

# 7 Numerische Untersuchung an Anwendungsbeispielen

In diesem Kapitel werden die bislang beschriebenen sequentiell und iterativ gestaffelten Lösungsverfahren abschließend auf eine Reihe von komplexeren Beispielen aus dem Bereich der geometrisch nichtlinearen Strukturmechanik und der Fluid-Struktur-Interaktion angewandt, in denen insbesondere physikalisch sinnvolle, anwendungsorientierte Material- und Geometriedaten verwendet werden. Anhand der Simulationsergebnisse werden die numerischen Eigenschaften der jeweils eingesetzten partitionierten Lösungsansätze diskutiert.

## 7.1 Rahmenschwingung nach Sinuslastimpuls

Als erstes Beispiel wird ein rein strukturendynamisches 2-D Problem betrachtet, an dem insbesondere die Anwendung der sequentiell gestaffelten Lösungsansätze aus Kapitel 5 auf nichtlineare strukturendynamische Probleme untersucht werden soll. Der in *Bild 7.1* dargestellte Rahmen wird durch einen kurzen, sinusförmigen Lastimpuls zum Schwingen gebracht. Der schlanke,

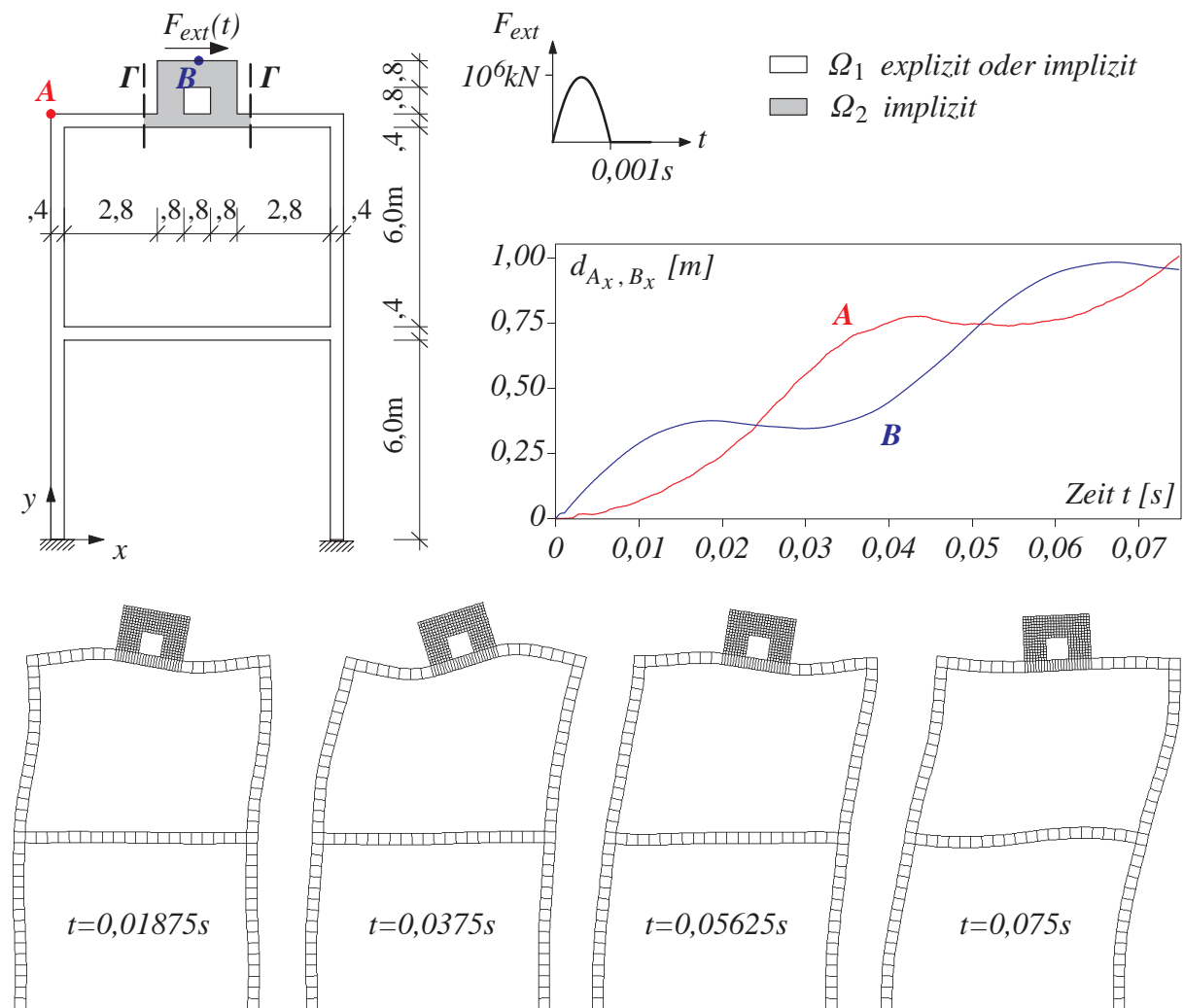
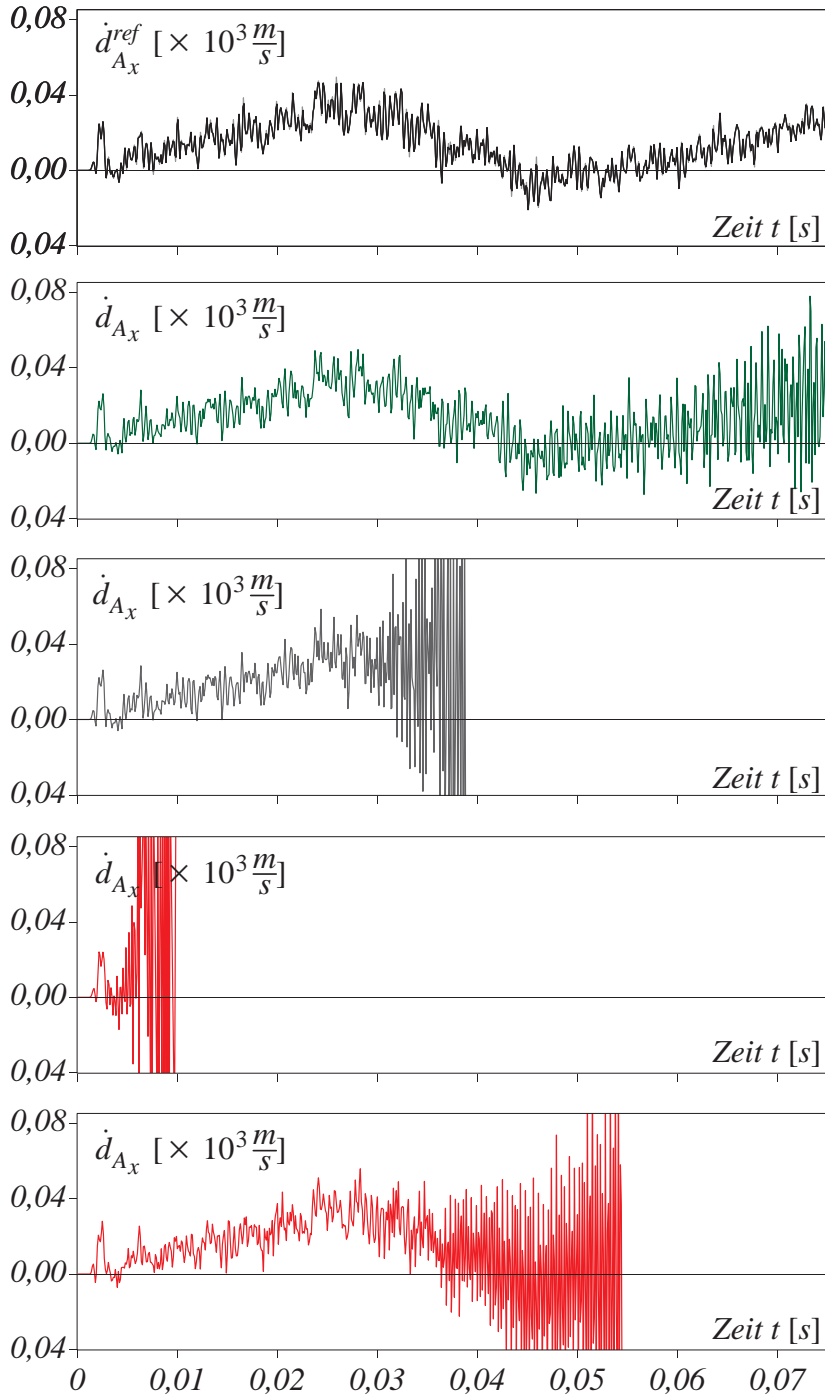


Bild 7.1: Rahmenschwingung nach Sinuslastimpuls: Problemstellung, Verschiebungs-Zeitverläufe und verformte Geometrien (Verschiebungen 1-fach überhöht)

untere Teil  $\Omega_1$  wurde mit einem Elastizitätsmodul  $E_1 = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  und einer Dichte  $\rho_1 = 2500 \text{ kg/m}^3$  modelliert (entspricht in etwa Aluminium), wogegen für den wesentlich steiferen, oberen Teil  $\Omega_2$  die Materialeigenschaften von Stahl verwendet wurden:  $E_2 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_2 = 8000 \text{ kg/m}^3$  (in beiden Teilen ist  $\nu = 0$  gesetzt). In den Berechnungen wurde geometrische Nichtlinearität berücksichtigt und eine konzentrierte (diagonale) Massenmatrix-Formulierung verwendet. Für die Raumdiskretisierung kamen 9-knotige, vollintegrierte Verschiebungselemente zum Einsatz. Der untere Teil  $\Omega_1$  wurde dabei relativ grob diskretisiert (Elementgröße  $0,4 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$ ), woraus bei expliziter Zeitdiskretisierung mit dem zentralen Differenzenverfahren im linearen Fall gemäß Gl. (2.55) ein kritischer Zeitschritt von  $\Delta t_{\text{cr}} = 3,01 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  resultiert. Der obere Teil  $\Omega_2$  hingegen verwendete ein viel feineres FE-Netz (Elementgröße  $0,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$ ), für das der kritische Zeitschritt gemäß Gl. (2.55) mit  $\Delta t_{\text{cr}} = 7,53 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  abgeschätzt wird. Aufgrund der Nichtlinearität sind die kritischen Zeitschritte allerdings noch einmal kleiner. Für die Zeitdiskretisierung kamen je nach partitionierter Lösungsmethode unterschiedliche Verfahren zum Einsatz. Der obere, steifere Teil  $\Omega_2$  verwendete das implizite Generalized- $\alpha$ -Verfahren in verschiedenen Parametrisierungen, während der untere, weichere Teil  $\Omega_1$  entweder mit dem expliziten zentralen Differenzenverfahren oder ebenfalls mit dem Generalized- $\alpha$ -Verfahren zeitintegriert wurde. Als globaler Zeitschritt wurde in allen Berechnungen  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  verwendet, und im Fall expliziter Zeitintegration in  $\Omega_1$  wurde das Verfahren mit 15-fachem Subcycling (also  $\Delta t/15 = 3,3333 \cdot 10^{-6} \text{ s} < \Delta t_{\text{cr}}$  in  $\Omega_1$ ) eingesetzt.

*Bild 7.2* zeigt, exemplarisch für den Eckknoten A, die resultierenden Geschwindigkeits-Zeitverläufe für verschiedene Berechnungsansätze, und in *Bild 7.3* sind die zugehörigen Kurven des aus der partitionierten Lösung resultierenden, aufsummierten Fehlers in der Horizontalverschiebung des Knotens A gemäß Gl. (5.24) dargestellt. In Diagramm a) ist die simultan berechnete Referenzlösung sowie zwei iterativ gestaffelte Lösungen aufgetragen. Die drei Kurven sind praktisch deckungsgleich, sowohl die mit der Aitken-Methode als auch die mit dem Gradientenverfahren beschleunigte, iterativ gestaffelte Berechnung konvergierte mit nur 3–4 äußeren Iterationen je Zeitschritt gegen die simultane Lösung (Abbruchkriterium:  $\| \mathbf{g}_i \| / \sqrt{n_{\text{eq}}} \leq 10^{-6}$ , aufsummierter Fehler am Berechnungsende  $t^{1500} = 0,075 \text{ s}$  in beiden Fällen  $\text{err}_{A_x}^{1500} < 2,0 \cdot 10^{-8}$ ), und zeigte keinerlei Stabilitätsprobleme.

Dagegen weisen alle sequentiell gestaffelt berechneten Lösungen das typische, schwache Instabilitätsphänomen auf, welches je nach Verfahren früher oder später beginnt. Das  $E^{15}$ -I-Verfahren (*Algorithmus 5.2*, Kurve b) ohne numerische Dissipation ermittelt dabei noch für einen relativ langen Zeitbereich eine stabile, mit der Referenzlösung sehr gut übereinstimmende Lösung. Ist insofern nur ein kurzer Zeitbereich von Interesse, so ist diese numerisch billige Methode durchaus gut geeignet. Die Kurve c) verdeutlicht den in Abschnitt 5.2 erläuterten, destabilisierenden Einfluß der Verwendung von numerisch dissipativen Zeitintegrationsverfahren auf die Stabilität gestaffelter Berechnungen von strukturdynamischen Systemen. Der einzige Unterschied zu dem Vorgehen in b) ist, daß hier in der implizit integrierten Partition  $\Omega_2$  eine mit 10% sogar noch relativ schwache, hochfrequente Dämpfung eingesetzt wurde ( $\rho_\infty = 0,9$ ). Diese führt zwar in  $\Omega_2$  zur erwünschten Dissipation hochfrequenter Moden, bewirkt aber,



a) Simultane Referenzlösung, sowie zwei iterativ gestaffelte Lösungen  
 $\Omega_1$  u.  $\Omega_2$ : Trapezregel  
 $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

b)  $E^{15}$ -I:  
 $\Omega_1$ : Zentr. Diff.  
 $\Omega_2$ : Trapezregel  
 $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

c)  $E^{15}$ -I:  
 $\Omega_1$ : Zentr. Diff.  
 $\Omega_2$ : Gen.- $\alpha$ ,  $\rho_\infty=0,9$   
 $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

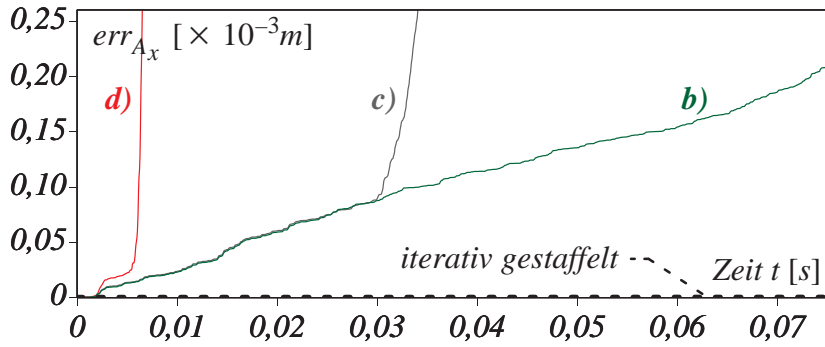
d) I-I,  $O(\Delta t^0)$ -Prädiktor:  
 $\Omega_1$ : Trapezregel  
 $\Omega_2$ : Trapezregel  
 $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

d2) I-I,  $O(\Delta t^0)$ -Prädiktor:  
 $\Omega_1$ : Trapezregel  
 $\Omega_2$ : Trapezregel  
kleinerer Zeitschritt:  
 $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

Bild 7.2: Rahmenschwingung nach Sinuslastimpuls: Geschwindigkeits-Zeitverläufe Knoten A

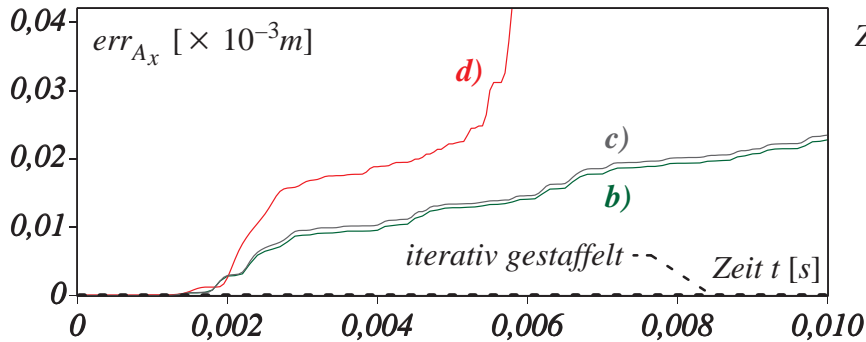
da dieselben hochfrequenten Schwingungsanteile in  $\Omega_1$  nicht gedämpft werden, für das gekoppelte Gesamtsystem eine vom Interface ausgehende hochfrequente Störung. Diese erzeugt die deutlich erkennbaren, parasitären, hochfrequenten Schwingungsanteile in der Kurve c) ab ca.  $t = 0,03 \text{ s}$ , deren Amplituden exponentiell anwachsen, die stabile Lösung überlagern und so zur Instabilität führen.

Das I-I-Verfahren (sequentiell gestaffeltes Grundverfahren (Algorithmus 5.3), bzw. sequentiell gestaffeltes Verfahren mit nullter Ordnung genauem Prädiktor (Algorithmus 5.5 mit Gl. (5.27)) ist schließlich nur für eine sehr kurze Zeitdauer stabil (Kurve d), und somit für die Berechnung



Aufsummierter  
Verschiebungsfehler:

$$err_A^n = \left[ \sum_{i=1}^n (d_A^i - d_A^{ref,i})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



Zoom in Anfangsbereich

Bild 7.3: Rahmenschwingung nach Sinuslastimpuls: Aufsummierter Fehler in der Horizontalverschiebung am Punkt A

eines solchen strukturdynamischen Systems unbrauchbar. Wie für schwach instabile Verfahren typisch ist es zwar möglich, durch Zeitschrittverkleinerung den Beginn der Instabilität zeitlich nach hinten zu schieben (Kurve d2,  $\Delta t$  um Faktor 5 verkleinert), jedoch erhöht sich dadurch natürlich entsprechend der numerische Aufwand enorm. Zudem ist die Zeitschrittgröße, die erforderlich ist, um über eine bestimmte Berechnungszeitdauer hinweg eine stabile Lösung zu erhalten, nicht einmal a-priori bestimmbar; in diesem Beispiel ist offensichtlich die Zeitschrittverkleinerung um den Faktor 5 noch nicht ausreichend. Und im Gegensatz zu strikt instabilen Verfahren ist das Auftreten der Instabilität, wie bereits erläutert, nicht bereits in den ersten Zeitschritten erkennbar, was fatalerweise dazu führen kann, daß Berechnungen erst über viele Stunden laufen, bevor der Anwender feststellen kann, daß eine vollständige Neuberechnung mit einem kleineren Zeitschritt erforderlich ist. Exemplarisch sei für die Berechnung d2) von  $t = 0,0$  s bis  $T = 0,055$  s (=5500 Zeitschritte) die Rechenzeit auf einer HP J7000 High-End-Workstation (PA8500-RISC-Prozessor, 440 MHz) genannt: ca. 5,5 Stunden für dieses noch verhältnismäßig kleine Problem (1138 Freiheitsgrade in  $\Omega_1$  und 3004 in  $\Omega_2$ ).

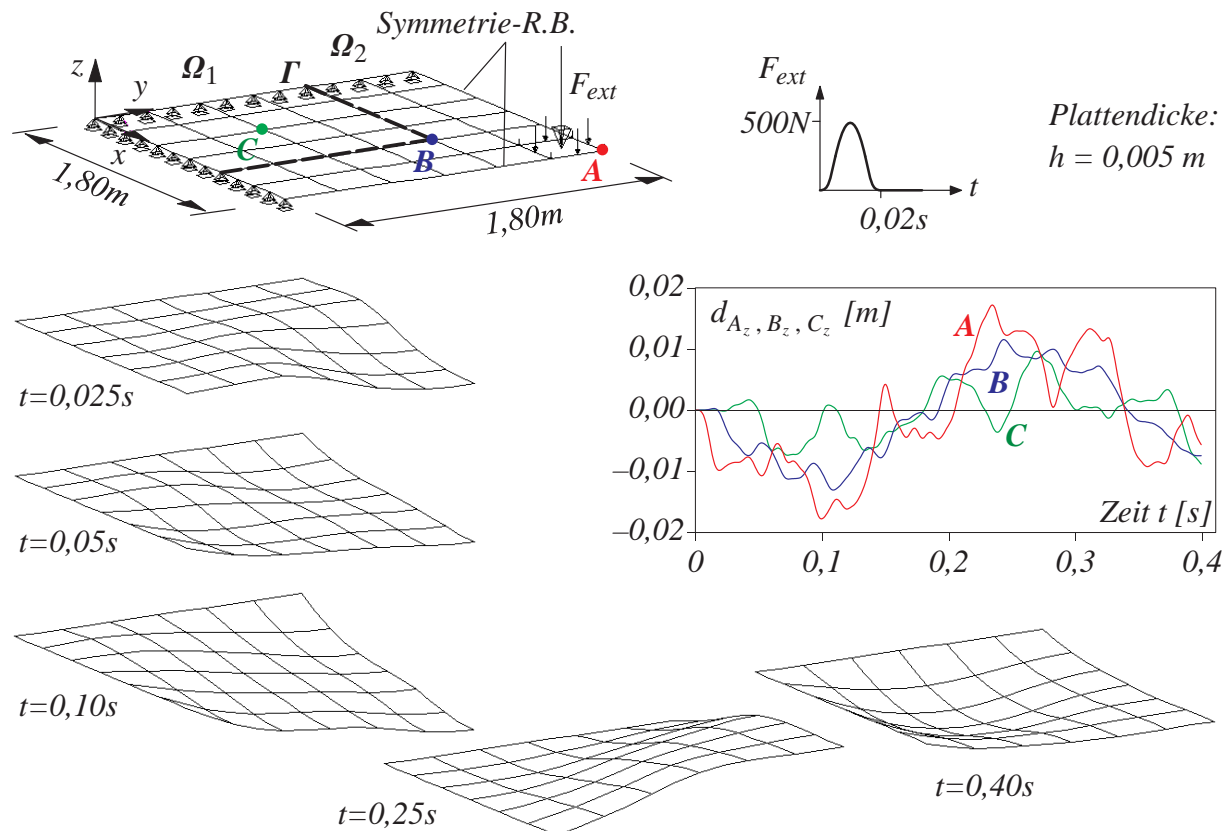
Die I-I-Verfahren mit erster sowie zweiter Ordnung genauen Struktur-Prädiktoren erzeugten schließlich in diesem Beispiel mit  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5}$  s beide sofort instabile Lösungen. Die obigen Ausführungen zur Zeitschrittverkleinerung gelten hierfür natürlich analog.

Die Kurven des aufsummierten Verschiebungsfehlers in Bild 7.3 zeigen des weiteren, daß das  $E^{15}$ -I-Verfahren, wie in Abschnitt 5.2 theoretisch hergeleitet, doppelt so genau ist wie das I-I-Grundverfahren. Die Verwendung von numerischer Dissipation ( $\rho_\infty = 0,9$ ) hingegen verändert die Lösung im stabilen Bereich nur sehr geringfügig, die Fehlerkurve c) liegt nur unwesentlich höher als die Kurve b). Zudem wird klar ersichtlich, daß es sich bei der beobachte-

ten Zunahme der Schwingungsamplituden nicht etwa um ein bloßes Anwachsen des numerischen Fehlers handelt, also nicht um ein Genauigkeitsproblem, sondern tatsächlich um ein Stabilitätsproblem. Dies zeigt der zunächst im stabilen Lösungsbereich linear zunehmende aufsummierte Fehler, der dann bei Eintreten der Instabilität mehr oder weniger schlagartig in eine exponentielle Zunahme übergeht, so wie es in der nichtlinearen Dynamik für numerisch instabile Zeitintegrationsverfahren typisch ist.

## 7.2 Quadratplatte unter transversalem Lastimpuls

Mit einem zweiten strukturdynamischen Beispiel sollen die Anwendungsmöglichkeiten partitionierter Lösungsverfahren auf mit Finiten Schalenelementen diskretisierte Flächentragwerke untersucht werden. Das in *Bild 7.4* in seiner Ausgangslage und in einer Abfolge von verformten Konfigurationen abgebildete Beispiel stellt eine ringsum naviergelagerte, quadratische Platte aus Stahl dar, die zu Beginn der Rechnung mit einem sinusförmigen, transversalen Lastimpuls in Plattenmitte belastet wird ( $F_{ext}(t) = \frac{1}{2}F_{max}(1 - \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2}))$ ) mit  $F_{max} = 500N$  für  $0 \leq t \leq 0,02s$  und  $F_{ext}(t) = 0$  für  $t > 0,02s$ ). Aus Symmetriegründen wurde nur ein Viertel der Platte modelliert, dieses wurde zur Berechnung wie abgebildet in zwei Partitionen  $\Omega_1$  (Eckbereich) und  $\Omega_2$  (Mittelbereich) unterteilt. Die verwendeten Materialdaten sind: Elastizitätsmodul  $E^S = 2,1 \cdot 10^{11} N/m^2$ , Dichte  $\rho^S = 8000,0 kg/m^3$  und Poissonzahl  $\nu^S = 0$ . Zur Diskretisierung im Raum wurden 9-knotige, hybrid-gemischte 7-Parameter-Schalenelemente



*Bild 7.4: Quadratplatte unter transversalem Lastimpuls: Problemstellung, Vertikalverschiebungs-Zeitverläufe und verformte Geometrien (Verschiebungen 20-fach überhöht)*

(Reissner/Mindlin-Kinematik) mit EAS-Erweiterung in Dickenrichtung und ANS zur Vermeidung des Querschublockings verwendet. Für die Zeitintegration wurde in beiden Partitionen das Generalized- $\alpha$ -Verfahren mit jeweils identischer numerischer Dissipation ( $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ :  $\rho_\infty = 0,6$ ) zur Stabilisierung des Zeitschrittverfahrens im Nichtlinearen eingesetzt. Als Zeitschrittgröße wurde für die simultane Referenzlösung und für die iterativ gestaffelten Verfahren  $\Delta t = 0,001$  s verwendet, dieser Wert wurde so gewählt, um die relativ hochfrequente Dynamik dieser Plattenschwingung (s. Verschiebungs–Zeitverlauf in *Bild 7.4*) ausreichend aufzulösen.

Bezüglich den mit den einfach gestaffelten Verfahren erzielten Ergebnissen kann zusammenfassend festgestellt werden, daß keines der Verfahren mit sinnvollen Zeitschrittgrößen stabile Berechnungsergebnisse lieferte. Aufgrund der sehr hohen Konditionszahl der verwendeten Schalenelemente ergeben sich bei expliziter Zeitintegration extrem kleine kritische Zeitschritte, weshalb das im vorigen Beispiel recht gut einsetzbare explizit–implizite, sequentiell gestaffelte Berechnungsverfahren für diese Problemklasse von vornherein nicht anwendbar ist. Die implizit–impliziten, sequentiell gestaffelten Verfahren zeigten mit  $\Delta t = 0,001$  s alle schon innerhalb der ersten 5–15 Zeitschritte den Beginn der schwachen Instabilität, die in diesem Fall auch zu einem extrem schnellen Anwachsen der Amplituden der parasitären Schwingungsanteile führte. Durch Verkleinerung der Zeitschrittweite konnte zwar das Auftreten der Instabilität verschoben werden, und zwar im Fall des gutmütigsten Verfahrens (iterativ gestaffeltes I–I–Grundverfahren) mit  $\Delta t = 0,0001$  s auf nach dem 40. Zeitschritt, und mit  $\Delta t = 0,00001$  s sogar auf nach dem 800. Zeitschritt, allerdings entspricht letzteres bei einem derart kleinen Zeitschritt gerade noch einem stabilen Berechnungszeitraum von 0,008 s.

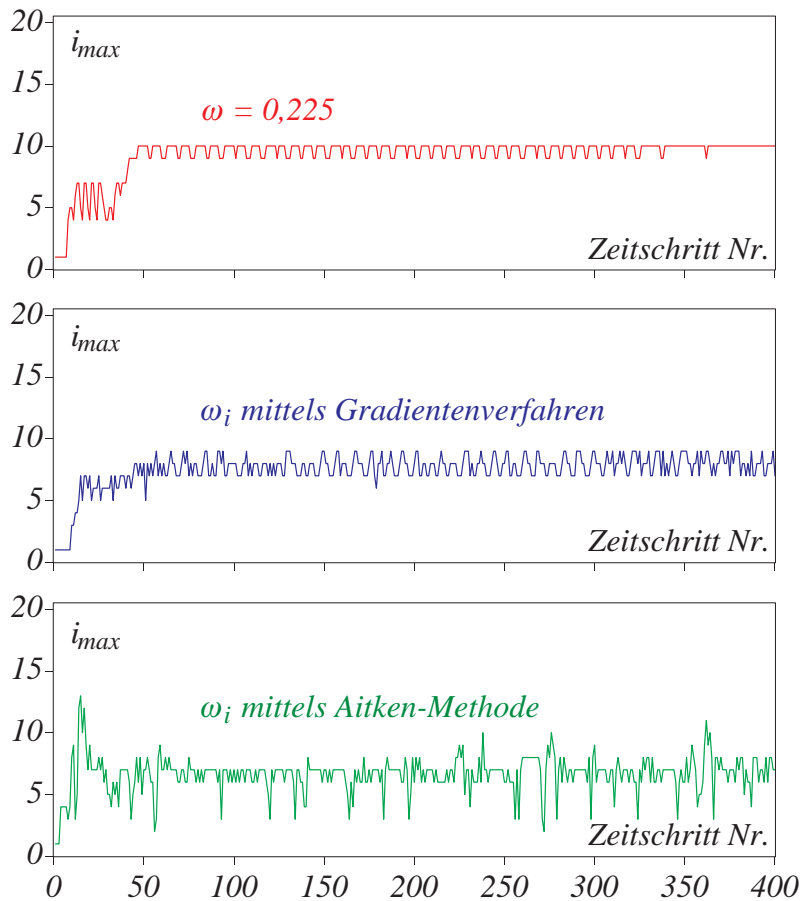
Insofern bleibt im weiteren nur noch das Verhalten der iterativ gestaffelten Lösungsverfahren zu untersuchen. Die Ergebnisse einer Studie, in der das iterativ gestaffelte Grundverfahren mit unterschiedlichen festen Relaxationsparametern getestet wurde, sind in *Tabelle 7.1* zusammengestellt. Man erkennt wieder das typische Verhalten. Der optimale Relaxationsparameter liegt für dieses Beispiel etwa bei  $\omega = 0,225$ , beim Abweichen von diesem Wert nach unten oder oben steigen die erforderlichen Iterationszahlen sehr schnell an, und das unrelaxierte Verfahren ( $\omega = 1$ ) divergiert hier wieder.

$\omega$	0,10	0,15	0,175	0,20	<b>0,225</b>	0,25	0,275	0,30
Iterationen	16	11	9	8	<b>7</b>	8	19	59

*Tabelle 7.1* Quadratplatte: Iterationszahlen  $i_{max}$  im Zeitschritt Nr. 25 für verschiedene Relaxationsparameter  $\omega$  (Abbruchkriterium:  $\|g_i\| / \sqrt{n_{eq}} \leq 10^{-6}$ )

*Bild 7.5* vergleicht dann die jeweilige Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte in der Iteration über die Teilfelder für eine Konvergenzbeschleunigung mit dem Gradientenverfahren, mit der Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen, sowie mit dem bestmöglichen, festen Relaxationsparameter  $\omega = 0,225$ . Die Robustheit und Effizienz der beiden erstgenannten Beschleunigungsmethoden, die jeweils ohne jeglichen „User–Input“ zu einer noch etwas schnelleren Konvergenz als  $\omega = 0,225$  führen, ist eindeutig zu sehen.

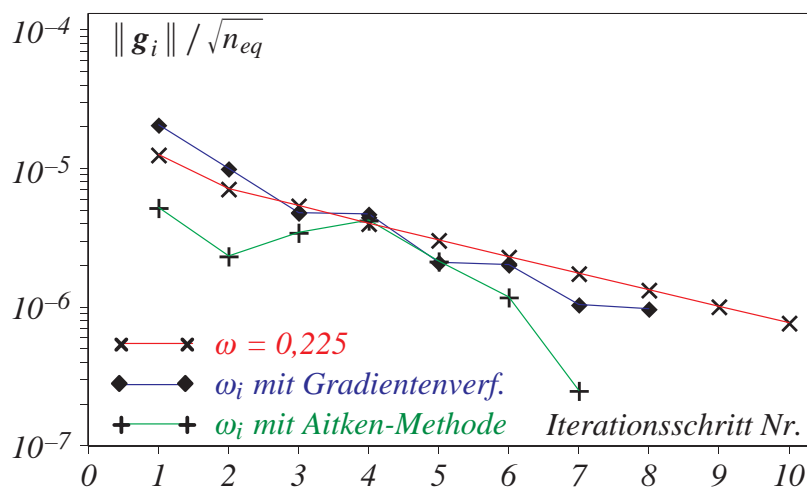




Anzahl der Iterationen  
 $i_{max}$  je Zeitschritt  
in äußerer Iteration;  
Abbruchkriterium:  
 $\frac{\|g_i\|}{\sqrt{n_{eq}}} \leq 10^{-6}$

Bild 7.5: Quadratplatte: Konvergenzstudie – Verfahrensvergleich

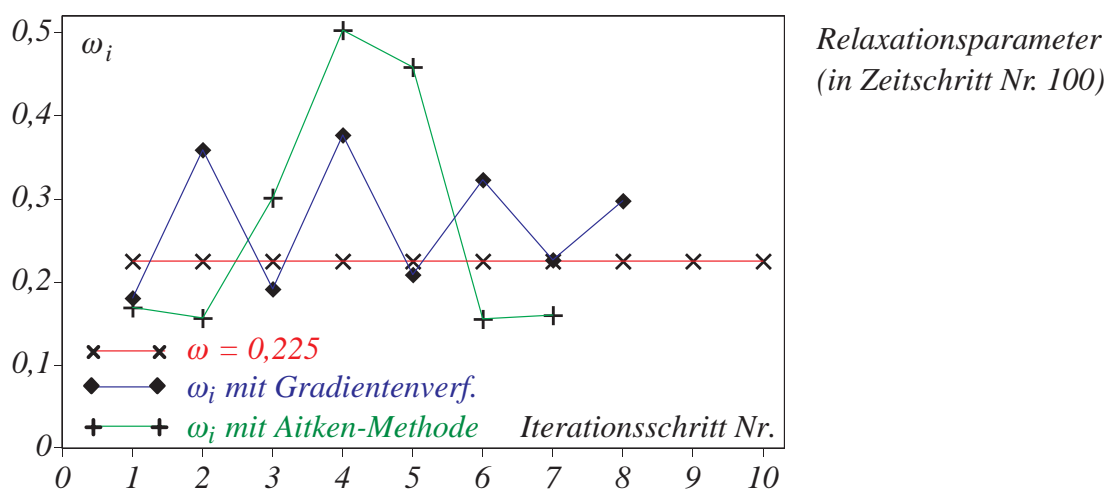
Weiterhin zeigt Bild 7.6, in dem die Entwicklung des Fehlers der Iteration über die Teilfelder innerhalb des exemplarisch ausgewählten Zeitschritts Nr. 100 aufgetragen ist, für den Fall der stationären Richardson-Iteration sowie des Gradientenverfahrens eine lineare Konvergenzordnung, bei entsprechend leicht höherer Konvergenzrate des Gradientenverfahrens. Das Konvergenzverhalten der Aitken-Beschleunigung hingegen ist wiederum verhältnismäßig unregel-



Iterationsfehler  
in äußerer Iteration  
(in Zeitschritt Nr. 100)

Bild 7.6: Quadratplatte: Entwicklung des Fehlers der Iteration über die Teilfelder innerhalb eines Zeitschritts

mäßig, wobei die Konvergenzgeschwindigkeit gegen Schluß überlinear zuzunehmen scheint. Die Ergebnisse bei diesem rein strukturdynamischen Beispiel stimmen hierin mit den Beobachtungen überein, die schon bei dem FSI-Modellbeispiel B2 in Abschnitt 6.6 gemacht wurden. Schließlich wird in *Bild 7.7* noch die Entwicklung der Relaxationsparameter  $\omega_i$  im selben Zeitschritt Nr. 100 dargestellt. Die  $\omega_i$  des Gradientenverfahrens zeigen wiederum den schon beobachteten oszillierenden Verlauf, der sich in etwa um denselben Mittelwert herum bewegt, wie die Relaxationsparameter der Aitken-Beschleunigung. Dieser Mittelwert liegt im gezeigten Zeitschritt mit  $\bar{\omega}_i \approx 0,27$  etwas höher als der für die stationäre Richardson-Iteration als bester Wert identifizierte  $\omega = 0,225$ , obwohl bei dem FSI-Modellbeispiel B2 in Abschnitt 6.6 beobachtet wurde, daß die  $\omega_i$  des Gradientenverfahrens und der Aitken-Methode sich eigentlich um den optimalen, festen Relaxationsparameter bewegen. Diese Abweichung erklärt sich da-



*Bild 7.7: Quadratplatte: Entwicklung des Relaxationsparameters innerhalb eines Zeitschritts*

raus, daß  $\omega = 0,225$  nur in der Anfangsphase „optimal“ ist, später hingegen seine Optimalität aufgrund der Systemnichtlinearität offensichtlich verliert. Erkennbar wird dies auch daran, daß ab dem Zeitschritt Nr. 40 das Gradientenverfahren deutlich schneller konvergiert als das mit  $\omega = 0,225$  beschleunigte Verfahren, was, wie die Verformungsbilder in *Bild 7.4* zeigen, in etwa mit der Zeit zusammenfällt, an dem sich die durch den Lastimpuls erregte Verformungswelle von  $\Omega_2$  aus kommend über den Kopplungsrand hinweg vollständig in das angekoppelte Teilgebiet  $\Omega_1$  ausgebreitet hat.

### 7.3 Flexible Klappe in Kanalströmung mit Einschnürung

Es folgt ein Beispiel aus dem Bereich der Fluid-Struktur-Interaktion. Das in *Bild 7.8* dargestellte, zweidimensional simulierte, gekoppelte System besteht aus einem Kanal, in den eine flexible Klappe eingebaut ist, welche den durchströmten Querschnitt auf die Hälfte reduziert. Hinter der Klappe schnürt sich der Kanal ein, wodurch der im Nachlauf entstehende Primärwirbel in seiner Längsausdehnung begrenzt wird. Aus Symmetriegründen wird nur die abgebildete Hälfte des Kanals modelliert. Das Material der Klappe ist ein Hartgummi mit den Kennwerten Elastizitätsmodul  $E^S = 2,3 \cdot 10^6 \text{N/m}^2$ , Dichte  $\rho^S = 1500,0 \text{kg/m}^3$  und Poissonzahl  $\nu^S = 0,45$ .



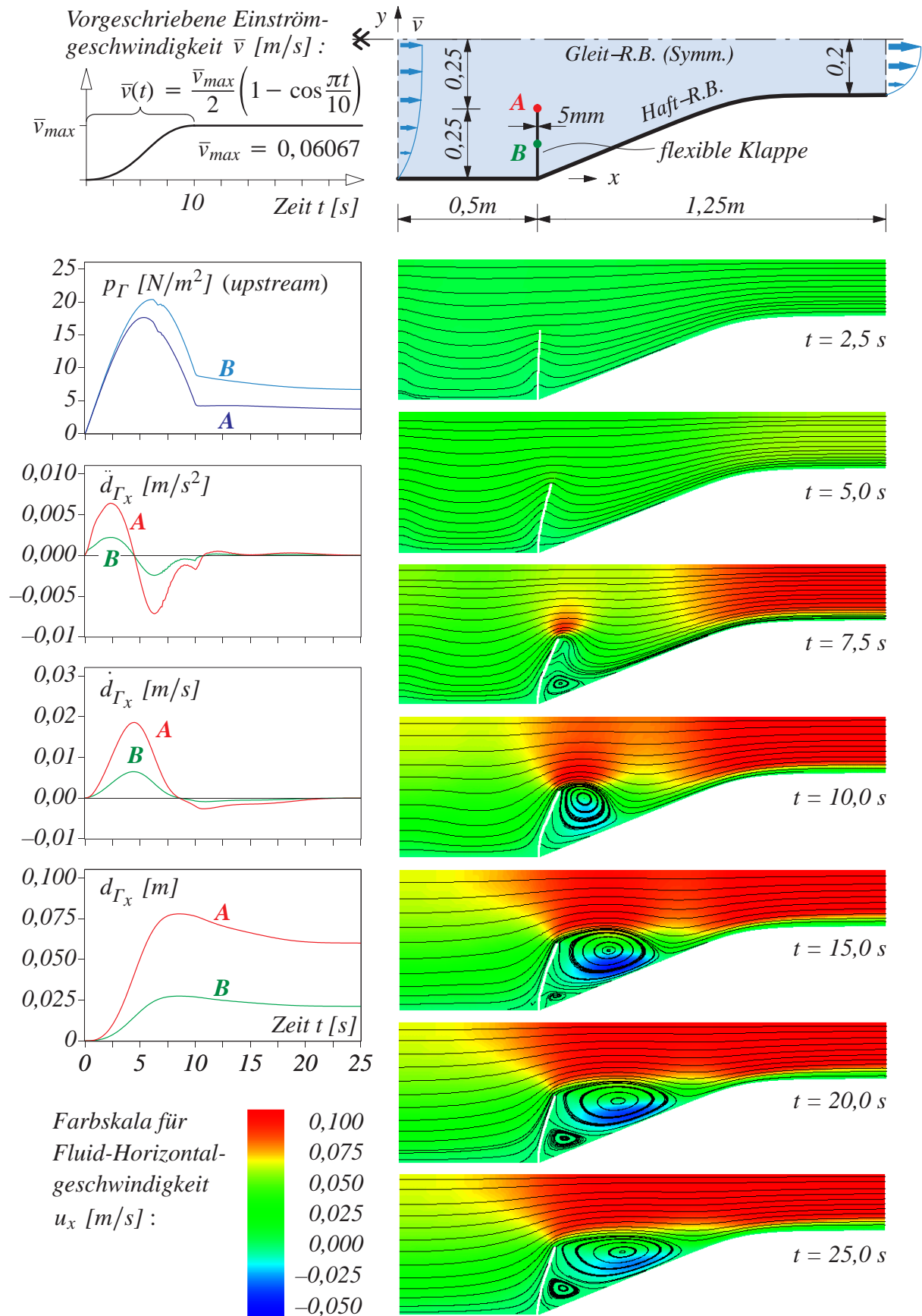


Bild 7.8: Flexible Klappe in Kanalströmung mit Einschnürung: Problemstellung, Druck-, Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und Verschiebungs-Zeitverläufe, Momentaufnahmen des Strömungsfeldes (Stromlinien auf Horizontalgeschwindigkeit)

Das Fluid ist ein Silikonöl mit einer Dichte  $\rho^F = 956,0 \text{ kg/m}^3$  und einer dynamischen Viskosität von  $\mu^F = 0,145 \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ . Die parabolische Einströmung hat den in der Abbildung links oben dargestellten, anfangs kosinusförmigen und ab  $t = 10 \text{ s}$  konstanten Verlauf in der Zeit, wodurch sich nach vollständiger Ausbildung der Strömung eine relativ niedrige Reynoldszahl von etwa  $\text{Re} = 100$  ergibt. Es handelt sich also um eine rein laminare Strömung. Wie die abgebildeten, iterativ gestaffelt berechneten Momentaufnahmen des Strömungsfeldes sowie die zugehörigen Zeitverläufe des Strömungsdruckes am Interface und der Bewegungsgrößen ausgewählter Strukturpunkte erkennen lassen, ist das gekoppelte System während des „Anfahrens“ der Strömung und für weitere ca. 5 Sekunden stark instationär (Anschwellen und wieder Abnehmen des Strömungsdruckes auf die Struktur, transientes Verbiegen der Struktur, Ausbildung eines großen Primär- und später eines kleineren, gegenläufigen Sekundärwirbels im Nachlauf der Klappe), danach stellt sich allmählich ein stationärer Strömungszustand ein.

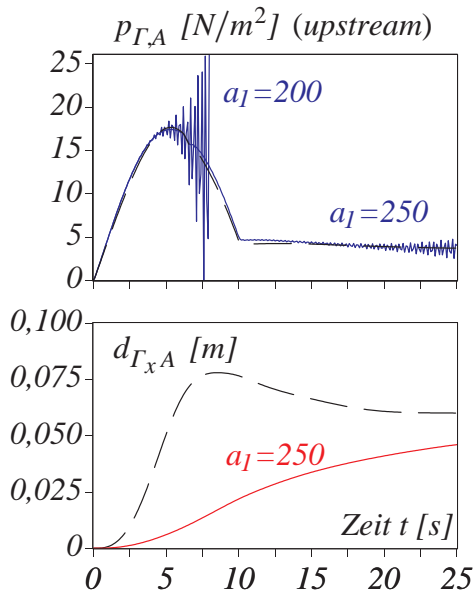
Für die räumliche Diskretisierung des Strömungsgebiets wurden 1944 Q1Q1-Elemente (5845 Freiheitsgrade) verwendet, in der Zeit kam das Backward-Euler-Verfahren zum Einsatz. Die Struktur wurde mit 6 neunknotigen, vollintegrierten Scheibenelementen modelliert, und in der Zeit durch das Generalized- $\alpha$ -Verfahren mit numerischer Dämpfung ( $\rho_\infty = 0,6$ ) zur Stabilisierung der geometrisch nichtlinearen Berechnung integriert (mit Ausnahme des asynchronen, sequentiell gestaffelten Kopplungsverfahrens, bei dem man auf die implizite Mittelpunktsregel festgelegt ist). Als Zeitschrittgröße wurde in der Regel  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$  für beide Partitionen gewählt, womit die transienten Vorgänge ausreichend genau auflösbar sind.

Zunächst sollen nun die mit den *einfach gestaffelten, expliziten* Lösungsverfahren erzielten Ergebnisse diskutiert werden. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 6 dokumentierten, verhältnismäßig gutmütigen FSI-Modellbeispiel B2 konnte hier mit keinem der sequentiell gestaffelten Verfahren eine stabile Lösung ermittelt werden. Selbst das implizit-implizite Grundverfahren wird mit der gewählten Zeitschrittgröße  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$  bereits nach dem 4. Zeitschritt ( $\underline{\Delta t} = 0,4 \text{ s}$ ) instabil. Und auch hier konnte aufgrund des „Artificial Added Mass“-Effektes durch Verkleinerung des Zeitschrittes der Beginn der schwachen Instabilität nicht nach hinten geschoben werden: Sie setzte mit  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$  nach  $t = 0,06 \text{ s}$  ein, mit  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$  nach  $t = 0,009 \text{ s}$  und mit  $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$  bereits nach  $t = 0,0071 \text{ s}$ . Eine derartige oder sogar noch weitergehende Zeitschrittverkleinerung ist ohnehin nicht mehr sinnvoll.

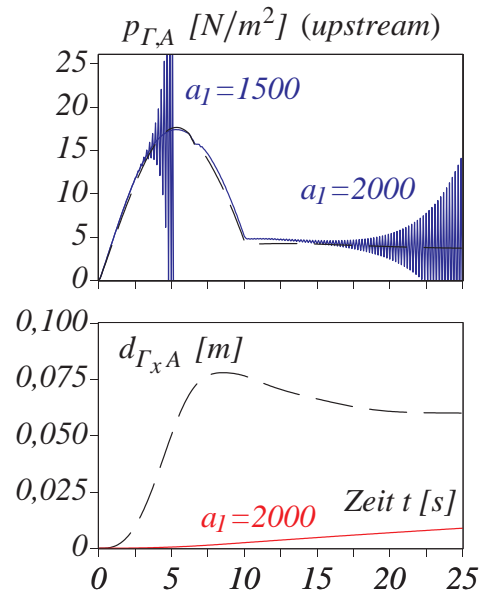
Ferner wurde an diesem Beispiel exemplarisch der in der Literatur u.a. von Stein et al. (1998, 2000) eingesetzte Stabilisierungsansatz mithilfe von künstlicher, massenproportionaler Dämpfung der Struktur untersucht, um zu demonstrieren, wie sehr die transiente, numerische Lösung durch eine solche Maßnahme verfälscht wird. In *Bild 7.9* sind für die vier implizit-impliziten, sequentiell gestaffelten Lösungsverfahren jeweils der Strömungsdruck-Zeitverlauf auf das Interface am Knoten A (linke obere Ecke der Klappe) sowie der Horizontalverschiebungs-Zeitverlauf der Struktur am selben Knoten aufgetragen. Dabei wurde der gleiche Maßstab verwendet wie in der iterativ gestaffelt ermittelten Referenzlösung (*Bild 7.8*). Zum einfacheren, direkten Vergleich ist diese Referenzlösung auch in den Verschiebungsdiagrammen in *Bild 7.9* gestrichelt eingetragen. Es sind jeweils Kurven für verschiedene Werte des Dämpfungsparameters  $a_1$ , mit dem die massenproportionale Rayleigh-Dämpfung gemäß der Gleichung

$\mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}^S \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_{int}^S(\mathbf{d}) = \mathbf{f}_{ext}^S$  mit  $\mathbf{D}^S = a_1 \cdot \mathbf{M}^S$  bestimmt wird, abgebildet. Es wird deutlich, wie extrem hoch die künstliche Dämpfung zur ausreichenden Stabilisierung sein muß (zum Vergleich: in praktischen, strukturdynamischen Berechnungen kommen Dämpfungsparameter in der Größenordnung von  $a_1 \approx 0,1$  vor). Interessanterweise gilt auch hier wieder, daß die zur Stabilisierung erforderliche Dämpfung immer größer ist, je höher die Genauigkeit des partitionierten Lösungsverfahrens ist. Die starke Dämpfung führt jedoch dazu, daß die Verschiebungen der Klappe viel zu klein berechnet werden. Es folgt also, daß die Verwendung

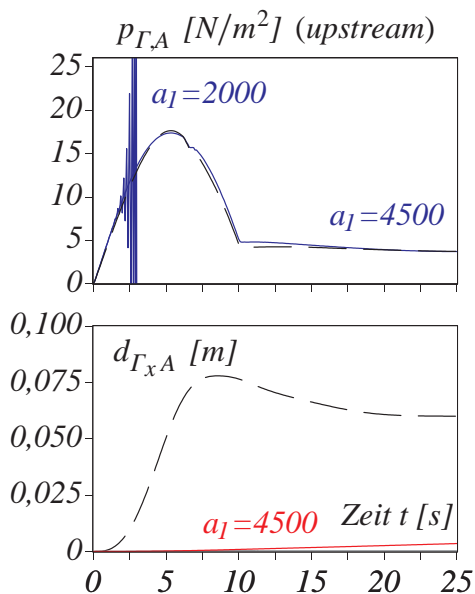
Synchrones, sequentiell gestaffeltes I–I-Verfahren mit  $O(\Delta t^0)$ -Prädiktor:



Synchrones, sequentiell gestaffeltes I–I-Verfahren mit  $O(\Delta t^1)$ -Prädiktor:



Synchrones, sequentiell gestaffeltes I–I-Verfahren mit  $O(\Delta t^2)$ -Prädiktor:



Asynchrones, sequentiell gestaffeltes I–I-Verfahren:

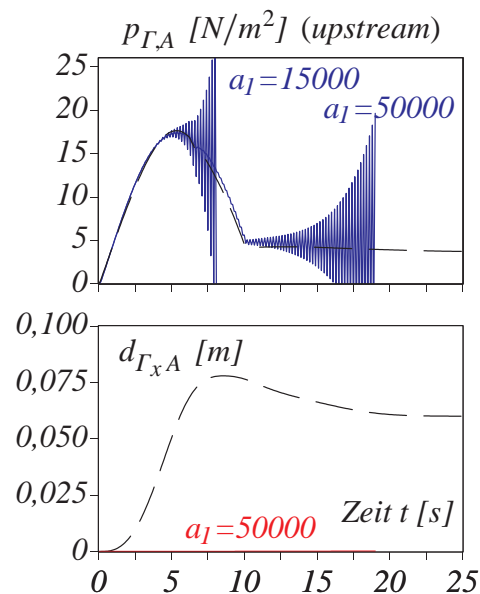


Bild 7.9: Flexible Klappe in Kanalströmung: Druck- und Verschiebungs-Zeitverläufe für sequentiell gestaffelte Verfahren mit viskoser Dämpfung (gestrichelte Kurven: iterativ gestaffelte Referenzlösung ohne viskose Dämpfung)

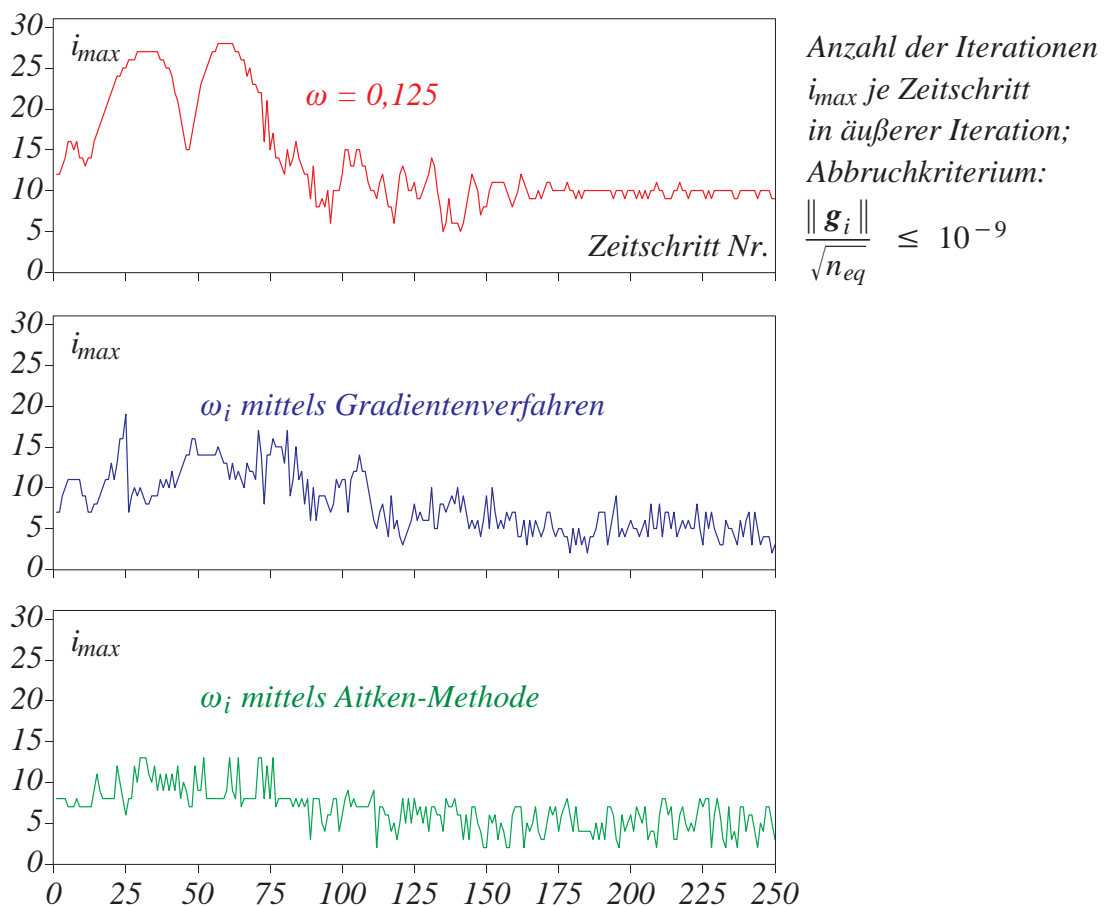
von künstlicher, viskoser Dämpfung ein völlig ungeeigneter Stabilisierungsansatz ist, da er die Physik des modellierten Systems verändert.

Die *iterativ gestaffelten* Lösungsverfahren hingegen zeigten hinsichtlich der numerischen Stabilität ausnahmslos keinerlei Probleme. Bezüglich ihres Lösungsverhaltens können die Aussagen und Schlußfolgerungen, die bei dem Beispiel der Plattenschwingung im vorigen Abschnitt sowie bei dem FSI-Modellbeispiel B2 in Kapitel 6 getroffen wurden, direkt übernommen und bestätigt werden. Die in *Tabelle 7.2* zusammengestellten Iterationszahlen im ersten Zeitschritt bei Verwendung fester Relaxationsparameter zeigen wieder ein Optimum, in diesem Fall bei  $\omega = 0,125$ , während beim Abweichen von diesem Wert die Iterationszahlen drastisch ansteigen, und die Iteration über die Felder hier bereits bei etwa  $\omega \geq 0,20$  divergiert.

$\omega$	0,050	0,075	0,100	0,120	<b>0,125</b>	0,130	0,150	0,175	0,200
Iterationen	22	17	14	13	12	13	22	>100	div.

*Tabelle 7.2 Flexible Klappe in Kanalströmung: Iterationszahlen  $i_{max}$  im Zeitschritt Nr. 1 für verschiedene Relaxationsparameter  $\omega$  (Abbruchkrit.:  $\| \mathbf{g}_i \| / \sqrt{n_{eq}} \leq 10^{-9}$ )*

Wie *Bild 7.10* weiter veranschaulicht, führt dann sowohl die automatische Bestimmung der Relaxationsparameter mittels des Gradientenverfahrens als auch mittels der Aitken-Methode im Laufe des gesamten Berechnungszeitraums zu nochmals deutlich weniger Iterationszahlen pro Zeitschritt als die Konvergenzbeschleunigung mit dem „besten“ konstanten Wert  $\omega = 0,125$ , wobei die Aitken-Beschleunigung wiederum eine noch etwas schnellere Konver-



*Bild 7.10: Flexible Klappe in Kanalströmung: Konvergenzstudie – Verfahrensvergleich*

genz aufweist als das teurere Gradientenverfahren. Trotz der sehr hohen geforderten Genauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-9}$  reichen im Schnitt etwa 5–7 Iterationen pro Zeitschritt bereits zur Konvergenz der Iteration über die Teilfelder aus.

Und schließlich kann mit *Bild 7.11* und *Bild 7.12*, in denen für die verschiedenen Konvergenzbeschleunigungen der Iterationsfehler in der Iteration über die Felder in dem willkürlich herausgegriffenen Zeitschritt Nr. 100 sowie die Entwicklung des Relaxationsparameters im Laufe derselben Iteration dargestellt ist, wieder das in den oben genannten Beispielen bereits beschriebene Iterationsverhalten analog gezeigt werden.

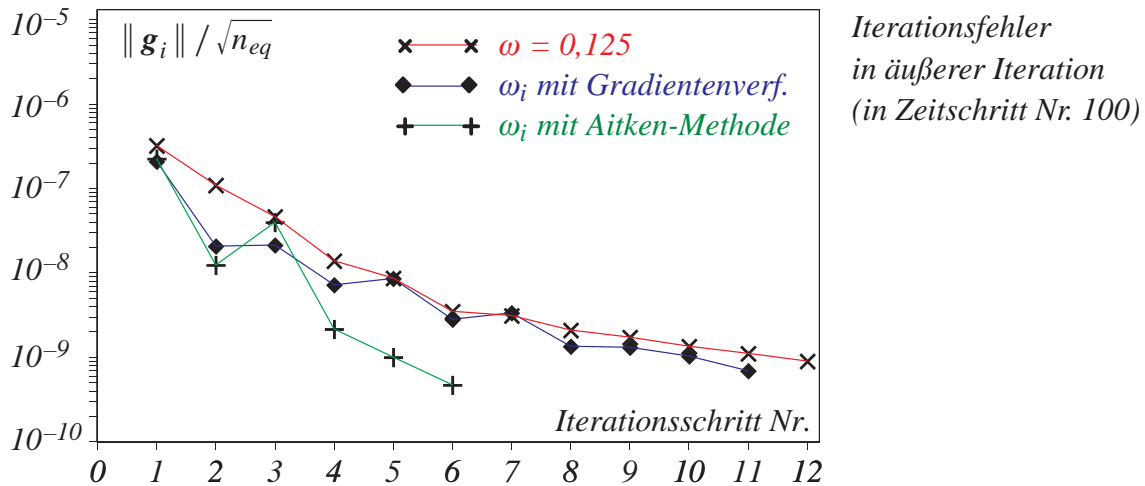


Bild 7.11: Flexible Klappe in Kanalströmung: Entwicklung des Fehlers der Iteration über die Teilfelder innerhalb eines Zeitschritts

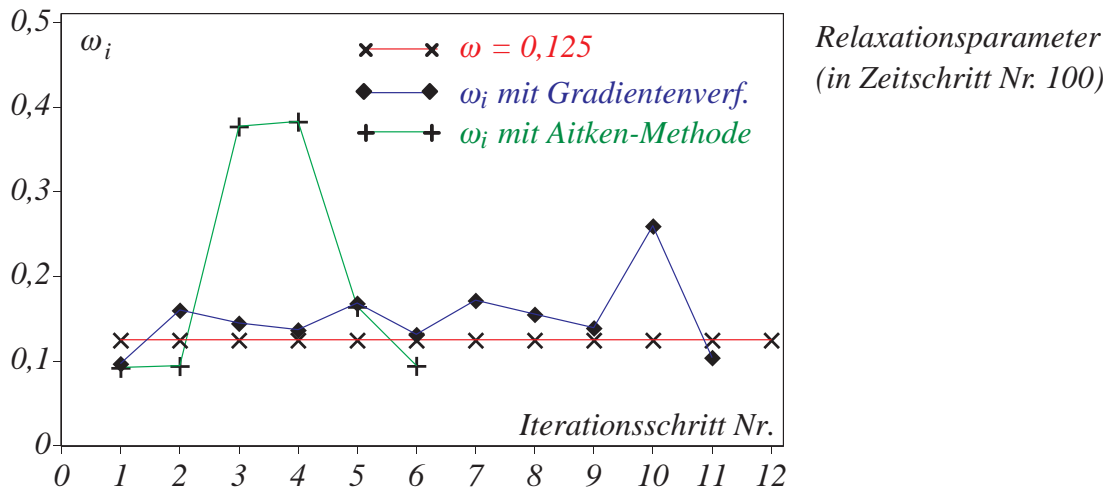
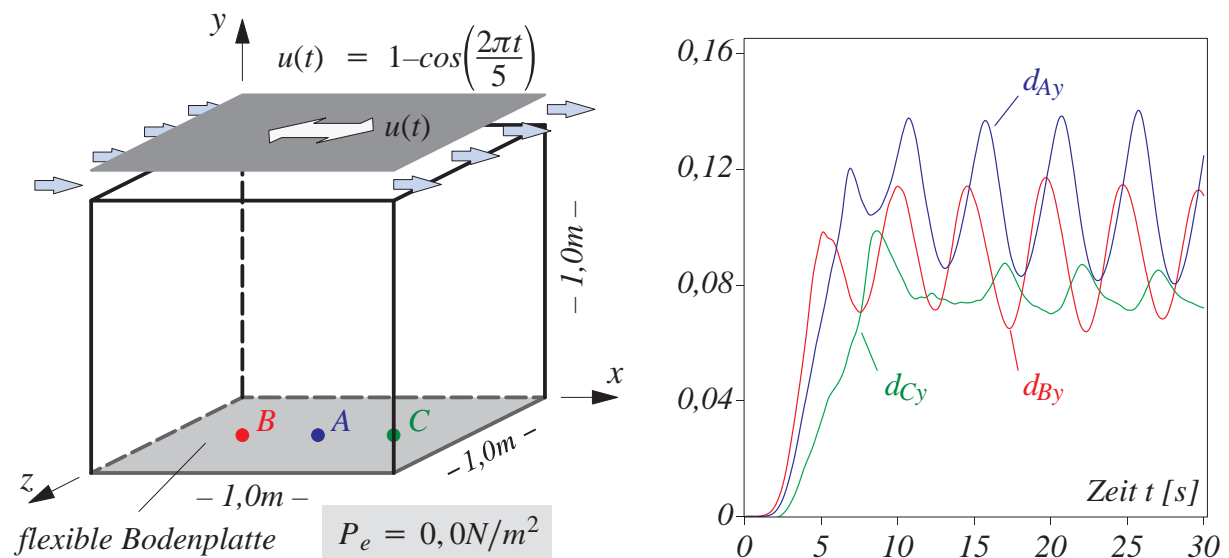


Bild 7.12: Flexible Klappe in Kanalströmung: Entwicklung des Relaxationsparameters innerhalb eines Zeitschritts

## 7.4 3-D Simulation des oszillierend überströmten Hohlraums mit flexibler Bodenplatte

Abschließend wird noch die Anwendung der diskutierten partitionierten Lösungsverfahren auf ein dreidimensionales Fluid-Struktur-Interaktionsbeispiel dokumentiert. Dabei handelt es sich um die in *Bild 7.13* dargestellte 3-D-Erweiterung des oszillierend überströmten Hohlraums mit flexibler Bodenplatte, der in den Abschnitten 5.3 und 6.6 bereits als zweidimensionales Modellbeispiel untersucht worden ist.



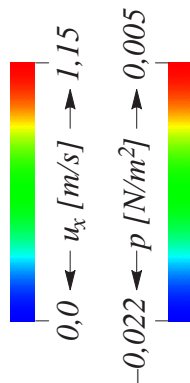
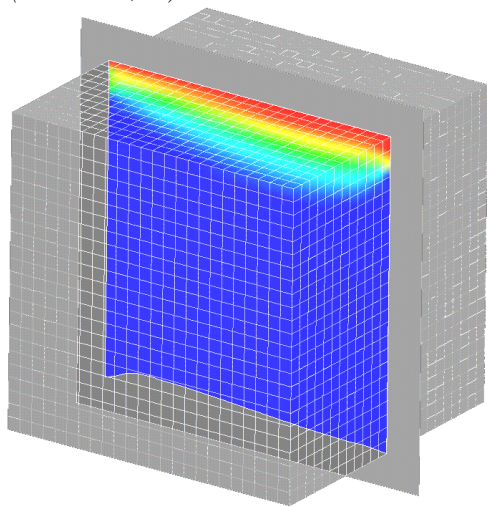
*Bild 7.13: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexibler Bodenplatte, 3-D: Problemstellung und Verschiebungs-Zeitverläufe*

Die Materialparameter für die Struktur sind hier: Dichte  $\rho^S = 500,0 \text{ kg/m}^3$ , Elastizitätsmodul  $E^S = 250,0 \text{ N/m}^2$  und Poissonzahl  $\nu^S = 0,0$ . Es kamen  $24 \times 24$  vierknotige, hybrid-gemischte 7-Parameter-Schalenelemente (Reissner/Mindlin-Kinematik) mit EAS-Erweiterung in Dickenrichtung und ANS zur Vermeidung des Querschublockings zum Einsatz, mit voller Einspannung an den Kanten. Als Zeitintegrationsverfahren wurde das Bossak- $\alpha$ -Verfahren mit leichter numerischer Dämpfung ( $\rho_\infty = 0,9$ ), einem Zeitschritt von  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$  und einer konsistenten Massenmatrix verwendet. Die Materialparameter für das Fluid sind: Dichte  $\rho^F = 1,0 \text{ kg/m}^3$  und kinematische Viskosität  $\nu^F = 0,01 \text{ m}^2/\text{s}$ . Für die Diskretisierung im Raum wurden  $24 \times 24 \times 24$  Q1Q1-Elemente (52702 Freiheitsgrade) verwendet, und in der Zeit das Backward-Euler-Verfahren, ebenfalls mit  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ . Auf das gesamte System wirkt ein externer Druck von  $P_e = 0,0 \text{ N/m}^2$ .

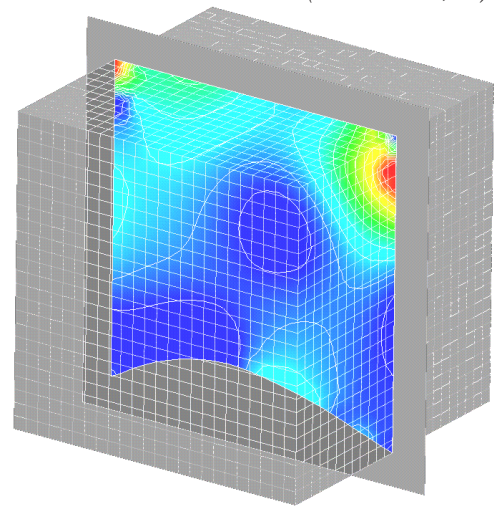
*Bild 7.14* zeigt einige ausgewählte Strömungszustände und verformte Konfigurationen der flexiblen Bodenplatte zu verschiedenen Zeitpunkten. Die ausgeprägte Dreidimensionalität der Strömung, die großen Deformationen der Struktur und auch die konfigurationsbedingte Symmetrie der Lösung zur Mittelebene ( $z = 0,5 \text{ m}$ ) sind klar erkennbar, ebenso wie die prinzipielle Ähnlichkeit des Strömungszustandes in der Mittelebene mit dem der zweidimensionalen Simu-



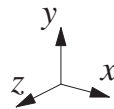
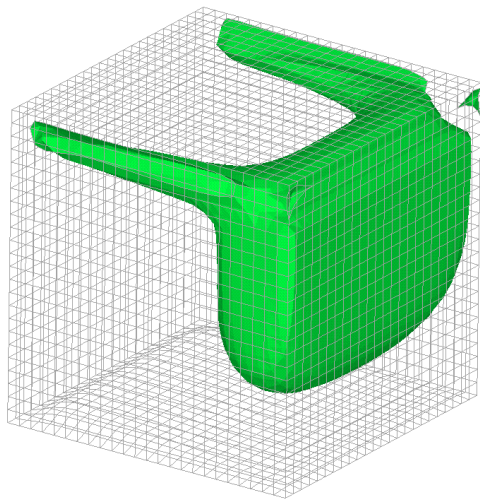
Strömungsgeschwindigkeit  $u_x$  in Mittelebene:  
(z.Zt.  $t=3,5s$ )



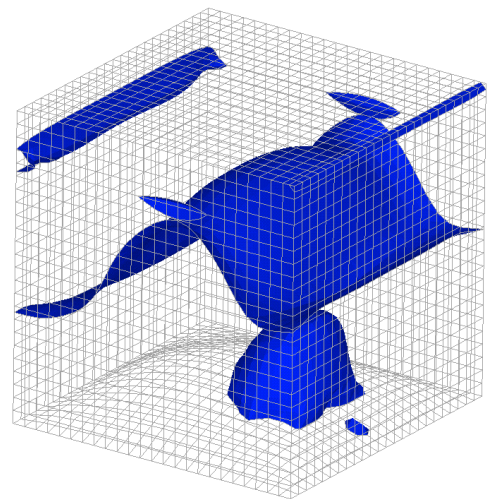
Strömungsdruck  $p$  in Mittelebene:  
(z.Zt.  $t=10,5s$ )



Isofläche Strömungsgeschwindigkeit:  
 $u_y = -0,01$  m/s (z.Zt.  $t=3,5s$ )



Isofläche Strömungsdruck:  
 $p = -0,0195$  N/m<sup>2</sup> (z.Zt.  $t=10,5s$ )



Bodenplatte:

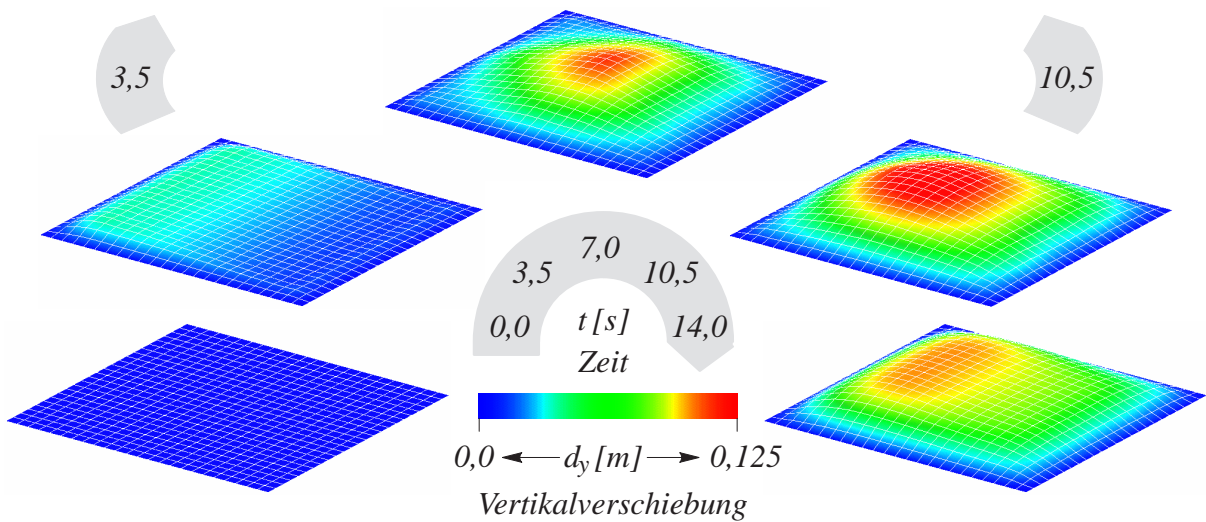


Bild 7.14: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexibler Bodenplatte, 3-D: Strömungsgeschwindigkeit und -druck, sowie verformte Konfigurationen der Bodenplatte

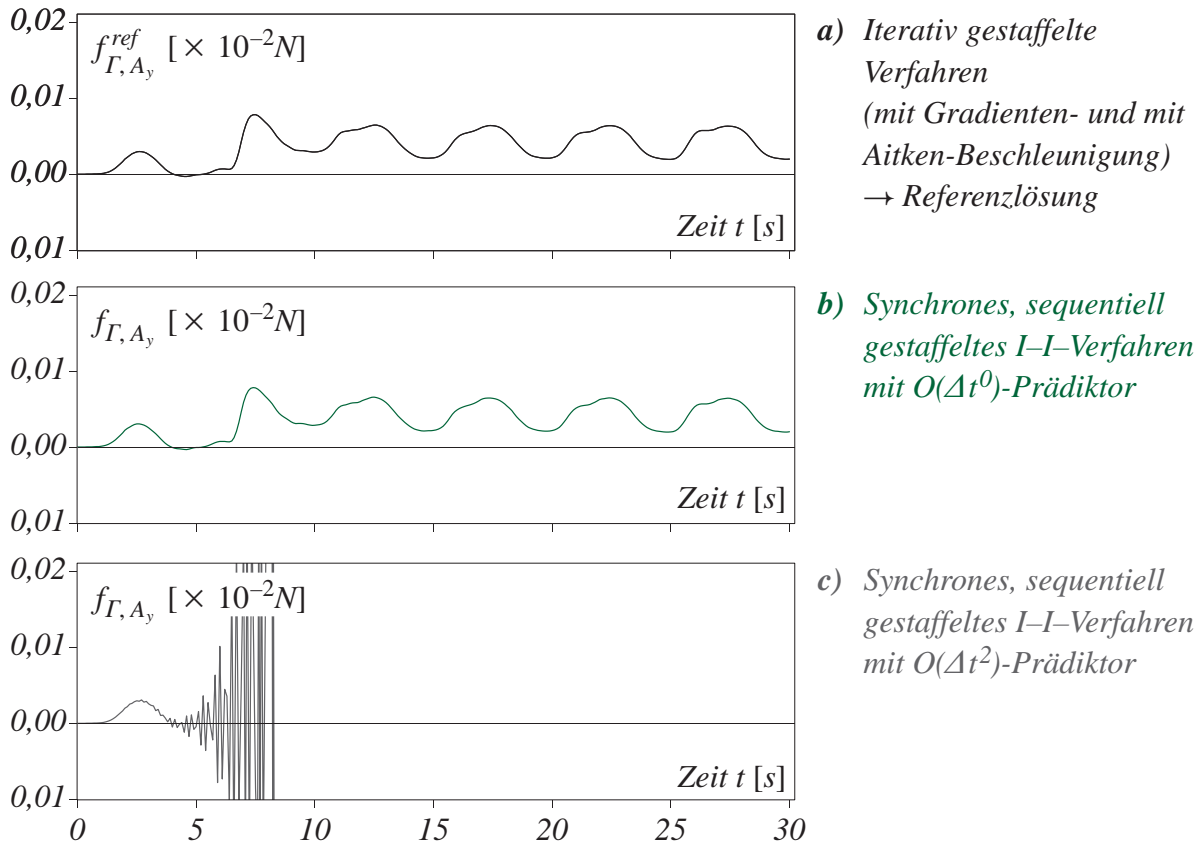


Bild 7.15: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexibler Bodenplatte, 3-D: Fluiddrucklast–Zeitverläufe Knoten A (Mitte der Bodenplatte)

lation. Erwartungsgemäß sind dabei die Querverschiebungen  $d_y$  des Bodens aufgrund der Plattentragwirkung geringer als bei der 2–D-Variante (vgl. Bild 6.6).

Die in Bild 7.15, Bild 7.16 und Bild 7.17 aufgetragenen Ergebnisse (Fluiddrucklast-Zeitverläufe, aufsummierter Verschiebungsfehler und aufsummierte Interface-Energie) von zwei iterativ gestaffelten (Kurven a) deckungsgleich) und zwei sequentiell gestaffelten Rechnungen zeigen weiterhin ein mit den 2–D-Simulationen vergleichbares Verhalten der verschiedenen partitionierten Lösungsverfahren: Während das synchrone, sequentiell gestaffelte Verfahren mit zweiter Ordnung genauen Prädiktor (Kurven c) bereits nach relativ kurzer Zeit instabil wird, ist der stabile Bereich des entsprechenden Verfahrens mit nullter Ordnung genauen Prä-

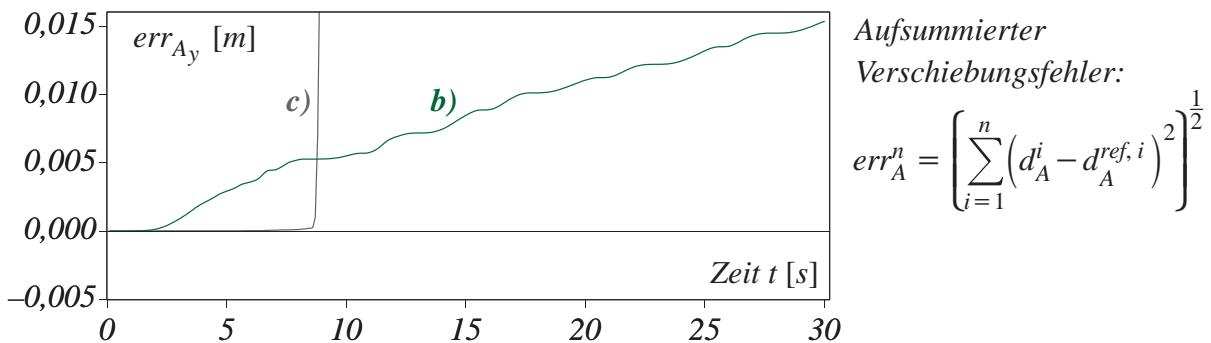


Bild 7.16: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexibler Bodenplatte, 3-D: Aufsummierter Fehler in der Vertikalverschiebung am Punkt A

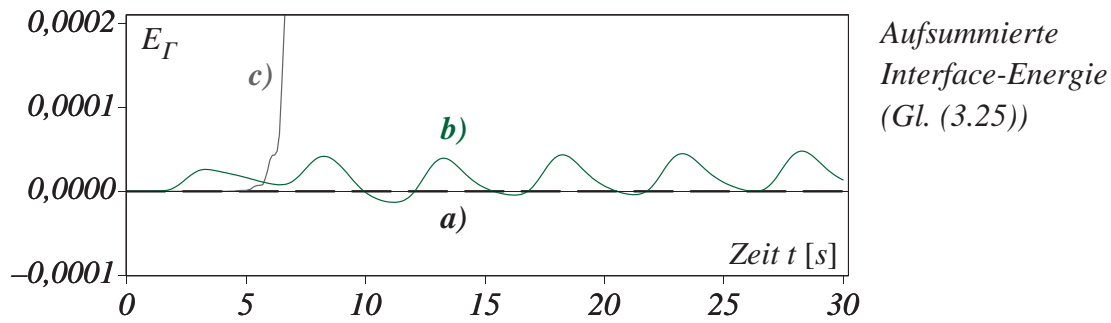


Bild 7.17: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexibler Bodenplatte, 3-D:  
Aufsummierte Interface-Energie

dikt (Kurven b) deutlich länger – hier sogar länger als der Berechnungszeitraum (aufgrund der extrem hohen Rechenzeiten wurde bei diesem Beispiel darauf verzichtet, bis zum Auftreten der schwachen Instabilität weiter zu rechnen). Dabei ist sowohl der Verschiebungsfehler als auch die am Interface künstlich produzierte Energiemenge des Verfahrens mit dem genaueren Prädiktor im stabilen Anfangsbereich um Größenordnungen geringer, bevor beide Maße dann mit dem Einsetzen der instabilen Oszillationen exponentiell ansteigen.

Die iterativ gestaffelten Verfahren zeigen wiederum keinerlei Stabilitätsprobleme; die aufsummierte Interface-Energie bleibt über den gesamten Berechnungszeitraum hinweg kleiner als  $10^{-10}$ . Die mittels des Gradientenverfahrens und mittels der Aitken-Methode beschleunigten Rechnungen benötigten beide je Zeitschritt lediglich 3 bis 4 Iterationen über die Teilfelder, was die Effizienz und Robustheit dieser Ansätze auch bei der Anwendung auf dieses 3-D FSI-Problem klar zeigt (Bild 7.18). Dabei war die – im Rahmen der aktuellen Implementierung und für dieses Beispiel – gemessene Rechenzeit bei Verwendung des Gradientenverfahrens trotz der im Schnitt etwa gleichen Iterationszahlen um etwa 20% höher, was den doch deutlich geringeren numerischen Aufwand des mittels der Aitken-Methode beschleunigten Verfahrens illustriert.

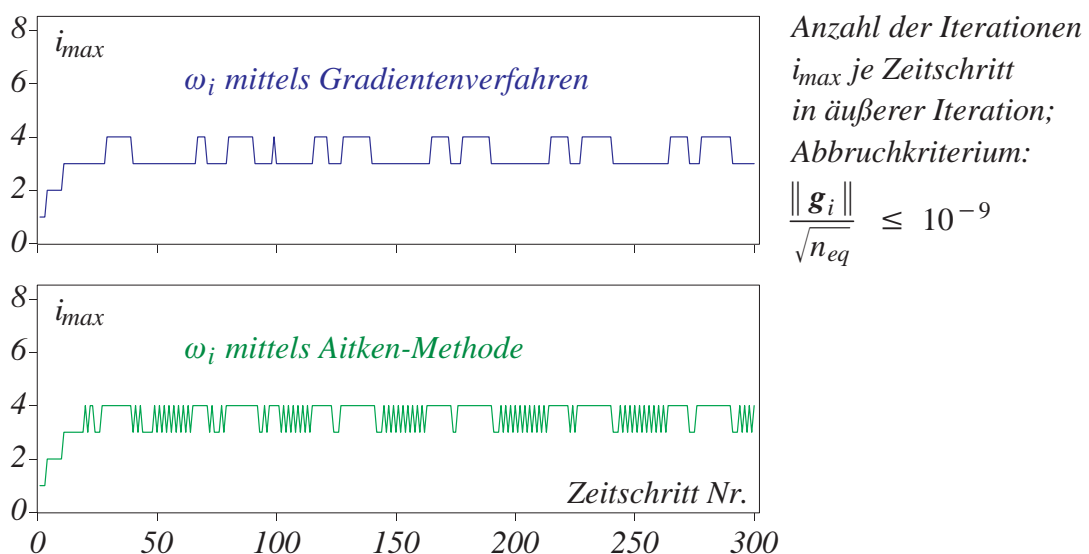


Bild 7.18: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexibler Bodenplatte, 3-D:  
Konvergenzstudie iterativ gestaffelte Verfahren