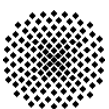


**Modellentwicklung und
numerische Analyse zweiphasig
geschichteter horizontaler
Strömungen**

Thomas Winterle



Modellentwicklung und numerische Analyse zweiphasig geschichteter horizontaler Strömungen

Von der Fakultät Maschinenbau der
Universität Stuttgart zur Erlangung der
Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Thomas Winterle

geboren in Stuttgart.

Hauptberichter:

Prof. Dr.-Ing. habil. E. Laurien

Mitberichter:

Prof. Dr.-Ing. T. Schulenberg

Tag der Einreichung:

10. November 2007

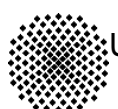
Tag der mündlichen Prüfung:

22. Februar 2008

ISSN – 0173 – 6892

März 2008

IKE 8 - 107



Dissertation (D93)
Institut für Kernenergetik und Energiesysteme
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 31
D-70569 Stuttgart

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Thermofluidodynamik des Institutes für Kernenergetik und Energiesysteme der Universität Stuttgart.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. E. Laurien, dem Leiter der Abteilung Thermofluidodynamik gilt mein besonderer Dank. Er gab den Anstoß zu diesem Forschungsprojekt und betreute es als Hauptberichter. Durch die anregenden wissenschaftlichen Diskussionen und sein umfangreiches Wissen auf verschiedenen Fachgebieten trug er maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei. An dieser Stelle möchte ich mich auch für die sehr kollegiale Arbeitsatmosphäre und die Einführung in das wissenschaftliche Arbeiten schon während meiner Studienzeit bedanken.

Dem Leiter des Institutes für Kern- und Energiesysteme des Forschungszentrums Karlsruhe, Herrn Prof. Dr.-Ing. T. Schulenberg, danke ich herzlich für die Übernahme des Mitberichters sowie für die Bereitstellung der Experimente aus der WENKA Versuchsanlage. Für die Durchführung dieser Experimente und anregenden Diskussionen zu den untersuchten Strömungsformen bedanke ich mich bei Dr.-Ing. Thomas Stäbler. Ohne diese Messergebnisse wäre die Durchführung dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Günter Lohnert, Ph.D. für die Möglichkeit, diese Arbeit an dem von ihm geleiteten Institut anzufertigen. Durch seine stets gezielten Fragen vermochte er es, den Blick immer wieder auf das Wesentliche zu richten.

Meinen Kollegen am Institut und besonders in der Abteilung Thermofluidodynamik sowie der Institutssekretärin Frau Maria Vencia danke ich für das sehr gute Arbeitsklima. Des Weiteren möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Stephan Schüle, Herrn Dipl.-Math. Holger Perfahl und bei Frau Tanja Kapoun bedanken.

Ganz besonders herzlich danke ich meinen Eltern, für Ihre uneingeschränkte Unterstützung in all meinen Lebenslagen und für ihren stets wertvollen Rat. Auch danke ich meinen Freunden für die vielen aufmunternden Worte und das Interesse an meiner Arbeit.

Stuttgart, im März 2008

Thomas Wintterle

Abstract

Counter-current horizontal stratified flows are relevant in many technical applications, e.g. in open channel flows or nuclear engineering. In detail the sub-, supercritical and partially reversed flow of water and air are investigated numerically in this work. Especially the supercritical and partially reversed flow plays an important role during the injection of coolant into the hot leg and covers a wide range of air and water mass flow rates. An ordinary differential equation which describes the interaction of the wavy surface, correlating the void fraction normal to the surface with the turbulent kinetic energy, is known. This differential equation is implemented as a diffusion force counterbalancing the buoyancy force to describe the momentum exchange normal to the surface. As a result the waves are described statistically represented by a smeared two phase layer.

The momentum exchange in horizontal direction is modelled by the interfacial friction factor taking account of the shear stress at the interface. The interfacial friction factor is assumed to be constant for small surface waves and is derived from the modelling approach of rough walls. From the derivation of the Two-Fluid equations it is shown that with the increase of waviness the turbulent shear stress becomes more and more relevant for the horizontal momentum exchange and has to be accounted by the interfacial friction factor.

The overall momentum exchange is summarised by the phase interaction model and is additionally correlated to local flow quantities like the turbulent kinetic energy. To close the phase exchange model, accurate turbulence modelling is necessary. The phase-averaging of the second moment leads to a two phase Reynolds Stress Transport equation with additional terms for production and diffusion at the interface. The influence of the interface on the additional terms is determined from the WENKA experiments. For modelling purposes of the phase exchange model only the trace of the two-phase Reynolds Stress Transport equations, which is known as the turbulent kinetic energy equation, is used. The numerical analyses for the sub-, supercritical and partially reversed flow leads to good results for the local velocity and turbulent kinetic energy. The pressure drop along the mean flow path of the air and the backflow ratio for partially reversed flow are integral quantities which agree closely with the experimental data, too. For hot leg injection the phase interaction model is compared with the known Upper Plenum Test Facility flooding correlation.

Übersicht

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die numerische Analyse von gegengerichteten horizontalen Wasser-Luft Strömungen. Im Besonderen werden die fließende, schießende und teilweise umgekehrte Strömung betrachtet. Diese Strömungsformen decken einen weiten Bereich an unterschiedlichen Wasser- und Luftmassenströmen ab und treten unter anderem bei der Einspeisung in den heißen Strang, wie dies bei einem Kühlmittelverluststörfall vorkommt, auf. Die verschiedenen Strömungsformen besitzen aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten an der Phasengrenze unterschiedlich stark angefachte und teilweise turbulente Wellenstrukturen. Aus der statistischen Betrachtung der auftretenden Wellen ist eine Differentialgleichung, welche den lokalen Gasgehaltsanteil mit der turbulenten kinetischen Energie korreliert, bekannt. Diese wird zur Beschreibung des Impulsaustausches normal zur freien Oberfläche verwendet und kann als Diffusionskraft interpretiert werden, die mit der Auftriebskraft im Gleichgewicht steht. Die einzelnen Wellen werden als Ergebnis durch einen verschmierten (diffusiven) Zweiphasenbereich beschrieben. Der Impulsaustausch in horizontaler Richtung wird an der Phasengrenze durch die wirkende Schubspannung unter Verwendung des Phasenreibungsbeiwertes berechnet. Der Phasenreibungsbeiwert wird für Strömungen mit kleiner Wellenamplitude als konstant angenommen und leitet sich aus der Modellvorstellung für raue Wände ab. Anhand der Zwei-Fluid Gleichungen wird gezeigt, dass mit zunehmender Welligkeit die turbulente Schubspannung für den Impulsaustausch an der Phasengrenze verantwortlich ist und im Phasenreibungsbeiwert berücksichtigt werden muss.

Der Impulsaustausch in horizontaler und vertikaler Richtung wird als Phasenwechselwirkungsmodell bezeichnet und basiert weiterhin auf lokalen Strömungsgrößen, wie z.B. der turbulenten kinetischen Energie. Durch Ableitung der zweiphasigen Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie entstehen aufgrund der Phasengrenze neue Terme, deren Einfluss mit Hilfe der WENKA Experimente bestimmt werden. Zur Schließung des Phasenwechselwirkungsmodells wird das $k-\epsilon$ und $k-\omega$ Turbulenzmodell auf zweiphasige Strömung erweitert. Die numerische Simulation der beschriebenen Modelle liefert gute Ergebnisse für die lokalen Größen wie Geschwindigkeit und turbulente kinetische Energie, wie auch für die integralen Größen, wie z.B. den Druckverlust der Luftphase und der Rückflussrate des Wassers bei teilweise umgekehrten Strömungen. Die Einspeisung in den heißen Strang wird anhand der aus den Upper Plenum Test Facility (UPTF) Experimenten gewonnenen Flutkorrelation untersucht.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	V
1 Einleitung	1
1.1 Technischer Hintergrund	1
1.2 WENKA Versuchsstand	4
1.3 Stand der Technik	6
1.3.1 Physikalische Vorgänge an der Phasengrenze	9
1.3.2 Modellierung der Zweiphasenströmung	12
1.3.3 Turbulenzmodellierung	15
1.4 Ziel und Aufbau der Arbeit	18
2 Mehrdimensionale Modellierung der horizontalen Strömung	21
2.1 Zwei-Fluid Modell	21
2.2 Das Phasenwechselwirkungsmodell	23
2.3 Turbulenzmodellierung	29
2.3.1 Prandtl'sches Mischungswegmodell	30
2.3.2 Transportmodelle	32
2.4 Lösung des Gleichungssystems	38
3 Simulationsergebnisse	41
3.1 Schießende Strömungen	43
3.1.1 Ergebnis für den Prandtl'schen Mischungsweg	44
3.1.2 Das $k-\epsilon$ und $k-\omega$ Modell	48
3.1.2.1 Wasserphase	49
3.1.2.2 Luftphase	53
3.1.2.3 Diagramme schießender Strömungen	55
3.2 Fließende Strömungen	63
3.2.1 Flüssige Phase	64
3.2.2 Luftphase	65
3.2.3 Diagramme fließender Strömungen	66
3.3 Teilweise umgekehrte Strömung	68
3.3.1 Flüssige Phase	68
3.3.2 Luftphase	75
3.3.3 Diagramme teilweise umgekehrter Strömungen	76
3.4 Vergleichende Betrachtungen der Strömungsformen	84
3.5 Numerische Analyse der Einspeisung in den heißen Strang	89

4 Zusammenfassung und Schlussfolgerung	97
Literaturverzeichnis.....	100
Anhang	108
A1 Das Zwei-Fluid Modell.....	108
A2 Herleitung des Prandtlschen Mischungsweges in Wandnähe	113
A3 Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen	115

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben:

a	-	Konstante des k - ω Modells
$a^{2\phi}$	-	Konstante des Turbulenzmodells
A	m^2	Querschnittsfläche
A	-	Konstante der Nachlauffunktion
B	-	Konstante der Nachlauffunktion
A_i	$1/m$	Phasengrenzflächendichte
c	m/s	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
C	N/m^2	Diffusionskonstante
C_D	-	Widerstandsbeiwert
$C_{\varepsilon 1}$	-	Konstante des k - ε Modells
$C_{\varepsilon 2}$	-	Konstante des k - ε Modells
C_μ	-	Konstante des k - ε Modells
d_{char}	m	charakteristische Länge
d_h	m	hydraulischer Durchmesser
F	N/m^3	Kraft in der Impulsgleichung
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
h	m	hydraulische Höhe
J	m/s	Leerrohrgeschwindigkeit
k	m^2/s^2	turbulente kinetische Energie
l	m	Mischungsweg
m	-	Wallis-Konstante
M^k	N/m^3	Impulsaustauschterm
$N(u_i)$		Navier-Stokes Operator
P	N/m^2	Druck
P_k	W/m	Turbulenzproduktionsterm
t	s	Zeit
Tu	-	Turbulenzgrad
Tu^*	-	Turbulenzgrad gebildet mit der lokalen Geschwindigkeit u
u	m/s	Geschwindigkeit
u_m	m/s	mittlere Geschwindigkeit

u^*	-	normierte Geschwindigkeit
u'_i	m/s	Schwankungsgeschwindigkeit
x	mm	Messposition im Kanal
y	m	kartesische Koordinate / Wandabstand
y_E	mm	Wassereinlasshöhe
y^*	-	normierter Wandabstand
y_m	-	mittlere flüssige Schichtdicke bei $\alpha_G=0.5$

Griechische Buchstaben:

α_k	-	Gasvolumenanteil
β, β'	-	Konstanten des k- ω Modells
ε	N/s	Turbulente Dissipation
ε_k	-	Phasenindikatorfunktion
Φ_k		skalare oder vektorielle Zustandsgröße
Γ^k	kg/m ³ s	Massenaustauschterm
κ		von Karman Konstante
λ_i	-	Phasenreibungsbeiwert
μ	kg/ms	Dynamische Viskosität
μ_t	kg/ms	Wirbelviskosität
ν	m ² /s	Kinematische Viskosität
ρ	kg/m ³	Dichte
ρ^*	kg/m ³	Gemischdichte
σ_k	-	Konstante der Transportgleichung k
σ_ε	-	Konstante des k- ε Modells
σ_w	-	Konstante des k- ω Modells
\mathcal{G}	s	Zeit
σ	N/m	Oberflächenspannung
τ_{ij}	N/m ²	Schubspannung
ω	s	Turbulente Dissipation; Wirbelfrequenz

Indizes:

+	Wandeinheiten
A	Auftriebskraft
D	Widerstandskraft
Diff	Diffusionskraft
G	Gas
HJ	Hydraulischer Sprung
i	Phasengrenze

ip	Integrationspunkt
i,j,k	Indizes der drei kartesischen Raumrichtungen
k	Phasenindizierung
L	Wasser
Re	Reynoldsschubspannungen

Dimensionslose Kennzahlen:

Fr	$u / \sqrt{g \cdot h}$	Froude-Zahl
Ma	u / a	Mach-Zahl
Re	$u \cdot d_h / \nu$	Reynolds-Zahl
We	$\rho_L \cdot v^2 \cdot d_H / \sigma$	Weber-Zahl
Tu	$\sqrt{2/3} \cdot k / u$	Turbulenzgrad

Abkürzungen:

ECCS	Emergency Core Cooling System (Notkühlsystem)
LOCA	Loss of Coolant Accident (Kühlmittelverluststörfall)
LR	Wasserlieferungsrate
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes Equations
UPTF	Upper Plenum Test Facility

1 Einleitung

1.1 Technischer Hintergrund

Mehrphasenströmungen treten in der Technik in den vielfältigsten Anwendungen auf, so auch z.B. in der Verfahrens- und Energietechnik. Im Vergleich zu einphasigen Strömungen handelt es sich bei den Mehrphasenströmungen um ein relativ neues Forschungsgebiet. Seit Mitte des letzten Jahrhunderts nahm die Relevanz für technische Anwendung stetig zu und es gibt bis heute unzählige offene Fragestellungen. Auftretende Mehrphasenströmungen in der Energietechnik setzen sich häufig aus einer Wasser- und Wasserdampfphase zusammen und dienen als Transportmedium, um elektrische Energie mittels thermischen Kraftprozessen zu erzeugen. In der Kernenergie gibt es zwei grundsätzliche Verfahren der Wärmeabfuhr aus dem Reaktorkern: Zum einen gibt es die direkte Verdampfung des Wassers im Reaktorkern und den direkt daran angeschlossenen Turbinensatz. Dieser Typ von Kernreaktor wird als Siedewasserreaktor bezeichnet. Wird die Wärme unter hohem Druck aus dem Reaktorkern abgeführt, entfällt die Dampfbildung im Kern. Dieses Reaktorkonzept wird als Druckwasserreaktor bezeichnet. Zur Erzeugung von Dampf wird im Gegensatz zum Siedewasserreaktor ein zusätzlicher Kreislauf benötigt. Deshalb wird bei Druckwasserreaktoren der Kreislauf in einen primären und sekundären unterteilt. Im Vergleich zu konventionellen Kraftwerken besitzen Kernreaktoren im Falle eines Kühlmittelverluststörfalles ein so genanntes Notkühlssystem, um die entstehende Nachzerfallswärme sicher abführen zu können. Damit kann ein Schmelzen des Kerns und eine eventuelle Proliferation von Radioaktivität verhindert werden. Der Kühlmittelverluststörfall wird in der Literatur als LOCA (Loss of Coolant Accident) und das zugehörige Notkühlssystem als ECCS (Emergency Core Cooling System) bezeichnet. Die Notkühlung unterteilt sich bei Druckwasserreaktoren in drei zeitlich unterschiedlich ablaufende Phasen: Zuerst setzt die Hochdruckeinspeisung ein, danach erfolgt die Niederdruckeinspeisung und zuletzt findet aus dem Containmentsumpf eine Rezirkulationseinspeisung bei niedrigem Druck statt. Hierbei werden in allen drei Phasen der Notkühlung große Mengen an Kühlmittel in den Kern befördert, um eine eventuelle Freilegung zu verhindern.

Das Kühlmittel kann während der Niederdruckeinspeisung in den heißen Strang über einen Notkühleinlass, die Hutze, eingespeist werden. Diese Form der Einspeisung wird unter anderem dann gewählt,

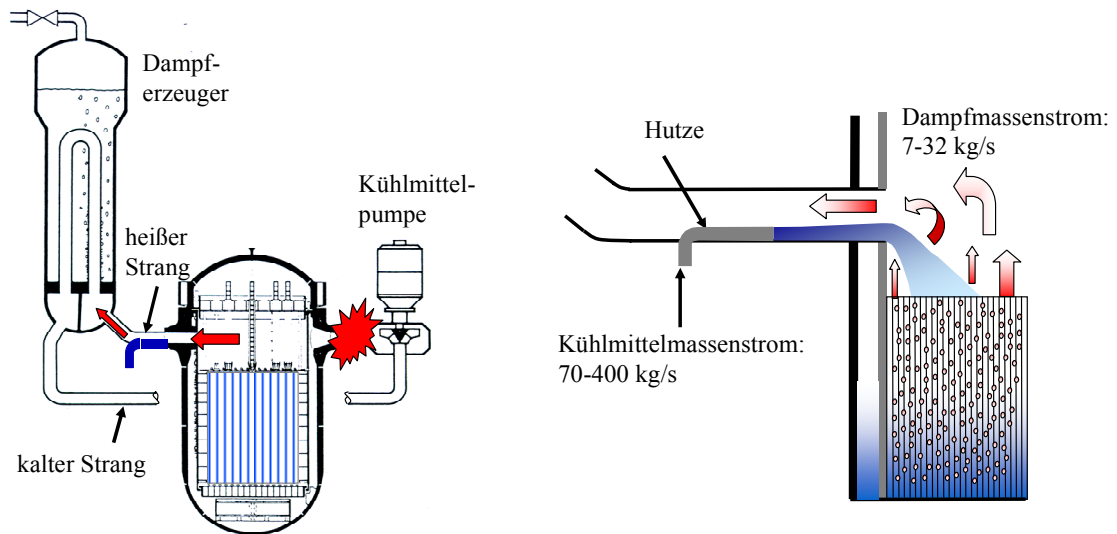


Abbildung 1.1: Einspeisung von Kühlmittel in den heißen Strang während eines Leckstörfalls.

wenn es zu einem großen und schnellen Kühlmittelverlust, z.B. durch einen Bruch einer Hauptkühlmittelleitung, kommt. Hierbei fällt der Druck im Reaktordruckbehälter schlagartig ab, so dass Dampf entsteht, der im freien Gegenstrom mit dem eingespeisten Kühlmittel strömt (siehe Abbildung 1.1). Der heiße Strang hat einen Durchmesser von 750 mm, an dessen Boden die Hutze mit einem Radius von 160 mm angebracht ist. Wie aus Abbildung 1.1 ersichtlich, variiert der eingespeiste Kühlmittelstrom zwischen 70-400 kg/s. Der Dampf strömt dabei im Gegenstrom mit 7-32 kg/s in den heißen Strang ein. Aus konstruktiven Gründen strömt das eingespeiste Kühlmittel und der Dampf 1,5 m lang im freien Gegenstrom. Aufgrund der Phasenreibung zwischen dem Kühlmittel und dem Dampf kann es bei höheren Dampfmassenströmen zu einem Mitriss von Kühlmittel kommen. Dieses Phänomen wird als Fluten bezeichnet [87]. Das Einsetzen des Flutens reduziert den Lieferungsgrad von kaltem Fluid und ist entscheidend, ob die Kühlung des Kerns möglich ist. Je nach Massenstrom des Dampfes kann sich eine teilweise oder totale Strömungsumkehr einstellen. Bei geringen Dampfmassenströmen stellt sich eine fließende oder schießende Strömung des Kühlmittels ein. Schießende und fließende Strömungen werden durch die Froude Zahl (Fr) charakterisiert und wurden zuerst detailliert für offene Gerinne untersucht [9].

$$Fr = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}} \quad (1.1)$$

Dabei stellt die Froude Zahl das Verhältnis zwischen Trägheitskräften und Schwerkraft dar. Sie wird aber auch häufig in Analogie zur Mach-Zahl als Fließgeschwindigkeit zu Wellenausbreitungsgeschwindigkeit interpretiert. v ist die Fließgeschwindigkeit, c die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit und h der hydraulische Durchmesser. Dieser entspricht für horizontal geschichtete Kanalströmungen der hydraulischen Wassertiefe. Wie aus Gleichung (1.1) zu erkennen ist, nimmt die Froude Zahl mit steigender hydraulischer Tiefe ab und hat bei eins einen Übergang in eine fließende Strömung. Dieser Übergang wird als hydraulischer Sprung bezeichnet. In Abbildung 1.2 sind die schießende Strömung (a), die fließende Strömung (b) und der hydraulische Sprung (c) dargestellt.

Wird die Fr-Zahl mit der Dichte ρ erweitert, ist das Ergebnis das Verhältnis aus dynamischem Druck zu statischem Druck. An der Phasengrenze, als auch an der Rohrwand, ergeben sich durch die Fließgeschwindigkeit Reibungskräfte, die nach der allgemeinen Rohrreibungstheorie ([74],[76]) zu einem Druckverlust führen. Dieser Druckverlust führt zu einer Reduzierung des dynamischen Druckes und folglich zu einer Verringerung der Fr-Zahl. Da im gleichen Zug die Massenerhaltung gewährleistet sein muss, kommt es für schießende Strömungen zu einer Zunahme der hydraulischen Tiefe h .

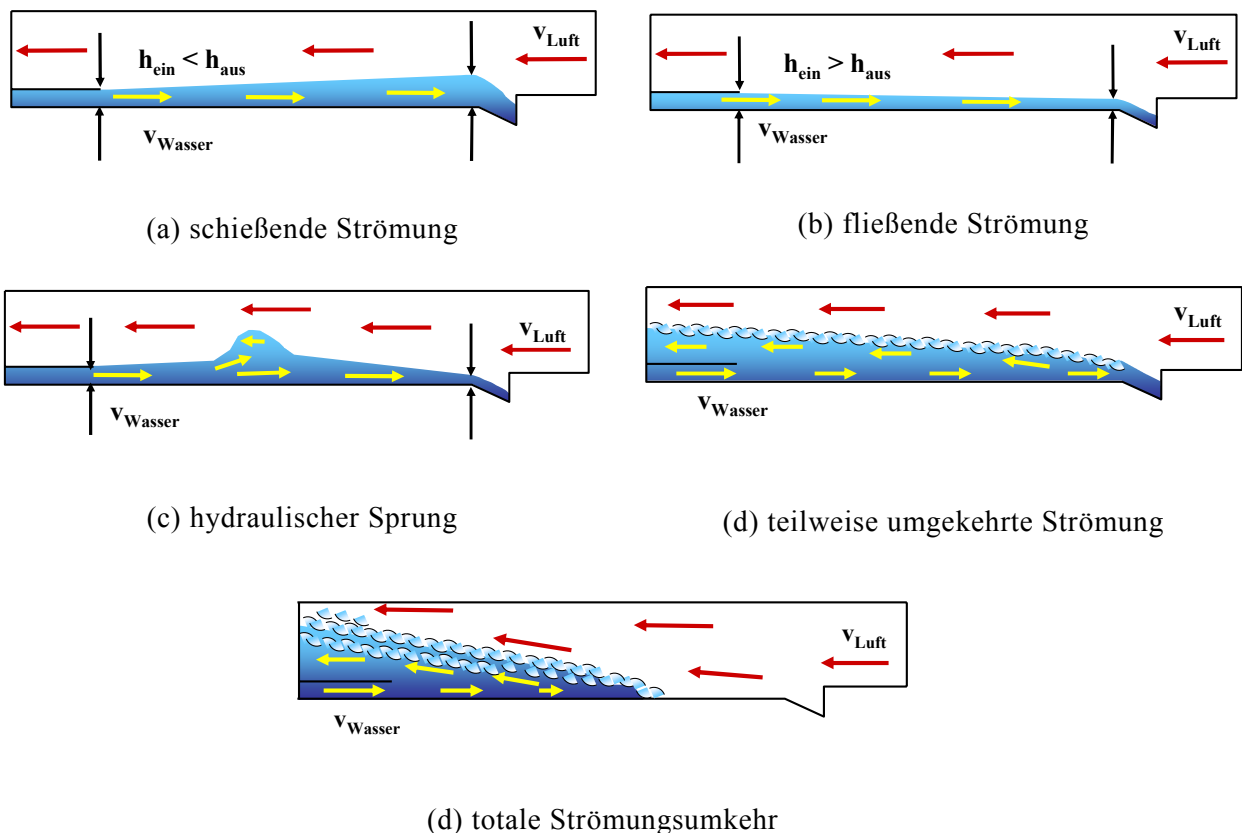


Abbildung 1.2: Strömungsformen

Die Strömung mit hydraulischem Sprung kann in drei Abschnitte unterteilt werden: bis zum hydraulischen Sprung ist die Strömung schießend, danach tritt der eigentliche hydraulische Sprung (auch Wechselsprung genannt) auf, an den sich eine fließende Strömung anschließt. Die fließende Strömung ist durch eine Abnahme der flüssigen Schichtdicke und einer Zunahme der Geschwindigkeit charakterisiert. Folglich kommt es zuerst zu einer Zunahme der hydraulischen Tiefe, die nach dem hydraulischen Sprung wieder abnimmt. Steigert sich nun der Dampfmassenstrom, so wandert der hydraulische Sprung durch den heißen Strang und endet in einer teilweisen Strömungsumkehr (Abbildung 1.2 (d)). Bei einer weiteren Erhöhung des Dampfmassenstroms nimmt die Wechselwirkung an der Phasengrenzfläche weiter zu und die kinetische Energie des eingespeisten Kühlmittels reicht nicht mehr aus, um in den Kern zu gelangen. Das gesamte Kühlmittel wird in den heißen Strang mitgerissen. Dies wird als totale Strömungsumkehr bezeichnet (Abbildung 1.2 (e)).

Die Anfachung der Wellen an der Phasengrenze hängen direkt mit der Strömungsgeschwindigkeit der Gas- und Wasserphase zusammen. Im Falle der schießenden Strömung treten nur kleine Oberflächenwellen auf. Diese können sich aufgrund der Strömungsgeschwindigkeit nur stromab ausbreiten und tauschen keine Informationen mit stromauf folgenden Wellen aus. Da die Strömungsgeschwindigkeit größer ist als die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, bleiben die Amplituden der Wellen klein, selbst wenn sich die Gasgeschwindigkeit erhöht. Für den Fall der fließenden Strömung kommt es mit zunehmender Gasgeschwindigkeit zu einer Anregung der Wellenamplituden. Die teilweise Strömungsumkehr setzt für fließende Fälle bei kleineren Gasgeschwindigkeiten ein, als bei schießenden. Im Falle der teilweisen Strömungsumkehr nimmt die Wellenamplitude mit zunehmender Scherung an der Phasengrenze zu und man spricht von einer turbulent welligen Oberfläche. An den Wellenkämmen kann es vereinzelt zu Tropfenbildung und –mitriss kommen. Im Falle der totalen Strömungsumkehr gibt es keine definierte Phasengrenze mehr, da die Anfachung der Wellen und deren Zerfall in einem Gemisch aus Gas und Wasser endet.

1.2 WENKA Versuchsstand

Um die verschiedenen Stadien bei der Einspeisung in den heißen Strang lokal untersuchen zu können, wurde der WENKA Versuchsstand [20] am Forschungszentrum Karlsruhe gebaut. Der rechtwinklige Strömungskanal stellt eine vereinfachte Einspeisung dar, der mit seiner variablen Wassereinlasshöhe geeignet ist, die auftretenden hydraulischen Phänomene untersuchen zu können. Der Strömungskanal ist 470 mm lang und besitzt einen Querschnitt von 90 x 110 mm. Um thermohydraulische Vorgänge ausschließen zu können, wird der Versuchsstand unter atmosphärischen

Bedingungen mit Wasser und Luft betrieben. Der WENKA Versuchsstand ist über die gesamte Lauflänge der Strömung optisch zugänglich und mit einem PIV-Meßsystem (Particle Image Velocimetry) versehen, so dass auch lokale Strömungsmessungen durchgeführt werden können. Eine detaillierte Beschreibung des Versuchstandes und der verwendeten Messtechnik findet man in Gargallo [19] und Stähler [77].

Gargallo [19] untersuchte die im vorherigen Abschnitt erläuterten fließenden, schießenden und teilweise umgekehrten Strömungen. Die Übergänge der verschiedenen Strömungsformen wurden in dimensionsloser Form in Strömungskarten aufgetragen. Detaillierte Untersuchungen führte sie in ihrer Arbeit für das Einsetzen der Strömungsumkehr durch. Abbildung 1.3 zeigt solch eine Strömungskarte exemplarisch und unterteilt sie in 5 Bereiche. Auf der Abszisse ist die Leerrohrgeschwindigkeit für die flüssige Phase und auf der Ordinate die Leerrohrgeschwindigkeit der Gasphase aufgetragen. Bereich 1 gibt die Randbedingungen für fließende Strömungen wieder. Nimmt der Massenstrom der flüssigen Phase zu, kommt es zu einem hydraulischen Sprung (Gebiet 2) und bei noch größerem Massenstrom stellt sich der Bereich der schießenden Strömung (Gebiet 3) ein. Wird nun der Gasmassenstrom bis zur Grenzlinie zwischen schießender und teilweise umgekehrter Strömung erhöht, tritt der Flutbeginn ein und es stellt sich eine stabile Strömungsumkehr ein (Gebiet 4). Bei noch höheren Gasmassenströmen kommt es zur totalen Strömungsumkehr (Gebiet 5).

Der umgekehrte Verlauf, von einer teilweise umgekehrten Strömung wieder zu einer schießenden Strömung, unterliegt einem Hystereseeffekt. Dieser Bereich setzt sich aus einem Teil der drei Gebiete 1-3 zusammen und ist grau hinterlegt. Der Hysteresebereich wurde von Stähler et. al [78] untersucht. Weiterhin hat er Kurven für konstante Wasserlieferungsraten im Gebiet der teilweise umgekehrten Strömungen vermessen und in die Strömungskarten eingetragen.

Zusätzlich wurden lokale Größen wie die Geschwindigkeit des Wassers, der Luft und die dazugehörigen Geschwindigkeitsfluktuationen untersucht. Um das Strömungsfeld der flüssigen Phase bis an die Phasengrenzfläche bestimmen zu können, wurde die eingesetzte PIV Messtechnik weiterentwickelt, so dass mit Hilfe von fluoreszierenden Partikeln die Messung bis an die bewegte Phasengrenzfläche möglich war. Diese detaillierten Untersuchungen der lokalen Strömungsgrößen wurden für die Kanalmitte und nahe dem Kanalende durchgeführt. Weiterhin wurden die lokal zeitlich gemittelten Gasgehaltsanteile über die bewegte Phasengrenze mit Hilfe einer Widerstandsmesssonde gemessen.

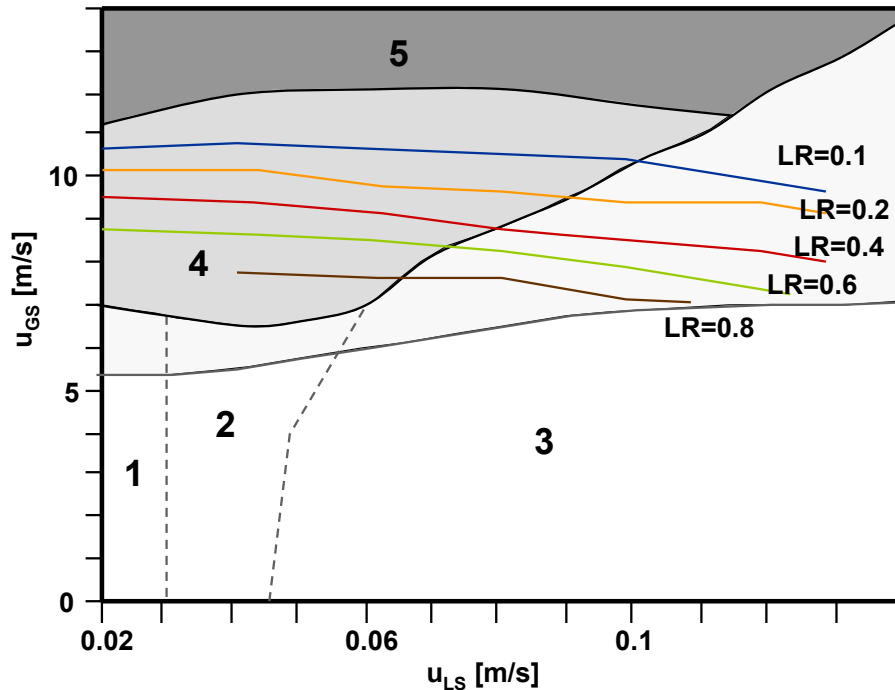
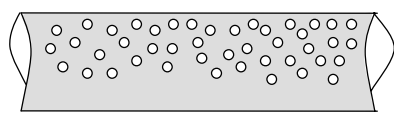


Abbildung 1.3: Erweiterte Strömungskarte nach Stähler [77].

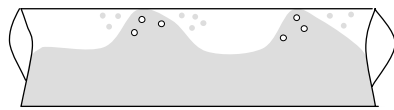
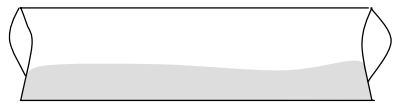
1.3 Stand der Technik

Die Berechnung von einphasigen und zweiphasigen Strömungen in Rohren ist in der Energietechnik von enormer technischer Relevanz. Zuerst wurden die Rohre anhand rein empirischer Ansätze ausgelegt. Mit zunehmender Erfahrung wurden diese Ansätze immer weiter verfeinert und Rohrströmungen werden heute anhand der entstehenden Druckverluste mit den bekannten Diagrammen für den Reibungsbeiwert von Moody (siehe Kays et al. [33]) oder Nikuradse [53] ausgelegt. Zusätzlich werden heute zweiphasige Strömungen anhand verschiedener Strömungsformen charakterisiert. Die komplexen Wechselwirkungsmechanismen zwischen den einzelnen Phasen, als auch den festen Wänden, sind von großer Bedeutung für die Einteilung der Strömungsformen. Die wichtigsten auftretenden Strömungsformen sind in Abbildung 1.4 dargestellt und hängen von den jeweiligen Massenströmen ab. Bei der Blasenströmung ist der Massenstrom der gasförmigen Phase im Vergleich zum Massenstrom der flüssigen Phase klein, so dass sich das Gas in Form von Blasen dispers verteilt. In horizontalen Rohren sammeln sich die Blasen aufgrund der Gravitation im oberen Bereich des Rohres an. Erhöht sich der Gasgehalt in der Strömung, so stellt sich abhängig vom Massenstrom der flüssigen Phase entweder eine Schwall-/Pfropfenströmung oder eine geschichtete Strömung ein. Erhöht sich der Massenstrom der gasförmigen Phase, ausgehend von einer geschichteten

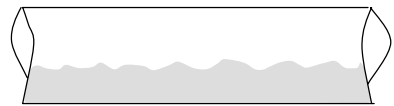
Strömung, entsteht durch die Kelvin-Helmholtz-Instabilität eine deformierte Oberfläche. Unter einer Kelvin-Helmholtz-Instabilität (siehe auch Oertel und Delfs [55]) versteht man das Anwachsen einer kleinen Störung zweier unterschiedlich dichter Phasen aufgrund von unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten dieser beiden Phasen. Ein Beispiel ist die Umströmung einer Welle. Am Wellenberg kommt es aufgrund des Grenzschichtverhaltens der Gas- oder Luftphase zu einer schnelleren Überströmung, wobei nach Bernoulli die Welle wegen des geringeren Druckes nach oben gesaugt wird. Im Wellental kommt es hingegen zu einer langsameren Umströmung und zu einer Druckerhöhung. Dies führt zu einem weiteren Verdrängen des Wassers im Wellental.



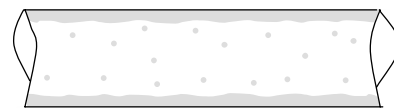
Blasenströmung

Schwall- oder
Pfropfenströmung

Geschichtete Strömung



Wellenströmung



Ringströmung



Tropfenströmung

Abbildung 1.4: Strömungsformen im Rohr.

Die daraus entstehenden Wellen werden durch den Impulsaustausch angefacht, bis sie im Gleichgewicht mit der Oberflächenspannung stehen. Diese Strömung wird als wellige Schichtenströmung bezeichnet. Wird der Massenstrom der gasförmigen Phase weiter erhöht, kann es je nach Wassertiefe dazu kommen, dass die Wellenkämme die obere Wand berühren. In diesem Fall strömt die Flüssigkeit in einem Schwall durch das Rohr (Schwallströmung). Bei sehr hohen Gasmassenströmen und niedrigen Massenströmen der flüssigen Phase kommt es zu einer Ringströmung. Hierbei strömt das Gas in der Mitte des Rohres und der flüssige Anteil strömt entlang der Wand. Je nach Größe der wirkenden Schubspannung an der Phasengrenze kann es zur Abtrennung von Tropfen kommen. Liegen die Tropfen dispers verteilt in der Rohrströmung vor, spricht man von einer Tropfenströmung. Die Strömungsformen können anhand von charakteristischen Kenngrößen, wie z.B. den Volumenströmen oder Massenströmen aus Strömungskarten bestimmt werden. Taitel und Dukler [80] sowie Mandahae und Gregory [48] erstellten aufgrund einer umfangreichen experimentellen Datenbasis eine Strömungskarte und wählten eine dimensionslose Darstellung. Für die Darstellung verwendeten sie die Leerrohrgeschwindigkeit der flüssigen und gasförmigen Phase.

Geschichtete horizontale Strömungen können in der Reaktortechnik sowohl als gegengerichtete oder als gleichgerichtete Strömungen auftreten. Die Gegenströmung von Kühlmittel und Dampf wird in vertikalen Kanälen durch den Dichteunterschied hervorgerufen. Das Fluid strömt aufgrund seiner höheren Dichte in Richtung der Erdbeschleunigung und das Gas aufgrund des wirkenden Auftriebs in entgegengesetzter Richtung. In horizontalen Kanälen wirkt die Erdbeschleunigung nicht in Strömungsrichtung. Es kann nur ein Gegenstrom auftreten, wenn das Fluid einen Anfangsimpuls, z.B. durch Einspeisung entgegengesetzt der Gasströmungsrichtung besitzt. In der Vergangenheit wurde das Einsetzen der Strömungsumkehr (engl. Flooding) von gegengerichteten Strömungen untersucht und beschreibt den Zusammenbruch der stabilen Gegenströmung aufgrund von Transport von Flüssigkeit durch die Interaktion des Gases an der Phasengrenzfläche in Richtung der Gasgeschwindigkeit. Daraus resultierte eine Vielzahl von Modellen zur Vorhersage der Strömungsumkehr. Eine Übersicht über die verschiedenen Modelle findet man in [19] und [89]. Im Wesentlichen können diese in analytische und empirische Modelle unterteilt werden.

Die empirischen Modelle erfassen die Flutbeginncharakteristik in Abhängigkeit wesentlicher Einflussparameter, wie z.B. der Geometrie, der Stoffeigenschaften und der Strömungsgeschwindigkeit. Eine der ersten Flutkorrelationen wurde von Wallis [87] veröffentlicht. Das Wallis Kriterium, für das die Strömungsumkehr auftritt, lautet wie folgt:

$$m \cdot J_L^{*1/2} + J_G^{*1/2} = C, \quad (1.2)$$

wobei J_k^* die dimensionslose Leerrohrgeschwindigkeit darstellt

$$J_k^* = J_k \cdot \left[\frac{\rho_k}{(\rho_l - \rho_g) \cdot g \cdot A} \right]^{1/2}. \quad (1.3)$$

J_k ist die Leerrohrgeschwindigkeit und errechnet sich aus der Geschwindigkeit der Gas- oder Flüssigphase multipliziert mit dem volumetrischen Dampfgehalt. Die Konstante m nimmt einen Wert zwischen 0,8 und 1,0 an. Die Konstante C wird als Walliskonstante bezeichnet und variiert zwischen 0,7 und 1,0. Aufbauend auf dem Walliskriterium wurden weitere Korrelationen für verschiedene Anwendungen entwickelt und getestet ([6],[58],[59]).

Glaser [22] vergleicht in seiner Arbeit verschiedene Korrelationen für den Flutbeginn und stellt fest, dass eine direkte Übertragung der gewonnenen Korrelationen anhand von kleiner skalierten Versuchsanlagen nur bedingt auf die UPTF Experimente möglich ist. Mayinger et al. [50] kommen zu dem Schluss, dass für den heißen Strang die Korrelation von Richter et al. [69] am besten die UPTF Experimente wiedergibt, stellt aber wie auch Glaser fest, dass diese Korrelationen für das Einsetzen der Strömungsumkehr nur schlecht die Strömungszustände im Downcomer wiedergeben, hingegen für den horizontalen Fall der Gegenströmung gute Ergebnisse liefert. Gargallo [19] formuliert für den Fall der Einspeisung in den heißen Strang anhand der gewonnenen Daten aus dem WENKA Versuchstand ein weiteres notwendiges Kriterium für das Auftreten der Strömungsumkehr. Es muss für das Einsetzen von Strömungsumkehr immer eine fließende Strömung ($Fr < 1$) vorliegen. Dies bedeutet, dass eine schießende Strömung durch die Reibung abgebremst werden muss, bis der hydraulische Sprung entsteht. Erst dann kann unter Einhaltung der Walliskonstanten ($m \approx 1$ und $0,7 < C < 1,0$) das Fluten einsetzen.

1.3.1 Physikalische Vorgänge an der Phasengrenze

Für die Modellierung der physikalischen Vorgänge an der Phasengrenzfläche ist es wichtig, die Mechanismen zu kennen und zu bestimmen, die für die Wellenbildung verantwortlich sind. Der ausgetauschte Impuls an der Phasengrenzfläche nimmt mit zunehmender Gasgeschwindigkeit zu. Dies führt nach Ostrach und Koestel [60] in vertikalen geschichteten Zweiphasenströmungen zu einer Anfachung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität, die für diese Art von Strömungen treibend für die Wellenbildung und -anfachung sind. Imura et al. [26] leiten anhand einer gegengerichteten Ringraumströmung die Stabilitätsgrenze für die Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten her. Als

Herleitung betrachtet er eine gleichgerichtete Strömung von Gas und Wasser mit einer sinusförmigen Welle an der Phasengrenze. Dies führt in der Herleitung für die Abweichung der mittleren Filmdicke zu einer modifizierten Besselfunktion. In seiner Herleitung stellt dies eine Funktion für die Wellenamplitude dar. Dabei kann die Besselfunktion in zwei Bereiche unterteilt werden: einen negativen Bereich und einen positiven Bereich. Imura et al. kommen zu dem Ergebnis, dass für den Bereich kleiner null eine stabile Wellenanfachung vorliegt und für die positive Besselfunktion die Instabilität ausreicht, um den Flutbeginn zu initiieren. Eine gute Übersicht über die in der Literatur zu findenden Stabilitätsgrenzen der Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten und deren Auswirkungen für den Flutbeginn findet man in Mata et al. [49]. Eine weitere Anwendungen der Kelvin-Helmholtz-Instabilität findet sich in Andries [3].

Die Simulation der Instabilitäten stellt eine große Herausforderung an kommerzielle Strömungscodes dar, da diese die Phasengrenze mit mehreren Zellen auflösen müssen. Dies führt für reale Anwendungen schnell zu einer nicht gewünschten hohen Rechenzeit. Daher werden Simulationen mit Instabilitäten an der Phasengrenzfläche an idealisierten Geometrien untersucht. So berechnen Strubelj et al. [79] die Kelvin-Helmholtz-Instabilität, wie sie von Thorpe [85] untersucht wurde, an einem Rohrausschnitt. Zur Reduzierung der Rechenzeit setzt er periodische Randbedingungen. Er erhält eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten, wenn die Oberflächenspannung vernachlässigt wird. Fietz [17] untersucht mit Hilfe einer Level Set Methode die entstehenden Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten anhand von einströmendem Wasser in eine ruhende Gasumgebung.

In der Literatur findet sich ein weiterer Ansatz für die Herleitung von Flutkorrelationen. Dieser berücksichtigt den Reibungseffekt an der Phasengrenzfläche zwischen flüssiger und gasförmiger Phase. Die Schubspannung an der Phasengrenzfläche resultiert in einem zusätzlichen Druckverlust und wird daher ähnlich wie der Reibungsansatz für einphasige turbulente Strömungen formuliert [43].

$$\tau_i = \frac{1}{2} \cdot \lambda_i \cdot \rho_G \cdot (\bar{u}_L - \bar{u}_G) \cdot |\bar{u}_L - \bar{u}_G| \quad (1.4)$$

\bar{u}_L und \bar{u}_G entsprechen dem flüssigen und gasförmigen Geschwindigkeitsfeld, ρ_G der Dichte der gasförmigen Phase und λ_i dem Phasenreibungsbeiwert. Dieser Reibungsansatz ist für die Modellbildung des Impulsaustausches an der Phasengrenzfläche von Bedeutung und wird von verschiedenen Autoren anhand von Experimenten oder aus dem Vergleich von Rechnungen mit Experimenten hergeleitet. Für den Phasenreibungsbeiwert λ_i wird häufig derjenige von Kim et al. [34] verwendet.

$$\lambda_i = a \cdot \text{Re}_L + b \quad (1.5)$$

Der Phasenreibungsbeiwert nimmt mit zunehmender Reynoldszahl der flüssigen Phase Re_L zu. Kim verwendet für seine Berechnungen die folgende Werte: $a = 0,14 \cdot 10^{-5}$ und $b = 0,021$. Ohnuki [58] verwendete zuerst die Korrelation von Kim. Da diese aber nur die flüssige Phase betrachtet und daher den Impulsaustausch nur unvollständig wiedergibt, leitet Ohnuki aus den UPTF Experimenten (Upper Plenum Test Facility) eine eigene Korrelation ab. Diese berücksichtigt die Gasphase als ausschlaggebenden Faktor für den Phasenreibungsbeiwert. Dabei unterteilt er seine Korrelation in ein laminares, ein Übergangs- und ein turbulentes Gebiet anhand der Reynoldszahl der gasförmigen Phase Re_G :

$$\lambda_i = 1,84 \cdot \begin{cases} 16/\text{Re}_G & \text{laminar} \\ 0,079/\text{Re}_G^{0,25} & \text{Re}_G < 10^5 \\ 0,0008 + 0,05525/\text{Re}_G^{0,237} & \text{Re}_G > 10^5 \end{cases} \quad (1.6)$$

Lee und Bankoff [42] entwickelten eine ähnliche Korrelation für horizontal geneigte Kanäle, die aus einer Wasser-Wasserdampf Strömung abgeleitet worden sind.

$$\lambda_i = 0,012 + 2,694 \cdot 10^{-4} (\text{Re}_L/1000)^{1,534} (\text{Re}_G - \text{Re}_G^*)/1000$$

$$\text{Re}_G^* = 1,837 \cdot 10^5 \cdot \text{Re}_L^{-0,184} \quad (1.7)$$

Dabei stellt Re_G^* die kritische Gas-Reynoldszahl als Funktion der flüssigen Reynoldszahl dar. Aufgrund der verschiedenen Korrelationen und einem Mangel an allgemein gültigen Korrelationen für den Phasenreibungsbeiwert verwenden Wang und Mayinger [88] in ihren Rechnungen zwei konstante Werte für den Phasenreibungsbeiwert. So verwenden sie einen Wert von $\lambda_i = 0,015$ für gleichgerichtete Strömungen und $\lambda_i = 0,02$ für Gegenströmungen. Dies stellt einen einfachen, aber effektiven Ansatz dar, um die Rückströmung im heißen Strang während des Kondensationsmodus eines kleinen Störfalls zu berechnen.

Eine andere Arbeit von Baik und Hanratty [5] untersucht den Einfluss von Verschmutzungen oder die gezielte Zugabe von Polymeren zur Reduzierung des Phasenreibungskoeffizienten auf die geschichtete Zweiphasenströmung. Der Aspekt der Verschmutzung der Strömung und der Einfluss auf die Stoffeigenschaften im Falle eines Störfalls waren bis heute nicht Gegenstand von Untersuchungen.

1.3.2 Modellierung der Zweiphasenströmung

Mit Hilfe der Volumenmittelung lassen sich die in technischen Anwendungen häufig verwendeten Modelle, wie das homogene und das Zwei-Fluid Modell (inhomogenes Modell), herleiten. Das homogene Modell entspricht dem der einphasigen Navier-Stokes Gleichungen und modelliert ein Ersatzfluid aus den einzelnen Phasen der Strömung. Die Modellierung des Ersatzfluids beruht auf der Vernachlässigung der Reibung zwischen den einzelnen Phasen, da wie der Name besagt, diese als homogen vermischt angenommen werden. Tritt eine Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen auf und ist diese wichtig für den Strömungszustand und die Verteilung der einzelnen Phasen im Strömungsgebiet, wird das Zwei-Fluid Modell verwendet. Die heutigen kommerziellen Strömungscodes wie CFX, Fluent und Star CD haben diese Modelle in ihren Codes bereits implementiert, so dass der Anwender diese nur noch anzuwählen braucht.

Bei der Euler-Lagrange Formulierung wird eine Phase als kontinuierliche Phase angesehen und mit der Eulerschen Bewegungsgleichung beschrieben. Die disperse Phase, wie z.B. Blasen, Tropfen oder Partikel, werden mit Hilfe der Lagrange Formulierung beschrieben, welche je eine Bewegungsgleichung für einen Partikel berechnet (siehe z.B. [14], [47]). Dieses Vorgehen führt zu einem sehr hohen Rechenaufwand und ist heute nur mit weiteren Vereinfachungen auf reale Zweiphasenströmungen anwendbar.

Die Euler-Lagrange Formulierung ist auf Strömungsformen mit Blasen, Tropfen und Partikeln begrenzt. Eine Schichtenströmung kann mit dieser Formulierung nicht modelliert werden. Dafür bedarf es der Euler-Euler Formulierung. Diese wird häufig synonym als Zwei-Fluid Modell bezeichnet und findet sich in Ishi und Mishima [27] und modelliert beide Phasen als kontinuierliche Phasen, die an ihrer Phasengrenze Masse, Impuls und Energie austauschen können. Die Volumenmittelung führt auf zwei Sätze von RANS-Gleichungen (Reynolds Averaged Navier Stokes Equations), die über Austauschterme gekoppelt sind. Mit der Euler-Euler Formulierung können auch Blasen-, Tropfen- und Partikelströmungen modelliert werden. Ansätze für die Erhaltungsgleichungen für Blasenströmungen finden sich z.B. in Giese [21], welche auch synonym für Tropfen und Partikel gelten.

Die Beschreibung der Phasengrenze und deren exakte Lokalisierung im Raum bedarf eines zusätzlichen Modellansatzes, da sich die Phasengrenzfläche zeitlich veränderlich im Raum bewegt. Hier findet sich in der Literatur die Volume of Fluid (VOF) Methode und die Level Set Methode. Bei beiden Methoden handelt es sich um numerische Verfahren zur Lokalisierung der Phasengrenze.

Die VOF Methode verwendet eine Phasenindikatorfunktion, die im diskretisierten Raum den Ort der Phasengrenze charakterisiert. Diese nimmt für die flüssige Phase den Wert null und für die gasförmige Phase den Wert eins an. Liegt die Phasengrenze in einer oder mehreren Zellen, nimmt die Phasenindikatorfunktion in diesen Zellen einen Wert

zwischen null und eins an. Die zeitliche Bewegung der Phasengrenzfläche wird durch eine zusätzliche Transportgleichung für die Volumenanteile der Phasen beschrieben. In einem weiteren Schritt wird aus der Phasenindikatorfunktion die Phasengrenzfläche rekonstruiert. Die VOF Methode bedarf feiner Gitter, um eine exakte Phasengrenze und die daraus resultierende Krümmung, notwendig für die Oberflächenspannung, berechnen zu können. Eine detaillierte Beschreibung der VOF Methode findet sich in Hirt und Nicholas [24].

Die Level Set Methode beruht auf der Grundlage, dass eine Funktion $\phi(\vec{x}, t)$ die Phasengrenzfläche beschreibt und zu dem Zeitpunkt $t=0$ initialisiert wird. Bewegt sich nun die Phasengrenzfläche zeitlich im Raum, so ändert sich $\vec{x}(t)$ und somit auch die Funktion $\phi(\vec{x}, t)$, die dann die neue Phasengrenzfläche abbildet. Die Phasengrenze kann zu einem beliebigen Zeitpunkt t aus der Funktion $\phi(\vec{x}, t)=\text{konstant}$ rekonstruiert werden. Dies erlaubt eine exakte Rekonstruktion der Phasengrenzfläche. Eine genaue Beschreibung der Algorithmen der Level Set Methode findet man bei Sethian [75].

Die VOF als auch die Level Set Methode wurde in der Hydromechanik häufig an offenen Kanälen validiert. Yokijima und Street [91] validieren ihren Zwei-Phasen Code mit einer Level Set Methode für die Berechnung der freien Oberfläche an einer offenen Kanalströmung. Diesen Code wenden sie später auf eine offene Kanalströmung mit einer Vertiefung an, um die daraus resultierende Wellenbewegung zu simulieren. Nguyen und Lausen [54] wenden die Level Set Methode auf eine Flussströmung an, um das Verhalten von Strömungswirbel und deren Problematik auf die Schiffsnavigation zu untersuchen. Kleefsman et al. [35] untersuchen mit Hilfe der VOF Methode die Krafteinwirkung, die Wellenbildung als auch das Umströmungsverhalten von Bauteilen im Bereich des Offshore Engineerings, wie sie z.B. bei Bohrinseln auftreten können. Sie validieren ihr Modell anhand der Umströmung eines Pfeilers mit verschiedenen Durchmessern, hervorgerufen durch einen plötzlich auftretenden Dambruch. Weitere Anwendungen der VOF Methode, wie z.B. die Wellenbewegungen bei einem Dambruch [29] oder die vertikal geschichtete Strömung in Rohren [52], finden sich in der Literatur. Die VOF Methode wird auch zur Untersuchung des Verhaltens von Blasenströmungen eingesetzt. Bothe [7] untersuchte das Koaleszenzverhalten als auch das Aufstiegverhalten von Blasen und die damit induzierte Turbulenz.

Der Nachteil der VOF Methode und der Level Set Methode liegt an der Verwendung von sehr fein diskretisierten Rechenräumen und kleinen Zeitschritten zur exakten Berechnung der Phasengrenze. Dies führt in technischen Anwendungen häufig zu extrem hohen Rechenzeiten und findet daher in der Praxis eher selten Anwendung. Statt dessen werden freie Oberflächen mit Hilfe vereinfachter, numerischer Interface Tracking/Capturing Methoden modelliert. Dabei wird die freie Oberfläche, an deren Phasengrenze physikalische Randbedingungen für den Impulsaustausch gesetzt werden

können, mit Hilfe von Algorithmen lokalisiert. In CFX-11.0 wird für Strömungen mit freier Oberfläche die Gleichung für den Gasgehalt soweit geschärft, dass nur noch in maximal drei aufeinander folgenden Zellen beide Volumenanteile einer Phase vorhanden sind. Dies wird als „Sharpening“ Algorithmus bezeichnet. Die freie Oberfläche pro Volumeneinheit wird als Phasengrenzflächendichte bezeichnet und dient dazu den Impulsaustausch zwischen beiden Phasen berechnen zu können. Meist wird für die Berechnung der Phasengrenzflächendichte eine charakteristische Länge d_{char} angegeben [4], [92]. Diese ist in CFX-11.0 proportional der Höhe der diskretisierten Zellen an der Phasengrenze und dem Gradienten des Gasgehaltes, welcher als Korrekturfaktor für die Lage der Phasengrenze im Raum dient. Bei der Modellierung der Phasengrenzflächendichte wird dabei ein in der Größenordnung nicht zu bestimmender Fehler angenommen, da dieses Verfahren nur exakt glatte Phasengrenzen betrachtet. Höhne et al. [25] wenden das beschriebene Interface Capturing Verfahren auf eine Schwallströmung an. Die Instabilitäten, die zu dieser Schwallströmung führen, wurden dabei qualitativ gut wiedergegeben.

Für große Zeitschritte löst der Sharpening Algorithmus für die Gasphase Phänomene, wie z.B. einzelne Wellen mit kleinen Amplituden, nicht mehr auf. Diese sind aber für den Impulsaustausch für geschichtete horizontale Strömungen von großer Bedeutung. Die statistische Mittelung der einzelnen Wellen kann hier für den Impulsaustausch eine deutliche Verbesserung bewirken. Ein statistisches Mittelungsverfahren, welches aus den Geschwindigkeitsfluktuationen die turbulente kinetische Energie errechnet und mit dem Gasgehalt α_G korreliert, findet sich in Stähler [77]. Der lokale Gasgehalt wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben und leitet sich aus den Wassergeschwindigkeiten der Wellen unter der Annahme, dass diese aus Fluidpartikeln bestehen und mit der Luftphase wechselwirken, her.

$$\frac{d\alpha_G}{dy} = \frac{\Delta\rho \cdot g}{2 \cdot \rho_L \cdot k_L} \cdot \alpha_G \cdot (1 - \alpha_G) \quad (1.8)$$

Die Differentialgleichung korreliert die Verteilung des Gasgehaltes α_G mit der lokalen turbulenten kinetischen Energie k_L der Wasserphase, der Differenz der flüssigen und gasförmigen Dichte $\Delta\rho = \rho_L - \rho_G$ und der Erdbeschleunigung g . Diese zeigt gute Übereinstimmung mit den experimentellen WENKA Daten (siehe Kapitel 1.2). Die Aufweitung des statistisch gemittelten Zweiphasenbereiches wird durch die turbulente kinetische Energie der Wasserphase getrieben und gibt die Beobachtungen aus den Experimenten von schießenden und teilweise umgekehrten Strömungen wieder, bei der eine Zunahme der Welligkeit und Wellenamplituden beobachtet werden konnte.

1.3.3 Turbulenzmodellierung

Technische Strömungen besitzen meist eine hohe Reynolds-Zahl und werden physikalisch als turbulent bezeichnet. Physikalisch stellt die Turbulenz Schwankungen der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten dar, die einer mittleren Strömung überlagert sind. So war Reynolds (siehe Wilcox [90]) der erste, der dieses erkannte und die sogenannten Reynolds Mittelungen einführte, welche die zeitlichen Schwankungen der Strömungen mittelt. Dies führt auf die so genannten RANS-Gleichungen (Reynolds Averaged Navier Stokes Equations), die heute und in der Vergangenheit als Ausgangspunkt für die Entwicklung von Turbulenzmodellen dienen. Durch die Herleitung der RANS-Gleichungen werden die auftretenden Schwankungsgeschwindigkeiten in Form von einem zusätzlichen Spannungstensor berücksichtigt, die Reynoldsspannungen τ_{ij}^{Re} . Aus der Vorstellung heraus, dass die Turbulenz als kleine Durchmischungswirbel in der Strömung auftritt, formulierte Boussinesq (siehe Oertel und Böhle [57]) analog zu der viskosen Reibung (Stokesscher Reibungsansatz) eine Wirbelviskosität μ_t . Mit diesem Ansatz lassen sich die 6 unabhängigen Reynolds-Spannungen τ_{ij}^{Re} wie folgt modellieren:

$$\tau_{ij}^{\text{Re}} = -\rho \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

Turbulenzmodelle, die den Ansatz der Wirbelviskosität verwenden, werden als Wirbelviskositätsmodelle bezeichnet. Die einfachste Klasse von Wirbelviskositätsmodellen sind die algebraischen. Diese verwenden im Vergleich zu anderen Modellen keine Differentialgleichungen zur Beschreibung der Wirbelviskosität. Das wohl bekannteste algebraische Modell stammt von Prandtl aus dem Jahre 1925 (siehe Tennekes und Lumley [81]). In diesem setzt er die Wirbelviskosität proportional zum Quadrat der Mischungsweglänge, die charakteristisch für die turbulente Strömung ist. Aus dem universellen Wandgesetz leitet er die folgende exakte Mischungsweglänge $l = \kappa \cdot y$ her. Dabei gibt y den Wandabstand an. Van Driest (siehe [56]) erweiterte den Prandtlschen Mischungsweg um eine Dämpfungsfunktion und somit den Gültigkeitsbereich bis in die laminare Unterschicht. In der Literatur finden sich noch weitere algebraische Modelle, die hauptsächlich für Grenzschichten und Nachläufe entwickelt worden sind. Die zwei bekanntesten stammen von Cebeci-Smith [90] und Baldwin-Lomax [56].

Aufgrund der Unvollständigkeit des Prandtlschen Mischungswegs, keinen Transport und keine Diffusion von Turbulenz zu betrachten, wurde dieses Modell durch die Eingleichungsmodelle abgelöst. Diese lösen für die turbulente kinetische Energie k eine partielle Differentialgleichung, die sowohl Transport als auch Diffusion berücksichtigt. Es wird aber weiterhin eine algebraische Gleichung für die charakteristische Länge der

Turbulenz benötigt. Dies ist wohl der Hauptgrund, warum sich die Eingleichungsmodelle gegenüber den Zweigleichungsmodellen nicht durchgesetzt haben. Der Vollständigkeit halber sei hier noch das am weitesten verbreitete Eingleichungsmodell von Bradshaw erwähnt (siehe [70]).

Zweigleichungsmodelle verwenden für die Bestimmung der charakteristischen Länge und Zeit der Turbulenz zwei Transportgleichungen. So wird von allen Zweigleichungsmodellen die turbulente kinetische Energie k und zusätzlich eine Dissipationsgröße berechnet. Im industriellen Einsatz haben sich überwiegend drei Zweigleichungsmodelle durchgesetzt. Zum einen das k - ε Modell von Launder und Spalding [40], das k - ω Modell von Wilcox [90] und zuletzt das von Menter [51] entwickelte SST-Modell, welches die günstigen Eigenschaften des k - ε und k - ω Modell miteinander verbindet. Dabei liefert das k - ε Modell für freie Strömungen bessere Turbulenzvorhersagen als das k - ω Modell, welches hingegen in starken Scherschichten und in wandnahen Schichten bessere Vorhersagen trifft [23].

Sollen Sekundärströmungen aufgrund von lokaler Anisotropie der Turbulenz modelliert werden, sind Wirbelviskositätsmodelle wegen der isotropen Annahme der turbulenten kinetischen Energie Gleichung nicht mehr geeignet. Die Anisotropie der Turbulenz muss durch die Modellierung der 6 richtungsunabhängigen Reynolds-Spannungen erfolgen. Diese Modelle werden als Reynolds-Spannungsmodelle bezeichnet.

Eine exakte Lösung der Strömungszustände und der Phasengrenze bietet die Direkte Numerische Simulation (DNS). Dieses Verfahren verwendet kein Turbulenzmodell, sondern simuliert die Effekte der Turbulenz direkt. Da mit zunehmender Reynolds Zahl (Re) die Strukturen der zerfallenden Wirbel immer kleiner werden, muss auch das Rechengitter immer weiter verfeinert werden. Die damit einhergehende Steigerung der Rechenzeit begrenzt die DNS auf Strömungen mit niedrigen Re -Zahlen. In der Forschung wird die DNS dazu verwendet, neue Modelle für reale Anwendungen zu entwickeln. Durch die exakte Lösung der Navier-Stokes Gleichungen kann sie zum Teil Experimente ersetzen. Für den zweiphasigen Fall mit bewegter Oberfläche ist die DNS auf Oberflächenwellen mit kleinen Amplituden beschränkt. In der Literatur gibt es nur sehr wenige DNS Rechnungen, die sich mit der Turbulenz an einer Phasengrenze beschäftigen. Lombardi et al. [45] untersuchten eine flüssig-gas Strömung mit einer glatten Phasengrenzfläche. Diese Strömung verhält sich abhängig von dem Dichteverhältnis wie eine wandnahe Strömung. Fulgosi et al. [18] ersetzten die glatte Oberfläche durch eine deformierbare Phasengrenze mit kleinen Wellenamplituden. In ihren Untersuchungen wurden die RMS-Werte (Root Mean Square) durch die Phasengrenze gedämpft. Im Vergleich mit den wandnahen Turbulenzgrößen waren diese an der bewegten Phasengrenze isotroper verteilt. Lakehal et al. [39] führten die gleichen Rechnungen mit zusätzlichem Wärmeübergang an der Phasengrenze durch.

Für das Verhalten der Turbulenz an freien Oberflächen zwischen Gas- und Flüssigkeitsströmung gibt es kein etabliertes Turbulenzmodell, welches mit einer guten Genauigkeit die turbulenten Größen vorhersagt, wie dies beim einphasigen k - ε oder k - ω Modell der Fall ist. In Experimenten wurde das Verhalten der Turbulenz an Phasengrenzen untersucht. Dabei wurde ein ähnliches Verhalten der Fluktuationsgeschwindigkeiten beobachtet wie an festen Wänden.

Komori et al. [38] untersuchten das Dämpfungsverhalten der Turbulenz an der freien Oberfläche in einem offenen Kanal und stellten eine Dämpfung der normalen Geschwindigkeitsfluktuation, einhergehend mit einer Umverteilung der turbulenten kinetischen Energie hin zur Oberfläche fest. Dies führt in der Nähe der freien Oberfläche zu einer Zunahme der Schwankungsgeschwindigkeiten in Strömungs- und Querrichtung. Untersuchungen der Schwankungsgeschwindigkeiten an bewegten Wänden zeigen ein sehr ähnliches Verhalten wie Gas-Flüssigkeitsströmungen mit einer freien Oberfläche. Thomas und Hancock [84] stellten wie Komori eine Umverteilung der Schwankungsgeschwindigkeiten fest. Sie konnten zusätzlich eine Verringerung der charakteristischen Länge der Schwankungsgrößen in Quer- und Strömungsrichtung beobachten. Daraus schlussfolgerten sie, dass die Dissipation der Turbulenz ansteigt. In einer früheren Untersuchung von Komori et al. [36] über die Frequenz der zusammenbrechenden kohärenten Strukturen (engl. *bursts*), kamen sie zu der Schlussfolgerung, dass die Anzahl der kohärenten Strukturen mit Zunahme der Reynoldszahl, wie dies auch für Wände der Fall ist, ansteigt. Rashidie und Banerjee ([65],[66]) untersuchten das Entstehen von kohärenten Strukturen und deren Zusammenbruch (engl. *streaks and bursts*) an der freien Oberfläche für alle drei möglichen Strömungsformen: Gleich- und Gegenstrom von Luft und das Verhalten in stehender Luft. Weitere Messdaten, wie die lokalen Geschwindigkeiten der flüssigen Phasen und Schwankungsgeschwindigkeiten, finden sich in Akai et al. [1] und Fabre et al. [16], wobei Fabre et al. auch eine Untersuchung der Gasgeschwindigkeit vornahmen.

Mit zunehmender Welligkeit an der Oberfläche nimmt die Dämpfung der vertikalen Komponente ab. Rashidie et al. [67] zeigen anhand von offenen Kanalströmungen mit künstlich generierten Wellen eine Zunahme der vertikalen Schwankungsgeschwindigkeit verglichen mit den Schwankungsgeschwindigkeiten an Wänden. Stähler [77] kommt in seinen Untersuchungen zur Strömungsumkehr zu dem gleichen Ergebnissen, dass die vertikale Schwankungsgeschwindigkeit mit zunehmender Welligkeit zunimmt. Daraus schlussfolgert er, dass die turbulente kinetische Energie einen Einfluss auf die Wellenerzeugung hat.

Die Modellierung der Turbulenz an der freien Oberfläche kann mit zwei verschiedenen Ansätzen erfolgen. Zum einen kann eine zusätzliche Wirbelviskosität verwendet werden, wie es z.B. Sato und Sekoguchi [73] bei Blasenströmungen erfolgreich angewandt haben. Diese Beschreibung ist nicht ausreichend für die Modellierung der Turbulenz an Phasengrenzen. In der Literatur findet sich ein anderer weit verbreiteter Ansatz. Dabei werden Zusatzterme in die Turbulenzgleichungen implementiert, die eine genauere Beschreibung der Turbulenz gewährleisten. Celic und Rodi [10] verwenden das k - ϵ Modell und verwenden bei der Simulation von offenen Gerinneströmungen eine zusätzliche Randbedingung für die Phasengrenze. Dabei ersetzen sie die Konstante C_μ für die Berechnung der Wirbelviskosität durch eine Dämpfungsfunktion. Diese leiten Sie aus der experimentellen Arbeit von Ljuboja und Rodi [44] ab. Lopez de Bertodano [46] leitet für eine Blasenströmung die Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie für die einzelnen Phasen her, welche aufgrund der Phasengrenze zusätzliche Terme beinhaltet. Diese interpretiert er als zusätzliche Produktions- und Dissipationsterme. In Blasenströmungen generiert die disperse Phase zusätzlich Turbulenz [63]. Im Vergleich dazu besitzt die Phasengrenze für geschichtete Strömungen einen dämpfenden Effekt auf die Turbulenz.

1.4 Ziel und Aufbau der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Analyse geschichteter welliger horizontaler Strömungen, wie sie bei der Einspeisung in den heißen Strang auftreten können. Hierfür wird ein Modell entwickelt, welches die Auflösung mehrdimensionaler Strömungsbereiche, im Speziellen die einzelnen Strömungsformen schießend, fließend und teilweise umgekehrt sowie den Übergang von schießend bzw. fließend hin zu einer teilweisen umgekehrten Strömung, ermöglicht. Wie in [37] und [82] aufgeführt, bedarf es neuer Modellansätze, welche auf lokalen Strömungsgrößen basieren, um die Physik an der Phasengrenze modellieren zu können. Das Verständnis dieser Mechanismen führt auf ein dreidimensionales Modell, welches die physikalischen Vorgänge an einer welligen Phasengrenze beschreibt. Ein weiterer großer Vorteil der dreidimensionalen numerischen Analyse liegt in der Skalierbarkeit eines verifizierten Codes oder Modells [41] und kann sehr einfach über ein körperangepasstes Netz auf andere Geometrien übertragen werden. Die strömungstechnisch relevanten Vorgänge an gegengerichteten horizontalen Strömungen wurden detailliert in der WENKA Versuchsanlage [77] untersucht und werden hier für die Modellvalidierung verwendet.

In Kapitel 2 wird ein neuer Modellansatz für die Wechselwirkung an der Phasengrenze vorgestellt. Dabei wird der in Kapitel 1.3 diskutierte theoretische Ansatz zur Beschreibung der Gasgehaltsverteilung, korreliert mit der turbulenten kinetischen Energie, verwendet. Für den Impulsaustausch in horizontaler Richtung wird ein

Modellansatz hergeleitet, welcher auf der Reibung zwischen den beiden Phasen Wasser und Luft bzw. Dampf besteht. Zur Schließung des Phasenwechselwirkungsmodells werden die beiden Zweigleichungsturbulenzmodelle $k-\epsilon$ und $k-\omega$ auf zweiphasige Strömungen erweitert. Der Einfluss der Phasengrenze auf die Turbulenzintensität wird anhand der hergeleiteten Reynoldstransportgleichungen für zweiphasige Strömungen mit Hilfe der WENKA Experiment bestimmt.

In Kapitel 3 werden die numerischen Ergebnisse mit den in der WENKA Versuchsanlage gewonnen Daten verglichen. Es werden im Detail die Strömungsformen schießend, fließend und teilweise umgekehrt diskutiert. Für teilweise umgekehrte Strömungen wird die Notwendigkeit aufgezeigt turbulente Anteile am Impulsaustausch, hervorgerufen durch die Reibung an der Phasengrenze, zu berücksichtigen. Weiterhin werden die integralen Messgrößen wie Druckverlust oder Rückströmraten diskutiert.

Die Skalierbarkeit des validierten Phasenwechselwirkungsmodells auf den dreidimensionalen Fall wird anhand der Upper Plenum Test Facility Experimente in Kapitel 3.5 demonstriert. Die Skalierbarkeit wird im Einzelnen anhand der gewonnen Flutkorrelation bei der Einspeisung in den heißen Strang untersucht.

2 Mehrdimensionale Modellierung der horizontalen Strömung

Aufgrund der komplexen Struktur der Zweiphasenströmungen und die Schwierigkeit, eine allgemein gültige analytische Beschreibung der Strömungszustände zu finden, gibt es zahlreiche Ansätze zur Berechnung für zweiphasige Strömungen. Durch die stetige Weiterentwicklung der Modelle gibt es heute für einzelne Zweiphasenströmungen recht gut entwickelte und allgemeingültige Modelle, welche die Wechselwirkungen zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase beschreiben. Diese basieren auf dem Zwei-Fluid Modell, welches zwei sich durchdringende Fluide modelliert. Es existiert somit an jedem Ort im Strömungsgebiet ein Satz von Erhaltungsgleichungen je Phase. Diese Gleichungen wurden in großem Umfang auf Blasenströmungen angewandt [13], [28], sind aber auch für die hier betrachteten horizontal geschichteten Strömungen gültig. Der Zustand einer Phase ist jedoch vom Zustand der anderen Phase abhängig. Diese Kopplung wird durch die Phasenaustauschtermen der gemittelten Grundgleichungen wiedergegeben. Die Austauschtermen werden ausführlich in Abschnitt 2.2 für horizontal geschichtete Strömungen diskutiert.

2.1 Zwei-Fluid Modell

Ausgehend von den Navier-Stokes Gleichungen für einphasige Strömungen, welche hier nicht mehr explizit aufgeführt sind, wird eine Phasenindikatorfunktion ε_k definiert. Diese besitzt beim Vorhandensein einer Phase k an einem bestimmten Ort des Strömungsgebietes den Wert 1 und im umgekehrten Fall den Wert 0. Durch zeitliche Mittelung (oder Reynoldsmittlung) der Phasenindikatorfunktion nach Drew und Passman [13] erhält man den volumetrischen Anteil α_k der einzelnen Phasen an einem Ort im Zeitintervall Δt .

$$\alpha_k = \overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\vartheta=t}^{\vartheta=t+\Delta t} \varepsilon_k(\vartheta) d\vartheta \quad (2.1)$$

Im weiteren Verlauf werden die beiden verwendeten Phasen mit dem Index L für Liquid und G für Gas indiziert. Dies entspricht den verwendeten Medien Wasser und Luft im

WENKA Versuchsstand. Beide Phasen sind über die folgende Schließungsbedingung miteinander gekoppelt:

$$\alpha_L + \alpha_G = 1. \quad (2.2)$$

Um jede Phase einer Mehrphasenströmung als Kontinuum beschreiben zu können, werden die Zustandsgrößen Φ_k der einzelnen Phasen, wobei Φ_k eine skalare als auch vektorielle Größe sein kann, gemäß ihres Phasenanteils über die Zeit gemittelt. Daraus resultieren die phasengemittelten Zustandsgrößen $\bar{\Phi}^k$, wie z.B. das Geschwindigkeitsfeld an einer Stelle im Strömungsgebiet.

$$\bar{\Phi}^L = \frac{1}{\alpha_L} \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon_L(\mathcal{G}) \Phi_L d\mathcal{G} \quad (2.3)$$

$$\bar{\Phi}^G = \frac{1}{(1-\alpha_L)} \int_t^{t+\Delta t} (1-\varepsilon_L(\mathcal{G})) \Phi_G d\mathcal{G} \quad (2.4)$$

Wird die Phasenmittelung auf die einphasigen Navier-Stokes Gleichungen angewandt, sind das Ergebnis die bekannten Zwei-Fluid Gleichungen. Die vollständige Herleitung findet sich im Anhang A1. Die Zwei-Fluid Gleichungen lassen sich für inkompressible Strömungen als flüssige und gasförmige Kontinuitätsgleichung

$$\rho_L \frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \rho_L \frac{\partial (\alpha_L \bar{u}_i^L)}{\partial x_i} = \Gamma_L^* \quad (2.5)$$

$$\rho_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \rho_G \frac{\partial (\alpha_G \bar{u}_i^G)}{\partial x_i} = \Gamma_G^* \quad (2.6)$$

und als Impulsgleichungen für beide Phasen schreiben:

$$\rho_L \frac{\partial (\alpha_L \bar{u}_i^L)}{\partial t} + \rho_L \frac{\partial (\alpha_L \bar{u}_i^L \bar{u}_j^L)}{\partial x_j} = -\alpha_L \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha_L (\bar{\tau}_{ij}^L + \bar{\tau}_{ij}^{\text{Re},L})] + \alpha_L \rho_L g_i + M_{L,i} \quad (2.7)$$

$$\rho_G \frac{\partial (\alpha_G \bar{u}_i^G)}{\partial t} + \rho_G \frac{\partial (\alpha_G \bar{u}_i^G \bar{u}_j^G)}{\partial x_j} = -\alpha_G \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha_G (\bar{\tau}_{ij}^G + \bar{\tau}_{ij}^{\text{Re},G})] + \alpha_G \rho_G g_i + M_{G,i} \quad (2.8)$$

Dabei sind Γ_k^* der Quell-/Senkenterm für den Phasenübergang, $M_{k,i}$ die Kräfte, die über die Phasengrenze ausgetauscht werden und g_i die Komponenten des Gravitationsvektors. Die auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten im WENKA Versuchstand sind kleiner als 15 m/s. Dies entspricht einer Machzahl $\text{Ma} \approx 0,05$ und liegt unter der

$Ma < 0,3$, welche etwa den Grenzwert für den Übergang zu kompressiblen Strömungen in technischen Anwendungen darstellt. Der Anteil der Dichteänderung, der aufgrund von Druckänderungen in einer Phase entsteht, kann somit vernachlässigt werden. D.h. für die Modellierung werden ρ_L und ρ_G als konstant angenommen. Die Reynoldsspannungen der einzelnen Phasen $\bar{\tau}_{ij}^{Re,k}$ ergeben sich aus der Phasenmittelung des Konvektionsterms durch Zerlegung der Geschwindigkeit in einen Mittelwert und einen Momentanwert.

Die Energiegleichung für das Zwei-Fluid Modell wird hier nicht näher erläutert, da für den weiteren Modellierungsansatz isotherme Strömungsrandbedingungen vorausgesetzt werden können. Der Leser sei hier auf Drew und Passman [13] oder Ishii [28] verwiesen.

2.2 Das Phasenwechselwirkungsmodell

Für Strömungen mit freier Oberfläche ist der Impulsaustausch von großer Bedeutung. Mit zunehmender Luftgeschwindigkeit nimmt die Schubspannung an der Phasengrenze und daraus resultierend die Turbulenzproduktion zu. Die turbulente kinetische Energie facht die Amplitude der Wellen an und ist ein direktes Maß für die Welligkeit der Strömung. Um dieses Verhalten physikalisch modellieren zu können, bedarf es einer statistisch zeitlich gemittelten Betrachtung der Wellen. Ein statistisches Mittelungsverfahren, welches aus den Geschwindigkeitsfluktuationen die turbulente kinetische Energie errechnet und mit dem gemessenen Gasgehalt korreliert, findet sich in Stähler [77] und wird in diesem Abschnitt konsequent weiterverfolgt (siehe auch Kapitel 1.3.2).

Bei den untersuchten Schichtenströmungen im WENKA Versuchsstand sind drei Strömungsformen möglich. Bei der Modellierung müssen die physikalischen Vorgänge an der Phasengrenze berücksichtigt werden, um die Phasenaustauschterme der Zwei-Fluid Gleichungen schließen zu können. Da in der WENKA Anlage nur Wasser und Luft als Versuchsmedium verwendet wurden, kann kein Massentransport über die Phasengrenze hinweg stattfinden. Der Austauschterm für die Massenquelle oder –senke (siehe Gleichungen (2.5) und (2.6)) reduziert sich zu $\Gamma_k^* = 0$.

Der Impulsaustauschterm besteht aus drei Komponenten und wirkt in die drei Raumrichtungen x , y und z . Bei einer zweidimensionalen Betrachtung der Wellen kann für die Bestimmung der Impulsaustauschterme die dritte Raumrichtung z vernachlässigt werden. Der Verlauf entlang der y -Achse (Profil A-A) aus Abbildung 2.1 zeigt den Zweiphasenbereich, der sich aus der statistischen, zeitlichen Mittelung der auftretenden Wellen durch die gewöhnliche Differentialgleichung aus Gleichung (1.8) ergibt. Wie im Folgenden gezeigt wird, führt die statistische Mittelung auf eine zusätzliche Kraft, die

der Auftriebskraft entgegen wirken muss. Physikalisch wird in dieser Arbeit die zusätzliche Kraft als Diffusionskraft

$$F_{Diff} = C \cdot \nabla \alpha_G \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.9)$$

gewertet. In Abbildung 2.1 ist ein differentielles Element dx skizziert, an dem in y -Richtung die Auftriebs- F_A und Diffusionskraft F_{Diff} und in x -Richtung die Widerstandskraft F_D wirkt. Die Diffusionskraft ist nach Gl. (2.9) proportional zum Gradient des Gasgehaltes α_G und C ist hierbei der zu bestimmende Diffusionskraftkoeffizient in $[\text{N}/\text{m}^2]$.

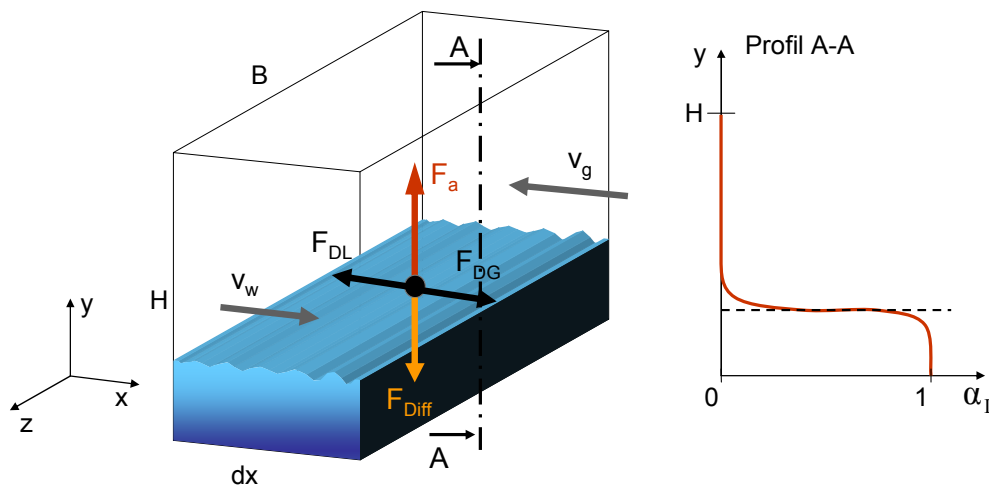


Abbildung 2.1: Differentielles Element des Kräftegleichgewichts.

Die Proportionalität der Diffusionskraft mit dem Gradient des Gasgehaltes lässt sich aus der folgenden Grenzbetrachtung herleiten: stellt sich aufgrund der Auftriebskraft eine scharfe Grenzfläche ein, so muss eine große Diffusionskraft entgegenwirken. Ist hingegen der Zweiphasenbereich stark verschmiert, bedarf es nur einer kleinen Diffusionskraft. Dies kann mit dem Gradienten des Gasgehaltes wiedergegeben werden. Dieser ist für eine scharfe Grenzfläche groß und verringert sich mit zunehmender Verschmierung.

Die Kraft resultierend aus der Oberflächenspannung kann hier vernachlässigt werden. Dies wird durch die Berechnung der Weber Zahl (We) bestätigt. Die Weberzahl $We = \rho_L v^2 d_H / \sigma$ ist das Verhältnis aus Trägheitskraft zu Oberflächenkraft. Die Trägheitskraft wirkt deformierend, d.h. sie regt die Wellen an, und die Oberflächenkraft

wirkt dämpfend auf die Anfachung der Wellen. ρ_L ist die Dichte, v die Strömungsgeschwindigkeit, d_H der hydraulische Durchmesser und σ die Oberflächenspannung. Wird, wie bei der Berechnung der Fr-Zahl, die Wassertiefe als hydraulischer Durchmesser und die Oberflächenspannung $\sigma=0,072$ [N/m] angenommen, ergeben sich Werte von $35 \leq We \leq 100$ unter Verwendung der experimentellen Randbedingungen im WENKA Versuchsstand. Der Wert der Weber Zahl ist größer als der Wert $We=8$ [8], für den die Oberflächenspannung in technischen Anwendungen relevant ist. Somit kann die Oberflächenkraft für die hier untersuchten geschichteten horizontalen Strömungen vernachlässigt werden.

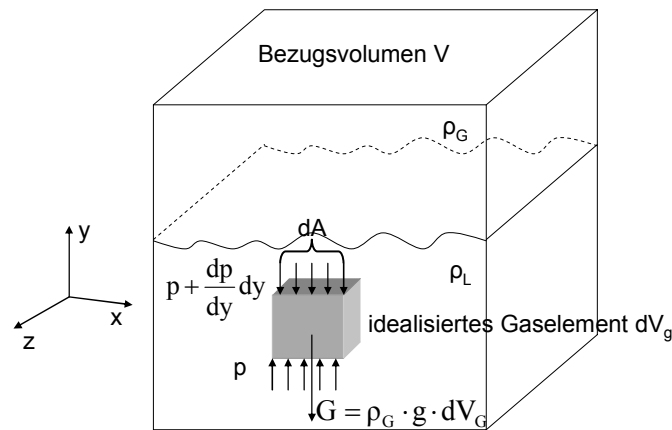


Abbildung 2.2: Auftriebskraft in zweiphasigen Strömungen.

In Abbildung 2.2 ist die Herleitung der Auftriebskraft für eine zweiphasige Strömung skizziert. Für die Herleitung der Auftriebskraft wird das Archimedische Prinzip [83] verwendet. Dieses betrachtet ein Element eines Mediums mit einem Volumen V_g in einem anderen Medium. Der Einfachheit halber wird hier ein Luftelement in Wasser betrachtet. Dabei wirken die Gewichtskraft und auf die Ober- und Unterseite des Luftelementes der Druck. Der Druck auf die Seitenflächen des Luftelementes spielt für die Auftriebskraft keine Rolle, da dieser sich gegenseitig aufhebt. Die Resultierende ist die Auftriebskraft

$$\begin{aligned}
 F_A &= \left[p - \left(p + \frac{dp}{dy} dy \right) \right] \underbrace{dx dz}_{dA} - \rho_G \cdot g \cdot \underbrace{dx dy dz}_{dV_G} \\
 &= -\frac{dp}{dy} dV_G - \rho_G \cdot g \cdot dV_G
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Bei weiterer Vereinfachung der Gleichung (2.10), kürzt sich der Druck p , so dass die Auftriebskraft die Resultierende der hydrostatischen Druckdifferenz und der Gewichtskraft ist. Für die Berechnung der hydrostatischen Druckdifferenz einer zweiphasigen Strömung ist die Gemischdichte ρ^* , anstatt der Dichte der flüssigen Phase, zu verwenden. Der Druck wird mit zunehmendem y kleiner. Daraus ergibt sich ein negativer Druckgradient in y -Richtung.

$$\frac{dp}{dy} = -(\alpha_L \cdot \rho_L + \alpha_G \cdot \rho_G) \cdot g \quad (2.11)$$

Hieraus folgt für die Auftriebskraft:

$$F_A = (\rho_L - \rho_G) g \alpha_L V_G \quad (2.12)$$

Wird die Auftriebskraft durch ein Bezugsvolumen V dividiert, erhält man folgende Beziehung für die Auftriebskraft in der Einheit $[\text{N}/\text{m}^3]$.

$$F_A = (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot \alpha_L \cdot \alpha_G \quad (2.13)$$

Wird die Auftriebskraft F_A und die eingeführte Diffusionskraft $F_{D_{\text{diff}}}$ unter der Annahme, dass nur der Gradient des Gasgehaltes in y -Richtung $d\alpha_G/dy$ existiert gleichgesetzt, ist das Ergebnis eine Differentialgleichung für den Gasgehalt α_G , die den Verlauf der Verschmierung des Zweiphasenbereichs beschreibt.

$$\frac{d\alpha_G}{dy} = \frac{\Delta\rho \cdot g}{C} \cdot \alpha_G \cdot (1 - \alpha_G) \quad (2.14)$$

Parameter darin sind die Dichtedifferenz $\Delta\rho = \rho_L - \rho_G$, der Diffusionskraftkoeffizient C und die Erdbeschleunigung g .

Die x -Komponente des Impulsaustauschterms $M_{1,G}$ wird für horizontal geschichtete Strömungen durch den Ansatz der Schubspannung

$$\tau_i = \lambda_i \frac{\rho_G}{2} \cdot u_{\text{rel}}^2 \quad (2.15)$$

an der Phasengrenzfläche bestimmt. Die Schubspannung an der Phasengrenze setzt sich analog zur Wandschubspannung aus dem Phasenreibungsbeiwert λ_i , der Dichte der Luft und dem Quadrat der Differenzgeschwindigkeit u_{rel} der flüssigen und gasförmigen Phase zusammen. Weiterhin in Analogie zur Wandschubspannung wird auch der

Phasenreibungsbeiwert bestimmt. Der Phasenreibungsbeiwert λ_i kann für horizontal turbulente geschichtete Gegenströmungen nach Wang und Mayinger [88] als konstant angenommen werden. Dies entspricht einer bestimmten Wandrauigkeit des Moody Diagramms [33], in dem die Reibungszahl λ unabhängig von der Reynoldszahl ist. Numerisch wird die Schubspannung in CFX-11.0 als Widerstandskraft

$$F_D = C_D \frac{\rho^*}{2} A_i \cdot u_{\text{rel}}^2 \quad (2.16)$$

interpretiert. Diese setzt sich aus dem Widerstandsbeiwert C_D , der Gemischdichte ρ^* , der Phasengrenzflächendichte A_i und der Relativgeschwindigkeit zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase zusammen. Die Phasengrenzflächendichte bildet die Oberfläche der Wellen ab, an der die Schubspannung wirkt. Je exakter diese modelliert werden kann oder geometrische Annahmen getroffen werden können, desto besser wird der Impulsaustausch wiedergegeben. Der Ansatz der Phasengrenzflächendichte

$$A_i = \frac{\alpha_L \cdot \alpha_G}{d_{\text{char}}} \quad (2.17)$$

welcher in dieser Arbeit verwendet wird, lässt sich als Produkt aus den beiden Gasgehaltanteilen dividiert durch eine charakteristische Länge d_{char} schreiben. Das Produkt der Gasgehaltsanteile gewährleistet, dass in beiden Grenzfällen, für α_L und α_G gegen null, auch die Phasengrenzflächendichte gegen null strebt. Da die Schubspannung nur an der Oberfläche der Phasengrenze wirkt, aber die Widerstandskraft im Volumen (siehe Abbildung 2.3), müssen für die Bestimmung der Widerstandskraft beide Kräfte integriert werden. Trifft man für ein infinitesimales Element die Annahme, dass die Schubspannung nur in der Ebene $dx dz$ wirkt und die Widerstandskraft im Volumen $dx \cdot dy \cdot dz$, so lässt sich das Integral folgendermaßen schreiben:

$$\iiint_V F_D dx dy dz = \iint_A \tau_i dx dz \quad (2.18)$$

Dieses Integral lässt sich durch Kürzen der Integrationsrichtungen dx und dz sowie unter Einsetzen der Kräfte aus Gleichungen (2.15) und (2.16) wie folgt vereinfachen:

$$\int_{y_{\text{min}}}^{y_{\text{max}}} C_D \frac{\rho^*}{2} \frac{\alpha_L(y) \cdot \alpha_G(y)}{d_{\text{char}}} \cdot u_{\text{rel}}^2 dy = \lambda_i \frac{\rho_G}{2} \cdot u_{\text{rel}}^2 \quad (2.19)$$

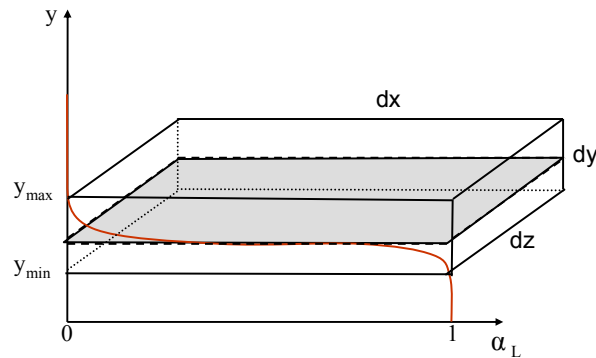


Abbildung 2.3: Integration über verschmierten Zweiphasenbereich.

Das Integral lässt sich durch Substitution von dy nach $d\alpha_G$ mit Hilfe der Differentialgleichung (Gleichung (2.14)) in eine integrierbare Form umformen. Dabei ändern sich die Integrationsgrenzen von y_{\min} nach $\alpha_{G\min} = 0$ und y_{\max} nach $\alpha_{G\max} = 1$.

$$\int_0^1 \frac{C_D}{d_{\text{char}}} \frac{\rho^* \cdot C}{2(\rho_L - \rho_G) \cdot g} \cdot u_{\text{rel}}^2 d\alpha_G = \lambda_i \frac{\rho_G}{2} \cdot u_{\text{rel}}^2 \quad (2.20)$$

Dieses Integral kann mit der Tatsache, dass die Differenzgeschwindigkeiten der Widerstandskraft und der Schubspannung gleich groß sind und keine Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes C_D und der charakteristischen Länge d_{char} vom Gasgehalt existiert, integriert werden. Für die Integration wird die Gemischdichte eingesetzt. Das Ergebnis der Integration korreliert den Widerstandsbeiwert mit der charakteristischen Länge

$$\frac{C_D}{d_{\text{char}}} = \frac{\lambda_i \cdot \rho_G \cdot (\rho_L - \rho_G) \cdot g}{2 \cdot C \cdot (\rho_L + \rho_G)} \quad (2.21)$$

Aus dem Integrationsergebnis wird ersichtlich, dass für geschichtete horizontale Strömungen nur ein Modellparameter C_D/d_{char} für den horizontalen Impulsaustausch modelliert werden muss. Dies stellt einen erheblichen Vorteil im Gegensatz zu Blasen- oder Tropfenströmungen dar, bei denen sowohl Modelle für die charakteristische Länge d_{char} , als auch für die Widerstandsbeiwert C_D nötig sind. Eine triviale geometrische Interpretation der charakteristischen Länge bei einer horizontalen Wellenströmung ist nicht möglich. Deshalb wird in dieser Arbeit die charakteristische Länge als konstant angesehen. Wie in Kapitel 3 genauer erläutert wird, hängt der Widerstandsbeiwert, bzw. der Phasenreibungsbeiwert sehr stark von der Oberflächenstruktur der Wellen ab und

wird anhand der experimentellen Daten kalibriert. Die Kalibrierung und die verwendeten Modellparameter werden in Kapitel 3 genauer erläutert.

Der Proportionalitätsfaktor C der Diffusionskraft kann mit Hilfe der Theorie von Stähler [77] für die Verteilung des Gasgehaltes an der Phasengrenze bestimmt werden. Die Gleichung entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung und wurde bereits in Kapitel 1.3.2 diskutiert. Vergleicht man Gleichung (2.14) mit dem Ergebnis aus der statistischen, zeitlichen Mittelung aus Gleichung (1.8), ergibt sich daraus der Diffusionskoeffizient C zu:

$$C = 2 \cdot \rho_L \cdot k_L. \quad (2.22)$$

Der Diffusionskraftkoeffizient hängt nun von der turbulenten kinetischen Energie k_L und der Dichte der flüssigen Phase ρ_L ab. D.h. mit zunehmender Turbulenzintensität nimmt auch die Verschmierung des Zweiphasenbereiches zu.

2.3 Turbulenzmodellierung

Strömungen können in laminare und turbulente Strömungen unterteilt werden. Turbulente Strömungen sind dadurch charakterisiert, dass Geschwindigkeitsfluktuationen einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit überlagert sind. Durch den Ansatz der zeitlichen Mittelungen und den daraus abgeleiteten Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) Gleichungen [56],[81] ergeben sich für einphasige Strömung zusätzliche Terme aufgrund der Fluktuationen der Strömung. Diese werden als Reynoldsspannungen bezeichnet und treten auch bei der Herleitung der Zwei-Fluid Gleichungen auf und müssen modelliert werden, um das Gleichungssystem zu schließen.

Die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen verhalten sich analog zu den molekularen Diffusionsvorgängen in laminaren Strömungen. Daher ist es heute üblich, die turbulenten Austauschvorgänge analog zu den laminaren Austauschvorgängen mit einer strömungsabhängigen turbulenten Zähigkeit μ_t zu modellieren (siehe Gleichung (1.9)). Dieses gilt im gleichen Umfang für die zweiphasigen Strömungen, nur dass die Indizierung k für die einzelnen Phasen noch angefügt werden muss. Das Modellierungsproblem besteht nun in der richtigen Wiedergabe der turbulenten Zähigkeit (Wirbelzähigkeit). Zur Berechnung der Wirbelzähigkeit sind ein turbulentes Längenmaß als auch eine turbulente Zeitskala, welche sich aus dem Wirbel bestimmt, nötig [90].

2.3.1 Prandtl'sches Mischungswegmodell

Für die WENKA Versuche stellt sich im Bereich der freien Oberfläche ein ähnliches Verhalten, vergleichbar mit einem Grenzschichtverhalten der flüssigen und gasförmigen Phase für schießende Strömungen ein. In einem ersten Schritt wurde das Prandtl'sche Mischungsweg Modell verwendet, um zu testen, ob ein Transportmodell für die Modellierung der Turbulenz notwendig ist. Das Prandtl'sche Mischungswegmodell geht von einem algebraischen Modellierungsansatz für die turbulente Längenskala l_k für die einzelnen Phasen aus. Die turbulente Längenskala l_k , oder auch Mischungsweg, bestimmt sich aus der Strömung der einzelnen Phasen und den geometrischen Randbedingungen. Die Zeitskala wird durch den Betrag des Geschwindigkeitsgradienten bestimmt und schließt die Berechnung der Wirbelviskosität.

$$\mu_t = \rho_k \cdot l_k^2 \left| \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial y} \right| \quad (2.23)$$

Für die Modellierung des Mischungsweges in wandnahen Bereichen leitete Prandtl eine exakt gültige Gleichung aus dem universellen Wandgesetz ab. Wird das universelle Wandgesetz nach y differenziert und nach der Schubspannung aufgelöst, erhält man durch Vergleich der Koeffizienten die exakte Lösung.

$$l_k = \kappa \cdot y \quad (2.24)$$

κ ist die von Karman Konstante und ergibt sich zu 0.41. Die exakte Herleitung des Mischungsweges für wandnahe Bereiche findet sich im Anhang A2.

Werden die Experimente für schießende Fälle in Wandeinheiten mit der Wandschubspannung nach Blasius [76] logarithmisch aufgetragen, unterliegen die schießenden Fälle einer Störungsschicht (engl. defect layer). Diese stellt eine Abweichung vom logarithmischen Wandgesetz aufgrund von äußeren Störungen dar, die sich bis in das logarithmische Wandprofil auswirken (siehe Rotta [71]) dar. Abbildung 2.4 zeigt den Einfluss der Störungsschicht für vier schießende Fälle aus den WENKA Experimenten in Wandeinheiten. Coles [31] führte für den Mischungsweg eine Nachlauffunktion ein, welche die Störungsschicht berücksichtigt. Die Nachlauffunktion von Coles unterschätzt die Dicke der Störungsschicht, so dass in dieser Arbeit eine eigene Nachlauffunktion entwickelt wird. Dabei wird das logarithmische Wandgesetz um einen zusätzlichen Term erweitert, mit dem die schießenden Strömungen gut abgebildet werden (siehe Kapitel 3). Das logarithmische Wandgesetz ergibt sich mit Erweiterung für die schießenden Fälle zu:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C^* + \frac{A^*}{\kappa} \left[1 - \frac{1}{B} \right] \quad B = 1 + e^D \quad (2.25)$$

Wendet man die gleiche Herleitung wie Prandtl für das universelle Wandgesetz an, erhält man für den Mischungsweg die folgende Korrelation:

$$l = \kappa \cdot y \frac{1}{1 + \frac{B-1}{B^2} \cdot A \cdot y^+} \quad (2.26)$$

Die einzelnen Schritte der Herleitung sind im Anhang A2 aufgeführt. Die zu bestimmenden Konstanten A und B für den Mischungsweg werden anhand der schießenden Strömung in Kapitel 3 bestimmt.

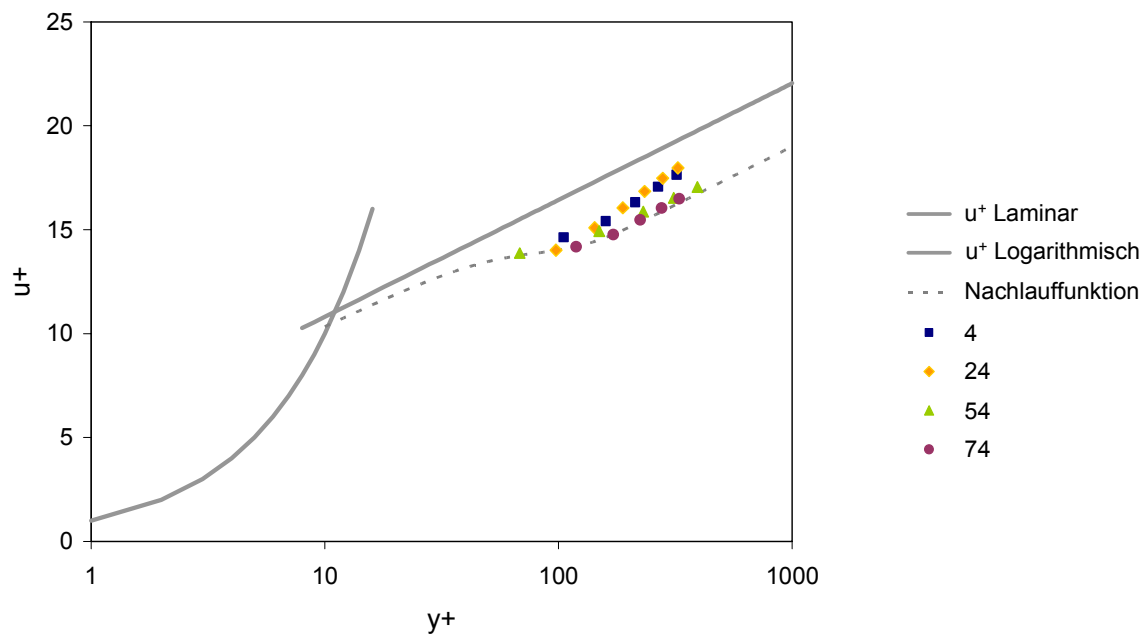


Abbildung 2.4: Störungsschicht und Nachlauffunktion mit schießenden Fällen (siehe Kapitel 3.1).

2.3.2 Transportmodelle

Ein entscheidender Nachteil des Prandtlschen Mischungsweges ist die Annahme, dass die Produktion und Dissipation von Turbulenz gleich groß sind. Aus Messungen und DNS Rechnungen [64] ist bekannt, dass die Turbulenz in Bereichen mit einem Nulldurchgang des Geschwindigkeitsgradienten nicht zu null wird. Es spielen weitere Transportmechanismen, wie Konvektion und Diffusion eine Rolle. Die zusätzlichen Transportmechanismen für die Turbulenz werden durch Transportmodelle berücksichtigt. Eine zusätzliche Transportgleichung für die Reynoldsspannungen kann durch Bildung der 2. Momentengleichung aus den Navier-Stokes Gleichungen generiert werden [12], [90]. Das heißt, die Impulsgleichungen der Navier-Stokes Gleichungen werden mit den Geschwindigkeitsfluktuationen u'_i und u'_j multipliziert und wie bei der Herleitung der RANS-Gleichungen zeitlich gemittelt (siehe Gl. (2.27)). In einem ersten Schritt wird die Transportgleichung für die Reynoldsspannungen exemplarisch für eine inkompressible einphasige Strömung hergeleitet. In einem zweiten Schritt wird diese für eine zweiphasige Strömung hergeleitet, um die zusätzlich entstehenden Terme interpretieren zu können.

Einphasige Strömungen:

Die Mittelung für das zweite Moment lässt sich mit Hilfe des Navier-Stokes Operators $N(u_i) = 0$ für einphasige inkompressible Strömungen schreiben

$$\overline{u'_i \cdot N(u_j) + u'_j \cdot N(u_i)} = 0$$

$$N(u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \cdot u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_k} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \quad (2.27)$$

Die momentane Geschwindigkeit u_i wird für die Herleitung in einen Mittelwert $\overline{u_i}$ und eine Fluktuationengeschwindigkeit u'_i zerlegt. Für die Herleitung wird jeder einzelne Term der Impulsgleichung nach obiger Gleichung (2.24) zeitlich gemittelt, wobei die Mittelungsergebnisse durch die Kontinuitätsgleichung $\partial u_i / \partial x_i = \partial u'_i / \partial x_i = 0$ vereinfacht werden können. Aufgrund des Rechenaufwandes und aus Übersichtlichkeitsgründen findet sich eine ausführliche Herleitung für jeden einzelnen Term des Navier-Stokes Operators im Anhang A3. Das Ergebnis der zeitlichen Mittelung des zweiten Momentes ergibt die folgende Transportgleichung für die Reynoldsspannungen.

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\rho \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{Re}}}{\partial t} + \rho \cdot \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{Re}}}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{\rho \cdot \tau_{ik}^{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \rho \cdot \tau_{jk}^{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Dilatation}} \\
&+ \underbrace{\rho \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k} - \mu \cdot \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u'_j p'})}{\partial x_i}}_{\text{Diffusion}}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Es ergibt sich für jede der sechs unabhängigen Reynoldsspannungen eine einzelne Differentialgleichung mit weiteren zu modellierenden unbekanntenen Größen. Die einzelnen Terme der Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen können interpretiert werden als Konvektion, Produktion, Diffusion, Dissipation und Dilatation [32], wobei die Dilatation als eine Umverteilung der Turbulenz zwischen den einzelnen Reynoldsspannungen angesehen werden kann. Eine Reduzierung des Modellierungsaufwandes der Turbulenz kann dadurch erfolgen, dass der Ansatz der turbulenten kinetischen Energie weiterverfolgt wird. Alle Zweigleichungsmodelle, hier im Speziellen das k- ϵ Modell von Launder und Spalding [40] und das k- ω Modell von Wilcox [90], gehen von einer turbulenten kinetischen Energie k der Wirbel aus, die sich aus der Spur des Reynoldsspannungstensors berechnen lässt.

$$\tau_{ii}^{\text{Re}} = \overline{u'_i u'_i} = -2k \tag{2.29}$$

Mit dieser Annahme lässt sich aus den Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen eine Transportgleichung für k herleiten

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j u'_i} - \overline{p' u'_j} \right)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\nu \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie berücksichtigt die Konvektion, Produktion, Diffusion und Dissipation von Turbulenz. Der Dilatationsterm aus Gleichung (2.28) ergibt sich durch Einsetzen der Kontinuitätsgleichung zu null.

Zweiphasige Strömungen:

Wie bei der Herleitung der Zwei-Fluid Gleichungen muss die 2. Momentengleichung zusätzlich mit der Phasenindikatorfunktion ϵ_k multipliziert werden. Die zeitliche Mittelung (Reynolds Mittelung) wird durch die Phasenmittelung ersetzt, wobei die phasengemittelte Schwankungsgeschwindigkeit $\overline{\epsilon \cdot u_i'^k} = 0$ ist.

$$\overline{u_i'^k \cdot \epsilon_k \cdot N(u_j) + u_j'^k \cdot \epsilon_k \cdot N(u_i)} = 0 \tag{2.31}$$

Eine ausführliche Herleitung für die Phasenmittelung der einzelnen Terme des Navier-Stokes Operators findet sich im Anhang A3. Das Ergebnis der Phasenmittelung für die 2. Momentengleichung ergibt analog zu den Austauschtermen für Masse, Impuls und Energie zusätzliche Transportterme aufgrund der Wechselwirkung an der Phasengrenze.

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{\partial \bar{\varepsilon}_k \cdot \bar{\tau}_{ij}^k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\varepsilon}_k \cdot \bar{\tau}_{ij}^k}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{-\bar{\varepsilon}_k \cdot \bar{\tau}_{ik}^k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \bar{\varepsilon}_k \cdot \bar{\tau}_{jk}^k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\rho_k \frac{\partial (\varepsilon_k \cdot u_i^k \cdot u_j^k \cdot u_k^k)}{\partial x_k} - \varepsilon_k \cdot \frac{\partial (u_i^k \cdot \tau_{jk}^k)}{\partial x_k} - \varepsilon_k \cdot \frac{\partial (u_j^k \cdot \tau_{ik}^k)}{\partial x_k}}_{\text{Diffusion}} \\
&+ \underbrace{\varepsilon_k \cdot \frac{\partial (u_i^k \cdot p^k)}{\partial x_j} + \varepsilon_k \cdot \frac{\partial (u_j^k \cdot p^k)}{\partial x_i}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\varepsilon_k \cdot \tau_{jk}^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_k} + \varepsilon_k \cdot \tau_{ik}^k \frac{\partial u_j^k}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\varepsilon_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right)}_{\text{Dilatation}} \\
&+ \underbrace{\bar{u}_k \cdot \tau_{ij}^k \frac{\partial (\varepsilon_k)}{\partial x_k} - \tau_{ij}^k \cdot u_{i_int} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_k} + 2 \cdot \tau_{ij}^k \frac{\partial (\varepsilon_k)}{\partial t}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\rho_k \cdot \varepsilon_k \cdot u_i^k \cdot \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u_k^k}{\partial x_k} + \rho_k \cdot \varepsilon_k \cdot u_j^k \cdot \bar{u}_i \cdot \frac{\partial u_k^k}{\partial x_k}}_{\text{Zweiphasig}} \\
&\underbrace{- \rho_k \cdot u_i^k \cdot u_j^k \cdot u_k^k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_k} - \rho_k \cdot \varepsilon_k \cdot u_i^k \cdot u_j^k \frac{\partial u_k^k}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Zweiphasig}}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Die zusätzlichen Terme können als Turbulenzproduktion und Dissipation interpretiert werden. Die zusätzlichen Produktionsterme der Turbulenz haben je nach Zustand der Phasengrenze einen positiven oder negativen Effekt auf die Turbulenz in allen Gebieten der Strömung, in denen eine Phasengrenze vorhanden ist. Da die Fluktuationsgeschwindigkeiten der Phasengrenze nicht in ihren Einzelheiten bekannt sind, gestaltet sich eine Modellierung der Turbulenz sehr aufwändig.

Durch Bildung der Spur können die Transportgleichungen der zweiphasigen Reynoldsspannungen vereinfacht werden (siehe Gl. (2.29)). Das Ergebnis ist die turbulente kinetische Energie der einzelnen Phasen. Wird zusätzlich vereinfachend für die Modellierung der k-Gleichung angenommen, dass der Gasgehalt in einem Zeitintervall Δt eine konstante Verteilung im Strömungsgebiet aufweist (vgl. [28]), erhält man folgende Transportgleichung für k:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\alpha_k \frac{\partial k^k}{\partial t} + \alpha_k \bar{u}_j \frac{\partial k^k}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{\alpha_k \bar{\tau}_{ij}^k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_k \left(\nu \frac{\partial k^k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j^k} - \overline{p' u_j^k} \right)}_{\text{Diffusion}} \\
&\underbrace{- \alpha_k \nu \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}} + P_{\text{Interface}} + D_{\text{Interface}}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Die zusätzlichen Terme aufgrund des vorhanden seins einer Phasengrenze werden als Produktion $P_{\text{Interface}}$ und Dissipation $D_{\text{Interface}}$ zusammengefasst.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Zweigleichungsmodelle k - ε und k - ω von Launder und Spalding [40] und Wilcox [90] für einphasige Strömungen als Ausgangspunkt für ein zweiphasiges Turbulenzmodell verwendet. Aus Gründen der numerischen Stabilität wird das homogene Turbulenzmodell verwendet. Die Berechnung der einzelnen Geschwindigkeitsgradienten basiert in diesem Fall nur noch auf der flüssigen Phase. Deshalb kann die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie ohne den Gasgehalt geschrieben werden. Für die Dichte, die laminare Viskosität und die Wirbelviskosität werden Gemischeigenschaften angenommen. Diese berechnen sich aus der Summe der einzelnen Verhältnisse des Gasgehaltes multipliziert mit den jeweiligen Stoffeigenschaften der einzelnen Phasen. Trotz der Annahme, dass das homogene Turbulenzmodell nur ein Turbulenzfeld berechnet, stimmen die berechneten Turbulenzgrößen mit den experimentellen Daten für die flüssige Phase gut überein (siehe Kapitel 3). Selbst im Zweiphasenbereich ist die Abweichung der berechneten Turbulenzgrößen auf den gesamten Strömungsverlauf vernachlässigbar klein.

Wie im Folgenden gezeigt wird, ist der Produktionsterm der Turbulenz immer positiv. Physikalisch wird die Produktion von Turbulenz durch Scherspannungen hervorgerufen. Daher erfolgt der Modellierungsansatz, dass die Scherspannungen mit den Geschwindigkeitsgradienten korreliert werden. Der Turbulenzproduktionsterm P_k lässt sich somit schreiben als:

$$P_k = \mu_t \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.34)$$

Aus der Komponentenschreibweise wird ersichtlich, dass der Produktionsterm immer positiv ist:

$$P_k = 2 \cdot \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \mu_t \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.35)$$

Der Produktionsterm wurde in dieser Arbeit unter der Annahme, dass der Gradient in der dritten Raumrichtung z vernachlässigbar klein ist, ausgeschrieben. In einphasigen Strömungen gibt dieser Ansatz das physikalische Verhalten der Turbulenz sehr gut wieder.

Nach Gleichung (2.32) ruft die Bewegung der Phasengrenze einen zusätzlichen Produktionsterm und Dissipationsterm der Turbulenz hervor. Der Einfluss der Phasengrenze auf den zusätzlichen Produktionsterm der Turbulenz kann anhand der Messdaten von Stähler [77] bestimmt werden. Betrachtet man den Verlauf der Reynoldsspannungen in der Ebene der Hauptströmung und normal zur Phasengrenze, so hat die Reynoldsspannung einen Nulldurchgang im Zweiphasengebiet. Der Verlauf der

Reynoldsspannung und der mittleren Geschwindigkeit der beiden Phasen ist exemplarisch in Abbildung 2.5 skizziert.

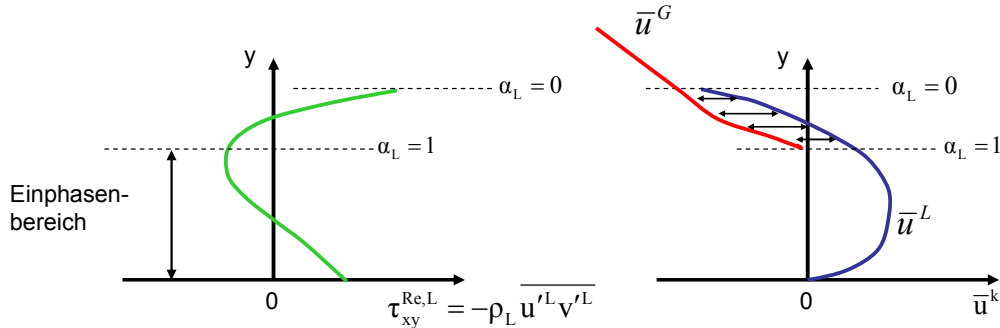


Abbildung 2.5: Reynoldsspannungen und Geschwindigkeitsverteilung am Schnitt A-A aus Abbildung 2.1.

Aus einphasigen Strömungen ist bekannt, dass eine Reynoldsspannung gleich null einem Geschwindigkeitsgradienten von null in dieser Ebene entspricht. Es wird somit nach Gleichung (2.34) keine Turbulenz produziert. Betrachtet man den gemessenen Geschwindigkeitsverlauf im Zweiphasengebiet, ist der dazugehörige Geschwindigkeitsgradient ungleich null. Aufgrund des Impulsaustausches an der Phasengrenze stellt sich eine Schlupfgeschwindigkeit zwischen beiden Phasen ein. Der Impulsaustausch ist der Grund, dass der Geschwindigkeitsgradient von null verschieden ist. Da der Geschwindigkeitsgradient im Zweiphasengebiet einen von null verschiedenen Wert aufweist, führt dies zu einer Überproduktion von Turbulenz. Hieraus lässt sich schlussfolgern, dass der Einfluss der zusätzlichen Terme aufgrund der Zweiphasigkeit auf die Turbulenzproduktion dämpfend wirkt. Diese dämpfende Wirkung wird nicht als negative Produktion implementiert, sondern als zusätzliche Dissipationsquelle in der Dissipationsgleichung für ε und ω hinzugefügt [15]. Damit erhöht sich die Dissipationsrate in der k-Gleichung und hat denselben Effekt wie ein negativer Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie. Die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k lässt sich für das k- ε und k- ω Modell ohne Zusatzterme wie die einphasige Transportgleichung schreiben:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - D \quad (2.36)$$

k- ε model: $D = \varepsilon$; k- ω model : $D = \beta' \rho k \omega$

Die erweiterten Dissipationsgleichungen lauten

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \varepsilon)}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + a^{2\phi} \frac{\varepsilon}{k} P_k \alpha_L \alpha_G \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = a \frac{\omega}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) - \beta \rho \omega^2 + a^{2\phi} \frac{\omega}{k} P_k \alpha_L \alpha_G \quad (2.38)$$

und unterscheiden sich von den einphasigen Dissipationsgleichungen durch den letzten Term der rechten Seiten. Dieser berücksichtigt eine zusätzliche Produktion der Dissipation von Turbulenz aufgrund der Zweiphasigkeit. Der zusätzliche Produktionsterm der Dissipation unterscheidet sich nur durch den Vorfaktor $a^{2\phi}$ von dem Produktionsterm der einphasigen Gleichung. $a^{2\phi}$ wird anhand der Experimente in Kapitel 3 validiert. Zusätzlich wird der Term mit dem Produkt aus den beiden Gasgehaltsanteilen $\alpha_L \alpha_G$ multipliziert, um die Wirkung auf das Zweiphasengebiet zu begrenzen. In Tabelle 2.1 sind für beide Turbulenzmodelle die Modellkonstanten angegeben.

a	σ_k	β'	β	σ_ω	$C_{\varepsilon 1}$	σ_ε	$C_{\varepsilon 2}$	C_μ
5/9	2	0.09	0.075	2	1.44	1.3	1.92	0.09

Tabelle 2.1: Konstanten des k- ε und k- ω Modells

Die Turbulenzmodellierung wird durch die Berechnung der Wirbelviskosität μ_t geschlossen.

$$\text{k-}\varepsilon: \quad \mu_t = (\alpha_L \rho_L + \alpha_G \rho_G) \cdot C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.39)$$

$$\text{k-}\omega: \quad \mu_t = (\alpha_L \rho_L + \alpha_G \rho_G) \cdot \frac{k}{\omega} \quad (2.40)$$

Da nur ein Turbulenzfeld für beide Phasen vorliegt, wird die Wirbelviskosität mit der Gemischdichte multipliziert. Dies gewährleistet, dass in dem Bereich der einzelnen Phasen die turbulente Viskosität korrekt berechnet wird. Für den zweiphasigen Bereich wird eine turbulente Gemischviskosität berechnet.

2.4 Lösung des Gleichungssystems

Die in Kapitel 2.1 eingeführten Zwei-Fluid Gleichungen sind die Ausgangsgleichungen, welche mit einer geeigneten numerischen Methode diskretisiert und anschließend gelöst werden müssen. Für die Lösung dieser gekoppelten Differentialgleichungen stehen heute verschiedene numerische Methoden zur Verfügung. Unter den am häufigsten verwendeten Methoden finden sich die Finite Differenzen Methode, die Finite Volumen Methode und die Finite Element Methode [62]. In der Strömungsmechanik werden die Gleichungen häufig mit Hilfe der Finiten Volumen Methode (FVM) gelöst. Auch CFX 11.0 basiert auf dieser Methode. Der grundlegende Mechanismus der FVM ist die Erzeugung finiter Volumina und die Integration der Transportgleichungen über diese. Bei einer genügend feinen Diskretisierung ergeben sich diskrete Werte, die das analytische und stetige Verhalten der Ausgangsgleichungen sehr gut wiedergeben. Mit Hilfe des Satzes von Gauß, welcher besagt, dass die Änderung im Inneren eines Kontrollvolumens den Flüssen durch die Oberfläche O dieses Kontrollvolumens entsprechen, lassen sich die Volumenintegrale in Oberflächenintegrale umwandeln. Wendet man den Satz von Gauß auf die Gleichungen (2.7) und (2.8) an, erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_V \alpha_k \rho_k dV + \int_O \alpha_k \rho_k \bar{u}_i^k dn_j = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \alpha_k \rho_k \bar{u}_i^k dV + \int_O \alpha_k \rho_k \bar{u}_i^k \bar{u}_j^k dn_j = - \int_O \alpha_k p dn_j + \int_O \mu_{eff} \alpha_k \left(\frac{\partial \bar{u}_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^k}{\partial x_i} \right) dn_j + \int_V M_i^k dV \quad (2.42)$$

Die Zeitableitungen können vor das Integral gezogen werden, falls sich die Kontrollvolumen nicht mit der Zeit ändern. dn_j stellt den nach außen gerichteten Normalenvektor auf einer Oberfläche dar. k ist in dieser Notation der Phasenindex. Die numerische Lösung dieser Oberflächenintegrale lässt sich als Summe über die einzelnen Teilflächen der finiten Volumina approximieren. Dies führt auf

$$\frac{(\alpha_k \rho_k - \alpha_k^o \rho_k^o)}{\Delta t} V + \sum_{ip} (\alpha_k \rho_k \bar{u}_i^k \bar{n}_j)_{ip} = 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_k \rho_k \bar{u}_i^k - \alpha_k^o \rho_k^o \bar{u}_i^{k,o})}{\Delta t} V + \sum_{ip} (\alpha_k \rho_k \bar{u}_i^k \bar{u}_j^k \bar{n}_j)_{ip} \\ & = - \sum_{ip} (\alpha_k p \bar{n}_j)_{ip} + \sum_{ip} \left[\mu_{eff} \alpha_k \left(\frac{\partial \bar{u}_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^k}{\partial x_i} \right) \bar{n}_j \right]_{ip} + M_i^k V \end{aligned} \quad (2.44)$$

ip steht hierbei für einen Integrationspunkt, durch den der Fluss, z.B. Masse oder Impuls, berechnet wird. Der Index *o* in der Zeitableitung steht für den alten Zeitschritt, kommend aus dem vorherigen Iterationsschritt. CFX 11.0 verwendet eine knotenzentrierte Methode, aus der die Integrationspunkte für ein Kontrollvolumen konstruiert werden. Zunächst werden für jede Fläche eines finiten Volumenelementes vier Integrationspunkte berechnet, aus denen wiederum ein neues Kontrollvolumen rekonstruiert wird. In Abbildung 2.6 ist die Konstruktion der Integrationspunkte für ein 2-D Gitter exemplarisch gezeigt. Für den Fall eines Hexaeders steigt die Anzahl der durchströmten Oberflächen von 6 auf 24 an und erhöht die Genauigkeit der Lösung.

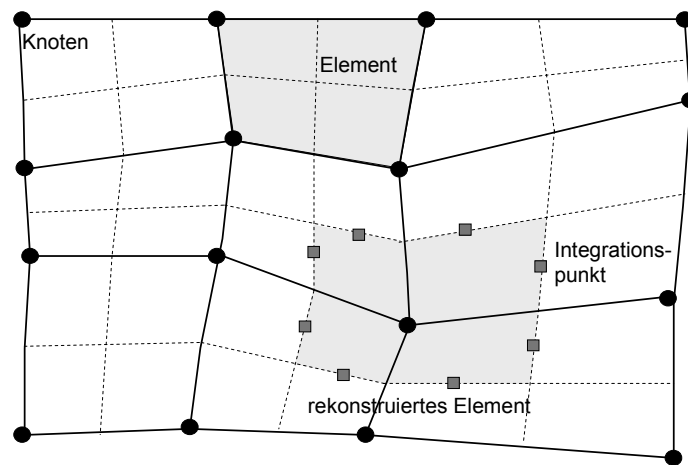


Abbildung 2.6: Konstruktion der Integrationspunkte ip in CFX-11.0.

Zur Lösung der diskretisierten Kontinuitäts- und Impulsgleichung bedarf es auf Grund der Kopplung des Geschwindigkeits- und Druckfeldes eines Druckkorrekturverfahrens. Das SIMPLE Verfahren (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) wurde von Patankar und Spalding [61] zur Lösung der Reynolds-Gleichungen entwickelt. Für die Berechnung des Druckfeldes stellt die Kontinuitätsgleichung eine weitere Bedingung an das Geschwindigkeitsfeld. Die Berechnung des Druckes erfolgt, so dass die Kontinuitätsgleichung (Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes) zum neuen Zeitschritt erfüllt ist. Der aus der Berechnung kommende Fehler der Kontinuitätsgleichung kann als Quell- oder Senkenterm für den Druck aufgefasst werden. Dabei wird der Druck so lange iteriert, bis die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Weiterhin haben sich als Druckkorrekturverfahren das SIMPLEC (SIMPLE Consistent) [2] und das PISO (Pressure Implicit Splitting of Operators) [30] etabliert. Rhie und Chow [68] erweiterten das Druckkorrekturverfahren auf unstrukturierte Gitter, indem sie die Entkopplung des Drucks und der Geschwindigkeit vom Gitter durch eine

Approximation des Druckgradienten mit anschließender Korrektur auf den jeweiligen finiten Volumen einführt.

In CFX 11.0 werden zuerst die hydrodynamischen Gleichungen für u_i und p in allen Raumrichtungen gelöst. In einem nächsten Schritt werden die für Mehrphasenströmungen notwendigen Phasengasgehaltsanteile berechnet, um danach entkoppelt, die Gleichungen für das Turbulenzmodell lösen zu können. Diese Iterationsschritte werden als innere Iteration bezeichnet. Werden die Konvergenzkriterien am Ende dieser inneren Iteration überschritten, so erfolgt ein erneuter Aufruf der inneren Iterationsschleife. Für instationäre Strömungen wird der Zeitfortschritt in einer äußeren oder Zeitschritt-Iteration gelöst, bei der wiederum die innere Iterationsschleife aufgerufen wird.

3 Simulationsergebnisse

Das Phasenwechselwirkungsmodell wird anhand der gegengerichteten horizontalen Strömungsformen im WENKA Versuchstand validiert. Die Validierung ist unterteilt in die drei folgenden Strömungsformen: schießend, fließend und teilweise umgekehrt.

Die verwendeten Gitter sind in der Nähe der Phasengrenze stark verdichtet, um den verschmierten Verlauf des Zweiphasenbereichs, hervorgerufen durch die Diffusionskraft, exakt und ohne numerischen Einfluss berechnen zu können. Das verwendete Gitter ist in Abbildung 3.1 dargestellt und besitzt im Bereich der Wasser- und Lufteinlassplatte eine starke Verdichtung. Die Wasser- und Lufteinlassplatte wurde über eine Länge von jeweils 100 mm modelliert, um ausgebildete Strömungsverhältnisse am Wasser- und Lufteintritt in die Versuchsstrecke zu gewährleisten. Der Abstand zwischen Wasser- und Lufteinlass beträgt 470 mm und ist eine exakte zweidimensionale Abbildung der WENKA Versuchsstrecke. Die Höhe der WENKA Anlage beträgt 90 mm. Die verschiedenen Strömungsformen wurden für eine Wassereinlasshöhe von 9 mm und 15 mm vermessen. Die Lufteinlassplatte wurde für diese Fälle ebenfalls auf die Wassereinlasshöhe eingestellt. In Abbildung 3.1 ist nur das verwendete Gitter für den Fall mit einer Wassereinlasshöhe von 15 mm gezeigt. Das Wasser strömt unten von links nach rechts und die Luft oben von rechts nach links durch den Kanal. Unten rechts ist der abgeschrägte Wasserauslass modelliert, an den sich im Experiment der primäre Wasserbehälter anschließt. Oben links befindet sich der Luftauslass, an den sich der Zyklon zur Wasserabscheidung für das in den Luftstrom eingetragene Wasser befindet. Für alle Rechnungen wurde ein instationäres Verhalten vorausgesetzt, obwohl die vermessenen Strömungszustände in der WENKA Anlage als stationär betrachtet werden können. Da aber der sich einstellende stationäre Zustand abhängig von den Anfangsbedingungen ist, muss dieses zeitliche Verhalten modelliert werden. Für die Rechnungen wurde eine Zeitschrittweite von 1 ms für fließende und schießende sowie 5 ms für teilweise umgekehrte Strömungen gewählt. Die Luftgeschwindigkeit wurde in den Rechnungen linear erhöht, bis die nominale Geschwindigkeit am Eintritt erreicht wurde. Dies entspricht dem Vorgehen bei den experimentellen Untersuchungen in der WENKA Anlage. Weiterhin wurde eine Begrenzung des Gradienten für den Gasgehalt $d\alpha_G/dy$ gesetzt. Dieser ist unabdingbar für die einlaufende Strömung, um die Diffusionskraft an der unteren Wand zu limitieren. Für schießende Strömungen wurde der Gradient des Gasgehaltes auf einen Wert von $d\alpha_G/dy = 2000$ [1/m] begrenzt. Diese Begrenzung erhöht sich auf $d\alpha_G/dy = 15000$ [1/m] für teilweise Strömungsumkehr.

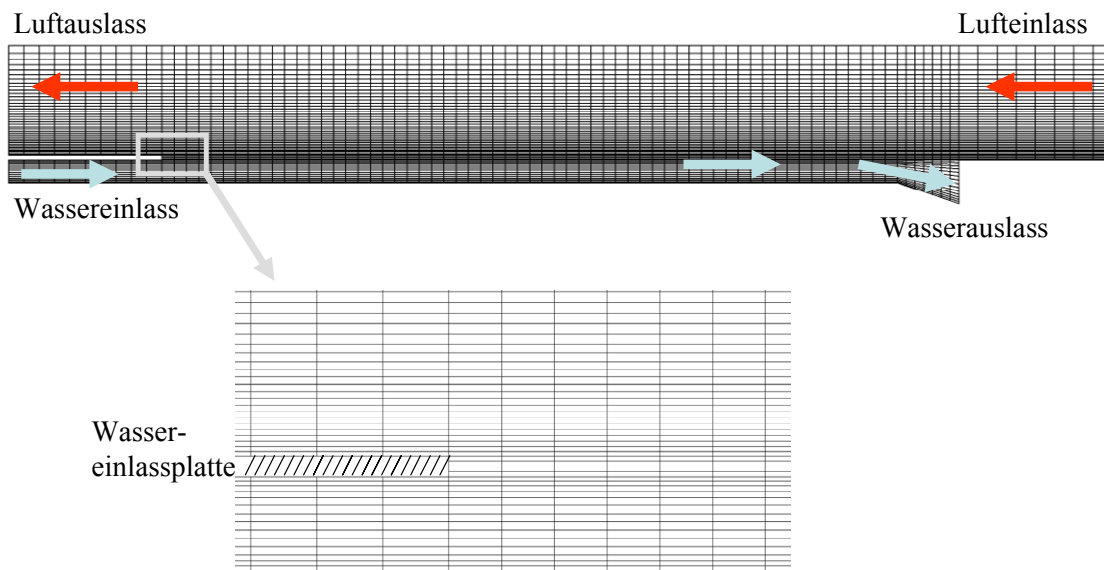


Abbildung 3.1: 2-D Netz für einen Fall mit 15 mm Wassereinlasshöhe.

Der Gradient für den Gasgehalt kann aus Gleichung (1.8) abgeschätzt werden. Dieser Wert ist limitierend für den verschmierten Zweiphasenbereich und sollte nicht unterschritten werden, da sonst ein Einfluss auf die quasistationäre Lösung besteht. Der größte auftretende Gasgehaltsgradient für eine schießende Strömung liegt bei zirka $d\alpha_G/dy \approx 1000$ [1/m] und verkleinert sich für teilweise umgekehrte Strömungen. Die Begrenzungen für den Gradienten des Gasgehaltes haben somit keinen Einfluss auf den berechneten Zweiphasenbereich.

Der Einfluss der Seitenwand wird durch eine zweidimensionale Modellierung vernachlässigt und kann mit Hilfe des Impulssatzes, wie Gargallo [19] diesen in ihrer Arbeit für eine Abschätzung des Schichtdickenwachses verwendet hat hier für eine Abschätzung des Wandeinflusses verwendet werden. Wird bei der Berechnung des hydraulischen Durchmessers eine mittlere Schichtdicke angenommen, so kann diese als prozentualer Anteil der Breite des Kanals ausgedrückt werden (siehe auch Chanson [9]) und führt auf einen lösbaren Impulssatz. Wird in erster Näherung für eine schießende Strömung die mittlere Schichtdicke gleich der Wassereinlasstiefe gesetzt, kann der Einfluss der Seitenwand berechnet werden. Dieser kann sich im ungünstigsten Fall bis auf 10 % des gesamten Schichtdickenwachses aufsummieren. Die Schichtdicke nimmt aufgrund des Kanalbodens um 0,7 mm, aufgrund des Seitenwandeinflusses um 0,1 mm und aufgrund der Phasenreibung im Falle einer schießenden Strömung und kleiner Luftgeschwindigkeit um 0,2 mm zu. Der Einfluss der Phasengrenze wird mit zunehmender Luftgeschwindigkeit immer größer und der Einfluss der Seitenwand verringert sich damit zunehmend, so dass in dieser Arbeit die Annahme einer zweidimensionalen Betrachtung gerechtfertigt ist.

3.1 Schießende Strömungen

Das prinzipielle Verhalten der schießenden Strömung ist für die modellierte Geometrie des WENKA Versuchstandes in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Zunahme der Schichtdicke in Hauptströmungsrichtung ist charakteristisch für diese Strömungsform (siehe auch Kapitel 1) und wird sehr gut durch die Rechnungen wiedergegeben. Weiterhin gut zu erkennen ist, dass der Zweiphasenbereich sehr schmal ist und den kleinen Wellenamplituden bei dieser Strömungsform entspricht. Der Zweiphasenbereich ist in der Prinzipskizze für schießende Strömungen grau und überhöht dargestellt. Das Strömungsverhalten der Wasser- und der Luftphase ist an den beiden Messpositionen im Kanal skizziert. Diese befinden sich an der Position $x = 235 \text{ mm}$ und $x = 380 \text{ mm}$, wobei x die Hauptströmungsrichtung des Wasser darstellt. Die Strömungsgeschwindigkeiten, sowohl für das Wasser als auch für die Luft, sind für eine bessere Darstellung unterschiedlich skaliert. Die Wasser- als auch die Luftgeschwindigkeit werden durch die Wandschubspannung in Wandnähe deutlich verzögert. Wie bereits in Kapitel 2 diskutiert, unterliegt die schießende Strömung des Wassers einer Störungsschicht, die durch die Turbulenz der äußeren Strömung hervorgerufen wird. Dies hat im Vergleich zum logarithmischen Wandgesetz für den Bereich großer normierter Wandabstände ($y^+ > 100$) einen zusätzlichen Verzögerungseffekt auf die Wasserströmung.

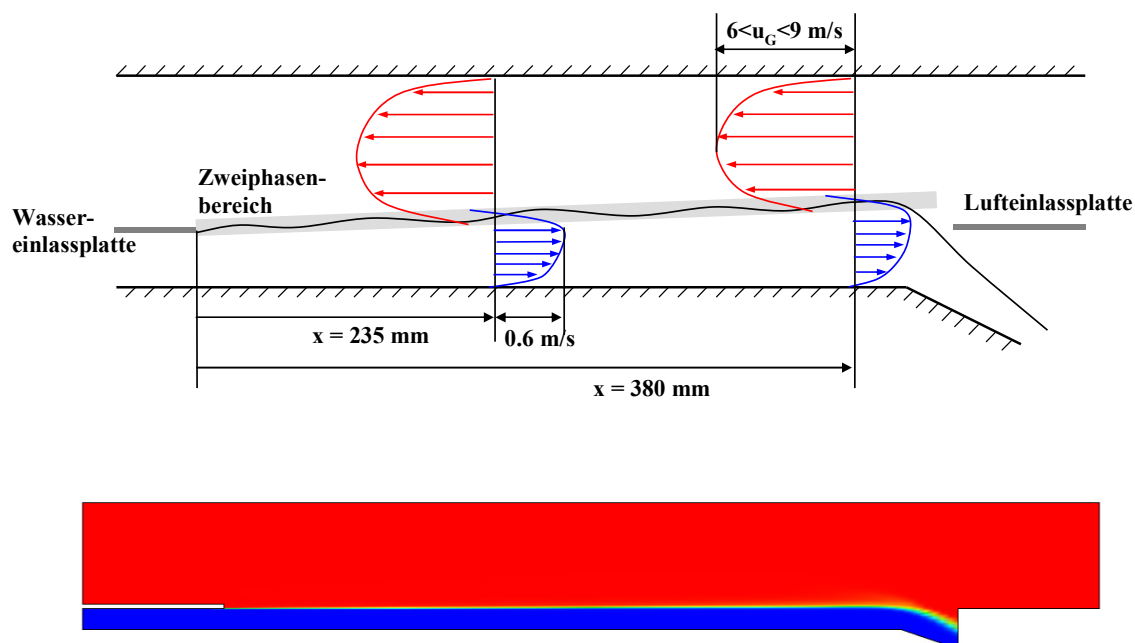


Abbildung 3.2: Schematische Geschwindigkeitsverteilung und Breite des Zweiphasenbereichs mit Ergebnis der Rechnung für die Verteilung des Gasgehaltes einer schießenden Strömung.

Aufgrund der Phasenreibung an der freien Oberfläche kommt es zu einer weiteren Verzögerung der Wassergeschwindigkeit und hat zur Folge, dass die maximale Strömungsgeschwindigkeit des Wassers knapp unterhalb des Zweiphasenbereichs liegt. Der Einfluss des Impulsaustausches an der freien Oberfläche ist auf die Luftströmung größer als auf die Wasserströmung, da die Luftgeschwindigkeit zwischen beiden Messpositionen nahe der Phasengrenze deutlich stärker verzögert wird.

3.1.1 Ergebnis für den Prandtlischen Mischungsweg

Zur Berechnung der schießenden Strömung wurde in einem ersten Schritt das in Kapitel 2 erläuterte Mischungswegmodell verwendet. Für die Berechnung wird vereinfachend angenommen, dass der Vorfaktor für die Diffusionskraft (siehe Gleichung (2.9) und (2.22)) sich konstant verhält. Für die Berechnung wird die charakteristische Länge zu $d_{char} = 0,003$ m gesetzt. Unter der Voraussetzung, dass das Dichteverhältnis $\rho_L / \rho_G \gg 1$ ist, lässt sich daraus mit $C = 1,05$ und dem Phasenreibungsbeiwert $\lambda_i = 0,2$ der Widerstandsbeiwert C_D nach Gleichung (2.21) zu 0,1 bestimmen.

Die Modellierung des Mischungsweges wird hier in vier Bereiche unterteilt, wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Ausgehend von der Wand wirkt der Mischungsweg in Wandnähe, bis sich mit zunehmendem Wandabstand die Nachlauffunktion auswirkt. Der Mischungsweg wird in diesen beiden Bereichen mit der Gleichung (2.26) berechnet. Zur exakten Bestimmung der Gleichung (2.26) wurden die Konstanten A und D an den schießenden Strömungen kalibriert. A ergibt sich zu 1,5 und $D = (y^+ - 60)/30$. Übersteigt der Mischungsweg der Nachlauffunktion denjenigen des inneren Bereichs der Strömung

$$l_{innen} = h_{Einlass} \cdot 0,125, \quad (3.1)$$

wird der kleinere der beiden Mischungswege verwendet. In diesem Fall ergibt sich für den Mischungsweg eine Konstante, die abhängig ist von der verwendeten Einlasshöhe des Wassers $h_{Einlass}$. Im Bereich der freien Oberfläche ergibt sich aufgrund von Turbulenzdämpfungsmechanismen ein kleinerer Wert für den Mischungsweg. Für den Zweiphasenbereich ist es ausreichend, eine Konstante

$$l_{int} = 0,00025 \text{ [m]} \quad (3.2)$$

anzunehmen. Dieser wird mit Hilfe des Gasgehaltes vom inneren Bereich der Strömung in den verschmierten Zweiphasenbereich übergeblendet. Für den inneren Bereich der Luftströmung wird der gleiche Mischungsweg wie für die Wasserströmung verwendet. Der Wandbereich der Luftströmung wird durch den von Prandtl hergeleiteten Mischungsweg $l = \kappa \cdot y$ modelliert.

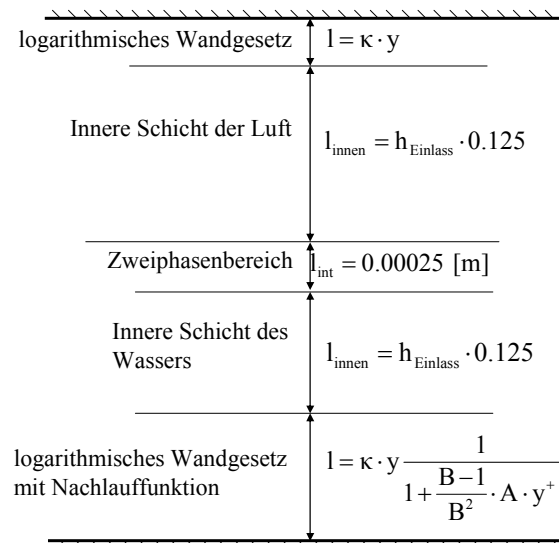


Abbildung 3.3: Bereiche des Prandtlschen Mischungsweges für schießende Strömungen.

Die Ergebnisse für das Mischungswegmodell sind einmal für eine Wassereinlasshöhe von 9 mm (Fall 4-24) in Abbildung 3.4(a) und für eine Wassereinlasshöhe von 15 mm (Fall 54-74) in Abbildung 3.4(b) dargestellt. Aufgetragen ist der normierte Wandabstand $y^* = y / y_{m(\alpha=0.5)}$ über der dimensionslosen Geschwindigkeit $u^* = u / u_m$. Für die Normierung des Wandabstandes wurde die mittlere gemessene Schichtdicke, dies entspricht einem Gasgehaltsanteil von 50%, verwendet. Somit lassen sich die Geschwindigkeiten der flüssigen Phase für eine Wassereinlasshöhe von 9 mm und 15 mm miteinander vergleichen. Die Geschwindigkeit für die flüssige Phase wurde mit der mittleren Geschwindigkeit

$$u_m = \frac{1}{\alpha_m \cdot y_{\max}} \int_0^{y_{\max}} u(y) \cdot \alpha(y) dy \quad , \quad \alpha_m = \frac{1}{y_{\max}} \int_0^{y_{\max}} \alpha(y) dy \quad (3.3)$$

berechnet. Die berechneten mittleren Größen für die Normierung sind in der folgenden Tabelle 3.1 zusammengefasst. Fall 4 und 54 befinden sich an der Messstelle $x=235$ mm in der Kanalmitte und Fall 24 und 74 an der Position $x=380$ mm.

Die verwendete Nachlauffunktion gibt die Wirbelviskosität im wandnahen Bereich und daraus folgend den Geschwindigkeitsverlauf in diesem Bereich sehr gut wieder. Der Übergang zwischen der Nachlauffunktion und innerem Bereich wird durch das Mischungswegmodell weiterhin gut wiedergegeben. Im Bereich der maximalen Geschwindigkeit wird die Wirbelviskosität für die Fälle 54-74 zu klein vorhergesagt, da der Geschwindigkeitsgradient in diesem Bereich zu null wird. Dies hat zur Folge, dass die berechnete Wirbelviskosität ebenfalls null wird und keine zusätzliche Reibung in diesem Gebiet mehr verursacht wird. Durch die fehlende Reibung steigt die

Geschwindigkeit schneller und nimmt größere Werte an. Für den Fall 4-24 mit 9 mm Wassereinlasshöhe ist dieser Effekt nur sehr schwach ausgeprägt und hat keinen Einfluss auf den Verlauf der Geschwindigkeit.

Punkt	Theorie mit Mischungsweg		Experiment	
	u_m [m/s]	y_m mit $\alpha_G = 0,5$ [mm]	u_m [m/s]	y_m mit $\alpha_G = 0,5$ [mm]
4	0,54	11,0	0,56	10,4
24	0,47	13,5	0,48	12,3
54	0,56	18,4	0,58	15,3
74	0,48	21,9	0,51	17,9

Tabelle 3.1: Berechnete mittlere Größen des Prandtlschen Mischungswegs für schießende Strömungen.

Die verstärkte Zunahme der Geschwindigkeit bei sehr kleinen Geschwindigkeitsgradienten ist ein typischer Effekt des Mischungswegansatzes, da dieser Ansatz nur Produktion und Dissipation von Turbulenz betrachtet und Effekte wie Transport und Diffusion vernachlässigt. Die Vereinfachung, dass Produktion und Dissipation von Turbulenz im Gleichgewicht stehen, darf hier nicht getroffen werden. Die Transport- und Diffusionsprozesse liefern für horizontal gegengerichtete Strömungen im Bereich der maximalen Geschwindigkeit einen nicht zu vernachlässigen Beitrag. Für horizontal geschichtete und schießende Strömungen kann trotz allem mit dem Prandtlschen Mischungsweg die Geschwindigkeit in hinreichender Genauigkeit vorhergesagt werden.

Die Größe der Diffusionskraft gibt die Breite des Zweiphasenbereiches mit den einzelnen statistisch gemittelten Wellenamplituden physikalisch wieder. Wie aus Abbildung 3.5 ersichtlich, wird der Zweiphasenbereich mit der Annahme einer konstanten turbulenten kinetischen Energie sehr gut abgebildet. Die berechnete mittlere Schichtdicke des Wassers wird für alle Fälle überschätzt. Die maximale Abweichung tritt bei Punkt 74 auf und beträgt 3,9 mm. Dies entspricht einer Abweichung zwischen Experiment und Simulation von 22%.

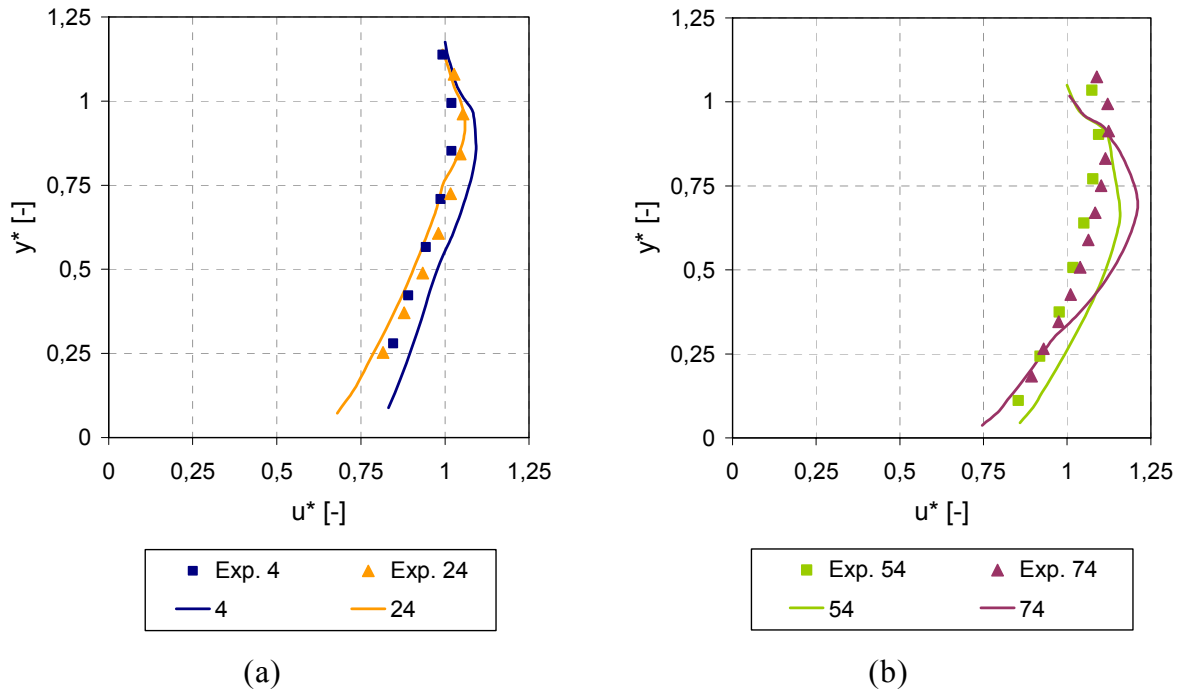


Abbildung 3.4: Geschwindigkeitsverteilung für schießende Strömung mit Prandtl'schem Mischungsweg: (a) 9 mm (b) 15 mm.

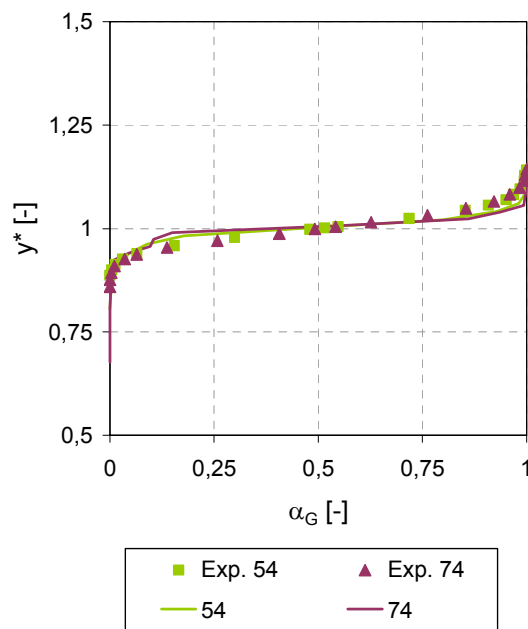


Abbildung 3.5: Verteilung des Gasgehaltes für schießende Strömungen.

3.1.2 Das k- ϵ und k- ω Modell

Zweigliedungsmodelle betrachten Transport- und Diffusionsprozesse der Turbulenz und sind daher besser geeignet, die Turbulenz im Bereich der maximalen Geschwindigkeit vorherzusagen. Ein weiterer großer Vorteil der Zweigliedungsmodelle ist die Berechnung der turbulenten kinetischen Energie, die für die Berechnung der Diffusionskraft (Gleichungen (2.9) und (2.22)) benötigt wird. Diese musste für das Prandtlsche Mischungswegmodell abgeschätzt werden. Für beide Turbulenzmodelle wurde, wie für den Prandtlschen Mischungsweg, die charakteristische Länge und der Phasenreibungskoeffizient zu $d_{char} = 0,003$ und $\lambda_i = 0,2$ gesetzt. Der Widerstandskoeffizient C_D errechnet sich nach Gleichung (2.21) und ist eine Funktion der turbulenten kinetischen Energie.

Für den zusätzlichen Produktionsterm der Dissipation an der Phasengrenze (siehe Gleichung (2.37) und (2.38)) wurde folgende Funktion für $a^{2\phi}$ verwendet.

$$a^{2\phi} = \frac{0,006}{Tu^*} \cdot \left(\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \text{EXP} \left(\frac{Tu^* - 0,75}{0,15} \right) \right)} \right] \cdot 3,0 + 1,0 \right) \quad (3.4)$$

Diese gibt den Verlauf der turbulenten kinetischen Energie im Vergleich mit den Experimenten sehr gut wieder. Für die Berechnung von $a^{2\phi}$ wird der lokale Turbulenzgrad Tu^* verwendet. Dieser errechnet sich analog zu Gleichung (3.5). Anstatt der mittleren Geschwindigkeit wird die lokale Geschwindigkeit verwendet. Der Verlauf der Funktion $a^{2\phi}$ ist in Abbildung 3.6 für typische lokale Turbulenzgrade gezeigt. Typische Werte für den lokalen Turbulenzgrad für schießende Strömungen liegen im Bereich $0,1 < Tu^* < 0,5$. Die erneute Zunahme von $a^{2\phi}$ für höhere lokale Turbulenzgrade ist nötig, um den Übergang und das Verhalten der turbulenten Größen für teilweise Strömungsumkehr richtig vorhersagen zu können.

Kommt es zu keiner zusätzlichen Dämpfung der Turbulenz im Zweiphasenbereich ($a^{2\phi} = 0$), stellt sich aufgrund der fehlenden Dämpfung bereits für schießende Randbedingungen eine teilweise Strömungsumkehr ein. Der Unterschied mit und ohne Dämpfung auf die Strömung ist am Punkt 54 in Abbildung 3.7 (S.55) gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Geschwindigkeit im Zweiphasenbereich deutlich kleinere und negative Werte aufweist, als mit zusätzlicher Dämpfung an der Phasengrenze. Negative Geschwindigkeiten für die flüssige Phase bedeuten, dass ein Teil des Massenstroms entgegen der eingespeisten Richtung fließt und teilweise umgekehrt ist. Die turbulente kinetische Energie ist ebenfalls in Abbildung 3.7 (S.55) gezeigt.

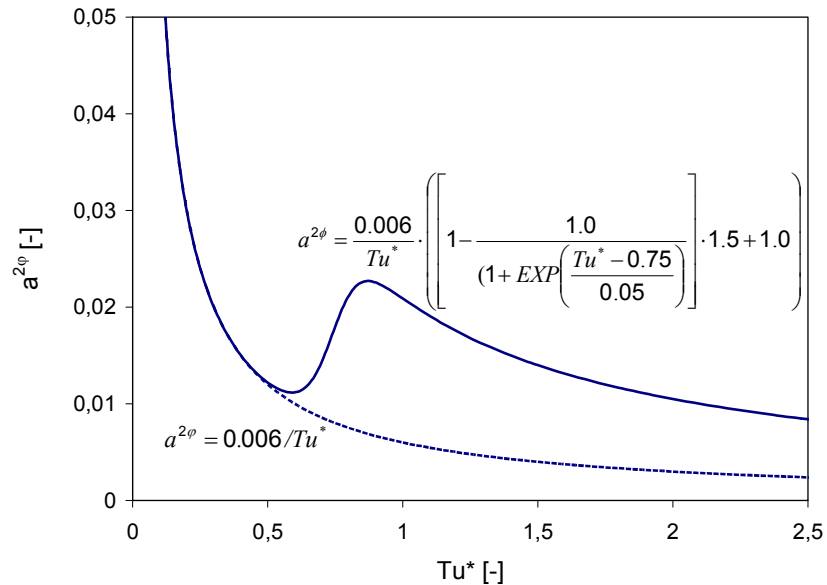


Abbildung 3.6: Funktion des Vorfaktors $a^{2\phi}$ für zusätzlichen Dämpfungsterm in der Dissipationsgleichung.

Aufgetragen ist der Turbulenzgrad

$$Tu = \frac{\sqrt{2/3 \cdot k_L}}{u_m} \quad (3.5)$$

über der dimensionslosen wandnormalen Koordinate y^* . Ohne Turbulenzdämpfung übersteigt der Turbulenzgrad die in den Experimenten gemessenen Werte um den Faktor 3-4. Mit zusätzlicher Dämpfung kommt es zu einer guten Übereinstimmung. Aufgrund der zu groß berechneten turbulenten kinetischen Energie und Wirbelviskosität wird zuviel Impuls an der Phasengrenze ausgetauscht. Als direkte Folge stellt sich eine teilweise umgekehrte Strömung ein. Weiterhin ist deutlich zu erkennen, dass der Einfluss der zusätzlichen Dissipation bis weit in die flüssige Phase durch Transport- und Diffusionsmechanismen wirkt.

3.1.2.1 Wasserphase

Die Randbedingungen für die berechneten Strömungen variieren zwischen $1,88 < Fr < 3,36$ am Eintritt für die flüssige Phase. Bei kleineren Fr-Zahlen kann es aufgrund der Phasenreibung bereits zu einem hydraulischen Sprung im Kanal kommen, der je nach Luftmassenstrom im Kanal steht. Daher sollten für reine schießende Strömung die $Fr > 1,5$ am Eintritt sein. Die verwendeten Randbedingungen sind in Tabelle 3.2 für eine Wassereinlasshöhe von 9 mm und in Tabelle 3.3 für 15 mm aufgelistet.

Punkt		Einlasshöhe y_E [mm]	Messposition x [mm]	u_W [m/s]	u_G [m/s]	Fr_0 [-]	Re_{Wasser} [-]
3-23	3	9	235	0,7	4,44	2,36	5700
	23	9	380	0,7	4,44	2,36	5700
4-24	4	9	235	0,7	6,67	2,36	5700
	24	9	380	0,7	6,67	2,36	5700
6-26	6	9	235	1,0	4,44	3,37	8000
	26	9	380	1,0	4,44	3,37	8000
9-29	9	9	235	1,0	6,67	3,37	8000
	29	9	380	1,0	6,67	3,37	8000

Tabelle 3.2: Randbedingungen für schießende Strömungen mit $y_E = 9$ mm.

Punkt		Einlasshöhe y_E [mm]	Messposition x [mm]	u_W [m/s]	u_G [m/s]	Fr_0 [-]	Re_{Wasser} [-]
53-73	53	15	235	0,72	4,8	1,88	10500
	73	15	380	0,72	4,8	1,88	10500
54-74	54	15	235	0,72	7,2	1,88	10500
	74	15	380	0,72	7,2	1,88	10500
	56	15	235	1,0	4,8	2,6	14500
	57	15	235	1,0	7,2	2,6	14500
	58	15	235	1,0	10,8	2,6	14500

Tabelle 3.3: Randbedingungen für schießende Strömungen mit $y_E = 15$ mm.

In den Abbildungen 3.8-3.11 ist die dimensionslose Geschwindigkeit aufgetragen. Im wandnahen Bereich berechnet das $k-\epsilon$ Modell für eine Wassereinlasshöhe von 9 mm und 15 mm eine kleinere Geschwindigkeit als das $k-\omega$ Modell. In der inneren Schicht der flüssigen Phase steigt die Geschwindigkeit für das $k-\epsilon$ Modell schneller an. Dies führt zu einer größeren Geschwindigkeit im Vergleich zum $k-\omega$ Modell. Der Zweiphasenbereich beginnt für den Fall der schießenden Strömung zirka ab einem Wert von 0,85 für den normierten Wandabstand y^* . Dies ist in den Abbildungen 3.8-3.11 durch einen grauen Bereich in den Diagrammen dargestellt. Im Zweiphasenbereich reduziert sich die Geschwindigkeit der flüssigen Phase für das $k-\epsilon$ Modell schneller als beim $k-\omega$ Modell je größer der Gasgehaltsanteil der Luftphase wird. Beide Turbulenzmodelle berechnen das Verhalten der Geschwindigkeit der flüssigen Phase verglichen mit den Experimenten sehr gut und die Abweichung für die einzelnen Punkte betragen weniger als 5 %.

Betrachtet man die Abweichungen der mittleren Geschwindigkeiten zwischen Experiment und numerischem Ergebnis, so stellt man teilweise eine größere Abweichung als 5% fest (siehe Tabelle 3.4). Die größere Abweichung liegt darin begründet, dass für den Fall der schießenden Strömung stehende Wellen durch die Wassereinlassplatte generiert werden (siehe Stähler [78]). Dies führt zusätzlich zu einem dreidimensionalen Effekt, der in dieser Arbeit nicht aufgelöst wird. Durch die Normierung mit der mittleren Geschwindigkeit entfällt dieser bei der dimensionslosen Betrachtung. Aufgrund der stehenden Wellen kommt es auch für die mittlere Schichtdicke zu Abweichungen, je nachdem ob die Messung näher an einem Wellenberg oder Wellental durchgeführt wurde.

Die Geschwindigkeitsprofile der schießenden Strömungen verhalten sich alle ähnlich, obwohl die Wassereinlasshöhe als auch die Wassergeschwindigkeit am Eintritt sowie die Luftgeschwindigkeit variiert wurden. Dieses ähnliche Verhalten ist unabhängig von der Messposition im Kanal. Für hohe Luftgeschwindigkeiten und einer niedrigen Fr-Zahl am Eintritt (Fall 54-74) erkennt man, dass an der Messposition 74 im Kanal die Geschwindigkeit am oberen Ende des Zweiphasenbereiches bereits stärker verzögert wurde, als dies für die anderen Fälle der Fall ist. Bei diesem Fall tritt bei weiterer Erhöhung der Luftgeschwindigkeit zuerst der hydraulische Sprung auf.

Für die Punkte 56, 57 und 58 ist die Geschwindigkeit des Wassers am Eintritt konstant. Trotz einer starken Erhöhung der Luftgeschwindigkeit bleibt der Einfluss der Reibung an der Phasengrenze auf die schießende Strömung sehr gering. Erst am Punkt 58 kann eine leichte Verzögerung der Wasserphase beobachten werden.

Die turbulente kinetische Energie lässt sich aus den einzelnen gemessenen Schwankungsgeschwindigkeiten wie folgt berechnen:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{2} \left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} \right) \quad (3.6)$$

Da in den WENKA Experimenten die Geschwindigkeiten nur in zwei Raumrichtungen vermessen wurden, muss für die Berechnung der turbulenten kinetischen Energie eine Annahme für die dritte Raumrichtung getroffen werden. In der Literatur [64] wird diese Schwankungsgeschwindigkeit üblicherweise durch den Mittelwert der beiden bekannten Schwankungsgeschwindigkeiten gebildet und stellt einen oberer Wert für die turbulente kinetische Energie dar. Eine untere Abschätzung ist die Annahme, dass die dritte Komponente der kleineren der ersten beiden entspricht. Für die weitere Auswertung der WENKA Experimente wird die obere Abschätzung für die turbulent kinetische Energie verwendet.

Punkt	Experiment		k- ϵ Modell		Abweichung		k- ω Modell		Abweichung	
	u_m	y_m	u_m	y_m	$\frac{u_{m_k-\epsilon}}{u_{m_Exp.}}$	$\frac{y_{m_k-\epsilon}}{y_{m_Exp.}}$	u_m	y_m	$\frac{u_{m_k-\omega}}{u_{m_Exp.}}$	$\frac{y_{m_k-\omega}}{y_{m_Exp.}}$
	[m/s]	[mm]	[m/s]	[mm]			[m/s]	[mm]		
3	0,56	10,2	0,65	10,0	1,161	0,980	0,63	9,8	1,125	0,961
23	0,49	11,9	0,60	10,6	1,224	0,891	0,60	10,5	1,224	0,882
4	0,56	10,4	0,63	9,8	1,125	0,942	0,63	9,9	1,125	0,952
24	0,48	12,3	0,59	10,5	1,229	0,854	0,59	10,6	1,229	0,862
6	0,79	11,7	0,91	9,8	1,152	0,838	0,92	9,7	1,165	0,829
26	0,77	10,6	0,86	10,3	1,117	0,972	0,87	10,1	1,130	0,953
9	0,8	11,8	0,91	9,8	1,138	0,831	0,92	9,7	1,150	0,822
29	0,74	10,7	0,86	10,3	1,162	0,963	0,87	10,1	1,176	0,944
53	0,58	15,2	0,67	15,9	1,155	1,046	0,67	16,0	1,155	1,053
73	0,53	17,3	0,64	16,6	1,208	0,960	0,64	16,8	1,208	0,971
54	0,58	15,3	0,67	15,8	1,155	1,033	0,67	16,1	1,155	1,052
74	0,51	17,9	0,63	16,8	1,235	0,939	0,64	16,8	1,255	0,939
56	0,83	17,3	0,95	15,6	1,145	0,902	0,95	15,8	1,145	0,913
57	0,82	17,3	0,95	15,6	1,159	0,902	0,95	15,7	1,159	0,908
58	0,81	17,8	0,94	15,8	1,160	0,888	0,94	15,8	1,160	0,888

Tabelle 3.4: Mittlere Größen und Abweichungen von den Experimenten der schießenden Strömung.

Aus den einzelnen Schwankungsgeschwindigkeiten der WENKA Experimente ist erkennbar, dass diese im Zweiphasenbereich kontinuierlich ansteigen, wobei die Schwankungsgeschwindigkeiten in vertikaler Richtung in der Hauptströmung kleinere Werte aufweisen als in Hauptströmungsrichtung. Die vertikalen Schwankungsgeschwindigkeiten nehmen im Zweiphasenbereich aufgrund der Wellenbewegungen des Wassers deutlich zu. Die turbulente kinetische Energie verhält sich analog dazu und ist in den Abbildungen 3.12-3.15 in dimensionsloser Form gezeigt. Trotz der Zunahme der turbulenten kinetischen Energie im Zweiphasenbereich ist der Einfluss der Phasengrenze dämpfend auf die Modellierung der Turbulenzproduktion (siehe Kapitel 2.3). Beide Turbulenzmodelle überschätzen die turbulente kinetische Energie im wandnahen Bereich. Mit zunehmendem Wandabstand verringert sich die Differenz zwischen Rechnung und Experiment und wird im inneren Bereich der flüssigen Phase sehr gut vorhergesagt. In der Nähe der Phasengrenze nimmt die berechnete turbulente kinetische Energie wieder zu. Die Zunahme der turbulenten kinetischen Energie ist auf die Verwendung des homogenen Turbulenzmodells zurückzuführen. Mit sich verringerndem flüssigen Anteil steigt der Einfluss der turbulenten kinetischen Energie der Luftphase an. Diese ist in der Luftphase aufgrund

der größeren Schergeschwindigkeiten wesentlich höher. Das $k-\epsilon$ Modell berechnet im Zweiphasenbereich systematisch einen schnelleren Anstieg der turbulenten kinetischen Energie als das $k-\omega$ Modell.

Die korrekte Berechnung der turbulenten kinetischen Energie hat zusätzlich einen großen Einfluss auf die Berechnung des Zweiphasenbereiches. Dieser wird direkt über den turbulenten Diffusionskoeffizienten aus Gleichung (2.9) bestimmt. Kommt es zu einer größeren Abweichung in der Berechnung der turbulenten kinetischen Energie, hat dies einen direkten Einfluss auf die Aufweitung des Zweiphasenbereiches. Dieser Effekt wird deutlich im Bereich großer Gasgehaltsanteile der Luft. Wie bereits oben erwähnt, kommt es in diesem Bereich der Zweiphasigkeit zu einer Überschätzung der turbulenten kinetischen Energie, die im gleichen Zuge auch zu einer Vergrößerung des Zweiphasenbereiches führt. Die stärkere Aufweitung des Zweiphasengebietes für die einzelnen schießenden Strömungsrandbedingungen sind in den Abbildungen 3.16-3.19 dargestellt. Vergleicht man die berechnete mittlere Schichtdicke mit der ermittelten mittleren Schichtdicke aus den Experimenten, stellt man teilweise größere Abweichungen fest. Die Ursache hierfür liegt wieder an den stehenden Wellen, die durch die Einlassplatte generiert werden.

3.1.2.2 Luftphase

Die Abweichung zwischen den berechneten Geschwindigkeiten der Luftphase und den experimentell gemessenen Geschwindigkeiten sind größer als die der Wasserphase. Im WENKA Versuchstand wurde die Luftgeschwindigkeit nur für eine Wassereinlasshöhe von $y_E = 9$ mm untersucht. Wie aus den Abbildungen 3.20 (a) und 3.21 (a) zu erkennen ist, wird die Luftphase systematisch in der Nähe der Phasengrenze stärker durch das gegenströmende Wasser als im Experiment verzögert. Aufgetragen ist der Betrag der Luftgeschwindigkeit über dem dimensionslosen Wandabstand. Dieser errechnet sich für die Luftphase wie folgt

$$y^* = \frac{y - y_{m(\alpha=0.5)}}{h_{\text{Kanal}} - y_{m(\alpha=0.5)}} \quad (3.7)$$

und nimmt den Wert $y^* = 0$ für die mittlere Schichtdicke bei $\alpha_G = 0,5$ an und erreicht den Wert $y^* = 1$ für die obere Wand des Kanals. h_{Kanal} ist die Gesamthöhe des Kanals und beträgt für den WENKA Versuchstand $h_{\text{Kanal}} = 90$ mm.

Selbst für höhere Luftgeschwindigkeiten, wie sie in den Fällen 4-24 und 9-29 vorherrschen, gibt es keinen erkennbaren Unterschied der Geschwindigkeit im Bereich der Phasengrenze. Aufgrund der Massenerhaltung der Luft kommt es zu einem Beschleunigungseffekt für diese Fälle im mittleren Bereich ($0,3 < y^* < 0,9$). Die verstärkte

Verzögerung auf die Luftphase wird einerseits durch eine zu niedrig berechnete turbulente kinetische Energie (siehe Abbildung 3.20 (b)), die wiederum auf eine Unterschätzung der Wirbelviskosität führt und damit eine starke Änderung (Verzögerung) der Geschwindigkeit in der Nähe der Phasengrenze zulässt, hervorgerufen. Da, wie bereits oben erwähnt, ein einziges Turbulenzmodell für beide Phasen (homogenes Turbulenzmodell) verwendet wird, wirkt sich in diesem Bereich das Wasser auf die Turbulenzproduktion der Luft negativ aus. Zusätzlich wirkt der Ansatz, den Zweiphasenbereich als eine diffusive Schicht zu modellieren, verzögernd auf die Luftphase. In diesem Fall werden lokale Vorgänge, die zwischen Wellenberg und Tal ablaufen, vernachlässigt. Dies führt für die Modellierungsannahmen zu einem schwächeren Grenzschichtverhalten als in den Experimenten beobachtet. Die Grenzschicht an der Kanaldecke wurde mit Hilfe von Wandfunktionen gelöst.

Die berechnete turbulente kinetische Energie mit dem k - ϵ und k - ω Modell unterliegt größerer Abweichungen als in der Wasserphase. Die Zunahme in der Nähe des Zweiphasenbereichs wird tendenziell von beiden Turbulenzmodellen richtig vorhergesagt, wobei der maximale Wert um den Faktor 1.5-1.7 unterschätzt wird. Im Bereich $0,3 < y^* < 0,9$ kommt es nur noch zu einer geringen Änderung der turbulenten kinetischen Energie. Die Abweichung nimmt mit größer werdendem y^* zu und kann im Bereich der Wand qualitativ nicht richtig wiedergegeben werden.

3.1.2.3 Diagramme schießender Strömungen

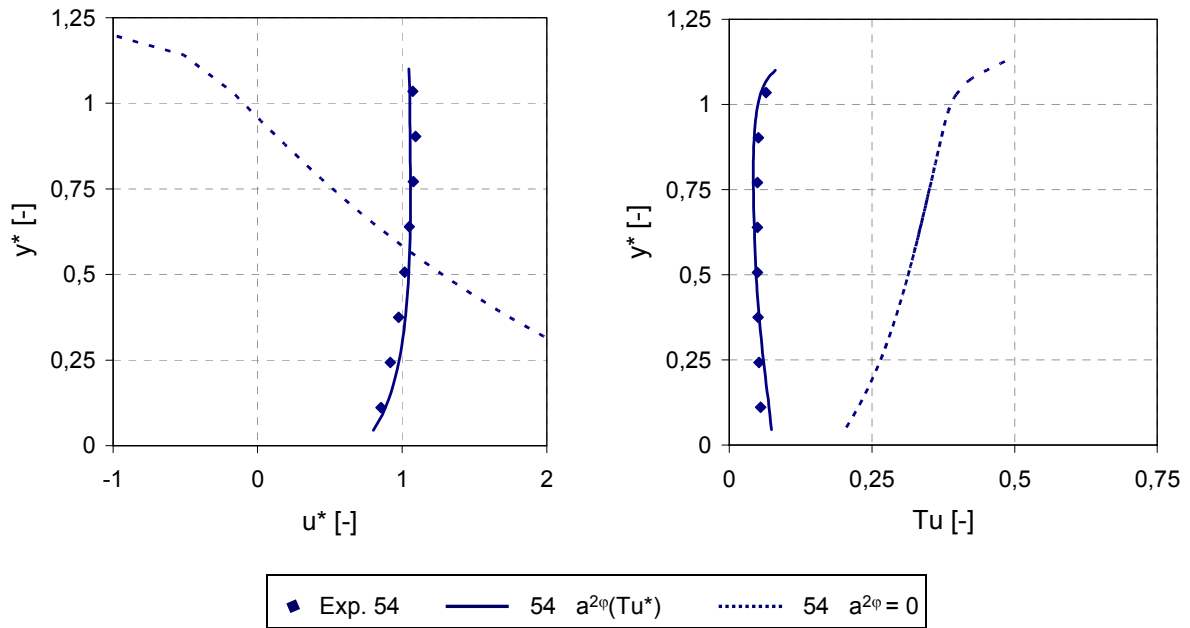


Abbildung 3.7: Vergleich der Geschwindigkeit und des Turbulenzlevels mit und ohne zusätzlicher Turbulenzdämpfung.

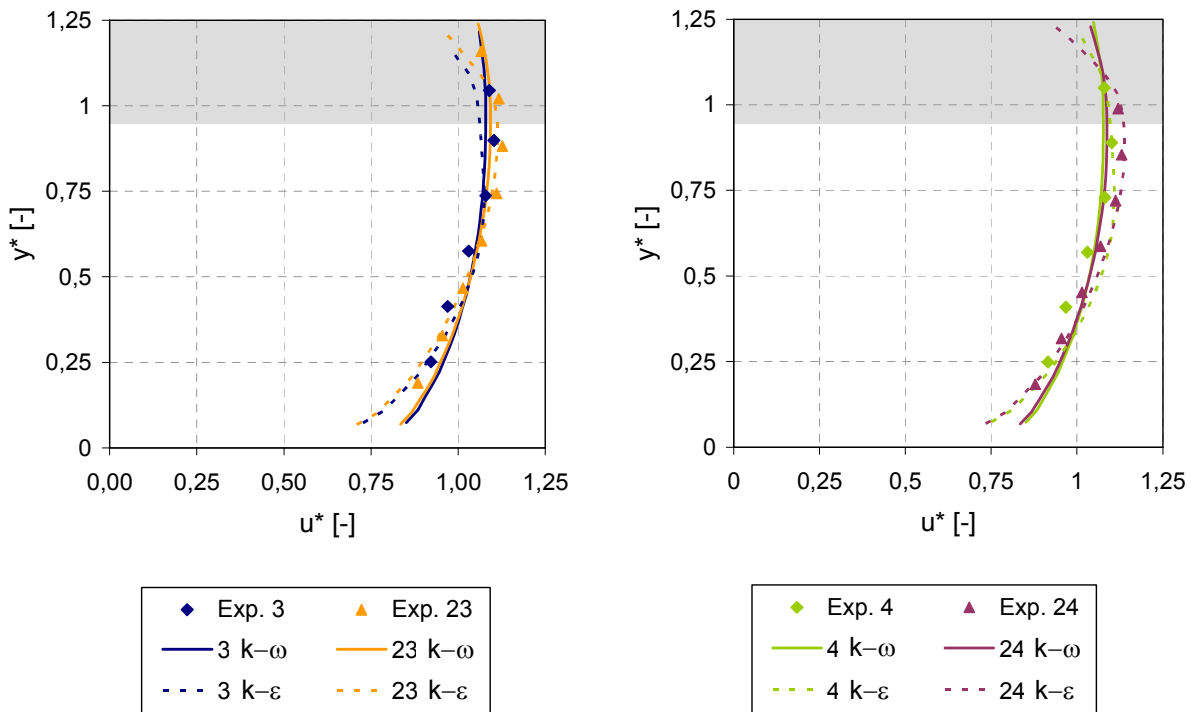


Abbildung 3.8: Geschwindigkeitsverlauf schießender Strömung mit $u_w = 0.7$ m/s und $y_E = 9$ mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

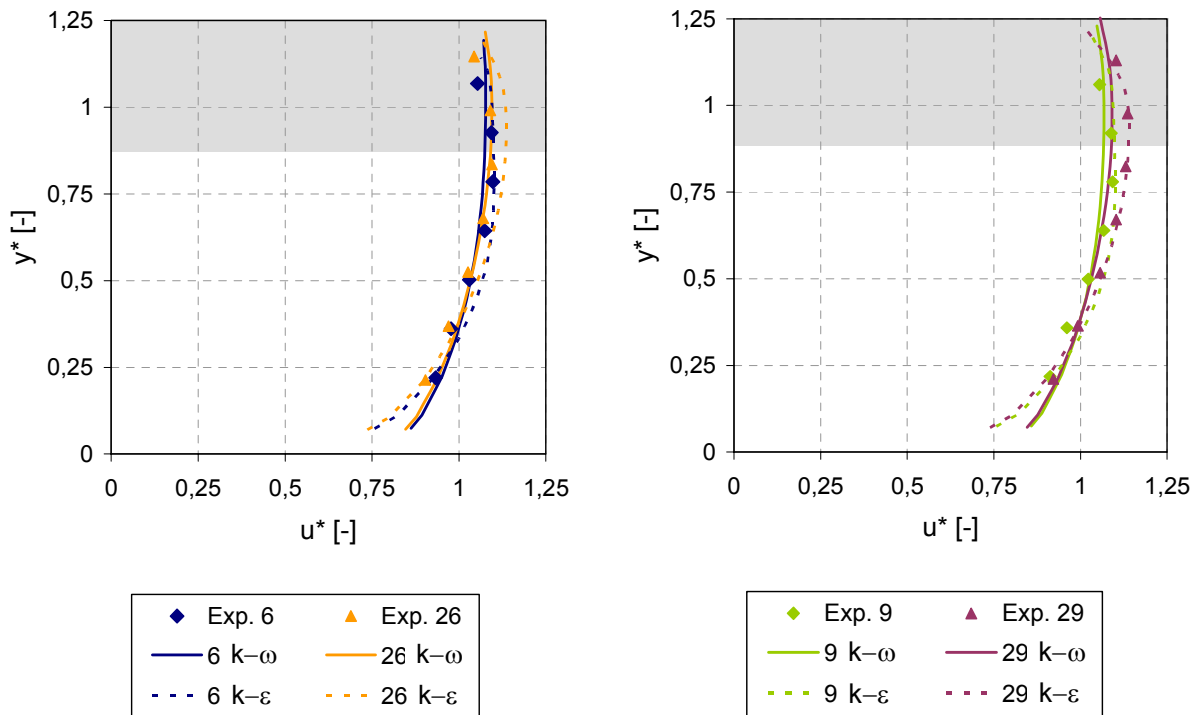


Abbildung 3.9: Geschwindigkeitsverlauf schießender Strömung mit $u_w = 1.0$ m/s und $y_E = 9$ mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

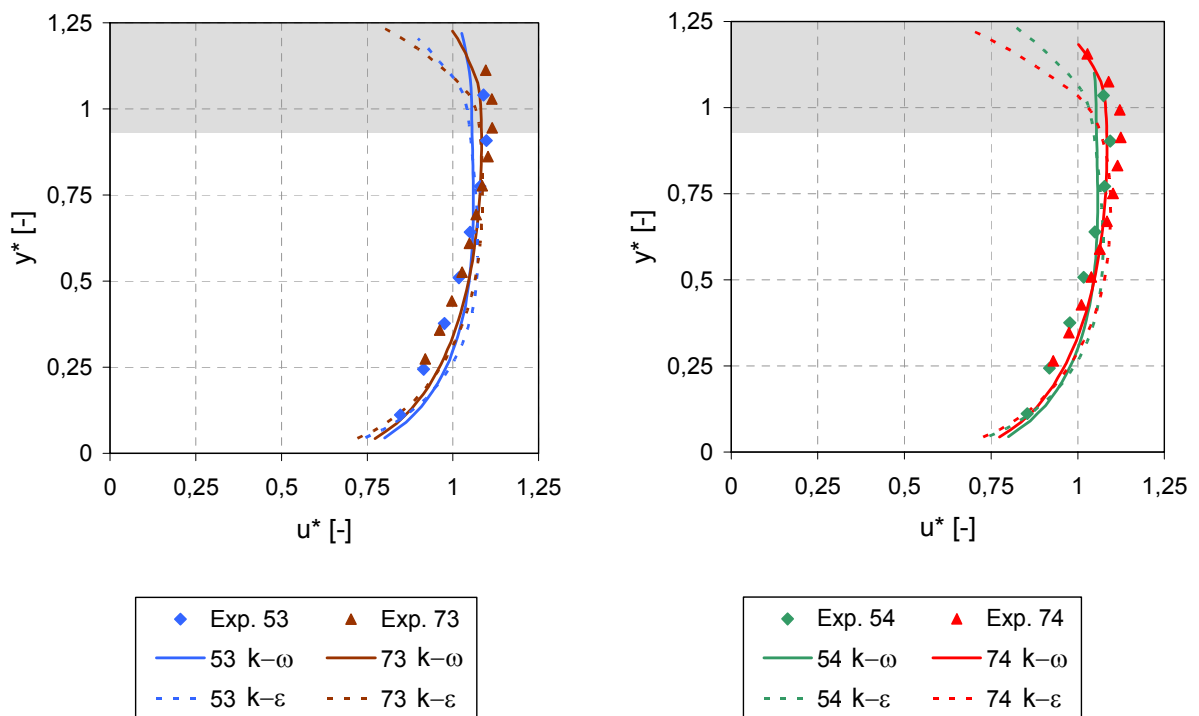


Abbildung 3.10: Geschwindigkeitsverlauf schießender Strömung mit $u_w = 0.72$ m/s und $y_E = 15$ mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

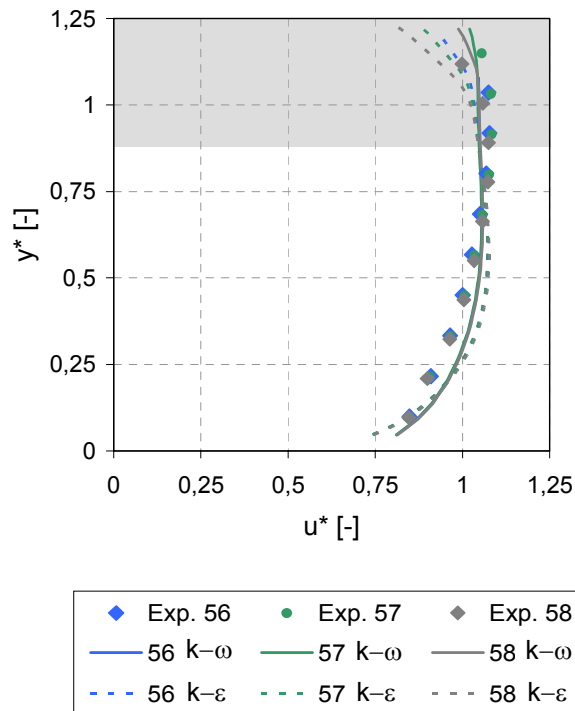


Abbildung 3.11: Geschwindigkeitsverlauf schießender Strömung mit $u_w = 1.0$ m/s und $y_E = 15$ mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

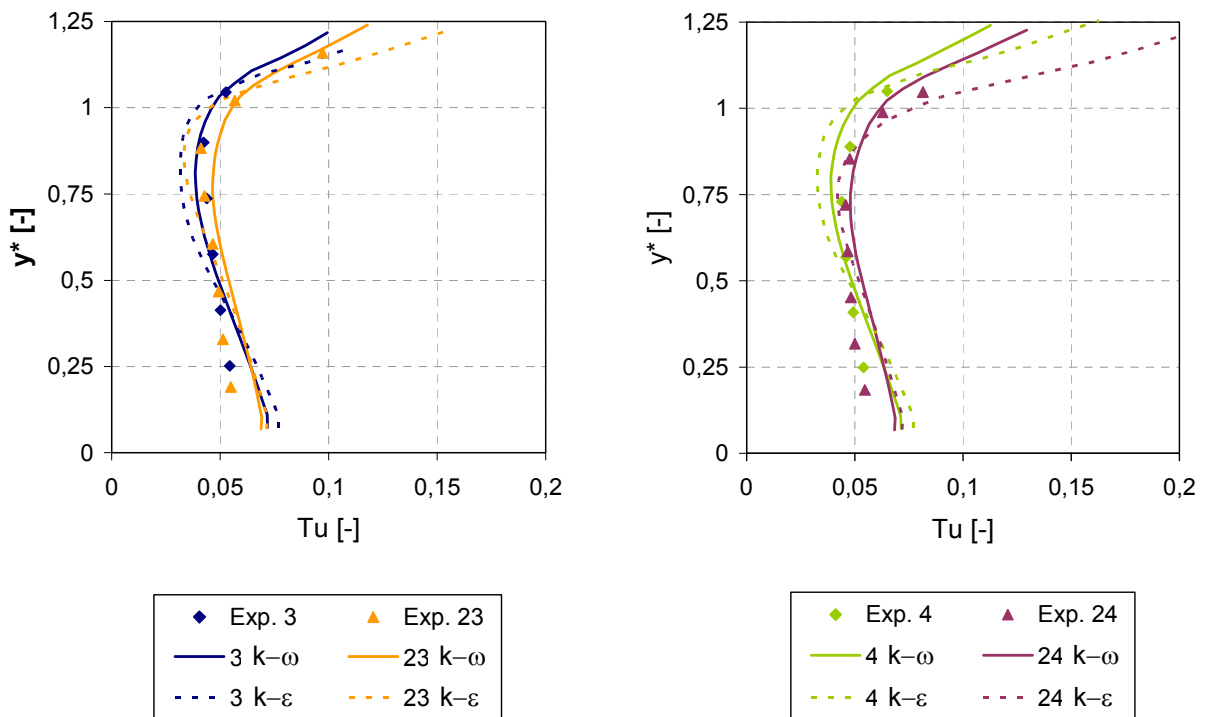


Abbildung 3.12: Turbulenzgrad schießender Strömung mit $u_w = 0.7$ m/s und $y_E = 9$ mm.

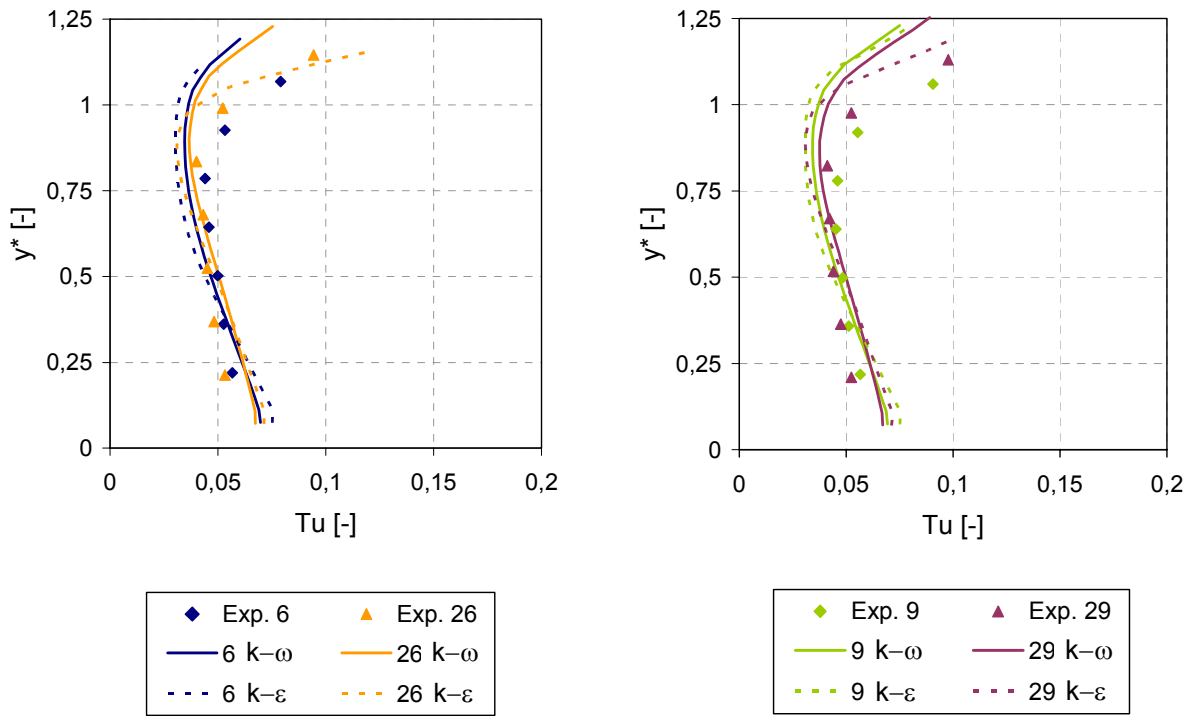


Abbildung 3.13: Turbulenzgrad schießender Strömung mit $u_w = 1.0$ m/s und $y_E = 9$ mm.

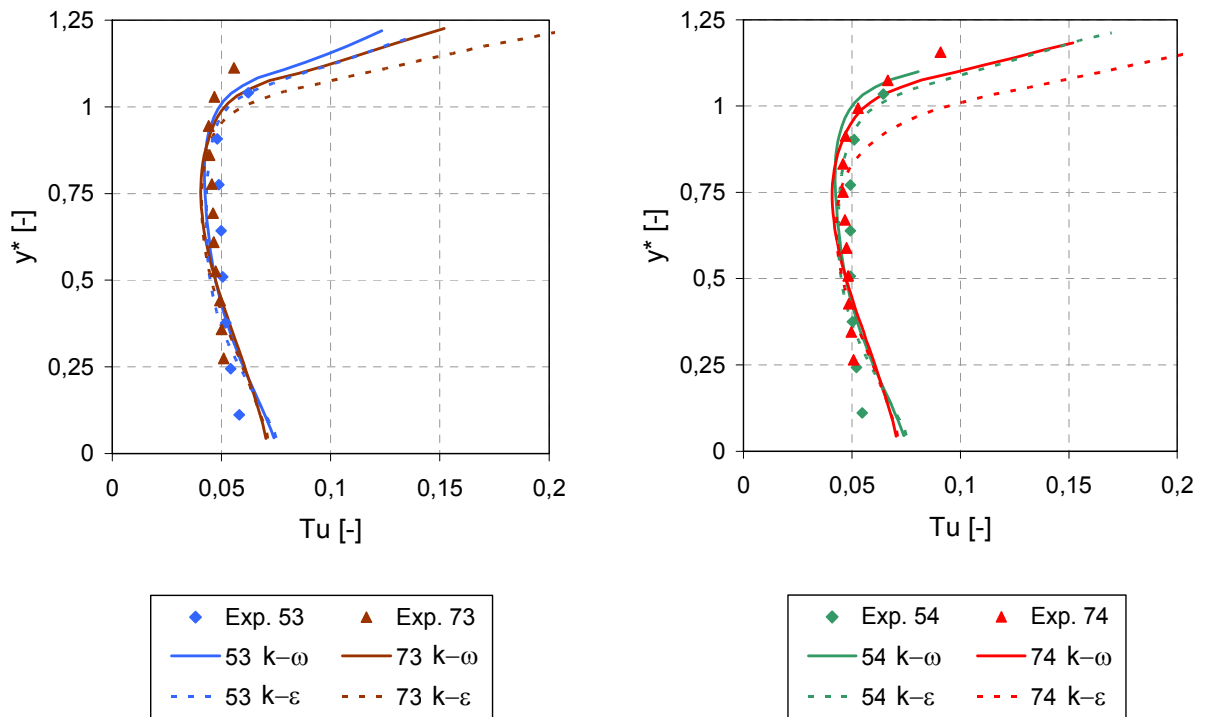


Abbildung 3.14: Turbulenzgrad schießender Strömung mit $u_w = 0.72$ m/s und $y_E = 15$ mm.

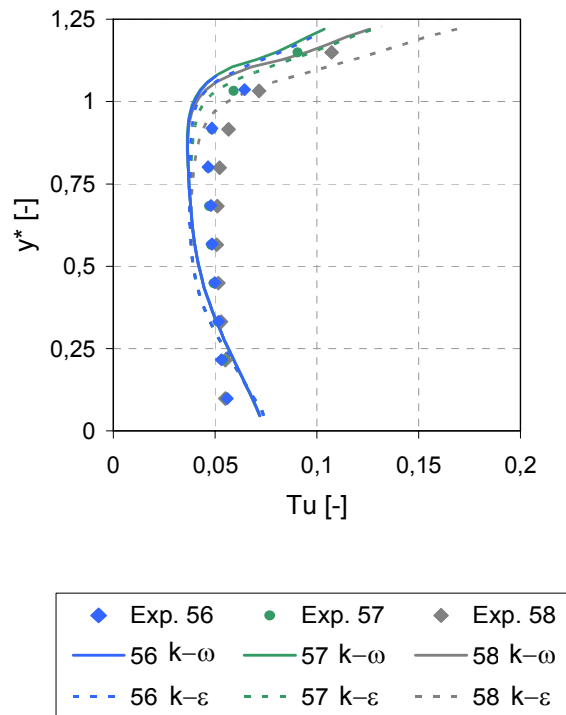


Abbildung 3.15: Turbulenzgrad schießender Strömung mit $u_w = 1.0 \text{ m/s}$ und $y_E = 15 \text{ mm}$.

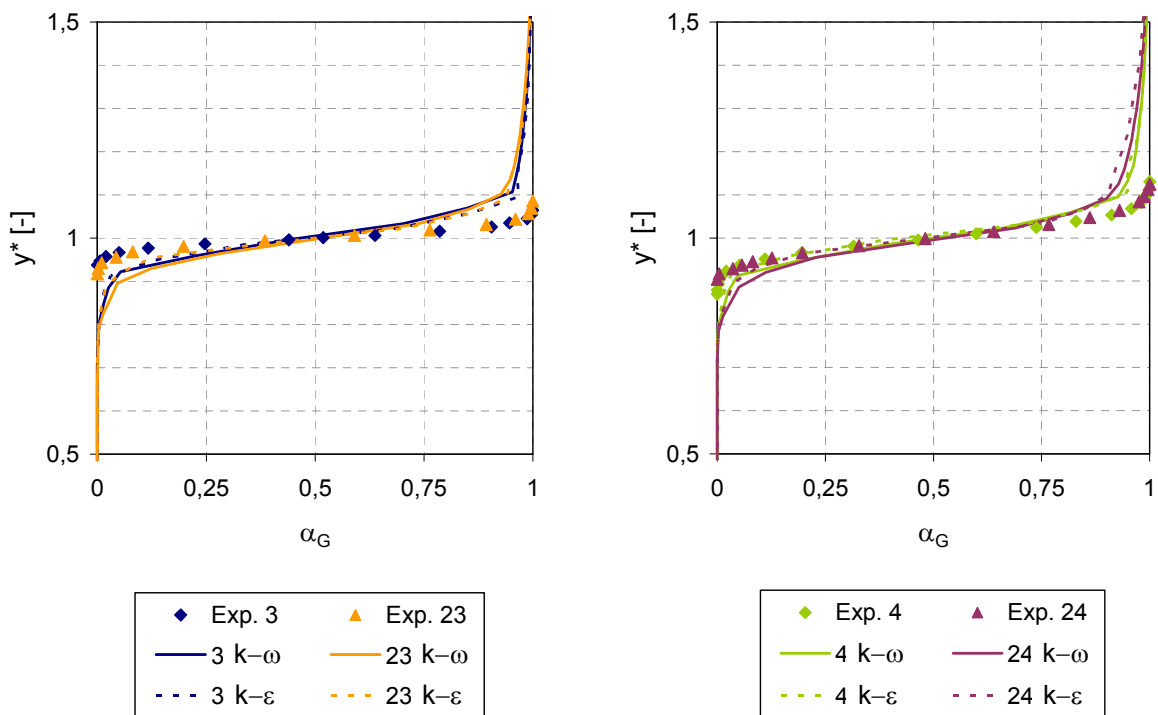


Abbildung 3.16: Verlauf Zweiphasenbereich schießender Strömung mit $u_w = 0.7 \text{ m/s}$ und $y_E = 9 \text{ mm}$.

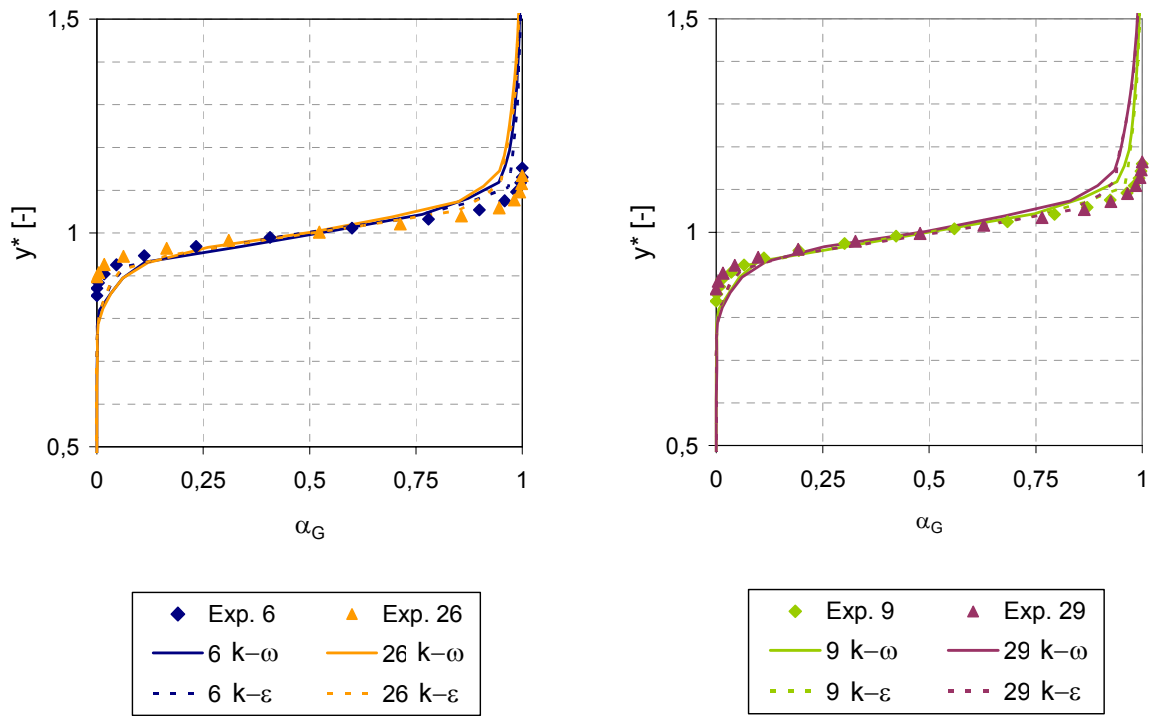


Abbildung 3.17: Verlauf Zweiphasenbereich schießender Strömung mit $u_w = 1.0$ m/s und $y_E = 9$ mm.

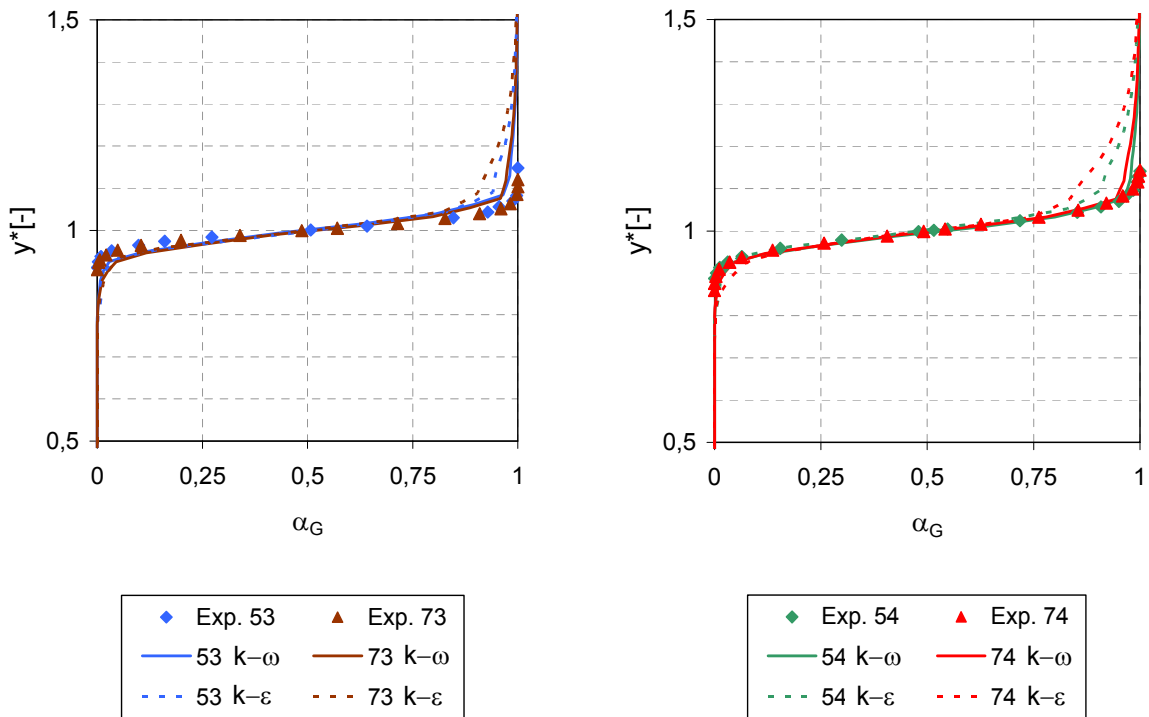


Abbildung 3.18: Verlauf Zweiphasenbereich schießender Strömung mit $u_w = 0.72$ m/s und $y_E = 15$ mm.

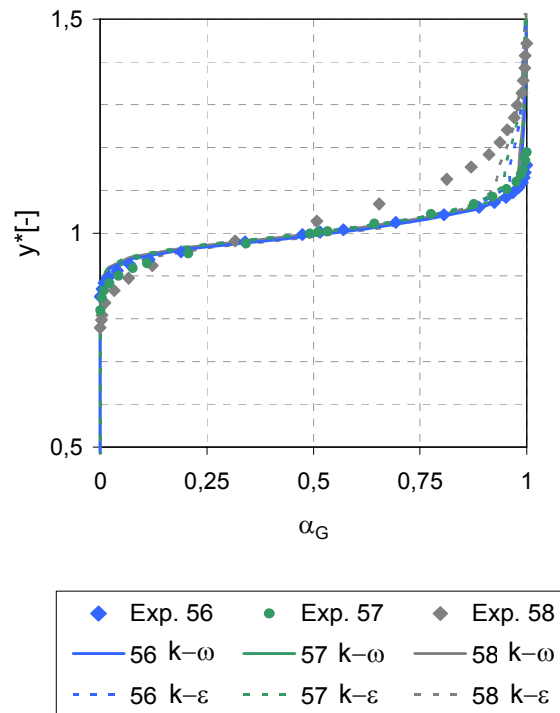


Abbildung 3.19: Verlauf Zweiphasenbereich schießender Strömung mit $u_w = 1.0$ m/s und $y_E = 15$ mm.

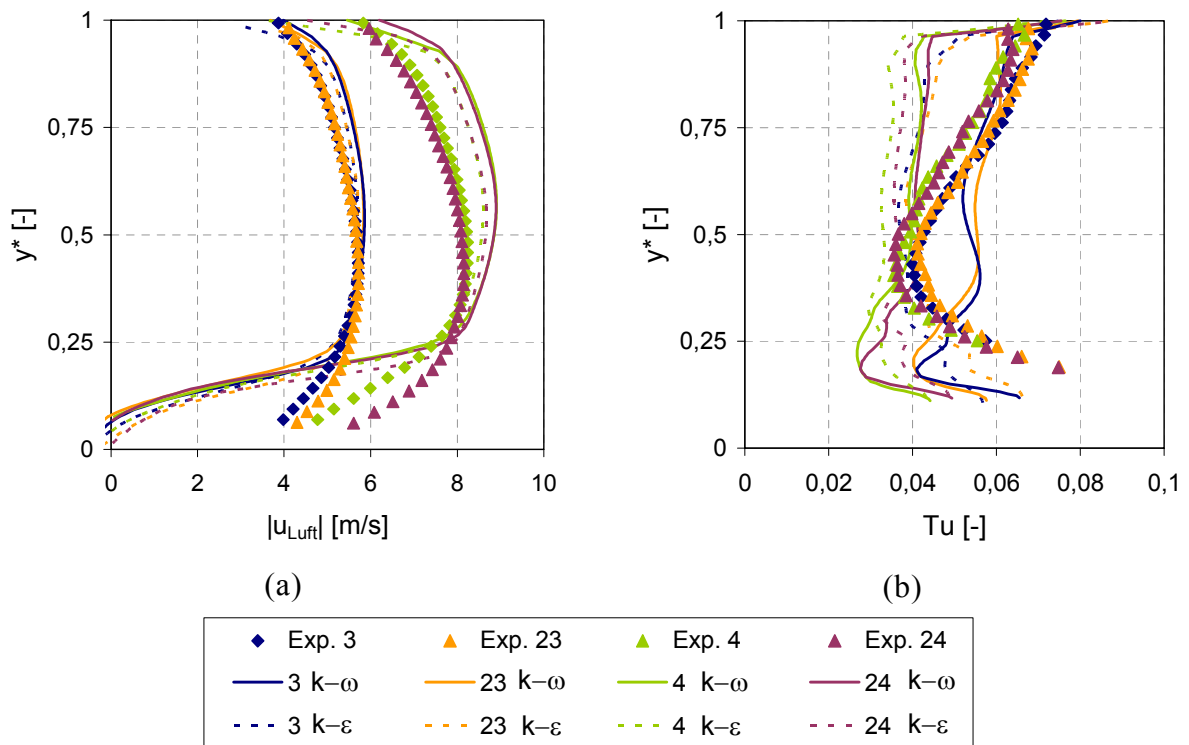


Abbildung 3.20: Geschwindigkeit und Turbulenzgrad der Luft einer schießenden Strömung mit $u_w = 0.7$ m/s und $y_E = 9$ mm.

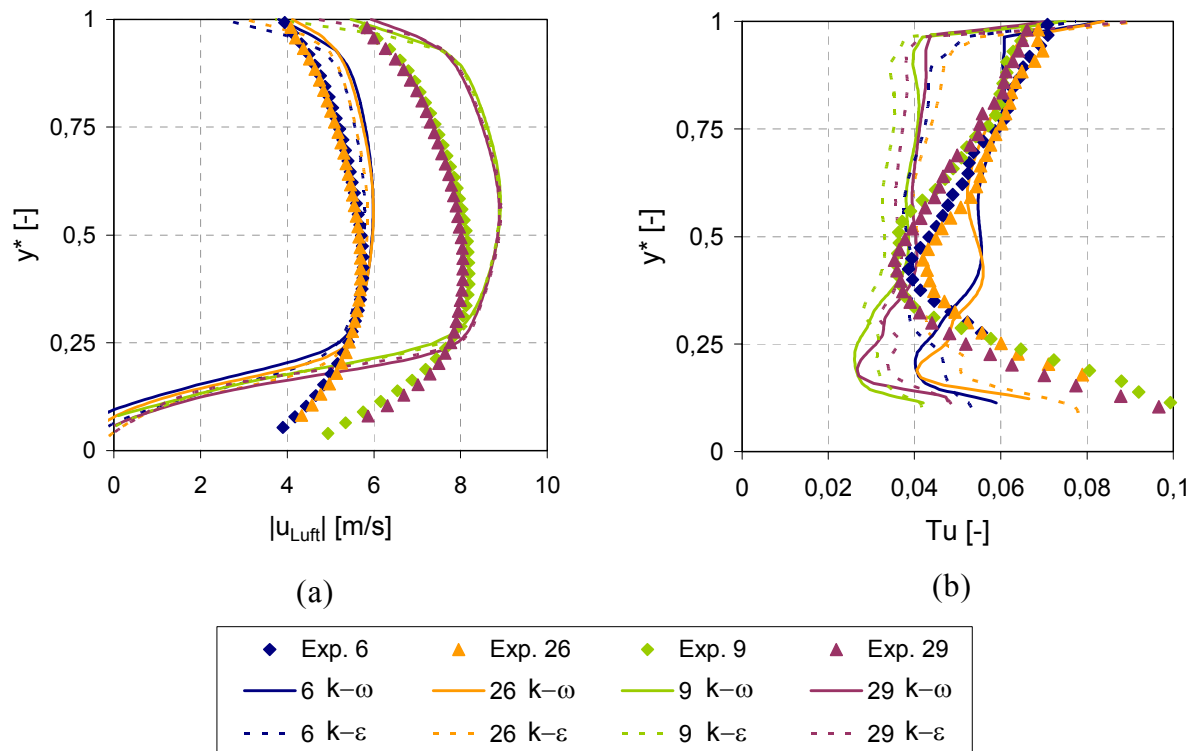


Abbildung 3.21: Geschwindigkeit (a) und Turbulenzgrad (b) der Luft einer schießenden Strömung mit $u_w = 1.0$ m/s und $y_E = 9$ mm.

3.2 Fließende Strömungen

Fließende Strömungen besitzen am Wassereintritt eine Fr-Zahl kleiner eins. Hieraus ergibt sich, dass die fließende Strömung hauptsächlich durch die Gravitation getrieben wird. Dies hat zur Folge, dass im Gegensatz zur schießenden Strömung die Schichtdicke in Hauptströmungsrichtung abnimmt. In Abbildung 3.22 ist das prinzipielle Verhalten der Strömung skizziert. Die Strömungsgeschwindigkeiten, sowohl für das Wasser als auch der Luft, sind wie für die schießende Strömung unterschiedlich skaliert. Für die fließenden Strömungen nimmt die Schichtdicke direkt nach Ende der Wassereinlassplatte sprunghaft zu, um dann kontinuierlich in Hauptströmungsrichtung abzunehmen. Dieser sprunghafte Anstieg wird durch das plötzliche Wegfallen der oberen Wandschubspannung verursacht. Wird dies mit der Rechnung verglichen, ergibt sich der gleiche sprunghafte Anstieg der Schichtdicke wie im Experiment.

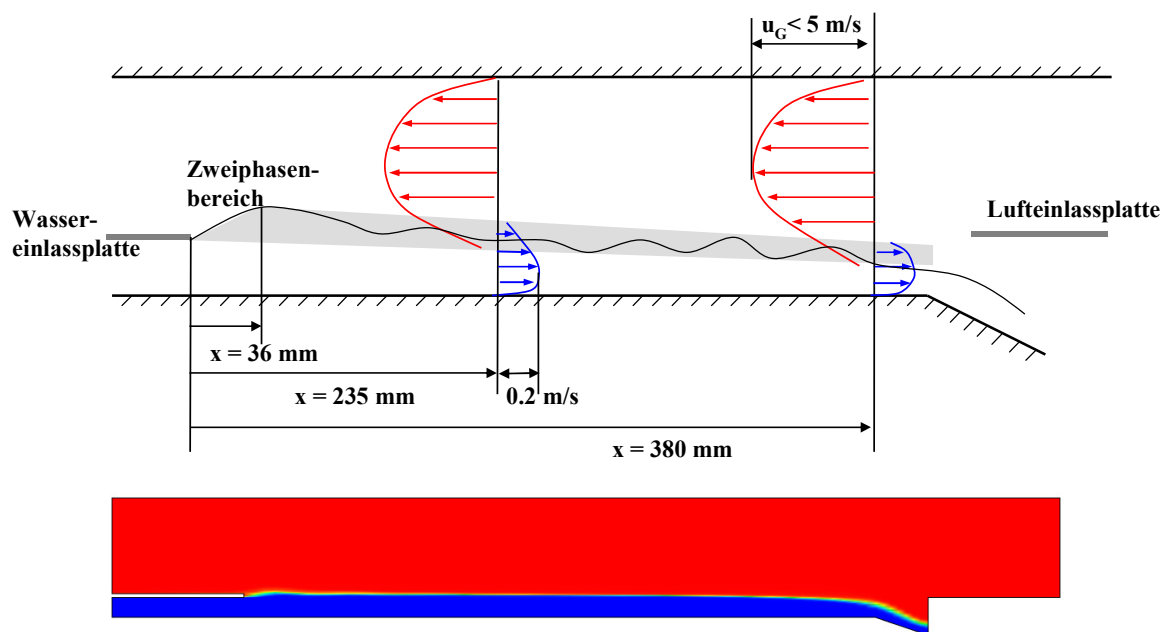


Abbildung 3.22: Schematische Geschwindigkeitsverteilung und Breite des Zweiphasenbereichs mit Ergebnis der Rechnung für die Verteilung des Gasgehaltes einer fließenden Strömung.

Der sprunghafte Anstieg der Schichtdicke wurde daher zusätzlich zu den beiden anderen Messstellen an der axialen Stelle $x = 36 \text{ mm}$ für den Gasgehalt vermessen. Für fließende Strömungen wurde jeweils nur ein Fall mit einer Wassereinlasshöhe von 9 und 15 mm untersucht. Die dazugehörigen Strömungsgeschwindigkeiten und verwendeten mittleren Größen sind in Tabelle 3.5 aufgelistet.

Punkt		Einlasshöhe y_E [mm]	Messposition x [mm]	u_W [m/s]	u_G [m/s]	Fr_0 [-]	Re_{Wasser} [-]
1-21	1	9	235	0,275	4,44	0,93	2200
	21	9	380	0,275	4,44	0,93	2200
41-61	41	15	235	0,3	4,8	0,78	4300
	61	15	380	0,3	4,8	0,78	4300

Punkt	Experiment		k- ϵ Modell		k- ω Modell	
	u_m [m/s]	y_m [mm]	u_m [m/s]	y_m [mm]	u_m [m/s]	y_m [mm]
1	0,21	12,3	0,2	12,2	0,21	11,6
21	0,25	10,5	0,22	11,0	0,22	10,7
$x = 36$ mm	-	13,3	-	12,6	-	12,3
41	0,28	16,8	0,26	16,9	0,28	15,6
61	0,32	14,9	0,27	15,9	0,3	14,6
$x = 36$ mm	-	17,6	-	18,3	-	16,9

Tabelle 3.5: Randbedingungen und mittlere Größen der fließenden Strömungen.

3.2.1 Flüssige Phase

Der berechnete Anstieg nach Ende der Wassereinlassplatte an der Stelle $x = 36$ mm fällt für den Fall mit einer Höhe von 9 mm geringer aus als im Experiment. Die mittlere Schichtdicke bei einem Gasgehaltsanteil von 50% wird hierbei um 1 mm für das k- ϵ Modell bzw. um 0,6 mm für das k- ω Modell zu niedrig vorhergesagt. Bei einer Wassereinlasshöhe von 15 mm ist der sprunghafte Anstieg der Schichtdicke unter Verwendung des k- ϵ Modells geringfügig größer und mit dem k- ω Modell kleiner als im Experiment. Der nach dem sprunghaften Anstieg typische abnehmende Verlauf der Schichtdicke wird für beide Fälle korrekt berechnet. Typischerweise wird für das k- ϵ Modell eine größere Schichtdicke als für das k- ω Modell vorhergesagt. In Abbildung 3.25 ist der dimensionslose Verlauf des Zweiphasenbereiches (bezogen auf die mittlere Schichtdicke) dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sowohl im Bereich geringer als auch hoher Gasgehaltsanteile die Aufweitung des Zweiphasenbereiches größer vorhergesagt wird, als im Experiment bestimmt.

Der berechnete Turbulenzgrad ist in Abbildung 3.24 gezeigt und überschätzt diesen sowohl bei der Verwendung des k- ϵ als auch des k- ω Modells im Vergleich mit den experimentellen Werten. Dies führt wiederum zu einer stärkeren Aufweitung des Zweiphasenbereiches. Das k- ω Modell überschätzt den Turbulenzgrad für den Fall 1-21 um das 2,5 fache und ist für den Fall 41-61 nur wesentlich geringer. Das k- ϵ Modell

berechnet hier sowohl für den Fall 1-21 als auch für den Fall 41-61 den Turbulenzgrad wesentlich genauer. Der Grund für die Überschätzung der turbulenten kinetischen Energie liegt an der Reynolds-Zahl (Re) der flüssigen Phase am Wassereintritt. Für den Fall 1-21 liegt diese bei $Re = 2200$ und für den Fall 41-61 bei $Re = 4300$. In beiden Fällen ist die Strömung noch nicht voll turbulent ausgebildet. Man spricht hier von einem so genannten Transitionsbereich. In diesem liefern die Turbulenzmodelle nur ungenaue Vorhersagen für die turbulente kinetische Energie. Als Folge überschätzen sie die Produktion von Turbulenz. Dies hat einen direkten Einfluss auf den berechneten Verlauf der Geschwindigkeit. Wird die turbulente kinetische Energie stark überschätzt, so ist die berechnete Wirbelviskosität zu groß und beeinflusst den Geschwindigkeitsverlauf. Wie aus Abbildung 3.24 (a) und (b) für die Fälle 1-21 und 41-61 hervorgeht, gibt das $k-\omega$ Modell den Verlauf der Geschwindigkeit schlechter wieder, als das $k-\varepsilon$ Modell. Speziell im Bereich $y^* > 0,75$ ist die berechnete Wirbelviskosität des $k-\omega$ Modells zu groß und kann die Änderung der Geschwindigkeit mit Beginn des Zweiphasenbereiches nicht mehr wiedergeben. Das $k-\varepsilon$ Modell gibt in diesem Bereich den Verlauf der Geschwindigkeit gut wieder, obwohl auch hier die turbulente kinetische Energie überschätzt wird. Den Verlauf der flüssigen Phase berechnet das $k-\varepsilon$ Modell für die fließenden Fälle wesentlich besser. Es gilt hierbei nach wie vor zu beachten, dass die Re -Zahlen speziell für den Fall 1-21 eher dem laminaren Strömungsbereich zugeordnet werden müssen, als dass man von einer turbulenten Strömung sprechen kann. Daher sind die fließenden Fälle hier als Grenzfälle zu betrachten, in denen das Phasenwechselwirkungsmodell noch sehr gute Vorhersagen liefert.

3.2.2 Luftphase

Die Luftphase zeigt für die fließenden Fälle das gleiche Verhalten wie die schießenden Strömungen. Die Verzögerung der Luftphase nahe der Phasengrenze ist hierbei nicht so ausgeprägt wie bei schießenden Strömungen mit hoher Wassergeschwindigkeit. In Abbildung 3.26 werden die berechneten Luftgeschwindigkeiten für das $k-\varepsilon$ und $k-\omega$ Modell mit den experimentellen Daten verglichen.

Der Turbulenzgrad stimmt mit den experimentellen Werten nur quantitativ überein. Es wird die tendenzielle Zunahme der turbulenten kinetischen Energie nahe der Phasengrenze richtig vorhergesagt, wobei diese um den Faktor 1,5 zu niedrig ist. Dies liegt, wie bereits für schießende Fälle diskutiert, an der Verwendung eines homogenen Turbulenzmodells.

Dass die Geschwindigkeitsprofile mit denen aus dem Experiment gut übereinstimmen, liegt in der Tatsache begründet, dass das Turbulenzmodell die richtige Größenordnung für die Turbulenz vorhersagt und somit der Unterschied der berechneten Wirbelviskosität im Vergleich zum Experiment klein bleibt. Dies gilt, wie bereits oben diskutiert, nicht für die Wasserphase.

3.2.3 Diagramme fließender Strömungen

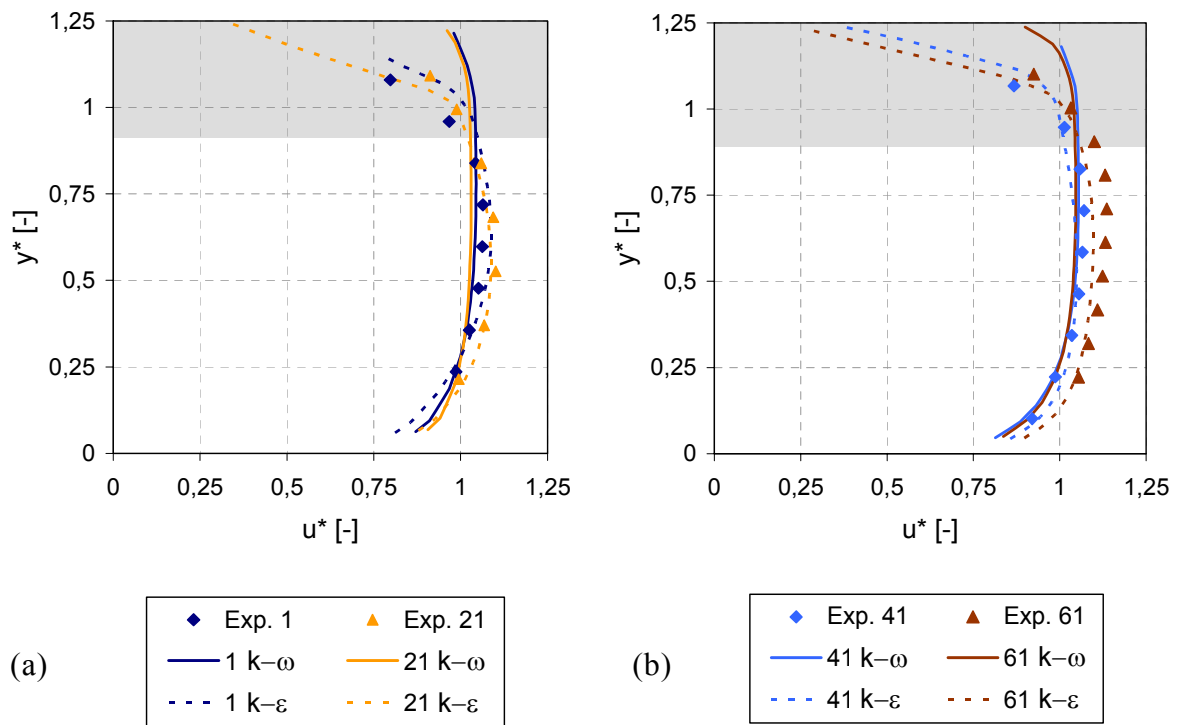


Abbildung 3.23: Geschwindigkeitsverlauf fließender Strömung: (a) 9 mm, (b) 15 mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

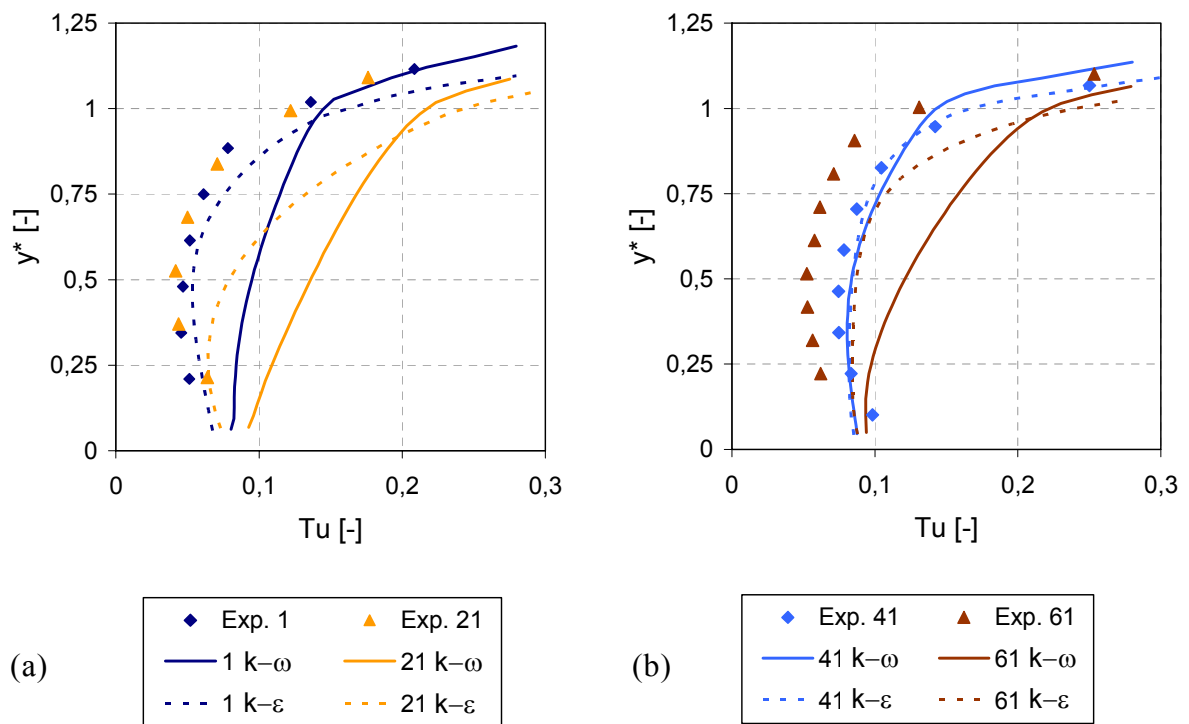


Abbildung 3.24: Turbulenzgrad fließender Strömung: (a) 9 mm, (b) 15 mm.

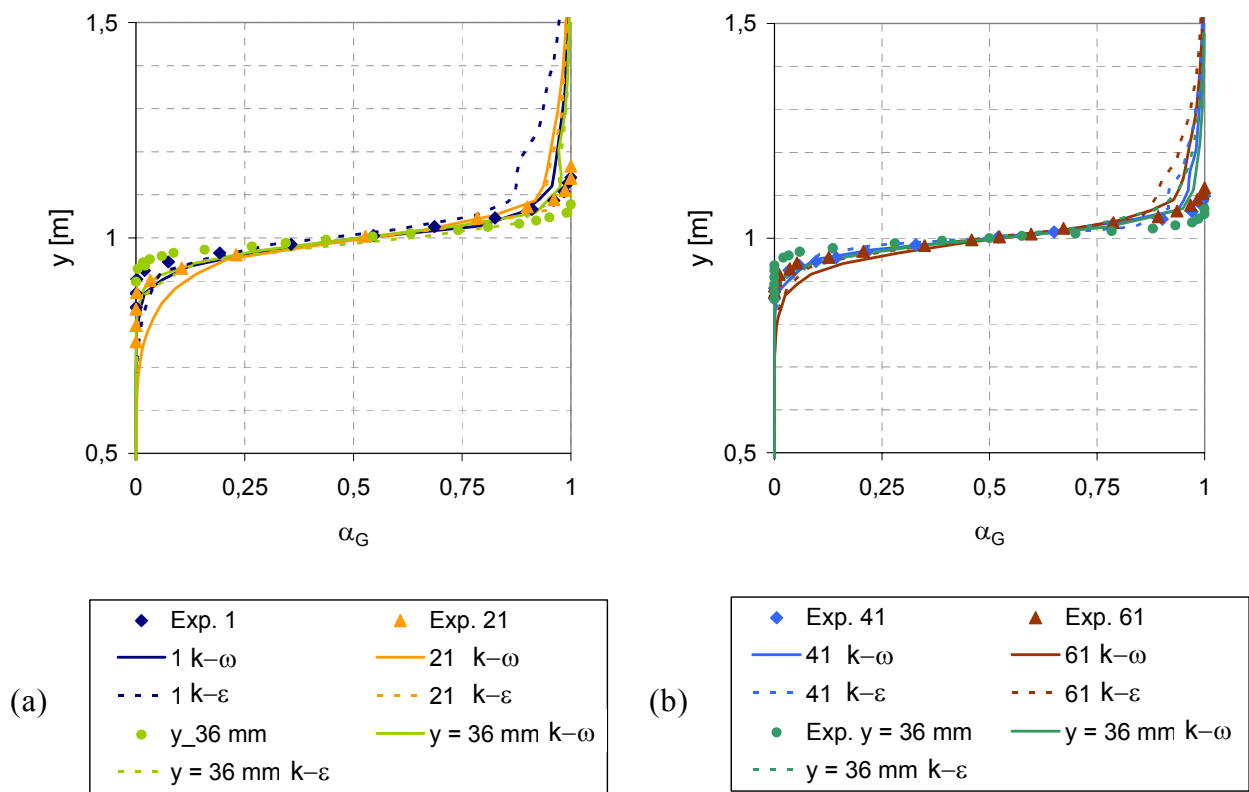


Abbildung 3.25: Verlauf Zweiphasenbereich fließender Strömung: (a) 9 mm , (b) 15 mm.

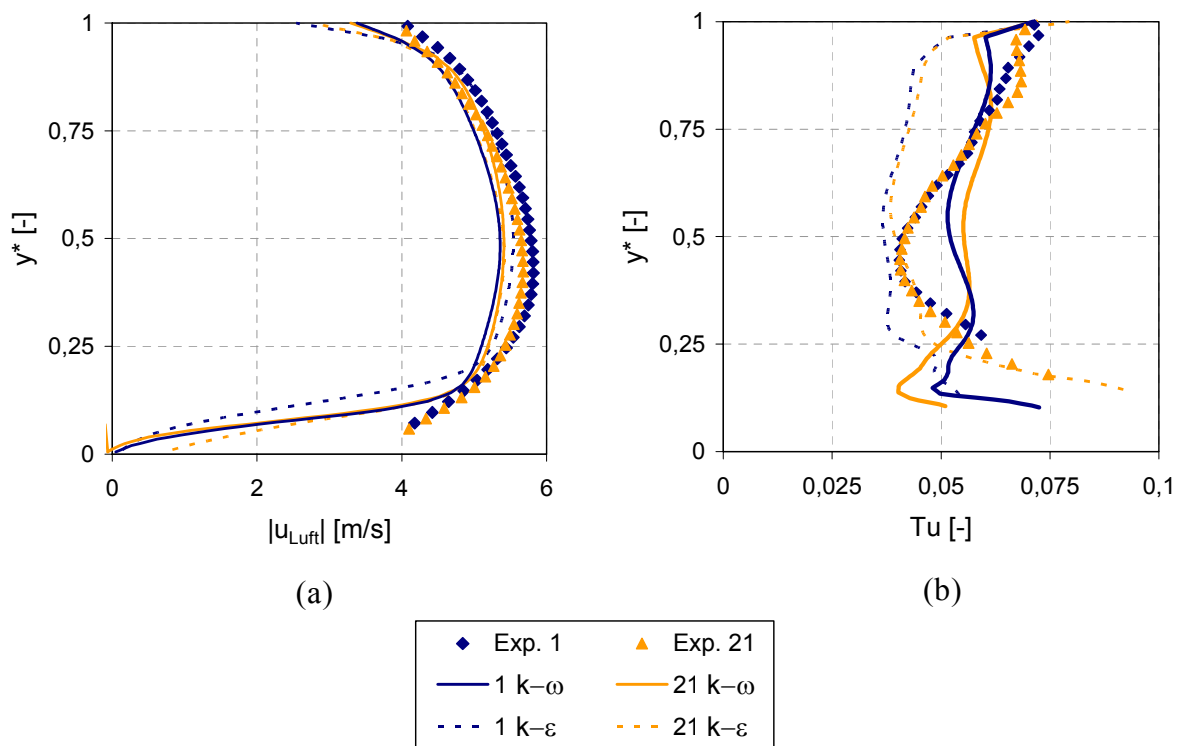


Abbildung 3.26: Geschwindigkeit (a) und Turbulenzgrad (b) der Luft einer fließenden Strömung mit $y_E = 9$ mm.

3.3 Teilweise umgekehrte Strömung

Im Falle der teilweisen Strömungsumkehr werden die Gasgeschwindigkeiten weiter erhöht, so dass die Scherkräfte zwischen flüssiger und gasförmiger Phase ausreichen, einen Teil des Wassers in Richtung der Luftphase strömen zu lassen. In diesem Fall spricht man von teilweiser oder partieller Strömungsumkehr. Es erreicht nur noch ein Teil des eingespeisten Wassermassenstroms das Kanalende. Der restliche Wassermassenstrom verlässt den Kanal mit der Luft in entgegengesetzter Richtung des ursprünglichen Impulses des eingespeisten Wassers.

Das prinzipielle Verhalten der teilweise umgekehrten Strömung ist in Abbildung 3.27 gezeigt. Es kommt zu einer deutlichen Zunahme der Wellenamplituden im Vergleich zu den fließenden und schießenden Strömungen. Der Bereich der auftretenden Wellen ist grau skizziert und entspricht dem Zweiphasenbereich. An beiden Messstellen ($x = 235$ mm und $x = 380$ mm) sind die Geschwindigkeitsverläufe aufgetragen. Aus Darstellungsgründen wurden die Geschwindigkeiten der Wasser- und Luftphase unterschiedlich skaliert. Wie am prinzipiellen Verlauf der Wassergeschwindigkeit zu erkennen ist, kommt es zu einer Umkehr der Geschwindigkeitsrichtung im Zweiphasenbereich. Physikalisch führt dies für die horizontale Geschwindigkeitskomponente der Strömung auf einen freien Staupunkt an der Phasengrenze. Dieser und die Isolinie der Nullgeschwindigkeit für die horizontale Strömungskomponente sind zusätzlich in Abbildung 3.27 skizziert. Außerdem ist in Abbildung 3.27 der berechnete Gasgehalt für eine teilweise Strömungsumkehr gezeigt. Wie aus Abbildung 3.27 ersichtlich, kommt es wie im Experiment zu einer Zunahme der Schichtdicke. In Abbildung 3.27 ist weiterhin ein Einfluss der Wassereinlassplatte zu erkennen, der zu einer Zunahme der Schichtdicke kurz nach deren Ende führt. Dies bedeutet ein Aufstauen der Wellen nahe der Wassereinlassplatte. Dieses Phänomen wurde auch während der Experimente beobachtet.

3.3.1 Flüssige Phase

Das Verhältnis aus rückströmendem zu eingespeistem Wasser wird als Rückströmrage bezeichnet und wurde experimentell bestimmt. Die gemessenen Rückströmrage sind in Tabelle 3.7 und die dazugehörigen Randbedingungen in Tabelle 3.6 aufgelistet. In Tabelle 3.7 sind zusätzlich zwei verschiedene Werte für den Phasenreibungsbeiwert λ_i aufgeführt, die auf unterschiedliche Rückströmrage führen. Graphisch ist Tabelle 3.7 in Abbildung 3.29 zusammengefasst, wobei die berechneten Rückströmrage über den experimentell gemessenen aufgetragen sind. Aus dieser Abbildung wird ersichtlich, dass die berechneten Rückströmrage für den Phasenreibungsbeiwert $\lambda_i = 0,2$, wie er für schießende und fließende Strömungen verwendet wurde, zu klein sind.

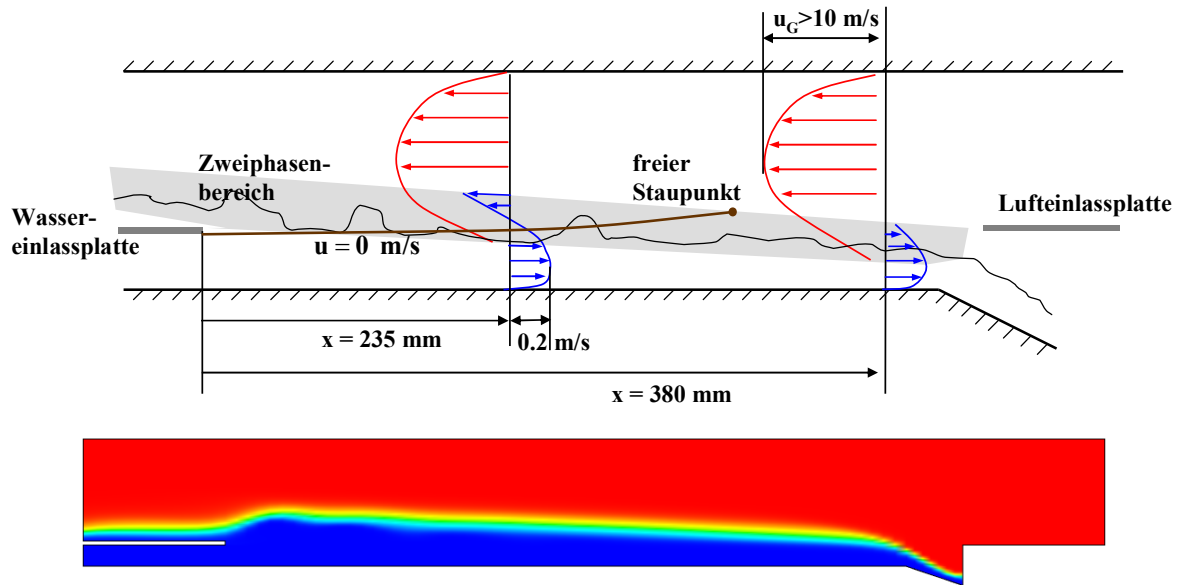


Abbildung 3.27: Schematische Geschwindigkeitsverteilung und Breite des Zweiphasenbereichs mit Ergebnis der Rechnung für die Verteilung des Gasgehaltes einer teilweise umgekehrten Strömung.

Fall		Einlasshöhe y_E [mm]	Messposition x [mm]	u_W [m/s]	u_G [m/s]	Fr_0 [-]	Re_{Wasser} [-]
2-22	2	9	235	0,275	10,0	0,93	2300
	22	9	380	0,275	10,0	0,93	2300
5-25	5	9	235	0,7	10,0	2,35	5700
	25	9	380	0,7	10,0	2,35	5700
10-30	10	9	235	0,5	10,0	1,69	4100
	30	9	380	0,5	10,0	1,69	4100
7- 27Hyst.	7	9	235	1,0	10,0	3,37	8000
	27	9	380	1,0	10,0	3,37	8000
	45	15	235	0,42	10,8	1,09	6000
	51	15	235	0,42	9,6	1,09	6000
50-70	50	15	235	0,3	10,8	0,78	4300
	70	15	380	0,3	10,8	0,78	4300
55-75	55	15	235	0,72	10,8	1,88	10200
	75	15	380	0,72	10,8	1,88	10200

Tabelle 3.6: Randbedingungen für teilweise umgekehrte Strömungen.

Fall	Rückflussrate [-]			
	Experiment	k- ϵ Modell $\lambda_i = 2,0 \cdot 10^5$	k- ω Modell $\lambda_i = 2,0 \cdot 10^5$	k- ϵ Modell $\lambda_i = 0,2$
2-22	0,45	0,519	0,765	-
5-25	0,56	0,733	0,88	0,08
10-30	0,5	0,392	0,588	-
7-27 Hyst.	0,7	0,665	-	-
45	0,51	0,46	0,482	-
51	0,3	0,273	0,23	-
50-70	0,43	0,468	0,489	-
55-75	0,69	0,724	0,685	0,11

Tabelle 3.7: Rückflussraten teilweise umgekehrter Strömungen.

Fall	Experiment		k- ϵ Modell		k- ω Modell	
	u_m [m/s]	y_m [mm]	u_m [m/s]	y_m [mm]	u_m [m/s]	y_m [mm]
2	0,135	14,3	0,08	17,1	0,04	21,1
22	0,18	9,6	0,1	13,1	0,05	16,1
5	0,18	21,2	0,09	22,3	0,04	28,3
25	0,25	14,2	0,12	16,0	0,05	17,1
10	0,17	18,9	0,12	23,0	0,07	26,8
30	0,23	13,2	0,15	18,0	0,1	20,5
7 Hyst.	0,18	21,5	0,11	31,4	-	-
27 Hyst.	0,24	14,2	0,15	20,4	-	-
45	0,22	20,1	0,12	29,3	0,11	31,3
51	0,24	22,7	0,17	27,3	0,16	30,6
50	0,215	17,8	0,13	23,0	0,09	27,7
70	0,22	12,3	0,16	18,5	0,11	22,0
55	0,22	22,2	0,11	31,4	0,1	37,0
75	0,3	15,3	0,15	21,7	0,14	26,1

Tabelle 3.8: Mittlere Größen der schießenden Strömung.

Wird der Phasenreibungsbeiwert auf $\lambda_i = 2.0 \cdot 10^5$ erhöht, werden die Rückströmraten korrekt vorhergesagt. Die Zunahme des Phasenreibungsbeiwertes um mehrere Größenordnungen deutet auf einen turbulenten Effekt, wie er auch bei der Turbulenzmodellierung von laminarer und Wirbelviskosität zu beobachten ist, hin. Betrachtet man den Austauschterm M_i^k aus den Impulsgleichungen aus Kapitel 2 im Detail, so setzt sich dieser folgendermaßen zusammen:

$$M_i^k = \bar{\tau}_{ij,i}^k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} + \rho_k \overline{u'_{i,i} u'_{j,i}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} + \bar{p}_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \quad (3.8)$$

Die exakte Herleitung des Phasenaustauschterms findet sich im Anhang A1. Der erste Term berechnet den Impulsaustausch aufgrund der laminaren Schubspannungen an der Phasengrenze. Im Vergleich mit der Herleitung von Drew [13] oder auch Saptoadi und Laurien [72] ergibt sich ein zusätzlicher Term für die turbulenten Fluktuationen an der Phasengrenze. Dieser steht hier an zweiter Stelle. Der dritte Term ergibt einen zusätzlichen Impulsaustausch aufgrund von Druckunterschieden an der Phasengrenze, die z.B. durch die Oberflächenspannung hervorgerufen werden. Wie schon im Kapitel 2 erläutert, kann dieser Term für die hier betrachteten Experimente vernachlässigt werden. Um die einzelnen Anteile des Impulsaustausches abschätzen zu können, speziell das Verhältnis zwischen laminaren und turbulenten Schubspannungen, wird im Folgenden nur der Impulsaustausch in Hauptströmungsrichtung betrachtet. Die Betrachtung gilt auch analog für den Impulsaustausch in den anderen Raumrichtungen. Unter Verwendung der Verteilung des Gasgehaltes (Gleichungen (2.9) und (2.22)) und der viskosen Schubspannung an der Phasengrenze (Gleichung (2.15)) und unter Vernachlässigung der viskosen Schubspannungen in den anderen Raumrichtungen, lässt sich der Impulsaustausch in Hauptströmungsrichtung für die flüssige Phase wie folgt schreiben:

$$M_1^L = \lambda_i \underbrace{\frac{\rho_G}{2} u_{rel}^2 \cdot \frac{\Delta \rho g}{2 \rho_L k_L} \alpha_L (1 - \alpha_L)}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\rho_L \overline{u'_{1,L} u'_{2,L}} \cdot \frac{\Delta \rho g}{2 \rho_L k_L} \alpha_L (1 - \alpha_L)}_{\text{Term 2}} + \underbrace{\rho_L \overline{u_{1,L}^2} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x_1}}_{\text{Term 3}} + \underbrace{\rho_L \overline{u'_{3,L} u'_{3,L}} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x_3}}_{\text{Term 4}} \quad (3.9)$$

Mit Hilfe der gemessenen Schubspannungen der flüssigen Phase und der Relativgeschwindigkeit aus der Rechnung, lassen sich die einzelnen Terme bestimmen. Vereinfachend wurde hier angenommen, dass der Gradient $\partial \alpha_L / \partial x_3$ für den Fall der WENKA Versuche vernachlässigbar klein ist. In Abbildung 3.30 sind die einzelnen Anteile der Gleichung (3.9) für eine schießende und teilweise umgekehrte Strömung gezeigt. Es ist ein deutlicher Anstieg des Impulsaustausches aufgrund der turbulenten Anteile bei der teilweisen Strömungsumkehr zu erkennen. Der Term 1 für beide Punkte ist extrem klein und liegt nahe bei null. Dabei ist zu beachten, dass die Relativgeschwindigkeit u_{rel} zwischen beiden Phasen aus der Berechnung mit CFX

stammt. Die Relativgeschwindigkeit, notwendig für die Berechnung der Schubspannung aus Gleichung (2.15), basiert auf einer 1-D Betrachtung und ist aufgrund der Auflösung der Grenzschicht im Zweiphasenbereich in der Rechnung mit CFX um den Faktor 100 kleiner. Dies führt in der Auswertung für Term 1 zu sehr kleine Werte. Der Unterschied der Relativgeschwindigkeit der Rechnung und einer eindimensionalen Betrachtung ist in Abbildung 3.28 skizziert.

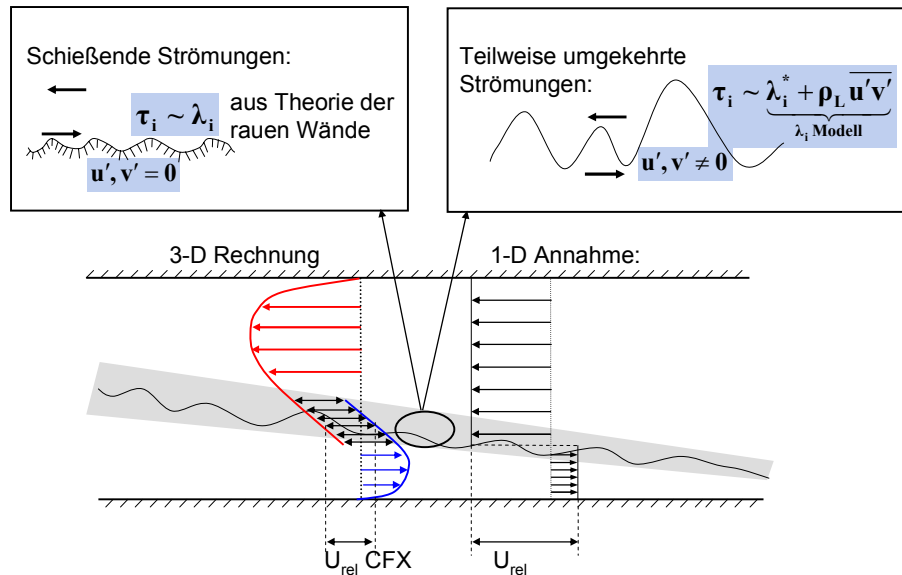


Abbildung 3.28: Relativgeschwindigkeit an der Phasengrenze für eine 1-D und 3-D Betrachtung.

Wird das Verhältnis aus turbulentem (Term 2 + Term 3) zu laminarem Anteil (Term 1) berechnet, erkennt man, dass für die teilweise Strömungsumkehr die Impulsübertragung aufgrund der turbulenten Schubspannung von ausschlaggebender Bedeutung ist (siehe Abbildung 3.31). Das Verhältnis steigt von ca. 25 auf 10000 an. Dies bedeutet, dass die turbulenten Anteile aus Term 2 und 3 für die teilweise umgekehrte Strömung von großer Bedeutung für den Impulsaustausch in horizontaler Richtung sind und schlägt sich in der Erhöhung des Phasenreibungsbeiwerts λ_i nieder.

Anschaulich wird der Anstieg des Phasenreibungsbeiwertes zusätzlich durch Abbildung 3.28 erklärt. Für schießende Strömungen ist die Annahme noch zutreffend, dass die Wellen sich ähnlich einer rauhen Oberfläche verhalten (siehe Kapitel 1). An dieser werden die turbulenten Fluktuationen zu null. Betrachtet man nun eine turbulente wellige Oberfläche, wie sie bei der teilweisen Strömungsumkehr auftritt, so wird ersichtlich, dass die Annahme von verschwindenden Geschwindigkeitsfluktuationen an der Phasengrenze nicht mehr zutreffend ist. Die in der Literatur zu findenden Phasenreibungsbeiwerte basieren durchweg auf der Annahme einer rauhen überströmten Oberfläche und sind hier für teilweise umgekehrte Strömungen nicht mehr gültig.

Die Rückflussraten werden für das k - ε Modell mit einer Genauigkeit von $\pm 25\%$ vorhergesagt, wobei kleinere Rückflussraten mit einer größeren Genauigkeit berechnet werden. Rückflussraten, die mit dem k - ω Modell berechnet wurden, weisen größere Abweichungen, speziell für die Fälle mit einer Wassereinlasshöhe von $y_E = 9$ mm, auf. Je größer die Rückflussrate wird, desto mehr Tropfenabriss findet an der Phasengrenze statt und wird nicht mehr physikalisch vom Phasenwechselwirkungsmodell modelliert. Dies erhöht die Ungenauigkeit des Modells und spiegelt sich in den Ergebnissen der Rückflussraten wieder. Bei den Punkten 45 und 51 wurde der Massenstrom des Wassers konstant gehalten und die Luftgeschwindigkeit am Eintritt variiert. Die Luftgeschwindigkeit wurde von $u_w = 9,6$ m/s (Punkt 51) auf $u_w = 10,8$ m/s (Punkt 45) erhöht. Die Erhöhung der Luftgeschwindigkeit führt auf eine erhöhte Schubspannung an der Phasengrenze und spiegelt sich in einer Erhöhung der Rückflussraten wider. In den Experimenten steigt diese von 0,3 auf 0,51 an. Das Phasenwechselwirkungsmodell berechnet einen Anstieg von 0,27 auf 0,46 und weicht somit maximal 5 % von den Experimenten ab.

Aufgrund der turbulenten welligen Oberfläche steigt im Experiment die turbulente kinetische Energie im Zweiphasenbereich stark an. Diese hat direkt Einfluss auf die Breite des berechneten Zweiphasenbereiches. In den Abbildungen 3.41-3.44 ist der dimensionslose Wandabstand über dem Gasgehalt aufgetragen. Wie aus Abbildung 3.41 hervorgeht, wird für den Fall mit einer Wassereinlasshöhe von 9 mm die Aufweitung des Zweiphasenbereiches für geringe Gasgehalte leicht unterschätzt. Dies führt zu einem größeren Gradienten in diesem Bereich. Die Abweichung zu den Experimenten beträgt aber weniger als 5 %. Bei einer Wassereinlasshöhe von 15 mm (siehe Abbildung 3.43) ist dieser Effekt nicht mehr zu beobachten. Für alle Fälle mit teilweiser Strömungsumkehr stimmen die Aufweitung und der Verlauf des Gasgehaltes sehr gut mit den experimentellen Daten überein. Die starke Zunahme der Aufweitung des Zweiphasenbereichs für große Gasgehalte, wie sie für fließende und schießende Strömungen berechnet wurden, kann für die teilweise umgekehrten Strömungen nicht mehr beobachtet werden.

Zu größeren Abweichungen kommt es bei der berechneten mittleren Schichtdicke. Die mittlere Schichtdicke wird vom Phasenwechselwirkungsmodell durchweg um das bis zu 1,2 fache überschätzt. Auch hier sagt das k - ε Modell, wie bei den Rückflussraten, die Schichtdicke besser voraus als das k - ω Modell.

Die Breite des Zweiphasenbereichs ist gleichzeitig auch ein indirektes Maß für die Genauigkeit der berechneten turbulenten kinetischen Energie. Diese ist in den Abbildungen 3.37-3.40 gezeigt, wobei wieder der dimensionslose Wandabstand über dem Turbulenzgrad aufgetragen ist. Der Verlauf des Turbulenzgrades stimmt im flüssigen Bereich sehr gut mit den experimentellen Werten überein. Erst bei sehr hohen

Gasgehalten steigt der Turbulenzgrad stärker an. Dies ist wiederum auf das homogene Turbulenzmodell zurückzuführen, da in diesem Bereich die Turbulenz der Luftphase einen starken Einfluss hat. Für die Fälle 25 (Abbildung 3.37) und 75 (Abbildung 3.39) ist der berechnete Turbulenzgrad um 50% zu groß. In beiden Fällen ist die gemessene Rückströmrage groß und wird zusätzlich vom Phasenwechselwirkungsmodell überschätzt. Dies führt für beide Fälle zu einem nur sehr kleinen Massenstrom an der Messposition $x = 380$ mm im Kanal. Eine direkte Folge daraus ist, dass die Geschwindigkeitsgradienten größer sind als im Experiment. Diese sind aber ausschlaggebend für die Produktion der Turbulenz. Als Folge wird die Turbulenz an der gemessenen Position im Kanal überschätzt. Die dazugehörigen Geschwindigkeiten für die Fälle 25 und 75 sind in den Abbildungen 3.32 (b) und 3.35 (a) gezeigt. Typischerweise nehmen die Geschwindigkeiten negative Werte im Zweiphasenbereich an. Die Abbildungen 3.32 - 3.34(a) zeigen die Geschwindigkeitsverläufe für eine Wassereinlasshöhe von 9 mm und die Abbildungen 3.34 (b)-3.35 diejenigen mit 15 mm. Verglichen mit den experimentell gemessenen Werten besitzt die Geschwindigkeit im Zweiphasenbereich wesentlich größere negative Werte. Da es sich bei der Modellierung um eine homogene Mischungsschicht handelt und die einzelnen Effekte an der Phasengrenze der Welle nicht aufgelöst werden, kommt es aufgrund der Homogenisierung des Zweiphasenbereichs bereits zu einem starken Einfluss der Luftgeschwindigkeiten auf die Wasserphase. Dieses Verhalten zeigt sich bei allen berechneten teilweise umgekehrten Strömungen.

Im Bereich des Kanalbodens kommt es zusätzlich zu teilweise erheblichen Abweichungen vom gemessenen Geschwindigkeitsprofil (siehe Abbildung 3.32 (b)). Diese Abweichung entsteht aufgrund der für diese Fälle zu klein berechneten mittleren Geschwindigkeit. Abbildung 3.33 zeigt die tatsächlichen Geschwindigkeitsverläufe für die Fälle 2-22 und 5-25 (vgl. Abbildung 3.32), welche qualitativ eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Geschwindigkeiten zeigen.

Zu große Geschwindigkeitskomponenten im einphasigen Bereich ($y^* < 0,5$) sind ein weiteres Indiz dafür, dass der Massenstrom des Wassers zu groß ist. Dies tritt ausschließlich an der Messposition in der Kanalmitte ($x = 235$ mm) auf und verstärkt sich mit größer werdendem eingespeisten Massenstrom des Wassers. So ist die Abweichung für die Fälle 5 und 55 am größten. Ist der eingespeiste Massenstrom nur noch halb so groß, stimmen die berechneten Geschwindigkeiten bereits sehr gut mit den Geschwindigkeiten aus den Experimenten überein (siehe Fall 10 und 51).

Abbildung 3.36 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf im Hysteresebereich mit einer Wassereinlasshöhe von 9 mm. Bei der Hysterese für horizontal geschichtete Strömungen geht die teilweise umgekehrte Strömung erst bei einer sehr viel geringeren Strömungsgeschwindigkeit wieder in eine schießende Strömung über als im umgekehrten Fall von einer schießenden in eine teilweise umgekehrte Strömung. Die

Strömungsgeschwindigkeit wurde für die Rechnung zuerst auf $u_G = 11,67$ m/s gesetzt. Nachdem sich die teilweise umgekehrte Strömung eingestellt hat, wurde die Luftgeschwindigkeit auf die im Experiment vermessenen $u_G = 10,0$ m/s reduziert. Es ergibt sich für die Strömungsgeschwindigkeit das gleiche Verhalten wie für alle anderen teilweise umgekehrten Strömungen.

3.3.2 Luftphase

Die Vermessung der Luftgeschwindigkeit war nur eingeschränkt möglich, so dass nur drei Messpunkte vorliegen. Die Luftgeschwindigkeit der Messpunkte 2, 22 und 30 ist in Abbildung 3.45 gezeigt. Da die Messung aufgrund der starken Wellenbildung und des vereinzelt Tropfenabrisses nur in einigem Abstand von der Phasengrenze möglich war, ist nur die Hauptströmung der Luft dargestellt. Der Verlauf der Geschwindigkeit und die maximalen Werte stimmen mit denen aus den Experimenten gut überein. Auch für die teilweise umgekehrte Strömung ist im Ansatz die starke Verzögerung der Luftphase in der Nähe der Phasengrenze gut zu erkennen. Besonders gut geht dies aus dem Messpunkt 30 hervor. Der Turbulenzgrad ist in Abbildung 3.45 (b) gezeigt und unterschätzt die turbulente kinetische Energie in der Hauptströmung um ca. den Faktor 1,6. Der Verlauf des Turbulenzgrades ist ähnlich dem der schießenden und fließenden Strömungen und wurde bereits für diese Fälle diskutiert.

3.3.3 Diagramme teilweise umgekehrter Strömungen

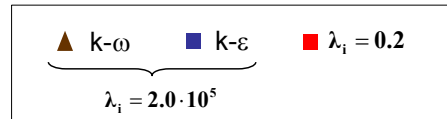
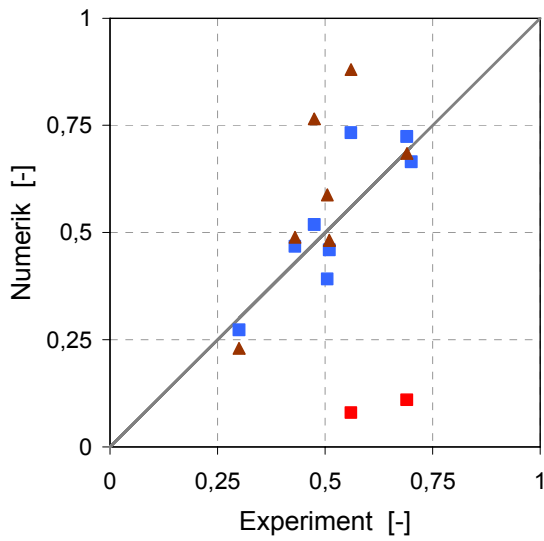


Abbildung 3.29: Rückflussraten

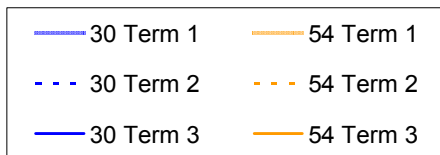
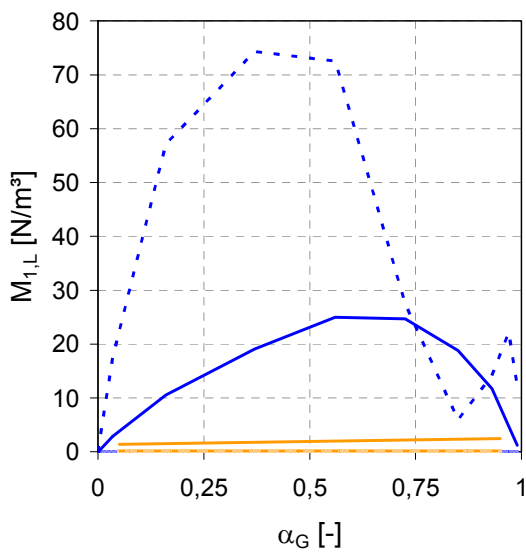


Abbildung 3.30: Anteile der einzelnen Terme aus Gleichung (3.9), 30 teilweise umgekehrte und 54 schießende Strömung.

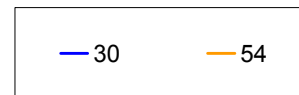
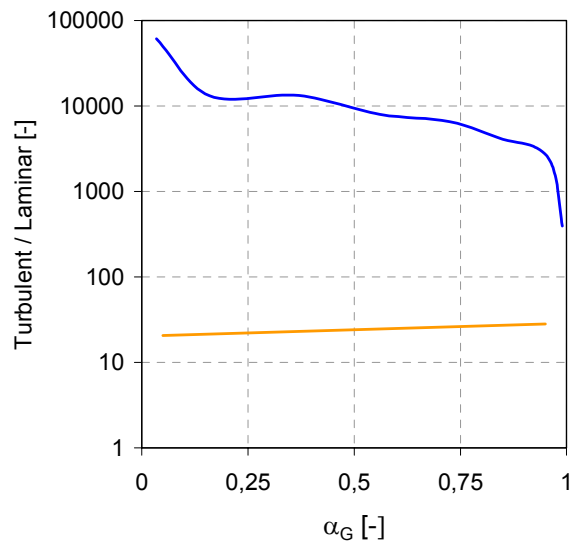


Abbildung 3.31: Verhältnis turbulenter zu laminarer Anteile an der Impulsübertragung, 30 teilweise umgekehrt und 54 schießende Strömung.

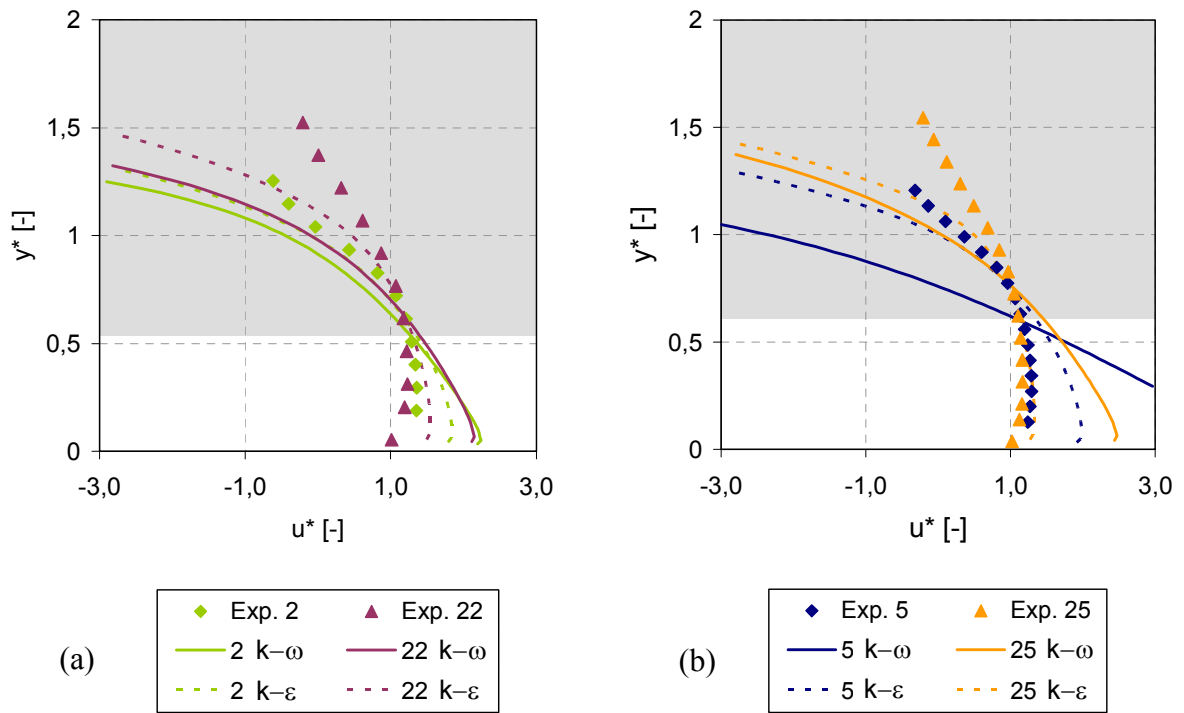


Abbildung 3.32: Geschwindigkeitsverlauf teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 9$ mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

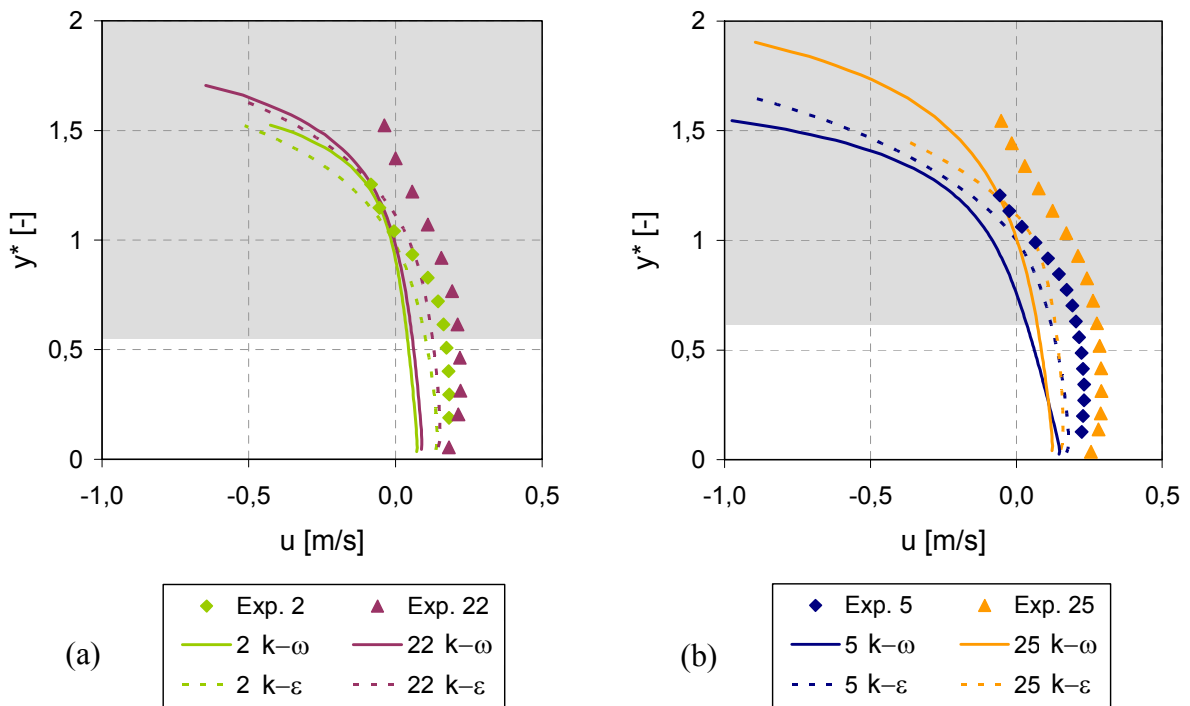


Abbildung 3.33: Verlauf der dimensionsbehafteten Geschwindigkeit im Vergleich zu Abbildung 3.32

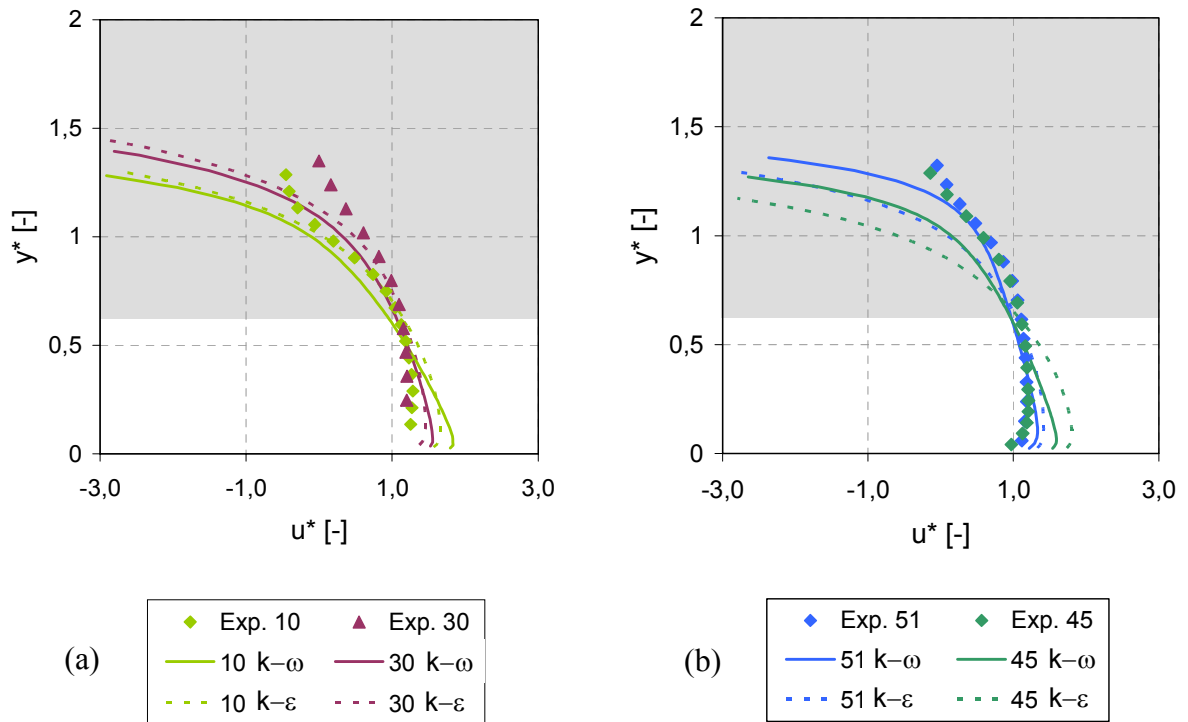


Abbildung 3.34: Geschwindigkeitsverlauf teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 9$ mm (a) bzw. $y_E = 15$ mm (b). Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

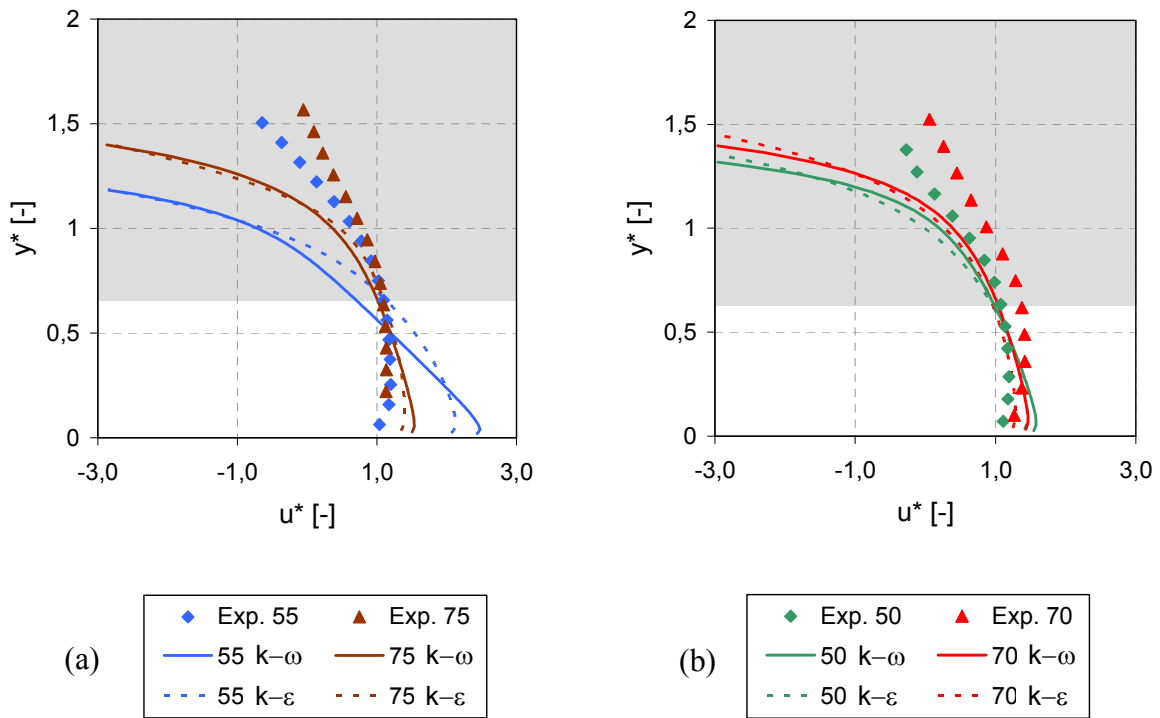


Abbildung 3.35: Geschwindigkeitsverlauf teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 15$ mm. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

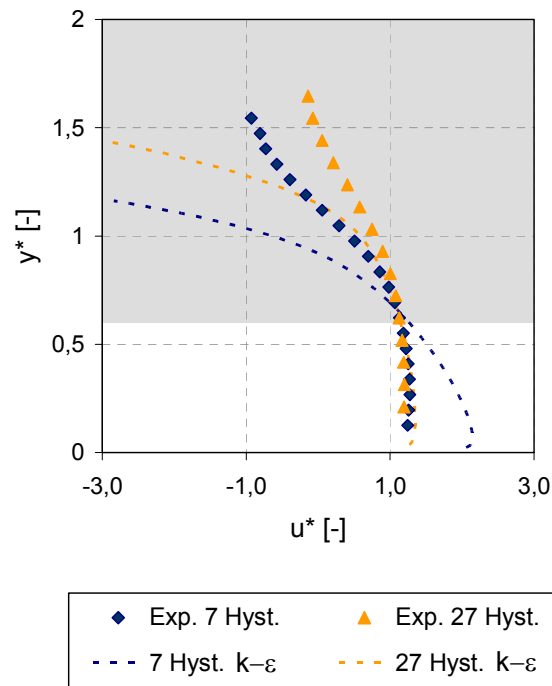


Abbildung 3.36: Geschwindigkeitsverlauf teilweise umgekehrter Strömung mit Hysterese. Bereich der Zweiphasigkeit grau hinterlegt.

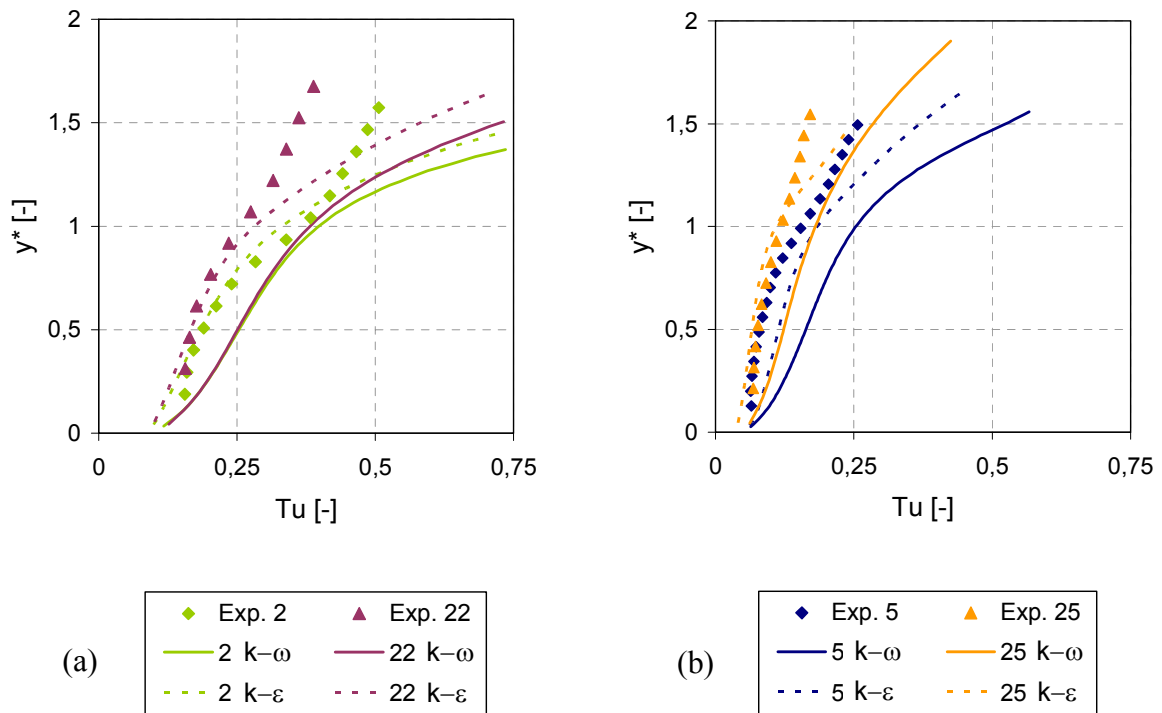


Abbildung 3.37: Turbulenzgrad teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 9$ mm.

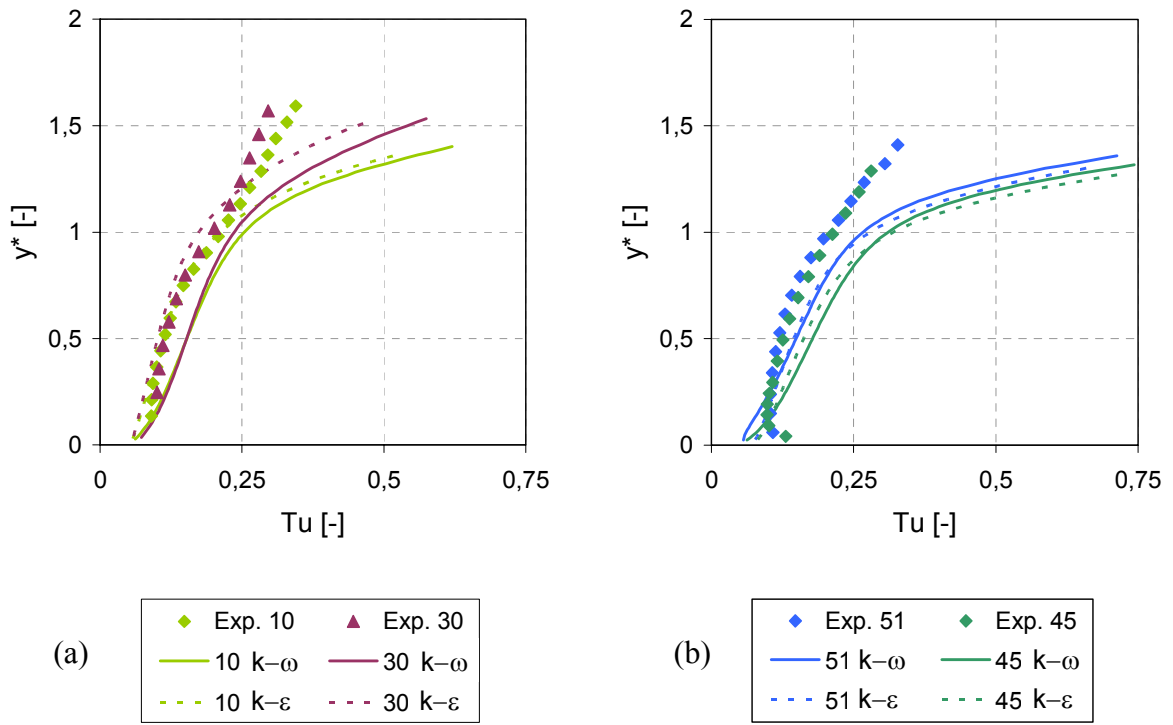


Abbildung 3.38: Turbulenzgrad teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 9$ mm (a) bzw. $y_E = 15$ mm (b).

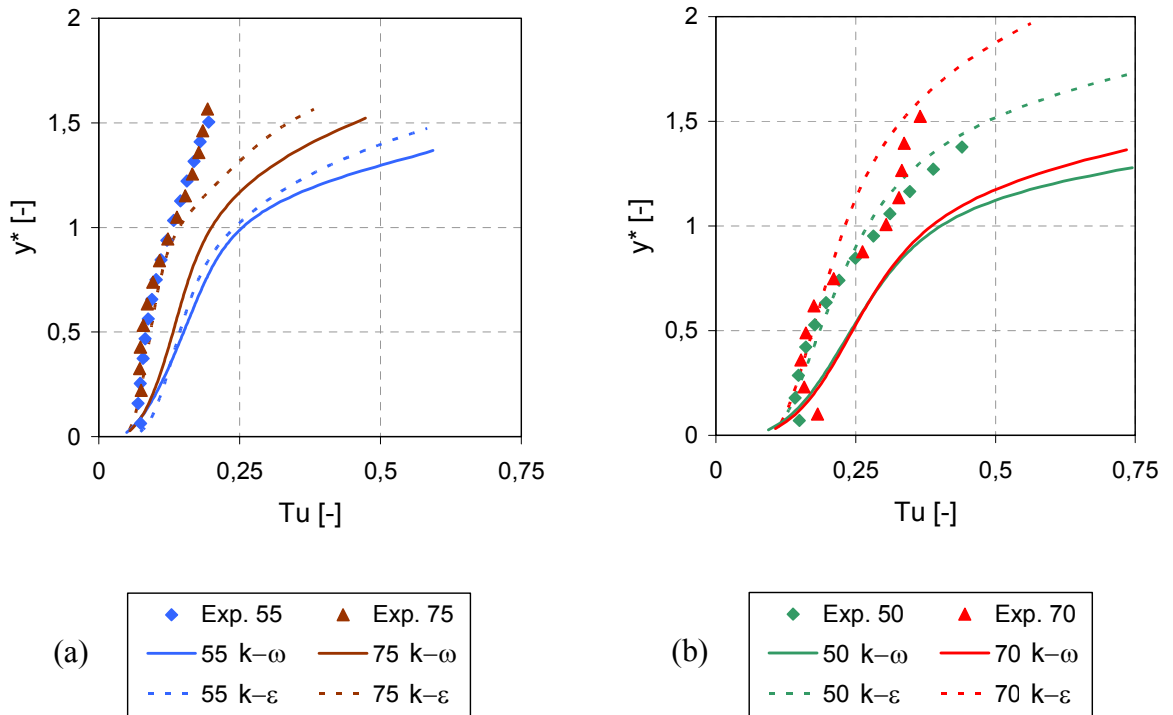


Abbildung 3.39: Turbulenzgrad teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 15$ mm.

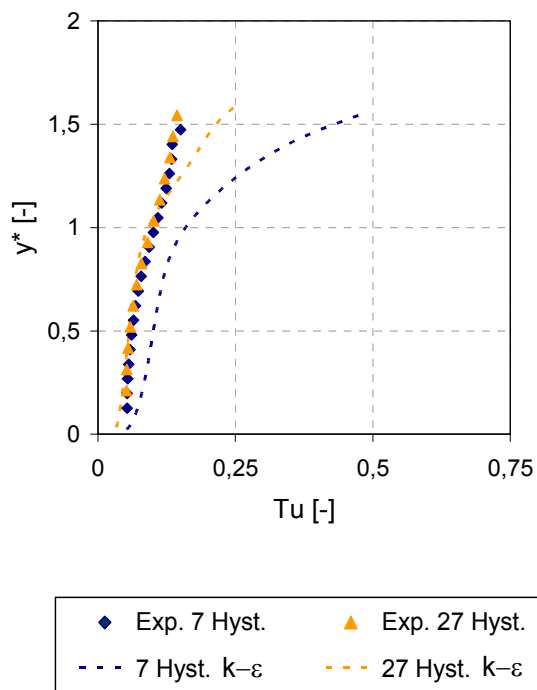


Abbildung 3.40: Turbulenzgrad teilweise umgekehrter Strömung mit Hysterese.

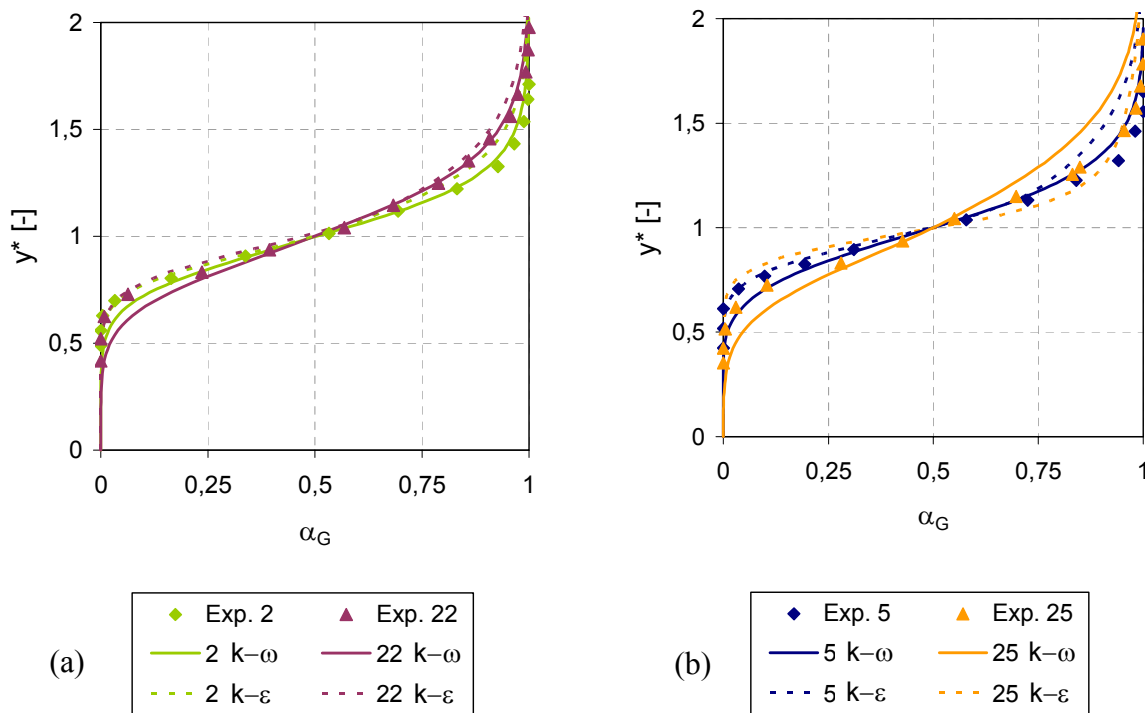


Abbildung 3.41: Verlauf Zweiphasenbereich teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 9$ mm.

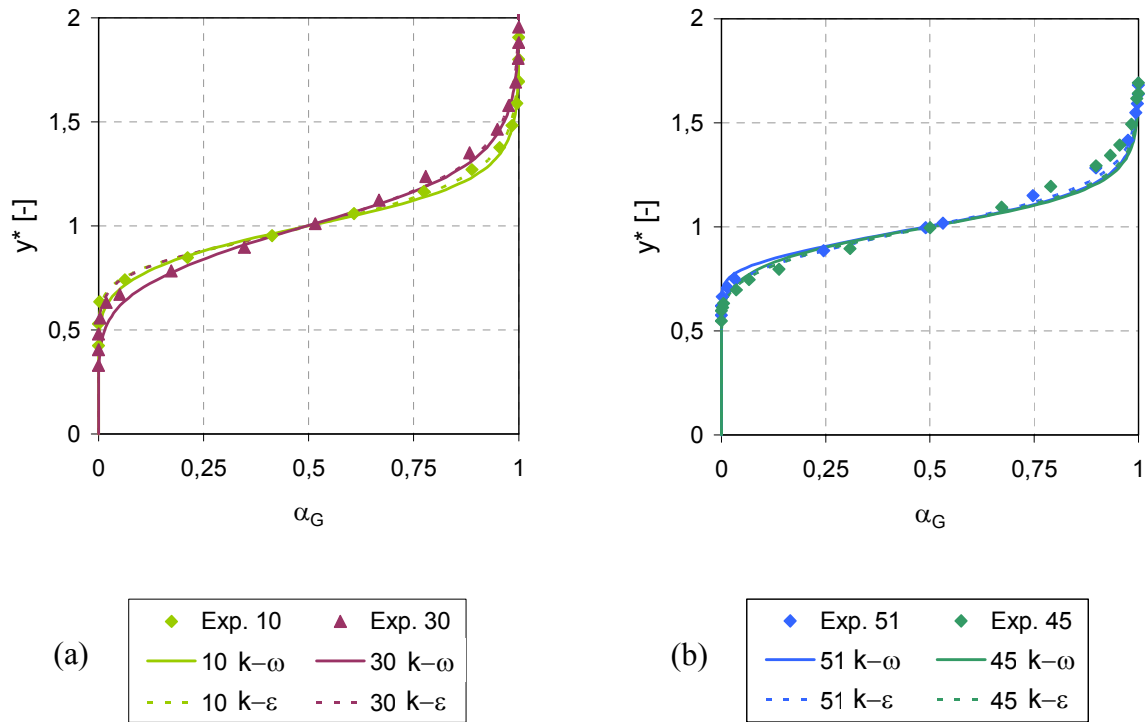


Abbildung 3.42: Verlauf Zweiphasenbereich teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 9$ mm (a) bzw. $y_E = 15$ mm (b).

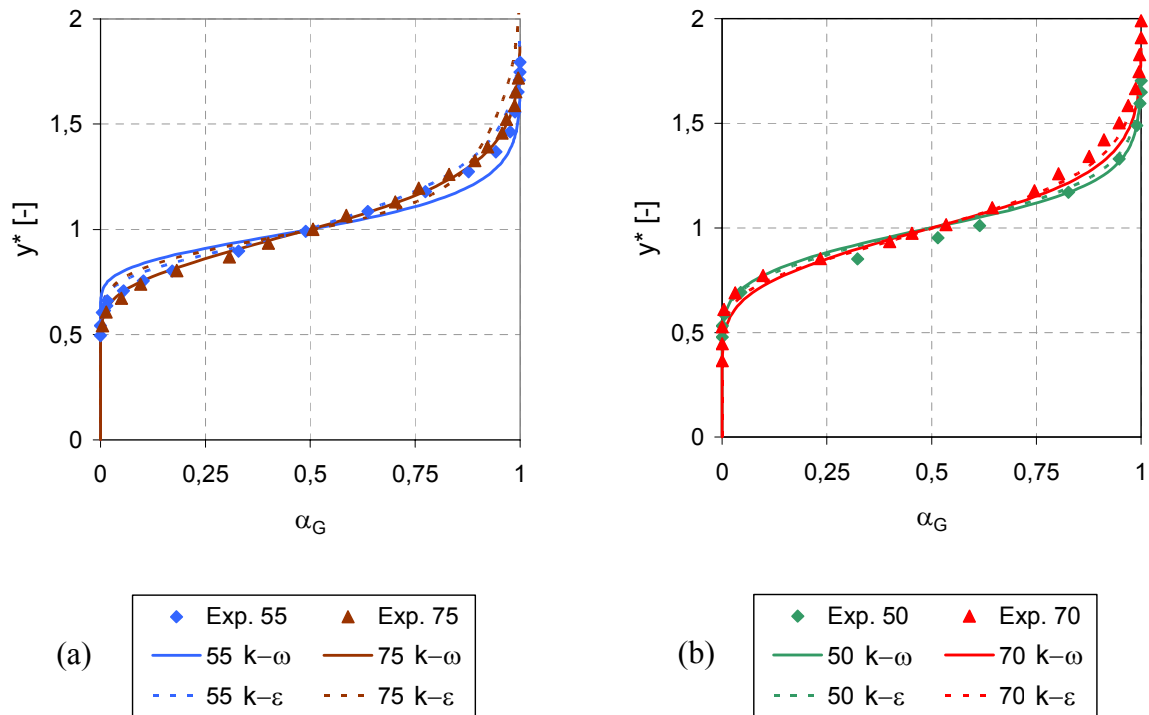


Abbildung 3.43: Verlauf Zweiphasenbereich teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 15$ mm.

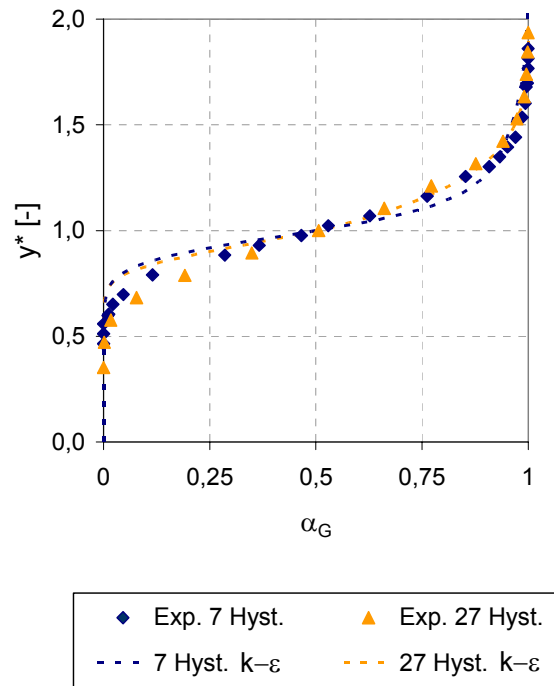


Abbildung 3.44: Verlauf Zweiphasenbereich teilweise umgekehrter Strömung mit Hysterese.

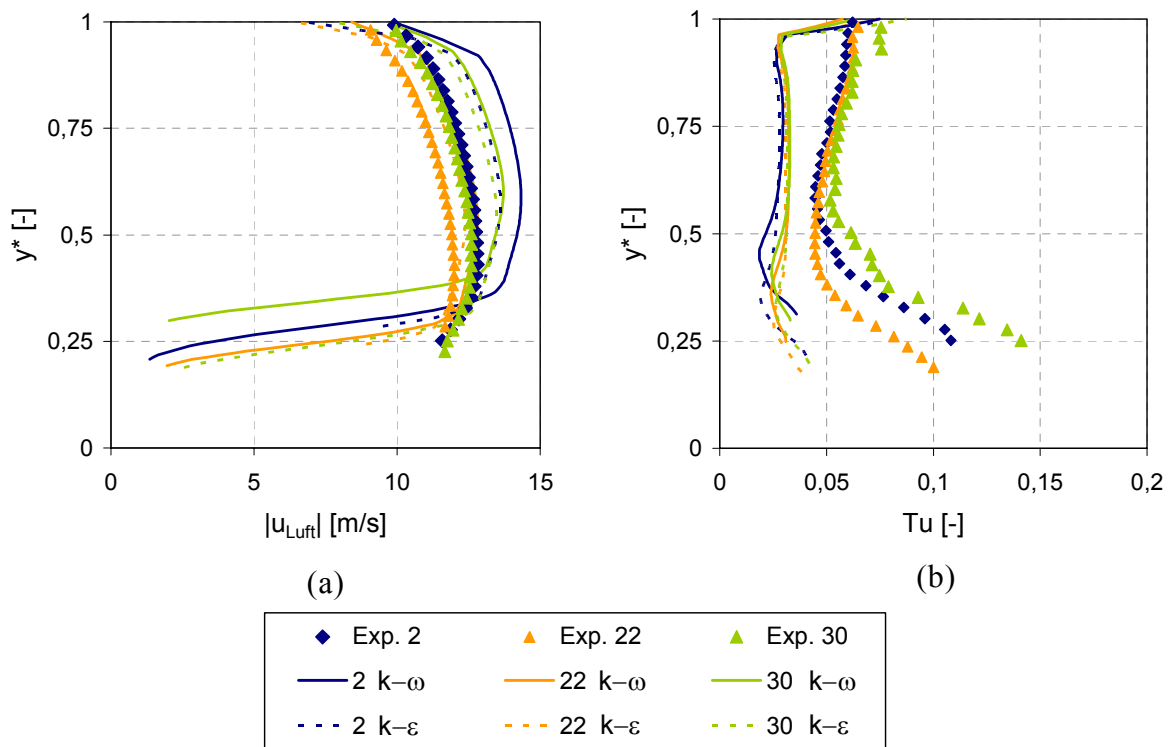


Abbildung 3.45: Geschwindigkeit (a) und Turbulenzgrad (b) der Luft bei teilweise umgekehrter Strömung mit $u_G = 10.0$ m/s und $y_E = 15$ mm.

3.4 Vergleichende Betrachtungen der Strömungsformen

Netzstudie:

Um den Einfluss der numerischen Diffusion an der Phasengrenze auszuschließen, wurde eine Netzverfeinerungsstudie durchgeführt. Es reicht dabei aus, diese für einen schießenden Fall durchzuführen, da hier die Breite des Zweiphasenbereiches kleiner ist als für teilweise umgekehrte Strömungen. Kann der Einfluss der numerischen Diffusion für die schießende Strömung ausgeschlossen werden, besteht aufgrund des breiteren Zweiphasenbereichs auch kein Einfluss der numerischen Diffusion auf die teilweise umgekehrte Strömung. Abbildung 3.46 zeigt die Netzverfeinerungsstudie für die Geschwindigkeit und die turbulente kinetische Energie. Es wurde auf eine dimensionslose Darstellung verzichtet. Wie aus Abbildung 3.46 hervorgeht, besteht kein Einfluss des gewählten Gitters auf das Geschwindigkeitsfeld in der Hauptströmung und im Zweiphasenbereich. In Wandnähe kommt es aufgrund der Verwendung von Wandfunktionen und einer verbesserten Auflösung zu kleinen Abweichungen im Geschwindigkeitsprofil. Der Einfluss des verwendeten Gitters auf die turbulente kinetische Energie im Bereich des Minimums ist marginal und kann vernachlässigt werden.

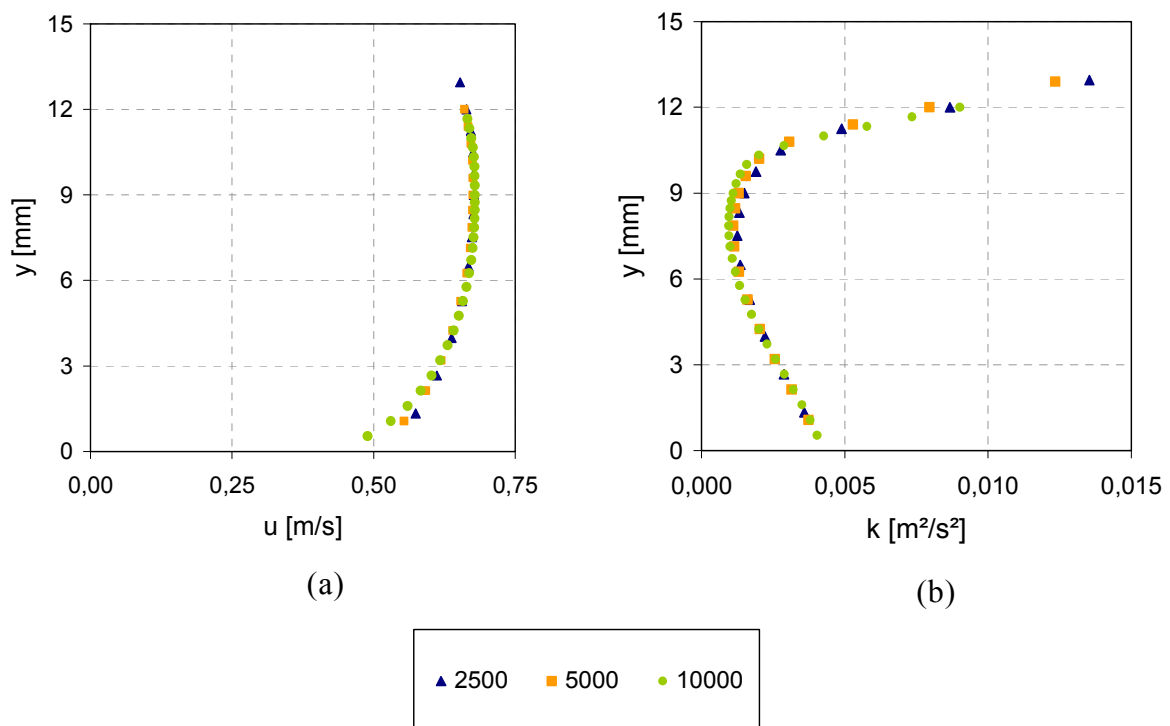


Abbildung 3.46: Netzstudie für eine schießende Strömung mit 2500, 5000 und 10000 Zellen;
(a) Geschwindigkeitsverlauf, (b) turbulente kinetische Energie.

Verteilung des Gasgehaltes:

Die Schichtdicke, welche hier auch den Wellenamplituden entspricht, nimmt mit zunehmender Gasgeschwindigkeit zu. D.h die Dicke des Zweiphasenbereiches wächst von einer schießenden hin zu einer teilweise umgekehrten Strömung an. Die Verschmierung des Zweiphasenbereiches für die einzelnen Strömungsformen wurde bereits in den vorherigen Kapiteln diskutiert. In Abbildung 3.47 ist die berechnete Schichtdicke für eine schießende und teilweise umgekehrte Strömung aufgetragen. Aus dieser Abbildung ist ersichtlich, dass die Wellenamplituden, bzw. der Zweiphasenbereich um den Faktor 1,5 anwächst und durch das Phasenwechselwirkungsmodell mit dem zweiphasigen Turbulenzmodell physikalisch genau wiedergeben wird.

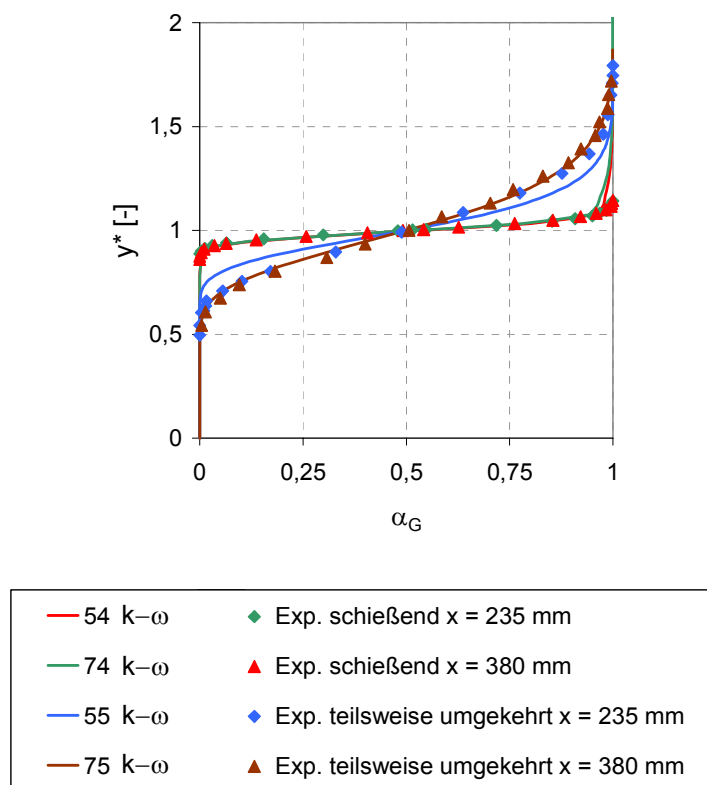


Abbildung 3.47: Vergleich der Aufweitung des Zweiphasenbereiches zwischen einer schießenden und teilweise umgekehrten Strömung.

Hystereseeffekt:

In Strömungskarten werden die verschiedenen Strömungszustände abhängig von den verwendeten Randbedingungen dargestellt. Sie ermöglichen in einem weiten Parameterbereich, den Übergang von einer schießenden bzw. fließenden Strömung in eine teilweise Strömungsumkehr darzustellen. Stähler [78] hat in seiner Arbeit die Strömungskarten von Gargallo [20] um den bereits erwähnten Hystereseeffekt (siehe

Kapitel 1.2) erweitert. Berechnet man zuerst die schießende Strömung für die Randbedingungen 7-Hyst ohne Luftgeschwindigkeit, so erhält man Punkt 1 in der Strömungskarte (siehe Abbildung 3.48). Wird die Luftgeschwindigkeit auf $u_{GS}=9$ m/s erhöht, ändert sich die Strömungsform nicht. Diese schießende Strömung ist mit Punkt 2 in der Strömungskarte gekennzeichnet. Wird die Luftgeschwindigkeit weiter erhöht, kommt es zu einem hydraulischen Sprung. Dieser stellt den Übergang von schießender zu teilweise umgekehrter Strömung dar. Dieser tritt am Punkt 3 für eine Luftgeschwindigkeit von $u_{GS}=10,1$ m/s auf. Die Luftgeschwindigkeit liegt für die Rechnung $0,3$ m/s unterhalb des Wertes aus der Strömungskarte. Bei einer Luftgeschwindigkeit von $u_{GS}=11,0$ m/s berechnet das Phasenwechselwirkungsmodell bereits eine Rückflussrate von 85 %. (Punkt 4). Wie aus der Strömungskarte ersichtlich, ist das Gebiet zwischen teilweiser und totaler Strömungsumkehr relativ klein. Deshalb steigt mit geringer Erhöhung der Luftgeschwindigkeit auch die Rückflussrate stark an. Verringert man nun die Luftgeschwindigkeit wieder auf $u_{GS}=9$ m/s, befindet man sich im Hysteresegebiet. Die Rückflussrate sinkt in der Rechnung von 85% (Punkt 4) auf 66% und beträgt im Experiment 70%.

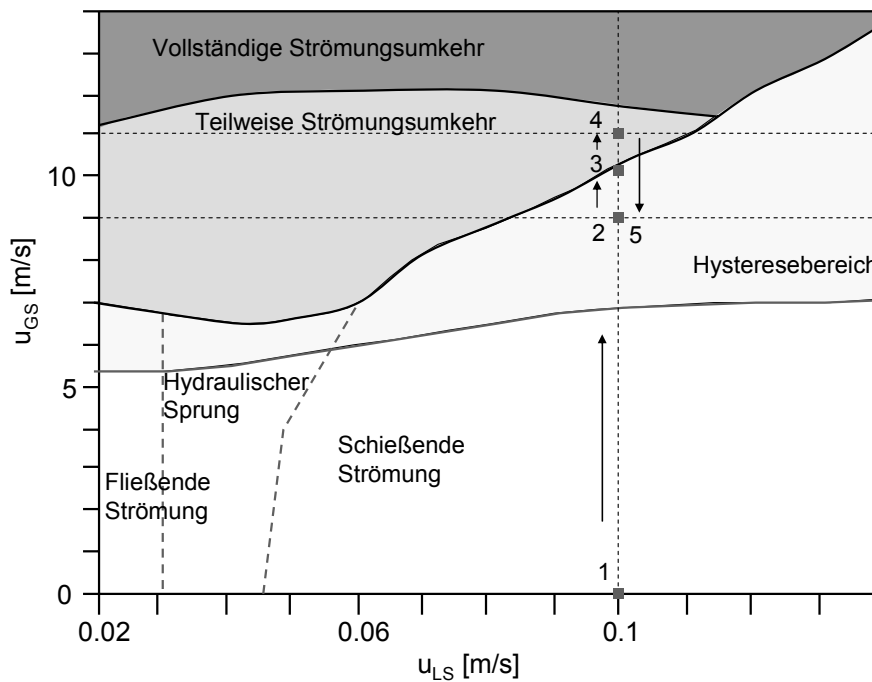


Abbildung 3.48: Strömungskarte

Druckverlust:

Der Druckverlust ist nach der Rückflussrate eine weitere integrale Messgröße zur Bestimmung der Genauigkeit des Phasenwechselwirkungsmodells und wurde an der Kanaldecke als Differenzdruck gemessen. Der Differenzdruck wurde über eine Länge von 300 mm gemessen, wobei die erste Druckanbohrung sich 100 mm von der Wassereinlassplatte entfernt befindet. In Abbildung 3.49 sind die berechneten über den gemessenen Druckdifferenzen aufgetragen. Es wurde eine logarithmische Auftragung gewählt, um sowohl Druckverluste für schießende/fließende und teilweise umgekehrte Strömungen darstellen zu können. Im Vergleich zu den schießenden Strömungen steigt der Druckverlust für teilweise umgekehrte Strömung um zirka das 50-fache an. Dieser Anstieg liegt einerseits daran, dass es zu erhöhten Reibungsverlusten an der turbulenten Phasengrenze kommt und ein Teil der Energie der Luftströmung verwendet werden muss, um die Wasserphase in negativer Richtung zu beschleunigen. Der Druckverlust von fließender/schießender Strömung ist hier sehr klein und liegt im Bereich von 1 Pascal (Pa). Für schießende Strömungen wird dieser durchweg zu groß vorhergesagt und weicht teilweise erheblich von den Experimenten ab. Die Balken für die schießenden Strömungen geben die Messgenauigkeit des Differenzdruckaufnehmers wieder und relativieren die großen Abweichungen der Rechnung. Die Messgenauigkeit liegt bei 0.65 Pa.

Der geringe Druckverlust für schießende Strömungen ist zusätzlich ein Indiz, dass die Reibung an der Phasengrenze in der gleichen Größenordnung liegt, wie der Druckverlust, der durch die Wandschubspannung an der Kanaldecke verursacht wird. Da die Wandschubspannung keine Schwankungsgeschwindigkeiten an der Wand zulässt, lassen sich daraus auch Rückschlüsse auf den Phasenreibungsbeiwert λ_i ziehen. Dieser verhält sich für schießende Strömungen laminar. Für teilweise umgekehrte Strömungen steigt der Druckverlust sprunghaft an und eine um mehrere Größenordnungen größere Reibung ist notwendig, um diesen zu erzeugen. Dies führt, wie bereits im vorherigen Kapitel erläutert, zu einem turbulenten Phasenreibungsbeiwert. Wie aus Abbildung 3.49 weiterhin ersichtlich, überschätzt das $k-\omega$ Modell den Druckverlust von teilweise umgekehrten Strömungen. Hingegen für schießende Strömungen unterliegen die berechneten Druckverluste kleineren Abweichungen als diejenigen des $k-\varepsilon$ Modells. Zusammenfassend betrachtet, berechnet das $k-\omega$ Modell die schießenden Strömungen tendenziell besser als das $k-\varepsilon$ Modell. Dieses Verhalten kehrt sich für teilweise umgekehrte Strömungen um.

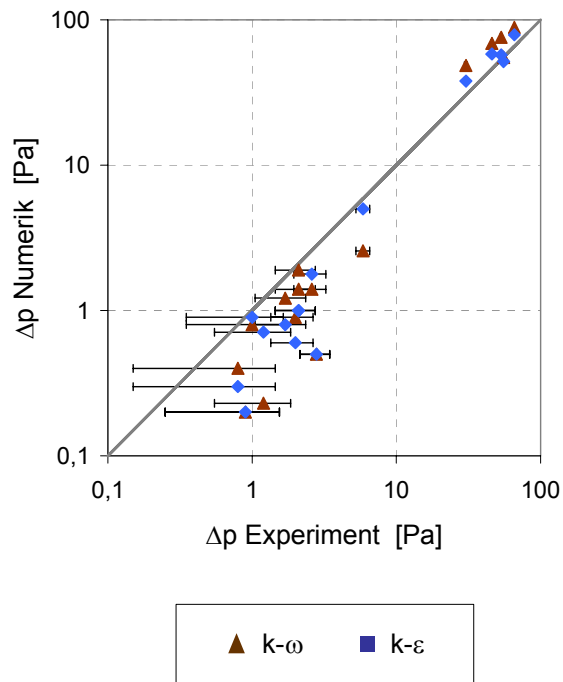


Abbildung 3.49: Druckverlust für schießende und teilweise umgekehrte Strömungen.

3.5 Numerische Analyse der Einspeisung in den heißen Strang

In der Literatur finden sich zahlreiche Korrelationen (siehe auch Kapitel 1) zum Einsetzen des Flutens bei der Einspeisung in den heißen Strang. Diese wurden durchweg in kleiner skalierten Anlagen gewonnen und auf die realen Reaktorgeometrien extrapoliert [50]. Hier bietet die Berechnung mit CFD einen großen Vorteil, da die physikalischen Modelle auf lokalen Phänomenen beruhen und daher eine Skalierbarkeit der Modelle angenommen werden darf. Das in dieser Arbeit entwickelte Phasenwechselwirkungsmodell wurde an der vereinfachten prototypischen WENKA Geometrie validiert und soll in diesem Abschnitt auf die Skalierbarkeit, anhand der bei der Einspeisung in den heißen Strang gewonnenen Flutkorrelation aus den Upper Plenum Test Facility (UPTF) Versuchen, untersucht werden. Bei den UPTF Versuchen handelt es sich um einen 1:1 Nachbau eines deutschen Druckwasserreaktors (Typ KONVOI) mit vier Strängen und einer Leistung von 1300 MWe. Diese Versuchsanlage dient hauptsächlich zur Untersuchung des Auftretens von Zweiphasenströmungen während einer Druckentlastung. Es können sowohl kleine als auch große Leckstörfälle an den kalten und heißen Strängen und die Einspeisung in die gebrochenen oder intakten Stränge, wie auch in den Downcomer simuliert werden. Die unterschiedlichen Einspeisemöglichkeiten werden als Notkühlsystem (Emergency Core Cooling System ECC) bezeichnet. Der entstehende Dampf wird mittels Dampfsimulator in das Core eingespeist. Eine detaillierte Beschreibung der Versuchsanlage findet sich in Damrell [11].

In der Versuchreihe UPTF Test No. 26 A (Run 230) [86] wurde der Einfluss auf den Impulsstrom des eingespeisten Kühlmittels unter gesättigten Bedingungen untersucht. Für die numerische Analyse wurde ein Segment des oberen Plenums von $22,5^\circ$ mit dem daran angeschlossenen heißen Strang diskretisiert. Durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften muss nur die Hälfte des heißen Stranges diskretisiert werden. Abbildung 3.50 zeigt den diskretisierten Rechenraum. Erkennbar ist eine starke Verdichtung des Netzes im Bereich des eingespeisten Kühlmittels. Diese ist notwendig, um den Einfluss der numerischen Diffusion auszuschließen. Der im Dampfsimulator erzeugte Dampf strömt von der Seite durch das Achssegment ein und strömt durch das obere Plenum bis er schließlich in den heißen Strang gelangt. Nach Austritt aus der Hutze strömt das Wasser im freien Gegenstrom mit dem entweichenden Dampf, bis es in das obere Plenum gelangt und dort als Freistrahler zerfällt. Die Kopfplatte stellt in diesem Rechenraum einen Auslass dar. Das obere Plenum ist nicht Ziel dieser numerischen Analyse, wird aber aufgrund der notwendigen Strömungsrandbedingungen am Eintritt in den heißen Strang als Eintrittsrandbedingung zusätzlich gelöst.

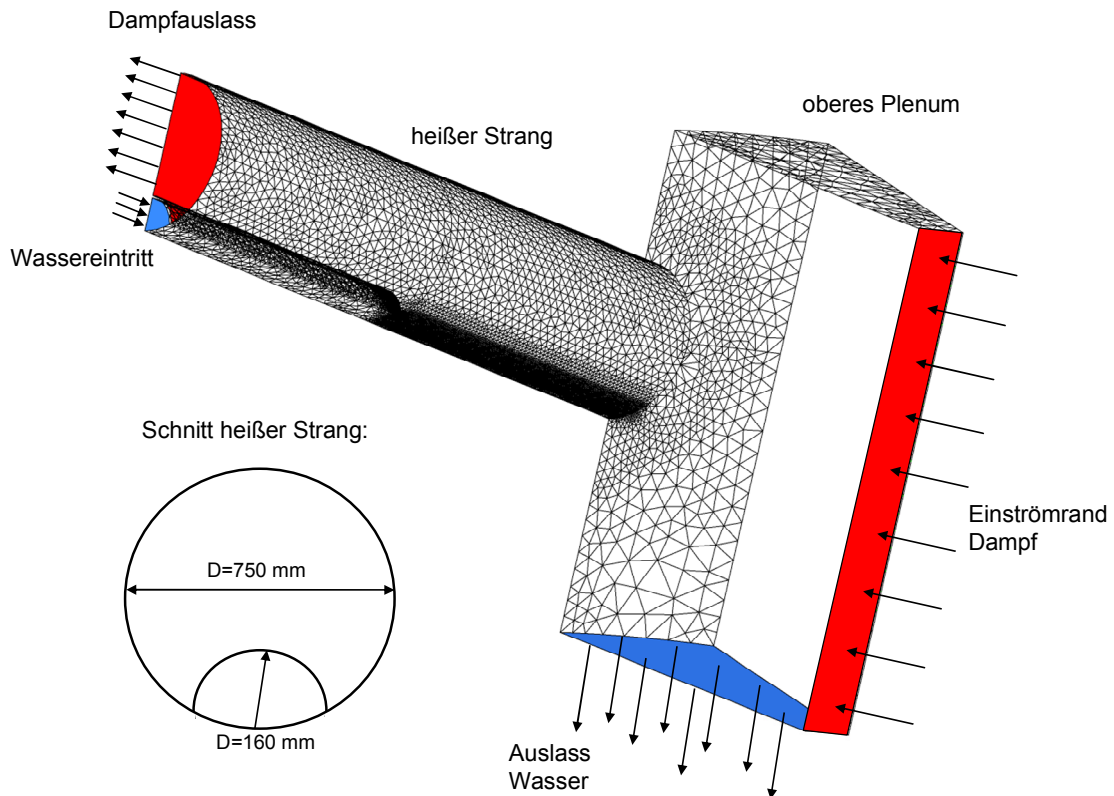


Abbildung 3.50: Diskretisierter heißer Strang mit oberem Plenum.

Der Einfluss der Dampfphase auf das eingespeiste Kühlmittel wurde an drei verschiedenen Kühlmassenströmen untersucht. Die verwendeten Randbedingungen sind in Tabelle 3.9 aufgelistet. Aufgrund der konstruktiven Gegebenheit des Anschlusses der Hutze an den heißen Strang, kommt es zu einer Wellenbewegung des Wassers hin zur Wand.

Abbildung 3.51 zeigt das typische Wellenverhalten bei der Einspeisung in den heißen Strang. Die vier Schnitte im Abstand von 0,42 m zeigen die Verteilung des Dampfgehaltes. Zusätzlich wurde die Isofläche mit einem Dampfgehalt von $\alpha_G = 0,5$ dargestellt. Das Wellenverhalten wird durch die wirkende Gravitation auf das Wasser nach Verlassen der Hutze verursacht. In Schnitt 1, welcher sich direkt am Ende der Hutze befindet, besitzt das eingespeiste Wasser aufgrund der neuen Lage im heißen Strang eine potentielle Energie. Diese entspricht nicht mehr der energetisch günstigsten Verteilung, so dass das Wasser eine seitliche Bewegung vollzieht. Erkennbar ist dies am Schnitt 2. Hier hat sich das Wasser bereits im heißen Strang zur Seite hin verteilt.

Aufgrund der Beschleunigung hin zu der Wand des heißen Stranges kommt es im folgenden (Schnitt 3 und 4) zu einer Ansammlung des Wasser in Wandnähe. Der durchströmte Querschnitt des Wassers im heißen Strang ist aufgrund der schießenden Randbedingungen gleich dem Querschnitt der Hutze.

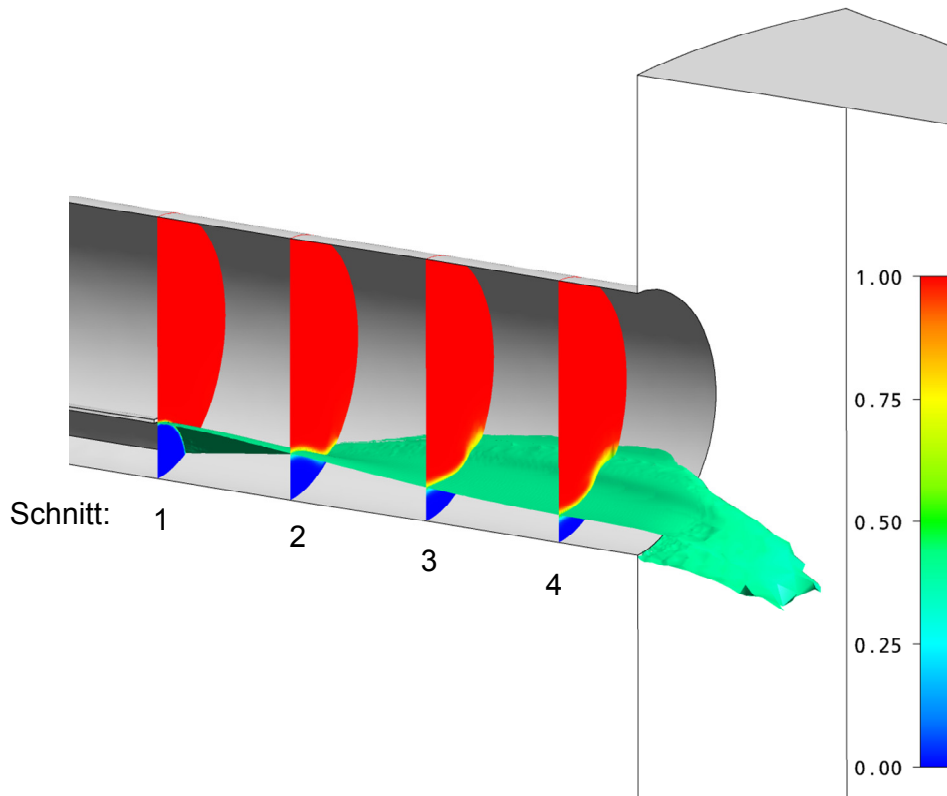


Abbildung 3.51: Entstehende Wellenbewegung aufgrund der Umverteilung des Wasser nach Verlassen der Hutze im heißen Strang mit Isofläche des Gasgehaltes $\alpha_G = 0.5$.

Die Skalierbarkeit des Phasenwechselwirkungsmodells wird anhand der aus dem Experiment Test No. 26 A (Run 230) gewonnenen Flutkorrelation untersucht. Für die Einspeisung von Kühlmittel wird ein Massenstrom von 70, 100 und 150 kg/s angenommen und die Dampfgeschwindigkeit in mehreren Schritten erhöht. Die Flutkorrelation wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\sqrt{J_G^*} = -0.556\sqrt{J_L^*} + 0.783, \quad (3.10)$$

wobei

$$J_L^* = \frac{J_L \cdot \sqrt{\rho_L}}{\left[(\rho_L - \rho_G)g \frac{D}{2} + \rho_L J_L^2 \frac{A}{A_{Hutze}} \right]^{1/2}} \quad (3.11)$$

und

$$J_G^* = \frac{J_G \cdot \sqrt{\rho_G}}{\left[(\rho_L - \rho_G)g \frac{D}{2} + \rho_L J_L^2 \frac{A}{A_{Hutze}} \right]^{1/2}} \quad (3.12)$$

ein erweitertes Wallis Kriterium darstellen (siehe auch Kapitel 1). Die einzelnen Lehrrohrgeschwindigkeiten errechnen sich aus dem Massenstrom dividiert durch die jeweilige Dichte und dem Querschnitt A des heißen Stranges.

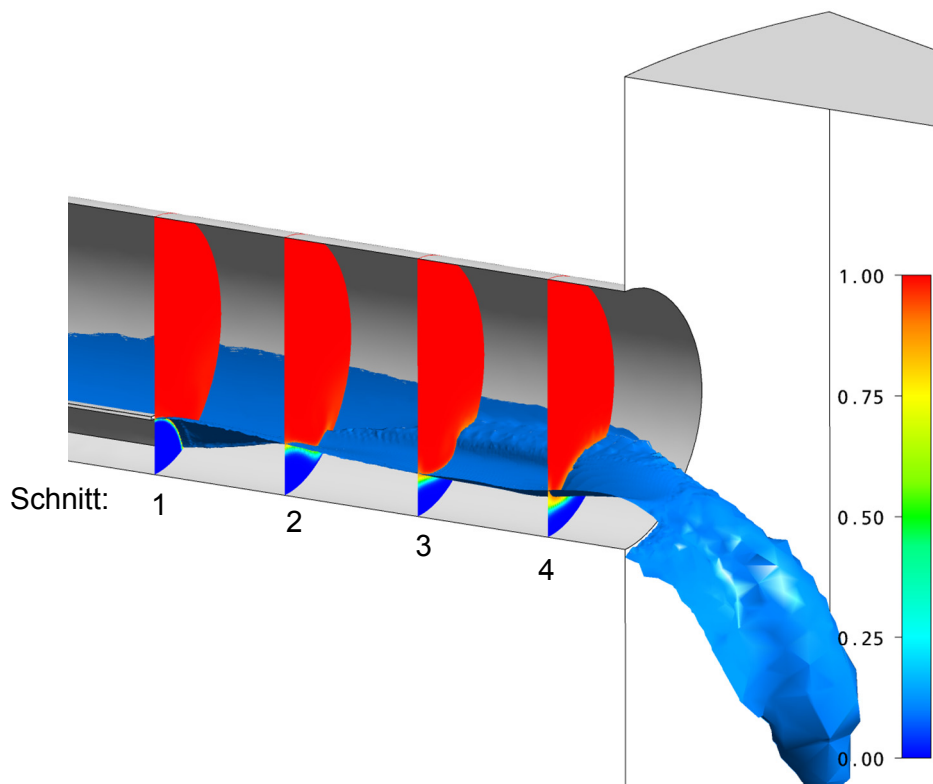
$$J_k = \frac{\dot{M}_k}{\rho_k A} \quad (3.13)$$

Der bei der Druckentlastung vorherrschende Versuchsdruck wurde bei dieser Versuchsreihe auf $p=0,4$ MPa eingestellt. Dies entspricht einer Dichte von $\rho_G = 2,148 \text{ kg/m}^3$ des Dampfes und $\rho_L = 926 \text{ kg/m}^3$ des Wassers.

Die erzielten Rechenergebnisse für unterschiedliche Dampfmassenströme sind in Tabelle 3.9 zusammengefasst. Bei allen verwendeten Dampfmassenströmen kommt es bereits zu einem Rückfluss des eingespeisten Wassers. Dieser Rückfluss setzt bereits weit unterhalb des kritischen Dampfmassenstromes ein, bleibt aber unterhalb dieses sehr klein. Für den Fall mit einer Wassereinspeisung von 150 kg/s liegt der aus den UPTF Experimenten bestimmte kritische Dampfmassenstrom für das Fluten bei $14,5 \text{ kg/s}$. In der Rechnung ist die berechnete Rückflussrate für den Bereich des Dampfmassenstromes $11 < \dot{M}_G < 15,7 \text{ kg/s}$ annähernd konstant und steigt erst bei größeren Dampfmassenströmen an. So liegt die Rückflussrate bei $\dot{M}_G = 18,5 \text{ kg/s}$ bei $5,1\%$. Der in der WENKA Versuchsanlage typischerweise auftretende hydraulische Sprung, als Indiz für das Beginnen des Flutens, tritt in den Rechnungen erst sehr viel später auf. Das Auftreten des hydraulischen Sprunges kann erst bei einem Dampfmassenstrom von $\dot{M}_G = 24,1 \text{ kg/s}$ beobachtet werden. Trotz des fehlenden hydraulischen Sprunges kommt es zu einem Mitriss von Wasser, hervorgerufen durch die Wellenbewegung des eingespeisten Wassers.

$p=0.4$ [MPa]		$\rho_L=926$ kg/m ³		$\rho_G=2.148$ kg/m ³	
$A_{\text{heißer Strang}}=0.4418$ m ²			$A_{\text{Hutze}}=0.0347$ m ²		
\dot{M}_L [kg/s]	\dot{M}_G [kg/s]	$\sqrt{J_L^*}$ [-]	$\sqrt{J_G^*}$ [-]	Rückflussrate	$\dot{M}_{G_kritisch}$ [kg/s]
70	5,3	0,3	0,37	0,0064	15
70	7,3	0,3	0,43	0,013	15
70	9,6	0,3	0,49	0,025	15
70	11,5	0,3	0,54	0,038	15
100	11,5	0,343	0,526	0,043	14,6
100	16,3	0,343	0,586	0,105	14,6
100	20,32	0,343	0,66	0,201	14,6
150	11	0,4	0,49	0,023	14,5
150	13,9	0,4	0,55	0,021	14,5
150	15,7	0,4	0,58	0,024	14,5
150	16,5	0,4	0,6	0,044	14,5
150	18,5	0,4	0,64	0,051	14,5

Tabelle 3.9: Randbedingungen der untersuchten UPTF Experimente.

Abbildung 3.52: Tropfenabriss am Wellenberg und Eintrag in den Dampfmassenstrom. Darstellung der Isofläche des Gasgehaltes $\alpha_G = 0.1$.

Bei genauerer Betrachtung tritt der erste Mitriss von Wasser an dem dort befindlichen Wellenberg aufgrund der starken wirkenden Scherspannungen auf. Dieser Mitriss kann als Abscherung von einzelnen Tropfen interpretiert werden, wird aber nicht von dem Phasenwechselwirkungsmodell modelliert und summiert sich für die untersuchten Dampfmassenströme bis auf 10 % des eingespeisten Massenstromes auf. Abbildung 3.52 zeigt den gleichen Fall wie

Abbildung 3.51 mit einem geänderten Wert für die Isofläche auf $\alpha_G = 0,1$. Für diesen Wert des Dampfgehaltes gibt es bereits negative Werte für die Geschwindigkeit des Wassers am Wellenberg und führt folglich auf den Rückfluss des Wassers.

Abbildung 3.53 zeigt den entstehenden hydraulischen Sprung im heißen Strang. Dieser entsteht 8,5 s nach Beginn der Einspeisung in Wandnähe, wo bereits die Abscherung der Tropfen auftreten. In der Mitte des heißen Stranges kommt es zu einer deutlichen Zunahme der Wassertiefe, aber die Strömung besitzt noch immer den typisch schießenden Charakter. Nach weiteren 1,5 s bewegt sich der hydraulische Sprung in den heißen Strang und initiiert auch in der Mitte das Auftreten des hydraulischen Sprunges. Nach weiteren 2 s ist der hydraulische Sprung voll ausgebildet und beginnt in den heißen Strang zu wandern.

Abbildung 3.54 zeigt die in Tabelle 3.9 aufgelisteten Rechenergebnisse in graphischer Form. Die schwarze Kurve entspricht der in Gleichung (3.10) beschriebenen Flutkorrelation. Die Werte neben den einzelnen Rechenpunkten sind die dazugehörigen Rückflussraten. Aus dieser Darstellung wird für die drei untersuchten Wassermassenströme ersichtlich, dass die Rückflussraten nach Überschreiten des kritischen Dampfmassenstromes zunehmen.

Wie aus Tabelle 3.9 für den kritischen Dampfmassenstrom erkennbar, nimmt dieser sogar für größer werdende Kühlmassenströme leicht ab und steigt erst wieder für sehr große Kühlmassenströme an. Diese werden hier nicht weiter untersucht. Da es sich bei den UPTF Experimenten um integrale Messgrößen handelt und nicht die einzelnen Rückflussraten untersucht wurden, können keine Aussagen über das tatsächliche Verhalten der Strömung im heißen Strang gemacht werden. Im Speziellen konnte während der Versuche nicht zwischen dem Rückfluss aus Tropfenabriss und teilweiser Strömungsumkehr unterschieden werden. Wie aber durch die numerische Analyse gezeigt werden konnte, spielt der Tropfenabriss eine nicht zu vernachlässigende Rolle und summiert sich bis auf zirka 10% des eingespeisten Kühlmassenstromes auf. Aus diesem Grund fällt das Auftreten des Flutens nicht mehr mit dem Auftreten des hydraulischen Sprunges für den kritischen Dampfmassenstrom zusammen. Das Phasenwechselwirkungsmodell liefert für die numerische Analyse zum ersten Mal lokale Einsichten in das Strömungsverhalten während der Einspeisung.

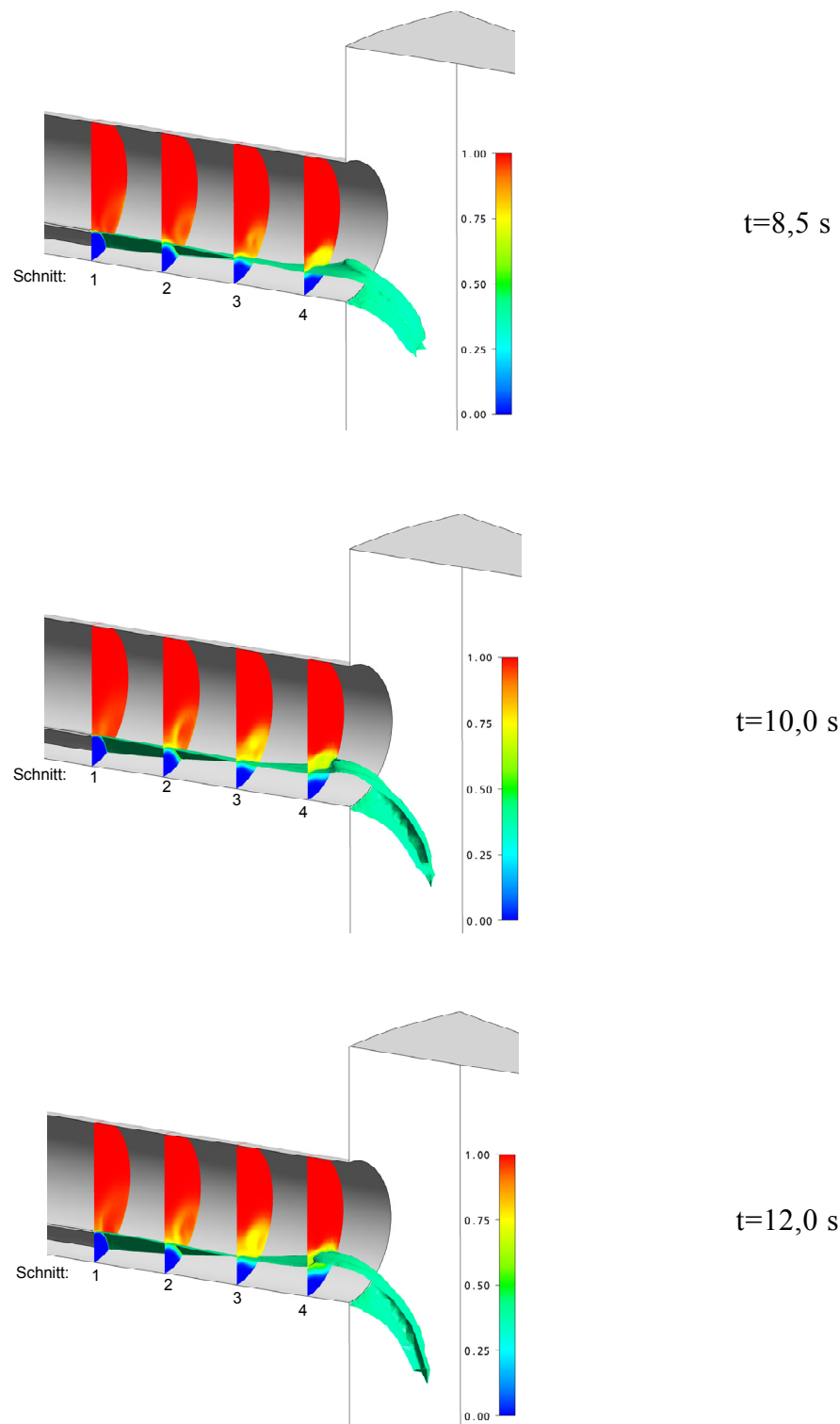


Abbildung 3.53: Entstehung des hydraulischen Sprunges nach Beginn der Einspeisung.

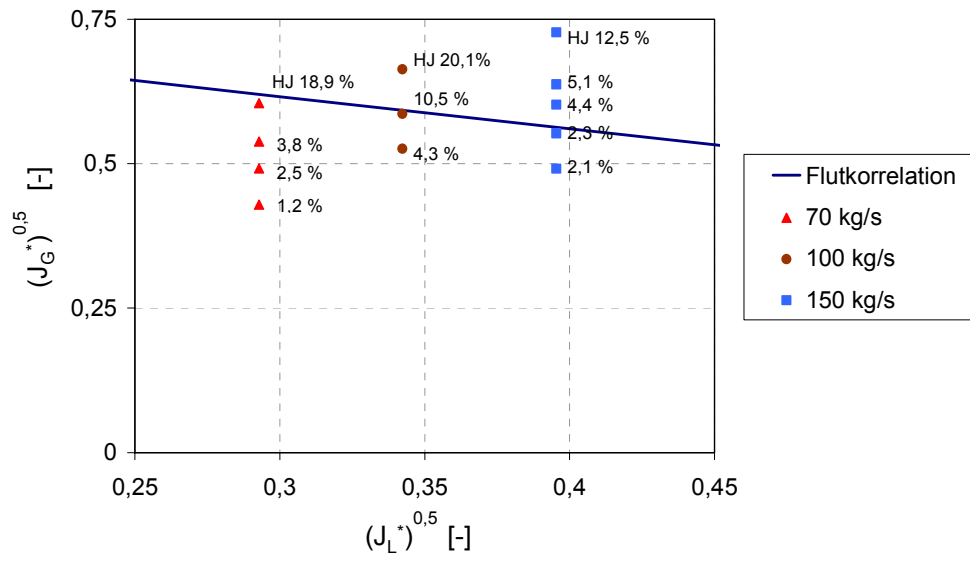


Abbildung 3.54: Flutkorrelation aus den UPTF Experimenten verglichen mit den einzelnen berechneten Rückströmraten für verschiedene Gasmassenströme bei drei konstanten Kühlmassenströmen.

4 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

In dieser Arbeit wurden ein Phasenwechselwirkungs- und zweiphasiges Turbulenzmodell für horizontale wellige Strömungen entwickelt. Zur Validierung der Modellierungsansätze wurden die in der WENKA Versuchsanlage gemessenen lokalen kinematischen und turbulenten, zeitlich gemittelten Strömungsgrößen verwendet. Im Speziellen wurden die fließenden, schießenden und teilweise umgekehrten Strömungen untersucht. Die untersuchten Strömungsformen stellen sich durch Variation des flüssigen und luftförmigen Massenstromes in einen weiten Parameterbereich ein. Für fließende und schießende Strömungen liegen die Wellenamplituden in der gleichen Größenordnung und steigen mit zunehmendem Luftdurchsatz bei der teilweise umgekehrten Strömung stark an. Die statistische Betrachtung der Wellen als Fluidpartikel [77] führt auf eine Differentialgleichung zur Beschreibung des Gasgehaltes als Funktion der turbulenten kinetischen Energie. Für den Modellierungsansatz des Phasenwechselwirkungsmodells führt die Implementierung dieser Differentialgleichung auf eine Diffusionskraft. Die Größe der Diffusionskraft bestimmt sich aus der turbulenten kinetischen Energie und ist in der Modellierung ein indirektes Maß für die Wellenamplituden. Der Impulsaustausch in horizontaler Richtung wird aus der an der Phasengrenze wirkenden Schubspannung mit dem bekannten Phasenreibungsbeiwert modelliert. Es konnte gezeigt werden, dass die charakteristische Länge und der Widerstandsbeiwert, notwendig für die Bestimmung der Widerstandskraft in CFX-11.0, mit dem Phasenreibungsbeiwert korreliert ist. Somit ist für den Impulsaustausch bei geschichteten horizontalen Strömungen nur noch ein Modellparameter zu bestimmen.

Zur Schließung der einzelnen Formulierungen des Impulsaustausches wurde in einem ersten Schritt der Prandtl'sche Mischungsweg und später das einphasige k - ϵ und k - ω Turbulenzmodell auf zweiphasige Strömungen erweitert. Das Mischungswegmodell wurde in dieser Arbeit nur auf die schießenden Strömungen angewandt. Unter der Annahme einer konstanten turbulenten kinetischen Energie für den diffusiven Zweiphasenbereich konnte das Phasenwechselwirkungsmodell geschlossen werden. Es wurde für die schießenden Strömungen eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten erzielt. Wie gezeigt werden konnte, spielt der Transport von Turbulenz beim Übergang in die teilweise umgekehrte Strömung eine nicht zu vernachlässigende Rolle. Das k - ϵ und k - ω Modell berücksichtigen diesen Transport von Turbulenz. Die fehlende Skalierbarkeit des Mischungsweges auf andere Geometrien führte ebenfalls auf

die Verwendung des k - ϵ und k - ω Modells. Die dämpfende Wirkung der Phasengrenze auf die Turbulenz wurde unter anderem aus der Ableitung der zweiphasigen Transportgleichung für die Reynoldsspannung und den gemessenen Reynoldsspannungen bestimmt. Die zusätzliche Dämpfung aufgrund der Phasengrenze beinhaltet einen Vorfaktor, welcher anhand der schießenden und teilweise umgekehrten Strömung kalibriert wurde und für beide Turbulenzmodelle gültig ist. Der Vorfaktor basiert auf dem lokalen Turbulenzgrad und berechnet die turbulente kinetische Energie der drei Strömungsformen hinreichend genau.

Für fließende und schießende Strömungen liefert die Annahme eines konstanten Phasenreibungsbeiwertes gute Übereinstimmung mit dem gemessenen Geschwindigkeitsfeld. Indirekt führt dies ebenfalls auf eine korrekte Berechnung des diffusiven Zweiphasenbereichs. Der konstante Phasenreibungsbeiwert führt bei teilweise umgekehrten Strömungen auf zu geringe Rückströmraten. Wie anhand der Zwei-Fluid Gleichungen erstmals gezeigt werden konnte, darf der Einfluss der turbulenten Schubspannung an der Phasengrenze bei dieser Strömungsform nicht vernachlässigt werden. Die Modellvorstellung eines konstanten Phasenreibungsbeiwertes basiert auf der Überströmung von rauen Wänden, welche selbst keine Fluktuationsgeschwindigkeiten besitzen. Dies ist für turbulent wellige Strömungen nicht mehr zutreffend, da die bewegte Phasengrenze analog zu den Reynoldsspannungen eine turbulente Schubspannung aufgrund der Fluktuation der Phasengrenze verursacht. Dies wird in dieser Arbeit in Form eines konstanten turbulenten Phasenreibungsbeiwertes berücksichtigt und führt auf die korrekte Berechnung der Rückflussraten.

Mit dem entwickelten Phasenwechselwirkungsmodell ist es zum ersten Mal möglich die qualitative Gasgehaltsverteilung gut vorherzusagen, ohne dass einzelne Phänomene aufgelöst werden müssen. Wie gezeigt werden konnte, bedarf es keiner numerischen Interface Tracking Methoden mehr, um das Verhalten der Phasengrenze simulieren zu können. Der zunehmende diffusive Zweiphasenbereich entspricht der Zunahme der Welligkeit und wird durch die korrekte Berechnung der turbulenten kinetischen Energie gut wiedergeben. Das k - ω Modell berechnet die schießenden Strömungen am besten, führt aber bei teilweise umgekehrten Strömungen zu größeren Abweichungen. Die Abweichung des k - ϵ Modells ist für schießende Strömungen nur unwesentlich größer, liefert aber für die fließende und teilweise umgekehrte Strömungen genauere Ergebnisse als das k - ω Modell. Der Druckverlust stellt eine weitere integrale Messgröße für die betrachteten Strömungsformen dar und wurde für die Luft entlang der Hauptströmungsrichtung ausgewertet. Zusätzlich ist dieser ein indirektes Maß für die Genauigkeit des Phasenwechselwirkungsmodells und gibt den Anstieg um mehrere Größenordnungen von einer schießenden hin zu einer teilweisen umgekehrten Strömung gut wieder.

Das Phasenwechselwirkungsmodell ermöglicht dem Anwender die physikalischen Vorgänge innerhalb der einzelnen Wellen statistisch durch einen diffusiven Zweiphasenbereich zu modellieren. Die Stärke des entwickelten Phasenwechselwirkungsmodells liegt an der Skalierbarkeit auf andere Geometrietypen. Diese wurde anhand der Einspeisung in den heißen Strang getestet und mit der aus den UPTF Experimenten bekannten Flutkorrelation verglichen. Wie durch die Simulationsrechnungen gezeigt werden konnte, spielt dabei der Mitriss von Kühlmittel, welcher als Tropfenabriss interpretiert werden kann, eine wichtige Rolle für den Beginn des Flutens. Aufgrund der dreidimensionalen Strömung kommt es zu einem langsamen Einsetzen des Flutens. Der hydraulische Sprung tritt dabei teilweise erst verzögert auf.

Die Modellierung und Implementierung des Phasenwechselwirkungsmodells führen zu einem wissenschaftlichen Fortschritt bezüglich der Vorhersagemethoden für geschichtete horizontale Strömungen sowohl für prototypische als auch realer dreidimensionaler Reaktorgeometrien mit einer Wasser-Luft oder Wasser-Wasserdampfströmung.

Literaturverzeichnis

- [1] Akai, M., Inoue, A., Aoki, S.: *The Prediction of Stratified Two-Phase Flow with a Two-Equation Model of Turbulence*. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 7, pp. 21-39, 1981
- [2] Anderson, D. A., Tannehill, J.C., Pletcher, R. H.: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1984
- [3] Andries, J., Tirry, W.J., Goossens, M.: *Modified Kelvin-Helmholtz Instabilities and Resonant Flow Instabilities in a One-Dimensional Coronal Plume Model*. Astrophysical Journal, Vol. 531, 2000, pp. 561-570
- [4] Ansys CFX-11.0: *Solver Theory Guide*. Ansys Inc., Canonsburg, USA
- [5] Baik, S. and Hanratty, T.J.: *Effects of drag reducing polymer on stratified gas-liquid flow in a large diameter horizontal pipe*. Int. J. of Multiphase Flow, Vol. 29, 2003, pp. 1749-1757
- [6] Bankoff, S.G and Lee, S.C.: *A Brief Review of Countercurrent Flooding Models Applicable to PWR Geometries*. Nuclear Safety, Vol. 26, No. 2, 1985, pp. 139-152
- [7] Bothe, D.: *VOF-Simulation of Fluid Particle Dynamics*. 11th Workshop on Two-Phase Flow Prediction, April 5-8, 2005, Merseburg, Germany
- [8] Carey, V. P.: *Liquid-Vapor Phase-Change Phenomena: An Introduction to the Thermophysics of Vaporization and Condensation Process in Heat Transfer Equipment*. Taylor & Francis, Bristol, 1992
- [9] Chanson, H.: *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction*. Elsevier, Amsterdam, Boston, London, 2004
- [10] Celik, I. and Rodi, W.: *Simulation of Free-Surface Effects in Turbulent Channel Flows*. PCH Physico Chemical Hydrodynamics, Vol. 5, pp. 217-227, 1994
- [11] Damerell, P.S. and Simmons, J.W.: *Reactor Safety Issues Resolved by the 2D/3D Program*. Prepared jointly by Japan Atomic Energy Research Institute, Gesellschaft für Anlagen- und Reaktorsicherheit (GRS) mbH, Siemens AG, UB KWU, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Los Alamos National Laboratory, MPR Associates, Inc., 1993

- [12] Davies, J. T.: *Turbulence Phenomena*. Academic Press, New York, London, 1972
- [13] Drew, D. and Passman, S. L.: *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, New York, Heidelberg, 1999
- [14] Eaton, J.K. and Fessler, J.R.: *Preferential concentration of particles by turbulence*. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 20, 1994, pp. 169-209
- [15] Egorov, Y. and Menter F.: *Modelling and Simulation of Condensation on a Free Surface with CFX-5*. Development Report, Ansys Inc., Germany
- [16] Fabre, J., Masbernat, L., Suzanne, C.: *Stratified Flow, Part I: Local Structure*. Multiphase Science and Technology, Vol. 3, pp. 285-301, 1987
- [17] Fietz, M.: *Numerische Simulation von Oberflächeninstabilitäten in Zweiphasenströmungen mit Hilfe einer Level-Set Methode*. Dissertation, RWTH Aachen, Shaker Verlag 2004
- [18] Fulgosi, M., Lakehal, D., Banerjee, S. and De Angelis, V.: *Direct numerical simulation of turbulence in a sheared air-water flow with deformable interface*. J. Fluid Mech., Vol. 482, pp 319-345, 2003
- [19] Gargallo Gallego, M.G.: *Countercurrent Flow Limitations in Horizontal Stratified Flows of Air and Water*. Dissertation Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte FZKA 7018, 2004
- [20] Gargallo, M.G, Schulenberg, T., Meyer, L., Laurien, E.: *Counter-current flow limitations during hot leg injection in pressurized water reactors*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 235, 2005, pp. 785-804
- [21] Giese, T.: *Numerische und Experimentelle Untersuchung von gravitationsgetriebenen Zweiphasenströmungen durch Rohrleitungen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2003
- [22] Glaser, H.: *Downcomer and tie plate countercurrent flow in the Upper Plenum Test Facility (UPTF)*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 133, 1992, pp. 259-283
- [23] Herwig, H.: *Strömungsmechanik: Eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002
- [24] Hirt, C.W. and Nichols, B.D.: *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*. Journal of Computational Physics, Vol. 39, 1981, pp. 201-225

- [25] Höhne, T., Vallée, C., Prasser, H.M.: *Experimental and numerical prediction of horizontal stratified flows*. 6th International Conference on Multiphase Flow, ICMF, Leipzig, Germany, July 9-13, 2007
- [26] Imura, H., Kusuda, H., Funatsu, S.: *Flooding Velocity in a Counter-Current Annular Two-Phase Flow*. Chemical Engineering Science, Vol. 32, 1977, pp. 79-87
- [27] Ishii, M. and Mishima, K.: *Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 82, 1984, pp. 107-126
- [28] Ishii, M., Hibiki, T.: *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, New York, 2006
- [29] Isnard, O. and Lubrano, J.L.: *Application of the Volume Of Fluid (VOF) Method with a Finite Element Method to the Study of Free Moving Boundaries: 3D Applications*. 3rd International Conference on Multiphase Flow (ICMF 98), June 8-12, 1998, Lyon, France
- [30] Issa, R. I.: *Solution of the implicitly discretised fluid flow equation by operator splitting*. J. Computational Physics, Vol. 61, pp. 40 ff., 1985
- [31] Jischa, M.: *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1982
- [32] Jovanovic, J.: *The Statistical Dynamics of Turbulence*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004
- [33] Kays, W., Crawford, M., Weigand, B.: *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, Boston, 2005
- [34] Kim, H.J., Lee, S.C., Bankoff, S.G.: *Heat Transfer and Interfacial Drag in Countercurrent Steam-Water Stratified Flow*. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 11, 1985, pp. 593-606
- [35] Kleefsman, K.M., Fekken, G., Veldman, A.E.P., Bunnik, T., Buchner, B., Iwanowski, B.: *Prediction of Green Water and Wave Loading Using a Navier-Stokes Based Simulation Tool*. ASME Offshore Mechanics and Arctic Engineering, June 23-28, 2002, Oslo, Norway
- [36] Komori, S., Ueda, H., Ogino, F., Mizushima, T.: *Turbulence Structure and Transport Mechanism at the Free Surface in an Open Channel Flow*. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 25, pp. 513-521, 1982

- [37] Kolev, N.I., Seitz, H., Roloff-Bock, I.: *Hot-Leg Injection: 3D versus 1D Three Velocity Fields Modelling and Comparison with UPTF Experiments*. Proceedings of 4th ICMF, New Orleans, May 21-24, 2001
- [38] Komori, S., Murakami, Y., Ueda, H.: *The Relationship between Surface-Renewal and Bursting Motions in an Open-Channel Flow*. J. Fluid Mechanics, Vol. 203, pp. 103-123, 1989
- [39] Lakehal, D., Fulgosi, M., Yadigaroglu, G.: *Direct Numerical Simulation of Turbulent Heat Transfer across a Mobile, Sheared Gas-Liquid Interface*. Journal of Heat Transfer, Vol. 125, pp 1129-1239, 2003
- [40] Launder, B. E. und Spalding, D. B.: *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London, 1972
- [41] Laurien, E.: *Turbulence Modelling for CFD in Reactor Safety*. Annual Meeting on Nuclear Technology KTG, Karlsruhe, Germany, Mai 22-24, 2007
- [42] Lee, S.C. and Bankoff, S.G.: *Stability of Steam-Water Countercurrent Flow in an Inclined Channel: Flooding*. J. of Heat Transfer, Vol. 105, 1983, pp. 713-718
- [43] Liu, C.P., Mc Carthy, G.E., Tien, C.L.: *Flooding in Vertical Gas-Liquid Countercurrent Flow Through Multiple Short Paths*. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 25, 1982, pp. 1301-1312
- [44] Ljuboja, M. and Rodi, W.: *Calculation of Turbulent Wall Jets with an Algebraic Reynolds Stress Model*. Journal of Fluids Engineering, Vol. 102, pp. 350-356, 1990
- [45] Lombardi, P., De Angelis, V. and Banerjee, S.: *Direct numerical simulation of near-interface turbulence in coupled gas-liquid flow*. Phys. Fluids, Vol. 8 pp. 1643 1996
- [46] Lopez de Bertodano, M.L.: *Countercurrent Gas-Liquid Flow in a Pressurized Water Reactor Hot Leg*. Nuclear Science and Engineering, vol. 117, pp. 126-133 1994
- [47] Loth, E.: *Numerical approaches for motion of dispersed particles, droplets and bubbles*. Progress in Energy and Combustion Science, Vol. 26, 2000, pp. 161-223
- [48] Mandhane, J. M., Gregory, G. A., Aziz, K., *A: Flow Pattern Map for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes*. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 1, 1974
- [49] Mata, C., Pereyra, E., Trallero, J.L., Joseph, D.D.: *Stability of stratified gas-liquid flows*. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 28, 2002, pp. 1249-1268

- [50] Mayinger, F., Weiss, P. and Wolfert, K.: *Two-phase flow phenomena in full-scale reactor geometry*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 145, 1993, pp. 47-61
- [51] Menter, F.: *Multiscale Model for Turbulent Flows*. 24th Fluid Dynamic Conference, AIAA, 1993
- [52] Minato, A., Nagayoshi, T., Misawa, M., Suzuki, A., Ninokata, H., Koshizuka, S.: *Numerical Simulation of Complex 3D Gas-Liquid Two-Phase Flow*. 5th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 04), May 30- June 4, 2004, Yokohama, Japan
- [53] Nikuradse, J.: *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*. Forschungsheft 361, Ausgabe B, Band 4, VDI-Verlag GmbH, Berlin, 1933
- [54] Nguyen, V.T. and Lausen, R.: *3D Numerical Computation of Free Surface Flows in Open Channels and Rivers*. ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, May 29 – June 1, 2001, New Orleans, Louisiana, USA
- [55] Oertel, H. jr. and Delfs, J.: *Strömungsmechanische Instabilitäten*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996
- [56] Oertel, H. jr. and Laurien, E.: *Numerische Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2003
- [57] Oertel, H. jr. and Böhle, M.: *Strömungsmechanik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004
- [58] Ohnuki, A.: *Experimental Study of Counter-Current Two-Phase-Flow in Horizontal Tube Connected to Inclined Riser*. J. of Nuclear Science and Technology, Vol. 23, 1986, p.p. 219-232
- [59] Ohnuki, A., Adachi, H. and Murao, Y.: *Scale Effects on Countercurrent Gas-Liquid Flow in a Horizontal Tube Connected to an Inclined Riser*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 107, 1988, pp. 283-294
- [60] Ostrach, S. and Koestel, A.: *Film Instabilities in Two-Phase Flows*. AIChE J., 1965, pp. 294-303
- [61] Patankar, S. V. and Spalding, D. B.: *A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows*. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 1787 ff., 1972
- [62] Peric, M. and Ferziger, J. H.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002

- [63] Podowski, M. Z.: *On the Mechanistic Modeling of Interfacial Phenomena in Gas/Liquid Two-Phase Flows*. 6th International Conference on Multiphase Flow, Leipzig, Germany, July 9-13, 2007
- [64] Pope, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005
- [65] Rashidie, M. and Banerjee, S.: *Streak Characteristics and Behavior Near Wall and Interface in Open Channel Flows*. Journal of Fluids Engineering, Vol. 112, pp. 164- 170, 1990
- [66] Rashidie, M., Hetsroni, G., Banerjee, S.: *Mechanism of Heat and Mass Transfer at Gas-Liquid interfaces*. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 1799-1810, 1991
- [67] Rashidi, M., Hetsroni, G., Banerjee, S.: *Wave-Turbulence Interaction in Free Surface Channel Flows*. Phys. Fluids A, Vol. 4, Issue 12, pp. 2727-2738, 1992
- [68] Rhie, D. M. and Chow, W.L.: *A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separator*. AIAA Journal, Vol. 21, pp. 1527-1532, 1983
- [69] Richter, H.J. and Wallis, G.B., Carter, K.H., Murphy, S.L.: *Deentrainment and Countercurrent Air-Water Flow in A Model PWR Hot Leg*. Washington D.C. NRC-0193-9, U.S Nuclear Regulatory Commission, 1978
- [70] Rodi, W.: *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A state of the art review*. IAHR Monograph Series, Rotterdam, Brookfield, 1993
- [71] Rotta, J.C.: *Perspectives in turbulence studies, International symposium DFVLR Research Center*. Göttingen, Germany, May 11-12,1987, Springer, Berlin Heidelberg
- [72] Saptoadi, D. and Laurien, E.: *On the Fundamental Two-Fluid Equations to Model Three-Dimensional Bubbly Flows*. 4th International Conference on Multiphase Flow, New Orleans, USA, May 27th – June 1st , 2001
- [73] Sato, Y. and Sekoguchi, K.: *Liquid Velocity Distribution in Two-Phase Bubbly Flow*. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 2, p.79, 1975
- [74] Schlichting, H. and Gersten, K.: *Boundary Layer Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000
- [75] Sethian, J.A: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999
- [76] Siegloch, H.: *Technische Fluidmechanik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005

- [77] Stähler, T.: *Experimentelle Untersuchung und physikalische Beschreibung der Schichtenströmung in horizontalen Kanälen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2007
- [78] Stähler, T., Meyer, L., Schulenberg, T., Laurien, E.: *Investigation on Flow Reversal in Stratified Horizontal Flow*. Int. Conference Nuclear Energy for New Europe, Bled, Slovenia, September 5-8, 2005
- [79] Strubelj, L., Bajsic, I., Tiselj, I.: *CFX Simulations of Kelvin-Helmholtz Instability*. Multiphase Flow: Simulation, Experiment and Application, Dresden, Germany, June 2004
- [80] Taitel, Y. and Dukler, A.E.: *A Model for Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow*. AIChE Journal, Vol. 22, 1976, pp. 47-55
- [81] Tennekes, H., Lumley, J. L.: *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1972
- [82] Teschendorf, V., Scheuerer, M., Sonnenburg, H.-G.: *Projektvorschlag für eine konzentrierte Aktion zur Integration von CFD-Codes bzw. deren Module in den Systemcode ATHLET zur physikalischen fundierten und sicher skalierbaren Simulation mehrdimensionaler Zweiphasenströmungen*. 12. Sitzung des Projektkomitees „Transienten und Unfallabläufe“, GRS, Köln, 1998
- [83] Tipler, P. A.: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2006
- [84] Thomas, N. H. and Hancock, P. E.: *Grid Turbulence near a Moving Wall*. J. Fluid Mechanics, Vol. 82, pp. 481-496, 1977
- [85] Thorpe, S.A.: *Experiments on the Instabilities of Stratified Shear Flows: Immiscible Fluids*. J. Fluid Mechanics, Vol. 39, 1969, pp. 25-48
- [86] Upper Plenum Test Facility, Test No.26: *Hot-Leg Flow Pattern Test*. Quick Look Report, Siemens KWU E314/91/003
- [87] Wallis, G.B.: *One-dimensional Two-Phase Flow*. McGraw-Hill Book Company, London, 1969
- [88] Wang, M.J. and Mayinger, F.: *Simulation and analysis of thermal-hydraulic phenomena in a PWR hot leg related to SBLOCA*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 155, 1995, pp. 643-652
- [89] Weisbrod, J.G.: *Modellierung von Zweiphasengegenströmungen in Ringraumgeometrien bei Druckwasserreaktoren*. Dissertation Universität Bochum, 2002

-
- [90] Wilcox, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, California, 2004
- [91] Yokojima, S. and Street, R.L.: *A Level-Set Simulation of Incompressible Free-Surface Flow over a Trench*. 5th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 04), May 30 – June 4, 2004, Yokohama, Japan
- [92] Zwart, P., Scheuerer, M., Bogner, M.: *Free Surface Flow Modelling of an Impinging Jet*. ASTAR International Workshop on Advanced Numerical Methods for Multidimensional Simulation of Two-Phase Flow, GRS Garching, Germany, September 15-16, 2003

Anhang

A1 Das Zwei-Fluid Modell

Das Zwei-Fluid Modell beschreibt den allgemeinsten Fall einer zweiphasigen Strömung. Durch Multiplikation der einphasigen Navier-Stokes Gleichung mit der Phasenindikatorfunktion ε^k wird die Zwei-Fluid Gleichung hergeleitet, wobei der Index k die flüssige Phase und gasförmige Phase beinhaltet. Die Herleitung der Zwei-Fluid Gleichung erfolgt anhand der inkompressiblen Kontinuitäts- und Impulsgleichung. Es gilt dabei die folgende Rechenregel:

$$\overline{\varepsilon^k u_i} = \overline{\varepsilon^k} \overline{u_i^k} + \underbrace{\overline{\varepsilon^k u_i'^k}}_{=0}$$

Kontinuitätsgleichung:

Die einphasige Kontinuitätsgleichung wird mit der Phasenindikatorfunktion multipliziert und zeitlich gemittelt.

$$\overline{\varepsilon \frac{\partial \rho_k}{\partial t}} + \overline{\varepsilon \frac{\partial \rho_k u_i}{\partial x_i}} = 0$$

Mit Hilfe der Produktregel wird die Kontinuitätsgleichung wie folgt umgeschrieben:

$$\overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k}{\partial t}} - \overline{\rho_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k u_i}{\partial x_i}} - \overline{\rho_k u_i \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i}} = 0$$

Die zeitliche Ableitung der Phasenfunktion kann mit Hilfe der Annahme von Drew [13], dass diese gleich der räumlichen Ableitung der Phasenindikatorfunktion multipliziert mit der Phasengrenzgeschwindigkeit u_{int} ist, ersetzt werden.

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = -u_{i,\text{int}} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i}$$

Die räumliche Ableitung der Phasenindikatorfunktion ist in den einzelnen Phasen gleich null und wird genau an der Phasengrenze unendlich. Dies entspricht einer Delta Funktion. Alle Terme, welche die räumliche Ableitung der Phasenindikatorfunktion beinhalten, stellen somit zusätzliche Terme aufgrund von physikalischen Vorgängen an der Phasengrenze dar. Werden diese Terme zusammengefasst, ergibt sich die zweiphasige Kontinuitätsgleichung zu:

$$\overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k u_i}{\partial x_i}} - \overline{\rho_k (u_i - u_{i,\text{int}}) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i}} = 0$$

Der Term $\overline{\rho_k (u_i - u_{i,\text{int}}) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i}}$ wird in Drew als Massenaustausch Γ zwischen den Phasen bezeichnet. Wird in einem weiteren Schritt die momentane Geschwindigkeit u_i in ihren Mittelwert \bar{u}_i^k und ihren Schwankungsanteil $u_i'^k$ zerlegt, erhält man

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k u_i}{\partial x_i}} - \overline{\rho_k (\bar{u}_i^k + u_i'^k - u_{i,\text{int}}) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i}} &= 0 \\ \overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \varepsilon_k \rho_k u_i}{\partial x_i}} - \underbrace{\overline{\rho_k u_i'^k}}_{=0} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} - \underbrace{\overline{\rho_k (\bar{u}_i^k - u_{i,\text{int}})}}_{\Gamma^*} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

Dieser weitere Umformungsschritt ist für die Herleitung des turbulenten Terms in der Impulsgleichung wichtig. Das Ergebnis besteht nun aus zwei Termen für den Massenaustausch an der Phasengrenze. Der Massenaustauschterm Γ^* hat die gleiche Form wie bei Drew, nur dass dieser jetzt von der phasengemittelten Geschwindigkeit abhängt.

Impulsgleichung:

Wird die Impulsgleichung mit der Phasenindikatorfunktion multipliziert, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\varepsilon_k \frac{\partial (\rho_k u_i)}{\partial t} + \varepsilon_k \frac{\partial (\rho_k u_i u_j)}{\partial x_j} = -\varepsilon_k \frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Unter Verwendung der Produktregel führt dies auf die folgende Gleichung:

$$\underbrace{\overline{\frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k u_i)}{\partial t}}}_{\text{Term1}} - \underbrace{\overline{\rho_k u_i \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t}}}_{\text{Term2}} + \underbrace{\overline{\frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k u_i u_j)}{\partial x_j}}}_{\text{Term3}} - \underbrace{\overline{\rho_k u_i u_j \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}}}_{\text{Term4}} = -\underbrace{\overline{\varepsilon_k \frac{\partial p}{\partial x_i}}}_{\text{Term5}} + \underbrace{\overline{\varepsilon_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}}_{\text{Term6}}$$

Im weiteren Verlauf werden zum besseren Verständnis und der Übersichtlichkeit wegen die Terme einzeln umgeformt.

Term 1:

$$\frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i)}}{\partial t} = \frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k \bar{u}_i^k)}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i'^k)}}{\partial t}}_{=0} = \frac{\partial(\rho_k \bar{\varepsilon}^k \bar{u}_i^k)}{\partial t}$$

Das Ergebnis ist die phasengemittelte Änderung des Impulses nach der Zeit.

Term 3:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i u_j)}}{\partial x_j} &= \frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k (\bar{u}_i^k + u_i'^k)(\bar{u}_j^k + u_j'^k))}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k \bar{u}_i^k \bar{u}_j^k)}}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k \bar{u}_i^k u_j'^k)}}{\partial x_j}}_{=0} + \underbrace{\frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i'^k \bar{u}_j^k)}}{\partial x_j}}_{=0} + \frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i'^k u_j'^k)}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial(\rho_k \bar{\varepsilon}^k \bar{u}_i^k \bar{u}_j^k)}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i'^k u_j'^k)}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Analog zur Reynoldsmittelung ergeben sich durch die Phasenmittelung die zweiphasigen Reynoldsspannungen. Diese setzen sich aus den beiden Fluktuationsgeschwindigkeiten multipliziert mit der Phasenfunktion zusammen. Die Herleitung der zweiphasigen Transportgleichung für die Reynoldsspannungen ist im Anhang A2 aufgeführt.

Term 2 + Term 4:

Zusammengefasst ergeben diese beiden Terme unter der Verwendung der Gleichung für die Phasengrenzgeschwindigkeit u_{int} :

$$\overline{\rho_k (u_i u_{i,\text{int}} - u_i u_j) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}} = \rho_k u_i \underbrace{(u_{i,\text{int}} - u_j)}_{\text{nach Drew } \Gamma} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}$$

Der aus Term 2 und 4 entstandene Term wird als zusätzlicher Impulsaustauschterm aufgrund von Massenaustausch an der Phasengrenze interpretiert. Wird allerdings, wie bei der Kontinuitätsgleichung die momentane Geschwindigkeit in einen Mittelwert und eine Fluktuationsgeschwindigkeit zerlegt, ergeben sich aufgrund der Phasenmittelung neue Terme.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overline{\rho_k u_i (u_{i,\text{int}} - u_j)} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}}_{\text{nach Drew } \Gamma} &= \overline{\rho_k u_i (u_{i,\text{int}} - (\bar{u}_j^k + u_j'^k))} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} \\
&= -\overline{\rho_k u_i u_j'^k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} + \overline{\rho_k u_i (u_{i,\text{int}} - \bar{u}_j^k)} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} \\
&= -\overline{\rho_k \bar{u}_i^k u_j'^k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} - \underbrace{\overline{\rho_k u_i' u_j'^k}}_{=0} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} - \overline{\rho_k \bar{u}_i^k \Gamma^*} - \overline{\rho_k u_i' \Gamma^*}
\end{aligned}$$

In Analogie zu Drew erhält man mit der neuen Definition des Massenaustauschterms Γ^* ähnliche Terme, die jetzt von der phasengemittelten Geschwindigkeit \bar{u}_i^k abhängen. Der erste Term der rechten Seite kann als turbulente Schubspannung an der Phasengrenze interpretiert werden und ist entscheidend für den horizontalen Impulsaustausch für die teilweise umgekehrten Strömungen. Dieser Term wurde in den bestehenden Zwei-Fluid Gleichungen immer vernachlässigt oder zu null gesetzt, da er bisher dem zusätzlichen Impulsaustausch aufgrund von Massentransfer an der Phasengrenze zugeordnet wurde. Wie aus dieser Ableitung ersichtlich und in Kapitel 3.3 diskutiert, ist diese Annahme für turbulente Phasengrenzen nicht mehr zulässig.

Term 5:

$$-\varepsilon_k \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{\varepsilon}^k \bar{p}^k}{\partial x_i} - \underbrace{\frac{\partial (\varepsilon_k p'^k)}{\partial x_i}}_{=0} + p \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i}$$

Term 6:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\varepsilon_k \tau_{ij})}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial \bar{\varepsilon}^k \bar{\tau}_{ij}^k}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{\partial (\varepsilon_k \tau_{ij}')}{\partial x_j}}_{=0} - \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Alle Terme zusammengefasst, ergibt die Impulsgleichung der Zwei-Fluid Gleichung.

$$\frac{\partial(\rho_k \bar{\varepsilon}^k \bar{u}_i^k)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_k \bar{\varepsilon}^k \bar{u}_i^k \bar{u}_j^k)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{\varepsilon}^k \bar{p}^k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\varepsilon}^k \bar{\tau}_{ij}^k}{\partial x_j} - \frac{\partial(\varepsilon_k \rho_k u_i'^k u_j'^k)}{\partial x_j} + M_i^k$$

$$M_i^k = -\overline{\rho_k \bar{u}_i^k u_j'^k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} - \overline{\rho_k u_i'^k u_j'^k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} - \overline{\rho_k \bar{u}_i^k \Gamma^*} - \overline{\rho_k u_i'^k \Gamma^*} + p \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}$$

Der Gravitationsterm wurde in dieser Ableitung nicht explizit aufgeführt und muss der Impulsgleichung noch hinzugefügt werden. Dieser lautet für zweiphasige Strömungen $\rho_k \bar{\varepsilon}^k g_i$, wobei g_i den Gravitationsvektor im räumlichen Koordinatensystem darstellt. Der Impulsaustausch reduziert sich für horizontal geschichtete Strömungen aufgrund des fehlenden Massenaustausches zwischen den Phasen und der Schließungsgleichung, dass der Druck in beiden Phasen an der Phasengrenze gleich groß ist, auf die laminaren und turbulenten Schubspannungen.

$$M_i^k = -\overline{\rho_k u_i'^k u_j'^k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}.$$

A2 Herleitung des Prandtlschen Mischungsweges in Wandnähe

Ausgehend von der Geschwindigkeit und dem Wandabstand in Wandeinheiten lässt sich das universelle logarithmische Wandgesetz schreiben als:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad \kappa = 0.41 \quad C = 5.5$$

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_w / \rho}} ; \quad y^+ = \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu}$$

Werden u^+ und y^+ durch die dimensionsbehafteten Größen ersetzt und nach u aufgelöst, ist das Ergebnis die dimensionsbehaftete Geschwindigkeit in Wandnähe

$$u = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln \frac{y \cdot \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} + C$$

Wird die Geschwindigkeit nach y differenziert, erhält man die Steigung der Geschwindigkeit in wandnormaler Richtung

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{y}$$

Die Wandschubspannung ergibt sich durch Auflösen dieser Gleichung zu

$$\tau_w = \rho \cdot \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

Wird dieser Ansatz mit der isotropen Reynoldsspannung, berechnet mit dem Prandtlschen Mischungsweg

$$\tau = \rho \cdot l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

verglichen, kann der exakte Mischungsweg in Wandnähe bestimmt werden.

$$l = \kappa \cdot y$$

Bei der Herleitung des Mischungsweges der Nachlauffunktion werden die gleichen Schritte durchgeführt wie oben erwähnt. Ausgehend von der logarithmischen Wandfunktion mit Nachlauffunktion

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C^* + \frac{A^*}{\kappa} \left[1 - \frac{1}{1 + e^{(D)}} \right] \quad D = \frac{y^+ - 60}{30}$$

wird die Wandfunktion erst nach der Geschwindigkeit u aufgelöst und im nächsten Schritt nach y differenziert. Das Ergebnis lautet wie folgt:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{y} + \frac{A^*}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \left[\frac{e^{(D)}}{(1 + e^{(D)})^2} \right] \cdot D'$$

D ist der Exponent der Exponentialfunktion und D' die innere Ableitung

$$D' = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu \cdot 30}$$

Für die weitere Herleitung wird $A = A^*/30$ zu einer neuen Konstanten zusammengefasst. Nach der Wandschubspannung aufgelöst, ergibt sich

$$\tau_w = \rho \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{\kappa \cdot y} + \frac{A}{\kappa} \left(\frac{e^{(D)}}{(1 + e^{(D)})^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} \right]^2} \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten der isotropen Reynoldsspannung auf Grundlage des Prandtlschen Mischungsweges ergibt sich der Mischungsweg mit Nachlauffunktion zu

$$l = \kappa \cdot y \frac{1}{1 + \left(\frac{e^{(D)}}{(1 + e^{(D)})^2} \right) \cdot A \cdot y^+}$$

A3 Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen

Einphasige Strömungen:

Ausgehend von den Impulsgleichungen der Navier-Stokes Gleichungen

$$N(u_i) = \underbrace{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}}_1 + u_k \underbrace{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_k}}_2 + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_k}}_3 - \underbrace{\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}}_4,$$

kann das zweite Moment wie folgt gebildet werden

$$\overline{u'_i \cdot N(u_j) + u'_j \cdot N(u_i)} = 0.$$

Die Herleitung des zweiten Momentes wird in die einzelnen Terme 1-4 unter der Annahme einer konstanten Dichte $\rho = const$, aufgeteilt. Um die Gleichung der zweiten Momente vereinfachen zu können, werden wie für die Herleitung der Reynoldsgleichungen, die Rechenregeln der zeitlichen Mittelung einer momentanen Zustandsgröße benötigt. Für die zeitliche Mittelung der Geschwindigkeit ergibt sich $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ wobei $\bar{u}'_i = 0$ ist. Korrelationen aus verschiedenen Schwankungsgeschwindigkeiten sind ungleich null, wobei für die Schubspannung gilt: $\overline{\tau_{ij}} = -\rho \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j}$. Weitere Vereinfachungen der zweiten Momente erfolgt durch Einsetzen der Kontinuitätsgleichung ($\overline{\partial u_k / \partial x_k} = \partial u'_k / \partial x_k = 0$).

Term 1:

$$\begin{aligned} \overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial t}} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t}} &= \overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial t}} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t}} \\ &= \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial t}} \\ &= \rho \cdot \overline{\frac{\partial(u'_i \cdot u'_j)}{\partial t}} = -\frac{\partial \tau_{ij}^{Re}}{\partial t} \end{aligned}$$

Term 2:

$$\begin{aligned}
\overline{\rho \cdot u'_i \frac{\partial(u_k u_j)}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_j \frac{\partial(u_k u_i)}{\partial x_k}} &= \overline{\rho \cdot u'_i \frac{\partial(\bar{u}_k + u'_k)(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_j \frac{\partial(\bar{u}_k + u'_k)(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k}} \\
&= \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial \bar{u}_k \bar{u}_j}{\partial x_k}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial \bar{u}_k u'_j}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial u'_k \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_i \cdot \frac{\partial u'_k u'_j}{\partial x_k}} \\
&\quad + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_k \bar{u}_i}{\partial x_k}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_k u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u'_k \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u'_k u'_i}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der dreifachen Produktregel $(ijk)' = i'jk + ij'k + ijk'$ kann diese Gleichung weiter vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
\overline{\rho \cdot u'_i \frac{\partial(u_k u_j)}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_j \frac{\partial(u_k u_i)}{\partial x_k}} &= \overline{\rho \cdot u'_i \cdot \bar{u}_k \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot u'_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}}}_{=0} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot u'_i \cdot u'_k \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} \\
&\quad + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot \bar{u}_k \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_j \cdot u'_i \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}}}_{=0} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_j \cdot \bar{u}_i \cdot \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot u'_k \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} \\
&\quad + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot u'_k \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}}_{ij'k} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i \cdot u'_j \cdot \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}}_0 + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_j \cdot u'_k \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}}_{i'jk} + \underbrace{\overline{\rho \cdot u'_i u'_j \cdot \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}}_{=0} \\
&= \overline{\rho \cdot \bar{u}_k \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_i \cdot u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{\rho \cdot u'_j \cdot u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho \frac{\partial(u'_i u'_j u'_k)}{\partial x_k}} \\
&= -\bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{Re}}}{\partial x_k} - \tau_{ik}^{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}^{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{\rho \frac{\partial(u'_i u'_j u'_k)}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

Term 3:

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \overline{u'_i \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i}} \\
&= \underbrace{\overline{u'_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}}_{=0} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \underbrace{\overline{u'_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}}_{=0} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \\
&= \frac{\partial(u'_i p')}{\partial x_j} - p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(u'_j p')}{\partial x_i} - p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial(u'_i p')}{\partial x_j} + \frac{\partial(u'_j p')}{\partial x_i} - p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)
\end{aligned}$$

Term 4:

$$\begin{aligned}
-\overline{u'_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}} - \overline{u'_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}} &= -\overline{u'_i \frac{\partial(\bar{\tau}_{jk} + \tau'_{jk})}{\partial x_k}} - \overline{u'_j \frac{\partial(\bar{\tau}_{ik} + \tau'_{ik})}{\partial x_k}} \\
&= \underbrace{-\overline{u'_i \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial x_k}}}_{=0} - \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_k}} - \underbrace{-\overline{u'_j \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k}}}_{=0} - \overline{u'_j \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}} \\
&= -\overline{\frac{\partial(u'_i \tau'_{jk})}{\partial x_k}} + \overline{\tau'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial(u'_j \tau'_{ik})}{\partial x_k}} + \overline{\tau'_{ik} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

Alternativ kann der inkompressible Term der viskosen Reibung in die Mittelung für die zweiten Momente eingesetzt werden. Die Herleitung ist hier der Vollständigkeit halber aufgeführt. Man findet sie aber auch bei Wilcox [90]. Unter der Annahme der Produktregel zweimal abgeleitet $(i \cdot j)'' = i''j' + 2i'j'' + ij''$ kann auch diese Gleichung zusätzlich vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu \cdot u'_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \cdot \partial x_k}} + \overline{\mu \cdot u'_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \cdot \partial x_k}} &= \overline{\mu \cdot u'_i \frac{\partial^2(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_k \cdot \partial x_k}} + \overline{\mu \cdot u'_j \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k \cdot \partial x_k}} \\
&= \underbrace{\overline{\mu \cdot \bar{u}'_i \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \cdot \partial x_k}}}_{=0} + \overline{\mu \cdot u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \cdot \partial x_k}} + \underbrace{\overline{\mu \cdot \bar{u}'_j \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \cdot \partial x_k}}}_{=0} + \overline{\mu \cdot u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \cdot \partial x_k}} \\
&= \underbrace{\overline{\mu \cdot u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}}}_{v''} + \underbrace{\overline{\mu \cdot u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}}}_{u''} \\
&= \overline{\mu \cdot \frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k}} - 2\overline{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

Werden alle erhaltenen Terme zusammengefasst, so können diese als Konvektion, Produktion, Dissipation, Diffusion und Dilatation interpretiert werden.

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{\partial \tau_{ij}^{\text{Re}}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{Re}}}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{-\tau_{ik}^{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}^{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\rho \frac{\partial(u'_i u'_j u'_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial(u'_i \tau'_{jk})}{\partial x_k} - \frac{\partial(u'_j \tau'_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial(u'_i p')}{\partial x_j} + \frac{\partial(u'_j p')}{\partial x_i}}_{\text{Diffusion}} \\
&\quad + \underbrace{\tau'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \tau'_{ik} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Dilatation}}
\end{aligned}$$

In der Literatur werden die einzelnen Terme wie z.B. die Dissipation in einem neuen Term zusammengefasst. Die Transportgleichung für die Reynoldsspannung lässt sich vereinfacht wie folgt schreiben:

$$-\underbrace{\frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial t}}_{\text{Konvektion}} + \underbrace{\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} = -\bar{\tau}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \bar{\tau}_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (-u'_i \tau'_{ik} - u'_j \tau'_{jk} + C_{ijk})}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\Pi_{ij}}_{\text{Dilatation}}$$

Zweiphasige Strömungen:

Wird die einphasige Impulsgleichung mit der Phasenindikatorfunktion multipliziert

$$\varepsilon_L \cdot N(u_i^L) = \underbrace{\varepsilon_L \cdot \rho \frac{\partial u_i^L}{\partial t}}_1 + \underbrace{\varepsilon_L \cdot \rho \cdot u_k^L \frac{\partial u_i^L}{\partial x_k}}_2 + \underbrace{\varepsilon_L \cdot \frac{\partial p}{\partial x_k}}_3 - \underbrace{\varepsilon_L \cdot \frac{\partial \tau_{ik}^L}{\partial x_j}}_4,$$

ergibt sich das zweite Moment wie folgt:

$$\overline{u_i^L \varepsilon_L \cdot N(u_j^L) + u_j^L \cdot \varepsilon_L \cdot N(u_i^L)} = 0$$

An die Stelle der zeitlichen Mittelung tritt die Phasenmittelung für eine Phase

$$\overline{\varepsilon_L \cdot u_i^L} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon_L \cdot u_i^L(\tau) d\tau,$$

wobei sich die momentane Geschwindigkeit wieder aus einem Mittelwert und einer Geschwindigkeitsfluktuation $u_i^L = \overline{u_i^L} + u_i'^L$ zusammensetzt. Der Index L steht hier für die flüssige Phase und wurde gewählt, um Verwirrungen zwischen dem Phasenindikator k und der dritten Raumrichtung der Indexschreibweise k zu vermeiden. Der Index der flüssigen Phase L kann synonym durch den Phasenindikator k ersetzt werden. Die phasengemittelte Schwankungsgeschwindigkeit ergibt sich zu $\overline{\varepsilon \cdot u_i'^L} = 0$. Korrelationen aus verschiedenen Schwankungsgeschwindigkeiten sind ungleich null, wobei für die Schubspannung in einer Ebene gilt:

$$\overline{\tau_{ij}^L} = -\rho \cdot \overline{u_i'^L \cdot u_j'^L}$$

Die Bildung des 2. Momentes wird hier, wie für die Herleitung der einphasigen Transportgleichung, für die Terme 1-4 durchgeführt. Term 1 ergibt sich für eine zweiphasige Strömung folgendermaßen:

Term 1:

$$\begin{aligned}
 \overline{u_i'^L \cdot \varepsilon_L \cdot \rho \cdot \frac{\partial u_j^L}{\partial t}} + \overline{u_j'^L \cdot \varepsilon_L \cdot \rho \cdot \frac{\partial u_i^L}{\partial t}} &= \overline{\rho \cdot u_i'^L \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{\partial (\bar{u}_j^L + u_j'^L)}{\partial t}} + \overline{\rho \cdot u_j'^L \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{\partial (\bar{u}_i^L + u_i'^L)}{\partial t}} \\
 &= \underbrace{\overline{\rho \cdot \varepsilon_L \cdot u_i'^L \cdot \frac{\partial \bar{u}_j^L}{\partial t}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot \varepsilon_L \cdot u_j'^L \cdot \frac{\partial u_i^L}{\partial t}} + \underbrace{\overline{\rho \cdot \varepsilon_L \cdot u_i'^L \cdot \frac{\partial \bar{u}_j^L}{\partial t}}}_{=0} + \overline{\rho \cdot \varepsilon_L \cdot u_j'^L \cdot \frac{\partial u_i^L}{\partial t}} \\
 &= \overline{\rho \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_i'^L \cdot u_j'^L)}{\partial t}} \\
 &= \overline{\rho \cdot \frac{\partial (\varepsilon_L \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L)}{\partial t}} - \overline{\rho \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial t}}
 \end{aligned}$$

Unter der Verwendung der Annahme nach Drew [13] $\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial t} = u_{i,int} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \overline{u_i'^L \cdot \varepsilon_L \cdot \rho \cdot \frac{\partial u_j^L}{\partial t}} + \overline{u_j'^L \cdot \varepsilon_L \cdot \rho \cdot \frac{\partial u_i^L}{\partial t}} &= \overline{\rho \cdot \frac{\partial (\varepsilon_L \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L)}{\partial t}} - \overline{\rho \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L \cdot u_{i,int} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k}} \\
 &= -\overline{\frac{\partial \varepsilon_L \cdot \tau_{ij}^L}{\partial t}} - \overline{\rho \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L \cdot u_{i,int} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k}}
 \end{aligned}$$

Term 2:

$$\begin{aligned}
 \overline{u_i'^L \varepsilon_L \rho \frac{\partial (u_k^L u_j^L)}{\partial x_k}} + \overline{u_j'^L \varepsilon_L \rho \frac{\partial (u_k^L u_i^L)}{\partial x_k}} &= \overline{\rho u_i'^L \varepsilon_L \frac{\partial (\bar{u}_k^L + u_k'^L)(\bar{u}_j^L + u_j'^L)}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_j'^L \varepsilon_L \frac{\partial (\bar{u}_k^L + u_k'^L)(\bar{u}_i^L + u_i'^L)}{\partial x_k}} \\
 &= \underbrace{\overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial \bar{u}_k^L \bar{u}_j^L}{\partial x_k}}}_{=0} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial \bar{u}_k^L u_j'^L}{\partial x_k}} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial u_k'^L \bar{u}_j^L}{\partial x_k}} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial u_k'^L u_j'^L}{\partial x_k}} \\
 &\quad + \underbrace{\overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial \bar{u}_k^L \bar{u}_i^L}{\partial x_k}}}_{=0} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial \bar{u}_k^L u_i'^L}{\partial x_k}} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial u_k'^L \bar{u}_i^L}{\partial x_k}} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial u_k'^L u_i'^L}{\partial x_k}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u_i'^L \varepsilon_L \rho} \frac{\partial(\overline{u_k^L u_j^L})}{\partial x_k} + \overline{u_j'^L \varepsilon_L \rho} \frac{\partial(\overline{u_k^L u_i^L})}{\partial x_k} &= \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \bar{u}_k^L} \frac{\partial u_j'^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial \bar{u}_k^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \bar{u}_j^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_k'^L} \frac{\partial \bar{u}_j^L}{\partial x_k} \\
&+ \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \bar{u}_k^L} \frac{\partial u_i'^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L u_i'^L} \frac{\partial \bar{u}_k^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \bar{u}_i^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L u_k'^L} \frac{\partial \bar{u}_i^L}{\partial x_k} \\
&+ \overline{\rho \varepsilon_L} \frac{\partial(\overline{u_i'^L u_j'^L u_k'^L})}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k} \\
&= \overline{\rho \varepsilon_L \bar{u}_k^L} \frac{\partial(\overline{u_i'^L u_j'^L})}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_k'^L} \frac{\partial \bar{u}_j^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L u_k'^L} \frac{\partial \bar{u}_i^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial(\overline{u_i'^L u_j'^L u_k'^L})}{\partial x_k} \\
&+ \underbrace{2 \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial \bar{u}_k^L}{\partial x_k}}_5 + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \bar{u}_j^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \bar{u}_i^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k} + \underbrace{\overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k}}_6
\end{aligned}$$

Ausgehend von der Phasenmittelung der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial(\overline{\varepsilon_L \rho})}{\partial t} - \overline{\rho} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial t} + \varepsilon_L \frac{\partial(\overline{\rho u_k^L})}{\partial x_k} = 0$, der Annahme einer konstanten Dichte und mit der oben eingeführten Annahme nach Drew [13] ergibt sich die Kontinuitätsgleichung wie folgt:

$$\varepsilon_L \frac{\partial(\overline{\rho u_k^L})}{\partial x_k} = \overline{\rho} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial t} - \frac{\partial(\overline{\varepsilon_L \rho})}{\partial t} = \overline{\rho \cdot u_{i,int}} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k} - \frac{\partial(\overline{\varepsilon_L \rho})}{\partial t}.$$

Addiert und subtrahiert man zusätzlich den Term $\overline{\rho \cdot \varepsilon_L \cdot u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k}$ zu der Gleichung, können die Terme 5 und 6 folgendermaßen zusammenfassen werden:

$$\begin{aligned}
2 \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial \bar{u}_k^L}{\partial x_k} + 2 \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} - \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} &= 2 \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k^L}{\partial x_k} - \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} \\
&= 2 \overline{\rho u_i'^L u_j'^L} \left(u_{i,int} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k} - \frac{\partial(\overline{\varepsilon_L \rho})}{\partial t} \right) - \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Diese beiden Terme wiederum in die Gleichung für Term 2 eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}
\overline{u_i'^L \varepsilon_L \rho} \frac{\partial(\overline{u_k^L u_j^L})}{\partial x_k} + \overline{u_j'^L \varepsilon_L \rho} \frac{\partial(\overline{u_k^L u_i^L})}{\partial x_k} &= -\bar{u}_k^L \frac{\partial(\overline{\varepsilon_L \cdot \bar{\tau}_{ij}^L})}{\partial x_k} + \bar{u}_k^L \bar{\tau}_{ij}^L \frac{\partial(\overline{\varepsilon_L})}{\partial x_k} - \bar{\varepsilon}_L \bar{\tau}_{ik}^L \frac{\partial \bar{u}_j^L}{\partial x_k} - \bar{\varepsilon}_L \bar{\tau}_{jk}^L \frac{\partial \bar{u}_i^L}{\partial x_k} \\
&+ \overline{\rho \cdot \frac{\partial(\varepsilon_L u_i'^L u_j'^L u_k'^L)}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_i'^L u_j'^L u_k'^L} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k} + 2 \overline{\rho u_i'^L u_j'^L u_{i,int}} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k} \\
&- 2 \overline{u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial(\overline{\varepsilon_L \rho})}{\partial t} - \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L u_j'^L} \frac{\partial u_k^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_i'^L \bar{u}_j^L} \cdot \frac{\partial u_k^L}{\partial x_k} + \overline{\rho \varepsilon_L u_j'^L \bar{u}_i^L} \frac{\partial u_k^L}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Term 3:

$$\begin{aligned}
\overline{u_i'^L \varepsilon_L \frac{\partial p^L}{\partial x_j}} + \overline{u_j'^L \varepsilon_L \frac{\partial p^L}{\partial x_i}} &= \overline{\varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial (\bar{p}^L + p')}{\partial x_j}} + \overline{\varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial (\bar{p}^L + p')}{\partial x_i}} \\
&= \underbrace{\overline{\varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial \bar{p}^L}{\partial x_j}}}_{=0} + \overline{\varepsilon_L u_i'^L \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \underbrace{\overline{\varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial \bar{p}^L}{\partial x_i}}}_{=0} + \overline{\varepsilon_L u_j'^L \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \\
&= \overline{\varepsilon_L \frac{\partial (u_i'^L p')}{\partial x_j}} - \overline{\varepsilon_L p' \frac{\partial u_i'^L}{\partial x_j}} + \overline{\varepsilon_L \frac{\partial (u_j'^L p')}{\partial x_i}} - \overline{\varepsilon_L p' \frac{\partial u_j'^L}{\partial x_i}} \\
&= \overline{\varepsilon_L \frac{\partial (u_i'^L \cdot p')}{\partial x_j}} + \overline{\varepsilon_L \frac{\partial (u_j'^L \cdot p')}{\partial x_i}} - \overline{\varepsilon_L p' \left(\frac{\partial u_i'^L}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'^L}{\partial x_i} \right)}
\end{aligned}$$

Term 4:

$$\begin{aligned}
-\overline{u_i'^L \varepsilon_L \frac{\partial \tau_{jk}^L}{\partial x_k}} - \overline{u_j'^L \varepsilon_L \frac{\partial \tau_{ik}^L}{\partial x_k}} &= -\overline{\varepsilon_L \cdot u_i'^L \frac{\partial (\bar{\tau}_{jk}^L + \tau_{jk}'^L)}{\partial x_k}} - \overline{\varepsilon_L \cdot u_j'^L \frac{\partial (\bar{\tau}_{ik}^L + \tau_{ik}'^L)}{\partial x_k}} \\
&= -\underbrace{\overline{\varepsilon_L \cdot u_i'^L \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}^L}{\partial x_k}}}_{=0} - \overline{\varepsilon_L \cdot u_i'^L \frac{\partial \tau_{jk}'^L}{\partial x_k}} - \underbrace{\overline{\varepsilon_L \cdot u_j'^L \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}^L}{\partial x_k}}}_{=0} - \overline{\varepsilon_L \cdot u_j'^L \frac{\partial \tau_{ik}'^L}{\partial x_k}} \\
&= -\overline{\varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_i'^L \cdot \tau_{jk}'^L)}{\partial x_k}} + \overline{\varepsilon_L \cdot \tau_{jk}'^L \frac{\partial u_i'^L}{\partial x_k}} - \overline{\varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_j'^L \cdot \tau_{ik}'^L)}{\partial x_k}} + \overline{\varepsilon_L \cdot \tau_{ik}'^L \frac{\partial u_j'^L}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

Es ergeben sich aufgrund der Phasenmittelung zusätzliche Terme für die Transportgleichung der Reynoldsspannungen. Diese Terme wirken aufgrund der Ableitung der Phasenindikatorfunktion an der Phasengrenze und können als Produktion und Dissipation an der Phasengrenze interpretiert werden.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \bar{\varepsilon}_L \cdot \bar{\tau}_{ij}^L}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\varepsilon}_L \cdot \bar{\tau}_{ij}^L}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{-\bar{\varepsilon}_L \cdot \bar{\tau}_{ik}^L \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \bar{\varepsilon}_L \cdot \bar{\tau}_{jk}^L \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\rho \frac{\partial (\varepsilon_L \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L \cdot u_k'^L)}{\partial x_k} - \varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_i'^L \cdot \tau_{jk}'^L)}{\partial x_k} - \varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_j'^L \cdot \tau_{ik}'^L)}{\partial x_k}}_{\text{Diffusion}} \\
&+ \underbrace{\varepsilon_L \cdot \tau_{jk}'^L \frac{\partial u_i'^L}{\partial x_k} + \varepsilon_L \cdot \tau_{ik}'^L \frac{\partial u_j'^L}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_i'^L \cdot p'^L)}{\partial x_j} + \varepsilon_L \cdot \frac{\partial (u_j'^L \cdot p'^L)}{\partial x_i}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\varepsilon_L \cdot p'^L \cdot \left(\frac{\partial u_i'^L}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'^L}{\partial x_i} \right)}_{\text{Dilatation}} \\
&+ \underbrace{\bar{u}_k \cdot \tau_{ij}^L \frac{\partial (\varepsilon_L)}{\partial x_k} - \tau_{ij}^L \cdot u_{i_int} \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k} + 2 \cdot \tau_{ij}^L \frac{\partial (\varepsilon_L)}{\partial t} + \rho \cdot \varepsilon \cdot u_i'^L \cdot \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k} + \rho \cdot \varepsilon \cdot u_j'^L \cdot \bar{u}_i \cdot \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k}}_{\text{Produktion Zweiphasig}} \\
&\underbrace{-\rho \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L \cdot u_k'^L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x_k} - \rho \cdot \varepsilon_L \cdot u_i'^L \cdot u_j'^L \frac{\partial u_k'^L}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation Zweiphasig}}
\end{aligned}$$

