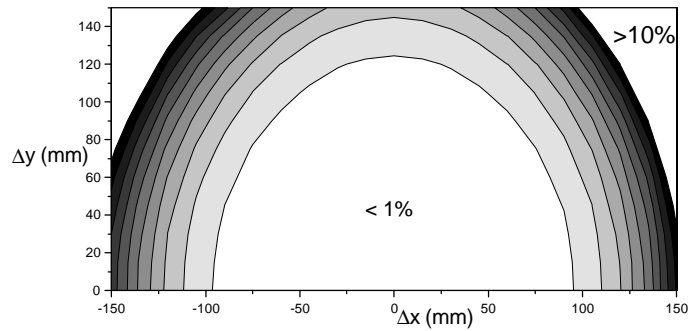


Abb. 31: Verlust an Leistung in der fundamentalen Mode nach 4 Spiegeln in Z-Konfiguration in Abhängigkeit von der Strahlversetzung, $p=0$, $w_0=20$, $f=1000$

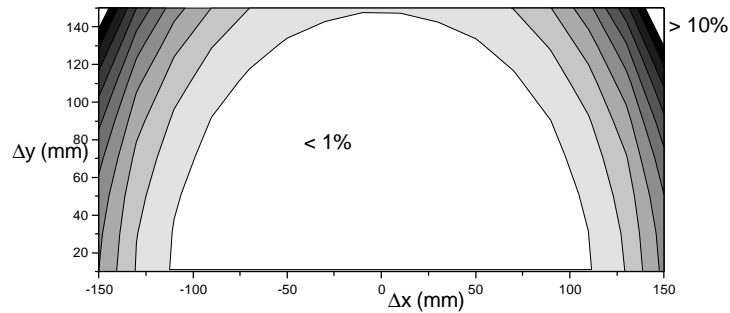


Abb. 32: Verlust an Leistung in der fundamentalen Mode nach 4 Spiegeln in Z-Konfiguration in Abhängigkeit von der Strahlversetzung, $p=0.5$, $w_0=20$, $f=1000$

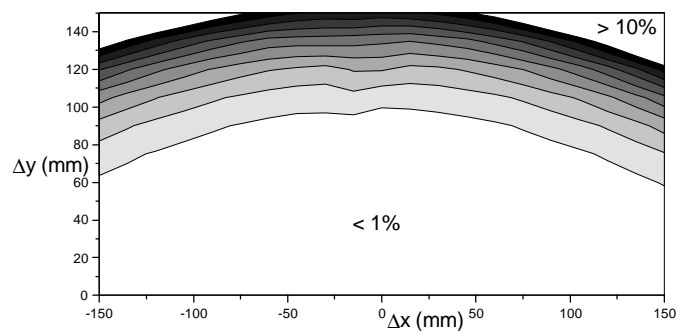


Abb. 33: Verlust an Leistung in der fundamentalen Mode nach 4 Spiegeln in Q-Konfiguration in Abhängigkeit von der Strahlversetzung, $p=0$, $w_0=20$, $f=1000$

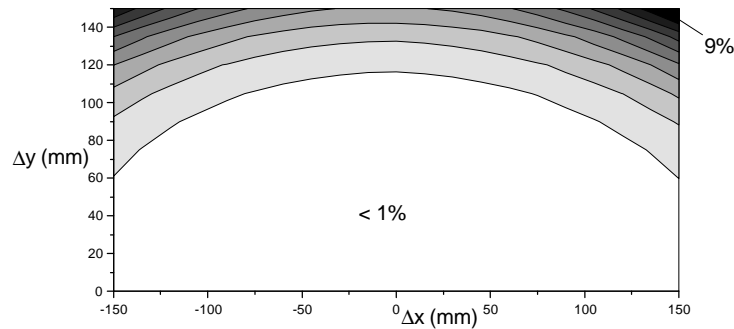


Abb. 34: Verlust an Leistung in der fundamentalen Mode nach 4 Spiegeln in Q -Konfiguration in Abhängigkeit von der Strahlversetzung, $p=0$, $w_0=30$, $f=1000$

Die Fläche innerhalb einer Höhenlinie gleicher Verlustleistung bestimmt die Zahl der übertragbaren Kanäle. Diese ist für die Q -Konfiguration größer als für die vergleichbare Z -Anordnung.

3.3.4 1-2-4 Spiegel im Vergleich

Die Verbesserung der Strahleigenschaften durch die Kombination von vier Spiegeln wird deutlich durch den direkten Vergleich der Falschmodenanteile an den verschiedenen Brennebenen. Die Modenanalyse hinter dem ersten Spiegel muss auf einer gekippten Messebene durchgeführt werden, andernfalls ergeben sich für die Leistungsanteile der Moden Werte nahe null. Die anderen Messebenen stehen dagegen senkrecht zum Zentralstrahl. Sie beinhalten also neben 'echter' Modenwandlung auch die Fehlanpassung durch z. B. leicht schräg einfallende Strahlung. Wie Abb. 35 zeigt, sinkt die Leistung in jeder der Falschmoden hinter dem vierten Spiegel bei geeigneter Anordnung stark.

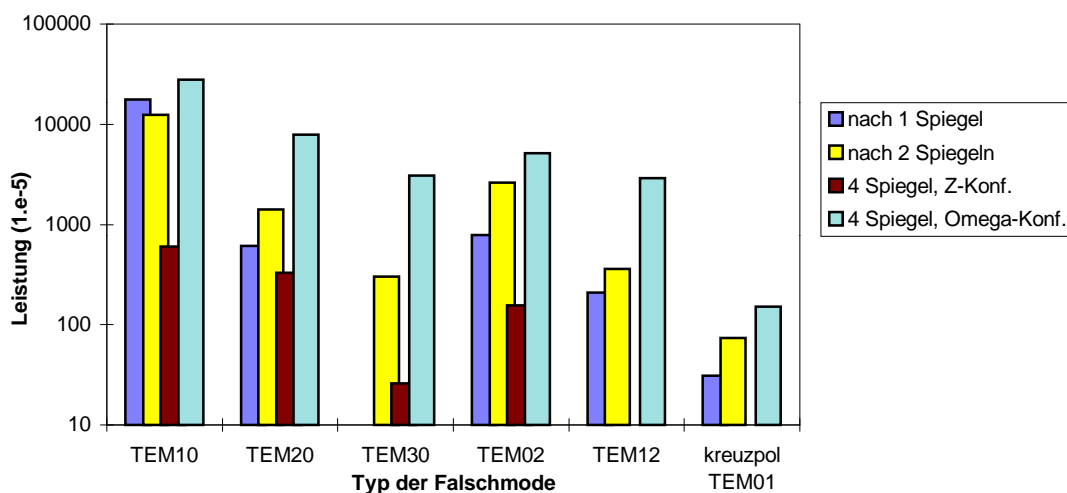


Abb. 35: Vergleich der Falschmodenanteile nach 1, 2 und 4 Spiegeln, $p=0$, $\Delta x=100$, $\Delta y=0$. Die Leistung in den Falschmoden verringert sich bei der geeigneten 4-Spiegel-Anordnung um mehr als eine Zehnerpotenz

Die Abhängigkeit des Leistungsverlustes von der Strahlversetzung Δx ist im folgenden Schaubild aufgetragen. Auf den ersten Blick erkennt man die Verbesserung bei vier Spiegeln. Die Punkte, welche den Verlust nach zwei Spiegeln beschreiben, lassen sich sehr gut mit einer Parabel dritter Ordnung beschreiben:

$$P^{\text{nach}2} = c_0^{\text{nach}2} + c_3^{\text{nach}2}(f, w_0) \cdot \Delta x^3 \quad (78)$$

Der Offset c_0 entspricht offensichtlich dem Leistungsverlust für den Zentralstrahl. Die Abhängigkeit der Größe c_3 lässt sich allerdings auf empirischem Wege nicht finden. Nach vier Spiegeln ist der Leistungsverlust nur noch in der vierten Potenz von Δx abhängig. Der Fit ergibt:

$$P^{\text{nach}4} = c_0^{\text{nach}4} + c_4^{\text{nach}4}(f, w_0) \cdot \Delta x^4 \quad (79)$$

Die detaillierte, analytische Rechnung im folgenden Kapitel wird ergeben, dass bei sehr großen Werten von $\Delta x/f$ nicht mehr die vierte, sondern die sechste Potenz der Taylorentwicklung den größten Beitrag liefert.

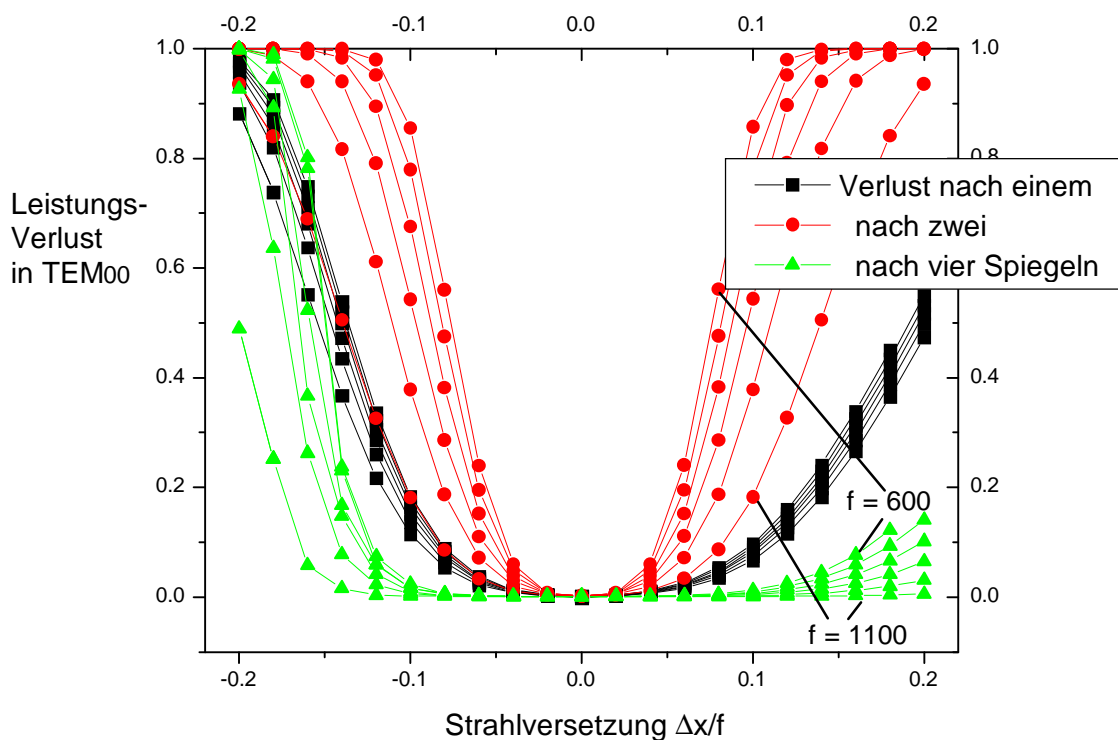


Abb. 36: Vergleich der Falschmodenanteile nach 1, 2 und 4 Spiegeln, Q-Konfiguration, Scharparameter ist die Brennweite $f=600..1100$. Außerdem $p=0$, $w_s=f/20$, $\Delta y=0$

3.4 Analytische Rechnungen

Im letzten Kapitel wurden die Eigenschaften eines gaußschen Strahles beim Durchlaufen eines Vielstrahl-Wellenleiters berechnet und die Ergebnisse interpretiert. Diese basieren auf numerischen Rechnungen des elektromagnetischen Strahles mittels des Huygensschen Prinzips. Es lassen sich damit beliebige Spiegeloberflächen und Anordnungen simulieren. Allerdings muss bei jeder Änderung der Eingangsparameter die Rechnung erneut durchgeführt werden. Dieses Vorgehen ist für das Design einer konkreten Übertragungsleitung relativ unproblematisch, da nur wenige freie Parameter existieren. Generell ist aber eine funktionale Abhängigkeit der Strahlverluste von den Eingangsparametern wünschenswert. Mit dem numerischen Verfahren konnte auch durch systematische Parametervariation nicht auf eine Formel für die Falschmodenanteile geschlossen werden.

Bisher existieren analytische Formeln nur für elliptische Spiegeloberflächen [Mur-87, Vin-95]. Diese überführen bestmöglich die Phasenfront des ein- und die des auslaufenden gaußschen Strahles. Im Vielstrahl-Wellenleiter taucht dieses Ellipsoid nur als Sonderfall auf, als Zentralstrahl beim passenden Spiegeloberflächenparameter. Im Folgenden werden analytische Ausdrücke für die Modenwandlung im Vielstrahl-Wellenleiter hergeleitet.

3.4.1 Methode

Das naheliegende Verfahren zur Berechnung des gesamten Wellenleiters ist es, jede der Falschmoden an jeder Reflexion neu zu berechnen. Diese Methode schlägt aber fehl, da bereits für einen einzelnen Spiegel mit nicht-elliptischer Oberfläche keine analytische Formel für die Falschmodenleistung gefunden wurde. Man kann aber von vornherein die günstige Eigenschaft von Spiegelkombinationen als Hilfsmittel verwenden. Für die analytische Behandlung der Falschmodenanteile müssen dann noch drei verschiedene Effekte behandelt werden. Sie können in drei Gruppen klassifiziert werden, je nachdem, welche Ordnung der Spiegeloberflächenfunktion dafür zuständig ist:

1. Es kommt zu *Abbildungsfehlern* derjenigen Strahlen, die den Spiegel nicht direkt im Zentrum treffen. Dies ist ganz analog zur *sphärischen Aberration* in der geometrischen Optik. Das bedeutet, dass an der letzten Brennebene die Strahlachse nicht exakt senkrecht und nicht an der Sollposition auftrifft. Die Abweichungen dieser Strahlparameter können als Falschmode interpretiert und auch quantifiziert werden:

- Ein leicht parallel versetzter gaußscher Strahl ist äquivalent zu einem fundamentalen Strahl mit einem kleinen Anteil der niedrigsten kopolarisierten Falschmode TEM_1^{kopol} in derselben Phasenlage (oder $\cdot e^{i\pi}$). Siehe dazu den ersten Summanden in Gleichung (35).
- Ein Strahl mit einem Anteil derselben Mode TEM_1 , die aber um $\pm\pi/2$ phasenverschoben ist, kann als schräge Strahlachse des TEM_0 interpretiert werden (zweiter Summand (35)).

2. Neben Richtung und Position können auch die anderen Parameter des gaußschen Strahles von den Sollwerten abweichen. D. h. im Wesentlichen, dass die Strahltaille zu groß oder zu klein ist oder nicht direkt in der Ausgangsebene liegt. Man erhält dort stattdessen eine gekrümmte Phasenfront oder sogar einen *Astigmatismus*. Für die Berechnung muss zusätzlich zur Richtung der Oberflächennormalen auch die lokale Brennweite der Spiegeloberfläche berücksichtigt werden. Sie weicht im Allgemeinen vom Sollwert f ab. Der gaußsche Strahl wird ein wenig zu stark oder zu schwach fokussiert, wodurch sich die Taille längs der Strahlachse verschiebt.

- Die Analyse eines solchen Strahles ergibt zusätzlich zur Fundamentalmode einen Beitrag der niedrigsten symmetrischen Falschmode TEM_2^{kopol} . Siehe dazu auch Gleichung (36).

3. Zusätzlich zu diesen Fehlern erster und zweiter Ordnung kommt es an allen gekrümmten Spiegeloberflächen zur Modenwandlung, da es (auch theoretisch) keine Spiegeloberfläche gibt, welche Amplitude und Phase von zwei fundamentalen gaußschen Strahlen fehlerlos aneinander anpasst (*Coma*). Insbesondere wird beim Vielstrahl-Wellenleiter dieselbe Spiegeloberfläche von mehreren Strahlen gleichzeitig benutzt, so dass hier zusätzlich ein Kompromiss für die verschiedenen Strahlen gefunden werden muss. Im folgenden Kapitel ‘Modenrekonversion’ wird allerdings gezeigt, dass sich bei geeigneter Anordnung von vier Spiegeln die jeweils erzeugten Falschmoden größtenteils gegenseitig kompensieren. Es ergibt sich für die kopolarisierten Falschmoden, dass diese Modenwandlung — eine geeignete Anordnung vorausgesetzt — letztendlich *gegenüber den anderen Abbildungsfehlern vernachlässigbar* ist. Lediglich die kreuzpolarisierte Falschmode (TEM_{01}^{kreuz}) muss genau betrachtet werden, da es durch die oben beschriebenen Abbildungsfehler nicht zu einer Drehung der Polarisationsrichtung kommen kann.

Zur Berechnung der Falschmodenanteile kann also folgendermaßen vorgegangen werden:

In einem ersten Schritt wird ein Strahl im Sinne der Strahlenoptik verfolgt, der zu Beginn auf der Symmetrieachse des zu analysierenden gaußschen Strahles liegt. Einen solchen ‘echten’ Strahl kann man sich zum Beispiel bei Millimeterwellenanwendungen vorstellen als einen Laser. Seine Wellenlänge ist sehr klein, sodass die Divergenz des Strahles keine Rolle spielt. Position und Einfallswinkel des Lasers stimmen an jeder Stelle sehr gut mit dem Schwerpunkt der Amplitudenverteilung bzw. mit der Normalen zur Phasenfront des mm-Wellenstrahles überein. Oder in anderen Worten: Für die Position des gaußschen Strahles reicht es aus, die Spiegeloberfläche in erster Ordnung zu evaluieren.

Für die weitere Berechnung muss neben dem Abstand dieser Laser-Auftreffpunkte die lokale Oberflächenkrümmung, d. h. die *lokale Brennweite* berechnet werden. Diese beschreibt den Spiegel in zweiter Ordnung.

Eine geeignete Spiegelkonfiguration vorausgesetzt, müssen die nächst höheren Terme der Spiegeloberfläche nicht berücksichtigt werden. D. h. es ist ausreichend, eine gaußsche Mode beim Durchgang durch ein System von idealen Phasenplatten zu verfolgen, die jeweils keine weitere Modenkonzersion verursachen. Die beiden transversalen Richtungen müssen im Allgemeinen getrennt voneinander betrachtet werden, entsprechend zwei verschiedenen Krümmungsradien.

3.4.2 Modenrekonzersion durch geeignete Spiegel-Konfiguration

Die numerischen Ergebnisse (wie auch das Experiment) lassen deutlich erkennen, dass es für einen Vielstrahl-Wellenleiter aus vier Spiegeln zwei besonders geeignete Konfigurationen gibt. Auch für zwei Spiegel lassen sich mehr oder weniger geeignete Anordnungen voraussagen [Mur-87]. In Analogie zu Ergebnissen an überdimensionierten Hohlleitern [Qui-92] kann auch hier nach einer Rechtskrümmung durch geeignete Linkskrümmung der Anteil der erzeugten Falschmoden wieder kompensiert werden.

3.4.2.1 Zwei Spiegel

Zunächst wird der Einfachheit halber der Zentralstrahl betrachtet, es zeigt sich aber, dass auch für den versetzten Strahl ($\Delta x, \Delta y \neq 0$) dasselbe Ergebnis gilt.

Man startet mit einer reinen, fundamentalen Mode TEM_{00} , das heißt, man geht aus von den im allgemeinen komplexen Amplituden $A_{00} = 1$ und $A_{xy} = 0$; für jede andere Mode $xy \neq 00$. Die Phase von A_{xy} bezieht sich in jedem Fall und an jeder z-Position auf die Fundamentalmode.

$$\Rightarrow \quad \text{Im}(A_{00}) \equiv 0$$

Aus dem Betrag der Amplitude errechnet sich die in der Mode transportierte Leistung:

$$P_{xy} = |A_{xy}|^2 \quad (80)$$

Am ersten Spiegel wird ein Teil der Leistung in Falschmoden umgewandelt. Im Allgemeinen werden mehrere Moden gleichzeitig erzeugt. Die folgende Betrachtung gilt für jede der Moden einzeln, die hier der Einfachheit halber mit einem einzelnen Index k unterschieden werden. Eine reine Fundamentalmode erzeuge an *einem* Spiegel die Mode k mit der Amplitude A_k^S . An der numerischen Rechnung (Abb. 25) erkennt man, dass vor allem die kopolarisierten Moden mit Index 10, 12 und 30 erzeugt werden. Die Summe der Indizes ist offensichtlich jeweils ungerade. Die Amplitude A_k^S ist von der genauen Spiegeloberfläche abhängig, von Phasenkrümmung und Strahlradius des einfallenden TEM_{00} und vom Einfallswinkel. Die Berechnung ist schwierig, und die geschlossene Darstellung ist im allgemeinen Fall unmöglich. Der genaue Wert von A_k^S spielt allerdings für die folgende Überlegung keine Rolle, sondern lediglich die Eigenschaft, dass die Amplitude rein reell ist, denn in jedem Fall wird die Falschmode von der Fundamentalmode und damit in derselben Phase erzeugt.

$$\begin{aligned} A_k^{\text{vor1}} &= 0 \\ A_k^{\text{nach1}} &= A_{00}^{\text{vor1}} \cdot A_k^S \approx A_k^S \end{aligned} \quad (81)$$

Auf dem Weg zum zweiten Spiegel erfährt die Mode k gegenüber der TEM_{00} -Welle eine Phasenverschiebung, die Amplitude bleibt gleich. Mit den Abkürzungen

$$\Theta \equiv \arctan\left(\frac{\lambda f}{\pi w_0^2}\right), \quad n \equiv n_x + n_y \quad \text{und} \quad \Theta_k \equiv n\Theta \quad (82)$$

ergibt sich wegen der konfokalen Anordnung

$$A_k^{\text{vor2}} = A_k^{\text{nach1}} \cdot e^{-i2\left(\frac{n\pi}{2} - \Theta_k\right)} = A_k^S \cdot e^{-i2\left(\frac{n\pi}{2} - \Theta_k\right)} \quad (83)$$

Am zweiten Spiegel wird erneut aus der Fundamentalmode dieselbe Falschmode generiert, während wegen $|A_k| \ll A_{00}$ andere Konversionen vernachlässigt werden können. Die Parameter des einfallenden Strahles sind dieselben wie beim ersten Spiegel, der Einfallswinkel, der Auftreffort und damit die Spiegeloberfläche sind im Rahmen der Näherung gleich. Es ergibt sich derselbe Falschmodenanteil, der phasenrichtig zum existierenden Anteil addiert werden muss. Hier ergibt sich ein Unterschied zwischen den verschiedenen Spiegelanordnungen. In der Zick-Zack-Anordnung wird dieselbe Phasenlage angeregt ($v_2 = +1$), während in der anderen Anordnung noch ein Vorzeichenwechsel ($v_2 = -1$) auftritt.

$$\begin{aligned} A_k^{\text{nach2}} &= A_k^{\text{vor2}} + v_2 A_k^S = \dots \\ &= A_k^S \cdot \left[\left((-1)^n + v_2 \right) \cos \Theta_k + i \left((-1)^n - v_2 \right) \sin \Theta_k \right] \end{aligned} \quad (84)$$

Eine Rekonversion der Falschmode durch den zweiten Spiegel ergibt sich nur für Sonderfälle:

- $v_2 = +1 \wedge \sin \Theta_k = 0$

Dies entspricht der Z-Konfiguration mit $(n_x + n_y) \arctan \frac{\lambda f}{\pi w_0^2} = m\pi, \quad m \in \mathbb{N}_0$

Ein Beispiel hierfür ist die Mode TEM_{12} ($n_x = 1, n_y = 2$) in einer Anordnung mit $\Theta = \pi/3$,

oder gleichbedeutend $\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} = \sqrt{3}$.

Dieser und auch der nächste Fall wird u. a. in [Mur-87] vorgeschlagen.

- $v_2 = -1 \wedge \cos \Theta_k = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Q-Konfiguration,} \quad (n_x + n_y) \arctan \frac{\lambda f}{\pi w_0^2} = \frac{2m+1}{2} \pi, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Diese Bedingung kann gleichzeitig für mehrere Moden erfüllt werden, wie z. B. TEM_{10} , $\text{TEM}_{10}^{\text{kreuz}}$, TEM_{12} , TEM_{30} . Allerdings muss die anfängliche Strahltaile so schmal sein, dass sich der erste Spiegel bereits im Fernfeld befindet, also $\Theta = \pi/2$ ist. Dies bedeutet

$\frac{\lambda f}{\pi w_0^2} \rightarrow \infty$ und verletzt strenggenommen die Paraxialität.

3.4.2.2 Vier Spiegel

Dieselbe Rechnung für eine Anordnung aus vier Spiegeln ergibt

$$A_k^{\text{nach4}} = A_k^S \cdot \left[\left(1 + (-1)^n v_2 + (-1)^n v_3 + v_4 \right) \cos \Theta_k + i \left(1 - (-1)^n v_2 + (-1)^n v_3 + v_4 \right) \sin \Theta_k \right] \quad (85)$$

$$v_2, v_3, v_4 = \pm 1$$

Die Vorzeichen-Faktoren sind abhängig von der Spiegelgeometrie. Man erkennt, dass sich für die Moden mit ungeradem n bei zwei der Anordnungen eine vollständige Rekonversion der Falschmoden ergibt, und zwar unabhängig von der Phasenverschiebung Θ :

- $v_2 = v_3 = v_4 = +1 \quad \leftrightarrow \quad \text{Zick-Zack-Konfiguration}$
- $v_2 = +1, v_3 = v_4 = -1 \quad \leftrightarrow \quad \text{Quadratische Konfiguration}$

In jeder anderen Anordnung ergibt sich eine Verstärkung der Effekte der einzelnen Spiegel. Beispielsweise ist in der Ω -förmigen Anordnung die Leistung in jeder der Falschmoden

$$P_{\text{nach4}}^{\Omega\text{-Konfig}} = 16 |A_k^S|^2 \sin^2 \left((n_x + n_y) \Theta \right), \quad (86)$$

was wiederum nur für einige Spezialfälle null ergibt.

Man kann die Amplitude der Falschmode beim Durchlaufen der verschiedenen Schritte auch in einem Zeigerdiagramm darstellen. Dabei erkennt man exemplarisch, wie sich in der Z-Konfiguration und in der Q-Konfiguration die Falschmodenbeiträge durch die verschiedenen Spiegel kompensieren.

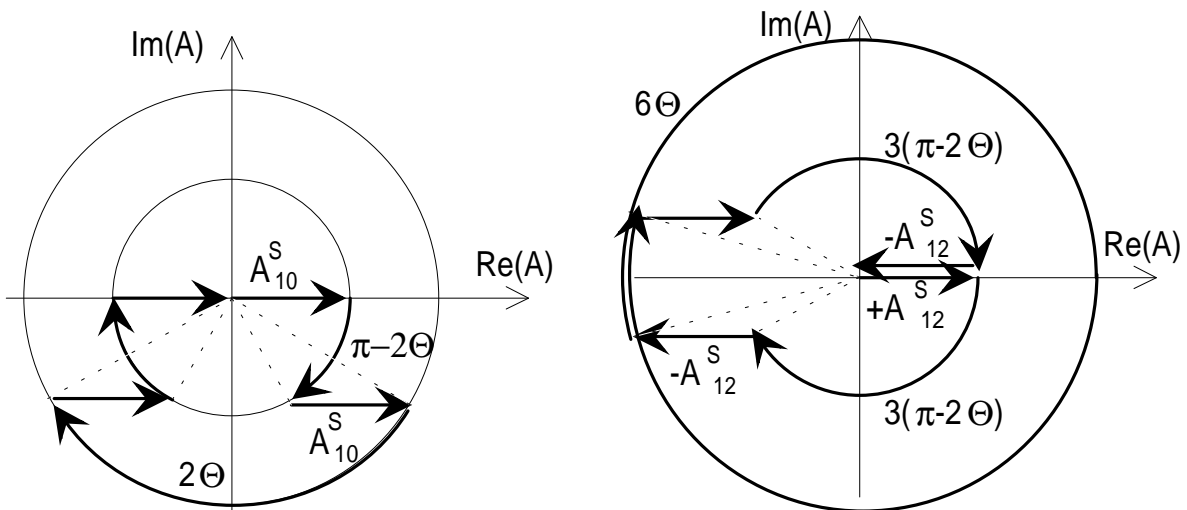


Abb. 37: Zeigerdiagramm für die Entwicklung der komplexen Amplitude einer Falschmode bei 4 Spiegeln. Links: TEM_{10} Z-Konfiguration, Rechts: TEM_{12} Q-Konf. Die Propagationsstrecken ändern den Phasenfaktor, während an den Spiegeln ein Beitrag von $\pm A^S$ erzeugt bzw. addiert wird

Für jeden beliebigen Phasenwinkel Θ und jede Amplitude A^S führt die Kombination aus Phasenverschiebungen und Additionen eines Anteils in der Phase von TEM_{00} zum Ursprung

zurück. D. h. bei den beiden genannten Spiegelanordnungen ist der Zentralstrahl ($\Delta x = \Delta y = 0$) frei von Modenkonzersion. Bei den versetzten Strahlen stimmen die jeweils erzeugten Anteile und Phasenverschiebungen nicht mehr exakt überein, d. h. die Pfeile führen nicht mehr direkt zum Ursprung zurück. Allerdings sind die Abweichungen klein

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta} \approx \frac{\Delta x}{f} \ll 1 \quad (87)$$

und bei den kopolarisierten Moden vernachlässigbar gegenüber den Abbildungsfehlern. Bei den kreuzpolarisierten Falschmoden müssen allerdings die exakten Werte verwendet werden, denn hier ist die Modenkonzersion an gekrümmten Oberflächen der einzige Mechanismus zur Erzeugung. Die Summe der Beiträge ergibt nicht exakt null, und am Ende der Leitung bleibt trotz geeigneter Spiegelanordnung ein kreuzpolarisierter Beitrag, der allerdings wesentlich kleiner ist, als nach nur einem Spiegel.

3.4.3 Weg eines 'echten' Strahles

Wie bereits erwähnt verhalten sich Position und Richtung eines gaußschen Strahles nach dem Vielstrahl-Wellenleiter wie für einen Strahl im Sinne der Strahlenoptik. Wenn die Spiegeloberfläche eine Parabel zweiter Ordnung ist ($p = 0$), dann lässt sich der Schnitt zwischen dem Strahl und der Fläche analytisch exakt berechnen. Für Parabelflächen dritter Ordnung ($p \neq 0$) ist der analytische Schnitt lediglich in der Näherung $\Delta x/f \ll 1$ möglich. An jedem Schnittpunkt von der Parabel mit der Geraden muss neben dem Normalenvektor der Fläche auch die Brennweite der Fläche berechnet werden, sowohl in x- als auch in y-Richtung.

3.4.3.1 Ein Spiegel

Im Koordinatensystem des Spiegels ist die Gleichung der Parabel (eindimensional) für den Fall $p = 0$

$$z_s(x_s) = \frac{1}{4\sqrt{2}f} x_s^2 \quad (89)$$

Der Strahl startet mit der Steigung 1 bei

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{-f + \Delta x}{\sqrt{2}} \\ z_s &= \frac{f + \Delta x}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (90)$$

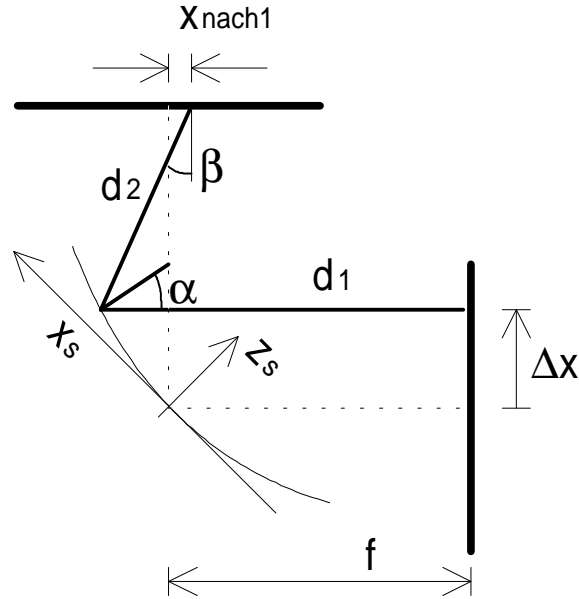


Abb. 38: Erklärung der verwendeten Größen für die Berechnung des Weges eines 'echten Strahles' beim Durchlaufen des Vielstrahl-Wellenleiters

Nach der Reflexion trifft der Strahl leicht versetzt durch die zweite Brennebene. Die exakte Position des Auftreffpunktes ist bereits in diesem einfachsten Fall sehr unübersichtlich. Allerdings sind bereits die zwei niedrigsten Ordnungen der Entwicklung nach $\varepsilon = \Delta x/f$ als Ergebnis ausreichend. Für die weitere Rechnung müssen dagegen wesentlich mehr Ordnungen verwendet werden.

$$x_{\text{nach1}} = f \frac{\sqrt{1 + \varepsilon(14 + 4\varepsilon - 2\varepsilon^2)} - 14 - 11\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{3 + 2\varepsilon - \varepsilon^2} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{f} \quad (91)$$

$$\approx \frac{3 \Delta x^2}{4f} - \frac{3 \Delta x^3}{8f^2} + \frac{31 \Delta x^4}{64f^3} + O(\varepsilon^5)$$

Wenn man neben der Parabel zweiter Ordnung andere Spiegeloberflächen mit berücksichtigt ($p \neq 0$) und zusätzlich eine anfängliche Versetzung nach Δy zulässt, dann ergibt sich für den Schnittpunkt durch die Brennebene

$$x_{\text{nach1}} = \frac{3}{4}(1-p) \frac{\Delta x^2}{f} + \frac{1}{4}(1-p) \frac{\Delta y^2}{f} + \left(-\frac{3}{8} + p\right) \frac{\Delta x^3}{f^2} + \left(-\frac{5}{8} + p\right) \frac{\Delta x \Delta y^2}{f^2} + O(\Delta x^4, \Delta y^4) \quad (92)$$

Diese Kurve (mit $\Delta y = 0$) ist in Abb. 22 im Vergleich zu den numerischen 'Messpunkten' eingezeichnet. Für das off-axis-Paraboloid ($p = 1$) trifft der Laserstrahl wie erwartet direkt durch den Brennpunkt.

Der Reflexionswinkel α^{Spiegel1} auf dem Spiegel, die lokalen Krümmungen K_x^{Spiegel1} und K_y^{Spiegel1} am Auftreffpunkt des Strahles und letztendlich die lokalen Brennweiten sind:

$$\begin{aligned}
\alpha^{\text{Spiegel 1}} &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{f} + \frac{1}{8} \frac{\Delta x^2}{f^2} + \frac{1}{48} (-1 + 3p) \frac{\Delta x^3}{f^3} + \dots \\
K_x^{\text{Spiegel 1}} &= \frac{\sqrt{2}}{4f} + \frac{3\sqrt{2}p}{8} \frac{\Delta x}{f^2} + \frac{3\sqrt{2}}{32} (-1 - p) \frac{\Delta x^2}{f^3} + \dots \\
K_y^{\text{Spiegel 1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2f} + \frac{\sqrt{2}p}{4} \frac{\Delta x}{f^2} + \frac{\sqrt{2}}{16} (-1 - p) \frac{\Delta x^2}{f^3} + \dots \\
f_x^{\text{Spiegel 1}} &= f + \frac{1}{2} (1 - 3p) \Delta x + \frac{1}{8} (1 - 3p + 18p^2) \frac{\Delta x^2}{f} + \dots \\
f_y^{\text{Spiegel 1}} &= f + \frac{1}{2} (-1 - p) \Delta x + \frac{1}{8} (5 + 3p + 2p^2) \frac{\Delta x^2}{f} + \dots
\end{aligned} \tag{93}$$

Die Ausdrücke 0ter Ordnung in Δx sind trivial. Die Abhängigkeiten erster Ordnung kann man wie folgt interpretieren:

- Der Einfallswinkel α nimmt ab mit positivem Δx , die Oberfläche neigt sich zunehmend zum Strahl hin.
- Die Krümmungen K der Spiegeloberfläche nehmen für das symmetrische Paraboloid ($p = 0$) nach beiden Richtungen hin ab. Das Paraboloid hat am Scheitel die stärkste Krümmung.
- Für $p > 0$ nehmen die Krümmungen mit positivem Δx zu, da der Auftreffpunkt dann näher beim Scheitel der Parabel liegt.

3.4.3.2 Zwei Spiegel

Wenn man den ‘echten’ Strahl weiter verfolgt und den Schnitt mit der Brennebene nach dem zweiten Spiegel berechnet ($p = 0$), so ergeben sich folgende Positionen und Winkel gegen die Normale:

$$\begin{aligned}
x_{\text{nach2}}^{\text{Z-Konfig}} &= -\Delta x - \frac{3}{4} \frac{\Delta x^3}{f^2} + O(\Delta x^4) & \beta_{\text{nach2}}^{\text{Z-Konfig}} &= \frac{3}{2} \frac{\Delta x^2}{f^2} + O(\Delta x^3) \\
x_{\text{nach2}}^{\text{Q-Konfig}} &= \Delta x - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{f} + O(\Delta x^3) & \beta_{\text{nach2}}^{\text{Q-Konfig}} &= 0
\end{aligned} \tag{94}$$

Das Ergebnis erster Ordnung ist wiederum trivial. Während in der Z-Konfiguration die Strahlen ihre gegenseitige Position ändern ($x = -\Delta x + O(\Delta x/f)$), bleibt die Orientierung in der x -Richtung bei der Q-Anordnung gleich. Von den Termen der nächst höheren Ordnung ist neben dem exakten Wert vor allem die Potenz der Entwicklung interessant. Im Vergleich der beiden Anordnungen ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der numerischen Rechnung. Der Strahl in der Z-Konfiguration trifft besser durch die Soll-Position ($|x^{\text{Z-Konfig}} + \Delta x| \ll |x^{\text{Q-Konfig}} - \Delta x|$). Die Abweichung ist hier nur in dritter Ordnung in Δx . Dafür trifft der Strahl aber unter einem Winkel ungleich 90° auf die Ebene, während in der Q-Konfiguration der Strahl exakt parallel zum Startstrahl verläuft.

Für $p \neq 0$ und $\Delta y \neq 0$ werden die Formeln erwartungsgemäß wesentlich komplexer. Sie können jeweils mit numerischen Rechnungen bestätigt werden. Der Schnittpunkt mit der Messebene

und der Auftreffwinkel können nun außerdem in der y -Richtung von den Sollwerten abweichen. Exemplarisch sei hier nur der Auftreffpunkt für die Z-Konfiguration notiert:

$$\begin{aligned} x_{\text{nach2}}^{\text{Z-Konfig}} &= -\Delta x + \frac{3}{4}(-1 - 2p + 3p^2) \frac{\Delta x^3}{f^2} + \frac{1}{4}(1 - 6p + 5p^2) \frac{\Delta x \Delta y^2}{f^2} + \dots \\ y_{\text{nach2}}^{\text{Z-Konfig}} &= -\Delta y + \frac{1}{4}(-3 - 2p + 5p^2) \frac{\Delta x^2 \Delta y}{f^2} + \frac{1}{4}(1 - 2p + p^2) \frac{\Delta y^3}{f^2} + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

Man erkennt, dass für den Sonderfall $p = 1$ die ohnehin kleine Abweichung des Auftreffpunktes für mindestens eine weitere Größenordnung von $\Delta x/f$ bzw. $\Delta y/f$ verschwindet.

3.4.3.3 Vier Spiegel

Ergänzt man die Anordnungen um zwei weitere Spiegel, so existieren acht Anordnungen. Neben den beiden ausgezeichneten sind hier exemplarisch die Ergebnisse der Ω -Konfiguration gerechnet. Siehe hierzu auch die kompletten Formeln im Anhang!

$$\begin{aligned} x_{\text{nach4}}^{\text{Z-Konfig}} &= \Delta x - \frac{15}{4} \frac{\Delta x^4}{f^3} + O(\Delta x^5) & \beta_{\text{nach4}}^{\text{Z-Konfig}} &= 3 \frac{\Delta x^3}{f^3} + O(\Delta x^4) \\ x_{\text{nach4}}^{\text{Q-Konfig}} &= \Delta x & \beta_{\text{nach4}}^{\text{Q-Konfig}} &= 0 \\ x_{\text{nach4}}^{\Omega\text{-Konfig}} &= \Delta x + 3 \frac{\Delta x^3}{f^2} + O(\Delta x^4) & \beta_{\text{nach4}}^{\Omega\text{-Konfig}} &= 3 \frac{\Delta x^2}{f^2} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (96)$$

Bei den ersten beiden Fällen ergibt der Vergleich mit den Werten nach dem zweiten Spiegel, dass die Abweichung von der Soll-Position und vom exakt senkrechten Einfall deutlich kleiner geworden sind. Die Werte sind jeweils um eine Größenordnung, also den Faktor $\Delta x/f$ gesunken. In der Q-Konfiguration ist die Spiegelanordnung symmetrisch zur Startebene, der Ebene der anfänglichen Taille. Da hier der Strahl nach zwei Spiegeln exakt antiparallel verläuft, trifft er nach den Spiegeln drei und vier aus Symmetriegründen auch wieder exakt auf den Startpunkt.

Bei den vier Spiegeln der Ω -Konfiguration dagegen ergibt sich keine Verbesserung gegenüber der 2-Spiegel-Anordnung.

Die optimale Anordnung scheint die Q-Konfiguration zu sein. Wenn man für diese Geometrie eine allgemeine Spiegeloberfläche berücksichtigt, dann ergibt die Rechnung

$$\begin{aligned} x_{\text{nach4}}^{\text{Q-Konfig}} &= \Delta x + \frac{p}{8}(4 - 9p)(8 - 9p^2) \frac{\Delta x^5}{f^4} + O(\Delta x^6) \\ \beta_{\text{nach4}}^{\text{Q-Konfig}} &= \frac{1}{2} p(4 - 9p) \frac{\Delta x^3}{f^3} + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (97)$$

Diese Werte für den gaußschen Strahl sind in nullter Ordnung (Ort Δ) und erster Ordnung (Winkel β) für $p = 0$ exakt null. Die Abweichungen werden also bei jeder anderen Oberfläche nicht besser. Offenbar trifft aber zum Beispiel der Strahl auch für $p = 4/9$ senkrecht auf die

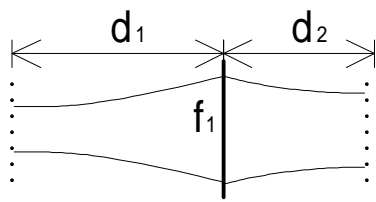
Sollposition. Es zeigt sich, dass auch die weiteren gaußschen Parameter (passende Strahltaile und flache Phasenkrümmung) ebenfalls eine große Rolle für Strahlqualität spielen. Dieser Effekt kann überwiegen über den günstigen geometrisch-optischen Eigenschaften der Anordnung aus einfachen Paraboloiden.

3.4.4 Kopolarisierte Falschmoden

Im vorangegangenen Kapitel wurde der Weg eines geometrischen Strahles berechnet. Aus den resultierenden Abbildungsfehlern und den Abweichungen der gaußschen Parameter relativ zum Sollstrahl lässt sich der dominierende Teil der kopolarisierten Falschmoden ermitteln.

3.4.4.1 Ein Spiegel

Die Rechnung erfolgt mit dem ABCD-Matrix-Formalismus (Kapitel 2.3.5), mit dem auch der gesamte Wellenleiter analysiert werden kann. Der Spiegel wird dabei wie eine dünne Linse, also ohne Modenwandlung behandelt. Aus dem in Abb. 38 skizzierten Fall wird eine gerade Leitung.



$$\begin{aligned}
 d_1 &= f + \Delta x + \left[-\frac{\Delta x^2}{2f} + \dots \right] \\
 f_{1,x} &= f + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} p \right) \Delta x + \dots \\
 d_2 &= f - \Delta x + \left[\frac{\Delta x^2}{2f} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{98}$$

Abb. 39: Abweichung von der streng konfokalen Geometrie bei den um Δx versetzten Strahlen

Die Abstände und Brennweite wurden im vorangegangenen Kapitel berechnet. Bei der Propagation eines gaußschen Strahles durch dieses System ergibt sich, dass die Strahlen in der zweiten Brennebene i. Allg. keine ebene Phasenfront haben. Für $\Delta y = 0$ bzw. $\Delta x = 0$ lässt sich jeweils eine optimierte Spiegeloberfläche, d. h. ein Parabelparameter finden, sodass die Taille in der Brennebene zu liegen kommt.

$$p_{\Delta x} = \frac{3\pi^2 w_0^4 + \lambda^2 f^2}{3\pi^2 w_0^4 - 3\lambda^2 f^2} = \frac{3 + \tan^2 \Theta}{3 - 3 \tan^2 \Theta}, \quad p_{\Delta y} = \frac{1 + 3 \tan^2 \Theta}{1 - \tan^2 \Theta} \tag{99}$$

Die Lösung ist wegen der Singularität bei $\tan \Theta = 1$ nur möglich, wenn πw_0^2 stark ungleich λf ist. Das sind die Fälle mit großem Strahlradius am Spiegel, also kleiner Taille entweder am Start oder an der ersten Brennebene.

3.4.4.2 Zwei Spiegel

Nach zwei Spiegeln haben sich Falschmoden noch nicht vollständig zurück gewandelt. Daneben hat aber auch der fundamentale gaußsche Anteil wegen der falschen Strahlparameter eine Fehlanpassung zur Folge. Für diese Berechnung verwendet man wiederum den ABCD-Matrix-Formalismus, wobei getrennt werden muss zwischen der x- und der y-Richtung. Durch die unterschiedlichen lokalen Brennweiten ergibt sich im Allgemeinen $w_x \neq w_y$ und $R_x \neq R_y$, und daraus resultiert dann ,getrennt voneinander, der Falschmodenanteil TEM_{10} und TEM_{20} , bzw. TEM_{01} und TEM_{02} .

Bei der Q-Anordnung (zunächst: $p = 0$) ergibt sich für den Strahlradius w_x und die Phasenkrümmung $1/R_x$

$$\begin{aligned} w_x &= w_0 - \frac{w_0 \Delta x}{f} + O(\Delta x^2) \\ \frac{1}{R_x} &= \frac{-2\lambda^2}{fw_0^2\pi^2} \Delta x^2 - \frac{5\lambda^2}{f^2 w_0^4 \pi^2} \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (100)$$

Im Folgenden wird der Einfachheit halber der Restterm (' $+O(\Delta x^2)$ ') nicht mehr explizit geschrieben. Alle Ergebnisse sind Entwicklungen nach Δx , sofern es nicht ausdrücklich vermerkt ist.

Die Abweichungen von den Sollwerten w_0 bzw. $R^{-1} = 0$ sind für die Fehlanpassung an eine TEM_{00} von unterschiedlich großer Bedeutung. Das Überlappintegral (33) zweier fundamentaler gaußscher Moden mit verschiedenen Parametern ist im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar. Man kann aber die einzelnen Effekte betrachten. So resultiert sowohl aus der Versetzung des Strahles, als auch aus der Krümmung der Phasenfront eine Verlustleistung lediglich in der Größenordnung $(\Delta x/f)^4$. Dies ist vernachlässigbar gegenüber der Wirkung der falsch angepassten Taille. Der Verlust hierdurch ist proportional zur zweiten Potenz von Δx .

$$P_{\text{Verlust}}^{\text{Q,nach2}} = \frac{\Delta x^2}{4f^2} + \text{y-Richtung-Term} \quad (101)$$

3.4.4.3 Vier Spiegel

Nach vier Spiegeln im Vielstrahl-Wellenleiter ist die Konversion in Falschmoden, welche sich unweigerlich bei jedem Spiegel einstellt, größtenteils kompensiert. Was bei der Kopplung an die weitere Leitung an Verlusten bleibt, ist die Fehlanpassung eines fundamentalen gaußschen Strahles mit leicht abweichenden Parametern. Die Rechnung liefert für den toroidalen Spiegel folgende Werte für die Krümmungen und die Strahlradien in x- und in y-Richtung:

Q-Konfiguration:

$$\begin{aligned}
R_{X_{\text{nach4}}}^{-1Q\text{-Konfig}} &= -4 \tan^2 \Theta \frac{\Delta x^2}{f^3} - 2 \tan^2 \Theta \frac{\Delta x^3}{f^4} \\
R_{Y_{\text{nach4}}}^{-1Q\text{-Konfig}} &= (1 + 3 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^2}{f^3} + \frac{1}{2} (1 - 9 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^3}{f^4} \\
w_{X_{\text{nach4}}}^{Q\text{-Konfig}} &= w_0 + w_0 8 \tan^2 \Theta \frac{\Delta x^4}{f^4} \\
w_{Y_{\text{nach4}}}^{Q\text{-Konfig}} &= w_0 + w_0 \frac{3}{2} (1 + 3 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^4}{f^4}
\end{aligned} \tag{102}$$

Z-Konfiguration:

$$\begin{aligned}
R_{X_{\text{nach4}}}^{-1Z\text{-Konfig}} &= (-9 - 7 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^2}{f^3} \\
R_{Y_{\text{nach4}}}^{-1Z\text{-Konfig}} &= (-2 - 6 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^2}{f^3} \\
w_{X_{\text{nach4}}}^{Q\text{-Konfig}} &= w_0 \left[1 - 15 \frac{3 \Delta x^3}{2 f^3} + \frac{7}{2} (15 + 7 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^4}{f^3} \right] \\
w_{Y_{\text{nach4}}}^{Z\text{-Konfig}} &= w_0 \left[1 - \frac{3 \Delta x^3}{2 f^3} + 6 (1 + 3 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x^4}{f^3} \right]
\end{aligned} \tag{103}$$

Ω -Konfiguration

$$\begin{aligned}
R_{X_{\text{nach4}}}^{-1\Omega\text{-Konfig}} &= (7 + \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x}{f^2} & w_{X_{\text{nach4}}}^{\Omega\text{-Konfig}} &= w_0 \left[1 + \frac{\Delta x}{f} \right] \\
R_{Y_{\text{nach4}}}^{-1\Omega\text{-Konfig}} &= (1 + 7 \tan^2 \Theta) \frac{\Delta x}{f^2} & w_{Y_{\text{nach4}}}^{\Omega\text{-Konfig}} &= w_0 \left[1 - \frac{\Delta x}{f} \right]
\end{aligned} \tag{104}$$

Die Ergebnisse für die allgemeine Spiegeloberfläche ($p \neq 0$) finden sich im Anhang.

Unter Verwendung des Überlappintegrals (33) errechnet sich daraus der Verlust an Leistung in der Fundamentalmode zu

$$\begin{aligned}
1 - P_{\text{kopol00}}^{Z\text{-Konfig}} &= \frac{85\pi^2 w_0^4 \Delta x^4}{8\lambda^2 f^6} + O(\Delta x^5) \\
1 - P_{\text{kopol00}}^{Q\text{-Konfig}} &= \frac{\pi^2 w_0^4 \Delta x^4}{8\lambda^2 f^6} + O(\Delta x^5)
\end{aligned} \tag{105}$$

Hieraus darf nicht direkt geschlossen werden, dass die Q-Konfiguration in jedem Fall der Z-Anordnung vorzuziehen ist. Man muss vielmehr auch die weiteren Terme (Δx^5 , Δx^6) betrachten, die ebenfalls im Anhang aufgeführt sind. Dort findet sich außerdem, wie sich diese Leistung auf die verschiedenen Falschmoden verteilt.

Eine ähnlich einfache Gleichung läßt sich für die Ω -Konfiguration nicht angeben. Ist allerdings die Modenkonzersion eines einzelnen Strahles an einem einzelnen Spiegel bekannt, dann errechnet sich der Gesamt-Leistungsverlust mit Hilfe von Gleichung (86).

Für die symmetrischen Falschmoden TEM_{02} und TEM_{20} ist der endliche Krümmungsradius, eine nichtpassende Strahltaile oder beide Fehlanpassungen verantwortlich. Von Fall zu Fall kann der jeweilige Effekt gegenüber dem anderen vernachlässigt werden. Es darf nicht selbstverständlich nach der niedrigsten Ordnung der Δx -Entwicklung abgebrochen werden. Trotz eines typischen Wertes von $\Delta x/f = 0.1$ für den Kleinheitsparameter ist oft das zweithöchste Glied vergleichbar zur führenden Potenz.

3.4.5 Kreuzpolarisation

An den Spiegeloberflächen geschieht eine Modenwandlung nicht nur in andere kopolarisierte Moden, sondern auch in kreuzpolarisierte Anteile. Für den off-axis ellipsoidalen Spiegel ist dieser Anteil quantitativ berechenbar [Mur-87] zu

$$A_{\text{kreuz01}}^S = \frac{\tan \alpha w_s}{2f}, \quad (106)$$

mit

α Einfallswinkel

w_s Strahlradius am Spiegel.

Numerische Rechnungen zeigen, dass auch für andere Spiegeloberflächen mit der Brennweite f , d. h. andere Parameter p diese Formel richtig bleibt (Abb. 25). Der Anteil an der kreuzpolarisierten Mode 01 ist demnach nur von der lokalen Brennweite, dem Strahlradius und vom Einfallswinkel abhängig. Außerdem sieht man, dass keine weiteren kreuzpolarisierten Moden angeregt werden.

Für diese Falschmode gilt dasselbe wie für die kopolarisierten Anteile mit $n_x + n_y$ ungerade: Nach vier geeignet installierten Spiegeln kompensiert sich die Modenkonzersion weitestgehend. Da aber diese Modenwandlung an den gekrümmten Spiegeloberflächen der einzige Mechanismus zur Erzeugung einer kreuzpolarisierten Welle ist, kann man diesen kleinen Anteil sowohl im numerischen wie auch im experimentellen Ergebnis gut erkennen. Im kopolarisierten Fall wird dieser Effekt überdeckt von anderen Abbildungsfehlern des fundamentalen gaußschen Strahles.

Durch die günstige Tatsache, dass der Falschmodenanteil von der Spiegelkrümmung nur in niedrigster Ordnung abhängt, lässt sich die Rechnung aus Kapitel 3.4.2 ('Modenrekonzersion') verfeinern:

Die lokalen Brennweiten und die Einfallswinkel sind ungleich der Brennweite des Zentralstrahles. Diese Abhängigkeit von Δx ist bereits für die Berechnung des Strahlenverlaufes eines 'echten Strahles' notwendig. Daneben muss an jedem Spiegel der Strahlradius w_s berechnet werden. Der für alle vier Spiegel konstante Wert niedrigster Ordnung

$$w_s = w_0 \sqrt{1 + \tan^2 \Theta} \quad (107)$$

muss um die erste Ordnung in Δx erweitert werden. Außerdem ist die Phasenverschiebung der Mode TEM_{01} gegenüber der Mode TEM_{00} auf dem Weg zwischen den Spiegeln nicht exakt gleich 2Θ , bzw. $\pi-2\Theta$, sondern zusätzlich von Δx abhängig. In Gleichung (88) lässt sich A^S nicht mehr ausklammern, da der erzeugte Falschmodenanteil an den verschiedenen Spiegeln nicht gleich ist. Nach vier Spiegeln ergibt sich dann eine Leistung in der kreuzpolarisierten Mode, die mit der zweiten Potenz von Δx ansteigt:

$$P_{\text{kreuz01}}^{\text{Z-Konfig}} = P_{\text{kreuz01}}^{\text{Q-Konfig}} = \frac{4\lambda^2}{\pi^2 w_0^2 f^2} \Delta x^2 \quad (108)$$

3.5 Vergleich von analytischen und numerischen Ergebnissen

Die analytischen Formeln für die Modenanteile des Strahles am Ausgang des Vielstrahl-Wellenleiters, die im Anhang angegeben sind, werden verifiziert durch den Vergleich mit den numerischen Rechnungen. Diese verwenden ein völlig anderes Rechenverfahren, und daher können systematische Fehler ausgeschlossen werden. Die numerischen Resultate wiederum werden durch den Vergleich mit dem Laborexperiment bestätigt (Kapitel 4). Obwohl dort relativ extreme Parameter verwendet wurden, wird die Messung sehr gut wiedergegeben. Numerische Fehler, sowie Abweichungen von der Paraxialität sind im Normalfall wesentlich schwächer.

Der Vergleich zwischen den analytischen und numerischen Ergebnissen illustriert auch nochmals die Abhängigkeit der Falschmodenanteile von den Eingangsparametern.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist in den folgenden Schaubildern jeweils nur *ein* Parameter variiert. Die anderen Größen werden festgehalten beim Wert des oben eingeführten Standardfalles (73). Scharparameter der Kurven innerhalb der Schaubilder ist der Index der gaußschen Mode. Die durchgezogenen Linien sind die Graphen der oben berechneten Funktionen, die Markierungen sind die 'numerischen Messpunkte'.

Die einfachste Abhängigkeit ist die von der Strahlversetzung Δx , welche in Abb. 41 dargestellt ist, und von Δy . Die Verluste wachsen vom Zentralstrahl aus gesehen nach jeder Richtung an. Die Leistung der symmetrischen Moden TEM_{xy} , d. h. n_x+n_y gerade, wachsen an mit Δx^4 , bei anderen Moden sogar mit der 6ten Potenz von Δx . Man erkennt, dass nahe dem Zentralstrahl der Leistungsverlust $1-TEM_{00}$ der Fundamentalmode relativ schlecht wiedergegeben wird, während die Falschmodenanteile bei den beiden Rechenverfahren auch für kleine Δx sehr gut übereinstimmen. Bemerkenswert ist die extreme Rückwandlung der kreuzpolarisierten Mode, denn sie trägt bei einem Einzelspiegel die größten Verluste.

Es geht also in der numerischen Rechnung sozusagen Leistung der fundamentalen Mode TEM_{00} verloren, die nirgends anders auftaucht. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Konversion in hohe, nicht erfasste Moden
- Nicht vollständige Rekonversion von Falschmoden
- Konversion in kreuzpolarisierte Moden \neq TEM₀₁

Abschneide- und Streuverlust aufgrund endlich großer Spiegel können ausgeschlossen werden, da die Gesamtleistung über die ganze Leitung konstant ist und die numerische Rechnung für ausreichend große Spiegel durchgeführt wurde. Diese Diskrepanz zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen tritt vermutlich auch bei großen Abständen vom Zentralstrahl auf, fällt aber dort nicht ins Gewicht.

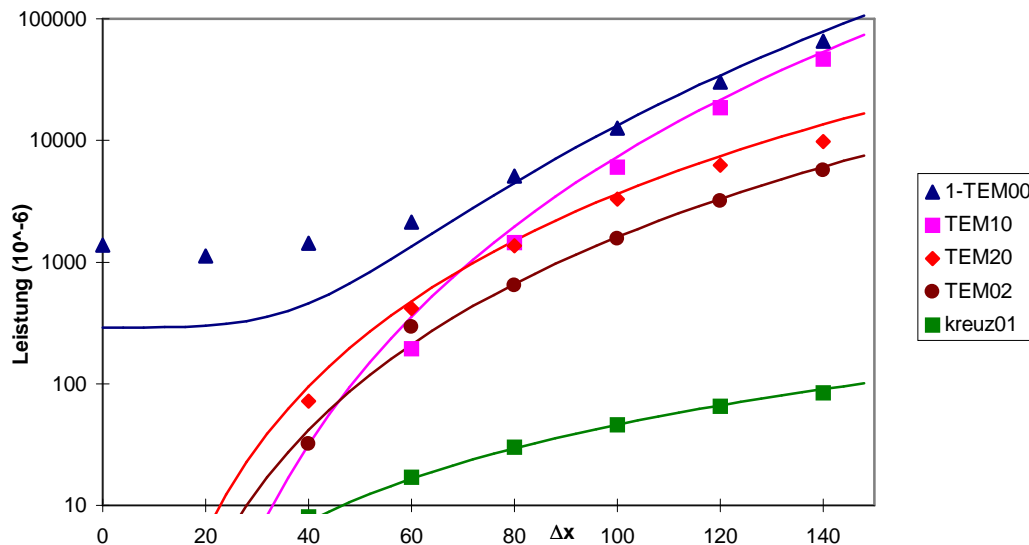


Abb. 41: Falschmodenanteil nach 4 Spiegeln in Z-Konfiguration in Abhängigkeit von der Versetzung Δx , restliche Parameter siehe (73)

Bei der Variation der Strahltaile w_0 zu Beginn der Leitung ist die Interpretation weniger einfach. Es ergibt sich keine starke Abhängigkeit, d. h. also, die Verluste sind über den gesamten Parameterbereich von w_0 relativ konstant (Abb. 42). Insbesondere könnte man erwarten, dass sich für den symmetrischen Fall

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} = 26.1 \text{ mm}$$

ein ausgezeichnetes Ergebnis ergibt. Für diesen Sonderfall ist der ellipsoide Spiegel gleich dem toroidalen, der Strahlradius am Spiegel (bei gegebener Brennweite) ist minimal, es ergibt sich $\tan\Theta = 1$, und die Taille hinter dem ersten Spiegel ist gleich der Taille am Start. Das Minimum von $1 - P_{\text{TEM00}}$ liegt bei diesen Parametern vielmehr bei $w_0 \approx 19 \text{ mm}$. Auch bei anderen Parametersätzen zeigt sich für den 'symmetrischen' w_0 -Wert kein Minimum oder eine andere Besonderheit.

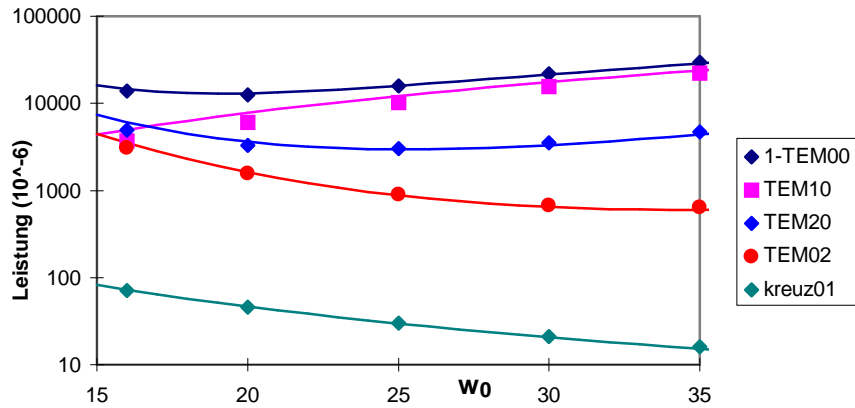


Abb. 42: Falschmodenanteil nach 4 Spiegeln in Z-Konfiguration in Abhängigkeit von der Strahltaile w_0 , restliche Parameter siehe (73)

Bei größer werdender Brennweite f , bei welcher auch der Abstand der Spiegel ansteigt, ist die Abnahme der Oberflächenkrümmung wesentlich. Erwartungsgemäß sinken die Verluste mit steigender Brennweite stark:

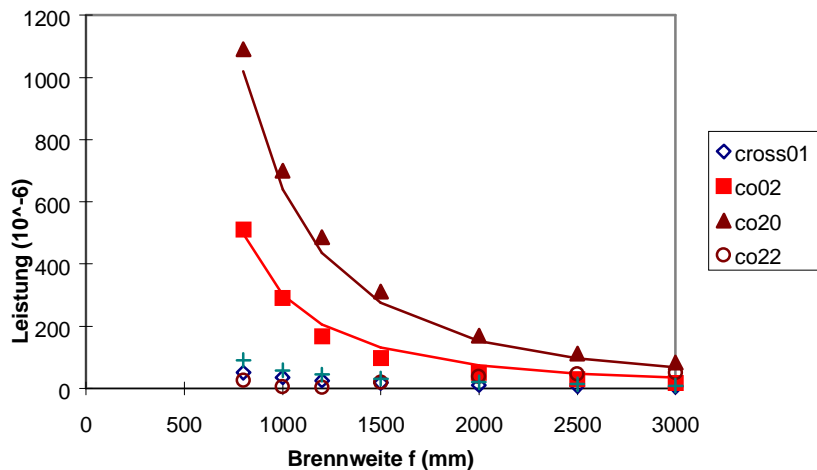


Abb. 43: Falschmodenanteil nach 4 Spiegeln in Z-Konfiguration in Abhängigkeit von der Brennweite f , restliche Parameter siehe (73)

Im Allgemeinen werden bei der Dimensionierung eines Wellenleiters die Größe der Anordnung und die Strahlparameter durch die geometrischen Anforderungen mehr oder weniger festliegen. Eine freie Größe ist der Parabelparameter, welcher die Spiegelfläche beschreibt. Es zeigt sich, dass auch bei dieser Variation des kubischen Anteiles der Oberflächenfunktion die Falschmodenanteile gut wiedergegeben werden.

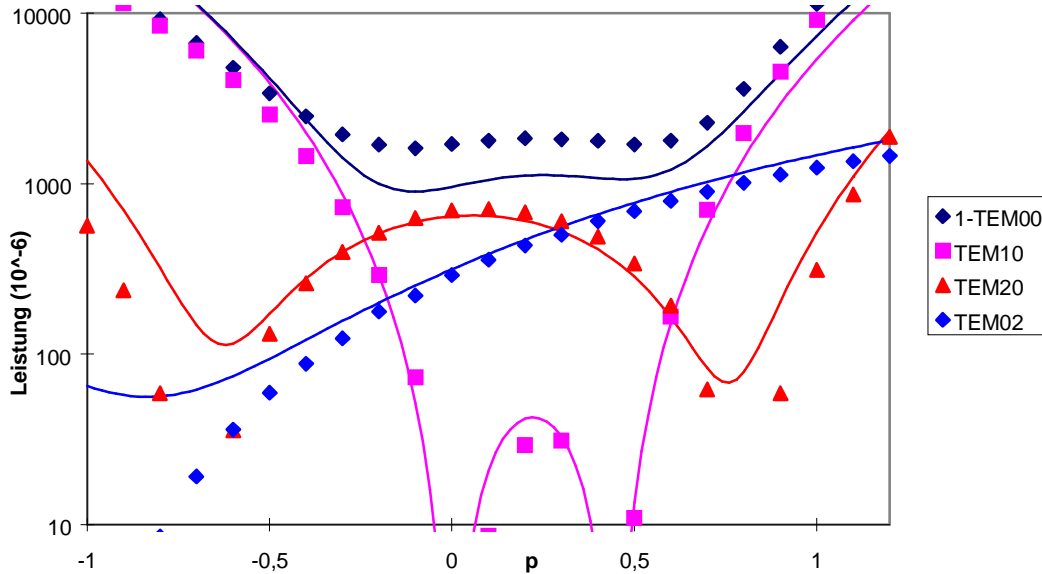


Abb. 44: Falschmodenanteil nach 4 Spiegeln in Q-Konfiguration in Abhängigkeit vom Parabelparameter p , restliche Parameter siehe (73)

Lediglich der Gesamtleistungsverlust fällt bei der analytischen Rechnung aus den beschriebenen Gründen wiederum etwas zu niedrig aus. Mit Hilfe der zugehörigen Formeln kann die Optimierung der Spiegel bezüglich des Parabelparameters p durchgeführt werden.

3.6 Transmission einer Modenmischung

Eine weiterer günstiger Aspekt des konfokalen Vielstrahl-Wellenleiters ist die Eigenschaft, dass eine Mischung aus Moden eines gaußschen Modensystems nach vier Spiegeln phasenrichtig abgebildet wird. Aus Gleichung (83) und dem analogen Ausdruck für die Phasenverschiebung zwischen den weiteren Spiegeln ergibt sich, dass eine Mode höherer Ordnung in der Zielebene um

$$\Delta\varphi = (n_x + n_y) \cdot 2\pi \quad \text{bzw.} \quad \Delta\varphi = (2p + m) \cdot 2\pi \quad (109)$$

gegenüber der Fundamentalmode in der Phase verschoben ist, wobei n_x und n_y für die Indizes einer gauss-hermiteschen, p und m für diejenigen einer gauss-laguerresche Mode stehen. In jedem Fall handelt es sich um natürliche Zahlen, sodass sich als Verschiebung ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ergibt.

Modenmischungen werden zum Beispiel bei Hochleistungs-Anwendungen ganz bewusst eingesetzt, um an Vakuumfenstern die Spitzenbelastung zu reduzieren. In den folgenden Abbildungen erkennt man die Leistungsverteilung und das Ergebnis der Modenanalyse an verschiedenen Querschnitten für einen Strahl, der mit 70% seiner Leistung in der Fundamentalmode, und je 15% in den Moden TEM_{02} und TEM_{20} startet. Die Feldverteilung wird dabei sehr gut an das Ende der Leitung abgebildet.

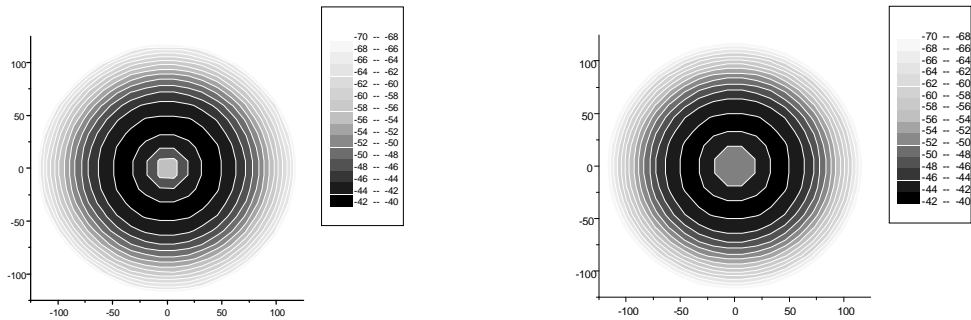


Abb. 45: Leistungsverteilung eines multimodigen mm-Wellenstrahles (70% TEM_{00} +15% TEM_{20} +15% TEM_{02}) am Eingang und am Ausgang des Wellenleiters. Die Verteilung wird gut an das Ende der Leitung abgebildet

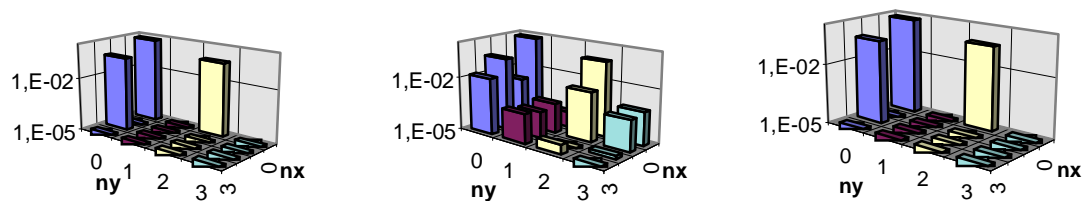


Abb. 46: Analyse eines multimodigen mm-Wellenstrahles (70% TEM_{00} +15% TEM_{20} +15% TEM_{02}) in der Startebene, nach zwei und nach vier Spiegeln. Am Ausgang ergibt sich wieder die anfängliche Modenmischung

3.7 Fazit aus den Untersuchungen

In den vorangegangenen Kapitel wurde der Vielstrahl-Wellenleiter numerisch und vor allem auch analytisch untersucht. Obwohl die Formeln für die Strahlverluste (Anhang) alle Information beinhalten, seien hier nochmals die Ergebnisse für die Auslegung einer derartigen Wellenleitung zusammengefasst:

Für eine Anordnung aus *zwei* Spiegeln existieren zwei mögliche Konfiguration:

- In der Zick-Zack-förmigen Anordnung treffen die Strahlen relativ gut an der erwarteten Position auf, allerdings weicht der Auftreffwinkel mit wachsendem $|\Delta x|$ zunehmend vom senkrechten Einfall ab.
- In der alternativen Anordnung treffen die Strahlen senkrecht auf die Brennebene, sind allerdings transversal versetzt.

Beide Effekte sind ungefähr gleich stark in ihrem Einfluss auf den Leistungsverlust in der Nutzmode.

Bei einer Anordnung aus *vier* Spiegeln kommen für die Anwendung nur zwei der möglichen acht Konfigurationen in Betracht. Nur bei diesen werden die erzeugten Falschmoden weitestgehend zurückgewandelt. Die Verluste in der fundamentalen gaußschen Mode sind

$$1 - P_{\text{TEM00}}^{\text{nach4}} = c_0 + c_4 \Delta x^4 + c_6 \Delta x^6 \quad (110)$$

- Der Offset c_0 entspricht den Verlusten für den Zentralstrahl, die also auch bei einer herkömmlichen Spiegelleitung auftreten. Dazu gehören Strahldeformationen, welche gegenüber denen eines versetzten Strahles sehr klein sind, und vor allem aber ohmsche Verluste [Emp-98a].
- Der Δx^4 -Term rührt daher, dass der gaußsche Strahl keine ebene Phasenfront besitzt, dass also die Taille des Strahles nicht mit der Brennebene zusammenfällt. Außerdem verursacht eine zu große oder zu kleine Taille einen solchen Fehler. Der Entwicklungskoeffizient errechnet sich zu

$$c_4 = C_4(p) \frac{w_0^4}{f^6 \lambda^2} \quad (111)$$

Die Konstante C_4 ist ebenso wie C_6 nur vom Parabelparameter abhängig und in der Größenordnung im Bereich von eins (0.1 .. 10). Die genaue Abhängigkeit findet sich im Anhang.

- Durch die günstigen Eigenschaften der Abbildung trifft der Strahl nahezu senkrecht und an der erwarteten Position auf der Brennebene nach dem vierten Spiegel auf. Die Verluste, welche mit den kleinen, aber vorhandenen Abweichungen verknüpft sind, steigen in der sechsten Potenz in Δx an. Dies wird für große Versetzungen der dominierende Term. Für den Vorfaktor gilt

$$c_6 = C_6(p) \frac{w_0^2}{f^6 \lambda^2} \quad (112)$$

Der off-axis-ellipsoidale Spiegel, wie man ihn für eine herkömmliche Spiegelleitung bauen würde, ist nicht die geeignete Wahl für den Vielstrahl-Wellenleiter. Auch das off-axis-Paraboloid, welches für geometrisch-optische Strahlen optimal ist, bringt nicht die besten Ergebnisse (vgl. Abb. 44, $p = 1$). Für vier Spiegel in Q-förmiger Anordnung wählt man vielmehr eine toroidale Spiegeloberfläche ($p = 0$), während in der Z-Konfiguration der Parabelparameter $p = 0.5$ minimale Verluste liefert.

Hat man sehr viele Strahlen über den Wellenleiter zu übertragen, so verteilt man sie in der Z-Anordnung möglichst zentrisch um den Zentralstrahl. Die Verluste wachsen hier in der Richtung quer zum Wellenleiter (Δy) ebenso stark an wie bei einer Versetzung parallel zur Einfallsebene. In der Q-Konfiguration erhält man für $p = 0.5$ ebenfalls eine ähnlich starke Abhängigkeit von $|\Delta x|$ und von $|\Delta y|$. Für den Fall $p = 0$ lassen sich aber bei gleicher Verlustleistung in Δx -Richtung wesentlich mehr Strahlen anordnen.

4 Messungen

Zur Verifizierung der gerechneten Ergebnisse wurden im Labor Niederleistungsmessungen durchgeführt. Nach Gleichung (110) sind die Abbildungsfehler eines Vielstrahl-Wellenleiters, d. h. die Leistungsverluste in der fundamentalen gaußschen Mode, proportional zu

$$\frac{\Delta x^6 w_0^2}{f^6 \lambda^2} \text{ bzw. } \frac{\Delta x^4 w_0^4}{f^6 \lambda^2},$$

wobei mit w_0 und λ die Strahltaile und Wellenlänge des gaußschen Strahles, mit f die Spiegelbrennweite und mit Δx die transversale Versetzung der Strahlachse gemeint ist. Um dies messen zu können, müssen relativ extreme Parameter, d. h. insbesondere eine kleine Brennweite, verwendet werden.

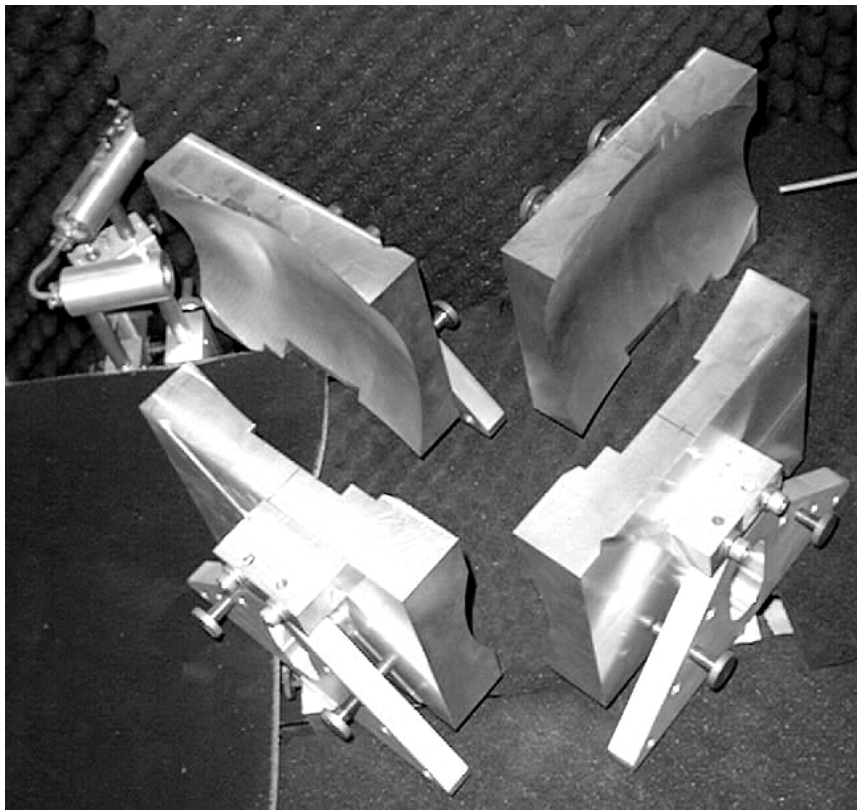


Abb. 47: Vielstrahl-Wellenleiter im Labormaßstab, $f=120\text{mm}$. Man erkennt links das Sendehorn und am rechten Bildrand als Empfänger einen abgesägten D-Band-Hohlleiter. Dieser ist an einer 2-dimensionalen Scannermechanik montiert

Man erhält dann Falschmodenanteile, die nicht mehr klein sind gegenüber der Fundamentalmode. Dies hat zur Folge, dass die Formeln aus dem Kapitel 3.4 (‘Analytische Rechnungen’) nicht mehr angewendet werden können. Die Messungen können aber mit numerischen Rechnungen verglichen werden.

Folgende Parameter wurden für die Messungen verwendet:

- Wellenlänge λ 2.14mm (140GHz)
- Strahltaille w_0 4.5mm
- Strahlversetzung $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq 30\text{mm}$
- Brennweite f 120mm

Mit der Brennweite ist auch der Spiegelabstand auf 240mm festgelegt. Die Anordnung ist also so kompakt (Abb. 47), dass zwischen den Spiegeln keine zusätzlichen Planspiegel eingebaut werden können, um den Strahl ohne Beeinflussung der Eigenschaften umzulenken. Dadurch ist es nicht möglich, die sogenannte Q-Konfiguration nach vier Spiegeln zu vermessen. Hier liegen Sender und Empfänger in der identischen Ebene.

4.1 Messaufbau

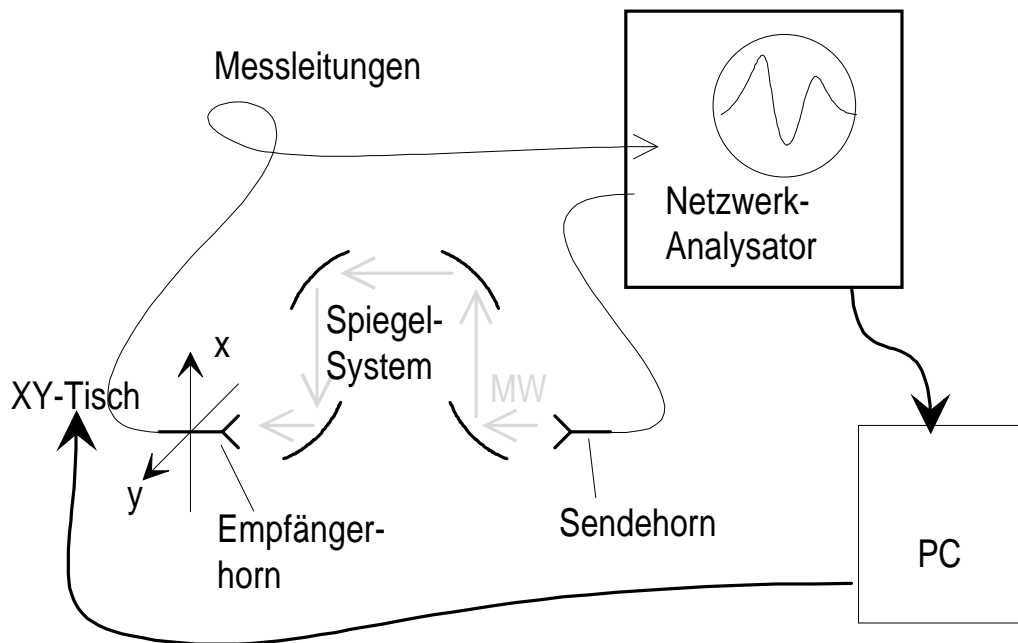


Abb. 48: Schematischer Versuchsaufbau bei der Vermessung der mm-Wellenfelder

Für die Messungen im Niederleistungsbereich stand ein vektorieller Netzwerk-Analysator der französischen Firma AB-millimètre zur Verfügung. Es wurde nur bei der festen Frequenz 140GHz gearbeitet. Das Gerät liefert eine zur Leistung (in dB) oder eine zur Phase des Signals proportionale Gleichspannung, die von einem PC eingelesen wird. Dieser steuert gleichzeitig die Schrittmotoren des xy-Tisches, der es erlaubt, das Empfängerhorn in zwei Dimensionen transversal zur Strahlrichtung zu verfahren. Das Empfängerhorn ist typischerweise als abgesägter Standard-Hohlleiter ausgeführt, also möglichst klein, um eine gute räumliche Auflösung zu erzielen.

Da vom Aufnahmesystem gleichzeitig nur die Amplitude oder nur die Phase verarbeitet werden kann, wurden für jede Position vier separate Messungen durchgeführt, zwei für jede Polarisationsrichtung. Die Leistung der kreuzpolarisierten Moden ist um 20-30dB kleiner als

der kopolarisierte Anteil. Um dies auflösen zu können, müssen die Hörner die beiden Richtungen ausreichend gut voneinander trennen. Man erkennt dann zum Beispiel in der Abb. 49, dass bei einer zu $y = 0$ symmetrischen Anordnung, wenn der Sender also nur in der Δx -Richtung versetzt wird, ausschließlich kreuzpolarisierte Moden mit ungeradem y -Index angeregt werden können. Die Feldverteilung hat bei $y = 0$ eine deutliche Knotenlinie und die Phase zeigt einen Sprung um 180° .

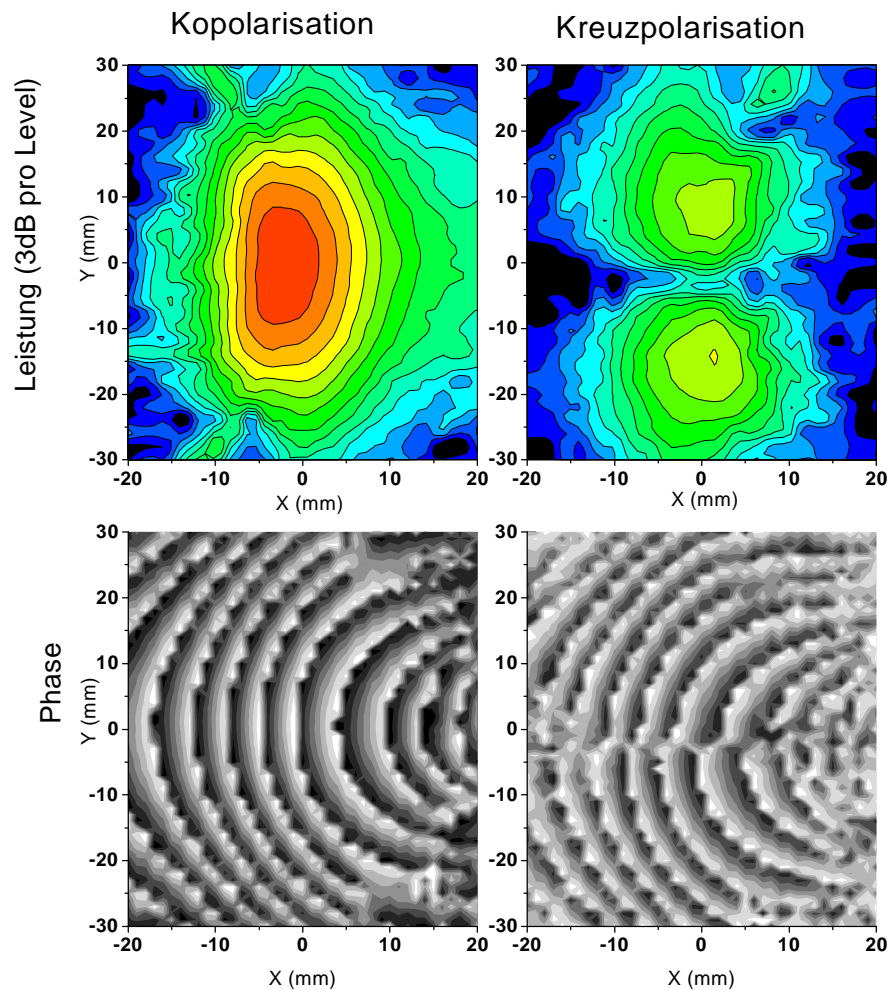


Abb. 49: Leistung und Phase nach 2 Spiegeln, Z-Konfiguration, $\Delta x = -30$, $\Delta y = 0$. Man erkennt deutlich die gekrümmte Phasenfront (unten) und die Knotenlinie $y = 0$ (rechts)

4.2 Ergebnisse

In den folgenden Abbildungen sieht man die Messungen zu dem obigen Parametersatz und der Strahlposition $\Delta x = +30$, $\Delta y = 0$ in allen zugänglichen Brennebenen. Die Schnitte in horizontaler und vertikaler Richtung werden der numerischen Rechnung gegenübergestellt.

In der Startebene hat der Strahl per Definition eine gaußförmige Leistungsverteilung. Die Abszisse bezieht sich relativ zu $P_0 = 1/\text{mm}^2$.

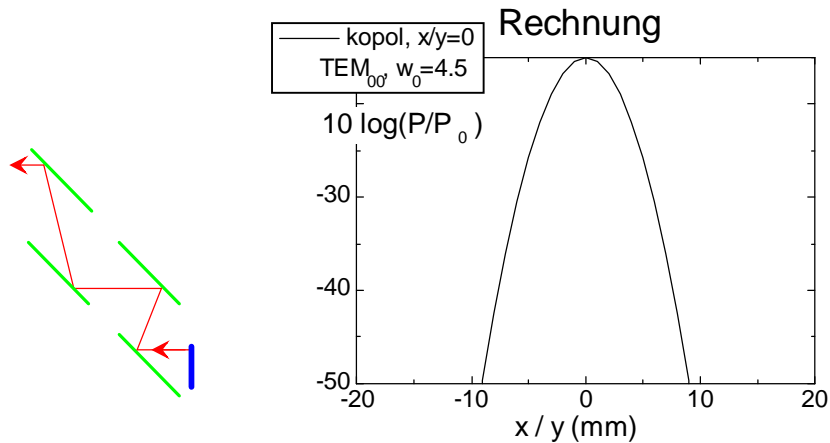


Abb. 50: Leistung des mm-Wellenstrahles in der Startebene, $w_0=4.5$. Der Strahl ist nach Definition rotations-symmetrisch und die Leistung gaußverteilt

Der Strahl in der Ebene nach dem ersten Spiegel ist noch unabhängig davon, wie die (weiteren) Spiegel angeordnet sind. Nach Gleichung (46) ist hier der Strahldurchmesser circa um das 4fache größer als w_0 . In der horizontal abgebildeten (x-) Richtung hat das gemessene Strahlprofil eine Breite von $w_x = 29\text{mm}$, die numerische Rechnung ergibt $w_y = 25.7\text{mm}$. In der vertikal abgebildeten (y-) Richtung misst man $w_y = 22.5\text{mm}$, im Gegensatz zum gerechneten Wert $w_y = 19.4\text{mm}$.

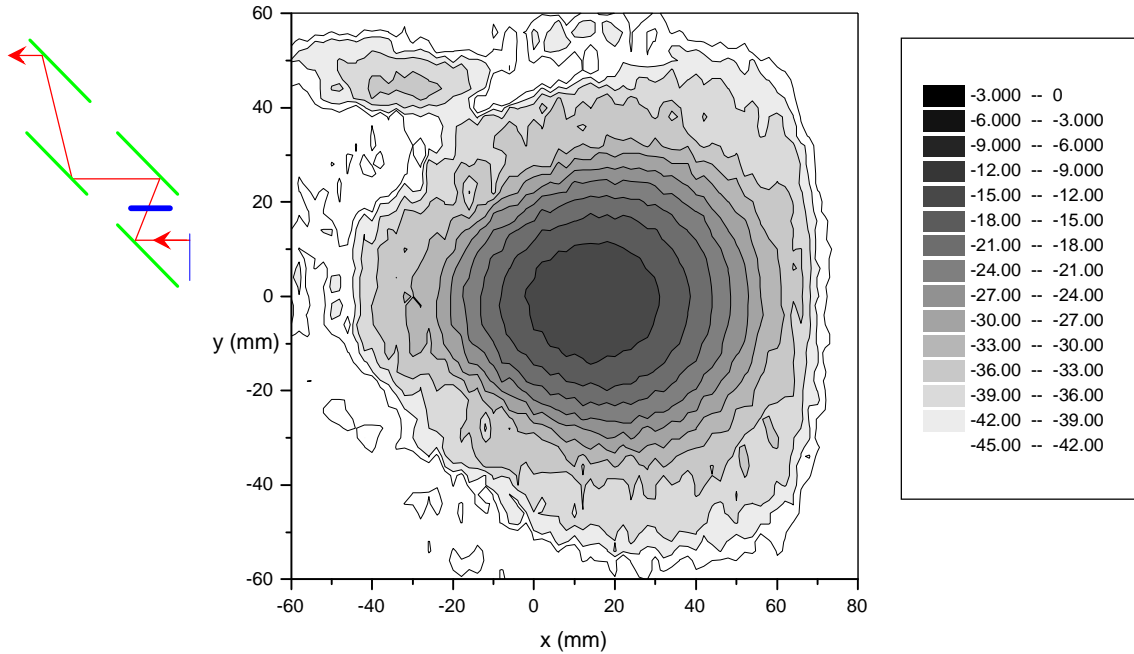


Abb. 51: Leistung des kopolarisierten Anteils in der Brennebene nach dem ersten Spiegel $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Man beachte beim Vergleich mit den anderen Abbildungen den anderen Maßstab

Nach zwei Spiegeln in Z-Konfiguration trifft der Strahl in erster Ordnung von $\Delta x/f$ exakt an der Sollposition auf. Durch die extrem gewählten Parameter ($\Delta x/f = 0.25$) erkennt man sowohl im Experiment (Abb. 52) wie auch in der zugehörigen Rechnung eine leichte Verschiebung. In den folgenden Abbildungen sieht man neben dem gemessenen Leistungsprofil Schnitte in x- und in y-Richtung durch das Maximum der Verteilung. Die Breite ist $w_{x,\text{Messung}} = 8.6\text{mm}$ (Rechnung: $w_x = 8.7\text{mm}$) bzw. $w_{y,\text{Messung}} = 9.0\text{mm}$ ($w_{x,\text{Rechnung}} = 7.7\text{mm}$). Es ergibt sich also eine gute Übereinstimmung, trotz der starken Aufweitung des Strahles gegenüber dem Startwert $w_0 = 4.5\text{mm}$, die von den analytischen Formeln (analog zu (100)) nicht mehr richtig beschrieben wird.

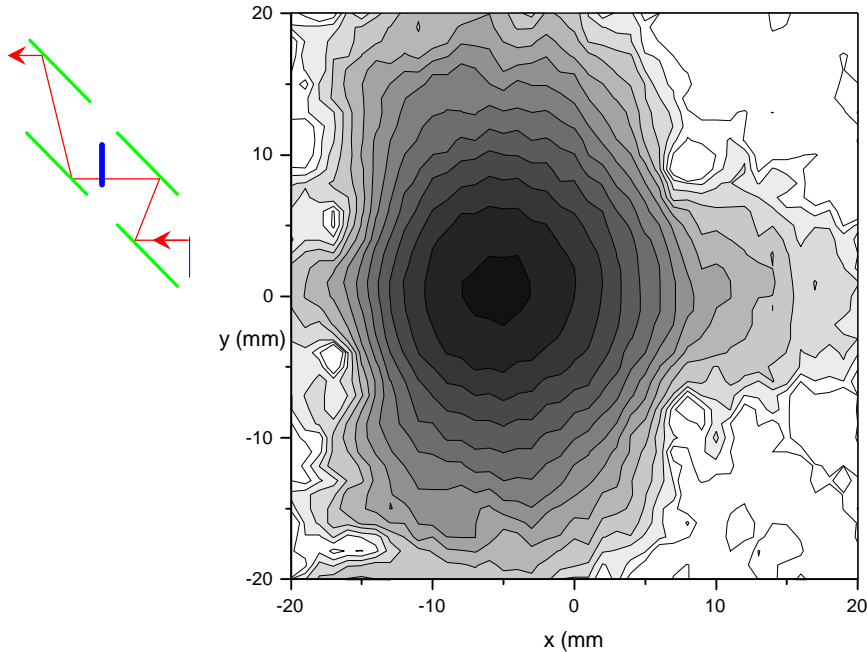


Abb. 52: Leistung des kopolarisierten Anteils nach zwei Spiegeln in Z-Konfiguration $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Erwartungsgemäß ist die Strahltaile gegenüber $w_0=4.5$ etwas vergrößert

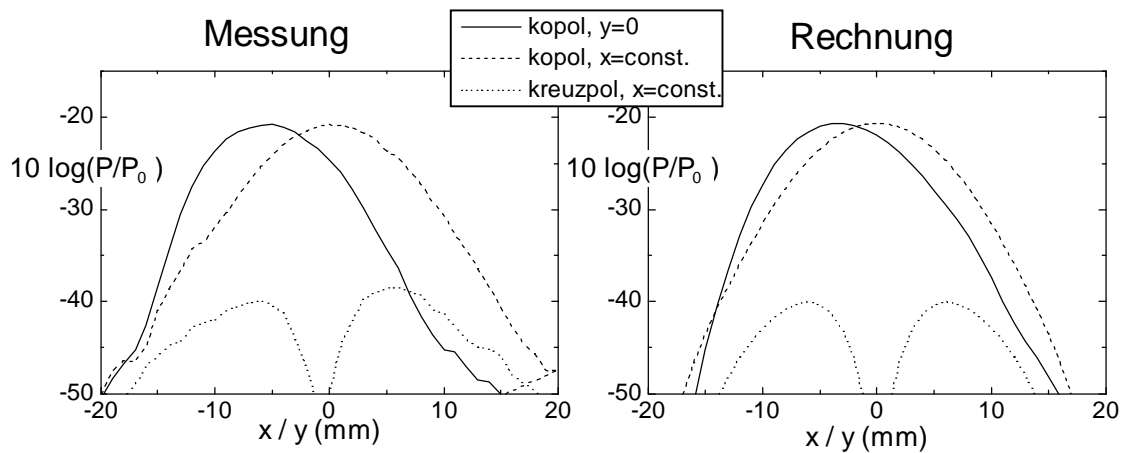


Abb. 53: Schnitte durch das Leistungsprofil nach zwei Spiegeln in Z-Konfiguration $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Links: Messung, rechts: numerische Rechnung

Nach zwei Spiegeln in Q-Konfiguration ist der Strahl dagegen stärker konzentriert als zu Beginn des Wellenleiters. Außerdem erkennt man in den folgenden zwei Abbildungen die starke Versetzung relativ zur Sollposition (welche der Mitte der Abbildung entspricht). Auch hier gibt es eine gute Übereinstimmung zwischen der Messung und dem numerischem Ergebnis.

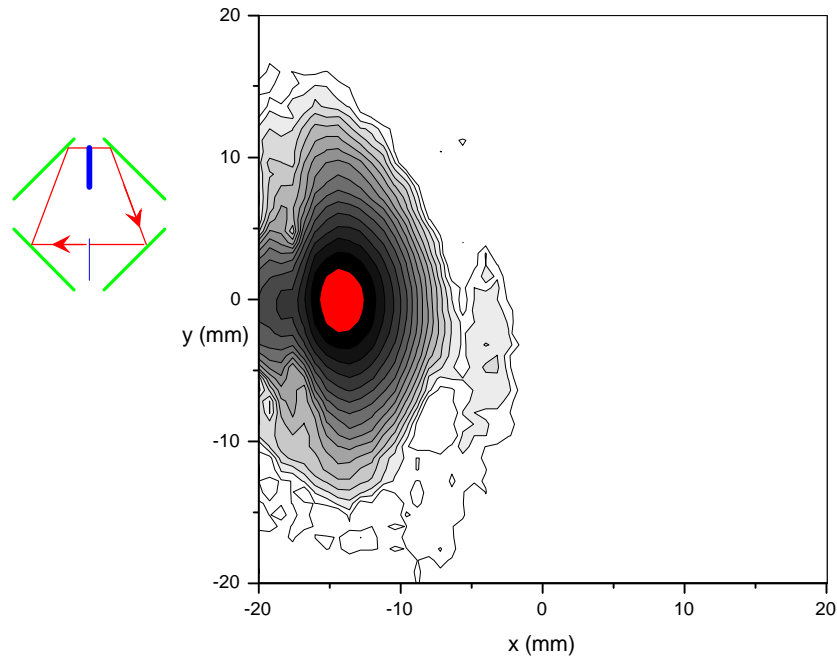


Abb. 54: Leistung des kopolarisierten Anteils in der Brennebene nach zwei Spiegeln in Q -Konfiguration, $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Man erkennt sowohl die starke Verschiebung wie auch die Konzentration der Verteilung (relativ zu $w_0=4.5$)

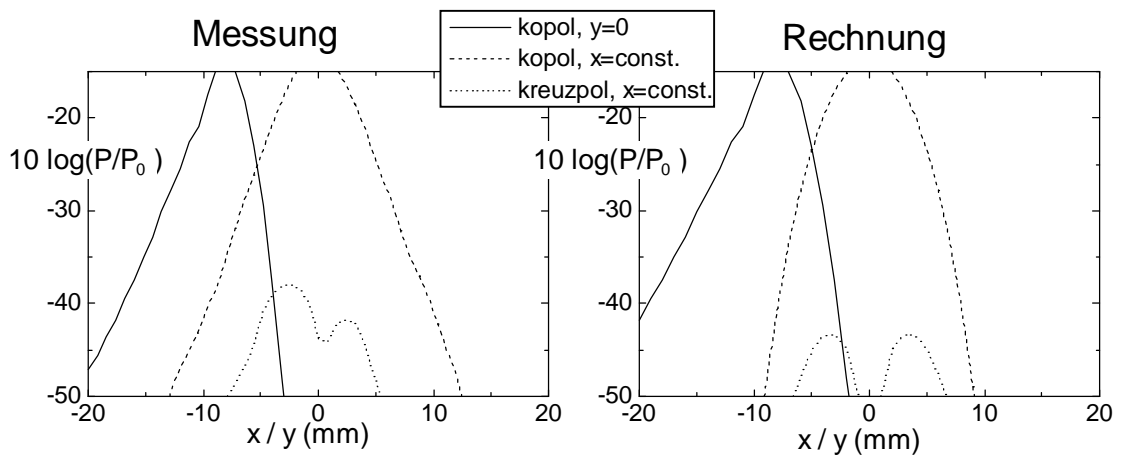


Abb. 55: Schnitte durch das Leistungsprofil nach zwei Spiegeln in Q -Konfiguration $\Delta x=30$, $\Delta y=0$

In der folgenden Abbildung sieht man das Leistungsprofil in der Zielebene, d. h. nach 4 Spiegeln in Z -Konfiguration. Durch die extremen Parameter wird zwar die ursprüngliche Form und Position des Strahles (Abb. 50, $w_0 = 4.5\text{mm}$) nicht vollständig wiederhergestellt, man erkennt aber in Abb. 57 die gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung.

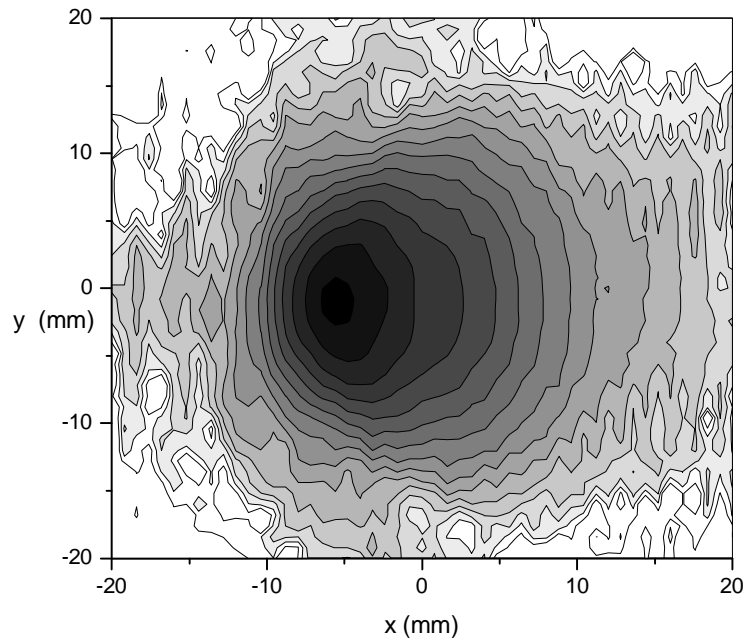


Abb. 56: Leistung des kopolarisierten Anteils nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration, $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Wegen der extremen Parameter $\Delta x/f=.25$ erkennt man die leichte Versetzung des Strahles. Er entspricht aber sehr gut der mm-Wellen-Verteilung in der Startebene

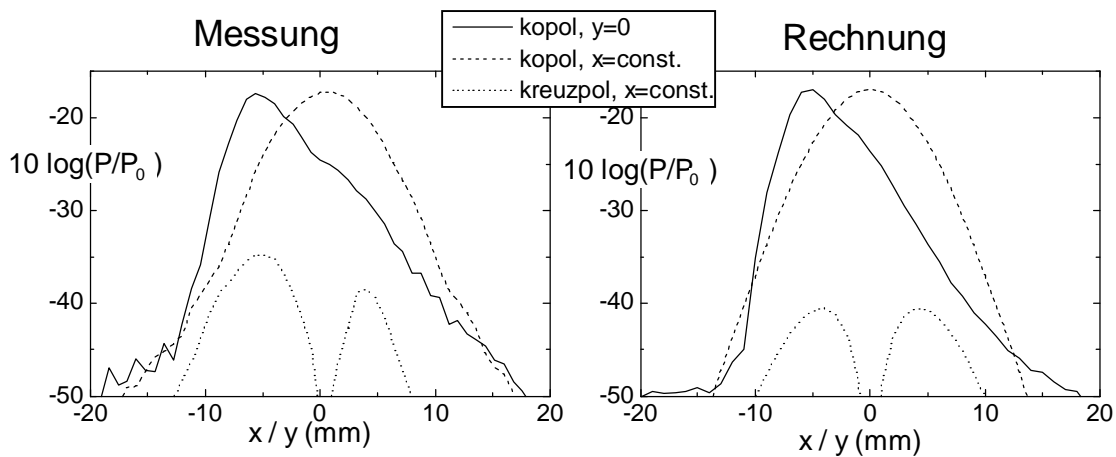


Abb. 57: Schnitte durch das Leistungsprofil nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Die Schaubilder verstehen sich im Vergleich zu Abb. 50, dem Strahl in der Startebene

Wie nach den analytischen Rechnungen zu erwarten war, ergibt sich nach vier Spiegeln in einer ungeeigneten Konfiguration ein deutlich schlechteres Abbild der gaußschen Mode vom Beginn des Wellenleiters. Die größere Anzahl von Falschmoden spiegelt sich wider in einer stark verbreiterten Leistungsverteilung (Abb. 58).

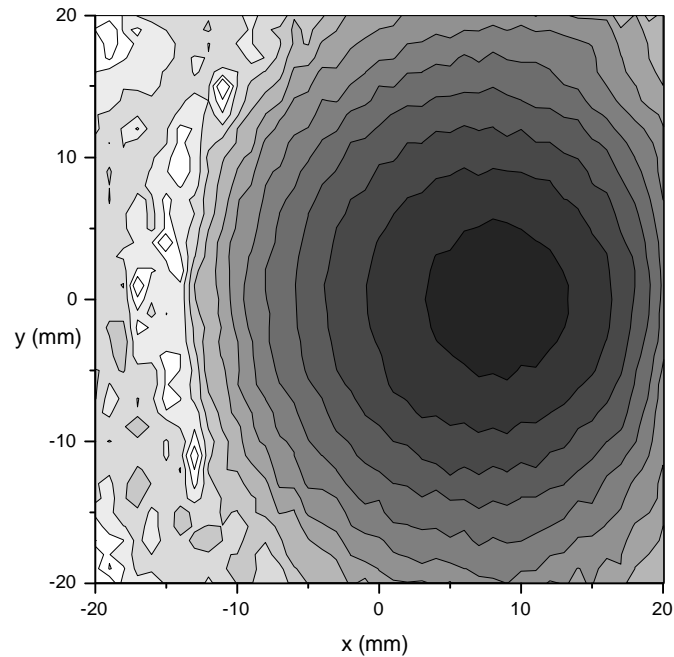


Abb. 58: Leistung des kopolarisierten Anteils nach vier Spiegeln in Ω -Konfiguration, $\Delta x=30$, $\Delta y=0$. Der Strahl ist deutlich größer als in der Startebene und um mehr als einen Strahldurchmesser versetzt

In der Abb. 59 sieht man die Leistungsverteilung in der Brennebene nach dem vierten Spiegel in Z-Konfiguration, also am Ende des Vielstrahl-Wellenleiters. Vier Messungen, welche hintereinander durchgeführt wurden, nachdem das Sendehorn jeweils auf eine andere Position gefahren wurde, sind in eine gemeinsame Abbildung eingezeichnet. Bei diesen extremen Parametern erkennt man die Grenzen für die Vielstrahl-Übertragung. Mit einer Auslegung entsprechend Gleichung (59) sind die Strahlen nicht ausreichend voneinander getrennt. Es kommt zu Übersprechen zwischen den Kanälen und bei Hochleistungsanwendung zu Problemen mit Überschlägen.

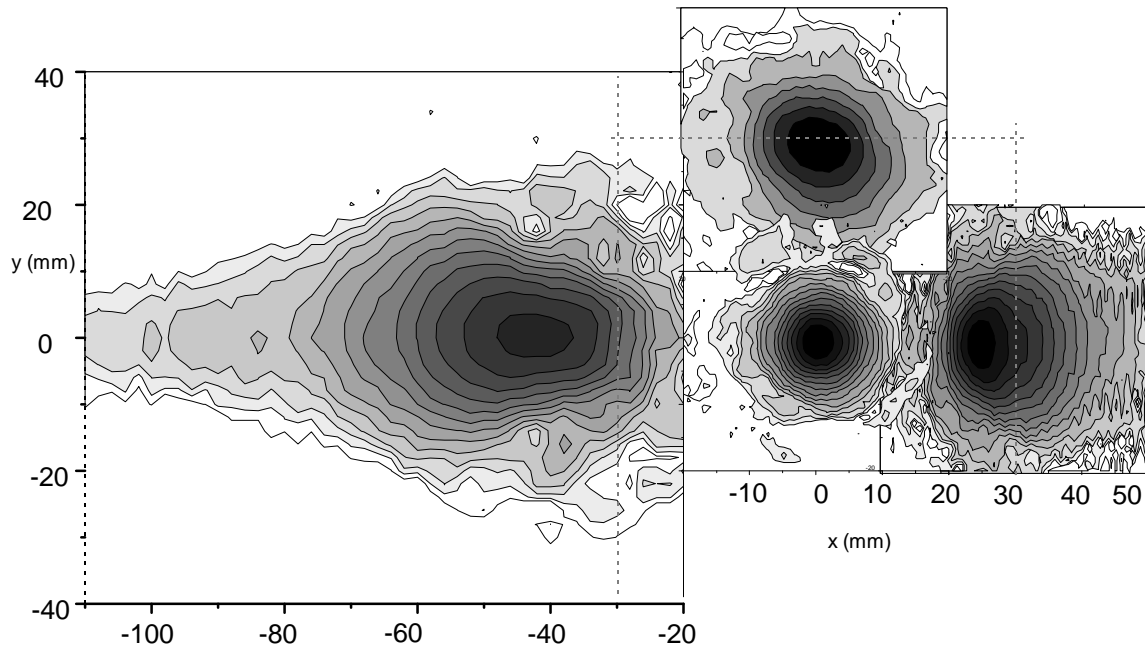


Abb. 59: Vier verschiedene Messungen der Leistung des kopolarisierten Anteils nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration, $\Delta x = -30, 0, +30$, $\Delta y = 0, 30$, $p = p_{\text{ellipsoid}}$

Die folgenden drei Paare von Abbildungen unterstreichen nochmals die gute Übereinstimmung der numerischen Rechnung mit den Messungen. Insbesondere bei Abb. 62 sieht man, dass die extremen Verhältnisse des Laborexperiments auch dann noch wiedergegeben werden, wenn die Abbildungseigenschaften des Aufbaus sehr schlecht sind. Man kann also davon ausgehen, dass sowohl die numerischen, als auch wegen der guten Übereinstimmung die analytischen Rechnungen die Verhältnisse beim Vielstrahl-Wellenleiter gut beschreiben. Damit steht ein verlässliches Werkzeug zur Auslegung und Optimierung von derartigen Wellenleitern zur Verfügung. Im folgenden Kapitel 5 wird die Anwendung für die Auslegung der ECRH-Leitung am Stellarator-Experiment W7-X beschrieben.

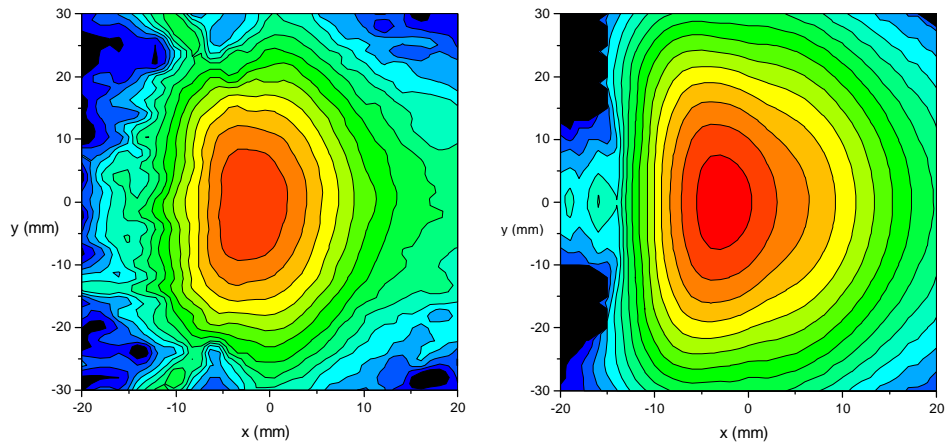


Abb. 60: Messung (links) und Rechnung (rechts) der kopolarisierten Leistungsverteilung nach zwei Spiegeln in Z-Konfiguration, $\Delta x = -30$, $\Delta y = 0$

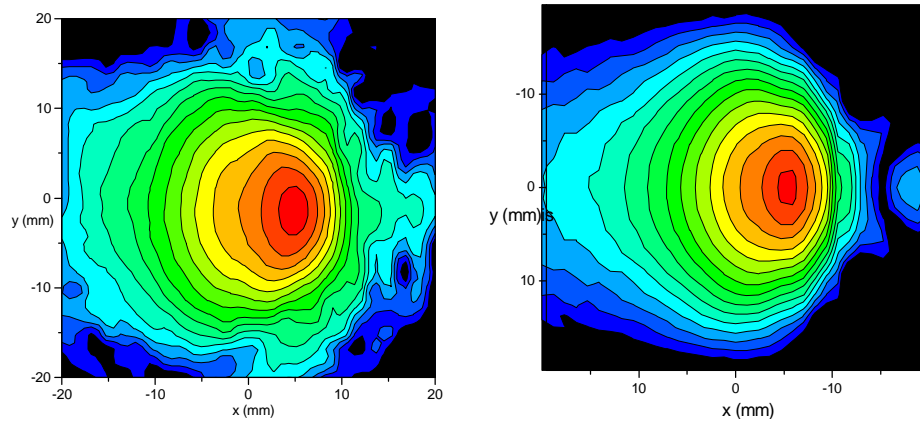


Abb. 61: Messung (links) und Rechnung (rechts) der kopolarisierten Leistungsverteilung nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration, $\Delta x = -30$, $\Delta y = 0$

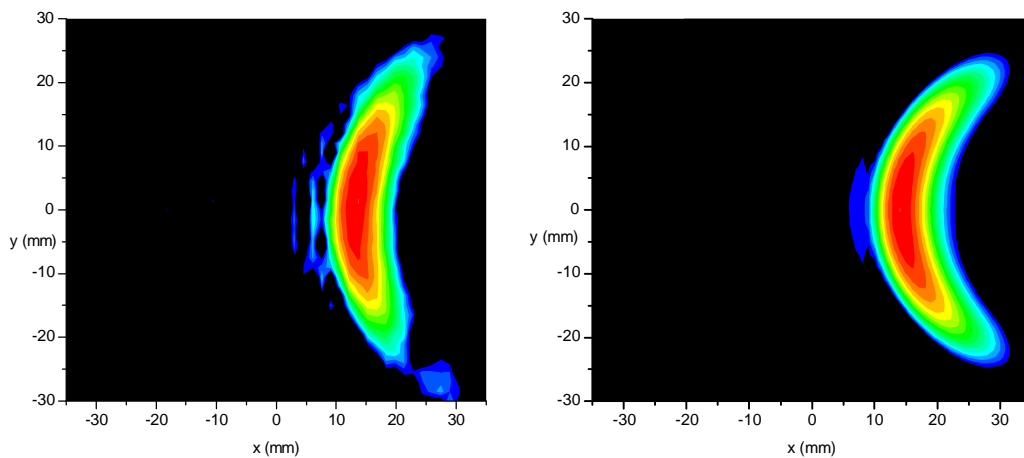


Abb. 62: Messung (links) und Rechnung (rechts) der kopolarisierten Leistungsverteilung nach vier Spiegeln in der ungeeigneten Ω -Konfiguration, $\Delta x = -30$, $\Delta y = 0$

5 Wendelstein 7-X

Ein Vielstrahl-Wellenleiter in einer Hochleistungs-Anwendung wird erstmals bei der Elektron-Zyklotron-Resonanz-Heizung im Stellarator Wendelstein 7-X (W7-X) eingesetzt werden. Die Anlage in Greifswald (Mecklenburg-Vorpommern) befindet sich zur Zeit im Aufbau und wird das in Garching installierte Fusionsexperiment W7-AS ablösen.

Das Plasma wird durch ein Magnetfeld eingeschlossen, welches im Wesentlichen durch 50 nicht-ebene, und zusätzlich 20 planare supraleitende Poloidal-feld-Spulen erzeugt wird. Der große Radius des Torus-Gefäßes beträgt $R = 5.5\text{m}$, der kleine Radius $r = 0.53\text{m}$. Für die Plasmaheizung und für verschiedene Diagnostiken [Suv-95] sind insgesamt 10 Megawatt Millimeterwellenleistung erforderlich, welche von 10 Gyrotrons erzeugt wird.

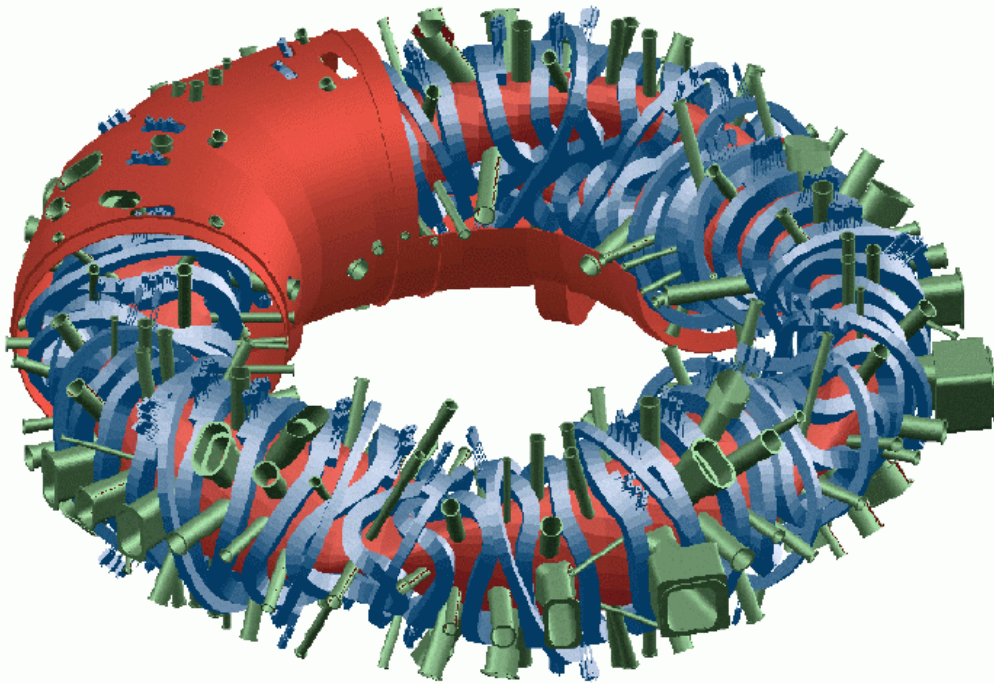


Abb. 63: Torus des Stellarator-Experiments W7-X. Man erkennt zwischen den nicht-ebenen supraleitenden Magnetfeldspulen eine Reihe von Stützen für Diagnostikzwecke, Heizung, usw. Links oben ist der Kryostat geschlossen

5.1 Übersicht über die geplante ECRH-Anlage

In Abb. 64 sieht man eine Skizze des gesamten ECRH-Traktes von W7-X. Ein unterirdischer Kanal verbindet das Gyrotrongeäude mit der Experimentierhalle. Einige der Komponenten der Übertragungsleitung können wie bei den existierenden, konventionellen Leitungen am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching ausgeführt werden.

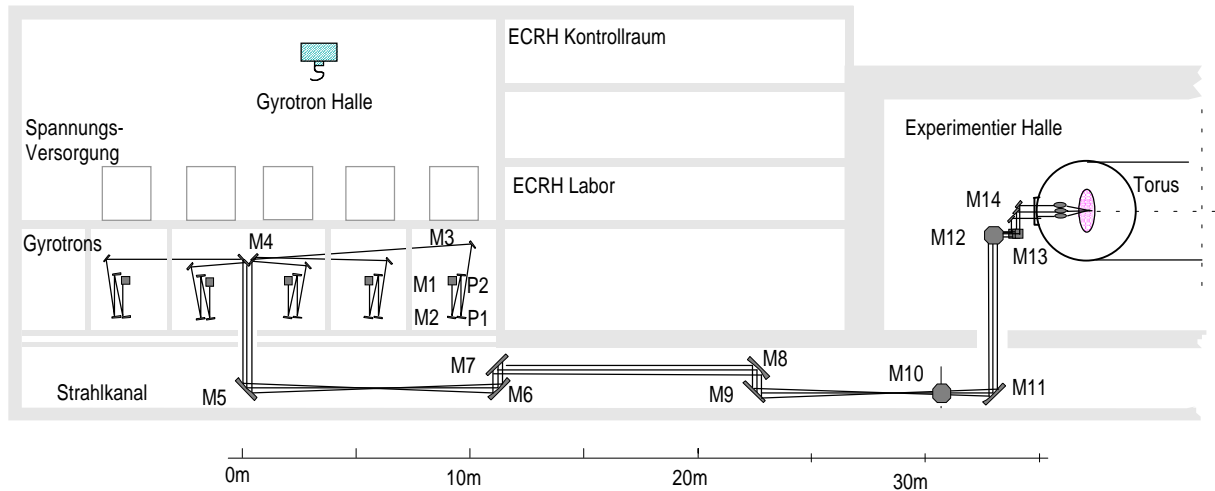


Abb. 64: Skizze der ECRH-Übertragungsleitung für W7-X. Jeweils 5 mm-Wellenstrahlen werden vereinigt (bei M4) und über ein gemeinsames System von überdimensionierten Spiegeln (M5..M12) zum Plasmagefäß geführt

Die ersten beiden Spiegel (M1 und M2) müssen als phasenkorrigierende Spiegel vorgesehen werden. Da die Gyrotrons ein Objekt aktueller Entwicklung sind, ist bislang noch nicht bekannt, ob die Millimeterwelle als gaußsche Mode aus dem Fenster austreten wird. Eine mehr oder weniger glatte Leistungsverteilung ist aber notwendig, da die Strahlen sonst zu stark divergieren. Nicht zuletzt wegen der starken Leistungsdeposition auf dem Fenster des Gyrotrons haben aktuell verfügbare Modelle keinen solchen Ausgangsstrahl. Hier ist vielmehr ein Paar von genau angepassten Spiegeln notwendig, um die mm-Wellenleistung aus dem Gyrotron in einen ordentlichen Strahl zu formen. Im Kapitel 5.3 wird das Verfahren beschrieben, wie man den Gyrotronstrahl vermessen und solche phasenkorrigierenden Spiegel herzustellen kann.

Bei den Polarisatoren (P1 und P2) handelt es sich um drehbar montierte, ebene Spiegel, in deren Oberfläche eine Rillenstruktur eingefräst ist [Doa-92], welche es erlauben, die Polarisations Ebene des mm-Wellenstrahles zu drehen, und elliptische Polarisation zu erzeugen. Dies ist erforderlich, da für eine optimale Absorption im Plasma Strahlung mit elliptischer Polarisation und einer definierten Lage der Polarisationsellipse relativ zum einschließenden Magnetfeld notwendig ist [Smi-92]. Auch hierfür kann die Technologie verwendet werden, wie sie bereits in Garching eingesetzt wird.

Die beiden nächsten Spiegel (M3 und M4) werden, was ihre Oberfläche betrifft, ebenfalls konventionell ausgelegt. Das heißt, man benötigt Spiegel für jeden einzelnen der Strahlen. Die Oberfläche wird als Ellipsoid ausgeführt werden, da hierbei die geringsten Strahldeformationen auftreten [Mur-87]. Die verschiedenen Spiegel M4 müssen geeignet montiert sein, sodass nach dieser Reflexion alle Strahlen exakt parallel nach unten und nahe beieinander verlaufen. Diese Spiegel bilden sozusagen den Eingang zum Vielstrahl-Wellenleiter, in welchem jeweils 5 Strahlen zusammengefasst sind. Er wird im Wesentlichen durch die Spiegel M5, M6 (Brennweite 5000mm) und M8, M11 ($f = 6120\text{mm}$) gebildet und wird im folgenden Kapitel 5.2

diskutiert. Da jede Fokussierung bei Spiegeln auch mit einer Richtungsänderung verbunden ist, müssen zusätzlich in diesem Bereich vier Planspiegel (M7, M9, M10, M12) verwendet werden. Diese haben keinen Einfluss auf die optischen Eigenschaften der Wellen, aber sie lenken den Strahl längs dem Montagekanal. Der Spiegel M13 ist wieder für jeden Strahl einzeln ausgeführt. An der Reflexion M14 hat man noch die Möglichkeit, die Leistungsverteilung über dem Strahlquerschnitt für das Vakuumfenster am Torus umzuwandeln. Mit einem relativ einfachen phasenkorrigierenden Spiegel kann die in der Mitte konzentrierte gaußsche Leistungsdichte auf den Randbereich umverteilt, also abgeflacht werden. Im Inneren des Torusgefäßes befinden sich zwei weitere Spiegel. Der erste fokussiert den Strahl, und könnte die Deformation von M14 teilweise rückgängig machen, der zweite wird eben aber schwenkbar sein. Je nach den experimentellen Anforderungen läßt sich damit der Wirkungsort der Plasmaheizung einstellen.

Alle Spiegel erfordern in Anbetracht ihrer Kühlung neuartige Technologie, da beim vorgesehenen Dauerbetrieb die ohmschen Verluste durch Oberflächenströme trotz des Einsatzes von Kupfer wassergekühlt werden müssen.

5.2 Vielstrahl-Wellenleiter

5.2.1 Wahl der Parameter

Für die Heizung des magnetisch eingeschlossenen Plasmas an W7-X sind 10 Megawatt Leistung in Form von elektromagnetischer Strahlung notwendig. Die Zyklotronfrequenz errechnet sich aus dem toroidalen Magnetfeld von 2.5 Tesla mit

$$f = \frac{e}{2\pi m} |\mathbf{B}| \quad (113)$$

zu 70GHz. Zur Heizung wird die zweite Harmonische, also die doppelte Frequenz $f = 140GHz$ verwendet werden. Wegen der begrenzten Leistung einer einzelnen mm-Wellenquelle [Thu-98] und aus Gründen der Betriebssicherheit wird die Mikrowellenleistung in 10 Strahlen zum Experiment geführt, von denen jeweils fünf zu einem Vielstrahl-Wellenleiter zusammengefasst sind. Diese werden jeweils in einem Kranz an fünf von sechs möglichen Positionen um den Zentralstrahl herum angeordnet sein ($n = 1$ in Abb. 13). Die Distanz von der Gyrotron-Halle zum Plasmatorus beträgt circa 45 Meter, und der Vielstrahl-Wellenleiter soll wegen der günstigen Übertragungseigenschaften als eine 4-Spiegel-Anordnung ausgeführt werden. Der Spiegelabstand kann wegen der Gebäudegeometrie nicht überall gleich groß (also 11.25 Meter) sein. Man muß vielmehr auf eine (konfokale) Anordnung ausweichen, bei welcher die beiden ersten Spiegel eine Brennweite von $f = 5000mm$, der dritte und vierte eine Brennweite von $f = 6120mm$ haben. Abgesehen von zusätzlichen Planspiegeln sind die vier fokussierenden Spiegel im Quadrat angeordnet.

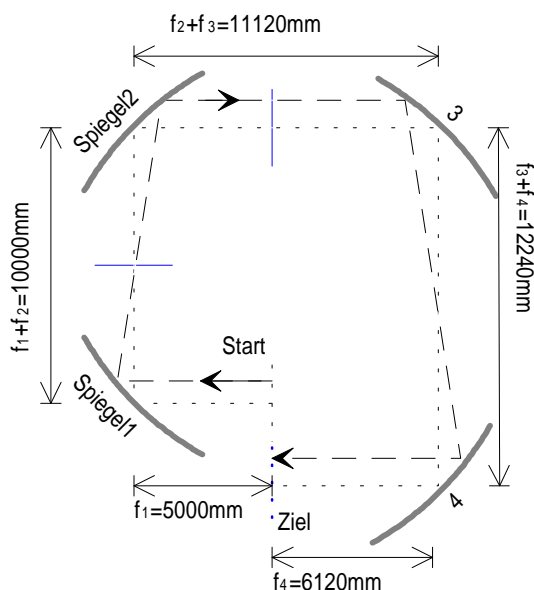


Abb. 65: Schematische Anordnung der vier Spiegel im W7-X-Wellenleiter. Sie sind konfokal angeordnet, mit $f_1=f_2$, $f_3=f_4$ aber $f_1 \neq f_3$. Zusätzlich sind vier nicht gezeichnete ebene Umlenkspiegel im Wellenleitervorgesehen, welche die optischen Eigenschaften nicht ändern

Durch die frequenzunabhängige Anordnung hat man für eine spätere Ausbauphase die Option, weitere Gyrotronstrahlen mit anderen Wellenlängen in die Wellenleiter einzuspeisen. Hier sind jeweils ein Gyrotron mit der halben Frequenz, also 70GHz vorgesehen. Aus Gleichung (61) folgt, dass sich hierfür bei anfänglich gleicher Taille w_0 ein größerer Strahldurchmesser auf den Spiegeln ergibt. Man reserviert für diesen niederfrequenten Strahl also die Zentralposition. Mit (63) lässt sich sowohl für diesen Strahl ($n = 0$), wie auch für die darum herum ringförmig angeordneten 140GHz-Strahlen ($n = 1$) der mindestens notwendig Spiegeldurchmesser bestimmen. In Abb. 66 erkennt man, dass bei $w_0 = 50\text{mm}$ ein Kompromiss für die zwei verschiedenen Strahlen und für die beiden eingesetzten Brennweiten liegt. Es ergibt sich ein mindestens erforderlicher Spiegeldurchmesser von $d = 740\text{mm}$. In der Richtung parallel zur Einfallsebene muss der Spiegel wegen der Projektion senkrecht zum Strahl um den Faktor $1/\cos(45^\circ) = \sqrt{2}$ größer sein.

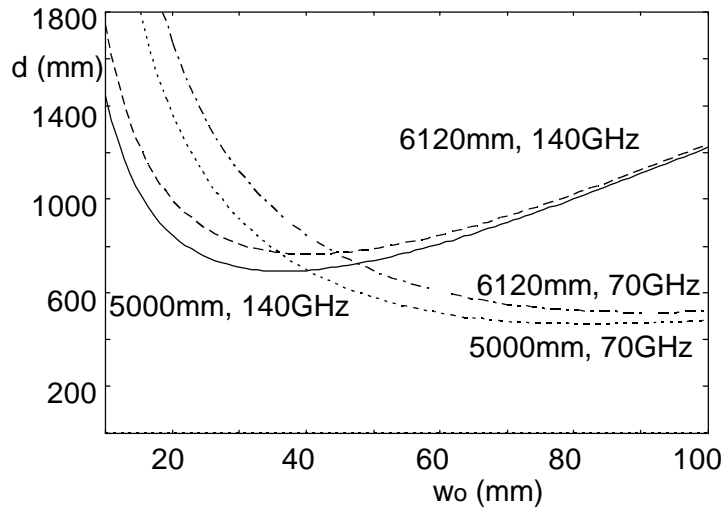


Abb. 66: Berechnung für den mindestens erforderlichen Spiegeldurchmesser bei einem 70GHz-Zentralstrahl und ringförmig angeordneten 140GHz-Strahlen nach (63)

5.2.2 Übertragungs-Eigenschaften

Der Vielstrahl-Wellenleiter für W7-X ist mit den obigen Parametern ($\Delta x/f \approx 0.04$) relativ konservativ ausgelegt, so dass bei geeigneter Spiegelgeometrie nur geringe Verluste in der fundamentalen gaußschen Mode zu erwarten sind. Es wurden hierfür detaillierte Beugungsrechnungen durchgeführt. Man hat bei dieser numerischen Rechnung außerdem in einem zweiten Schritt die Möglichkeit, eine endliche Spiegelgröße mit einzubeziehen.

Exemplarisch für die verschiedenen Positionen im Ring um den Zentralstrahl sind im Folgenden für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 200$ die Strahlprofile in den jeweiligen Brennebenen abgebildet und auf ihre Modenanteile hin analysiert:

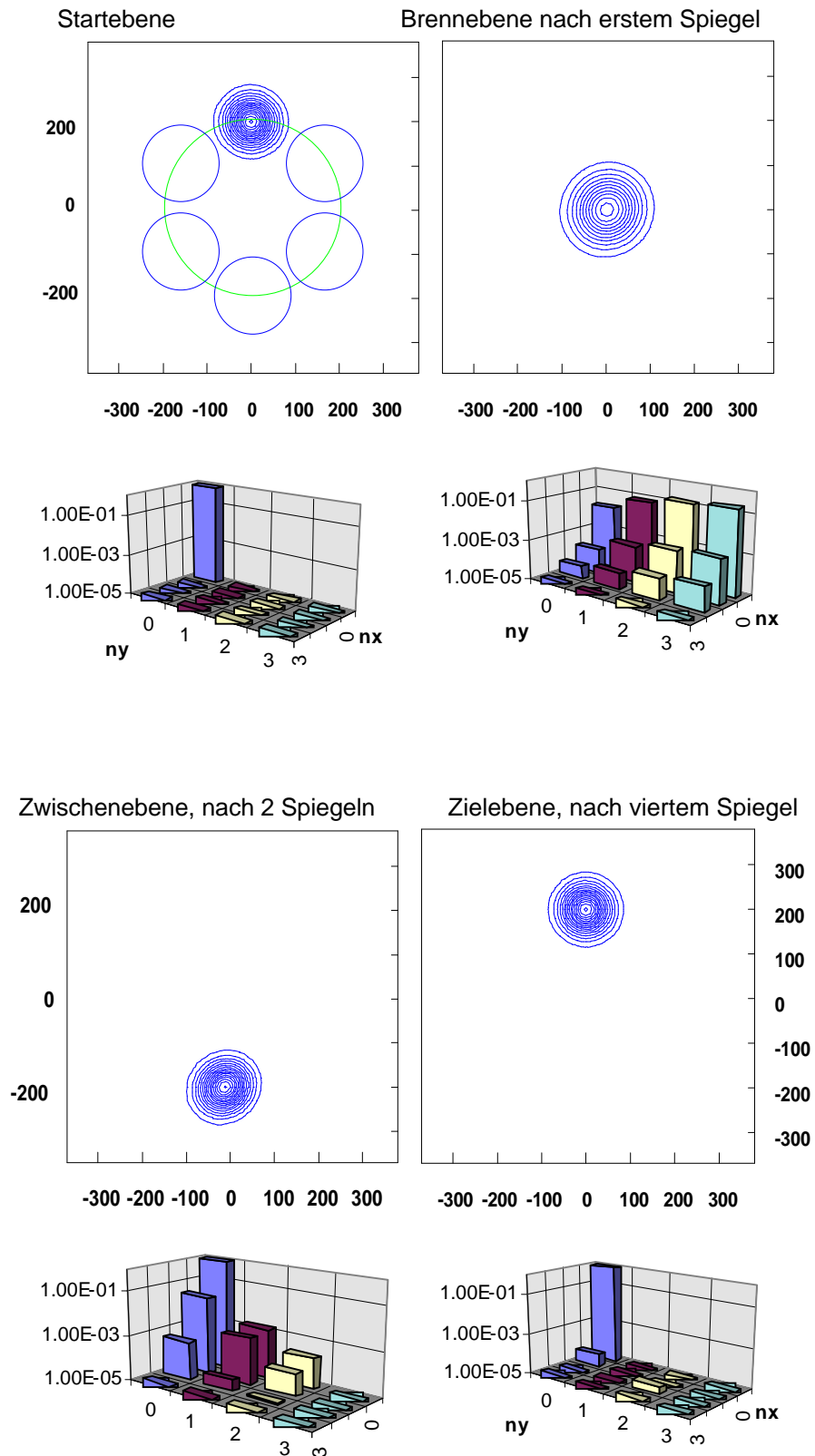


Abb. 67: Exemplarisch für den W7-X-Wellenleiter: Leistungsverteilung und Modenanalyse für den mm-Wellenstrahl $\Delta x=0$, $\Delta y=200$ nach 1, 2 und 4 Spiegeln, $p=0$

In der Tabelle (Abb. 68) sind die Ergebnisse notiert, die sich für die anderen Strahlen und andere mögliche Spiegeloberflächen ergeben:

p	Spiegel (mm^2)	Leistung (10^{-5})	0	± 60	± 120	180	Azimet des Strahles ($^\circ$)
			200	100	-100	-200	Δx (mm)
			0	± 173	± 173	0	Δy (mm)
0	∞	1-P _{gesamt}	1	0	0	1	
0	720×1100	1-P _{gesamt}	19	106	230	11	
0	720×1100	1-P _{TEM00}	68	364	547	550	
0	∞	1-P _{TEM00}	44	203	201	43	
+.5	720×1100	1-P _{TEM00}	33	353	445	31	
+ .5	∞	1-P _{TEM00}	7	133	141	21	
-.299	∞	1-P _{TEM00}	116	246	246	116	

Abb. 68: Zusammenstellung der Leistungsverluste im W7-X-Wellenleiter für verschiedene Spiegelformen und -größen. Der Spiegel mit $p=0..0.5$ liefert die besten Ergebnisse (und nicht der off-axis-ellipsoidale Spiegel)

Die Resultate in dieser Arbeit gehen im Allgemeinen von unendlich großen Spiegeln aus, d. h. es wird jeweils der komplette Strahl reflektiert. Es muss dann selbstverständlich die gesamte Leistung am Ende der Leitung ankommen. Dies wird durch die numerischen Rechnungen (erste Zeile) gut bestätigt und spiegelt gleichzeitig die Rechengenauigkeit wieder.

Bei endlich großen Spiegeln kommt es zu 'Abschälverlusten', und es verstärkt sich auch die Leistung in den Falschmoden ein wenig. Als wichtigstes Resultat kann man festhalten, dass die Verluste aufgrund von Strahldeformationen durch die Vielstrahl-Anordnung vernachlässigbar klein sind. Dies rührt her von der konservativen Auslegung, d. h. von der durchweg schwachen Krümmung der Spiegel. Die Verluste in der Mode TEM₀₀ sind deutlich unter einem Prozent. Davon wiederum verteilt sich nur ein Teil als Fehlleistung mehr oder weniger gleichmäßig auf den Wellenleiter-Kanal. Der Rest trifft wie der fundamentale Strahl durch das Fenster ins Vakuumgefäß und heizt dort ebenfalls das Plasma.

Die Verluste durch die endliche Spiegelgröße sind bei einem effektiven Durchmesser von 720mm ebenfalls vernachlässigbar. Sie betragen über die gesamte Leitung weniger als 0.6 Prozent.

Der dominierende Beitrag sind die ohmschen Verluste an den Spiegeloberflächen mit circa 0.15 Prozent pro Reflexion [Emp-98a], die in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden sollen.

In der Übertragungsleitung für W7-X werden die Strahlen in der letzten Brennebene aus dem Vielstrahl-Wellenleiter durch Spiegel ausgekoppelt, welche beweglich und justierbar montiert

sind. In der Praxis ist es deshalb sehr einfach, die Fehlanpassung aufgrund eines schräg einfallenden Strahles zu kompensieren. In den obigen Rechnung wird diese kleine, potentielle Verbesserung nicht berücksichtigt, da dieser Effekt bei der W7-X-Geometrie vernachlässigt werden kann.

Durch die Geometrie der gesamten Experimentierhalle und des ECRH-Gebäudes ist der Abstand der Spiegel und damit die Brennweite der Spiegel in engen Grenzen festgelegt. Als variabler Parameter steht aber noch die Form der Spiegeloberfläche zur Verfügung. Würde man die Leitung für den Zentralstrahl optimieren, dann müsste man für die Oberfläche nach Gleichung (71) den Parabelparameter

$$p = p_{\text{off-axis-Ellipsoid}} = -0.299$$

wählen. In den analytischen Rechnungen (z.B. Abb. 44) hat sich aber herausgestellt, dass die Oberfläche mit einem Parabelparameter im Bereich $p = 0..0.5$ die besten Strahleigenschaften für die Q-Konfiguration liefert. Diesem Ergebnis liegen einige Näherungen zugrunde, es ist aber unabhängig von den anderen Parametern wie Brennweite oder Strahltaile. In der obigen Tabelle ist deshalb zusätzlich zum Ergebnis beim toroidalen Spiegel ($p = 0$) und zu $p = p_{\text{Ellipsoid}}$ auch der Fall $p = 1/2$ aufgelistet (grau unterlegt). Offensichtlich lassen sich die ohnehin kleinen Verluste durch die Oberfläche $p = .5$ noch minimieren.

Auf einer numerischen Fräsmaschine lässt sich diese Spiegeloberfläche wegen der enormen Datenmenge unter Umständen nur mit Schwierigkeiten in hoher Qualität fertigen. Im Gegensatz dazu kann das Ellipsoid durch Kreisbahnen beschrieben werden, und die Maschine kommt daher mit wesentlich weniger Echtzeit-Rechenoperationen aus. Sollte dies ein wesentliches Kriterium sein, dann könnte man auch einen ellipsoidalen Spiegel ($p = -.299$) fertigen, aber 'verkehrt herum' installieren. Man erhält dann eine Oberfläche entsprechend $p = +.299$, was nahe genug beim Optimum $p = 1/2$ liegt.

5.3 Gyrotron-Anpassoptik

Die ersten beiden Spiegel nach dem mm-Wellenfenster der Gyrotrons müssen individuell für jeden Strahl gefertigt werden. Bei einer mehr oder weniger gaußförmigen Leistungsverteilung ist es zwar möglich, den Strahl direkt als Modenmischung zu übertragen (Kapitel 3.6), im allgemeinen Fall, also bei Moden hoher Ordnung in der Ausgangsverteilung, ist der Strahl nicht zur Übertragung geeignet. Er hat vielmehr (bewusst) einen großen Anteil an Falschmoden, um am Vakuumfenster eine möglichst homogene Leistungsverteilung zu erzielen. Mit den zwei Korrekturspiegeln kann der Strahl weitestgehend in eine gaußsche Mode umgewandelt werden.

5.3.1 Verfahren

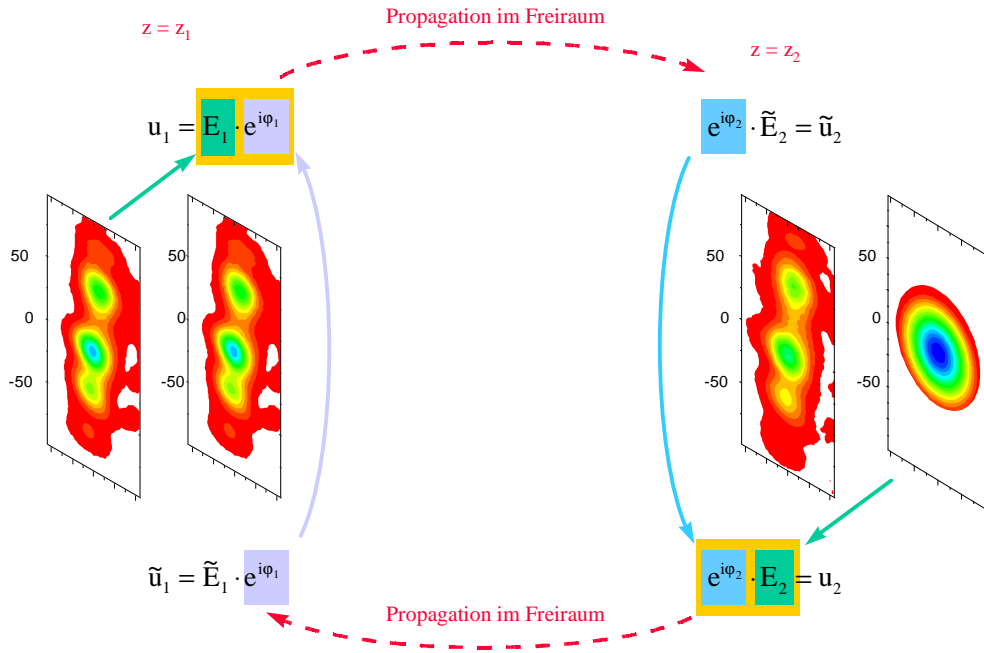
Vor der Berechnung dieser Spiegel muss zunächst der Hochleistungsstrahl exakt vermessen werden. Während üblicherweise beim Vermessen von Mikrowellen das Problem darin liegt,

dass das Signal *zu klein* ist, hat man es bei Gyrotronstrahlung mit 10^5 - 10^6 Watt zu tun, was ein besonderes Messverfahren nötig macht [Chi-95].

Die Leistung eines Gyrotrons ist so hoch, dass lediglich seine thermische Wirkung zugänglich ist. Oft ist es ausreichend, mit Flüssigkristallfolie oder mit thermoempfindlichem Papier ('Faxpapier') zu arbeiten, die senkrecht zum Strahl im Wellenfeld aufgespannt werden. Für die weiter unten geschilderte Auswertung sind diese Methoden nicht genau genug, da nur zwei oder drei Farbabstufungen unterscheidbar sind. Deshalb muss ein Target eingebracht werden, dessen Temperatur dann mit einer Infrarotkamera aufgenommen wird. In jedem Fall geht bei dieser Messung der Temperatur, welche ja nur von der Amplitude der elektromagnetischen Welle abhängt, die Information über die Phase des Wellenfeldes verloren. Man kann aber, sofern man die Amplitudenverteilung an mehreren Querschnitten kennt, numerisch auf die Information der Phase zurückrechnen [Kat-67]. Ist von einem paraxialen Strahl über einen beliebigen Querschnitt neben der Amplitude auch die komplette Phasenverteilung bekannt, dann kann von dort aus z. B. über eine Zerlegung in ebene Wellen das komplette Wellenfeld berechnet werden. Insbesondere lässt sich der Strahl an der Position des ersten Spiegels berechnen. Dort wird mit dem individuell berechneten Spiegel (= Phasenplatte) die Phasefront derart verzerrt, dass sich an der Position des zweiten Spiegels eine gaußartige Amplitudenverteilung ergibt. Mit diesem zweiten Spiegel kann die Phasefront wieder geebnet werden, damit neben der Amplitude auch die Phase einem gaußschen Strahles gleicht.

5.3.2 Theorie

Die russischen Theoretiker B.Z. Katsenellenbaum und V.V. Semenov haben einen Iterationsalgorithmus vorgestellt, der einem die Rekonstruktion der Phase eines elektromagnetischen Wellenfeldes erlaubt [Kat-67]. Als Eingabegröße ist die Amplitudenverteilung $E_1(\mathbf{x})$ und $E_2(\mathbf{x})$ auf zwei Querschnittflächen $z = z_1$ und $z = z_2$ nötig. Zunächst wird als Phasenverteilung auf dem ersten Querschnitt eine beliebige, z. B. ebene Phase angenommen. Man berechnet daraus die Verteilung des Wellenfeldes \tilde{u}_2 auf dem zweiten Querschnitt, d. h. also Phase und Amplitude in Abhängigkeit von der Position auf der Fläche $z = z_2$. Dann verwirft man die errechnete Amplitude \tilde{E}_2 und synthetisiert aus der soeben errechneten Phase φ_2 und dem gegebenen Feld E_2 ein neues komplexes Wellenfeld u_2 . Jetzt rechnet man diesen Strahl zurück auf die Fläche mit $z = z_1$, d. h. welches Feld \tilde{u}_1 auf der Fläche 1 erzeugt das synthetisierte Feld von Fläche 2. Hiervon wird dann wiederum der reelle Amplitudenfaktor verworfen, und stattdessen das gegebene Feld E_1 verwendet. Das so erzeugte Feld lässt man abermals propagieren zur Fläche 2. Hier schließt sich der Kreis, d. h. es wiederholen sich die obigen Schritte.



Prinzip des Algorithmus zur Phasenrekonstruktion aus der Amplitudenverteilung an zwei Querschnitten

Es kann gezeigt werden, dass sich mit jedem Iterationsschritt das Feld \tilde{E}_2 an das gewünschte Feld E_2 annähert. Nach typisch 20 bis 50 Iterationsschritten verbessert sich die Übereinstimmung der Felder nicht mehr. Diese kann man quantifizieren mit einem Überlappintegral, das der Gleichung (30) entspricht:

$$\eta_k = \frac{\left[\int \tilde{E}_k \cdot E_k \, dx \, dy \right]^2}{\int |\tilde{E}_k|^2 \, dx \, dy \cdot \int |E_k|^2 \, dx \, dy} \quad (114)$$

Für vollständige Übereinstimmung wächst η_k bis auf 1. Um dabei nicht in lokale Maxima zu wandern, empfiehlt es sich, die Rechnung über drei statt zwei Querschnittsflächen durchzuführen.

5.3.3 Infrarot-Aufnahmen

Als Eingabe für den beschriebenen Iterationsalgorithmus ist die Amplitudenverteilung auf zwei oder mehr Querschnitten nötig. Diese wird gemessen aus der Wärmeentwicklung des Mikrowellenstrahles beim Durchgang durch eine Targetplatte.

Im gegebenen Fall wurde der Strahl eines 140GHz-Gyrotrons der Firma GYCOM vermessen, welches beim Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching zur Plasmaheizung am Stellaratorexperiment W7-AS verwendet wird. Aus geometrischen Gründen musste der Strahl zunächst mit Hilfe eines ebenen Spiegels nach oben umgelenkt werden. Parallel zum Strahl war eine optische Schiene installiert, welche es erlaubt, die Targetplatte längs dem Strahl zu verschieben und an bestimmten, wohl definierten Querschnitten zu fixieren. Als Material für das mm-Wellentarget müssen mehrerer Kriterien beachtet werden [Sem-94],[Woc-96]. In

unserem Fall wurde eine 3mm starke PVC-Platte verwendet, die beim Durchgang ca. 10% der Mikrowellenleistung absorbiert. Dadurch bleibt das Temperaturbild auf der Platte auch einige Zeit nach der 'Belichtung' mit der Millimeterwelle erhalten, denn die Strahlleistung kann über die Dicke der Platte als konstant angesehen werden, wodurch die Wärmeleitung senkrecht zur Platte vermieden wird. Andererseits ist die Platte ausreichend dick, und die gespeicherte Wärme so groß, dass die Konvektion von der Oberfläche ausreichend klein ist. Zu guter letzt ist die Wärmeleitung im PVC längs der Platte zu berücksichtigen. Nachdem sich jedoch das Material in typischerweise nur 10msec um 50°C erwärmt hat, ist die beobachtete Diffusionszeit des Thermobildes von ca. 10 Sekunden vernachlässigbar klein.

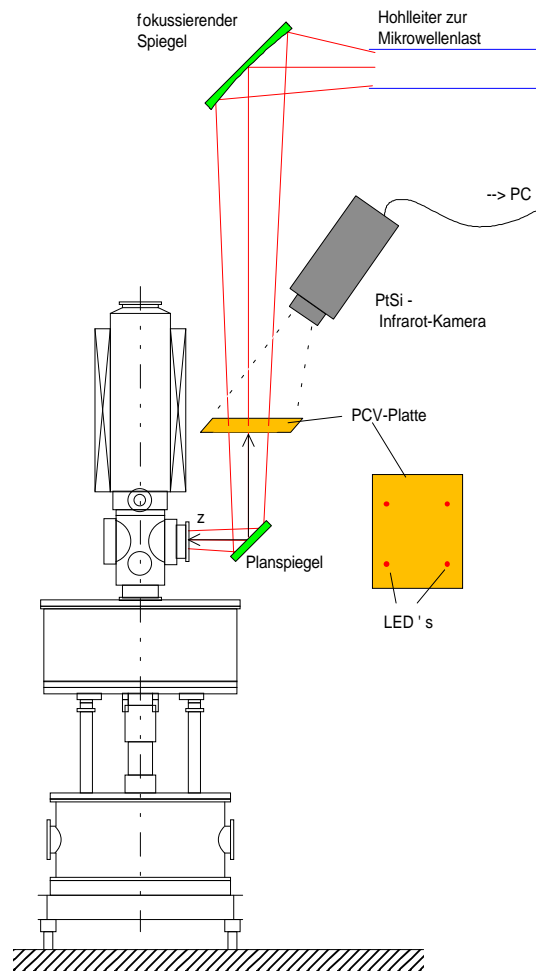


Abb. 69: Versuchsaufbau: Messung der Wärmeentwicklung in einer Targetplatte beim Durchgang eines Gyrotronstrahles

Die Oberfläche der Platte ist korrigiert, um eine $\lambda/4$ -Schicht zu erreichen. Dies verhindert Reflexionen zurück in das Gyrotron.

Bei Dielektrika, deren Wärmekapazität und Mikrowellenabsorption von der Temperatur unabhängig sind, ist die Temperaturerhöhung linear von der Mikrowellenarbeit abhängig. Bei PVC darf allerdings die Veränderung der Absorption $\alpha(T)$ über den relevanten Bereich

(20..70°C) nicht vernachlässigt werden, und sie musste separat in einem Niederleistungsexperiment vermessen werden.

Die Aufzeichnung der Thermo-Bilder erfolgt mit einer Infrarot-Kamera vom Typ PRISM DS der Firma Flir Systems Corporation [Ste-95]. Sie misst mit einem Stirling-gekühlten PtSi-Array die im Bereich 3.6-5µm emittierte Strahlung. Die räumliche Auflösung ist 320×244 Bildpunkte, wobei verschiedene Objektive zur Verfügung stehen. Als Temperaturauflösung wird für den verwendeten Temperaturbereich $\Delta T < 0.1^\circ\text{C}$ angegeben. Das ist für die beschriebene Anwendung ausreichend.

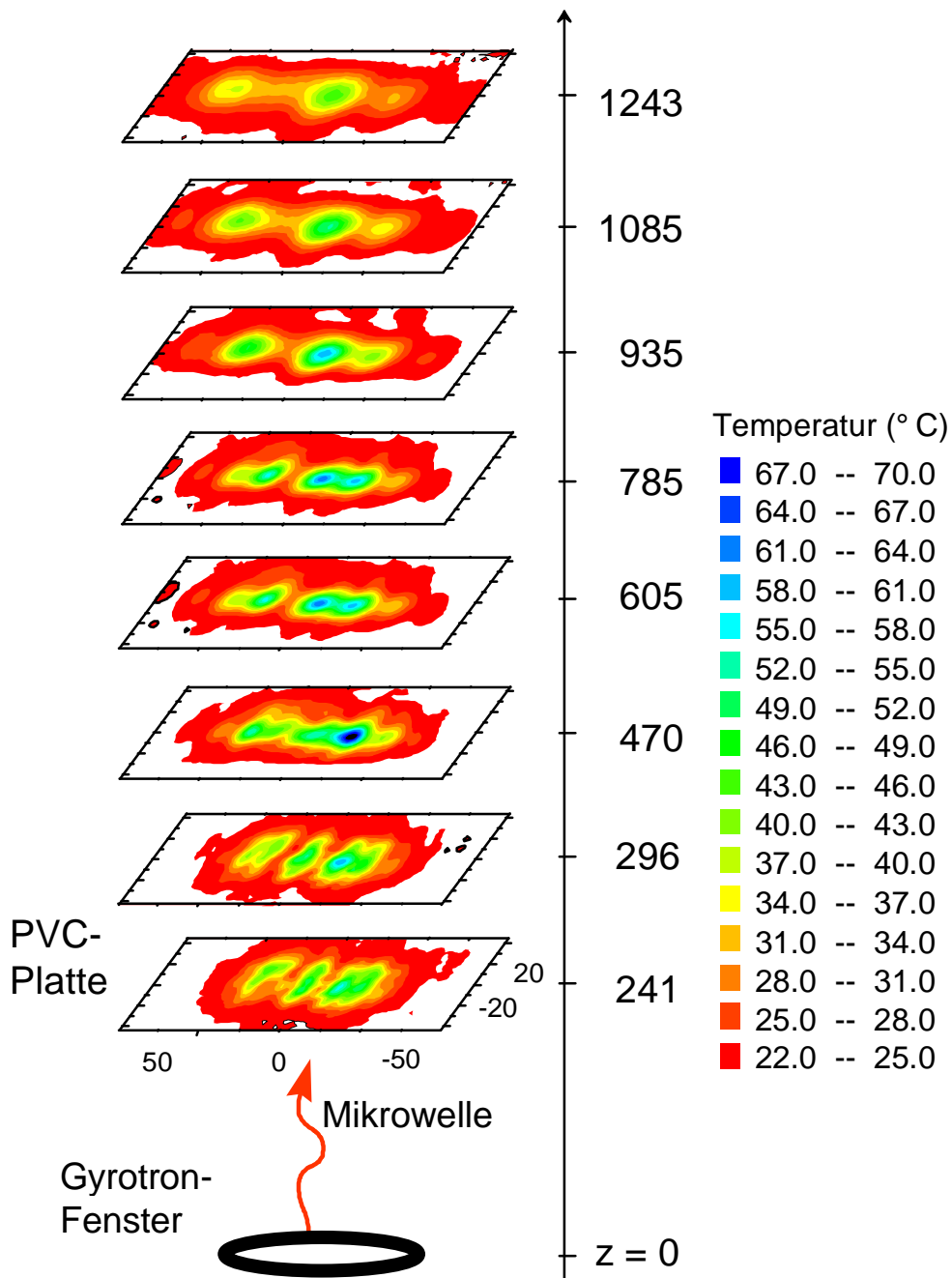


Abb. 70: Messung der Temperatur der PVC-Targetplatte bei verschiedenen Abständen vom Gyrotronfenster

Die Bilder müssen allerdings für die Auswertung sorgfältig vom Untergrund bereinigt werden. Deshalb betreibt man die Kamera in dem Betriebsmodus, bei dem viele Bilder in schnellst möglicher Folge (ca. 4 Bilder/sec) aufgenommen und über Kabel an den PC übertragen werden. Dabei muss verzichtet werden auf die Umrechnung der binären Farbwerte (12bit) in die zugehörige Temperatur, und auch auf die Korrektur von defekten Pixel des Detektor-Arrays. Man speichert dann einen kurzen Film auf der Festplatte ab, der mindestens jeweils 5 Bilder vor und nach der Belichtung durch den mm-Wellenstrahl umfassen sollte. Die Thermobilder werden vom PC eingelesen und einem speziellen Format auf der Festplatte abgelegt. Die Bilder können in Echtzeit beobachtet werden um gegebenenfalls Messungen zu wiederholen. Die eigentliche Auswertung erfolgt im Nachhinein, zunächst mit einer zur Kamera gehörigen, kommerziellen Bildbearbeitungssoftware, dann mit einem FORTRAN-Programm. Folgende Schritte sind nötig:

- Mitteln über mehrere Bilder

Kann man mehrere Bilder so schnell hintereinander aufzeichnen, dass sie praktisch dasselbe Bild zeigen, dann kann man das Rauschen vermindern, indem von mehreren der Mittelwert der Temperatur gebildet wird.

- Untergrund Abziehen

Wenn die Targetplatte vor der Belichtung nicht völlig isotherm ist, dann muss auch diese Temperaturverteilung gemessen und vom Ergebnis subtrahiert werden, um die tatsächliche Erwärmung durch die Millimeterwelle zu erhalten. In der Praxis erhält man einen solchen Untergrund z. B. durch die Umgebungstemperatur oder weil die Platte vom vorherigen Schuss noch nicht vollständig abgekühlt ist. Insbesondere im Randbereich des Bildes, wo keine mm-Wellenleistung mehr auftrifft, wird das Ergebnis stark verfälscht, da in der weiteren Auswertung aus der Leistungsverteilung durch Radizieren die Amplitude berechnet wird. Diese Operation ist nahe null sehr empfindlich auf Störungen.

- Pixelfehler

Bei Aufnahme mit einem zweidimensionalen Detektor-Array muss mit dem Aussetzen einzelner Pixel gerechnet werden. Entweder sind einzelne Elemente dauerhaft kaputt, oder es kommt zu einem lokalen Aussetzer z. B. durch mm-Wellen-Streustrahlung. Diese Fehler sind optisch leicht auszumachen. Zur 'Reparatur' dieser Pixel wird zwischen den benachbarten, funktionierenden Punkten interpoliert.

- Entzerren

Da die Kamera nicht direkt im Mikrowellenfeld montiert sein kann, muss das Thermobild unter einem schrägen Blickwinkel aufgenommen werden. Um im Nachhinein die Bildern in einem rechtwinkligen Koordinatensystem miteinander zu vergleichen, sind auf der Targetplatte Markierungen angebracht. Diese müssen im Infrarotbild sichtbar, also z. B. etwas erwärmt sein. In unserem Fall wurden vier Leuchtdioden im Abstand von 150mm verwendet, welche die Ecken eines Quadrates bezeichnen.

- Umrechnen auf Temperatur

Durch die möglichst schnelle Aufnahme der Bilder muss auf die Berechnung der Temperatur in Echtzeit verzichtet werden. Stattdessen steht nur ein 12bit-Farbwert zur Verfügung. Die Umwandlung muss im Nachhinein durch Vergleich mit Bildern bekannter Temperatur durchgeführt werden.

- Umrechnung Temperatur \rightarrow Millimeterwellenleistung

Das Verfahren bis hierher liefert die Temperatur-Erhöhung des Targets nach der Belichtung durch die Millimeterwelle als Funktion des Ortes. Diese ist im einfachsten Fall linear abhängig von der Dauer Δt_{Puls} des Pulses, von der Leistung P_{mmW} der Mikrowelle und vom Absorptionskoeffizienten α . Im Allgemeinen ändert sich aber dieser Koeffizient mit der Temperatur des Targetmaterials, also während des Pulses. Wenn diese Materialeigenschaft bekannt ist, dann kann mit folgender Beziehung die mm-Wellenleistung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) &= c \cdot P_{\text{mmW}}(\mathbf{x}) \cdot \alpha(T) \\ \Rightarrow P_{\text{mmW}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c \cdot \Delta t_{\text{Puls}}} \cdot \int_{T_0}^{T_{\text{ende}}(\mathbf{x})} \frac{1}{\alpha(T)} dT \end{aligned} \quad (115)$$

- Leistung \rightarrow Feldamplitude

$$E(\mathbf{x}) \sim \sqrt{P(\mathbf{x})} \quad (116)$$

Diese Umrechnung ist trivial, bedarf aber besonderer Beachtung im Sinne der Fehlerfortpflanzung, da in den Randbereichen, d. h. an Stellen mit verschwindender Mikrowellenleistung, die Wurzelfunktion eine singuläre Ableitung hat.

5.3.4 Strahlrekonstruktion und Spiegeldesign

Mit dem oben dargestellten Iterationsalgorithmus wurde aus den Bildern, die möglichst nahe am Gyrotronfenster aufgenommen worden sind, die Phase und damit der komplette Strahl rekonstruiert. Von den numerischen Verfahren zur Berechnung der Propagation hat sich die Fouriertransformation, d. h. die Analyse in ebene Wellen als am meisten geeignet herausgestellt. Da die Amplitudenverteilungen auch bei aller Sorgfalt noch Messfehler enthalten, kann es bei der Berechnung der Phase φ aus dem komplexen Phasenfaktor $e^{i\varphi}$ zu 2π -Sprüngen kommen [Mic-98]. Diese Sprünge sind insbesondere bei der Berechnung von phasenkorrigierenden Spiegeln schwer zu handhaben. Sie können bereits bei der Entstehung, d. h. während der Iteration vermieden werden, wenn bei der Propagation zwischen den Querschnittsflächen hohe Fourierkomponenten ausgefiltert werden. Mit dem beschriebenen Verfahren und den gezeigten Messungen wurde ein Überlapp-Koeffizient (114) von $\eta = 97 - 98\%$ erreicht.

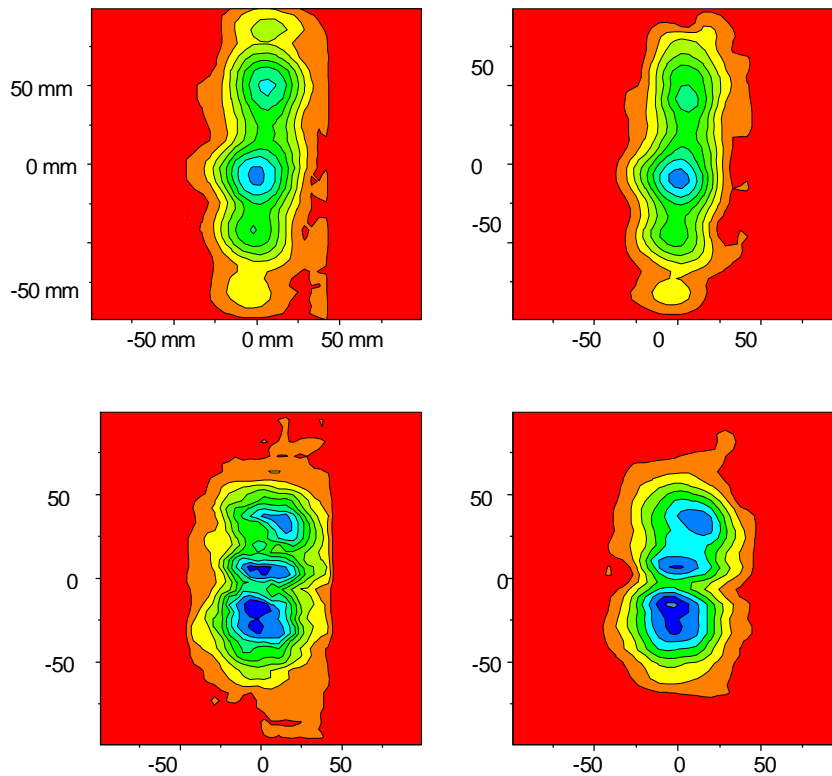


Abb. 71: Vergleich von gemessener (links) und rekonstruierter (rechts) Amplitudenverteilung an zwei Querschnitten (oben: $z=1085\text{mm}$, unten: $z=241\text{mm}$)

Dasselbe Iterationsverfahren wird verwendet, um die Amplitudenverteilung am Querschnitt des ersten Spiegels umzuwandeln in die gewünschte Gaußverteilung am zweiten Spiegel. Der Algorithmus liefert wiederum eine Phasenverteilung an den beiden Querschnitten. Diesmal handelt es sich aber nicht um eine Messung der frei propagierenden Millimeterwelle, sondern um die notwendige Korrektur der Phasenverteilung, welche man dem Strahl mittels zweier Phasenplatten einprägt. In Abb. 72 ist ein solcher Spiegel abgebildet, der für ein 140GHz Gyrotron am Experiment W7-AS hergestellt worden ist.

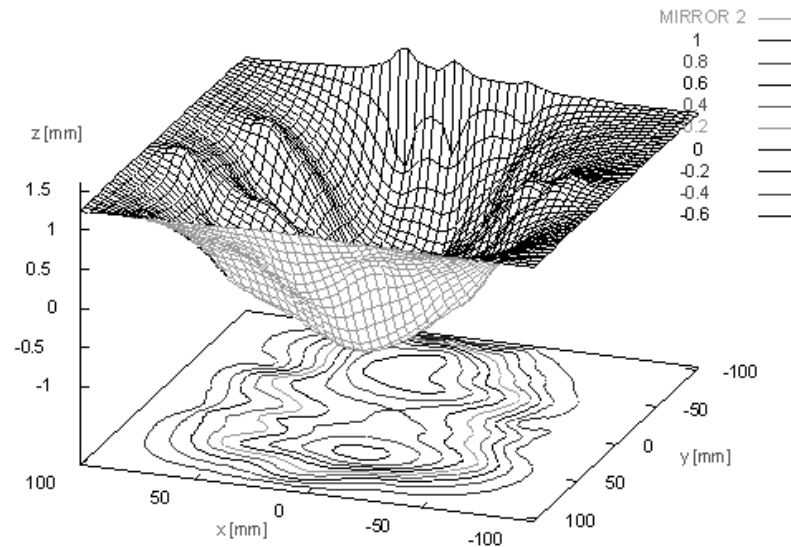


Abb. 72: Berechnung für die Oberfläche eines phasenkorrigierenden Spiegels für eines der 140GHz Gyrotrons am Stellarator W7-AS / IPP

5.4 Zusammenfassung zur ECRH-Anlage an W7-X

Die Ergebnisse aus den Untersuchungen zum Vielstrahl-Wellenleiter konnten bei der Planung des im Bau befindlichen Stellarator-Experiments W7-X angewendet werden.

Im Vergleich zu 10 herkömmlichen einzelnen Übertragungsleitungen reduziert sich die Zahl der notwendigen Spiegel drastisch, und die gesamte zu bearbeitende Spiegeloberfläche sinkt auf weniger als 50%.

Die Leistung der dadurch erzeugten Falschmoden am Ende der Übertragungsleitung beträgt weniger als 0.2%, die Verluste durch die endliche Größe der Spiegel ($740 \times 110 \text{ mm}^2$) schlagen mit weiteren 0.3% zu Buche. Beides ist vernachlässigbar beispielsweise gegenüber den ohmschen Verlusten an den kupfernen Spiegeloberflächen.

Die mm-Wellenstrahlung aus den Gyrotrons kann mit zwei speziell angefertigten, phasenkorrigierenden Spiegeln an die Übertragungsleitung angepasst werden. Bei einer hinreichend glatten Leistungsverteilung am Ausgangsfenster kann die Strahlung aber auch direkt als Modenmischung bis zum Plasma übertragen werden.

6 Literatur

- Arn-69 J.A.Arnaud, H.Kogelnik, 1969, 'Gaussian light beams with general astigmatism', Applied Optics, vol.8, no.8, pp.1687-1693.
- Arn-73 J.A.Arnaud, 1973, 'Classroom Demonstration of the Law of Propagation of Gaussian Beams', AJP, vol.41, pp.549-552
- Aro-92 R.K.Arora, Zhong Lu, 1992, 'Graphical depiction of the electromagnetic fields of Hermite-Gaussian modes', IEE-proceedings H, vol.139, no.4, pp.369-375.
- Bro-87 I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew, 1987, 'Taschenbuch der Mathematik', Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main.
- Chi-95 A.V.Chirkov, G.G.Denisov, N.L.Aleksandrov, 1995, '3D wavebeam field reconstruction from intensity measurements in a few cross sections', Optics Communications, vol.16, no.4, pp.449-452.
- Coo-65 J.W.Cooley, J.W.Tukey, 1965, 'An algorithm for the machine computation of complex Fourier series', Mathematics of Computation, vol.19, pp.297-301.
- Doa-92 J.L.Doane, 1992, 'Grating Polarizers in Waveguide miter bends', Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves, vol.13, no.11, pp.1727-1743
- Dra-82 C.Dragone, 1982, 'A First-Order Treatment of Aberrations in Cassegrainian and Gregorian Antennas', IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol.30, no.3.
- Edi-90 G.A.Ediss, 1990, 'Diffraction of a Gaussian beam at an aperture', IEE-proceedings H, vol.137, no.3, pp.171-174.
- Emp-97 L.Empacher et al., 1997, 'Conceptual Design of the 140GHz/10MW CW ECRH System for the Stellarator W7-X', In Fusion Technology 1996, Elsevier Science B.V.Amsterdam, pp.541-544
- Emp-97a L.Empacher, G.Gantenbein, W.Kasperek, 1997, 'Matching of a non-Gaussian gyrotron output beam to an ECRH transmission line using thermographic measurements', Proc. of the 24th Eur. Phys. Soc. Conf., Berchtesgaden, Germany, 9-13.Jun 97, Proc.ECA, Geneva, vol.21A, pp1825-1828.
- Emp-98 L.Empacher et al., 1998, 'Calculations and experiments on multi-beam transmission for the 140GHz/10MW CW ECRH system on W7-X', Proc. of the 10-th Joint Workshop on ECD and ECH, Ameland, the Netherlands, 6-11.Apr 97, ed. by T.Donné, T.Verhoeven, World Scientific, Singapore, pp.561-568.
- Emp-98a L.Empacher, G.Gantenbein, F.Hollmann, W.Kasperek, H.Zohm, 1998, 'Present Development for the 140GHz Transmission System for ECRH on Stellarator W7-X', Proc. of the 23rd Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, 7-11.Sept 98, Essex.
- Erc-94 V.Erckmann, U.Gasparino, 1994, 'Electron Cyclotron Resonance Heating and Current Drive in Toroidal Fusion Plasmas'

- Fie-82 J.R.Fienup, 1982, 'Phase retrieval algorithms: a comparison', *Applied Optics*, vol.21, no.15, pp.2758-2769.
- Fly-88 V.A.Flyagin, G.S.Nusinovich, 1988, 'Gyrotron Oscillators', *Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers*, vol.76, pp.644-656.
- Ito-89 T.Itoh, 1989, 'Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave passive Structures', J.Wiley, New York.
- Jac-62 J.D.Jackson, 1962, 'Classical Electrodynamics', Wiley, New York
- Joy-84 W.B.Joyce, B.C.DeLoach, 1984, 'Alignment of Gaussian beams', *Applied Optics*, vol.23, no.23, pp.4187-4195.
- Kat-67 B.Z.Katsenellenbaum, V.V.Semenov, 1967, 'Synthesis of the phase correctors forming a given field', *Radio Eng. Electronic Phys.* 12, p.223.
- Kog-64 H.Kogelnik, 1964, 'Coupling and Conversion Coefficients for Optical Modes in Quasi-Optics', *Microwave Research Institute Symposia*, Ser.14, Polytechnic Press, New York.
- Kog-65 H.Kogelnik, T.Li, 1965, 'On the Propagation of Gaussian Beams of Light Through Lenslike Media Including those with a Loss or Gain Variation', *Applied Optics*, vol.4, no.12, pp.1562-1569.
- Kog-66 H.Kogelnik, T.Li, 1966, 'Laser Beams and Resonators', *Applied Optics*, vol.5, no.10, pp.1550-1567.
- Kon-86 J.A.Kong, 1986, 'Electromagnetic Wave Theory', John Wiley&Sons, Inc.
- Kop-92 K.Kopp, 1992, 'Numerische Lösungen der zeitabhängigen Maxwellgleichungen für polarisationsabhängige Reflexionsgitter', *Diplomarbeit am Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart*.
- Kra-90 H.G.Kraus, 1990, 'Huygens-Fresnel-Kirchhoff wave-front diffraction formulation: paraxial and exact Gaussian laser beams', *J. Opt. Soc. Am. A*, vol.7, no.1, pp.47-65.
- Leh-90 G.Lehner, 1990, 'Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker', Springer-Verlag, Berlin.
- Mar-93 D.H.Martin, J.W.Bowen, 1993, 'Long-Wave Optic', *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.41, no.10, pp.1676-1690.
- Mic-98 G.Michel, E.Sanchez, 1998, 'Investigations on Transmission lines with non-quadratic mirrors', *Proc. of the 10-th Joint Workshop on ECD and ECH, Ameland, the Netherlands, 6-11 Apr 1997*, ed. by T.Donné, T.Verhoeven, World Scientific, Singapore, pp.589-596.
- Mur-87 J.A.Murphy, 1987, 'Distortions of a simple Gaussian beam on reflection from off-axis ellipsoidal mirrors', *Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol.8, pp.1165-1187.

- Qui-65 J.P.Quine, 1965, 'E- and H-Bends for High-Power Oversized Rectangular Waveguide', IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., pp.54-63
- Sch-93 U.Schumacher, 1993, 'Fusionsforschung', Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.
- Sem-94 C.Semmler, 'Aufbau eines Meßsystems zur Bestimmung der Parameter des Millimeterwellen-Ausgangsstrahls von Hochleistungsgyrotrons', Wissenschaftlicher Bericht FZKA 5400, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH.
- Sie-71 A.E.Siegman, 1971, 'An Introduction to Lasers and Masers', McGraw-Hill, Inc.
- Smi-92 F.M.A.Smits, 1992, 'Elliptical Polarisation for Oblique EC-Wave Launch', Proc. of the 8-th Joint Workshop on ECE and ECRH, Gut Ising, Germany, 19-21 Oct 1992, ed. by H.J.Hartfuß, pp.549-559
- Ste-95 Fa.Stemmer, 'PRISM-Infrarotkameras', Datenblatt PRISM DS, Fa. Stemmer, <http://www.imaging.de/>
- Suv-95 E.V.Suvorov et al., 1995, 'Ion temperature and beam driven plasma waves from collective scattering of gyrotron radiation', Plasma Physics and Controlled Fusion, vol.37, pp.207-1213.
- Thu-98 M.Thumm, 1998, 'state-of-the-Art of High Power Gyro-Devices and Free Electron Masers, Update 1997', Wissenschaftlicher Bericht FZKA 6060, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH.
- Vin-95 D.V.Vinogradov, 1995, 'Mirror conversion of Gaussian beams with simple astigmatism', Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves, vol.16.
- Woc-96 S.Wochner, 1996, 'Analyse der Strahlparameter und der Leistung eines Hochleistungs-Mikrowellenstrahles', Wissenschaftlicher Bericht FZKA 5797, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH.

7 Anhang

7.1 Überlapp-Integrale

Ergänzung zum gleichnamigen Kapitel

Zur Falschmodenanalyse einer eindimensionalen, fundamentalen gaußschen Mode TEM_0 in einem anderen System von gaußschen Moden TEM_n ist die Lösung des Überlapp-Integrals nötig:

$$\langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0, R \neq \infty, w \neq w_0, d \neq 0} * \text{TEM}_n \rangle = \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} e^{-\frac{(x-d)^2}{w^2}} e^{-ik \frac{x^2}{2R}} e^{-ik\beta x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n! 2^n w_0} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2}{w_0^2}} dx$$

Dieses Integral ist nicht explizit lösbar. Oft weicht aber nur einer der Parameter von der Sollgröße ab. Dann kann das Integral auch explizit gelöst werden.

$d = 0, R = \infty, \beta = 0$, aber Strahltaile $w \neq w_0$

$$\langle \text{TEM}_0^{w \neq w_0} * \text{TEM}_0 \rangle = \sqrt{2} \frac{\sqrt{ww_0} (w^2 - w_0^2)^0}{(w^2 + w_0^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2ww_0}{w^2 + w_0^2}}$$

$$\langle \text{TEM}_0^{w \neq w_0} * \text{TEM}_1 \rangle = 0$$

$$\langle \text{TEM}_0^{w \neq w_0} * \text{TEM}_2 \rangle = \frac{\sqrt{ww_0} (w^2 - w_0^2)}{(w^2 + w_0^2)^{3/2}} = \sqrt{\frac{ww_0}{w^2 + w_0^2}} \frac{w^2 - w_0^2}{w^2 + w_0^2}$$

allgemein:

$$\langle \text{TEM}_0^{w \neq w_0} * \text{TEM}_n \rangle = \begin{cases} \frac{\sqrt{n!}}{2^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n}{2})!} \frac{\sqrt{ww_0} (w^2 - w_0^2)^{n/2}}{(w^2 + w_0^2)^{\frac{n+1}{2}}} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$w = w_0, R = \infty, \beta = 0$, aber verschoben um $d \neq 0$

$$\langle \text{TEM}_0^{d \neq 0} * \text{TEM}_0 \rangle = e^{-\frac{d^2}{2w^2}}$$

$$\langle \text{TEM}_0^{d \neq 0} * \text{TEM}_1 \rangle = \frac{d}{w} e^{-\frac{d^2}{2w^2}}$$

$$\langle \text{TEM}_0^{d \neq 0} * \text{TEM}_2 \rangle = \frac{d^2}{\sqrt{2}w^2} e^{-\frac{d^2}{2w^2}}$$

allgemein:

$$\langle \text{TEM}_0^{d \neq 0} * \text{TEM}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{w} \right)^n e^{-\frac{d^2}{2w^2}}$$

Da das gaußsche Modensystem vollständig ist, muss sich die gesamte Leistung des untersuchten Strahles in den einzelnen Moden wiederfinden. Dies bestätigt umgekehrt die Integrationsformeln. Die Rechnung, die für jedes der Integrale durchführbar ist, ist hier exemplarisch für den transversal verschobenen Strahl gezeigt.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} P_n &= \sum_{n=0} \left| \langle \text{TEM}_0^{d \neq 0} * \text{TEM}_n \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{w} \right)^{2n} e^{-\frac{d^2}{w^2}} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^2}{w^2} \right)^n \cdot e^{-\frac{d^2}{w^2}} = e^{+\frac{d^2}{w^2}} \cdot e^{-\frac{d^2}{w^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$w = w_0, d = 0, \beta = 0$, aber Phasenkrümmungsradius $R \neq \infty$

$$\begin{aligned} \langle \text{TEM}_0^{R \neq \infty} * \text{TEM}_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{ikw^2}{4R}}} \\ \langle \text{TEM}_0^{R \neq \infty} * \text{TEM}_1 \rangle &= 0 \\ \langle \text{TEM}_0^{R \neq \infty} * \text{TEM}_2 \rangle &= \frac{\frac{ikw^2}{4R}}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{ikw^2}{4R} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{q}{\sqrt{2}(1+q^2)^{\frac{3}{4}}} e^{-i\frac{3}{2}\arctan(q)} \quad \text{mit } q = \frac{kw^2}{4R} \end{aligned}$$

$w = w_0, d = 0, R = \infty$, aber Einfallswinkel $\beta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0} * \text{TEM}_0 \rangle &= e^{-\frac{k^2 w^2 \tan^2 \beta}{8}} \\ \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0} * \text{TEM}_1 \rangle &= -i \frac{1}{2} (kw \tan \beta) e^{-\frac{k^2 w^2 \tan^2 \beta}{8}} \\ \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0} * \text{TEM}_2 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{32}} (kw \tan \beta)^2 e^{-\frac{k^2 w^2 \tan^2 \beta}{8}} \end{aligned}$$

allgemein:

$$\langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0} * \text{TEM}_n \rangle = (-i)^n \frac{(kw \tan \beta)^n}{\sqrt{n!} 2^n} e^{-\frac{k^2 w^2 \tan^2 \beta}{8}}$$

Kontrolle:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} \left| \langle \text{TEM}_0^{\beta \neq 0} * \text{TEM}_n \rangle \right|^2 &= \left(e^{-\frac{Q^2}{8}} \right)^2 \sum_{n=0} \frac{Q^{2n}}{n! 4^n} \quad \text{mit } Q = kw \tan \beta \\ &= e^{-\frac{Q^2}{4}} \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{Q^2}{4} \right)^n = 1 \end{aligned}$$

$d = 0, \beta = 0$, aber $w \neq w_0, R \neq \infty$

$$\langle \text{TEM}_0^{R_1 \neq \infty, w \neq w_0} * \text{TEM}_2 \rangle = \frac{\sqrt{\frac{w}{w_0}} \left(\frac{w^2}{w_0^2} - 1 - i \frac{\pi w^2}{\pi R} \right)}{\left(\frac{w^2}{w_0^2} + 1 + i \frac{\pi w^2}{\pi R} \right)^{3/2}}$$

7.2 Analytische Ergebnisse

Um das Layout der Formeln zu vereinfachen, sind im Folgenden noch einige (selbsterklärenden) Abkürzungen verwendet:

$$w_0 = w_0$$

$$dx, dy = \Delta x, \Delta y$$

$$ta = \tan\Theta = \lambda f / \pi w_0^2$$

7.2.1 Q-Konfiguration

Strahlparameter und Modenanteil eines gaußschen Strahles nach vier Spiegeln in Q-Konfiguration ($\Delta y = 0$)

$$R_x^{-1} =$$

$$1/2 \frac{27 p^2 - 12 p + 9 ta^2 p^2 - 8 ta^2}{f^3} dx^2 + O(dx^3)$$

$$R_y^{-1} =$$

$$- 1/2 \frac{- 5 p^2 + 4 p + ta^2 p^2 - 6 ta^2 - 8 ta^2 p - 2}{f^3} dx^2 + O(dx^3)$$

$$W_x =$$

$$w_0 + 3/2 \frac{w_0 p}{f^2} dx^2 + 3/4 \frac{w_0 p (- 1 + 3 p)}{f^3} dx^3 + O(dx^4)$$

$$W_y =$$

$$w_0 - 3/2 \frac{w_0 p}{f^2} dx^2 - 3/4 \frac{w_0 p (- 1 + 3 p)}{f^3} dx^3 + O(dx^4)$$

$$d_x =$$

$$1/32 \frac{p (128 - 288 p - 144 p^2 + 324 p^3)}{f^4} dx^5$$

$$+ 1/32 \frac{p (408 p - 204 p^2 - 96 - 621 p^3 + 243 p^4)}{f^5} dx^6$$

$$\beta_x =$$

$$- 1/2 \frac{p (- 4 + 9 p)}{f^3} dx^3 - 5/8 \frac{p (4 - 21 p + 27 p^2)}{f^4} dx^4 + O(dx^5)$$

Daraus resultiert folgende Leistung in den Falschmoden:

$$P_{\text{TEM10}} = \frac{1}{4} \frac{p^2 (16 - 72 p + 81 p^2)}{f^4 w_0^2 t_a^2} dx + \frac{5}{8} \frac{p^2 (-16 + 120 p - 297 p^2 + 243 p^3)}{f^5 w_0^2 t_a^2} dx + \frac{1}{64} \frac{p^2 (-8856 p + 33975 p^2 - 60102 p^3 + 880 + 41553 p^4)}{f^6 w_0^2 t_a^2} dx$$

$$P_{\text{TEM20}} = \frac{1}{32} \frac{(144 p^2 + 729 p^4 - 648 p^3) dx}{t_a^2 f^4} + \frac{1}{32} \frac{(192 p^4 + 486 p^2 - 396 p^3 - 216 p^4) dx}{f^4} - \frac{1}{16} \frac{(240 p^2 - 1800 p^3 + 4455 p^4 - 3645 p^5) dx}{f^5 t_a^2} - \frac{1}{16} \frac{(-486 p^5 + 112 p^2 - 498 p^3 + 324 p^4 + 702 p^5) dx}{f^5}$$

$$P_{\text{TEM02}} = \frac{1}{32} \frac{(4 - 40 p^3 - 16 p^2 + 36 p^4 + 25 p^4) dx}{t_a^2 f^4} + \frac{1}{32} \frac{(28 p^2 + 24 + 88 p^3 - 16 p^4 - 10 p^4) dx}{f^4} + \frac{1}{16} \frac{(14 p^5 + 85 p^3 + 2 + 171 p^3 - 183 p^4 - 77 p^2) dx}{f^5 t_a^2} + \frac{1}{16} \frac{(-94 p^3 + 84 p^2 - 96 p^2 - 12 - 42 p^5 + 194 p^4) dx}{f^5}$$

$1-P_{\text{TEM00}}$ = fehlende Leistung in der Fundamentalmode =

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{16} \frac{(377 p^4 + 2 - 8 p^2 + 90 p^3 - 344 p^4) dx}{t a^2 f^4} \\
 & + \frac{1}{16} \frac{(12 + 238 p^4 - 184 p^2 - 64 p^3 + 88 p^4) dx}{f^4} \\
 & - \frac{1}{16} \frac{(317 p^2 - 2 - 1971 p^3 + 4638 p^4 - 3730 p^5 - 14 p^5) dx}{f^5 t a^2} \\
 & - \frac{1}{16} \frac{(-444 p^5 + 508 p^4 + 28 p^3 + 12 + 418 p^3 - 402 p^2) dx}{f^5}
 \end{aligned}$$

7.2.2 Z-Konfiguration

Strahlparameter und Modenanteil eines gaußschen Strahles nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration ($\Delta y = 0$)

$$R_x^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{18 - 60 p^2 + 9 p^2 t a^2 + 14 t a^2 + 27 p^2}{f^3} dx$$

$$R_y^{-1} = \frac{1}{2} \frac{-4 - 12 t a^2 - 5 p^2 + p^2 t a^2 + 12 p^2}{f^3} dx$$

$$W_x = w_0 + \frac{3}{2} \frac{w_0 p^2}{f^2} dx - \frac{1}{2} \frac{w_0 (30 + 129 p^2 - 38 p^3)}{f^3} dx$$

$$W_y = w_0 - \frac{3}{2} \frac{w_0 p^2}{f^2} dx - \frac{1}{2} \frac{w_0 (-3 p^3 + 3 + 17 p^2)}{f^3} dx$$

$$d_x =$$

$$- \frac{1}{8} \frac{(30 + 129 p^2 - 38 p^4) dx^3}{f} + \frac{1}{2} \frac{(21 - 70 p^2 + 45 p^5) dx^4}{f}$$

$$\beta_x =$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(6 - 20 p^2 + 9 p^3) dx^3}{f} + \frac{15}{32} \frac{(38 - 60 p^2 + 47 p^5) dx^5}{f}$$

$$P_{\text{TEM10}} =$$

$$\frac{1}{32} \frac{648 p^4 + 288 - 2880 p^3 + 4064 p^2 - 1920 p^6}{f w_0^4 t_a^2} dx^6$$

$$+ \frac{1}{32} \frac{25596 p^5 - 33120 p^2 - 3420 + 17664 p^4 - 42633 p^6 - 5832 p^6 + 41520 p^3}{f w_0^6 t_a^2} dx^8$$

$$P_{\text{TEM20}} =$$

$$\frac{9}{32} \frac{81 p^4 + 36 + 508 p^2 - 360 p^3 - 240 p^4}{f^4 t_a^2} dx^4$$

$$+ \frac{9}{32} \frac{-81 p^4 + 261 p^3 + 54 p^2 - 234 p^5}{f^5 t_a^2} dx^5$$

$$P_{\text{TEM02}} =$$

$$\frac{1}{32} \frac{16 - 120 p^3 - 96 p^4 + 25 p^2 + 184 p^2}{f^4 t_a^2} dx^4$$

$$+ \frac{1}{32} \frac{75 p^4 - 255 p^3 + 240 p^2 - 60 p^5}{f^5 t_a^2} dx^5$$

$$1 - P_{\text{TEM00}} =$$

$$\frac{1}{16} \frac{-1680 p^3 - 1128 p^2 + 170 + 2378 p^2 + 377 p^4}{f^4 t_a^2} dx^4$$

$$+ \frac{1}{16} \frac{1047 p^3 - 933 p^2 - 327 p^4 + 213 p^5}{f^5 t_a^2} dx^5$$

Auftreffort und -winkel eines Strahles nach vier Spiegeln in Z-Konfiguration ($\Delta y \neq 0$):

$d_x =$

$$\begin{aligned}
 dx + 1/8 \frac{(81 p^3 - 129 p^2 + 38 p - 30) dx^4}{f^3} \\
 + 1/8 \frac{(58 p^3 - 50 + 82 p^2 - 114 p^2) dy^2 dx^2}{f^3} \\
 + 1/8 \frac{(p^3 + 24 p^2 - 9 p^2 - 16) dy^4}{f^3}
 \end{aligned}$$

$d_y =$

$$\begin{aligned}
 dy + 1/2 \frac{(-17 p^2 + 11 p^3 - 3 + 3 p) dy^3 dx^3}{f^3} \\
 + 1/2 \frac{(-4 - 11 p^2 + 8 p^3 + 5 p^3) dy^3 dx^3}{f^3}
 \end{aligned}$$

$\beta_x =$

$$1/2 \frac{(6 + 9 p^2 - 20 p) dx^3}{f^3} + 1/2 \frac{(-12 p + 5 p^2 + 4) dy^2 dx^2}{f^3}$$

$\beta_y =$

$$-1/2 \frac{(-12 p + 5 p^2 + 4) dy^2 dx^2}{f^3} - 1/2 \frac{(p^2 - 4 p + 2) dy^3}{f^3}$$