

Effiziente holographische Gitterspiegel für die Elektronzyklotronresonanzheizung von Fusionsplasmen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Oliver Mangold
aus Ulm (an der Donau)

Hauptberichter: Prof. Dr. rer. nat. U. Schumacher
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. G. Denninger

Tag der mündlichen Prüfung: 20. März 2009

Institut für Plasmaforschung
Universität Stuttgart

2009

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	6
Summary	8
Einleitung	9
1 Experimente zur Kernfusion in magn. eingeschl. Plasmen	12
1.1 Tokamaks	12
1.1.1 ASDEX Upgrade	13
1.2 Stellaratoren	14
1.2.1 Wendelstein 7-X	14
2 Theorie der Elektronzyklotronresonanzheizung	16
2.1 Plasmabeschreibung	17
2.1.1 Vielteilchenbeschreibung	17
2.1.2 Vlasov- und Boltzmann-Gleichung	17
2.2 Elektromagnetische Wellen im Plasma	19
2.2.1 Der dielektrische Tensor des Plasmas	20
2.2.2 Dispersionsrelationen elektromagnetischer Wellen	22
2.2.3 Ausbreitungsfähigkeit der Wellen	25
2.2.4 Das CMA-Diagramm	25
2.2.5 Polarisierung	27
2.3 Heizung durch elektromagnetische Wellen	28
2.3.1 Energieaustausch zwischen Welle und Plasma	28
2.3.2 Verteilungsfunktion des heißen Plasmas	29
2.3.3 Leistungsabsorption des Plasmas	33
2.3.4 Vergleich der unterschiedlichen Moden	35
3 Ausbreitung und Absorption der O2- und X3-Mode	37
3.1 Raytracing	37
3.2 Beamtracing	38
3.3 ASDEX Upgrade	39

3.3.1	Absorption	40
3.3.2	Strahlablenkung	42
3.3.3	Mehrfachdurchgänge mit Spiegel	44
3.4	Wendelstein 7-X	47
3.4.1	Strahlablenkung	47
3.4.2	Absorption	52
4	Optimierung des Gitterspiegels	55
4.1	Holographischer Gitterspiegel	55
4.1.1	Holographische Gitter	55
4.1.2	Verwendung lokal ebener Gitter	56
4.2	Theorie ebener Gitter	58
4.2.1	Periodische Symmetrien in Feldproblemen	58
4.2.2	Zeitharmonische 2-dim. verlustfreie Reflexionsprobleme	59
4.2.3	Ausnutzung der Gittersymmetrie	61
4.3	Simulation mit Hilfe finiter Differenzen	63
4.3.1	Die Diskretisierung der Helmholtz-Gleichung	63
4.3.2	Stabilitätsdiskussion	64
4.3.3	Gitterdispersion	66
4.3.4	Randbedingungen	67
4.4	Simulation mit Hilfe der Randelementemethode	69
4.4.1	Reduzierung des Problems auf den Rand	70
4.4.2	Numerische Lösung der Gleichungen	72
4.4.3	Berechnung der Randintegrale	74
4.5	Optimierungsverfahren	77
4.5.1	Optimierung von Gitterprofilen	77
4.5.2	Das Verfahren von Nelder und Mead	79
4.5.3	Genetische Algorithmen	80
4.5.4	Differential Evolution	83
4.5.5	Cross-Entropy-Verfahren	84
5	Simulations- und Messergebnisse	87
5.1	Simulationscodes für ebene Gitter	87
5.1.1	Simulationen mit Hilfe der FDTD und BEM	87
5.1.2	Performance der Verfahren	88
5.2	Optimierungsverfahren	92
5.2.1	Das Nelder-Mead-Verfahren	93
5.2.2	Genetischer Algorithmus	94
5.2.3	Differential Evolution	95
5.2.4	Cross-Entropy-Verfahren	96
5.2.5	Direkter Vergleich der Optimierungsverfahren	96

5.3	Optimierte Gitter	98
5.3.1	Gitterstrukturen und Effizienzen	98
5.3.2	Experimentelle Untersuchungen	111
5.4	Holographischer Spiegel	115
5.4.1	Berechnung des holographischen Spiegels	115
5.4.2	Reflexion in die Gaußsche Grundmode	123
5.4.3	FDTD-Simulation	124
5.4.4	Winkel- und Frequenzabhängigkeit der Gittereffizienzen	125
5.4.5	Resonatormessungen	130
6	Ausblick	134
A	Parameterstudien zu den Optimierungsverfahren	136
	Literaturverzeichnis	146

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde untersucht, ob die Elektronzyklotronresonanzheizung auch für hochdichte Fusionsplasmen eingesetzt werden kann, indem höhere Harmonische der Zyklotronfrequenz (O2- und X3-Moden) verwendet werden und das damit auftretende Problem der unvollständigen Absorption der Heizleistung durch Mehrfachdurchstrahlung des Plasmas reduziert werden kann.

Dazu wurde ein Konzept zu Design und Fertigung von effizienten holographischen Gitterspiegeln, die in die Wand des Plasmagefäßes eingesetzt werden können, entwickelt. Dabei kann die Form der Spiegelfläche unabhängig von der Geometrie des Mikrowellenstrahls gewählt werden, und somit insbesondere dem ursprünglichen Verlauf der Gefäßwand angepasst werden, wodurch die Beeinflussung des Plasmas sowie die thermische Belastung des Spiegels selbst und der benachbarten Wand minimiert werden.

Die Form der Gitternuten wurde auf Effizienz und Polarisationsunabhängigkeit der Mikrowellenstrahlung optimiert, wobei zusätzlich die Krümmung und die Anstiegs- und Abfallwinkel des Gitterprofils berücksichtigt werden, um die Lebensdauer zu erhöhen und die Fertigung zu vereinfachen.

Zur Optimierung des Gitters wurden numerische Codes entwickelt, insbesondere ein schneller Randelementecode, um die Optimierung auf einem PC in praktikabler Zeit zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang wurden gängige Optimierungsverfahren untersucht, um hohe Qualität der Optimierungsergebnisse zu gewährleisten und den Rechenaufwand zu reduzieren. Insbesondere das Differential-Evolution-Verfahren hat sich als günstig herausgestellt.

Abschließend wurden die Simulationsergebnisse experimentell verifiziert, indem sowohl ebene Gitter als auch ein holographischer Spiegel gefertigt wurden und in Freiraumexperimenten vermessen wurden. Es konnte unter Berücksichtigung der zu erwartenden Fehler relativ gute Übereinstimmung mit der Theorie festgestellt werden.

Als Ergebnis sind nun die nötigen Hilfsmittel vorhanden, um für beliebige Wandformen und Strahlgeometrien derartige holographische Spiegel zu pro-

duzieren. Dies stellt einen wichtigen Schritt zur Verbesserung der Elektronenzyklotronresonanzheizung von Stellaratoren, wie das im Aufbau befindliche Stellaratorexperiment W7-X, bei Dichten jenseits des Cutoffs der X2-Mode dar. Die Resultate dieser Arbeit geben Anlass zu der Annahme, dass optimierte holographische Gitterspiegel ein Teil des ECRH-Systems von W7-X sein werden.

Summary

This work investigated to which extent electron cyclotron resonance heating can be applied even for high density fusion plasmas by utilizing higher harmonics of the cyclotron frequency (O2 and X3 modes) and reducing the resulting problem of incomplete absorption of heating power by realizing multiple passes of the beam through the plasma.

For this purpose a concept of design and manufacturing of efficient holographic grating mirrors, which can be inserted into the first wall of the plasma vessel, has been developed. The shape of the mirror surface can be chosen independently of the geometry of the microwave beam and can thus be fitted to the original shape of the wall. In effect the thermal load of the mirror itself and the adjacent wall can be minimized.

The shape of the grating grooves has been optimized towards efficiency and polarization independency of the microwave reflection. The curvature and the rising and falling angles of the grating profile were also included in the optimization to extend the lifetime and to simplify the manufacturing.

For the optimization of the grating, numerical codes, particularly a fast boundary element code, were developed to realize the optimization on a PC within reasonable time. In this context popular optimization algorithms were examined to ensure high-quality optimization results and reduce computational effort. Especially the differential evolution method has proven itself beneficial.

Finally the simulation results were verified experimentally by manufacturing plane gratings and a holographic mirror and performing free space measurements on them. The results are in good agreement with theory within the expected error range.

As an outcome now the required tools to produce this kind of holographic mirrors for arbitrary wall shapes and beam geometries are available. This is an important step to improve electron cyclotron resonance heating of stellarators at densities beyond the X2 mode cutoff, e.g. of the stellarator experiment W7-X which is currently under construction. The results of this work give reason to the assumption that holographic grating mirrors will be part of the ECRH system of W7-X.

Einleitung

Die langfristige globale Energieversorgung ist ein Problem, das in der nahen Zukunft immer wichtiger werden wird. Zu dessen Lösung gibt es verschiedene technische Konzepte, an deren Realisierung gearbeitet wird. Eines davon ist die Kernfusion in magnetisch eingeschlossenen Plasmen.

Dabei lässt man in einem Magnetfeld torusförmiger Geometrie eingeschlossene Deuterium- und Tritium-Kerne bei sehr hoher Temperatur durch thermonukleare Fusion zu Helium und Neutronen reagieren, wobei viel Energie freigesetzt wird. Die Vorteile der Kernfusion werden in der sehr großen verfügbaren Menge an Brennstoff, der im Vergleich zur Kernspaltung geringen Menge an entstehendem radioaktivem Abfall und der wesentlich höheren Sicherheit gesehen.

Um ein Plasma aus Deuterium und Tritium zum stationären thermonuklearen Brennen zu bringen, ist eine Temperatur von etwa 100 Millionen Kelvin notwendig. Um diese in aktuellen Fusionsexperimenten zu erreichen, sind üblicherweise mehrere Heizungssysteme installiert. Eines davon ist die Elektron-Zyklotron-Resonanzheizung (ECRH).

Die ECRH ist ein effizientes Heizverfahren, das mit anderen Methoden wie der Ohmschen Heizung und der Neutralteilcheninjektionsheizung konkurrieren kann. Die Leistungseffizienz ist bei modernen Mikrowellenquellen hoch (Gyrotrons mit sogenanntem Depressed Collector erreichen Wirkungsgrade von über 50%.) Die ECRH hat des Weiteren den Vorteil, dass sie aufgrund der kurzen Wellenlängen und der relativ scharfen Resonanz eine gute lokale Leistungsdeposition ermöglicht (Depositionsbreiten von wenigen cm werden in großen Experimenten ohne weiteres erreicht). Dies hat an Bedeutung gewonnen, bedingt durch den Wunsch nach lokaler Heizung und lokalem Stromtrieb (z.B. zur Stabilisierung von sogenannten Tearingmoden oder zur Modifizierung von Stromprofilen).

Probleme treten allerdings auf, wenn zum Zwecke eines optimalen Reaktorbetriebs Plasmen hoher Dichte geheizt werden sollen, da aufgrund des Plasma-Cutoffs (wenn die Plasmafrequenz die Frequenz der eingestrahlten Welle erreicht) die Mikrowelle reflektiert wird, bevor sie die Resonanzzone

im Zentrum des Plasmas erreichen kann. Für die in den Experimenten ASDEX Upgrade in Garching und Wendelstein 7-X in Greifswald verwendeten ECRH-Systeme mit einer Frequenz von $f = 140$ GHz und mit Absorption bei der 2. harmonischen X-Mode beträgt die maximal zugängliche Dichte $n_e = 1.25 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Insbesondere für den Stellarator W7-X ist das Problem von wesentlicher Bedeutung für das Gesamtkonzept, da Stellaratoren die herausragende Eigenschaft besitzen (und dieses ein wesentliches Entwicklungsziel ist), bei hoher Dichte betrieben werden zu können und damit ein hohes Verhältnis β von innerer zu magnetischer Energiedichte zu erreichen, was einen wesentlichen ökonomischen Vorteil des Stellarators und ein wichtiges Entwicklungsziel der Fusionsforschung darstellt.

Das Problem kann entschärft werden, indem entweder in der O-Mode eingestrahlt wird (ebenfalls bei der 2. Harmonischen), in der so genannten O2-Mode, oder bei der 3. Harmonischen in X-Mode, der so genannten X3-Mode. In der O2-Mode bei $f = 140$ GHz sind Dichten bis $2.5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ zugänglich. In der X3-Mode bei $f = 140$ GHz sind es Dichten bis $1.67 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, bei gleichem Magnetfeld wie für die Heizung in 2. Harmonischer, d.h. bei $f = 210$ GHz, sind es $3.75 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$.

Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Absorption der Welle bei den höheren Harmonischen O2 / X3 gegenüber X2 etwa um den Faktor des Quotienten $k_B T_e / m_e c^2$ geringer wird, d.h. es findet nur noch unvollständige Absorption statt. Bei einmaligem Durchgang der Welle sinkt damit die Heizungseffizienz dramatisch ab.

Ziel dieser Arbeit ist es, auf der Basis von Simulationen der Mikrowellendurchstrahlung des Plasmas die Praktikabilität der Heizung in der O2- und X3-Mode für große Fusionsexperimente aufzuzeigen und Lösungen für die dabei auftretenden technischen Probleme anzubieten. Das Grundkonzept besteht darin, Spiegel an der dem ECRH-Launcher (mit dem die Mikrowellenleistung in den Plasma-Torus eingespeist wird) gegenüberliegenden Wand anzubringen, um die totale Absorption durch Mehrfachdurchgänge des Strahls durch das Plasma zu erhöhen.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist dem rechnerischen und experimentellen Nachweis gewidmet, dass diese Spiegel als holographische Gitterspiegel ausgelegt werden können, und die Ergebnisse dazu zu präsentieren. Grund für die Verwendung von holographischen Spiegeln ist zu ermöglichen, die Form des Spiegels an die Wand des Plasmagefäßes anzupassen. Dies bringt den großen Vorteil mit sich, erhöhte thermische Belastungen des Wandmaterials weitestgehend zu vermeiden, was den Nachteil der etwas geringeren Reflektionseffizienz vermutlich mehr als aufwiegt.

Zuerst wurden für O2- bzw. X3-Heizung geeignete Szenarien sowohl in ASDEX Upgrade als auch in W7-X mit Hilfe von Tracing-Codes simuliert.

Als Ergebnis erhält man – neben der Leistungsabsorption als natürlich wichtigster Kenngröße – durch Parameterstudien Informationen über die Dichteabhängigkeit der Strahlablenkung, was letztendlich eine Eingrenzung des Dichtebereichs, für den ein entwickelter Spiegel sinnvoll einsetzbar ist, erlaubt.

Anschließend wird das Verfahren zur Erzeugung der Spiegelgeometrie erklärt, welches im wesentlichen auf dem Prinzip der holographischen Phasenrekonstruktion kombiniert mit der numerischen Simulation des elektromagnetischen Feldproblems der Gitterbeugung und modernen Optimierungsverfahren basiert. Durch die sehr aufwändige Erstellung (da die zugrundeliegende Mathematik relativ anspruchsvoll ist) eines schnellen, an das Gitterproblem angepassten Randelemente-Rechenkerns wurde die numerische Optimierung von ebenen Reflexionsgittern ermöglicht. Die verwendeten Simulations- und Optimierungsmethoden werden relativ ausführlich erklärt.

Als Ergebnis wurden etliche optimierte Gitter erhalten. Das allgemeine Verfahren mit den entsprechenden numerischen Codes, um Gitter für andere Situationen zu optimieren, wurde verfügbar gemacht. Ein Beispiel eines für den Einbau in die Innensäule von ASDEX Upgrade ausgelegten holographischen Spiegels wurde berechnet, angefertigt und in seinen Reflexionseigenschaften vermessen. Bei der Entwicklung der verwendeten Gitter wurde außer auf hohe Reflexionseffizienz Wert auf polarisationsunabhängiges Verhalten gelegt, so dass sie sowohl für O2- als auch X3-Mode (bei derselben Frequenz) verwendet werden können. Insgesamt zeigt die Arbeit, dass holographische Spiegel für realistische ECRH-Szenarien mit einer Reflexionseffizienz über 90% ohne größere Probleme berechnet und auch hergestellt werden können.

Kapitel 1

Experimente zur Kernfusion in magnetisch eingeschlossenen Plasmen

Die vorliegende Arbeit ist als Beitrag zur Weiterentwicklung aktueller Experimente zur Kernfusion bzw. zur Elektronzyklotronresonanzheizung (ECRH) derselben gedacht. Es sollen daher in Kapitel 1 einige Worte zu den relevanten Experimenten gesagt werden, und in Kapitel 2 eine Einführung in die Elektronzyklotronresonanzheizung gegeben werden.

Als die Konzepte mit den größten Erfolgsaussichten für die Entwicklung eines Fusionsreaktors mit magnetischem Teilcheneinschluss werden derzeit das Tokamak und der Stellarator angesehen. Zu beiden sollen im folgenden kurz einige für die Arbeit wichtige Fakten dargestellt werden. Für eine ausführliche Diskussion sei jedoch auf die Fachliteratur verwiesen [1, 2, 3].

1.1 Tokamaks

Das Tokamak-Prinzip ist die Basis für die aktuell größten Fusionsexperimente in magnetisch eingeschlossenen Plasmen. Der Joint European Torus (JET) in Culham, Oxfordshire, Großbritannien (Abb. 1.1), das Experiment ASDEX Upgrade am IPP Garching sowie der seit diesem Jahr im Bau befindliche internationale thermonukleare Experimentalreaktor (ITER) in Cadarache, Frankreich sind Tokamaks.

Die Magnetfeldkonfiguration und damit auch das Plasmaprofil sind in einem Tokamak per Definition rotationsymmetrisch, was verschiedene Vorteile insbesondere in Bezug auf physikalische Beschreibung und technische Konstruktion des Experiments mit sich bringt. Da die magnetischen Feldlinien

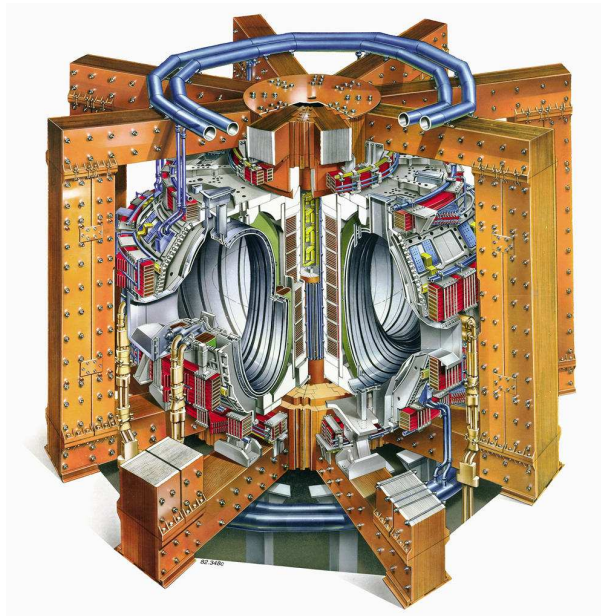


Abbildung 1.1: Schematischer Aufbau des Tokamaks JET in Culham, Großbritannien.
Bildquelle: <http://www.jet.efda.org>

für effektiven Einschluss grundsätzlich verdrillt sein müssen (zur Kompensation der Driftbewegung der eingeschlossenen Teilchen), folgt, dass rotationsymmetrisch eingeschlossene Plasmen immer einen (normalerweise induktiv getriebenen) elektrischen Strom in toroidaler Richtung tragen müssen [2, 3]. Dies wiederum ist die Ursache für verschiedene Probleme, z.B. lassen sich Tokamaks im Moment nur gepulst betreiben, da z.Z. keine befriedigende Lösung für kontinuierlichen Toroidalstromtrieb existiert, oder auch bestimmte magnetohydrodynamische Instabilitäten (neoklassische Tearingmoden) sind durch den Toroidalstrom bedingt. Trotzdem wird das Konzept insgesamt als aussichtsreich angesehen und natürlich weiter verfolgt.

1.1.1 ASDEX Upgrade

Das Tokamak ASDEX Upgrade ist zur Zeit das größte deutsche Fusionsexperiment (Großer Radius $R_0 = 1.67$ m, kleiner Radius $a = 0.5$ m). Geheizt wird das Experiment vornehmlich durch Neutralteilcheninjektion ($P = 20$ MW) und Ionenzyklotronresonanzheizung ($P = 7$ MW). Es ist jedoch auch ein ECRH-System mit $P = 2$ MW und $f_0 = 140$ GHz vorhanden, und ein weiteres mit $P = 4$ MW und $f_0 = 105$ GHz/140 GHz befindet sich im Aufbau.

Die erreichbaren Elektronendichten liegen in der Regel unter $n_e = 2 \cdot$

10^{20} m^{-3} , woraus folgt, dass kein direkter Bedarf für Heizung in der O2-Mode besteht. Jedoch könnten sich auch hier Gitterspiegel als nützlich erweisen, z.B. für Szenarien mit Heizung in der X2-Mode aber trotzdem schlechter Absorption, weil die Welle am Plasmarand (wo die Temperatur niedrig ist) absorbiert werden soll. Außerdem bietet sich ASDEX Upgrade allgemein für Tests von Gitterspiegeln an, solange W7-X noch nicht fertiggestellt ist. Da entsprechendes für die Zukunft geplant ist, wurden Simulationen und Gitter- und Spiegelberechnungen im Rahmen dieser Arbeit primär für ASDEX Upgrade durchgeführt.

1.2 Stellaratoren

Stellaratoren im Vergleich zu Tokamaks tragen keinen von außen induzierten Strom. Daraus folgt, dass sie grundsätzlich keine Axialsymmetrie aufweisen können. In der Regel werden Anordnungen mit diskreter Rotationssymmetrie (z.B. 5-fach $\hat{=}$ Symmetrie bezüglich Rotation um 72°) verwendet.

Es existieren mehrere konzeptionell verschiedene Spulenanordnungen, z.B. mit verdrillten Spulen (Torsatron, Heliotron), planaren und verdrillten Spulen (W7-A), planaren und dreidimensionalen Spulen (W7-AS, W7-X). Diese komplizierteren Geometrien scheinen nicht unbedeutende konstruktive Probleme zu bedingen. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass Stellaratoren nicht nur ohne Probleme kontinuierlich betrieben werden können, sondern auch Vorteile in Bezug auf Qualität des Einschlusses und magnetohydrodynamische Stabilität aufweisen. Insbesondere gilt, dass bei Stellaratoren (weil sie nettostromfrei sind) keine stromgetriebenen Instabilitäten auftreten und man somit zu höherer Dichte und damit zu höherem β gelangen kann [3].

1.2.1 Wendelstein 7-X

Das Stellaratorexperiment W7-X, das sich zur Zeit in Greifswald im Bau befindet und 2014 in Betrieb gehen soll, wird bei Inbetriebnahme voraussichtlich der größte je gebaute Stellarator sein. Es handelt sich um einen sogenannten optimierten Stellarator [4, 5, 6], welcher fünfzählige Rotationssymmetrie (Abb. 1.2) aufweist.

Geheizt wird das Experiment primär durch ECRH ($P = 10 \text{ MW}$, $f = 140 \text{ GHz}$). Da die Elektronendichten bei Stellaratoren im Vergleich zu Tokamaks in günstigen Betriebszuständen wesentlich höher liegen, ist die Heizung in der X2-Mode bei W7-X oft nicht möglich, d.h. effiziente Heizung in der O2-Mode ist hier ein sehr wichtiges Thema. In Hinblick auf die erwähnten entscheidenden Vorteile des Stellarators ist die in dieser Arbeit durchgeführte

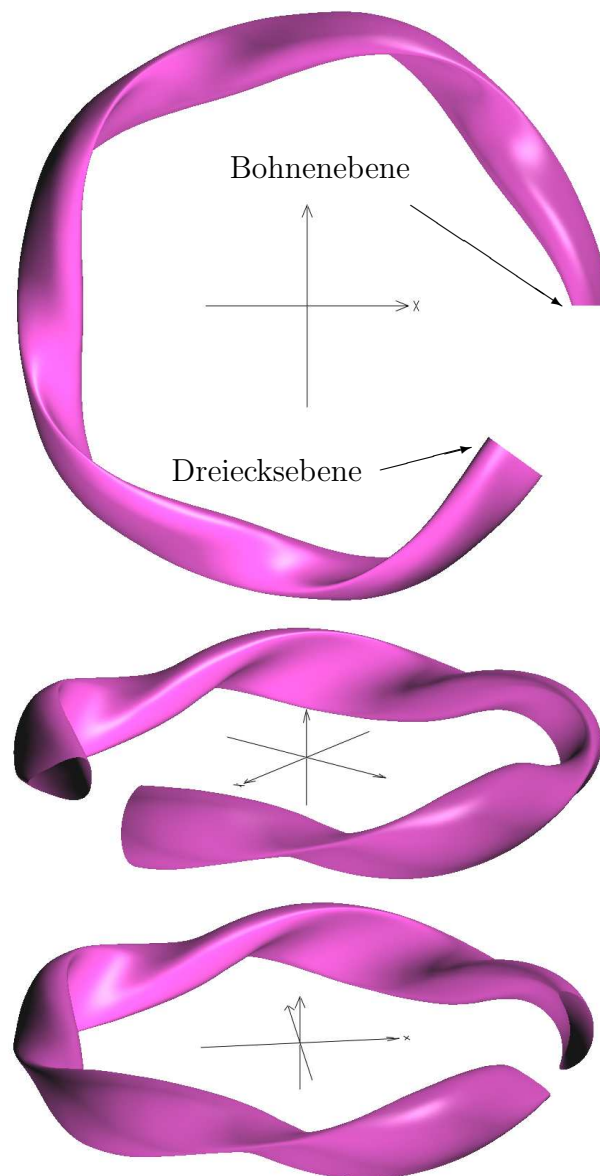


Abbildung 1.2: Darstellung der magnetischen Konfiguration des Stellaratorexperiments Wendelstein 7-X.

Entwicklung von Gitterspiegeln möglicherweise letztendlich von großer Bedeutung.

Kapitel 2

Theorie der Elektronzyklotronresonanzheizung

Für die Beschäftigung mit der Elektronzyklotronresonanzheizung (ECRH) und der Arbeit mit der verwendeten Mikrowellentechnologie ist eine mathematische Beschreibung des Heizprozesses sicher von Nutzen. Insbesondere können dadurch wesentliche Eckdaten bezüglich Ausbreitungsfähigkeit und Absorption der Mikrowellen gewonnen werden. Daher soll in diesem Kapitel eine knappe Darstellung der zugrundeliegenden Theorie des magnetisierten Plasmas gegeben werden.

Für die Beschreibung der Elektronzyklotronresonanzheizung hat man im wesentlichen zwei unterschiedliche Effekte zu diskutieren.

Wenn bei der Welleneinstrahlung von außen die Frequenz der eingestrahlten Welle ($\Omega =$ Kreisfrequenz der eingestrahlten Welle) größer als die Elektronzyklotronresonanzfrequenz ($\omega_{ce} = B_0 \cdot 28 \text{ GHz/T} =$ Elektronzyklotronkreisfrequenz, $B_0 =$ äußeres Magnetfeld) ist (und auch größer als die Cutoff-Frequenz des Plasmas ist), erfolgt eine reine dämpfungsfreie Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen im magnetisierten Plasma. Außerhalb von resonanten Schichten ($\Omega \approx s \cdot \omega_{ce}$ mit $s = 1, 2, 3, \dots =$ Harmonische der ECRH) kann diese Ausbreitung in der Näherung des *kalten Plasmas* ($k_B T_e \ll m_e c^2$) beschrieben werden.

Wenn eine Resonanzschicht erreicht wird, findet ein Energieübertrag zwischen der Welle und dem Elektronensystem statt. Um den Effekt exakt zu beschreiben, ist eine kinetische Modellierung notwendig, bei der berechnet wird, wie die thermische Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum der Elektronen durch die eingestrahlte Welle verzerrt wird. In den meisten Fällen kann jedoch in der *linearen Näherung* gerechnet werden, bei der eine schnelle Thermalisierung angenommen wird, wodurch die Verteilungsfunktion weiterhin der Maxwellverteilung entspricht.

2.1 Plasmabeschreibung

2.1.1 Vielteilchenbeschreibung

Ein Plasma ist ein Vielteilchensystem, das aus mehreren unterschiedlichen Teilchensorten besteht (Ionen, Elektronen und evtl. neutrale Atome).

Eine Beschreibung auf Basis der Bewegungsgleichungen der Einzelteilchen ist natürlich aufgrund deren großer Anzahl unpraktikabel.

$$\dot{\mathbf{x}}_{i,d} = \mathbf{v}_{i,d} \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{i,d} = \frac{q_d}{m_d} [\mathbf{E}(\mathbf{x}_{i,d}) + \mathbf{v}_{i,d} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{i,d})] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i,d}} \sum_t \sum_j^{N_d} U_{d,t}(\mathbf{x}_{i,d}, \mathbf{x}_{j,t}) \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet d die Teilchensorte, m_d deren Masse und q_d deren Ladung. Das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{B} ergeben sich aus den Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} \quad (2.5)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnen ρ die elektrische Ladungs- und \mathbf{j} die Stromdichte.

Die Potentiale $U_{d,t}$ berücksichtigen die Stöße zwischen den Teilchen, die u.U. nicht durch die klassische Elektrodynamik beschrieben werden können (z.B. inelastische Stöße an gebundenen Elektronen der Atome oder Ionen).

2.1.2 Vlasov- und Boltzmann-Gleichung

Das Modell lässt sich jedoch wesentlich vereinfachen, wenn man von diesen $6N$ Bewegungsgleichungen zu einer Kontinuumsbeschreibung in einem 6-dimensionalen Phasenraum (pro Teilchensorte) übergeht, wodurch die Unterscheidbarkeit der Teilchen und Korrelationseffekte zwischen ihnen verloren gehen. Stöße zwischen den Teilchen müssen daher gesondert in die Gleichungen eingeführt werden. Die Verteilungsfunktion $f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ beschreibt die Dichte der Teilchen der Sorte d in diesem Phasenraum.

Um auf die Bewegungsgleichung für f zu kommen, kann man die Teilchenstromdichte im Phasenraum J einführen, welche sich aus der Bewegungsgleichung der Einzelteilchen unter Vernachlässigung der Stöße ergibt zu

$$J_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_d \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = f_d \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{q_d}{m_d} [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})] \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Da keine Teilchen verloren gehen, muss für f die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{f}_d + \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \\ \nabla_{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \cdot J_d = 0 \quad (2.8)$$

gelten. Durch Einsetzen von J_d in die Kontinuitätsgleichung und unter Berücksichtigung von $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$ und $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ erhält man die Vlasov-Gleichung

$$\dot{f}_d + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_d + \frac{q_d}{m_d} [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_d = 0 \quad (2.9)$$

Leider verliert man bei dieser Reduktion auf 6 Dimensionen die Effekte der Stöße zwischen den Einzelteilchen. Diese können jedoch nachträglich wieder eingeführt werden, indem man annimmt, dass f noch eine zusätzliche Änderung durch diese Stöße erfährt. Man führt dazu den Stoßterm $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c$ ein. Die resultierende Bewegungsgleichung heißt Boltzmann-Gleichung

$$\dot{f}_d + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_d + \frac{q_d}{m_d} [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_d = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \quad (2.10)$$

Unter der Annahme, dass die Stöße lokal stattfindende, kurzzeitige Prozesse sind, kann man die Veränderung von f während des kleinen Zeitintervalls Δt durch diese allgemein schreiben als

$$f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t + \Delta t) = \int f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, t) \psi(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d^3 \Delta v \quad (2.11)$$

Die Funktion $\psi(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während Δt ein Teilchen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} eine Geschwindigkeitsänderung $\Delta \mathbf{v}$ erfährt. Wenn nun Kleinwinkelstöße dominieren, was in Fusionsplasmen der Fall ist, kann man den Integrand $(f\psi)$ bezüglich \mathbf{v} um den Entwicklungspunkt \mathbf{v} in eine Taylorreihe entwickeln.

$$\begin{aligned} & f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, t) \psi(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) \\ &= f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \psi(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f\psi) + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}})^2 (f\psi) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Durch Einsetzen von (2.12) in (2.11) und unter Verwendung von

$$\int \psi(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d^3\Delta v = 1 \quad (2.13)$$

erhält man

$$\begin{aligned} & f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t + \Delta t) - f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} \cdot \left(f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \int \psi(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) \Delta\mathbf{v} d^3\Delta v \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \int \psi(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) \Delta v_i \Delta v_j d^3\Delta v \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Durch Einführung der Fokker-Planck-Koeffizienten

$$\langle \Delta\mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int \psi \Delta\mathbf{v} d^3\Delta v \quad (2.15)$$

und

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int \psi \Delta v_i \Delta v_j d^3\Delta v \quad (2.16)$$

erhält man den Stoßterm

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c &= \frac{f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t + \Delta t) - f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\Delta t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} \cdot (\langle \Delta\mathbf{v} \rangle f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle f_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Man nennt $\langle \Delta\mathbf{v} \rangle$ die dynamische Reibung und $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$ den Diffusionstensor. Man beachte, dass die Streuwahrscheinlichkeit ψ und damit auch die Fokker-Planck-Koeffizienten selbst von den Verteilungsfunktionen f_d abhängen. Wenn jedoch nur kleine Änderungen von f_d auftreten, wie das bei der Wellenausbreitung meist der Fall ist, genügt es, die mittlere Verteilungsfunktion zur Bestimmung der Fokker-Planck-Koeffizienten zu verwenden [1], [2].

2.2 Elektromagnetische Wellen im Plasma

Zur Diskussion der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen wird folgendes Modell angenommen

- nur die Elektronen wechselwirken mit dem elektromagnetischen Feld, die Bewegung der Ionen wird aufgrund Ihrer großen Masse vernachlässigt. Diese bilden nur einen homogenen Untergrund.
- die Dämpfung durch Stöße, d.h. der (Fokker-Planck-)Stoßterm soll vernachlässigt werden
- die Felder üben nur kleine Störungen auf das Elektronensystem aus (lineare Näherung)

2.2.1 Der dielektrische Tensor des Plasmas

Das magnetische Feld \mathbf{B} und die Verteilungsfunktion der Elektronen f_e werden zerlegt in einen stationären bzw. langsam veränderlichen Anteil \mathbf{B}_0 und f_{e0} und einen Anteil $\tilde{\mathbf{B}}$ und \tilde{f}_e , der mit der Frequenz der Welle oszilliert. Für das elektrische Feld existiert nur der oszillierende Anteil $\tilde{\mathbf{E}}$. Aus der Vlasov-Gleichung für die Elektronen

$$\dot{f}_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_e - \frac{e}{m_e} [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = 0 \quad (2.18)$$

lässt sich der stationäre vom oszillierenden Anteil separieren

$$\dot{\tilde{f}}_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f}_e - \frac{e}{m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_e = \frac{e}{m_e} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} \quad (2.19)$$

$$\dot{f}_{e0} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{e0} - \frac{e}{m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} = \frac{e}{m_e} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_e \quad (2.20)$$

Für die Ausbreitung der Welle kann die langsame Veränderung der stationären Verteilung f_{e0} , wie sie durch (2.20) beschrieben wird, vernachlässigt werden. Sie ist allerdings für die Heizung, die in der Nähe von Resonanzen stattfindet, relevant. Die Diskussion des Effekts wird jedoch auf Abschnitt 2.3 verschoben.

Die oszillierende Verteilungsfunktion \tilde{f}_e beschreibt die Reaktion des Plasmas auf die elektromagnetischen Felder. Die elektrische Stromdichte $\tilde{\mathbf{j}}$ ergibt sich daraus zu

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = -e \int \mathbf{v} \tilde{f}_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v \quad (2.21)$$

Da die Geschwindigkeit der Elektronen klein sein soll, kann in (2.19) $\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ gegenüber $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x})$ vernachlässigt werden, ebenso $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f}_e$.

$$\dot{\tilde{f}}_e - \frac{e}{m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_e = \frac{e}{m_e} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} \quad (2.22)$$

Die Verteilung \tilde{f}_e hängt somit nur noch linear und lokal von $\tilde{\mathbf{E}}$ ab, und $\tilde{\mathbf{j}}$ kann durch den Leitfähigkeitstensor σ ausgedrückt werden.

$$\tilde{\mathbf{j}} = \sigma \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.23)$$

Es wird in den Frequenzraum gewechselt, wodurch $\frac{\partial}{\partial t}$ durch $i\omega$ ersetzt wird. Außerdem wird angenommen, dass \mathbf{B}_0 entlang z orientiert ist, und es werden die „rotierenden Koordinaten“ $v_{\pm} = \frac{1}{2}(v_x \pm iv_y)$, $\frac{\partial}{\partial v_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial v_x} \mp i \frac{\partial}{\partial v_y}$ und $E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_x \pm iE_y)$ sowie die algebraische Zyklotronfrequenz $\omega_{ce} = \frac{eB_0}{m_e}$ eingeführt. Damit geschrieben wird (2.22) zu

$$\left(-i\omega + i\omega_{ce}(v_+ \frac{\partial}{\partial v_+} - v_- \frac{\partial}{\partial v_-}) \right) \tilde{f}_e = \frac{e}{m_e} (\tilde{E}_+ \frac{\partial}{\partial v_+} + \tilde{E}_- \frac{\partial}{\partial v_-} + \tilde{E}_z \frac{\partial}{\partial v_z}) f_{e0} \quad (2.24)$$

Unter Beachtung, dass für die ungestörte Gleichgewichtsverteilung f_{e0} gelten muss, dass $\dot{f}_{e0} = 0$, folgt aus der Bewegungsgleichung (2.20)

$$(-v_x \frac{\partial}{\partial v_y} + v_y \frac{\partial}{\partial v_x}) f_{e0} = i(v_+ \frac{\partial}{\partial v_+} - v_- \frac{\partial}{\partial v_-}) f_{e0} = 0 \quad (2.25)$$

Damit lässt sich zeigen, dass die Lösung von (2.24) lautet

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e &= -\tilde{E}_+ \frac{e}{i(\omega + \omega_{ce})m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_+} - \tilde{E}_- \frac{e}{i(\omega - \omega_{ce})m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_-} - \tilde{E}_z \frac{e}{i\omega m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_z} \\ &= \left(-\tilde{E}_+ \frac{e}{i(\omega + \omega_{ce})m_e} - \tilde{E}_- \frac{e}{i(\omega - \omega_{ce})m_e} \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_x} \\ &\quad + i \left(\tilde{E}_+ \frac{e}{i(\omega + \omega_{ce})m_e} - \tilde{E}_- \frac{e}{i(\omega - \omega_{ce})m_e} \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_y} \\ &\quad - \tilde{E}_z \frac{e}{i\omega m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_z} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Somit ergibt sich aus (2.21) und

$$\int v_{\alpha} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\beta}} d^3v = n_e \delta_{\alpha\beta} \quad (2.27)$$

für die Stromdichte $\tilde{\mathbf{j}}$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \begin{pmatrix} -\tilde{E}_+ \frac{1}{i(\omega + \omega_{ce})} - \tilde{E}_- \frac{1}{i(\omega - \omega_{ce})} \\ i(\tilde{E}_+ \frac{1}{i(\omega + \omega_{ce})} - \tilde{E}_- \frac{1}{i(\omega - \omega_{ce})}) \\ -\tilde{E}_z \frac{1}{i\omega} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Unter Einführung der Plasmafrequenz $\omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}$ lautet damit der Leitfähigkeitstensor

$$\sigma = \epsilon_0 \omega_{pe}^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{\omega + \omega_{ce}} + \frac{1}{\omega - \omega_{ce}}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega + \omega_{ce}} - \frac{1}{\omega - \omega_{ce}}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega + \omega_{ce}} - \frac{1}{\omega - \omega_{ce}}\right) & \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{\omega + \omega_{ce}} + \frac{1}{\omega - \omega_{ce}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{i\omega} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Damit kann man unter Einführung des dielektrischen Tensors $\epsilon_r = 1 - \sigma/(i\omega\epsilon_0)$ die Stromdichte \mathbf{j} aus der Maxwellgleichung (2.5) eliminieren, so dass diese dann lautet

$$i\omega\epsilon_r \mathbf{E} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.30)$$

Um den dielektrischen Tensor zu schreiben, werden üblicherweise folgende Abkürzungen eingeführt [1],[7]

$$\begin{aligned} R &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \\ L &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \\ P &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \\ S &= \frac{1}{2}(R + L) \\ D &= \frac{1}{2}(R - L) \end{aligned}$$

Damit lautet der dielektrische Tensor des kalten Plasmas

$$\epsilon_r = \begin{pmatrix} S & iD & 0 \\ -iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

2.2.2 Dispersionsrelationen elektromagnetischer Wellen

Zu Diskussion der Wellenausbreitung wird ein homogenes Plasma angenommen, $\epsilon_r(\mathbf{x}) = \text{const.}$, und die Felder werden als ebene Wellen angesetzt. Aus den Maxwellgleichungen (2.6) und (2.30) folgt

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (2.32)$$

mit $k_0 = \omega/c$. Somit gilt wegen $\nabla = -i\mathbf{k}$ für ebene Wellen

$$-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (2.33)$$

Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass der k -Vektor in der xz -Ebene liegt

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} k \sin \theta \\ 0 \\ k \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

wobei θ der Winkel ist, den der k -Vektor mit der z -Achse (und damit mit B_0) einschließt. Daraus folgt mit Einführung des Brechungsindex $n = k/k_0$

$$[n^2(1 - \hat{\mathbf{k}} \otimes \hat{\mathbf{k}}) - \epsilon_r] \mathbf{E} = 0 \quad (2.35)$$

Dies hat für \mathbf{E} genau dann eine nicht triviale Lösung, wenn

$$\det[n^2(1 - \hat{\mathbf{k}} \otimes \hat{\mathbf{k}}) - \epsilon_r] = 0 \quad (2.36)$$

$$n^4(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) - n^2(PS(1 + \cos^2 \theta) + (S^2 - D^2) \sin^2 \theta) + P(S^2 - D^2) = 0 \quad (2.37)$$

oder

$$n^4(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) - n^2(PS(1 + \cos^2 \theta) + RL \sin^2 \theta) + PRL = 0 \quad (2.38)$$

wenn berücksichtigt wird, dass

$$S^2 - D^2 = RL \quad (2.39)$$

ist. Die Lösung der biquadratischen Gleichung ist

$$n^2 = \frac{PS(1 + \cos^2 \theta) + RL \sin^2 \theta \pm \sqrt{(RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta}}{2(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta)} \quad (2.40)$$

Man erkennt, dass 2 verschiedene Brechungsindizes und damit 2 verschiedene Ausbreitungsmoden mit unterschiedlicher Polarisation auftreten können. Da die verschiedenen Teile von $n(\omega)$ Diskontinuitäten enthalten, ist nicht gegeben, dass bei Verwendung desselben Vorzeichens keine unnötigen Sprünge der Funktion auftreten, sondern es ist eine Fallunterscheidung nötig. Das $+$ -Zeichen ergibt die sog. X-Mode (Extraordinary Mode, Außerordentliche Welle), das $-$ -Zeichen die sog. O-Mode (Ordinary Mode, Ordentliche Welle), falls $\omega < \omega_{\text{UH}} = \sqrt{\omega_{\text{ce}}^2 + \omega_{\text{pe}}^2}$, im anderen Fall ($\omega > \omega_{\text{UH}}$) genau umgekehrt. Die neu eingeführte Größe ω_{UH} nennt man obere Hybridfrequenz [7]. Im Sonderfall der Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld $\theta = 0$ tritt außerdem noch ein weiterer Sprung bei $\omega = \omega_{\text{pe}}$ auf.

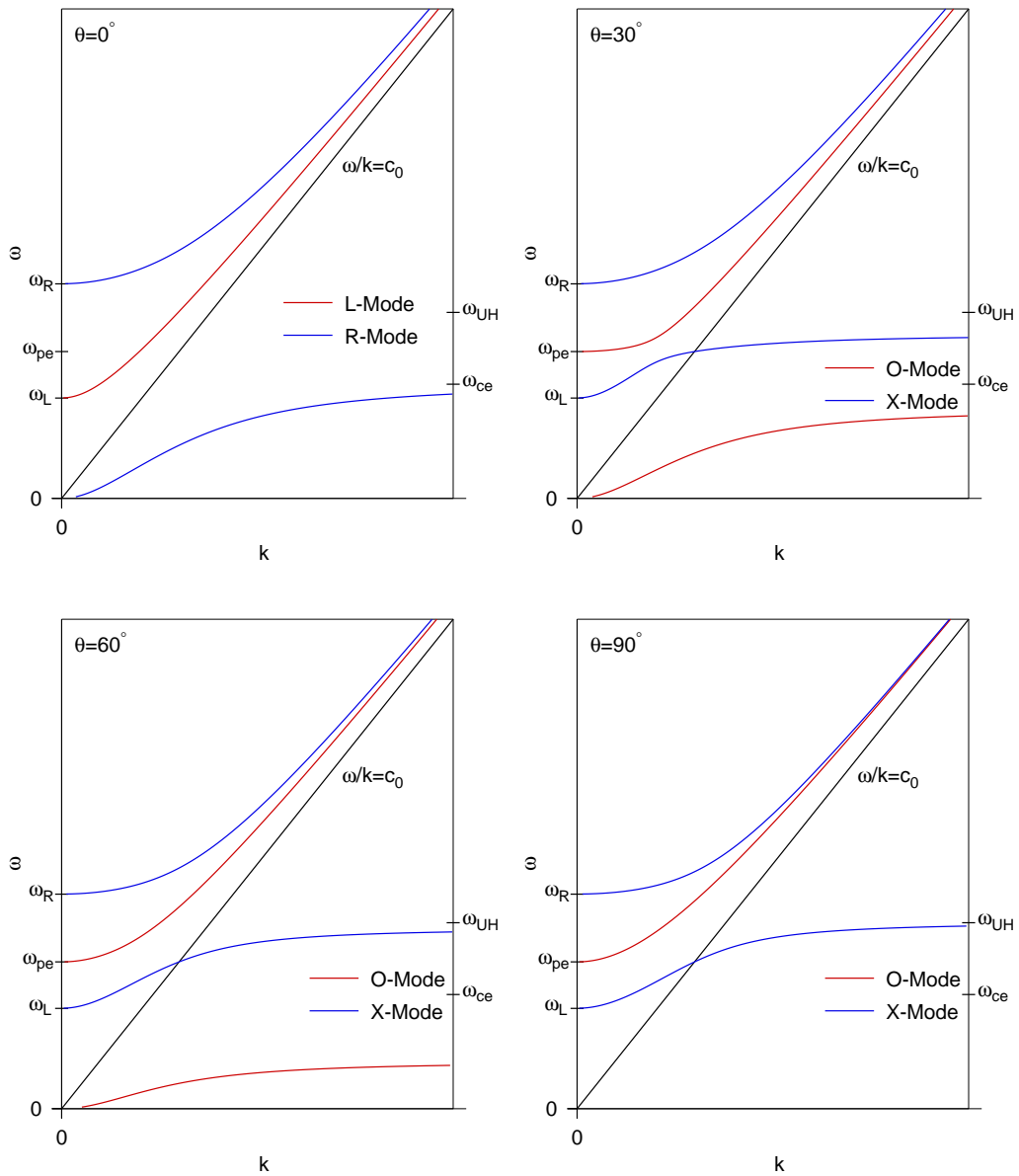


Abbildung 2.1: Dispersionsrelationen der elektromagnetischen Wellen für unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen. Es treten für die Wellen unzugängliche Frequenzbereiche auf (z.B. für $\omega < \omega_R$ bei der R-Mode), in denen der Brechungsindex negativ ist.

2.2.3 Ausbreitungsfähigkeit der Wellen

Die Wellen sind grundsätzlich überall ausbreitungsfähig, wo $n^2 > 0$, anderenfalls erhält man einen imaginären k -Vektor, und damit exponentiellen Abfall im betrachteten Gebiet, bzw. Reflexion an der Übergangsstelle. In Abb. 2.1 sind die Dispersionsrelationen sowohl für die O-Mode als auch die X-Mode für verschiedene θ dargestellt. Man erkennt, dass die Bereiche der Ausbreitungsfähigkeit für die Moden unterschiedlich sind, was sich für die Heizung als relevant herausstellen wird.

Für den Spezialfall der Ausbreitung senkrecht zu B_0 ($\theta = 90^\circ$) können diese Bereiche analytisch angegeben werden. Die Formel für den Brechungsindex (2.40) vereinfacht sich dann zu

$$n_X^2 = \frac{RL}{S} = \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2 - 2\omega_{pe}^2) + \omega_{pe}^4}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2)} \quad (2.41)$$

$$n_O^2 = P = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

Dabei bezieht sich n_X auf die X-Mode und n_O auf die O-Mode. Man erkennt sofort, dass die O-Mode für $\omega > \omega_{pe}$ ausbreitungsfähig ist. Für die X-Mode erhält man durch Bestimmung der Nullstellen des Zählers und des Nenners von (2.41), dass die Mode ausbreitungsfähig ist für $\omega > \omega_R$ sowie für $\omega_L < \omega < \omega_{UH}$ (Siehe auch Abb. 2.1) [7]. Die Cutoff-Frequenzen ergeben sich zu

$$\omega_L = -\frac{1}{2}\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{1}{4}\omega_{ce}^2} \quad (2.44)$$

$$\omega_R = \frac{1}{2}\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{1}{4}\omega_{ce}^2} \quad (2.45)$$

Typischerweise wird der hochfrequente Zweig der X-Mode (Abb. 2.1) für die Heizung verwendet, d.h. ω_R ist die relevante Cutoff-Frequenz.

2.2.4 Das CMA-Diagramm

Für die Ausbreitungsfähigkeit der Wellen existiert noch eine weitere Möglichkeit der Darstellung, die insbesondere interessant ist, um zu bestimmen, mit welchen Wellen welche räumlichen Bereiche eines Experiments für die Wellen zugänglich sind. Dazu werden die durch die Cutoffs ω_L und ω_R sowie die obere hybride Resonanz ω_{UH} limitierten Bereiche der Ausbreitungsfähigkeit für eine feste Frequenz ω der Welle in einem Diagramm der charakteristischen Frequenzen des Plasmas ω_{pe} und ω_{ce} markiert. Dies ergibt das so genannte

CMA-Diagramm (Abb. 2.2), benannt nach P.C. Clemmow, R.F. Mullaly und W.P. Allis [7, 8].

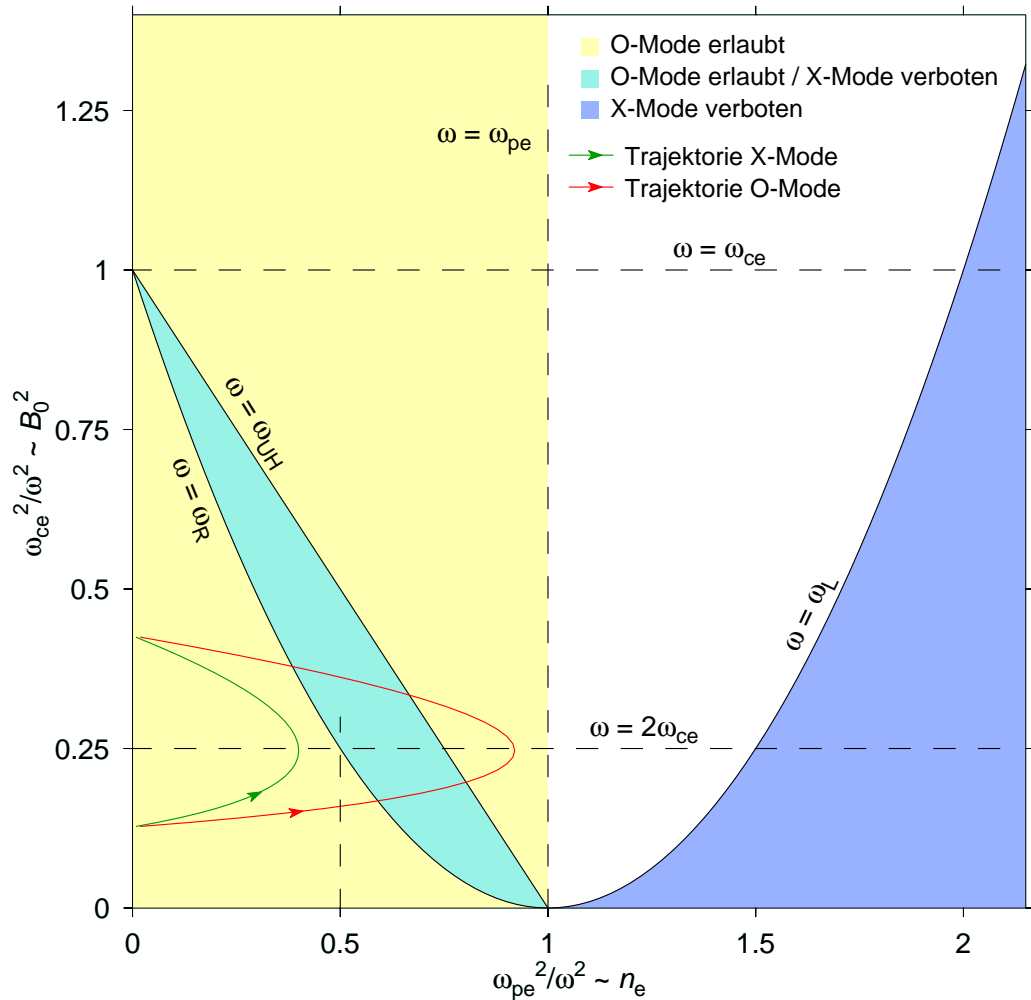


Abbildung 2.2: CMA-Diagramm elektromagnetischer Wellen im magnetisierten Plasma [7, 8].

Wenn man im CMA-Diagramm die Zyklotronresonanzen ($\omega = \omega_{ce}$, $\omega = 2\omega_{ce}$, ...) markiert (in Abb. 2.2 unterbrochene Querstriche) und sich überlegt, wie die Trajektorien der eingestrahlten Welle verlaufen, kann man verschiedene wichtige Aussagen über die Heizung treffen. Bei Einstrahlung von der Außenseite des Torus werden, da das Magnetfeld nach innen stärker wird, die Trajektorien immer von unten nach oben verlaufen. Die Elektronendichte nimmt dagegen bis zum Plasmazentrum zu, danach wieder ab. Dies zusammen ergibt Trajektorien, wie in Abb. 2.2 (grün für die 2. Harmonische

X-Mode und rot für die 2. Harmonische O-Mode) eingezeichnet.

Man erkennt damit z.B., dass es nicht möglich ist, bei Einstrahlung von außen in der X1-Mode zu heizen. Die für diese Arbeit wichtigere Aussage ist jedoch (da sie die Relevanz der O2- und X3-Mode-Heizung begründet), dass sich im Fall der Einstrahlung in das Experiment von außen, allgemein mit der O-Mode Plasmen mit $\omega_{pe} < s \cdot \omega_{ce}$ heizen lassen, mit der X-Mode dagegen nur Plasmen mit $\omega_{pe} < \sqrt{s(s-1)} \cdot \omega_{ce}$. Dabei bezeichnet s die Harmonische von ω_{ce} , bei der die Welle absorbiert wird.

Es gilt somit bei vorgegebenem Magnetfeld und somit vorgegebener Zyklotronfrequenz, dass die maximal erlaubte Elektronendichte bei Heizung in der O2-Mode (O-Mode, $s = 2$) doppelt so groß, bei der X3-Mode (X-Mode, $s = 3$) dreimal so groß ist wie bei der normalerweise verwendeten X2-Mode (X-Mode, $s = 2$). Dabei ist zu beachten, dass bei der X3-Mode die Frequenz um einen Faktor $3/2$ erhöht werden müsste, um Absorption am selben Ort, d.h. beim selben Magnetfeld zu erreichen. Für hochdichte Szenarien sind beide Möglichkeiten interessant, wobei man für die X3-Mode das Magnetfeld reduzieren würde.

2.2.5 Polarisation

Wie bereits erwähnt, ist die Polarisation der X-Mode und O-Mode unterschiedlich und von der Ausbreitungsrichtung, d.h. dem Winkel θ abhängig. Der Vektor \mathbf{E} kann aus (2.35) bestimmt werden. Es gilt [7]

$$\frac{E_x}{E_y} = i \frac{(n^2 - S)}{D} \quad \text{und} \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{n^2 \cos \theta \sin \theta}{n^2 \sin^2 \theta - P} \quad (2.46)$$

Sinnvoll ist außerdem eine Betrachtung im Koordinatensystem der Wellenausbreitung. Die Basisvektoren sind durch die Ausbreitungsrichtung $\hat{\mathbf{k}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, den Vektor $\mathbf{u} = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ in der Ebene zwischen \mathbf{k} und \mathbf{B}_0 sowie die auf beiden senkrecht stehende y-Achse gegeben. Damit erhält man

$$\frac{E_k}{E_u} = \frac{P - n^2}{P} \tan \theta \quad \text{und} \quad \frac{E_u}{E_y} = i \frac{P(S - n^2) \cos \theta}{D(n^2 \sin^2 \theta - P)} \quad (2.47)$$

Die Formeln vereinfachen sich ebenfalls wieder in den Grenzfällen zur Richtung des Magnetfelds paralleler ($\theta = 0^\circ$) und senkrechter ($\theta = 90^\circ$) Einstrahlung. Für parallele Einstrahlung gilt

$$E_k = E_z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{E_u}{E_y} = \frac{E_x}{E_y} = \begin{cases} -i & \text{für die R-Mode} \\ i & \text{für die L-Mode} \end{cases} \quad (2.48)$$

für senkrechte Einstrahlung

$$\frac{E_k}{E_y} = \frac{E_k}{E_y} = i \frac{D}{S} \quad \text{und} \quad \begin{cases} E_u = -E_z = 0 & \text{für die X-Mode} \\ E_y = 0 & \text{für die O-Mode} \end{cases} \quad (2.49)$$

Man erkennt, dass im parallelen Fall die Polarisation entweder links- oder rechtszirkular ist, im senkrechten Fall dagegen linear.

Ein ganz spezieller Fall, der eine Betrachtung wert ist, ist die Situation am Rande eines Plasmaexperiments, da bei äußerer Einstrahlung der Welle die Polarisation an die gewünschte Mode angepasst werden soll. Dort wird angenommen, dass die Dichte verschwindet, das Magnetfeld dagegen nicht. Man kann die nötige Polarisation aus (2.47) bestimmen, wenn man den Grenzübergang $\lim_{n_e \rightarrow 0}$ betrachtet. Es folgt [9]

$$\lim_{n_e \rightarrow 0} \frac{E_k}{E_u} = 0 \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n_e \rightarrow 0} \frac{E_u}{E_y} &= -i \frac{1}{\cos \theta} \lim_{n_e \rightarrow 0} \frac{S - n^2}{D} \\ &= i \frac{\frac{\omega_{ce}}{\omega} \sin^2 \theta \mp \sqrt{\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta}}{2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dabei bezeichnet das +-Zeichen die O-Mode, das --Zeichen die X-Mode.

2.3 Heizung durch elektromagnetische Wellen

2.3.1 Energieaustausch zwischen Welle und Plasma

Wie im folgenden dargestellt werden soll, breiten sich Wellen im Plasma nicht grundsätzlich verlustfrei aus, sondern vor Allem in der Nähe von Resonanzen findet Absorption statt [10, 11].

Es soll nun bestimmt werden, wie groß der Energieübertrag von der Welle auf das Elektronensystem ist. Dabei interessiert natürlich nur, was auf der langen Zeitskala passiert. Es ist nicht von Bedeutung, dass während einer Schwingungsperiode laufend Energie hin und her übertragen wird, was sich in Form der in \tilde{f}_e vorhandenen Energie äußert. Der langzeitskalige Energieübertrag pro Volumen

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} m_e \int v^2 \dot{f}_{e0} d^3v \quad (2.52)$$

ergibt sich nach Einsetzen von (2.20) zu

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e}{2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \cdot \int v^2 \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_e d^3v \quad (2.53)$$

$$= -e \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \cdot \int \mathbf{v} \tilde{f}_e d^3v = -e \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

Wenn nun das System A , welches die Stromantwort auf eine elektrische Feldanregung angibt, im Frequenzraum bekannt ist,

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega) = A(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \quad (2.55)$$

kann durch Rücktransformation die Energieaufnahme bestimmt werden

$$\begin{aligned} W &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\omega') e^{-i\omega't} d\omega' \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} A(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega't} d\omega dt \\ &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(-\omega) \cdot A(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$(2.57)$$

Da für reelle Anregungen bekanntlich gilt,

$$\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(-\omega)) = \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)) \quad (2.58)$$

$$\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{E}}(-\omega)) = -\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)) \quad (2.59)$$

und analog für reelle Systeme

$$\operatorname{Re}(A(-\omega)) = \operatorname{Re}(A(\omega)) \quad (2.60)$$

$$\operatorname{Im}(A(-\omega)) = -\operatorname{Im}(A(\omega)) \quad (2.61)$$

folgt

$$W = \int_{\omega=0}^{\infty} \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)) \cdot R(\omega) \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)) + \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)) \cdot R(\omega) \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)) d\omega \quad (2.62)$$

mit der Matrix $R(\omega) = 2\operatorname{Re}(A(\omega))$.

2.3.2 Verteilungsfunktion des heißen Plasmas

Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Vernachlässigung von $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f}_e$, die in (2.19) gemacht wurde, hierbei nicht mehr gültig ist, da der endliche Gyrationradius und die daraus resultierende Phasenmodulation der Anregung für die Absorption bei höheren Harmonischen verantwortlich ist (Abb. 2.3).

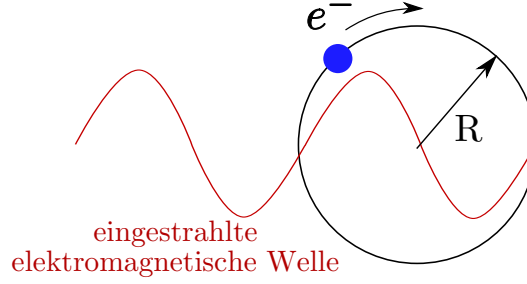


Abbildung 2.3: Die Absorption bei höheren Harmonischen ist dadurch bedingt, dass ein Elektron, dessen Gyrationradius $R = v_{\perp}/\omega_{ce}$ gegenüber der Wellenlänge nicht vernachlässigbar ist, eine Phasenmodulation erfährt. Das Elektron sieht ein E-Feld $\sim e^{i[\omega t + k_{\perp} R \sin(\omega_{ce} t)]}$, welches in der Spektralzerlegung Komponenten bei jeweils $(\omega - s\omega_{ce})$ aufweist.

Außerdem sollte der relativistische Masseneffekt berücksichtigt werden, da dieser zu einer geschwindigkeitsabhängigen Zyklotronfrequenz und damit zu einer Verbreiterung der Absorptionsschicht führt. Es wird daher der relativistische Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ eingeführt. Gleichung (2.19) lautet damit

$$\dot{\tilde{f}}_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f}_e - \frac{e}{\gamma m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_e = \frac{e}{\gamma m_e} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} \quad (2.63)$$

bzw. unter Verwendung von (2.6) und Wechsel in den Frequenzraum

$$(-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \frac{e}{\gamma m_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) \tilde{f}_e = \frac{e}{\gamma m_e} [\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{\omega} ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{E}} - (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \mathbf{k})] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} \quad (2.64)$$

Durch Transformation von \mathbf{v} in Zylinderkoordinaten $v_x = v_{\perp} \cos \phi_v$, $v_y = v_{\perp} \sin \phi_v$, $v_z = v_{\parallel}$ und unter Berücksichtigung, dass \mathbf{k} in der xz -Ebene liegt ($k_y = 0$), und f_{e0} isotrop ist, d.h. $df_{e0}/d\phi_v = 0$ erhält man

$$\left(-i\omega + ik_{\parallel} v_{\parallel} + ik_{\perp} v_{\perp} \cos \phi_v + \frac{\omega_{ce}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \phi_v} \right) \tilde{f}_e = \frac{e}{\gamma m_e} D(\phi_v) \quad (2.65)$$

mit

$$D(\phi) = \left[\left(1 + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) (\tilde{E}_{-} e^{i\phi} + \tilde{E}_{+} e^{-i\phi}) - \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega} \cos \phi \tilde{E}_{\parallel} \right] \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + \left[-\frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} (\tilde{E}_{-} e^{i\phi} + \tilde{E}_{+} e^{-i\phi}) + \left(1 + \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega} \cos \phi \right) \tilde{E}_{\parallel} \right] \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \quad (2.66)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in ϕ_v , die aufintegriert werden kann.

$$\tilde{f}_e = e^{-i\frac{\gamma}{\omega_{ce}}[(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)\phi_v+k_{\perp}v_{\perp}\sin\phi_v]} \left(\text{const.} + \frac{e}{m_e\omega_{ce}} \int_0^{\phi_v} D(\phi') e^{i\frac{\gamma}{\omega_{ce}}[(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)\phi'+k_{\perp}v_{\perp}\sin\phi']} d\phi' \right) \quad (2.67)$$

Die Integrationskonstante ist so zu bestimmen, dass die periodische Randbedingung $\tilde{f}_e(\phi_v = 0) = \tilde{f}_e(\phi_v = 2\pi)$ erfüllt ist. Aus der Fourierentwicklung

$$e^{i\xi\sin\phi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\xi) e^{is\phi} \quad (2.68)$$

folgt [10, 11]

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e &= e^{-i\frac{\gamma}{\omega_{ce}}[(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)\phi_v+k_{\perp}v_{\perp}\sin\phi_v]} \\ &\left(\text{const.} + \frac{e}{m_e\omega_{ce}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}}k_{\perp}v_{\perp}\right) \int_0^{\phi_v} D(\phi') e^{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)+s]\phi'} d\phi' \right) \\ &= e^{-i\frac{\gamma}{\omega_{ce}}[k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega]\phi_v+k_{\perp}v_{\perp}\sin\phi_v} \\ &\left(\text{const.} + \frac{e}{m_e\omega_{ce}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)+s]} (e^{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)+s]\phi_v} - 1) \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

mit

$$\begin{aligned} G_s &= \left([J_s(\xi) - \frac{k_{\perp}v_{\perp}}{2\omega}(J_{s-1}(\xi) + J_{s+1}(\xi))] \tilde{E}_{\parallel} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega}(J_{s-1}(\xi)\tilde{E}_{-} + J_{s+1}(\xi)\tilde{E}_{+}) \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \\ &\quad + \left(\frac{k_{\perp}v_{\parallel}}{2\omega}(J_{s-1}(\xi) + J_{s+1}(\xi))\tilde{E}_{\parallel} + \right. \\ &\quad \left. (1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega})(J_{s-1}(\xi)\tilde{E}_{-} + J_{s+1}(\xi)\tilde{E}_{+}) \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} \end{aligned}$$

wobei $\xi = \frac{\gamma}{\omega_{ce}}k_{\perp}v_{\perp}$. Damit ergibt sich die Konstante aus der Randbedingung zu

$$\text{const.} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)+s]} \quad (2.70)$$

und damit \tilde{f}_e zu

$$\tilde{f}_e = \frac{e}{m_e\omega_{ce}} e^{-i\frac{\gamma}{\omega_{ce}}k_{\perp}v_{\perp}\sin\phi_v} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel}-\omega)+s]} e^{is\phi_v} \quad (2.71)$$

Einsetzen in (2.21) unter nochmaliger Anwendung von (2.68) ergibt [10, 11]

$$\tilde{\mathbf{j}} = -\frac{e^2}{m_e \omega_{ce}} \int \begin{pmatrix} v_{\perp} \cos \phi_v \\ v_{\perp} \sin \phi_v \\ v_{\parallel} \end{pmatrix} v_{\perp} \sum_{t=-\infty}^{\infty} J_t\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} e^{i(s-t)\phi_v} d\phi_v dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.72)$$

bzw.

$$\tilde{j}_+ = -\frac{e^2}{m_e \omega_{ce}} \int v_{\perp}^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} J_{t+1}\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} e^{i(s-t)\phi_v} d\phi_v dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.73)$$

$$\tilde{j}_- = -\frac{e^2}{m_e \omega_{ce}} \int v_{\perp}^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} J_{t-1}\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} e^{i(s-t)\phi_v} d\phi_v dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.74)$$

$$\tilde{j}_z = -\frac{e^2}{m_e \omega_{ce}} \int v_{\perp} v_{\parallel} \sum_{t=-\infty}^{\infty} J_t\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} e^{i(s-t)\phi_v} d\phi_v dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.75)$$

und nach Ausführen der ϕ_v -Integration

$$\tilde{j}_+ = -\frac{2\pi e^2}{m_e \omega_{ce}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int v_{\perp}^2 J_{s+1}\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.76)$$

$$\tilde{j}_- = -\frac{2\pi e^2}{m_e \omega_{ce}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int v_{\perp}^2 J_{s-1}\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.77)$$

$$\tilde{j}_z = -\frac{2\pi e^2}{m_e \omega_{ce}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int v_{\perp} v_{\parallel} J_s\left(\frac{\gamma}{\omega_{ce}} k_{\perp} v_{\perp}\right) G_s \frac{1}{i\left[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + s\right]} dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.78)$$

2.3.3 Leistungsabsorption des Plasmas

Die Ausdrücke für $\tilde{\mathbf{j}}$ können jedoch nicht direkt in (2.62) eingesetzt werden, da zu beachten ist, dass das Plasma in diesem Modell ein dämpfungsfreies System darstellt, das langfristig keine Energie aufnehmen würde. In der Realität ist dies natürlich nicht der Fall. Es treten Stöße auf, die zu einer minimalen Dämpfung führen, was durch Berücksichtigung des Stoßterms $(\frac{\partial f}{\partial t})_c$ aus (2.17) ersichtlich wird.

Eine minimale Dämpfung kann in das System direkt eingeführt werden, wodurch die Resonanzterme in (2.76)–(2.78) folgendermaßen ersetzt werden

$$\frac{1}{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega) + s]} \longrightarrow \frac{1}{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega) + s] + r} \quad (2.79)$$

wobei r den Dämpfungsfaktor darstellt. Für den Grenzfall kleiner Dämpfung gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i[\frac{\gamma}{\omega_{ce}}(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega) + s] + r} \right) &= \frac{\pi \omega_{ce}}{\gamma} \delta \left(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma} \right) \quad (2.80) \\ &\approx \pi \omega_{ce} \delta \left(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck folgt aus der Vernachlässigung des relativistischen γ -Faktors, was für typische Fusionsplasmen zulässig ist, da die kinetischen Energien der Elektronen deutlich kleiner als deren Ruhemassen sind.

Damit folgt durch Vergleich der entsprechend modifizierten Ströme aus (2.76)–(2.78) mit (2.62)

$$W = \frac{(2\pi)^2 e^2}{m_e} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} \tilde{E}_+ \\ \tilde{E}_- \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{++} & R_{+-} & R_{+z} \\ R_{+-} & R_{--} & R_{-z} \\ R_{z+} & R_{z-} & R_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{E}_+ \\ \tilde{E}_- \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \right) d\omega$$

mit

$$R_{++}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 J_{s+1}^2 \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right] \delta \left(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma} \right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.81)$$

$$R_{--}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 J_{s-1}^2 \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right] \delta \left(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma} \right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.82)$$

$$R_{+-}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right] J_{s-1} J_{s+1} \delta \left(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma} \right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.83)$$

$$R_{z-}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} J_s - \frac{k_{\perp}}{2\omega} F(J_{s-1} + J_{s+1}) \right] J_{s-1} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.84)$$

$$R_{z+}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} J_s - \frac{k_{\perp}}{2\omega} F(J_{s-1} + J_{s+1}) \right] J_{s+1} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.85)$$

$$R_{-z}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp} v_{\parallel} \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right] J_s J_{s-1} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.86)$$

$$R_{+z}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp} v_{\parallel} \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right] J_s J_{s+1} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.87)$$

$$R_{zz}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp} v_{\parallel} J_s \left[\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} J_s - \frac{k_{\perp}}{2\omega} F(J_{s-1} + J_{s+1}) \right] \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.88)$$

mit

$$F = v_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} \quad (2.89)$$

Daraus sind einige Eigenschaften der ECRH direkt erkennbar, z.B. dass Absorption nur stattfindet, wenn die Resonanzbedingung $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + s\omega_{ce}/\gamma$ erfüllt ist, dass die Absorption mit steigender Harmonischer s schlechter wird, da für kleine Argumente $J_s(\xi) \approx \xi^s/(2^s s!)$, dass die X-Mode besser absorbiert wird als die O-Mode, sowie dass die Absorption allgemein temperaturabhängig ist.

Die Ausdrücke R_{++} , R_{z+} können wegen der höheren Ordnung der Besselfunktion J_s gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden. Aufgrund der Symmetrie von f_{e0} bezüglich v_{\parallel} in der Näherung des homogenen Plasmas verschwinden außerdem einige weitere Ausdrücke, wie R_{z-} , R_{-z} und R_{+z} , da die Leistung, die an einer Stelle absorbiert wird, an anderer Stelle wieder abgegeben wird.

Übrig bleibt

$$R_{--}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 J_{s-1}^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.90)$$

$$R_{+-}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} J_{s-1} J_{s+1} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.91)$$

$$R_{zz}(\omega) = - \sum_{s=1}^{\infty} \int v_{\perp} v_{\parallel} J_s^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{s\omega_{ce}}{\gamma}\right) dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (2.92)$$

2.3.4 Vergleich der unterschiedlichen Moden

Für eine Leistungseinstrahlung mit konstanter Frequenz ω gibt somit der Ausdruck

$$P_{\text{abs,V}} = \frac{(2\pi)^2 e^2}{m_e} \text{Re} \left(\begin{pmatrix} \tilde{E}_+ \\ \tilde{E}_- \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & R_{+-} & 0 \\ R_{+-} & R_{--} & 0 \\ 0 & 0 & R_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{E}_+ \\ \tilde{E}_- \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \right)$$

in guter Näherung die absorbierte Leistung pro Volumen an. Um die Absorption pro Durchstrahlung $P_{\text{abs}}/P_{\text{in}}$ des Plasmas anzugeben, wird üblicherweise die optische Dicke τ eingeführt. Dabei wird angenommen, dass sich die Strahlung entlang eines Pfades s ausbreitet und auf ihrem Weg teilweise absorbiert wird. Pro Wegelement ds wird der Teil $\kappa \cdot ds$ der noch vorhandenen Leistung absorbiert. Dabei ist κ der Absorptionskoeffizient. Es folgt

$$\kappa = P_{\text{abs,V}} / (\rho_E v_{\text{gr}}) \quad (2.93)$$

wobei ρ_E die Energiedichte der elektromagnetischen Welle sowie $v_{\text{gr}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ die Gruppengeschwindigkeit der eingestrahlten Mode bezeichnen. Aus der Definition der optischen Dicke

$$e^{-\tau} = \frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{in}}} \quad (2.94)$$

folgt, dass gilt

$$\tau = \int \kappa ds \quad (2.95)$$

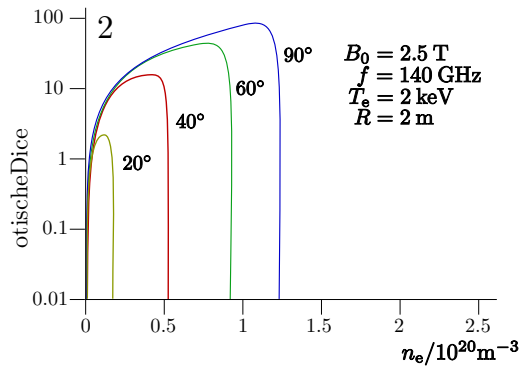


Abbildung 2.4: Optische Dicke τ für die Absorption der X2-Mode für unterschiedliche Einstrahlwinkel relativ zum Magnetfeld [8].

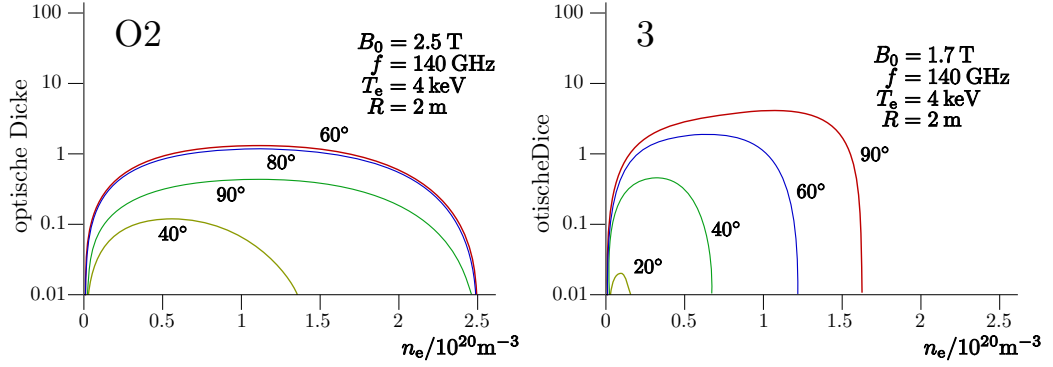


Abbildung 2.5: Optische Dicke τ für die Absorption der O2- (l) und der X3-Mode (r) für unterschiedliche Einstrahlwinkel relativ zum Magnetfeld [8]. Die Absorption für die O2-Mode ist bei senkrechter Einstrahlung nicht optimal, sondern bei einer Neigung von 15° gegen die Senkrechte auf das Magnetfeld.

Nach [12] gilt in einer prismatischen Geometrie für Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld bei einem Feldprofil $B_0 \sim 1/R$ ($n_e = \text{const.}$, $T_e = \text{const.}$) für die Absorption der O- und X-Mode bei der harmonischen s

$$\tau_{s \geq 1}^{\text{O}} = \frac{\pi^2 s^{2(s-1)}}{2^{s-1} (s-1)!} n_{\text{O}}^{2s-1} \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{c}}^2} \left(\frac{k_{\text{B}} T_e}{m_e c_0^2} \right)^s \frac{R}{\lambda} \quad (2.96)$$

$$\tau_{s=1}^{\text{X}} = \pi^2 n_{\text{X}}^5 \left(1 + \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{c}}^2} \right)^2 \frac{\omega_{\text{c}}^2 k_{\text{B}} T_e R}{\omega_{\text{p}}^2 m_e c_0^2 \lambda} \quad (2.97)$$

$$\tau_{s \geq 2}^{\text{X}} = \frac{\pi^2 s^{2(s-1)}}{2^{s-1} (s-1)!} n_{\text{X}}^{2s-3} \left[1 + \frac{\omega_{\text{p}}^2 / \omega_{\text{c}}^2}{s(s^2 - 1 - \omega_{\text{p}}^2 / \omega_{\text{c}}^2)} \right] \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{c}}^2} \left(\frac{k_{\text{B}} T_e}{m_e c_0^2} \right)^{s-1} \frac{R}{\lambda}$$

Was die Winkelabhängigkeit betrifft, so sind in [8] die optischen Dicken für einige Situationen dargestellt (Abb. 2.4 und 2.5). Man erkennt, dass die X2-Mode üblicherweise perfekte Absorption liefert. Die Werte für die O2- und die X3-Mode sind miteinander vergleichbar. Sie ergeben i.a. (bei typischen Plasmaparametern) unvollständige Absorption.

Kapitel 3

Ausbreitung und Absorption der O2- und X3-Mode in den Fusionsexperimenten ASDEX Upgrade und W7-X

Um die Praktikabilität der vorgeschlagenen Heizverfahren zu überprüfen soll die zuvor eingeführte Theorie angewendet werden, indem mit Hilfe von Raytracing-Verfahren die Wellenausbreitung in der Näherung des kalten Plasmas (2.31) simuliert wird, und für den erhaltenen Strahlverlauf die Absorption in der O2- und X3-Mode bestimmt wird.

Zuerst sollen die verwendeten Strahlrechnungsmethoden Raytracing und Beamtracing eingeführt werden und anschließend die erhaltenen Simulationsergebnisse für ASDEX Upgrade und W7-X dargestellt werden.

3.1 Raytracing

Die Lösung der vollständigen Wellengleichung (2.30) für den Durchgang des Strahls durch ein großes Fusionsexperiment wie ASDEX Upgrade oder W7-X erweist sich als sehr rechenaufwändig, da das zu simulierende Volumen in der Größenordnung $10^6 \lambda^3$ liegt.

Für Wellengleichungen vom Typ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k(x)^2 \psi = 0 \quad (3.1)$$

kann jedoch die Wentzel-Kramers-Brillouin-(WKB-)Näherung

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{k(x)}} e^{i \int_0^x k(x) dx} \quad (3.2)$$

verwendet werden, falls der Brechungsindex des Mediums im Gebiet des Strahlverlaufs nur schwach veränderlich ist, d.h.

$$\frac{1}{k^4} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{k^3} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \ll 1 \quad (3.3)$$

Durch diese Näherung werden Reflexions- und Modenkonversionseffekte in Brechungsindexgradienten vernachlässigt, sie besitzt aber für die ECRH in großen Fusionsexperimenten in den meisten Fällen Gültigkeit.

Die Erweiterung des Prinzips auf mehrdimensionale Wellenausbreitungsprobleme führt zu sogenannten Raytracing-Verfahren [13, 14]. Es kann gezeigt werden [13, 15], dass mit Hilfe der Dispersionsgleichung (2.36) die Ausbreitung von geometrisch-optischen Strahlen in inhomogenen, anisotropen Medien durch Hamiltonsche Bewegungsgleichungen beschrieben werden kann:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \det[k^2 - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - \epsilon_r] \quad (3.4)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathcal{H}}{d\mathbf{k}} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = -\frac{d\mathcal{H}}{d\mathbf{x}} \quad (3.6)$$

Das Verfahren ist zulässig, solange die WKB-Näherung erfüllt ist, sowie diffraktive Effekte vernachlässigt werden können. Letzteres verlangt insbesondere, dass λ viel kleiner als der Strahldurchmesser zu sein hat.

3.2 Beamtracing

Für das klassische Raytracing wurden verschiedene Verbesserungen entwickelt, insbesondere um diffraktive Effekte besser behandeln zu können. Eines dieser verbesserten Verfahren wird Beamtracing [16, 15, 17] genannt. Dabei wird davon ausgegangen, dass der zu verfolgende Strahl ein Gaußsches Strahlprofil besitzt.

Die Ausbreitung eines astigmatischen Gaußschen Strahles kann in paraxialer Näherung ($k_x \ll k_z$) nach [18] analytisch beschrieben werden.

Für einen Strahl, der bei $z = 0$ das Profil

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{w_{0x} w_{0y}}} e^{-(x^2/w_{0x}^2 + y^2/w_{0y}^2)} \quad (3.7)$$

besitzt, kann ein Ebene-Wellen-Ansatz

$$\psi(x, y, z) = \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \int_{k_y=-\infty}^{\infty} \Psi(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \quad (3.8)$$

gemacht werden. Dabei gilt $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Durch inverse Fourier-Transformation folgt, dass die Koeffizientenfunktion Ψ der ebenen Wellen für den Gaußschen Strahl lautet

$$\Psi(k_x, k_y) = \sqrt{w_{0x} w_{0y}} e^{-\frac{1}{4}(w_{0x}^2 k_x^2 + w_{0y}^2 k_y^2)} \quad (3.9)$$

Mit der paraxialen Näherung $k_z = k_0 - (k_x^2 + k_y^2)/2k_0 + \mathcal{O}(k_x^4, k_y^4)$ kann die dann erhaltene Ebene-Wellen-Darstellung

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \sqrt{w_{0x} w_{0y}} e^{ik_0 z} \\ &\cdot \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \int_{k_y=-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y) - k_x^2 (w_{0x}^2/4 - iz/2k_0) - k_y^2 (w_{0y}^2/4 - iz/2k_0)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (3.10)$$

aufintegriert werden. Es ergibt sich

$$\psi(x, y, z) = \frac{\sqrt{w_{0x} w_{0y}}}{\bar{w}_x(z) \bar{w}_y(z)} e^{ik_0 z} e^{-[x/\bar{w}_x(z)]^2 - [y/\bar{w}_y(z)]^2} \quad (3.11)$$

mit $\bar{w}_x(z) = \sqrt{w_{0x}^2 - i\lambda z/\pi}$ und $\bar{w}_y(z) = \sqrt{w_{0y}^2 - i\lambda z/\pi}$. Die Tailen des Strahls können auch an unterschiedlichen Positionen in z -Richtung liegen, wobei dann $\bar{w}_x(z) = \sqrt{w_{0x}^2 - i\lambda(z - z_{0x})/\pi}$ und $\bar{w}_y(z) = \sqrt{w_{0y}^2 - i\lambda(z - z_{0y})/\pi}$ gilt.

Beim Beamtracing wird dann nicht nur die Veränderung entlang des Strahls des \mathbf{k} -Vektors, sondern auch die der komplexen Breitenparameter $\bar{w}_x(z)$ und $\bar{w}_y(z)$ des Gaußschen Strahls berechnet. Dazu wird dann von den 2. Ableitungen der Hamilton-Funktion $\partial^2 \mathcal{H}/\partial \mathbf{x}^2$, $\partial^2 \mathcal{H}/\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{k}$ und $\partial^2 \mathcal{H}/\partial \mathbf{k}^2$ Gebrauch gemacht [15].

Der Vorteil besteht in einer relativ realistischen Berechnung der Strahlbreite, da sowohl die Linseneffekte des Plasmas als auch die diffraktiven Effekte des Gaußschen Strahls berücksichtigt werden. Dabei sind allerdings noch weitere Verfeinerungen möglich, z.B. durch Berücksichtigung höherer Gaußscher Moden [19] oder durch gekoppelte Strahlensysteme, die ähnlich einem Parabolic-Equation-Ansatz operieren [20].

3.3 ASDEX Upgrade

Zur Vorbereitung der Spiegelentwicklung wurden Simulationen der Plasmadurchstrahlung für ASDEX Upgrade und W7-X durchgeführt. Dazu wurden

die am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP) in Garching und Greifswald entwickelten Codes TRAVIS (Raytracing-Code für W7-X) [21, 22] und TORBEAM (Beamtracing-Code für ASDEX Upgrade) [16, 15, 17] verwendet.

TORBEAM ist einer der Standard-Codes zur ECRH-Simulation in ASDEX Upgrade und daher relativ sorgfältig auf Zuverlässigkeit getestet. Er sollte hinreichend realistische Ergebnisse für das betrachtete Problem liefern. Als sehr vorteilhaft stellt sich die Beamtracing-Funktionalität heraus. Dies erlaubt nämlich die Verwendung eines realistischen Gaußschen Strahlprofils für die später zu erfolgende holographische Phasenrekonstruktion. Unter anderem war dies ein Grund für die Berechnung des Testspiegels für ASDEX Upgrade anstatt für W7-X.

TRAVIS ist ein neu entwickelter (und noch nicht komplett vollständiger) Code, der sowohl das Raytracing- als auch das Beamtracing-Verfahren beinhalten soll. Im Moment steht jedoch noch kein Beamtracing zur Verfügung, da der Schwerpunkt der Entwicklung mehr auf realistischere Simulation von Absorption und Stromtrieb gelegt wurde. Erwähnenswert ist, dass er die Berechnung der X3-Absorption erlaubt, wofür im folgenden auch Ergebnisse gezeigt werden.

3.3.1 Absorption

Für ASDEX Upgrade wurde ein Szenario mit einer relativ hohen Dichte von etwa $n_e = 9 \cdot 10^{19}/\text{m}^3$ untersucht. Dies ist noch unterhalb der Cutoff-Dichte der X-Mode $n_e = 1.25 \cdot 10^{20}/\text{m}^3$ bei $f = 140$ GHz, aber als Proof-of-Principle-Experiment wäre das Szenario denkbar. Bei ASDEX Upgrade besteht allerdings seit kurzem Interesse an Szenarien mit deutlich höherer Dichte, daher nimmt auch die Bedeutung der Heizung in der O2- oder X3-Mode an diesem Experiment zu.

Bei den verwendeten Daten für die magnetische Konfiguration sowie das Dichte- und Temperaturprofil handelt es sich um experimentelle Werte, die von den Plasmadiagnostiken gemessen wurden. Für die magnetische Konfiguration wurde die sogenannte FPP-Diagnostik (Funktionsparametrisierung des Plasmas), bei der über eine Funktionsparametrisierung aus den Magnetfelddaten außerhalb angebrachter Spulen das magnetische Gleichgewicht errechnet wird [23]. Die Elektronendichte wurde mit Hilfe der DLP-Diagnostik bestimmt (welche Infrarot-Laser-Interferometrie und Emissionsspektroskopie an einem hochenergetischen Lithiumteilchen-Strahl verwendet), die Elektronentemperatur über die Messung der Elektronenzyklotronemission (ECE). In Abb. 3.1 sind die Elektronendichte und -temperatur über dem poloidalen Radius ρ_p dargestellt.

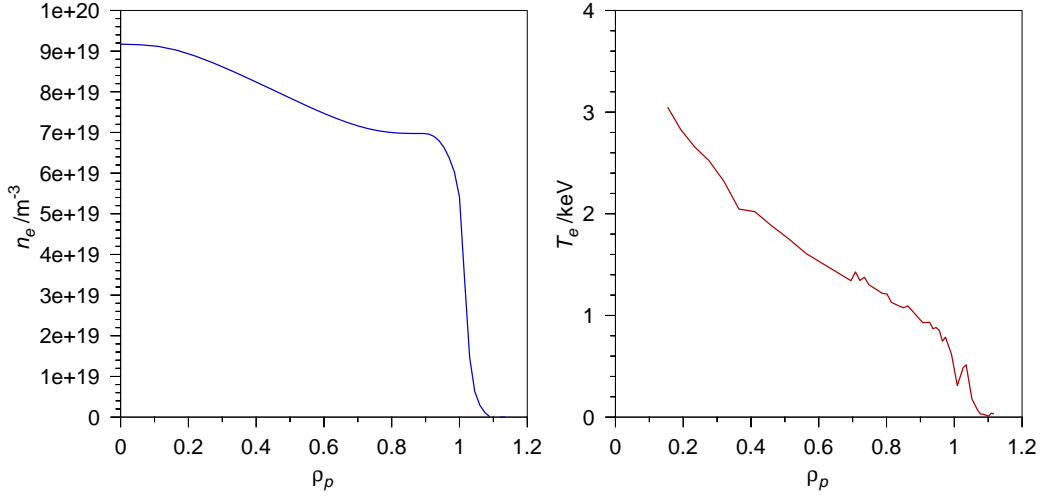


Abbildung 3.1: Dichte- und Temperaturprofil des für die TORBEAM-Simulation verwendeten ASDEX Upgrade-Szenarios. Auf der Abszisse ist der poloidale Radius ρ_p aufgetragen. Dieser stellt eine auf den kleinen Radius des Torus normierte Größe dar, d.h. der Rand des Plasmas befindet sich bei $\rho_p = 1$.

Leider verfügt der TORBEAM-Code nicht über die Fähigkeit, Absorption bei der 3. Harmonischen zu berechnen, daher wird für ASDEX Upgrade nur die Heizung in der O2-Mode untersucht. Um die maximal mögliche Absorption bei einem Durchgang zu bestimmen, wurde ein Parametersweep über der Einstrahlrichtung durchgeführt (Abb. 3.2). Die Einstrahlrichtung \mathbf{k}_0 wurde dabei durch die Polarwinkel ϕ und θ spezifiziert. Der Startpunkt \mathbf{x}_0 befindet sich auf der positiven x -Achse, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ bezeichnet den großen Radius des Torus oder – dazu äquivalent – den Radius in Zylinderkoordinaten. Für den Vektor \mathbf{k}_0 gilt

$$\mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Aus Abb. 3.2 ist ersichtlich, dass für das Szenario die maximale Absorption etwa bei $\theta = -9^\circ$ und $\phi = -15^\circ$ erreicht wird und etwa 63% beträgt. Insbesondere deckt sich das Ergebnis für den optimale Toroidalwinkel von $\phi = -15^\circ$ mit der analytischen Rechnung.

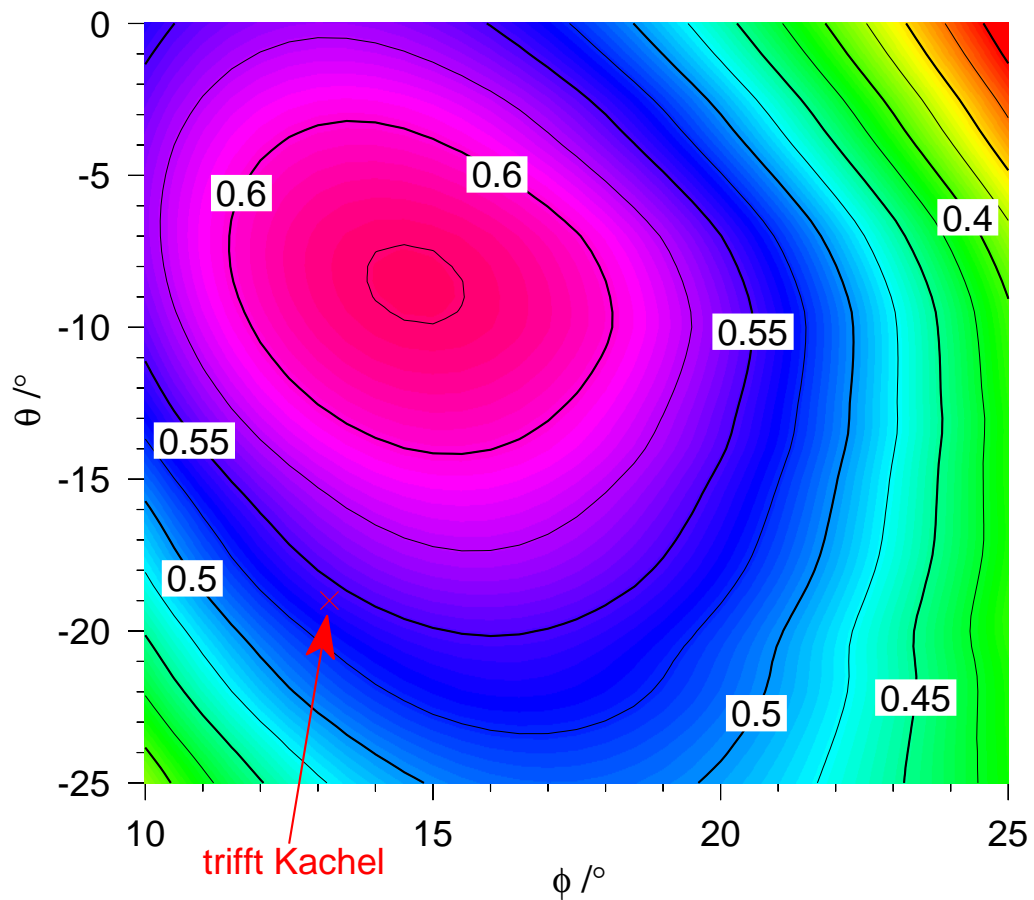


Abbildung 3.2: TORBEAM-Simulation der Ausbreitung der O2-Mode für das ASDEX Upgrade-Szenario in Abhängigkeit von den Einstrahlwinkeln.

3.3.2 Strahlableitung

Das ASDEX Upgrade-Szenario soll nun etwas genauer in Hinsicht auf den Strahlengang untersucht werden. Zuerst ist anzumerken, dass es ungünstig ist, in der Mittelsäule von ASDEX Upgrade einen Spiegel auf mittlerer Höhe anzubringen, da in der Endphase der Entladung das Plasma dort sehr dicht anliegt und damit die Belastung der Wand hoch ist. Daher wurde für den Spiegel eine Doppelkachel gewählt, die sich relativ weit oben im Gefäß befindet (Markierung in Abb. 3.3 rechts), aber immer noch einen Strahlengang mit hoher Absorption (54%) ergibt. In Abb. 3.4 ist der Strahlengang, den die TORBEAM-Simulation ergibt, gezeigt. Man erkennt, dass man um das Zentrum des Plasmas zu durchstrahlen, eine wesentlich tiefer sitzende Kachel ersetzen müsste.

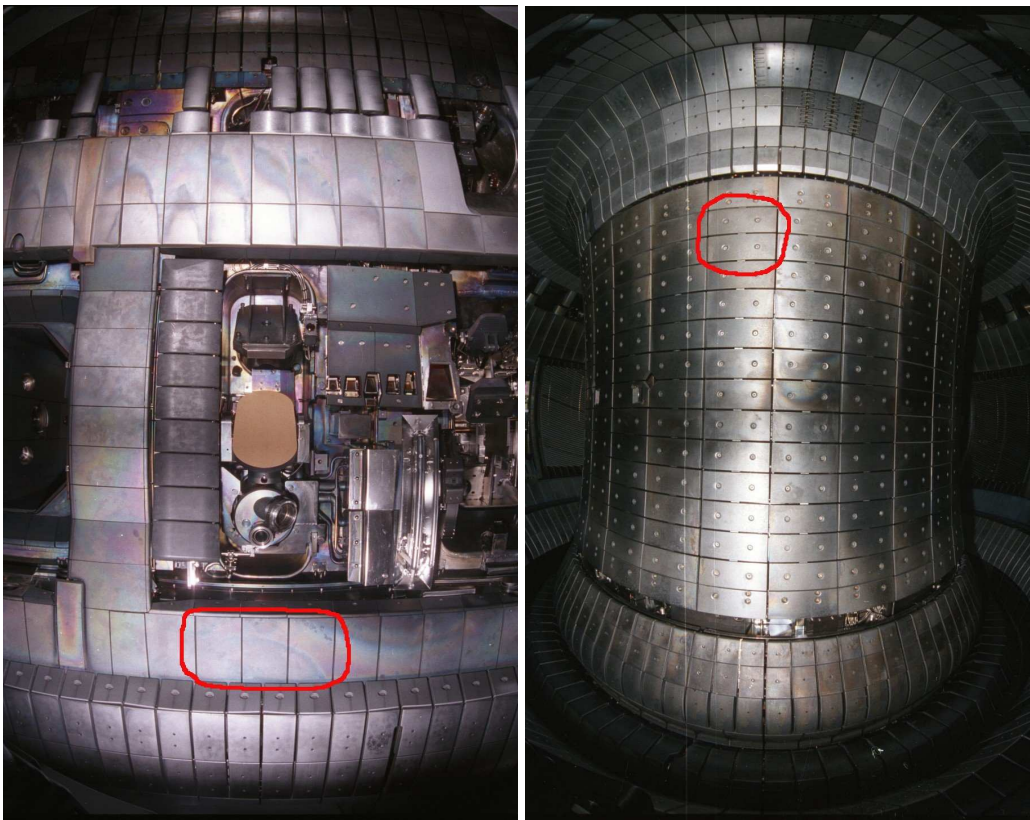


Abbildung 3.3: Plasmagefäß von ASDEX Upgrade in Garching, Außenwand des Torus-Inneren (l), Innensäule (r). Genau in der Mitte des Bildes (l) ist der ECRH-Launcher-Spiegel zu sehen. In rot sind die Auftreffregionen des Mikrowellenstrahles für das geplante Experiment mit Spiegel an der Innensäule markiert. Die Markierung an der Innensäule zeigt die zu ersetzende Doppelkachel.

Aus der Tatsache, dass der Strahl bei hohen Dichten vom Plasma – insbesondere auch durch die nichtzentrale Durchstrahlung – eine merkliche Ablenkung erfährt, folgt natürlich, dass der Einfallswinkel auf den Spiegel vom Szenario abhängig ist. Der Effekt wurde abgeschätzt, indem der Zentralstrahl der TORBEAM-Rechnung mit dem geraden Zentralstrahl der Ausbreitung im Vakuum verglichen wurde. Der Winkel zwischen den Auftreffrichtungen Vakuum \leftrightarrow Plasma wurde damit zu 1.4° berechnet, d.h. der Effekt ist klein genug um anzunehmen, dass der Spiegel im kompletten Dichtebereich von 0 bis zu $9 \cdot 10^{19}/\text{m}^3$ funktionieren würde.

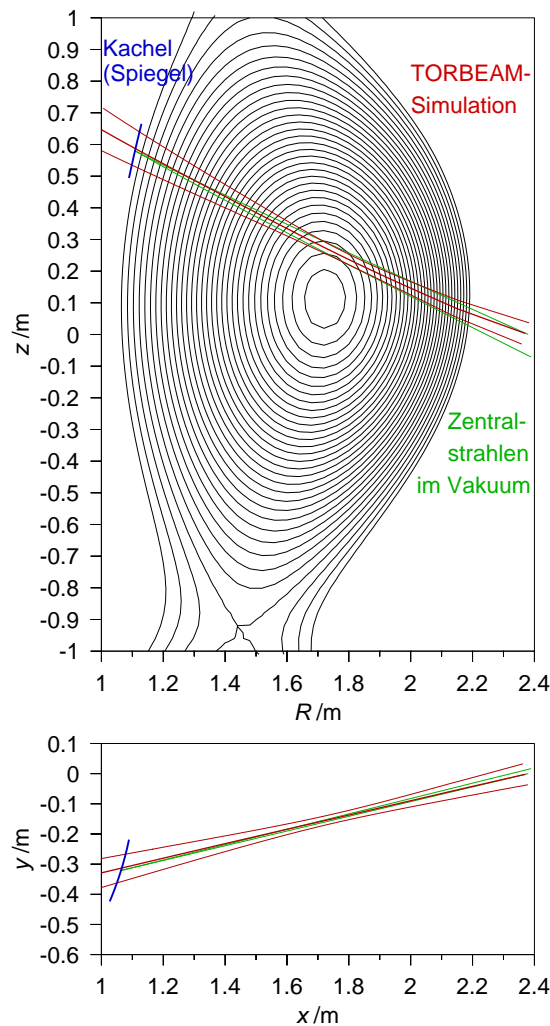


Abbildung 3.4: TORBEAM-Simulation des Strahlverlaufs der O2-Mode für das ASDEX Upgrade-Szenario ($n_e = 9 \cdot 10^{19}/\text{m}^3$). Die Einstrahlrichtung wurde so gewählt, dass der Strahl bei dem B_0 - und n_e -Profil des Szenarios genau die Spiegel-Doppelkachel trifft. Für einen Spiegel, der den Strahl bei dieser Dichte genau in sich zurückreflektiert, wurde außerdem die Situation im Vakuum berechnet und der zugehörige Strahlverlauf eingezeichnet, was einen anschaulichen Eindruck von der Auswirkung der Strahlablenkung in diesem Dichtebereich ermöglicht.

3.3.3 Mehrfachdurchgänge mit Spiegel

Der letzte Schritt ist, für das Szenario einen geeigneten 2. Durchgang des Strahls durch das Plasma zu bestimmen. Für Niederleistungsexperimente zur Absorption könnte der Strahl einfach in sich zurückreflektiert werden, was

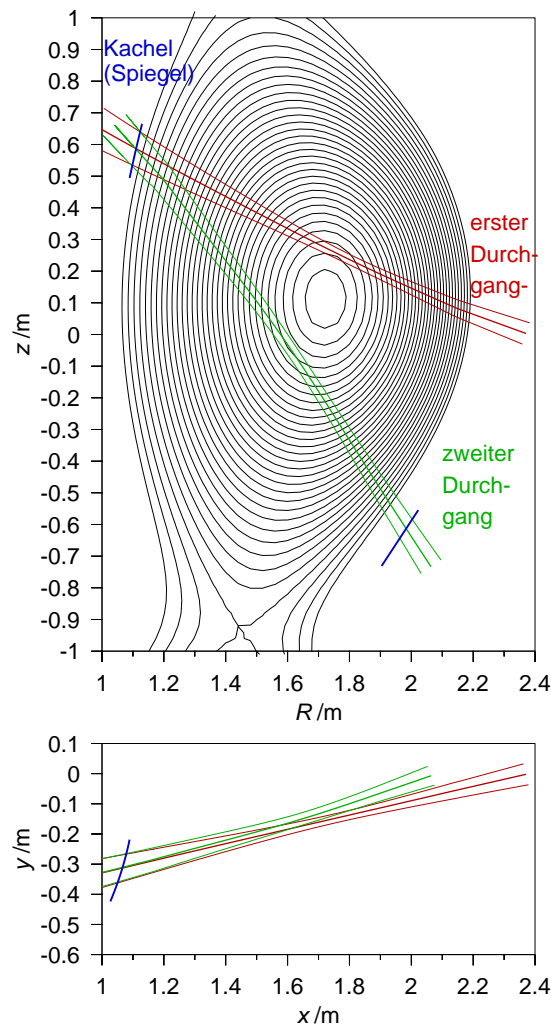


Abbildung 3.5: TORBEAM-Simulation des Strahlverlaufs der O2-Mode für das ASDEX Upgrade-Szenario ($n_e = 9 \cdot 10^{19}/\text{m}^3$) mit Spiegel und 2. Durchstrahlung, welche auf die Außenwand unterhalb des ECRH-Launchers gerichtet ist.

die Detektion erleichtern würde, da die Messung von außerhalb über die bestehenden ECRH-Hohlleiter möglich wäre. Für diese Situation wäre bei einer angenommenen Effizienz des Spiegels von 90% mit einer Gesamtabsorption über beide Durchgänge von 76% zu rechnen.

Für tatsächliche Heizung mit Hochleistung würde sich dieses Setup jedoch verbieten, da die Rückreflexion der übrigen Leistung in den ECRH-Hohlleiter und damit ins Gyrotron nicht erlaubt ist. Deshalb wurde ein weiteres Setup entworfen (Abb. 3.5), bei dem der zurücklaufende Strahl die Wandkacheln unterhalb des ECRH-Launchers trifft (Markierung in Abb. 3.3 links). Laut

TORBEAM hätte der 2. Durchgang dann eine Absorptionseffizienz von 72%, was wiederum mit einer Effizienz des Spiegels von 90% eine Gesamtabsorption von 83% ergäbe.

Möglicherweise wäre sogar noch ein 3. Durchgang möglich, womit sich die Effizienz noch weiter erhöhen würde.

3.4 Wendelstein 7-X

Für die ECRH ergeben sich aufgrund der dreidimensionalen Geometrie von W7-X völlig verschiedene Situationen in Abhängigkeit vom Toroidalwinkel der Launcherposition. Es wurden daher für die beiden Extrema der magnetischen Konfiguration – die sogenannte „Dreiecksebene“ und die sogenannte „Bohnenebene“, in der das Plasma in axialer Richtung sehr ausgedehnt ist – separate Simulationen durchgeführt. Die beiden extremen poloidalen Querschnittsebenen sind in Abb. 1.2 sowie in Abb. 3.6–3.8 dargestellt.

Für die Rechnungen wurde der neue TRAVIS-Code verwendet. Dieser soll zwar Beamtracing-Funktionalität erhalten, leider war diese jedoch zum Zeitpunkt der Anfertigung dieser Arbeit noch nicht verfügbar. Daher basieren die hier gezeigten Ergebnisse auf reinen Raytracing-Rechnungen. Der Code erlaubt jedoch die Berechnung der Absorption bei der 3. Harmonischen, daher wurden sowohl für die O2-Mode als auch für die X3-Mode Resultate gewonnen.

3.4.1 Strahlableitung

Als erstes Ergebnis zeigt sich, dass in der Dreiecksebene die Defokussierungseffekte des Plasmas extrem stark sind, was auf die ungünstige Geometrie mit starken vertikalen Gradienten zurückzuführen ist (Abb. 3.6). Da der Strahl dann natürlich auch sehr sensitiv auf Dichteänderungen reagiert, ist das Szenario für Spiegelanordnungen eher ungeeignet.

Ungleich günstiger sieht es in der Bohnenebene aus. Es tritt zwar relativ starke Brechung im hohen Dichtegradienten am Plasmarand auf, jedoch findet kaum Defokussierung statt. Dies gilt sowohl für die O2-Mode als auch für die X3-Mode günstigen toroidalen Einstrahlwinkel ϕ (Abb. 3.7,3.8).

Um die Relevanz der Ablenkungseffekte für das Spiegeldesign zu quantifizieren, wurde für die gezeigte Situation in der Bohnenebene ein Sweep über die Elektronendichte durchgeführt und die Einstrahlrichtung so korrigiert, dass immer dieselbe Position an der inneren Wand getroffen wird. Die Abhängigkeit des Toroidalwinkels ϕ_{out} und des Poloidalwinkels θ_{out} des Strahls beim Austritt aus dem Plasma von der Elektronendichte n_e sind in Abb. 3.9 und 3.10 dargestellt.

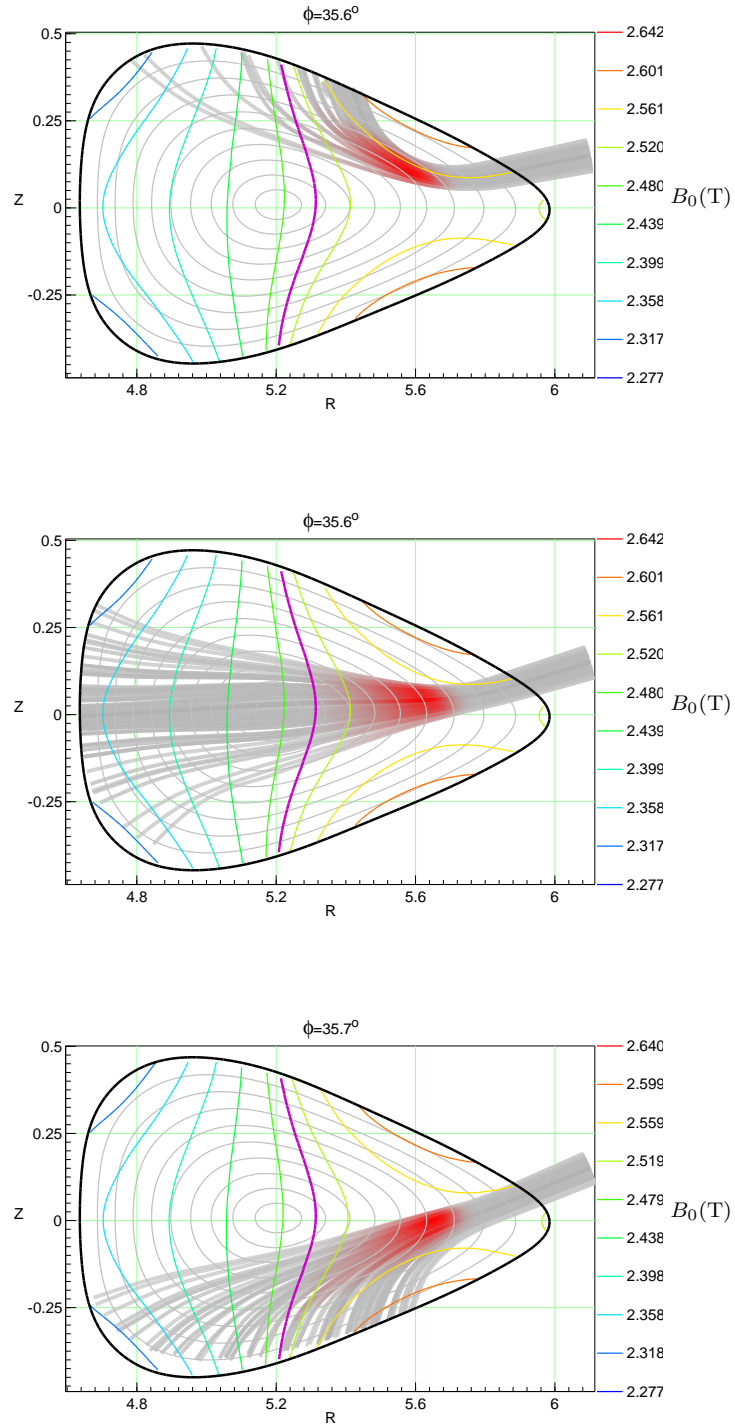


Abbildung 3.6: Bei der Heizung in O2-Mode in der Dreiecksebene von W7-X ($n_e = 1.4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$) tritt starke Ablenkung und Defokussierung auf. Daher ist das Szenario für Spiegelanordnungen nicht zu empfehlen.

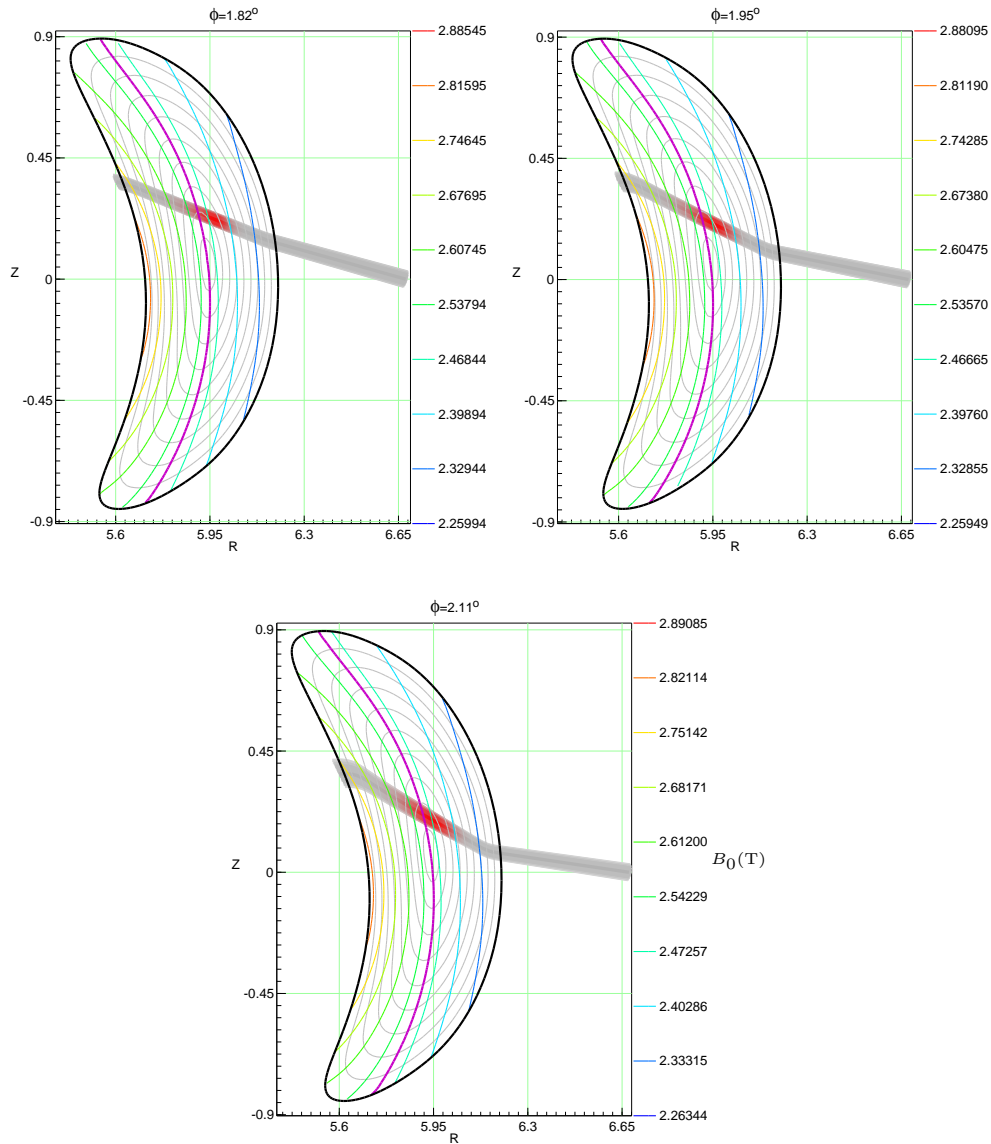


Abbildung 3.7: Bei der Heizung in O2-Mode in der Bohnenebene von W7-X tritt kaum Defokussierung auf. Strahlverlauf bei unterschiedlichen Dichten, $n_e = 1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ (lo), $n_e = 1.9 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ (ro), $n_e = 2.25 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ (u).

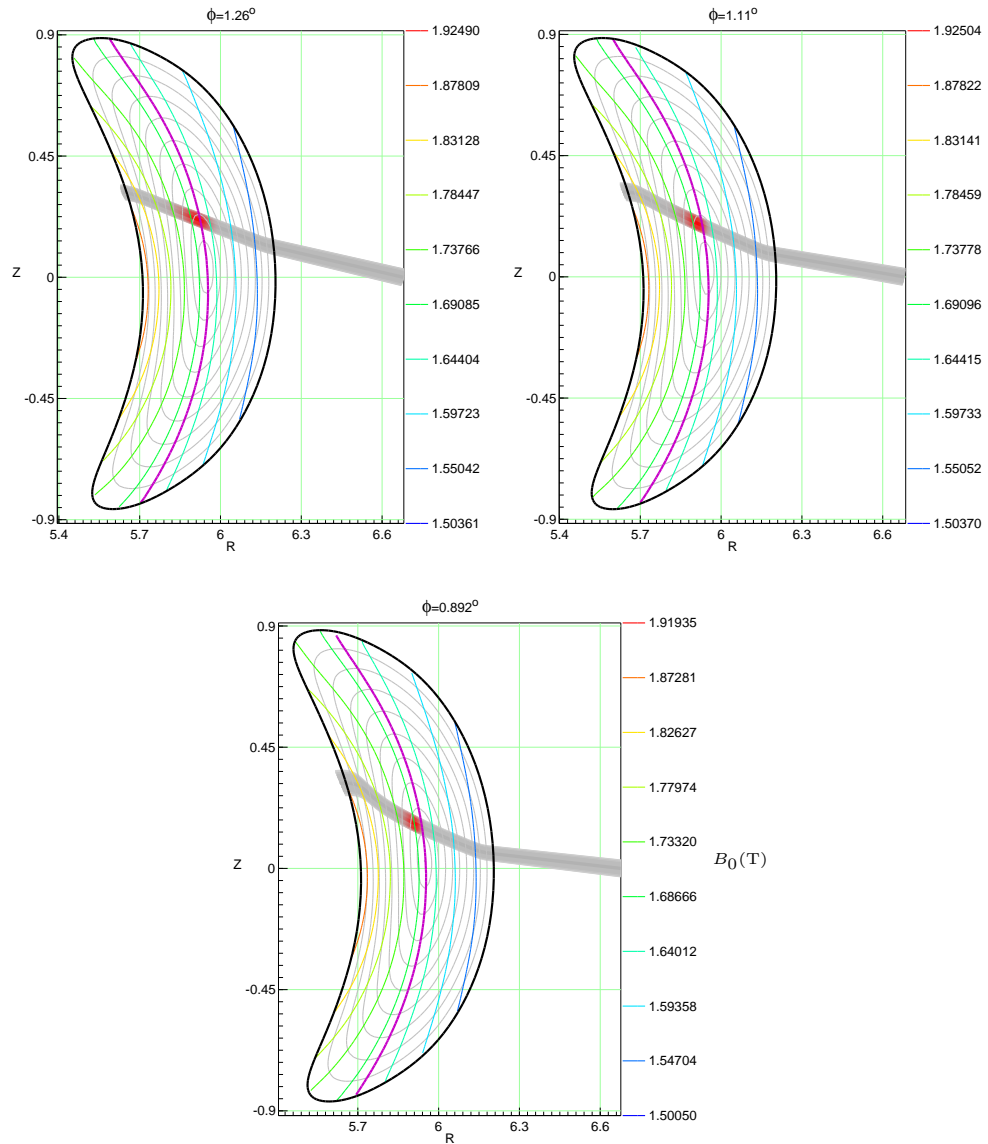


Abbildung 3.8: Heizung in X3-Mode in der Bohnenebene von W7-X. Strahlverlauf bei unterschiedlichen Dichten, $n_e = 8.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ (lo), $n_e = 1.3 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ (ro), $n_e = 1.5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ (u). Die sehr hohe Absorption bei großen positiven Poloidalwinkeln kommt dadurch zustande, dass der Strahl so abgelenkt wird, dass er an der Resonanzfläche entlang läuft.

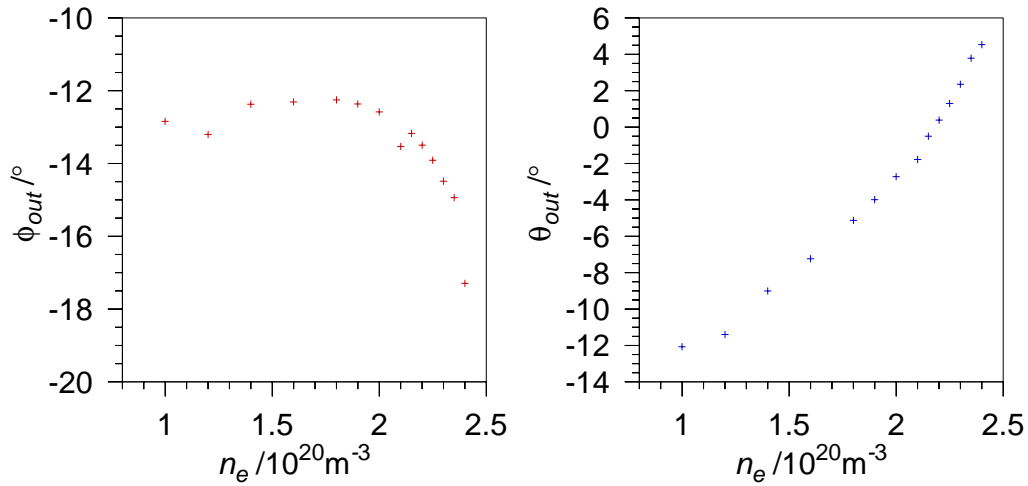


Abbildung 3.9: Strahlableitung bei Heizung in der Bohnenebene von W7-X in O2-Mode. Die Winkel ϕ_{out} und θ_{out} , die die Ausfallsrichtung des Strahls aus dem Plasma spezifizieren, sind in Abhängigkeit von der Elektronendichte n_e aufgetragen.

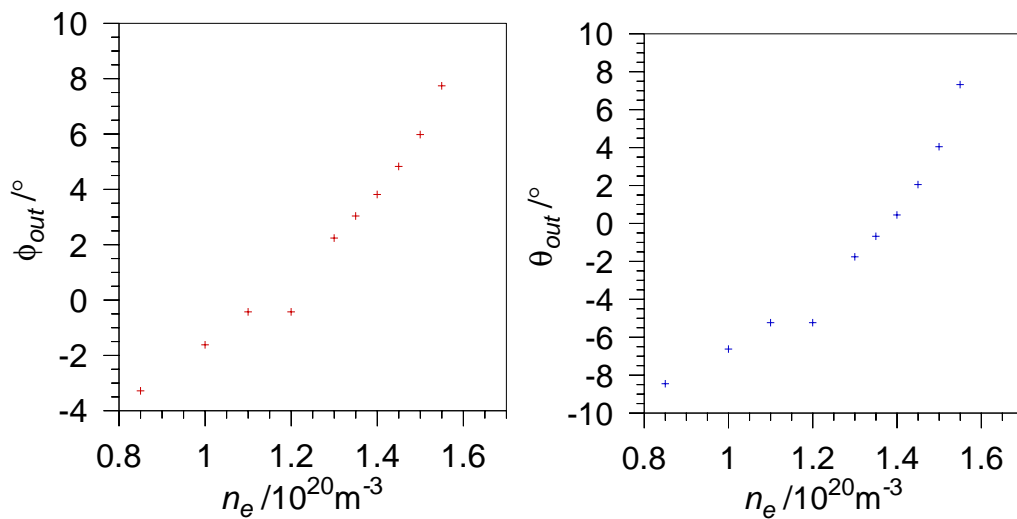


Abbildung 3.10: Strahlableitung bei Heizung in der Bohnenebene von W7-X in X3-Mode. Die Winkel ϕ_{out} und θ_{out} , die die Ausfallsrichtung des Strahls aus dem Plasma spezifizieren, sind in Abhängigkeit von der Elektronendichte n_e aufgetragen.

3.4.2 Absorption

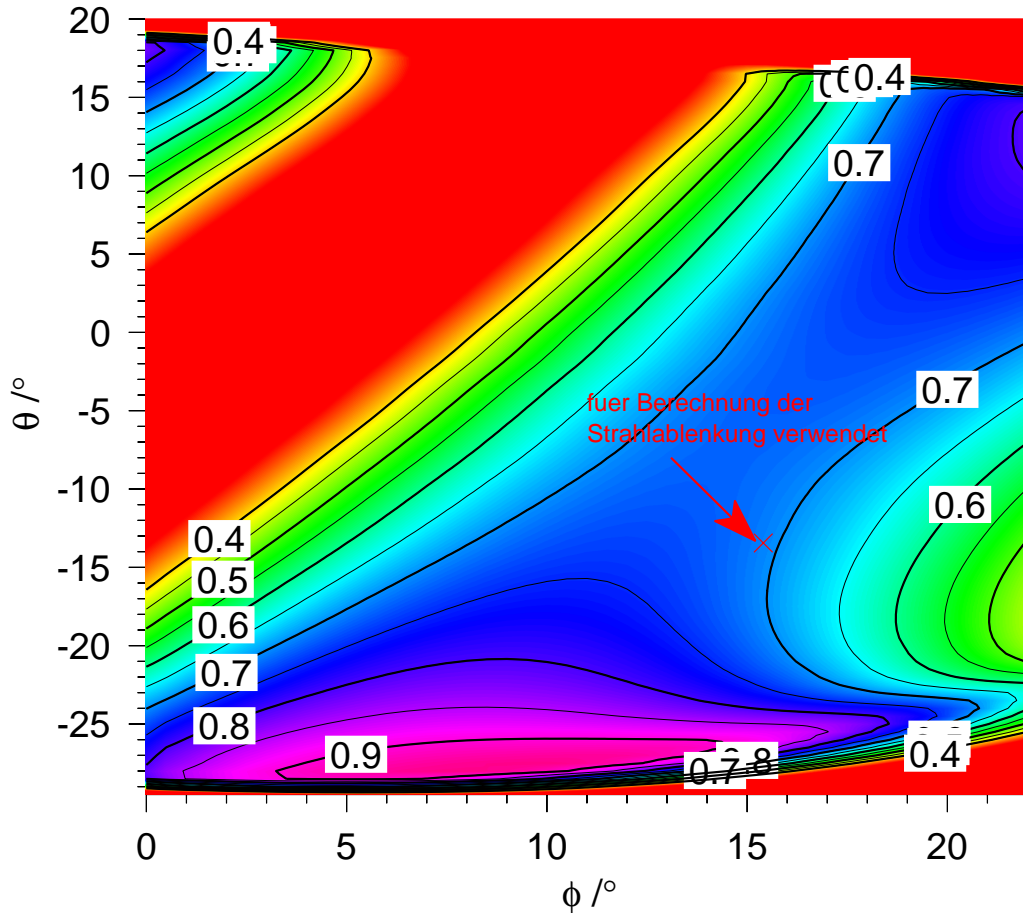


Abbildung 3.11: Absorptionseffizienz der O2-Mode in W7-X bei einer Elektronendichte von $n_e = 1.4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ und Temperatur $T_e = 2.5 \text{ keV}$ in Abhängigkeit von den Einstrahlwinkeln θ und ϕ . Das Kreuz markiert die Einstrahlrichtung, die für die Bestimmung der Strahlablenkung (Abb. 3.9) verwendet wurde. Die sehr hohe Absorption bei $\theta \approx -30^\circ$ kommt dadurch zustande, dass der Strahl so abgelenkt wird, dass er an der Resonanzfläche entlang läuft (Abb. 3.13).

Aus oben erwähnten Gründen soll für W7-X die Absorption nur in der Bohnenebene genau analysiert werden. Da der TRAVIS-Code auch Rechnungen für die X3-Mode erlaubt, sind im folgenden die Absorption für ein Szenario in O2-Mode als auch eines in X3-Mode bei $f = 140 \text{ GHz}$ dargestellt. Für die O2-Mode wurde ein zentrales Feld $B_0 = 2.5 \text{ T}$ sowie die eine zentrale Elektronendichte $n_e = 1.4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, für die X3-Mode $B_0 = 1.67 \text{ T}$ und $n_e = 8.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ verwendet. Die Absorptionseffizienz in Abhängigkeit

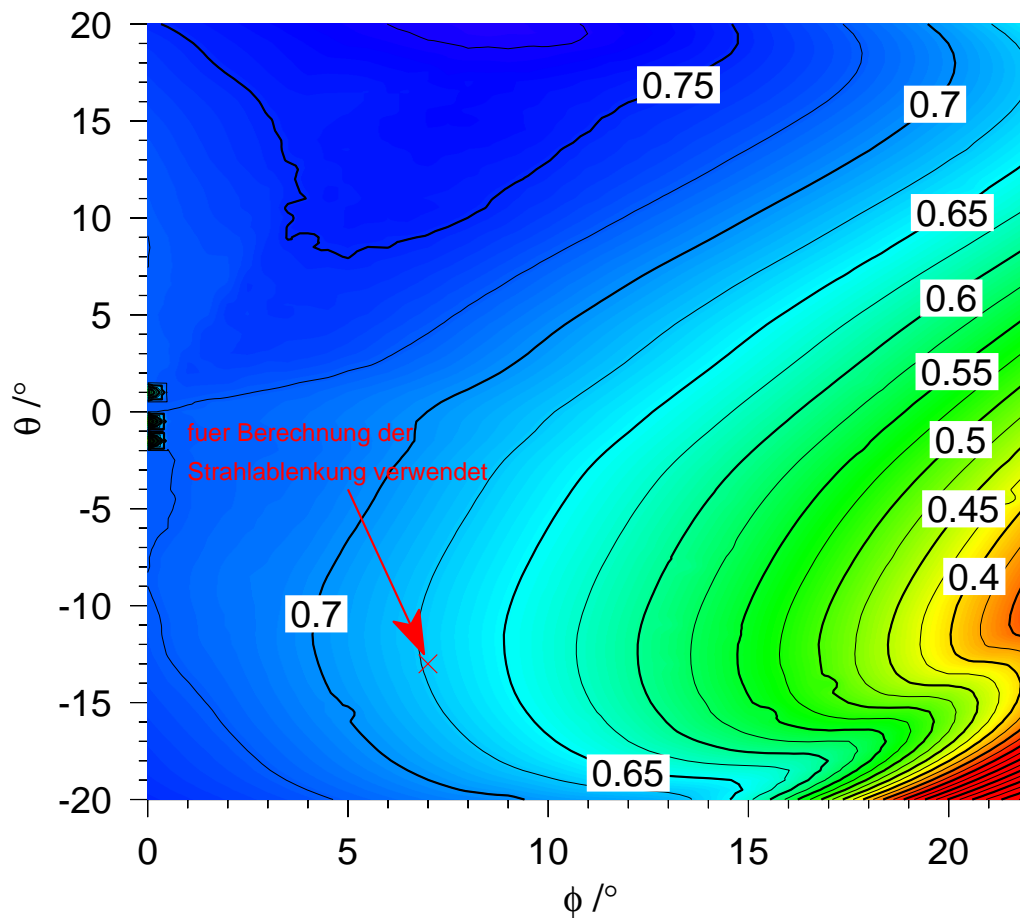


Abbildung 3.12: Absorptionseffizienz der X3-Mode in W7-X bei Dichte $n_e = 8.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ und Temperatur $T_e = 2.5 \text{ keV}$ in Abhängigkeit von den Einstrahlwinkeln θ und ϕ . Das Kreuz markiert die Einstrahlrichtung, die für die Bestimmung der Strahlablenkung (Abb. 3.10) verwendet wurde.

von den Lauching-Winkeln ϕ und θ ist in Abb.3.11 und 3.11 dargestellt. Für die O2-Mode ist bei dieser Dichte eine sehr hohe Absorptionseffizienz zu erreichen, da es möglich ist, durch die Strahlablenkung des Plasmas einen Strahlverlauf entlang der Resonanzfläche zu erhalten (Abb. 3.13). Jedoch ist die Situation erstens stark dichteabhängig und daher für Spiegelanordnungen nicht zu empfehlen, und zweitens verursacht der Strahlverlauf senkrecht zu den Flussflächen eine schlechte Lokalisierung der Leistungsdeposition.

Es ist ersichtlich, dass für stabilere Anordnungen, sowohl für das O2- als auch für das X3-Szenario mit einer Absorption im Bereich 70–80 % zu rechnen ist.

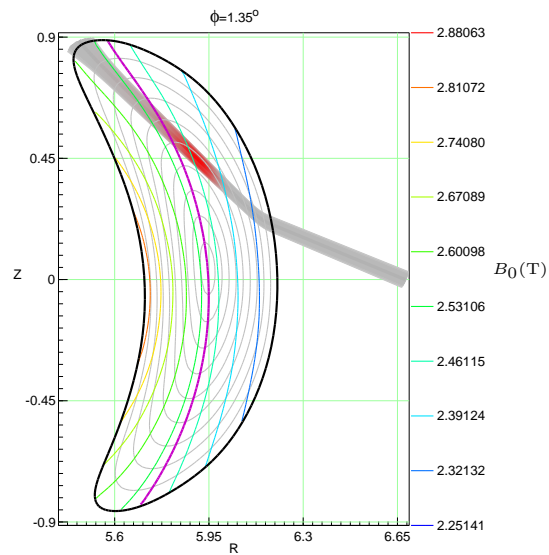


Abbildung 3.13: Strahlverlauf bei Einstrahlung in die Bohnenebene von W7-X in der O2-Mode mit großem negativem Poloidalwinkel θ . Die Absorption wird sehr hoch, weil der Strahl an der Resonanzfläche entlang verläuft. Das Szenario ist allerdings nicht stabil (stark dichteabhängig) und daher für Spiegelanordnungen ungeeignet.

Kapitel 4

Optimierung des Gitterspiegels

Wie schon zuvor erwähnt, soll die Gesamtabsorption der O2- bzw. X3-Mode erhöht werden, indem an der Auftreffstelle an der Gefäßinnensäule ein Spiegel angebracht werden. Das folgende Kapitel beschäftigt sich nun mit der Auslegung des Spiegels und der zugrundeliegenden Theorie der Wellenausbreitung.

4.1 Holographischer Gitterspiegel

Ein Spiegel an der Innenwand des Plasmagefäßes sollte vielerlei Anforderungen gerecht werden. Er sollte das Plasma nicht stören, d.h. er sollte sich auf keinen Fall vor der ersten Wand befinden und auch möglichst keine Lücke in der Wand verursachen. Damit ergibt sich idealerweise ein Spiegel, der der Wandgeometrie angepasst ist. Er sollte den Mikrowellenstrahl möglichst perfekt in eine Richtung reflektieren, in der er beim zweiten Durchgang durch das Plasma gut absorbiert wird, dabei aber auch möglichst wenig Leistung in andere Richtungen streuen. Außerdem sollte er den Strahl refokussieren und die Polarisierung der Welle bei Zerlegung in X- und O-Mode gemäß (2.51) erhalten.

Eine Reflexion in eine beliebige Richtung mit minimaler Änderung der Wandgeometrie lässt sich durch Auslegung des Spiegels als Phasengitter erreichen. Durch die Anwendung holographischer Verfahren lässt sich außerdem Kontrolle über die Fokussierungseigenschaften des Spiegels erreichen [24, 25].

4.1.1 Holographische Gitter

Die Grundlage holographischer Phasengitter ist, eine Phasenrekonstruktion des gewünschten auslaufenden Strahls zu bewerkstelligen, d.h. die Phasenver-

teilung des einlaufenden Strahls $\varphi(a_{\text{in}})$ in die des gewünschten auslaufenden Strahls $\varphi(a_{\text{out}})$ zu transformieren [26].

Es wird angenommen, dass die reflektierende Fläche eine beliebige Form haben kann, die durch die parametrische Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{S}(u, v) \quad (4.1)$$

beschrieben wird, mit den Parametern u und v , sowie dem Normalenvektor

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right|} \quad (4.2)$$

Dann lassen sich bei bekanntem einlaufendem und auslaufendem Strahl jedem Punkt dieser Oberfläche, d.h. jedem (u, v) -Tupel eine notwendige Phasenkorrektur

$$\Delta\varphi(u, v) = \varphi(a_{\text{out}}(\mathbf{S}(u, v))) - \varphi(a_{\text{in}}(\mathbf{S}(u, v))) \quad (4.3)$$

sowie lokale Einfallswellen- und Ausfallswellenvektoren

$$\mathbf{k}_{\text{in}}(u, v) = \nabla\varphi(a_{\text{in}}(\mathbf{S}(u, v))) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{k}_{\text{out}}(u, v) = \nabla\varphi(a_{\text{out}}(\mathbf{S}(u, v))) \quad (4.5)$$

zuweisen. Das Profil des Gitters ist durch das holographische Verfahren nicht festgelegt. Man nehme an, dass es durch die Randkurve $h(r)$ gegeben ist, wobei h die Höhe entlang \mathbf{n} bezeichnet und r die Gitter-Koordinate in der Reflexionsfläche S bezeichnet, welche auf eine Gitterperiode von $2\pi \cdot m$ normiert ist (es gilt $h(r) = h(r + 2\pi \cdot m)$). Dabei bezeichnet m die Ordnung des Gitters.

Dann erhält man als Oberfläche des Hologramms in parametrischer Darstellung

$$\mathbf{S}_{\text{holo}}(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + h(\Delta\varphi(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \quad (4.6)$$

4.1.2 Verwendung lokal ebener Gitter

Dabei ist zu beachten, dass, wie in 4.2 genauer diskutiert werden wird, Gitter Leistung nicht nur in eine Gitterordnung m reflektieren, sondern auch

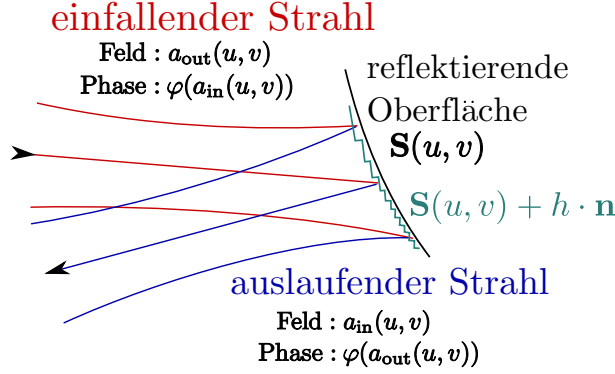


Abbildung 4.1: Prinzip eines holographischen Phasengitters: die Oberfläche S wird mit einem Profil h überzogen, die lokale Höhe ergibt sich aus der Phasendifferenz der Strahlen $\Delta\varphi$.

Phasenverschiebungen φ_m zwischen den Polarisierungen der elektromagnetischen Wellen verursachen. Die Effekte hängen von der genauen Form der Randkurve $h(r)$ ab. Das Problem kann bei der Betrachtung von ebenen Gittern diskutiert und befriedigend gelöst werden, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt werden wird.

Es liegt daher nahe, den holographischen Spiegel lokal als ebenes Gitter zu betrachten, für dessen Einfallswellenvektoren dann gemäß Definition in 4.2.2 gilt

$$\alpha_0 = \mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{G}_1 \quad (4.7)$$

$$\alpha_m = \mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{G}_1 \quad (4.8)$$

$$k_{xy} = \sqrt{(\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{G}_1)^2 + (\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n})^2} = \sqrt{(\mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{G}_1)^2 + (\mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{n})^2} \quad (4.9)$$

$$\gamma = \mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{G}_2 = \mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{G}_2 \quad (4.10)$$

woraus sich alle anderen Gitterparameter berechnen lassen. Dabei bezeichnet \mathbf{G}_1 die Gitterrichtung und \mathbf{G}_2 die Richtung der Nut

$$\mathbf{G}_1 = \frac{(\mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}}) - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}})]}{|(\mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}}) - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}})]|} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{G}_1 \quad (4.12)$$

Da die Gitterparameter von der Position auf dem Spiegel abhängen, sich aber nur kontinuierlich langsam mit der Position verändern, sollte es möglich sein, einen Satz von Profilen zu verwenden, die auf die auftretenden relevanten Gitterparameter $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \alpha_0/k_{xy}$ und $\theta_m = \frac{\pi}{2} + \arcsin \alpha_m/k_{xy}$ optimiert sind und dann zwischen den Profilen des Satzes zu interpolieren.

Man beachte, dass dies die einzigen relevanten Parameter sind, da die Antwort des Gitters sich nicht verändert, wenn diese Parameter konstant bleiben und die Höhe h mit $\lambda_{xy} = 2\pi/k_{xy}$ skaliert wird.

4.2 Theorie ebener Gitter

Die exakte Simulation holographischer Gitter ist i.A. sehr rechenaufwändig, da ein echtes 3-dimensionales Problem vorliegt, das zudem noch über eine Ausdehnung weit größer als die Wellenlänge verfügt. Es kann jedoch in Vereinfachung angenommen werden, dass lokal ein ebenes Gitter vorliegt, aus dem die lokale Reflexionsantwort berechnet werden kann.

Mit dem Begriff ebenes Gitter soll im weiteren ein prismatisches, unendlich ausgedehntes periodisches Profil bezeichnet werden. Das Profil ist so orientiert, dass es bezüglich der z -Achse homogen ist, und bezüglich der x -Achse periodisch mit der Periodenlänge ℓ . Es ist daher vollständig beschrieben durch zwei Funktionen, die die Randkurve angeben $x = a(r)$, $y = b(r)$, mit $a(0) = 0$, $a(1) = \ell$, $b(0) = b(1)$. Im folgenden wird nun diskutiert, wie eine effiziente Simulation derartiger Gitter durchgeführt werden kann.

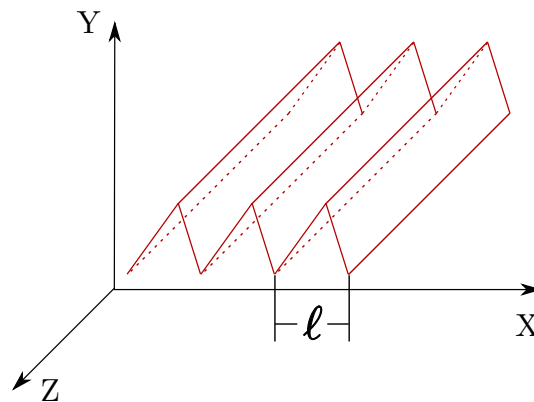


Abbildung 4.2: Koordinatensystem für die Beschreibung von ebenen Gittern.

4.2.1 Periodische Symmetrien in Feldproblemen

Bei der Simulation der Reflexion ebener Gitter lassen sich eine Reihe von Symmetrieeigenschaften ausnutzen, die den benötigten Rechenaufwand stark reduzieren. Diese Ausnutzung von Symmetrien basiert auf der Betrachtung eines linearen Differentialgleichungssystems mit diskreten oder Feldfreiheits-

graden \mathbf{F} und der Anregung \mathbf{A} , welches durch den linearen Operator L beschrieben wird:

$$\dot{\mathbf{F}} = L\mathbf{F} + \mathbf{A} \quad (4.13)$$

Falls dieses System eine Symmetrieeigenschaft für einen Transformationsoperator T und einen komplexen Faktor κ , besitzt, die lautet

$$T^{-1}LT = L \quad \text{und} \quad T\mathbf{A} = \kappa\mathbf{A} \quad (4.14)$$

folgt aus ((4.13))

$$T\dot{\mathbf{F}} = LTF + \kappa\mathbf{A} \quad (4.15)$$

und damit auf Grund der Linearität des Systems

$$T\mathbf{F} = \kappa\mathbf{F} \quad (4.16)$$

Dies wird manchmal als Floquet-Theorem bezeichnet [27], wobei es noch einige weitere damit verwandte Sätze gibt, für die dieser Begriff auch verwendet wird.

4.2.2 Zeitharmonische 2-dimensionale verlustfreie Reflexionsprobleme

Zuerst soll nur die zeitharmonische Lösung für eine Kreisfrequenz ω betrachtet werden, wodurch die Maxwellgleichungen (2.5) und (2.6) auf Grund der Symmetrie bezüglich Zeitverschiebung übergehen in

$$-i\omega\mathbf{E} = c^2\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{j} \quad (4.17)$$

$$-i\omega\mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (4.18)$$

Die anderen beiden Maxwellgleichungen können vernachlässigt werden, da sie in der Kombination aus (4.17), (4.18) und der Kontinuitätsgleichung der Ladung $-i\omega\rho = -\nabla\mathbf{j}$ schon enthalten sind.

Im verlustfreien Fall (unendliche Leitfähigkeit) ist es außerdem nicht notwendig, die Ladungen und Ströme explizit zu betrachten. Im Inneren des Materials verschwinden einfach alle Felder, und es treten nur Oberflächenladungen und Ströme auf. Dadurch kann das Problem vollständig beschrieben werden, indem die Felder nur im Freiraum definiert werden. Da an den Materialübergängen grundsätzlich gelten muss, dass \mathbf{E}_{\parallel} stetig ist [28, 29], folgt $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$. Dabei bezeichnet $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ den (2-komponentigen) Anteil des elektrischen Feldes, der entlang (parallel) der Materialoberfläche orientiert ist.

Des weiteren wird angenommen, dass die Anregung aus einer ebenen Welle besteht, d.h. eine x - und z -Abhängigkeit der Form $\exp[-i(\alpha_0 x + \gamma z)]$ besitzt. Dadurch kann analog zum Zeitverhalten die z -Symmetrie ausgenutzt werden, wodurch die Maxwellgleichungen lauten

$$-i\omega E_x = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} B_z + i\gamma B_y \right) \quad (4.19)$$

$$-i\omega E_y = c^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x} B_z - i\gamma B_x \right) \quad (4.20)$$

$$-i\omega E_z = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) \quad (4.21)$$

$$-i\omega B_x = -\frac{\partial}{\partial y} E_z - i\gamma E_y \quad (4.22)$$

$$-i\omega B_y = \frac{\partial}{\partial x} E_z + i\gamma E_x \quad (4.23)$$

$$-i\omega B_z = -\frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x \quad (4.24)$$

Die Gleichungen (4.19), (4.20), (4.22), (4.23) können umgeformt werden zu

$$(\omega^2 - \gamma^2 c^2) E_x = i\omega c^2 \frac{\partial}{\partial y} B_z - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} E_z \quad (4.25)$$

$$(\omega^2 - \gamma^2 c^2) E_y = -i\omega c^2 \frac{\partial}{\partial x} B_z - i\gamma \frac{\partial}{\partial y} E_z \quad (4.26)$$

$$(\omega^2 - \gamma^2 c^2) B_x = -i\gamma c^2 \frac{\partial}{\partial x} B_z - i\omega \frac{\partial}{\partial y} E_z \quad (4.27)$$

$$(\omega^2 - \gamma^2 c^2) B_y = -i\gamma c^2 \frac{\partial}{\partial y} B_z + i\omega \frac{\partial}{\partial x} E_z \quad (4.28)$$

Einsetzen in (4.21) und (4.24) ergibt

$$k_{xy}^2 E_z = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z \quad (4.29)$$

$$k_{xy}^2 B_z = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) B_z \quad (4.30)$$

mit $k_{xy}^2 = \omega^2/c^2 - \gamma^2$.

Dies bedeutet, es gibt 2 Feldkomponenten, nämlich E_z und B_z , die sich unabhängig voneinander verhalten und ausreichend sind, um das Gesamtproblem zu beschreiben. Die restlichen Felder können dann aus (4.25)–(4.28) bestimmt werden. Dazu ist allerdings vorauszusetzen, dass durch die Randbedingungen ebenfalls keine Kopplung der Felder ins Spiel kommt. Dies ist

aber erfüllt, man sieht, dass als Randbedingungen $E_z = 0$ und $\mathbf{n} \cdot \nabla B_z = 0$ ausreichend sind. Dabei bezeichnet \mathbf{n} die Senkrechte auf die Wandfläche. Die beiden separierbaren Komponenten unterscheiden sich natürlich einfach in der Polarisation. Man bezeichnet die Lösung für E_z als TE-Mode oder Fast-Polarisation, die Lösung für B_z als TM-Mode oder Slow-Polarisation.

Da unmittelbar einsichtig ist, dass das Problem außerdem invariant ist unter räumlicher Skalierung (bei gleichzeitiger Skalierung der Wellenlänge), soll im Folgenden mit auf die effektive Wellenlänge $\lambda_{xy} = 2\pi/k_{xy}$ normierten Größen gearbeitet werden ($\tilde{\ell} = \ell/\lambda_{xy}$, $\tilde{x} = x/\lambda_{xy}$, $\tilde{y} = y/\lambda_{xy}$, $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0/\lambda_{xy}$).

4.2.3 Ausnutzung der Gittersymmetrie

Des weiteren existiert noch eine Symmetrie, die bisher nicht berücksichtigt wurde, nämlich die Invarianz unter einer Verschiebung um eine Gitterperiode, d.h. $TF(\tilde{x}) = F(\tilde{x} + \tilde{\ell})$ und $\kappa = \exp(i\tilde{\alpha}_0\tilde{\ell})$, woraus folgt, dass $F(\tilde{x} + \tilde{\ell}) = F(\tilde{x})\exp(i\tilde{\alpha}_0\tilde{\ell})$, d.h. es genügt die Simulation einer einzelnen Gitterperiode.

Es soll nun ein Bereich betrachtet werden, in dem die Helmholtz-Gleichung über die gesamte Breite gilt, z.B. oberhalb der Nuten. Dort soll das Feld folgendermaßen in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{y}) e^{i(2\pi n/\tilde{\ell} + \tilde{\alpha}_0)\tilde{x}} \quad (4.31)$$

Aus der Helmholtz-Gleichung folgt dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(2\pi - \left(\frac{2\pi n}{\tilde{\ell}} + \tilde{\alpha}_0 \right)^2 \right) c_n(\tilde{y}) + c_n''(\tilde{y}) \right] e^{i(2\pi n/\tilde{\ell} + \tilde{\alpha}_0)\tilde{x}} = 0 \quad (4.32)$$

Da dies über die gesamte Gitterbreite zu gelten hat, kann die Summe entfernt und die Gleichung für die einzelnen Fourierkoeffizienten betrachtet werden:

$$\left(2\pi - \left(\frac{2\pi n}{\tilde{\ell}} + \tilde{\alpha}_0 \right)^2 \right) c_n(\tilde{y}) + c_n''(\tilde{y}) = 0 \quad (4.33)$$

Dies hat die 2 Lösungen

$$c_{n,\pm}(\tilde{y}) = c_{n,\pm,0} e^{\pm i \sqrt{2\pi - (2\pi n/\tilde{\ell} + \tilde{\alpha}_0)^2} \tilde{y}} \quad (4.34)$$

Somit kann das Feld oberhalb der Gitternuten folgendermaßen zerlegt werden

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,+0} e^{i(\tilde{\alpha}_n \tilde{x} + \tilde{\beta}_n \tilde{y})} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,-0} e^{i(\tilde{\alpha}_n \tilde{x} - \tilde{\beta}_n \tilde{y})} \quad (4.35)$$

mit $\tilde{\alpha}_n = 2\pi n/\tilde{\ell} + \tilde{\alpha}_0$ und $\tilde{\beta}_n = \sqrt{(2\pi)^2 - \tilde{\alpha}_n^2}$. Die Terme $e^{i(\tilde{\alpha}_n \tilde{x} \pm \tilde{\beta}_n \tilde{y})}$ nennt man Floquet-Moden [30, 31]. Man sieht, dass sie, sofern $\tilde{\beta}_n$ reell ist, ebenen Wellen entsprechen, wobei das +-Zeichen vom Gitter weg laufende Wellen, das --Zeichen die umgekehrte Richtung bezeichnet. Da $\tilde{\beta}_n$ nur reell ist für

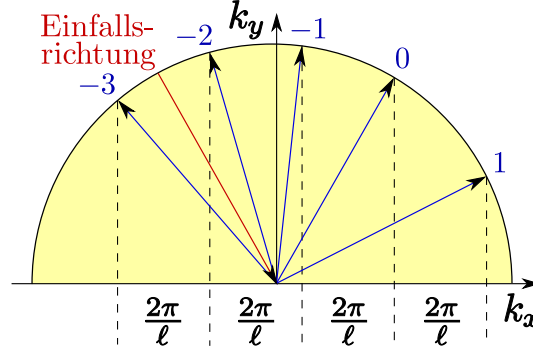


Abbildung 4.3: Geometrische Konstruktion der Gitterordnungen.

$|\tilde{\alpha}_n| \leq 2\pi$, gibt es nur eine endliche Zahl von ausbreitungsfähigen Moden, die anderen sind exponentiell gedämpft und werden daher als evaneszente Moden bezeichnet. Wobei zu beachten ist, dass nur die (+)-Moden auftreten. Die (-)-Moden sind unphysikalisch, da sie in Richtung des Freiraums (+y-Richtung) anwachsen würden. Im folgenden sei angenommen, dass für die einlaufenden Wellen gilt $c_{0,-0} = 1$, sowie $c_{n,-0} = 0$ für $n \neq 0$, d.h. es läuft nur eine ebene Welle auf dem Freiraum ein. Für die ausbreitungsfähigen (+)-Moden, die auch Gitterordnungen genannt werden, gilt folgende Formel für deren relative Intensitäten I_n

$$I_n = \frac{|c_{n,+0}|^2 \sin \theta_n}{\sin \theta_0} \quad (4.36)$$

wobei $\theta_i = \frac{\pi}{2} + \arctan \tilde{\alpha}_n/\tilde{\beta}_n$ den Glanzwinkel der i . Gitterordnung bezeichnet.

Da sich die Rechnung für beide Polarisierungen ausführen lässt, deren $c_{n,+0}$ in der Regel verschieden sind, lässt sich für jede Gitterordnung noch die Phasenverschiebung

$$\varphi_n = \arg\left(-\frac{c_{n,+0}^{\text{TM}}}{c_{n,+0}^{\text{TE}}}\right) \quad (4.37)$$

zwischen den Polarisierungen definieren. Um die Vergleichbarkeit der Leistungen in der TE- und TM-Mode zu gewährleisten, soll zudem noch definiert werden, dass

$$E_z(x, y, z) = F^{\text{TE}}(x, y)e^{i\gamma z} \quad (4.38)$$

$$B_z(x, y, z) = c_0 \cdot F^{\text{TM}}(x, y)e^{i\gamma z} \quad (4.39)$$

Dann gilt, dass für $|c_{m,+0}^{\text{TE}}| = |c_{m,+0}^{\text{TM}}|$ in der Gitterordnung m die Leistung in der TE-Polarisation gleich der Leistung in der TM-Polarisation ist, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

4.3 Simulation mit Hilfe finiter Differenzen

Aufgabe ist nun, die Feldgleichung (4.29) bzw. (4.30), die als 2-dimensionale Helmholtz-Gleichung bezeichnet wird, unter den genannten Randbedingungen zu lösen. Dies ist nur in Spezialfällen analytisch möglich [30], z.B. für rechteckige Gitterprofile [32]. Im allgemeinen Fall muss man dagegen auf numerische Verfahren zurückgreifen. Dabei bieten sich insbesondere die Finite-Differenzen-Methode und die Randlementemethode an [33, 34, 31].

4.3.1 Die Diskretisierung der Helmholtz-Gleichung

Unter dem Verfahren der finiten Differenzen versteht man, ein Feld durch endlich viele Werte darzustellen, die zu unterschiedlichen Punkten gehören, die in einem regelmäßigen Gitter angeordnet sind. Dabei werden die Werte der Felder durch Ausdrücke $F_{m,n}^p$ bezeichnet mit dem Index m für die x -Koordinate, n für die y -Koordinate, p für den Zeitschritt. Es soll nun jedoch nicht die Helmholtz-Gleichung gelöst werden, da dies zu einem impliziten Gleichungssystem führt, das zur Lösung effiziente Algorithmen zur Inversion dünn besetzter Matrizen benötigt, sondern das äquivalente zeitabhängige Problem behandelt werden, das durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} F = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) F \quad (4.40)$$

beschrieben wird, wobei die normierte Kreisfrequenz der Anregung $\tilde{\omega} = 2\pi$ zu wählen ist, d.h. ($\tilde{t} = 1$). Derartige Zeitschrittverfahren, die auf gitterperiodischer Diskretisierung beruhen werden allgemein als Finite Difference Time Domain-Verfahren (FDTD) bezeichnet.

Im folgenden soll nun das Problem unabhängig von der Polarisation behandelt werden, weshalb das Feld wieder F genannt wird. Auf die von der Polarisation abhängigen Randbedingungen wird dann in 4.3.4 eingegangen.

Für die Diskretisierung sind nun 2 Parameter zu wählen, nämlich der Gitterabstand h und der Zeitschritt Δt . Wie diese vernünftig zu wählen sind, wird sich später herausstellen. Da die Wellengleichung eine Differentialgleichung 2. Ordnung in der Zeit ist, und das Speichern mehrerer Zeitschritte vermieden werden soll, soll diese in 2 Gleichungen 1. Ordnung zerlegt werden. Dazu gibt es 2 verschiedene Möglichkeiten

1.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} U = \Delta t \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) F, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} F = \frac{1}{\Delta t} U$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} F = \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} W, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} V = \frac{h}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} F, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} W = \frac{h}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} F$$

wobei U , V und W neu eingeführte Hilfsfelder sind, die mit physikalischen Größen identifiziert werden können: $U = \Delta t \dot{E}_z$, $V = \frac{h\lambda^2}{\Delta t} B_y$, $W = -\frac{h\lambda^2}{\Delta t} B_x$ für die TE-Polarisation, bzw. $U = \Delta t \dot{B}_z$, $V = -\frac{h}{\Delta t f^2} E_y$, $W = \frac{h}{\Delta t f^2} E_x$ für die TM-Polarisation.

Das erste Schema führt durch simple Ersetzung der Differentiale durch Differenzen auf

$$\begin{aligned} U_{m,n}^{p+1} &= U_{m,n}^p - \frac{\Delta t^2}{h^2} (4F_{m,n}^p - F_{m-1,n}^p - F_{m+1,n}^p - F_{m,n-1}^p - F_{m,n+1}^p) \\ F_{m,n}^{p+1} &= F_{m,n}^p + U_{m,n}^{p+1} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Für das zweite Schema sollte wegen der 1. Ortsableitungen für die unterschiedlichen Felder ein versetztes Gitter gewählt werden, so dass V bezüglich F um $h/2$ in x -Richtung versetzt ist, W entsprechend in y -Richtung. Damit erhält man

$$\begin{aligned} F_{m,n}^{p+1} &= F_{m,n}^p + \frac{\Delta t^2}{h^2} (V_{m+1,n}^p - V_{m,n}^p + W_{m,n+1}^p - W_{m,n}^p) \\ V_{m,n}^{p+1} &= V_{m,n}^p + F_{m,n}^{p+1} - F_{m-1,n}^{p+1} \\ W_{m,n}^{p+1} &= W_{m,n}^p + F_{m,n}^{p+1} - F_{m,n-1}^{p+1} \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.3.2 Stabilitätsdiskussion

Um nun festzustellen, ob das Gleichungssystem stabil gegen kleine Störungen ist, oder ob anwachsende Moden existieren, wendet man das folgende Verfahren an. Man betrachtet ein unendlich ausgedehntes Gitter, was bedeutet, man kann die Feldverteilung in räumliche Fourierkomponenten zerlegen. Aufgrund der Linearität, der räumlichen Translationsinvarianz und Zeitunabhängigkeit folgt, dass die Iterationsvorschrift (4.41) bzw. (4.42) für jeden Fourierkoeffizienten 2 zeitliche Exponenten ω' liefert (2, da es sich System 2. Ordnung handelt). Somit ist folgender Ansatz möglich

$$F_{m,n}^p = e^{i(-\Delta t \omega' p + h \tilde{\alpha} m + h \tilde{\beta} n)} \quad (4.43)$$

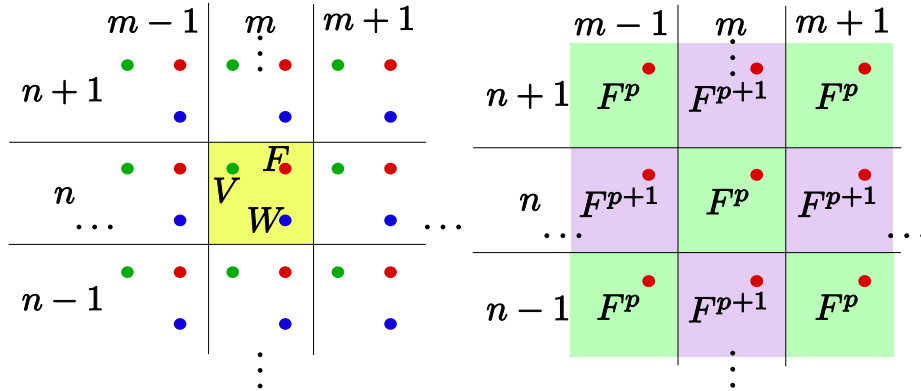


Abbildung 4.4: Rasteranordnung der Feldgrößen F (und V, W) für die Schemata (4.42) (l) und (4.47) (r). Das Schema (4.47) kommt mit einer Feldgröße pro Gitterzelle aus und bei jedem Zeitschritt wird nur jedes 2. Feld berechnet (Schachbrettanordnung).

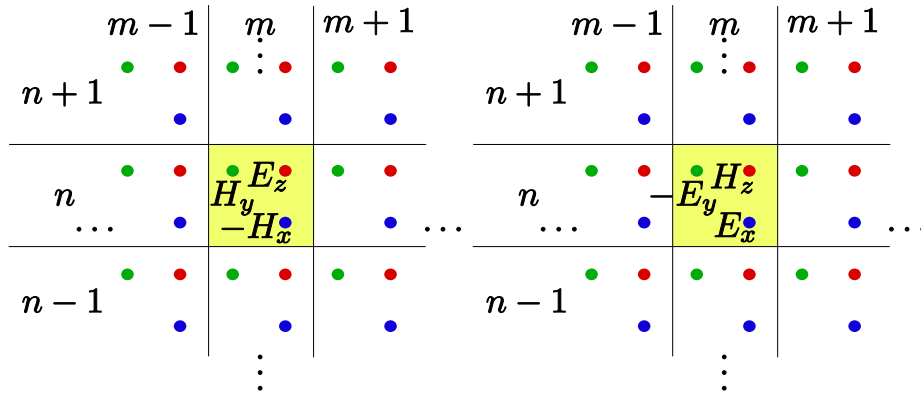


Abbildung 4.5: Rasteranordnung der Feldgrößen für das Schema (4.42). Die Felder können für die TE-Polarisation mit E_z , H_x und H_y , für die TM-Polarisation mit H_z , E_x , und E_y identifiziert werden. Das Schema folgt dann direkt aus den Maxwellgleichungen für die entsprechende Polarisation ($\dot{E}_z = \mu(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y})$, $\dot{H}_x = -\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y}$ und $\dot{H}_y = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x}$ bzw. $\dot{H}_z = \mu(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x})$, $\dot{E}_x = \epsilon \frac{\partial H_z}{\partial y}$ und $\dot{E}_y = -\epsilon \frac{\partial H_z}{\partial x}$).

Sowohl für (4.41) wie auch für (4.42) liefert dies

$$\cos \Delta t \omega' - 1 = \frac{\Delta t^2}{h^2} (\cos h\tilde{\alpha} + \cos h\tilde{\beta} - 2) \quad (4.44)$$

Stabilität bedeutet, es existieren keine Lösungen mit $\text{Im}(\omega') > 0$, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\Delta t \leq h/\sqrt{2} \quad (4.45)$$

ist. Glg. 4.45 ist das nach den Entdeckern benannte Courant-Friedrichs-Lewy-(CFL-)Stabilitätskriterium [35]. Üblicherweise wird daher $\Delta t = h/\sqrt{2}$ ge-

setzt, wodurch sich das Gleichungssystem (4.41) vereinfacht zu:

$$\begin{aligned} U_{m,n}^{p+1} &= U_{m,n}^p - \frac{1}{2}(4F_{m,n}^p - F_{m-1,n}^p - F_{m+1,n}^p - F_{m,n-1}^p - F_{m,n+1}^p) \\ F_{m,n}^{p+1} &= F_{m,n}^p + U_{m,n}^{p+1} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Man sieht jedoch, dass man, wenn man das Hilfsfeld U wieder eliminiert, folgende Gleichung erhält

$$F_{m,n}^{p+1} = -F_{m,n}^{p-1} + \frac{1}{2}(F_{m-1,n}^p + F_{m+1,n}^p + F_{m,n-1}^p + F_{m,n+1}^p) \quad (4.47)$$

Diese ist zwar wieder 2. Ordnung in der Zeit, besteht aber aus 2 vollständig entkoppelten Systemen (für gerade bzw. ungerade $m+n+p$). Wenn nur eines dieser Systeme berechnet werden soll, kann es trotzdem ohne Probleme in einem Gitter geführt werden.

Es ist anzumerken, dass das Schema (4.47) gegenüber (4.42) bei gleicher Gitterperiode etwa einen Faktor 2 schneller ist. Es soll aber trotzdem hier nicht weiter verfolgt werden, da es deutlich mehr Probleme bereitet, wenn man es um zusätzliche Effekte erweitern möchte (Perfectly Matched Layers, elektrische Leitfähigkeit, Wellenausbreitung in kalten Plasmen). Im folgenden wird daher nur noch das Schema (4.42) verwendet.

4.3.3 Gitterdispersion

Um nun die Gitterkonstante h zu wählen, sind 2 Effekte zu berücksichtigen. Zum einen ist das Gitter natürlich fein genug zu wählen, so dass die zu simulierenden Wandstrukturen hinreichend gut aufgelöst werden können, zum anderen ist der Effekt der Gitterdispersion von Bedeutung. Darunter versteht man, dass für eine gegebene Anregungsfrequenz ω die sich ausbreitende Welle in ihrer Wellenzahl k von dem korrekten Wert $k_{\text{theo}} = \omega$ abweicht. Der Effekt kann aus (4.44) hergeleitet werden. Man erhält für das verwendete Δt

$$2 \cos \frac{h}{\sqrt{2}} k_{\text{theo}} = \cos h\tilde{\alpha} + \cos h\tilde{\beta} \quad (4.48)$$

Für eine Ausbreitung entlang der Diagonalen $\tilde{\alpha} = \pm\tilde{\beta}$, ist das Ergebnis exakt, d.h. $|\tilde{\alpha}| = k_{\text{theo}}/\sqrt{2}$ bzw. $k = k_{\text{theo}}$. Für eine Ausbreitung entlang der Achsen erhält man

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{h} \arccos(2 \cos \frac{h}{\sqrt{2}} k_{\text{theo}} - 1) \\ &= k_{\text{theo}} \left(1 + \frac{h^2 k_{\text{theo}}^2}{48} + \mathcal{O}(h^4 k_{\text{theo}}^4)\right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

was bedeutet, dass der relative Fehler $\Delta k/k_{\text{theo}} \approx h^2 k_{\text{theo}}^2/48$ beträgt.

4.3.4 Randbedingungen

Man stellt fest, dass bei dem diskutierten Problem 3 unterschiedliche Arten von Rändern des Rechenfeldes auftreten (Abb. 4.6).

1. die Materialoberfläche des Gitters
2. das Ende des Rechenfeldes in x -Richtung für eine Gitterperiode
3. das Ende des Rechenfeldes in $+y$ -Richtung oberhalb des Gitters

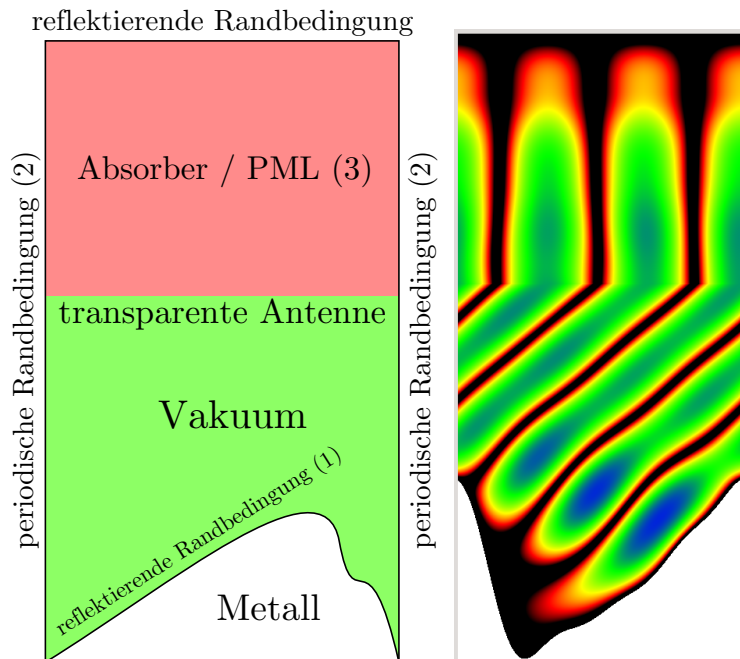


Abbildung 4.6: Aufteilung des Rechenfeldes für die Gittersimulation mit Hilfe der FDTD (l). Feldbild einer tatsächlichen FDTD-Simulation (r) zum Vergleich.

Die Randbedingungen an der Materialoberfläche sind für die beiden Polarisierungen unterschiedlich. Für die TE-Mode gilt einfach, dass $F_{m,n} = 0$ angenommen wird für alle Punkte (m, n) im Material.

Für die TM-Mode ist die Situation etwas komplizierter, da die Normalableitung von F zu verschwinden hat. Dies bedeutet, dass man die Fälle Wand in x -Richtung bzw. y -Richtung zu unterscheiden hat. Falls einer der Punkte $(m - 1, n)$ und (m, n) sich im Material und der andere außerhalb befindet (Wand in y -Richtung), hat $V_{m,n} = 0$ zu sein, und im Falle, einer der Punkte $(m, n - 1)$ und (m, n) im Material, der andere außerhalb (Wand in x -Richtung), hat $U_{m,n} = 0$ zu sein.

Die Randbedingungen am Ende des Rechenfeldes in x-Richtung sind periodisch zu wählen. Wenn $M = h \cdot \tilde{\ell}$ die Zahl der Gitterpunkte in x -Richtung bezeichnet, folgt aus dem Floquet-Theorem $F_{m,n} = F_{m+M,n} e^{i\tilde{\alpha}_0 \tilde{\ell}}$ und $V_{m,n} = V_{m+M,n} e^{i\tilde{\alpha}_0 \tilde{\ell}}$. Da diese Randbedingung explizit einen komplexen Phasenfaktor enthält, ist es nötig, die Felder F , U und V ebenfalls durch komplexe Zahlen zu repräsentieren. D.h. es müssen quasi 2 Gitter berechnet werden, für den Real- und den Imaginärteil, wodurch sich der Rechenaufwand natürlich verdoppelt. Dies ist aber noch wesentlich günstiger als die Periodizität des Problems nicht auszunutzen und ein Rechenfeld mit einer größeren Zahlen von Perioden zu verwenden.

Die Randbedingungen am Ende des Rechenfeldes in +y-Richtung müssen absorbierend sein, sonst würden die vom Gitter zurück laufenden Wellen wieder am oberen Ende des Rechenfeldes reflektiert und im System verbleiben, was natürlich nicht erwünscht ist. Die Implementierung absorbierender Ränder ist nicht trivial und kann nicht in einfacher Form in einer einzelnen Zeile des Gitters erfolgen.

Die einfachste Lösung ist, oberhalb des tatsächlich benötigten Vakuum-Rechenfeldes ein Gebiet mit absorbierendem Verhalten analog zu einem elektrisch leitfähigen Material ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$) anzufügen.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}) \\ &= \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Dies bedeutet, es wird dort anstatt (4.42) das modifizierte Schema (4.51) verwendet.

$$\begin{aligned} F_{m,n}^{p+1} &= (1 - \delta_{m,n}) [F_{m,n}^p + \frac{\Delta t^2}{h^2} (V_{m+1,n}^p - V_{m,n}^p + W_{m,n+1}^p - W_{m,n}^p)] \\ V_{m,n}^{p+1} &= V_{m,n}^p + F_{m,n}^{p+1} - F_{m-1,n}^{p+1} \\ W_{m,n}^{p+1} &= W_{m,n}^p + F_{m,n}^{p+1} - F_{m,n-1}^{p+1} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Es ist zu beachten, dass die Dämpfung eine Impedanzänderung der gedämpften Region verursacht. Da eine sprunghafte Änderung zu unerwünschten Reflexionen an der Grenzfläche führt, wird die Dämpfungskonstante δ mit einem parabolischen Profil versehen, welches über einen Bereich von 2–3 Wellenlängen langsam ansteigt.

Ein moderneres, effizienteres Verfahren ist die Verwendung von so genannten Perfectly Matched Layers (PMLs) [36, 37]. Dabei wird sowohl für

\mathbf{E} , als auch für \mathbf{H} eine Dämpfung δ eingeführt. Im Fall, dass das Medium beschrieben wird durch

$$\epsilon_r = \mu_r = \begin{pmatrix} 1 - i\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - i\delta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 + i\delta}{1 + \delta^2} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

tritt an einer Grenzfläche senkrecht zur z -Achse (in der analytischen Lösung der Maxwellgleichungen) keinerlei Reflexion auf. Für die numerische Lösung mit der FDTD stimmt dies nicht mehr, es ist eine durch die Diskretisierung bedingte so genannte numerische Reflexion auf [37], die ähnlich wie im Fall (4.51) von der räumlichen Änderung von δ abhängt. Deshalb wird üblicherweise ebenfalls ein parabolisches oder lineares Profil verwendet. Die notwendige Dicke der Absorberschicht wird durch das Verfahren aber wesentlich reduziert.

PMLs können auch in das 2-dimensionale Schema (4.42) integriert werden, wobei jedoch das Feld F in 2 Komponenten F_x und F_y zerlegt werden muss. Das Schema lautet dann

$$\begin{aligned} F_{x;m,n}^{p+1} &= (1 - \delta_{x;m,n})[F_{x;m,n}^p + \frac{\Delta t^2}{h^2}(V_{m+1,n}^p - V_{m,n}^p)] \\ F_{y;m,n}^{p+1} &= (1 - \delta_{y;m,n})[F_{y;m,n}^p + \frac{\Delta t^2}{h^2}(W_{m,n+1}^p - W_{m,n}^p)] \\ V_{m,n}^{p+1} &= (1 - \delta_{x;m,n})V_{m,n}^p + F_{x;m,n}^{p+1} + F_{y;m,n}^{p+1} - F_{x;m-1,n}^{p+1} - F_{y;m-1,n}^{p+1} \\ W_{m,n}^{p+1} &= (1 - \delta_{y;m,n})W_{m,n}^p + F_{x;m,n}^{p+1} + F_{y;m,n}^{p+1} - F_{x;m,n-1}^{p+1} - F_{y;m,n-1}^{p+1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

wobei bei einer Grenzfläche in x -Richtung $\delta_x = 0$, bei einer Grenzfläche in y -Richtung $\delta_y = 0$ gewählt wird.

4.4 Simulation mit Hilfe der Randelementemethode

Die Randelementemethode (Boundary Element Method, BEM) verfolgt einen ganz anderen Ansatz als die FDTD. Man macht sich dabei zu Nutze, dass die Greensche Funktion eines Feldproblems bekannt ist. Dies erlaubt es, das Problem komplett auf dem Rand des betrachteten Gebietes zu formulieren. Dies hat den Vorteil der einfacheren und effizienteren Behandlung von (ins unendliche laufenden) Freiraumproblemen. Es muss nicht in endlichem Abstand abgeschnitten werden. Die BEM ist ein implizites und damit schnelles

Lösungsverfahren, das auf komplizierte Solver zur Inversion dünn besetzter Matrizen verzichtet und trotzdem dieselbe Skalierung des Rechenaufwands mit der Gitterkonstante wie FDTD aufweist ($\sim 1/h^3$). Es stellt sich jedoch heraus, dass die BEM für das Gitterproblem einen sehr großen linearen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber FDTD aufweist. Dieser ist vermutlich hauptsächlich auf die wesentlich bessere Approximation der Randkurve durch Liniensegmente anstatt der Treppenstrukturen (bei der FDTD ohne lokale Gitterverfeinerung) zurückzuführen. Des weiteren trägt sowohl der daraus resultierende geringere Speicherbedarf zusätzlich zur Effizienzsteigerung bei, da bei typischer Anzahl von Elementen (100–200) die Daten vollständig in den 2nd-Level-Cache passen sollten, als auch die Tatsache, dass bei der Lösung vollbesetzter linearer Gleichungssystem i.A. die Prozessorcaches effizienter genutzt werden können als bei FDTD-Verfahren, was die effektive Rechenleistung des Prozessors stark erhöht.

4.4.1 Reduzierung des Problems auf den Rand

Zuerst sollte bestimmt werden, wie die Greensche Funktion der 2-dimensionalen Helmholtz-Gleichung

$$[(2\pi)^2 + \Delta]F = 0 \quad (4.54)$$

lautet. Sie ist definiert durch

$$[(2\pi)^2 + \Delta]G(\tilde{x}, \tilde{y}) = \delta(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (4.55)$$

Eine Lösung lautet $G(\tilde{x}, \tilde{y}) = H_0^{(1)}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}/2\pi)$. Diese stellt eine isotrope auslaufende Welle dar, die vom Ursprung ausgeht. Dabei bezeichnet $H_0^{(1)}$ die Hankelfunktion nullter Ordnung erster Art, die durch Superposition von 2 Besselfunktionen dargestellt werden kann [38].

Von größerem Interesse ist allerdings die periodische Greensche Funktion G^* , die, um der Floquet-Gittersymmetrie gerecht zu werden, definiert ist als

$$[(2\pi)^2 + \Delta]G^*(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\tilde{\alpha}_0\tilde{\ell}} \delta(\tilde{x} - n\tilde{\ell}, \tilde{y}) \quad (4.56)$$

Es gilt [30, 31]

$$G^*(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\tilde{\alpha}_0\tilde{\ell}} G(\tilde{x} - n\tilde{\ell}, \tilde{y}) \quad (4.57)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \tilde{\beta}_m} e^{i(\tilde{\alpha}_m \tilde{x} + \tilde{\beta}_m |\tilde{y}|)} \quad (4.58)$$

Durch Anwendung folgender Greenscher Identität

$$\oint_{\partial\tilde{A}} P\nabla Q - Q\nabla P \, d\mathbf{n} = \int_A P\Delta Q - Q\Delta P \, d\tilde{A} \quad (4.59)$$

folgt, wenn $P = G(\tilde{x} - \tilde{x}', \tilde{y} - \tilde{y}')$ und $Q = E_z(\tilde{x}', \tilde{y}')$ gesetzt wird und \tilde{A} als der gesamte Freiraum oberhalb der Gitternuten gewählt wird, bzw. $\partial\tilde{A}$ als die Materialoberfläche, da auf der Randfläche gelten muss, dass $E_z = 0$

$$E_z(\tilde{x}, \tilde{y}) + \oint_{\partial\tilde{A}} G(\tilde{x} - \tilde{x}', \tilde{y} - \tilde{y}') \nabla E_z(\tilde{x}', \tilde{y}') \, d\mathbf{n}' = \int_A \psi(\tilde{x}', \tilde{y}') G(\tilde{x} - \tilde{x}', \tilde{y} - \tilde{y}') \, d\tilde{A}' \quad (4.60)$$

Analog gilt für B_z auf dem Rand $\nabla B_z \cdot \mathbf{n} = 0$, und es folgt

$$B_z(\tilde{x}, \tilde{y}) - \oint_{\partial\tilde{A}} B_z(\tilde{x}', \tilde{y}') \nabla G(\tilde{x} - \tilde{x}', \tilde{y} - \tilde{y}') \, d\mathbf{n}' = \int_A \psi(\tilde{x}', \tilde{y}') G(\tilde{x} - \tilde{x}', \tilde{y} - \tilde{y}') \, d\tilde{A}' \quad (4.61)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{n} den Normalenvektor auf der Gitteroberfläche bzw. Integrationskurve. Er ist so gerichtet, dass er ins Material hinein zeigt. Die Funktion ψ drückt die äußere Anregung aus. Bei der TM-Polarisation ist zu beachten, dass ein Kurvenintegral über ∇G an der Integrationskurve unstetig ist [33]. Es ist daher in (4.61) der Grenzwert zu verwenden, der auf der Seite der integrierten Fläche A liegt, also von oberhalb des Materials. Es ist bekannt, dass die Höhe der Unstetigkeit gleich dem Integrand B_z ist [33], also

$$\begin{aligned} & \lim_{\kappa \uparrow 0} \oint_{\partial\tilde{A}} B_z(\tilde{x}', \tilde{y}') \nabla G(a(r) + \kappa n_x - \tilde{x}', b(r) + \kappa n_y - \tilde{y}') \, d\mathbf{n}' \\ & - \lim_{\kappa \downarrow 0} \oint_{\partial\tilde{A}} B_z(\tilde{x}', \tilde{y}') \nabla G(a(r) + \kappa n_x - \tilde{x}', b(r) + \kappa n_y - \tilde{y}') \, d\mathbf{n}' \quad (4.62) \\ & = B_z(a(r), b(r)) \end{aligned}$$

Gleichung (4.61) kann deshalb, wenn nur Punkte auf dem Rand betrachtet werden, vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} & - \lim_{\kappa \downarrow 0} \oint_{\partial\tilde{A}} B_z(\tilde{x}', \tilde{y}') \nabla G(a(r) + \kappa n_x - \tilde{x}', b(r) + \kappa n_y - \tilde{y}') \, d\mathbf{n}' \quad (4.63) \\ & = \int_A \psi(\tilde{x}', \tilde{y}') G(\tilde{x} - \tilde{x}', \tilde{y} - \tilde{y}') \, d\tilde{A}' \end{aligned}$$

Bis jetzt wurde noch nicht verwendet, dass eine periodische Gittersymmetrie vorliegt und die Anregung aus einer ebenen Welle ($\sim \exp[i(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x} - \tilde{\beta}_0 \tilde{y})]$) besteht. Berücksichtigt man dies, erhält man unter Verwendung von G^*

aus (4.60) und (4.61)

$$E_z(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_{r'=0}^1 G^*(\tilde{x} - a(r'), \tilde{y} - b(r')) \mathbf{n} \cdot \nabla E_z(a(r'), b(r')) dr' = E_0 e^{i(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x} - \tilde{\beta}_0 \tilde{y})} \quad (4.64)$$

$$B_z(\tilde{x}, \tilde{y}) - \int_{r'=0}^1 B_z(a(r'), b(r')) \mathbf{n} \cdot \nabla G^*(\tilde{x} - a(r'), \tilde{y} - b(r')) dr' = B_0 e^{i(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x} - \tilde{\beta}_0 \tilde{y})} \quad (4.65)$$

sowie unter Verwendung von $E_z = 0$ und (4.63) für die Punkte auf dem Rand

$$\int_{r'=0}^1 G^*(a(r) - a(r'), b(r) - b(r')) \mathbf{n} \cdot \nabla E_z(a(r'), b(r')) dr' = E_0 e^{i[\tilde{\alpha}_0 a(r) - \tilde{\beta}_0 b(r)]} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\kappa \downarrow 0} \int_{r'=0}^1 B_z(a(r'), b(r')) \mathbf{n} \cdot \nabla G^*(a(r) + \kappa n_x - a(r'), b(r) + \kappa n_y - b(r')) dr' \\ & = -B_0 e^{i[\tilde{\alpha}_0 a(r) - \tilde{\beta}_0 b(r)]} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Gleichungen (4.66) und (4.67) sind Bestimmungsgleichungen für die unbekanntenen Größen auf dem Rand $\mathbf{n} \cdot \nabla E_z$ und B_z . Es sind Fredholmsche Integralgleichungen erster Art, welche i.A. numerisch gelöst werden müssen. Die numerische Approximation der Lösung dieser Gleichungen durch Diskretisierung des Randes bezeichnet man als Randelementemethode. Man beachte, dass, wenn dies erledigt ist, d.h. $\mathbf{n} \cdot \nabla E_z(r)$ und $B_z(r)$ auf dem ganzen Rand bekannt sind, auch die Felder E_z und B_z im gesamten Raum bekannt sind, da sie einfach durch Ausführen der Integrale in (4.64) und (4.65) erhalten werden können.

4.4.2 Numerische Lösung der Gleichungen

Zur Lösung von (4.66) und (4.67) werden diese mit Hilfe konstanter Randelemente diskretisiert, d.h. es werden Stützpunkte $(a_1 = a(r_1), b_1 = b(r_1)) \dots (a_N = a(r_N), b_N = b(r_N))$ gewählt und der Rand $\partial \tilde{A}$ jeweils zwischen zwei Stützpunkten als gerade Strecken approximiert. Diese Strecken werden dann Randelemente genannt. Die Felder $\mathbf{n}^* \cdot \nabla E_z$ und B_z werden als stückweise konstante Funktionen angenommen, d.h. werden jeweils innerhalb eines Elements als konstant angenommen, $\mathbf{n}^* \cdot \nabla E_z(r) = u_n$ bzw. $B_z(r) = v_n$ für $r_n \leq r \leq r_{n+1}$, mit $\mathbf{n}^* = (b(r_{n+1}) - b(r_n), -a(r_{n+1}) + a(r_n))$.

Um nun ein Gleichungssystem zu erhalten, werden nur die Punkte in der Mitte jedes Elements $(a_{n+1/2} = \frac{1}{2}(a(r_n) + a(r_{n+1})), b_{n+1/2} = \frac{1}{2}(b(r_n) + b(r_{n+1})))$ betrachtet.

Dies ergibt

$$\sum_{n=1}^N Q_{mn} u_n = E_0 e^{i[\tilde{\alpha}_0 a_{m+1/2} - \tilde{\beta}_0 b_{m+1/2}]} \quad (4.68)$$

und

$$\sum_{n=1}^N R_{mn} v_n = -B_0 e^{i[\tilde{\alpha}_0 a_{m+1/2} - \tilde{\beta}_0 b_{m+1/2}]} \quad (4.69)$$

mit

$$Q_{mn} = \int_{s=0}^1 G^*(a_{m+1/2} - (1-s)a_n - sa_{n+1}, b_{m+1/2} - (1-s)b_n - sb_{n+1}) ds \quad (4.70)$$

und

$$R_{mn} = \int_{s=0}^1 \mathbf{n}^* \cdot \nabla G^*(a_{m+1/2} - (1-s)a_n - sa_{n+1}, b_{m+1/2} - (1-s)b_n - sb_{n+1}) ds \quad \text{für } m \neq n \quad (4.71)$$

$$R_{mm} = \lim_{\kappa \downarrow 0} \int_{s=0}^1 \mathbf{n}^* \cdot \nabla G^* \left(-\left(\frac{1}{2} - s\right)a_m + \left(\frac{1}{2} - s\right)a_{m+1} + \kappa n_x^*, \right. \\ \left. -\left(\frac{1}{2} - s\right)b_m + \left(\frac{1}{2} - s\right)b_{m+1} + \kappa n_y^* \right) ds \quad (4.72)$$

Nachdem die Koeffizienten Q_{mn} und R_{mn} bestimmt sind, können die Gleichungssysteme (4.68) und (4.69) gelöst werden. Die Felder im Raum ergeben sich dann aus den diskretisierten Formen von (4.64) und (4.65), welche lauten

$$E_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = E_0 e^{i(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x} - \tilde{\beta}_0 \tilde{y})} - \sum_{n=1}^N u_n \int_{s=0}^1 G^*(\tilde{x} - (1-s)a_n - sa_{n+1}, \tilde{y} - (1-s)b_n - sb_{n+1}) ds \quad (4.73)$$

$$B_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = B_0 e^{i(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x} - \tilde{\beta}_0 \tilde{y})} + \sum_{n=1}^N v_n \int_{s=0}^1 \mathbf{n}^* \cdot \nabla G^*(\tilde{x} - (1-s)a_n - sa_{n+1}, \tilde{y} - (1-s)b_n - sb_{n+1}) ds \quad (4.74)$$

Falls nur die Intensitäten in den einzelnen Gitterordnungen von Interesse sind, ist es jedoch einfacher, direkt die Floquet-Koeffizienten $c_{n,+0}$ zu bestimmen, indem man (4.58) in (4.73) und (4.74) einsetzt und nur die entsprechende Floquet-Mode berücksichtigt.

$$c_{j,+0}^{\text{TE}} = -\frac{1}{2\pi i \tilde{\beta}_j} \sum_{n=1}^N u_n \int_{s=0}^1 e^{-i[\tilde{\alpha}_j((1-s)a_n + sa_{n+1}) + \tilde{\beta}_j((1-s)b_n + sb_{n+1})]} ds \quad (4.75)$$

$$c_{j,+0}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\pi i \tilde{\beta}_j} \sum_{n=1}^N v_n \int_{s=0}^1 \mathbf{n}^* \cdot \nabla e^{-i[\tilde{\alpha}_j((1-s)a_n + sa_{n+1}) + \tilde{\beta}_j((1-s)b_n + sb_{n+1})]} ds \quad (4.76)$$

4.4.3 Berechnung der Randintegrale

Um die BEM anwenden zu können ist noch zu klären, wie die Q_{mn} und R_{mn} bestimmt werden können, bzw. wie sich die Integrale (4.70)–(4.72) effizient berechnen lassen.

Nach Einsetzen der Floquet-Reihe (4.58) kann die Integration der einzelnen Reihenglieder analytisch ausgeführt werden.

$$Q_{mn} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\beta}_j} \int_{s=0}^1 e^{i[\tilde{\alpha}_j(\epsilon_a + s\epsilon_c) + \tilde{\beta}_j|\epsilon_b + s\epsilon_d|]} ds \quad (4.77)$$

mit $\epsilon_a = a_{m+1/2} - a_n$, $\epsilon_b = b_{m+1/2} - b_n$, $\epsilon_c = a_n - a_{n+1}$, $\epsilon_d = b_n - b_{n+1}$. Falls $\epsilon_d > \epsilon_b$ muss wegen des Betrages das Integral in 2 Teile aufgespaltet werden. Dies soll aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht im Detail diskutiert werden. Nach Ausführen der Integration erhält man (unabhängig davon ob o.g. Fallunterscheidung notwendig ist) als jeweiliges Glied der Reihe einen Ausdruck, der aus mehreren Termen der Form

$$\frac{1}{\tilde{\beta}_j(\tilde{\alpha}_j\epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j\epsilon_d)} e^{i[\tilde{\alpha}_j(\epsilon_a + s^*\epsilon_c) \pm \tilde{\beta}_j(\epsilon_b + s^*\epsilon_d)]} \quad (4.78)$$

besteht. Dabei ist s^* ein Wert in $[0, 1]$. Unter Beachtung, dass $\tilde{\beta}_j \approx i\tilde{\alpha}_j$ für $j \gg \tilde{\ell}/\lambda$ kann man erkennen, dass für die Q_{mn} die Reihe mindestens ein lineares Konvergenzverhalten aufweist, da für große j gilt $\tilde{\beta}_j(\tilde{\alpha}_j\epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j\epsilon_d) \sim j^2$. Falls $|\epsilon_b + s^*\epsilon_d|$ hinreichend groß ist, ist das Konvergenzverhalten sogar exponentiell. Damit ist diese Berechnungsmethode für die Q_{mn} ausreichend. Für die R_{mn} ist dies nicht der Fall, wie im folgenden gezeigt werden soll. Der Grund liegt darin, dass wie oben erwähnt das B_z -Feld an der Oberfläche unstetig ist, und eine Fourierreihe einer unstetigen Funktion grundsätzlich nicht gleichmäßig konvergieren kann. Für die R_{mn} sollen analog zu (4.78) Terme der Form

$$i \frac{\tilde{\alpha}_j n_x^* \pm \tilde{\beta}_j n_y^*}{\tilde{\beta}_j(\tilde{\alpha}_j\epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j\epsilon_d)} e^{i[\tilde{\alpha}_j(\epsilon_a + s^*\epsilon_c) \pm \tilde{\beta}_j(\epsilon_b + s^*\epsilon_d)]} \quad (4.79)$$

aufsummiert werden. Diese Reihe konvergiert im Fall von hinreichend großem $|\epsilon_b + s^*\epsilon_d|$ zwar ebenfalls exponentiell, ansonsten ist das Konvergenzverhalten jedoch schlecht, und direkt an der Unstetigkeitsstelle, d.h. im Fall R_{mn} konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert der beiden Grenzwerte, und die

Bestimmung des Grenzwertes – wie in (4.72) angegeben – ist damit nicht direkt möglich.

Es soll nun erklärt werden, wie das Problem gelöst werden kann. Die oben erwähnte Tatsache, dass für große j , $\tilde{\beta}_j \approx i\tilde{\alpha}_j$ gilt bzw. für große negative j , dass gilt $\tilde{\beta}_j \approx -i\tilde{\alpha}_j$, legt nahe, die zu berechnende Reihe folgendermaßen umzuschreiben:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} i \frac{\tilde{\alpha}_j n_x^* \pm \tilde{\beta}_j n_y^*}{\tilde{\beta}_j (\tilde{\alpha}_j \epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j \epsilon_d)} e^{i[\tilde{\alpha}_j (\epsilon_a + s^* \epsilon_c) \pm \tilde{\beta}_j (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)]} \quad (4.80)$$

$$= \sum_{j=u+1}^{v-1} i \frac{\tilde{\alpha}_j n_x^* \pm \tilde{\beta}_j n_y^*}{\tilde{\beta}_j (\tilde{\alpha}_j \epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j \epsilon_d)} e^{i[\tilde{\alpha}_j (\epsilon_a + s^* \epsilon_c) \pm \tilde{\beta}_j (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)]} \quad (4.81)$$

$$+ \sum_{j=v}^{\infty} \left(i \frac{\tilde{\alpha}_j n_x^* \pm \tilde{\beta}_j n_y^*}{\tilde{\beta}_j (\tilde{\alpha}_j \epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j \epsilon_d)} e^{i[\tilde{\alpha}_j (\epsilon_a + s^* \epsilon_c) \pm \tilde{\beta}_j (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)]} - \frac{n_x^* \pm i n_y^*}{\epsilon_c \pm i \epsilon_d} \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} e^{\tilde{\alpha}_j [i \epsilon_a + s^* \epsilon_c \mp (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)]} \right) \quad (4.82)$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^u \left(i \frac{\tilde{\alpha}_j n_x^* \pm \tilde{\beta}_j n_y^*}{\tilde{\beta}_j (\tilde{\alpha}_j \epsilon_c \pm \tilde{\beta}_j \epsilon_d)} e^{i[\tilde{\alpha}_j (\epsilon_a + s^* \epsilon_c) \pm \tilde{\beta}_j (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)]} - \frac{n_x^* \mp i n_y^*}{\epsilon_c \mp i \epsilon_d} \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} e^{\tilde{\alpha}_j [i \epsilon_a + s^* \epsilon_c \pm (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)]} \right) \quad (4.83)$$

$$+ \frac{n_x^* \pm i n_y^*}{\epsilon_c \pm i \epsilon_d} H_v^+ (i \epsilon_a + s^* \epsilon_c \mp (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)) \quad (4.84)$$

$$+ \frac{n_x^* \mp i n_y^*}{\epsilon_c \mp i \epsilon_d} H_u^- (i \epsilon_a + s^* \epsilon_c \pm (\epsilon_b + s^* \epsilon_d)) \quad (4.85)$$

was genau dann richtig ist, wenn

$$H_v^+(\chi) = \sum_{j=v}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} e^{\tilde{\alpha}_j \chi} \quad (4.86)$$

und

$$H_u^-(\chi) = \sum_{j=-\infty}^u \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} e^{\tilde{\alpha}_j \chi} \quad (4.87)$$

Die Reihen (4.82) und (4.83) konvergieren nun effizient, jedoch nicht die Reihen für H_v^+ (4.86) und H_u^- (4.87), was bedeutet, man hat das Problem verschoben in die Suche nach einer effizienten Berechnungsmethode für H_v^+ und H_u^- . Wenn man diese gefunden hat, ist das Problem der Berechnung der R_{mn} gelöst.

Nach [38] gilt

$$H_v^+(\chi) = \frac{1}{\tilde{\alpha}_v} e^{\tilde{\alpha}_v \chi} {}_2F_1\left(\frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_v, 1, 1 + \frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_v, e^{\frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \chi}\right) \quad (4.88)$$

und

$$H_u^-(\chi) = \frac{1}{\tilde{\alpha}_u} e^{\tilde{\alpha}_u \chi} {}_2F_1\left(-\frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_u, 1, 1 - \frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_u, e^{\frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \chi}\right) \quad (4.89)$$

wobei ${}_2F_1$ die Gaußsche hypergeometrische ${}_2F_1$ -Funktion bezeichnet. Für diese Funktion existieren effiziente Berechnungsverfahren. Z.B. in [39] ist ein Algorithmus erklärt und implementiert, der schnell und mit hoher Genauigkeit ${}_2F_1$ berechnet, sofern $\frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_v$ und $-\frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_u$ sich nicht zu nahe bei Null befinden und nicht zu groß sind, sowie χ nicht zu nahe bei Null ist, da ${}_2F_1(\xi, 1, 1 + \xi, z)$ bei $z = 1$ eine Singularität besitzt.

Die Werte u und v können immer so gewählt werden, dass $0,1 \leq \frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_v \leq 1,1$ und $-1,1 \leq \frac{\tilde{\ell}}{2\pi} \tilde{\alpha}_u \leq -0,1$, wodurch die erste Bedingung erfüllt wäre. Die zweite Bedingung dagegen ist problematischer, da in der Nähe der Unstetigkeitsstelle von $\int \nabla G^*$ das Argument χ sehr klein und bei der Berechnung von R_{mm} sogar exakt Null wird.

Deshalb bietet sich für die Berechnung von ${}_2F_1$ für kleine χ die Formel an [38]

$${}_2F_1(\xi, 1, 1 + \xi, z) = \xi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\xi + k)}{\Gamma(\xi)} (-\ln(1 - z) - \psi(\xi + k) + \psi(1 + k)) \frac{(1 - z)^k}{k!} \quad (4.90)$$

Dabei bezeichnet ψ die Digamma-Funktion. Die Reihe (4.90) ist gültig für $|z - 1| < 1$ und konvergiert effizient für kleine Werte von $|z - 1|$.

Die Funktion enthält natürlich immer noch die Divergenz bei $z = 1$, man kann jedoch erkennen, dass sie unproblematischer logarithmischer Natur ist, d.h. zur Bestimmung des Grenzwertes in (4.72) kann einfach der Wert κ als eine sehr kleine von Null verschiedene Zahl, z.B. 0,0001, gewählt werden, ohne dass wesentliche numerische Fehler zu befürchten sind.

Es muss jedoch angemerkt werden, dass dieses Verfahren zur Berechnung der Greenschen Funktion noch nicht optimal ist. Eine weitere Verbesserung der Berechnungseffizienz kann man durch Verwendung des Ewald-Verfahrens erreichen, bei welchem die verwendeten Summen exponentiell konvergieren [40, 41].

4.5 Optimierungungsverfahren

Grundsätzlich ist der Begriff der Optimierung gleichbedeutend mit dem Auffinden eines Minimums einer Funktion $C(p_1, \dots, p_N)$, die von den N Optimierungsparametern p_1, \dots, p_N abhängt und natürlich so gewählt wird, dass sie umso kleinere Werte ergibt, je mehr das zu optimierende System erwünschtes Verhalten aufweist. C wird daher auch Kostenfunktion genannt. Im folgenden soll nun dargestellt werden, welche Optimierungsparameter und Kostenfunktionen für die Optimierung von Gitterprofilen verwendet wurden, und eine Übersicht über die verwendeten Algorithmen zur Funktionsminimierung soll gegeben werden.

4.5.1 Optimierung von Gitterprofilen

Um die Randkurve des Gitters $(a(r), b(r))$ durch einen endlichen Parametersatz auszudrücken, bieten sich natürlich eine Vielzahl von Verfahren an. In dieser Arbeit wurden die Parametrisierung durch Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a(r) &= \tilde{\ell} \cdot r \\ b(r) &= \sum_{k=1}^{N/2} p_{2k-1} \cos(2\pi k \cdot r) + p_{2k} \sin(2\pi k \cdot r) \end{aligned} \quad (4.91)$$

verwendet, sowie die Parametrisierung durch äquidistante Stützstellen

$$\begin{aligned} a(k/N) &= \tilde{\ell} \cdot k/N \\ b(k/N) &= p_k \end{aligned} \quad (4.92)$$

mit $k \in \{1, \dots, N\}$ und anschließender Interpolation durch kubische Splines [39].

Da das Ziel ist, wie in Abschnitt 4.1 erklärt wurde, möglichst alle Leistung in eine Gitterordnung zu beugen, sowie Kontrolle über die Polarisation zu haben, müssen in die Kostenfunktion C natürlich die Effizienzen des Gitters I_m^{TE} und I_m^{TM} sowie die Phasenverschiebung φ_m in der gewünschten Mode m eingehen.

Es sei angenommen, dass eine Welle mit einem Polarisationszustand, der durch die Parameter ξ_{in} und ϵ_{in} spezifiziert ist

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} c_{0,-,0}^{\text{TM}} \\ c_{0,-,0}^{\text{TE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi_{\text{in}} \cdot e^{i\epsilon_{\text{in}}/2} \\ \sin \xi_{\text{in}} \cdot e^{-i\epsilon_{\text{in}}/2} \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

auf das Gitter trifft. Dann erzeugt das Gitter in der Ordnung m eine Welle mit dem Polarisationszustand

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} c_{m,-,0}^{\text{TM}} \\ c_{m,-,0}^{\text{TE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{I_m^{\text{TM}}} \cos \xi_{\text{in}} \cdot e^{i(\epsilon_{\text{in}} + \varphi_m)/2} \\ \sqrt{I_m^{\text{TE}}} \sin \xi_{\text{in}} \cdot e^{-i(\epsilon_{\text{in}} + \varphi_m)/2} \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

Diese wird dann, wenn sie wieder in das Plasma eingestrahlt wird, in X- und O-Mode zerlegt. Man kann sich mit Hilfe von (2.51) davon überzeugen, dass sich die Polarisationszustände des Plasmas o.B.d.A. in gleicher Art durch ebenfalls 2 Parameter ξ_{out} und ϵ_{out} beschreiben lassen.

$$\mathbf{P}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} c_{0,-,0}^{\text{TM}} \\ c_{0,-,0}^{\text{TE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi_{\text{out}} \cdot e^{i\epsilon_{\text{out}}/2} \\ \sin \xi_{\text{out}} \cdot e^{-i\epsilon_{\text{out}}/2} \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

$$\mathbf{P}'_{\text{out}} = \begin{pmatrix} c'_{0,-,0}^{\text{TM}} \\ c'_{0,-,0}^{\text{TE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \xi_{\text{out}} \cdot e^{i\epsilon_{\text{out}}/2} \\ \cos \xi_{\text{out}} \cdot e^{-i\epsilon_{\text{out}}/2} \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

Es soll gelten, dass es sich bei \mathbf{P}_{out} um die erwünschte, bei \mathbf{P}'_{out} um die unerwünschte Mode handelt. Es ist dabei unerheblich, ob es sich um die X- oder O-Mode handelt. Wegen der Orthogonalität der Moden ($\tilde{\mathbf{P}}_{\text{out}} \cdot \mathbf{P}'_{\text{out}} = 0$) gilt, dass der Wirkungsgrad des Gitters

$$\eta = \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{in}}} = \frac{|\tilde{\mathbf{P}}_{\text{out}} \cdot \mathbf{P}_m|^2}{|\mathbf{P}_m|^2} \quad (4.97)$$

$$= I_m^{\text{TM}} \cos^2 \xi_{\text{in}} \cos^2 \xi_{\text{out}} + I_m^{\text{TE}} \sin^2 \xi_{\text{in}} \sin^2 \xi_{\text{out}} + 2\sqrt{I_m^{\text{TM}} I_m^{\text{TE}}} \cos \xi_{\text{in}} \sin \xi_{\text{in}} \cos \xi_{\text{out}} \sin \xi_{\text{out}} \cos(\epsilon_{\text{in}} - \epsilon_{\text{out}} + \varphi_m) \quad (4.98)$$

beträgt. Unter der Annahme, dass der Strahl direkt in sich zurücklaufen soll, woraus folgt, dass der Polarisationszustand gleich bleibt ($\xi_{\text{out}} = \xi_{\text{in}} = \xi$, $\epsilon_{\text{out}} = \epsilon_{\text{in}}$), erhält man

$$\eta = I_m^{\text{TM}} \cos^4 \xi + I_m^{\text{TE}} \sin^4 \xi + 2\sqrt{I_m^{\text{TM}} I_m^{\text{TE}}} \cos^2 \xi \sin^2 \xi \cos(\varphi_m) \quad (4.99)$$

Der Einfachheit halber, um nicht gezwungen zu sein im Voraus ξ_{in} bestimmen zu müssen, und um wirklich auf polarisationsunabhängiges Verhalten zu optimieren, sollen nur die 3 Spezialfälle $\xi = 0$ ($\eta^{\text{TE}} = I_m^{\text{TE}}$), $\xi = \frac{\pi}{2}$ ($\eta^{\text{TM}} = I_m^{\text{TM}}$) und $\xi = \frac{\pi}{4}$ ($\eta^{\text{circ}} = I_m^{\text{TE}} + I_m^{\text{TM}} + 2\sqrt{I_m^{\text{TE}} I_m^{\text{TM}}} \cos(\varphi_m)$) betrachtet werden.

η^{circ} stellt alleine schon einen Wert dar, der die wünschenswerte Eigenschaft aufweist, nur genau dann 1 zu werden, wenn $I_m^{\text{TE}} = I_m^{\text{TM}} = 1$ und $\varphi = 0$ ist, und ansonsten kleiner zu sein. Daher ist $C_1 = 1 - \eta^{\text{circ}}$ eine brauchbare

Kostenfunktion. Da $\xi = \frac{\pi}{4}$ nicht grundsätzlich das schlechteste η ergibt, kann auch überlegt werden $C_2 = 1 - \min_{\xi \in [-\pi, \pi]} \eta(\xi)$ (was einen eher komplizierten Ausdruck ergibt) oder einfacher $C_3 = 1 - \min\{\eta^{\text{circ}}, I_m^{\text{TE}}, I_m^{\text{TM}}\}$ zu verwenden.

Des Weiteren hat sich gezeigt, dass eine Optimierung der Gitter allein auf den Wirkungsgrad η selten glatte Gitter mit gut verrundeter Randkurve ergibt, sondern eher stark oszillierende. Insbesondere spitze Strukturen im oberen Bereich des Profils sind sicher ungünstig für die Lebensdauer des Gitters im Plasmagefäß, da dort eine hohe thermische Belastung auftritt.

Daher wurde in die Kostenfunktion ein zusätzlicher (Form-)Term eingeführt, der eine Berücksichtigung der Verrundung bewirkt.

$$C_1^{\text{F}} = \int_0^1 \left[\begin{cases} c_{\text{curv},+} & \text{für } \frac{d\chi(r)}{dr} > 0 \\ c_{\text{curv},-} & \text{für } \frac{d\chi(r)}{dr} < 0 \end{cases} + (b(r) - b_{\text{min}})c_{\text{curv,height}} \right] \left(\frac{d\chi(r)}{dr} \right)^2 dr \quad (4.100)$$

Er enthält die 3 Parameter $c_{\text{curv},+}$, $c_{\text{curv},-}$ und $c_{\text{curv,height}}$, die die Gewichtungen für positive und negative Krümmungen der Randkurve darstellen sowie einen Zusatzterm ($c_{\text{curv,height}}$), der eine Vermeidung starker Krümmung im oberen Bereich bewirken soll. Dabei bezeichnet $\chi(r) = \arctan \frac{db(r)}{dr} / \frac{da(r)}{dr}$ den Steigungswinkel und $b_{\text{min}} = \min_{r \in [0,1]} b(r)$ die Höhe am niedrigsten Punkt der Randkurve.

Alternativ dazu oder zusätzlich ist ein Term C_2^{F} möglich, mit dem man versucht das Gitterprofil günstiger für die Fertigung auszulegen, indem man den maximalen und minimalen Steigungswinkel klein zu halten versucht, wodurch ein Fräser mit stumpferem Winkel verwendet werden kann.

$$C_2^{\text{F}} = c_{\text{angle},+} (\chi_{\text{max}} - \chi_{\text{base},+})^2 + c_{\text{angle},-} (\chi_{\text{min}} - \chi_{\text{base},-})^2 \quad (4.101)$$

Dieser Term enthält 4 Parameter, die Gewichtungsfaktoren $c_{\text{angle},+}$ und $c_{\text{angle},-}$ für positive und negative Steigungswinkel sowie die angestrebten maximalen und minimalen Steigungswinkel $\chi_{\text{base},+}$ und $\chi_{\text{base},-}$. Die Winkel $\chi_{\text{max}} = \max_{r \in [0,1]} \chi(r)$ und $\chi_{\text{min}} = \min_{r \in [0,1]} \chi(r)$ bezeichnen den maximalen und minimalen Steigungswinkel, der im Gitterprofil auftritt.

4.5.2 Das Verfahren von Nelder und Mead

Das Verfahren von Nelder und Mead, auch Downhill Simplex genannt [42, 39], war in der Vergangenheit eine Standardmethode zur Minimierung von mehrdimensionalen Problemen.

Das Grundprinzip ist im wesentlichen, einen Satz von $N + 1$ Punkten $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_{N+1}$ im N -dimensionalen Parameterraum zu betrachten, d.h. die

Funktionswerte $f_k = C(I_{k,1}, \dots, I_{k,N})$ für $1 \leq k \leq N + 1$ zu berechnen und die Position des Punktes mit dem größten (schlechtesten) Funktionswert senkrecht zu der von den anderen Punkten aufgespannten Hyperebene zu variieren, bis es sich bei besagtem Punkt nicht mehr um den schlechtesten handelt. Durch Iteration konvergiert das Verfahren immer in ein lokales Minimum. Das geometrische Objekt, das durch die $N + 1$ Punkte aufgespannt wird, wird Simplex genannt, was den Namen des Algorithmus begründet. Ein vollständige Beschreibung und Implementierung ist in [39] verfügbar.

Das Verfahren konvergiert sehr schnell, hat aber den Nachteil, meist in lokalen Minima steckenzubleiben. Eine gewisse Verbesserung kann erreicht werden, indem die Methode um das sogenannte Simulated-Annealing-Konzept erweitert wird. Dabei wird nicht bei jedem Iterationsschritt eine Verbesserung des Funktionswertes f_k erwartet, sondern es wird in Analogie zu thermodynamischen Betrachtungen von z.B. chemischen Reaktionen, auch Verschlechterungen mit einer Wahrscheinlichkeit P akzeptiert, wobei P durch die „Boltzmann-Formel“

$$P = e^{-\Delta f_k / (k_B T)} \quad (4.102)$$

gegeben ist. Die Temperatur T wird im Laufe der Minimierung Richtung Null reduziert, wobei man in diesem Grenzfall wieder das ursprüngliche Verfahren und vollständige Konvergenz in ein lokales Minimum erhält. Der komplette Algorithmus ist ebenfalls in [39] verfügbar.

4.5.3 Genetische Algorithmen

Sehr verbreitet sind heutzutage sogenannte evolutionäre Algorithmen [43, 44, 45, 46], die darauf basieren, einige Aspekte der biologischen Evolution, wie Kreuzung, Mutation und Selektion, nachzuempfinden. Die Begriffe Genetischer Algorithmus (GA) und Evolutionäre Strategie sind dabei zwar nicht scharf zu trennen, aber im üblichen Sprachgebrauch wird ein Verfahren, welches primär auf Kreuzung beruht, als Genetischer Algorithmus, ein Verfahren, das dagegen primär auf Mutation beruht, als Evolutionäre Strategie bezeichnet. Für die Gitteroptimierung wurde ein GA implementiert, welcher auf dem in [47] dargestellten basiert. Der verwendete Algorithmus funktioniert folgendermaßen:

Zuerst (a) wird eine zufällige Population von P Vektoren $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_P$ in dem als sinnvoll erachteten Bereich des zugrundeliegenden Parameterraums (p_1, \dots, p_N) erzeugt. Anschließend (b) wird mit der verwendeten Kostenfunktion C für jeden dieser Vektoren ein Fitnesswert $f_k = C(I_{k,1}, \dots, I_{k,N})$ berechnet, und die Vektoren I_k werden nach ihren Fitnesswerten sortiert. Gemäß Definition von C bedeutet dabei ein geringerer Wert von f_k ein bes-

seres Individuum. Nach dem Sortiervorgang soll gelten $f_k \leq f_{k+1}$. Dann folgt die Selektion (c). Dazu wird eine neue Population, die nächste Generation, aus der aktuellen erzeugt, indem die besten R Individuen 2 mal reproduziert werden, die nächsten $P - 2R$ einmal reproduziert werden und die schlechtesten R aussterben, also

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_R) &\leftarrow (\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_R) \\ (\mathbf{I}_{R+1}, \dots, \mathbf{I}_{P-R}) &\leftarrow (\mathbf{I}_{R+1}, \dots, \mathbf{I}_{P-R}) \\ (\mathbf{I}_{P-R+1}, \dots, \mathbf{I}_P) &\leftarrow (\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_R) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Der nächste Punkt (d) ist die Kreuzung. Dazu wird zu jedem Vektor \mathbf{I}_k ein weiterer Vektor \mathbf{I}_m der Population zufällig ($k \neq m$) ausgewählt und ein Teil der Information von \mathbf{I}_m auf \mathbf{I}_k übertragen. Was mit diesem Informationsaustausch gemeint ist, kann auf 2 unterschiedliche Arten verstanden werden. Zum einen ($\tilde{\alpha}$) kann man Linearkombinationen der Vektoren bilden

$$\mathbf{I}_k \leftarrow (1 - K)\mathbf{I}_k + K\mathbf{I}_m \quad (4.104)$$

Dies ist die Variante, wie Kreuzung bei GAs meist verstanden wird. Die andere Möglichkeit (β) ist, einzelne Komponenten des Vektors \mathbf{I}_m auf \mathbf{I}_k zu übertragen. Welche Komponenten verwendet werden, wird zufällig bestimmt. Hier wurde die Methode gewählt, für die Komponenten des Vektors je eine Zufallsvariable ($q_{k,1}, \dots, q_{k,N}$) zu bestimmen ($0 \leq q_{k,j} \leq 1$), und wenn diese größer ist als eine Schwelle S , die Kreuzung für die Komponente durchzuführen

$$I_{k,j} \leftarrow \begin{cases} I_{k,j} & \text{für } q_{k,j} \leq S \\ I_{m,j} & \text{für } q_{k,j} > S \end{cases} \quad (4.105)$$

In dem verwendeten Algorithmus wurde eine Kombination aus beiden Verfahren implementiert

$$I_{k,j} \leftarrow \begin{cases} I_{k,j} & \text{für } q_{k,j} \leq S \\ (1 - K)I_{k,j} + KI_{m,j} & \text{für } q_{k,j} > S \end{cases} \quad (4.106)$$

Bei Kreuzung vom Typ β ist jedoch zu beachten, dass man die Isotropie des Algorithmus verliert (Abb. 4.7). Dies verschlechtert die Performance des Optimierers, wenn die Parameterbereiche mit guten Ergebnissen nicht entlang den Koordinatenachsen orientiert sind. Dies ist bei der Parametrisierung durch Splinestützpunkte nach (4.92) ausgeprägt der Fall.

Zur Lösung des Problems wird die Berechnung der Varianzmatrix der Population

$$V_{ij} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (I_{k,i} - \bar{I}_i)(I_{k,j} - \bar{I}_j) \quad (4.107)$$

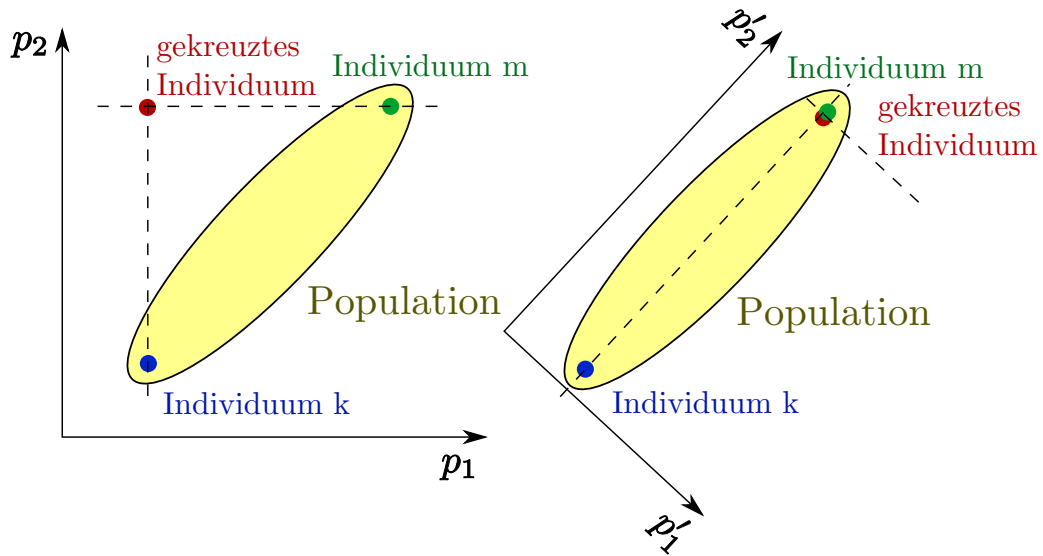


Abbildung 4.7: Der Vorgang der Kreuzung nach dem Verfahren β . Das Ergebnis hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab, d.h. es ist nicht isotrop. Insbesondere führt das Ergebnis i.A. über den Bereich der momentanen Population hinaus.

und anschließende Diagonalisierung vorgeschlagen. $\bar{\mathbf{I}}$ bezeichnet dabei den Schwerpunkt der Population

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \mathbf{I}_k \quad (4.108)$$

Als Koordinatensystem, in dem die Kreuzung durchgeführt wird, wird dann jenes gewählt, in dem \mathbf{V} diagonal ist. Die Diagonalisierung kann im allgemeinen rechenaufwändig werden, für die Gitteroptimierung gilt jedoch, dass bei typischen Parameterzahlen N und vernünftigen Anforderungen an die Genauigkeit des BEM-Rechenkerns der Rechenaufwand des Optimierers verglichen mit dem Rechenaufwand der Gitterberechnung völlig vernachlässigbar ist.

Der letzte Schritt des Genetischen Algorithmus ist die Mutation (e). Dazu wird jedem der Vektoren \mathbf{I}_k eine zufällige kleine Änderung $\epsilon_{k,j} \in [-M, M]$ jeder einzelne Komponente hinzuaddiert

$$I_{k,j} \leftarrow I_{k,j} + \epsilon_{k,j} \quad (4.109)$$

Die Schritte b–e werden wiederholt, bis Konvergenz erreicht ist, wobei bei GAs Konvergenz bedeutet, dass die Streuung der Population nur noch von der Größenordnung M ist. Kleiner kann die Population nicht werden, falls

der Mutationsparameter M konstant gehalten wird. Als Variante kann M von Iteration zu Iteration exponentiell verkleinert werden, was jedoch das Problem mit sich bringt, eine gute Zeitkonstante für den Vorgang bestimmen zu müssen.

4.5.4 Differential Evolution

GAs von der in 4.5.3 beschriebenen Art weisen den Nachteil auf, dass die Fähigkeit der Population, sich an die Optimierungslandschaft anzupassen, begrenzt ist. Der Kreuzungsoperator kann z.B. nicht zu einer Vergrößerung der Streuung in einer Dimension des Parameterraums führen. Und der Mutationsoperator passt sich nicht an die aktuelle Population an und darf daher eher nur kleinere Streuungen bewirken. Das Problem lässt sich jedoch mit moderneren populationsbasierten Optimierern wie Differential Evolution oder Cross-Entropy-Verfahren [48] beheben. Differential Evolution (DE) wurde in den 90er-Jahren von Rainer Storn entwickelt [49], und hat seitdem etliche Anwendungen gefunden. Das Verfahren ist folgendes:

Es wird genauso wie beim GA eine Startpopulation erzeugt (a) und die Fitnesswerte berechnet (b). Dann wird jedes Individuum mutiert, wobei im Kontext von DE unter Mutation etwas völlig anderes verstanden wird als bei GA. Das Grundprinzip ist, dass zu dem zu mutierenden Parametervektor \mathbf{I}_k die Differenz von anderen Vektoren der Population addiert wird. Dieser Vorgang ist eher mit Kreuzung von Typ $\tilde{\alpha}$ verwandt, wird aber bei DE trotzdem als Mutation bezeichnet. Es ist klar, dass der Vorteil dieses Operators ist, dass Bereiche außerhalb der aktuellen Population erreicht werden können und die Streuweite in die einzelnen Richtungen sich an der aktuellen Population orientiert. Von Storn [49] wurden folgende Varianten vorgeschlagen und als effizient erachtet:

- Addition der Differenz zweier zufälliger Individuen zum besten Individuum der aktuellen Population (DE/best/1)

$$\mathbf{I}'_k \leftarrow \mathbf{I}_b + M(\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_n) \quad (4.110)$$

- Addition der Differenz zweier zufälliger Individuen zu einem weiteren zufälligen Individuum der aktuellen Population (DE/rand/1)

$$\mathbf{I}'_k \leftarrow \mathbf{I}_o + M(\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_n) \quad (4.111)$$

- Addition der Differenz zweier zufälliger Individuen zu einer Kreuzung des aktuellen Individuums mit dem besten Individuum der aktuellen Population (DE/rand-to-best/1)

$$\mathbf{I}'_k \leftarrow (1 - M_1)\mathbf{I}_k + M_1\mathbf{I}_b + M_2(\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_n) \quad (4.112)$$

- Addition der paarweisen Differenzen zweier zufälliger Paare von Individuen zum besten Individuum der aktuellen Population (DE/best/2)

$$\mathbf{I}'_k \leftarrow \mathbf{I}_b + M_1(\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_n) + M_2(\mathbf{I}_o - \mathbf{I}_p) \quad (4.113)$$

- Addition der paarweisen Differenzen zweier zufälliger Paare von Individuen zu einem weiteren zufälligen Individuum der aktuellen Population (DE/rand/2)

$$\mathbf{I}'_k \leftarrow \mathbf{I}_q + M_1(\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_n) + M_2(\mathbf{I}_o - \mathbf{I}_p) \quad (4.114)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{I}_m , \mathbf{I}_n , \mathbf{I}_o , \mathbf{I}_p und \mathbf{I}_q zufällig ausgewählte Individuen der aktuellen Population, \mathbf{I}_b das beste Individuum der aktuellen Population, \mathbf{I}'_k das aktuelle betrachtete Individuum der neu zu erzeugenden Generation, sowie K , M , M_1 und M_2 reelle Parameter, die über die Streuweite der Mutation entscheiden.

Anschließend wird noch eine Kreuzung (d) des Typs β des aktuellen mit einem weiteren zufälligen Individuum durchgeführt, welche auch bei DE als Kreuzung bezeichnet wird

$$I'_{k,j} \leftarrow \begin{cases} I'_{k,j} & \text{für } q_{k,j} \leq S \\ I_{r,j} & \text{für } q_{k,j} > S \end{cases} \quad (4.115)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{I}_r ein weiteres zufälliges Individuum. Die Kreuzung kann, genauso wie in 4.5.3 beschrieben, durch Diagonalisierung der Varianzmatrix isotropisiert durchgeführt werden.

Die Selektion (e) wird bei DE ebenfalls anders als beim GA durchgeführt. Dazu wird der Fitnesswert f'_k des neuen Individuums \mathbf{I}'_k mit dem des aktuellen Individuums f_k verglichen und, falls $f'_k < f_k$ ist, das aktuelle Individuum durch das neue ersetzt

$$\mathbf{I}_k \leftarrow \begin{cases} \mathbf{I}'_k & \text{für } f'_k < f_k \\ \mathbf{I}_k & \text{für } f'_k \geq f_k \end{cases} \quad (4.116)$$

4.5.5 Cross-Entropy-Verfahren

Das Cross-Entropy-Verfahren (CE) ist eine neuere Methode, die von Rubinstein [48, 50, 51] entwickelt wurde. Sie wurden ursprünglich vorgeschlagen zur Verbesserung von Monte-Carlo-Integrationen durch Importance-Sampling, wobei die Kullback-Leibler-Entropie [52] maximiert wird. Das erklärt den Namen Cross-Entropy-Verfahren. Es ist im Hinblick auf einige Eigenschaften,

z.B. Anpassung der Streuung an die aktuelle Population dem DE-Verfahren ähnlich, obwohl der mathematische Ansatz ein ganz anderer war.

Das Cross-Entropy-Verfahren zur Optimierung funktioniert folgendermaßen:

Es werden eine mit M Parametern behaftete statistische Verteilungsfunktion $D(p_1, \dots, p_N, \sigma_1, \dots, \sigma_M)$ und vernünftige Anfangswerte für die Parameter $(\sigma_1, \dots, \sigma_M)$ gewählt. Dann wird eine Population $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_P$ entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion D erzeugt (a), die Fitnesswerte f_1, \dots, f_P der Individuen berechnet (b) und die Individuen entsprechend der Fitnesswerte sortiert (c). Nach dem Sortiervorgang soll gelten $f_k \leq f_{k+1}$. Die schlechtesten $P - R$ Individuen werden weggeworfen. Die besten P werden verwendet, um die Parameter der Verteilungsfunktion für die nächste Generation anzupassen (d). Dazu wird die Kreuzentropie E der Verteilung der besten P Individuen mit der Ausgangsverteilungsfunktion D berechnet

$$E(\sigma_1, \dots, \sigma_M) = \sum_{k=1}^R \ln D(I_{k,1}, \dots, I_{k,N}, \sigma_1, \dots, \sigma_M) \quad (4.117)$$

Die Parameter $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_M)$ der Verteilungsfunktion der nächsten Generation werden so gewählt, dass E maximal wird

$$E(\sigma'_1, \dots, \sigma'_M) = \max_{\sigma_1, \dots, \sigma_M} E(\sigma_1, \dots, \sigma_M) \quad (4.118)$$

Die Schritte a–d werden wiederholt, bis Konvergenz erreicht ist.

Zur Vereinfachung wird eine Variante des CE-Verfahrens verwendet, die ohne die numerische Minimierung der Kreuzentropie E auskommt. Dazu wird angenommen, dass die Verteilungsfunktion geschrieben werden kann als

$$D(p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}}} D^*(\sqrt{(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{I}})}) \quad (4.119)$$

also durch eine Verteilung, die durch Schwerpunkt $\bar{\mathbf{I}}$ und Varianz \mathbf{V} parametrisiert ist. Unter der Annahme, dass die nur noch von einem Parameter abhängende Verteilungsfunktion D^* normiert ist und eine Varianz von 1 besitzt, d.h.

$$2 \int_0^\infty D^*(x) dx = 1 \quad (4.120)$$

$$2 \int_0^\infty x^2 D^*(x) dx = 1 \quad (4.121)$$

können die Parameter der nächsten Generation $\bar{\mathbf{I}}'$ und \mathbf{V}' auch aus Schwerpunkt und Varianz der besten R Elemente der aktuellen Generation bestimmt

werden

$$\bar{\mathbf{I}}' \leftarrow \bar{\mathbf{I}}_b = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \mathbf{I}_k \quad (4.122)$$

$$V'_{ij} \leftarrow V_{ij,b} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R (I_{k,i} - \bar{I}_i)(I_{k,j} - \bar{I}_j) \quad (4.123)$$

Falls es sich bei D^* um die Gauß-Verteilung handelt, ist das Ergebnis mit dem der Entropie-Maximierung identisch.

Desweiteren ist beim CE-Verfahren zu beachten, dass typische Populationsgrößen häufig zu klein sind, um aus der aktuellen Generation alle Parameter ohne großes statistisches Rauschen zu bestimmen. Daher wird, wie in [51] vorgeschlagen, eine Glättung vorgenommen

$$\bar{\mathbf{I}}' \leftarrow S \bar{\mathbf{I}}_b + (1 - S) \bar{\mathbf{I}} \quad (4.124)$$

$$\mathbf{V}' \leftarrow S \mathbf{V}_b + (1 - S) \mathbf{V} \quad (4.125)$$

Ist \mathbf{V} jedoch als vollständige Matrix inklusive Nichtdiagonalelemente implementiert, muss der Faktor S sehr klein gewählt werden, um das Funktionieren des Verfahrens zu gewährleisten. Dadurch wird allerdings die Konvergenzgeschwindigkeit stark verlangsamt. Deshalb wurde das Glättungsverfahren so modifiziert, dass für die Bewegung des Schwerpunkts sowie für die Skalierung und die Rotation der Varianzellipse unterschiedliche Glättungsfaktoren gewählt werden können. Dazu werden bei jeder Iteration die aktuelle Varianzmatrix diagonalisiert, die Diagonalebasis \mathbf{T} von \mathbf{V} gewechselt, und die die Diagonal- und Nichtdiagonalelemente von \mathbf{V} mit unterschiedlichen Faktoren geglättet:

$$\bar{\mathbf{I}}' \leftarrow S_c \bar{\mathbf{I}}_b + (1 - S_c) \bar{\mathbf{I}} \quad (4.126)$$

$$\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{T} \quad (4.127)$$

$$\mathbf{V}_b \leftarrow \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}_b \mathbf{T} \quad (4.128)$$

$$V'_{ij} \leftarrow \begin{cases} S_{V,d} V_{ij,b} + (1 - S_{V,d}) V_{ij} & \text{für } i = j \\ S_{V,n} V_{ij,b} + (1 - S_{V,n}) V_{ij} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.129)$$

$$\mathbf{V}' \leftarrow \mathbf{T} \mathbf{V}' \mathbf{T}^{-1} \quad (4.130)$$

Kapitel 5

Simulations- und Messergebnisse

Nachdem die entwickelten und verwendeten Verfahren zur Berechnung optimierter holographischer Gitterspiegel dargestellt wurden, sollen nun die Simulationsergebnisse für die Optimierung der Gitterstrukturen sowie die Messergebnisse, die nach Anfertigung von Probeexemplaren von Gitterspiegeln im Mikrowellenlabor entstanden sind, präsentiert werden. Damit soll der Einklang zwischen Theorie und Experiment und die Tauglichkeit des Konzepts holographischer Gitterspiegel weitestgehend gezeigt werden.

5.1 Simulationscodes für ebene Gitter

5.1.1 Simulationen mit Hilfe der FDTD und BEM

Die Ergebnisse der Simulationen, die mit Hilfe der in den Abschnitten 4.3 und 4.4 vorgestellten FDTD-Methode und der Randelementemethode gewonnen wurden, sind vergleichbar, sofern bei beiden Verfahren fein genug diskretisiert wird. Abgesehen von der bekannten Problematik, dass im Fall einer Oberflächenwelle (eine Mode i für die $\beta_i \approx 0$ ist), die BEM versagt, da die Greensche Funktion dann divergiert, ist nie der Fall von widersprüchlichen Ergebnissen aufgetreten. Daher wird angenommen, dass die Verfahren korrekt implementiert sind.

Was die Performance betrifft, zeigt sich die BEM der FDTD weit überlegen. Für typische Gitterprofile dauert die Berechnung der relativen Modenintensitäten bis zu einem Fehler $<0,1\%$ für beide Polarisierungen auf einem aktuellen PC mit Hilfe der BEM weniger als 1 s, mit Hilfe der FDTD mehrere Minuten.

5.1.2 Performance der Verfahren

Um Aussagen über die Qualität der Ergebnisse sowie die dafür benötigte Rechenzeit machen zu können, wurde für ein Test-Gitterprofil (Abb. 5.1) zuerst als Referenz die erwarteten I_f und I_s mit Hilfe der BEM mit hoher Genauigkeit bestimmt. Anschließend wurde dasselbe Gitter mit unterschiedlicher

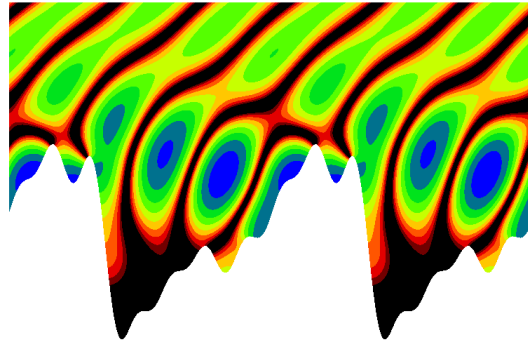


Abbildung 5.1: Optimiertes Gitterprofil für die -3. Ordnung, das zum Testen der Qualität der Simulationsergebnisse benutzt wird ($I_f = 0.999930$, $I_s = 0.999728$).

Zahl von Elementen und Floquet-Moden (BEM) bzw. unterschiedlicher Zahl von Gitterpunkten (FDTD) simuliert und die Abweichung der Ergebnisse von der Referenz bestimmt.

In Abb. 5.2–5.5 sind die Abweichungen sowie die Berechnungszeiten für beide Verfahren aufgetragen. Für die FDTD sind der Fehler (Abweichung zur Referenz) sowie die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Zahl der Gitterzellen, für die BEM in Abhängigkeit von der Zahl der Randelemente und der Zahl der Floquet-Moden, die nach 4.77 und 4.80 bei der Berechnung der Koeffizienten Q_{mn} und R_{mn} verwendet wurden, gezeigt.

In Abb. 5.6 ist – quasi zusammenfassend – der direkte Zusammenhang von den Fehlern und der Berechnungszeit im direkten Vergleich zwischen BEM und FDTD dargestellt. Daraus geht die Überlegenheit der BEM für die Gitterberechnung klar hervor.

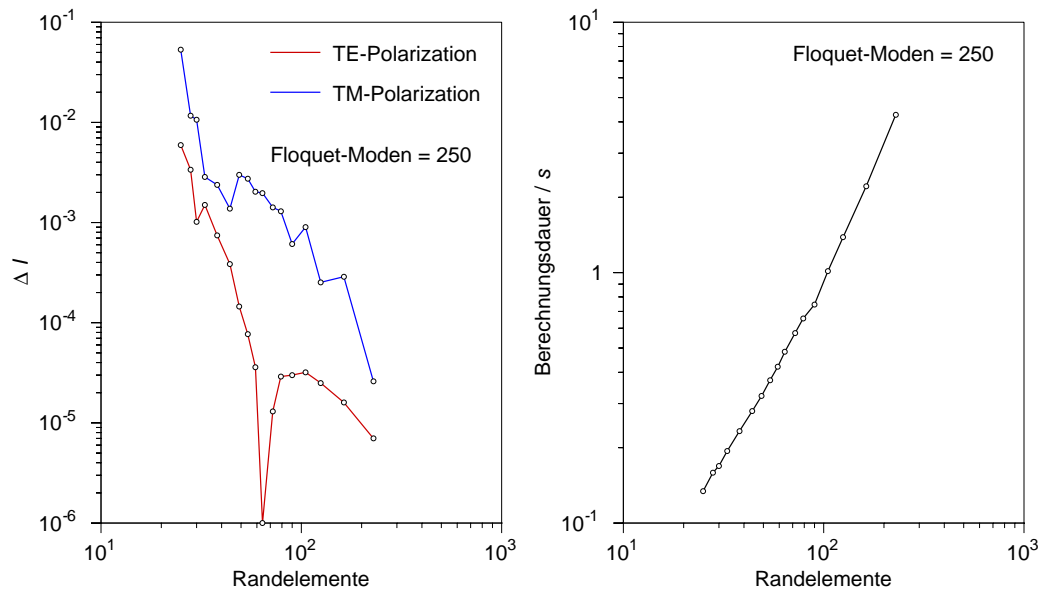


Abbildung 5.2: Abweichungen der Ergebnisse von der Referenz der BEM-Simulation sowie die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Zahl der Randelemente für 250 Floquet-Moden.

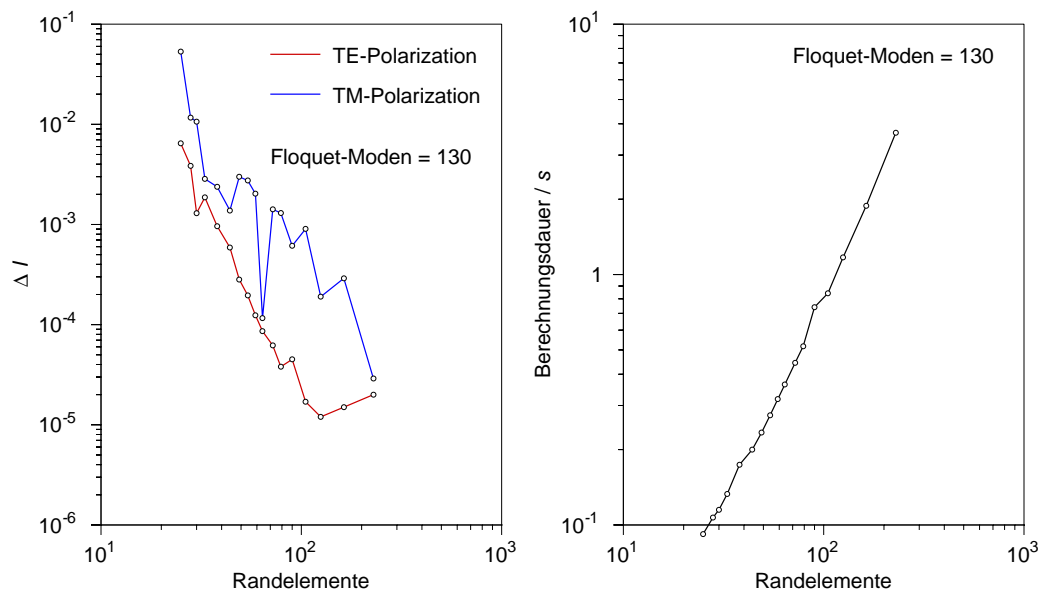


Abbildung 5.3: Abweichungen der Ergebnisse von der Referenz der BEM-Simulation sowie die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Zahl der Randelemente für 130 Floquet-Moden.

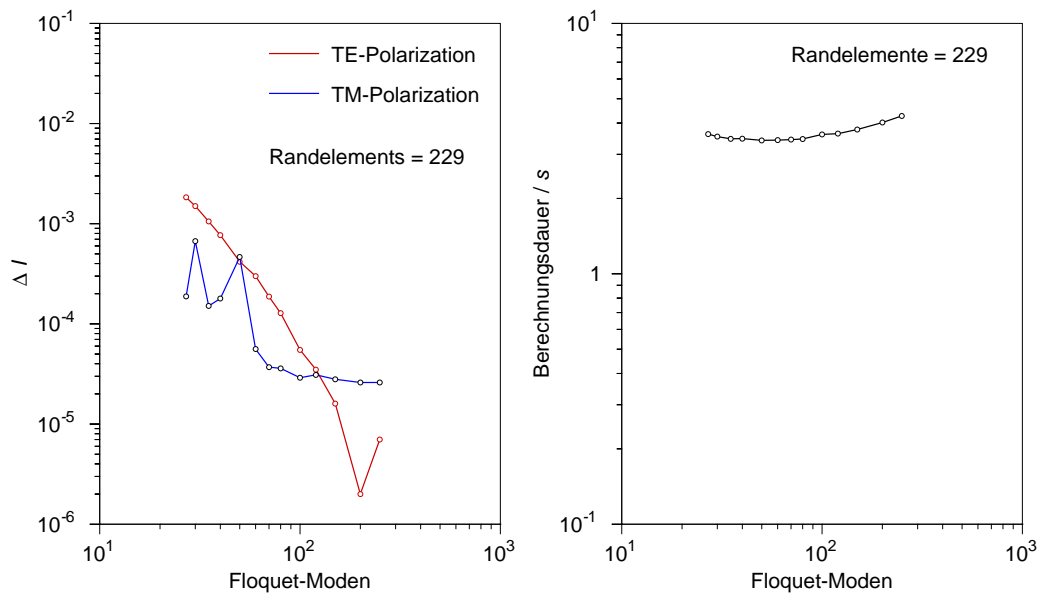


Abbildung 5.4: Abweichungen der Ergebnisse von der Referenz der BEM-Simulation sowie die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Zahl der Floquet-Moden.

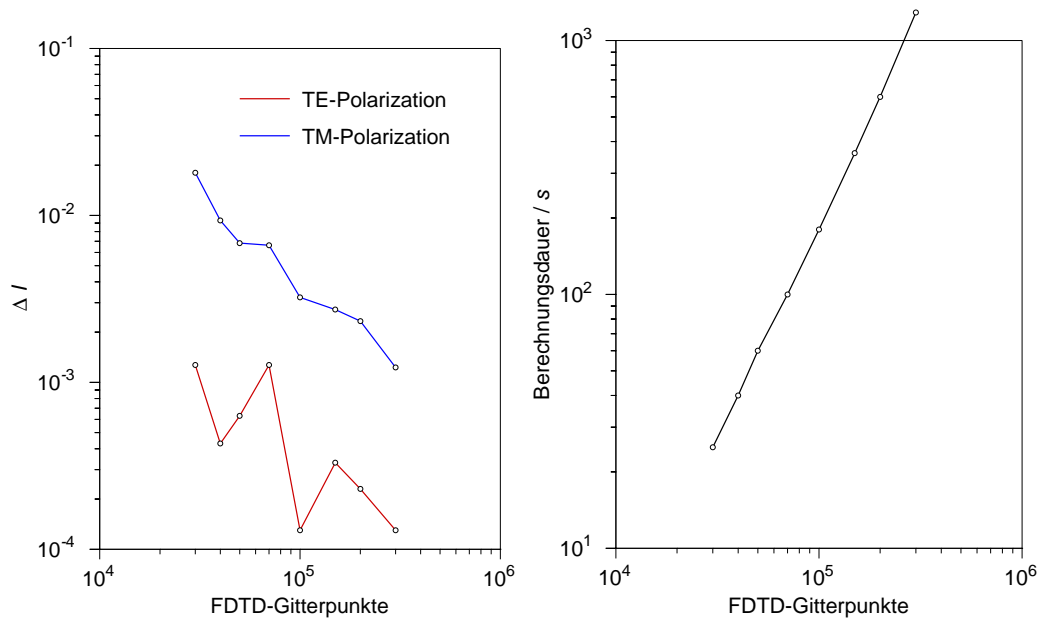


Abbildung 5.5: Abweichungen der Ergebnisse von der Referenz der FDTD-Simulation sowie die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Zahl der Gitterpunkte

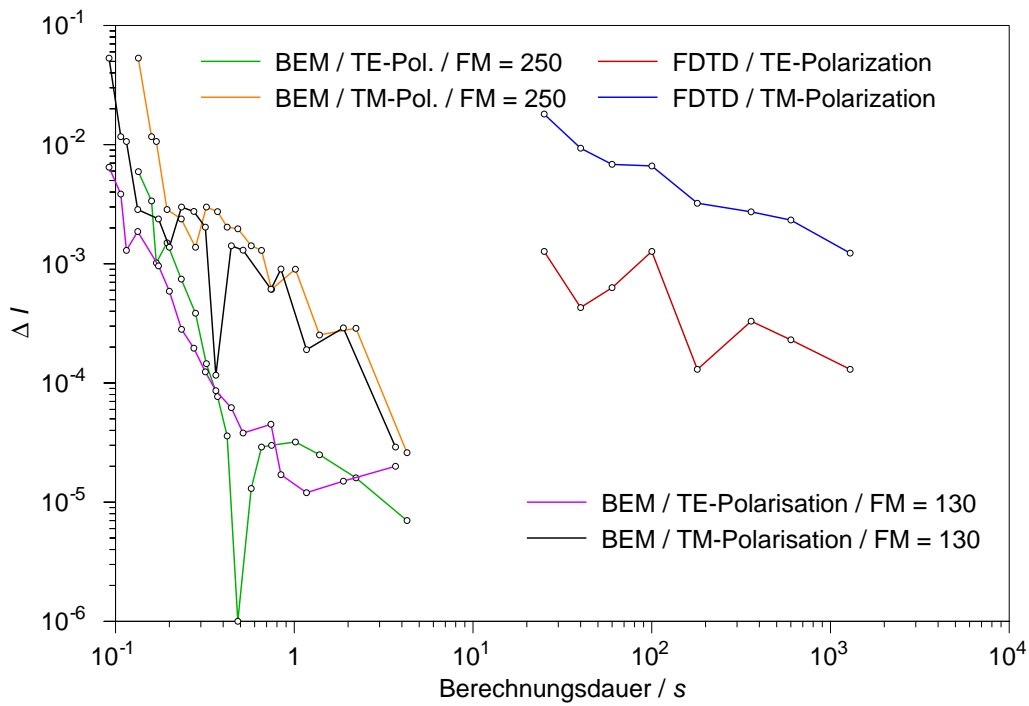


Abbildung 5.6: Abweichungen der Ergebnisse von der Referenz der BEM- und FDTD-Simulation in Abhängigkeit von der Berechnungsdauer. Für eine Genauigkeit von 10^{-3} ist die BEM etwa um einen Faktor 1000 schneller.

5.2 Optimierungsverfahren

Vor der Verwendung für die relativ zeitaufwändige Gitteroptimierung ist es sinnvoll, die Optimierungsverfahren mit schneller auswertbaren Funktionen zu testen und die optimalen Parameter der Verfahren zu bestimmen. Hierzu wurden mehrere geeignete Testfunktionen ausgewählt. Als einfachste Funktion, welche nur ein einziges lokales Minimum bei $(0.5, \dots, 0.5)$ besitzt, wurde

$$C_1^T = -\frac{1}{1 + \alpha \sum_{j=1}^N (p_j - 0.5)^2} \quad (5.1)$$

ausgewählt. Sie bietet sich an, um allein die Konvergenzgeschwindigkeit zu testen. Versagen beim Auffinden des Minimums kommt natürlich bei grundsätzlich brauchbar eingestellten Optimierungsparametern nicht vor.

Desweiteren soll noch die Funktion C_2 betrachtet werden, welche 2 Hauptminima sowie in Form des Cosinus-Terms ein (Pseudo-)Rauschen aufweist, welches viele kleine lokale Minima besitzt. Die Funktion ist gut geeignet, um die Zuverlässigkeit des Optimierers beim Auffinden des globalen Optimums zu bestimmen.

$$C_2^T = -\frac{1}{1 + \alpha \sum_{j=1}^N (p_j - 0.5)^2} - \frac{\gamma}{1 + \beta \sum_{j=1}^N (p_j + 0.5)^2} + \delta \sum_{j=1}^N \cos(200 \cdot p_j) \quad (5.2)$$

Es sind natürlich noch deutlich schwieriger zu optimierende Funktionen erstellbar und wurden auch untersucht, jedoch scheinen sie keine wesentlich anderen Erkenntnisse bezüglich des Vergleichs der hier vorgestellten Verfahren zu liefern, außer dass dann alle Optimierer gleichermaßen mehr Schwierigkeiten zeigen, das globale Optimum zu finden. Da man von Optimierungsalgorithmen im allgemeinen nicht erwarten kann, bei jedem Versuch das absolute Minimum zu finden, und wegen der Verwendung von Zufallszahlen aufeinander folgende Versuche im allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, wurden die Optimierungsprozesse hinreichend oft wiederholt, um zu statistisch aussagekräftigen Ergebnissen zu gelangen.

Es ist weiterhin natürlich zu beachten, dass Wiederholungen auch bei der praktischen Anwendung des Optimierungsverfahrens möglich sind, und man so zu hohen Trefferwahrscheinlichkeiten gelangen kann, wenn das beste Ergebnis aller Wiederholungen ausgewählt wird. In diesem Zusammenhang

soll die Optimierereffizienz ϵ für eine bestimmte Funktion und bestimmte Startverteilung definiert werden als

$$\epsilon = -\frac{\ln(1-p)}{N_A} \quad (5.3)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit, das globale Optimum zu finden, und N_A die Zahl der dafür benötigten Funktionsauswertungen bezeichnet. Dies ist äquivalent zu der Aussage, der Optimierer erreicht, unabhängig von der Zahl der Wiederholungen, das globale Minimum mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = 1 - e^{-\epsilon N_A} \quad (5.4)$$

Da die absoluten Minima natürlich nie exakt erreicht werden, wurde als Kriterium für Erfolg angenommen, dass der Funktionswert nicht mehr als 0.01 vom absoluten Minimum abweicht. Um eine brauchbare Statistik zu erhalten wurde der Optimierungsvorgang jeweils $N_R = 10000$ mal wiederholt. Bei einer realen Trefferquote p liegt die Standardabweichung Δp bei N_R Wiederholungen bei

$$\Delta p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N_R}} \quad (5.5)$$

und somit für eine ermittelte Trefferquote \bar{p} , die Ober- und Untergrenzen p_+^κ und p_-^κ des Bereichs von p , in dem sich \bar{p} innerhalb von $[p - \kappa \cdot \Delta p, p + \kappa \cdot \Delta p]$ befindet, bei

$$p_{+,-}^\kappa = \frac{\kappa^2/N_R + 2p \pm \sqrt{(\kappa^2/N_R + 2p)^2 - 4(1 + \kappa^2/N_R)p^2}}{2(1 + \kappa^2/N_R)} \quad (5.6)$$

5.2.1 Das Nelder-Mead-Verfahren

Das Nelder-Mead-Verfahren wurde in der Version mit Simulated Annealing verwendet, die Annealing-Temperatur T wurde exponentiell im Lauf der Optimierung reduziert

$$T = T_0 \cdot e^{-\delta_T N_R} \quad (5.7)$$

wobei δ_T angibt, wie stark T pro Funktionsauswertung abklingt.

Als einfachste Funktion wurde C_1^T (Abb. 5.7) in $N = 4$ Dimensionen mit $\alpha = 3$ verwendet. Da sie nur 1 Minimum besitzt, hat das Nelder-Mead-Verfahren keine Probleme und erreicht mit $p = 1$ das Minimum nach $N_R = 65$ Schritten. Eine von Null verschiedene Annealing-Temperatur ist natürlich kontraproduktiv, da keine lokalen Minima vorkommen, in denen der Optimierer steckenbleiben könnte. Außerdem führen zu hohe Temperaturen dazu,

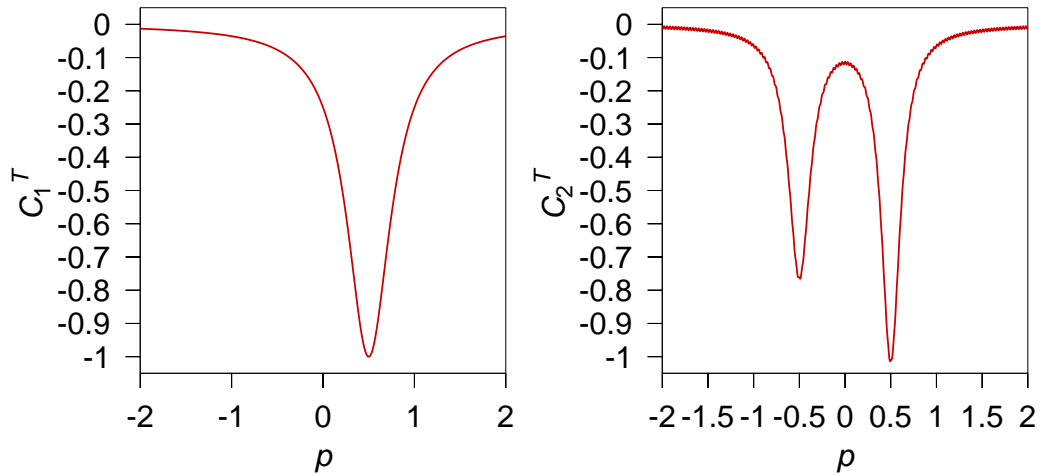


Abbildung 5.7: Schnitt durch die Raumdiagonale ($p = p_1 = \dots = p_N$) der Funktionen C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ sowie C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$. Die Funktion C_2^T weist leichtes Rauschen auf, was aber in der Darstellung kaum sichtbar ist.

dass der Simplex den interessanten Bereich komplett verlässt, und die Abbruchbedingung dann als erfüllt angesehen wird, da alle Funktionswerte nahe bei Null und damit etwa gleich sind.

Interessanter dagegen ist die Funktion C_2^T , da, wie erwähnt, der Optimierer nun nicht nur das richtige zweier Hauptminima zu finden hat, sondern auch in den Minima des Rauschens steckenbleiben kann. Letzteres ist für $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ noch nicht sehr ausgeprägt von Belang. Ein $T = 0$ ist immer noch am günstigsten, wobei nach $N_R = 170$ Schritten mit $p = 0.34$ das globale Minimum erreicht wird. Eine Erhöhung von $T = 0$ führt zu einer Verbesserung auf $p = 0.5$, d.h. es wird zumindest eines der beiden Hauptminima gefunden, jedoch ist der Optimierer nicht in der Lage, das bessere auszuwählen. Da die Zahl der benötigten Schritte jedoch stark zunimmt, führt eine Temperaturerhöhung zu keinem besseren ϵ .

Für stärker verrauschte Funktionen oder für manche Funktionen mit mehr als 2 Hauptminima ist eine Verwendung der Annealing-Temperatur deutlich von Vorteil.

5.2.2 Genetischer Algorithmus

Der genetische Algorithmus verfügt über deutlich mehr einstellbare Parameter, die Population P , die Reproduktionszahl R , die Parameter K und S für die Kreuzung nach den Methoden α und β , die Start-Streuweite der Muta-

tion M_0 , sowie die Relaxationkonstante δ_M für die exponentielle Dämpfung der Mutation.

Der GA zeigt durchweg keine gute Performance verglichen mit den anderen diskutierten Verfahren. Trotzdem sollen die Ergebnisse zum Vergleich dargestellt werden.

Für alle 3 getesteten populationsbasierten Verfahren hat sich herausgestellt, dass die meisten Parameter, nachdem einmal ein Optimum ermittelt wurde, nicht wesentlich für die jeweilige Funktion angepasst werden müssen. Der wichtigste zu verändernde Parameter ist die Population, welche größer gewählt werden sollte, je schwieriger die verwendete Funktion zu optimieren ist. Eine umfassende Darstellung der Auswirkungen von Parametereinstellungen ist jedoch aus Platzgründen hier nicht möglich, es sollen jedoch im Anhang für die 3 populationsbasierten Optimierer vergleichend die Auswirkungen der Veränderung der Population dargestellt werden.

Für den GA wurden als Standard-Einstellungen $R = \frac{1}{3}P$, $K = 0.75$ und $S = 0.33$ gewählt. Nachteilig für den GA ist außerdem, dass die Mutationsparameter M_0 und δ_M für jede Funktion speziell eingestellt werden müssen, wenn man akzeptable Effizienzen erreichen will.

Die Auswirkung einer Populationsänderung sind in A.1 und A.2 dargestellt.

5.2.3 Differential Evolution

DE hat effektiv nur 3 Parameter, die Population P , den Mutationsfaktor M und den Kreuzungsparameter S (Es zeigt sich, dass es sich bis auf wenige Ausnahmen, nicht lohnt, M_1 und M_2 separat zu variieren.)

Davon sind M und S relativ robust, d.h. das Optimum ist eher unabhängig von der gewählten Funktion, was sicher eine wünschenswerte Eigenschaft ist. Die verschiedenen Varianten DE/best/1, DE/rand/1, DE/rand-to-best/1, DE/best/2 und DE/rand/2 zeigen jedoch des Öfteren unterschiedliches Verhalten. Insbesondere unterscheidet sich das Verhalten von DE/rand/1 und DE/rand/2 deutlich, ist aber nicht für alle Situationen schlechter.

Es wurden folgende Standardeinstellungen gewählt:

Variante	$M = M_1 = M_2$	S
DE/best/1	0.54	0.09
DE/rand/1	0.57	0.09
DE/rand-to-best	0.57	0.09
DE/best/2	0.56	0.40
DE/rand/2	0.52	0.24

Insgesamt scheint DE eine deutliche Verbesserung gegenüber GAs darzustellen, gegenüber Nelder-Mead zeichnet es sich als populationsbasiertes Verfahren durch Parallelisierbarkeit aus. Analog zum GA ist in A.3 –A.12 der Einfluss der Populationsgröße dargestellt.

5.2.4 Cross-Entropy-Verfahren

CE zeigt im allgemeinen sehr ähnliche Ergebnisse wie DE. Situationen, in denen DE deutlich überlegen ist und umgekehrt, kommen zwar vor, doch konnte dabei keine Regelmäßigkeit gefunden werden, nach der sich der geeignetere Optimierer vorhersagen ließe. Anzumerken ist, dass obwohl 5.8 die Vermutung nahelegt, dass eine Gauß-Verteilungsfunktion die ideale Wahl ist, ebenso Situationen vorkamen, bei denen die Rechteckfunktion deutlich überlegen war, jedoch wird aus Platzgründen auf die Darstellung verzichtet.

Zum Vergleich mit DE und GA ist in A.13 –A.18 ebenfalls der Einfluss der Populationsgröße dargestellt.

5.2.5 Direkter Vergleich der Optimierungsverfahren

Abb. 5.8 gibt eine vergleichende Übersicht über die Qualität der Optimierungsverfahren. Sie scheinen halbwegs repräsentativ zu sein, die Verwendung stärker verrauschter Funktionen, Funktionen mit mehr Parametern, etc. ergibt relativ ähnliche Bilder. Nelder-Mead zeigt, wenn optimal eingestellt, meist die besten Resultate. Der GA ist nicht zu empfehlen. DE und CE, zeigen mittlere Qualitäten. Erwähnen möchte ich jedoch, dass bei einem derartigen Vergleich m.E. Nelder-Mead und der GA deutlich besser abschneiden als in der praktischen Anwendung, da man normalerweise aus Geschwindigkeitsgründen nicht die Möglichkeit hat, die Optimiererparameter an das Problem anzupassen. Da dies für den Annealing-Schedule bei Nelder-Mead sowie für die Mutation beim GA zwingend nötig scheint, nicht jedoch bei DE und CE wurden die Resultate in dieser Form veröffentlicht. Diese Robustheit ist der Grund, warum für die Gitteroptimierung hauptsächlich auf DE zurückgegriffen wurde.

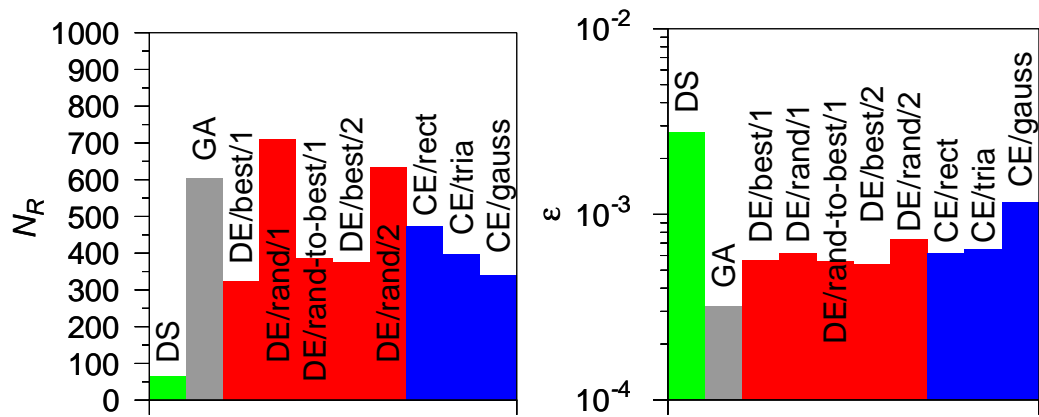


Abbildung 5.8: Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen N_R und Trefferwahrscheinlichkeit p für die Funktion C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ (l). Da die Trefferquote p für vernünftige Einstellungen sehr hoch wird, wurde ϵ nicht berechnet, sondern nur das N_R angegeben, das benötigt wird, um auf $p > 0.99$ zu kommen. Optimierereffizienz ϵ für die Funktion C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ (r).

5.3 Optimierte Gitter

5.3.1 Gitterstrukturen und Effizienzen

Im diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Gitteroptimierung dargestellt, die durch Versuche mit den entwickelten Verfahren gewonnen wurden.

Im folgenden soll gelten, dass n die Gitterordnung bezeichnet, die für maximale Intensität optimiert wurde, sowie $\theta_{\text{in}} = \arctan(k_y/k_x)$ den Einfallswinkel der ebenen Welle und $\theta_{\text{out}} = \arctan(-\beta_n/\alpha_n)$ den Ausfallswinkel der Gitterordnung n .

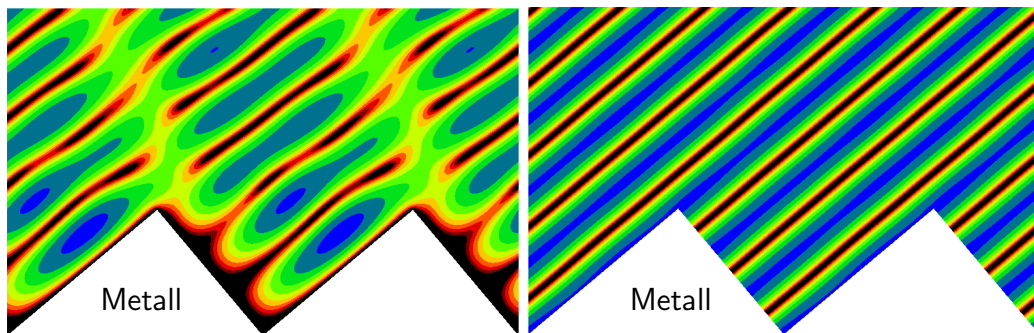


Abbildung 5.9: Echelette-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD Simulation. Man erkennt die nicht-ideale Reflexionseffizienz in der TE-Mode deutlich am Auftreten von Interferenzmustern.

Zuerst soll die Situation eines Gitters betrachtet werden, das die einfallende Welle in sich zurück reflektiert ($\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$) mit $n = -3$. Das Gitter mit der wohl einfachsten Form (Dreiecksform), das hohe Effizienz in einer Gitterordnung vermuten lässt, ist das klassische Echelette-Gitter (Abb. 5.9) [53]. Die Winkel des Dreiecks werden so gewählt, dass die reflektierenden Flächen senkrecht und parallel zur einfallenden Welle stehen, was ein rechtwinkliges Dreieck ergibt. Die Gitterperiode wird so gewählt, dass die Länge, der parallel zur Einfallsrichtung stehenden Dreiecksseite ein Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt. Dies ergibt sich allerdings automatisch aus der Bedingung, dass entsprechend (4.35) eine Floquet-Mode existieren soll, die eine in die Einfallsrichtung zurücklaufende Welle darstellt.

Das Gitter hat theoretisch 100% Effizienz in der TM-Polarisation. Dies kann man sich einfach klar machen, indem man erkennt, dass ein Feld, welches nur aus der einlaufenden und einer ideal in sich zurücklaufenden Welle besteht, die Randbedingungen der TM-Polarisation perfekt erfüllt. In der

TE-Polarisation ist sie im Gegensatz dazu relativ niedrig, was in Abb. 5.9 (links) gut zu sehen ist in Form von Interferenzen der unerwünschten Gitterordnungen. Die berechneten Effizienzen für sind in Tab. 5.1 angegeben. Das Gitter kann als Referenz verwendet werden, um ein Maß für die Verbesserung durch den Optimierungsprozess zur Verfügung zu haben.

Leider kann für die Optimierung aus Gründen des Rechenaufwands keine statistisch signifikante Untersuchung des Erfolgs der Optimierungsverfahren durchgeführt werden. Jedoch wurden für ein Fouriergitter ($\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, 6 Harmonische) für unterschiedliche Gewichtungen des Formterms C_1^{F} jeweils mehrere Läufe des DE-Optimierers (mit Standardeinstellungen) durchgeführt. Die Ergebnisse (Abb. 5.10–5.12, Tab. 5.2) vermitteln trotz der mangelnden Signifikanz einen gewissen Eindruck von der Zuverlässigkeit des Optimierungsprozesses.

Die Bilderserie (Abb. 5.10–5.12) zeigt, dass perfekte Effizienz erreichbar ist (Abb. 5.10 unten), wenn auf Berücksichtigung der Form verzichtet wird. In der Tat ist dies für viele Einfallswinkel der Fall. Desweiteren ist ersichtlich, dass Einbeziehung der Form in die Kostenfunktion den Optimierer stabiler werden lässt, im Sinne, dass trotz des statischen Verhaltens das Endergebnis reproduzierbarer wird. Wahrscheinlich ist das darauf zurückzuführen, dass ohne Gewichtung der Form einfach mehrere Lösungen für das Funktionsminimierungsproblem existieren, d.h. mehrere Parametersätze mit global minimalem Wert der Kostenfunktion (eben mehrere perfekte Gitter).

Desweiteren ist erwähnenswert, dass der Betrachter der optimierten Gitterprofile oft geneigt ist, nach einer anschaulichen Begründung für die Gitterformen zu suchen, z.B. würde die Vermutung in Frage kommen, dass Abb. 5.10 (unten) eine Überlagerung aus einem Dreiecksgitter, welches für die Reflexion in die gewünschte Gitterordnung bedingt und einem (Sinus-) Phasengitter mit kleiner Periodenlänge darstellt. Dies ist aber, wie die rechnerische Analyse zeigt, nicht der Fall. Es scheint in den meisten Fällen zu gelten, dass die Reflexionseigenschaften der Gitter durch ein Zusammenspiel mehrerer geometrischer Eigenschaften der Randkurve zustandekommt, z.B. indem sich Reflexionen in unerwünschte Moden gegenseitig aufheben. Dies macht eine Interpretation der Gitterform im allgemeinen sehr schwierig.

Zum Vergleich von Gittern unterschiedlicher Ordnungen sind für dieselben Winkel wie in Abb. 5.10–5.12 noch die optimierten Gitter für die -1. und -2. Ordnung gezeigt (Abb. 5.13–5.16). Erwähnenswert ist dabei, dass trotz glatter Randkurve die Effizienz dieser Gitter 99.9% bzw. 99.8% beträgt. Allerdings bedeutet dies keineswegs dass grundsätzlich Gitter für die -1. oder -2. Ordnung bessere Resultate als solche für höhere Ordnungen liefern.

Tab. 5.2 zeigt die Effizienzen η^{TE} , η^{TM} und η^{circ} der gezeigten Gitter sowie

deren Phasenverschiebung φ_n .

Tabelle 5.1: Berechnete Effizienzen des Echelette-Gitters und optimierter Gitter für $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$ und $n = -3$, in beiden Polarisationen (I_{TE} und I_{TM}), sowie die Phasenverschiebung φ_n und die Effizienz für zirkulare Polarisation I_{c} . Es wurden mit denselben Gewichtungen der Krümmung jeweils mehrere Läufe des Optimierers durchgeführt. Läufe mit denselben Einstellungen sind geklammert.

	η^{TE}	η^{TM}	$\varphi_n/^\circ$	η^{circ}
$\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -3$				
Echelette (Abb. 5.9)	0.670	1.000	-11.8	0.818
Fourier (Abb. 5.10)	0.996	0.999	-9.6	0.991
	0.994	0.998	-4.7	0.990
	0.994	0.998	-9.3	0.990
	0.999	0.999	-0.7	0.999
Fourier (Abb. 5.11)	0.996	0.997	-10.2	0.989
	0.998	0.999	-10.6	0.990
	0.994	0.998	-11.4	0.986
Fourier (Abb. 5.12)	0.990	0.999	-3.5	0.994
	0.998	0.993	-13.3	0.982
	0.994	0.997	-12.9	0.983
	0.994	0.999	-13.6	0.983
	0.994	0.997	-13.4	0.982

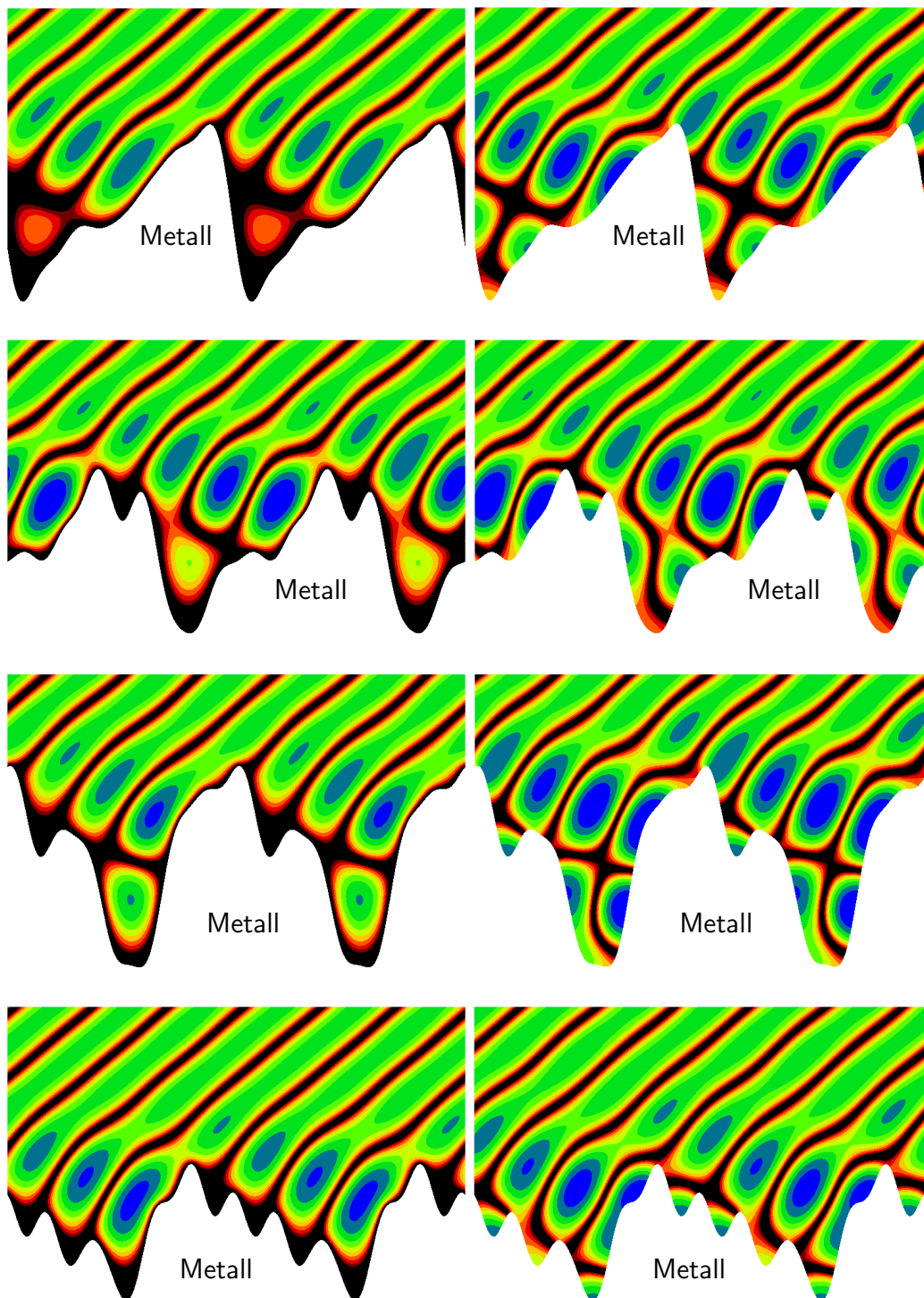


Abbildung 5.10: Optimierte Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, 6 Fourier-Harmonische, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM) von oben nach unten: (0.996/0.999), (0.994/0.998), (0.994/0.998), (0.999/0.999)

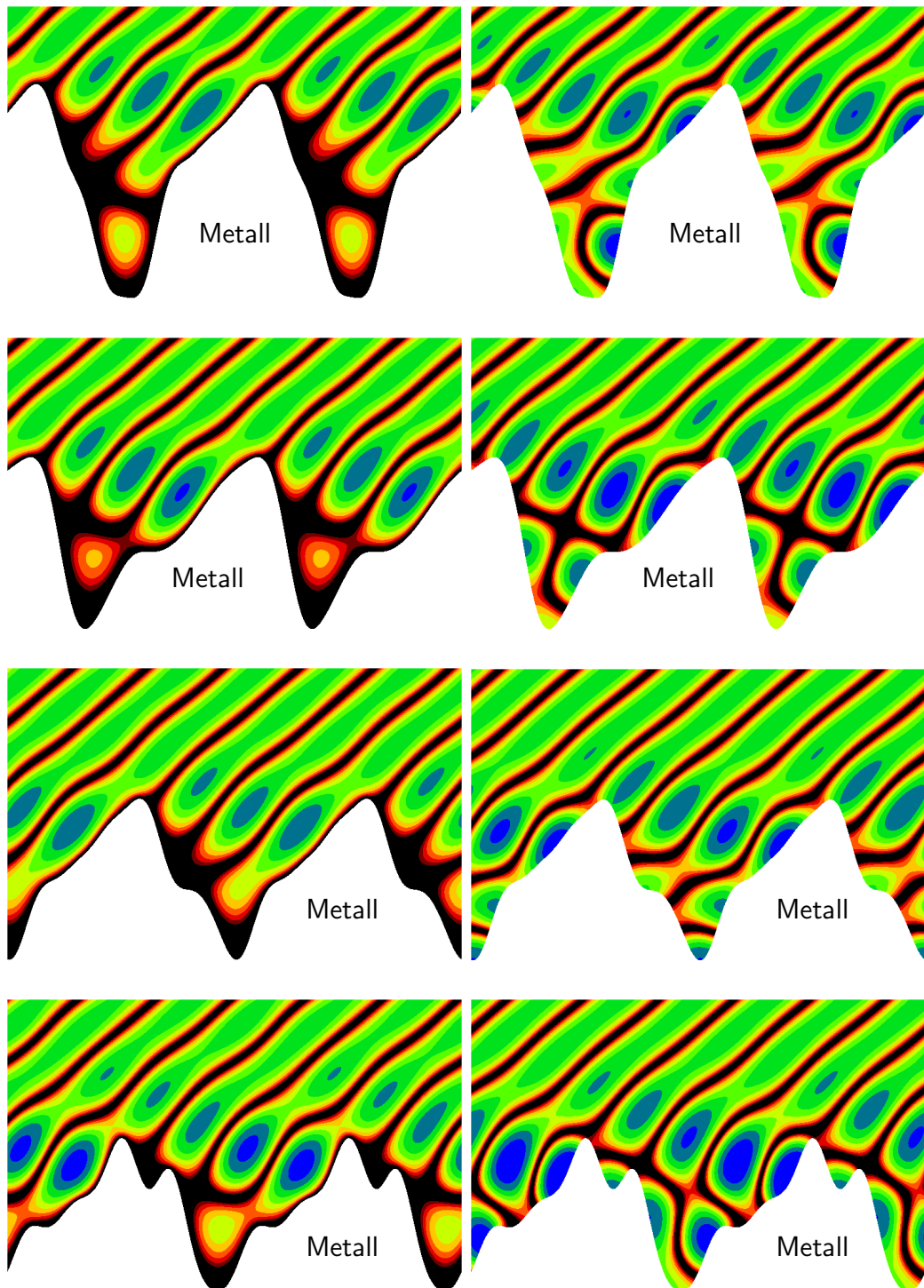


Abbildung 5.11: Optimierte Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3, 6$ Fourier-Harmonische, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, schwache Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM) von oben nach unten: (0.996/0.997), (0.998/0.999), (0.994/0.998), (0.990/0.999)

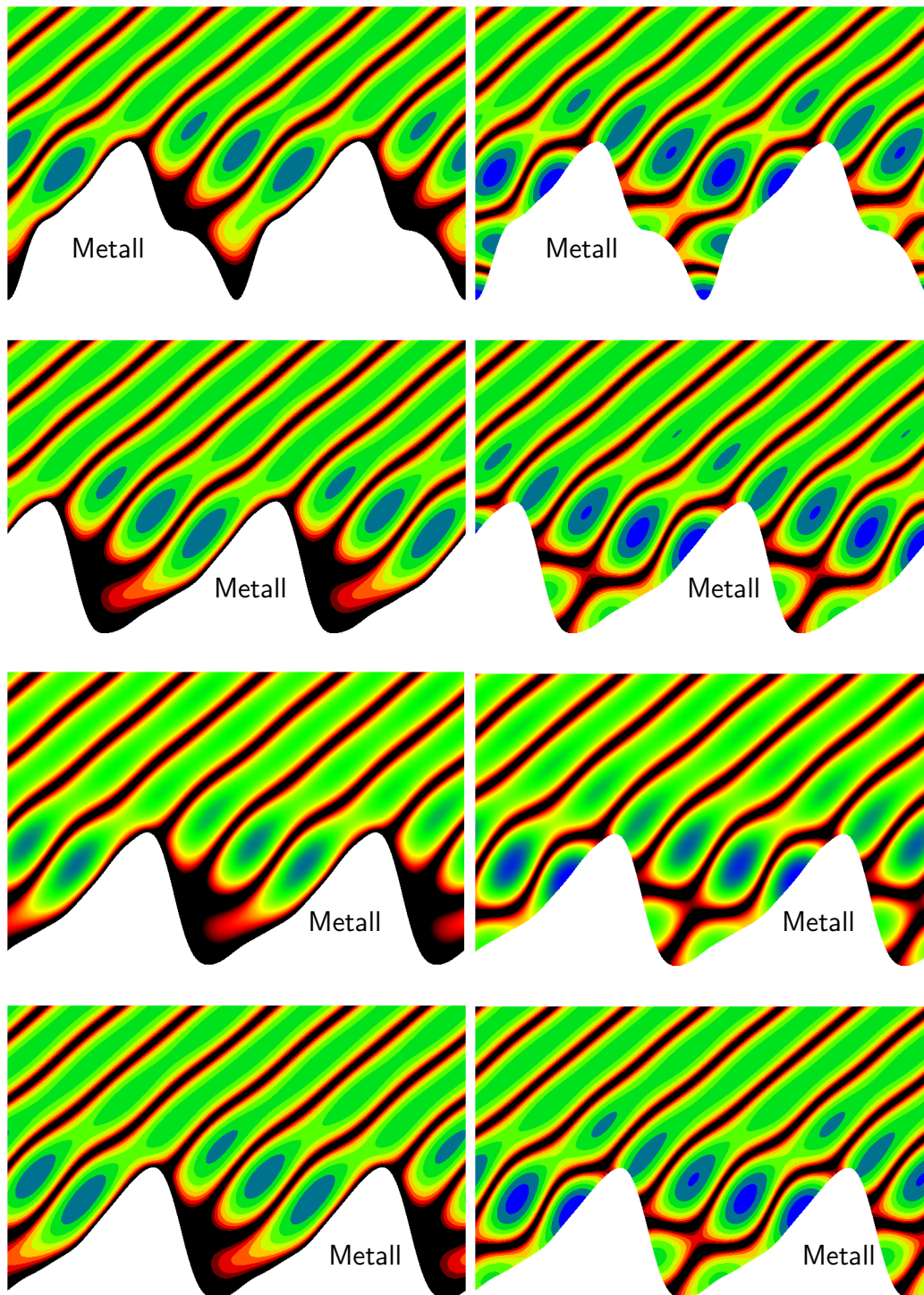


Abbildung 5.12: Optimierte Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, 6 Fourier-Harmonische, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM) von oben nach unten: (0.998/0.993), (0.994/0.997), (0.994/0.997), (0.994/0.997)

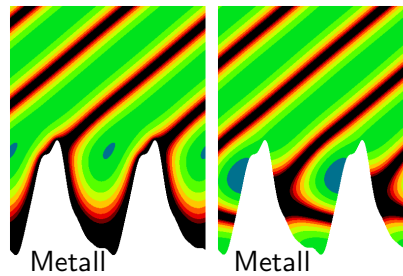


Abbildung 5.13: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -1$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.999/0.999)

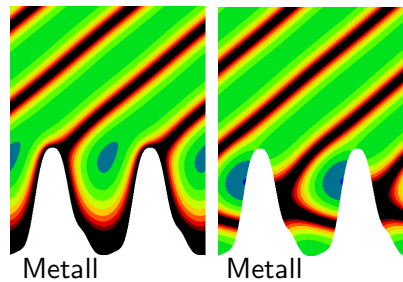


Abbildung 5.14: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -1$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.999/0.999)

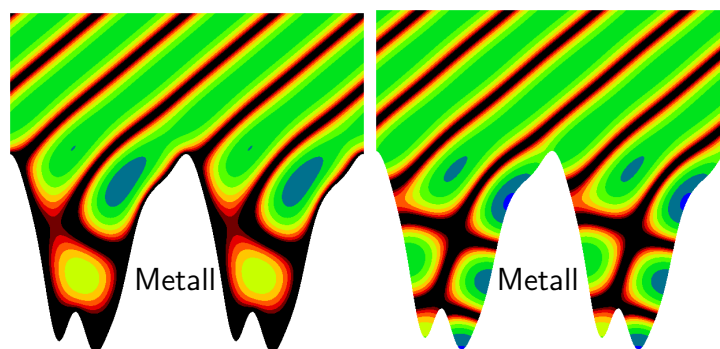


Abbildung 5.15: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -2$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.999/0.999)

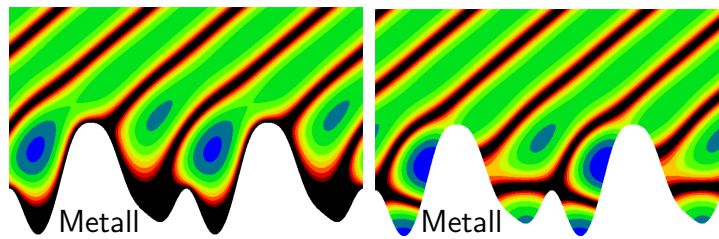


Abbildung 5.16: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -2$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.998/0.998)

Ohne Anspruch auf irgendeine Art von Vollständigkeit, sollen noch einige weitere optimierte Gitter gezeigt werden, um einen Eindruck vom Rahmen des Möglichen zu geben.

Das nächste Beispiel (Abb. 5.17) wurde für einen anderen Winkel ($\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 60^\circ$) mit dem Nelder-Mead-Optimierer gewonnen. Es wurde genauso wie die Gitter in Abb. 5.10 nicht auf Form optimiert, und liefert etwa ähnliche Ergebnisse. Wenn jedoch auch die Krümmung berücksichtigt wird, verschlechtert sich die Effizienz deutlich (Abb. 5.18).

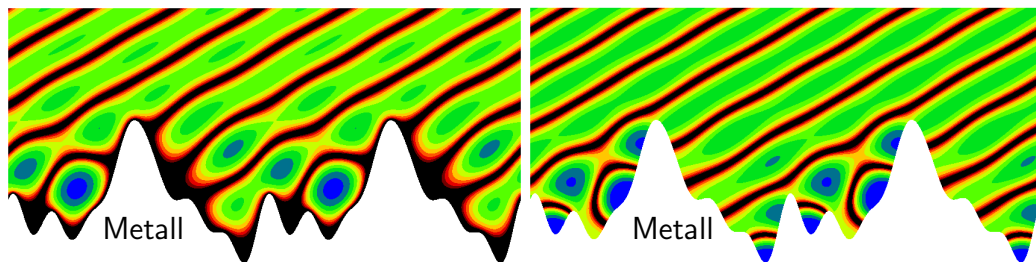


Abbildung 5.17: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 60^\circ$, $n = -3$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, Nelder-Mead-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.999/0.995)

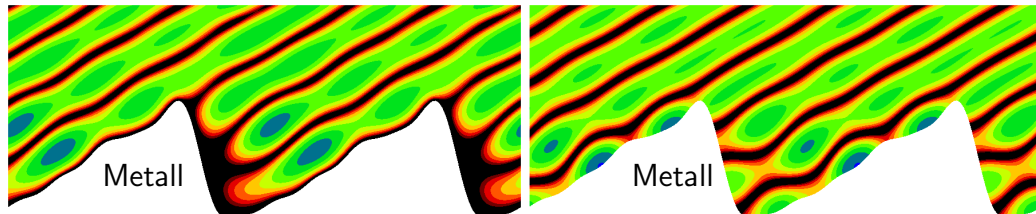


Abbildung 5.18: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 60^\circ$, $n = -3$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.962/0.992)

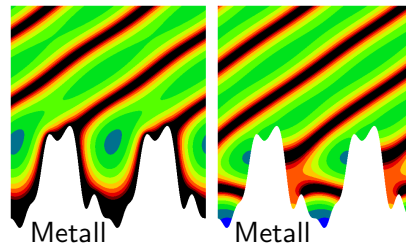


Abbildung 5.19: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -1$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.987/0.998)

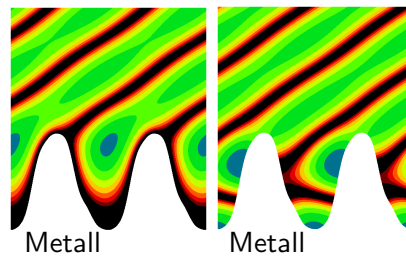


Abbildung 5.20: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -1$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.987/0.993)

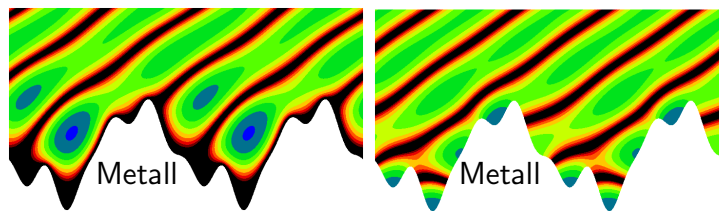


Abbildung 5.21: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -2$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.964/0.999)

Es ist natürlich auch möglich Gitter für sich unterscheidende Einfallswinkel zu generieren. Die Abb. 5.19-5.24 zeigen einige Ergebnisse für $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$ und unterschiedliche Gitterordnungen. Es zeigt sich, dass in dieser Situation keine perfekte Effizienz mehr erreicht wird, (trotz etlichen Läufen des Optimierers) auch wenn nicht auf Form optimiert wurde.

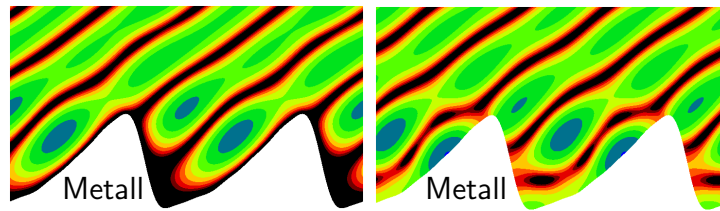


Abbildung 5.22: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -2$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.958/0.995)

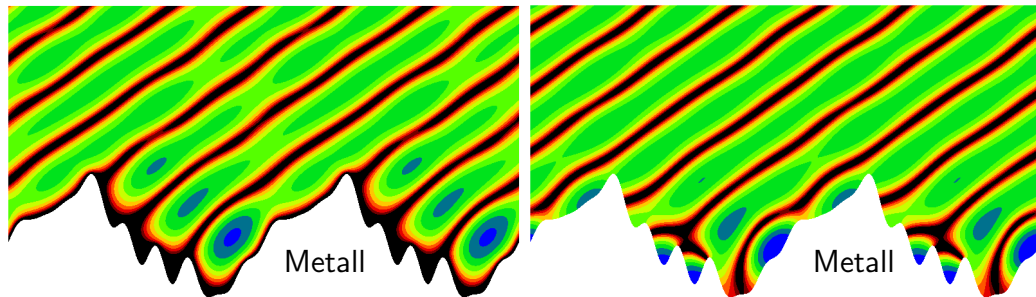


Abbildung 5.23: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, Nelder-Mead-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.956/0.987)

Es scheint also Situationen zu geben wo dies nicht möglich ist. Anzumerken ist, dass dies keine spezielle Eigenschaft von Gittern mit sich unterscheidenden Einfallswinkel- und Ausfallswinkeln zu sein scheint. Es wurden auch einige Gegenbeispiele gefunden.

Abschließend soll mit Abb. 5.25 noch ein Gitter dargestellt werden, welches für die Verwendung bei 2 verschiedene Frequenzen $f_1/f_2 = 3/4$ optimiert wurde. Eine Anwendung könnte bei einem Mehrfrequenz-ECRH-System liegen, das wie bei ASDEX Upgrade [54, 55], bei 105 GHz und 140 GHz arbeitet. Die Welle soll unter $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$ bei beiden Frequenzen in sich zurückreflektiert werden, d.h. für f_1 wurde die Effizienz in der Ordnung $n = -3$, für Frequenz f_2 in der Ordnung $n = -4$ optimiert.

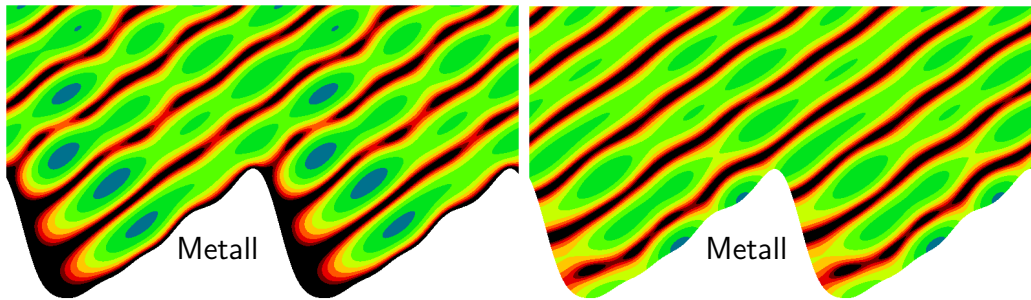


Abbildung 5.24: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$, $\theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, DE-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. Effizienzen (TE/TM): (0.890/0.969)

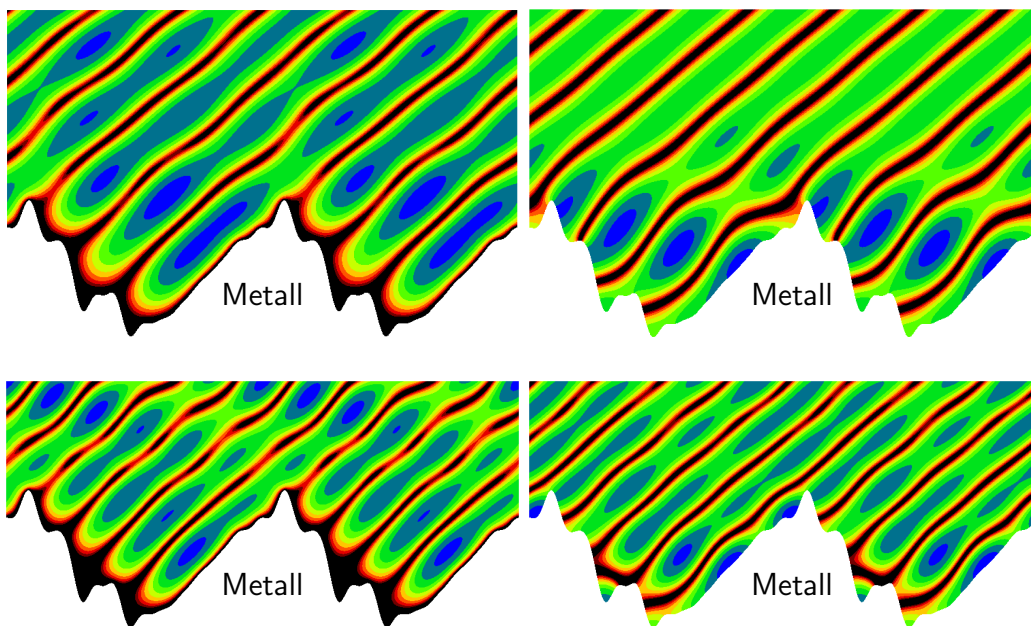


Abbildung 5.25: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, verwendbar für 2 Frequenzen mit $f_1/f_2 = 4/3$ in $n = -3$ und $n = -4$, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, Nelder-Mead-Optimierer, keine Gewichtung der Krümmung. Effizienzen 3. Ordnung (TE/TM): (0.932/0.999), Effizienzen 4. Ordnung (TE/TM): (0.932/0.968)

Tabelle 5.2: Berechnete Effizienzen der Echelette-Gitter und optimierten Gitter, für einige unterschiedliche Einfallswinkel, in beiden Polarisierungen (I_{TE} und I_{TM}), sowie die Phasenverschiebung φ_n und die Effizienz für zirkuläre Polarisation I_{C} . Es ist jeweils das beste von den Optimierern aufgefundene Resultat dargestellt.

	η^{TE}	η^{TM}	$\varphi_n/^\circ$	η^{circ}
$\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -1$				
Echelette	0.401	1.000	-23.2	0.642
Fourier (Abb. 5.13)	0.999	0.999	-1.7	0.999
Fourier (Abb. 5.14)	0.999	0.999	-4.1	0.998
$\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -2$				
Echelette	0.605	1.000	-16.6	0.774
Fourier (Abb. 5.15)	0.999	0.999	-1.9	0.999
Fourier (Abb. 5.16)	0.998	0.998	-0.5	0.998
$\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -3$				
siehe Tab. 5.1				
$\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 60^\circ, n = -3$				
Echelette	0.743	1.000	-8.5	0.862
Fourier (Abb. 5.17)	0.999	0.995	-1.2	0.997
Fourier (Abb. 5.18)	0.962	0.992	-13.7	0.963
$\theta_{\text{in}} = 60^\circ, \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -1$				
Echelette	0.500	0.999	-18.6	0.709
Fourier (Abb. 5.19)	0.987	0.998	-0.5	0.993
Fourier (Abb. 5.20)	0.987	0.993	-0.9	0.989
$\theta_{\text{in}} = 60^\circ, \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -2$				
Echelette	0.655	0.992	-12.0	0.806
Fourier (Abb. 5.21)	0.964	0.999	-1.5	0.968
Fourier (Abb. 5.22)	0.958	0.995	-16.2	0.957
$\theta_{\text{in}} = 60^\circ, \theta_{\text{out}} = 50^\circ, n = -3$				
Echelette	0.685	0.990	-10.1	0.824
Fourier (Abb. 5.23)	0.956	0.987	-6.9	0.968
Fourier (Abb. 5.24)	0.890	0.963	-12.9	0.914
$\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ, 2\text{-freq.}$				
Echelette (Abb. 5.9), $n = -3$	0.670	1.000	-11.8	0.818
Fourier (Abb. 5.25), $n = -3$	0.932	0.999	-20.7	0.935
Echelette, $n = -4$	0.656	1.000	-11.1	0.811
Fourier (Abb. 5.25), $n = -4$	0.932	0.968	-15.9	0.932

5.3.2 Experimentelle Untersuchungen

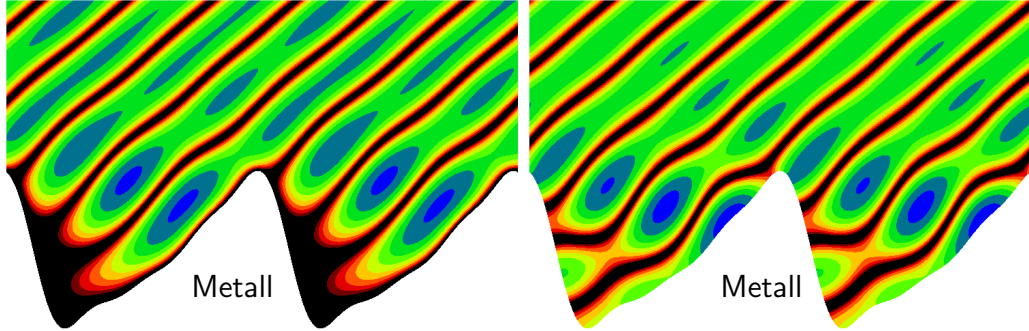


Abbildung 5.26: Optimiertes Fourier-Gitter mit $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{out}} = 50^\circ$, $n = -3$, 4 Fourier-Harmonische, TE-Polarisation $|E_z|^2$ (links), TM-Polarisation $|H_z|^2$ (rechts), 2 dB/Farbstufe, FDTD-Simulation, Nelder-Mead-Optimierer, starke Gewichtung der Krümmung. (Das Gitter wird hier gezeigt, da es für die experimentellen Untersuchungen verwendet wurde, nicht weil es weitere Erkenntnisse über die in Abschnitt 5.3.1 dargestellte numerische Optimierung der Gitter liefert.

Um zu überprüfen, ob die BEM- und FDTD-Simulationen der Gittereffizienzen und Phasenverschiebungen im Experiment reproduzierbar sind, wurden 2 optimierte Gitter (Abb. 5.26 und Abb. 5.23) aus Aluminium angefertigt und bei 68 GHz mit einem Millimeterwellen-Netzwerkanalysator vermessen. Die Gitter wurden mit einem Gaußschen Strahl, der seine Taille (Radius $w_0 = 32.5$ mm) am Gitter hat, angeregt.

Zuerst wurden die relativen Intensitäten der einzelnen Gitterordnungen gemessen, indem ein Winkelscan des Empfängers durchgeführt wurde (Variation von θ_{out}). Die Ergebnisse sind in (Abb. 5.27 und Abb. 5.28) zu sehen.

Die relativen Intensitäten der einzelnen Ordnungen wurden anschließend durch Integration über dem Scanwinkel θ_{out} ermittelt

$$I_{m,\text{rel}} = \int_{\theta_m - 10^\circ}^{\theta_m + 10^\circ} I(\theta_{\text{out}}) d\theta_{\text{out}} \quad (5.8)$$

und daraus die Gittereffizienz berechnet zu $I_m = I_{m,\text{rel}} / \sum_k I_{k,\text{rel}}$ (Ergebnisse in Tab. 5.3).

Es zeigt sich, dass die experimentellen Daten mit den Simulationsergebnissen sehr gut zusammenpassen. Die vorhandenen kleineren Abweichungen sind vermutlich durch das Winkelspektrum des Gaußschen Strahls, Justierfehler im optischen Aufbau und Fertigungstoleranzen bei der Herstellung des

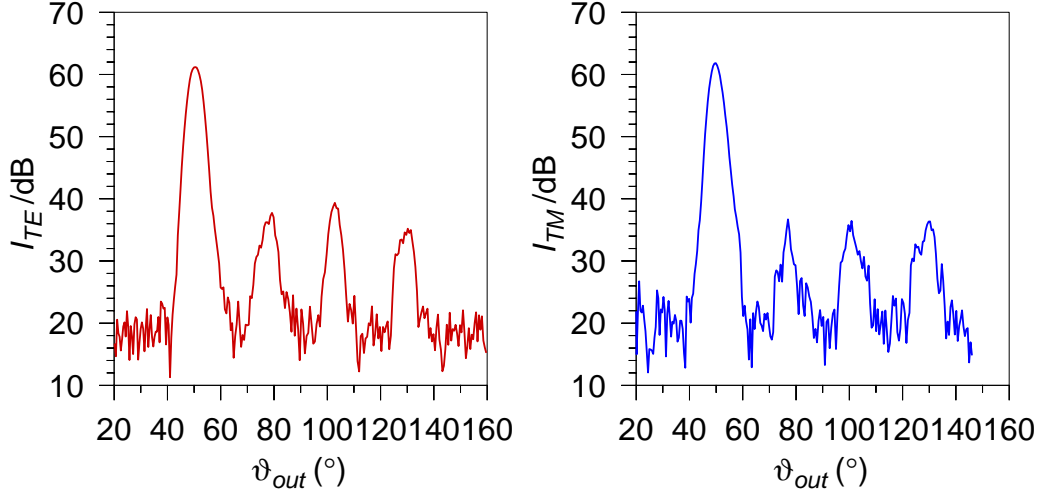


Abbildung 5.27: Gemessene Winkelverteilung der reflektierten Leistung für das Fourier-Gitter Abb. 5.26, welches durch einen Gaußschen Strahl ($w_0 = 32.5$ mm) angeregt wird, in TE-Polarisation (links) und TM (rechts). Die Peaks entsprechen den Gitterordnungen -3 bis 0 (von l. nach r.).

Gitters zu erklären. Sie stellen sicher keinen Hinweis auf Fehler in den Simulationscodes dar.

Des Weiteren wurde die Phasenverschiebung durch Vermessung der Polarisationsellipse überprüft. Das Gitter wurde dabei in linearer Polarisation schräg zu den Nuten unter einem Winkel ξ_{in} angeregt (definiert relativ zur TM-Polarisation). Die reflektierte Leistung in der gewünschten -3. Ordnung wird dann durch einen Empfänger gemessen, der lineare Polarisation akzeptiert und um die Ausbreitungsrichtung der Welle rotiert werden kann, wobei ξ_{out} wieder den Winkel bezüglich der TM-Polarisation bedeutet. Dann ist für die detektierte Leistung (4.98) gültig, wobei für die linearen Polarisationen $\epsilon_{\text{in}} = \epsilon_{\text{out}} = 0$ zu setzen ist. Insgesamt ist die Intensität dann gegeben durch

$$I(\xi_{\text{out}}) = (\sqrt{I_s} \cos \xi_{\text{in}} \cos \xi_{\text{out}} + \sqrt{I_f} \sin \xi_{\text{in}} \sin \xi_{\text{out}} \cos \varphi_n)^2 + I_f (\sin \xi_{\text{in}} \sin \xi_{\text{out}} \sin \varphi_n)^2 \quad (5.9)$$

Die Formel (5.9) wurde für die theoretische Kurve (durchgezogene Linie) in Abb. 5.23 verwendet. Für ϵ , ζ und φ_n wurden die simulierten Werte verwendet, die Gesamtamplitude wurde an die Messdaten angefitet. Die Übereinstimmung kann als gut bezeichnet werden. Die kleinen Fehler sind durch Fehljustierung des optischen Aufbaus zu erklären.

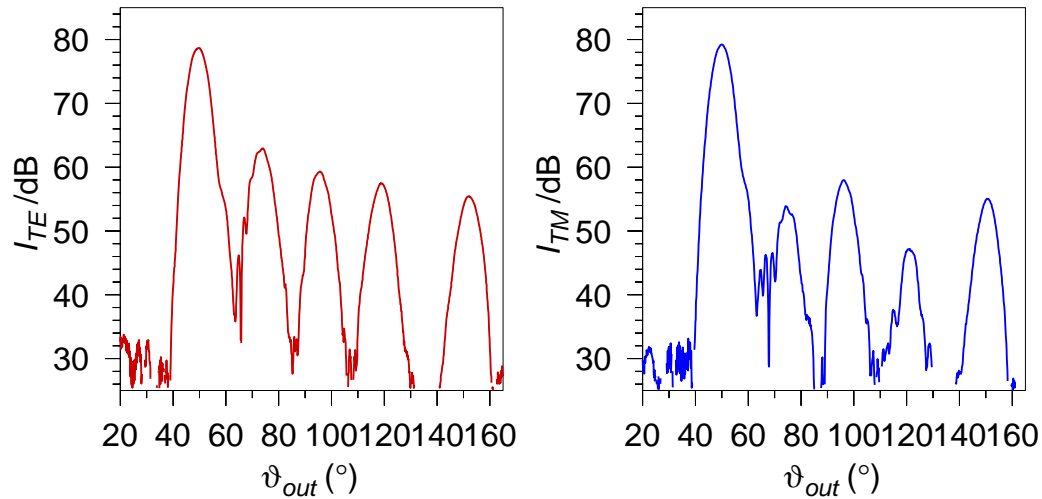


Abbildung 5.28: Gemessene Winkelverteilung der reflektierten Leistung für das Fourier-Gitter Abb. 5.23, welches durch einen Gaußschen Strahl ($w_0 = 32.5$ mm) angeregt wird, in TE-Polarisation (links) und TM (rechts). Die Peaks entsprechen den Gitterordnungen -3 bis 1 (von l. nach r.).

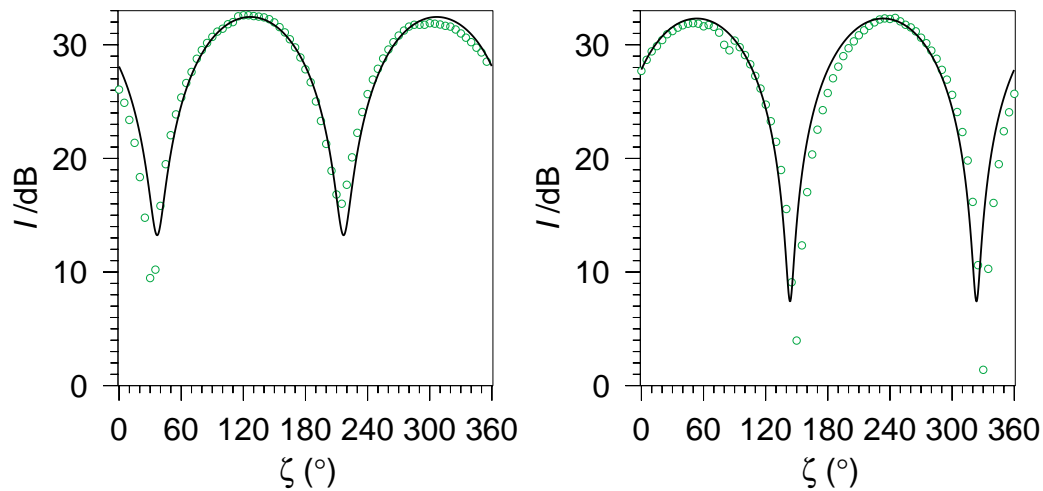


Abbildung 5.29: Messung der Polarisationsellipsen der -3. Ordnung für Abb. 5.26 (links) and Abb. 5.23 (rechts). Die durchgezogene Linie stellt die zu erwartende theoretische Kurve dar.

Tabelle 5.3: Vergleich der theoretischen Simulationsergebnisse mit den experimentell gemessenen Gittereffizienzen.

Order n	-3	-2	-1	0	1
$\theta_{\text{in}} = 50^\circ$ (Abb. 5.26)					
I_f (theo)	0.9945	0.0036	0.0017	0.0001	—
I_f (exp)	0.9864	0.0049	0.0055	0.0031	—
I_s (theo)	0.9988	0.0005	0.0009	0.0003	—
I_s (exp)	0.9905	0.0025	0.0032	0.0039	—
$\theta_{\text{in}} = 60^\circ$ (Abb. 5.23)					
I_f (theo)	0.9560	0.0232	0.0097	0.0055	0.0059
I_f (exp)	0.9510	0.0261	0.0111	0.0071	0.0047
I_s (theo)	0.9868	0.0013	0.0078	0.0006	0.0035
I_s (exp)	0.9859	0.0029	0.0071	0.0006	0.0037

5.4 Holographischer Spiegel

Da der hier beschriebene Spiegel für den kontrollierten 2. Durchgang der O2-Mode unter den extremen (Temperatur-)Bedingungen eines großen Fusionsexperiments betrieben werden soll, wo die Belastung der inneren Wand die Grenzen des Wandmaterials erreicht, ist es notwendig die Belastung sehr homogen über die Wandfläche zu verteilen. Daraus folgt, dass der Spiegel gegenüber den benachbarten Wandkacheln weder vor- noch zurückversetzt werden darf, er muss also an den ursprünglichen Wandverlauf angeschmiegt werden. Um trotzdem die Reflexion in die gewünschte Richtung, sowie die gewünschten Fokussierungseigenschaften des Spiegels zu erhalten, ist das Auftragen eines holographischen Gitters notwendig.

5.4.1 Berechnung des holographischen Spiegels

Für den in Kapitel 3 beschriebenen Strahlengang wurde für $f = 140$ GHz ein holographischer Spiegel berechnet, der 2 Kacheln der inneren Wand von ASDEX Upgrade ersetzen soll (Abb. 3.3). Bei dieser Doppelkachel handelt es sich um eine Sattelfläche mit den Krümmungsradien $R_x = 880$ mm und $R_y = 4972$ mm (Abb. 5.30).

Als einlaufender Strahl wird der astigmatische Gaußsche Strahl aus der TORBEAM-Rechnung angenommen mit den Taillenbreiten $w_{0x'} = 13.5$ mm und $w_{0y'} = 12$ mm. Um die weiteren Strahlparameter anzugeben, soll ein an die Kachel angepasstes kartesisches Koordinatensystem angenommen werden (Der Normalenvektor von der Kacheloberfläche weg zeigt in $+z$ -Richtung. Der Ursprung befindet sich in der Mitte der Kacheloberfläche.) In diesem Koordinatensystem läuft der Gaußsche Strahl durch den Punkt (9.6 mm, 7 mm, 0 mm), die Taillen in x' - und y' -Richtung liegen 693 mm bzw. 780 mm von diesem Punkt entfernt, die Ausbreitungsrichtung des Strahls \hat{z} , sowie die Richtungen \hat{x} und \hat{y} , die die Orientierung des Astigmatismus festlegen, lauten

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= (0.8849, 0.0525, -0.4628) \\ \hat{y}' &= (0.0620, 0.9715, 0.2288) \\ \hat{z}' &= (-0.4613, 0.2299, -0.8569)\end{aligned}\tag{5.10}$$

Da der Strahl in sich zurücklaufen soll, sind der Einfallswinkel und Ausfallswinkel immer identisch. Über die Oberfläche des Spiegels aufgetragen ergibt sich die Verteilung der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ (4.3) sowie der Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel ($\theta_{\text{in}} = \theta_m$).

Für die auftretenden Winkel $\theta_{\text{in}} \in [46^\circ, 73^\circ]$ wurden ein Satz optimierter Fouriergitter in 1° -Schritten produziert, indem zuerst für $\theta_{\text{in}} = 57^\circ$ ein Gitter

optimiert wurde und dann jeweils ein Gitter nach dem anderen ausgehend vom benachbarten nachoptimiert wurde. Mit nachoptimiert ist gemeint, dass dem Optimierer als Mittelpunkt der Startverteilung die Parameter des Nachbargitters übergeben werden, und die Verteilung klein genug gewählt wird, dass sprunghafte Änderungen des Gitterprofils gegenüber dem Nachbarn verhindert werden.

Es wurde die Gitterordnung $n = 2$ gewählt, da die Effizienz als hinreichend anzusehen ist, und die kleinere Profiltiefe von Gittern 2. Ordnung als wichtiger erachtet wurde als die höhere Effizienz von Gittern 3. Ordnung.

Bei der Festlegung der x - und y -Positionen, die für die unterschiedlichen Gitter einander entsprechen sollen, wurde in y -Richtung keine Verschiebung vorgenommen, was bei Fourier-Gittern Berechtigung hat, da die Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse immer identisch sind und somit angenommen werden kann, dass die Gitter in dieser Richtung bei der Optimierung nicht wandern. In x -Richtung wurde die relative Verschiebung so gewählt, dass im Ursprung des Koordinatensystems die Phasenverschiebungen zwischen der einlaufenden und der auslaufenden Welle für beide Gitter möglichst gleich sind, wobei natürlich ein Kompromiss zwischen den Polarisierungen TE und TM gemacht werden muss.

Damit erhält man den Satz von Gitterprofilen Abb. 5.34. Es sind kleinere Sprünge zu beobachten, diese ließen sich jedoch aufgrund des Verhaltens des Optimierers nicht vermeiden. Zur Kontrolle wurde der Unterschied von benachbarten Gittern im Sinne der Summe der Fehlerquadrate berechnet.

$$E = \sqrt{\int_0^1 [y_1(\frac{x}{\ell}) - y_2(\frac{x}{\ell})]^2 dx} \quad (5.11)$$

In Abb. 5.36 sind die Ergebnisse dargestellt. Der Sprung bei $\theta = 60^\circ$ ist weniger erstaunlich, da dort die -3. und die 1. Gitterordnung erscheinen. Da der BEM-Rechenkern an derartigen Stellen versagt (wegen der Divergenz von β_n), wurden 2 Gitter, knapp oberhalb und unterhalb von $\theta = 60^\circ$ optimiert (in Abb. 5.34 schwarz dargestellt). Das Problem bei 54° ließe sich vielleicht beheben, wenn man versucht geeignete Optimierereinstellungen zu finden.

In Abb. 5.35 und 5.36 sind die Wirkungsgrade der Gitter sowie die relative Phasenverschiebung zwischen den Polarisierungen dargestellt.

Desweiteren wurde versucht direkt sichtbar zu machen, an welcher Stelle auf dem Spiegel welche Verhältnisse vorliegen. In Abb. 5.37 und 5.38 sind die Daten aus Abb. 5.35 und 5.36 über der Spiegeloberfläche dargestellt.

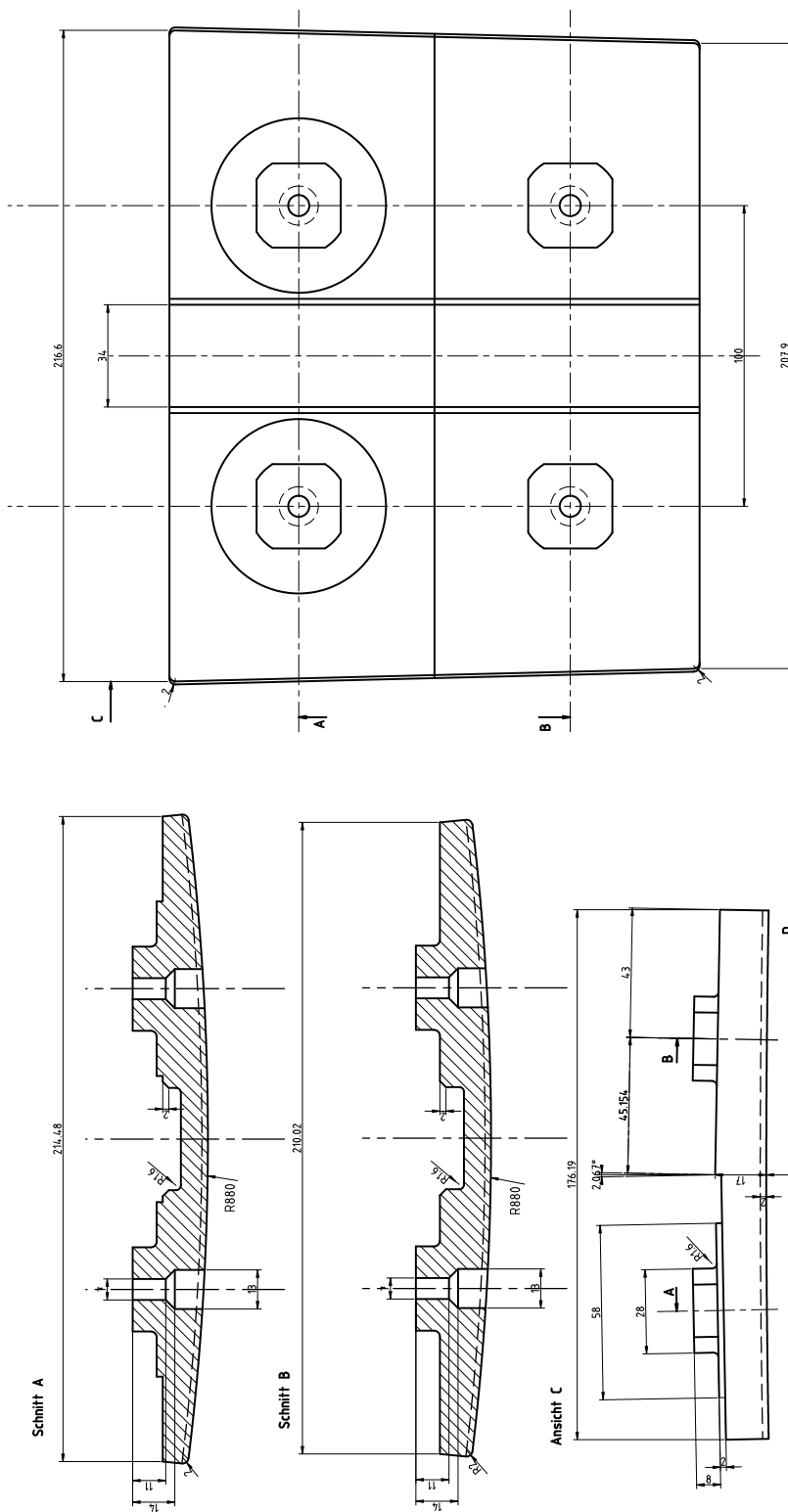


Abbildung 5.30: Zeichnung der Doppelkachel mit Gitterspiegel für ASDEX Upgrade.

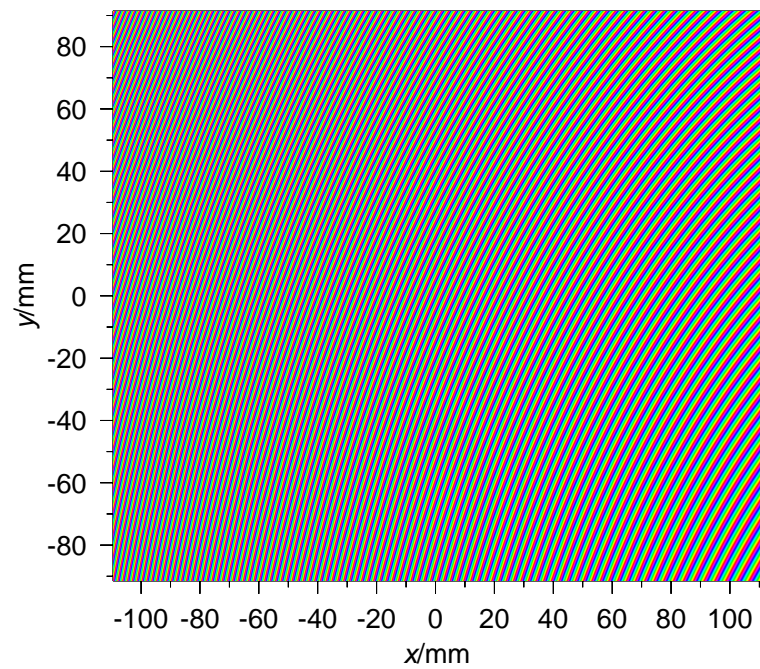


Abbildung 5.31: Bild der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ des berechneten holographischen Spiegels in Abhängigkeit von der Position auf der Spiegeloberfläche.



Abbildung 5.32: Foto des fertigen holographischen Spiegels aus Aluminium. Da Gitter 2. Ordnung verwendet wurden, liegen die Nuten nur halb so dicht wie die Phasendurchgänge in Abb. 5.31.

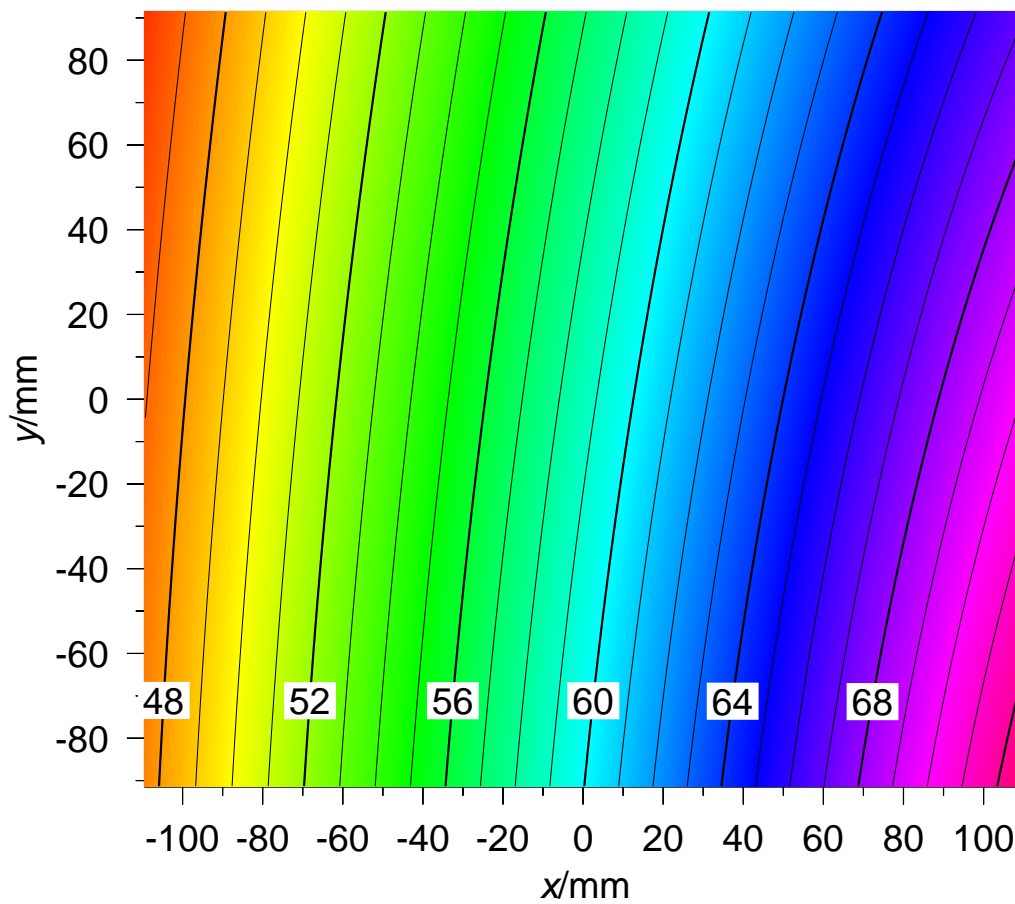


Abbildung 5.33: Einfallswinkel θ_{in} der Phasenfront auf der Oberfläche des berechneten holographischen Spiegels in Abhängigkeit von der Position auf der Spiegeloberfläche.

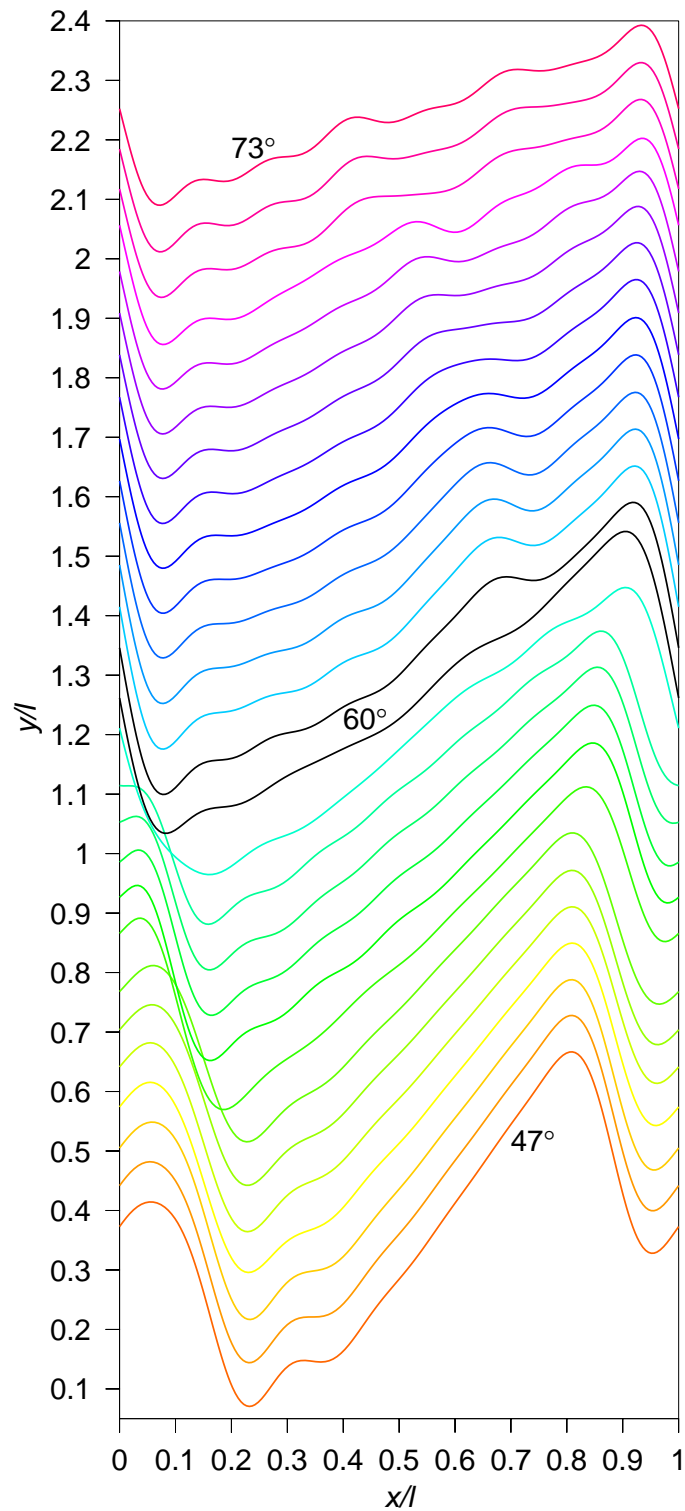


Abbildung 5.34: Gitterprofile des holographischen Spiegels in Abhängigkeit vom Einfallswinkel. In schwarz sind die Gitter für $\theta_{\text{in}} = 60^\circ$ markiert, wo eine neue Gitterordnung anfängt. Die Längen sind auf ℓ normiert, d.h. die Profile für große Winkel erscheinen kleiner, als sie im Verhältnis sind.

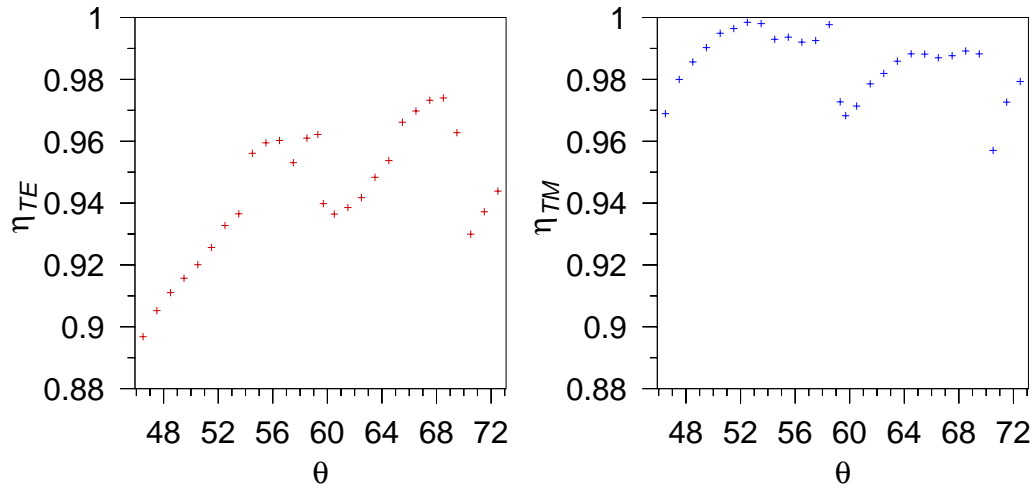


Abbildung 5.35: Wirkungsgrade der verwendeten Gitter in der TE-Polarisation (l) und TM-Polarisation (r) in Abhängigkeit vom Einfallswinkel θ_{in} .

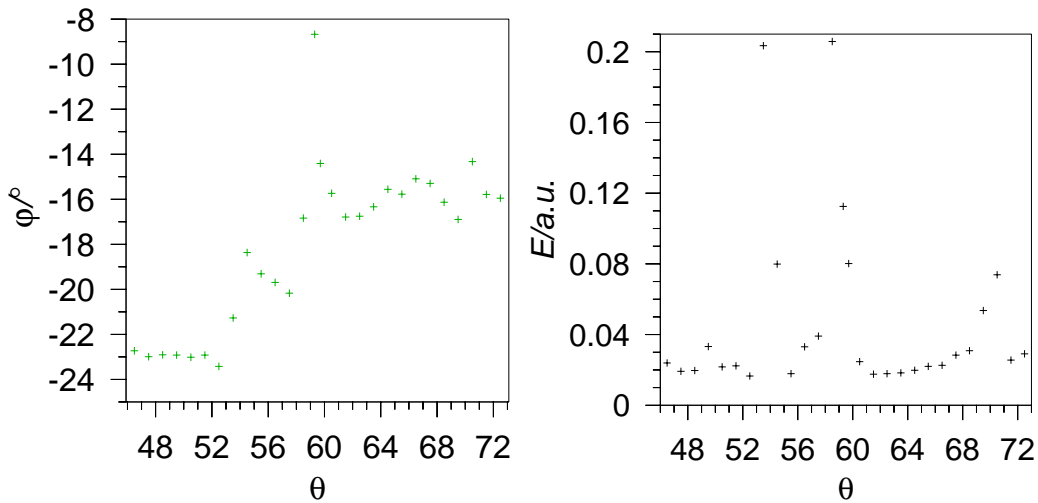


Abbildung 5.36: Phasenverschiebung φ zwischen den Polarisationen (l) sowie Änderung des Gitterform E ($\sqrt{\text{Summe der Fehlerquadrate}}$) (r).

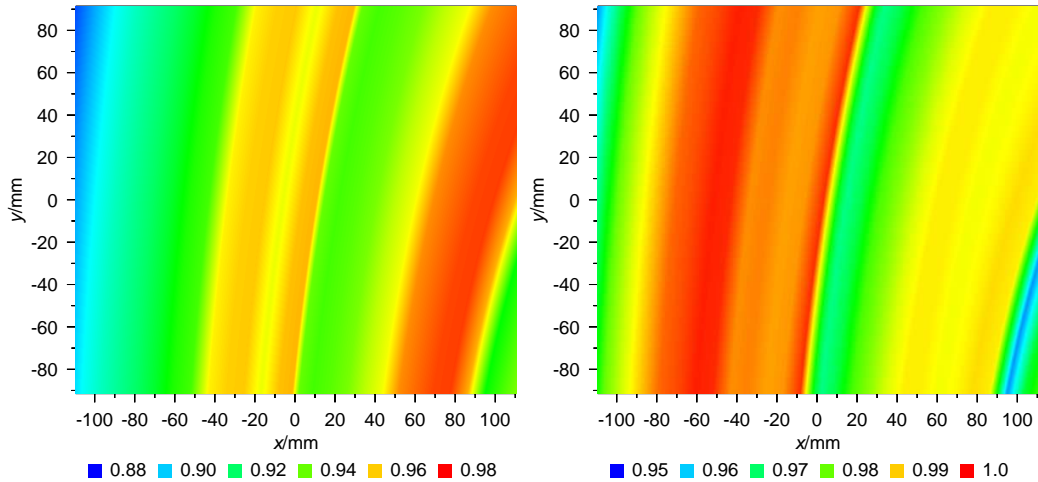


Abbildung 5.37: Gittereffizienzen η_{TE} und η_{TM} in TE- (l) bzw. TM-Polarisation (r) des berechneten holographischen Spiegels in Abhängigkeit von der Position auf der Spiegeloberfläche.

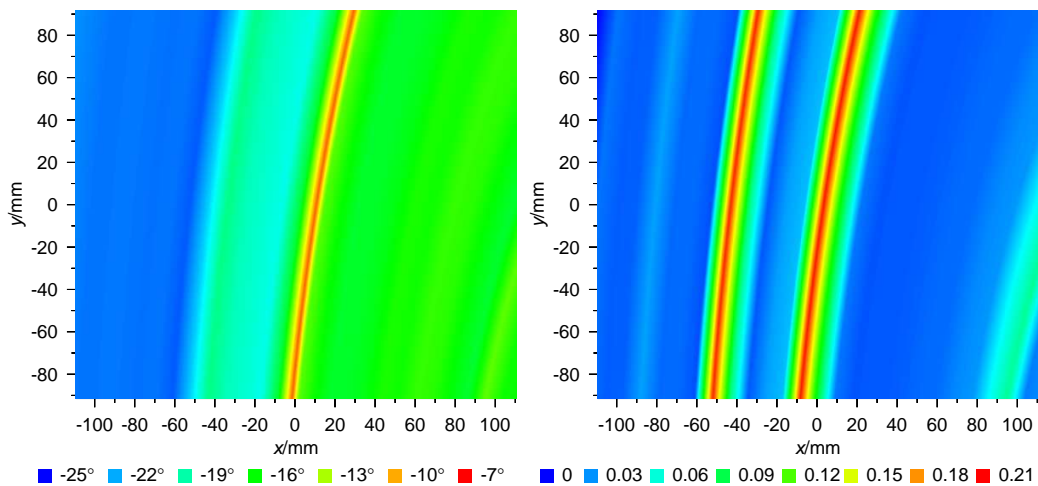


Abbildung 5.38: Phasenverschiebung zwischen den Polarisationen φ (l) und Änderung der Gitterform E (r) des berechneten holographischen Spiegels in Abhängigkeit von der Position auf der Spiegeloberfläche.

5.4.2 Reflexion in die Gaußsche Grundmode

Die Abb. 5.37–5.38 zeigen, dass die Reflexionsantwort des Spiegels in Abhängigkeit von der Position auf der Gitteroberfläche deutlich veränderlich ist. Dies verursacht, dass zusätzlich zu den Streuverlusten Leistung in höhere Gaußsche Moden konvertiert wird.

Die Gauß-Hermite-Moden bilden bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_1(x, y, z) \psi_2(x, y, z) dx dy \quad (5.12)$$

ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.13)$$

$$\sum_i \psi_i \langle \psi_i, \phi \rangle = \phi \quad (5.14)$$

mit dem Kroneckersymbol δ . Dabei ist das Koordinatensystem so zu wählen, dass die Ausbreitungsachse der Gaussmoden entlang der z -Achse zu liegen kommt. Da jedoch der Gitterspiegel im Koordinatensystem des Strahls nicht nur geneigt zu liegen kommt, sondern außerdem noch gekrümmt ist (Abb. 5.39), ist es schwierig, ein Skalarprodukt zu bestimmen, bei dem entlang der Spiegeloberfläche integriert wird und außerdem die Orthogonalität erhalten bleibt. Da jedoch die Rayleigh-Länge $z_0 = \pi w_0^2 / \lambda$ des Strahls deutlich größer ist als die Ausdehnung der Spiegeloberfläche in z -Richtung, was bedeutet, dass die Veränderung der Strahlprofils in z -Richtung klein ist, sollte eine Projektion der Gitterantwort in die xy -Ebene in der Mitte des Gitterspiegels und anschließende Integration in dieser Ebene eine hinreichend gute Näherung zur Bestimmung der reflektierten Leistungsanteile in den verschiedenen Gaußschen Moden darstellen.

Insgesamt erhält man somit die relative Leistung I_x in einer Gaußschen Mode ψ_x mit

$$I_x = |\langle \psi_x, a(x, y) \psi_0 \rangle|^2 \quad (5.15)$$

wobei ψ_0 die eingestrahlte Gaußsche Grundmode bezeichnet und $a(x, y)$ die (projizierte) Gitterantwortfunktion $a = \sqrt{\eta} e^{i\phi}$.

Damit ergeben sich folgende Resultate: Etwa 0.1% der Leistung wird am Rand des Spiegels abgeschnitten, weitere 0.1% werden durch das Abschneiden in höhere Gaußsche Moden transformiert. (Die Schraubenlöcher sind dabei nicht berücksichtigt.) Wenn Phaseneffekte (ϕ) des Gitters vernachlässigt werden, gehen von der Leistung in der Gaußschen Grundmode in TE-Polarisation 5.2%, in TM-Polarisation 1.7% verloren. Wenn Amplitudeneffekte (η) vernachlässigt werden, gehen von der Leistung in der Gaußschen

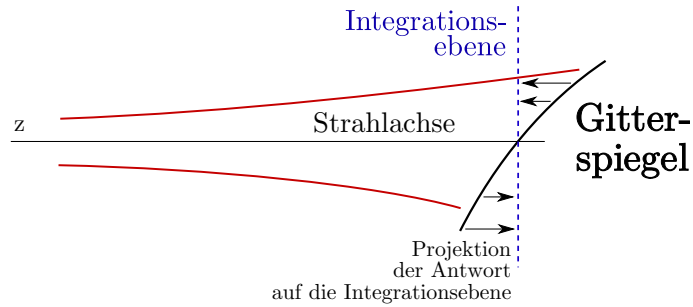


Abbildung 5.39: Integrationsverfahren zur Bestimmung des Anteils der reflektierten Leistung in der Gaußschen Grundmode. Die Antwortfunktion des Gitters wird von der Spiegeloberfläche entlang der z -Richtung in eine Ebene projiziert, in der dann die Integration durchgeführt wird.

Grundmode 0.27% verloren. Unter Berücksichtigung sowohl des Abschneidens als auch der Amplituden- und Phaseneffekte gehen in TE-Polarisation 5.2%, in TM-Polarisation 1.8% verloren.

Mit demselben Verfahren ist außerdem noch die Leistung, die in die gewünschte Gitterordnung gebeugt wird in der Summe über alle Gaußschen Moden, d.h. alle Leistung die in die richtige Hauptrichtung reflektiert wird, ohne Berücksichtigung der Deformation des Strahlprofils berechenbar. Aus der Definition dieser summierten Leistung

$$I_{\Sigma} = \sum_x I_x = \sum_x |\langle \psi_x, a(x, y) \psi_0 \rangle|^2 \quad (5.16)$$

folgt unter Zuhilfenahme der Vollständigkeitsbedingung (5.14), dass gilt

$$I_{\Sigma} = \sum_x I_x = \langle \psi_0, \eta(x, y) \psi_0 \rangle \quad (5.17)$$

Nach dieser Formel ergibt sich für den Spiegel, dass bei der Reflexion in die gewünschte Hauptrichtung in der TE-Mode 5.1%, in der TM-Mode 1.7% der Leistung verloren gehen.

Insgesamt zeigt sich somit, dass am Spiegel die Konversion von Leistung aus der Gaußschen Grundmode in höhere Moden vernachlässigbar ist, d.h. die Verluste im wesentlichen durch die Streuung in unerwünschte Ordnungen der Reflexionsgitter zustandekommen.

5.4.3 FDTD-Simulation

Obwohl eine komplette Simulation des Spiegels wegen des Rechenaufwands nicht möglich ist, lässt sich eine Validierung des holographischen Grund-

prinzips aus 4.1.2 durchführen, wenn man das Problem auf 2 Dimensionen reduziert.

Dazu wurde ein ähnliches Hologramm mit den Profilen 5.34 berechnet und die Reflexion eines Gaußschen Strahles mit Hilfe der FDTD simuliert (Einfallswinkel des Zentralstrahls $\theta_{\text{in}} = 57^\circ$, Breitenparameter der Gaußschen Strahls $w_0 = 7.5\lambda$, Abstand der Taille zur Mitte der Spiegeloberfläche $z_0 = 10\lambda$, Krümmungsradius der Spiegeloberfläche $R = 125\lambda$).

Durch Pulsanregung und Fouriertransformation in t - und x -Richtung lässt sich das Leistungs-Winkelspektrum $I(\theta)$ der Gitterantwort bestimmen. Durch Integration über den Soll-Winkelbereich von $I(\theta)$ erhält man also die Gesamtleistung, die in die gewünschte Richtung gestreut wird. Der Strahl muss nicht notwendigerweise aus einer einzelnen Gaußschen Mode bestehen, was für vorgesehene Anwendung jedoch sekundär ist.

Mit dem Verfahren erhält man als Effizienz des Spiegels $\eta_{\text{TE}} = 94.0\%$ für die TE-Polarisation und $\eta_{\text{TM}} = 95.2\%$ für die TM-Polarisation. Einige Bilder des Simulationsablaufs sind in Abb. 5.40 dargestellt.

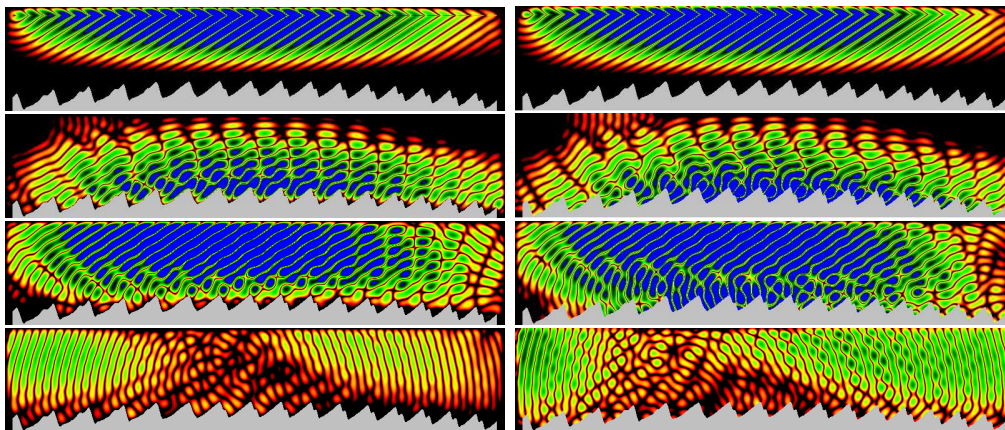


Abbildung 5.40: Ablauf der Simulation des holographischen Gitterspiegels. Zuerst wird ein schmalbandiger Puls erzeugt, welcher dann auf das Gitter trifft. Die zurückreflektierte Leistung wird (am oberen Rand) aufgezeichnet und in sein Winkelspektrum zerlegt. Der zeitliche Ablauf ist von oben nach unten dargestellt, (l) TE-Polarisation, (r) TM-Polarisation.

5.4.4 Winkel- und Frequenzabhängigkeit der Gittereffizienzen

Da der Mikrowellenstrahl in einem Fusionsexperiment vom Plasma abgelenkt wird, und damit die Auftreffrichtung des Strahls auf den Spiegel von der Plas-

madichte abhängt, ist es von Interesse, die Effizienzen für die verwendeten Gitter in Abhängigkeit von den Einfallswinkeln θ_{in} und ϕ zu betrachten. Eine Variation der Winkel führt zwangsläufig dazu, dass Einfalls- und Ausfallswinkel nicht mehr übereinstimmen, was aber nur bedeutet, dass der reflektierte Gaußsche Strahl einen leicht veränderten Strahlengang durch das Plasma nehmen wird. Es gilt, wenn für die Winkeländerung, wenn θ_g den Winkel bezeichnet, für den das Gitter ausgelegt ist

$$\cos \theta_{\text{out}} = 2 \cos \theta_g - \cos \theta_{\text{in}} \quad (5.18)$$

Eine Verschlechterung der Gittereffizienzen der gewünschten Ordnung der ebenen Gitter dagegen dürfte jedoch im wesentlichen zu einer proportionalen Verschlechterung des Gesamtwirkungsgrads des Spiegels führen.

Gemäß 4.29 und 4.30 mit $k_{xy}^2 = \omega^2/c^2(1 - \cos^2 \phi)$ gilt, dass eine Veränderung des Winkels ϕ sich wie eine Frequenzänderung auswirkt mit

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} f_0 \quad (5.19)$$

In Abb. 5.41–5.46 sind die Abhängigkeiten von f und θ_{in} für 3 der verwendeten Gitter dargestellt. Die Ergebnisse zeigen, dass das Gitterverhalten

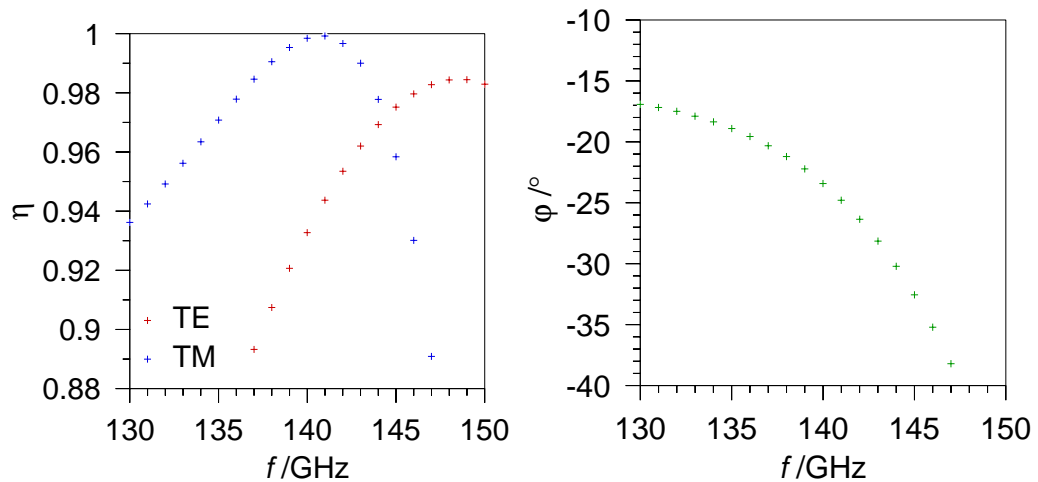


Abbildung 5.41: Abhängigkeit der Gittereffizienzen (l) und der relativen Phase ϕ (r) von der Frequenz f für das ebene Gitter mit $\theta_g = 53^\circ$ ($f_0 = 140$ GHz).

relativ unproblematisch ist. Es kann davon ausgegangen werden, dass das ECRH-Gyrotron bis auf $\Delta f = 0.5$ GHz frequenzstabil ist. Winkeländerungen sind (wie in 3.3.2 und 3.4.1 ermittelt) in der Größenordnung von wenigen Grad zu erwarten.

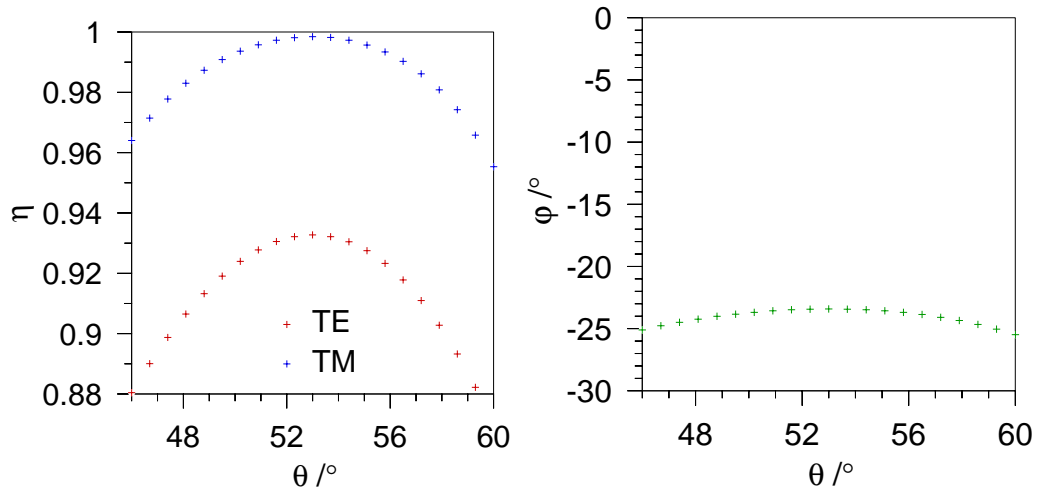


Abbildung 5.42: Abhängigkeit der Gittereffizienzen (η) und der relativen Phase ϕ (r) vom Einfallswinkel θ_{in} für das ebene Gitter mit $\theta_g = 53$.

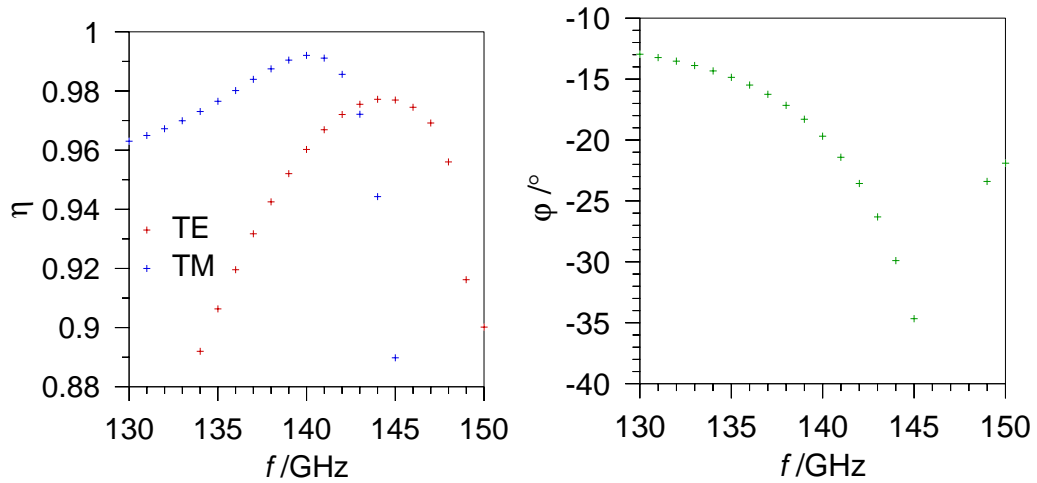


Abbildung 5.43: Abhängigkeit der Gittereffizienzen (η) und der relativen Phase ϕ (r) von der Frequenz f für das ebene Gitter mit $\theta_g = 57^\circ$ ($f_0 = 140 \text{ GHz}$).

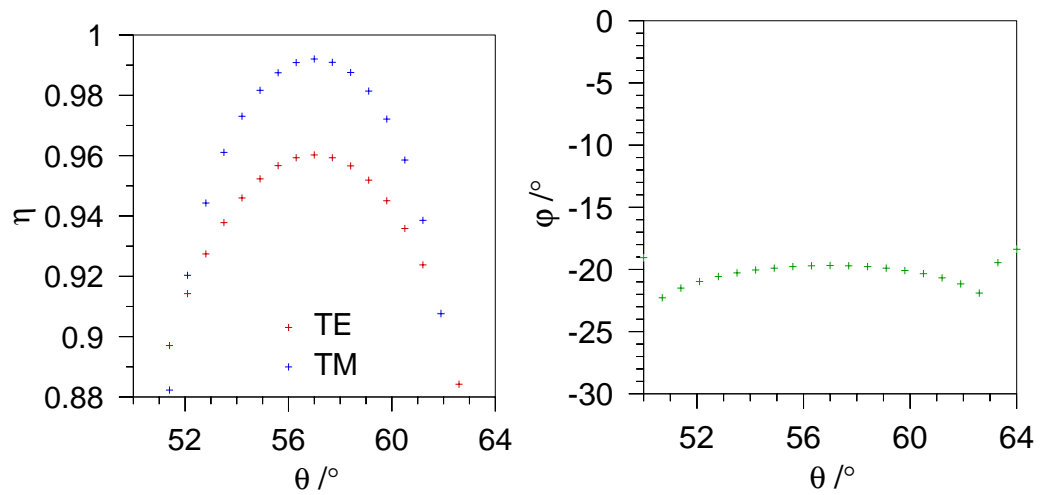


Abbildung 5.44: Abhängigkeit der Gittereffizienzen (η) und der relativen Phase ϕ (r) vom Einfallswinkel θ_{in} für das ebene Gitter mit $\theta_g = 57$.

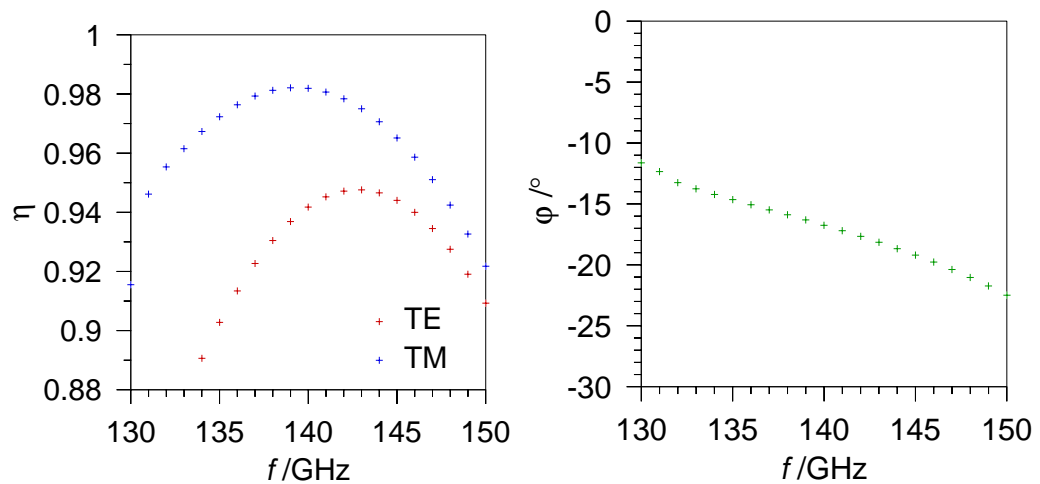


Abbildung 5.45: Abhängigkeit der Gittereffizienzen (η) und der relativen Phase ϕ (r) von der Frequenz f für das ebene Gitter mit $\theta_g = 63^\circ$ ($f_0 = 140 \text{ GHz}$).

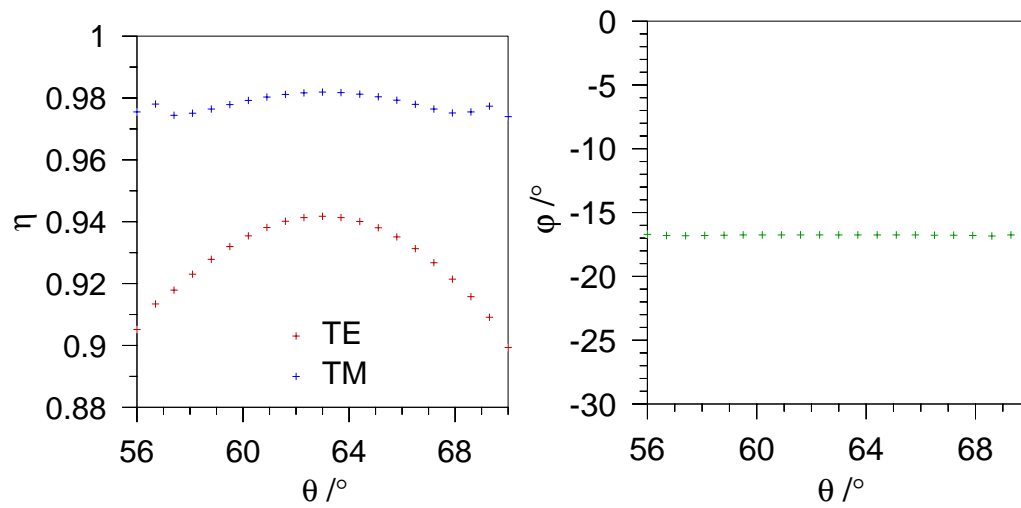


Abbildung 5.46: Abhängigkeit der Gittereffizienzen (η) und der relativen Phase ϕ (r) vom Einfallswinkel θ_{in} für das ebene Gitter mit $\theta_{\text{g}} = 63$.

5.4.5 Resonatormessungen

Aus verschiedenen Gründen ist eine experimentelle Validierung der Funktion des Spiegels angebracht, z.B. ist unklar wie stark durch die Veränderung des Gitterprofils über der Oberfläche Streuverluste verursacht werden, insbesondere bei den eher sprunghaften Änderungen, oder ob die unvermeidbaren Fertigungstoleranzen die Gittereffizienzen wesentlich verändern.

Da eine direkte Messung der Gesamtintensität des reflektierten Gaußschen Strahls mit großen Fehlern behaftet ist, wurde als Messverfahren ein Resonatoraufbau verwendet (Abb. 5.47). Dabei wird angenommen, dass über

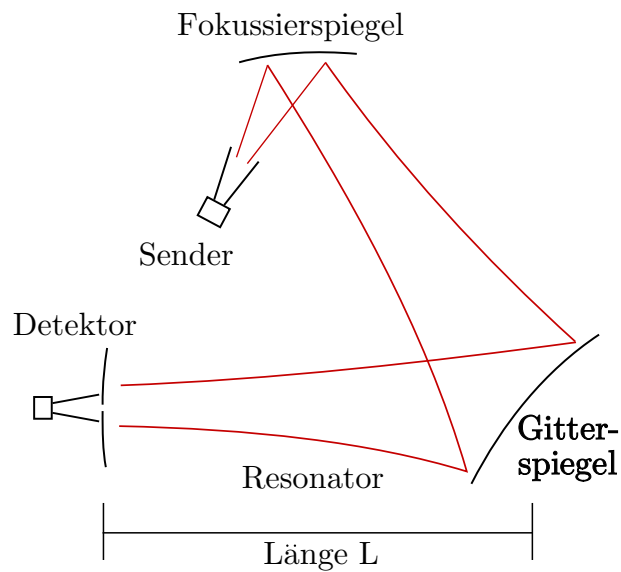


Abbildung 5.47: Resonatoraufbau zur Messung der Reflexionseffizienz des Gitterspiegels.

die 0. Ordnung des Gitterspiegels Leistung der Intensität I_0 in den Resonator eingekoppelt wird. Der Strahl erfährt beim Zurücklegen des Weges $2L$ eine Phasenverschiebung von $\phi = 4\pi Lf/c_0$ und eine Dämpfung r , d.h. wenn die Intensität im Resonator $I = |a|^2$ beträgt, geht innerhalb eines Umlaufs $r \cdot I$ dieser Intensität verloren, d.h. r stellt somit eine Obergrenze für die Gesamtreflexionsverluste des Gitters dar.

Es ergibt sich aus diesen Annahmen, dass man eine Amplitude

$$a(f) = \frac{\sqrt{I_0}}{1 - \sqrt{1-r} e^{4\pi i Lf/c_0}} \quad (5.20)$$

erhält, d.h. dass sich jeweils im Abstand von $\Delta f = c_0/(2L)$ Resonanzen zeigen. Für kleine r gilt, dass das Verhalten im Bereich einer Resonanz einer

Lorentz-Linie entspricht

$$a(f) = \frac{\sqrt{I_0}}{r/2 + 4\pi i L(f - f_r)/c_0} \quad (5.21)$$

Zu beachten ist dabei, dass außer der Grundmode auch höhere Gaußsche Moden im Resonator auftreten. Gemäß [18] akkumulieren Gaußsche Moden verglichen mit einer ebenen Welle auf ihrem Weg eine zusätzliche Phase von

$$\Delta\phi = \left(\frac{1}{2} + m + n\right) \arctan \frac{z'}{\pi\lambda w_0} \quad (5.22)$$

auf, wobei m und n die Modenzahlen bezeichnen. Es wurde daher zum einen versucht eine Resonatorgeometrie zu verwenden, bei der die höheren Resonanzen nicht mit der Grundmode in der Frequenz zusammenfallen, und zum anderen die höheren Resonanzen zu dämpfen, indem der 2. Spiegel soweit verkleinert wurde, dass nur noch die Grundmode ungedämpft reflektiert wird.

Im Abstand $L = 1100$ mm von Gitter wurde ein Spiegel mit den Krümmungsradien $R_x = 535$ mm und $R_y = 431$ mm aufgestellt. Dies ergibt einen Resonator mit einem stabilen Bereich von etwa $900 \text{ mm} \leq L \leq 1250$ mm. Die Resonanzkurven wurden für beide Polarisierungen separat vermessen. Dabei wurde die Orientierung der Polarisierungen am Verlauf der Nuten in der Mitte des Gitterspiegels ausgerichtet. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.48 dargestellt.

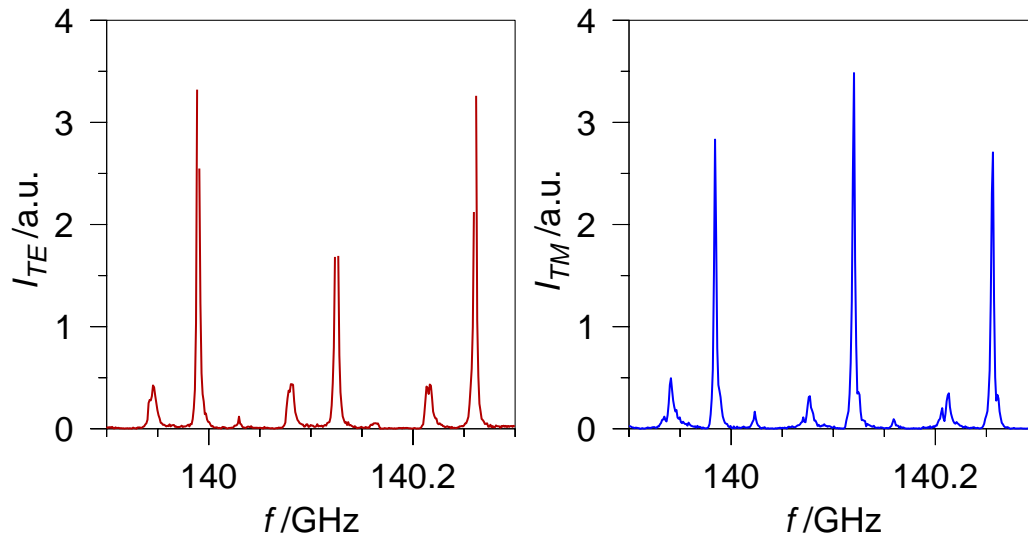


Abbildung 5.48: Gemessene Leistung im Resonator in Abhängigkeit von der Frequenz für die TE-Polarisation (l) und TM-Polarisation (r).

Aus dem Fit einer Lorentzlinie an die Daten (Abb. 5.49–5.51) erhält man die Dämpfungskonstante r . Es ergibt sich $r = 8.8\%$ für die TE-Polarisation

und $r = 9.6\%$ für die TM-Polarisation. Desweiteren lässt sich aus der Verschiebung der Resonanzfrequenz zwischen den Polarisationen $f_{r, \text{TM}} - f_{r, \text{TE}}$ die gemittelte Phasenverschiebung φ sehr genau bestimmen. Mit

$$\varphi = 4\pi(f_{r, \text{TM}} - f_{r, \text{TE}})L/c_0 \quad (5.23)$$

erhält man $\varphi = -13.3^\circ$.

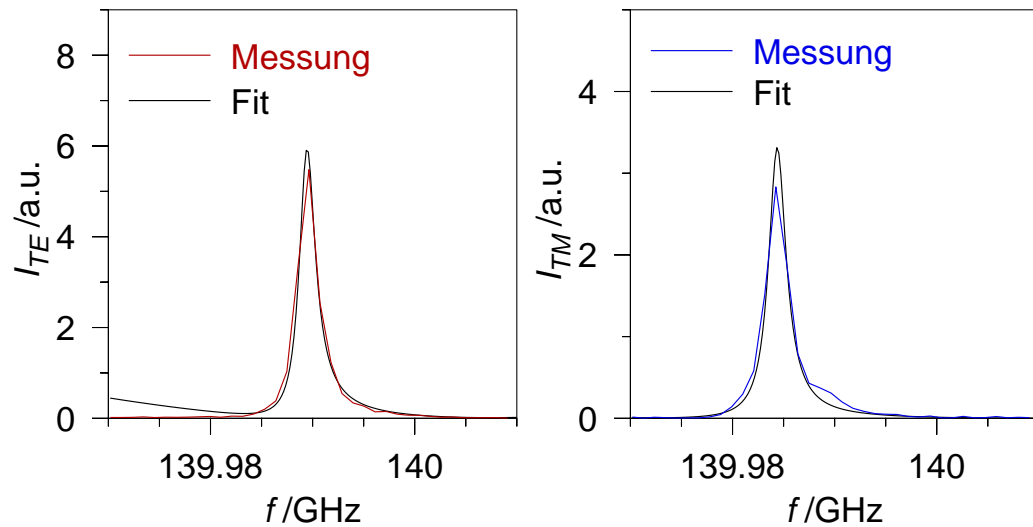


Abbildung 5.49: Fit einer Lorentz-Linie an die Hauptresonanz des Resonanzspektrums Abb. 5.48 für die TE- (l) und TM-Mode (r). Dargestellt ist die Resonatorleistung.

Zuerst ist anzumerken, dass mit Hilfe des Experiments gezeigt werden konnte, dass der Spiegel auf jeden Fall eine Reflexionseffizienz $\eta > 90\%$ für beide Polarisationen besitzt. Es zeigt sich jedoch eine Diskrepanz von einigen Prozent zwischen Theorie und Experiment, die auch nach gründlicher Untersuchung nicht aufzulösen war. Es wird davon ausgegangen, dass die reduzierte Effizienz Teils auf den in 5.4.3 festgestellten Effekt, dass die Krümmung der Gitteroberfläche bzw. die kontinuierliche Veränderung des Gitterprofils entlang der Oberfläche einen negativen Einfluss auf die Effizienz hat, Teils auf Justierfehler des Messaufbaus und Teils auf Fertigungstoleranzen bei der Herstellung zurückzuführen ist.

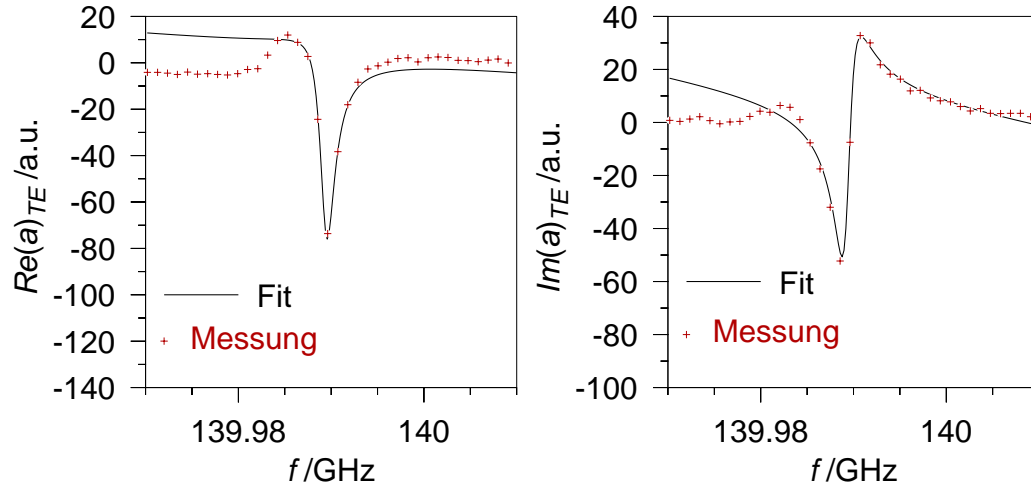


Abbildung 5.50: Fit einer Lorentz-Linie an die Hauptresonanz des Resonanzspektrums Abb. 5.48 für die TE-Mode. Dargestellt sind Real- (l) und Imaginärteil (r) der Amplitude.

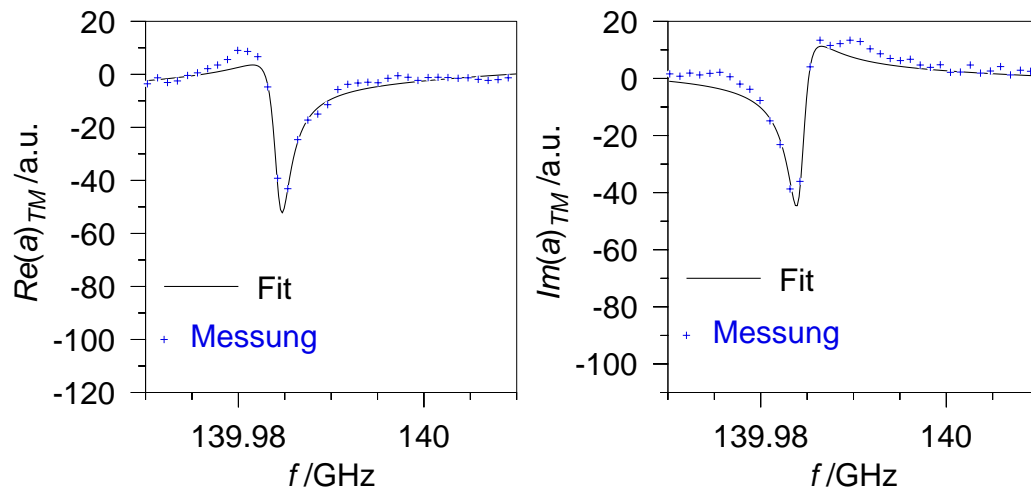


Abbildung 5.51: Fit einer Lorentz-Linie an die Hauptresonanz des Resonanzspektrums Abb. 5.48 für die TM-Mode. Dargestellt sind Real- (l) und Imaginärteil (r) der Amplitude.

Kapitel 6

Ausblick

Am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik besteht Interesse, das vorgeschlagene Konzept weiterhin zu verfolgen. Insbesondere sind Experimente mit hochdichten Entladungen in ASDEX Upgrade geplant. In diesem Rahmen sind sicherlich weitere interessante Ergebnisse bezüglich der ECRH in O2- und X3-Mode und dem Einsatz eines holographischen Gitterspiegels zu erwarten.

Ein wichtiger Schritt sollte die Validierung des Konzepts an ASDEX Upgrade sein. Mit Hilfe des vorgestellten Gitterspiegels (welcher für die Reflexion des Mikrowellenstrahls in sich zurück ausgelegt ist) kann die Absorption der O2- und X3-Mode für doppelten Durchgang durch das Plasma in einem Niederleistungsexperiment bestimmt werden. Dies stellt einen verhältnismäßig kleinen Aufwand dar, da neben dem Gitterspiegel keine weiteren Umbauten im Gefäß notwendig sind. Es ist nur eine Temperaturmodulation in der Absorptionsschicht vorzunehmen (was durch periodisches Ein- und Ausschalten eines Gyrotrons bei der X2-Mode zu erreichen ist), und aus einer Relativmessung der reflektierten Leistung im ECRH-Hohlleiter kann der Absorptionskoeffizient gewonnen werden.

Nach dem Schutz empfindlicher Mikrowellendiagnostiken vor Zerstörung kann die ECRH in der O2-Mode für die Heizung der sogenannten „hochdichten H-Mode“ eingesetzt werden.

Des Weiteren ist die Lebensdauer des Spiegels unter thermischer Belastung eine interessante noch offene Fragestellung, welche durch den Einsatz in ASDEX Upgrade beantwortet werden könnte. In diesem Zusammenhang ist sicherlich auch eine Wolframbeschichtung des Graphitspiegels wünschenswert. Der Beschichtungsprozess stellt aufgrund der gerillten Oberfläche möglicherweise eine Herausforderung an sich dar. Es ist allerdings wahrscheinlich, dass bis zum Beginn des Betriebs von W7-X im Rahmen der Experimente an ASDEX Upgrade die noch offenen Fragen beantwortet

und die möglicherweise auftretenden Probleme gelöst werden können.

Anhang A

Parameterstudien zu den Optimierungsverfahren

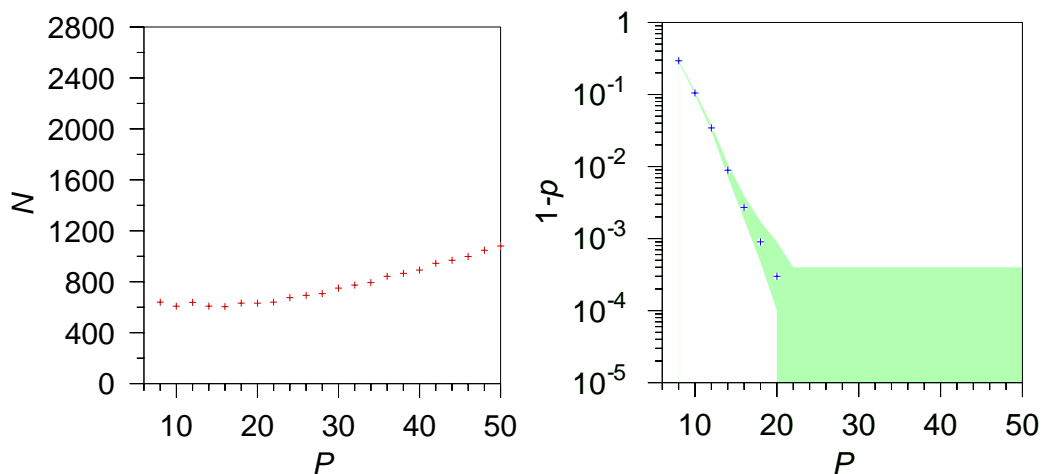


Abbildung A.1: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit GA in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = \frac{1}{3}P$, $K = 0.75$, $S = 0.33$, $M_0 = 0.02$ und $\delta_M = 0.01$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

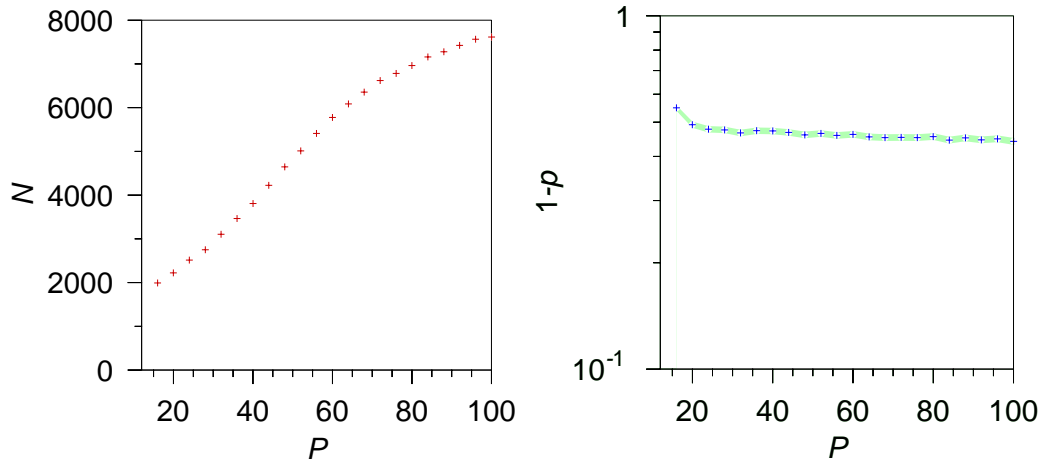


Abbildung A.2: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$, mit GA in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = \frac{1}{3}P$, $K = 0.75$, $S = 0.33$, $M_0 = 0.02$ und $\delta_M = 0.01$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

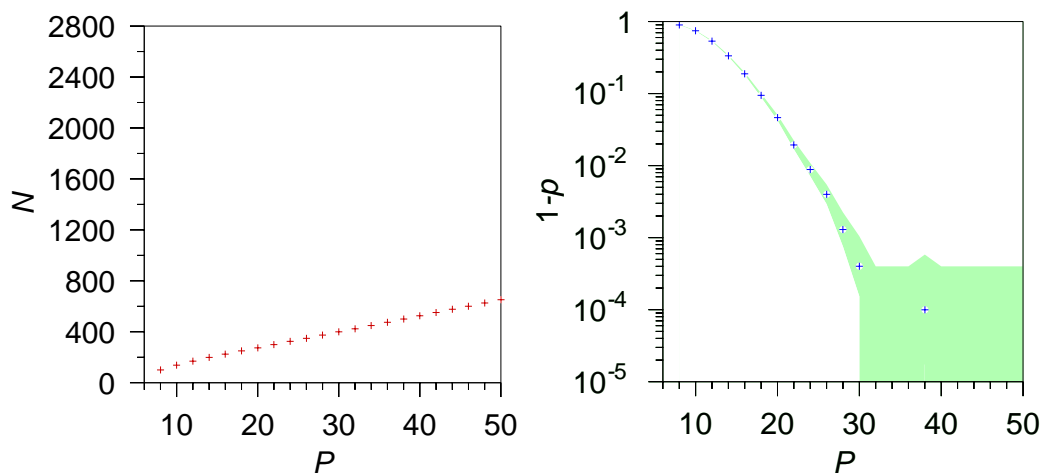


Abbildung A.3: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit DE/best/1 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M = 0.54$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

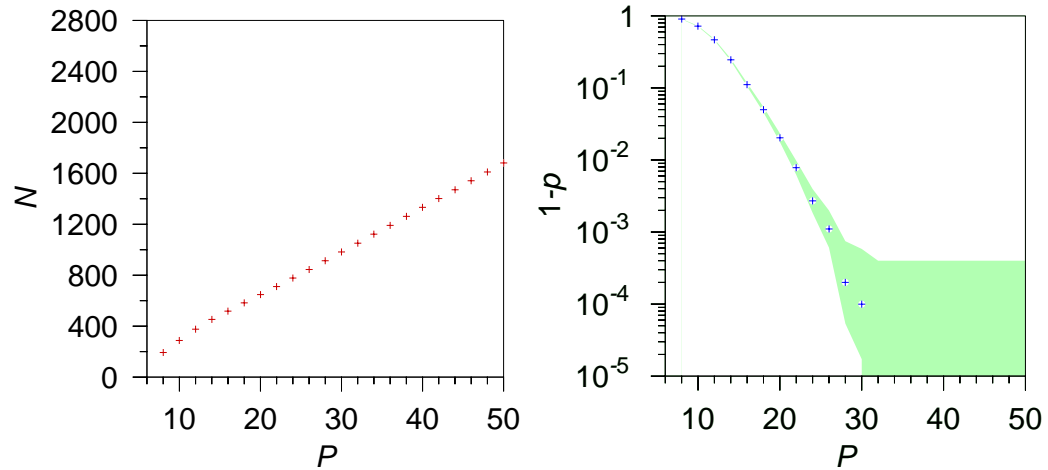


Abbildung A.4: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit DE/rand/1 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M = 0.57$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

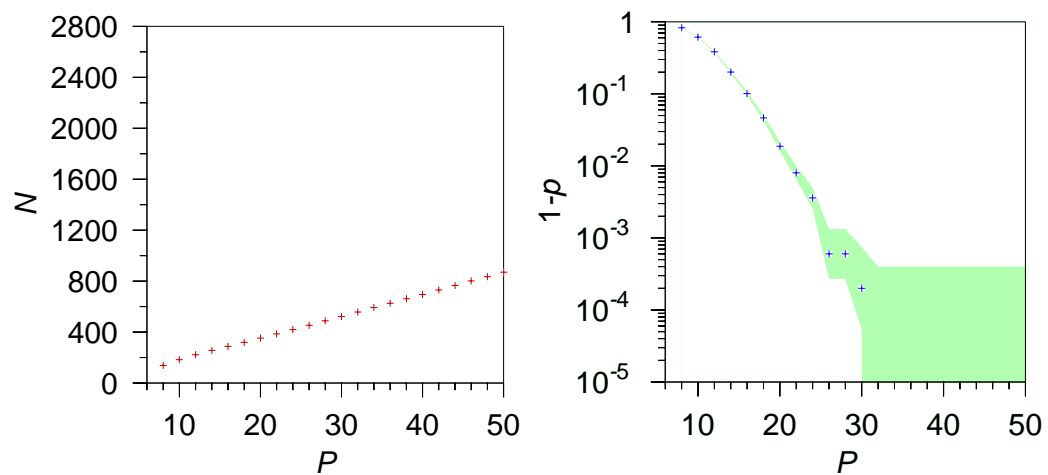


Abbildung A.5: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit DE/rand-to-best/1 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M_1 = M_2 = 0.57$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

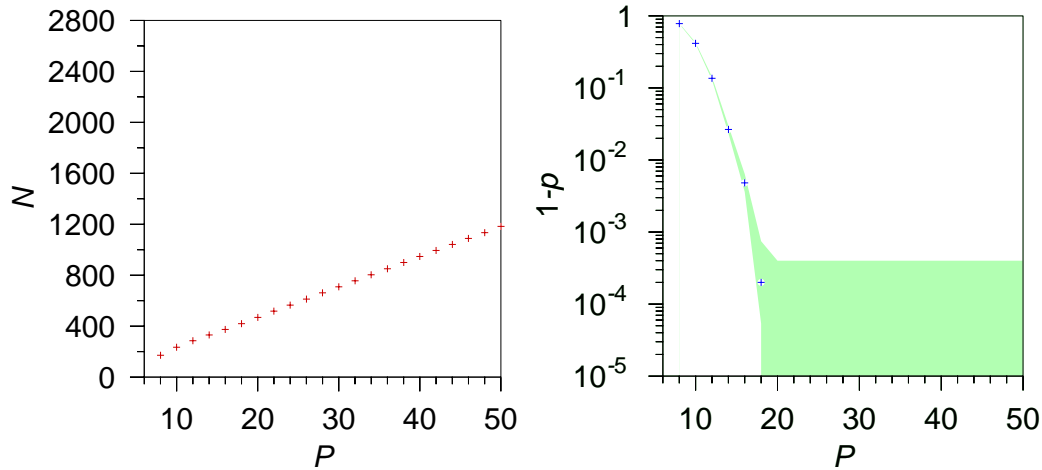


Abbildung A.6: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit DE/best/2 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M_1 = M_2 = 0.56$ und $S = 0.4$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

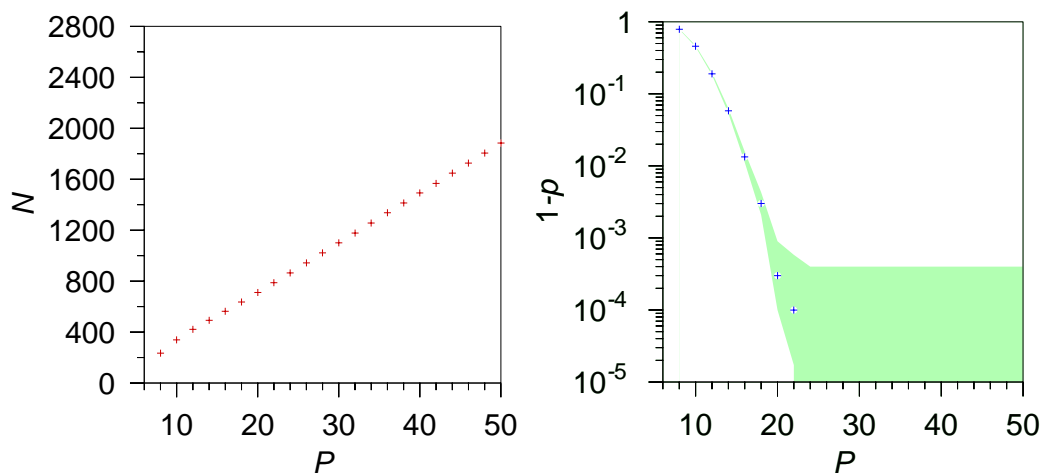


Abbildung A.7: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit DE/rand/2 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M_1 = 0.55$, $M_2 = 0.5$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

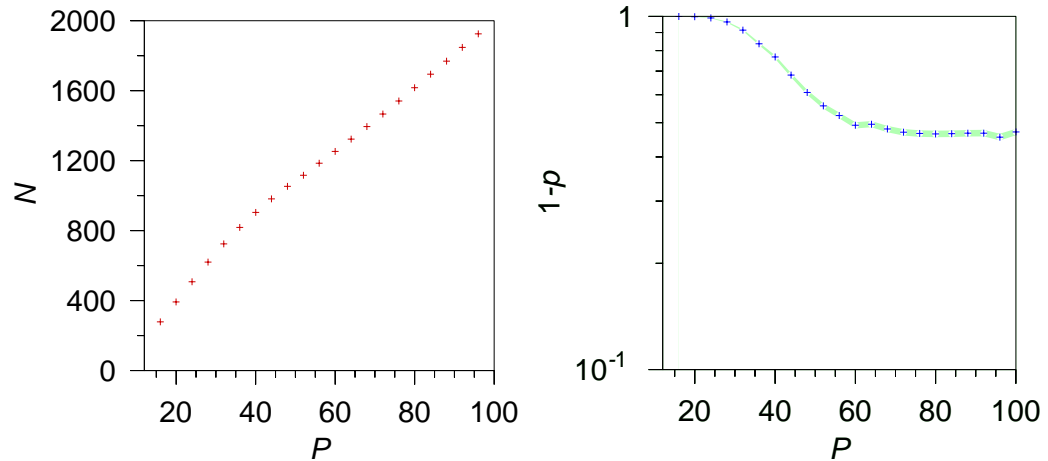


Abbildung A.8: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit DE/best/1 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M = 0.54$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

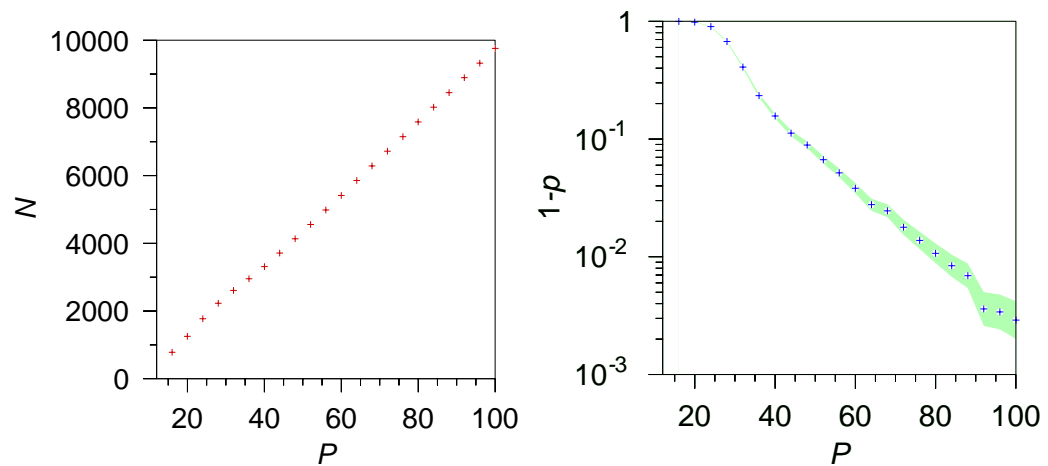


Abbildung A.9: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit DE/rand/1 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M = 0.57$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

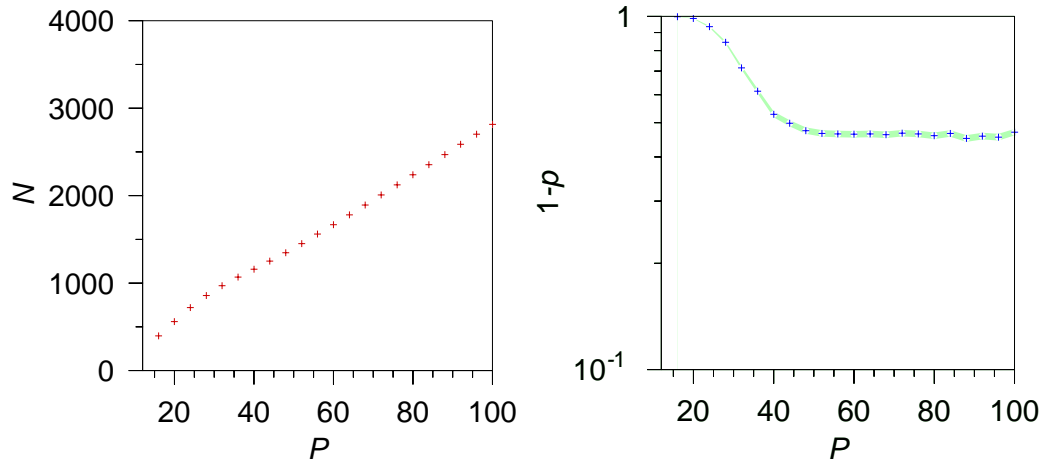


Abbildung A.10: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit DE/rand-to-best/1 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M_1 = M_2 = 0.57$, und $S = 0.09$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

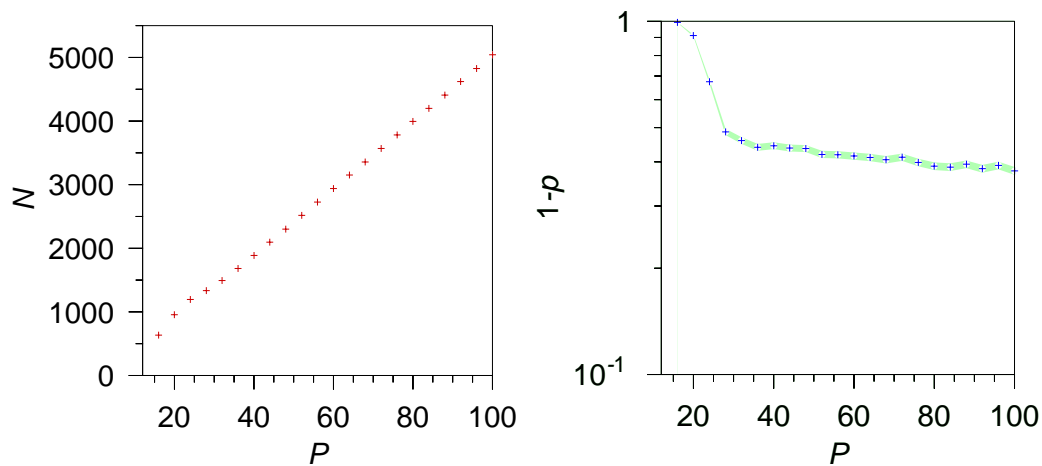


Abbildung A.11: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit DE/best/2 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M_1 = M_2 = 0.56$, und $S = 0.4$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

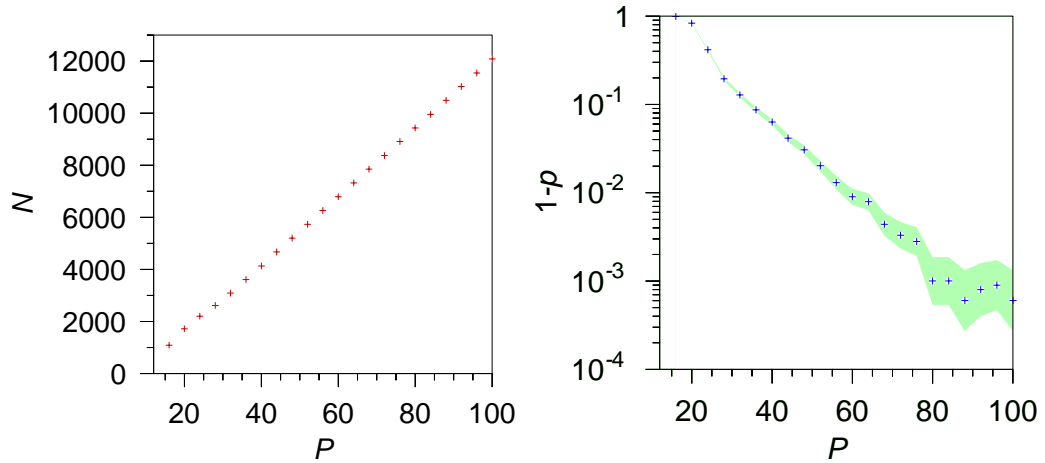


Abbildung A.12: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit DE/rand/2 in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $M_1 = M_2 = 0.52$, und $S = 0.24$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

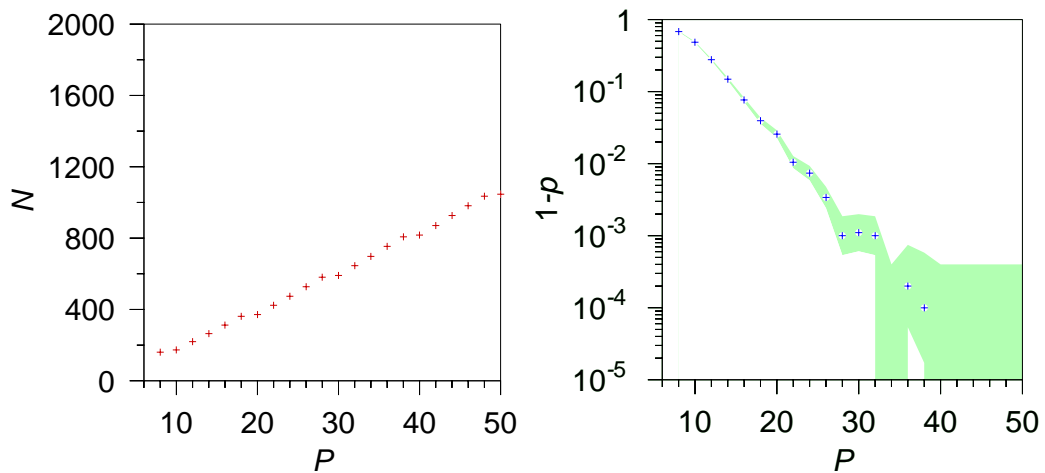


Abbildung A.13: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit CE/rect in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = 0.4P$, $S_c = 0.94$, $S_{V,d} = 0.65$ und $S_{V,n} = 0.05$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

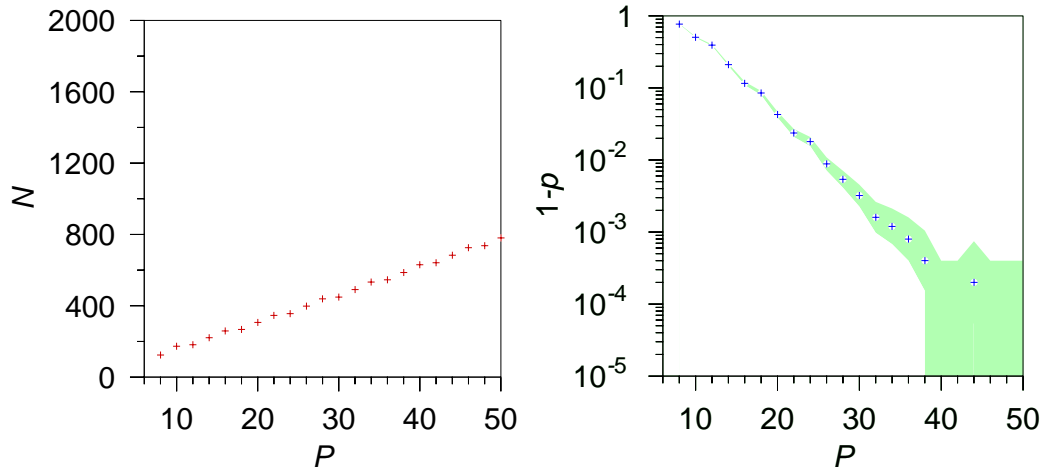


Abbildung A.14: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit CE/tria in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = \frac{1}{3}P$, $S_c = 0.94$, $S_{V,d} = 0.63$ und $S_{V,n} = 0.05$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

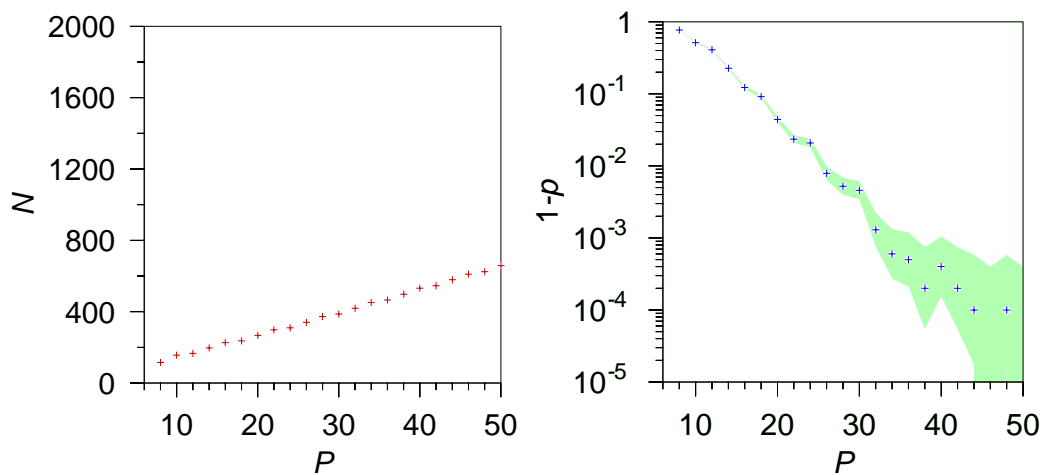


Abbildung A.15: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_1^T mit $N = 4$ und $\alpha = 3$ mit CE/gauss in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = \frac{1}{3}P$, $S_c = 0.94$, $S_{V,d} = 0.6$ und $S_{V,n} = 0.05$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

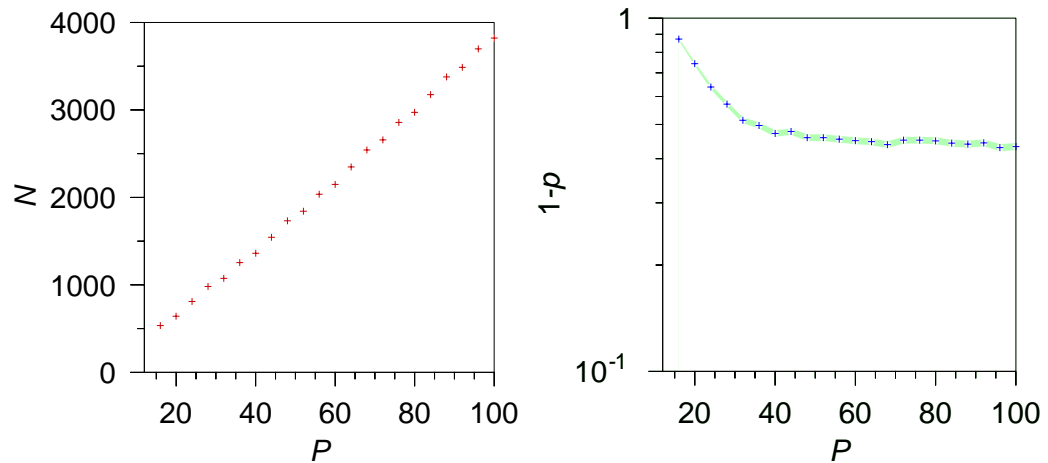


Abbildung A.16: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit CE/rect in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = 0.4P$, $S_c = 0.94$, $S_{V,d} = 0.65$ und $S_{V,n} = 0.05$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

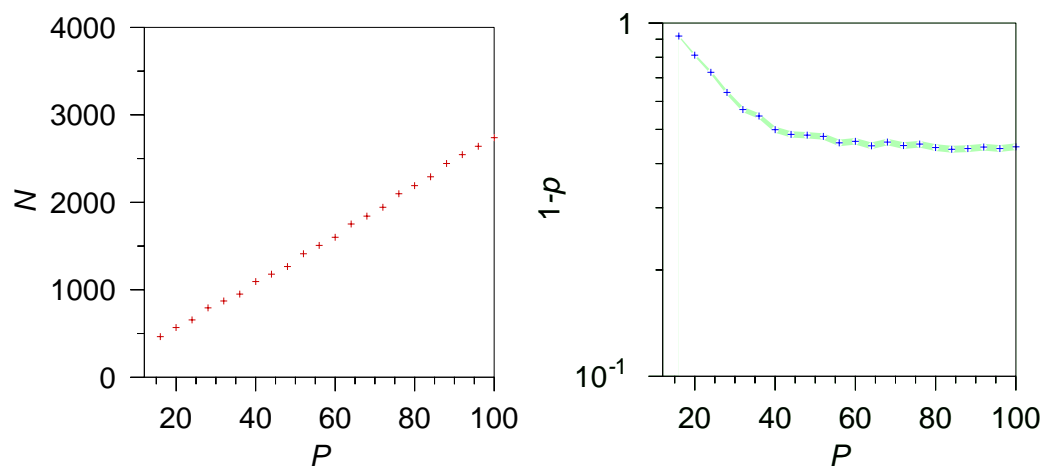


Abbildung A.17: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit CE/tria in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = \frac{1}{3}P$, $S_c = 0.94$, $S_{V,d} = 0.63$ und $S_{V,n} = 0.05$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

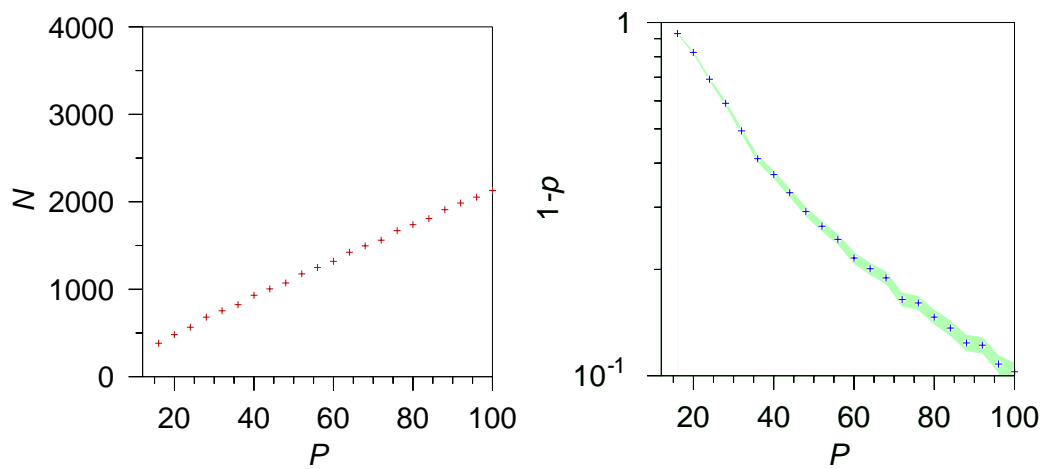


Abbildung A.18: Anzahl der Funktionsauswertungen N und Trefferwahrscheinlichkeit p für C_2^T mit $N = 8$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 0.75$ und $\delta = 0.0005$ mit CE/gauss in Abhängigkeit von der Population P , es wurde $R = \frac{1}{3}P$, $S_c = 0.94$, $S_{V,d} = 0.6$ und $S_{V,n} = 0.05$ gewählt. Rechts ist in grün der statistische Fehlerbereich $[p_-, p_+]$ markiert ($\kappa = 2$).

Literaturverzeichnis

- [1] U. Schumacher, *Fusionsforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1993.
- [2] J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford Science Publications, 1987.
- [3] F. Wagner and H. Wobig, *Plasma Physics*, Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [4] H. Wobig, *Theory of advanced stellarators*, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, A159 (1999).
- [5] J. Nührenberg and R. Zille, *Quasi-Helically Symmetric Toroidal Stellarators*, Phys. Lett. **113**, A129 (1988).
- [6] J. Nührenberg, *Critical Issues and Comparison of Optimized Stellarators*, Fusion Science and Technology **50**, 146 (2006).
- [7] T. H. Stix, *Waves in plasmas*, American Institute of Physics, 1992.
- [8] V. Erckmann and U. Gasparino, *Electron cyclotron resonance heating and current drive in toroidal fusion plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **36**, 1869 (1994).
- [9] H. W. Barkley, W. Kasperek, G. A. Müller, L. Rebuffi, P. G. Schüller and M. Thumm, *Feasibility study on a high-power (1 MW) millimetre-wave (140 GHz) transmission system for diagnostics of fusion alpha-particles in JET by collective millimetre wave scattering*, Report JET-R(88) 14 **6**, 45 (1988).
- [10] D. C. Montgomery and D. A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill, New York, San Francisco, Toronto, London, 1964.
- [11] M. Bornatici, R. Cano, O. D. Barbieri and F. Engelmann, *Electron cyclotron emission and absorption in fusion plasmas*, Nucl. Fusion **9**, 1153 (1983).

- [12] E. Westerhof, *Electron Cyclotron Waves*, Fusion science and technology **49**, 195 (2006).
- [13] V. M. Babič, *Short-wavelength diffraction theory: asymptotic methods*, Springer Berlin, 1991.
- [14] Y. A. Kravtsov and Y. I. Orlov, *Geometrical optics of inhomogeneous media*, Springer Berlin, 1990.
- [15] E. Poli, G. V. Pereverzev and A. G. Peeters, *Paraxial Gaussian wave beam propagation in an anisotropic inhomogeneous plasma*, Phys. Plasmas **6**, 5 (1999).
- [16] G. V. Pereverzev, *Beam tracing in inhomogeneous anisotropic plasmas*, Phys. Plasmas **5**, 3529 (1998).
- [17] E. Poli, G. V. Pereverzev, A. G. Peeters and M. Bornatici, *EC beam tracing in fusion plasmas*, Fusion Eng. and Design **53**, 9 (2001).
- [18] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, 1986.
- [19] C. Tsironis, E. Poli and P. V. Pereverzev, *Beam tracing description of non-Gaussian wave beams*, Phys. Plasmas **13**, 11304 (2006).
- [20] D. Farina, *GRAY: a Quasi-Optical Beam Tracing Code for EC Absorption and Current Drive*, in Proceedings of the 14th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating, A. Lazaros [Hrsg.], 289 (2006), Athens, Greece, Heliotopos Conferences.
- [21] N. B. Marushchenko, in Proceedings of the 14th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating, A. Lazaros [Hrsg.] 295 (2006), Athens, Greece, Heliotopos Conferences.
- [22] N. B. Marushchenko, Plasma and Fusion Research **2**, S1000 (2007).
- [23] W. Schneider, P. J. McCarthy, K. Lackner, O. Gruber, K. Behler, P. Martin and R. Merkel, *ASDEX upgrade MHD equilibria reconstruction on distributed workstations*, Fusion Engineering and Design **48**, 127 (2000).
- [24] K. W. Kopp, W. Kasparek and E. Holzhauer, *Microwave reflection properties of grooved metallic mirrors*, Int. J. Infrared and Millimeter Waves **13**, 1619 (1992).

- [25] J. P. Hogge, *Optimisation du couplage de sortie d'un gyrotron quasi optique grace a un réseau diffractif a support ellipsoïdal*, Diplomarbeit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1993.
- [26] M. C. Hutley, *Diffraction Gratings*, London Academic Press, 1982.
- [27] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Ann. École Norm. Sup. **12**, 47 (1883).
- [28] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1998.
- [29] G. Lehner, *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*, Springer Berlin, 2005.
- [30] R. Petit et al., *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [31] J. Elschner and G. Schmidt, *Diffraction in Periodic Structures and Optimal Design of Binary Gratings. Part I: Direct Problems and Gradient Formulas*, Math. Meth. Appl. Sci. **21**, 1297 (1998).
- [32] Y.-L. Kok and N. C. Gallagher, *Relative phases of electromagnetic waves diffracted by a perfectly conducting rectangular-grooved grating*, J. Opt. Soc. Am. A **5**, 65 (1988).
- [33] A. Kost, *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*, Springer Berlin, 1994.
- [34] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics with CDRM*, Artech House Publishers, 2000.
- [35] R. Courant, K. Friedrichs and H. Lewy, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Mathematische Annalen **100**, 32 (1928).
- [36] J. P. Bérenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys. **114**, 185 (1994).
- [37] J. P. Bérenger, *Perfectly Matched Layer for FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems*, IEEE Trans. Ant. Prop. **44**, 110 (1996).
- [38] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1964.
- [39] W. H. Press et al., *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992.

- [40] P. P. Ewald, *Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale*, Ann. Phys. **64**, 253 (1921).
- [41] F. Capolino, D. R. Wilton and W. A. Johnson, *Efficient computation of the 2D Green's function for 1D periodic layered structures using the Ewald method*, Antennas and Propagation Society International Symposium **1**, 194 (2002).
- [42] J. A. Nelder and R. Mead, *A Simplex Method for Function Minimization*, Computer Journal **7**, 308 (1965).
- [43] G. J. Friedman, *Selective Feedback Computers for Engineering Synthesis and Nervous System Analogy*, Diplomarbeit, UCLA, 1956.
- [44] G. J. Friedman, *Digital simulation of an evolutionary process*, General Systems: Yearbook of the Society for General Research Systems **4**, 171 (1959).
- [45] N. A. Barricelli, *Esempi numerici di processi di evoluzione*, Methodos **6**, 45 (1954).
- [46] N. A. Barricelli, *Symbiogenetic evolution processes realized by artificial methods*, Methodos **9**, 143 (1957).
- [47] H. Zhang, B. Lennox, P. R. Goulding and A. Y. T. Leung, *A float-encoded genetic algorithm technique for integrated optimization of piezoelectric actuator and sensor placement and feedback gains*, Smart Mater. Struct. **9**, 552 (2000).
- [48] R. Y. Rubinstein, *Optimization of computer simulation models with rare events*, European Journal of Operational Search **99**, 89 (1997).
- [49] R. Storn, *On the Usage of Differential Evolution for Function Optimization*, in 1996 Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, 519 (1996), IEEE Press.
- [50] R. Y. Rubinstein, *The cross-entropy method for combinatorial and continuous optimization*, Methodology and Computing in Applied Probability **2**, 127 (1999).
- [51] D. P. Kroese, S. Porotsky and R. Y. Rubinstein, *The Cross-Entropy Method for Continuous Multi-extremal Optimization*.
- [52] S. Kullback and R. Leibler, *On information and sufficiency*, Annals of Mathematical Statistics **22**, 79 (1951).

- [53] R. D. Hatcher and J. H. Rohrbaugh, *Theory of the Echelette Grating I*, Journal of the Optical Society of America **46**, 104 (1956).
- [54] K. K. Kirov, F. Leuterer, G. V. Pereverzev, F. Rytter and W. Suttrop, *ECRH power deposition studies in ASDEX Upgrade*, Plasma Phys. Control. Fusion **44**, 2583 (2002).
- [55] F. Leuterer et al., *Plans for a new ECRH system at ASDEX Upgrade*, Fusion Engineering and Design **66–68**, 537 (2003).

Danksagungen

- Ich danke Herrn Prof. Schumacher für die Aufnahme als Doktorand am Institut für Plasmaforschung, die Übernahme des Hauptberichts und die Unterstützung während der Promotion, insbesondere während der Endphase.
- Ich danke Herrn Prof. Denninger für die Übernahme des Mitberichts.
- Ich danke Herrn Dr. Walter Kasperek für die Betreuung der Doktorarbeit und der Unterstützung in allem mit Bezug zu Mikrowellentechnologie.
- Ich danke Herrn Dr. Eberhard Holzhauer für die Unterstützung bei der Entwicklung der Mikrowellen-Simulationsverfahren.
- Ich danke Herrn Roland Munk für die Anfertigung des Doktorhuts und für verschiedentliche Unterstützung während meiner Zeit am Institut für Plasmaforschung.
- Ich danke Frau Dr. Helga Kumric, Herrn Dr. Gerd Gantenbein, Herrn Dr. Peter Brand verschiedentliche Unterstützung und die Kollegiale Zusammenarbeit.
- Ich danke der mechanischen Werkstatt des Instituts für Plasmaforschung und insbesondere Herrn Gottfried Roth für die freundliche Unterstützung und die Anfertigung von diversen Spiegeln und anderen Mikrowellenkomponenten.
- Ich danke Herrn Dr. Wolfgang Suttrop, Herrn Emanuelle Poli, Herrn Dr. Henning Maaßberg und Herrn Dr. Nikolai Maruschtschenko für die Unterstützung als Ansprechpartner bei Fragen zur Plasmaphysik und bei der Verwendung der Raytracingcodes für ASDEX Upgrade und W7-X.
- Ich danke meinen neuen Kollegen für die freundliche Aufnahme am Höchstleistungsrechenzentrum.

Lebenslauf

- 1.1.1978 Geboren in Ulm an der Donau
- 1984–1988 Grund- und Hauptschule Laichingen / Ulm-Donau-Kreis
- 1988–1994 Schiller-Realschule Schwäbisch Gmünd
- 1994–1997 Technisches Gymnasium Schwäbisch Gmünd
- 1997–2003 Physikstudium an der Universität Stuttgart
- 2002–2003 Diplomarbeit „Implementierung des Deutsch-Algorithmus mit 3 ^{19}F -Kernspins“ am 2. Physikalischen Institut
- 2003–2007 Promotion am Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart
- seit 2007 Wissenschaftlicher Angestellter am Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart