

Berechnung der Stator-Rotor-Wechselwirkung in Turbomaschinen

Von der Fakultät Energietechnik der Universität Stuttgart zur
Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Alexander Jung
aus Schwäbisch Gmünd

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Stetter

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.sc.t.h.c. (PL) H. E. Gallus

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juli 2000

Lehrstuhl und Institut für Thermische Strömungsmaschinen
und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart

2000

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart. Sie wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Vorhabens „Berechnung der Stator–Rotor–Interaktion in Turbomaschinen“ und vom Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS) im Rahmen des High-Performance-Computing-Bundesprojektes „Simulation der instationären Durchströmung von ein- und mehrstufigen Turbomaschinen“ finanziell unterstützt, wofür ich mich bedanke.

Besonders herzlich danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stetter, der mir die Durchführung der Arbeit ermöglichte und sie in jeder Hinsicht unterstützte. Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.sc.t.h.c. (PL) H. E. Gallus danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit, für seine Unterstützung der Zusammenarbeit und die Übernahme des Mitberichts.

Danken möchte ich an dieser Stelle auch allen Institutsangehörigen, die auf unterschiedlichste Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt meinen ehemaligen Kollegen aus der Numerikabteilung Dr.-Ing. Rüdiger Merz, Dr.-Ing. Jörg Krückels und Dipl.-Ing. Holger Bauer für die gute Zusammenarbeit, das angenehme Arbeitsklima und die stetige Diskussionsbereitschaft. Nicht zuletzt danke ich dem Leiter der Numerikabteilung Herrn Dr.-Ing. J. F. Mayer, der mir stets die richtige Menge Entfaltungsfreiraum ließ.

Den Mitarbeitern des Rechenzentrums der Universität Stuttgart (RUS bzw. HLRS) gebührt mein Dank für die vielfältige Unterstützung, die ich dort erfahren durfte. Insbesondere möchte ich mich hier bei Jutta Sauer, Uwe Wössner und Uwe Zimmat von der Visualisierungs-Abteilung bedanken.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Ralf Walraevens für seine detaillierten Meßdaten, die beispiellose Zusammenarbeit, die freundliche Bereitstellung einiger Bilder und seines Visualisierungsprogrammes und die vielen extensiven Fachdiskussionen, die leider meist telefonisch erfolgen mußten. Ebenso danke ich allen anderen Mitarbeitern des Instituts für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der Rheinisch–Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, die in irgendeiner Form an der Zusammenarbeit beteiligt waren.

Besonderer Dank gilt meiner Frau Birgit und unseren Kindern für das entgegengebrachte Verständnis und den für das Gelingen dieser Arbeit erforderlichen privaten Rückhalt. Außerdem möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir die Ingenieurausbildung ermöglichten.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	6
1 Einleitung	12
1.1 Motivation	12
1.2 Stand der Forschung	13
1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise	19
2 Instationaritäten in Turbomaschinenströmungen	21
2.1 Einteilung und Abgrenzung	21
2.2 Entstehung	22
2.3 Das Periodizitätsproblem	25
3 Modellierung kompressibler Strömungen	34
3.1 Thermodynamische Beziehungen	34
3.2 Navier-Stokes-Gleichungen	36
3.3 Turbulenzmodellierung	40
3.3.1 Turbulenzmodell nach Baldwin und Lomax	40
3.3.2 Implementierung in das numerische Verfahren	42
3.4 Randbedingungen	46
3.4.1 Feste Wände	46
3.4.2 Eintritts- und Austrittsränder	47
3.4.3 Periodische Ränder	58
3.4.4 Koppellebene zwischen Stator- und Rotorgebiet	58
3.4.5 Künstliche Ränder	58
3.5 Anfangsbedingungen	58
3.6 Entdimensionalisierung der Gleichungen	59

4	Erweiterungen für instationäre Strömungen	60
4.1	Zeitlich geneigte Rechengebiete	60
4.1.1	Mathematische Beschreibung	60
4.1.2	Implementierung	64
4.2	Instationäre Kopplung von Stator- und Rotorgebiet	65
4.2.1	Kopplungsmethoden	65
4.2.2	Beschreibung der Stator–Rotor–Kopplung	67
4.3	Rücktransformation zeitlich geneigter Strömungsfelder	72
4.4	Mehrstufige Anwendungsfälle	73
4.5	Beschleunigungstechniken	76
4.5.1	Implizites Residuenglätten bei globalen Zeitschrittweiten	77
4.5.2	Zeitkonsistentes, explizites Multigridverfahren	79
4.5.3	Implizite Zeitintegration	82
4.5.4	Vektorisierung und Parallelisierung	85
4.5.5	Kombinationen verschiedener Techniken	90
5	Instationäre Strömung in einer Kaltluftturbine	91
5.1	Beschreibung des Testfalls	91
5.1.1	Turbinenprüfstand	91
5.1.2	Experimentelle Untersuchungen	92
5.1.3	Numerische Untersuchungen	94
5.2	Ergebnisse	97
5.2.1	Gemittelte Strömungsgrößen	98
5.2.2	Instationäres Strömungsfeld	109
6	Computeranimationen	138
6.1	Transsonisch durchströmte Turbinenstufe	138
6.2	Strömungseffekte in einer 1,5-stufigen Axialturbine	142
7	Zusammenfassung	148

A	Normierung der physikalischen Größen	151
B	Zeitgeneigte Navier-Stokes-Gleichungen	152
C	Stabilitätsgrenze der Zeitneigungsmethode	154
D	Bilineare Interpolation	155
E	Weitere umfangsgemittelte Radialverteilungen	158
	Literaturverzeichnis	164

Nomenklatur

Formelzeichen

a	lokale Schallgeschwindigkeit, komplexer Fourierkoeffizient
A	Oberfläche des Kontrollvolumens
A^+	Konstante des Turbulenzmodells
\overline{A}	Koeffizientenmatrix der linearisierten Euler–Gleichungen
\overline{B}	Koeffizientenmatrix der linearisierten Euler–Gleichungen
c	scheinbare Amplitudengeschwindigkeit, charakteristische Größe
c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
C_{CP}	Konstante des Turbulenzmodells
C_{KLEB}	Klebanoffkonstante
C_{MUTM}	Konstante des Turbulenzmodells
C_{WK}	Konstante des Turbulenzmodells
\vec{C}	Vektor der charakteristischen Variablen
\overline{C}	Koeffizientenmatrix der linearisierten Euler–Gleichungen
CFL	Courantzahl
e	spezifische innere Energie, Eulersche Zahl
f	physikalische Frequenz, Interpolationsfaktor
F	Hilfsfunktion des Turbulenzmodells
F_{MAX}	Maximalwert der Hilfsfunktion F
F_{KLEB}	Klebanoffsche Intermittenzfunktion
F_{WAKE}	Nachlauffaktor des Turbulenzmodells
\overline{F}	Flußmatrix der Navier–Stokes–Gleichungen
h	spezifische Enthalpie
i	Zählindex, imaginäre Einheit
j	Zählindex
\overline{I}	Einheitstensor
k	spezifische Wärmeleitfähigkeit, Wellenzahl in x -Richtung, Konstante des Turbulenzmodells
konst.	Konstante
K	reduzierte Frequenz, Clauserkonstante
l	gewichteter Wandabstand beim Turbulenzmodell, Wellenzahl in y -Richtung
L_{ref}	Referenzlänge
m	Wellenzahl in z -Richtung, Anzahl der Gitterebenen beim Multigrid–Verfahren
M	Machzahl

n	Schaufelzahl, ε -Umgebung der diskreten Testfunktion, Zählindex, Anzahl Schaufelkanäle in einem Bereich des Rechengebiets, Zahl der Zeitschritte, Nummer des Zeitschritts in der transformierten Zeit
n_{sol}	Anzahl instationärer Momentaufnahmen des Strömungsfelds
n_{teil}	Anzahl der in Umfangsrichtung benachbarten Bereiche
\vec{n}	Normalenvektor
p	Druck, Exponent der laminar-trubulenten Umschlagsfunktion
Pr	Prandtlzahl
q	beliebige Strömungsgröße, Wärmestrom, zeittransformierte Zustandsgröße
\vec{q}	Wärmestromvektor
\vec{Q}	Zustandsvektor der zeittransformierten Gleichungen
r	Radius des Zylinderkoordinatensystems, r -Koordinate, Abstand von der Drehachse
R	stoffspezifische Gaskonstante
\vec{R}	Vektor der Gesamtresiduen
s	Entropie, Bogenlänge des Schaufelprofils
S	Sutherlandkonstante, Hilfstern der nicht-reflektierenden Randbedingungen
\vec{S}	Quelltermvektor
Str	Strouhalzahl
sym.	symmetrisch
t	Zeit, Schubspannungsleistung
\vec{t}	Vektor der Schubspannungsleistung
t_{ref}	Referenzzeit
T	Schaufelwechselferiodenperiode, Temperatur, Intermittenzfaktor des Transitionsmodells
u	Geschwindigkeit in x -Richtung
u_{DIF}	Hilfsgeschwindigkeit des Turbulenzmodells
u_{ref}	Referenzgeschwindigkeit
u_{∞}	Geschwindigkeit der ungestörten Zuströmung
u_{τ}	Reibungsgeschwindigkeit
\vec{u}^R	rechter Eigenvektor
\vec{U}	Lösungsvektor der konservativen Variablen, Vektor der Schwankungen der Primitivvariablen
$\overline{\overline{U}}^R$	Matrix der rechten Eigenvektoren, Transformationsmatrix
v	Geschwindigkeit in y -Richtung
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor, Vektor der Absolutgeschwindigkeit
\vec{v}^L	linker Eigenvektor
V	Kontrollvolumen
$\overline{\overline{V}}^L$	Matrix der linken Eigenvektoren, Transformationsmatrix
w	Relativgeschwindigkeit, Geschwindigkeit in z -Richtung
\vec{w}	Vektor der Relativgeschwindigkeit
x	Höhe des Zylinderkoordinatensystems, x -Koordinate

X	Scharparameter der linken Eigenvektoren
y	y -Koordinate, Wandabstand
y^+	dimensionsloser Wandabstand
y^*	spezieller Wandabstand des Turbulenzmodells
y_{MAX}	Wandabstand bei F_{MAX}
Y	Scharparameter der rechten Eigenvektoren
z	z -Koordinate
α	Winkel, absoluter tangentialer Strömungswinkel
β	relativer tangentialer Strömungswinkel
γ	absoluter radialer Strömungswinkel, bogenbezogener Zeitneigungsparameter
δ	Testfunktion
$\vec{\delta}$	Einheitsvektor
ε	ε -Umgebung der Testfunktion, Glättungsparameter
κ	Isentropenexponent
λ	Viskositätskoeffizient, Querkontraktionszahl, Hilfstern der instationären Randbedingungen
Λ	Hilfstern des Schubspannungstensors, Hilfsfrequenz der nicht-reflektierenden Randbedingungen
μ	dynamische Viskosität, Hilfstern der instationären Randbedingungen
π	Kreiszahl
ϱ	Dichte
τ	Schubspannung, Pseudozeit bei impliziter Integration
$\bar{\tau}$	Schubspannungstensor
φ	Winkel des Zylinderkoordinatensystems, φ -Koordinate, Schau- felteilung, Breite eines Bereichs des Rechengebiets
$\tilde{\varphi}$	Breite eines einzelnen Schaufelgitterkanals
χ	winkelbezogener Zeitneigungsparameter
Φ	Teilungsverhältnis
Ψ	Hilfstern bei der Zeitneigung
ω	Kreisfrequenz
$\vec{\omega}$	Vektor der Wirbelstärke
Ω	Winkelgeschwindigkeit
$\vec{\Omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor

Tiefgestellte Indizes

a	zum Ausgabezeitpunkt
avg	gemittelt
C	konvektiv
D	diffusiv
h	entlang einer Gitterlinie
i	Index für Rechengebietsbereich, Zählindex, innen, Gitterindex in der ersten Gitterrichtung
I	aufgrund der Zeitneigung, zeitlich geneigt
j	Zählindex, Gitterindex in der zweiten Gitterrichtung
k	Gitterindex in der dritten Gitterrichtung
l	laminar
loc	lokal
max	Maximalwert
min	Minimalwert
n	für eine diskrete ε -Umgebung
o	außen
r	r -Richtung
R	im Rotorbereich
ref	Bezugswert
S	im Statorbereich
sec	sekundär
t	relativer Totalzustand, turbulent, zur Zeit t
T	absoluter Totalzustand, pro Periode
w	in unmittelbarer Wandnähe
x	x -Richtung, an einem beliebigen Punkt der Koppellebene
ε	in einem Abstand ε von der Wand, für eine ε -Umgebung
ζ	Richtung normal zur Seitenwandgrenzschicht, in dritter Gitter- richtung
η	Richtung normal zur Schaufelgrenzschicht, in zweiter Gitterrich- tung
ξ	Hauptströmungsrichtung, in erster Gitterrichtung
φ	φ -Richtung, in Umfangsrichtung
Ω	bezogen auf die Rotationsgeschwindigkeit
0	Referenzwert
	parallel

Hochgestellte Indizes

'	zeitlich transformiert
*	nach dem Transitionsmodell, normiert, des unbeschleunigten Verfahrens
\rightarrow	Vektor, Tensor erster Stufe
-	geglättet
\rightarrow	entlang einer radial verlaufenden Gitterlinie gemittelt
\rightarrow	entlang einer in Umfangsrichtung verlaufenden Gitterlinie gemittelt
=	Matrix, Tensor zweiter Stufe
$j, j1, j2$	Zählindizes
m	für den m -ten in Umfangsrichtung benachbarten Bereich
n	n -te Komponente eines Vektors, zum n -ten Zeitschritt
T	transponierte Matrix

Operatoren, Funktionen und Symbole

d	totaler Differentialoperator
∂	partieller Differentialoperator
δ	differentielle Änderung
$\delta_{\xi\xi}, \delta_{\eta\eta}, \delta_{\zeta\zeta}$	zweite Differenzen in den Gitterrichtungen
Δ	Differenz
$\vec{\nabla}$	Nablaoperator
$\arctan()$	Arcustangensfunktion
$\det()$	Determinante einer Matrix
$\text{int}()$	ganzzahliger Anteil einer reellen Zahl
$\text{Im}()$	Imaginärteil
$\ln()$	natürliche Logarithmusfunktion
$\max()$	Maximumsfunktion
$\min()$	Minimumsfunktion
$O()$	Größenordnung
sign	Signumfunktion
$ $	Betrag eines Skalars
$ $	Betrag eines Vektors
\approx	näherungsweise
\times	einfach verjüngendes Tensorprodukt
\cdot	zweifach verjüngendes Tensorprodukt

Kurzfassung

Die Strömung in thermischen Turbomaschinen ist aufgrund der wechselnden Folge von ruhenden und rotierenden Schaufelreihen inhärent instationär. Zusammen mit den Einflüssen der festen Wände und den sich einstellenden physikalischen Ausgleichsprozessen ergeben sich äußerst komplexe, dreidimensionale Strömungsfelder. Moderne numerische Verfahren ermöglichen die zeitgenaue Berechnung dieser Strömungsvorgänge. Damit lassen sich instationäre Effekte bei der aerodynamischen Auslegung so berücksichtigen, daß die Effektivität der Energieumwandlung in den Turbomaschinen gesteigert wird.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Lösung der dreidimensionalen Navier–Stokes–Gleichungen erweitert, um damit die instationären Stator–Rotor–Wechselwirkungen in Turbomaschinen zu berechnen. Dazu wird ein Verfahren zur zeitgenauen Kopplung der Strömungsfelder relativ zueinander bewegter Rechengebietsbereiche entwickelt. Mit Hilfe einer geeigneten Zeittransformation werden periodische Randbedingungen ermöglicht. Hierdurch läßt sich das wirkliche Schaufelzahlverhältnis einer Turbomaschinenstufe ohne eine periodische Erweiterung des Rechengebiets berücksichtigen. Es werden verschiedene Methoden entwickelt, die die langen Rechenzeiten zeitgenauer, expliziter Integrationsverfahren drastisch reduzieren und effiziente instationäre Simulationen ermöglichen.

Das entwickelte Verfahren wird zur Strömungssimulation in einer einhalbstufigen Axialturbine eingesetzt. Die berechneten Strömungsfelder werden analysiert. Identifizierte Strömungsphänomene werden visualisiert und dokumentiert. Die Eignung des entwickelten Verfahrens zur Lösung der gestellten Aufgabe wird durch einen Vergleich der Berechnungsergebnisse mit experimentell ermittelten Daten belegt.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Bei der aerodynamischen Auslegung von Turbomaschinenkomponenten spielen Strömungsberechnungsprogramme heute die wichtigste Rolle. Die Weiterentwicklung der Lösungsverfahren, die explosionsartige Erhöhung der Leistungsfähigkeit moderner Rechenanlagen und die starke Konkurrenz unter den Anbietern von Turbomaschinen führen dabei zu steigenden Anforderungen an die Berechnungsverfahren. Neben einer einfachen Bedienbarkeit sollen sie bei akzeptablen Antwortzeiten genaue Vorhersagen über den Strömungszustand in den Maschinen liefern.

In den letzten Jahren wurde die Bedeutung erkannt, die die Berücksichtigung instationärer Effekte in Turbomaschinenströmungen für die weitere Verbesserung der beteiligten Komponenten darstellt. Daher wird der Vorhersage des zeitgenauen Strömungszustands mit numerischen Berechnungsverfahren zunehmende Aufmerksamkeit gewidmet.

Eine wichtige Gruppe von Instationaritäten stellen in diesem Zusammenhang die Strömungsphänomene dar, die durch die Wechselwirkungen benachbarter Schaufelreihen verursacht werden und durch sich periodisch ändernde Strömungsfelder charakterisiert sind. Diese sogenannten Stator–Rotor-Wechselwirkungen haben die Schaufelwechselfrequenz als Grundfrequenz.¹ Es handelt sich hierbei um turbomaschinentypische Effekte, die die Hauptursache für die instationäre Strömung und die damit verbundenen Verluste darstellen. Diese machen einen bedeutenden Anteil der Gesamtverluste der Strömung aus [7].

Die Konvektion von Strömungsinhomogenitäten wird durch die Interaktion der Leit- und Laufradströmung entscheidend beeinflusst. So weist beispielsweise bei Gasturbinen die Abströmung aus der Brennkammer häufig starke Ungleichförmigkeiten in der Temperaturverteilung, sog. heiße Strahlen, auf. Tritt diese Strömung in die Turbine ein, so tendiert das heiße Fluid dazu, sich an den Druckseiten der Laufschaufeln zu konzentrieren, wodurch dort die Temperaturbelastung zunimmt. Für eine optimale Auslegung der Schaufeln ist daher die Kenntnis der sich einstellenden Temperaturverteilung in der Turbine erforderlich.

¹Die Schaufelwechselfrequenz, auch Frequenz der Düsenregung genannt, ist die mit der Anzahl der Schaufeln multiplizierte Drehfrequenz der Rotors.

Der optimale axiale Abstand zweier benachbarter Schaufelreihen hängt in erster Linie von den Stator–Rotor-Wechselwirkungen ab. Ein zu kurzer Abstand führt zu starken Potentialwechselwirkungen der Schaufeln mit der Gefahr der Schwingungsanregung und zu erhöhten Verlusten. Ein zu großer Abstand erhöht nicht nur die Baulänge und Kosten der Maschine, sondern führt bei Verdichtern zu Druckverlusten und bei Turbinen zu zusätzlichen Reibungsverlusten.

Stator–Rotor-Wechselwirkungen führen zu periodischen Druck- und Inzidenzschwankungen, die bei der Auslegung optimaler Beschaukelungen zu berücksichtigen sind. Beispielsweise kann bei filmgekühlten Gasturbinenschaufeln durch Kenntnis der Druckschwankungen der Totaldruck der ausgeblasenen Kühlluft so eingestellt werden, daß bei minimalem Kühlluftbedarf periodischer Heißgaseintritt in die Schaufel vermieden wird. Durch Kenntnis der periodischen Inzidenzen kann zum Beispiel die Schaufelprofilierung so optimiert werden, daß keine periodischen Ablösungen auftreten, die mit zusätzlichen Verlusten verbunden sind.

Die Amplituden der Druckschwankungen auf den Schaufeln können, insbesondere in den Niederdruckbereichen transsonisch durchströmter Turbomaschinen, einen Anteil von 40 % und mehr des zeitlichen Mittels des Auftriebs des Rotors ausmachen. Die daraus resultierenden periodischen Schaufelkräfte und -momente führen zu zusätzlichen Wechselbeanspruchungen des Schaufelwerkstoffs, die in die Lebensdauerabschätzungen miteinzubeziehen sind. Auch das damit verbundene Risiko einer Schwingungserregung ist bei der strukturdynamischen Auslegung der Schaufeln zu berücksichtigen.

1.2 Stand der Forschung

Die Berechnung der dreidimensionalen, reibungsbehafteten, instationären Strömung in mehrstufigen Turbomaschinen wirft bei einer Modellierung des gesamten Umfangs der Schaufelräder keine grundsätzlichen numerischen Probleme auf. Allerdings wird ein derartiges Vorgehen aufgrund des mit einem solchen Ansatz verbundenen, unwirtschaftlich großen Speicherplatz- und Rechenzeitbedarfs auf absehbare Zeit nur bei einzelnen ehrgeizigen Demonstrationsprojekten Anwendung finden. Deshalb wurde bereits recht früh nach Möglichkeiten zur effizienteren Durchführung instationärer Strömungsberechnungen gesucht

Die ersten Untersuchungen zur numerischen Simulation der instationären Strömung in Turbomaschinenstufen auf Basis der nicht-linearen Erhaltungsgleichungen wurden bereits in der zweiten Hälfte der 70er Jahre durchgeführt. Erdos, Alzner und McNally [16] stellen 1977 ein Verfahren vor, das es erstmalig ermöglicht, bei unterschiedlicher Teilung von Stator und Rotor das Rechengebiet auf nur jeweils eine Teilung zu beschränken. Sie erreichen

dies durch eine Periodizitätsannahme und die Formulierung geeigneter Phasenbeziehungen. Dem Verfahren liegen die zweidimensionalen Euler-Gleichungen zugrunde. Sie berechnen damit die Strömung für eine gehäusenaher Stromfläche einer transsonisch durchströmten Verdichterstufe.

In den folgenden zehn Jahren lag ein Schwerpunkt der Forschung in diesem Bereich in der Entwicklung von Methoden, die zum Ziel hatten, effiziente Berechnungsverfahren bereitzustellen, mit denen sich instationäre Strömungssimulationen auf den zur Verfügung stehenden Rechenanlagen durchführen lassen. Neben der Beschränkung auf die reibungsfreien Eulergleichungen in oftmals nur zwei Raumdimensionen mit oder ohne Berücksichtigung der Stromröhrenerweiterung wurde außerdem nach Möglichkeiten gesucht, das zu diskretisierende Gebiet – und damit auch die Anzahl der Knotenpunkte – zu minimieren. Wie bereits erwähnt, stellt hierbei die Formulierung von Randbedingungen für die seitlichen Rechengebietsränder im Falle ungleicher Schaufelzahlen von Stator und Rotor eines der Hauptprobleme dar. Das oben zitierte Verfahren von Erdos et al., die sog. Direct-Store-Methode, ist in dieser Hinsicht keine optimale Lösung, da es zum einen durch das notwendige Abspeichern von Strömungsgrößen einen hohen Speicherbedarf hat und zum anderen, aufgrund der Verwendung von Strömungsgrößen von bereits vergangenen Schaufelwechselperioden, nur eine relativ langsame Konvergenz zu einer periodischen Lösung ermöglicht, also lange Rechenzeiten benötigt [42]. Allerdings übte dieser Ansatz aufgrund seiner leichten Verständlichkeit und Implementierbarkeit eine gewisse Faszination aus, so daß von einigen Teams von Wissenschaftlern aus der ganzen Welt kurze Zeit später Derivate dieser Methode zur Randbehandlung ausprobiert wurden. Im Verfahren von Mitchell wird sie beispielsweise nur an den periodischen Rändern stromauf der Schaufel angewendet, während an den Rändern stromab der Schaufel eine zeitunabhängige Formulierung zur Anwendung kommt [65]. Hodson [42] implementiert die Randbehandlung in einen Strömungslöser von Denton [9]. Er beschränkt das Rechengebiet auf den Rotor und gibt am Gebietseintritt ein Geschwindigkeitsprofil vor, das im Verlauf der Rechnung den Eintrittsrand in Umfangsrichtung passiert. Er vergleicht die Ergebnisse mit seinen Meßdaten [41]. Koya und Kotake [57] berechnen 1985 die reibungsfreie, dreidimensionale Strömung durch eine Turbinenstufe. Auch sie verwenden Periodizitätsbedingungen, die denen von Erdos et al. ähnlich sind, um die Simulation mit einem Schaufelzahlverhältnis von 52/68 und nur jeweils einem diskretisierten Schaufelkanal durchführen zu können. Allerdings zwingen sie dem gesamten Rechengebiet die zeitliche Periodizität des Rotors auf, was so von Erdos et al. nicht vorgeschlagen wurde und eine grobe Vereinfachung der Strömungsphysik bedeutet. Dadurch ist es ihnen möglich, zu jedem Zeitschritt die Rechengebiete von Stator und Rotor, die sich um eine Gitterzelle überlappen, unter Berücksichtigung entsprechender Phasenbeziehungen zumindest über einen Teilbereich der Koppellebene direkt aneinander zu koppeln, wodurch das Konvergenzverhalten des Verfahrens positiv beeinflußt wird.

In gleichen Jahr stellt Rai [67] erstmals ein 2D-Verfahren zur Simulation der reibungsbehafteten instationären Stator-Rotor-Interaktion vor. Er verwendet ein Upwind-Verfahren zur Flußberechnung sowie eine implizite Zeitintegration. Er diskretisiert das Rechengebiet mit einem System sich überlappend und aneinander grenzender O- und H-Gitter. Der Informationsaustausch zwischen den Netzen erfolgt durch ein recht aufwendiges Interpolationsverfahren. Er vergleicht die Amplituden der zeitabhängigen Schaufeldruckschwankungen aus seinen Berechnungsergebnissen, die für ein Stufenteilungsverhältnis von eins ermittelt wurden, mit experimentellen Daten von Dring et al. [12], die an einer Versuchsturbine mit 22 Stator- und 28 Rotorschaukeln ermittelt wurden. In einer späteren Veröffentlichung stellt Rai die erste Simulation der dreidimensionalen, instationären und reibungsbehafteten Strömung vor [68]. In diesem Artikel beschreibt er auch einige Probleme, auf die er im Zusammenhang mit seinen vergeblichen Bemühungen gestoßen war, eine konsistente Skalierung der Geometrie des Testfalles auf ein Teilungsverhältnis von eins zu entwickeln. Einige dieser Probleme wurden erst aufgrund der Erweiterung des Berechnungsmodells auf drei Raumdimensionen deutlich. Bedingt durch die Skalierung erhält er beispielsweise im Rotor vom Experiment abweichende Reynoldszahlen. Außerdem hat er Schwierigkeiten, den Axialspalt zwischen Stator und Rotor konsistent zu skalieren. Er vergleicht seine Ergebnisse wiederum mit den Meßdaten von Dring et al. [12]. Wenig später stellen Rai und Madavan [69] nochmals Berechnungsergebnisse zum selben Testfall vor, wobei sie jedoch das Teilungsverhältnis der Turbine besser annähern, indem sie das – in diesem Fall allerdings wieder zweidimensionale – Rechengebiet auf drei Statorteilungen und vier Rotorteilungen ausdehnen. Der Rotor wird so weniger stark skaliert, wodurch die Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Schaufeldruckschwankungsamplituden in manchen Bereichen verbessert wird. In logischer Konsequenz folgen kurze Zeit danach auch die entsprechenden dreidimensionalen Simulationen [62]. Auch hier zeigen die Berechnungen mit dem besser angenäherten Teilungsverhältnis eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten als die stärker skalierte Geometrie.

Fourmaux stellt 1986 ein 2D-Euler-Verfahren vor, das die Kopplung von Stator- und Rotorgebiet in ein Predictor-Corrector-Integrationsschema einbettet [21]. Die Rechengitter überlappen sich nicht, sondern gleiten lediglich aneinander vorbei. Dabei werden die Lösungsgrößen nach dem Predictor-Schritt vom stromauf- an das stromabliegende Gitter und nach dem Corrector-Schritt vom stromab- an das stromaufliegende Gitter übergeben. Die Anzahl der diskretisierten Stator- und Rotorkanäle wird so gewählt, daß die Periodizität an den seitlichen Rechengebietsrändern gewährleistet ist.

Giles berichtet 1986 über einen neuen Ansatz zur Lösung des Periodizitätsproblems bei ungleichen Schaufelzahlen [23]. Seine Zeitneigungsmethode stellt eine Verallgemeinerung der räumlichen Periodizitätsannahme, wie sie bei gleichen Schaufelzahlen getroffen wird, auf beliebige Schaufelzahlen dar. Damit entfällt die einschränkende Annahme einer zusätzlichen zeitli-

chen Periodizität, wie es die Phase-Lagged-Methode von Erdos et al. erfordert. Erreicht wird dies durch die Formulierung von Zeittransformationen für das Stator- und Rotorgebiet. Er implementiert diese Methode zunächst in seinen expliziten, zweidimensionalen Euler-Löser UNSFLO. Mit diesem Berechnungsprogramm simuliert er die sehr komplexen, durch Potentialwechselwirkungen verursachten Stoßwanderungs- und Stoßreflexionsvorgänge in einer transsonischen Turbinenstufe mit einem Schaufelzahlverhältnis von 1,69 [26]. Er berechnet Schwankungen im Auftrieb des Rotors von bis zu 40 %. Eine gründliche Validierung des zwischenzeitlich auf reibungsbehaftete Strömungen erweiterten Verfahrens präsentieren Giles und Haines in einem späteren Artikel [29]. Bemerkenswert an der Methode ist der gewählte zonale Ansatz. Dabei werden die Schaufelgrenzschichten mit einem sehr feinen O-Netz diskretisiert. In diesem Bereich werden die Navier-Stokes-Gleichungen mit einem impliziten Upwind-Verfahren gelöst, das im Raum von dritter Ordnung genau ist. Das restliche Strömungsgebiet wird mit einem strukturierten oder unstrukturierten Gitter diskretisiert, auf dem eine explizite Formulierung der Euler-Gleichungen gelöst wird [27]. Der Nachlaufbereich wird somit ebenfalls als reibungsfrei betrachtet, was jedoch aufgrund der vorhandenen künstlichen Dissipation nicht als eine wesentliche Schwäche des Verfahrens eingeschätzt wird [29].

He entwickelt ein weiteres Verfahren zur Behandlung des Periodizitätsproblems, das prinzipiell auch für Mehrstufenrechnungen geeignet ist [33]. Die Methode basiert in ihren Grundzügen auf der Direct-Store-Methode von Erdos et al. Allerdings wird das Speicherproblem dahingehend entschärft, daß dabei nicht die Strömungsgrößen zu jedem Zeitpunkt sondern lediglich einige ihrer Fourierkoeffizienten abgespeichert werden. Aus diesen werden dann zu jedem Zeitschritt die benötigten Randwerte rekonstruiert.

Gegen Ende der achtziger und Anfang der neunziger Jahre wurden noch eine ganze Reihe weiterer Verfahren zur Berechnung der instationären Schaufelwechselwirkungen vorgestellt. Allerdings finden sich in den Veröffentlichungen keine neuen Ansätze, um das Periodizitätsproblem zu lösen. Hervorzuheben sind die Arbeiten von Lewis et al. [61], Le Meur [60], Kang und Chang [55], Rao and Delaney [70] und Dawes [8, 7]. Erwähnenswert sind auch diverse 2D-Simulationen zu diesem Thema, die vom Deutschen Forschungszentrum für Luft- und Raumfahrttechnik (DLR) in Köln veröffentlicht wurden (z. B. [15, 14, 18, 17]).

Seit dem ersten Drittel der neunziger Jahre hat die Anzahl der Veröffentlichungen über die Simulation von Stator-Rotor-Wechselwirkungen in Turbomaschinen stetig zugenommen. Standen bislang noch die Verfahrensentwicklung oder die Demonstration der Durchführbarkeit im Mittelpunkt der Publikationen, so begann nun eine Schwerpunktsverlagerung in Richtung Strömungsphysik und Analyse der aus wissenschaftlicher und technischer Sicht relevanten Inhalte der Ergebnisse. Zahlreiche Forschungsstellen beschäftigen sich weltweit mit den unterschiedlichen Phänomenen und Aus-

Jahr	Prozessor	Taktrate in MHz	Her- steller	Rechnertyp	spez. Rechen- zeit in μs
1990	R3000	36	SGI	Workstation	1541,0
1993	Alpha	166	DEC	Workstation	407,0
1996	Alpha	333	DEC	Workstation	95,0
1997	C200	200	HP	Workstation	87,0
1997	4×R10000	195	SGI	Server	55,0 (mit 2 CPU)
1997	32×SX-4	125	NEC	Vektor-Parallel- Supercomputer	4,4 (mit 4 CPU)

Tabelle 1.1: Entwicklung der spezifischen Rechenzeit (Zeit pro explizitem Integrationsschritt und Gitterpunkt)

wirkungen der Wechselwirkungseffekte. Die untersuchten Problemstellungen reichen von Potentialwechselwirkungen [2, 64, 49, 52] und dem Einfluß der Axialspaltweite [4], über instationäre Sekundärströmungseffekte [22, 88, 80, 81], instationäre Wärmeübergangssimulationen [28, 38], Berechnungen der Konvektion von heißen Strahlen [73, 11] und Mechanismen zur Entstehung von instationären Verlusten [8, 7] bis hin zu Dampfturbinenstufen unter Teilbeaufschlagung [82], Strömungsinstabilitäten in Verdichtern wie „rotating stall“ oder „stall flutter“ [34], dem sog. „clocking effect“ [18, 10, 32, 17] und induzierter Wirbelablösung an Schaufelhinterkanten [76].

Die verstärkten Aktivitäten auf diesem Gebiet wurden in erster Linie durch die explosionsartige Entwicklung der Rechenleistungen digitaler Rechenanlagen in den letzten Jahren ermöglicht. Lag noch Anfang der neunziger Jahre die durchschnittliche Ausstattung eines wissenschaftlichen Arbeitsplatzrechners (Workstation) bei 16 bis 96 MB Haupt- und 1 GB Plattenspeicher, so ist heute ein Ausbauzustand einer Workstation mit 1 GB RAM und 9 GB Festplatte durchaus Standard, wobei die Rechengeschwindigkeit ebenfalls um ein bis zwei Größenordnungen zugenommen hat. Im Gegensatz zu den Rechnerleistungen haben die Preise für Rechenanlagen stagniert oder sind sogar gesunken. Dies hat zur Folge, daß heute zu erschwinglichen Preisen Arbeitsplatzrechner erworben werden können, deren Leistungen durchaus mit denen von Hoch- und Höchstleistungsrechenanlagen von vor 10 Jahren vergleichbar sind. Tabelle 1.1 zeigt im Vergleich die Rechenleistungen einiger Rechnertypen anhand der spezifischen Rechenzeiten pro explizitem Integrationsschritt und Gitterpunkt eines 3D-Navier-Stokes-Lösers [49]. Die Zunahme der Leistungsfähigkeit der Computer ging mit einer steigenden Komplexität der Modellierung einher, so daß sich diese Entwicklung nicht unbedingt in kürzeren Antwortzeiten von Strömungssimulationen niederschlägt. Oftmals werden zugunsten genauerer Ergebnisse mit geringeren Diskretisierungsfehlern längere Rechenzeiten in Kauf genommen. Die Entwicklung der Gitterpunktezahlen für instationäre Stufensimulationen ist in Tabelle 1.2 gezeigt.

Jahr	Testfall	Verfahren	Anzahl Knoten
1977	Verdichter, 1-stufig	2D-Euler [16]	<1.000
1985	Turbine, 1-stufig	3D-Euler [57]	7.568
1987	Turbine, 1-stufig	3D-Navier-Stokes [68]	203.055
1998	Turbine, 1,5-stufig	3D-Navier-Stokes [88]	2.116.941

Tabelle 1.2: Entwicklung der Problemgröße instationärer Stufensimulationen

Zusätzlich zur Entwicklung der Computerhardware liefern auch Methoden zur Effizienzsteigerung der Verfahren einen bedeutsamen Beitrag zum Erfolg und zur Verbreitung von instationären Berechnungsverfahren. Damit lassen sich die naturgemäß langen Rechenzeiten nicht selten um ein bis zwei Größenordnungen reduzieren, ohne daß darunter die Qualität der Ergebnisse merklich leidet. Jorgenson und Chima [46] entwickeln ein implizites Residuenglättungsverfahren mit variablen Koeffizienten für explizite Integrationsverfahren mit globalen Zeitschrittweiten. Die Methode ist theoretisch für beliebig große Zeitschrittweiten stabil, wobei die erzielbare Beschleunigung allerdings zu Lasten der räumlichen Zeitgenauigkeit geht. Bei stationären Strömungen ist die Methode konvergent. Jameson [44] entwickelt ein voll implizites Verfahren, bei dem die Lösung der impliziten Gleichungen anstelle der sonst üblichen Iterationsverfahren durch ein explizites Zeitschrittverfahren, das für eine sog. Pseudozeit formuliert wird, erfolgt. Dieser Ansatz – üblicherweise als „dual time stepping“ bezeichnet – ermöglicht für die innere Integrationsschleife die Verwendung sämtlicher Beschleunigungstechniken, die auch bei der Simulation stationärer Strömungen Anwendung finden, ohne die Zeitgenauigkeit zu beeinflussen; die erzielbare Effizienzsteigerung nimmt mit zunehmender Feinheit der Rechennetze zu. He [35] stellt ein zeitkonsistentes, explizites Mehrgitterverfahren vor, das die Erweiterung des Stabilitätsbereichs durch lokal vergrößerte Bilanzvolumen und damit einer reduzierten räumlichen Genauigkeit im Bereich der feinsten Gitterzellen erreicht. Durch die Art der Formulierung wird die Lösung von den Residuen der Feingitterzellen dominiert. Die Methode ist für stationäre Strömungen konvergent. Die erzielbare Rechenzeitreduktion ist ähnlich wie beim Residuenglättungsverfahren.

Die Parallelisierung von Strömungslösern nimmt in diesem Zusammenhang eine Sonderstellung ein. Sie greift in das Lösungsverfahren ein und beeinflusst und verändert dessen Struktur, aber nicht die Lösungsmethode selbst. Im Gegensatz zu den anderen Beschleunigungstechniken wird jedoch nicht die Zahl der Rechenoperationen reduziert. Die Effizienzsteigerung wird durch eine Vervielfachung der Leistungsfähigkeit der Rechenanlagen erzielt, indem die Rechenleistung mehrerer Computer zusammengeschaltet wird und das Problem parallel, d. h. auf mehreren Rechnern gleichzeitig gelöst wird, wobei der notwendige Datenaustausch durch geeignete Schnittstellen erfolgt. Die Parallelisierung birgt damit das größte Potential zur Rechenzeitreduktion. Allerdings ist es ein Trugschluß zu glauben, durch

eine genügend große Anzahl von Prozessoren ließen sich beliebig kurze Rechenzeiten realisieren. Vor allem bei kleineren bis mittleren Problemen tritt nämlich relativ schnell eine Sättigung oder schlimmstenfalls gar eine Effizienzminderung ein, wenn der zusätzliche Aufwand für den Datenaustausch den durch die Hinzunahme weiterer Prozessoren erzielbaren Nutzen übersteigt.

Von den vielen Möglichkeiten, ein numerisches Verfahren zu parallelisieren, hat sich im Bereich der Strömungslöser die gitterblockbasierte Parallelisierung durchgesetzt. Dabei bearbeitet jeder Prozessor einen zusammenhängenden Teil der Knotenpunkte des Rechengebiets, so daß ein Datenaustausch nur an den jeweiligen (Teil-)Gebietsberandungen durchgeführt werden muß [13, 5, 54].

Neben den genannten Entwicklungen im Bereich der Rechenanlagen und der numerischen Verfahren wurde in den letzten Jahren auch die Meßtechnik ständig weiterentwickelt. Damit verbunden ist eine zunehmende Zahl von Veröffentlichungen über instationäre Strömungsmessungen (z. B. [12, 87, 71]). Erwähnenswert sind auch die umfassenden Übersichtsartikel und -vorträge zu diesem Themenschwerpunkt von Hodson [43] und Sharma [75]. Falls eine Zugriffsmöglichkeit auf entsprechende experimentelle Datensätze besteht, kann die Zeitgenauigkeit der Strömungssimulationen bzw. des zugrundeliegenden Verfahrens validiert werden, was jedoch meist nur für die Teammitglieder bzw. Kooperationspartner der entsprechenden Forschungsprojekte der Fall ist. Als bislang einmalig und in diesem Zusammenhang als mustergültig zu erwähnen ist die Tatsache, daß ein umfangreicher Datensatz der sehr detaillierten Messungen des instationären Strömungsfeldes einer eineinhalbstufigen Kaltluftturbine, die am Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der RWTH Aachen durchgeführt wurden [85], als frei erhältlicher Testfall des „ERCOFTAC Seminar and Workshop on 3D Turbomachinery Flow Predictions“ [31] dient. Im Rahmen des 5. Workshops im Januar 1997 wurden die ersten Ergebnisse einer Simulation der instationären Strömung in der gesamten Turbine vorgestellt [51].

1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur numerischen Berechnung der instationären Stator-Rotor-Wechselwirkungen in Turbomaschinenströmungen entwickelt und vorgestellt. Als Basis dient ein explizites Zeitschrittverfahren zur Lösung der dreidimensionalen Favre-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen mit Hilfe einer Finite-Volumen-Diskretisierung [63].

Aufeinanderfolgende Schaufelkränze sind bei realen Turbomaschinen fast ausnahmslos mit unterschiedlichen Schaufelzahlen ausgeführt. Daher bildet die Entwicklung eines Verfahrens zur Berücksichtigung des tatsächlichen

Schaufelzahlverhältnisses bei der Strömungssimulation in Turbomaschinenstufen einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. Die wesentlichste Forderung stellt hierbei die wirtschaftliche Durchführbarkeit von Simulationen der instationären Strömung dar. Gleichzeitig sollen einschränkende Annahmen bei der Modellierung weitgehend vermieden werden, um eine möglichst gute Wiedergabe der wirklichen Strömungsverhältnisse zu erreichen. Zu diesem Zweck wird ein Zeitneigungsverfahren entwickelt und implementiert, das es ermöglicht, das Rechengebiet auf wenige Schaufelkanäle zu beschränken und dennoch die realen Schaufelzahlen zu modellieren.

Zur weiteren Reduktion des Rechenaufwandes werden diverse Beschleunigungstechniken entwickelt, implementiert und verglichen. Einerseits wird mit Hilfe von implizitem Residuenglättungen, einer expliziten und zeitkonsistenten sowie einer impliziten und zeitgenauen Mehrgittermethode das Stabilitätsgebiet des Löser erweitert, um größere Zeitschritte verwenden zu können. Andererseits wird durch die Parallelisierung des Programms die gleichzeitige Nutzung der Rechenleistung mehrerer Prozessoren ermöglicht und die Effizienz des Verfahrens noch weiter gesteigert.

Die Implementierung von instationären Randbedingungen dient zur Beantwortung der Frage, inwieweit Simulationen der instationären Strömung in Turbomaschinenstufen durch Einzelgitterrechnungen mit instationären Randbedingungen angenähert werden können. Auch soll damit geklärt werden, ob instationäre Simulationen grundsätzlich die Verwendung instationärer Randbedingungen erfordern, selbst wenn die Randwerte nur in Form von zeitlich konstanten, umfangsgemittelten Daten vorliegen.

Das entwickelte Verfahren wird für verschiedene Anwendungsfälle eingesetzt. Die Berechnungsergebnisse werden analysiert und mit experimentellen Daten verglichen. Typische instationäre Strömungsphänomene werden identifiziert und unter Einsatz der modernen Medien visualisiert und dokumentiert.

Wie in Abschnitt 1.1 dargestellt, birgt die Berücksichtigung von instationären Vorgängen bei der aerodynamischen Auslegung von neuen Turbomaschinen vermutlich ein beträchtliches Potential, die Effizienz und Wirtschaftlichkeit der Anlagen zu erhöhen und die Umweltbelastung zu reduzieren. Mit der Bereitstellung eines effizienten Verfahrens zur numerischen Berechnung instationärer Strömungen soll die vorliegende Arbeit nicht zuletzt dazu beitragen, dieses vermutete Potential in Zukunft mehr und mehr auszuschöpfen.

2 Instationaritäten in Turbomaschinenströmungen

2.1 Einteilung und Abgrenzung

Eine mögliche der Klassifizierung von instationären Effekten in Turbomaschinenströmungen ist die Einteilung nach den auftretenden Zeit- und Längenskalen. Geeignete dimensionslose Kennzahlen sind die Strouhalzahl

$$\text{Sr} = \frac{L_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}} u_{\text{ref}}} \quad (2.1)$$

bzw. die für Turbomaschinenströmungen häufiger verwendete reduzierte Frequenz

$$K = \frac{\omega L_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}} = \frac{2\pi f L_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}} \quad , \quad (2.2)$$

die eine Aussage über das Konvektionsverhalten von Instationaritäten zulassen. Hierbei ist L_{ref} eine geeignete Referenzlänge. Die Referenzzeit t_{ref} , die Kreisfrequenz ω bzw. die physikalische Frequenz f beschreiben die Zeitdauer des instationären Vorganges. Die Referenzgeschwindigkeit u_{ref} dient der Normierung und wird gewöhnlich gleich der Geschwindigkeit der ungestörten Zuströmung u_{∞} gesetzt. Im Falle von periodischen Vorgängen gilt der Zusammenhang

$$K = 2\pi \text{Sr} \quad . \quad (2.3)$$

Damit stellt die Strouhalzahl einerseits das Verhältnis der Zeitdauer, die ein Partikel für die Konvektion über die Strecke L_{ref} benötigt, zur Dauer des instationären Vorganges dar, andererseits kann sie aber auch als das Verhältnis einer Referenzlänge zur Wellenlänge der konvektierten Instationarität interpretiert werden [35].

Ein Beispiel für einen instationären Effekt mit einer sehr großen Wellenlänge und einer entsprechend sehr niedrigen Frequenz stellt das Verdichterpumpen dar. Die Längenskala liegt dabei im Bereich der Baulänge der Maschine. Niederfrequente Störungen werden auch durch die über dem Umfang ungleichförmige Anströmung der ersten Schaufelreihe bei Dampfturbinen unter Teilbeaufschlagung verursacht. Hierbei entspricht die Wellenlänge dem Umfang des Schaufelkranzes und die Zeitskala der Drehfrequenz des Rotors. Die Größenordnung einer typischen Strömungsinstabilität beim „rotating stall“ liegt im Bereich mehrerer Schaufelteilungen. Die Umlauffrequenz der Stallzellen beträgt dabei 20–50 % der Schaufelwechselfrequenz. Bei Problemen

des Schaufelflatterns dient meist die Sehnenlänge als Referenzlänge. Die Zeitskala wird durch die Schwingungsfrequenz der Schaufel bestimmt. Instationaritäten durch Stator-Rotor-Wechselwirkungen treten zeitlich mit der Schaufelwechselfrequenz und räumlich mit der Schaufelteilung auf, als Referenzlänge dient allerdings meist die Sehnenlänge. Sehr viel kleinere Wellenlängen treten bei Wirbelablösungen an Schaufelhinterkanten auf. In Analogie zur Zylinderumströmung stellt der Hinterkantendurchmesser die entsprechende Längenskala dar. Die auftretenden Frequenzen liegen typischerweise um bis zu eine Größenordnung höher als bei Stator-Rotor-Wechselwirkungen.

Die bei den technisch relevanten instationären Effekten auftretenden physikalischen Frequenzen umfassen einen Bereich von mehreren Größenordnungen. Alle Zeit- und Längenskalen mit einer Simulation aufzulösen ist sehr aufwendig und schwierig und außerdem kaum praktikabel, da die Ergebnisanalyse unnötig kompliziert wird und es zum physikalischen Verständnis beispielsweise des Verdichterpumpens auch nicht beiträgt, wenn dazu das Schwingungsverhalten jeder einzelnen Schaufel erfaßt und in die Auswertung miteinbezogen wird. Daher ist es empfehlenswert, die interessierenden Zeit- und Längenskalen bereits im Vorfeld der Untersuchungen festzulegen, um ein geeignetes und effizientes numerisches Verfahren einsetzen zu können.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit instationären Effekten aufgrund von Stator-Rotor-Wechselwirkungen. Die interessierende Längenskala liegt daher im allgemeinen im Bereich einer Schaufelteilung. Die zugehörige Zeitskala wird durch die Schaufelwechselfrequenz, d. h. durch die Frequenz der Düsenerrregung, vorgegeben. Strömungseffekte mit größerer Wellenlänge, wie z. B. größere Ablösungen, wie sie bei Verdichterströmungen vorkommen, können folglich nur dann berücksichtigt werden, wenn das zu diskretisierende Gebiet beispielsweise durch Hinzuziehen mehrerer Schaufelteilungen entsprechend vergrößert wird. Instationäre Effekte mit kleineren Wellenlängen werden prinzipiell berücksichtigt. Allerdings legen hier die zugrundeliegenden räumlichen und zeitlichen Diskretisierungen die Grenzen der Auflösbarkeit fest.

2.2 Entstehung

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Entstehungsmechanismen der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Instationaritäten in Turbomaschinenstufen kurz zusammengefaßt. Dabei wird eine gleichförmige Anströmung des ersten Schaufelgitters des Rechengebietes angenommen, d. h. Effekte, die durch eine über der Zeit veränderliche Zuströmung verursacht werden, werden nicht berücksichtigt.

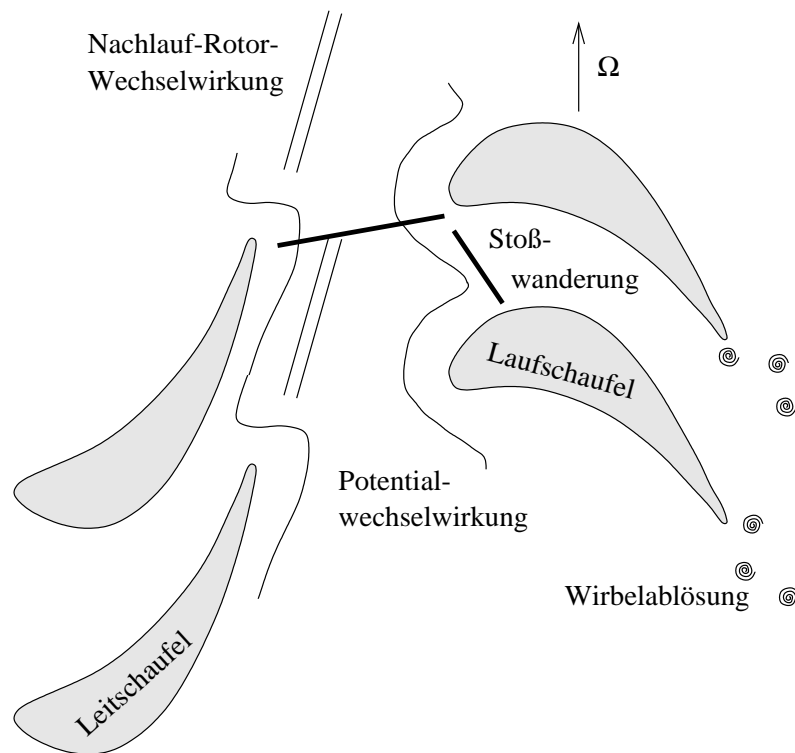


Bild 2.1: Ursachen von Instationaritäten in Turbomaschinen

Wenn hier und im folgenden von Turbomaschinenstufen und Stator-Rotor-Wechselwirkungen die Rede ist, so wird dabei aus Gründen einer einfacheren Formulierbarkeit vorausgesetzt, daß das Leitgitter wie bei einer Turbine in Strömungsrichtung vor dem Rotorgitter kommt. Natürlich gelten die Betrachtungen analog für Verdichterstufen, bei denen das Leitrad hinter dem Laufrad kommt, und für Turbomaschinenstufen mit gegensinnig rotierenden Schaufelgittern (z. B. CRISP), bei denen ein Statorgitter im eigentlichen Sinne nicht vorhanden ist.

Eine wesentliche Ursache für die instationären Strömungsverhältnisse bei der Stator-Rotor-Interaktion ist die Nachlaufströmung des stromauf liegenden Schaufelgitters. Die Abströmung eines Statorgitters ist von einem rotorfesten Bezugssystem aus betrachtet instationär, obwohl sie im statorfesten Bezugssystem näherungsweise stationär ist. Die Laufschaufeln zerteilen aufgrund ihrer Relativbewegung zu den Leitschaufeln deren Nachlaufströmung in kleinere Abschnitte und bewirken eine sich mit der Zeit periodisch ändernde Durchströmung des Laufschaufelkanals. Dadurch werden u. a. Druckwellen erzeugt und instationäre Kräfte auf die Schaufeln ausgeübt. Auf dem Weg durch den Schaufelkanal des Rotors werden die Nachläufe auf eine durch die Profilierung der Schaufeln vorgegebene, gekrümmte Bahn gezwungen, wobei sie in Wechselwirkung mit den im Laufschaufelkanal entstehenden Sekundärströmungsphänomenen wie beispielsweise Kanal- und Spaltwirbel treten. Gleichzeitig treten Vermischungs- und Ausgleichsprozesse auf. Eine hochgradig instationäre und dreidimensionale Strömung ist die Folge.

Obwohl eine Nachlaufströmung prinzipiell nur in reibungsbehafteten Fluiden auftreten kann, können die nachfolgenden Wechselwirkungen des Nachlaufs mit den Rotorscheaufeln und der Rotorströmung in reibungsfreie und reibungsbehaftete Vorgänge unterteilt werden. Zu den ersteren zählt beispielsweise die Konvektion und Deformation der Nachlaufreste durch den Kanal, während instationäre Wärmeübergänge, Wechselwirkungen mit den Grenzschichten und die Beeinflussung der Sekundärströmungen den letzteren zuzuordnen sind.

Potentialwechselwirkungen zwischen Stator- und Rotorgebiet zählen ebenfalls zu den reibungsfreien Vorgängen. Sie treten in reibungsfreien wie reibungsbehafteten Fluiden gleichermaßen auf und verursachen Instationaritäten, weil sich der Druck im Bereich zwischen den Stator- und Rotorscheaufeln näherungsweise in drei Anteile aufspalten läßt:

- ein gleichförmiger und stationärer Anteil,
- ein ungleichförmiger und bezüglich eines statorfesten Bezugssystems stationärer Anteil, der durch die Druckkräfte auf die Statorschaufeln verursacht wird und
- ein ungleichförmiger und bezüglich eines rotorfesten Bezugssystems stationärer Anteil, der durch die Druckkräfte auf die Rotorscheaufeln verursacht wird.

Durch die Rotation wirkt der statorfeste, ungleichförmige Anteil als instationärer Druck auf die Rotorscheaufeln. Durch den rotorfesten, ungleichförmigen Anteil erfahren aber auch die Statorschaufeln instationäre Druckschwankungen. Zu dieser Gruppe von instationären Wechselwirkungen gehören auch Druckwellen, die sich zwischen Stator- und Rotorgebiet bewegen und in Wechselwirkung mit den Schaufeln treten, wie dies beispielsweise bei transsonisch durchströmten Turbomaschinenstufen der Fall ist.

Eine reibungsbehaftete Strömung über die stumpfe Hinterkante einer Turbinenschaufel führt zur Wirbelbildung analog der von Kármánschen Wirbelstraße bei der Zylinderumströmung. Diese Wirbelablösung trägt einerseits zur Geräusentstehung bei, andererseits beeinflußt sie auch die Höhe der Profildruckverluste, die einen nennenswerten Anteil der gesamten Strömungsverluste ausmachen. Der Vorgang wird allerdings nicht primär durch die Relativbewegung der Stator- und Rotorscheaufeln verursacht. Bei isolierten Schaufelgittern ist diese Wirbelablösung ein selbsterregtes Phänomen; im Stufenverbund wird sie jedoch durch die Potentialwechselwirkungen beeinflußt und unter gewissen Umständen verstärkt. Das Frequenzspektrum der Strömung beinhaltet im Stufenverbund eine Gruppe von Harmonischen der Schaufelwechselfrequenz, die in der Nähe der Eigenfrequenz des Phänomens liegen, während bei isolierten Schaufelgittern nur die Eigenfrequenz und ihre Harmonischen im Spektrum präsent sind [76].

2.3 Das Periodizitätsproblem

Aufgrund einer nicht unbeschränkten Rechnerleistung und der Forderung nach einer möglichst feinen Auflösung des Rechengebiets zur Minimierung der Diskretisierungsfehler wird bei numerischen Strömungsberechnungen das Rechengebiet nur gerade so groß gewählt wie unbedingt erforderlich. Daher erstreckt sich in aller Regel bei der Berechnung der stationären Strömung in Turbomaschinenstufen, bei der ja weder das Schaufelzahlverhältnis noch die aktuelle Winkellage der Stator- und Rotorschaukeln zueinander einen unmittelbaren Einfluß auf das Strömungsfeld haben, das Rechengebiet nur über eine Stator- und eine Rotorteilung; es werden identische Strömungsfelder in allen Schaufelkanälen von Stator- und Rotorgitter angenommen, siehe Bild 2.2. Diese Annahme stellt zum heutigen Zeitpunkt die wichtigste Voraussetzung für den effizienten Einsatz von dreidimensionalen Strömungslösern im Turbomaschinenbereich dar. Dieser Einzelkanalansatz hat bei stationären Strömungen a priori Gültigkeit und beinhaltet außer der Vernachlässigung von Fertigungsungenauigkeiten keinerlei einschränkende Annahme. Für die Strömungsgröße q an einem beliebigen Punkt des Rechengebiets gelten dann bezüglich benachbarter Schaufelkanäle die einfachen Periodizitätsbedingungen

$$q_i(\varphi) = q_i(\varphi + \varphi_i) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad , \quad (2.4)$$

wobei φ der Umfangswinkel und φ_S und φ_R die Teilung des Stators bzw. des Rotors ist, abhängig davon, in welchem Gebiet sich der betrachtete Punkt befindet.

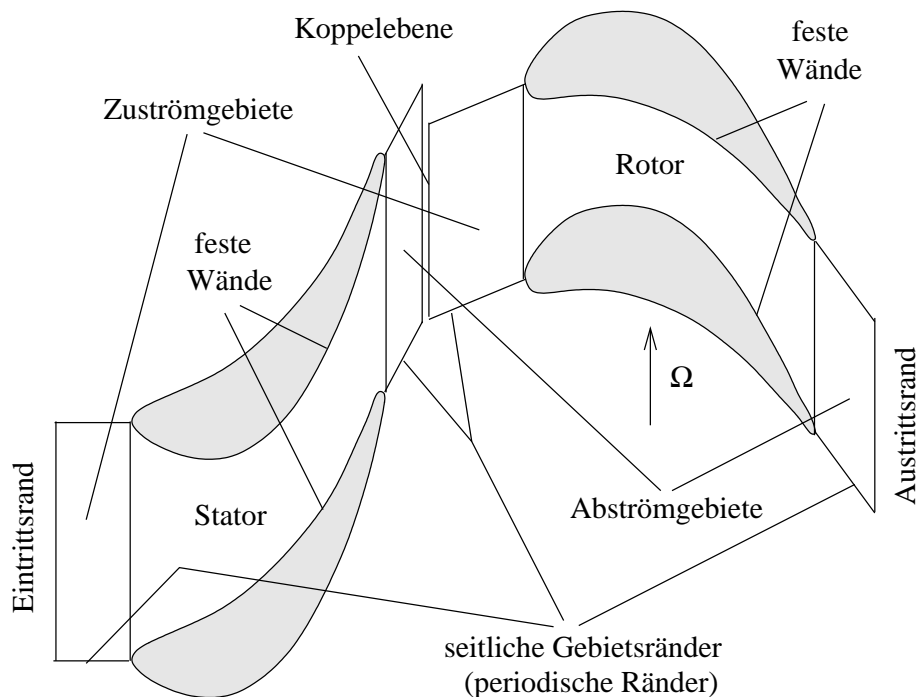


Bild 2.2: Rechengebiet für eine Turbinenstufe

Bei der Simulation der instationären Stufenströmung werden die Zusammenhänge komplizierter, weil dann die momentane Relativlage der Stator- und Rotorscheaufeln zueinander berücksichtigt werden muß. Auch muß zu jedem Zeitpunkt ein kontinuierlicher und konservativer Verlauf der Strömungsgrößen am Übergang vom Statorgebiet zum Rotorgebiet sichergestellt sein. Ferner stellt das Schaufelzahlverhältnis von Stator und Rotor einen entscheidenden Einflußparameter bei der Formulierung von Periodizitätsbeziehungen an den Gebietsgrenzen zu benachbarten Schaufelkanälen dar.

Bei Turbomaschinenstufen mit gleichen Teilungen von Stator und Rotor ist allerdings nur die Verdrehung des Rotors bezüglich des Statorgitters zu berücksichtigen, da dann die Strömung in den einzelnen Gitterkanälen – ähnlich den stationären Berechnungen – zu jedem Zeitpunkt als gleich angenommen werden kann. Bei dieser Erweiterung der Einzelkanalannahme auf instationäre Strömungen werden zufällige Unterschiede in den Strömungsfeldern nicht berücksichtigt. Ein Beispiel für solche Zufallsschwankungen stellt die Wirbelablösung an Schaufelhinterkanten dar, deren Phasenlage zwischen zwei benachbarten Schaufeln unterschiedlich sein kann, falls sie nicht durch Stator-Rotor-Wechselwirkungen induziert wird. In einem solchen Fall würden mit der Einzelkanalannahme nur gleiche Phasenlagen berechnet werden. Für die Stufenberechnung bedeutet diese Annahme anschaulich, daß jede Schaufel zu jedem Zeitpunkt dieselbe Winkellage α bzgl. der nächsten Schaufel des Nachbargitters einnimmt, vgl. Bild 2.3. Somit erfährt sie auch

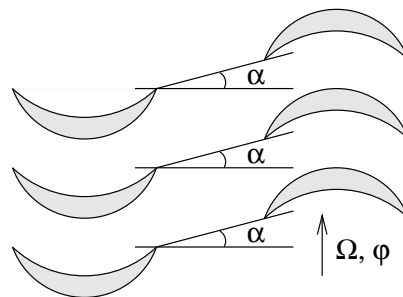


Bild 2.3: Turbomaschinenstufe bei gleicher Teilung von Stator und Rotor (schematisch)

dieselben Störungen durch Nachlaufströmungen, Druckschwankungen usw. wie die in Umfangsrichtung benachbarte Schaufel.

Zur Strömungsberechnung genügt es auch hier, lediglich eine Stator- und eine Rotorteilung im Rechengebiet zu berücksichtigen. Die zugehörigen Periodizitätsbedingungen sind identisch mit denen von Gleichung (2.4). Allerdings wird zusätzlich eine Bedingung benötigt, die die Kopplung der Rechengebiete von Stator und Rotor beschreibt, um die Interaktion der Strömung in beiden Gittern zu berechnen. Die Betrachtung der Strömungsgrößen an den Punkten der Koppellebene führt auf die Beziehung

$$q_S(\varphi, t) = q_R(\varphi - \Omega t, t) \quad . \quad (2.5)$$

An dieser Stelle soll die für diese Betrachtungen gültige Voraussetzung erwähnt werden: Die Rechengebiete von Stator und Rotor seien stator- bzw. rotorfest, d. h. die Rechengebiete selbst üben zueinander eine Relativbewegung aus. Es sind auch andere Ansätze denkbar, bei denen beispielsweise das gesamte Rechengebiet raumfest ist und sich die Rotorschaukeln durch das Gebiet hindurchdrehen. Auf derartige Modelle wird hier nicht näher eingegangen, da sich dabei eine ganze Reihe von zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Definition und der Berechnung der Randbedingungen auf den Schaufeloberflächen ergeben.

Allerdings sind Turbomaschinenstufen mit gleicher Schaufelzahl in Stator und Rotor in der Praxis eher die Ausnahme denn die Regel. Der Grund dafür liegt in der Möglichkeit der Geräusentwicklung und der Entstehung von akustischen Resonanzen, die Schaufelschwingungen anregen können und damit die Beschaukelung gefährden können. Daher werden Schaufelzahlverhältnisse von eins in der Stufenauslegung weitestgehend vermieden; Schaufelzahlverhältnisse mit kleinen gemeinsamen Teilern werden hingegen bevorzugt.

Haben die Schaufelzahlen einen sehr großen gemeinsamen Teiler, so besteht die Möglichkeit, das Rechengebiet gerade aus so vielen Stator- und Rotor-kanälen zusammenzusetzen, wie für einfache Periodizitäts- und Koppelbedingungen notwendig sind. Die Periodizitätsbedingungen lauten dann

$$q_i(\varphi) = q_i(\varphi + n_i\varphi_i) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad , \quad (2.6)$$

wobei n_S und n_R die Schaufelzahlen von Stator bzw. Rotor dividiert durch ihren größten gemeinsamen Teiler sind. Es gilt die Koppelbedingung (2.5). Für eine Stufe mit 40 Stator- und 60 Rotorschaukeln bedeutet dies beispielsweise, daß das Rechengebiet über 2 Stator- und 3 Rotorkanäle zu erstrecken ist, Bild 2.4. Wird die Gitterfeinheit beibehalten, so führt diese Vorgehens-

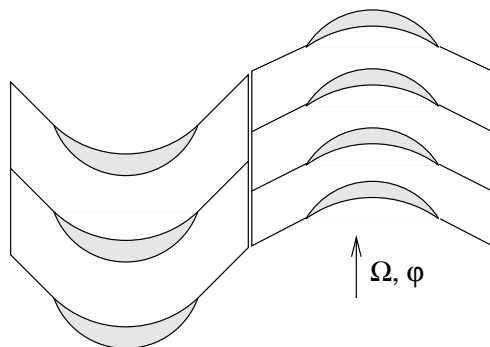


Bild 2.4: Schema eines Rechengebiets für eine Turbomaschinenstufe mit einem Schaufelzahlverhältnis von 1,5

weise zu deutlich längeren Rechenzeiten als eine Einzelkanalrechnung. Im Falle des obigen Beispiels mit einem Schaufelzahlverhältnis von 1,5 müssen

also anstelle von lediglich zwei insgesamt fünf Schaufelkanäle diskretisiert werden, was den etwa 2,5-fach Rechenaufwand bedeutet.

Wie bereits erwähnt, haben Turbomaschinenstufen selten Schaufelzahlen mit einem sehr großen gemeinsamen Teiler. Die Stufe aus obigem Beispiel wird in der Praxis also eher mit einem Schaufelzahlverhältnis von 43:61 o. ä. als mit 40:60 ausgeführt werden. Damit muß bei obiger Vorgehensweise zum Erreichen der Periodizitätsbedingung (2.6) jeweils das gesamte Stator- und Rotorrad als Rechengebiet verwendet werden. Der Aufwand für eine numerische Strömungssimulation erhöht sich dadurch derart, daß selbst auf äußerst leistungsfähigen Rechenanlagen bei dreidimensionalen, reibungsbehafteten Rechnungen entweder keine ausreichend feine Diskretisierung vorgenommen werden kann oder die Rechenzeiten inakzeptabel lang werden.

Ein naheliegender Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, für das Rechengebiet gerade so viele Stator- und Rotorkanäle zu verwenden, wie zum Erreichen eines Schaufelzahlverhältnisses benötigt werden, das einerseits das wirkliche Schaufelzahlverhältnis möglichst gut annähert aber andererseits den Rechenaufwand möglichst drastisch reduziert. Im obigen Beispiel würde die Rechnung so beispielsweise mit einem Schaufelzahlverhältnis von 3:2 anstelle von 61:43 durchgeführt werden, wodurch der Rechenaufwand um 95 % abnähme. Um eine möglichst ähnliche Strömung zu erreichen, sollte aber auch gleichzeitig mit der Änderung der Schaufelteilung die Schaufel- und Kanalgeometrie skaliert werden. Für eine ähnliche Versperrungswirkung der Schaufeln ist beispielsweise das Verhältnis von Teilung zu Sehnenlänge konstant zu halten. Wesentlich komplizierter, wenn nicht gänzlich unmöglich werden diese Überlegungen allerdings, wenn versucht wird, neben der Versperrung auch für die Axialabstände, Radialspaltweiten und Kanalerweiterungen ähnliche Beziehungen zu finden, um die gesamte dreidimensionale Geometrie konsistent zu skalieren [68]. Auch wird der Frequenzinhalt der Lösung und damit das Zeitverhalten der Strömung von der Geometrieanpassung mehr oder minder stark beeinflußt und damit verfälscht. Arnone und Pacciani haben in einer Studie die Auswirkungen von Teilungsanpassungen im Rotor auf die Ergebnisse von zweidimensionalen Strömungsberechnungen in einer Turbinenstufe untersucht. Neben dem wirklichen Teilungsverhältnis von 19:11 führten sie auch Rechnungen mit diversen angenäherten Verhältnissen (2:1, 5:3, 7:4 und 12:7) durch und stellten deutliche Einflüsse auf das Strömungsfeld fest, wenn die Teilung um mehr als 1 % verändert wird [2].

Eine weitere Verallgemeinerung der oben erwähnten Einzelkanalannahme für instationäre Strömungen in Turbomaschinenstufen mit beliebigen Schaufelzahlen führt auf die sogenannten zeitlich phasenversetzten Ränder. Zur Formulierung der Periodizitätsbedingungen werden die zeitlichen Schaufelwechelperioden T_S und T_R des statorfesten bzw. des rotorfesten Koordinatensystems,

$$T_S = \frac{\varphi_R}{\Omega} \quad \text{bzw.} \quad T_R = \frac{\varphi_S}{\Omega} \quad , \quad (2.7)$$

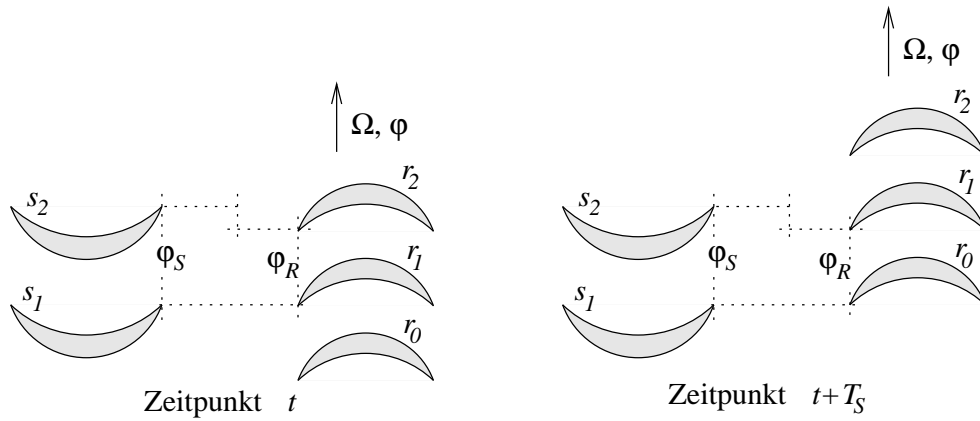


Bild 2.5: Definition der Schaufelwechselferode T_S des statorfesten Systems

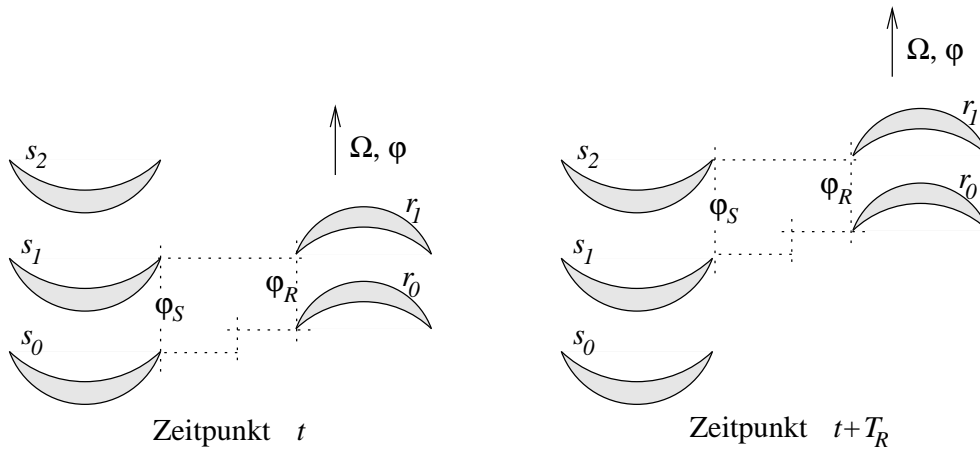


Bild 2.6: Definition der Schaufelwechselferode T_R des rotorfesten Systems

benötigt. Der Kehrwert der Statorwechselferode T_S entspricht der Frequenz, mit der sich die Rotorschaukeln an einem statorfesten Beobachtungspunkt vorbeibewegen. Dieser Zusammenhang wird durch die Skizzen in Bild 2.5 illustriert. Analog dazu entspricht die Rotorwechselferode, d. h. der Kehrwert der zeitlichen Rotorwechselferode T_R , der Frequenz, mit der sich die Statorschaukeln an einem rotorfesten Beobachtungspunkt vorbeibewegen, siehe Bild 2.6.

Bei den räumlichen Periodizitätsbedingungen spielt der Zeitversatz bzw. der „time-lag“ ΔT

$$\Delta T = T_R - T_S = \frac{\varphi_S - \varphi_R}{\Omega} \quad (2.8)$$

die zentrale Rolle. Dieser Versatz berechnet sich somit als Differenz der beiden Periodendauern T_S und T_R und entspricht der Zeitdauer bis die in Umfangsrichtung nächste Statorschaukel s_2 dieselbe Relativposition zu ihrer benachbarten Rotorschaukel r_2 hat, wie die betrachtete Schaukel s_1 zur Schaukel r_1 , siehe Skizzen in Bild 2.7.

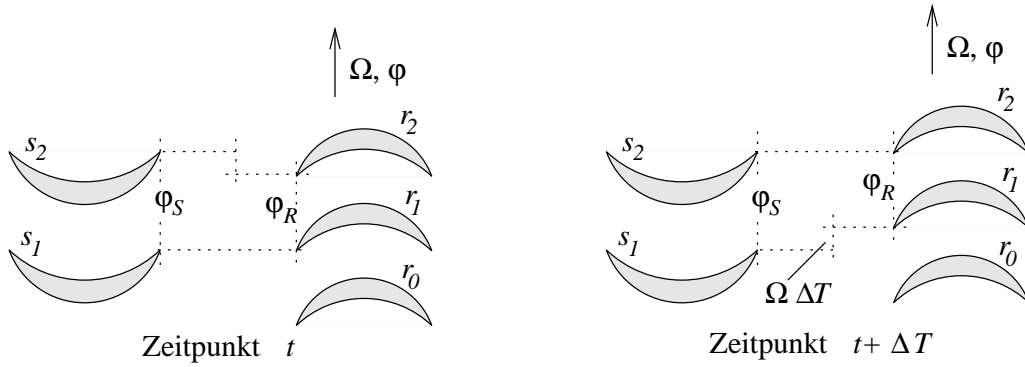


Bild 2.7: Skizze zur Veranschaulichung des Zeitversatzes in Turbomaschinenstufen mit unterschiedlicher Teilung von Stator und Rotor

Geht man bei gleicher Schaufelzahl von Stator und Rotor davon aus, daß sich in allen Schaufelkanälen zeitgleich diesselben Vorgänge abspielen, so wird bei einem beliebigen Schaufelzahlverhältnis in logischer Konsequenz angenommen, daß die Strömung von in Umfangsrichtung benachbarten Schaufelkanälen durch ein um den „time-lag“ ΔT zeitlich verschobenes Verhalten charakterisiert wird. Für Bild 2.7 bedeutet dies, daß die Strömung im Schaufelkanal zwischen r_0 und r_1 zum Zeitpunkt t dieselbe ist, wie zwischen r_1 und r_2 zum Zeitpunkt $t + \Delta T$. Mathematisch formuliert lauten daher die sich ergebenden räumlichen Periodizitätsbedingungen

$$q_i(\varphi, t) = q_i(\varphi - \varphi_i, t - \Delta T) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad , \quad (2.9)$$

für das Strömungsfeld des in positiver φ -Richtung benachbarten Schaufelkanals und

$$q_i(\varphi, t) = q_i(\varphi + \varphi_i, t + \Delta T) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad , \quad (2.10)$$

für das Strömungsfeld des in negativer φ -Richtung benachbarten Schaufelkanals. Nachfolgend sind zwei Ansätze zur Berücksichtigung des Zeitversatzes an den Umfangsrändern beschrieben.

Erdos, Alzner und McNally [16] stellten 1977 die sogenannte Methode des direkten Abspeicherns der Lösungsgrößen auf den periodischen Rändern vor. Das Problem, daß zur Zeit t die Strömung zum späteren Zeitpunkt $t + \Delta T$ noch nicht bekannt ist, lösen sie durch die Einführung einer zusätzlichen zeitlichen Periodizität. Bezugnehmend auf Bild 2.5 setzen sie voraus, daß die Strömung im Statorkanal zwischen den Schaufeln s_1 und s_2 zu den Zeitpunkten t und $t + T_S$ identisch ist. Mit Bezug auf Bild 2.6 wird die Strömung im Rotorkanal zwischen den Schaufeln r_0 und r_1 zu den Zeitpunkten t und $t + T_R$ ebenso als identisch angenommen. Mit Bezugnahme auf die drei Bilder 2.5 bis 2.7 lauten somit die räumlichen Periodizitätsbedingungen nach Erdos et al. [16]

$$q_i(\varphi, t) = q_i(\varphi - \varphi_i, t - \Delta T) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad , \quad (2.11)$$

an den Punkten der periodischen Gebietsränder bei Schaufel s_2 bzw. r_2 und

$$q_i(\varphi, t) = q_i(\varphi + \varphi_i, t - (T_i - \Delta T)) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad , \quad (2.12)$$

an den Punkten der periodischen Gebietsränder bei Schaufel s_1 bzw. r_1 . Bei der Anwendung dieser Periodizitätsbedingung werden nun nur Werte zu bereits vorangegangenen Zeitpunkten benötigt. Im Strömungsberechnungsprogramm werden dazu während der Schaufelwechselperioden die Strömungsgrößen an den periodischen Gebietsrändern abgespeichert und zum entsprechenden Zeitpunkt der darauffolgenden Periode als Randbedingung verwendet. Analog dazu wird auch an den Koppelgrenzen zwischen Stator- und Rotorgebieten verfahren. Allerdings müssen dort diese Werte über ein ausreichend großes Segment des Umfanges verfügbar sein, so daß stets für den sich weiterdrehenden Rotor eine gegenüberliegende Berandung des Stators zur Verfügung steht, die eine Kopplung dieser Bereiche ermöglicht. Dasselbe gilt natürlich umgekehrt auch für den Stator, an dem sich der Rotor vorbeidreht. Die zusätzliche zeitliche Periodizität dieser Methode wird deutlich, wenn Gln. (2.11) und (2.12) zu

$$q_i(\varphi, t) = q_i(\varphi, t - T_i) \quad , \quad i \in \{R, S\} \quad (2.13)$$

zusammengefaßt werden. Genau genommen gelten diese Bedingungen jedoch nur in reibungsfreien Strömungen. In reibungsbehafteten Strömungen können aufgrund von physikalischen Oszillationen und Strömungsinstabilitäten, wie beispielsweise die Wirbelablösung an Schaufelhinterkanten, Frequenzen im Strömungsfeld auftreten, die kein ganzzahliges Vielfaches der Schaufelwechselfrequenz sind. Durch die aufgezwungene zeitliche Periodizität dieses Verfahrens wird dann entweder die Konvergenz zu einer periodischen Lösung nicht erreicht oder derartige Effekte werden vollständig herausgefiltert. Erwähnenswert ist auch die Tatsache, daß allgemein die Konvergenzrate bis zum Erreichen einer periodischen Lösung bei diesem Verfahren niedriger als bei anderen Verfahren ist, weil sich die Verwendung von Lösungsgrößen aus der vorangegangenen Periode stark konvergenzhemmend auswirkt [42].

Giles [23] schlägt 1986 ein anderes Verfahren zur Behandlung der zeitlich versetzten Gebietsränder vor, bei der die geschilderten Probleme der Methode des direkten Abspeicherns nicht auftreten. Bei der sogenannten Methode der zeitlich geneigten Rechengebiete werden die Lösungsgebiete von Stator und Rotor einer Zeittransformation unterzogen. In der transformierten Zeit besteht an den periodischen Rändern kein Zeitversatz mehr, so daß Stator- und Rotorgebiet dem Anschein nach gleiche Teilungen haben. Dadurch lassen sich die einfachen Periodizitätsbedingungen (2.5) anwenden, siehe Skizzen in Bild 2.8. Die Transformationsbeziehungen lauten

$$t'_S = t - \frac{\Delta T}{\varphi_S} \varphi \quad \text{bzw.} \quad t = t'_S + \frac{\Delta T}{\varphi_S} \varphi \quad (2.14)$$

für die Punkte des Statorgebiets und

$$t'_R = t - \frac{\Delta T}{\varphi_R} \varphi \quad \text{bzw.} \quad t = t'_R + \frac{\Delta T}{\varphi_R} \varphi \quad (2.15)$$

für die Punkte des Rotorgebiets. Die für Stator- und Rotorgebiet unterschiedlichen Zeiten t'_S und t'_R hängen somit von der Lage des betrachteten Punkts

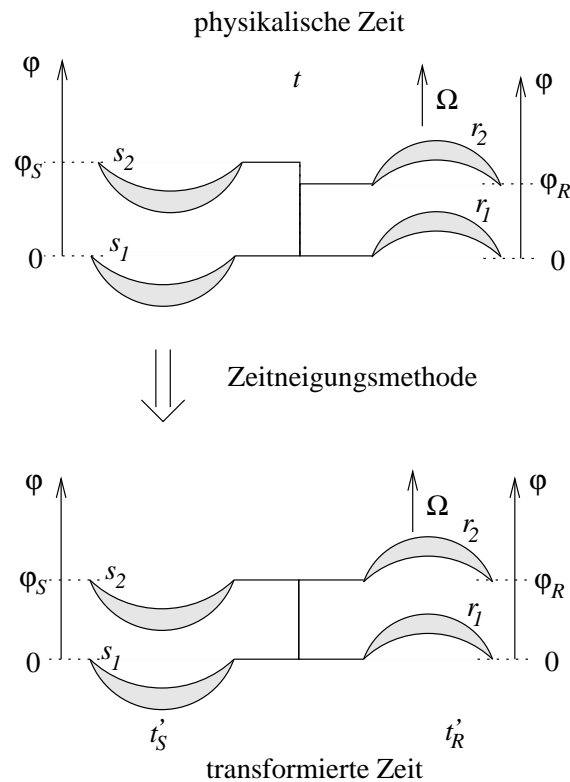


Bild 2.8: Skizze zur Wirkungsweise der zeitlichen Neigung der Rechengebiete für Turbomaschinenstufen mit unterschiedlicher Teilung von Stator und Rotor

auf dem Umfang (Koordinate φ) ab. Im allgemeinen befindet sich damit jeder Punkt des Rechengebiets zu jedem Zeitpunkt der künstlichen Zeit t' in einer anderen physikalischen Zeit t . Den Gleichungen (2.14) und (2.15) ist zu entnehmen, daß für diejenigen Punkte der Koppellebene, die auf dem unteren periodischen Rand bei den Schaufeln s_1 und r_1 ($\varphi = 0$) liegen und somit sowohl zum Stator- als auch zum Rotorgebiet gehören, die physikalische mit der transformierten Zeit identisch ist,

$$t(\varphi = 0) = t'_S = t'_R = t_0 \quad . \quad (2.16)$$

Auch für die Punkte der Koppellebene, die zum oberen periodischen Rand bei den Schaufeln s_2 und r_2 gehören ($\varphi = \varphi_S$ bzw. $\varphi = \varphi_R$), ist die Pseudozeit im Stator- und Rotorgebiet dieselbe. Allerdings befinden sich diese Punkte in der physikalischen Zeit

$$t(\varphi_i) = t_0 + \Delta T \quad (2.17)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_S && \text{für die Punkte des Statorgebiets und} \\ \varphi_i &= \varphi_R && \text{für die Punkte des Rotorgebiets.} \end{aligned}$$

Diese durch die Transformation erreichte Zeitdifferenz zwischen dem oberen und unteren periodischen Rand entspricht also gerade dem Zeitversatz

zwischen der Stator- und Rotorschaukelwechselferode. Damit lassen sich zu jedem Zeitpunkt der transformierten Zeit die beiden Rechengebiete direkt koppeln. An den periodischen Rändern gelten die Periodizitätsbeziehungen

$$q_i(\varphi, t'_i) = q_i(\varphi + \varphi_i, t'_i) \quad , \quad i \in \{S, R\} \quad . \quad (2.18)$$

Eine schematische Darstellung dieses Sachverhalts ist in Bild 2.9 dargestellt.

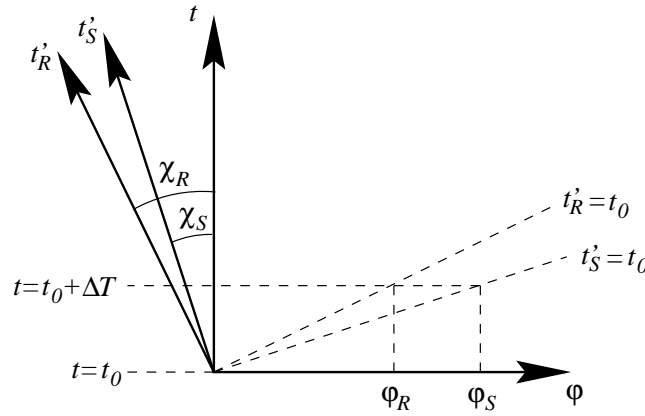


Bild 2.9: Schema zur Zeitneigung von Stator- und Rotorgebiet

Die Zeitachsen der einzelnen Rechengebiete sind abhängig von der Teilungsdifferenz, die ja nach Gleichung (2.7) den Zeitversatz ΔT bestimmt, verschieden stark gegenüber der physikalischen Zeitachse geneigt, daher rührt auch der Name „Zeitneigungsmethode“. Die entsprechenden Inklinationsparameter χ_S und χ_R des Stators bzw. Rotors lauten nach Gln. (2.14) und (2.15)

$$\chi_S = \frac{\Delta T}{\varphi_S} = \frac{\varphi_S - \varphi_R}{\Omega \varphi_S} \quad \text{bzw.} \quad \chi_R = \frac{\Delta T}{\varphi_R} = \frac{\varphi_S - \varphi_R}{\Omega \varphi_R} \quad . \quad (2.19)$$

Mit der Zeitneigungsmethode lassen sich unabhängig vom Schaufelzahlverhältnis der Stufe einfache Periodizitätsbeziehungen für die periodischen Rechengebietsränder formulieren, mit denen sich ein numerisches Verfahren implementieren läßt, das ohne das Abspeichern bereits berechneter Lösungen oder die Diskretisierung vieler Stator- und Rotorkanäle auskommt. Dem steht ein erhöhter Rechenaufwand gegenüber, da zur Integration die transformierten Zustandsgrößen verwendet werden, während für die Flußbilanzierung die bekannten Erhaltungsgrößen benötigt werden, so daß ein ständiger Wechsel der Beschreibung der Größen erforderlich ist. Außerdem müssen am Ende der Simulation die zeitlich transformierten Lösungen in die physikalische Zeit zurücktransformiert werden, um die Ergebnisse sinnvoll analysieren und interpretieren zu können. Auch zeigen Stabilitätsbetrachtungen [24], daß die Rechengebiete nicht beliebig stark in der Zeit geneigt werden können; d. h. es existiert eine problemabhängige obere Grenze für die Beträge der Inklinationsparameter χ_S und χ_R . Hierauf wird innerhalb dieses Berichts noch detailliert eingegangen.

3 Modellierung kompressibler Strömungen

In diesem Kapitel werden die verwendeten Grundgleichungen zusammengefaßt. Dazu werden zunächst die thermodynamischen Beziehungen aufgeführt. Danach werden die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen zur Berechnung von kompressiblen, instationären und reibungsbehafteten Strömungen in einer für Turbomaschinenanwendungen geeigneten Formulierung beschrieben. Für Nachweise zur hier aufgeführten Theorie sei auf die einschlägigen Standardwerke der Thermodynamik und Strömungsmechanik verwiesen. Die Grundzüge des verwendeten algebraischen Modells zur Beschreibung der turbulenten Grenzschichteffekte werden in einem anschließenden Abschnitt kurz zusammengefaßt. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung der zur Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen verwendeten Rand- und Anfangsbedingungen.

3.1 Thermodynamische Beziehungen

Das strömende Fluid wird als perfektes Gas angenommen. Damit hat es eine konstante spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$c_p = \text{konst.} \quad , \quad (3.1)$$

und es gilt die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase,

$$\frac{p}{\varrho T} = R = \text{konst.} \quad , \quad (3.2)$$

die den Zusammenhang von statischem Druck p , Dichte ϱ und Temperatur T mit der stoffspezifischen Gaskonstanten R beschreibt. Die kalorische Zustandsgleichung

$$e = c_v T \quad (3.3)$$

beschreibt den inneren Energiezustand e des Fluids mit Hilfe der Temperatur T und der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v . Für die Wärmekapazitäten gilt der Zusammenhang

$$c_p - c_v = R \quad . \quad (3.4)$$

Mit der Definition des Isentropenexponenten κ

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.5)$$

und den Gleichungen (3.2) und (3.4) läßt sich Gleichung (3.3) umschreiben zu

$$\varrho e = \frac{p}{\kappa - 1} \quad . \quad (3.6)$$

Die Beziehung für die spezifische Enthalpie h lautet

$$h = e + \frac{p}{\varrho} = \kappa e \quad . \quad (3.7)$$

Die Beziehungen für die spezifische Totalenergie e_T und die spezifische Totalenthalpie h_T im Absolutsystem lauten mit dem Absolutgeschwindigkeitsvektor \vec{v}

$$e_T = e + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \quad \text{bzw.} \quad h_T = e_T + \frac{p}{\varrho} \quad . \quad (3.8)$$

Eine geeignete Totalzustandsgröße für Bezugssysteme, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um eine raumfeste Drehachse rotieren, ist (z. B. nach [39]) durch die relative spezifische Totalenergie e_t und durch die „Rotalthalpie“ genannte relative spezifische Totalenthalpie h_t ,

$$e_t = e + \frac{1}{2} (\vec{w}^2 - \Omega^2 r^2) \quad \text{bzw.} \quad h_t = e_t + \frac{p}{\varrho} \quad , \quad (3.9)$$

gegeben, wobei \vec{w} der Relativgeschwindigkeitsvektor ist und r den Abstand zur Drehachse bezeichnet.

Als Maß für die Reversibilität von Zustandsänderungen dient die Entropie s , die durch das Differential

$$ds = \frac{1}{T} \left(de + p d \left(\frac{1}{\varrho} \right) \right) = \frac{1}{T} \left(dh - \frac{1}{\varrho} dp \right) \quad (3.10)$$

beschrieben wird. Im Falle idealer Gase vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$\frac{ds}{c_v} = \frac{dp}{p} - \kappa \frac{d\varrho}{\varrho} \quad (3.11)$$

und läßt sich für konstante spezifische Wärmen geschlossen integrieren. Für einen beliebigen Bezugszustand (Index 0) ergibt sich dann

$$\frac{s - s_0}{c_v} = \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) - \kappa \ln \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right) \quad . \quad (3.12)$$

Nach dem Fourierschen Gesetz ist der Wärmestrom proportional zum Temperaturgradienten. Der Wärmetransport im Fluid folgt daher der Transportgleichung

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (3.13)$$

mit der spezifischen Wärmeleitfähigkeit

$$k = \frac{c_p \mu}{\text{Pr}} \quad , \quad (3.14)$$

der Prandtlzahl Pr und der dynamischen Viskosität μ .

Unter der Voraussetzung eines Newtonschen Fluids lassen sich die Schubspannungen im Medium in Abhängigkeit von den Geschwindigkeitsgradienten formulieren, und es gilt für den Schubspannungstensor

$$\bar{\tau} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \bar{I} + \mu (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T) \quad . \quad (3.15)$$

Der Viskositätskoeffizient λ läßt sich in Volumenviskosität und Querkontraktion unterteilen. Da die Volumenviskosität, die für eine Relaxationszeit bei Druckänderungen verantwortlich ist, im allgemeinen jedoch nicht bekannt ist, wird sie zu Null gesetzt, was allerdings nur bei einatomigen Gasen korrekt ist. Der verbleibende Querkontraktionseinfluß wird nach der Stokeschen Hypothese zu

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.16)$$

angenommen.

3.2 Navier-Stokes-Gleichungen

Die allgemeinste Form der Zustandsgleichungen zur Beschreibung der Bewegung eines als Kontinuum betrachteten, strömenden Fluids ist durch die Navier-Stokes-Gleichungen gegeben. Sie dienen zur Berechnung von kompressiblen, instationären und reibungsbehafteten Strömungsvorgängen und setzen sich aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zusammen. Bei Integration über ein Kontrollvolumen V mit der Oberfläche A und dem Normalenvektor der Oberfläche \vec{n} haben die Navier-Stokes-Gleichungen die streng konservative Form

$$\int_V \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV + \oint_A (\bar{F}_C - \bar{F}_D) \cdot \vec{n} dA = \vec{0} \quad , \quad (3.17)$$

wobei \vec{U} den Vektor der konservativen Zustandssgrößen

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho e_T \end{bmatrix} \quad , \quad (3.18)$$

\bar{F}_C die konvektive Flußmatrix

$$\bar{F}_C = \begin{bmatrix} \rho \vec{v}^T \\ \rho \vec{v} \vec{v}^T + p \bar{I} \\ \rho h_T \vec{v}^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

und \bar{F}_D die diffusive Flußmatrix

$$\bar{F}_D = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \bar{\tau} \\ (\bar{\tau} \cdot \vec{v})^T - \vec{q}^T \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

bezeichnet.

Für Turbomaschinenanwendungen erweist sich die Formulierung der Navier–Stokes–Gleichungen für ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die raumfeste Maschinenachse rotierendes Zylinderkoordinatensystem als geeignet, da hierdurch in eleganter Weise sowohl die Rotationssymmetrie als auch die Drehung des Rotors berücksichtigt wird. Ausgehend von einem ortsfesten kartesischen xyz -Koordinatensystem lassen sich die Gleichungen in ein bewegtes zylindrisches $x\varphi r$ -Koordinatensystem mit Hilfe der Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} x &= x & x &= x \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{z}\right) & \text{bzw.} & y = r \sin \varphi \\ r &= \sqrt{y^2 + z^2} & & z = r \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.21)$$

überführen. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor zeigt in Richtung der x -Achse (Einheitsvektor $\vec{\delta}_x$) und hat in beiden Koordinatensystemen die Form

$$\vec{\Omega} = -\Omega \vec{\delta}_x = \text{konst.} \quad (3.22)$$

Diese Wahl hat den Vorteil, daß mit fortschreitender Zeit für positives Ω die Drehung in Richtung steigender φ -Werte erfolgt.

Beim Wechsel ins Relativsystem ist zu beachten, daß anstelle der absoluten Totalzustände (3.8) die relativen Größen (3.9) zu verwenden sind. Die integralen Navier-Stokes-Gleichungen können dann – wiederum in streng konservativer Formulierung und unter der Voraussetzung von zeitunabhängigen Kontrollvolumina – wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \vec{U} dV + \iiint_V (\vec{S}_C - \vec{S}_D) dV + \iint_A (\overline{\overline{F}}_C - \overline{\overline{F}}_D) \vec{\delta}_x r d\varphi dr + \\ + \iint_A (\overline{\overline{F}}_C - \overline{\overline{F}}_D) \vec{\delta}_\varphi dx dr + \iint_A (\overline{\overline{F}}_C - \overline{\overline{F}}_D) \vec{\delta}_r r dx d\varphi = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit dem Vektor der konservativen Variablen

$$\vec{U} = \left[\varrho \quad \varrho w_x \quad \varrho w_\varphi \quad \varrho w_r \quad \varrho e_t \right]^T, \quad (3.24)$$

der Matrix der konvektiven Flüsse und dem Vektor der konvektiven Quellterme

$$\overline{\overline{F}}_C = \begin{bmatrix} \varrho w_x & \varrho w_\varphi & \varrho w_r \\ \varrho w_x^2 + p & \varrho w_x w_\varphi & \varrho w_x w_r \\ \varrho w_\varphi w_x & \varrho w_\varphi^2 + p & \varrho w_\varphi w_r \\ \varrho w_r w_x & \varrho w_r w_\varphi & \varrho w_r^2 + p \\ \varrho h_t w_x & \varrho h_t w_\varphi & \varrho h_t w_r \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{S}_C = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varrho w_r (w_\varphi + 2\Omega r) \\ -\varrho (w_\varphi + \Omega r)^2 - p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

sowie der Matrix der diffusiven Flüsse und dem Vektor der diffusiven Quellterme

$$\overline{\overline{F}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{x\varphi} & \tau_{xr} \\ \tau_{\varphi x} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi r} \\ \tau_{rx} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rr} \\ t_x - q_x & t_\varphi - q_\varphi & t_r - q_r \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{S}_D = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{r\varphi} \\ -\tau_{\varphi\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3.26)$$

Der symmetrische Schubspannungstensor (3.15) hat im gewählten Zylinderkoordinatensystem die Form

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{x\varphi} & \tau_{xr} \\ \tau_{\varphi x} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi r} \\ \tau_{rx} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rr} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial w_x}{\partial x} + \Lambda & \frac{1}{r}\frac{\partial w_x}{\partial\varphi} + \frac{\partial w_\varphi}{\partial x} & \frac{\partial w_x}{\partial r} + \frac{\partial w_r}{\partial x} \\ \vdots & 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{w_r}{r}\right) + \Lambda & \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} - \frac{w_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial\varphi} \\ \text{sym.} & \dots & 2\frac{\partial w_r}{\partial r} + \Lambda \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

mit

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) . \quad (3.28)$$

Die Vektoren der Schubspannungsleistung und des Wärmestroms lauten wie folgt:

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_\varphi \\ t_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx}w_x + \tau_{x\varphi}w_\varphi + \tau_{xr}w_r \\ \tau_{\varphi x}w_x + \tau_{\varphi\varphi}w_\varphi + \tau_{\varphi r}w_r \\ \tau_{rx}w_x + \tau_{r\varphi}w_\varphi + \tau_{rr}w_r \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_\varphi \\ q_r \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Mit den angegebenen thermodynamischen Zustandsgleichungen und mathematischen Beziehungen sind die Navier-Stokes-Gleichungen (3.23) prinzipiell numerisch lösbar. Allerdings müssen noch die stoffspezifischen Transportkoeffizienten μ und k angegeben werden. Die direkte numerische Simulation aller in einer turbulenten Strömung vorhanden Längen- und Zeitskalen ist jedoch für Turbomaschinenanwendungen bislang und auf absehbare Zeit aufgrund des immensen Ressourcenbedarfs nicht praktikierbar. Aus diesem Grund wird häufig eine statistische Betrachtungsweise der Strömung verwendet. Dabei wird angenommen, daß sich jede beliebige Strömungsgröße in einen statistischen Mittelwert und einen hochfrequenten, stochastischen, die Schwankungen durch die feinen turbulenten Wirbel beschreibenden Anteil aufspalten läßt. Für kompressible Strömungen hat sich dabei die dichtegegewichtete Mittelung (Favre [19, 20]) als geeignet erwiesen. Führt man nun diese Art der Mittelung für die Navier-Stokes-Gleichungen durch, so lassen sich durch geeignete vereinfachende Annahmen und unter Zuhilfenahme der Wirbelviskositätshypothese die Ausgangsgleichungen (3.23) formal erhalten; die darin vorkommenden Strömungsgrößen stellen dann allerdings dichtegegewichtete Mittelwerte dar, siehe z. B. [39]. Hinzukommende, nicht verschwindende Schwankungsterme können dabei in Analogie zu den sogenannten laminaren Transportkoeffizienten μ und k der ungemittelten Gleichungen als turbulente stoffspezifische Größen berücksichtigt werden. Durch einen sogenannten Boussinesq-Ansatz lassen sich die Reynoldsspannungen ähnlich den

Schubspannungen über die Gradienten des mittleren Geschwindigkeitsfelds berechnen. Es gilt dann für die dynamische Viskosität

$$\mu = \mu_l + \mu_t \quad , \quad (3.30)$$

für die Querkontraktionszahl

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu_l \quad (3.31)$$

und für die Wärmeleitfähigkeit

$$k = c_p \left(\frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \quad . \quad (3.32)$$

Bei den für thermische Turbomaschinenanwendungen relevanten Fluiden ist die laminare dynamische Scherzähigkeit μ_l nur schwach druckabhängig und kann mit dem empirischen Sutherland-Gesetz als Funktion der Temperatur ermittelt werden:

$$\mu_l = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad , \quad (3.33)$$

wobei μ_0 die laminare Viskosität bei der Bezugstemperatur T_0 und S die sogenannte Sutherland-Konstante ist.

Die laminare Prandtlzahl Pr_l zeigt in einem weiten Bereich eine nur schwache Temperaturabhängigkeit und wird deshalb meist als Konstante verwendet,

$$Pr_l = \text{konst.} \quad . \quad (3.34)$$

Für Luft liegt sie bei etwa 0,72. Über die turbulente Prandtlzahl Pr_t ist relativ wenig bekannt. Für die hier interessierenden Strömungsmedien deuten die meisten experimentellen Untersuchungen auf einen Wert, der in der Größenordnung von 1 oder knapp darunter liegt. Aus diesen Gründen wird auch die turbulente Prandtlzahl meist konstant gesetzt,

$$Pr_t = \text{konst.} \quad . \quad (3.35)$$

Ein häufig verwendeter Wert ist 0,9.

Zur Schließung der Favre-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen ist beim oben erwähnten Ansatz mit isotroper Turbulenz zur Berechnung der Reynoldsspannungen weiterhin noch die Angabe der turbulenten Viskosität μ_t nötig, was im allgemeinen durch empirische Berechnungsvorschriften, sogenannte Turbulenzmodelle, erfolgt. Aus der inzwischen sehr großen Vielfalt von Turbulenzmodellen und ihren vielen linearen und nichtlinearen Erweiterungen und Derivaten ohne bzw. mit einer oder mehreren partiellen Differentialgleichungen wurde im Rahmen dieser Arbeit das algebraische Turbulenzmodell nach Baldwin und Lomax [3] ausgewählt, weil es zum einen in der numerischen Strömungsmechanik relativ weit verbreitet ist und zum anderen aufgrund der rein algebraischen Beziehungen einfach zu implementieren ist. Dieser Typ von Turbulenzmodellen hat allerdings den klaren Nachteil,

daß für die turbulente kinetische Energie keine Transportgleichung formuliert wird. Dies hat zur Folge, daß die turbulenten Einflüsse im Innern des Strömungsgebiets nur dann berücksichtigt werden, wenn die sie verursachenden Wirbel und Sekundärströmungen bei ihrer Konvektion durch das Gebiet mit Hilfe geeigneter Identifikationskriterien verfolgt werden. Bei instationären Strömungen in mehrstufigen Turbomaschinen ist dies jedoch aufgrund der Vielzahl der auftretenden Strömungsphänomene nicht oder nur sehr begrenzt möglich. Die Grundzüge des Modells und seiner Implementierung werden in Abschnitt 3.3 zusammengefaßt.

3.3 Turbulenzmodellierung

Zur Berechnung der Wirbelviskosität μ_t wird im Rahmen dieser Arbeit das Turbulenzmodell nach Baldwin und Lomax [3] verwendet. Im Gegensatz zu anderen algebraischen Modellen muß bei diesem Modell die in der Regel unbekannte Grenzschichtdicke nicht bestimmt werden. Obwohl die Bestimmungsgleichungen dieses Modells in der einschlägigen Literatur relativ häufig zu finden sind, werden sie in Abschnitt 3.3.1 dennoch aufgeführt, um die Besonderheiten der gewählten Implementierung, die in Abschnitt 3.3.2 dargestellt werden, einfacher beschreiben zu können.

3.3.1 Turbulenzmodell nach Baldwin und Lomax

Das Baldwin-Lomax-Modell [3] wurde ursprünglich zur Beschreibung von turbulenten Grenzschichteffekten bei zweidimensionalen bzw. quasi dreidimensionalen Außenströmungsproblemen entwickelt. Die mathematische Formulierung des Turbulenzmodells erfordert dabei die Auswertung der Beziehungen in Geschwindigkeitsprofilen normal zur Wand bzw. zum Nachlauf an allen diskreten Gitterpositionen entlang den festen Wänden bzw. entlang der Hauptströmungsrichtung. Da im allgemeinen jedoch die Gitterlinien der verwendeten Rechennetze diese Voraussetzung nicht im gesamten Rechengebiet erfüllen können, wird bei strukturierten Gittern in der Regel das Turbulenzmodell in einem Profil entlang den quer zur Hauptströmung verlaufenden Gitterlinien ausgewertet, um den numerischen Aufwand möglichst gering zu halten.

Das Turbulenzmodell ist ein sogenanntes Zweischichten-Wirbelviskositätsmodell, bei dem die Grenzschicht in einen inneren und einen äußeren Bereich unterteilt wird. In den beiden Bereichen kommen jeweils unterschiedliche Berechnungsformeln für die Wirbelviskosität μ_t zum Einsatz. Der Übergang vom inneren zum äußeren Bereich ist beim kleinsten Wandabstand $y = y^*$, an dem die inneren und äußeren Wirbelviskositätswerte μ_{ti} bzw. μ_{to} gleich groß

sind:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{ti} & \text{für } y \leq y^* \\ \mu_{to} & \text{für } y > y^* \end{cases} \quad (3.36)$$

Für den inneren Bereich wird die van Driestsche Formulierung des Prandtl-schen Mischungswegansatzes verwendet:

$$\mu_{ti} = \varrho l^2 \|\vec{\omega}\| \quad (3.37)$$

mit

$$l = ky \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) , \quad (3.38)$$

wobei der Term in runden Klammern in Gleichung (3.38) als van Driestsche Dämpfungsfunktion bezeichnet wird und ein exponentielles Abfallen der Wirbelviskosität in Wandnähe bewirkt. Die beiden Konstanten sind $A^+ = 26$ und $k = 0,4$. Der dimensionslose Wandabstand y^+ berechnet sich aus

$$y^+ = \frac{\varrho_w u_\tau y}{\mu_{lw}} , \quad (3.39)$$

mit der Dichte an der Wand ϱ_w , der Reibungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho_w}} , \quad (3.40)$$

der laminaren Zähigkeit an der Wand μ_{lw} und der Wandschubspannung

$$\tau_w = \mu_{lw} (\vec{\nabla} w_{\parallel})_w \cdot \vec{n}_w , \quad (3.41)$$

wobei mit $(\vec{\nabla} w_{\parallel})_w \cdot \vec{n}_w$ der Gradient der wandparallelen Geschwindigkeit in Wandnormalenrichtung in unmittelbarer Nähe zur Wand bezeichnet wird. Der Betrag der lokalen Rotation des Geschwindigkeitsfeldes kann in Zylinderkoordinaten wie folgt angegeben werden:

$$\|\vec{\omega}\| = \|\vec{\nabla} \times \vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{w_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_r}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_\varphi}{\partial x} \right)^2} \quad (3.42)$$

Für den äußeren Bereich der Grenzschicht wird eine Erweiterung der Clauser-schen Formulierung der Wirbelviskosität verwendet:

$$\mu_{to} = K C_{CP} \varrho F_{\text{WAKE}} F_{\text{KLEB}}(y) \quad (3.43)$$

Hierbei ist die Clauserkonstante $K = 0,0168$ und die Konstante $C_{CP} = 1,6$. Der Faktor F_{WAKE} ist definiert als

$$F_{\text{WAKE}} = y_{\text{MAX}} \min \left(F_{\text{MAX}}, \frac{C_{\text{WK}} u_{\text{DIF}}^2}{F_{\text{MAX}}} \right) . \quad (3.44)$$

Die Konstante C_{WK} hat den Wert 0,25 und y_{MAX} ist der Wandabstand, bei dem die Funktion

$$F(y) = y \|\vec{\omega}\| \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \quad (3.45)$$

ihr mit F_{MAX} bezeichnetes Maximum erreicht. Die Geschwindigkeit u_{DIF} ist die Differenz zwischen den maximalen und minimalen Geschwindigkeitsbeiträgen, die im Profil senkrecht zur Wand bzw. senkrecht zum Nachlauf vorkommen:

$$u_{\text{DIF}} = \left(\sqrt{w_x^2 + w_\varphi^2 + w_r^2} \right)_{\text{max}} - \left(\sqrt{w_x^2 + w_\varphi^2 + w_r^2} \right)_{\text{min}} \quad (3.46)$$

Die Klebanoffsche Intermittenzfunktion $F_{\text{KLEB}}(y)$ ist definiert als

$$F_{\text{KLEB}}(y) = \left[1 + 5,5 \left(\frac{C_{\text{KLEB}} y}{y_{\text{MAX}}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (3.47)$$

mit dem konstanten Wert $C_{\text{KLEB}} = 0,3$.

In Nachlaufgebieten kann das Zentrum des Nachlaufs als eine Art feste Wand aufgefaßt werden und die Formulierung für den äußeren Bereich zur Bestimmung der Wirbelviskosität verwendet werden. Allerdings wird dann bei der Bestimmung von F_{MAX} die van Driestsche Dämpfungsfunktion in Gleichung (3.45) weggelassen.

Zur Berücksichtigung der Effekte des laminar/turbulenten Umschlags und der Relaminarisierung schlagen Baldwin und Lomax eine einfache Schaltfunktion vor, die die Wirbelviskosität im gesamten Profil zu null setzt, falls der Maximalwert unterhalb eines gewissen Schwellenwerts liegt:

$$\mu_t = 0 \quad \text{falls} \quad \max(\mu_t)_{\text{im Profil}} < C_{\text{MUTM}} \mu_\infty \quad (3.48)$$

mit $C_{\text{MUTM}} = 14$ und $\mu_\infty = \mu_l$.

3.3.2 Implementierung in das numerische Verfahren

Bei den im Rahmen der vorliegenden Arbeit interessierenden, dreidimensionalen Innenströmungsproblemen in Turbomaschinen treten folgende Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der ursprünglichen Formulierung des Baldwin–Lomax–Turbulenzmodells auf. Dabei soll im folgenden aus Gründen einer einfacheren Formulierbarkeit in Nachlaufgebieten auch das als eine Art Wand aufzufassende Nachlaufzentrum mit „Wand“ bezeichnet werden.

- Die Netzlinien der verwendeten H-Gitter verlaufen im allgemeinen nicht in Wandnormalenrichtung.
- Aufgrund der komplexen Geometrie der Anwendungsfälle kann nicht für jeden Punkt im Raum in eindeutiger Weise eine für die lokale Wirbelviskosität alleine verantwortliche Wand zugewiesen werden. Bei mehreren aneinandergrenzenden Wänden existiert keine eindeutige Wandnormalenrichtung.
- Die Bestimmung der Abstände zu den nächstgelegenen Wänden ist bei aus mehreren einzelnen Gitterblöcken aufgebauten Rechengebieten aufwendig (Multiblock-Topologie).

- Bei Innenströmungsproblemen kann die Funktion $F(y)$ aus Gleichung (3.45) mehrere Maxima haben, da die Wirbelstärke der Kernströmung im Schaufelkanal im Gegensatz zur ungestörten Strömung bei der Tragflügelumströmung nicht notwendigerweise verschwindet und aufgrund ihrer Gewichtung mit dem Wandabstand bedeutsam werden kann.
- Das Turbulenzmodell bestimmt die durch die Grenzschicht oder durch den Nachlauf verursachte Wirbelviskosität; andere Turbulenzeinflüsse werden nicht berücksichtigt. Dies führt zu einer unzureichenden Modellierung von Sekundärströmungseffekten wie beispielsweise die Konvektion von Wirbeln oder abgeschnittenen Nachläufen von weiter stromaufliegenden Schaufelgittern.
- Die auch als „clipping“ bezeichnete einfache Schaltfunktion (3.48) zur Berücksichtigung von Transitionseffekten kann sich ungünstig auf das Konvergenzverhalten des Löser auswirken.

Bei der Implementierung des Modells in das numerische Verfahren wird daher in einigen Punkten von der von Baldwin und Lomax angegebenen Berechnungsvorschrift abgewichen:

Zur Berücksichtigung der turbulenten Einflüsse von Schaufelgrenzschicht und Seitenwandgrenzschicht wird, einem Vorschlag von Arnone et al. [1] folgend, die Wirbelviskosität zunächst getrennt für die Schaufelgrenzschicht bzw. die Nachlaufströmung (Index η) und für die Seitenwandgrenzschicht (Index ζ) berechnet. Die resultierende turbulente Zähigkeit wird dann über eine abstandsgewichtete Überlagerung der beiden Anteile bestimmt:

$$\mu_t = \frac{y_\zeta^2 \mu_{t\eta} + y_\eta^2 \mu_{t\zeta}}{y_\eta^2 + y_\zeta^2} \quad (3.49)$$

Die Auswertung der mathematischen Beziehungen erfolgt für die Schaufelgrenzschichten und Nachläufe entlang den Gitterlinien in η -Richtung, d. h. von Schaufel zu Schaufel bzw. von unterem zu oberem periodischen Rand, und für die Seitenwandgrenzschichten entlang den Gitterlinien in ζ -Richtung, d. h. von Nabe zu Gehäuse.

Die Konstante C_{wk} in Gleichung (3.44) wird abweichend vom ursprünglichen Vorschlag auf 0,9 gesetzt, wodurch bei Innenströmungsproblemen das Grenzschichtverhalten bei kleinen Strömungsablösungen und Stößen sowie bzgl. der Strömungsverluste besser wiedergegeben wird [40].

Der Wandabstand für das Profil in η -Richtung y_η wird als Betrag der Projektion des Abstandsvektors in Gitterlinienrichtung y_h auf einen näherungsweise ermittelten Normalenvektor n_η bestimmt:

$$y_\eta = |\vec{y}_h \cdot \vec{n}_\eta| \quad (3.50)$$

Der Abstandsvektor wird als Differenzvektor zwischen dem betrachteten Gitterpunkt und dem nächsten Wandpunkt im Profil (Index w) berechnet,

$$\vec{y}_h \approx \left[x - x_w \quad \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_w)(r + r_w) \quad r - r_w \right]^T \quad (3.51)$$

Der Normalenvektor wird aus zwei linear unabhängigen Vektoren einer Meridianebene ermittelt. Bei Durchströmungsproblemen von axialen Turbomaschinen eignen sich hierzu der Strömungsvektor, der in einem sinnvollen Abstand ε von der Wand als wandparallel angenommen werden kann und mit \vec{w}_ε bezeichnet wird, sowie der Einheitsvektor in radialer Richtung $\vec{\delta}_r$, der selbst im Fall sogenannter „lean“- und „bow“-Schaufeln, die deutlich von der radialen Richtung abweichende Auffädellinien haben, eine noch sinnvolle, weil näherungsweise wandparallele Richtung darstellt. Der resultierende Fehler bei der Abstandsberechnung liegt deutlich unter 10 %, falls der Neigungswinkel der Schaufel in Umfangsrichtung kleiner als 25° ist. Für den angenäherten Normalenvektor gilt somit

$$\vec{n}_\eta \approx \vec{w}_\varepsilon \times \vec{\delta}_r = \frac{1}{\sqrt{w_\varphi^2 + w_x^2}} \begin{bmatrix} w_\varphi & -w_x & 0 \end{bmatrix}^T . \quad (3.52)$$

Als Wandabstand für das Profil in ζ -Richtung wird der Betrag des Abstandsvektors in Gitterlinienrichtung \vec{y}_h aus Gleichung (3.51) verwendet, der eine gute Näherung für die betrachteten Anwendungsfälle und Rechnetze darstellt und für die weiteren Betrachtungen auch mit dem Skalarprodukt aus \vec{y}_h und $\vec{\delta}_r$ abgeschätzt werden kann:

$$y_\zeta = \|\vec{y}_h\| = |\vec{y}_h \cdot \vec{n}_\zeta| \quad \text{mit} \quad \vec{n}_\zeta \approx \vec{\delta}_r \quad (3.53)$$

Bei Tragflügelumströmungsproblemen kommt der einzige signifikante Beitrag zur Wirbelstärke (3.42) aus dem Geschwindigkeitsgradienten normal zur Wand, d. h. aus $\partial u / \partial y$, wenn u die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung ist. Alle anderen Anteile sind in der Regel vernachlässigbar klein. Dies ist bei Innenströmungen nicht der Fall, da auch die Zuströmung wirbelbehaftet sein kann. Aus diesem Grund werden bei der gewählten Implementierung auch nur diejenigen Anteile der Wirbelstärke berücksichtigt, die auf Geschwindigkeitsänderungen in Wandnormalenrichtung basieren. Mathematisch ausgedrückt handelt es sich dabei um die zum Wandnormalenvektor orthogonalen Anteile der Rotation

$$\|\vec{\omega}\|_\eta = \|\vec{\omega} \times \vec{n}_\eta\| \quad \text{bzw.} \quad \|\vec{\omega}\|_\zeta = \|\vec{\omega} \times \vec{n}_\zeta\| . \quad (3.54)$$

Das Problem mehrerer möglicher Maxima der Funktion $F(y)$ aus Gleichung (3.45) wird dadurch gelöst, daß das jeweils wandnächste Maximum verwendet wird. Dies erfolgt wiederum in Analogie zu Außenströmungsproblemen, bei denen ein wohldefiniertes Maximum immer existent ist, weil die Grenzschichtwirbelstärke mit zunehmender Entfernung von der Wand sehr schnell abnimmt. Da die durch das gesuchte Maximum definierten Größen y_{MAX} und F_{MAX} die resultierende Wirbelviskosität maßgeblich bestimmen und damit die Qualität der Ergebnisse entscheidend zu beeinflussen vermögen, wird die für das vorliegende Problem gewählte Vorgehensweise zu ihrer Bestimmung im folgenden kurz erläutert:

Gegeben sei die in Bild 3.1 oben links dargestellte Funktion $F(y)$. Per Augenschein läßt sich das gesuchte erste lokale Maximum der Funktion sehr einfach bestimmen. Allerdings ist vom numerischen Gesichtspunkt aus dieses

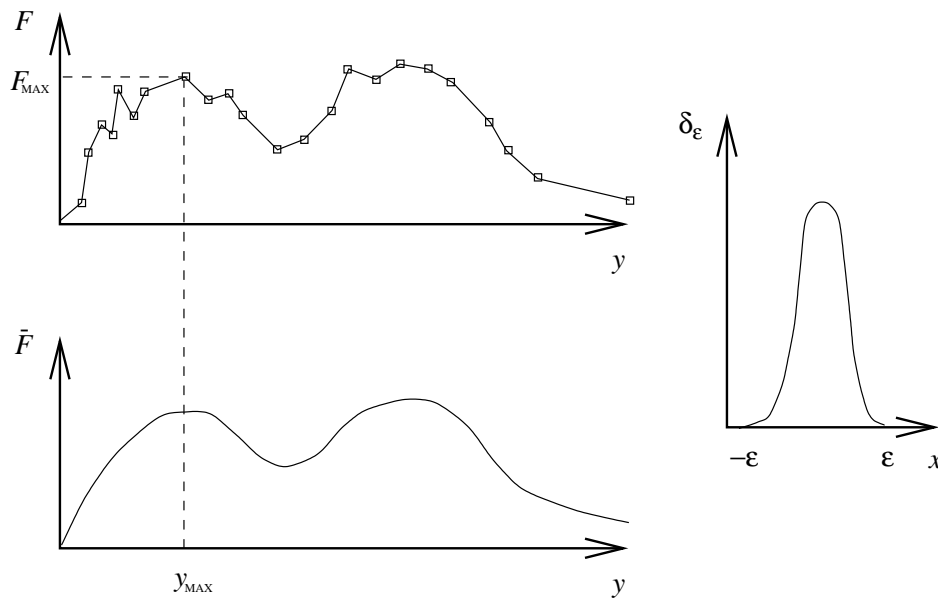


Bild 3.1: Schematische Darstellung der Funktion $F(y)$, der Testfunktion δ_ϵ und der geglätteten Funktion $\bar{F}(y)$.

Maximum bereits der dritte Hochpunkt. Die Identifikation dieses Maximums innerhalb der „verrauschten“ Funktion ist daher nicht trivial. Mit Hilfe einer geeigneten Testfunktion $\delta_\epsilon(x)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_\epsilon(x) dx = 1 \quad (3.55)$$

läßt sich die ursprüngliche Funktion $F(y)$ glätten, wodurch sich das erste Maximum einfach durch Identifikation des ersten Steigungswechsels bestimmen läßt, siehe Bild 3.1 unten. Für die geglättete Funktion gilt

$$\bar{F}(y) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_\epsilon(x) F(y-x) dx \quad (3.56)$$

Für eine diskrete Funktion F_i und eine diskrete Testfunktion δ_{nj} folgt analog

$$\bar{F}_i = \sum_{j=-n}^n \delta_{nj} F_{i+j} \quad \text{mit} \quad \sum_{j=-n}^n \delta_{nj} = 1 \quad (3.57)$$

Der gewünschte Effekt läßt sich meist für eine lokale Umgebung mit $n = 1$ oder $n = 2$ erzielen. Geeignete Gewichtungsfaktoren für die Funktion δ_{1j} sind z. B. die Werte $1/4, 1/2$ und $1/4$ bzw. für δ_{2j} die Werte $1/10, 1/5, 2/5, 1/5$ und $1/10$. Auf diese Art und Weise werden die entsprechenden Maxima für die druck- und saugseitigen Schaufelgrenzschichten, die druck- und saugseitigen Nachlaufhälften sowie für die Seitenwandgrenzschichten an Nabe und Gehäuse ermittelt. Nachlaufströmungen, die die periodischen Ränder kreuzen, wird durch periodische Fortsetzung der Gebiete Rechnung getragen. Bei

Rechengebieten, die aus mehreren Schaufelteilungen bestehen, werden die Zentren der Nachläufe entsprechend der Anzahl der Schaufeln im Gebiet bestimmt. Das Turbulenzmodell wird dann jeweils auf die druck- und saugseitigen Bereiche aller Nachläufe angewendet. Bei der Kopplung von Stator- und Rotorgebiet wird die Information über die Anzahl der ankommenden Nachläufe weitergegeben, so daß diese auch im Zuströmbereich des Nachbargebiets entsprechend weiterverfolgt werden können. Die Verfolgung der Nachläufe endet allerdings mit deren Eintritt in das in Strömungsrichtung nächstgelegene Schaufelgitter, da lediglich die neu hinzukommenden Schaufelgrenzschichten bzw. die stromab des Schaufelgitters entstehenden Nachläufe durch das Turbulenzmodell berücksichtigt werden.

Das laminar–turbulente Transitionsverhalten auf den Schaufeln wird durch eine Gewichtungsfunktion $T(s)$ simuliert, die die Ausbildung der Turbulenz über der Lauflänge s der Schaufeloberfläche steuert:

$$\mu_t^* = T(s)\mu_t \quad (3.58)$$

In dieser Form lassen sich beliebig komplizierte Transitionsmodelle beschreiben. Aus der Vielfalt der Möglichkeiten wurden für die vorliegende Arbeit einfache Potenzfunktionen gewählt,

$$T(s) = s^p \quad \text{mit} \quad 0 < s < 1 \quad \text{und} \quad p \geq 0 \quad . \quad (3.59)$$

Diese Kurven haben den Vorteil, daß durch den einzigen Parameter p sehr unterschiedliche Transitionsmuster beschrieben werden können, siehe Bild 3.2. Eine vollturbulente Strömung ab der Vorderkante läßt sich z. B. durch $p = 0$ beschreiben. Eine vollständig laminare Schaufelgrenzschicht wird durch $p \gg 1$ erreicht. Die Nachläufe und die Seitenwandgrenzschichten werden im übrigen immer vollturbulent angenommen.

3.4 Randbedingungen

Die Lösung des durch die Navier-Stokes-Gleichungen (3.23) beschriebenen Rand- und Anfangswertproblems erfordert die Angabe von Randbedingungen für die Ränder des Integrationsgebiets und von Anfangsbedingungen für das gesamte Strömungsfeld. Die Grundlagen für die Einbringung der Randbedingungen für die bei der Strömungssimulation in Turbomaschinen auftretenden Arten von Rändern sind in den nachfolgenden Abschnitten aufgeführt.

3.4.1 Feste Wände

Zu den ruhenden und bewegten festen Wänden gehören die naben- und gehäuseseitigen Gebietsränder sowie die Schaufeloberflächen. Auf den festen

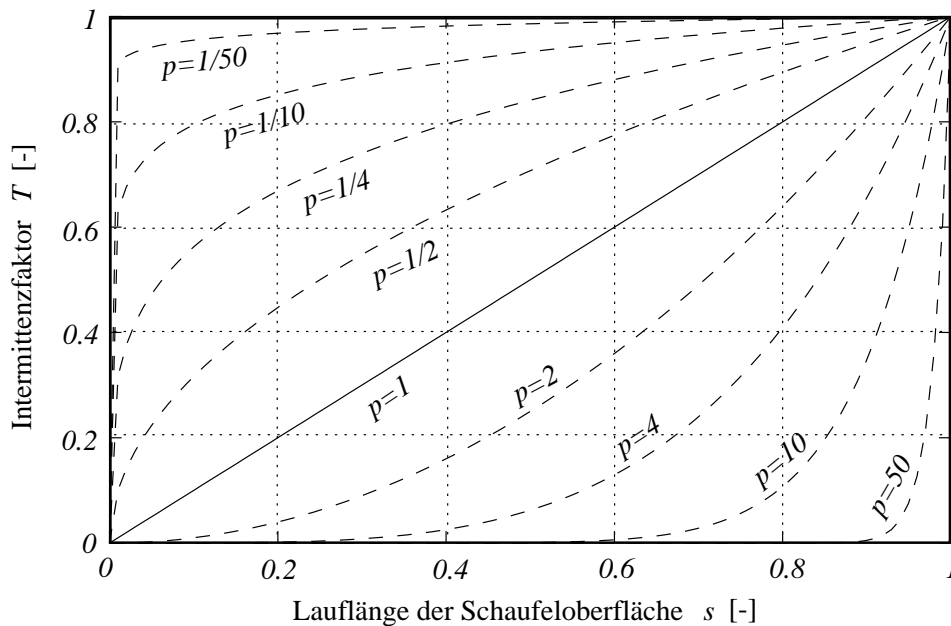


Bild 3.2: Kurvenschar zur Simulation des laminar/turbulenten Umschlagverhaltens

Wänden wird die Haftbedingung angewandt, die besagt, daß das die Wand benetzende Fluid relativ zu ihr unbewegt ist. Desweiteren werden die Wände adiabatisch angenommen und es wird vorausgesetzt, daß die Gradienten der Schubspannungen normal zur Wand verschwinden.

Im Integrationsverfahren wird nach jedem Zeitschritt sichergestellt, daß die Haftbedingung erfüllt wird. Dies geschieht durch eine Korrektur des Strömungsvektors, wobei die dabei entzogene kinetische Energie isentrop und isenthalp in innere Energie umgerechnet und dem Fluid in Form einer Druck- und Dichtekorrektur wieder zugeführt wird.

3.4.2 Eintritts- und Austrittsränder

Theorie der nichtreflektierenden Randbedingungen

An den Ein- und Austrittsrändern werden nichtreflektierende Randbedingungen verwendet, die auf die Arbeiten von Giles [25] und Saxer [72] aufbauen. Bei dieser Art von Randbehandlung lassen sich Strömungen in Rechengebieten mit theoretisch beliebig kurzen Zu- und Abströmkanälen berechnen, ohne daß durch unphysikalische Reflexionen von aus dem Gebiet herauslaufenden Wellen die Lösung an den Rändern verfälscht wird.

Die Theorie basiert dabei auf einer Fourier-Analyse der linearisierten Euler-Gleichungen in einer differentiellen Formulierung in kartesischen Koordina-

ten,

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \bar{B} \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + \bar{C} \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = \vec{0} \quad . \quad (3.60)$$

Der Vektor der Strömungsvariablen $\vec{U} = [\delta \varrho, \delta u, \delta v, \delta w, \delta p]$ beschreibt hier kleine Abweichungen von einer gleichförmigen Strömung. \bar{A} , \bar{B} und \bar{C} sind konstante Matrizen:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} u & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \varrho^{-1} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \varrho a^2 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \varrho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \varrho a^2 & 0 & v \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \varrho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \varrho a^2 & w \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

wobei u , v und w die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind und $a = \sqrt{\kappa p / \varrho}$ die örtliche Schallgeschwindigkeit ist.

Die Betrachtung wellenförmiger Lösungen mit konstantem Amplitudenvektor \vec{u}^R der Form

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \vec{u}^R e^{i(kx + ly + mz - \omega t)} \quad (3.62)$$

liefert aus (3.60) die Beziehung

$$(-\omega \bar{I} + k \bar{A} + l \bar{B} + m \bar{C}) \vec{u}^R = \vec{0} \quad , \quad (3.63)$$

die das Eigenwertproblem der Matrix $(k \bar{A} + l \bar{B} + m \bar{C})$ mit dem Eigenwert ω und dem rechten Eigenvektor \vec{u}^R beschreibt. Hierbei sind k , l , m und ω die komplexen Wellenzahlen in x -, y - und z -Richtung und in der Zeit. Die Realteile stehen dabei für die Ortsfrequenzen bzw. für die physikalische Frequenz, während die Imaginärteile die Amplitudendämpfung beschreiben. Multipliziert man Gleichung (3.63) von links mit \bar{A}^{-1} , so wird deutlich, daß \vec{u}^R ebenfalls ein rechter Eigenvektor von $\bar{A}^{-1}(-\omega \bar{I} + l \bar{B} + m \bar{C})$ zum Eigenwert $-k$ ist. Für \vec{u}^R gibt es genau dann nichttriviale Lösungen, falls die Dispersionsbeziehung

$$\det(-\omega \bar{I} + k \bar{A} + l \bar{B} + m \bar{C}) = 0 \quad (3.64)$$

erfüllt ist.

Nichtreflektierend bedeutet in diesem Zusammenhang, daß Wellen, die aus dem Gebietsinneren nach außen laufen, an den Rändern das Gebiet rückwirkungsfrei verlassen. Dabei sind Wellen mit zeitlich konstanter oder zeitlich

anwachsender Amplitude von Interesse, d. h. solche Wellen mit reeller Frequenz ω bzw. mit positivem Imaginärteil bei komplexem ω . Betrachtet man eine Ebene mit $x = \text{konst.}$, so laufen von den Wellen mit zeitlich wachsender Amplitude diejenigen Wellen nach rechts, d. h. in Richtung positiver x -Werte, bei denen bei einer komplexen Wellenzahl k die scheinbare Amplitudengeschwindigkeit $c = \text{Im}(\omega)/\text{Im}(k)$ positiv ist.¹ Bei Wellen mit konstanter Amplitude sind es hingegen diejenigen Wellen, bei denen die Gruppengeschwindigkeit² in x -Richtung $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ bei reellem k positiv ist oder bei komplexem k einen positiven Imaginärteil hat.

Die Dispersionsbeziehung (3.64) liefert für jedes Wertetripel (ω, l, m) von Frequenz und Wellenzahlen der Modi der Randfläche fünf nichttriviale Lösungen (Eigenwerte) $k_i, i = 1, \dots, 5$, für die Wellenzahl in x -Richtung.

Zur Formulierung der Randbedingungen werden neben den rechten Eigenwerten \vec{u}^R aus (3.63) auch die linken Eigenvektoren \vec{v}^L benötigt. Sie erfüllen die folgende Beziehung:

$$\vec{v}^L \bar{A}^{-1} (-\omega \bar{I} + k \bar{A} + l \bar{B} + m \bar{C}) = \vec{0} \quad (3.65)$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser linken Eigenvektoren ist ihre Orthogonalität zu den rechten Eigenvektoren für zwei unterschiedliche Eigenwerte k_i und k_j . Der Beweis dazu ist sehr einfach: Aus

$$\begin{aligned} \vec{v}_j^L \bar{A}^{-1} (-\omega \bar{I} + k_i \bar{A} + l \bar{B} + m \bar{C}) \vec{u}_i^R &= 0 \\ \vec{v}_j^L \bar{A}^{-1} (-\omega \bar{I} + k_j \bar{A} + l \bar{B} + m \bar{C}) \vec{u}_i^R &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

folgt durch Subtraktion

$$(k_i - k_j) \vec{v}_j^L \vec{u}_i^R = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{v}_j^L \vec{u}_i^R = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \quad (3.67)$$

Die Strömungsvariablen an den Rändern lassen sich nach dem Superpositionsprinzip ganz allgemein als Summe aller ihrer Fourier-Modi beschreiben,

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \left[\sum_{n=1}^5 a_n \vec{u}_n^R e^{ik_n x} \right] e^{i(ly+mz-\omega t)}. \quad (3.68)$$

Um Reflexionen an den Rändern zu verhindern, müssen all diejenigen Koeffizienten a_n zu null gesetzt werden, die zu einer Wellenzahl k_n einer in das Gebiet laufenden Welle gehören. Aufgrund der Orthogonalität (3.67) erhält man durch Linksmultiplikation von (3.68) mit den linken Eigenvektoren die nicht-reflektierenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{v}_n^L \vec{U} &= \vec{v}_n^L \left[\sum_{n=1}^5 a_n \vec{u}_n^R e^{ik_n x} \right] e^{i(ly+mz-\omega t)} \\ &= a_n \left(\vec{v}_n^L \vec{u}_n^R \right) e^{i(k_n x + ly + mz - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.69)$$

¹Die Amplitude der Wellen ist proportional zu $e^{\text{Im}(\omega)(t-x/c)}$

²Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der der Energietransport erfolgt.

oder

$$\vec{v}_n^L \vec{U} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.70)$$

für alle $n \in \{1, \dots, 5\}$, für die k_n zu einer ins Gebiet laufenden Welle gehört.

Die Eigenwerte der linearisierten Euler-Gleichungen (3.60) lauten

$$\begin{aligned} k_{1,2,3} &= \frac{\Lambda}{u} \\ k_4 &= \frac{\Lambda(aS - u)}{a^2 - u^2} \\ k_5 &= -\frac{\Lambda(aS + u)}{a^2 - u^2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

mit

$$\Lambda = \omega - lv - mw \quad \text{und} \quad S = \sqrt{1 - \frac{(a^2 - u^2)(l^2 + m^2)}{\Lambda^2}}. \quad (3.72)$$

Damit ergeben sich die linken und rechten Eigenvektoren zu

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^L &= \left[X_1 \quad \frac{\varrho u(X_1 + X_3 a^2)}{a^2} \quad -\frac{\varrho \Lambda(X_1 + X_3 a^2) + ma^2 X_2}{la^2} \quad X_2 \quad X_3 \right], \\ \vec{v}_2^L &= \left[X_4 \quad \frac{\varrho u(X_4 + X_6 a^2)}{a^2} \quad -\frac{\varrho \Lambda(X_4 + X_6 a^2) + ma^2 X_5}{la^2} \quad X_5 \quad X_6 \right], \\ \vec{v}_3^L &= \left[X_7 \quad \frac{\varrho u(X_7 + X_9 a^2)}{a^2} \quad -\frac{\varrho \Lambda(X_7 + X_9 a^2) + ma^2 X_8}{la^2} \quad X_8 \quad X_9 \right], \\ \vec{v}_4^L &= \left[0 \quad \Lambda X_{10} \quad lu X_{10} \quad mu X_{10} \quad \frac{\Lambda S X_{10}}{\varrho a} \right], \\ \vec{v}_5^L &= \left[0 \quad \Lambda X_{11} \quad lu X_{11} \quad mu X_{11} \quad \frac{-\Lambda S X_{11}}{\varrho a} \right], \end{aligned} \quad (3.73)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^R &= \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ -\frac{\Lambda Y_2 + mu Y_3}{lu} \\ Y_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2^R = \begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_5 \\ -\frac{\Lambda Y_5 + mu Y_6}{lu} \\ Y_6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3^R = \begin{bmatrix} Y_7 \\ Y_8 \\ -\frac{\Lambda Y_8 + mu Y_9}{lu} \\ Y_9 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{u}_4^R &= \begin{bmatrix} \frac{\Lambda \varrho (a - uS) Y_{10}}{a(a^2 - u^2)} \\ -\frac{\Lambda (u - aS) Y_{10}}{a^2 - u^2} \\ l Y_{10} \\ m Y_{10} \\ \frac{\Lambda \varrho a (a - uS) Y_{10}}{a^2 - u^2} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_5^R = \begin{bmatrix} \frac{\Lambda \varrho (a + uS) Y_{10}}{a(a^2 - u^2)} \\ -\frac{\Lambda (u + aS) Y_{10}}{a^2 - u^2} \\ l Y_{10} \\ m Y_{10} \\ \frac{\Lambda \varrho a (a + uS) Y_{10}}{a^2 - u^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

wobei X_1, \dots, X_{11} und Y_1, \dots, Y_{11} frei wählbare Scharparameter sind. Mit

$$\begin{aligned} X_1 &= -a^2, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 1, \quad X_4 = 0, \quad X_5 = 0, \quad X_6 = \frac{-la}{\omega}, \\ X_7 &= 0, \quad X_8 = \frac{\Lambda \varrho a}{\omega}, \quad X_9 = \frac{-ma}{\omega}, \quad X_{10} = \frac{\varrho a}{\omega} \quad \text{und} \quad X_{11} = \frac{-\varrho a}{\omega} \end{aligned} \quad (3.75)$$

ergeben sich die folgenden linken Eigenvektoren:

$$\vec{V}^L = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^L \\ \vec{v}_2^L \\ \vec{v}_3^L \\ \vec{v}_4^L \\ \vec{v}_5^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{l}{\omega} \varrho a u & \frac{\Lambda}{\omega} \varrho a & 0 & -\frac{l}{\omega} a \\ 0 & -\frac{m}{\omega} \varrho a u & 0 & \frac{\Lambda}{\omega} \varrho a & -\frac{m}{\omega} a \\ 0 & \frac{\Lambda}{\omega} \varrho a & \frac{l}{\omega} \varrho a u & \frac{m}{\omega} \varrho a u & \frac{\Lambda}{\omega} S \\ 0 & -\frac{\Lambda}{\omega} \varrho a & -\frac{l}{\omega} \varrho a u & -\frac{m}{\omega} \varrho a u & \frac{\Lambda}{\omega} S \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Die rechten Eigenvektoren lassen sich mit

$$\begin{aligned} Y_1 = \frac{-1}{a^2}, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0, \quad Y_5 = \frac{-lu}{\rho a \omega}, \quad Y_6 = 0, \\ Y_7 = 0, \quad Y_8 = \frac{-mu}{\rho a \omega}, \quad Y_9 = \frac{\Lambda}{\rho a \omega}, \quad Y_{10} = \frac{a+u}{2\rho a \omega} \quad \text{und} \quad Y_{11} = \frac{a-u}{2\rho a \omega} \end{aligned} \quad (3.77)$$

in nachstehender Form schreiben:

$$\overline{\overline{U}}^R = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^R & \vec{u}_2^R & \vec{u}_3^R & \vec{u}_4^R & \vec{u}_5^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\Lambda(a-uS)}{2\omega a^2(a-u)} & \frac{\Lambda(a+uS)}{2\omega a^2(a+u)} \\ 0 & -\frac{lu}{\omega \rho a} & -\frac{mu}{\omega \rho a} & \frac{\Lambda(aS-u)}{2\omega \rho a(a-u)} & -\frac{\Lambda(aS+u)}{2\omega \rho a(a+u)} \\ 0 & \frac{\Lambda}{\omega \rho a} & 0 & \frac{l(a^2-u^2)}{2\omega \rho a(a-u)} & \frac{l(a^2-u^2)}{2\omega \rho a(a+u)} \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda}{\omega \rho a} & \frac{m(a^2-u^2)}{2\omega \rho a(a-u)} & \frac{m(a^2-u^2)}{2\omega \rho a(a+u)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Lambda(a-uS)}{2\omega(a-u)} & \frac{\Lambda(a+uS)}{2\omega(a+u)} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Durch obige Wahl der Scharparameter können die durch die Eigenvektoren beschriebenen Wellenformen physikalisch gedeutet werden [25]:

- Die Eigenform zum Eigenwert k_1 beschreibt eine mit der Strömungsgeschwindigkeit konvektierende Entropiewelle.
- Die beiden Eigenformen zu den Eigenwerten k_2 und k_3 sind stromabwärts laufende Wirbelwellen in der x - y - bzw. der x - z -Ebene.
- Der Eigenmodus zu k_4 läßt sich als stromabwärts laufende Druckwelle deuten.
- Die Wellenform des fünften Eigenwerts k_5 entspricht einer entgegen der Strömung fließenden Druckwelle, falls Unterschallströmung vorliegt. Bei supersonischer Strömung in x -Richtung läuft auch die fünfte charakteristische Welle stromabwärts.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß am Eintrittsrand die Bedingung (3.70) bei subsonischer Strömung für die ersten vier Eigenwerte, bei supersonischer Strömung für alle fünf Eigenwerte erfüllt werden muß. Entsprechend muß am Austrittsrand diese Bedingung nur bei subsonischer Strömung und dann nur für den fünften Eigenwert k_5 erfüllt werden.

Eine Beschreibung der Implementierung einer quasi-dreidimensionalen stationären Formulierung dieser Randbedingungen in das verwendete numerische Verfahren ist in der Dissertation von Merz [63] enthalten.

Instationäre nichtreflektierende Randbedingungen

Eindimensionale instationäre Randbedingungen Die einfachste Formulierung instationärer nichtreflektierender Randbedingungen ergibt sich durch eine eindimensionale Betrachtung der Strömung normal zum Rand. Die Vernachlässigung der Schwankungen der Strömungsgrößen in den Richtungen, die die Eintritts- bzw. Austrittsebene aufspannen, wird dadurch erreicht, daß die Wellenzahlen in diesen Richtungen, l und m , zu null gesetzt

werden. Damit ergeben sich aus (3.76) und (3.78) die folgenden Eigenvektormatrizen:

$$\overline{\overline{V}}^L = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho a & 0 \\ 0 & \rho a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{U}}^R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho a} & -\frac{1}{2\rho a} \\ 0 & \frac{1}{\rho a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Mit Gleichung (3.70) folgt unmittelbar, daß sich durch Gleichung (3.79) die Transformation der Primitivvariablen \vec{U} in eindimensionale charakteristische Variablen $\vec{C} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5]^T$ beschreiben läßt. Es ist

$$\vec{C} = \overline{\overline{V}}^L \vec{U} \quad \text{bzw.} \quad \vec{U} = \overline{\overline{U}}^R \vec{C} = (\overline{\overline{V}}^L)^{-1} \vec{C} \quad . \quad (3.80)$$

Damit lauten bei subsonischer Strömung normal zum Rand die korrekten nicht-reflektierenden Eintrittsrandbedingungen nach Gl. (3.70)

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \quad . \quad (3.81)$$

Für die Austrittsrandbedingung gilt dann entsprechend

$$c_5 = 0 \quad . \quad (3.82)$$

Bei einer Implementierung dieser Bedingungen in ein numerisches Verfahren werden gewöhnlich die jeweils fehlenden Charakteristiken aus den vom Integrationsverfahren berechneten Strömungsgrößen bestimmt. Gleichung (3.80) wird dann dazu verwendet, die gesuchten Änderungen der Lösungsgrößen zu bestimmen.

Im Gegensatz zu Außenströmungsproblemen trifft bei Durchströmungsproblemen von Turbomaschinen die Annahme einer gleichförmigen Zu- und Abströmung nicht zu. An den Rändern sollen bestimmte Strömungszustände herrschen. So wird z. B. meist der statische Druck am Austritt vorgegeben. Nach [72] werden damit die eindimensionalen Randbedingungen zwangsläufig reflektierend, weil beispielsweise eine das Gebiet verlassende Druckwelle eine eintretende Druckwelle erzeugen muß, um den Austrittsdruck konstant zu halten. Ähnliche Effekte treten auch am Eintrittsrand durch die Spezifizierung bestimmter physikalischer Größen auf. Giles zeigt in [25], daß die Reflexionskoeffizienten, d. h. die Verhältnisse der Amplituden der reflektierten und der das Gebiet verlassenden Wellen, bei den eindimensionalen Randbedingungen eine Größenordnung von $O(l/\omega)$ bzw. $O(m/\omega)$ haben. Dieser Fehler läßt sich durch die Verwendung mehrdimensionaler Formulierungen bzw. durch Näherungen höherer Ordnung vermindern. Im nachfolgenden Abschnitt wird eine Formulierung zur Berechnung der dreidimensionalen instationären Randbedingungen vorgestellt.

Dreidimensionale instationäre Randbedingungen Bei größeren räumlichen und zeitlichen Schwankungen des Strömungsfelds am Ein- und Austritt bzw. wenn die Fehler bei der Einbringung der Randbedingungen minimiert werden sollen, können die Gradienten der Strömungsgrößen in der Ein- und Austrittsebene nicht mehr vernachlässigt werden. Im folgenden soll daher eine dreidimensionale Formulierung der nicht-reflektierenden Randbedingungen beschrieben werden, die sich zur Implementierung in ein Strömungsberechnungsprogramm eignet. Die Reflexionskoeffizienten haben bei dieser Formulierung eine Größenordnung von $O(l^2/\omega^2)$ bzw. $O(m^2/\omega^2)$ [25].

Die linken Eigenvektoren (3.76) werden in einer Taylorreihe entwickelt. Es gilt mit $\lambda = l/\omega$ und $\mu = m/\omega$

$$\vec{v}_n^L(\lambda, \mu) = \vec{v}_n^L|_{\lambda, \mu=0} + \lambda \frac{\partial \vec{v}_n^L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda, \mu=0} + \mu \frac{\partial \vec{v}_n^L}{\partial \mu} \Big|_{\lambda, \mu=0} + O(\lambda^2, \mu^2) \quad . \quad (3.83)$$

Durch eine Näherung erster Ordnung, die lediglich aus dem führenden Term der Reihenentwicklung besteht, ergeben sich die oben beschriebenen eindimensionalen Randbedingungen. Die Näherung zweiter Ordnung führt auf die Randbedingungen

$$\left(\vec{v}_n^L|_{\lambda, \mu=0} + \lambda \frac{\partial \vec{v}_n^L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda, \mu=0} + \mu \frac{\partial \vec{v}_n^L}{\partial \mu} \Big|_{\lambda, \mu=0} \right) \vec{U} = 0 \quad . \quad (3.84)$$

Terme höherer Ordnung werden durch die Näherung $S \approx 1$ vernachlässigt. Wird diese Beziehung mit ω multipliziert und substituiert man ω durch $-\frac{\partial}{\partial t}$, l durch $\frac{\partial}{\partial y}$ und m durch $\frac{\partial}{\partial z}$ so lassen sich die Randbedingungen in ein partielles Differentialgleichungssystem überführen. Giles [25] zeigt durch eine Analyse der Gleichung, daß die Eintrittsrandbedingungen in dieser Form ein schlecht gestelltes Problem darstellen und daher modifiziert werden müssen. Er schlägt eine Änderung des vierten linken Eigenvektors in

$$\vec{v}_4^L = \left[0 \quad \frac{\lambda}{\omega} \rho a \quad \frac{l}{\omega} \rho \frac{a-u}{2} \quad \frac{m}{\omega} \rho \frac{a-u}{2} \quad \frac{\lambda}{\omega} S \right] \quad (3.85)$$

vor und zeigt, daß damit das Problem korrekt gestellt ist.³ Durch die in Gleichung (3.80) angegebene Transformation auf eindimensionale charakteristische Variablen läßt sich das entstehende Differentialgleichungssystem in eine Form bringen, die ähnlich den linearisierten Euler-Gleichungen ist. Im Falle subsonischer Strömung normal zum Rand gilt dann für die Eintrittsrandbedingungen

$$c_1 = 0 \quad (3.86)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v & 0 & \frac{a+u}{2} & \frac{a-u}{2} \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \frac{a-u}{2} & 0 & v & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} +$$

³Für ein korrekt gestelltes Problem existiert eine eindeutige Lösung, die stetig bzgl. ihrer Eingangsgröße ist, was bedeutet, daß kleine Änderungen der Eingangsgröße auch nur kleine Änderungen der Ausgangsgröße bewirken.

$$+ \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & \frac{a+u}{2} & \frac{a-u}{2} \\ 0 & \frac{a-u}{2} & w & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3.87)$$

Als Austrittsrandbedingung ergibt sich die folgende Differentialgleichung für die fünfte charakteristische Variable:

$$\frac{\partial c_5}{\partial t} + \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.88)$$

Zur Lösung dieser Gleichungen wird ein Verfahren verwendet, das prinzipiell dem Verfahren zur Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen entspricht. Allerdings erfolgt die Integration in kartesischen Koordinaten, um Probleme mit den bei der Transformation auf Zylinderkoordinaten entstehenden Quelltermen zu vermeiden. Eine detaillierte Beschreibung der Implementierung in den Strömungslöser ist in [74] zu finden. Dieser Bericht enthält außerdem die zeittransformierte Variante dieser Randbedingungen sowie einige Beispielrechnungen.

Anwendungsbereiche instationärer Randbedingungen Die Untersuchungen im Zusammenhang mit der Implementierung der instationären Randbedingungen sollen Antworten auf folgende Fragestellungen liefern:

1. Welche Formulierung der mehrdimensionalen instationären Randbedingungen eignet sich am besten zur reflexionsfreien Vorgabe der Randwerte?
2. Müssen bei instationären Stufenberechnungen instationäre Randbedingungen verwendet werden, falls lediglich zeitlich konstante Radialverteilungen umfangsgemittelter Strömungsgrößen als Randwerte vorgegeben werden?
3. Lassen sich die instationären Strömungsverhältnisse in einer mehrstufigen Turbomaschine durch eine Sequenz mehrerer Stufen- oder Einzelgittersimulationen, bei denen jeweils instationäre Randbedingungen vorgegeben werden, in einer ausreichenden Genauigkeit annähern? Wie groß ist der Fehler, der dabei durch die vernachlässigten gegenseitigen Wechselwirkungen zweier benachbarter Schaufelreihen entsteht?

Die Validierung der Implementierung erfolgte anhand von quasi dreidimensionalen reibungsfreien sowie dreidimensionalen reibungsbehafteten Testfällen sowohl bei stationärer wie auch bei instationärer Strömung. Dabei stellte sich heraus, daß die im vorigen Abschnitt beschriebene Formulierung der dreidimensionalen Randbedingungen mit lokalen Vorgabewerten und Mittelwertkorrektur der Charakteristiken die besten Ergebnisse liefert. Zweidimensionale Formulierungen und Formulierungen, in denen zusätzlich zum vierten linken Eigenvektor auch noch der erste modifiziert wur-

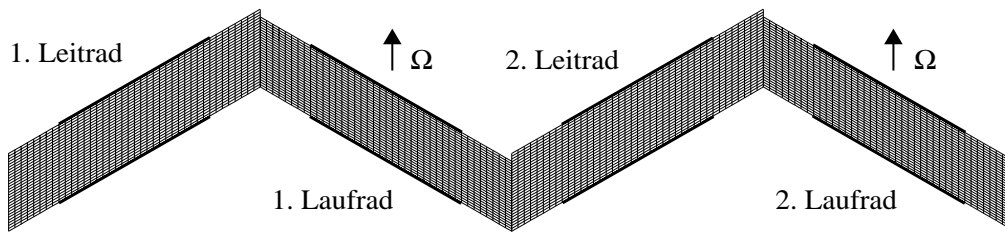


Bild 3.3: Rechengebiet für eine zweistufige Turbine mit ungekrümmten Schaufeln

de, waren der o. a. Variante unterlegen [74]. Ein Vergleich mit den quasi-dreidimensionalen stationären Randbedingungen zeigte, daß bei instationären Stufenrechnungen mit zeitlich konstanten, mittleren Vorgabewerten die instationären Randbedingungen keine erkennbaren Vorteile bieten. In diesen Fällen kann also ohne Qualitätsverlust in den Ergebnissen der Mehraufwand für die Berechnung der instationären Randbedingungen durch die Verwendung der stationären Randbedingungen vermieden werden. Werden hingegen sich zeitlich verändernde Vorgabewerte verwendet, so sind die instationären Formulierungen unumgänglich. Desweiteren stellte sich heraus, daß instationäre Randbedingungen im Zusammenhang mit der abschnittsweisen Simulation der Strömung in mehrstufigen Konfigurationen nur sehr eingeschränkt einen Ersatz für die instationäre Simulation der Strömung unter voller Berücksichtigung der direkten Stator–Rotor–Wechselwirkungen darstellen. Befriedigende Ergebnisse ergeben sich eigentlich nur dann, wenn das Strömungsfeld gleichfalls mit einer einzigen instationären Strömungssimulation der Gesamtkonfiguration ohne Diskretisierung des gesamten Umfangs berechenbar ist, wie beispielsweise bei mehrstufigen Turbomaschinen mit gleichem Schaufelzahlverhältnis in den einzelnen Stufen (Stichwort „clocking“, Abschnitt 4.4).

Testbeispiel Die Validität der eingebauten instationären Randbedingungen soll am Beispiel des momentanen Strömungsfelds der zweiten Stufe einer zweistufigen Turbine mit unendlich dünnen, ungekrümmten Schaufeln gezeigt werden. Das zugehörige Rechengebiet ist in Bild 3.3 dargestellt. Die Strömung ist reibungsfrei und quasi-dreidimensional, d. h., es treten keine radialen Gradienten in der Strömung auf. Beide Stufen sind identisch und haben ein Schaufelzahlverhältnis $n_S/n_R = 0,9$. Das erste Gitter wird mit einer Inzidenz von -10° falsch angeströmt. Das Euler-Verfahren kann die notwendige, sehr starke Krümmung der Stromlinien an der Vorder- und Hinterkante der dünnen Schaufeln bei der gewählten Diskretisierung des Rechengebiets nicht auflösen. Es kommt dort zu einer lokalen Strömungsablösung, die durch die künstliche Dissipation stabilisiert wird. In der eigentlich reibungsfreien Strömung entsteht daher eine Störung, die in mancherlei Hinsicht mit einer Nachlaufströmung vergleichbar ist, einen relativ harmonischen Verlauf über der Statorteilung hat und stromab konvektiert wird. Die

mit der Störung verbundenen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen treten dabei mit den nachfolgenden Schaufelreihen in Wechselwirkung. Die Strömung im zweiten Stator präsentiert sich daher mit einem charakteristischen Muster, das durch die mit der Statorteilung auftretenden Störungen und den periodischen Einfluß des ersten Rotors gekennzeichnet ist. Im zweiten Rotor kommen dann weitere Störungen der Strömung durch die erneute Wechselwirkung mit den Schaufeln hinzu.

Während einer Strömungssimulation für die zweistufige Konfiguration, die als Referenzrechnung dient, werden für die Dauer einer Periode die Strömungsgrößen am Austritt des ersten Rotors abgespeichert und fouriertransformiert, siehe [74]. Aus diesen Größen werden die Vorgabewerte für die instationären Randbedingungen einer weiteren Simulation berechnet, bei der sich das Rechengebiet lediglich auf die zweite Turbinenstufe erstreckt. Bild 3.4 zeigt nun im Vergleich die momentanen Strömungsfelder für beide Simulationen. Bezüglich der Entropieverteilung kann eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden. Dies ist allerdings nicht weiter verwunderlich, da ja die Entropie selbst eine eintretende Charakteristik der Euler-Gleichungen darstellt, für die unabhängig von der Variante der nicht-reflektierenden Randbedingungen (ein- oder mehrdimensional, stationär oder instationär) dieselbe Gleichung zum Tragen kommt. Doch auch bezüglich der absoluten Machzahl, die nicht direkt eine eintretende charakteristische Größe darstellt, oder bezüglich des statischen Drucks, der eng mit der bei Unterschallströmung stromaufwirkenden Charakteristik der Euler-Gleichungen verbunden ist, sind keine signifikanten Unterschiede zwischen beiden Rechnungen erkennbar. Damit lassen sich bei diesem Testfall mit einer abschnittswisen instationären Simulation Ergebnisse erzielen, die denen einer instationären Simulation der gesamten Turbine sehr nahe kommen. Eine genauere Analyse der Ergebnisse bzgl. der instationären Druck- und Entropieverteilungen auf den Schaufeln, Bild 3.5, läßt die auftretenden Unterschiede deutlicher werden. So zeigt sich, daß trotz einer perfekten Übereinstimmung der Entropieverteilung auf der zweiten Laufschaufel, dennoch bemerkenswerte Unterschiede vor allem in der Druckverteilung auf der zweiten Leitschaufel erkennbar sind. Doch auch die Entropieverteilung auf der zweiten Leitschaufel weist Unterschiede auf. So sind die Maxima bei der Simulation mit instationären Randbedingungen um etwa 8 % höher und liegen etwa 4 % weiter stromauf als bei der zweistufigen Simulation. Neben einer eher geringen Unsicherheit bzgl. der akkumulierten Fehler bei der Vorgabe der Randwerte sind die Unterschiede in erster Linie darauf zurückzuführen, daß bei der isolierten Simulation der zweiten Stufe die Potentialwechselwirkungen der Strömung des ersten Laufrads mit der Strömung des zweiten Leittrads nur unzureichend berücksichtigt werden. Weiter stromab werden diese Einflüsse geringer. Daher sind auch die Unterschiede in den Druckverteilungen im ersten Leitrad größer als im nachfolgenden Laufrad.

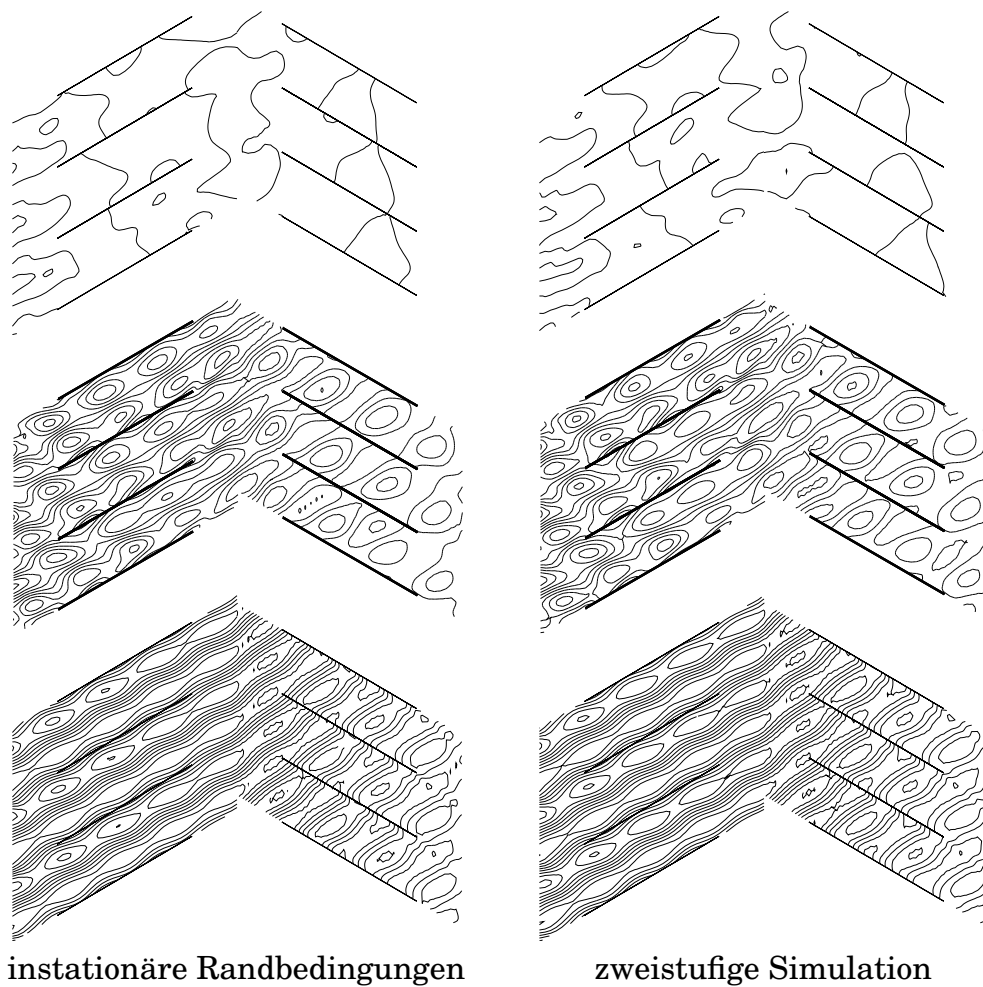


Bild 3.4: Momentane Verteilung des statischen Drucks (oben), der absoluten Machzahl (Mitte) und der Entropie (unten) bei Simulation der zweiten Turbinenstufe mit instationären Eintrittsrandbedingungen (links) und bei Simulation der gesamten zweistufigen Turbine (rechts) [74]

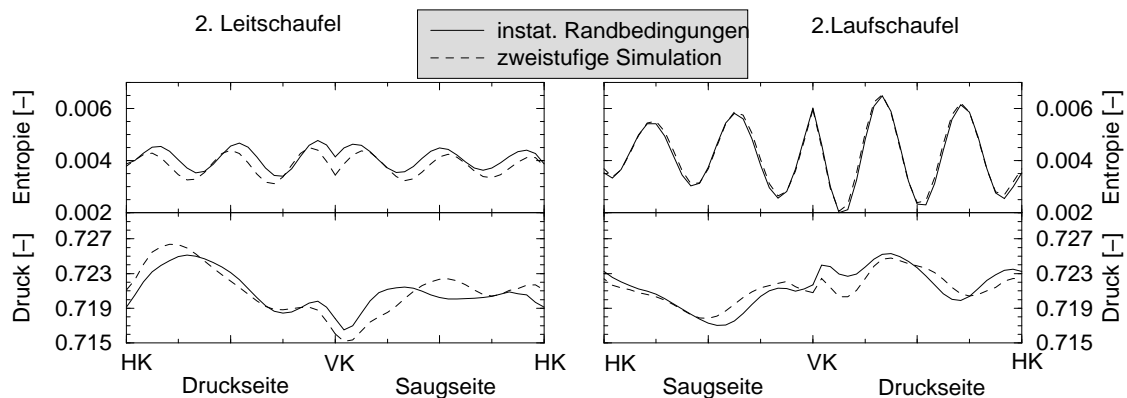


Bild 3.5: Momentane Verteilung der Entropie und des statischen Drucks auf den Schaufeln der zweiten Turbinenstufe

3.4.3 Periodische Ränder

In Abschnitt 2.3 wurden unterschiedliche Methoden zur Behandlung der periodischen Gebietsränder bei der Berechnung von Stator–Rotor–Interaktionen mit unterschiedlichen Lauf- und Leitschaufelteilungen vorgestellt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Methode der zeitlich geneigten Rechengebiete erläutert und in ein numerisches Verfahren implementiert. Wie bereits in Abschnitt 2.3 angedeutet, lassen sich damit Periodizitätsbedingungen für die periodischen Ränder formulieren. Die Erfüllung dieser Bedingungen wird im numerischen Verfahren durch die Verwendung von sogenannten Phantomzellen sichergestellt, wodurch sich die Punkte der periodischen Ränder wie innere Punkte behandeln lassen. Damit ist eine weitere Sonderbehandlung dieser Punkte nicht notwendig.

3.4.4 Koppalebene zwischen Stator- und Rotorgebiet

An der Koppalebene überlappen sich die Rechengebiete um eine Gitterzellenschicht. Damit können auf die jeweiligen Gebietsränder die Werte der Strömungsgrößen aus dem Innern des jeweils benachbarten Gebiets übertragen werden. Die Berechnung der Lösungsgrößen kann dann bis an den eigentlichen Koppelrand wie für gewöhnliche innere Punkte erfolgen. Somit ist hier keine gesonderte Randbehandlung notwendig. Eine detaillierte Beschreibung der Kopplung der beiden Bereiche ist in Abschnitt 4.2.2 zu finden.

3.4.5 Künstliche Ränder

Bei den künstlichen Rändern handelt es sich um die Ränder der einzelnen Gitterblöcke des Rechengebiets, die an andere Gitterblöcke angrenzen, also Berandungen im Inneren des Rechengebiets darstellen. Hierbei erfolgt der Datenaustausch ebenfalls über Phantomzellen, die eine Kopie der Lösungsgrößen des Nachbarblocks erhalten, so daß die Knotenpunkte auf diesen Rändern wie innere Punkte behandelt werden können und keiner Sonderbehandlung bedürfen.

3.5 Anfangsbedingungen

Die Anfangswerte für die Strömungsgrößen an den einzelnen Punkten des Rechengebiets sind im allgemeinen nicht bekannt. Um einen physikalisch sinnvollen Zustand als Ausgangszustand zu verwenden, wird die Simulation im Normalfall mit einem ruhendem Fluid gestartet, dem impulsartig,

das heißt mit dem ersten Integrationsschritt, die Randbedingungen aufgezungen werden. Bei Turbinenrechnungen mit zwei und mehr Schaufelreihen hat es sich als hilfreich erwiesen, entweder den statischen Druck am Austritt zu Beginn der Simulation langsam auf den Sollwert abzusenken oder bei der Vorbelegung des statischen Druckes bereits ein Druckgefälle in Strömungsrichtung vorzusehen, um die transienten Geschwindigkeiten am Gebietsaustritt in sinnvollen Grenzen zu halten. Bei der Simulation von Verdichterströmungen hingegen führt ein allmähliches Absenken des Totaldrucks am Eintritt zu einem stabilen Hochlaufvorgang, ohne daß größere Rückströmungen am Simulationsbeginn auftreten.

Eine weitere Möglichkeit ist der Start mit Hilfe einer Vorlösung. Es lassen sich lange Einschwingzeiten vermeiden, wenn bei gleicher Geometrie und nur leicht variierten Randbedingungen die Lösungen früherer Rechnungen als Anfangsbedingungen für die Punkte des Rechengebiets verwendet werden. Insbesondere im Falle von instationären Strömungssimulationen bietet sich als Anfangsbedingung das Ergebnis der zugehörigen stationären Rechnung an, weil dadurch die Rechenzeiten stark verkürzt werden können.

3.6 Entdimensionalisierung der Gleichungen

Die physikalischen Größen aus den mathematischen Beziehungen werden mit Hilfe geeigneter Bezugsgrößen normiert. Dadurch lassen sich numerische Rundungsfehler minimieren, weil alle auftretenden Werte in eine ähnliche Größenordnung gebracht werden. Außerdem wird durch die Relativierung der Strömungsgrößen ein einfacher Vergleich mit ähnlich gearteten Problemstellungen ermöglicht. Die formale Gestalt aller Beziehungen wird durch die Normierung nicht beeinflusst. Mit Hilfe der folgenden vier Bezugsgrößen und entsprechenden Kombinationen davon läßt sich die Entdimensionalisierung durchführen:

- Als Bezugsdruck dient der maximale Totaldruck am Eintritt p_{t0} .
- Als Bezugstemperatur dient die am Ort mit dem Totaldruck p_{t0} herrschende Totaltemperatur T_{t0} .
- Die dritte Normierungsgröße stellt die spezielle Gaskonstante R_0 des Fluids am Eintritt dar.
- Als Bezugslänge L_0 dient eine charakteristische Länge des ersten Schaufelgitters.⁴

Die Kombinationen aus diesen Bezugsgrößen zur Entdimensionalisierung aller in den Gleichungen auftretenden Größen sind im Anhang A aufgeführt.

⁴Falls der Zuströmbereich des ersten Schaufelgitters aus einem separaten Gitterblock besteht, wird dessen Länge an der Nabe als Bezugslänge verwendet, ansonsten wird die axiale Sehne im Nabenschnitt des ersten Gitters verwendet.

4 Erweiterungen für instationäre Strömungen

4.1 Zeitlich geneigte Rechengebiete

4.1.1 Mathematische Beschreibung

In Kapitel 2 wurde bereits die Grundidee der Verwendung von zeitlich geneigten Rechengebieten zur Berechnung von Stator–Rotor–Interaktionsproblemen in Turbomaschinen geschildert. Das Verfahren [23] basiert auf Transformationen der Rechengebietsbereiche von Stator und Rotor vom (x, φ, r, t) –Raum in einen (x', φ', r', t') –Raum der Form

$$\begin{aligned} x' &= x \\ \varphi' &= \varphi \\ r' &= r \\ t' &= t - \chi\varphi \quad . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Stator- und Rotorbereich haben dabei unterschiedliche Inklinationsparameter χ , siehe Gleichung (2.19), und somit auch unterschiedliche geneigte Zeiten t' . Auf die Indizierung dieser Parameter wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Aus Gleichung (4.1) folgt für die Transformation der Differentiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi'} - \chi \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Anwendung dieser Beziehungen auf die Navier–Stokes–Gleichungen (3.23) führt auf die transformierten Gleichungen, die sich in folgender Form angeben lassen:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt'} \iiint_V \left(\vec{U} - \frac{\chi}{r} \left(\vec{F}_C - \left(\vec{F}_D - \frac{\chi}{r} \vec{F}_{DI} \right) \right) \vec{\delta}_\varphi \right) dV + \\ &+ \iiint_V \left(\vec{S}_C - \left(\vec{S}_D - \frac{\chi}{r} \vec{S}_{DI} \right) \right) dV + \\ &+ \iint_A \left(\vec{F}_C - \left(\vec{F}_D - \frac{\chi}{r} \vec{F}_{DI} \right) \right) \vec{\delta}_{xr} d\varphi dr + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_A \left(\bar{F}_C - \left(\bar{F}_D - \frac{\chi}{r} \bar{F}_{DI} \right) \right) \vec{\delta}_\varphi dx dr + \\
& + \iint_A \left(\bar{F}_C - \left(\bar{F}_D - \frac{\chi}{r} \bar{F}_{DI} \right) \right) \vec{\delta}_{r,r} dx d\varphi = \vec{0} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Bei der Transformation führen alle in den Navier–Stokes–Gleichungen vorkommenden Terme mit partiellen Ableitungen in Umfangsrichtung zu zusätzlichen Termen, die Zeitableitungen enthalten. Zu den neu hinzugekommenen Termen gehören die zeitliche Ableitung des Flußdichtevektors in Umfangsrichtung $(\bar{F}_C - \bar{F}_D)\vec{\delta}_\varphi$ sowie die mit \bar{F}_{DI} und \vec{S}_{DI} bezeichneten Zusatzterme, für die sich in erster Linie die diffusiven Anteile (3.26) und davon allen voran der Schubspannungstensor $\bar{\tau}$ mit den darin enthaltenen Geschwindigkeitsgradienten verantwortlich zeigen. Die Zusatzterme sind zusammen mit einer Herleitung von Gleichung (4.3) im Anhang B aufgeführt.

Die numerische Lösung der transformierten Navier–Stokes–Gleichungen (4.3) ist nicht mehr ohne weiteres möglich, weil nun anstelle der Zustandsgrößen selbst Kombinationen der Zustandsgrößen mit ihren Ableitungen als Lösungsgrößen zeitlich integriert werden müssen. Eine analytische Berechnung der gewohnten Zustandsgrößen, mit deren Hilfe die Flußmatrizen und Quelltermvektoren bestimmt werden könnten, ist aus diesen Lösungsgrößen nicht möglich, da dazu eine geschlossene Lösung für ein gekoppeltes differential–algebraisches Gleichungssystem gefunden werden muß. Die transformierten Gleichungen sind daher nur lösbar, wenn es gelingt, den gewohnten Zustandsvektor \vec{U} zu jedem Integrationsschritt aus den Lösungsgrößen der transformierten Gleichungen mit Hilfe eines konvergenten numerischen Näherungsverfahrens zu berechnen.

Eine einfachere Möglichkeit, dieses Problem anzugehen, besteht darin, in Gleichung (4.3) alle Terme mit zeitlichen Ableitungen zu vernachlässigen, die bei der Transformation der diffusiven Terme (3.26) entstanden sind. Die davon betroffenen Terme haben die Form

$$O(\mu) \frac{\partial w_j}{\partial t'} \quad , \quad O(\mu) \frac{\partial^2 w_j}{\partial t' \partial i} \quad \text{oder} \quad k \frac{\partial^2 T}{\partial t' \partial i} \quad , \quad (4.4)$$

wobei

$$i \in \{t', x, \varphi, r\} \quad \text{und} \quad j \in \{x, \varphi, r\} \quad . \quad (4.5)$$

Die Vorgehensweise läßt sich im Falle genügend hoher Reynoldszahlen mit folgender Argumentation rechtfertigen: Zeitliche Ableitungen sind bezüglich ihrer Größenordnung mit den entsprechenden räumlichen Ableitungen in Strömungsrichtung vergleichbar. In Gebieten mit signifikanten viskosen Effekten sind jedoch die Gradienten quer zur Strömungsrichtung dominant. Die Tatsache, daß die Gradienten in Strömungsrichtung und quer dazu von so stark unterschiedlicher Größenordnung sind, führt zum Beispiel auch zur Vernachlässigung dieser Terme bei der Formulierung der Navier–Stokes–Gleichungen für dünne Grenz- und Scherschichten („thin-layer equations“). Auch werden aufgrund der Transformationsbeziehungen (4.2) alle Zusatzterme mit dem Inklinationsparameter χ gewichtet. Dieser Parameter ist,

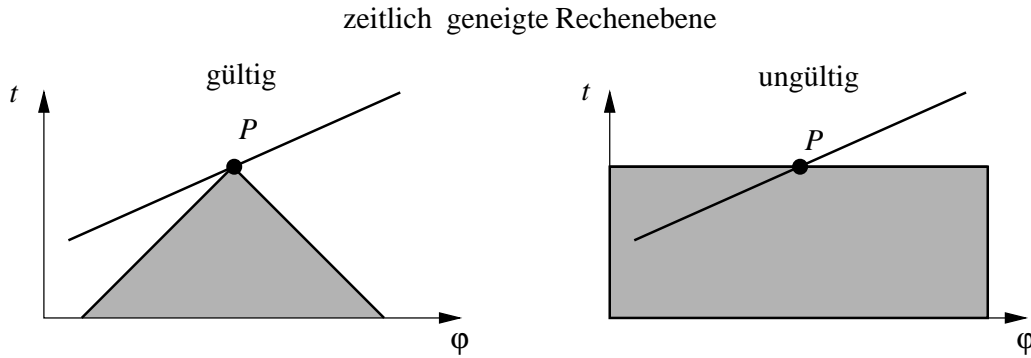


Bild 4.1: Abhängigkeitsgebiet des Punktes P bei Gleichungen hyperbolisch-parabolischen Typs (links) und parabolischen Typs (rechts).

wie weiter unten gezeigt wird, stets deutlich kleiner als eins, wodurch die Vernachlässigbarkeit dieser Terme ebenfalls unterstützt wird. Bei niedrigen Reynoldszahlen hingegen ist die gesamte Begründung nicht mehr gültig, weil dann die Navier–Stokes–Gleichungen von hyperbolisch-parabolisch in eine Differentialgleichung parabolischen Typs übergehen. Bei parabolischen Gleichungen ist jedoch die Informationsausbreitungsgeschwindigkeit unendlich groß¹, so daß bei einer zeitlichen Neigung das Abhängigkeitsgebiet jedes beliebigen Punktes P des Rechengebietes nicht mehr vollständig berücksichtigt werden kann, siehe Skizze in Bild 4.1. In diesen Fällen kann mit der Zeittransformation keine korrekte Lösung berechnet werden [27].

Führt man unter der Voraussetzung genügend hoher Reynoldszahlen die oben erwähnte Vereinfachung bei den transformierten Gleichungen (4.3) durch, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt'} \iiint_V \left(\vec{U} - \frac{\chi}{r} \overline{F}_C \vec{\delta}_\varphi \right) dV + \iiint_V (\vec{S}_C - \vec{S}_D) dV + \\
 & + \iint_A (\overline{F}_C - \overline{F}_D) \vec{\delta}_{x,r} d\varphi dr + \\
 & + \iint_A (\overline{F}_C - \overline{F}_D) \vec{\delta}_\varphi dx dr + \\
 & + \iint_A (\overline{F}_C - \overline{F}_D) \vec{\delta}_{r,r} dx d\varphi = \vec{0} \quad . \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Beziehungen (3.23) und (4.6) zeigt, daß durch die Wahl eines neuen Zustandsvektors

$$\vec{Q} := \vec{U} - \frac{\chi}{r} \overline{F}_C \vec{\delta}_\varphi \quad (4.7)$$

die Form der beiden Gleichungen völlig identisch ist, so daß dasselbe Verfahren zu deren Lösung angewandt werden kann. Die Flußmatrizen \overline{F}_C und \overline{F}_D und die Quelltermvektoren \vec{S}_C und \vec{S}_D sind jedoch von den Komponenten des

¹Das Abhängigkeitsgebiet besteht bei Gleichungen parabolischen Typs aus allen Punkten des Rechengebiets, die auf gleicher Höhe oder stromauf des betrachteten Punktes liegen.

ursprünglichen Zustandsvektors \vec{U} abhängig. Allerdings existiert in diesem Fall nun eine einfache analytische Transformation von \vec{Q} nach \vec{U} . Für die Komponenten von $\vec{Q} = [q_1, \dots, q_5]^T$ gilt nach Gleichung (4.7)

$$\begin{aligned}
q_1 &= (1 - \gamma w_\varphi) \varrho \\
q_2 &= (1 - \gamma w_\varphi) \varrho w_x = q_1 w_x \\
q_3 &= (1 - \gamma w_\varphi) \varrho w_\varphi - \gamma p = q_1 w_\varphi - \gamma p \\
q_4 &= (1 - \gamma w_\varphi) \varrho w_r = q_1 w_r \\
q_5 &= (1 - \gamma w_\varphi) \varrho e_t - \gamma w_\varphi p \\
&= \frac{q_1}{2} (w_x^2 + w_\varphi^2 + w_r^2 - \omega^2 r^2) + \frac{p}{\kappa - 1} - \frac{\kappa}{\kappa - 1} \gamma p w_\varphi \quad ,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

wobei γ der bogenbezogene Inklinationsparameter

$$\gamma = \frac{\chi}{r} \tag{4.9}$$

ist. Die Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems führt auf eine quadratische Gleichung für p mit den Wurzeln

$$p = \frac{(\kappa - 1)\Psi}{q_1 - \gamma q_3 \pm \sqrt{(q_1 - \gamma q_3)^2 - \gamma^2(\kappa^2 - 1)\Psi}} \quad , \tag{4.10}$$

wobei

$$\Psi = 2q_1 q_5 + q_1^2 \Omega^2 r^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 \quad . \tag{4.11}$$

Bei gleicher Teilung von Stator und Rotor ist $\gamma = 0$, d. h. es findet keine zeitliche Transformation statt. Gleichung (4.10) muß jedoch auch für diesen Fall Gültigkeit besitzen. Dies führt auf die positive Wurzel als Lösung für p , da die negative Wurzel für $\gamma \rightarrow 0$ gegen unendlich strebt. Nun lassen sich die restlichen Strömungsgrößen bestimmen:

$$w_x = \frac{q_2}{q_1} \quad , \quad w_\varphi = \frac{q_3 + \gamma p}{q_1} \quad , \quad w_r = \frac{q_4}{q_1} \quad , \quad \varrho = \frac{q_1}{1 - \gamma w_\varphi} \tag{4.12}$$

Eine Analyse von Gleichung (4.10) führt auf eine einschränkende Bedingung² für den Wertebereich des Inklinationsparameters γ :

$$-\frac{1}{a - w_\varphi} \leq \gamma \leq \frac{1}{a + w_\varphi} \tag{4.13}$$

Hierbei ist $a = \sqrt{\kappa p / \rho}$ die örtliche Schallgeschwindigkeit. Anschaulich ausgedrückt bedeutet diese Einschränkung, daß die Neigung des Rechengebiets zwischen den Charakteristiken der linearisierten Euler-Gleichungen liegen muß, die die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Druckwellen in Umfangsrichtung beschreiben. Ansonsten schneidet die zeitgeneigte Rechenebene das

²Eine Herleitung dieser Beziehung ist im Anhang C enthalten.

Abhängigkeitsgebiet des Punktes P in Bild 4.1. Diese Bedingung ist damit ganz offensichtlich physikalisch begründet, da bei stärker geneigten Rechengebieten die Informationsausbreitung im Gebiet, die ja mit den charakteristischen Geschwindigkeiten erfolgt, im geneigten Rechengebiet zeitlich rückwärts läuft. Dies verletzt aber das Kausalitätsprinzip und ist inkonsistent mit einem numerischen Zeitschrittverfahren, das lediglich zukünftige Zustände aus vergangenen Zuständen, nicht jedoch vergangene Zustände aus noch unbekanntem zukünftigen Zuständen heraus berechnen kann. Daher handelt es sich bei Gleichung (4.13) um die Stabilitätsbedingung der Zeitneigungsmethode.

Wird die Definition für γ aus Gleichung (2.19) bzw. (4.9) in die Beziehung für den Stabilitätsbereich (4.13) eingesetzt, so läßt sich der zu den Grenzen von γ gehörende Bereich der mit dem Zeitneigungsverfahren berechenbaren Stufenteilungsverhältnisse berechnen:

$$1 - \frac{M_\Omega}{1 - M_\varphi} \leq \frac{\varphi_S}{\varphi_R} \leq 1 + \frac{M_\Omega}{1 + M_\varphi} \quad (4.14)$$

Hierbei ist $M_\Omega = \Omega r/a$ die mit der Umlaufgeschwindigkeit des Rotors gebildete Machzahl und $M_\varphi = w_\varphi/a$ die relative Machzahl in Umfangsrichtung.

Für viele Turbomaschinenanwendungen sind die Teilungsverhältnisse und Machzahlen derart, daß das Stabilitätskriterium (4.14) erfüllt ist. Das gesamte Spektrum von Teilungsverhältnissen, Drehzahlen und Strömungsgeschwindigkeiten bei Stufenberechnungen läßt sich mit dieser Methode allerdings auch dann berechnen, falls dies nicht mehr der Fall ist. Das Rechengebiet wird dann aus einer geeigneten Anzahl von Stator- und Rotorkanälen zusammengesetzt, so daß das Teilungsverhältnis des dadurch entstandenen erweiterten Rechengebiets innerhalb der durch das Stabilitätslimit definierten Grenzen liegt. Eine Verallgemeinerung der Definition der Inklinationsparameter (2.19) läßt sich für ein solches Rechengebiet, das aus einem mit 1 indizierten Bereich bestehend aus n_S Statorschaufelteilungen und aus einem mit 2 indizierten Bereich bestehend aus n_R Rotorschaufelteilungen aufgebaut ist, wie folgt angeben:

$$\chi_1 = \frac{n_S \varphi_S - n_R \varphi_R}{\Omega n_S \varphi_S} \quad \text{bzw.} \quad \chi_2 = \frac{n_S \varphi_S - n_R \varphi_R}{\Omega n_R \varphi_R} \quad (4.15)$$

Für die relative Änderung des Inklinationsparameters durch die Hinzunahme weiterer Schaufelkanäle gilt

$$\frac{\chi_1}{\chi_S} = \frac{n_S \varphi_S - n_R \varphi_R}{n_S (\varphi_S - \varphi_R)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\chi_2}{\chi_R} = \frac{n_S \varphi_S - n_R \varphi_R}{n_R (\varphi_S - \varphi_R)} \quad (4.16)$$

4.1.2 Implementierung

Bei dem als Grundlage dienenden, auf zentralen Differenzen basierenden Finite-Volumen-Programm zur Strömungsberechnung auf strukturierten

Netzen [63] wird das zu lösende Gleichungssystem (4.6) an einem beliebigen Punkt P_{ijk} des Rechengebiets durch die semi-diskrete Form

$$\frac{d\vec{Q}_{ijk}}{dt'} = -\frac{1}{V_{ijk}}\vec{R}_{ijk} \quad (4.17)$$

approximiert, wobei im Vektor \vec{R} die gesamten Residuen der Konvektion und der natürlichen und künstlichen Dissipation zusammengefaßt sind. Das zum Punkt P_{ijk} gehörende Bilanzvolumen wird mit V_{ijk} bezeichnet. Die Implementierung der Zeitneigungsmethode in ein Strömungsberechnungsprogramm erfordert lediglich eine leichte Modifikation des Integrationsverfahrens. Zur Berechnung der Residuen werden die gewohnten Erhaltungsvariablen \vec{U} benötigt, während das zeitliche Vorwärtsschreiten bei der Integration in den transformierten Zustandsgrößen \vec{Q} erfolgt. Daher muß bei jedem Integrations-schritt zunächst \vec{Q} aus \vec{U} berechnet werden. Die Integration ergibt dann den Zustandsvektor \vec{Q} zum nächsten Zeitpunkt, der dann in die gewohnten Größen \vec{U} zurücktransformiert werden muß, um die Residuen für den nächsten Integrationsschritt berechnen zu können.

4.2 Instationäre Kopplung von Stator- und Rotorgebiet

In diesem Abschnitt wird nach einem kurzen Überblick über einige in der Literatur beschriebene Kopplungsmöglichkeiten das entwickelte Verfahren zur Kopplung zweier relativ zueinander bewegter Bereiche des Rechengebietes beschrieben. Dabei wird insbesondere auf den Austausch der zeittransformierten Strömungsgrößen zwischen den Bereichen eingegangen. Auch wird die durch die Zeitneigungsmethode bedingte Verwendung unterschiedlicher Zeitschrittweiten in den einzelnen Rechengebietsbereichen im Detail erläutert.

4.2.1 Kopplungsmethoden

Kopplung mit einem eindimensionalen Charakteristikenverfahren

Das numerische Berechnungsverfahren von Erdos et al. [16] behandelt die Koppelebene zwischen Statoraustritt und Rotoreintritt ähnlich wie einen Eintritts- bzw. Austrittsrand. Ohne an dieser Stelle näher auf die Charakteristikentheorie einzugehen sei nur bemerkt, daß bei dieser Art der Randbehandlung im Fall dreidimensionaler, subsonischer Strömungen vier der fünf charakteristischen Variablen am Eintrittsrand spezifiziert werden, während die fehlende fünfte über eine charakteristische Beziehung aus Werten des

Gebietsinneren bestimmt wird. Am Austrittsrand wird dann entsprechend nur eine Variable vorgegeben und die restlichen vier werden über geeignete Bedingungen mit Hilfe des vorgegebenen Wertes aus Werten des Gebietsinneren festgelegt. Ist hingegen die Strömung normal zum Rand supersonisch, so müssen am Eintritt alle und am Austritt keine der charakteristischen Größen vorgegeben werden, weil dann die Informationsausbreitung nur in Strömungsrichtung erfolgt. Die Größen, die am Rotoreintritt vorgegeben sind, werden aus den Werten am Statoraustritt unter Berücksichtigung der Rotordrehung und des Zeitversatzes (siehe Kapitel 2) bestimmt. Ebenso erfolgt umgekehrt die Bestimmung der Vorgabegrößen am Statoraustritt aus den entsprechenden Größen am Rotoreintritt.

Direkte Übergabe bei nicht überlappenden Gittern

Fourmaux [21] verwendet für seinen Strömungslöser ein McCormack–Predictor–Corrector–Integrationsverfahren. Zur Kopplung der Rechengebiete übergibt er nach dem Predictor–Schritt alle Strömungsgrößen direkt vom stromauf liegenden ans stromab liegende Gebiet. Nach dem Corrector–Schritt erfolgt die Übergabe in umgekehrter Richtung.

Im Verfahren von Kang und Chang [55] werden alle Strömungsvariablen an der Koppellebene durch lineare Interpolation direkt übergeben. Die Autoren führen das Funktionieren dieser unspektakulären Vorgehensweise darauf zurück, daß bei ihren Testrechnungen in der Nähe der Koppellebene keine nennenswerten Gradienten im Strömungsfeld auftreten.

Kopplung mit überlappenden Gittern

Beim Verfahren von Lewis et al. [61] überlappen sich die verwendeten O–Netze an der Koppelstelle um mehrere Gitterzellen. Da sie mit einfachen linearen Interpolationen der Strömungsgrößen im Überlappungsgebiet Konvergenzprobleme bekommen, fügen sie eine zusätzliche charakteristische Behandlung für den Statoraustritt hinzu.

Koya und Kotake [57] verwenden in ihrem Verfahren im Stator und Rotor je eine zusätzliche Gitterschicht, die sich auf derselben axialen Position befindet, wie die vorletzte Schicht im jeweils anderen Bereich. Die Strömungsgrößen an den sog. Phantompunkten werden unter Berücksichtigung der Rotordrehung von den Punkten an den entsprechenden axialen Positionen des Partnergitters übertragen. Auch Jorgensen und Chima [46] verwenden Stator- und Rotorgitter, die sich in ähnlicher Weise wie bei Koya und Kotake überlappen. Die Strömungsgrößen werden dabei mittels einer Interpolation an das andere Gitter weitergegeben. Die Punkte an der Koppellebene können dadurch im innerhalb des von ihnen verwendeten vierstufigen Runge–Kutta–Integrationsverfahrens wie gewöhnliche innere Punkte behandelt werden.

4.2.2 Beschreibung der Stator–Rotor–Kopplung

Ein Verfahren zur Kopplung zweier relativ zueinander bewegter Bereiche des Rechengebiets hat mehrere Anforderungen zu erfüllen:

1. Die Kopplung muß konservativ erfolgen, d. h. an der Koppellebene darf weder Energie noch Masse verlorengehen, hinzukommen oder umgewandelt werden.
2. Die Kopplung muß rückwirkungsfrei sein; die Strömung durch die Koppellebene hindurch darf nicht vom Kopplungsverfahren beeinflusst werden. Insbesondere sollte es nicht möglich sein, anhand der Entropie- oder Totaldruckverteilung die Lage der Koppellebene im Rechengebiet zu identifizieren.
3. Die Implementierung in den Strömungslöser soll modular erfolgen, und der numerische Aufwand für die Kopplung soll angemessen sein.
4. Das Verfahren soll sich durch die notwendige Flexibilität in Bezug auf die Stufenkonfiguration (Stator-Rotor, Rotor-Stator oder konterrotierende Rotoren) sowie hinsichtlich einer möglichen Mehrstufigkeit des Anwendungsfalles auszeichnen. Auch soll das Verfahren unabhängig vom Anwendungsfall sein (z. B. Simulationen mit oder ohne Zeitneigungsmethode oder mit einer oder mehreren Schaufelteilungen).

Die positiven Erfahrungen mit der direkten Kopplung nicht relativ zueinander bewegter, künstlicher Blockgrenzen von Multiblock-Rechengittern durch sog. Phantomschichten [59], legen eine analoge Vorgehensweise bei der instationären Stator–Rotor–Kopplung nahe. Die wesentlichsten Vorteile dieses Ansatzes liegen zum einen darin, daß aufgrund der zusätzlichen Punkte der Phantomschichten komplette Bilanzvolumina für die Randpunkte verwendet werden können. Hierdurch wird die Bildung halbseitiger Differenzen vermieden und der Informationsfluß bleibt ungestört. Auch kann ein kontinuierlicher Verlauf der künstlichen Dissipation vierter Ordnung über die Bereichsgrenzen hinweg mit Phantomschichten realisiert werden. Damit besteht de facto kein Unterschied in der Behandlung der Knotenpunkte der inneren Ränder des Rechengebiets und den inneren Punkten eines Gitterblocks.

Bei der Stator–Rotor–Kopplung hat allerdings aufgrund der Relativbewegung der zu koppelnden Bereiche nicht jeder Punkt der Phantomschicht einen seiner aktuellen geometrischen Lage entsprechenden Punkt im Nachbarblock als Koppelpartner. Im allgemeinen Fall liegt daher jeder Punkt der Phantomschicht innerhalb eines von acht Punkten des Nachbarbereichs aufgespannten Hexaeders. Dies macht mit jeder Kopplung eine aufwendige räumliche Interpolation der an den Eckpunkten des Hexaeders definierten Strömungsgrößen auf den betrachteten Punkt erforderlich, da die Interpolationsfaktoren zeitabhängig sind. Um die Mehrdeutigkeit des sich dabei ergebenden Interpolationsproblems zu umgehen, ist beispielsweise eine Tetraedrisierung der identifizierten Hexaeder mit anschließender trilinearer In-

terpolation denkbar.

Durch die einschränkende Forderung, daß die Punkte der zu koppelnden Gitterschichten auf identischen Rotationsflächen liegen, läßt sich die Kopplung mittels einer bilinearen Interpolation in φ und r realisieren. Der betrachtete Punkt liegt dann nämlich innerhalb einer Hexaederstirnfläche des Nachbargitters. Für die Rechenetzgenerierung ist diese Einschränkung unwesentlich, da der Netzlinsenabstand im Bereich zweier direkt gekoppelter Bereiche oder Gitterblöcke ohnehin möglichst konstant sein sollte, um eine gleichmäßige räumliche Auflösung zu realisieren. Im Rechenprogramm wird gegebenenfalls durch eine entsprechende Korrektur der Lage der Punkte in den betroffenen Gitterschichten gewährleistet, daß die Punkte tatsächlich auf denselben Rotationsflächen liegen.

Abweichend von der stationären Kopplung [59], bei der sich die Gitterblöcke um zwei Zellschichten überlappen, wird für die instationäre Kopplung der Strömungsgrößen nur eine überlappende Zellschicht verwendet. Dies ist für die zentrale Flußbilanzierung ausreichend, da so vom Inneren jedes Bereichs die Werte auf den Rand des jeweiligen Partnergitters übertragen werden können. Bei zwei überlappenden Schichten muß zusätzlich noch Sorge getragen werden, daß die Strömungsgrößen der redundanten Schicht in beiden Bereichen auch die entsprechenden, identischen Werte haben, wodurch der Strömung eine Zwangsbedingung aufgeprägt wird, die an sich überflüssig ist.

Die Kopplung eines mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_1 rotierenden Rechengebietsbereichs bestehend aus n_1 Schaufelgitterkanälen der Teilung $\tilde{\varphi}_1$ mit einem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_2 rotierenden Bereich mit n_2 Kanälen der Teilung $\tilde{\varphi}_2$ läßt sich zu jedem Zeitpunkt als Kopplung zweier Bereiche mit den Breiten

$$\varphi_1 := n_1 \tilde{\varphi}_1 \quad \text{und} \quad \varphi_2 := n_2 \tilde{\varphi}_2 \quad (4.18)$$

beschreiben. Daher soll im folgenden der allgemeine Fall der Kopplung von Bereich 1 an Bereich 2 beschrieben werden.

Die Zeitneigungsmethode ermöglicht zu jedem Zeitschritt die Verwendung einfacher Periodizitätsbedingungen (2.18) als Randbedingungen für die Gebietsränder in Umfangsrichtung. Die Anwendung dieses Verfahrens bei der Strömungssimulation in Turbomaschinenstufen erfordert daher die Auflösung der Periodendauern der Bereiche 1 und 2 mit derselben Anzahl n_T von Zeitschritten. Die Periode von Gebiet 1 ist dabei die Zeit während der sich an einem beliebigen Punkt von Bereich 1 die gesamte Breite φ_2 des Bereichs 2 vorbeibewegt:

$$T_1 = \frac{\varphi_2}{|\Omega_2 - \Omega_1|} = n_T \Delta t_1 \quad (4.19)$$

Für die Gebietswechseldauer von Bereich 2 gilt ganz analog

$$T_2 = \frac{\varphi_1}{|\Omega_2 - \Omega_1|} = n_T \Delta t_2 \quad . \quad (4.20)$$

Daraus folgt, daß das Verhältnis der Zeitschrittweiten in den beiden Bereichen gleich dem Teilungsverhältnis sein muß:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} =: \Phi_1 \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \frac{1}{\Phi_1} \quad (4.21)$$

Als Referenzlage zum Zeitpunkt $t = 0$ dient die relative Stator–Rotor–Position, für die diejenigen zwei Punkte der beiden Bereiche der in Strömungsrichtung ersten Koppel Ebene koinzidieren, die sich sowohl auf der Nabe als auch am unteren periodischen Rand befinden, siehe Bild 4.2. Alle Be-

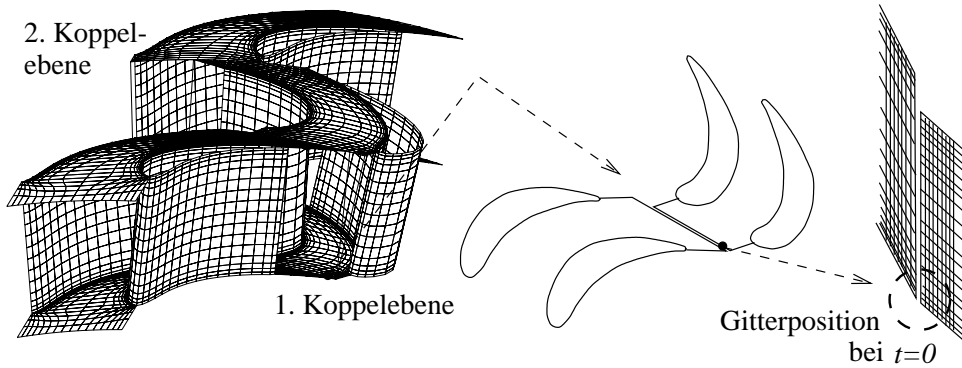


Bild 4.2: Definition des Referenzzeitpunkts $t = 0$ bei instationären Stufenrechnungen

reiche des Rechengebiets werden einmalig zu Simulationsbeginn in Umfangsrichtung so verschoben, daß die φ -Koordinaten dieser Punkte zum Referenzzeitpunkt gleich null sind. Werden die Koordinaten eines x -beliebigen Punktes der Koppel Ebene mit i, x indiziert, wobei i den Bereich 1 bzw. 2 kennzeichnet, so gilt für die mit $3 - i, x$ indizierten Koordinaten desjenigen Punktes des anderen Bereichs, dessen Strömungsgrößen ohne Interpolation an diesen Punkt übergeben werden können:

$$x_{3-i,x} = x_{i,x} \quad , \quad \varphi_{3-i,x} = \Phi_i \varphi_{i,x} \quad \text{und} \quad r_{3-i,x} = r_{i,x} \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \quad (4.22)$$

In Bild 4.3 ist der Austausch der Strömungsgrößen von Bereich 1 mit Bereich 2 skizziert.

Mit fortschreitender Zeit muß die Drehung des Rotors berücksichtigt werden, siehe Bild 4.3 rechts. Die Relativverdrehungen der Bereiche nach n Zeitschritten betragen

$$\varphi_{1,t} = (\Omega_2 - \Omega_1)n\Delta t_1 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{2,t} = (\Omega_1 - \Omega_2)n\Delta t_2 = -\Phi_2\varphi_{1,t} \quad . \quad (4.23)$$

Immer wenn die Relativverdrehung der Bereiche die Breite des jeweiligen Partnerbereichs erreicht, d. h. alle n_T Zeitschritte, wird die Verdrehung wieder zurückgesetzt,

$$\varphi_{i,t} := \varphi_{i,t} - \text{sign}(\Omega_{3-i} - \Omega_i)\Phi_i\varphi_i \quad \text{falls} \quad |\varphi_{i,t}| = \Phi_i\varphi_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \quad , \quad (4.24)$$

damit sich die Bereiche nicht zu weit voneinander wegbewegen, was die gemeinsame Darstellung der Strömungsfelder bei der Auswertung vereinfacht. Für die Kopplung zu einem beliebigen Zeitpunkt gelten dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{3-i,x} &= x_{i,x} \\ \varphi_{3-i,x} &= \Phi_i \varphi_{i,x} - \varphi_{i,t} \quad , \quad i = 1, 2 \quad . \\ r_{3-i,x} &= r_{i,x} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Zu beachten ist, daß bei dieser Formulierung immer die gitterfesten, konstanten Werte als φ -Koordinaten zu verwenden sind. Bei periodischen Rechengebietsrändern läßt sich die periodische Fortsetzung der Rechengebiete durch die folgenden Beziehungen erreichen:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,x} &:= \varphi_{i,x} - \varphi_i \quad \text{falls} \quad \varphi_{i,x} \geq \varphi_i \\ \varphi_{i,x} &:= \varphi_{i,x} + \varphi_i \quad \text{falls} \quad \varphi_{i,x} < 0 \quad , \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

In der Regel erfüllt kein Punkt des jeweiligen Partnergitters exakt die Beziehungen (4.25). Deshalb wird eine Interpolation der Strömungsgrößen von den vier den betrachteten Punkt $A = (x_{i,x}, \varphi_{i,x}, r_{i,x})$ umgebenden Punkte B_j , $j = 1 \dots 4$ durchgeführt. Der Suchalgorithmus verwendet zur Bestimmung des gesuchten Punktequadrupels eine sogenannte Linkssuche. Das Quadrupel ist genau dann gefunden, wenn der gesuchte Punkt bei mathematisch positivem Umlaufsinn sich links von allen vier Kanten des untersuchten Vierecks befindet. Dies ist dann der Fall, wenn für jede aus zwei Punkten $B_{j_1} = (x_{i,x}^{j_1}, \varphi_{i,x}^{j_1}, r_{i,x}^{j_1})$ und $B_{j_2} = (x_{i,x}^{j_2}, \varphi_{i,x}^{j_2}, r_{i,x}^{j_2})$ gebildete Kante die Ungleichung

$$(r_{i,x} - r_{i,x}^{j_1})(\varphi_{i,x}^{j_2} - \varphi_{i,x}^{j_1}) \leq (\varphi_{i,x} - \varphi_{i,x}^{j_1})(r_{i,x}^{j_2} - r_{i,x}^{j_1}) \quad (4.27)$$

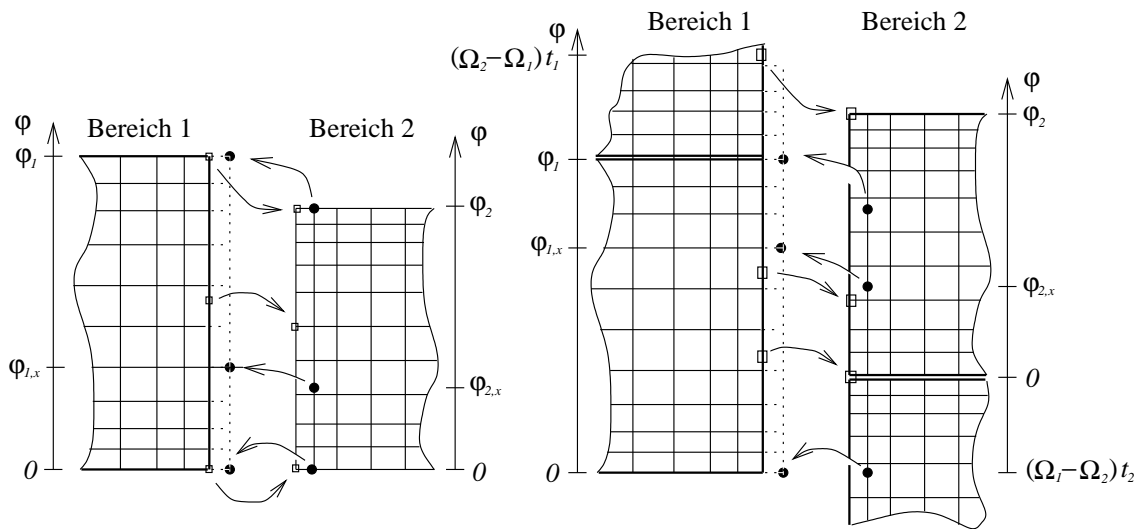


Bild 4.3: Austausch der Strömungsgrößen bei überlappenden Rechengittern (links: Referenzlage, rechts: mit Rotation)

erfüllt wird. Für den Fall, daß die gesamte Koppellebene oder ein Teil davon auf einem konstantem Radius liegt, wie z. B. bei Radialmaschinen, müssen bei dieser Ungleichung (4.27) die r -Koordinaten gegen die x -Koordinaten ausgetauscht werden, weil die Beziehung sonst trivial wird.

Aus der Geometrie der auf diese Art und Weise bestimmten vier Punkte werden die Faktoren zur bilinearen Interpolation der Strömungsgrößen auf den Punkt A bestimmt. Für die interpolierten Strömungsgrößen $\vec{Q}_{i,x}$ gilt

$$\vec{Q}_{i,x} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 f_j \vec{Q}_{i,x}^j, \quad i = 1, 2, \quad (4.28)$$

wobei $\vec{Q}_{i,x}^j$ die Zustandsvektoren an den vier Punkten B_j , $j = 1, 4$ nach Gleichung (4.8) sind. Die Berechnungsformeln für die Interpolationsfaktoren f_j sind im Anhang D angegeben.

Die so bestimmten Zustandsgrößen am Punkt A können dann schließlich zwischen den beiden Bereichen ausgetauscht werden. Hierbei ist noch zu beachten, daß diese Größen in den jeweiligen Relativsystemen beschrieben sind. Zur Kopplung der Gebiete müssen jedoch alle Größen in ein und demselben System beschrieben werden. Nach einigen Umformungen finden sich für die Transformation vom einen Bezugssystem ins andere die Beziehungen

$$\begin{aligned} q_{3-i,x}^1 &= \Phi_{3-i} q_{i,x}^1 \\ q_{3-i,x}^2 &= \Phi_{3-i} q_{i,x}^2 \\ q_{3-i,x}^3 &= \Phi_{3-i} \left(q_{i,x}^3 + (\Omega_i - \Omega_{3-i}) r_{i,x} q_{i,x}^1 \right) \\ q_{3-i,x}^4 &= \Phi_{3-i} q_{i,x}^4 \\ q_{3-i,x}^5 &= \Phi_{3-i} \left(q_{i,x}^5 + (\Omega_i - \Omega_{3-i}) r_{i,x} \left(q_{i,x}^3 + \Omega_i r_{i,x} q_{i,x}^1 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

wenn $q_{i,x}^n$, $n = 1, \dots, 5$, die n -te Komponente von $\vec{Q}_{i,x}$ ist.

Die Kopplung erfolgt in zwei Schritten, wie auch in Bild 4.3 skizziert. Dabei werden zunächst die Strömungsgrößen an der eigentlichen Gebietsgrenze vom stromauf liegenden Bereich an den stromab liegenden Bereich übergeben. Danach werden die Punkte der Phantomschicht des stromauf liegenden Bereichs mit den Strömungsgrößen der in Strömungsrichtung zweiten Gitterlinie des Partnerbereichs belegt. Diese Kopplung wird auf jeder Stufe des Runge–Kutta–Integrationsverfahrens nach Einbringung der Randbedingung für die festen Wände und vor dem Austausch der Größen an den nicht zueinander bewegten Blockgrenzen durchgeführt.

Ausschließlich zu einer konsistenten Berechnung der künstlichen Dämpfung vierter Ordnung im gesamten Integrationsgebiet wird auf der ersten, dritten und fünften Stufe des Runge–Kutta–Verfahrens nochmals instationär gekoppelt. Dabei werden die Strömungsgrößen der in Strömungsrichtung vorletzten Gitterschicht des stromauf liegenden Bereichs und der dritten Gitterschicht des stromab liegenden Bereichs in entsprechende Phantomschichten des jeweiligen Partnerbereichs kopiert.

4.3 Rücktransformation zeitlich geneigter Strömungsfelder

Aufgrund der Transformation (4.1) stellt das momentane Strömungsfeld bei der Zeitneigungsmethode kein zu einem physikalischen Zeitpunkt existentes Strömungsfeld dar. Zur Ergebnisauswertung muß deshalb eine Rücktransformation vom zeitlich geneigten in den physikalischen Raum durchgeführt werden. Bei Problemen der Stator–Rotor–Interaktion ist die Schaufelwechselperiode die grundlegende Zeitskala. Daher bilden zeitlich äquidistante Momentaufnahmen des Strömungsfeldes während einer Periode einen sinnvollen Satz von Ergebnisdaten.

Sollen n_{sol} Lösungen von n_{teil} in Umfangsrichtung benachbarten Bereichen der Breite φ_i während der Periode T_1/n_2 der Gitterteilung $\tilde{\varphi}_2$ von Bereich 2 nach Gln. (4.18) und (4.19) ausgegeben werden, so gilt mit Gln. (2.19), (4.1) und (4.20) für die Ausgabezeitpunkte t_a^n

$$t_a^{mn} = \frac{n}{n_{sol}} \cdot \frac{T_1}{n_2} + m|T_1 - T_2| = n_{a,i}^{mn} \Delta t_i + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{(\Omega_{3-i} - \Omega_i)} \cdot \frac{\varphi}{\varphi_i} ,$$

$$i = 1, 2 , \quad m = 0, \dots, n_{teil} - 1 , \quad n = 0, \dots, n_{sol} - 1 , \quad (4.30)$$

wenn $n_{a,i}^{mn}$ die von der jeweiligen φ -Koordinate des betrachteten Punkts abhängigen Zeitpunkte in der transformierten Zeit beschreibt. Hierbei wird berücksichtigt, daß für benachbarte Bereiche die zeitlichen Phasenbeziehungen (2.9) und (2.10) gelten. Umgeformt ergeben sich damit die Beziehungen für die gesuchten Zeitpunkte der beiden Bereiche:

$$\frac{n_{a,1}^{mn}}{n_T} = \frac{n}{n_{sol}n_2} + m|\Phi_2 - 1| - \text{sign}(\Omega_2 - \Omega_1) \frac{(\Phi_2 - 1)\varphi}{\varphi_1}$$

$$\frac{n_{a,2}^{mn}}{n_T} = \Phi_1 \left(\frac{n}{n_{sol}n_2} + m|\Phi_2 - 1| - \text{sign}(\Omega_2 - \Omega_1) \frac{(\Phi_2 - 1)\varphi}{\varphi_2} \right) \quad (4.31)$$

$$m = 0, \dots, n_{teil} - 1 , \quad n = 0, \dots, n_{sol} - 1$$

Die Signumfunktion $\text{sign}(x)$ liefert den Wert 1 für $x \geq 1$ und den Wert -1 für $x < 1$. Soll die Ausgabe während der Periode T_2/n_1 der Gitterteilung $\tilde{\varphi}_1$ von Bereich 1 erfolgen, so lassen sich durch eine analoge Vorgehensweise die entsprechenden Beziehungen ermitteln.

Die so bestimmten Zeitpunkte sind im allgemeinen keine ganzen Zahlen. Die Lösungsgrößen \vec{U}_i zum gewünschten Zeitpunkt $n_{a,i}^{mn}$ für jeden Punkt im Bereich i des Rechengebiets müssen daher aus den Werten der zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkte $\text{int}(n_{a,i}^{mn})$ und $\text{int}(n_{a,i}^{mn} + 1)$ der Integration bestimmt werden. Dazu wird eine lineare Interpolation gemäß

$$\vec{U}_i(t_a^{mn}) = f_i^{mn} \vec{U}_i(\text{int}(n_{a,i}^{mn}) \Delta t_i) + g_i^{mn} \vec{U}_i(\text{int}(n_{a,i}^{mn} + 1) \Delta t_i) ,$$

$$i = 1, 2 , \quad m = 0, \dots, n_{teil} - 1 , \quad n = 0, \dots, n_{sol} - 1 , \quad (4.32)$$

verwendet, wobei die Berechnung der Interpolationsfaktoren über die Beziehungen

$$\begin{aligned} {}^1f_i^{mn} &= 1 - \left(n_{a,i}^{mn} - \text{int}(n_{a,i}^{mn}) \right) , \\ {}^2f_i^{mn} &= 1 - {}^1f_i^{mn} , \\ i &= 1, 2 \quad , \quad m = 0, \dots, n_{\text{teil}} - 1 \quad , \quad n = 0, \dots, n_{\text{sol}} - 1 \quad , \end{aligned} \quad (4.33)$$

erfolgt. Die Integer-Funktion $\text{int}(a)$ liefert dabei den ganzzahligen Anteil des reellen Arguments a .

4.4 Mehrstufige Anwendungsfälle

Das in Abschnitt 4.2.2 beschriebene Koppelverfahren hat keinerlei Einschränkungen in Bezug auf die Anzahl der Schaufelreihen des jeweiligen Testfalles. Es ist somit prinzipiell für mehrstufige Anwendungen geeignet. Allerdings sind mit dem Zeitneigungsverfahren instationäre Simulationen mehrstufiger Maschinen nur möglich, wenn alle Stufen dasselbe Schaufelzahlverhältnis haben. Derartige Realisierungen finden sich häufig dann, wenn der sog. „clocking effect“ berücksichtigt werden soll. Bei diesem auch als Rotor–Rotor- bzw. Stator–Stator–Interaktion bezeichneten physikalischen Phänomen, handelt es sich um die Wechselwirkungen der Nachlaufreste einer Rotor-(Stator-)Abströmung mit der nachfolgenden Rotor-(Stator-)Schaufel. Aufgrund der gleichen Teilung existiert dabei eine konstante Phasenbeziehung zwischen den Nachlaufresten und den Schaufeln. Bei einer geeigneten Wahl der Phasenwinkel, d. h. bei einer optimalen Relativposition zweier aufeinanderfolgender Rotor-(Stator-)Schaufelreihen läßt sich ein Teil der Strömungsverluste vermeiden. Dies ist im allgemeinen dann der Fall, wenn die energieärmeren Nachlaufreste so in den Schaufelkanal eintreten, daß sie zusammen mit der ebenfalls energiearmen Schaufelgrenzschichtströmung einen minimalen Raum einnehmen [18, 17].

Mit dem nachfolgend beschriebenen Ansatz der Kombination von direkter, instationärer Kopplung mit der Kopplung zweier Bereiche über eine Mischungsebene lassen sich – mit gewissen Einschränkungen – effiziente und zeitgenaue Simulationen auch dann durchführen, wenn aufeinanderfolgende Stufen unterschiedliche Schaufelzahlverhältnisse haben und alle Schaufelkanäle diskretisiert werden müssen, um die physikalischen Verhältnisse zu modellieren. Diese Mischung der Kopplungsarten an inneren Rändern zwischen Schaufelreihen erlaubt dabei die unabhängige Anwendung der Zeitneigungsmethode in aufeinanderfolgenden Stufen, weil auf diese Weise das Periodizitätsproblem der gesamten Maschine in Probleme von Schaufelreihenpaaren aufgeteilt wird. Die Mischungsebenen fungieren dabei als eine Art Abschluß der einzelnen zeitgeneigten Bereiche, so daß für jede Stufe eine andere Zeittransformation angewandt werden kann. Das Verfahren der

Kopplung über eine Mischungsebene, d. h. die nichtreflektierende Kopplung zweier Bereiche durch umfangsgemittelte Strömungsgrößen ist in [63] enthalten. Die darin beschriebene Relaxation beim Austausch der Strömungsgrößen wird in Verbindung mit instationären Simulationen nicht angewandt, um die Zeitgenauigkeit der Kopplung sicherzustellen. An den Mischungsebenen geht zwar ein Teil der direkten Interaktion verloren, weil dort nur umfanggemittelte zeitliche Schwankungen ausgetauscht werden, aber stromabwärts oder stromaufwärts laufende, wellenförmige Störungen können die Mischungsebene ungehindert passieren und zeitgenau berücksichtigt werden. Das Strömungsfeld im gesamten Rechengebiet wird so in einer einzigen Simulation berechnet. Im Gegensatz zu einer abschnittswisen Simulation von Einzelstufen brauchen deshalb keine Randbedingungen für die Teilbereiche des Rechengebiets spezifiziert werden. Auch ist der Informationsgehalt des auf diese Art und Weise berechneten Strömungsfeldes höher als bei Einzelstufenrechnungen, weil die instationären Stromauf- und Stromabwirkungen der gesamten Maschine teilweise berücksichtigt werden. Für die Schaufelreihen mit direkter Kopplung der instationären Strömung werden die vollen Stator–Rotor–Wechselwirkungen simuliert. Durch eine zweite Simulation, bei der die Art der Kopplung der einzelnen Schaufelreihen vertauscht ist, lassen sich auch die Wechselwirkungen zwischen den anderen Schaufelreihenpaaren berechnen. Damit kann ein Großteil der instationären Effekte von mehrstufigen Konfigurationen simuliert werden.

Anwendungsbeispiel

In einem Anwendungsbeispiel wurde das Verfahren der gemischten Kopplung zur Simulation der Strömung in einer transsonischen Verdichterstufe mit Vorleitrad (IGV) eingesetzt [78]. Die Daten hierzu sind dem „ERCOFTAC Seminar and Workshop on Turbomachinery Flow Predictions“ [31] entnommen, wo sie bis 1997 als Testfall verwendet wurden. Die wesentlichen Geometriedaten sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Da alle drei Schau-

	IGV	Rotor	Stator
Schaufelzahl	33	57	58
Schaufelhöhe/Sehnenlänge	1,5	1,5	1,2
Teilungsverhältnis (Nabe)	1,02	0,60	0,58
Teilungsverhältnis (Gehäuse)	1,32	0,85	0,72
Schaufelhöhe (Sehnenmitte)	60 mm	57 mm	49 mm
Gehäusedurchmesser	550 mm	544 mm	534 mm
Drehzahl	—	11.500 U/min	—
Radialspalt	50 μm	60 μm	0... 600 μm
Axialspalt (Nabe)	41 mm		41 mm
Axialspalt (Gehäuse)	45 mm		46 mm

Tabelle 4.1: Geometriedaten des Verdichtertestfalles

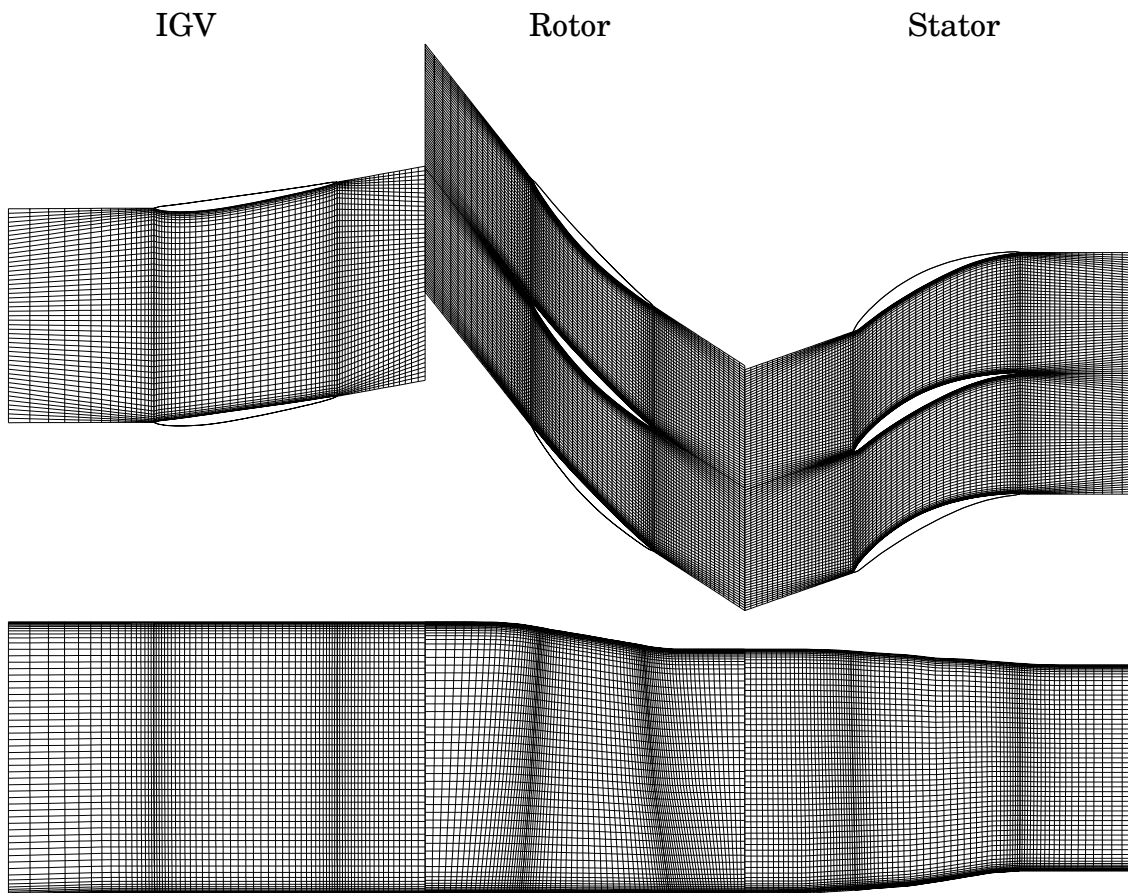


Bild 4.4: Rechengitter für die transsonische Verdichterstufe mit Vorleitrad (oben: Mittenschnitt, unten: Meridianschnitt)

felreihen unterschiedliche Schaufelzahlen haben, kann ohne vereinfachende Annahmen die voll instationäre Strömung nur durch Diskretisierung aller 148 Schaufelkanäle berechnet werden. Obigem Ansatz folgend wird daher die Strömung im Rotor und im Stator mit der Zeitneigungsmethode voll instationär simuliert, während die Strömung des Vorleitrads über eine Mischungsebene an die Stufe gekoppelt wird. Dies ermöglicht eine effiziente Strömungsberechnung für die gesamte Maschine. Die Zahl der Gitterpunkte lag bei etwa 0,25 Mio pro Schaufelkanal. Die engen Radialspalte unter bzw. über den Schaufeln erfordern sehr feine Gitterzellen in den Seitenwandgrenzschichten und stellen hier eine besondere Herausforderung für die Gittergenerierung dar. In Bild 4.4 ist das verwendete Rechengitter abgebildet. Die Funktionsweise der gemischten Kopplung ist in Bild 4.5 illustriert. Es zeigt eine Momentaufnahme der Entropieverteilung auf halber Kanalhöhe. Die Mischungsebene zwischen Vorleitrad und Rotor ist deutlich am abrupten Ende der Nachlaufströmung des Vorleitrades zu erkennen. Das Nachlaufgebiet des Rotors hingegen kann aufgrund der direkten instationären Kopplung von Rotor- und Statorgebiet die Kopplebene ungestört passieren und in volle Wechselwirkung mit der Statorströmung treten.

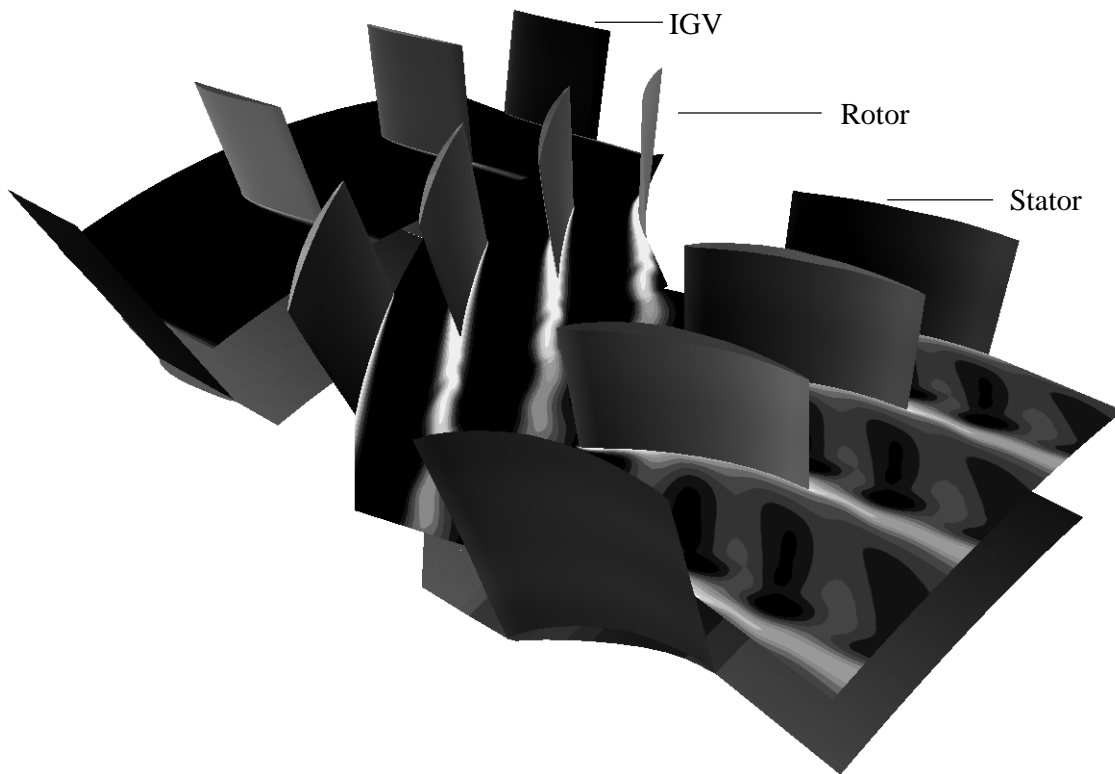


Bild 4.5: Illustration der gemischten Kopplung: Momentaufnahme der Entropieverteilung in einer Schnittebene auf halber Kanalhöhe

4.5 Beschleunigungstechniken

Bei zeitgenauen Rechnungen muß der Lösungsfortschritt von Zeitschritt zu Zeitschritt in allen Punkten des Rechengebiets gleich groß sein, um ein zeitkonsistentes Strömungsfeld zu erhalten. Dies bedeutet aber, daß der Lösungsfortschritt durch die maximale Zeitschrittweite bestimmt wird, für die das Integrationsverfahren an jedem Bilanzvolumen gerade noch stabil ist. Bei reibungsbehafteten Strömungen treten in Wandnähe sehr starke Gradienten auf, die nur durch entsprechend feine Gitterzellen aufzulösen sind. Aufgrund der nach Courant, Friedrichs und Lewy benannten CFL-Bedingung [6] sind in diesen Bereichen nur sehr kleine Zeitschrittweiten erlaubt. Diese Bedingung besagt, daß sich bei expliziten Integrationsverfahren eine Störung während eines Zeitschritts nur über einen begrenzten räumlichen Bereich ausbreiten darf. Die Größe dieses Bereichs ist vom Integrationsverfahren abhängig und ist im eindimensionalen Fall bei einer zeitgenauen Einschritt-Vorwärtsintegration gleich dem kleinsten Abstand zweier Knotenpunkte. Im mehrdimensionalen Fall und mit anderen Integratoren wird die Größe des Bereichs als Vielfaches eines äquivalenten Gitterpunktabstands angegeben.³ Aus diesem Zusammenhang heraus

³Dieses Vielfache wird allgemein als Courant-Zahl bezeichnet.

begründen sich die sehr langen Rechenzeiten bei der Simulation instationärer und reibungsbehafteter Strömungen. Ein Rechenlauf mit einer Million Knotenpunkten und entsprechend feinen Gitterzellen kann daher auf einer Einprozessor-Workstation durchaus mehrere Monate dauern. Deswegen liegt ein Schwerpunkt bei der Entwicklung expliziter und zeitgenauer Navier-Stokes-Verfahren in der Bereitstellung von Methoden zur Rechenzeitreduktion bzw. zur Beschleunigung der Rechenverfahren. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden vier diesbezügliche Ansätze untersucht. Die nachfolgenden Abschnitte stellen die Grundzüge dieser Methoden vor.

4.5.1 Implizites Residuenglätten bei globalen Zeitschrittweiten

Das implizite Glätten der Residuen wurde von Jameson und Baker [45] erstmals innerhalb von Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren verwendet. Damit lassen sich bei mehrstufigen Integrationsverfahren die maximal verwendbaren Courant-Zahlen steigern, ohne daß die Integration instabil wird. Dies wird durch eine räumliche Mittelung der Gesamtresiduen \vec{R} mit Hilfe eines impliziten Operators auf jeder Stufe des Integrationsschemas erreicht:

$$(1 - \varepsilon\delta_{\xi\xi})(1 - \varepsilon\delta_{\eta\eta})(1 - \varepsilon\delta_{\zeta\zeta})\overline{\vec{R}} = \vec{R} \quad (4.34)$$

Hierbei sind $\overline{\vec{R}}$ die geglätteten Residuen. Die Operatoren $\delta_{\xi\xi}$, $\delta_{\eta\eta}$ und $\delta_{\zeta\zeta}$ symbolisieren zweite Differenzen in den drei Gitterrichtungen ξ , η und ζ , und ε ist der Glättungsparameter. Mittels einer linearen Stabilitätsanalyse kann gezeigt werden [45], daß durch implizites Residuenglätten die Strömungsgleichungen mit einem Runge-Kutta-Verfahren für beliebige Courant-Zahlen stabil integriert werden können, vorausgesetzt der Glättungsparameter ist groß genug. Im eindimensionalen Fall wird unbedingte Stabilität durch

$$\varepsilon \geq \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\text{CFL}}{\text{CFL}^*} \right)^2 - 1 \right) \quad (4.35)$$

erreicht, wenn CFL die Courant-Zahl des geglätteten und CFL^* die Stabilitätsgrenze des ungeglätteten Verfahrens ist.

Das ursprünglich zur Beschleunigung der Konvergenz stationärer Strömungsberechnungen entwickelte Residuenglätten wurde von Jorgenson und Chima [46] für eine zeitgenaue Integration formuliert. Im Gegensatz zu stationären Rechnungen, bei denen bei konstanter Courant-Zahl räumlich schwankende, sog. lokale Zeitschrittweiten verwendet werden, schwanken bei zeitgenauen Simulationen aufgrund der konstanten, sog. globalen Zeitschrittweite die Courant-Zahlen an jedem Punkt im Rechengebiet. Im Rechengebiet gibt es folglich relativ große Bereiche, in denen die gewünschte Zeitschrittweite noch sehr wohl innerhalb des Stabilitätsgebiets des Verfahrens liegt. In diesen Bereichen wird daher bei konstantem Glättungsparameter ε die Lösung durch eine starke und unnötige Glättung inakzeptabel

verfälscht. Die Courant-Zahlen sind in diesen Bereichen typischerweise um mehrere Größenordnungen kleiner, als in den die Stabilität des Verfahrens bestimmenden Bereichen des Rechengebiets an den Vorder- und Hinterkanten der Schaufeln oder im Bereich des Radialspalts freistehender Schaufeln. Durch die Verwendung von an jedem Punkt P_{ijk} und für jede Gitterrichtung variablen Glättungskoeffizienten, mit z. B. in ξ -Richtung

$$\varepsilon_{\xi,ijk} = \max \left(0, \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\text{CFL}_{\xi,ijk}}{\text{CFL}^*} \right)^2 - 1 \right) \right), \quad (4.36)$$

lassen sich die Residuen gerade so stark glätten, wie es für eine Stabilisierung des Verfahrens erforderlich ist. Hierbei ist $\text{CFL}_{\xi,ijk}$ die aus dem Verhältnis von tatsächlicher zu in ξ -Richtung maximal möglicher lokaler Zeitschrittweite gebildete lokale Courant-Zahl für diese Richtung. An den Punkten des Gebiets, an denen diese Courant-Zahl kleiner als CFL^* ist, verschwindet der Glättungsparameter für diesen Punkt. Die Residuen an diesem Punkt werden aber dennoch verändert. Dieser Einfluß resultiert aus der Glättung der Residuen an den Punkten des Gebiets, die sich auf einer gemeinsamen Gitterlinie mit dem betrachteten Punkt befinden, als Folge der impliziten Formulierung der Mittelungsvorschrift (4.34). Allerdings nimmt der Einfluß der anderen Punkte mit zunehmendem Abstand ab und ist vergleichbar mit dem Einfluß der höheren Glieder bei konvergenten geometrischen Reihen. Bei genügend kleinen Werten von ε wird daher die räumliche Genauigkeit der Lösung nur geringfügig verringert. Die zeitliche Genauigkeit des Verfahrens wird durch die räumliche Mittelung nicht beeinflusst [46].

Die Implementierung der Glättungsvorschrift (4.34) erfordert die Lösung von periodischen und nicht-periodischen Blocktridiagonalmatrizen. Dies kann sehr effizient z. B. mit dem vektorisierbaren Thomas-Algorithmus erfolgen [39].

Die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit haben gezeigt, daß sich das beschriebene Glättungsverfahren gut eignet, um bei Problemen mit moderaten Knotenpunktzahlen und vergleichsweise einfachen Geometrien bzw. Gittertopologien die Rechenzeiten wirkungsvoll zu reduzieren. Eine Beschleunigung der Simulation um den Faktor 6 bis maximal 10 gegenüber einer rein expliziten Rechnung stellte sich als sinnvoller Kompromiß zwischen Effizienz und Genauigkeit heraus [49]. An einem quasi-dreidimensionalen, reibungsfreien Testbeispiel konnte gezeigt werden, daß mit dem Verfahren selbst bei einer Beschleunigung um mehrere Größenordnungen die Integration stabil bleibt. Die sofort auskonvergierte Lösung enthielt dann allerdings – wie zu erwarten – nicht mehr viel von der ursprünglichen Physik der Strömung. Bei reibungsbehafteten Problemen auf feinen Netzen mit Diskretisierung der radialen Schaufelspalte ließen sich allerdings selten Beschleunigungsfaktoren >6 erreichen, bevor die Integration trotz weiterer Erhöhung der Glättungsparameter instabil wurde.

4.5.2 Zeitkonsistentes, explizites Multigridverfahren

Die von He [36] vorgeschlagene Beschleunigungstechnik für zeitgenaue, explizite Verfahren umgeht die o. a. Problematik des großen Einflußgebiets des impliziten Operators beim Residuenglättten und die damit verbundenen Schwierigkeiten bei der Abschätzung der gemachten Fehler durch eine leichter nachvollziehbare, rein explizite Vorgehensweise. Die Idee, die sich dahinter verbirgt, soll nachfolgend beschrieben werden.

Die Lösung \vec{Q} einer Feingitterzelle (Index 1) mit dem Volumen V soll mit der globalen Schrittweite Δt vom Zeitschritt n nach $n + 1$ vorangebracht werden. Dieser Zeitschritt ist größer als der zulässige Zeitschritt Δt_1 der betrachteten Gitterzelle. Die Problemstellung läßt sich durch die folgenden Gleichungen illustrieren:

$$\left(\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^n\right)_1 = -\frac{\Delta t}{V_1} \vec{R}_1 \quad \dots \text{instabil, da } \Delta t \text{ zu groß} \quad (4.37)$$

$$\left(\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^n\right)_1 = -\frac{\Delta t_1}{V_1} \vec{R}_1 \quad \dots \text{nicht zeitgenau, da } \Delta t_1 \text{ zu klein} \quad (4.38)$$

Um Zeitkonsistenz im Rechengebiet sicherzustellen, d. h. um die Lösung der Feingitterzelle dennoch um Δt in der Zeit voranzubringen, wird der in Gleichung (4.38) noch fehlende Zeitschritt $\Delta t - \Delta t_1$ durch Hinzuziehen von Residuen aus benachbarten Zellen wettgemacht. Damit läßt sich ein Mehrgitterverfahren mit insgesamt m Ebenen wie folgt formulieren:

$$\left(\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^n\right)_1 = -\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta t_i}{V_i} \vec{R}_i + \frac{\Delta t - \sum_{i=1}^{m-1} \Delta t_i}{V_m} \vec{R}_m\right) \quad (4.39)$$

Um das Integrationsverfahren mit Hilfe dieses Ansatzes zu stabilisieren, muß mindestens eine weitere, gröbere Gitterebene zusätzlich zum feinen Gitter definiert werden. In den Bilanzvolumina aller gröberen Gitter V_i muß die Feingitterzelle V_1 enthalten sein. Die Summe der zulässigen Zeitschrittweiten auf allen Gittern muß dann mindestens so groß wie der gewünschte Integrationsschritt Δt sein, wodurch sich die Anzahl m der notwendigen Ebenen bzw. die Feinheit der größten Ebene m ergibt. Zeitkonsistenz wird nun dadurch erreicht, daß die Residuen der größten Gitterebene nur gerade soviel zum Lösungsfortschritt beitragen, wie für die gewünschte Zeitschrittweite notwendig ist,

$$\Delta t_m = \Delta t - \sum_{i=1}^{m-1} \Delta t_i \quad . \quad (4.40)$$

Eine einfache Möglichkeit, diese Methode zu implementieren, besteht darin, die gröberen Gitter durch Zusammenfassen mehrerer Zellen der feinsten Ebene zu definieren, weil dann kein zusätzlicher Aufwand für die Berechnung der Residuen entsteht. Für die Bilanzvolumina der einzelnen Gitterebenen gilt dann nämlich

$$V_i = V_{i-1} + \sum_{k=1}^{n(i)} V_{i,k} \quad , \quad (4.41)$$

wenn $n(i)$ die Anzahl der auf Ebene i zum Bilanzvolumen V_{i-1} neu hinzukommenden Gitterzellen und $V_{i,k}$, $k = 1, n(i)$ deren Zellvolumina darstellt. Ebenso gilt aus Gründen der Konservativität für die Berechnung der Grobgitterresiduen

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{i-1} + \sum_{k=1}^{n(i)} \vec{R}_{i,k} \quad . \quad (4.42)$$

Die Rekursion in dieser Beziehung stellt sicher, daß die Lösung letztlich durch die Residuen der feinsten Gitterebene bestimmt wird, da diese auf jeder Ebene einen Beitrag leisten. Im Falle stationärer Strömungen ist daher die Lösung dieser Multigridmethode mit der direkten Lösung auf der feinsten Gitterebene identisch. Bei instationären Problemen ist allerdings die volle Zeitgenauigkeit auf der Feingitterebene nicht gegeben, weshalb He sein Verfahren auch lediglich als zeitkonsistent, nicht aber zeitgenau bezeichnet. Der Längenmaßstab, in dem die Zeitgenauigkeit nicht erfüllt wird, entspricht der räumlichen Auflösung der gröberen Gitter. Solange dieser wesentlich kleiner ist, als die räumliche Wellenlänge der betrachteten Instationarität, sollte der gemachte Fehler unter Berücksichtigung des Rechenzeitvorteils akzeptabel sein [37]. Bei Problemen, in denen das instationäre Grenzschichtverhalten den Interessenschwerpunkt bildet, wird der Einfluß der verminderten Zeitgenauigkeit jedoch stärker ausfallen, so daß dann eine Fehlerabschätzung der Verwendung dieses Verfahrens vorangehen sollte.

Die Implementierung des Verfahrens in den Strömungslöser, über die erstmals in [50] berichtet wurde, verwendet Gitterebenen, deren Anzahl von der lokalen Gitterfeinheit abhängt und daher räumlich schwankt. Auf jeder Stufe des Runge-Kutta-Verfahrens werden dazu um die betrachtete Feingitterzelle herum solange weitere Gitterebenen bestimmt, bis der vorgegebene Zeitschritt erfüllt werden kann. Dabei erfolgt auf der i -ten Ebene die Erweiterung des Bilanzvolumens jeweils in derjenigen Gitterrichtung, die die maximal mögliche Zeitschrittweite des aktuellen Bilanzvolumens V_i bestimmt. Diese Zeitschrittweite wird näherungsweise aus den lokalen, gitterrichtungsabhängigen Zeitschrittweiten der Feingitterzellen bestimmt. Hierbei wird angenommen, daß sich für eine Zellkombination von zwei z. B. in ξ -Richtung benachbarten Zellen a und b die Zeitschrittweite in dieser Gitterrichtung $\Delta t_{\xi,ab}$ als Summe der entsprechenden Zeitschrittweiten $\Delta t_{\xi,a}$ und $\Delta t_{\xi,b}$ der beiden Zellen berechnen läßt,

$$\Delta t_{\xi,ab} = \Delta t_{\xi,a} + \Delta t_{\xi,b} \quad . \quad (4.43)$$

Der maximale Zeitschritt des Bilanzvolumens V_i auf der Gitterebene i wird schließlich gemäß

$$\Delta t_i = \min (\Delta t_{\xi,i}, \Delta t_{\eta,i}, \Delta t_{\zeta,i}) \quad (4.44)$$

aus den Zeitschrittweiten der drei Gitterrichtungen bestimmt.

Die gewählte Vorgehensweise vermeidet, daß die Grobgitterebenen im voraus festgelegt werden müssen. Dadurch kann auf die im Verlauf einer Simulation auftretenden Zeitschrittschwankungen sehr flexibel reagiert werden. Dabei

					Ebene:	Zellen:
p	l	k	j	y	1	a
q	c	b	i	x	2	ab
r	d	a	h	w	3	abcd
s	e	f	g	v	4	abcdef
t	m	n	o	u	5	abcdefghi
					6	abcdefghijkl
					7	abcdefghijklmno
					8	abcdefghijklmnopqrst
					9

Bild 4.6: Flexible Definition der Gitterebenen beim zeitkonsistenten Multi-gridverfahren (schematisch für zwei Dimensionen)

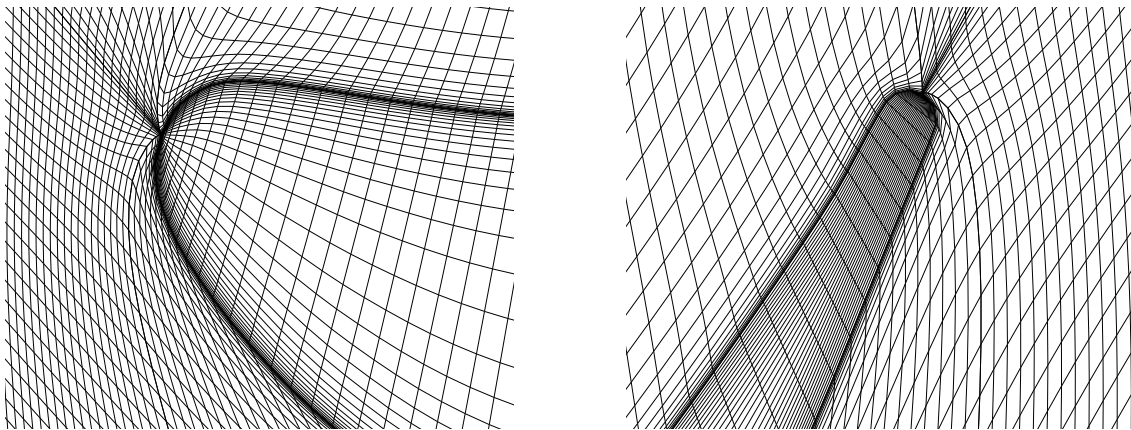


Bild 4.7: Beispiel für ein Rechengitter im Bereich des Radialspalts über den Schaufeln (links: über der Vorderkante, rechts: über der Hinterkante)

wird die Ausnutzung der beim zugrundeliegenden Feingitter minimal möglichen Gittervergrößerungen sichergestellt. Bild 4.6 stellt schematisch diese flexible Bilanzvolumenerweiterung in zwei Raumrichtungen dar.

Die mit dem Verfahren erzielbaren Beschleunigungen gegenüber unbeschleunigten Simulationen lagen bei etwa sechs bis acht, wobei zum Teil sechs und mehr Gitterebenen benutzt wurden. Noch höhere Beschleunigungen scheitern zum einen an der ungenauen Zeitschrittweitenberechnung bei aus relativ vielen Einzelzellen bestehenden Bilanzvolumina [88]. Eine andere Ursache hängt mit den inneren Rechengebietsrändern (Multiblock-Koppelgrenzen) zusammen: Bei Rechnungen mit Berücksichtigung der radialen Schaufelspalte stoßen im Bereich der Schaufelspitze Gitterblöcke zusammen, die insbesondere an den Rändern sehr feine Netzzellen haben, siehe Bild 4.7. Die oben beschriebene Implementierung des Verfahrens erlaubt jedoch keine Bilanzzellenerweiterung über die Blockgrenzen hinweg. Eine derartige Realisierung würde einen unangemessen hohen Verwaltungsaufwand und Datenaustausch zwischen den Blöcken bedeuten. Als Folge dieser Einschränkung werden daher an der Blockgrenzen Bilanzzellen gebildet, bei denen die Zeller-

weiterung nur entlang des Randes oder in Richtung des Blockinneren erfolgt. Die Integration der Residuen dieser Zellen ist daher ab einer bestimmten Anzahl von Einzelzellen mit der Integration von Residuen vergleichbar, die durch sog. „halbseitige“ Differenzen bestimmt werden. Halbseitige Differenzen treten normalerweise sonst nur an den äußeren Rechengebietsrändern bzw. an festen Wänden auf, wobei jeweils durch das Einbringen geeigneter Randbedingungen dem Randwertproblem Rechnung getragen werden muß, was im Fall dieser Bilanzzellen jedoch nicht geschieht. Deshalb stellen beim zeitkonsistenten Multigridverfahren die inneren Blockgrenzen im Bereich feiner Gitterzellen die stabilitätskritischen Bereiche dar.

4.5.3 Implizite Zeitintegration

Die für explizite Integrationsverfahren charakteristischen Stabilitätsgrenzen können durch die Verwendung impliziter Zeitableitungen gänzlich vermieden werden. Implizite Verfahren haben keine Beschränkungen bezüglich der verwendbaren Zeitschrittweiten. Sie sind unbedingt stabil. Die Größe der zu wählenden Zeitschrittweite ergibt sich lediglich aus der Anforderung, die interessierenden und mit bestimmten Frequenzen verbundenen instationären Effekte sinnvoll aufzulösen. Jameson schlägt vor, eine voll implizite Zeitintegration mit Hilfe eines expliziten Verfahrens zu realisieren [44]. Den Ausgangspunkt stellt dabei die semi-diskrete Form der Navier–Stokes–Gleichung für den Punkt P_{ijk} zum Zeitschritt $n + 1$ dar:

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{Q}_{ijk} V_{ijk}) \right]^{n+1} = -\vec{R}_{ijk}^{n+1} \quad , \quad (4.45)$$

Die Zeitableitung in der physikalischen Zeit t wird dabei implizit diskretisiert. Durch Einführung einer zweiten, sog. Pseudozeit τ läßt sich diese Beziehung (4.45) in folgender Form angeben:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{Q} V_{ijk}) = -\vec{R}_{ijk}^* := -\vec{R}_{ijk}^{n+1} - \left[\frac{d}{dt} (\vec{Q}_{ijk} V_{ijk}) \right]^{n+1} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad , \quad (4.46)$$

Die Zeitgenauigkeit von Gleichung (4.45) ist genau dann erfüllt, wenn das Residuum in der Pseudozeit \vec{R}^* verschwindet. Dies wird nun ganz analog zu stationären Strömungssimulationen durch die Konvergenz eines expliziten Zeitschrittverfahrens in der Pseudozeit erreicht. Diese Formulierung ist mit der bei rein impliziten Verfahren üblichen Vorgehensweise vergleichbar. In beiden Fällen muß ein nichtlineares Gleichungssystem iterativ gelöst werden, um zum nächsten physikalischen Zeitpunkt zu gelangen. Bei rein impliziten Verfahren erfolgt dies meist mit Hilfe von Newton–Iterationen, während hier ein Zeitschrittverfahren verwendet wird.

Mit der Konvergenz der Pseudozeititerationen stellen die aktuellen Strömungsgrößen die gesuchten Werte zum neuen physikalischen Zeitschritt

$n + 1$ dar. Da in der Pseudozeit Zeitgenauigkeit nicht erforderlich ist, können zur Effizienzsteigerung die gleichen, die Konvergenz des Verfahrens beschleunigenden Techniken benutzt werden, wie bei der Simulation stationärer Strömungen. Beim verwendeten Verfahren sind dies implizites Residuenglätteln, lokale Zeitschrittweiten und Full-Multigrid-Zyklen. Die implizite Diskretisierung der Zeitableitung kann prinzipiell beliebig genau erfolgen. Eine sinnvolle Wahl stellen dabei Rückwärtsdifferenzen 2. Ordnung dar, da sie wie das explizite Integrationsverfahren und die räumliche Diskretisierung von zweiter Ordnung genau sind. Gleichung (4.46) lautet damit

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{Q}_{ijk} V_{ijk}) = -\vec{R}_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{ijk}}{2\Delta t} (3\vec{Q}_{ijk}^{n+1} - 4\vec{Q}_{ijk}^n + \vec{Q}_{ijk}^{n-1}) = -\vec{R}_{ijk}^* \quad , \quad (4.47)$$

wenn Δt die Zeitschrittweite des impliziten Verfahrens ist. Bei der Berechnung werden für die gesuchten Lösungsgrößen \vec{Q}_{ijk}^{n+1} die jeweils aktuellen Zustandsgrößen der Pseudozeitintegration verwendet. Um die Stabilität des Verfahrens sicherzustellen, muß die Zeitschrittweite in der Pseudozeit $\Delta \tau$ zusätzlich zu den üblichen Stabilitätsbedingungen noch die Voraussetzung

$$\Delta \tau \leq \frac{2}{3} \text{CFL}^* \cdot \Delta t \quad (4.48)$$

erfüllen. Ein Integrationsschritt in der Pseudozeit kann folglich die Lösung nur bis maximal zum neuen Zeitschritt $n + 1$ zeitlich weiterbringen. Diese Beziehung, die unmittelbar aus der Stabilitätsanalyse des fünfstufigen Runge–Kutta–Verfahrens folgt, siehe z. B. [63], verhindert daher letztlich eine Verletzung des Kausalitätsprinzips.

Die Anpassung dieses Verfahrens auf zeitgeneigte Rechengebiete kann sehr einfach auf zweierlei Arten durchgeführt werden. Zum einen behält Gleichung (4.47) auch bei Zeitneigung unmittelbar ihre Gültigkeit, wenn der Vektor der Erhaltungsgrößen \vec{Q}_{ijk} die transformierten Variablen (4.8) enthält. Etwas geschickter ist allerdings die Wahl der gewöhnlichen Strömungsvariablen \vec{U}_{ijk} nach Gleichung (3.24) als Zustandsgrößen in der Pseudozeit τ , da dadurch die Rücktransformation von \vec{Q}_{ijk} nach \vec{U}_{ijk} nach jeder Stufe des Runge–Kutta–Schemas eingespart werden kann. Diese Wahl ist möglich, weil das Pseudoresiduum am Ende jedes impliziten Zeitschritts verschwindet und es deshalb unerheblich ist, ob der Zustandsvektor gegen die transformierten oder die gewöhnlichen Strömungsgrößen konvergiert. Für die Iterationsvorschrift mit Zeitneigung gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{U}_{ijk} V_{ijk}) = -\vec{R}_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{ijk}}{2\Delta t} (3\vec{Q}_{ijk}^{n+1} - 4\vec{Q}_{ijk}^n + \vec{Q}_{ijk}^{n-1}) = -\vec{R}_{ijk}^* \quad (4.49)$$

Der Aufwand für die Implementierung dieses gemeinhin als „dual-time stepping“ oder „zeitgenaue Multigridmethode“ bezeichneten impliziten Integrationsverfahrens in einen expliziten Strömungslöser ist relativ gering. Dazu

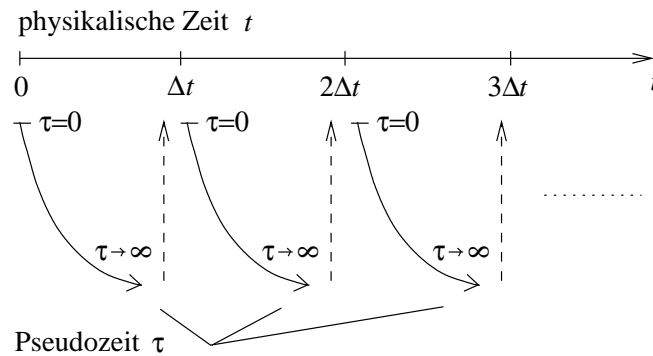


Bild 4.8: Implizite Zeitintegration durch „dual-time stepping“

muß im Prinzip lediglich die gesamte explizite Zeitschrittsschleife so organisiert werden, daß sie innerhalb einer weiteren, den impliziten, physikalischen Zeitschritten entsprechenden Schleife abläuft. Die Aktualisierungsvorschrift für die Strömungsgrößen muß mit der Beziehung (4.47) bzw. (4.49) ausgetauscht werden. Ferner es ist erforderlich, die Lösungsgrößen zu den Zeitschritten n und $n - 1$ in zusätzlichen Datenfeldern bereitzuhalten. In Bild 4.8 ist die Vorgehensweise der Zeitintegration beim „dual-time stepping“ schematisch dargestellt.

Durch die implizite Zeitintegration lassen sich die Rechenzeiten für instationäre Strömungssimulationen drastisch reduzieren. Dazu hat das Verfahren im Gegensatz zu den beiden weiter oben beschriebenen Beschleunigungstechniken den Vorteil, daß im Verlauf einer Simulation in der Regel keine unerwarteten Stabilitätsprobleme auftreten. Es muß nur sichergestellt sein, daß die Integration in der Pseudozeit stabil verläuft, wobei auf die Erfahrungen mit stationären Strömungssimulationen zurückgegriffen werden kann. Im Falle sehr feiner Rechnetetze ist das Verfahren besonders effizient, da ja die Zahl der impliziten Zeitschritte lediglich so groß zu sein braucht, wie es für eine sinnvolle zeitliche Auflösung des interessierenden Strömungsphänomens nötig ist. Eine feinere räumliche Diskretisierung erfordert daher nicht unbedingt auch eine höhere zeitliche Auflösung. Eine weitere Reduktion der Rechenzeit mit dem impliziten Verfahren läßt sich außerdem dadurch erreichen, daß während der ersten Zyklen des instationären Phänomens, d. h. solange noch transiente Vorgänge im Strömungsfeld präsent sind, eine geringe Anzahl von inneren Iterationen verwendet wird. Erst während der letzten Zyklen, d. h. vor der eigentlichen Ergebnisausgabe, wird die Anzahl der Pseudozeititerationen erhöht, um die gewünschte Zeitgenauigkeit zu erreichen. Der Iterationsschritt, an dem ein impliziter Zeitschritt abgeschlossen ist, wird dann durch die Konvergenz der Pseudozeititerationen vorgegeben.

Bei räumlich gröberen Diskretisierungen oder bei der Simulation reibungsfreier Strömungen ist das Verfahren allerdings weniger geeignet. Explizite Zeitintegration mit geeigneten Beschleunigungstechniken ist in solchen Fällen meist effizienter. Dieser Umstand begründet sich durch den erhöhten

Verwaltungsaufwand aufgrund der impliziten Integration. Außerdem ist für die Konvergenz eines impliziten Schritts immer eine gewisse Mindestanzahl an Pseudozeititerationen notwendig, die zudem aufgrund der Multigridzyklen aufwendiger sind, als ein expliziter Integrationsschritt. Ein Effizienzvergleich zwischen dem zeitkonsistenten Multigridverfahren und der impliziten Zeitintegration für verschieden feine Diskretisierungen ist in [53] dokumentiert.

4.5.4 Vektorisierung und Parallelisierung

Die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Methoden zur Effizienzsteigerung von instationären Strömungsberechnungsverfahren erzielen die Rechenzeiteinsparung durch eine Erweiterung des Stabilitätsbereichs des Integrationsverfahrens, d. h. durch eine Vergrößerung der pro Integrations-schritt maximal möglichen Zeitschrittweite. Dies ist gleichbedeutend mit einer Verringerung des Rechenaufwandes. Damit spielt bei diesen Methoden immer das Lösungsverfahren die zentrale Rolle. Im Gegensatz dazu lassen sich mit den nachfolgend beschriebenen Methoden der Vektorisierung und Parallelisierung eines numerischen Verfahren im Normalfall keine Rechenoperationen oder gar Integrationsschritte einsparen. Bei der Parallelisierung ist sogar eher das Gegenteil der Fall, und es werden noch zusätzliche Anweisungen oder Unterprogrammaufrufe nötig. Diese Methoden erzielen die Effizienzsteigerung durch die Ausnutzung bestimmter Eigenschaften der Prozessorarchitektur bzw. der Computer-Hardware.

Vektorrechner sind speziell zur numerischen Lösung von Problemen geeignet, die viele gleichartige Rechenoperationen mit unterschiedlichen Zahlen erfordern. Sie ermöglichen durch eine spezielle Prozessorarchitektur die beinahe gleichzeitige Auswertung von ganzen Schleifen oder Teilen davon. Die Vektorlänge bei modernen Rechanlagen liegt dabei in der Größenordnung von 2^8 bis 2^9 . Die maximale Rechenleistung eines solchen Prozessors liegt ein bis zwei Größenordnungen höher als bei modernen skalaren Prozessoren. Die vektorisierte Abarbeitung einer Schleife im Vergleich zur skalaren Vorgehensweise ist in Bild 4.9 schematisch dargestellt.

Explizite Strömungsberechnungsprogramme sind aufgrund der Vielzahl der Berechnungsschleifen sehr gut für die Vektorisierung geeignet. Bei der Programmierung sollte lediglich darauf geachtet werden, daß bei geschachtelten Schleifen die innerste Schleife möglichst lang ist, bzw. daß kurze innere Schleifen ausprogrammiert werden. Rekursionsschleifen sind nur dann vektorisierbar, wenn die Rekursion nicht in der innersten Schleife auftritt. Aufgrund des Mehraufwandes für die Initialisierung der Vektoroperationen sind i. a. Vektorrechner bei kurzen Schleifen Skalarrechnern in der Rechengeschwindigkeit unterlegen. Allerdings kann auch nicht einfach die Reihenfolge der Schleifen so vertauscht werden, daß die jeweils längste Schleife zur innersten Schleife wird. Dies liegt daran, daß das Programm auf möglichst vie-

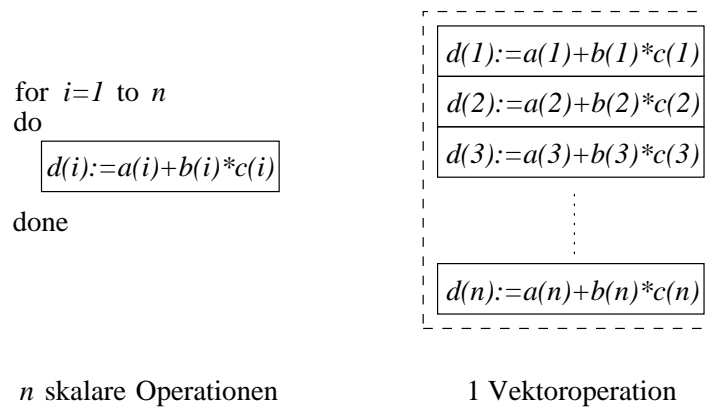


Bild 4.9: Schema der skalaren (links) und der vektorisierten (rechts) Bearbeitung von Berechnungsschleifen

len Rechnerarchitekturen effizient laufen soll. Die Rechenleistung der meisten Skalarrechner sinkt jedoch bei der Abarbeitung geschachtelter Schleifen aufgrund der aufwendigeren Berechnung der Speicheradressen deutlich, falls der innerste Schleifenindex nicht mit fortlaufenden Speicheradressen der in der Schleife vorkommenden Feldelemente einhergeht. Im gesamten Strömungslöser wurde durch die entsprechende Programmierung ein Vektorisierungsgrad von über 94 % realisiert. Die berechnungsintensiven Kernroutinen sind sogar zu über 97 % vektorisierbar.

Durch die Parallelisierung eines numerischen Verfahrens lassen sich verschiedene Teilaufgaben der Berechnung simultan auf mehreren Prozessoren erledigen. Prinzipiell sind dabei sehr unterschiedliche Ansätze denkbar, wobei die Einteilung zum Beispiel nach der Größe der jeweiligen Teilaufgaben erfolgen kann. Das sog. Microtasking ist noch am ehesten mit der Vektorisierung vergleichbar. Dabei wird z. B. bei geschachtelten Schleifen die äußerste Schleife unter den einzelnen Prozessoren aufgeteilt, die dann die inneren Schleifen parallel berechnen. Eine derartige Parallelisierung kann von entsprechenden Computerprogrammen, sog. Autoparallelisierern, durchgeführt werden, wobei das Ergebnis insbesondere bei kritischen Unterprogrammen, die zum Beispiel Rekursionen enthalten, sehr genau geprüft werden sollte, um unerwartete Resultate zu vermeiden. Für das vorliegende Problem erwies sich diese Parallelisierungsmethode als nicht besonders effektiv und wurde nach einigen Testrechnungen nicht weiter verfolgt.

Durch Macrotasking lassen sich größere, logisch zusammengehörende Teilaufgaben der Berechnung parallel ausführen, falls dies der Programmablauf ermöglicht. Ein denkbare Beispiel stellt die simultane Berechnung der konvektiven und der diffusiven Flüsse und der künstlichen Dissipation dar. Danach werden diese Anteile von einem einzelnen Prozessor gesammelt und zur Aktualisierung der Lösungsgrößen benutzt. Diese Art der Parallelisierung läßt sich nicht automatisiert durchführen, das Programm muß dazu entsprechend modifiziert werden.

Bei der Parallelisierung des Strömungslösers wurden die folgenden Anforderungen als wichtig erachtet:

1. Die zu erzielende Effizienzsteigerung soll nach Möglichkeit proportional zur Anzahl der eingesetzten Prozessoren sein.
2. Das Parallelprogramm soll ohne Modifikation als effizientes Seriellprogramm lauffähig sein. Es soll nur eine Version des Programmes geben, die alle Anforderungen erfüllt, um die weitere Programmpflege so einfach wie möglich zu halten.
3. Die Parallelisierung soll so erfolgen, daß das Programm universell und auf möglichst vielen Parallelrechnerplattformen einsetzbar ist.
4. Auf den Einsatz spezieller Software für bestimmte Rechnerarchitekturen soll verzichtet werden.
5. Die Option, auf mehreren untereinander vernetzten Workstations unterschiedlicher Hersteller parallel rechnen zu können, soll grundsätzlich bestehen.
6. Die Teilaufgaben der einzelnen Prozessoren sollen weitestgehend voneinander unabhängig ausführbar sein, um die Kommunikation der Prozesse miteinander gering zu halten.
7. Der Aufwand für die Parallelisierung soll der Implementierung einer Beschleunigungstechnik angemessen sein.
8. Die Programmstruktur soll durch die Parallelisierung nicht wesentlich verändert werden.

Eine programmiertechnische Analyse des Strömungsberechnungsprogrammes bezüglich der o. a. Gesichtspunkte ergab eine geradezu ideale Eignung der bestehenden Programmstruktur für eine Parallelisierung auf Basis der einzelnen Gitterblöcke des Rechengebiets. Die Parallelisierung wurde daher so realisiert, daß jedem Prozessor ein oder mehrere Gitterblöcke zugewiesen werden können. Damit ist jeder Prozessor bei seinen Blöcken für die gesamte Strömungsberechnung einschließlich der Integration, dem Einbringen der Randbedingungen und der Ergebnisausgabe zuständig. Die Prozesse müssen daher – abgesehen vom Austausch einiger wichtiger globaler Kenngrößen der Simulation — lediglich zum Austausch der Strömungsgrößen an den inneren Rechengebietsrändern miteinander kommunizieren. Diese Kommunikation zwischen den einzelnen Prozessen erfolgt mit Hilfe des Parallelisierungsstandards „message-passing interface“ (MPI), wofür eine Implementierung in Form einer nichtkommerziellen, frei erhältlichen Programm-bibliothek erhältlich ist [66]. Ein Beispiel für die Aufteilung eines aus neun Gitterblöcken bestehenden Rechengebiets für eine eineinhalbstufige Turbine auf sechs Prozesse ist in Bild 4.10 dargestellt. Um den größtmöglichen Nutzen aus der Parallelisierung zu ziehen, ist darauf zu achten, daß alle beteiligten Prozessoren möglichst gleichmäßig ausgelastet werden und nicht ein oder mehrere Prozesse auf einen anderen warten müssen, bis dieser zum nächsten

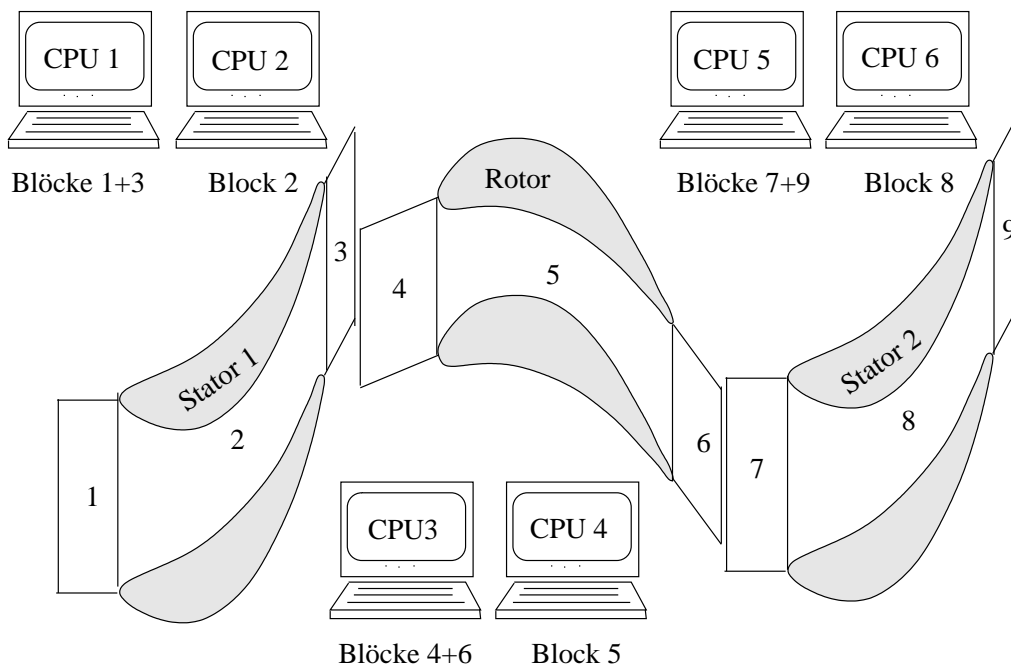


Bild 4.10: Parallelisierung der Strömungsberechnung auf Basis der Multi-block-Topologie des Rechengebiets: neun Gitterblöcke werden auf sechs Prozesse verteilt

Block-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte $\times 10^3$	27,5	87,5	42,5	59,4	93,4	48,1	4,3	1,2	6,8	3,5

Tabelle 4.2: Testfall zur Bestimmung des Speed-Up des Parallelprogramms: Zahl der Knotenpunkte der einzelnen Gitterblöcke

Datenaustausch bereit ist. Dieses sog. „load balancing“ wird in erster Linie dadurch erreicht, daß die Zuordnung der Gitterblöcke auf die Prozessoren entsprechend der Leistungsfähigkeit der Prozessoren erfolgt.

Die durch die Parallelisierung erreichte Beschleunigung, der sog. Speed-Up, berechnet sich als Verhältnis der spezifischen Rechenzeit des seriellen zu der des parallelen Programms. Zur Untersuchung der Beschleunigung durch die Parallelisierung wurde bewußt kein akademischer Testfall konstruiert, sondern ein typisches Rechengitter für eine typische Turbomaschinenanwendung zugrundegelegt. Beim verwendeten Testfall handelt es sich um eine Dampfturbinenendstufe, bei der der radiale Laufschaufelspalt mitmodelliert wurde. Die normale Blockaufteilung, wie sie bei der Gittergenerierung entsteht, wurde beibehalten, da der ohne Zusatzaufwand erreichbare Speed-Up im Mittelpunkt der Studie stand. Das gesamte Rechengebiet besteht daher aus zehn Gitterblöcken mit z. T. sehr unterschiedlichen Gitterpunktezahlen, siehe Tabelle 4.2. Charakteristisch sind die geringen Punktezahlen der Blöcke im Spaltbereich sowie die relativ großen Punktezahlen in den Schaufelkanälen. Vor diesem Hintergrund ist daher auch Bild 4.11 zu interpretie-

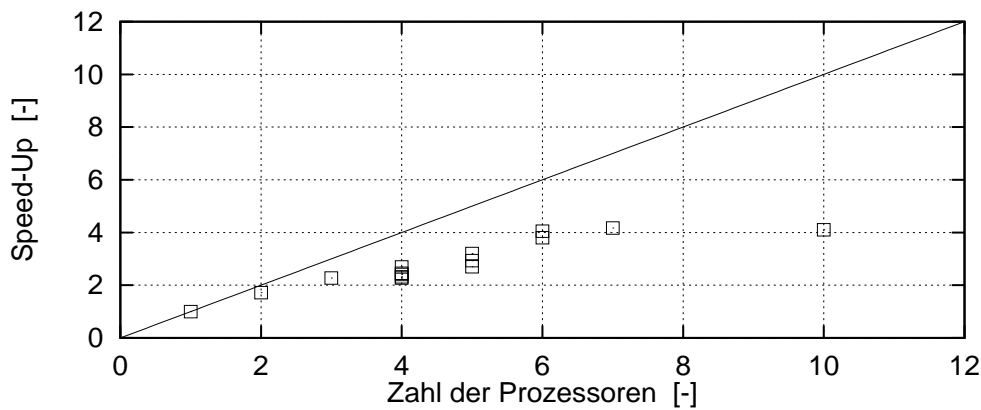


Bild 4.11: Speed-Up Diagramm für die Strömungssimulation in einer Dampfturbinenendstufe unter Berücksichtigung des Radialspalts, 10 Gitterblöcke mit 1.155 bis 93.357 Knotenpunkten (insgesamt 374.132 Punkte)

ren, das den mit dem parallelisierten Strömungslöser erzielten Speed-Up in Abhängigkeit von der Zahl der verwendeten Prozessoren zeigt. Die Streuung der Ergebnisse bei manchen Prozessorzahlen ergibt sich aus den verschiedenen Möglichkeiten, die Blöcke auf die einzelnen Prozesse zu verteilen. Es hat sich hierbei gezeigt, daß es oftmals günstiger ist, von einer Verteilung mit möglichst gleichmäßigen Punktezahlen etwas abzuweichen und stattdessen eher Blöcke mit gemeinsamen direkten Koppelgrenzen einem Prozeß zuzuordnen, um die Kommunikation zwischen den Prozessen zu minimieren. Ein fast linearer Speed-Up ist mit zwei Prozessoren erreichbar, wenn jedem Prozeß jeweils ein komplettes Schaufelgitter zugeordnet wird. Wie der Tabelle 4.2 zu entnehmen ist, besteht das Rechengitter aus sechs größeren und vier kleineren Blöcken. Daher ist bei einer Verwendung von bis zu sechs Prozessoren ein Anstieg des Speed-Up zu beobachten. Bei mehr als sechs Prozessoren erhöht sich die Beschleunigung des vorliegenden Testfalls nicht weiter, weil dann lediglich die deutlich kleineren Blöcke auf zusätzliche Prozesse verteilt werden, obwohl sie noch problemlos z. B. von dem Prozeß, dem Block 1 zugeordnet ist, mitbetreut werden könnten.

Durch die gewählte, einfache Form der Parallelisierung läßt sich somit bereits ohne Mehraufwand eine deutliche Reduktion der Rechenzeit realisieren, die insbesondere für feine Diskretisierungen mehrstufiger Anwendungsfälle geeignet ist. Durch gewisse Anstrengungen bei der Gittergenerierung ließen sich die erzielbaren Beschleunigungen allerdings nochmals deutlich erhöhen. Erste, mit dem Parallelprogramm berechnete Ergebnisse zu einem sehr fein diskretisierten Testfall wurden in [53] vorgestellt und später in [88] zusammengefaßt.

4.5.5 Kombinationen verschiedener Techniken

Die kürzesten Rechenzeiten ergeben sich durch die Kombination verschiedener Beschleunigungstechniken. Vektorisierung bzw. Parallelisierung lassen sich generell mit den anderen beschriebenen Methoden kombinieren, wobei sich die Gesamtbeschleunigung als Produkt der Beschleunigungen der einzelnen Methoden ergibt. Die Kombination von implizitem Residuenglättungen für zeitgenaue, explizite Zeitintegration bzw. von zeitkonsistentem, explizitem Multigrid mit der Methode der impliziten Zeitintegration durch „dual-time stepping“ schließt sich aufgrund der konträren Ansätze aus. Das implizite Residuenglättungen läßt sich jedoch mit dem zeitkonsistenten Multigridverfahren kombinieren. Allerdings fällt die mit dieser Kombination erzielbare Beschleunigung geringer aus, als wie sie sich durch die formale Multiplikation der Beschleunigungen der einzelnen Verfahren ergibt. Dies hängt damit zusammen, daß die zugrundeliegenden Stabilitätskriterien nicht gänzlich voneinander unabhängig sind.

Die durch die Kombination von Vektorisierung, Parallelisierung und impliziter Zeitintegration erhaltenen Simulationsergebnisse sind in [54] dokumentiert. Die Konvergenz der Pseudozeitintegration wurde hierbei zusätzlich durch lokale Zeitschrittweiten, implizites Residuenglättungen für lokale Zeitschrittweiten und Full-Multigrid-Zyklen beschleunigt.

5 Instationäre Strömung in einer Kaltluftturbine

Am Beispiel der instationären Durchströmung einer einstufigen Kaltluftturbine mit anschließendem zweiten Leitrad sollen nun die Leistungsfähigkeit und die Grenzen des entwickelten Verfahrens aufgezeigt werden. Hierzu werden die Simulationsergebnisse für die stationäre, die zeitgemittelte instationäre und die instationäre Strömung analysiert und mit detaillierten experimentellen Daten verglichen. Die beobachteten Strömungsphänomene werden dargestellt und erläutert.

5.1 Beschreibung des Testfalls

Am Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen (IST) der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule (RWTH) in Aachen wurden im Rahmen mehrerer Forschungsprojekte der Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen (FVV) detaillierte stationäre und instationäre Strömungsmessungen an einer eineinhalbstufigen Kaltluftturbine mit kleinem Verhältnis von Schaufelhöhe zu Sehnenlänge durchgeführt, siehe z. B. [83, 85, 86, 87]. Teile der Meßdaten dienen als frei erhältlicher, instationärer Testfall des „ERCOFTAC Seminar and Workshop on 3D Turbomachinery Flow Prediction“ [31].

5.1.1 Turbinenprüfstand

Ein Schnitt durch den Turbinenprüfstand des IST ist in Bild 5.1 abgebildet. Für die beiden Statoren der Turbine wurde das Traupel-Profil [79] verwendet, wobei die Profilgeometrie, die Schaufelzahl und der Staffelungswinkel in beiden Leitschaufelreihen identisch sind. Die Laufschaufeln haben ein modifiziertes VKI-Profil [56]. Der Radialspalt beträgt 0,4 mm. Alle Schaufeln sind unverwunden. Die Leitschaufeln sind über der Hinterkante und die Laufschaufeln über dem Profilschwerpunkt aufgefädelt. Bild 5.2 zeigt die Turbine im Mittenschnitt zusammen mit den Geschwindigkeitsdreiecken, den Winkeldefinitionen und wesentlichen Designparametern. Die Drehzahl im Auslegungspunkt liegt bei 3.500 U/min. Die Drehzahlschwankungen bei den Messungen waren kleiner als 0,2%. Die Totaltemperatur am Turbineneintritt wurde durch Kühlung der Versorgungsluft am Verdichteraustritt im Bereich

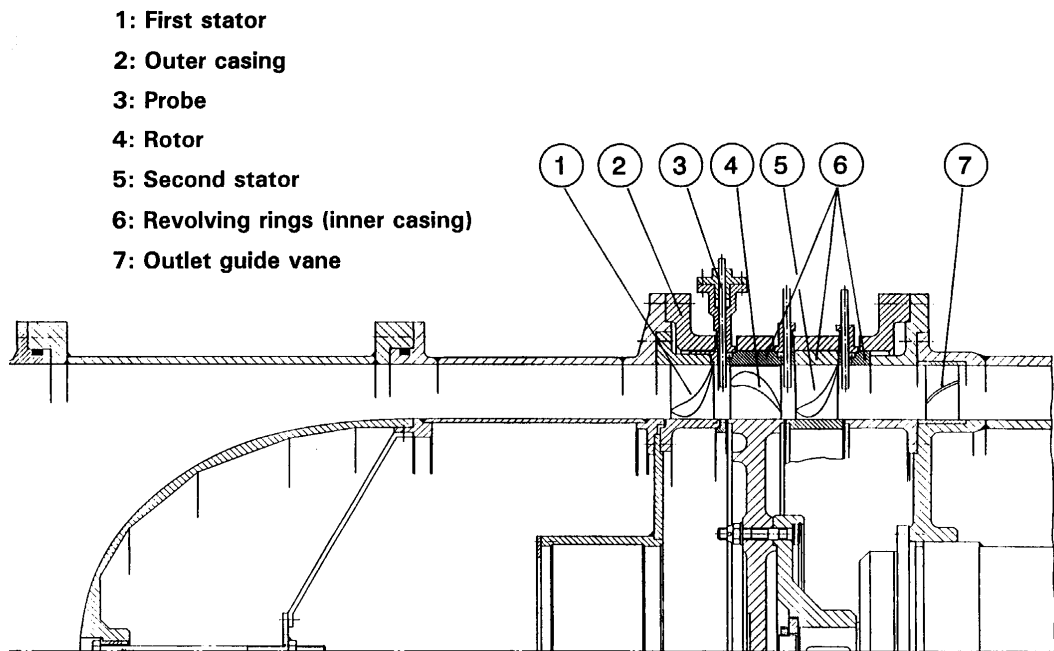


Bild 5.1: Turbinenprüfstand [87]

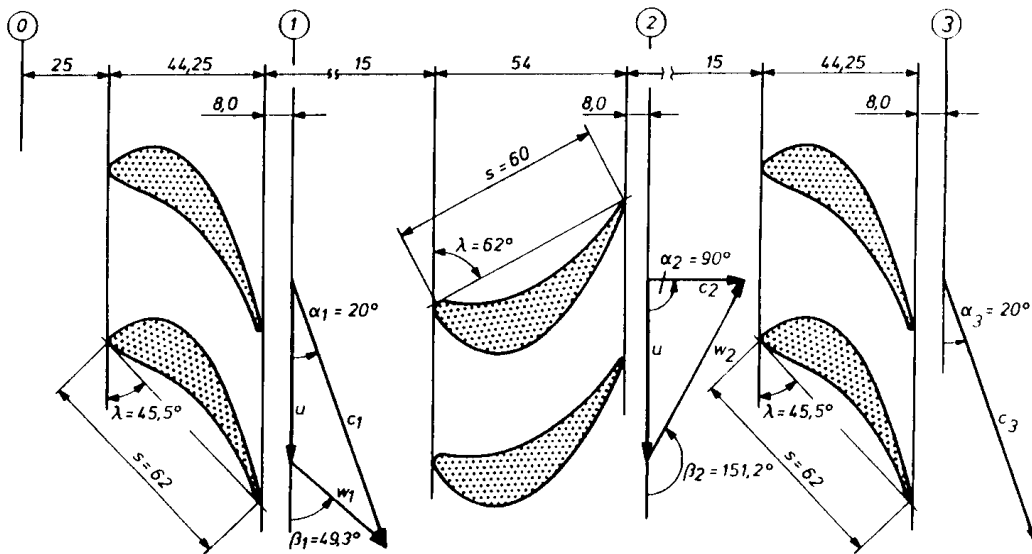
von $308\text{ K} \pm 0,5\text{ K}$ gehalten. Die Machzahl am Turbineneintritt wurde mit einer Genauigkeit von etwa 0,5 % konstant gehalten.

5.1.2 Experimentelle Untersuchungen

Dieser Abschnitt enthält eine knappe Zusammenfassung der am IST in Aachen durchgeführten experimentellen Untersuchungen, bei denen die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Meßergebnisse gewonnen wurden. Der nachfolgende Text ist im wesentlichen aus [88] entnommen. Detailliertere Beschreibungen sind in [83, 85, 86, 87] zu finden.

Die Strömungsfelder wurden 8 mm hinter den Schaufeln (entsprechend den Ebenen 1–3 in Bild 5.2) mit pneumatischen Fünflochsonden, pneumatischen Grenzschichtsonden und Hitzdrahtsonden gemessen. Die Hitzdrahtsonden wurden dabei über eine Leitradteilung an 17 Umfangspositionen und 20 radialen Positionen traversiert, wobei der Bereich von 9 % bis 91 % Kanalhöhe abgedeckt wurde. Im Kanal zwischen den Schaufeln des zweiten Leitrads wurden mit einer speziellen Hitzdrahtsonde, deren Schaft und Messvolumen einen Durchmesser von nur 1,9 mm hat, Strömungsfeldmessungen durchgeführt. Hierbei wurde durch 92 radiale Traversierungen eine hohe räumliche Auflösung erzielt. Die Lage der Meßorte im Kanal des zweiten Stators ist in Bild 5.3 dargestellt. Ein Sicherheitsabstand wurde eingeführt, um einerseits eine Beschädigung der Sonde zu vermeiden und andererseits die Wechselwirkungen der Sonde mit der Grenzschichtströmung zu minimieren.

Die Messungen in den Ebenen hinter den Schaufeln und im Kanal des zwei-



aspect ratio h/s	0.887	0.917	0.887
pitch (midspan) t	47.6 mm	41.8 mm	47.6 mm
blade number	36	41	36
Reynolds number, based on chord and exit velocity	6.8×10^5	4.9×10^5	6.9×10^5
rotational speed	---	3500 rpm	---
tip diameter	600 mm	600 mm	600 mm

Bild 5.2: Turbinengeometrie und Designparameter [87]

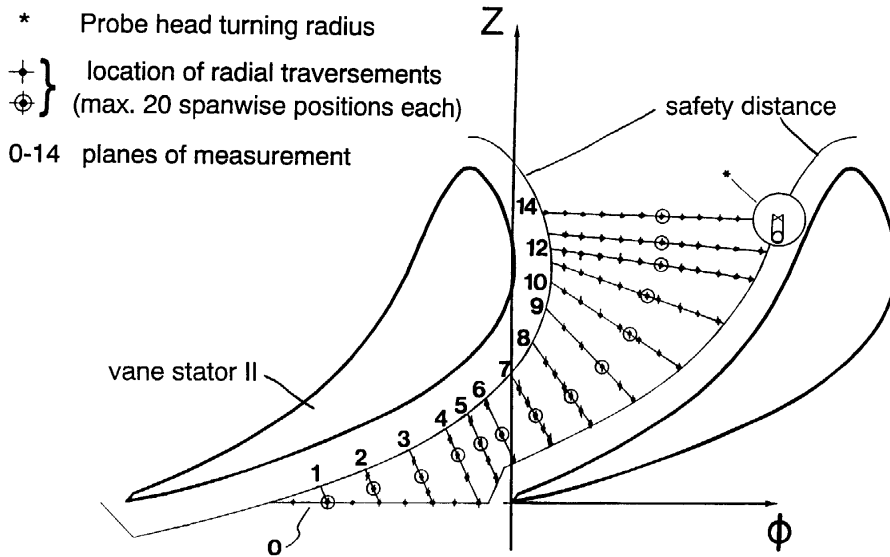


Bild 5.3: Lage der Meßorte im Kanal des zweiten Leittrads [88]

ten Leitrades wurden bei unterschiedlichen Betriebspunkten und Stator-Stator-Positionen durchgeführt. Bei den Messungen in den Ebenen 1–3 lag der Massenstrom bei etwa 8 kg/s. Dieser Betriebspunkt wird im folgenden mit „großer Massenstrom“ bezeichnet. Das zweite Leitrad war dabei gegenüber dem ersten Leitrad um 2° entgegen der Drehrichtung des Rotors verdreht. Bei den Messungen im zweiten Leitrad hingegen herrschte ein „kleiner Massenstrom“ von etwa 7 kg/s, wobei das zweite Leitrad gegenüber der Stellung beim großen Massenstrom um eine halbe Statorteilung in Rotationsrichtung verdreht wurde. Dadurch ergibt sich ein deutlich unterschiedliches Strömungsverhalten im zweiten Leitrad, auf das in Abschnitt 5.2.2 noch genauer eingegangen wird.

Während der Messungen wurden die zeitabhängigen Signale sowie das Trigger-Signal der Rotordrehung mit einer Mehrkanal-Bandmaschine auf handelsüblichen Videokassetten aufgezeichnet. Alle Geräte wurden von einem PC gesteuert. Mit einem Voltmeter wurden die zeitgemittelten Spannungen gemessen, die auf dem Computer gespeichert wurden, um stationäre Geschwindigkeiten und Strömungswinkel zu berechnen, die zur Überwachung der Testläufe dienten.

Zur Auswertung der aufgezeichneten Daten wurde die Bandmaschine an ein Mehrkanal-Meßwerterfassungssystem angeschlossen. Beim Abspielen des Bandes wurden für 128 Rotorumdrehungen jeweils 512 Zeitpunkte aufgezeichnet, wodurch eine Zeitspanne von etwa acht Schaufelwechselferioden abgedeckt wurde. Die so erhaltenen Daten wurden schließlich durch eine Ensemble-Mittelung [30] auf 64 verschiedene Stator-Rotor-Positionen innerhalb einer Rotorteilung reduziert und kalibriert.

5.1.3 Numerische Untersuchungen

Es wurden zwei Sätze von Simulationen durchgeführt, um die beiden in den Experimenten eingestellten Betriebspunkte zu berücksichtigen. Jeder dieser Sätze enthielt Berechnungen auf zwei unterschiedlich feinen Rechengittern. Die wesentlichen Kenngrößen der Rechnetze sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Eine dreidimensionale Ansicht über drei Schaufelteilungen des groben Rechengitters ist in Bild 5.4 abgebildet. Mit der feinen Diskretisierung wird zusätzlich noch der Einfluß des Turbulenzmodells auf die sich einstellende instationäre Strömung durch einen Vergleich der Ergebnisse vor und nach der Implementierung der in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Modifikationen untersucht. Außerdem wird die Effizienz verschiedener Beschleunigungstechniken dargestellt. Dazu wird die zeitkonsistente Mehrgittermethode der impliziten Zeitintegration durch „dual-time stepping“ gegenübergestellt.

Als Anfangsbedingung für das instationäre Strömungsfeld dienten die Ergebnisse vorausgegangener stationärer Simulationen. Bei den instationären

Diskretisierung	grob	fein
Gesamtzahl der Knotenpunkte	294.423	2.116.941
Rechengitter für das 1. Leitrad	$65 \times 33 \times 43$	$117 \times 73 \times 65$
Wandabstand y^+ im 1. Leitrad	< 19	< 7
Rechengitter für das Laufrad	$65 \times 33 \times 47$	$161 \times 73 \times 73$
Wandabstand y^+ im Laufrad	< 12	< 4
Rechengitter für das 2. Leitrad	$65 \times 33 \times 43$	$137 \times 73 \times 65$
Wandabstand y^+ im 2. Leitrad	< 19	< 7
Punkte im Radialspalt (Laufrad)	2.925	31.185

Tabelle 5.1: Kenngrößen der Rechnetze

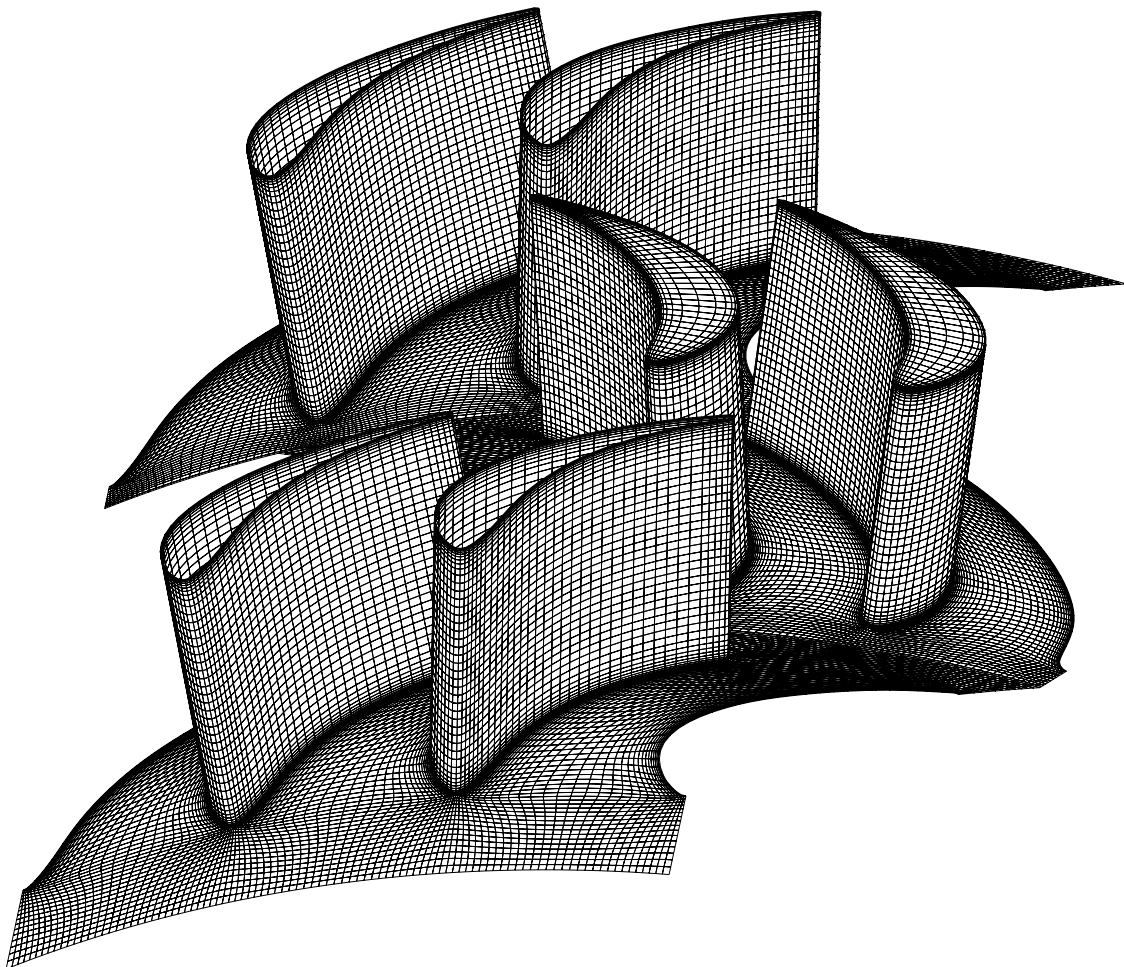


Bild 5.4: Rechengitter für die Kaltluftturbine (grobe Diskretisierung)

Feingitterrechnungen mit „dual-time stepping“ wurden zunächst 16 Schaufelwechselformen mit nur wenigen inneren Iterationen berechnet. Dadurch stellte sich recht schnell ein zeitlich periodisches Strömungsfeld ein. Danach wurden nochmals gut 2 Perioden gerechnet, in denen die Pseudozeititerationen auskonvergiert wurden. Auch bei den Simulationen auf dem gröbe-

Simulation	grob (ZKMG)	grob (DTS)	fein (DTS)
Rechnertyp	Workstation	Workstation	Vektor-Parallel-Supercomputer
Rechnerarchitektur	Digital Alpha	Digital Alpha	NEC SX-4
Anzahl Prozessoren	1	1	32
davon verwendet	1	1	4
max. Leistung/Prozessor	140 Mflops	140 Mflops	2 Gflops
Leist. je Proz. (Mflops)	n. b.	n. b.	350/222/409/362
max. Vektorlänge	1	1	256
eff. Vektorlänge je Proz.	1	1	87/32/99/87
Vekt.grad je Proz. (%)	—	—	94/91/95/94
Gesamtrechenzeit	ca. 197 h	ca. 230 h	ca. 75 h
spez. Rechenzeit (s.S. 17)	90,0 μ s	120,0 μ s	4,4 μ s
Iterationsschritte	ca. 27.000	ca. 21.000	ca. 21.000
Zeitschritte/Periode	1.500 (expliz.)	100 (impliz.)	100 (impliz.)
Anzahl Multigridebenen	n. b.	3	5
Hauptspeicherbedarf	64 MB	91 MB	1.429 MB
Speicher/reelle Zahl	4 bytes	4 bytes	8 bytes
Speicher/Knotenpunkt	0,22 kB	0,32 kB	0,69 kB

Tabelle 5.2: Vergleich der Rechenläufe

ren Gitter wurden so viele Schaufelwechselperioden berechnet, bis das Strömungsfeld ausreichend periodisch war. Erst danach wurden die Ergebnisse ausgegeben.

Die Rechnungen mit der groben Diskretisierung wurden auf einer DEC Alpha 600 Workstation mit einer Prozessortaktrate von 333 MHz durchgeführt. Dabei wurden jeweils die zeitkonsistente Mehrgittermethode (ZKMG) oder das implizite „dual-time stepping“ (DTS) als Beschleunigungstechnik eingesetzt. Die Konvergenz der Pseudozeititeration beim „dual-time stepping“ wurde durch lokale Zeitschrittweitensteuerung, implizites Residuenglättten und ein Full-Multigrid-Verfahren beschleunigt. Die Simulationen auf dem feinen Rechnernetz wurden im Rahmen des mit Bundesmitteln geförderten Vorhabens „High Performance Computing in Science and Engineering“ [58] innerhalb des Projektes „Simulation der instationären Durchströmung von ein- und mehrstufigen Turbomaschinen“ auf dem Vektor-Parallel-Supercomputer NEC SX-4 des Höchstleistungsrechenzentrums Stuttgart durchgeführt. Allerdings wurden hier nur die Berechnungen mit „dual-time stepping“ zu Ende geführt. Die Simulationen mit zeitkonsistentem Multigrid wurden abgebrochen, weil die für eine stabile Integration erforderliche Anzahl von expliziten Integrationsschritten sich mit etwa 7.500 Zeitschritten pro Periode als unwirtschaftlich herausstellte. Ein Vergleich der Rechenzeiten und der Leistungsdaten der einzelnen Rechenläufe ist in Tabelle 5.2 dargestellt. Die Prozessorleistung ist darin als Anzahl von Gleitkommaoperationen je Sekunde angegeben (flops: floating point operations per second).

5.2 Ergebnisse

Im erklärenden Text sowie in den Diagrammen und Tabellen werden die folgenden Winkeldefinitionen verwendet: Für den absoluten tangentialen Strömungswinkel oder Tangentialwinkel α gilt:

$$\alpha = 90^\circ + \arctan\left(\frac{v_\varphi}{v_x}\right) \quad (5.1)$$

Der relative tangentiale Strömungswinkel oder relative Tangentialwinkel β ist analog definiert:

$$\beta = 90^\circ + \arctan\left(\frac{w_\varphi}{w_x}\right) \quad (5.2)$$

Der absolute radiale Strömungswinkel oder Radialwinkel γ wird wie folgt berechnet:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{v_r}{\sqrt{v_x^2 + v_\varphi^2}}\right) \quad (5.3)$$

Die Sekundärgeschwindigkeit \vec{v}_{sec} ist definiert als Differenz einer lokalen Geschwindigkeit \vec{v}_{loc} und einer mittleren Geschwindigkeit \vec{v}_{avg} :

$$\vec{v}_{\text{sec}} = \vec{v}_{\text{loc}} - \vec{v}_{\text{avg}} \quad (5.4)$$

Bei azimuthalen Schnittebenen (Bilder 5.19 und 5.25) wird als mittlere Geschwindigkeit die über die Stator- bzw. Rotorperiode zeitlich im jeweiligen Relativsystem gemittelte Geschwindigkeit verwendet, abhängig davon, ob sich der betrachtete Punkt im Stator- oder im Rotorgebiet befindet. Es gilt für die Punkte des Statorgebiets:

$$\vec{v}_{\text{sec}} = \vec{v} - \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} \vec{v} dt \quad (5.5)$$

Für die Punkte des Rotorgebiets gilt:

$$\vec{v}_{\text{sec}} = \vec{w} - \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} \vec{w} dt \quad (5.6)$$

Bei senkrecht zur Maschinenachse verlaufenden Schnittebenen, d. h. bei allen Sekundärströmungsbildern mit Ausnahme der Bilder 5.19 und 5.25, ist eine zeitlich gemittelte Geschwindigkeit als mittlere Geschwindigkeit ungeeignet, weil dadurch einige der wesentlichen Sekundärströmungseffekte nicht in der gewünschten Deutlichkeit gezeigt werden können. Beispielsweise weisen die Kanalwirbel am Austritt des Schaufelkanals, in dem sie entstanden sind, bezüglich ihrer Lage und Stärke über weite Teile einer zeitlichen Periode nur eine relativ geringe Zeitabhängigkeit auf, so daß sie während dieser

Zeitdauer als Differenz zum Zeitmittel der Strömung nur schwer zu erkennen wären. Aus diesem Grund wird für diese Fälle eine andere Definition der Sekundärgeschwindigkeit verwendet: Als lokale Geschwindigkeit wird stets die Absolutgeschwindigkeit verwendet. Die mittlere Geschwindigkeit hat denselben Betrag wie die lokale Geschwindigkeit und einen tangentialen Strömungswinkel, der als abstandsgewichteter Mittelwert $\bar{\alpha}^r$ der Tangentialwinkel aller Punkte berechnet wird, die sich auf der radial verlaufenden Gitterlinie durch den betrachteten Punkt befinden. Der Radialwinkel wird entsprechend als abstandsgewichteter Mittelwert $\bar{\gamma}^\varphi$ der Radialwinkel aller Punkte berechnet, die sich auf der in Umfangsrichtung verlaufenden Gitterlinie durch den betrachteten Punkt befinden:

$$\vec{v}_{\text{sec}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{avg}}(|\vec{v}|, \bar{\alpha}^r, \bar{\gamma}^\varphi) \quad (5.7)$$

Bei allen Abbildungen, die Strömungsgrößen in Schnittebenen senkrecht zur Maschinenachse zeigen, steht der Beobachter stromabwärts der betrachteten Ebene mit Blick entgegen der Strömungsrichtung. Der Rotor führt dann eine Bewegung entgegen dem Uhrzeigersinn aus. Bei ringförmig angeordneten Bildern, die instationäre Momentaufnahmen zeigen, nimmt die Zeit entgegen dem Uhrzeigersinn zu.

Die Definition des Referenzzeitpunkts $t = 0$ bei den Messungen weicht von derjenigen bei den numerischen Untersuchungen (siehe Abschnitt 4.2.2) ab. Da das IST freundlicherweise einige der Meßergebnisse als fertige Bilder zur Verfügung stellte, wurde für die Vergleiche von Messung und Rechnung die Zeitindizierung des IST übernommen. Bei diesem System wird eine Statorwechselperiode in 64 zeitlich äquidistante Abschnitte unterteilt, die in den Bildern 5.17 bis 5.40 mit TimeIndex 1 bis TimeIndex 64 bezeichnet werden.

5.2.1 Gemittelte Strömungsgrößen

Umfangsgemittelte Radialverteilungen

Zunächst werden die Radialverteilungen der Strömungsgrößen an den Meßebenen 0–3 ausgewertet und mit entsprechenden pneumatischen Sondenmessungen verglichen, um die Wiedergabe der mittleren Strömung durch die numerischen Berechnungen zu untersuchen. Zusätzlich zu den experimentell ermittelten Daten enthalten daher die Diagramme in den Bildern 5.5 bis 5.8 die Ergebnisse aus vier verschiedenen Simulationsrechnungen. Diese sind

1. die umfangsgemittelten Verteilungen des zeitlich gemittelten Strömungsfeldes einer instationären Simulation mit dem modifizierten Turbulenzmodell auf dem feinen Gitter (Bildlegende: zeitgemittelt, mTM, fein),

Datensatz	kleiner Massenstrom	großer Massenstrom
in den experimentellen Daten angegeben	6,67 kg/s	8,02 kg/s
feines Gitter, Turbulenzmodell modifiziert	6,68 kg/s	8,06 kg/s
grobes Gitter, Turbulenzmodell nicht modifiziert	6,69 kg/s	8,08 kg/s
feines Gitter, Turbulenzmodell nicht modifiziert	7,01 kg/s	8,45 kg/s
Integration der Daten aus den Feldmessungen [84]	7,38 kg/s	8,72 kg/s

Tabelle 5.3: Massenströme für die beiden Betriebspunkte

2. die umfangsgemittelten Verteilungen des zeitlich gemittelten Strömungsfeldes einer instationären Simulation auf dem feinen Gitter vor der Modifikation (nicht modifiziert) des Turbulenzmodells (Bildlegende: zeitgemittelt, nmTM, fein),
3. die umfangsgemittelten Verteilungen der Ergebnisse einer stationären Simulation auf dem feinen Gitter nach der Modifikation des Turbulenzmodells (Bildlegende: stationaer, mTM, fein) und
4. die umfangsgemittelten Verteilungen des zeitlich gemittelten Strömungsfeldes einer instationären Simulation auf dem groben Gitter vor der Modifikation des Turbulenzmodells (Bildlegende: zeitgemittelt, nmTM, grob).

Nachfolgend werden die einzelnen Simulationen aus Gründen einer einfacheren Bezugnahme häufig mit Variante 1–4 entsprechend der obigen Nummerierung bezeichnet. Bei der Interpretation der Bilder ist zu berücksichtigen, daß für die neueren Simulationen mit dem modifizierten Baldwin–Lomax–Modell das Druckgefälle etwas reduziert wurde. Beim kleinen Massenstrom wurde hierzu der mittlere Austrittsdruck um etwa 50 mbar oder 4,6 % und beim großen Massenstrom um etwa 70 mbar oder 6,4 % erhöht. Dies geschah in der Absicht, eine bessere Übereinstimmung mit den in den Meßdaten angegebenen Massenströmen zu erreichen. Unglücklicherweise stellte sich erst nach Abschluß der Simulationen bei einer Diskussion mit Ralf Walraevens vom IST heraus, daß die in den Meßdaten angegebenen, auf Korrelationen beruhenden Massenstromwerte eine gewisse Unsicherheit besitzen. Neuere Auswertungen durch Integration der Strömungsfeldmessungen [84] ergeben deutlich höhere Massenströme, so daß sich die Verringerung des Druckgefälles im Nachhinein sogar als kontraproduktiv herausgestellt hat. Die ermittelten Massenströme sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Auffallend sind die relativ großen Unterschiede zwischen den berechneten Massenströmen des groben und des feinen Gitters beim nichtmodifizierten Turbulenzmodell. Obwohl hierbei jeweils dieselben Randbedingungen verwendet wurden, liegen die Massenströme beim feinen Gitter um etwa 4,5 % höher. Dies ist ein deutliches Indiz dafür, daß die grobe Diskretisierung mit knapp 100.000 Knotenpunkten pro Schaufelkanal bei weitem noch nicht ausreicht und zu signi-

fikanten numerischen Verlusten führt.

Bei der Auswertung der nachfolgenden Bilder ist ferner zu berücksichtigen, daß in den Experimenten im Bereich der Seitenwandgrenzschichten, d. h. von 0–10 % und von 90–100 % Kanalhöhe, spezielle Grenzschichtsonden eingesetzt wurden. Die entsprechenden Messungen wurden allerdings bei leicht unterschiedlichen Betriebspunkten durchgeführt. Außerdem ist im wandnahen Bereich mit erhöhten Meßfehlern zu rechnen. Alles in allem ist daher vor allem in den Druck- und Temperaturverteilungen eine leichte Inkonsistenz der Meßdaten zu verzeichnen, die sich in erster Linie in den Druck- und Temperaturverteilungen niederschlägt [84].

Die nachfolgend näher beschriebenen Bilder zeigen eine Auswahl von Strömungsgrößen aus den Simulationsrechnungen für den kleinen Massenstrom. Der Vollständigkeit halber sind noch einige weitere Strömungsgrößen sowie die Ergebnisse für den großen Massenstrom im Anhang E aufgeführt.

In den Diagrammen von Bild 5.5 sind die Strömungsgrößen für die Ebene 0, d. h. am Rechengebietseintritt dargestellt. Der experimentell ermittelte Totaldruck, die Zuströmtempo und die Strömungswinkel sind Vorgabegrößen. Bei den Varianten 2 und 4 wurden die experimentell ermittelten Strömungswinkel verwendet, während bei den neueren Varianten 1 und 3 die Streuungen in den gemessenen Radialverteilungen der Strömungswinkel als Meßunsicherheiten betrachtet und eine völlig drallfreie und achsparallele Zuströmung vorgegeben wurde. Diese Änderung in den Randbedingungen wirkt sich auf die Druck- und Machzahlverteilungen aus und führt dazu, daß bei den Varianten 1 und 3 die radialen Gradienten besser wiedergegeben werden. Die zu geringen Massenströme in den Simulationsrechnungen gehen mit zu niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten und entsprechend zu hohen statischen Drücken einher.

Die Diagramme in Bild 5.6 zeigen umfangsgemittelte Werte der absoluten Strömungsgrößen für Ebene 1, also an der Koppellebene zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad. Ein Vergleich der Absolutwerte der statischen Drücke läßt die in Tabelle 5.3 angegebenen Unterschiede in den Massenströmen zwischen den einzelnen Varianten and der Messung als Druckdifferenzen wiedererkennen. Läßt man die Absolutwerte allerdings außen vor und betrachtet lediglich die Gradienten und die Form der Kurven, so ist eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen den Varianten 1 und 3 und den Meßwerten erkennbar. Bemerkenswert ist die Lage der durch die Sekundärströmungen verursachten Verlustzentren bei etwa 12 % und 85 % Kanalhöhe, die durch die Varianten 1 und 3 wesentlich besser wiedergegeben werden als durch die Varianten 2 und 4, wo insbesondere im Nabenbereich Defizite erkennbar sind. Allgemein kommen bei diesen Varianten die Wirbelzentren zu nahe an den Seitenwänden zu liegen. Aber auch die absoluten Totaldruckverluste stimmen bei diesen Varianten nicht so gut mit den Meßwerten überein wie bei den anderen Varianten. Die zeitlich gemittelte instationäre Lösung weist an dieser Stelle bereits Unterschiede zur stati-

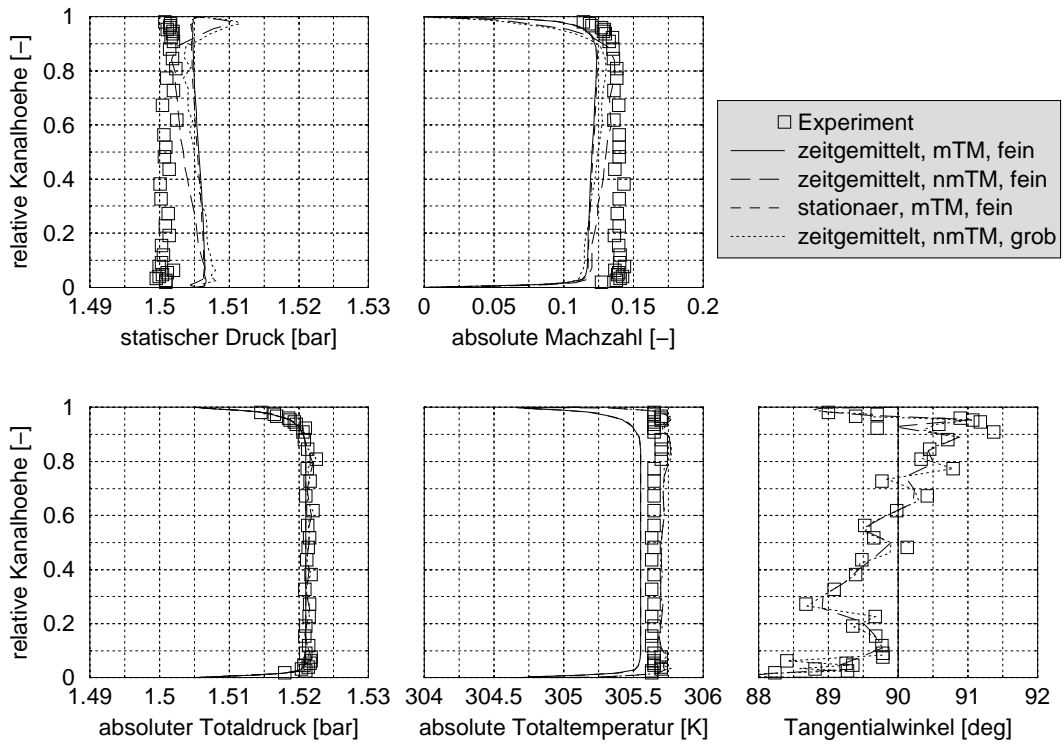


Bild 5.5: Anströmung des 1. Leitrades (kleiner Massenstrom)

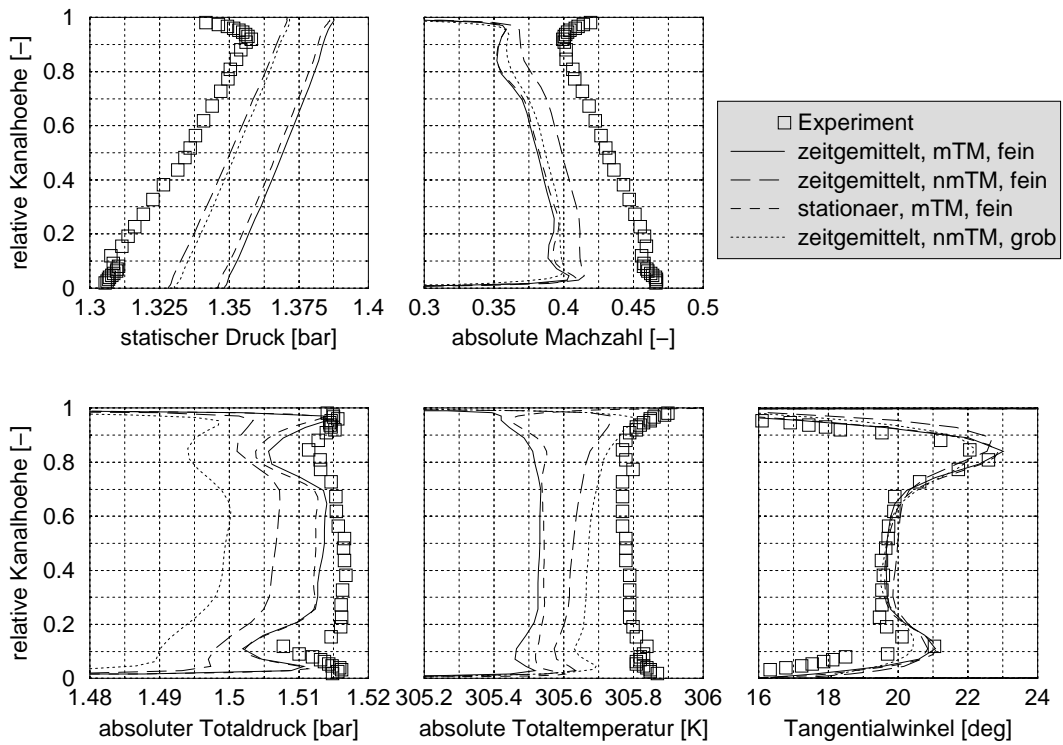


Bild 5.6: Abströmung 1. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei kleinem Massenstrom

onären Lösung auf, die in der Totaldruckverteilung besonders deutlich werden und auf den instationären Einfluß des Rotors zurückzuführen sind und durch die Simulation der stationären Strömung ohne geeignete Modelle für instationäre Phänomene a priori nicht wiedergegeben werden kann. Darauf wird weiter unten bei der Beschreibung des instationären Strömungsfeldes noch näher eingegangen

Die Abströmung der Rotors in Ebene 2 ist in Bild 5.7 dargestellt. Diese Ebene entspricht in den Simulationsrechnungen der Koppelebene zwischen dem Rotorbereich und dem Bereich des zweiten Leitrades. Angesichts der vielfältigen Phänomene, die an dieser Stelle in der Strömung bereits enthalten sind und sich einander überlagern kann hier immer noch von einer allgemein guten Übereinstimmung im radialen Gradientenverlauf zwischen den Simulationen und den Meßwerten gesprochen werden. Die gemessenen Gradienten der statischen Druckverteilung, der Machzahlverteilung und der Totaldruckverteilung werden durch Variante 1 am besten wiedergegeben. Beim Diagramm für den statischen Druck ist zu beachten, daß die Abszisse eine Unterbrechung aufweist, um eine größere Spreizung zu ermöglichen. Auffallend ist auch die charakteristische Form der Totaltemperaturverteilung, die durch die starken Sekundärströmungseffekte der Rotorströmung verursacht wird. Die Gradienten der Tangentialwinkelverteilung werden ebenfalls von den Varianten 1 und 3 am besten wiedergegeben. Allerdings liegen die Absolutwerte aufgrund des zu geringen Durchsatzes um etwa 4° bis 8° niedriger als die Meßwerte. Die durch die Kanalwirbel des Rotors verursachten Minderumlenkungen werden von allen Varianten beim unteren Wirbel etwas zu stark und beim oberen Wirbel etwas zu gering vorhergesagt. Der Vergleich der Varianten 1 und 2 zeigt, daß durch die Turbulenzmodellmodifikation die Lage der Verlustzentren etwas mehr in die Mitte des Kanals verlagert wird, was den Meßwerten näher kommt. Die Unterschiede zwischen der instationären und der stationären Simulation werden an dieser Stelle noch markanter als an Ebene 1. In den Totaldruck- und Machzahlverteilungen sind die Unterschiede des Strömungsverhaltens in der Kanalmitte besonders ausgeprägt. Bei den Strömungswinkeln sind über der ganzen Kanalhöhe Unterschiede bis zu 6° erkennbar. Bei den instationären Simulation fällt die Winkeluntertreibung des unteren Kanalwirbels zu stark aus, doch stimmt die Ausdehnung des oberen Kanalwirbels besser mit den Meßwerten überein als die stationäre Simulation.

Die Diagramme in Bild 5.8 zeigen die umfangsgemittelten Radialverteilungen der Strömungsgrößen in Ebene 3, d. h. in der Abströmung des zweiten Leitrades, die bei den Simulationsrechnungen mit der Austrittebene des Rechengebiets identisch ist. Der experimentell ermittelte statische Druck diente bei den Varianten 2 und 4 als Randbedingung. Für die neueren Varianten mit der Turbulenzmodellmodifikation (1 und 3) wurde, wie schon erwähnt, der mittlere statische Druck um etwa 50 mbar oder 4,6 % gegenüber den Varianten 2 und 4 erhöht. Die sich bei der stationären Simulation durch die Vorgabe des mittleren statischen Drucks am Austritt einstellende Radial-

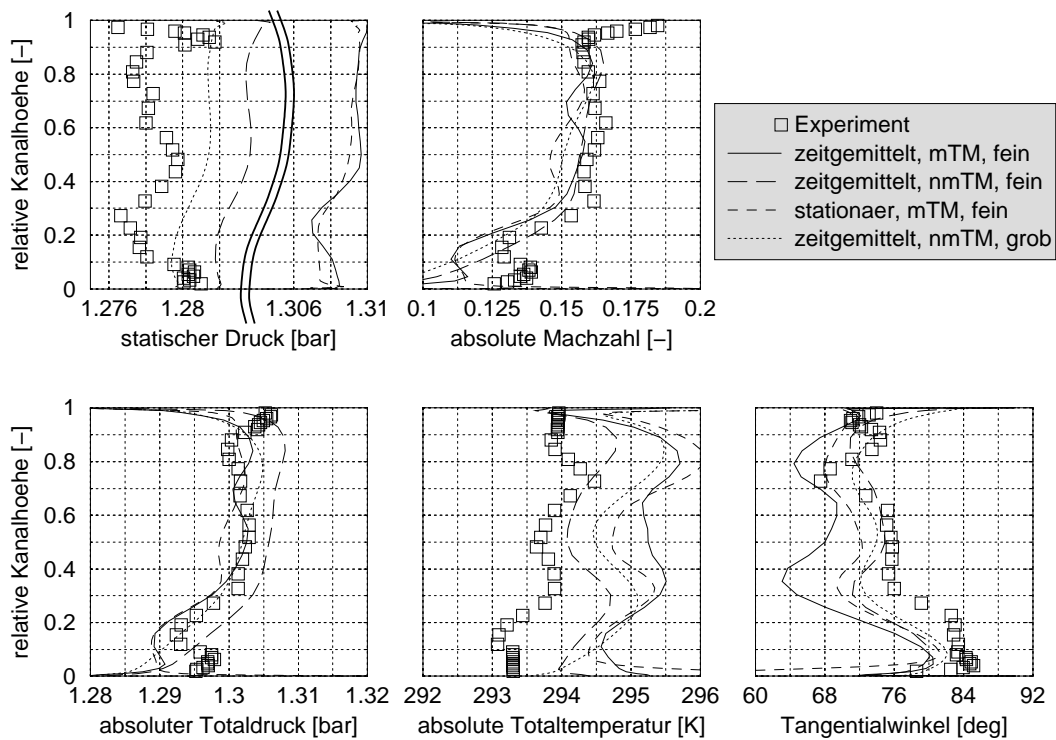


Bild 5.7: Abströmung des Rotors: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei kleinem Massenstrom

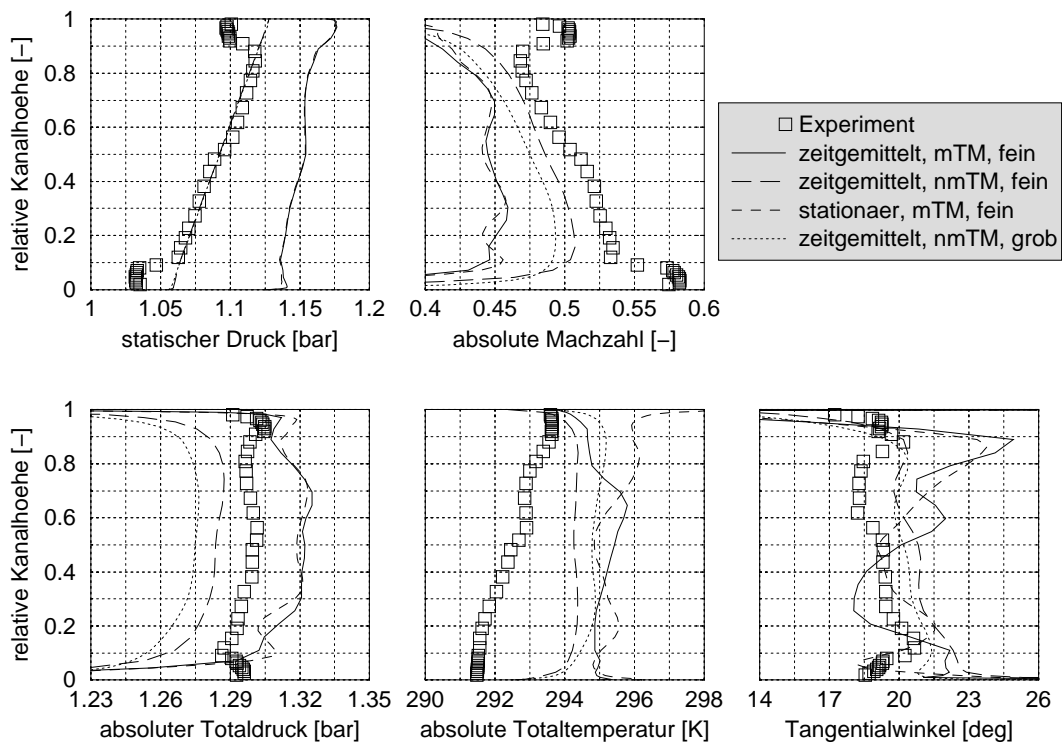


Bild 5.8: Abströmung des 2. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei kleinem Massenstrom

verteilung wurde in der anschließenden instationären Simulation als Randbedingung verwendet. An der Meßebene 3 ist die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen nicht mehr so gut wie an den Ebenen 1 und 2. Ein Grund dafür ist sicherlich darin zu sehen, daß es sich hier um die Austrittebene des Rechengebiets handelt und gewisse Rückwirkungen durch die Randbehandlung nicht gänzlich auszuschließen sind. Die Hauptursache liegt aber wohl eher in der unzureichenden Berücksichtigung der hier dominierenden turbulenten Effekte. Insbesondere in der Abströmung des zweiten Leitrades sind die Strömungsverhältnisse durch die Überlagerung und Wechselwirkung der Sekundärströmungseffekte aller drei Schaufelreihen derart komplex, daß sie durch ein einfaches algebraisches Turbulenzmodell nicht wiedergegeben werden können. Unter Berücksichtigung der Abszissenspreizung in den Diagrammen, läßt sich zwar klar erkennen, daß die berechnete der gemessenen Strömung sehr ähnlich ist, doch existieren sichtbare Defizite in der Wiedergabe einzelner Details in den Radialverläufen der Strömungsgrößen. So trägt bei der Tangentialwinkelverteilung die maximale Abweichung zwischen Messung und Rechnung etwa 4° . Auch zeigt beispielsweise Variante 1 in der Tangentialwinkelverteilung bei etwa 15 %, 25 %, 55 %, 75 % und 90 % zwar tendenziell ähnliche Gradientenwechsel wie die Messung, jedoch fallen die damit verbundenen Winkeländerungen deutlich stärker aus, was in erster Linie durch zu wenig turbulente Reibung bedingt wird. Eine vollturbulente Strömungsrechnung, bei der für die zweite Leitschaufel das eingebaute Umschlagsmodell deaktiviert ist,¹ würde hier die Qualität verbessern. Die höheren turbulenten Zähigkeiten, die die Varianten vor der Turbulenzmodellmodifikation (2 und 4) berechnen, führen zwar zu erhöhten Strömungsverlusten, doch dämpfen sie gleichzeitig die durch die Sekundärströmungseffekte verursachten Winkeländerungen, weshalb hier nach dem zweiten Leitrad, wo offensichtlich die Reibungseffekte zunehmen, diese Varianten bezüglich der Winkelverteilung mit den Messungen eine etwas bessere Übereinstimmung zeigen.

Zeitlich gemitteltes Strömungsfeld

Nach dem Vergleich umfangsgemittelter Strömungsgrößen soll nun das zeitlich gemittelte Strömungsfeld untersucht werden.

Obwohl aufgrund des engen Radialspalts der Laufschaufeln der Spaltstrahl für die Strömung im nachfolgenden Leitrad von untergeordneter Bedeutung ist, ist die Modellierung des Spaltes bei der Simulation dennoch entscheidend für die Strömung in und in der Nähe der oberen Seitenwandgrenzschicht wie auch für die Ausbildung des gehäuseseitigen Rotorkanalwirbels. In Bild 5.9 ist die gemessene [89] Gehäusedruckverteilung den zeitlich gemittelten Simulationsdaten gegenübergestellt. In den Meßdaten ist ein Druckplateau zu

¹Der Umschlagsparameter p aus Gl. (3.59) war bei den Varianten 1 und 3 für alle drei Schaufelreihen auf 0,25 gesetzt.

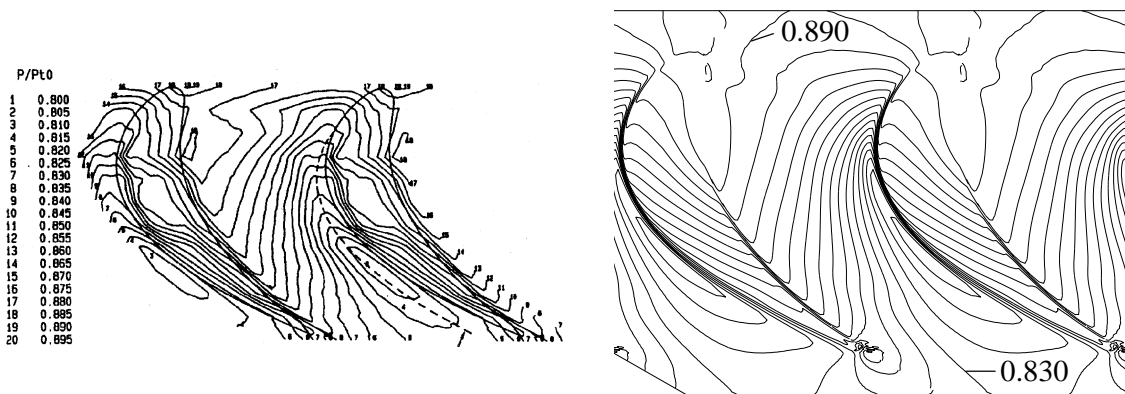


Bild 5.9: Vergleich von gemessener [89] und berechneter (Variante 3, großer Massenstrom) Gehäusedruckverteilung über dem Rotor

erkennen, das in den Simulationsergebnissen fehlt. Dieses Plateau kommt durch eine Vertiefung in der Mitte der Schaufelspitze zustande, in der der Befestigungsbolzen der Rotorschaukel eingelassen ist. Diese Vertiefung wurde bei den Simulationsrechnungen nicht modelliert. Vor diesem Hintergrund kann die Übereinstimmung daher als sehr gut bezeichnet werden.

In Bild 5.10 ist die Überströmung der Laufschaufelspitze im Radialspalt mit Hilfe von ebenen Projektionen von Stromlinien des zeitlich gemittelten Relativgeschwindigkeitsfeldes für die beiden Betriebspunkte visualisiert. Hierauf

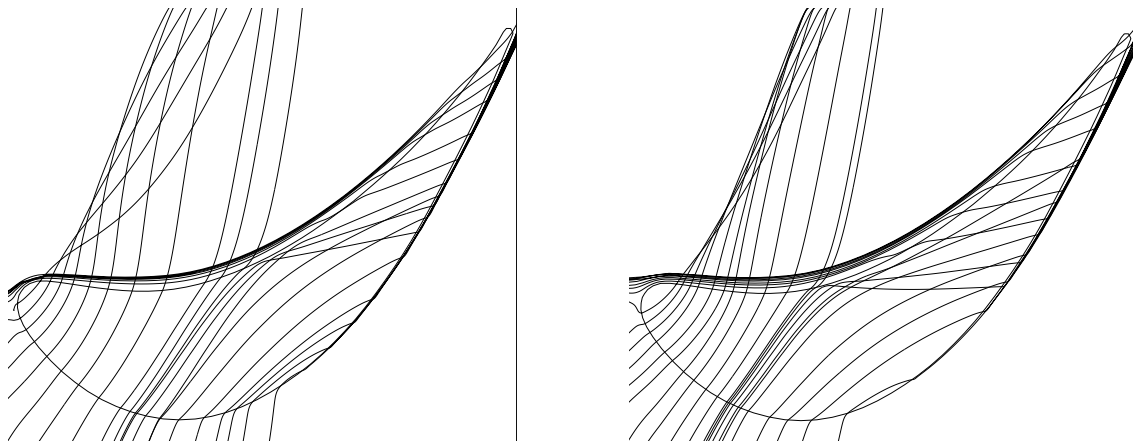


Bild 5.10: Stromlinienprojektionen des zeitgemittelten Relativgeschwindigkeitsfeldes im Rotorspalt bei kleinem (links) und großem (rechts) Massenstrom

ist zu erkennen, wie in der ersten Hälfte der Sehnenlänge das Fluid von der Saug- zur Druckseite, also in Richtung höherer Drücke, strömt. Dies kommt dadurch zustande, daß die Relativbewegung zwischen den Laufschaufeln und dem Gehäuse dem Druckgradienten zwischen Druck- und Saugseite entgegenwirkt. Vom rotorfesten System aus läßt sich so beobachten, wie das auf der sich relativ bewegenden Gehäusewand haftende Fluid zusam-

men mit dessen Scherkräften und Trägheit die Strömung über weite Bereiche des Schaufelpalts entgegen des Druckgefälles mitzieht. Allerdings nimmt der Einfluß des Druckgradienten mit zunehmender Lauflänge zu, so daß weiter stromab die Strömung dann doch von der Druck- zur Saugseite fließt. Bedingt durch das unterschiedliche Druckgefälle bei den beiden Betriebspunkten liegt die Trennlinie für den Wechsel der Richtung der Schaufelüberströmung beim kleinen Massenstrom um etwa 15 % Sehnenlänge weiter stromabwärts als beim großen Massenstrom.

Ein Vergleich von experimentell visualisierter [77] und berechneter Grenzschichtströmung ist in Bild 5.11 dargestellt. Es zeigt ein Ölanstrichbild bzw.

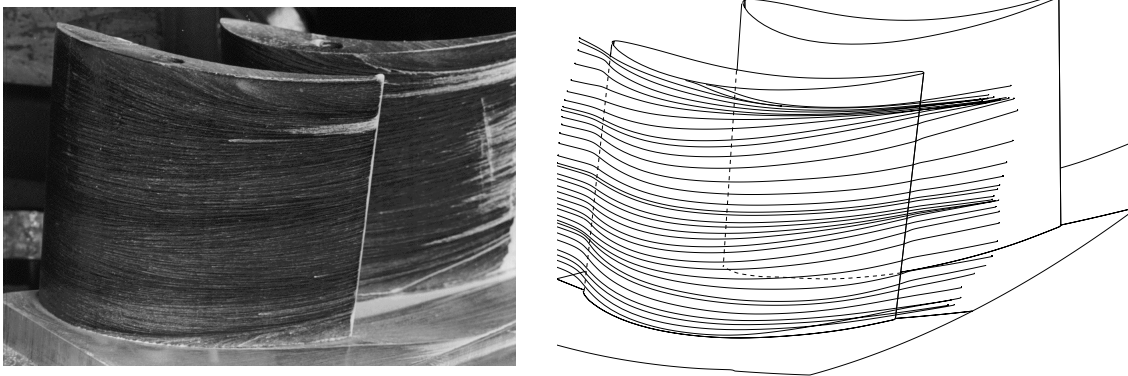


Bild 5.11: Grenzschichtströmung im zweiten Leitrad: Vergleich von experimenteller Visualisierung [77] und berechneten wandnahen Stromlinien auf der Saugseite

berechnete wandnahe Stromlinien für die Saugseite des zweiten Leitgitters. Die Gehäuseseite ist in diesen Bildern unten. In den naben- und gehäusenahen Bereichen ist die Bildung und Ausdehnung vor allem des Nabenkanalwirbels deutlich zu erkennen. Ferner sind charakteristische Strukturen im Bereich von 20 % bis 80 % Kanalhöhe zu beobachten. Die experimentellen und die numerischen Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

Die Strömung in der Gehäusegrenzschicht des zweiten Leitrades ist in Bild 5.12 gezeigt. Der linke Teil zeigt ein im Experiment ermitteltes Ölanstrichbild, während im rechten Teil berechnete wandnahe Stromlinien dargestellt sind. Auf den Bildern ist die Wechselwirkung zwischen druck- und saugseitigem Ast des Hufeisenwirbels und die Formation des Kanalwirbels zu erkennen. Beide Ergebnisse zeigen bzgl. der Lage und Ausdehnung der Strömungsphänomene eine sehr gute Übereinstimmung.

Bild 5.13 zeigt den Vergleich der zeitlich gemittelten Sekundärströmungsfelder der Absolutgeschwindigkeiten in den Ebenen 1 bis 3. Die Ergebnisse der Messung [83] sind links und die der Simulation rechts dargestellt. In der Abströmung des ersten Leitrades (Ebene 1) ist eine typische Nachlaufströmung eines Leitgitters mit kleinem Verhältnis von Schaufelhöhe zu Seh-

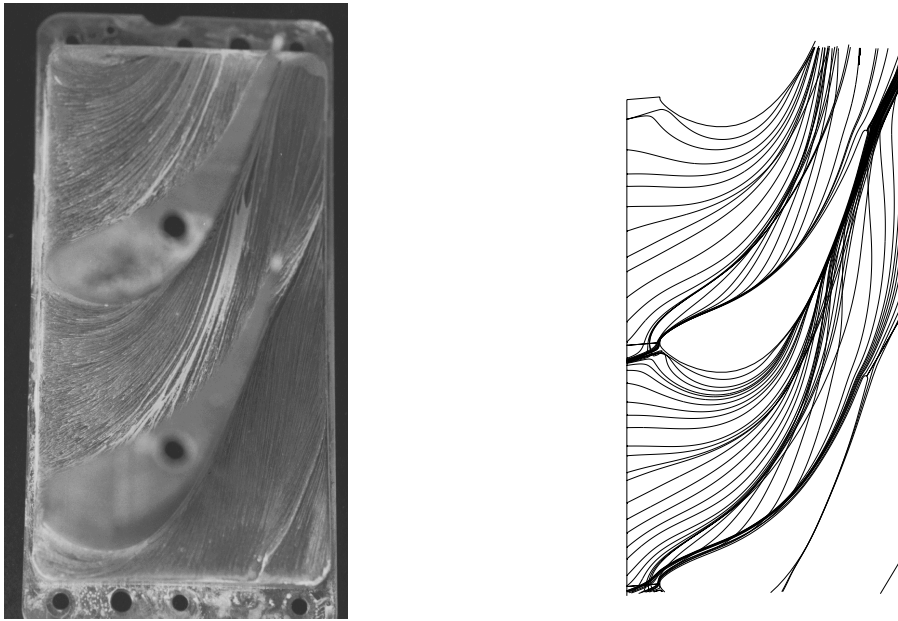


Bild 5.12: Grenzschichtströmung im zweiten Leitrad: Vergleich von experimenteller Visualisierung [77] und berechneten wandnahen Stromlinien auf dem Gehäuse

nenlänge erkennbar. Der oberen und der untere Kanalwirbel stellen hierbei die auffälligsten Strömungsphänomene dar.

Die zeitlich gemittelte Laufradabströmung im Absolutsystem, wie sie vom stromab liegenden Leitgitter beobachtet werden kann, zeigt bei einem isolierten Schaufelgitter bzw. bei einer stationären Anströmung im naben- und gehäusenahen Bereich nur eine „verwischte“ Spur der sich vorbeibewegenden Sekundärströmungseffekte wie Kanal- und Spaltwirbel. In Stufenverbund ist dies anders. Hier sind im zeitlichen Mittel die Einflüsse der stromauf liegenden Schaufelgitter auf die Strömung zu erkennen, insbesondere dann, wenn die Nachlaufreste des Stators zwar periodisch aber nicht harmonisch den Rotorkanal verlassen, wie es im vorliegenden Beispiel der Fall ist. Daher sind in der Rotorabströmung deutliche Wirbelstrukturen erkennbar, die im Zeitmittel aufgrund des instationären Einflusses des ersten Leitrades entstehen. Die periodisch auftauchenden Nachlaufreste des ersten Leitrades treten in Wechselwirkung mit den Wirbelstrukturen des Rotors und bewirken deren zeitliche Schwankungen. Im Mittel ergibt sich dadurch ein über dem Umfang ungleichförmiges Strömungsfeld, das mit der Leitschaufelteilung räumlich periodisch ist. Ein derartiges Ergebnis ist mit stationären Strömungsberechnungen ohne Berücksichtigung instationärer Effekte durch geeignete Modelle nicht erzielbar.

Die Abströmung des zweiten Leitrades ist ebenfalls von den oben beschriebenen Strömungseffekten einer typischen Leitradabströmung dominiert. Ähnlich wie bei der Rotorabströmung kommen hier allerdings weitere Einflüsse durch die vorausgehenden Schaufelreihen hinzu, die in der Sekundärge-

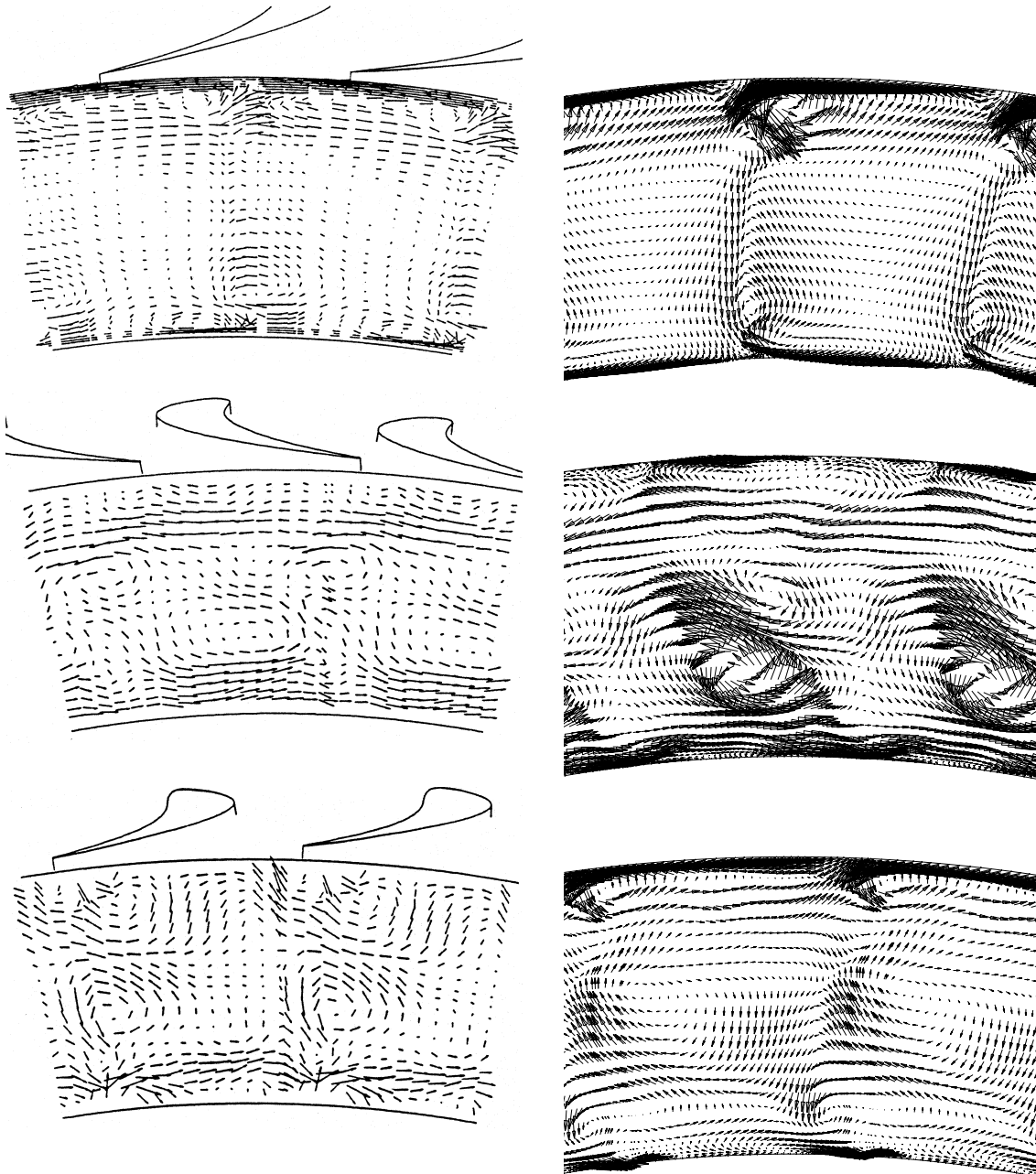


Bild 5.13: Zeitlich gemittelte Sekundärströmungsvektoren im Absolutsystem nach dem 1. Leitrad (oben), nach dem Rotor (Mitte) und nach dem 2. Leitrad (unten): Vergleich zwischen Experiment [83] (links) und Rechnung (rechts)

schwindigkeitsverteilung erkennbar sind. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung kann bis einschließlich Ebene 2 als sehr gut bezeichnet werden. Die Übereinstimmung in der Abströmung des zweiten Leitrades ist, wie im Zusammenhang mit den umfangsgemittelten Strömungsgrößen an dieser Ebene bereits erwähnt wurde, aufgrund der Defizite in der Turbulenzmodellierung nicht so gut wie in den anderen Ebenen.

5.2.2 Instationäres Strömungsfeld

Die Bilder 5.14 und 5.15 vermitteln einen Eindruck von der Komplexität des instationären Strömungsfeldes in der Turbine. Das erstere zeigt die Entro-

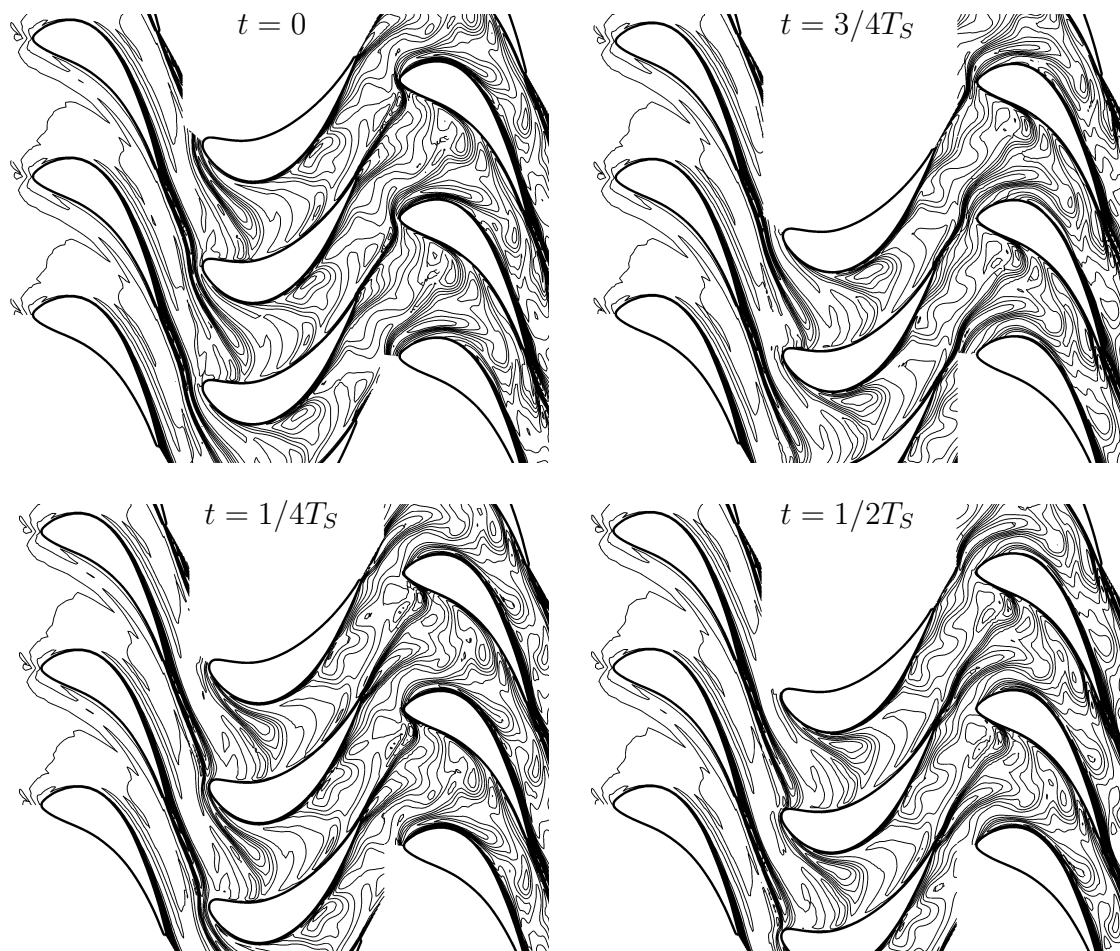


Bild 5.14: Entropieverteilung im Mittenschnitt (kleiner Massenstrom)

pieverteilung im Mittenschnitt zu vier Zeitpunkten während einer Schaufelwechselperiode für den kleinen Massenstrom. Bei der zugehörigen Stator–Stator–Position trifft die Nachlaufdelle des ersten Leitrades auf die Schaufeln des zweiten Leitrades und wird dort nochmals zerteilt. Dies lässt sich visuell nachvollziehen, wenn in Bild 5.14 der markante Statornachlauf, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im oberen Rotorkanal befindet, zeitlich über $2 \frac{3}{4}$

Perioden verfolgt wird, bis dieser im unteren Kanal des zweiten Leitrades verschwunden ist. Bild 5.15 zeigt die Strömungseffekte beim großen Massenstrom. Hier treten die Nachlaufreste des ersten Leitrades aufgrund der um eine halbe Statorteilung gegenüber der Konfiguration beim kleinen Massenstrom geänderten Stator–Stator–Position zwischen zwei Schaufeln in den Kanal des zweiten Leitrades ein. Entsprechend unterschiedlich präsentiert sich daher auch das Strömungsverhalten im zweiten Leitrad. Die Bilder zeigen ferner das Funktionieren der direkten instationären Kopplung bei mehreren Schaufelreihen, der implementierten Zeitneigungsmethode sowie der Rücktransformation der Ergebnisse in die physikalische Zeit.

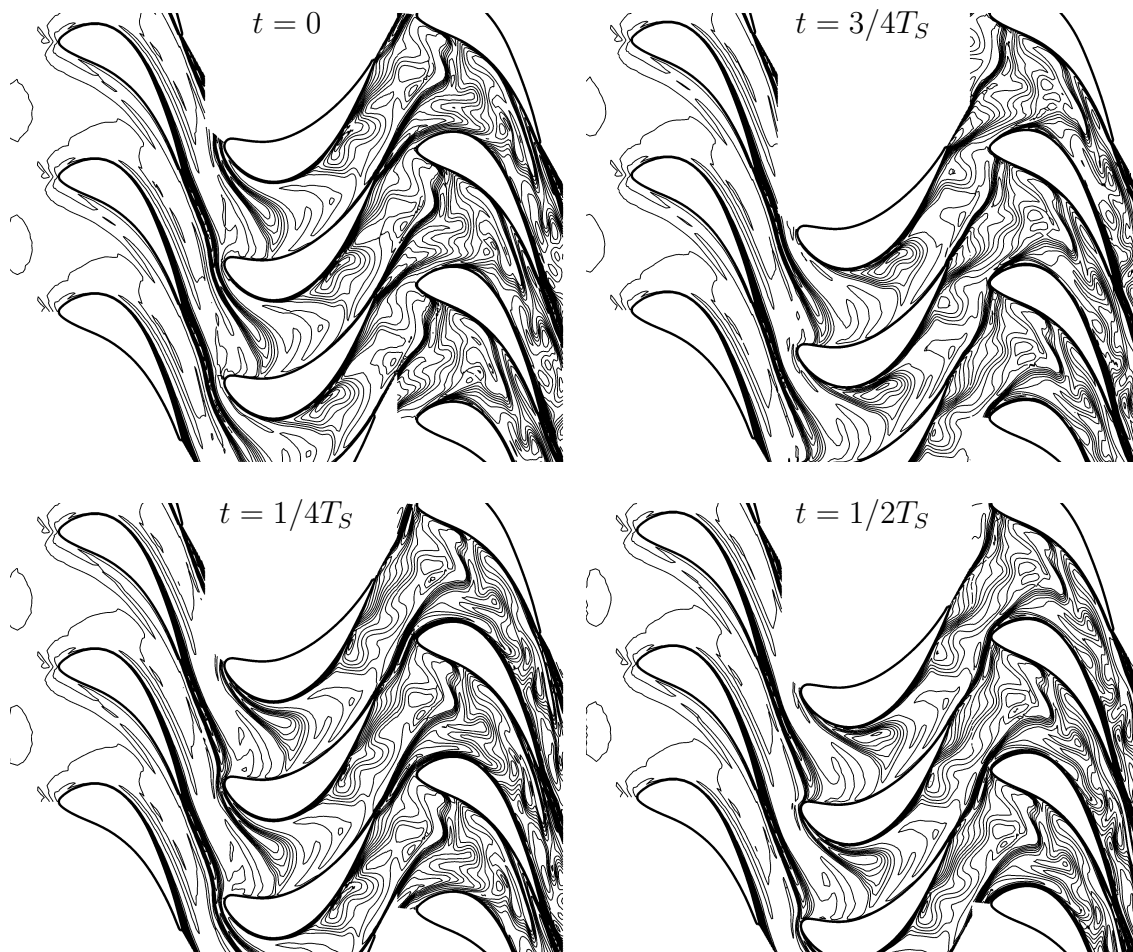


Bild 5.15: Entropieverteilung im Mittenschnitt (großer Massenstrom)

Ein Beispiel für den Einfluß der Gitterfeinheit und der Turbulenzmodellierung auf das instationäre Strömungsfeld ist in Bild 5.16 dargestellt. Es zeigt im Vergleich die Entropieverteilung zum Referenzzeitpunkt, d. h. zu identischen Stator–Rotor–Positionen, im Mittenschnitt des zweiten Leitrades für die Simulationen auf dem groben und dem feinen Gitter ohne Turbulenzmodellmodifikation und auf dem feinen Gitter nach der Modifizierung. Die Detaillierung des Strömungsfeldes nimmt im Bild aufgrund der abnehmen-

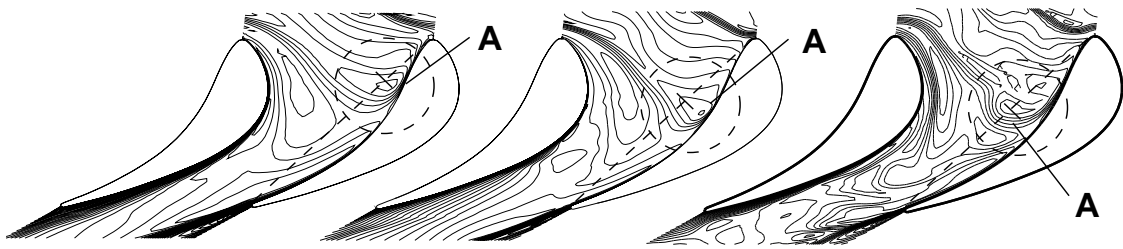


Bild 5.16: Entropieverteilung im Mittenschnitt des zweiten Laufrades zum Referenzzeitpunkt (links und Mitte: grobe bzw. feine Diskretisierung vor der Turbulenzmodellmodifikation, rechts: feine Diskretisierung nach der Modifikation)

den numerischen Strömungsverluste der einzelnen Varianten von links nach rechts zu. Der Einfluß der Abströmung des ersten Leitrades nimmt ebenfalls von links nach rechts zu, weil die damit verbundenen Strömungseffekte weniger stark dissipiert werden. Die Lage des eingekreisten und mit „A“ bezeichneten Entropieminimums ist deshalb ebenfalls von der Simulationsvariante abhängig. Bei der linken Variante liegt es bei etwa 25 %, bei der mittleren bei etwa 35 % und bei der rechten bereits bei 42 % der ebenfalls eingezeichneten Bitangente des Profils. Auch die Konvektion des Rotornachlaufs im Kanal des zweiten Leitrades, der bei der rechten Variante stärker in Richtung Saugseite abgelenkt wird, zeigt ein von der Berechnungsvariante abhängiges Verhalten, das ebenfalls in erster Linie auf den unterschiedlich stark wiedergegebenen Einfluß des ersten Leitrades zurückzuführen ist. Die Zunahme der Grenzschichtdicke auf der Saugseite, die bei den beiden linken Varianten deutlich zu sehen ist, fällt bei der rechten Variante sehr viel geringer aus, weil die Strömung bei Simulationen mit dem modifizierten Turbulenzmodell – wie oben erwähnt – weniger dissipativ ist.

In den bislang gezeigten Ergebnissen konnte in der Mehrheit der angestellten Vergleiche eine Überlegenheit der Simulationsvariante mit Turbulenzmodellmodifikation festgestellt werden. Um die noch folgenden Auswertungen übersichtlicher zu gestalten, werden deshalb nur noch diese Ergebnisse weiter analysiert.

Stromaufwirkung des Laufrades

In den Bildern 5.17 und 5.18 ist im Vergleich zwischen Messung [85] und Rechnung die Stromaufwirkung des Rotors zu beobachten. Die Bilder zeigen die instationäre Totaldruckverteilung in Ebene 1, d. h. zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad für acht Zeitpunkte während einer Periode. Die Druckwerte wurden mit dem Eintrittstotaldruck normiert. Der dargestellte Wertebereich ist stark gespreizt und umfaßt Totaldruckschwankungen von etwa 5 % des Eintrittstotaldrucks. Der Nachlauf des ersten Leitrades ist an den markanten Verlustzentren und den starken Druckgradienten

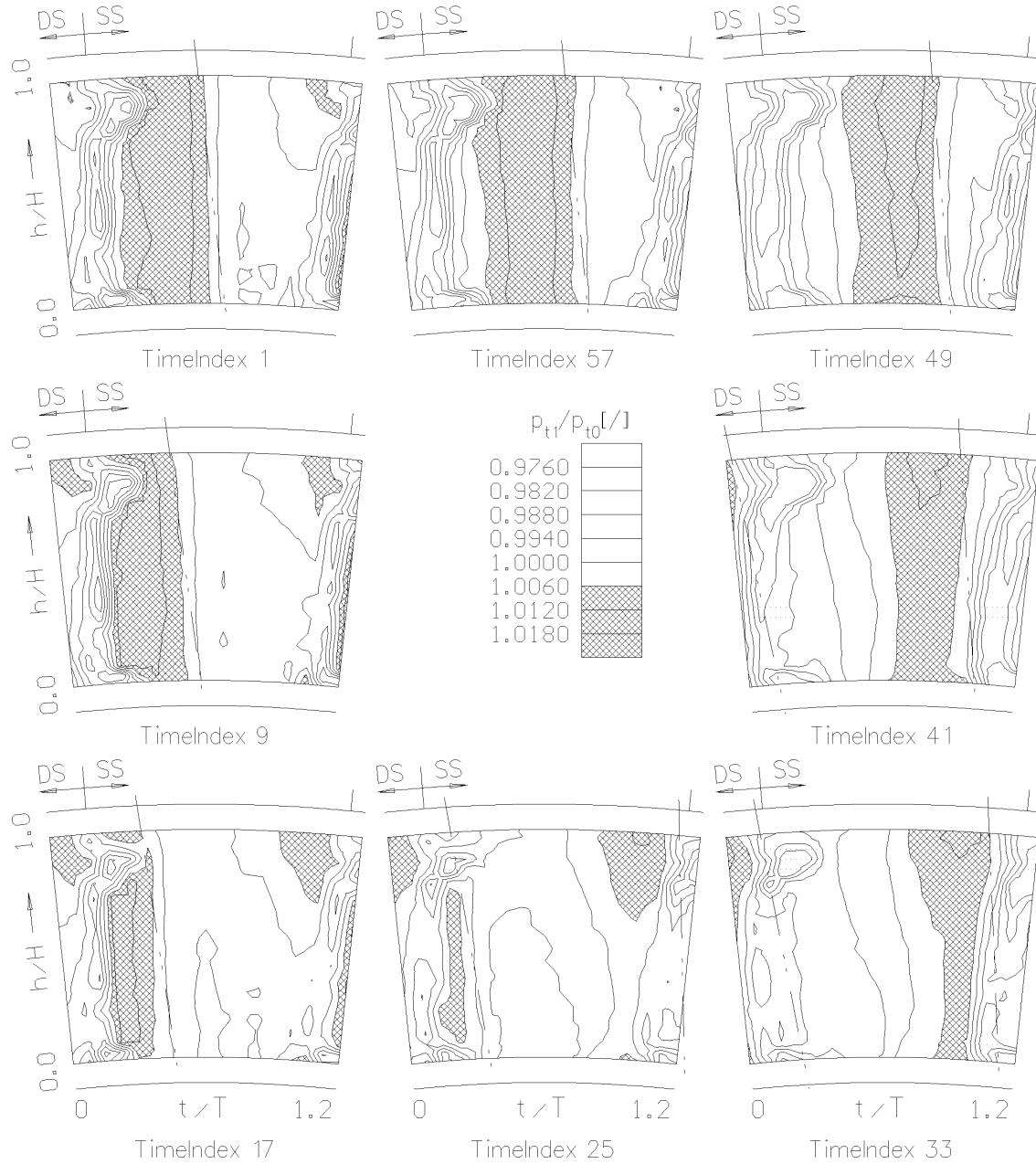


Bild 5.17: Gemessene Verteilung des absoluten Totaldrucks zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad während einer Schaufelwechselfperiode [85] (der dargestellte Bereich entspricht 1,2 Leitradteilungen; zur Art der Zeitindizierung s. S. 98)



Bild 5.18: Berechnete Verteilung des absoluten Totaldrucks zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad während einer Schaufelwechselperiode (der dargestellte Bereich entspricht einer Leitradteilung)

erkennbar. Der Rotor bewegt sich mit fortschreitender Zeit von links nach rechts. Die momentane, ungefähre Lage der Laufschaufelvorderkante entspricht dem dunklen, radial verlaufenden Band. Im Bereich des dunklen Bandes ist der Totaldruck höher als der Totaldruck der Zuströmung. Dies bedeutet, daß durch die Rotorbewegung und das Potential der Laufschaufeln dem Fluid in diesem Bereich Energie zugeführt wird. Durch diese Stromaufwirkung arbeitet der Rotor daher zunächst als Verdichter, bevor er dem Fluid im Schaufelkanal Energie entzieht. Die Energetisierung der Strömung durch die Stromaufwirkung ist sogar so stark, daß zum Zeitindex 25 das Totaldruckdefizit im Statornachlauf mit Ausnahme des Bereichs der Verlustzentren beinahe ausgeglichen werden kann. Im Experiment fällt dieser Effekt etwas stärker aus als in der Rechnung, was durch die zusätzliche Potentialwirkung der Meßsonde verursacht werden könnte. Damit ließe sich auch das um 0,5 % höhere Totaldruckniveau bei den Messungen erklären. Alles in allem ist hier eine sehr gute qualitative Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung festzustellen.

Strömung im Rotorkanal

Die momentane Verteilung der Sekundärgeschwindigkeitsvektoren und der Entropie im Mittenschnitt des Laufradkanals ist in Bild 5.19 gezeigt. Anhand der Entropieisolines kann die Lage des Statornachlaufs identifiziert werden. Innerhalb des Nachlaufs zeigen die Sekundärgeschwindigkeitsvektoren aufgrund des Geschwindigkeitsdefizits des Nachlaufs entgegen der Strömungsrichtung, während sie in der Kernströmung mehr oder weniger verschwinden. Damit kann die Nachlaufströmung als von der Druck- zur Saugseite verlaufender Strahl aufgefaßt werden. Dieser Strahl wird meist als „negative jet“ bezeichnet und wird häufig dazu verwendet, den Prozeß der Konzentration des energiearmen Fluids auf der Saugseite eines Schaufelkanals zu erklären. Die sich ergebenden Wirbelstrukturen am Übergang zwischen Nachlauf- und Kernströmung sind im Bild ebenfalls zu beobachten. Bemerkenswert ist die o. a. Stromauf- und Verdrängungswirkung des Rotors, die hier zu einer Verringerung der Sekundärgeschwindigkeiten im Bereich der Vorderkante führt.

Abströmung des Rotors

Die instationäre Abströmung des Rotors in Ebene 2, d. h. etwa in der Mitte des Axialspaltes zwischen dem Laufrad und dem zweiten Laufrad wird anhand der nachfolgenden Bilder beschrieben. In Bild 5.20 ist die relative Machzahl zu vier Zeitpunkten während einer Statorperiode dargestellt. Die linken Diagramme zeigen die Ergebnisse von Hitzdrahtsondenmessungen [83]. Die Simulationsergebnisse sind rechts abgebildet, wobei die ungefähre Lage des Meßfensters aus Gründen einer einfacheren Vergleichbarkeit als

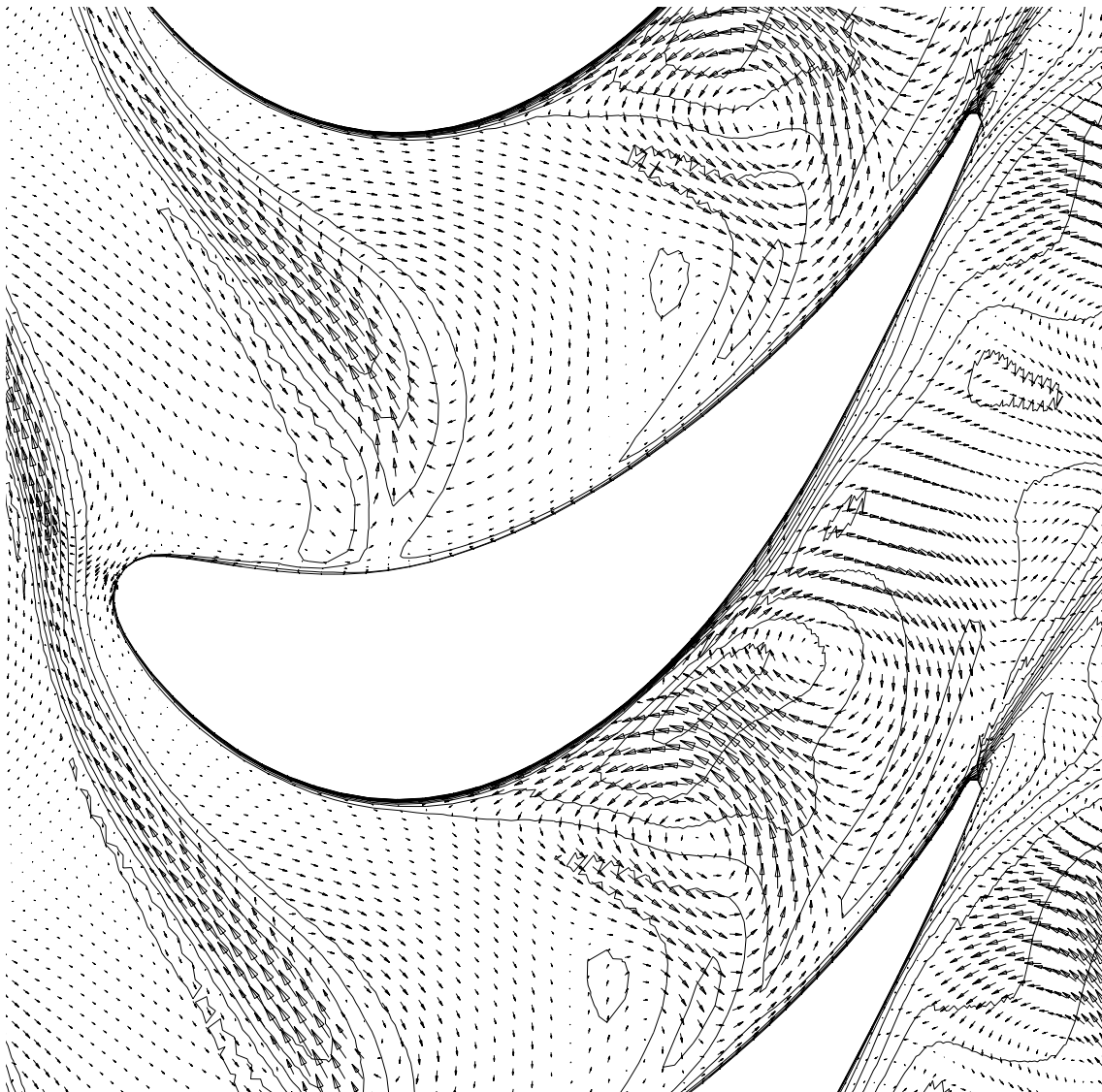


Bild 5.19: Momentane Verteilung der Sekundärgeschwindigkeiten und der Entropie im Rotorkanal bei 50 % Kanalhöhe

gestrichelte Linie mit eingezeichnet ist. Das Isolinieninkrement beträgt 0,01. Die Bewegung des Rotors läßt sich anhand der Lage der Zentren der Kanalwirbel und anhand der Markierung, die die ungefähre Mitte des Rotornachlaufs anzeigt, beobachten. Der saugseitige Bereich des Nachlaufs ist dazu mit „SS“ und der druckseitige Bereich mit „DS“ gekennzeichnet. Zum Zeitindex 33 ist eine vollausgebildete Rotorabströmung erkennbar. Der Nabenwirbel befindet sich bei etwa 40 % und der Gehäusewirbel bei etwa 80 % Kanalhöhe. Zwischen den Nachlaufgebieten zweier benachbarter Laufschaufeln ist die Strömung verhältnismäßig gleichförmig. Zu den übrigen Zeitpunkten sorgen die Nachlaufreste des ersten Leitrades für eine Aufweitung des Rotornachlaufs, wobei in der unteren Kanalhälfte der stärkste Einfluß zu beobachten ist. Messung und Rechnung zeigen in bezug auf die Lage und die Bewegung

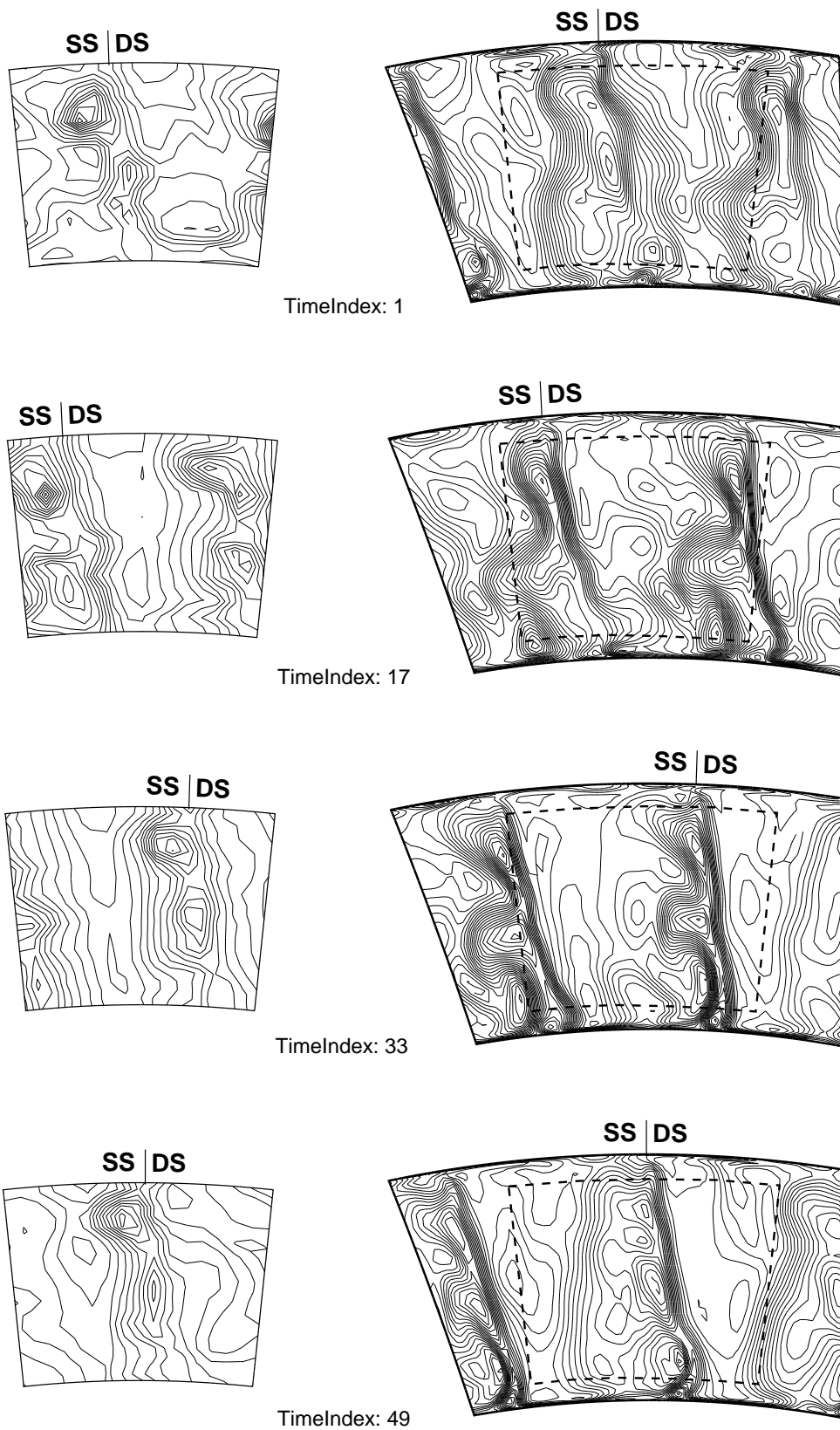


Bild 5.20: Relative Machzahl am Rotorausritt (Inkrement 0,01, links: Messung [83], rechts: Simulation)

der Verlustzentren qualitativ eine gute Übereinstimmung, wobei die Simulationsergebnisse tendenziell etwas stärkere Gradienten im Strömungsfeld zeigen und den Einfluß des ersten Leitrades etwas größer vorhersagen. Wie bereits gezeigt, sind aufgrund der unterschiedlichen Massenströme die Absolutwerte der Ergebnisse nur bedingt vergleichbar, weshalb auf eine Beschriftung der Isolinien verzichtet wurde.

Bild 5.21 ist analog zu Bild 5.20 aufgebaut. Es zeigt die instationäre Radialwinkelverteilung in der Rotorabströmung. Das Isolinieninkrement beträgt 2° . Auch hier sind die Sekundärströmungseinflüsse anhand von lokalen Extrema identifizierbar. Die Kanalwirbel verursachen signifikante radiale Strömungen, die links und rechts der Wirbel jeweils eine unterschiedliche Richtung haben. In den Diagrammen sind daher die Wirbelzentren als Sattelpunkt zwischen einer zusammengehörenden Hochpunkt–Tiefpunkt–Kombination zu identifizieren. Die vielfältigen Strukturen in den Diagrammen erfordern eine genaue Betrachtung, um die experimentellen und numerischen Ergebnisse vergleichen zu können. Die deutlich größeren Radialwinkel der numerischen Ergebnisse werden in erster Linie durch den geringeren Massenstrom verursacht, da bei einer kleineren Axialgeschwindigkeit die Radialgeschwindigkeit bei der Winkelberechnung an Einfluß gewinnt, siehe Gleichung (5.3). Vor diesem Hintergrund kann die qualitative Übereinstimmung von Messung und Rechnung als noch gut bezeichnet werden. Die Messungen zeigen allerdings allgemein ein etwas gleichmäßigeres Strömungsfeld. Bei beiden Ergebnissen sind die druckseitigen Radialströmungen stärker als die saugseitigen. Beim oberen Kanalwirbel ist im Verlauf einer Periode außer den Intensitätsschwankungen auch eine leichte Bewegung in radialer Richtung zu beobachten.

Das zeitabhängige Sekundärströmungsfeld der Rotorabströmung in Ebene 2 zu acht Zeitpunkten während einer Periode ist in den Bildern 5.22 und 5.23 dargestellt. Das erstere zeigt dabei die Ergebnisse der Strömungsfeldmessungen mit Hitzdrahtsonden [83], während das letztere die Ergebnisse der numerischen Strömungsberechnung zeigt. In Bild 5.23 sind zusätzlich noch Entropieisolinen hinterlegt. Die Legende zu den durch Nummern gekennzeichneten Strömungsphänomenen ist in Tabelle 5.4 angegeben. Die Beschreibung des Strömungsverhaltens ist, falls nicht anders angegeben, immer relativ zu dem durch die Messungen abgedeckten Bereich. Die ungefähre Lage dieses Bereichs der Abströmebene ist daher in den Simulationsergebnissen durch gestrichelte Linien gekennzeichnet. Die momentane Position des Zentrums des Rotornachlaufs ist in Bild 5.22 durch eine eingezeichnete Schaufelhinterkante und in Bild 5.23 durch die Markierung SS|DS angedeutet.

In der Nähe der Nabe ist eine markante Strömung von Druck- in Richtung Saugseite zu beobachten, die den unteren Teil des Nabenkanalwirbels darstellt. Bei etwa 75 % Kanalhöhe formt eine Strömung, die dieser entgegen gerichtet ist und von der Saug- zur Druckseite strömt, den unteren Teil des Gehäusewirbels. Stromab der Rotorhinterkante bildet sich bei etwa 60 % Ka-

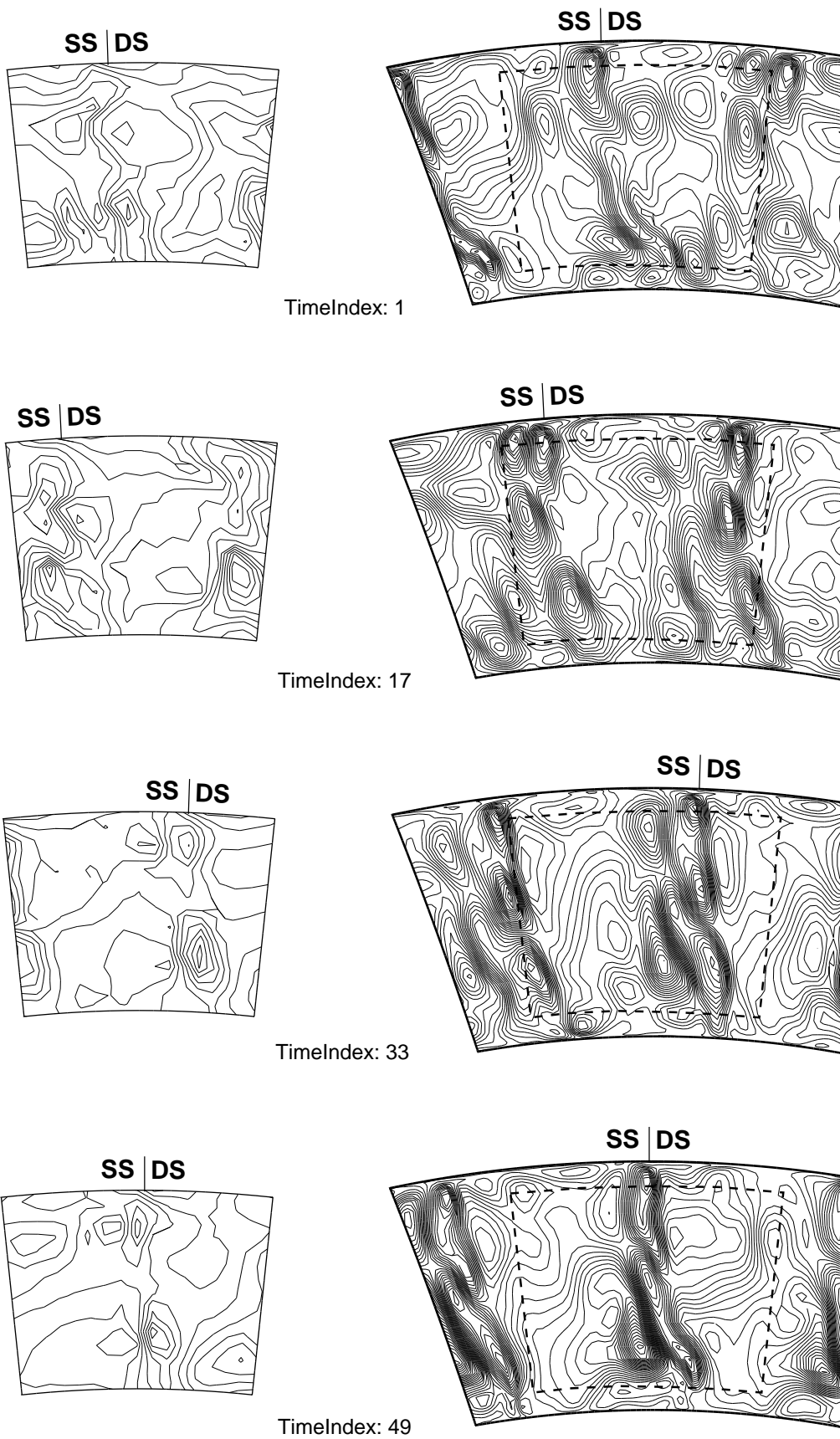


Bild 5.21: Instationäre Radialwinkelverteilung am Rotorausritt (Inkrement 2° , links: Messung [83], rechts: Simulation)

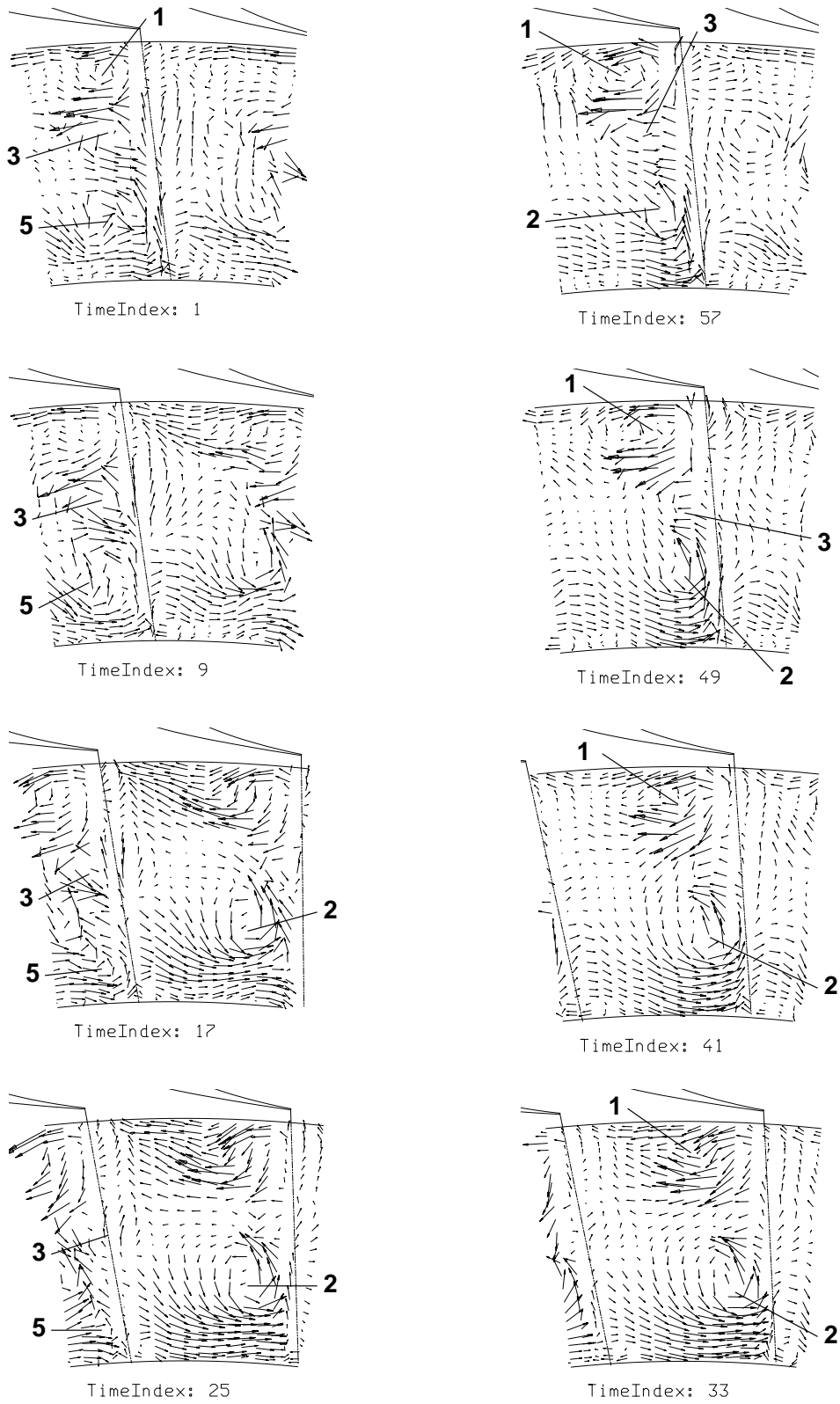


Bild 5.22: Gemessene Sekundärströmungen in der Rotorabströmung

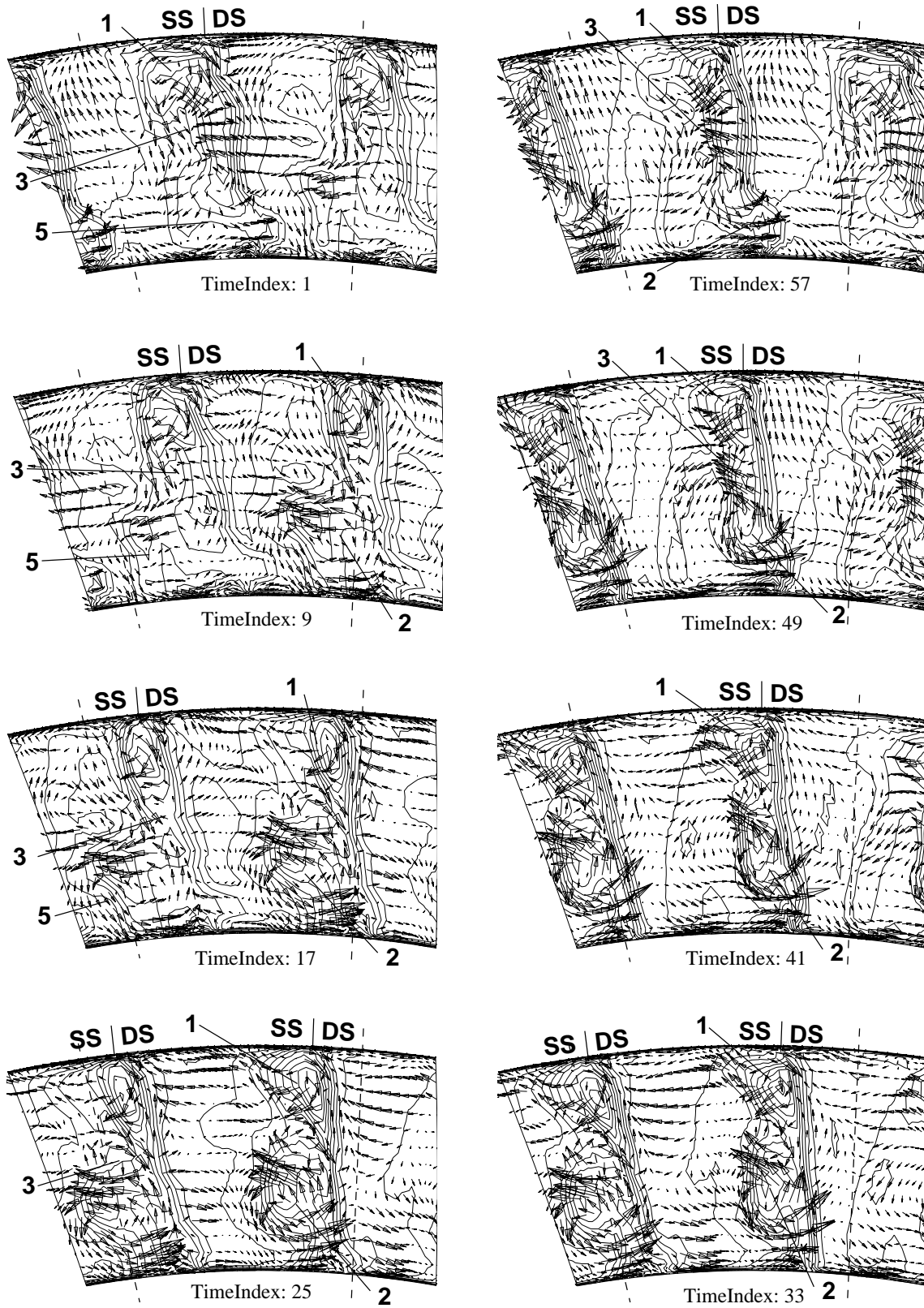


Bild 5.23: Berechnete Sekundärströmungen und Entropieverteilung in der Rotorabströmung

Nr.	Bedeutung	Bilder
1	Gehäusewirbel, oberer Kanalwirbel	5.22, 5.23, 5.38–5.40
2	Nabenwirbel, unterer Kanalwirbel	5.22, 5.23, 5.37–5.40
3	Hinterkantenwirbel	5.22, 5.23
5	Einfluß des ersten Leitrades	5.22, 5.23
6.1	oberer Kanalwirbel des Laufrades	5.35–5.40
6.2	unterer Kanalwirbel des Laufrades	5.35–5.40
6.3	Hinterkantenwirbel des Laufrades	5.35–5.40
7	Kombiwirbel im zweiten Laufrad	5.39, 5.40

Tabelle 5.4: Legende zu den Sekundärströmungsbildern

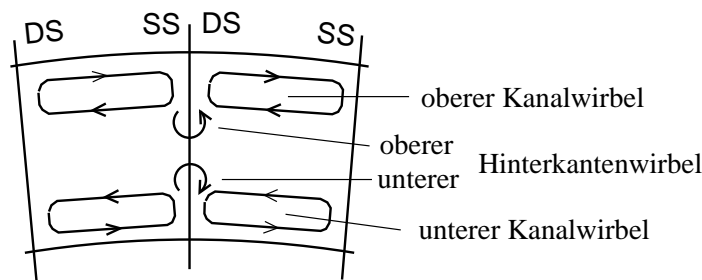


Bild 5.24: Skizze zur Entstehung der Hinterkantenwirbel

nalhöhe aufgrund der Scherschichten der Nachlaufströmung der obere und untere Hinterkantenwirbel. Dieser Mechanismus ist in Bild 5.24 schematisch dargestellt. Weiter unten wird gezeigt, daß insbesondere der obere Hinterkantenwirbel bei den Wechselwirkungen von Rotor und zweitem Leitrad eine wichtige Rolle spielt.

In den Bildern 5.22 und 5.23 sind mit Ausnahme der Zeitindizes 1, 9 und 17 die oberen (1) und unteren (2) Kanalwirbel die dominierenden Strömungsphänomene. Die größten Änderungen im Strömungsfeld erfolgen zwischen den Zeitindizes 1 und 33. Zum letzteren Zeitpunkt ist eine für Schaufeln mit kleinem Verhältnis von Höhe zu Sehnenlänge typische, ausgeglichene Lauftradabströmung mit ausgeprägten Kanalwirbeln erkennbar. Zum Zeitindex 1 hingegen wird die Abströmung durch die Nachlaufreste des ersten Leitrades (5), die im Bereich des Nabenkanalwirbels erscheinen, gestört. Der ursprüngliche Drehsinn des Nabenwirbels entgegen dem Uhrzeigersinn wird gestört. Zum Zeitindex 17 ist am linken Bildrand nur noch eine schräg nach rechts unten verlaufende Struktur (5) übrig. Fast gleichzeitig mit der beschriebenen Störung taucht ein weiterer entgegen dem Uhrzeigersinn drehender Wirbel (3) auf, der sich bis zum Zeitindex 33 von etwa 70 % Kanalhöhe auf 50 % Kanalhöhe radial nach unten bewegt. Die obere Hälfte dieses Wirbels vereinigt sich mit der unteren Hälfte des Gehäusewirbels. Die Lage und der Drehsinn identifizieren diesen Wirbel als oberen Hinterkantenwirbel. Dieser Schluß wird durch die Entropieverteilung im entsprechenden Bereich unterstützt. Das Nachlaufzentrum als Fortsetzung der Schaufelhinterkante läßt sich in

der Vektordarstellung durch eine radial nach außen verlaufende Strömung erkennen, die durch die Druckkräfte auf der Druckseite der Laufschaufel hervorgerufen werden. Die dargestellte Schnittebene befindet sich 8 mm stromab der Rotorhinterkante. An dieser Position finden daher bereits starke Ausgleichsprozesse statt.

Die experimentellen und numerischen Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung bezüglich der Lage und Ausdehnung aller beschriebenen Strömungseffekte. Insbesondere wird auch das in den Experimenten beobachtete Zeitverhalten durch die Rechnung sehr gut wiedergegeben.

Strömung im zweiten Leitrad

Die instationären Strömungsfeldmessungen im Kanal des zweiten Leitrades erfolgten beim kleinen Massenstrom. Um die Daten vergleichen zu können, wurden die experimentellen Ergebnisse mit den entsprechenden numerischen Ergebnissen am Eintritt des zweiten Leitgitters zeitlich synchronisiert. Diese Synchronisation wurde für alle Auswertungen des Strömungsfeldes im Kanal des zweiten Leitrades beibehalten, so daß die Gegenüberstellungen der gemessenen und der berechneten Strömungsfelder in dieser Hinsicht völlig konsistent sind.

Bild 5.25 zeigt eine Momentaufnahme der Verteilung der Sekundärgeschwindigkeiten und der Entropie im Kanal des zweiten Leitrades bei 50 % Kanalhöhe. Im Inneren des Rotornachlaufs ist eine starke Strömung („negative jet“) in Richtung der Saugseite der Leitschaufel zu erkennen. Die Verdrängungswirkung der Schaufel und die Versperrung durch die Nachlaufströmung des Rotors führt vor der Vorderkante zu einer Beschleunigung der Strömung („positive jet“). Dieser Effekt ist in den linken Bildecken zu beobachten. Ein ähnliches Verhalten ergibt sich auch infolge der Ausgleichprozesse, die im Gegenzug zu den „negative jets“ Fluid von der Saug- zur Druckseite transportieren, siehe z. B. im rechten Drittel des unteren Bildrandes. Auf diese Art und Weise entstehen im Übergang zwischen den „positive jets“ und den „negative jets“ markante Wirbelstrukturen, die stromabwärts konvektiert werden.

Die nachfolgenden neun Abbildungen (Bilder 5.26 bis 5.34) zeigen instationäre Schwankungen von Strömungsgrößen im Kanal des zweiten Leitrades an drei verschiedenen radialen Positionen. Die Größen sind jeweils zu vier Zeitpunkten während eine Periode dargestellt, wobei die Simulationsergebnisse immer mit den entsprechenden Meßergebnissen aus [85] gegenübergestellt werden. Aus Gründen einer einfacheren Vergleichbarkeit ist die Ausdehnung des durch die Messungen abgedeckten Bereichs des Leitschaufelkanals in den Rechenergebnissen durch eine durchgezogene Linie gekennzeichnet. Die Isolinien Darstellungen sind mit zusätzlichen Texturen versehen, die den Wertebereich in fünf Abschnitte einteilen, wobei die einzelnen Abschnit-

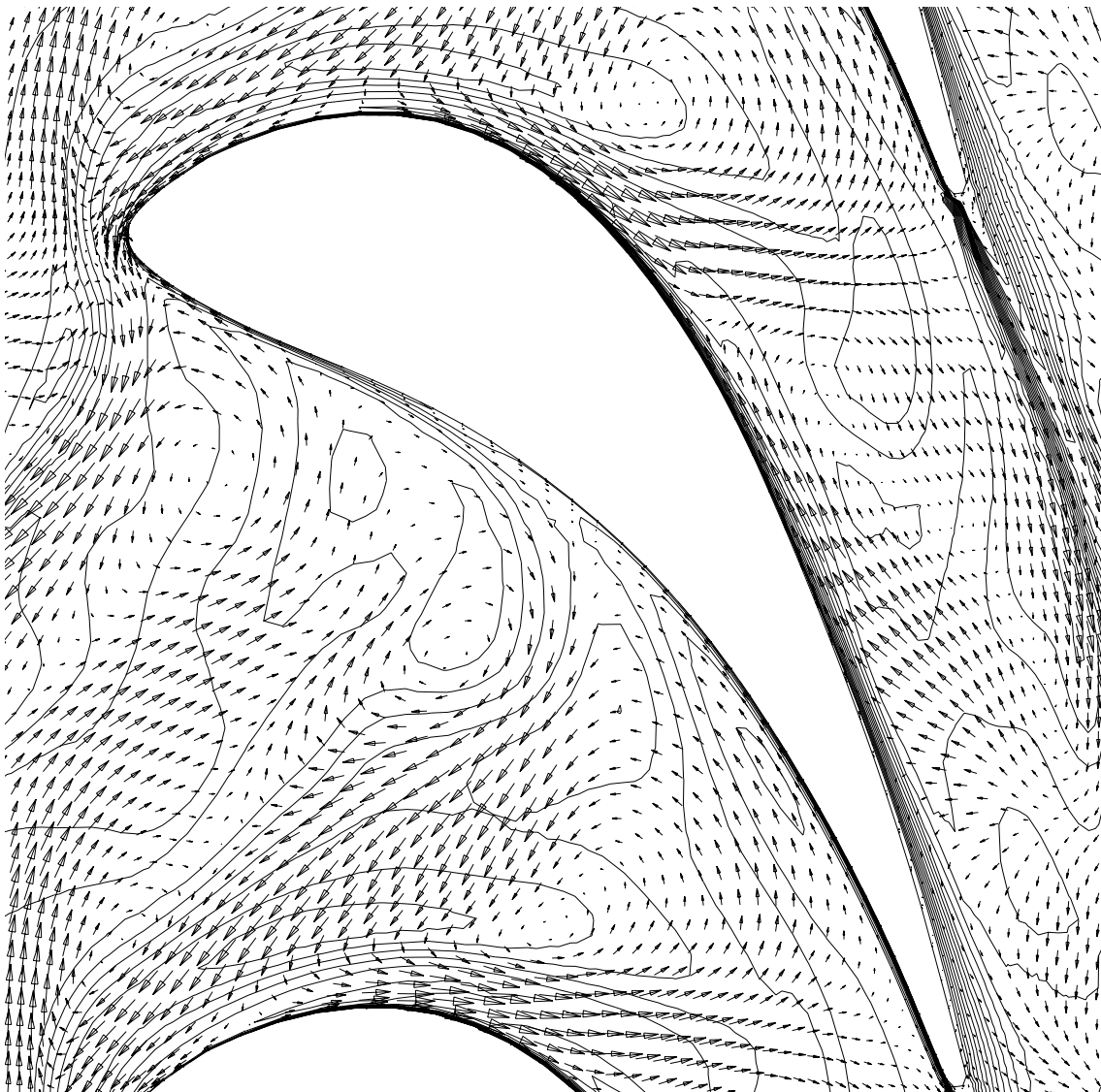


Bild 5.25: Momentane Verteilung der Sekundärgeschwindigkeiten und der Entropie im Kanal des zweiten Leitrades bei 50 % Kanalhöhe

te zur Erhöhung der Auflösung jeweils mit einer Höhenlinie weiter unterteilt sind. Der Bereich um den Nullpunkt ist nicht mit einer Textur versehen, so daß die Bereiche mit geringen Schwankungen als weiße Flächen einfach zu identifizieren sind. Dementsprechend haben die Bereiche mit starken Schwankungen dunkle Texturen. Wie erwähnt, handelt es sich bei den numerischen Ergebnissen um die Berechnungsvariante mit Turbulenzmodellmodifikation. Ein Vergleich der Ergebnisse vor der Modifikation ist in [88] zu finden.

Die Bilder 5.26 bis 5.28 zeigen die instationären Machzahlschwankungen bei 24 %, 50 % und 73 % Kanalhöhe. Die Schwankungen werden dabei als Differenz zwischen der lokalen instationären und der aus zeitlich gemittelten Strömungsgrößen gebildeten lokalen Machzahl berechnet. Die Bereiche mit

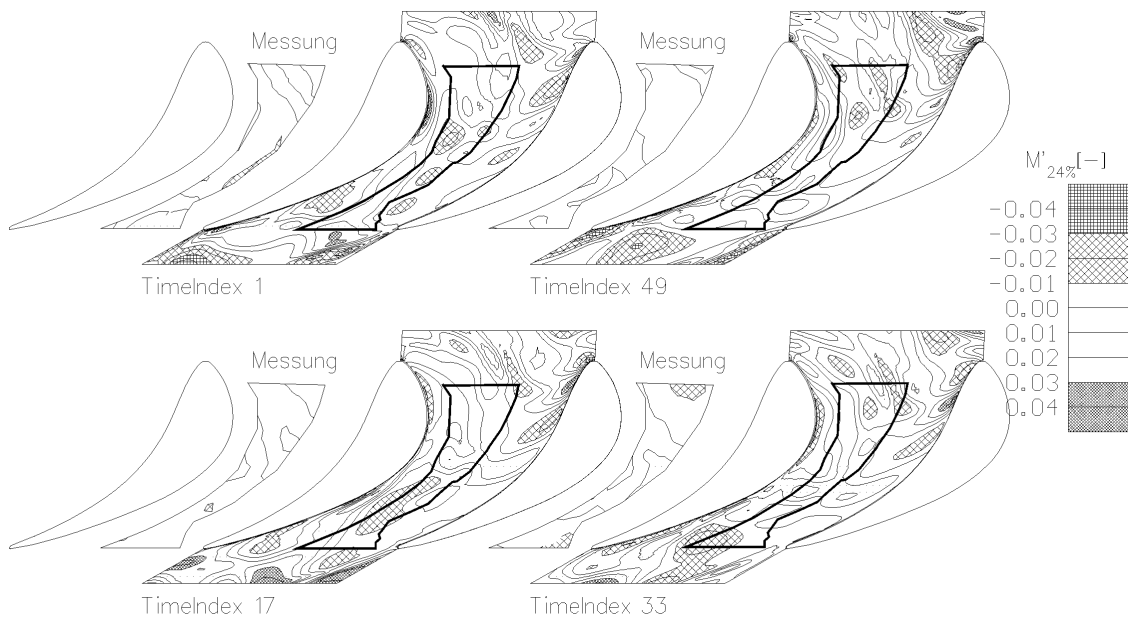


Bild 5.26: Machzahlschwankungen im zweiten Leitrad bei 24 % Kanalhöhe (Meßdaten aus [85])

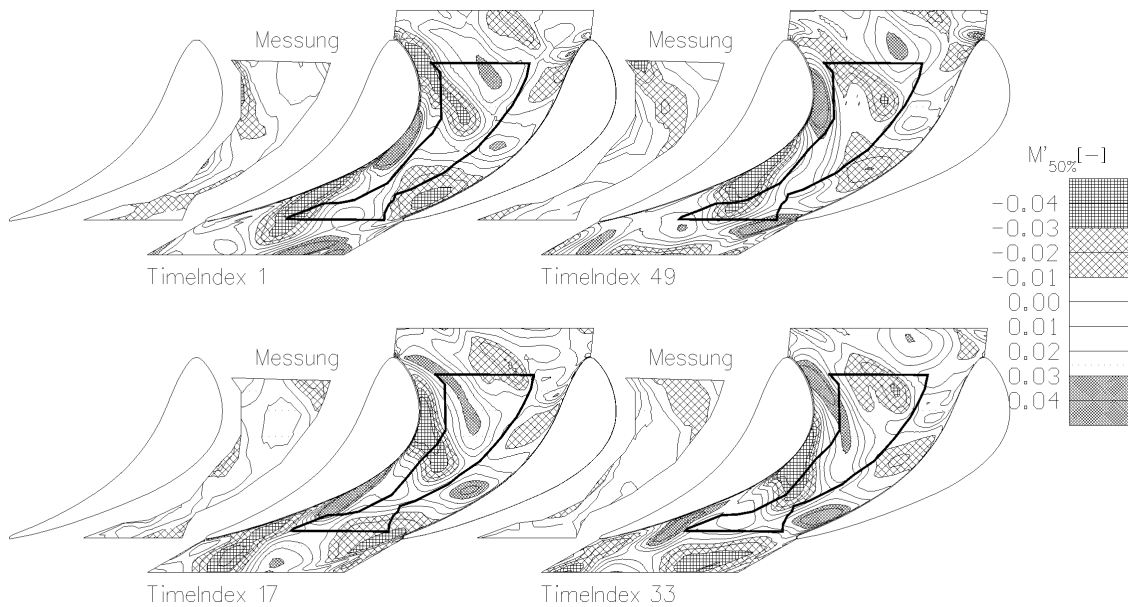


Bild 5.27: Machzahlschwankungen im Mittenschnitt des zweiten Leitrades (Meßdaten aus [85])

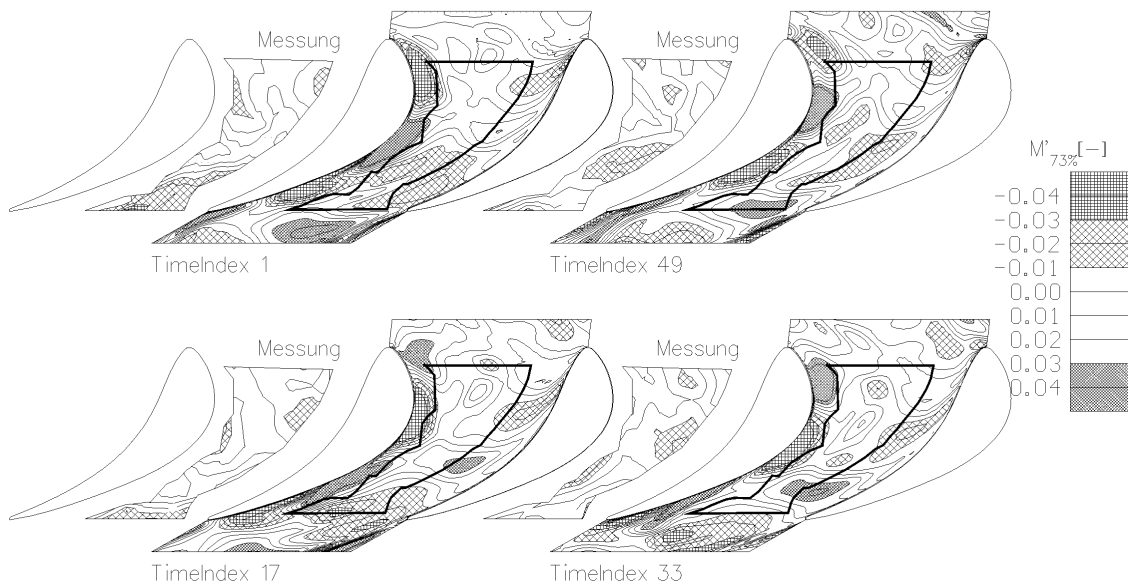


Bild 5.28: Machzahlschwankungen im zweiten Leitrad bei 73 % Kanalhöhe (Meßdaten aus [85])

negativen Werten zeigen die Konvektion des aus der Nachlaufströmung des Rotors stammenden, energiearmen Fluids durch den Leitschaufelkanal. Zum Zeitindex 49 (Bild 5.27) erstreckt sich die Nachlaufströmung von der Vorderkante der linken Schaufel über die linke obere Ecke des Meßgebiets bis hin zu etwa 40 % Sehnenlänge auf der Druckseite der rechten Schaufel. Verfolgt man diesen Nachlauf visuell in seinem Zeitverhalten, so läßt sich beobachten, daß es ziemlich genau zwei Perioden dauert, bis er den Leitschaufelkanal an der Hinterkante der linken Schaufel wieder verläßt.² Daher sind also immer genau zwei Rotornachläufe gleichzeitig im Kanal des zweiten Leitrades zu finden, wobei der weiter stromabwärts liegende aus der vorausgegangenen Periode stammt. Bei 24 % und 73 % Kanalhöhe ist prinzipiell ein ähnliches Strömungsverhalten erkennbar, das allerdings durch die dort vorhandenen starken Sekundärströmungseinflüsse gestört wird. Bemerkenswert ist die Region starker Schwankungen in der Nähe der Saugseite bei 73 % Kanalhöhe (Bild 5.28), das vom Meßgebiet gerade eben tangiert wird, so daß die dort ablaufenden Vorgänge erst durch die Erweiterung des betrachteten Bereichs durch die Simulation transparent werden.

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung in bezug auf das zeitliche Strömungsverhalten, die räumliche Verteilung und die Höhe der Schwankungen kann im großen und ganzen als sehr gut bezeichnet werden. Die Rechenergebnisse zeigen tendenziell, wie bereits weiter oben beobachtet, etwas steilere Gradienten und feinere Strukturen (Bild 5.26) als die Messungen, was von der höheren räumlichen Auflösung und der etwas zu geringen Dissipation bei den Simulationsrechnungen herrührt. Bei 73 % Kanalhöhe

²Dies entspricht dem zeitlichen Ablauf vom Timeindex 49 über die Zeitindizes 1, 17, 33, 49, 1, 17 und 33 wieder bis zum Zeitindex 49.

sind die feineren Strukturen auch – zumindest ansatzweise – in den Experimenten zu finden.

Die instationären Tangentialwinkelschwankungen bei 24 %, 50 % und 73 % Kanalhöhe sind in den Bildern 5.29 bis 5.31 dargestellt. Die Schwankungen berechnen sich als Differenz von lokalem, instationärem Tangentialwinkel und dem aus dem zeitlich gemittelten Strömungsfeld ermittelten, lokalen Tangentialwinkel. Die Rotornachläufe sind in diesen Abbildungen als dunkle Bereiche mit momentanen Minderumlenkungen zu erkennen, die zu einer reduzierten Belastung der Schaufeln im Bereich der Vorderkante führen. Im Gegensatz zu den Machzahlschwankungen treten hier in unmittelbarer Schaufelnähe keine signifikanten Schwankungen auf, weil die Strömungswinkeländerungen schneller ausgeglichen werden. Daher ist das Strömungsfeld etwas übersichtlicher, wodurch die Verfolgung der Nachlaufreste im Kanal und der Vergleich von Messung und Rechnung vereinfacht wird. Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist von ähnlicher Qualität wie bei den Machzahlschwankungen. Bemerkenswert sind die unterschiedlichen Positionen der Nachläufe auf den unterschiedlichen Radien zum selben Zeitpunkt. So berührt beispielsweise bei 24 % zum Zeitindex 1 der Nachlauf gerade die Schaufelvorderkante, während er sich bei 73 % Kanalhöhe bereits im Bereich der maximalen Krümmung der Schaufelsaugseite befindet. Die Ursache für dieses Verhalten liegt an der Auffädung der Leitschaufel über die Hinterkante. Dies hat zur Folge, daß die Vorderkante sich nicht radial erstreckt, sondern die Schaufelspitze gegenüber dem Schaufelfuß leicht in Richtung der Rotordrehung geneigt ist. Auch ist in diesen Bildern die mit dem zu geringen Massenstrom bei der Simulation verbundene zu niedrige Strömungsgeschwindigkeit erkennbar. Diese geht mit einer langsameren Konvektion der Nachläufe bei der Rechnung im Vergleich zur Messung einher. Dieser Effekt ist ab dem Moment zu beobachten, an dem der Rotornachlauf in den Leitschaufelkanal eintritt.

Die Bilder 5.32 bis 5.34 zeigen die momentane Verteilung des Radialwinkels bei 24 %, 50 % und 73 % Kanalhöhe. Durch die achsparallele Naben- und Gehäusekontur liegt der mittlere Radialwinkel bei etwa 0° , so daß hier eine Mittelwertsubtraktion überflüssig ist und die Absolutgröße zur Darstellung geeignet ist. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist mit Ausnahme der Ergebnisse für 73 % Kanalhöhe nicht ganz so gut wie bei den Machzahl- und Tangentialwinkelschwankungen. Die Ursache für die höheren Absolutwerte der Rechnung ist, wie bereits weiter oben erwähnt, in erster Linie auf die unterschiedlichen Massenströme zurückzuführen. Vergleicht man nur die Struktur des Strömungsfeldes und läßt die Absolutwerte außer Betracht, so kann bei 73 % Kanalhöhe sogar eine ausgezeichnete Übereinstimmung festgestellt werden. Ähnlich wie bei den Machzahlschwankungen sind auch in der Radialwinkelverteilung starke Instationaritäten in Profilnähe zu beobachten, die bei der Betrachtung des Meßfensters in der Form nicht vermutet werden.

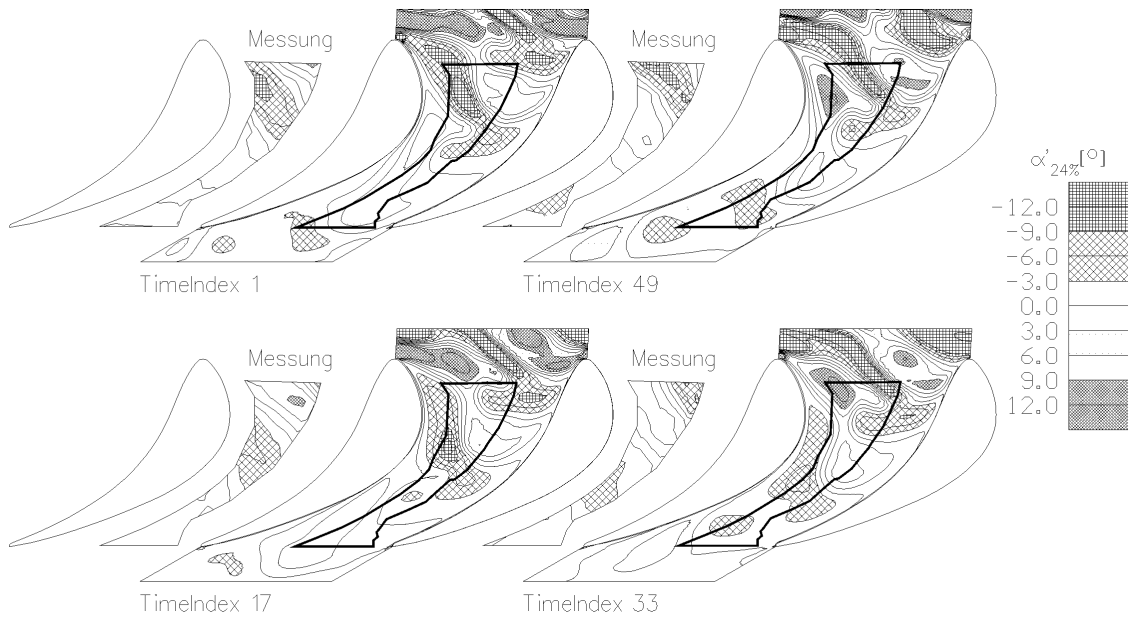


Bild 5.29: Tangentialwinkelschwankungen im zweiten Leitrad bei 24% Kanalhöhe (Meßdaten aus [85])

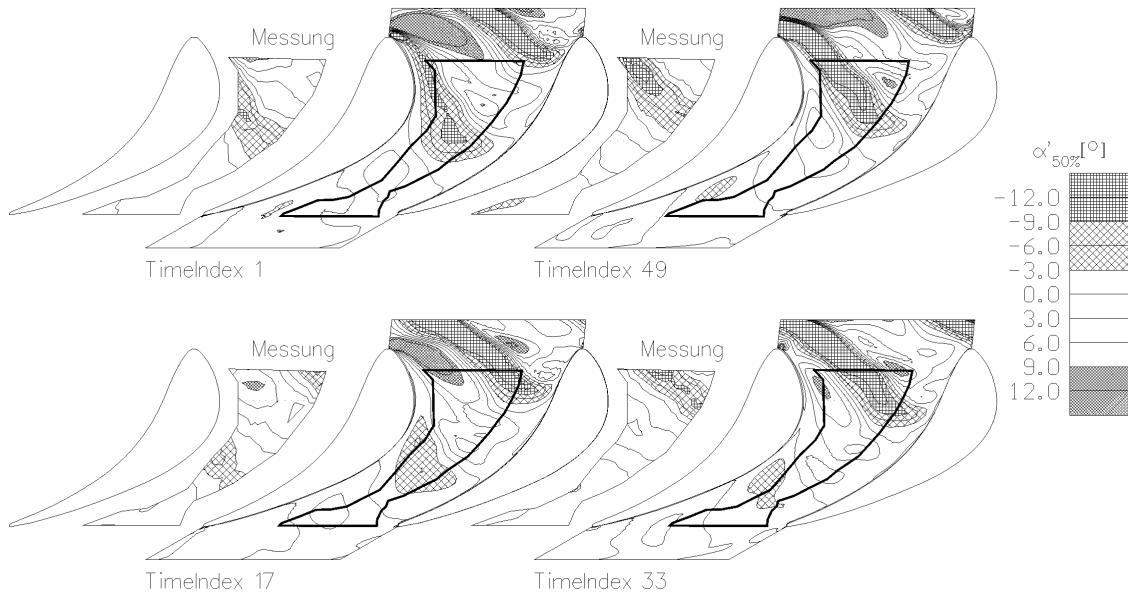


Bild 5.30: Tangentialwinkelschwankungen im Mittenschnitt des zweiten Leitrades (Meßdaten aus [85])

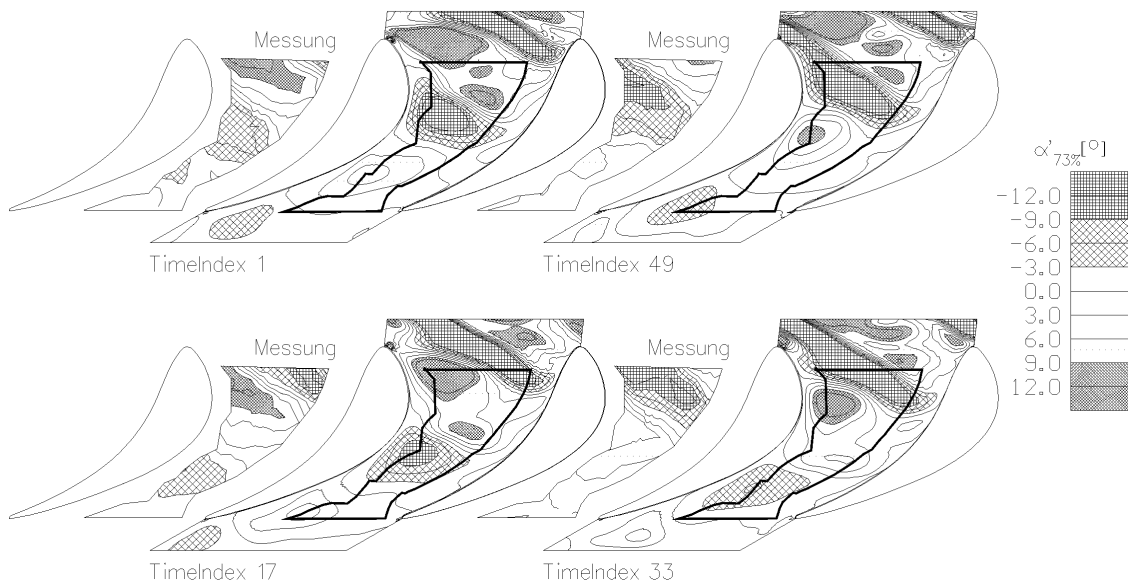


Bild 5.31: Tangentialwinkelschwankungen im zweiten Leitrad bei 73% Kanalhöhe (Meßdaten aus [85])

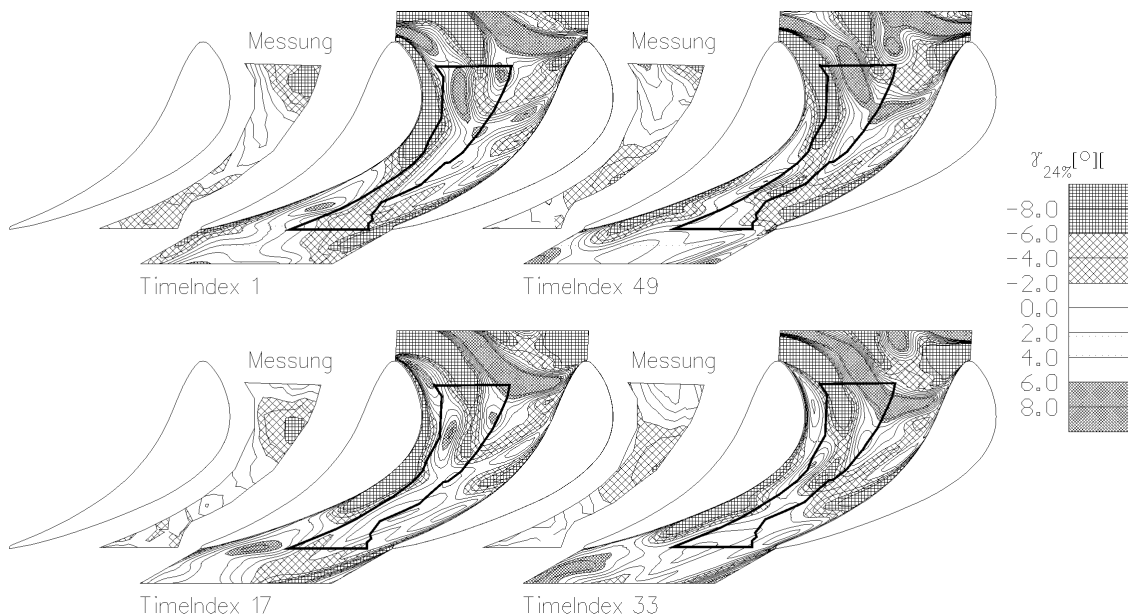


Bild 5.32: Radialwinkelverteilung im zweiten Leitrad bei 24% Kanalhöhe (Meßdaten aus [85])

Die gemessenen und die berechneten Sekundärströmungen in einer Schnittebene senkrecht zur Maschinenachse an Eintritt des Kanals des zweiten Leitrades (Meßebeine 14, Bild 5.3) sind in den Bildern 5.35 und 5.36 dargestellt. In den Rechenergebnissen ist zusätzlich noch die Lage des Meßfensters als gestrichelter Linienzug sowie eine Isoliniendarstellung der Entropieverteilung eingezeichnet.

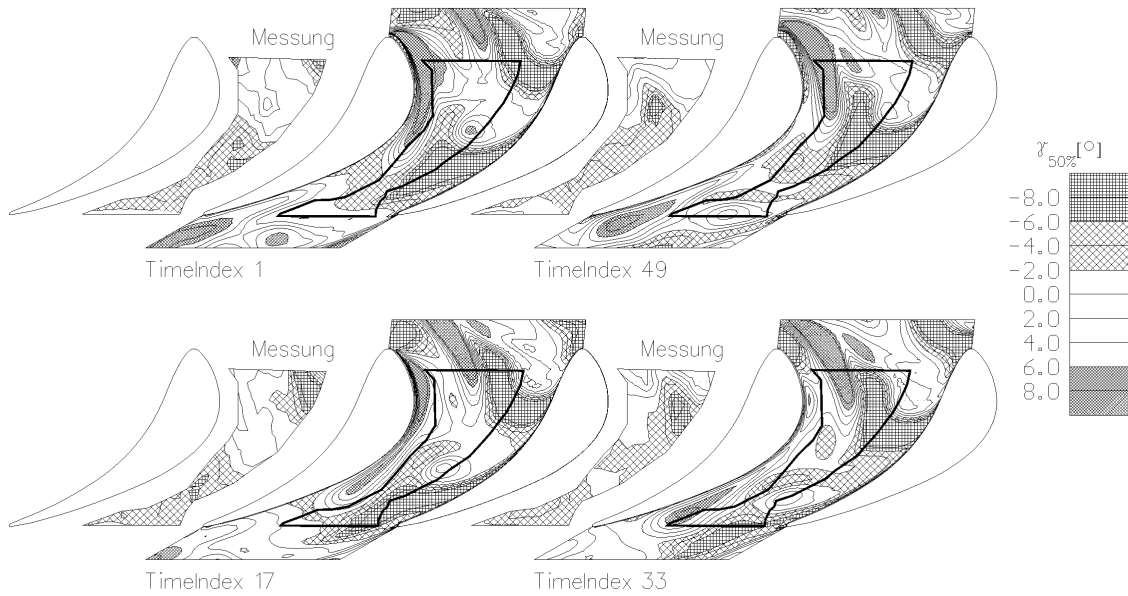


Bild 5.33: Radialwinkelverteilung im Mittenschnitt des zweiten Leitrades (Meßdaten aus [85])

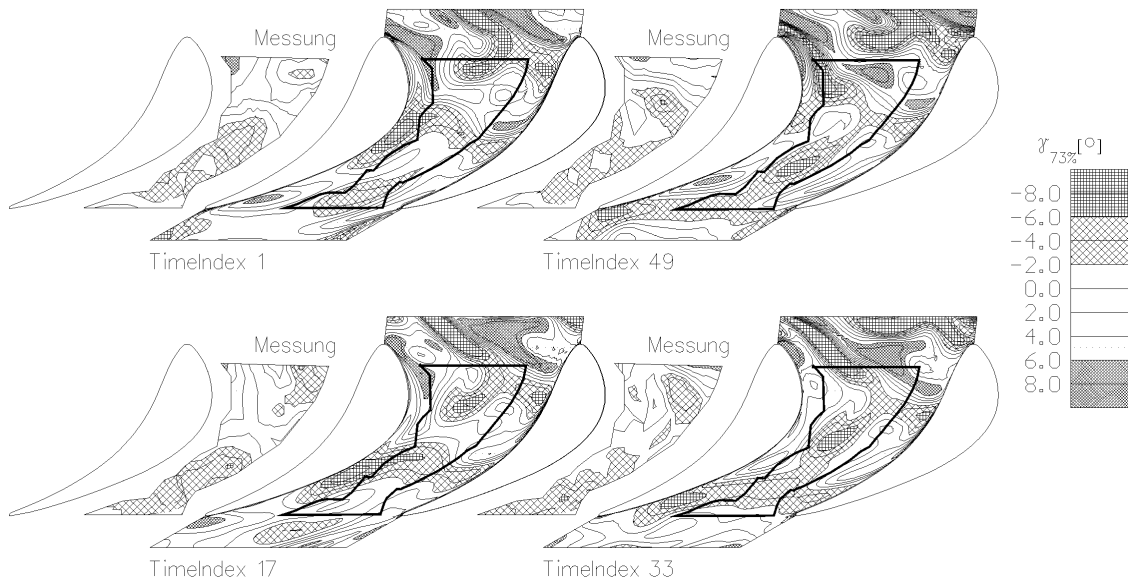


Bild 5.34: Radialwinkelverteilung im zweiten Leitrad bei 73% Kanalhöhe (Meßdaten aus [85])

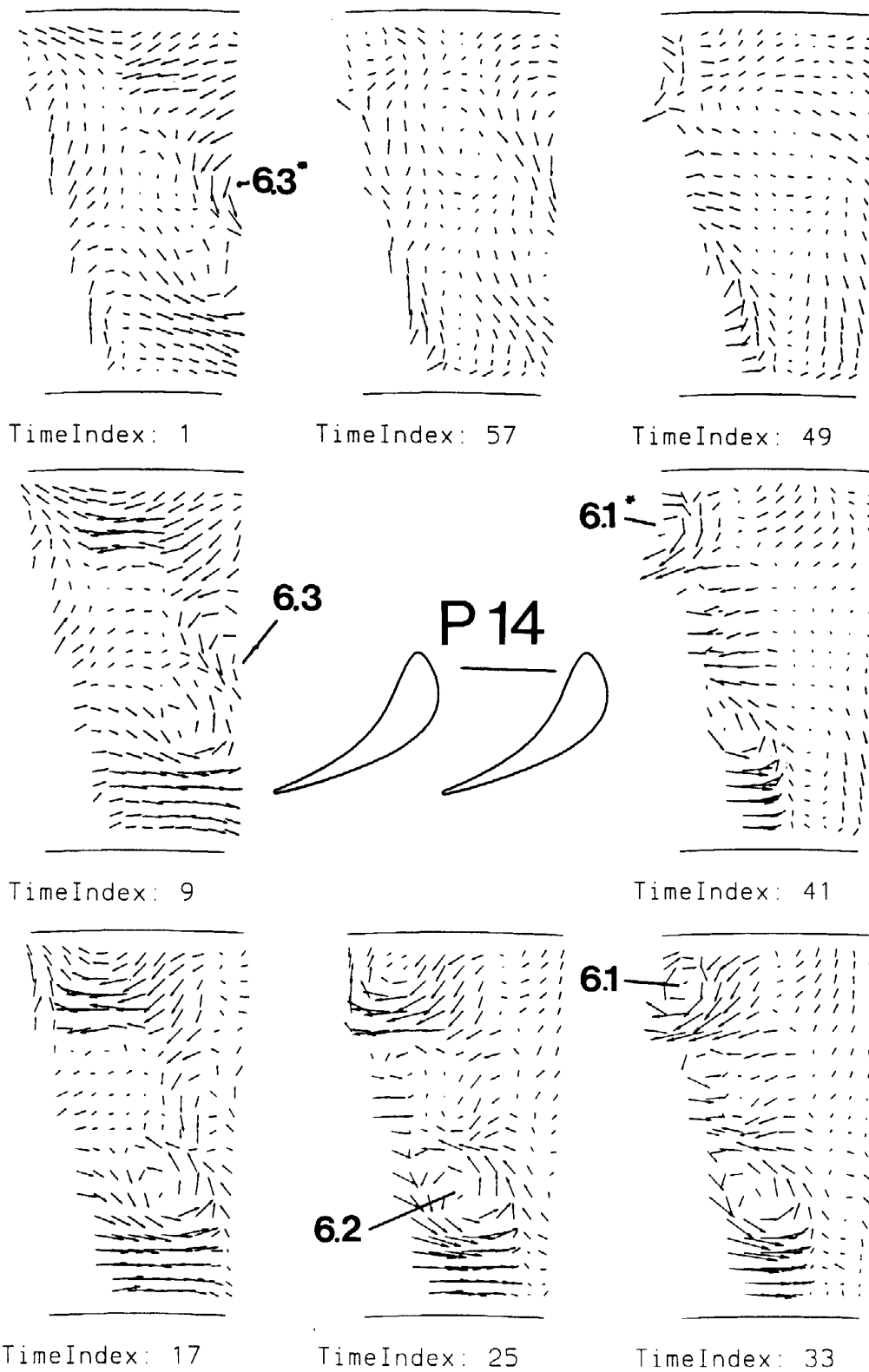


Bild 5.35: Gemessene Sekundärströmungen am Eintritt des zweiten Leit-
schaufelkanals

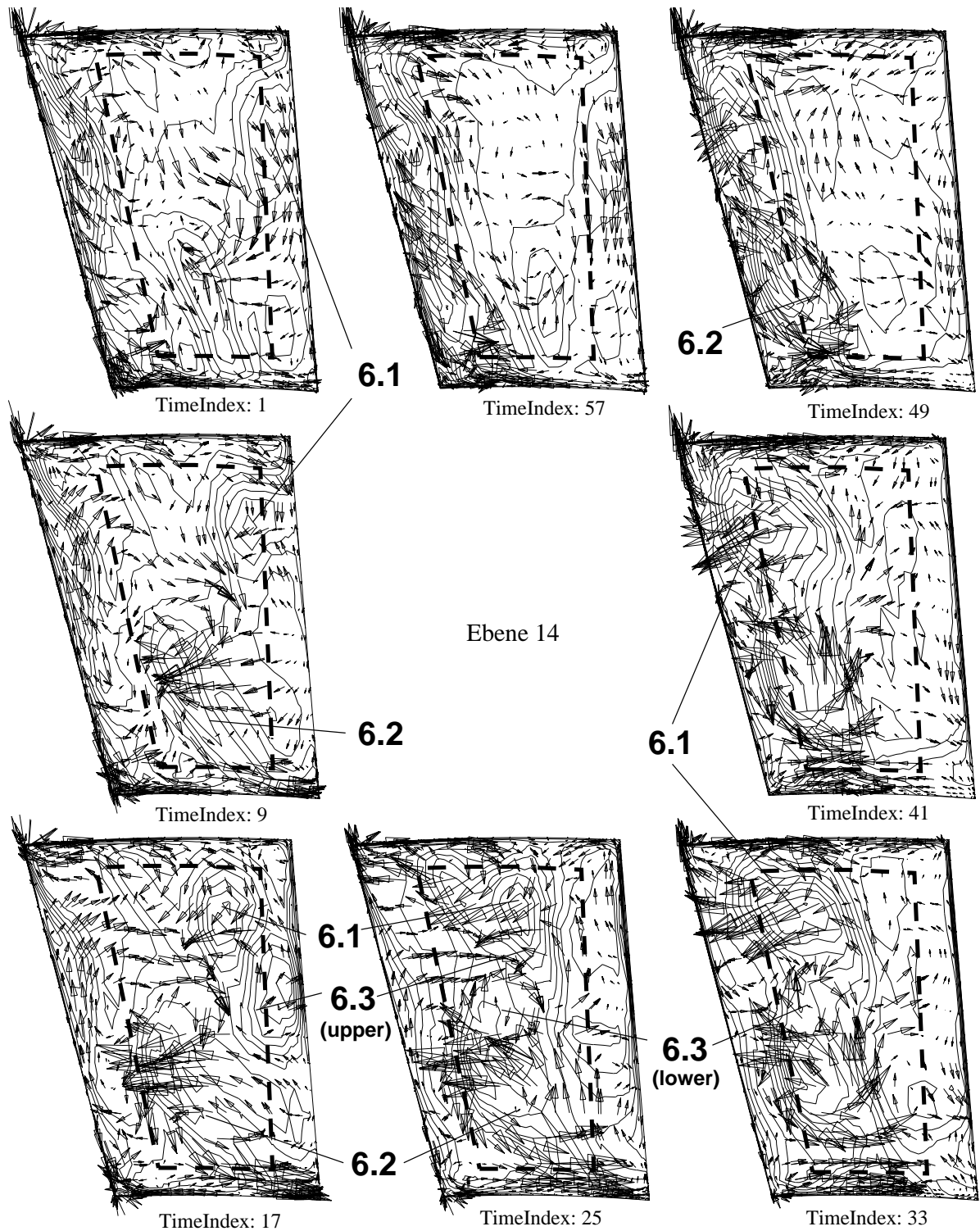


Bild 5.36: Berechnete Sekundärströmungen und Entropieverteilung am Eintritt des zweiten Leitschaufelkanals

Der Vergleich der Sekundärströmungen in der Rotorabströmung, Bilder 5.22 und 5.23, und am Eintritt des zweiten Leitrades, Bilder 5.35 und 5.36, zeigt, daß alle Wirbelstrukturen in beiden Schnittebenen zu erkennen sind. Zum Zeitindex 9 erscheint bei etwa 30 % Kanalhöhe ein zunächst noch schwacher Wirbel (6.2), der jedoch mit fortschreitender Zeit rasch an Stärke zunimmt und seine maximale Intensität bei den Zeitindizes 33 und 41 erreicht. Sein Drehsinn und seine Lage lassen ihn als Nabenwirbel des Rotors identifizieren. Der sich im Uhrzeigersinn drehende Gehäusewirbel des Rotors (6.1) bei etwa 85 % Kanalhöhe ist in den Simulationsergebnissen bereits zum Zeitindex 1 anhand der Entropieverteilung nahe der Druckseite des Leitrades auszumachen. In der Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren ist er allerdings erst ab etwa dem Zeitindex 17 richtig deutlich zu erkennen. Mit der Rotorbewegung wird sein Zentrum bis zum Zeitindex 41 um etwa 10 % der Kanalhöhe radial nach unten verlagert. Dieser Wirbel hat aufgrund der starken Querströmungen seiner unteren Hälfte ein markantes Aussehen. Bei genauerer Betrachtung der Sekundärströmungsbilder lassen sich, insbesondere in den numerischen Ergebnissen, die beiden Hinterkantenwirbel (6.3) des Rotors beobachten, die gewissermaßen für einen Ausgleich der durch die Kanalwirbel verursachten Störungen im Strömungsfeld sorgen. Zwischen den experimentellen und den numerischen Ergebnissen kann in bezug auf das zeitliche Verhalten, die räumliche Verteilung und die Stärke der Sekundärströmungsphänomene eine ausgezeichnete Übereinstimmung festgestellt werden.

In den Bildern 5.37 und 5.38 sind die gemessenen und berechneten Sekundärströmungen aus Austritt des zweiten Leitradgitters, Ebene 0 in Bild 5.3, dargestellt. Auch dieser Position kann das Wirbelsystem des Rotors noch beobachtet werden. In den Messungen ist der Gehäusewirbel (6.1) und der obere Hinterkantenwirbel (6.3) zum Zeitindex 17 deutlich erkennbar. Auch in den Simulationsergebnissen deutet sich in der Entropieverteilung zu diesem Zeitpunkt das Auftauchen der Rotorwirbel an. Allerdings deutet es noch bis zum Zeitindex 33, bis die Wirbelstrukturen auch in den Geschwindigkeitsvektoren deutlich zu erkennen sind. Der Grund für diesen Zeitversatz liegt an der mit dem zu geringen Massenstrom verursachten, zu niedrigen Konvektionsgeschwindigkeit. Besonders auffallend in den numerischen Ergebnissen ist der untere Hinterkantenwirbel des Rotors, der zum Zeitindex 33 das Strömungsfeld dominiert und sich in dieser Stärke in den Messungen nicht beobachten läßt. Die Kanalwirbel des zweiten Leitrades sind in beiden Ergebnissen ebenfalls zu beobachten. Diese Wirbel zeigen aufgrund der Interaktion mit den durch die ungleichförmige Rotorabströmung verursachten Störungen periodische Schwankungen in ihrer Intensität, wobei zwischen den Meß- und den Rechenergebnissen wiederum aus den oben genannten Gründen ein Zeitversatz festzustellen ist.

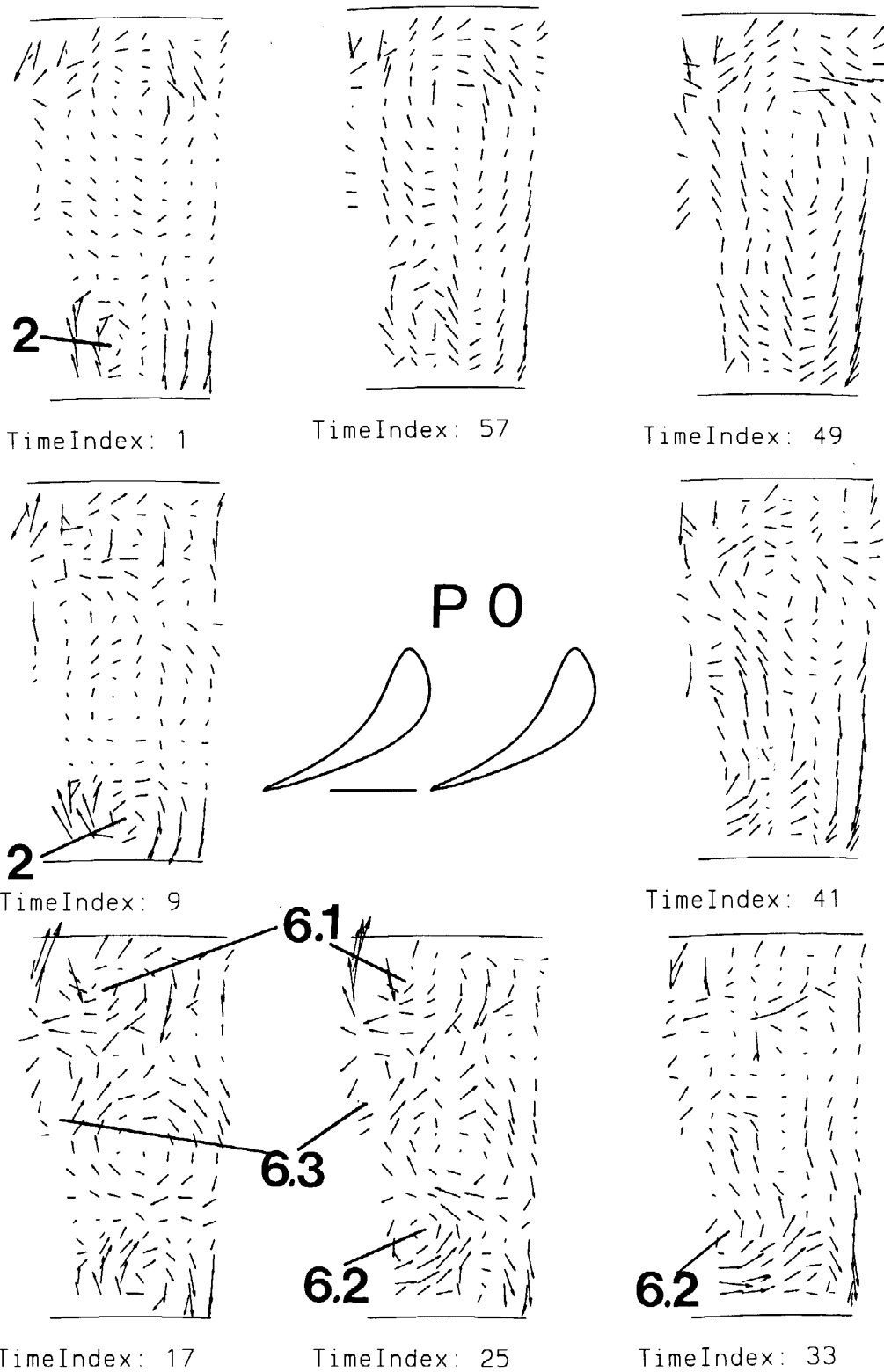


Bild 5.37: Gemessene Sekundärströmungen am Austritt des zweiten Leit-
schaufelkanals

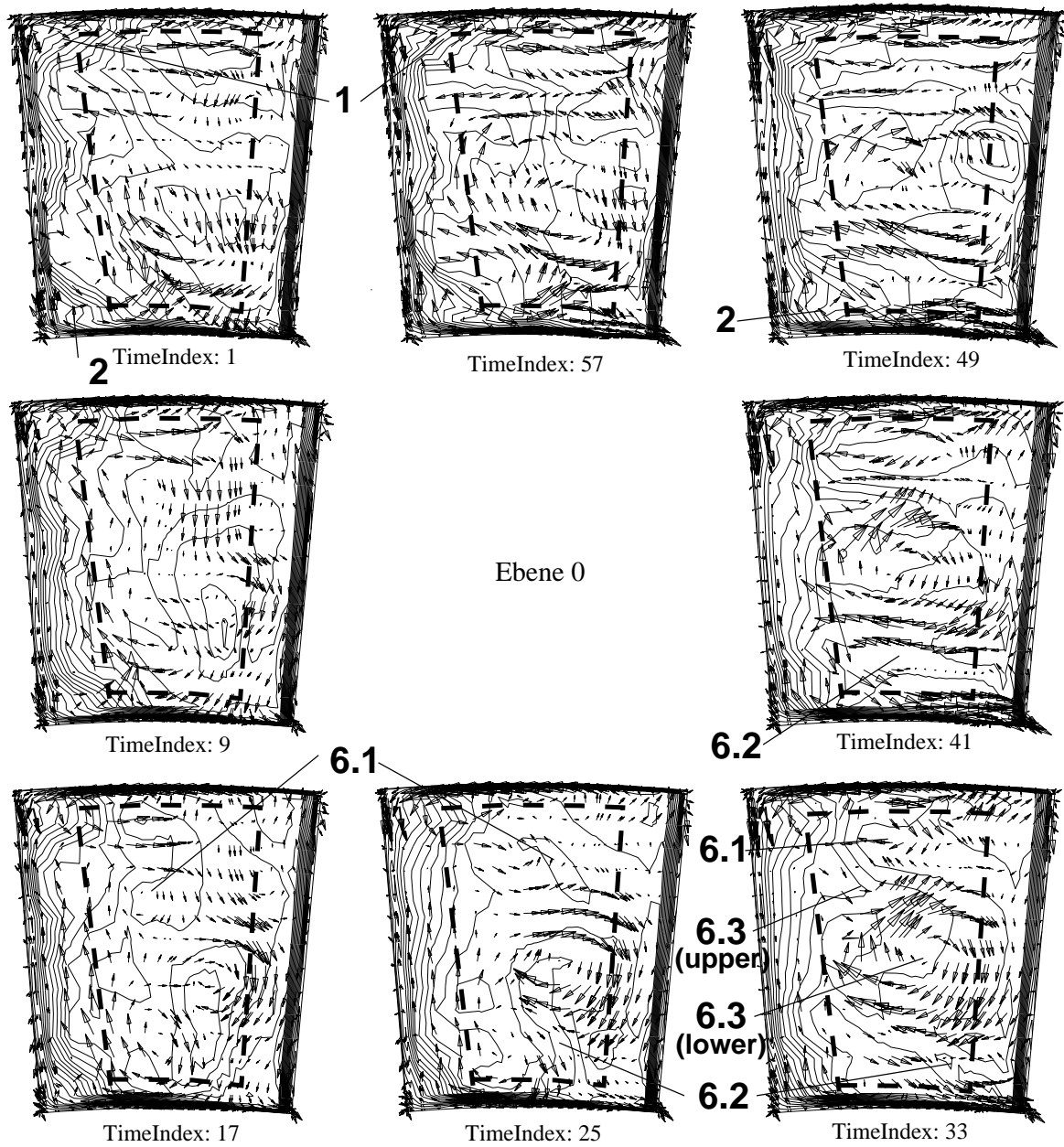


Bild 5.38: Berechnete Sekundärströmungen und Entropieverteilung am Austritt des zweiten Leitschaufelkanals

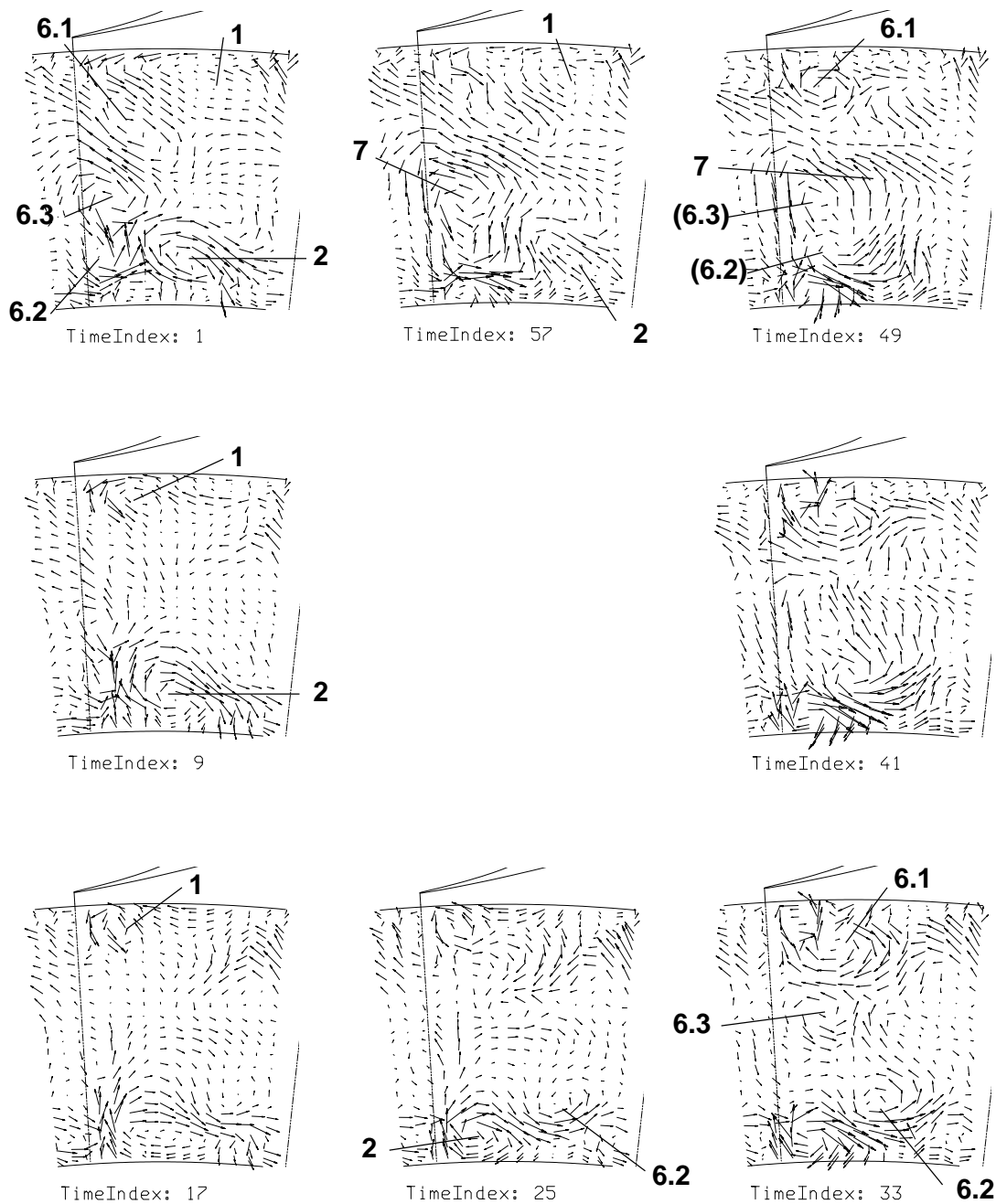


Bild 5.39: Gemessene Sekundärströmungen in der Abströmung des zweiten Leitschaufelkanals

Abströmung des zweiten Leitrades

Abschließend sollen nun noch die Abströmung des zweiten Leitrades untersucht und mit entsprechenden experimentellen Daten verglichen werden. Dazu sind in den Bildern 5.39 und 5.40 die gemessenen und berechneten Sekundärströmungen in Ebene 3 dargestellt, die sich 8 mm stromab der Hinterkante des zweiten Leitrades befindet. Diese Position entspricht bei den Simulationen der Austrittsebene des Rechengebiets.

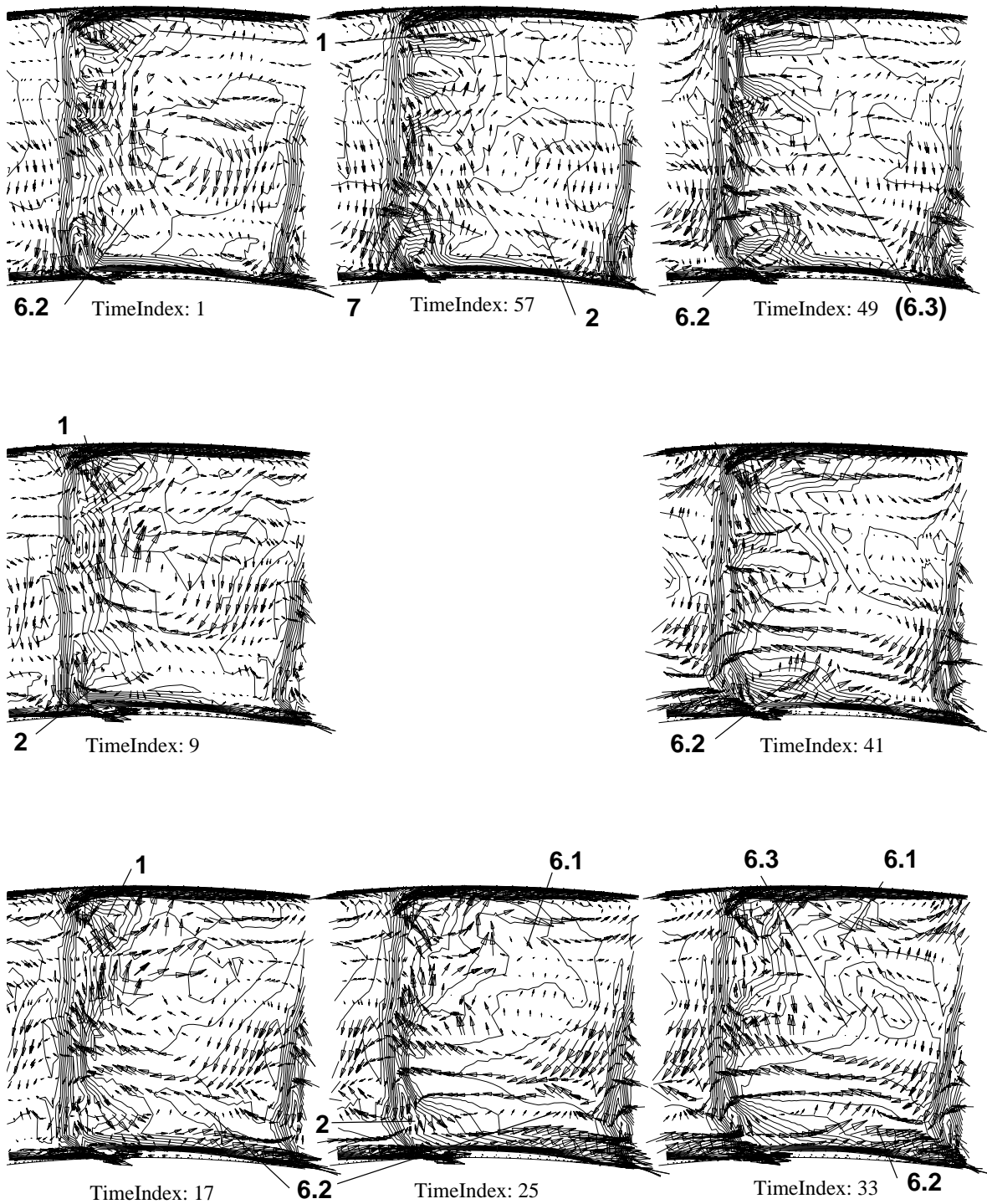


Bild 5.40: Berechnete Sekundärströmungen und Entropieverteilung in der Abströmung des zweiten Leitschaufelkanals

Da die Meßdaten an dieser Ebene – im Gegensatz zu den Messungen im Kanal des zweiten Leitrades – beim großen Massenstrom gewonnen wurden, konnten die experimentellen und numerischen Ergebnisse hier ebenfalls zeitlich synchronisiert werden, ohne eine diesbezügliche Inkonsistenz in die Ergebnispräsentation einzubringen. Diese separate Synchronisation ist auch die Begründung dafür, daß hier trotz des deutlichen Massenstromunterschieds zwischen Messung und Rechnung, der mit Unterschieden in der Strömungs- bzw. Konvektionsgeschwindigkeit einher geht, zwischen gemessener und berechneter Strömung kein nennenswerter Phasenversatz im zeitlichen Strömungsverhalten festzustellen ist.

Zu den Zeitindizes 17 und 25 ähnelt das Strömungsfeld noch am ehesten dem eines Leitgitters mit einer gleichförmigen Anströmung, wobei die beiden Kanalwirbel des Gitters die markantesten Strukturen bilden. Doch bereits zum Zeitindex 17 taucht nahe der Nabe und nahe dem Gehäuse jeweils eine rotierende Störung, (6.2) bzw. (6.1), auf, deren Drehsinn darauf schließen läßt, daß es sich dabei um die Überreste der beiden Rotorkanalwirbel handelt. Der Nabenwirbel des Rotors (6.2) befindet sich in dieser Ebene deutlich näher an der Nabe als weiter stromauf. Verfolgt man diesen Wirbel mit der Zeit, so erkennt man, daß er zum Zeitindex 49 an den saugseitigen Bereich des Statornachlaufes kommt, wo er in der Nähe der Position zu finden ist, wo der Nabenwirbel des Leitgitters zu erwarten ist. Dort löst er sich langsam auf und wird bis zum Zeitindex 9 durch den sich bildenden Nabenwirbel des Leitrades (2) ersetzt. Ein ähnlicher Vorgang ist in den Meßergebnissen auch für den Gehäusewirbel des Rotors (6.1) zu beobachten, der entsprechend in Wechselwirkung mit dem Gehäusewirbel des Leitrades (1) tritt. In den Simulationsergebnissen läßt sich dieser Vorgang bei genauer Betrachtung auch beobachten, doch ist der Gehäusewirbel des Rotors deutlich schwächer als bei den Experimenten. In den Meßergebnissen läßt sich ein weiteres Strömungsphänomen beobachten, das zur Bildung eines neuen Wirbelsystems führt. Zum Zeitindex 33 ist zu erkennen, wie Fluid vom Nabenwirbel des Rotors (6.2) zum oberen Hinterkantenwirbel (6.3) transportiert wird. Auf diese Art und Weise verstärken sich die beiden Wirbel und einer neuer großer Wirbel (7) entsteht, der zum Zeitindex 57 durch das Aufkommen des Nabenwirbels des Leitrades (2) wieder aufgelöst wird, so daß zum Zeitpunkt 1 die beiden Wirbel (6.2) und (6.3), aus denen er hervorging, wieder deutlich zu unterscheiden sind. Dieser Vorgang ist in den Simulationsergebnissen allenfalls ansatzweise zu beobachten. Derartig komplexe Vorgänge, die durch das Zusammenspiel von turbulenten Strömungseffekten aus verschiedenen Schaufelreihen wesentlich beeinflusst werden, können offensichtlich durch das einfache algebraische Turbulenzmodell nicht wiedergegeben werden.

6 Computeranimationen

Diesem Bericht liegt eine CD-ROM bei, die zwei im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit entstandene Computeranimationen von Berechnungsergebnissen enthält. Mit der MPEG-Codierung von Bild und Ton wurde ein Dateiformat gewählt, das heute einen weitverbreiteten Standard darstellt und von den meisten Rechnerplattformen unterstützt wird. Die Animationen sind aber auch als VHS-Videokassette verfügbar.

Bestimmte Strömungsphänomene lassen sich erst in ihrem zeitlichen Ablauf verstehen und interpretieren. Zwar lassen sich wesentliche Mechanismen sehr wohl durch Serien von Einzelbildern erschließen doch einen „realistischen Eindruck“ von den ablaufenden Strömungsvorgängen erhält man erst durch animierte Sequenzen. Die Hochkommata um den Begriff „realistischen Eindruck“ sind hierbei bewußt gesetzt, denn die Realität sieht mit Sicherheit anders aus, als sie durch Computergraphiken vermittelt wird. Realistisch bedeutet in diesem Zusammenhang vielmehr, daß die Art der Visualisierung Bilder liefert, die dem Betrachter von anderen Zusammenhängen her geläufig sind und die deshalb greifbar und wirklichkeitsnah erscheinen, weil sie, unterstützt von einer einfachen visuellen Erfäßbarkeit, eine Übertragung auf das gewohnte Realitätserlebnis ermöglichen.

Die nachfolgenden Abschnitte beschreiben die einzelnen Sequenzen der Animationen und sollen so zur Interpretation der gezeigten Strömungsphänomene beitragen. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt mehr in der Verfahrensentwicklung und weniger in der physikalischen Beschreibung der stattfindenden instationären Vorgänge. Daher sollen die Anwendungsbeispiele in erster Linie aufzeigen, welche Art von Phänomenen durch die Anwendung des Verfahrens berechnet werden und welche Möglichkeiten zur Visualisierung durch Einsatz moderner Medien bestehen.

6.1 Transsonisch durchströmte Turbinenstufe

Vorstellung des Testfalles

Bei diesem Anwendungsbeispiel handelt es sich um die hochbelastete Endstufe einer Dampfturbine mit 44 Leit- und 60 Laufschaufeln. Die Drehzahl des Rotors beträgt 12.600 U/min. Die langen und stark verwundenen Laufschaufeln und die hohen Strömungsgeschwindigkeiten führen zu einer

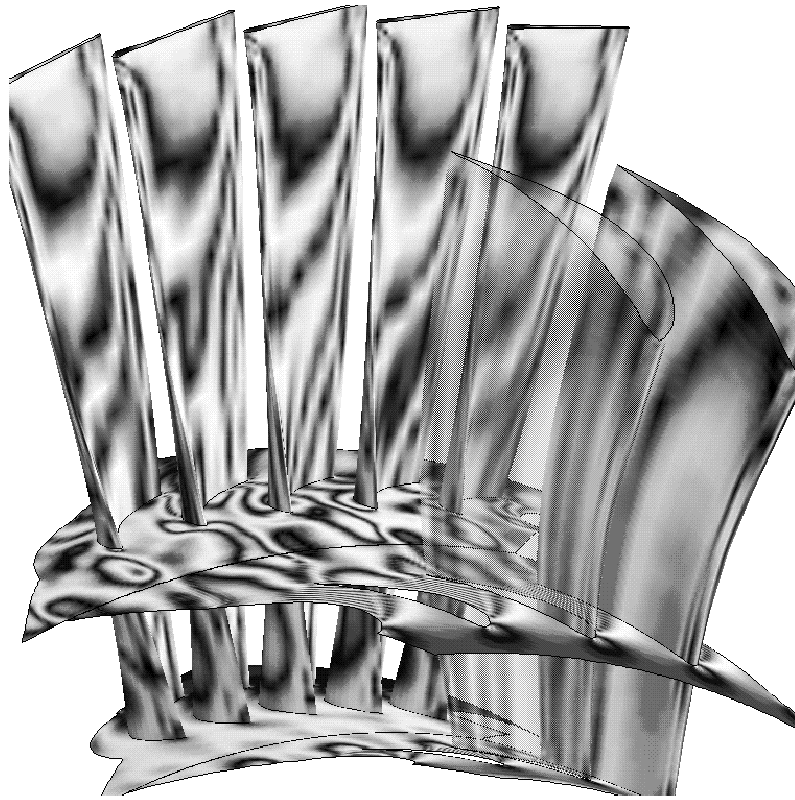


Bild 6.1: Instationäre Druckverteilung in der Turbinenstufe

hochgradig instationären, dreidimensionalen Strömung. Im Bereich der unteren Kanalhälfte, in der die Statorabströmung transsonisch ist, werden die Stator-Rotor-Interaktionen von den durch die Druckkräfte auf den Schaufeln verursachten, sogenannten Potentialwechselwirkungen dominiert. Viskose Einflüsse spielen hier eine eher untergeordnete Rolle. Auf den Rotorschaukeln treten dabei sehr starke Druckschwankungen auf, die dazu führen, daß Druck- und Saugseite zeitweilig vertauscht sind. Das Strömungsfeld vor und zwischen den Laufschaufeln wird von Druckpulsationen beherrscht, die hauptsächlich mit den Frequenzen der ersten beiden Harmonischen der Schaufelwechselfrequenz auftreten. Analysen der instationären Schaufeldruckverteilung und der daraus resultierenden Kräfte und Momente sind z. B. in [47, 48, 52] enthalten. Die Rückwirkung auf die Leitschaufeln ist relativ gering und erstreckt sich nur auf Bereich in der Nähe der Hinterkanten, weil die Überschallgebiete den stromaufwärts laufenden Informationstransport behindern. Bild 6.1 zeigt eine dreidimensionale Ansicht der Turbinenstufe. Auf der Nabe, auf den Schaufeln und in einer Schnittebene bei 30% Kanalhöhe ist die momentane Druckverteilung in Form von sich abwechselnden hellen und dunklen Bereichen dargestellt, die als „ausgedehnte Isolinien“ aufgefaßt werden können.

Der große Unterschied in den Schaufelzahlen erfordert die Diskretisierung von zwei Stator- und drei Rotorkanälen, um die Stabilitätsbedingung der

Zeitneigungsmethode zu erfüllen. Das gesamte Rechengebiet wurde mit etwa 440.000 Knotenpunkten diskretisiert. Die Simulationsergebnisse für ein Segment von 8 Stator- und 12 Rotorteilungen zu 50 gleichverteilten Zeitpunkten während einer Schaufelwechselfrequenz dienen als Datensatz für die Visualisierung, wobei der zeitliche Phasenversatz der Lösungen benachbarter Teile bei der Ergebnisausgabe berücksichtigt wurde, siehe Abschnitt 4.3. Da sich ein mit der Schaufelwechselfrequenz periodisches Strömungsfeld einstellt, lassen sich die Ergebnisse in einer Endlosschleife aneinanderhängen, so daß eine kontinuierliche Animation möglich ist.

Beschreibung der einzelnen Bildsequenzen

Verteilung des statischen Drucks

Diese Sequenz zeigt eine Ansicht der Turbinenstufe mit Blick in Strömungsrichtung. Die Farbverteilung auf den dargestellten Flächen repräsentiert die Verteilung des statischen Drucks auf der Nabe, auf den Schaufeln und in einer Schnittebene bei 30 % Kanalhöhe, auf der auch die entsprechenden Höhenlinien zu sehen sind. Eine Statorschaufel ist undurchsichtig und eine weitere transparent gezeichnet, Alle anderen sind ausgeblendet, um eine bessere Sicht auf die Rotorschaufeln zu ermöglichen.

Die Druckwerte steigen von blau über zyan, grün und gelb nach rot an. Mit der Drehung des Rotors können die instationären Druckänderungen beobachtet werden. Die stärksten Schwankungen sind auf der Druckseite der Rotorschaufeln und auf der Schnittebene in den Rotorkanälen zu erkennen.

Isofläche des statischen Drucks

Die Perspektive bei dieser Sequenz entspricht der vorigen mit einem leicht erhöhten Standpunkt. Anstelle der Schnittebene ist nun eine Isofläche für einen normierten statischen Druck von 0,38 dargestellt. Als Normierungsgröße dient dabei der maximale Totaldruck der Statorzuströmung.

Während sich der Rotor dreht können die durch die Druckkräfte auf den Schaufeln verursachten starken Potentialwechselwirkungen beobachtet werden, die zu einer komplexen Bewegung der Isofläche führen. In der Nähe der Druckseiten der Laufschaufeln sind Druckschwingungen erkennbar, die mit der doppelten Schaufelwechselfrequenz auftreten. Die Bewegungen der Isofläche in der Nähe der Saugseiten sind hingegen deutlich ruhiger und ähneln stromabwärts laufenden Druckwellen, die mit der Schaufelwechselfrequenz auftreten. Höhere Harmonische leisten hier nur einen geringen Beitrag, was durch eine Frequenzanalyse bestätigt wird [52].

Partikelbahnen im Absolutsystem

Diese Ansicht zeigt den Rotorbereich in der Nähe der Nabe, wobei sich der Betrachter im Axialspalt zwischen den Leit- und Laufschaufeln befindet und in Strömungsrichtung blickt. Die Nabe und die meisten Schaufeloberflächen sind grau und undurchsichtig gezeichnet. Zwei Rotorscheaufeln sind jedoch durchsichtig dargestellt, um einen Blick auf die Strömung hinter der Schaufeln zu ermöglichen. Entlang einer statorfesten, vertikalen Linie werden der Strömung in gleichmäßigen Abständen trägheitsfreie Partikel zugeführt. Mit der Zeit bilden sich so Ketten von Partikeln, von denen jeder eine bestimmte Bahn durchläuft und die mit der Strömung fortgetragen werden. Der so erzielte Effekt ist mit der Technik der Zuführung von Wasserstoffblasen zur Visualisierung von Partikelbahnen in Experimenten vergleichbar. Die Farbe der Partikel repräsentiert ihre lokale absolute Machzahl. Auch hierbei steht rot für hohe und blau für niedrige Werte.

Die Bewegung der Partikel in Nabennähe zeigt die Bildung des Rotorkanalwirbels. Energiearmes Fluid aus der Seitenwandgrenzschicht wird zur Saugseite getragen, wo es auf der Schaufeloberfläche hochrollt. Dort wird es beschleunigt und strömt zunächst wieder Richtung Kanalmitte und anschließend Richtung Nabe. Oberhalb dieses Bereichs sind keine Sekundärströmungseinflüsse mehr zu erkennen. Die Partikelketten folgen dort mehr oder weniger den Meridianstromlinien.

Partikelbahnen im Relativsystem

Der Blickpunkt in dieser Sequenz entspricht dem der vorigen Sequenz, mit dem Unterschied, daß sich der Betrachter nun mit den Rotorscheaufeln mitbewegt. Eine der Rotorscheaufeln ist durchsichtig. Die Partikel werden entlang einer ebenfalls mitbewegten Linie zugeführt. Die Farbe der Partikel stellt nun die relative Machzahl dar, wobei rot hohe und blau niedrige Werte bedeuten.

Die Entwicklung des Kanalwirbels zeigt sich nun in Form einer mehr oder weniger gleichförmigen Rotation der gestreckten Partikelketten um das Wirbelzentrum, während im Absolutsystem eine wendelförmige Bewegung der Ketten um das Zentrum zu beobachten war. Eine der Partikelketten wird im sehr wandnahen Grenzschichtbereich zugeführt. Daher ist sie langsamer als die anderen. Ihre Bewegung beschreibt einen weiten Bogen, weil sie in den äußeren Bereich des Wirbels aufgenommen wird.

Der Einfluß der aus den Potentialwechselwirkungen resultierenden Druckwellen läßt sich in einer plötzlichen Formänderung der Ketten erkennen: Während die Druckwelle über die Partikelketten hinwegrollt, bekommt die mehr oder weniger lineare Form der Ketten einen S-Schlag. Die mit diesem Prozess verbundenen Geschwindigkeitsgradienten lassen sich in Form von

Ausdehnungs- und Kontraktionsbewegungen der Ketten erkennen.

In der abschließenden Sequenz der Animation wird das eben Beschriebene von einer anderen Perspektive aus beobachtet. Der Betrachter blickt nun in Umfangsrichtung auf die Druckseite einer Rotorscheufel. Die Partikel werden von denselben rotorfesten Orten wie zuvor zugeführt, allerdings strömen sie nun vornehmlich von links nach rechts. Die erwähnte langsame Kette aus der Seitenwandgrenzschicht ist leicht zu erkennen und dient der Orientierung. Die radiale Bewegung der Ketten gibt einen Hinweis auf die Größe des Wirbels, der sich etwa über die unteren zehn Ketten erstreckt. Die Formänderungen durch die Druckwelle und die Längenänderungen aufgrund der räumlichen Geschwindigkeitsgradienten sind deutlich sichtbar.

6.2 Strömungseffekte in einer 1,5-stufigen Axialturbine

Dieser Testfall wurde in Kapitel 5 vorgestellt. Auch wurden dort einige der auftretenden Strömungsphänomene anhand des zeitlich gemittelten und des instationären Strömungsfeldes beschrieben. Die beiliegende Computeranimation der Simulationsergebnisse beschäftigt sich ausschließlich mit der instationären Strömung in ihrem zeitlichen Ablauf. So können einige der bereits vorgestellten Strömungseffekte nun in der Bewegung beobachtet werden. Bei dem visualisierten Datensatz handelt es sich um das mit dem Strömungslöser vor der Turbulenzmodellmodifizierung berechneten Ergebnis für den kleinen Massenstrom, siehe Abschnitt 5.1.

Visualisierungstechnik

Die beiliegende Animation ist eine Zusammenstellung von Szenen, die mit einer digitalen Videokamera im Projektionsraum für virtuelle Realität (VR-Umgebung, „virtual reality cave“) des Rechenzentrums der Universität Stuttgart aufgenommen wurden. Bei dieser Visualisierungstechnik werden von einem Höchstleistungsgraphikrechner vier spezielle Videoprojektoren mit hoher Bildauflösung angesteuert. Diese Videobeamer projizieren die Bilder zum Teil durch Rückprojektion und zum Teil über Umlenkspiegel auf vier Leinwände, die den Boden und drei Seitenwände eines begehbaren, übermannshohen Quaders bilden. Die hohe Bildwiederholfrequenz der Projektoren ermöglicht die Stereoprojektion, d. h. die alternierende Darstellung von Bildern für zwei leicht unterschiedliche Blickpunkte, wobei der eine der Sichtweise des linken und der andere der Sichtweise des rechten Auges entspricht. Mit Hilfe einer LCD-Brille, die über Infrarotimpulse getriggert wird, lassen sich die beiden Bilder für den Betrachter trennen, so daß jedes Auge

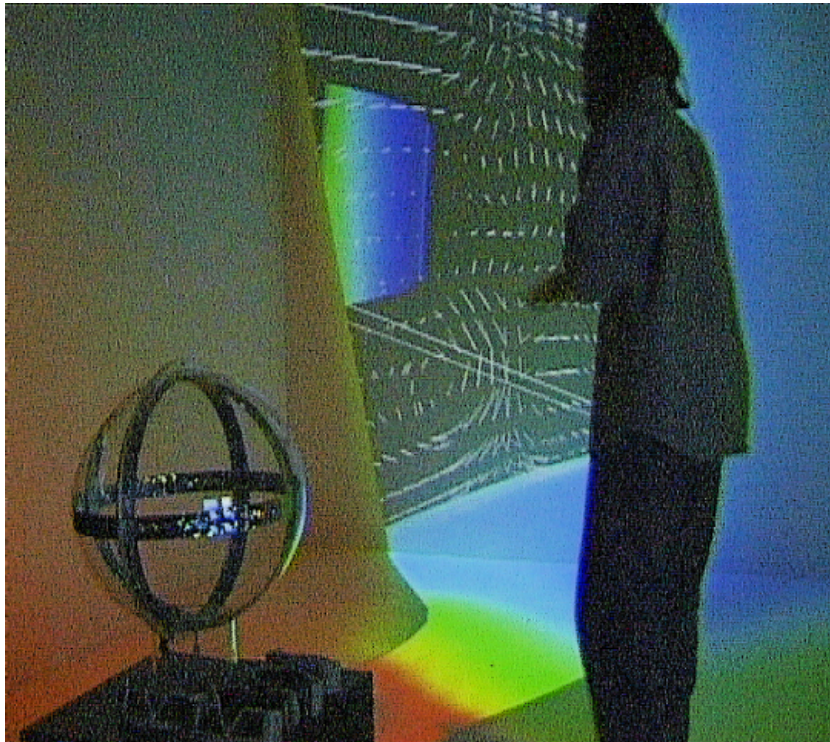


Bild 6.2: „Virtual reality“-Visualisierung: Beobachter bewegt sich im Kanal des zweiten Leittrades entgegen der Strömungsrichtung auf eine Schnittebene zu, die Sekundärgeschwindigkeitsvektoren zeigt

nur die seiner Sichtweise entsprechenden Bilder zu sehen bekommt. Auf diese Art und Weise wird die Darstellung dreidimensionaler, virtueller Körper ermöglicht, die der gewohnten Sichtweise entsprechen und, insbesondere aufgrund der Dimensionen des Projektionsraum, beeindruckend reell erscheinen. Die Kopf- und Handbewegungen des Betrachters werden elektronisch verfolgt und dem Graphikrechner übermittelt, der daraus die aktuelle Perspektive des Betrachters berechnet und ständig die Projektion entsprechend anpaßt. Dadurch wird der Realitätseindruck nochmals deutlich verstärkt, da der Betrachter nun um die Objekte herumlaufen kann oder durch ein Annähern Einzelheiten betrachten kann. Durch die Verfolgung der Handbewegungen wird die direkte dreidimensionale Interaktion mit den projizierten Objekten über eine Art von 3D-Zeiger (ähnlich dem sog. „Mauszeiger“ bei Computern) ermöglicht. So lassen sich die Objekte im Raum packen, verdrehen und verschieben. Auch kann sich der Beobachter damit innerhalb der Objekte bewegen, siehe Bild 6.2. Die interaktiven Menüs zur Programmsteuerung werden ebenfalls auf diese Art und Weise bedient.

Bei der Aufnahme der in der Animation gezeigten Szenen mußte auf die Stereoprojektionstechnik verzichtet werden, weil mit den gebräuchlichen Aufnahme- und Wiedergabetechniken nur eine Perspektive berücksichtigt wird. Der dreidimensionale Eindruck ist nur vor Ort in der VR-Umgebung vermittelbar. Auch kann das Tracking der Kopfbewegungen bei den Video-

aufnahmen nicht verwendet werden, weil dies von der Kameraperspektive aus betrachtet zu unruhigen und zum Teil verwirrenden Ansichten führt. Mit den gezeigten Szenen kann deshalb nur die prinzipielle Arbeitsweise im „cave“ demonstriert und ein erster Eindruck von den sich durch moderne Visualisierungstechniken ergebenden Möglichkeiten vermittelt werden.

Beschreibung der einzelnen Szenen

Das dargestellte Gebiet umfaßt jeweils drei benachbarte Schaufelkanäle der drei Schaufelreihen der Axialturbine. Der zugrundeliegende Datensatz besteht aus 16 instationären Strömungsfeldern während einer Leitschaufelperiode, die in einer Endlosschleife aneinandergehängt wurden, um eine kontinuierliche, zeitlich fortlaufende Bewegung zu erhalten. Allerdings mußten die Daten stark reduziert werden, um mit dem Visualisierungsprogramm verzögerungsfrei arbeiten zu können.

Entropieverteilung und Sekundärgeschwindigkeiten

Im ersten Teil der Animation gibt die Farbverteilung auf der Nabe und den Schaufelflächen die Verteilung der Entropie auf diesen Flächen wieder, wobei dunkelblau einem niedrigen und dunkelrot einem hohen lokalen Entropiewert entspricht. Die weiße Fläche, die sich durch die gesamte Maschine erstreckt, stellt eine Fläche konstanter Entropie dar, d. h. von der Fläche wird Fluid mit niedrigeren Entropiewerten als dem Entropiewert der Isofläche eingeschlossen. Ferner sind noch zwei Schnittebenen dargestellt, die die Verteilung der instationären Sekundärgeschwindigkeitsvektoren zeigen. Eine Schnittebene liegt quer zur Strömungsrichtung im Axialspalt zwischen dem Laufrad und dem zweiten Leitrad. Bei der zweiten Schnittebene handelt es sich um eine Zylinderfläche bei etwa 30 % Kanalhöhe.

Die erste Einstellung zeigt eine Ansicht entgegen der Strömungsrichtung von einem leicht erhöhten Standpunkt. Im Vordergrund liegt somit die Austrittsebene des Rechengebietes. Die Verringerung des von der Isofläche eingefassten durchströmten Querschnitts vom Turbineneintritt bis zum -austritt ist deutlich erkennbar. Dies entspricht einer steten Zunahme der Entropie aufgrund der Strömungsverluste. Am Eintritt wird mit Ausnahme des Grenzschichtbereichs noch der gesamte durchströmte Querschnitt von der Isofläche eingehüllt. Zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad sind im Bereich des Nachlaufs bereits größere Gebiete mit höherer Entropie entstanden. Mit der Drehung des Rotors trennen die Laufschaufeln von der verlustarmen Kernströmung, die sich innerhalb der Isofläche befindet, einzelne Portionen ab, die sich zunächst einzeln weiter stromab bewegen, sich aber bereits kurz darauf aufgrund von Ausgleichsprozessen wieder mit ihren Vorgängern und

Nachfolgern vereinigen. Das „Negativ“ dieses Vorganges läßt sich ebenso beobachten: Die sich außerhalb der Isofläche befindliche, verlustreiche Nachlaufströmung des ersten Leitrades wird von der Laufschaufeln in separate Teile getrennt, die sich in Richtung Saugseite bewegen, wobei gleichzeitig Ausmischungsvorgänge auftreten. Die durch den Rotorkanal konvektierenden Nachlaufreste geben der durch die Isofläche angedeuteten Kernströmung die charakteristische Ausprägung. Mit dem Eintritt in den Kanal des zweiten Leitrades wird die Isofläche aufgrund ihrer Relativbewegung zu den Laufschaufeln abermals zerteilt, wodurch die Ausdehnung des Bereichs mit entropiearmem Fluid nochmals deutlich abnimmt. Den Austritt des Rechengebiets erreichen nur noch einzelne kleine „Wölkchen“, die ein sehr begrenzte Bereiche von verlustarmem Fluid einschliessen. Am Austritt ist somit beinahe im gesamten Strömungsquerschnitt die Entropie höher als der Entropiewert der Isofläche.

Bedienung des VR-Visualisierungsprogrammes

In dieser Szene wird die prinzipielle Arbeitsweise im „cave“ gezeigt. Der Betrachter betritt den Projektionsraum und „schiebt“ zunächst das Auswahlmenü mit Hilfe der in seiner Hand befindlichen „3D-Maus“ beiseite. Danach „ergreift“ er die Turbine und verändert ihre Orientierung und Position. Durch Anwahl der Vergrößerungsfunktion im Auswahlmenü erscheint eine Lupe als Mauszeigersymbol und die Größe des dargestellten Objekts kann interaktiv verändert werden.

„Wanderung“ vom Turbinenaustritt zur Laufradhinterkante

Bei dieser Einstellung bewegt sich der Betrachter im Kanal des stark vergrößerten zweiten Leitrades in Nabennähe entgegen der Strömung in Richtung Laufradhinterkante, die sich von rechts nach links am Betrachter vorbeibewegt. Er erreicht dies, indem er die Turbine mit dem 3D-Interaktor ergreift und quasi an sich vorbeischiebt. Die Entropieisofläche befindet sich über dem Kopf des Betrachters, wo ihre periodischen Bewegungen beobachtet werden können. Die azimutale Schnittfläche mit den Sekundärgeschwindigkeitsvektoren bei etwa 30 % Kanalhöhe befindet sich am oberen Bildrand ebenfalls über dem Kopf des Betrachters.

Nachlauf-Rotor-Wechselwirkungen

Diese Szene zeigt eine Ansicht von schräg oben auf die Turbine. Die Strömungsrichtung ist hier von rechts nach links. Die Laufschaufeln befinden sich in der Bildmitte. Der Nachlauf des ersten Leitrades ist als Bereich erhöhter Entropie zwischen zwei Isoflächen erkennbar. Bei dieser vergrößerten

Einstellung lassen sich die Vorgänge bei der Interaktion des Nachlaufs bzw. der Kernströmung mit den Rotorscheaufeln und die anschließende Konvektion der Nachlaufreste durch den Kanal des Laufrades beobachten.

„Wanderung“ vom Turbineneintritt zur Laufradvorderkante

Die Einstellung zeigt den Blick vom Turbineneintritt in Strömungsrichtung in die Isofläche. Die Schaufeln sind übermannshoch. Die azimutale Schnittfläche mit den Sekundärgeschwindigkeitsvektoren bei etwa 30 % Kanalhöhe befindet sich in Kniehöhe. Rechter Hand, an der Saugseite des ersten Leitrades, kann über dem Kopf und auf Höhe der Füße des Betrachters die Bildung des oberen und unteren Kanalwirbels in Form größer werdender Einbeulungen der Isofläche verfolgt werden. Da die Blickrichtung der Strömungsrichtung entspricht, bewegen sich – bedingt durch den steilen Abströmwinkel des ersten Leitrades – die Vorderkanten des Rotors von links vorne nach rechts hinten periodisch am Betrachter vorbei. Mit der Rotorbewegung wird die Isofläche so weit zusammengedrückt, bis einzelne Teile der Kernströmung periodisch abgetrennt werden.

Sekundärströmungen am Rotoraustritt

Bei dieser Szene wurde die Isofläche entfernt, um eine bessere Sicht auf die Schnittebenen mit den Sekundärgeschwindigkeiten zu ermöglichen. Der Betrachter bewegt sich im Kanal des zweiten Leitrades entgegen der Strömung in Richtung des Axialspalt zwischen zweiten Leitrad und Laufrad, wo sich eine Schnittebene mit Sekundärgeschwindigkeitsvektoren befindet. Die Saugseite ist links und die Druckseite rechts. Mit der Bewegung des Rotors können die Bewegungen der Sekundärgeschwindigkeitsvektoren beobachtet werden. Der Nachlauf des Laufrades läßt sich als eine von rechts nach links bewegende, vertikale Linie im Geschwindigkeitsfeld erkennen. Ebenfalls sehr markant ist der untere Kanalwirbel des Rotors, der vor der saugseitigen Nachlaufhälfte hergeschoben wird. Aber auch andere Strömungseffekte wie z. B. der obere Kanalwirbel und der Einfluß des ersten Leitrades sind in der Sekundärgeschwindigkeitsverteilung erkennbar.

Sekundärgeschwindigkeiten im zweiten Leitrad

In dieser Einstellung befindet sich die Schnittebene mit den Sekundärgeschwindigkeitsvektoren am Eintritt des Kanals des zweiten Leitrades. Die Lage des Rotornachlaufs und der obere und untere Kanalwirbel des Rotors sind auch hier zu beobachten. Allerdings wird das zeitliche Verhalten der Strömungseffekte hier von den Wechselwirkungen mit dem zweiten Leitrad beeinflusst.

Im zweiten Teil der Szene wird die Schnittebene vom Betrachter interaktiv weiter stromab in die Nähe der Hinterkante des zweiten Leitrades positioniert. Dort sind die den Leitschaufelkanal periodisch verlassenden Reste des Rotornachlaufs erkennbar. Auch kann das Wechselspiel zwischen dem Aufbau des unteren Kanalwirbels des zweiten Leitrades und dessen Verdrängung durch den periodischen auftauchenden unteren Kanalwirbel des Rotors beobachtet werden.

Druckverteilung und Totaldruckisofläche

Bei den folgenden Szenen repräsentiert die Farbverteilung die Verteilung des statischen Drucks auf den dargestellten Flächen von Nabe und Schaufeln. Die Schnittflächen mit den Sekundärgeschwindigkeitsvektoren sind immer noch eingeblendet. Neu hinzugekommen ist eine Totaldruckisofläche, die einen Bereich umschließt, in dem der absolute Totaldruck mindestens 0,4 % über dem maximalen Totaldruck der Zuströmung liegt. Ebenfalls neu ist eine Schnittfläche im Axialspalt zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad, deren Farbverteilung der Totaldruckverteilung entspricht.

Die Blickrichtung weist in Strömungsrichtung. Mit der Bewegung des Rotors sind die durch die Stromaufwirkung des Rotors verursachten periodischen Totaldruckschwankungen zu erkennen. Auf der azimutalen Schnittebene mit der Sekundärgeschwindigkeitverteilung können im Laufradkanal die Strömungen in Richtung Saugseite („negative jets“) beobachtet werden.

Stromaufwirkung des Rotors

Die lokale Energetisierung der Strömung durch die Verdrängungswirkung der rotierenden Laufschaufeln ist stromauf der Rotorvorderkanten in Form des periodischen Anwachsens der Totaldruckisoflächen zu beobachten. Diese Isoflächen bestehen pro Schaufelkanal aus je zwei Teilen, die sich beiderseits des Leitradnachlaufs befinden. Während einer Schaufelwechselperiode verschmelzen die beiden Teile zu einer Fläche, die weiter stromab durch die Energieumsetzung des Rotors abgebaut wird. Die Verschmelzung der beiden Isoflächen bedeutet somit, daß durch die Stromaufwirkung des Rotorpotentials das Totaldruckdefizit des Leitradnachlaufs mehr als kompensiert wird, da ja innerhalb der Isofläche der Totaldruck 0,4 % über dem Totaldruck der Zuströmung des Turbine liegt.

7 Zusammenfassung

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit bestand in der Entwicklung eines effizienten numerischen Verfahrens zur Berechnung der instationären Stator–Rotor–Wechselwirkungen in Turbomaschinenströmungen. Dabei stellte die zeitgenaue, direkte Kopplung der Leitrad- mit der Laufradströmung unter Berücksichtigung des realen Schaufelzahlverhältnisses der Turbomaschinenstufen einen wesentlichen Aufgabenschwerpunkt dar. Als Basis diente ein explizites Zeitschrittverfahren zur Lösung der dreidimensionalen Navier–Stokes–Gleichungen.

Es wurde ein Kopplungsverfahren entwickelt, das es ermöglicht unter Beibehaltung der räumlichen Genauigkeit der Zentralfrequenzdiskretisierung die Strömungsfelder benachbarter, relativ zueinander bewegter Schaufelgitterreihen direkt und zeitgenau miteinander zu verbinden. Dies wurde durch eine Überlappung der Rechengebiete an der Koppellebene und eine konservative Interpolationsmethode erreicht.

Zur Lösung des Periodizitätsproblems bei der Simulation von Stufenströmungen mit unterschiedlichen Schaufelzahlen in Leit- und Laufrad wurde ein Zeitneigungsverfahren auf dreidimensionale Strömungen erweitert. Hierbei wird durch eine geeignete Zeittransformation der Bestimmungsgleichungen die Verwendung von einfachen periodischen Randbedingungen ermöglicht. Die Stabilitätsgrenzen des Verfahrens wurden hergeleitet. Zur Rücktransformation der zeitgeneigten Strömungsgrößen in die physikalische Zeit wurden die notwendigen Algorithmen entwickelt. Die Implementierung in den Strömungslöser erfolgte so, daß für einen Programmlauf mit Zeitneigung vom Anwender keine zusätzlichen Angaben zu machen sind. Die notwendigen Informationen werden aus der Testfallgeometrie entnommen.

Es wurden instationäre nichtreflektierende Randbedingungen entwickelt, die es ermöglichen, eine Näherung für die instationäre Strömung in mehrstufigen Konfigurationen durch abschnittsweise Simulationen effizient zu berechnen. Dazu wird dem nachfolgenden Gitter die Abströmung des stromaufliegenden Gitters unter Berücksichtigung des wirklichen Schaufelzahlverhältnisses in Form von instationären Randbedingungen vorgegeben.

Zur Rechenzeitreduktion wurden verschiedene Beschleunigungstechniken entwickelt. Neben einer impliziten Residuenglättungsmethode für explizite Zeitschrittverfahren mit globalen Zeitschrittweiten und einer expliziten, zeitkonsistenten Mehrgittermethode wurde auch ein implizites Integrationsverfahren implementiert, das sich bei feinen Netzen als besonders effizient erwiesen hat.

Durch die Parallelisierung des Strömungslösers konnte die Effizienz des Verfahrens nochmals deutlich gesteigert werden. Die Parallelisierung nutzt die Multiblocktopologie der strukturierten Rechengitter aus, so daß die Strömungsberechnung für die einzelnen Gitterblöcke gleichzeitig auf mehreren Prozessoren ablaufen kann. Der Benutzer muß dazu lediglich die Zahl der Prozessoren und die Zuordnung der Gitterblöcke auf die einzelnen Prozessoren festlegen.

Das entwickelte Verfahren wurde zur Strömungsberechnung in einer einhalbstufigen, axialen Kaltluftturbine eingesetzt, für die umfangreiche experimentell ermittelte Daten aus instationären Strömungsfeldmessungen zugänglich sind. Es wurden zwei Sätze von Simulationsrechnungen für die verschiedenen Betriebspunkte der Strömungsmessungen durchgeführt. Dabei wurden Rechennetze mit unterschiedlicher Feinheit verwendet. Es wurden sowohl stationäre als auch instationäre Strömungsberechnungen durchgeführt. Ferner wurden zwei Varianten des implementierten Baldwin–Lomax–Turbulenzmodells auf der aus 2,1 Millionen Gitterpunkten bestehenden feinen Diskretisierung des Rechengebiets untersucht. Mit der zweiten Variante konnte in weiten Bereichen des Rechengebiets eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten bzgl. der Sekundärströmungen und der Strömungsverluste erzielt werden.

Die Ergebnisse der stationären und der zeitlich gemittelten instationären Simulationen wurden den Ergebnissen aus Traversierungen mit pneumatischen Meßsonden gegenübergestellt. Dabei konnte eine gute bis ausgezeichnete Übereinstimmung von der Zuströmung des ersten Leitrades bis zur Rotorabströmung festgestellt werden. An der Austrittebene des Rechengebiets waren die Abweichungen größer. Die Ergebnisse der Simulation der instationären Strömung auf dem feinen Rechennetz und mit modifiziertem Turbulenzmodell lieferten insgesamt die besten Übereinstimmungen mit den Messungen. Auch wurden zum Teil signifikante Unterschiede zwischen den zeitlich gemittelten instationären Strömungsfeldern und den Ergebnissen vergleichbarer Simulationen der stationären Strömung festgestellt, die auf den mittleren zeitlichen Einfluß der instationären Effekte zurückzuführen sind.

Durch Stator–Rotor–Stator–Wechselwirkungen verursachte instationäre Effekte wurden identifiziert und mit den Experimenten verglichen. Im Axialspalt zwischen dem ersten Leitrad und dem Laufrad wurde die Stromaufwirkung des Rotors untersucht. Zwischen dem Rotor und dem zweiten Leitrad wurden die instationären Strömungsfelder analysiert. Auch wurden dort sowie im Kanal des zweiten Leitrades und in der Abströmung des zweiten Leitrades Sekundärströmungen und auftretende Wirbelstrukturen identifiziert. Es konnte ein signifikanter Einfluß der Abströmung des ersten Leitrades auf die Strömung im zweiten Leitrad festgestellt werden. Im Kanal des zweiten Leitrades wurden auf drei azimuthalen Schnittflächen die instationären Schwankungsanteile der Machzahl und des Tangentialwinkels sowie der instationäre Radialwinkel untersucht.

Die Visualisierung und Animation der Berechnungsergebnisse mit Hilfe modernster Techniken („virtual reality“) ermöglichte die Beobachtung und Analyse von instationären Phänomenen in ihrem zeitlichen Ablauf. Auf einer CD-ROM sind zwei Computeranimationen beigefügt, die im Rahmen der Arbeit erstellt wurden. Die in den einzelnen Sequenzen dargestellten Strömungseffekte wurden beschrieben.

Bei den Untersuchungen bzgl. der instationären Effekte konnte eine sehr gute qualitative und vielfach auch gute quantitative Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen festgestellt werden. Das entwickelte Verfahren hat sich als geeignet erwiesen, die gestellten Anforderungen zu erfüllen. Es ist somit gelungen, ein Berechnungsprogramm für dreidimensionale, reibungsbehaftete und instationäre Strömungen in thermischen Turbomaschinen zu entwickeln, das bzgl. seiner Effizienz und der zugrundeliegenden Modellierung für Stufenströmungen mit beliebigem Schaufelzahlverhältnis bislang konkurrenzlos ist.

Die Turbulenzeffekte in der Strömung werden durch das algebraische Baldwin–Lomax–Turbulenzmodell auch in der implementierten modifizierten Form nicht befriedigend wiedergegeben. Dieses Modellierungsdefizit ist die Hauptursache für die mit zunehmender Strömungskomplexität schlechter werdende Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Experimenten, wie sie im Kanal und stromab des zweiten Leitrades festzustellen war. Mit der Implementierung eines geeigneteren Turbulenzmodells (z. B. k - ε - oder k - ω -Modell) könnte die Qualität der Ergebnisse weiter verbessert werden.

A Normierung der physikalischen Größen

Mit dem Bezugsdruck p_{t0} , der Bezugstemperatur T_{t0} , der als Bezugsgröße dienenden Gaskonstante R_0 und der Bezugslänge L_0 lassen sich die in den Gleichungen auftretenden physikalischen Größen entdimensionalisieren.

Für die Längen und Winkel gilt:

$$x^* = \frac{x}{L_0} , \quad y^* = \frac{y}{L_0} , \quad z^* = \frac{z}{L_0} , \quad \varphi^* = \varphi , \quad r^* = \frac{r}{L_0} \quad (\text{A.1})$$

Die dimensionslose Zeit ist

$$t^* = \frac{\sqrt{R_0 T_{t0}}}{L_0} t . \quad (\text{A.2})$$

Die Normierung der Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten erfolgt gemäß

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{\sqrt{R_0 T_{t0}}} , \quad \vec{w}^* = \frac{\vec{w}}{\sqrt{R_0 T_{t0}}} , \quad a^* = \frac{a}{\sqrt{R_0 T_{t0}}} , \quad \vec{\Omega}^* = \frac{L_0}{\sqrt{R_0 T_{t0}}} \vec{\Omega} . \quad (\text{A.3})$$

Die thermodynamischen Zustandsgrößen werden wie folgt normiert:

$$p^* = \frac{p}{p_{t0}} , \quad T^* = \frac{T}{T_{t0}} , \quad \varrho^* = \frac{R_0 T_{t0}}{p_{t0}} \varrho , \quad e^* = \frac{e_t}{R_0 T_{t0}} , \quad h^* = \frac{h_t}{R_0 T_{t0}} \quad (\text{A.4})$$

Für die Normierung der Stoffkenngrößen und der Reibungsgrößen ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$R^* = \frac{R}{R_0} , \quad \kappa^* = \kappa , \quad c_v^* = \frac{R}{(\kappa - 1)R_0} , \quad c_p^* = \frac{\kappa R}{(\kappa - 1)R_0} \quad (\text{A.5})$$

$$\mu^* = \frac{\sqrt{R_0 T_{t0}}}{p_{t0} L_0} \mu , \quad \tau = \frac{\tau}{p_{t0}} , \quad k^* = \frac{\sqrt{R_0 T_{t0}}}{p_{t0} R_0 L_0} k , \quad \vec{q}^* = \frac{\vec{q}}{p_{t0} \sqrt{R_0 T_{t0}}} \quad (\text{A.6})$$

B Zeitgeneigte Navier-Stokes-Gleichungen

Die Anwendung der Transformation (4.1) bzw. (4.2) auf die Zustandsgrößen, die konvektive Flußmatrix und den konvektiven Quelltermvektor aus (3.25) bleibt ohne Effekt, und es gilt

$$\vec{U}' = \vec{U} \quad , \quad \vec{F}'_C = \vec{F}_C \quad \text{bzw.} \quad \vec{S}'_C = \vec{S}_C \quad . \quad (\text{B.1})$$

Bei der Transformation der diffusiven Anteile ergeben sich hingegen aufgrund der darin enthaltenen partiellen Ableitungen eine Reihe von zusätzlichen Termen. Für den Schubspannungstensor gilt

$$\bar{\bar{\tau}}' = \bar{\bar{\tau}} - \frac{\chi}{r} \bar{\bar{\tau}}_I \quad (\text{B.2})$$

mit

$$\bar{\bar{\tau}}_I = \begin{bmatrix} \tau_{xx,I} & \tau_{x\varphi,I} & \tau_{xr,I} \\ \tau_{\varphi x,I} & \tau_{\varphi\varphi,I} & \tau_{\varphi r,I} \\ \tau_{rx,I} & \tau_{r\varphi,I} & \tau_{rr,I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial w_\varphi}{\partial t'} & \mu \frac{\partial w_x}{\partial t'} & 0 \\ \mu \frac{\partial w_x}{\partial t'} & (2\mu + \lambda) \frac{\partial w_\varphi}{\partial t'} & \mu \frac{\partial w_r}{\partial t'} \\ 0 & \mu \frac{\partial w_r}{\partial t'} & \lambda \frac{\partial w_\varphi}{\partial t'} \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Der transformierte Vektor der Schubspannungsleistung aus (3.29) ergibt sich damit zu

$$\vec{t}' = \vec{t} - \frac{\chi}{r} \vec{t}_I = \vec{t} - \frac{\chi}{r} \begin{bmatrix} \tau_{xx,I} w_x + \tau_{x\varphi,I} w_\varphi \\ \tau_{\varphi x,I} w_x + \tau_{\varphi\varphi,I} w_\varphi + \tau_{\varphi r,I} w_r \\ \tau_{r\varphi,I} w_\varphi + \tau_{rr,I} w_r \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Für den transformierten Wärmestromvektor aus (3.29) folgt

$$\vec{q}' = \vec{q} - \frac{\chi}{r} \vec{q}_I = \vec{q} - \frac{\chi}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial t'} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.5})$$

Damit läßt sich nun die zeitlich transformierte Matrix der diffusiven Flüsse und der diffusive Quelltermvektor aus (3.26) angeben. Es ist

$$\vec{F}'_D = \vec{F}_D - \frac{\chi}{r} \vec{F}_{DI} = \quad \text{und} \quad \vec{S}'_D = \vec{S}_D - \frac{\chi}{r} \vec{S}_{DI} \quad (\text{B.6})$$

mit

$$\vec{F}_{DI} = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \bar{\bar{\tau}}_I \\ (\vec{t}_I - \vec{q}_I)^T \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{S}_{DI} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{r\varphi,I} & -\tau_{\varphi\varphi,I} & 0 \end{bmatrix}^T \quad . \quad (\text{B.7})$$

Unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß lassen sich die Navier–Stokes–Gleichungen (3.23) auch in der Form

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{S}_C - \vec{S}_D + \frac{\partial}{\partial x} ((\bar{F}_C - \bar{F}_D) \vec{\delta}_x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((\bar{F}_C - \bar{F}_D) \vec{\delta}_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} ((\bar{F}_C - \bar{F}_D) r \vec{\delta}_r) \right) dV = \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

angeben. Bei der zeitlichen Transformation des gesamten Gleichungssystems ergibt sich schließlich mit (4.2) und (B.1) bis (B.7) die Beziehung

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial t'} \left(\vec{U} - \frac{\chi}{r} \left((\bar{F}_C - \left(\bar{F}_D - \frac{\chi}{r} \bar{F}_{DI} \right)) \vec{\delta}_\varphi \right) \right) + \right. \\ + \vec{S}_C - \left(\vec{S}_D - \frac{\chi}{r} \vec{S}_{DI} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\bar{F}_C - \left(\bar{F}_D - \frac{\chi}{r} \bar{F}_{DI} \right) \right) \vec{\delta}_x \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left(\bar{F}_C - \left(\bar{F}_D - \frac{\chi}{r} \bar{F}_{DI} \right) \right) \vec{\delta}_\varphi \right) + \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\bar{F}_C - \left(\bar{F}_D - \frac{\chi}{r} \bar{F}_{DI} \right) \right) r \vec{\delta}_r \right) \right) dV = \vec{0} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

die sich durch Umwandlung des Volumenintegrals der räumlichen Ableitungen in ein Oberflächenintegral und unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation in die in Gleichung (4.3) angegebene Form bringen läßt.

C Stabilitätsgrenze der Zeitneigungsmethode

Das Einsetzen der Beziehungen aus Gleichung (4.8) in die richtige Lösung für den statischen Druck, d. h. die positive Wurzel aus (4.10), führt auf die Gleichung

$$p = \frac{2\varrho p(1 - \gamma w_\varphi)^2 - (\kappa - 1)\gamma^2 p^2}{\varrho(1 - \gamma w_\varphi)^2 + \gamma^2 p + \sqrt{(\varrho(1 - \gamma w_\varphi)^2 - \gamma^2 \kappa p)^2}} \quad (\text{C.1})$$

oder

$$\varrho(1 - \gamma w_\varphi)^2 - \gamma^2 \kappa p = |\varrho(1 - \gamma w_\varphi)^2 - \gamma^2 \kappa p| \quad . \quad (\text{C.2})$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, falls

$$\varrho(1 - \gamma w_\varphi)^2 \geq \gamma^2 \kappa p \quad . \quad (\text{C.3})$$

Mit der Einführung der örtlichen Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa p / \varrho}$ erhält man daraus eine quadratische Ungleichung für γ ,

$$(w_\varphi^2 - a^2)\gamma^2 - 2w_\varphi\gamma + 1 \geq 0 \quad , \quad (\text{C.4})$$

die die in Gleichung (4.13) angegebene Lösung besitzt.

D Bilineare Interpolation

Bei der Interpolation einer Lösungsgröße q an einem beliebigen Punkt $A(\alpha, \beta)$ aus den Lösungsgrößen q_i der vier diesen Punkt umgebenden Punkte $B_i(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, \dots, 4$ wird von dem Ansatz

$$q(\alpha, \beta) = a_1 + a_2\alpha + a_3\beta + a_4\alpha\beta \quad (\text{D.1})$$

ausgegangen, der eine bilineare Verteilung der Lösungsgröße in den sogenannten natürlichen Koordinaten α und β des betrachteten Vierecks beschreibt. Durch Einsetzen der Koordinaten der vier Eckpunkte B_i ergibt sich daraus ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a_i , mit denen der gesuchte Funktionswert q berechnet werden kann,

$$q(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta & \alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1\beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2\beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3\beta_3 \\ 1 & \alpha_4 & \beta_4 & \alpha_4\beta_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} . \quad (\text{D.2})$$

Wählt man das natürliche Koordinatensystem so, daß die vier Punkte B_i darin ein Quadrat beschreiben, z. B.

$$B_1(-1, -1) , \quad B_2(1, -1) , \quad B_3(1, 1) , \quad B_4(-1, 1) , \quad (\text{D.3})$$

so ergeben sich besonders einfache Beziehungen. Außerdem hat die Interpolation dann die Eigenschaft, daß die Funktionswerte entlang den Kanten des Vierecks linear verlaufen. Damit ist gewährleistet, daß die Funktionswerte benachbarter Vierecke einen stetigen Übergang haben und eindeutig sind. Dies ist bei einem Ansatz, der beispielsweise bilinear bzgl. der globalen Koordinaten x und y ist, nicht der Fall. Setzt man die natürlichen Koordinaten der vier Punkte in die Matrix aus Gleichung (D.2) ein und invertiert diese, so ergibt sich die Interpolationsvorschrift

$$q(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta & \alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

bzw. ausmultipliziert und faktorisiert

$$q(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} ((1 - \alpha)(1 - \beta)q_1 + (1 + \alpha)(1 - \beta)q_2 + (1 + \alpha)(1 + \beta)q_3 + (1 - \alpha)(1 + \beta)q_4) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f_i q_i , \quad (\text{D.5})$$

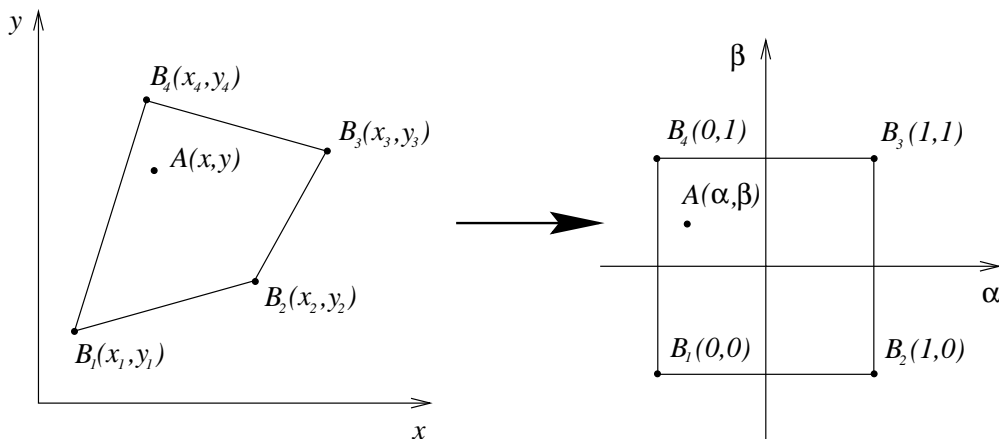


Bild D.1: Abbildung eines Vierecks auf ein Quadrat zur bilinearen Interpolation der Funktionswerte an den Eckpunkten auf den Punkt A

wobei f_i die sog. bilinearen Basisfunktionen sind. Diese häufig als Formfunktionen bezeichneten Interpolationsfunktionen werden beispielsweise in der Finite-Elemente-Methode extensiv benutzt, um die Verteilung von physikalischen Größen innerhalb von Viereckelementen zu beschreiben.

Bei der Definition der Transformation von den globalen Koordinaten x und y in die lokalen, natürlichen Koordinaten α und β macht man von dem Umstand Gebrauch, daß für die globalen Koordinaten dieselben Eigenschaften gelten müssen, wie für die Interpolation der Funktionswerte. Das heißt, daß die globalen Koordinaten entlang den Kanten des aufgespannten Vierecks linear verlaufen und die Eckpunkte des Vierecks in den globalen Koordinaten $B_i(x_i, y_i)$ den Eckpunkten des Quadrats in den natürlichen Koordinaten $B_i(\alpha_i, \beta_i)$ entsprechen. Damit erhält man die beiden zusätzlichen Bedingungen

$$x(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f_i x_i \quad \text{und} \quad y(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f_i y_i \quad , \quad (\text{D.6})$$

aus denen sich die natürlichen Koordinaten des Punktes $A(\alpha, \beta)$ durch Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmen lassen, die für regelmäßige Vierecke eine eindeutige Lösung besitzt. Die Koordinatentransformation von einem allgemeinen Viereck auf ein Quadrat ist in Bild D.1 dargestellt. Bild D.2 zeigt exemplarisch zwei Beispiele für bilineare Verteilungen von Funktionswerten über einem $[-1, 1]^2$ -Quadrat.

Der Vollständigkeit halber werden abschließend noch die Berechnungsformeln für die bilineare Interpolation aus (4.28) unter Verwendung der Be-

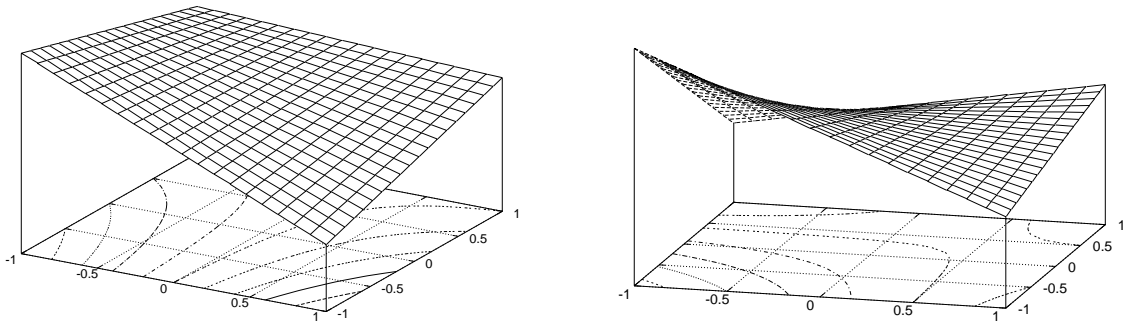


Bild D.2: Beispiele für bilineare Verteilungen über einem $[-1, 1]^2$ -Quadrat

zeichnungen aus Abschnitt 4.2.2 aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (1 - \alpha)(1 - \beta) \\
 f_2 &= (1 + \alpha)(1 - \beta) \\
 f_3 &= (1 + \alpha)(1 + \beta) \\
 f_4 &= (1 - \alpha)(1 + \beta) \\
 \alpha &= \begin{cases} \frac{-\Upsilon - \sqrt{\Upsilon^2 - 4\Pi\Xi}}{2\Pi} & \text{für } \Pi \neq 0 \\ -\frac{\Upsilon}{\Xi} & \text{für } \Pi = 0 \end{cases} \\
 \beta &= -\frac{b_0 + b_1\alpha}{b_2 + b_3\alpha} \\
 \Pi &= a_3b_1 - a_1b_3 \\
 \Upsilon &= a_3b_0 - a_0b_3 + a_2b_1 - a_1b_2 \\
 \Xi &= a_2b_0 - a_0b_2 \\
 a_0 &= \varphi_{i,x}^1 + \varphi_{i,x}^2 + \varphi_{i,x}^3 + \varphi_{i,x}^4 - 4\varphi_{i,x} \\
 a_1 &= -\varphi_{i,x}^1 + \varphi_{i,x}^2 + \varphi_{i,x}^3 - \varphi_{i,x}^4 \\
 a_2 &= -\varphi_{i,x}^1 - \varphi_{i,x}^2 + \varphi_{i,x}^3 + \varphi_{i,x}^4 \\
 a_3 &= \varphi_{i,x}^1 - \varphi_{i,x}^2 + \varphi_{i,x}^3 - \varphi_{i,x}^4 \\
 b_0 &= r_{i,x}^1 + r_{i,x}^2 + r_{i,x}^3 + r_{i,x}^4 - 4r_{i,x} \\
 b_1 &= -r_{i,x}^1 + r_{i,x}^2 + r_{i,x}^3 - r_{i,x}^4 \\
 b_2 &= -r_{i,x}^1 - r_{i,x}^2 + r_{i,x}^3 + r_{i,x}^4 \\
 b_3 &= r_{i,x}^1 - r_{i,x}^2 + r_{i,x}^3 - r_{i,x}^4
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

E Weitere umfangsgemittelte Radialverteilungen

In diesem Kapitel sind der Vollständigkeit halber weitere umfangsgemittelte Radialverteilungen des Strömungsfeldes der in Kapitel 5 beschriebenen, axial durchströmten Kaltluftturbine dargestellt. In Abschnitt 5.2.1 wurden für den kleinen Massenstrom in den Meßebenen 0 bis 3, Bild 5.2, der statische Druck, die absolute Machzahl, der absolute Totaldruck, die absolute Totaltemperatur sowie der mit absoluten Geschwindigkeiten gebildete tangentielle Strömungswinkel beschrieben. Hier werden nun für den kleinen Massenstrom noch zusätzlich die Radialwinkelverteilung, die relative Machzahl, der relative Totaldruck, die relative Totaltemperatur und der mit Relativgeschwindigkeiten gebildete tangentielle Strömungswinkel dargestellt. Außerdem werden alle genannten Strömungsgrößen auch für den großen Massenstrom gezeigt.

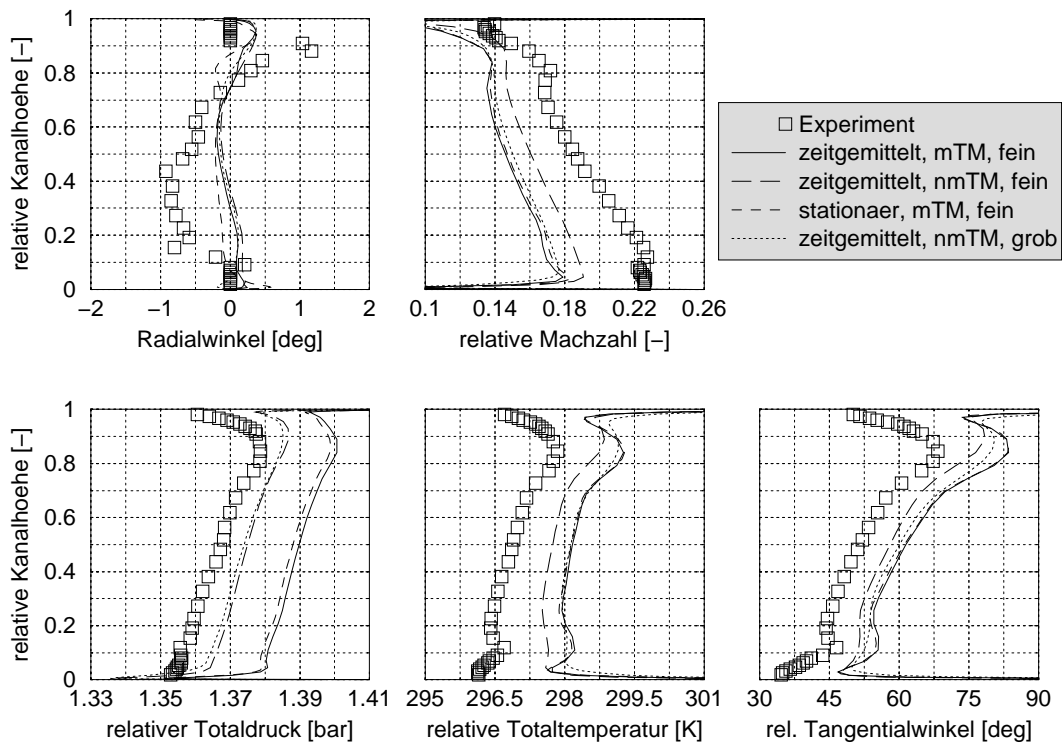


Bild E.1: Abströmung des 1. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei kleinem Massenstrom, Teil II (Teil I siehe Bild 5.6)

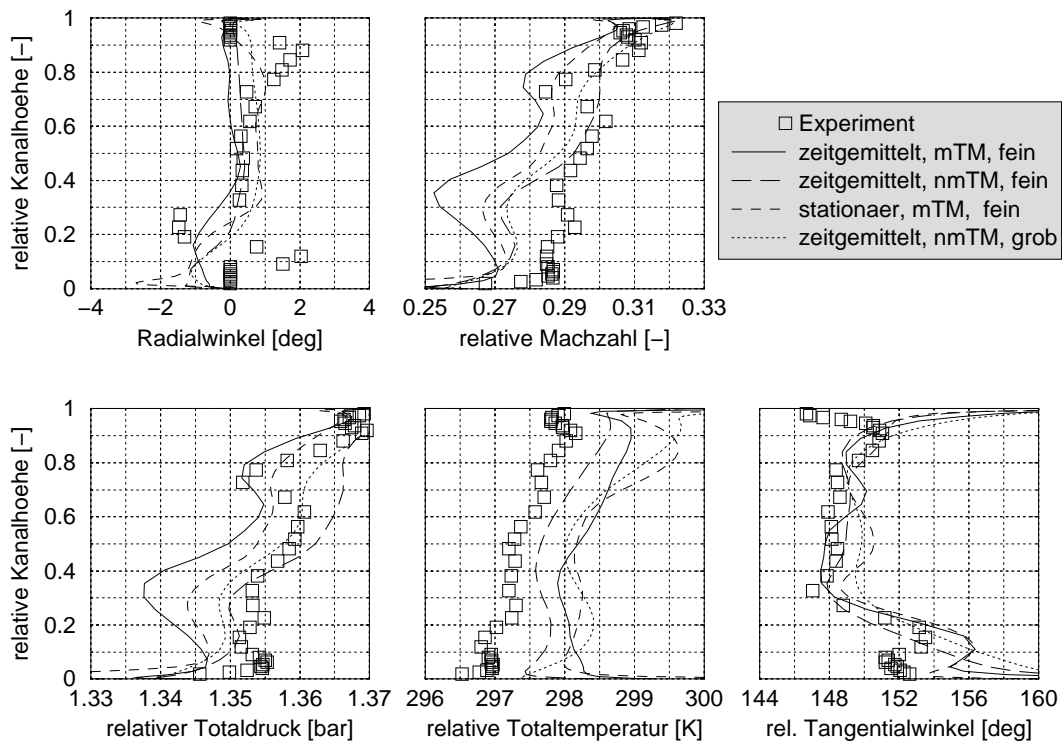


Bild E.2: Abströmung des Rotors: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei kleinem Massenstrom, Teil II (Teil I siehe Bild 5.7)

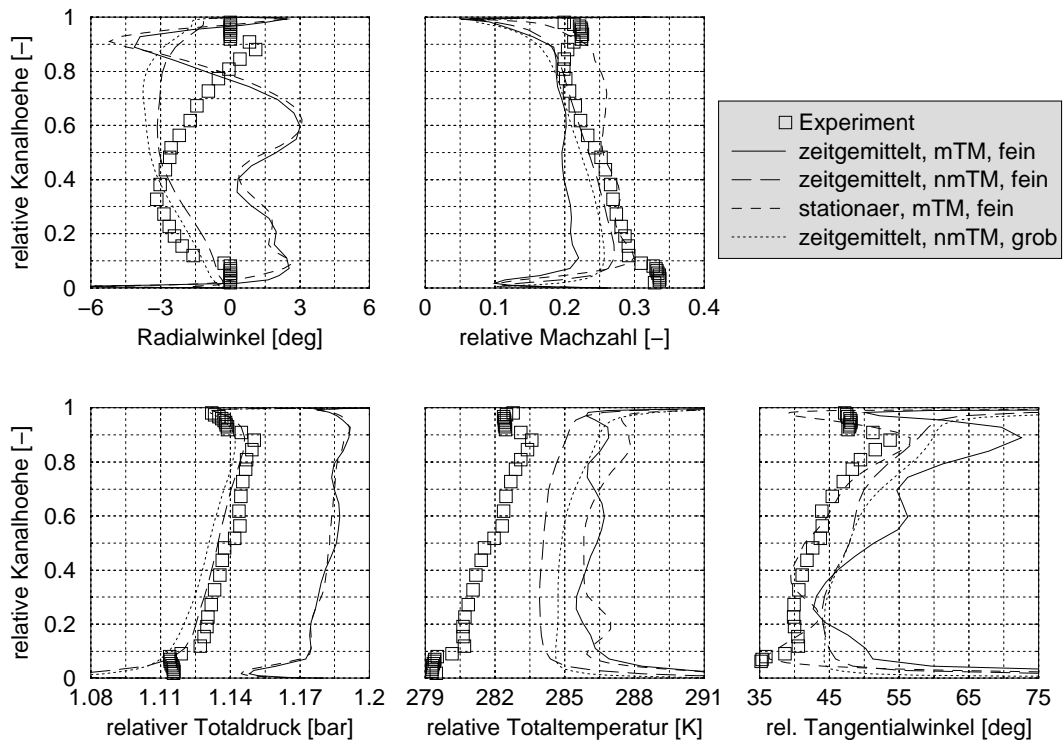


Bild E.3: Abströmung des 2. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei kleinem Massenstrom, Teil II (Teil I siehe Bild 5.8)

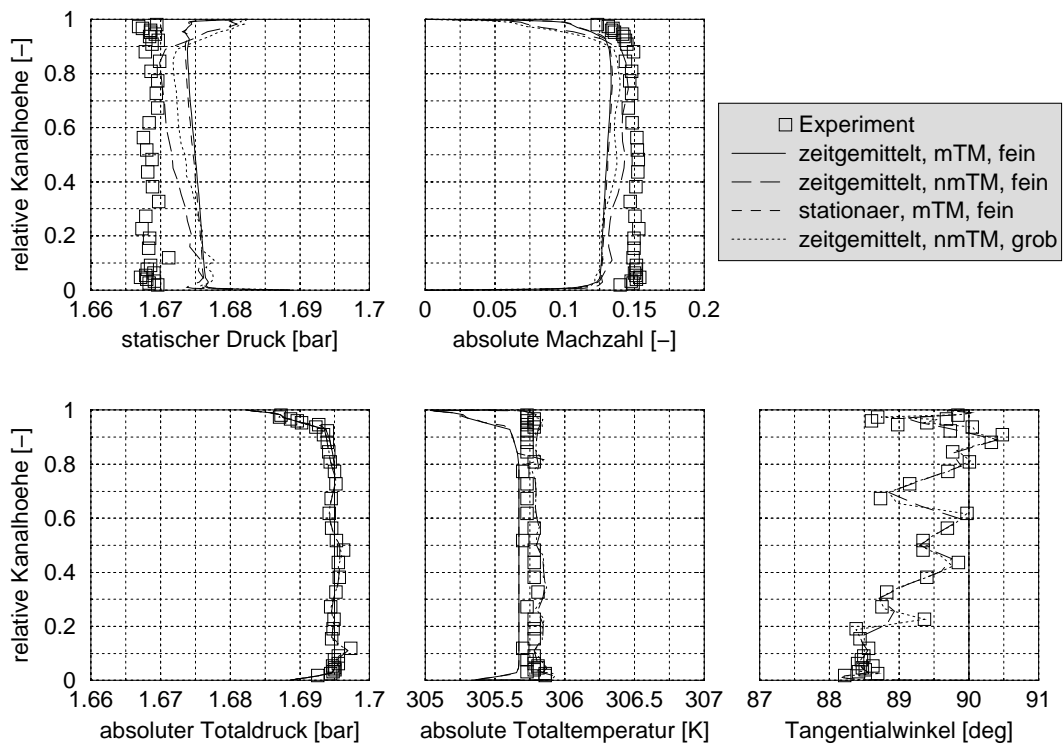


Bild E.4: Anströmung des 1. Leitrades (großer Massenstrom)

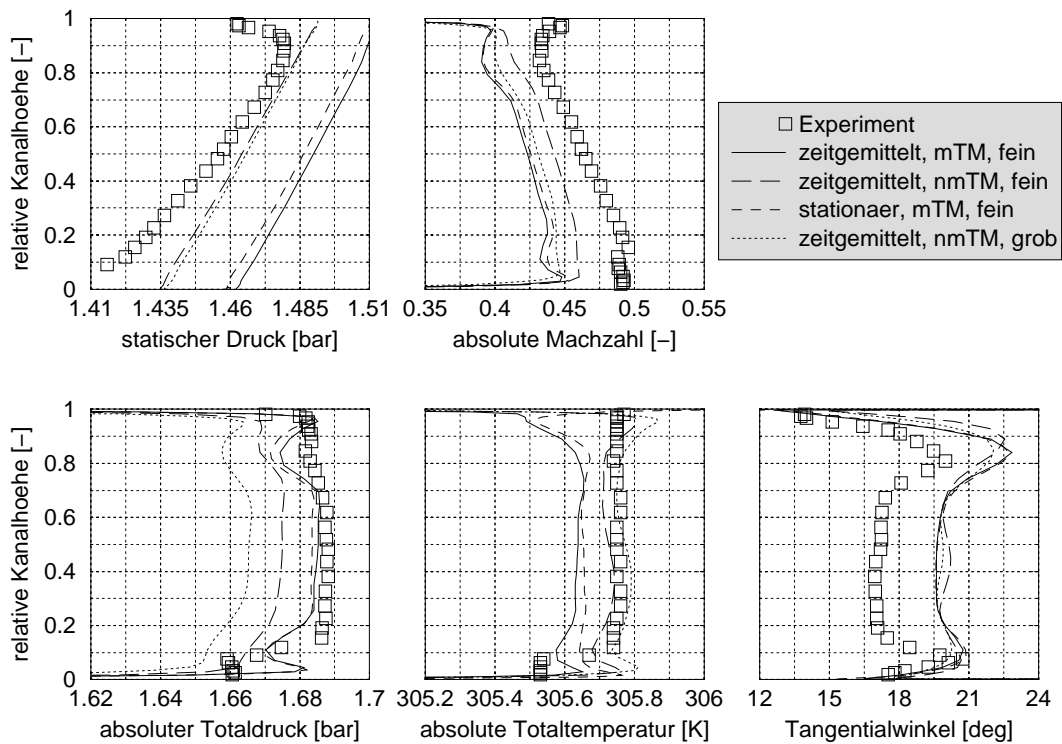


Bild E.5: Abströmung des 1. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei großem Massenstrom, Teil I

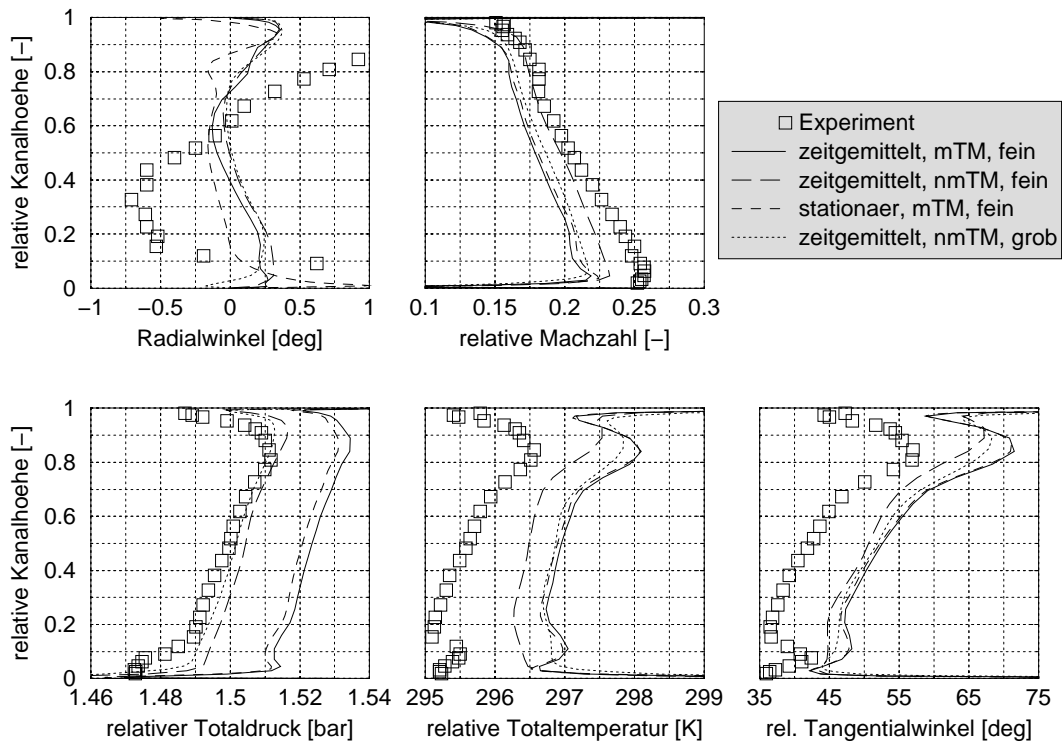


Bild E.6: Abströmung des 1. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei großem Massenstrom, Teil II

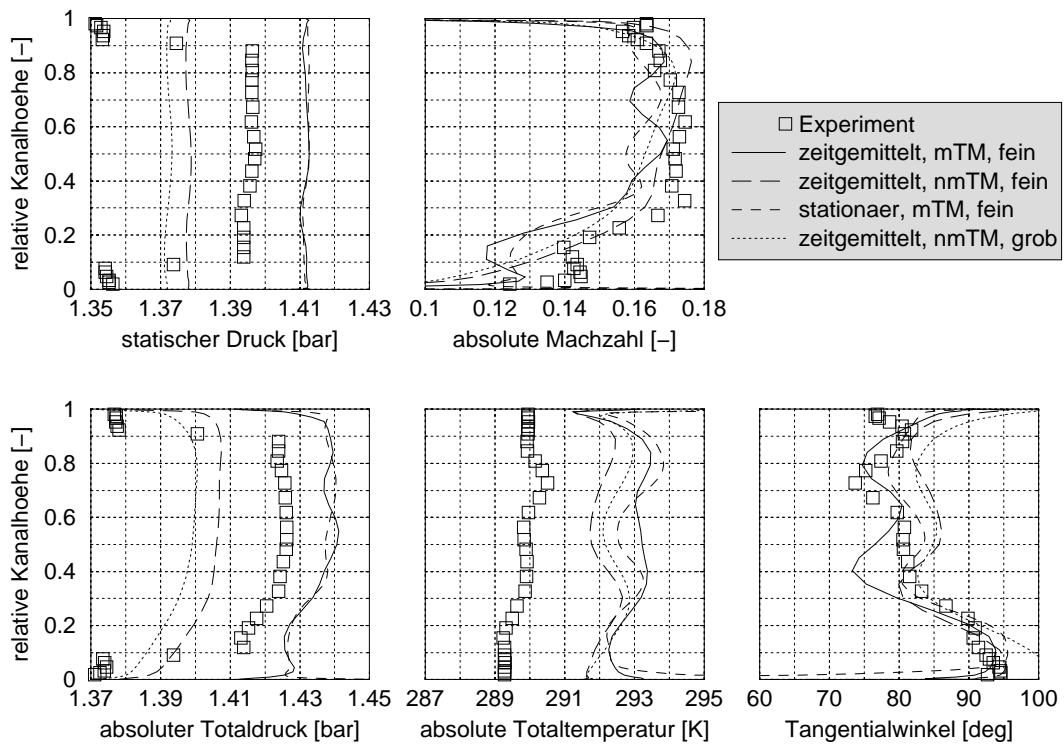


Bild E.7: Abströmung des Rotors: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei großem Massenstrom, Teil I

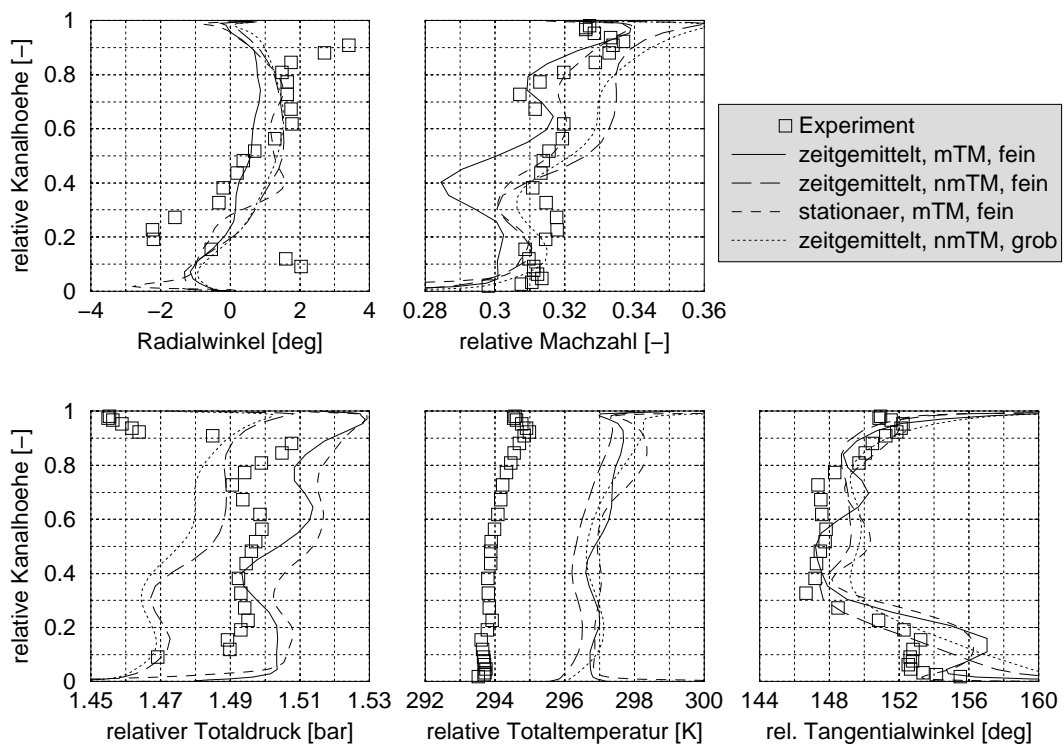


Bild E.8: Abströmung des Rotors: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei großem Massenstrom, Teil II

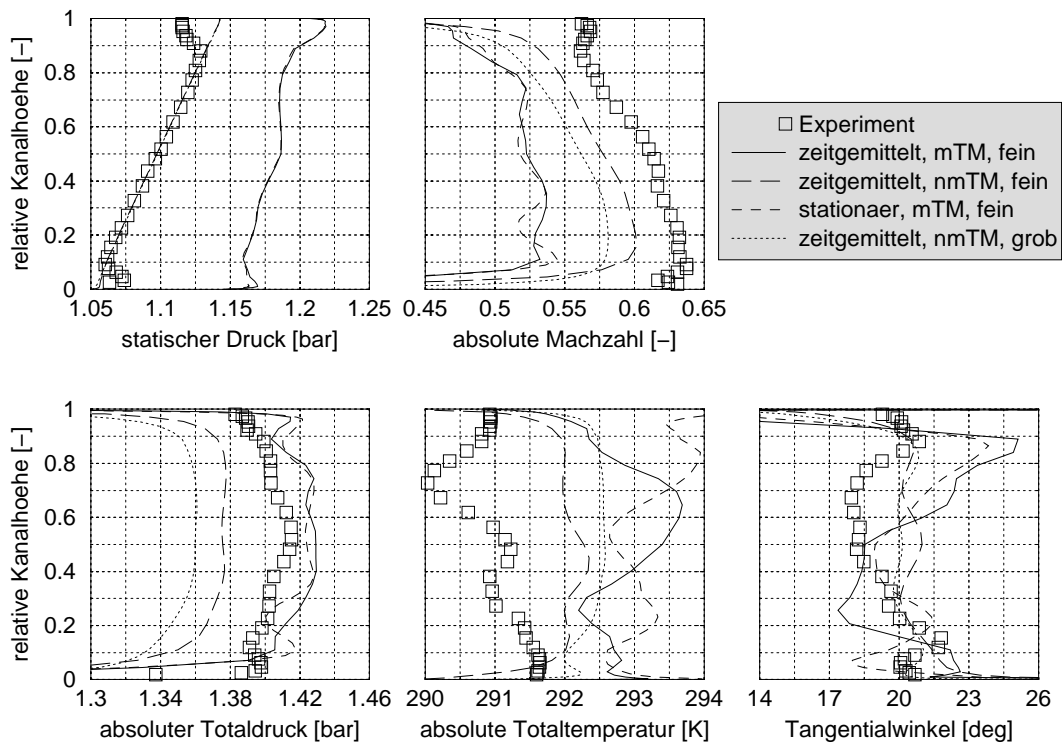


Bild E.9: Abströmung des 2. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei großem Massenstrom, Teil I

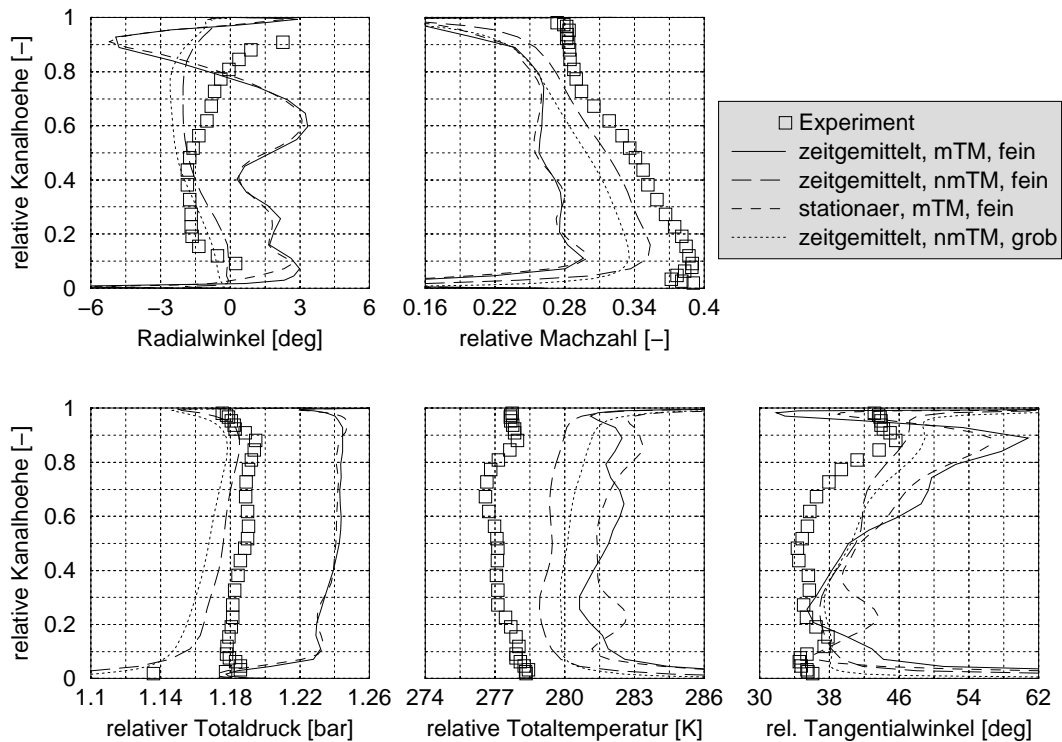


Bild E.10: Abströmung des 2. Leitrades: Radialverteilungen der Strömungsgrößen bei großem Massenstrom, Teil II

Literaturverzeichnis

- [1] A. Arnone, M.-S. Liou, and L. A. Povinelli, 'Multigrid calculation of three-dimensional viscous cascade flows', *AIAA Paper 91-3238*, (1991).
- [2] A. Arnone and R. Pacciani, 'Rotor-stator interaction analysis using the Navier-Stokes equations and a multigrid method', *ASME Paper 95-GT-177*, (1995).
- [3] B. S. Baldwin and H. Lomax, 'Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows', *AIAA Paper 78-257*, (1978).
- [4] J. A. Busby, R. L. Davis, D. J. Dorney, M. G. Dunn, C. W. Haldeman, R. S. Abhari, B. L. Venable, and R. A. Delaney, 'Influence of vane-blade spacing on transonic turbine stage aerodynamics, part ii: Time-resolved data and analysis', *ASME Paper 98-GT-482*, (1998).
- [5] P. Cizmas and R. Subramanya, 'Parallel computation of rotor-stator interaction', in *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines, Proc. 8th Int. Symp., Stockholm, Sweden, 14-18 Sept. 1997*, pp. 633-645, (1998).
- [6] R. Courant, K. O. Friedrichs, and H. Lewy, 'Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik', *Mathematische Annalen*, **100**, 32-74, (1928).
- [7] W. N. Dawes, 'A numerical study of the interaction of a transonic compressor rotor overtip leakage vortex with the following stator blade row', *ASME Paper 94-GT-156*, (1994).
- [8] W. N. Dawes, 'A simulation of the unsteady interaction of a centrifugal impeller with its vaned diffuser: Flows analysis', *ASME Paper 94-GT-105*, (1994).
- [9] J. D. Denton, 'An improved time marching method for turbomachinery flow calculation', *ASME Paper 82-GT-239*, (1982).
- [10] D. J. Dorney and O. P. Sharma, 'A study of turbine performance increases through airfoil clocking', *AIAA Paper 96-2816*, (1996).
- [11] D. J. Dorney and D. L. Sondak, 'Study of hot streak phenomena in subsonic and transonic flows', *ASME Paper 96-GT-98*, (1996).
- [12] R. P. Dring, H. D. Joslyn, L. W. Hardin, and J. H. Wagner, 'Turbine rotor-stator interaction', *Trans. ASME, J. of Engrg. for Power*, **104**, 729-742, (1982).
- [13] K. Engel, *Numerische Simulation der instationären Strömung in Turbomaschinenkomponenten*, Dissertation, Universität Gesamthochschule Essen, 1995.

- [14] K. Engel and F. Eulitz, 'Numerical investigation of the rotor-stator-interaction in a transonic compressor stage', *AIAA Paper 94-2834*, (1994).
- [15] K. Engel, M. Faden, and S. Pokorny, 'Numerical investigation of the unsteady flow through a counter-rotating fan', *ICAS Paper 92-3.1.2*, (1992).
- [16] J. I. Erdos, E. Alzner, and W. McNally, 'Numerical solution of periodic transonic flow through a fan stage', *AIAA J.*, **15**(11), 1559–1568, (1977).
- [17] F. Eulitz and K. Engel, 'Numerical investigation of wake interaction in a low pressure turbine', *ASME Paper 98-GT-563*, (1998).
- [18] F. Eulitz, K. Engel, and H. Gebing, 'Numerical investigation of the clocking effects in a multistage turbine', *ASME Paper 96-GT-26*, (1996).
- [19] A. Favre, 'Equations des gaz turbulents compressibles, I. – formes générales', *Journal de Mécanique*, **4**(3), 361–390, (1965).
- [20] A. Favre, 'Equations des gaz turbulents compressibles, II. – méthode des vitesses moyennes; méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique', *Journal de Mécanique*, **4**(4), 391–421, (1965).
- [21] A. Fourmaux, 'Unsteady flow calculation in cascades', *ASME Paper 86-GT-178*, (1986).
- [22] H. E. Gallus, J. Zeschky, and C. Hah, 'Endwall and unsteady phenomena in an axial turbine stage', *ASME Paper 94-GT-143*, (1994).
- [23] M. B. Giles, 'UNSFLO: A numerical method for calculating unsteady stator/rotor interaction', Technical Report TR-86-6, MIT Computational Fluid Dynamics Laboratory, (1986).
- [24] M. B. Giles, 'Generalized conservation cells for finite volume calculations', *AIAA Paper 87-1118-CP*, (1987).
- [25] M. B. Giles, 'Non-reflecting boundary conditions for the Euler-equations', TR-88-1, MIT Computational Fluid Dynamics Laboratory, (1988).
- [26] M. B. Giles, 'Stator/rotor interaction in a transonic turbine', *AIAA Journal of Propulsion and Power*, **6**(5), 621–627, (1990).
- [27] M. B. Giles, 'UNSFLO: A numerical method for the calculation of unsteady flow in turbomachinery', Technical Report GTL Report No. 205, MIT Gas Turbine Laboratory, (1991).
- [28] M. B. Giles, 1997. Lecture held at the ERCOFTAC Seminar and Workshop on 3D Turbomachinery Flow Prediction V, Courchevel, France, January 6–9.
- [29] M. B. Giles and R. Haimes, 'Validation of a numerical method for unsteady flow calculations', *ASME Paper 91-GT-271*, (1991).
- [30] J. P. Gostelow, 'A new approach to the experimental study of turbomachinery flow phenomena', *Trans. ASME, J. of Engrg. for Power*, **99**, 97–105, (1977).

- [31] D. G. Gregory-Smith, '3D flow simulation in turbomachinery – the ERCOFTAC Seminar and Workshop III, January 1994', in *VDI-Berichte 1185*, pp. 35–49. VDI, (1994).
- [32] K. L. Gundy-Burlet and D. J. Dorney, 'Physics of airfoil clocking in axial compressors', *ASME Paper 97-GT-444*, (1997).
- [33] L. He, 'Method of simulating unsteady turbomachinery flows with multiple perturbations', *AIAA J.*, **30**(11), 2730–2735, (1992).
- [34] L. He, 'Flow-structure coupled approach, rotating stall/stall flutter calculation', *VKI-LS 1996-05*, (1996).
- [35] L. He, 'Modelling issues for computation of unsteady turbomachinery flows', *VKI-LS 1996-05*, (1996).
- [36] L. He, 'Time-marching calculations of unsteady flows, blade row interaction and flutter', *VKI-LS 1996-05*, (1996).
- [37] L. He and J. D. Denton, 'Three dimensional time-marching inviscid and viscous solutions for unsteady flows around vibrating blades', *ASME Paper 93-GT-92*, (1993).
- [38] M. A. Hilditch, G. C. Smith, and U. K. Singh, 'Unsteady flow in a single stage turbine', *ASME Paper 98-GT-531*, (1998).
- [39] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1: Fundamentals of Internal and External Flows*, Wiley Interscience Series in Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1988.
- [40] C. Hirsch, 1997. Private Kommunikation.
- [41] H. P. Hodson, 'Boundary layer and loss measurements on the rotor of an axial-flow turbine', *ASME Paper 83-GT-4*, (1983).
- [42] H. P. Hodson, 'An inviscid blade-to-blade prediction of a wake-generated unsteady flow', *ASME Paper 84-GT-43*, (1984).
- [43] H. P. Hodson, 'Bladerow interactions in low pressure turbines', *VKI-LS 1998-02*, (1998).
- [44] A. Jameson, 'Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings', *AIAA Paper 91-1596*, (1991).
- [45] A. Jameson and T. J. Baker, 'Solution of the Euler Equations for Complex Configurations', *AIAA Paper 83-1929*, (1983).
- [46] P. C. E. Jorgenson and R. V. Chima, 'An unconditionally stable Runge-Kutta method for unsteady flows', *AIAA Paper 89-0205*, (1989).
- [47] A. Jung, R. Merz, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Calculation of stator/rotor interaction in a transonic turbine stage using multiple blade passages and time-inclining for three-dimensional flows', in *Proc. of Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics, vol. 2*, pp. 552–559, (1995).

- [48] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Calculation and visualization of the unsteady flow in an axial turbine stage', in *Computational Fluid Dynamics '96*. John Wiley and Sons, pp. 629–636, (1996).
- [49] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Simulation of 3D–unsteady stator/rotor interaction in turbomachinery stages of arbitrary pitch ratio', *ASME Paper 96-GT-69*, 1–8, (1996).
- [50] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Prediction of 3D–unsteady flow in an air turbine and a transonic compressor including blade gap flow and blade row interaction', *ASME Paper 97-GT-94*, (1997).
- [51] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Simulation of the unsteady flow in a turbine stage with outlet guide vane using a time–inclination method, test case 6: Axial flow turbine'. presented at the ERCOFTAC Seminar and Workshop on 3D Turbomachinery Flow Prediction V, Courchevel, France, January 6–9, 1997.
- [52] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Unsteady blade loads caused by stator/rotor interaction in an axial turbine stage', in *Modelling and Design in Fluid Flow Machinery 1997*, pp. 397–406, (1997). also in: *Trans. Institute of Fluid-Flow Machinery*, **104**, 45–58, (1998).
- [53] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'U1 (TC 6): Axial flow turbine stage: Unsteady blade row interaction: Grid dependency study'. presented at the ERCOFTAC Seminar and Workshop on 3D Turbomachinery Flow Prediction VI, Aussois, France, January 5–8, 1998.
- [54] A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Unsteady flow in an axial flow turbine using a parallel implicit Navier-Stokes Method', in *High Performance Computing in Science and Engineering '98*, eds., E. Krause and W. Jäger, Transactions of the High Performance Computing Center Stuttgart (HLRS) 1998, pp. 269–294. Springer-Verlag, (1999).
- [55] I.-M. Kang and K.-S. Chang, 'Euler analysis of transonic stator-rotor interaction using a finite volume method', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **12**, 625–636, (1991).
- [56] W. Koschel. Reibungsbehaftete Turbinenströmung. FVV–Heft R 346, 1984.
- [57] M. Koya and S. Kotake, 'Numerical analysis of fully three–dimensional periodic flows through a turbine stage', *ASME Paper 85-GT-57*, (1985).
- [58] E. Krause and W. Jäger, eds. *High Performance Computing in Science and Engineering '98*, Transactions of the High Performance Computing Center Stuttgart (HLRS) 1998. Springer-Verlag, 1999.
- [59] J. Krückels, *Numerische Berechnung der spaltbeeinflussten Strömung in Axialturbinen mit Diffusoren*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1996.
- [60] A. Le Meur, 'Three–dimensional unsteady flow computation in a transonic axial turbine stage', *AIAA Paper 88–0362*, (1988).

- [61] J. P. Lewis, R. A. Delaney, and E. J. Hall, 'Numerical prediction of turbine vane-blade interaction', *AIAA Paper 87-2149*, (1987).
- [62] N. K. Madavan, M. M. Rai, and S. Gavali, 'Multipassage three-dimensional Navier–Stokes simulation of turbine rotor–stator interaction', *Journal of Propulsion and Power*, **9**(3), 389–395, (1993).
- [63] R. Merz, *Entwicklung eines Mehrgitterverfahrens zur numerischen Lösung der dreidimensionalen, kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in mehrstufigen Turbomaschinen*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1998.
- [64] V. Michelassi, Adami P., and F. Martelli, 'An implicit algorithm for stator-rotor interaction analysis', *ASME Paper 96-GT-68*, (1996).
- [65] N. A. Mitchell, 'A time-marching method for unsteady two-dimensional flow in a blade passage', *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **2**(12), (1980).
- [66] MPI-Home-Page der Argonne National Laboratories, Literatursammlung, frei erhältliche Software und umfangreiche Programmdokumentation, Internetadresse: <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/>.
- [67] M. M. Rai, 'Navier–Stokes simulations of rotor-stator interaction using patched and overlaid grids', *AIAA Paper 85-1519*, (1985).
- [68] M. M. Rai, 'Unsteady three-dimensional Navier–Stokes simulations of turbine rotor–stator interaction', *AIAA Paper 87-2058*, (1987).
- [69] M. M. Rai and N. K. Madavan, 'Multi-airfoil Navier–Stokes simulations of turbine rotor-stator interaction', *Journal of Turbomachinery*, **112**, 377–384, (1990).
- [70] K. V. Rao and Delaney R. A., 'Investigation of unsteady flow through a transonic turbine stage, part i, analysis', *AIAA Paper 92-2408*, (1992).
- [71] W. Rieß, A. Sentker, and M Walbaum, 'Experimental investigations of unsteady flow in axial compressors', in *Latest Advances in the Aerodynamics of Turbomachinery with Special Emphasis upon Unsteady Flows*, *IMEchE Seminar S461, 9–10 December*, pp. 67–75, (1996).
- [72] A. P. Saxer, *A Numerical Analysis of 3-D Inviscid Stator / Rotor Interactions Using Non-Reflecting Boundary Conditions*, Phd. thesis, MIT Gas Turbine Laboratory, 1992.
- [73] A. P. Saxer and H. M. Felici, 'Numerical analysis of 3-d unsteady hot streak migration and shock interaction in a turbine stage', *ASME Paper 94-GT-76*, (1994).
- [74] F. Schuler, *Simulation instationärer Strömungen in mehrstufigen Turbomaschinen*, Diplomarbeit, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium, Universität Stuttgart, 1997.
- [75] O. P. Sharma and C. S. Tau, 'Impact of unsteadiness induced by adjacent airfoils rows on the performance, structural integrity and stalling characteristics of axial flow compressors', *VKI-LS 1998-02*, (1998).

- [76] D. L. Sondak and D. J. Dorney, 'Simulation of vortex shedding in a turbine stage', *ASME Paper 98-GT-242*, (1998).
- [77] B. Stephan. Turbinenlaufrad/-Leitradströmung II. Tischvorlage zur 3. Sitzung des FVV-Arbeitskreises, 1997.
- [78] H. Stetter, A. R. Jung, and J. F. Mayer, 'Numerical studies of unsteady flow phenomena in multi-blade row environment', in *Latest Advances in the Aerodynamics of Turbomachinery with Special Emphasis upon Unsteady Flows*, *IMEchE Seminar S461, 9–10 December*, (1996).
- [79] C. Utz, *Experimentelle Untersuchung der Strömungsverluste in einer mehrstufigen Axialturbine*, Dissertation, ETH Zürich, 1972.
- [80] T. W. Volmar, B. Brouillet, H. E. Gallus, and H. Benetschik, 'Time accurate 3D Navier-Stokes analysis of a $1\frac{1}{2}$ stage axial flow turbine', *AIAA Paper 98-3247*, (1998).
- [81] T. W. Volmar, *Zeitgenaue dreidimensionale Simulation der Rotor-Stator-Interaktion in Turbomaschinen durch numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung*, Dissertation, RWTH Aachen, 1999.
- [82] G. R. Wakeley and I. Potts, 'Origins of loss within a multistage turbine environment under conditions of partial admission', *ASME Paper 97-GT-96*, (1997).
- [83] R. E. Walraevens. Turbinenlaufrad/-Leitradströmung I – Turbinenleitradströmung hinter einem Laufrad mit Radialspalt. FVV-Heft 577, 1995.
- [84] R. E. Walraevens, 1997–1999. private Kommunikation.
- [85] R. E. Walraevens, *Experimentelle Analyse dreidimensionaler instationärer Strömungseffekte in einer $1\frac{1}{2}$ -stufigen Axialturbine*, Dissertation, RWTH Aachen, 1999.
- [86] R. E. Walraevens and H. E. Gallus, 'Three-dimensional structure of unsteady flow downstream the rotor in a $1-1/2$ stage turbine', in *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines*, eds., Y. Tanida and M. Namba, pp. 481–498. Elsevier Science B.V., (1995).
- [87] R. E. Walraevens and H. E. Gallus, 'Stator-rotor-stator interaction in an axial flow turbine and its influence on loss mechanisms', *AGARD-CP-571*, 39/1–39/14, (1996).
- [88] R. E. Walraevens, H. E. Gallus, A. R. Jung, J. F. Mayer, and H. Stetter, 'Experimental and computational study of the unsteady flow in a 1.5 stage axial turbine with emphasis on the secondary flow in the second stator', *ASME Paper 98-GT-254*, (1998).
- [89] J. Zeschky, *Experimentelle Untersuchung der dreidimensionalen instationären Rotorströmung einer axialen Kaltluftturbine*, Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen, 1990.

Lebenslauf

Name		Alexander Rudolf Jung
Geburtstag und -ort	16.04.1967	Schwäbisch Gmünd
Eltern		Herbert Jung Adelheid, geb. Widmann
Schulbildung	1973–1977 1977–1986	Grundschule in Schwäbisch Gmünd Gymnasium in Schwäbisch Gmünd
Wehrdienst	1986–1988	
Studium	1988-1993 1991–1992	Maschinenbaustudium an der Universität Stuttgart Integriertes Auslandsstudium an der Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, gefördert durch ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD)
Berufstätigkeit	1994-1998 seit 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl und Institut für Thermische Strömungsmaschinen (Prof. Dr.-Ing. H. Stetter) der Universität Stuttgart bei der Siemens AG (KWU) in Mülheim an der Ruhr