

## 8 Schlußfolgerungen und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Ansätze zur partitionierten Lösung gekoppelter, dynamischer Systeme untersucht, und zwar insbesondere im Hinblick auf die Eignung für die geometrisch nichtlineare Strukturmechanik und für die transiente Interaktion von instationären, inkompressiblen Strömungen mit flexiblen Strukturen bei großen Strukturdeformationen. Partitionierte Lösungsverfahren wurden aber im Laufe der letzten zwei bis drei Jahrzehnte aufgrund ihrer generellen, großen Vorteile gegenüber simultanen, monolithischen Berechnungsansätzen (unabhängige Modellierung, Diskretisierung und Lösung der einzelnen Teilfelder, Software-Modularität, Reduktion der Problemgröße, Parallelisierungsmöglichkeiten) nicht nur in diesen Anwendungsgebieten entwickelt, sondern auch in vielen anderen ingenieurwissenschaftlich-technischen, sowie mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichen. In einem ersten Schritt war es daher nötig, die in unterschiedlichen Disziplinen entwickelten Formulierungen in einem terminologisch möglichst einheitlichen Rahmen zusammenzustellen, und im Sinne einer klassifizierenden Übersicht zu gliedern. Wie sich dabei gezeigt hat, ist insbesondere die Unterscheidung nach der Art der räumlichen Partitionierung – nichtüberlappend bzw. elementweise oder überlappend bzw. knotenweise – sowie nach der eingesetzten Kopplungsstrategie – einfach gestaffelt oder iterativ gestaffelt – von fundamentaler Bedeutung für die spezifische Formulierung und die numerischen Eigenschaften der verschiedenen partitionierten Lösungsmethoden.

Vor dem Hintergrund der erforderlichen Eignung für die angestrebte Zielanwendung Fluid-Struktur-Interaktion beschränkten sich die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit dann auf nichtüberlappende Dirichlet-Neumann-Partitionierungen. Zunächst wurden die hierfür in der Literatur existierenden, einfach sequentiell gestaffelten Kopplungsverfahren umgesetzt, und sowohl numerisch als auch theoretisch analysiert. Dabei stellte sich heraus, daß diese Verfahren aufgrund ihres inhärent expliziten Charakters nur die dynamische, nicht jedoch die kinematische Kontinuitätsbedingung am Interface zwischen den Partitionen erfüllen, und somit zwar impulserhaltend, aber nicht massen- und energieerhaltend sind. Die Folge dieser sogenannten schwachen algorithmischen Kopplung ist einerseits ein Genauigkeitsverlust des Gesamtverfahrens im Vergleich zu den in den einzelnen Teilgebieten eingesetzten Diskretisierungsverfahren, und – wesentlich schwerwiegender – eine unbedingte, schwache Instabilität der partitionierten Lösung. Diese äußert sich (im Gegensatz zur bedingten Stabilität, als das das auftretende Instabilitätsphänomen in der Literatur häufig fehlinterpretiert wird) so, daß die numerische Lösung in einem anfänglichen Zeitbereich perfekt stabil ist, jedoch grundsätzlich ab einem bestimmten Zeitpunkt exponentiell anwachsende Störungen eintreten, welche die stabile Lösung überlagern und vollständig unbrauchbar machen. Der Zeitpunkt des Auftretens dieser Instabilität ist abhängig von der Formulierung des Kopplungsverfahrens, von der Zeitschrittgröße und von der Problemstellung selbst. Es konnte gezeigt werden, daß bei strukturmechanischen Problemen der Instabilitätsbeginn durch Zeitschrittverkleinerung zeitlich nach hinten verschoben werden kann – dies ist eine typische Eigenschaft schwach instabiler Algorithmen –, daß dies aber bei Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen mit inkompressiblen Strömungen aufgrund des

„Artificial Added Mass“-Effektes nicht möglich ist. Zudem ist auch eine Vorhersage des Zeitpunkts des Instabilitätsbeginns grundsätzlich unmöglich. Ferner wurde im Laufe der Untersuchungen deutlich, daß eine Stabilisierung einfach gestaffelter Lösungsverfahren mit Hilfe von künstlicher viskoser Dämpfung, wie sie in der Literatur gelegentlich zu finden ist, nicht sinnvoll ist, da einerseits die erforderliche Stärke der Dämpfung a-priori unbekannt ist, und zweitens die Physik des modellierten Systems durch eine solche Maßnahme verändert wird. Dies hatte bei der sehr hohen künstlichen Dämpfung, die in den dokumentierten Beispielen zur Stabilisierung nötig war, zu extrem stark von der Referenzlösung abweichenden Ergebnissen geführt.

Basierend auf diesen Erkenntnissen konnte für die geometrisch nichtlineare Strukturdynamik ein explizit–implizites Kopplungsverfahren mit der Möglichkeit des Subcycling der expliziten Partition entwickelt und vorgestellt werden, dessen stabiler Anfangsbereich zumindest in den berechneten Beispielen bei noch sinnvollen Zeitschrittgrößen meist lang genug ist, um wenigstens kurzzeitdynamische Simulationen zu ermöglichen. Dabei besitzt dieses  $E^m$ –I–Verfahren im stabilen Anfangsbereich auch eine verhältnismäßig hohe Genauigkeit, und ist natürlich vom numerischen Berechnungsaufwand her wesentlich günstiger als die iterativ gestaffelten Formulierungen. Die numerische Beobachtung von Kriterien wie etwa der in der Arbeit beschriebenen Interface-Energie, mit deren Hilfe der Beginn des Auftretens einer auf das partitionierte Lösungsverfahren zurückzuführenden schwachen Instabilität und somit der Endpunkt der physikalisch sinnvollen Lösung feststellbar ist, wird dabei unbedingt empfohlen. Im Gegensatz hierzu wurde festgestellt, daß mit den untersuchten implizit–impliziten Formulierungen, welche alle ursprünglich für die FSI mit kompressiblen Strömungen entwickelt wurden, weder für strukturdynamische noch für Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme mit *inkompressiblen* Strömungen brauchbare Lösungen berechnet werden können, da die schwache Instabilität stets sehr bald auftritt. Bei sehr gutmütigen Systemen konnten lediglich mit dem sequentiell gestaffelten I–I–Grundverfahren ausnahmsweise stabile kurzzeitdynamische Simulationen durchgeführt werden.

Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen wurde daher schließlich als einziger wirklich zuverlässiger Weg, mit partitionierten Lösungsansätzen auch über einen beliebig langen Berechnungszeitraum hinweg garantiert stabile und genaue numerische Lösungen zu ermitteln, der Einsatz von iterativ gestaffelten Lösungsverfahren identifiziert. Diese stellen auf iterativem Wege implizit die Kontinuität in den dynamischen und kinematischen Variablen am Interface, sowie die zeitliche Konsistenz der Kopplungsgrößen mit den in den Teilfeldern eingesetzten (beliebig wählbaren) Zeitintegrationsalgorithmen her. Durch eine solche starke algorithmische Kopplung stellen sie den Erhalt der Bilanzgrößen Masse, Impuls und Energie sicher. Somit konvergieren sie gegen die simultane Lösung des unpartitionierten, monolithischen Gesamtsystems und erben gleichzeitig deren Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften.

Weiterhin wurde die Kernidee der iterativ gestaffelten Methoden, in jedem Zeitschritt die Kontinuität in den Kopplungsgrößen mittels Subiterationen über die Teilfelder sicherzustellen, auf die in der mathematischen Literatur wohldokumentierten und ausführlich analysierten iterativen Substrukturverfahren und die damit unmittelbar verbundenen iterativen Lösungsverfahren zurückgeführt. Dadurch gelang es, iterativ gestaffelte Methoden zu entwickeln und soft-

wareseitig umzusetzen, die zum einen die Konvergenz der Iteration über die Teilfelder sicherstellen, und mit denen zudem auch der numerische Mehraufwand mittels effizienter Konvergenzbeschleunigung in akzeptablen Grenzen gehalten werden kann. Auch die Ableitung von analytischen Aussagen zu den Konvergenzeigenschaften wurde dadurch möglich. Und schließlich hat sich die Konvergenzbeschleunigung mit Hilfe des Gradientenverfahrens sowie mit der für vektorielle Gleichungen modifizierten Aitken-Methode auch im Nichtlinearen als geeignet und sehr effizient erwiesen. Damit stehen nun Werkzeuge zur Verfügung, die algorithmisch – d.h. automatisch, ohne jegliches Zutun des Programmanwenders – und in jedem Zeit- und Iterationsschritt optimal an das jeweilige System angepasste Relaxationsparameter ermitteln. In diesem Sinne sind die vorgestellten beschleunigten, iterativ gestaffelten Lösungsverfahren robuste Ansätze, im Gegensatz zu der Verwendung von durch mühsames und zeitaufwendiges Probieren oder experimentell vom Anwender ermittelten, extrem problemabhängigen, festen Relaxationsparametern, welche, wie die numerischen Beispiele verdeutlicht haben, in der Regel auch noch suboptimal sind.

Im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit wurden, wie bereits gesagt, aus Gründen der erforderlichen Eignung der partitionierten Lösungsansätze für die Zielanwendung Fluid-Struktur-Interaktion im wesentlichen nichtüberlappende Partitionierungen betrachtet. Insofern erscheint eine weitergehende Forschungstätigkeit zur sequentiell oder parallel gestaffelten Lösung insbesondere von strukturdynamischen Problemstellungen mit überlappenden, knotenweisen Partitionierungen wichtig und auch durchaus vielversprechend. Zu dieser Thematik wurde von diversen Autoren eine Vielzahl von einfach gestaffelten Verfahren vorgeschlagen, von denen die wichtigsten in Abschnitt 3.3 dieser Arbeit zusammengestellt wurden. Ferner ist auch eine vertiefte Untersuchung der erst kürzlich publizierten Idee von Gravouil & Combescure (2001) sicher lohnenswert, in der erstmalig eine duale Formulierung für sequentiell gestaffelte Verfahren eingesetzt wurde, mit der offensichtlich auch ohne Iterationen über die Teilfelder sowohl die dynamische als auch die kinematische Kontinuitätsbedingung erfüllt werden kann.

Desweiteren sollten im Hinblick auf die insbesondere mit dem Übergang auf 3-D enorm gestiegenen Systemgrößen auch verstärkte Anstrengungen in Richtung der Kombination der bisher softwareseitig umgesetzten Ansätze mit parallelen Lösungstechniken erfolgen. Zudem könnte die Erweiterung der implementierten Verfahren um die in Abschnitt 4.1.3 skizzierten Mortar-Ansätze zweckmäßig sein, um nicht-konforme Diskretisierungen am Interface zwischen Fluid und Struktur zu ermöglichen, was bei der Modellierung und Berechnung komplexer FSI-Probleme hilfreich und wichtig wäre. Im Gegensatz zur Fluid-Struktur-Interaktion sind für physikalische Einfeldprobleme wie der nichtlinearen Strukturdynamik vermutlich auch weitergehende, vergleichende Studien zwischen den hier untersuchten iterativen Substrukturverfahren mit nichtlinearen Teilgebieten und den mit Gebietszerlegungsverfahren kombinierten hybriden Krylov-Newton-Verfahren oder auch den dualen Ansätzen wie der FETI-Methode aussichtsreich. Diese erscheinen für solche Problemstellungen mittlerweile weitgehend ausgereift (mehrere Teilgebiete, Parallelisierung, dynamische Lastverteilung, usw.) und sehr effizient zu sein.

Weitere Forschungsaktivitäten sollten schließlich auch hinsichtlich der in dieser Arbeit noch offen gebliebenen Frage getätigt werden, aus welchen Gründen die einfach gestaffelten Verfahren mit steigender Genauigkeit des Kopplungsalgorithmus immer früher instabil werden. Eine Klärung dieser Thematik könnte möglicherweise die Tür zu besseren Stabilisierungstechniken, und damit zu allgemein einsetzbaren, numerisch günstigen, einfach gestaffelten Verfahren für die Simulation gekoppelter Probleme öffnen.

# A Anhang

An dieser Stelle werden abschließend eine Reihe von mathematischen Sätzen, Verfahren und Beweisen sowie einige programmtechnische Details zusammengestellt, die überwiegend nicht im Rahmen dieser Dissertation selbst entwickelt, sondern der entsprechenden Literatur entnommen wurden. Ihre Präsenz hier in einer zum Hauptteil dieser Arbeit konformen Notation mag jedoch das Verständnis der geschilderten Zusammenhänge erleichtern und weiteres Literaturstudium vermeiden helfen. Die Ausführungen in diesem Anhang beschränken sich auf zum besseren Verständnis der Arbeit erforderliche Angaben und erheben folglich keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Für detailliertere Herleitungen und Beschreibungen wird auf die in der Regel jeweils angegebene Fachliteratur verwiesen.

## A1 Integralsätze

- **Gaußscher Integralsatz oder Divergenztheorem**

Mit dem Gaußschen Integralsatz ist die Umwandlung von Volumen- in Flächenintegrale möglich. Für einen Tensor  $S$  und den Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  auf der Oberfläche  $\Gamma$  eines Gebietes  $\Omega$  gilt damit

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot S \, d\Omega = \int_{\Gamma} S \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{A.1})$$

- **Partielle Integration oder Greensches Theorem (1. Greensche Formel)**

Mit dem Greenschen Theorem können in einem Integralausdruck Richtungsableitungen von einer (tensorwertigen) Funktion  $P$  auf eine andere (tensorwertige) Funktion  $S$  übergewälzt werden.

$$\int_{\Omega} S \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \, d\Omega = \int_{\Gamma} S \cdot P \cdot \mathbf{n}_x \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial x} \cdot P \, d\Omega \quad (\text{A.2})$$

## A2 Programmtechnische und algorithmische Aspekte

### A2.1 Generalized- $\alpha$ -Zeitintegrationsverfahren für die nichtlineare Strukturdynamik

Dieser Abschnitt erläutert die algorithmische Umsetzung und Implementierungsweise des Generalized- $\alpha$ -Zeitintegrationsverfahrens von Chung & Hulbert (1993) für die nichtlineare Struk-

turdynamik, in der Form wie sie von Kuhl (1996) (mit späteren Erweiterungen durch den Autor dieser Arbeit hinsichtlich vorgeschriebener Dirichlet-Randbedingungen) in das hier verwendete FEM-Programmsystem CARAT des Instituts für Baustatik implementiert wurde.

Die Bestimmungsgleichungen und Eigenschaften des Verfahrens wurden in Abschnitt 2.1.4 zusammengefaßt. Aus der diskreten Bewegungsgleichung (2.45) folgt durch Umstellen direkt die auch als *effektive Strukturgleichung* bezeichnete Gleichung für das Residuum  $\mathbf{g}(\mathbf{d}^{n+1})$ :

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}^{n+1}) = \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}^S \mathbf{d}^{n+1} + (1-\alpha_f) \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}^{n+1}) - \mathbf{f}_{ext}^\alpha - \mathbf{M}^S \mathbf{h}(\mathbf{d}^n, \dot{\mathbf{d}}^n, \ddot{\mathbf{d}}^n) + \alpha_f \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}^n) = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

mit den geschifteten externen Lasten gemäß Gl. (2.42) ( $\mathbf{f}_{ext}^\alpha = (1-\alpha_f) \mathbf{f}_{ext}^{n+1} + \alpha_f \mathbf{f}_{ext}^n$ ) aus Neumann-Randbedingungen und eingepprägten Volumenkräften, und mit den Geschichtsvariablen gemäß Gl. (2.46):

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}^n, \dot{\mathbf{d}}^n, \ddot{\mathbf{d}}^n) := \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{d}^n + \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n + \left( \frac{1-\alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}^n$$

### Linearisierung und inkrementelle Formulierung

Zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens bedarf es zunächst einer Linearisierung. Dazu wird das Residuum in eine nach dem linearen Glied abgebrochene Taylorreihe entwickelt.

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_{k+1}^{n+1}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{d}_k^{n+1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_k^{n+1}} \Delta \mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{d}_{k+1} := \mathbf{d}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{d}_k^{n+1} \quad (\text{A.4})$$

Die Ableitung der inneren Kräfte  $\partial \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}) / \partial \mathbf{d}$  ergibt sich völlig analog zum statischen Fall, wird als tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^S(\mathbf{d})$  bezeichnet und setzt sich aus elastischer Steifigkeitsmatrix, Anfangsverschiebungsmatrix und geometrischer Steifigkeitsmatrix zusammen (für detaillierte Angaben hierzu siehe beispielsweise Zienkiewicz & Taylor (1991)). Die inkrementelle Form des zu lösenden Systems lautet folglich

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_k^{n+1}} \Delta \mathbf{d}_{k+1} = - \mathbf{g}(\mathbf{d}_k^{n+1}) \quad (\text{A.5})$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}^S + (1-\alpha_f) \mathbf{K}_T^S(\mathbf{d}_k^{n+1}) \right) \Delta \mathbf{d}_{k+1} = \\ & = \mathbf{f}_{ext}^\alpha - \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}^S \mathbf{d}_k^{n+1} - (1-\alpha_f) \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}_k^{n+1}) + \mathbf{M}^S \mathbf{h}(\mathbf{d}^n, \dot{\mathbf{d}}^n, \ddot{\mathbf{d}}^n) - \alpha_f \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}^n) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Dabei wird der Klammerausdruck auf der linken Gleichungsseite zusammengefaßt als *effektive Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{K}_{eff}^S$  und die gesamte rechte Gleichungsseite als *effektiver Lastvektor*  $\mathbf{f}_{eff}$  bezeichnet. Der vollständige Lösungsablauf mit Hilfe einer Prädiktor-Multikorrekter-Formulierung und Newton-Raphson-Gleichgewichtssiterationen ist als *Algorithmus A.1* dargestellt.

*Bemerkung A.1:* Bei Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen treten an der benetzten Strukturoberfläche ( $\underline{\Delta}$  dem Interface  $\Gamma$ ) deformationsabhängige Lasten  $f_{\Gamma}(\mathbf{d})$  auf. Auf deren Linearisierung wird jedoch hier verzichtet, da die Linearisierung und die damit verbundenen Steifigkeitsanteile (sog. *Laststeifigkeitsmatrizen*, s. Mok (1997) und Mok et al. (1999a, b)) eine zusätzliche Kopplung zwischen den Feldern bewirkt. Diese ist numerisch nur sehr aufwendig umzusetzen und läuft dem hier verfolgten partitionierten Lösungsansatz zuwider.

<p><i>Initialisierung:</i> Setze <math>n = 0</math> und Anfangsbedingungen <math>\mathbf{d}^0 = \mathbf{d}_0; \dot{\mathbf{d}}^0 = \dot{\mathbf{d}}_0; \Rightarrow \ddot{\mathbf{d}}^0</math></p>
<p><i>Schleife über alle <math>n_T</math> Zeitschritte</i></p>
<p><i>Prädiktorschritt (<math>k = 0</math>)</i></p> $\mathbf{K}_{eff}^S = \left( \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^S + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_T^S(\mathbf{d}^n) \right)$ $\mathbf{f}_{eff} = \mathbf{f}_{ext}^\alpha + \mathbf{M}^S \mathbf{h}(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{d}}^n, \ddot{\mathbf{d}}^n) - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}^n)$ $\Delta \mathbf{d}_0^\Sigma = \mathbf{K}_{eff}^{S-1} \mathbf{f}_{eff}$ $\mathbf{d}_0^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta \mathbf{d}_0^\Sigma$
<p><i>Newton-Raphson-Korrekturiteration</i></p>
$\mathbf{K}_{eff}^S = \left( \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^S + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_T^S(\mathbf{d}_k^{n+1}) \right)$ $\mathbf{f}_{eff} = \mathbf{f}_{ext}^\alpha + \mathbf{M}^S \mathbf{h}(-\Delta \mathbf{d}_k^\Sigma, \dot{\mathbf{d}}^n, \ddot{\mathbf{d}}^n) - (1 - \alpha_f) \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}_k^{n+1}) - \alpha_f \mathbf{f}_{int}(\mathbf{d}^n)$ $\Delta \mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{K}_{eff}^{S-1} \mathbf{f}_{eff}$ $\Delta \mathbf{d}_{k+1}^\Sigma = \Delta \mathbf{d}_k^\Sigma + \Delta \mathbf{d}_{k+1}$ $\mathbf{d}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta \mathbf{d}_{k+1}^\Sigma$
<p>⬆ <math>k \leftarrow k + 1</math> bis zur Konvergenz</p>
<p><i>Update Bewegungsgrößen (Newmark-Ansätze) mit <math>\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}_{k+1}^{n+1}</math></i></p> $\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{d}}^n - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n$ $\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n$
<p>⬆ <math>n \leftarrow n + 1</math> bis <math>n + 1 = n_T</math></p>

*Algorithmus A.1: Generalized- $\alpha$ : Prädiktor-Multikorrekter-Formulierung*

## Algorithmus mit Dirichlet-Randbedingungen

Im folgenden wird des weiteren die Implementierung des Generalized- $\alpha$ -Verfahrens mit einer vorgeschriebenen Dirichlet-Randbedingung  $\hat{\mathbf{d}}_\Gamma$  auf dem Rand  $\Gamma$  (Verschiebungsvorgabe) erläutert. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird wieder das Newton-Raphson-Verfahren in einer Prädiktor-Multikorrekter-Formulierung verwendet. Diese Implementierungsform kommt bei der partitionierten Berechnung rein strukturdynamischer Problemstellungen mit nichtüberlappenden Dirichlet-Neumann-Verfahren zum Einsatz.

Ausgangspunkt ist die diskrete Bewegungsgleichung in der inkrementellen Form (A.6) mit einer nichtüberlappenden Partitionierung gemäß Gl. (3.2) in Freiheitsgrade im Innern  $(\cdot)_I$  und auf dem Rand  $(\cdot)_\Gamma$ , diese wird hier exemplarisch für Steifigkeitsmatrix, Verschiebungs- und Verschiebungsinkrementvektor sowie externen Lastvektor angegeben:

$$\mathbf{K}_T^S(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T,II}^S(\mathbf{d}) & \mathbf{K}_{T,I\Gamma}^S(\mathbf{d}) \\ \mathbf{K}_{T,\Gamma I}^S(\mathbf{d}) & \mathbf{K}_{T,\Gamma\Gamma}^S(\mathbf{d}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_I \\ \mathbf{d}_\Gamma \end{Bmatrix}; \quad \Delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d}_I \\ \Delta \mathbf{d}_\Gamma \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{I\ ext} \\ \mathbf{f}_\Gamma \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Damit ergibt sich dann der auf der nächsten Seite als *Algorithmus A.2* dargestellte Lösungsablauf.



Initialisierung: Setze  $n = 0$  und Anfangsbedingungen  $\mathbf{d}^0 = \mathbf{d}_0$ ;  $\dot{\mathbf{d}}^0 = \dot{\mathbf{d}}_0$ ;  $\Rightarrow \ddot{\mathbf{d}}^0$

Schleife über alle  $n_T$  Zeitschritte

Prädiktorschritt ( $k = 0$ ) mit Dirichlet-R.B.  $\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} = \hat{\mathbf{d}}_\Gamma^{n+1} \Rightarrow \Delta \mathbf{d}_\Gamma^\Sigma = \mathbf{d}_\Gamma^{n+1} - \mathbf{d}_\Gamma^n$

$$\mathbf{K}_{II\text{eff}}^S = \left( \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_{II}^S + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{T,II}^S(\mathbf{d}^n) \right)$$

$$\mathbf{f}_{I\text{eff}} = \mathbf{f}_{I\text{ext}}^\alpha + \mathbf{M}_{II}^S \mathbf{h}_I(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{d}}_I^n, \ddot{\mathbf{d}}_I^n) - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}^n) + \\ + \mathbf{M}_{I\Gamma}^S \mathbf{h}_\Gamma(-\Delta \mathbf{d}_\Gamma^\Sigma, \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n, \ddot{\mathbf{d}}_\Gamma^n) - (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{T,I\Gamma}^S(\mathbf{d}^n) \Delta \mathbf{d}_\Gamma^\Sigma$$

$$\Delta \mathbf{d}_0^\Sigma = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{II\text{eff}}^{S-1} \mathbf{f}_{I\text{eff}} \\ \Delta \mathbf{d}_\Gamma^\Sigma \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_0^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta \mathbf{d}_0^\Sigma$$

Newton-Raphson-Korrekturiteration

$$\mathbf{K}_{II\text{eff}}^S = \left( \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_{II}^S + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{T,II}^S(\mathbf{d}_k^{n+1}) \right)$$

$$\mathbf{f}_{I\text{eff}} = \mathbf{f}_{I\text{ext}}^\alpha + \mathbf{M}_{II}^S \mathbf{h}_I(-\Delta \mathbf{d}_k^\Sigma, \dot{\mathbf{d}}_I^n, \ddot{\mathbf{d}}_I^n) - (1 - \alpha_f) \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_k^{n+1}) - \alpha_f \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}^n) + \\ + \mathbf{M}_{I\Gamma}^S \mathbf{h}_\Gamma(-\Delta \mathbf{d}_k^\Sigma, \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n, \ddot{\mathbf{d}}_\Gamma^n)$$

$$\Delta \mathbf{d}_{k+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{II\text{eff}}^{S-1} \mathbf{f}_{I\text{eff}} \\ \Delta \mathbf{d}_\Gamma^\Sigma \end{Bmatrix} \Rightarrow \Delta \mathbf{d}_{k+1}^\Sigma = \Delta \mathbf{d}_k^\Sigma + \Delta \mathbf{d}_{k+1}$$

$$\mathbf{d}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta \mathbf{d}_{k+1}^\Sigma$$



$k \leftarrow k + 1$  bis zur Konvergenz

Update Bewegungsgrößen (Newmark-Ansätze) mit  $\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}_{k+1}^{n+1}$

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{d}}^n - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n$$

Berechnung Auflagerkräfte ( $\rightarrow$  Kopplungskräfte) auf  $\Gamma$

$$\mathbf{f}_\Gamma^{n+1} = \frac{1}{1 - \alpha_f} \left( -\mathbf{f}_\Gamma^n - [\mathbf{M}_{\Gamma I}^S \ \mathbf{M}_{\Gamma \Gamma}^S] \mathbf{h}(-\Delta \mathbf{d}_{k+1}^\Sigma, \dot{\mathbf{d}}^n, \ddot{\mathbf{d}}^n) + \right. \\ \left. + (1 - \alpha_f) \mathbf{f}_{\Gamma\text{int}}(\mathbf{d}^{n+1}) + \alpha_f \mathbf{f}_{\Gamma\text{int}}(\mathbf{d}^n) \right)$$



$n \leftarrow n + 1$  bis  $n + 1 = n_T$

Algorithmus A.2: Generalized- $\alpha$ : Prädiktor-Multikorrekter-Formulierung mit Dirichlet-R.B.

## A2.2 Beweis der Verschiebungskontinuität des asynchronen, sequentiell gestaffelten Verfahrens nach Lesoinne & Farhat (1998)

Hier wird – in einer zur übrigen Arbeit konformen Notation – der in Lesoinne & Farhat (1998a, b) durchgeführte Beweis dokumentiert, daß für das in Abschnitt 5.4 beschriebene asynchrone, sequentiell gestaffelte Lösungsverfahren die kinematische Kontinuität in den Verschiebungen auf  $\Gamma$  zwischen Fluidgebiet, d.h. Fluid-Netz, und Struktur zur Zeit  $t^n$  gilt (Gleichung (5.54):  $\mathbf{r}_\Gamma^n = \mathbf{d}_\Gamma^n$ ). Der Beweis ist zweiteilig. Zuerst wird durch vollständige Induktion bewiesen, daß die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{r}_\Gamma^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{d}_\Gamma^n - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n \quad (\text{A.8})$$

Aufgrund der Initialisierung mit Gl. (5.45) gilt Gl. (A.8) für  $n = 0$ . Mit der Annahme, daß (A.8) auch für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt durch Einsetzen von Gl. (5.46) und (A.8) in (5.47)

$$\mathbf{r}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{r}_\Gamma^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{u}_\Gamma^{G, n-\frac{1}{2} \rightarrow n+\frac{1}{2}} = \mathbf{d}_\Gamma^n - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n = \mathbf{d}_\Gamma^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n \quad (\text{A.9})$$

Da das Strukturfeld mit der Mittelpunktsregel gelöst wird, folgt aus dem Zeitintegrationsansatz (Gl. (2.31) mit den entsprechenden Parameterwerten  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$ )

$$\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} - \mathbf{d}_\Gamma^n = \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{d}}_\Gamma^{n+1} + \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^n) \quad (\text{A.10})$$

Kombination von (A.9) und (A.10) liefert schließlich

$$\mathbf{r}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{d}_\Gamma^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}_\Gamma^{n+1} \quad (\text{A.11})$$

womit die Beziehung (A.8) induktiv bewiesen ist.

Der zweite Teil des Beweises der Verschiebungskontinuität bedient sich der Eigenschaft, daß aufgrund der über den Zeitschritt hinweg als konstant angenommenen Geschwindigkeit des Fluid-Netzes  $\mathbf{u}_\Gamma^{G, n-1/2 \rightarrow n+1/2}$  die Netzverschiebung im Zeitschritt linear interpoliert sein muß, und daher die Beziehung

$$\mathbf{r}_\Gamma^n = \frac{1}{2} \left( \mathbf{r}_\Gamma^{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{r}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.12})$$

definiert werden kann. Einsetzen von Gl. (5.47) in (A.12) ergibt dann

$$\mathbf{r}_\Gamma^n = \mathbf{r}_\Gamma^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{r}}_\Gamma^n \quad (\text{A.13})$$

und weiteres Einsetzen von Gl. (5.46) und der im ersten Teil bewiesenen Beziehung (A.8) in Gl. (A.13) führt letztendlich auf

$$\mathbf{r}_\Gamma^n = \mathbf{d}_\Gamma^n \quad (\text{A.14})$$

womit die kinematische Kontinuität in den Verschiebungen auf dem Interface  $\Gamma$  zwischen Fluid-Netz und Struktur zur Zeit  $t^n$  bewiesen ist.

## A3 Iterationsverfahren

In diesem letzten Anhangskapitel werden zunächst einige Begriffe und übergeordnete Verfahrensklassen erläutert, anschließend werden für die in der vorliegenden Arbeit angesprochenen Iterationsverfahren jeweils Grundidee, Iterationsvorschrift sowie grundsätzliche Eigenschaften und Konvergenzaussagen angeführt. Die Ausführungen sind, soweit nicht anders angegeben, aus der folgenden Literatur zusammengetragen und in vereinheitlichter Notation wiedergegeben: Barrett et al. (1994), Deuffhard & Hohmann (1991), Jung (1999), Hackbusch (1993, 1994), Kelley (1995), Meister (1997) und Quarteroni et al. (2000).

### A3.1 Begriffe, Definitionen

Betrachtet wird ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{A.15})$$

mit gegebener regulärer, symmetrischer Operatormatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , gesuchtem Lösungsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und gegebenem Vektor der rechten Seite  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Dieses soll mit Iterationsverfahren  $\Phi$  gelöst werden, deren Iterationsvorschrift im allgemeinen Fall durch

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{G}_i^\Phi(\mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.16})$$

gegeben ist. Die Matrix  $\mathbf{G}_i^\Phi(\mathbf{x}_i) = \mathbf{I} - \omega_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *Iterationsmatrix von  $\Phi$* , und der Skalar  $\omega_i(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}$  ist ein *Relaxationsparameter* oder auch eine *Schrittlänge*.  $\mathbf{G}^\Phi$  und  $\omega$  können je nach Iterationsverfahren im Laufe der Iteration entweder konstant oder (in Abhängigkeit von der aktuellen Iterierten) veränderlich sein. Der Vektor  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$  ist der *Korrekturvektor*, der auch als *Suchrichtung* interpretiert wird. Die reguläre, symmetrische Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist eine *Vorkonditionierungsmatrix*, mit dem das System (A.15) von links durchmultipliziert wird, um so das iterativ leichter lösbare System

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \quad (\text{A.17})$$

zu erhalten. Die Lösung  $\mathbf{x}^*$  von (A.17) und diejenige von (A.15) sind identisch.  $\mathbf{M}$  sollte möglichst einfach zu invertieren sein und die Operatormatrix  $\mathbf{A}$  möglichst gut approximieren, sodaß  $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{I}$ , mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ .

*Bemerkung A.2:* Neben der beschriebenen Links-Vorkonditionierung ist auch eine Rechts-Vorkonditionierung möglich, die durch  $\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$  definiert ist, sowie eine gemischte Form:  $\mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_r^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{b}$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{M}_r^{-1}\mathbf{y}$ . Bei den in dieser Arbeit beschriebenen Gebietszerlegungsmethoden kommt jedoch fast ausschließlich die Links-Vorkonditionierung zur Anwendung.

*Bemerkung A.3:* Die Bezeichnung *Relaxationsparameter* erklärt sich aus der folgenden Betrachtung: Ohne Relaxation ergibt sich, ausgehend von einer gegebenen Iterierten  $\mathbf{x}_i$ , zunächst ein korrigierter Wert  $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{p}_i$ . Die Relaxation besagt nun, daß als neue Iterierte anstelle von  $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$  ein relaxierter Wert

$$\mathbf{x}_{i+1} = \omega \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} + (1-\omega) \mathbf{x}_i \quad (\text{A.18})$$

im Sinne einer linearen Interpolation zwischen  $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$  und  $\mathbf{x}_i$  verwendet wird. Einsetzen und Ausmultiplizieren führt dann wieder auf die in Gl. (A.16) dargestellte Form  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega \mathbf{p}_i$ . Ob in einer Berechnung nun die Ermittlung der  $\mathbf{x}_{i+1}$  direkt nach Gl. (A.16) oder gemäß der hier geschilderten alternativen Formulierung mit Gl. (A.18) zweckmäßiger ist, hängt von der spezifischen Implementierung ab.

- **Stationäres / nichtstationäres Iterationsverfahren**

Ein Iterationsverfahren  $\Phi$  heißt *stationär*, wenn die Iterationsmatrix vom Iterationsschritt  $i$  unabhängig ist:  $\mathbf{G}^\Phi = \mathbf{G}_i^\Phi = \mathbf{G}_{i-1}^\Phi$ ; ansonsten heißt  $\Phi$  *nichtstationär*:  $\mathbf{G}_i^\Phi \neq \mathbf{G}_{i-1}^\Phi$ .

- **Lineares / nichtlineares Iterationsverfahren**

Ein Iterationsverfahren  $\Phi$  heißt *linear*, wenn die Iterationsmatrix von der Iterierten  $\mathbf{x}_i$  unabhängig ist:  $\mathbf{G}^\Phi \neq f(\mathbf{x}_i)$ ; ansonsten heißt  $\Phi$  *nichtlinear*:  $\mathbf{G}^\Phi = \mathbf{G}^\Phi(\mathbf{x}_i)$ .

Stationäre Verfahren sind somit linear, nichtlineare Verfahren sind instationär (der jeweilige Umkehrschluß ist nicht automatisch gültig).

- **Fixpunktiteration**

Ein Iterationsverfahren  $\Phi$  heißt *Fixpunktiteration* oder auch *Picarditeration* wenn die Folge seiner Iterierten durch die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}_{i+1} = \Phi(\mathbf{x}_i) \quad (\text{A.19})$$

dargestellt werden kann. Der Vektor  $\bar{\mathbf{x}}$  für den  $\bar{\mathbf{x}} = \Phi(\bar{\mathbf{x}})$  gilt, heißt *Fixpunkt* der Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Somit sind alle hier betrachteten Iterationsverfahren Fixpunktiterationsverfahren.

- **Konsistenz**

Ein Iterationsverfahren  $\Phi$  heißt *konsistent* zum Gleichungssystem (A.15), wenn dessen Lösung  $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  ein Fixpunkt von  $\Phi$  ist. Alle hier betrachteten Iterationsverfahren sind konsistent.

- **Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit**

Ein Iterationsverfahren  $\Phi$  heißt *global konvergent*, wenn für alle Startwerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  ein vom Startwert unabhängiger Grenzwert

$$\bar{\mathbf{x}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}_{i-1}) \quad (\text{A.20})$$

existiert. Ist die Existenz dieses Grenzwertes vom Startwert  $\mathbf{x}_0$  abhängig (d.h. muß  $\mathbf{x}_0$  innerhalb einer bestimmten Umgebung von  $\bar{\mathbf{x}}$  – dem Konvergenzradius – liegen) so heißt  $\Phi$  *lokal konvergent*. Die notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz ist durch

$$\rho(\mathbf{G}^\Phi) < 1 \quad \text{mit} \quad \rho(\mathbf{G}^\Phi) := \max_{j=1 \dots n} \left\{ \left| \lambda_j(\mathbf{G}^\Phi) \right| \right\} \quad (\text{A.21})$$

gegeben. Der gemäß (A.21) als betragsmäßig größter Eigenwert der Iterationsmatrix definierte Spektralradius  $\rho(\mathbf{G}^\Phi)$  heißt *asymptotische Konvergenzrate* des Iterationsverfahrens  $\Phi$ .

*Bemerkung A.4:* Hier ist die Nomenklatur nicht einheitlich, bei einigen Autoren steht der Begriff der asymptotischen Konvergenzrate für die Größe  $\log(\rho(\mathbf{G}^\Phi)^{-1}) = -\log\rho(\mathbf{G}^\Phi)$ .

Die *Konvergenzgeschwindigkeit* eines konvergenten Iterationsverfahrens, also die Schnelligkeit der iterativen Reduktion des Fehlers  $\mathbf{e}_i := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}^*$ , läßt sich in der Regel nicht exakt angeben. Man kann sie aber folgendermaßen abschätzen:

$$\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{\mathbf{A}}} \leq C_i \|\mathbf{e}_{i-1}\|_{\tilde{\mathbf{A}}}^p \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 < C_i < 1 & \text{für } p = 1 \\ 0 < C_i < \infty & \text{für } p > 1 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

mit der Energienorm des Fehlervektors  $\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{\mathbf{A}}} := \|\tilde{\mathbf{A}}^{1/2}\mathbf{e}_i\|_2 = (\mathbf{e}_i^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{e}_i)^{1/2}$ . Der Exponent  $p \in \mathbb{N}$  heißt *Konvergenzordnung* und der Faktor  $C_i \in \mathbb{R}$  heißt *Konvergenzfaktor* des Iterationsverfahrens  $\Phi$ . Im Falle  $p = 1$  wird anstelle von (A.22) auch häufig eine Fehlerabschätzung in der folgenden Form angegeben (mit der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  bzw.  $\|\cdot\|_2$ ):

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq (C_i)^i \|\mathbf{e}_0\| \quad (\text{A.23})$$

Im Limit streben die Konvergenzfaktoren  $C_i$  gegen die asymptotische Konvergenzrate  $\rho(\mathbf{G}^\Phi)$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = \rho(\mathbf{G}^\Phi) \quad (\text{A.24})$$

Für  $p = 1$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} C_i \neq 0$  spricht man von *linearer* Konvergenz, für  $p = 2$  von *quadratischer* Konvergenz. *Superlineare* Konvergenz ist gekennzeichnet durch  $p = 1$  und eine nicht negative Nullfolge der  $\{C_i\}$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = 0$  und  $C_i \geq 0$ , d.h. die Konvergenzgeschwindigkeit nimmt im Laufe der Iteration zu.

Eine möglichst schnelle Konvergenz ist also durch einen möglichst kleinen Konvergenzfaktor (Konvergenzrate) und/oder eine hohe Konvergenzordnung erreichbar. Höhere als lineare Konvergenzordnungen sind nur mit nichtlinearen Iterationsverfahren oder durch geeignete konvergenzbeschleunigende Methoden erreichbar. Desweiteren gilt generell: Je kleiner die spektrale Konditionszahl  $\kappa(\tilde{\mathbf{A}}) := \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) / \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})$  der (vorkonditionierten) Operatormatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$ , desto höher die Konvergenzgeschwindigkeit.

Trägt man den normierten Fehler im semi-logarithmischen Maßstab über der Iterationsschritt-  
nummer auf, lassen sich aus den Fehlergraphen Aussagen zu Konvergenzrate und -ordnung  
des Verfahrens ablesen. Sind die (ausgemittelten) Kurven Geraden mit der Steigung

$$m = \frac{\Delta \log \|\mathbf{e}\|_{\tilde{\mathbf{A}}}}{\Delta i} = \frac{1}{i} \log \frac{\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{\mathbf{A}}}}{\|\mathbf{e}_0\|_{\tilde{\mathbf{A}}}} = \log \frac{\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{\mathbf{A}}}}{\|\mathbf{e}_{i-1}\|_{\tilde{\mathbf{A}}}} = \log C_i \rightarrow \log \rho(\mathbf{G}^\Phi) \quad (\text{A.25})$$

( $m < 0$ ) so ist  $\Phi$  linear konvergent und die Konvergenzrate läßt sich entsprechend durch

$$\rho(\mathbf{G}^\Phi) \approx 10^m \quad (\text{A.26})$$

schätzen. Superlineare Konvergenz führt zu Kurven mit betragsmäßig größer werdender Steigung ( $m < 0$ ). Im Falle quadratischer Konvergenz ergeben sich quadratische Parabeln.

*Bemerkung A.5:* Der exakte Fehler  $\mathbf{e}_i := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}^*$  ist im allgemeinen nicht berechenbar, da er auf der unbekanntenen Lösung  $\mathbf{x}^*$  beruht. Eine in der Regel akzeptable Näherung für die Energienorm des Fehlers  $\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{A}}$  ist jedoch wegen

$$\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{A}} = (\mathbf{e}_i^T \tilde{A} \mathbf{e}_i)^{1/2} \approx \|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{A}^T \tilde{A}} = (\mathbf{e}_i^T \tilde{A}^T \tilde{A} \mathbf{e}_i)^{1/2} = (\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i)^{1/2} = \|\mathbf{g}_i\|_2 \quad (\text{A.27})$$

die Euklidische Norm des Residuenvektors  $\|\mathbf{g}_i\|_2$  (unter Verwendung der Beziehung  $\mathbf{A} \mathbf{e}_i = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^*) = \mathbf{A} \mathbf{x}_i - \mathbf{b} = -\mathbf{g}_i$ ).

- **Optimalität**

Der Begriff der *Optimalität eines Iterationsvektors*  $\mathbf{x}_i$  besagt allgemein, daß die Konvergenzrate des Iterationsverfahrens  $\Phi$  in einem bestimmten Sinne minimal ist, d.h. daß mit diesem  $\mathbf{x}_i$  die Energienorm des Fehlers  $\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{A}}$  in einem bestimmten Sinne minimiert wird.

Eine *lokale* Optimalitätsaussage ist die *Optimalität eines Iterationsvektors*  $\mathbf{x}_i$  *bezüglich einer Richtung*  $\mathbf{p}_{i-1}$  bzw. *bezüglich eines durch einen oder mehrere Richtungsvektoren aufgespannten Unterraums*  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Damit wird ausgesagt, daß das Fehlermaß  $\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{A}}$  für eine gegebene Suchrichtung  $\mathbf{p}_{i-1}$  durch  $\mathbf{x}_i$  minimiert wird, bzw. daß  $\|\mathbf{e}_i\|_{\tilde{A}}$  unter Berücksichtigung aller Richtungen in  $U$  durch  $\mathbf{x}_i$  minimiert wird. Dies führt im Falle von Projektions- und Krylov-Unterraum-Verfahren auf die Orthogonalitätsbedingung für den aktuellen Residuenvektor  $\mathbf{g}_i$

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_i) \perp \mathbf{p}_{i-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i \perp U \quad (\text{A.28})$$

Die Orthogonalitätsbedingung ist hierbei durch das euklidische Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_2$  definiert.

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y})_2 = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0 \quad (\text{A.29})$$

*Globale Optimalität* führt bei beliebigem Startvektor mit einem einzigen Iterationsschritt zur Lösung.

- **Projektionsmethoden und Krylov-Unterraum-Verfahren**

Ein Iterationsverfahren  $\Phi$  ist eine *Projektionsmethode*, wenn die Iterierten durch

$$\mathbf{x}_i \in \mathbf{x}_0 + K_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{beliebig} \quad (\text{A.30})$$

bestimmt sind (d.h.  $\mathbf{x}_i$  ist gleich der Startlösung  $\mathbf{x}_0$  plus eine Linearkombination der Vektoren, die den Raum  $K_i$  aufspannen), und die Residuen  $\mathbf{g}_i = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_i)$  die Orthogonalitätsbedingung  $\mathbf{g}_i \perp L_i$  erfüllen. Dabei sind  $K_i$  und  $L_i$  zwei  $i$ -dimensionale Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Für  $K_i = L_i$  wird das Verfahren *orthogonale Projektionsmethode* genannt, für  $K_i \neq L_i$  *schiefe Projektionsmethode*.

Ein *Krylov-Unterraum-Iterationsverfahren* (kurz: *Krylov-Verfahren* oder *Krylov-Iteration*) ist eine Projektionsmethode, bei der  $K_i$  den Krylov-Unterraum

$$K_i = K_i(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{g}_0) = \text{span}\{\mathbf{g}_0, \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{g}_0, \dots, \tilde{\mathbf{A}}^{i-1} \mathbf{g}_0\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.31})$$

darstellt (mit  $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}$  gemäß (A.17)).

## A3.2 Beschreibung einiger Iterationsverfahren

### • Jacobi-Iteration

Die Jacobi-Iteration ist ein *stationäres, lineares Fixpunktiterationsverfahren* und wird auch als *Gesamtschrittverfahren* bezeichnet. Sie verwendet als Vorkonditionierungsmatrix den Diagonalteil  $\mathbf{D}$  von  $\mathbf{A}$ .

– Iterationsvorschrift:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_{i+1} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})}_{=: \mathbf{G}^J} \mathbf{x}_i + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.32})$$

– Hinreichende Bedingungen für Konvergenz:  $\mathbf{A}$  und  $[2\mathbf{D} - \mathbf{A}]$  positiv definit, d.h.  $\mathbf{A}$  strikt diagonal dominant.

– Konvergenzgeschwindigkeit: Lineare Konvergenz, Fehlerabschätzung gemäß (A.22) oder (A.23) mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = \rho(\mathbf{G}^J) = \max\left\{ |1 - \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})|, |1 - \lambda_{\max}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})| \right\} \quad (\text{A.33})$$

Die Jacobi-Iteration wird auch häufig als Block-Iterationsverfahren verwendet (mit  $\mathbf{D}$  als Block-Diagonalmatrix von  $\mathbf{A}$ ). Die genannten Konvergenzaussagen bleiben auch für die Blockversion gültig, die Konvergenzgeschwindigkeit kann u.U. sogar etwas höher sein (Hackbusch (1993, 1994)).

### • Gauß-Seidel-Iteration

Die Gauß-Seidel-Iteration ist ein *stationäres, lineares Fixpunktiterationsverfahren* und wird auch als *Einzelschrittverfahren* bezeichnet. Sie verwendet den additiven Matrixsplit  $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$ , wobei  $\mathbf{D}$  den Diagonalteil,  $\mathbf{L}$  die strikte untere und  $\mathbf{U}$  die strikte obere Dreiecksmatrix von  $\mathbf{A}$  darstellt. Das lineare Gleichungssystem wird mit  $\mathbf{D} + \mathbf{L}$  vorkonditioniert.

– Iterationsvorschrift:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_{i+1} = \underbrace{(\mathbf{I} - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{A})}_{=: \mathbf{G}^{GS}} \mathbf{x}_i + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.34})$$

– Hinreichende Bedingung für Konvergenz:  $\mathbf{A}$  positiv definit.

– Konvergenzgeschwindigkeit: Lineare Konvergenz, Fehlerabschätzung gemäß (A.22) oder (A.23) mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = \rho(\mathbf{G}^{GS}) = \max\left\{ |1 - \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}}^{GS})|, |1 - \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}^{GS})| \right\} \quad (\text{A.35})$$

mit  $\tilde{\mathbf{A}}^{GS} := (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{A}$ . Die Gauß-Seidel-Iteration konvergiert doppelt so schnell (d.h. benötigt halb so viele Iterationsschritte zum Erreichen einer bestimmten Genauigkeit) wie die Jacobi-Iteration:

$$\rho(\mathbf{G}^{GS}) \approx \rho(\mathbf{G}^J)^2 \quad \rightarrow \quad m^{GS} \approx 2 m^J \quad (\text{A.36})$$

(Darin wird "≈" zu "=", wenn  $\mathbf{A}$  konsistent geordnet ist, d.h. wenn die Eigenwerte von  $\mathbf{C}(\alpha) = -\alpha\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} - \alpha^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$  unabhängig von  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind (z.B.  $\mathbf{A}$  tridiagonal))

Die Gauss-Seidel-Iteration wird ebenfalls häufig als Block-Iterationsverfahren verwendet (mit  $\mathbf{D}$  als Block-Diagonal- und  $\mathbf{L}$  bzw.  $\mathbf{U}$  als strikter unterer bzw. strikter oberer Block-Dreiecksmatrix von  $\mathbf{A}$ ). Die genannten Konvergenzaussagen bleiben auch für die Blockversion gültig (Hackbusch (1993, 1994).

### • Richardson-Iteration

Die Richardson-Iteration ist ein *lineares Fixpunktiterationsverfahren*, mit Relaxationsparameter  $\omega \in \mathbb{R}^+$  und Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Je nachdem, ob der Relaxationsparameter im Iterationsverlauf veränderlich ist oder nicht, unterscheidet man zwischen einer stationären und einer nichtstationären Verfahrensvariante.

– Iterationsvorschrift der *stationären Richardson-Iteration* (mit  $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ ):

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_{i+1} = \underbrace{(\mathbf{I} - \omega\tilde{\mathbf{A}})}_{=: \mathbf{G}^R} \mathbf{x}_i + \omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.37})$$

– Hinreichende Bedingung für Konvergenz:  $\tilde{\mathbf{A}}$  symmetrisch positiv definit und

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}})} \quad (\text{A.38})$$

– Konvergenzgeschwindigkeit: Lineare Konvergenz, Fehlerabschätzung gemäß (A.22) oder (A.23) mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = \rho(\mathbf{G}^R) = \max\left\{ |1 - \omega\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})|, |1 - \omega\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}})| \right\} \quad (\text{A.39})$$

Der optimale Relaxationsparameter  $\omega_{opt}$  läßt sich durch Minimierung der Bedingung (A.39) bestimmen zu

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) + \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})} \quad (\text{A.40})$$

und führt auf eine ausschließlich von den extremalen Eigenwerten der (vorkonditionierten) Operatormatrix abhängende, optimale asymptotische Konvergenzrate  $\rho_{opt}(\mathbf{G}^R)$  von

$$\rho_{opt}(\mathbf{G}^R) = \frac{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) - \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})}{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) + \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})} = \frac{\kappa(\tilde{\mathbf{A}}) - 1}{\kappa(\tilde{\mathbf{A}}) + 1} \quad \text{mit} \quad \kappa(\tilde{\mathbf{A}}) := \frac{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}})}{\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})} \quad (\text{A.41})$$

mit der spektralen Konditionszahl  $\kappa(\tilde{\mathbf{A}})$  der (vorkonditionierten) Operatormatrix. Die Bestimmung des optimalen Relaxationsparameters  $\omega_{opt}$  setzt die Kenntnis von  $\lambda_{\max/\min}(\tilde{\mathbf{A}})$  voraus, was den entscheidenden Nachteil des stationären Richardson-Verfahrens darstellt.



*Bemerkung A.6:* Die asymptotische Konvergenzrate  $\rho_{opt}(\mathbf{G}^R)$  der optimal relaxierten, stationären Richardson-Iteration ohne Vorkonditionierung ( $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ ) oder mit dem Diagonalteil  $\mathbf{D}$  von  $\mathbf{A}$  als Vorkonditionierungsmatrix ( $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ ) ist gleich der asymptotischen Konvergenzrate der Jacobi-Iteration  $\rho(\mathbf{G}^J)$ .

– Iterationsvorschrift der *nichtstationären Richardson-Iteration*:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega_i \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad =: \mathbf{G}_i^{Rns} \quad (\text{A.42})$$

bzw.  $\mathbf{x}_{i+1} = \left( \mathbf{I} - \omega_i \tilde{\mathbf{A}} \right) \mathbf{x}_i + \omega_i \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}$

– Konvergenzeigenschaften: siehe z.B. Gradientenverfahren.

Die meisten Fixpunktiterationsverfahren können als Sonderfälle der Richardson-Iteration interpretiert werden. So ergeben sich die Jacobi- bzw. die Gauß-Seidel-Iteration aus der stationären Richardson-Iteration mit  $\omega = 1$  und  $\mathbf{M} = \mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$ . Die im folgenden beschriebenen Gradientenverfahren sind Sonderfälle der nichtstationären Richardson-Iteration mit speziellen Formeln zur Berechnung der Relaxationsparameter  $\omega_i$ .

Die Richardson-Iteration ist außerdem im allgemeinen ein *schiefes Krylov-Iterationsverfahren*: Die Folge der Iterierten (A.42) kann umgeformt werden zu

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^i \omega_j \mathbf{g}_j \quad (\text{A.43})$$

wobei die Residuenvektoren  $\mathbf{g}_j$  mit dem Ausgangsresiduum  $\mathbf{g}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)$  gemäß

$$\mathbf{g}_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \omega_k \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{g}_0 \quad ; \quad j > 0 \quad (\text{A.44})$$

verknüpft werden können, sodaß gilt:  $\mathbf{x}_{i+1} \in \mathbf{x}_0 + K_{i+1}$  mit dem Krylov-Unterraum  $K_{i+1}(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{g}_0)$  gemäß (A.31), aber  $\mathbf{g}_{i+1} \notin K_{i+1}$ .

### • Gradientenverfahren oder Methode des steilsten Abstiegs

Das (vorkonditionierte) Gradientenverfahren ist ein *nichtlineares, nichtstationäres Fixpunktiterationsverfahren*, mit veränderlichem Relaxationsparameter  $\omega_i \in \mathbb{R}$  und Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Es minimiert die quadratische Form (Energie- bzw. Potentialfunktion)  $F$  des vorkonditionierten Systems (A.17),

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \quad (\text{A.45})$$

deren Minimum  $\mathbf{x}^*$  gleich der Lösung von (A.17) und somit auch von (A.15) ist. Die lokal optimale Suchrichtung  $\mathbf{p}_i$  liegt mit dem negativen Gradienten von  $F(\mathbf{x}_i)$  vor, der gleich dem Residuenvektor  $\mathbf{g}_i$  ist ( $\mathbf{p}_i := -\nabla F(\mathbf{x}_i) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}_i = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) = \mathbf{g}_i$ ). Die bezüglich dieser Suchrichtung optimale Schrittweite  $\omega_i(\mathbf{x}_i)$  gemäß (A.47) ergibt sich durch Einsetzen der Iterationsvorschrift in die Gleichung für  $F(\mathbf{x}_{i+1})$  und Minimieren dieser Gleichung ( $\partial F(\mathbf{x}_{i+1}) / \partial \omega_i = 0$ ).

– Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \omega_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) && =: \mathbf{G}_i^G(\mathbf{x}_i) && \text{(A.46)} \\ \text{bzw. } \mathbf{x}_{i+1} &= \left( \mathbf{I} - \omega_i(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{A}} \right) \mathbf{x}_i + \omega_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

mit Schrittlänge:

$$\omega_i(\mathbf{x}_i) = \frac{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i}{\mathbf{g}_i^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{g}_i} \quad \text{(A.47)}$$

- Hinreichende Bedingung für Konvergenz:  $\mathbf{A}$  symmetrisch positiv definit.
- Konvergenzgeschwindigkeit: Lineare Konvergenz, Fehlerabschätzung gemäß (A.22) oder (A.23) mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = \rho(\mathbf{G}_\infty^G(\mathbf{x}_\infty)) \leq \frac{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) - \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})}{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) + \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})} = \frac{\kappa(\tilde{\mathbf{A}}) - 1}{\kappa(\tilde{\mathbf{A}}) + 1} = \rho_{opt}(\mathbf{G}^R) \quad \text{(A.48)}$$

Das Gradientenverfahren zeigt somit eine mindestens so schnelle Konvergenz wie das stationäre Richardson-Verfahren mit optimalem Relaxationsparameter, ohne jedoch die Kenntnis der extremalen Eigenwerte des vorkonditionierten Operators  $\lambda_{\max/\min}(\tilde{\mathbf{A}})$  vorauszusetzen. Die optimale Konvergenzrate der stationären Richardson-Iteration ist wegen der oben beschriebenen Minimierungseigenschaft eine obere Grenze für die asymptotische Konvergenzrate des Gradientenverfahrens.

Das Gradientenverfahren kann als *nichtstationäres Richardson-Verfahren* interpretiert werden. Es ist somit ebenfalls ein *schiefes Krylov-Iterationsverfahren*. Weiterhin sind die Iterierten  $\mathbf{x}_{i+1}$  wegen der o.g. Minimierung von  $F$  jeweils optimal bezüglich dem vorherigen Residuenvektor  $\mathbf{g}_i$  (d.h.  $\mathbf{g}_{i+1} \perp \mathbf{g}_i$ ), aber nicht notwendigerweise bezüglich früheren  $\mathbf{g}_{i-k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), sodaß das Gradientenverfahren auch eine *orthogonale Projektionsmethode* mit  $K_{i+1} = L_{i+1} = \text{span}\{\mathbf{g}_i\}$  darstellt.

- **Konjugiertes Gradientenverfahren (CG)**

Das auf Stiefel (1952) bzw. Hestenes & Stiefel (1952) zurückgehende (vorkonditionierte) konjugierte Gradientenverfahren ist ein *nichtstationäres, nichtlineares Fixpunktiterationsverfahren*. Es modifiziert das Gradientenverfahren so, daß die Iterierten  $\mathbf{x}_{i+1}$  bezüglich *aller* vorheriger Suchrichtungen  $\mathbf{p}_{i-k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, i$ ), d.h. bezüglich des von diesen Suchrichtungen aufgespannten Krylov-Unterraums  $K_{i+1} \in \mathbb{R}^n$

$$K_{i+1}(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{g}_0) = \text{span}\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i\} = \text{span}\{\mathbf{g}_0, \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{g}_0, \dots, \tilde{\mathbf{A}}^i\mathbf{g}_0\} \quad \text{(A.49)}$$

optimal sind (mit  $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ ). Dazu müssen die Suchrichtungen zueinander paarweise konjugiert, d.h.  $\tilde{\mathbf{A}}$ -orthogonal sein:

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l)_{\tilde{\mathbf{A}}} := (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l)_2 = 0 \quad \forall k, l \in \{0, 1, \dots, i\}; k \neq l \quad \text{(A.50)}$$

Daraus folgt, daß das konjugierte Gradientenverfahren ein *orthogonales Krylov-Iterationsverfahren* ist.

– Iterationsvorschrift:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega_i \mathbf{p}_i \quad (\text{A.51})$$

mit Schrittlänge:

$$\omega_i = \frac{\mathbf{g}_i^T \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}_i} \quad (\text{A.52})$$

Berechnungsvorschrift für das Residuum:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{i-1} - \omega_{i-1} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}_{i-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) \quad (\text{A.53})$$

Berechnungsvorschrift für die Suchrichtung:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{g}_i - \frac{\mathbf{p}_{i-1}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{g}_i}{\mathbf{p}_{i-1}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}_{i-1}} \mathbf{p}_{i-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{g}_0 \quad (\text{A.54})$$

– Hinreichende Bedingung für Konvergenz:  $\mathbf{A}$  symmetrisch positiv definit.

– Konvergenzgeschwindigkeit: Superlineare Konvergenz; Fehlerabschätzung gemäß (A.23):

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq \frac{2 c^i}{1 + c^{2i}} \|\mathbf{e}_0\| \quad \text{mit} \quad c = \frac{\sqrt{\kappa(\tilde{\mathbf{A}})} - 1}{\sqrt{\kappa(\tilde{\mathbf{A}})} + 1} \quad (\text{A.55})$$

Während die asymptotische Konvergenzrate des Gradientenverfahrens (A.48) ausschließlich von den extremalen Eigenwerten der (vorkonditionierten) Operatormatrix abhängt, wird die Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens vom gesamten Spektrum beeinflusst. Daher ist die in (A.55) angegebene Fehlerabschätzung nur eine obere Schranke für die Konvergenzgeschwindigkeit. Tatsächlich konvergiert das CG-Verfahren bei nicht gleichmäßig über  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  verteilten Eigenwerten schneller (vgl. auch Winther (1980) oder van der Sluis & van der Vorst (1986) zur superlinearen Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens). Weiter gilt, daß nach spätestens  $n$  Schritten die exakte Lösung erreicht wird, weshalb das CG-Verfahren auch als direktes Lösungsverfahren betrachtet werden kann.

#### • **Newton-Raphson-Iterationsverfahren**

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Iterationsverfahren ist das Newton-Raphson-Verfahren eine Methode zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) := \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (\text{A.56})$$

Es stellt ein *nichtstationäres, nichtlineares Fixpunktiterationsverfahren* dar.

– Iterationsvorschrift:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \left(\mathbf{g}_{,x}(\mathbf{x}_i)\right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_{,x}(\mathbf{x}_i) := \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_i} \quad (\text{A.57})$$

wobei die Matrix  $\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_i) := \mathbf{g}_{,x}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  im Kontext der Finite-Elemente-Verfahren die tangentielle Steifigkeits- bzw. Koeffizientenmatrix darstellt.

- Konvergenzeigenschaften: Lokal konvergent mit quadratischer Konvergenzordnung.

*Bemerkung A.7:* Bei Anwendung auf *lineare* Gleichungssysteme der Form (A.15) ist die Newton-Raphson-Iteration *global optimal*, d.h. bei beliebigem Startvektor  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  liefert bereits die erste Iteration die exakte Lösung  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^*$ .

Für die Beschreibung der bekannten Varianten des Newton-Raphson-Verfahrens (modifiziertes N.-R.-Verfahren, Quasi-Newton-Verfahren) wird auf die Literatur verwiesen. Es soll hier lediglich noch darauf hingewiesen werden, daß das reine Newton-Raphson-Verfahren von der *direkten* Lösung des in (A.57) vorkommenden linearen Gleichungssystems

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{K}_T(\mathbf{x}_i)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \quad (\text{A.58})$$

ausgeht. Wird dieses *iterativ* gelöst, sodaß die Lösung  $\Delta \mathbf{x}$  nur mit der in der Iteration geforderten Genauigkeit approximiert wird, so spricht man von einem *inexakten Newton-Verfahren* oder auch einem *hybriden* Verfahren. Wird weiterhin für diese iterative Lösung ein Krylov-Verfahren verwendet, so wird das resultierende Verfahren als *Krylov-Newton-, Newton-Krylov-* oder auch einfach *hybrides* oder *nichtlineares Krylov-Unterraum-Verfahren* bezeichnet. Hybride Verfahren werden u.a. in Brown & Saad (1990, 1994) und Bulenda (1993) beschrieben.

### A3.3 Konvergenzbeschleunigende Methoden

Konvergenzbeschleunigende Methoden verwenden grundsätzlich beliebige Iterationsverfahren als Basisverfahren und beschleunigen deren Konvergenz mit Hilfe geeigneter Mittel. Eines der am häufigsten eingesetzten Mittel ist die Relaxation der Iterierten entsprechend (A.37) oder (A.42). So existieren beispielsweise relaxierte Varianten der Jacobi- und der Gauß-Seidel-Iteration, letztere ist für  $\omega \geq 1$  unter der Bezeichnung *SOR-Iteration* (Successive Over-Relaxation) bekannt. Prinzipiell könnten folglich auch die speziellen Relaxationsansätze der oben beschriebenen Richardson-Iteration, des Gradienten- und des Konjugierten Gradientenverfahrens als relaxierte, also beschleunigte Varianten eines Basisiterationsverfahrens bezeichnet werden. Sie haben sich jedoch in der Literatur als eigenständig betrachtete Iterationsverfahren durchgesetzt.

- **Tschebyscheff-Methode**

Die Tschebyscheff-Methode verwendet meist die nichtstationäre Richardson-Iteration als lineares Basisverfahren. Mithilfe der Tschebyscheff-Polynome  $m$ -ter Ordnung  $T_m(\mathbf{x}^*)$

$$T_m(\mathbf{x}^*) = \begin{cases} \cos(m \arccos \mathbf{x}^*) & \text{für } |\mathbf{x}^*| \leq 1 \\ \cosh(m \cosh^{-1} \mathbf{x}^*) & \text{für } |\mathbf{x}^*| \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

und der extremalen Eigenwerte des (vorkonditionierten) Operators  $\lambda_{\max/\min}(\tilde{\mathbf{A}})$  (mit  $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ ) wird in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Genauigkeitsschranke  $\varepsilon$  a-priori

eine erforderliche Iterationsschrittzahl  $m$  bestimmt und eine Sequenz optimaler Relaxationsparameter  $\{\omega_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) konstruiert, die zu einer garantierten Fehlerreduktion um den Faktor  $\varepsilon$  in  $m$  Schritten führt.

– Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \omega_i \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) && =: \mathbf{G}_i^T && \text{(A.60)} \\ &\text{bzw.} && \mathbf{x}_{i+1} = \underbrace{(\mathbf{I} - \omega_i \tilde{\mathbf{A}})}_{=: \mathbf{G}_i^T} \mathbf{x}_i + \omega_i \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} \end{aligned}$$

Sequenz von Relaxationsparametern  $\{\omega_i\}$ :

$$\omega_i = \frac{2}{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) + \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}}) + \mu_i (\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) - \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}}))} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{(A.61)}$$

mit den Lösungen  $\mu_i$  des Tschebyscheff-Polynoms  $m$ -ter Ordnung  $T_m(\mathbf{x}^*)$

$$\mu_i = -\cos\left(\frac{2i-1}{2m}\pi\right) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{(A.62)}$$

und der erforderlichen Anzahl an Iterationsschritten  $m \in \mathbb{N}$

$$m \geq \frac{\ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1})}{\ln\left(\frac{\sqrt{\kappa(\tilde{\mathbf{A}})} + 1}{\sqrt{\kappa(\tilde{\mathbf{A}})} - 1}\right)} \quad \text{(A.63)}$$

mit der spektralen Konditionszahl  $\kappa$  nach (A.41) und vorgegebener Genauigkeitsschranke  $\varepsilon$ . Diese Abschätzung setzt die Verwendung des Abbruchkriteriums  $\|\mathbf{e}_m\|_{\tilde{\mathbf{A}}} \leq \varepsilon \|\mathbf{e}_0\|_{\tilde{\mathbf{A}}}$  voraus. Zur Stabilisierung des im Hinblick auf Rundungsfehler sehr sensiblen Verfahrens empfiehlt sich eine anschließende optimierte Sortierung der Sequenz von Relaxationsparametern  $\{\omega_i\}$  gemäß der in Samarskii & Nikolaev (1989) (S. 82 ff) angegebenen Prozedur.

- Hinreichende Bedingung für Konvergenz:  $\mathbf{A}$  symmetrisch positiv definit.
- Konvergenzgeschwindigkeit: Lineare Konvergenz; Fehlerabschätzung gemäß (A.23):

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq \frac{2 c^i}{1 + c^{2i}} \|\mathbf{e}_0\| \quad \text{mit} \quad c = \frac{\sqrt{\kappa(\tilde{\mathbf{A}})} - 1}{\sqrt{\kappa(\tilde{\mathbf{A}})} + 1} \quad \text{(A.64)}$$

(Abschätzung identisch zum CG-Verfahren, Voraussetzung: Verwendung des Abbruchkriteriums  $\|\mathbf{e}_m\|_{\tilde{\mathbf{A}}} \leq \varepsilon \|\mathbf{e}_0\|_{\tilde{\mathbf{A}}}$ ). Die asymptotische Konvergenzrate ist

$$\rho(\mathbf{G}_\infty^T) = \lim_{i \rightarrow \infty} C_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{2 c^i}{1 + c^{2i}}\right)^{1/i} = \lim_{i \rightarrow \infty} c \left(\frac{2}{1 + c^{2i}}\right)^{1/i} = c \quad \text{(A.65)}$$

Dabei ist bei der Tschebyscheff-Methode – im Gegensatz zum CG-Verfahren – diese Abschätzung der iterativen Fehlerabnahme scharf, da die Konvergenzgeschwindigkeit hier nur von den extremalen Eigenwerten abhängt und nicht vom gesamten Spektrum des (vorkonditionierten) Operators. Somit konvergiert die Tschebyscheff-Methode in der Regel langsamer

als das CG-Verfahren, sie ist jedoch bei bekannten  $\lambda_{\max/\min}(\tilde{A})$  weniger aufwendig. Gegenüber der Basisiteration wird aber eine deutliche Beschleunigung erreicht. Die erforderliche Kenntnis der extremalen Eigenwerte ist natürlich wiederum ein Hauptnachteil der Tschebyscheff-Methode.

Ausführliche Angaben zu diesem Iterationsverfahren findet man in Deuffhard & Hohmann (1991) sowie v.a. in Samarskii & Nikolaev (1989). Die Bestimmung optimaler Relaxationsparameter mit Hilfe der Tschebyscheff-Polynome wurde bereits 1892 von dem russischen Mathematiker V.A. Markov entwickelt. Da die Relaxationsparameter  $\omega_i$  und somit auch die Iterierten  $\mathbf{x}_i$  über das Tschebyscheff-Polynom alle gegenseitig voneinander abhängen, wird das auf diese Weise beschleunigte Richardson-Verfahren auch den *semi-iterativen Verfahren* zugeordnet (Hackbusch (1993, 1994)) und häufig als eigenständiges Iterationsverfahren (*Tschebyscheff-Iteration*) betrachtet.

- **Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen**

Das meist unter dem Namen *Aitken's  $\Delta^2$ -Methode* bekannte Grundverfahren wurde von Aitken (1937) für die iterative Eigenwertbestimmung vorgeschlagen, mit dem Zweck, eine beliebige, konvergente, skalare Folge  $\{\bar{x}_i\}$  in eine schneller konvergierende Folge  $\{x_i\}$  zu konvertieren (vgl. auch Isaacson & Keller (1966) und Quarteroni et al. (2000) für die mathematische Analyse). Dieses Grundverfahren wurde später von einer Reihe von Autoren verbessert und für die iterative Lösung vektorieller Gleichungen (A.17) erweitert. In einer vergleichenden Übersichtsarbeit von MacLeod (1986) wird dabei die Variante nach Anderson (1965) bzw. Irons & Tuck (1969) als die effizienteste Methode identifiziert. Diese auch für nichtlineare Gleichungssysteme einsetzbare *Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen* ist nachfolgend in der direkt implementierbaren Formulierung von Irons & Tuck beschrieben. Sie wurde für die numerischen Beispiele in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Ausgehend von bekannten Iterierten  $\mathbf{x}_{i-k}$  ( $k = 0, 1, \dots \leq i$ ) erzeuge ein beliebiges Iterationsverfahren eine neue Iterierte  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1}$ . Damit wird für  $i \geq 1$  ein *Aitken-Faktor*  $\mu_i$  extrapoliert,

$$\mu_i = \mu_{i-1} + (\mu_{i-1} - 1) \frac{(\Delta \mathbf{x}_i - \Delta \mathbf{x}_{i+1})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_{i+1}}{(\Delta \mathbf{x}_i - \Delta \mathbf{x}_{i+1})^2} \quad (\text{A.66})$$

mit  $\mu_0 = 0$  und

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} - \bar{\mathbf{x}}_i \quad (\text{A.67})$$

Anschließend wird ein daraus bestimmter Relaxationsparameter  $\omega_i^{\text{Ait}}$

$$\omega_i^{\text{Ait}} = 1 - \mu_i \quad (\text{A.68})$$

zur relaxierten Ermittlung der verbesserten Iterierten  $\mathbf{x}_{i+1}$  herangezogen.

$$\mathbf{x}_{i+1} = \omega_i^{\text{Ait}} \bar{\mathbf{x}}_{i+1} + (1 - \omega_i^{\text{Ait}}) \mathbf{x}_i \quad (\text{A.69})$$

Wegen  $\mu_0 = 0$  und damit  $\omega_0^{\text{Ait}} = 1$  wird die erste Iterierte  $\mathbf{x}_1$  nicht beschleunigt. Ist allerdings ein guter Startwert  $\mu_0$  verfügbar, so kann dieser anstelle von 0 verwendet werden. So empfeh-

len Irons & Tuck, bei nichtlinearen, inkrementellen Berechnungen jeweils den letzten Wert  $\mu_{i_{max}}$  innerhalb eines Inkrements als ersten Wert  $\mu_0$  für das nächste Inkrement zu verwenden. Analog kann man bei direkten dynamischen Simulationen vorgehen:  $\mu_0^{n+1} = \mu_{i_{max}}^n$ .

- Angewendet beispielsweise auf die nichtstationäre Richardson-Iteration zur jeweiligen Bestimmung der  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega_i \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$  läßt sich die folgende Iterationsvorschrift für das beschleunigte Gesamtverfahren ableiten:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \omega_i^{Ait} \omega_i \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad (\text{A.70})$$

mit  $\omega_i^{Ait}$  nach (A.68) und  $\omega_i$  z.B. nach (A.47) oder auch  $\omega_i = \omega = \text{konstant}$ .

- Konvergenzeigenschaften: Für ein Basisverfahren mit linearer Konvergenzordnung ( $p = 1$ ) ergibt sich eine Beschleunigung auf  $p = 2$ , und das beschleunigte Verfahren konvergiert, auch wenn das Basisverfahren nicht konvergent ist. Für ein Basisverfahren mit Konvergenzordnung  $p \geq 2$  ergibt sich eine Beschleunigung auf  $2p - 1$ .

*Bemerkung A.8:* Konvergenzaussagen dieser Art existieren nur für die skalare Originalversion der Aitken's  $\Delta^2$ -Methode. Die Übertragbarkeit auf den vektoriellen Fall in der hier dargestellten, modifizierten Form ist leider nicht gesichert. Das folgende numerische Beispiel zeigt jedoch für einen vektoriellen Fall, daß die Konvergenz des Basisverfahrens zumindest stark beschleunigt wird, und eine Verbesserung der Konvergenzordnung auf superlineare oder gar quadratische Konvergenz wenigstens nicht völlig auszuschließen ist.

### A3.4 Numerisches Beispiel

In *Bild A.1* wird das Konvergenzverhalten der beschriebenen Iterationsverfahren an einem numerischen Beispiel dokumentiert. Das aus Meister (1997) entnommene Modellproblem ist die mit zentralen Differenzen und  $n = 7$  diskretisierte eindimensionale Poisson-Gleichung. Dies führt auf die tridiagonale, strikt diagonal dominante, positiv definite Operatormatrix

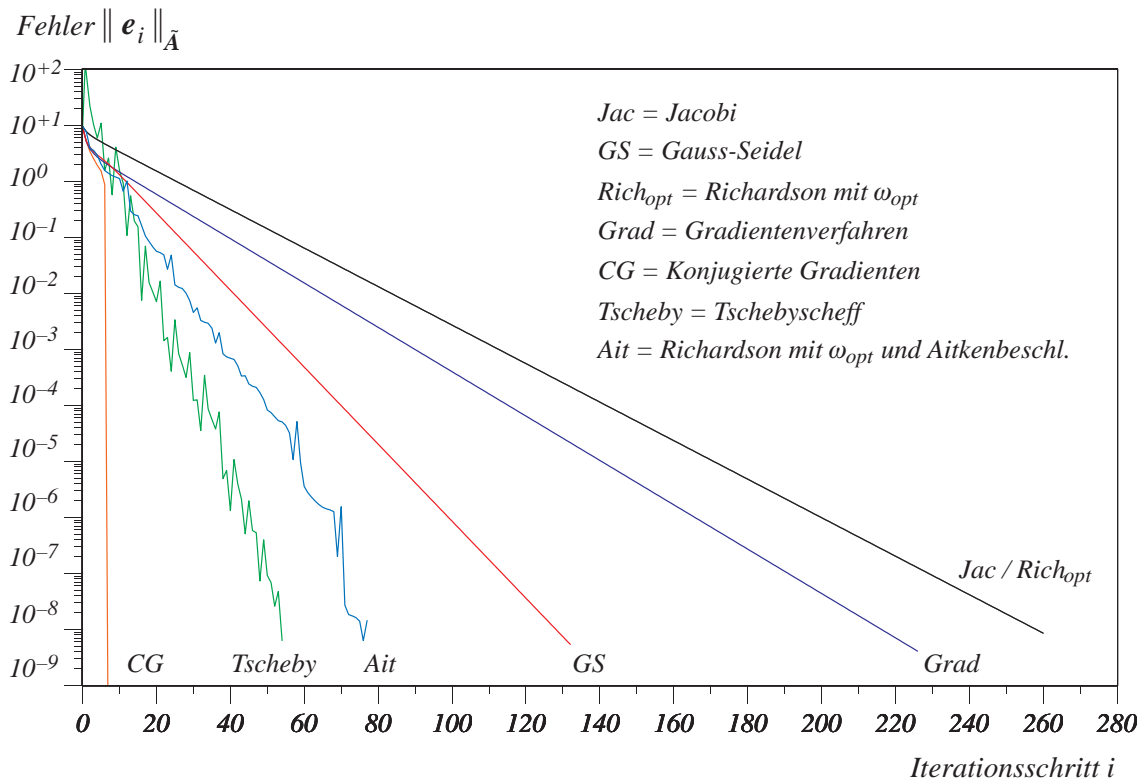
$$\mathbf{A} = \text{tridiag}\{-64 \quad 128 \quad -64\}$$

und den Vektor der rechten Seite

$$\mathbf{b} = \{128 \quad -448 \quad 704 \quad -832 \quad 512 \quad 128 \quad 320\}^T$$

Als Startvektor wurde  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und als Abbruchkriterium  $\|\mathbf{e}_m\|_{\tilde{\mathbf{A}}} \leq \varepsilon \|\mathbf{e}_0\|_{\tilde{\mathbf{A}}}$  mit  $\varepsilon = 10^{-9}$  verwendet. Mit Ausnahme der Gauss-Seidel-Iteration wurde bei allen Verfahren die Jacobi-Vorkonditionierung eingesetzt ( $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ ). Die extremalen Eigenwerte der so vorkonditionierten Operatormatrix betragen  $\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}}) = 0.07612$  und  $\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1.9239$ , daraus folgt  $\kappa(\tilde{\mathbf{A}}) = 25.2743$ .

Das konjugierte Gradientenverfahren ermittelt erwartungsgemäß nach  $i_{\max} = n = 7$  Schritten die exakte Lösung. Die Aitkenbeschleunigung angewandt auf das stationäre Richardson-Verfahren zeigt eine deutliche Konvergenzbeschleunigung gegenüber dem Basisverfahren (260  $\rightarrow$  77 Schritte) und anfangs lineare, in der Endphase superlineare Konvergenz. Alle anderen



ild A.1: Beispiel Poissongleichung – Konvergenzstudie

Verfahren weisen wie erwartet lineare Konvergenz auf. In *Tabelle A.1* ist ein Vergleich zwischen den analytischen Konvergenzraten und den experimentell über die Steigung der Fehlergraphen gemäß (A.25) und (A.26) ermittelbaren Schätzwerten aufgelistet. Es ergeben sich durchweg übereinstimmende Ergebnisse.

<i>Verfahren</i>	<i>experimentell</i>	<i>analytisch</i>
<i>Jacobi</i>	0.9230	0.9239 (A.33)
<i>Gauss-Seidel</i>	0.8515	0.8536 (A.36)
<i>Richardson mit <math>\omega_{opt}</math></i>	0.9230	0.9239 (A.41)
<i>Gradientenverfahren</i>	0.9090	$\leq 0.9239$ (A.48)
<i>Tschebyscheff</i>	0.6761	0.6682 (A.65)

Tabelle A.1 Beispiel Poissongleichung – Vergleich analytisch und experimentell ermittelter Konvergenzraten



# Literatur

- Achdou, Y., Maday, Y., Widlund, O.B. (1999):** „Iterative substructuring preconditioners for mortar element methods in two dimensions.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **36**, 551–580.
- Agoshkov, V. (1988):** „Poincaré-Steklov’s operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces.” *Proc. 1st Int. Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Paris, France, 7–9 January 1987, R. Glowinski et al. (Eds.), SIAM, Philadelphia, 73–112.
- Aitken, A.C. (1937):** „Studies in practical mathematics. II. The evaluation of the latent roots and latent vectors of a matrix.” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **57**, 269–304.
- Altenbach, J., Altenbach, H. (1994):** *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Aluru, N.R., White, J. (1997):** „Multi-level newton method for static and fundamental frequency analysis of electromechanical systems.” *SISPAD ’97 – Proc. of the 1997 Int. Conference on Simulation of Semiconductor Processes and Devices*, Cambridge, MA, USA, 8–10 September 1997, 125–128.
- Anderson, D.G. (1965):** „Iterative procedures for non-linear integral equations.” *Journal of the Association for Computing Machinery*, **12**, 547–560.
- Argyris, J., Mlejnek, H.-P. (1988a):** *Die Methode der Finiten Elemente, Band I: Verschiebungsmethode in der Statik*. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Argyris, J., Mlejnek, H.-P. (1988b):** *Die Methode der Finiten Elemente, Band II: Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten*. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Argyris, J., Mlejnek, H.-P. (1988c):** *Die Methode der Finiten Elemente, Band III: Einführung in die Dynamik*. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Armero, F., Simo, J.C. (1992):** „A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 737–766.
- Artlich, S., Mackens, W. (1995):** „Newton-coupling of fixed point iterations.” *Numerical Treatment of Coupled Systems*, W. Hackbusch, G. Wittum (Eds.), Vieweg, Braunschweig, 1–10.
- Barrett, R., Berry, M., Chan, T.F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, Ch., van der Vorst, H. (1994):** *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia.
- Bathe, K.J. (1986):** *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin.
- Bathe, K.J., Cimento, A.P. (1980):** „Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **22**, 59–85.
- Bathe, K.J., Zhang, H., Ji, S. (1999):** „Finite element analysis of fluid flows coupled with structural interactions.” *Computers & Structures*, **72**, 1–16.
- Bathe, K.J., Zhang, H., Wang, M.H. (1995):** „Finite element analysis of incompressible and compressible fluid flows with free surfaces and structural interactions.” *Computers & Structures*, **56**, 193–213.
- Bathe, K.J., Zhang, H., Zhang, X. (1997):** „Some advances in the analysis of fluid flows.” *Computers & Structures*, **64**, 909–930.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. (1992):** „An explicit multi-time step integration for parabolic and hyperbolic systems.” *New Methods in Transient Analysis*, ASME, PVP-Vol. **246**/AMD-Vol. **143**, 25–39.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. (1993):** „Explicit multi-time step integration for first and second order finite element semidiscretizations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **108**, 353–383.

- Belytschko, T., Mullen, R. (1978a):** „Explicit integration of structural problems.” *Finite Elements in Nonlinear Mechanics Vol. 2*, Proc. Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Geilo, Norway, August 1977, P.G. Bergan et al. (Eds.), Tapir, Trondheim, 697–720.
- Belytschko, T., Mullen, R. (1978b):** „Mesh partitions of explicit-implicit time integration.” *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, Proc. US Germany Symposium on Finite Element Methods, Cambridge, Mass. USA, August 1976, K.-J. Bathe et al. (Eds.), M.I.T. Press, 673–690.
- Belytschko, T., Mullen, R. (1978c):** „Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12**, 1575–1586.
- Belytschko, T., Schoeberle, D.F. (1975):** „On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics.” *Journal of Applied Mechanics*, **17**, 865–869.
- Belytschko, T., Yen, H.J., Mullen, R. (1979):** „Mixed methods for time integration.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **17/18**, 259–275.
- Benney, R.J., Stein, K., Tezduyar, T. (2000):** „Finite element fluid-structure interaction model for air-drop system applications.” *FEF2000*, Book of Abstracts of the Finite Elements in Flow Problems 2000 Conference, Austin, TX, USA, 30 April – 4 May 2000. Außerdem: Persönliche Gespräche mit Keith Stein auf der FEF2000 Konferenz.
- Bernardi, C., Maday, Y., Patera, A.T. (1994):** „A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method.” *Nonlinear partial differential equations and their applications – Collège de France Seminar, Vol. XI*, H. Brezis & J.L. Lions (Eds.), Longman, Harlow, UK, 13–51.
- Bhardway, M.K., Kapania, R.K., Reichenbach, E., Guruswamy, G.P. (1997):** „Computational fluid dynamics / computational structural dynamics interaction methodology for aircraft wings.” *AIAA Journal*, **36**, 2179–2186.
- Bischoff, M. (1999):** *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bjørstad, P.E., Widlund, O.B. (1984):** „Solving elliptic problems on regions partitioned into substructures.” *Elliptic Problem Solvers II*, G. Birkhoff, A. Schoenstadt (Eds.), Academic Press, New York, 245–256.
- Bjørstad, P.E., Widlund, O.B. (1986):** „Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **23**, 1097–1120.
- Bletzinger, K.-U. (1990):** *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 11, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Blom, F.J. (1998):** „A monolithic fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **167**, 369–391.
- Blom, F.J., Leyland, P. (1998):** „Consistency analysis of fluid-structure interaction algorithms.” *ECCOMAS 98*, Proc. 4th ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Athens, Greece, 7–11 September 1998, K.D. Papailiou et al. (Eds.), J. Wiley & Sons, 1026–1031.
- Bonelli, A., Bursi, O.S., Mancuso, M. (1999):** „The generalized- $\alpha$  method applied to conservative Duffing oscillators.” *Structural Dynamics – EURO DYN '99*, Proc. 4th Europ. Conf. on Structural Dynamics, Prague, Czech Republic, 7–10 June 1999, L. Fryba, J. Naprstek (Eds.). Balkema, Rotterdam, 133–138.
- Bourgat, J.-F., Glowinski, R., Le Tallec, P., Vidrascu, M. (1989):** „Variational formulation and algorithm for trace operator in domain decomposition calculations.” *Proc. 2nd Int. Symposium on Domain Decomposition Methods*, Los Angeles, California, USA, 14–16 January 1988, T.F. Chan et al. (Eds.), SIAM, Philadelphia, 3–16.
- Braess, D., Dahmen, W. (1998):** „Stability estimates of the mortar finite element method for 3-dimensional problems.” *East-West Journal of Numerical Mathematics*, **6**, 249–263.

- Braess, D., Dahmen, W., Wieners, C. (1999):** „A multigrid algorithm for the mortar finite element method.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **37**, 48–69.
- Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Vassilev, A. (1998):** „Non-overlapping domain decomposition preconditioners with inexact solves.” *Proc. 9th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods*, Ullensvang, Norway, 3–9 June 1996. P.E. Bjørstad, M.S. Espedal, D.E. Keyes (Eds.).
- Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Wang, J., Xu, J. (1991):** „Convergence estimates for multigrid algorithms without regularity assumptions.” *Mathematics of Computation*, **57**, 23–45.
- Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Xu, J. (1990):** „Parallel multilevel preconditioners.” *Mathematics of Computation*, **55**, 1–22.
- Braun, M. (1995):** *Nichtlineare Analysen von geschichteten elastischen Flächentragwerken*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Brown, P.N., Saad, Y. (1990):** „Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations.” *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **11** (3), 450–481.
- Brown, P.N., Saad, Y. (1994):** „Convergence theory of nonlinear Newton-Krylov algorithms.” *SIAM Journal on Optimization*, **4**, 297–330.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992):** „3d-extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept.” *Computational Mechanics in Applied Sciences*, C. Hirsch (Ed.), Elsevier, Oxford, 55–62.
- Bulenda, T. (1993):** *Behandlung nichtlinearer Lösungspfade in der Statik mit Hybriden Krylov-Newton-Verfahren*. Dissertationsschrift. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau Nr. 5/93, Techn. Univ. München.
- Bungartz, H.-J., Ebner, R., Schulte, S. (1997):** *Hierarchische Basen zur effizienten Kopplung substrukturierter Probleme der Strukturmechanik*. SFB-Bericht Nr. 342/05/97 A, Techn. Univ. München.
- Bungartz, H.-J., Frank, A., Meier, F., Neunhoffer, T., Schulte, S. (1998):** „Fluid structure interaction: 3 D numerical simulation and visualization of a micropump.” *Computation and Visualization of Three-Dimensional Vortical and Turbulent Flows*, R. Friedrich, P. Bontoux (Eds.), Vieweg, Braunschweig, 350–368.
- Bungartz, H.-J., Schulte, S. (1995):** „Coupled problems in microsystem technology.” *Numerical Treatment of Coupled Systems*, W. Hackbusch, G. Wittum (Eds.), Vieweg, Braunschweig, 11–24.
- Cai, X.C., Dryja, M. (1994a):** „Domain decomposition methods for monotone elliptic problems.” *Contemporary Mathematics*, **180**, D. Keyes, J. Xu (Eds.), American Mathematical Society, 21–27.
- Cai, X.C., Gropp, W.D., Keyes, D.E., Tidriri, M.D. (1994b):** „Newton-Krylov-Schwarz methods in CFD.” *Proc. Int. Workshop on the Navier-Stokes Equations, Notes in Numerical Fluid Mechanics*, R. Rannacher (Ed.), Braunschweig.
- Chung, J., Hulbert, G.M. (1993):** „A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The Generalized- $\alpha$  method.” *Journal of Applied Mechanics*, **60**, 371–375.
- Cebal, J.R. (1996):** *Loose Coupling Algorithms for Fluid-Structure Interaction*. Ph.D.-Dissertation, Institute for Computational Sciences and Informatics, George Mason University, Fairfax, Virginia, USA.
- Cebal, J.R., Löhner, R. (1997):** „Fluid-Structure Coupling: Extensions and Improvements.” *AIAA-97-0858*.
- Cervera, M., Codina, R., Galindo, M. (1996):** „On the computational efficiency and implementation of block-iterative algorithms for nonlinear coupled problems.” *Engineering Computations*, **13** (6), 4–30.
- Codina, R. (2000):** Persönliche Gespräche auf der Konferenz *Finite Elements in Flow Problems 2000*, Austin, TX, USA, 30 April – 4 May 2000.

- Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H. (1928):** „Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik.“ *Mathematische Annalen*, **100**, 32–74.
- Crisfield, M.A. (1983):** „An arc-length method including line searches and accelerations.“ *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 1269–1289.
- Cuvelier, C., Segal, A., van Steenhoven, A.A. (1986):** *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company.
- Daniel, W.J.T. (1997a):** „Analysis and implementation of a new constant acceleration subcycling algorithm.“ *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2841–2855.
- Daniel, W.J.T. (1997b):** „The subcycled Newmark algorithm.“ *Computational Mechanics*, **20**, 272–281.
- Daniel, W.J.T. (1998a):** „A study of the stability of subcycling algorithms in structural dynamics.“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **156**, 1–14.
- Daniel, W.J.T. (1998b):** „Subcycling first and second order generalizations of the trapezoidal rule.“ *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **42**, 1091–1120.
- Dembo, R.S., Eisenstat, S.C., Steihaug, T. (1982):** „Inexact Newton methods.“ *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **19**, 400–408.
- Dembo, R.S., Steihaug, T. (1983):** „Truncated-Newton algorithms for large-scale unconstrained optimization.“ *Mathematical Programming*, **26**, 190–212.
- Demirdzic, I., Peric, M. (1988):** „Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow.“ *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 1037–1050.
- Deuflhard, P., Bornemann, F. (1994):** *Numerische Mathematik II: Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Deuflhard, P., Hohmann, A. (1991):** *Numerische Mathematik: Eine algorithmisch orientierte Einführung*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Donea, J. (1983):** „Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods.“ *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko, T.J.R. Hughes (Eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 473–516.
- Dryja, M., Hackbusch, W. (1997):** „On the nonlinear domain decomposition method.“ *BIT – Numerical Mathematics*, **37**, 296–311.
- Dryja, M., Widlund, O.B. (1987):** *An additive variant of the Schwarz alternating method for the case of many subregions*. Technical Report 339, also Ultracomputer Note 131, Department of Computer Science, Courant Institute, New York.
- Dryja, M., Widlund, O.B. (1991):** „Multilevel additive methods for elliptic finite element problems.“ *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations, Proc. 6th GAMM-Seminar*, Kiel, 19–21 January 1990, W. Hackbusch (Ed.), Vieweg, Braunschweig.
- Farhat, C., Chen, P.-S., Mandel, J., Roux, F.X. (1998a):** „The two-level FETI method. Part II: Extension to shell problems, parallel implementation and performance results.“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **155**, 153–179.
- Farhat, C., Crivelli, L., Roux, F.X. (1994a):** „A transient FETI methodology for large-scale parallel implicit computations in structural mechanics.“ *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1945–1975.
- Farhat, C., Crivelli, L., Roux, F.X. (1994b):** „Extending substructure based iterative solvers to multiple load and repeated analyses.“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **117**, 195–209.
- Farhat, C., Lesoinne, M. (2000):** „Two efficient algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems.“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **182**, 499–515.

- Farhat, C., Lesoinne, M., Le Tallec, P. (1998b):** „Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **157**, 95–114.
- Farhat, C., Lesoinne, M., Maman, N. (1995):** „Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: Three-field formulation, geometric conservation and distributed solution.” *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **21**, 807–835.
- Farhat, C., Mandel, J. (1998):** „The two-level FETI method for static and dynamic plate problems. Part I: An optimal iterative solver for biharmonic systems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **155**, 129–151.
- Farhat, C., Roux, F.X. (1991):** „A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 1205–1227.
- Felippa, C.A., Geers, T.L. (1988):** „Partitioned analysis for coupled mechanical systems.” *Engineering Computations*, **5**, 123–133.
- Felippa, C.A., Park, K.C. (1980):** „Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems: Formulation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **24**, 61–111.
- Felippa, C.A., Park, K.C., DeRuntz, J.A. (1977):** „Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis.” *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction Problems*, T. Belytschko, T.L. Geers (Eds.), AMD Vol. 26, American Society of Mechanical Engineers, New York, 95–124.
- Felippa, C.A., Park, K.C., Farhat, C. (1998):** „Partitioned analysis of coupled systems.” *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 29 June – 2 July 1998, S.R. Idelsohn, E. Oñate, E.N. Dvorkin (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain.
- Ferziger, J.H., Peric, M. (1997):** *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume I & II*. Springer, Berlin.
- Flanagan, D., Belytschko, T. (1981):** „Simultaneous relaxation in structural dynamics.” *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, **107**, 1039–1055.
- Fletcher, C.A.J. (1991):** *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin.
- Funaro, D., Quarteroni, A., Zanolli, P. (1988):** „An iterative procedure with interface relaxation for domain decomposition methods.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **25**, 1213–1236.
- Glowinski, R., Le Tallec, P. (1989):** *Augmented Lagrangian and Operator Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM, Philadelphia.
- Glowinski, R., Le Tallec, P. (1990):** „Augmented Lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method.” *Proc. 3rd Int. Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Houston, Texas, USA, 20–22 March 1989, T.F. Chan et al. (Eds.), SIAM, Philadelphia, 224–231.
- Gravouil, A., Combescure, A. (2001):** „Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 199–225.
- Gresho, P.M., Sani, R.L. (1998):** *Incompressible Flow and the Finite Element Method*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Gunzburger, M.D. (1989):** *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows*. Academic Press Inc., San Diego.
- Gupta, S., Ramirez, M. (1997):** „Accuracy, stability and parallelization of multi-time step integration schemes in explicit structural dynamic analysis.” *Parallel Solution Methods in Computational Mechanics*, M. Papadrakakis (Ed.), J. Wiley & Sons, Chichester, 181–217.

- Guruswamy, P., Yang, T.Y. (1981):** „Aeroelastic time response analysis of thin airfoils by transonic code LTRAN2.” *Computers and Fluids*, **9**, 409–425.
- Haase, G., Langer, U., Meyer, A. (1990):** „A new approach to the Dirichlet domain decomposition method.” *Proc. 5th Multigrid Seminar*, Eberswalde, 1990, S. Hengst (Ed.), 1–59. Report R–MATH–09/90, Karl-Weierstrass-Institut, Berlin, 1990.
- Haase, G., Langer, U., Meyer, A. (1991a):** „Domain decomposition methods with inexact subdomain solvers.” *Journal of Numerical Linear Algebra with Applications*, **1**, 27–41.
- Haase, G., Langer, U., Meyer, A. (1991b):** „The approximate Dirichlet domain decomposition method. Part I: An algebraic approach.” *Computing*, **47**, 137–151.
- Haase, G., Langer, U., Meyer, A. (1991c):** „The approximate Dirichlet domain decomposition method. Part II: Applications to second order elliptic b.v.p.” *Computing*, **47**, 153–167.
- Haase, G., Langer, U., Meyer, A., Nepomnyaschikh, S.V. (1994):** „Hierarchical extension operators and local multigrid methods in domain decomposition preconditioners.” *East-West Journal of Numerical Mathematics*, **2**, 173–193.
- Hackbusch, W. (1993):** *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. B.G. Teubner Stuttgart 1993.
- Hackbusch, W. (1994):** *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations*. Springer, New York, Heidelberg 1994.
- Haußer, C. (1996):** *Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 21, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Heise, B. (1995):** „Nonlinear simulation of electromagnetic fields with domain decomposition methods on MIMD parallel computers.” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **63**, 373–381.
- Hestenes, M.R., Stiefel, E. (1952):** „Methods of conjugate gradients for solving linear systems.” *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **49**, 409–436.
- Heywood, J.G., Rannacher, R. (1990):** „Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. Part IV: Error analysis for second-order time discretization.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **27**, 353–384.
- Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. (1977):** „Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics.” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **5**, 283–292.
- Hoff, C., Pahl, P.J. (1988):** „Practical performance of the t1-method and comparison with other dissipative algorithms in structural dynamics.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **67**, 87–110.
- Holzappel, G.A. (2000):** *Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineering*. J. Wiley & Sons, Chichester.
- Huang, M., Zienkiewicz, O.C. (1998):** „New unconditionally stable staggered solution procedures for coupled soil-pore fluid dynamic problems.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 1029–1052.
- Hughes, T.J.R. (1987):** *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. (Reprinted: Dover Publications, Mineola, New York, 2000).
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K. (1978a):** „Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Stability theory.” *Journal of Applied Mechanics*, **45**, 371–374.
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K. (1978b):** „Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Implementation and numerical examples.” *Journal of Applied Mechanics*, **45**, 375–378.
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K., Zimmermann, T.K. (1981):** „Lagrangian-Eulerian finite element formulation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 343–366.

- Hughes, T.J.R., Pister, K.S., Taylor, R.L. (1979):** „Implicit-explicit finite elements in transient analysis.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **17/18**, 159–182.
- Hughes, T.J.R., Stephenson, R.A. (1981):** „Convergence of implicit-explicit algorithms in nonlinear transient analysis.” *Int. Journal of Engineering Science*, **19**, 295–302.
- Hulbert, G.M. (1992):** „Time finite element methods for structural dynamics.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 307–331.
- Hulbert, G.M., Chung, J. (1996):** „Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **137**, 175–188.
- Irons, B. (1970):** *Applications of a theorem on eigenvalues to finite element problems*. Report no. CR/132/70, University of Wales at Swansea, Department of Civil Engineering.
- Irons, B., Tuck, R.C. (1969):** „A version of the Aitken accelerator for computer implementation.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **1**, 275–277.
- Isaacson, E., Keller, H.B. (1966):** *Analysis of Numerical Methods*. Wiley, New York.
- Itoh, J., Takeshi, E., Kubota, Y., Takahashi, A. (1993):** „Simulation of tape floating behavior in VTR.” *Journal of Tribology*, **115**, 561–565.
- Jung, M. (1999):** *Einige Klassen paralleler iterativer Auflösungsverfahren*. Habilitationsschrift, Preprint SFB393/99–11 des DFG-Sonderforschungsbereichs 393, Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz.
- Justino, M.R., Park, K.C., Felippa, C.A. (1997):** „An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis: performance evaluation.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2739–2758.
- Kalro, V., Tezduyar, T. (2000):** „A parallel 3D computational method for fluid-structure interactions in parachute systems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 321–332.
- Kelley, C.T. (1995):** *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Frontiers in Applied Mathematics, Vol. 16. SIAM, Philadelphia.
- Kohne, K., Takahashi, S., Saki, K. (1994):** „Elasto-hydrodynamic lubrication analysis of journal bearings with combined use of boundary elements and finite elements.” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **13**, 273–281.
- Kübler, R., Schiehlen, W. (1998):** „Modular simulation in multibody system dynamics.” *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 29 June – 2 July 1998, S.R. Idelsohn, E. Oñate, E.N. Dvorkin (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain.
- Kuhl, D. (1996):** *Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 22, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kuhl, D., Crisfield, M. (1999):** „Energy conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45**, 569–599.
- Kuhl, D., Ramm, E. (1999):** „Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 343–366.
- Lacour, C. (1998):** „Iterative substructuring preconditioners for the mortar finite element method.” *Proc. 9th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods*, Ullensvang, Norway, 3–9 June 1996. P.E. Bjørstad, M.S. Espedal, D.E. Keyes (Eds.).
- Langer, U. (1992):** „Substrukturtechnik und Schwarzsche Methoden.” *Mitteilungen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM)*, **15**, 86–103.
- Langer, U. (1997):** *Gebietsdekompositionsmethoden (Ausgewählte Kapitel)*. Vorlesungsskriptum, Institut für Analysis und Numerik, Johannes Kepler Universität Linz.

- Le Tallec, P. (1994):** „Domain decomposition methods in computational mechanics.” *Computational Mechanics Advances*, **1**, 121–220.
- Le Tallec, P., De Roeck, Y.H., Vidrascu, M. (1991):** „Domain decomposition methods for large linearly elliptic three dimensional problems.” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **34**, 93–117.
- Le Tallec, P., Mouro, J. (1998):** „Fluid structure interaction with large structural displacements.” *ECCOMAS 98*, Proc. 4th ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Athens, Greece, 7–11 September 1998, K.D. Papailiou et al. (Eds.), J. Wiley & Sons, 1032–1040.
- Le Tallec, P., Mouro, J. (2001):** „Fluid structure interaction with large structural displacements.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 3039–3067. Preprint erschienen im Mai 1998.
- Le Tallec, P., Sassi, T. (1995):** „Domain decomposition with nonmatching grids: Augmented Lagrangian approach.” *Mathematics of Computation*, **64**, 1367–1396.
- Lesoinne, M., Farhat, C. (1996):** „Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **134**, 71–90.
- Lesoinne, M., Farhat, C. (1998a):** „A higher order subiteration free staggered algorithm for nonlinear transient aeroelastic problems.” *AIAA Journal*, **39**, 1754–1756.
- Lesoinne, M., Farhat, C. (1998b):** „Improved staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems.” *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 29 June – 2 July 1998, S.R. Idelsohn, E. Oñate, E.N. Dvorkin (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain.
- Lions, P.L. (1988):** „On the Schwarz alternating method. I.” *Proc. 1st Int. Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Paris, France, 7–9 January 1987, R. Glowinski et al. (Eds.), SIAM, Philadelphia, 1–42.
- Lions, P.L. (1989):** „On the Schwarz alternating method. II. Stochastic interpretation and other properties.” *Proc. 2nd Int. Symposium on Domain Decomposition Methods*, Los Angeles, California, USA, 14–16 January 1988, T.F. Chan et al. (Eds.), SIAM, Philadelphia, 47–70.
- Lions, P.L. (1990):** „On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains.” *Proc. 3rd Int. Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Houston, Texas, USA, 20–22 March 1989, T.F. Chan et al. (Eds.), SIAM, Philadelphia, 202–223.
- Liu, W.K., Belytschko, T. (1982):** „Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis.” *Computer & Structures*, **15(4)**, 445–450.
- Lowe, T.W., Pedley, T.J. (1994):** „Finite element solution of a Stokes flow in a channel with a collapsible segment.” *Computational methods for fluid-structure interaction*, J.M. Crolet, R. Ohayon (Eds.), Longman Scientific & Technical, Essex, 220–229.
- Lübbing, C. (1997):** *Zur Stabilität von gestaffelten Finite-Elemente Berechnungen*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 18–97, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Luo, X.J., Pedley, T.J. (1995):** „A numerical simulation of steady flow in a 2-D collapsible channel.” *Journal of Fluids and Structures*, **9**, 149–174.
- MacLeod, A.J. (1986):** „Acceleration of vector sequences by multi-dimensional  $\Delta^2$  methods.” *Communications in Applied Numerical Methods*, **2**, 385–392.
- Mandel, J. (1993):** „Balancing domain decomposition.” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **9**, 233–241.
- Mandel, J., Brezina, M. (1996):** „Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients.” *Mathematics of Computation*, **65**, 1387–1401.



- Marini, L.D., Quarteroni, A. (1989):** „A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements.” *Numerische Mathematik*, **55**, 575–598.
- Marsden, J.E., Hughes, T.J.R. (1983):** *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Matthies, H.G., Steindorf, J. (2000):** „Efficient iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction problems.” *Computational Mechanics: Techniques and Developments*, B.H.V. Topping (Ed.), Civil-Comp Press, Edinburgh, 263–267.
- Meister, A. (1997):** *Numerische Lineare Algebra*. Skriptum zur Vorlesung WS 1997/98, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg.
- Miranda, I., Ferencz, R.M., Hughes, T.J.R. (1989):** „An improved implicit-explicit time integration method for structural dynamics.” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **18**, 643–653.
- Mok, D.P. (1997):** *Verformungsabhängige Lasten bei nichtlinearen Finite-Elemente-Berechnungen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Mok, D.P., Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999a):** „Algorithmic aspects of deformation dependent loads in nonlinear static finite element analysis.” *Engineering Computations*, **16**, 601–618.
- Mok, D.P., Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999b):** „Load stiffness matrices for follower loads in nonlinear FE analysis.” *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **79** (Suppl. 2), 561–562.
- Mok, D.P., Wall, W.A., Ramm, E. (1999c):** „Partitioned multi-time step finite element analysis for nonlinear structural dynamics.” *Structural Dynamics – EURODYN '99*, Proc. 4th Int. Conf. of the European Association of Structural Dynamics, Prague, Czech Rep., 7–10 June 1999, L. Fryba, J. Naprstek (Eds.). Balkema, Rotterdam, 351–356.
- Morton, S.A., Melville, R.B., Visbal, M.R. (1998):** „Accuracy and coupling issues of aeroelastic Navier-Stokes solutions on deforming meshes.” *AIAA Journal*, **35**, 798–805.
- Müller, A., Jacob, N. (1994):** „Explicit fluid-flow-solid interaction.” *Int. Journal of Computer Applications in Technology*, **7**, 185–192.
- Neal, M.O., Belytschko, T. (1989):** „Explicit-explicit subcycling with non-integer time step ratios for structural dynamic systems.” *Computer & Structures*, **31**, 871–880.
- Newmark, N.N. (1959):** „A method of computation for structural dynamics.” *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **85** (3), 67–94.
- Niho, T., Horie, T., Tanaka, Y. (1999):** „Numerical instability of electromagnetic and structural coupled analysis.” Paper presented at *COMPUMAG – Conference on the Computation of Electromagnetic fields*, 24–25 October 1999, Sapporo, Japan. To be published in: *IEEE Transactions on Magnetics*.
- Nour-Omid, B., Parlett, B.N., Taylor, R.L. (1983):** „A Newton-Lanczos method for solution of nonlinear finite element equations.” *Computers & Structures*, **16**, 241–252.
- Papadrakakis, M. (1997):** „Domain decomposition techniques for computational structural mechanics.” *Parallel Solution Methods in Computational Mechanics*, M. Papadrakakis (Ed.), John Wiley & Sons, Chichester, 87–141.
- Papadrakakis, M., Gantes, C.J. (1988):** „Truncated Newton methods for nonlinear finite element analysis.” *Computers & Structures*, **30**, 705–714.
- Park, K.C. (1980):** „Partitioned transient analysis procedures for coupled-field problems: stability analysis.” *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 370–376.
- Park, K.C., Felippa, C.A. (1980):** „Partitioned transient analysis procedures for coupled-field problems: accuracy analysis.” *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 919–926.
- Park, K.C., Felippa, C.A. (1983):** „Partitioned analysis of coupled systems.” *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T.J.R. Hughes (Eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 157–219.

- Park, K.C., Felippa, C.A. (1984):** „Recent developments in coupled field analysis methods.” *Numerical Methods in Coupled Systems*, R.W. Lewis, P. Bettess and E. Hinton (Eds.), John Wiley & Sons, 327–351.
- Park, K.C., Justino, M.R., Felippa, C.A. (1997):** „An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis: algorithm description.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2717–2737.
- Piperno, S. (1997):** „Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations.” *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25**, 1207–1226.
- Piperno, S., Farhat, C. (1997):** „Design and evaluation of staggered partitioned procedures for fluid-structure interaction simulations.” *Rapport de recherche no. 3241*, INRIA Sophia Antipolis, France.
- Piperno, S., Farhat, C. (2000):** „Energy based design and analysis of staggered solvers for nonlinear transient aeroelastic problems.” *AIAA-paper 2000-1447*, Proc. 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta, Georgia, USA, 3–4 April 2000.
- Piperno, S., Farhat, C., Larrouturou, B. (1995):** „Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I: Model problem, theory and two-dimensional application.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **124**, 79–112.
- Preis, K., Biro, O., Dyczij-Edlinger, R., Badics, Z., Riedler, H., Stögner, H. (1994):** „Berechnung gekoppelter elektrischer, thermischer und mechanischer Probleme mit der Methode der finiten Elemente.” *Elektrotechnik und Informationstechnik e&i*, **111**, 106–112.
- Prevost, J.H. (1997):** „Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems.” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **13**, 239–247.
- Przemieniecki, J.S. (1968):** *Theory of Matrix Structural Analysis*. Mc Graw-Hill, New York.
- Quarteroni, A. (1990):** *Domain decomposition method for the numerical solution of partial differential equations*. Technical Report UMSI 90/246, Supercomputing Institute, University of Minnesota. Journal version: „Domain decomposition method and parallel processing for the numerical solution of partial differential equations.” *Surveys on Mathematics for Industry*, **1**, 75–118 (1991).
- Quarteroni, A., Valli, A. (1999):** *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Clarendon Press, Oxford.
- Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F. (2000):** *Numerical Mathematics*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 37. Springer, New York.
- Ramm, E. (1976):** *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Habilitationsschrift, Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Rannacher, R. (1993):** „On the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes Equations.” *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **73**, 203–216.
- Reitinger, R. (1994):** *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Riemsblagh, K., Vierendeels, J., Dick, E. (2000):** „An efficient coupling procedure for flexible wall fluid-structure interaction.” *ECCOMAS 2000*, Proc. Europ. Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, Spain, 11–14 September 2000, ECCOMAS.
- Rifai, S.M., Johan, Z., Wang, W.-P., Grisval, J.-P., Hughes, T.J.R., Ferencz, R.M. (1999):** „Multi-physics simulation of flow-induced vibrations and aeroelasticity on parallel computing platforms.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **174**, 393–417.
- Rixen, D., Farhat, C., Gérardin, M. (1998):** „A two-step, two-field hybrid method for the static and dynamic analysis of substructure problems with conforming and non-conforming interfaces.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **154**, 229–264.

- Rizzetta, D.P., Visbal, M.R. (1993):** „Comparative numerical study of two turbulence models for airfoil static and dynamic stall.” *AIAA Journal*, **31**, 784–786.
- Rugonyi, S. (2001):** Persönlicher Email-Kontakt im Januar 2001.
- Rugonyi, S., Bathe, K.-J. (2000):** „On the analysis of fully coupled fluid flows with structural interactions: a coupling and condensation procedure.” *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, **1**, 29–41.
- Rumold, W. (1999):** *Modellierung von Starrkörper-Fluid-Systemen mit Anwendung in der Fahrzeugdynamik*. Dissertationsschrift, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart; Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 388, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Samarskii, A.A., Nikolaev, E.S. (1989):** *Numerical Methods for Grid Equations, Vol.2: Iterative Methods*. Birkhäuser, Basel.
- Schrefler, B.A., Simoni, L., Turska, E. (1997):** „Standard staggered and staggered Newton schemes in thermo-hydro-mechanical problems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **144**, 93–109.
- Schulte, S. (1998):** *Modulare und hierarchische Simulation gekoppelter Probleme*. Dissertationsschrift, Institut für Informatik, Technische Universität München.
- Schwarz, H.A. (1870):** „Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren.” *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, **15**, 272–286. Nochmals veröffentlicht in: H.A. Schwarz (1890), *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. 2*, Springer, Berlin, 133–143.
- Simo, J.C., Miehe, C. (1992):** „Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, 41–104.
- Simoncini, V., Gallopoulos, E. (1995):** „An iterative method for nonsymmetric systems with multiple right-hand sides.” *SIAM Journal on Scientific Computing*, **16**, 917–933.
- van der Sluis, A., van der Vorst, H. (1986):** „The rate of convergence of conjugate gradients.” *Numerische Mathematik*, **48**, 543–560.
- Smith, B.F., Bjørstad, P.E., Gropp, W.D. (1996):** *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Smith, B.F., Widlund, O.B. (1990):** „A domain decomposition algorithm using a hierarchical basis.” *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **11**, 1212–1220.
- Smolinski, P. (1992a):** „An explicit multi-time step integration method for second order equations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 25–34.
- Smolinski, P. (1992b):** „Stability analysis of a multi-time step explicit integration method.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **95**, 291–300.
- Smolinski, P., Sleith, S. (1992):** „Explicit multi-time step methods for structural dynamics.” *New Methods in Transient Analysis, PVP-Vol. 246/AMD-Vol. 143*, ASME, 1–4.
- Smolinski, P., Sleith, S., Belytschko, T. (1996):** „Stability of an explicit multi-time step integration algorithm for linear structural dynamics.” *Computational Mechanics*, **18**, 236–244.
- Smolinski, P., Wu, Y.-S. (1998):** „An implicit multi-time step integration method for structural dynamics problems.” *Computational Mechanics*, **22**, 337–343.
- Stein, E., Barthold, F.-J. (1996):** „Elastizitätstheorie.” *Der Ingenieurbau: Grundwissen, Band 4: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, G. Mehlhorn (Hrsg.), Ernst & Sohn, Berlin, 165–428.
- Stein, K., Benney, R., Kalro, V., Tezduyar, T., Leonard, J., Accorsi, M. (1998):** *Parachute fluid-structure interactions: Coupling issues*. University of Minnesota Supercomputer Institute Research Report Nr. 98/70.

- Stein, K., Benney, R., Kalro, V., Tezduyar, T., Leonard, J., Accorsi, M. (2000):** „Parachute fluid-structure interactions: 3-D computation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 373–386.
- Stiefel, E. (1952):** „Über einige Methoden der Relaxationsrechnung.” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **3**, 1–33.
- Strganac, T.W., Mook, D.T. (1990):** „Numerical model of unsteady subsonic aeroelastic behavior.” *AIAA Journal*, **28**, 903–909.
- Taylor, C., O’Callaghan, J.F. (1972):** „A numerical solution of the elasto-hydrodynamic lubrication problem using finite elements.” *Journal of Mechanical Engineering Science*, **14**, 229–237.
- Tidriri, M.D. (1998):** „Hybrid Newton-Krylov / domain decomposition methods for compressible flows.” *Proc. 9th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods*, Ullensvang, Norway, 3–9 June 1996. P.E. Bjørstad, M.S. Espedal, D.E. Keyes (Eds.).
- Turska, E., Schrefler, B.A. (1993):** „On convergence conditions of partitioned solution procedures for consolidation problems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **106**, 51–63.
- Turska, E., Wisniewski, K., Schrefler, B.A. (1994):** „Error propagation of staggered solution procedures for transient problems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **114**, 177–188.
- Wall, W.A. (1999):** *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertationsschrift, Bericht Nr. 31, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Wall, W.A., Mok, D.P., Ramm, E. (1999):** „Partitioned analysis approach for the transient, coupled response of viscous fluids and flexible structures.” *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Proc. ECCM ’99, European Conference on Computational Mechanics, München, 31. August – 3. September 1999, W. Wunderlich (Ed.).
- Wall, W.A., Mok, D.P., Ramm, E. (2000a):** „Simulation of nonlinear shells interacting with instationary flows.” *Computational Methods for Shell and Spatial Structures*, Proc. IASS–IACM 2000, 4th International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures, Chania-Crete, Greece, 4–7 June 2000, M. Papadrakakis, A. Samartin, E. Oñate (Eds.), ISASR–NTUA, Athens, Greece.
- Wall, W.A., Mok, D.P., Schmidt, J., Ramm, E. (2000b):** „Partitioned analysis of transient nonlinear fluid structure interaction including free surface effects.” *Multifield Problems: State of the Art*, A.-M. Sändig, W. Schiehlen, W.L. Wendland (Eds.), Springer, Berlin, 159–166.
- Wall, W.A., Ramm, E. (1998):** „Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method.” *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 29 June – 2 July 1998, S.R. Idelsohn, E. Oñate, E.N. Dvorkin (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain.
- Warsi, Z.U.A. (1993):** *Fluid Dynamics – Theoretical and Computational Approaches*. CRC Press, Boca Raton.
- Winther, R. (1980):** „Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **17**, 14–17.
- Wohlmuth, B.J. (1999):** „Hierarchical a posteriori error estimators for mortar finite element methods with Lagrange multipliers.” *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **36**, 1636–1658.
- Wood, W.L., Bossak, M., Zienkiewicz, O.C. (1981):** „An alpha modification of Newmark’s method.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1562–1566.
- Wu, Y.S., Smolinski, P. (2000):** „A multi-time step integration algorithm for structural dynamics based on the modified trapezoidal rule.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **187**, 641–660.
- Zienkiewicz, O.C. (1984):** „Coupled problems and their numerical solution.” *Numerical Methods in Coupled Systems*, R.W. Lewis, P. Bettles, E. Hinton (Eds.), John Wiley & Sons, Chichester, 35–58.

**Zienkiewicz, O.C., Paul, D.K., Chan A.H.C. (1988):** „Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems.” *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 1039–1055.

**Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000a):** *The Finite Element Method, 5. ed., Volume 1: The Basis*. Butterworth–Heinemann, Oxford.

**Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000b):** *The Finite Element Method, 5. ed., Volume 2: Solid Mechanics*. Butterworth–Heinemann, Oxford.

**Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000c):** *The Finite Element Method, 5. ed., Volume 3: Fluid Dynamics*. Butterworth–Heinemann, Oxford.

## Lebenslauf

Name: Daniel Pinyen Mok

Geburtsdatum/-ort: 27. März 1970 in Stuttgart

Eltern: Son-Fung Mok und Gerhild Mok, geb. Vaeth

Familienstand: ledig

1976 – 1980 Grundschule Stuttgart-Sillenbuch

1980 – 1985 Geschwister-Scholl-Gymnasium Stuttgart-Sillenbuch

1985 – 1989 Evang. Heidehof-Gymnasium Stuttgart; Abschluß: Abitur (05/1989)

06/1989 – 03/1990 Chinesisch-Intensivkurs am Chinese Language Center der Feng Chia University in Taichung, Taiwan, Republik China

04/1990 – 03/1991 Grundwehrdienst beim Heeresmusikkorps 4 in Regensburg

10/1991 – 03/1997 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart

02/1992 – 03/1997 Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes

02/1992 – 08/1994 Freier Mitarbeiter im Ingenieurbüro für Bauwesen Dipl.-Ing. S.-F. Mok

03/1994 – 04/1994 Fachpraktikum im Planungsbüro für Bauwesen „Join Engineering Consultants“ in Taipei, Taiwan, Republik China

09/1994 – 04/1995 Auslandsstudium (Civil Eng.) an der University of Calgary in Kanada als IAS-Stipendiat des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

08/1995 – 12/1996 Wissenschaftlicher Hilfsassistent am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

03/1997 Studienabschluß als Diplom-Ingenieur (mit Auszeichnung)

06/1997 Artur-Fischer-Preis der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart für hervorragende Studienleistungen bei kurzer Studiendauer

04/1997 – 03/2000 Promotionsstipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Graduiertenkolleg „Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen“ an der Universität Stuttgart

10/1998 – 05/2001 Mitglied des Sonderforschungsbereichs 404 „Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft

04/2000 – 05/2001 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

seit 07/2001 Mitarbeiter im Ingenieurbüro Leonhardt, Andrä und Partner, Stuttgart

# Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.

- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th.J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.



- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W.A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite Elemente Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.