

Kapitel 4

Mehrdimensionale Probleme

4.1 Lineare Konvektionsgleichung in zwei Dimensionen

In diesem Kapitel werden wir die Diskretisierung einer mehrdimensionalen linearen Konvektionsgleichung behandeln. Wir beschränken uns dabei auf den zweidimensionalen Fall, da die Erweiterung auf den 3-D Fall analog durchgeführt werden kann. Die zweidimensionale lineare Konvektionsgleichung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x, y)u(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y}(b(x, y)u(x, y, t)) = 0. \quad (4.1)$$

Der Fall konstanter Konvektionsgeschwindigkeiten ($a \equiv const$, $b \equiv const$) wird diesmal nicht wie im 1-D Fall separat behandelt, sondern nur als ein Spezialfall der allgemeineren Gleichung (4.1) betrachtet.

Im Unterschied zu vorigen Kapiteln werden wir gleich mit der Herleitung der Finite-Volumen-Formulierung beginnen. Einige analytische Testfälle werden in folgenden Abschnitten präsentiert. Dort sind auch die entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen spezifiziert.

Wir gehen deshalb zunächst von einem unendlichen Berechnungsgebiet aus, und definieren das numerische Gitter durch

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$y_j = j \cdot \Delta y, \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Das Wertepaar (x_i, y_j) definiert den Mittelpunkt des Kontrollvolumens mit dem Doppelinde (i, j) . Definiert man weiter

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm \Delta x/2 = (i \pm 1/2) \cdot \Delta x$$

$$y_{j\pm 1/2} = y_j \pm \Delta y/2 = (j \pm 1/2) \cdot \Delta y,$$

so wird das Volumenelement selbst durch $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ festgelegt.

Wir bezeichnen mit $\bar{U}_{i,j}$ und $U_{i,j}$ die numerischen Approximationen der exakten Lösung der Konvektionsgleichung an der Stelle (x_i, y_j) zu den Zeitpunkten $t = t_n$ und $t = t_{n+1}$:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{i,j} &\approx u(x_i, y_j, t_n) \\ U_{i,j} &\approx u(x_i, y_j, t_{n+1}).\end{aligned}$$

Nun wird die Differentialgleichung (4.1) über das Kontrollvolumen

$[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ sowie über das Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ integriert

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (u_t + (au)_x + (bu)_y) dy dx dt = 0 \quad (4.2)$$

und die einzelnen Terme durch die Werte $\{\bar{U}\}$ und $\{U\}$ approximiert. Geht man dabei ähnlich wie im Abschnitt 1.3 vor, so erhält man folgende Finite-Volumen-Formulierung für die zweidimensionale lineare Konvektionsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{U_{i,j} - \bar{U}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{F(U; i + 1/2, j) - F(U; i - 1/2, j)}{\Delta x} \\ + \frac{G(U; i, j + 1/2) - G(U; i, j - 1/2)}{\Delta y} = 0.\end{aligned} \quad (4.3)$$

mit

$$\begin{aligned}F(U; i - 1/2, j) &\approx \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} a(x_{i-1/2}, y) u(x_{i-1/2}, y, t) dy dt \\ &\approx a(x_{i-1/2}, y_j) u(x_{i-1/2}, y_j, t_{n+1}) \approx (aU)_{i-1/2, j},\end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}G(U; i, j - 1/2) &\approx \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} b(x, y_{j-1/2}) u(x, y_{j-1/2}, t) dx dt \\ &\approx b(x_i, y_{j-1/2}) u(x_i, y_{j-1/2}, t_{n+1}) \approx (bU)_{i, j-1/2},\end{aligned} \quad (4.5)$$

so daß die Gleichung (4.3) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{U_{i,j} - \bar{U}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{(aU)_{i+1/2,j} - (aU)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{(bU)_{i,j+1/2} - (bU)_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0.$$

Im Spezialfall konstanter Konvektionsgeschwindigkeiten ($a \equiv const$, $b \equiv const$) gilt

$$\frac{U_{i,j} - \bar{U}_{i,j}}{\Delta t} + a \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta x} + b \frac{U_{i,j+1/2} - U_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0.$$

Da die Gitterfunktion U nur in den Zentren der Kontrollvolumina definiert ist, müssen die Werte der Gitterfunktion auf den Rändern der Kontrollvolumina interpoliert werden. Wie im 1-D Fall kann man zeigen, daß eine stückweise-konstante Interpolation der Gitterfunktion, bei der der Wert an der stromaufwärts liegenden Stelle genommen wird (2-D-UPWIND) zu einem Verfahren erster Ordnung führt, das an numerischer Diffusion leidet. Eine lineare Interpolation der Gitterfunktion zwischen den Gitterpunkten führt zum 2-D-CDS-Verfahren, das 2. Ordnung genau ist, aber starke Oszillationen in der Lösung verursacht.

Wie bei einem 1-D-Problem, nimmt die totale Variation der *analytischen* Lösung der linearen Konvektionsgleichung (im Falle $a \equiv const$, $b \equiv const$) nicht zu, so daß man versuchen kann, ein numerisches Verfahren zu bilden, das ebenfalls die TVD-Eigenschaft besitzt. Leider kann so ein Verfahren im zweidimensionalen Fall höchstens erster Ordnung genau sein, wie *Goodman und LeVeque* in [32] gezeigt haben. Man geht deshalb in der Praxis so vor, daß man dieselben Interpolationsansätze, welche im 1-D Fall zur Konstruktion eines TVD-Verfahrens geführt haben, *unverändert* in den 2-D Fall übernimmt. Die resultierenden Diskretisierungsverfahren besitzen zwar **nicht** die TVD-Eigenschaft, produzieren jedoch in den meisten bekannten Testfällen oszillationsfreie Lösungen mit einer guten Auflösung von scharfen Fronten und sind auf glatten Lösungen je nach eingesetzter Limiter-Funktion mindestens 2. Ordnung genau. Man bezeichnet solche Verfahren daher trotzdem als TVD-Verfahren, obwohl sie genau gesehen gar keine TVD-Verfahren sind.

Sind die Konvektionsgeschwindigkeiten $a(x, y)$ und $b(x, y)$ nicht konstant, so bildet man ein Diskretisierungsverfahren, das im Spezialfall $a \equiv const$, $b \equiv const$ mit dem TVD-Verfahren übereinstimmt. Dabei kann man ebenfalls die eindimensionalen Interpolationsansätze direkt übernehmen (s. Abschnitt 2.2). Da im 1-D Fall nur die Slope-Limiter-Verfahren oszillationsfreie Lösungen erzeugt haben (s. Abschnitt 2.2), sollte man sie auch

im 2-D Fall einsetzen. Analog zu (2.57) gilt dann unter Verwendung von Abkürzungen „ l “ $=$ $(i - 1/2, j)$, „ u “ $=$ $(i, j - 1/2)$:

$$(aU)_{i-1/2,j} = F^{tvd}(U;l) = F^{up}(U;l) + F^{dc}(U;l) \quad (4.6)$$

$$(bU)_{i,j-1/2} = G^{tvd}(U;u) = G^{up}(U;u) + G^{dc}(U;u), \quad (4.7)$$

wobei die UPWIND-Ströme wie in (2.58) –

$$F^{up}(U;l) = \max(a_l, 0) \cdot U_{i-1,j} - \max(-a_l, 0) \cdot U_{i,j} \quad (4.8)$$

$$G^{up}(U;u) = \max(b_u, 0) \cdot U_{i,j-1} - \max(-b_u, 0) \cdot U_{i,j} \quad (4.9)$$

– und die Korrekturströme wie in (2.59) definiert werden:

$$F^{dc}(U;l) = \phi_l \cdot \frac{1}{2} \cdot |a_l| \cdot (U_{i,j} - U_{i-1,j}) \quad (4.10)$$

$$G^{dc}(U;u) = \phi_u \cdot \frac{1}{2} \cdot |b_u| \cdot (U_{i,j} - U_{i,j-1}). \quad (4.11)$$

Dabei bezeichnen a_l und b_u die Geschwindigkeitswerte $a(x_{i-1/2}, y_j)$ und $b(x_i, y_{j-1/2})$. Die Gewichtungsfaktoren werden durch die Limiter-Funktion definiert ($\phi_l = \phi(\theta_l)$, $\phi_u = \phi(\theta_u)$), und für θ_l und θ_u gilt

$$\theta_l = \frac{U_{I,j} - U_{I-1,j}}{U_{i,j} - U_{i-1,j}}, \quad \theta_u = \frac{U_{i,J} - U_{i,J-1}}{U_{i,j} - U_{i,j-1}}, \quad (4.12)$$

mit

$$I = \begin{cases} i - 1, & \text{wenn } a_l \geq 0, \\ i + 1, & \text{wenn } a_l < 0. \end{cases} \quad \text{und } J = \begin{cases} j - 1, & \text{wenn } b_u \geq 0, \\ j + 1, & \text{wenn } b_u < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Ist die Größe θ_l bzw. θ_u nicht definiert, da $U_{i,j} - U_{i-1,j} = 0$ bzw. $U_{i,j} - U_{i,j-1} = 0$, so wird der entsprechende Gewichtungsfaktor zu Null gesetzt.

In den nächsten zwei Abschnitten wird das so konstruierte TVD-Verfahren an zwei Beispielen mit konstanten und einem Beispiel mit variablen Konvektionsgeschwindigkeiten getestet.

4.2 Fall einer konstanten Konvektionsgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten von unterschiedlichen Diskretisierungsverfahren an 2 Testbeispielen für den Fall einer konstanten Konvektionsgeschwindigkeit untersuchen. Unter der Annahme $a(x, y) \equiv a \equiv const$, $b(x, y) \equiv b \equiv const$ läßt sich die

zweidimensionale Konvektionsgleichung (4.1) folgendermaßen schreiben:

$$u_t + au_x + bu_y = 0. \quad (4.14)$$

Das Cauchy-Problem wird durch die Anfangsbedingung

$$u(x, y, t = 0) = u_0(x, y), \quad x, y \in (-\infty, +\infty). \quad (4.15)$$

definiert. Analog zum eindimensionalen Fall kann man zeigen, daß die analytische Lösung des Cauchy-Problems für den Fall einer stetig differenzierbaren Anfangsbedingung lautet

$$u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt). \quad (4.16)$$

Ist die Anfangsbedingung $u_0(x, y)$ nicht differenzierbar, so kann die Funktion (4.16) als schwache Lösung der Konvektionsgleichung (4.14) interpretiert werden (die der Differentialgleichung (4.14) entsprechende Integralform läßt sich analog zu (1.18) herleiten).

Wir wollen nun zwei Testfälle untersuchen, wovon in einem Fall die Anfangsbedingung diskontinuierlich und in anderem Fall stetig differenzierbar ist. In beiden Fällen werden für die Geschwindigkeitskomponenten die Werte $a = b = 1$ angenommen. Das entspricht einem homogenen Strömungsfeld in der xy -Ebene und die Stromrichtung verläuft parallel zur Geraden $y = x$. Die analytische Lösung lautet in beiden Fällen

$$u(x, y, t = 0) = u_0(x - t, y - t). \quad (4.17)$$

Testbeispiel No.8. Wir untersuchen zunächst den Fall einer *diskontinuierlichen* Lösung. Die Anfangsbedingung sei durch folgende Funktion gegeben:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (x, y) \in [0.2, 0.4] \times [0.2, 0.4] \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (4.18)$$

Die analytische Lösung der Gleichung (4.14) lautet entsprechend

$$u(x, y, t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (x - t, y - t) \in [0.2, 0.4] \times [0.2, 0.4] \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (4.19)$$

Wir sind an der Entwicklung der Lösung im Zeitintervall $t \in [0, 0.5]$ interessiert. Während dieses Zeitintervalls liegt der Bereich, in dem die Lösung ungleich Null ist, innerhalb des Quadrates $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, so daß wir uns bei der numerischen Berechnung der Lösung

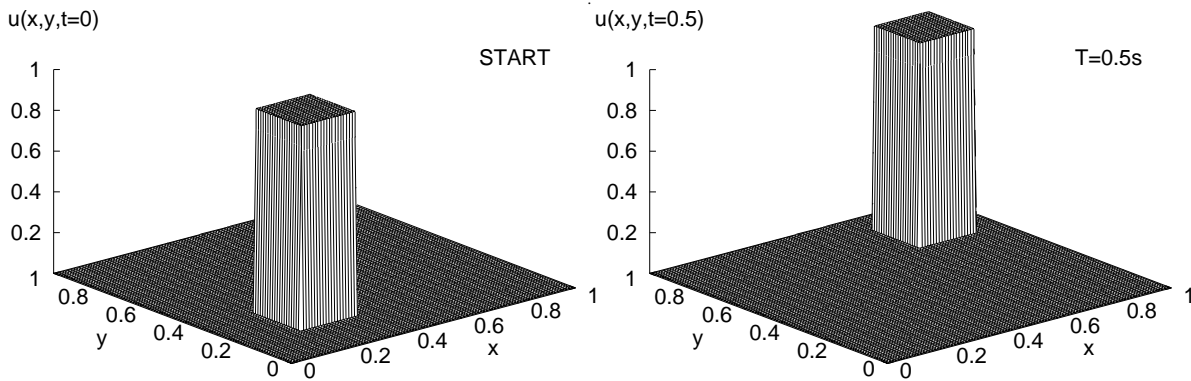


Abbildung 4.1: Test No.8: Anfangsprofil und Lösungsverlauf zum Zeitpunkt $t = 0.5s$.

auf dieses Gebiet beschränkt werden. An beiden Einströmrändern werden dabei triviale Randbedingungen spezifiziert:

$$u(0, y, t) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (4.20)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \quad (4.21)$$

Das Startprofil der Lösung sowie deren Verlauf zum Zeitpunkt $t = 0.5$ ist in der Abb. 4.1 dargestellt. In der Abbildung 4.2 sind die auf einer Maschenweite $\Delta x = \Delta y = 0.01$ berechneten Lösungen für 8 Verfahren gegenübergestellt. Der Vorteil der limitierten Verfahren ist eindeutig zu erkennen. Die UPWIND-Lösung leidet stark an numerischer Diffusion, so daß das Maximum der numerischen Lösung fast 30% unter dem Maximalwert der exakten Lösung liegt. Die CDS-, QUICK- und AGARWAL-Lösungen leiden dagegen an starken Oszillationen, wobei der Maximalwert zu hoch und der Minimalwert zu niedrig ausfällt. Alle vier TVD-Verfahren liefern dagegen oszillationsfreie Profile, wobei sowohl das Maximum als auch das Minimum der numerischen und der exakten Lösung übereinstimmen. Die MC-, L-QUICK- und L-AGARWAL-Verfahren produzieren dabei sehr ähnliche Ergebnisse. Die mit Abstand genaueste Lösung liefert allerdings der Superbee-Limiter, und zwar nicht nur auf dem hier dargestellten Gitter von 100×100 Stützstellen, sondern auch bei größeren Auflösungen, wie aus dem E - Δx -Diagramm (Abb. 4.3) ersichtlich ist (es wurde stets $\Delta x = \Delta y$ genommen). Das beschriebene Verhalten von allen 8 Verfahren sowie deren Reihenfolge in Bezug auf die Genauigkeit stimmen somit mit dem eindimensionalen Fall (Test No.2) vollständig überein.

Testbeispiel No.9. In diesem Testbeispiel wird der Fall einer *stetig differenzierbaren* Lösung untersucht. Die Anfangsbedingung sei durch folgende Funktion gegeben:

$$u_0(x, y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y). \quad (4.22)$$

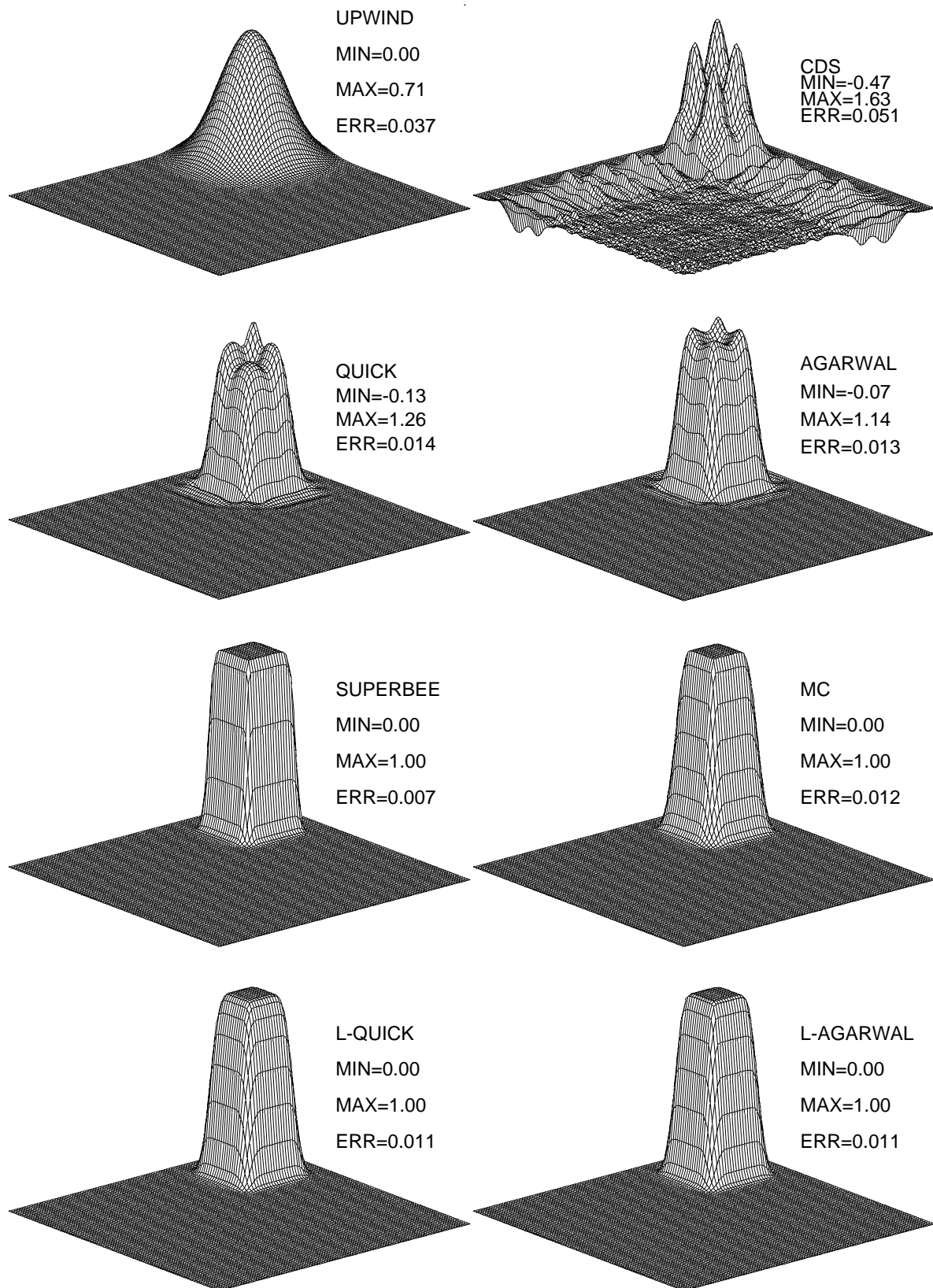


Abbildung 4.2: Test No.8: Lösungsverlauf zum Zeitpunkt $t = 0.5s$ auf einem Gitter $\Delta x = \Delta y = 0.01$ für 8 Verfahren.

TEST No.8: E-dx-Diagramm

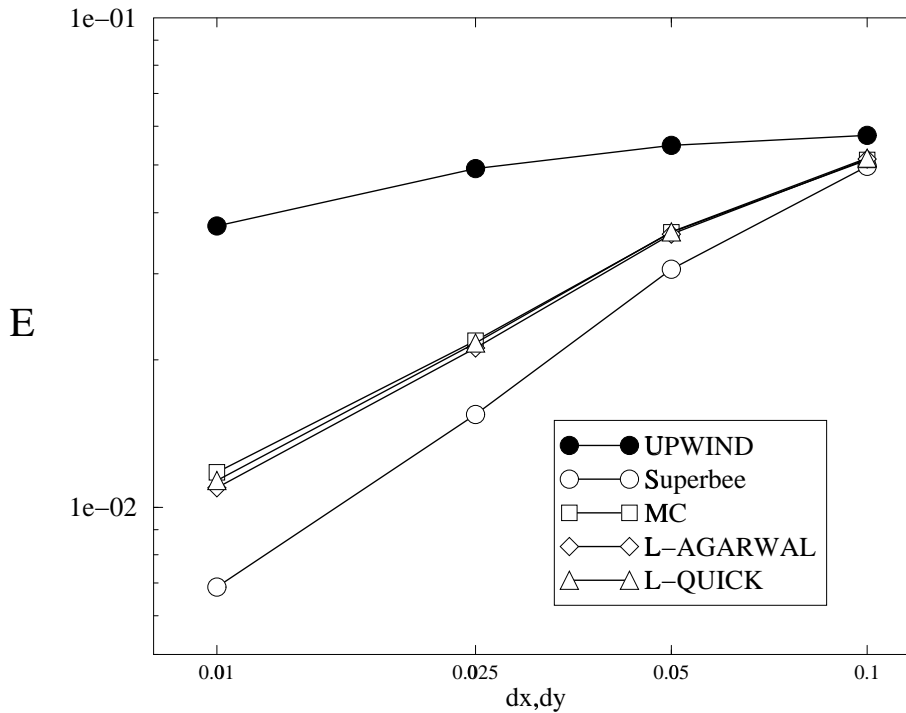


Abbildung 4.3: Test No.8: Vergleich von 4 Limitern untereinander.

Die analytische Lösung der Gleichung (4.14) lautet entsprechend

$$u(x, y, t) = \sin(2\pi(x - t)) \cdot \sin(2\pi(y - t)). \quad (4.23)$$

Sie ist periodisch bezüglich x , y und t und die Periode beträgt 1. Wir können uns somit bei der numerischen Berechnung der Lösung wieder auf das Quadrat $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ beschränken. Damit die Lösung eindeutig bestimmt ist, müssen noch die Randbedingungen an den Einströmrändern spezifiziert werden. Man kann dazu entweder die Werte der analytischen Lösung (4.23) am Rand einsetzen:

$$u(0, y, t) = -\sin(2\pi t) \cdot \sin(2\pi(y - t)), \quad y \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (4.24)$$

$$u(x, 0, t) = -\sin(2\pi t) \cdot \sin(2\pi(x - t)), \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (4.25)$$

oder periodische Randbedingungen verwenden:

$$u(0, y, t) = u(1, y, t), \quad y \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (4.26)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t), \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \quad (4.27)$$

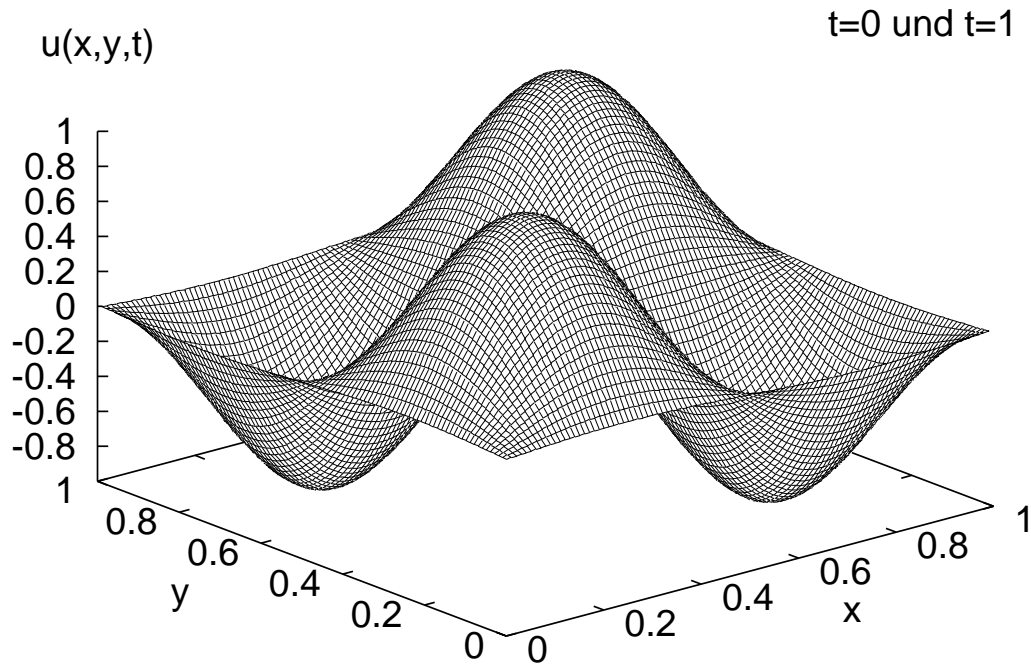


Abbildung 4.4: Test No.9: Anfangsprofil bzw. der Lösungsverlauf zum Zeitpunkt $t = 1$ s.

Aus mathematischer Sicht sind diese beiden Sätze von Randbedingungen äquivalent, da sie zu ein und derselben Lösung führen, die durch (4.23) definiert ist. Numerisch implementiert, führen sie jedoch zu unterschiedlichen Lösungen. Die physikalischen Randbedingungen (4.24, 4.25) führen zu numerischen Randbedingungen:

$$U_{0j} = -\sin(2\pi t_{n+1}) \cdot \sin(2\pi(y_j - t_{n+1})), \quad j = \overline{0, N} \quad (4.28)$$

$$U_{i0} = -\sin(2\pi t_{n+1}) \cdot \sin(2\pi(x_i - t_{n+1})), \quad i = \overline{0, N}. \quad (4.29)$$

Damit stimmen die analytische und die numerische Lösung an Einströmrandern zu allen Zeitpunkten genau überein, wodurch die Genauigkeit der numerischen Lösung im Inneren des Berechnungsgebietes über längere Zeit erhalten bleibt.

Die periodischen physikalischen Randbedingungen (4.26, 4.27) führen entsprechend zu periodischen numerischen Randbedingungen:

$$U_{0j} = U_{Nj}, \quad j = \overline{0, N} \quad (4.30)$$

$$U_{i0} = U_{iN}, \quad i = \overline{0, N}. \quad (4.31)$$

Damit werden die numerischen Fehler, die am Ausströmrand entstehen, über den Einströmrand wieder „eingeschleust“, was dazu führt, daß sich die numerischen Fehler im Inneren des Berechnungsgebietes über längere Zeit ansammeln können.

TEST No.9: E-dx-Diagramm

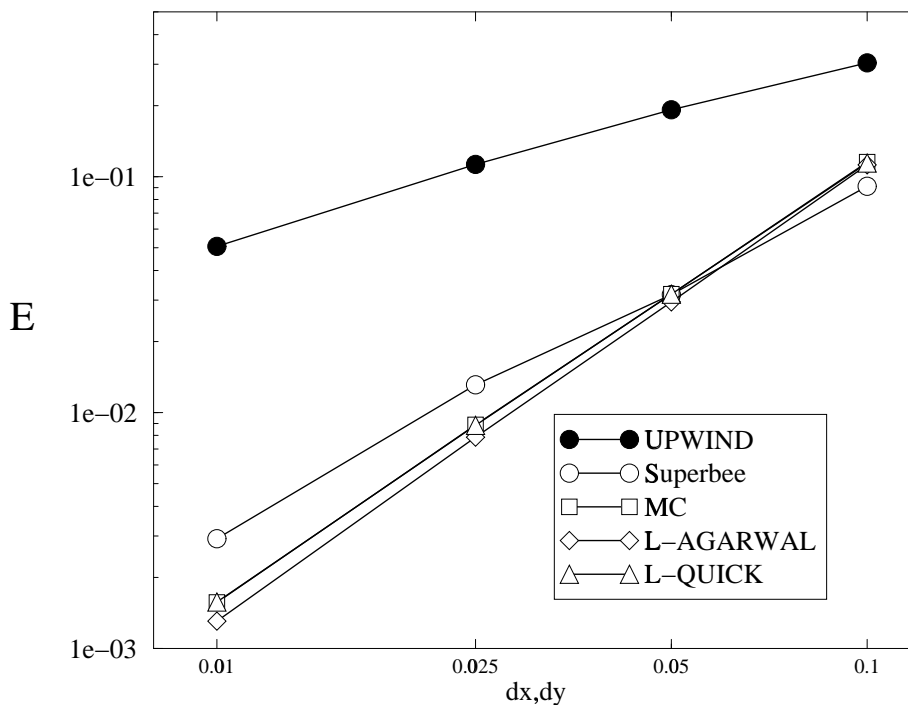


Abbildung 4.5: Test No.9: Vergleich von 4 Limitern untereinander.

Wir beginnen mit der Untersuchung der Randbedingungen (4.28, 4.29) und vergleichen die numerische und die exakte Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$. Zu diesem Zeitpunkt stimmt die exakte Lösung (4.23) mit der Anfangsbedingung (4.22) überein. Sie ist in Abb. 4.4 dargestellt. Auf die Darstellung der numerischen Lösungen werden wir diesmal verzichten, da diese bei allen untersuchten TVD-Verfahren von der exakten Lösung visuell kaum zu unterscheiden ist. Stattdessen schauen wir uns die $E-\Delta x$ -Kurven für 4 untersuchten Limiter an (Abb. 4.5).

Man sieht, daß alle vier TVD-Verfahren wesentlich genauer als das UPWIND-Verfahren sind. Die nach (1.85) berechnete Approximation für die Konvergenzordnung der Verfahren beträgt 1.64 für Superbee, 1.88 für L-QUICK, 1.89 für MC und 1.96 für L-AGARWAL. Man kann davon ausgehen, daß auf feineren Gittern die Konvergenzordnung von 2 erreicht wird. Das MC- und das L-QUICK-Verfahren haben fast identische $E-\Delta x$ -Kurven, L-AGARWAL ist nur unwesentlich genauer (maximal 20% auf dem feinsten der untersuchten Gitter). Das Verhalten des Superbee-Limiters ist typisch für die glatten Lösungsfunktionen. Auf dem größten Gitter liefert das Verfahren die genauesten Lösungen, danach wird die Konvergenz durch die Antidiffusion des Verfahrens stark beeinträchtigt. Entscheidend ist jedoch, daß auch dieses Verfahren eine höhere Konvergenzordnung als UPWIND hat, und gleichzeitig

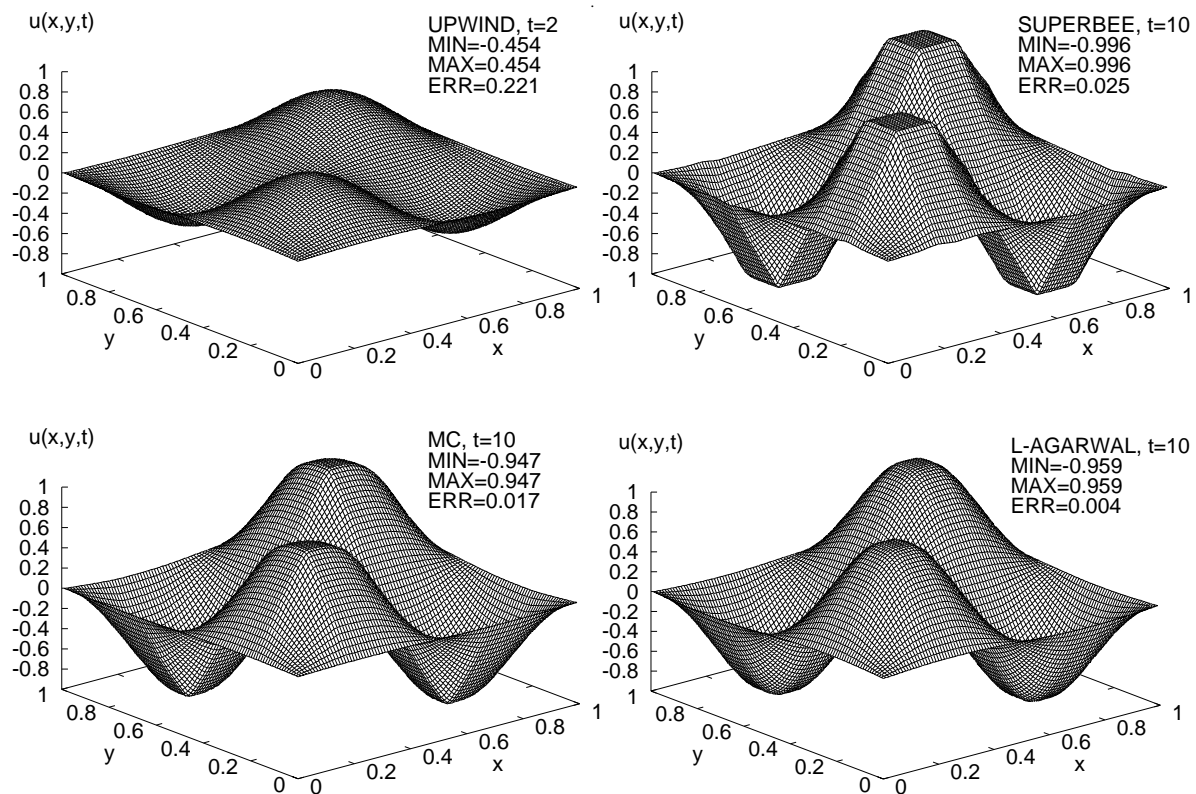


Abbildung 4.6: Test No.9: Lösungsverlauf zum Zeitpunkt $t = 2s$ (UPWIND) bzw. $t = 10s$ (TVD-Verfahren) auf einem Gitter $\Delta x = \Delta y = 0.01$.

an keinen Oszillationen (im Gegensatz zu allen linearen Verfahren höherer Ordnung) leidet.

Nun wenden wir uns dem Fall periodischer Randbedingungen (4.30, 4.31) zu. Wie oben bereits erwähnt, ist dieser Fall sehr gut dafür geeignet, um das Langzeitverhalten unterschiedlicher Diskretisierungen zu untersuchen. Wir wählen dazu den Zeitpunkt $t = 10s$. Auch zu diesem Zeitpunkt stimmt die exakte Lösung der Konvektionsgleichung mit der Anfangsbedingung (4.22) überein, die in der Abb. 4.4 dargestellt wurde.

Beim Einsatz des UPWIND-Verfahrens hat die numerische Lösung zu diesem Zeitpunkt einen sehr flachen Verlauf, so daß auf die Darstellung der Lösung zum Zeitpunkt $t = 10s$ verzichtet werden kann. In Abb. 4.6 (oben, links) wird stattdessen die UPWIND-Lösung zum Zeitpunkt $t = 2s$ dargestellt. Bereits zu diesem Zeitpunkt hat die Lösung eine mehr als 50% kleinere Amplitude als die exakte Lösung der Gleichung, was auf den starken Einfluß der numerischen Diffusion zurückzuführen ist. Zum Zeitpunkt $t = 10s$ hat die numerische Lösung eine Amplitude von lediglich 0.012, weniger als 2% des Soll-Wertes.

In der Abbildung 4.6 (oben, rechts) ist die mit Superbee-Verfahren berechnete Lösung dargestellt. Im Gegensatz zur UPWIND-Lösung leidet die Superbee-Lösung nicht an einer

Abflachung, sondern an einer Aufsteilung. Das ist dem bereits im 1-D Fall diskutierten antidiffusiven Charakter des Superbee-Limiters zu verdanken. Obwohl die glatten Flächen steiler werden, schießen sie nicht über die zulässigen Grenzen hinaus, so daß die Minimum- und Maximumwerte der exakten Lösung nicht überschritten werden. Obwohl die Superbee-Lösung etwas eckig und unnatürlich wirkt, hat sie zum Zeitpunkt $t = 10s$ eine fast 10fach höhere Genauigkeit, als die UPWIND-Lösung nach nur 2 Sekunden Echtzeit.

Auch die mit MC-Limiter berechnete Lösung leidet an der numerischen Antidiffusion, im Vergleich zur Superbee-Lösung sieht sie jedoch wesentlich glatter aus. Der numerische Fehler wird allerdings nur um 33% im Vergleich zur Superbee-Lösung reduziert. Die mit Abstand genaueste Lösung liefert das L-AGARWAL-Verfahren. Das Lösungsprofil wirkt sehr glatt, der numerische Fehler geht um Faktor 4 (!) zurück im Vergleich zur MC-Lösung.

Zusammenfassung. Bei der Lösung der zweidimensionalen Konvektionsgleichung mit konstanten Geschwindigkeiten liefern alle TVD-Verfahren sowohl im Falle einer diskontinuierlichen als auch im Falle einer glatten Lösungsfunktion sehr genaue Lösungsprofile, die keinerlei unphysikalische Oszillationen aufweisen.

4.3 Fall einer variablen Konvektionsgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten von unterschiedlichen Diskretisierungsverfahren an einem Testbeispiel für den Fall einer variablen Konvektionsgeschwindigkeit untersuchen. Ein sehr beliebtes Beispiel einer variablen Geschwindigkeit ist ein rotierendes Strömungsfeld:

$$a(x, y) = -(y - y_0), \quad (4.32)$$

$$b(x, y) = (x - x_0). \quad (4.33)$$

Das Koordinatenpaar (x_0, y_0) beschreibt den Mittelpunkt der Rotation, so daß diesem Strömungsfeld ein um den Punkt (x_0, y_0) rotierendes Lösungsprofil entspricht. Man nennt diese Testaufgabe deshalb oft *Festkörperrotationsproblem* („solid body rotation“).

Wir werden uns bei der numerischen Berechnung wieder auf das quadratische Berechnungsgebiet $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ beschränken und wählen deshalb den Punkt $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ als Rotationszentrum.

Als Startprofil $u_0(x, y)$ nehmen wir eine Funktion, die von *LeVeque* [78] vorgeschlagen wurde und deren Profil in der Abbildung 4.7 graphisch dargestellt ist (**Test No.10**). Das Lösungsprofil beschreibt drei „Festkörper“: eine Scheibe mit einem Schlitz, einen Kegel

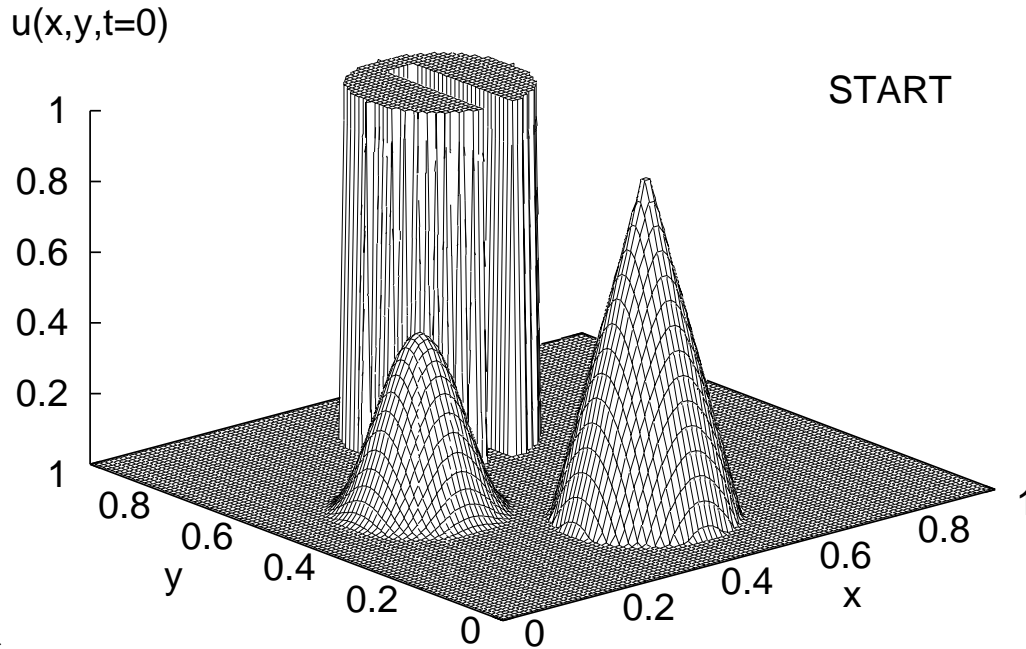


Abbildung 4.7: Test No.10: Startprofil nach *LeVeque* [78].

und einen glatten Buckel. Dieser Festkörpersatz macht eine volle Umdrehung innerhalb von 2π Sekunden, so daß die Lösung der Konvektionsgleichung zu den Zeitpunkten

$$t = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$$

mit dem Startprofil übereinstimmt.

In der Abbildung 4.8 sind die Lösungsprofile, berechnet mit UPWIND sowie 3 TVD-Verfahren, nach einer bzw. zehn vollen Umdrehungen dargestellt. Man sieht, daß die UPWIND-Lösung bereits nach einer Umdrehung keine Ähnlichkeit mit dem Startprofil hat, und nach 10 Umdrehungen fast vollständig über die Ränder des Berechnungsgebietes wegdiffundiert ist. Dagegen liefern alle 3 TVD-Verfahren sehr genaue Lösungen nach einer Umdrehung. Die MC- und L-ARAGWAL-Profile sind ziemlich ähnlich und weisen fast gleiche Genauigkeit auf. Die Superbee-Lösung hat eine fast doppelt so hohe Genauigkeit, die vor allem aus der besseren Auflösung der Scheibe resultiert. Nach 10 Umdrehungen ist Superbee das einzige Verfahren, bei dem der Schlitz in der Scheibe noch deutlich zu erkennen ist. Dafür sind der Kegel und der Buckel bei den beiden anderen Verfahren viel besser aufgelöst, während beim Superbee-Verfahren diese beiden Teile der Lösung infolge der Antidiffusion fast senkrechte Seitenflächen bekommen. Entscheidend ist, daß auch in diesem Testfall eine dem UPWIND-Verfahren deutlich überlegene Genauigkeit aller TVD-Diskretisierungen nicht auf Kosten eines unphysikalischen Verhaltens der Lösung erzielt wird.

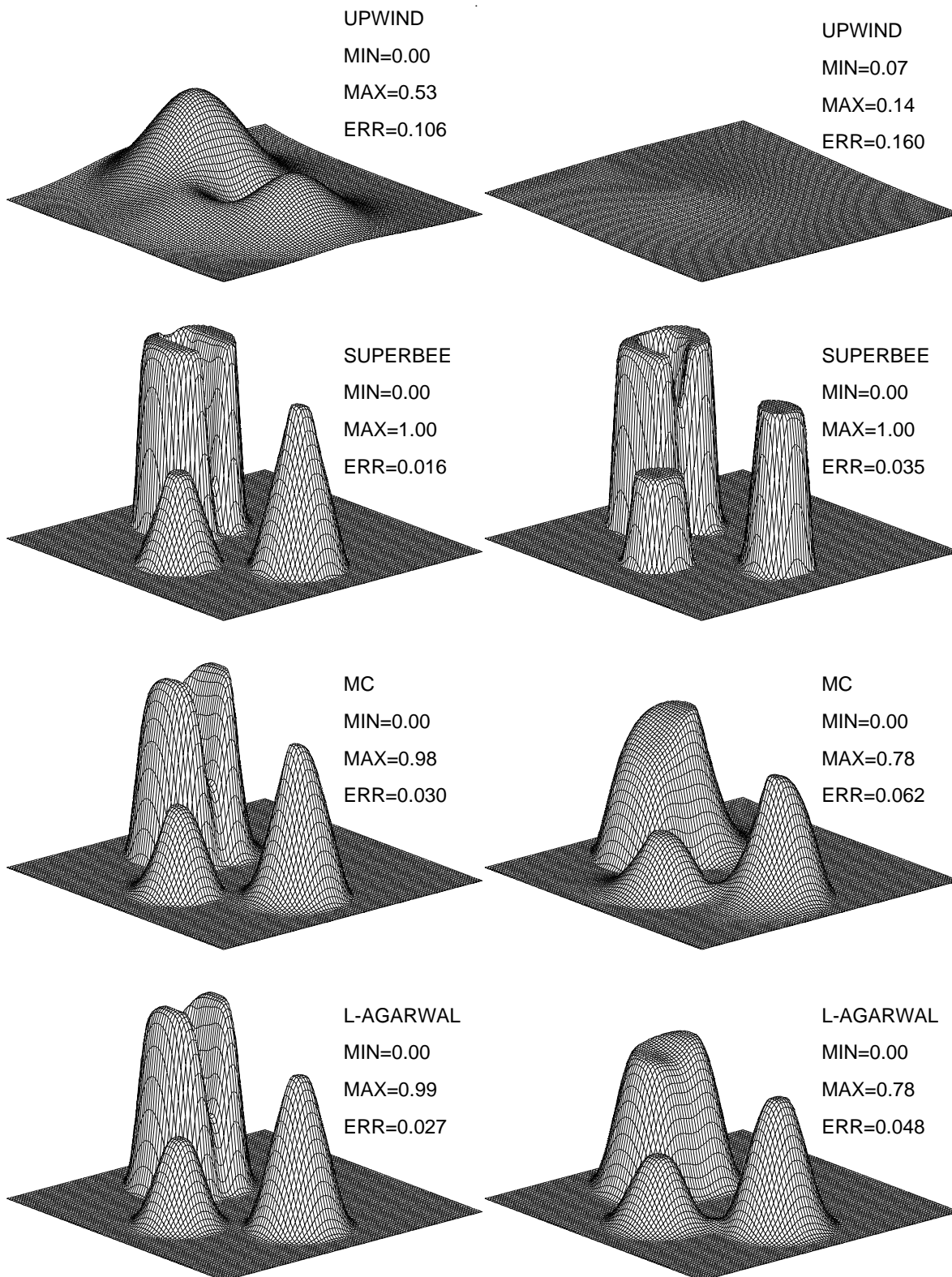


Abbildung 4.8: Test No.10: Lösungsverlauf nach 1 (links) und 10 (rechts) Umdrehungen auf einem Gitter $\Delta x = \Delta y = 0.01$ für 4 Verfahren.

4.4 Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Besonderheiten eingehen, die mit der Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen verbunden sind. Wir beschränken uns dabei wiederum auf den zweidimensionalen Fall und setzen außerdem voraus, daß die Strömung inkompressibel ist. Die letzte Annahme ist für die Konstruktion des Verfahrens nicht entscheidend, sie macht jedoch die Analogie zur zweidimensionalen Konvektionsgleichung, die wir später ausnutzen werden, mehr transparent.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine vektorielle Gleichung, so daß man im 2-D Fall zwei skalare Gleichungen berücksichtigen muß – je eine Gleichung pro Koordinatenrichtung. Da beide Gleichungen ähnlich sind, beschränken wir uns auf die Beschreibung der Erhaltungsgleichung der Fluidgeschwindigkeit in x -Richtung. Bezeichnet man diese wie üblich mit u , die y -Geschwindigkeit mit v , die Dichte mit ϱ und den Druck mit p , so lautet die x -Impulsbilanz in der konservativen Form

$$(\varrho u)_t = -p_x - (\varrho u^2 - \mu u_x)_x - (\varrho uv - \mu u_y)_y + \varrho g^x \quad (4.34)$$

Hier bezeichnet g^x - die x -Komponente der Erdbeschleunigung, und μ - die dynamische Viskosität des Fluids. Wir teilen alle Terme dieser Gleichung durch die als konstant angenommene Dichte, und bringen die Konvektionsterme auf die linke Seite:

$$u_t + (u^2)_x + (uv)_y = -\frac{1}{\varrho} p_x + \nu u_{xx} + \nu u_{yy} + g^x. \quad (4.35)$$

Hier bezeichnet ν die (als konstant angenommene) kinematische Viskosität des Fluids.

Für die Herleitung der Finite-Volumen-Formulierung nehmen wir an, daß das zweidimensionale numerische Gitter, auf dem die Gitterfunktion $U_{i,j}$ definiert ist, genau so wie im Abschnitt 4.1 festgelegt wird. Dabei kann es sein, daß die (ebenfalls unbekannt) Approximationen — $P_{i,j}$ für den Druck und $V_{i,j}$ für die y -Geschwindigkeit — auf anderen, versetzten, Gittern definiert sind. Zum jetzigen Zeitpunkt spielt dies jedoch noch keine Rolle.

Die Finite-Volumen-Formulierung wird hergeleitet, indem man die Gleichung (4.35) über das Kontrollvolumen $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ sowie über das Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ integriert und durch $\Delta x \Delta y \Delta t$ dividiert. Die Behandlung des Drucktermes, der diffusiven Terme und des Quelltermes auf der rechten Seite der Gleichung stellt dabei keine Schwierigkeiten dar. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf das klassische Buch von Patankar [93] und beschränken uns auf die Behandlung der Terme auf der linken Seite der Gleichung (4.35). Wir setzen daher die rechte Seite gleich Null und schreiben die resultierende Gleichung

chung folgendermaßen um, wobei der Term u^2 explizit in zwei Faktoren aufgespalten wird:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x, y, t) \cdot u(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y}(v(x, y, t) \cdot u(x, y, t)) = 0. \quad (4.36)$$

Ein direkter Vergleich dieser Gleichung mit der zweidimensionalen Konvektionsgleichung (4.1) zeigt, daß der einzige Unterschied zwischen diesen Gleichungen darin besteht, daß die Gleichung (4.36) an Stelle von bekannten Konvektionsgeschwindigkeiten $a(x, y)$ und $b(x, y)$ diesmal unbekannte Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y, t)$ und $v(x, y, t)$ enthält. Die resultierende Finite-Volumen-Formulierung stimmt daher mit der Gleichung (4.3) *komplett* überein, wobei die numerischen Konvektionsströme

$$F(U; i - 1/2, j) \quad \text{und} \quad G(U; i, j - 1/2)$$

diesmal nicht die Größen

$$(aU)_{i-1/2, j} \quad \text{und} \quad (bU)_{i, j-1/2},$$

sondern die nichtlinearen Ausdrücke

$$(U \cdot U)_{i-1/2, j} \quad \text{und} \quad (V \cdot U)_{i, j-1/2} \quad (4.37)$$

approximieren.

Im Abschnitt 3.4 vorigen Kapitels wurde das Splitting-Verfahren für die Burger-Gleichung präsentiert. Dieses Verfahren behandelt die linearen und nichtlinearen Konvektionsströme völlig analog, so daß die Approximationsausdrücke für die linearen Konvektionsströme durch eine leichte Modifikation an den Fall der nichtlinearen Ströme angepaßt werden können. Wir setzen nun das Splitting-Verfahren auch für die Diskretisierung der Gleichung (4.36) ein. Das bedeutet, daß die Approximationsausdrücke (4.6 - 4.13) auch für die Terme (4.37) eingesetzt werden können, wenn die Größen a_l und b_u so umdefiniert werden, daß sie die Geschwindigkeiten $U(x_{i-1/2}, y_j)$ und $V(x_i, y_{j-1/2})$ approximieren.

Bei der Definition von a_l verwenden wir die lineare Interpolation zwischen den Stellen (x_{i-1}, y_j) und (x_i, y_j) :

$$a_l = U(x_{i-1/2}, y_j) = \frac{1}{2}(U_{i-1, j} + U_{i, j}).$$

Die Approximationsformel für $V(x_i, y_{j-1/2})$ hängt davon ab, ob man eine versetzte oder eine nichtversetzte Variablenanordnung verwendet. Bei einer nicht-versetzten Variablenanordnung ist die Gitterfunktion $V_{i, j}$ an denselben Stellen wie die Gitterfunktion $U_{i, j}$ definiert. Man verwendet dann eine lineare Interpolation zwischen den Stellen (x_i, y_{j-1}) und (x_i, y_j) :

$$b_u = V(x_i, y_{j-1/2}) = \frac{1}{2}(V_{i, j-1} + V_{i, j}).$$

Bei einer versetzten Variablenanordnung nach *Harlow und Welch* [38] ist die Gitterfunktion $V_{i,j}$ in den Eckpunkten des U -Kontrollvolumens definiert. Man verwendet dann für die Approximation von $V(x_i, y_{j-1/2})$ eine lineare Interpolation zwischen den Stellen $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ und $(x_{i+1/2}, y_{j-1/2})$.

Bei der Besprechung des Splitting-Verfahrens für die Burger-Gleichung wurde erwähnt, daß sein wichtigster Vorteil eine relativ einfache und für alle (linearen sowie nichtlinearen) Gleichungen einheitliche Implementierung ist. Gleichzeitig wurde darauf hingewiesen, daß obwohl der Einsatz von Limiter-Funktionen im Rahmen eines Splitting-Verfahrens auf einer Analogie zu Slope-Limiter-Verfahren beruht, das resultierende Verfahren jedoch die TVD-Eigenschaft nicht besitzt. Das als QTVD (quasi-TVD) getaufte Verfahren führte im Test No.7 zwar zu deutlich besseren Ergebnissen als die nichtlimitierten Verfahren zweiter Ordnung, eine vollständige Eliminierung der Oszillationen wurde jedoch nicht festgestellt. Im Test No.7 handelte es sich allerdings um eine diskontinuierliche Lösungsfunktion. Wir wollen nun das QTVD-Verfahren an einem Beispiel testen, bei welchem die Lösung keine Diskontinuitäten aufweist.

Als **Testfall No.11** untersuchen wir das sogenannte „*standing vortex problem*“. Das strömende Medium sei nichtviskos und das Berechnungsgebiet sei durch $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ gegeben. Die Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit sei durch ein axisymmetrisches rotierendes Strömungsfeld gegeben. Wir definieren das Geschwindigkeitsfeld in Polarkoordinaten (u_r, u_θ) :

$$u_r = 0,$$

$$u_\theta = \begin{cases} 5r, & \text{wenn } r < 0.2 \\ 2 - 5r, & \text{wenn } 0.2 \leq r \leq 0.4 \\ 0, & \text{wenn } r > 0.4 \end{cases}$$

wobei die Größe r folgendermaßen definiert ist

$$r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}.$$

Diese Anfangsbedingung für das Geschwindigkeitsfeld, dargestellt in Abb. 4.9, bildet gleichzeitig die stationäre Lösung des Problems. Die numerische Lösung sollte daher diese Anfangsverteilung möglichst genau beibehalten.

In Abb. 4.10 ist das Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt $t = 3s$, berechnet auf einem Gitter mit 65×65 Stützstellen mit dem UPWIND (links) und dem QTVD-L-AGARWAL-Verfahren (rechts), dargestellt. Infolge der numerischen Diffusion nimmt der Maximalwert der Geschwindigkeit in der UPWIND-Lösung auf 0.47 ab, bei der L-AGARWAL-Lösung

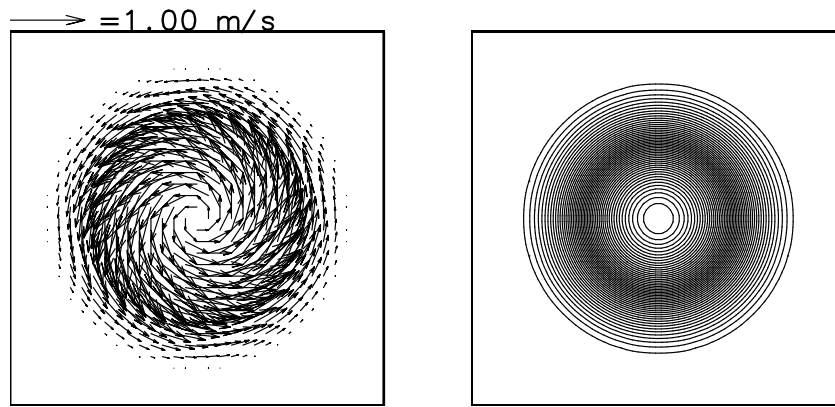


Abbildung 4.9: Test No.11: Das Flow-Map und die Stromlinien für das Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt $t = 0s$

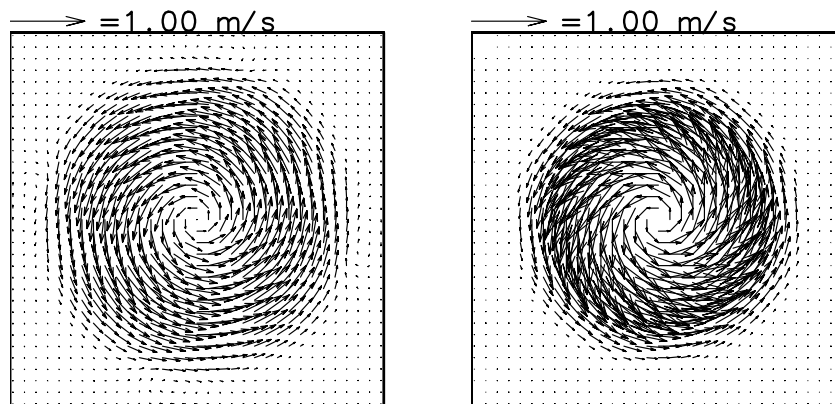


Abbildung 4.10: Test No.11: UPWIND und L-AGARWAL-Lösung zum Zeitpunkt $t = 3s$ als Flow-Map.

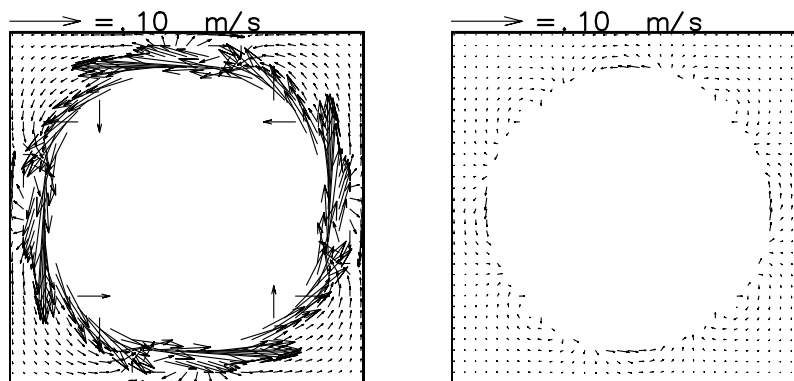


Abbildung 4.11: Test No.11: UPWIND und L-AGARWAL-Lösung zum Zeitpunkt $t = 3s$ als Flow-Map (vergrößert).

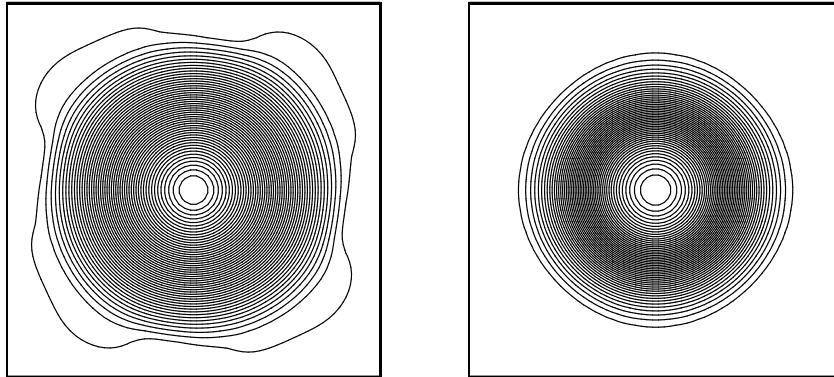


Abbildung 4.12: Test No.11: UPWIND und L-AGARWAL-Lösung zum Zeitpunkt $t = 3s$ als Stromlinien.

Test No.11: UPWIND vs. L-AGARWAL
Vertikale Geschwindigkeit auf der Höhe $y=0.5$

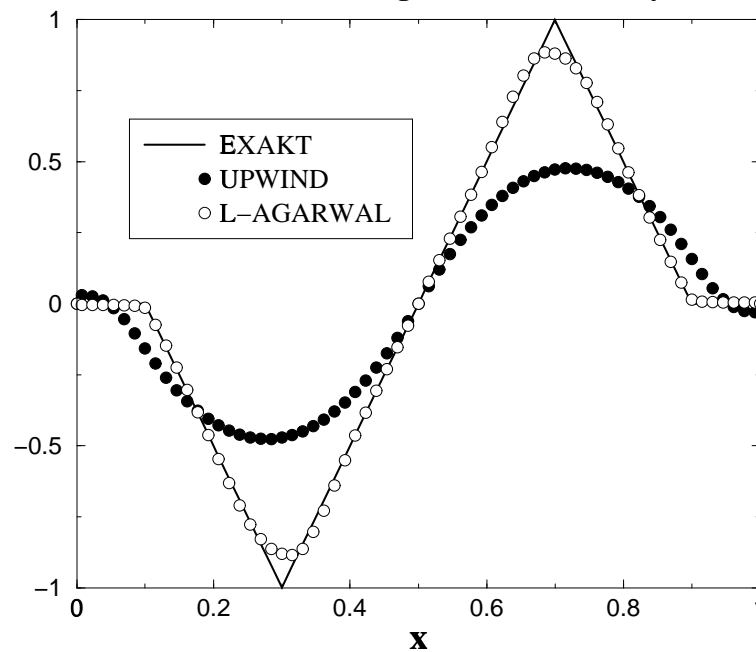


Abbildung 4.13: Test No.11: Vergleich der Lösungsprofile auf der Höhe $y = 0.5$.

beträgt der Maximalwert dagegen 0.88. Außerhalb des Kreises mit dem Radius 0.4 ist bei der exakten Lösung die Geschwindigkeit gleich Null. Die numerische Lösung ist infolge der Diskretisierungsfehler jedoch ungleich Null. In Abb. 4.11 sind die Geschwindigkeiten in diesem Bereich vergrößert dargestellt. Man sieht, daß auch hier die L-AGARWAL-Lösung wesentlich genauer als die UPWIND-Lösung ist. Auch das Stromliniendiagramm für die L-AGARWAL-Lösung (Abb. 4.12, rechts) zeigt wesentlich mehr Ähnlichkeit mit der exakten Lösung (Abb. 4.9), als im Falle der UPWIND-Lösung (Abb. 4.12, links).

In der Abb. 4.13 sind die Profile der vertikalen Geschwindigkeitskomponente auf der Höhe $y = 0.5$, berechnet mit beiden Verfahren, der exakten Lösung gegenübergestellt. Eine wesentlich höhere Genauigkeit des L-AGARWAL-Verfahrens ist deutlich zu erkennen. Entscheidend ist, daß das mit QTVD-Verfahren berechnete Profil keine unphysikalischen Oszillationen aufweist.

Mit diesem Abschnitt schließen wir unsere Ausführungen zur Diskretisierung von linearen und nichtlinearen Konvektionstermen bei ein- und mehrdimensionalen Problemen ab. Im letzten Kapitel des ersten Teils der Arbeit gehen wir noch kurz auf unterschiedliche Möglichkeiten der Zeitdiskretisierung unter dem Blickwinkel des TVD-Konzeptes ein.