

# **Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen**

von

**Karoly Krausz**

Bericht Nr. 38 (2002)

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. E. Ramm

Stuttgart 2002

**D 93**

# **Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Karoly Krausz

aus Budapest

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. (em) Gallus Rehm
Tag der mündlichen Prüfung:	24.07.2002

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

2002



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart.

Mein spezieller Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Ekkehard Ramm für meine Betreuung als Mitarbeiter eines anderen Instituts und für die Übernahme des Erstberichtes.

Die Anregung zum Thema gab Herr Professor em. Dr.-Ing. Gallus Rehm als ich in seinem Ingenieurbüro in München tätig war. Ihm gilt mein besonderer Dank für seine Unterstützung und seine Ermutigungen während meiner Arbeit und dafür, dass er das Thema als Eigenforschungsvorhaben im ersten Jahr aus eigenen Mitteln förderte.

Herrn Professor Dr.-Ing. Rolf Eligehausen danke ich für die Förderung des Themas aus Eigenforschungsmitteln und dafür, dass ich in der Forschung und in der angewandten Forschung auf dem Gebiet der Befestigungstechnik mitwirken durfte.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Dr. Andor Windisch für seine Diskussionsbereitschaft über Fragen der höheren Mathematik und der technischen Mechanik.

Für ihre Unterstützung bedanke ich mich des Weiteren bei Herrn Dipl.-Ing. Gunt-hard A. Stübiger, bei Herrn Matthew Hoehler B.S., M.Sc. und bei Herrn Dipl.-Ing. Hartmut Wilhelm.

Schließlich bedanke ich mich ganz besonders herzlich bei meiner verständnisvollen Familie – Ehefrau Andrea, Tochter Barbara und Sohn Mark – für ihre Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit.

Leonberg, im Oktober 2002

Karoly Krausz



# Inhaltsverzeichnis

<b>ABKÜRZUNGEN</b>	<b>7</b>
<b>ZUSAMMENFASSUNG</b>	<b>9</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>15</b>
<b>1. EINLEITUNG</b>	<b>21</b>
1.1 PROBLEMSTELLUNG UND ZIELSETZUNG	21
1.2 STAND DES WISSENS	22
1.3 VORGEHENSWEISE	23
<b>2. GEMAUERTE GEWÖLBE</b>	<b>25</b>
2.1 BEGRIFFE AUS DEM GEWÖLBEBAU	25
2.2 WERKSTOFFE IM GEWÖLBEBAU	28
2.3 TECHNIK DER WÖLBUNG MIT MAUERWERK	29
2.4 TONNENGEWÖLBE MIT STICKKAPPEN IM BAROCK	32
<b>3. BESTANDTEILE DES HISTORISCHEN MAUERWERKS</b>	<b>33</b>
3.1 ENTWICKLUNG DER ZIEGELHERSTELLUNG	33
3.2 ENTWICKLUNG DER KALKMÖRTELHERSTELLUNG	36
3.2.1 <i>Herstellung des Baukalks</i>	36
3.2.2 <i>Herstellung des Mauermörtels</i>	37
3.3 MECHANISCHE EIGENSCHAFTEN VON HISTORISCHEN ZIEGELN UND MAUERMÖRTEL	37
3.4 MODELLIERUNG MECHANISCHER EIGENSCHAFTEN VON ZIEGELN UND VON MAUERMÖRTEL	39
<b>4. TRAG- UND VERFORMUNGSVERHALTEN VON EINSCHALIGEM MAUERWERK UNTER DRUCK</b>	<b>43</b>
4.1 KENNTNISSTAND NACH AKTUELLEN LITERATURSTELLEN	43
4.2 FE-UNTERSUCHUNGEN ZUR ERMITTLUNG DER WERKSTOFFPARAMETER DES HISTORISCHEN MAUERWERKS	49
4.3 KENNWERTE EINES EINPHASEN-WERKSTOFFMODELLS FÜR HISTORISCHES MAUERWERK	64
<b>5. DAS TRAGVERHALTEN EBENER BOGENTRAGWERKE</b>	<b>66</b>
5.1 DIE METHODE DER STÜTZLINIE	66
5.2 UNTERSUCHUNGEN AN STABTRAGWERKMODELLEN UNTER ANNAHME LINEAR-ELASTISCHER WERKSTOFFEIGENSCHAFTEN	69
5.2.1 <i>Der Verlauf der Stützzlinie</i>	70
5.2.2 <i>Größe und Neigung der Auflagerkraft</i>	74
5.2.3 <i>Verformungen von Bögen aus linear-elastischem Werkstoff</i>	77
5.3 NICHTLINEARE FE-UNTERSUCHUNGEN VON BOGENTRAGWERKEN MIT EINPHASENMODELLEN	78
5.3.1 <i>Verlauf der Stützzlinie</i>	79
5.3.2 <i>Neigung der Auflagerkraft</i>	84

5.3.3	<i>Verformungen der Bogenmodelle</i>	85
5.4	UNTERSUCHUNG DES TRAGVERHALTENS EINES 120°-BOGENS MIT EINEM ZWEIPHASENMODELL	88
5.4.1	<i>Verlauf der Stützlinie</i>	89
5.4.2	<i>Neigung der Auflagerkraft</i>	90
5.4.3	<i>Verformungen</i>	90
5.5	ZUSAMMENFASSUNG	91
<b>6.</b>	<b>GEMAUERTE TONNENGEWÖLBE ALS RÄUMLICHE TRAGWERKE</b>	<b>93</b>
6.1	MODELLE ZUR BESCHREIBUNG DES TRAGVERHALTENS VON GEKRÜMMTEN FLÄCHENTRAGWERKEN	94
6.2	TRAGVERHALTEN ZYLINDRISCHER TONNENSCHALEN MIT STICKKAPPEN AUS LINEAR-ELASTISCHEM WERKSTOFF UNTER EIGENGEWICHT	97
6.2.1	<i>Einfluss der Stichkappe auf die Außermittigkeit der Druckkraft am Scheitel</i>	101
6.2.2	<i>Einfluss der Stichkappe auf die Auflagerkraft</i>	102
6.2.3	<i>Einfluss der Stichkappe auf die Verformungen der Tonne</i>	104
6.3	TRAGVERHALTEN ZYLINDRISCHER TONNENGEWÖLBE MIT STICKKAPPEN AUS MAUERWERK	107
6.3.1	<i>Lage der gerissenen Bereiche</i>	109
6.3.2	<i>Einfluss der Stichkappe auf die Auflagerkräfte</i>	111
6.3.3	<i>Einfluss der Stichkappen auf die Verformungen</i>	115
6.4	ZUSAMMENFASSUNG	117
<b>7.</b>	<b>SCHLUSSWORT</b>	<b>120</b>
7.1	ZUSAMMENFASSUNG	120
7.2	AUSBLICK	123
<b>8.</b>	<b>ANHANG</b>	<b>124</b>
8.1	ERMITTLUNG DER STÜTZLINIE EINES KREISSEGMENTBOGENS	124
8.2	ERMITTLUNG DER LAST EINER STÜTZLINIE IN FORM EINES KREISSEGMENTBOGENS	126
8.3	ANGABEN ZU DEN FE-MODELLEN DER ARBEIT	128
8.3.1	<i>Die verwendeten finiten Elementtypen</i>	129
8.3.2	<i>Modellierung von Werkstoffeigenschaften</i>	134
8.3.3	<i>Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen</i>	138
8.3.4	<i>Numerische Verfahren zur Steuerung stufenweiser Belastung</i>	140
8.4	FALLBEISPIEL	142
	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>147</b>



## Abkürzungen

b	Breite des Ziegelsteins
c	Kohäsion
d	Wandstärke
e	Außermittigkeit
$e_H$	Außermittigkeit der horizontalen Auflagerkraftkomponente
$e_V$	Außermittigkeit der vertikalen Auflagerkraftkomponente
$f_c$	Druckfestigkeit
$f_t$	Zugfestigkeit
h	Rissbandbreite
$h_S$	Höhe des Ziegels
$h_m$	Höhe der Mörtelfuge
l	Spannweite
$l_H$	Länge der Haupttonne
$l_{ST}$	Länge des Stichkappenauflegers
n	Verhältnis der aktuellen Lastgröße zum Eigengewicht
r	Stichkappenradius
t	Höhe des Ziegelsteins
E	Elastizitätsmodul
H	Auflagerschub
$G_F$	Bruchenergie
R	Haupttonnenradius
V	vertikale Auflagerkraft
<b>t</b>	lokale Dehnungsvektor
<b>e</b>	lokale Spannungsvektor
<b>D</b>	Material-Steifigkeitsmatrix
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix
<b>N</b>	Transformationsmatrix
$\alpha$	Öffnungswinkel
$\beta$	Zentralwinkel des Viertelpunkts
$\varepsilon$	Dehnung
$\varepsilon_1$	erste Hauptdehnung
$\varepsilon_2$	zweite Hauptdehnung
$\varepsilon_3$	dritte Hauptdehnung

$\varepsilon^{\text{co}}$	Dehnungsanteil des ungerissenen Bereichs
$\varepsilon^{\text{cr}}$	Dehnungsanteil des gerissenen Bereichs
$\varepsilon_u$	Bruchdehnung
$\varepsilon^{\text{nl}}$	nichtlineare Dehnung
$\phi$	Polarwinkel
$\varphi$	Reibungswinkel
$\nu$	Poisson-Zahl
$\rho$	Rohwichte
$\sigma$	Spannung
$\sigma_1$	erste Hauptspannung
$\sigma_2$	zweite Hauptspannung
$\sigma_3$	dritte Hauptspannung
$\psi$	Dilatationswinkel

## Zusammenfassung

Zur Einwölbung langer rechteckiger Räume wurden im Barock vorzugsweise zylindrische Tonnengewölbe verwendet. Im Bereich der im Regelfall hochgezogenen Fenster wurden Stichkappen angeordnet. Im Bild 1.1 ist die Untersicht eines Tonnengewölbes mit Stichkappen als Foto dargestellt.

Mit zunehmendem Alter treten immer mehr Schäden an solchen Bauwerken auf. Die Beurteilung ihrer Standsicherheit ist Aufgabe des Bauingenieurs. Da über das Tragverhalten von Tonnengewölben mit Stichkappen keine Veröffentlichungen zur Verfügung stehen, bedient man sich der Erfahrungen früherer Generationen und arbeitet mit der Methode der Stützlinien. Auf der „sicheren Seite liegend“ werden die Stichkappen dabei vernachlässigt und die Größe der Spannweite mit dem Abstand zwischen den gegenüber liegenden Trompenoberkanten gleichgesetzt. Eine Überprüfung dieser Annahme erfolgte bis heute nicht.

Das Ziel dieser Arbeit ist, den Tragmechanismus zylindrischer Tonnengewölbe mit Stichkappen zu untersuchen und den Einfluss der Stichkappen in seinen Grundzügen zu ermitteln.

Im *Kapitel 1* ist die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, der Kenntnisstand zu Beginn der Ausarbeitung sowie die Vorgehensweise vorgestellt.

Seit die Statik als Wissenschaft existiert, wurden Versuche unternommen, das Tragverhalten von unterschiedlichen Gewölben zu erklären. In manchen Fällen wurden statische Überlegungen auf einem sehr hohen Niveau angestellt und eingesetzt, wie es Castigliano bei der Planung der Ponte Mosca Brücke tat [Heyman, 1988], die nachher Jahrhunderte lang nicht mehr angewendet wurden. Nur die Methode der Stützlinie setzte sich im Laufe der Zeit durch. Ihr Einsatz zur Untersuchung unterschiedlicher Einwölbungen verfeinerte sich mit der Zeit immer mehr. Bis zu Beginn der 80er Jahre des XX. Jahrhunderts erschienen Nachschlagewerke über den Einsatz der Stützlinienmethode bei Kreuzgewölben.

In den vergangenen zwei Jahrzehnten etablierten sich numerische Verfahren, die Untersuchungen von Mauerwerkskonstruktionen unter Berücksichtigung der Rissbildung ermöglichten. Wissenschaftliche Abhandlungen über das Tragverhalten gotischer Kreuzgewölbe [Barthel, 1991] und über den Zusammenhang von Form und Tragwirkung im Gewölbebau [Trautz, 1998] sind erschienen. Aber nur in einer Fallstudie wird das Tragverhalten einer abschnittsweise gelagerten Tonne in den Einzelheiten untersucht. Hinweise oder eine brauchbare Analogie zum Tragverhalten von Tonnengewölben mit Stichkappen lassen sich nicht finden.

Im *Kapitel 2* wird ein kurzer Überblick über die Begriffe im Gewölbebau, über die Gewölbearten, die verwendeten Werkstoffe und Bautechniken gegeben. In diesem Zusammenhang wird der zu untersuchende Gewölbetyp eingeordnet.

Um den Einfluss der Werkstoffeigenschaften besser zu verstehen, werden historische – handgestrichene - Ziegel, Baukalk (Luftkalk) und Mörtel sowie ihre Herstellung im *Kapitel 3* vorgestellt.

Aus der Literatur werden die Parameter ihrer mechanischen Eigenschaften entnommen und das Verformungsverhalten für den gerissenen Zustand durch FE-

Simulationen von Kleinfeilerversuchen mittels Zweiphasenmodellen im *Kapitel 4* ermittelt. Dazu wurden sowohl finite Volumenelemente als auch finite Scheibenelemente verwendet.

Über das Last-Verschiebungsverhalten von historischem Mörtel sowie Mauerwerk unter Zugbeanspruchung sind keine Literaturstellen bekannt. Deshalb wurde der Einfluss der Zugfestigkeit und der Duktilität auf das Tragverhalten durch die Variation der entsprechenden Parameter berücksichtigt. Zeitabhängiges Materialverhalten wurde nicht untersucht.

Im *Kapitel 5* wurden Untersuchungsergebnisse über das Tragverhalten ebener Kreissegmentbögen aus Mauerwerk mit verschiedenen Methoden dargestellt. Es wurden Verfahren mit immer stärker verfeinerter Erfassung der Materialeigenschaften dargestellt und die Ergebnisse diskutiert:

- Die Stützlinienmethode, die keine Werkstoffeigenschaften berücksichtigt;
- Das Stabtragwerkmodell mit linear-elastischen, ausreichend zug- und druckfesten Werkstoffeigenschaften.
- Das Einphasen-Scheibenmodell unter Berücksichtigung der Zugfestigkeit bzw. der Rissbildung mit der Rissbandmethode.
- Das Zweiphasen-Scheibenmodell unter Berücksichtigung der Zugfestigkeit bzw. der Rissbildung beider Komponente des Mauerwerks.

Die mit den dargestellten Methoden gewonnenen Ergebnisse können wie folgt zusammengefasst werden:

Die rein statischen Verfahren geben lediglich Auskunft über den Gleichgewichtszustand eines (Bogen-)Tragwerkes. Die Lösung liegt immer auf der sicheren Seite, d.h. die ermittelten Außermittigkeiten stellen eine obere Schätzung dar. Vorteil der Methode ist, dass sie entsprechend der Ist-Form eines Bogens über die Standsicherheit immer eine zuverlässige Aussage für die Standsicherheit liefert.

Untersuchungen unter Annahme linear-elastischer, ausreichend zug- und druckfester Werkstoffeigenschaften mit einem Stabtragwerkmodell können nur dann eingesetzt werden, wenn der Werkstoff den Annahmen weitgehend entspricht. Dies ist beim Mauerwerk in der Regel nicht der Fall. Anderenfalls müssen die Abmessungen so groß sein, dass im Bogen überall elastische Spannungszustände herrschen. Die errechneten Stützlinien und Verformungen gelten sinngemäß nur für den ungerissenen Zustand. Der Auflagerschub, unter Annahme eines eingespannten Systems, ist mit ausreichender Genauigkeit auch für gerissene Systeme verwendbar.

Beim Einsatz eines Einphasenmodells mit spröden oder duktilen Werkstoffeigenschaften unter Berücksichtigung der Rissbildung sind qualitativ bessere Ergebnisse zu erwarten. Der Stützlinienverlauf und der Auflagerschub lassen sich damit zuverlässig bestimmen. Nach den eigenen Untersuchungen ist der Stützlinienverlauf und der Auflagerschub verhältnismäßig unempfindlich gegen „Veränderungen“ der Materialeigenschaften bis zur abgeschlossenen Rissbildung. Die Lage der Viertelpunkte nach Heyman wurde bei Bögen mit  $\alpha=120^\circ$  und  $\alpha=150^\circ$  bestätigt. Bei  $\alpha=180^\circ$  weicht der Wert der FE-Berechnung um  $3^\circ$  ab. Das ist wahrscheinlich auf den Einfluss von Schubverformungen zurückzuführen.

Über die Genauigkeit der errechneten Verformungen kann keine Aussage getroffen werden, da dazu zuverlässige Rechenwerte der Zugfestigkeit und des E-Moduls sowie genaue Kenntnisse über das Materialverhalten unter Zugbeanspruchung (wie die Bruchenergie „ $G_F$ “) erforderlich sind. Zur Zeit der Durchführung der FE-Berechnungen standen diese nicht zur Verfügung.

Allgemein kann festgestellt werden, dass die Verformungen im gerissenen Zustand – Größenordnung „cm“ - das Mehrfache von den Verformungen im ungerissenen Zustand - in der Größenordnung von „mm“ - betragen. Vergleicht man die Ergebnisse im gerissenen Zustand mit an bestehenden Bögen bzw. Gewölbe gemessenen Verformungen, ergibt sich noch einmal ein Sprung in der Größe der Verformungen mit dem Faktor 10 durch zeitabhängiges Materialverhalten [Rehm, 1995].

Die für den Zustand „abgeschlossene Rissbildung“ ermittelten Höchstlasten („peaks“) hängen sowohl vom Lösungsverfahren des Gleichungssystems als auch von der Schrittgröße bei der Belastung ab. Es muss gegebenenfalls durch mehrfache Wiederholung der Berechnung mit anderen numerischen Lösungsmethoden und mit direkter Belastungsteuerung geprüft werden, ob eine größere Höchstlast erreicht werden kann.

Zweiphasenmodelle sind die wirklichkeitsnächste Möglichkeit zur Durchführung von Standsicherheitsuntersuchungen eines Mauerwerksbogens. Die Lage der Stützlinie und die Größe des Auflagerschubs können quantitativ zuverlässig ermittelt werden. Die Verformungen sind bei zutreffender Annahme der Werkstoffeigenschaften zumindest in ihrer Größenordnung richtig. Für die Ermittlung der Höchstlast gilt das gleiche wie beim Einphasenmodell.

In Standsicherheitsuntersuchungen werden Tonnengewölbe mit Stichkappen in der Regel als ebene Bogentragwerke modelliert (Bild 6.1). Als Spannweite wird der Abstand zwischen den Trompenoberkanten angenommen. Die Untersuchungen in Kapitel 5 zeigen, dass ein gemauerter Bogen mit einem Radius von  $R = 6,0$  m, einer Querschnittshöhe von  $d = 0,15$  cm und einem Öffnungswinkel von  $\alpha \cong 120^\circ$  unter Eigengewicht gerade noch standsicher ist. Zahlreiche Tonnengewölbe mit gleichem Radius und gleicher Wandstärke haben zwischen den Gewölbeansätzen einen größeren Öffnungswinkel als  $\alpha = 120^\circ$ . Sie stehen jedoch seit Jahrhunderten. Alle dieser Einwölbungen haben Stichkappen, die mit der Haupttonne verbunden sind.

Die Vermutung liegt nahe, dass Stichkappen eine wesentliche Verbesserung im Tragverhalten solcher Einwölbungen darstellen, auch wenn die Vorderkante einer Stichkappe nicht durch das aufgehende Mauerwerk gestützt wird. Somit ist ihre Vernachlässigung bei statischen Untersuchungen eine zu grobe Näherung auf der „sicheren Seite“ und führt unter Umständen zu unnötigen Sicherungsmaßnahmen.

Im *Kapitel 6* wurden Untersuchungen zur Ermittlung des Tragmechanismus von Tonnengewölben mit Stichkappen durchgeführt.

Eingangs wurden FE-Schalenberechnungen unter Annahme eines linear-elastischen Mauerwerksverhaltens mit dem Programm DIANA durchgeführt. Die Wirkung der Stichkappen wurde durch Auswertung einiger Größen untersucht: Neben der Außermittigkeit der Druckkraft am Scheitel wurden die Scheitelsenkung und der Auflagerschub in Abhängigkeit von Stichkappenlänge und Stichkappenradius ausgewertet. Die Auswertung der ausgewählten Größen zeigen, dass sowohl

die Verlängerung der Stichkappen als auch die Vergrößerung ihres Radius eine Zunahme der Steifigkeit des Gesamtsystems bewirken.

Die Analyse aller untersuchten Größen aus den linearen Berechnungen deutet darauf hin, dass der Haupttonnenöffnungswinkel „ $\alpha_H$ “ bei zunehmender Steifigkeit der Stichkappe immer mehr vom Öffnungswinkel des statischen Systems der Haupttonne abweicht. Das heißt, dass sich die Spannweite der Haupttonne verkürzt. Demnach verhält sich die Tonne nicht wie ein Bogen mit einem Öffnungswinkel, der durch die beiden Trompenoberkanten bestimmt wird ( $\alpha_{nom}$ ), sondern wie ein Bogen mit einem kleineren Öffnungswinkel. Diese Abnahme des Öffnungswinkels beträgt bei den untersuchten Modellen  $\Delta\alpha = 10^\circ$  bis  $20^\circ$ . Dabei geben Scheitelsenkung und Außermittigkeit an der Scheitelmittle eine untere, die Größe des Auflagerschubes eine obere Schätzung von  $\Delta\alpha$ .

Im Zuge der nichtlinearen Untersuchungen wurden räumliche FE-Berechnungen mit sechs Modellen durchgeführt. Dabei wurden die Tonnengewölbe mit einem Netz aus Volumenelementen abgebildet sowie die Rissbildung im Mauerwerk berücksichtigt. Sowohl sprödes als auch duktiler Mauerwerksverhalten wurde bewertet. Wegen der eingeschränkten Rechnerkapazität konnten nur grobe FE-Netze untersucht werden. Deshalb sind die Ergebnisse lediglich qualitativ verwertbar um Tendenzen zu erkennen. Wegen des groben Netzes wurde auf die Auswertung der Außermittigkeiten im gerissenen Zustand verzichtet. Hierzu reichen drei Elemente entlang der Querschnittshöhe nicht aus. Die Verformungen der Systeme im gerissenen Zustand wurden aus dem gleichen Grund nicht verglichen wie bei den Verformungen der gerissenen Bogentragwerke mit vergleichbaren Parametern in den Schalenberechnungen. Ein solcher Vergleich ist nur bei ausreichend feinen FE-Netzen sinnvoll.

Durch die Auswertung der nichtlinearen Berechnungen konnte dennoch der Tragmechanismus zylindrischer Tonnengewölbe mit kleinen Stichkappen im Detail geklärt werden. Stichkappen wirken als Widerlager, indem sie die statisch wirksame Spannweite verkürzen. Mit ansteigender Steifigkeit nimmt die Wirksamkeit der Stichkappen zu. Demnach ist der durch die Trompenoberkanten vorgegebene Öffnungswinkel  $\alpha_H$  größer als, der Öffnungswinkel des statischen Systems der Haupttonne. Dieser Winkel wird durch die Lage des Risses „R6“ in der Haupttonne (Bild 6.17) definiert und wird als effektiver Öffnungswinkel „ $\alpha_{ef}$ “ bezeichnet, bei  $\alpha_{ef} = (\alpha_H - \Delta\alpha)$ .

Die Ergebnisse der linearen und der nichtlinearen Analysen zeigen übereinstimmend den Einfluss der Rissbildung auf das Tragverhalten von Tonnengewölbe mit Stichkappen. Ähnlich wie bei Bogentragwerken aus Mauerwerk wird durch die Rissbildung der Auflagerschub kleiner und die Verformungen werden größer. Durch die Lage und Ausdehnung der gerissenen Bereiche konnten die Tendenzen aus den Schalenberechnungen zum Teil bestätigt werden. Im Bild 6.27 sind die Drucklinien der Modelle B und E im Grundriss dargestellt. Sie zeigen den gleichen Tragmechanismus wie die Drucklinien der linear-elastischen Schalenmodelle im Bild 6.6.

Bei Tonnen mit kleinen Stichkappen bringt die Kenntnis des effektiven Öffnungswinkels einen großen Vorteil mit sich: ihre Standsicherheit kann mit einem einfachen Verfahren untersucht werden. Ist „ $\alpha_{ef}$ “ – d.h. die Lage des Risses „R6“ nach Bild 6.17 - bekannt, kann das Gesamtsystem unterteilt werden und die Untersys-

teme können getrennt untersucht werden. Die Tonne mit dem Öffnungswinkel „ $\alpha_{ef}$ “ kann als ebener Bogentragwerk unter Berücksichtigung der Rissbildung, z. B. wie von *Castigliano*, überprüft werden. Anschließend wird das Gleichgewicht des Schalenfaltwerks zwischen Tonne und Oberkante der Trompe untersucht. Alternativ kann die Stützlinienmethode für das gesamte System, also Haupttonne und Stichkappen zusammen, eingesetzt werden. Dabei wird der Auflagerpunkt des Gesamtsystems außerhalb des Haupttonnenquerschnittes auf der Trompenoberkante so angenommen, dass die Stützlinie den durch  $\alpha_{ef}$  definierten Querschnitt innerhalb des Haupttonnenquerschnittes passiert.

Bei den Modellen mit einem relativ großen Stichkappenradius können auch Vergleichswerte für ebene Bogentragwerke ermittelt werden, aber sie können nicht mit einem solchen „Ersatzsystem“, wie die mit kleinem Stichkappenradius untersucht werden. Ihr Tragmechanismus ist im wesentlichen räumlich. Es bildet einen Übergang zwischen Kreuzgewölbe und Tonnengewölbe mit kleinen Stichkappen.

Abschließend wird als Beispiel die Standsicherheit der gemauerten Tonnengewölbe der St. Jakob-Kirche in Willing (Bayern) untersucht. Die Ergebnisse des herkömmlichen Verfahrens und des hier vorgeschlagenen Verfahrens werden verglichen. Eine kurze Baubeschreibung sowie eine grafische und tabellarische Zusammenfassung der geometrischen Angaben und der wichtigsten Rechenschritte sind im Abschnitt 8.4 zusammengestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten einige Fragen zum Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen nicht geklärt werden:

Die nichtlinearen Berechnungen wurden mit einem Einphasen-Werkstoffmodell für das Mauerwerk durchgeführt, da in den benutzten Versionen 6.2 bis 7.2 des FE-Programms DIANA noch kein anisotropes Werkstoffmodell implementiert war. Somit konnten die Ergebnisse nur qualitativ bewertet werden. Simulationen mit einem anisotropen Werkstoffmodell für Mauerwerk würden quantitative verwertbare Ergebnisse liefern, sofern die Parameter durch entsprechende Druckversuche kalibriert werden. Mit einem anisotropen Werkstoffmodell sind rein virtuelle Phänomene, wie z.B. die Delaminierung in einem halbsteinstarken Gewölbe, vermeidbar.

Der Einfluss von Auflagerverschiebungen konnte nicht erfolgreich erfasst werden. Es wurden mehrere Versuche unternommen, Auflagerverschiebung unter Eigengewicht bereits gerissener Bögen zu simulieren. Unabhängig vom eingesetzten Lösungsverfahren konvergierten die Berechnungen bereits nach einigen 1/1000 mm Auflagerverschiebung nicht mehr. Durch eine Verfeinerung des Netzes könnte dieses Problem umgangen werden. Dazu ist ein leistungsstärkerer Rechner erforderlich. Alternativ könnte ein FE-Programm eingesetzt werden, das die Steifigkeitsmatrix bei Konvergenzproblemen neu aufbaut, wobei die Steifigkeit stark beschädigter Elemente außer Acht gelassen wird.

Zur Simulation räumlicher Modelle wurden grobe Netze verwendet. Dies lag an der Kapazität des benutzten Rechners. Durch das grobe Netz konnte der effektive Öffnungswinkel nicht genau bestimmt werden, was mit feineren FE-Netzen möglich werden wird. Diese Simulationen wurden nur an zwei Kombinationen von Haupttonnenradius „ $R$ “ und Stichkappenradius „ $r$ “ durchgeführt. Sie zeigten, dass bei kleinem Stichkappenradius „ $r$ “ (ca.  $r/R < 1/4$ ) eine Unterteilung des Systems sinnvoll durchführbar ist, bei einem großem „ $r$ “ hingegen nicht. Die Grenze zwischen „klein“ und „groß“ muss noch durch eine Reihe von Parameterstudien ermittelt werden. Wenn diese Fragen geklärt sind, sind die Randbedingungen für den

Einsatz des im Kapitel 7.1 geschilderten, vereinfachten Bemessungskonzeptes auch für Verhältnisse von  $r/R > 1/4$  gegeben.

Im *Kapitel 7* sind die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst.

Im *Kapitel 8* sind Ableitungen von Differentialgleichungen zur Stützlinie, Angaben über die verwendeten Finiten Elemente und ihr Konvergenzverhalten, über die verwendeten Werkstoffmodelle, über die eingesetzten numerischen Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen und zur Belastungssteuerung zusammengestellt. Des Weiteren sind detaillierte Angaben zum Beispiel und die tabellarische Zusammenfassung der zugehörigen Berechnungen aufgeführt.

Zum Schluss sind die Literaturquellen zusammengestellt.



## Summary

During the Baroque era cylindrical barrel vaults were commonly used for the vaulting of long rectangular spaces. Lunettes were formed at the locations of the typically slender windows. The photograph in Figure 1.1 shows the bottom view of a barrel vault with a lunette.

With increasing age, an increasing amount of damage is observed in these structures. The determination of their stability is the task of civil engineers. Because no literature about the load bearing behaviour of barrel vaults with lunette is available, one has to rely on the experience of previous generations and to work with the method of thrust lines. To be “on the safe side” the lunette are neglected when using this method and the vault span length is set equal to the distance between the upper edges of the opposing Trombe. A check of these assumptions has not been conducted before now.

In *chapter 1* the goal of the work contained in this dissertation, the state-of-the-art at the start of the work, as well as the approach to the research are presented.

The goal of this work is to investigate the load bearing mechanisms of barrel vaults with lunette and to thoroughly determine the influence of lunette.

Ever since structural analysis has existed as a branch of science, attempts have been made to understand the load bearing behaviour of various types of vaults. In some cases, analytical considerations of a very high level were employed, such as by Castigliano during the planning for the Pont Mosca Bridge [Heyman, 1988], that were not used again for the next hundred years. Only the method of thrust lines has endured. The use of the method for the investigation of various vaults has been refined over the years. Up until the beginning of the 1980s new references were published on the use of the method of thrust lines for groined vaults.

In the past two decades numerical methods, which have made the consideration of cracking phenomena possible, have established themselves for the investigation of brick constructions. Scientific works on the load bearing behaviour of Gothic groined vaults [Barthel, 1991] and on the connection between form and load bearing in vaults [Trautz, 1998] have been published. Only in one case study, however, was the load bearing behaviour of an intermittently supported barrel vault investigated in detail. Advice or a useful analogy to the load bearing behaviour of barrel vaults with lunette was not found.

In *chapter 2* a brief overview is given of the terms used in vault construction, the different types of vaults and the applied materials and constructions practices. The various types of vaults are organized within this context.

To better understand the influence of the material properties, a look at historical – handmade – brick, caulk (air-hardening lime) and mortar and their production is presented in *chapter 3*.

The parameters for the mechanical properties of these materials were obtained from the literature. The deformation behaviour in the cracked state was determined from FE simulations of small columns by means of two-phase models and

is presented in *chapter 4*. For this purpose finite volume and plate elements were used.

The author is not aware of any literature about the load-displacement behaviour of historical mortar or brickwork under tensile loading. Consequently, the influence of the tensile strength and ductility on the behaviour was accounted for by variation of these parameters. Time-dependent material behaviour was not investigated.

In *chapter 5* results are presented from investigations of the behaviour of planer, segmental, circular arches made of brick using various analysis methods. Methods with increasingly refined descriptions of the material properties are presented and the results are discussed. The methods investigated are:

- the method of thrust lines, which does not account for material properties,
- a framework model with linear elastic materials with appropriate tension and compression properties,
- a one-phase plate model with consideration of the tensile strength and the crack formation using the crack band method,
- a two-phase plate model with consideration of the tensile strength and the crack formation in both components of the brickwork (brick and mortar).

The results obtained using the above mentioned methods are summarized below.

Purely analytical methods, i.e. the method of thrust lines, provide only information about the equilibrium state of a structure. The solution is always conservative, that is to say that the determined eccentricities are an upper approximation. The advantage of the method is that after determining the real deformed shape of the arch it provides a reliable value for the stability of the structure.

Investigations using a framework model under the assumption of a linear elastic material with appropriate tension and compression properties can only be used if the material is adequately represented by these assumptions. This is usually not the case for brick constructions. Alternatively, the arch must be large enough so that the condition of an elastic stress state holds within the entire cross-section. The calculated thrust lines and deformations are only reasonable when the structure is uncracked. The support shear, assuming the structure is restrained, is sufficiently exact even for the case of a cracked system.

Qualitatively better results can be expected by using a one-phase model with brittle or ductile material properties and with the consideration of cracking. The thrust lines and the support shear can be reliably determined. The studies showed that the thrust lines and the support shear are relatively insensitive to “changes” in the material properties up until stabilized cracking. Our simulations confirmed Heyman’s values for “ $\beta$ ” of the quarter points for arches with  $\alpha = 120^\circ$  and  $\alpha = 150^\circ$ . At  $\alpha = 180^\circ$  the value in the FE simulation drifted by  $3^\circ$ . This can most likely be attributed to the influence of the shear deformation.

No conclusions can be drawn about the accuracy of the calculated deformations. This would require reliable values for the tensile strength and the elastic modulus of the materials, as well as an exact knowledge about the material behaviour under tension loading (i.e. the fracture energy “ $G_F$ ”). This information was not available when the FE simulations were conducted.

What can be concluded is that the deformations in the cracked state, which are on the order of “cm”, are several times larger than the deformations in the uncracked state, which are on the order of “mm”. Deformations measured in vaults show a further increase of a factor of 10 due to time-dependent material properties [Rehm, 1995].

The calculated maximum (“peak”) loads determined for the “stabilized crack” state are dependent on the solution method for the system of equations, as well as on the load step size. To determine whether a higher maximum load can be reached, analyses using other solution methods and direct load control must be carried out.

Two-phase models are the most realistic option to conduct stability assessments of brick arches. The location of the thrust line and the magnitude of the support shear can be quantitatively and reliably determined. Provided that the assumptions for the material properties are adequate, the deformations are roughly accurate. Determination of the maximum load requires the same consideration as for the one-phase model.

For stability assessments, barrel vaults with lunette are typically modelled as planer arch structures (Figure 6.1). The distance between the upper edges of the opposing Trombe is used as the span length. The investigations in chapter 5 show that a brick arch with a radius of  $R = 6.0$  m, a cross-section height of  $d = 0.15$  m and an opening angle of maximum  $\alpha \approx 120^\circ$  is stable under its own weight. Numerous barrel vaults with the same radius and the same wall thickness have a larger opening angle between the vault supports than  $\alpha = 120^\circ$ . Nevertheless these structures have stood for hundreds of years. All of these vaults have lunettes that are connected to the main barrel vault.

It is believed that the lunette significantly improves the load bearing behaviour of these vaults, even when the front edge of the lunette is not horizontally supported. Consequently, neglecting the lunette in a structural analysis is an over conservative approximation and can lead to unnecessary rehabilitation measures.

In *chapter 6* investigations to determine the load bearing mechanisms of barrel vaults with lunette are presented.

Initially, FE simulations using shell elements were performed under the assumption of linear elastic material behaviour using the analysis program DIANA. The behaviour of the lunette was investigated using several metrics. In addition to the eccentricity of the compressive force at the crown of the vault, the dependence of the sagging at the crown, as well as the support shear, on the lunette length and radius were calculated. Calculation of the chosen metrics showed that lengthening the lunette, as well as increasing its radius, leads to an increase in the total system stiffness.

Analysis of all of the investigated metrics from the linear elastic calculations shows that the opening angle of the static system drifts progressively from the primary barrel vault opening angle “ $\alpha_H$ ” with increasing lunette stiffness. That implies that the span length of the main barrel vault shortens. Consequently the barrel does not behave as an arch with an opening angle determined by the upper edges of the two Trombe ( $\alpha_H$ ), but rather as an arch with a smaller opening angle. The investigated models suggest the reduction in the opening angle to be between  $\Delta\alpha = 10^\circ$  to  $20^\circ$ . Thereby a lower estimation of the deflection of the crown and the

amount by which the crown is out-of-centre and an upper estimation of the magnitude of the support shear are given.

For the nonlinear investigations, three-dimensional FE simulations using six models were carried out. In these simulations the barrel vault was modelled using volume elements and crack formation in the brickwork was taken into account. Brittle as well as ductile materials were used. Due to a lack of computer capacity, only very coarse FE meshes could be investigated. Consequently the results can only be used qualitatively to recognize tendencies in the behaviour. Due to the coarseness of the meshes, the eccentricity of the vault in the cracked state was not calculated. Three elements through the cross-section height are not sufficient for this purpose. For the same reason, the deformation of these systems in the cracked state could not be compared, as was the case with the deformations in the cracked state in arch structures modelled with the shell elements with comparable parameters. Such a comparison is only reasonable with sufficiently fine FE meshes.

Analysis of the non-linear simulations, however, allowed the load bearing behaviour of cylindrical barrel vaults with small lunette to be explained in detail. Lunette function as abutments in that they shorten the effective span length. With increasing stiffness, the effectiveness of the lunette increases. Thus, the opening angle  $\alpha_H$  determined by the upper edges of the Trombe is greater than the opening angle of the static system of the main vault. This angle is defined by the location of the cracks "R6" in the main vault (Figure 6.17) and is referred to as the effective opening angle " $\alpha_{ef}$ ", where  $\alpha_{ef} = (\alpha_H - \Delta\alpha)$ .

The results of the linear and non-linear analyses show the influence of crack building on the load bearing behaviour of barrel vaults with lunette. Similar to the case of arch structures made of brick, cracking reduces the support shear and increases the deformation. Using the location and the expansion of the cracked regions the tendencies observed in the analyses using the shell elements could partially be confirmed. In Figure 6.27 the compression lines for models B and E are shown in plan view. The figures show the same load transfer mechanism as that shown in Figure 6.6, which was obtained using the linear elastic shell element model.

For models with a relatively large lunette radius, comparison values for planer arch structures could be obtained, however, they could not be investigated with a "replacement system" as was the case for small lunette radii. Their load transfer mechanism is primarily spatial. A transition exists between groined vaults and barrel vaults with small lunette.

For barrel vaults with small lunette, knowledge of the effective opening angle is very advantageous; namely their stability can be evaluated using simple methods. If " $\alpha_{ef}$ ", i.e. the location of the cracks "R6" as shown in Figure 6.17, is known, then the total system can be divided and the subsystems can be investigated individually. The barrel with the opening angle " $\alpha_{ef}$ " can be treated as a planer arch structure and investigated taking cracking into consideration, e.g. as done by Castigliano. Afterwards, the equilibrium of the folded plate between the barrel and the upper edge of the Trombe can be investigated. Alternatively, the thrust line method can be used to analyse the complete system, i.e. the main barrel and the lunette together. Thereby the support point of the complete system is assumed to be located on the Trombe outside of the main barrel vault cross-section, such that

the thrust line through the cross-section defined by " $\alpha_{ef}$ " is located inside the main barrel vault cross-section.

As an example case, the stability of the brick barrel vault of the St. Jakob church in Willing (Bavaria) was investigated. Results from conventional analysis methods and the methods presented in this work were compared. A brief description of the structure, as well as a graphical and tabular summary of the geometric data and the most important calculation steps are presented in section 8.4.

Some questions about the load bearing behaviour of brick barrel vaults with lunette could not be answered within the scope of the present work.

The non-linear calculations were performed using a one-phase material model for the brickwork because versions 6.2 to 7.2 of the FE analysis program DIANA, which were used in this study, did not have an anisotropic material model. Consequently, the results could only be qualitatively analysed. Simulation with an anisotropic material model would allow for usable quantitative results, as long as the parameters were properly calibrated through compression tests. An anisotropic material would prevent the appearance of fictitious phenomena, such as delamination in a half-brick strong vault.

The influence of support displacements could not successfully be determined. Several attempts were made to simulate the support displacement of cracked arches under gravity loads. Independent of the numerical solution method used, the solution could not converge for support displacements as small as 1/1000mm. This problem could be circumvented by a finer mesh, however, this would require a more powerful computer. Alternatively, a FE program could be used that reforms the stiffness matrix when convergence problems are encountered and in doing so ignores the stiffness of elements that are strongly damaged.

Coarse meshes were used for the spatial models. This was due to the capacity of the computers used in the study. The effective opening angle could not be precisely determined due to the coarse mesh, which would not be the case for finer meshes. The simulations were only performed for two combinations of main barrel vault radius " $R$ " and the lunette radius " $r$ ". The simulations show that for relatively small lunette radii " $r$ " (approximately  $r/R < 1/4$ ) division of the system is reasonable, however, this is not the case for larger values of " $r$ ". The limit between "small" and "large" radii must be determined through more detailed parameter studies. When this limit is found, conditions for use of the simplified design methods presented in chapter 7.1 could be provided also for cases with  $r/R > 1/4$ .

In *chapter 7* the results of the work are summarized.

In *chapter 8* the simplification from differential equations to the thrust lines, data on the finite elements used and on their convergence, information about the material models used in this study, as well as information on the numerical methods for the solution of the systems of non-linear equations and the load stepping procedures are summarized. Additionally, detailed data about the example problem and a tabular summary of the example analysis are presented.

Finally, the literature sources are presented.



# 1. Einleitung

## 1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Zur Einwölbung langer rechteckiger Räume wurden im Barock vorzugsweise zylindrische Tonnengewölbe verwendet. Im Bereich der im Regelfall hochgezogenen Fenster wurden Stichkappen angeordnet. Im Bild 1.1 ist die Untersicht eines Tonnengewölbes mit Stichkappen als Foto dargestellt.

Mit zunehmendem Alter treten immer mehr Schäden an solchen Bauwerken auf. Die Beurteilung ihrer Standsicherheit ist Aufgabe des Bauingenieurs. Da über das Tragverhalten von Tonnengewölben mit Stichkappen keine Veröffentlichungen zur Verfügung stehen, bedient man sich der Erfahrungen früherer Generationen und arbeitet mit der Methode der Stützlinien. Auf der „sicheren Seite liegend“ werden die Stichkappen dabei vernachlässigt und die Größe der Spannweite mit dem Abstand zwischen den gegenüber liegenden Trompenoberkanten gleichgesetzt. Eine Überprüfung dieser Annahme erfolgte bis heute nicht.



Bild 1.1: Tonnengewölbe mit Stichkappen - Untersicht der Einwölbung über dem Langhaus der St. Jakob Kirche in Willing / Bayern. Foto: *Verfasser, 2002*

Das Ziel dieser Arbeit ist, den Tragmechanismus zylindrischer Tonnengewölbe mit Stichkappen zu untersuchen und den Einfluss der Stichkappen in seinen Grundzügen zu ermitteln.

## 1.2 Stand des Wissens

Seit die Statik als Wissenschaft existiert, wurden Versuche unternommen, das Tragverhalten von unterschiedlichen Gewölben zu erklären. In manchen Fällen wurden statische Überlegungen auf einem sehr hohen Niveau angestellt und eingesetzt, wie es Castigliano bei der Planung der Ponte Mosca Brücke tat [Heyman, 1988], die nachher Jahrhunderte lang nicht mehr angewendet wurden. Nur die Methode der Stützlinie setzte sich im Laufe der Zeit durch. Ihr Einsatz zur Untersuchung unterschiedlicher Einwölbungen verfeinerte sich mit der Zeit immer mehr. Bis zu Beginn der 80er Jahre des XX. Jahrhunderts erschienen Nachschlagewerke über den Einsatz der Stützlinienmethode bei Kreuzgewölben.

In den vergangenen zwei Jahrzehnten etablierten sich numerische Verfahren, die Untersuchungen von Mauerwerkskonstruktionen unter Berücksichtigung der Rissbildung ermöglichten. Wissenschaftliche Abhandlungen über das Tragverhalten gotischer Kreuzgewölbe [Barthel, 1991] und über den Zusammenhang von Form und Tragwirkung im Gewölbebau [Trautz, 1998] sind erschienen. Aber nur in einer Fallstudie wird das Tragverhalten einer abschnittsweise gelagerten Tonne in den Einzelheiten untersucht. Hinweise oder eine brauchbare Analogie zum Tragverhalten von Tonnengewölben mit Stichkappen lässt sich nicht finden. Dementsprechend wird bei der Untersuchung der Standsicherheit gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen auf die Methode der Stützlinie zurückgegriffen.

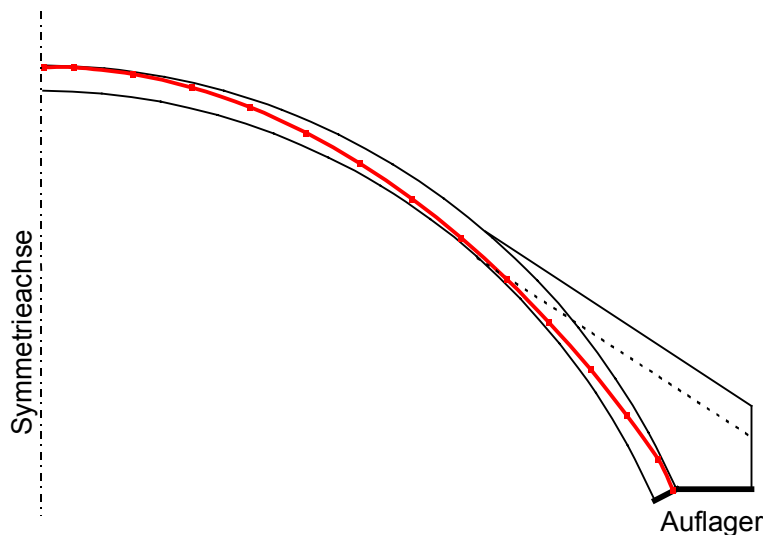


Bild 1.2: Verlauf der Stützlinie im Querschnitt des im Bild 1.1 dargestellten Tonnengewölbes mit Stichkappen. Darstellung des halben Systems.

Als Beispiel für eine Standsicherheitsuntersuchung mit der Stützlinienmethode ist im Bild 1.2 der Verlauf der Stützlinie in der Einwölbung der St. Jakob Kirche dar-



gestellt<sup>1</sup>. Die Außermittigkeit der Stützlinie nimmt am Scheitel ihren größten Wert mit 7 cm bei ca. 16 cm Gewölbedicke an. Demnach verläuft die Stützlinie 1 cm unterhalb der Querschnittsunterkante. Am Stichkappenanschluss und am Auflager beträgt der Abstand zwischen Stützlinie und Querschnittsrand gerade 2 cm. Nach den Ergebnissen ist diese Einwölbung zwar standsicher, jedoch mit sehr geringen Reserven.

### 1.3 Vorgehensweise

Zuerst wird ein kurzer Überblick über die Begriffe im Gewölbebau, über die Gewölbearten, die verwendeten Werkstoffe und Bautechniken gegeben. In diesem Zusammenhang wird der zu untersuchende Gewölbetyp eingeordnet.

Um den Einfluss der Werkstoffeigenschaften besser zu verstehen, werden historische Ziegel, Baukalk (Luftkalk) und Mörtel sowie ihre Herstellung vorgestellt. Aus der Literatur werden die Parameter ihrer mechanischen Eigenschaften entnommen und das Verformungsverhalten für den gerissenen Zustand durch FE-Simulationen von Kleinpfeilerversuchen mittels Zweiphasenmodellen ermittelt. Dazu werden sowohl finite Volumenelemente als auch finite Scheibenelemente verwendet. Über das Last-Verschiebungsverhalten von historischem oder auch nachgefertigtem Mörtel sowie Mauerwerk unter Zugbeanspruchung sind keine Literaturstellen bekannt. Deshalb wird der Einfluss der Zugfestigkeit und der Duktilität auf das Tragverhalten durch die Variation der entsprechenden Parameter berücksichtigt. Zeitabhängiges Materialverhalten wird nicht untersucht.

Untersuchungen von ebenen Bogentragwerken sind die Basis der weiteren Arbeit. In allen Untersuchungen von Bogentragwerken wird nur das Eigengewicht als Last berücksichtigt. Ergebnisse rein statischer Verfahren, die nur Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigen, werden mit denen von linear-elastischen FE-Berechnungen an Stabtragwerkmodellen, die neben den Gleichgewichtsbedingungen auch die Werkstoffeigenschaften durch geeignete Materialmodelle einbeziehen, verglichen. Parameterstudien werden durchgeführt, um den Einfluss des Öffnungswinkels, des statischen Systems und der Querschnittshöhe zu ermitteln. Der Einfluss der Rissbildung wird an zwei Bögen mit ausgewählter Geometrie und isotropem Werkstoffverhalten simuliert. Dabei werden die Bögen mit Scheibenelementen abgebildet. Den Einfluss der Anzahl der Phasen auf das Ergebnis wird durch ein Beispiel gezeigt.

Nach einem kurzen Überblick über die mechanischen Modelle für Schalenkonstruktionen werden Parameterstudien an ausgewählten Systemen durchgeführt. In den Berechnungen an räumlichen Modellen wird ebenfalls nur das Eigengewicht des Gewölbes berücksichtigt. Die Haupttonnenabmessungen ( $R = 6,0$  m bei  $d = 0,15$  m) werden dabei anhand der Ergebnisse der durchgeführten Bogenberechnungen gewählt. Bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln der Haupttonne wird die Steifigkeit der Stichkappe durch ihre Länge und ihren Radius variiert. Für diese Berechnungen werden gekrümmte finite Schalenelemente verwendet. Die Ergebnisse werden ausgewertet und mit den entsprechenden Größen von Bogentrag-

---

<sup>1</sup> Angaben über die Kirche und über die Ermittlung der Stützlinie sind im Kapitel 8.4 Fallbeispiel zu finden.

werken verglichen. Zum Schluss werden Simulationen an räumlichen Modellen unter Berücksichtigung der Rissbildung durchgeführt. Dabei werden quaderförmige Volumenelemente eingesetzt. Wegen numerischer Probleme in den FE-Berechnungen mit dem Programm DIANA konnte der Einfluss von Auflagerverschiebungen nicht ermittelt werden.

## 2. Gemauerte Gewölbe

In diesem Kapitel wird der Begriff „Gewölbe“ erläutert und es werden die Arten und Formen der Gewölbe kurz vorgestellt. Die im Gewölbebau verwendete Werkstoffe und die zur Errichtung von Gewölben eingesetzten Bautechniken werden ebenfalls geschildert. Es werden nur die Gewölbearten näher behandelt, die zum Verständnis der späteren Ausführungen erforderlich sind. Zum Schluss wird näher auf die Gewölbeform, den Hauptinhalt dieser Arbeit ist, eingegangen.

### 2.1 Begriffe aus dem Gewölbebau

Nachstehend werden die Begriffe definiert, die zum Verständnis dieser Arbeit erforderlich sind. Gewölbe und Bogentragwerke bei anderen Konstruktionen wie Brücken werden nicht behandelt. Die Definitionen nach *Koch, 1991*, sind mit einem „\*“ markiert.

*Gewölbe* sind ein- oder zweifach gekrümmte Flächentragwerke, die ihre Lasten überwiegend durch Druck abtragen. [*Barthel, 1991*]

*Kraggewölbe\** sind unechte, auf vorkragenden Steinschichten errichtete Gewölbe, die ihre Lasten über die Kragwirkung und nicht über Druck abtragen.

*Kuppeln* sind die Überwölbungen runder, vier- oder vieleckiger Räume mit einer rotationssymmetrischen Form.

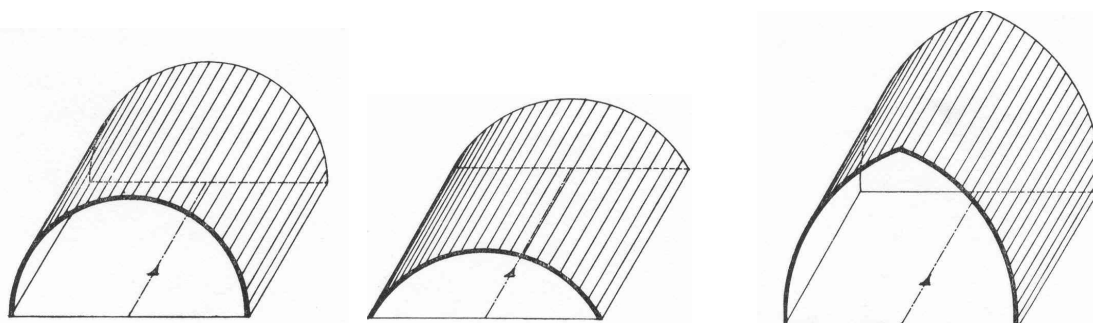
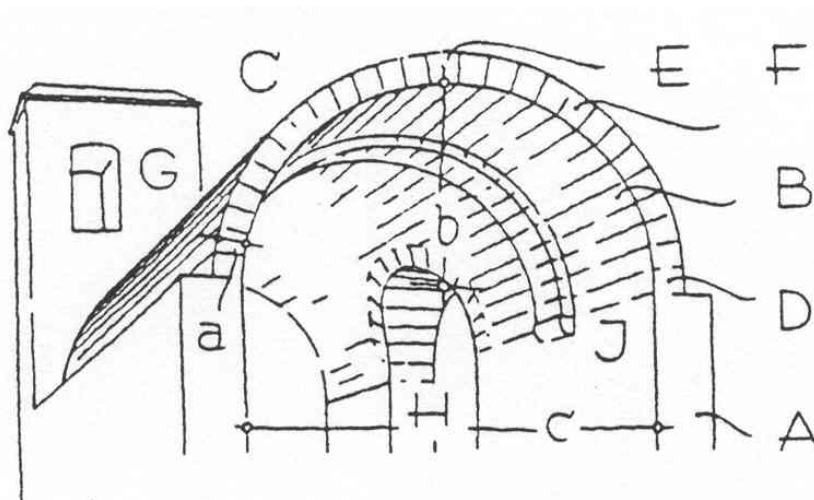


Bild 2.1: Tonnengewölbe mit Halbkreis- (links), Kreissegment- (Mitte) und Spitzbogenprofil (rechts). Aus *Hart, 1965*.

*Tonnengewölbe* haben die geometrisch einfachste, einfach gekrümmte Gewölbeform über einem rechteckigen Grundriss. Im Bild 2.1 sind unterschiedliche Tonnengewölbeformen dargestellt.



- A: Widerlager
- B: Leibung
- C: Rücken
- D: Kämpfer
- E: Schlussstein
- F: Bogensteine
- G: Stirnmauer
- H: Stichkappe
- J: Gurtbogen
- a: Wandstärke
- b: Stichhöhe
- c: Spannweite

Bild 2.2: Bezeichnungen der einzelnen Bestandteile eines Gewölbes. Aus Hess, 1943.

**Spannweite:** Abstand zwischen den Widerlagern des Gewölbes. (Bild 2.2)

**Stichhöhe:** Höhenunterschied zwischen dem Gewölbeauflager und dem Scheitel. (Bild 2.2)

**Kämpfer\*** (auch *Gewölbeansatz*): Bereich zwischen Stütze (Mauer, Pfeiler, Säule) und Gewölbe.

**Leibung** (auch *Laibung* – engl. *intrados*): Innenfläche des Gewölbes. (Bild 2.2)

**Rücken** (engl. *extrados*): Außenfläche des Gewölbes. (Bild 2.2)

**Wandstärke:** Abstand zwischen Rücken und Leibung. (Bild 2.2)

**Kappe und Wange** entstehen durch die Vierteilung eines Tonnengewölbes über einem quadratischen Grundriss durch die Diagonalen. Die so entstandenen Abschnitte an den Stirnseiten heißen Kappen, die Abschnitte an den Widerlagern Wangen. (Bild 2.3)

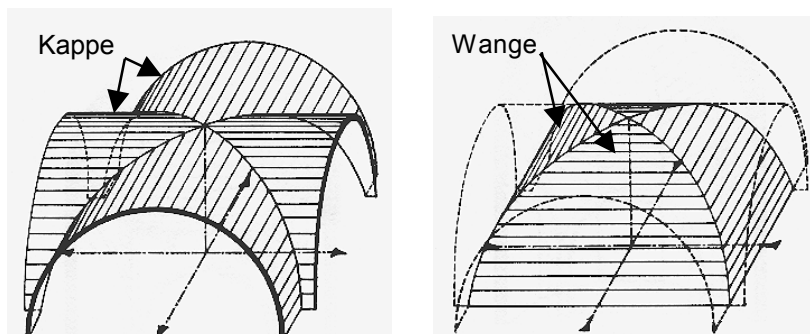


Bild 2.3: Kreuzgewölbe (links) und Klostergewölbe (rechts). Aus Hart, 1965

**Kreuzgewölbe** entstehen durch Zusammenfügen von vier gleichen Kappen über einem quadratischen Grundriss (Bild 2.3 links).

*Klostergewölbe* entstehen durch Zusammenfügen von vier gleichen Wangen über einem quadratischen Grundriss (Bild 2.3 rechts).

*Haupttonne*: Einwölbung des Langhauses mit einer Tonne. (Bild 2.4 links)

*Nebentonne\**: Senkrecht auf die Haupttonne ausgerichtete Überwölbung von Seitenschiffen.

*Stichkappe\**: Quer zur Hauptachse verlaufendes Gewölbe, besonders wenn Fenster in die Haupttonne hineinreichen. Stichkappen haben einen kleineren Querschnitt als die Haupttonne. Ihr Scheitel liegt tiefer als der Scheitel der Haupttonne. (Bild 2.4 links)

*Entlastungsbogen*: In der Fläche der Haupttonne am Stichkappenanschluss gemauerter Bogen zur Entlastung der Stichkappe. Die anschließenden Steine der Haupttonne und der Stichkappe sind entsprechend bearbeitet. (Bild 2.4 links)

*Öffnungswinkel ( $\alpha$ )*: Zentralwinkel (auch Mittelpunktswinkel) des Bogens zwischen den beiden Auflagerpunkten.

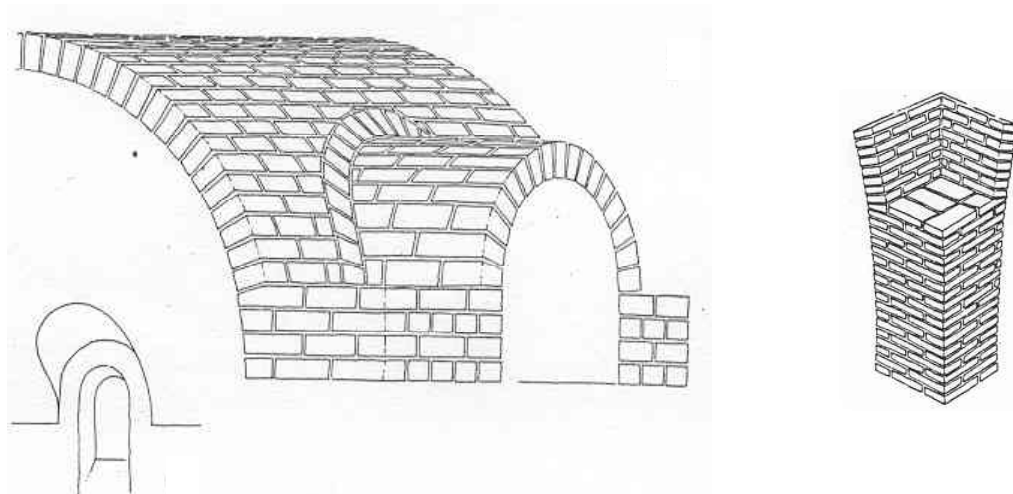


Bild 2.4: Haupttonne mit Stichkappe und Entlastungsbogen (links) und ausgemauerte Trompe (rechts). Aus Hess, 1943.

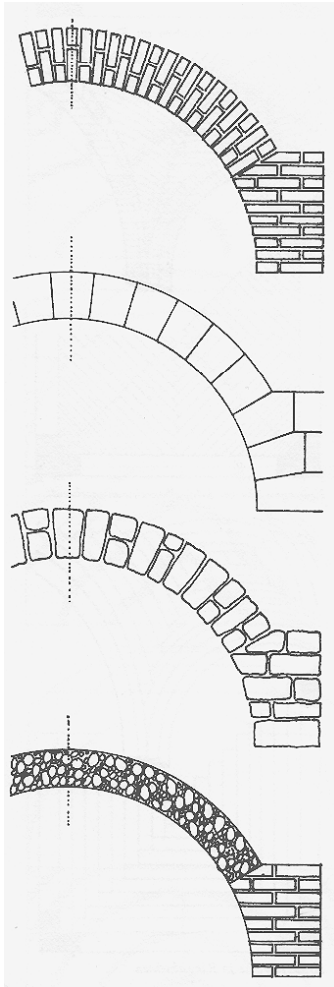
*Trompe* (auch Trombe): Trichterförmiger Körper, der durch die Verschneidung von Haupttonne und Nebentonne bzw. Stichkappe entsteht. Sie ist entweder in Schichten voll ausgemauert oder mit Gussmauerwerk aufgefüllt. Bei Untersuchungen der Standsicherheit wird in der Regel die Oberkante der Auffüllung als Auflagerkante angenommen. (Bild 2.4 rechts)

Bei den Untersuchungen des Tragmechanismus von Gewölben mit Stichkappen sind weitere Definitionen erforderlich.

Ein *Gewölbfeld* besteht aus einem Haupttonnenabschnitt und beidseitig je einer anschließende Stichkappe. Die Länge des Tonnenabschnitts entspricht dem Abstand der Stichkappen in Tonnenlängsrichtung. Die „Ränder“ des Feldes liegen in den Trompenachsen.

## 2.2 Werkstoffe im Gewölbebau

Zur Errichtung von Einwölbungen wurden seit dem Altertum folgende Mauerwerksarten verwendet: Ziegel, Hausteine, Bruchstein und Gussmauerwerk (oder Beton). Im Bild 2.5 sind Tonnenquerschnitte aus diesen vier Werkstoffen dargestellt.



Gewölbe aus *Ziegelsteinen* wurden entweder aus trapezförmigen Formziegeln oder aus normalen, quaderförmigen Mauerziegeln errichtet. Gewölbe aus Mauerziegeln haben Fugen mit ungleicher Dicke. An der Leibung ist die Fuge dünner, am Rücken dicker. Dementsprechend ist die Drucksteifigkeit innerhalb des Gewölbequerschnitts ungleich verteilt. Die Formgebung der Formziegel lässt eine durchgehende Fugenstärke zu.

*Hausteine* wurden entsprechend ihrer Lage im Gewölbe genau bearbeitet. Ähnlich wie Formziegel haben sie eine Trapezform. Gegebenenfalls sind ihre Kanten an der Leibung und am Rücken dem Gewölbeprofil entsprechend gekrümmt ausgebildet. Ihre Höhe reicht über die gesamte Wandhöhe der Einwölbung. Die Lagerfugen zwischen den einzelnen Hausteinen sind schmal.

Bild 2.5: Querschnitte von TonnenGewölben, errichtet aus unterschiedlichen Werkstoffen.  
Von oben nach unten: Ziegel, Hausteine, Bruchstein und Gussmauerwerk.  
Aus Hart, 1965

*Bruchsteine* werden auch trapezförmig ausgebildet, aber gröber bearbeitet. Ihre Querschnittshöhe entspricht nicht in jeder Lage der Wandstärke. Bruchsteingewölbe werden im Verband gemauert.

*Gussmauerwerk* wurde sowohl für ganze Einwölbungen mit kleineren Spannweiten als auch für Abschnitte großer Gewölbe verwendet. Einer der Vorteile ist, dass die Verteilung des Gewichts bei gleichbleibendem Querschnitt verändert werden kann. Dies konnte durch Einlegen eigens dafür hergestellter Tontöpfe erreicht werden. Ein weiterer Vorteil ist die leichte Verarbeitbarkeit durch das Gießen. Daher wurde Gussmauerwerk in Kombination mit Ziegelrippen und für Hinterfüllungen verwendet. In Bild 2.6 sind Beispiele für den Einsatz von Gussmauerwerk im Gewölbebau aus Hess, 1943 gezeigt.

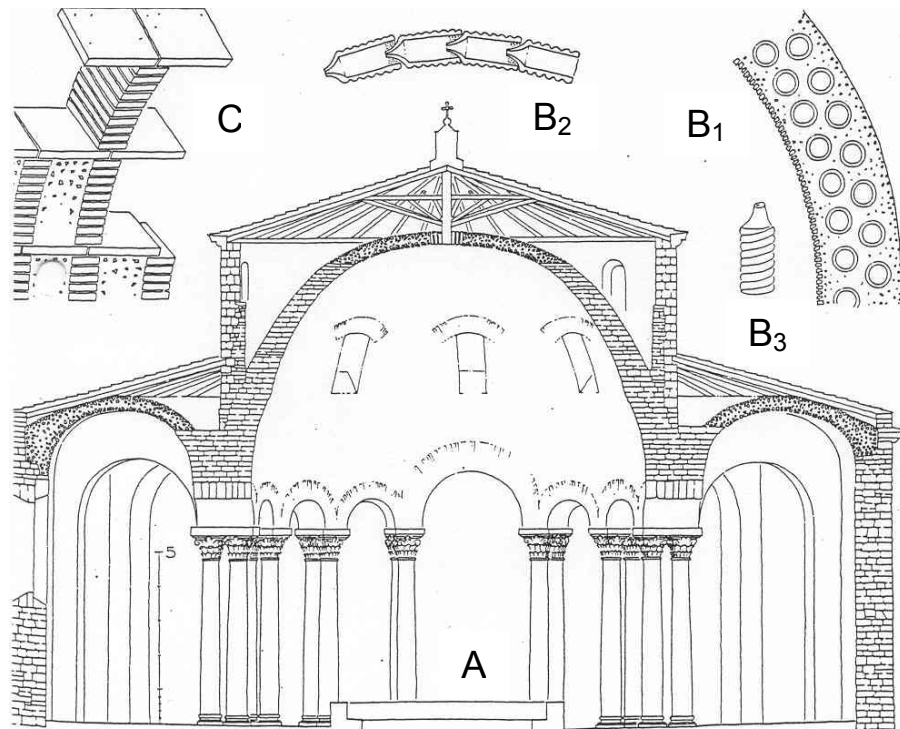


Bild 2.6: Querschnitt der Nocera Superiora Kirche in Neapel, mit Angabe der verwendeten Mauerwerksarten einzelner Bereiche (A). Tongefässe, ihre Lage im Gewölbe und ihre Zusammenfügung (B<sub>1</sub> bis B<sub>3</sub>). Römisches Gewölbe aus Ziegelrippen mit Gussmauerwerkfüllung (C). Aus Hess, 1943.

### 2.3 Technik der Wölbung mit Mauerwerk

In vielen Bauwerken sind die Widerlager nicht ausreichend stabil ausgeführt, um ohne die Auflast und die zusätzliche Tragwirkung der Dachkonstruktion die Horizontalkräfte aus dem Gewölbeschub aufzunehmen. In diesen Fällen wurde die Einwölbung erst nach Fertigstellung des Daches erstellt. Dadurch war erstens die Standsicherheit der aufgehenden Wände gewahrt und zweitens konnte die Wölbung unabhängig vom Wetter ausgeführt werden.

Tonnengewölbe wurden in der Regel auf einem Lehrgerüst oder auf einer Schalung gemauert oder gegossen. Die Abfangkonstruktion wurde auf Keilpaare gestellt. Nach Aushärtung des Mörtels konnte das Lehrgerüst oder die Schalung durch Lockerung der Keile stufenweise abgelassen werden. Für heutige Mörtel gibt Hess, 1943, acht Tage als Mindestaushärtezeit an. Bei dem im Mittelalter verwendeten Luftkalkmörtel war diese Zeit viel länger. Hier konnte die Schalung erst nach zwei bis vier Monaten abgelassen werden. Wurde die Schalung früher abgelassen, musste eine stärkere Absenkung der Einwölbung hingenommen werden.

Im Bild 2.7 sind die bei Tonnengewölben verwendeten Mauerverbände und die zugehörigen Schalungsarten dargestellt.

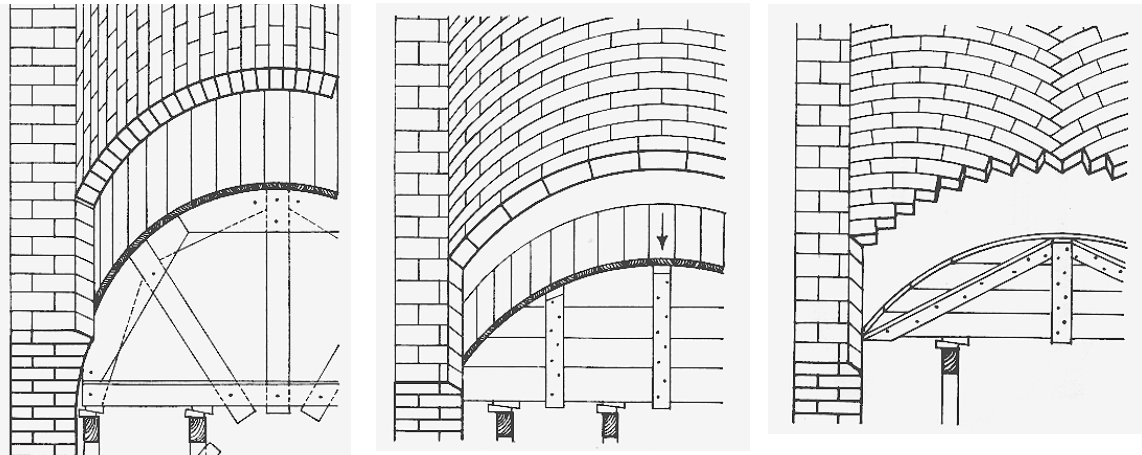


Bild 2.7: Herstellungsarten von Tonnengewölben. Im Kufverband (links), im Ringverband (Mitte) und im Schwalbenschwanzverband (rechts). Aus *Hart, 1965*.

Tonnengewölbe wurden nach *Hart, 1965*, auf drei unterschiedliche Weisen errichtet:

Im Regelfall wurden sie im *Kufverband* gemauert (Bild 2.7, links). Dabei wurden die Ziegelschichten ähnlich zusammengefügt wie die Planken bei der Herstellung eines Fasses durch den Kűfner. Die Lagerfugen verliefen parallel zur Tonnenachse, radial zur Krűmmung der Schalung. Die Stossfugen waren um einen halben Stein versetzt angeordnet. Gemauert wurde von den Widerlagern ausgehend in Richtung Tonnenscheitel. Die Wölbung „auf Kuf“ erforderte die vollflächige Einschalung der zu wölbenden Fläche.

Eine Alternative zum Kufverband war der *Ringverband* (Bild 2.7, Mitte). Die Wölbung wurde nicht in liegenden Schichten hochgeführt, sondern der Fortschritt erfolgte horizontal in stehenden Scheiben. Der Ringschichtverband brauchte keine vollflächige Schalung. Es genűgte ein Rutschbogen mit der Breite einiger Scheiben zur Ausführung. Diese Methode setzte leichte Steine und einen schnellbindenden Műrtel voraus.

Im *Schwalbenschwanzverband* wurden die Steinschichten aus den Ecken ausgehend diagonal zur Wölbachse in Richtung Scheitel geführt, wo sie sich trafen und verzahnten (Bild 2.7 rechts). Der Schwalbenschwanzverband wurde freihändig auf einer Breitscheibe oder auf einem Eisenbogen gemauert. Dieser Verband wurde in der Regel bei flachen Kappengewölben verwendet.

Die Abkehr vom quadratischen Grundriss der Gewölbefelder brachte krumme Diagonalen in einem Kreuzgewölbe mit sich, wenn Haupt- und Nebentonne einen zylindrischen Querschnitt hatten. Wollte man im Grundriss gerade Diagonalen beibehalten, wurden die Kappen zu zweifach gekrűmte Flächen, deren Schalung nicht aus geraden Brettern errichtet werden konnte. Dieses Problem konnte nur durch freihändige Wölbung gelöst werden. Der Rippenverlauf wurde mit kreisbogenförmigen Lehren vorgegeben und die Zwischenflächen wurden freihändig gemauert. Bis zur Fertigstellung einer Schicht mussten die einzelnen Ziegelsteine in ihrer Lage gehalten werden. Dies konnte entweder durch eine Latte oder durch eine mit Gewichten beschwerte Schnur erfolgen (Bild 2.8).



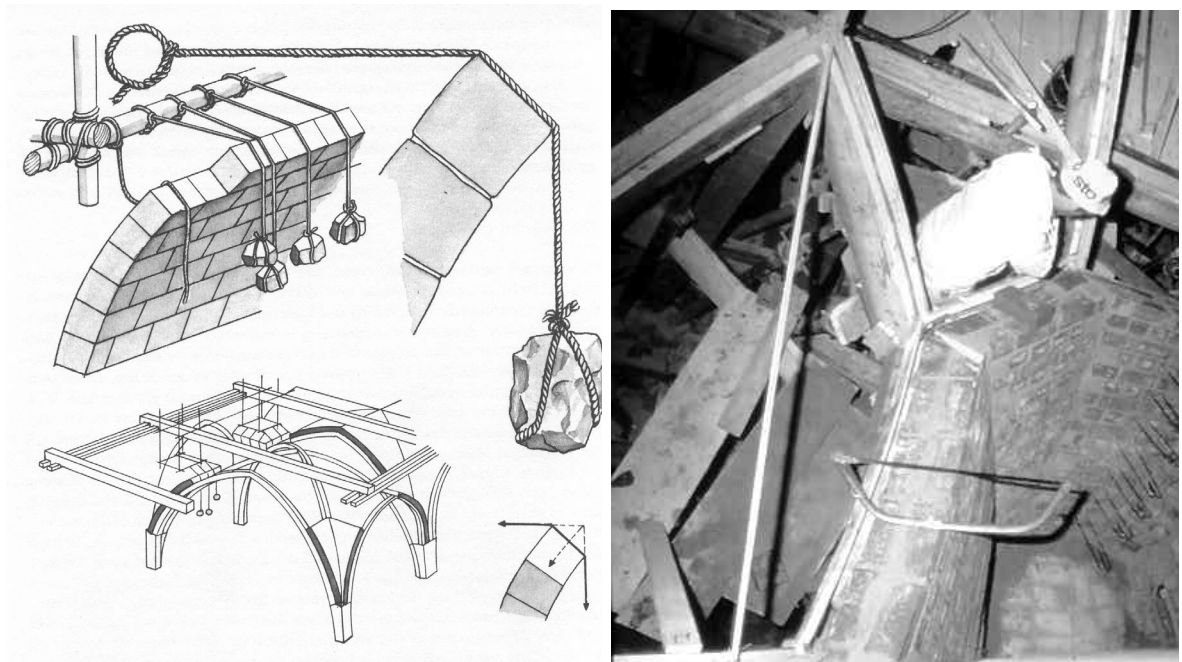


Bild 2.8: Links: Schema des freihändigen Wölbens. Aus *Conrad, 1991*.  
Rechts: Freihändiges Mauern eines Sterngewölbes bei der Neueinwölbung des Eingangsbereichs der Münchener Frauenkirche. Foto: Verfasser, 1992

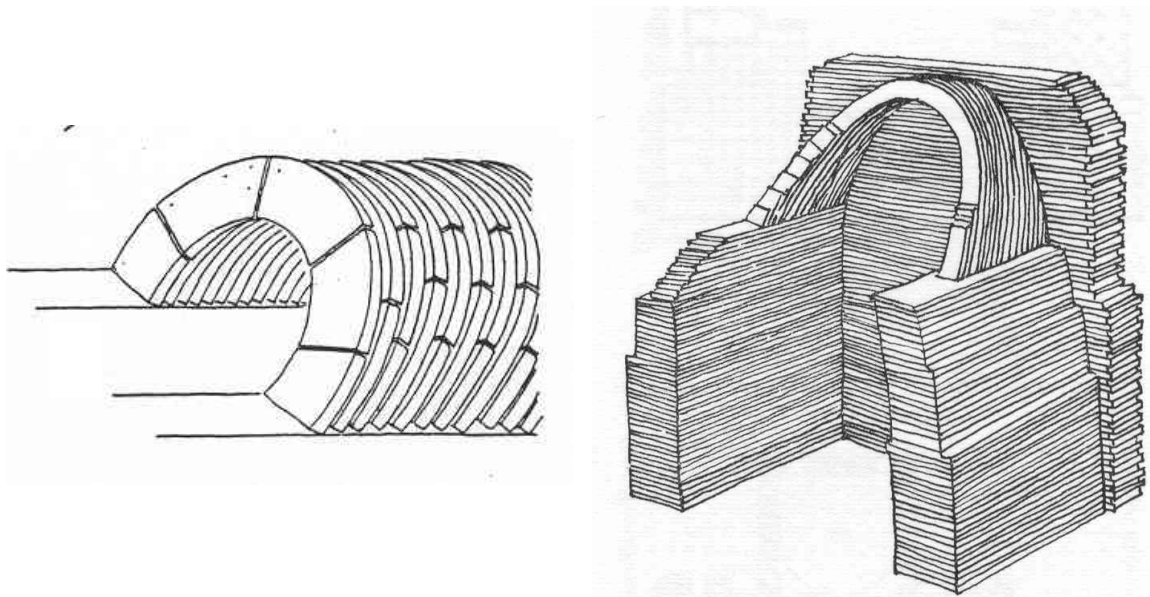


Bild 2.9: Schalungsfreies Wölben: Tonnengewölbe der unterirdischen Kanäle von Ninive (8. bis 7. Jahrhundert v. Chr. - links) und die Einwölbung des Palastes in Ktesiphon (Mitte 6. Jahrhundert - rechts), aus *Hart, 1965*

Freihändige bzw. schalungsfreie Wölbungen wurden schon im Altertum auf anderen Wegen hergestellt. Zwei Beispiele davon sind die dicken Tonnengewölbe der unterirdischen Kanäle von Ninive (Bild 2.9, links) und die Einwölbung des Palastes in Ktesiphon (Bild 2.9, rechts). In beiden Fällen wurden als Beginn der Wölbung

die leicht geneigten Ringschichten an die Rückenwand angelegt. Dieses Verfahren funktioniert nur, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

- die Querwand und die Widerlager müssen dicke Querschnitte haben
- es muss ein schnellbindender Mörtel verwendet, oder
- die Steine nach Bild 2.8 bis zum Abbinden des Mörtels gesichert werden.

## **2.4 Tonnengewölbe mit Stichkappen im Barock**

Während der Gegenreformation (18. Jahrhundert) wurden vor allem in Süddeutschland zahlreiche romanische Hallenkirchen eingewölbt und neue Kirchen errichtet. Im Bereich der Langhäuser wurden vorzugsweise Tonnengewölbe mit Stichkappen - oft mit halber Steinstärke - eingezogen. Aus dem Inneren des Raumes haben die Einwölbungen eine halbkreisförmige Untersicht. Im Bereich der Stichkappen reichen die Fenster meistens in die Haupttonnen hinein. Auch die Stichkappen haben im Regelfall einen Halbkreisquerschnitt. Ihre Scheitellinie kann horizontal, steigend und fallend geführt werden. Für die Untersuchungen in Kapitel 6 sind weitere Bezeichnungen erforderlich, die nachfolgend erläutert werden.

*Kehle:* Verschneidung der Haupttonne und der Stichkappe.

*Stichkappenvorderkante:* Von der Haupttonne abgewandter, gekrümmter Rand der *Stichkappe*.

*Haupttonnenrand:* Endquerschnitt eines Gewölbefeldes.

*Haupttonnen- und Stichkappenaufleger:* Die horizontal verlaufenden Ränder der Einwölbung an der Trompenoberkante.

## 3. Bestandteile des historischen Mauerwerks

Gebannter Ziegel ist einer der dauerhaftesten Baustoffe. Es wird seit dem Altertum verwendet. Mauerwerk kann als „opus caementitium“ gegossen oder im Regelfall aus Mauersteinen mit Bindemittel sowie als sogenanntes Trockenmauerwerk ohne Bindemittel errichtet werden. Die Struktur des Mauerwerks kann ein- oder mehrschalig sein.

Im nachfolgenden Kapitel wird die Entwicklung der Ziegel- und Mörtelherstellung und deren Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften erörtert. Des Weiteren werden die für das Tragverhalten wichtigen Werkstoffgesetze zusammengefasst.

### 3.1 Entwicklung der Ziegelherstellung

Gebrannte Ziegel dienen seit Jahrtausenden als Ersatz für Naturstein in steinarmer Gebieten, wie z.B. großen Flusstälern. Archäologischen Funden zufolge waren gebrannte Ziegel schon vor fünftausend Jahren im mittleren und im Fernen Osten bekannt und wurden auf einem hohen Niveau verwendet. In Europa wurde Ziegelmauerwerk durch die Griechen und die Römer eingeführt.

Die Herstellung von gebrannten Ziegeln veränderte sich vom Altertum an bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts kaum. Die Entwicklung der Ziegelherstellung ist z.B. von *Egermann und Mayer, 1989* sowie von *Stark und Wicht, 1995*, beschrieben. *Krenkler, 1980* schildert ausführlich die chemische Zusammensetzung der Rohstoffe und die Vorgänge bei der Ziegelherstellung. Die Rohmaterialien sind Ton und Sand. Sand besteht zu 93% aus freiem  $\text{SiO}_2$ , zu 3% aus gebundenem  $\text{SiO}_2$ , zu 2% aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$  und zu 1% aus  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Ton beinhaltet kein freies  $\text{SiO}_2$ . Er besteht aus 65% gebundenem  $\text{SiO}_2$ , aus 25%  $\text{Al}_2\text{O}_3$  und aus 10%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Der in der Natur vorkommende Lehm ist eine Mischung aus Ton und Quarzmehl. Er besteht zu 60% aus freiem  $\text{SiO}_2$ , zu 25% aus gebundenem  $\text{SiO}_2$ , zu 10% aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$  und zu 5% aus  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Die wichtigsten Verbindungen sind Kaolinit und Montmorillonit. Die in der Natur vorkommende Tone bestehen überwiegend aus diesen zwei Tonmineralien.

Die Förderung des Rohmaterials und dessen Vorbehandlung beschreiben z.B. *Stark und Wicht, 1995*. Der Prozess beginnt mit dem Abbau des Tons bzw. Lehms aus einer Grube. Der abgebaute Ton wird danach längere Zeit im Freien gelagert, so dass durch den Einfluss der Witterung, d.h. durch Einwirkung von Regen sowie von abwechselnd wirkendem Frost und Tau, die Struktur der Tonmineralien aufgelockert wird. Nach Angaben von *Virtuv, 1991* wurde der Ton über eine ganze Jahreszeit - also etwa drei Monate - gelagert. In China wurde der Rohthon mehrere Jahre, manchmal sogar mehrere Jahrzehnte lang in dieser Weise gelagert. Gegebenenfalls wurde er durch Stampfen immer wieder durchgearbeitet, bevor daraus Ziegel gestrichen wurden.

Nachfolgend wird die Ziegelherstellung nach *Egermann und Mayer, 1989* beschrieben:

Vor dem Streichen des Ziegels wurde die Tonmasse eingeweicht, zerkleinert und von Hand geknetet, um die natürliche Schichtung aufzulösen. Enthaltene Steine wurden ausgesondert und, falls der Ton zu fett war, wurde Sand beigemischt, um eine brauchbare Konsistenz zu erzielen. Ziegel aus zu fettem Ton bekommen Risse beim Brennen, Ziegel aus zu magerem Ton backen nicht zusammen.

Die älteste Art der Ziegelherstellung war das Formen der Ziegel von Hand. Die noch plastische Tonmasse wurde auf dem Boden geformt und anschließend auf der gleichen Stelle getrocknet. Mit einfachen Kratz- und Zuschneidewerkzeugen wurde dann den schon getrockneten Ziegeln die endgültige Form gegeben.



Bild 3.1: Handstreichen von Ziegeln – Mittelalterliche zeitgenössische Darstellung.  
Aus Egermann und Mayer, 1989

Das Streichen der Ziegel erfolgte schon bei den Ägyptern durch den Einsatz von Holzrahmen. Bild 3.1 zeigt eine zeitgenössische Darstellung eines Zieglers bei der Arbeit im Mittelalter.

Beim Sandstreichverfahren wird ein Klumpen Ton - etwa  $\frac{5}{4}$  der erforderlichen Menge - in eine nasse und sandbestreute Form (Holzrahmen) geworfen und in die Ecken gedrückt, bis die Form von der Masse völlig ausgefüllt ist. Der überschüssige Ton wird anschließend mit einem Brett oder mit einem in einen Bogen gespannten Draht abgeschnitten. Der so geformte Rohziegel wird auf ein Brett gestürzt.

Beim Wasserstreichverfahren wird aus dem Rohton eine Platte ausgewalzt. Dann werden aus der Tonplatte mit einem Formkasten aus Eisen die Ziegelrohlinge herausgestochen. Die ausgestochenen Ziegel werden ebenfalls auf ein Brett gestürzt.

Handgestrichene Ziegel weisen manchmal eine Faltstruktur auf. Solche Steine zeugen von der Unerfahrenheit des Zieglers.

Bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Ziegelrohlinge von Hand gestrichen. Anfang des 19. Jahrhundert erschienen zwar Maschinen, die das Handstreichen ersetzen sollten, die sich jedoch nicht durchsetzen konnten. Erst ab Mitte des 19. Jahrhunderts, nach der Erfindung der Schneckenpresse durch Schlickeysen (1854), konnte die Formung der Ziegelrohlinge so verbessert werden, dass sie weder Falten noch leere Ecken oder Stellen aufwiesen. Während der nachfolgenden Jahrzehnte wurden die Methoden der Formgebung immer weiter verbessert. Der wesentliche Entwicklungsschritt war das Vorgehen, die Tonmasse durch eine Form zu pressen. Bei diesem Verfahren richten sich die Tonminerale quer zum Druck aus, wodurch ein Ziegelstein entsteht, der anisotrope mechanische Eigenschaften besitzt. Die Struktur eines handgestrichenen Ziegels ist dagegen homogen und beinahe isotrop.

Das Brennen von getrockneten Rohziegeln erfolgte in Ziegelmeilern oder in Brennöfen. Im Bild 3.2 ist der Querschnitt eines Ziegelmeilers dargestellt. Die älteste Brennmethode dürfte das Brennen im Meiler sein: Die Rohlinge werden mauerartig in einem viereckigen oder runden, sich nach oben verjüngenden Block aufgeschichtet, der im unteren Bereich mit regelmäßig verteilten Feuerungsöffnungen versehen ist. Dabei werden die Fugen mit Brennmaterial ausgefüllt. Der Meiler wird außen mit Lehm abgedichtet und das Brennmaterial in den Feuerungsöffnungen angezündet. Der Brennvorgang dauert mehrere Tage. Je nach Lage im Meiler gibt es ungebrannte oder gut gebrannte Ziegel.

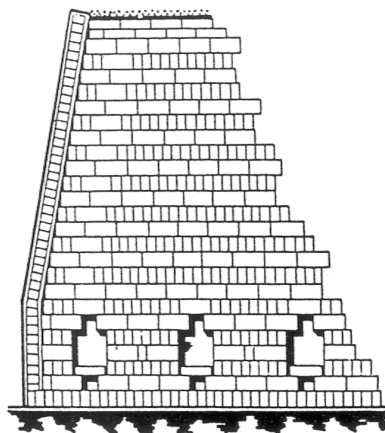


Bild 3.2:  
Querschnitt eines Ziegelmeilers.  
Aus Egermann und Mayer, 1989

Folgende Vorgänge laufen im Ton beim Brennen ab:

Beim Ansteigen der Temperatur bis  $120^{\circ}\text{C}$  wird das restliche Porenwasser aus den Rohlingen ausgetrieben. Bei Temperaturen zwischen  $450^{\circ}\text{C}$  und  $600^{\circ}\text{C}$  wandeln sich die Tonminerale unter Abspaltung des Hydratwassers um. Der Scherben hält bereits zusammen, ist aber noch porös. Oberhalb des Quarzsprunges ( $573^{\circ}\text{C}$ ) verändert sich die Kristallstruktur: Es entsteht Metakaolin. Dies ist ein Gemisch aus den Resten der ursprünglichen Kristallstruktur und amorphem  $\text{SiO}_2$  und  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Zwischen  $800^{\circ}\text{C}$  und  $1200^{\circ}\text{C}$  reagieren  $\text{SiO}_2$  und  $\text{Al}_2\text{O}_3$  zu Aluminiumsilikaten. Der Ziegel erreicht seine gewünschte Härte. Ab  $1.200^{\circ}\text{C}$  beginnen die Berührungsfächen der Kristalle zu „sintern“, d.h. die Kristalle schmelzen an ihren Berührungsfächen zusammen. In diesem Bereich wird der Ziegel glasartig. Dadurch wird er frostbeständig (sog. Klinker) und besitzt eine hohe Druckfestigkeit. Ab  $1.200^{\circ}\text{C}$  beginnt der Ton zu schmelzen. Beim Quarzprung erfolgt eine Volu-

mendehnung im Ton. In diesem Bereich soll der Temperaturanstieg und -abfall langsam verlaufen, damit eine Rissbildung im Ziegel vermieden wird [Krenkler, 1980; Egermann und Mayer, 1989].

Das Brennen im Meiler oder im traditionellen Ofen ergab keine gleichmäßige Ziegelqualität. Je nach Lage des Ziegelrohlings im Meiler bzw. im Ofen war der Ziegel ungebrannt (Schwachbrand, d.h. unter 573°C) oder gut gebrannt (Schmolz). Die gebrannten Steine wurden nach ihrer Farbe sortiert und verwendet, wobei die helle Farbe einen weichen, die dunkle Farbe einen harten Ziegel anzeigte. Anstelle der Festigkeit wurde bis in das 18. Jahrhundert die Härte für die Belastbarkeit der Steine verwendet [Egermann und Mayer, 1989].

## 3.2 Entwicklung der Kalkmörtelherstellung

### 3.2.1 Herstellung des Baukalks

Kalk als Bindemittel wurde bei den Ausgrabungen in den etwa 4000 Jahre alten Ruinen von Troja nachgewiesen. Kalk als Mörtelbinder hat eine mehr als 3000 jährige Vergangenheit.

Bild 3.3 zeigt unterschiedliche Tätigkeiten auf einer Baustelle im 18. Jahrhundert. Rechts im Bild ist das Löschen von Kalk dargestellt.



Bild 3.3: Baustelle aus dem 18. Jahrhundert. Rechts im Bild: Das Löschen von Kalk. Aus Eckert, 1993

Auch die Herstellung des Kalkes als Mörtelbinder veränderte sich über Jahrtausende wenig [Stark und Wicht, 1995; Krauss, 1989]. Kalkstein wird abgebaut und zerkleinert. Der zerkleinerte Kalkstein wird in einem mit Holz beheizten Ofen gebrannt, wobei Brandkalk entsteht. Der Brandkalk muss noch vor seiner Verwendung gelöscht werden. Das Löschen kann nass oder trocken erfolgen.

Das Nass-Löschen des Brandkalkes erfolgt in einer Grube durch Überflutung (Einsumpfen) der Kalkstücke. Während des Löschvorgangs werden die Kalkstücke immer weiter zerkleinert. Der so gelöschte Kalk wird zu einem Kalkteig mit einer sehr feinen Struktur.

Das Trockenlöschen von Kalk kann auf zwei unterschiedliche Arten ausgeführt werden:

Brandkalkstücke und Sand werden ein- oder mehrlagig aufgeschichtet und mit Wasser besprengt.

Brandkalkstücke werden in einen Korb gelegt, der solange ins Wasser getaucht wird, bis keine Blasen mehr aufsteigen. Nach Herausnehmen des Korbes trocknet der Kalk infolge der sich beim Löschen entwickelnden Hitze. Das gelöschte Produkt wird bis zur Verwendung mit Sand abgedeckt.

Trocken gelöschter Kalk beinhaltet immer nicht gelöschte Stückchen und weist eine gröbere Struktur auf.

### 3.2.2 Herstellung des Mauermörtels

Mörtel wird aus gelöschtem Brandkalk, Sand und Wasser durch Vermischen im Mörtelkasten hergestellt. Hydraulisch erhärtende Mörtel enthalten noch Hydraulfaktoren, wie z.B. Puzzolanerde (Trass) oder Ziegelmehl, die eine Erhärtung unter Wasser ermöglichen. Hydraulische Mörtel erhärten schneller als Luftkalkmörtel und erreichen eine höhere Druckfestigkeit als diese.

Das Mischungsverhältnis zwischen Kalk und Sand wird im 17. und 18. Jahrhundert mit 1:2 bis 1:3 angegeben. Diesbezügliche Quellen sind bei *Eckert, 1993* zusammengefasst. Die erforderliche Wassermenge wird durch die Kalkart bestimmt. Als Faustregel gilt: Kalkarten mit einer feinen Struktur nehmen mehr, solche mit grober Struktur weniger Wasser auf.

### 3.3 Mechanische Eigenschaften von historischen Ziegeln und Mauermörtel

Handgestrichene Ziegel sind in ihrer inneren Struktur weitgehend homogen. Die von *Egermann und Mayer, 1989* vorgelegten Untersuchungsergebnisse beruhen auf kleinen Bohrkernen, die aus historischen Bauwerken und aus nachgefertigten handgestrichenen Ziegelsteinen entnommen wurden. In Tabelle 3.1 sind die ermittelten Richtungsfaktoren für die Zylinderdruckfestigkeiten, für die E-Module und für die Poisson-Zahlen der Proben auszugsweise zusammengestellt. Im Bild 3.4 sind die Richtungen und die Entnahmestellen der Proben dargestellt.

Tabelle 3.1: Richtungsfaktoren für moderne Ziegel (MZ), nachgefertigte handgestrichene Mauerziegel (HM) und historischen Mauerziegeln (QU.) Auszugsweise aus *Egermann und Mayer, 1989*.

Probe	Druckfestigkeit		E-Modul		Poisson-Zahl	
	$\beta_{Dy}/\beta_{Dx}$	$\beta_{Dy}/\beta_{Dz}$	$E_y/E_x$	$E_y/E_z$	$\nu_y/\nu_x$	$\nu_y/\nu_z$
MZ	1,31	1,34	1,69	1,85	1,36	1,58
HM	0,87	0,92	0,88	0,92	0,91	1,11
QU (rot)	1,01	0,87	0,86	1,02	0,88	0,93

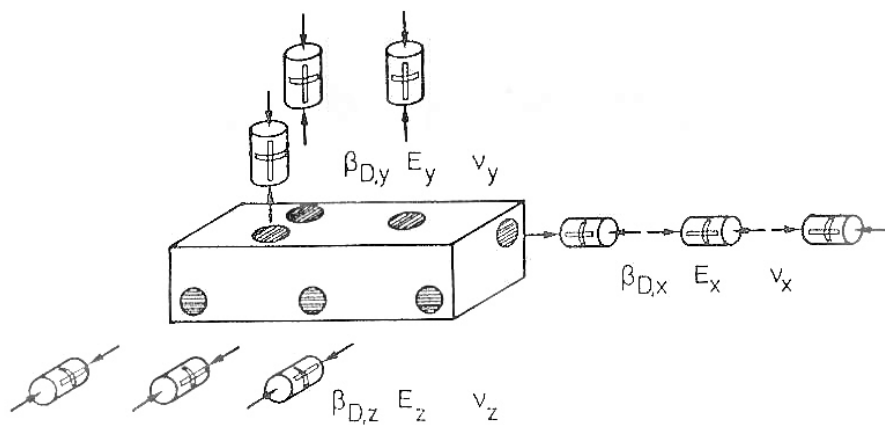


Bild 3.4: Definition der Richtungen und Darstellung der Probeentnahmestellen in einem Ziegelstein für die Ermittlung der Richtungsfaktoren in Tabelle 3.1.  
Aus Egermann und Meyer, 1989

Der Vergleich der mechanischen Eigenschaften zeigt, dass bei handgestrichenen Ziegeln (HM und QU) nur eine geringfügige Richtungsabhängigkeit von -14% bis +11% der Eigenschaften vorliegt, wobei die „schwache“ Richtung meistens senkrecht auf die flache Seite der Steine zeigt. Moderne Ziegelsteine (MZ) verhalten sich anders: Hier sind die Werte in y-Richtung immer größer. Sie liegen 31% bis 85% höher als in den anderen beiden Richtungen. Diese starke Richtungsabhängigkeit moderner Ziegel entsteht bei der Formgebung durch Strangpressen: Die Tonminerale richten sich quer zur Druckrichtung aus und liegen somit in der xy-Ebene nach Bild 3.4.

Anhand dieser Ergebnisse können historische Ziegel als homogener Werkstoff mit weitgehend isotropen mechanischen Eigenschaften betrachtet werden.

Im Bild 3.5 sind die Spannungs-Dehnungslinien von Druckversuchen mit vier Mörtelproben nach Schäfer und Hilsdorf, 1992 dargestellt. Eine Probe wurde aus einem alten Mörtel entnommen, die drei weiteren Mörtelproben im Labor hergestellt.

Der mit Sumpfkalk hergestellte Mörtel verhält sich nach Überschreitung seiner niedrigen Druckfestigkeit beinahe ideal plastisch. Mörtel aus hydraulischem Kalk erreichen im Druckversuch eine höhere Festigkeit als der Sumpfkalkmörtel. Nach Erreichen der Druckfestigkeit kann hier eine Abnahme der Druckspannung bei zunehmender Stauchung beobachtet werden. Dieses Verhalten wird als Entfestigung bezeichnet.

Nach Ergebnissen weiterer Versuche liegt die Poisson-Zahl für Sumpfkalkmörtel zwischen 0,1 und 0,2.

Die Untersuchung der Druckfestigkeitsentwicklung zeigte, dass Luftkalkmörtel aus Sumpfkalk und Mörtel aus Weißkalkhydrat zwar eine niedrige Endfestigkeit haben, diese Festigkeit aber bereits nach acht Wochen erreicht wird.



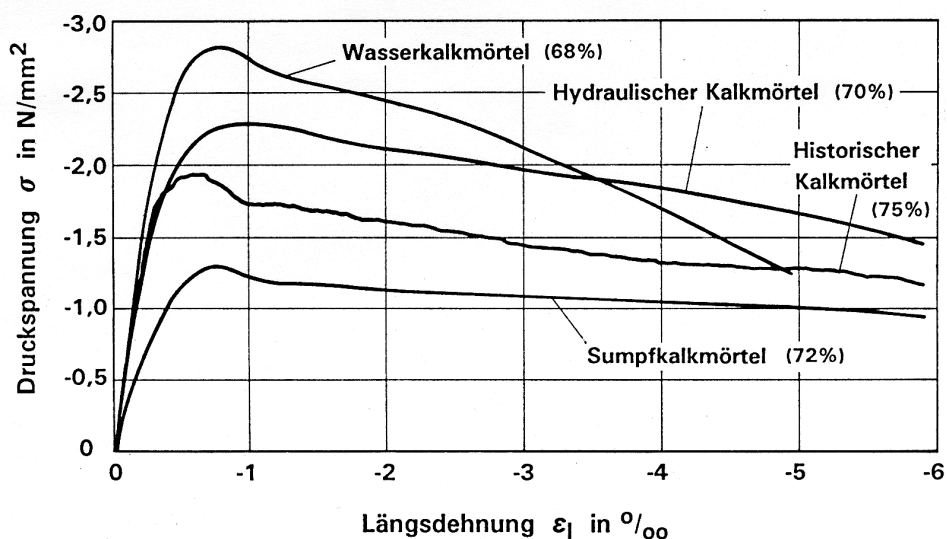


Bild 3.5: Spannungs-Dehnungslinien von Druckversuchen eines historischen Mörtels und dreier Labormörtel mit vergleichbarem Mischungsverhältnis (1:8). In Klammern sind jeweils die Porosität der Bindemittelmatrix angegeben. Aus Schäfer und Hilsdorf, 1992.

### 3.4 Modellierung mechanischer Eigenschaften von Ziegeln und von Mauermörtel

Ziegel und Mauermörtel können, ähnlich wie Beton, bei reiner Druckbeanspruchung als linear-elastische, ideal-plastische Werkstoffe modelliert werden. Für den eindimensionalen Fall gilt das im Bild 3.6 dargestellte Diagramm.

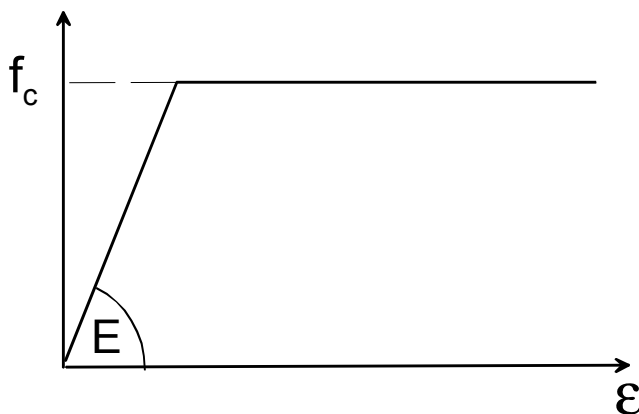


Bild 3.6: Linear-elastisches, ideal-plastisches Werkstoffverhalten unter Druckbeanspruchung

Für den dreidimensionalen Spannungszustand stehen mehrere Modelle zur Verfügung: Neben dem Modell von Tresca gibt es das Modell von Mohr und Coulomb sowie das Modell von Drucker und Prager. Diese wurden unter anderem von *Chen und Han, 1988* ausführlich vorgestellt und erörtert. Nur über das dreidimensionale Verhalten des modernen Mauermörtels stehen Versuchsergebnisse zur Verfügung, wohingegen es über historischen Mauermörtel und Ziegel noch keine Veröffentlichungen gibt. Das plastische Verhalten des Mörtels im dreidimensionalen

Zustand lässt sich wegen der Isotropie der mechanischen Eigenschaften mit der Fließbedingung von Drucker-Prager beschreiben. Vereinfachend wird dieses Modell auch für den beinahe isotropen Mauerziegel verwendet. Die im nächsten Kapitel zusammengestellten Ergebnisse zeigen, dass diese Annahme keinen Einfluss auf das Untersuchungsergebnis von Kleinfeldern hat. Bei festgelegten Verhältnissen, d.h. wenn die Druckfestigkeit des Mörtels stets kleiner als die Druckfestigkeit des Ziegels ist und die Zugfestigkeit des Ziegels kleiner als das  $\nu$ -fache seiner Druckfestigkeit, wird die Druckfestigkeit des Ziegels nicht erreicht. Das Mauerwerk versagt durch Spalten des Ziegels infolge von Zwangsspannungen, die durch das unterschiedliche Querdehnungsverhalten der zwei Komponenten entstehen. Um die numerischen Untersuchungen einfacher zu gestalten, wurde deshalb bei einigen Berechnungen keine Druckfestigkeit und keine Fließbedingung definiert, da diese nicht aktiviert werden.

Im Bild 3.7 sind die Fließbedingungen nach Drucker-Prager sowie nach Mohr-Coulomb im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen isometrisch dargestellt.

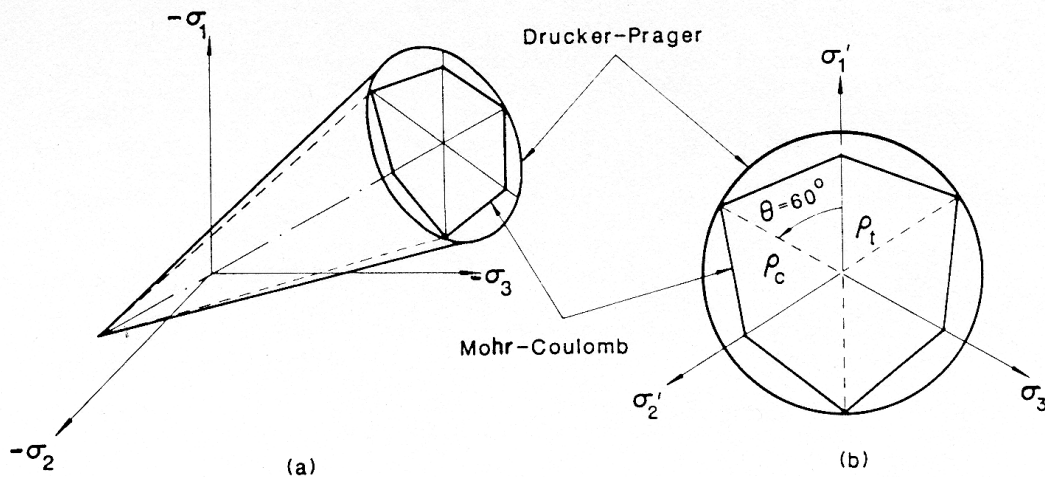


Bild 3.7: Fließbedingungen nach Drucker-Prager und nach Mohr-Coulomb.  
Aus Chen und Han, 1988.

Bei den numerischen Untersuchungen wird assoziierte Plastizität angenommen. Das bedeutet, dass der Winkel der inneren Reibung  $\varphi$  mit dem Dilatationswinkel  $\psi$  gleich ist. Die Definition von  $\psi$  ist aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) zu entnehmen.

$$\sin \psi = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{-2 * \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_v^p} \quad (3.1)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p \quad (3.2)$$

mit:  $\varepsilon_i^p$  plastische Hauptdehnungsrate  
 $\varepsilon_v^p$  plastische Volumendehnungsrate

Für die Kohäsion gilt Gleichung (3.3):

$$c = \frac{f_c * (1 - \sin \varphi)}{2 * \cos \varphi} \quad (3.3)$$

Für den Reibungswinkel „ $\varphi$ “ wurden die Werte 20° und 30°, für den Mörtel der Wert von 20° angesetzt. Die Poisson-Zahl wurde für Ziegel mit 0,10 bis 0,15 und für Mörtel mit 0,15 bis 0,20 angenommen. Die Druckfestigkeit der Ziegel wurde mit einem Mindestwert von 15.000 kN/m<sup>2</sup>, die von Mörtel mit 1.100 kN/m<sup>2</sup> und mit 1.600 kN/m<sup>2</sup> angenommen. Die Rechenwerte sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

Über das Verformungsverhalten von historischem Mörtel und Ziegeln unter Zugbeanspruchung stehen keine Veröffentlichungen zur Verfügung. Deshalb wird das Verhalten in Anlehnung an den Werkstoff Beton und anhand des übrigen Verhaltens von Ziegel und von Mörtel wie folgt modelliert:

Beton-ähnliche Werkstoffe verhalten sich unter Zugbeanspruchung spröde oder quasi-spröde. Bei sprödem Verhalten reißt der Werkstoff plötzlich. Nach dem Erreichen der Zugfestigkeit kann keine Kraft mehr aufgenommen werden. Bei quasi-sprödem Verhalten gibt es nach dem Erreichen der Zugfestigkeit noch einen abnehmenden Widerstand bei zunehmender Dehnung des Materials, die sogenannte Entfestigung. Quasi-sprödes Material gibt einer Tragkonstruktion Duktilität und damit eine größere Steifigkeit im gerissenen Zustand.

Bild 3.8 zeigt Beispiele idealisierten Spannungs-Dehnungslinien für spröde und quasi-spröde Werkstoffe.

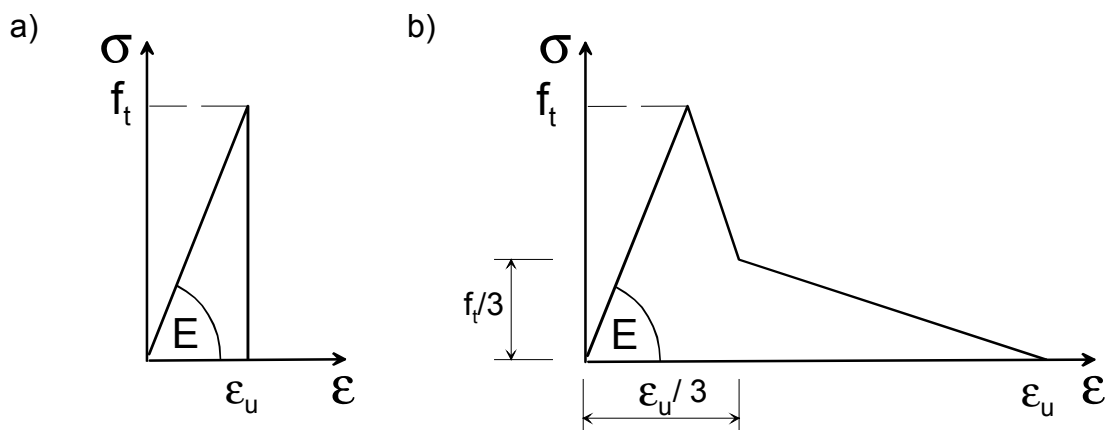


Bild 3.8: Idealisierte Spannungs-Dehnungslinien für spröde (a) und quasi-spröde (b) Werkstoffe

Die Parameter des Knickpunkts in der trilinearen Spannungs-Dehnungslinie sind willkürlich angenommen. Mit Hilfe dieses Modells soll lediglich der Einfluss der Duktilität auf den Zug qualitativ erfasst werden.

Die Rechenwerte für die Zugfestigkeit sind ebenfalls in Tabelle 3.2 zu finden.

Tabelle 3.2: Rechenwerte des E-Moduls, der Poisson-Zahl, des Reibungswinkels sowie der Druck- und Zugfestigkeit von Ziegel und Mauermörtel

Werkstoff	Ziegel	Mauermörtel
E-Modul [kN/m <sup>2</sup> ]	5,0*10 <sup>6</sup>	2,5*10 <sup>6</sup>
Poisson-Zahl $\nu$	0,10-0,15	0,15-0,20
Reibungswinkel $\varphi$ [°]	20-30	20
Druckfestigkeit $f_c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	15000	1100-1600
Zugfestigkeit $f_t$ [kN/m <sup>2</sup> ]	110	450

## 4. Trag- und Verformungsverhalten von einschaligem Mauerwerk unter Druck

Im nachstehenden Kapitel wird das Trag- und Verformungsverhalten von einschaligem historischem Mauerwerk anhand von Literaturangaben und eigenen FE-Untersuchungen dargestellt. Auf das Verhalten von Mauerwerksscheiben - siehe z.B. *Ganz, 1985* und *Seim, 1995* - wird nicht eingegangen, da bei Bogentragwerken und bei Tonnengewölben mit Stichkappen dieses Tragverhalten eine untergeordnete Rolle spielt.

In historischen Mauerwerkskonstruktionen ist die Höhe der Mörtelfuge ( $h_m$ ) größer als im heutigen Mauerwerk. Bei Gewölbekonstruktionen kann die Fugenhöhe nach eigenen Beobachtungen bis zur Hälfte der Ziegeldicke betragen.

### 4.1 Kenntnisstand nach aktuellen Literaturstellen

Die Anzahl der Literaturstellen über die Tragfähigkeit oder das Verformungsverhalten von Mauerwerk ist groß. Die meisten Veröffentlichungen beschäftigen sich mit Themen über Mauerwerk nach den aktuellen Regelwerken. Verwertbare Literatur über das Trag- und Verformungsverhalten historischen Mauerwerks mit dicken Mörtelfugen und mit Mörtelbinder aus Sumpfkalk oder Weißkalkhydrat stand nicht zur Verfügung. Deshalb werden nachstehend die Literaturstellen erwähnt, die zur Klärung des Tragverhaltens der betreffenden Mauerwerksart mit dicken Kalkmörtelfugen halfen.

In der Mitte des 20. Jahrhunderts lag der Schwerpunkt des Interesses auf der Tragfähigkeit des Mauerwerks. Trotz einer großen Anzahl von Versuchen konnte die Tragfähigkeit aber mittels empirischer Formeln nicht einheitlich erfasst werden. *Graf, 1952* stellt in seiner Arbeit sechzehn unterschiedliche Formeln zur Ermittlung der Mauerwerkstragfähigkeit dar. Der Grund für die Vielzahl der unterschiedlichen Formeln war einerseits die Tatsache, dass die Einflussparameter noch nicht systematisch ermittelt wurden, andererseits die fehlende Kenntnis der Versagensmechanismen von Mauerwerk.

Zur Erfassung des Mauerwerksversagens stellte Hilsdorf als erster ein Bruchmodell auf [*Probst, 1981*]. In seiner Bruchhypothese geht Hilsdorf davon aus, dass sich die Spannungen in einem Ziegel eines Mauerwerkskörpers bei zentrischer Druckbelastung nach Bild 4.1a entwickeln. Er nimmt an, dass die Querkzugspannungen in der x- und z-Richtung,  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  gleich sind. Im Bild 4.1a sind diese Spannungen in Abhängigkeit von der örtlichen Maximalspannung  $\sigma_y$  in Richtung der äußeren Last dargestellt. Die Linie A stellt die Bruchkurve für die Ziegelfestigkeit dar und zeigt den Zusammenhang zwischen der Druckspannung  $\sigma_y$  und den Querkzugspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$ , die einen örtlichen Bruch oder eine Rissbildung im Ziegel auslösen. Für  $\sigma_x = \sigma_z = 0$  entspricht  $\sigma_y$  der einachsigen Druckfestigkeit des Ziegels. Das Versagenskriterium von Ziegel war damals noch nicht bekannt und wird deshalb von Hilsdorf nach der Mohr'schen Theorie als linear angenommen.

Wird das Mauerwerk auf Druck belastet, folgt der Spannungsverlauf der gestrichelten Linie  $B_1$ . Wenn diese Linie die Bruchkurve A schneidet, findet ein örtlicher Bruch statt, das heißt es bildet sich ein Riss im Ziegel in Richtung der Last. Dadurch versagt das Mauerwerk noch nicht. Im gerissenen Querschnitt nehmen die Quersugspannungen ab. Wenn die äußere Last bereits größer ist als die einachsige Druckfestigkeit des Mörtels, muss der Mörtel in Querrichtung dehnungsbehindert werden. Somit ist eine gewisse Quersugspannung im Mörtel erforderlich. Mit dieser Spannung steht eine Quersugspannung in den ungerissenen Bereichen des Ziegels im Gleichgewicht. Dieser Mindestquersugspannung entspricht Linie C. Mit steigender äußerer Last steigt die Mindestquersugspannung an. Wird die äußere Last über die Last beim 1. Riss hinaus erhöht, können sich die Spannungen in einem ungerissenen Querschnitt des Ziegels entlang der Linie  $B_2$  entwickeln. Wenn die Linie  $B_2$  die Bruchkurve A schneidet, entsteht der 2. Riss. Dieser Vorgang der Rissbildung setzt sich fort, und der Ziegel wird sich in schmale Elemente aufspalten. Unter idealen Voraussetzungen geschieht der Bruch des Mauerwerks dann, wenn die Quersugfestigkeit des Ziegels kleiner ist als die Spannung, die notwendig ist, um den Mörtel in Querrichtung genügend zusammenzuhalten.

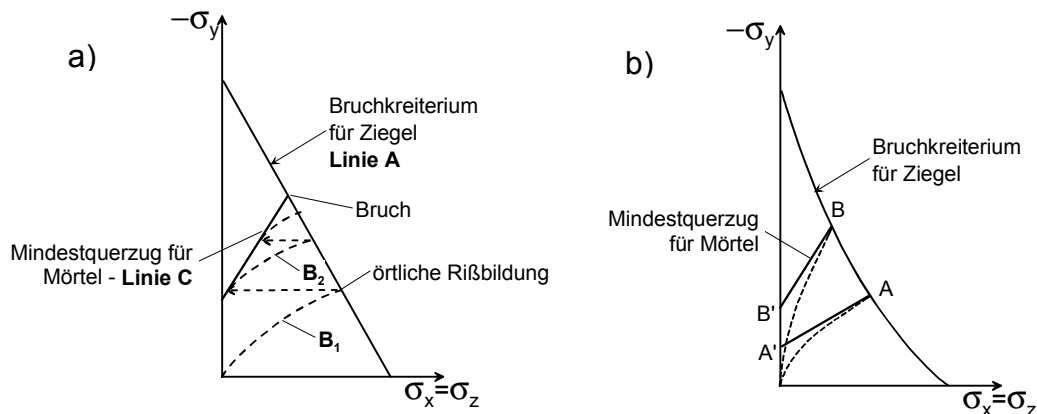


Bild 4.1 Bruchmechanismus von Mauerwerk:  
a) nach *Hilsdorf*  
b) nach *Khoo und Hendry*. Aus *Probst*, 1981

Auf der Basis des einfachen Hilsdorf'schen Bruchmechanismus wurden weitere, immer feinere Modelle entwickelt. So berücksichtigten Khoo und Hendry [*Probst*, 1981] in ihrem Bruchmodell das von ihnen in Versuchen ermittelte Bruchkriterium für Ziegel sowie eigene Ergebnisse von FE-Berechnungen. Khoo und Hendry gehen bei ihrem Vorschlag für eine Bruchtheorie von der im Bild 4.1b gezeigten Entwicklung der Spannungen im Ziegel eines Mauerwerksprismas unter zentrischer Last aus. Die Darstellung entspricht der von Hilsdorf im Bild 4.1a. Der Spannungszustand des Ziegels entwickelt sich bei Laststeigerung entsprechend der gestrichelten Linie. Der Bruch des Ziegels tritt beim Schnittpunkt mit der Bruchkurve ein. Die Neigung der gestrichelten Linie hängt von den Eigenschaften der Mörtelfuge unter dreiaxsigem Druck ab. Ist der verwendete Mörtel schlechter, wird die Linie flacher. Die Linien A'A und B'B stellen die Zugspannungen dar, die notwendig sind, um das Mörtelversagen unter dreiaxsigem Druck zu verhindern. Die Bezie-

hung zwischen den Querspannungen in Ziegel und Mörtel wird durch das horizontale Kräftegleichgewicht erzeugt.

Khoo und Hendry sowie Hilsdorf [Probst, 1981] berücksichtigten die Verträglichkeit der Ziegel- und Mörtelverformungen nicht (Bild 4.1a und b). In beiden, nur die Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigenden, Modellen wird angenommen, dass der Bruch des Mauerwerks am Schnittpunkt der Bruchkurven von Ziegel und Mörtel erfolgt.

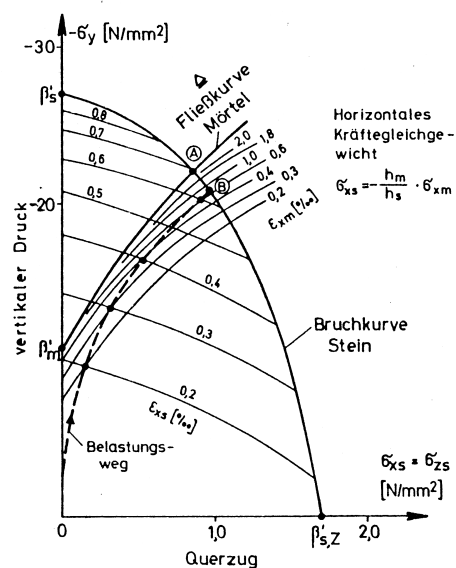


Bild 4.2 Spannungsentwicklung im Mauerwerk unter zentrischem Druck bis zum Bruch. Aus Probst, 1981

Probst, 1981 zeigte, dass der Bruch (im  $\sigma_v/\sigma_x$ -Koordinatensystem) nicht unbedingt am oben genannten Schnittpunkt „A“ auftritt, sondern unterhalb des Schnittpunktes an der Stelle „B“, an der die Dehnungen gleich groß sind (Bild 4.2). Die Linien  $\epsilon_{xs}$  und  $\epsilon_{xm}$  stellen die Hauptspannungsbeziehungen bei verschiedenen Dehnungszuständen für Ziegelstein und Mörtel dar. Sinngemäß verläuft der Belastungsweg durch die Schnittpunkte oben genannter Linien von Ziegelstein und Mörtel gleicher Dehnung.

Zur Untersuchung des Einflusses der Steinhöhe auf das Tragverhalten des Mauerwerks führten Sabha und Weigert, 1996 Versuche durch. Ziel ihrer Untersuchungen war, eine zuverlässige Formel zur Ermittlung der Bruchfestigkeit von Mauerwerk mit schmalen Mörtelfugen ( $t/b < 0,2$ ) aufzustellen. Zur Ermittlung der Mauerwerksfestigkeit  $f_{c,Ma}$  geben die Autoren die empirische Gleichung (4.1) an. Der Beiwert „K“ nach Gleichung (4.2) berücksichtigt neben dem Verhältnis der Fugenstärke zur Steinbreite auch den Einfluss der Steinhöhe.

$$f_{c,Ma} = \frac{2 * K * f_{c,m} + f_{t,s}}{K + \frac{f_{t,s}}{f_{c,s}}} \quad (4.1)$$

$$K = \frac{t}{b} * \left( 2,32 * \frac{f_{t,s}}{f_{c,s}} + 1,6 * \sqrt{\frac{b}{h}} \right) \quad (4.2)$$

mit:	$f_{c,m}$ :	Normdruckfestigkeit des Mörtels
	$f_{t,s}, f_{c,s}$ :	Zug- bzw. Druckfestigkeit des Steines
	$t$ :	Dicke der Lagerfuge
	$b$ :	Breite des Steins
	$h$ :	Höhe des Steins

Die Gleichungen (4.3) und (4.4) geben die Mauerwerksfestigkeit für den Fall an, dass der Mörtel in der dicken Mörtelfuge fest genug ist und vor dem Spalten des Steins nicht ausbröckelt :

$$f_{c,Ma} = \frac{f_{t,s}}{A + \frac{f_{t,s}}{f_{c,s}}} \quad (4.3)$$

$$A = \frac{E_s * (\mu_m + \mu_m^2) - E_m * (\mu_s + \mu_s^2)}{E_s * (1 + \mu_m^2) * B - E_m * (1 + \mu_s^2)} \quad (4.4)$$

mit:	$f_{c,s}$ :	Steindruckfestigkeit
	$f_{t,s}$ :	Steinzugfestigkeit
	$E_s, E_m$ :	Elastizitätsmodul des Steins bzw. des Mörtels
	$\mu_s, \mu_m$ :	Querdehnzahl des Steins bzw. des Mörtels
	$B$ :	Faktor zur Berücksichtigung unterschiedlicher Spannungsverteilung. $B = h/t$ bei flachen Steinen und $B = h/2t$ bei quaderförmigen Steinen, in <i>Sabha und Weigert, 1996</i> , als „Integrationskonstante“ bezeichnet.

Die Gleichungen (4.1) und (4.3) berücksichtigen z.T. unterschiedliche Parameter. Das liegt daran, dass Mauerwerk in Abhängigkeit von der Dicke der Mörtelfuge unterschiedlich versagt.

Mauerwerk mit dünnen Mörtelfugen ( $t/b < 0,2$ ) versagt durch das Spalten der Ziegelsteine: Das Ausbröckeln des Fugenmörtels im Randbereich führt zu einer Spannungskonzentration (Teilflächendruck) zwischen Ziegel und Fugenmörtel. Dadurch entstehen Spaltzugspannungen im Ziegelstein, die beim Erreichen der örtlichen Zugfestigkeit zu mit der Lastrichtung parallel verlaufenden Rissen führen. Durch diese Rissbildung wird der dreidimensionale Druckspannungszustand im Mörtel gestört, und die aufnehmbare Last fällt bei zunehmender Stauchung ab.

Im Mauerwerk mit dickeren Mörtelfugen ( $t/b \geq 0,2$ ), kann ein Versagensmechanismus mit oder ohne Ausbröckeln des Fugenmörtels entstehen. Ein ausreichend fester Mörtel bröckelt nicht aus. In diesem Fall versagt der Ziegel auch auf Querszug, verursacht durch das unterschiedliche Querdehnungsverhalten des Mörtels und des Ziegels. Die Steinzugfestigkeit wird überschritten, bevor der Fugenmörtel



seine Druckfestigkeit erreicht. Somit kann das Versagen mit den elastischen Ansätzen der Gleichung (4.3) beschrieben werden.

Mauerwerksversagen bei dicken Mörtelfugen aus Mörtel mit niedriger Druckfestigkeit wird im Abschnitt 4.2 erörtert.

Der E-Modul des Mauerwerks wird in Druckversuchen ermittelt. Aus der Last-Verschiebungskurve des Versuchs wird ein Sekantenmodul aus 1/3 der Höchstlast (Druckspannung) und der zugehörigen Verschiebung (Stauchung) ermittelt. Zu unterschiedlichen Kombinationen der Stein- und Fugengeometrie, zur Art des Verbandes sowie zu den Stein- und Mörtelfestigkeiten stehen empirische Formeln des E-Moduls zur Verfügung (*Ruile, 2000*). Verschiedene Quellen geben dazu unterschiedliche Formeln an. Die Größe des E-Moduls liegt in einem Streubereich  $500 * f_{c,M} \leq E_D \leq 2000 * f_{c,M}$ . Der Zug-E-Modul von Mauerwerk wird in Zugversuchen analog zum Druck-E-Modul ermittelt. Für Mauerwerk aus Mauerziegeln lautet z.B. die Beziehung:

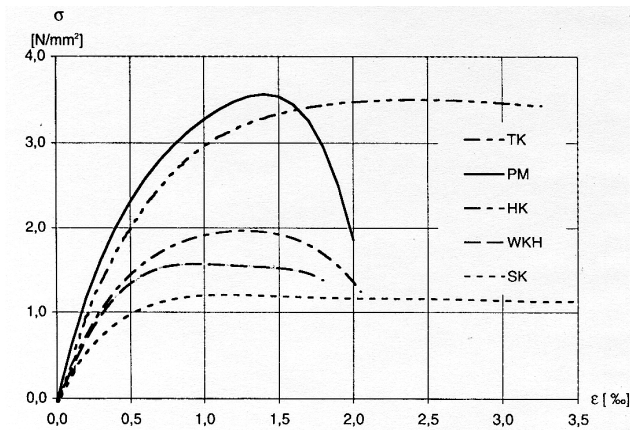
$$E_z = 14700 * f_z^{0,89} \quad (4.5)$$

*Neuwald-Burg, 1999* untersuchte das Trag- und Verformungsverhalten von historischem Mauerwerk mit Kleinpfeilerversuchen. Die Kleinpfeiler wurden aus dem historischen Vorbild am nächsten stehenden Ziegeln mit dünnen, 1,2 cm starken Mörtelfugen hergestellt. Zur Ermittlung des Einflusses der Mörtelsorte wurden bei der Herstellung der Prüfkörper Trasskalk, Putz- und Mauerbinder, hydraulischer Kalk, Wasserkalkhydrat und Sumpfkalk verwendet.

Die mechanischen Eigenschaften der verwendeten Ziegel und der genannten Mörtelsorten untersuchte *Neuwald-Burg* ebenfalls durch Druckversuche. Beim Ziegel wurden Bohrkerne mit  $d/h = 50 \text{ mm} / 50 \text{ mm}$ , beim Mörtel Prismen mit Kantenlängen von  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$  als Probekörper verwendet.

Die Spannungs-Dehnungs-Linien der untersuchten Mörtelproben (Bild 4.3) stimmen mit der Literatur – z.B.: *Hilsdorf und Schäfer, 1992* – überein.

Die Spannungs-Dehnungs-Linien der zentrisch belasteten Kleinpfeiler weisen jedoch eine wesentlich geringere Steifigkeit auf als die entsprechenden Mörtelproben im Versuch (Bild 4.3), obwohl die Aushärtezeiten der Mörtelproben und der Kleinpfeiler gleich lang waren. *Neuwald-Burg* führte auch eine Reihe von Kleinpfeilerversuchen mit außermittiger Belastung an gleichen Probekörpern wie bei den zentrischen Druckversuchen durch. Aus den gemessenen Verschiebungen und aus den Druckkräften ergaben sich Spannungs-Dehnungs-Linien. Im Bild 4.4 sind die Spannungs-Dehnungs-Linien und der Versuchsaufbau dargestellt. Die errechneten Bruchstauchungen waren bei außermittiger Belastung wesentlich größer, als bei den zentrischen Druckversuchen. In Tabelle 4.1 sind die betreffende Werte nach *Neuwald-Burg, 1999* auszugsweise zusammengestellt.



Bindemittel im Mörtel:

TK - Trasskalk

PM - Putz- u. Mauerbinder

(zementhaltig)

HK - hydraulischer Kalk

WKH - Wasserkalkhydrat

SK - Sumpfkalk

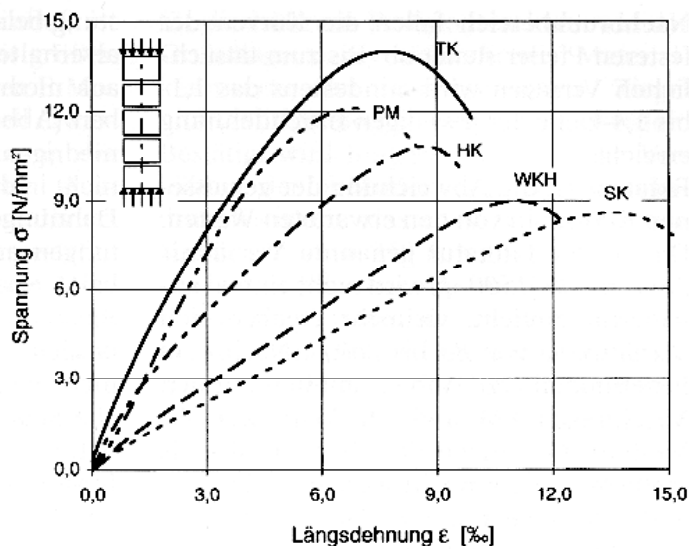


Bild 4.3 Gemittelte Spannungs-Dehnungs-Linien der zentrischen Druckversuche an Mörtelproben (oben) und an Kleinfelern (unten). Aus *Neuwaldburg, 1999*

Tabelle 4.1 Mittelwerte der Druckfestigkeiten und E-Module von mittigen Kleinfelerversuchen. Auszugsweise aus *Neuwaldburg, 1999*

Mörtelart	Mörtel		Pfeiler (mittig)	
	$f_M$ [ $\text{N/mm}^2$ ]	$E_M$ [ $\text{N/mm}^2$ ]	$f_{Mw}$ [ $\text{N/mm}^2$ ]	$E_{Mw}$ [ $\text{N/mm}^2$ ]
Sumpfkalk (SK)	1,2	2500	8,6	700
Weißkalkhydrat (WKH)	1,8	3700	9,0	1000
Trasskalk (TK)	3,5	4700	14,1	3000

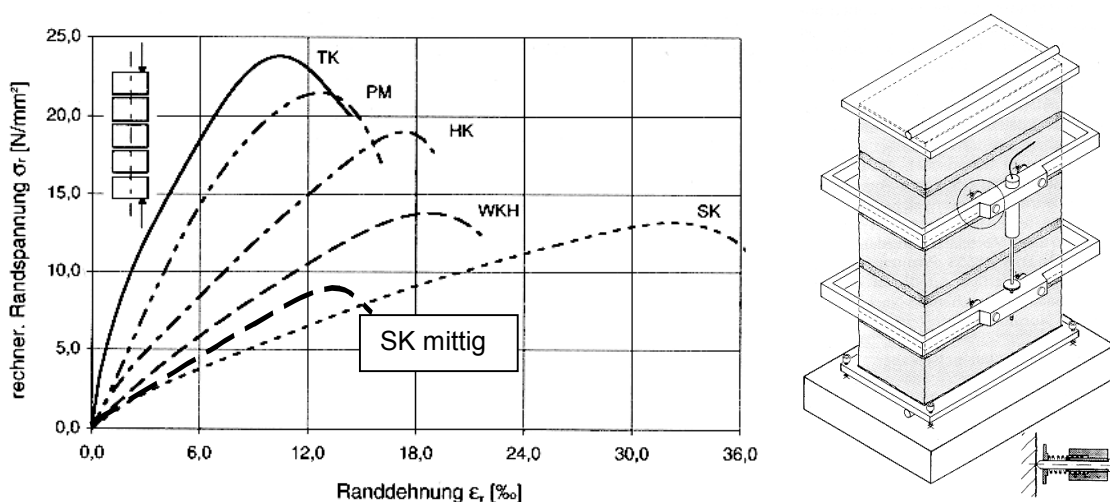


Bild 4.4: Spannungs-Dehnungslinien (links) und Aufbau der außermittigen Druckversuche ( $e \sim d/6$ ) an Kleinfelilern. Aus *Neuwald-Burg, 1999*

Aus der vorhergehenden Übersicht ist erkennbar, dass sowohl der Versagensmechanismus als auch einige Aspekte des Tragverhaltens von historischem Mauerwerk für Gewölbe aus der Literatur entnommen werden können. Zuverlässige Materialparameter für historisches Mauerwerk stehen jedoch nicht zur Verfügung. Für die Untersuchungen mit homogenisierten Mauerwerkseigenschaften mussten diese Parameter durch FE-Berechnungen an Zweiphasen-Kleinfelilermodellen ermittelt werden. Dabei wurden die mechanischen Eigenschaften von Ziegel und Mörtel nach Literaturangaben berücksichtigt.

## 4.2 FE-Untersuchungen zur Ermittlung der Werkstoffparameter des historischen Mauerwerks

Bei schlanken Einwölbungen kann eine verhältnismäßig große Lagerfugenstärke festgestellt werden. Diese reicht von einem Drittel bis zur Hälfte der Steindicke. Die erhöhte Fugenstärke und der verwendete plastische Luftkalkmörtel ermöglichen die mit der großen Schlankheit verbundenen großen Verformungen dieser Konstruktionen.

*Neuwald-Burg, 1997* führte Kleinfelilerversuche mit einer Fugenstärke von 1,2 cm durch. Das Verformungsverhalten dieser Kleinfeliler kann für historisches Mauerwerk mit großer Fugenstärke nicht übernommen werden.

Da die Versuchsergebnisse aus der Literatur nicht unmittelbar eingesetzt werden können, müssen die fehlenden Werkstoffparameter mit Hilfe der FE-Methode ermittelt werden.

Mit Hilfe der Finiten-Element-Methode können die Werkstoffparameter von Mauerwerk aus der Geometrie und aus den mechanischen Eigenschaften der Komponenten - „Phasen“ - für weitere Untersuchungen ermittelt werden. Des Weiteren kann der Einfluss der Ausführung, d.h. die Qualität des Verbandes zwischen den Komponenten, auf das Tragverhalten des Mauerwerks getrennt simuliert und aus-

gewertet werden. Dabei werden Kleinfeilerversuche mit detaillierten FE-Modellen simuliert. In diesen Modellen sind sowohl der Ziegelstein als auch die Mörtelfuge getrennt abgebildet, wobei die Elementgruppen mit den entsprechenden mechanischen Eigenschaften versehen werden. Diese Art von Modell wird in der Literatur als „Mikromodell“ oder Zweiphasenmodell bezeichnet (z.B. *Rots, 1991*). Zweiphasenmodelle von Mauerwerk können unterschiedlich fein aufgebaut werden. Bei allen Versionen werden die Ziegelsteine mit Kontinuumelementen abgebildet. Die Mörtelfugen können je nach Bedarf als „Interface-Element“ oder als Kontinuumelement idealisiert werden. Eine weitere Verfeinerung des Modells ist die Berücksichtigung des Verbundes zwischen Ziegel und Mörtelfuge. Hierzu werden auch „Interface-Elemente“ verwendet. Die grobe Erfassung der Mörtel­eigenschaften mit Interface-Elementen wird in der englischsprachigen Fachliteratur auch als Meso-Modellierung bezeichnet [*Rots, 1991*] und wird meistens zur Untersuchung von kleineren Wandscheiben eingesetzt. Mit den feineren Zweiphasenmodellen können Detailfragen des Tragverhaltens wie beispielsweise die Interaktion zwischen Ziegel und Mörtel untersucht werden.

Unter anderem führten *Probst, 1981* sowie *Sabha und Weigert, 1996* eine Reihe von FE-Berechnungen an Mauerwerksmodellen unter zentrischem Axialdruck durch. Alle diese Untersuchungen wurden unter Annahme von homogenem, isotropem und linear-elastischem Werkstoffverhalten durchgeführt. Obwohl ihre Ergebnisse nur den noch unbeschädigten Zustand erfassen, liefern sie wertvolle Informationen über die Interaktion zwischen Ziegel und Mörtel. In den letzten Jahren wird bei Untersuchungen an Mauerwerk immer häufiger nichtlineares Werkstoffverhalten berücksichtigt. *Trautz, 1998* ermittelte Werkstoffparameter durch die Simulation von Kleinfeilerversuchen mittels FE-Berechnungen an Mauerwerks-Einphasenmodellen. Er richtete sich dabei nach den Bruchlasten im Versuch. Dabei berücksichtigte er im Werkstoffgesetz für Mauerwerk Rissbildung (durch das Rissbandmodell) und Plastifizierung. *Pöschel und Purtak, 2000* untersuchten den Einfluss der Schlankheit auf die Tragfähigkeit von Mauerwerk an Zweiphasenmodellen. Die geometrischen Verhältnisse ihrer Modelle richteten sich nach Mauerwerk aus Elbsandstein.

Der Querschnitt eines Elbsandsteinquaders ist quadratisch, somit können auch diese Ergebnisse nicht für die nachstehenden Untersuchungen herangezogen werden.

Die Ergebnisse von *Trautz* stützen sich auf Kleinfeilerversuche mit dünnen Mörtelfugen, die Ergebnisse von *Pöschel und Purtak* sich dagegen auf ein Modell mit hohem Steinquerschnitt. Beide entsprechen nicht der für die Untersuchungen ausgewählten Geometrie: Ziegelsteine mit historischem „Normalformat“ und dicke Mörtelfuge. Deshalb mussten für die vorliegende Arbeit zur Ermittlung der Werkstoffparameter für die Einphasenmodelle eigene FE-Berechnungen mit Zweiphasenmodellen durchgeführt werden.

Die Besonderheiten der Methode bei Problemen mit nichtlinearem Materialverhalten werden im Kapitel 8.2 erörtert. Die verwendeten Elementtypen und Werkstoffgesetze sowie die numerische Verfahren in den eigenen Untersuchungen werden ebenfalls dort zusammengefasst.

Vorerst wurden Simulationen an dem im Bild 4.6 dargestellten *räumlichen* Zweiphasen-Kleinfeilermodell durchgeführt. Zur Modellierung der Werkstoffeigenschaften wurde die Kombination des Drucker-Prager Versagenskriteriums mit

„tension cut-off“ verwendet (Bild 8.15). Für die Modellierung der Rissbildung wurde die Rissbandmethode eingesetzt (s. noch Abschnitt 8.3.2).

Das FE-Modell wurde aus 8-knotigen, quaderförmigen Elementen mit linearer Verschiebungsfunktion aufgebaut, wobei die zweifache Symmetrie des abgebildeten Probekörpers ausgenutzt wurde. Die einzelnen Ziegelsteine wurden durch  $l \times b \times h = 18 \times 8 \times 4$ , die Mörtelfugen durch  $l \times b \times h = 18 \times 8 \times 8$  Elemente abgebildet. Nähere Angaben über das verwendete FE-Programm DIANA und seine Besonderheiten sind im Abschnitt 8.3 zusammengestellt.

Alle Knoten der Auflagerfläche waren räumlich festgehalten. Die anschließenden Teile des Kleinfeilers wurden durch Verschiebungsverhinderung senkrecht auf die Grenzflächen berücksichtigt. Die Werkstoffeigenschaften wurden gemäß der Zusammenstellung in Tabelle 3.1 angenommen.

Es wurden zentrische und exzentrische Druckversuche am räumlichen Modell simuliert. Das Modell wurde durch Aufbringen einer Auflagerverschiebung, also verschiebungsgesteuert (s. Abschnitt 8.3.4), belastet.

In Bild 4.6 und Bild 4.7 sind die Lage des Modells innerhalb des Kleinfeilerkörpers, die Belastung, die Isoflächen der Rissdehnungen und die Isoflächen der ersten Hauptspannungen im Mörtel dargestellt.

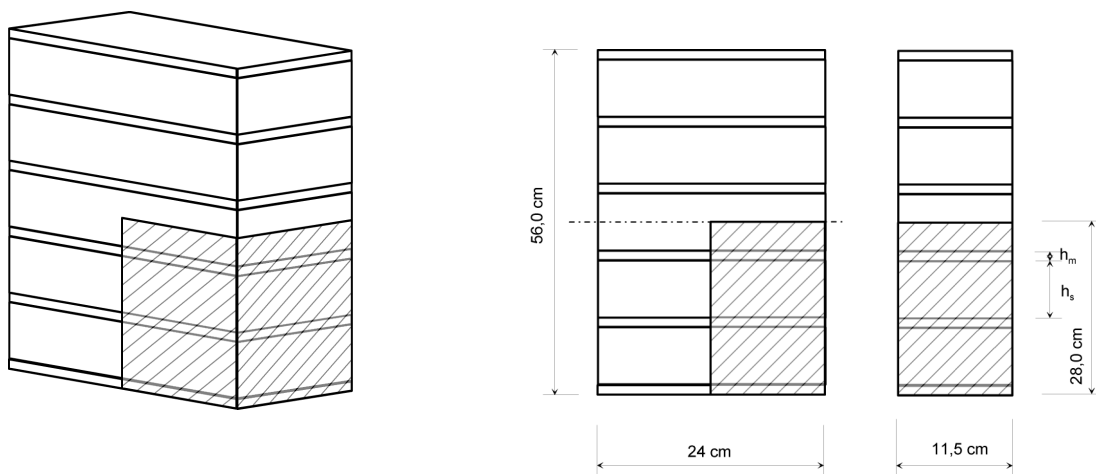


Bild 4.5: Kleinfeiler schematisch. Bereich des FE-Modells schraffiert (isometrische Darstellung links, Vorder- und Seitenansicht rechts)

Unter zentrischem Druck (Bild 4.6) wird die Querdehnung des weichen Mörtels durch den Ziegelstein verhindert. Im Mörtel entsteht dadurch mit Ausnahme der Ränder ein dreidimensionaler Spannungszustand, in dem alle Hauptspannungen Druckspannungen sind (Bild 4.6d). Da die drei Hauptspannungskomponenten meistens unterschiedlich groß sind, entspricht diese Bezeichnung der Definition von „hydrostatisch“ nicht. Deshalb ist es sinnvoller, den Zustand als „quasi-hydrostatisch“ zu bezeichnen.

Die Isoflächen im Bild 4.6 zeigen eine weitgehend gleiche Verteilung der ersten Hauptspannungen entlang der z-Achse, d.h. in Längsrichtung der Mörtelfuge. In den Fugenquerschnitten (in der xy-Ebene) herrscht zwischen den relativ kleinen Stirnzonen durch die Behinderung ein ebener Verformungszustand. Die Länge der Stirnzonen ist etwa gleich groß wie die Höhe der Mörtelfuge. An der Auflagerflä-

che sind die Verschiebungen quer zur Lastrichtung behindert, somit ist die Verteilung der Spannungen anders als im mittleren Abschnitt des Kleinfeylers und dadurch nicht repräsentativ. Im Mörtel entstehen Risse in halber Höhe der Fuge in den Ecken (Bild 4.6d). Im Ziegel, an den mit dem Mörtel benachbarten Rändern, bilden sich ebenfalls Risse (Bild 4.6c). Diese Risse verlaufen parallel zu den Kanten. Im Bild 4.6c sind oberhalb und unterhalb der Mörtelfuge Ansätze von Spaltrissen zu erkennen.

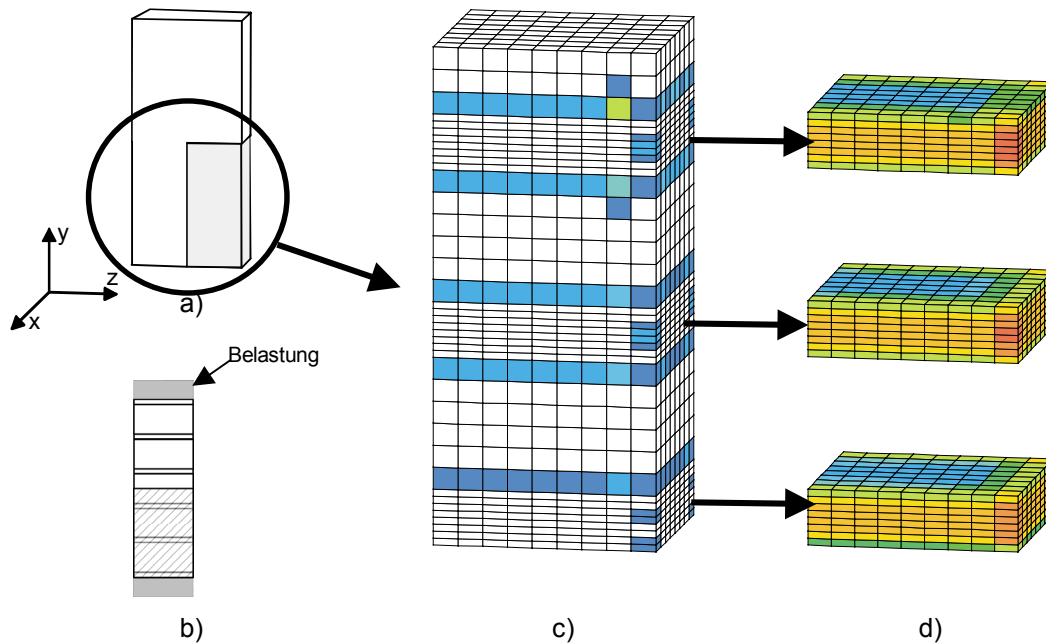


Bild 4.6: Rissdehnungs- und Hauptspannungs-Isosflächen des FE-Modells bei zentrischer Druckbeanspruchung

- a) Isometrie der Kleinfeyler mit dem markierten Bereich des Modells
- b) Lastform: Seitenansicht in Richtung „z“
- c) Isometrie der durch Risse geschädigten Bereiche im Modell (dunkelblau bis grün: kleine bis mittlere Rissdehnungen)
- d) Isometrie der ersten Hauptspannungen in den Mörtelfugen (blau bis grün: Druckspannungen, gelb bis orange: Zugspannungen)

Die außermittige Belastung wurde durch Verdrehen der Auflagerfläche um die hintere Längskante aufgebracht. Im Bild 4.7d ist die Verteilung der ersten Hauptspannungen in den Mörtelfugen dargestellt. Sie entspricht in z-Richtung der Verteilung bei zentrischer Druckbelastung: Über 75% der Mörtelfugenlänge sind die Spannungen in den xy-Querschnitten gleich verteilt. Wegen des Randeinflusses verlaufen die Spannungen in der Nähe der Stirnfläche anders. Bei außermittiger Belastung bröckelt der Mörtel auf etwa 60% der Stirnseiten aus. Die hochbelasteten Längskanten der Ziegel weisen solche Risse auf, wie sie die zentrisch gedrückten Ziegel umlaufend zeigen.

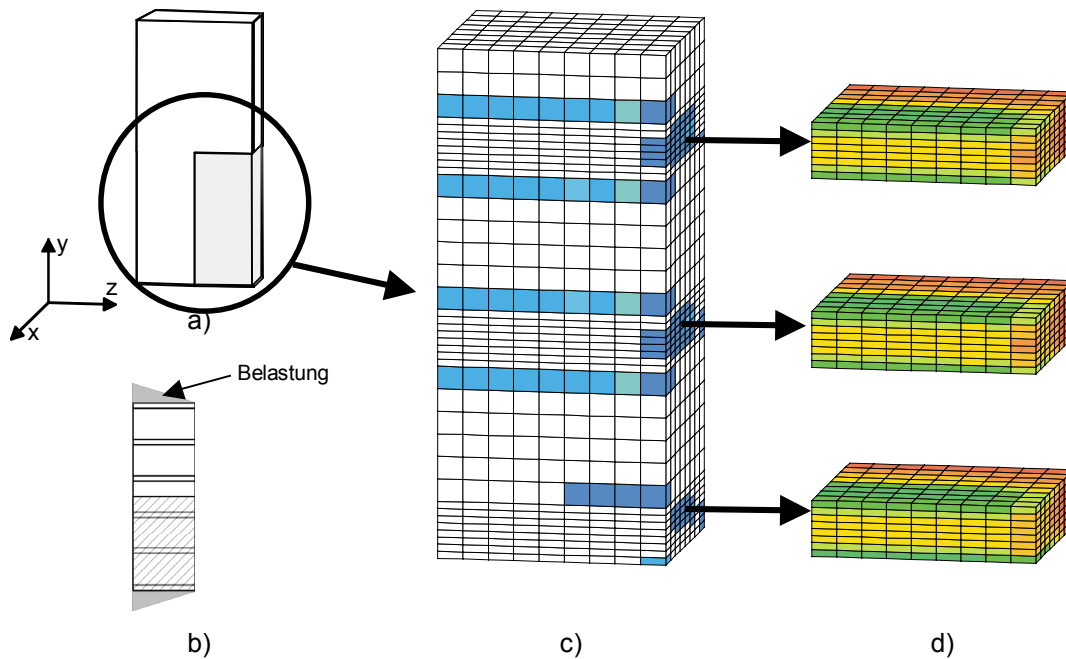


Bild 4.7: Rissdehnungs- und Hauptspannungs-Isoflächen des FE-Modells bei außermittiger Druckbeanspruchung ( $e \cong d/6$ )

- a) Isometrie der Kleinfeiler mit dem markierten Bereich des Modells
- b) Lastform: Seitenansicht in Richtung „z“
- c) Isometrie der durch Risse geschädigten Bereiche im Modell (dunkelblau bis grün: kleine bis mittlere Rissdehnungen)
- d) Isometrie der ersten Hauptspannungen der Mörtelfugen (blau bis grün: Druckspannungen, gelb bis orange: Zugspannungen)

Beide Beispiele zeigen, dass die Spannungen und Dehnungen in einem Kleinfeiler in z-Richtung auf etwa 75% der Länge gleichmäßig verteilt sind. Die Randstörung ist an den Stirnseiten auf einen kurzen Bereich begrenzt. Die Tiefe dieses Bereichs ist etwa so groß wie die Fugenhöhe. Deshalb ist die Untersuchung der Interaktion zwischen Ziegel und Mörtel sowie des Verbundes zwischen den beiden Mauerwerkskomponenten mit ebenen FE-Modellen weitgehend zulässig. Für die FE-Untersuchungen in der Ebene wurden Modelle aus einer Mörtelfuge mit den oberhalb und unterhalb davon liegenden halben Ziegelsteinen gebildet. Im Bild 4.8 ist die Lage des Modells in einem Kleinfeilerlängsschnitt dargestellt.

Die numerischen Untersuchungen sollen bei den gewählten Werkstoffen (historische Ziegel und Luftkalkmörtel) den Einfluss folgender Parameter klären:

- Dicke der Mörtelfuge,
- Qualität der Ausführung, d.h. des Verbundes zwischen Ziegel und Mörtel.

Des Weiteren soll die Frage geklärt werden, ob eine Delaminierung vor dem Versagen, wie von *Trautz, 1998* beschrieben, bei halbsteinstarken historischem Mauerwerk mit dicken Mörtelfugen auftreten kann.

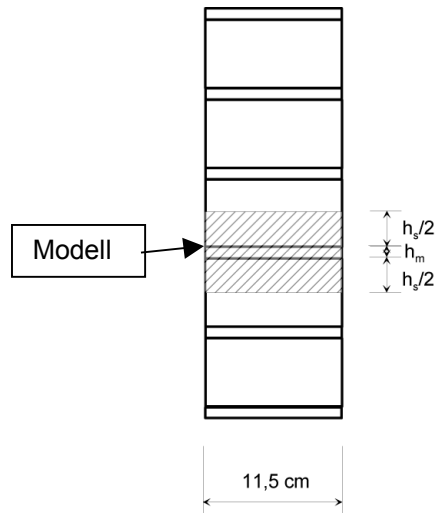


Bild 4.8: Kleinfeylerlängsschnitt mit Modell

Zur Untersuchung des Einflusses der Fugenstärke wurden FE-Berechnungen an ebenen Mauerwerkmodellen mit 11,5 cm / 7,0 cm Ziegelquerschnitt mit 1,2 cm Fugendicke (dünne Fuge) und mit 3,5 cm Fugendicke (dicke Fuge) durchgeführt. Im Bild 4.9 sind die Fugenränder beider Modelle kurz vor dem Versagen abgebildet.

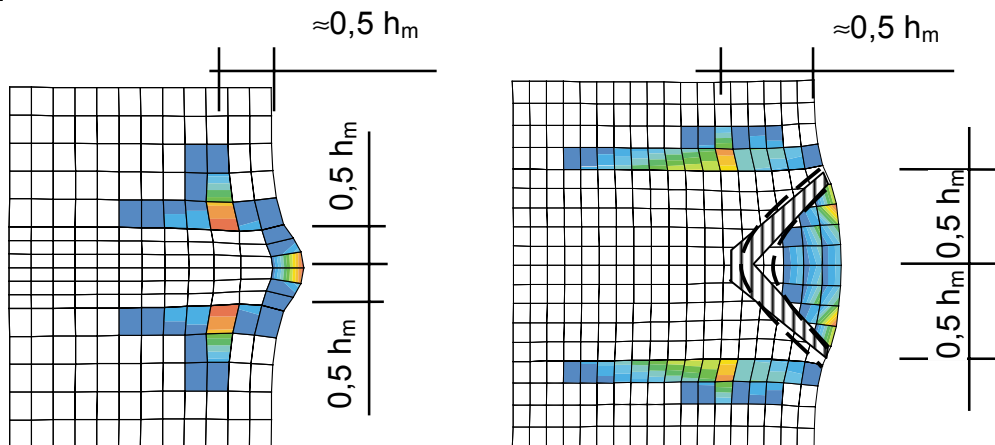


Bild 4.9: Fugenränder mit den Isoflächen der Rissdehnungen - bei dünner (links), bei dicker Mörtelfuge (rechts) (blau: kleine, gelb bis orange: große Rissdehnung). Im rechten Bild ist der liegende V-förmige plastifizierte Bereich vertikal schraffiert. Die realen Grenzen dieses Bereiches sind mit gestrichelten Linien dargestellt.

Die Verformungen sind in einem vergrößerten Maßstab, die durch Risse beschädigten Elemente farblich dargestellt. Der Randbereich des Mörtels ist von Rissen stark durchsetzt. Das ist der Bereich der Ausbröckelung. Hinter der Ausbröckelung verlaufen die Trajektorien der Druckspannungen bogenförmig zwischen den anschließenden Ziegelflächen. Auf der Rückseite der Ausbröckelung plastifiziert sich der Mörtel karreeförmig. Durch die Elementierung nimmt dieser Bereich die Form eines liegenden „V“ an. Bei beiden Fugenstärken ist die Lage des Risses im Ziegel proportional gleich: Der Abstand des Risses von der Fugenkante gleicht etwa der halben Fugenstärke. Die Rissbilder gehören zu unterschiedlichen Laststufen.



Im Bild 4.10 ist das verformte ebene Kleinpfeilermodell mit den Isoflächen der Rissdehnungen und mit einer schematischen Darstellung der Drucktrajektorien in den Randbereichen dargestellt. Des Weiteren sind folgende Querschnitte gekennzeichnet: Berührungsfläche zwischen Mörtel und Ziegel (Schnitt 1-1) und Querschnitt in halber Höhe der Mörtelfuge (Schnitt 2-2). Im Bild 4.11 ist die Verteilung der Druckspannungen in den Querschnitten 1-1 und 2-2 im ungerissenen Zustand und kurz vor dem Spaltversagen des Ziegels dargestellt. Im ungerissenen Zustand ist die Verteilung der Druckspannungen in den zwei Querschnitten beinahe identisch. An beiden Rändern auf einer Länge von je ca. 1 cm weichen die Kurven nur leicht voneinander ab. Der Unterschied ist am Rand am größten und beträgt lediglich 7,5%. Kurz vor dem Spaltversagen des Ziegels und damit dem Versagen des ganzen Systems ist der Unterschied im Verlauf wesentlich größer. Die Druckspannungen im mittleren Bereich des Mörtels sind etwa gleichmäßig verteilt. An den Rändern jeweils auf einer Länge von ca. 2 cm fällt ihr Wert von 1.800 kN/m<sup>2</sup> auf 1.440 kN/m<sup>2</sup>, d.h. um 20%. In der Berührungsfläche (Schnitt 1-1) verlaufen die Druckspannungen unterschiedlich: Die Spannungen sind zwar im mittleren Bereich etwa gleich groß wie in halber Höhe der Mörtelfuge, wohingegen dieser Abschnitt aber kürzer ist als im Mörtel (Schnitt 2-2). Zu den Rändern hin fällt der Wert erst von 1.805 kN/m<sup>2</sup> auf 1.630 kN/m<sup>2</sup> ab, nimmt aber in unmittelbarer Nähe des Randes wieder zu und steigt auf die rechnerische Größe von 1.973 kN/m<sup>2</sup>. Der etwas stärkere Abfall der Druckspannungen in der halben Höhe der Mörtelfuge und der leichte Abfall und plötzliche Anstieg am Rand der Berührungsfläche wird durch Beschädigungen des Fugenmörtels verursacht. Durch die Rissbildung und gleichzeitige Plastifizierung des Mörtels im Inneren der Ausbröckelung und im dahinter liegenden Mörtelbereich fällt die Mörtelsteifigkeit stark ab. Der angrenzende, unbeschädigte Mörtelbereich muss daher mehr Last übernehmen. Die Spannungen bilden einen „Entlastungsbogen“ und umfahren den beschädigten Bereich. Damit treffen sie die Berührungsfläche am Rand „gebündelt“. Im allgemeinen wird das Spaltversagen des Ziegels im Mauerwerk durch zwei wesentlichen Einflüsse verursacht. Der erste Einfluss ist die Teilflächenbelastung, die durch einen vollständigen Ausfall – „Ausbröckelung“ – der beschädigten Ränder des Fugenmörtels entsteht. Der andere Einfluss ist das durch das unterschiedliche Querdehnungsverhalten von steifem Ziegelstein und weichem Mörtel verursachte Spalten des Ziegels. Aus Bild 4.11 ist ersichtlich, dass der beschädigte Mörtel kurz vor dem Spaltversagen des Ziegels noch durchaus tragfähig ist.

Im Bild 4.12 ist der Verlauf der Schubspannungen in der Berührungsfläche (Schnitt 1-1) bei drei Stufen der Belastung dargestellt. Die erste Stufe ist im ungerissenen Zustand. Der Höchstwert der Schubspannung wird 0,6 cm vom Rand entfernt aufgenommen. Der weitere Verlauf der Kurve ist flach, die Größe der Spannung nimmt in Richtung zur Mitte ab. Bei der nächsten dargestellten Laststufe ist die Rissbildung am Fugenrand fortgeschritten. Die Stelle des Höchstwertes ist leicht nach innen verschoben. Die dritte Laststufe ist kurz vor dem Spaltversagen des Ziegels. Der Maximalwert von 149 kN/m<sup>2</sup> wird etwa 1 cm vom Rand entfernt erreicht. Die Schubspannung nimmt Richtung Mitte erst steiler, dann flacher ab. Ein Verbundversagen tritt nicht auf.

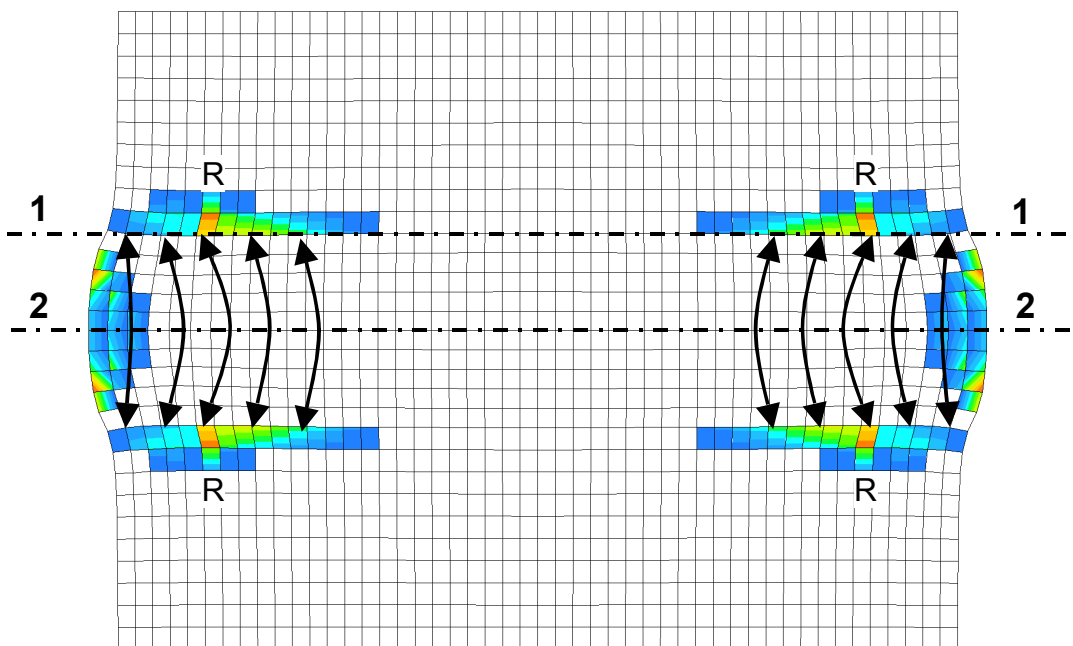


Bild 4.10: Ebenes Kleinfemlermodell am Anfang der Bildung des zum Versagen führenden Risses „R“ im Ziegel. Die Isoflächen der Rissdehnungen sind schraffiert (blau: kleine, gelb bis orange große Rissdehnungen). Die Neigung der Drucktrajektorien ist verzerrt dargestellt. Die Querschnitte in halber Höhe der Mörtelfuge und durch die Berührungsfläche zwischen Mörtel und Ziegel sind gekennzeichnet.

Zur Untersuchung der Ursachen des Ziegel- bzw. Mauersteinspaltes wurden von *Sabha und Weigert, 1996* FE-Berechnungen mit linear-elastischen Materialeigenschaften durchgeführt. Nach ihren Ergebnissen sind dünne Ziegel gegenüber Teilflächenpressung durch Ausbröckelung unempfindlich. Als Ursache für das Ziegelspalten geben sie das unterschiedliche Dehnungsverhalten der Komponenten an. Das Verhältnis der Schub- und Normalspannungen in der Berührungsfläche im ungerissenen Zustand und kurz vor dem Spaltversagen des Ziegels zeigen, dass der Querdehnungsunterschied mit zunehmender Belastung ebenfalls zunimmt: Die maximale Neigung der zweiten Hauptspannung in der Berührungsfläche beträgt  $1^\circ$  im ungerissenen Zustand und etwa  $6^\circ$  vor dem Ziegelspalten an der Stelle des Risses. Die Neigung der zweiten Hauptspannungen gegen die Vertikale in der Berührungsfläche nimmt von der Mitte Richtung Rand erst zu. Ab der Stelle des Spaltrisses „R“, ca.  $\frac{1}{2}h_m$  vom Rand entfernt, fällt sie auf  $0^\circ$  ab. Der plastifizierte Mörtel ist noch weicher als im elastischen Zustand.

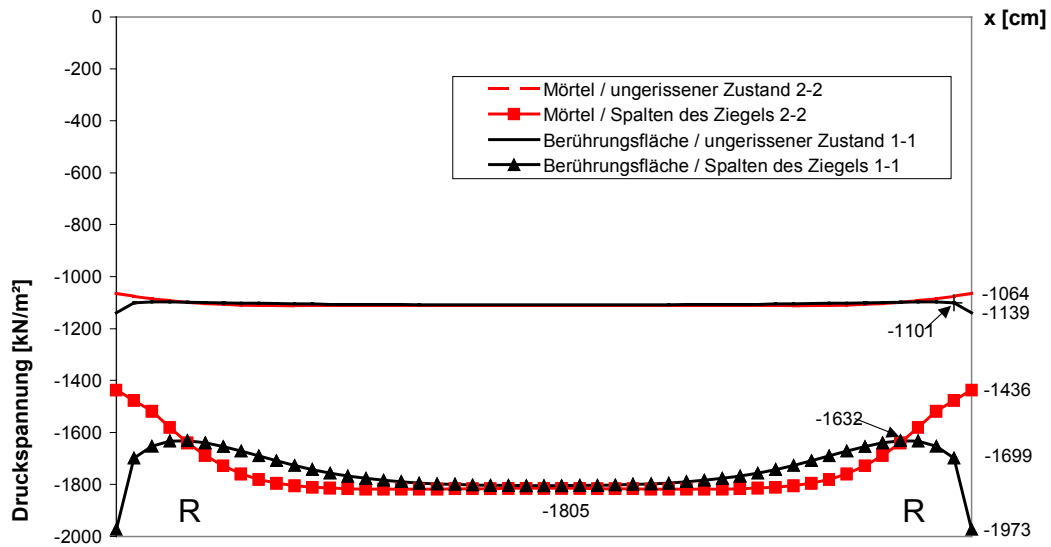


Bild 4.11: Verteilung der Vertikalspannungen im Kleinfeilermodell entlang der Berührungsfläche zwischen Mörtelfuge und Ziegel (Schnitt 1-1) sowie in halber Höhe der Mörtelfuge (Schnitt 2-2) in ungerissenem Zustand und kurz vor Versagen des Ziegels – Schnitte 1-1 und 2-2 nach Bild 4.10. Stelle der Rissbildung im Ziegel: „R“.

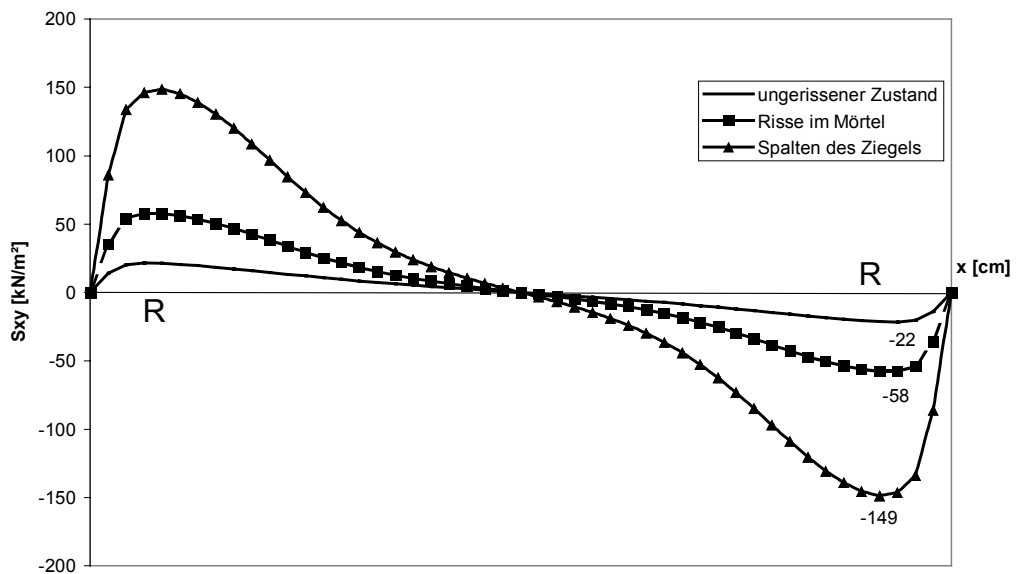


Bild 4.12: Verteilung der Schubspannungen in der Berührungsfläche 1-1 zwischen Ziegel und Mörtel (Schnitt 1-1 nach Bild 4.10). Stelle der Rissbildung im Ziegel: „R“.

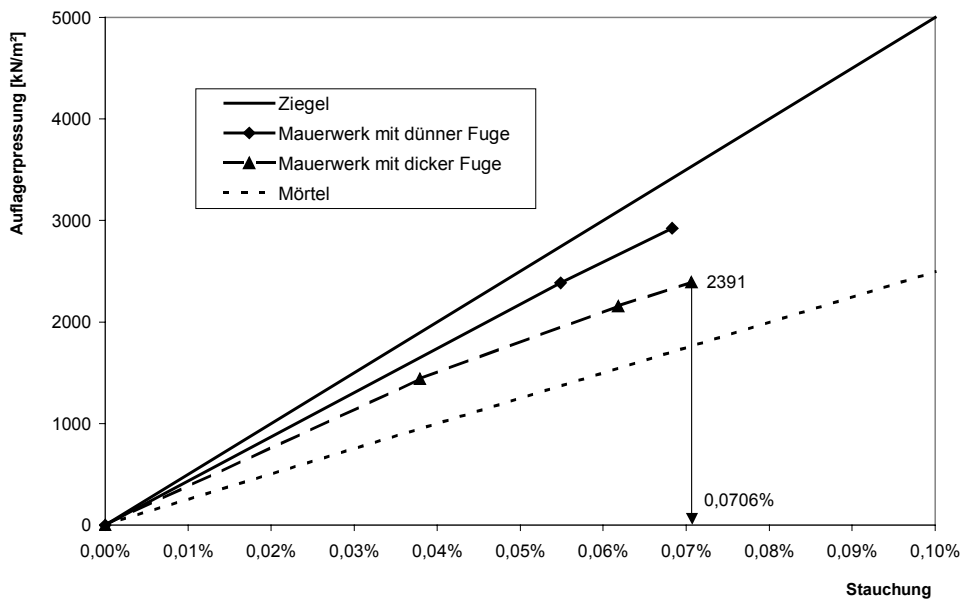


Bild 4.13: Last-Verschiebungskurven in Längsrichtung der ebenen Mauerwerksmodelle mit dünner ( $h_m = 1,2 \text{ cm}$ ) und dicker ( $h_m = 3,5 \text{ cm}$ ) Lagerfuge

Der Einfluss der Fugenstärke auf das Verformungsverhalten von Mauerwerk ist im Bild 4.13 in den Last-Verschiebungskurven der Modelle dargestellt. In beiden Fällen ist ein leicht unterlineares Verschiebungsverhalten vorhanden. Der Verlauf der Kurven entspricht tendenziell den Kurven im Bild 4.3. Am Endpunkt der jeweiligen Kurve konvergierte die FE-Rechnung nicht mehr. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Höchstlast erreicht wurde. Vielmehr kann das daran liegen, dass durch die große Anzahl der Elemente im gerissenen Zustand das Gleichungssystem schlecht konditioniert ist. Der Verlauf beider Kurven zeigt jedoch, dass bei dünneren Mörtelfugen das Mauerwerk steifer ist und eine höhere Tragfähigkeit hat. Daher wird angenommen, dass das Mauerwerk mit dünnen Lagerfugen die Versagenslast bei etwas kleinerer Stauchung erreicht als mit dicken Fugen.

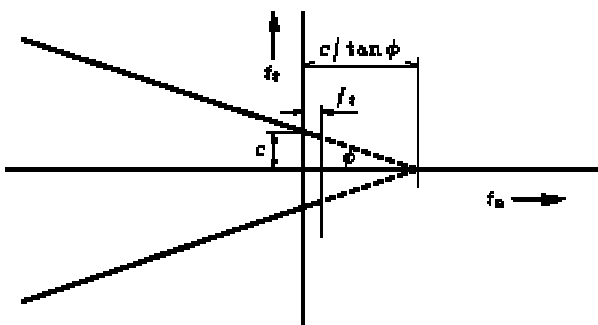


Bild 4.14: Das Coulomb'sche Reibungsgesetz zur Modellierung des Verbundes

Der Einfluss der Verbundqualität wurde an denselben ebenen Mauerwerksmodellen mit dicker Lagerfuge untersucht. Im Bild 4.14 ist das verwendete Coulomb'sche Reibungsmodell grafisch dargestellt. Die Kohäsion bzw.

Haftscherfestigkeit wurde mit einem Mindestwert von  $c = 0,001 \text{ kN/m}^2$  und einem Höchstwert von  $c = 0,1 \text{ kN/m}^2$  berücksichtigt. Die Tangente des Reibungswinkels „ $\varphi$ “ variierte zwischen  $0,1 \leq \tan \varphi \leq 0,4$ .

Der Einfluss beider Größen auf das Tragverhalten zeigt sich in den Last-Verschiebungskurven (Bild 4.15): Bei einem schlechten Verbund ist nur eine niedrigere Tragfähigkeit zu erwarten, wohingegen das Verformungsverhalten fast gleich ist. Eine weitere Besonderheit des Tragverhaltens ist, dass bei einer niedrigen Haftscherfestigkeit von  $c = 0,001 \text{ kN/m}^2$  und einem niedrig angenommenen Reibungsbeiwert von  $0,2 \leq \tan \varphi \leq 0,3$  kein Gleiten zwischen Ziegel und Mörtel auftritt. Die Druckkraft beim Versagen der sogenannten Haftscherfestigkeit ist so groß, dass die Reibkraft das Gleiten zwischen Mörtelfuge und Ziegel verhindert. Die zu diesem Fall gehörige Last-Verschiebungskurve entspricht der Kurve bei gutem Verbund.

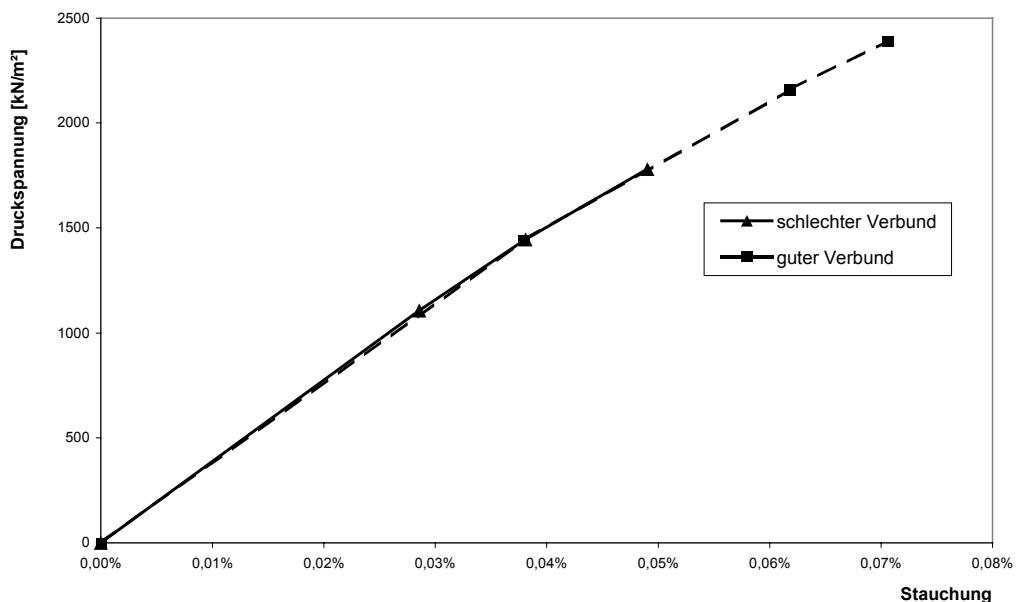


Bild 4.15: Last-Verschiebungskurven von Druckversuchs-Simulationen an Mauerwerk bei schlechtem Verbund ( $c = 0,001 \text{ kN/m}^2$ ,  $\tan \varphi = 0,1$ ) und bei gutem Verbund ( $c = 0,1 \text{ kN/m}^2$ ,  $\tan \varphi = 0,4$ )

Wie Eingangs erwähnt, sind die in Tabelle 4.1 zusammengefassten Ergebnisse insofern ungewöhnlich, dass das Mauerwerk eine geringere Steifigkeit hat als die Probe aus dem zugehörigen Mörtel. Um die Vorgänge im Mauerwerk zu klären, wurden zwei FE-Berechnungen an ebenen Kleinfemlermodellen durchgeführt. Im Bild 4.16 sind das Modell und die Belastung schematisch dargestellt. In beiden Fällen wurde die Belastung verformungsgesteuert aufgebracht. Der Lastfall Axialdruck mit kleiner Außermittigkeit ( $e \approx d/6$ ) wurde durch Verdrehung der Auflagerflächen (Schnitt 1-1) um die Punkte „A“ simuliert. Der Lastfall Axialdruck mit großer Außermittigkeit ( $e \approx d/3$ ) wurde durch das Verdrehen der halben Auflagerfläche um die Punkte „B“ erzeugt. In diesem Fall wurden die Interface-Elemente aus der Zugzone unterhalb und oberhalb der Mörtelfuge entfernt, um die numerischen Probleme während des Rechenganges zu reduzieren. In Bild 4.17 und Bild 4.18

sind die Isoflächen der ersten Hauptspannungen (links) und die Isoflächen der Rissdehnungen (rechts) dargestellt. Die ersten Hauptspannungen in den nachgezeichneten Bereichen der Mörtelfugen sind negativ. Der Mörtel befindet sich also in einem quasi-hydrostatischen Spannungszustand. Interessant ist dabei, dass Bereiche des Ziegels ebenfalls unter allseitigem Druck stehen. Dabei handelt es sich um dreieckförmige Bereiche an den Auflagern am höher belasteten Rand. Bei der Belastung mit großer Außermittigkeit treten diese Bereiche zusätzlich im Bereich der Drehpunkte auf, da hier die Querdehnung durch die anschließenden, nicht belasteten Ziegelbereiche verhindert wird. Die Rissbilder an den höher belasteten Rändern sind ähnlich wie beim Axialdruck.

Bei der Belastung mit großer Außermittigkeit entstehen zusätzlich Risse im Mörtel „ $R_M$ “ und im Ziegel  $R_z$ “ an den Spitzen der klaffenden Risse (Bild 4.18). In Bild 4.19 und Bild 4.20 ist der Verlauf der Druckspannungen in den Querschnitten 1-1 (Auflager bzw. in halber Höhe des Ziegels) und 2-2 (in halber Höhe der Mörtelfuge) dargestellt. Die Druckspannungen nehmen in beiden Lastfällen von Null abweichende Werte zwischen den Drehpunkten an. Diese Spannungen sind durch Querverformungen verursacht. In beiden Lastfällen gibt es einen starken Abfall der Druckspannungen im Mörtel am beschädigten Fugenrand. Die Entwicklung der Druckspannung im Ziegel wird besonders bei kleiner Außermittigkeit durch die Beschädigungen am Fugenrand beeinflusst. Anhand der vorliegenden Ergebnisse kann der Verlauf der Druckspannungen für die weiteren Untersuchungen näherungsweise als linear angenommen werden.

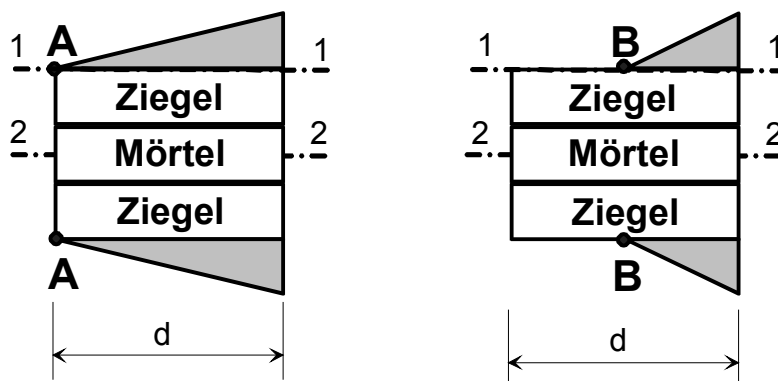


Bild 4.16: Ebenes Mauerwerksmodell aus einer Mörtelfuge und zwei halben Ziegeln. Belastung durch Verdrehung der jeweiligen Auflagerfläche um die Punkte „A“ und „B“, Drehung um die Ziegelkante entspricht einer Außermittigkeit von etwa  $e = d/6$  (links) und Drehung um die Querschnittsachse entspricht einer Außermittigkeit von etwa  $e = d/3$ .

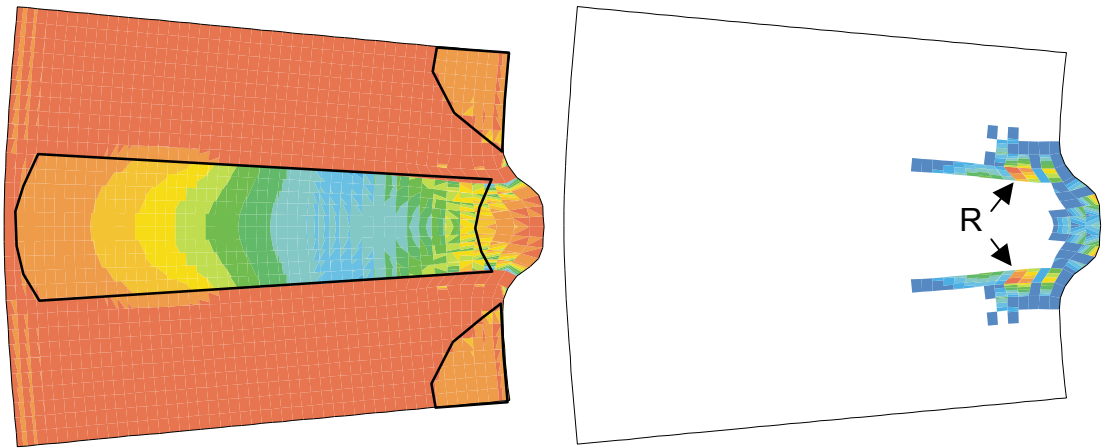


Bild 4.17: Ebenes Mauerwerksmodell unter außermittig angreifendem Axialdruck ( $e = d/6$ ), siehe Bild 4.16 (links) am Anfang der Bildung der zum Versagen führenden Risse „R“ im Ziegel. Isoflächen der ersten Hauptspannungen (links) und Isoflächen der Rissdehnungen (rechts). Die nachgezeichneten Bereiche (links) sind im plastischen Zustand.

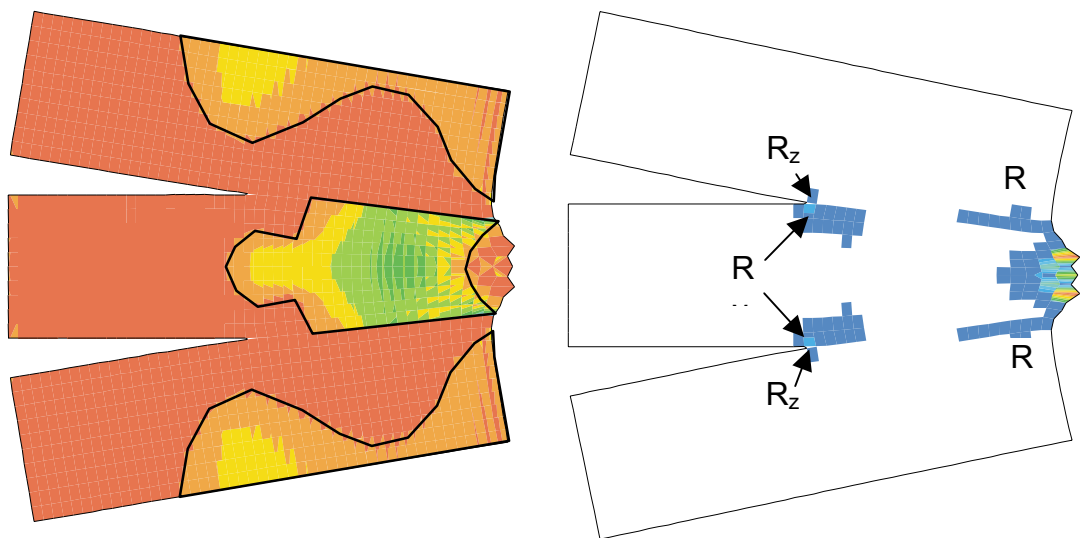


Bild 4.18: Ebenes Mauerwerksmodell unter außermittig angreifendem Axialdruck ( $e = d/3$ ), siehe Bild 4.16 (rechst), am Anfang der Bildung der zum Versagen führenden Risse im Ziegel „R“. Isoflächen der ersten Hauptspannungen (links) und Isoflächen der Rissdehnungen (rechts). Die nachgezeichneten Bereiche (links) sind im plastischen Zustand.

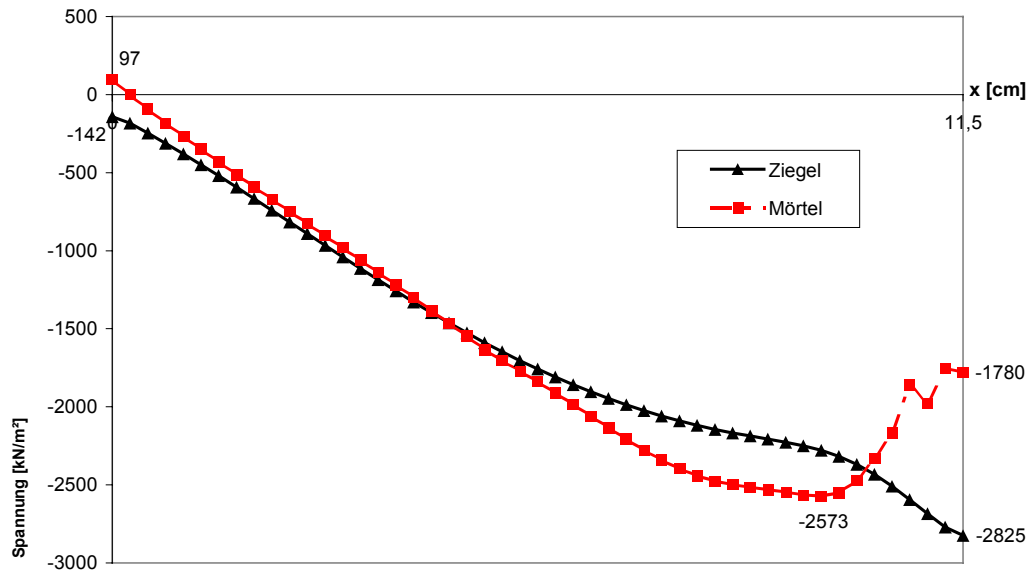


Bild 4.19: Ebenes Mauerwerksmodell, außermittige Belastung nach Bild 4.16 (links), Verteilung der vertikalen Druckspannungen auf der Auflagerfläche des Ziegels (Schnitt 1-1) und in halber Höhe der Mörtelfuge (Schnitt 2-2) beim numerischen Versagen

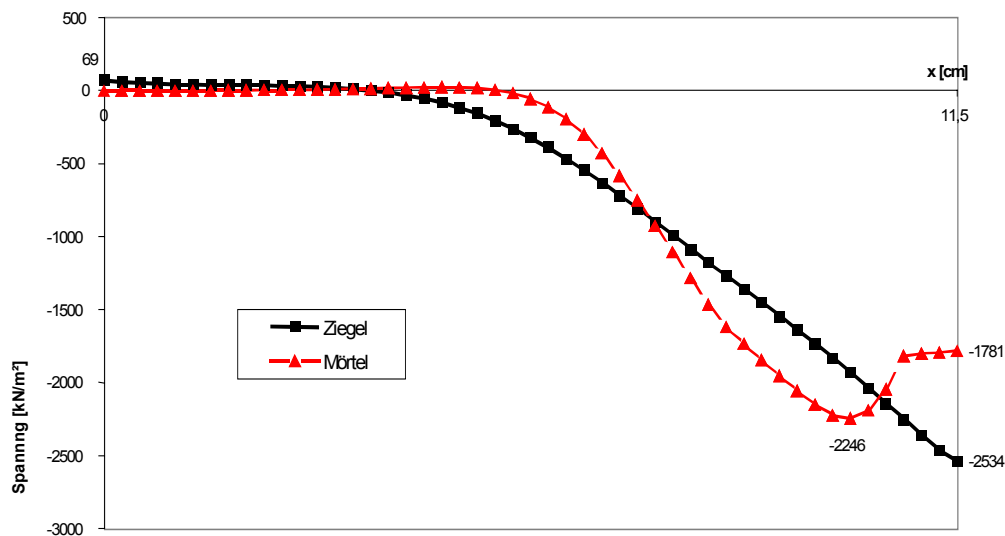


Bild 4.20: Ebenes Mauerwerksmodell, außermittige Belastung nach Bild 4.16 (rechts), Verteilung der vertikalen Druckspannungen auf der Auflagerfläche des Ziegels (Schnitt 1-1) und in halber Höhe der Mörtelfuge (Schnitt 2-2) beim numerischen Versagen

Im Bild 4.21 sind die Spannungs-Dehnungslinien des Kleinfemlermodells für die drei untersuchten Lastfälle dargestellt. Die Spannungswerte wurden aus dem höchstbelasteten Element am Ziegelrand entnommen. Die zugehörigen Stauungen wurden aus den Verschiebungen der Auflagerkanten zurückgerechnet. Abweichend von den in Bild 4.3 und Bild 4.4 dargestellten Kurven korrespondieren diese in beiden außermittigen Lastfällen mit der Kurve für die mittige Belastung. Die geringfügigen Unterschiede sind zum Teil auf den unterschiedlichen Verlauf der Belastung bei der FE-Berechnung zurückzuführen. Die Wahl der Schrittweite



der Belastung wird vom FE-Programm teils „automatisch“ unter Berücksichtigung der Rissbildung und Plastifizierung gesteuert (s. Abschnitt 8.3.4).

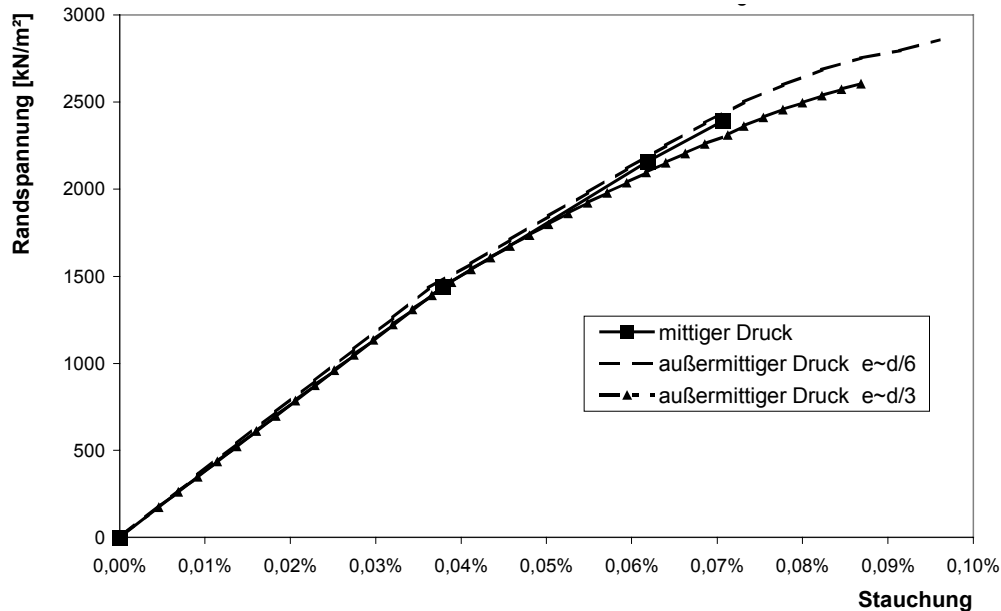


Bild 4.21: Spannungs-Dehnungslinien eines ebenen Kleinpfeilermodells bei Druckbelastung mit unterschiedlichen Außermittigkeiten. Spannung am Ziegelrand, Stauchung auf die gesamte Höhe des Modells –  $(h_s+h_M)$  bezogen. Es ist kein nennenswerter Unterschied zu erkennen.

*Trautz, 1998* untersuchte den Einfluss der Delaminierung. Das Phänomen Delaminierung lässt sich bei homogenen Werkstoffen mit Kohäsion und mit plastischen Eigenschaften unter Druckbelastung beobachten, z.B. bei Beton: Im Druckversuch ohne Querdehnungsbehinderung auf den Auflagerflächen zerfällt der Probekörper in viele Prismen. Die Spannungen quer zur Lastrichtung überschreiten die Zugfestigkeit, wodurch die den Probekörper spaltenden Längsrisse entstehen. Bei ungleichmäßiger Belastung eines delaminierten Querschnitts werden nach Trautz die miteinander nicht mehr schubfest verbundene Teilquerschnitte nacheinander den plastischen Zustand erreichen. Damit kann der Gesamtquerschnitt insgesamt mehr Last widerstehen, als bei einem Versagen bei der Bildung des ersten Längsrisses.

Der Versagensmechanismus von historischem Ziegelmauerwerk mit dicken Lagerfugen aus weichem Luftkalkmörtel funktioniert jedoch grundsätzlich anders als der eines homogenen und isotropen Werkstoffes, wie z.B. der Beton. Wie am Anfang dieses Kapitels bereits beschrieben, wird bei wachsender Belastung die Druckfestigkeit des Mörtels weit überschritten. Das ist nur möglich, weil die Querdehnungen des weichen Mörtels durch den steifen Ziegel verhindert werden. Im Mörtel außerhalb des relativ kleinen Randbereichs herrscht allseitiger Druck, also ein „quasi-hydrostatischer“ Spannungszustand, wohingegen im Ziegel Querzugspannungen auftreten. Wird die dreiaxiale Zugfestigkeit im Ziegel erreicht, entstehen Risse darin parallel zur Krafrichtung. Ist der Ziegel durch einen Längsriss beschädigt, wird die Querdehnung des Mörtels an dieser Stelle nicht mehr behindert und

damit bricht der quasi-hydrostatische Zustand zusammen. Die dreiachsige Druckfestigkeit des Mörtels nimmt an dieser Stelle stark ab und bei wachsender Stauung fällt die aufnehmbare Last ab. Das Mauerwerk verliert seine Tragfähigkeit. Demnach ist die Delaminierung bei halbsteinstarkem Mauerwerk mit dicken Mörtelfugen kein die Tragfähigkeit förderndes Phänomen.

### 4.3 Kennwerte eines Einphasen-Werkstoffmodells für historisches Mauerwerk

Bei der Simulation des Tragverhaltens von gemauerten Bögen und Gewölbekonstruktionen ist die Arbeit mit Zweiphasenmodellen kaum möglich. Schon das relativ kleine räumliche Kleinfeilermodell bestand aus fast 2600 Elementen, obwohl es nur 25% des Probekörpers abbildete. Die Untersuchung ganzer Tragwerke wird deshalb in der Regel mit Einphasenmodellen durchgeführt. Wenn im verwendeten FE-Programm ein anisotropes Werkstoffmodell zur Verfügung steht, kann das Verhalten von Mauerwerk qualitativ besser erfasst werden als mit einem isotropen Modell. In den verwendeten Versionen von 6.2 bis 7.2 des FE-Programms DIANA steht die Kombination eines orthotropen Materialverhaltens mit der Rissbandmethode nicht zur Verfügung. Somit musste ein „homogenisiertes“ Einphasen-Werkstoffmodell für Mauerwerk bestimmt werden. Das heißt: die mechanischen Eigenschaften wurden in allen Richtungen gleich angenommen.

Der Wechsel von einem Zweiphasen- auf ein Einphasenmodell ist immer mit Problemen verbunden: Beim Zweiphasenmodell mit Phasen aus homogenen und isotropen Werkstoffen wird das Tragverhalten mit mathematisch einfach formulierten Werkstoffgesetzen beschrieben. Zur Erfassung des zu modellierenden Körpers ist ein wesentlich feineres Netz erforderlich. Bei Einphasenmodellen reicht ein gröberes Netz. Nur im Bereich von Spannungskonzentrationen, muss das Netz dichter gewählt werden. Solche Spannungskonzentrationen sind Auflager und Singularitäten der Geometrie, wie einspringende Ecken im Grundriss oder eine Veränderung des Querschnittes. Mit einfachen Werkstoffgesetzen können jedoch komplizierte Phänomene, wie das „Druckversagen“ von Mauerwerk durch Spalten des Ziegels infolge der unterschiedlichen Querdehnungen des Mörtels und des Ziegels, nicht erfasst werden. Beim orthotropen Werkstoff „Mauerwerk“ lassen sich nur mit einer Kombination von komplexen Werkstoffgesetzen und Versagenskriterien alle relevanten Seiten des Tragverhaltens erfassen. Für das räumliche Tragverhalten stehen zur Zeit solche Modelle in allgemein zugänglichen Programmen noch nicht zur Verfügung. *Ganz, 1985* sowie *Lorenco, Rots und Blaauwendraad, 1995* entwickelten für Mauerwerksscheiben unter Schub- und Druckbelastung solche Modelle. Bei *Ganz* gibt es für das Versagen neun Kriterien. Gleichzeitig mit *Seim, 1995* reduzierten *Lorenco et al.* die Anzahl der Versagenskriterien unter Berücksichtigung des anisotropen Materialverhaltens.

Bedenkt man, dass das Versagen von Mauerwerk zum Teil von der Art des Verbandes beeinflusst wird, wird es klar, dass der Wechsel vom Zweiphasenmodell auf das Einphasenmodell ohne Verluste in der Qualität nicht möglich ist.

Anhand der vorliegenden Ergebnisse kann nur der E-Modul des Mauerwerks auf Druck bestimmt werden. Nach Bild 4.13 beträgt der Sekantenmodul für Mauerwerk mit dicken Fugen  $E = 2391/0,0706 = 3,39 \cdot 10^6$  [kN/m<sup>2</sup>]. Die weiteren Parameter

können für ein isotropes Mauerwerksmodell nicht genau ermittelt werden. Beim Biegezugversagen ist die Zugfestigkeit des Mörtels, beim Druckversagen des Mauerwerks aber die Steifigkeit des Mörtels und die Zugfestigkeit des Ziegels maßgebend. Ein isotropes Materialmodell hat aber nur eine Zugfestigkeit. Um die dadurch zu erwartenden Probleme zumindest teilweise zu umgehen, wird in den Berechnungen der Wert der Zugfestigkeit zwischen  $150 \text{ kN/m}^2$  und  $450 \text{ kN/m}^2$  variiert. Das Querdehnungsverhalten von Mauerwerk ist für die zu untersuchenden Tragwerke von untergeordneter Bedeutung. Die Poisson-Zahl wird mit einem Wert von 0,2 berücksichtigt. Die Rohwichte mit  $1800 \text{ kg/m}^3$  entspricht dem eines Vollziegelmauerwerks mit Kalkmörtelfugen. Die Druckfestigkeit des Mauerwerks wird in Anlehnung zu *Berger, 1987* / Tabelle 1 mit  $f_c=15.000 \text{ kN/m}^2$  angenommen.

Tabelle 4.2: Parameter für die numerische Untersuchung von Tragwerken aus Mauerwerk mit homogen-isotropem Werkstoffgesetz

E-Modul	[kN/m <sup>2</sup> ]	$3,39 \cdot 10^6$ (für Mauerwerk) und $5 \cdot 10^6$ (für Ziegel)
Poisson-Zahl $\nu$	[ - ]	0,2
Rohwichte $\rho$	[t/m <sup>3</sup> ]	1,8
Druckfestigkeit $f_c$	[kN/m <sup>2</sup> ]	15.000
$\tan \varphi$	[ - ]	0,5
c	[kN/m <sup>2</sup> ]	4503
Zugfestigkeit $f_t$	[kN/m <sup>2</sup> ]	150; 300; 450

## 5. Das Tragverhalten ebener Bogentragwerke

Die Untersuchung von ebenen, gekrümmten Tragwerken kann auf drei Modell-ebenen wie nachfolgend beschrieben durchgeführt werden:

- Stützlinienmethode: Rein statisches Verfahren, ohne Berücksichtigung von Werkstoffeigenschaften;
- Stabtragwerkmodell: Berücksichtigung von linear-elastischen Werkstoffeigenschaften;
- Nichtlineare FE-Methode: Berücksichtigung von nichtlinearen und viskosen Werkstoffeigenschaften wie Rissbildung, Plastizität und zeitabhängigen Eigenschaften, wie Kriechen oder Schwinden.

Im folgenden Kapitel werden diese Möglichkeiten vorgestellt.

### 5.1 Die Methode der Stützlinie

In diesem Problembereich gibt es drei wichtige Begriffe: Die Kettenlinie, die Seillinie und die Stützlinie. Diese werden manchmal ungenau benutzt, was u.U. zu einer falschen Beurteilung der Standsicherheit von Tragwerken führen kann. Deshalb werden diese Begriffe nachstehend nach *Bufler, 1982*, definiert :

Kettenlinie: Gleichgewichtsform eines biegeschlaffen Seiles oder einer Kette unter *Eigengewicht*, wobei beide Enden des Seils fest gelagert sind. Erweitert gilt die Definition für jede Last, die am Seil befestigt ist. Wesentlich ist, dass die Last hier *nicht raumfest* ist.

Seillinie: Gleichgewichtsform eines „*gewichtslosen*“ Seiles, das zwischen zwei festen Punkten gespannt ist und mit einer von der Seillage unabhängigen, *raumfesten Last* beansprucht wird.

Stützlinie: Bieungsfreie Bogenform für eine vorgegebene *raumfeste Last*. Dies ist der Gegensatz der Seillinie, da hier anstatt Zug- nur Druckkräfte zulässig sind.

Nach den oben aufgeführten Definitionen kann bei der rein statischen Untersuchung von (unverformten) Bogentragwerken nur die Methode der Stützlinie angewendet werden. Der Einsatz der „Kettenlinienmethode“ ist unzweckmäßig, auch wenn *Trautz, 1998*, damit günstige Ergebnisse erzielen konnte.

*Heyman, 1966* benutzte als erster das Traglastverfahren zur Ermittlung der auf den Radius bezogenen Mindeststärke eines Kreissegmentbogens in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel.

Er ging davon aus, dass gemauerte Bogentragwerke immer eine ausreichende Druckfestigkeit besitzen, womit eine geringe Druckzonenhöhe zur Abtragung der Lasten genügt. Bild 5.1 stellt als Diagramm die bezogene Bogenstärke  $d/R$  in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel nach *Heyman* dar.

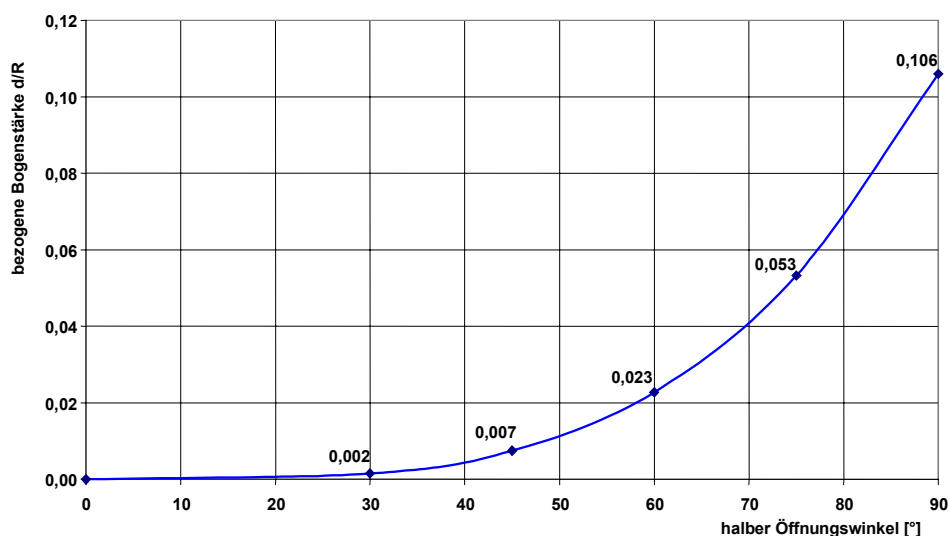


Bild 5.1: Mindeststärke eines Kreissegmentbogens bezogen auf den Radius in Abhängigkeit vom (halben) Öffnungswinkel. Nach *Heyman*, 1966.

Demnach ergibt sich für den einen Halbstein starken Bogen bei einem Radius  $R = 6$  m und Ziegelmaßen von  $30 \times 15 \times 7$  cm der maximale Öffnungswinkel von  $2 \times 61,5^\circ = 123^\circ$ . Ein Halbkreisbogen mit dem Radius  $R = 6$  m müsste eine Stärke von 63,6 cm aufweisen, um sicher zu stehen.

Die Lösung nach *Heyman* liefert die erforderliche Bogenstärke, die Lage des Risses auf dem Gewölberücken zwischen dem Scheitel und dem Auflager – wird auch als „Viertelpunkt“ bezeichnet – sowie den Auflagerschub. Wenn der genaue Verlauf der Stützlinie von Interesse ist, kann sie entweder näherungsweise mit einem Seilpolygon oder genau durch die Lösung der Differentialgleichung [s. Anlage 8.1] ermittelt werden.

Auch durch die Lösung der Differentialgleichung können die Bogenstärken nach *Heyman* errechnet werden. Das Verfahren basiert auf der wiederholten Lösung der Differentialgleichung, wobei die Bogenstärke immer besser angenähert wird. Als erster Schritt wird eine Stützlinie errechnet, die zwischen dem Scheitelpunkt und dem Auflagerpunkt der Systemlinie verläuft. Dabei ergibt sich eine maximale Außermittigkeit ( $d_1$ ) im Viertelpunkt. Im zweiten Schritt wird die Stützlinie errechnet, die am Scheitel und am Auflager die Oberkante des Bogenquerschnittes passiert, d.h. eine Außermittigkeit von  $d_1/2$  aufweist. Weicht die Außermittigkeit am Viertelpunkt (im Absolutwert) von derjenigen am Scheitel ab, muss die Querschnittshöhe korrigiert und die Berechnung so lange wiederholt werden, bis der Querschnitt symmetrisch auf der Systemlinie liegt. Nach eigenen Erfahrungen erreicht man spätestens im dritten Rechengang eine ausreichende Genauigkeit.

Eigene Berechnungen mit dieser analytischen Lösung bestätigten die Ergebnisse von *Heyman*. Bild 5.2 stellt den Verlauf der Stützlinie eines  $120^\circ$ -Öffnungswinkel-Kreissegmentbogens mit Radius  $R = 6$  m und mit der nach *Heyman* ermittelten Bogenstärke von  $d = 13,7$  cm dar.

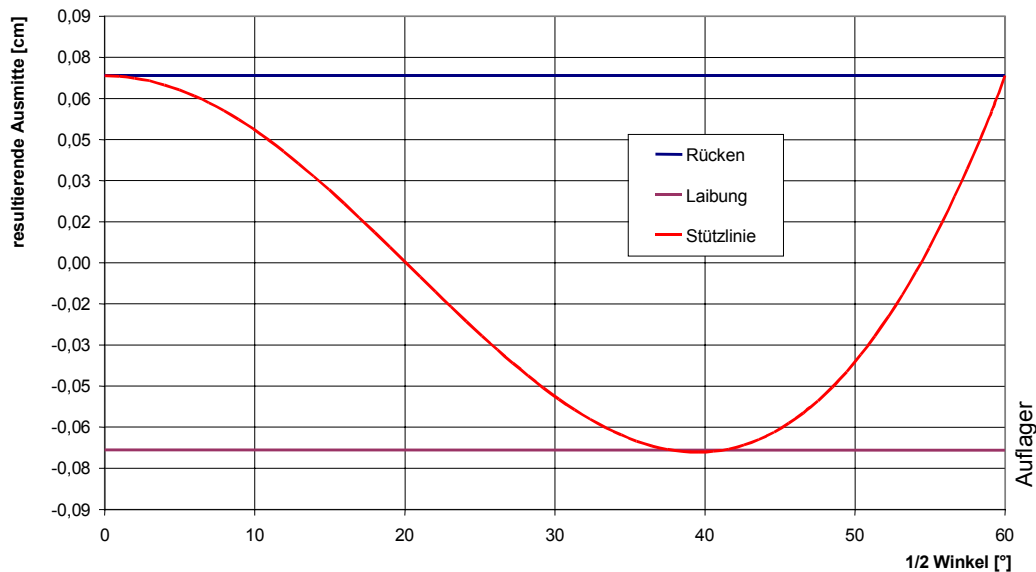


Bild 5.2: Durch Lösung der Differentialgleichung ermittelte Stützlinie für einen Kreissegmentbogen mit  $\alpha = 120^\circ$  und mit  $R = 6$  m. Die Bogenstärke beträgt  $d = 13,7$  cm.

Es gibt zwischen den Ergebnissen von *Heyman* und der Lösung über die Differentialgleichung eine Abweichung in der Lage des Viertelpunktes. In Tabelle 5.1 ist die mit den zwei Verfahren ermittelte Lage des Viertelpunktes bei drei Öffnungswinkeln angegeben. Diese Abweichung ist auf den unterschiedlichen Ansatz der Lösungen zurückzuführen.

Tabelle 5.1: Lage des „Viertelpunktes“ nach der Lösung der Differentialgleichung und nach *Heyman* bei einem Radius  $R = 6$  m

Öffnungswinkel [°]	Lage des Viertelpunktes – $\beta$ [°]		Differenz [°]
	Differentialgleichung	Heyman	
120	40,2	40,8	0,6
150	48,2	49,4	1,2
180	54,1	60,4	6,3

#### Bemerkungen :

- Die raumfeste Last, deren Stützlinie der Kreisbogen ist, lässt sich durch Lösung der Gleichung (8.6) (s. Anlage 8.2) bestimmen. Diese Lösung kann in besonderen Sanierungsfällen von Nutzen sein. Wenn sich z.B. die Spannweite eines Kreissegmentbogens wegen ungünstiger Verhältnisse nicht verkürzen lässt, kann durch Anbringen der „fehlenden“ Lastanteile die Stützlinie im Bogenquerschnitt zentriert werden. Der Auflagerschub wird jedoch dabei nicht erhöht. Jeder Schritt des Lastanbringens soll detailliert untersucht werden, weil das Gleichgewicht immer gewährleistet werden muss.

- Im 19. Jahrhundert beschäftigten sich zahlreiche Wissenschaftler mit den Fragen der Gewölbestatik [*Schwedler, 1859 und Tolkmitt, 1876*]. Einerseits wurden Tabellenwerke, andererseits grafische und grafostatische Methoden für die Planung und statische Überprüfung von Bogentragwerken und Gewölben entwickelt. So wurde für die Aufgaben, deren Lösung die Kettenlinie ist (in mathematischer Form:  $y = \cosh(x)$ ), eine Annäherung an diese mittels Korbbögen (einer aus einer Reihe von Kreissegmentbögen mit verschiedenen Radien und Öffnungswinkeln zusammengesetzte Kurve) erarbeitet.

## 5.2 Untersuchungen an Stabtragwerkmodellen unter Annahme linear-elastischer Werkstoffeigenschaften

Die Stützlinienmethode ist sehr einfach. Es lässt sich damit der Ist-Zustand auch eines verformten Systems überprüfen, wenn die Ist-Form bekannt ist. Mit dieser Methode können jedoch weder zeitunabhängige noch zeitabhängige Verformungen bestimmt werden.

*Castigliano* war der erste, der bei der Planung einer weitgespannten Mauerwerksbrücke, der Ponte Mosca in Turin, außer den Gleichgewichtsbedingungen auch die Werkstoffeigenschaften und die Verträglichkeit der Verformungen berücksichtigte [*Heyman, 1988*]. Er nahm an, dass Mauerwerk keinen Zug aufnehmen kann, sich unter Druck linear-elastisch verhält und ausreichend druckfest ist. Dementsprechend berücksichtigte er auch die Rissbildung, indem er bei der Ermittlung des Flächenmoments 2. Grades und der Fläche nur die nach der Rissbildung verbleibende Querschnittshöhe anrechnete. Mit diesem Verfahren erhielt er nach wenigen Wiederholungen der Berechnung das Ergebnis.

Berechnungen unter Annahme von linear-elastischen Werkstoffeigenschaften können zur Untersuchung von Bogentragwerken eingesetzt werden, wenn diese aus einem ausreichend zugfesten Werkstoff bestehen oder der Querschnitt so groß ist, dass in keinem Bereich Zugspannungen entstehen.

Auch wenn linear-elastische Stabwerksberechnungen nicht ohne Einschränkungen für die Untersuchung von Mauerwerksbögen herangezogen werden können, sind die Ergebnisse solcher Berechnungen interessant und werden deshalb erörtert.

Eine Reihe von Bögen wurde mit Radien von  $R_1 = 6$  m und  $R_2 = 10$  m, mit Öffnungswinkeln von  $\alpha = 40^\circ$  bis  $180^\circ$  und mit Bogenstärken von  $d = 0,15$  m bis 2,4 m unter Eigenlast untersucht. Bei den Berechnungen wurden drei statische Systeme untersucht: Eingespannter Bogen, Zweigelenkbogen und Dreigelenkbogen. Die Lage der Gelenke war bei den betreffenden Systemen stets im Querschnitt zentriert. Die Berechnungen wurden zum einen Teil mit dem Stabwerkprogramm RSTAB (Version 3.94) zum anderen Teil mit dem FE-Programm DIANA (Versionen 6.2 bis 7.2) durchgeführt. Nachstehend sind die Ergebnisse zusammengefasst.

### 5.2.1 Der Verlauf der Stützlinie

Zur Untersuchung der Einflüsse auf den Stützlinienverlauf wurden Berechnungen an Modellen mit Radien von  $R_1 = 6 \text{ m}$  und  $R_2 = 10 \text{ m}$ , Öffnungswinkel von  $\alpha = 120^\circ$  und  $180^\circ$  und mit einer Bogenstärke von  $d = 0,15 \text{ m}$  mit allen drei o.a. statischen Systemen durchgeführt. Die Bogenstärke von  $d = 0,15 \text{ m}$  wurde gewählt, damit ein Vergleich mit späteren Untersuchungsergebnissen an halbsteinstarkem Gewölbe möglich ist.

Bild 5.3 stellt den Stützlinienverlauf der drei untersuchten statischen Systeme, den Stützlinienverlauf gemäß der Lösung der Differentialgleichung sowie Leibung und Rücken des Querschnittes dar. Die Randbedingungen bei der Lösung der Differentialgleichung waren, dass die Stützlinie den Rücken am Scheitel tangiert und am Auflager durchquert.

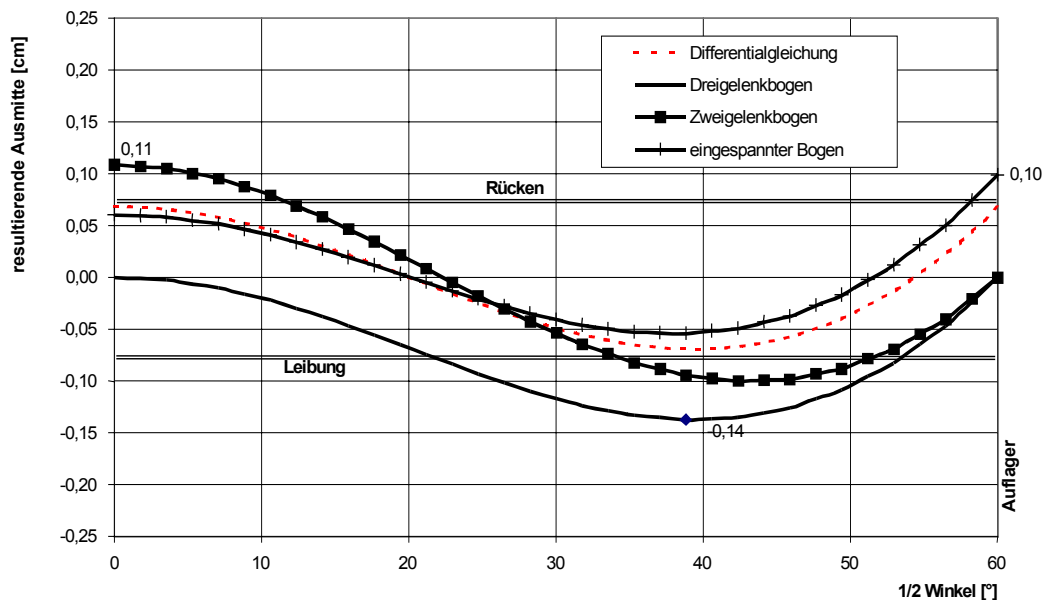


Bild 5.3: Stützlinienverlauf in Bögen mit Radius  $R = 6 \text{ m}$ , Öffnungswinkel  $\alpha = 120^\circ$  und Bogenstärke  $d = 0,15 \text{ m}$  bei verschiedenen statischen Systemen und gemäß der Lösung der Differentialgleichung

Die Stützlinie des eingespannten Bogens liegt der Lösung der Differentialgleichung am nächsten (= statische Stützlinie). Am Scheitel und am Viertelwinkel hat die statische Stützlinie eine größere Außermittigkeit als die Stützlinie des eingespannten Bogens. Am Auflager verlässt sie jedoch den Querschnitt und liegt  $2,4 \text{ cm}$  außerhalb des Rückens. Die Stützlinien der zwei gelenkigen Systeme verlaufen ungünstiger. Die Linie des Zweigelenkbogens liegt sowohl am Scheitel ( $e = 11 \text{ cm}$ ) als auch am Viertelwinkel ( $e = 10 \text{ cm}$ ) außerhalb des Querschnittes. Die Stützlinie des Dreigelenkbogens verläuft zur Hälfte unterhalb der Leibung. Die Außermittigkeit erreicht hier ihren größten Wert am Viertelwinkel mit  $e = 14 \text{ cm}$ .

Die Ergebnisse gleicher Berechnungen an Halbkreisbögen ( $\alpha = 180^\circ$ ) mit gleichem Radius, jedoch mit Bogenstärke  $d = 0,64 \text{ m}$  sind im Bild 5.4 dargestellt. Der Verlauf der Stützlinien entspricht im wesentlichen den Linien der  $120^\circ$ -Bögen mit folgenden Unterschieden:



- Die Außermittigkeiten fallen im Absolutwert größer aus und
- die Stützlinie des eingespannten Bogens verlässt den Querschnitt auch im Bereich des Scheitels.

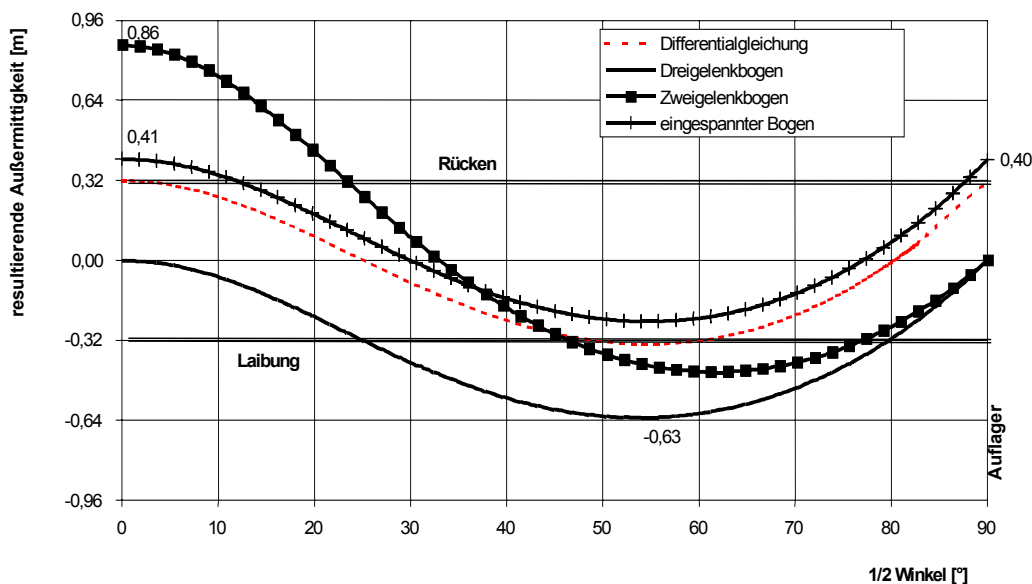


Bild 5.4: Stützlinienverlauf in Bögen mit Radius  $R = 6$  m, Öffnungswinkel  $\alpha = 180^\circ$  und Bogenstärke  $d = 0,64$  m bei verschiedenen statischen Systemen und gemäß der Lösung der Differentialgleichung

Der Einfluss der Querschnittshöhe auf den Stützlinienverlauf wurde an eingespannten Bögen mit einem Radius von  $R = 10$  m, mit Öffnungswinkeln von  $\alpha = 120^\circ$  und  $180^\circ$  und bei Bogenstärken von  $d = 0,15$  m;  $0,60$  m und  $2,40$  m untersucht. Im Bild 5.5 sind die zum  $120^\circ$ -Öffnungswinkel gehörenden, im Bild 5.6 die zum  $180^\circ$ -Öffnungswinkel gehörenden Stützlinien dargestellt.

Es kann festgestellt werden, dass mit zunehmender Querschnittshöhe die Außermittigkeit am Scheitel und am Viertelpunkt wächst. Am Auflager verschiebt sich die Stützlinie gleichzeitig in Richtung Querschnittsachse bzw. Laibung. Die Stützlinie des Bogens mit  $\alpha = 120^\circ$  und  $d = 2,40$  m verläuft anders als in allen anderen Bögen: Sie wechselt ihr Vorzeichen nur einmal zwischen Scheitel und Auflager. Dies ähnelt einem eingespannten Balken.

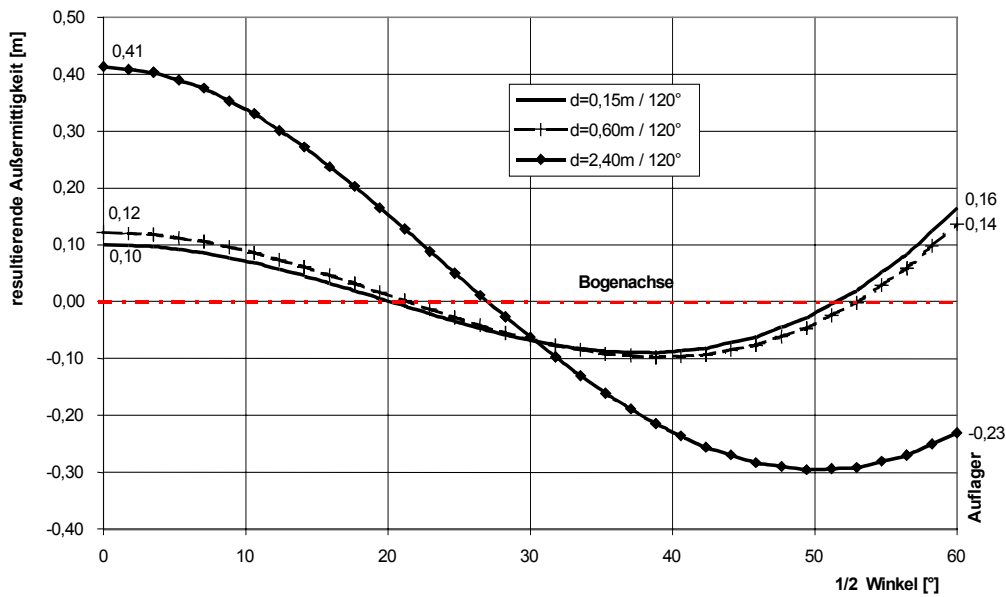


Bild 5.5: Stützlinienverlauf in eingespannten Bögen mit Radius  $R = 10$  m, Öffnungswinkel  $\alpha = 120^\circ$ , Bogenstärke  $d = 0,15$  m;  $0,60$  m und  $2,40$  m

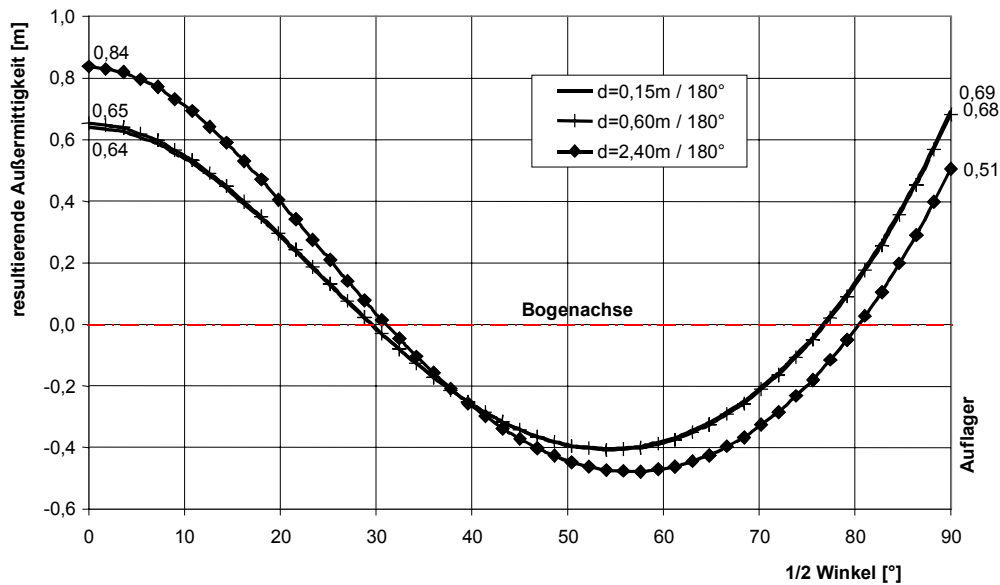


Bild 5.6: Stützlinienverlauf in eingespannten Bögen mit Radius  $R = 10$  m, Öffnungswinkel  $\alpha = 180^\circ$ , Bogenstärke  $d = 0,15$  m;  $0,60$  m und  $2,40$  m

In Bild 5.5 und Bild 5.6 fällt auf, dass die Vervielfachung der Querschnittshöhe von  $d = 0,15$  m auf  $0,60$  m nur einen geringen Einfluss auf die absolute Größe der Außermittigkeiten hat. Eine weitere Vervielfachung der Querschnittshöhe von  $d = 0,60$  m auf  $2,40$  m bringt jedoch nur bei  $\alpha = 120^\circ$  einen Zuwachs der Außermittigkeiten mit. Werden die Außermittigkeiten auf die Querschnittshöhe bezogen, dann zeigt sich, dass der Relativwert  $e/d$  mit zunehmender Querschnittshöhe stark abnimmt. Dieser Einfluss ist in Bild 5.7 und 5.8 dargestellt. Bei dieser Betrachtung

ergibt sich eine starke Verkleinerung der relativen Außermitteigkeit beim Wechsel der Querschnittshöhe von  $d = 0,15$  m auf  $0,60$  m. Die Veränderung zwischen  $d = 0,60$  m und  $2,40$  m fällt kleiner aus.

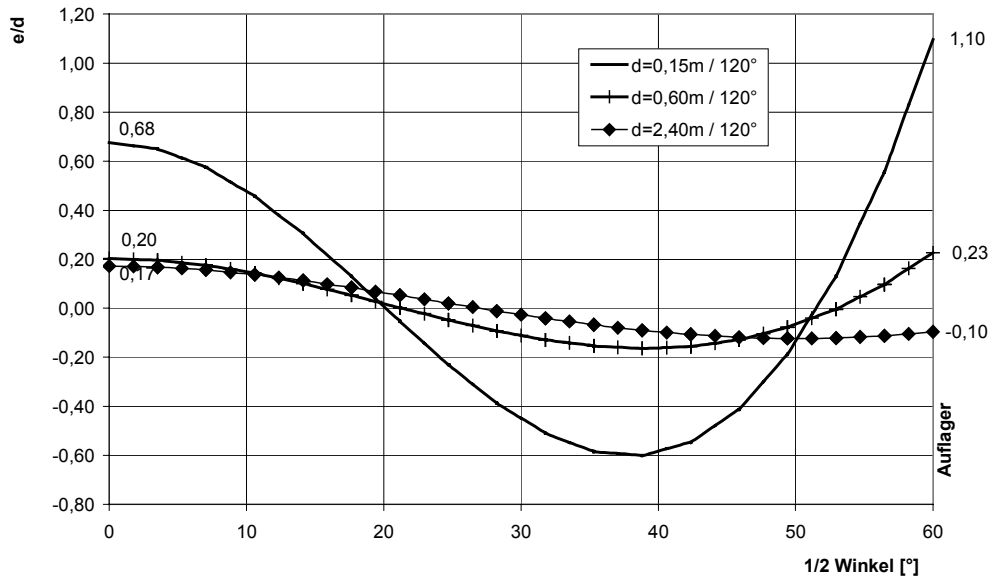


Bild 5.7: Auf die Bogenstärke bezogene Außermitteigkeit in eingespannten Bögen mit Radius  $R = 10$  m, Öffnungswinkel  $\alpha = 120^\circ$ , Bogenstärken  $d = 0,15$  m;  $0,60$  m und  $2,40$  m

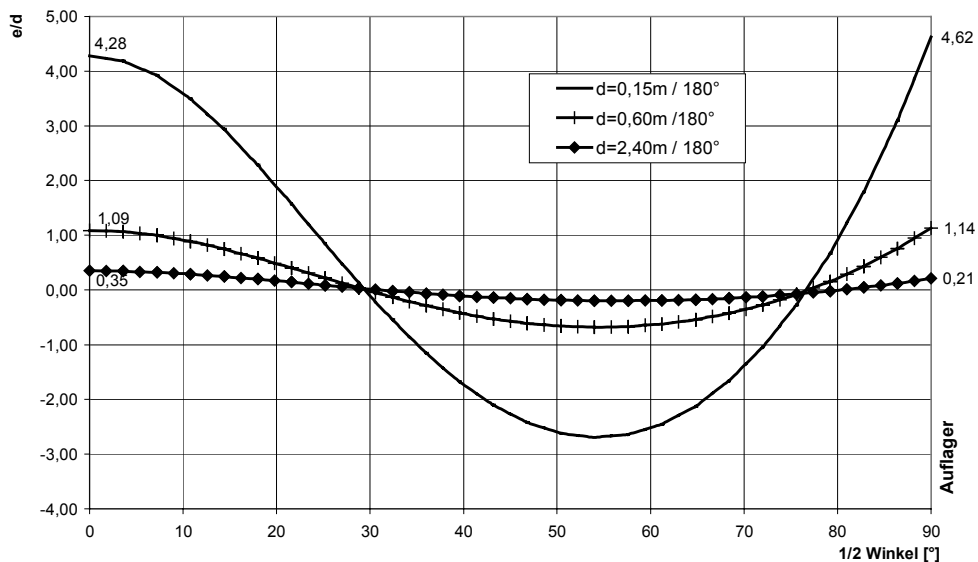


Bild 5.8: Auf die Bogenstärke bezogene Außermitteigkeit in eingespannten Bögen mit Radius  $R = 10$  m, Öffnungswinkel  $\alpha = 180^\circ$ , Bogenstärke  $d = 0,15$  m;  $0,60$  m und  $2,40$  m

Diese Veränderungen sind auf die Zunahme der Schubtragwirkung beim hohen Bogenquerschnitt ( $d = 2,40$  m) zurückzuführen. Dieser Einfluss wird beim  $120^\circ$ -Bogen durch die kürzere Spannweite verstärkt.

Der Einfluss des Radius auf den Stützlinienverlauf wurde an eingespannten Bögen mit  $120^\circ$ -Öffnungswinkel und mit den Radien  $R_1 = 6$  m und  $R_2 = 10$  m untersucht. Im Bild 5.9 sind die bezogenen Außermittigkeiten zu diesen zwei Bögen dargestellt.

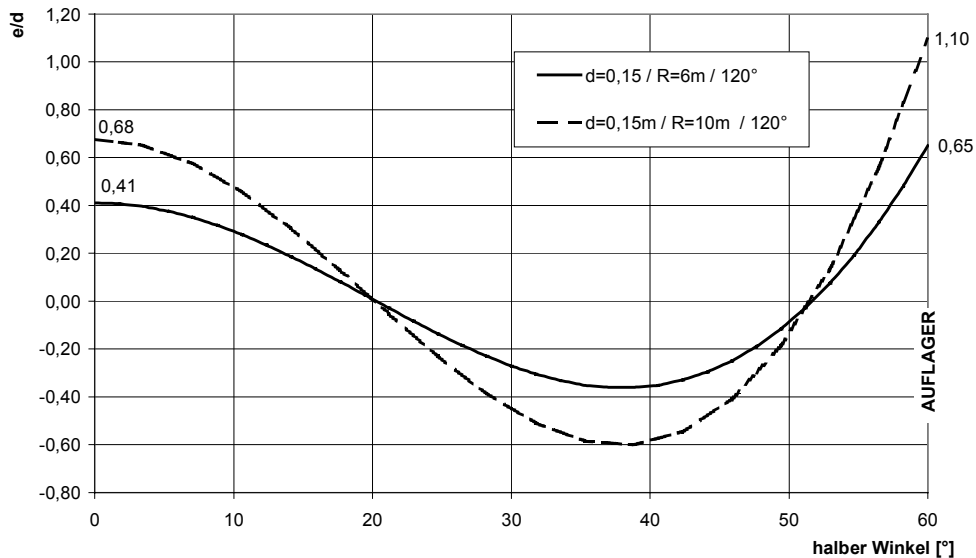


Bild 5.9: Auf die Bogenstärke bezogene Außermittigkeiten in eingespannten Bögen mit Radius  $R = 6$  m und  $R = 10$  m, Öffnungswinkel  $\alpha = 120^\circ$ , Bogenstärke  $d = 0,15$  m

Aus den angegebenen Werten im Bild 5.9 ist ersichtlich, dass das Verhältnis der  $e/d$ -Werte (z.B.:  $0,68/0,41 = 1,66$ ) am Scheitel etwa dem der Radien ( $10/6 = 1,67$ ) entspricht. Das bedeutet, dass das Verhältnis  $e/d$  vom Radius praktisch linear abhängt, wenn die Bogenstärke unverändert bleibt.

### 5.2.2 Größe und Neigung der Auflagerkraft

Der Einfluss des Öffnungswinkels und des statischen Systems wurde in einer Reihe von Stabwerksberechnungen mit folgenden Parametern untersucht: Mit einem Radius von  $R = 10$  m, einer Bogenstärke von  $d = 0,15$  m und mit Öffnungswinkeln zwischen  $40^\circ$  und  $180^\circ$ , bei eingespanntem Bogen, Zweigelenbogen und Dreigelenbogen. Im Bild 5.10 ist das Verhältnis des Auflagerschubs ( $H$ ) zur vertikalen Auflagerkraft ( $V$ ) in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Bogens dargestellt.

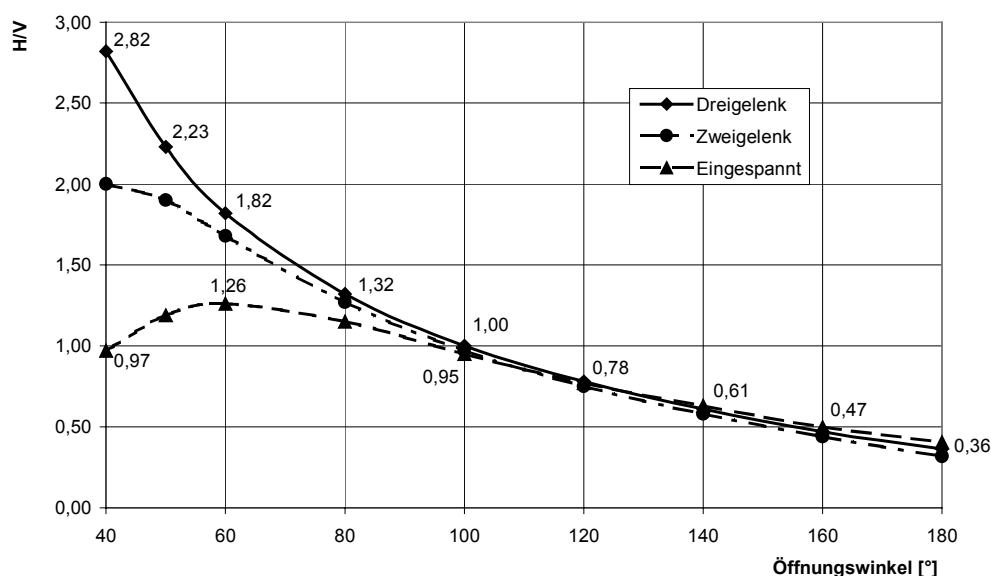


Bild 5.10: Neigung der Auflagerkraft ( $H/V$ ) in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Bogens beim Dreigelenkbogen, beim Zweigelenkbogen und beim eingespannten Bogen ( $R = 10$  m;  $d = 0,15$  m)

Bei Dreigelenkbögen und bei Zweigelenkbögen nimmt die Größe  $H/V$  mit zunehmendem Öffnungswinkel ständig ab. Beim eingespannten Bogen wächst der Wert  $H/V$  erst bis zu einem Öffnungswinkel von etwa  $\alpha = 60^\circ$  an, danach nimmt er wieder ab. Zwischen  $\alpha = 100^\circ$  und  $\alpha = 140^\circ$  liegen die  $H/V$ -Werte der drei Modelle sehr eng nebeneinander, z.B. bei  $100^\circ$  zwischen 1,00 beim Dreigelenkbogen und 0,95 beim eingespannten Bogen. Die jeweiligen Höchstwerte liefert der Dreigelenkbogen unterhalb von etwa  $\alpha = 125^\circ$ , der eingespannte Bogen oberhalb davon.

Der Einfluss der Bogenstärke auf den Auflagerschub bzw. auf die Neigung der Auflagerkraft ( $H/V$ ) wurde anhand der durchgeführten Berechnungen ausgewertet. Im Bild 5.11 ist die Neigung der Auflagerkraft ( $H/V$ ) in Abhängigkeit von der Bogenstärke bei Kreissegmentbögen mit einem Radius von  $R = 10$  m und mit Öffnungswinkeln von  $\alpha_1 = 120^\circ$  und  $\alpha_2 = 180^\circ$  dargestellt.

Bei Bögen mit  $180^\circ$ -Öffnungswinkel ist dieser Einfluss klein. Während bei dünnwandigen Bögen ( $d/R \leq 0,6/10 = 0,06 < 0,10$ ) der Wert  $H/V$  unverändert bleibt, fällt er bei dickwandigen Bögen ( $d/R = 2,4/10 = 0,24$ ) um 5% ab. Bei Bögen mit  $120^\circ$ -Öffnungswinkel fällt der  $H/V$ -Wert um 1,2% bei einer Erhöhung des Querschnittes von  $d = 0,15$  m auf  $d = 0,60$  m. Mit dem Wechsel vom dünnwandigen zum dickwandigen Bogen, also von  $d = 0,6$  m auf  $d = 2,4$  m, fällt der  $H/V$ -Wert von 0,79 auf 0,67 ab. Dies entspricht 15% des Anfangswertes.

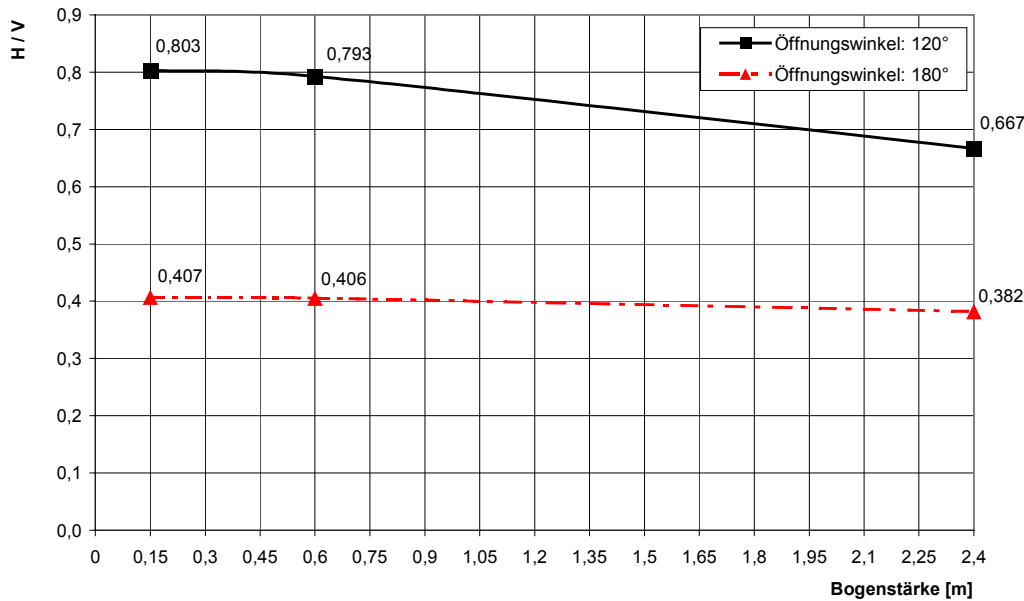


Bild 5.11: Neigung der Auflagerkraft in Abhängigkeit von der Bogenstärke bei eingespannten Kreissegmentbögen mit einem Radius von  $R = 10$  m und mit Öffnungswinkeln von  $\alpha_1 = 120^\circ$  und  $\alpha_2 = 180^\circ$

Im Bild 5.12 ist der Auflagerschub in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel und von den untersuchten statischen Systemen dargestellt. Auffällig ist die Zunahme des Auflagerschubs mit abnehmendem Öffnungswinkel bei Dreigelenkbögen. Bei Zweigelenkbögen fällt der Wert bei  $\alpha = 40^\circ$  auf 79% des Höchstwerts bei etwa  $\alpha = 80^\circ$ , bei eingespannten Bögen sogar auf 41% des Höchstwerts bei etwa  $\alpha = 100^\circ$ .

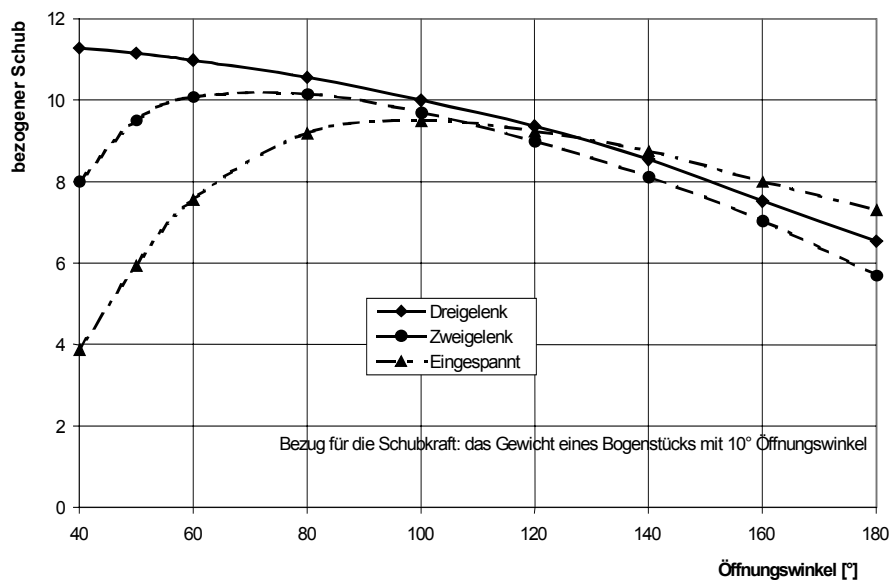


Bild 5.12: Bezogener Auflagerschub ( $H_{\text{bez}}$ ) in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Bogens bei eingespanntem Bogen, bei Zweigelenkbogen und bei Dreigelenkbogen ( $R = 10$  m;  $d = 0,15$  m) - Bezug für die Schubkraft: das Gewicht eines Bogenabschnittes mit  $10^\circ$  Öffnungswinkel

Diese Verhältnisse können bei der Konzipierung von Sanierungsmaßnahmen eine wichtige Rolle spielen. Je nach Annahme eines statischen Systems verändert sich der Auflagerschub unterschiedlich bei einer Verkürzung der Spannweite (= Verkleinerung des Öffnungswinkels). Wird über das statische System eine unzutreffende Annahme getroffen, wird entweder eine unzureichende oder eine viel zu sichere und damit auch im Regelfall zu teure Sanierungslösung gewählt.

### 5.2.3 Verformungen von Bögen aus linear-elastischem Werkstoff

Nachstehend wird der Einfluss des statischen Systems und des Öffnungswinkels erläutert. Im Bild 5.13 ist die Scheitelsenkung von Bogenmodellen mit  $R = 10\text{ m}$ ,  $d = 0,15\text{ m}$  und  $E = 5 \cdot 10^6\text{ kN/m}^2$  in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel dargestellt.

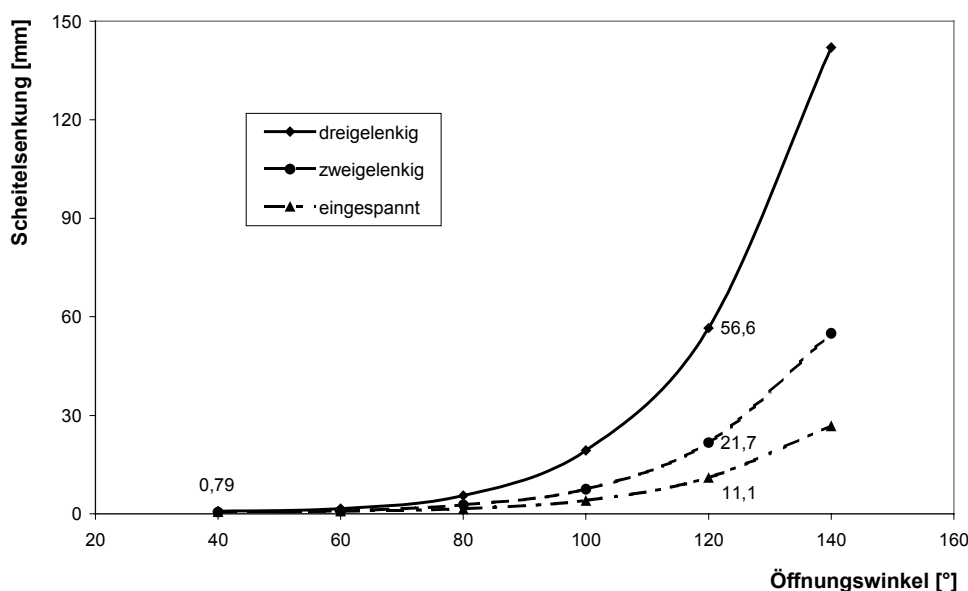


Bild 5.13: Scheitelsenkung von Bögen mit  $R = 10\text{ m}$ , Bogenstärke  $d = 0,15\text{ m}$ , in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel, bei eingespanntem Bogen, Zweigelenkbogen und Dreigelenkbogen

Die elastischen Verformungen unter Eigenlast, hier  $g = 2,7\text{ kN/m}$ , sind im Vergleich zur Bogenstärke und zum Radius sehr klein. Bei Öffnungswinkeln bis zu  $\alpha = 60^\circ$  bleiben die Verformungen in der Größenordnung von Millimetern, da die Spannweiten sehr klein sind. Mit zunehmendem Öffnungswinkel steigt die Scheitelsenkung überproportional an. Das liegt zum einen an der Zunahme der Spannweite, zum anderen daran, dass das Verhalten eines Bogens mit großem Öffnungswinkel dem eines Rahmens ähnlich ist. Durch das Hinzufügen von Gelenken werden die Systeme im Vergleich zum eingespannten Bogen mit gleichem Öffnungswinkel zunehmend weicher. So verdoppelt sich bei  $120^\circ$ -Öffnungswinkel etwa die Scheitelsenkung von  $11,1\text{ mm}$  auf  $21,7\text{ mm}$  nach dem Einfügen zweier Gelenke an den Auflagern. Wird ein drittes Gelenk am Scheitel eingesetzt, beträgt die Scheitelsenkung  $56,6\text{ mm}$ , also mehr als die 2,5-fache der Senkung beim

Zweigelenkbogen. Der Einfluss des Radius ist in Tabelle 5.2 beispielhaft für Bögen mit  $R = 10,0$  m und mit  $R = 6,0$  m Radius zusammengestellt.

Eine Verkleinerung des Radius von 10,0 m auf 6,0 m, also auf 60% der Ausgangsgröße, bewirkt eine Abnahme der Scheitelsenkung auf 13% bis 15% ihrer ursprünglichen Größe.

Tabelle 5.2: Einfluss des Radius auf die Scheitelsenkung von Bögen bei Öffnungswinkel  $120^\circ$  mit unterschiedlichen statischen Systemen

System:	Scheitelsenkung [mm]		
	eingespannt	zweigelenkig	dreigelenkig
$R = 10,0$ m	11,1	21,7	56,6
$R = 6,0$ m	1,6	3,0	7,5

### 5.3 Nichtlineare FE-Untersuchungen von Bogentragwerken mit Einphasenmodellen

Mauerwerk kann in seinen Fugen kaum Zugkräfte aufnehmen. Deshalb ist die Berücksichtigung der Rissbildung bei einer Untersuchung der Standsicherheit erforderlich. Da das Verformungsverhalten historischer Mörtel auf Zugbeanspruchung nicht bekannt ist, wurde bei den durchgeführten numerischen Untersuchungen sowohl sprödes als auch duktiler Verhalten berücksichtigt. Im Bild 3.8 sind die bei den Untersuchungen verwendeten Spannungs-Dehnungslinien für Zug bei sprödem und bei duktilem Werkstoffverhalten dargestellt. In Tabelle 5.3 sind alle für die Untersuchungen relevanten Werkstoffparameter zusammengestellt.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen wurde auf Modelle mit Abmessungen annähernd wie bei *Heyman* gelegt. Neben dem Einfluss der Zugfestigkeit wurde fallweise auch der Einfluss der Duktilität ermittelt. Als Versagenskriterium wurde eine Kombination des Drucker-Prager Plastizitätsmodell und „tension cut-off“ eingesetzt. In keiner Berechnung trat eine Plastifizierung im Bogentragwerk auf, da sie bei niedrigeren Belastung wegen Spaltrissbildung versagten. Die eingesetzten Werkstoffmodelle und die verwendeten numerischen Verfahren zur Lösung der Gleichungssysteme sind in der Anlage im Abschnitt 8.3 zusammengefasst. Bei der Durchführung der Untersuchungen wurde die Rissbandmethode verwendet.

In den nachstehend diskutierten nichtlinearen Untersuchungen wurden die geometrischen Parameter nicht mehr variiert. Wie aus Tabelle 5.3 zu entnehmen ist, betrug der Radius stets  $R = 6,0$  m, bei  $\alpha_1=120^\circ$  Öffnungswinkel betrug die Bogenstärken  $d_1=0,15$  m und bei  $\alpha_2=180^\circ$  Öffnungswinkel  $d_2=0,64$  m. Die Angaben über die verwendeten Elementtypen, die verwendeten numerischen Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems und über die Belastungssteuerung sind in Kapitel 8.2 zusammengestellt. In beiden Modellen wurden Q8EPS Scheibenelemente – ebener Verformungszustand – mit Abmessungen von im Durchschnitt  $\sim 2,5$ cm in radialer und 4cm in Ringrichtung verwendet. Die Qualität dieser Netzwahl wurde durch Voruntersuchungen abgesichert.



Tabelle 5.3: Parameter für die numerische Untersuchung von Bogentragwerken aus Einphasen-Werkstoffen

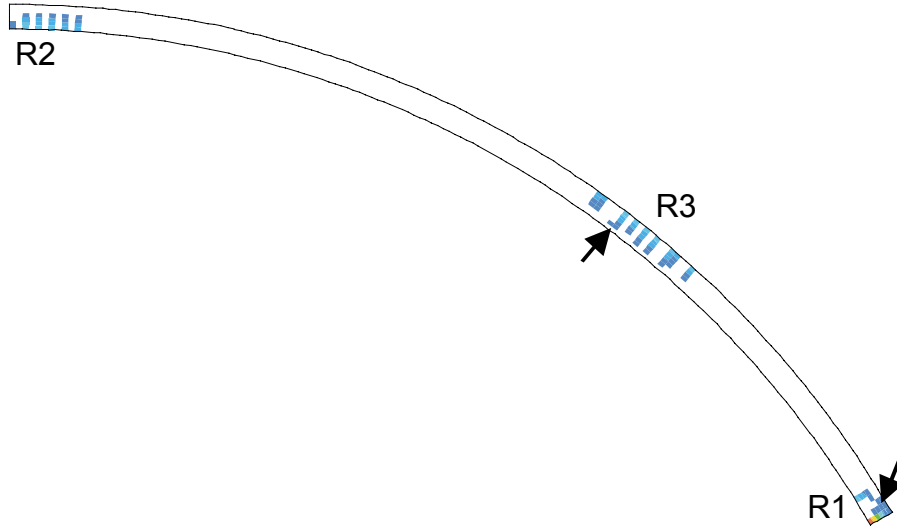
Öffnungswinkel $\alpha$ [°]	120	180
Systemradius R [m]	6,00	
Wandstärke d [m]	0,15	0,64
E-Modul [kN/m <sup>2</sup> ]	3,39 * 10 <sup>6</sup> (für Mauerwerk) und 5 * 10 <sup>6</sup> (für Ziegel)	
Poisson-Zahl $\nu$ [-]	0,2	
Rohwichte [t/m <sup>3</sup> ]	1,8	
Druckfestigkeit $f_c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	15.000	
$\tan \varphi$ [-]	0,5	
c [kN/m <sup>2</sup> ]	4503	
Zugfestigkeit $f_t$ [kN/m <sup>2</sup> ]	150; 300; 450	
Bruchdehnung <sup>1)</sup> $\epsilon$	- / 1,8 * 10 <sup>-2</sup>	-

Bemerkungen: 1) bei quasi-sprödem Werkstoffverhalten auf Zug bei h=2,5cm

### 5.3.1 Verlauf der Stützlinie

Die nichtlinearen Untersuchungen, die die Rissbildung in verschmierter Form berücksichtigen, werden bei einer schrittweise Erhöhung der Last - hier Eigenlast - durchgeführt. Das heißt, dass die Last von einer zum ungerissenen Zustand gehörigen Größe ausgehend schrittweise gesteigert wird. Die Berechnung wird bei steigender Belastung so lange fortgeführt, bis ein Gleichgewichtszustand zur aktuellen Last gefunden werden kann. Bei spröden Werkstoffen ist es schwierig, nach der Öffnung neuer Risse einen Gleichgewichtszustand auf der vorhandenen Lasthöhe zu finden, deshalb wird die Last (vom Algorithmus gesteuert) vorerst so reduziert, dass ein Gleichgewichtszustand gefunden wird. Anschließend wird die Belastung, wie im Abschnitt 8.3.4 beschrieben mit der Bogenlängen-Methode wieder gesteigert.

Während der Lasterhöhung und fortschreitenden Rissbildung ändert sich auch die Stützlinienlage. Die durch Risse geschädigte Bereiche und die zu den Phasen der Rissbildung gehörenden Stützlinien eines 120°-Öffnungswinkel-Bogens (d = 15 cm) und eines 180°-Öffnungswinkel-Bogens (d = 64 cm) sind in Bild 5.14 bis Bild 5.17 ( $f_t = 450 \text{ kN/m}^2$ ) dargestellt. In Tabelle 5.4 und Tabelle 5.5 sind die entsprechenden Außermittigkeiten am Scheitel, am Viertelpunkt und am Auflager zusammengefasst.



Bemerkung: Nur die Hälfte des Tragwerks dargestellt.

Bild 5.14: Von Rissen durchsetzte Bereiche beim Lastniveau von  $4,06 \cdot g$  in einem am Anfang eingespannten  $120^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogen mit  $R=6,0$  m aus Einphasen-Werkstoff ( $f_t = 450 \text{ kN/m}^2$ ). Die Markierung der Bereiche entspricht der Reihenfolge der Risserscheinung. (dunkelblau: kleine, hellblau bis grün: mittlere, gelb bis orange: große Rissdehnungen) Am Auflager und am Viertelpunkt sind ansatzweise Längsrisse aufgetreten. Die Delaminierung der Druckzone beginnt. Die Längsrisse sind mit Pfeilen markiert. Die Richtung der Risse wurde aus der vergrößerten grafischen Darstellung der Rissdehnungsvektoren entnommen.

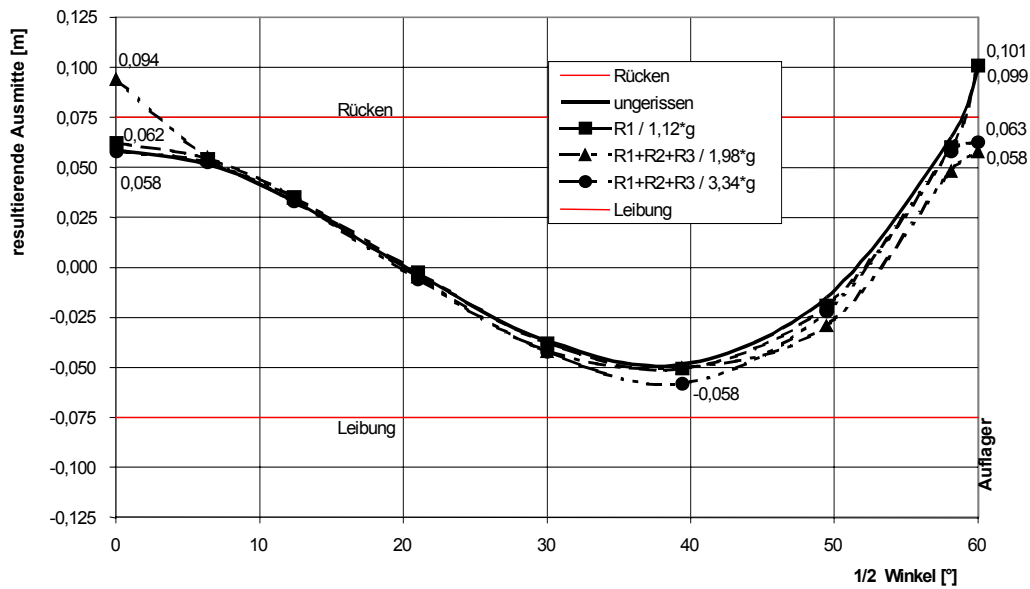


Bild 5.15: Verlauf der Stützzlinie während fortschreitender Rissbildung in einem eingespannten  $120^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogen mit  $R=6,0$  m und  $d=15$  cm aus Einphasen-Werkstoff. Die Bezeichnung der Risse entspricht Bild 5.14.

Tabelle 5.4: Außermittigkeit in den maßgebenden Querschnitten bei fortschreitender Belastung und Rissbildung in einem 120°-Öffnungswinkel-Bogen aus Einphasen- Werkstoff nach den Ergebnissen der FE-Berechnungen.  
Die Bezeichnung der Risse entspricht Bild 5.14.

Zustand / Last	Außermittigkeit [m] im Querschnitt:		
	Scheitel	Viertelpunkt ( $\beta=39,4^\circ$ )	Auflager
ungerissen / $< 1,12 * g$	0,059	-0,048	0,099
R1 / $1,12 * g$	0,062	-0,051	0,101
R1+R2+R3 / $1,98 * g$	0,094 <sup>1)</sup>	-0,050	0,058
R1+R2+R3 / $3,34 * g$	0,058	-0,058	0,063

1) Numerischer „Ausreißer“ bei der Rissbildung.

Wie in der Einleitung beschrieben, wird die Belastung des Modells ausgehend von einer Lasthöhe ohne Risse durchgeführt. Die Lasthöhe wurde also so gewählt, dass die Zugfestigkeit im Bogen an keiner Stelle überschritten ist. Demnach ist die zu dieser Last gehörende Stützlinie identisch mit der einer linear-elastischen Berechnung. Beim 120°-Bogen verläuft die Stützlinie nur in unmittelbarer Nähe des Auflagers außerhalb des Querschnittes. Hier nimmt sie ihren höchsten Wert mit 2,4 cm außerhalb des Rückens an. Wird das 1,12-fache Eigengewicht (hier bei  $f_t = 450 \text{ kN/m}^2$  Zugfestigkeit) erreicht, entstehen Risse im Bereich des Auflagers. Trotz Rissbildung bleibt die Außermittigkeit beinahe unverändert, da der Riss nur 1/3 der Querschnittshöhe beträgt und damit noch ein Biegemoment aufnehmen kann. Durch zusätzliche Relativverdrehung am Auflager, bedingt durch die Rissbildung, verlagern sich die innere Kräfte, so dass die Außermittigkeit am Scheitel und am Viertelpunkt geringfügig zunimmt. Bei Erreichen der Last  $1,98 * g$  treten sowohl am Scheitel als auch am Viertelpunkt Risse auf. Die Lage der Stützlinie verändert sich dabei: Am Scheitel nimmt die Außermittigkeit von  $e = 0,059 \text{ m}$  auf  $e = 0,094 \text{ m}$  zu und am Auflager sinkt sie von  $e = 0,101 \text{ m}$  auf  $0,058 \text{ m}$  ab. Nach einer weiteren Erhöhung der Last auf  $3,34 * g$  ist die Stützlinie so weit „zentriert“, dass sie überall innerhalb des Bogenquerschnittes verläuft.

Während fortschreitender Belastung öffnen sich die Risse am Scheitel und am Auflager weiter und in den Restquerschnitten entstehen praktisch keine Zugspannungen mehr. Dadurch entsteht ein ausgeglichener Verlauf der Stützlinie entlang des Bogens. Die Außermittigkeiten betragen am Scheitel  $e = 0,058 \text{ m}$ , am Viertelpunkt  $e = -0,058 \text{ m}$  und am Auflager  $e = 0,063 \text{ m}$ .

Diese Ergebnisse zeigen, dass die rein statischen Lösungsverfahren, wie die Stützlinienmethode und das Verfahren nach *Heyman*, einen ungünstigeren Verlauf der Stützlinie liefern, als die Verfahren mit der Rissbandmethode. Der Grund dafür ist, dass das Mauerwerk in der Druckzone bei der Belastung von  $3,34 * g$  in einem linear-elastischen Zustand ist, da die Druckfestigkeit noch nicht erreicht ist. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass der Mörtel, trotz plastischer Eigenschaften, zwischen zwei Ziegelsteinen ein schwach unterlineares Verformungsverhalten zeigt und die Druckzone in den gerissenen Bereichen mit etwa  $d/3 = 5 \text{ cm}$  relativ groß ist gegenüber *Heymans* Annahme einer Höhe von 1 bis 2 Zentimeter.

Der Stützlinienverlauf in einem Halbkreisbogen mit  $d = 64$  cm verändert sich bei fortschreitender Belastung und Rissbildung anders (Bild 5.16). Der erste Unterschied zum  $120^\circ$ -Bogen mit  $d=15$  cm ist, dass nach der Bildung des Auflagerrisses (R1) die Risse am Scheitel (R2) und am Viertelpunkt (R3) nicht bei der gleichen Laststufe, sondern nacheinander entstehen. Der erste Riss entsteht am Auflager bei einer Lasthöhe von  $0,69 * g$ , obwohl die Außermittigkeit am Scheitel von  $e = 40,6$  cm etwas größer ausfällt als am Auflager mit  $e = 40,1$  cm. Der Grund dafür ist, dass am Auflager nicht nur Biegezugspannungen, sondern auch erhebliche Schubspannungen auftreten. Somit wird das Versagenskriterium am Auflager bei einer niedrigeren Last als am Scheitel erfüllt. Nach der Bildung der ersten Risse wird die Außermittigkeit am Auflager um 30% kleiner, dabei nimmt sie am Viertelpunkt um 9% und am Scheitel um 41% zu. Somit liegt die Stützlinie nur im Bereich des Scheitels außerhalb des Querschnitts.

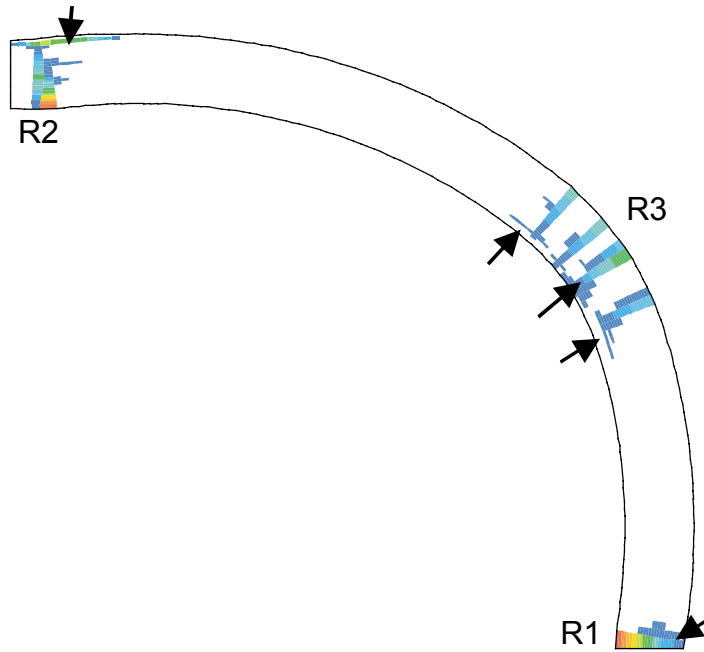
Nach weiterer Steigerung der Last auf  $1,54 * g$  erscheint der zweite Riss in unmittelbarer Nähe des Scheitels. Durch diese örtliche Veränderung der Steifigkeit fällt hier die Außermittigkeit auf 49% des vorherigen Wertes.

Am Auflager nimmt sie um 6% ab, im Viertelpunkt jedoch um 28% zu und rutscht aus dem Querschnitt heraus.

Tabelle 5.5: Außermittigkeit in den maßgebenden Querschnitten während fortschreitender Belastung und Rissbildung in einem  $180^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogen aus Einphasen-Werkstoff, nach den Ergebnissen der FE-Berechnungen.  
Die Bezeichnung der Risse entspricht Bild 5.16.

Zustand / Last	Außermittigkeit im Querschnitt [m]		
	Scheitel	Viertelpunkt ( $\beta=56^\circ$ )	Auflager
ungerissen / $0,6 * g$	0,406	-0,244	0,401
R1 / $0,69 * g$	0,574	-0,261	0,280
R1+R2 / $1,54 * g$	0,267	-0,310	0,263
R1+R2+R3 / $2,04 * g$	0,295	-0,295	0,287

Die Lage der Viertelpunkte nach den FE-Berechnungen und nach Heyman sind:  $\beta_{1FE}/\beta_{1H}=39,4^\circ/40,8^\circ$  bei  $\alpha_1=120^\circ$ ,  $\beta_{3FE}/\beta_{3H}=50^\circ/50,6^\circ$  bei  $\alpha_3=150^\circ$  und  $\beta_{3FE}/\beta_{3H}=56^\circ/59^\circ$  bei  $\alpha_2=180^\circ$ .



Bemerkung: Nur die Hälfte des verformten Tragwerks dargestellt.  
Die Verformungen sind vergrößert dargestellt.

Bild 5.16: Von Rissen durchsetzte Bereiche beim Lastniveau von  $2,04 \cdot g$  eines am Anfang eingespannten  $180^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogen mit  $R=0,64$  m aus Einphasen-Werkstoff ( $f_t = 450$  kN/m<sup>2</sup>). (dunkelblau: kleine, hellblau bis grün: mittlere, gelb bis orange: große Rissdehnungen) Die Markierung der Bereiche entspricht der Reihenfolge der Risserscheinung. Am Scheitel, am Viertelpunkt und am Auflager sind Längsrisse aufgetreten: Die Delaminierung der Druckzonen ist bereits fortgeschritten. Die Längsrisse sind mit Pfeilen markiert. Die Richtung der Risse wurde aus der vergrößerten grafischen Darstellung der Rissdehnungsvektoren entnommen.

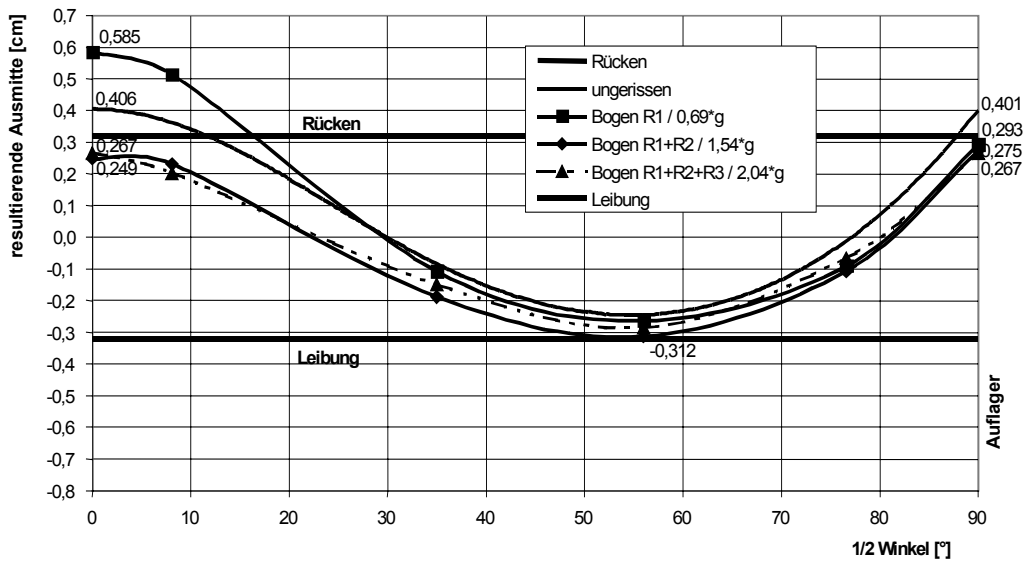


Bild 5.17: Verlauf der Stützlinie während fortschreitender Rissbildung in einem am Anfang eingespannten  $180^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogen mit  $R=6,0$  m und  $d=0,64$  cm aus sprödem, Einphasen- Werkstoff

Wird an dieser Stelle bei  $1,7 \cdot g$  die Zugfestigkeit an der Oberkante des Querschnitts erreicht, entsteht die dritte Risszone aus zwei benachbarten Rissen im Bogen. Nach weiterer Erhöhung der Last auf  $2,04 \cdot g$  nimmt die Stützlinie eine Lage an, in der sie im ganzen Bogen innerhalb des Querschnittes liegt, wobei die Größe der Außermittigkeiten in den drei maßgeblichen Querschnitten praktisch gleich groß ausfällt.

Zum Verlauf der Stützlinie in Bogentragwerken unter fortschreitender Belastung durch Eigengewicht kann unter Verzicht auf eine ausführliche Darstellung bemerkt werden, dass durch das Einreißen der Zugzone – vorerst - elastische Gelenke entstehen. An diesen Gelenken ist der Restquerschnitt überdrückt. Die Druckkräfte nehmen ihre kleinste Außermittigkeit in diesem Zustand an. Bei weiterer Belastung wachsen die Verformungen und die eingerissenen Querschnitte werden bei einer Zunahme der Außermittigkeit der Druckkräfte so lange eingeschnürt, bis am Auflager die Druckzone versagt.

### 5.3.2 Neigung der Auflagerkraft

Die Neigung (H/V) der Auflagerkraft in Abhängigkeit von der Last bei fortschreitender Rissbildung ist für einen  $120^\circ$ -Bogen im Bild 5.18, für einen Halbkreisbogen im Bild 5.19 dargestellt. Der Grund für die geringfügige Schwankung der H/V-Werte während fortschreitender Rissbildung liegt im numerischen Lösungsverfahren. Die Veränderung von H/V stellt der hellgraue Pfeil wirklichkeitsnäher dar.

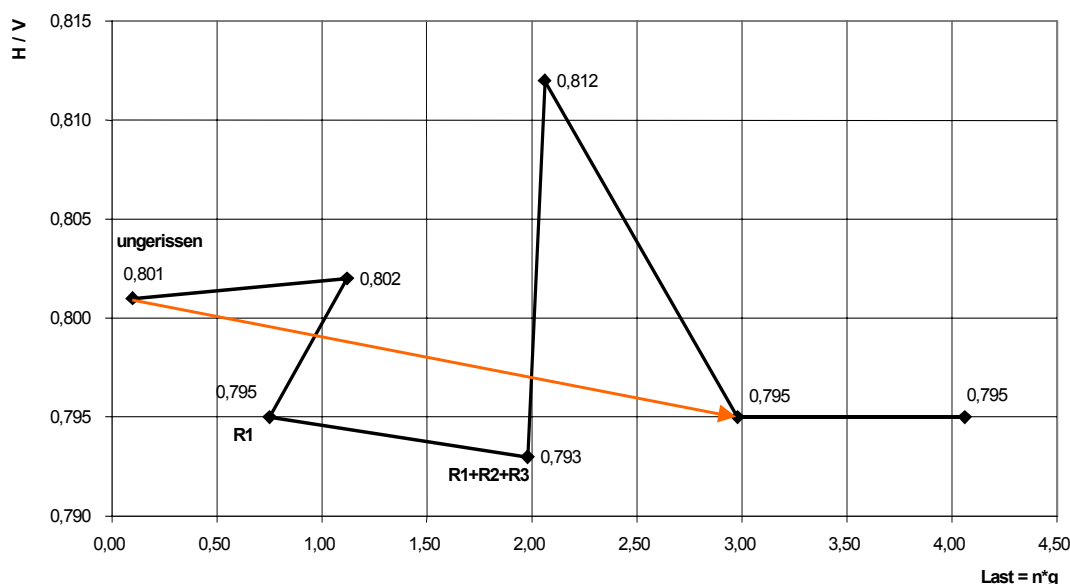


Bild 5.18: Neigung der Auflagerkraft in Abhängigkeit von der Belastung während fortschreitender Rissbildung in einem  $120^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogen aus Einphasen-Werkstoff. Die geringfügige Schwankung der H/V-Werte wird durch das numerische Lösungsverfahren verursacht. Der Pfeil stellt den wirklichkeitsnäheren Verlauf dieser Änderung dar.

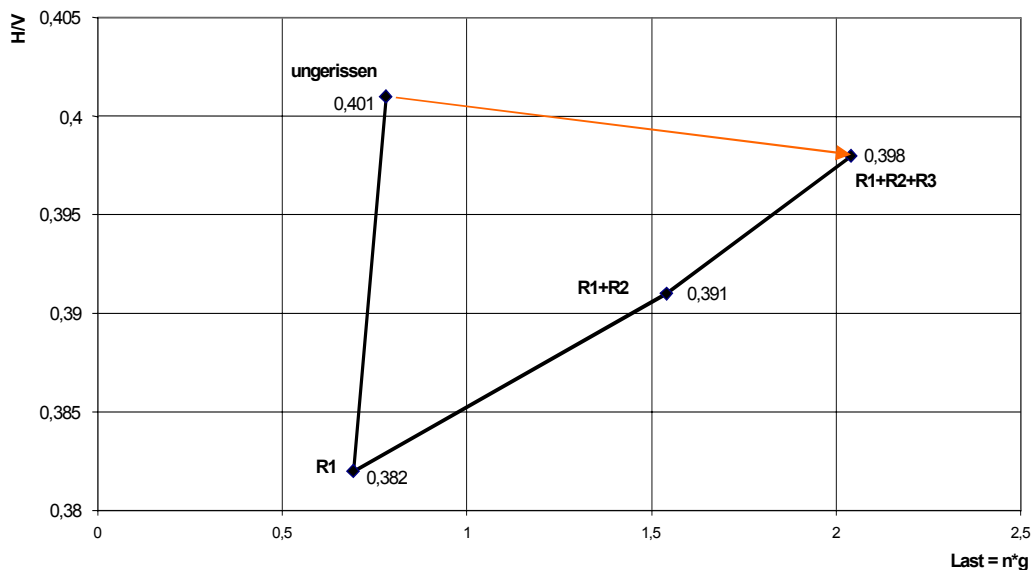


Bild 5.19: Neigung der Auflagerkraft in Abhängigkeit von der Belastung während fortschreitender Rissbildung in einem 180°-Öffnungswinkel-Bogen aus Einphasen-Werkstoff. Die geringfügige Schwankung der H/V-Werte wird durch das numerische Lösungsverfahren verursacht. Der Pfeil stellt den wirklichkeitsnäheren Verlauf dieser Änderung dar.

Bei beiden Modellen kann festgestellt werden, dass der Unterschied zwischen ungerissenem Zustand und dem Zustand kurz vor dem Versagen klein ausfällt. Beim 120°-Bogen liegt der H/V-Wert in ungerissenem Zustand um 2% über dem des gerissenen. Beim Halbkreisbogen beträgt diese Differenz weniger als 1%.

Demnach können zur Bestimmung der Größe des Auflagerschubs Ergebnisse von linear-elastischen Berechnungen mit einem eingespannten Bogenmodell ohne Einschränkung verwendet werden.

### 5.3.3 Verformungen der Bogenmodelle

Neben dem Stützlinienverlauf und der Auflagerkraftneigung wurden die Verformungen der untersuchten Bogenmodelle ausgewertet. Bei 120° und 180° Bögen sind die Verformungen im Prinzip ähnlich: Der Scheitel senkt sich durch und die Viertelpunkte werden in radialer Richtung nach außen gedrückt.

In Bild 5.20 und Bild 5.21 ist die Scheitelsenkung von 120°- und 180°-Bögen in Abhängigkeit von der Belastung dargestellt. Es sind jeweils die Last-Verschiebungskurven von Modellen aus einem sprödem Werkstoff mit Zugfestigkeiten von  $f_t = 450 \text{ kN/m}^2$  und  $150 \text{ kN/m}^2$  aufgetragen.

Im Verlauf jeder Last-Verschiebungskurve zeigt sich die Rissbildung durch eine lokale Störung in Form eines plötzlichen Abfalls der Last. Nach unterschiedlich großer Talfahrt steigt die Last erneut, die Steifigkeit ist nach Bildung weiterer Risse geringer. In Wirklichkeit fällt die Last bei der Bildung von Rissen nicht ab. Durch die Rissbildung verringert sich die Steifigkeit und die Verformungen nehmen stark zu, ohne wesentliche Zunahme der Last. (s. noch Bild 8.20 rechts).

Die Last-Verschiebungskurven gleicher Modelle mit unterschiedlicher Zugfestigkeit sehen ähnlich aus und stehen ungefähr im Verhältnis zueinander wie das Verhältnis ihrer Zugfestigkeiten.

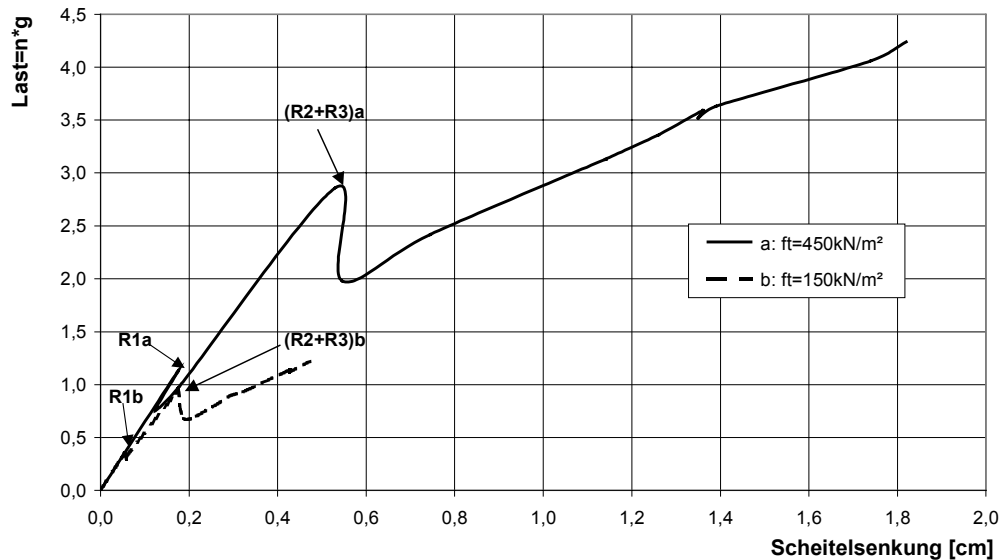


Bild 5.20: Errechnete Last-Verschiebungskurven der Scheitelpunkte während fortschreitender Rissbildung eines  $120^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogens aus sprödem Einphasen-Werkstoff (Scheitelverschiebung nach unten = positiv)

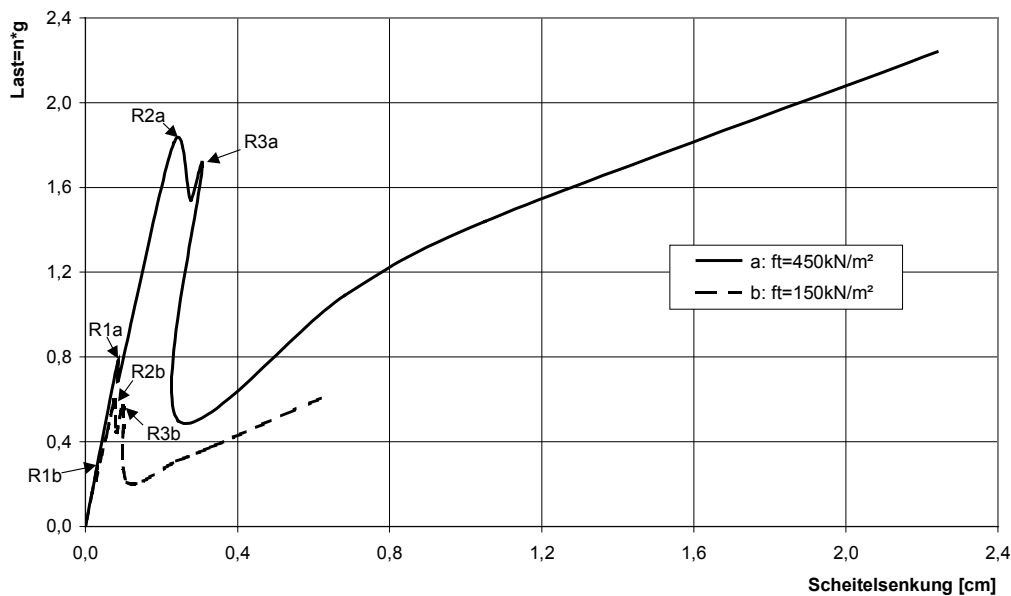


Bild 5.21: Last-Verschiebungskurven der Scheitelpunkte während fortschreitender Rissbildung eines  $180^\circ$ -Öffnungswinkel-Bogens aus sprödem Einphasen-Werkstoff



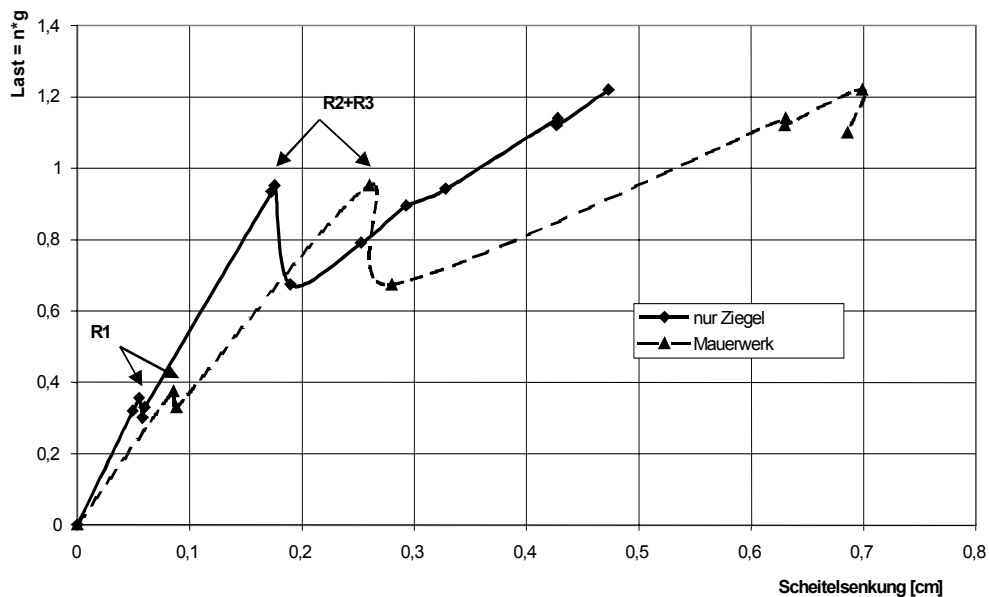


Bild 5.22: Last-Verschiebungskurven der Scheitelpunkte während fortschreitender Rissbildung zweier  $120^\circ$ -Öffnungswinkel-Bögen aus sprödem Einphasen-Werkstoff mit unterschiedlichen E-Modulen; ( $E_Z = 5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  für Ziegel und  $E_M = 3,39 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  für historisches Mauerwerk)

Der Einfluss des E-Moduls ist im Bild 5.22 durch die Last-Verschiebungskurven zweier Bögen mit  $\alpha = 120^\circ$ , mit gleicher Geometrie und Zugfestigkeit, jedoch mit unterschiedlichen E-Moduln dargestellt. Durch Streckung der L-V-Kurve des Bogens aus „nur Ziegeln“ entlang der Verschiebungsachse im Verhältnis  $E_Z/E_M$  entsteht in etwa die L-V-Kurve des „Mauerwerksbogens“.

Um den Einfluss der Duktilität im Zusammenhang mit unterschiedlichen E-Modulen und Zugfestigkeiten aufzuzeigen, sind im Bild 5.23 Last-Verschiebungskurven der Scheitelsenkung dreier Modelle dargestellt. Modell „a“ ist aus sprödem Ziegel mit einem E-Modul von  $5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  und  $f_t = 450 \text{ kN/m}^2$  Zugfestigkeit. Modell „b“ ist aus „duktilen Ziegeln“ mit einer rechnerischen Bruchdehnung von  $\varepsilon = 1,8 \cdot 10^{-2}$  ( $h = 2,5 \text{ cm}$ ), mit einem E-Modul von  $5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  und mit einer Zugfestigkeit von  $f_t = 450 \text{ kN/m}^2$ . Modell „c“ ist aus duktilem, historischem Mauerwerk mit einer rechnerischen Bruchdehnung von  $\varepsilon = 1,8 \cdot 10^{-2}$  ( $h = 2,5 \text{ cm}$ ), mit einem E-Modul von  $3,39 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  und mit einer Zugfestigkeit von  $f_t = 150 \text{ kN/m}^2$ .

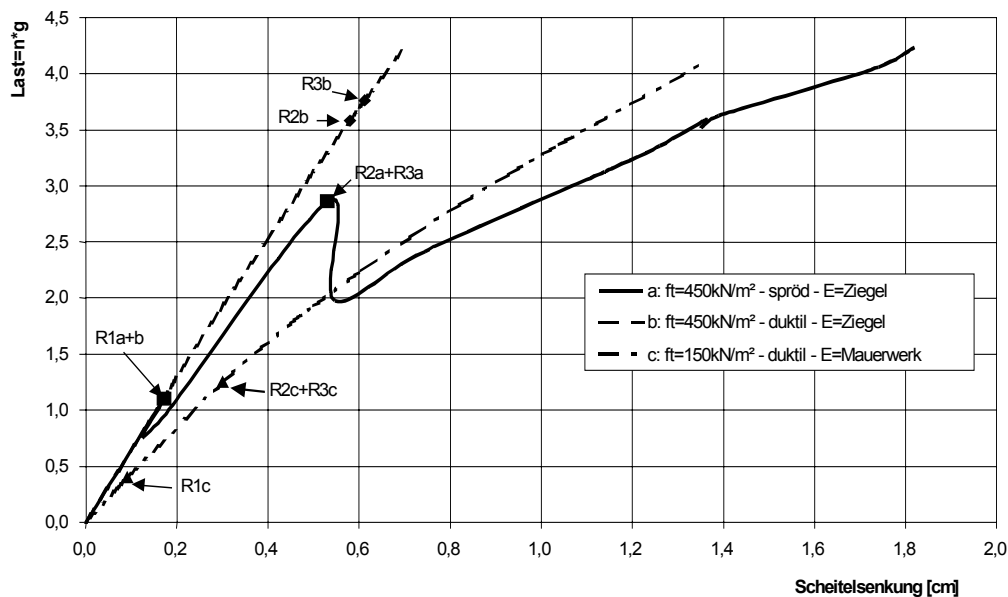


Bild 5.23: Einfluss der Duktilität, des E-Moduls und der Zugfestigkeit auf die Last-Verschiebungskurven der Scheitelpunkte während fortschreitender Rissbildung zweier 120°-Öffnungswinkel-Bögen aus Einphasen-Werkstoff.  
( $E_Z = 5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  für Ziegel und  $E_M = 3,39 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  für historisches Mauerwerk)

Der auffälligste Unterschied zwischen sprödem und duktilem Verhalten ist, dass die Rissbildung zwar eine Krümmungsänderung, aber keinen plötzlichen Abfall der Last in der L-V-Kurve verursacht. Da die eingerissenen Zonen noch Zugkräfte übertragen können, fällt ihre Steifigkeit nicht gleich auf Null ab. Somit sind die nichtelastischen Anteile der Scheitelsenkung kleiner. Nach der Bildung der Risse am Auflager ist die Steifigkeit des spröden Bogens merkbar kleiner als die des duktilen Bogens. Nach abgeschlossener Rissbildung weist der spröde Bogen sogar eine größere Scheitelsenkung bei gleicher Last auf als der duktile Bogen mit den Eigenschaften von historischem Mauerwerk.

## 5.4 Untersuchung des Tragverhaltens eines 120°-Bogens mit einem Zweiphasenmodell

Die Untersuchung des Tragverhaltens von Mauerwerkskonstruktionen mit einem homogenen und isotropen Werkstoffmodell ist eine grobe Vereinfachung der Aufgabe. Schon aus der Struktur und aus den stark unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften der Bestandteile des Mauerwerks folgt ein anisotropes Verhalten auch im ungerissenen Zustand [siehe Kapitel 4]. Treten Risse im Mörtel auf, ist die Richtungsabhängigkeit des Verhaltens noch stärker. Dementsprechend können die Ergebnisse solcher FE-Berechnungen mit Einphasenmodellen nur als Näherungslösung, also eher qualitativ als quantitativ zuverlässig, angesehen werden.

Das richtungsabhängige Verhalten von Mauerwerk kann bei Einphasenmodellen durch eine komplexe Beschreibung des Verformungsverhaltens und der Versagenskriterien erreicht werden. Bei einer Untersuchung von Mauerwerkskonstruktionen mit der Methode der Finiten Elemente unter Einsatz eines Einphasen-

modells kann zwar ein relativ einfaches Netz benutzt werden, aber durch den komplexen Aufbau der Versagenskriterien, wie bei *Ganz, 1985*, ist der Rechenaufwand sehr groß.

Eine andere Möglichkeit ist, das Tragwerk mit einem detaillierten Zweiphasenmodell abzubilden. Dabei werden die Ziegelsteine und die Mörtelfugen durch mehrere Elementschichten abgebildet. Die bei der Untersuchung eingesetzte Werkstoffparameter sind in Tabelle 5.6 zusammengestellt. Der Nachteil dieser Lösung ist die relativ große Anzahl der Elemente im Modell: Um das Verhalten der Mörtelfugen numerisch stabil simulieren zu können, sind vier Elementschichten für eine Mörtelfuge erforderlich. Eine Verdichtung des Netzes im Querschnitt ist ebenfalls ratsam, um die Proportionen der Elemente nicht zu stark zu verzerren. Somit ergibt sich beim untersuchten 120°-Bogenmodell etwa die 5-fache Anzahl der Elemente, also 4560 statt 960. Die mechanischen Eigenschaften können dafür wesentlich einfacher modelliert werden: Bis zum Erreichen der jeweiligen Festigkeit linear-elastisch, mit dem Drucker-Prager Plastizitätskriterium für den Zustand nach Überschreitung der Druckfestigkeit und mit dem Rissbandmodell für den Zustand nach Überschreitung der Zugfestigkeit.

Für die nachstehend aufgeführten Untersuchungen wurde die Geometrie der im vorhergehenden Abschnitt diskutierten 120°-Bögen mit einem Radius  $R = 6,0$  m und einer Bogenstärke  $d = 0,15$  m, mit einer Ziegelsteinhöhe von 8 cm und einer Mörtelfugenstärke von 3,0 cm bis 3,3 cm gewählt. Die Ziegelsteine sind rechteckig, die Mörtelfugen leicht trapezförmig.

Tabelle 5.6: Werkstoffeigenschaften für die Untersuchung mittels Zweiphasenmodell

Werkstoff		Ziegel	Mörtel
Schichtstärke	[cm]	8,0	3,0 bis 3,3
E-Modul	[kN/m <sup>2</sup> ]	$5 \cdot 10^6$	$2,5 \cdot 10^6$
Poisson-Zahl $\nu$	[ - ]	0,2	0,15
Rohwichte $\rho$	[t/m <sup>3</sup> ]	1,8	
Druckfestigkeit $f_c$	[kN/m <sup>2</sup> ]	-	1100
$\tan \phi$	[ - ]	-	0,5
Zugfestigkeit $f_t$	[kN/m <sup>2</sup> ]	450	150
Bruchdehnung $\epsilon^{1)}$		-	-

Bemerkung: 1) Es wurde sprödes Werkstoffverhalten angenommen.

#### 5.4.1 Verlauf der Stützlinie

Die Rissentwicklung entspricht der des Einphasenmodells. Erst bildet sich ein Riss am Auflager, dann erscheinen der Reihe nach gleich in mehreren Mörtelfugen Risse am Scheitel und am Viertelpunkt. Während der fortschreitenden Belastung nimmt die Anzahl der gerissenen Mörtelfugen in allen Bereichen zu. Im Bild 5.24 ist das halbe Modell mit den gerissenen Mörtelfugen farblich markiert dargestellt. In Tabelle 5.7 sind die Außermittigkeiten in den drei maßgeblichen Querschnitten

bei etwa gleicher Scheitelsenkung zusammengestellt. Hier zeigen sich kaum Unterschiede. Die größte Differenz von 0,03% der Querschnittshöhe mit 0,45 cm zwischen den beiden Stützlinien ergibt sich am Scheitel. Der weitere Verlauf der Stützlinie entspricht der Linie des Einphasenmodells mit Mauerwerkseigenschaften.

Tabelle 5.7: Vergleich der bezogenen Außerzmittigkeiten eines Zweiphasenmodells und eines Einphasenmodells mit Ersatzeigenschaften ( $\alpha = 120^\circ$ ,  $R = 6,0$  m und  $d = 0,15$  m) bei gleicher Zugfestigkeit  $f_t = 150$  kN/m<sup>2</sup> und etwa gleich großer Scheitelsenkung

Modell	e/d		
	Scheitel	Viertelpunkt	Auflager
Zweiphasenmodell	0,43	0,40	0,45
Einphasenmodell	0,40	0,39	0,44

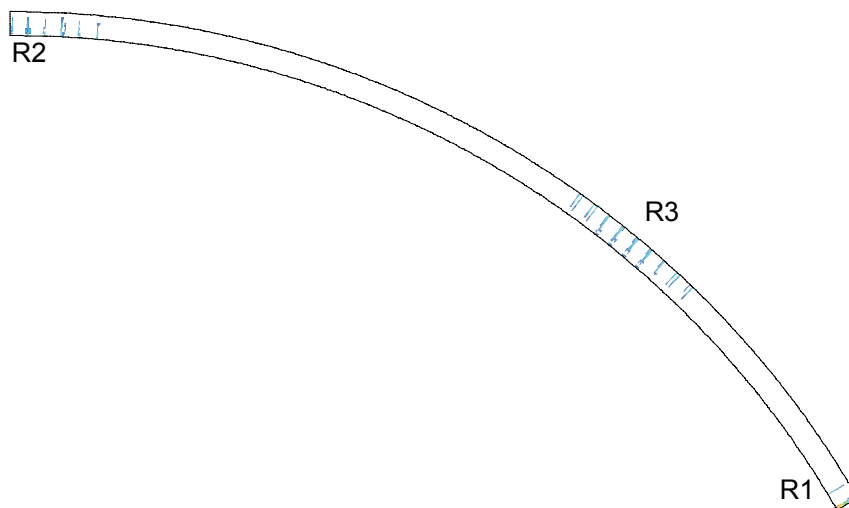


Bild 5.24: Zweiphasenmodell eines 120°-Öffnungswinkel-Bogens nach abgeschlossener Rissbildung. Nur die Mörtelfugen weisen Risse auf. (blau bis grün: kleine, gelb bis orange: große Rissdehnungen) Die Markierung der Bereiche entspricht der Reihenfolge der Risserscheinung.

#### 5.4.2 Neigung der Auflagerkraft

Beim Zweiphasenmodell gibt es auch kaum Unterschiede in der Neigung der Auflagerkraft zwischen ungerissenem Zustand und abgeschlossener Rissbildung. Der H/V-Wert beträgt in ungerissenem Zustand 0,801 und im gerissenen Zustand 0,795. Damit ist die Differenz, wie beim Einphasenmodell, gerade 2%.

#### 5.4.3 Verformungen

Im Bild 5.25 sind die Scheitelsenkungen zweier 120° Bögen (der eine mit Einphasenmodell, der andere mit Zweiphasenmodell simuliert) in Abhängigkeit von der Belastung dargestellt. In beiden Fällen beträgt die Zugfestigkeit  $f_t = 150$  kN/m<sup>2</sup>. Die Risse treten beim Einphasenmodell bei höheren Lasten auf als beim Zweipha-

senmodell. Dies kann entweder auf „Homogenisierungsfehler“, oder auf den Unterschied in der Elementgröße beider Modelle zurückzuführen. Der Homogenisierungsfehler besteht darin, dass orthotropes Werkstoffverhalten im eingesetzten Einphasen- Werkstoffmodell nicht erfasst werden kann.

Abgesehen von diesem Unterschied verlaufen die Last-Verschiebungskurven ähnlich.

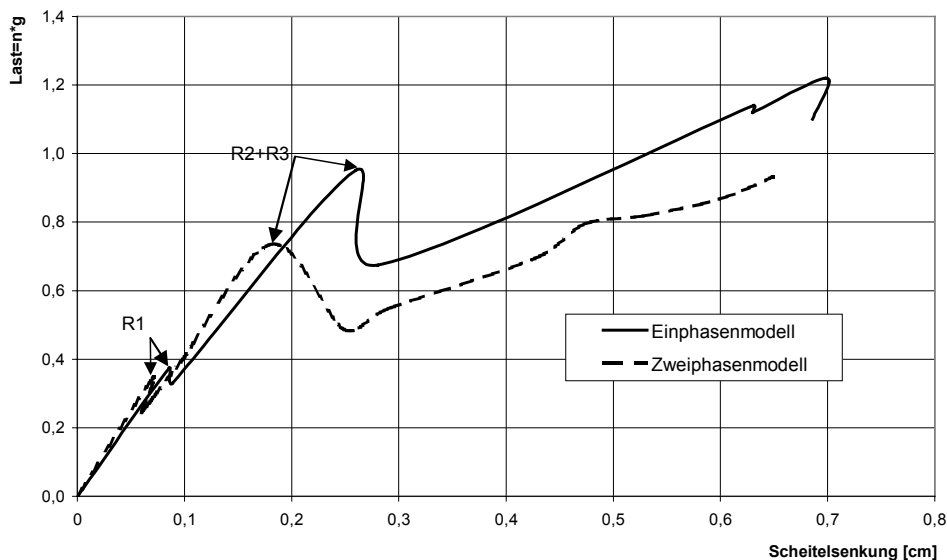


Bild 5.25: Scheitelsenkung eines 120°-Bogens nach der Simulation mit einem Einphasenmodell und mit einem Zweiphasenmodell bei gleicher Zugfestigkeit

## 5.5 Zusammenfassung

Im Kapitel 5 wurden Untersuchungsergebnisse über das Tragverhalten ebener Kreissegmentbögen aus Mauerwerk mit verschiedenen Methoden dargestellt. Es wurden Verfahren mit immer stärker verfeinerter Erfassung der Materialeigenschaften dargestellt und die Ergebnisse diskutiert:

Die Stützlinienmethode, die keine Werkstoffeigenschaften berücksichtigt.

Das Stabtragwerkmodell mit linear-elastischen, ausreichend zug- und druckfesten Werkstoffeigenschaften.

Das Einphasen-Scheibenmodell unter Berücksichtigung der Zugfestigkeit bzw. der Rissbildung mit der Rissbandmethode (und der Plastifizierung des Werkstoffes mit der Drucker-Prager Fließbedingung).

Das differenzierte Zweiphasen-Scheibenmodell unter Berücksichtigung der Zugfestigkeit bzw. der Rissbildung mit der Rissbandmethode und der Plastifizierung der Werkstoffe mit der Drucker-Prager Fließbedingung.

Die mit den dargestellten Methoden gewonnene Ergebnisse können wie folgt zusammengefasst werden:

Die rein statischen Verfahren geben lediglich Auskunft über den Gleichgewichtszustand eines (Bogen-)Tragwerkes. Die Lösung liegt immer auf der sicheren Seite, d.h. die ermittelten Außermittigkeiten stellen eine obere Schätzung dar. Vorteil der Methode ist, dass sie nach der Aufnahme der Ist-Form eines Bogens über die Standsicherheit immer eine zuverlässige Aussage für die Standsicherheit liefert.

Untersuchungen unter Annahme linear-elastischer, ausreichend zug- und druckfester Werkstoffeigenschaften mit einem Stabtragwerkmodell können nur dann eingesetzt werden, wenn der Werkstoff den Annahmen weitgehend entspricht. Dies ist beim Mauerwerk nicht der Fall. Anderenfalls müssen die Abmessungen so groß sein, dass im Bogen überall elastische Spannungszustände herrschen. Die errechneten Stützlinien und Verformungen gelten sinngemäß nur für den ungerissenen Zustand. Der Auflagerschub, unter Annahme eines eingespannten Systems, ist mit ausreichender Genauigkeit auch für gerissene Systeme verwendbar.

Beim Einsatz eines Einphasenmodells mit spröden oder duktilen Werkstoffeigenschaften unter Berücksichtigung der Rissbildung mit der Rissbandmethode und der Plastifizierung mit der Drucker-Prager-Fließbedingung sind qualitativ bessere Ergebnisse zu erwarten. Der Stützlinienverlauf und der Auflagerschub lassen sich damit zuverlässig bestimmen. Nach den eigenen Untersuchungen sind der Stützlinienverlauf und der Auflagerschub verhältnismäßig unempfindlich gegen „Veränderungen“ der Materialeigenschaften bis zur abgeschlossenen Rissbildung. Die Lage der Viertelpunkte nach Heyman wurde bei Bögen mit  $\alpha=120^\circ$  und  $\alpha=150^\circ$  bestätigt. Bei  $\alpha=180^\circ$  weicht der Wert der FE-Berechnung um  $3^\circ$  ab. Das ist wahrscheinlich auf den Einfluss von Schubverformungen zurückzuführen. Über die Genauigkeit der errechneten Verformungen kann keine Aussage getroffen werden, da dazu zuverlässige Rechenwerte der Zugfestigkeit und des E-Moduls sowie Kenntnisse über das Materialverhalten unter Zugbeanspruchung (wie die Bruchenergie „ $G_F$ “) erforderlich sind. Zur Zeit der Durchführung der FE-Berechnungen standen diese nicht zur Verfügung. Allgemein kann festgestellt werden, dass die Verformungen im gerissenen Zustand – Größenordnung „cm“ - das Mehrfache der Verformungen im ungerissenen Zustand - in der Größenordnung von „mm“ - betragen. Vergleicht man die Ergebnisse im gerissenen Zustand mit an bestehenden Bögen bzw. Gewölbe gemessenen Verformungen, ergibt sich noch einmal ein Sprung in der Größe der Verformungen mit dem Faktor 10 durch zeitabhängiges Materialverhalten [Rehm und Mitarbeiter, 1995].

Die für den Zustand „abgeschlossene Rissbildung“ ermittelten Höchstlasten („peaks“) hängen sowohl vom Lösungsverfahren des Gleichungssystems als auch von der Schrittgröße bei der Belastung ab. Es muss gegebenenfalls durch mehrfache Wiederholung der Berechnung mit anderen numerischen Lösungsmethoden und mit direkter Belastungssteuerung geprüft werden, ob eine größere Höchstlast erreicht werden kann.

Differenzierte Zweiphasenmodelle sind die wirklichkeitsnächste Möglichkeit zur Durchführung von Standsicherheitsuntersuchungen eines Mauerwerksbogens. Die Stützlinie und der Auflagerschub können quantitativ zuverlässig ermittelt werden. Die Verformungen sind bei zutreffender Annahme der Werkstoffeigenschaften zumindest in ihrer Größenordnung richtig. Für die Ermittlung der Höchstlast gilt das gleiche wie beim Einphasenmodell.

## 6. Gemauerte Tonnengewölbe als räumliche Tragwerke

Das räumliche Tragverhalten von Einwölbungen wurde von *Heyman, 1966 und 1967*, untersucht. Er analysierte Kugelsegment-Kuppeln und gotische Kreuzgewölbe mit Hilfe der Theorie der Membranschalen.

*Barthel, 1991*, stellte das Tragverhalten von unterschiedlich gestalteten Kreuzgewölben vor. In FE-Berechnungen berücksichtigte er Rissbildung und nicht-elastisches Materialverhalten unter Druck. Anhand seiner Ergebnisse verbesserte er das Bemessungsverfahren von *Pieper, 1983*.

*Trautz, 1998*, rechnete eine Reihe von historischen Einwölbungen nach. Wie *Barthel* berücksichtigte er nichtlineares Werkstoffverhalten. Am Beispiel der Tonnengewölbe der Kirche St. Michael in München stellt er die Wirkungsweise einer abschnittsweise gelagerten kreiszylindrischen Tonne vor. In seinen Ausführungen ging er auf den Einfluss von Stichkappen nicht ein.

In Standsicherheitsuntersuchungen werden Tonnengewölbe mit Stichkappen in der Regel als ebene Bogentragwerke modelliert (Bild 6.1). Als Spannweite wird der Abstand zwischen den Trombenoberkanten angenommen. Die Untersuchungen in Kapitel 5 zeigen, dass ein gemauerter Bogen mit einem Radius von  $R = 6,0$  m, einer Querschnittshöhe von  $d = 0,15$  m und einem Öffnungswinkel von  $\alpha \cong 120^\circ$  unter Eigengewicht gerade noch standsicher ist. Zahlreiche Tonnengewölbe mit gleichem Radius und gleicher Wandstärke haben zwischen den Gewölbeansätzen einen größeren Öffnungswinkel als  $\alpha = 120^\circ$ . Sie stehen jedoch seit Jahrhunderten. Alle dieser Einwölbungen haben Stichkappen, die mit der Haupttonne verbunden sind.

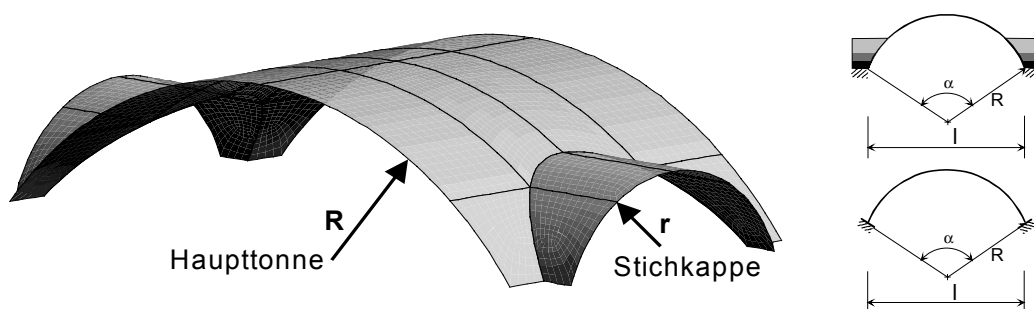


Bild 6.1: Zylindrisches Tonnengewölbe mit Stichkappen - Isometrische Darstellung eines Gewölbefeldes (links). Querschnitt des Gewölbes (rechts oben) und das in der Ingenieurpraxis übliche statische System dazu (rechts unten)

Die Vermutung liegt nahe, dass Stichkappen eine wesentliche Verbesserung im Tragverhalten solcher Einwölbungen darstellen, auch wenn die Vorderkante einer Stichkappe nicht durch das aufgehende Mauerwerk gestützt wird.

Somit ist ihre Vernachlässigung bei statischen Untersuchungen eine zu grobe Näherung auf der „sicheren Seite“ und führt unter Umständen zu unnötigen Sicherungsmaßnahmen.

Zuerst werden die mechanischen Modelle zur Analyse von Einwölbungen kurz dargestellt. Danach werden die Ergebnisse eigener numerischer Untersuchungen mit folgenden Modellen vorgestellt:

- Gewölbe als Schale modelliert, nach der Biegetheorie der Schalen, unter Annahme eines linear-elastischen Werkstoffgesetzes.
- Ausgewählte Gewölbemodelle mit finiten Volumenelementen abgebildet, unter Berücksichtigung von Rissbildung und Plastifizierung im Werkstoffmodell.

Zum Abschluss werden die Ergebnisse diskutiert.

## 6.1 Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von gekrümmten Flächentragwerken

Schalen sind ein- oder zweifach gekrümmte Flächentragwerke mit großen Ausdehnungen im Grundriss und mit einer geringen Wandstärke. In Tabelle 6.1 ist die Einteilung der Schalen nach ihren geometrischen Verhältnissen nach *Ramm, 2000*, dargestellt.

Tabelle 6.1: Einteilung der Schalenkonstruktionen nach dem Verhältnis  $d/R$ . Nach *Ramm, 2000*

Art	Membranschale	dünne Schale	dicke Schale
Geometrie	$d/R < 1/1000$	$1/1000 \leq d/R \leq 1/20$	$1/20 < d/R$

Schalen werden nach der Gültigkeit der Schalentheorien klassifiziert:

*Membranschalen* sind besonders dünne gekrümmte Flächentragwerke, die durch die sehr kleine Biegesteifigkeit ihrer Wand kaum Biegemomente aufnehmen können. Sie tragen ihre Lasten nur durch innere Kräfte ab, die zur Mittelfläche tangential gerichtet sind (*Girkmann, 1963*). Das Tragverhalten dieser sehr dünnen Schalen wird durch die Membrantheorie beschrieben. Nach der Membrantheorie lassen sich drei Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen (innerlich statisch bestimmte Theorie), das heißt, kinematische Gleichungen und Werkstoffbeziehungen sind heranzuziehen, wenn Verformungen zu ermitteln sind.

*Dünne Schalen* sind gekrümmte Flächentragwerke, die zur Aufnahme von senkrecht auf die Mittelfläche wirkenden Querkräften und von Biegemomenten eine ausreichende Wandstärke haben. Das Tragverhalten der dünnen Schalen wird durch die Biegetheorie der Schalen beschrieben. In der Biegetheorie werden die Materialeigenschaften und Formänderungen infolge Biegung und Normalkraft neben den Gleichgewichtsbedingungen für die Berechnung der Schnittgrößen benötigt.



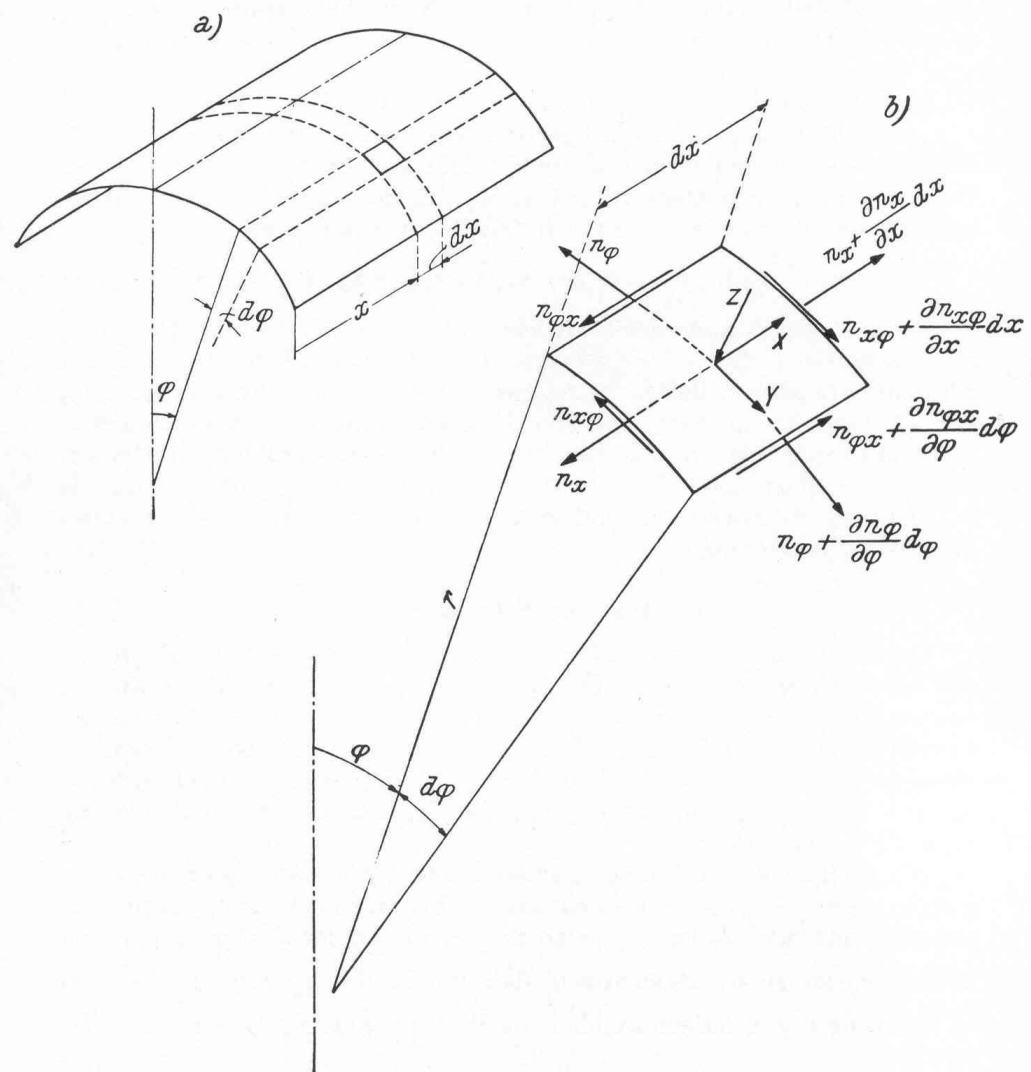


Bild 6.2: Schalenelement mit Last- und Membrankraftkomponenten.  
Aus Girkmann, 1963

*Dicke Schalen* haben eine große Wandstärke, damit müssen neben den Biegeverformungen auch die Querschubverformungen berücksichtigt werden.

Die Membrantheorie liefert für zylindrische Tonnenschalen Beziehungen zur Beschreibung der inneren Kräfte unter Eigengewicht. Die Lösung gilt jedoch nur dann, wenn die zugehörigen Randbedingungen erfüllt werden. Die Membrantheorie nimmt bei der Lösung jeder Tonnenschale an, dass diese an ihren beiden Endquerschnitten durch eine Scheibe oder einen Binder starr gehalten ist. Diese Lagerung darf nur Membrankräfte – also Normalkraft und Schub – aufnehmen (Bild 6.4). Können keine Schubkomponenten an den Endquerschnitten der Tonne aufgenommen werden, ist ein dreidimensionales membranartiges Tragverhalten nicht möglich. In diesem Fall kann die Tonne ihre Lasten nur in Bogenrichtung ableiten.

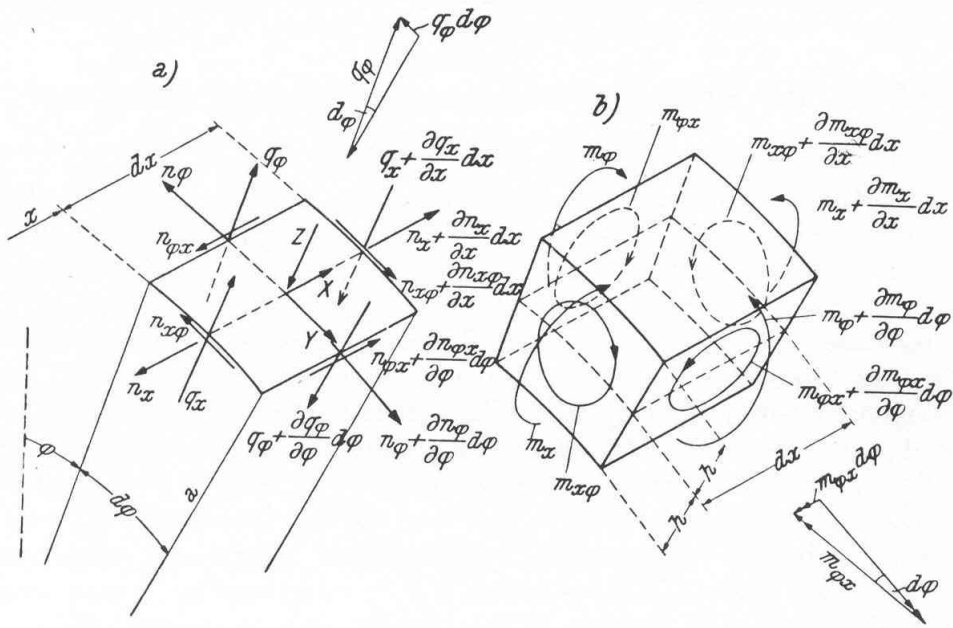


Bild 6.3: Schalelement mit Last- und Schnittkraftkomponenten in der Biegetheorie der dünnen Schalen. Aus Girkmann, 1963.

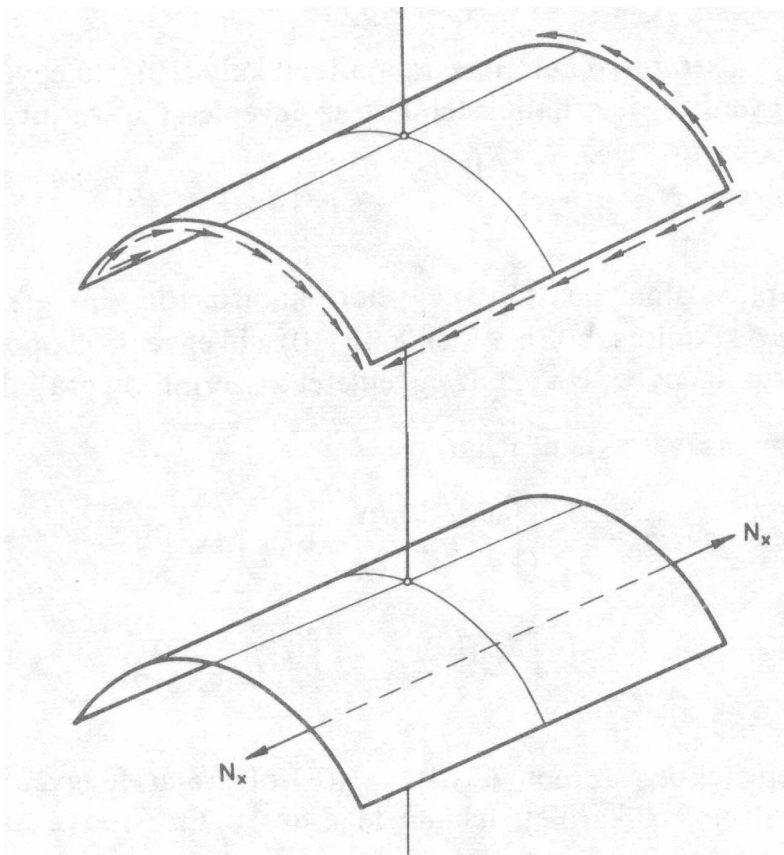


Bild 6.4: Zulässige Auflagerkraftkomponenten von Tonnenschalen nach der Membrantheorie: Schub (oben) und Normalkraft (unten). Aus Csonka, 1987

Die Biegetheorie der dünnen Schalen gibt das Trag- und Verformungsverhalten der betreffenden Schalenkonstruktionen mit linear-elastischem Werkstoffgesetz wieder. Das Differentialgleichungssystem kann nur für wenige, sehr einfachen Aufgaben in geschlossener Form gelöst werden. Seit der Verbreitung der elektronischen Tischrechner (PC) können die Schnittgrößen von Schalenkonstruktionen mit beliebiger Geometrie mit FE-Programme gelöst werden. Die Biegetheorie der Schalen kann für Schalen aus linear-elastischem, ausreichend zugfestem Material eingesetzt werden.

Gemauerte Tonnengewölbe werden zwischen zwei Längswänden meistens nach Fertigstellung des Daches eingezogen. Beim Errichten der Längswände werden die Kämpfer bereits gemauert. An beiden Endquerschnitten der Tonne wird sie normalerweise gegen die Querwand (Giebelwand oder Chorbogen) gemauert. Die Fuge zwischen Tonne und Querwand ist zwar vermörtelt, ihre Schubtragfähigkeit ist aber gering. Deshalb können an den Stirnseiten einer gemauerten Tonnenschale in der Regel kaum Membranschubkräfte aufgenommen werden. Somit kann sich ein dreidimensionales, rein membranartiges Tragverhalten nicht einstellen. Das Tragverhalten von Mauerwerkschalen lässt sich daher besser mit der Biegetheorie der Schalen modellieren.

Die nachfolgend vorgestellten Modelle bestehen aus Haupttonnen mit einem Radius  $R = 6$  m und mit einer Wandstärke  $d = 0,15$  m.

Das ergibt ein Verhältnis  $d/R = 1/40$ , damit gelten diese Einwölbungen als dünne Schalen. Die Stichkappen mit einem Verhältnis von  $d/r = 0,15/1,0 = 1/6,7$  bis  $0,15/2,0 = 1/13,3$  gelten als dicke Schalen. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt auf dem Einfluss der Stichkappen auf die Haupttonne. Da die Stichkappenachse senkrecht auf die Haupttonne ausgerichtet ist, spielt dabei die MembranstEIFigkeit eine wesentlich größere Rolle als die Querschubsteifigkeit in „Plattenrichtung“. Damit beeinflusst ihre Modellierung als dünne Schale die Ergebnisse unwesentlich.

## 6.2 Tragverhalten zylindrischer Tonnenschalen mit Stichkappen aus linear-elastischem Werkstoff unter Eigengewicht

Zur Untersuchung des Tragverhaltens von einfachen und zusammengesetzten Schalenkonstruktionen wurde bis vor Kurzem meistens die Membrantheorie herangezogen. Abweichungen von den allgemeinen Annahmen der Membrantheorie, wie Randstörungen oder eine größere Wandstärke, behandelte man gesondert. Anschließend wurden die Ergebnisse der Membranberechnung und der ergänzenden Untersuchung überlagert und die erforderlichen Nachweise geführt [Markus, 1967; Kollár, 1983]. Für die zu untersuchende Tonnengewölbe mit Stichkappen kann diese Vorgehensweise nicht eingesetzt werden, da gleichzeitig mehrere Annahmen von Membranlösungen nicht erfüllt werden.

Auf die Ergebnisse von Barthel, 1991, aufbauend wird im Vorfeld das Tragverhalten von Tonnengewölben mit Stichkappen aus dem von Kreuzgewölben qualitativ abgeleitet. In nachstehenden qualitativen Ausführungen werden die Biegemomente bzw. die Außermittigkeit der Druckkräfte außer acht gelassen. Es wird angenommen, dass ihre Größe keinen Einfluss auf die Ausrichtung der Druckspannungen habe, d. h. die Lage der Drucklinien in der Fläche verändert

sich durch die Rissbildung nicht. Lediglich ihre Außermittigkeit im Querschnitt ändert sich nach der Rissbildung.

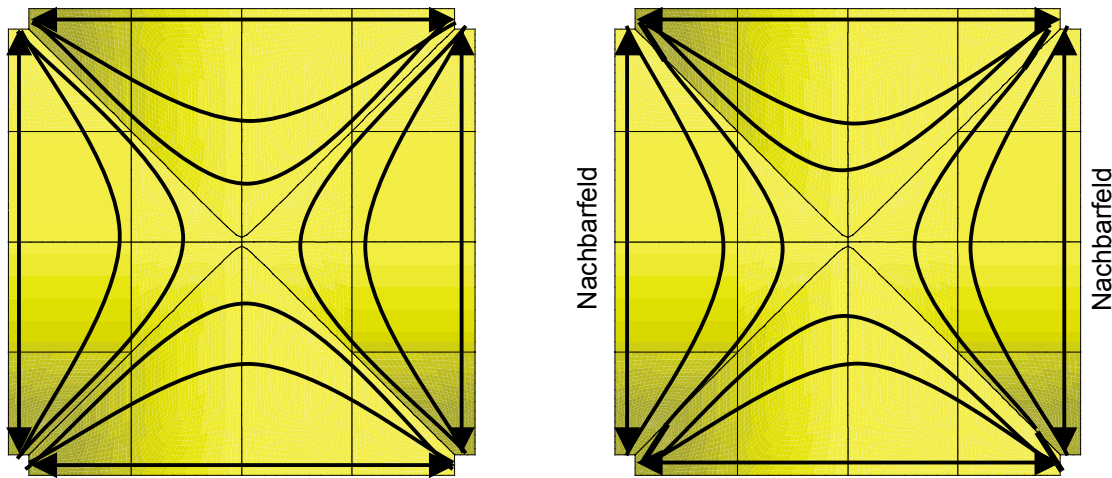


Bild 6.5: Zylindrisches Kreuzgewölbe mit ungestützten (links) und gestützten Kappenrändern (rechts). Verlauf der Drucktrajektorien schematisch. Die nicht gekennzeichneten Ränder sind frei.

Im Bild 6.5 sind die Drucklinien in zwei Lagerungsfällen eines zylindrischen Kreuzgewölbes dargestellt. Im ersten Fall (links) sind alle vier gekrümmten Kappenrändern frei. Im zweiten Fall (rechts) sind zwei gegenüber liegende Kappenränder frei, die anderen beiden parallel mit der zugehörigen Kappenachse gestützt und um die lokale Tangentialachse eingespannt. Dies entspricht dem Anschluss an eine benachbarte Kappe. Im ersten Fall (links) ist der Verlauf der Drucklinien zweifach symmetrisch. Die Druckkräfte sind am Scheitel tangential, quer zur Kappenachse, ausgerichtet. Die Druckkrafttrichtung folgt erst der Falllinie der Zylinderfläche und ändert dann ihre Richtung desto mehr, je näher sie zur Kehllinie kommt und bildet dann eine Tangente zu dieser. Im zweiten Fall (rechts) verlaufen die Drucklinien nur im Scheitelbereich gleich wie im ersten Fall (links). Im unteren Bereich der Kehle überschreiten die Drucklinien die Kehle und erreichen das Auflager in der seitlich nicht gestützten Nachbarkappe.

Im Bild 6.6 sind zwei Tonnengewölbe mit Stichkappen abgebildet. Anhand der Ergebnisse von FE-Berechnungen ist der Tragmechanismus schematisch dargestellt.

In beiden Fällen verlaufen die Drucklinien vom Scheitel ausgehend entlang der Falllinien. An den Kanten der Haupttonne verlaufen sie zum Auflager bogenartig. Im Haupttonnenabschnitt zwischen den Kappenscheiteln liegen die Drucklinien ebenfalls in der Falllinie. Oberhalb des Stichkappenscheitels bilden sich Entlastungsbögen in der Haupttonne, die den Druck vorerst seitlich der Kappen „membranartig“ ableiten. Im unteren Abschnitt der Kehle treffen drei Druckkräfte aufeinander: Aus der „Falllinie“ der Haupttonne, aus dem Entlastungsbogen und aus der horizontalen Abstützung des benachbarten Feldes. Durch den membranartigen Widerstand des Haupttonnenstücks werden die Druckkräfte hier in die Stichkappen „gedrückt“. Somit wirken die unteren Abschnitte der Stichkappen als Steifen.

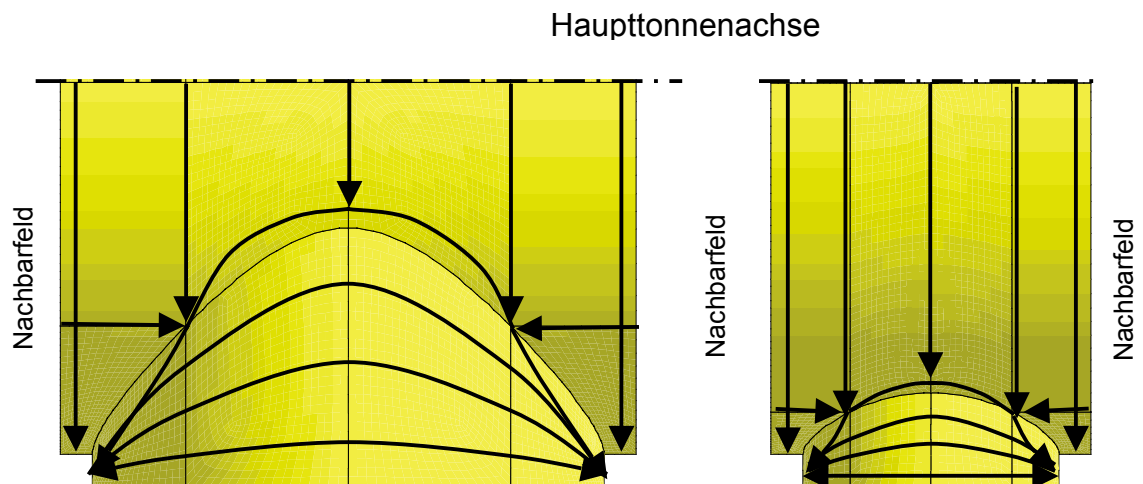
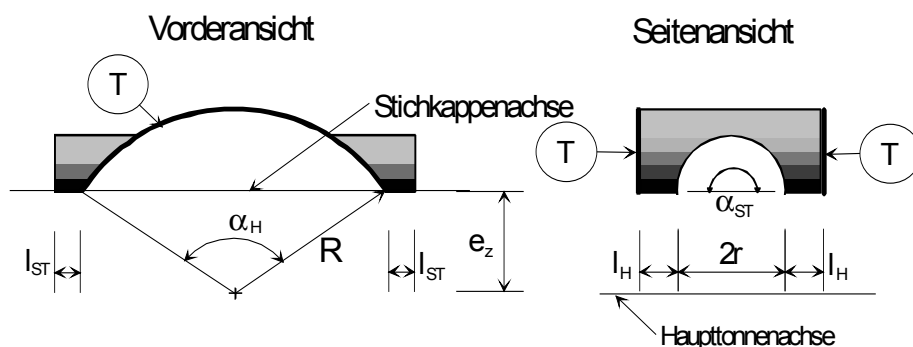


Bild 6.6: Zylindrische Tonnengewölbe ( $\alpha = 150^\circ$ ) mit Stichkappe  
 Verlauf der Drucktrajektorien bei Radius der Stichkappe  
 $r = 3,0$  m (links) und  $1,5$  m (rechts)  
 Die nicht gekennzeichneten Ränder sind frei. (nur die Hälfte des Systems dargestellt).

Nach dieser qualitativen Darstellung wird die Wirkungsweise der Stichkappen in ihren Einzelheiten untersucht.

Zuerst wurden insgesamt 27 Schalenmodelle nach Bild 6.7 mit der Biegetheorie der dünnen Schalen aus linear-elastischem Werkstoff berechnet. Die Berechnungen wurden mit dem FE-Programm DIANA 6.2 durchgeführt. Zur Modellierung der Gewölbegeometrie wurden zylindrisch gekrümmte Schalenelemente (CQ45S) verwendet. Die Kantenlänge der Schalenelemente lag zwischen 10cm und 20cm. Angaben über die Verschiebungsfunktion des Elements und sein Konvergenzverhalten bei dieser Vernetzung sind in Kapitel 8.2 zusammengestellt. Die Diagramme im Bild 8.11 zeigen, dass mit diesen Elementgrößen ausreichend genaue Ergebnisse erzielt werden können. In Tabelle 6.2 sind die Rechenparameter zusammengestellt.



Legende: „T“: Anschluss zum benachbarten Tonnenfeld

Bild 6.7: Geometrie der untersuchten Gewölbekonstruktionen mit den verwendeten Bezeichnungen. Auflagerlinien an der Tronpenoberkante:  $l_H$  und  $l_{ST}$

Tabelle 6.2: Rechenparameter der Schalenmodelle

Haupttonnenradius R	[m]	6,0
Stichkappenradius r	[m]	1,5 (1,0; 2,0 und 2,5) <sup>1)</sup>
Wandstärke d	[m]	0,15
Öffnungswinkel der Haupttonne $\alpha_H$	[°]	120 bis 150
Öffnungswinkel der Stichkappe $\alpha_{ST}$	[°]	180
Länge des Haupttonnenauflegers $l_H$	[m]	1,0
Länge des Stichkappenauflegers $l_{ST}$	[m]	0,5 bis 3,0
Flächengewicht g	[kN/m <sup>2</sup> ]	2,7
E-Modul	[kN/m <sup>2</sup> ]	$3,39 \cdot 10^6$
Poisson-Zahl $\nu$	[ - ]	0,2

Bemerkung: 1) Modelle mit diesen Stichkappenradien wurden nur mit  $\alpha = 150^\circ$  und  $l_{ST} = 1,0$  m untersucht.

In allen Modellen wurden der Haupttonnenradius ( $R = 6,0$  m) und die Wandstärke ( $d = 0,15$  m) sowie der Öffnungswinkel der Stichkappe ( $\alpha_{ST} = 180^\circ$ ) stets gleich groß gewählt. Der Einfluss der Stichkappenlänge  $l_{ST}$  bei Tonnen mit unterschiedlichem Öffnungswinkel „ $\alpha$ “ wurde an Modellen mit einem Stichkappenradius von  $r = 1,5$  m untersucht. Der Öffnungswinkel der Haupttonne variierte zwischen  $\alpha_H = 120^\circ$  und  $\alpha_H = 150^\circ$ .

Die Länge der horizontalen Haupttonnenaufleger betrug stets  $l_H = 1,0$  m, wobei die der Stichkappenaufleger zwischen  $l_{ST} = 0,5$  m und  $l_{ST} = 3,0$  m lagen. Der Einfluss des Stichkappenradius wird an zusätzlichen Modellen mit  $\alpha_H = 150^\circ$ ,  $r = 1,0$  m und  $2,0$  m gezeigt. In diesen Modellen haben die Stichkappen eine Länge von  $l_{ST} = 1,0$  m. Die Auflagerlinien an der Trompenoberkante -  $l_H$  und  $l_{ST}$  - wurden als unverschieblich und eingespannt angenommen. An den gekrümmten Haupttonnenrändern „T“ wurden die anschließenden Tonnenfelder durch eine parallel zur Tonnenachse unverschiebliche Lagerung der Randknoten berücksichtigt.

Die Ergebnisse der durchgeführten FE-Berechnungen wurden hinsichtlich der Außermittigkeit der Druckkraft an der Scheitelmittle der Haupttonne, der Größe und der Verteilung der Auflagerkraft – insbesondere die Größe des Schubs und die Scheitelsenkung der Haupttonne – ausgewertet. Diese Ergebnisse werden mit den zugehörigen Größen entsprechender Bogentragwerke verglichen, um die aussteifende Wirkung quantitativ zu erfassen. In allen Diagrammen, in denen Größen in Abhängigkeit von der Stichkappenlänge dargestellt sind, werden bei  $l_{ST} = 0$  m die entsprechenden Werte einer „Tonne ohne Stichkappe“, d. h. eines vergleichbaren Bogens, aufgetragen. In den Diagrammen, in denen der Einfluss des Stichkappenradius gezeigt ist, werden die entsprechenden Größen vergleichbarer Bögen in Form von Linien dargestellt.

### 6.2.1 Einfluss der Stichkappe auf die Außermittigkeit der Druckkraft am Scheitel

Die qualitative Darstellung des Tragmechanismus in Bild 6.5 und Bild 6.6 zeigt, dass Stichkappen wie Steifen wirken. Diese Wirkung wird nachstehend im Detail gezeigt.

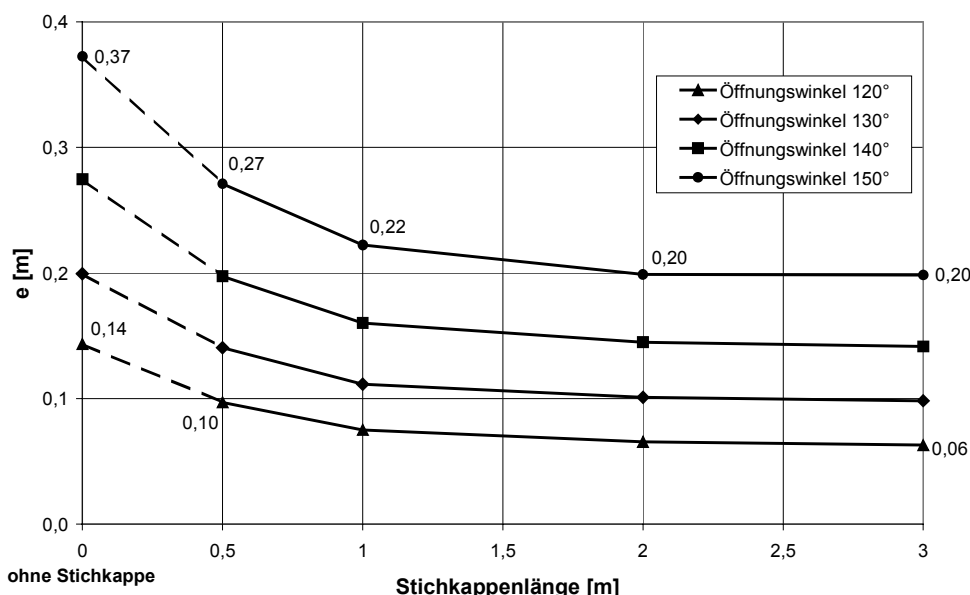


Bild 6.8: Außermittigkeit  $e$  der Druckkraft am Scheitel in Abhängigkeit von der Stichkappenlänge bei unterschiedlichen Haupttonnenöffnungswinkeln. ( $R = 6,0$  m;  $r = 1,5$  m;  $d = 0,15$  m)

Im Bild 6.8 ist die Außermittigkeit „ $e$ “ der Druckkraft am Scheitel in der Haupttonne in Ringrichtung in Abhängigkeit von der Stichkappenlänge bei Haupttonnenöffnungswinkeln von  $\alpha_H = 120^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $140^\circ$  und  $150^\circ$  dargestellt. Die Länge der Stichkappen ist mit der Länge ihrer horizontalen Auflager  $l_{ST}$  angegeben.

Allgemein gilt, dass in Gewölben mit kleinerem Öffnungswinkel die Druckkraft eine kleinere Außermittigkeit am Scheitel einnimmt. Der Einfluss der Stichkappenlänge zeigt sich bei jedem Öffnungswinkel in der Abnahme der Außermittigkeit mit zunehmender Stichkappenlänge. Diese Abnahme ist bis zu einer Stichkappenlänge von  $l_{ST} = 1,5$  m stärker, ab  $l_{ST} = 2$  m ändert sie sich kaum noch. Bei  $l_{ST} = 3$  m ist die Stützwirkung der Stichkappe so groß wie die einer an ihrer Vorderkante starr gestützten kurzen Stichkappe. Bei jedem Öffnungswinkel bewirkt schon eine weiche Stichkappe ( $l_{ST} = 0,5$  m) die Abnahme der Außermittigkeit auf die Größe eines Bogens mit einem um  $10^\circ$  kleineren Öffnungswinkel „ $\alpha$ “. Bei einer steifen Stichkappe ( $l_{ST} \geq 2$  m) beträgt  $e = 0,2$  m ( $\alpha = 150^\circ$ ). Dies entspricht genau der Außermittigkeit am Scheitel eines Bogens mit  $\alpha = 130^\circ$ , also mit einem um  $20^\circ$  kleinerem Öffnungswinkel.

Die Außermittigkeit „ $e$ “ der Druckkraft an der Scheitelmitte in der Haupttonne in Ringrichtung in Abhängigkeit vom Stichkappendurchmesser ist im Bild 6.9 am Beispiel einer Tonne mit  $R = 6,0$  m;  $\alpha = 150^\circ$ ;  $l_H = l_{ST} = 1,0$  m dargestellt. Bei einem

verhältnismäßig kleinen Stichkappenradius von  $r = 1,0$  m ist  $e$  fast so klein wie bei einem Bogen mit  $\alpha = 140^\circ$ . Wird der Radius auf  $r = 2,5$  m vergrößert, sinkt die Außermitteigkeit „ $e$ “ auf  $0,16$  m. Das entspricht dem „ $e$ “ am Scheitel eines Bogens mit etwa  $\alpha = 125^\circ$ .

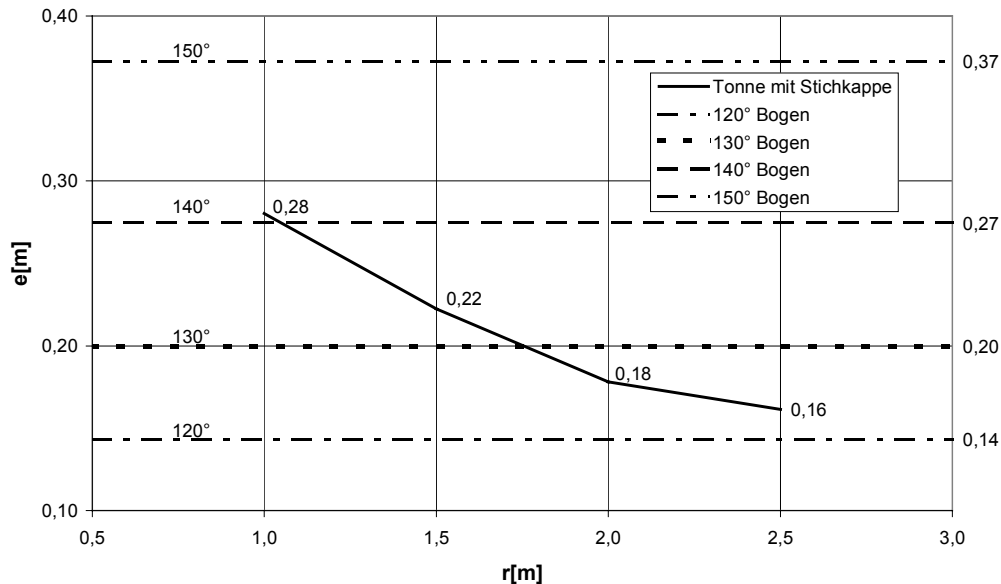


Bild 6.9: Außermitteigkeit der Druckkraft „ $e$ “ am Scheitel in Abhängigkeit vom Stichkappenradius ( $R = 6,0$  m;  $\alpha = 150^\circ$ ;  $I_H = I_{ST} = 1,0$  m). Alle Werte auf die Breite von  $2,0$  m, ausgehend vom Modell mit  $r = 1,5$  m, umgerechnet.

## 6.2.2 Einfluss der Stichkappe auf die Auflagerkraft

Die Änderung des Auflagerschubes bei zunehmender Stichkappenlänge ist im Bild 6.10 dargestellt. Bei jedem Öffnungswinkel der Haupttonne steigt sie gleichmäßig an. Zwischen  $I_{ST} = 0,5$  m bis  $1,5$  m ist der Anstieg stärker, über  $2,0$  m Stichkappenlänge ist er kaum bemerkbar. Bei  $\alpha_H = 120^\circ$  beträgt die Größe der Schubzunahme  $(36,5 - 34,0) = 2,5$  kN, bei  $\alpha_H = 150^\circ$  ist sie mit  $(33,1 - 30,5) = 2,6$  kN nur geringfügig größer. Bei „voller“ Steifigkeit der Stichkappe ist der Schub des Modells etwa so groß wie der eines Bogens mit gleicher Breite und mit um  $20^\circ$  kleinerem Öffnungswinkel.

Die Änderung des Auflagerschubes in Abhängigkeit vom Stichkappendurchmesser ist am Beispiel von Tonnen mit  $R = 6,0$  m;  $\alpha_H = 150^\circ$ ,  $I_H = I_{ST} = 1,0$  m im Bild 6.11 dargestellt. Beim Stichkappenradius  $r = 1,0$  m ist der Schub etwas größer als der eines Bogens mit  $\alpha = 140^\circ$ . Bei  $r = 2,0$  m steigt der Wert auf  $H_y = 35,0$  kN, größer als der Schub eines Bogens mit  $\alpha = 120^\circ$  (etwa mit  $\alpha = 110^\circ$ ).



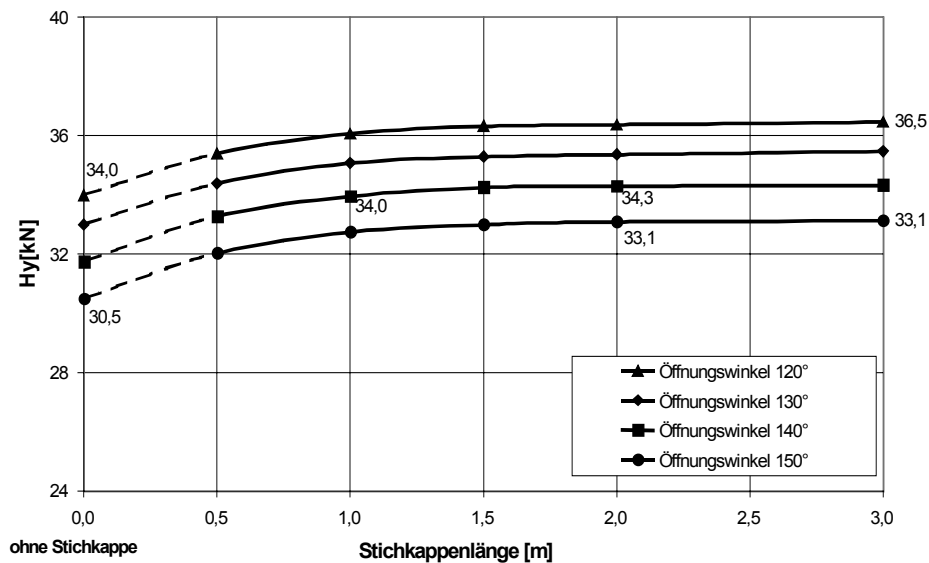


Bild 6.10: Größe des Auflagerschubes in Abhängigkeit von der Stichkappenlänge bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln der Haupttonne. ( $R = 6,0 \text{ m}$ ;  $r = 1,5 \text{ m}$ ;  $d = 0,15 \text{ m}$ )

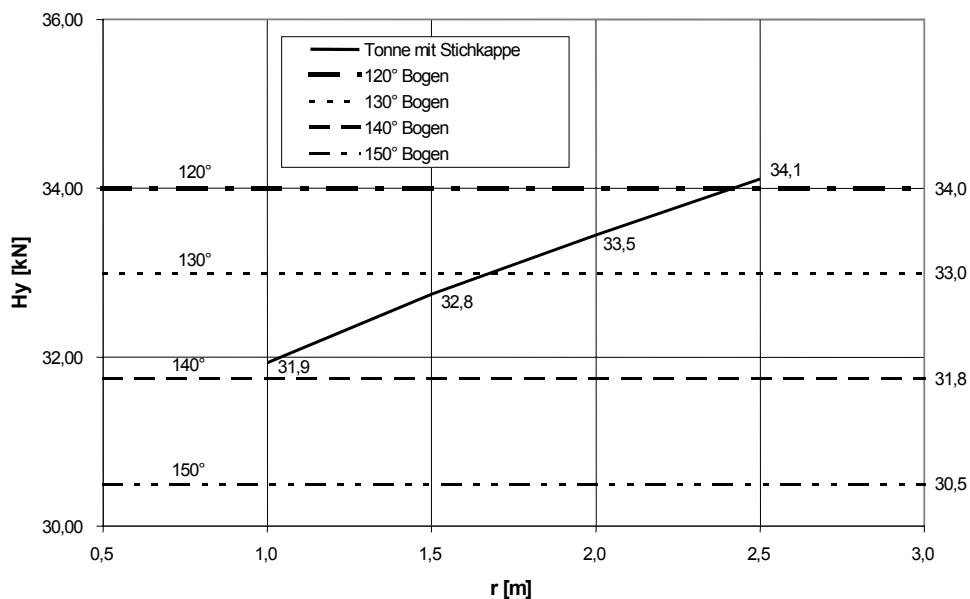


Bild 6.11: Die Größe des Auflagerschubes in Abhängigkeit vom Stichkappenradius ( $R = 6,0 \text{ m}$ ;  $\alpha = 150^\circ$ ;  $l_H = l_{ST} = 1,0 \text{ m}$ ). Alle Werte sind auf die Breite von  $2,0 \text{ m}$  des Modells mit  $r = 1,5 \text{ m}$  umgerechnet.

Der Einfluss der Stichkappenlänge auf die Verteilung des Auflagerschubes zwischen Haupttonnen- und Stichkappenaufleger bei Modellen mit unterschiedlichen Öffnungswinkeln  $\alpha$  ist im Bild 6.12 grafisch dargestellt. Bei größeren Öffnungswinkeln  $140^\circ \leq \alpha_H \leq 150^\circ$  nehmen die Stichkappen mit zunehmender Länge verhältnismäßig immer mehr Schub von der Tonne ab. Bei flachen Tonnen mit  $120^\circ \leq \alpha \leq 130^\circ$  beeinflusst die Stichkappenlänge das Verhältnis  $H_H/H_{ST}$  kaum.

Das liegt daran, dass die Stichkappen mit gleichem Querschnitt bei Tonnen mit kleineren Öffnungswinkeln an sich sehr steif sind. Daher wirkt sich ihre Versteifung in der Verteilung des Gewölbeschubs wenig aus.

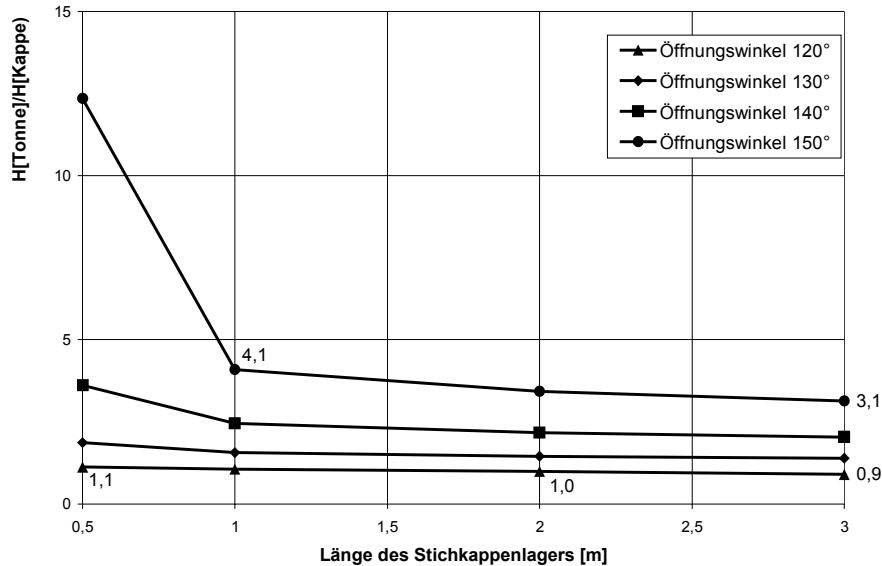


Bild 6.12: Aufteilung des Gewölbeschubes  $H_H/H_{ST}$  zwischen Haupttonnen- ( $l_H$ ) und Stichkappenaufleger ( $l_{ST}$ ) bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln der Haupttonne. ( $R = 6,0$  m;  $r = 1,5$  m;  $d = 0,15$  m)

### 6.2.3 Einfluss der Stichkappe auf die Verformungen der Tonne

Im Bild 6.13 sind die unbelastete Form und die überhöhten Verformungen unter Eigengewicht eines der untersuchten Modelle dargestellt. Die Verformungen lassen sich wie folgt beschreiben:

Der Tonnenscheitel senkt sich nach unten durch und die Viertelpunkte werden ungefähr radial nach außen verschoben. Die Haupttonne drückt gegen die Stichkappen. Je nach ihrer Steifigkeit geben die Stichkappen nach und verschieben sich nach außen. Die bogenartigen Verformungen der Stichkappe sind durch die Verbindung zur Tonne zum Teil verhindert, wodurch sich der Stichkappenquerschnitt am Anschluss zur Tonne nicht frei verformen kann. In Richtung ihres freien Randes werden die Verformungen immer größer. Ist die Stichkappe lang genug, werden die Verformungen an ihrem freien Rand gleich denen eines Bogens.

Stellvertretend für die Verformungen werden nachfolgend die Verschiebungen an der Scheitelmittle der Haupttonne ausgewertet. Der Einfluss der Stichkappenlänge auf die Scheitelsenkung bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln der Haupttonne ist im Bild 6.14 dargestellt.

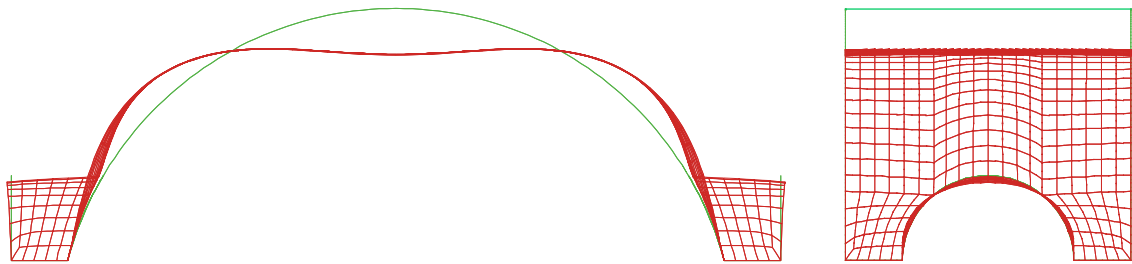


Bild 6.13: Ränder der unbelasteten Form und verzerrt dargestellte Verformungen unter Eigen- gewicht eines Tonnengewölbes mit Stichkappen aus linear-elastischem Werkstoff. ( $R = 6,0 \text{ m}$ ;  $r = 1,5 \text{ m}$ ;  $\alpha = 150^\circ$ ). Vorderansicht, parallel zur Tonnenachse (links), Seitenansicht, parallel zur Stichkappenachse (rechts).

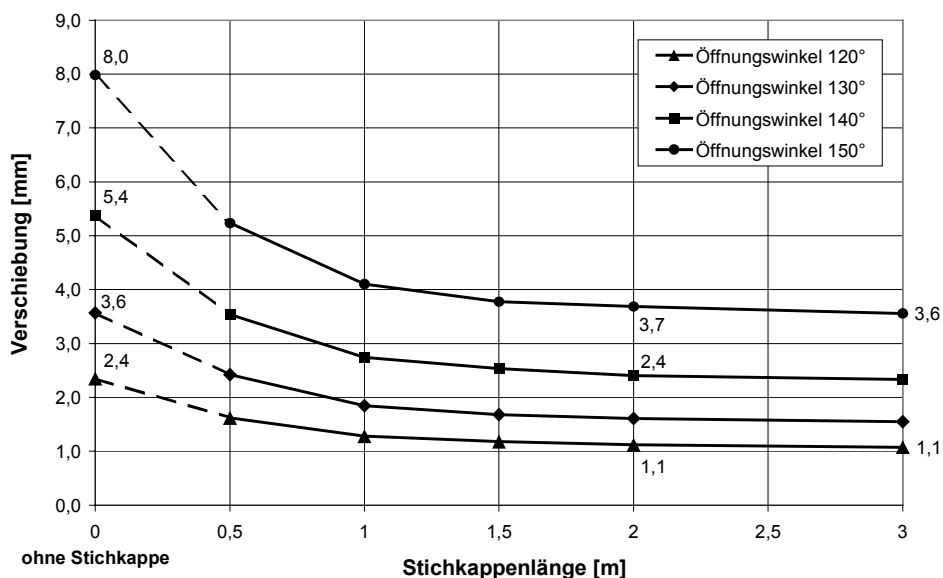


Bild 6.14: Scheitelsenkung in Abhängigkeit von der Stichkappenlänge bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln der Haupttonne. ( $R = 6,0 \text{ m}$ ;  $r = 1,5 \text{ m}$ ;  $d = 0,15 \text{ m}$ )

Die Scheitelsenkung der Modelle zeigt ein ähnliches Bild wie die Außermittigkeit der Druckkraft an der Scheitelmittle. Alle Feststellungen des Abschnittes 6.2.1 gelten für die Scheitelsenkungen sinngemäß. Die Scheitelsenkungen der Tonnen mit Stichkappen sind kleiner als die eines Bogens mit entsprechenden Abmessungen. Mit zunehmender Steifigkeit der Stichkappe ( $l_{ST} \geq 1,5 \text{ m}$ ) wird die „Steifigkeit“ eines Bogens mit etwa um  $20^\circ$  kleinerem Öffnungswinkel erreicht.

Dasselbe gilt auch für den Einfluss des Stichkappenradius. Wie im Bild 6.15 dargestellt, verringert sich die Scheitelsenkung bei Zunahme des Stichkappenradius. Die Werte ab  $r = 2,0 \text{ m}$  Stichkappenradius sind deutlich kleiner, als die eines vergleichbaren Bogens mit einem Öffnungswinkel von  $130^\circ$ .

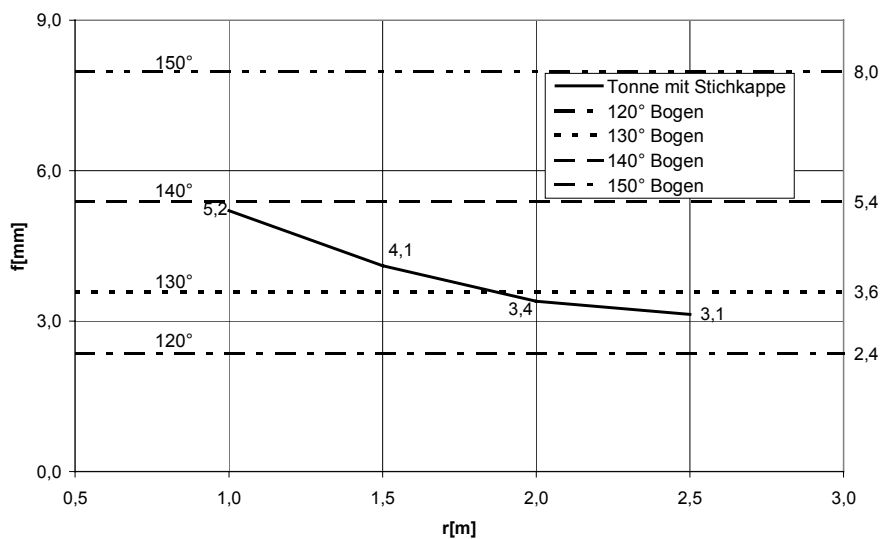


Bild 6.15: Scheitelsenkung in Abhängigkeit vom Stichkappenradius  
( $R = 6,0$  m;  $\alpha = 150^\circ$ ;  $l_H = l_{ST} = 1,0$  m).

Die Ergebnisse der Schalenberechnungen deuten darauf hin, dass Stichkappen wie Widerlager wirken: Sie verkürzen die Spannweite der Tonnen, d. h. der Öffnungswinkel des statischen Systems fällt um  $10^\circ$  bis  $20^\circ$  kleiner aus als der geometrische Öffnungswinkel der Haupttonne. Biegemomente und Verformungen werden kleiner, wohingegen die Normalkräfte in Tonnenringrichtung und der Gewölbeschub zunehmen.

Um die Widerlagerfunktion der Stichkappen zu klären, wurden nichtlineare FE-Berechnungen unter Berücksichtigung der Rissbildung im Mauerwerk durchgeführt. Die Ergebnisse sind im nachfolgendem Abschnitt zusammengefasst.

### 6.3 Tragverhalten zylindrischer Tonnengewölbe mit Stichkapfen aus Mauerwerk

Gewölbe aus Mauerwerk haben nur im ungerissenen Zustand annähernd linear-elastische Materialeigenschaften. Schon bei niedriger Belastung wird die Zugfestigkeit des Mörtels in der Zugzone und in der Druckzone am Fugenrand überschritten: Es bilden sich Risse. Bei weiter steigender Belastung plastifiziert der Mörtel in der Druckzone. Durch diese Einflüsse entsteht ein nichtlineares Last-Verschiebungsverhalten des Mauerwerks.

Bereits im Kapitel 4 wurde erwähnt, dass das Trag- und Verformungsverhalten von Mauerwerk mit einem isotropen, nichtlinearen Materialmodell nur bedingt erfasst werden kann. Durch die „Homogenisierung“ der mechanischen Eigenschaften gehen manche Phänomene verloren, z.B. die durch unterschiedliches Querdehnungsverhalten bedingte Wechselwirkung zwischen Ziegel und Mörtel. Damit geht auch der eigentliche Grund für das Versagen von einschaligem halbstarkem Mauerwerk verloren. Hingegen bekommt das Mauerwerk die „Fähigkeit“ der Delaminierung: Es kann, zumindest nach einem Einphasen-Werkstoffmodell, während zunehmender Längsrissbildung in der Druckzone weitere Lasten aufnehmen. In Wirklichkeit versagt Mauerwerk gerade durch die Bildung von Längsrissen. Dies wird auch durch die Simulation von Kleinpfeilerversuchen bestätigt. Im Einphasen-Werkstoffmodell wird die Zugfestigkeit in Fugenrichtung und senkrecht dazu gleich gesetzt. Es ist offensichtlich, dass mit all diesen Annahmen kein quantitativ verwertbares Ergebnis erzielt werden kann.

Ein weiteres Problem stellte die Größe des Arbeitsspeichers der benutzten Rechner dar. Durch die Speicherkapazität war die Gesamtzahl der Elemente in den Modellen begrenzt. Daher wurde die Wandstärke nur durch drei Elementschichten abgebildet. Das entspricht einer Kantenlänge der HX24L Elemente von 5 cm in radialer Richtung. Die Kantenlänge in den anderen Richtungen betrug zwischen 5 cm und 20 cm. Da in dieser Arbeit eine qualitative Aussage über das Tragverhalten getroffen werden soll, ist diese etwas grobe Vernetzung ausreichend. In den Bereichen mit Rissbildung wurde die Elementgröße kleiner gewählt, in den Abschnitten dazwischen größer. Im Bild 6.16 sind die FE-Netze zweier untersuchter Modelle isometrisch dargestellt. Die Netze bilden  $\frac{1}{4}$  eines Gewölbefeldes ab. Die geometrischen Parameter der Modelle sind in Tabelle 6.3 zusammengestellt. Die Werkstoffparameter entsprechen denen der Bogenberechnungen und können aus Tabelle 5.3 entnommen werden.

Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt ähnlich wie bei den linear-elastischen Berechnungen. Die Außermittigkeit der Druckkraft am Scheitel wird nicht detailliert ausgewertet, da das FE-Netz zu grob ist. Statt dessen werden die Phasen der Rissbildung dargestellt und die Lage der Risszonen ausgewertet. Des Weiteren wird der Einfluss der Rissbildung auf die Größe und auf die Lage der Druckkraft in ungerissenem und gerissenem Zustand bei sprödem und duktilem Mauerwerkverhalten ausgewertet. Das Verformungsverhalten wird bei den räumlichen Modellen ebenfalls durch die Verschiebung der Scheitelmitte erfasst.

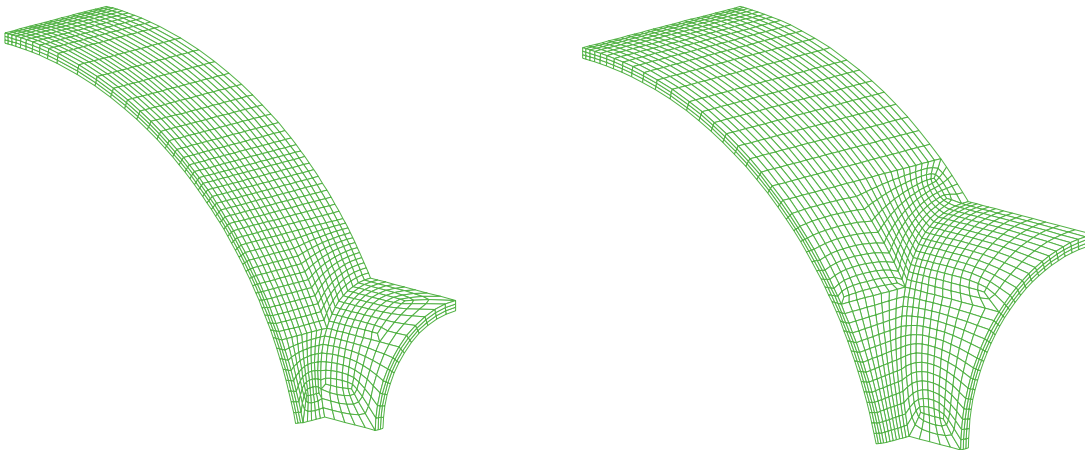


Bild 6.16: FE-Netz von zwei untersuchten räumlichen Modellen:  
 Stichkappenradius  $r_1=1,5$  m: Modell B (links),  
 Stichkappenradius  $r_2=2,5$  m: Modell E (rechts).  
 Die Netze bilden  $\frac{1}{4}$  eines Gewölbefeldes ab.

Tabelle 6.3: Geometrische Parameter der untersuchten räumlichen Gewölbemodelle.  
 Die Bezeichnungen sind im Bild 6.7 erklärt.

Bezeichnung	R [m]	$\alpha_H$ [°]	$l_H$ [m]	r [m]	$\alpha_{ST}$ [°]	$l_{ST}$ [m]	Lagerung <sup>1)</sup>	$f_t$ [kN/m <sup>2</sup> ]	Duktilität <sup>2)</sup>
A	6,0	150	0,5	1,5	180	0,5	a	150	s und d
B						1,0	a		s und d
C						0,5	b		s und d
D				2,5		0,5	a		d
E						1,0	a		d
F						0,5	b		d

Bemerkungen:

- 1) „a“: nur die horizontalen Ränder der Haupttonne ( $l_{ST}$ ) und der Stichkappe ( $l_H$ ) sind räumlich unverschieblich gehalten, der Anschluss an die benachbarten Gewölbefelder ist durch unverschiebliche horizontale Lagerung in Richtung der Haupttonnenachse modelliert. (Bild 6.7)

„b“: wie „a“, zusätzlich horizontale Stützung der gekrümmten Stichkappenkanten in Richtung der Stichkappenachse. (Bild 6.7)
- 2) „s und d“: Modell wurde mit sprödem und mit quasi-sprödem Werkstoffmodell untersucht (s. Bild 3.8). Beim duktilen Werkstoff betrug  $\epsilon_u = 0,0018$  für  $h = 2,5$  cm Rissbandbreite.

„d“: Modell wurde nur mit duktilem Werkstoffmodell untersucht.

### 6.3.1 Lage der gerissenen Bereiche

In Bild 6.17 und Bild 6.18 sind die Isoflächen der gerissenen Bereiche zweier untersuchter Modelle dargestellt. In beiden Bildern sind die Leibung und der Rücken dargestellt. Die Nummerierung der Risse entspricht der Reihenfolge ihres Auftretens. Im gleichen Querschnitt, in dem auch Biegerisse auftreten, sind in den Druckzonen Längsrisse entstanden. Diese sind mit einem Stern „\*“ gekennzeichnet. Der Verlauf der Rissbildung ist in den beiden Modellen unterschiedlich.

Im Modell „B“ (Bild 6.17) erscheinen die ersten Risse am Anschluss der Haupttonne zur Stichkappe und am Auflager der Stichkappe gleichzeitig beim selben Lastniveau. Die Risse R1a treten auf der Oberkante und auf der Vorderkante des Entlastungsbogens auf. An beiden Flächen beginnen sie in der Leibung und gehen in Richtung Rücken. Die Risse R1b gehen von der Vorderkantenleibung der Stichkappe aus horizontal bis zur halben Länge des Auflagers. Ab hier steigen sie Richtung Anschluss der Stichkappe zur Haupttonne mit einer Neigung von etwa  $45^\circ$ . Am Scheitel bilden sich die nächsten Risse R2. Bei steigender Belastung reißt die Stichkappe am Scheitel (R3a) und am Viertelpunkt (R3b) gleichzeitig. Der Riss am Viertelpunkt (R3b) verläuft analog zum Riss (R1a) am Stichkappenaufleger. Dann bilden sich nacheinander zwei Risse (R4 und R5) am Viertelpunkt der Haupttonne. Riss R4 liegt beim Zentralwinkel von  $84^\circ$ , R5 bei  $80^\circ$ . Zum Schluss verzweigt sich der Riss R1a etwa in  $\frac{3}{4}$  Höhe der Stichkappe. Ein beinahe horizontaler Riss (R6) bildet sich in der Haupttonne und der Riss R1a verlängert sich nach unten, bis er den Riss R1b erreicht. Riss R6 ist beim Zentralwinkel  $128^\circ$ . Das Rissbild zeigt, dass die Haupttonne oberhalb der Stichkappe wie ein ebenes Tragsystem wirkt, da die Trajektorien der dritten Hauptspannungen in diesem Bereich miteinander parallel in Ringrichtung verlaufen. Dieses System lagert auf dem durch die Stichkappe und Teile der Haupttonne gebildeten Schalenfaltwerk, das durch die Risse R1a und R6 von der Haupttonne getrennt ist. Der „Entlastungsbogen“ leitet die Lasten aus dem mittleren Bereich des Haupttonnenfeldes bis zur Höhe des Risses R6 in der Haupttonnenfläche. Dort werden sie durch die stützende Wirkung des Nachbarfeldes in die Flanke der Stichkappe umgelenkt.

Im Modell „E“ treten die ersten Risse am äußeren Ende des Stichkappenauflegers auf. Danach reißen Stichkappe und Haupttonne vom Entlastungsbogen ab, ähnlich wie im Modell „B“. Der Riss R2 reicht jedoch nicht bis zum Stichkappenscheitel. Auf dem gleichen Lastniveau treten die Risse am Scheitel der Haupttonne (R3a), am Viertelpunkt (R3b) und am Scheitel (R3c) der Stichkappe auf. Die letzten Risse entstehen auf dem Rücken der Haupttonne (R4). Die obere Grenzlinie dieser Risszone ist *netzbedingt* parallel zur Scheitellinie. Die untere Grenzlinie folgt der Krümmung der Stichkappe. Dadurch verändert sich die Lage des Viertelpunktes der Haupttonnenlängsrichtung. Zur Oberkante der Risszone R4 gehört ein Zentralwinkel von  $80^\circ$  und zur unteren „Spitze“ ein Winkel von  $116^\circ$ . Des weiteren verändert sich die Ausrichtung der Risse in diesem Bereich: An den Grenzlinien sind sie parallel zu diesen ausgerichtet. Zwischen den Grenzlinien verändert sich die Rissrichtung fließend. In diesem Modell trägt die Haupttonne auch teilweise wie ein ebenes Tragsystem. Da die Stichkappe weit nach oben reicht, ist diese Zone kleiner. Das räumliche Tragverhalten reicht vom Bereich der Stichkappe bis zum oberen Rand der Risszone R4.

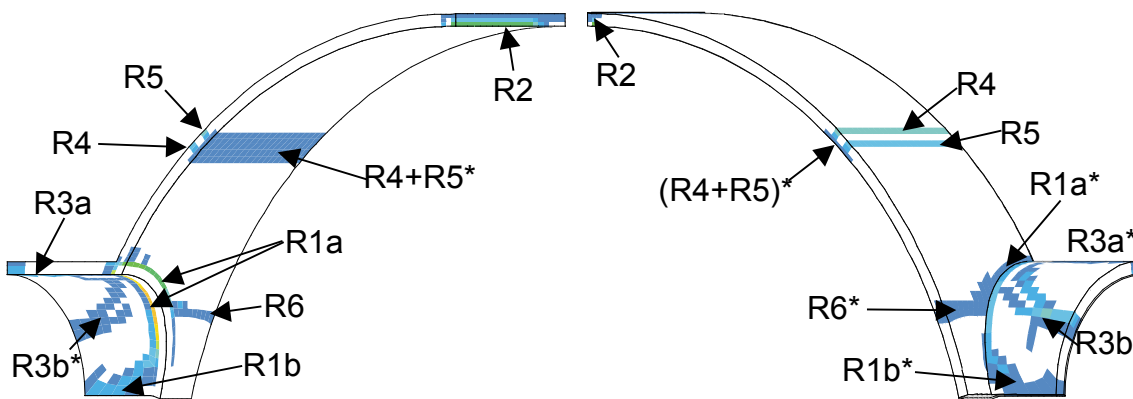


Bild 6.17: Isoflächen der durch Risse beschädigten Bereiche des räumlichen Modells „B“. Blick in die Leibung (links) und auf den Rücken (rechts), isometrisch dargestellt. (dunkelblau: kleine, hellblau bis grün: mittlere, gelb bis orange: große Rissdehnungen)

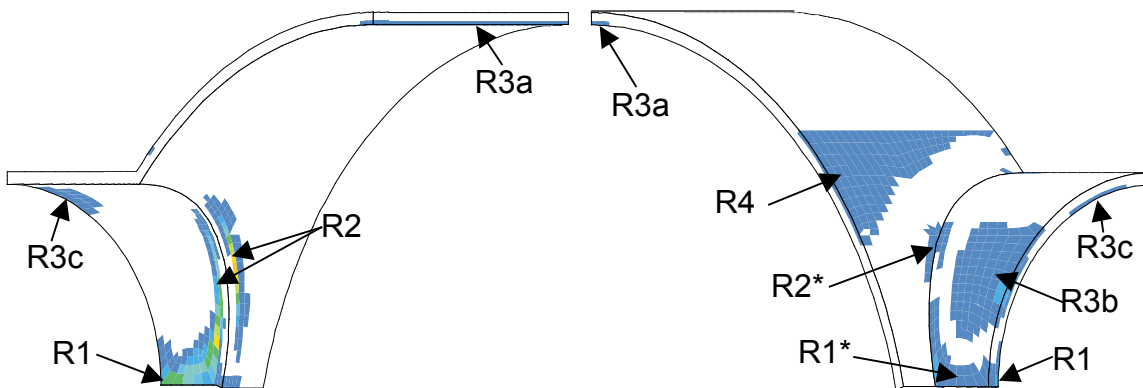


Bild 6.18: Isoflächen der durch Risse beschädigten Bereiche des räumlichen Modells „E“. Blick in die Leibung (links) und auf den Rücken (rechts), isometrisch dargestellt. (dunkelblau: kleine, hellblau bis grün: mittlere, gelb bis orange: große Rissdehnungen)

Aus der Lage des Viertelpunktes „ $\beta$ “ kann nach *Heyman, 1966*, der Öffnungswinkel „ $\alpha$ “ ermittelt werden. Bild 6.19 stellt diesen Zusammenhang zwischen dem Zentralwinkel zum Viertelpunkt „ $\beta$ “ und dem Öffnungswinkel „ $\alpha$ “ dar. Im Abschnitt 5.3.1 wurde die Lage des Viertelpunktes für die Öffnungswinkel  $120^\circ$  und  $150^\circ$  durch die Ergebnisse nichtlinearer FE-Berechnungen bestätigt. In den Modellen mit  $r = 1,5$  m liegt die Zone, in der sich der Viertelpunkt befindet bei einem Zentralwinkel von  $80^\circ$  bis  $84^\circ$  zu den mit der Haupttonnenachse parallel verlaufenden Kanten. Der Mittelwert beträgt damit  $82^\circ$ . Der zugehörige Öffnungswinkel des statischen Systems der Haupttonne beträgt somit mindestens  $\alpha_H = 120^\circ$  höchstens  $\alpha_H = 124^\circ$ . Die Lage des Risses R6 bei  $128^\circ$  weicht davon ab. Unter Berücksichtigung des Einflusses der Elementgröße auf die Lage der Risse (der Zentralwinkel am Viertelpunkt beträgt  $1^\circ$  zur Elementkante, am Riss R6 beträgt er  $2^\circ$ ) ist die Übereinstimmung hinreichend.

In den Modellen mit Stichkappenradius  $r = 2,5$  m ist die Lage des Viertelpunktes in jedem Haupttonnenquerschnitt anders. Zum Kleinstwert von  $\beta = 80^\circ$  gehört



$\alpha = 118^\circ$ , zum größten Mittelwert  $\beta_{\text{mittel}} = (80^\circ + 116^\circ)/2 = 98^\circ$  gehört  $\alpha = 146^\circ$ . Dieser Unterschied ist zu groß, um das Tragverhalten mit einem ebenen Ersatzsystem erfassen zu können.

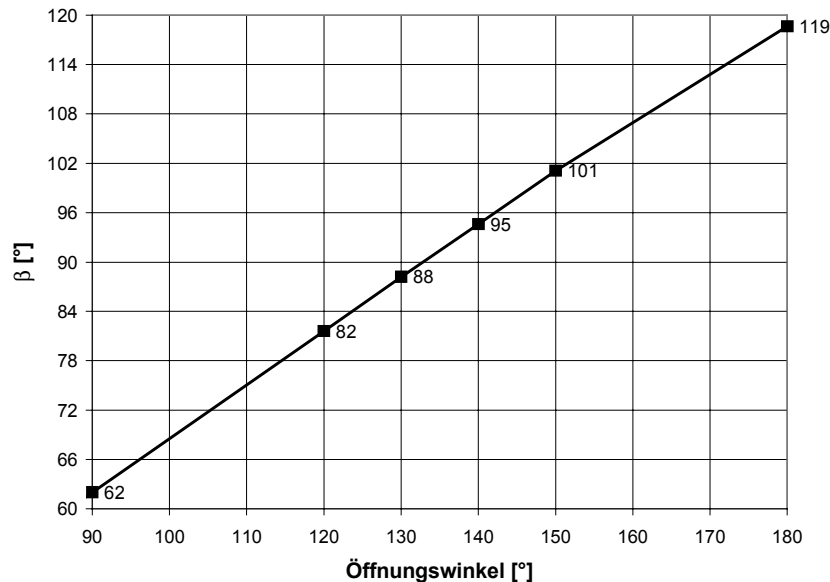


Bild 6.19: Lage des Viertelpunktes in einem Kreissegmentbogen nach *Heyman, 1966*

### 6.3.2 Einfluss der Sticksappe auf die Auflagerkräfte

Die Größe und Lage der resultierenden Auflagerkraft wurden in Abhängigkeit des Rissstatus, der Duktilität und der Sticksappensteifigkeit ausgewertet.

In Tabelle 6.4 und Tabelle 6.5 sind die Größe des Auflagerschubes der untersuchten Modelle in ungerissenem und gerissenem Zustand zusammengestellt. Der Einfluss der Rissbildung bleibt bei jedem Modell unter 3%. Da das Modell „D“ am Sticksappenaufleger versagte, ehe am Scheitel und am Viertelpunkt der Haupttonne Risse auftraten, fällt der zugehörige Verhältniswert zu günstig aus. Der Einfluss der Rissbildung ist in ihrer Tendenz einheitlich. Dies entspricht Bild 5.12, wonach der Auflagerschub in Bogentragwerken ab einem Öffnungswinkel von  $110^\circ$  bei fortgeschrittener Riss- bzw. Gelenkbildung leicht abnimmt. Dieser Einfluss ist bei ebenen Bogentragwerken mit knapp 1% niedriger ausgefallen (siehe noch Bild 5.18 und Bild 5.19).

Die Verringerung des Auflagerschubes ist hier auf eine Veränderung des Tragsystems zurückzuführen. Die Verringerung des Schubes um bis zu 3% ist auf keinen Fall mit der Vergrößerung des effektiven Öffnungswinkels gleichzusetzen. Hier wird aus einem eingespannten System mit einer durchgehenden Steifigkeit durch die Rissbildung ein „aufgelockertes“ System mit ähnlichen Eigenschaften wie ein Dreigelenkbogen mit außermittig liegenden Gelenken.

Tabelle 6.4: Größe des Auflagerschubes in Abhängigkeit von Rissstatus, Duktilität und Lagerung der Stichkappe bei Modellen mit einem Stichkappenradius von  $r = 1,5$  m. Die Größe der Schubkraft ist auf das einfache Eigengewicht umgerechnet.

Modell	Schub [kN]			Verhältnis gerissen/ ungerissen
	ungerissen	gerissen		
		spröd	duktil	
A	32,48	31,58	-	0,972
B	33,08	33,05	33,03	0,998
C	33,32	33,23	32,99	0,997

Tabelle 6.5: Größe des Auflagerschubes in Abhängigkeit von Rissstatus, Duktilität und Lagerung der Stichkappe bei Modellen mit einem Stichkappenradius von  $r = 2,5$ . Die Größe der Schubkraft ist auf das einfache Eigengewicht umgerechnet.

Modell	Schub [kN]		Verhältnis gerissen/ungerissen
	ungerissen	gerissen	
D <sup>1</sup>	39,88	39,71	0,996
E <sup>2</sup>	41,57	40,97	0,986
F <sup>3</sup>	43,47	42,3	0,973

- Bemerkungen: 1) Versagen des Stichkappenauflegers, keine Rissbildung in der Haupttonne.  
 2) Abgeschlossene Rissbildung in der Stichkappe und in der Haupttonne.  
 3) Rissbild wie im Bild 6.18, jedoch ohne den Riss R3a.

Bei den Modellen B und E mit Stichkappenlänge  $l_{ST} = 1,0$  m wurde die Lage der Auflagerkraft „R“ im Vergleich zur Haupttonnenkante an der Trombe in ungerissenem und in gerissenem Zustand ermittelt (Tabelle 6.6). Die Querschnittsfläche des Auflegers mit der resultierenden Auflagerkraft ist im Bild 6.20 dargestellt. Der Schwerpunkt der Auflagerfläche liegt 0,26 m außerhalb der Haupttonnenkante. Die erste Kernweite des Auflagerquerschnitts beträgt 0,27 m vom Schwerpunkt und 0,53 m von der Haupttonnenkante an der Trombe. Bei beiden Modellen liegt demnach die resultierende Auflagerkraft innerhalb der ersten Kernweite des Auflagerquerschnitts an der Trombenoberkante.

Tabelle 6.6: Abstand der Auflagerkraft „e“ von der Haupttonnenkante in ungerissenem und in gerissenem Zustand bei den Modellen B und E

Modell	$e_v$ [m]			Verhältnis gerissen/ ungerissen
	ungerissen	gerissen		
		spröd	duktil	
B	0,403	0,398	0,388	0,96
E	0,501	-	0,457	0,91

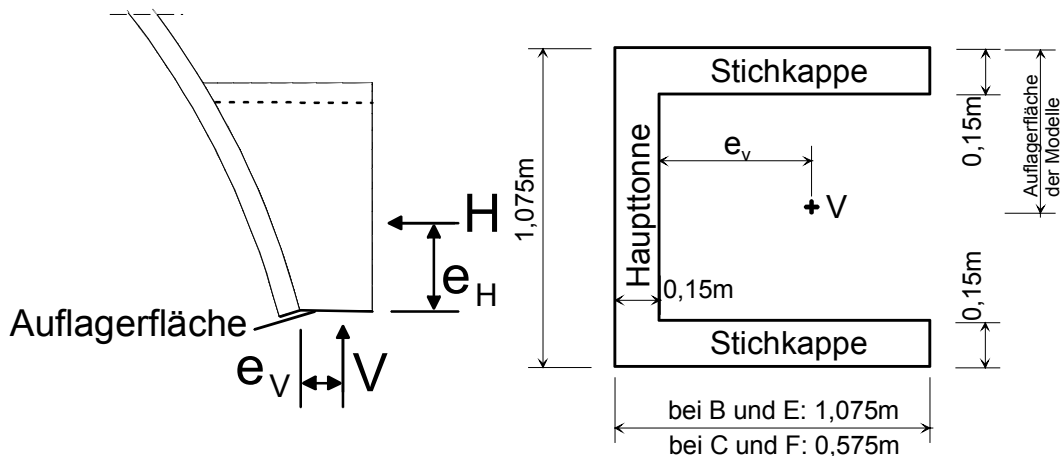


Bild 6.20: Stichkappenbereich mit der Lage der Auflagerkraftkomponente (links) und Fläche eines ganzen Auflagers der Modelle B, C, E und F mit der Lage der vertikalen Auflagerkraftkomponente „V“ (rechts)

Bei den Modellen C und F wurde außer der Lage der vertikalen Auflagerkraft auch die Höhenlage des Auflagerschubes in ungerissenem und gerissenem Zustand ermittelt. Die Veränderung der Höhenlage des Auflagerschubes ist gering, insbesondere verglichen mit dem Radius der Stichkappen. Im Modell C beträgt die Lagenänderung  $\Delta e_H = 0,01\text{ m}$  bei  $r = 1,5\text{ m}$ . Das ergibt ein Verhältnis von  $0,67\%$ . Im Modell verändert sich die Höhenlage um  $0,03\text{ m}$  bei  $r = 2,5\text{ m}$ . Die Änderungsrate beträgt  $1,2\%$ . Eine Veränderung in der Lage der vertikalen Auflagerkraft kann nicht festgestellt werden.

Tabelle 6.7: Einfluss der Rissbildung auf die Lage der Auflagerkraft bei Modellen mit einer horizontalen Stützung der Stichkappenkante parallel zu deren Achse. Der vertikale Abstand der horizontalen Auflagerkraft vom Auflager ist mit  $e_H$  angegeben.

Modell	$e_H$ [m]		Verhältnis gerissen/ungerissen	$e_V$ [m]	
	ungerissen	gerissen		ungerissen	gerissen
C <sup>1</sup>	0,59	0,58	0,983	0,03	0,03
F	0,82	0,79	0,963	0,03	0,03

Bemerkung: 1) Werkstoffmodell – spröde

Im Bild 6.21 sind zwei Beispiele mit den Auflagerkräften und den Stützkräften des Nachbarfeldes im Stichkappenbereich dargestellt. Im Bild links ist ein System (Modell E) ohne horizontale Stützung der gekrümmten Stichkappenkante mit einer Stichkappenlänge von  $l_{ST} = 1,0\text{ m}$ . Auf der rechten Seite (Modell F) ist die Stichkappe mit  $l_{ST} = 0,5\text{ m}$  kürzer und ihr gekrümmter Rand ist horizontal gestützt. In beiden Modellen wirkt die Stichkappe als Widerlager. Die stützende Wirkung der Stichkappen ist in beiden Fällen schematisch eingezeichnet.

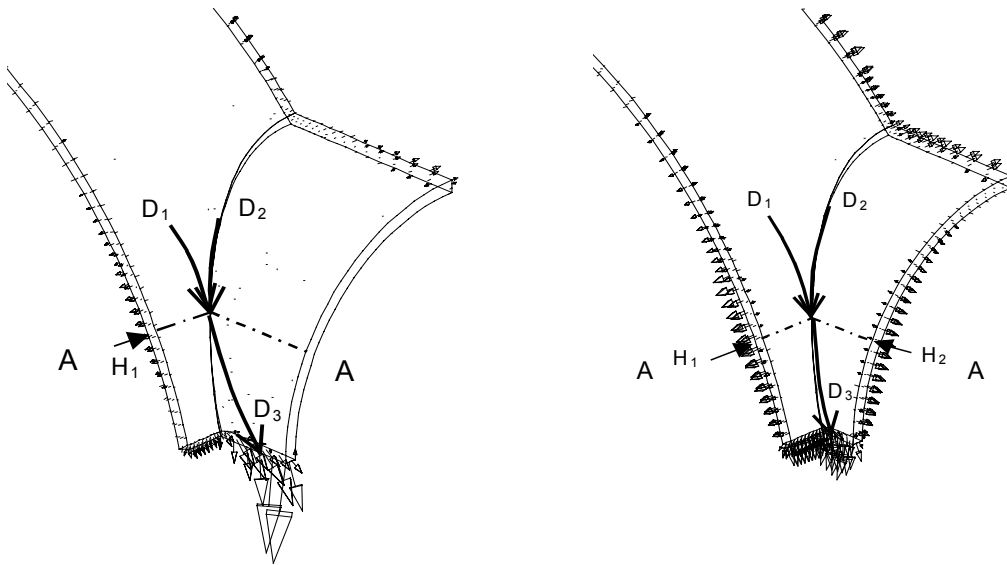


Bild 6.21: Verteilung der Auflagerkräfte im Bereich der Stichkappen bei den Modellen E (ohne horizontale Stützung der Stichkappenvorderkante - links) und F (mit horizontaler Stützung der Stichkappenvorderkante - rechts). Die horizontalen Schnitte parallel mit der Trompenoberkante sind mit „A-A“ gekennzeichnet.

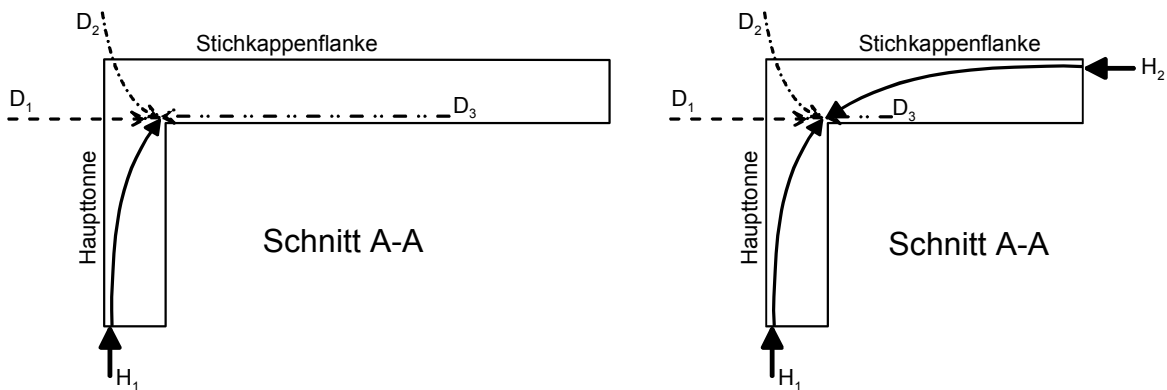


Bild 6.22: Wirkungsweise von horizontal ungestützten (links) und horizontal gestützten (rechts) Stichkappen im horizontalen Schnitt A-A eingetragen. Die Lage der Schnitte und die Drucklinien (schematisch) sind im Bild 6.21 dargestellt.

Im Bild 6.22 sind horizontale Schnitte „A-A“ durch die Kehle mit den dort wirkenden Kräften schematisch dargestellt. Die mit durchgehenden Linien dargestellten Drucklinien liegen innerhalb der jeweiligen Querschnitte. Die gestrichelten und punktgestrichelten Drucklinien verlaufen unter einem Winkel zur Schnittebene.  $D_2$  ist die Drucklinie im Entlastungsbogen. Sie trifft auf weitere Drucklinien in der Ecke des Kehlquerschnittes:  $D_1$  von der Haupttonne in Ringrichtung,  $H_1$  von der Haupttonne aus der horizontalen Abstützung an das benachbarte Tonnenfeld und  $D_3$  aus der Stichkappenflanke. Bei horizontal gestützten Stichkappen gibt es eine zusätzliche Komponente, die Drucklinie  $H_2$ . In der äußeren Ecke der Kehle sind diese Druckkräfte in Gleichgewicht. Der Unterschied zwischen horizontal gehaltenen und nicht gehaltenen Stichkappen ist, dass die Drucklinie  $D_3$  bei nicht gehaltenen Stichkappen flacher, bei gehaltenen Stichkappen steiler in Richtung Stichkappen-

fuß verläuft. Dadurch ist die Verteilung der Auflagerkräfte zwischen Haupttonnen- und Stichkappenaufleger beim Modell F wesentlich gleichmäßiger als beim Modell E. Die Drucklinie  $D_3$  verläuft knapp unter dem Stichkappenrücken in der Druckzone der Stichkappenflanke. Die Wirkungsweise der Stichkappen in den Modellen mit  $r = 1,50$  m ist vergleichbar, nur ist ihr Einflussbereich dort kleiner.

### 6.3.3 Einfluss der Stichkappen auf die Verformungen

Die Verformungen von Tonnengewölben mit Stichkappen aus linear-elastischem Werkstoff sind im Abschnitt 6.2.3 beschrieben. Die Scheitel senken sich nach unten durch und die Viertelpunkte werden ungefähr radial nach außen verschoben. Die Stichkappen werden durch die sich auf sie abstützende Haupttonne nach außen gedrückt. Gemauerte Gewölbe haben größere Verformungen infolge Rissbildung als Gewölbe aus einem linear-elastischen Werkstoff. Im Bild 6.23 sind als Beispiel die Verformungen des Modells B unter Annahme eines spröden Mauerwerksverhaltens dargestellt. In den gerissenen Bereichen sind die Krümmungen durch die Querschnittsschwächung wesentlich größer als in den unbeschädigten Abschnitten, was im Bild als ein „Knick“ in der verformten Geometrie erscheint.

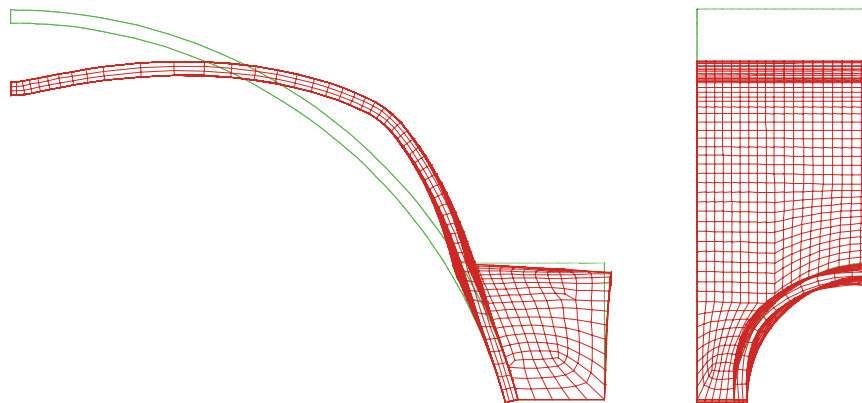


Bild 6.23: Ränder der unbelasteten Form und verzerrt dargestellte Verformungen unter Eigengewicht des Modells B aus sprödem Mauerwerk. Vorderansicht, parallel mit der Tonnenachse (links) und Seitenansicht, parallel mit der Stichkappenachse (rechts).

Der Einfluss der Stichkappensteifigkeit auf die Scheitelsenkung bei sprödem Mauerwerk ist im Bild 6.24 dargestellt. Die Rissentwicklung gemäß Bild 6.17 für das Modell B ist eingetragen. Der unstetige Verlauf der Kurven B und C entspricht nicht dem wirklichen Last-Verschiebungsverhalten der Tonnen, sondern ist die Folge des zur Laststeuerung eingesetzten Bogenlängen-Verfahrens (s. Bild 8.20). Die Stichkappen in den Modellen A, B und C sind, in dieser Reihenfolge, steifer. Modell A versagt knapp bei der Hälfte des Eigengewichtes: Durch zu wenig Eigensteifigkeit wird die Stichkappe stark nach außen gedrückt, bis ihr Auflager am freien Rand versagt. Die geringe Steifigkeit der Stichkappe zeigt sich in der Last-Verschiebungskurve. Ihre Neigung ist etwas geringer als die der anderen Modelle. Die Scheitelsenkung der Modelle B und C verläuft bis zur Bildung der Scheitelrisse „R2“ praktisch identisch. Ab diesem Punkt bleiben die Lasten des

Modells B um etwa 10-12% unter denen des steiferen Modells C. Alle Modelle versagen (numerisch) vor dem Erreichen des vollen Eigengewichts.

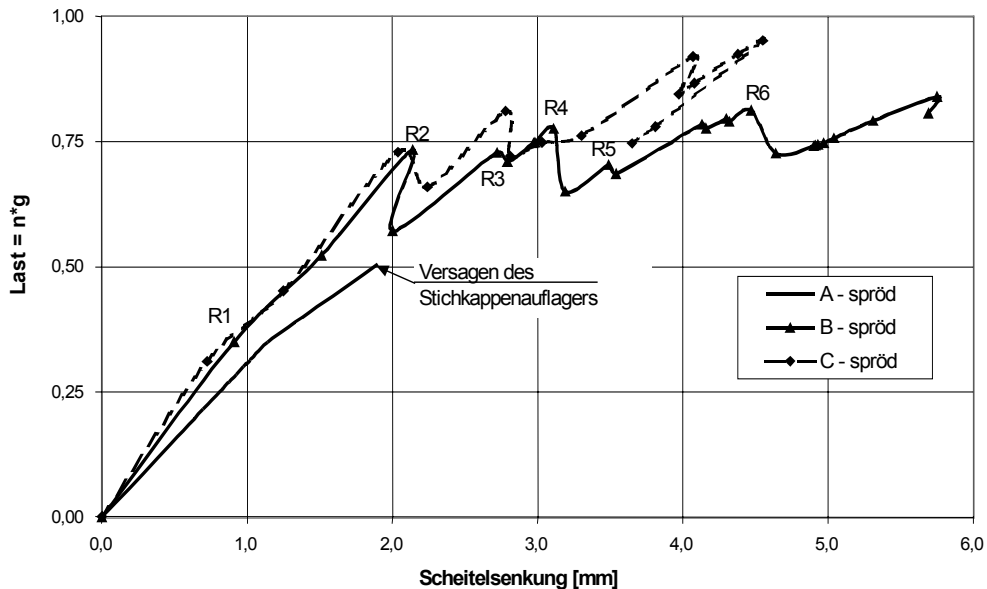


Bild 6.24: Errechnete Scheitelsenkung in Abhängigkeit von der Belastung der Modelle A, B und C unter Annahme spröden Mauerwerksverhaltens. In der Last-Verschiebungskurve des Modells B sind die Stellen der Rissbildung gekennzeichnet.

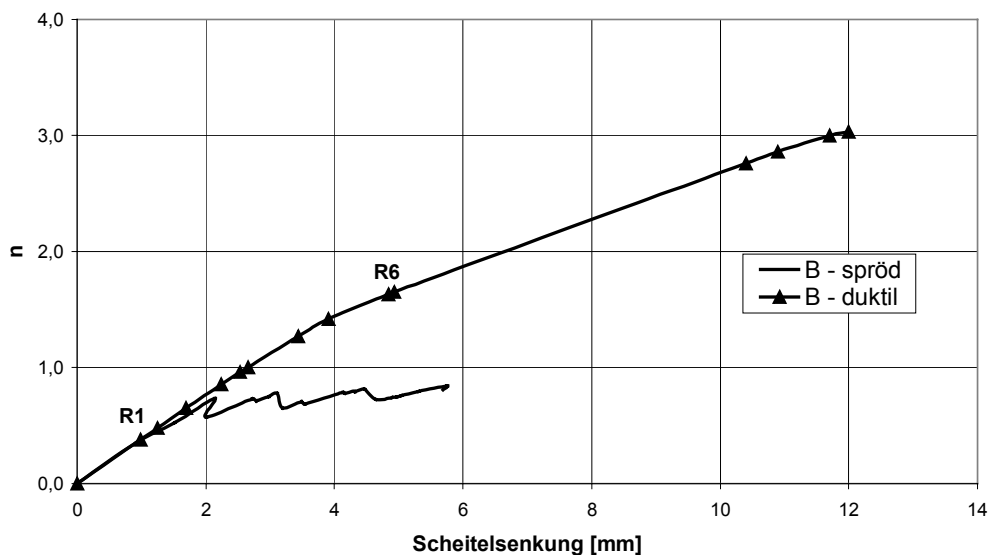


Bild 6.25: Errechnete Scheitelsenkung in Abhängigkeit von der Belastung. Einfluss der Duktilität des Mauerwerks auf die Scheitelsenkung des Modells B. Anfang / Ende der Rissbildung für das Modell aus duktilem Mauerwerk eingetragen.

Der Einfluss der Duktilität ist am Beispiel der Last-Verschiebungskurven des Modells B im Bild 6.25 dargestellt. Das Gewölbe aus duktilem Mauerwerk trägt das Mehrfache seines Eigengewichts. Die errechneten Last-Verschiebungskurven zei-

gen auch keine Unstetigkeiten. Die Bildung der Risszonen nach Bild 6.17 ist durch einen ständigen Steifigkeitsabfall ab einer Scheitelsenkung von 1 mm (R1) bis zu knapp 5 mm (R6) bemerkbar.

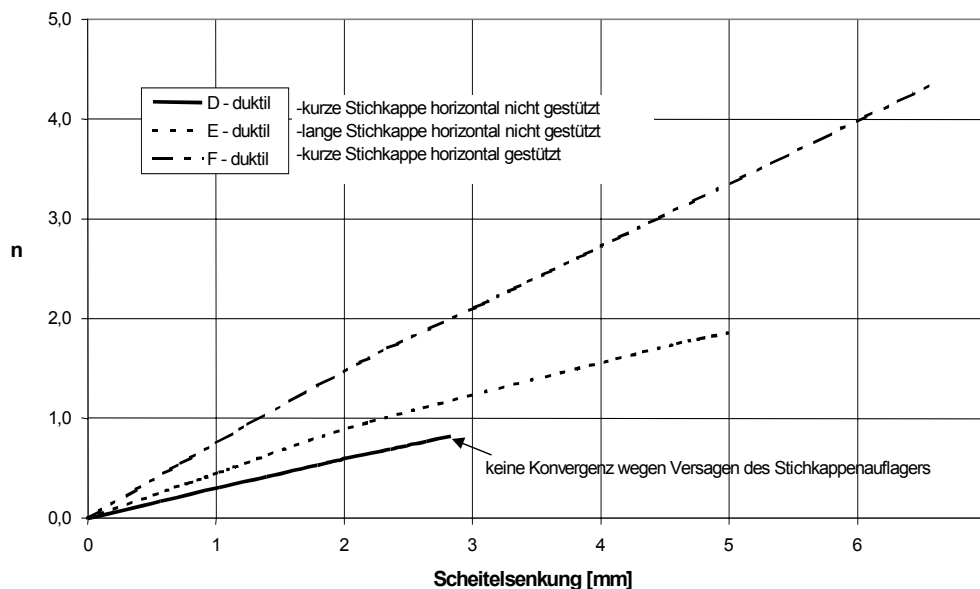


Bild 6.26: Einfluss der Stichkappensteifigkeit auf das Last-Verschiebungsverhalten von gemauerten Tonnengewölben mit einem Stichkappenradius von  $r = 2,5$  m

Die Last-Verschiebungskurven der Scheitel der Modelle D, E und F mit einem Stichkappenradius von  $r = 2,5$  m sind im Bild 6.26 gezeigt. Wie bei den Modellen A bis C aus duktilem Mauerwerk zeigen die Kurven ein leicht unterlineares Verschiebungsverhalten des Scheitels. Mit zunehmender Steifigkeit der Stichkappe nimmt die (rechnerische) Steifigkeit und die Tragfähigkeit der Tonnen zu. Diese Zunahme fällt größer aus als bei den Modellen mit  $r = 1,5$  m.

## 6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Untersuchungen zur Ermittlung des Tragmechanismus von Tonnengewölben mit Stichkappen durchgeführt.

Eingangs wurden 27 FE-Schalenberechnungen unter Annahme eines linear-elastischen Mauerwerksverhaltens mit dem Programm DIANA durchgeführt. Die Wirkung der Stichkappen wurde durch Auswertung einiger Größen untersucht: Neben der Außermittigkeit der Druckkraft am Scheitel wurde die Scheitelsenkung und der Auflagerschub in Abhängigkeit von Stichkappenlänge und Stichkappenradius ausgewertet. Die Auswertung der ausgewählten Größen zeigen, dass sowohl die Verlängerung der Stichkappen als auch die Vergrößerung ihres Radius eine Zunahme der Steifigkeit des Gesamtsystems bewirken.

Die Analyse aller untersuchten Größen aus den linearen Berechnungen deutet darauf hin, dass der Haupttonnenöffnungswinkel „ $\alpha_H$ “ bei zunehmender Steifigkeit

der Stichkappe immer mehr vom Öffnungswinkel des statischen Systems der Haupttonne abweicht. Das heißt, dass sich die Spannweite der Haupttonne verkürzt. Demnach verhält sich die Tonne nicht wie ein Bogen mit einem Öffnungswinkel, der durch die beiden Trombenoberkanten bestimmt wird ( $\alpha_{\text{nom}}$ ), sondern wie ein Bogen mit einem kleineren Öffnungswinkel. Dieser Öffnungswinkel kann als effektiver Öffnungswinkel „ $\alpha_{\text{ef}}$ “ bezeichnet werden, bei  $\alpha_{\text{ef}} = (\alpha_{\text{nom}} - \Delta\alpha)$ . Diese Abnahme des Öffnungswinkels beträgt  $\Delta\alpha = 10^\circ$  bis  $20^\circ$ . Dabei geben Scheitelsenkung und Außermittigkeit an der Scheitelmittle eine untere, die Größe des Auflagerschubes eine obere Schätzung von  $\Delta\alpha$ .

Im Zuge der nichtlinearen Untersuchungen wurden neun räumliche FE-Berechnungen mit insgesamt sechs Modellen durchgeführt. Dabei wurden die Tonnengewölbe mit einem Netz aus Volumenelementen abgebildet sowie die Rissbildung im Mauerwerk berücksichtigt. Sowohl sprödes als auch duktiler Mauerwerksverhalten wurde bewertet. Wegen der eingeschränkten Rechnerkapazität konnten nur grobe FE-Netze untersucht werden. Deshalb sind die Ergebnisse lediglich qualitativ verwertbar um Tendenzen zu erkennen. Wegen des groben Netzes wurde auf die Auswertung der Außermittigkeiten im gerissenen Zustand verzichtet. Hierzu reichen drei Elemente entlang der Querschnittshöhe nicht aus. Die Verformungen der Systeme im gerissenen Zustand wurden aus dem gleichen Grund nicht verglichen wie bei den Verformungen der gerissenen Bogentragwerke mit vergleichbaren Parametern in den Schalenberechnungen. Ein solcher Vergleich ist nur bei ausreichend feinen FE-Netzen sinnvoll.

Durch die Auswertung der nichtlinearen Berechnungen konnte dennoch der Tragmechanismus zylindrischer Tonnengewölbe mit Stichkappen im Detail geklärt werden. Stichkappen wirken als Widerlager, indem sie die Spannweite verkürzen beziehungsweise den Öffnungswinkel der Tonne verkleinern, soweit sie die anfallende Auflagerkraft tragen können. Mit ansteigender Steifigkeit nimmt die Wirksamkeit der Stichkappen zu.

Durch den Vergleich der Ergebnisse der linearen Schalenberechnungen mit denen der nichtlinearen Analysen zeigt sich der Einfluss des nichtlinearen Mauerwerkverhaltens auf das Tragverhalten von Tonnengewölben mit Stichkappen. Ähnlich wie bei Bogentragwerken aus Mauerwerk wird durch die Rissbildung der Auflager Schub kleiner und die Verformungen werden größer. Durch die Lage und Ausdehnung der gerissenen Bereiche konnten die Tendenzen aus den Schalenberechnungen zum Teil bestätigt werden. Im Bild 6.27 sind die Drucklinien der Modelle B und E im Grundriss dargestellt. Sie zeigen den gleichen Tragmechanismus wie die Drucklinien der linear-elastischen Schalenmodelle im Bild 6.6.

Bei den Modellen mit einem relativ großen Stichkappenradius können auch Vergleichswerte für ebene Bogentragwerke ermittelt werden, aber sie können nicht mit einem solchen „Ersatzsystem“ untersucht werden. Ihr Tragmechanismus bildet einen Übergang zwischen Kreuzgewölbe und Tonnengewölbe mit kleinen Stichkappen.

Die Ergebnisse der Modelle mit einem kleinen Stichkappenradius von  $r = 1,5$  m bestätigen, dass der Öffnungswinkel des statischen Systems der Haupttonne durch die Stichkappen um  $\Delta\alpha = 10^\circ$  bis  $20^\circ$  abnimmt. Des Weiteren zeigen diese Ergebnisse, dass Tonnen mit relativ kleinen Stichkappen ( $r/R \leq 4$ ) oberhalb  $\frac{3}{4}$  des Stichkappenradius auf Untersysteme geteilt werden können und damit die Tonne selbst als ebener Bogen behandelt werden kann.



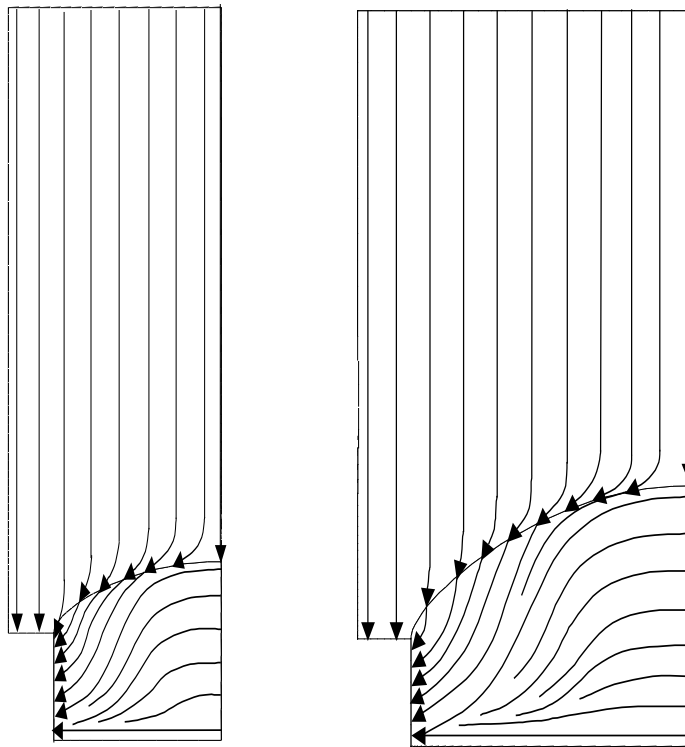


Bild 6.27: Verlauf der Drucklinien ( $\approx \sigma_3$ ) im Modell B (links) und im Modell E (rechts) im gerissenen Zustand.

Bei Tonnen mit kleinen Stichkappen bringt der Kenntnis des effektiven Öffnungswinkels einen großen Vorteil mit sich:

Ist „ $\alpha_{ef}$ “ bekannt, kann das Gesamtsystem unterteilt werden und die Untersysteme können getrennt untersucht werden. Die Tonne mit dem Öffnungswinkel „ $\alpha_{ef}$ “ kann als ebenes Bogentragwerk unter Berücksichtigung der Rissbildung, wie von *Castiglano*, überprüft werden. Anschließend wird das Gleichgewicht des Schalenfaltwerks zwischen Tonne und Oberkante der Trompe untersucht.

Alternativ kann die Stützlinienmethode für das gesamte System, also Haupttonne und Stichkappen zusammen, eingesetzt werden. Dabei wird der Auflagerpunkt des Gesamtsystems außerhalb des Haupttonnenquerschnitts auf der Trompenoberkante so angenommen, dass die Stützlinie den durch  $\alpha_{ef}$  definierten Querschnitt innerhalb des Haupttonnenquerschnittes passiert.

## 7. Schlusswort

### 7.1 Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit brachte Ergebnisse auf folgenden drei Gebieten:

- Die Interaktion zwischen historischen Ziegeln und Mörtel im Mauerwerk mit dicken Mörtelfugen wurde mittels numerischen Untersuchungen gezeigt.
- Das Tragverhalten von kreissegmentförmigen Bogentragwerken wurde unter Annahme linear-elastischen und nichtlinearen Werkstoffverhaltens (Berücksichtigung der Rissbildung) erfasst.
- Der Tragmechanismus von zylindrischen Tonnengewölben mit Stichkappen wurde unter Annahme linear-elastischen und nichtlinearen Werkstoffverhaltens (Berücksichtigung der Rissbildung) aufgezeichnet.

Die Simulation von Kleinfleißversuchen mit räumlichen und ebenen Zweiphasenmodellen zeigte eine gute Übereinstimmung in der Versagensart (Versagen des Mauerwerks durch Spalten des Ziegels, verursacht durch unterschiedliches Querdehnungsverhalten von Ziegel und Mörtel) mit den Versuchen des Sonderforschungsbereiches 315 [Neuwald-Burg, 1999]. Die Ergebnisse zeigen weiter, dass die Ausbröckelung des Mörtels am Fugenrand ein kombiniertes Versagen ist. Einerseits treten Risse parallel zur Krafrichtung auf, andererseits plastifiziert der Mörtel in einem ungefähr karreeförmigen Randbereich.

Die Gegenüberstellung von Ergebnissen der Stützlinienmethode mit denen von Heyman, 1966 zeigt eine Übereinstimmung. Die erforderliche Bogenstärke fällt im Rahmen der Rechengenauigkeit gleich groß aus.

Die Ergebnisse der durchgeführten linear-elastischen Bogenberechnungen gelten nur für den ungerissenen Zustand. Der errechnete Auflagerschub ist, unter Annahme eines eingespannten Systems, für gerissene Systeme mit ausreichender Genauigkeit verwendbar. Des Weiteren zeigen die Ergebnisse, dass das Vorzeichen der Veränderung des Auflagerschubs auf Grund von Rissbildung vom Öffnungswinkel abhängt.

Die Simulationen der Kreissegmentbögen unter Berücksichtigung von spröden und duktilen Werkstoffeigenschaften zeigen, dass die Lage der Viertelpunkte – in diesen Fällen die Stelle des ersten Risses im betreffenden Bereich – mit den Ergebnissen von Heyman gut übereinstimmen. Dessen Annahme, dass die Stützlinie gleichzeitig an den Auflagern, am Scheitel und an den Viertelpunkten eine gleich große Außermittigkeit annimmt, liegt weit auf der sicheren Seite. Die Veränderung des Auflagerschubes durch Rissbildung ist minimal, kleiner als dessen Unterschied zwischen eingespanntem Bogen und Dreigelenkbogen bei den linearen Bogenberechnungen. Das liegt daran, dass die Stützlinie am Riss durch den überdrückten Restquerschnitt verläuft, also außermittig. Das entspricht einer „Teileinspannung“. In den untersuchten Dreigelenkbögen wurden hin gegen die Gelenke in der Achse des Stabtragwerkes angenommen. Somit muss die Schubgröße auch zwischen denen des eingespannten und des Dreigelenkbogens liegen.

Die Verformungen von Bögen im gerissenen Zustand sind zwar mehrfach größer als die Verformungen im ungerissenen Zustand, sie bleiben jedoch im Bereich von „mm“. An Gewölben gemessene Verformungen liegen in der Größenordnung von „cm“, öfters auch von „dm“. Demnach können die Verformungen bestehender Einwölbungen, wie die der St. Magdalena Kirche in Fürstenfeldbruck bei München mit bis zu 20 cm, nicht allein mit der Rissbildung erklärt werden [Rehm, 1995] Zeitabhängiges Werkstoffverhalten, frühe Belastung und eventuelle Auflagerverschiebungen sind für die Abweichungen zwischen Rechnung und Bestand verantwortlich.

Die Auswertung linear-elastischer Schalenberechnungen von Tonnengewölben mit Stichkappen deutet auf eine Verkürzung der Spannweite hin. Das bedeutet, dass der Öffnungswinkel „ $\alpha_{ef}$ “ des statischen Systems kleiner ist, als der durch die Trompenoberkanten und den Mittelpunkt gegebener Winkel. Bei den untersuchten Abmessungen entsprachen die Werte einer Differenz von bis zu 20°.

Die nichtlinearen Simulationen ausgewählter Modelle bestätigen diese Tendenz. Sie zeigen, dass bei Tonnen mit kleinen Stichkappen ein effektiver Öffnungswinkel „ $\alpha_{ef}$ “ bestimmt werden kann. Dementsprechend kann ein **vereinfachtes Bemessungskonzept** wie folgt aufgestellt werden:

Ist „ $\alpha_{ef}$ “ bekannt, kann das Gesamtsystem unterteilt werden und die Untersysteme können getrennt untersucht werden. Die Tonne mit dem Öffnungswinkel „ $\alpha_{ef}$ “ kann als ebenes Bogentragwerk unter Berücksichtigung der Rissbildung wie von *Castigliano* überprüft werden. Anschließend wird das Gleichgewicht des Schalenfaltwerks zwischen Tonne und Oberkante der Trompe untersucht. Alternativ kann die Stützlinienmethode für das gesamte System, also Haupttonne und Stichkappen zusammen, eingesetzt werden. Dabei wird der Auflagerpunkt des Gesamtsystems außerhalb des Haupttonnenquerschnitts auf der Trompenoberkante so angenommen, dass die Stützlinie den durch  $\alpha_{ef}$  definierten Querschnitt innerhalb des Haupttonnenquerschnittes passiert.

Die Ergebnisse von Modellen mit einer großen Stichkappe – also eher einer Nebentonne – zeigen, dass ein „ $\alpha_{ef}$ “ nicht bestimmt werden kann. Bei solchen Verhältnissen ist eine Unterteilung des Systems nicht sinnvoll durchführbar. Solche Systeme müssen mit räumlichen Modellen unter Berücksichtigung der Rissbildung untersucht werden.

Als Beispiel wird die Standsicherheit der gemauerten Tonnengewölbe der St. Jakob-Kirche in Willing (Bayern) nachstehend untersucht. Die Ergebnisse des herkömmlichen Verfahrens und des hier vorgeschlagenen Verfahrens werden verglichen. Eine kurze Baubeschreibung sowie eine grafische und tabellarische Zusammenfassung der geometrischen Angaben und der wichtigsten Rechenschritte sind im Kapitel 8.4 zusammengestellt.

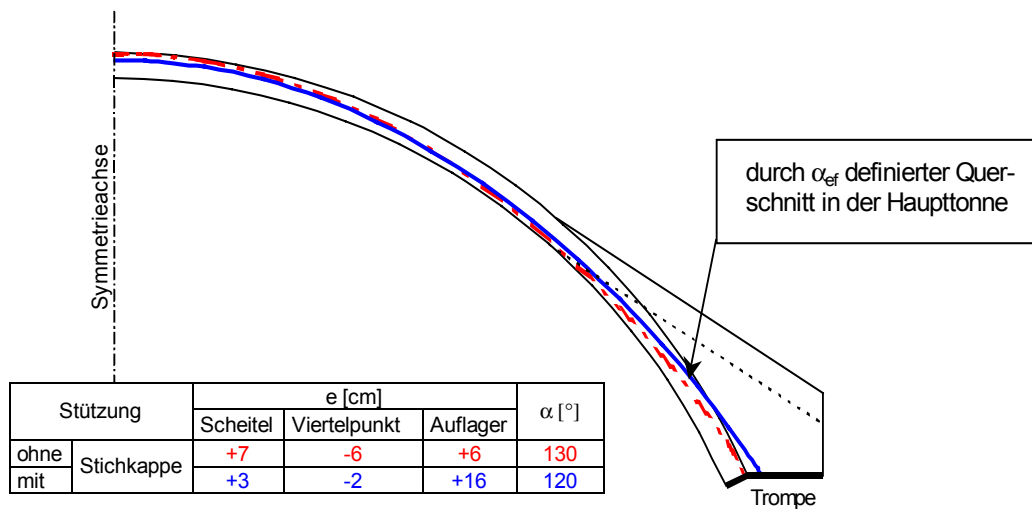


Bild 7.1: Halber Querschnitt der gemauerten Tonnengewölbe der St. Jakob-Kirche in Willing. Verlauf der Stützlinien, sowie eine tabellarische Zusammenfassung der Außer-mittigkeiten in den maßgebenden Querschnitten ohne (Punkt-Strichlinie – rot) und mit (durchgehende Linie – blau) Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe.

Bild 7.1 stellt Stützlinien ohne und mit Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe im halben Haupttonnenquerschnitt dar.

Mit dem herkömmlichen Verfahren kann eine Stützlinie ermittelt werden, die überall innerhalb des Haupttonnenquerschnittes verläuft. Am Scheitel beträgt der Abstand 1 cm, am Viertelpunkt und am Auflager 2 cm vom Querschnittsrand. Auffällig im Verlauf ist die Ausdehnung des „Viertelpunkt-Bereiches“. Die Stützlinie verläuft in einem ungewöhnlich langen Abschnitt in der Nähe der Tonnenlaibung. Das wird von der fehlenden Auflast im Bereich der Stichkappe verursacht. Grund dafür ist, dass der fehlende Tonnenabschnitt unterhalb der Stichkappe mehr wiegt als die Stichkappe selbst.

Wird die stützende Wirkung der Stichkappe berücksichtigt, kann die Stützlinie den Tonnenquerschnitt im unteren Bereich der anschließenden Stichkappe verlassen. Wie aus Bild 7.1 ersichtlich, reichen einige Zentimeter Außer-mittigkeit des Auflagerpunktes außerhalb des Tonnenquerschnittes aus, um eine besonders günstig verlaufende Stützlinie zu finden. Sie verläuft zwischen Scheitel und Anschluss der Stichkappenscheitel knapp außerhalb der ersten Kernweite. Die Außer-mittigkeit der Stützlinie bleibt zwischen +3 cm und –3 cm, wobei die erste Kernweite 2,67 cm beträgt. Die Stützlinie trifft die Oberkante der Trompe 10 cm außerhalb des Tonnenrückens.

Das in Tabelle 8.2 zusammengestellte Ergebnis der Untersuchung mit dem herkömmlichen Verfahren zeigt einen Gleichgewichtszustand der Einwölbung, der kaum Sicherheitsreserven hat. Bei einer Auflagerverschiebung von einigen Zentimetern kann keine Stützlinie mehr ermittelt werden, die überall in der Haupttonne verläuft. Das mit dem neuen Verfahren errechnete Ergebnis zeigt hingegen, dass das System erhebliche Reserven hat (s. Tabelle 8.3). Ein solches System kann demnach auch Auflagerverschiebungen durch die Verlagerung der inneren Kräfte (der Stützlinie) problemlos ausgleichen.

Wie dieses Beispiel zeigt, fällt die Beurteilung der Standsicherheit einer Einwölbung durch die Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe bedeutend günstiger aber auch wirklichkeitsnaher aus.

## 7.2 Ausblick

Die nichtlinearen Berechnungen wurden mit einem Einphasen-Werkstoffmodell für das Mauerwerk durchgeführt, da in den benutzten Versionen 6.2 bis 7.2 des FE-Programms DIANA noch kein anisotropes Werkstoffmodell implementiert war. Somit konnten die Ergebnisse nur qualitativ bewertet werden. Simulationen mit einem anisotropen Werkstoffmodell für Mauerwerk würden quantitative verwertbare Ergebnisse liefern, sofern die Parameter durch entsprechende Druckversuche kalibriert werden. Mit einem anisotropen Werkstoffmodell sind rein virtuelle Phänomene, wie z.B. die Delaminierung in einem halbsteinstarken Gewölbe, vermeidbar.

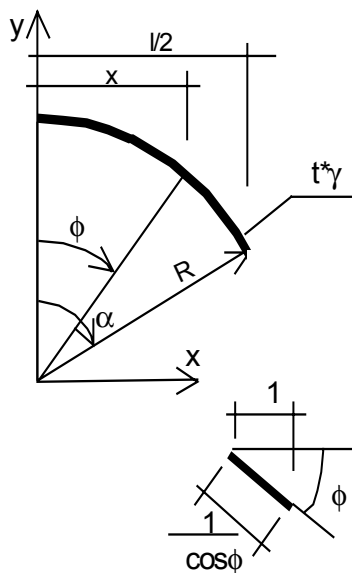
Im Rahmen dieser Arbeit konnte der Einfluss von Auflagerverschiebungen nicht erfolgreich erfasst werden. Es wurden mehrere Versuche unternommen, Auflagerverschiebung unter Eigengewicht bereits gerissener Bögen zu simulieren. Unabhängig vom eingesetzten Lösungsverfahren konvergierten die Berechnungen bereits nach einigen 1/1000 mm Auflagerverschiebung nicht mehr. Durch eine Verfeinerung des Netzes könnte dieses Problem umgangen werden. Dazu ist ein leistungsstärkerer Rechner erforderlich. Alternativ könnte ein FE-Programm eingesetzt werden, das die Steifigkeitsmatrix bei Konvergenzproblemen neu aufbaut, wobei die Steifigkeit stark beschädigter Elemente außer Acht gelassen wird.

Zur Simulation räumlicher Modelle wurden grobe Netze verwendet. Dies lag an der Kapazität des benutzten Rechners. Durch das grobe Netz konnte der effektive Öffnungswinkel nicht genau bestimmt werden, was mit feineren FE-Netzen möglich werden wird. Diese Simulationen wurden nur an zwei Kombinationen des Haupttonnenradius „R“ und des Stichkappenradius „r“ durchgeführt. Sie zeigen, dass bei kleinem Stichkappenradius „r“ (ca.  $r/R < 1/4$ ) eine Unterteilung des Systems sinnvoll durchführbar ist, bei einem großem „r“ hingegen nicht. Die Grenze zwischen „klein“ und „groß“ muss noch durch eine Reihe von Parameterstudien ermittelt werden. Wenn diese Fragen geklärt sind, sind die Randbedingungen für den Einsatz des in Kapitel 7.1 geschilderten, vereinfachten Bemessungskonzeptes auch für Verhältniswerte von  $r/R > 1/4$  gegeben.

## 8. Anhang

### 8.1 Ermittlung der Stützlinie eines Kreissegmentbogens

Zur Ermittlung der Stützlinie eines Kreissegmentbogens mit unveränderlicher Bogenstärke unter Eigenlast muss die Differentialgleichung der Seillinie verwendet werden. Das Vorzeichen auf der rechten Seite - mittlerer Ausdruck in Gl. (8.1) - ist dabei bereits verändert, da hier anstatt Zug in der Stützlinie Druck wirkt. Im Bild 8.1 sind die Geometrie, die Bezeichnungen sowie die Definition der Lastfunktion dargestellt.



$$g_0 = t * \gamma \quad (a)$$

$$0 \leq \phi \leq \alpha \quad (b)$$

$$x = R * \sin \phi \quad (c)$$

$$g = \frac{g_0}{\cos \phi} \quad (d)$$

Bild 8.1: Geometrie eines Kreissegmentbogens mit gleichbleibender Bogenstärke und seine Belastung durch Eigengewicht

Die Differentialgleichung der Seillinie mit der Belastung im Bild 8.1(d) lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-1}{H} * g(x) - \frac{g_0}{H} * \frac{1}{\cos \left( \arcsin \frac{x}{R} \right)} \quad (8.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g_0}{H} * \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \left( \arcsin \frac{x}{R} \right)}} = -\frac{g_0}{H} * \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2}} \quad (8.2)$$

Die Lösung (8.5) lässt sich durch zweifaches Integrieren der Gleichung (8.2) nach *Bronstein, 1991*, Integralformel Nr. 164 und 488, ermitteln:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g_0}{H} * \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (8.3)$$

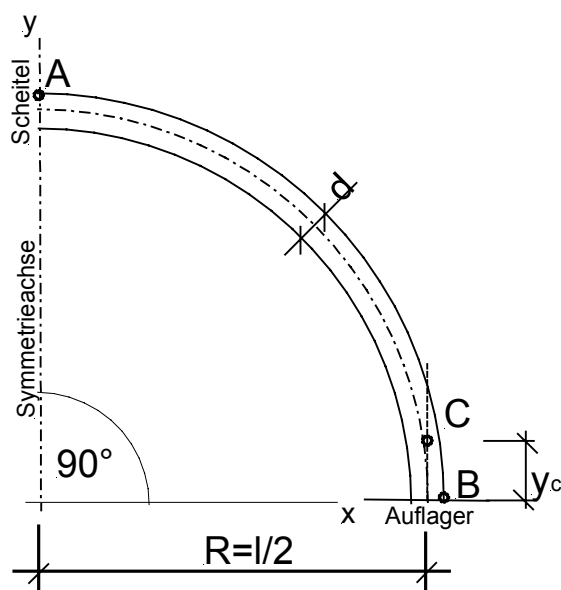
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{g_0 * R}{H} * \arcsin \frac{x}{R} + C_1 \quad (8.4)$$

$$y = -\frac{g_0 * R}{H} * \left( x * \arcsin \frac{x}{R} + \sqrt{R^2 - x^2} \right) + C_1 * x + C_2 \quad (8.5)$$

Ermittlung der Integrationskonstanten für den Fall  $\alpha=180^\circ$ :

Im Bild 8.2 ist ein Halbkreisbogen mit den bei der Aufgabenlösung benutzten Bezeichnungen dargestellt. Die Lösung der Differentialgleichung ist Gleichung (8.5). Sie beinhaltet die drei vorerst unbekanntnen Parameter  $H$ ,  $C_1$  und  $C_2$ , die durch Berücksichtigung der Randbedingungen ermittelt werden können. Das Gewicht  $g_0$  ist ein freier Parameter. Es wird mit  $H$  zusammengefasst und durch die Größe  $h = g_0/H$  ersetzt. Die Randbedingungen sind folgende:

- die Stützlinie geht durch Punkt „A“ am Scheitel,
- die Tangente der Stützlinie ist horizontal im Punkt „A“ und
- die Stützlinie geht durch den Auflagerpunkt „B“.



- 1)  $y(0) = R + \frac{d}{2}$
- 2)  $y'(0) = 0$
- 3)  $y(l/2) = y_C$
- 4)  $y'(l/2) = \frac{y_B - y_C}{x_B - l/2}$

Bild 8.2 Halbkreisbogen als Beispiel für die bei der Lösung verwendeten Bezeichnungen sowie die vier Randbedingungen für die Lösung der Differentialgleichung

Damit stehen drei voneinander unabhängige Bedingungen zur Ermittlung der unbekanntnen Parameter zur Verfügung. Die Aufgabe lässt sich jedoch noch nicht lösen, da der Auflagerpunkt „B“ ( $x = R + d/2 > R$ ) außerhalb des Definitionsbereiches der Lastfunktion liegt. Daher muss die Lage eines zusätzlichen Punktes „C“ an der Grenze des Definitionsbereiches bestimmt werden, wo die Stützlinie so durchgeht, dass sie auch den Auflagerpunkt „B“ trifft. Die mathematische Formulierung dieser vierten Bedingung ist im Bild 8.3 dargestellt. In Tabelle 8.1 sind die Ausgangsparameter und die ermittelten Integrationskonstanten von Kreisseg-

mentbögen mit Radius  $R = 6$  m, Öffnungswinkel  $\alpha_1 = 120^\circ$  und  $\alpha_2 = 180^\circ$  sowie den zugehörigen Mindeststärken nach *Heyman*  $d_1 = 0,137$  m und  $d_2 = 0,64$  m zusammengestellt.

Tabelle 8.1 Zusammenstellung der Eingangsparameter und der ermittelten Parameter der Stützlinien zweier Kreissegmentbögen ( $\alpha_1 = 120^\circ$  und  $\alpha_2 = 180^\circ$ ) mit Radius  $R = 6$  m und den zugehörigen Mindeststärken nach *Heyman* von  $d_1 = 0,137$  m und  $d_2 = 0,64$  m

Bezeichnung		$\alpha_1 = 120^\circ$	$\alpha_2 = 180^\circ$
Eingangsparameter	$A_x$	0,000	0,000
	$A_y$	6,0685	6,32
	$B_x$	5,2553	6,32
	$B_y$	3,0342	0,000
	$C_x$	5,1962	6,000
Lösung	$C_y$	3,1098	0,808
	$C_2$	13,341	15,972
	$h$	0,202	0,268

Bemerkung: Aus der Randbedingung Nr. 2 folgt, dass  $C_1$  stets gleich 0 ist.

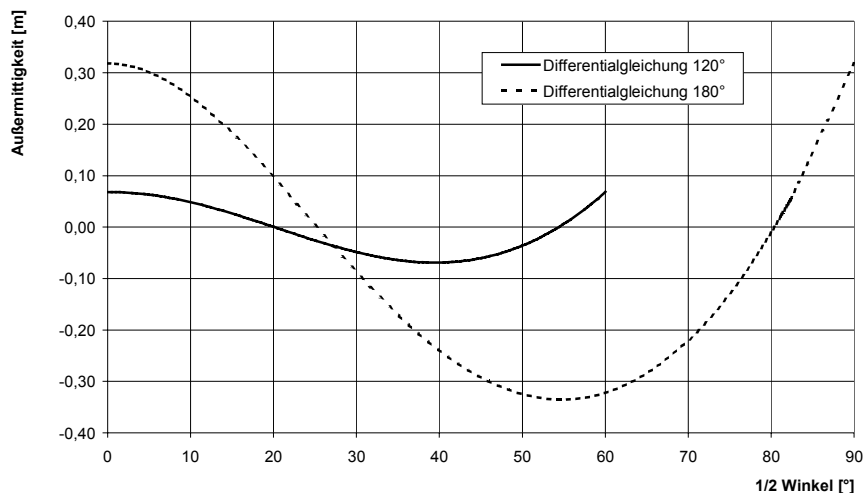


Bild 8.3 Verlauf der Stützlinien nach den Lösungen der Differentialgleichung (Parameter siehe Tabelle 8.1)

## 8.2 Ermittlung der Last einer Stützlinie in Form eines Kreissegmentbogens

Die Ermittlung der Last, deren Stützlinie ein Kreissegmentbogen ist, ist die Umkehraufgabe der Stützlinienbestimmung für eine vorgegebene Last. Bei der Lösung wurde jedoch nicht die Differentialgleichung, sondern es wurden die Gleichgewichtsbedingungen verwendet, die für jeden Bogenabschnitt gelten. Im Bild 8.4 ist die Aufgabenstellung grafisch dargestellt.



Folgende Eigenschaften ergeben sich aus der Stützlinie in Form des Kreisbogens:

- Die Druckkraft liegt in jedem Querschnitt tangential zur Systemachse, d.h. sie hat eine Neigung von  $\phi$  zur Horizontalen.
- Die resultierende Last für jeden Abschnitt – im Bild 8.4 mit dem Zentralwinkel  $\phi$  bezeichnet – liegt in einer Entfernung vom Scheitel  $x_s(\phi) = \tan(\phi/2)$ .

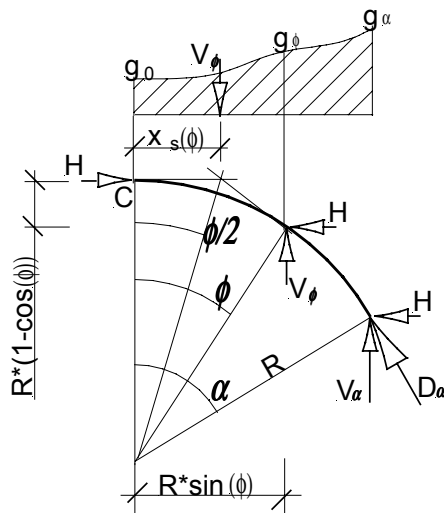


Bild 8.4 Kreissegmentbogen als Stützlinie – Bezeichnungen zur Aufgabenstellung

Gleichung (8.6) ist die Gleichgewichtsbedingung der vertikalen Kräfte für den Bogenabschnitt mit einem halben Öffnungswinkel  $\phi$ . Die tangentielle Neigung der Druckkraft im Querschnitt wird mit der Gleichung (8.7) ausgedrückt.

$$V_\phi = \int_0^\phi g(\alpha) * R * d\alpha \quad (8.6)$$

$$H = V_\phi / \tan(\phi) \quad (8.7)$$

Das Drehmoment des Bogenabschnittes um „C“ lautet:

$$x_s(\phi) * V_\phi = \int_0^\phi g(\alpha) * R^2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) d\alpha \quad (8.8)$$

Das Momentengleichgewicht um „C“ heißt:

$$\sum M_C = x_s(\phi) * V_\phi + H * R * (1 - \cos(\phi)) - V_\phi * R * \sin(\phi) = 0 \quad (8.9)$$

Nach Einsatz der Ausdrücke (8.6), (8.7) und (8.8) in (8.9)

$$\sum M_C = \sin(\phi) * \cos(\phi) * g(\phi) * R + H * \sin(\phi) - H * \{ \cos(\phi) * \tan(\phi) + \tan(\phi) \} = 0 \quad (8.10)$$

Aus (8.10) folgt:

$$g(\phi) = \frac{H}{R * \cos^3(\phi)} \quad (8.11)$$

Die Parameter  $H$  und  $R$  können in „ $g_0$ “ zusammengefasst werden:

$$g_0 = \frac{H}{R} \quad (8.12)$$

Nach Einsatz von (8.12) in (8.11) erhält man die Funktion für die gesuchte Last, die eine kreisbogenförmige Stützlinie hat:

$$g(\phi) = \frac{g_0}{\cos^3(\phi)} \quad (8.13)$$

Die Formel des Gewölbeschubes ist:

$$H = \frac{g_0}{R} \quad (8.14)$$

*Schwedler, 1859*, kam auf einem anderen Weg zum selben Ergebnis. Im Bild 8.5 ist die Lastgröße in Abhängigkeit vom Polarwinkel dargestellt.

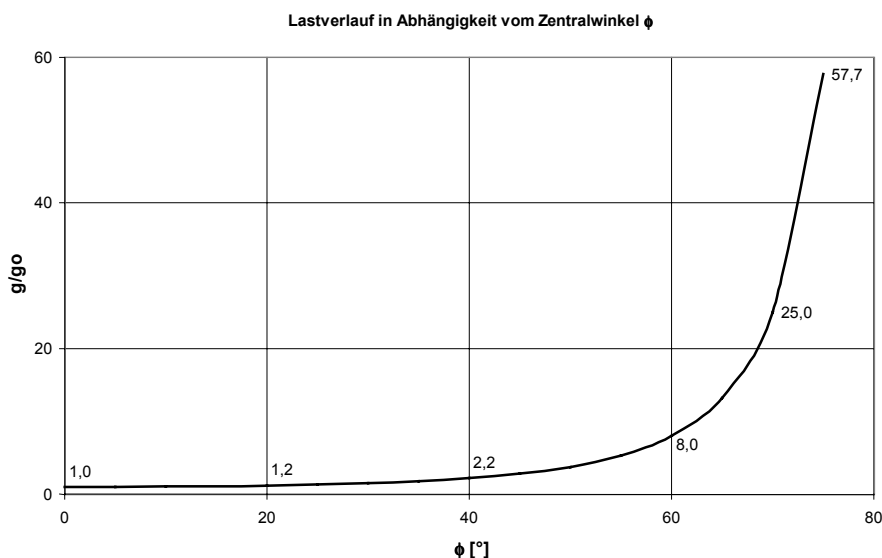


Bild 8.5 Bezogener Lastverlauf zur Kreisbogenstützlinie in Abhängigkeit vom Zentralwinkel  $\phi$  (Scheitel =  $0^\circ$ ). Bezugsbasis: Lastgröße am Scheitel

### 8.3 Angaben zu den FE-Modellen der Arbeit

Die FE-Methode etablierte sich in den vergangenen 30 Jahren in den Ingenieurwissenschaften, also auch im konstruktiven Ingenieurbau. Ihre Grundlagen wurden in der Literatur ausreichend behandelt. Hier wird nur beispielhaft auf die Veröffentlichungen von *Ramm, 1996 und 2001, und Bathe, 2002*, hingewiesen. Die numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode wurden mit den FE-Programmen RSTAB (Version 3.94) und DIANA (Versionen 6.2 bis 7.2) durchgeführt.

Im nachfolgenden Abschnitt werden die verwendeten Elementarten, die Werkstoffgesetze und ihre Modellierung, sowie die eingesetzten numerischen Verfahren beschrieben.

### 8.3.1 Die verwendeten finiten Elementtypen

Die verwendeten Elementtypen werden nachstehend systematisch vom ebenen Balkenelement bis zum räumlichen Quaderelement dargestellt.

Balkenelemente:

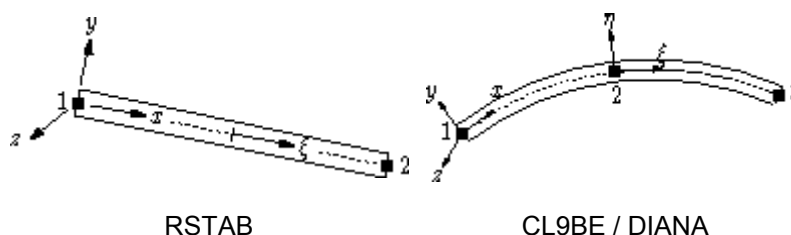


Bild 8.6: Schematische Darstellung der ebenen Balkenelemente von RSTAB 3.94 und von DIANA (CL9BE). Bilder aus *DIANA 7.2 / Elementlibrary*

Bei den meisten numerischen Untersuchungen von Bogentragwerken wurde das Stabwerkprogramm RSTAB 3.94 verwendet. Die Bögen wurden in allen Fällen nach dem gleichen Schema angenähert: Die Länge der geraden Elemente entsprach der Sehne zu einem  $5^\circ$  Zentralwinkel bei  $R = 10$  m Radius. Somit bildeten bei den Bogenmodellen mit dem (kleinsten)  $40^\circ$  Öffnungswinkel 8 Elemente, beim  $120^\circ$ -Öffnungswinkel 24 Elemente das FE-Netz zwischen den Auflagern. Nach Angaben des Softwarehauses Dlubal (1996) kann dadurch eine für die Praxis ausreichende Genauigkeit erzielt werden. Nur bei wenigen ergänzenden Untersuchungen an Bogentragwerken mit dem Radius  $R = 6$  m wurde das Programm DIANA eingesetzt. Die Größe der parabelförmig gekrümmten Balkenelemente ergab sich aus dem Zentralwinkel von  $10^\circ$  zu den zwei Endpunkten beim Radius  $R = 6$  m. Sie wurden bei Bogenberechnungen mit großen Öffnungswinkeln ( $\alpha \geq 120^\circ$ ) verwendet. Die Qualität dieser Modelle wurde nicht gesondert untersucht, da finite Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz auch bei gleicher Netzwahl bessere Ergebnisse liefern. In den Gleichungen (8.15) bis (8.19) sind die Verschiebungsfunktionen der verwendeten Balkenelemente zusammengefasst.

Die einfachen linearen Verschiebungsfunktionen des Balkenelements von RSTAB sind mit den Gleichungen (8.15) und (8.16) angegeben.

$$u_x = a_0 + a_1 * \xi \quad (8.15)$$

$$u_y = b_0 + b_1 * \xi \quad (8.16)$$

Die Verschiebungsfunktionen des ebenen gekrümmten Balkenelements CL9BE sind nachfolgend aufgestellt:

$$u_x = a_0 + a_1 * \xi + a_2 * \xi^2 \quad (8.17)$$

$$u_y = b_0 + b_1 * \xi + b_2 * \xi^2 \quad (8.18)$$

$$\phi_x = c_0 + c_1 * \xi + c_2 * \xi^2 \quad (8.19)$$

Scheibenelemente und ebene Interface-Elemente:

Bei Untersuchungen an Mauerwerk und an Bogentragwerken in der Ebene wurden Scheibenelemente mit ebenem Verformungszustand verwendet. Das Modell wird als eine ausgeschnittene Scheibe aus einer langen Mauerwerksscheibe oder aus einem Gewölbe angenommen. In diesem Fall sind Querdehnungen durch die anschließenden Bauteile behindert. Die Verschiebungsfunktion des isoparametrischen Scheibenelements Q8EPS ist in Gleichung (8.20) angegeben. Das Konvergenzverhalten des Scheibenelements Q8EPS wurde an einem ebenen, eingespannten Balkenmodell mit einer Spannweite von 1,00 m und einer Querschnittshöhe von 0,15 m untersucht. Die Ergebnisse sind in Bild 8.8 grafisch dargestellt.

$$u_i = a_0 + a_1 * \xi + a_2 * \eta + a_3 * \xi * \eta \quad (8.20)$$

Zusammen mit den Scheibenelementen im ebenen Verformungszustand wurden Interface-Elemente zur Modellierung des Verbundes zwischen Mörtel und Ziegel eingesetzt. Die Integration wurde an 2x2 Gaußpunkten durchgeführt. Das Konvergenzverhalten dieser Elemente wurde nicht gesondert untersucht.

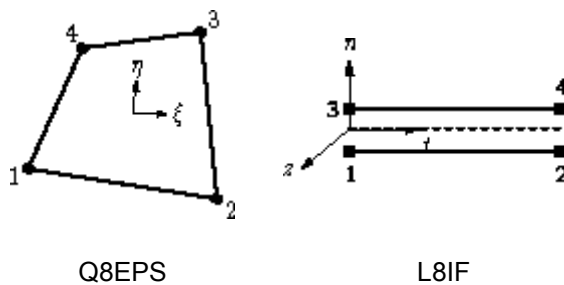


Bild 8.7: Schematische Darstellung des Scheibenelements Q8EPS (mit ebenem Spannungszustand) und des Interface Elements L8IF.  
Bild aus *DIANA 7.2 / Elementlibrary*

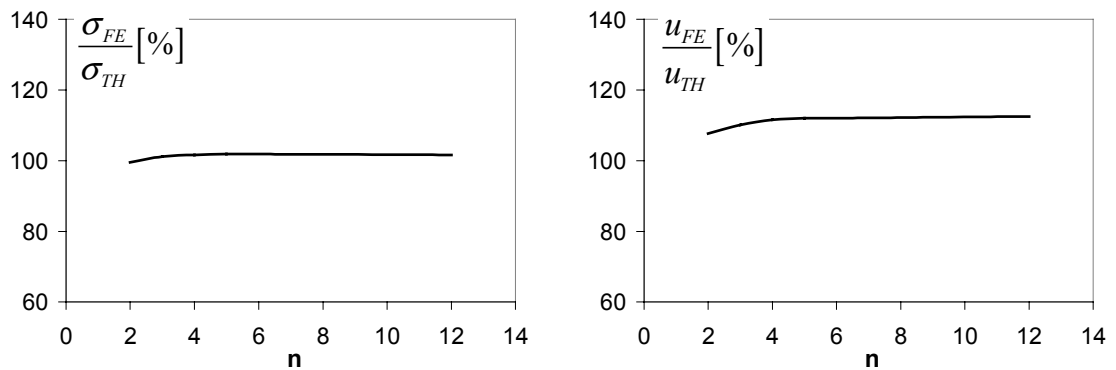
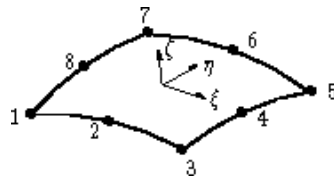


Bild 8.8: Konvergenzverhalten des Q8EPS Scheibenelements in Abhängigkeit von der Teilung der Querschnittshöhe. - Spannungen (links), Verschiebungen (rechts) an der Feldmitte, bezogen auf die Ergebnisse nach der Euler-Bernoulli Theorie

### Schalenelemente:

Die Untersuchung von Tonnengewölben mit Stichkappen unter Annahme linear-elastischer Materialeigenschaften erfolgte mit einfach gekrümmten Schalenelementen mit 8 Knoten nach der Biegetheorie der Schalen. Das isoparametrische CQ40S Schalenelement ist im Bild 8.9 dargestellt. Die Verschiebungsfunktionen des Elements sind in den Gleichungen (8.21) und (8.22) angegeben. Das Konvergenzverhalten des CQ40S Elements wurde an einem der untersuchten Tonnengewölbe mit Stichkappen untersucht.



CQ40S

Bild 8.9: Schematische Darstellung des gekrümmten Schalenelements CQ40S. Bild aus *DIANA 7.2 / Elementlibrary*

$$u_i(\xi, \eta) = a_0 + a_1 * \xi + a_2 * \eta + a_3 * \xi * \eta + a_4 * \xi^2 + a_5 * \eta^2 + a_6 * \xi^2 * \eta + a_7 * \xi * \eta^2 \quad (8.21)$$

$$\phi_i(\xi, \eta) = b_0 + b_1 * \xi + b_2 * \eta + b_3 * \xi * \eta + b_4 * \xi^2 + b_5 * \eta^2 + b_6 * \xi^2 * \eta + b_7 * \xi * \eta^2 \quad (8.22)$$

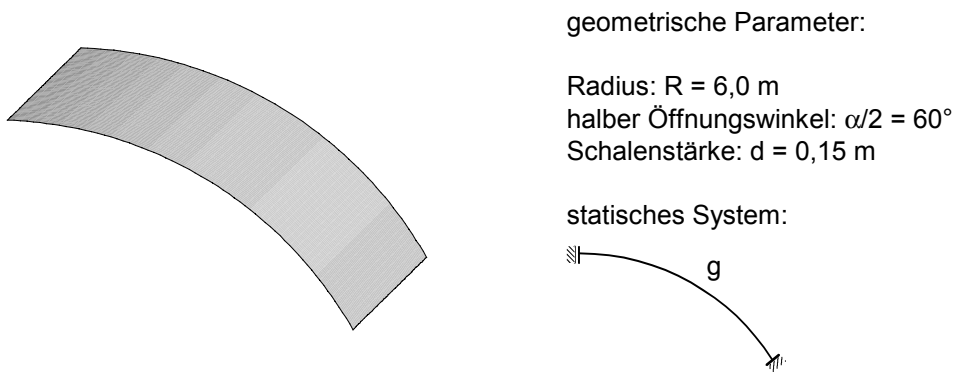


Bild 8.10: Geometrie der Schalenkonstruktion für die Konvergenz-Verhaltensuntersuchung des Schalenelements CQ40S

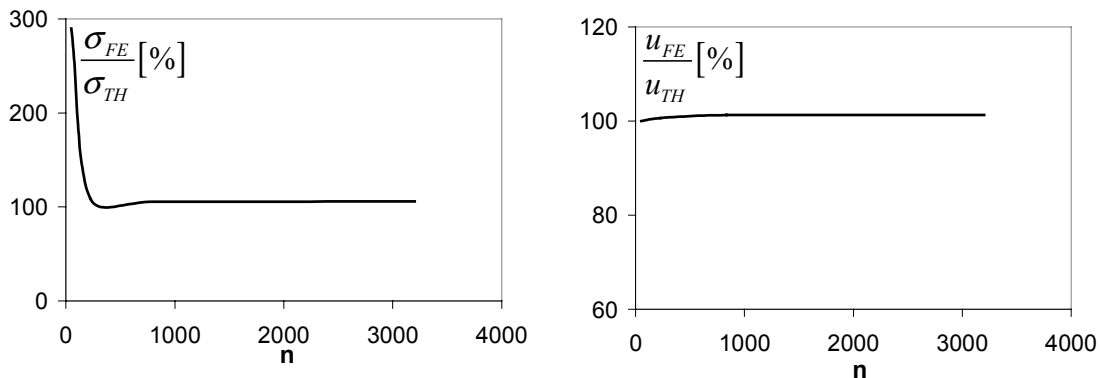


Bild 8.11: Konvergenzverhalten des CQ40S Schalenelements in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente. Spannungen (links), Verschiebungen (rechts) an Oberkante der Scheitelmitte

### Volumenelemente:

Bei der Untersuchung des räumlichen Tragverhaltens von Kleinfeilern und von Tonnengewölben mit Stichkappen wurden 8-knotige, quaderförmige Volumenelemente verwendet. Das isoparametrische HX24L-Volumenelement ist im Bild 8.12 dargestellt. Die Verschiebungsfunktion des Elements ist in Gleichung (8.23) angegeben. Das Konvergenzverhalten des HX24L-Elements wurde an einem eingespannten Einfeldträger (Spannweite 1,0 m; Querschnitt  $b/d = 1,00 \text{ m}/0,15 \text{ m}$ ) untersucht. Die Ergebnisse dazu sind im Bild 8.13 grafisch dargestellt.

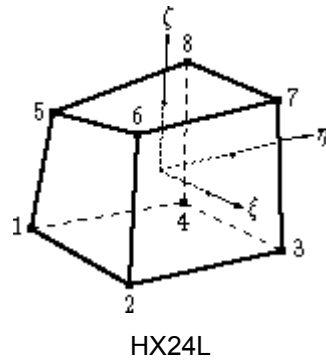


Bild 8.12: Schematische Darstellung des verwendeten Volumenelements HX24L.  
Bild aus *DIANA 7.2 / Elementlibrary*

$$u_i(\xi, \eta, \zeta) = a_0 + a_1 * \xi + a_2 * \eta + a_3 * \zeta + a_4 * \xi * \eta + a_5 * \eta * \zeta + a_6 * \xi * \zeta + a_7 * \xi * \eta * \zeta \quad (8.23)$$

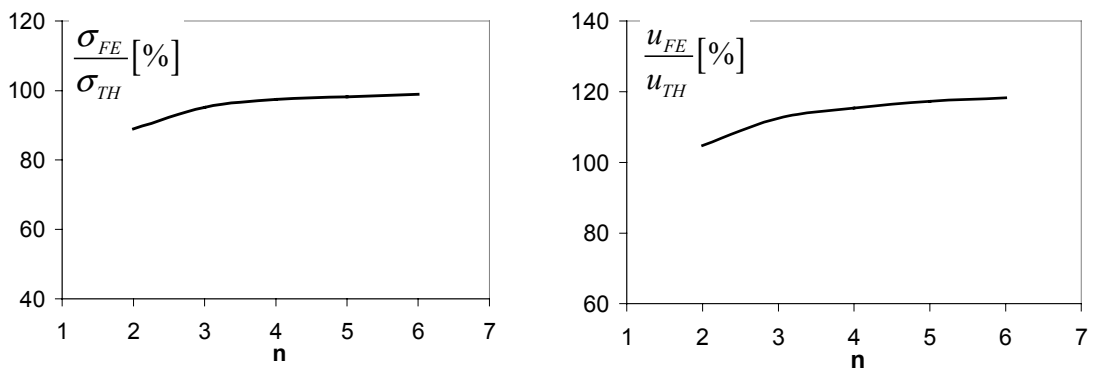


Bild 8.13: Konvergenzverhalten des HX24L Volumenelements. Spannungen (links), Verschiebungen (rechts) in der Feldmitte in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente entlang der Querschnittshöhe, bezogen auf die Ergebnisse nach der Euler-Bernoulli Theorie

### 8.3.2 Modellierung von Werkstoffeigenschaften

Das Werkstoff- oder Materialgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen den Verformungen und den Spannungen eines Festkörpers. Bei linear-elastischen Materialeigenschaften im dreidimensionalen Spannungs-Dehnungszustand ist dieser Zusammenhang in den Gleichungen (8.24) bis (8.26) angegeben [Chen und Han, 1988].

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.24)$$

bei:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

sowie

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2*\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2*\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2*\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2*\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

Der Zusammenhang für den ebenen Verzerrungszustand vereinfacht sich auf Gleichung (8.27).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2*\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2*\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Ziegel und Mörtel können, ebenso wie andere Werkstoffe, nicht unbegrenzt belastet werden. Sie haben eine Zug- und Druckfestigkeit. Nach dem Erreichen der Druckfestigkeit verhalten sich beide Werkstoffe plastisch, Kalkmörtel sogar fast ideal-plastisch. Nach dem Erreichen der Zugfestigkeit versagen beide Werkstoffe spröde oder quasi-spröde. Das quasi-spröde Versagen erfolgt nicht schlagartig, sondern bei abnehmendem Widerstand nehmen die Verformungen so lange zu, bis die Bruchdehnung erreicht wird. Im Bild 8.14 sind die Spannungs-Dehnungslinien für Zug- und Druckbelastung des Betons für den eindimensionalen Fall schematisch dargestellt. Sie gelten auch für betonähnliche Werkstoffe, wie es Mörtel und Ziegel sind.



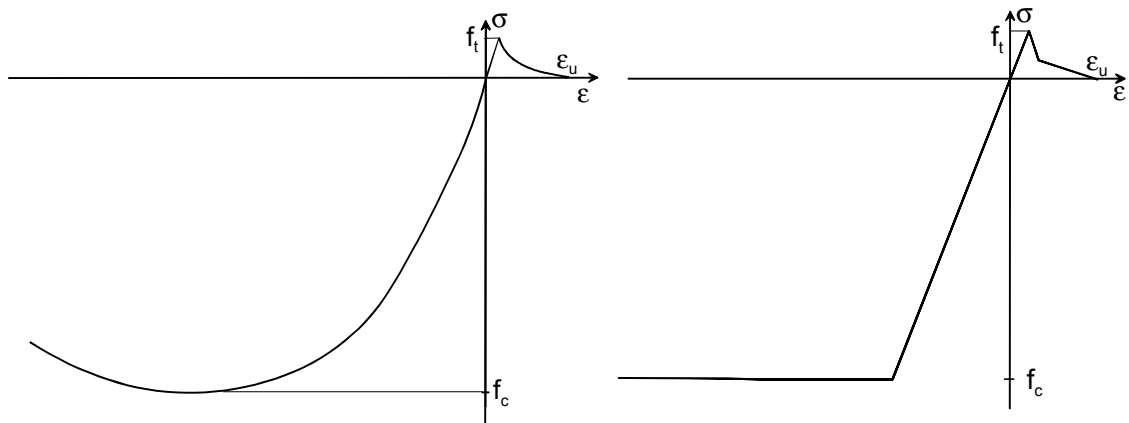


Bild 8.14: Schematische Darstellung der Spannungs-Dehnungslinien des Betons für den ein-dimensionalen Fall: Aus dem Versuch (links) und das Rechenmodell dazu (rechts)

Das Versagen von Ziegel und Mörtel unter Druckbeanspruchung wird mit der Plazizitätstheorie beschrieben. In den Berechnungen wird es durch die Drucker-Prager-Fließbedingung modelliert. Diese Fließbedingung wird im Raum der Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  durch einen Kegel abgebildet. Die Einschränkung erfolgt durch die Berücksichtigung der einachsigen Zug- und Druckfestigkeiten. Dadurch fällt die Spitze weg und wird durch 2 x 3 Ebenen ersetzt. Das Versagenskriterium entsprechend dem ebenen Spannungszustand ist im Bild 8.15 dargestellt.

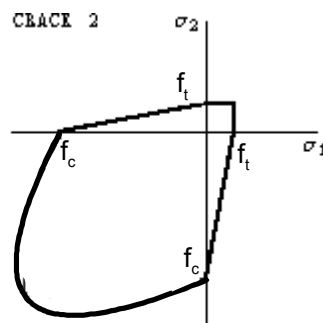


Bild 8.15: Drucker-Prager Versagenskriteriums kombiniert mit tension cut-off im ebenen Spannungszustand

Die Rissbildung wurde mittels der Rissbandmethode, der Mörtel mit sprödem, der Ziegel mit quasi-sprödem Verhalten berücksichtigt. Bei quasi-sprödem Verhalten wurde einheitlich eine Rissbandbreite von  $h = 2,5$  cm angenommen. Das ist eine Annahme, die aus Mangel an Versuchen noch nicht bestätigt wurde. Im Rahmen der Rissbandmethode wurde eine unveränderliche Ausrichtung der Risse angesetzt. Nach diesem Modell kann nur ein Riss einen Punkt durchqueren (Bild 8.16). Rissbildung mindert die Schubtragfähigkeit des betreffenden Bereichs parallel zum Riss. Zur Berücksichtigung dieser Eigenschaft stehen in DIANA drei Modelle zur Verfügung: vollständige, konstante und variable Schubübertragung. Die variable Schubübertragung ist in Abhängigkeit von der zugehörigen Rissdehnung „ $\epsilon^{cr}$ “ an-

gegeben. In den Berechnungen wurde stets eine konstante Schubübertragung im sich öffnenden Riss mit  $\beta = 0,001$  zugrundegelegt.

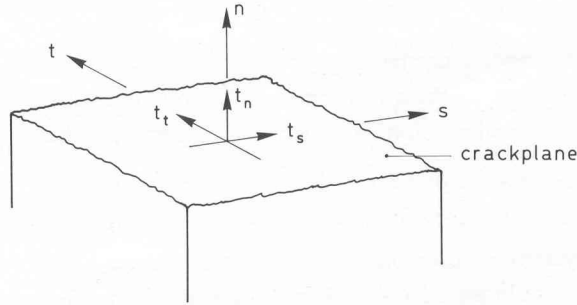


Bild 8.16: Das lokale Koordinatensystem und die Zugkraftkomponenten (tractions) im Riss. Aus Rots und Blaauwendraad, 1989

Sowohl beim plastischen Verhalten als auch bei Rissbildung können die Dehnungen in einen elastischen und einen nicht-elastischen Anteil zerlegt werden [Rots und Blaauwendraad, 1989]:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{nl} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{co} \quad (8.28)$$

Die Rissdehnungen haben nur drei Komponenten im lokalen Koordinatensystem (Bild 8.16) des Risses. Die Transformation zwischen lokalem und globalem System erfolgt durch die Transformationsmatrix  $[\mathbf{N}]$  nach Gleichung (8.29):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ m_x^2 & m_x m_y & m_z m_x \\ n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & m_x n_y + m_y n_x & m_z n_x + m_y n_z \\ 2n_x l_x & n_x l_y + n_y l_x & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Die Verbindung zwischen lokalen und globalen Rissdehnungen entspricht Gleichung (8.30). Hier wird für die lokale Rissdehnung der Buchstabe „e“ benutzt, um die Anzahl der Indices zu minimieren.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{e}^{cr} \quad (8.30)$$

Die im Riss wirkende Kraft<sup>1</sup> lässt sich ähnlich erfassen:

$$\Delta \mathbf{t}^{cr} = \mathbf{N}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (8.31)$$

Das Inkrement der globalen Spannungen im ungerissenen Bereich lautet:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{co} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{co} \quad (8.32)$$

Für die Rissspannungen gilt:

<sup>1</sup> „t“ steht hier für den lokalen Spannungsvektor.

$$\Delta \mathbf{t}^{cr} = \mathbf{D}^{cr} \Delta \mathbf{e}^{cr} \quad (8.33)$$

In (8.33) sind die Eigenschaften des Risses für Mode I, Mode II, Mode III und „mixed-Mode“ in der  $\mathbf{D}^{cr}$  Matrix zusammengefasst.

Nach einer passenden Kombination der Gleichungen (8.28) bis (8.33) bei  $\boldsymbol{\varepsilon}^{nl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{cr}$  lautet der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen des gerissenen Betons:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{D}^{co} - \mathbf{D}^{co} \mathbf{N} \left[ \mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N} \right]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.34)$$

Der Ausdruck zwischen den äußeren eckigen Klammern ist die Steifigkeitsmatrix des gerissenen Werkstoffes.

Durch die Fließbedingung (8.35) wird der Spannungszustand angegeben, in dem das plastische Fließen des Werkstoffes beginnt. Die Fließbedingung kann als Funktion des Spannungstensors und des internen Zustandsparameters  $\kappa$  formuliert werden.

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (8.35)$$

Wenn der Wert der Fließfunktion kleiner null ist, herrscht elastischer Zustand. Größere Werte als null sind beim ideal-plastischem Materialmodell nicht zugelassen.

Der plastische Verformungsgeschwindigkeitsvektor wird als Funktion des Spannungszustandes durch das Fließgesetz ermittelt. Die plastische Dehnungsrate ist durch  $n$  plastische Potentialfunktionen gegeben.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j \frac{\partial g_j(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (8.36)$$

Die plastischen Multiplikatoren  $\dot{\lambda}_j$  sind durch die Kuhn-Tucker Bedingungen eingeschränkt:

$$\begin{aligned} f &\leq 0 \\ \dot{\lambda}_j &\geq 0 \\ \dot{\lambda}_j f &= 0 \end{aligned} \quad (8.37)$$

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen gilt auch für ihre Ableitungen:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right\} = \mathbf{D} \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \quad (8.38)$$

Aus der Bedingung der Konsistenz (consistency condition)  $\dot{f} = 0$  lässt sich  $\dot{\lambda}$  in Abhängigkeit vom Fließgesetz und vom Zustandsparameter  $\kappa$  ausdrücken. Nach weiteren Umformungen erhält man die Steifigkeitsmatrix:

$$\dot{\sigma} = \left[ \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right] \dot{\epsilon} \quad (8.39)$$

Hier wird zwischen Verformungs- und Spannungsgeschwindigkeit eine Beziehung hergestellt, in dem die Steifigkeitsmatrix in jedem Schritt modifiziert wird.

Auf die Implementierung des verwendeten Rissmodells und der Drucker-Prager-Fließbedingung im FE-Programm wird hier nicht eingegangen. Diesbezügliche Details sind in der Literatur [DIANA, 2000 / *Nonlinear Analysis*] zu finden.

### 8.3.3 Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen

Bei linear-elastischen Berechnungen wurde zur Lösung des Gleichungssystems die „wavefront-super-element“ Technik mit der Bezeichnung „GENEL“ nach DIANA, 2000 eingesetzt.

Materiell nicht-lineare Aufgaben werden schrittweise-iterativ gelöst: Die Last wird stufenweise aufgebracht und der zur Laststufe gehörige Gleichgewichts- Verformungszustand wird iterativ ermittelt. Die im FE-Programm implementierten Verfahren sind in DIANA / *Nonlinear Analysis, 2000*, beschrieben. Bei den durchgeführten nichtlinearen Berechnungen wurden nur zwei davon eingesetzt: Das Newton-Raphson-Verfahren und das modifizierte Newton-Raphson- Verfahren. Im Bild 8.17 ist der Berechnungsablauf beider Verfahren grafisch dargestellt.

Die iterativen Verfahren ermitteln die Verschiebungsänderung „ $\delta u_i$ “ mit Hilfe der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_i$ , die eine linearisierte Form der Beziehung zwischen Kraftvektor und Verschiebungsvektor ist. Die Größe der nächsten Verschiebungsänderung kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\delta u_i = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}_i \quad (8.40)$$

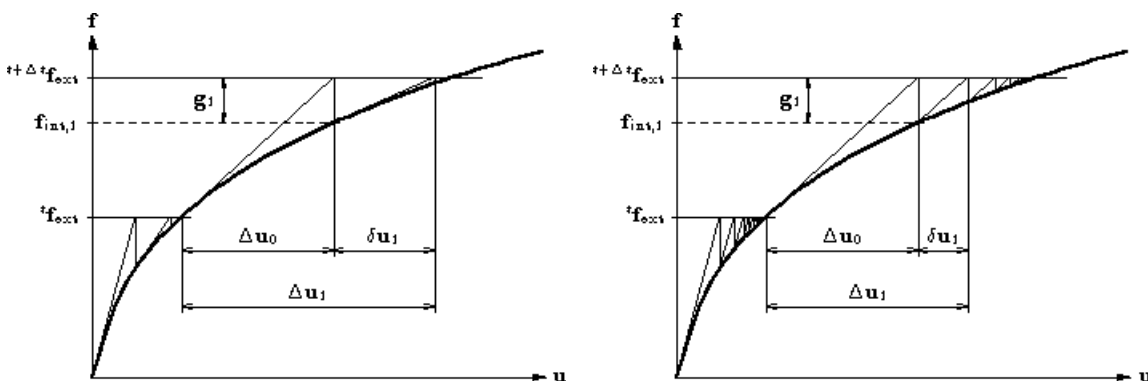


Bild 8.17 Das Prinzip der Newton-Raphson (links) und der modifizierten Newton-Raphson Iteration (rechts). Bild nach: DIANA / *Nonlinear Analysis 2000*

Im Newton-Raphson-Verfahren wird in jedem Iterationsschritt die aktuelle Steifigkeitsmatrix ermittelt. Der Rechenaufwand ist dadurch groß, dafür sind wenige Iterationsschritte in den einzelnen Laststufen erforderlich. Das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren benutzt innerhalb einer Laststufe für jeden Iterationsschritt die Anfangssteifigkeit.

Für stark nichtlineares Verhalten, wie es bei der Rissbildung der Fall ist, wurde die „line-search“ Methode eingesetzt (Bild 8.18). Damit kann der Rechengang innerhalb eines Lastschrittes stabilisiert werden, indem nicht eine exakte Lösung für die einzelnen Iterationsschritte, sondern nur eine akzeptabel genaue Lösung ( $\psi = 0,8$ ) gesucht wird.

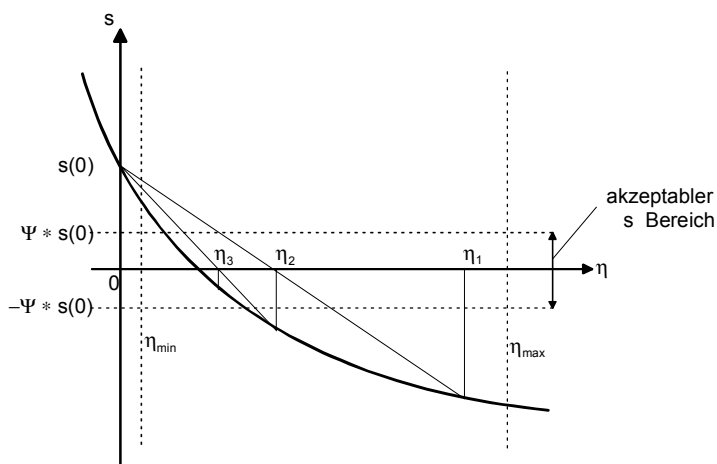


Bild 8.18 Das Prinzip des „line-search“ Verfahrens.  
Bild nach: *DIANA / Nonlinear Analysis, 2000*

Zum Anhalten der Iteration innerhalb der jeweiligen Laststufe wird ein Konvergenzkriterium eingesetzt. Bei den hier diskutierten Berechnungen wurde eine Energie-Norm als Kriterium gewählt.

### 8.3.4 Numerische Verfahren zur Steuerung stufenweiser Belastung

Nichtlineare Berechnungen vorliegender Art werden inkrementell (schrittweise) – iterativ durchgeführt.

Es gibt drei Möglichkeiten, die schrittweise Belastung zu steuern:

- Kraftsteuerung (oder Laststeuerung),
- Wegsteuerung,
- Methode der Bogenlänge.

Bild 8.19 zeigt die Last- und Wegsteuerung schematisch.

Bei der Last-Steuerung wird die beliebig angeordnete Belastung in gleich großen oder mit fortschreitender Belastung kleineren Stufen aufgebracht. Das Verfahren ist relativ einfach. Ihr Nachteil ist, dass es zur Ermittlung eines Lastmaximums ungeeignet ist.

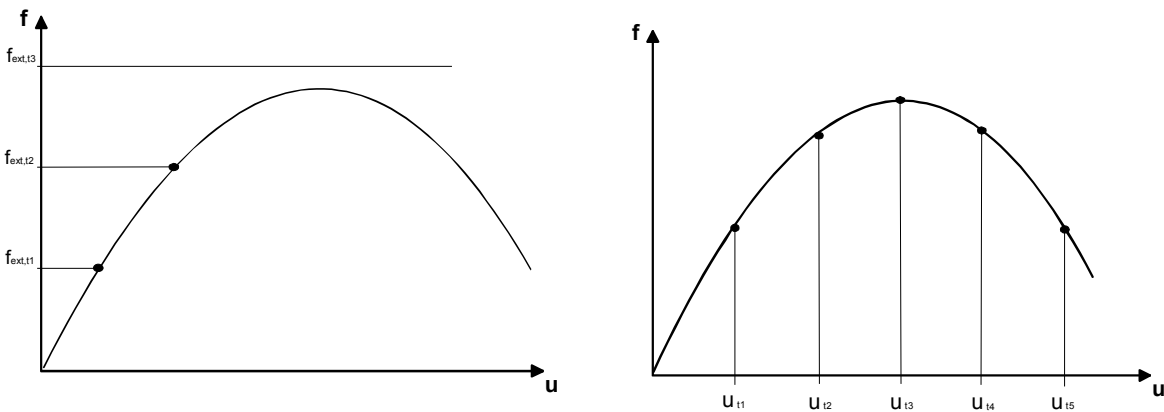


Bild 8.19: Last-Steuerung (links) und Weg-Steuerung (rechts)

Die Weg-Steuerung bietet die Möglichkeit, den vollständigen Belastungsablauf  $[f \rightarrow u]$  zu erfassen. Sie kann jedoch nur bei einfachen Belastungen, wie Drei- und Vierpunktbiegung, angewandt werden. Unstetigkeiten im Verlauf der Last-Verschiebungskurve, wie z.B. Snap-Back (Zurückschnappen) (Bild 8.20 rechts), kann auch mit ihr nicht ermittelt werden. Das dritte Verfahren, die Bogenlängen-Methode („arc-length method“ – Bild 8.20 links), ist universell anwendbar. Sie kann auch bei komplizierten Belastungen mit einem absteigenden Ast der Last-Verschiebungskurve eingesetzt werden. Der Snap-Back (Bild 8.20 rechts) kann mit ihr ebenfalls erfasst werden. Ihr Nachteil ist der große Rechenaufwand im Vergleich zu den anderen Steuerungsmethoden.

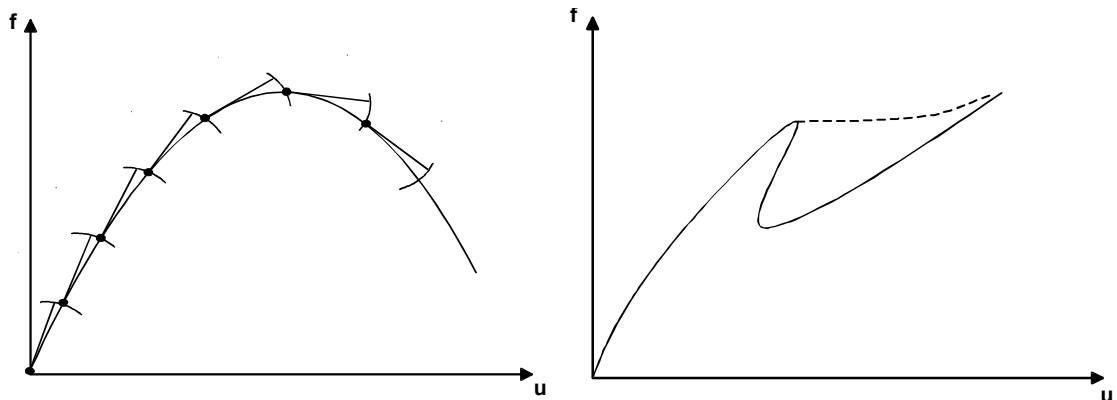


Bild 8.20 Belastungssteuerung mit der Bogenlängen-Methode (links) und Snap-Back in einer errechneten Last-Verschiebungskurve mit dem wirklichen Verlauf der Kurve ergänzt – gestrichelt eingetragen (rechts)

Das „Snap-Back“ Verhalten der untersuchten Bogen und Gewölbekonstruktionen ist rein numerischer Natur. Wenn Risse in Tragwerken aus einem spröden Werkstoff auftreten, findet das Programm keinen Gleichgewichtszustand zum erreichten Lastniveau. Deshalb wird die Last vorerst reduziert, bis ein Gleichgewichtszustand gefunden wird. Anschließend wird die Last erneut gesteigert, bis zur Bildung des nächsten Risses, oder bis zum Versagen des Tragwerks.

## 8.4 Fallbeispiel

Die St. Jakob-Kirche in Willing (Bayern) ist eine einschiffige Kirche mit einem ca.  $2 \times 1$  m eingezogenen Chor und einem an der Westseite des Langhauses anschließenden Glockenturm. Bild 8.21 zeigt ein Foto der Kirche von Süden. Im Bild 8.22 ist der Grundriss der Kirche und ein Querschnitt durch das Langhaus dargestellt. Die Traufe des Langhauses liegt auf 8,10 m, der First auf 15,35 m über Geländeoberkante. Der Turm ist ca. 24,0 m hoch. Der Turm und die Kirche ist mit einem Satteldach abgedeckt, das über dem Chor mit einer  $3/8$  Pyramide abgeschlossen ist.



Bild 8.21: Die St. Jakob-Kirche in Willing – Foto: *Ingenieurbüro Professor Rehm, 1991*

Den oberen Raumabschluss bilden sowohl im Langhaus als auch im Chor gemauerte, halbsteinstarke ( $d \sim 16$  cm,  $R_H = 4,50$  m) Tonnengewölbe mit Stichkappen über den Fenstern. Der Querschnitt der Haupttonne ist beinahe halbkreisförmig. Durch die Höhenlage der Trompenoberkante ergibt sich ein Öffnungswinkel von  $\alpha_{\text{nom}} = 130^\circ$  für die Haupttonne. Der Innenradius der Stichkappen misst  $r_{\text{STi}} = 1,10$  m. Die Stichkappenoberkante an den Längswänden befindet sich ca. 0,50 m über der Trompenoberkante. Die Stichkappen sind mit steigend ausgebildeten Scheitellinien gebaut. Die Scheitellinien der Stichkappen treffen den Rücken der Haupttonne 2,95 m entfernt von deren Längsachse. In den Berechnungen wird davon ausgegangen, dass alle vertikalen Schnitte der Stichkappen kreisbogenförmig sind und den gleichen Innenradius haben.



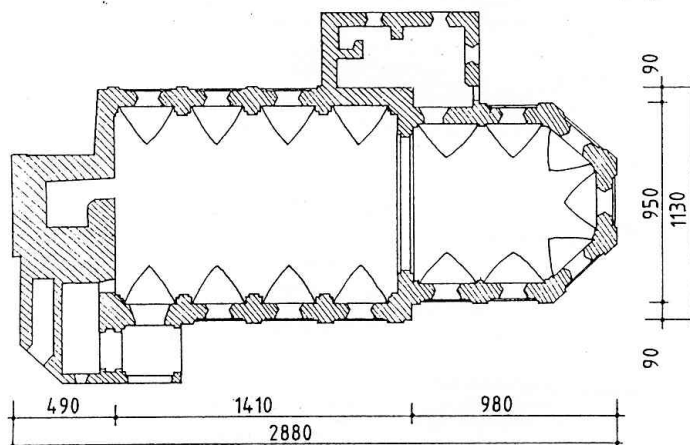
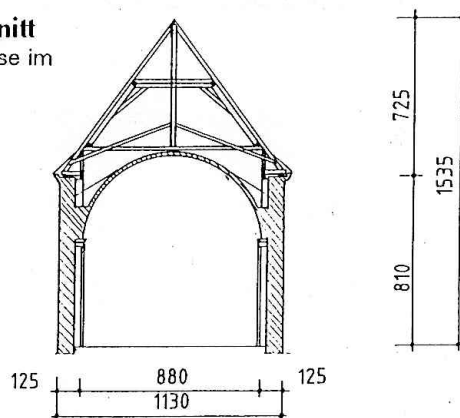
**Grundriss** Gewölbeuntersicht**Querschnitt**  
Binderachse im  
Langhaus

Bild 8.22: St. Jakob-Kirche in Willing. Grundriss (oben) und Querschnitt des Langhauses (unten). Aus *Rehm und Mitarbeiter, 1995*

Im Bild 8.23 ist die Gewölbeunterseite mit dem Rissbild dargestellt. Die Laibung des Gewölbes am Scheitel ist durch mehrere Risse ( $R_{sch}$ ) in Längsrichtung beschädigt. Dieses Rissbild ist typisch für gemauerte Tonnengewölbe. (Siehe auch Bild 6.17, Risse R2 und R5.) Die Stichkappenvorderkanten sind an mehreren Stellen durch Risse ( $R_a$ ) von der Längswand getrennt. Durch die Auflagerverschiebung verdrehen sich die Längswände nach außen hin und die Stichkappe löst sich von ihnen. Die Scheitelrisse in den Stichkappen sind „normale“ Biegerisse.

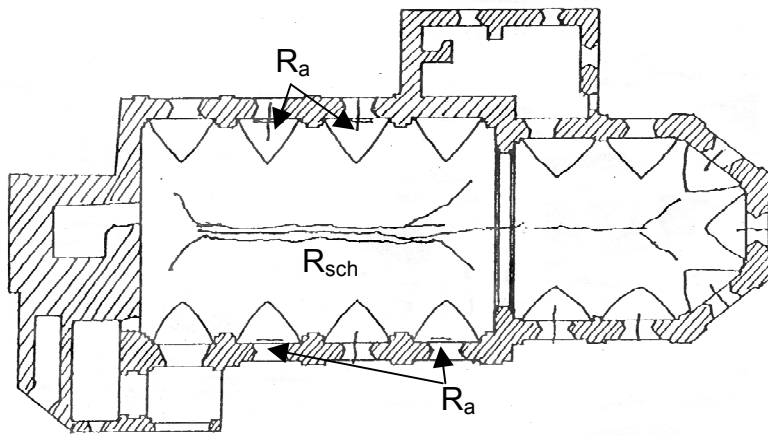


Bild 8.23: St. Jakob-Kirche in Willing - Untersicht der Einwölbung mit Rissbild.  
Aus Rehm und Mitarbeiter, 1995

Bild 8.24 stellt den halben Querschnitt der Haupttonne mit der Seitenansicht einer Stichkappe als Zeichnung dar. Das Verhältnis der halben Spannweite zur Stichhöhe  $8,2/2,6$  ergibt einen Öffnungswinkel von ca.  $\alpha_{\text{Hnom}} = 130^\circ$  für die Haupttonne. Zur Ermittlung der Stützlinien wurde die Haupttonne in 13 gleichen Abschnitte geteilt. Das entspricht einem Zentralwinkel von  $5^\circ$  je Abschnitt. Die Teilung der Stichkappe wurde der Teilung der Haupttonne angepasst. Das Gewicht des rechnerischen Abschnittes bestand jeweils aus der Summe der beiden Teile. Im Bild 8.24 sind die beiden Teile des Abschnittes Nr. 12 farblich gekennzeichnet (Haupttonne dunkelgrau, Stichkappe hellgrau). Die Stützlinie mit dem herkömmlichen Verfahren wurde für eine Stichhöhe von  $f_1 = 2,65$  m und eine Spannweite von  $l = 8,42$  m unter Berücksichtigung der Belastung der Abschnitte 1 bis 13 errechnet. Als Auflagerpunkt wurde  $A_1$  mit den Koordinaten  $x = 4,20$  m und  $y = 1,97$  m (Nullpunkt des Koordinatensystems = Längsachse der Haupttonne) gewählt. Die Stützlinie mit Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe wurde sukzessiv, unter Berücksichtigung der Belastung der Abschnitte 1 bis 14 errechnet. Als Auflagerpunkt wurde hier  $A_2$  mit den Koordinaten  $x = 4,32$  m und  $y = 2,00$  m gewählt. Die Größe von  $\alpha_{\text{ef}}$  in der Haupttonne wurde in diesem Fall in jedem Rechengang kontrolliert. Seine Koordinaten sind  $x = 3,89$  m;  $y = 2,54$  m. Die Stützlinien sind im Bild 8.25 grafisch dargestellt.

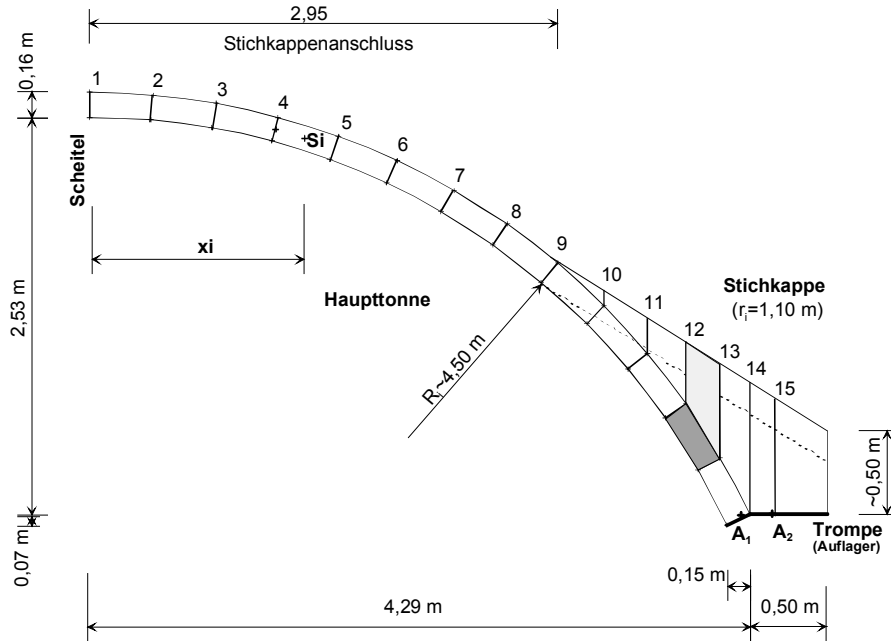


Bild 8.24: St. Jakob-Kirche in Willing: Halber Gewölbequerschnitt mit Angaben zur Geometrie und der Zuordnung der Querschnitte zu den statischen Untersuchungen. Die Breite eines ganzen Tonnenfeldes beträgt  $b = 3,50$  m.

Tabelle 8.2: Ermittlung der Stützlinie mit dem herkömmlichen Verfahren, ohne Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe:  
 Tabellarische Zusammenfassung der wichtigsten Rechenschritte.  
 Stichhöhe  $f_1 = 2,65$  m; Spannweite  $l = 8,42$  m

Q.-Nr.	Winkel [°]	Winkel [rad]	$G_i$ [kN]	$x_i$ [m]	$G_i \cdot x_i$ [kNm]	$\Sigma G_i$ [kN]	$\Sigma G_i / H$ [-]	$x_i'$	$\Delta x_i' = x_i - x_{i-1}$ [m]	$y_i'$ [m]	$r_i$ [m]
1	0	0,000	0,88	0,20	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	4,65	4,65
2	5	0,087	0,88	0,60	0,52	0,88	0,11	0,20	0,20	4,65	4,65
3	10	0,175	0,88	0,99	0,87	1,75	0,22	0,60	0,40	4,61	4,65
4	15	0,262	0,88	1,38	1,20	2,63	0,32	0,99	0,39	4,52	4,63
5	20	0,349	0,88	1,75	1,53	3,50	0,43	1,38	0,39	4,40	4,61
6	25	0,436	0,88	2,11	1,85	4,38	0,54	1,75	0,38	4,24	4,58
7	30	0,524	0,88	2,46	2,15	5,26	0,65	2,11	0,36	4,04	4,56
8	35	0,611	0,88	2,78	2,44	6,13	0,76	2,46	0,35	3,82	4,54
9	40	0,698	0,88	3,09	2,71	7,01	0,86	2,78	0,33	3,57	4,53
10	45	0,785	0,88	3,37	2,95	7,88	0,97	3,09	0,31	3,30	4,52
11	50	0,873	1,03	3,65	3,75	8,76	1,08	3,37	0,28	3,03	4,53
12	55	0,960	1,01	3,89	3,94	9,79	1,21	3,65	0,28	2,73	4,56
13	60	1,047	0,98	4,10	4,03	10,80	1,33	3,89	0,24	2,44	4,59
14	65	1,134				11,78	1,45	4,10	0,21	2,16	4,63
						12,76	1,57	4,20	0,10	1,97	4,64

$\Sigma G_i = 11,784$        $\Sigma M_{G_i} = 28,12$   
 $\Sigma M_{G_i-A^*} / 2 = -21,48$   
 $H = 8,11$

Tabelle 8.3: Ermittlung der Stützlinie mit Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe:  
 Tabellarische Zusammenfassung der wichtigsten Rechenschritte.  
 Stichhöhe  $f_1 = 2,64$  m; Spannweite  $l = 8,64$  m.  
 Die Koordinaten des Auflagerpunktes in der Haupttonne sind grau hinterlegt.

Q.-Nr.	Winkel [°]	Winkel [rad]	$G_i$ [kN]	$x_i$ [m]	$G_i \cdot x_i$ [kNm]	$\Sigma G_i$ [kN]	$\Sigma G_i/H$ [-]	$x_i'$ [m]	$\Delta x_i' = x_i - x_{i-1}$ [m]	$y_i'$ [m]	$r_i$ [m]
1	0	0,000	0,88	0,20	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	4,61	4,61
2	5	0,087	0,88	0,60	0,52	0,88	0,10	0,20	0,20	4,61	4,61
3	10	0,175	0,88	0,99	0,87	1,75	0,20	0,60	0,40	4,57	4,61
4	15	0,262	0,88	1,38	1,20	2,63	0,30	0,99	0,39	4,49	4,60
5	20	0,349	0,88	1,75	1,53	3,50	0,41	1,38	0,39	4,37	4,58
6	25	0,436	0,88	2,11	1,85	4,38	0,51	1,75	0,38	4,22	4,57
7	30	0,524	0,88	2,46	2,15	5,26	0,61	2,11	0,36	4,04	4,56
8	35	0,611	0,88	2,78	2,44	6,13	0,71	2,46	0,35	3,83	4,55
9	40	0,698	0,88	3,09	2,71	7,01	0,81	2,78	0,33	3,59	4,55
10	45	0,785	0,88	3,37	2,95	7,88	0,91	3,09	0,31	3,35	4,56
11	50	0,873	1,03	3,65	3,75	8,76	1,01	3,37	0,28	3,09	4,57
12	55	0,960	1,01	3,89	3,94	9,79	1,13	3,65	0,28	2,81	4,60
13	60	1,047	0,98	4,10	4,03	10,80	1,25	3,89	0,24	2,54	4,64
14	65	1,134	0,98	4,29	4,19	11,78	1,36	4,10	0,21	2,27	4,69
15	0	0				12,76	1,48	4,29	0,19	2,02	4,74
								4,32	0,03	1,97	4,75

$\Sigma G_i = 12,760$        $\Sigma M_{G_i} = 32,31$   
 $\Sigma M_{G_i} - A \cdot l^2 / 2 = -22,81$   
 $H = 8,64$

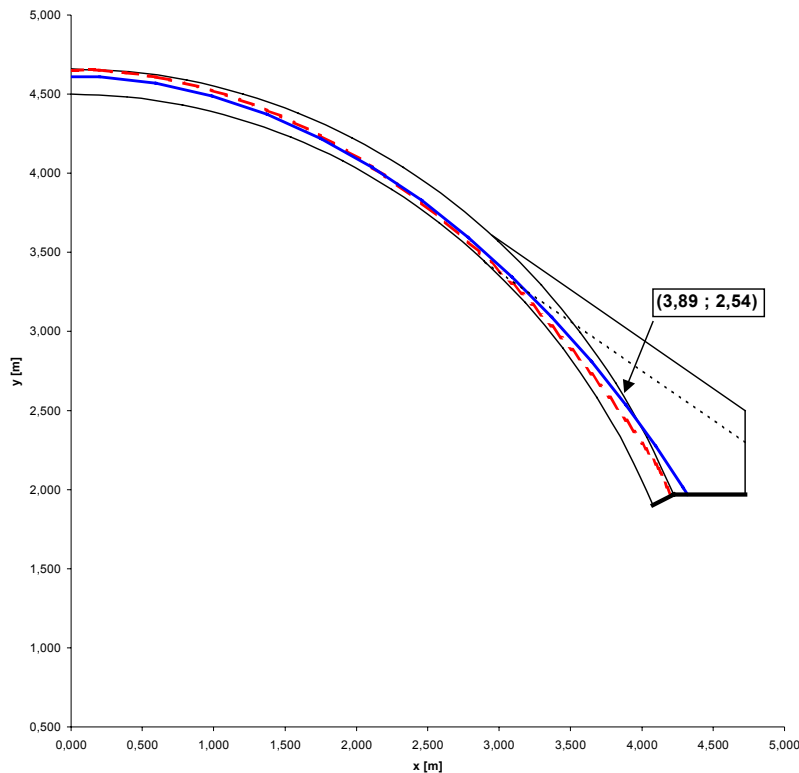


Bild 8.25: Halber Querschnitt der gemauerten Tonnengewölbe der St. Jakob-Kirche in Willing im gewählten Koordinatensystem. Verlauf der Stützlinien ohne (Punkt-Strichlinie – rot) und mit (durchgehende Linie – blau) Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Stichkappe.

## Literaturverzeichnis

Autor, Erscheinungsjahr	Titel und Erscheinungsort
Barthel, R., 1991	Tragverhalten gemauerter Kreuzgewölbe; Dissertation, Karlsruhe
Barthel, R., 1993	Tragverhalten und Berechnung gemauerter Kreuzgewölbe; Ernst & Sohn; Bautechnik 70, Heft 7, S. 379-391
Berger, F., 1987	Zur nachträglichen Bestimmung der Tragfähigkeit von zentrisch gedrücktem Ziegelmauerwerk, in Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1986, Ernst & Sohn, Berlin
Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., 1991	Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main
Bufler, H., 1978	Vorlesungen über technische Mechanik, Band I, Universität Stuttgart, S. 121-135
Chen, W. F. und Han, D. J., 1988	Plasticity for Structural Engineers, Springer, Berlin,
Conrad, D., 1990	Kirchenbau im Mittelalter, Edition Leipzig
Csonka, P., 1987	Shell Structures, Akadémia Kiadó, Budapest
Eckert, H., 1993	Altes Mauerwerk nach historischen Quellen, in Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1991, Ernst & Sohn, Berlin, S. 19-64
Egermann, R. und Mayer, K., 1989	Die Entwicklung der Ziegelherstellung und ihr Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften von Mauerziegeln, in Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1988, Ernst & Sohn, Berlin, S. 107-130
DIANA, 1996	DIANA 6.2 - Users Manual, Delft
DIANA, 2000	DIANA 7.2 - Users Manual, Delft
Ganz, H. R., 1985	Mauerwerksscheiben unter Normalkraft und Schub. Dissertation ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel
Girkmann, K. 1963	Flächentragwerke, 6. Auflage, Springer, Wien
Graf, O., 1952	Über die Tragfähigkeit von Mauerwerk, insbesondere von Stockwerkshohen Wänden, Fortschritte und Forschungen im Bauwesen, Reihe D, Heft 8, Franck'sche Verlagshandlung Stuttgart
Graefe, R., 1983	Kettenlinien und Stützlinien, in Baukultur 1 S. 4-12
Hart, F., 1965	Kunst und Technik der Wölbung, Callwey, München
Hess, F., 1943	Konstruktion und Form im Bauen, Julius Hoffmann Verlag, Stuttgart
Heyman, J., 1966	The Stone Skeleton; in International Journal of Solids Structures, S.249-279

Autor, Erscheinungsjahr	Titel und Erscheinungsort
Heyman, J., 1967	On Shell Solutions for Masonry Domes; International Journal of Solids Structures Vol.3, S.227-242
Heyman, J., 1969	The Safety of Masonry Arches; in International Journal of Solids Structures, Vol. 19, S. 363-385
Heyman, J., 1972	Coulomb's Memoir on Statics, Cambridge : Univ. Pr.,
Heyman, J., 1980	The Estimation of the Strength of Masonry Arches; Proc. Instn Civ. Engrs., Part 2, 69,; S. 921-937
Heyman, J., 1988	Poleni's Problem; in Proc. Instn Civ. Engrs., Part 1, 84,; S. 737-759
Koch, W., 1991	Kleine Stilkunde der Baukunst, Orbis Verlag, München
Krenkler, K., 1980	Chemie des Bauwesens, Band 1: Anorganische Chemie, Springer-Verlag, Berlin
Kraus, K., Wissler, S. und Knöfel, D., 1989	Über das Löschen von Kalk vor der Mitte des 18. Jahrhunderts – Literaturlauswertung und Laborversuche, in Arbeitsblätter für Restauratoren 22, Heft 1, S. 206-221
Lamprecht, H.-O., 1996	Opus caementitium: Bautechnik der Römer, Beton-Verlag, Düsseldorf
Lorenco, P. B., Rots, J. G., Blaauwendrad, J., 1995	Analysis of Masonry Structures, in Heron, Band 40, Heft 4, Delft, S. 313-340
Neuwald-Burg, C. und Bohne, D., 1999	Zum Trag- und Verformungsverhaltens historischen Ziegelmauerwerks, Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1996, Ernst & Sohn, Berlin, S. 111-136
Opderbecke, A., 1999	Der Maurer, Reprint-Verlag-Leipzig
Pieper, K., 1983	Sicherung historischer Bauten, Ernst & Sohn, Berlin
Pippard, 1937	The Mechanics of the Voussoir Arch, in Excerpt journal of The Institution of Civil Engineers, London, S. 281-306
Probst, P., 1981	Ein Beitrag zum Bruchmechanismus von zentrisch gedrücktem Mauerwerk, Dissertation TU München,
Pöschel, G und Purtak, F., 2000	Zur Tragfähigkeit von historischem Mauerwerk aus Elbsandstein, Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1997/1998, Ernst & Sohn, Berlin, S. 183-202
Ramm, E., 1998	Die Methode der Finiten Elemente, Vorlesungsskript, Universität Stuttgart
Ramm, E., 2000	Theorie der Schalen, Vorlesungsskript, Universität Stuttgart
Ramm, E., 2001	Modellierung mit der Methode der Finiten Elemente, in Betonkalender 2001, Ernst & Sohn, Berlin
Rehm, G. und Mitarbeiter, 1995	Beispiele statisch konstruktiver Instandsetzungen denkmalgeschützter Kirchen, München (unveröffentlicht)
Rots, J. G., 1991	Nonlinear Simulation of Cracking in Structural Masonry, in Heron, Band 36, Heft 2, Delft, S. 49-63
Ruile, A.-V., 2000	Zur Interaktion von Boden und Mauerwerk, Dissertation TU München

<b>Autor, Erscheinungsjahr</b>	<b>Titel und Erscheinungsort</b>
Sabha, A. und Weigert, A., 1996	Einfluss der Steinhöhe auf das Tragverhalten einschaligen Mauerwerks, Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1995, Ernst & Sohn, Berlin, S. 249-260
Seim, W., 1995	Numerische Modellierung des anisotropen Versagens zweiachsig beanspruchter Mauerwerksscheiben. Dissertation Universität Karlsruhe, H27,
Schäfer, J. und Hilsdorf, H., 1992	Struktur und mechanische Eigenschaften von Kalkmörteln, in Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Jahrbuch 1991, Ernst & Sohn, Berlin, S. 65-76
Schwedler, 1859	Theorie der Stützlinie, in Zeitschrift für Bauwesen, S. 110-126
Stark, J. und Wicht, B., 1995	Geschichte der Baustoffe, Schriften der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar
Straub, H., 1949	Die Geschichte der Bauingenieurkunst, Birkhäuser, Basel
Tolkmitt, 1876	Beitrag zur Theorie gewölbter Bögen; Zeitschrift für Bauwesen, S. 401-422
Trautz, M., 1998	Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik, Dissertation, Stuttgart;
Virtuv, M., 1991	De architectura libri decem (Zehn Bücher über Architektur) dt. Übersetzung Curt Fensterbusch, 5. Auflage, Darmstadt,

## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit Finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.



- 
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.

- 36 (2002)**     **D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Struktur­dynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002)**     **H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002)**     **K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.