Untersuchung der Struktur und Dynamik magnetischer Inseln im Tokamak ASDEX Upgrade

Von der Fakultät Elektro- und Informationstechnik
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

John Patrick Meskat

aus Köln

Hauptberichter:	Prof. Dr. Zohm
Mitberichter:	Prof. Dr. Rucker
Tag der mündlichen Prüfung:	24. April 2001

Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart

2001

Abstract

Neoclassical tearing modes limit the maximum achievable β in magnetically confined fusion plasmas and may be a severe problem for a fusion reactor. This thesis deals with the theoretical and experimental analysis of the structure and dynamics of tearing modes and the associated magnetic islands in ASDEX Upgrade. The magnetic structure is modelled by realistic helical magnetic fluxes. For the perturbation flux an analytical fit function to solutions of the tearing mode equation is used. The temperature profile associated with the magnetic structure can be computed numerically by the heat flux equation. In this study, the Spitzer heat conductivity parallel to the field lines must be reduced by two orders of magnitude since the mean free path length is long compared to the gradient length ("heat flux limit"). The modelled temperature profile is flattenend inside the island except for the heat conducting layer around the separatrix. The temperature profile is experimentally observed by ECE and exhibits substructures inside the island which cannot be explained in the framework of the model. A modelling based analysis of the magnetic structure yields $6-8cm$ broad asymmetric islands as expected from theory. The dynamics of neoclassical tearing modes is analysed by fitting the generalised Rutherford equation to the experimentally observed island width evolution measured by Mirnov and ECE. Due to the above mentioned reduction of the heat conductivity the incomplete flattening of the temperature and pressure profile of a small island may not be neglected in the bootstrap effect and is consistent with the poloidal ion larmor radius scaling of β. A range of free parameter sets of the Rutherford equation can be determined giving a fit to the dynamics of all observed islands. An English summary is given at the end of this thesis.

Neoklassische Tearing Moden begrenzen das maximale β in magnetisch eingeschlossenen Fusionsplasmen. In dieser Arbeit werden die Struktur und Dynamik von Tearing Moden und magnetischen Inseln in ASDEX Upgrade theoretisch und experimentell untersucht. Die magnetische Struktur wird mit realistischen helikalen magnetischen Flüssen modelliert. Als Störfluß dient eine analytische Anpassungsfunktion an Lösungen der Tearing-Mode-Gleichung. Das resultierende Temperaturprofil kann mit der Wärmeleitungsgleichung numerisch modelliert werden. Die parallele Spitzerwärmeleitfähigkeit muß in dieser Arbeit um zwei Größenordnungen reduziert werden, da die freie Weglänge groß gegen die Gradientenlänge ist ("heat flux limit"). Das modellierte Temperaturprofil ist innerhalb der Insel flach mit Ausnahme der Wärmeleitungszone um die Separatrix. Das Profil wird mit ECE experimentell beobachtet und zeigt nicht modellierbare Substrukturen innerhalb der Insel. Eine modellgestützte Analyse der Magnetfeldstruktur zeigt, wie theoretisch erwartet, $6-8cm$ breite asymmetrische Inseln. Die Dynamik neoklassischer Tearing Moden wird mit einer Anpassung der verallgemeinerten Rutherfordgleichung an die experimentell beobachtete Inselbreiteentwicklung (Mirnov und ECE) untersucht. Aufgrund der Reduktion der Wärmeleitfähigkeit kann die unvollständige Temperatur- und Druckprofilabflachung in kleinen Inseln nicht im Bootstrapeffekt vernachlässigt werden und ist mit der Skalierung von β mit dem poloidalen Ionenlarmorradius vereinbar. Es kann ein Bereich von Kombinationen der freien Parameter der Rutherfordgleichung bestimmt werden, die Anpassungen an die Dynamik aller beobachteter Inseln ermöglichen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Modellierung der Flußflächenstruktur **13**
2.1 Magnetohydrodynamische Grundlagen 13
2.2 Das helikale Koordinatensystem 14
2.3 Der helikale magnetische Fluß 15
2.4 Ein einfaches Modell einer magnetischen Insel 17
2.5 Realistische Modellierung magnetischer Inseln 19
2.6 Zusammenfassung 26

3 Modellierung des Temperaturprofils **27**
3.1 Die Wärmeleitungsgleichung 27
3.2 Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung 34
3.3 Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung 38
3.4 Modellierung mit Transportgleichungen 39
3.5 Zusammenfassung 44

4 Modellierung der Dynamik **45**
4.1 Die Grundidee der Rutherfordgleichung 45
4.2 Die verallgemeinerte Rutherfordgleichung 46
4.3 Eigenschaften der Inseldynamik 48
4.4 Modellierung des gekoppelten Systems Plasma - Insel 51
4.5 Zusammenfassung 52

5 Untersuchungsmethoden für Struktur und Dynamik **53**
5.1 Geometrieabschätzung magnetischer Inseln 53
5.2 Rekonstruktion der Flußflächenkonfiguration 55
5.3 Bestimmung der Parameter der Rutherfordgleichung 56
5.4 Zusammenfassung 59

6 Experimentelle Diagnostiken **61**
6.1 Messung des Elektronentemperaturprofils mit ECE 61
6.2 Relative Inselbreitemessung mit der Mirnovdiagnostik 67
6.3 Zusammenfassung 68

7 Experimentelle Untersuchung der Inselstruktur **69**
7.1 Untersuchung einer klassischen Tearingmode 69
7.2 Untersuchung neoklassischer Tearing Moden 70
7.3 Diskussion der Inselstrukturuntersuchung 77

8 Experimentelle Untersuchung der Inseldynamik **79**
8.1 Die freien Parameter der Rutherfordgleichung 79
8.2 Fehlerdiskussion 87
8.3 Diskussion der Inseldynamikuntersuchung 89

9 Zusammenfassung **91**

A Berechnung der Feldlinienlänge **95**

B Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung **99**

C Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung **105**

D Hochauflösende ECE-Temperaturmessung **109**

E Programmbeschreibungen **113**

F Summary **115**
F.1 Introduction to tearing modes 115
F.2 Model of the magnetic structure 115
F.3 Model of the temperature profile 116
F.4 Model of tearing mode dynamics 118
F.5 Experimental methods 119
F.6 Experimental observation of the island structure 121
F.7 Experimental analysis of island dynamics 122
F.8 Conclusions 124

Literaturverzeichnis **127**

Kapitel 1

Einleitung

Auf der Suche nach alternativen Energiequellen für die Zukunft stellt die kontrollierte Kernfusion mit magnetischem Einschluß eine langfristige Option dar. Sie basiert auf der Freisetzung von Energie bei der Verschmelzung leichter Atomkerne, beispielsweise in der Reaktion der Wasserstoffisotope Deuterium und Tritium:

$$ {}^{2}_{1}D + {}^{3}_{1}T = {}^{4}_{2}He(3.5MeV) + n(14.1MeV) \quad . \tag{1.1} $$

Notwendige Voraussetzung für eine ausreichende Fusionsrate ist das Überschreiten eines Schwellwertes des Produkts aus der Teilchendichte n und der Energieeinschlußzeit τ_E (Quotient aus Energieinhalt und Heizleistung). Der Schwellwert ist eine Funktion der Temperatur T und hat ein Minimum von $n \cdot \tau_E = 1.5 \cdot 10^{20} m^{-3} s$ bei $T = 25keV$ [1]. Die Energieeinschlußzeit muß mindestens $\tau_E = 5s$ betragen, sodaß eine Dichte von $n \approx 10^{20} m^{-3}$ erforderlich ist. Dies macht einen effizienten Einschluß des heißen Gasgemischs erforderlich.

Das Gas ist bereits weit unterhalb der oben genannten Temperatur und Dichte ionisiert und bildet ein Plasma. Aufgrund ihrer elektrischen Ladung treten die Plasmateilchen in Wechselwirkung mit Magnetfeldern und lassen sich darin einschließen. Eine Beschreibung des Plasmas im Magnetfeld ist durch eine kinetische Theorie möglich (z. B. Fokker-Planck-Gleichung). In makroskopischen Systemen, bei denen die Skalenlängen der Teilchenbewegungen und die freien Weglängen klein gegen die Systemabmessungen sind, kann über die kinetischen Gleichungen gemittelt werden, sofern keine signifikanten Abweichungen von der Maxwellverteilung auftreten. Man erhält eine Beschreibung des Plasmas im Magnetfeld analog zur Beschreibung einer (magnetischen) Flüssigkeit, die sogenannte Magnetohydrodynamik (MHD) [1].

Die Plasmateilchen sind im Magnetfeld in ihrer Bewegungsfreiheit senkrecht zu den Feldlinien eingeschränkt, parallel dazu jedoch unbeeinflußt. Benutzt man eine lineare Magnetfeldanordnung zum Einschluß, so kommt es unvermeidlich zu Teilchenverlusten an den Enden, auch wenn diese durch geeignete Magnetfeldkonfigurationen reduziert werden können ("magnetische Spiegel"). Aus diesem Grund konzentriert sich die aktuelle Forschung auf den Einschluß

[1] Die Temperatur $T[eV]$ wird hier synonym für die Energie $kT[K]$ verwendet. Es gilt $1eV \triangleq 11600K$

in toroidalen Magnetfeldkonfigurationen. Dabei ist aus Stabilitätsgründen die Überlagerung eines zusätzlichen schwächeren poloidalen Magnetfeldes erforderlich. Dieses wird beim Tokamak durch einen toroidal im Plasma fließenden Strom erzeugt, der von einer Transformatorspule induziert wird. Beim Stellarator wird der poloidale Anteil durch geeignet geformte Spulen miterzeugt. Abbildung 1.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Tokamaks mit den helikal verschraubten Magnetfeldlinien. Die zusätzlichen Poloidalfeldspulen sind notwendig, um der mit der Plasmaenergie zunehmenden Verschiebung der magnetischen Achse nach außen (Shafranov-Verschiebung) entgegenzuwirken.

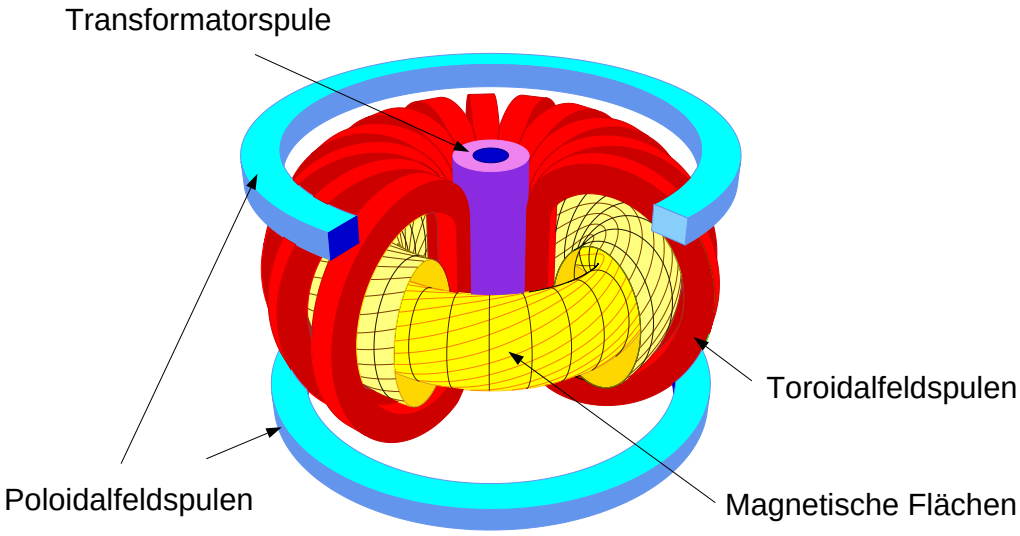

Abbildung 1.1: *Prinzipieller Aufbau eines Tokamaks.*

Abbildung 1.2 zeigt, wie die Verschraubung der Feldlinien nach außen hin abnimmt (positive Verscherung). Feldlinien mit identischer Verschraubung liegen auf gleichen magnetischen Flußflächen, die durch einen konstanten Wert des magnetischen Flusses definiert sind. Der magnetische Fluß ergibt sich aus der Integration des Magnetfeldes über eine Fläche im Torus (toroidal oder poloidal, entsprechend toroidaler oder poloidaler Fluß). Die Flußflächen sind ineinander geschachtelt und können sich grundsätzlich nicht schneiden, wenn das Plasma unendlich leitfähig ist (ideale MHD). Eine häufig verwendete Kennzahl für das Verhältnis von Toroidalfeld B_{tor} und Poloidalfeld B_{pol} und damit für die Flußflächen ist der Sicherheitsfaktor q, der die Anzahl der toroidalen Umläufe einer Feldlinie pro poloidalem Umlauf angibt. Allgemein ist er als Änderung des toroidalen Flusses Φ mit dem poloidalen Fluß Ψ definiert: $q = d\Phi/d\Psi$. In zylindrischer Näherung gilt mit dem kleinen Radius r und dem großen Radius R:

$$q = \frac{r}{R}\frac{B_{tor}}{B_{pol}} = \frac{\text{Toroidale Umläufe einer Feldlinie}}{\text{Poloidale Umläufe einer Feldlinie}} \quad . \tag{1.2}$$

Ein großer Wert von q bedeutet eine kleine Steigung der Feldlinien. Eine Besonderheit stellen

Flußflächen dar, bei denen $q = m/n$ als Bruch (kleiner) ganzer Zahlen m und n darstellbar ist, sodaß sich die Feldlinien bereits nach wenigen toroidalen Umläufen schließen. Auf diesen resonanten Flächen können sich Plasmainstabilitäten wie die in dieser Arbeit behandelten Tearing Moden ausbilden.

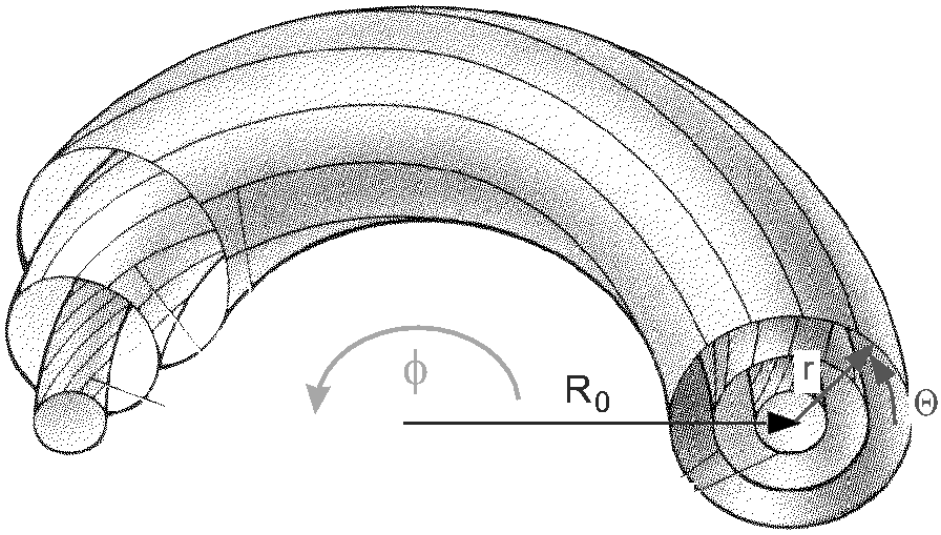

Abbildung 1.2: *Magnetische Feldlinien und Flußflächen im Tokamak.*

Voraussetzung für das Auftreten von druckgetriebenen magnetohydrodynamischen Plasmainstabilitäten ist das Überschreiten einer Grenze des Plasmaenergieinhalts, ausgedrückt durch den Faktor

$$\beta = \frac{< p >}{B^2/(2\mu_0)} \quad . \tag{1.3}$$

Er gibt das Verhältnis zwischem dem mittleren Plasmadruck $< p >$ und dem das Plasma einschließenden Magnetfelddruck $B^2/(2\mu_0)$ an und sollte im Fusionsreaktor aus ökonomischen Gründen möglichst hoch sein. Teilweise wird der Plasmadruck in Relation zum poloidalen Magnetfeldanteil gesetzt (poloidales β, β_p). Aus der idealen MHD folgt das Troyon-Limit für den maximalen in einem Tokamak erreichbaren Wert von β in Abhängigkeit vom Plasmastrom $I_p[MA]$, dem kleinen Plasmaradius $a[m]$ und dem Toroidalfeld $B_{tor}[T]$ [1]:

$$\beta = 0.028 \frac{I_p}{aB_{tor}} \quad . \tag{1.4}$$

Oft wird dieser Wert noch mit dem Faktor 100 multipliziert, sodaß man den Wert als Prozentangabe interpretieren muß ($\beta[\%]$). Die Relation zu den Plasmaparametern legt die Einführung eines normierten $\beta_N = \beta[\%]/(I_p/(aB_{tor}))$ mit dem Troyon-Limit $\beta_N = 2.8$ nahe ("normalised β").

In Experimenten an verschiedenen Tokamaks (TFTR, COMPASS-D, DIII-D, JET, ASDEX Upgrade) hat sich gezeigt, daß der maximal erreichbare Wert von β_N oftmals durch das Auftreten sogenannter neoklassischer Tearing Moden auf Werte deutlich unterhalb des Troyon-Limits begrenzt wird [2, 3, 4, 5]. Tearing Moden sind Plasmainstabilitäten, bei denen ein helikaler Störstrom auf einer resonanten Fläche ($q = m/n$) fließt, womit eine Störung der Magnetfeldkonfiguration verbunden ist [6]. Dies läßt sich als Überlagerung eines magnetischen Störflusses auf den Gleichgewichtsfluß darstellen. Dabei kommt es zur Verbiegung und zur Rekonnektion, d.h. Verbindung, von magnetischen Flußflächen. Diese Vorgänge sind nur im Rahmen der resistiven (nichtidealen) MHD zu erklären, weshalb sie nicht im (idealen) Troyon-Limit berücksichtigt sein können. Durch die Rekonnektion der Flußflächen bilden sich magnetische Inseln, die wie eine Feldlinie auf der resonanten Fläche um den Torus verlaufen. Abbildung 1.3 zeigt, wie eine Insel an der $q = 2/1$-Fläche zweimal toroidal umläuft, bis sie einen poloidalen Umlauf gemacht hat und sich schließt. Eine Tearing Mode kann also durch ihre poloidale Modenzahl m und ihre toroidale Modenzahl n charakterisiert werden, was zur Bezeichung (m,n)-Mode oder (m,n)-Insel zusammengefaßt wird. Die toroidale Modenzahl n gibt die Anzahl der magnetischen Inseln an, die poloidale Modenzahl m die Anzahl der in einem poloidalen Plasmaquerschnitt erscheinenden Inselquerschnitte. Dementsprechend existieren bei einer $(3,2)$-Mode zwei unabhängige Inseln, die sich jeweils nach drei toroidalen Umläufen schließen. In einem poloidalen Querschnitt sind dabei drei Inselquerschnitte zu sehen.

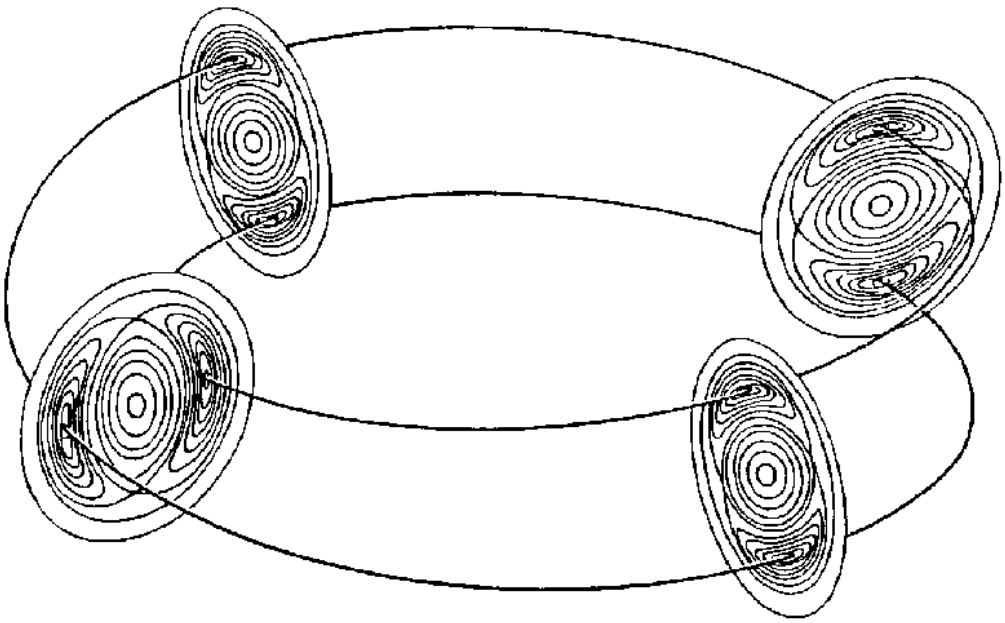

Abbildung 1.3: *Flußflächenstruktur im Tokamak mit einer (2,1)-Tearing Mode.*

Die magnetischen Inseln stellen einen Kurzschluß in der radialen Wärmeisolation des Plasmas

dar. Infolge dessen kommt es zu einer Abflachung des radialen Temperatur- und Druckprofils, was mit einem Verlust an eingeschlossener Plasmaenergie verknüpft ist (Verringerung der Energieeinschlußzeit τ_E). Dadurch kommt es zu einem Abfall in β. Die Abflachung des Druckprofils führt zu einer Verringerung des helikalen Bootstrapstroms (dies ist ein durch thermoelektrische Effekte getriebener toroidaler Strom), was wiederum einen Störstrom darstellt und weiteres Inselwachstum bewirken kann. In Plasmen mit ausreichendem β kann allein aufgrund dieses Effekts aus einem kleinen Inselkeim, einer sogenannten seed island, eine große Insel entstehen. Man spricht dann von einer neoklassischen Tearing Mode, da sie durch den neoklassischen Bootstrapeffekt getrieben wird [7].

Die Dynamik von Tearing Moden, also das zeitliche Verhalten der Inselbreite, wird durch die zeitliche Änderung des Störflusses bestimmt und mit der Rutherfordgleichung theoretisch beschrieben. Sie läßt sich zur Beschreibung der Dynamik neoklassischer Tearing Moden verallgemeinern, wobei neben dem destabilisierenden Bootstrapeffekt auch stabilisierende Effekte einbezogen werden können.

Abbildung 1.4 zeigt ein Beispiel von neoklassischen Tearing Moden an ASDEX Upgrade [3]. Mit steigender Neutralteilchenheizleistung steigt β_N bis die Modenaktivität einsetzt und β_N absinkt. Die Modenaktivität ist im Signal der Mirnovspulen erkennbar, welche die störungsbedingte Fluktuation des Magnetfeldes im toroidal rotierenden Plasma registrieren. Hier ist das addierte Signal zweier Mirnovspulen dargestellt, welches die Aktivität von Moden mit gerader toroidaler Modenzahl n widergibt. In diesem Beispiel tritt wie häufig eine (3,2)-Mode zusammen mit einer (2,2)-Mode auf. Mit Hilfe von Modellannahmen läßt sich die Geometrie der magnetischen Inseln aus den Signalen verschiedener Mirnovspulen rekonstruieren [8]. Auf diese Weise wurde die (3,2)-Mode dargestellt. Eine andere Untersuchungsmethode besteht in der tomographischen Rekonstruktion aus Soft-X-Ray-Messungen, mit welcher die (2,2)-Mode dargestellt wurde [9].

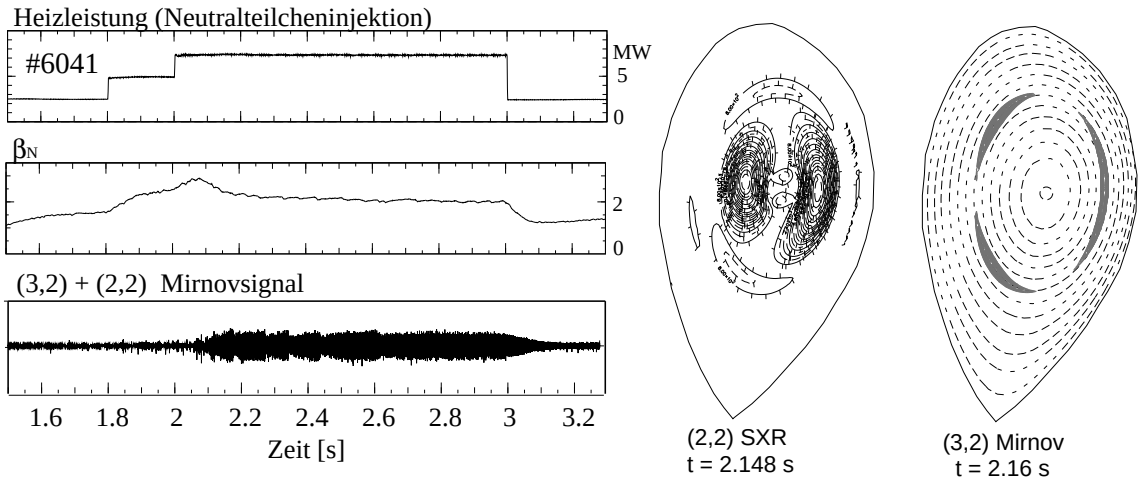

Abbildung 1.4: *Gekoppelte (3,2)- und (2,2)-Tearing Moden in einer β-Limit Entladung in ASDEX Upgrade.*

Neoklassische Tearing Moden stellen heutzutage ein ernstzunehmendes Hindernis auf dem Weg zu einem zukünftigen Fusionsreaktor dar. Neben vielfältigen Anstrengungen zu ihrer Vermeidung ist daher auch ihre weitere Erforschung notwendig. In dieser Arbeit werden die Struktur und die Dynamik magnetischer Inseln untersucht. Eine realistische Modellierung der Flußflächenstruktur (Kapitel 2) und des Inseltemperaturprofils (Kapitel 3) eröffnen Interpretationsmöglichkeiten für experimentell gemessene Temperaturprofile (Kapitel 5). Zur experimentellen Messung dient die Elektronenzyklotronemissionsdiagnostik (ECE) (Kapitel 6). Damit konnten die Inseltemperaturprofile in einigen Entladungen mit sehr hoher zeitlicher und ausreichender radialer Auflösung gemessen und mit den Ergebnissen der Modellierung verglichen werden (Kapitel 7). In Übereinstimmung mit der Theorie beobachtet man asymmetrische Inseln, deren Temperaturprofile jedoch im Gegensatz zur theoretischen Erwartung anstelle einer vollständigen Abflachung im Inneren eine Substruktur aufweisen. In der Theorie der Inseldynamik (Kapitel 4) treten in der verallgemeinerten Rutherfordgleichung freie Parameter auf, deren Werte aus dem Experiment bestimmt werden müssen. Dazu dient der Vergleich der modellierten Inseldynamik mit der experimentell gemessenen (Kapitel 5 und 8). Damit läßt sich ein Bereich von Parametersätzen eingrenzen, welche die Dynamik aller untersuchten Entladungen beschreiben.

Kapitel 2

Modellierung der Flußflächenstruktur

Tearing Moden bewirken aufgrund eines Störstroms eine Störung der Magnetfeldkonfiguration. Dabei bilden sich durch die Rekonnektion von Flußflächen magnetische Inseln. Diese Effekte können nur bei nichtverschwindender Plasmaresistivität auftreten und lassen sich nur im Rahmen der resistiven Magnetohydrodynamik verstehen, in der keine Flußerhaltung gilt. Der magnetische Fluß wird in einem helikalen Koordinatensystem definiert, welches der Geometrie der Störung folgt. Der helikale magnetische Störfluß, der die Inselgeometrie maßgeblich bestimmt, läßt sich aus einer idealen magnetohydrodynamischen Betrachtung als numerische Lösung der Tearing-Mode-Gleichung berechnen. Nach einer ersten vereinfachenden Modellierung einer magnetischen Insel wird mit Hilfe einer analytischen Näherungsbeschreibung des Störflusses und eines aus einem Stromprofilansatz berechneten Gleichgewichtsflusses ein realistisches Modell der Flußflächenkonfiguration einer magnetischen Insel gebildet.

2.1 Magnetohydrodynamische Grundlagen

Ausgangspunkt der magnetohydrodynamischen Beschreibung von resistiven MHD-Instabilitäten ist das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz [10]:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\sigma}\vec{j} + \frac{1}{en}\left(\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p\right) \quad . \tag{2.1}$$

Im Gleichgewicht steht dem Plasmadruckgradienten ∇p eine ausgleichende Kraftwirkung des Gleichgewichtsmagnetfeldes $\vec{B}_0$ auf den Gleichgewichtsstrom $\vec{j}_0$ im Plasma entgegen ($\nabla p = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0$). Betrachtet man eine Störung in erster Ordnung, so wird durch die Störbewegung des Plasmas (mit Geschwindigkeit $\vec{v}_1$) im Gleichgewichtsmagnetfeld ein elektrisches Störfeld $\vec{E}_1$ induziert, welches wiederum zu einem Störmagnetfeld $\vec{B}_1$ führt. (Im idealen Plasma mit $\sigma = \infty$ ist dies z.B. bei der idealen Kinkinstabilität der Fall.) In einem resistiven Plasma ($\sigma \neq \infty$) passiert dasselbe auch infolge eines Störstroms $\vec{j}_1$. Mit dem Faradayschen Gesetz folgt:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 - \frac{1}{\sigma} \vec{j}_1 \right) \quad . \tag{2.2}$$

Wesentlich ist hier, daß eine Störung der Magnetfeldkonfiguration in der resistiven MHD allein durch einen Störstrom verursacht werden kann. Aufgrund der Resistivität ist die Erhaltung des magnetischen Flusses nicht mehr gegeben. Fluß kann durch Plasmainstabilitäten erzeugt oder vernichtet werden, was zu Änderungen in der Flußflächentopologie und zur Bildung magnetischer Inseln führt.

Der Ausbildung des Störstroms stehen die Induktivität und Resistivität des Plasmas entgegen, sodaß sie eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt. Zur Abschätzung der resistiven Zeitskala wendet man die Bildung der Rotation auf das Amperesche Gesetz an ($\sigma = const$):

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{B} \right) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j} = \mu_0 \sigma \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad . \tag{2.3}$$

Dies stellt eine Diffusionsgleichung für das Magnetfeld mit dem Diffusionskoeffizienten $D_{mag} = 1/(\mu_0 \sigma)$ dar. Die Zeitkonstante der Diffusion über eine Länge L ergibt sich dann zu $\tau \sim L^2/D_{mag} = \mu_0 \sigma L^2$. Betrachtet man die Diffusion über den kleinen Plasmaradius $L = a = 0.5m$ von ASDEX Upgrade und setzt $D_{mag} = 0.037 m^2/s$ (mit der Spitzerleitfähigkeit gemäß Gl.(5.2) bei typischen Werten von $T = 1keV$, $Z_{eff} = 2$ und $\ln \lambda = 17$), so erhält man eine Zeitkonstante von $\tau = 6.8s$. Damit scheint die Berücksichtigung resistiver Instabilitäten nicht notwendig, da Prozesse deutlich unter dieser Größenordnung als nichtresistiv betrachtet werden können. Eine Ausnahme stellen die Tearing-Moden dar, bei welchen der Störstrom auf die Umgebung einer resonanten Fläche konzentriert ist. Hier treten resistive Effekte nur in einem kleinen Bereich um die resonante Fläche auf, während sich das Plasma ansonsten ideal verhält. Bei einer Breite der stromführenden Schicht von $1cm$ ergibt sich eine Zeitkonstante von $\tau = 2.7ms$.

2.2 Das helikale Koordinatensystem

Mit dem Auftreten einer Tearing Mode verliert die Flußflächenkonfiguration ihre Invarianz gegen toroidale Verschiebungen. Das mit einem helikalen Störstrom verbundene Störmagnetfeld hat drei nichtverschwindende Komponenten. Durch die Näherung des Torus als Zylinder und die Transformation in ein helikales Koordinatensystem, das wie eine Feldlinie auf der resonanten Fläche verschraubt ist, läßt sich die Symmetrie wiederherstellen und das Störmagnetfeld mit zwei nichtverschwindenden Komponenten beschreiben. Abbildung 2.1 veranschaulicht den Übergang von der toroidalen Geometrie zur Zylindernäherung, wobei der toroidale Winkel Φ in die axiale Koordinate $z = R_0 \Phi$ übergeht (R_0 ist der große Plasmaradius der Zylinderachse und z ist periodisch, $z(2\pi) = z(0)$). Anstelle des großen Radius R wird der kleine Radius r mit dem Wertebereich $r = 0 \ldots a$ verwendet. Der Abstand von der resonanten

Fläche bei r_{res} wird oftmals mit $x = r - r_{res}$ bezeichnet. Der poloidale Winkel Θ bleibt beim Übergang zum Zylindersystem erhalten. Im helikalen Koordinatensystem ist die transformierte z-Richtung $\hat{e}_\eta$ wie eine Feldlinie auf der betrachteten resonanten Fläche verschraubt. Die Verkippung der η- zur z-Koordinatenrichtung ist dabei geringfügig. Die transformierte Winkelkoordinate $\hat{e}_\mu \approx \hat{e}_\Theta - r/R_0 \cdot 1/q_{res} \cdot \hat{e}_z$ ist in ihrer Ebene gegenüber der ursprünglichen $\hat{e}_\Theta$ ebenfalls leicht gekippt, während die radiale Koordinate unverändert bleibt.

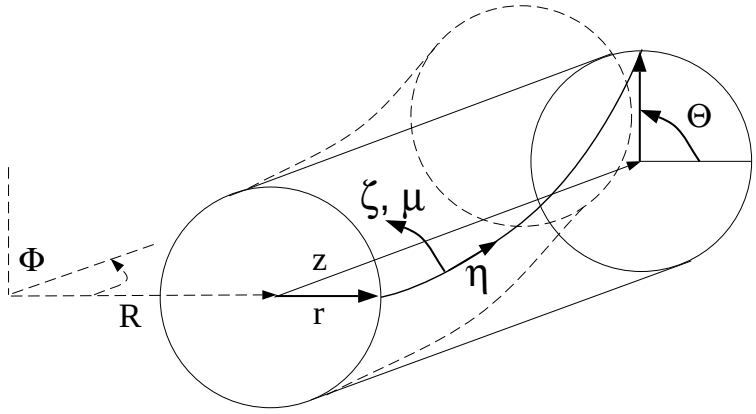

Abbildung 2.1: *Näherung des Torus als Zylinder und Transformation in ein helikales Koordinatensystem, das wie eine Feldlinie auf der resonanten Fläche verschraubt ist. Zur Beschreibung einer Insel dienen die Koordinaten r bzw. $x = r - r_{res}$ und der helikale Winkel ζ.*

Im Gegensatz zur Gleichgewichtskonfiguration, welche invariant gegenüber dem poloidalen Winkel Θ ist, hängt die gestörte Magnetfeldkonfiguration von der Winkelkoordinate μ ab, da der Störstrom nicht auf allen Feldlinien gleich fließt. Diese Variation ist jedoch periodisch, weil eine Feldlinie auf der resonanten Fläche den Torus (bzw. Zylinder) m-mal durchläuft, bis sie sich schließt, wobei die Störung im Querschnitt m-mal zu sehen ist. Daher kann man sich bei der Beschreibung der Störung nicht nur auf einen Zylinderquerschnitt beschränken, sondern zusätzlich auch ein Winkelsegment herausschneiden, welches eine Periode enthält ($\mu = 0 \ldots 2\pi/m$). Dies geschieht bei der Verwendung des helikalen Winkels $\zeta = 0 \ldots 2\pi$:

$$\zeta = m\Theta - n\frac{z}{R_0} \quad . \tag{2.4}$$

Damit läßt sich die gestörte Magnetfeldkonfiguration als Funktion der radialen Koordinate r bzw. $x = r - r_{res}$ und des helikalen Winkels ζ darstellen.

2.3 Der helikale magnetische Fluß

Das Störmagnetfeld hat im helikalen Koordinatensystem nichtverschwindende Komponenten B_{1r} und $B_{1\mu}$. Das Gleichgewichtsmagnetfeld läßt sich in einen helikalen und einen nichtheli-

kalen Anteil zerlegen, wobei im helikalen Anteil nur $B_{0\mu}$ ungleich null ist. Aus dem helikalen Magnetfeld $\vec{B}_{Helikal}$ läßt sich mit der Definition

$$\vec{B}_{Helikal} = \nabla\chi \times \hat{e}_\eta \tag{2.5}$$

der helikale magnetische Fluß χ bilden. Mit dem Nablaoperator im helikalen Koordinatensystem $\nabla = (\partial/\partial r, m/r \cdot \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\eta)$ folgt:

$$\begin{pmatrix} B_r \\ B_\mu \\ B_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} \\ -\frac{\partial\chi}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.6}$$

Diesem zunächst abstrakt definierten helikalen magnetischen Fluß läßt sich analog zur Definition des poloidalen magnetischen Flusses eine anschauliche Deutung geben. Der zur Beschreibung axialsymmetrischer Gleichgewichte üblicherweise verwendete poloidale magnetische Fluß ist das Integral des Magnetfeldes über eine Fläche, welche von einer toroidal im großen Plasmaradius umlaufenden Kurve begrenzt wird. Im Gegensatz dazu wird hier der Fluß pro Längeneinheit der begrenzenden Kurve verwendet, d.h. $\int \vec{B}dR$ anstelle $2\pi R_0 \int \vec{B}dR$. Beim Übergang auf die Zylindernäherung wird die Integration über R auf eine Integration über den kleinen Radius r zurückgeführt. Die Integration erfolgt vom jeweiligen Radius im Plasmainneren bis zum Plasmarand, sodaß beide Flußdefinitionen zum gleichen Ergebnis führen. Der poloidale magnetische Fluß ψ errechnet sich aus dem poloidalen Magnetfeld B_Θ zu:

$$\psi(r) = \int_r^a B_\Theta(r')dr' = -\int_a^r B_\Theta(r')dr' \quad . \tag{2.7}$$

Analog ergibt sich der helikale Fluß durch Integration von B_μ in Gl.(2.6) zu:

$$\chi(r) = -\int_{r_{res}}^r B_\mu(r')dr' \quad . \tag{2.8}$$

Abbildung 2.2 verdeutlicht, wie der helikale magnetische Fluß im Unterschied zum poloidalen aus der radialen Integration des Magnetfeldes längs einer Feldlinie auf der resonanten Fläche gebildet wird.

Der gesamte helikale magnetische Fluß χ besteht größtenteils aus dem Gleichgewichtsanteil χ_0, der durch das helikale Gleichgewichtsmagnetfeld gegeben und nur eine Funktion der radialen Koordinate ist. Dazu überlagert sich additiv (bezüglich des gleichen Koordinatensystems gebildete Flüsse dürfen addiert werden) der aus dem Störmagnetfeld resultierende Störfluß χ_1. Er ist eine Funktion des Radius und des helikalen Winkels, da das Störmagnetfeld auch eine nichtverschwindende radiale Komponente aufweist. Der helikale magnetische Gesamtfluß ergibt sich zu:

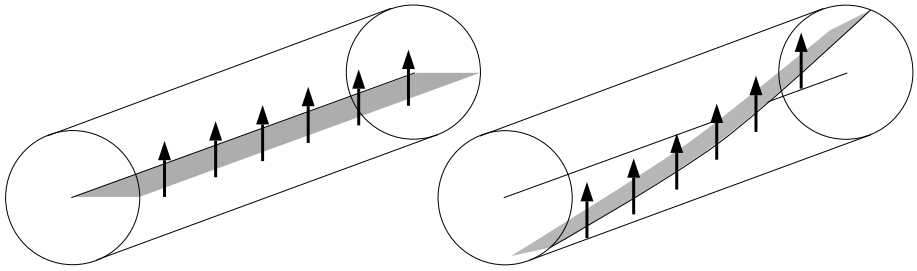

Abbildung 2.2: *Während die radiale Integration des Magnetfeldes den poloidalen Fluß ergibt (links), integriert man zur Bildung des helikalen Flusses radial längs einer Feldlinie auf der resonanten Fläche (rechts).*

$$\chi(r,\zeta) = \chi_0(r) + \chi_1(r,\zeta) \quad . \tag{2.9}$$

Die expliziten Formen des Gleichgewichts- und Störflusses werden in den folgenden Abschnitten näher untersucht. Die Magnetfeldkonfiguration magnetischer Inseln läßt sich allein anhand der helikalen Flußflächen darstellen. Der überlagerte nichthelikale Anteil des Gleichgewichtsmagnetfeldes hat keinen Einfluß auf die Inselgeometrie.

2.4 Ein einfaches Modell einer magnetischen Insel

Der helikale magnetische Gleichgewichtsfluß $\chi_0(r)$ errechnet sich gemäß Gl.(2.8) aus der Integration der helikalen Gleichgewichtsmagnetfeldkomponente $B_{0\mu}$. Diese läßt sich durch das poloidale Gleichgewichtsmagnetfeld $B_{0\Theta}$ ausdrücken (für $r \ll R_0$):

$$B_{0\mu} \approx B_{0\Theta}(r) - B_{0\Theta}(r_{res})\frac{r}{r_{res}} \quad . \tag{2.10}$$

Auf der resonanten Fläche verschwindet $B_{0\mu}$, da das helikale Koordinatensystem dieselbe Steigung wie die Feldlinien auf der resonanten Fläche besitzt. An anderen radialen Positionen sieht ein Beobachter im helikalen Koordinantensystem eine Magnetfeldkomponente in μ-Richtung, da das Feld verschert ist und somit $B_{0\Theta}$ nicht linear mit r variiert. An der resonanten Fläche wechselt $B_{0\mu}$ sein Vorzeichen. Exakt läßt sich $B_{0\Theta}$ aus dem Plasmastromprofil berechnen, was zur Bildung eines realistischen Modells im nächsten Abschnitt durchgeführt wird. Näherungsweise kann man Gl.(2.10) umschreiben zu:

$$B_{0\mu}(r) \approx B_{0\Theta}(r_{res})\left(1 - \frac{q(r)}{q_{res}}\right) \quad . \tag{2.11}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl.(2.8) ein und entwickelt den Gleichgewichtsfluß als Taylorreihe um die resonante Fläche, so ergibt die erste Ableitung Null, da die μ-Komponente des Magnetfeldes im helikalen Koordinatensystem an der resonanten Fläche verschwindet. Daher wird die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung fortgesetzt und man erhält folgende Näherung des helikalen Gleichgewichtsflusses:

$$\chi_0(r) = \chi_0(r_{res}) + \frac{1}{2} B_{0\Theta}(r_{res}) \frac{q'_{res}}{q_{res}} (r - r_{res})^2 \quad . \tag{2.12}$$

Dabei bezeichnet q'_{res} die Ableitung von q an der resonanten Fläche. Da die Verscherung rq'/q in der Regel positiv ist, hat der helikale Gleichgewichtsfluß näherungsweise die Form einer nach oben geöffneten Parabel.

Der helikale Störfluß wird in Zylinderkoordinaten nach Fourierkomponenten zerlegt (mit poloidaler Modenzahl m und toroidaler Modenzahl n):

$$\chi_1 = \chi_1(r) e^{i\left(m\Theta - n\frac{z}{R_0}\right)} \quad . \tag{2.13}$$

Dies entspricht einem Ansatz, der die Periodizität im helikalen Winkel ζ beschreibt:

$$\chi_1(r,\zeta) = \chi_1(r) \cos\zeta \quad . \tag{2.14}$$

Der radiale Verlauf der Störflußamplitude $\chi_1(r)$ soll zunächst als konstant genähert werden ($\chi_1(r) = const = \chi_1$). Der fehlende Abfall von χ_1 zum Plasmarand hin verursacht keine unphysikalischen Ergebnisse, da der Gleichgewichtsfluß $\chi_0(r)$ in der Parabelnäherung in zunehmender Entfernung von der resonanten Fläche stark zunimmt.

In Abbildung 2.3 sind die Flußflächen gegen die rechtwinkligen Koordinatenachsen r bzw. x und ζ aufgetragen. Man betrachtet also ein Segment eines poloidalen Plasmaquerschnitts mit einer Periode der Störung (eine Insel), welches in eine rechtwinklige Form gebogen wurde. Entsprechend werden die Gleichgewichtsflußflächen zu parallelen Geraden. Durch die Überlagerung des Störflusses verbiegen sich die Flußflächen. Bei $\zeta = \pi/2$ und $\zeta = 3\pi/2$ sind sie unverändert, bei $\zeta < \pi/2$ und $\zeta > 3\pi/2$ werden sie zur resonanten Fläche hingebogen und bei $\pi/2 < \zeta < 3\pi/2$ werden sie weggebogen. In der Nähe der resonanten Fläche kommt es zur Rekonnektion von ursprünglich separaten Flußflächen und damit zur Bildung einer magnetischen Insel. Die äußere Begrenzung der Insel wird Separatrix genannt. Bei $\zeta = 0$ bzw. äquivalent bei $\zeta = 2\pi$ liegt der X-Punkt, wo der Störstrom in Richtung des Gleichgewichtsplasmastroms fließt (bei positiver Verscherung, $rq'/q > 0$). In der Inselmitte bei $\zeta = \pi$, im O-Punkt, fließt der Störstrom dem entgegengesetzt. Aufgrund der symmetrischen Flußfunktionen ist auch die Insel symmetrisch bezüglich der resonanten Fläche. Die Inselbreite bestimmt sich aus Gleichsetzen des Separatrixflusses an X- und O-Punkt zum störflußamplitudenabhängigen Wert:

$$W = 4\sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_0''}} \quad . \tag{2.15}$$

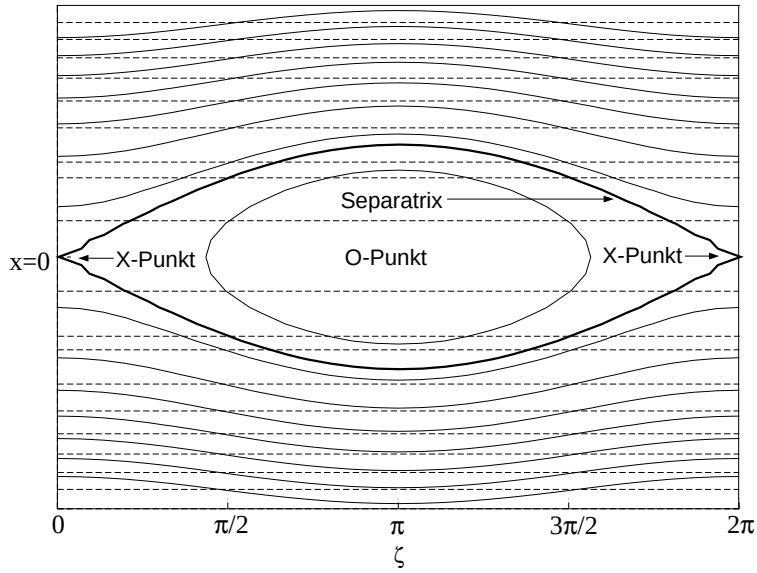

Abbildung 2.3: *Bildung einer magnetischen Insel. Die parallelen Gleichgewichtsflußflächen werden durch den Störfluß verbogen und in der Insel miteinander verbunden (Rekonnektion).*

2.5 Realistische Modellierung magnetischer Inseln

Das bisher vorgestellte einfache Modell der Flußflächenkonfiguration ist nicht dazu geeignet, die an ASDEX Upgrade experimentell beobachtbare asymmetrische Struktur magnetischer Inseln zu erklären. Daher ist eine detailliertere Modellierung der helikalen magnetischen Flüsse erforderlich. Dazu wird eine realistische Form des Gleichgewichtsflusses aus einem Ansatz für das Gleichgewichtsstromprofil berechnet. Anschließend wird die Tearing-Mode-Gleichung vorgestellt, deren numerisch zu berechnende Lösung die Störflußamplitude ergibt. Dafür läßt sich eine analytische Näherungsbeschreibung finden.

2.5.1 Der helikale Gleichgewichtsfluß

Zur Berechnung des helikalen magnetischen Gleichgewichtsflusses muß Gl.(2.8) nach Einsetzen von Gl.(2.10) integriert werden. Man erhält als Ergebnis:

$$\chi_0(r) = \psi_0(r) + \frac{B_{0\Theta}(r_{res})}{2r_{res}} r^2 + const \quad . \tag{2.16}$$

Zur weiteren Berechnung wird das poloidale Gleichgewichtsmagnetfeld benötigt, aus dem auch $\psi_0(r)$ gemäß Gl.(2.7) gebildet wird.
Das Magnetfeld ist mit dem Plasmastrom über das Faradaysche Gesetz $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ verknüpft. In Zylindergeometrie ergibt eine Gleichgewichtsstromdichte $\vec{j}_z$ in axialer Richtung ein diesen ringförmig umschließendes Magnetfeld $B_{0\Theta}$ gemäß:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_{0\Theta}) = \mu_0 j_z \quad . \tag{2.17}$$

Eine häufig verwendete Näherungsfunktion für das Stromdichteprofil ist

$$j_z = j_0\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \quad . \tag{2.18}$$

Mittels Integration von Gl.(2.18) über die Zylinderquerschnittsfläche kann man das Stromdichtemaximum j_0 durch den Gesamtstrom $I_0 = j_0\pi a^2/2$ ersetzen. Mit geeigneter Wahl der Integrationskonstanten erhält man:

$$\chi_0(r) = \frac{\mu_0 I_0}{8\pi}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_{res}}{a}\right)^2\right)^2 \quad . \tag{2.19}$$

Abbildung 2.4 zeigt einen Vergleich des mit Gl.(2.19) modellierten helikalen magnetischen Gleichgewichtsflusses mit dem Ergebnis einer experimentellen Messung an ASDEX Upgrade (aus einer q-Profilmessung mit der MSE-Diagnostik). Die Lage der resonanten Fläche entspricht der experimentell bestimmten Position der $q = 3/2$-Fläche. Man erkennt eine qualitativ gute Übereinstimmung. Nahe der resonanten Fläche läßt sich $\chi_0(r)$ in guter Näherung mit einer Parabel approximieren, in zunehmender Entfernung wird die Abweichung insbesondere zum Plasmazentrum hin größer. Die in dieser Arbeit durchgeführte experimentelle Untersuchung neoklassischer $(3,2)$-Inseln (Kapitel 7) ergibt, daß die resonante Fläche etwas weiter innen bei $r/a \approx 0.6$ liegt. Wie in Abbildung 2.4 zum Vergleich dargestellt, nimmt die Asymmetrie des modellierten Gleichgewichtsflusses mit einer Verschiebung der resonanten Fläche zum Plasmainneren hin zu. Die Asymmetrie des Gleichgewichtsflusses trägt zu einer asymmetrischen Form der magnetischen Inseln bei.

2.5.2 Der helikale Störfluß

Der helikale Störfluß läßt sich mit Hilfe der idealen Magnetohydrodynamik berechnen, indem man annimmt, daß der Störstrom in einer Schicht verschwindender Dicke um die resonante Fläche fließt (Flächenstrom), sodaß die Rechnung außerhalb durchgeführt werden kann. Damit kann die Entwicklung der Störung als das Durchlaufen von idealen Gleichgewichten betrachtet werden, wobei dies allerdings auf der langsameren resistiven Zeitskala geschieht. Zunächst wird der helikale Störfluß wie bereits in Abschnitt 2.4 beschrieben nach Fourierkomponenten zerlegt. Durch die Verknüpfung des Störflusses mit der Verschiebung des Plasmas, welche von der idealen MHD bestimmt wird, erhält man eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Störflußamplitude $\chi_1(r)$, die sogenannte Tearing-Mode-Gleichung [6]:

$$\Delta\chi_1(r) - \frac{\mu_0(dj_z/dr)}{B_{0\Theta}(1-q(r)n/m)}\chi_1(r) = 0 \quad . \tag{2.20}$$

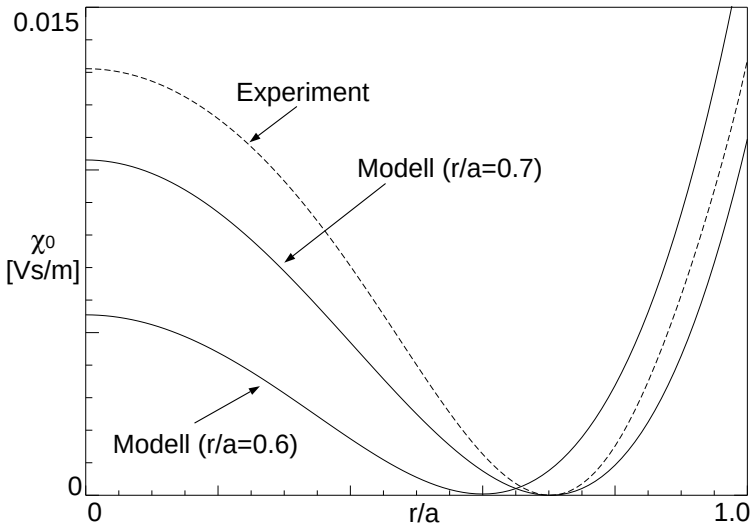

Abbildung 2.4: *Vergleich des modellierten helikalen magnetischen Gleichgewichtsflusses aus Gl.(2.19) mit einer experimentellen Messung an ASDEX Upgrade (#13685, Messung des q-Profils mit MSE-Diagnostik, Zeitpunkt 1.6s,* $I_0 = 850$ *kA,* $B_{tor} = 2.14$ *T,* $r_{res}/a = 0.7$*). Eine Verschiebung der resonanten Fläche ändert die Asymmetrie des modellierten Gleichgewichtsflusses.*

Sie beschreibt das Gleichgewicht des Plasmas unter Verformung durch den Störfluß. Der Störfluß stellt sich so ein, daß die freie Magnetfeldenergie des Plasmas minimiert wird. Die Gleichung ist bei $r = r_{res}$ mit $q = m/n$ singulär. Dennoch kann in einer numerischen Lösung unter Annahme eines Gleichgewichtsstromprofils die Störflußamplitude $\chi_1(r)$ stetig erhalten werden, jedoch ist $\chi_1'(r)$ und somit das Störmagnetfeld unstetig [11]. Dies korrespondiert mit der Reduktion des Störstroms auf einen Flächenstrom auf der resonanten Fläche. Abbildung 2.5 zeigt eine numerische Lösung der Tearing-Mode-Gleichung an der $q = 3/2$-Fläche.

Der mit der Unstetigkeit verbundene “Knick” im Störfluß entscheidet über die Instabilität oder Stabilität des Systems, d.h. darüber, ob sich eine magnetische Insel bilden wird oder nicht. Die Resistivität in der Nähe der resonanten Fläche bewirkt Stromdiffusion und damit eine Abrundung des Knicks. Ist die Steigung des Störflusses links von der resonanten Fläche kleiner als rechts, so führt dies zu einem Anwachsen der Störung, ist die Steigung dagegen links größer als rechts, so führt dies zu einer Abnahme der Störung. Entscheidend ist also der Sprung von χ_1' an der resonanten Fläche. Man definiert daher den linearen Stabilitätsparameter (wobei ε hier einen infinitesimalen Abstand bezeichnet):

$$\Delta' = \frac{\chi_1'(r_{res}+\varepsilon) - \chi_1'(r_{res}-\varepsilon)}{\chi_1(r_{res})} \quad . \tag{2.21}$$

Der Fall $\Delta' > 0$ bedeutet Instabilität, also die Bildung einer magnetischen Insel, während im Fall $\Delta' < 0$ das System stabil ist und sich keine Insel bildet. Über diese qualitative Sta-

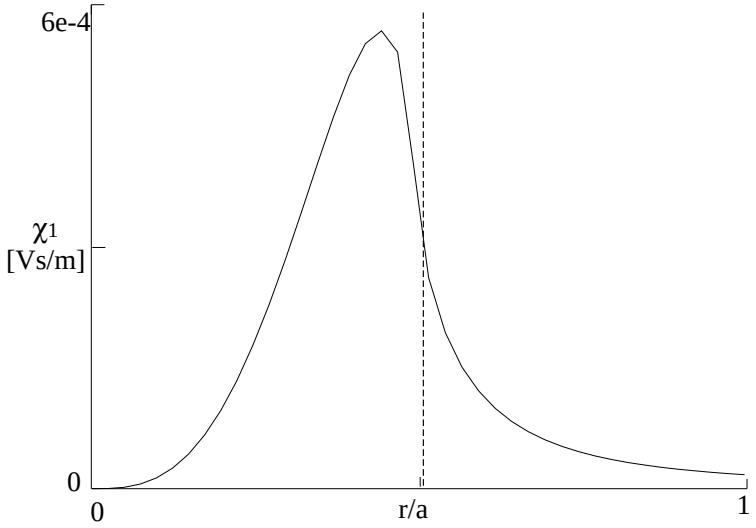

Abbildung 2.5: *Ergebnis der numerischen Lösung der Tearing-Mode-Gleichung für die Störflußamplitude. (Die $q = 3/2$-Fläche liegt bei dem zugrundeliegenden Stromprofilmodell bei $r/a = 0.5$.)*

bilitätsanalyse hinaus kann aus der idealen MHD keine Information über die Dynamik der Inselbildung gewonnen werden. Diese muß aus der nichtidealen MHD berechnet werden und wird durch die in Kapitel 4 vorgestellte Rutherford-Gleichung beschrieben. Sie enthält analog den nichtlinearen Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$, bei dem die Ableitungen an den O-Punktseparatrixpositionen gebildet werden (siehe Gl.(4.4)).

2.5.3 Analytische Näherungsfunktion für den helikalen Störfluß

Zur Modellierung realistischer magnetischer Inseln ist eine analytische Beschreibung des helikalen Störflusses wünschenswert, mit welcher mögliche Lösungen der Tearing-Mode-Gleichung nachgebildet werden können. Damit werden Studien über die Auswirkung verschiedener Formen der Störflußamplitude möglich, ohne daß für jeden Fall die Tearing-Mode-Gleichung gelöst werden müßte. Der im folgenden vorgestellte Ansatz erfüllt im allgemeinen nicht die Tearing-Mode-Gleichung, was strenggenommen gefordert werden müßte. Allerdings ist diese Forderung nur sinnvoll, wenn die genaue Form des Stromprofils zur Lösung der Tearing-Mode-Gleichung bekannt ist. Das ist jedoch nicht der Fall. Der Ansatz ist zur näherungsweisen Modellierung von verschiedenen Formen der Störflußamplitude geeignet, wie sie in der Realität entstehen können.

Als Ausgangspunkt für den Ansatz dient die Erfüllung der Randbedingungen der Vakuummagnetfeldlösung, nämlich $\chi_1(r) \sim r^m$ bei $r \to 0$ und $\chi_1(r) \sim r^{-m}$ bei $r \to \infty$. Da diese Bedingung nicht mit einer einzigen analytischen Funktion erfüllbar ist, wird der Ansatz aus zwei Teilfunktionen zusammengesetzt. Die beiden Teile gehen an der resonanten Fläche stetig, aber nicht stetig differenzierbar, ineinander über. Damit enthalten sie wie die Lösung der Tearing-Mode-

Gleichung einen Knick an der resonanten Fläche, welcher einem dort fließendem Flächenstrom entspricht. Das Vorhandensein des Knicks ist im Rahmen der nichtlinearen MHD unphysikalisch, da der Störstrom nicht auf eine Fläche beschränkt ist, jedoch ist die Breite der stromführenden Schicht sehr klein im Vergleich zur Inselbreite. Der Ansatz lautet:

$$\chi_1(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{8\pi}\alpha\left(\frac{r}{r_{res}}\right)^m\left(1-\beta\frac{r}{r_{res}}\right) & \text{für}\, r \leq r_{res} \\ \frac{\mu_0 I_0}{8\pi}\frac{\alpha(1-\beta)-\gamma+\gamma r/r_{res}}{(r/r_{res})^{m+1}} & \text{für}\, r > r_{res} \end{cases} . \tag{2.22}$$

Dabei sind α, β und γ dimensionslose Parameter, mit welchen sich die Form der Funktion variieren läßt. Im folgenden wird zur Modellierung von (3,2)-Inseln immer $m = 3$ angenommen. Der Vorfaktor ist derselbe wie der in Gl.(2.19) für den Gleichgewichtsfluß. Abbildung 2.6 veranschaulicht die Auswirkungen der Variation der Parameter. Man erkennt folgende Eigenschaften der Funktion:

- Der Parameter α steuert maßgeblich die Größe der Störflußamplitude ($\alpha > 0$).
- Der Parameter β bestimmt maßgeblich die Form der Funktion, insbesondere die Lage des Maximums im Bereich $r \leq r_{res}$, beeinflußt aber auch deutlich die Höhe ($\beta < 1$).
- Der Parameter γ ermöglicht die gezielte Beeinflussung der Funktion im Bereich $r > r_{res}$ ($\gamma > 0$).
- Das Maximum der Funktion liegt im Bereich $0.75 r_{res} < r_{max} < r_{res}$, wenn $\beta > 0.75$, und bei $r_{max} = r_{res}$, wenn $\beta \leq 0.75$.
- Variationen von $\beta < 0.75$ führen zu geringen Veränderungen der Funktion im Vergleich zu Variationen von $\beta > 0.75$.
- Der Wertebereich von γ muß auf den Maximalwert $4\alpha(1-\beta)$ beschränkt werden, da ansonsten ein unerwünschtes zweites Maximum im Bereich $r > r_{res}$ auftritt.

2.5.4 Beispiele realistischer magnetischer Inseln

Mit dem vorgestellten analytischen Modell der Flußflächenkonfiguration lassen sich die Auswirkungen verschiedener Störflußformen auf die Inselgeometrie und den nichtlinearen Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$ untersuchen. Abbildung 2.7 zeigt die zunehmende Asymmetrie des Störflusses und der Inselgeometrie mit steigendem Wert des Parameters β. Der Parameter α wird so angepaßt, daß das Störflußmaximum konstant bleibt. Dabei nimmt die Inselbreite leicht ab. Für den Parameter γ gilt $\gamma = 0.5 \cdot 4\alpha(1-\beta)$. Der Wert des nichtlinearen Stabilitätsparameters $\Delta'(W)$ nimmt zu und wechselt sein Vorzeichen vom negativen zum positiven. Dies geht mit der Verschiebung der O-Punktseparatrixposition im Bereich $r < r_{res}$ vom ansteigenden Teil der Störflußamplitudenfunktion in den abfallenden einher. Ein positiver Wert

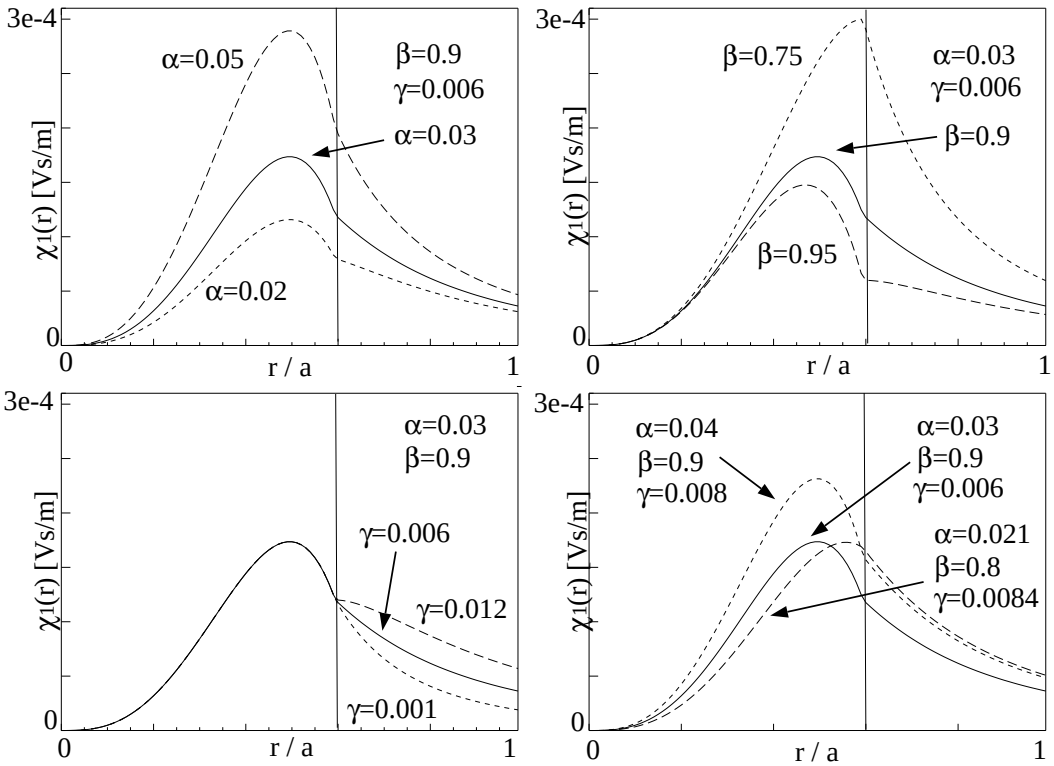

Abbildung 2.6: *Analytische Näherung der Störflußamplitude $\chi_1(r)$ gemäß Gl.(2.22). Die Parameter α, β und γ bestimmen die Form der Funktion.*

von $\Delta'(W)$ setzt voraus, daß die Ableitung der Störflußamplitude im Bereich $r < r_{res}$ an der O-Punktseparatrixposition negativ ist, wie die Ableitung an der O-Punktseparatrixposition im Bereich $r > r_{res}$ auch, und ihr Betrag den der letzteren übersteigt (siehe Gl.(4.4)). Demnach geht zunehmende Inselasymmetrie tendenziell mit steigendem $\Delta'(W)$ einher. Dabei existiert ein Übergangsbereich, in dem geringfügige Geometrieunterschiede über $\Delta'(W) < 0$ oder $\Delta'(W) > 0$ und damit über Stabilität oder Instabilität gegen klassische Tearing Moden entscheiden. Hier können auch kleine Unterschiede im Parameter γ wichtig werden, die ansonsten keine signifikanten Auswirkungen zeigen.

Eine interessante Auswirkung asymmetrischer Inselformen auf den Verlauf der resonanten Fläche veranschaulicht Abbildung 2.8. Im helikalen Koordinatensystem gilt auf der resonanten Fläche $B_\mu = \partial\chi/\partial r = 0$, wobei der Störfluß mit zu berücksichtigen ist. Wird er asymmetrisch, so ist $\partial\chi_1(r)/\partial r \neq 0$ an der ungestörten resonanten Fläche, sodaß diese verbogen wird. Bei sehr starken Störflüssen kann $\partial\chi/\partial r = 0$ in X-Punktnähe an mehr als einer radialen Position (für das jeweilige ζ) gelten. Dies entspricht der Bildung von “Nebeninseln” [8].

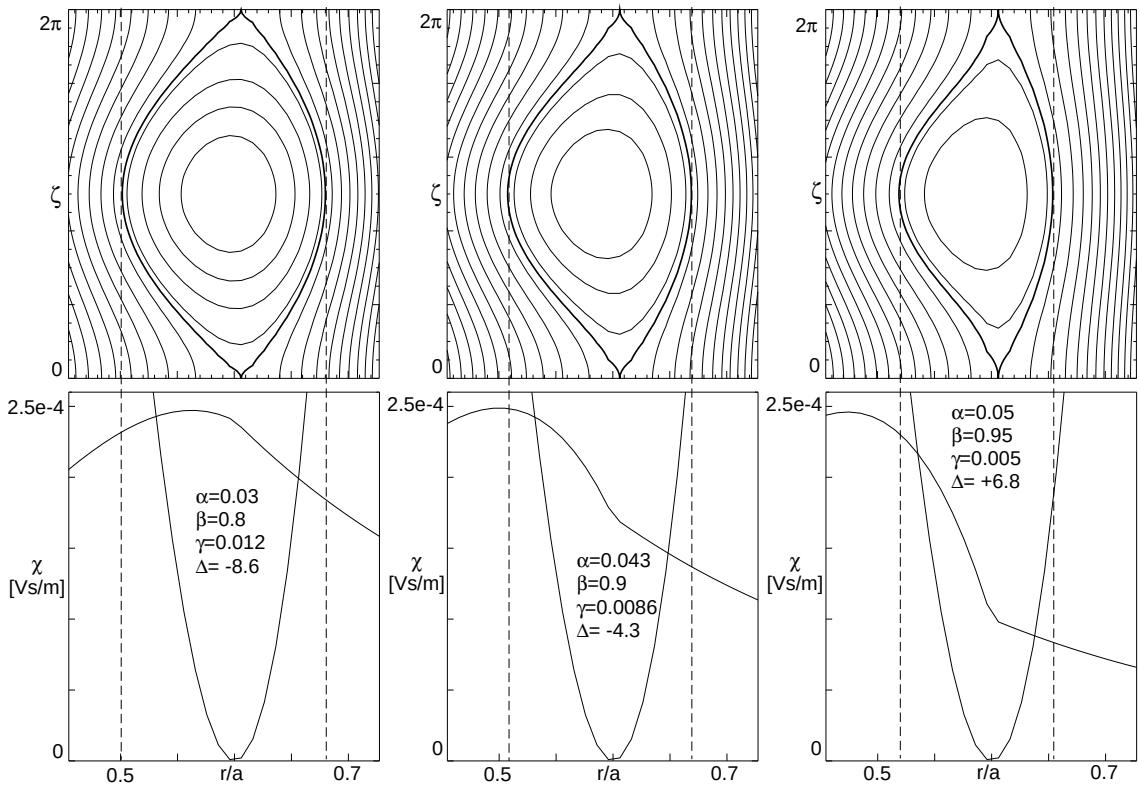

Abbildung 2.7: *Realistische Modellierung magnetischer Inseln.*

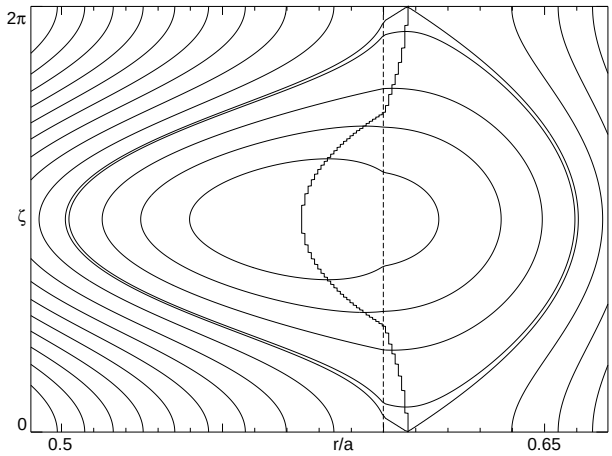

Abbildung 2.8: *Aufgrund der Asymmetrie des Störflusses wird die resonante Fläche verbogen.*

2.6 Zusammenfassung

Tearing Moden sind resistive Plasmainstabilitäten, bei deren Auftreten ein Störstrom auf einer resonanten Fläche die Magnetfeldkonfiguration stört und zur Bildung magnetischer Inseln führt. In diesem Kapitel wurde ein realistisches Modell für die Flußflächenstruktur magnetischer Inseln entwickelt:

- Magnetische Inseln lassen sich mit Hilfe der helikalen Flußflächen beschreiben. Der helikale Fluß ist in einem helikalen Koordinatensystem definiert, das wie eine Feldlinie auf der resonanten Fläche verschraubt ist und somit der Geometrie der Störung folgt.
- Das helikale Koordinatensystem kann zur Beschreibung der Flußflächenkonfiguration magnetischer Inseln auf die radiale Koordinate r und den helikalen Winkel ζ reduziert werden.
- Der helikale Fluß $\chi(r,\zeta)$ läßt sich additiv in einen Gleichgewichtsanteil $\chi_0(r)$ und einen Störanteil $\chi_1(r,\zeta) = \chi_1(r)\cos\zeta$ zerlegen.
- Der helikale Gleichgewichtsfluß $\chi_0(r)$ wird durch das poloidale Gleichgewichtsmagnetfeld bestimmt und ist näherungsweise parabelförmig mit Minimum an der resonanten Fläche.
- Mit einem einfachen Stromprofilansatz erhält man eine realistische Modellierung des helikalen Gleichgewichtsflusses, die von der Parabelform abweicht.
- Die Störflußamplitude $\chi_1(r)$ läßt sich aus dem Stromprofil mit Hilfe der Tearing-Mode-Gleichung numerisch berechnen.
- Mit Hilfe einer zusammengesetzten analytischen Funktion lassen sich mögliche Lösungen der Tearing-Mode-Gleichung auf einfache Weise nachbilden.
- Die Form der Störflußamplitude $\chi_1(r)$ entscheidet über die Stabilität gegenüber Tearing Moden. Als Kennzahl dient der nichtlineare Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$.
- Die realistisch modellierten magnetischen Inseln sind asymmetrisch.

Die auf dem realistischen Modell der Magnetfeldkonfiguration basierende Modellierung des Temperaturprofils im nächsten Kapitel wird zeigen, daß die asymmetrische Inselform auch im Temperaturprofil erkennbar ist. Dies wird in Kapitel 7 experimentell bestätigt.

Kapitel 3

Modellierung des Temperaturprofils

In dieser Arbeit wird die Struktur magnetischer Inseln anhand ihrer Elektronentemperaturprofile experimentell untersucht. Zur Interpretation der Daten dient ein Modell des Plasmatemperaturprofils, in welches das im vorigen Kapitel dargestellte Modell der Magnetfeldstruktur eingeht. Die aus der Modellierung ableitbaren Methoden zur Inselstrukturuntersuchung werden in Kapitel 5 vorgestellt. Zur Modellierung des Temperaturprofils wird die Wärmeleitungsgleichung gelöst. Dabei muß eine Korrektur der Spitzerwärmeleitfähigkeit parallel zu den Feldlinien vorgenommen werden, da die Voraussetzung kurzer freier Weglängen gegenüber der Gradientenlänge nicht erfüllt ist ("heat flux limit"). Unter vereinfachenden Annahmen ist eine analytische Lösung möglich. Die Modellierung eines realistischen Temperaturprofils unter Verwendung des realistischen Ansatzes der Magnetfeldkonfiguration erfordert hingegen die numerische Lösung der partiellen Differentialgleichung. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Plasmatransportrechnungen bestätigt die Richtigkeit der Methode.

3.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Der Wärmetransport kann mit der Energiegleichung der MHD beschrieben werden. Im stationären Fall läßt sie sich unter zu diskutierenden Voraussetzungen auf die Wärmeleitungsgleichung reduzieren. Aufgrund der sehr unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten parallel und senkrecht zu den Feldlinien treten Temperaturgradienten vorwiegend senkrecht zu den Feldlinien auf. Dementsprechend wird die Wärmeleitungsgleichung in zwei Anteile parallel und senkrecht zu den Feldlinien zerlegt. In die Bildung dieser Komponenten geht die gestörte Magnetfeldkonfiguration ein.

3.1.1 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Die Energiegleichung der MHD reduziert sich im stationären Fall und unter Vernachlässigung der Expansionsarbeit auf die Aussage, daß die Divergenz des Wärmestroms $\vec{q}$ dem Wärmequellterm Q entspricht, also $\nabla \cdot \vec{q} = Q$ [12]. Der Wärmestrom setzt sich aus einem konduktiven

und einem konvektiven Anteil zusammen, da Strahlungstransport in optisch dünnen Plasmen nicht von Bedeutung ist. Zur Beschreibung dient der Ansatz:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T + n\vec{v}_{Konv} T \quad , \tag{3.1}$$

wobei κ den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten, T die Temperatur, n die Teilchendichte und $\vec{v}_{Konv}$ die Konvektionsgeschwindigkeit bezeichnen. Die Gewichtung der beiden Terme hängt vom Verhältnis der freien Weglänge λ (die im thermischen Plasma für Elektronen und Ionen etwa gleich ist) zur typischen Skalenlänge L der Temperaturgradienten ($\nabla \sim 1/L$) ab. Im folgenden wird der Ansatz auf den konduktiven Anteil reduziert. Dieses Vorgehen bedarf einer weiteren Diskussion, die im nächsten Abschnitt geführt wird.

Der Temperaturgradient läßt sich in zwei Anteile zerlegen, von denen einer parallel zu den Magnetfeldlinien zeigt ($\nabla_{\|} T$) und der andere senkrecht auf den Flußflächen steht ($\nabla_{\perp} T$). Entsprechend verfährt man auch mit dem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten. Man bildet nun wieder die Divergenz (formal durch Anwenden des Nablaoperators auf die Richtungsableitungen) und erhält die Wärmeleitungsgleichung:

$$-\kappa_{\|} \nabla_{\|}^2 T - \kappa_{\perp} \nabla_{\perp}^2 T = Q \quad . \tag{3.2}$$

In Plasmen mit magnetischen Inseln ist die Dichte gewöhnlich so hoch, daß Elektronen- und Ionentemperatur (T_e und T_i) gleich sind. Gl.(3.2) gilt daher gleichermaßen für T_e und T_i. (Wenn T_e und T_i verschieden sind, wird Q zu einer Funktion der Temperaturdifferenz.) Experimentell gemessen und mit der Theorie verglichen wird die Elektronentemperatur, sodaß im folgenden mit T immer T_e gemeint ist.

Im mittleren Plasmabereich, wo keine Wärmequelle oder -senke in unmittelbarer Nähe vorhanden ist, gilt $Q = 0$ und Gl.(3.2) wird zu

$$\kappa_{\|} \nabla_{\|}^2 T + \kappa_{\perp} \nabla_{\perp}^2 T = 0 \quad . \tag{3.3}$$

Dann ist es jedoch notwendig, mittels geeigneter Randbedingungen das Temperaturprofil zum Plasmarand hin fortzusetzen.

3.1.2 Anwendbarkeit der Wärmeleitungsgleichung

Die Voraussetzung für die Reduktion von Gl.(3.1) auf den konduktiven Anteil ist eine kurze freie Weglänge λ im Vergleich zur typischen Skalenlänge L des Temperaturgradienten. Für die Wärmeleitung senkrecht zu den Feldlinien ist die freie Weglänge durch den Larmorradius gegeben und $L_{\perp}$ mit dem kleinen Plasmaradius abschätzbar, sodaß in Tokamaks $\lambda_{\perp} \ll L_{\perp}$ gilt. Parallel zu den Feldlinien beträgt die freie Weglänge der Elektronen (für ein reines Wasserstoffplasma mit Ionenladung $Z = 1$ und T_e in eV) [10]:

$$\lambda_e = \frac{12\pi^{3/2}\varepsilon_0^2}{\sqrt{2}(\ln\lambda)e^2}\frac{T_e^2}{n_e} \quad . \tag{3.4}$$

Mit typischen Zahlenwerten ($T_e = 1500eV$ im Inselbereich, $n_e = 5 \cdot 10^{19}m^{-3}$ und Coulomblogarithmus $\ln\lambda = 17$) ergibt sich die freie Weglänge zu $380m$, also vielen Torusumläufen. Die Skalenlänge $L_{\|}$ des Temperaturgradienten parallel zu den Feldlinien läßt sich durch die Länge einer Feldlinie abschätzen, welche bei ihren Torusumläufen relativ zu einem Punkt auf der resonanten Fläche einen halben poloidalen Umlauf macht und damit ihre Flußfläche halb durchläuft. Dies entspricht der maximalen Länge, über die sich ein Temperaturgradient aufbauen kann.

Eine Feldlinie außerhalb der magnetischen Insel verschiebt sich wegen der radialen Abhängigkeit der Magnetfeldliniensteigung bei Fortschreiten in toroidale Richtung relativ zur Insel und muß für einen halben poloidalen Umlauf eine Differenz im helikalen Winkel von $\Delta\zeta = m\pi$ zurücklegen. Eine Feldlinie innerhalb der magnetischen Insel kann diese nicht verlassen und beschreibt daher einen poloidalen Umlauf um die Inselachse. Während eines halben poloidalen Umlaufs durchläuft sie einmal das für ihre Flußfläche zulässige Intervall des helikalen Winkels. Die Berechnung der Feldlinienlänge ist in Anhang A dargestellt. Die Länge einer Feldlinie, die von ihrer O-Punktposition ($x = x_O$ ($x_O > 0$), $\zeta = \pi$) außerhalb der Insel zu ihrer X-Punktposition ($x = x_X$, $\zeta = 0$) oder innerhalb der Insel zur resonanten Fläche ($x = 0$, $\zeta = \zeta_{min}$) läuft, ergibt sich unter der Annahme einer symmetrischen Insel (parabelförmiger Gleichgewichtsfluß und konstante Störflußamplitude) zu:

$$L = \frac{2R_0}{n}\frac{q_{res}}{q'_{res}}\frac{1}{x_O}\int_0^{(\pi-\zeta_{min})/2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{W^2}{4x_O^2}\sin^2\alpha}}d\alpha \tag{3.5}$$

mit

$$\zeta_{min} = \begin{cases} \arccos\left(8\frac{x_O^2}{W^2}-1\right) & \text{wenn } x_O < W/2 \\ 0 & \text{wenn } x_O \geq W/2 \end{cases} \quad . \tag{3.6}$$

Zur Berechnung der gesuchten Skalenlänge $L_{\|}$ des Temperaturgradienten, die einem halben poloidalen Umlauf entspricht, muß dieses Ergebnis innerhalb der Insel mit dem Faktor zwei und außerhalb mit der poloidalen Modenzahl m multipliziert werden.

Abbildung 3.1 zeigt ein Beispiel für die Variation von $L_{\|}$ über die Flußflächen, die mit Hilfe ihrer radialen Position x_O bei $\zeta = \pi$ gekennzeichnet werden (mit typischen Werten für eine (3,2)-Insel von $q_{res}/q'_{res} = 0.3m$, $W = 6cm$ und $W = 8cm$). Für drei Spezialfälle läßt sich das elliptische Integral in Gl.(3.5) auch analytisch auswerten:

$$L_{\|} = \begin{cases} 2\frac{2\pi R_0}{nW}\frac{q_{res}}{q'_{res}} & \text{für } x_O \to 0 \\ \infty & \text{für } x_O = W/2 \\ m\frac{\pi R_0}{n}\frac{q_{res}}{q'_{res}}\frac{1}{x_O} & \text{für } x_O \to \infty \end{cases} \quad . \tag{3.7}$$

Eine Feldlinie auf der Separatrix ($x_O = W/2$) stagniert, sobald sie zum X-Punkt gelangt ist, da dort der radiale Anteil des Störmagnetfeldes null wird ($B_{1r} \sim \sin\zeta$). Somit benötigt sie unendlich viele toroidale Umläufe für einen halben poloidalen. Innerhalb der Insel mit Ausnahme des O-Punkts ist der radiale Störfeldanteil ungleich null, sodaß die Feldlinie poloidal umläuft. Im Grenzfall $x_O \to 0$ werden einerseits das radiale Störfeld und die Änderung im helikalen Winkel pro toroidalem Umlauf zunehmend kleiner, andererseits nimmt der zu durchlaufende Winkelbereich ab. Die Grenzwertbetrachtung liefert eine endliche Feldlinienlänge, die mit steigender Inselbreite abnimmt ($\sim 1/W$). Der Grenzfall $x_O \to \infty$ entspricht dem Verschwinden des Störmagnetfelds und liefert dementsprechend die Lösung für das ungestörte Gleichgewichtsfeld ($\sim 1/x_O$ bei konstanter Verscherung rq'/q). Bei Annäherung an die Insel wird diese durch das elliptische Integral modifiziert.

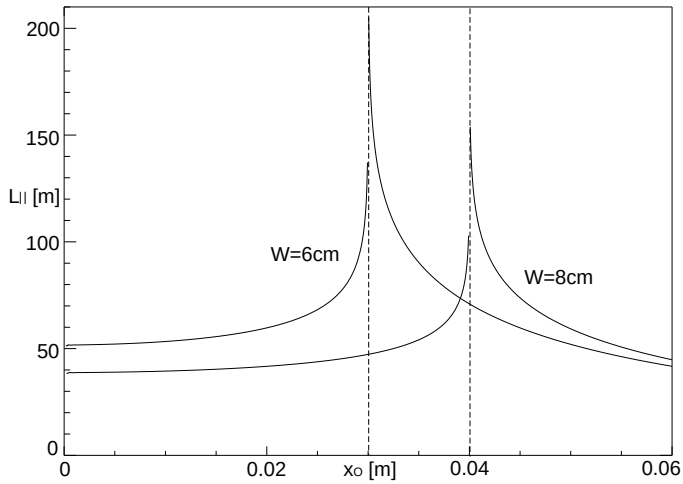

Abbildung 3.1: *Skalenlänge $L_{\|}$ des Temperaturgradienten auf verschiedenen Flußflächen innerhalb und außerhalb von magnetischen Inseln im radialen Schnitt durch den O-Punkt, wo die Flußflächen die radialen Positionen x_O haben.*

Das Beispiel illustriert, daß die Bedingung $\lambda_e \ll L_{\|}$ ($\lambda_e = 380m$ typisch) für die Reduktion auf den konduktiven Anteil in der Wärmeleitungsgleichung praktisch nur auf der Separatrix erfüllt ist, in einem Millimeter Abstand davon hingegen bereits nicht mehr. Systematische Vergleiche der Ergebnisse von kinetischen Rechnungen mit denen des Wärmeleitungsansatzes haben allerdings gezeigt, daß die Wärmeleitungsgleichung (3.3) dennoch verwendet werden darf, wenn der Wert der parallelen Wärmeleitfähigkeit $\kappa_{\|korrigiert}$ gegenüber der klassischen Spitzerwärmeleitfähigkeit $\kappa_{\|Spitzer}$ um folgenden Faktor reduziert wird [13, 14]:

$$\frac{\kappa_{\|korrigiert}}{\kappa_{\|Spitzer}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(3.16\frac{\lambda_e}{L_\|}\right)^2}} \quad . \tag{3.8}$$

Abbildung 3.2 zeigt die Korrekturen der Spitzerwärmeleitfähigkeit für das obige Beispiel (mit $\lambda_e = 380m$). Der parallele Wärmeleitfähigkeitskoeffizient muß demnach innerhalb einer typischen Insel und auch außerhalb in der Umgebung der Insel um ein bis zwei Größenordnungen unter die Spitzerwärmeleitfähigkeit korrigiert werden.

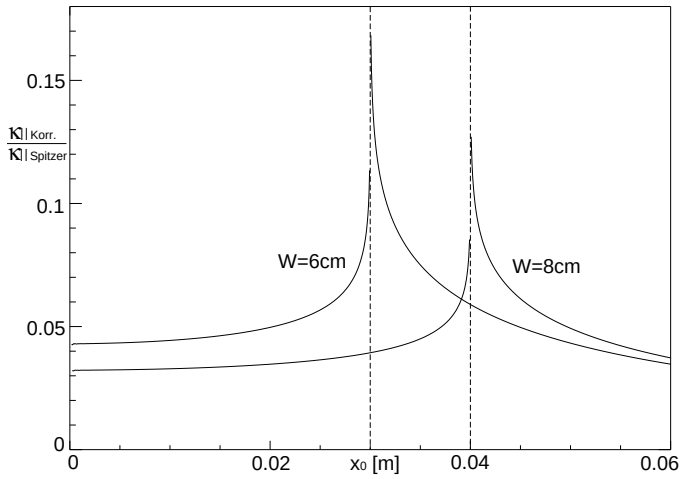

Abbildung 3.2: *Korrektur der parallelen Wärmeleitfähigkeit entsprechend der Skalenlänge $L_\|$ aus Abbildung 3.1 und Gl.(3.8).*

Die klassische Spitzerwärmeleitfähigkeit der Elektronen parallel zu den Feldlinien berechnet sich aus $\kappa_{\|Spitzer} = 2.2 n_e v_{Th} \lambda_e$ mit der thermischen Geschwindigkeit der Elektronen $v_{Th} = \sqrt{eT_e/m_e}$ zu (T_e in eV) [10, 15]:

$$\kappa_{\|Spitzer} = 2.2 \frac{12\pi^{3/2}\varepsilon_0^2}{\sqrt{2m_e}e^{3/2}\ln\lambda} T_e^{5/2} \quad . \tag{3.9}$$

Für eine typische Temperatur in einer magnetischen Insel von $T_e = 1500eV$ (und $\ln\lambda = 17$) folgt $\kappa_{\|Spitzer} = 6.8 \cdot 10^{29} m^{-1}s^{-1}$. Die Wärmeleitung senkrecht zu den Feldlinien wird durch den anormalen Transport bestimmt. Der typische Wert liegt in der Größenordnung $\kappa_\perp = 5 \cdot 10^{19} m^{-1}s^{-1}$ [16]. Damit ergibt sich das im weiteren interessierende Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten an der Separatrix größenordnungsmäßig zu $\kappa_\|/\kappa_\perp \approx 10^{10}$. Innerhalb und außerhalb der Insel ist das Wärmeleitfähigkeitsverhältnis somit im Bereich $\kappa_\|/\kappa_\perp \approx 10^8 - 10^9$ anzusetzen.

3.1.3 Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung

Die Aufspaltung der Wärmeleitungsgleichung in zwei Komponenten senkrecht und parallel zu den Feldlinien spiegelt die wesentlichen Wege des Wärmetransports im Plasma wider. Der normalerweise weitaus überwiegende parallele Transport sorgt dafür, daß die Temperatur auf Flußflächen konstant gehalten wird, während der senkrechte Transport mit der Ausbildung des radialen Temperaturprofils verbunden ist. Bei der Bildung einer magnetischen Insel werden vorher voneinander unabhängige Flußflächen mit verschiedenen Temperaturniveaus miteinander verbunden. Wärme aus dem Plasmainneren kann durch den parallelen Transport auf die entgegengesetzte Inselseite zum Plasmaäußeren gelangen. Damit wird der radiale Temperaturgradient über der Insel abgebaut. Idealerweise bleibt dabei die Temperatur auf den Flußflächen konstant und wird innerhalb der gesamten Insel identisch. Beim Passieren der resonanten Fläche in der Nähe des X-Punktes legt eine Feldlinie jedoch einen langen Weg zurück, sodaß der parallele Wärmefluß aufgrund des endlichen $\kappa_{\|}$ auf die Größenordnung des senkrechten absinkt. Somit wird der Temperaturausgleich auf einer Flußfläche in X-Punktnähe unvollständig.

Eine theoretische Untersuchung des Wärmetransports über eine magnetische Insel hinweg ergibt, daß die Wärme in einer Schicht längs der Inselseparatrix transportiert wird [17]. Diese Schicht ist am X-Punkt am breitesten mit der Breite

$$W_c = \sqrt{\frac{8R_0 q_{res}}{n q'_{res}}} \left(\frac{\kappa_\perp}{\kappa_\|}\right)^{\frac{1}{4}} \quad . \tag{3.10}$$

Am O-Punkt ist die wärmeführende Schicht mit der Breite W_c^2/W am schmalsten. Im Bereich der Wärmetransportzone besteht ein Temperaturgradient innerhalb der Insel, sodaß die Temperatur nicht konstant auf den Flußflächen ist. Dies bedeutet, daß das Temperaturprofil einer magnetischen Insel nur dann eine nahezu vollständige Abflachung zeigen kann, wenn ihre Breite deutlich größer als W_c ist. Eine kleinere Insel beginnt einen vollständig abgeflachten Bereich in der Inselmitte zu entwickeln, wenn ihre Breite den berechneten Grenzwert $W_0 = 1.8W_c$ überschreitet. In der Theorie wird überall einschließlich der Separatrix ein konstanter Wert des Wärmeleitfähigkeitsverhältnisses $\kappa_\|/\kappa_\perp$ angenommen. Abbildung 3.3 verdeutlicht die Bandbreite von W_0, W_c und W_c^2/W einer typischen Insel in Abhängigkeit von $\kappa_\|/\kappa_\perp$ im realistischen Größenordnungsbereich. Demnach ist W_c mit ca. $1cm$ abzuschätzen, W_0 mit größerer Variationsbreite mit $1.8cm$ und W_c^2/W mit ca. $1-2mm$. Dementsprechend ist zu erwarten, daß das Temperaturprofil einer typischen magnetischen Insel im Inneren weitgehend abgeflacht ist und die verbleibenden Temperaturgradienten auch in X-Punktnähe mit der gegebenen Auflösung der Temperaturdiagnostiken nicht einwandfrei experimentell nachweisbar sein können.

3.1.4 Wärmeleitungsgleichung und Flußflächenstruktur

Die konkrete Formulierung der Wärmeleitungsgleichung (3.3) zur Berechnung des Temperaturprofils bei einer speziellen Flußflächenkonfiguration erfordert die Berechnung der konkre-

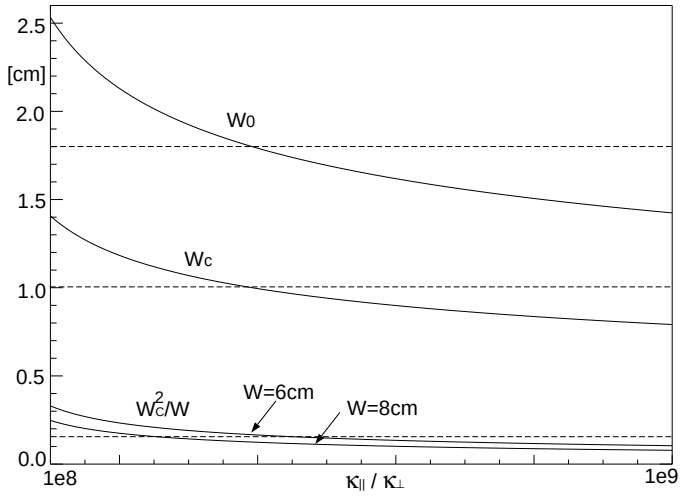

Abbildung 3.3: *Variation der Mindestbreite (W_0) einer Insel mit abgeflachten Temperaturprofil und der Breite der wärmeführenden Schicht am X-Punkt (W_c) und am O-Punkt (W_c^2/W) mit $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp}$ ($q_{res}/q'_{res} = 0.3m$).*

ten Form der Divergenzen der Richtungsableitungen $\nabla_{\|}^2$ und $\nabla_{\perp}^2$. Dabei kann man sich auf die explizite Berechnung von $\nabla_{\|}^2 T$ beschränken, denn es gilt $\nabla^2 T = \nabla_{\|}^2 T + \nabla_{\perp}^2 T$ und damit:

$$\nabla_{\perp}^2 T = \nabla^2 T - \nabla_{\|}^2 T \quad . \tag{3.11}$$

Näherungsweise kann man auch

$$\nabla_{\perp}^2 \approx (\partial/\partial x)^2 \tag{3.12}$$

verwenden, jedoch existiert bei Vorhandensein einer Insel genaugenommen auch eine nicht-verschwindende ζ-Komponente.
Die Richtungsableitung parallel zu den magnetischen Feldlinien erhält man aus der Projektion des Gradienten auf den Magnetfeldeinheitsvektor, d.h. $\nabla_{\|} = (\vec{B}/B \cdot \nabla)\vec{B}/B$. Die Divergenz folgt aus der nochmaligen Anwendung des Nablaoperators in Zylindernäherung zu (mit $\vec{b} = \vec{B}/B$):

$$\nabla_{\|}^2 = (\vec{b} \cdot \nabla)^2 \quad . \tag{3.13}$$

Mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes für das gestörte Magnetfeld läßt sich die explizite Form der Wärmeleitungsgleichung berechnen. Dabei müssen das helikale Gleichgewichts- und Störfeld (siehe Gl.(2.6)) dem Toroidalfeld und dem nichthelikalen Poloidalfeldanteil (siehe

Gl.(2.10)) überlagert werden. Für $r \ll R_0$ dürfen die helikalen und die nichthelikalen Komponenten in guter Näherung direkt addiert werden. Mit $|\vec{B}| \approx B_{0z}$ folgt:

$$\vec{b} = \frac{1}{B_{0z}} \begin{pmatrix} -\frac{m}{r}\chi_1(r)\sin\zeta \\ B_{0\Theta}(r_{res})\frac{r}{r_{res}} - \frac{\partial\chi_0(r)}{\partial r} - \frac{\partial\chi_1(r)}{\partial r}\cos\zeta \\ B_{0z} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.14}$$

Bei der Berechnung von $b \cdot \nabla$ mit dem Nablaoperator in Zylinderkoordinaten $\nabla = (\partial/\partial r, 1/r \cdot \partial/\partial\Theta, \partial/\partial z)$ und anschließender Transformation der Ableitungen nach Θ und z auf Ableitungen nach dem helikalen Winkel ζ entfällt der nichthelikale Anteil und man erhält:

$$\vec{b} \cdot \nabla = \frac{1}{B_{0z}} \begin{pmatrix} -\frac{m}{r}\chi_1(r)\sin\zeta \\ -\frac{\partial\chi_0(r)}{\partial r} - \frac{\partial\chi_1(r)}{\partial r}\cos\zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial\zeta} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.15}$$

Durch den Wegfall der z-Komponente reduziert sich das Zylinderkoordinatensystem auf ein Polarkoordinatensystem. Im folgenden wird die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in der Nähe der resonanten Fläche gesucht, sodaß ein Übergang auf die “slab geometry” möglich ist, d.h. das Polarkoordinatensystem wird zu einem kartesischen gebogen. Dazu werden in Gl.(3.15) die Terme m/r durch m/r_{res} ersetzt. Der Laplaceoperator lautet dann:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m^2}{r_{res}^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \quad . \tag{3.16}$$

3.2 Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Für das einfache Modell der Flußflächenkonfiguration einer symmetrischen magnetischen Insel mit einem parabelförmigen Gleichgewichtsfluß und einer konstanten Störflußamplitude kann die Wärmeleitungsgleichung analytisch gelöst werden [17]. Dabei wird angenommen, daß die Temperatur auf Flußflächen konstant sein soll, sodaß sich ein vollständig flaches Temperaturprofil innerhalb der Insel ergibt. Die Temperaturgradientenbildung innerhalb der Insel aufgrund der endlichen parallelen Wärmeleitfähigkeit kann nicht berücksichtigt werden. Das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten wird als konstant angenommen. Die höhere parallele Wärmeleitfähigkeit auf der Separatrix bleibt damit unberücksichtigt.

Der helikale magnetische Gleichgewichtsfluß in der Parabelnäherung gemäß Gl.(2.12) läßt sich umformen zu:

$$\chi_0(x) = \frac{B_z r_{res} q'_{res}}{2R_0 q_{res}^2} x^2 \quad . \tag{3.17}$$

Bei der Berechnung von $\nabla_{\parallel}^2$ gemäß den Gleichungen (3.13) und (3.15) wird eine Koordinatentransformation vom System (x,ζ) auf das System (Ω,ζ) durchgeführt, wobei Ω der auf die konstante Störflußamplitude χ_1 normierte helikale Fluß ist:

$$\Omega = \frac{\chi(r,\zeta)}{\chi_1} = 8\frac{x^2}{W^2} + \cos\zeta \quad . \tag{3.18}$$

Dabei ist W die Inselbreite gemäß Gl.(2.15). Unter Verwendung von W_c gemäß Gl.(3.10) folgt als Ergebnis:

$$\nabla_{\parallel}^2 = \frac{8W^2}{W_c^4}\frac{\kappa_\perp}{\kappa_\parallel}\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) \quad . \tag{3.19}$$

Der Operator $\nabla_\perp$ wird in der Näherungsform gemäß Gl.(3.12) angesetzt. Es folgt analog:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{32}{W^2}\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial}{\partial\Omega}\right) \quad . \tag{3.20}$$

Dank der Koordinatentransformation erhält man eine Formulierung der Wärmeleitungsgleichung (3.3) als partielle Differentialgleichung ohne gemischte Ableitungen:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{W}{W_c}\right)^4\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial T}{\partial\Omega}\right) = 0 \quad . \tag{3.21}$$

Anhang B beschreibt den weiteren Rechenweg zur analytischen Lösung in Anlehnung an [17]. Behandelt wird die Temperaturvariation in der Umgebung der resonanten Fläche. Durch eine Mittelung über die Flußflächen reduziert sich die partielle Differentialgleichung zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Damit geht die Information über Temperaturvariationen auf den Flußflächen verloren, sodaß die Temperatur auf einer Flußfläche als konstant angesehen werden muß. Innerhalb der Insel, wo Flußflächen mit ursprünglich verschiedener Temperatur miteinander verbunden werden, muß das Temperaturprofil flach werden. Bei der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung geht ein Ansatz für das Temperaturprofil in der Umgebung der resonanten Fläche in Form eines linearen Gleichgewichtsprofils mit ortsabhängiger Störung ein.

Die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung (Gl.(B.13)) läßt sich numerisch lösen. Abbildung 3.4 zeigt ein Beispiel der Temperaturprofilschnitte, wobei die Inseltemperatur entsprechend der Randbedingung $T(a) = 0$ (bei $\zeta = \pi/2$) gewählt wurde. Die (negative) Steigung $T_0'(r_{res})$ des Gleichgewichtsprofils an der resonanten Fläche wurde zu den Rändern hin fortgesetzt. Als charakteristische Merkmale erkennt man, daß das O-Punktprofil zum Plasmaäußeren hin eine “Aufwölbung” zeigt, wo die Temperatur am Inselrand die Gleichgewichtstemperatur übersteigt. Das X-Punktprofil verläuft hingegen niedriger und ist an der resonanten Fläche zu einem Sattelpunkt abgeflacht. Das Profil bei $\zeta = \pi/2$ entspricht abgesehen

vom Inselinneren dem Gleichgewichtsprofil. Die Differenz zwischen der Gleichgewichtstemperatur im Plasmakern $T_0(0)$ und der Kerntemperatur $T(0)$ bei Anwesenheit einer Insel ergibt sich mit der effektiven Inselbreite $W_{eff} = W/\sqrt{2}$ (Inselbreite bei $\zeta = \pi/2$) zu:

$$T(0) = T_0(0) + T_0'(r_{res})W_{eff} \quad . \tag{3.22}$$

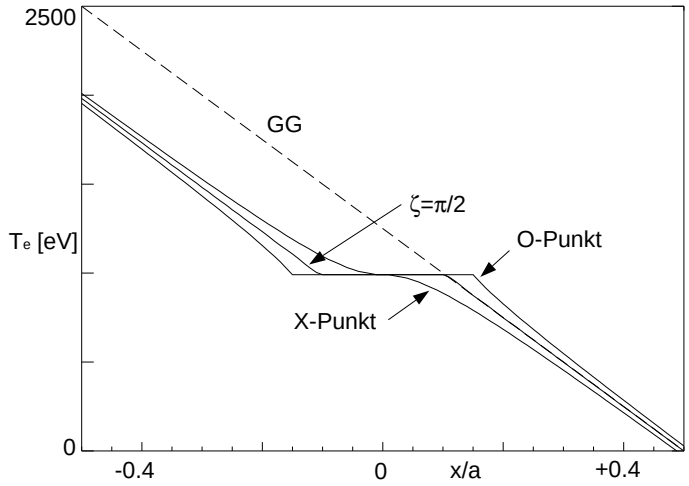

Abbildung 3.4: *Temperaturprofilschnitte einer symmetrischen magnetischen Insel aus der numerischen Lösung der auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzierten Wärmeleitungsgleichung (B.13).*

Zur weiteren Behandlung der auf eine einfache Differentialgleichung erster Ordnung reduzierten Wärmeleitungsgleichung wird ein Fourierreihenansatz für die Störung des Temperaturprofils $\delta T(x,\zeta)$ gemacht:

$$\delta T(x,\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta T_\nu(x) \cos \nu\zeta \quad . \tag{3.23}$$

Die Berechnung der Fourierkomponenten $\delta T_\nu(x)$ ergibt den numerisch auszuwertenden Ausdruck:

$$\delta T_\nu(x) = \pm \frac{W T_0'(r_{res})}{16\nu} \int_0^{\zeta_c} \frac{\cos(\nu-1)\zeta - \cos(\nu+1)\zeta}{kE(1/k)} d\zeta \tag{3.24}$$

mit der (negativen) Steigung des linearen Gleichgewichtstemperaturprofils an der resonanten Fläche $T_0'(r_{res})$, mit der Standardform des elliptischen Integrals

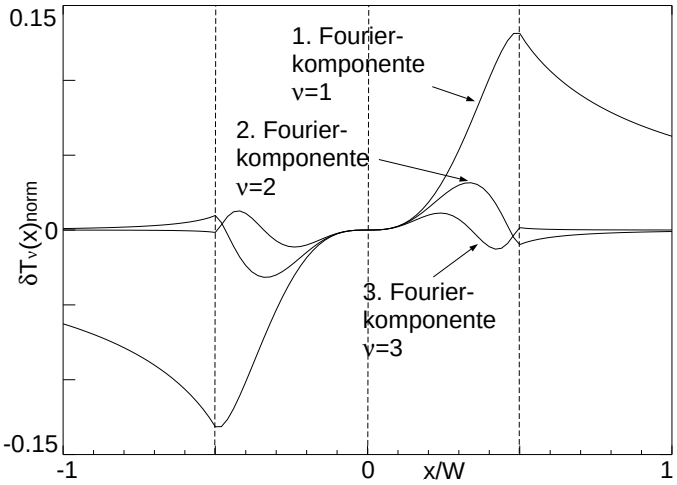

Abbildung 3.5: *Radialer Verlauf der ersten drei Fourierkomponenten des Temperaturprofils aus numerischer Integration von Gl.(3.24) in normierter Darstellung* $\delta T_\nu(x)_{norm} = \delta T_\nu(x/W)/(WT_0'(r_{res}))$.

$$E(l) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - l^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha \quad , \tag{3.25}$$

mit

$$k = \sqrt{\cos^2\frac{\zeta}{2} + 4\frac{x^2}{W^2}} = \frac{1}{l} \tag{3.26}$$

und mit

$$\zeta_c = \begin{cases} \arccos\left(1 - 8\frac{x^2}{W^2}\right) & \text{wenn } |x| < W/2 \\ \pi & \text{wenn } |x| \geq W/2 \end{cases} \quad . \tag{3.27}$$

Abbildung 3.5 zeigt den radialen Verlauf der ersten drei Fourierkomponenten in normierter Form $\delta T_\nu(x/W)/(WT_0'(r_{res}))$. Die erste Fourierkomponente ($\nu = 1$) hat Extrema von $\delta T_1(W/2)/(WT_0'(r_{res})) = \pm 0.13$ bei $x = \pm W/2$ und einen Nulldurchgang an der resonanten Fläche. Während die Lage der Extrema einfach zu bestimmen ist, fällt die genaue Lokalisierung der Nullstelle schwerer. Besser läßt sie sich durch eine getrennte Auftragung von Amplitude und Phase bestimmen, die an der Nullstelle um 180 Grad springt. Diese Eigenschaften der ersten Fourierkomponente lassen sich zur Auswertung experimentell gemessener Inseltemperaturprofile nutzen (Kapitel 5). Die höheren Fourierkomponenten sind deutlich kleiner

und komplexer in ihrem Verlauf und korrespondieren mit der Temperaturabflachung innerhalb der Insel. Sie nehmen außerhalb der Insel sehr schnell ab, während die erste Komponente nur langsam fällt, da sie dort die Verbiegung der nicht miteinander verbundenen Flußflächen beschreibt.

3.3 Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Das Temperaturprofil einer realistischen magnetischen Insel läßt sich modellieren, indem man die Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung eines realistischen Flußflächenmodells formuliert. Die resultierende partielle Differentialgleichung muß numerisch gelöst werden. Damit wird es möglich, die Temperaturgradienten innerhalb der Insel aufgrund der endlichen parallelen Wärmeleitfähigkeit zu modellieren. Allerdings wird auch hier ein konstanter Wert des Wärmeleitfähigkeitsverhältnisses auf dem gesamten Lösungsgebiet angenommen und die höhere parallele Wärmeleitfähigkeit auf der Separatrix vernachlässigt. Weiterhin wird die slab geometry verwendet und die Wärmequelle durch geeignete Randbedingungen ersetzt.
Die Wärmeleitungsgleichung (3.3) erhält mit $\nabla_\perp^2 T$ gemäß Gl. (3.11) die Form

$$\kappa_\perp \nabla^2 T + (\kappa_\parallel - \kappa_\perp)\nabla_\parallel^2 T = 0 \quad . \tag{3.28}$$

Dies läßt sich (in sehr guter Näherung) zu $\nabla^2 T + \kappa_\parallel/\kappa_\perp \nabla_\parallel^2 T = 0$ umschreiben. Die Berechnung von $\nabla_\parallel^2$ erfolgt nach den Gleichungen (3.13) und (3.15) für allgemeine Flußfunktionen $\chi_0(r)$ und $\chi_1(r)$. Dies ermöglicht die Verwendung der modellierten realistischen Flußfunktionen gemäß den Gleichungen (2.19) und (2.22) oder auch anderer eventuell nur in numerischer Form vorliegender Funktionen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\nabla_\parallel^2 &= \left(-\frac{m}{B_{0z}} \frac{\chi_1(r)}{r_{res}} \sin\zeta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{B_{0z}} \frac{\partial \chi_0(r)}{\partial r} \frac{1}{r_{res}} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{m}{B_{0z}} \frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \cos\zeta \frac{1}{r_{res}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 \\
&= \frac{m^2}{B_{0z}^2} \Bigg\{ \left[\left(\frac{\partial \chi_0(r)}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial \chi_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \cos\zeta + \left(\frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \right)^2 \cos^2\zeta \right] \frac{1}{r_{res}^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 \chi_0(r)}{\partial r^2} \frac{\chi_1(r)}{r_{res}} - \frac{\partial \chi_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \frac{1}{r_{res}} \right] \frac{\sin\zeta}{r_{res}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
&\quad + \left[\frac{\chi_1(r)}{r_{res}} \frac{\partial^2 \chi_1(r)}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \right)^2 \frac{1}{r_{res}} \right] \sin\zeta \cos\zeta \frac{1}{r_{res}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
&\quad + \left[2 \frac{\partial \chi_0(r)}{\partial r} \frac{\chi_1(r)}{r_{res}} + 2 \frac{\chi_1(r)}{r_{res}} \frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \cos\zeta \right] \frac{\sin\zeta}{r_{res}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial r} \\
&\quad + \left[\frac{\partial \chi_0(r)}{\partial r} \frac{\chi_1(r)}{r_{res}} \frac{\cos\zeta}{r_{res}} + \frac{\chi_1(r)}{r_{res}^2} \frac{\partial \chi_1(r)}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\chi_1(r)^2}{r_{res}^2} \sin^2\zeta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Bigg\} \quad .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Die Wärmeleitungsgleichung kann mit Hilfe der Methode der finiten Elemente unter Verwendung eines kommerziell erhältlichen Programms (FlexPDE) gelöst werden. Das Lösungsgebiet ist eine Fläche, die von den senkrecht zueinander stehenden Koordinaten r und $\zeta = 0 \ldots 2\pi$ aufgespannt wird. Die Randbedingungen des Gebiets müssen die Wirkung der fehlenden Wärmequelle ersetzen. Bei $r = r_{min}$ und $r = r_{max}$ wird dazu jeweils eine konstante Temperatur vorgegeben. Damit ist dort keine Temperaturvariation mehr möglich, sodaß die Störung am Rand nur noch gering sein darf, um den Fehler zu begrenzen. Trotz der Beschränkung der slab geometry auf die Nähe der resonanten Fläche muß das Lösungsgebiet daher die weitere Umgebung der Insel umfassen. Bei $\zeta = 0$ und $\zeta = 2\pi$ gilt die Randbedingung $\partial T/\partial\zeta = 0$, weil sich hier periodisch die nächste Insel anschließt. Für die Verwendung der zusammengesetzten Störflußamplitude Gl.(2.22) wird das Gebiet an der resonanten Fläche in zwei Teile unterteilt. Anstelle analytischer Flußfunktionen können auch numerische Werte importiert werden. Der Steuerungscode des Programms und weitere Details finden sich in Anhang C.

Abbildung 3.6 zeigt einen Vergleich numerisch modellierter Inseltemperaturprofile mit verschiedenen Verhältnissen der parallelen und senkrechten Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten. Die Flußflächen sind mit dem analytischen Modell modelliert. Die Parameter wurden so gewählt, daß die $q = 3/2$-Fläche bei $r/a = 0.6$ liegt. Innerhalb der wärmeführenden Schicht um die Inselseparatrix, welche am X-Punkt die Breite $W_c \sim (\kappa_\perp/\kappa_\parallel)^{1/4}$ und am O-Punkt die Breite W_c^2/W hat, bestehen Temperaturgradienten innerhalb der Insel. Bei $\kappa_\parallel/\kappa_\perp = 1 \cdot 10^7$ (links) überdeckt die wärmeführende Schicht fast die gesamte Insel, sodaß das Temperaturprofil auch in O-Punktnähe nicht vollständig abflacht ($W < W_0$). Auffällig ist, daß das X-Punktprofil an der resonanten Fläche aufgesteilt ist. Mit zunehmendem $\kappa_\parallel/\kappa_\perp$ sinkt W_c, und die wärmeführende Schicht reduziert sich auf den Inselrand. Bei Verwendung realistischer Wärmeleitfähigkeitsverhältnisse von $\kappa_\parallel/\kappa_\perp = 10^8 - 10^9$ (Mitte und rechts) ist das Inseltemperaturprofil weitgehend flach. Die Form des X-Punktprofils nähert sich der abgeflachten Form an, die man aus der analytischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhält. Die Aufsteilung reduziert sich auf einen kleinen Bereich. Der Vergleich der ersten Fourierkomponenten mit der Inselgeometrie zeigt, daß sich die Übereinstimmung der Maxima mit der O-Punktseparatrixposition mit zunehmendem Wärmeleitfähigkeitsverhältnis verbessert. Unter realistischen Verhältnissen kann die Inselbreite gut anhand des Abstands der Maxima abgeschätzt werden. Die Höhe der Maxima ist infolge der Inselasymmetrie nicht mehr gleich und wird von den Änderungen des Temperaturprofils mit steigendem Wärmeleitfähigkeitsverhältnis beeinflußt. Die Nullstellen der ersten (und auch der zweiten) Fourierkomponente sind leicht gegenüber der resonanten Fläche verschoben. Diese Verschiebung nimmt mit steigender Inselasymmetrie zu. Abbildung 3.7 zeigt ein Beispiel für den modellierten Wärmefluß. Dabei ist zu beachten, daß für eine anschaulichere Darstellung das Wärmeleitfähigkeitsverhältnis unrealistisch klein gewählt wurde, sodaß die wärmeführende Schicht die gesamte Insel überdeckt.

3.4 Modellierung mit Transportgleichungen

Das Temperaturprofil kann alternativ mit der numerischen Lösung der zeitabhängigen Plasmatransportgleichungen modelliert werden. Dazu wurde am Max-Planck-Institut für Plas-

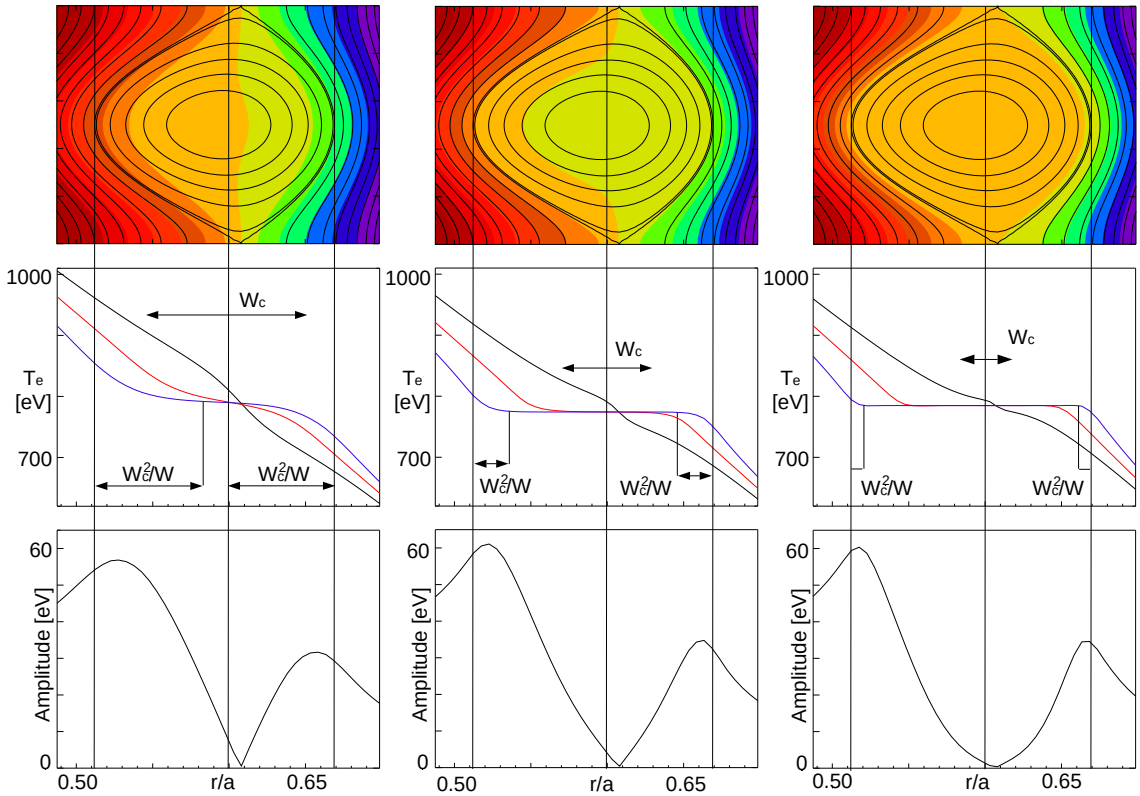

Abbildung 3.6: *Numerisch modellierte Temperaturprofile realistischer magnetischer Inseln bei verschiedenen Wärmeleitfähigkeitsverhältnissen* ($\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 1 \cdot 10^7$ *links*, $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 1 \cdot 10^8$ *Mitte*, $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 1 \cdot 10^9$ *rechts). Die Flußflächenkonturen sind überlagert eingezeichnet* ($\alpha = 0.03$, $\beta = 0.85$, $\gamma = 0.005$, $\Delta' = -7.6$, $W = 8cm$, $W_c = 3.0(\kappa_{\perp}/\kappa_{\|})^{1/4}$, $I_0 = 8kA$, $B_z = 2.6T$, $a = 0.5m$ *und* $r_{res}/a = 0.6$*).*

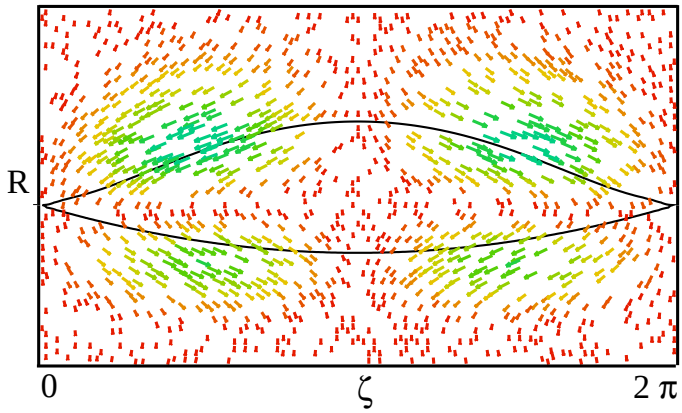

Abbildung 3.7: *Numerisch modellierter Wärmefluß um eine magnetische Insel* ($\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 1 \cdot 10^5$*).*

maphysik in Garching (IPP) ein Transportcode entwickelt, dessen Ergebnisse mit denen der Wärmeleitungsgleichung verglichen werden können [18]. Der Transportcode liefert die radialen Verläufe der nullten (Durchschnittsprofil), ersten und zweiten Fourierkomponente des auf den Gleichgewichtsdruck im Plasmazentrum normierten Druckprofils. Aufgrund konstanter Plasmadichte ist das Druckprofil äquivalent zum Temperaturprofil. Die beiden ersten Fourierkomponenten geben die Abflachung des Inseltemperaturprofils bereits weitgehend wieder. Die Simulationszeiträume wurden ausreichend lange gewählt, sodaß das zeitabhängige Modell einen stationären Zustand erreichen konnte. Die Berechnungen basieren einheitlich auf dem in Abbildung 3.8 dargestellten Gleichgewichts- und Störfluß, wie er sich aus selbstkonsistenten Rechnungen ergibt. Die senkrechte und parallele Wärmeleitfähigkeit sind konstant, sodaß auch in diesem Modell die erhöhte Wärmeleitfähigkeit an der Separatrix unberücksichtigt bleibt. Aufgrund des hohen Rechenaufwands wurde das maximale Wärmeleitfähigkeitsverhältnis auf $2.5 \cdot 10^8$ begrenzt. Die für den Code notwendige Energiequelle ist im Plasmazentrum lokalisiert, sodaß keine direkten Auswirkungen auf das Inseltemperaturprofil auftreten können.

Abbildung 3.9 zeigt die modellierten Inseltemperaturprofile bei verschiedenen Verhältnissen von paralleler und senkrechter Wärmeleitfähigkeit. Wie bereits in der numerischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung erkennt man Temperaturgradienten innerhalb der Insel im Bereich der wärmeführenden Schicht mit der Breite W_c am X-Punkt und W_c^2/W am O-Punkt. Im linken Teil der Abbildung ist $W = 2W_c$, sodaß die wärmeführende Schicht einen großen Teil der Insel überdeckt. Infolgedessen stellt sich auch in der O-Punktregion keine vollständige Abflachung ein. (Aus der analytischen Untersuchung der Wärmeleitung um die Insel ergibt sich eine Mindestgröße der Insel für beginnende Abflachung von $W_0 = 1.8W_c$.) Das X-Punktprofil zeigt wie in der Lösung der Wärmeleitungsgleichung eine Aufsteilung an der resonanten Fläche. Mit zunehmendem Wärmeleitfähigkeitsverhältnis (Mitte, rechts) reduziert sich die wärmeführende Schicht auf den Inselrand und das Temperaturprofil wird weitgehend flach. Die leichten Temperaturmodulationen innerhalb des abgeflachten Profils resultieren aus dem Fehlen der dritten und höheren Fourierkomponenten. Die X-Punktprofile zeigen ebenfalls eine Abflachung, wie man es aus der analytischen Modellierung erwartet. Deutlich zeigt sich auch hier der Einfluß des Wärmeleitfähigkeitsverhältnisses auf die erste Fourierkomponente des Temperaturprofils. Bei zunehmendem $\kappa_\parallel/\kappa_\perp$ rücken die Maxima weiter nach außen, wobei die Verschiebung hier über die O-Punktseparatrixposition hinausgeht. Offen bleibt, ob bei noch höheren Werten von $\kappa_\parallel/\kappa_\perp$ der Abstand der Maxima wieder genau mit der Inselbreite übereinstimmt. Die Höhe der Maxima fällt mit zunehmendem $\kappa_\parallel/\kappa_\perp$. Das Verhältnis der Maxima auf beiden Seiten bleibt weitgehend konstant. Die Unterschiede im Vergleich zu den Lösungen der Wärmeleitungsgleichung können durch die verschiedenen Formen des Gleichgewichtstemperaturprofils in den beiden Modellen begründet sein.

Zum Vergleich der Temperaturprofile aus der Plasmatransportmodellierung mit denen aus der numerischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung wurde das Temperaturprofil mit beiden Verfahren unter Verwendung derselben Flußfunktionen modelliert. Das Wärmeleitfähigkeitsverhältnis wurde so gewählt, daß deutliche Temperaturgradienten in der Insel erkennbar sein müssen. Abbildung 3.10 zeigt die qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse. Ein auffälliger Unterschied liegt im insgesamt höheren Verlauf des mit der Wärmeleitungsgleichung modellierten Profils, der aus den unterschiedlichen Gleichgewichtstemperaturprofilen resultiert (be-

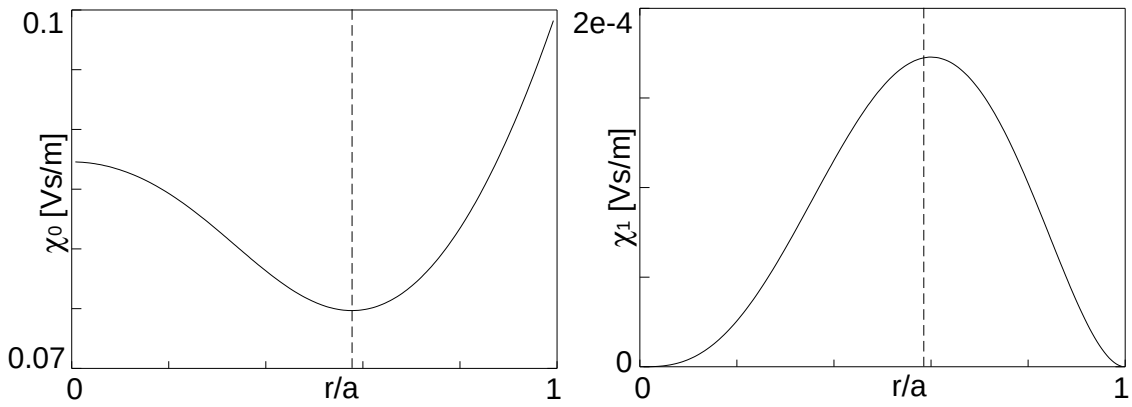

Abbildung 3.8: *Gleichgewichtsfluß (links) und Störflußamplitude (rechts) für die Temperaturprofilmodellierung mit einem zeitabhängigen Transportcode.*

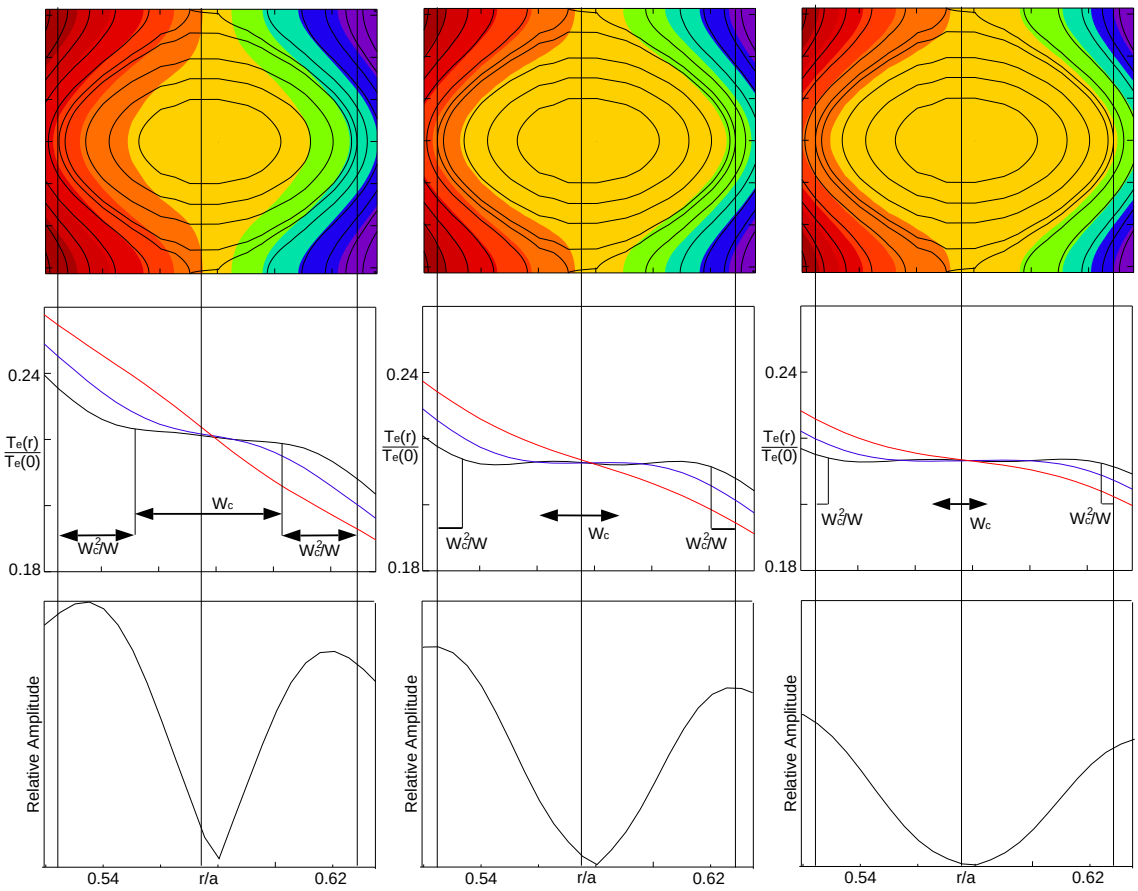

Abbildung 3.9: *Temperaturprofilmodellierung mit einem Plasmatransportcode* ($\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 5 \cdot 10^6$ *links,* $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 5 \cdot 10^7$ *Mitte,* $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 2.5 \cdot 10^8$ *rechts).*

stimmt durch die Randbedingungen bzw. durch die Wärmequelle). Ein weiterer Unterschied liegt darin, daß die Wärmeleitungsgleichung eine Aufsteilung des X-Punktprofils an der resonanten Fläche liefert, während das X-Punktprofil aus dem Transportcode bei dem gewählten Wärmeleitfähigkeitsverhältnis bereits abgeflacht verläuft. Die erste und die zweite Fourierkomponente zeigen prinzipielle Übereinstimmung in der Form mit Unterschieden in der Höhe und leichten Differenzen in der Lage der Maxima und Nullstellen. Dies ist auf die unterschiedlichen Temperaturprofile zurückzuführen.

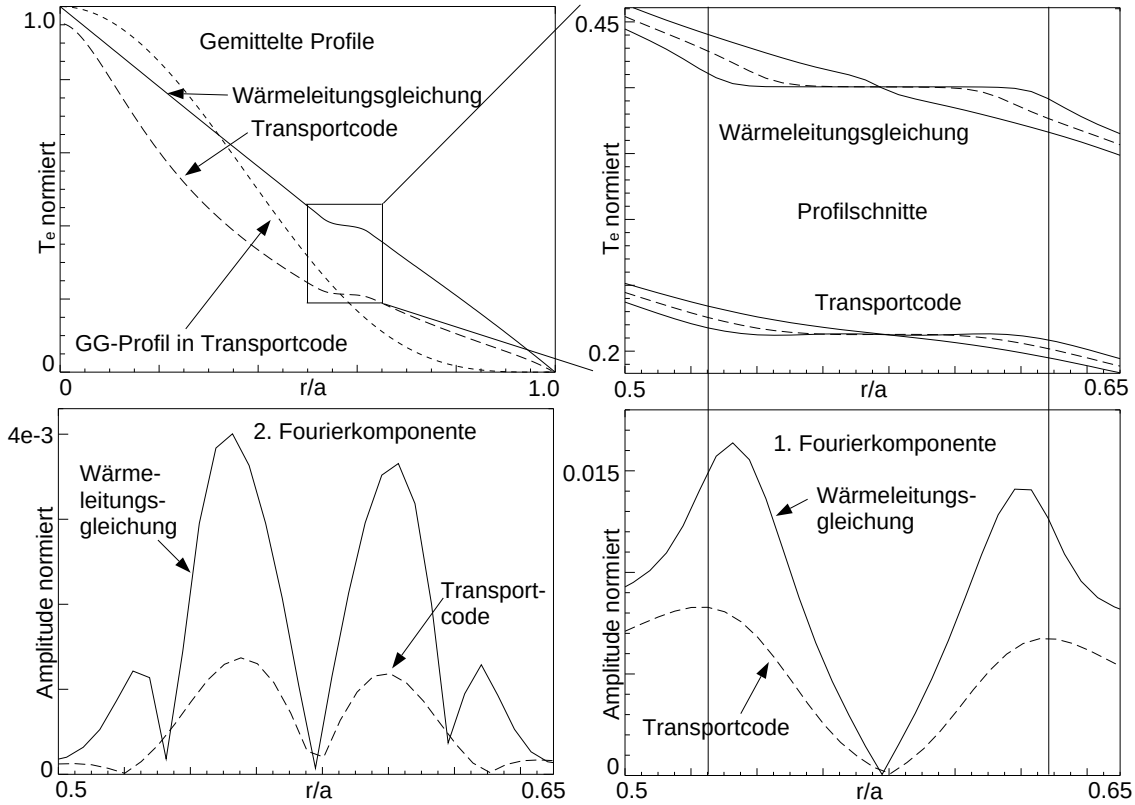

Abbildung 3.10: *Vergleich der Temperaturprofilmodellierung mit der Lösung der Plasmatransportgleichungen und der Wärmeleitungsgleichung* ($\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 5 \cdot 10^7$).

Aus dem Vergleich läßt sich schließen, daß die numerische Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung zur Modellierung von realistischen Inseltemperaturprofilen geeignet ist. Dabei ist der Rechenaufwand erheblich geringer als bei der Lösung der zeitabhängigen Transportgleichungen. Somit stellt die Lösung der Wärmeleitungsgleichung eine interessante Alternative zur Transportrechnung dar, wenn Inseltemperaturprofile modelliert werden sollen, ohne daß eine Untersuchung der Zeitabhängigkeit erwünscht ist.

3.5 Zusammenfassung

Das Temperaturprofil magnetischer Inseln läßt sich mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung modellieren, in welche die Flußflächenstruktur über die Richtungsableitungen senkrecht und parallel zu den Feldlinien einfließt. Dabei sind folgende Punkte zu beachten:

- Die Bedingung für die Verwendung der Wärmeleitungsgleichung ist eine kurze freie Weglänge im Vergleich zur Gradientenlänge. Diese Bedingung ist für die Wärmeleitung parallel zu den Feldlinien außerhalb der unmittelbaren Separatrixumgebung nicht erfüllt.
- Die Wärmeleitungsgleichung darf dennoch verwendet werden, wenn die Spitzerwärmeleitfähigkeit parallel zu den Feldlinien korrigiert wird.
- Das Verhältnis der parallelen und senkrechten Wärmeleitfähigkeiten muß im Inselinneren und in der Umgebung der Insel in der Größenordnung von $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} \approx 10^8 - 10^9$ anstelle von 10^{10} in die Rechnung eingehen.
- In der Modellierung wird die höhere parallele Wärmeleitfähigkeit in Separatrixnähe vernachlässigt und $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = const$ im gesamten Lösungsgebiet angenommen.

Die Wärmeleitungsgleichung läßt sich unter stark vereinfachenden Annahmen (symmetrische Insel, konstante Temperatur auf Flußflächen) analytisch lösen. Für realistische Flußflächenkonfigurationen ist eine numerische Lösung erforderlich. Diese ermöglicht die Modellierung von Temperaturgradienten innerhalb der Insel. Die Ergebnisse sind mit denen von Plasmatransportrechnungen vergleichbar. Die Modellierung zeigt einige wichtige Eigenschaften der Temperaturprofile magnetischer Inseln:

- Das Temperaturprofil im Inneren einer magnetischen Insel ist abgeflacht mit Ausnahme der Wärmetransportzone um die Separatrix, in der Temperaturgradienten innerhalb der Insel bestehen.
- Eine magnetische Insel benötigt eine Mindestbreite, damit eine Temperaturprofilabflachung im Inselinneren auftreten kann ($W \gg W_c$ für nahezu vollständige Abflachung, $W \approx W_0 = 1.8W_c$ für beginnende Abflachung am O-Punkt, $W_c \approx 1cm$).
- Bei typischen Inselbreiten von $6-8cm$ ist eine weitgehende Abflachung des Inseltemperaturprofils zu erwarten. Mit der gegebenen radialen Auflösung der Temperaturdiagnostiken können die verbleibenden Gradienten auch in der X-Punktregion nicht einwandfrei beobachtet werden.
- Die erste Fourierkomponente des Temperaturprofils ist zur Abschätzung der Inselbreite und der Separatrixlage geeignet.

Der letzte Punkt wird in Kapitel 5 eingehender diskutiert und in Kapitel 7 zur Auswertung experimenteller Beobachtungen genutzt.

Kapitel 4

Modellierung der Dynamik

Die Dynamik einer Tearing Mode wird durch die zeitliche Änderung der Magnetfeldstörung bestimmt. In diesem Kapitel wird zunächst der Grundgedanke zur Herleitung der Rutherfordgleichung für die Dynamik von Tearing Moden vorgestellt und anschließend die Erweiterung zur verallgemeinerten Rutherfordgleichung für neoklassische Tearing Moden vorgenommen. Damit lassen sich die experimentell beobachtbaren Dynamikeigenschaften von neoklassischen Tearing Moden erklären. Zusammen mit einem Modell für den modenbedingten Energieverlust des Plasmas erhält man ein Modell des gekoppelten Systems Plasma-Insel. Damit wird eine selbstkonsistente Simulation der Inselstabilisierung mit ECCD (electron cyclotron current drive) prinzipiell möglich.

4.1 Die Grundidee der Rutherfordgleichung

Die Breite einer magnetischen Insel ist von der Magnetfeldstörung abhängig, welche durch den helikalen magnetischen Störfluß beschrieben wird. Die zeitliche Änderung der Störflußamplitude induziert eine Umlaufspannung bzw. hier, wo χ genaugenommen den magnetischen Fluß pro Längeneinheit bezeichnet, ein elektrisches Feld. Mit der Resistivität σ des Plasmas resultiert ein Störstrom mit Dichte j_{Ohm} in helikaler Richtung:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} = \frac{j_{Ohm}}{\sigma} \quad . \tag{4.1}$$

Im einfachen Inselmodell ($\chi_0 \sim x^2$ und $\chi_1(r) = const$) ist die Inselbreite W gemäß Gl.(2.15) mit der Störflußamplitude χ_1 verknüpft. Die Störstromdichte j_{Ohm} wird über die Insel zum Störstrom I_{Ohm} integriert, wobei der Faktor 1.22 eingeht. Es folgt:

$$\frac{\chi_0''}{16}\frac{d}{dt}W^2 = \frac{1.22 I_{Ohm}}{\pi r_{res} W \sigma} \quad . \tag{4.2}$$

Der gesamte Störstrom $I_1 = I_{Ohm} + I_{Rest}$, der nicht notwendigerweise nur aus I_{Ohm} bestehen muß, ist nach dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{B}_1 d\vec{s} = \mu_0 I_1$ mit dem Störmagnetfeld bzw. -fluß verknüpft. Mittels einer Abschätzung des Umlaufintegrals und der Ersetzung von B_1 durch χ_1' folgt:

$$\Delta'(W) = \frac{8\mu_0}{\pi r_{res}\chi_0''}\frac{I_{Ohm} + I_{Rest}}{W^2} \quad . \tag{4.3}$$

Dabei ist $\Delta'(W)$ in Analogie zu Gl.(2.21) der nichtlineare Stabilitätsparameter für magnetische Inseln der Breite W:

$$\Delta'(W) = \frac{\chi_1'(r_{res} + W/2) - \chi_1'(r_{res} - W/2)}{\chi_1(r_{res})} \quad . \tag{4.4}$$

Aus den Gleichungen (4.2) und (4.3) folgt mit der Definition der resistiven Zeitskala

$$\tau_R = \frac{\mu_0 \sigma r_{res}^2}{1.22} \tag{4.5}$$

eine Differentialgleichung für die Inseldynamik:

$$\frac{\tau_R}{r_{res}}\frac{dW}{dt} = r_{res}\Delta'(W) - \frac{8\mu_0}{\pi\chi_0''}\frac{I_{Rest}}{W^2} \quad . \tag{4.6}$$

Im Fall $I_{Rest} = 0$ entspricht dies der Rutherfordgleichung für die Dynamik von klassischen Tearing Moden [19]. Der nichtlineare Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$ gibt an, ob das Plasma infolge seines Stromprofils stabil ($\Delta'(W) < 0$) oder instabil ($\Delta'(W) > 0$) gegen Tearing Moden ist. Im Falle der Instabilität bildet sich eine magnetische Insel, bis wieder eine stabile Konfiguration ($\Delta'(W) = 0$) erreicht ist.

4.2 Die verallgemeinerte Rutherfordgleichung

In der Herleitung von Gl.(4.6) wurde berücksichtigt, daß neben dem mit der zeitlichen Störflußänderung verknüpften Störstrom I_{Ohm} noch weitere in I_{Rest} zusammengefaßte helikale Störströme auftreten können. Insbesondere ist hier die Verringerung des Bootstrapstroms zu nennen, die mit der Plasmadruckprofilabflachung in einer magnetischen Insel einhergeht. Wenn eine kleine seed island, die beispielsweise infolge eines Sägezahncrashs entstehen kann, aufgrund dieses Effekts zu einer großen Insel anwächst, spricht man von einer neoklassischen Tearing Mode. Die Dynamik neoklassischer Tearing Moden kann mit einer verallgemeinerten Form der Rutherfordgleichung beschrieben werden, in der neben dem destabilisierenden

Bootstrapeffekt noch weitere stabilisierende Effekte berücksichtigt werden. Die verallgemeinerte Rutherfordgleichung lautet [20]:

$$\begin{aligned}\frac{\tau_R}{r_{res}}\frac{dW}{dt} &= r_{res}\Delta'(W) \\ &+ r_{res}\beta_p\left(a_{BS}\sqrt{\varepsilon}\frac{L_q}{L_p}\frac{W}{W^2+W_0^2} - a_{GGJ}\frac{r_{res}}{R_0^2}\frac{L_q^2}{L_p}\frac{1}{W} - a_{Pol}\left(\rho_p\frac{L_q}{L_p}\right)^2 g(\varepsilon)\frac{1}{W^3}\right) \\ &- a_{ECCD}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{r_{res}}{d}L_q\frac{I_{ECCD}}{I_P(r_{res})}\frac{1}{W} \quad .\end{aligned} \tag{4.7}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt den (bei positiver Verscherung) destabilisierenden Effekt des verringerten Bootstrapstroms [7]. Der Bootstrapstrom entsteht, indem sich aufgrund des radialen Dichte- und Temperaturgradienten in den auf Bananenbahnen gefangenen Teilchen ein Strom ausbildet, der über Reibung einen weiteren Strom von freien Elektronen herbeiführt [21]. Der Bootstrapstrom ist proportional zum Druckgradienten, was auf eine proportionale Abhängigkeit von $\beta_p = 2\mu_0 p/B_p^2$ umgeformt werden kann. Zur Berechnung von β_p müssen der Druck p und das poloidale Magnetfeld B_p jeweils an der resonanten Fläche verwendet werden. Weiterhin bezeichnen $\varepsilon = r_{res}/R_0$ das inverse Aspektverhältnis, $L_q = q_{res}/q'_{res}$ die Verscherungslänge der Feldlinien und $L_p = p/p'$ die Plasmadruckabfallänge jeweils an der resonanten Fläche. Die Konstante a_{BS} ist ein freier Parameter, in dem theoretisch nicht befriedigend erfaßbare Effekte eingehen, wie beispielsweise die Auswirkungen der Plasmageometrie. Solche freien Parameter treten auch in den nachfolgenden Termen auf. Ihre numerische Bestimmung aus dem Experiment ist Gegenstand von Kapitel 8. Die Verringerung des Bootstrapstroms ist bei vollständiger Druckprofilabflachung innerhalb der Insel proportional zu W, womit für den Bootstrapterm in der Rutherfordgleichung gemäß Gl.(4.6) eine proportionale Abhängigkeit von $1/W$ folgt. Bei kleinen Inselbreiten ist jedoch zu berücksichtigen, daß das Temperatur- und Druckprofil aufgrund der endlichen Wärmeleitfähigkeit parallel zu den Feldlinien nur unvollständig abflacht, sodaß der Verlust an Bootstrapstrom nicht einfach proportional zu W ist. Daher geht die Mindestbreite W_0 einer Insel mit beginnender Profilabflachung in den Bootstrapterm ein [17]. Seine maximale (und endliche) Wirkung entfaltet der Bootstrapeffekt bei $W = W_0$. Der typische Wert in ASDEX Upgrade liegt bei $W_0 = 1.8cm$ (siehe Abschnitt 3.1.3).

Der dritte Term auf der rechten Seite beschreibt die stabilisierende Wirkung des Glasser-Greene-Johnson-Effekts [22]. Er enthält die Auswirkung der Torusform des Plasmas. Der vierte Term beschreibt die ebenfalls stabilisierende Wirkung der Polarisationsströme, die durch die Bewegung der Insel durch das Plasma induziert werden [23]. Aufgrund der Abhängigkeit $1/W^3$ ist dieser Effekt vor allem bei kleiner Inselgröße wirksam. Hier bezeichnet $\rho_p = \sqrt{2m_iT_i}/(\sqrt{e}B_p)$ den poloidalen Ionenlarmorradius an der resonanten Fläche (mit der Ionentemperatur $T_i \approx T_e$ in eV und der Ionenmasse m_i.) Der Faktor $g(\varepsilon)$ berücksichtigt die Kollisionalität, hier definiert als $\nu_{ii}/(\varepsilon\omega_e^*)$ mit der Ionenstoßfrequenz ν_{ii} und der diamagnetischen Driftfrequenz der Elektronen an der resonanten Fläche ω_e^*. Der Polarisationsstromeffekt ist vor allem in Plasmen mit hoher Kollisionalität wichtig, wo $g(\varepsilon) = 1$ gilt, während in den in dieser

Arbeit experimentell untersuchten Plasmen mit niedriger Kollisionalität $g(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$ anzusetzen ist.

Der fünfte Term auf der rechten Seite beschreibt die Stabilisierungswirkung, welche man durch das Ersetzen des fehlenden Bootstrapstroms mittels Elektronenzyklotronresonanzstromtrieb (ECCD) erzielen kann [24]. Mittels Einstrahlung von Mikrowellen, welche mit der Elektronenzyklotronfrequenz auf der resonanten Fläche resonant sind, erzielt man eine lokale Heizwirkung (ECRH) und über die Senkung des Widerstands eine Erhöhung des Plasmastroms im Inselbereich. Einstrahlung schräg zur poloidalen Querschnittsebene bewirkt zusätzlich einen nichtinduktiven Stromtrieb (ECCD). Die Deposition der Heizleistung findet auf der Breite $2d \approx 4cm$ statt. Der Faktor $I_{ECCD}/I_P(r_{res})$ bezeichnet das Verhältnis des erzeugten Stroms zum Plasmastrom zwischen Plasmamitte und resonanter Fläche. Für den Vorfaktor a_{ECCD} ergibt sich aus theoretischer Betrachtung ein numerisches Ergebnis, das wie folgt genähert werden kann [25]:

$$a_{ECCD} = \begin{cases} 34\frac{d}{W}e^{-d/W} & \text{für} d/W \leq 0.5 \\ 10.311 & \text{für} d/W > 0.5 \end{cases} \tag{4.8}$$

Der nichtlineare Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$ im ersten Term auf der rechten Seite läßt sich mittels einer Modellierung der Störflußamplitude als inselbreitenabhängige Größe quantifizieren. In Ermangelung der ausreichend genauen Kenntnis der real vorliegenden Störflußamplitude verwendet man zur Untersuchung der Dynamik neoklassischer Tearing Moden üblicherweise die Näherung eines konstanten negativen Wertes Δ'_0 (Annahme von Stabilität gegen klassische Tearing Moden). Dazu wird teilweise die Vakuumlösung des Störflusses $\Delta'_0 = -2m/r_{res}$ verwendet, realistischere Berechnungen ergeben hingegen das Ergebnis $\Delta'_0 = -m/r_{res}$ [26]. Letzteres wird auch in dieser Arbeit Verwendung finden.

Abschließend sei bemerkt, daß bezüglich der Terme der Rutherfordgleichung noch einige Unsicherheit herrscht. So wird diskutiert, daß der Glasser-Greene-Johnson-Effekt einen zu W_0 äquivalenten Term enthalten müßte [26]. Entsprechendes gilt für den Polarisationsstromterm. Letzterer könnte zudem aus theoretischer Sicht auch destabilisierend wirken [27].

4.3 Eigenschaften der Inseldynamik

Anhand der verallgemeinerten Rutherfordgleichung lassen sich einige grundlegende Eigenschaften von neoklassischen Tearing Moden verstehen. Abbildung 4.1 veranschaulicht den Zusammenhang $dW/dt(W)$ für verschiedene Werte von β_p (ohne ECRH/ECCD-Stabilisierung). Die notwendige aber noch nicht hinreichende Voraussetzung für das Entstehen einer neoklassischen Tearing Mode ist das Überschreiten einer Grenze der eingeschlossenen Energie, ausgedrückt durch $\beta_p > \beta_{p,crit}$, mit

$$\beta_{p,crit} = \frac{3\sqrt{3}}{2\varepsilon^{3/4}} \frac{\sqrt{a_{Pol}g(\varepsilon)}(-\Delta'_0)\rho_p}{(a_{BS} - a_{GGJ}\varepsilon^{3/2}L_q/r_{res})^{3/2}} \sqrt{\frac{L_p}{L_q}} \quad . \tag{4.9}$$

Bei der Herleitung wird W_0 vernachlässigt [20]. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann eine seed island anwachsen, wenn sie die kritische Breite

$$W_{seed,crit} = \rho_p \sqrt{\frac{L_q}{\sqrt{\varepsilon} L_p} \frac{a_{Pol} g(\varepsilon)}{a_{BS} - a_{GGJ}(L_q/r_{res})\varepsilon^{3/2}}} \tag{4.10}$$

überschreitet. Bei der Herleitung wird zusätzlich zu $W_0 = 0$ noch $W_{seed,crit} \ll W_{sat}$ angenommen. Die kritische Größe der seed island sinkt mit zunehmendem β_p, allerdings ist diese Abhängigkeit in Gl.(4.10) aufgrund der Näherungen nicht mehr enthalten. Das zeitliche Wachstumsverhalten einer neoklassischen Tearing Mode läßt sich näherungsweise mit $W \sim \sqrt{t}$ ($dW/dt \sim 1/W$) beschreiben, während eine klassische Tearing Mode mit $W \sim t$ wächst. Dabei erreicht die Insel ihre Sättigungsbreite

$$W_{sat} = \frac{\beta_p \sqrt{\varepsilon} L_q}{(-\Delta_0') L_p} \left(a_{BS} - a_{GGJ} \frac{L_q}{r_{res}} \varepsilon^{3/2} \right) \quad . \tag{4.11}$$

Bei der Berechnung wurden W_0 und der Polarisationsstromterm vernachlässigt. Die gesättigte Inselbreite W_{sat} ist in guter Näherung proportional zu β_p. (Eine Berechnung von W_{sat} und W_{seed} mit $W_0 = 0$ als einziger Näherung findet man in [24].) Mit sinkendem β_p nimmt die Inselbreite entsprechend ab, bis β_p unter $\beta_{p,crit}$ sinkt und die Insel zerfällt.

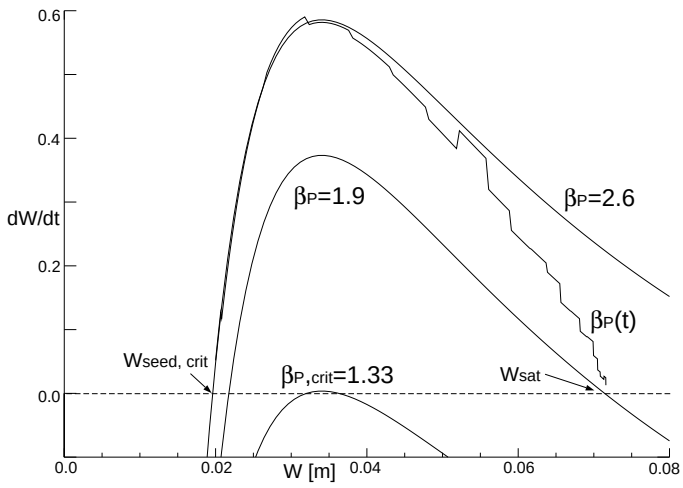

Abbildung 4.1: *Dynamik einer neoklassischen Tearing Mode gemäß Gl.(4.7) für verschiedene konstante Werte von β_p und für einen experimentell gemessenen mit wachsender Inselbreite sinkenden Verlauf von $\beta_p(t)$ (#11671, Modellparameter gemäß Kapitel 8).*

Mit steigender Inselbreite verliert das Plasma an Energie und β_p nimmt ab. Dementsprechend ist auch keine Konstanz der übrigen Parameter zu erwarten (τ_R sinkt beispielsweise mit T_e),

was jedoch in der folgenden Diskussion nicht weiter berücksichtigt wird. Für die frühe Wachstumsphase der Insel ist der Wert von β_p zu Beginn der Modenentwicklung maßgeblich, die gesättigte Inselbreite stellt sich hingegen im neuen Gleichgewicht mit einem typischerweise um 20-30% niedrigeren Wert von β_p ein. Damit ergibt sich aus Gl.(4.7) eine Form von $dW/dt(W(t))$, wie sie mit einem experimentell gemessenen $\beta_p(W(t))$-Verlauf ebenfalls in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Der signifikante β_p-Abfall setzt voraus, daß β_p zu Modenbeginn $\beta_{p,crit}$ deutlich übersteigt. Somit muß die Modenentstehung durch das Auftreten einer ausreichend großen seed island ausgelöst werden und nicht bereits durch das Überschreiten von $\beta_{p,crit}$. Dies erklärt auch das im Vergleich zur Zeitskala von β_p sehr schnelle experimentell beobachtete Modenwachstum [4]. Typische Größen von seed islands werden in der Literatur mit ca. $2cm$ angegeben, was mit den in Kapitel 8 beschriebenen Beobachtungen konsistent ist [4, 28]. Hier besteht allerdings eine beachtliche experimentelle Unsicherheit.

Die Vernachlässigung von W_0 in der Berechnung von $\beta_{p,crit}$, $W_{seed,crit}$ und W_{sat} dient der analytischen Auflösbarkeit und findet ihre Rechtfertigung in der Annahme, daß W_0 "klein" sei. Dieser Schluß ergibt sich, wenn man ausgehend von der parallelen Spitzerwärmeleitfähigkeit den Wert von W_0 in der Größenordnung von einigen Millimetern errechnet und dies zur gesättigten Inselbreite von einigen Zentimetern in Relation setzt. Berücksichtigt man die für die Anwendbarkeit der Wärmeleitungsgleichung notwendige Korrektur der parallelen Wärmeleitfähigkeit, so erhält man einen deutlich höheren Wert von $W_0 \approx 1.8cm$ (siehe Abschnitt 3.1.3). Bedenkt man weiterhin, daß das Inselwachstum mit einer seed island in ähnlicher Breite beginnt, so sollte W_0 zumindest in der Berechnung von $\beta_{p,crit}$ und $W_{seed,crit}$ keineswegs vernachlässigt werden. Es ist leicht einzusehen, daß $\beta_{p,crit}$ und $W_{seed,crit}$ aufgrund des stabilisierenden Effekts von W_0 größer sein müssen, während W_{sat} etwas kleiner wird.

Als wichtiges Argument für die Vernachlässigbarkeit von W_0 wird angeführt, daß die stabilisierende Wirkung von W_0 alleine nicht zur Erklärung der experimentell gefundenen Skalierungsgesetze von $\beta_{N,Modenbeginn} \sim \beta_{p,Modenbeginn}$ bei Modenbeginn geeignet sei, wohl aber der Polarisationsstromeffekt. Aus Gl.(4.9) folgt für $W_0 = 0$ die Abhängigkeit $\beta_{p,crit} \sim \rho_p \sim \sqrt{T}$. Vernachlässigt man den Polarisationsstromterm (und den Glasser-Greene-Johnson-Term, der auch in obiger Skalierung unwesentlich ist), folgt aus der Bedingung $W_{seed,crit} \approx W_{seed}$ für Modenbeginn unter den Annahmen $W_{seed} = const$ und $W_0 \ll W_{sat}$ die Skalierung $\beta_{p,Modenbeginn} \sim W_0^2$. Legt man die parallele Spitzerwärmeleitfähigkeit $\kappa_{\|} \sim T^{5/2}$ und die Gyro-Bohm-Skalierung für die senkrechte Wärmeleitfähigkeit $\kappa_{\perp} \sim T^{3/2}$ zugrunde, so erhält man die Skalierung $\beta_{p,Modenbeginn} \sim 1/\sqrt{T}$. Experimentelle Untersuchungen an ASDEX Upgrade haben die Skalierung $\beta_{N,Modenbeginn} \sim \sqrt{T} \sim \rho_p$ gezeigt [29]. Dies wird dahingehend interpretiert, daß der Polarisationsstromterm den wesentlichen Anteil an der Stabilisierung kleiner Inseln trägt. Ein Schwachpunkt dieser Argumentation liegt darin, daß $\beta_{p,crit}$ mit $\beta_{p,Modenbeginn}$ gleichgesetzt wird. Weiterhin wurde in der Diskussion bisher nicht beachtet, daß in der Berechnung von W_0 die Korrektur der Spitzerwärmeleitfähigkeit gemäß Gl.(3.8) berücksichtigt werden muß. Aufgrund der Skalierung der freien Weglänge ($\lambda_e \sim T^2$) folgt $\beta_{p,Modenbeginn} \sim \sqrt{T} \sim \rho_p$. Dies bedeutet, daß anhand der ρ_p-Skalierung von $\beta_{p,Modenbeginn}$ kein Schluß auf das Überwiegen des Polarisationsstromterms oder der Wirkung der unvollständigen Profilabflachung gezogen werden darf.

Als weitere Skalierung wurde an verschiedenen Experimenten (ASDEX Upgrade, COMPASS-D, DIII-D) der Einfluß der Plasmadichte und damit der Kollisionalität auf das β-Limit untersucht [4, 28, 30]. In der Theorie führt höhere Kollisionalität über den Faktor $g(\varepsilon)$ im Polarisationsstromterm zu einem höheren β-Limit. Die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß der Übergang zwischen den aus kinetischen Berechnungen erhältlichen Grenzwerten $g(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$ für niedrige Kollisionalität und $g(\varepsilon) = 1$ für hohe Kollisionalität bei Erreichen einer Kollisionalitätsschwelle annähernd sprunghaft verläuft. Diese Skalierung deutet darauf hin, daß der Stabilisierungseffekt des Polarisationsstroms auf kleine Inseln nicht vernachlässigbar ist.

4.4 Modellierung des gekoppelten Systems Plasma - Insel

Die Modellierung der Inseldynamik mit Hilfe der verallgemeinerten Rutherfordgleichung (4.7) erfordert Informationen über die Änderung von β_p während der Inselbreiteentwicklung. Mit Hilfe eines Modells für $\beta_p(W)$ läßt sich ein konsistentes Modell des gekoppelten Systems Plasma-Insel konstruieren. Zur weiteren Verfeinerung müßten auch andere von der Inselbreite beeinflußte Größen wie beispielsweise τ_R modelliert werden, jedoch wird davon in dem im folgenden vorgestellten einfachen Modell abgesehen. Die Modellierung von β_p erfolgt über den Ansatz

$$\frac{dT_e}{dt} = P_{Heiz} - \frac{T_e}{\tau_E(W)} \tag{4.12}$$

für die Plasmatemperatur an der resonanten Fläche, die hier synonym für die Energie eines Plasmateilchens (in eV) steht. Dabei ist P_{Heiz} die Heizleistung in eV/s pro Plasmateilchen. Dies läßt sich über $\beta_p = 2\mu_0 p/B_p^2$ mit $p = 2(n_e T_e)e$ umrechnen. Der Einfluß der Insel wird über die inselbreiteabhängige Energieeinschlußzeit

$$\tau_E(W) = \frac{\tau_{E0}}{\sqrt{P/P_0}} \left(1 - \frac{W}{W_{max}}\right)^2 \tag{4.13}$$

modelliert [31, 32]. Damit wird das System Plasma-Insel mit einem System von zwei nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit beschrieben, die sich numerisch lösen lassen (Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, IDL-Standardroutine). Abbildung 4.2 zeigt das Verhalten des Systems bei Simulation von vollständiger und teilweiser ECCD-Stabilisierung im Vergleich zum nichtstabilisierten System. Für das Nachvollziehen experimenteller Ergebnisse ist das vorgestellte Modell jedoch zu stark vereinfacht. Das zur Stabilisierung notwendige Verhältnis des ECCD-Stroms zum Plasmastrom von 0.4% liegt unterhalb der erwarteten Größenordnung von 1-2%. Ein weiterentwickeltes Modell könnte insbesondere für die Planung zukünftiger ECCD-Modenstabilisierungseinrichtungen von Bedeutung werden.

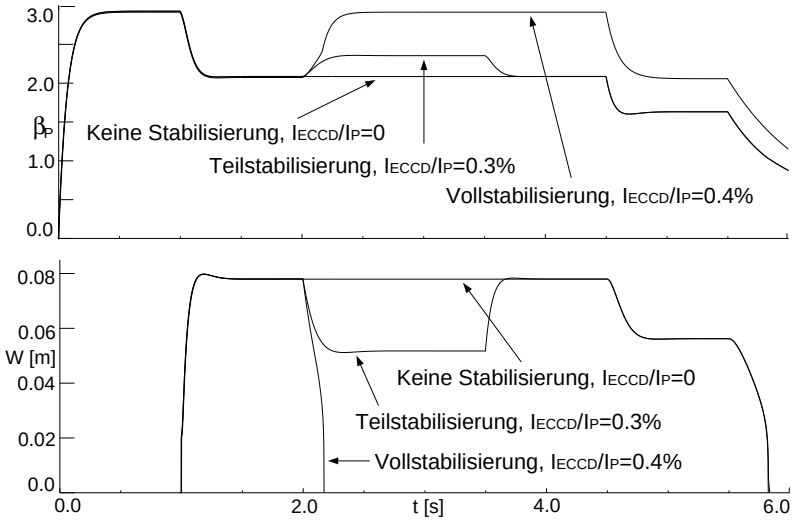

Abbildung 4.2: *Simulation von $\beta_p(t)$ (oben) und $W(t)$ (unten) mit dem Modell des gekoppelten Systems Plasma-Insel mit vollständiger, teilweiser und ohne ECCD-Stabilisierung (Parameter aus Kapitel 8, $a_{BS} = 2.1$, $a_{GGJ} = 10.0$, $a_{Pol} = 0.3$, $\tau_R = 0.71s$, $\tau_{E0} = 0.07s$, $W_{max} = 0.5m$, $P_{Heiz} = P_0 = 30.58keV/s$ pro Teilchen).*

4.5 Zusammenfassung

Die Dynamik neoklassischer Tearing Moden läßt sich mit der verallgemeinerten Rutherfordgleichung theoretisch beschreiben, in welche die Stabilität des Gleichgewichtsstromprofils gegen Tearing Moden ($\Delta_0' < 0$), die destabilisierende Wirkung des verringerten Bootstrapstroms und die stabilisierenden Wirkungen der unvollständigen Druckprofilabflachung kleiner Inseln (W_0), der Torusform (Glasser-Greene-Johnson-Effekt) und des Polarisationsstromeffekts eingehen. Zusätzlich kann die ECCD-Stabilisierungswirkung berücksichtigt werden.

Die stabilisierende Wirkung der unvollständigen Druckprofilabflachung kleiner Inseln (W_0) kann nicht vernachlässigt werden, wenn die Korrektur der parallelen Spitzerwärmeleitfähigkeit berücksichtigt wird, die zur Verwendung der Wärmeleitungsgleichung erforderlich ist. Weiterhin läßt sich damit die experimentell gefundene Skalierung $\beta_{p,Modenbeginn} \sim \rho_p$ nicht nur mit dem Polarisationsstromeffekt sondern auch mit der Wirkung von W_0 erklären. Somit erscheint ein Schluß auf die Dominanz des Polarisationsstromeffekts bei der Stabilisierung kleiner Inseln nicht gerechtfertigt.

Der Bootstrapterm, der Glasser-Greene-Johnson-Term und der Polarisationsstromterm enthalten freie Parameter, die theoretisch schwierig zu erfassende Effekte (z. B. Geometrieeinflüsse) beinhalten. Ihre Werte müssen aus dem Experiment bestimmt werden. Die Kenntnis der freien Parameter ist insbesondere für die Berechnung der zur ECCD-Modenstabilisierung notwendigen Mikrowellenleistung erforderlich. Für diese Berechnung könnte ein weiterentwickeltes Modell des gekoppelten Systems Plasma-Insel bedeutsam werden. Die Bestimmung der freien Parameter wird in Kapitel 8 mit der in Kapitel 5 beschriebenen Methode durchgeführt.

Kapitel 5

Untersuchungsmethoden für Struktur und Dynamik

Für die experimentelle Untersuchung magnetischer Inseln lassen sich Messungen der Magnetfeldstörungen oder des Plasmatemperaturprofils auswerten. In diesem Kapitel wird zunächst diskutiert, wie anhand des Plasmatemperaturprofils die Geometrie einer magnetischen Insel abgeschätzt werden kann. Daraufhin wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem ein Rückschluß vom beobachteten Temperaturprofil auf die magnetische Flußflächenkonfiguration und den nichtlinearen Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$ gezogen werden kann. Abschließend wird ein Verfahren zur Untersuchung der Inseldynamik und zur Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung erläutert. Eine ausführliche Erklärung der Diagnostiken (ECE und Mirnov) und der Datenauswertung folgt im nächsten Kapitel.

5.1 Geometrieabschätzung magnetischer Inseln

Ein erster Eindruck von der Geometrie einer magnetischen Insel läßt sich aus der visuellen Betrachtung des Temperaturprofils gewinnen. Zur Bestimmung der Lage der resonanten Fläche und der Inselbreite können die radialen Verläufe der Fourierkomponenten des Temperaturprofils ausgewertet werden. Die analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung zeigt, daß die Nullstellen der Fourierkomponenten einer symmetrischen Insel mit der Lage der resonanten Fläche übereinstimmen und die Maxima der ersten Fourierkomponente mit der Lage der Separatrix am O-Punkt zusammenfallen, ihr Abstand also der Inselbreite entspricht. Die numerische Temperaturprofilmodellierung realistischer asymmetrischer Inseln zeigt in drei Punkten Abweichungen im Verlauf der Fourierkomponenten. Die Höhe der Maxima ist unterschiedlich, die Lage der Maxima wird vom Wärmeleitfähigkeitsverhältnis beeinflußt und die Nullstellen sind gegenüber der Position der ungestörten resonanten Fläche verschoben. Die Höhe der Maxima geht allerdings in die Geometrieabschätzung nicht ein, die Abweichung der Maxima von der O-Punktseparatrixposition ist unter realistischen Bedingungen nicht signifikant und die Nullstellenverschiebung ist geringfügig. Der Abstand der Maxima stellt damit ein gutes Maß für die Inselbreite dar, und die Lage der resonanten Fläche kann unter der Voraussetzung

eines flachen Temperaturprofils im Inselinneren anhand der Nullstelle bestimmt werden. Die Genauigkeit der Auswertung ist primär durch die radiale Auflösung der Messung begrenzt.

Die experimentelle Beobachtung zeigt allerdings, daß die Temperaturprofile magnetischer Inseln in ASDEX Upgrade keineswegs vollständig abgeflacht sind, sondern Substrukturen aufweisen. Diese führen zu einer Beeinflussung der radialen Verläufe der Fourierkomponenten, insbesondere zu einer signifikanten Verschiebung der Nullstellen. Abbildung 5.1 verdeutlicht dies anhand eines flachen Temperaturprofils (aus der analytischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung), in das verschiedene Substrukturen hineinmodelliert sind, wie sie im Prinzip auch im Experiment beobachtet werden.

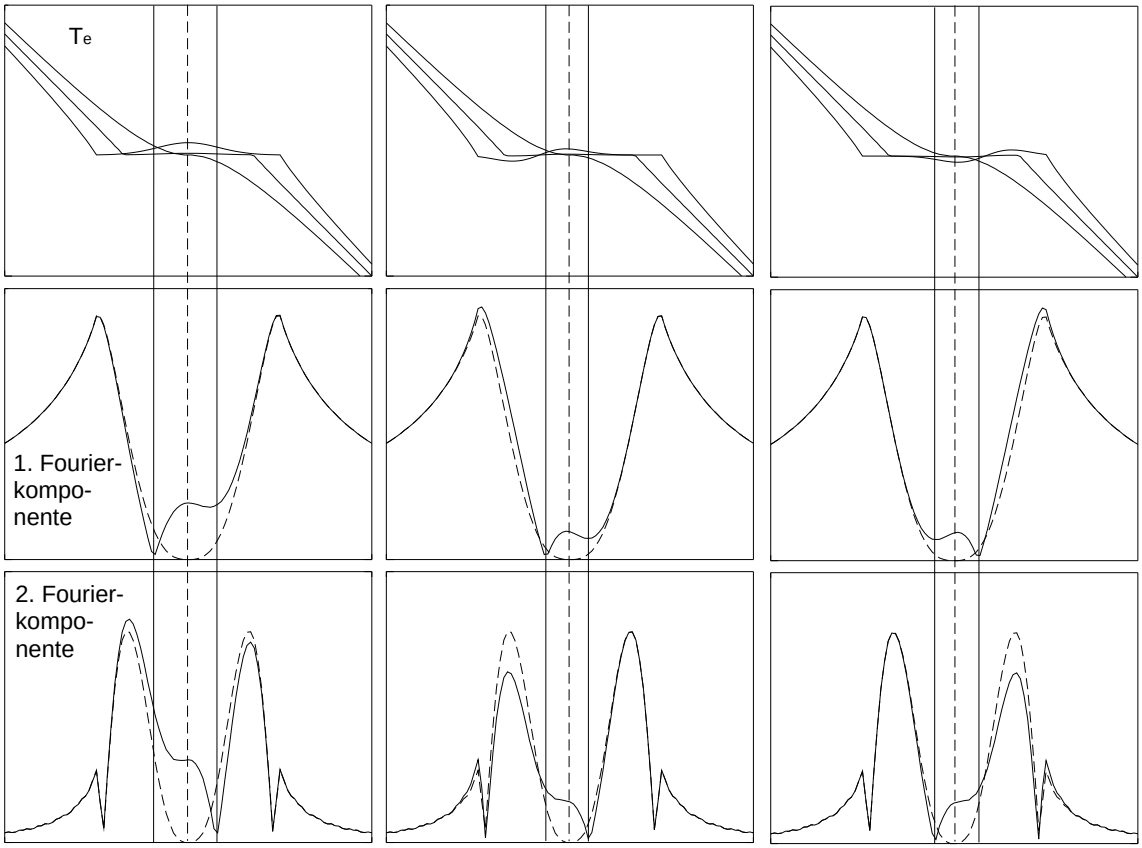

Abbildung 5.1: *Simulation der Auswirkungen von Temperatursubstrukturen innerhalb einer magnetischen Insel auf die Fourierkomponenten (zentriertes Temperaturmaximum links, nichtzentrierte Minimum-Maximum-Struktur Mitte und rechts).*

Ein in der Inselmitte zentriertes lokales Temperaturmaximum (links) führt zu einer gegensinnigen Verschiebung der Nulldurchgänge von erster und zweiter Fourierkomponente und zur Ausbildung eines 'Plateaus' im radialen Verlauf. Eine Verschiebung des Temperaturmaximums zum Plasmainneren oder -äußeren beeinflußt die Lage der Nulldurchgänge und die Ausformung des 'Plateaus', bewirkt aber weiterhin eine gegensinnige Verschiebung der Nulldurchgänge in gleichbleibender Richtung. Die Nullstelle der ersten Fourierkomponente

liegt an der Position, wo sich X- und O-Punktprofil schneiden. Eine Minimum-Maximum-Substruktur (Mitte, rechts) führt nur dann zu einer gegensinnigen Verschiebung der ersten und zweiten Fourierkomponente, wenn sie nicht in der Inselmitte zentriert ist. Auch hier treten wieder 'Plateaus' im radialen Verlauf auf. Im Gegensatz zur Maximum-Substruktur hängt die Verschiebungsrichtung der Nullstellen hier von der Verschiebungsrichtung der Substruktur ab.

Die Temperatursubstruktur in den experimentell beobachteten Inseln hat zur Folge, daß die Lage der resonanten Fläche anhand der Nullstelle der ersten Fourierkomponente nur noch grob bestimmt werden kann. Mit Hilfe der zweiten Fourierkomponente ist durch Mittelung der Nullstellen eine wesentlich genauere Bestimmung möglich, wobei die resonante Fläche aber keineswegs genau mittig zwischen den Nullstellen liegen muß. In der Praxis läßt sich bei Verwendung der regulär aufgenommenen ECE-Daten aufgrund mangelnder Zeitauflösung nur die erste Fourierkomponente neoklassischer Tearing Moden bestimmen. Eine zusätzliche Messung mit erhöhter Zeitauflösung, die in einigen Experimenten durchgeführt wurde, erlaubt auch die Darstellung der zweiten Fourierkomponente. Die höheren Komponenten lassen sich aufgrund der beschränkten radialen Auflösung nicht mehr sinnvoll auswerten.

5.2 Rekonstruktion der Flußflächenkonfiguration

Die Verknüpfung des Temperaturprofils einer magnetischen Insel mit der Flußflächenkonfiguration eröffnet über die einfache Geometrieabschätzung hinaus auch einen Zugang zur Rekonstruktion der magnetischen Struktur. Auf diese Weise können prinzipiell der helikale Störfluß und der nichtlineare Stabilitätsparameter $\Delta'(W)$ bestimmt werden. Dessen Bestimmung über die Rekonstruktion des Plasmastromprofils ist mit erheblichen Unsicherheiten behaftet, da in die Berechnung des Störflusses mit der Tearing-Mode-Gleichung die Ableitung des Stromprofils eingeht. Zur Bestimmung von $\Delta'(W)$ aus dem Temperaturprofil wurde bereits ein Verfahren entwickelt, das auf einer analytischen Modellierung der Flußflächenkonfiguration und des damit verknüpften Temperaturprofils basiert [33]. Aufgrund der enthaltenen Vereinfachungen ist es jedoch für die asymmetrischen Inseln in ASDEX Upgrade nicht geeignet. Im folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, welches auf dem realistischen analytischen Modell der Flußflächenkonfiguration und der numerischen Modellierung des Temperaturprofils mit der Wärmeleitungsgleichung basiert.

Mit Gl.(2.22) läßt sich durch Variation der Parameter eine Reihe verschiedener Störflüsse und Inselgeometrien modellieren. Für jede Konfiguration muß die Wärmeleitungsgleichung numerisch gelöst und die erste Fourierkomponente des Temperaturprofils berechnet werden. Die Verwendung der höheren Komponenten ist wenig sinnvoll, da sie mit der ECE-Diagnostik nicht mit ausreichender radialer Auflösung gemessen werden können. Mit der Zuordnung einer passenden modellierten ersten Fourierkomponente zum experimentellen Ergebnis erhält man eine Rekonstruktion der Flußflächengeometrie und damit $\Delta'(W)$. Bei der Zuordnung ist nur der relative Verlauf der Fourierkomponenten entscheidend, da die Absolutwerte von der Heizleistung bzw. im Modell von den Randbedingungen abhängen. Dazu werden die Abstände zwischen den Maxima und der Nullstelle (normiert auf den kleinen Plasmaradius) sowie das Größenverhältnis der Maxima als robuste charakteristische Kennzeichen der Fourierkompo-

nenten verwendet und nach optimaler Übereinstimmung gesucht.

Die Erstellung der Datenbasis ist mit drei grundlegenden Problemen verknüpft. Als erstes kann nur eine endliche Anzahl verschiedener Flußflächenkonfigurationen zugrunde gelegt werden, wobei zusätzlich die Einschränkungen des verwendeten Flußflächenmodells bezüglich der modellierbaren Formen zu beachten ist. Als zweites können die experimentell beobachteten Temperatursubstrukturen nicht modelliert werden, sodaß die Nullstellenverschiebung der Fourierkomponenten unberücksichtigt bleibt. Als drittes ist zu fragen, ob die drei einfachen Kenngrößen der Fourierkomponenten prinzipiell eine eindeutige Bestimmung zulassen. Insbesondere im Hinblick auf die Temperatursubstrukturen ist zu vermuten, daß die Einbeziehung zumindest der zweiten Fourierkomponente in die Auswertung notwendig ist.

Aufgrund der teilweise geringen Unterschiede, die bei verschiedenen Flußflächenkonfigurationen in den Fourierkomponenten auftreten, wird die Zuverlässigkeit der Flußflächenrekonstruktion und $\Delta'(W)$-Bestimmung nicht alleine von den Limitierungen der Modelldatenbasis eingeschränkt, sondern auch von der Genauigkeit der experimentellen Kenngrößenbestimmung. Hier sind drei Probleme zu nennen. Die radiale Auflösung ist für eine exakte Messung des radialen Verlaufs der ersten Fourierkomponente teilweise zu gering und für die Messung der zweiten und höheren unzulänglich (sofern die zeitliche Auflösung ihre Erfassung überhaupt ermöglicht). Ungenauigkeiten in der Kalibration der Diagnostik können zu Verfälschungen der Fourieramplituden führen. Zu diesen technischen Problemen kommt noch hinzu, daß sich in vielen Fällen die Fourierkomponenten gekoppelter Moden überlagern, sodaß eine saubere Trennung oder eine gemeinsame Behandlung erforderlich wären.

Das vorgestellte Verfahren ist daher als ein Ansatz zu betrachten, um aus dem Temperaturprofil die Flußflächenkonfiguration zu rekonstruieren und den Wert des nichtlinearen Stabilitätsparameters $\Delta'(W)$ zu bestimmen. Eine adäquate Verläßlichkeit setzt eine optimierte Neuberechnung des Modelldatensatzes voraus. Hierbei stellt insbesondere die Berücksichtigung der Temperatursubstrukturen eine hohe Herausforderung dar. Deutliche Verbesserungen sind auch seitens der experimentellen Messung notwendig, wobei insbesondere gekoppelte Moden weitere Überlegungen erfordern.

5.3 Bestimmung der Parameter der Rutherfordgleichung

Die experimentelle Bestimmung der freien Parameter a_{BS}, a_{GGJ} und a_{Pol} in der verallgemeinerten Rutherfordgleichung (4.7) für die Inseldynamik ist über die Anpassung der Funktion an die gemessene Inselbreiteentwicklung $W(t)$ möglich. Zunächst erscheint es naheliegend, die zeitliche Ableitung von $W(t)$ zu bilden und die Rutherfordgleichung anzupassen. Dies erfordert allerdings eine starke Glättung von $W(t)$, die das Ergebnis beeinflussen kann. Daher wird in dieser Arbeit die Rutherfordgleichung unter Variation der freien Parameter numerisch gelöst und jeweils mit der experimentell gemessenen Inselbreiteentwicklung verglichen. Anhand eines Fehlerkriteriums lassen sich die besten Anpassungsparameter finden. Eine perfekte Anpassung der Rutherfordgleichung kann nicht erwartet werden, da die Bestimmung der Plasmaparameter der Rutherfordgleichung und ihrer zeitlichen Entwicklung sowie die Messung des Inselbreiteverlaufs mit deutlichen Ungenauigkeiten verbunden sind. Daher ist nur eine

Eingrenzung des Parameterbereichs möglich.

5.3.1 Bestimmungsverfahren für die freien Parameter

Die numerische Lösung der Rutherfordgleichung wird ausgehend von einer Anfangsbreite W_{Start} zum Anfangszeitpunkt t_{Start} zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten im Abstand von $10ms$ bis zum Zeitpunkt t_{Ende} berechnet (Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, IDL-Standardroutine). Negative Inselbreiten sind nicht möglich, sodaß ein negatives Ergebnis eines Rechenschritts auf Null gesetzt werden muß. Als Anfangs- und Endzeitpunkt t_{Start} und t_{Ende} dienen die experimentell bestimmten Zeitpunkte des Modenbeginns und -endes. Anfangsbreite W_{Start} ist die seed island Breite, die sich an der experimentellen Inselbreitemessung und am Richtwert $W_{seed} \approx 2cm$ orientiert. Als Eingangsdaten dienen der experimentell gemessene zeitliche Verlauf von $\beta_p(t)$ und von $\tau_R(t)$. Die übrigen Plasmaparameter lassen sich nicht oder nur schwerlich in ihrer zeitlichen Entwicklung verfolgen und sollten großenteils keinen signifikanten Änderungen unterworfen sein. Daher werden ihre Werte konstant gehalten.

Die freien Parameter der Rutherfordgleichung werden in einem sukzessive eingeengten Bereich unabhängig voneinander variiert und die Lösungen nach steigendem Anpassungsfehler sortiert. Zur Berechnung des Anpassungsfehlers wird zunächst für jeden Berechnungszeitpunkt die gemessene Inselbreite (die eine höhere Zeitauflösung besitzt) in einem Intervall von $10ms$ um den jeweiligen Zeitpunkt gemittelt. Dann wird die Standardabweichung der modellierten Inselbreiten von den gemittelten gemessenen gebildet. Die Inselentstehungsphase wird bei der Berechnung der Standardabweichung nicht berücksichtigt, da die experimentellen Ungenauigkeiten in dieser Phase am größten sind. Diese Phase geht dennoch indirekt in die Auswertung ein, da sich hier entscheidet, ob die modellierte Insel mit der gegebenen Parameterkombination anwachsen kann oder gleich zerfällt. Die Inselzerfallsphase zwischen $t_{Fehler,2}$ und t_{Ende} geht mit dem gleichen Gewicht ein wie der übrige Zeitraum zwischen $t_{Fehler,1}$ und $t_{Fehler,2}$. Zusätzlich wird gefordert, daß die modellierte Inselbreite am Ende des Lösungszeitraums den Wert Null erreicht haben muß. Diese relative Übergewichtung der Modenzerfallphase ermöglicht eine angemessene Berücksichtigung der Wirkungen der unvollständigen Druckprofilabflachung und des Polarisationsstromeffekts, die nur bei kleinen Inselbreiten bedeutsam sind.

5.3.2 Bestimmung der Eingangsgrößen und Plasmaparameter

Die Lage der resonanten Fläche r_{res} und die absolute Inselbreite zu einzelnen Zeitpunkten lassen sich mit Hilfe der Inselgeometrieabschätzung aus dem Temperaturprofil bestimmen. Die absolute Inselbreite dient zur Skalierung des relativen Inselbreiteverlaufs, der sich mit dem Signal der Mirnovspulen nachvollziehen läßt (Abschnitt 6.2). Die Elektronentemperaturmessung an der resonanten Fläche liefert die Daten für die Berechnung der zeitlichen Entwicklung des Plasmadrucks $p = (n_i T_i + n_e T_e)e \approx 2(n_e T_e)e$ (zusammen mit der Elektronendichte n_e aus der Entfaltung der interferometrischen Messung) und damit von $\beta_p(t)$. Weiterhin läßt sich mit T_e (zusammen mit der effektiven Ionenladung $Z_{eff}(t)$) die zeitliche Entwicklung

der resistiven Zeitskala $\tau_R(t)$ berechnen, worin die neoklassische Korrektur der klassischen elektrischen Spitzerleitfähigkeit einbezogen werden muß (mit Coloumblogarithmus $\ln\lambda = 17$) [15, 21, 34, 35]:

$$\sigma_{Neo} = \sigma_{Spitzer}\left(1 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) \tag{5.1}$$

$$\sigma_{Spitzer} = 1.961\frac{3\varepsilon_0^2(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{m_e e}}\left(2 - Z_{eff}^{-1/3}\right)\frac{T_e^{3/2}}{Z_{eff}\ln\lambda} \quad . \tag{5.2}$$

Für den (als konstant angesetzten) poloidalen Ionenlarmorradius ρ_p wird der Mittelwert von T_e während der Modendauer verwendet. Die Darstellung des radialen Druckprofils (gemittelt über mehrere Inseln) erlaubt die Abschätzung der Druckabfallänge L_p (ebenfalls als zeitlich konstant angenommen). Für L_q erhält man aus einer Modellvorstellung für das Stromprofil unter Beachtung des experimentell beobachteten q-Wertes am Plasmarand einen Wert von ca. 0.3 m. Für W_0 wird wie in Abschnitt 4.2 erläutert ein Wert von $1.8cm$ und für den nichtlinearen Stabilitätsparameter $\Delta_0' = -m/r_{res}$ verwendet.

5.3.3 Eindeutigkeit der freien Parameter

Unter der Annahme, daß die verallgemeinerte Rutherfordgleichung (4.7) die Inselbreiteentwicklung exakt beschreibt, müssen sich die freien Parameter bei genauer Kenntnis aller Größen mit dem oben beschriebenen Verfahren eindeutig bestimmen lassen. Die experimentellen Messungen und die eingehenden Modellannahmen (z.B. für $\Delta'(W)$) sind jedoch mit nicht unerheblichen Ungenauigkeiten verbunden, sodaß keine exakte Übereinstimmung zwischen experimentell beobachteter Inselbreite und Lösung der Rutherfordgleichung erwartet werden kann. Daher stellt sich die Frage, inwieweit verschiedene Parametersätze zu sehr ähnlichen Ergebnissen führen können, sodaß der 'beste' Parametersatz angesichts kleiner Unterschiede in den Anpassungsfehlern nicht sinnvollerweise als der 'richtige' identifiziert werden darf.

Eine magnetische Insel ist während des größten Teils ihrer Existenzperiode 'groß' in dem Sinne, daß die unvollständige Druckabflachung im Bootstrapterm (ausgedrückt durch W_0) und der Polarisationsstromterm nur noch einen geringen Beitrag liefern und näherungsweise vernachlässigt werden können. Damit haben sowohl der Bootstrap- als auch der Glasser-Greene-Johnson-Term dieselbe Abhängigkeit von der Inselbreite und die Rutherfordgleichung (Gl.(4.7)) vereinfacht sich zu:

$$\frac{\tau_R}{r_{res}^2}\frac{dW}{dt} = \Delta_0' + \beta_p\sqrt{\varepsilon}\frac{L_q}{L_p}\left(a_{BS} - \frac{\varepsilon^{3/2}L_q}{r_{res}}a_{GGJ}\right)\frac{1}{W} \quad , \tag{5.3}$$

wobei sich die beiden freien Parameter zu einem gemeinsamen $a_{ges} = a_{BS} - \varepsilon^{3/2}L_q/r_{res}\cdot a_{GGJ}$ zusammenfassen lassen. Daraus wird ersichtlich, daß während der Phase mit 'großer' Inselbreite viele auf einer Gerade mit der Steigung $r_{res}/(\varepsilon^{3/2}L_q)$ liegende Wertepaare a_{BS} und a_{GGJ}

nahezu identische Ergebnisse liefern, die nur geringfügig von W_0 und a_{Pol} beeinflußt werden. Löst man Gl.(4.11) für W_{sat} nach a_{BS} auf, so kann man erkennen, daß die Lage der Geraden von $(-\Delta_0')L_p/(\sqrt{\varepsilon}L_q)$ beeinflußt wird. Unterscheidbar sind Bootstrap- und Glasser-Greene-Johnson-Term nur im Bereich 'kleiner' Inselbreite. In diesem Bereich hat aber auch der Polarisationsstromterm einen wichtigen Einfluß. Aufgrund des komplexen Zusammenwirkens der Terme ist es denkbar, daß auch bei kleinen Inselbreiten verschiedene Kombinationen von a_{BS}, a_{GGJ} und a_{Pol} zu ähnlichem Verhalten führen. Folglich ist nicht zu erwarten, daß durch die Anpassung der Lösung der Rutherfordgleichung an den experimentell gemessenen Inselbreiteverlauf der eindeutig richtige Satz der freien Parameter bestimmt werden kann. Vielmehr wird sich nur eine Menge geeigneter Parametersätze eingrenzen lassen. Die nicht vernachlässigbare Größe von W_0 sollte dazu führen, daß diese nur auf einem Teil der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden angesiedelt sind. Eine weitere Einengung könnte durch die Auswertung mehrerer Entladungen gelingen, worin jedoch ebenfalls wieder verschiedene Fehler eingehen. Schließlich bleibt noch zu erwähnen, daß im Rahmen einer exakteren Theorie auch im Glasser-Greene-Johnson-Effekt und im Polarisationsstromeffekt eine zu W_0 äquivalente Korrektur eingeführt werden müßte, die eine unendliche Stabilisierungswirkung bei verschwindender Inselbreite verhindert. Dies könnte die Differenzierbarkeit insbesondere von Bootstrap- und Glasser-Greene-Johnson-Effekt weiter erschweren.

5.4 Zusammenfassung

Die Inselgeometrie läßt sich mit Hilfe der ersten und zweiten Fourierkomponente des Temperaturprofils abschätzen:

- Der Abstand der Maxima der ersten Fourierkomponente ist ein Maß für die Inselbreite.
- Die resonante Fläche ist zwischen den Nullstellen der ersten und zweiten Fourierkomponente lokalisiert.

Die Rekonstruktion der Flußflächengeometrie und die Bestimmung des nichtlinearen Stabilitätsparameters $\Delta'(W)$ aus experimentellen Temperaturprofilmessungen scheinen mit Hilfe der Modellierung von Flußflächenkonfigurationen und Temperaturprofilen grundsätzlich möglich zu sein. Die Weiterentwicklung zu einem zuverlässigen Verfahren ist jedoch mit erheblichen Herausforderungen verbunden:

- Die auszuwertenden Kenngrößen der Fourierkomponenten der Temperaturprofile sind so zu wählen, daß das Verfahren möglichst eindeutige Resultate liefern kann.
- Die Modelldatenbasis muß optimiert werden, wobei insbesondere die bisher nicht modellierbaren Temperatursubstrukturen berücksichtigt werden müssen.
- Die experimentelle Temperaturprofilmessung ist weiterzuentwickeln.

- Die Anwendung des Verfahrens auf gekoppelte Moden erfordert weitere Maßnahmen wie die Trennung der Fourierkomponenten oder die gemeinsame Behandlung der Moden.

Die freien Parameter der Rutherfordgleichung können über eine Anpassung an den experimentell gemessenen Inselbreiteverlauf bestimmt werden. Aufgrund der Beschaffenheit der Gleichung und der experimentellen Ungenauigkeiten kann keine eindeutige Bestimmung sondern nur eine Eingrenzung auf einen Parameterbereich erwartet werden. Dabei werden die Kombinationen von a_{BS} und a_{Pol} näherungsweise auf einer Geraden liegen.

Kapitel 6

Experimentelle Diagnostiken

In dieser Arbeit wird das Elektronentemperaturprofil des Plasmas mit magnetischen Inseln mit Hilfe der Elektronenzyklotronemissionsspektroskopie (ECE) experimentell gemessen. Im Gegensatz zur Soft-X-Ray-Diagnostik (SXR) mißt die ECE-Diagnostik direkt die Elektronentemperatur an definierten Orten und erfordert somit weder eine tomographische Auswertung noch weitere Daten zur Temperaturberechnung. Gegenüber der Thomsonstreuungs-Diagnostik bietet die ECE-Diagnostik den Vorteil einer kontinuierlichen Messung, sodaß die zeitliche Auflösung nur durch die Abtastrate der Signaldigitalisierung bestimmt ist. (Die Wiederholrate der Thomsonstreuungs-Diagnostik ist für die detaillierte Untersuchung neoklassischer Tearing Moden zu gering.) Informationen über die Störung des Magnetfeldes sind aus der Mirnovdiagnostik erhältlich. Sie wird in dieser Arbeit zur Bestimmung der zeitlichen Entwicklung der Inselbreite und als Inselphasenreferenz genutzt. Eine Rekonstruktion der Inselgeometrie aus den Mirnovsignalen setzt weitgehende Modellannahmen voraus [8]. Im folgenden Kapitel werden die technischen Grundlagen der ECE- und Mirnovdiagnostik sowie die Datenauswertung dargestellt.

6.1 Messung des Elektronentemperaturprofils mit ECE

Die ECE-Diagnostik mißt die Elektronentemperatur an verschiedenen radialen Positionen in einem poloidalen Querschnitt im überwiegend toroidal rotierenden Plasma. Aufgrund der Verschraubung der magnetischen Feldlinien scheinen die magnetischen Inseln im poloidalen Querschnitt gesehen zu rotieren. Aus der resultierenden zeitlichen Modulation der Temperatursignale an verschiedenen radialen Positionen läßt sich das Temperaturprofil darstellen. Aufgrund der im allgemeinen zur direkten Darstellung des Temperaturprofils neoklassischer Tearing Moden zu geringen Abtastrate der regulären Datenerfassung muß eine weitere Signalbearbeitung erfolgen oder eine zusätzliche Datenerfassung mit erhöhter Abtastrate verwendet werden.

6.1.1 Physikalische und technische Grundlagen der ECE

Die ECE-Diagnostik mißt die Elektronentemperatur anhand der Intensität der Mikrowellenstrahlung, welche von den im Magnetfeld gyrierenden Elektronen ausgesandt wird. Bei einem Magnetfeld von $2T$ beispielsweise beträgt die Elektronenzyklotronfrequenz $\nu_c = eB/(2\pi m_e) = 56GHz$. Das Magnetfeld fällt im Torus nach außen hin mit $1/R$ ab, sodaß mittels frequenzselektiver Intensitätsmessung eine lokale Temperaturmessung möglich ist. Im Bereich der Elektronenzyklotronfrequenzen ist das ansonsten optisch dünne Plasma optisch dick, da hier eine hohe Reabsorptionswahrscheinlichkeit besteht. Somit entspricht die Strahlung in diesem Frequenzbereich der eines schwarzen Körpers. Unter der Annahme einer Maxwellverteilung für die Elektronengeschwindigkeit ist die Strahlungsintensität durch das Planck-Gesetz gegeben, welches im relevanten Frequenzbereich durch das Rayleigh-Jeans-Gesetz genähert werden kann. Die Elektronentemperatur an einer radialen Position ist demnach direkt proportional zur Intensität der Strahlung der entsprechenden Frequenz.

Abbildung 6.1 veranschaulicht, wie an einer toroidalen Position am Gefäß die Messung an verschiedenen radialen Positionen in einem poloidalen Plasmaquerschnitt vorgenommen wird. Aufgrund des Impulsübertrags durch die zur Heizung injizierten Neutralteilchen rotiert das Plasma in toroidale Richtung mit der Geschwindigkeit v_{Pl}. Im poloidalen Querschnitt gesehen rotieren die magnetischen Inseln aufgrund der Feldlinienverschraubung mit der Modenfrequenz $\nu = nv_{Pl}/(2\pi R_0)$. (Anhand der Beobachtung läßt sich nicht zwischen toroidaler und poloidaler Rotation unterscheiden. Dies ist vergleichbar mit der Betrachtung eines Abschnitts eines geschobenen oder gedrehten Maibaums. Im allgemeinen ist die Rotation aber überwiegend toroidal.) Die idealisiert zu erwartenden Meßsignale verschiedener radialer Positionen in Inselnähe sind sinusförmige Temperaturschwankungen, welche innerhalb der Insel aufgrund des Temperaturplateaus abgeflacht sind. Dies entspricht einem Spektrum an Oberwellen. An der resonanten Fläche findet ein Phasensprung statt, weil zum Plasmainneren hin die Temperatur vom X- zum O-Punkt sinkt, während sie zum Plasmaäußeren hin vom X- zum O-Punkt steigt. Ein Wellenzug entspricht einer Insel.

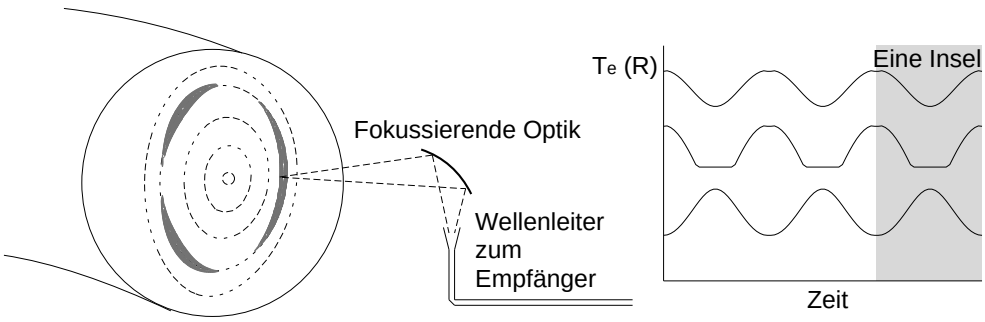

Abbildung 6.1: *Die ECE-Diagnostik mißt an einer toroidalen Position die Elektronentemperatur an verschiedenen radialen Positionen im Plasma, welches in der Querschnittsebene gesehen poloidal rotiert. Als Meßsignal erhält man in Inselnähe sinusförmige Temperaturschwankungen, welche innerhalb der Insel entsprechend der abgeflachten Temperatur abgeschnitten sind.*

Die Mikrowellenstrahlung wird auf der Außenseite des Torus über eine fokussierende Optik in einen Hohlleiter abgebildet und zum Empfänger übertragen. An ASDEX Upgrade wird die zweite Harmonische in X-Mode gemessen (d.h. der elektrische Feldvektor steht senkrecht zum Magnetfeld). Die frequenzselektive Messung der Mikrowellenintensität erfolgt mit einem Heterodyneradiometer, dessen schematischer Aufbau in Abbildung 6.2 dargestellt ist. Die Mikrowellen werden zunächst in breitbandigen Mischern mit dem Signal von Lokaloszillatoren gemischt. Die wesentlich niederfrequenteren Signale der unteren und oberen Seitenbänder werden verstärkt und mit verschiedenen Bandpaßfiltern (im Bereich $2-17GHz$) gefiltert, um die zu verschiedenen radialen Bereichen im Plasma gehörenden Signale zu isolieren. Ihre Intensitäten werden mit Schottky-Dioden detektiert, deren Signale verstärkt, digitalisiert und gespeichert werden.

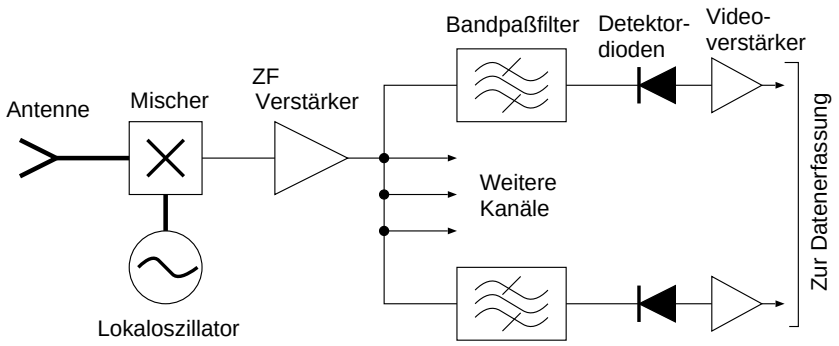

Abbildung 6.2: *Schematischer Aufbau des Heterodyneradiometers zur Messung der ECE-Intensität an ASDEX Upgrade.*

An ASDEX Upgrade sind fünf Mischer mit verschiedenen Lokaloszillatoren (95, 101, 128, 133 und 167 GHz) vorhanden, von denen drei gleichzeitig eingesetzt werden können. Mit Hilfe von 60 (ungleichmäßig auf die verwendeten Mischer aufteilbaren) Bandpaßfiltern lassen sich entsprechend viele radiale Positionen vermessen. Diese können durch geeignete Wahl der Lokaloszillatoren und Seitenbänder je nach Magnetfeldstärke auf verschiedene radiale Bereiche verteilt werden. Die radiale Breite einer Meßposition beträgt ca. 0.5 oder 1 cm (36 Bandpaßfilter mit Bandbreite $300MHz$, 24 mit $600MHz$), der Abstand der Meßpositionen ca. 1 oder 2 cm, womit die radiale Auflösung limitiert ist. Bei typischen Inselbreiten von ca $6-8cm$ ist dies ausreichend. Die Messungen sollten vorzugsweise auf der Niedrigfeldseite des Plasmas stattfinden, da die Mikrowellenstrahlung ansonsten das Plasmazentrum (mit großen Elektronendichtegradienten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) durchqueren muß, was Strahlverbreiterung und -ablenkung zur Folge hat. Somit verschlechtert sich bei Messungen auf der Hochfeldseite die radiale Auflösung.

Die Detektordioden liefern Spannungssignale, die der Elektronentemperatur proportional sind. Für die Umrechnung werden Kalibrationsfaktoren benötigt, die aus Messungen an Temperaturnormalen mit Schwarzkörpereigenschaft bestimmt werden. Dazu stehen ein Behälter mit flüssigem Stickstoff (Temperatur $77K$) und eine geheizte Kavität (Temperatur $773K$) zur Verfügung. Aufgrund ihrer geringen Strahlungsintensitäten und der Mischereigenschaften sind

die Kalibrationsfaktoren mit teilweise recht großen Fehlern behaftet (einige Prozent). Aus diesem Grund ist für die Darstellung magnetischer Inseln in der Regel eine Korrektur der radialen Temperaturprofile notwendig. Dazu wird an das radiale Profil kurz vor Entstehen der magnetischen Insel die Funktion

$$T = T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\mu} \tag{6.1}$$

mit den Anpassungskoeffizienten T_0 und μ angepaßt. Die Division der Anpaßfunktionswerte durch die gemessenen Temperaturwerte ergibt die Korrekturfaktoren.

Ein anderes Problem der ECE-Diagnostik tritt auf, wenn die Plasmadichte zu hoch wird, was in einigen Entladungen mit neoklassischen Tearing Moden zeitweilig der Fall ist. Die Mikrowellenfrequenzen müssen auf dem Weg zur Antenne oberhalb der Cutoff-Frequenz $\omega_R \sim \sqrt{n_e}$ für eine rechts-zirkular polarisierte Welle liegen, da die Strahlung ansonsten reflektiert wird. Bei hohen Elektronendichten n_e kann ω_R die Frequenz der zweiten Harmonischen der Elektronenzyklotronfrequenz überschreiten, sodaß keine Temperaturmessung mehr möglich ist. Aufgrund der zur Plasmamitte hin zunehmenden Elektronendichte betrifft dies insbesondere die inneren Meßpositionen.

6.1.2 Temperaturprofilrekonstruktion bei Unterabtastung

Die ECE-Meßsignale werden zur Speicherung in der Standarddatenerfassung mit einer Abtastrate von $31.25kHz$ digitalisiert. Bei für neoklassische Tearing Moden typischen Modenfrequenzen von ca. $15-25kHz$ bedeutet dies, daß während der Rotation einer Insel durch die Sichtlinie der Diagnostik nur ein bis zwei Messungen vorgenommen werden, sodaß die Temperaturvariation nicht ausreichend aufgelöst werden kann. Eine direkte Darstellung des Temperaturprofils aus den Meßdaten ist somit nicht möglich. Dennoch können nicht zu schnell rotierende Inseln (nicht mehr als ca. $20kHz$) mit Hilfe eines Signalbearbeitungsverfahrens sichtbar gemacht werden.

Nach dem Nyquisttheorem können mit einer Abtastrate ν_{Sample} Frequenzanteile eines Signals bis maximal zur Nyquistfrequenz $\nu_{Nyquist} = \nu_{Sample}/2$ korrekt abgetastet werden (mit mindestens zwei Meßpunkten pro Periode) [36]. Höhere Frequenzanteile ν_{Signal} erscheinen im (diskreten) Frequenzspektrum des abgetasteten Signals ($\nu = 0, \ldots, \nu_{Nyquist}$) bei den sogenannten Aliasingfrequenzen, die sich durch Spiegelung von ν_{Signal} an der Nyquistfrequenz (und evtl. nochmal an $\nu = 0$) ergeben ($\nu_{Aliasing} = 2\nu_{Nyquist} - \nu_{Signal}$, falls $\nu_{Nyquist} < \nu_{Signal} < 2\nu_{Nyquist}$). Dieser Aliasingeffekt verfälscht das Signal im Frequenzbereich bis $\nu_{Nyquist}$, weshalb das Signal vor der Digitalisierung mit einem Antialiasingfilter von Frequenzanteilen oberhalb der Nyquistfrequenz befreit werden muß. Dazu dienen an ASDEX Upgrade Besselfilter sechster Ordnung mit $15kHz$ Grenzfrequenz, welche die Phasenrelationen der Frequenzen nicht verfälschen. Aufgrund ihrer Dämpfungseigenschaften (36dB/Oktave) wird die Grundfrequenz der neoklassischen Tearing Moden jedoch keineswegs vollständig aus den Meßdaten beseitigt, solange sie nicht größer als ca. $20kHz$ ist. Im weitgehend von Rauschen bestimmten Fre-

quenzspektrum ist sie deutlich bei ihrer Aliasingfrequenz erkennbar. Durch Fourierrücktransformation des entsprechenden Frequenzintervalls läßt sich das Signal auf seinen Modenanteil (zuzüglich Rauschanteil) reduzieren. Weiterhin kann die filterbedingte Abschwächung durch entsprechende Signalverstärkung kompensiert werden (unter gleichzeitiger Verstärkung des Rauschanteils).

Nach der Isolation des unterabgetasteten Modensignals muß es derart rekonstruiert werden, als sei es mit ausreichend hoher Zeitauflösung gemessen worden. Innerhalb kurzer Zeiträume (wenige *ms*, Größenordnung hundert Inseln) dürfen die inselbedingten Temperaturschwankungen als unverändert angesehen werden. Die Messungen sind auf verschiedene Punkte im periodischen Signal verteilt. Kennt man die Phasenlage der Insel zu den Meßzeitpunkten, so kann man die Meßwerte aus dem Zeitraum dementsprechend umsortieren und ein hochaufgelöstes Abbild einer Periode rekonstruieren. Zur Bestimmung der Phasenlage der Insel dient das ausreichend hoch ($250kHz$) abgetastete Signal einer Mirnovspule, welche die Störung des Magnetfeldes mißt und ebenfalls eine Sinusschwingung pro Insel zeigt. Das Mirnovsignal kann ebenfalls durch Fouriertransformation und Rücktransformation im Bereich der Modenfrequenz gefiltert werden, um niederfrequente Nullpunktwanderungen oder hochfrequente Störungen zu beseitigen. Abbildung 6.3 verdeutlicht das Prinzip der Meßwertumsortierung. Aus der gemeinsamen Auftragung der ECE-Meßwerte (Sternchen) und des Mirnovsignals (Sinus) gegen die Zeitachse (Teil a) wird die Phasenlage der ECE-Meßwerte bezüglich des Mirnovsignals ermittelt (Teil b). Die Auftragung der ECE-Meßwerte (aus Teil a) gegen ihre Phasenlage (aus Teil b) ergibt eine hochauflösend rekonstruierte Signalperiode (Teil c). Man erhält damit das Abbild einer über viele Inselperioden gemittelten magnetischen Insel. Allerdings ist zu beachten, daß nur die Grundmode des Signals rekonstruiert werden kann. Das Temperaturprofil innerhalb der Insel kann daher nicht korrekt dargestellt werden.

6.1.3 Zeitlich hochauflösende Temperaturprofilmessung

In einigen Entladungen wurden ECE-Meßsignale parallel zur Standarddatenerfassung mit sehr hoher Abtastrate ($\nu_{Sample} \gg \nu_{Mode}$) digitalisiert, sodaß die magnetischen Inseln direkt dargestellt werden können und insbesondere die Temperaturprofilabflachung im Inselinneren sichtbar wird. Die zur Elektronentemperatur proportionalen Signale wurden analog zu den regulär erfaßten Daten ausgewertet. Für die Messungen stand ein Meßwerterfassungsystem (Nicolet System 510) mit sechzehn Digital-Analog-Wandlern zur Verfügung, womit die Signale von fünfzehn nebeneinanderliegenden ECE-Kanälen aufgenommen wurden. Die Kanäle mußten so gewählt werden, daß die entsprechenden Meßpositionen nach vorheriger Abschätzung (in Abhängigkeit vom Toroidalfeld) den Inselbereich abdecken konnten. Der verbleibende Wandler diente der gleichzeitigen Aufnahme des Signals einer Mirnovspule als Referenzsignal zur Bestimmung der Inselphase. Messungen wurden mit Abtastraten von $5MHz$ über $200ms$ Meßzeit, mit $1MHz$ über $1s$ und mit $500kHz$ über $2s$ durchgeführt. Dementsprechend mußte vorher die sinnvolle Lage des Meßintervalls abgeschätzt werden. In einigen Experimenten wurde das Magnetfeld variiert (maximal 2% pro Sekunde), wobei sich die Meßpositionen um denselben Prozentsatz verschieben (z.B. 6cm bei R=2m). Da sich die Lage der resonanten Fläche

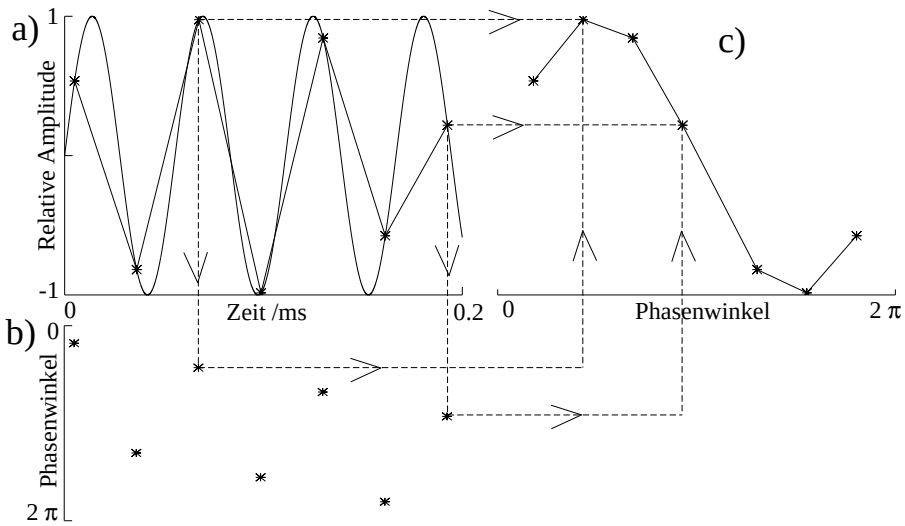

Abbildung 6.3: *Aus der gemeinsamen zeitlichen Auftragung der ECE-Meßwerte (Sternchen) und des Mirnovsignals (Sinus) in Teil a wird die Phasenlage der ECE-Meßwerte bezüglich des Mirnovsignals bestimmt (Teil b). Durch die Auftragung der ECE-Meßwerte gegen ihre Phasenlage (Teil c) läßt sich eine hochaufgelöste ECE-Signalperiode und somit trotz Unterabtastung ein Bild einer magnetischen Insel rekonstruieren.*

weniger stark ändert , bewegen sich die Meßpositionen auch relativ zur magnetischen Insel. Somit besteht eine erhöhte Wahrscheinlichkeit, daß trotz der leichten Variation der Lage der resonanten Fläche von Entladung zu Entladung zumindest in einem Teil der Meßzeit die Insel vollständig im Meßbereich liegt. Weitere Details zu Messung und Auswertung sind in Anhang D ausführlich beschrieben.

Im Bereich der gemessenen Mikrowellenfrequenzen strahlt das Plasma wie bereits diskutiert wie ein schwarzer Körper, sodaß das Meßsignal einen deutlichen Rauschanteil enthält. Aufgrund der hohen Nyquistfrequenzen der Messungen (250*kHz* und mehr) stört er die Inseldarstellung und sollte beseitigt werden. Dazu dient hier eine Mittelung der Temperaturprofile vieler aufeinander folgender Inseln (mehrere *ms*, Größenordnung 100 Inseln), welche in Abbildung 6.4 anhand von wenigen Inseln illustriert ist. Das mit dem Meßwerterfassungssystem gemessene Mirnovsignal wird im auszuwertenden Zeitintervall mittels einer Fouriertransformation und Rücktransformation im Bereich der Modenfrequenz gefiltert. Es dient zur Bestimmung der Phasenlage der Meßzeitpunkte. Die Phasenlagen werden in Intervalle eingeteilt und die Meßwerte aus gleichen Intervallen arithmetisch gemittelt. Bei der Mittelung bleibt die Stärke der kohärenten Signalanteile, also der inselbedingten Modulation, erhalten, während die inkohärenten Anteile, also das Rauschen, abgeschwächt werden. Man erhält einen erhöhten Signal-Rausch-Abstand. Die Anzahl der Phasenintervalle (Auflösung im helikalen Winkel) entspricht der mittleren Anzahl der Meßpunkte in einer Insel.

Zur weiteren Analyse wird wie auch im Fall der rekonstruierten unterabgetasteten Inseln das gemittelte Inseltemperaturprofil einer Fouriertransformation unterzogen. Das Re-

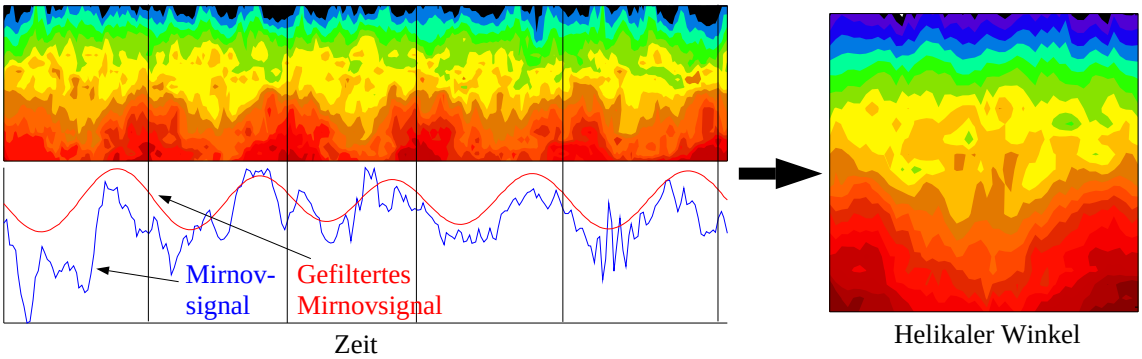

Abbildung 6.4: *Die zeitlich hochauflösend gemessenen Temperaturprofile magnetischer Inseln werden anhand eines Mirnovspulensignals in Phasenintervalle unterteilt und gemittelt. Das gemittelte Temperaturprofil hat einen erhöhten Signal-Rausch-Abstand.*

sultat einer diskreten Fouriertransformation sind die Komponenten mit den Frequenzen $\nu = 0/T, 1/T, 2/T, \ldots, N/(2T)$, wobei T das transformierte Zeitintervall und N die Anzahl der enthaltenen Meßpunkte bezeichnen. Das Zeitintervall gleicht hier dem Kehrwert der (gemittelten) Modenfrequenz. Die resultierenden diskreten Frequenzanteile entsprechen damit direkt den gesuchten Fourierkomponenten.

6.2 Relative Inselbreitemessung mit der Mirnovdiagnostik

Die Mirnovdiagnostik besteht aus Spulen, von denen an verschiedenen toroidalen Positionen jeweils mehrere (bis zu 32) um den poloidalen Querschnitt herum angebracht sind. Sie registrieren die zeitliche Änderung des poloidalen (Stör-)Magnetfeldanteils, die proportional zur zeitlichen Änderung des radialen Störmagnetfeldanteils ist (wegen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$). Aufgrund der Plasmarotation erzeugt eine Mode in den Signalen der Mirnovspulen eine periodische Modulation. Bei Vorhandensein mehrerer Moden kommt es zur Überlagerung ihrer Signale. Eine Differenzierung ist jedoch möglich, da die Signale verschiedener Spulen Phasendifferenzen aufweisen. So zeigt die Addition der Signale zweier toroidal um 180 Grad auseinanderliegender Spulen (in gleicher poloidaler Position) den Anteil der Moden mit gerader toroidaler Modenzahl n. Die Differenzbildung zeigt den Anteil der Moden mit ungerader toroidaler Modenzahl. Entsprechendes gilt für die poloidale Modenzahl m bei Verwendung zweier poloidal um 180 Grad auseinanderliegender Spulen (in gleicher toroidaler Position). Mit Hilfe einer Singular Value Decomposition ist es möglich, speziell die aus der (3,2)-Mode stammende Signalkomponente zu isolieren [37]. Diese wird in der vorliegenden Arbeit zur Inselbreitemessung herangezogen.

Für die Breite einer magnetischen Insel gilt gemäß Gl.(2.15) in der Näherung einer symmetrischen Insel ($\chi_1(r) = const, \chi_0 \sim x^2$) ein proportionaler Zusammenhang zur Wurzel der Amplitude des radialen Störmagnetfeldes ($W \sim \sqrt{\hat{B}_{1r}}$). Das Signal der Mirnovspulen ist proportional

zur zeitlichen Änderung des poloidalen und des radialen Störmagnetfelds $dB_{1r}(t)/dt$, sodaß die Amplitude des integrierten Signals der (3,2)-Mode als relatives Maß der Inselbreite dient. Der zeitliche Amplitudenverlauf ergibt sich aus der Bildung der Enveloppe des integrierten Signals.

Das Amplitudensignal beinhaltet drei Arten von Störeinflüssen, die beseitigt werden müssen, nämlich ELMs, Sägezähne und sonstige Signalfluktuationen. Dazu werden die Datenpunkte der auf ELMs beruhenden Signalspitzen entfernt und das Signal durch Mittelung benachbarter Datenpunkte leicht geglättet. In Zeitintervallen mit starker Sägezahnaktivität erstreckt sich die Mittelung auf Intervalle mit mehreren Sägezähnen, sodaß das Signal dort durch die Sägezähne hindurch gemittelt wird. Weiterhin resultiert ein Teil des Amplitudensignals aus Fluktuationen des zu integrierenden Mirnovsignals, was sich in Form eines Offset vor und nach Modenbeginn bemerkbar macht. Dieser muß abgezogen werden. Die Skalierung des Amplitudensignals $Amplitude(t)$ auf die absolute Inselbreite erfolgt (unter Abzug des Offsets) mit Hilfe der Inselbreite $W(t_{Skalierung})$ zum Zeitpunkt $t_{Skalierung}$, die aus dem Temperaturprofil bestimmt wird.

6.3 Zusammenfassung

Die Darstellung der Elektronentemperaturprofile magnetischer Inseln aus ECE-Messungen ist auf drei Arten durchführbar:

- Bei klassischen Tearing Moden mit Modenfrequenzen im Bereich $1kHz$ können die Daten aus der regulären Datenerfassung verwendet werden.
- Bei neoklassischen Tearing Moden mit Modenfrequenzen im Bereich $15-25kHz$ sollte eine Datenerfassung mit sehr hoher Zeitauflösung (einige hundert kHz) verwendet werden. Dies wurde bei einigen Entladungen mit Hilfe eines zusätzlichen Meßwerterfassungssystems realisiert. Dabei wurde durch eine Mittelung der Inseltemperaturprofile der Signal-Rausch-Abstand erhöht.
- Die Grundmode des Temperaturprofils einer neoklassischen Tearing Mode läßt sich mit Hilfe einer Meßwertumsortierung aus den regulär erfaßten ECE-Daten rekonstruieren.

In der Regel ist eine Korrektur der Kalibrationsungenauigkeiten im radialen Temperaturprofil notwendig. Die Fourierkomponenten werden in dieser Arbeit aus der (zeitlichen) Fouriertransformation der gemittelten Inseltemperaturprofile berechnet.

Für die Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung wird der relative zeitliche Inselbreiteverlauf benötigt, der dem Amplitudenverlauf des integrierten (3,2)-Modensignals aus der Mirnov-Diagnostik entspricht.

Kapitel 7

Experimentelle Untersuchung der Inselstruktur

Im folgenden Kapitel werden experimentell beobachtete Temperaturprofile magnetischer Inseln diskutiert. Als einführendes Beispiel dient eine klassische Tearing Mode, die direkt aus den regulären ECE-Daten ohne weitere Behandlung dargestellt werden kann. Der Hauptkomplex besteht in der Untersuchung neoklassischer (3,2)-Tearing Moden, deren Temperaturprofile mit hoher Zeitauflösung gemessen wurden. Weiterhin wird ein Beispiel für die Darstellung einer neoklassischen Tearing Mode bei zu geringer Zeitauflösung vorgestellt.

7.1 Untersuchung einer klassischen Tearingmode

Als einführendes Beispiel zeigt Abbildung 7.1 das Temperaturprofil einer klassischen (2,1)-Tearing Mode in einer Dichtelimitentladung mit rein ohmscher Heizung [38]. Die Besonderheit dieser Messung besteht darin, daß die Modenfrequenz von $0.53kHz$ und die gute Kalibration der Diagnostik im Gegensatz zu den folgenden Beispielen neoklassischer Tearing Moden die direkte Darstellung des Inseltemperaturprofils aus den regulär gemessenen ECE-Daten ohne weitere Bearbeitung erlaubt. Am unteren Bildrand erkennt man einen Teil einer (3,1)-Mode, die in dieser Entladung stets mit der (2,1)-Mode gekoppelt auftritt. Die Überlagerung ihrer Fourierkomponenten macht eine sinnvolle Geometrieanalyse unmöglich. Bei visueller Beurteilung erscheint die Insel stark asymmetrisch mit stärkerer Ausbuchtung zum Plasmainneren hin, wie aus der realistischen Modellierung zu erwarten ist. Eine sehr wichtige Beobachtung besteht darin, daß das Temperaturprofil innerhalb der Insel entgegen der Modellvorstellung nicht vollständig abgeflacht ist, sondern eine Substruktur in Form eines “Temperaturhügels” aufweist. Solche Temperatursubstrukturen innerhalb magnetischer Inseln werden auch in den folgenden Beispielen neoklassischer Tearing Moden auftreten. Sie wurden auch von anderen Autoren bereits beobachtet [39, 40]

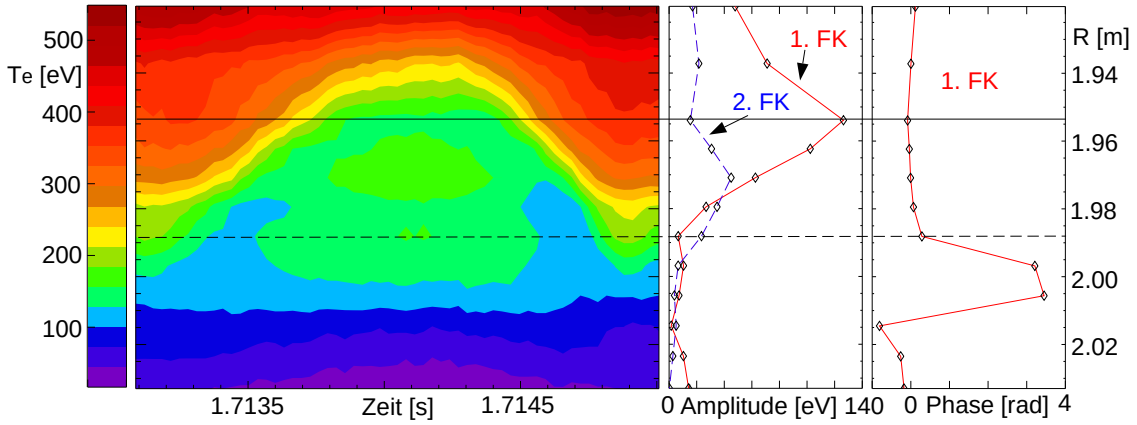

Abbildung 7.1: *Direkt aus dem ECE-Signal dargestelltes Temperaturprofil einer klassischen (2,1)-Tearing Mode in einer Dichtelimitentladung mit rein ohmscher Heizung (#6353). Das Temperaturprofil innerhalb der Insel zeigt eine Substruktur. Am unteren Rand ist eine gekoppelte (3,1)-Mode erkennbar.*

7.2 Untersuchung neoklassischer Tearing Moden

Zur Untersuchung neoklassischer Tearing Moden wurden bei einigen β-Limit Entladungen in ASDEX Upgrade die ECE-Signale mit einem zusätzlichen Meßwerterfassungssystem digitalisiert (Plasmastrom $800kA$, liniengemittelte Dichte $5-6\cdot 10^{19}m^{-3}$, Heizleistung $10MW$, Toroidalfeldstärke $2.05-2.2T$, $q_{95}=4-4.5$). Die höhere Abtastrate ermöglicht eine ausreichende zeitliche Auflösung der schnell rotierenden magnetischen (3,2)-Inseln. Zugleich entsteht die Notwendigkeit einer Rauschunterdrückung, welche durch Mittelung vieler Inseltemperaturprofile erreicht wird ($5ms$, entsprechend 100 Inseln bei $20kHz$ Modenfrequenz). Insofern ist hier die direkte Darstellung einzelner Inseln ganz ohne weitere Signalbearbeitung wie im obigen Eingangsbeispiel nicht gegeben. Die Details der Datenauswertung sind in Anhang D beschrieben.

Abbildung 7.2 zeigt als erstes Beispiel ein Inseltemperaturprofil mit sehr hoher Abtastrate ($5MHz$, 150 Meßpunkte pro Insel). Das Signalrauschen ist trotz Mittelung deutlich sichtbar und erschwert die Identifikation der Konturen. Ansatzweise läßt sich erkennen, daß das Temperaturprofil innerhalb der Insel nicht flach ist sondern Substrukturen aufweist. Die Fourierkomponenten erlauben eine relativ gute Geometrieabschätzung (wobei zum Plasmaäußeren hin die radiale Auflösung abnimmt). Wie in Abschnitt 5.1 diskutiert fallen die Nullstellen der ersten und zweiten Fourierkomponente aufgrund der Temperatursubstruktur in der Insel nicht zusammen, sodaß die Lage der resonanten Fläche durch Mittelung bestimmt wird. Die Insel ist ca. 8cm breit und im Verhältnis von ca. 2:1 asymmetrisch mit größerer Ausdehnung zum Plasmainneren hin. Eine solche Form entspricht qualitativ der theoretischen Erwartung aus der Modellierung. Die Beschaffenheit der ersten Fourierkomponente ermöglicht die Anwendung der in Abschnitt 5.2 vorgestellten Methode zur Rekonstruktion der Flußflächenkonfiguration. Dies ermöglicht zumindest eine tendenzielle Aussage über das Vorzeichen des nichtlinearen

Stabilitätsparameters $\Delta'(W)$, der in diesem Beispiel erwartungsgemäß negativ ist. Die Nullstelle der modellierten ersten Fourierkomponente wurde an die Position der resonanten Fläche gelegt und zeigt daher Abweichungen von der gemessenen ersten Fourierkomponente. Hier wird die prinzipielle Einschränkung des Verfahrens deutlich, daß die Temperaturprofilmodellierung keine Temperatursubstruktur berücksichtigt.

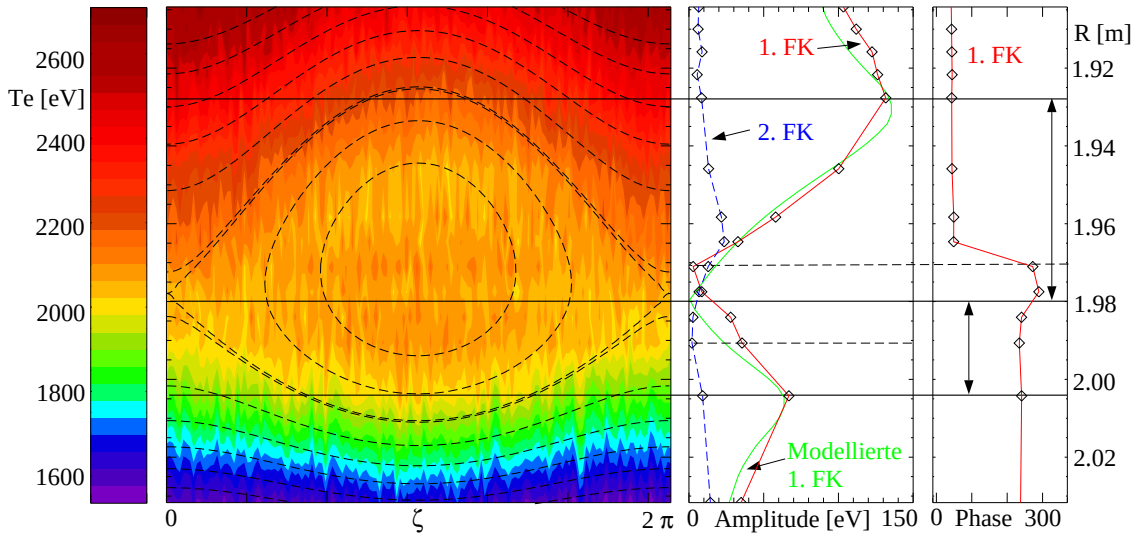

Abbildung 7.2: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#11657, 3.25-3.255s, ν_{Mode}=28kHz, 5MHz Abtastrate). Die Fourierkomponenten erlauben sowohl die Geometrieabschätzung der asymmetrischen Insel mit ca. 8cm Breite als auch die Rekonstruktion der Flußflächenkonfiguration (gestrichelte Konturen,* $\alpha = 0.04$, $\beta = 0.87$, $\gamma = 0.005$, $\Delta'(W) = -3.9$*).*

Die Abbildungen 7.3 und 7.4 zeigen zwei weitere mit sehr hoher Abtastrate gemessene Temperaturprofile (5*MHz*, 138 bzw. 215 Meßpunkte pro Insel). In beiden Fällen liegt der äußere Randbereich der Insel außerhalb des Meßbereichs. Im zweiten Fall (#11671) ist die (3,2)-Mode mit einer (2,2)-Mode gekoppelt, wie eine Analyse mit der SXR-Diagnostik bestätigt. Dementsprechend sieht man eine Überlagerung ihrer ersten Fourierkomponenten zum Plasmainneren hin, sodaß die Lokalisierung des Maximums problematisch ist. Eine vollständige Geometrieanalyse und eine Flußflächenrekonstruktion sind in beiden Fälen nicht sinnvoll durchführbar. Nach visueller Abschätzung handelt es sich um asymmetrische Inseln von ca. 7*cm* Breite. Insbesondere im zweiten Fall (#11671) läßt sich sehr deutlich eine Temperatursubstruktur in Form eines “Temperaturhügels” innerhalb der Insel erkennen.

Die Abbildungen 7.5 und 7.6 zeigen zwei mit niedrigerer Abtastrate gemessene Temperaturprofile (1*MHz*, 41 bzw. 51 Meßpunkte pro Insel). Dementsprechend fällt das Signalrauschen nicht mehr störend auf. Auch hier lassen sich Temperatursubstrukturen innerhalb der Inseln erkennen. Diese erscheinen im ersten Fall (#11673) aus einem “Temperaturhügel” und einem “Temperaturloch” innerhalb der Insel zu bestehen. Die Geometrieanalyse ist im zweiten Fall (#11681) wieder durch eine gekoppelte (2,2)-Mode (mit SXR bestätigt) und zusätzlich durch

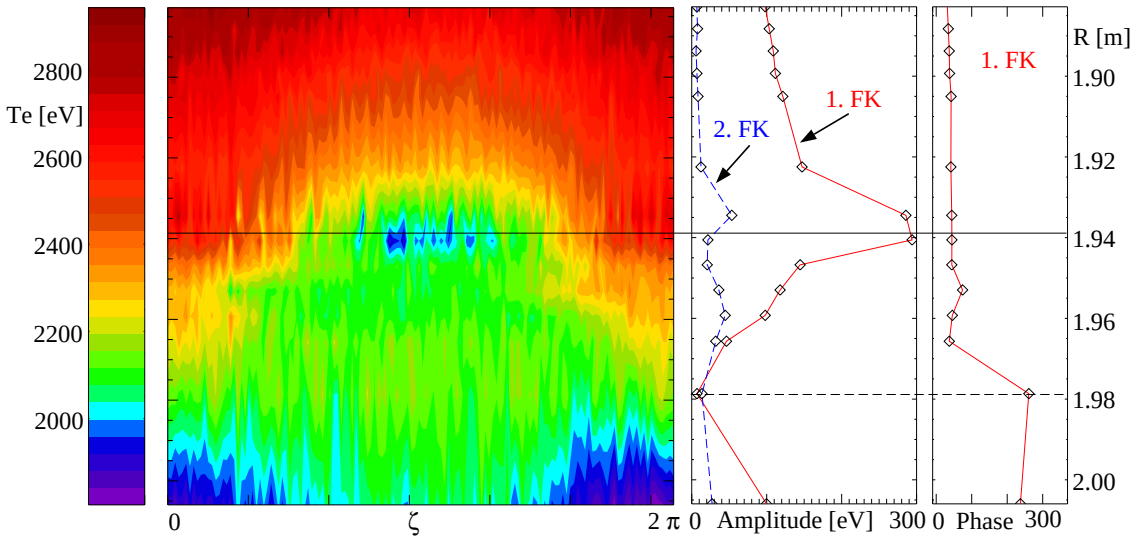

Abbildung 7.3: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#11659, 3.2-3.205s, ν_{Mode}=30kHz, 5MHz Abtastrate). Die Insel liegt nicht vollständig im Meßbereich. Andeutungsweise läßt sich eine Temperatursubstruktur innerhalb der Insel erkennen.*

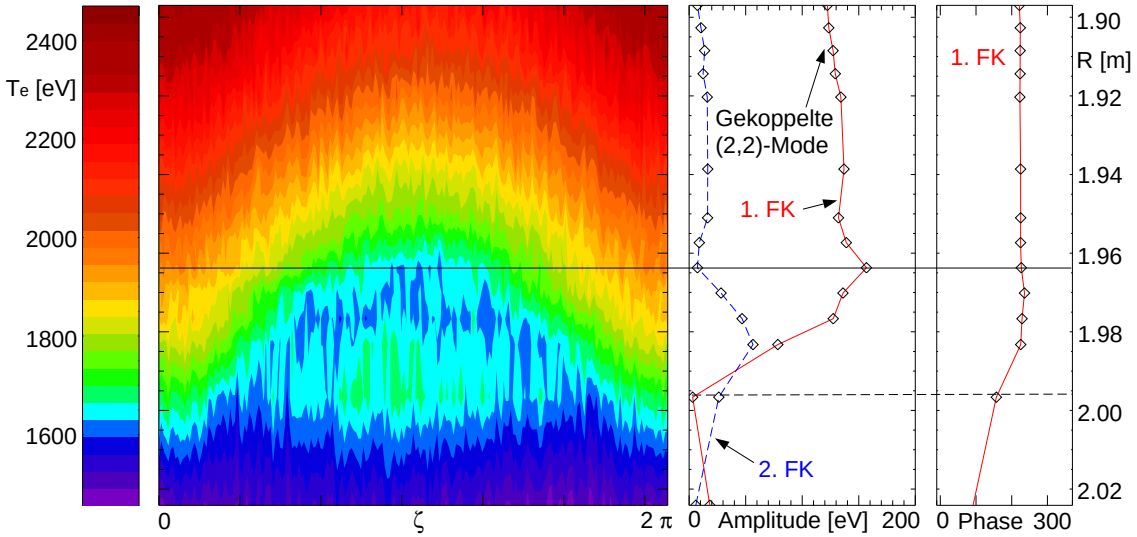

Abbildung 7.4: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#11671, 2.695-2.7s, ν_{Mode}=19kHz, 5MHz Abtastrate). Die Insel liegt nicht vollständig im Meßbereich. Sehr deutlich läßt sich eine Temperatursubstruktur innerhalb der Insel erkennen.*

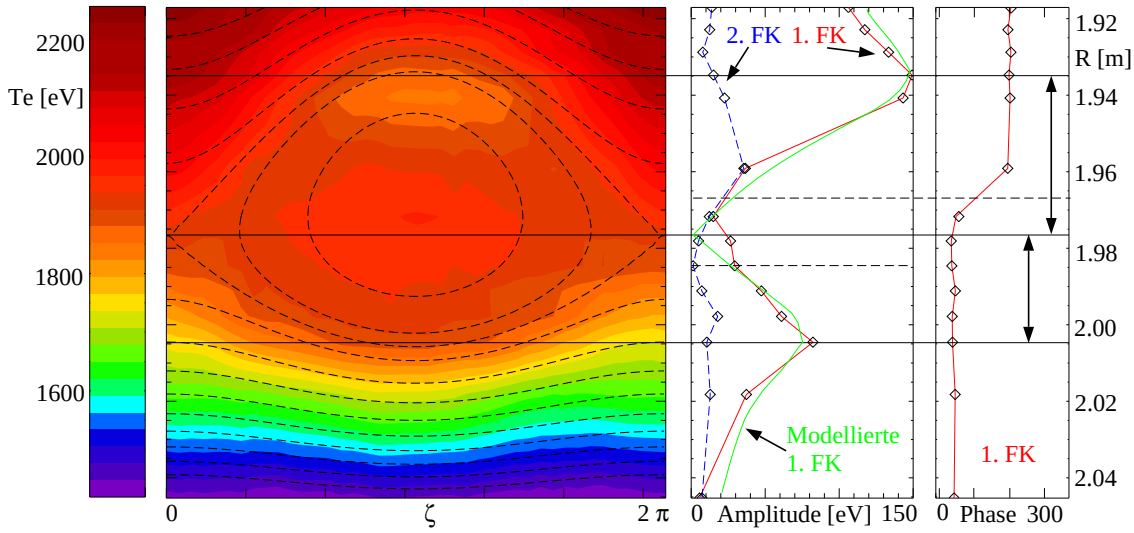

Abbildung 7.5: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#11673, 3.1-3.105s, ν_{Mode}=25kHz, 1MHz Abtastrate). Hier scheint die Substruktur aus einem "Temperaturhügel" und einem "Temperaturloch" innerhalb der Insel zu bestehen. Flußflächenrekonstruktion mit* $\alpha = 0.03$, $\beta = 0.86$, $\gamma = 0.001$, $\Delta'(W) = -4.36$.

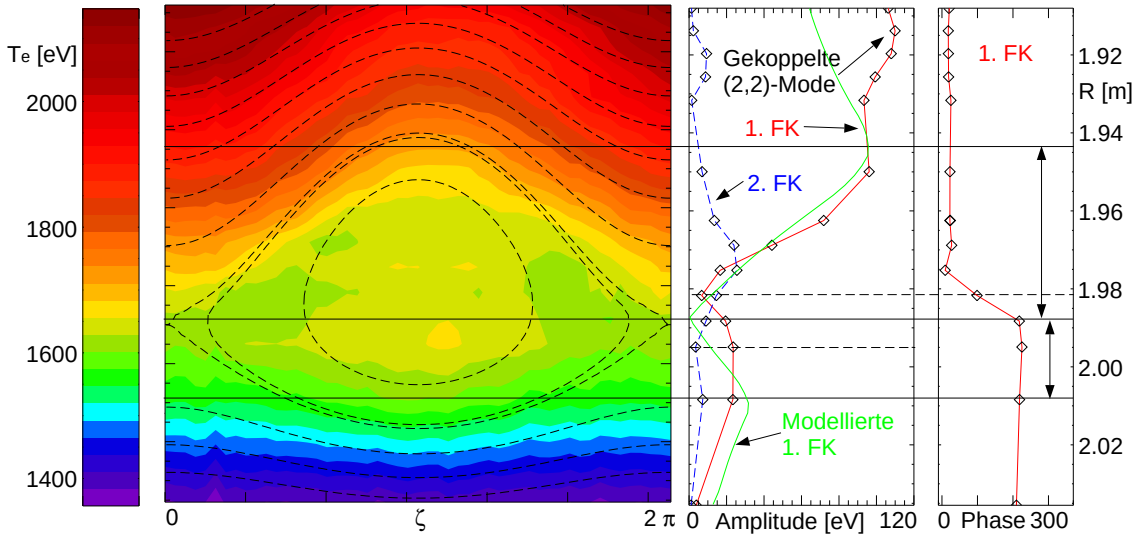

Abbildung 7.6: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#11681, 3.3-3.305s, ν_{Mode}=20.5kHz, 1MHz Abtastrate). Im Temperaturprofil ist eine Substruktur zu erkennen. Die Geometrieanalyse ist durch eine gekoppelte (2,2)-Mode erschwert. Flußflächenrekonstruktion mit* $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.93$, $\gamma = 0.001$, $\Delta'(W) = -0.86$.

den flachen Verlauf und die geringe radiale Auflösung zum Plasmaäußeren hin erschwert. Die Inseln sind 7*cm* (#11673) und ca. 6*cm* (#11681) breit und asymmetrisch. Während die Geometrie im ersten Fall (#11673) der aus dem ersten Beispiel (#11657) ähnelt, erscheint die Asymmetrie im zweiten Fall (#11681) ausgeprägter. Die Flußflächenrekonstruktion ergibt in beiden Fällen negative Werte von $\Delta'(W)$.

Während Entladung #11681 wurde während der Meßzeit von 1*s* das Toroidalfeld variiert, wobei die Insel durchgängig im Meßbereich lag. (In Entladung #11673 setzt die Feldvariation zu spät ein, sodaß nur eine geringfügige Änderung in die Meßzeit fällt.) Damit läßt sich die Verschiebung der resonanten Fläche bei Toroidalfeldänderung beobachten. Eine genaue Lagebestimmung ist aufgrund der beschränkten radialen Auflösung schwierig, jedoch läßt sich zumindest qualitativ eine geringfügige Verschiebung (ca. 1*cm*) zu höheren Werten des großen Radius (und wegen der Messung auf der Niedrigfeldseite auch des kleinen Radius) bei steigender Toroidalfeldstärke feststellen.

Die Abbildungen 7.7 und 7.8 zeigen Temperaturprofile, die mit noch einmal halbierter und damit minimal sinnvoller Abtastrate gemessen wurden (0.5*MHz*, 39 bzw. 40 Meßpunkte pro Insel). Der Meßzeitraum beträgt 2*s*, jedoch liegen die Inseln aufgrund der Variation des Toroidalfeldes nur kürzere Zeit vollständig im Meßbereich. Die Inseln sind asymmetrisch und ca. 6*cm* breit. Die Geometrieanalyse ist wiederum durch gekoppelte (2,2)-Moden (mit SXR bestätigt) und die radiale Auflösung begrenzt und insbesondere im zweiten Fall (#12531) schwierig (zumal hier die ECE-Kalibration problematisch ist und sich auch nicht zufriedenstellend korrigieren läßt). Die Flußflächenrekonstruktion ergibt im ersten Fall (#12250) wieder eine negativen Wert von $\Delta'(W)$, im zweiten Fall (#12531) ist sie nicht sinnvoll durchzuführen. Wiederum zeigen sich Substrukturen im Inseltemperaturprofil in Form eines Temperaturhügels, der insbesondere im zweiten Beispiel (#12531) sehr ausgeprägt erkennbar ist. (Hier könnten sich allerdings auch Kalibrationsungenauigkeiten auswirken.)

Zum Abschluß dieses Abschnitts ist in Abbildung 7.9 ein Beispiel für die Rekonstruktion des Temperaturprofils einer neoklassischen Tearing Mode dargestellt, das nur mit der regulären ECE-Diagnostik mit unzureichender zeitlicher Auflösung gemessen wurde. Diese Entladung ist von großer Bedeutung, da hier die ECCD-Stabilisierung einer neoklassischen Tearing Mode demonstriert werden konnte. Die erste Fourierkomponente des Modensignals ist aufgrund der relativ niedrigen Modenfrequenz von 12*kHz* nicht durch das Antialiasingfilter abgeschwächt und daher gut aus dem unterabgetasteten Signal zu rekonstruieren. Aufgrund des Fehlens der höheren Fourierkomponenten kann das Temperaturprofil nicht korrekt mit Abflachung und Substrukturen dargestellt werden. Man erkennt an den Orten hoher Amplitude zwangsläufig ein “Temperaturloch” auf der Innenseite und einen “Temperaturberg” auf der Außenseite. Diese dürfen nicht mit den Temperatursubstrukturen aus den hochauflösenden Messungen verwechselt werden. Eine visuelle Einschätzung der Inselkonturen führt damit zu Fehlschlüssen, wie der Vergleich mit der Geometrieanalyse anhand der ersten Fourierkomponente zeigt. Die Lage der resonanten Fläche kann anhand der ersten Fourierkomponente nur grob abgeschätzt werden und muß der bisherigen Erfahrung nach von der Nullstelle aus ca. 1cm weiter zum Plasmaäußeren hin verschoben werden. Damit ergibt sich die erwartete Asymmetrie. Die Inselbreite vor der Stabilisierung läßt sich zu ca. 6*cm* abschätzen. Die ECCD-Modenstabilisierung

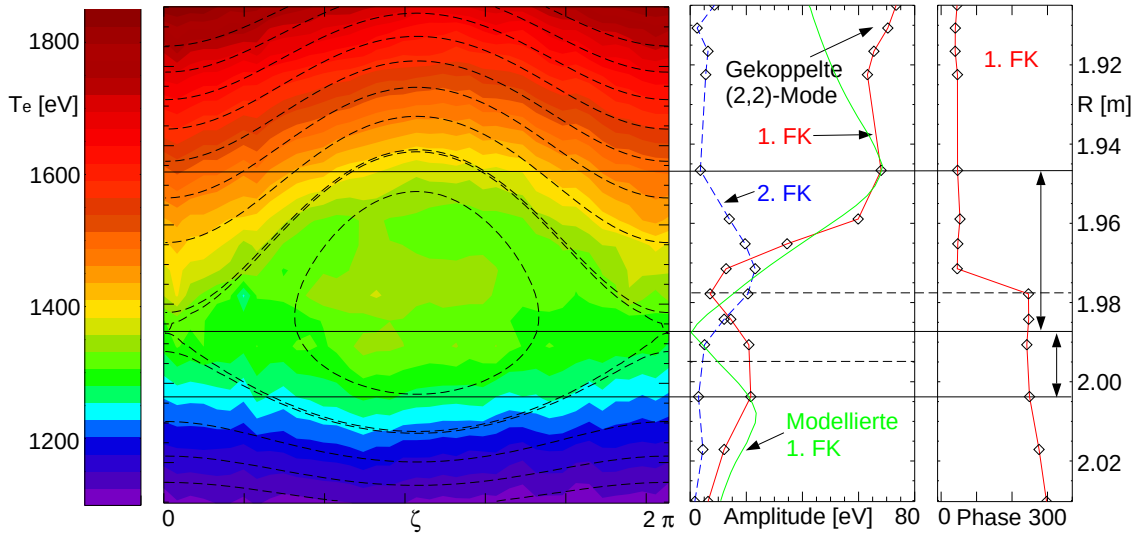

Abbildung 7.7: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#12250, 4.65-4.655s, ν_{Mode}=13kHz, 0.5MHz Abtastrate). Das Inseltemperaturprofil läßt eine Substruktur erkennen. Die Geometrieanalyse ist durch eine gekoppelte (2,2)-Mode erschwert. Flußflächenrekonstruktion mit* $\alpha = 0.045$, $\beta = 0.93$, $\gamma = 0.001$, $\Delta'(W) = -0.24$.

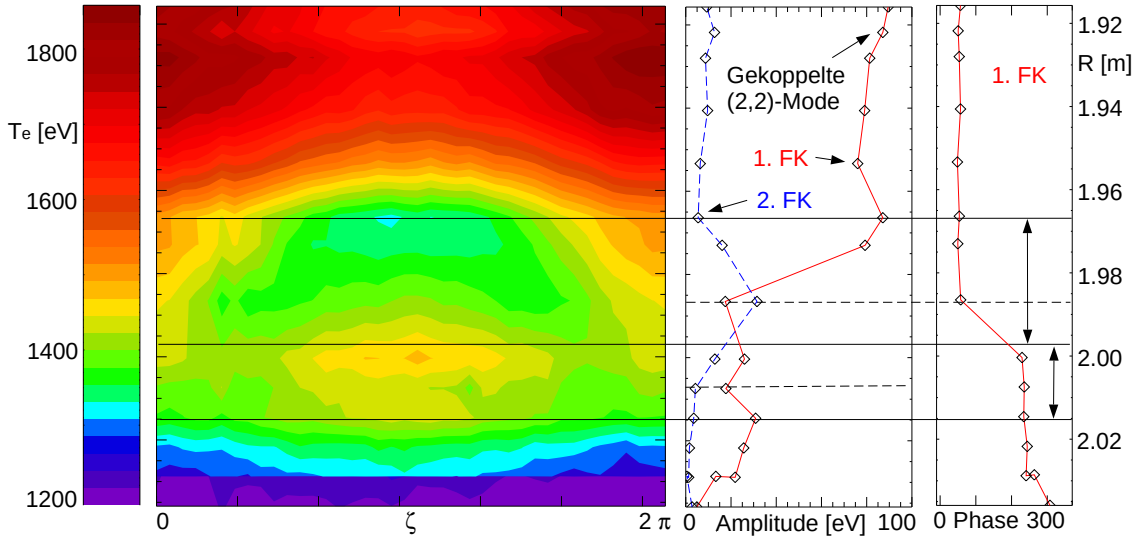

Abbildung 7.8: *Gemitteltes Temperaturprofil einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel (#12531, 2.6-2.605s, ν_{Mode}=13kHz, 0.5MHz Abtastrate). Das Inseltemperaturprofil zeigt eine sehr deutliche Substruktur. Die Geometrieanalyse ist aufgrund einer gekoppelten (2,2)-Mode, die auch im Temperaturprofil deutlich zu sehen ist, und nicht zufriedenstellender ECE-Kalibration problematisch.*

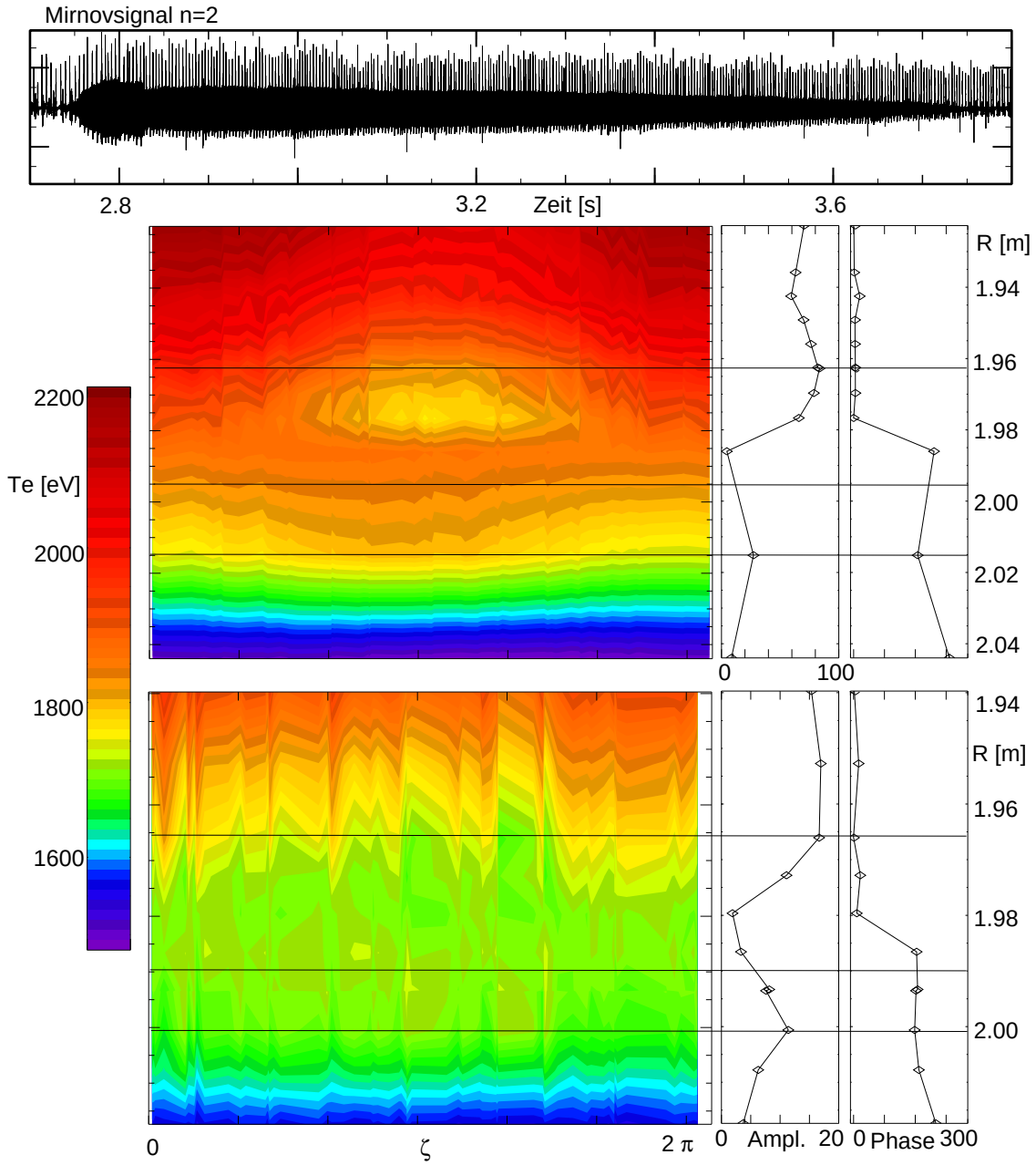

Abbildung 7.9: *Temperaturprofile einer neoklassischen magnetischen (3,2)-Insel vor (oben) und während (unten) wirksamer ECCD-Modenstabilisierung dargestellt aus regulären ECE-Daten mit dem Meßwertumsortierverfahren (#12235, 3.0-3.002s und 3.5525-3.5545s,* ν_{Mode}*=12kHz). Die Stabilisierung ist im* $n = 2$*-Mirnovsignal erkennbar und führt zu einer Verringerung der Amplitude der ersten Fourierkomponente (Skalenbreite oben 100 eV, unten 20 eV) und zu geringerer Inselbreite.*

führt bis zum zweiten Beobachtungszeitpunkt zu einer Abnahme der Temperaturmodulation (kleinere Fourieramplitude) und einer Verringerung der bestimmten Inselbreite auf ca. $3.5cm$. Die Inselkonturen sind (unter Verwendung einer gleichbleibenden Farbskala) kaum noch zu erkennen.

7.3 Diskussion der Inselstrukturuntersuchung

Aus den experimentellen Beobachtungen klassischer und neoklassischer Tearing Moden lassen sich folgende Eigenschaften magnetischer Inseln zusammenfassen:

- Die Inseln sind in Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung asymmetrisch mit stärkerer Wölbung zum Plasmainneren.
- Die Inselbreite beträgt ca. 6-8cm.
- Die Inseltemperaturprofile weisen Substrukturen in Form eines "Temperaturhügels" im Inselinneren auf, wie sie auch von anderen Autoren bereits beobachtet wurden [39, 40].
- Das theoretisch vorhergesagte Auftreten von Temperaturgradienten im Inselinneren insbesondere im X-Punktbereich aufgrund des Wärmetransports läßt sich mit der gegebenen radialen Auflösung und der ungenauen Kenntnis des Flußflächenverlaufs nicht überprüfen.

Die Temperatursubstrukturen lassen sich nicht mit dem Modell des Temperaturprofils nachvollziehen. Ein denkbarer Erklärungsansatz wäre das Vorhandensein einer lokalen Wärmequelle. (Die Temperaturprofilmodellierung mit Hilfe des zeitabhängigen Transportcodes zeigt in diesem Fall einen "Temperaturhügel" in der Insel.) Allerdings scheidet hierfür die Neutralteilchenheizung aus, da die Substrukturen bereits im Eingangsbeispiel einer Entladung mit rein ohmscher Heizung beobachtet wurden. Ansonsten könnten komplexere Wärmetransportvorgänge im Zuge der Temperaturprofilabflachung dazu führen, daß ein "Restwärmegradient" in der Insel verbleibt. (Die Temperaturprofilmodellierung mit Hilfe des zeitabhängigen Transportcodes zeigt jedoch eine vollständige Abflachung des zentralen Temperaturprofils innerhalb weniger ms.)
Die Geometrieanalyse mit Hilfe der Fourierkomponenten ist mit folgenden Problemen verbunden:

- Die Lagebestimmung der Maxima der ersten Fourierkomponente zur Inselbreitemessung ist durch die radiale Auflösung (teilweise schlechter als $1cm$) und oftmals durch die Überlagerung gekoppelter (2,2)-Moden erschwert.
- Zur Lagebestimmung der resonanten Fläche sollte auch die zweite Fourierkomponente vorhanden sein, da aufgrund der Temperaturprofilsubstrukturen die Nullstellen auseinanderfallen. Dazu ist eine Datenerfassung mit ausreichender Abtastrate erforderlich. Auch hier wirkt die radiale Auflösung genauigkeitsbegrenzend.

- Ungenaue Kalibration der ECE-Diagnostik beeinträchtigt die Zuverlässigkeit der Resultate.

Aus dem gemessenen Temperaturprofil läßt sich im Prinzip über ein angepaßtes Modell die Flußflächenkonfiguration rekonstruieren. Dazu wurde das in Abschnitt 5.2 beschriebene Verfahren auf vier Entladungen angewendet. Aufgrund der in Abschnitt 5.2 diskutierten Einschränkungen ist die Rekonstruktion mit deutlichen Unsicherheiten behaftet und erlaubt somit keine zuverlässige Bestimmung des nichtlinearen Stabilitätsparameters $\Delta'(W)$. Die Ergebnisse weisen aber darauf hin, daß $\Delta'(W)$ in den untersuchten neoklassischen Tearing Moden wie erwartet negative Werte hat. Eine Steigerung der Zuverlässigkeit der $\Delta'(W)$-Bestimmung würde neben einer verbesserten Modellierung (Temperatursubstrukturen) auch eine wesentlich verbesserte Diagnostik und eine Berücksichtigung gekoppelter Moden erfordern.

Die Verschiebung der resonanten Fläche mit der Änderung der Toroidalfeldstärke, die in einer Entladung (#11681) beobachtet werden konnte, ist für die ECCD-Modenstabilisierung von Interesse. Der Depositionsort der Mikrowellenleistung wird durch Variation des Toroidalfeldes verschoben, sodaß er trotz leichter entladungsindividueller Unterschiede in der Lage der resonanten Fläche zumindest zeitweilig mit der Insel überlappen kann. Eine Erhöhung der Toroidalfeldstärke bewirkt eine Zunahme des großen Radius des Depositionsortes in der Größenordnung $\Delta B/B \cdot R$. Aufgrund seiner Lage auf der Hochfeldseite des Plasmas führt dies zu einer entsprechenden Verringerung des kleinen Radius des Depositionsortes. Gleichzeitig erwartet man bei höherer Toroidalfeldstärke aus einer einfachen Abschätzung des q-Profils ($q \sim B$) eine Verschiebung der resonanten Fläche zu geringerem kleinen Radius in der Größenordnung $\Delta B/B \cdot r$. Demnach würde sich die resonante Fläche in dieselbe Richtung wie der Depositionsort bewegen, allerdings weniger stark, sodaß der Zweck der Toroidalfeldänderung erreichbar bleibt. Gemäß der experimentellen Beobachtung verschiebt sich die resonante Fläche jedoch bei steigendem Toroidalfeld nur geringfügig und entgegen der Erwartung zu größerem kleinen Radius. Die resonante Fläche wandert also dem Depositionsort etwas entgegen, womit eine zeitweilige Übereinstimmung problemlos erreichbar wird. Zur Modellierung dieses Verhaltens der resonanten Fläche müssen Änderungen des Stromprofils berücksichtigt werden.

Kapitel 8

Experimentelle Untersuchung der Inseldynamik

Die experimentelle Untersuchung der Dynamik magnetischer Inseln basiert auf der Anpassung der numerischen Lösung der Rutherfordgleichung an die experimentell gemessene Inselbreiteentwicklung mit dem in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren. Auf diese Weise lassen sich als Anpassungsparameter die freien Parameter der Rutherfordgleichung bestimmen. Das Verfahren wurde auf vier Entladungen in ASDEX Upgrade angewendet. Als Ergebnis erhält man für jede Entladung verschiedene Parametersätze, die sehr ähnliche zufriedenstellende Anpassungen der Rutherfordgleichung ergeben. Durch gemeinsame Optimierung oder durch Mittelung lassen sich Parametersätze finden, die für alle vier Entladungen zufriedenstellende Anpassungen ergeben. Damit können die freien Parameter der Rutherfordgleichung eingegrenzt werden.

8.1 Die freien Parameter der Rutherfordgleichung

Für die experimentelle Untersuchung der Inseldynamik wurden vier Entladungen in ASDEX Upgrade ausgewertet, bei denen mit Erreichen des β-Limits eine neoklassische Tearing Mode aufgetreten ist (Plasmastrom $800kA$, liniengemittelte Dichte $5-6\cdot 10^{19}m^{-3}$, Heizleistung $10MW$, Toroidalfeldstärke $2.05-2.17T$, $q_{95}\approx 4.5$). Die Auswahl der Entladungen ist durch mehrere Kriterien eingeschränkt. Es müssen alle benötigten Daten vorhanden sein, insbesondere auswertbare Temperatur- und Elektronendichteprofilmessungen, wobei Entladungen mit zusätzlicher zeitlich hochauflösender Messung des Inseltemperaturprofils zur besseren Inselbreitemessung zu bevorzugen sind. Weiterhin muß das Toroidalfeld konstant sein, damit sich die Lage der resonanten Fläche nicht verschiebt. In Entladungen mit ECRH oder ECCD darf die Mikrowellendeposition nicht im Inselbereich stattfinden.

Von den ausgewerteten Entladungen ist bei einer (# 11657) eine sehr gut auswertbare Temperaturprofilmessung mit hoher Zeitauflösung vorhanden, in zwei weiteren (#11659 und # 11671) erfaßt die Messung den Inselrand nicht vollständig, sodaß die reguläre ECE-Messung hinzugezogen werden muß. In einer Entladung (#12238) muß die Geometrieanalyse allein anhand der regulären ECE-Messung vorgenommen werden. Dementsprechend ist die Zuverlässigkeit der

Inselbreitemessung und der Lagebestimmung der resonanten Fläche außer in der erstgenannten Entladung eingeschränkt. In Entladung # 12238 mußte die Messug von $T_e(t)$ zur Berechnung von $\beta_p(t)$ und $\tau_R(t)$ ca $1cm$ weiter außen durchgeführt werden, weil an der resonanten Fläche zeitweilig Cutoff auftritt. Im Zeitraum zwischen 5 und $5.2s$ tritt auch an der Meßposition Cutoff auf, weshalb das Signal entsprechend korrigiert werden mußte ($\beta_p = const$).

Tabelle 8.1 enthält die konstanten (bzw. als konstant angenommenen) Eingangsparameter des Modells. Die Werte von r_{res} sind im Rahmen der Meßungenauigkeit gleich, die Werte von L_p und ρ_p wurden über die vier Entladungen gemittelt und ebenfalls als gleich angenommen, da die Meßunsicherheit hier recht groß ist. Weiterhin sind die Parameter zur Integration, Fehlergewichtung und Inselbreitebestimmung aufgeführt (siehe Abschnitt 5.3). Die Skalierungsfaktoren des Mirnovsignals ($W(t_{Skalierung})/(Amplitude(t_{Skalierung}) - Offset)$) zeigen eine Streuung von ca. 10% um ihren Mittelwert.

	# 11657	# 11659	#11671	# 12238
r_{res} [m]	0.23	0.23	0.23	0.23
R_0 [m]	1.65	1.65	1.65	1.65
$\varepsilon^{1/2}$	0.37	0.37	0.37	0.37
$g(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$	0.05	0.05	0.05	0.05
L_p [m]	0.3	0.3	0.3	0.3
L_q [m]	0.3	0.3	0.3	0.3
ρ_p [m]	0.045	0.045	0.045	0.045
Δ' [m^{-1}]	-13	-13	-13	-13
W_0 [m]	0.018	0.018	0.018	0.018
B_p [T]	0.2	0.2	0.2	0.19
t_{Start} [s]	1.98	1.93	2.38	2.76
t_{Ende} [s]	4.15	4.12	4.29	5.4
W_{Start} [m]	0.02	0.02	0.02	0.02
$t_{Fehler1}$ [s]	2.05	2.05	2.5	2.9
$t_{Fehler2}$ [s]	3.6	3.6	3.6	5.2
$W(t_{Skalierung})$ [m]	0.08	0.07	0.07	0.07
$t_{Skalierung}$ [s]	3.25	3.2	2.7	4.5
$Amplitude(t_{Skalierung})$	0.11	0.11	0.125	0.12
$Offset$	0.025	0.03	0.03	0.025

Tabelle 8.1: *Eingangsparameter zur Anpassung der Rutherfordgleichung an die experimentell beobachtete Inseldynamik.*

Die Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung mit dem in Abschnitt 5.3 beschriebenen Anpassungsverfahren liefert als Ergebnis eine Reihe von Parametersätzen mit steigendem Anpassungsfehler. Die getesteten Werte der freien Parameter wurden in den Bereichen $a_{BS} = 1.0, 1.05, \ldots, 2.7$, $a_{GGJ} = 0.0, 0.5, \ldots, 19.0$ und $a_{Pol} = 0.0, 0.05, \ldots, 1.0$ variiert. Dieser Bereich hat sich in Voruntersuchungen mit groberer Rasterung und weiterem Parameterbereich

als sinnvoll herausgestellt. Tabelle 8.2 enthält die zehn besten Parametersätze für jede Entladung zusammen mit dem Fehler (gewichtete Standardabweichung der modellierten Inselbreite von der gemessenen über dem Zeitintervall). Wie nach der Diskussion in Abschnitt 5.3 zu erwarten ist, führen aufgrund der Eigenschaften der Rutherfordgleichung alle aufgelisteten Parametersätze für die jeweilige Entladung zu sehr ähnlichen Ergebnissen. Entsprechend nehmen die Fehler nur moderat zu (Erhöhung um 37% gegenüber dem kleinsten Wert in #11657, um 24% in #11659, um 4% in #11671 und um 3% in #12238). Eine perfekte Übereinstimmung mit den experimentell gemessenen Inselbreiteverläufen ist jedoch nicht erzielbar. Daher ist es nicht möglich, die eindeutig "richtigen" Werte der freien Parameter der Rutherfordgleichung anzugeben.

#11657				#11659			
a_{BS}	a_{GGJ}	a_{Pol}	Fehler	a_{BS}	a_{GGJ}	a_{Pol}	Fehler
2.5	15.5	0.05	0.0197	1.35	0.5	0.55	0.0159
2.4	14.0	0.15	0.0197	2.1	10.5	0.15	0.0161
2.30	12.5	0.25	0.0204	1.5	2.0	0.6	0.0162
2.1	10.0	0.3	0.0206	1.85	7.5	0.2	0.0165
2.0	8.5	0.4	0.0209	1.5	3.0	0.35	0.0172
2.2	11.5	0.2	0.0213	2.0	9.0	0.25	0.0180
2.15	11.5	0.05	0.0246	1.4	0.5	0.7	0.0181
1.9	8.5	0.1	0.0261	1.6	5.5	0.05	0.0182
1.65	4.5	0.4	0.0262	1.6	5.0	0.15	0.0193
2.05	10.0	0.15	0.0270	1.9	7.5	0.35	0.0197
#11671				12238			
a_{BS}	a_{GGJ}	a_{Pol}	Fehler	a_{BS}	a_{GGJ}	a_{Pol}	Fehler
2.55	16.0	0.05	0.0114	2.0	9.0	0.25	0.0221
2.5	15.5	0.05	0.0115	1.7	5.0	0.4	0.0221
2.45	15.0	0.05	0.0115	1.5	2.0	0.6	0.0221
2.35	13.5	0.15	0.0115	1.4	0.5	0.7	0.0222
2.4	14.0	0.15	0.0115	1.8	6.0	0.45	0.0222
2.35	13.5	0.1	0.0117	2.15	11.5	0.05	0.0223
2.25	12.0	0.2	0.0117	1.7	4.5	0.55	0.0223
2.6	16.5	0.05	0.0118	2.3	13.0	0.1	0.0225
2.3	12.5	0.2	0.0118	2.05	10.0	0.15	0.0225
2.1	10.0	0.3	0.0118	2.1	10.0	0.3	0.0228

Tabelle 8.2: *Freie Parameter der Rutherfordgleichung für die besten zehn Anpassungen.*

Die Auftragung der a_{BS}-a_{GGJ}- und a_{BS}-a_{Pol}-Wertepaare in Abbildung 8.1 verdeutlicht die Verteilung der Parametersätze. Erwartungsgemäß liegen die a_{BS}-a_{GGJ}-Wertepaare in etwa auf einer Geraden mit der Steigung $r_{res}/(\varepsilon^{3/2}L_q) = 14.7$. In den meisten Fällen liegt das Verhältnis a_{GGJ}/a_{BS} bei etwa vier bis sechs, sodaß der Betrag des Glasser-Greene-Johnson-Terms bei großen Inselbreiten ungefähr einem Drittel des Betrags des Bootstrapterms entspricht (und bei

kleinen Inselbreiten wesentlich mehr) und nicht vernachlässigt werden sollte. Die a_{BS}-a_{Pol}-Wertepaare weisen eine stärkere Streuung auf, es besteht aber eine eindeutige Tendenz zu sinkenden a_{Pol}-Werten mit steigenden a_{BS}-Werten. Die obere Grenze der "guten" a_{BS}-a_{GGJ}-Wertepaare fällt mit der Annäherung an $a_{Pol} = 0$ zusammen. Der Wert $a_{Pol} = 0$ ist öfters unter den "guten" Parametersätzen zu finden ($a_{GGJ} = 0$ selten). Diese Parametersätze wurden ignoriert, da gefordert wird, daß alle Effekte wirksam sind. Auch kleine Werte von a_{Pol} führen aufgrund der $1/W^3$-Abhängigkeit des Polarisationsstromeffekts bei entsprechend kleinen Inselbreiten zu signifikanten Wirkungen.

Die besten Parametersätze der vier Entladungen sind deutlich unterschiedlich positioniert und die weiteren konzentrieren sich in der Umgebung der besten. Aufgrund von Überlappungen von "guten" Parametersätzen lassen sich gemeinsame Parametersätze finden, die in allen vier Entladungen sinnvolle Lösungen liefern. Dazu werden die Parametersätze nach der Summe der Quadrate der Fehler in den einzelnen Entladungen sortiert. Die besten zehn gemeinsamen Parametersätze sind mit dem gemittelten Fehler in Tabelle 8.3 aufgeführt und ebenfalls in Abbildung 8.1 eingezeichnet. Sie liegen auf der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden und in der a_{BS}-a_{Pol}-Wolke und decken sich teilweise mit den besten zehn Parametersätzen der Entladungen. Der beste gemeinsame Parametersatz liegt etwa in der Mitte der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden und der a_{BS}-a_{Pol}-Wolke und ist identisch mit dem vierten Parametersatz von #11657, dem einundzwanzigsten von #11659, dem zehnten von #11671 und dem zehnten von #12238.

a_{BS}	2.1	2.5	2.15	1.65	1.9	2.05	1.55	1.95	2.25	1.85
a_{GGJ}	10.0	15.5	11.5	4.5	8.5	10.0	3.0	8.5	12.5	7.0
a_{Pol}	0.3	0.05	0.05	0.4	0.1	0.15	0.5	0.25	0.1	0.35
Fehler	0.040	0.040	0.042	0.043	0.044	0.044	0.045	0.046	0.046	0.047

Tabelle 8.3: *Liste der zehn besten gemeinsamen Parametersätze mit gemitteltem Fehler, die in allen vier untersuchten Entladungen sinnvolle Ergebnisse liefern.*

Die Parameterverteilung läßt sich durch die Bildung von Mittelwerten (μ) und Standardabweichungen (σ) charakterisieren. Tabelle 8.4 zeigt die Resultate für die Mittelung über die besten zehn Parameter der jeweiligen Entladungen (aus Tabelle 8.2), für die Mittelung über die jeweils zehn besten Parameter aller vier Entladungen zusammen und für die Mittelung über die zehn besten gemeinsamen Parameter (aus Tabelle 8.3). Aufgrund der relativ geringen Fehlerunterschiede und der ohnehin nicht perfekten Anpassungen werden alle Daten gleich gewichtet. Die Mittelwerte mit Fehlerbalken sind in Abbildung 8.1 eingezeichnet. Während die Mittelwerte für die einzelnen Entladungen genauso wie die jeweiligen Parameterbereiche und die besten Parameter deutlich auseinanderliegen, sind die Mittelwerte über alle vier Entladungen ($a_{BS} = 2.01$, $a_{GGJ} = 9.2$, $a_{Pol} = 0.26$) fast identisch mit den Mittelwerten der gemeinsamen Parameter ($a_{BS} = 2.0$, $a_{GGJ} = 9.1$, $a_{Pol} = 0.23$). Weiterhin ist der Unterschied zum besten gemeinsamen Parametersatz ($a_{BS} = 2.1$, $a_{GGJ} = 10.0$, $a_{Pol} = 0.3$) gering. Bemerkenswert ist auch, daß die gemittelten Parameter sehr dicht am besten Parametersatz von #12238 und am sechstbesten von #11659 liegen (beide $a_{BS} = 2.0$, $a_{GGJ} = 9.0$, $a_{Pol} = 0.25$). Tabelle 8.5 zeigt die Anpassungsfehler bei Verwendung des besten Parametersatzes für die jeweilige Entladung,

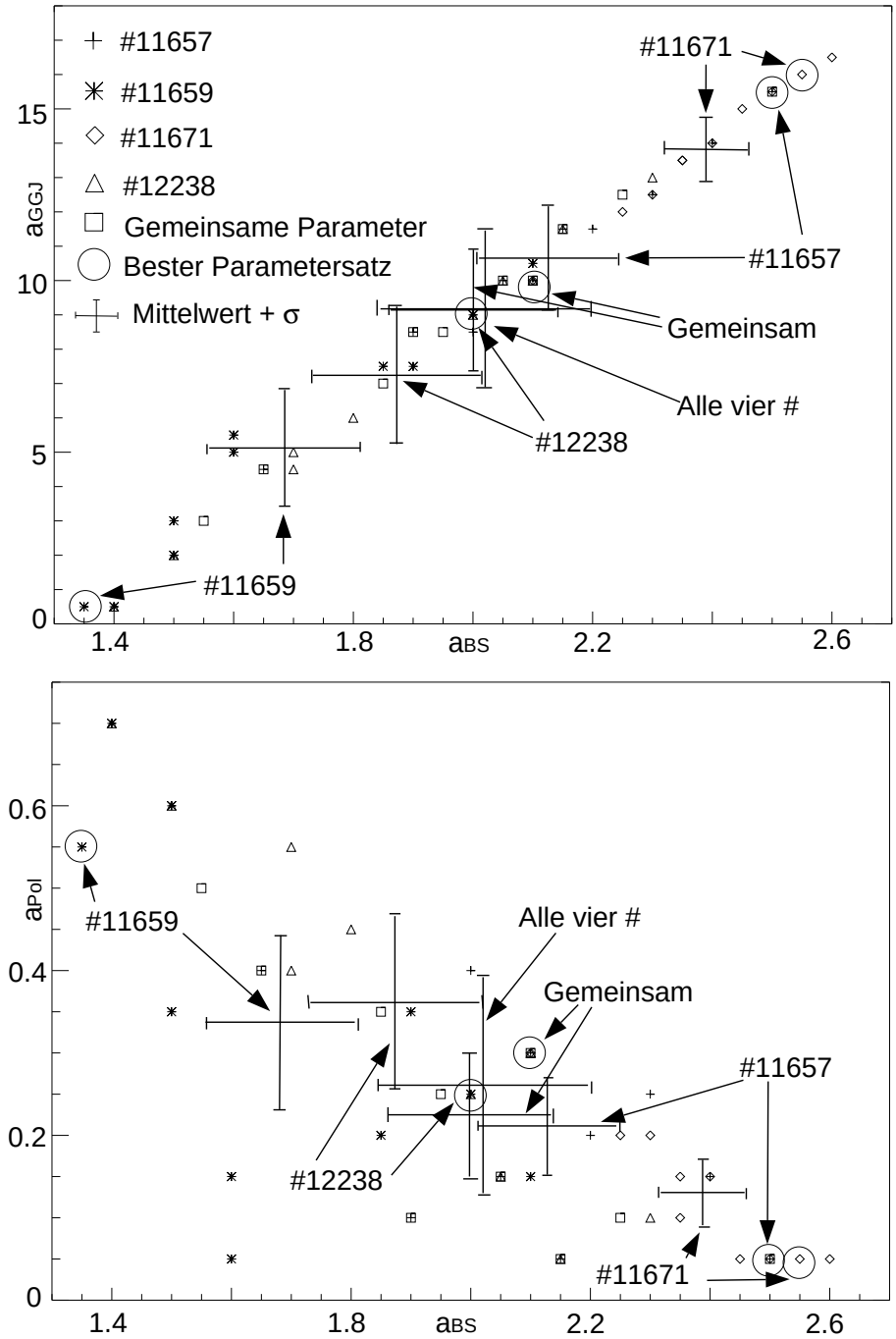

Abbildung 8.1: *Projektion der besten Parametersätze und ihrer Mittelwerte mit Standardabweichung auf die a_{BS}-a_{GGJ}- und die a_{BS}-a_{Pol}-Ebene.*

des besten gemeinsamen Parametersatzes, der gemittelten Parameter der jeweiligen Entladung, der gemittelten Parameter aller vier Entladungen und der gemittelten gemeinsamen Parameter. In allen Fällen ergeben sich sinnvolle Anpassungen, wie die Fehlerdifferenzen von maximal 66% bezogen auf den jeweils kleinsten Wert zeigen.

	#11657	#11659	#11671	#12238	Alle vier #	Gemeinsam
$\mu_{a_{BS}}$	2.13	1.68	2.39	1.87	2.01	2.0
$\sigma_{a_{BS}}$	0.23	0.25	0.14	0.28	0.35	0.27
σ/μ	0.11	0.15	0.06	0.15	0.18	0.13
$\mu_{a_{GGJ}}$	10.7	5.1	13.9	7.2	9.2	9.1
$\sigma_{a_{GGJ}}$	3.0	3.4	1.9	4.0	4.6	3.5
σ/μ	0.28	0.66	0.14	0.55	0.5	0.39
$\mu_{a_{Pol}}$	0.21	0.34	0.13	0.36	0.26	0.23
$\sigma_{a_{Pol}}$	0.12	0.21	0.08	0.21	0.19	0.15
σ/μ	0.61	0.62	0.62	0.59	0.74	0.67

Tabelle 8.4: *Mittelwerte μ und Standardabweichungen σ über die zehn besten Parametersätze der vier einzelnen Entladungen, über die aller vier Entladungen und über die zehn besten gemeinsamen Parametersätze.*

	#11657	#11659	#11671	#12238
Beste Parameter für #	0.0197	0.0159	0.0114	0.0221
Beste gemeinsame Parameter	0.0210	0.0229	0.0119	0.0228
Gemittelte Parameter für #	0.0274	0.0242	0.0116	0.0237
Gemittelte Parameter für alle vier #	0.0311	0.0264	0.0125	0.0285
Gemittelte gemeinsame Parameter	0.0224	0.0214	0.0126	0.0221

Tabelle 8.5: *Anpassungsfehler der Entladungen bei Verwendung der verschiedenen relevanten Parametersätze.*

Anhand der Fehlergrößen aus Tabelle 8.5 läßt sich die Frage untersuchen, welche Parameter, die besten gemeinsamen, die gemittelten gemeinsamen oder die über alle Entladungen gemittelten, am besten zur Modellierung der Inseldynamik aller untersuchten Entladungen geeignet sind. Von den drei genannten Parametersätzen liefert der beste gemeinsame für die Entladungen #11657 und #11671 den geringsten Fehler mit geringfügigem Abstand zu den gemittelten gemeinsamen Parametern. Für die Entladungen #11659 und #12238 ist der Fehler unter Verwendung der gemittelten gemeinsamen Parameter geringfügig kleiner als mit den besten gemeinsamen. Die über alle vier Entladungen gemittelten Parameter liefern in fast allen Entladungen die größten Fehler (außer in #11671), allerdings sind auch hier die Unterschiede nicht gravierend. Insofern lassen sich (zumindest in den untersuchten Fällen) alle drei (nahe beieinanderliegenden) Parametersätze zur Modellierung der Inseldynamik der untersuchten

Entladungen verwenden. Der gemeinsame Parametersatz hat dabei den Vorzug, daß bei seiner Ermittlung der Inselzerfall in allen einbezogenen Entladungen sichergestellt ist. Dies ist bei der Mittelwertbildung nicht unbedingt gegeben, sondern muß gesondert überprüft werden. (So zerfiele beispielsweise die modellierte Insel für #11657 nicht mehr, wenn im über alle Entladungen gemittelten Parametersatz a_{BS} etwas größer wäre.) Insofern empfiehlt sich die Verwendung des besten gemeinsamen Parametersatzes zur allgemeinen Beschreibung der Inseldynamik. Die Parametermittelung liefert hingegen mit der Standardabweichung ein Maß für die Parameterstreuung. Allerdings ist nicht garantiert, daß alle Parametersätze innerhalb des so definierten Streubereichs zu guten Anpassungen führen (es bleibt jeweils zu prüfen, ob der Inselzerfall modelliert wird).

Die Parameterstreuung kann anhand des relativen Fehlers (σ/μ, Tabelle 8.4) diskutiert werden. Die Streuungen von a_{BS} unterscheiden sich mit 6-18% relativ wenig, die von a_{GGJ} mit 14-66% stark und die von a_{Pol} mit 59-74% wiederum weniger. In fast allen Fällen ist die Streuung von a_{BS} am geringsten und von a_{Pol} am größten (mit Ausnahme von #11659, wo die Streuung von a_{GGJ} etwas größer ist als die von a_{Pol}). Somit läßt sich schließen, daß a_{BS} ein relativ genau bestimmter Parameter ist (mit 13% relativem Fehler für die gemittelten gemeinsamen Parameter), während a_{GGJ} (39% Fehler) und vor allem a_{Pol} (67% Fehler) nur ungenau zu bestimmen sind.

Abbildung 8.2 zeigt die experimentell gemessenen und die modellierten Inselbreiteverläufe unter Verwendung der besten Parametersätze der Entladungen und des besten gemeinsamen Parametersatzes. Ein deutlicher Unterschied zwischen den Modellierungen ist nur bei Entladung #11659 zu erkennen, weil hier der gemeinsame Parametersatz nicht mehr zu den zehn besten der Entladung gehört. Zum Vergleich ist $\beta_p(t)$ eingezeichnet (mit Nullpunkt unterhalb der Zeitachse). Man erkennt, daß die numerische Lösung der Rutherfordgleichung in der Phase gesättigter Inselbreite erwartungsgemäß dem Verlauf von β_p folgt. Demgegenüber entwickelt sich die gemessene Inselbreite teilweise anders als β_p. In den beiden letzten Entladungen (#11671 und #12238) ist der β-Abfall im ersten Drittel nicht in der Inselbreite ersichtlich. In diesem Zeitraum ist allerdings das Mirnovsignal durch Sägezähne gestört, sodaß die Inselbreitemessung durch die notwendige Signalbearbeitung beeinträchtigt wird. In den ersten beiden Entladungen (#11657 und #11659) ist ein kontinuierlicher leichter Abfall der Inselbreite erkennbar, dem kein entsprechender β_p-Abfall gegenübersteht. Sägezähne treten hier ebenfalls nur im ersten Drittel der Zeit auf, sodaß ein anderer Grund für das abweichende Verhalten vorhanden sein muß. Auffällig ist weiterhin, daß das modellierte Inselwachstum zu Modenbeginn deutlich langsamer verläuft als das experimentell gemessene. Hier ist zu bedenken, daß zu Modenbeginn aufgrund der Störung des Mirnovsignals durch Sägezähne keine zuverlässige Inselbreitemessung möglich ist. Dementsprechend wird dieser Zeitraum nicht bei der Berechnung des Anpassungsfehlers berücksichtigt. Die dritte Entladung (#11671) zeigt zwischem dem Abschalten der ersten und zweiten Neutralteilchenheizquelle (3.6 und 4.1s) ein interessantes Schwingverhalten. Mit sinkendem β_p sinkt die Inselbreite, bis β_p wieder steigt und die Insel mit zeitlicher Verzögerung anwächst. Das Zeitverhalten kann in der Modellierung nicht korrekt nachvollzogen werden. Insgesamt gesehen bestehen zwischen den experimentell gemessenen und den modellierten Inselbreiteverläufen deutliche Diskrepanzen, insbesondere aufgrund der teilweise nicht proportionalen Entwicklung von β_p und gemessener Inselbreite.

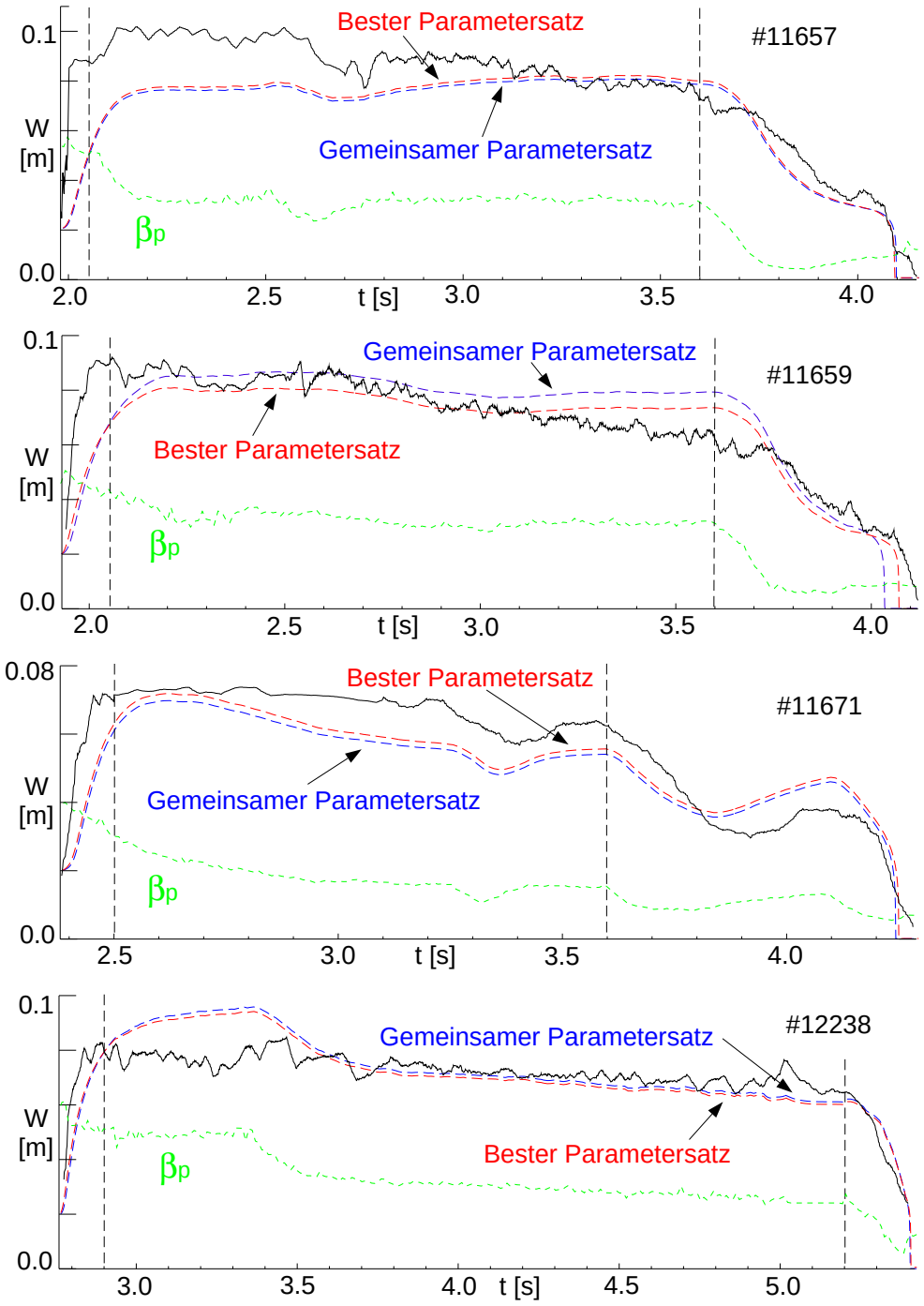

Abbildung 8.2: *Experimentell gemessene Inselbreite (durchgezogen) und numerische Lösungen der Rutherfordgleichung (gestrichelt) mit den besten Parametersätzen der Entladungen und dem besten gemeinsamen Parametersatz. Der Nullpunkt von* $\beta_p(t)$ *(gepunktet) liegt unterhalb der Zeitachse. Die vertikalen Linien zeigen* $t_{Fehler1}$ *und* $t_{Fehler2}$.

Als Erklärungsansatz lassen sich einerseits die Unsicherheiten der experimentellen Messungen ($W(t)$, Eingangsparameter) und andererseits die vereinfachenden Annahmen der Modellierung (z.B. $\Delta'(W) = const$) nennen.

8.2 Fehlerdiskussion

Der Fehler in der Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung läßt sich zunächst grob mit der gesamten Breite des Wertebereichs abschätzen. Im vorigen Abschnitt wurde bereits diskutiert, daß darüber hinaus mit der Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichungen eine genauere Eingrenzung möglich ist. Dabei zeigt sich, daß a_{BS} eine gut bestimmbare Größe ist, während a_{GGJ} und a_{Pol} eine große Streuung aufweisen. Im folgenden soll ein anderer Fehleraspekt diskutiert werden, nämlich die Frage, wie sich der bestimmte Wertebereich mit einer Variation der Eingangsparameter ändert. Die folgende Fehlerdiskussion basiert auf beispielhaften Wiederholungen der Parameterbestimmung für Entladung #11659 unter Variation der wichtigsten fehlerbehafteten Eingangsparameter. Eine Quantifizierung der Wertebereichsänderung ist wenig zweckmäßig, da sich mit den Eingangsparametern auch die Anpassungsfehler deutlich ändern können.

Die Lage der a_{BS}-a_{GGJ}-Wertepaare streut um eine Gerade, die gemäß der vereinfachenden theoretischen Betrachtung der Rutherfordgleichung (Abschnitt 5.3) die Steigung $r_{res}/(\varepsilon^{3/2}L_q)$ hat und deren Achsenschnittpunkte von $(-\Delta_0')L_p/(\sqrt{\varepsilon}L_q)$ beeinflußt werden. Die Größen Δ_0', L_q und L_p sind experimentell schwierig zugänglich und werden im Modell als Näherungswerte konstant gehalten. Abbildung 8.3 (oberer Teil) zeigt die Auswirkungen einer Variation dieser Eingangsparameter in realistischer Größenordnung. Größere Werte von $(-\Delta_0')$ und L_p führen zu einer deutlichen Verschiebung der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden mit Steigung 14.7 nach rechts. Die a_{BS}-a_{Pol}-Punktewolke verschiebt sich ebenfalls nach rechts und umfaßt auch größere Werte nahe eins. Ein größerer Wert von L_q führt zu einer Verschiebung der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden nach links und zu einer Verkippung zur Steigung 11. Die a_{BS}-a_{Pol}-Punktewolke verschiebt sich ebenfalls nach links, sodaß die Werte von a_{Pol} nahe bei Null liegen. Ein weiterer wichtiger Parameter, dessen abgeschätzter Wert konstant gehalten wird, ist W_0. Abbildung 8.3 (unterer Teil) zeigt das Ergebnis für den Wert $W_0 = 8mm$, den man mit der unkorrigierten Spitzerwärmeleitfähigkeit erhält. Man erkennt eine leichte Verschiebung der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden nach links und eine Tendenz zu höheren Werten. Dies korrespondiert mit höheren a_{Pol}-Werten. Jenseits des dargestellten a_{BS}-a_{GGJ}-Wertebereichs finden sich weitere “gute” Parametersätze, während dies bei $W_0 = 1.8cm$ nicht der Fall ist. Ein höherer Wert von W_0 reduziert den Wertebereich der “guten” Parametersätze auf einen kürzeren Abschnitt der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden bei tieferen Parameterwerten auch in a_{Pol}. Somit ermöglicht die Berücksichtigung von W_0 in der richtigen Größenordnung eine genauere Eingrenzung der freien Parameter, da Bootstrap- und Glasser-Greene-Johnson-Effekt besser differenzierbar sind.

Neben Fehlern in den konstantgehaltenen Eingangsparametern der Rutherfordgleichung sind auch Fehler in der Inselbreitemessung wichtig. Hier sind insbesondere die Skalierung des relativen Inselbreiteverlaufs und die Messung der seed island Breite zu nennen. Ein weiterer fehleranfälliger Schritt ist die Bestimmung des relativen Inselbreiteverlaufs aus dem Mir-

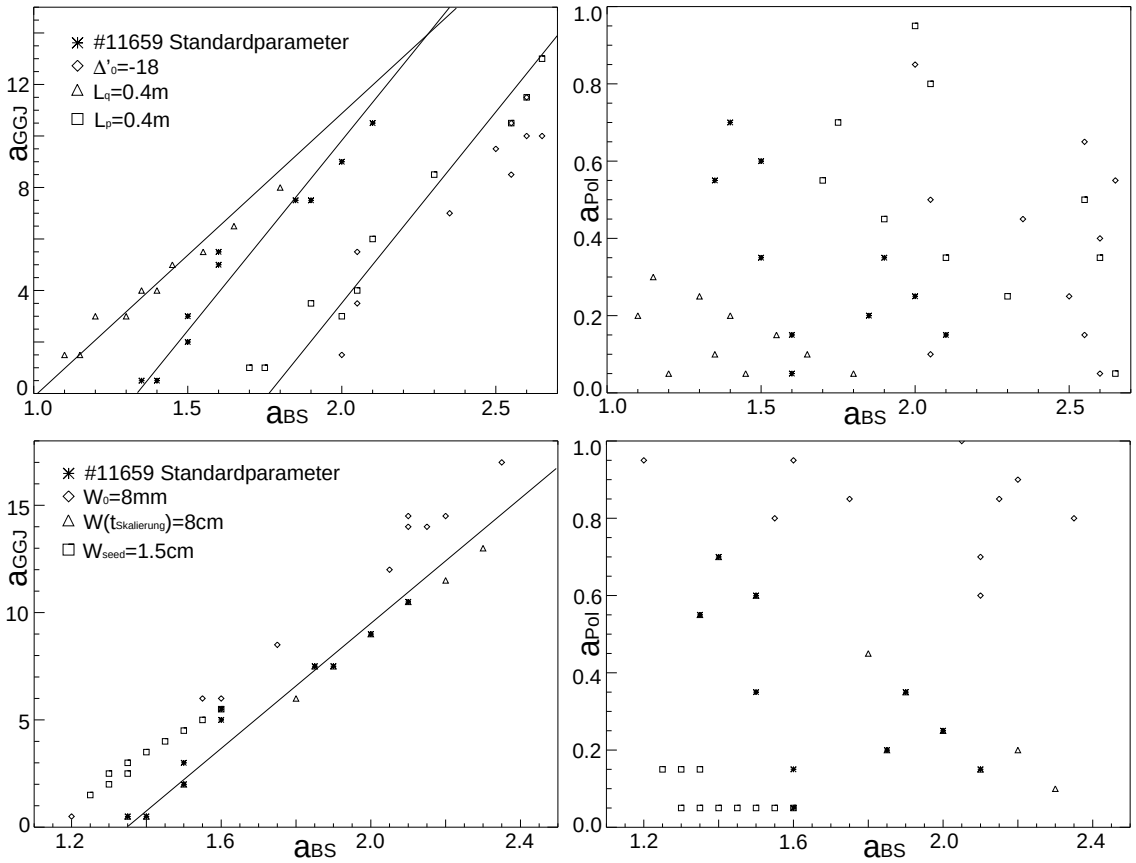

Abbildung 8.3: *Einfluß von Eingangsparametervariationen auf die Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung in Entladung #11659.*

novsignal, in das verschiedene Störeinflüsse eingehen. In diesem Zusammenhang ist daran zu erinnern, daß die gemessene gesättigte Inselbreite teilweise nicht proportional zu $\beta_p(t)$ verläuft, wie es von der Rutherfordgleichung vorhergesagt wird. Abbildung 8.3 (unterer Teil) veranschaulicht die Auswirkungen einer um einen Zentimeter abweichenden Skalierung der Inselbreite, was der Unsicherheit der Inselbreitemessung mit der ECE-Diagnostik entspricht (insbesondere in einem Fall wie #11659, wo die Insel in der hochauflösenden Messung nicht vollständig im Meßbereich lag). Hier sind keine signifikante Folgen erkennbar. Die experimentelle Messung der seed island Breite aus dem Mirnovsignal oder ECE-Messungen ist sehr unzuverlässig, allerdings ist zu vermuten, daß W_{seed} nicht wesentlich kleiner als W_0 ist, weil ansonsten der Bootstrapeffekt zu schwach wird. Andererseits erscheint eine Inselgröße von deutlich mehr als W_0 ($> 2cm$) unrealistisch groß. Der Vergleich mit $W_{seed} = 1.5cm$ demonstriert die Auswirkungen einer zu klein gewählten seed island Breite. Der beste modellierte Inselbreiteverlauf liegt deutlich niedriger als bei $W_{seed} = 2cm$, sodaß die Anpassung nicht mehr befriedigt. Abbildung 8.3 (unterer Teil) zeigt, daß die a_{BS}-a_{GGJ}-Wertepaare um eine leicht nach links verschobene Gerade streuen und sich auf vergleichsweise kleine Werte beschränken. Dies kor-

respondiert mit a_{Pol}-Werten nahe Null. Die Parametersätze, die man mit größerer seed island Breite erhält, erlauben bei Verwendung von $W_{seed} = 1.5cm$ in der Regel keine Inselentstehung oder führen nicht zum erwünschten Inselzerfall. Wählt man hingegen eine deutlich größere seed island Breite (z.B. $W_{seed} = 3cm$), so erhält man im wesentlichen dasselbe Ergebnis wie mit $W_{seed} = 2cm$. Die Parameterbestimmung reagiert demnach sehr sensibel auf zu kleine seed island Breiten, aber nicht auf zu große. Die seed island Breite muß folglich so gewählt werden, daß eine kleine Variation das Ergebnis nicht wesentlich beeinflußt.

Eine weitere Fehlerquelle stellen die Temperatur- und Druckprofilmessung sowie die Lagebestimmung der resonanten Fläche dar. Hier ergeben sich Auswirkungen auf $\beta_p(t)$ und $\tau_R(t)$. Somit haben Fehler in r_{res} komplexere Auswirkungen als nur die Drehung der a_{BS}-a_{GGJ}-Geraden. Schwierig zu beurteilen ist die Wirkung des Konstanthaltens von zeitlich veränderlichen Größen wie $\Delta'(W)$ oder ρ_p. Beide könnten einen signifikanten Einfluß auf die Parameterbestimmung haben. Die Implementierung von $\rho_p(t)$ in das vorhandene Modell ist einfach machbar, jedoch ist der Zuwachs an Zuverlässigkeit der Parameterbestimmung in Ermangelung eines ausreichend exakten $\Delta'(W)$-Modells fraglich. Abschließend läßt sich zusammenfassen, daß die Bestimmung des Wertebereichs der freien Parameter deutlich von den Eingangsparametern Δ'_0, L_p, L_q, W_0 und W_{seed} beeinflußt wird, die experimentell schwer zugänglich sind und daher in Form konstanter Schätzwerte eingehen müssen. Dazu kommen die schwieriger zu beurteilenden Einflüsse anderer Modell- und Meßungenauigkeiten sowie der Kombination verschiedener Fehler. Daher erweitert sich der mögliche Wertebereich der freien Parameter deutlich, wobei eine Quantifizierung schwerlich möglich ist.

8.3 Diskussion der Inseldynamikuntersuchung

Die numerische Lösung der verallgemeinerten Rutherfordgleichung wurde mit dem in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren an die experimentell gemessene Inseldynamik von vier Entladungen mit neoklassischen Tearing Moden in ASDEX Upgrade angepaßt, um die freien Parameter a_{BS}, a_{GGJ} und a_{Pol} der Rutherfordgleichung experimentell zu bestimmen. Eine “perfekte” Anpassung kann nicht gefunden werden, sodaß keine sichere Bestimmung des “richtigen” Parametersatzes möglich ist. Dies ist angesichts der experimentellen Ungenauigkeiten, der vereinfachenden Modellannahmen (z. B. abgeschätzte und konstante Eingangsparameter) und der mathematischen Struktur der Rutherfordgleichung ($1/W$-Abhängigkeit von Bootstrapeffekt und Glasser-Greene-Johnson-Effekt für große Inseln) nicht anders zu erwarten. Stattdessen kann man für jede Entladung einen Bereich von verschiedenen Parametersätzen eingrenzen, die zu sehr ähnlichen guten Anpassungen führen. Die Parameterbereiche überlappen sich, sodaß verschiedene gemeinsame Parametersätze gefunden werden können, die in allen vier Entladungen sehr ähnliche gute Anpassungen liefern. Weiterhin zeigt sich:

- Der beste gemeinsame Parametersatz (mit dem geringsten gemittelten Fehler) weicht nur geringfügig vom Mittelwert der zehn besten gemeinsamen Parametersätze und vom Mittelwert der jeweils zehn besten Parametersätze der vier Entladungen ab.

- Der beste gemeinsame Parametersatz liefert sehr gute Anpassungen (mit vergleichsweise geringem Fehler und garantiertem Inselzerfall) und erscheint daher optimal zur Beschreibung der Inseldynamik aller vier untersuchten Entladungen geeignet. Er lautet $a_{BS} = 2.1$, $a_{GGJ} = 10.0$ und $a_{Pol} = 0.3$.

Die aus der Parametermittelung erhältliche relative Standardabweichung stellt ein Maß für die Parameterstreuung dar. Es zeigt sich, daß a_{BS} eine gut bestimmte Größe ist, während a_{GGJ} und a_{Pol} mit größerer Streuung behaftet sind. Bei der Fehlerbetrachtung ist zu bedenken, daß die Eingangsparameter der Rutherfordgleichung teilweise mit erheblichen Ungenauigkeiten behaftet sind, die deutlichen Einfluß auf den bestimmten Parameterbereich haben können.

Zwei weitere Beobachtungen verdienen besondere Beachtung:

- Die Berücksichtigung der stabilisierenden Wirkung der unvollständigen Druckprofilabflachung in realistischer Größenordnung ($W_0 = 1.8cm$ statt $W_0 = 8mm \approx 0$) ermöglicht die Differenzierung zwischen Bootstrapeffekt und Glasser-Greene-Johnson-Effekt. Dies führt zu einer Einengung des bestimmten Wertebereichs der freien Parameter.

- Die gemessene gesättigte Inselbreite verläuft nicht durchgängig proportional zu $\beta_p(t)$, wie von der Rutherfordgleichung beschrieben. Dies ist zumindest teilweise Unzulänglichkeiten der experimentellen Messung und dem Konstanthalten von Eingangsparametern zuzuschreiben, eine weitere Ursache könnten aber auch MHD-Effekte sein, die das Mirnovsignal beeinflussen. In diesen Abweichungen liegt ein wesentlicher Grund für die mangelnde Anpaßbarkeit der Rutherfordgleichung, sodaß für eine präzisere Parameterbestimmung eine nähere Untersuchung notwendig wird.

Ein Vergleich der Ergebnisse der Parameterbestimmung mit denen andere Autoren ist schwerlich möglich, da je nach Autor verschiedene Effekte in der Rutherfordgleichung Berücksichtigung finden. In [2] findet man das Ergebnis $a_{BS} = 1.7$ für eine auf $\Delta'(W)$ und den Bootstrapterm mit $W_0 = 0$ reduzierte Rutherfordgleichung, in [4] und [28] hingegen wird zusätzlich der Polarisationsstromeffekt berücksichtigt und $a_{BS} = a_{Pol} = 7.0$ angegeben. Eine gegenüber Gl.(4.7) allgemeinere Form der Rutherfordgleichung wird in [26] verwendet, wobei nur der Wert $a_{Pol} = 5.0$ direkt vergleichbar ist (die anderen Werte ergeben sich nach Umrechnung zu $a_{BS} = 1.5$ und $a_{GGJ} = 3.3$). Somit stimmen die a_{BS} größenordnungsmäßig überein, während in a_{GGJ} und a_{Pol} ein Unterschied von einer Größenordnung liegt. Diese beiden Parameter weisen jedoch auch eine große Streuung auf. Weiterhin ist daran zu erinnern, daß a_{Pol} mit kleinerem oder vernachlässigtem W_0 tendenziell größere Werte hat.

Der beste gemeinsame Parametersatz der vier untersuchten Entladungen eröffnet die Möglichkeit, im Rahmen des zugrundeliegenden Modells die Dynamik neoklassischer Tearing Moden zu simulieren. Dies erlaubt die Abschätzung der zur ECCD-Modenstabilisierung notwendigen Mikrowellenleistung, beispielsweise mit Hilfe eines konsistenten Modells des gekoppelten Systems Plasma-Insel, dessen Prinzip in Abschnitt 4.4 dargestellt ist. Eine wesentliche Verbesserung der Zuverlässigkeit der Parameterbestimmung erfordert eine erhebliche Steigerung der experimentellen Meßgenauigkeiten. Insbesondere müßten auch bisher schwierig zu messende Größen wie $\Delta'(W)$ ausreichend gut meßbar werden, sodaß sie zeitabhängig erfaßt werden können.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die theoretische und experimentelle Untersuchung der Struktur und Dynamik neoklassischer Tearing Moden in ASDEX Upgrade. Die Flußflächenstruktur magnetischer Inseln wird mit einem realistischen Modell des helikalen magnetischen Gleichgewichts- und Störflusses dargestellt. Die modellierten magnetischen Inseln sind asymmetrisch mit stärkerer Wölbung zum Plasmainneren. Der Störfluß läßt sich mit Hilfe einer zusammengesetzten analytischen Funktion beschreiben, deren Verlauf mögliche Lösungen der Tearing-Mode-Gleichung näherungsweise wiedergeben kann. Basierend auf dem Flußflächenmodell wird das Temperaturprofil magnetischer Inseln mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung modelliert. Dabei wird die Absenkung der Spitzerwärmeleitfähigkeit parallel zu den Feldlinien um etwa zwei Größenordnungen berücksichtigt, die aufgrund der im Vergleich zur Gradientenlänge langen freien Weglänge in ASDEX Upgrade notwendig ist ("heat flux limit"). Unter vereinfachenden Annahmen läßt sich die Wärmeleitungsgleichung analytisch lösen. Die Berücksichtigung der realistischen Inselgeometrie und der endlichen Wärmeleitfähigkeit erfordert hingegen eine numerische Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung. Die Ergebnisse sind mit denen einer zeitabhängigen Plasmatransportmodellierung vergleichbar. Die asymmetrische Inselgeometrie zeichnet sich im Temperaturprofil ab. Insbesondere zu erwähnen ist die auch theoretisch vorhergesagte unvollständige Temperaturprofilabflachung im Inselinneren in Separatrixnähe vor allem in der X-Punktregion aufgrund der endlichen Wärmeleitfähigkeit. Das Temperaturprofil einer magnetischen Insel in der experimentell beobachtbaren Größenordnung von 6 - 8cm sollte dennoch großenteils vollständig abgeflacht sein.

Die experimentelle Untersuchung der Inselstruktur basiert auf der Auswertung der Elektronentemperaturprofile und ihrer Fourierkomponenten, die mit der ECE-Diagnostik an ASDEX Upgrade gemessen wurden. In einigen Entladungen wurde eine zusätzliche zeitlich hochauflösende Datenerfassung verwendet, welche die vollständige Darstellung der Inseltemperaturprofile neoklassischer Tearing Moden mit allen Fourierkomponenten erlaubt. In den übrigen Entladungen ist die Darstellung aufgrund zu geringer Zeitauflösung der Standarddatenerfassung auf die erste Fourierkomponente beschränkt, die mit Hilfe eines entwickelten Verfahrens rekonstruiert werden kann. Die theoretisch erwartete unvollständige Temperaturprofilabflachung in der X-Punktregion läßt sich experimentell mit der gegebenen radialen Auflösung und oh-

ne genaue Kenntnis der Flußflächenstruktur nicht einwandfrei überprüfen. Hingegen kann die bereits von anderen Autoren gemachte Beobachtung bestätigt werden, daß das Temperaturprofil in der Inselmitte entgegen der theoretischen Erwartung aus der Modellierung nicht vollständig abgeflacht ist, sondern Substrukturen ("Temperaturhügel") aufweist. Eine theoretische Erklärung dieser Substrukturen ist bisher nicht bekannt und erfordert wahrscheinlich ein umfassendes nichtlineares Plasmatransportmodell.

Die modellierte Verknüpfung zwischen Flußflächenstruktur und Temperaturprofil läßt sich ausnutzen, um aus der experimentellen Temperaturprofilmessung auf die Flußflächenstruktur zu schließen. Eine einfache Geometrieanalyse kann anhand der Maxima der ersten und der Nullstellen der ersten und zweiten Fourierkomponente vorgenommen werden. Dabei bestätigt sich die theoretische Erwartung, daß die magnetischen Inseln in ASDEX Upgrade asymmetrisch mit stärkerer Wölbung zum Plasmainneren hin geformt sind. Weiterhin wurde das Prinzip eines Verfahrens demonstriert, mit dem über eine Anpassung modellierter Temperaturprofile die magnetische Flußflächenkonfiguration rekonstruiert werden kann. Damit ist im Prinzip die Bestimmung des nichtlinearen Stabilitätsparameters $\Delta'(W)$ möglich, allerdings erfordert das Verfahren weitere Entwicklungsarbeit. Insbesondere sind hier die Modellierung des Temperaturprofils mit Substrukturen und eine wesentliche Verbesserung der Diagnostik (z. B. der radialen Auflösung) zu nennen. Aus den Ergebnissen ist allerdings zu vermuten, daß $\Delta'(W)$ in den untersuchten neoklassischen Tearing Moden wie erwartet negativ ist.

Die Dynamik neoklassischer Tearing Moden kann mit der verallgemeinerten Rutherfordgleichung theoretisch beschrieben werden, welche neben der Stabilität des Stromprofils ($\Delta'(W)$) und dem Bootstrapeffekt die stabilisierenden Wirkungen der unvollständigen Druckprofilabflachung kleiner Inseln (W_0), der Torusform (Glasser-Greene-Johnson-Effekt) und des Polarisationsstroms enthält. Die Bedeutung des Polarisationsstroms ist aufgrund der an ASDEX Upgrade experimentell beobachteten Kollisionalitätsabhängigkeit des β-Limits und der proportionalen β-Skalierung mit dem poloidalen Ionenlarmorradius ρ_p weitgehend gesichert. Die Berücksichtigung der von anderen Autoren oft vernachlässigten unvollständigen Druckprofilabflachung ist notwendig, da W_0 unter Zugrundelegung der korrigierten Spitzerwärmeleitfähigkeit ("heat flux limit", siehe oben) die Größenordnung einer seed island erreicht und daher wesentlichen Einfluß bei der Inselentstehung haben könnte. Weiterhin läßt sich mit der Korrektur der Wärmeleitfähigkeit die ρ_p-Skalierung des β-Limits auch mit der Wirkung von W_0 vereinbaren, sodaß anhand der Skalierung nicht wie bisher angenommen auf die Dominanz des Polarisationsstroms bei der Stabilisierung kleiner Inseln geschlossen werden kann. Die Inselbreiteabhängigkeit des Glasser-Greene-Johnson-Effekts unterscheidet sich aufgrund der Berücksichtigung von W_0 von der des Bootstrapeffekts, sodaß zwischen beiden differenziert werden kann.

Die freien Parameter der Rutherfordgleichung im Bootstrapterm, im Glasser-Greene-Johnson-Term und im Polarisationsstromterm beinhalten theoretisch schwierig erfaßbare Effekte und sollten daher experimentell bestimmt werden. Dazu wird die numerische Lösung der Rutherfordgleichung an die experimentell beobachtete Inseldynamik in vier Entladungen in ASDEX Upgrade angepaßt. Die experimentellen Unsicherheiten in der Messung der Inselbreite und der übrigen Eingangsparameter der Rutherfordgleichung sowie die notwendigen vereinfachen-

den Annahmen führen zu deutlichen Abweichungen zwischen modellierter und beobachteter Inseldynamik. Zudem erhält man aufgrund der mathematischen Struktur der Rutherfordgleichung sehr ähnliche Lösungen mit verschiedenen Sätzen der freien Parameter. Insofern ist mit diesem Verfahren zunächst nur eine Eingrenzung auf einen Parameterbereich für jede Entladung möglich. Es lassen sich aber gemeinsame Parametersätze finden, mit welchen die Dynamik aller vier Entladungen zufriedenstellend modelliert werden kann. Der beste gemeinsame Parametersatz mit dem geringsten gemittelten Anpassungsfehler ($a_{BS} = 2.1$, $a_{GGJ} = 10.0$ und $a_{Pol} = 0.3$) stellt somit das Ergebnis der Parameterbestimmung dar. Er weicht nur geringfügig vom Mittelwert der zehn besten gemeinsamen Parametersätze und vom Mittelwert der jeweils zehn besten Parametersätze der vier Entladungen ab. Anhand der relativen Standardabweichungen der Mittelung läßt sich erkennen, daß a_{BS} eine gut bestimmte Größe ist, während a_{GGJ} und insbesondere a_{Pol} eine große Streuung aufweisen. Die genauere Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung erfordert wesentlich verbesserte diagnostische Möglichkeiten, wie beispielsweise die Messung von $\Delta'(W)$ im Zeitverlauf.

Anhang A

Berechnung der Feldlinienlänge

Der Ausgangspunkt für die Bestimmung der Länge L einer Feldlinie, welche während ihrer Torusumläufe eine bestimmten Differenz im helikalen Winkel ζ zurücklegt, ist die Frage nach der Änderung von ζ mit Fortschreiten in toroidaler Richtung. Die Feldlinien, darstellbar durch das Vektorfeld $\vec{s}$, sind an jedem Punkt in ihrer Richtung durch den Magnetfeldvektor (B_r, B_Θ, B_z) bestimmt. Parametrisiert man $\vec{s}$ nach der z-Koordinate, so gibt $d\vec{s}/dz$ genau wie der Magnetfeldvektor an jedem Punkt die Richtung der Feldlinie an. Folglich gilt $d\vec{s}/dz \times \vec{B} = (dr/dz, r_{res} \cdot d\Theta/dz, 1) \times \vec{B} = 0$. Hier geht die Annahme einer "slab geometry" ein, d. h. das Zylinderkoordinatensystem, welches den Torus nähert, wird zu einem kartesischen Koordinatensystem gebogen. Weiterhin kann eine Transformation auf den helikalen Winkel $\zeta = m\Theta$ (bei $z = const$) und den Abstand von der resonanten Fläche $x = r - r_{res}$ vorgenommen werden. Damit folgen die "Bewegungsgleichungen" der Feldlinie $\partial\zeta/\partial z = m/r_{res} \cdot B_\Theta/B_z$ und $\partial x/\partial z = B_r/B_z$.

Der radiale Anteil B_r des Magnetfelds ist allein durch den helikalen Störfluß $\chi_1(x, \zeta)$ gegeben. Der poloidale Gleichgewichtsanteil $B_{0\Theta}$ läßt sich gemäß Gl.(2.10) in einen helikalen und einen nichthelikalen Anteil zerlegen. Von Interesse ist hier nur der helikale Anteil, der die Bewegung der Feldlinie relativ zur Insel aufgrund der Verscherung des Magnetfelds beschreibt. Er läßt sich durch den helikalen Gleichgewichtsfluß $\chi_0(x)$ ausdrücken. Der nichthelikale Anteil bewirkt keine Änderung im helikalen Winkel. Damit lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{1}{B_z}\frac{m}{r_{res}}\chi_1(x)\sin\zeta \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{B_z}\frac{m}{r_{res}}\frac{\partial\chi_0(x)}{\partial x} - \frac{1}{B_z}\frac{m}{r_{res}}\frac{\partial\chi_1(x)}{\partial x}\cos\zeta \quad . \tag{A.2}$$

Die Bewegungsgleichungen (A.1) und (A.2) lassen sich numerisch für beliebige Flußfunktionen simultan lösen. Zur analytischen Lösung kann man Gl.(A.2) invertieren, sodaß man $\partial z/\partial\zeta$ erhält. Die Integration nach $d\zeta$ über das geforderte ζ-Intervall ergibt die Länge der Feldlinie. Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\partial\chi_0(x)/\partial x$ und im allgemeinen auch $\partial\chi_1(x)/\partial x$ von x abhängen, welches gemäß Gl.(A.1) nicht konstant bleibt, sondern einer ζ-abhängigen

Änderung unterliegt. Die Integration von $\partial z/\partial\zeta$ muß auf einer gleichbleibenden Flußfläche durchgeführt werden.
Die analytische Lösung ist unter der Annahme einer symmetrischen Insel mit parabelförmigem Gleichgewichtsfluß und radial konstanter Störflußamplitude möglich ($\partial\chi_1(x)/\partial x = 0$). Der Gleichgewichtsfluß gemäß Gl.(2.12) wird umgeformt zu:

$$\chi_0(x) = \frac{B_z r_{res} q'_{res}}{2R_0 q_{res}^2} x^2 \quad . \tag{A.3}$$

Nach Einsetzen in die invertierte Gl.(A.2) muß x unter der Forderung eines konstanten Gesamtflusses durch ζ ausgedrückt werden. Mit der Inselbreite W gemäß Gl.(2.15) folgt:

$$x = \frac{W}{2\sqrt{2}} \sqrt{8\frac{x_O^2}{W^2} - 1 - \cos\zeta} \quad , \tag{A.4}$$

wobei x_O die positive x-Position der Feldlinie bei $\zeta = \pi$ ist und somit die Flußfläche kennzeichnet. Als Integrationsbereich soll $\zeta = \pi \ldots \zeta_{min}$ betrachtet werden, wobei ζ_{min} der (untere) Winkel ist, bei dem das Argument der Wurzel gleich Null wird. Damit erhält man die Länge L der Feldlinie, die vom Startpunkt (x_O, π) zum Endpunkt $(0, \zeta_{min})$ innerhalb der Insel oder $(x_X, 0)$ außerhalb läuft:

$$L = \frac{2\sqrt{2}R_0 q_{res}}{nW q'_{res}} \int_{\pi}^{\zeta_{min}} \frac{1}{\sqrt{8\frac{x_O^2}{W^2} - 1 - \cos\zeta}} d\zeta \tag{A.5}$$

mit

$$\zeta_{min} = \begin{cases} \arccos\left(8\frac{x_O^2}{W^2} - 1\right) & \text{wenn } x_O < W/2 \\ 0 & \text{wenn } x_O \geq W/2 \end{cases} \quad . \tag{A.6}$$

Das elliptische Integral in Gl.(A.5) läßt sich auf eine Standardform zurückführen. Dazu substituiert man $\zeta = 2\beta$, verwendet $\cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1$, substituiert $\alpha = \pi/2 - \beta$, benutzt $\cos\beta = \sin(\pi/2 - \beta) = \sin\alpha$ und erhält das Endergebnis für die Länge der Feldlinie, welche im helikalen Winkel die Strecke $\zeta = \pi \ldots \zeta_{min}$ durchläuft:

$$L = \frac{2R_0}{n} \frac{q_{res}}{q'_{res}} \frac{1}{x_O} \int_0^{(\pi-\zeta_{min})/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{W^2}{4x_O^2}\sin^2\alpha}} d\alpha \quad . \tag{A.7}$$

Außerhalb der Insel und auf der Separatrix läuft das Integral bis $\pi/2$ und entspricht der Standardform des vollständigen elliptischen Integrals $K(W/(2x_O))$. Für eine Feldlinie auf der Separatrix ($x_O = W/2$) gilt $K(1) = \infty$ und für $x_O \to \infty$ gilt $K(0) = \pi/2$. In der Nähe der Inselmitte ist $x \ll W/2$ und ζ_{min} klein, sodaß $\sin^2\alpha \approx \alpha^2$ gilt. Damit wird das Integral analytisch lösbar und es folgt:

$$L \approx \frac{4R_0}{nW}\frac{q_{res}}{q'_{res}}\arcsin\left(\frac{(\pi-\zeta_{min})W}{4x_O}\right) = \frac{2\pi R_0}{nW}\frac{q_{res}}{q'_{res}} \quad . \tag{A.8}$$

Bei der Auswertung des arcsin-Terms ist zu beachten, daß sowohl $\pi - \zeta_{min}$ als auch x_O im Grenzfall gegen Null gehen, sodaß eine nähere Untersuchung notwendig ist. Die Gleichung (A.6) für ζ_{min} läßt sich zu $\pi - \arccos(1 - 8x_O^2/W^2)$ umformen, was die Verwendung von $\arccos(\phi) = \arcsin\sqrt{1-\phi^2}$ ermöglicht. Damit folgen (für kleine x_O) $\zeta_{min} = \pi - 4x_O/W$ und das Ergebnis $\pi/2$ für den arcsin-Term in Gl.(A.8).

Mit der Länge einer Feldlinie, die innerhalb einer magnetischen Insel einen poloidalen Umlauf um die Inselachse beschreibt, läßt sich das Äquivalent zum Faktor q bilden, der außerhalb einer Insel die Anzahl der toroidalen Umläufe einer Feldlinie angibt, die einen poloidalen Umlauf um die Torusachse beschreibt. Dazu bildet man $q_{Insel} = 4L/(2\pi R_0)$, woraus mit Gl.(A.8) für das Inselzentrum das Ergebnis

$$q_{Insel} = \frac{4}{n}\frac{q_{res}}{q'_{res}}\frac{1}{W} \tag{A.9}$$

folgt. Mit Annäherung an die Separatrix gilt $q_{Insel} \to \infty$.

Anhang B

Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

In der analytischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.21) soll die Temperaturvariation in der Umgebung der resonanten Fläche betrachtet werden. Dazu wird die Temperatur in einen konstanten Anteil und ihre räumliche Variation zerlegt:

$$T(x,\zeta) = T_0(r_{res}) + \tilde{T}(x,\zeta) \quad . \tag{B.1}$$

Die Wärmeleitungsgleichung lautet nun:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{W}{W_c}\right)^4 \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\Omega}\right) = 0 \quad . \tag{B.2}$$

Innerhalb der Insel ($\Omega < 1$) gilt die Bedingung $\arccos\Omega \leq \zeta \leq 2\pi - \arccos\Omega$, damit die Wurzel nicht imaginär wird. Außerhalb der Insel kann man Gl.(B.2) durch Integration nach ζ und Division durch 2π über den helikalen Winkel ζ mitteln. Dies entspricht einer Mittelung über die Flußflächen, sodaß die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung keine Informationen mehr über die Temperaturvariation auf den Flußflächen enthält. Es wird angenommen, daß die Temperatur eine Funktion der Flußflächen und auf diesen konstant ist, d.h. $\tilde{T} = \tilde{T}(\Omega)$. Innerhalb der Separatrix, wo Flußflächen mit ursprünglich verschiedener Temperatur miteinander verbunden werden, wird das Temperaturprofil flach, d.h. $\tilde{T} = 0$. Der erste Term in Gl.(B.2) ($\nabla_{\|}$) fällt weg und der zweite ergibt aufgrund der Vertauschbarkeit von Integration und Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\Omega-\cos\zeta}\frac{d\zeta}{2\pi}\cdot\frac{d\tilde{T}}{d\Omega}\right) = 0 \quad . \tag{B.3}$$

Integration von Gl.(B.3) nach Ω und Umformung liefert dann:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\Omega} = \pm \frac{const}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\Omega - \cos\zeta} \frac{d\zeta}{2\pi}} \quad . \tag{B.4}$$

Dabei gehört $\pm$ zu den Fällen $x \gtrless 0$, da anhand des Wertes von Ω nicht zwischen $x > 0$ und $x < 0$ unterschieden werden kann.
Das Integral in Gl.(B.4) läßt sich auf die Standardform eines elliptischen Integrals zurückführen. Dazu substituiert man Ω mit

$$k = \sqrt{\frac{1+\Omega}{2}} \tag{B.5}$$

und ζ mit $\beta = \zeta/2$ unter Ausnutzung von $\cos\zeta = \cos(2\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1$. Das resultierende Integral in den Grenzen von 0 bis π läßt sich aufgrund der Symmetrie von $\cos^2$ durch das zweifache desselben Integrals von 0 bis $\pi/2$ ersetzen. Mit der Substitution $\alpha = \pi/2 - \beta$ und $\cos\beta = \sin(\pi/2 - \beta) = \sin\alpha$ erhält man nach Vertauschen der Integrationsgrenzen die Standardform des elliptischen Integrals $E(l) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - l^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha$:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\Omega - \cos\zeta} \frac{d\zeta}{2\pi} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} k \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\alpha}\, d\alpha = \frac{\sqrt{8}}{\pi} k E(1/k) \quad . \tag{B.6}$$

Zur Bestimmung der Konstante in Gl.(B.4) muß ein Ansatz für die Temperaturschwankung $\tilde{T}$ um die Temperatur an der resonanten Fläche eingeführt werden. Dazu zerlegt man $\tilde{T}$ in zwei Anteile in x- und ζ-Richtung. Dieser Ansatz ist gültig für $x \gg W$, aber $x \ll r_{res}$, also in der Nähe der resonanten Fläche, jedoch weiter außerhalb der Insel:

$$\tilde{T}(x,\zeta) = T_0'(r_{res})x + \delta T(x)\cos\zeta \quad . \tag{B.7}$$

$T_0'(r_{res})$ ist die Steigung der ungestörten Gleichgewichtstemperatur an der resonanten Fläche, sodaß das Temperaturprofil in x-Richtung als linear abfallend genähert ist. In ζ-Richtung variiert die Temperatur entsprechend der Verbiegung der Flußflächen kosinusförmig. Die Amplitude ergibt sich in erster Ordnung zu

$$\delta T(x) = -T_0'(x)\xi(x) \approx -T_0'(r_{res})\xi(x) \quad , \tag{B.8}$$

wobei $\xi(x)$ die maximale Verschiebung der Gleichgewichtsflußfläche angibt, welche mit steigendem Abstand von der resonanten Fläche abnimmt. Die maximale Verschiebung $\xi(x)$ läßt sich dadurch bestimmen, daß der Fluß bei $\zeta = \pi$, also bei maximaler Flußflächenverschiebung, denselben Wert haben muß wie bei $\zeta = \pi/2$, wo keine Verschiebung vorliegt. Aus der

Bedingung $\chi_0(x+\xi(x)) - \chi_1(x+\xi(x)) = \chi_0(x)$ folgt nach Taylorentwicklung von χ_0 bis zur ersten Ordnung und mit $\chi_1 = const$ das Ergebnis $\xi(x) = \chi_1/\chi_0'(x)$. Die Ableitung des Gleichgewichtsflusses läßt sich über Gl. (2.11) auf das poloidale Magnetfeld zurückführen. Dieser Ausdruck kann noch mittels der Inselbreite W gemäß Gl.(2.15) und $q \approx r/R_0 \cdot B_z/B_\Theta(r_{res})$ umgeschrieben werden:

$$\xi(r) = \frac{\chi_1}{B_{0\Theta}\left(1 - \frac{q}{q_{res}}\right)} = -\frac{W^2}{16}\frac{1}{x} \quad . \tag{B.9}$$

Damit schreibt sich die Temperaturschwankung zu:

$$\tilde{T}(x,\zeta) = T_0'(r_{res})x + \frac{W^2 T_0'(r_{res})}{16}\frac{1}{x}\cos\zeta \quad . \tag{B.10}$$

Man kann nun in Gl.(B.10) x gemäß Gl.(3.18) durch Ω und ζ ausdrücken, den Ausdruck ableiten und wie vorher über ζ mitteln (d.h. integrieren und durch 2π teilen). Dabei fällt aufgrund der Periodizität des Kosinus der zweite Term weg und man erhält:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\Omega} = \frac{W T_0'(r_{res})}{\sqrt{32}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega - \cos\zeta}} \frac{d\zeta}{2\pi} \quad . \tag{B.11}$$

Auch hier läßt sich auf analoge Weise wie oben das Integral auf die Standardform eines elliptischen Integrals zurückführen. Es ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega - \cos\zeta}} \frac{d\zeta}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\alpha}} d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} K(1/k) \quad . \tag{B.12}$$

Vergleicht man Gl.(B.11) mit Gl.(B.4) unter Verwendung der elliptischen Integrale, so erhält man die Konstante in Gl.(B.4). Im Fall $k \gg 1$ (also $\Omega \gg 1$, weit außerhalb der Insel) haben beide elliptische Integrale näherungsweise den Wert $\pi/2$ und die Konstante ist $T_0'(r_{res})W/\sqrt{32}$, was aufgrund von $T_0'(r_{res}) < 0$ negativ ist. Damit schreibt sich Gl.(B.4) zu:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\Omega} = \pm\frac{\pi}{16}\frac{W T_0'(r_{res})}{kE(1/k)} \quad . \tag{B.13}$$

In großem Abstand von der Insel ($\Omega \gg 1$) erhält man das erwartete Ergebnis eines linearen Temperaturprofils, $\tilde{T} = T_0'(r_{res})$, in der Nähe der Insel bestimmt der Term $kE(1/k)$ die Abweichung davon. Damit hat man eine gewöhnliche Differentialgleichung ersten Grades für die Änderung der Temperatur von Flußfläche zu Flußfläche außerhalb der Insel, die numerisch lösbar ist.

Zur weiteren Behandlung von Gl.(B.13) wählt man für die Abweichung der gestörten Temperatur von der Gleichgewichtstemperatur,

$$\delta T(x,\zeta) = T(x,\zeta) - T_0(x) \quad , \tag{B.14}$$

einen Fourierreihenansatz in spezieller Form für gerade Funktionen mit Mittelwert null:

$$\delta T(x,\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta T_\nu(x) \cos \nu\zeta \quad . \tag{B.15}$$

Die Amplitude $\delta T_\nu(x)$ ist die Fouriertransformierte von $\delta T(x,\zeta)$. Der Term $T(x,\zeta)$ in Gl.(B.14) läßt sich durch Gl.(B.1) ersetzen, womit die Abweichung der gestörten Temperatur von der Gleichgewichtstemperatur an der resonanten Fläche, $\tilde{T}(x,\zeta)$, in das Integral eingeht. Dieser Term bleibt als einziger, der nicht konstant in ζ ist, bei der Integration nach ζ übrig und man erhält:

$$\delta T_\nu = 2 \oint \delta T(x,\zeta) \cos \nu\zeta \frac{d\zeta}{2\pi} = 2 \oint \tilde{T}(x,\zeta) \cos \nu\zeta \frac{d\zeta}{2\pi} \quad . \tag{B.16}$$

Nach partieller Integration von Gl.(B.16) mit $x = const$ verbleibt ein Integral, welches die Ableitung von $\tilde{T}$ nach ζ enthält. Diese läßt unter Verwendung von Gl.(3.18) auf eine Ableitung nach Ω umschreiben:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\zeta}|_x = -\sin\zeta \frac{d\tilde{T}}{d\Omega} \quad . \tag{B.17}$$

Unter Verwendung von $(\sin\nu\zeta \cdot \sin\zeta) = 1/2\,[\cos(\nu-1)\zeta - \cos(\nu+1)\zeta]$ und Einsetzen von Gl.(B.13) folgt:

$$\delta T_\nu(x) = \pm \frac{W T_0'(r_{res})}{16\nu} \int_0^{\zeta_c} \frac{\cos(\nu-1)\zeta - \cos(\nu+1)\zeta}{kE(1/k)} d\zeta \quad . \tag{B.18}$$

Da Gl.(B.13) nur außerhalb der Insel gilt, muß der Integrationsbereich entsprechend eingeschränkt werden. Es ist k eine Funktion von ζ gemäß Gl.(B.5) und Gl.(3.18). Mit $\cos\zeta = 2\cos^2(\zeta/2) - 1$ folgt:

$$k = \sqrt{\cos^2\frac{\zeta}{2} + 4\frac{x^2}{W^2}} \quad . \tag{B.19}$$

Da das elliptische Integral in Gl.(B.18) nur für $k \geq 1$ definiert ist (sonst wird die Wurzel imaginär), folgt für den maximal zulässigen Wert von ζ:

$$\zeta_c = \begin{cases} \arccos\left(1 - 8\frac{x^2}{W^2}\right) & \text{wenn } |x| < W/2 \\ \pi & \text{wenn } |x| \geq W/2 \end{cases} \tag{B.20}$$

Aufgrund der Symmetrie des Kosinus ist es möglich, die Integration im Fall $|x| \geq W/2$ nur bis π anstelle von 2π durchzuführen und dies durch einen Faktor 2 zu kompensieren.

Anhang C

Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Die numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung wurde mit dem kommerziell erhältlichen Programm FlexPDE (Version 2) berechnet, das auf der Methode der Finiten Elemente basiert und das benötigte Gitter selbständig erzeugt. Die Wärmeleitungsgleichung, die Geometrie des Lösungsgebiets mit Randbedingungen und die Flußfunktionen werden in einem weiter unten aufgeführten Steuerungscode beschrieben. Die Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten gehen nur in Form ihres Verhältnisses $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp}$ ein und sind auf dem gesamten Lösungsgebiet konstant. Zur Verwendung der analytischen Störflußamplitude Gl.(2.22) wird das Lösungsgebiet in zwei Teile zerlegt, in denen die jeweilige Teilfunktion definiert ist. Zur Verwendung der Flußfunktionen, die in den zum Vergleich verwendeten Plasmatransportcode eingehen, werden die in numerischer Form vorhandenen Flußwerte sowie ihre Ableitungen aus Datentabellen importiert. Abzuändern sind lediglich die Programmsektionen **definitions** und **boundaries**. Die Steuerung der numerischen Genauigkeit des Lösungsvorgangs ist mit der Größe **errlim** in der ersten Programmsektion **select** möglich. Die Größen **gridlimit** und **nodelimit** dienen zur Begrenzung der maximalen Anzahl der verschiedenen erzeugten Gitter sowie der Knoten im Gitter und damit des Rechenaufwands. Die Lösungsausgabe erfolgt in Form verschiedener Bilder und einer Datei zur weiteren Verarbeitung. Der Steuerungscode sieht auch eine Darstellung des Magnetfeldes und des Wärmeflusses in Form von Vektorbildern vor. Die Koordinaten r und ζ werden durch die transformierten Koordinaten r^* und ζ^* ersetzt:

$$\begin{array}{ll} r \to ar^* & \frac{\partial}{\partial r} \to \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial r^*} \\ \zeta \to \frac{2\pi}{\Delta_r}\zeta^* & \frac{\partial}{\partial \zeta} \to \frac{\Delta_r}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \zeta^*} \end{array} \quad . \tag{C.1}$$

Dabei ist Δ_r die Breite des Wertebereichs von r. Durch die Transformation erhalten beide Koordinaten den Wertebereich 0 bis 1, sodaß das Lösungsgebiet quadratisch ist.

FlexPDE Steuerungscode für die analytische Flußmodellierung

```
title "Inseltemperaturprofil"
select
    errlim=1e-6 {Fehlergrenze}
    nodelimit=100000 {Maximale Knotenzahl}
    gridlimit=10 {Maximale Anzahl neuer Gitter}
coordinates
    cartesian("r","z") {Kartesische Koordinaten, norm. kl. Radius r, helikaler Winkel z}
variables
    Temp {Elektronentemperatur (eV)}
definitions
    alpha=0.03 {Störflußparameter}
    beta=0.85
    gamma=0.005
    kappa_verh=1e8 {Wärmeleitfähigkeitsverhältnis parallel/senkrecht}
    m=3 {Poloidale Modenzahl}
    mu_0=4*PI*1e-7 {mu_0 (Vs/(Am))}
    I_0=8e5 {Plasmastrom (A)}
    B_z=2.6 {Tesla (Vs/m∧2)}
    a=0.5 {Kleiner Plasmaradius (m)}
    rs=0.6 {Position der resonanten Fläche}
    r_min=0 {Minimaler r-Wert}
    r_max=1 {Maximaler r-Wert}
    delta_r=r_max-r_min {Spannbreite von r-Werten}
    T_aussen=0 {Temperatur am äußeren Plasmarand}
    T_innen=2000 {Temperatur am inneren Plasmarand}
    abl_chi0=mu_0*I_0/(2*PI*a)*r*(r∧2-rs∧2) {Erste Ableitung GG-Fluß}
    abl2_chi0=mu_0*I_0/(2*PI*a∧2)*(3*r∧2-rs∧2) {Zweite Ableitung GG-Fluß}
    chi1=0 {Störfluß Vordefinition}
    abl_chi1=0 {Erste Ableitung Stöfluß}
    abl2_chi1=0 {Zweite Ableitung Störfluß}
equations
    (1/a∧2*drr(Temp)+m∧2/(a*rs)∧2* (delta_r/(2*PI))∧2*dzz(Temp))
    +(kappa_verh-1)*m∧2/(a*rs)∧2*1/B_z∧2
    *((abl_chi0∧2+2*abl_chi0*abl_chi1*cos(2*PI/delta_r*z)
    +abl_chi1∧2*cos(2*PI/delta_r*z)∧2) *(delta_r/(2*PI))∧2*Dzz(Temp)
    +(abl2_chi0*chi1-abl_chi0*abl_chi1)*sin(2*PI/delta_r*z) *delta_r/(2*PI)*Dz(Temp)
    +(chi1*abl2_chi1-abl_chi1∧2)
    *sin(2*PI/delta_r*z)*cos(2*PI/delta_r*z)*delta_r/(2*PI)*Dz(Temp)
    +(2*abl_chi0*chi1+2*chi1*abl_chi1*cos(2*PI/delta_r*z))
    *sin(2*PI/delta_r*z)*1/a*delta_r/(2*PI)*Drz(Temp)
    +(abl_chi0*chi1*cos(2*PI/delta_r*z)+chi1*abl_chi1)*1/a*Dr(Temp)
    +chi1∧2*sin(2*PI/delta_r*z)∧2*1/a∧2*Drr(Temp) )= 0
```

```
boundaries
    Region 1 {Bereichsdefinition mit Randbedingungen}
    start(r_min,0)
    natural(Temp)=0 {Randbedingung dT/dz=0}
    line to (r_max,0)
    value(Temp)=T_aussen {Temperatur Plasmarand konstant}
    line to (r_max,delta_r)
    natural(Temp)=0 {Randbedingung dT/dz=0}
    line to (r_min,delta_r)
    value(Temp)=T_innen {Temperatur Plasmarand konstant}
    line to finish
    Region 2 {Bereich r < rs}
    chi1=mu_0*I_0/(8*PI)*alpha*(r/rs)^3*(1-beta*r/rs) {Störflußdefinition}
    abl_chi1=mu_0*I_0/(8*PI*a)*alpha*1/rs*(3*(r/rs)^2 -4*beta*(r/rs)^3)
    abl2_chi1=mu_0*I_0/(8*PI*a^2)*alpha*1/rs^2 *(6*r/rs-12*beta*(r/rs)^2)
    start(r_min,0)
    line to (rs,0)
    line to (rs,delta_r)
    line to (r_min,delta_r)
    line to finish
    Region 3 {Bereich r > rs}
    chi1=mu_0*I_0/(8*PI)*(alpha*(1-beta)-gamma+gamma*r/rs)/(r/rs)^4
    abl_chi1=mu_0*I_0/(8*PI*a)*1/rs
    *(gamma/(r/rs)^4-4*(alpha*(1-beta)-gamma +gamma*r/rs)/(r/rs)^5)
    abl2_chi1=mu_0*I_0/(8*PI*a^2)*1/rs^2
    *(-8*gamma/(r/rs)^5+20*(alpha*(1-beta) -gamma+gamma*r/rs)/(r/rs)^6)
    start(rs,0)
    line to (r_max,0)
    line to (r_max,delta_r)
    line to (rs,delta_r)
    line to finish
monitors {Bildausgaben während Rechenzeit}
    contour(Temp)
    surface(Temp)
plots {Bildausgaben nach Rechnung}
    contour(Temp) painted as 'T Konturen'
    surface(Temp) viewpoint(6,-5,30) export(200,200) file 'Dateiname' as 'T Profil'
    elevation(Temp) from (r_min,delta_r/4) to (r_max,delta_r/4)
    as 'T Profil zwischen X- und O-Punkt'
    elevation(Temp) from (r_min,delta_r/2) to (r_max,delta_r/2) as 'T Profil O-Punkt'
    elevation(Temp) from (r_min,0) to (r_max,0) as 'T Profil X-Punkt'
    vector(-m/rs*chi1*sin(2*PI/delta_r*z),-(abl_chi0+abl_chi1 *cos(2*PI/delta_r*z)))
    as 'Magnetfeld' norm
```

```
    vector( -1/a*Dr(Temp)-(kappa_verh-1) *(m/B_z*1/(a*rs))^2
    *( -chi1*sin(2*PI/delta_r*z)*1/a*Dr(Temp)-abl_chi0 *delta_r/(2*PI)*Dz(Temp)
    -abl_chi1*cos(2*PI/delta_r*z)*delta_r/(2*PI)*Dz(Temp) ) *(-chi1*sin(2*PI/delta_r*z)) ,
    -m/(a*rs)*delta_r/(2*PI)*Dz(Temp)-(kappa_verh-1) *(m/B_z*1/(a*rs))^2
    *(-chi1*sin(2*PI/delta_r*z)*1/a*Dr(Temp) -abl_chi0*delta_r/(2*PI)*Dz(Temp)
    -abl_chi1*cos(2*PI/delta_r*z)*delta_r/(2*PI)*Dz(Text)
    *(-abl_chi0-abl_chi1*cos(2*PI/delta_r*z)) ) as 'Wärmefluß'
end
```

Abzuändernde Programmsektionen für Störflußimport aus Dateien

```
definitions
    kappa_verh=5e7 {Wärmeleitfähigkeitsverhältnis parallel/senkrecht}
    m=3 {Poloidale Modenzahl}
    B_z=1 {Störfluß normiert auf B_z}
    a=1.0 {Radiale Koordinate normiert auf a}
    rs=0.575 {Position der resonanten Fläche}
    r_min=0 {Minimaler r-Wert}
    r_max=1 {Maximaler r-Wert}
    delta_r=r_max-r_min {Spannbreite von r-Werten}
    T_aussen=0 {Temperatur am äußeren Plasmarand}
    T_innen=1 {Normierte Temperatur am inneren Plasmarand}
    abl_chi0=table('yu_abl_chi0_smooth.dat') {Datei mit erster Ableitung GG-Fluß}
    abl2_chi0=table('yu_abl2_chi0_smooth.dat') {Zweite Ableitung GG-Fluß}
    chi1=table('yu_chi1.dat') {Störfluß}
    abl_chi1=table('yu_abl_chi1_smooth.dat') {Erste Ableitung Störfluß}
    abl2_chi1=table('yu_abl2_chi1_smooth.dat') {Zweite Ableitung Störfluß}

boundaries {Bereichsdefinition mit Randbedingungen}
    Region 1
    start(r_min,-delta_r/2)
    natural(Temp)=0 {Randbedingung dT/dz=0}
    line to (r_max,-delta_r/2)
    value(Temp)=T_aussen {Temperatur Plasmarand konstant}
    line to (r_max,+delta_r/2)
    natural(Temp)=0 {Randbedingung dT/dz=0}
    line to (r_min,+delta_r/2)
    value(Temp)=T_innen {Temperatur Plasmarand konstant}
    line to finish
```

Anhang D

Hochauflösende ECE-Temperaturmessung

Tabelle D.1 zeigt eine Übersicht über alle Experimente an ASDEX Upgrade mit zusätzlicher hochauflösender Digitalisierung der ECE-Signale mit einem Meßwerterfassungssystem (Nicolet System 510). Ein Teil der Experimente diente rein der Temperaturprofiluntersuchung (Zweck: $T_e(r)$), andere der ECCD-Modenstabilisierung (Zweck: ECCD). Das Meßwerterfassungssystem verfügt über interne Zeitbasen für jeden Kanal und erlaubt die Einstellung einer Verzögerung des Meßbeginns gegenüber dem Zeitpunkt Null. Die Meßzeiten beziehen sich auf diese Zeitbasen. Die Zeitbasen werden durch das Triggersignal TS06 gestartet, welches den Zeitpunkt Null der regulären Diagnostiken festlegt. Die Meßzeit beträgt systembedingt $209.72ms$ mit $5MHz$ Abtastrate (angepaßt an $2.5MHz$ Bandbreite des Eingangssignals), $1.04858s$ mit $1MHz$ und $2.09715s$ mit $500kHz$ (unter Verwendung eines Antialiasingfilters, $100kHz$ Grenzfrequenz, Dämpfung 12 dB/Oktave). In einigen Fällen lag nur der Rand der Insel im Meßbereich, in zwei Fällen ist eine sinnvolle Auswertung nicht möglich, da die als Referenz benötigten regulär gemessenen ECE-Daten nicht ordnungsgemäß aufgenommen wurden.

Verwendet wurden folgende Mischerkombinationen (mit Frequenz des Lokaloszillators in GHz und verwendetem Seitenband, oberes “U” oder unteres “L”) und Kanäle der RAD-Diagnostik (Detektordiodenspannungssignale) mit entsprechenden Kanälen der CEC-Diagnostik (Temperatursignal aus RAD-Daten, sortiert nach absteigendem großen Radius der Meßposition):

- #11652 - #12260: Mischer 95U, 101L, 133L, Kanäle RAD 10-24, CEC 22-36
- #12525, #12531: Mischer 95U, 101L, 133L, Kanäle RAD 1-15, CEC 13-27 (CEC 13 und 14 in der Reihenfolge vertauscht).

Die Kanäle 1 bis 15 des Meßwerterfassungssystems wurden in aufsteigender Reihenfolge mit den RAD-Kanälen verbunden. Kanal 16 diente zur Messung des Mirnovsignals C07-01 als Inselphasenreferenz. In den Entladungen #11652 - #11681 war Kanal 2 des Meßwerterfassungssystems durch einen technischen Defekt gestört, sodaß Kanal RAD 11, CEC 23 nicht

#	Zweck	Meßzeit [s]	Nutzen	Sonstige Bemerkungen
11652	$T_e(r)$	3.1-3.3	Nein	Nur Fishbones
11657	$T_e(r)$	3.1-3.3	Ja	Vollständige (3,2)-Insel
11659	$T_e(r)$	3.1-3.3	Ja	(3,2)-Insel fast vollständig
11671	$T_e(r)$	2.5-2.7	Ja	(3,2)-Insel fast vollständig
11673	$T_e(r)$	2.2-3.2	Ja	Vollständige (3,2)-Insel
11681	$T_e(r)$	2.9-3.9	Ja	Vollständige (3,2)-Insel, mit B_t-Rampe
12235	ECCD	2.8-3.8	Nein	Meßbereich zu weit innen, Modenstabilisierung
12244	ECCD	2.6-4.7	Nein	Meßbereich zu weit innen, Modenstabilisierung
12248	ECCD	2.6-4.7	Nein	Locked (2,1)-Mode
12250	ECCD	2.6-4.7	Ja	Vollständige (3,2)-Insel, keine Stabilisierung
12252	ECCD	2.6-4.7	Nein	Locked (2,1)-Mode
12257	ECCD	2.6-4.7	Nein	Meßbereich zu weit innen, Modenstabilisierung
12260	ECCD	2.6-4.7	Nein	Auswertung mangels RAD-Daten nicht sinnvoll
12525	ECCD	2.0-4.1	Nein	Auswertung mangels RAD-Daten nicht sinnvoll
12531	ECCD	2.0-4.1	Ja	Vollständige (3,2)-Insel, keine Stabilisierung

Tabelle D.1: *Übersicht über alle Experimente mit hochauflösender Digitalisierung der ECE-Messungen an ASDEX Upgrade.*

ausgewertet werden kann. In den Entladungen #12235 - #12260 scheint Kanal 11 des Meßwerterfassungssystems nicht einwandfrei zu funktionieren, sodaß Kanal RAD 20, CEC 32 unberücksichtigt bleibt.

Die Zeitbasen der Kanäle laufen synchron mit Ausnahme der von Kanal 6, welche um ca. $23\mu s$ pro Sekunde langsamer läuft. Daraus resultiert eine Phasenverschiebung des Meßsignals zum Meßbeginn, welche während der Meßzeit weiter anwächst. Zur Korrektur wird das Signal von Kanal 6 bei der Betrachtung kurzer Ausschnitte (typisch 5ms für die Auswertung) entsprechend verschoben (23 Meßpunkte pro Zeitbasissekunde zum gemittelten Meßzeitraum bei 1MHz Abtastrate, entsprechend 11.5 Punkte bei 500kHz und 115 Punkte bei 5MHz).

Die gemessenen Spannungssignale U werden analog zu den RAD-Daten nach der Formel

$$T[eV] = \frac{1}{2}\frac{1}{MV} \cdot UF[eV/V] \cdot \left(U[V] - U_{Offset}\right) \tag{D.1}$$

in Temperatursignale umgerechnet. Dabei ist UF der Umrechnungsfaktor für den jeweiligen RAD-Kanal gemäß seiner Kalibration. MV bezeichnet den Verstärkungsfaktor des zum Anschluß des Meßwerterfassungsystems benutzten Monitorausgangs. Die Faktoren wurden mehrfach (zumindest vor jeder der drei Meßreihen) mit Testsignalen bestimmt. Bei einigen RAD-Kanälen wurden signifikante Änderungen der Verstärkungsfaktoren beobachtet. Die jeweils verwendeten Werte sind in Tabelle D.2 zusammengefaßt. Zur Auswertung der RAD-Daten wird stattdessen der Videoverstärkungsfaktor $VV = 2$ verwendet. Weiterhin ist ein Spannungsoffset U_{Offset} zu berücksichtigen. Bei den RAD-Daten ist dieser durch das Signal vor

dem Zeitpunkt null gegeben (ca. -4.5 V, teilweise invertiert). Die Signale der Monitorverstärkerausgänge werden nicht mit demselben Offset beaufschlagt. Dennoch muß ein Offsetwert in der Größenordung 1-100mV berücksichtigt werden, damit die Temperaturauswertung dieselben (wegen der unterschiedlichen Zeitauflösung über ein kleines Zeitintervall gemittelten) Werte wie die reguläre Diagnostik (CEC) liefert. Dabei kann der zur Auswertung in einem kleinen Zeitintervall (einige *ms*) benötigte Offset während der Meßzeit um einige Prozent variieren. Dies läßt sich durch kleine Offsets der Monitorverstärkerausgänge und des Meßwerterfassungssystems sowie die Ungenauigkeiten der Monitorverstärkungsfaktoren erklären. In der Auswertung werden die Offsetwerte für alle Kanäle während des Auswertungszeitraums (typisch 5*ms*) aus der Forderung identischer gemittelter Spannungssignale von RAD und Meßwerterfassungssystem bestimmt:

$$U_{Offset} = U - \frac{MV}{VV}\left(U_{RAD} - U_{Offset,RAD}\right) \quad . \tag{D.2}$$

Kanal	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UF 2	2.926	3.192	5.662	2.178	3.235	6.343	7.028	5.044	5.564
MV 4	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
Kanal	10	11	12	13	14	15	16	17	18
UF 1	2.685	3.906	5.379	3.555	7.547	2.347	3.364	3.666	5.094
UF 2	3.781	5.268	8.241	5.407	10.48	3.182	4.566	5.010	7.354
MV 1	1.560	(0.250)	1.945	1.941	1.943	1.948	1.938	0.971	0.976
MV 2	1.560	(0.250)	1.945	1.941	1.943	1.948	1.938	1.95	1.95
MV 3	1.939	1.942	1.945	1.941	1.943	1.948	1.938	1.926	0.964
MV 4	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92			
Kanal	19	20	21	22	23	24			
UF 1	3.773	5.202	5.216	5.087	4.352	3.687			
UF 2	5.360	3.384	7.806	7.534	6.153	4.905			
MV 1	1.957	1.940	1.938	1.94	1.940	1.943			
MV 2	1.957	1.940	1.938	1.94	1.940	1.943			
MV 3	1.957	1.940	1.938	1.94	1.940	1.943			

Tabelle D.2: *Umrechnungsfaktoren UF [keV/V] und Monitorverstärkungen MV für die RAD-Kanäle 1 bis 24. UF 1 für #11657 - #11681 (Kalibration 22), UF 2 für #12235 - #12531 (Kalibration 23). MV 1 für #11659 - #11681, MV 2 für #11657. Kanal 11 ist nicht auswertbar, die Kanäle 17 und 18 weisen Unregelmäßigkeiten im Verstärkungsfaktor auf. MV 3 für #12235 - #12260. Für die Kanäle 10, 11, 17 und 18 wurden die Verstärkungen neu bestimmt. MV 4 für # 12525 und #12531. Alle benötigten Faktoren wurden neu bestimmt und in guter Näherung als gleich angenommen.*

Tabelle D.3 enthält die Parameter zur Erstellung der in Kapitel 7 diskutierten Inseltemperaturprofile. Meist ist eine Korrektur des radialen Temperaturprofils sinnvoll, für welche Korrekturfaktoren in einem Zeitintervall unmittelbar vor Modenbeginn berechnet werden. In den

Entladungen #12250 und #12531 muß der Berechnungszeitraum etwas weiter vor den Modenbeginn gezogen werden, da später Cutoff im ECE-Signal auftritt.

#	Zeitraum	Freq.	Phasen	Fitzeit	Kanäle	Kommentar
11657	3.25-3.255	25-31	150	1.975-1.985	11-41	Meßzeit nur 200*ms*
11659	3.2-3.205	29-32	138	1.93-1.94	9-41	Meßzeit nur 200*ms*
11671	2.695-2.7	18-21	215	2.39-2.4	11-41	Meßzeit nur 200*ms*
11673	3.1-3.105	24-27	41	1.96-1.97	11-41	Beobachtung 1*s*
11681	3.3-3.305	19-22	51	2.11-2.12	11-41	Beobachtung 1*s*
12250	4.65-4.655	12-15	39	2.6-2.61	6-39	Insel vorher unvollständig
12531	2.6-2.605	11-15	40	kein Fit	-	Insel später unvollständig

Tabelle D.3: *Auswerteparameter der in Kapitel 7 diskutierten sinnvoll auswertbaren Entladungen (Auswertungszeitraum [s], Frequenzfilterungsintervall des Mirnovsignals [kHz], Anzahl der Phasenlagen der gemittelten Insel, Zeitintervall [s] und ECE-Kanäle für die Temperaturprofilkorrektur). In #11681 läßt sich die Insel über die gesamte Meßzeit von* 1*s mit Magnetfeldvariation beobachten.*

Anhang E

Programmbeschreibungen

Während dieser Arbeit wurden folgende IDL-Programme entwickelt:

- **NicoView** zur Darstellung von Inseltemperaturprofilen aus den zeitlich hochauflösenden ECE-Messungen mit dem Nicolet-Meßwerterfassungssystem.
  Besteht aus dem Programm NICOVIEW.PRO und benötigt zusätlich im gleichen Verzeichnis die Programme READ_CEC.PRO, READ_SHOTFILE.PRO und READ_SIGNAL.PRO (von Wolfgang Suttrop).
  Liest die Meßdaten aus /m/jpm/nico/RAD#####files/ (# stellt die Stellen der jeweiligen Entladungsnummer dar).

- **IslandView** zur Darstellung von Inseltemperaturprofilen bei zu geringer zeitlicher Auflösung der ECE-Diagnostik.
  Besteht aus den Teilprogrammen ISLANDVIEW.PRO, ISLANDPLOT.PRO und ISLANDFIT.PRO, benötigt zusätzlich im gleichen Verzeichnis die Programme READ_CEC.PRO, READ_SHOTFILE.PRO und READ_SIGNAL.PRO (von Wolfgang Suttrop).

- **RutherfordFit** zur Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung.
  Besteht aus dem Programm RUTHERFORDFIT.PRO und benötigt zusätzlich im gleichen Verzeichnis die Datendateien “inselamplitude_#####_tstart_tend.dat” (mit Entladungsnummer und Zeitintervall tstart bis tend), “druck_rs#####.dat”, “temp_rs#####.dat” und “z_eff_#####.dat”.
  Die Datenausgabe erfolgt in zwei Dateien, wovon eine die nach Fehler sortierten Parameterkombinationsindizes zusammen mit den Fehlern und die andere die besten Kombinationen im Klartext enthält.
  Achtung: Dieses Programm muß vor dem Start zweimal compiliert werden (Fehlermeldung beim erstenmal ignorieren).

- **Inselbreitemessung** zur Erstellung der Inselbreitedatei “inselamplitude_#####_tstart_tend.dat” für RUTHERFORDFIT.PRO.

Die Programmdatei INSELBREITEMESSUNG.PRO enthält mehrere Teilprogramme zur Berechnung und Bearbeitung der Mirnovdaten. Diese nehmen jeweils eine Zwischenspeicherung der Daten im gleichen Verzeichnis vor.

- **Druckprofil** zur Erstellung der Druck- und Temperaturdatendateien "druck_rs#####.dat" und temp_rs#####.dat" für RUTHERFORDFIT.PRO.
  Die Programmdatei DRUCKPROFIL.PRO besteht aus dem Teilprogramm ROHDATEN_SPEICHERN, welches Temperatur- und Dichtedaten bearbeitet und abspeichert, und dem Teilprogramm DRUCKPROFIL, welches die vorher abgespeicherten Temperatur- und Dichtedaten einliest und die Zeitspuren von Druck und Temperatur an der resonanten Fläche in Dateien schreibt. Die Dateien werden im gleichen Verzeichnis angelegt.
  Das Programm benötigt zusätzlich im gleichen Verzeichnis das Programm RHO2RN.PRO (von Wolfgang Suttrop).
  Die ebenfalls von RUTHERFORDFIT.PRO benötigten Z_{eff}-Daten können direkt aus dem Datenbestand in IDL eingelesen und in einer Datei gespeichert werden, da sie keiner weiteren Bearbeitung bedürfen.

- **OptimaleParameter** zur Weiterbearbeitung der Ergebnisse der Bestimmung der freien Parameter der Rutherfordgleichung.
  Die Programmdatei OPTIMALEPARAMETER.PRO enthält Teilprogramme zum Lesen der Ergebnisdateien aus RUTHERFORDFIT.PRO und zum Bestimmen gemeinsamer Parametersätze für mehrere Entladungen.

- **RutherfordIntegral** zur numerischen Lösung der Rutherfordgleichung entsprechend dem Verfahren in RUTHERFORDFIT.PRO unter Verwendung der experimentell gemessenen Druck- und Temperaturdaten mit wählbaren Werten der freien Parameter und der Möglichkeit zur Simulation von ECCD-Stabilisierung.
  Besteht aus dem Programm RUTHERFORDINTEGRAL.PRO und benötigt zusätzlich im gleichen Verzeichnis dieselben Inselbreite-, Druck-, Temperatur- und Z_{eff}-Dateien wie RUTHERFORDFIT.PRO.
  Achtung: Dieses Programm muß vor dem Start zweimal compiliert werden (Fehlermeldung beim erstenmal ignorieren).

- **Plasma_Insel_Simulation** zur Simulation des gekoppelten Systems Plasma-Insel unter Modellierung von $\beta_p(W)$.
  Besteht nur aus dem Programm PLASMA_INSEL_SIMULATION.PRO.

Anhang F

Summary

Neoclassical tearing modes limit the maximum achievable ratio of plasma and magnetic pressure β in magnetically confined fusion plasmas to values below the ideal Troyon limit. They put a severe constraint on the investigation of high β fusion plasmas and may be a problem for a fusion reactor. Further progress in neoclassical tearing mode stabilisation by methods such as ECCD will require more detailed studies of tearing mode physics. This thesis deals with the theoretical and experimental analysis of the structure and dynamics of tearing modes and the associated magnetic islands in ASDEX Upgrade.

F.1 Introduction to tearing modes

An (m,n)-tearing mode is a resistive magnetohydrodynamic instability characterised by a helical perturbation current on a resonant surface with $q = m/n$ in a tokamak plasma. In a classical tearing mode the perturbation current is due to an unfavourable equilibrium current profile. The associated perturbation of the magnetic configuration leads to reconnection of the flux surfaces and hence to the formation of magnetic islands. Due to the resulting dramatically reduced radial heat isolation the temperature and density profiles inside the island are flattened. An important consequence is a loss of confined energy what can be observed by a drop in β occuring at mode onset. Another consequence is a reduction of helical bootstrap current which represents a destabilising perturbation current. In high β discharges reaching the β limit this loss of bootstrap current associated with a small seed island generated e.g. by a sawtooth crash may lead to further island growth although the seed island should be classically tearing stable. Thus, these tearing modes are called neoclassical.

F.2 Model of the magnetic structure

The magnetic structure of (m,n)-tearing modes is best described in a helical coordinate system which follows the geometry of the magnetic island as illustrated in fig. 2.1. In this system a magnetic island can be completely described by the minor radius r (or the distance from

the resonant surface $x = r - r_{res}$) and the helical angle ζ defined in eq.(2.4). The magnetic field can be separated into a smaller helical and a larger non-helical component. The helical magnetic field describes the island structure and can be expressed by the helical magnetic flux $\chi(r,\zeta)$ defined by eq.(2.5) leading to eq.(2.6). The helical magnetic flux can be divided into the equilibrium flux $\chi_0(r)$ determined by the poloidal equilibrium field according to eq.(2.10) and the added perturbation flux $\chi_1(r,\zeta)$ determined by the poloidal and radial perturbation field. The perturbation flux $\chi_1(r,\zeta)$ is periodic in the helical angle ζ and thus can be written as $\chi_1(r)\cos\zeta$ with the perturbation flux amplitude $\chi_1(r)$ determined by the poloidal perturbation field. For a simple model of a magnetic island $\chi_0(r)$ can be approximated by a parabola (see eqn.(2.10) - (2.12)) and $\chi_1(r)$ as constant. Fig. 2.3 shows the deformation and reconnection of the flux surfaces forming a symmetric magnetic island of width W given by eq.(2.15) with the island separatrix as outer boundary, the X-point at $x = 0, \zeta = 0, 2\pi$ and the O-point at $x = 0, \zeta = \pi$.

A more realistic model of the magnetic island structure requires improved flux models. The equilibrium flux $\chi_0(r)$ can be calculated exactly using a realistic model of the equilibrium plasma current following eqn.(2.7), (2.8), (2.10) and (2.16) to (2.18) giving the result in eq.(2.19). Fig. 2.4 shows the dependence of the function on the position of the resonant surface r_{res} and the similarity to experimental observations. The perturbation flux amplitude $\chi_1(r)$ outside the island can be calculated by ideal magnetohydrodynamics leading to the tearing mode equation (2.20) which can be numerically solved with a result such as shown in fig. 2.5. For practical reasons the partially defined analytical function given in eq.(2.22) is used to model $\chi_1(r)$ in this work. This function fullfills the boundary conditions of the vacuum solution and can be fitted to solutions of the tearing mode equation within certain limits. The two parts join continuously at the resonant surface but with different derivatives like the solution of the tearing mode equation. Fig. 2.6 shows the effect of varying fit parameters α, β and γ on $\chi_1(r)$. Modelled flux surfaces are shown in fig. 2.7 illustrating the asymmetry of realistic magnetic islands and the influence of asymmetry on the nonlinear stability parameter $\Delta'(W)$ (see section F.4). Fig. 2.8 shows the deformation of the resonant surface defined by $\partial\chi/\partial r = 0$ due to the non-constant $\chi_1(r)$.

F.3 Model of the temperature profile

The electron temperature profile associated with the modelled magnetic structure can be calculated using the heat flux equation (3.3). The heat conduction is divided into components parallel and perpendicular to the field lines and the source term is set to zero assuming no heat source or sink in the vicinity of the resonant surface. Instead, suitable boundary conditions must be chosen. The use of the heat flux equation for modelling heat transport is justified if the mean free path length is by far smaller than the gradient length. This condition is fullfilled for the perpendicular but not for the parallel heat transport. The parallel gradient length $L_{\|}$ can be assessed by the length of a field line that makes one half poloidal turn inside or outside a magnetic island with respect to a point on the resonant surface. The calculation in appendix A yields eqn.(3.5) and (3.6) which give $L_{\|}$ on a flux surface after multiplication with the factor

two inside and the factor m outside the island (based on the simple island model $\chi_0(r) \sim x^2$, $\chi_1(r) = const$). Here, x_O denotes the (positive) distance of the flux surface from the resonant surface at $\zeta = \pi$ and thus serves as a flux surface label. The elliptic integral can be calculated for the limits given in eq.(3.7). Fig. 3.1 shows typical results. Except for the close vicinity of the separatrix the typical electron mean free path length of several hundred meters calculated by eq.(3.4) is far larger than the gradient length. Thus, the parallel heat transport inside and outside a magnetic island should actually be described by heat convection instead of conduction. However, some theoretical work has shown that the heat flux equation may be used if the parallel Spitzer heat conductivity (eq.(3.9)) is corrected by eq.(3.8) [Q. Yu et al., Physics of Plasmas, Vol. 7, No. 1 (2000), 312-322]. Fig. 3.2 shows the flux surface dependent correction for typical magnetic islands. Using typical values of the heat conductivities the ratio $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp}$ is reduced from 10^{10} to about $10^8 - 10^9$ except for the separatrix. The reduction of $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp}$ is important for the flattening of the temperature profile inside a magnetic island.

Theoretical analysis of the heat flux equation has shown that the heat transfer across an island takes place in a layer along the separatrix. The theoretical width of the layer is W_c defined by eq.(3.10) at the X-point and W_c^2/W at the O-point (based on the simple island model). Inside the layer gradients in the otherwise completely flattenend island temperature profile exist. Thus, the island width must exceed $W_0 = 1.8W_c$ in order to have completely flattened areas at least in the O-point region. Fig. 3.3 shows that $W_0 = 1.8cm$ is a realistic value to be used in this work. For comparison, the uncorrected Spitzer heat conductivity would yield $W_0 = 8mm$. In spite of the larger heat conducting layer width using $W_0 = 1.8cm$ the temperature profile of a typical magnetic island should be practically completely flattenend except for the X-point region.

The magnetic island structure enters into the heat flux equation by the parallel derivative as given by eq.(3.13). The non-helical components of the magnetic field included in eq.(3.14) yield zero and hence the problem reduces to eq.(3.15). For further simplification a slab geometry is assumed since the heat flux equation without source term is constrained to the vicinity of the resonant surface anyway. The Laplacian takes the form of eq.(3.16). For the simple island model with $\chi_0(r)$ given by eq.(3.17) and constant perturbation flux amplitude χ_1 the heat flux equation can be solved analytically. Approximating the perpendicular derivative by eq.(3.12) and introducing the flux surface label Ω defined by eq.(3.18) the heat flux equation can be written by eqn.(3.19) and (3.20) and finally by eq.(3.21). Appendix B describes the calculation in detail. Assuming constant temperature on flux surfaces and a linear equilibrium temperature profile the ordinary differential equation (B.13) for the temperature can be obtained. Fig. 3.4 shows the numerical solution. The perturbation $\delta T(x,\zeta)$ of the temperature profile can be expanded to a Fourier series as given by eqn.(3.23) to (3.27). The first, second and third Fourier component are shown in fig. 3.5.

In order to calculate the temperature profile associated with the modelled realistic flux surface structure and to examine the temperature gradients inside the islands eqn.(3.13) and (3.15) are evaluated to give eq.(3.29) using slab geometry. The perpendicular derivative is expressed by eq.(3.11) leading to the heat flux equation (3.28). The partial differential equation is solved numerically by a commercially available finite element code (FlexPDE, the problem descripti-

on code is given in appendix C). The heat conductivity ratio $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp}$ is held constant and hence the higher value near the separatrix is neglected. Fig. 3.6 shows results with $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 10^7$, 10^8 and 10^9 and fig. 3.7 shows an example of the modelled heat flux ($\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 10^5$, $W < W_0$). The flattening of the island temperature profile and the gradients inside the heat conducting layer can clearly be seen. The maxima of the first Fourier component do not exactly coincide with the outermost separatrix position and the zero position does not exactly coincide with the resonant surface as they do in the analytical solution. The temperature profile modelling by the heat flux equation can be checked with the results of a plasma transport code developed at IPP. The transport code yields temperature profiles as shown in fig. 3.9 using the fluxes shown in fig. 3.8 and $\kappa_{\|}/\kappa_{\perp} = 5 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^7$ and $2.5 \cdot 10^8$. Fig. 3.10 gives a direct comparison of the results of the two methods indicating a good match. Remaining differences seem to be due to different equilibrium profiles.

F.4 Model of tearing mode dynamics

The dynamics of tearing modes is determined by the change of the perturbation flux amplitude with time in the resistive plasma which is associated with an ohmic perturbation current I_{Ohm}. In addition, further perturbation currents such as the missing bootstrap current may contribute to the perturbation flux. The main ideas of the Rutherford equation for the time evolution of the island width are described in eqn.(4.1) to (4.6). The stability of the plasma against the evolution of a classical tearing mode depends on the equilibrium current profile (from which the perturbation flux can be calculated using the tearing mode equation) and is expressed by the nonlinear stability parameter $\Delta'(W)$ according to eq.(4.4).

The dynamics of neoclassical tearing modes is described by the generalised Rutherford equation (4.7). The nonlinear stability parameter $\Delta'(W)$ is taken to be constant $\Delta'_0 = -m/r_{res}$ in the model assuming stability against classical tearing modes. The second term on the right hand side describes the effect of the missing bootstrap current and includes the stabilising effect of the incomplete temperature and pressure profile flattening in small islands by W_0. The third and fourth term contain the stabilising effects of toroidicity (Glasser-Greene-Johnson effect) and the polarisation current. The function $g(\varepsilon)$ depends on the collisionality and is equal to $\varepsilon^{3/2}$ in the low collisionality plasmas considered in this work. The collisionality dependence of the β-limit is an evidence for the important role of the polarisation effect for the stabilisation of small islands. The fifth term describes the stabilising effect of noninductive current drive by ECCD by which neoclassical tearing modes can be suppressed. All quantities are to be taken at the resonant surface. The constants a_{BS}, a_{GGJ} and a_{Pol} are free parameters of the Rutherford equation which cannot be determined well by theory and thus have to be assessed experimentally.

The generalised Rutherford equation explains the experimentally observable island dynamics. The plot of $dW/dt(W)$ in fig. 4.1 shows that an island can grow if β_p exceeds $\beta_{p,crit}$ and if the critical seed island width $W_{seed,crit}$ has fallen below the occuring seed island width with further rising β_p. Then the island grows according to $W \sim \sqrt{t}$ and β_p drops until W reaches the satu-

ration width W_{sat} in a new equilibrium with a lower β_p. Eqn.(4.9) to (4.11) give approximate formulae for $\beta_{p,crit}$, $W_{seed,crit}$ and W_{sat}. With a simple model for the drop of $\beta_p(W)$ presented in eqn.(4.12) and (4.13) the behaviour of the coupled system plasma-island can be simulated. An example is shown in fig. 4.2. Such a model may become a useful tool for the determination of the necessary microwave power for ECCD mode stabilisation in future fusion experiments but still needs further sophistication.

The relative large value of $W_0 = 1.8cm$ due to the reduction of the parallel heat conductivity means that W_0 cannot be neglected as is assumed by many authors taking the Spitzer heat conductivity. Furthermore, the argument that W_0 is not compatible to the experimentally found linear scaling of the β-limit with the poloidal ion larmor radius ρ_p no longer holds. Taking W_0 as the only stabilising effect the scaling $\beta_p \sim W_0^2$ follows from the condition $W_{seed,crit} \approx W_{seed}$ for mode onset under the assumptions $W_{seed} = const$ and $W_0 \ll W_{sat}$. Using a Gyro-Bohm scaling $\kappa_\perp \sim T^{3/2}$ and the corrected Spitzer heat conductivity in the calculation of W_0 the scaling $\beta_p \sim \sqrt{T} \sim \rho_p$ follows. Since it is the same as calculated for the polarisation current effect it is impossible to distinguish between the importance of the two effects by this way. Hence, no term of the generalised Rutherford equation should be neglected.

F.5 Experimental methods

The structure of magnetic islands is experimentally observed by the electron temperature profile measured by electron cyclotron emission spectroscopy (ECE). The ECE diagnostic measures the electron temperature at different radial positions in one poloidal cross section of the plasma at one toroidal position as shown in fig. 6.1. Due to the helicity of the magnetic field lines the toroidally rotating plasma seems to rotate in the poloidal cross section and thus the temperature profile of the perturbed plasma ideally gives a sine signal outside the island and a periodic signal with flat phases inside the island correspondig to a sine signal with harmonics. One period in time corresponds to the helical angle range of one island.

The standard data acquisition system of the ECE diagnostic has a sample frequency of $32kHz$ which is far too low for resolving the signal of a neoclassical tearing mode of typically $15-25kHz$. However, a mode signal of not more than about $20kHz$ can pass the antialiasing filter without being completely suppressed. Thus, the method illustrated in fig. 6.3 can be used in order to reconstruct the first Fourier component of the mode signal. The signal phase for each measurement time can be determined by comparison to the highly resolved signal of a Mirnov coil. Then the measurements are rearranged according to their phase yielding one averaged signal period. Since the higher Fourier components are completely suppressed by the antialising filter and cannot be reconstructed it is impossible to observe the flattening of the temperature profile. In order to correctly observe the island temperature profile some measurements have been done with an additional highly resolving data acquisition system at fifteen radial positions. The signal to noise ratio can be raised by averaging of the island temperature profiles within a time interval. Fig. 6.4 illustrates the method which also uses the filtered signal of one Mirnov coil as island phase reference.

For further analysis a (discrete) Fourier transform is done on the averaged temperature profile

yielding the amplitude of the Fourier components at the different radial positions. According to the temperature profile model the maxima of the first Fourier component indicate the outermost position of the separatrix at the O-point. The coincidence may not be perfect due to the finite heat conductivities but the measurement error should mainly be determined by the radial resolution of the diagnostic. For a symmetric island with flattened temperature profile the position of the resonant surface can be determined by the zero of the first Fourier component which coincides with the zeros of the higher components. The model of asymmetric flattenend islands has shown only a slight deviation. However, the experimentally observed temperature profiles show substructures inside the islands which influence the Fourier components. Fig. 5.1 illustrates the simulated effects of such substructures. The zeros of the first and second Fourier component do not coincide any more and the resonant surface is to be approximately determined in between.

Beyond this simple analysis of the island geometry the observation of the temperature profile can be used in principle to determine the flux surface structure in detail. For this purpose temperature profiles with varying modelled perturbation flux amplitudes have been computed by the heat flux equation. The ratio of the maxima of the first Fourier component and their distance to the resonant surface have been extracted as characteristic labels for the flux surface structure. By a fit to the experimentally observed first Fourier component the flux surface structure can be assessed. However, the method used here is only a first approach which needs further improvements in order to be a useful tool for the detailed examination of the magnetic structure and for the measurement of the nonlinear stability parameter $\Delta'(W)$. The main problem is that the experimentally observed temperature profile substructures are not yet understood and hence not included in the model. Also the experimental methods will need significant improvements.

The relative island width evolution is measured by the (m,n)-component of the Mirnov coil signals determined by singular value decomposition. According to the simple island model the width is proportional to the square root of the amplitude of the perturbed magnetic field which is given by the envelope of the integrated (m,n)-Mirnov signal. The signal spikes due to ELMs are removed by taking out these data points and the signal modulation due to sawteeth is removed by averaging. Additionally, an offset must be subtracted resulting from fluctuations of the Mirnov signal. The scaling to the absolute island width is done by ECE measurements at single time points.

The determination of the free parameters of the generalised Rutherford equation is done by fitting the numerical solution of the Rutherford equation to the experimentally observed island width evolution. The free parameters are varied independently and the fits are ordered by the fitting error. The error is calculated by the standard deviation neglecting the initial island growth phase and weighting the island decay phase equal to the rest. The fit is regarded as not suitable and marked by a penalty in the error if the complete decay of the island is not included. The time evolution of the plasma parameters $\beta_p(t)$ and $\tau_R(t)$ is calculated from experimental measurements of the temperature (ECE) and density profile (eqn. (5.1) and (5.2) are used to calculate the neoclassical plasma conductivity for τ_R). The rest of the plasma parameters of the Rutherford equation is taken to be approximately constant from experimental results (r_{res}, L_p,

ρ_p) or modelling ($\Delta'(W)$, L_q, W_0). For the initial island width in the numerical solution the value $2cm$ is taken according to different experimental observations. Due to experimental errors and the simplifying assumptions no perfect fit to the measured island width can be expected. Furthermore, different linearly related pairs of a_{BS} and a_{GGJ} can lead to similar results since for large island widths the Rutherford equation simplifies approximately to eq.(5.3). Thus, several "good" sets of free parameters will be found and it will be impossible to decide which one is "right".

F.6 Experimental observation of the island structure

As a first example fig. 7.1 shows the temperature profile of a classical $(2,1)$-tearing mode. Due to the low mode frequency of $0.5kHz$ the ECE data from the standard data acquisition system can be displayed directly. A coupled $(3,1)$-mode influences the Fourier components and makes a complete geometry analysis impossible. The most interesting observation however is that the island temperature profile is not completely flattened but has a "temperature hill" substructure which will also be found in the following examples.

Several neoclassical tearing modes have been observed with sufficiently high temporal resolution in β-limit discharges in ASDEX Upgrade (plasma current $800kA$, line averaged density $5-6\cdot 10^{19}m^{-3}$, NBI power $10MW$, toroidal field $2.05-2.2T$, $q_{95}=4.0-4.5$). Fig. 7.2 shows a temperature profile measured with extremely high time resolution ($5MHz$) and thus clearly visible remaining signal noise in spite of averaging. The temperature profile is not completely flattenend inside the island but has a "minimum-maximum" substructure. The simple island geometry analysis can be done with fair accuracy. Due to the substructure the zeros of the first and second Fourier component differ and are averaged in order to localise the resonant surface. The island width is about $8cm$ and the island is asymmetric according to the theoretical model. As described above, fitting of the first Fourier component of modelled temperature profiles yields a reconstruction of the flux surface structure (dashed lines in the temperature profile) with $\Delta'(W)<0$. Since the model does not include temperature substructures the zero of the modelled Fourier component is put to the determined position of the resonant surface. Due to the drawbacks of the method the reconstruction shown in this and the following examples has a significant uncertainty.

Figs. 7.3 and 7.4 show two more measurements with $5MHz$ sample rate but incomplete covering of the island by the radial measurement positions which prevents exact quantitative analysis. In fig. 7.4 the effect of a coupled $(2,2)$-mode on the first Fourier component is visible. Figs. 7.5 and 7.6 show two island temperature profiles with $1MHz$ sample rate and hence no visible signal noise. The temperature substructures can clearly be seen. In the second case the geometry analysis is difficult because of a coupled $(2,2)$-mode on one side and the flat structure of the first Fourier component on the other side. The asymmetry in the first case is similar to that in fig. 7.2 whereas it seems to be more extreme in the second case. The flux surface reconstruction yields negative values of $\Delta'(W)$. Figs. 7.7 and 7.8 show island temperature profiles measured with $0.5MHz$ sample rate. Again, the geometry analysis is difficult especially due to coupled $(2,2)$-modes and temperature substructures can be seen. The flux

surface reconstruction can only be done in the first case yielding a negative $\Delta'(W)$ since in the second case the calibration of the ECE diagnostic seems to be not very good.

Fig. 7.9 shows one example of a temperature profile reconstructed from undersampled ECE data of the standard data acquisition system. This discharge is quite interesting since it is an example for successful mode stabilisation by ECCD as can be seen by the diminishing Mirnov signal. The island temperature profile is shown before ECCD onset (upper part) and during stabilisation (lower part) where the island can hardly be seen any more (the scale of the first Fourier amplitude is $20eV$ in the lower part in contrast to $100eV$ in the upper part). The temperature "substructure" visible here is due to the missing higher harmonics of the mode signal and must not be confused with those observed with high temporal resolution.

From the experimental observations of neoclassical tearing modes it may be concluded that magnetic islands are asymmetric according to theoretical expectations and have a saturated width of about $6-8cm$. The flux surface reconstruction is associated with significant uncertainty but indicates negative values of $\Delta'(W)$. The theoretically predicted temperature gradients along the separatrix especially in the X-point region cannot be checked with the present radial resolution of the ECE diagnostic. However, the temperature profiles inside the island are not flattened as expected but exhibit substructures which cannot be explained in the framework of the temperature model but have also been reported by other authors. An additional interesting observation was made in discharge #11681 (fig. 7.6) where the complete island temperature profile could be measured during a scan of the toroidal magnetic field during $1s$. In contrast to the simple assumption that the resonant surface should move to a smaller minor radius with rising magnetic field it moves to a slightly larger minor radius. Thus, the resonant surface moves in the opposite direction as the deposition radius of the microwave power for ECCD at the high field side of the plasma. Hence, a match of the deposition radius to the resonant surface should be feasible without problem by a scan of the toroidal magnetic field. This method has been used for successful ECCD stabilisation of neoclassical tearing modes in ASDEX Upgrade.

F.7 Experimental analysis of island dynamics

For the determination of the free parameters of the generalised Rutherford equation four β-limit discharges with neoclassical tearing modes in ASDEX Upgrade have been evaluated (plasma current $800kA$, line averaged density $5-6\cdot 10^{19}m^{-3}$, NBI power $10MW$, toroidal magnetic field $2.05-2.17T$, $q_{95}\approx 4.5$). Table 8.1 contains the parameters used for the fit of the numerical solution of the Rutherford equation to the experimentally observed island width evolution. The free parameters have been varied in the range $a_{BS}=1.0,1.05,\ldots,2.7$, $a_{GGJ}=0.0,0.5,\ldots,19.0$ and $a_{Pol}=0.0,0.05,\ldots,1.0$.

As expected from the discussion in section F.5 several parameter sets yield quite similar solutions of the Rutherford equation but no "perfect" fit can be found. Table 8.2 contains the best ten free parameter sets for each discharge together with the fitting errors (Fehler). Fig. 8.1 illustrates that the a_{BS}-a_{GGJ} pairs as expected scatter closely along a straight line with slope $r_{res}/(\varepsilon^{3/2}L_q)=14.7$. The a_{BS}-a_{Pol} pairs are more scattered with a tendency to smaller a_{Pol} with higher a_{BS}. The a_{BS}-a_{GGJ} line of "good fits" ends where a_{Pol} reaches zero. In most cases

the ratio a_{GGJ}/a_{BS} is such that the Glasser-Greene-Johnson effect equals to about a third of the Bootstrap effect for large islands and thus should not be neglected. The parameter sets of the different discharges are concentrated in different regions but there is an overlap that makes it possible to find general parameter sets for all four discharges by minimising the averaged fitting errors. The best ten general parameter sets are listed in table 8.3 together with the fitting errors and are also shown in fig. 8.1 (Gemeinsame Parameter). They are positioned on the a_{BS}-a_{GGJ} line and in the a_{BS}-a_{Pol} range and are partially identical to the best ten parameter sets of the discharges.

The parameter distribution can be characterised by the averaged values and the standard deviations (giving the same weight to all values). Table 8.4 contains the averages (μ) and standard deviations (σ) of the ten best parameter sets of each discharge, of the ten best parameter sets of all four discharges together (Alle vier #) and of the ten best general parameter sets (Gemeinsam). The averages with error bars are also shown in fig. 8.1. The relative standard deviation (σ/μ) reveals that a_{BS} can be determined with good accuracy whereas a_{GGJ} and especially a_{Pol} are associated with higher uncertainty. The average of all four discharges ($a_{BS} = 2.01$, $a_{GGJ} = 9.2$, $a_{Pol} = 0.26$) is almost identical to the average of the general parameters ($a_{BS} = 2.0$, $a_{GGJ} = 9.1$, $a_{Pol} = 0.23$). The difference to the best general parameter set ($a_{BS} = 2.1$, $a_{GGJ} = 10.0$, $a_{Pol} = 0.3$) is small. Table 8.5 contains the fitting errors using the best parameter set for each discharge (Beste Parameter für #), the best general parameter set (Beste gemeinsame Parameter), the averaged parameters of each discharge (Gemittelte Parameter für #), the averaged parameters of all four discharges (Gemittelte Parameter für alle vier #) and the averaged general parameters (Gemittelte gemeinsame Parameter). In all cases good fits can be obtained and the differences of the fitting errors are not significant. Thus, it is possible to model the dynamics of all observed islands using the best general parameter set, the averaged general parameters or the averaged parameters of all discharges. The best general parameter set seems to be best suited since it guarantees good fits and especially the inclusion of the island decay. This is not necessarily the case when using the averages.

Fig. 8.2 shows a comparison of the experimentally measured island width evolution (full line) and the solution of the Rutherford equation (dashed lines) using the best parameter set for each discharge (Bester Parametersatz) and the best general parameter set (Gemeinsamer Parametersatz). The experimentally determined $\beta_p(t)$ is also shown (dotted line) with suppressed zero. The best general parameter set is one of the best ten parameter sets of the discharges except for #11659 and hence there is no significant difference between the fits. As expected the modelled island width follows the evolution of $\beta_p(t)$ except for the mode onset and decay phase. In contrast, the measured island width behaves partially differently what leads to significant imperfections of the fits. In about the first third of the time these differences may be explained by the removal of sawteeth effects on the island width signal which makes a precise measurement impossible. However, the continuous slight decay of the island width in the first and second example cannot be explained by this way. The modelled island growth at mode onset is far slower than measured. This can be explained by the not precise measurement due to sawteeth and by the neglect of this phase in the fitting error. Instead, a good fit to the island decay is required by the error criteria. The third example exhibits an interesting behaviour between the switch off of the first and second NBI source (3.6 and 4.1s). With diminishing island width β_p

begins to rise again and W follows with a time lag.

The error in the determination of the free parameters of the Rutherford equation can roughly be assessed by the range of "good" parameters or with more sophistication by the relative standard deviation. Furthermore, the change of the parameter range with varying plasma parameters should be examined. Fig. 8.3 shows examples for the effects of differently determined plasma parameters. The slope of the a_{BS}-a_{GGJ} line is in good approximation given by theory as $r_{res}/(\varepsilon^{3/2}L_q)$ and the zeros are influenced by $(-\Delta_0')L_p/(\sqrt{\varepsilon}L_q)$. Accordingly, different values of the experimentally hardly to determine parameters Δ_0', L_p and L_q lead to a parallel shift of the a_{BS}-a_{GGJ} line together with a change of slope for different L_q. A shift to the right is combined with a tendency to higher values in a_{Pol} and a shift to the left with smaller values. The significantly smaller value of $W_0 = 8mm$ according to the Spitzer heat conductivity leads mainly to higher values of a_{Pol} and a wider range along the a_{BS}-a_{GGJ} line exceeding the shown parameter range. Thus, the correction of the heat conductivity helps to determine the free parameters with more accuracy since it is possible to better distinguish between the bootstrap and the Glasser-Greene-Johnson effect. An error in the scaling of the absolute island width $W(t_{Skalierung})$ by the realistic value of $1cm$ does not yield a significant effect. The initial island width for the numerical solution W_{seed} must not be too small as can be demonstrated using the value $W_{seed} = 1.5cm$ (instead of $2cm$) which leads to significantly smaller values of all free parameters and to worse fits. On the other hand, larger values of W_{seed} do not significantly change the results. In addition, there are more uncertainties such as the measurement of the relative island width evolution or β_p which are more complex to examine.

The discussion has shown that with the presented method a general set of the free parameters of the Rutherford equation can be determined out of a parameter range which describes the dynamics of all four observed islands within the given model. The parameter $a_{BS} = 2.1$ is determined with good accuracy whereas $a_{GGJ} = 10.0$ and $a_{Pol} = 0.3$ are associated with higher uncertainty. A more precise determination of the free parameters requires advanced experimental techniques such as the measurement of $\Delta'(W(t))$. A comparison to the free parameter values of other authors cannot properly be done since different simplifications of the Rutherford equation are commonly used.

F.8 Conclusions

A realistic model of the magnetic structure, the temperature profile and the dynamics of neoclassical tearing modes yields the following properties of magnetic islands:

- The magnetic structure and hence the temperature profile are asymmetric.
- The island temperature profile in the heat conducting layer along the separatrix and especially in the X-point region is not completely flattened as it is in the center of the island. Accordingly, an island must exceed the critical width W_0 in order to be completely flattened at least in the O-point region.

- $W_0 \sim (\kappa_\perp/\kappa_\parallel)^{1/4}$ is larger than usually expected ($W_0 \approx 1.8cm$ instead of $8mm$) due to the reduction of $\kappa_\parallel$ by about two orders of magnitude for the correct use of the heat flux equation.
- In spite of the large W_0 a magnetic island in ASDEX Upgrade should have a practically completely flattened temperature profile except for the X-point region.
- The large W_0 is important in the bootstrap effect in the Rutherford equation since the effect of the incomplete pressure profile flattening in small islands may not be neglected as is assumed by many authors.
- Taking the reduction of $\kappa_\parallel$ into account the stabilising effect of W_0 is consistent with the linear ion larmor radius scaling of the β-limit. Hence, it is impossible to differentiate between the importance of W_0 and the polarisation current by this way.

Experimental observations of the structure and dynamics of neoclassical tearing modes in ASDEX Upgrade have shown the following properties of magnetic islands:

- Magnetic islands in ASDEX Upgrade are asymmetric and have a saturated width of about $6-8cm$.
- The reconstruction of the flux surface structure indicates negative values of $\Delta'(W)$.
- The incomplete temperature profile flattening especially in the X-point region due to the heat conducting layer cannot be checked experimentally with the radial resolution of the ECE diagnostic.
- The temperature profile shows a substructure inside the island instead of flattening which cannot be explained in the framework of the temperature model but has also been reported by other authors.
- The fit of the numerically solved Rutherford equation to the experimentally observed island width evolution yields a range for the free parameters of the Rutherford equation for each discharge due to experimental uncertainties and model simplifications.
- Within the parameter range a best general parameter set can be determined which well describes the dynamics of all observed islands ($a_{BS} = 2.1$, $a_{GGJ} = 10.0$, $a_{GGJ} = 0.3$).
- The best general parameter set agrees well with the average of the ten best general parameter sets and of the best ten parameter sets of all four discharges.
- The relative standard deviation reveals that a_{BS} is well determined whereas a_{GGJ} and a_{Pol} are associated with high uncertainty.

The further investigation of the structure and dynamics of neoclassical tearing modes will require more sophisticated theoretical and experimental techniques, e. g. an extensive nonlinear plasma transport code for the theoretical explanation of the temperature substructures or a significantly improved radial resolution of the ECE diagnostic.

Literaturverzeichnis

[1] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press, New York and London, 1987

[2] Z. Chang et al., Observation of nonlinear neoclassical pressure-gradient-driven tearing modes in TFTR, Physical Review Letters, Vol. 74, No. 23 (1995), 4663-4666

[3] H. Zohm et al., MHD Stability and Disruption Physics in ASDEX Upgrade, Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 37 (1995), A313-A324

[4] D. A. Gates et al., Neoclassical islands on COMPASS-D, Nuclear Fusion, Vol. 37, No. 11 (1997), 1593-1606

[5] R. J. La Haye et al., High beta tokamak operation in DIII-D limited at low density/collisionality by resistive tearing modes, Nuclear Fusion, Vol. 37, No. 3 (1997), 397-401

[6] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 1993

[7] C. C. Hegna, J. D. Callen, Interaction of bootstrap-current-driven magnetic islands, Physics of Fluids B, Vol. 4, No. 7 (1992), 1855-1866

[8] M. Schittenhelm, H. Zohm, Analysis of coupled MHD modes with Mirnov probes in ASDEX Upgrade, Nuclear Fusion, Vol. 37, No. 9 (1997), 1255-1270

[9] M. Sokoll, *MHD-Instabilitäten in magnetisch eingeschlossenen Plasmen und ihre tomographische Rekonstruktion im Röntgenlicht*, Dissertation Universität München, 1996

[10] R. J. Goldston, P. H. Rutherford, *Plasmaphysik*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998

[11] K. Lackner, Private Mitteilung

[12] S. I. Braginskii, Transport processes in a plasma, in M. A. Leontovich (Hrsg.), *Reviews of Plasma Physics Vol. 1*, Consultants Bureau, New York, 1965

[13] Z. Chang, J. D. Callen, Unified fluid/kinetic description of plasma microinstabilities, Physics of Fluids B, Vol. 4, No. 5 (1992), 1167-1192

[14] Q. Yu et al., Modeling of the stabilization of neoclassical tearing modes by localized radio frequency current drive, Physics of Plasmas, Vol. 7, No. 1 (2000), 312-322

[15] H. Zohm, *Plasmaphysik und Fusionsforschung, Teil I: Plasmaphysik*, Vorlesungsskript Universität Augsburg, WS 1994/95

[16] P. C. Liewer, Measurements of microturbulence in tokamaks and comparisons with theories of turbulence and anomalous transport, Nuclear Fusion, Vol. 25, No. 5 (1985), 543-621

[17] R. Fitzpatrick, Helical temperature perturbations associated with tearing modes in tokamak plasmas, Physics of Plasmas, Vol. 2, No. 3 (1995), 825-838

[18] Q. Yu, S. Günter, Modeling of the nonlinear growth of neoclassical tearing modes, Physics of Plasmas, Vol. 5, No. 11 (1998), 3924-3928

[19] P. H. Rutherford, Nonlinear growth of the tearing mode, Physics of Fluids, Vol. 16, No. 11 (1973), 1903-1908

[20] H. Zohm et al., Neoclassical MHD in ASDEX Upgrade and COMPASS-D, Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 39 (1997), B237-B246

[21] J. Wesson, *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford, 1987

[22] A. H. Glasser, J. M. Greene, J. L. Johnson, Resistive instabilities in general toroidal plasma configurations, Physics of Fluids, Vol. 18, No. 7 (1975), 875-888

[23] H. R. Wilson, Threshold for neoclassical magnetic islands in a low collision frequency tokamak, Physics of Plasmas, Vol. 3, No. 1 (1996), 248-265

[24] H. Zohm, Stabilization of neoclassical tearing modes by electron cyclotron current drive, Physics of Plasmas, Vol. 4, No. 9 (1997), 3433-3435

[25] A. W. Morris et al., Feedback stabilisation of resistive tearing modes in tokamaks, Controlled Fusion and Plasma Physics, Proceedings of the 19th European Conference, Insbruck **I** (1992), 423-446

[26] O. Sauter et al., Beta limits in long-pulse tokamak discharges, Physics of Plasmas, Vol. 4, No. 5 (1997), 1654-1664

[27] F. L. Waelbroeck, R. Fitzpatrick, Rotation and locking of magnetic islands, Physical Review Letters, Vol. 78, No. 9 (1997), 1703-1706

[28] H. R. Wilson et al., The collisionality dependence of tokamak β-limits, Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 38 (1996), A149-A163

[29] S. Günter et al., β-scaling for the onset of neoclassical tearing modes at ASDEX Upgrade, Nuclear Fusion, Vol. 38, No. 10 (1998), 1431-1434

[30] M. Maraschek et al., Collisionality dependence of the neoclassical tearing mode in ASDEX Upgrade, Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 41, No. 2 (1999), L1-L8

[31] P. Yushmanov et al., Scalings for tokamak energy confinement, Nuclear Fusion, Vol. 30, No. 10 (1990), 1999-2006

[32] Z. Chang, J. D. Callen, Global energy confinement degradation due to macroscopic phenomena in tokamaks, Nuclear Fusion, Vol. 30, No. 2 (1990), 219-233

[33] C. Ren, *A study of tearing modes via electron cyclotron emission from Tokamak plasmas*, Dissertation University of Wisconsin, University of Wisconsin Report, 1998

[34] L. Spitzer, R. Härm, Transport phenomena in a completely ionized gas, Physical Review, Vol. 89 (1953), 977

[35] J. W. Connor et al., The conductivity of a toroidal plasma, Nuclear Fusion, Vol. 13 (1973), 211-214

[36] K. D. Kammeyer, K. Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung*, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1989

[37] C. Nardone, Multichannel fluctuation data analysis by the singular value decomposition method. Application to MHD modes in JET, Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 34, No. 9 (1992), 1447-1465

[38] W. Suttrop et al., Tearing mode formation and radiative edge cooling prior to density limit disruptions in ASDEX Upgrade, Nuclear Fusion, Vol. 37, No. 1 (1997), 119-125

[39] P. de Vries, *Magnetic islands in tokamak plasmas*, Dissertation Universität Utrecht, 1997

[40] M. A. Dubois et al., Method of cartography of q=1 islands during sawtooth activity in tokamaks, Nuclear Fusion, Vol. 20, No. 11 (1980), 1355-1361

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Zohm für seine hervorragende Betreuung während dieser Arbeit.
Ich danke Herrn Dr. Suttrop, Herrn Dr. Maraschek und Herrn Dr. Gantenbein für ihre Unterstützung meiner experimentellen Untersuchungen und viele wertvolle Diskussionen.
Weiterhin danke ich Frau Prof. Dr. Günter und Herrn Dr. Yu für ihre Hilfe bei meiner theoretischen Arbeit und die Ergebnisse der Transportcodemodellierung.
Mein Dank gilt auch dem gesamten ASDEX Upgrade Team, insbesondere Herrn Dr. Gernhardt für die Benutzung seines Meßwerterfassungssystems, Frau Dr. Gude für die Auswertung von SXR-Messungen und Herrn Dr. Hobirk für die Bereitstellung von MSE-Daten.