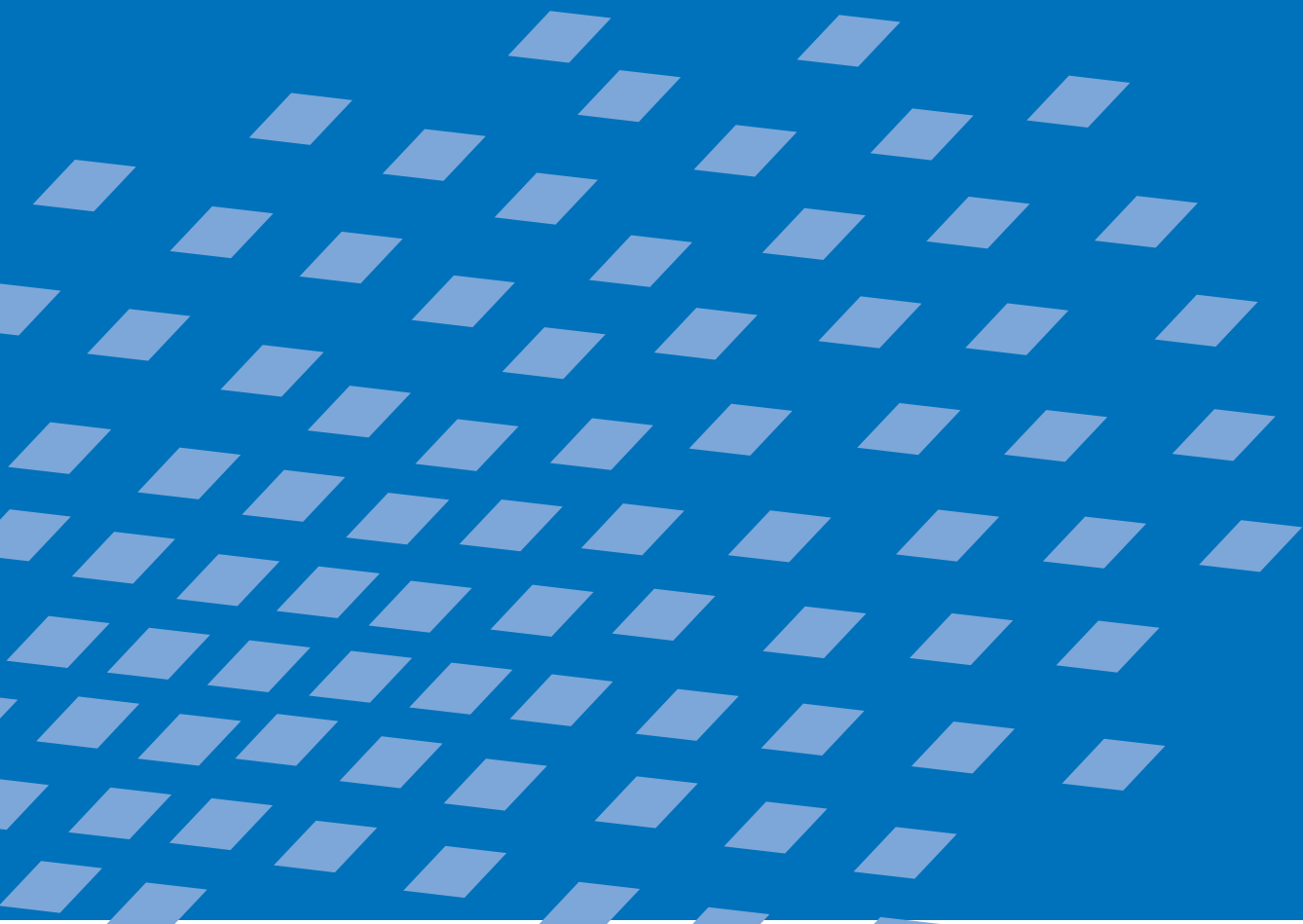




Universität Stuttgart  
Institut für Baustatik  
Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

# Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen

Matthias Hörmann



# **Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen**

von

**Matthias Hörmann**

Bericht Nr. 39 (2002)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 2002



© Matthias Hörmann

*Berichte können bezogen werden über:*

Institut für Baustatik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
D-70550 Stuttgart  
Tel.: 07 11 / 6 85 61 23  
Fax: 07 11 / 6 85 61 30  
<http://www.uni-stuttgart.de/ibs/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

ISBN 3-00-010896-3

# **Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen**

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Matthias Hörmann**

aus Oberstdorf

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Kaspar J. Willam
Tag der mündlichen Prüfung:	20. Dezember 2002

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Stuttgart 2002



# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Simulation des nichtlinearen Verhaltens von geschichteten, schalenförmigen Faserverbundstrukturen unter Verwendung der Methode der finiten Elemente. Um speziell dem nichtlinearen Materialverhalten dieser Werkstoffe ausreichend Beachtung zu schenken, werden in dieser Arbeit mehrere phänomenologische Materialmodelle vorgestellt und entwickelt. Diese sind in der Lage, das globale Strukturverhalten unter Berücksichtigung lokaler Effekte, wie beispielsweise der Delamination, zu erfassen. Nach der Vorstellung eines anisotrop verfestigenden Plastizitätsmodells geht die Arbeit vor allem auf die Versagensart der fortschreitenden Delamination ein, die eine häufige und gefährliche Versagensart in Faserverbundlaminaten darstellt.

Da Faserverbundwerkstoffe hauptsächlich bei dünnwandigen, schalenartigen Tragwerken Verwendung finden, wird zunächst eine mehrschichtige, dreidimensional orientierte Schalentheorie mit höherwertigem Verschiebungsansatz über die Dicke vorgestellt. Anschließend werden verschiedene in der Literatur verfügbare Versagensindikatoren erläutert und im Hinblick auf den möglichen Einsatz als Fließ- oder Schädigungskriterium untersucht und verglichen. Auf Basis des Hoffman-Versagenskriteriums wird hiernach ein Plastizitätsmodell beschrieben, mit dem man das anisotrop verfestigende Materialverhalten einer Laminat-Einzelschicht abbilden kann. Untersuchungen an Strukturbeispielen zeigen und verdeutlichen den Einfluss der anisotropen Verfestigung auf die Strukturantwort.

Die Versagensart der fortschreitenden Delamination wird in dieser Arbeit nicht als geometrische Diskontinuität, sondern im verschmierten Sinn einer Versagenszone abgebildet. Bei dieser kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise ist das nichtlineare Materialverhalten der Delamination mit Hilfe einer Prozessschicht beschreibbar. Hierzu werden in dieser Arbeit vier unterschiedliche Materialmodelle entwickelt und erläutert, wobei diese entweder im Rahmen einer entfestigenden Plastizitätstheorie oder über die Kontinuumschädigungsmechanik formuliert sind. Alle Modelle berücksichtigen bei der Beschreibung des entfestigenden Materialverhaltens die kritische Bruchenergie als maßgebenden Materialparameter. Bei Verwendung einer klassischen Kontinuumstheorie tritt allerdings im Nachbruchbereich infolge des entfestigenden Materialverhaltens eine Netzabhängigkeit der Ergebnisse und der Verlust von Elliptizität auf. Um diesen Problemen entgegenzuwirken, wird ein netzabhängiger Entfestigungsmodul verwendet und gegebenenfalls eine visko-plastische bzw. visko-schädigende Regularisierung eingesetzt. Allerdings ergibt sich infolge der viskosen Dämpfung auch eine Veränderung der physikalischen Eigenschaften. Damit diese möglichst klein bleibt, wird im Fall des plastizitätsbasierten Delaminationsmodells der Dämpfungsparameter automatisch angepasst, während er bei den Schädigungsmodellen konstant ist. Sowohl das Plastizitätsmodell als auch zwei der Schädigungsmodelle nutzen das Brewer-Lagace-Delaminationskriterium in seiner ursprünglichen bzw. in einer verzerrungsbasierten Form als Fließ- oder Schädigungsbedingung. Zusätzlich zu den bereits genannten Materialmodellen wird in der Arbeit ein weiteres Schädigungsmodell entwickelt, das Ähnlichkeiten zu einem Ansatz aus der Gruppe um Ladevèze aufweist. Hierbei wird die Schädigungsfunktion über eine äquivalente Energiefreisetzungsrate definiert. In diese gehen die Energiefreisetzungsraten der verschiedenen Bruchmodi (I, II, III) als energetisch konjugierte Größen zu den Schädigungsparametern ein. Anhand von Modell- und Strukturbeispielen werden die verschiedenen Ansätze miteinander verglichen und bewertet.

# Abstract

The present thesis is concerned with the numerical simulation of nonlinear behavior in composite structures by means of the Finite Element method. Thereby special attention is paid to nonlinear material behavior. For this phenomenological material models are developed and presented, which are capable of describing the overall structural response including local effects like delaminations. After the presentation of an anisotropic plasticity model combined with anisotropic hardening the frequently observed and very dangerous type of failure delamination is considered in particular.

On the basis of a multilayered, three-dimensional oriented shell theory including higher-order displacement kinematics across the thickness first-ply-failure indicators available from literature are presented at first. They are compared among themselves in particular with respect to their use as yield criterion or damage criterion in a materially nonlinear analysis. In what follows the anisotropic Hoffman failure criterion is used in the context of a plasticity formulation. Thereby an anisotropic hardening law is included allowing to simulate a nonlinear anisotropic hardening response of the laminate. In order to study the impact of the anisotropic hardening plasticity model structural examples are compared and assessed.

For their simulation the progressing delaminations are described in this thesis in a smeared manner and not as a geometrical discontinuity. Due to this continuum mechanics based description it is possible to represent delamination within a thin process layer. Hence four different material models are developed and presented. Some are formulated in the context of a softening plasticity theory while others are formulated in the context of continuum damage mechanics. All models in common is, that they use the critical fracture energy within the description of softening material response. Using those models in combination with a standard continuum mechanics approach leads to the well known problems of mesh sensitivity and loss of ellipticity of the underlying partial differential equations. In order to overcome these problems a mesh adjusted softening modulus is used and moreover a visco-plastic respectively visco-damage regularization is applied where required. In case of the delamination plasticity model the viscosity parameter is adapted automatically with the objective of minimal effect on numerical results. In contrary the delamination damage models utilize a constant viscosity parameter. Both plasticity and some damage models employ the Brewer-Lagace criterion in its original or modified form as yield or damage criterion, respectively. Additionally a further delamination damage model is developed, which has some similarities to the model proposed by Ladevèze and co-workers. It uses the definition of an equivalent energy release rate as damage criterion. The equivalent energy release rate is thereby composed of different energy release rates which are related to the fracture modes I, II and III, respectively. Those are the work conjugated variables to the damage parameters. By means of model examples and appropriate structural examples the different models are compared and assessed.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in der Zeit von November 1997 bis Dezember 2002.

Herrn Professor Dr.-Ing. Ekkehard Ramm gilt mein herzlichster Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Übernahme des Hauptberichts. Darüber hinaus möchte ich ihm besonders für die vielen Möglichkeiten zur Entfaltung meiner Person danken. Mit seinem vollsten Vertrauen im „Gepäck“, das mir stets Mut und Zuversicht gab, waren auch die schwierigen Phasen einer Dissertation zu bewältigen. Für mich war dabei seine fachliche Kompetenz kombiniert mit seiner Persönlichkeit und dessen kreativem Umfeld ein ideales wissenschaftliches Umfeld. Sein engagierter Lehrstil in den Vorlesungen des Faches Baustatik hat mich nicht nur als Student, sondern auch als Mitarbeiter gefesselt und ist mir stets ein gutes Beispiel.

Zu großem Dank bin ich auch den Herren Professoren Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger und Dr.-Ing. Kaspar J. Willam verpflichtet. Ihre Bereitschaft und unkomplizierte Zusage zur Übernahme des Mitberichtes hat mich sehr gefreut, da dies mein Wunsch war. Darüber hinaus danke ich beiden für ihr aufrichtiges Interesse an meiner Arbeit und für die zügige Durchsicht des Manuskripts. Ihr Beitrag zur Beschleunigung des Verfahrens hat mich sehr gefreut und war ein besonderes positives Erlebnis. Äußerst schätzenswert waren auch die fachlichen Diskussionen mit Herrn Professor Dr.-Ing. Kaspar J. Willam im Rahmen seines Forschungsaufenthalts am Institut für Baustatik.

Weiterhin möchte ich meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut danken. Ihre Hilfsbereitschaft, Freundlichkeit und die humorvollen Komponenten im alltäglichen Umgang sorgten für ein stets angenehmes Arbeitsklima, das ich sicherlich vermissen werde. Die geführten fachlichen Diskussionen kann ich als eine Erweiterung meines Wissenhorizontes bezeichnen. Mit Manfred Bischoff, Tobias Erhart, André Haufe, Horst Menrath, Wolfgang A. Wall und vielen anderen verbindet mich mehr als nur Fachliches, sondern vor allem Freundschaftliches. Hierfür danke ich ihnen ganz herzlich. Weiterhin danke ich Manfred Bischoff für die sorgfältige und kritische Durchsicht des Manuskripts. Auch möchte ich einige meiner Studienkollegen/-innen nicht vergessen, die sich stets für meine Arbeit und dessen Fortschritt interessiert haben und mir dadurch ihre Unterstützung gaben.

Meiner lieben Familie, allen voran meinem Vater und meiner lieben Isabella, bin ich ebenfalls zu herzlichem Dank für die vielen Jahre der tatkräftigen und motivierenden Unterstützung, des Verständnisses und der Hilfe verpflichtet.

Zuletzt und leider auch zu spät möchte ich meiner Mutter danken, die im entscheidenden Moment meinen beruflichen Werdegang gelegt hat – Danke!

Matthias Hörmann





# Inhalt

<b>Abkürzungen, Bezeichnungen, Vereinbarungen</b> .....	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Motivation .....	1
1.2 Stand der Forschung .....	3
1.3 Ziele der Arbeit und Übersicht .....	6
<b>2 Faserverbundwerkstoffe</b> .....	<b>8</b>
2.1 Einführung .....	8
2.2 Versagensvorgänge in Faserverbundwerkstoffen .....	10
2.3 Delamination in Laminaten .....	11
2.4 Modellierungsaspekte .....	13
<b>3 Kontinuumsmechanik und Strukturmodell</b> .....	<b>15</b>
3.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik .....	15
3.2 Dreidimensionales, geschichtetes Schalenmodell .....	21
<b>4 Elastoplastizität</b> .....	<b>27</b>
4.1 Einführung .....	27
4.2 Ratenunabhängige Plastizität .....	28
4.3 Duvaut-Lions Viskoplastizität .....	33
4.4 Inkrementelle Formulierung .....	34
<b>5 Kontinuumsschädigungsmechanik</b> .....	<b>41</b>
5.1 Einführung .....	41
5.2 Degradationsmodelle .....	42
5.3 Isotrope 1-Parameter Elasto-Schädigung .....	44
5.4 Elasto-geschädigte Materialtangente .....	47
5.5 Berücksichtigung viskoser Effekte .....	48
<b>6 Versagensindikatoren und anisotropes Plastizitätsmodell</b> .....	<b>49</b>
6.1 Einführung .....	49
6.2 Versagensindikatoren .....	50
6.3 Anisotropes Plastizitätsmodell .....	59
<b>7 Numerische Modelle zur Berechnung fortschreitender Delamination</b> .....	<b>73</b>
7.1 Einführung .....	73
7.2 Plastizitätsmodell mit Brewer-Lagace-Kriterium .....	76

7.3	Schädigungsmodelle mit Brewer-Lagace-Kriterium .....	101
7.4	Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium .....	109
7.5	Modellbeispiel .....	116
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele .....</b>	<b>119</b>
8.1	Balken mit konzentrierter Lasteinleitung .....	119
8.2	Zugprobe mit unsymmetrischem Schichtaufbau .....	121
8.3	Faserverbundrohr unter Innendruck .....	123
8.4	Versagenslasten einer anisotropen, gelochten Zugprobe .....	125
8.5	Tonnenschale mit anisotroper Verfestigung .....	128
8.6	Die „Möwe“ mit anisotroper Verfestigung .....	133
8.7	Faserverbundrohr mit anisotroper Verfestigung .....	135
8.8	Randdelamination .....	137
8.9	Brettschichtholzbogen .....	139
8.10	‘Double-Cantilever-Beam’-Probe .....	142
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>149</b>
9.1	Zusammenfassung .....	149
9.2	Ausblick .....	152
	<b>Literatur .....</b>	<b>154</b>
	<b>Anhang .....</b>	<b>166</b>
A	Tensorrechnung .....	166
B	Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung in der Elastoplastizität ...	168
C	Algorithmische elasto-plastische Materialtangente der Delaminationsplastizität .....	169

# Abkürzungen, Bezeichnungen, Vereinbarungen

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen:

## Abkürzungen

CLS	‘Cracked-Laped-Shear’
DCB	‘Double-Cantilever-Beam’
ENF	‘End-Notched-Flexure’
FE	Finite-Element
FEM	Finite-Element-Methode
FPF	‘First-Ply-Failure’
FVW	Faserverbundwerkstoff
LPF	‘Last-Ply-Failure’
MMF	‘Mixed-Mode-Flexure’
PK1	1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
PK2	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
RVE	Repräsentatives Volumenelement
RWP	Randwertproblem
UD	Unidirektional

## Bezeichnungen

### *Kontinuumsmechanik und Strukturmodell*

$\mathfrak{B}$	materieller Körper
$\mathfrak{E}^3$	dreidimensionaler Euklidischer Punktraum
$\mathfrak{R}^3$	dreidimensionaler Raum
$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{a}_{3_L}$	kovarianter Direktor der Schicht L in der Referenzkonfiguration
$\bar{\mathbf{a}}_{3_L}$	kovarianter Direktor der Schicht L in der Momentankonfiguration
$A_s$	Neumann-Rand (Spannungsrand)
$\mathbf{b}$	Volumenkraftvektor der Referenzkonfiguration (pro Masseneinheit)
$\mathbf{C}$	vierstufiger Werkstofftensor
$\mathbf{d}$	Vektor der Knotenverschiebungen
$\mathbf{E}$	Green-Lagrange Verzerrungstensor
$\mathbf{E}_L$	Green-Lagrange Verzerrungstensor der Schicht L
$\mathbf{e}_i$	kartesische Einheitsvektoren (i=1,2,3)

$F$	Deformationsgradient
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$\bar{\mathbf{g}}_i, \bar{\mathbf{g}}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Momentankonfiguration
$\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}$	Metriktensor der Referenz- und der Momentankonfiguration
$g_{ij}, g^{ij}$	ko- und kontravariante Komponenten des Metriktensors der Referenzkonfiguration
$\bar{g}_{ij}, \bar{g}^{ij}$	ko- und kontravariante Komponenten des Metriktensors der Momentankonfiguration
$H$	Verschiebungsgradient
$J$	Jacobi Determinante
$\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}$	Normalenvektor einer Fläche in der Referenz- und der Momentankonfiguration
$N_K$	Formfunktion des Knotens K
$NL$	Anzahl der Schichten
$NN$	Anzahl der Knoten
$\mathbf{P}$	1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$r_L$	Mittelfläche der Schicht L
$\mathbf{S}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor
$\mathbf{t}^*$	vorgeschriebene Spannungen auf dem Neumann Rand
$\mathbf{u}$	Verschiebungsfeld
$\delta\mathbf{u}$	virtuelle Verschiebung
$\mathbf{v}$	Verschiebung der Schalenmittelfläche
$\mathbf{w}_S$	Differenzvektor der Schicht S
$W^{int}(\mathbf{E})$	spezifisches Formänderungspotenzial
$\delta W$	virtuelle Arbeit
$\delta W_{ext}$	virtuelle äußere Arbeit
$\delta W_{int}$	virtuelle innere Arbeit
$\delta W_{ext}^e$	elementspezifische virtuelle äußere Arbeit
$\delta W_{int}^e$	elementspezifische virtuelle innere Arbeit
$x_i$	kartesische (orthonormierte) Koordinaten (i=1,2,3)
$\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes der Referenz- und der Momentankonfiguration
$\mathbf{x}_L, \bar{\mathbf{x}}_L$	Ortsvektor eines materiellen Punktes der Schicht L in der Referenz- und der Momentankonfiguration
$\delta_i^j$	Kronecker-Delta
$\boldsymbol{\epsilon}$	Verzerrungstensor für kleine Deformationen
$\rho$	Massendichte
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor

$\theta^i$	krummlinige, konvektive Koordinaten (i=1,2,3)
$\theta_{LS}^3$	Kontinuitätsmatrix
$\zeta_L$	lokale Dickenkoordinate der Schicht L

### *Elastoplastizität*

$C^{el}$	elastischer vierstufiger Materialtensor
$C^{ep}$	elasto-plastischer Materialtensor des Kontinuums
$E^{pl}$	plastischer Anteil des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors
$\dot{E}^{vp}$	visko-plastischer Anteil des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors
$F$	Fließfunktion
$H$	Matrix der Verfestigungsmoduli
$m$	Gradient des plastischen Potentials (nach den Spannungen)
$n$	Gradient der Fließfunktion (nach den Spannungen)
$q$	Vektor der internen Variablen des Spannungsraumes
$\dot{W}^{pl}$	Rate der plastischen Arbeit
$\eta$	Dämpfungsparameter, Viskosität
$\kappa$	Vektor der internen Variablen des Verzerrungsraumes
$\lambda$	plastischer Multiplikator
$\Psi$	freie Helmholtz-Energie
$\Psi_{el}$	elastischer Anteil der freien Helmholtz-Energie
$\Psi_{pl}$	plastischer Anteil der freien Helmholtz-Energie
$\bar{S}_y$	Fließspannung
$\Theta$	algorithmischer Modul

### *Kontinuumsschädigungsmechanik*

$A_0$	ungeschädigte Querschnittsfläche
$A_d$	geschädigte Querschnittsfläche
$d$	skalare Schädigungsvariable
$\tilde{E}$	effektive Verzerrungen
$C^{ed}$	vierstufiger Materialtensor der Elasto-Schädigung
$I$	vierstufiger Einheitstensor
$\tilde{S}$	effektive Spannungen
$Y$	Energiefreisetzungsrate
$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E})$	äquivalente Verzerrung
$\Phi$	Schädigungsfunktion
$\phi$	Schädigungsevolution
$\gamma$	Lagrange- bzw. Geschichtsparemeter
$\eta$	Dämpfungsparameter, Viskosität

## Versagensindikatoren und anisotropes Plastizitätsmodell

$A_{ij}$	zweistufiger Festigkeitstensor des Tsai-Wu-Kriteriums
$A_{ijkl}$	vierstufiger Festigkeitstensor des Tsai-Wu-Kriteriums
$H$	Matrix der Verfestigungsmoduli
$M$	Abbildungsmatrix zwischen $\hat{\kappa}$ und $\kappa$
$P$	Kopplungsmatrix des Hoffman-Kriteriums
$Q$	Kopplungsvektor des Hoffman-Kriteriums
$\hat{P}$	Kopplungsmatrix des plastischen Potentials
$\hat{Q}$	Kopplungsvektor des plastischen Potentials
$\hat{\kappa}$	äquivalenter Verzerrungsvektor (6x1)
$\kappa$	äquivalenter Verzerrungsvektor (9x1)
$\Theta$	algorithmischer Modul
$\bar{S}_{ii}^t, \bar{S}_{ii}^c$	Zug- und Druckfestigkeiten im Materialkoordinatensystem (i=1,2,3)
$\bar{S}_{ij}$	Schubfestigkeiten im Materialkoordinatensystem (i,j=1,2,3)

## Fortschreitende Delamination

$C^{ed}(d)$	vierstufiger Tensor des geschädigten Materials
$G$	Bruchenergie
$G_c$	kritische Bruchenergie
$h_{PS}$	Dicke der Prozessschicht
$H$	Gradient der Vergleichsspannung nach der äquivalenten Verzerrung
$P$	Kopplungsmatrix
$Q^{ak}$	akustischer Tensor
$Y_c$	kritische Energiefreisetzungsrate
$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E})$	äquivalente Verzerrung
$\mu$	positiver Entfestigungsmodul
$\bar{S}_{33,\infty}^t$	Restspannung in Dickenrichtung
$\tau$	Übergangsparameter
$\kappa$	skalarwertige, äquivalente Verzerrung
$\Theta$	algorithmischer Modul

Weitere Bezeichnungen werden beim jeweiligen Auftreten erläutert.

## Vereinbarungen

Unter dem Ausdruck „*Laminat*“ wird in dieser Arbeit eine laminierte Struktur verstanden, die aus dem Zusammenfügen mehrerer *Einzel-schichten* hervorgeht. Die Einzelschicht wird dabei häufig als „*Lamina*“ bezeichnet. Des Weiteren wird das *Materialkoordinatensystem* der Einzelschicht so eingeführt, dass die Faserlängsrichtung mit der 1-Richtung zusammenfällt und die 3-Richtung mit dem Schalendirektor übereinstimmt. Die Spannungen in 3-Richtung entspre-

chen somit den Dickennormalspannungen, die maßgeblich für die Delamination verantwortlich sind.

Ebenso werden englische Bezeichnungen, die im Sinne einer Fachsprache als eingedeutscht anzusehen sind, übernommen. Hierzu gehören beispielsweise die Begriffe ‘*Off-Axis-Versuch*’ oder ‘*Mixed-Mode-Delamination*’.

Zur Notation in dieser Arbeit sei folgendes angemerkt: In den allgemeinen Teilen wie Kontinuumsmechanik, Elastoplastizität und Kontinuumsschädigungsmechanik wird die Tensor-Schreibweise verwendet. Im Hauptabschnitt, der mit der Vorstellung und der Entwicklung verschiedener Materialmodelle gleichzusetzen ist, wird eine etwas modifizierte Vektor-Matrix-Schreibweise verwendet: Die Komponenten des Spannungsvektors bzw. des Verzerrungsvektors sind mit zwei Indices anstelle nur eines versehen. Die Indices entsprechen hier der üblichen Definition mit Normale der gedachten Schnittfläche in Kombination mit Richtungsorientierung. Das Werkstoffgesetz kann daher beispielsweise wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{E} .$$





# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Die Natur ist das Vorbild bei der Entwicklung und der effizienten Nutzung von Faserverbundwerkstoffen. So besteht beispielsweise der menschliche Körper mit seinen Sehnen und Muskeln, aber auch Pflanzen und Tiere aus verschiedenen Fasern, die von einer Matrix umschlossen werden. Gerade der menschliche Körper ist ein Paradebeispiel für die optimale Nutzung natürlicher Faserverbundwerkstoffe. So sind die Muskeln in mehreren Schichten und in unterschiedlicher Art und Größe angeordnet. Zusätzlich weisen sie noch eine verschiedenartige Orientierung auf, so dass sowohl eine starke und effiziente als auch eine gewandte und anpassungsfähige „Struktur“ entsteht, die optimal auf die herrschenden Kraftflüsse ausgerichtet ist.

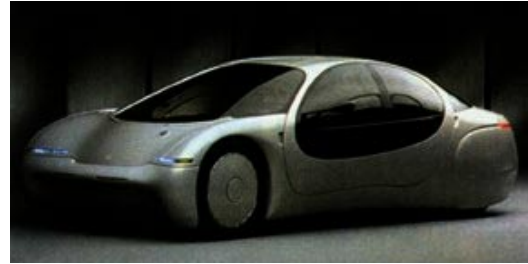
Der Mensch hat schon früh und intuitiv Faserverbundwerkstoffe aus natürlichen Materialien selbst hergestellt und verwendet. Um 1300 v. Chr. wird von Lehmziegeln berichtet, die durch die Zugabe von Stroh verstärkt bzw. bewehrt wurden, ein Vorgehen, das heutzutage noch üblich ist. In diesem Sinn ist auch Stahlbeton als ein Faserverbundwerkstoff anzusehen. Die Stahlbewehrung übernimmt die Funktion der Fasern, während der Beton das Matrixmaterial darstellt und den Verbund gewährleistet. Neuartige Faserverbundwerkstoffe (engl. ‘Advanced Composites’), die im Folgenden kurz als Faserverbundwerkstoffe bezeichnet werden, verwenden hingegen technisch hergestellte, hochwertige Fasern in Kombination mit einer nicht-hydraulisch gebundenen Matrix.

Seit Anfang des 20. Jahrhunderts gibt es ernsthafte Bestrebungen, das große Potenzial, das in der Verwendung von neuartigen Faserverbundwerkstoffen steckt, zu erforschen und zu nutzen. Durch die technische Herstellung hochwertiger Fasern sowie durch die Entwicklung neuer Produktionstechniken sind vielfältige Anwendungsmöglichkeiten für Faserverbundwerkstoffe entstanden. So ist allen voran die Luft- und Raumfahrtindustrie zu nennen, die vor allem an der Gewichtseinsparung bei gleichzeitig hohen Steifigkeiten und Festigkeiten interessiert ist. Aber auch im Maschinen- und Automobilbau, in der Sportgeräteherstellung und in der Herstellung medizinischer Geräte und Produkte ist inzwischen eine zunehmende Verwendung von Faserverbundwerkstoffen festzustellen. Im Bauwesen sind als Anwendungsmöglichkeiten nachträgliche Verstärkungen (Meier et al. (1995)), Ertüchtigungen gegenüber Erdbeben (Saadatmanesh et al. (1996), Seible (1997)), Ersatz für Stahlbewehrung (IStructE (1999)), Vorspannkabel (Meier und Farshad (1996)) und gesamte Brückentragwerke zu nennen, siehe beispielsweise Abb. 1.1 und Burgoyne (1999). In den meisten dieser Einsatzgebiete wird neben der Gewichtseinsparung, der Korrosionsbeständigkeit und den hohen Steifigkeiten und Festigkeiten von Faserverbundwerkstoffen auch die geplante und gewollte Anisotropie der mechanischen Eigenschaften ausgenutzt. Infolge dieser Anisotropie ist der Zusammenhang zwischen Belastung und resultierenden Verformungen komplexer sowie die entstehenden Spannungs- bzw. Verzerrungszustände komplizierter.

Die besonderen Eigenschaften dieses Werkstoffes und der damit verbundene, verstärkte Einsatz bringt die Forderung nach geeigneten Simulations- und Berechnungswerkzeugen mit sich. Diese müssen vor allem eine wirklichkeitsgetreue Abbildung des Materialverhaltens beinhalten, da



*Rennrad: Carbonfaser-Rahmen*  
*Quelle: JAD (2002)*



*GM Automobil-Studie: Carbonfaser-Karosserie*  
*Quelle: USCAR (2002)*



*Aberfeldy, Schottland*  
*Quelle: Strongwell (2002)*



*Kolding, Dänemark*  
*Quelle: Fiberline (2002)*

*Fußgängerbrücken: Glasfaser-Deck und -Pylone*

*Abb. 1.1: Anwendungsbeispiele für Faserverbundwerkstoffe*

beispielsweise die Gruppe der spröden Faserverbundwerkstoffe eine geringe Bruchverzerrung und eine geringe Duktilität aufweist. Die bei Stahlbeton vorhandene „Schlauheit des Materials“ ist daher bei spröden Faserverbundwerkstoffen nicht gegeben; sie „verzeihen“ nicht. Der Detailausbildung kommt somit eine besondere Bedeutung zu. Zusätzlich wird eine Versagensanalyse von Faserverbundwerkstoffen durch die Heterogenität der Struktur infolge des Mehrschichten-aufbaus und durch die Anisotropie der einzelnen Schichten erschwert. Dabei setzt sich das anisotrope Materialverhalten natürlich auch innerhalb des Versagensvorganges fort. Dies lässt sich anhand eines einfachen Beispiels verdeutlichen: Studiert man den Aufreißvorgang beim Öffnen einer Bananenschale, so können unterschiedliche Rissarten und Versagensvorgänge in diesem natürlichen Faserverbundwerkstoff beobachtet werden. Zu Beginn des Öffnens findet zunächst ein reines Zugversagen der Fasern statt. Hierbei kann auch ein Herausziehen der Fasern aus dem Matrixmaterial festgestellt werden. Beim weiteren Öffnungsvorgang, der mit einer Belastungsänderung verbunden ist, geht die Versagensart in ein Zugversagen des Matrixmaterials parallel zu den Fasern über. Der benötigte Kraftaufwand verringert sich im Vergleich zum Zugversagen der Fasern erheblich.

In technisch hergestellten Faserverbundwerkstoffen können diese Versagensarten prinzipiell ebenfalls festgestellt werden. So kann ein Reißen der Fasern und/oder der Matrix sowie ein Verbundversagen von Faser und Matrix auftreten. Je nach verwendetem Faser- und Matrixmaterial verhält sich das Versagen verfestigend oder entfestigend. Bei Laminaten, die durch ein Verkleben von mehreren Faserverbundschichten hergestellt werden, tritt die zusätzliche Versagensart der Delamination auf. Es handelt sich hierbei um das „Sich-voneinander-Trennen“ zweier be-

nachbarter Schichten, wobei die Ablösung entlang der Schichtgrenzen verläuft. Laut einer Studie von Boeing liegt diese Versagensart in ca. 60% der untersuchten Schadensfälle vor und spielt daher eine entscheidende Rolle (Miller et al. (1994)).

Das Versagen von Faserverbundwerkstoffen beginnt dabei stets auf der *Mikroskala*. Dort findet eine Spannungskonzentration in der Nähe von Defekten und Grenzschichten statt, die auch Mikrospannungen genannt werden. Diese haben wiederum die Initiierung und das Wachstum von Mikrodefekten und Mikrorissen zur Folge. Bei weiterer Belastung wird durch das Zusammenwachsen der Mikrorisse ein makroskopischer Riss entstehen und sichtbar auf der *Makroskala* wachsen. Die mechanische Beschreibung der Schadensvorgänge in Faserverbundwerkstoffen kann daher auf zwei verschiedenen Größenskalen erfolgen: der Mikro- und der Makroskala.

*Mikromechanische Ansätze* geben dabei Aufschluss über das Verhalten von Faserverbundwerkstoffen auf der Faser-Matrix-Ebene. Hierbei werden Fasern und Matrix einzeln berücksichtigt und untersucht. Durch diese detaillierte Betrachtungsweise der heterogenen Einzelschicht erhält man folglich einen besseren Einblick in die Rissinitiierung und in den Schädigungsfortschritt. Aus den Beobachtungen der *Mikroebene* können unter anderem physikalische Gesetze abgeleitet und entwickelt werden, die auf der *Makroebene* zum Einsatz kommen. Zur Untersuchung des globalen Strukturverhaltens sind diese mikromechanischen Ansätze jedoch aufgrund des hohen numerischen Aufwandes (noch) nicht geeignet. Dies trifft für *makromechanische Ansätze* nicht zu, denn diese haben primär die Beschreibung des globalen Strukturverhaltens zum Ziel. Dass dabei gleichzeitig und phänomenologisch lokale Effekte berücksichtigt werden, ist nicht nur wünschenswert, sondern auch erforderlich. Bei makroskopischen Ansätzen werden die einzelnen Werkstoffkomponenten Faser und Matrix nicht mehr einzeln für sich betrachtet, sondern vielmehr wird von der Einzelschicht als homogenisiertes Kontinuum ausgegangen. Die effektiven bzw. homogenisierten Werkstoffkennwerte lassen sich dabei aus Versuchen oder über Homogenisierungsmethoden, wie beispielsweise die Mischungsregel, bestimmen.

## 1.2 Stand der Forschung

Infolge der Inhomogenität und der Anisotropie von Faserverbundwerkstoffen sind zur Erfassung einer realistischen Strukturantwort und zur Berücksichtigung lokaler Effekte besondere darauf ausgerichtete Modelle notwendig. Die genaue Wiedergabe der Deformations- und Spannungszustände innerhalb der Laminatstruktur spielt dabei eine entscheidende Rolle, da diese direkte Eingangsgrößen für Versagenskriterien darstellen. Da Faserverbundwerkstoffe im Wesentlichen als Materialien für Leichtbaukonstruktionen eingesetzt werden, bei denen es sich häufig um dünnwandige, platten- und schalenartige Tragwerke handelt, wird im Folgenden auf die Anforderungen und die Auswahl einer geeigneten Schalenformulierung zur mechanischen Beschreibung eingegangen. Dabei ist insbesondere zu beachten, dass Faserverbundkonstruktionen oft aus mehreren, aufeinander laminierten Schichten mit unterschiedlicher Faserorientierung aufgebaut sind.

Die Erweiterung der Kirchhoff-Plattentheorie bzw. der Love-Schalentheorie auf geschichtete und somit heterogene Querschnitte ist die bekannte klassische Laminattheorie. Für sehr dünne Lamine und Einzelschichten mit ähnlichen Materialeigenschaften liefert sie ausreichend genaue Ergebnisse für die globale Strukturantwort. Die Querschubverzerrungen und die Dickennormalspannungen werden infolge des gewählten kinematischen Ansatzes vernachlässigt. Ist al-

lerdings der transversale Schubmodul quer zur Faserrichtung wesentlich geringer als der Elastizitätsmodul in Faserrichtung, kann dies zu großen Abweichungen gegenüber der exakten Lösung führen. Die Querschubverzerrungen können dann nicht mehr vernachlässigt werden, und es müssen schubweiche Theorien zum Einsatz kommen. Schubdeformationstheorien erster Ordnung, die einer Reissner-Mindlin-Kinematik entsprechen, berücksichtigen diese, siehe beispielsweise Dorninger (1989), Dorninger und Rammerstorfer (1990), Klarmann (1991) und Schellekens (1992). Es ist dann möglich, konstante Querschubverzerrungen und Querschubspannungen über die Schalendicke abzubilden. Zur wirklichkeitsnahen Erfassung der inneren Arbeit aus den Querschubdeformationen müssen allerdings Schubkorrekturfaktoren eingeführt werden. Bei Laminaten sind diese vom Schichtmaterial, vom Schichtaufbau und von der Faserrichtung abhängig und mitunter schwer zu bestimmen. Des Weiteren wird die Normalspannung in Dickenrichtung  $S^{33}$  immer noch vernachlässigt, so dass lokale Effekte, wie beispielsweise der Versagensvorgang der Delamination, nicht berücksichtigt werden können. Weiterhin wird vom Ebenbleiben des Querschnittes ausgegangen. Bei beliebigen Dicken- und Steifigkeitsverhältnissen der einzelnen Schichten entsteht in Wirklichkeit aber ein zick-zack-förmiger Verschiebungsverlauf über die Dicke, der einen nicht stetigen Verlauf der Querschubverzerrungen mit sich bringt. Folglich ist die Schubdeformationstheorie erster Ordnung im Hinblick auf die Berücksichtigung lokaler Effekte und die Modellierung von Schädigungsvorgängen in Faserverbundstrukturen ebenfalls nicht geeignet.

Sogenannte Mehrschichtmodelle, die pro eingeführter Berechnungsschicht (siehe Abb. 3.3) eine Reissner-Mindlin-Kinematik verwenden und zusätzlich die Änderung der Strukturdicke (Extensibilität des Direktors) erlauben, sind hierzu in der Lage, siehe beispielsweise Epstein und Huttelmaier (1983), Pinsky und Kim (1984), Schultz (1994), Gruttmann und Wagner (1994/1995) und Braun (1995). Mit diesen Modellen ist es sowohl möglich, einen vollständig dreidimensionalen Spannungszustand zu erfassen als auch eine kinematisch realistische Darstellung des Verschiebungs- und Verzerrungsverlaufes in Laminaten zu gewährleisten. Die wesentlichen Voraussetzungen für die Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen sind hiermit gegeben.

Grundsätzlich stehen zur numerischen Simulation fortschreitenden Versagens bzw. fortschreitender Delamination zwei verschiedene Ansätze zur Verfügung: der *bruchmechanische* Ansatz und der *kontinuumsmechanische* Ansatz. Beim Ersten wird ein Riss als eine geometrische bzw. topologische Diskontinuität abgebildet, während beim Zweiten der Riss im verschmierten Sinn in einer Prozesszone bzw. einer Prozessschicht dargestellt wird.

Beim bruchmechanischen Ansatz geht man somit von einem bereits vorhandenen Riss aus, der infolge seiner Rissspitze und der dort vorhandenen Spannungssingularität jedes Spannungs- bzw. Verzerrungskriterium bereits verletzt. Bei Verwendung der Finite-Element-Methode (FEM) als Diskretisierungs- und Lösungsverfahren verläuft die Rissentwicklung dann entlang der Elementkanten und endet stets an Knoten des FE-Netzes. Gekrümmte Rissfronten können daher nur sehr aufwendig durch eine Neuvernetzung der Rissspitze dargestellt werden, siehe Rinderknecht (1999). Der Rissfortschritt wird auf Basis des Griffith-Kriteriums (Griffith (1921, 1924)) überprüft, wobei die bei der Risserweiterung freigesetzte Bruchenergie mittels Methoden der finiten Risserweiterung, der virtuellen Risserweiterung oder der virtuellen Rissschließung berechnet wird, siehe Davidson (1990, 1996), Nilsson und Storakers (1990), Wang et al. (1995), Krüger (1996), Zhang (1998) oder Teßmer (2000). Um die freigesetzte Bruchenergie mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen, ist allerdings eine feine Diskretisierung im Bereich der Rissspitze nötig.

Beim kontinuumsmechanischen Ansatz betrachtet man hingegen nicht den Riss selbst, sondern lediglich seine Auswirkung auf das Kontinuum. Die Topologie der Struktur bleibt unverändert. Innerhalb der finiten Elemente können dann beispielsweise Plastizitäts- oder Schädigungsformulierungen zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens eingesetzt werden. Dabei wird sowohl bei einer Schädigungsformulierung als auch bei einer entfestigenden Plastizitätsformulierung das Griffith-Kriterium über die kritische Bruchenergie erfüllt, die sich aus der Fläche unter der äquivalenten Spannungs-Dehnungs-Beziehung ergibt.

Neuere Verfahren zur geometrischen Beschreibung von lokalen Effekten versuchen die jeweiligen Vorteile der diskreten und der verschmierten Rissbeschreibung zu kombinieren. In der Literatur sind hierzu zwei Verfahren gebräuchlich, die unter der Bezeichnung '*Embedded-Crack-Model*' und '*Extended-Finite-Element-Method*' bekannt sind. Beide Methoden arbeiten mit erweiterten Verschiebungs- und/oder Verzerrungsansätzen innerhalb der FE-Ansatzfunktionen. Mit Hilfe dieser erweiterten Ansatzfunktionen können diskontinuierliche Verläufe in den Verschiebungen und/oder in den Verzerrungen (starke und/oder schwache Diskontinuität) innerhalb eines Elementes abgebildet werden. Der Riss kann sich damit unabhängig vom FE-Netz entwickeln und fortsetzen. Einen detaillierten, historischen und vergleichenden Überblick der '*Embedded-Crack-Models*' geben Jirásek (2000) sowie Jirásek und Zimmermann (2001). Genaueres zur Methode der '*Extended-Finite-Elements*' ist in Moës et al. (1999), Sukumar et al. (2000) sowie Belytschko et al. (2001) zu finden. Einen Vergleich der beiden Verfahren gibt u.a. Jirásek und Belytschko (2002).

Das nichtlineare Materialverhalten, das bei der verschmierten Rissbeschreibung innerhalb der finiten Elemente durch geeignete Modelle abgebildet werden muss, hängt entscheidend von den verwendeten Verbundmaterialien ab. Werden Metalle als Faser- oder Matrixmaterial eingesetzt, so ist ein eher duktileres Verhalten zu erwarten, während bei der Verwendung von Glas- oder Carbonfasern in einer Polymermatrix ein eher sprödes Verhalten auftritt. Zusätzlich hängt das nichtlineare Verhalten, das meist zu dem anisotrop ist, vom anliegenden Belastungszustand (Zug/Druck) ab. Versagenskriterien, die bei der Versagensanalyse von Faserverbundwerkstoffen eingesetzt werden, müssen dies berücksichtigen. Es sind hier u.a. die Kriterien von Hill (1948), Hoffman (1967), Tsai und Wu (1971), Hashin (1980) und Puck (1992) zu nennen. In Nahas (1986) ist beispielsweise eine Zusammenstellung verschiedener Versagenskriterien gegeben. Für Abhandlungen neueren Datums sei auf Ochoa und Reddy (1992) sowie Puck (1996) verwiesen.

Zur Formulierung eines Materialmodells kann das Versagenskriterium innerhalb einer Plastizitätsformulierung als Fließbedingung oder innerhalb einer Schädigungsformulierung als Schädigungsbedingung eingesetzt werden. In neuerer Zeit werden vermehrt Schädigungsformulierungen verwendet, bei denen die Degradation der Materialeigenschaften über Schädigungsparameter, sogenannte interne Variablen, berücksichtigt wird. Die dazu energetisch konjugierten Kräfte, nämlich die Energiefreisetzungsraten, werden dann zur Definition des Versagenskriteriums und zur Beschreibung der Schädigungsevolution herangezogen, siehe beispielsweise Ladevèze (1983, 1986, 1992), Ladevèze und Dantec (1992) und Ladevèze et al. (1998, 2000).

### 1.3 Ziele der Arbeit und Übersicht

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Simulation von dünnwandigen, schalenartigen Strukturen aus Faserverbundwerkstoffen unter Berücksichtigung des nichtlinearen Strukturverhaltens und vor allem unter Einbeziehung des nichtlinearen Materialverhaltens. Da hierbei auch geschichtete Querschnitte, also Laminats, untersucht werden sollen, ist speziell die Initiierung und das Wachstum von Rissen bzw. von Delaminationen zu berücksichtigen. Dabei ist die wirklichkeitsgetreue Beschreibung des Trag- und Versagensverhaltens von entscheidender Bedeutung. Um den Bedürfnissen schalenartiger Faserverbundstrukturen Rechnung zu tragen, werden die in dieser Arbeit verwendeten bzw. entwickelten Materialmodelle innerhalb einer mehrschichtigen, dreidimensional orientierten Schalenformulierung eingesetzt.

Die Arbeit beinhaltet zwei Schwerpunkte. Nach der Vorstellung und der Bewertung einiger in der Literatur verfügbarer Versagenskriterien wird zunächst ein anisotrop verfestigendes Plastizitätsmodell vorgestellt, mit dem ein gerichtetes nichtlineares Materialverhalten einer Faserverbund-Einzelschicht erfassbar ist. Anhand einiger Beispiele zeigt die vorliegende Arbeit den Einfluss der anisotropen Verfestigung auf das Strukturantwortverhalten auf und bewertet deren Auswirkungen.

Der zweite und größere Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Simulation fortschreitender Delamination, die hier im kontinuumsmechanischen Sinn einer Prozessschicht abgebildet wird. Zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens infolge Delamination werden verschiedene Materialmodelle vorgestellt bzw. entwickelt. Dabei kommen sowohl plastizitätsbasierte als auch schädigungsbasierte Formulierungen zum Einsatz. Anhand von Modell- und Strukturbeispielen werden die Materialmodelle verglichen und bewertet.

*Kapitel 2* gibt zunächst eine kurze Beschreibung über den Aufbau und über das grundsätzliche mechanische Verhalten von Faserverbundwerkstoffen. Darüber hinaus werden die maßgeblichen Versagensarten der unidirektional verstärkten Einzelschicht sowie des Laminats vorgestellt. Eine Einführung in die Modellierungsaspekte von Faserverbundwerkstoffen und von Laminaten schließt dieses Kapitel ab.

Einige wichtige kontinuumsmechanische Grundlagen für den dreidimensionalen Körper wiederholt *Kapitel 3*, um die Basis für die im Anschluss kurz vorgestellte mehrschichtige, dreidimensional orientierte Schalentheorie zu schaffen. Diese höherwertige Schalentheorie zeichnet sich besonders durch die Wahl einer beliebigen Anzahl von Berechnungsschichten in Dickenrichtung aus. Jede Berechnungsschicht verwendet dabei eine Reissner-Mindlin-Kinematik mit extensilem Direktor, so dass die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten von der Anzahl der eingeführten Berechnungsschichten abhängt. Die vorliegende Schalentheorie erlaubt somit die Verwendung vollständiger dreidimensionaler Werkstoffgesetze und berücksichtigt sämtliche Spannungsponenten.

*Kapitel 4* leitet nach einer kurzen physikalischen Motivation des phänomenologischen Plastizitätsverhaltens von Materialien die Elastoplastizität unter der Annahme kleiner Verzerrungen, aber großer Rotationen her. Hierbei geht man speziell auf die inkrementelle Formulierung und auf die Herleitung der elasto-plastischen Materialtangente ein, weil beides bei der iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems benötigt wird. Zur Berücksichtigung viskoser Effekte wird die Erweiterung der Elastoplastizität auf die Viskoplastizität nach Duvaut und Lyons (1972) vorgestellt sowie deren numerische Umsetzung innerhalb der Methode der finiten Elemente beschrieben.

Ebenfalls nach einer kurzen physikalischen Motivation des Deteriorationsverhaltens von Materialien gibt *Kapitel 5* anhand des Beispiels der isotropen 1-Parameter Schädigung eine Einführung in die Kontinuumschädigungsmechanik. Zusätzlich wird auf die Berücksichtigung viskoser Effekte eingegangen.

*Kapitel 6* stellt zu Beginn einige, in der Literatur verfügbare und gebräuchliche Versagensindikatoren für Faserverbundwerkstoffe vor und vergleicht diese miteinander. Dabei wird insbesondere das Hoffman- und das Brewer-Lagace-Delaminationskriterium untersucht, da in dieser Arbeit beide Kriterien zur numerischen Simulation des nichtlinearen Materialverhaltens verwendet werden. Im zweiten Teil von Kapitel 6 wird eine Hoffman-Plastizität mit anisotroper Verfestigung vorgestellt, die auf der Arbeit von Hashagen (1998) basiert. Die vorliegende Arbeit geht dabei zusätzlich und insbesondere auf die unterschiedlichen Varianten zur Definition des plastischen Potenzials ein, die eine Veränderung der Rückprojektionsrichtung zur Folge haben und somit zur Vereinfachung des Rückprojektionsalgorithmus beitragen.

*Kapitel 7* widmet sich der Simulation fortschreitender Delamination im Sinne einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise mit Prozessschicht. In dieser können unterschiedliche Delaminationsmodelle zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens wirken. Hierzu wird das Brewer-Lagace-Delaminationskriterium sowohl im Rahmen einer entfestigenden Plastizitätstheorie als auch im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik verwendet. Zunächst stellt die Arbeit eine entfestigende Delaminationsplastizität in Kombination mit einer adaptiven viskosen Regularisierung vor, die von Sprenger (2000) entwickelt wurde. In Ergänzung zu Sprenger (2000) verdeutlichen Untersuchungen des akustischen Tensors die regularisierende Wirkung der viskosen Erweiterung. Anschließend wird das Brewer-Lagace-Delaminationskriterium für die Verwendung als Schädigungsfunktion im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik aufbereitet und die Definition der Schädigungsevolution vorgestellt. Hierbei geht die vorliegende Arbeit speziell auf die Entscheidung ein, welche Komponenten der Werkstoffmatrix zu schädigen sind, wie sich also die Schädigung auswirken soll. Mit diesen Überlegungen lassen sich zwei Materialmodelle entwickeln: ein isotropes und ein selektives Delaminationsschädigungsmodell. In beiden Fällen ergibt sich eine nicht-assoziierte Schädigungsformulierung, da das Brewer-Lagace-Kriterium als Schädigungsfunktion verwendet wird. In einem weiteren Ansatz wird ein Delaminationsmodell unter Ausnutzung von Energiefreisetzungsraten hergeleitet. Auch hier steht die Definition der geschädigten Materialmatrix, die von drei skalaren Schädigungsparameter abhängt, im Vordergrund und innerhalb der freien Helmholtz-Energie Verwendung findet. Aus dieser lassen sich dann thermodynamisch konsistent die Spannungen und die Energiefreisetzungsraten ableiten. Die spezielle Definition einer äquivalenten Energiefreisetzungsrates als Schädigungsfunktion sowie die Wahl der Schädigungsevolution komplettieren dieses Materialmodell. Unter bestimmten Voraussetzungen liefert die Verwendung der äquivalenten Energiefreisetzungsrates eine assoziierte Schädigungsformulierung. Sämtlichen Schädigungsmodellen bieten zusätzlich die Möglichkeit, viskose Effekte zu berücksichtigen.

In *Kapitel 8* werden die vorgestellten Materialmodelle anhand von ausgewählten Strukturbeispielen getestet und verglichen. Weiterhin soll der Einfluss verschiedener Modell- bzw. Materialparameter aufgezeigt werden.

*Kapitel 9* schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.



## 2 Faserverbundwerkstoffe

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in den Aufbau und in das grundsätzliche mechanische Verhalten von Faserverbundwerkstoffen gegeben. Dies ist einerseits nötig, um die im Kapitel 3.2 dargestellten strukturspezifischen Anforderungen an das kinematische Modell der Schalenformulierung besser verstehen zu können. Andererseits wird die Basis für die im Kapitel 6.2 beschriebenen Versagenskriterien geschaffen. Für ein tiefer greifenderes Studium der Faserverbundwerkstoffe wird auf die umfangreiche Literatur verwiesen: Vinson und Chou (1975), Christensen (1979), Tsai und Hahn (1980), Chawla (1987), Carlsson und Pipes (1989), Kelly (1989), Agarwal und Broutman (1990), Ochoa und Reddy (1992), Altenbach et al. (1996), Herakovich (1998), um nur einige zu nennen.

### 2.1 Einführung

Faserverbundwerkstoffe (FVW) bestehen aus Fasern, die in einem Grundwerkstoff, der Matrix, eingebettet sind. Die Fasern werden dabei so ausgerichtet, dass sie den wesentlichen Teil der Lastabtragung übernehmen, dabei aber durch das Matrixmaterial unterstützt werden. Bei Druckbeanspruchung erfüllt die Matrix die Funktion, die Fasern am Ausknicken zu hindern, während sie bei Zugbeanspruchung eine begrenzte Kraftübertragung über gerissene Fasern hinweg sowie zwischen den einzelnen Fasern gewährleistet. Darüber hinaus schützt sie die Fasern gegenüber äußeren mechanischen Einwirkungen und anderen Umwelteinflüssen. In ihrer Verbindung als Faserverbundwerkstoff (engl. 'Composite') ergeben Fasern und Matrix somit ein Material mit besseren Werkstoffeigenschaften als die Einzelkomponenten.

Die gängigsten Fasermaterialien sind neben Bor und Stahl beispielsweise Carbon, Aramid und Glas. Als Matrixmaterial können zum Beispiel Polyester, Epoxide, Keramik, Metalle oder auch Beton bzw. Feinbeton verwendet werden, siehe u.a. Herakovich (1998) für eine detaillierte Übersicht. Damit sich Fasern und Matrix in ihrer Kombination zum Faserverbundwerkstoff möglichst gut ergänzen, müssen nach Schultz (1996) folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Bruchfestigkeit der Fasern muss größer sein als die der Matrix.
- Der Elastizitätsmodul der Fasern muss sehr viel größer sein als der der Matrix.
- Die Bruchdehnung der Matrix muss größer sein als die der Fasern.

Heutzutage werden Faserverbundwerkstoffe in zahlreichen Bereichen der Technik, wie der Luft- und Raumfahrtindustrie, dem Maschinen- und Automobilbau und in jüngster Zeit auch im Bauwesen, verwendet. Künstliche Hüftgelenke in der Humanmedizin, tragende Komponenten bei Flugzeugen oder Brücken, die teilweise oder ganz aus FVW gefertigt werden, bestätigen dies eindrucksvoll (Herakovich (1998)).

Das niedrige spezifische Gewicht sowie die hohen Festigkeiten und Steifigkeiten bei gleichzeitig guter chemischer Beständigkeit zeichnen Faserverbundwerkstoffe besonders aus (siehe Niederstadt et al. (1997)). Darüber hinaus kann der Faserverlauf und damit die Materialeigenschaften dem Kraftfluss im Bauteil angepasst werden. Diese Variationsmöglichkeit führt zu einem neuen Aspekt, dem „Materialdesign“, siehe Park (1982), Kim et al. (1997). Als Nachteile der Faserverbundwerkstoffe sind allerdings die (noch) hohen Materialkosten, hohe UV-Strahlungs- und Temperaturempfindlichkeit und die Fragen nach dem Recycling zu nennen.

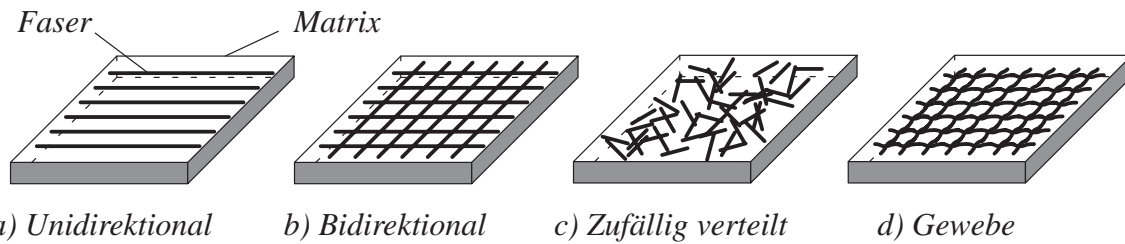


Abb. 2.1: Beispiele einiger Faseranordnungen

In Abb. 2.1 sind verschiedene Beispiele für Faseranordnungen im Matrixmaterial dargestellt. *Unidirektional* verstärkte Einzelschichten weisen dabei die höchsten Steifigkeits- und Festigkeitswerte in Faserlängsrichtung auf. Quer zur Faserrichtung sind diese Werte deutlich geringer, hängen stark von der Verbundfestigkeit zwischen Faser und Matrix ab und nähern sich den Eigenschaften des reinen Matrixmaterials an. Im Regelfall weist die unidirektional verstärkte Einzelschicht ein transversal isotropes Werkstoffverhalten mit einer ausgeprägten Materialrichtung auf. *Bidirektional* verstärkte Faserverbundwerkstoffe haben hingegen ein orthotropes Werkstoffverhalten mit drei ausgeprägten Materialrichtungen. Je nach verwendetem Matrix- und Fasermaterial sowie der verwendeten Fasergeometrie und Faseranordnung kann also ein isotropes, transversal isotropes oder orthotropes Materialverhalten erzeugt werden.

Durch das Verkleben (Laminieren) von mehreren auch unterschiedlich orientierten Einzelschichten lässt sich ein Schichtverbund herstellen, siehe Abb. 2.2. Dabei unterscheidet man zwischen *Laminat* und *Sandwich*. Laminats sind Schichtverbunde, deren Einzelschichten annähernd gleiche Schichtdicken und mechanische Eigenschaften aufweisen, sich aber vor allem hinsichtlich ihrer Faserorientierung unterscheiden. Sandwich-Konstruktionen bzw. sandwich-ähnliche Schichtverbunde besitzen hingegen mindestens eine in Dickenrichtung wesentlich grö-

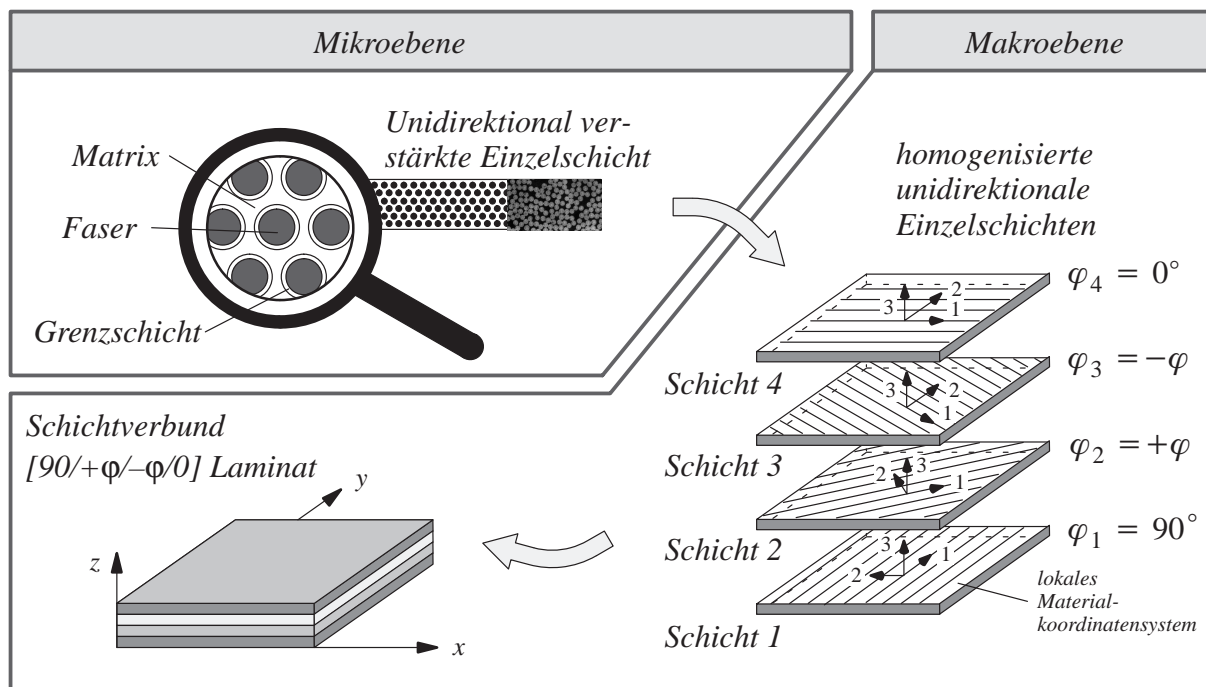


Abb. 2.2: Laminat aus unterschiedlich orientierten, unidirektionalen Einzelschichten

ßere und schubweichere Einzelschicht. Sie sind häufig aus zwei dünnen Deckschichten mit hohen Zugfestigkeiten und einer dicken und schubweichen Kernschicht aufgebaut.

## 2.2 Versagensvorgänge in Faserverbundwerkstoffen

Bei Faserverbundwerkstoffen hängt sowohl das Versagensverhalten, das entweder duktil, spröde, ver- oder entfestigend verlaufen kann, als auch die Versagensart (Faser- oder Matrixbruch) stark von den äußeren Belastungsbedingungen und der Faserorientierung ab. So wird zwischen Zug- oder Druckbelastung längs oder quer zur Faser unterschieden. In Schultz (1996), woraus die Abb. 2.3 entnommen wurde, werden einige Versagensarten einer unidirektionalen Einzelschicht angegeben (siehe auch Agarwal und Broutman (1990) mit umfangreichen Fotografien der Rissflächen im Experiment). Bei Zugbeanspruchung in Faserrichtung ist das Verhält-

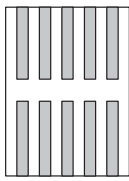
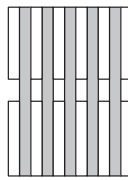
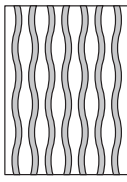

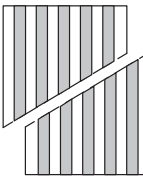
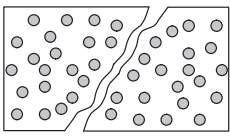
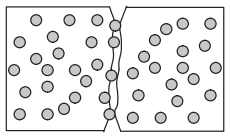
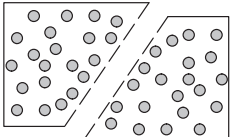
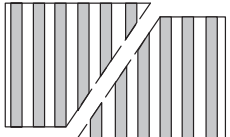
	<i>Bruchbild</i>		
<i>Längszug</i>	<p><i>Faserbruch</i> (<math>\epsilon_M &gt; \epsilon_F</math>)</p> 	<p><i>Matrixbruch</i> (<math>\epsilon_F &gt; \epsilon_M</math>)</p> 	
<i>Längsdruck</i>	<p><i>'out-of-phase'- Mikrobeulen</i></p> 	<p><i>'in-phase'- Mikrobeulen</i></p> 	<p><i>Schubversagen</i></p> 
<i>Querzug</i>	<p><i>Matrixbruch</i></p> 	<p><i>Grenzschichtversagen</i></p> 	
<i>Querdruck</i>	<p><i>Schub ohne Faserbruch</i></p> 	<p><i>Schub mit Faserbruch</i></p> 	

Abb. 2.3: Versagensarten der unidirektionalen Einzelschicht nach Schultz (1996)

nis der Faserbruchdehnung ( $\epsilon_F$ ) zur Matrixbruchdehnung ( $\epsilon_M$ ) ein entscheidender Faktor. Für den Fall, dass die Faserbruchdehnung größer ist als die Matrixbruchdehnung ( $\epsilon_F > \epsilon_M$ ), kann ein Matrixbruch erwartet werden. Bei  $\epsilon_M > \epsilon_F$  tritt hingegen ein Faserbruch auf.

Bei Druckbeanspruchung längs zur Faser hängt das Versagensverhalten stark vom Faservolumengehalt (Verhältnis des Faservolumens zum Gesamtvolumen) und von den Matrixeigenschaften ab. So kann bei einem kleinen Faservolumengehalt ein sogenanntes ‘*out-of-phase*’-Mikrobeulen der Fasern stattfinden. Bei einem großen Faservolumengehalt, der in der Praxis auch häufig anzutreffen ist, tritt in der Regel ein ‘*in-phase*’-Mikrobeulen auf. Beiden Versagensarten liegt die Annahme zugrunde, dass die Zugfestigkeit des Matrixmaterials ausreichend groß ist und somit noch kein Matrixversagen auf Zug aufgetreten ist. Eine weitere Versagensart bei Längsdruckbeanspruchung ist das Schubversagen in einem schmalen Versagensband, bei dem die Fasern ausknicken und abscheren.

Unter Querdrukbelastung sind Grenzschichtversagen zwischen Faser und Matrix und Matrixbruch die häufigsten Versagensarten. Ein Zugversagen der Fasern quer zur Faserrichtung tritt nur bei sehr exakt ausgerichteten Fasern und sehr geringen Querdrukfestigkeiten der Faser auf. Querdrukbeanspruchung löst häufig ein Schubversagen des Matrixmaterials aus, welches von Faserbrüchen und Grenzschichtversagen begleitet wird. Die genannten Versagensvorgänge spiegeln das mögliche *intralaminare* Versagen einer unidirektional-verstärkten Einzelschicht wider.

Nicht immer eindeutig ist die Zuordnung des experimentellen Versagens in eine der eben beschriebenen Versagensarten, da es eine Vielzahl möglicher Interaktionen zwischen den Versagensarten gibt. Diese lassen den Versagensvorgang von FVW vielfältig und komplex werden.

### 2.3 Delamination in Laminaten

Zu den unter Kapitel 2.2 genannten Versagensmöglichkeiten der unidirektionalen Einzelschicht kommt bei Laminaten die *Delamination* als ein weiterer und besonders wichtiger Versagensvorgang hinzu, siehe Abb. 2.4a) und b). Darüber hinaus stellt sie einen Spezialfall des Matrixbruchs dar, bei dem die Bruchfläche genau in der Grenzfläche zweier benachbarter Schichten liegt. Folglich wird die Delamination auch häufig als *interlaminares* Versagen bezeichnet, im Gegensatz zu einem intralaminaren Versagen der Einzelschicht (z.B. Matrixbruch, Faserbruch, Schubversagen). In vielen Anwendungsfällen stellt das interlaminares Versagen im Vergleich zum intralaminaren Versagen den kritischen Versagensvorgang dar (Miller et al. (1994)).

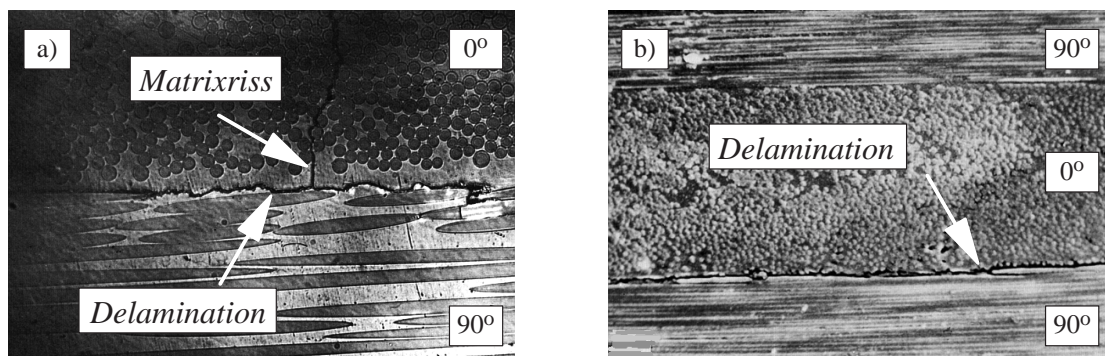


Abb. 2.4: Delamination in Laminaten (aus Agarwal und Broutman (1990))

Die Ursachen für das Auftreten einer Delamination sind vielfältig. Neben einer mangelhaften Herstellung des Laminats sind vor allem Spannungen (vornehmlich in Dickenrichtung) an den freien Rändern von großer Bedeutung. Dies wurde schon sehr früh von Pipes und Pagano (1970), Pagano (1978) und Wang und Choi (1982) festgestellt und untersucht. Die Spannungen entstehen auch bei rein einaxialer Belastung aus den unterschiedlichen Materialeigenschaften der unidirektionalen Einzelschichten und der Kompatibilitätsanforderung in der Grenzfläche. Die  $0^\circ$ -Schicht kontrahiert sich in Querrichtung nämlich wesentlich stärker als die  $90^\circ$ -Schicht, siehe exemplarisch Abb. 2.5a) und Niederstadt (1997). Damit die Kompatibilität an der Grenzfläche erhalten bleibt, sind interlaminare Schubspannungen  $\sigma_{23}$  nötig, die in Querrichtung wiederum Zugspannungen  $\sigma_{22}$  in der  $0^\circ$ -Schicht und Druckspannungen  $\sigma_{22}$  in der  $90^\circ$ -Schicht hervorrufen. Die Resultierenden dieser Spannungen wirken im Abstand einer Schichtdicke und rufen ein Biegemoment hervor, das die beiden Hälften  $[0^\circ, 90^\circ]$  und  $[90^\circ, 0^\circ]$  am Rand auseinanderbiegen möchte. Es entstehen somit Normalspannungen in Dickenrichtung  $\sigma_{33}$ , die direkt am Rand besonders groß sind (*'Free-Edge-Effect'*).

Die dynamische Beanspruchung des Laminats infolge von Schlagbelastung (impact) stellt eine weitere Ursache für Delamination dar, weil dabei hohe transversale Schub- und Normalspannungen entstehen können, siehe Blackman und Williams (1998a/b) und Abb. 2.5b).

Faser-Matrix-Ablösungen oder auch bereits vorhandene Matrixrisse sind ebenfalls in der Lage, Delaminationen auszulösen. Abb. 2.4a) zeigt deutlich eine beginnende Delamination, die wahrscheinlich von einem Matrixriss ausgelöst wurde. Es ist der Delamination daher möglich, zwischen Grenzschichten durch die Einzelschicht hindurch zu wechseln, so dass häufig eine eindeutige Identifikation der Versagensart schwierig ist. Abb. 6.2 in Sprenger (2000), siehe auch Abb. 6.1 in Gruttmann (1996), zeigt mögliche Interaktionen der einzelnen Versagensarten auf der Faser-Matrix-Ebene, der Einzelschicht-Ebene und der Laminat-Ebene nach Ochoa und Reddy (1992). Eine übersichtliche Zusammenfassung des Delaminationsprozesses in geschichteten Laminaten und eine detaillierte und ausführliche Auflistung von Referenzen gibt Garg (1988).

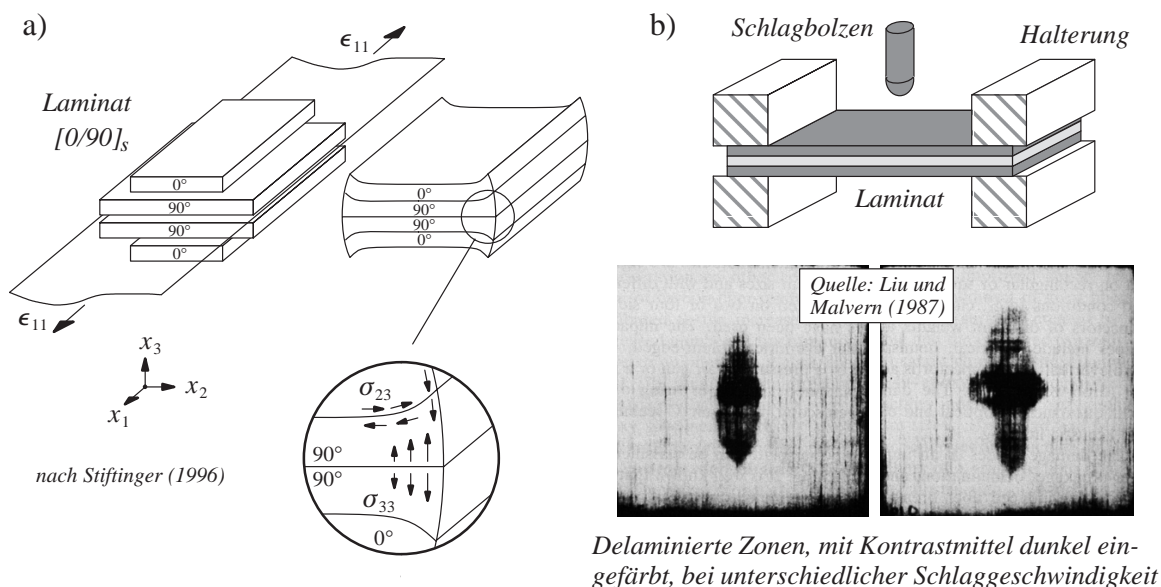


Abb. 2.5: Mögliche Ursachen für Delamination: a) Spannungen an freien Rändern b) Schlagbelastung

Weiterhin wird im Kontext der Delamination häufig von *Basislaminat* und *Sublaminat* gesprochen. Unter Basislaminat ist der Querschnittsteil zu verstehen, der an der Delaminationsstelle die größere Abmessung in Dickenrichtung hat, während das Sublaminat den verbleibenden dünneren Querschnittsteil bezeichnet. Sowohl Basislaminat als auch Sublaminat können dabei aus mehreren Einzelschichten bestehen. Insbesondere kommt der Delamination im Hinblick auf ein mögliches Stabilitätsversagen durch Beulen des Basis- oder des Sublaminates große Bedeutung zu. Ein zusätzliches Problem bei Delaminationen ist, dass sie im Regelfall von außen nicht sichtbar sind und somit nur sehr schwer zu entdecken sind. Die zahlreichen Publikationen zur messtechnischen Erfassung von Delaminationen belegen dies deutlich (Steiner (1992) und Brunner (1998)).

## 2.4 Modellierungsaspekte

Wie in Kapitel 2.2 und 2.3 gezeigt wurde, ist das Versagensverhalten von FVW vielfältig und komplex. Die Komplexität resultiert aus den zahlreichen Versagensvorgängen, die auf den verschiedenen Ebenen, wie der Faser-Matrix-Ebene und der Ebene der Einzelschichten, stattfinden können. Für die Untersuchung von FVW stehen somit grundsätzlich zwei verschiedene Betrachtungsebenen zur Verfügung, nämlich die der *Mikroebene* und die der *Makroebene*, siehe Dorninger (1989) für eine detaillierte Literaturübersicht zu diesem Thema. Naturgemäß sind beide Ebenen miteinander verknüpft, da ein Versagensprozess auf der Mikroebene beginnt und sich in weiterer Folge auf die Makroebene auswirkt.

Grundlage des mechanischen Modells einer *heterogenen* Einzelschicht ist gerade die Modellierung der Einzelschicht auf der Faser-Matrix-Ebene (Mikroebene), bei der die Faser, die Matrix und der Verbund Faser/Matrix einzeln modelliert bzw. diskretisiert werden. Dieses Vorgehen ist allerdings aufgrund des hohen Aufwands bei der numerischen Simulation des globalen Tragverhaltens einer Struktur nicht anwendbar. Da aber im Allgemeinen der Faserdurchmesser wesentlich kleiner als die Dicke der Einzelschicht ist, kann eine Homogenisierung durchgeführt werden. Die auf der Mikroebene betrachtete heterogene Einzelschicht mit jeweils eigenen Materialparametern für Faser und Matrix wird somit in eine auf der Makroebene betrachtete homogene Einzelschicht mit effektiven Materialparametern überführt, siehe auch Abb. 2.2.

Bei dieser Betrachtungsweise werden Fasern und Matrix in der Einzelschicht als gleichmäßig verschmiert angenommen und effektive mechanische Kennwerte ermittelt. Dies führt auf das mechanische Modell einer *homogenen*, aber anisotropen Einzelschicht. Die mechanischen Kennwerte können auf verschiedene Weise bestimmt werden: entweder im Sinne eines mikro-mechanischen Ansatzes aus Faser und Matrix mittels verschiedener Homogenisierungstechniken (z.B. Mischungsregel, Repräsentatives-Volumen-Element, generalisierte selbstkonsistente Methode; siehe Döbert (2001)) oder rein experimentell aus Versuchen an der Einzelschicht.

Die Festigkeitswerte der einzelnen Materialrichtungen können ebenfalls aus Versuchen ermittelt werden und dienen als Eingangsparameter für Versagenskriterien, die auf der Makroebene der homogenen Einzelschicht definiert sind. In dieser Arbeit werden ausschließlich Versagenskriterien (siehe Kapitel 6.2) verwendet, die auf dieser Ebene definiert sind und somit von der makroskopischen Betrachtungsweise der homogenen, anisotropen Einzelschicht ausgehen. Mehrere Einzelschichten innerhalb eines Laminates werden in der Regel bei der Modellierung aber nicht zusammengefasst (homogenisiert), sondern einzeln berücksichtigt. Dies ist nötig, da sich auf-

grund der unterschiedlichen Materialeigenschaften und Orientierungen der Einzelschichten komplexe Deformations- und Spannungszustände für das Laminat ergeben können.

**Anmerkung:** *In der Literatur wird die Modellierung des Laminats, bestehend aus mehreren homogenen und anisotropen Einzelschichten mit dazwischen liegenden 'Interface'-Schichten, auch häufig als Mesomodell bezeichnet, siehe beispielsweise Ladevèze (1986) und Ladevèze und Le Dantec (1992). Die Einführung von 'Interface'-Schichten ist dabei nötig, um die Versagensart der Delamination beschreiben zu können.*

### 3 Kontinuumsmechanik und Strukturmodell

In diesem Kapitel soll kurz auf einige grundlegende Gleichungen der Kontinuumsmechanik eingegangen werden. Für weiterführende Literatur zu diesem Thema sei auf Truesdell und Noll (1965), Malvern (1969), Ogden (1984) und Stein und Barthold (1996) verwiesen. Darüber hinaus wird das dreidimensionale, geschichtete Schalenelement vorgestellt, welches auf Arbeiten von Büchter (1992) und Braun (1995) zurückgeht.

#### 3.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Zur Analyse eines statischen Randwertproblems (RWP) der Kontinuumsmechanik muss ein gekoppeltes System von nichtlinearen, partiellen Differenzialgleichungen gelöst werden. Die Gleichungen setzen sich aus der kinematischen Beziehung, dem Materialgesetz, dem Gleichgewicht und den Randbedingungen zusammen. Im Allgemeinen ist das gekoppelte System nur für wenige, einfache RWP geschlossen lösbar, so dass variationelle Formulierungen in Verbindung mit einem Diskretisierungsverfahren, hier mit der Methode der finiten Elemente, zur Lösung eingesetzt werden. Ein sehr gebräuchliches Variationsverfahren ist das auf einem Arbeitsprinzip basierende *Prinzip der virtuellen Verschiebungen*.

##### 3.1.1 Konfigurationen und Kinematik

Um einen Körper im dreidimensionalen *Euklid'schen Vektorraum* beschreiben zu können, werden ein Bezugspunkt  $0$  und ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem  $x_i$ , das durch ortho-normierte Vektoren  $e^i = e_i$  im Bezugspunkt aufgespannt wird, definiert. Zusätzlich führt man ein krummliniges, konvektives Koordinatensystem  $\theta^i$  ein, das als „fest mit dem Körper verbunden“ gedacht werden kann, siehe Abb. 3.1. Durch die Einführung verschiedener Konfigurationen ist es möglich, sowohl die Bewegung der materiellen Punkte eines Körpers als auch die Deformation des Körpers selbst eindeutig zu beschreiben. Die Konfiguration stellt dabei die stetige

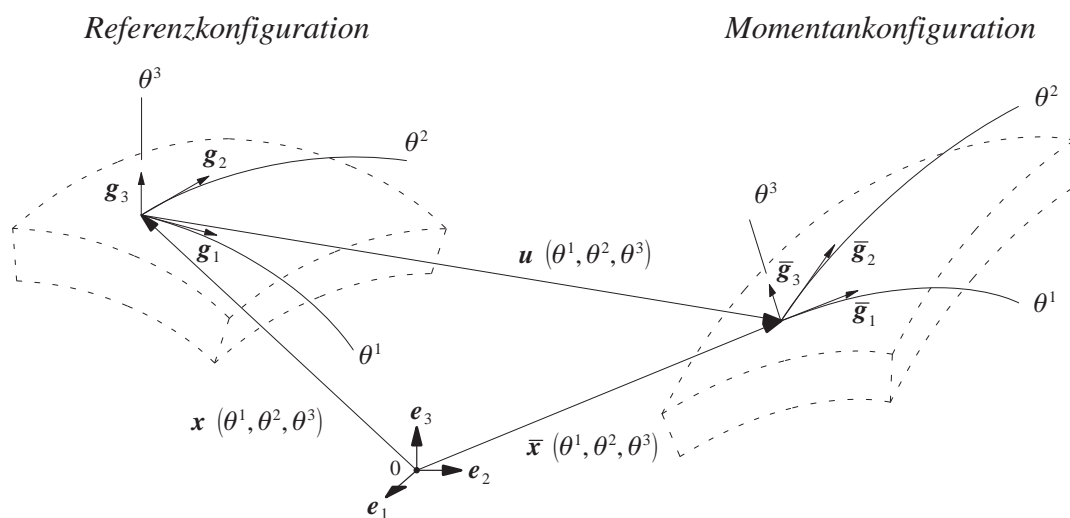


Abb. 3.1: Konfigurationen und Kinematik



und umkehrbar eindeutige Abbildung der materiellen Punkte des Körpers auf Raumpunkte des dreidimensionalen *Euklid'schen Punktraums*  $\mathcal{E}^3$  dar. In der sogenannten *Referenzkonfiguration* (Ausgangslage), die hier identisch der unverformten Lage sein soll, kann über ein Feld von Ortsvektoren  $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  jeder materielle Punkt des Körpers lokalisiert und somit die Lage des Körpers im Raum angegeben werden. Materielle Punkte des Körpers in der *Momentankonfiguration* (aktuelle bzw. verformte Lage) werden durch Ortsvektoren  $\bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  beschrieben. Die geschilderte *Lagrange'sche Betrachtungsweise* ist die übliche Darstellungsweise in der Festkörpermechanik. Größen, die sich auf die Momentankonfiguration beziehen, werden im Folgenden mit Querstrichen versehen. Die *ko- und kontravarianten Basisvektoren* des krummlinigen Koordinatensystems lauten für die Referenzkonfiguration

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad , \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad , \quad (3.1)$$

und für die Momentankonfiguration

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} \quad , \quad \bar{\mathbf{g}}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \quad . \quad (3.2)$$

Sie stehen senkrecht aufeinander, so dass das Skalarprodukt  $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j$  die *Komponenten des Einheitstensor zweiter Stufe*, auch als *Kronecker-Delta*  $\delta_i^j$  bezeichnet, liefert. Für das Skalarprodukt zweier energetisch konjugierter Tensoren zweiter Stufe gilt damit

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B^{ij}$$

mit  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$  und  $\mathbf{B} = B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$  . (3.3)

Das Skalarprodukt ist also unabhängig von der Metrik, was eine wichtige Eigenschaft hinsichtlich der Objektivität von Energieausdrücken ist (siehe Anhang A für die Definition des dyadischen Produktes  $\otimes$ ). Der Metriktensor (Einheitstensor)  $\mathbf{g}$  der Referenzkonfiguration kann in ko- und kontravarianter Basis wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{g} = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (3.4)$$

$$\text{mit } g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad \text{und} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad . \quad (3.5)$$

Sind die Ortsvektoren sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration bekannt, kann die Bewegung jedes Punktes des Körpers und somit die Deformation des Körpers eindeutig beschrieben werden. Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  wird dabei als die Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und der Referenzkonfiguration ausgedrückt:

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad . \quad (3.6)$$

Die ko- und kontravarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration erhält man durch Anwendung des sogenannten *materiellen Deformationsgradienten*  $\mathbf{F}$  auf die Basisvektoren der Referenzkonfiguration

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{g}}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{g}^i \quad . \quad (3.7)$$

Gleichung (3.7) bezeichnet man auch als *Vorwärtstransformation* ('push forward'). Der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  ist im Allgemeinen ein unsymmetrischer Tensor zweiter Stufe und in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{F} := \text{grad } \bar{\mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{g} = \mathbf{H} + \mathbf{g} . \quad (3.8)$$

Siehe dazu Gleichung (A.13) für die Definition des Gradienten eines Vektors.

Bei der *Rückwärtstransformation* ('pull back') ergeben sich die ko- und kontravarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration aus denen der Momentankonfiguration

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{g}}_i , \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{g}}^i . \quad (3.9)$$

Damit diese Transformationen eindeutig umkehrbar sind, muss die *Jacobi-Determinante*  $J$  des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  ungleich Null sein. Darüber hinaus soll sich der Körper während seiner Deformation nicht selbst durchdringen. Dies führt zu der Forderung, die Determinante muss größer oder gleich Null sein. Es folgt schließlich

$$J := \det \mathbf{F} > 0 . \quad (3.10)$$

Als Verzerrungsmaß für die konstitutive Gleichung ist der Deformationsgradient allerdings nicht unbedingt geeignet, da er Starrkörperanteile enthält, richtungsabhängig und unsymmetrisch ist. Ein sinnvolles und geeignetes Verzerrungsmaß ist mit dem *Green-Lagrange*'schen *Verzerrungstensor*  $\mathbf{E}$  gegeben, der über den Deformationsgradienten oder über die Differenz der Metriktensoren von Momentan- und Referenzkonfiguration definiert ist

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j . \quad (3.11)$$

Er liefert bei Starrkörperrotation und -translation keine Verzerrungen ( $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ), ist richtungsunabhängig (durch den quadratischen Term  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ ) und symmetrisch ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ ). Alternativ lässt er sich auch in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  mit

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}) \quad (3.12)$$

darstellen. Bei Vernachlässigung der nichtlinearen Anteile des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  erhält man hieraus den Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  für kleine Verformungen:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) . \quad (3.13)$$

Weitere Verzerrungsmaße sind u.a. in Ogden (1984) zu finden.

### 3.1.2 Spannungsmaße

Betrachtet man einen *gedachten* Schnitt im Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  durch einen materiellen Körper  $\mathfrak{B}$  in der aktuellen Konfiguration, so werden nach dem *Euler-Schnittprinzip* die inneren Kräfte zur Betrachtung frei. Die Kräfte  $\Delta \bar{\mathbf{f}}$  bezogen auf die gedachte Schnittfläche  $\Delta \bar{A}$  liefern für den Grenzübergang  $\Delta \bar{A} \rightarrow 0$  die Definition des Spannungsvektors  $\bar{\mathbf{t}}$ :

$$\bar{\mathbf{t}} := \lim_{\Delta \bar{A} \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\mathbf{f}}}{\Delta \bar{A}} = \frac{d\bar{\mathbf{f}}}{d\bar{A}} . \quad (3.14)$$

Des Weiteren fordert das *Cauchy-Postulat*, dass der Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  nur von der Orientierung der gedachten Schnittfläche, also lediglich vom Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}$  der Schnittfläche abhängig sein soll. Betrachtet man im Folgenden die Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Tetraederelement der Momentankonfiguration, so lässt sich der *Cauchy-Spannungstensor*  $\boldsymbol{\sigma}$  aus der folgenden linearen Abbildung (*Cauchy-Theorem*) als

$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j \quad (3.15)$$

angeben. Die Cauchy-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  werden durch ihren Bezug auf die aktuelle Konfiguration oft auch als *wahre Spannungen* bezeichnet. Mit der Forderung, dass die resultierende Kraft  $d\bar{\boldsymbol{f}}$  auf eine Flächenelement unabhängig von der Bezugskonfiguration sein soll ( $\bar{\boldsymbol{t}} d\bar{A} = \boldsymbol{t} dA$ ), gewinnt man mit der *Nanson-Formel*  $\bar{\boldsymbol{n}} d\bar{A} = \det \boldsymbol{F} \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n} dA$  folgende Beziehung:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} d\bar{A} = \det \boldsymbol{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n} dA \quad . \quad (3.16)$$

Gleichung (3.16) liefert die wahren Spannungen in Bezug auf Flächenelement der Referenzkonfiguration und somit die Definition des unsymmetrischen *1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors*  $\boldsymbol{P}$ , der seine Unsymmetrie vom Deformationsgradient  $\boldsymbol{F}$  „erbt“.

$$\boldsymbol{P} := \det \boldsymbol{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} = P^{ij} \bar{\boldsymbol{g}}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \quad . \quad (3.17)$$

Um den Nachteil der Unsymmetrie zu beheben, wird häufig der *2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*  $\boldsymbol{S}$  eingeführt, der durch eine Rückwärtstransformation des Basisvektors  $\bar{\boldsymbol{g}}_i$  in Gleichung (3.17) gewonnen wird.

$$\boldsymbol{S} := \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{P} = S^{ij} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \quad . \quad (3.18)$$

Der *2. Piola-Kirchhoff-(PK2)-Spannungstensor*  $\boldsymbol{S}$  bezieht sich infolgedessen nur noch auf Größen der Referenzkonfiguration; seine physikalische Bedeutung ist damit erschwert (Pseudospannungstensor). Die zum PK2-Spannungstensor  $\boldsymbol{S}$  energetisch konjugierte Größe ist der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor  $\boldsymbol{E}$ . Weiterhin gelten die folgenden Beziehungen zwischen dem Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem PK2-Spannungstensor  $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S} = \det \boldsymbol{F} \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \quad , \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \boldsymbol{F}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^T \quad . \quad (3.20)$$

### 3.1.3 Elastisches Materialgesetz

Das Werkstoffgesetz stellt den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen her, die bei der Lagrange'schen Betrachtungsweise in der Regel durch den *2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*  $\boldsymbol{S}$  und den Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{E}$  ausgedrückt werden. Geht man davon aus, dass ein *spezifisches Formänderungspotenzial*  $W^{\text{int}}(\boldsymbol{E})$  existiert (hyperelastisches Material), so lassen sich zum einen die Spannungen  $\boldsymbol{S}$  als die erste Ableitung und zum anderen der vierstufige Materialtensor  $\boldsymbol{C}$  als die zweite Ableitung des Potenzials nach den Verzerrungen  $\boldsymbol{E}$  angeben:

$$\boldsymbol{S} := \frac{\partial W^{\text{int}}(\boldsymbol{E})}{\partial \boldsymbol{E}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{C} := \frac{\partial^2 W^{\text{int}}(\boldsymbol{E})}{\partial \boldsymbol{E} \partial \boldsymbol{E}} \quad . \quad (3.21)$$

Für den Fall der linearen Elastizität stellt  $\boldsymbol{C}$  einen eindeutigen und linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor  $\boldsymbol{S}$  und dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{E}$  her.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{C} = C^{ijkl} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l \quad . \quad (3.22)$$

Im allgemeinen Fall der Anisotropie besitzt der Materialtensor 81 Konstanten, die sich allerdings durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft des Spannungs- und Verzerrungstensors auf 36 reduzieren lassen (*'minor symmetry'*). Durch die Anwendung des *Schwarz'schen Satzes*, der besagt, dass die Reihenfolge der Ableitungen nach  $\boldsymbol{E}$  in Gleichung (3.21)<sub>2</sub> vertauschbar sei, folgt

Material	anisotrop (triklin)	monoklin	orthotrop	transversal- isotrop	isotrop
Anzahl der unabhängigen Materialkonstanten	21	13	9	5	2
Anzahl der Symmetrieebenen	0	1	3	3	$\infty$

Abb. 3.2: Anzahl der Materialkonstanten und der Symmetrieebenen

die Symmetrie von  $\mathbf{C}$  sowie die Reduktion auf 21 Konstanten ('*major symmetry*'). Ein solches Material wird mit triklin bezeichnet und besitzt noch keine Symmetrieebenen. Sind in einem Werkstoff eine, mehrere oder unendlich viele Symmetrieebenen vorhanden, spricht man von monoklinem, orthotropem, transversal-isotropem oder isotropem Material. Diese unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich ihrer Symmetrieebenen, sondern auch bezüglich der Anzahl der unabhängigen Materialparameter, siehe Abb. 3.2. Auf die bildliche Darstellung der Materialsymmetrieebenen und der daraus resultierenden Ausdrücke zur Berechnung der Komponenten  $C^{ijkl}$  des Werkstoffensors wird an dieser Stelle verzichtet und auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Weiterhin ist der folgende Sachverhalt von Bedeutung: Die angenommene lineare Beziehung zwischen dem Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und dem PK2-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  (Gleichung (3.22)) bedeutet eine Beschränkung auf kleine Verzerrungen. Der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ist aber weiterhin nichtlinear vom Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  (Gleichung (3.12)) abhängig. Dies entspricht einer Übertragung der konstitutiven Gleichung eines *St. Venant-Kirchhoff-Materials* auf orthotrope oder transversal isotrope Materialien. Stein und Barthold (1996) bezeichnen dieses Material auch als ein Modell für „*große Verschiebungen – kleine Verzerrungen*“. Für die Simulation dünnwandiger bzw. schalenartiger Flächentragwerke ist dieses Modell gut geeignet, da diese Strukturen zwar endliche Rotationen und Verschiebungen, in der Regel aber kleine Verzerrungen aufweisen. Die geometrische Nichtlinearität ist somit trotz der linearen konstitutiven Beziehung vollständig bewahrt (Stein und Barthold (1996)). Sollten allerdings tatsächlich große Verzerrungen auftreten, sind entsprechende nichtlineare Materialgesetze zu verwenden. Exemplarisch seien hier Materialgesetze nach Ogden oder Mooney-Rivlin genannt. Im Vorgriff auf das Kapitel der Plastizitätstheorie (Kapitel 4) ist noch darauf hinzuweisen, dass die Beschränkung auf kleine Verzerrungen zusätzlich die additive Zerlegung des Verzerrungstensors in elastische und plastische Anteile erlaubt.

### 3.1.4 Schwache Form des Gleichgewichts

Über die Erhaltungssätze für die Masse und für den Impuls lässt sich die *1. Cauchy'sche Bewegungsgleichung* im statischen Fall und in Bezug auf die Referenzkonfiguration wie folgt angeben

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (3.23)$$

Sie stellt die lokale Gleichgewichtsgleichung eines materiellen Punktes des Körpers  $\mathfrak{B}$  dar und wird auch als *starke Form des Gleichgewichts* bezeichnet, da das Gleichgewicht punktweise er-

füllt sein muss. In Gleichung (3.23) bezeichnet  $\mathbf{b}$  den Volumenkraftvektor pro Masseneinheit und  $\rho$  die Massendichte. Mit der *statischen Randbedingung*

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{t} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf dem Spannungsrand (Neumann-Rand) } A_s \quad (3.24)$$

kann man die *schwache Form des Gleichgewichts* herleiten. Hierzu werden die Gleichungen (3.23) und (3.24) mit einer Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$ , die auf dem *Dirichlet-Rand (Verschiebungsrand)* identisch Null ist, gewichtet und über das Volumen des Körpers integriert.

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{A_s} (\mathbf{t}^* - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.25)$$

Unter Ausnutzung der Produktregel (A.9) und des Gauß'schen Integralsatzes (A.10) erhält man die schwache Form des Randwertproblems mit

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_V (\mathbf{P} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} - \operatorname{div}(\mathbf{P}^T \cdot \delta \mathbf{u}) - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}) \, dV - \int_{A_s} (\mathbf{t}^* - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \\ &= \int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{A_s} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$= \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (3.27)$$

Wird die Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  als virtuelle Verschiebung interpretiert, so stellt Gleichung (3.26) das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* dar. Der erste Integralausdruck gibt die *virtuelle innere Arbeit* wieder, während die beiden anderen Terme die *virtuelle äußere Arbeit* der Belastung beschreiben. Für kleine Deformationen kann mit  $\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\epsilon}$  nach Gleichung (3.13) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen auch wie folgt geschrieben werden:

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{A_s} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.28)$$

Zur räumlichen Diskretisierung und Lösung der schwachen Form des RWP wird in dieser Arbeit die Finite-Element-Methode (FEM) verwendet. Die Lösung des nichtlinearen RWPs muss dabei sowohl nach Gleichung (3.26) aufgrund geometrischer und/oder materieller als auch nach Gleichung (3.28) aufgrund materieller Nichtlinearität inkrementell iterativ erfolgen. Hierzu kann im Sinne eines *Prädiktor-Korrektor-Vorgehens* das *Newton-Raphson-Verfahren* verwendet werden, das bei einer konsistenten Linearisierung (siehe Kap. 3.2.3) quadratische Konvergenz in der Nähe der Lösung liefert. Für alternative Lösungsverfahren siehe Luenberger (1984).

## 3.2 Dreidimensionales, geschichtetes Schalenmodell

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt wurde, hat die vorliegende Arbeit das Ziel, dünnwandige und schalenartige Strukturen aus geschichteten FVW unter Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearitäten zu simulieren. Im Folgenden werden daher kurz die aus dem Struktur-aufbau resultierenden Anforderungen an ein Schalenmodell genannt und anschließend ein geschichtetes, finites Schalenelement vorgestellt, das auf die Arbeit von Braun (1995) zurückgeht. Dabei wird insbesondere auf die Wahl des kinematischen Ansatzes in Dickenrichtung der Schale eingegangen, was auch als *Semidiskretisierung in Dickenrichtung* bezeichnet werden kann.

### 3.2.1 Strukturspezifische Anforderungen

Laminat- und Sandwichkonstruktionen aus FVW stellen aufgrund ihres inhomogenen Aufbaus und ihrer Anisotropie erhöhte Anforderungen an die Kinematik eines Schalenmodells. Durch die unterschiedliche Orientierung und die variierenden mechanischen Eigenschaften der Einzelschichten können zick-zack-förmige Verschiebungsverläufe über die Dicke der FVW-Struktur entstehen. Die klassischen Annahmen wie „keine Querschubdeformationen“ und „Ebenbleiben des Querschnittes“ sind somit nicht mehr aufrecht zu erhalten. Ebenso können Spannungen in Dickenrichtung infolge von Kompatibilitätsforderungen an den Schichtgrenzen entstehen (siehe Kapitel 2.3). Die bei der Herleitung von Schalentheorien sonst übliche Annahme verschwindender Normalspannungen in Dickenrichtung ( $S^{33} = 0$ ) ist dann nicht mehr gerechtfertigt. Folglich erübrigt sich auch die Modifikation bzw. Kondensation des Werkstoffgesetzes, die ansonsten zur Realisierung von  $S^{33} = 0$  nötig und bei komplizierten Stoffgesetzen (gummiartige Materialien, Schädigungs- und Plastizitätsmodelle) nicht trivial ist. Soll zusätzlich das Delaminationsversagen untersucht werden, so müssen auf jeden Fall die Dickennormalspannungen  $S^{33}$  berücksichtigt werden, weil diese für die Initiierung von Delamination entscheidend sind. Außerdem muss zur geometrischen Beschreibung der Delamination ein *Aufweiten der Schale* ermöglicht und somit die *Inextensibilität des Direktors* fallen gelassen werden. Dies führt auf eine Schalentheorie mit *Extensibilität des Direktors*.

Die Beseitigung der oben genannten kinematischen Restriktionen bezüglich des Schalendirektors (keine Querschubdeformationen, Ebenbleiben des Querschnittes und Inextensibilität des Direktors) führt im Sinne einer Semidiskretisierung in Dickenrichtung entweder auf *Einschichttheorien* (*hierarchische Modelle*, *‘single-layer formulation’*) oder auf sogenannte *Mehrschichttheorien* (*‘multi-layer formulation’*). Während erstere höhere Polynomgrade für den Verschiebungsansatz über die Dicke verwenden (*p-Methode*), verwenden letztere schichtweise Verschiebungsansätze, was einer Diskretisierung in Dickenrichtung vergleichbar ist. Dabei können sowohl schichtweise lineare (*h-Methode*) oder schichtweise höhere (*h-p-Methode*) Verschiebungsansätze gewählt werden, siehe auch Bischoff (1999) für eine detaillierte Übersicht verschiedener Schalentheorien. Es bleibt aber anzumerken, dass Einschichttheorien selbst mit höherem Polynomgrad im Allgemeinen nicht ausreichen, um den Verschiebungsverlauf über die Dicke von FVW-Strukturen mit ausreichender Genauigkeit darzustellen. Mehrschichttheorien sind hierzu besser in der Lage, da die schichtweisen Verschiebungsansätze zu Knicken im Verschiebungsverlauf führen und folglich Diskontinuitäten in den Verschiebungsableitungen entstehen. Darüber hinaus sind Einschichttheorien im Hinblick auf die Beschreibung von geometrischen Diskontinuitäten, wie beispielsweise Delaminationen, ungeeignet. Diese können hingegen mit Mehrschichttheorien entweder in der verschmierten Betrachtungsweise einer Pro-

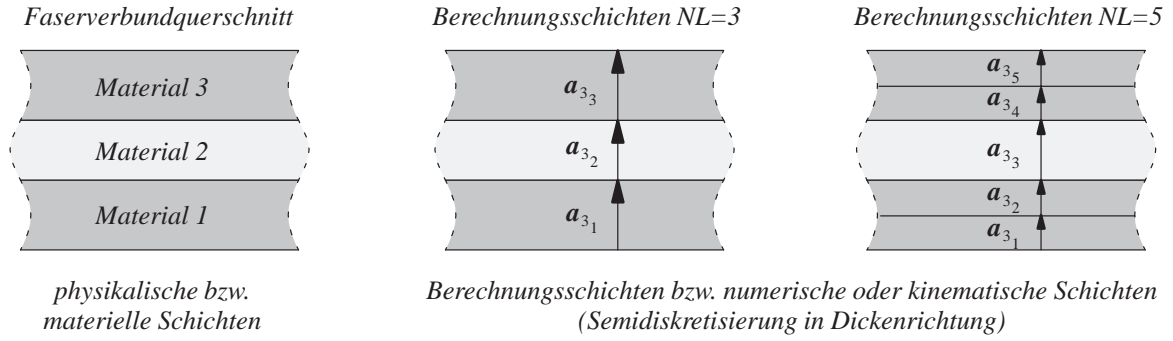


Abb. 3.3: Physikalische und numerische Schichten

zesszone oder durch Hinzunahme von Rissöffnungsvektoren diskret (Gruttmann (1996) und Teßmer (2000)) beschrieben werden. Im Folgenden wird die Kinematik des Schalenmodells nach Braun (1995), das auf der Mehrschichttheorie mit schichtweiser extensibler Reissner-Mindlin-Kinematik basiert, kurz vorgestellt.

### 3.2.2 Kinematisches Modell

Zur Beschreibung der unverformten, mehrschichtigen Schalengeometrie wird diese in eine bestimmte Anzahl Berechnungsschichten (NL) unterteilt, wie beispielsweise in Abb. 3.3 dargestellt ist. Im Regelfall wird die Anzahl der Berechnungsschichten bzw. der numerischen Schichten größer oder gleich der Anzahl der physikalischen bzw. materiellen Schichten des FVW-Querschnittes sein. An jedem Punkt der Schalenmittelfläche, die hier als Referenzfläche dient, kann ein krummliniges, konvektives Koordinatensystem aufgespannt werden. Die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  der Schalenmittelfläche bestimmt man dabei aus den Richtungsableitungen in  $\theta^1$ - und  $\theta^2$ -Richtung des Ortsvektors  $\mathbf{r}$ . Üblicherweise steht der Direktor  $\mathbf{a}_3$  senkrecht auf  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  und weist als Länge die halbe Schalendicke auf. Ein beliebiger Punkt des Schalenraums ist damit eindeutig durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  identifizierbar, der sich additiv aus dem Ortsvektor der Schalenmittelfläche  $\mathbf{r}$  und dem Direktor  $\mathbf{a}_3$  zusammensetzt. Bei der höherwertigen Kinematik der mehrschichtigen Schale wird jedoch für jede Berechnungsschicht ein zugehöriger Direktor  $\mathbf{a}_{3_L}$  eingeführt, siehe Abb. 3.4. Anfänglich besitzen die Direktoren die gleiche Richtung und entsprechen in ihrer Länge der jeweiligen Schichtdicke  $h_L$ . Der Ortsvektor  $\mathbf{x}_L$  eines beliebigen Punktes der Schicht L kann somit über den Ortsvektor  $\mathbf{r}_L$  der jeweiligen Schichtmittelfläche und den dazugehörigen Direktor  $\mathbf{a}_{3_L}$  bestimmt werden:

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{r}_L + \frac{1}{2} \zeta_L \mathbf{a}_{3_L} \quad ; \quad \zeta_L \in [-1, 1] \quad ; \quad L = 1, \dots, NL \quad . \quad (3.29)$$

Dabei stellt  $\zeta_L$  die lokale Dickenkoordinate der Schicht L dar. Durch Ausnutzung der Bedingung, dass der Ortsvektor am Übergang von einer Schicht auf die nächste kontinuierlich sein soll, also

$$\mathbf{x}_L(\zeta_L = +1) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_{L+1}(\zeta_{L+1} = -1) \quad , \quad L = 1, \dots, NL - 1 \quad , \quad (3.30)$$

kann man den Ortsvektor  $\mathbf{x}_L$  auch in Abhängigkeit der Schalenmittelfläche und einer Kombination von Schichtdirektoren ausdrücken:

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{r} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \mathbf{a}_{3_S} \quad . \quad (3.31)$$

**Anmerkung:** In Gruttmann (1996) und Teßmer (2000) wird bewusst die Kontinuitätsbedingung (3.30) zur kinematischen Beschreibung der Delamination fallengelassen. An den delaminierten Stellen wird dann ein Sprungvektor (Rissöffnungsvektor) eingeführt.

In Gleichung (3.31) liefert die Kontinuitätsmatrix  $\theta_{LS}^3$  die Aussage, ob die Schicht S auf dem Weg von der Schalenmittelfläche zu einem Punkt der Schicht L durchlaufen wird und somit der jeweilige Direktor  $\mathbf{a}_{3_S}$  zu berücksichtigen ist. So lässt sich beispielsweise der Ortsvektor zu einem Punkt der fünften Schicht wie folgt angeben:

$$\mathbf{x}_5(\xi_5) = \mathbf{r} + 0\mathbf{a}_{3_1} + 0\mathbf{a}_{3_2} + \frac{1}{2}\mathbf{a}_{3_3} + \mathbf{a}_{3_4} + \frac{1}{2}(\xi_5 + 1)\mathbf{a}_{3_5} . \quad (3.32)$$

Unter der Voraussetzung, die einzelnen Direktoren bleiben während der Deformation gerade, was einem linearen Verschiebungsansatz über die Schichtdicke entspricht, ergibt sich das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_L$  zu

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 (\bar{\mathbf{a}}_{3_S} - \mathbf{a}_{3_S}) = \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \mathbf{w}_S . \quad (3.33)$$

Die Verschiebung der Schalenmittelfläche wird dabei mit  $\mathbf{v}$  bezeichnet und der jeweilige Differenzvektor der Schicht S als  $\mathbf{w}_S$ . Dieser berechnet sich aus der Differenz der Schichtdirektoren in der Momentan- und der Referenzkonfiguration. Wie aus Gleichung (3.33) ersichtlich ist, erhöht sich mit steigender Anzahl der Berechnungsschichten (NL) auch die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten. Zu den drei Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{v}$  der Schalenmittelfläche kommen pro Berechnungsschicht nochmals drei Freiheitsgrade für den Differenzvektor  $\mathbf{w}_S$  hinzu. Die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade entspricht somit gerade der einer Diskretisierung mittels linearer Volumenelemente über die Dicke.

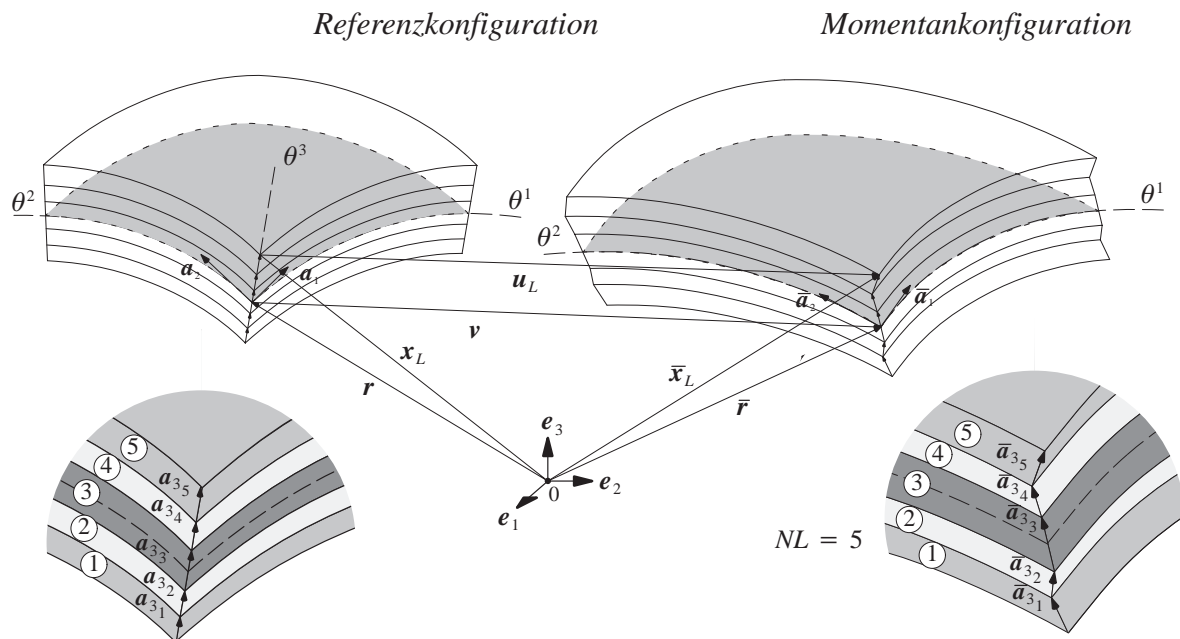


Abb. 3.4: Höherwertige Kinematik der mehrschichtigen Schale



Der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_L$  kann in Analogie zu Gleichung (3.11) über die Differenz der Metriken aus Momentan- und Referenzkonfiguration für die jeweilige Schicht L angegeben werden:

$$\mathbf{E}_L = E_{ijL} \mathbf{g}_L^i \otimes \mathbf{g}_L^j = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ijL} - g_{ijL}) \mathbf{g}_L^i \otimes \mathbf{g}_L^j \quad (3.34)$$

mit

$$\mathbf{g}_{\alpha L} = \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \mathbf{a}_{3_{S,\alpha}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_{3L} = \mathbf{a}_{3_L} . \quad (3.35)$$

Die bei Schalentheorien übliche Vorabintegration des Stoffgesetzes in Dickenrichtung mit gleichzeitigem Übergang von Spannungen auf Schnittgrößen (in Bezug auf die Referenzfläche) ist auch bei der höherwertigen Kinematik möglich. Die Reduktion der Dimensionsanzahl von drei auf zwei und folglich die flächenhafte Beschreibung der Struktur bei gleichzeitig vollständig dreidimensionaler Theorie ist der Vorteil, der hieraus folgt. Aufgrund der höherwertigen Schalentheorie und den von Schicht zu Schicht variierenden Materialeigenschaften muss allerdings die Vorabintegration in Dickenrichtung schichtweise erfolgen. Die Schnittgrößen und die Einzelschicht-Materialtensoren werden somit für jede Schalenschicht separat integriert. Weiterhin können die Faser- bzw. Materialkoordinatensysteme der Einzelschichten gegenüber dem globalen Koordinatensystem verdreht sein, siehe beispielsweise Abb. 2.2, was eine Richtungs- transformation der Einzelschicht-Materialtensoren  $\mathbf{C}_L^*$  in das globale Koordinatensystem nötig macht (vergleiche Braun (1995)). Es soll an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass der vollständige und unveränderte Werkstofftensor verwendet wird und keine Modifikation nötig ist.

**Anmerkung:** *Der aus der einschlägigen Literatur (Büchter und Ramm (1992), Büchter et al. (1994)) bekannte Versteifungseffekt des Poisson-Dickenlocking (nicht zu verwechseln mit 'Curvature-Thickness-Locking'), der bei Querdehnzahlen ungleich Null und bei Schalentheorien mit 3D-Stoffgesetz und extensiblen Direktor auftritt, ist bei der höherwertigen Kinematik ebenfalls vorhanden. Allerdings wird der Versteifungseffekt bei Verwendung mehrerer Schichten deutlich abgeschwächt (Braun (1995)). Die schichtweisen linearen Verschiebungsansätze führen nämlich auf konstante Verzerrungen  $E_{33}$  in jeder Schicht. Somit wird ein über die Dicke linearer Verzerrungsverlauf  $E_{33}$  durch schichtweise konstante Verzerrungen angenähert. Dies stellt insoweit keinen großen Nachteil dar, da die Simulation von geschichteten Strukturen unter Berücksichtigung lokaler Effekte ohnehin die Verwendung vieler Berechnungsschichten erfordert.*

### 3.2.3 Diskretisierung und Linearisierung

Die Variationsformulierung des lokalen Gleichgewichts im Sinne einer schwachen Formulierung (Gleichungen (3.26) oder (3.28)) stellt die Basis für viele Diskretisierungsmethoden, so beispielsweise auch der FEM, dar.

Im Rahmen der FEM wird das zu untersuchende Gebiet des RWP der Kontinuumsmechanik in eine endliche Anzahl von Teilgebieten zerlegt bzw. mit finiten Elementen diskretisiert. Die Steifigkeiten und die Lastvektoren aller Elemente werden ähnlich einem Baukastenprinzip zur Ge-

samtsteifigkeitsmatrix bzw. zum Gesamtlastvektor zusammengebaut. Die Diskretisierung muss an dieser Stelle nur noch über das Gebiet der Schalenmittelfläche durchgeführt werden. Durch die Wahl des Verschiebungsansatzes über die Dicke (Semidiskretisierung, Kapitel 3.2.1) und die Vorabintegration (Kapitel 3.2.2) ist die Diskretisierung der Dickenrichtung nämlich schon erfolgt. Die diskretisierte Form des Ortsvektors (3.31) lautet

$$\mathbf{x}_L \approx \mathbf{x}_L^h = \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{r}_K + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{a}_{3_s}^K . \quad (3.36)$$

Dabei bezeichnet  $N_K$  die in natürlichen Koordinaten  $(\xi, \eta)$  definierte Formfunktion des Knotens  $K$ , und  $NN$  die Anzahl der Knoten pro Element. Die Diskretisierung des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}_L$  führt unter Verwendung des isoparametrischen Konzepts auf

$$\mathbf{u}_L \approx \mathbf{u}_L^h = \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{v}_K + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{w}_S^K . \quad (3.37)$$

Über die diskretisierten Ausdrücke des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors und die schichtweise integrierten Spannungsresultierenden (siehe Braun (1995)) kann aus den virtuellen Arbeitsanteilen nach Gleichung (3.26) ein nichtlineares, elementbezogenes Gleichungssystem in den unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  hergeleitet werden:

$$\left. \begin{aligned} \delta W_{\text{int}}(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) &= \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}) \\ \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) &= \delta \mathbf{d}^T \cdot (-\mathbf{f}_{\text{ext}}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0} . \quad (3.38)$$

Die unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  sind dabei wie folgt sortiert:

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{d}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{d}_K^T \quad \dots \quad \mathbf{d}_{NN}^T] \quad (3.39)$$

mit

$$\mathbf{d}_K^T = [\mathbf{v}_K^T \quad (\mathbf{w}_K^T)_1 \quad (\mathbf{w}_K^T)_2 \quad \dots \quad (\mathbf{w}_K^T)_{NL}] . \quad (3.40)$$

Im Sinne eines *Bubnov-Galerkin*-Verfahrens werden für die virtuellen Knotenverschiebungen  $\delta \mathbf{d}$  die gleichen Ansatzfunktion wie für die Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  verwendet.

In der Regel handelt es sich bei dem Gleichungssystem nach Gleichung (3.38) um ein nichtlineares Problem. Die Nichtlinearität ist dabei durch geometrisch und/oder materiell nichtlineare Effekte gegeben. Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird daher auf das inkrementell-iterative Newton-Raphson-Verfahren zurückgegriffen. Hierbei wird eine verbesserte Lösung durch eine *Taylorreihenentwicklung* (Abbruch nach dem Glied erster Ordnung) der nichtlinearen, skalarwertigen Vektorfunktion  $\delta W(\mathbf{d})$  an der Stelle einer bereits bekannten Näherungslösung  $\bar{\mathbf{d}}$  erhalten. Die anschließende Korrekteriteration eliminiert den Linearisierungsfehler.

$$\delta W(\mathbf{d}) = \delta W(\bar{\mathbf{d}}) + D\delta W(\bar{\mathbf{d}}) \cdot \Delta \mathbf{d} \quad \text{mit} \quad D\delta W(\bar{\mathbf{d}}) = \frac{\partial \delta W(\bar{\mathbf{d}})}{\partial \mathbf{d}} . \quad (3.41)$$

Der Ausdruck  $D\delta W(\bar{\mathbf{d}})$  bezeichnet dabei die *Richtungs-* bzw. die *Gâteaux-Ableitung* nach den Knotenverschiebungen an der Stelle  $\bar{\mathbf{d}}$ . Geht man davon aus, dass eine verschiebungsunabhän-

gige und richtungstreue Belastung vorliegt, so ist die Richtungsableitung nur für die innere elementbezogene Arbeit  $\delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}})$  aufzustellen und es folgt:

$$\delta W(\mathbf{d}) = \delta W(\bar{\mathbf{d}}) + D\delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}}) \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (3.42)$$

mit

$$\delta W(\bar{\mathbf{d}}) = \delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}}) + \delta W_{\text{ext}} \quad (3.43)$$

Werden bei der Richtungsableitung  $D\delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}})$  keine Terme vernachlässigt, spricht man von einer *konsistenten Linearisierung*. Dabei ist insbesondere zu beachten, dass bei materieller Nichtlinearität der Materialtensor eine nichtlineare Funktion der Verzerrungen und somit der Knotenverschiebungen ist. Er muss daher ebenfalls konsistent linearisiert werden, siehe Kapitel 4.4.1.

## 4 Elastoplastizität

In diesem Kapitel sollen nach einer kurzen physikalischen Motivation des phänomenologischen Plastizitätsmodells die grundlegenden Gleichungen der Elastoplastizität und der Viskoplastizität nach Duvaut und Lions (1972) hergeleitet werden. Des Weiteren wird auf die inkrementelle Formulierung der Elasto- und der Viskoplastizität eingegangen, die für das numerische Lösungsverfahren (Newton-Raphson) nötig ist. Auf beides wird in den Kapiteln 6 und 7 zurückgegriffen. Für weiterführende Literatur zu diesem Thema sei auf die klassischen Arbeiten von Nádai (1931) und Hill (1950) sowie auf neuere Abhandlungen von Mandel (1972), Lemaître und Chaboche (1985), Lubliner (1990), Miehe (1993) und Simo und Hughes (1998) verwiesen.

### 4.1 Einführung

Elastisches Materialverhalten zeichnet sich dadurch aus, dass bei Be- und Entlastung die gleiche Spannungs-Dehnungskurve durchlaufen wird und bei vollständiger Entlastung keine bleibenden Verformungen entstehen, d.h. die Verzerrungen sind *reversibel*. Jedes Material hat in der Realität allerdings eine obere Grenze, ab der es sich nicht mehr elastisch verhält. Überschreitet also die Materialbeanspruchung die sogenannte *Elastizitätsgrenze*  $\bar{S}_y$ , so werden *plastische* bzw. *irreversible Verzerrungen* auftreten. Dabei resultiert im Unterschied zur Viskoplastizität eine Belastungsänderung in eine unmittelbare und zeitunabhängige Deformationsänderung. Somit ist das Materialverhalten zwar nicht von der Zeit als physikalische Größe, aber dennoch von der Belastungsgeschichte abhängig. Die Entlastung aus einem plastischen Zustand findet parallel zum elastischen Belastungsast statt und es verbleibt bei vollständiger Entlastung der plastische Verzerrungsanteil. Die Wiederbelastung verläuft exakt auf dem Entlastungspfad, vergleiche Abb. 4.1a). Eine schmale Hystereseschleife, die eventuell im Experiment auftritt, wird dabei nicht berücksichtigt.

Nach Erreichen der Elastizitätsgrenze (*Fließspannung*)  $\bar{S}_y$  kann neben nahezu ideal plastischem Materialverhalten (Zunahme der Verzerrungen bei gleich bleibenden Spannungen) auch ver-

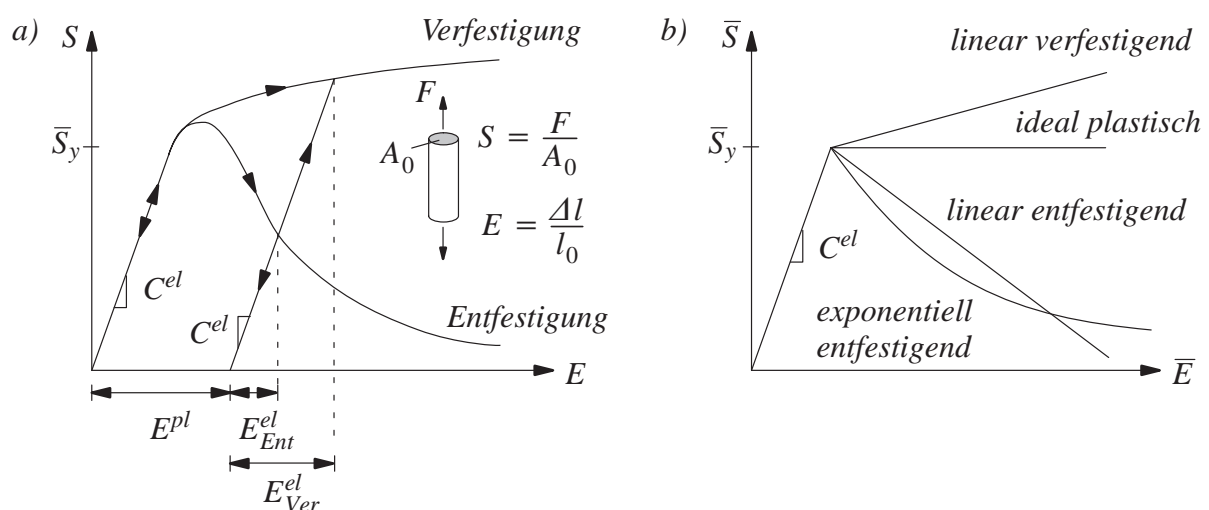


Abb. 4.1: a) Schematische Darstellung inelastischen, plastischen Materialverhaltens  
b) Idealisierte, einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

und/oder entfestigendes Verhalten beobachtet werden. So führt beispielsweise das plastische Fließen bei Metallen auf ein makroskopisch eher verfestigendes und duktileres Verhalten, das sich mit der Behinderung einzelner Gleitebenen in der kristallinen Struktur erklären lässt. Entfestigendes und eher sprödes Materialverhalten lässt sich hingegen bei Geomaterialien und Beton feststellen. Die Erklärung liegt hier in der Auflockerung des Korngefüges. Bei Faserverbundwerkstoffen hängt das Nachbruchverhalten stark von den verwendeten Faser- und Matrixmaterialien sowie von der Faserorientierung und der Belastungsrichtung ab. Es kann sowohl entfestigendes und sprödes Verhalten als auch verfestigendes und duktileres Verhalten auftreten, siehe beispielsweise Herakovich (1998).

Im Vordergrund der Plastizitätstheorie im Rahmen der Kontinuumsmechanik steht allerdings nicht die Modellierung der mikroskopischen Vorgänge auf der Mikroebene des Werkstoffes, sondern die phänomenologische Beschreibung des Materialverhaltens auf der Makroebene. Bei der numerischen Simulation des nichtlinearen Materialverhaltens wird das wirkliche Nachbruchverhalten daher meist durch *idealisierte, einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen* beschrieben, siehe Abb. 4.1b), die auch als *Evolutionsgesetze* interpretierbar sind. Diese steuern über die Veränderung der äquivalenten Fließspannung  $\bar{S}$ , die Änderung der *Fließfunktion* bzw. der *Fließfläche*.

Die in dieser Arbeit verwendete Plastizitätsformulierung geht auf Green und Naghdi (1965) zurück und eignet sich besonders zur Modellierung dünnwandiger Flächentragwerke. Diese können zwar endliche Rotationen, aber in der Regel kleine Verzerrungen aufweisen, wenn man von Umformvorgängen oder ähnlich großen Beanspruchungen absieht. Infolge der Beschränkung auf kleine Verzerrungen kann laut Matzenmiller (1988) auf die numerisch aufwendige Integration der geometrisch bedingten Anteile in den plastischen Spannungsflüssen verzichtet werden. Darüber hinaus ist der additive Split des Green-Lagrange'schen-Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  zulässig.

## 4.2 Ratenunabhängige Plastizität

### 4.2.1 Herleitung der Werkstoffgleichungen

Sowohl der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  als auch dessen Ratenform  $\dot{\mathbf{E}}$  kann unter den oben getroffenen Annahmen additiv in einen reversiblen, elastischen und in einen irreversiblen, plastischen Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{pl} \quad , \quad \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^{el} + \dot{\mathbf{E}}^{pl} \quad . \quad (4.1)$$

Folglich kann die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  in den elastischen und reversiblen Anteil der spezifischen Verzerrungsenergie  $\Psi_{el}$  und in den plastischen und irreversiblen Anteil  $\Psi_{pl}$ , der von den internen Variablen des Verzerrungsraums  $\boldsymbol{\kappa}$  abhängig ist, aufgespalten werden. Die additive Zerlegung der „freien Helmholtz-Energie“  $\Psi$  ist nach Lubliner (1990) nur dann zulässig, wenn auch die Verzerrungen additiv zerlegt werden können. Es lässt sich somit schreiben:

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}) = \Psi_{el}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}) + \Psi_{pl}(\boldsymbol{\kappa}) \quad . \quad (4.2)$$

Die spezifische Verzerrungsenergie  $\Psi_{el}$  ist durch die zweifache doppelte Verjüngung des Materialtensors  $\mathbf{C}^{el}$  mit den elastischen Verzerrungen  $\mathbf{E}^{el}$  gegeben

$$\Psi_{el}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) \quad , \quad (4.3)$$

während der plastische Anteil  $\Psi_{pl}$  dem Integral des Evolutionsgesetzes entspricht:

$$\Psi_{pl}(\boldsymbol{\kappa}) = \int_0^{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{q}(\bar{\boldsymbol{\kappa}}) \, d\bar{\boldsymbol{\kappa}} \quad . \quad (4.4)$$

Die beobachtbaren Größen sind dabei die Gesamtverzerrungen  $\mathbf{E}$ , während der Vektor  $\boldsymbol{\kappa}$  die im Verzerrungsraum definierten, internen Variablen darstellt. Hierzu ist der Vektor der internen, im Spannungsraum definierten Variablen  $\mathbf{q}$  energetisch konjugiert und es gilt folgender formaler Zusammenhang, der auch als Evolutionsgesetz bezeichnet wird:

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}) \quad . \quad (4.5)$$

Nach dem *zweiten Hauptsatz der Thermodynamik* muss die *innere Dissipation* während des Fließvorganges positiv sein. Für isotherme Prozesse geht hieraus die isotherme „*Clausius-Duhem-Ungleichung*“  $D = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi} \geq 0$  hervor, deren Auswertung nach Coleman und Noll (1963) bzw. nach Coleman und Gurtin (1967) die Definition des Spannungstensors als energetisch konjugierte Größe zu den elastischen Verzerrungen liefert (vergleiche Anhang B):

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{el}} = \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) \quad . \quad (4.6)$$

Die verbleibende *Dissipationsungleichung* lautet somit:

$$D^{pl} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad . \quad (4.7)$$

In der Plastizität ist es üblich, die Fließfunktion  $F$  spannungsbasiert als die Differenz der Vergleichsspannung  $f(\mathbf{S}, \mathbf{q})$  und der äquivalenten Fließspannung  $\bar{S}(\mathbf{q})$  zu definieren:

$$F = F(\mathbf{S}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{S}, \mathbf{q}) - \bar{S}(\mathbf{q}) \leq 0 \quad . \quad (4.8)$$

Die *Fließbedingung*  $F(\mathbf{S}, \mathbf{q}) = 0$ , die im Hauptspannungsraum auch als eine Fließfläche dargestellt werden kann (Betten (1986), Hill (1950)), trennt die zulässigen von den unzulässigen Bereichen ab. Ein Zustand, der durch den Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und die internen Variablen  $\mathbf{q}$  gegeben ist, wird als zulässig bezeichnet, wenn er innerhalb der Fließfläche liegt und die Fließfunktion  $F \leq 0$  erfüllt. Außerhalb liegende Zustände sind unzulässig; vielmehr entstehen plastische Verzerrungen in der Art, dass die Fließbedingung durch die aktualisierten internen Variablen  $\mathbf{q}$  und die auf die Fließfläche rückprojizierten Spannungen  $\mathbf{S}$  wieder erfüllt wird.

Wendet man innerhalb eines plastischen Belastungsprozesses das *Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation* an, kann die Dissipationsungleichung (4.7) in ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Fließbedingung (4.8) als Nebenbedingung überführt werden, vergleiche Luenberger (1984) und Simo et al. (1989). Hierzu wird die Fließfunktion über einen *Lagrange-Parameter*  $\dot{\lambda}$ , der auch als *plastischer Multiplikator* identifiziert werden kann, in die Dissipationsungleichung eingebracht. Die Stationaritätsbedingung der zugehörigen *Lagrange-Funktion* lautet somit:

$$L = - D^{pl} + \dot{\lambda} F = - \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \dot{\lambda} F(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \quad \rightarrow \quad \text{stat.} \quad (4.9)$$

Die Auswertung der Lagrange-Funktion liefert die Definitionen für die Evolutionsgleichungen der plastischen Verzerrungen und der internen Variablen

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{S}} = -\dot{\mathbf{E}}^{pl} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{E}}^{pl} = \lambda \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} := \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \quad , \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \quad . \quad (4.11)$$

In Gleichung (4.10), im Folgenden auch als *Fließregel* bezeichnet, gibt der zweistufige Tensor  $\mathbf{n}$  die Richtung und  $\lambda$  den Betrag des plastischen Flusses an. Da sich die Fließrichtung  $\mathbf{n}$  als Gradient der Fließfunktion  $F$  nach den Spannungen  $\mathbf{S}$  ergibt, spricht man hier von *assoziertem Fließen* und bezeichnet die Fließregel auch als *Normalenregel* (plastischer Fluss normal zur Fließfläche). Das *assozierte Ver- bzw. Entfestigungsgesetz* ist in Gleichung (4.11) dadurch charakterisiert, dass sich die internen Variablen  $\boldsymbol{\kappa}$  ebenfalls aus dem Gradienten der Fließfunktion  $F$  nach den internen Variablen  $\mathbf{q}$  bestimmen lassen. Wird in (4.10) und (4.11) anstelle der Fließfunktion  $F$  ein *plastisches Potenzial*  $G \neq F$  definiert, so führt dies auf ein *nicht-assoziertes Fließen* mit *nicht-assoziertem Ver- bzw. Entfestigungsgesetz* und es gilt

$$\dot{\mathbf{E}}^{pl} = \lambda \mathbf{m} \quad \text{mit} \quad \mathbf{m} := \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \quad , \quad (4.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \quad . \quad (4.13)$$

Zu beachten ist hierbei, dass die aus dem plastischen Potenzial  $G$  abgeleiteten Größen weiterhin die Dissipationsungleichung (4.7) erfüllen. Hingegen ist das Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation nicht mehr erfüllt. Die Einführung eines plastischen Potenzials  $G \neq F$  kann nötig sein, wenn Materialien im Versuch eine *Volumenzunahme (Dilatation)* aufweisen, die bei Verwendung einer assoziierten Formulierung eventuell überschätzt wird. In diesem Fall wird das plastische Potenzial so eingeführt, dass die volumetrische Komponente von  $\mathbf{m}$  kleiner ist als die von  $\mathbf{n}$ . Beispiele für solche Materialien sind Beton und Böden.

Die weitere Auswertung von Gleichung (4.9) liefert die *Be- und Entlastungsbedingungen* in Form der *Kuhn-Tucker-Bedingungen*

$$F \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad F \dot{\lambda} = 0 \quad , \quad (4.14)$$

sowie die *Konsistenzbedingung*

$$\dot{F} \dot{\lambda} = 0 \quad . \quad (4.15)$$

Für eine plastische Belastung ( $\dot{\lambda} > 0$ ) gilt mit Gleichung (4.15):

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad . \quad (4.16)$$

Unter Berücksichtigung der nicht-assozierten Fließregel (4.12) erhält man aus der Ratenform für die Spannungen (4.6)

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{el} : \left( \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^{pl} \right) = \mathbf{C}^{el} : \left( \dot{\mathbf{E}} - \lambda \mathbf{m} \right) \quad . \quad (4.17)$$

Die Ratenform des Evolutionsgesetzes nach (4.5) lautet unter Verwendung der Evolutionsgleichung (4.13) für die Verfestigungsvariablen  $\kappa$

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial \kappa} \cdot \dot{\kappa} = -\dot{\lambda} H \cdot \frac{\partial G}{\partial q} \quad \text{mit} \quad H = -\frac{\partial h}{\partial \kappa} \quad (\text{Verfestigungsmodul}) \quad (4.18)$$

und stellt damit das Ver- bzw. Entfestigungsgesetz dar. Grundsätzlich ist zwischen einer isotropen und einer kinematischen Verfestigung zu unterscheiden, die sich unterschiedlich auf die Fließfläche bzw. auf die Fließfunktion auswirken, siehe z.B. Hofstetter und Mang (1995). Im Fall des isotropen Verfestigungsgesetzes reduziert sich der Vektor der internen Variablen  $q$  auf eine skalare Größe  $q$ , die die Veränderung der äquivalenten Fließspannung und somit die Größenänderung der Fließfläche im Spannungsraum beschreibt. Bei einem kinematischen Verfestigungsgesetz stellt  $q$  den sogenannten kinematischen Ver- bzw. Entfestigungstensor oder auch *Backstress-Tensor* dar. Er beschreibt anschaulich die Translation der Fließfläche im Spannungsraum.

Werden die Gleichungen (4.17) und (4.18) in (4.16) eingesetzt, kann durch Auflösen nach  $\dot{\lambda}$  die Rate des plastischen Multiplikators gewonnen werden:

$$\dot{\lambda} = \frac{n : C^{el} : \dot{E}}{n : C^{el} : m + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial G}{\partial q}} \quad (4.19)$$

Rücksubstitution in Gleichung (4.17) liefert die Ratenform der elasto-plastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\dot{S} = \left[ C^{el} - \frac{C^{el} : m \otimes C^{el} : n}{n : C^{el} : m + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial G}{\partial q}} \right] : \dot{E} \quad (4.20)$$

wobei der Klammerausdruck den *elasto-plastischen Materialtensor*  $C^{ep}$  des Kontinuums darstellt.

Die vorgestellten Gleichungen der Ratenform müssen innerhalb eines inkrementellen Verfahrens vom Zeitpunkt  $t_n$  zu  $t_{n+1}$  integriert werden. Hierzu stehen verschiedene Zeitintegrationsverfahren wie beispielsweise das *Rückwärts-Euler-Verfahren*, das *Vorwärts-Euler-Verfahren*, die *verallgemeinerte Trapezregel* und die *verallgemeinerte Mittelpunktsregel* zur Verfügung, siehe hierzu u.a. Simo und Hughes (1998), Simo und Taylor (1986) und Ortiz und Simo (1986). Dabei bedingt der Übergang von differenziellen zu endlichen Zeit- bzw. Lastinkrementen zusätzliche Terme in der Herleitung des elasto-plastischen Materialtensors. In Kapitel 4.4 wird daher die inkrementelle Formulierung der Elastoplastizität hergeleitet.

Es soll an dieser Stelle noch einmal kurz auf das Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation und dessen Konsequenzen eingegangen werden. Es besagt, dass die von wirklich auftretenden Spannungen an einer vorgegebenen plastischen Verzerrung geleistete Arbeit größer ist als die Arbeit, die durch einen beliebigen zulässigen Spannungszustand an derselben Verzerrung geleistet wird (Roehl (1994)). Hieraus lassen sich die Forderungen nach *Konvexität der Fließfläche*, nach einer assoziierten Fließregel und nach einem assoziierten Ver- bzw. Entfestigungsgesetz ableiten. Da im Fall der assoziierten Fließregel die Fließrichtung  $m = n$  ist, wird der elasto-plastische Materialtensor  $C^{ep}$  symmetrisch. Im Vergleich dazu fordert das sogenannte *Drucker'sche Stabilitätspostulat* eine positive Arbeitsbilanz während einer inkrementellen Be-



lastung bzw. in seiner erweiterten Form eine nicht negative Arbeit während eines geschlossenen Belastungszyklus. Hieraus leitet sich alleinig die Konvexität der Fließfläche und die assoziierte Fließregel, aber nicht ein assoziiertes Ver- bzw. Entfestigungsgesetz ab, vergleiche Hofstetter und Mang (1995). Auf die formelmäßige Darstellung der beiden Postulate wird verzichtet und lediglich auf die einschlägige Literatur verwiesen.

#### 4.2.2 Verfestigungshypothesen

Aufgrund der Ver- bzw. Entfestigung verändert sich die Lage oder die Geometrie der Fließfläche im Spannungsraum. Zur Beschreibung dieser Veränderung werden in der Regel einaxiale, äquivalente Spannungs-Dehnungs-Beziehungen formuliert, die die Evolution der internen Variablen vorgeben. Bei isotroper Verfestigung steuert beispielsweise die skalare, äquivalente Verzerrung  $\kappa$  über den Verfestigungsmodul  $H$  die Fließspannung  $\bar{S}_y$  und verändert so die Größe der Fließfläche. Alternativ zur Bestimmung der äquivalenten Verzerrung  $\kappa$  über Gleichung (4.11) oder (4.13) kann diese auch über die tensoriellen Größen der Spannungen und Verzerrungen berechnet werden. Hierzu stehend grundsätzlich zwei verschiedene Hypothesen zur Verfügung, nämlich die *Arbeitsverfestigungshypothese* sowie die *Verzerrungsverfestigungshypothese*, siehe Hofstetter und Mang (1995), Khan und Huang (1995) und Simo und Hughes (1998).

Bei der Arbeitsverfestigungshypothese wird die Änderung der dreidimensionalen plastischen Arbeit aus dem Skalarprodukt der Spannungen  $\mathbf{S}$  und den plastischen Verzerrungen  $\dot{\mathbf{E}}^{pl}$  mit der Änderung der eindimensionalen plastischen Arbeit aus äquivalenter Spannung  $q$  und äquivalenter Verzerrung  $\dot{\kappa}$  gleichgesetzt:

$$\dot{W}^{pl} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} \equiv h(\kappa) \dot{\kappa} = q \dot{\kappa} . \quad (4.21)$$

Mit Gleichung (4.12) folgt für die äquivalente Verzerrungsrate  $\dot{\kappa}$

$$\dot{\kappa} = \frac{\dot{\lambda}}{h(\kappa)} \mathbf{S} : \mathbf{m} . \quad (4.22)$$

Bei der Verzerrungsverfestigungshypothese wird hingegen nur die plastische Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{E}}^{pl}$ , genauer gesagt deren Norm, als Maß für die äquivalente Verzerrungsrate  $\dot{\kappa}$  herangezogen.

$$\dot{\kappa} = a \left| \dot{\mathbf{E}}^{pl} \right| = a \sqrt{\dot{\mathbf{E}}^{pl} : \dot{\mathbf{E}}^{pl}} \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}} . \quad (4.23)$$

Der Skalierungsparameter  $a$  passt dabei die äquivalente Verzerrung, die sich unter der Voraussetzung eines rein deviatorischen plastischen Flusses ergibt, an die plastische Verzerrung bei rein einaxialer Belastung an. Unter Verwendung von Gleichung (4.12) kann man somit für die äquivalente Verzerrungsrate schreiben:

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{m} : \mathbf{m} . \quad (4.24)$$

### 4.3 Duvaut-Lions Viskoplastizität

Aufbauend auf der in Abschnitt 4.2 vorgestellten ratenunabhängigen Plastizität soll im Folgenden eine ratenabhängige Erweiterung vorgestellt werden, die es ermöglicht, viskose Materialeffekte zu berücksichtigen. Dabei wird die Zeit nicht mehr als Pseudozeit aufgefasst, sondern geht als physikalische Größe direkt ein. Weiterhin wird noch der *Dämpfungparameter*  $\eta$  mit der Einheit Zeit eingeführt, der ein Maß für die zeitliche Verzögerung der Antwort darstellt. Es lässt sich zeigen, dass dadurch ein *interner Längenparameter*  $\ell$  eingebracht wird (Sluys (1992)), der eine regularisierende Wirkung hat. Dieser Umstand wird in Kapitel 7.2.5 ausgenutzt.

Neben der ratenabhängigen Plastizität nach Perzyna (Perzyna (1966, 1971)) ist vor allem der Typ *Duvaut-Lions* (Duvaut und Lions (1972)) gebräuchlich, da er einige Nachteile des Perzyna-Typs beseitigt. So ist zum einen die Behandlung nicht-glatte Fließflächen einfacher. Zum anderen ist eine algorithmische Trennung von ratenunabhängiger und ratenabhängiger Plastizität bei der Berechnung von Spannungen, internen Variablen sowie der Materialtangente möglich, siehe Simo et al. (1988). Darüber hinaus beinhaltet die Viskoplastizität vom Typ Duvaut-Lions die ratenunabhängige Lösung für den Grenzfall, dass die Viskosität gegen Null geht. Dies ist für eine nicht-glatte Fließfläche beim Typ Perzyna nicht der Fall. Weiterhin ist erwähnenswert, dass es sich bei den Viskoplastizitätsmodellen nach Perzyna oder Duvaut-Lions um sogenannte *Überspannungsmodelle* handelt, d.h. die Fließbedingung ist am Ende des Zeitschrittes infolge viskoser Effekte nicht mehr erfüllt. Konsistente Formulierungen, bei denen die Fließbedingung noch zusätzlich von der Rate der internen Variablen abhängig ist  $F(\mathbf{S}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , beseitigen die Überspannungen, siehe Wang et al. (1997) und Sluys (1992). Diese Formulierungen ermöglichen auch die Simulation sogenannter *Portevin-Le-Chatelier* Effekte (PLC-Band), vergleiche Wang und Sluys (1998) sowie Aifantis (1998).

Ausgehend von der additiven Zerlegung der Verzerrungsrate in elastische und visko-plastische Anteile

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^{el} + \dot{\mathbf{E}}^{vp} \quad , \quad (4.25)$$

wird für  $F(\mathbf{S}, \mathbf{q}) > 0$  die visko-plastische Verzerrungsrate nach Duvaut und Lions (1972) als Differenz zwischen ratenabhängigen und ratenunabhängigen Größen wie folgt definiert:

$$\dot{\mathbf{E}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \mathbf{C}^{el-1} : (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}) \quad . \quad (4.26)$$

Die Evolutionsgesetze für die internen Variablen  $\mathbf{q}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  werden mit

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{\eta} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\mathbf{H}^{-1}}{\eta} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{\eta} (\boldsymbol{\kappa} - \bar{\boldsymbol{\kappa}}) \quad (4.27)$$

vorgegeben. Dabei bezeichnen  $\bar{\mathbf{S}}$  die Spannungen und  $\bar{\mathbf{q}}$  bzw.  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$  die internen Variablen der ratenunabhängigen Lösung (Kapitel 4.2). Durch Einsetzen der visko-plastischen Verzerrungsrate (4.26) in (4.17) erhält man in Kombination mit (4.25) eine inhomogene Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Spannungen  $\mathbf{S}$ :

$$\dot{\mathbf{S}} + \frac{1}{\eta} \mathbf{S} = \mathbf{C}^{el} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\eta} \bar{\mathbf{S}} \quad . \quad (4.28)$$

Die homogene Lösung kann über die Trennung der Veränderlichen berechnet werden und lautet

$$\mathbf{S}^h = \mathbf{K} \exp\left[\frac{-\mathbf{S}}{\eta}\right] \quad (4.29)$$

mit  $\mathbf{K}$  als Integrationskonstante mit der Einheit einer Spannung und mit der Zeit  $s$ . Der inhomogene Anteil berechnet sich über die Variation der Konstanten

$$\mathbf{S}^{in} = \mathbf{a}(s) \mathbf{S}^h \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{S}}^{in} = \dot{\mathbf{a}}(s) \mathbf{S}^h + \mathbf{a}(s) \dot{\mathbf{S}}^h \quad (4.30)$$

und liefert durch Einsetzen in die Differenzialgleichung (4.28) die inhomogene Lösung

$$\mathbf{S}^{in} = \mathbf{a} \mathbf{K} \exp\left[\frac{-s}{\eta}\right] \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \frac{1}{\mathbf{K}} \int_s \left( \exp\left[\frac{\bar{s}}{\eta}\right] \left( \mathbf{C}^{el} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\eta} \bar{\mathbf{S}} \right) \right) d\bar{s} . \quad (4.31)$$

Somit erhält man die Lösung der Differenzialgleichung

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} \exp\left[\frac{-s}{\eta}\right] + \exp\left[\frac{-s}{\eta}\right] \int_s \left( \exp\left[\frac{\bar{s}}{\eta}\right] \left( \mathbf{C}^{el} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\eta} \bar{\mathbf{S}} \right) \right) d\bar{s} . \quad (4.32)$$

Gleichung (4.32) muss innerhalb des inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahrens noch integriert werden. Hierzu wird in Kapitel 4.4 eine vollständige Integration nach Simo und Hughes (1998) bzw. Ju (1992) verwendet und die Integrationskonstante  $\mathbf{K}$  angegeben.

Der eingangs schon erwähnte interne Längenparameter, der bei entfestigendem Materialverhalten regularisierend wirkt und darüber hinaus die Gutgestelltheit des Problems gewährleistet, kann durch Multiplikation der Zeitgröße  $\eta$  mit der elastischen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c^{el}$  angegeben werden, siehe beispielsweise Sluys (1992) und de Borst et al. (1993):

$$\ell = c^{el} \eta \quad \text{mit} \quad c^{el} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{in} \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] , \quad (4.33)$$

d.h.  $\eta$  kann durch  $\ell$  ausgedrückt werden.

## 4.4 Inkrementelle Formulierung

In Kapitel 3.2.3 wurde bereits auf die Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems im Rahmen des Newton-Raphson-Verfahrens kurz eingegangen. Innerhalb dieses inkrementell-iterativen Verfahrens ist es durch die Einführung einer Diskretisierung in Zeitrichtung (Pseudozeit) möglich, mit endlichen Last- bzw. Verschiebungsinkrementen zu operieren. Dabei wird während eines Inkrementes ein elastischer *Prädiktorschritt* aufgebracht und anschließend durch mehrere *Korrektorschritte* das globale Gleichgewicht mittels Elimination des Linearisierungsfehlers wieder erfüllt (*Prädiktor-Korrektor-Verfahren*). Bei dieser *globalen Gleichgewichtssiteration* ist die konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen nötig, um eine quadratische Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens in der Nähe des Lösungspunktes zu gewährleisten (siehe Nagtegaal (1982) und Simo und Taylor (1985)). Hierbei ist insbesondere auf die *algorithmische elasto-plastische Materialtangente* hinzuweisen, die sich infolge des Übergangs von differentiellen zu endlichen Zeit- bzw. Lastinkrementen in einigen Termen von der Kontinuums-tangente in Gleichung (4.20) unterscheidet.

Die algorithmische elasto-plastische Materialtangente muss genau dann aufgestellt werden, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt innerhalb der globalen Gleichgewichtssiteration festgestellt wird, dass die Fließfunktion (4.8) am einzelnen *Gauß-Punkt* nicht mehr erfüllt ist. Vorher wird

jedoch eine Rückprojektion der Spannungen auf die Fließfläche durchgeführt, so dass die Fließfunktion und die Kuhn-Tucker-Bedingungen wieder eingehalten werden. Weil die zugrunde liegenden Gleichungen der Plastizität in der Regel nicht explizit lösbar sind, setzt man hier ebenfalls ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren ein. Als Prädiktorschritt ist dabei der Spannungszustand zu verstehen, der die Fließfunktion verletzt (*Prädiktorspannungen*), während die iterative Rückprojektion auf die Fließfläche als Korrektorschritte aufzufassen sind. In diesem Zusammenhang spricht man im Gegensatz zur globalen, auf Strukturebene stattfindenden Gleichgewichtsiteration von einer *lokalen Iteration*, da sie auf der Gauß-Punkt-Ebene abläuft.

#### 4.4.1 Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen

Sind zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_{n+1}$  das Inkrement des Verzerrungstensors  $\Delta \mathbf{E}_{n+1}$  sowie die vorherigen zum Zeitpunkt  $t_n$  gehörenden Spannungen  $\mathbf{S}_n$ , plastischen Verzerrungen  $\mathbf{E}_n^{pl}$  und internen Variablen  $\mathbf{q}_n$  bekannt, so stellt sich für die numerische Plastizitätsformulierung die Aufgabe, die konstitutiven Beziehungen und die Zustandsgrößen unter Einhaltung der Nebenbedingungen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu aktualisieren, also

$$\{\mathbf{S}_n, \mathbf{E}_n^{pl}, \mathbf{q}_n, \Delta \mathbf{E}_{n+1}\} \rightarrow \{\mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^{pl}, \mathbf{q}_{n+1}\} . \quad (4.34)$$

Die Erfüllung der Nebenbedingungen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  führt auf die Verwendung des impliziten Rückwärts-Euler-Verfahrens, das unabhängig von der Form der Fließfläche und der Schrittgröße unbedingt stabil ist, siehe Krieg und Krieg (1977), Schreyer et al. (1979), Ortiz und Popov (1985) und Simo und Taylor (1986). Die Prädiktorspannungen  $\mathbf{S}_{n+1}^*$  lassen sich unter der Annahme eines rein elastischen Verzerrungsinkrements  $\Delta \mathbf{E}_{n+1}$  wie folgt angeben:

$$\mathbf{S}_{n+1}^* = \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E}_n^{el} + \Delta \mathbf{E}_{n+1}) = \mathbf{S}_n + \mathbf{C}^{el} : \Delta \mathbf{E}_{n+1} . \quad (4.35)$$

Aufgrund der Konvexität der Fließfläche gilt (Simo und Hughes (1998))

$$F_{n+1}^* = F_{n+1}^*(\mathbf{S}_{n+1}^*, \mathbf{q}_n) \geq F_{n+1} = F_{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) . \quad (4.36)$$

Verletzen die Prädiktorspannungen zusammen mit den internen Variablen des Zeitpunktes  $t_n$  die Fließfunktion ( $F_{n+1}^* > 0$ ), so müssen sowohl neue Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  als auch neue plastische Verzerrungen  $\mathbf{E}_{n+1}^{pl}$  berechnet werden, die die Fließfunktion in Kombination mit den aktualisierten internen Variablen  $\mathbf{q}_{n+1}$  wieder erfüllen. Die diskreten Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten mit  $\Delta \lambda_{n+1} = \dot{\lambda} \Delta t_{n+1}$

$$F_{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 , \quad \Delta \lambda_{n+1} \geq 0 , \quad F_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} = 0 . \quad (4.37)$$

Der zeitlich diskretisierte Verzerrungstensor kann mit

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_{n+1}^{el} + \mathbf{E}_{n+1}^{pl} \quad (4.38)$$

bestimmt werden und man erhält somit aus Gleichung (4.6) für den diskretisierten Spannungstensor

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^{pl}) . \quad (4.39)$$

Alternativ lässt sich der Ausdruck  $(\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^{pl})$  auch als

$$\mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl} - \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_n^{el} + \Delta \mathbf{E}_{n+1} - \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} \quad (4.40)$$

schreiben, so dass mit der Definition für die Prädiktorspannungen (4.35) folgt

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^* - \mathbf{C}^{el} : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} \quad (4.41)$$

Die plastischen Verzerrungen lassen sich mit der Annahme einer nicht-assozierten Fließregel (4.12) folgendermaßen berechnen:

$$\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_n^{pl} + \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} \quad (4.42)$$

mit

$$\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \Delta \lambda_{n+1} \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{m}_{n+1} \quad (4.43)$$

Das nicht-assozierte Ver- bzw. Entfestigungsgesetz nach Gleichung (4.13) und (4.18) lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_{n+1} \quad , \\ \Delta \mathbf{q}_{n+1} &= -\mathbf{H}_{n+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} \quad \rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = -\mathbf{H}_{n+1}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1} \quad , \\ \Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} &= \Delta \lambda_{n+1} \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1} \quad . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Für die weitere Herleitung der algorithmischen elasto-plastischen Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$  werden die totalen Differenziale der diskretisierten Größen wie Spannungen, Verzerrungen, interne Variablen und Konsistenzbedingung benötigt:

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \mathbf{C}^{el} : (d\mathbf{E} - d\mathbf{E}^{pl}) \right\}_{n+1} \quad , \quad (4.45)$$

$$d\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \left\{ \mathbf{m} d\lambda + \Delta \lambda \left( \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{S}^2} : d\mathbf{S} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} \right) \right\}_{n+1} \quad , \quad (4.46)$$

$$d\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} d\lambda + \Delta \lambda \left( \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}^2} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{S}} : d\mathbf{S} \right) \right\}_{n+1} \quad , \quad (4.47)$$

$$dF_{n+1} = \left\{ \mathbf{n} : d\mathbf{S} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} \right\}_{n+1} = 0 \quad . \quad (4.48)$$

Dabei bezeichnet  $d\lambda_{n+1}$  das totale Differenzial des inkrementellen Konsistenzparameters  $\Delta \lambda_{n+1}$ . Durch Einsetzen von Gleichung (4.46) in (4.45) erhält man

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \boldsymbol{\Theta} : \left( d\mathbf{E} - \mathbf{m} d\lambda - \Delta \lambda \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} \right) \right\}_{n+1} \quad (4.49)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\Theta} = \left\{ \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{S}^2} \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad . \quad (4.50)$$

Wird Gleichung (4.49) wieder in die diskrete Konsistenzbedingung (4.48) eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} & \left\{ d\lambda \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} + \Delta\lambda \left( \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot d\mathbf{q} \right\}_{n+1} \\ & = \{ \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : d\mathbf{E} \}_{n+1} . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Gleichung (4.49), eingesetzt in (4.47), führt unter Verwendung des inkrementellen Ver- bzw. Entfestigungsgesetzes nach Gleichung (4.44)<sub>2</sub> auf

$$\begin{aligned} & \left\{ d\lambda \Delta\lambda \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \right] \right\}_{n+1} \\ & + \left\{ \Delta\lambda^2 \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2} - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \mathbf{H}^{-1} \right] \cdot d\mathbf{q} \right\}_{n+1} \\ & = \left\{ \Delta\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} : \boldsymbol{\Theta} : d\mathbf{E} \right\}_{n+1} . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Gleichungen (4.51) und (4.52) stellen ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Größen  $d\lambda_{n+1}$  und  $\Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1}$  dar. Aufgelöst nach  $d\lambda_{n+1}$  und  $\Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1}$  erhält man

$$\begin{bmatrix} d\lambda \\ \Delta\lambda d\mathbf{q} \end{bmatrix}_{n+1} = \mathbf{Z}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : d\mathbf{E} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} : \boldsymbol{\Theta} : d\mathbf{E} \end{bmatrix}_{n+1} . \quad (4.53)$$

Mit der Koeffizienten-Matrix  $\mathbf{Z}_{n+1}$

$$\begin{aligned} z_{11,n+1} & = \{ \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} \}_{n+1} , \\ z_{12,n+1} & = \left\{ \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{n+1} , \\ z_{21,n+1} & = \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \right\}_{n+1} , \\ z_{22,n+1} & = \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{q}^2} - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \mathbf{H}^{-1} \right\}_{n+1} . \end{aligned} \quad (4.54)$$

Gleichung (4.53), eingesetzt in (4.49), führt auf die algorithmische elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$  in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{E}} \right\}_{n+1} & = \left\{ \boldsymbol{\Theta} - z_{11}^{-1}(\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m}) \otimes (\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{n}) \right. \\ & \quad - z_{12}^{-1}(\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m}) \otimes \left( \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} \right) \\ & \quad - z_{21}^{-1} \left( \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} \right) \otimes (\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{n}) \\ & \quad \left. - z_{22}^{-1} \left( \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} \right) \otimes \left( \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \mathbf{q}} \right) \right\}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo} . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die Größen  $z_{ij}^{-1}$  bezeichnen dabei die Koeffizienten der invertierten Matrix  $\mathbf{Z}_{n+1}$ . Offensichtlich unterscheidet sich die algorithmische elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$  von der elasto-plastischen Kontinuumstangente (4.20). Für eine infinitesimal kleine Zeitschrittweite ( $\Delta t_{n+1} \rightarrow 0$  bzw.  $\Delta \lambda_{n+1} \rightarrow 0$ ) geht die algorithmische elasto-plastische Materialtangente wieder in die Kontinuumstangente über.

Die hier vorgestellten Gleichungen der allgemeinen Elasto-Plastizität werden später bei der Herleitung zweier Plastizitätsmodelle benötigt bzw. konkretisiert: eine anisotrop verfestigende Hoffman-Plastizität (Kapitel 6.3) und eine entfestigende Delaminationsplastizität (Kapitel 7.2). Beim Letztgenannten wird auch die Berücksichtigung viskoser Effekte benötigt, deren inkrementelle Form im Folgenden vorgestellt wird.

#### 4.4.2 Inkrementelle Form der visko-plastischen Erweiterung

Während im vorherigen Abschnitt das Rückwärts-Euler-Verfahren zur zeitlichen Integration der konstitutiven Gleichungen zur Anwendung kam, wird bei der visko-plastischen Erweiterung die Integration in geschlossener Form (vollständige Integration) durchgeführt. Alternativ könnte natürlich auch das implizite Rückwärts-Euler-Verfahren eingesetzt werden, vergleiche Simo und Hughes (1998) und Ju (1992).

Die vollständige Integration von Gleichung (4.32) im Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$  liefert mit den Bedingungen für die Zeitpunkte  $s = t_n$  mit  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_n$  und  $s = t_{n+1}$  mit  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{n+1}$  die Integrationskonstante  $\mathbf{K}$  und die Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$ :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta}\right] \mathbf{S}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[\frac{-(t_{n+1} - \bar{s})}{\eta}\right] \left(\frac{\bar{\mathbf{S}}}{\eta} + \mathbf{C}^{el} : \dot{\mathbf{E}}\right) d\bar{s} . \quad (4.56)$$

Hierbei stellen die überstrichenen Größen die Lösung der ratenunabhängigen Plastizität dar und  $\Delta t_{n+1}$  die Zeitschrittweite. Werden nach Simo et al. (1988) oder Simo und Hughes (1998) die folgenden Näherungen verwendet,

$$\dot{\mathbf{E}} \approx \frac{\Delta \mathbf{E}_{n+1}}{\Delta t_{n+1}} , \quad (4.57)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \exp\left[\frac{-(t_{n+1} - \bar{s})}{\eta}\right] \mathbf{C}^{el} : \dot{\mathbf{E}} \right] d\bar{s} \approx \left[ \frac{1 - \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta}\right]}{\frac{\Delta t_{n+1}}{\eta}} \right] \mathbf{C}^{el} : \Delta \mathbf{E}_{n+1} \quad (4.58)$$

und

$$\frac{1}{\eta} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \exp\left[\frac{-(t_{n+1} - \bar{s})}{\eta}\right] \bar{\mathbf{S}} \right] d\bar{s} \approx \left( 1 - \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta}\right] \right) \bar{\mathbf{S}}_{n+1} , \quad (4.59)$$

erhält man aus Gleichung (4.56) für die gesuchten Spannungen

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} = \exp[-\Delta\mu_{n+1}] \mathbf{S}_n + (1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]) \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \\ + \left[ \frac{1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]}{\Delta\mu_{n+1}} \right] \mathbf{C}^{el} : \Delta\mathbf{E}_{n+1} . \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dabei wurde die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\Delta\mu_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\eta} . \quad (4.61)$$

In gleicher Weise können die internen Variablen  $\mathbf{q}$  bzw.  $\boldsymbol{\kappa}$  als

$$\mathbf{q}_{n+1} = \exp[-\Delta\mu_{n+1}] \mathbf{q}_n + (1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]) \bar{\mathbf{q}}_{n+1} ; \quad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \exp[-\Delta\mu_{n+1}] \boldsymbol{\kappa}_n + (1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]) \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} \quad (4.63)$$

angegeben werden. Die konsistente Linearisierung von (4.60) führt mit  $\bar{\mathbf{C}}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$  zu folgendem Ausdruck für die algorithmische visko-plastische Materialtangente:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{E}} \right\}_{n+1} = (1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]) \bar{\mathbf{C}}_{n+1} \\ + \left[ \frac{1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]}{\Delta\mu_{n+1}} \right] \mathbf{C}^{el} = \mathbf{C}_{n+1}^{vp,algo} . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Aus den Gleichungen (4.60) bis (4.64) wird ersichtlich, dass der Faktor  $\Delta\mu_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\eta$  maßgebend für die viskosen Effekte ist.

Esie sind daher zwei Grenzfälle zu unterscheiden:

- Für den Fall, dass  $\Delta\mu_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\eta \rightarrow 0$  strebt, folgt  $\exp[-\Delta\mu_{n+1}] \rightarrow 1$  und  $(1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]) / (\Delta\mu_{n+1}) \rightarrow 1$ : Hieraus folgt  $\mathbf{S}_{n+1} \rightarrow \mathbf{C}^{el} : \Delta\mathbf{E}_{n+1} + \mathbf{S}_n$ ,  $\mathbf{q}_{n+1} \rightarrow \mathbf{q}_n$  und  $\mathbf{C}_{n+1}^{vp,algo} \rightarrow \mathbf{C}^{el}$ . Man erhält die rein elastische Lösung.
- Für den Fall, dass  $\Delta\mu_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\eta \rightarrow \infty$  strebt, folgt  $\exp[-\Delta\mu_{n+1}] \rightarrow 0$  und  $(1 - \exp[-\Delta\mu_{n+1}]) / (\Delta\mu_{n+1}) \rightarrow 0$ : Hieraus folgt  $\mathbf{S}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathbf{S}}_{n+1}$ ,  $\mathbf{q}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}_{n+1}$  und  $\mathbf{C}_{n+1}^{vp,algo} \rightarrow \mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$ . Man erhält die ratenunabhängige Lösung.

In Abb. 4.2 ist das algorithmische Vorgehen zur Berechnung der Viskoplastizität nach dem Modell von Duvaut und Lions (1972) nochmals übersichtlich dargestellt. Deutlich ist die klare Trennung zwischen plastischer und visko-plastischer Berechnung sowie der große Einfluss der Parameter Zeit  $\Delta t$  und Dämpfung  $\eta$  zu erkennen. Die klare Trennung ist insoweit von Vorteil, da die Viskoplastizität im Kapitel 7.2.5 zum Zweck der visko-plastischen Regularisierung eingesetzt werden soll. Die Steuerung der regularisierenden Wirkung mittels eines automatisch bestimmten Dämpfungsparameters ist folglich einfacher.



### 1. Ratenunabhängige Lösung

$$\bar{S} = \bar{S}_{n+1} \quad , \quad \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{n+1} \quad , \quad \bar{C} = \bar{C}_{n+1}$$

### 2. Visko-plastische Erweiterung

- Vorwerte

$$\Delta\mu = \frac{\Delta t}{\eta} \quad , \quad \beta = \exp(-\Delta\mu)$$

- Visko-plastische Spannungen

$$S_{n+1}^{vp} = \beta S_n + (1 - \beta) \bar{S} + \frac{1 - \beta}{\Delta\mu} C^{el} \Delta E$$

- Visko-plastische, interne Variablen

$$\kappa_{n+1}^{vp} = \beta \kappa_n + (1 - \beta) \bar{\kappa}$$

- Visko-plastische, algorithmische Materialtangente

$$C_{n+1}^{vp,algo} = \left( \frac{1 - \beta}{\Delta\mu} \right) C^{el} + (1 - \beta) \bar{C}$$

Abb. 4.2: Visko-plastisches Modell nach Duvaut und Lions (1972)

## 5 Kontinuumsschädigungsmechanik

In diesem Kapitel sollen nach einer kurzen physikalischen Motivation des phänomenologischen Schädigungsmodells die grundlegenden Gleichungen der Kontinuumsschädigungsmechanik angegeben werden, die als Basis für die Herleitungen von drei unterschiedlichen Delaminations-schädigungsmodellen (Kapitel 7.3 und 7.4) dienen. Für weiterführende Literatur zu dem Thema der Kontinuumsschädigungsmechanik sei auf Krajcinovic (1996), Kachanov (1986), Simo und Ju (1987), Chaboche (1988), Lemaître und Chaboche (1990) und Lemaître (1996) verwiesen.

### 5.1 Einführung

Die *Kontinuumsschädigungsmechanik* dient im Gegensatz zur Plastizität der phänomenologischen Beschreibung der *Deterioration* (Zerrüttung, Steifigkeitsreduktion) von Materialien. Sie beschreibt dabei im makroskopischen Sinn die auf der Mikro- und Mesoskala stattfindenden Versagensvorgänge und deren Auswirkung auf die jeweils gröbere Skala bis hin zur Makroskala. Auf der Mikroskala findet eine Konzentration von Mikrospannungen in der Nähe von Defekten und Grenzschichten statt, die auf der Mesoskala die Initiierung und das Wachstum von Mikrodefekten und Mikrorissen zur Folge haben. Bei weiterer Belastung wird durch das Zusammenwachsen der Mikrorisse ein makroskopischer Riss entstehen und sichtbar auf der Makroskala wachsen. Dabei kommt es zu einem völligen Verlust der Materialsteifigkeit und häufig zur Akkumulation der Schädigung in Versagensbändern.

Bei der idealisierten Betrachtung des Deteriorationsvorgangs von Materialien wird angenommen, dass sich die Schädigung lediglich auf die elastischen Materialparameter auswirkt, d.h. eine *Degradation* (Herabsetzen) der elastischen Materialparameter stattfindet. Dies lässt sich so motivieren, dass man sich die Schädigung als eine Reduktion der atomistischen Verbindungen auf der atomaren Ebene vorstellt. Im Gegensatz zur Plastizität entstehen bei der Elasto-Schädigung daher keine bleibenden Verformungen bzw. keine irreversiblen Dehnungen. Bei vollständiger Entlastung geht die Spannungs-Dehnungs-Beziehung somit wieder auf den Ursprung zurück, siehe Abb. 5.1a). In der Realität weisen Materialien oft eine Kombination aus Materialdegradation und plastischen Erscheinungen auf, was durch eine Kopplung von Schädigungs- und Plastizitätsmodell beschreibbar ist. Dies wird in dieser Arbeit allerdings nicht angewendet.

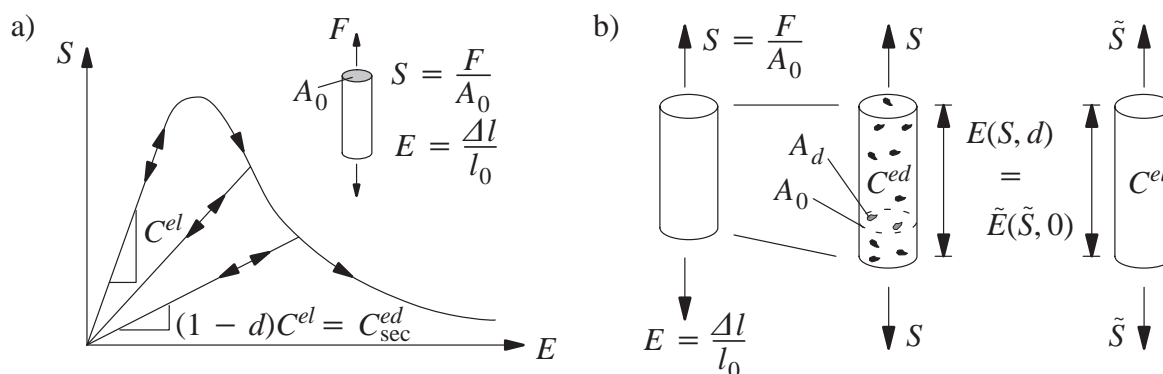


Abb. 5.1: a) Schematische Darstellung eines schädigenden Materials  
 b) „Effektive Spannungen“ – „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“

Die Grundlagen der Kontinuumsschädigungsmechanik wurden in der Arbeit von Kachanov (1958) gelegt. Dort wurde zur phänomenologischen Beschreibung der Degradation von Materialeigenschaften eine skalare Größe  $\delta = (A_0 - A_d)/A_0$  mit  $1 \geq \delta \geq 0$  eingeführt, die die Kontinuität des Materials beschreibt, wobei  $A_0$  die ursprünglich ungeschädigte Ausgangsfläche und  $A_d$  die geschädigte Fläche darstellt, siehe Abb. 5.1b). Kurz darauf stellte Rabotnov (1963, 1968) das „Konzept der effektiven Spannungen“ vor, das den Zusammenhang zwischen den nominalen von außen anliegenden Spannungen  $S$  und den effektiven im geschädigten Material herrschenden Spannungen  $\tilde{S}$  herstellt, siehe auch Hayhurst (1972) bzw. Leckie und Hayhurst (1974) und Abb. 5.1b). In weiterer Folge gelang es mit der Einführung einer internen Variable in Form eines *skalaren Schädigungsparameters*  $d := A_d/A_0$ , das Konzept der isotropen 1-Parameter Kontinuumsschädigungsmechanik im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse aufzubereiten, siehe Lemaître (1983, 1984), Krajcinovic (1983), Kachanov (1986) und Chaboche (1988). Mittlerweile existiert eine Vielzahl von verschiedenen Schädigungsmodellen, die unterschiedliche Versagensphänomene in Materialien berücksichtigen. Dies sind zum Beispiel Modelle für die duktile Schädigung, die Kriechschädigung, die Ermüdungsschädigung sowie die viskose Schädigung, siehe beispielsweise Murakami (1987a) sowie Skrzypek und Ganczarski (1999). Eine sehr gute zusammenfassende Klassifizierung und Übersicht isotroper Schädigungsmodelle ist in einer Veröffentlichung von Carol et al. (1994) zu finden.

Erweiterungen der isotropen Kontinuumsschädigungsmodelle zur Berücksichtigung anisotroper Schädigung werden nötig, wenn Materialien in Experimenten ein richtungsabhängiges Schädigungsverhalten aufweisen. Anschaulich betrachtet, bedeutet dies, dass die Mikroporen nicht mehr kugelförmig, sondern die Form von Mikrorissen annehmen, die orthogonal zur Richtung der maximalen Hauptspannung orientiert sein können. Innerhalb der Schädigungsformulierung kann die Anisotropie durch die Einführung vektor- oder tensorwertiger Schädigungsvariablen berücksichtigt werden, siehe Skrzypek und Ganczarski (1999). Die Theorie der Schädigungsbeschreibung über tensorwertige Schädigungsvariablen wurde wesentlich durch die Arbeiten von Murakami (1987b), Murakami und Ohno (1981), Cordebois und Sidoroff (1982), Sidoroff (1981) und Chaboche (1993, 1999) bereitgestellt. Eine gute Übersicht bietet auch Carol et al. (2001). Es bleibt allerdings anzumerken, dass die physikalische Interpretation der einzelnen Komponenten und ihre Identifikation bei höherwertigen Schädigungstensoren immer schwieriger wird.

## 5.2 Degradationsmodelle

Zur Beschreibung der Degradation von elastischen Materialeigenschaften stehen verschiedene Anschauungsmodelle zur Verfügung, die sich hinsichtlich der Betrachtungsebene (Mikro-, Meso- und Makroebene) unterscheiden, siehe Lemaître und Chaboche (1990). Häufig wird dabei auf die makroskopische Betrachtung in Form von effektiven Spannungen und/oder effektiven Verzerrungen in Verbindung mit dem ungeschädigten Material zurückgegriffen. Die effektiven Größen sind dabei meist durch eine der folgenden Hypothesen definiert:

- „Effektive Spannungen“ – „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“  
Die Verzerrungen  $\mathbf{E}$ , assoziiert mit dem ungeschädigten Material  $\mathbf{C}^{el}$  unter den effekti-

ven Spannungen  $\tilde{S}$ , sind äquivalent zu den Verzerrungen eines geschädigten Materials  $C^{ed}$  unter den nominalen Spannungen  $S$ , siehe Abb. 5.1b):

$$E = C^{el-1} : \tilde{S} = C^{ed-1} : S \quad \text{mit} \quad \tilde{S} = S/(1-d) . \quad (5.1)$$

- „Effektive Verzerrungen“ – „Hypothese der Spannungsäquivalenz“  
Die Spannungen  $S$ , assoziiert mit dem ungeschädigten Material  $C^{el}$  unter den effektiven Verzerrungen  $\tilde{E}$ , sind äquivalent zu den Spannungen eines geschädigten Materials  $C^{ed}$  unter den nominalen Verzerrungen  $E$  (siehe Cordebois und Sidoroff (1982)):

$$S = C^{el} : \tilde{E} = C^{ed} : E \quad \text{mit} \quad \tilde{E} = (1-d) E . \quad (5.2)$$

- „Effektive Verzerrungen“ – „Hypothese der Energieäquivalenz“  
Die Dichte der im geschädigten Material  $C^{ed}$  gespeicherten Energie unter den nominalen Verzerrungen  $E$  ist äquivalent der Energiedichte des ungeschädigten Materials  $C^{el}$  unter den effektiven Verzerrungen  $\tilde{E}$  (siehe Cordebois und Sidoroff (1982)):

$$\Psi = \frac{1}{2} E : C^{ed} : E = \frac{1}{2} \tilde{E} : C^{el} : \tilde{E} \quad \text{mit} \quad \tilde{E} = \sqrt{1-d} E . \quad (5.3)$$

- „Effektive Spannungen“ – „Hypothese der Äquivalenz der Komplementärenergie“  
Die gespeicherte Komplementärenergie des geschädigten Materials  $C^{ed}$  unter den nominalen Spannungen  $S$  ist äquivalent der Komplementärenergie des ungeschädigten Materials  $C^{el}$  unter den effektiven Spannungen  $\tilde{S}$  (siehe Cordebois und Sidoroff (1982)):

$$W = \frac{1}{2} S : C^{ed-1} : S = \frac{1}{2} \tilde{S} : C^{el-1} : \tilde{S} \quad \text{mit} \quad \tilde{S} = S/\sqrt{1-d} . \quad (5.4)$$

Im Folgenden wird das „Konzept der effektiven Spannungen“ in Kombination mit der „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“ angewendet.

### Effektive Spannungen – Verzerrungsäquivalenz

Das „Konzept der effektiven Spannungen“ wurde von Rabotnov (1963) eingeführt und beruht auf der Vorstellung, dass innerhalb eines geschädigten Materials die anliegenden Kräfte nur über die effektive Querschnittsfläche übertragen werden. Diese berechnet sich aus der Differenz von ursprünglich ungeschädigter Querschnittsfläche  $A_0$  und geschädigter Querschnittsfläche  $A_d$ , die durch Mikrorisse und Mikroporen gebildet wird, siehe Abb. 5.1b). Für den eindimensionalen Fall lässt sich somit in anschaulicher Weise schreiben:

$$\tilde{S} := \frac{F}{A_0 - A_d} = \frac{F/A_0}{1 - A_d/A_0} = \frac{S}{1-d} \quad \text{mit} \quad d := \frac{A_d}{A_0} . \quad (5.5)$$

Gleichung (5.5) beschreibt somit den Zusammenhang zwischen den effektiven, im Material herrschenden Spannungen  $\tilde{S}$ , und den nominalen, von außen anliegenden Spannungen  $S$ . Es ist offensichtlich, dass die effektiven Spannungen  $\tilde{S}$  größer sind als die nominalen Spannungen  $S$ .

Für den dreidimensionalen Fall und unter der Annahme einer allgemeinen anisotropen Schädigung kann man Gleichung (5.5) auf

$$\tilde{S} := (I - D)^{-1} : S \quad (5.6)$$

erweitern, wobei  $I$  den vierstufigen Einheitstensor und  $D$  einen vierstufigen Schädigungstensor bezeichnet. Für den Sonderfall der isotropen Schädigung, d.h. die Schädigung wirkt sich in alle

Richtungen gleich aus (kugelförmige Mikroporen), kann der Schädigungstensor durch den mit einer skalaren Schädigungsvariable  $d$  skalierten Einheitstensor dargestellt werden:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} d \quad . \quad (5.7)$$

So folgt schließlich aus (5.6) für die effektiven Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}$ :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{(1 - d)} \mathbf{S} \quad . \quad (5.8)$$

Durch Einsetzen der effektiven Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}$  nach Gleichung (5.8) in den Ausdruck für die „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“ (Gleichung (5.1)) gewinnt man den vierstufigen Materialtensor  $\mathbf{C}^{ed}$  der Elasto-Schädigung

$$\mathbf{C}^{ed} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} \quad . \quad (5.9)$$

**Anmerkung:** Das „Konzept der effektiven Spannungen“ in Kombination mit der „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“ wird üblicherweise innerhalb verzerrungsbasierter Materialmodelle angewendet, d.h. bei Schädigungsfunktionen, die im Verzerrungsraum definiert sind. Weiterhin bemerkenswert ist die gegenüber spannungsbasierter Modelle einfachere algorithmische Umsetzung.

### 5.3 Isotrope 1-Parameter Elasto-Schädigung

Unter Anwendung des „Konzepts der effektiven Spannungen“ in Verbindung mit der „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“ lässt sich die Materialdegradation in ihrer einfachsten Form der isotropen Schädigung über eine skalare Schädigungsvariable  $d$  ( $0 \leq d \leq 1$ ) beschreiben. Dabei bezeichnet  $d = 0$  den ungeschädigten und  $d = 1$  den vollständig geschädigten Zustand. Die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  ist als Funktion der Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und der Schädigungsvariablen  $d$  wie folgt definiert:

$$\Psi(\mathbf{E}, d) = (1 - d)\Psi^0(\mathbf{E}) \quad . \quad (5.10)$$

Die gespeicherte Energie  $\Psi^0(\mathbf{E})$  des ungeschädigten Kontinuums ist durch die zweifache doppelte Verjüngung des Materialtensors  $\mathbf{C}^{el}$  mit den Verzerrungen  $\mathbf{E}$  gegeben:

$$\Psi^0(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} \quad . \quad (5.11)$$

Die freie Energie  $\Psi$  kann somit als die mit dem Faktor  $(1 - d)$  gewichtete, gespeicherte Energie  $\Psi^0(\mathbf{E})$  des ungeschädigten Materials aufgefasst werden. Der Schädigungsparameter  $d$  stellt hierbei die interne Variable dar.

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muss die innere Dissipation während des Schädigungsprozesses positiv sein. Für isotherme Prozesse geht hieraus die isotherme „Clausius-Duhem-Ungleichung“  $D = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi} \geq 0$  hervor, deren Auswertung nach Coleman und Noll (1963) bzw. nach Coleman und Gurtin (1967) die Definition des Spannungstensors als energetisch konjugierte Größe zu den Verzerrungen liefert:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} \quad . \quad (5.12)$$

Weiterhin kann man die *Energiefreisetzungsrates*  $Y$  als energetisch konjugierte Größe zu der Schädigungsvariablen  $d$  ableiten:

$$Y = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} = \Psi^0(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} \quad . \quad (5.13)$$

Die reduzierte Dissipationsungleichung lautet somit:

$$D^{red} = Y \dot{d} \geq 0 \quad . \quad (5.14)$$

In der Kontinuumsschädigungsmechanik ist es üblich, eine verzerrungsbasierte *Schädigungsfunktion*  $\Phi$  zu definieren, die sich beispielsweise aus der Differenz einer Funktion  $\phi$  in Abhängigkeit der *Vergleichsverzerrung*  $\bar{\epsilon}_v$  und der Schädigungsvariablen  $d$  ergibt:

$$\Phi(\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}), d) = \phi(\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E})) - d \leq 0 \quad . \quad (5.15)$$

Die Größe und die Form der im Hauptverzerrungsraum darstellbaren Schädigungsfunktion  $\Phi$  hängt von der aktuellen Schädigungsvariable  $d$  sowie der Definition für die Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  ab. Grundsätzlich stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, um die tensoriellen Größen in Form des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  auf eine skalare Vergleichsgröße abzubilden. So kann die Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  eine Funktion der Invarianten der Verzerrungen  $(I_1, J_2)$ , der positiven Hauptverzerrungen  $\langle E_I \rangle$  oder der Energiefreisetzungsrates  $Y$  sein, siehe beispielsweise Lemaître und Chaboche (1990). Wird die Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  mit der Energiefreisetzungsrates  $Y$  gleichgesetzt, also

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := Y = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} \quad , \quad (5.16)$$

so spricht man im Sinne von Carol et al. (1994) von einer *assoziierten Schädigungsformulierung*. Die partielle Ableitung der Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  nach den Verzerrungen  $\mathbf{E}$  entspricht dann den effektiven Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}$ , siehe Gleichung (5.30), oder ist ein Vielfaches von  $\tilde{\mathbf{S}}$ . In Analogie zur Plastizität führt die assoziierte Formulierung auf eine symmetrische elasto-geschädigte Materialtangente, siehe Gleichung (5.32).

Weitere Möglichkeiten zur Definition der Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  sind u.a. in gesammelter Form in Jirásek (1999) und Kuhl (2000) zu finden. Definitionen für die Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$ , die ebenfalls auf eine assoziierte Formulierung führen, sind:

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := \sqrt{\mathbf{E} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E}} \quad \text{nach Simo und Ju (1987)} \quad , \quad (5.17)$$

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E}} \quad \text{nach Ju (1989)} \quad . \quad (5.18)$$

Hingegen gehen *nicht-assoziierte Schädigungsformulierungen* beispielsweise aus folgenden Ansätzen für die Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  hervor:

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := \sqrt{\mathbf{E} : \mathbf{E}} \quad \text{nach Lemaître (1984)} \quad , \quad (5.19)$$

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle E_I \rangle^2} \quad \text{nach Mazars und Pijaudier-Cabot (1989)} \quad , \quad (5.20)$$

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad \text{nach de Vree et al. (1995)} \quad . \quad (5.21)$$

Nicht-assoziierte Schädigungsformulierungen finden insbesondere bei der Modellierung von Beton und Böden ihre Anwendung. Da primär eine Schädigung unter Zugbeanspruchung auf-

tritt, kann dies durch den positiven Anteil der Hauptverzerrungen  $\langle E_I \rangle$  berücksichtigt werden, siehe Mazar und Pijaudier-Cabot (1989). In Gleichung (5.20) bezeichnet  $\langle x \rangle$  die Rampenfunktion mit  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ . Es gehen somit nur positive Hauptverzerrungen in das Kriterium ein. De Vree et al. (1995) beziehen die erste Invariante des Verzerrungstensors sowie die zweite Invariante des Verzerrungsdeviators in die Definition der äquivalenten Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  mit ein, siehe Gleichung (5.21). Es kann somit in Kombination mit den Modell- und Materialparametern  $k_0, k_1$  und  $k_2$  ein unterschiedliches Zug- und Druckverhalten abgebildet werden, das vor allem bei Beton anzutreffen ist.

Wird innerhalb des Belastungsprozesses das Postulat vom Maximum der Dissipation angewendet, kann die reduzierte Dissipationsungleichung (5.14) in ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Schädigungsfunktion  $\Phi$  als Nebenbedingung überführt werden (vergleiche Luenberger (1984)). Hierzu wird die Schädigungsfunktion (5.15) über einen Lagrange-Multiplikator  $\dot{\gamma}$  in die Dissipationsungleichung eingebracht. Die Stationaritätsbedingung der zugehörigen Lagrange-Funktion lautet:

$$L = -D^{red} + \dot{\gamma}\Phi = -Y\dot{d} + \dot{\gamma}(\phi(Y) - d) \rightarrow \text{stat.} \quad (5.22)$$

Das Lösen von Gleichung (5.22) liefert die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable  $d$  als Funktion des Lagrange-Multiplikators  $\dot{\gamma}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -\dot{d} + \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial Y} = 0 \rightarrow \dot{d} = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial Y} . \quad (5.23)$$

Die weitere Auswertung der Lagrange-Funktion (5.22) führt auf die Kuhn-Tucker-Bedingungen in der bekannten Form

$$\Phi(Y, d) \leq 0 , \quad \dot{\gamma} \geq 0 , \quad \Phi(Y, d) \dot{\gamma} = 0 , \quad (5.24)$$

sowie auf die Konsistenzbedingung

$$\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0 . \quad (5.25)$$

Im Fall der Schädigungszunahme ( $\dot{\gamma} > 0$ ) folgt nach Simo und Ju (1987) aus der Konsistenzbedingung (5.25) und unter der Voraussetzung einer monoton steigenden Funktion  $\phi$  die Evolutionsgleichung für den Lagrange-Multiplikator  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = \dot{Y} . \quad (5.26)$$

Dieser kann auch als Geschichtsparemeter aufgefasst werden und ist ebenfalls in expliziter Form darstellbar. In der Belastungsgeschichte  $]-\infty; \tau]$  ergibt er sich als der maximal erreichte Wert der Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$ , die nach Gleichung (5.16) mit der Energiefreisetzungsrate  $Y$  identifiziert wurde. Mit der Bedingung  $\Phi = 0$  im Schädigungsfall kann die folgende explizite Darstellung für die Schädigungsvariable  $d$  angegeben werden:

$$d = \phi(\gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma = \max \left( Y_i , \max_{-\infty < t < \tau} Y \right) . \quad (5.27)$$

Hierbei beschreibt  $Y_i$  einen Schädigungsschwellwert für das anfänglich ungeschädigte elastische Material, während  $\phi(\gamma)$  der Schädigungsevolution entspricht.

**Anmerkung:** Aufgrund der expliziten Abhängigkeit des Lagrange- bzw. Geschichtsparameters  $\gamma$  von der maximal erreichten Energiefreisetzungsrates  $Y$  (Gleichung (5.27)), ist im Gegensatz zur Plastizität keine lokale Iteration zur Berechnung der aktualisierten Größen wie Spannungen und internen Variablen nötig, siehe Simo und Ju (1987) und Ju (1989).

## 5.4 Elasto-geschädigte Materialtangente

Die Beziehung zwischen der Spannungs- und der Verzerrungsrate ( $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}_{tan}^{ed} : \dot{\mathbf{E}}$ ) liefert die Definition der Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  für die Elasto-Schädigung. So lautet die zeitliche Ableitung von Gleichung (5.12)

$$\dot{\mathbf{S}} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{d} \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} \quad , \quad (5.28)$$

mit der Rate für die Schädigungsvariable

$$\dot{d} = \frac{\partial \phi(\gamma)}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = \frac{\partial \phi(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial Y} \dot{Y} = \frac{\partial \phi(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \quad . \quad (5.29)$$

Unter Berücksichtigung des zugrunde liegenden „Konzepts der effektiven Spannungen“ lässt sich die partielle Ableitung der Energiefreisetzungsrates (5.13) nach den Verzerrungen angeben

$$Y = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}^{el} : \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{S}} \quad . \quad (5.30)$$

Ferner gilt

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Y} = \begin{cases} 1 & \text{für weitere Schädigung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (5.31)$$

Über Gleichung (5.28) kann damit die Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  der Elasto-Schädigung gewonnen werden

$$\mathbf{C}_{tan}^{ed} = \mathbf{C}_{sec}^{ed} - \frac{\partial \phi(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial Y} \tilde{\mathbf{S}} \otimes \tilde{\mathbf{S}} \quad . \quad (5.32)$$

Der Sekantenmodul für die isotrope Elasto-Schädigung wurde dabei wie folgt eingeführt

$$\mathbf{C}_{sec}^{ed} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} \quad . \quad (5.33)$$

Wie aus Gleichung (5.32) ersichtlich ist, erfolgt bei der isotropen 1-Parameter Schädigung die Reduktion der Steifigkeiten ebenfalls isotrop, d.h. die verschiedenen Richtungen reduzieren sich proportional zueinander und richtungsunabhängig. Weiterhin sei noch auf die Symmetrie von  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  hingewiesen, die aus Gleichung (5.32) ersichtlich ist und durch die assoziierte Schädigungsformulierung entsteht. Ebenfalls ist zu erwähnen, dass für eine allgemeine isotrope Schädigung eigentlich zwei Schädigungsvariablen nötig sind, da isotropes, elastisches Material durch zwei unabhängige Materialkonstanten (Elastizitätsmodul und Querdehnzahl) beschrieben wird. Für jede Materialkonstante ist daher eine eigene Schädigungsvariable einzuführen. Bei der isotropen Schädigung mit nur einer skalaren Schädigungsvariablen  $d$  wird jedoch die zusätzliche Annahme getroffen, dass die Querdehnzahl unabhängig von der Schädigung sei, vergleiche Ju (1990).



**Anmerkung:** Trotz der Verwendung des inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahrens ist keine Modifikation der geschädigten Materialtangente nötig, da der Geschichtsparemeter  $\gamma$  explizit von der maximal erreichten Energiefreisetzungsrare  $Y$  (Gleichung (5.27)) abhängt, siehe beispielsweise Simo und Ju (1987) und Ju (1989).

## 5.5 Berücksichtigung viskoser Effekte

Aus zahlreichen Versuchsergebnissen ist bekannt, dass Faserverbundwerkstoffe, wie beispielsweise Glasfasern in einer Epoxid-Matrix, ein ausgeprägt viskoses Verhalten aufweisen können (Lataillade et al. (1993)). Mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit steigt die Materialfestigkeit an und die Schädigungsentstehung findet verzögert statt, siehe beispielsweise Frassine und Pavan (1995) und Corigliano et al. (1998). Zur Berücksichtigung viskoser Effekte wird in Analogie zur Viskoplastizität nach Perzyna (1966) die Evolutionsgleichung des Schädigungsmultiplikators  $\dot{\gamma}$  direkt als konstitutive Gleichung eingeführt und nicht mehr aus der Konsistenzbedingung gewonnen, siehe auch Sluys (1992) und Wang (1997). Die Evolutionsgleichung kann beispielsweise wie folgt lauten:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\langle \Phi(\gamma(Y), d) \rangle}{\gamma_0} \right]^n = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\langle \phi(\gamma) - d \rangle}{\gamma_0} \right]^n . \quad (5.34)$$

Dabei stellt  $\eta$  den Viskositätsparameter mit der Einheit einer Zeit dar, während  $n$  ein dimensionsloser Modellparameter ist. In Gleichung (5.34) bezeichnet  $\langle x \rangle$  die Rampenfunktion mit  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ .

Mit Gleichung (5.29) lautet die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable

$$\dot{d} = \frac{\partial \phi(\gamma)}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = \frac{\partial \phi(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\langle \phi(\gamma) - d \rangle}{\gamma_0} \right]^n . \quad (5.35)$$

Für weitere Schädigungsgesetze, die viskose Effekte berücksichtigen, wird auf Ladevèze (1992), Dubé et al. (1996), Allix und Deü (1997), Faria et al. (1998) oder Corigliano und Allix (2000) verwiesen. Exemplarisch sei noch die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable aus Allix et al. (1997) dargestellt:

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} [1 - \exp(-a' \langle \phi(Y) - d \rangle)] . \quad (5.36)$$

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass die Verwendung ratenabhängiger konstitutiver Modelle eine Zeitskala mit physikalischer Bedeutung und einen Viskositätsparameter  $\eta$  mit der Einheit einer Zeit einführt. Der Viskositätsparameter lässt sich durch Multiplikation mit der elastischen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c^{el}$  in Bezug auf eine interne Länge setzen, siehe Kapitel 4.3 oder Sluys (1992). Das transiente bzw. quasistatische Problem behält dadurch bei Entfestigung auch im postkritischen Bereich seine Hyperbolizität bzw. Elliptizität, siehe beispielsweise de Borst et al. (1993), Sluys und de Borst (1994) und Needleman (1998).

# 6 Versagensindikatoren und anisotropes Plastizitätsmodell

## 6.1 Einführung

Wie in Kapitel 2 schon gezeigt wurde, ist das Versagen von Faserverbundwerkstoffen durch vielfältige lokale Versagensvorgänge gekennzeichnet. Der Begriff „Versagen“ ist an dieser Stelle eigentlich irreführend, da ein erstes Anzeichen der Schädigung noch nicht zu einem sofortigen und totalen Ausfall der Struktur führen muss, der durch das Zerbrechen in mehrere Teile charakterisiert ist. Somit kann das erste Versagen nicht mit dem endgültigen Versagen gleichgesetzt werden; im Gegenteil, es muss insbesondere bei geschichteten Strukturen, also bei Laminaten, zwischen dem sogenannten ‘*First-Ply-Failure*’ (FPF) und dem ‘*Last-Ply-Failure*’ (LPF) differenziert werden. Der Begriff des ‘*First-Ply-Failure*’ kommt dabei aus der Vorstellung, die Einzelschicht (‘*Ply*’) versagt, wenn der darin herrschende Spannungszustand ein makroskopisches Versagenskriterium verletzt. Das Versagenskriterium fungiert hier als *Versagensindikator*, der lediglich den Beginn des Versagens anzeigt und keine Aussage über die weitere Schädigung und über das endgültige Versagen liefert. Wird das Ansprechen des Versagensindikators mit dem endgültigen Versagen gleichgesetzt und somit die Resttragfähigkeit vernachlässigt, kann je nach Versagensart und Belastungsbedingungen die Anfangsschädigungslast (‘*First-Ply-Failure*’-Last) weit auf der sicheren Seite liegen. Im Hinblick auf die hohen Kosten der Faserverbundwerkstoffe ist es jedoch sinnvoll, die Resttragfähigkeit zu berücksichtigen und die Versagenslast bzw. die ‘*Last-Ply-Failure*’-Last zu bestimmen. Dazu ist die Beschreibung des Nachbruchverhaltens bis hin zum endgültigen Versagen, also die Modellierung des fortschreitenden Versagens nötig.

Eine sehr einfache Möglichkeit, das entfestigende Nachbruchverhalten zu beschreiben, besteht darin, bestimmte Steifigkeitswerte bei Verletzung des Versagenskriteriums gleich Null zu setzen. Diese Methode wird häufig in der Literatur als ‘*Ply-Failure-Distribution*’-Methode oder auch als ‘*Stiffness-Reduction*’-Methode bezeichnet. Dass das Versagenskriterium einen eindeutigen Versagensmode liefert, ist Voraussetzung hierfür. Dementsprechend werden die dazugehörigen Steifigkeitswerte zu Null gesetzt, siehe beispielsweise Lee (1982), Chen et al. (1985), Hwang und Sun (1989), Tolson und Zebaras (1991) und Schulz (1996). Die Methode basiert auf der Annahme, dass die aus der Schädigung resultierende Veränderung des Kontinuums durch Veränderungen der konstitutiven Gleichungen wiedergegeben werden kann (Allen et al. (1987)).

Allerdings treten sowohl bei der Berechnung von FPF-Lasten als auch bei einem Vorgehen nach der ‘*Stiffness-Reduction*’-Methode Probleme auf, sofern Spannungskonzentrationen oder Singularitäten vorhanden sind. Die Berechnung von Spannungen auf Basis der Elastizitätstheorie ist an diesen Stellen zwar gültig, nicht mehr aber unbedingt sinnvoll, da bei einer Netzverfeinerung die Versagenslast nicht gegen einen endlichen Grenzwert, sondern infolge der Spannungssingularität gegen Null strebt. Die Ergebnisse sind daher netzabhängig und nur eingeschränkt brauchbar. Bei der Simulation des entfestigenden Materialverhaltens ist demnach ein Kriterium nötig, das folgende Punkte überprüft: Es muss einerseits ein spannungs- oder verzerrungsbasiertes Versagenskriterium verletzt und andererseits die Bruchenergie, freigesetzt bei einem Riss-

wachstum, größer als die kritische Bruchenergie  $G_c$  sein. Sind beide Punkte erfüllt, stellt dies ein hinreichendes Kriterium für den Rissfortschritt dar. Ein weiterer Nachteil bei der ‘*Stiffness-Reduction*’-Methode ist das Auftreten von Konvergenzproblemen auf Strukturebene, weil die Steifigkeitswerte in den konstitutiven Gleichungen abrupt herabgesetzt werden.

Wird der Versagensindikator entweder innerhalb einer Plastizitätsformulierung als Fließbedingung oder innerhalb einer Schädigungsformulierung als Schädigungsbedingung verwendet, so kann das Nachbruchverhalten über Evolutionsgesetze abgebildet werden. Berücksichtigen diese noch zusätzlich die kritische Bruchenergie  $G_c$ , kann der entfestigende Versagensvorgang zuverlässig wiedergegeben werden. Die Plastizitätsformulierung ist dabei in der Lage, sowohl ver- als auch entfestigendes Verhalten zu beschreiben, während die Schädigungsformulierung üblicherweise nur ein entfestigendes Verhalten wiedergeben kann.

Im folgenden Kapitel 6.2 werden zunächst verschiedene Versagensindikatoren zur Berechnung von Anfangsschädigungslasten vorgestellt und miteinander verglichen. Dies ist nötig, da einige dieser Kriterien innerhalb einer Plastizitäts- oder einer Schädigungsformulierung verwendet werden. Bei den meisten Versagenskriterien ist der anliegende Spannungszustand die maßgebliche Eingangsgröße, so dass eine genaue kinematische Beschreibung des Deformationszustandes in Kombination mit einem vollständig dreidimensionalen Werkstoffgesetz unbedingt nötig ist. Das im Kapitel 3.2 vorgestellte mehrschichtige Schalenmodell erfüllt mit seiner höherwertigen Kinematik diese Anforderungen und kann daher zur Simulation von Faserverbundstrukturen eingesetzt werden.

Auf Basis des Hoffman-Versagenskriterium wird in Kapitel 6.3 ein Plastizitätsmodell vorgestellt, mit dem ein anisotrop verfestigendes Materialverhalten abgebildet werden kann. Für beide Unterkapitel 6.2 und 6.3 sind die in Kapitel 2.4 vorgestellten Modellierungsaspekte, die von einer homogenisierten Einzelschicht mit bekannten effektiven Festigkeitswerten ausgehen, zu berücksichtigen.

Eine gute Übersicht von verschiedenen in der Literatur verfügbaren Versagenskriterien bzw. -indikatoren sowie von Kriterien zur Beschreibung des Nachbruchverhaltens geben die Arbeiten von Tsai (1984), Nahas (1986), Dorninger (1989), Dorninger und Rammerstorfer (1990), Hult und Rammerstorfer (1994) und Puck (1996).

## 6.2 Versagensindikatoren

Im Folgenden werden einige gängige Versagensindikatoren zur Berechnung von Anfangsschädigungslasten vorgestellt. Die gleichzeitige Bestimmung des maßgeblichen Versagensmodes ist dabei im Hinblick auf die Erweiterung der Indikatoren zur Beschreibung des entfestigenden Nachbruchverhaltens oft vorteilhaft. Man unterscheidet daher zwischen Kriterien, die ohne eine Interaktion verschiedener Spannungs- oder Verzerrungskomponenten den Versagensmode bestimmen (‘*Independent-Failure-Criteria*’, Kapitel 6.2.1) und Kriterien, die eine Interaktion berücksichtigen, aber im Regelfall keine Information über die Versagensart liefern (‘*Polynomial-Failure-Criteria*’, Kapitel 6.2.2 und 6.2.3). Einen Sonderfall stellen dabei die ‘*Direct-Mode*’-Kriterien dar (Kapitel 6.2.4), die eine Interaktion ausgewählter Spannungskomponenten berücksichtigen, aber dennoch durch die Definition verschiedener Subkriterien eine Aussage über den vorliegenden Versagensmode liefern.

### 6.2.1 Maximalspannungs- und Maximalverzerrungskriterium

Beim Maximalspannungskriterium (Chen (1985), Gerstle (1985), Stanovsky (1985), Takahashi (1987)) wird angenommen, dass keine Interaktion zwischen den einzelnen Spannungskomponenten vorhanden ist. Vielmehr wird von einem Versagen ausgegangen, wenn eine Komponente des in die Materialhaupttrichtung transformierten Spannungsvektors, unabhängig von den weiteren Komponenten, den entsprechenden Festigkeitswert erreicht. Das Maximalspannungskriterium kann somit durch mehrere unabhängige Subkriterien angegeben werden:

$$|S_{ij}| \geq \begin{cases} \bar{S}_{ij}^t & \text{für } ij = 11, 22, 33 \text{ und } S_{ij} > 0 \\ \bar{S}_{ij}^c & \text{für } ij = 11, 22, 33 \text{ und } S_{ij} < 0 \\ \bar{S}_{ij} & \text{für } ij = 12, 23, 13 \end{cases} . \quad (6.1)$$

In Gleichung (6.1) werden dabei die folgenden Festigkeitswerte in Materialhaupttrichtung (lokales Materialkoordinatensystem, siehe Abb. 2.2) verwendet. Zusätzlich geht man von vorzeichenunabhängigen Schubfestigkeiten aus:

$$\begin{array}{ll} \bar{S}_{11}^t & \text{Längszugfestigkeit} & \bar{S}_{12} & \text{Schubfestigkeit} \\ \bar{S}_{11}^c & \text{Längsdruckfestigkeit} & \bar{S}_{23} & \text{Schubfestigkeit} \\ \bar{S}_{22}^t & \text{Querzugfestigkeit} & \bar{S}_{13} & \text{Schubfestigkeit} \\ \bar{S}_{22}^c & \text{Querdruckfestigkeit} & 1 \hat{=} & \text{Faserlängsrichtung} \\ \bar{S}_{33}^t & \text{Querzugfestigkeit} & 2 \hat{=} & \text{quer zur Faserrichtung} \\ \bar{S}_{33}^c & \text{Querdruckfestigkeit} & 3 \hat{=} & \text{quer zur Faserrichtung} \end{array} . \quad (6.2)$$

Die neun unabhängigen Materialparameter können aus jeweils drei einaxialen Zug- und Druckversuchen sowie drei Schubversuchen bestimmt werden.

Sofern das Hooke'sche Materialgesetz bis zum Bruch gültig ist, lässt sich das Maximalspannungskriterium auch alternativ als Maximalverzerrungskriterium formulieren (Stanovsky (1985)):

$$|E_{ij}| \geq \begin{cases} \bar{E}_{ij}^t & \text{für } ij = 11, 22, 33 \text{ und } E_{ij} > 0 \\ \bar{E}_{ij}^c & \text{für } ij = 11, 22, 33 \text{ und } E_{ij} < 0 \\ \bar{E}_{ij} & \text{für } ij = 12, 23, 13 \end{cases} . \quad (6.3)$$

Es liefert allerdings nicht die gleichen Versagenslasten wie das Maximalspannungskriterium, da über den Querdehneffekt eine Interaktion bestimmter Spannungskomponenten erfolgt, siehe beispielsweise Altenbach et al. (1996). Weiterhin kann das Maximalverzerrungskriterium gegenüber dem Maximalspannungskriterium von Vorteil sein, da die Verzerrungen an einem Punkt, im Gegensatz zu den Spannungen, messbare Größen sind.

Bei beiden Kriterien ist die einfache Anwendbarkeit und die eindeutige Zuordnung des Versagens in die verschiedenen Arten des Faserzug-, des Schub- und des Querzugversagens (gleiches gilt für Druckbelastung) vorteilhaft. Letzteres kann allerdings auch als Nachteil angesehen werden. Es findet nämlich ein scharfer, diskontinuierlicher Übergang zwischen den einzelnen Versagensarten statt (siehe Abb. 6.1), der in Wirklichkeit nicht zu beobachten ist. Des Weiteren ist ein physikalisch unrealistisches Verhalten bei der Simulation des 'Off-Axis'-Zugversuchs zu erkennen. Bei diesem Versuch wird für veränderliche Faserwinkel jeweils die Versagenslast bzw. die

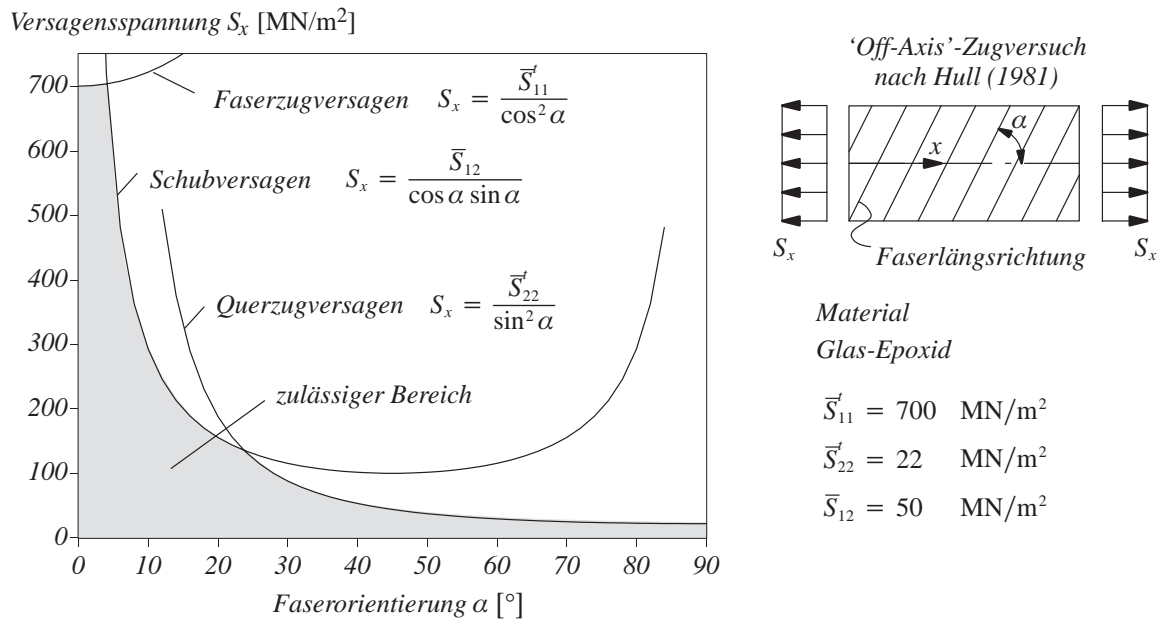


Abb. 6.1: Versagensspannung  $S_x$  aus Maximalspannungskriterium

Versagensspannung  $S_x$  in  $x$ -Richtung ermittelt. Für kleine Faserwinkel  $\alpha$  ist in Abb. 6.1 das unrealistische Anwachsen der Versagensspannung  $S_x$  zu erkennen. Verantwortlich ist hierfür die in Faserrichtung wirkende Spannungskomponente  $S_{11}$ , die sich bei Drehung der Fasern aus der  $x$ -Richtung heraus zunächst verringert, während die Schubspannung  $S_{12}$  erst aufgebaut wird. Da keine Interaktion zwischen der sich aufbauenden Schubspannung und der abfallenden Zugspannung in Faserrichtung stattfindet, wächst die maximal übertragbare Spannung  $S_x$  zunächst an, bis das Schubversagenskriterium maßgebend wird, siehe Abb. 6.1 und Gerstle und Reedy (1985). Man kann hier deutlich die fehlende Interaktion der einzelnen Spannungskomponenten erkennen. Es ist daher erforderlich, Theorien zu verwenden, die innerhalb einer skalaren Gleichung die Interaktion der Spannungskomponenten erfassen und somit eine bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen liefern.

### 6.2.2 Tsai-Wu-Kriterium

Polynomiale Versagenskriterien sind in der Lage, die Interaktion verschiedener Spannungskomponenten zu berücksichtigen. Ein gebräuchlicher Vertreter dieser Gruppe ist das für anisotrope Materialien formulierte Tsai-Wu-Kriterium (Tsai und Wu (1971)), das einen quadratischen Ansatz für die Spannungen verwendet. Es geht aus der allgemeinen Form eines polynomialen Versagenskriteriums nach Gol'denblatt und Kopnov (1965) bzw. Ashkenazi (1965) hervor

$$F(S_{ij}) = A_{ij} S_{ij} + A_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = 1 \quad \text{mit} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad , \quad (6.4)$$

bei der die Festigkeitstensoren  $A_{ij}$  und  $A_{ijkl}$  symmetrische Tensoren zweiter bzw. vierter Stufe darstellen. Die Anzahl der unabhängigen Komponenten von  $A_{ij}$  und  $A_{ijkl}$  beträgt zunächst sechs bzw. 21. Wird davon ausgegangen, dass der verwendete Faserverbundwerkstoff orthotropes Verhalten aufweist und somit gewisse Symmetrieeigenschaften vorliegen (Green (1968) bzw. Tsai und Wu (1971)), reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf drei bzw. neun. Während zur Bestimmung der Komponenten  $A_{ii}$ ,  $A_{iiii}$  und  $A_{ijij}$  (Gleichung (6.5)) einaxiale Zug- bzw. Druckversuche sowie reine Schubversuche ausreichen, müssen die Interaktionsterme

$A_{1122}$ ,  $A_{2233}$  und  $A_{1133}$  durch biaxiale Zug-Zug-, Druck-Druck- und Zug-Druck-Versuche ermittelt werden. Um die Durchführung solch aufwendiger Versuche zu vermeiden, gibt es in der Literatur einige Möglichkeiten zur näherungsweisen Bestimmung der Interaktionsterme, siehe Tsai und Wu (1971), Narayanaswami und Adelman (1977), Hashin (1980), Reddy und Pandey (1987), Dorninger (1989), Klarmann (1991) und Schultz (1996). Durch diese Vereinfachung wird die Anzahl der unabhängigen Komponenten von  $A_{ijkl}$  auf sechs reduziert. Im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen liefert der Ansatz von Reddy und Pandey (1987) eine gute Übereinstimmung. Dieser soll im Folgenden verwendet werden. Die von Null verschiedenen Komponenten der Festigkeitstensoren lassen sich wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
A_{ii} &= \frac{\bar{S}_{ii}^c - \bar{S}_{ii}^t}{\bar{S}_{ii}^c \bar{S}_{ii}^t} & (ii = 11, 22, 33) \quad , \\
A_{iiii} &= \frac{1}{\bar{S}_{ii}^c \bar{S}_{ii}^t} & (iiii = 1111, 2222, 3333) \quad , \\
A_{ijij} &= \frac{1}{4\bar{S}_{ij}^2} & (ijij = 1212, 2323, 1313) \quad , \\
A_{ijjj} &= -\frac{1}{2}\sqrt{A_{iiii} A_{jjjj}} & (ijjj = 1122, 2233, 1133) \quad .
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Die in Gleichung (6.5) benötigten Festigkeitswerte  $\bar{S}_{ii}^t$  für Zug,  $\bar{S}_{ii}^c$  für Druck und  $\bar{S}_{ij}$  für Schub (siehe Gleichung (6.2)) lassen sich über sechs einaxialen Zug- und Druckversuche sowie drei Schubversuche bestimmen. Das unterschiedliche Versagensverhalten bei Zug- bzw. Druckbeanspruchung wird durch den Anteil in Gleichung (6.4) berücksichtigt, der linear im Spannungstensor  $S$  ist. Das Versagenskriterium ist daher auch vom hydrostatischen Spannungsanteil abhängig. Des Weiteren ist zu beachten, dass sich die Festigkeitstensoren  $A_{ij}$  und  $A_{ijkl}$  stets auf die Materialhaupttrichtungen beziehen und somit der Spannungstensor  $S$  in diese Richtung zu transformieren ist.

### 6.2.3 Hoffman-Kriterium

Das von Hoffman (1967) vorgestellte Versagenskriterium ist ebenfalls ein Interaktionskriterium, in das alle Spannungskomponenten eingehen. Es ist nach Hoffman (1967), Narayanaswami und Adelman (1977), Hashin (1980), Schellekens und de Borst (1990) und Klarmann (1991) auf orthotrope Materialien anwendbar und berücksichtigt neben dem deviatorischen Spannungsanteil durch die Einbeziehung linearer Spannungsterme auch den hydrostatischen Anteil, siehe Pankaj et al. (1999). In der ursprünglichen Form lautet das Kriterium

$$\begin{aligned}
&C_1(S_{22} - S_{33})^2 + C_2(S_{33} - S_{11})^2 + C_3(S_{11} - S_{33})^2 \\
&+ C_4S_{11} + C_5S_{22} + C_6S_{33} + C_7(S_{12})^2 + C_8(S_{23})^2 + C_9(S_{13})^2 = 1 \quad .
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Konstanten  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) entsprechen dabei neun unabhängigen Materialparametern, die mittels sechs einaxialen Zug- und Druckversuchen sowie drei Schubversuchen zu bestimmen sind. In Vektor-Matrix-Schreibweise kann das Kriterium auch als

$$F(S) = f(S) - 1 = \frac{1}{2}S^T P S + S^T Q - 1 = 0 \tag{6.7}$$

dargestellt werden. Die Kopplungsgrößen ( $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ) und der Spannungsvektor  $\mathbf{S}$  lauten dabei

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)^T; \quad \mathbf{S} = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{13})^T \quad (6.8)$$

mit

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2(\alpha_4 + \alpha_6) & -2\alpha_4 & -2\alpha_6 \\ -2\alpha_4 & 2(\alpha_4 + \alpha_5) & -2\alpha_5 \\ -2\alpha_6 & -2\alpha_5 & 2(\alpha_6 + \alpha_5) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 6\alpha_7 & 0 & 0 \\ 0 & 6\alpha_8 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha_9 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Die Parameter  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) in den Kopplungsgrößen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  berechnen sich über

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\bar{S}_2 - \bar{S}_1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1}; & \alpha_4 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} + \frac{1}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} - \frac{1}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} \right); \\ \alpha_2 &= \frac{\bar{S}_4 - \bar{S}_3}{\bar{S}_4 \bar{S}_3}; & \alpha_5 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} + \frac{1}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} - \frac{1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} \right); \\ \alpha_3 &= \frac{\bar{S}_6 - \bar{S}_5}{\bar{S}_6 \bar{S}_5}; & \alpha_6 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} + \frac{1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} - \frac{1}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} \right); \\ \alpha_7 &= \frac{1}{3\bar{S}_7^2}; & \alpha_8 &= \frac{1}{3\bar{S}_8^2}; & \alpha_9 &= \frac{1}{3\bar{S}_9^2}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

wobei die folgenden Abkürzungen für die Festigkeitswerte verwendet werden:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \bar{S}_{11}^t; & \bar{S}_2 &= \bar{S}_{11}^c; & \bar{S}_3 &= \bar{S}_{22}^t; & \bar{S}_4 &= \bar{S}_{22}^c; & \bar{S}_5 &= \bar{S}_{33}^t; \\ \bar{S}_6 &= \bar{S}_{33}^c; & \bar{S}_7 &= \bar{S}_{12}; & \bar{S}_8 &= \bar{S}_{23}; & \bar{S}_9 &= \bar{S}_{13}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die in Gleichungen (6.10) und (6.11) benötigten Festigkeitswerte  $\bar{S}_{ii}^t$  für Zug,  $\bar{S}_{ii}^c$  für Druck und  $\bar{S}_{ij}$  für Schub (siehe Gleichung (6.2)) lassen sich über die oben genannten Versuche bestimmen. Der Spannungszustand  $\mathbf{S}$  ist wie schon beim Tsai-Wu-Kriterium in die Materialhauptrichtungen zu transformieren, da sich die Kopplungsgrößen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  auf diese Richtungen beziehen. Ebenso ist bei genauer Betrachtung des Hoffman-Kriteriums eine enge Verwandtschaft zum Tsai-Wu-Kriterium festzustellen und kann aus diesem als Sonderfall hergeleitet werden. Die beiden Kriterien unterscheiden sich nämlich lediglich in der Definition der Interaktionsterme  $A_{ijij}$ . Beispielsweise die Komponente  $A_{1122}$  berechnet sich für die Kriterien wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{1122} &= -\frac{1}{2} \sqrt{A_{1111} A_{2222}} && \text{bei Tsai-Wu-Kriterium,} \\ A_{1122} &= -\frac{1}{2} (A_{1111} + A_{2222} - A_{3333}) && \text{bei Hoffman-Kriterium.} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die weiteren Kopplungsterme ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indices. Das Hoffman-Kriterium ist daher als orthotroper Sonderfall in dem für anisotrope Materialien allgemein formulierten Tsai-Wu-Kriterium beinhaltet, siehe auch Schultz (1996). Wird der lineare Spannungsanteil in Gleichung (6.7) des Hoffman-Kriteriums bzw. in Gleichung (6.4) des Tsai-Wu-Kriteriums weggelassen, so erhält man das Tsai-Hill-Kriterium (Tsai (1968) und Hill (1948)), das zwar Materialhauptrichtungen berücksichtigt, aber keine Unterscheidung bezüglich Zug- und Druckbeanspruchung trifft, siehe Abb. 6.2a) und b) nach Hartmann (2002).

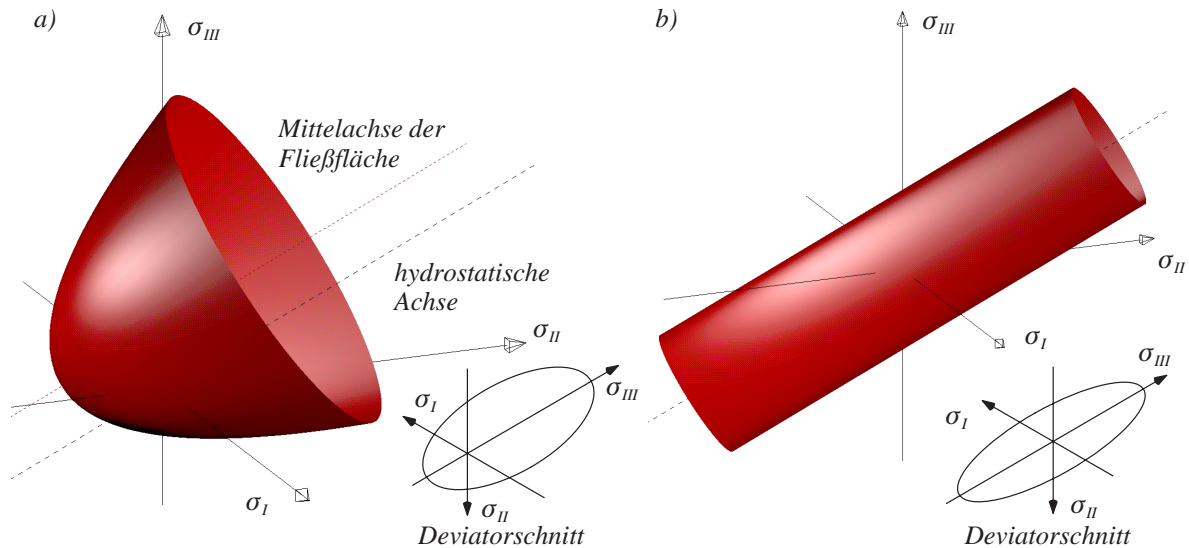
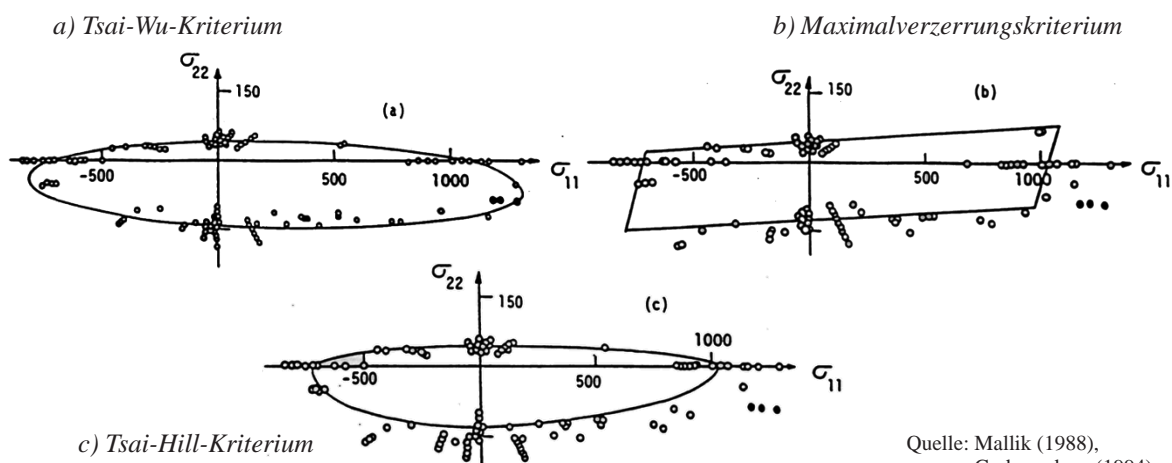


Abb. 6.2: Versagensflächen im Hauptspannungsraum a) Hoffman b) Tsai-Hill

Auf eine physikalische Unzulänglichkeit, die sowohl das Hoffman-, das Tsai-Hill als auch das Tsai-Wu-Kriterium betrifft, soll an dieser Stelle noch kurz hingewiesen werden: Unter der Annahme einer rein einaxialen Zugspannung in Faserlängsrichtung ist die Versagenslast dennoch über die Terme  $\alpha_4, \alpha_6$  und  $\alpha_1$  von der Druckfestigkeit  $\bar{S}_{11}^c$  abhängig. Dies ist physikalisch nur schwer zu motivieren, vergleiche auch Hashin (1980).

Abb. 6.3a) bis 6.3c) zeigen einen Vergleich von experimentellen Ergebnissen im ebenen Spannungszustand mit den Versagenskurven der Kriterien Tsai-Wu-, Tsai-Hill- und dem Maximalverzerrungskriterium. Für alle Kriterien ist die Abweichung zu den Versuchsergebnissen nicht zu groß, wenn auch das Tsai-Wu-Kriterium am besten übereinstimmt. Natürlich besteht auch die Möglichkeit, verschiedene Versagenskriterien zu kombinieren. So verwenden beispielsweise Dorninger (1989) bzw. Dorninger und Rammerstorfer (1990) eine Kombination von Maximalspannungs- und Tsai-Wu-Kriterium, bei dem die Versagensart Faserbruch mit dem Maximalspannungskriterium sowie die Versagensart Matrixbruch mit dem Tsai-Wu-Kriterium beschrie-



Quelle: Mallik (1988), Gudmundson (1994)

Abb. 6.3: Vergleich von experimentellen und analytischen Versagenskurven im ebenen  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$ -Spannungsraum



ben wird. Hierdurch soll die Vorhersage der Versagensart Faserbruch verbessert werden, die im Regelfall vom Tsai-Wu-Kriterium überschätzt wird.

Bei den bisher vorgestellten Kriterien Tsai-Wu, Tsai-Hill und Hoffman kann infolge der Spannungsinteraktion keine direkte Aussage über die genaue Versagensart des Faserverbundwerkstoffes getroffen werden. Zur Beschreibung des Nachbruchverhaltens kann allerdings die Kenntnis der Versagensart wichtig sein. Darüber hinaus sind die Versagensmöglichkeiten von Faserverbundwerkstoffen vielfältig, so dass es unmöglich erscheint, sämtliche Versagensvorgänge mit einem einzelnen Kriterium zu erfassen. Vielmehr ist es nahe liegend und sinnvoll, mehrere Einzelkriterien zu formulieren, die den jeweiligen Versagensarten zugeordnet sind und so zwangsläufig die verschiedenen Versagensarten besser abbilden. Im Unterschied zu den Einzelkriterien des Maximalspannungs- bzw. des Maximalverzerrungskriteriums wird allerdings die Interaktion gewisser versagensrelevanter Spannungskomponenten berücksichtigt. Die nachfolgend beschriebenen Kriterien von Hashin (1980) und Brewer und Lagace (1988) gehören dieser Gruppe der sogenannten ‘*Direct-Mode*’-Kriterien an.

#### 6.2.4 ‘Direct-Mode’-Kriterien

Bei den ‘*Direct-Mode*’-Kriterien nach Hashin (1980) oder Lee (1982) werden für die einzelnen Versagensarten stückweise stetige Kriterien entwickelt, die lineare und/oder quadratische Terme der Spannungskomponenten beinhalten. Das Hashin-Kriterium wurde dabei unter Berücksichtigung der Spannungsinvarianten eines transversal isotropen Materials entwickelt, während das Lee-Kriterium auf rein empirischen Überlegungen basiert. Im Folgenden soll lediglich das Hashin-Kriterium vorgestellt werden, da sich beide Kriterien nur geringfügig unterscheiden.

Das Hashin-Kriterium wurde für transversal isotrope Materialien entwickelt und besteht aus zwei Subkriterien, die den Versagensarten Faserbruch und Matrixbruch zugeordnet sind. Innerhalb dieser Subkriterien wird wiederum hinsichtlich Zug und Druck unterschieden, um dem unterschiedlichen Versagensverhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung von Faserverbundwerkstoffen gerecht zu werden. Die bei den Kriterien von Tsai-Wu und Hoffman genannte physikalische Unzulänglichkeit, dass Versagenslasten bei Zugbeanspruchung von Druckfestigkeiten abhängig sind, kann durch die Einführung der Subkriterien vermieden werden. Die einzelnen Subkriterien des Hashin-Kriteriums lassen sich wie folgt angeben:

*Faserbruch (Zug):*

$$\left(\frac{S_{11}}{\bar{S}_{11}}\right)^2 + \left(\frac{S_{12}}{\bar{S}_{12}}\right)^2 + \left(\frac{S_{13}}{\bar{S}_{13}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } S_{11} > 0 \quad (6.13)$$

*Faserbruch (Druck):*

$$\left(\frac{S_{11}}{\bar{S}_{11}^c}\right)^2 = 1 \quad \text{für } S_{11} \leq 0 \quad (6.14)$$

Matrixbruch (Zug):

$$\frac{(S_{22} + S_{33})^2}{(\bar{S}_{22}^t)^2} + \frac{1}{(\bar{S}_{23})^2} \left( (S_{23})^2 - S_{22}S_{33} \right) + \left( \frac{S_{12}}{\bar{S}_{12}} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\bar{S}_{13}} \right)^2 = 1 \quad \text{für } S_{22} + S_{33} > 0 \quad (6.16)$$

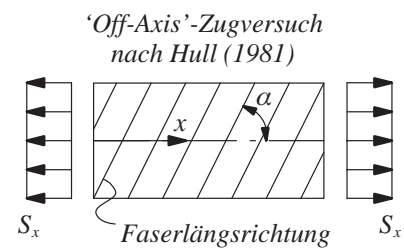
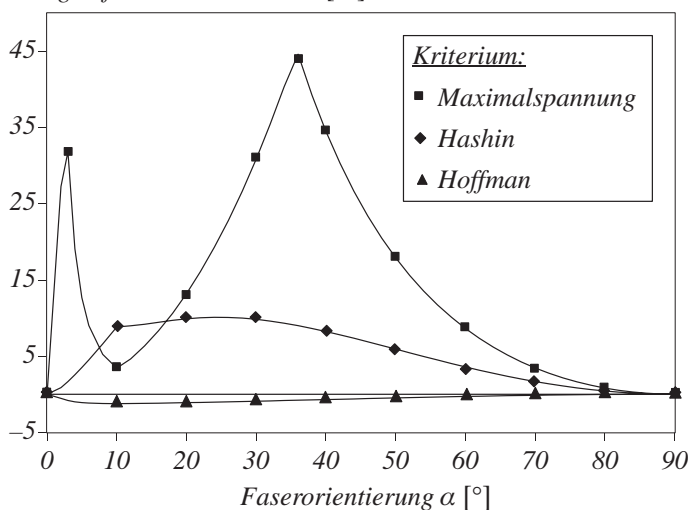
Matrixbruch (Druck):

$$\frac{1}{\bar{S}_{22}^c} \left[ \left( \frac{\bar{S}_{22}^c}{2\bar{S}_{23}} \right)^2 - 1 \right] (S_{22} + S_{33}) + \left( \frac{S_{12}}{\bar{S}_{12}} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\bar{S}_{13}} \right)^2 + \frac{(S_{23})^2 - S_{22}S_{33}}{\bar{S}_{23}^2} + \frac{1}{4\bar{S}_{23}^2} (S_{22} + S_{33})^2 = 1 \quad \text{für } S_{22} + S_{33} \leq 0 \quad (6.15)$$

Abb. 6.4 zeigt einen Vergleich von Maximalspannungs-, Tsai-Wu-, Hoffman- und Hashin-Kriterium. Aufgezeichnet ist die prozentuale Abweichung der Versagensspannung  $S_x$  der einzelnen Kriterien in Bezug auf die Werte des Tsai-Wu-Kriteriums (willkürlich festgelegt) bei einem 'Off-Axis'-Zugversuch mit den angegebenen Materialwerten. Die Abbildung liefert daher keine Aussage über die Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen, sondern vergleicht lediglich die Kriterien untereinander.

Für das Maximalspannungskriterium sind sowohl wesentlich größere Versagensspannungen (bis zu 45%) als auch deutlich die drei Versagensbereiche Faserzug-, Schub- und Querspannung zu erkennen (abrupter Übergang der Versagensarten, vergleiche auch Abb. 6.1). Wesentlich geringere Unterschiede (bis zu 10%) sind beim Hashin-Kriterium festzustellen, da bei diesem Kri-

Prozentuale Abweichung der Versagensspannung  $S_x$  in Bezug auf Tsai-Wu-Kriterium [%]



Materialdaten  
Hwang und Sun (1989)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11}^t &= 1393,0 \text{ MN/m}^2 \\ \bar{S}_{11}^c &= 1448,0 \text{ MN/m}^2 \\ \bar{S}_{22}^t = \bar{S}_{33}^t &= 44,8 \text{ MN/m}^2 \\ \bar{S}_{22}^c = \bar{S}_{33}^c &= 172,4 \text{ MN/m}^2 \\ \bar{S}_{12} = \bar{S}_{23} = \bar{S}_{13} &= 62,1 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

Abb. 6.4: Prozentuale Abweichung der Versagensspannung  $S_x$  in Bezug auf Tsai-Wu-Kriterium (nach Imminger (2001))

terium die Interaktion gewisser versagensrelevanter Spannungskomponenten berücksichtigt wird. Im Bereich für Faserwinkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $10^\circ$  liegt ein Zugversagen der Fasern vor, während im übrigen Bereich die Matrix auf Zug versagt. Die geringsten Abweichungen sind wie erwartet beim Hoffman-Kriterium festzustellen, da es in direkter Verwandtschaft zum Tsai-Wu-Kriterium steht und aus diesem abgeleitet werden kann. Der minimale Unterschied ergibt sich dabei ausschließlich aus der unterschiedlichen Definition der Interaktionsparameter  $A_{1122}$ ,  $A_{2233}$  und  $A_{1133}$ , siehe Gleichung (6.12).

In die Gruppe der ‘*Direct-Mode*’-Kriterien kann auch das Versagenskriterium nach Puck (1992, 1996), das auf den Vorarbeiten von Hashin (1980) basiert, eingeordnet werden. Unter der Annahme eines Sprödbrechens wird dort ein sogenanntes *Zwischenfaserbruchkriterium* (Matrixbruch) hergeleitet, das auf Wirkebenen bezogen ist und darauf bezogene Festigkeitswerte verwendet. Der Grundgedanke liegt darin, dass die Bruchgrenze eines Materials durch die Spannungen in der Bruchebene bestimmt wird (Analogie zur Mohr’schen Festigkeitshypothese). Es muss folglich die Bruchebene bzw. die Orientierung der Bruchebene gefunden werden, für die ein Versagenskriterium die größte Bruchgefahr liefert. Hierzu wird eine faserparallele Versagensebene eingeführt und bei gleichzeitiger Auswertung eines Versagenskriteriums um den Winkel  $\theta$  um die Faserlängsrichtung gedreht. Der numerische Mehraufwand, den die Ermittlung der maßgebenden Bruchebene mit sich bringt, ist wahrscheinlich für die geringe Verbreitung und für die seltene Verwendung verantwortlich.

Innerhalb der Gruppe der ‘*Direct-Mode*’-Kriterien können nicht nur Subkriterien für die interlaminaeren Versagensarten des Faser- und Matrixbruchs definiert werden, sondern es kann auch ein weiteres Kriterium für die intralaminare Versagensart der Delamination eingeführt werden. Polynomiale Versagenskriterien wie Tsai-Wu, Tsai-Hill und Hoffman können dies nicht ohne weiteres, da sie keinem bestimmten Versagensmode zugeordnet sind und sämtliche Spannungskomponenten in das Kriterium eingehen.

Das von Brewer und Lagace (1988) vorgestellte Delaminationskriterium ist ein quadratisches Versagenskriterium, in dem allein die Spannungskomponenten Eingang finden, die für die Initiierung der Delamination als maßgeblich angesehen werden, siehe auch Lagace und Bhat (1992) sowie Lagace (1993). Mit der Unterscheidung hinsichtlich positiver und negativer Spannungen in Dickenrichtung  $S_{33}$  lautet es:

$$\left( \frac{\langle S_{33} \rangle}{\bar{S}_{33}} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\bar{S}_{13}} \right)^2 + \left( \frac{S_{23}}{\bar{S}_{23}} \right)^2 = 1 \quad . \quad (6.17)$$

Sehr häufig ist in der Literatur auch die transversal isotrope Form von Gleichung (6.17) zu finden, die von gleichen Schubfestigkeiten  $\bar{S}_{13}$  und  $\bar{S}_{23}$  ausgeht, siehe beispielsweise Zhou und Sun (1990), Skrna-Jakl und Rammerstorfer (1993), Gruttmann (1996) und Sprenger (2000). Für den Sonderfall, dass die Spannungskomponenten  $S_{22}$  und  $S_{12}$  gleich Null sind, kann das Delaminationskriterium nach Brewer und Lagace auch aus dem Hashin Subkriterium des Matrixbruchs auf Zug hergeleitet werden. Abb. 6.5 zeigt die Versagensfläche nach Gleichung (6.17) im  $S_{13}$ -Spannungsraum. Das Delaminationskriterium dient auch in Kapitel 7 als Indikator zur Feststellung der maßgeblichen Delaminationsstelle. Dort wird anschließend eine Prozessschicht zur Simulation der fortschreitenden Delamination eingesetzt.

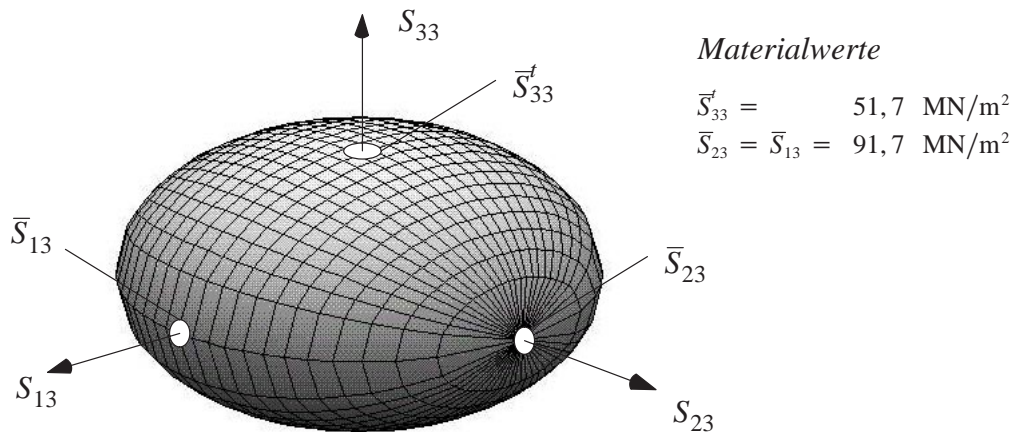


Abb. 6.5: Brewer-Lagace-Delaminationskriterium

### 6.2.5 Bewertung

Abschließend ist somit festzuhalten, dass polynomiale Versagenskriterien, wie beispielsweise das Tsai-Wu- oder das Hoffman-Kriterium, durch die Glattheit ihrer Versagensfläche und somit ihrer stetigen Differenzierbarkeit attraktiv für die numerische Umsetzung innerhalb von Plastizitäts- oder Schädigungsmodellen sind. Nachteilig ist hingegen, dass sie keine direkte und eindeutige Information über den vorliegenden Versagensmode geben, wodurch bei entfestigendem Materialverhalten eine Korrelation zu Bruchenergien der einzelnen Versagensmoden schwierig ist. Weiterhin ist die physikalische Unzulänglichkeit, dass die Last bei Zugversagen von Druckfestigkeitswerten abhängig ist, von Nachteil. ‘Direct-Mode’-Kriterien beseitigen die genannten Nachteile, allerdings bringt es den Verlust der Glattheit der Versagensfläche mit sich, siehe beispielsweise Hashin (1980) und Puck (1996).

## 6.3 Anisotropes Plastizitätsmodell

### 6.3.1 Einführung

Faserverbundwerkstoffe weisen aufgrund ihrer Faserorientierung schon im elastischen Bereich kein isotropes, sondern orthotropes oder transversal isotropes Verhalten auf. Die Strukturantwort von FVW ist somit abhängig von der Belastungsrichtung, wobei der Grad der Anisotropie von dem Volumenanteil, der Faserart, der Faserorientierung sowie dem Matrixmaterial beeinflusst wird. Im elastischen Bereich ist dieses Materialverhalten beispielsweise über ein orthotropes Materialgesetz mit neun unabhängigen Materialparametern und drei ausgeprägten Materialrichtungen beschreibbar.

Im nichtlinearen Bereich kann sich das anisotrope Verhalten natürlich verstärken, wobei sowohl irreversible Verzerrungen als auch die Degradation der Materialsteifigkeiten auftreten können. Abb. 6.6 aus Herakovich (1998) zeigt exemplarisch das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Polymer-Matrix-Verbundwerkstoffes Aramid/Epoxy und des Metall-Matrix-Verbundwerkstoffes Boron/Aluminium bei ‘Off-Axis’-Zugversuchen mit den angegebenen Faserwinkeln. Bei Ara-

mid/Epoxy sind neben einem Hystereseverhalten bleibende Verzerrungen (plastisches Verhalten) und eine geringfügige Abnahme der Steifigkeit (Materialdegradation) zu beobachten. Im Gegensatz hierzu weist Boron/Aluminium keine Materialdegradation und somit keine Schädigung auf. Es entstehen nur irreversible Verzerrungen, die hauptsächlich aus der plastischen Verformung des Matrixmaterials resultieren. Bei weiterer Laststeigerung kann eine Verfestigung auftreten, wobei das Verfestigungsverhalten wiederum entscheidend von der Faserorientierung beeinflusst wird. Es findet daher kein isotropes, sondern ein anisotropes Fließen statt, das zusätzlich eine anisotrope Verfestigung aufweisen kann.

Je nach Anwendungsfall lässt sich aus dem vorliegenden nichtlinearen Materialverhalten entweder die Anwendung eines Plastizitätsmodells oder die Anwendung eines Schädigungsmodells motivieren. Allerdings ist die Wahl des Versagenskriteriums bzw. der Fließfunktion eingeschränkt. Kriterien wie von Mises oder Drucker-Prager sind nicht anwendbar, da sie den richtungsabhängigen Charakter von Faserverbundwerkstoffen nicht beschreiben können. Das Tsai-Hill-Kriterium berücksichtigt zwar diese Eigenschaft, unterscheidet aber nicht hinsichtlich Zug- und Druckbeanspruchung und ist daher ebenfalls nicht geeignet. Hingegen sind Kriterien, wie beispielsweise das Tsai-Wu- oder das Hoffman-Kriterium, hierzu in der Lage, wobei im ersten Fall zwölf und im zweiten neun unabhängige Festigkeitskomponenten zu ermitteln sind. Bei geeigneter Wahl der Interaktionsparameter des Tsai-Wu-Kriteriums, gleichbedeutend mit der Reduktion der unabhängigen Festigkeitskomponenten von zwölf auf neun, sind beide Kriterien äquivalent (siehe Gleichung (6.12)).

In den Veröffentlichungen von Schellekens und de Borst (1990) sowie Klarmann (1991) wird das Hoffman-Kriterium innerhalb der Plastizitätstheorie als Fließfunktion mit einem ideal-plastischen Materialverhalten verwendet. Eine isotrope Dehnungsverfestigung wurde von Li et al. (1994) eingeführt und später von Hashagen und de Borst (1997b) aufgegriffen. Die Simulation des nichtlinearen Verhaltens von Beton mittels einer isotropen Form des Hoffman-Kriteriums wurde von Bicanic et al. (1994) vorgestellt. Die Berücksichtigung einer anisotropen Verfestigung innerhalb einer Plastizitätstheorie mit Hoffman-Fließbedingung geht auf die Veröffentli-

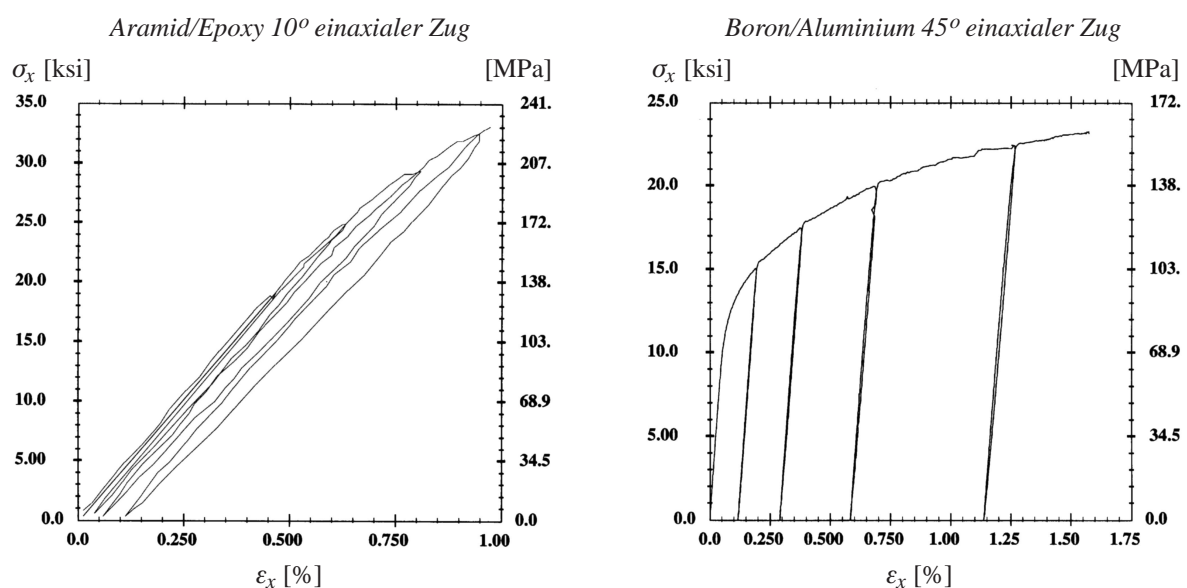


Abb. 6.6: Versuchsergebnisse von FVW (aus Herakovich (1998))

chungen von Hashagen und de Borst (1997a/b), Hashagen (1998) und Hashagen und de Borst (2001) zurück und wird im Folgenden beschrieben.

### 6.3.2 Hoffman-Fließbedingung

Um eine anisotrope Verfestigung im Hoffman-Kriterium zu realisieren, werden die konstanten Festigkeitswerte  $\bar{S}_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), die nach Gleichung (6.11) wie folgt definiert waren

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \bar{S}_{11}^f ; & \bar{S}_2 &= \bar{S}_{11}^c ; & \bar{S}_3 &= \bar{S}_{22}^f ; & \bar{S}_4 &= \bar{S}_{22}^c ; & \bar{S}_5 &= \bar{S}_{33}^f ; \\ \bar{S}_6 &= \bar{S}_{33}^c ; & \bar{S}_7 &= \bar{S}_{12} ; & \bar{S}_8 &= \bar{S}_{23} ; & \bar{S}_9 &= \bar{S}_{13} , \end{aligned} \quad (6.11)$$

durch veränderliche äquivalente Spannungen  $\bar{S}_i(\kappa_i)$  mit  $i = 1, \dots, 9$  (keine Summation) ersetzt. Die Veränderung der äquivalenten Spannungen ist über neun unabhängige Verfestigungsgesetze beschreibbar, die im nächsten Abschnitt 6.3.3 genauer definiert werden. Infolge der veränderlichen äquivalenten Spannungen sind die  $\alpha_i$ -Werte ebenfalls nicht mehr konstant, sondern von den äquivalenten Verzerrungen  $\kappa_i$  abhängig. Dabei kann es vorkommen, dass ein Wert  $\alpha_i$  auch von mehreren Werten  $\kappa_i$  abhängt, beispielsweise  $\alpha_4 = \alpha_4(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6)$ . Formal lassen sich die  $\alpha_i$ -Werte analog zu Gleichung (6.10) bestimmen.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\bar{S}_2 - \bar{S}_1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} ; & \alpha_4 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} + \frac{1}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} - \frac{1}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} \right) ; \\ \alpha_2 &= \frac{\bar{S}_4 - \bar{S}_3}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} ; & \alpha_5 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} + \frac{1}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} - \frac{1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} \right) ; \\ \alpha_3 &= \frac{\bar{S}_6 - \bar{S}_5}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} ; & \alpha_6 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{S}_6 \bar{S}_5} + \frac{1}{\bar{S}_2 \bar{S}_1} - \frac{1}{\bar{S}_4 \bar{S}_3} \right) ; \\ \alpha_7 &= \frac{1}{3\bar{S}_7^2} ; & \alpha_8 &= \frac{1}{3\bar{S}_8^2} ; & \alpha_9 &= \frac{1}{3\bar{S}_9^2} . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die Hoffman-Fließbedingung mit anisotroper Verfestigung kann, wie in Abschnitt 6.2.3 bereits gezeigt, formal in Vektor-Matrix-Schreibweise als Funktion der Spannungen  $\mathbf{S}$  und des Vektors (9x1) der äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}$  dargestellt werden:

$$F(\mathbf{S}, \boldsymbol{\kappa}) = f(\mathbf{S}, \boldsymbol{\kappa}) - 1 = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}) - 1 \leq 0 . \quad (6.18)$$

Dabei wird  $\mathbf{S}$  nach Gleichung (6.8) und die Kopplungsmatrix  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa})$  und der Kopplungsvektor  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa})$  in der Form

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}) = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)^T \quad (6.19)$$

verwendet, zusammen mit Gleichung (6.9)

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 2(a_4 + a_6) & -2a_4 & -2a_6 \\ -2a_4 & 2(a_4 + a_5) & -2a_5 \\ -2a_6 & -2a_5 & 2(a_6 + a_5) \end{pmatrix} ; \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} 6a_7 & 0 & 0 \\ 0 & 6a_8 & 0 \\ 0 & 0 & 6a_9 \end{pmatrix} . \quad (6.9)$$

Mit der vorgestellten Hoffman-Fließbedingung nach Gleichung (6.18) ist in Kombination mit den zu definierenden Verfestigungsgesetzen eine anisotrope Verfestigung beschreibbar. Die Erweiterung zur gleichzeitigen Berücksichtigung einer isotroper Verfestigung ist ebenfalls möglich und in Hashagen und de Borst (1997b) zu finden. In der vorliegenden Arbeit wird dies jedoch nicht verwendet.

### 6.3.3 Anisotropes Verfestigungsgesetz

Ein lineares Verfestigungsgesetz wird im Folgenden zwischen den äquivalenten Spannungen  $\bar{S}_i$  und den äquivalenten Verzerrungen  $\kappa_i$  angenommen:

$$\bar{S}_i = \bar{S}_i(\kappa_i) = \bar{S}_i^0 + H_{ij} \kappa_j \quad i, j = 1, \dots, 9 \quad . \quad (6.20)$$

Die äquivalenten Spannungen  $\bar{S}_i^0$  stellen die Anfangsfließspannungen dar:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1^0 &= \bar{S}_{11}^t ; \bar{S}_2^0 = \bar{S}_{11}^c ; \bar{S}_3^0 = \bar{S}_{22}^t ; \bar{S}_4^0 = \bar{S}_{22}^c ; \bar{S}_5^0 = \bar{S}_{33}^t ; \\ \bar{S}_6^0 &= \bar{S}_{33}^c ; \bar{S}_7^0 = \bar{S}_{12} ; \bar{S}_8^0 = \bar{S}_{23} ; \bar{S}_9^0 = \bar{S}_{13} . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Des Weiteren soll für die Verfestigungsmoduli  $H_{ij}$  gelten:

$$H_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad H_{ij} = \text{konst.} \quad \text{für } i = j \quad . \quad (6.22)$$

Gleichung (6.22) verhindert eine Kopplung der unterschiedlichen Verfestigungsrichtungen, da die Kopplung ohnehin sehr klein ist und zusätzlich die experimentelle Bestimmung dieser Verfestigungsmoduli sehr schwierig wäre. Zur Beschreibung der anisotropen Verfestigung sind somit insgesamt 18 Materialparameter nötig.

Werden die äquivalenten Spannungen  $\bar{S}_i$  und die äquivalenten Verzerrungen  $\kappa_i$  in Vektoren der Größe (9x1) einsortiert, so lässt sich das Verfestigungsgesetz (6.20) auch als

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^0 + \mathbf{H} \boldsymbol{\kappa} \quad (6.23)$$

schreiben, mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= [\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6, \bar{S}_7, \bar{S}_8, \bar{S}_9]^T ; \quad \boldsymbol{\kappa} = [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6, \kappa_7, \kappa_8, \kappa_9]^T ; \\ \bar{\mathbf{S}}^0 &= [\bar{S}_1^0, \bar{S}_2^0, \bar{S}_3^0, \bar{S}_4^0, \bar{S}_5^0, \bar{S}_6^0, \bar{S}_7^0, \bar{S}_8^0, \bar{S}_9^0]^T ; \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{H} = \text{diag}[H_{11}, H_{22}, H_{33}, H_{44}, H_{55}, H_{66}, H_{77}, H_{88}, H_{99}] \quad \text{mit } H_{ii} = \text{konst.}$$

Dabei ist der äquivalente Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\kappa}$  als Vektor der internen Variablen des Verzerrungsraumes zu verstehen. Dieser steht über die Matrix der Verfestigungsmoduli  $\mathbf{H}$  mit dem Vektor der internen Variablen des Spannungsraumes  $\mathbf{q}$  im Zusammenhang, die hier mit den äquivalenten Spannungen  $\bar{\mathbf{S}}$  übereinstimmen. Es verbleibt nun noch zu klären, wie die neun Komponenten des äquivalenten Verzerrungsvektors  $\boldsymbol{\kappa}$  zu ermitteln sind.

Üblicherweise wird die skalare äquivalente Verzerrungsrate  $\dot{\kappa}$  über die in Kapitel 4.2.2 vorgestellte Verzerrungsverfestigungshypothese definiert. In Vektor-Matrix-Schreibweise lautet diese

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \sqrt{\mathbf{m}^T \mathbf{T} \mathbf{m}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \text{diag}\left[1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] . \quad (6.25)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{m} = \partial G / \partial \mathbf{S}$  den Gradienten des plastischen Potentials  $G$  nach den Spannungen, auch, anschaulich betrachtet, als Richtung des plastischen Flusses interpretierbar. Gleichung (6.25) reicht allerdings zur Beschreibung der anisotropen und richtungsabhängigen Verfestigung nicht aus, da in Gleichung (6.20) neun äquivalente Verzerrungswerte  $\kappa_i$  zur Steuerung der Verfestigung nötig sind. Der skalaren Größe  $\dot{\kappa}$  fehlt daher die Richtungsinformation in Form des plastischen Flusses bzw. des Fließvektors  $\mathbf{m}$ . Dieser kann berücksichtigt werden, indem Gleichung (6.25) mit der normierten Richtung des plastischen Flusses  $\mathbf{m}$  multipliziert wird. Der Vektor (6x1) der äquivalenten Verzerrungsrate  $\hat{\kappa}$  sieht dann wie folgt aus:

$$\underset{(6 \times 1)}{\hat{\kappa}} = \frac{\mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|} \dot{\lambda} \sqrt{\mathbf{m}^T \mathbf{T} \mathbf{m}} \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{m}\| = \sqrt{\mathbf{m}^T \mathbf{m}} \quad . \quad (6.26)$$

Unter der Annahme eines assoziierten Fließens erhält man die Fließrichtung als

$$\mathbf{m} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{S} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{n} \quad . \quad (6.27)$$

Die anschließende Unterscheidung der Komponenten von  $\hat{\kappa}$  hinsichtlich positiven und negativen Werten (entspricht Fließen unter Zug- oder Druckbeanspruchung) sowie die Einsortierung in den Vektor (9x1) der äquivalenten Verzerrungsrate  $\dot{\kappa}$  über eine Abbildungsmatrix  $\mathbf{M}$  liefert

$$\underset{(9 \times 1)}{\dot{\kappa}} = \underset{(9 \times 6)(6 \times 1)}{\mathbf{M}} \underset{(6 \times 1)}{\hat{\kappa}} = \underset{(9 \times 1)}{\mathbf{M}} \frac{\mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|} \dot{\lambda} \sqrt{\mathbf{m}^T \mathbf{T} \mathbf{m}} \quad . \quad (6.28)$$

Die Abbildungsmatrix  $\mathbf{M}$  sieht dabei folgendermaßen aus:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_9 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} f_1 &= H(\dot{\kappa}_1) & ; & & f_2 &= -H(-\dot{\kappa}_1) & ; \\ f_3 &= H(\dot{\kappa}_2) & ; & & f_4 &= -H(-\dot{\kappa}_2) & ; \\ f_5 &= H(\dot{\kappa}_3) & ; & & f_6 &= -H(-\dot{\kappa}_3) & ; \\ f_7 &= H(\dot{\kappa}_4) & - & & H(-\dot{\kappa}_4) & ; \\ f_8 &= H(\dot{\kappa}_5) & - & & H(-\dot{\kappa}_5) & ; \\ f_9 &= H(\dot{\kappa}_6) & - & & H(-\dot{\kappa}_6) & . \end{aligned} \quad (6.29)$$

In Gleichung (6.29) stellt  $H(x)$  die Heaviside-Funktion dar, für die gilt:

$$H(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \leq 0 \quad \quad \text{und} \quad \quad H(x) = 1 \quad \text{für} \quad x > 0 \quad . \quad (6.30)$$

Gleichung (6.28) ist in Kombination mit der Richtung des plastischen Flusses  $\mathbf{m}$ , Gleichung (6.27), ein impliziter Ausdruck für  $\boldsymbol{\kappa}$ , da  $\mathbf{m}$  über das plastische Potenzial  $G = F$  wiederum von den Größen  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa})$  und  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa})$  abhängt. Dieser implizite Zusammenhang muss bei der Rückprojektion des Spannungszustandes auf die Fließbedingung berücksichtigt werden, wofür ein aufwendiger und rechenintensiver Rückprojektionsalgorithmus benötigt wird. Dieser ist beispielsweise in Hashagen (1998) und Hashagen und de Borst (2001) beschrieben.

Wird hingegen das plastische Potenzial  $G$  innerhalb des inkrementell-iterativen Verfahrens nicht identisch der Fließfunktion  $F$  gewählt oder anders ausgedrückt, wird das plastische Potenzial  $G$  nicht als Funktion der aktuellen äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$ , so ergibt sich über Gleichung (6.28) eine explizite Beziehung für  $\boldsymbol{\kappa}$  und daher eine Vereinfachung des Rückprojektionsalgo-



rithmus, siehe Li et al. (1994). Diese Vereinfachung wird in der folgenden Herleitung des Rückprojektionsalgorithmus verwendet, wobei im Unterschied zu Hashagen und de Borst (1997a, 2001) und Hashagen (1998) besonders auf die verschiedenen Varianten zur Definition des plastischen Potentials  $G$  eingegangen wird und eine Gegenüberstellung erfolgt.

Hashagen (1998) sowie Hashagen und de Borst (1997a, 2001) haben eine weitere vereinfachende Annahme innerhalb des Rückprojektionsalgorithmus für die Abbildungsmatrix  $\mathbf{M}$  getroffen: Obwohl diese von  $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$  abhängt (Gleichung (6.29)) werden die möglichen Ableitungen von  $\mathbf{M}$  bezüglich  $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$  vernachlässigt, siehe beispielsweise Gleichung (6.49). Da  $\mathbf{M}$  ausschließlich Heaviside-Funktionen beinhaltet, die nur dann ihren Wert wechseln, wenn das Argument sein Vorzeichen ändert, führt diese Vereinfachung laut Aussage der oben genannten Autoren nur selten zu Problemen, was in dieser Arbeit ebenfalls festgestellt wurde.

### 6.3.4 Rückprojektionsalgorithmus

Verletzen die Prädiktorspannungen  $\mathbf{S}_{n+1}^*$  (Gleichung (4.35)) zusammen mit den internen Variablen des Zeitpunktes  $t_n$  die Fließfunktion ( $F_{n+1}^* > 0$ , Gleichung (6.18)), so müssen sowohl neue Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  als auch neue plastische Verzerrungen  $\mathbf{E}_{n+1}^{pl}$  berechnet werden, die die Fließfunktion in Kombination mit den aktualisierten internen Variablen  $\mathbf{q}_{n+1}$  wieder erfüllen.

Die neuen Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  sind über die in Abschnitt 4.4.1 angegebenen Gleichungen (4.41) und (4.43) zu bestimmen

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^* - \mathbf{C}^{el} \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} \quad (4.41)$$

mit

$$\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \Delta \lambda_{n+1} \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{m}_{n+1} \quad (4.43)$$

An dieser Stelle muss nun genauer auf die Definition des plastischen Potentials  $G$  eingegangen werden. Dabei stehen, wie eingangs schon angedeutet, mehrere Varianten zur Auswahl, die im Folgenden kurz beschrieben werden.

#### 1. Variante

Eine erste Variante ist die Wahl des plastischen Potentials  $G$  analog zur Fließfunktion bei äquivalentem Verzerrungsvektor identisch Null und konstant ( $\boldsymbol{\kappa}_0 \equiv \mathbf{0}$ ). Folglich sind die Größen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  des plastischen Potentials während der gesamten plastischen Belastung konstant:

$$G_{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{n+1}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_0) \mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{S}_{n+1}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_0) - 1 = 0 \quad (6.31)$$

Anschaulich betrachtet bedeutet dies, dass sich das plastische Potential im Gegensatz zur Fließfunktion infolge einer Verfestigung nicht ändert. Die Richtung des plastischen Flusses kann man im Sinne einer nicht-assozierten Fließregel mit

$$\tilde{\mathbf{m}}_{n+1} = \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\mathbf{S}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_0} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_0) \mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_0) \quad (6.32)$$

angeben. Zusammen mit Gleichung (6.28) führt dies zu einem expliziten Ausdruck für das Inkrement des äquivalenten Verzerrungsvektors

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \mathbf{M} \frac{\tilde{\mathbf{m}}_{n+1}}{\|\tilde{\mathbf{m}}_{n+1}\|} \Delta \lambda_{n+1} \sqrt{\tilde{\mathbf{m}}_{n+1}^T \mathbf{T} \tilde{\mathbf{m}}_{n+1}} \quad (6.33)$$

## 2. Variante

Eine zweite Variante folgt einem Vorschlag von Li et al. (1994). Bei diesem wird das plastische Potenzial mit einem konstanten äquivalenten Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\kappa}_n$  des letzten Zeitpunktes  $t_n$  aufgestellt. Infolgedessen ändert sich das plastische Potenzial im Laufe der plastischen Belastung und die Verfestigung wird im plastischen Potenzial, wenn auch verzögert, berücksichtigt. Für den aktuellen Zeitpunkt  $t_{n+1}$  sind die Größen  $\boldsymbol{\kappa}_n$ ,  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n)$  und  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n)$  dann konstant.

$$G_{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_n) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{n+1}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n) \mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{S}_{n+1}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n) - 1 = 0 \quad . \quad (6.34)$$

Die Fließrichtung  $\hat{\mathbf{m}}_{n+1}$  berechnet sich im Sinne einer nicht-assozierten Fließregel mit

$$\hat{\mathbf{m}}_{n+1} = \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\mathbf{S}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_n} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n) \mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n) = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{S}_{n+1} + \hat{\mathbf{Q}} \quad (6.35)$$

und führt zusammen mit Gleichung (6.28) zu einem expliziten Ausdruck für  $\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1}$ :

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \mathbf{M} \frac{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}}{\|\hat{\mathbf{m}}_{n+1}\|} \Delta \lambda_{n+1} \sqrt{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}_{n+1}} \quad . \quad (6.36)$$

Die Richtung des plastischen Flusses  $\hat{\mathbf{m}}_{n+1}$  ist somit nicht nur von den aktuellen Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  abhängig, sondern auch von den bis zum letzten Zeitpunkt  $t_n$  erreichten äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}_n$ . Die äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  und die Fließrichtung  $\hat{\mathbf{m}}_{n+1}$  werden daher mittels eines Vorwärts-Euler-Verfahrens bezüglich der äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}$  und mittels eines Rückwärts-Euler-Verfahrens bezüglich der Spannungen  $\mathbf{S}$  integriert. In Matzenmiller (1988) wird dieses gemischt-explizit-implizite Vorgehen auch als semi-implizites Integrationsverfahren bezeichnet. Die Integrationsergebnisse müssten allerdings von der Lastschrittweite abhängig sein, was aber in Untersuchungen von Hashagen (1997a) nicht festgestellt wurde.

Ein ähnliches Vorgehen wird auch in Klarmann (1991) geschildert, der zur Berücksichtigung einer anisotropen Verfestigung ebenfalls jeder Fließspannung einen eigenen Verfestigungsmodul zuweist. Im Unterschied zu dem hier vorgestellten Verfahren wird allerdings schon das Verfestigungsgesetz explizit integriert. Dies hat zur Folge, dass nicht nur die Größen  $\hat{\mathbf{P}}$  und  $\hat{\mathbf{Q}}$  des plastischen Potenzials, sondern auch die Größen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  der Fließfunktion während der Rückprojektion konstant sind. Die Verfestigung wird somit innerhalb der Rückprojektion überhaupt nicht berücksichtigt. Natürlich entstehen bei diesem Vorgehen größere Abweichungen als bei dem vorgestellten Verfahren, da nach Aktualisierung der Fließspannungen der rückprojizierte Spannungspunkt infolge Verfestigung nicht mehr auf, sondern etwas innerhalb der Fließfläche liegt. Dies ist bei den hier beschriebenen Varianten nicht der Fall, da die Fließfunktion mit den äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ausgewertet wird. Die Fließbedingung, Gleichung (6.18), ist im ausiterierten Zustand somit erfüllt. Lediglich die Richtung des plastischen Flusses stimmt nicht exakt mit der Richtung eines vollständig impliziten Verfahrens überein, siehe Abb. 6.7 für eine graphische Interpretation. Die hieraus entstehenden Abweichungen sind allerdings klein, vergleiche Hashagen (1997a).

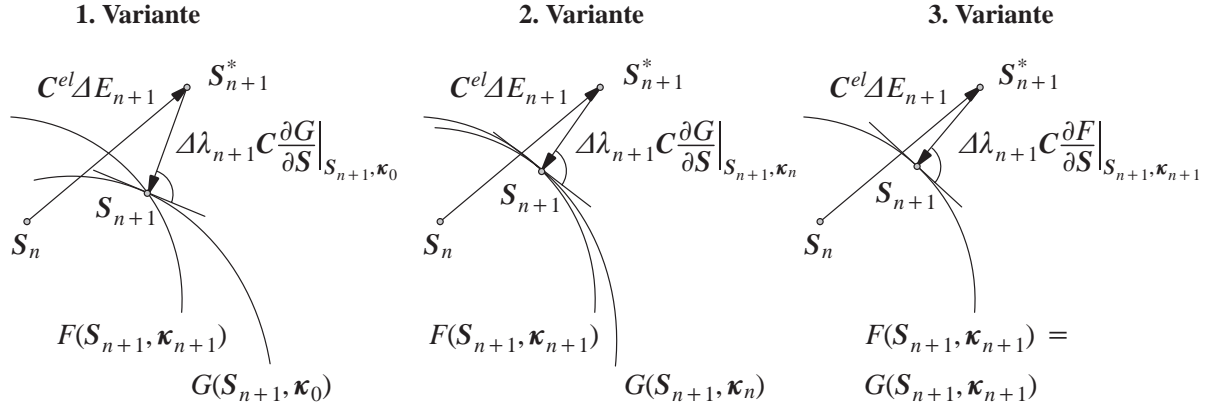


Abb. 6.7: Graphische Interpretation der verschiedenen Rückprojektionen

### 3. Variante

Bei dieser Variante wird das plastische Potenzial mit der Fließfunktion gleichgesetzt:

$$G_{n+1}(S_{n+1}, \kappa_{n+1}) = \frac{1}{2} S_{n+1}^T \mathbf{P}(\kappa_{n+1}) S_{n+1} + S_{n+1}^T \mathbf{Q}(\kappa_{n+1}) - 1 = 0 \quad (6.37)$$

Die Fließrichtung  $\mathbf{m}_{n+1}$  kann man nun im Sinne einer assoziierten Fließregel

$$\mathbf{m}_{n+1} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{S_{n+1}, \kappa_{n+1}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{S_{n+1}, \kappa_{n+1}} = \mathbf{P}(\kappa_{n+1}) S_{n+1} + \mathbf{Q}(\kappa_{n+1}) \quad (6.38)$$

angeben und führt zusammen mit Gleichung (6.28) auf die schon erwähnte implizite Gleichung für das Inkrement des äquivalenten Verzerrungsvektors:

$$\Delta \kappa_{n+1} = \mathbf{M} \frac{\mathbf{m}_{n+1}}{\|\mathbf{m}_{n+1}\|} \Delta \lambda_{n+1} \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}^T \mathbf{T} \mathbf{m}_{n+1}} \quad (6.39)$$

In Abb. 6.8 sind die verschiedenen Varianten nochmals tabellarisch zusammengefasst und gegenübergestellt. Die darin enthaltene Beurteilung stützt sich auf eigene Untersuchungen und auf Ergebnisse von Hashagen und de Borst (1997a, 2001). Weiterhin sei noch darauf hingewiesen, dass die zweite Variante im Grenzübergang von Zeitschrittweiten  $\Delta t_{n+1} \rightarrow 0$  die gleichen Ergebnisse wie die dritte Variante liefert.

Eine weitere Möglichkeit zur Vermeidung eines aufwendigen Projektionsalgorithmus wurde von Bicanic et al. (1994) vorgestellt. Sie ersetzen das totale Differenzial  $d\kappa/d\lambda$ , das innerhalb der Rückprojektion benötigt wird, durch eine Näherung mittels der partiellen Ableitung  $\partial\kappa/\partial\lambda$ .

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass das plastische Potenzial  $G$  eigentlich nicht nach algorithmischen Aspekten gewählt werden sollte. Vielmehr hat  $G$  eine eindeutige physikalische Bedeutung, nämlich die Beschreibung des plastischen Flusses in Verbindung mit der Dilatation, siehe Kapitel 4.2. In sehr aufwendigen Versuchen kann der plastische Fluss ermittelt werden, um daraus die Form von  $G$  abzuleiten. Sehr häufig ist die plastische Fließrichtung jedoch unbekannt, so dass man vereinfachend das plastische Potenzial mit der Fließfunktion identifiziert. Die Frage ist nun, inwieweit das plastische Potenzial auch geringfügig anders gewählt werden kann, mit dem Ziel einer einfacheren und schnelleren Rückprojektion bei gleicher Genauigkeit. Da zusätzlich die Simulationsergebnisse der zweiten Variante fast denen der dritten Variante entsprechen, ist die Modifikation des plastischen Potenzials zur einfacheren Rückpro-

	1. Variante	2. Variante	3. Variante
plastisches Potenzial	$G_{n+1}(S_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_0) = \frac{1}{2} S_{n+1}^T \mathbf{P} S_{n+1} + S_{n+1}^T \mathbf{Q} - 1 = 0$ (6.31)	$G_{n+1}(S_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_n) = \frac{1}{2} S_{n+1}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n) S_{n+1} + S_{n+1}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n) - 1 = 0$ (6.34)	$G_{n+1}(S_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = \frac{1}{2} S_{n+1}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) S_{n+1} + S_{n+1}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) - 1 = 0$ (6.37)
Fließregel	nicht-assoziert $\tilde{\mathbf{m}}_{n+1} = \mathbf{P} S_{n+1} + \mathbf{Q}$ (6.32)	nicht-assoziert $\hat{\mathbf{m}}_{n+1} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n) S_{n+1} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n)$ (6.35)	assoziert $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) S_{n+1} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1})$ (6.38)
Verfestigung	explizit $\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1}(\boldsymbol{\kappa}_0)$ (6.33)	explizit $\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1}(\boldsymbol{\kappa}_n)$ (6.36)	implizit $\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1})$ (6.39)
Beurteilung	einfacher und billiger Rückprojektionsalgorithmus unsymmetrische Materialtangente große Abweichungen zur 2. und 3. Variante	einfacher und billiger Rückprojektionsalgorithmus unsymmetrische Materialtangente geringe bis keine Abweichung zur 3. Variante	aufwendiger und teurer Rückprojektionsalgorithmus symmetrische Materialtangente

Abb. 6.8: Definitionen des plastischen Potentials  $G$

jektion zweifelsohne tolerierbar. Es wird somit aus Gründen der Effizienz und der Genauigkeit im Folgenden das plastische Potenzial analog der zweiten Variante verwendet.

Es folgt aus den Gleichungen (4.41) und (4.43) zusammen mit dem Gradienten des plastischen Potentials nach den Spannungen  $\partial G / \partial \mathbf{S} = \hat{\mathbf{m}}$  (Gleichung (6.35)),

$$S_{n+1} = S_{n+1}^* - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^{el} \hat{\mathbf{m}}_{n+1} \quad , \quad (6.40)$$

wobei in (6.40) die folgenden Abkürzungen verwendet werden:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n) \quad . \quad (6.41)$$

Durch Auflösen nach den Spannungen  $S_{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  erhält man

$$S_{n+1} = \boldsymbol{\Theta} \left( \mathbf{C}^{el-1} S_{n+1}^* - \Delta \lambda_{n+1} \hat{\mathbf{Q}} \right) \quad , \quad (6.42)$$

mit  $\boldsymbol{\Theta}$  nach Gleichung (4.50) und hier im Speziellen  $\partial^2 G / \partial \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{P}}$

$$\boldsymbol{\Theta} = \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta \lambda_{n+1} \hat{\mathbf{P}} \right]^{-1} \quad . \quad (6.43)$$

Die neuen Spannungen  $S_{n+1}$  sind nur vom plastischen Multiplikator  $\Delta \lambda_{n+1}$  abhängig

$$S_{n+1} = S_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}) \quad . \quad (6.44)$$

Das Inkrement des äquivalenten Verzerrungsvektors  $\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  lautet nun

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \mathbf{M} \frac{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}}{\|\hat{\mathbf{m}}_{n+1}\|} \Delta \lambda_{n+1} \sqrt{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}_{n+1}} = \mathbf{M} \Delta \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} \quad , \quad (6.45)$$

mit  $\hat{\mathbf{m}}_{n+1}$  als Richtung des plastischen Flusses nach Gleichung (6.35).

Der äquivalente Verzerrungsvektor  $\Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  ist ebenfalls nur noch eine Funktion des plastischen Multiplikators  $\Delta\lambda_{n+1}$ :

$$\Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}, \mathbf{S}_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1})) \quad . \quad (6.46)$$

Folglich kann auch die Fließbedingung als Funktion von  $\Delta\lambda_{n+1}$  ausgedrückt werden:

$$F(\mathbf{S}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = F(\Delta\lambda_{n+1}) = 0 \quad . \quad (6.47)$$

Dabei ist es allerdings nicht möglich, Gleichung (6.47) explizit für  $\Delta\lambda_{n+1}$  zu lösen, so dass eine lokale Newton-Iteration (Kopfzeiger  $j$ ) zur Ermittlung von  $\Delta\lambda_{n+1}$  verwendet wird:

$$\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} = \Delta\lambda_{n+1}^j - \frac{F}{dF/d\lambda} \Big|_{n+1}^j \quad . \quad (6.48)$$

Das totale Differenzial der Fließfunktion nach dem plastischen Multiplikator lautet dabei wie folgt:

$$\left\{ \frac{dF}{d\lambda} = \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta\boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \left[ \frac{\partial \Delta\hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \Delta\hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} \right] \right\}_{n+1}^j \quad . \quad (6.49)$$

Der Gradient der Fließfunktion nach den Spannungen ist

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1})\mathbf{S} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = \mathbf{n} \right\}_{n+1}^j \quad (6.50)$$

und der Gradient der Spannungen nach dem plastischen Multiplikator lautet

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} = -\boldsymbol{\Theta} \left[ \hat{\mathbf{P}} \left( \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}^* - \Delta\lambda \hat{\mathbf{Q}} \right) + \boldsymbol{\Theta}^{-1} \hat{\mathbf{Q}} \right] \boldsymbol{\Theta} \right\}_{n+1}^j \quad . \quad (6.51)$$

Der Gradient der Fließfläche bezüglich den äquivalenten Verzerrungen kann mit  $\partial(\dots)/\partial \Delta\boldsymbol{\kappa} = \partial(\dots)/\partial \boldsymbol{\kappa}$  wie folgt angegeben werden:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \Delta\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\eta} \right\}_{n+1}^j \quad \text{mit} \quad \left\{ \eta_i = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \kappa_i} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \kappa_i} \right\}_{n+1}^j \quad . \quad (6.52)$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \kappa_i} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial \bar{S}_m} \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial \kappa_i} \quad \text{mit} \quad l = 4, \dots, 9 \quad ; \quad m = 1, \dots, 9 \quad ; \quad i = 1, \dots, 9 \quad , \quad (6.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \kappa_i} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial \bar{S}_m} \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial \kappa_i} \quad \text{mit} \quad l = 1, \dots, 3 \quad ; \quad m = 1, \dots, 9 \quad ; \quad i = 1, \dots, 9 \quad . \quad (6.54)$$

Des Weiteren bestimmen sich die Gradienten der äquivalenten Verzerrungen nach dem plastischen Multiplikator und nach den Spannungen folgendermaßen:

$$\left\{ \frac{\partial \Delta \hat{\kappa}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial \hat{\kappa}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\hat{\mathbf{m}}}{\|\hat{\mathbf{m}}\|} \sqrt{\hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}} \right\}_{n+1}^j, \quad (6.55)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Delta \hat{\kappa}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial \hat{\kappa}}{\partial \mathbf{S}} = \Delta \lambda \frac{\sqrt{\hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}}}{\|\hat{\mathbf{m}}\|} \left[ \hat{\mathbf{P}} + \frac{\hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{P}}}{\hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}} - \frac{\hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{P}}}{\|\hat{\mathbf{m}}\|^2} \right] \right\}_{n+1}^j. \quad (6.56)$$

Somit stehen sämtliche Gleichungen bzw. Gradienten, die innerhalb der lokalen Newton-Iteration zur Berechnung des plastischen Multiplikators  $\Delta \lambda_{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  benötigt werden, zur Verfügung.

Abb. 6.9 (nach Hartmann (2002)) zeigt die Visualisierung einer lokalen Rückprojektion mit der einhergehenden Veränderung der Fließfläche infolge Verfestigung. Damit die anisotrope Veränderung der Fließfläche besser zu erkennen ist, werden die Fließspannungen  $\bar{S}_i$  und die äquivalenten Verzerrungen  $\kappa_n$  so gewählt, dass zunächst ein kreisförmiger Deviatorschnitt entsteht, siehe Abb. 6.9a). Des Weiteren wird bei diesem Beispiel angenommen, dass lediglich die Zug-Fließspannungen eine Verfestigung aufweisen, während sich alle anderen Komponenten ideal-plastisch verhalten. Die einzelnen Rückprojektionsschritte mit den dazugehörigen veränderten Spannungszuständen sind in Abb. 6.9b) dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass infolge Verfestigung die Fließfläche im Deviatorschnitt unrund wird und sich die Achse durch den Ellipsenmittelpunkt parallel zur hydrostatischen Achse verschiebt (Abb. 6.9c)). Zusätzlich findet eine massive Aufweitung der Fließfläche statt.

Ist der plastische Multiplikator mit ausreichender Genauigkeit ausiteriert und somit bekannt, können die internen Variablen bzw. der äquivalente Verzerrungsvektor  $\kappa_{n+1}$  und die Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  aktualisiert werden, siehe Abb. 6.10. Zur Gewährleistung der quadratischen Konvergenz des Lösungsverfahrens muss nun die algorithmische elasto-plastische Tangente noch bestimmt werden.

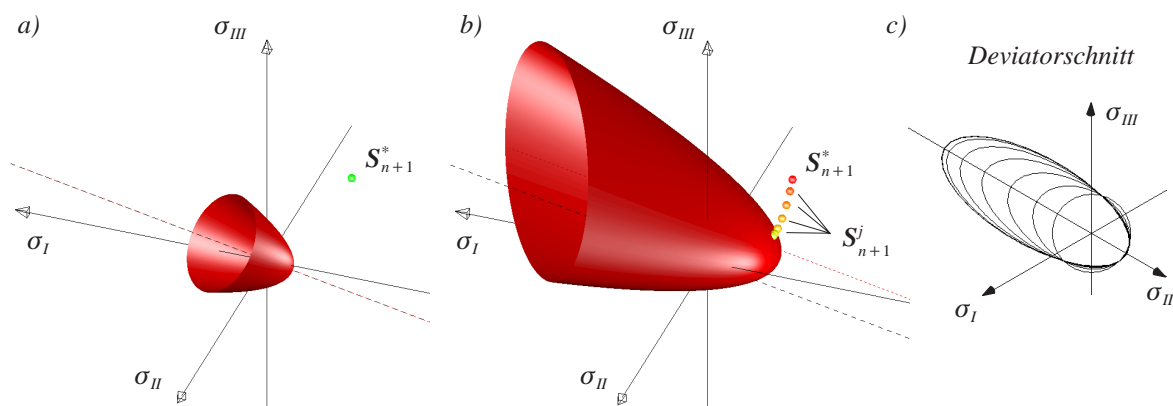


Abb. 6.9: Lokale Rückprojektion und Veränderung der Fließfläche infolge Verfestigung

**1. Initialisierung**  $\Delta\lambda_{n+1}^0 = 0$  und  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^0 = \boldsymbol{\kappa}_n$

**2. Lokale Newton-Iteration zur Berechnung von  $\Delta\lambda_{n+1}$**

- neue Spannungen

$$\mathbf{S}_{n+1}^j = \boldsymbol{\Theta} \left[ \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}_{n+1}^* - \Delta\lambda_{n+1}^j \hat{\mathbf{Q}} \right]$$

mit  $\boldsymbol{\Theta} = \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta\lambda_{n+1}^j \hat{\mathbf{P}} \right]^{-1}$  und  $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}_n)$  ;  $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}_n)$

- neue äquivalente Verzerrungen

$$\hat{\mathbf{m}}_{n+1}^j = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{S}_{n+1}^j + \hat{\mathbf{Q}}$$

$$\Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^j = \mathbf{M} \frac{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}^j}{\|\hat{\mathbf{m}}_{n+1}^j\|} \Delta\lambda_{n+1}^j \sqrt{\left( \hat{\mathbf{m}}_{n+1}^j \right)^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}_{n+1}^j}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^j = \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^j$$

- aktualisierte Fließfunktion und deren Ableitung

$$F(\mathbf{S}_{n+1}^j, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^j) \quad \text{und} \quad \left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_{n+1}^j$$

mit  $\left\{ \frac{dF}{d\lambda} = \mathbf{n}^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta\boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \left[ \frac{\partial \Delta\hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \Delta\hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} \right] \right\}_{n+1}^j$

über Gleichungen (6.50) bis (6.56)

- verbessertes  $\Delta\lambda_{n+1}^{j+1}$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} = \Delta\lambda_{n+1}^j - \left. \frac{F}{dF/d\lambda} \right|_{n+1}^j$$

- Abbruchkriterium

$$\left| \frac{\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} - \Delta\lambda_{n+1}^j}{\Delta\lambda_{n+1}^{j+1}} \right| \begin{cases} > TOL & \rightarrow GOTO \ 2. \\ \leq TOL & \rightarrow \Delta\lambda_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1}^{j+1} \rightarrow GOTO \ 3. \end{cases}$$

**3. Aktualisierung der Spannungen und der internen Variablen**

$$\mathbf{S}_{n+1} = \boldsymbol{\Theta} \left[ \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}_{n+1}^* - \Delta\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{Q}} \right] \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Theta} = \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{P}} \right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \mathbf{M} \frac{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}}{\|\hat{\mathbf{m}}_{n+1}\|} \Delta\lambda_{n+1} \sqrt{\hat{\mathbf{m}}_{n+1}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{m}}_{n+1}}$$

Abb. 6.10: Ablaufschema des Rückprojektionsalgorithmus

### 6.3.5 Algorithmische elasto-plastische Tangente

Im Folgenden soll die algorithmische elasto-plastische Tangente  $\mathbf{C}^{ep,algo}$  in Anlehnung an die in Kapitel 4.4.1 vorgestellten Gleichungen (4.45) bis (4.48) hergeleitet werden. Zu beachten ist dabei, dass eine lineare Verfestigung gewählt wurde und sich sämtliche Größen als Funktion des plastischen Multiplikators ausdrücken lassen. Die Herleitung von  $\mathbf{C}^{ep,algo}$  vereinfacht sich dadurch. Des Weiteren ist im Unterschied zu Kapitel 4.4.1 das Verfestigungsgesetz über die Verzerungsverfestigungshypothese nach Gleichung (6.36) gegeben und die Fließfunktion in Abhängigkeit von  $\boldsymbol{\kappa}$  formuliert. Dadurch verändern sich vor allem die Gleichungen (4.47) und (4.48). Die totalen Differenziale der Spannungen, der plastischen Verzerrungen, der äquivalenten Verzerrungen sowie der Konsistenzbedingung lauten somit hier im Speziellen

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \mathbf{C}^{el} (d\mathbf{E} - d\mathbf{E}^{pl}) \right\}_{n+1} , \quad (6.57)$$

$$d\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \left\{ \hat{m} d\lambda + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{S}^2} d\mathbf{S} + \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{S} \partial \boldsymbol{\kappa}} \mathbf{M} d\hat{\boldsymbol{\kappa}} \right) \right\}_{n+1} , \quad (6.58)$$

$$d\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} = \left\{ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} d\mathbf{S} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta\lambda} d\lambda \right\}_{n+1} , \quad (6.59)$$

$$dF_{n+1} = \left\{ \mathbf{n}^T d\mathbf{S} + \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} d\hat{\boldsymbol{\kappa}} \right\}_{n+1} = 0 . \quad (6.60)$$

Dabei bezeichnet  $d\lambda_{n+1}$  das totale Differenzial des inkrementellen Konsistenzparameters  $\Delta\lambda_{n+1}$ . Da das plastische Potenzial  $G$  nicht von den aktuellen äquivalenten Verzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  abhängig ist, vereinfacht sich Gleichung (6.58) für die plastischen Verzerrungen  $d\mathbf{E}_{n+1}^{pl}$

$$d\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \left\{ \hat{m} d\lambda + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{S}^2} d\mathbf{S} \right) \right\}_{n+1} . \quad (6.61)$$

Ein Einsetzen von Gleichung (6.59) in die Konsistenzbedingung (6.60) ergibt

$$dF_{n+1} = \left\{ \mathbf{n}^T d\mathbf{S} + \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \left( \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} d\mathbf{S} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta\lambda} d\lambda \right) \right\}_{n+1} = 0 . \quad (6.62)$$

Für die Spannungen in Gleichung (6.57) kann man unter Ausnützung von Gleichung (6.61)

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \boldsymbol{\Theta} (d\mathbf{E} - d\lambda \hat{m}) \right\}_{n+1} \quad (6.63)$$

schreiben, mit  $\boldsymbol{\Theta}$  nach Gleichung (4.50) und hier im Speziellen

$$\boldsymbol{\Theta} = \left\{ \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{S}^2} \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{S}^2} = \hat{\mathbf{P}} . \quad (6.64)$$



Wird Gleichung (6.63) eingesetzt in die Konsistenzbedingung (6.62) liefert die Auflösung nach  $d\lambda_{n+1}$  die Gleichung für den plastischen Multiplikator in der Form

$$d\lambda_{n+1} = \left\{ \frac{\left[ \mathbf{n}^T + \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} \right] \boldsymbol{\Theta} d\mathbf{E}}{\left[ \mathbf{n}^T + \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} \right] \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{m}} - \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta \lambda}} \right\}_{n+1} \quad (6.65)$$

Mit den folgenden Abkürzungen

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \mathbf{n}^T + \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{n}^T + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \mathbf{S}} \quad , \quad (6.66)$$

$$\boldsymbol{\eta}^T = \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right)^T \quad \text{mit} \quad \eta_i = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \kappa_i} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \kappa_i} \quad , \quad (6.67)$$

kann Gleichung (6.65) auch verkürzt geschrieben werden:

$$d\lambda_{n+1} = \left\{ \frac{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Theta} d\mathbf{E}}{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{m}} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta \lambda}} \right\}_{n+1} \quad . \quad (6.68)$$

Durch Rücksubstitution von Gleichung (6.68) in (6.63) gewinnt man schließlich die Definition für die algorithmische elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo} d\mathbf{E}_{n+1} \quad (6.69)$$

mit

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo} = \left\{ \boldsymbol{\Theta} - \frac{\boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{m}} \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Theta}}{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{m}} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \Delta \lambda}} \right\}_{n+1} \quad (6.70)$$

und  $\boldsymbol{\Theta}$  nach Gleichung (6.64).

Aufgrund der unterschiedlichen Größen  $\hat{\mathbf{m}}$  und  $\boldsymbol{\gamma}$  ist die elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$  unsymmetrisch.

## 7 Numerische Modelle zur Berechnung fortschreitender Delamination

Nach einer kurzen Einführung in die verschiedenen Möglichkeiten, eine Delamination geometrisch zu beschreiben, wird in Kapitel 7.2 ein entfestigendes Plastizitätsmodell vorgestellt, das auch in Sprenger (2000) Verwendung findet. Anschließend werden in Kapitel 7.3 zwei Schädigungsmodelle entwickelt, die auf der Definition einer verzerrungsbasierten Schädigungsfunktion aufbauen. Die Schädigungsfunktion erhält man dabei durch Überführung des Brewer-Lagace-Delaminationskriteriums in den Verzerrungsraum. In Kapitel 7.4 wird hingegen ein Schädigungsmodell hergeleitet, das die Definition einer äquivalenten Energiefreisetzungsrate als Schädigungsfunktion verwendet und unter bestimmten Voraussetzungen eine symmetrische Materialangabe liefert. Ein Modellbeispiel in Kapitel 7.5 liefert einen ersten Vergleich der verschiedenen Delaminationsmodelle.

### 7.1 Einführung

Zur geometrischen Beschreibung der fortschreitenden Delamination stehen grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze zur Verfügung: Erstens der *bruchmechanische Ansatz* und zweitens der *kontinuumsmechanische Ansatz*. Beim Ersten wird die Delamination als eine geometrische bzw. topologische Diskontinuität abgebildet, während beim Zweiten die Delamination im verschmierten Sinn einer Prozessschicht dargestellt wird, siehe Abb. 7.1. Beiden Fällen gemeinsam ist die Verwendung der kritischen Bruchenergie  $G_c$  als maßgebliche Größe innerhalb des zugrundeliegenden entfestigenden Materialmodells. Im Folgenden werden die beiden Ansätze sowie deren Vor- und Nachteile kurz beschrieben.

Beim bruchmechanischen Ansatz wird von einem bereits vorhandenen Riss ausgegangen, der infolge seiner Risspitze und der dort vorhandenen Spannungssingularität jedes Spannungs- bzw. Verzerrungskriterium bereits verletzt. Die Aufgabe besteht nun darin, die infolge einer Risserweiterung freiwerdende Energie  $G$ , die bei der Schaffung einer neuen freien Oberfläche freigesetzt wird, zu berechnen und der kritischen Bruchenergie  $G_c$  gegenüberzustellen. Ist die Bruchenergie, die durch eine Risserweiterung entstehen würde und auch als Energiefreisetzungsrate bezeichnet wird, größer als die kritische Bruchenergie, so kann man von einem Risswachstum ausgehen, siehe Griffith (1921, 1924). Das angrenzende Material bleibt dabei unverändert und erfährt keine Schädigung. Die Energiefreisetzungsrate lässt sich beispielsweise mit der *finiten Risserweiterungsmethode* (*‘Finite-Crack-Extension-Method’*), der *virtuellen Risserweiterungsmethode* (*‘Virtual-Crack-Extension-Method’*) oder mit der *virtuellen Rissschließungsmethode* (*‘Virtual-Crack-Closure-Method’*) berechnen. Es sind hierzu die Knotenverschiebungen und die Knotenkräfte der FE-Rechnung nötig, siehe Davidson (1990, 1996), Nilsson und Storakers (1990), Wang et al. (1995), Krüger (1996), Zhang (1998) oder Teßmer (2000). An dieser Stelle sind die Nachteile des bruchmechanischen Ansatzes am deutlichsten zu sehen, denn die ausreichend genaue Berechnung der Energiefreisetzungsrate im Fall der Risserweiterung erfordert eine sehr feine Diskretisierung in der Umgebung der Risspitze. Ebenfalls problematisch ist die Darstellung räumlich gekrümmter Rissfronten, die nur mittels aufwendiger Netzgenerierungsalgorithmen möglich ist, siehe Rinderknecht (1999). Dass die Rissinitiierung

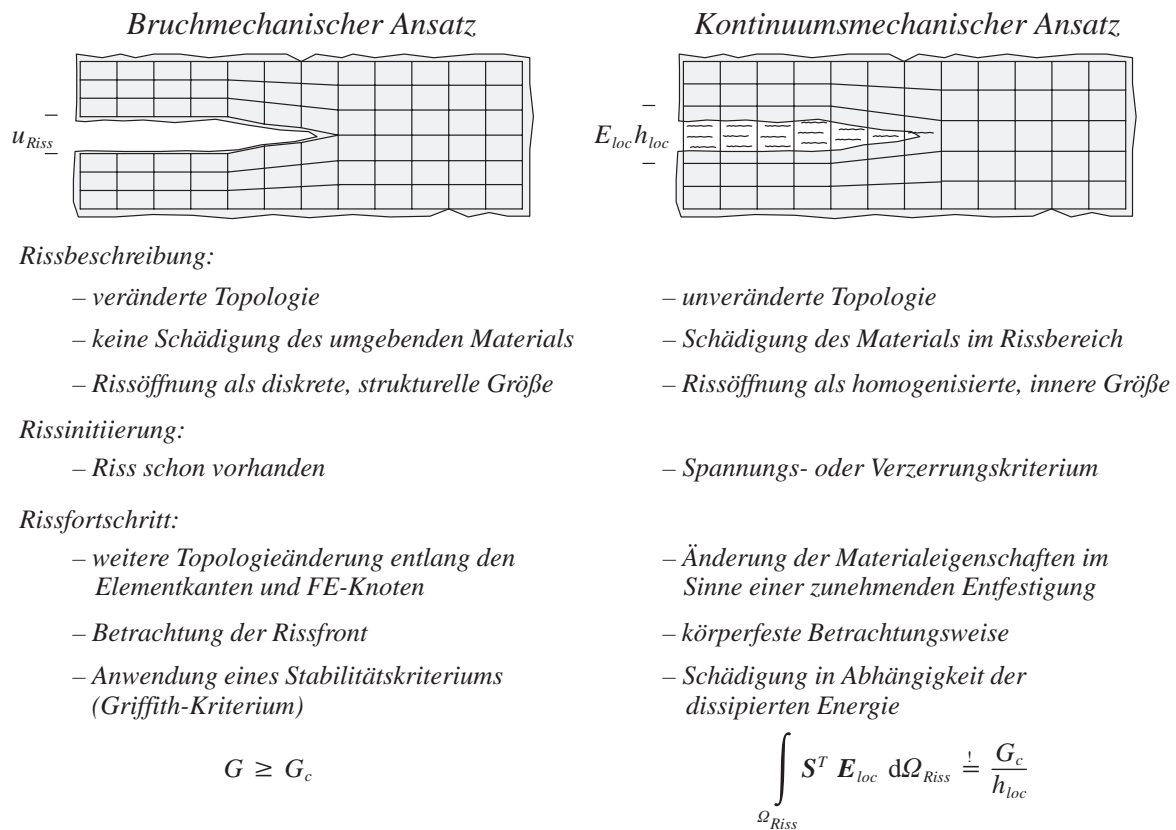


Abb. 7.1: *Bruchmechanische vs. kontinuumsmechanische Rissbeschreibung nach Weihe (1995)*

mittels klassischer bruchmechanischer Ansätze nicht berechnet werden kann, ist als weiterer Nachteil zu werten. Abhilfe schafft hier ein kombiniertes Spannungs-Energie-Kriterium wie es von Cui und Wisnom (1993) oder Teßmer (2000) vorgeschlagen wird. Diese Ansätze verwenden für die Rissinitiierung ein Spanningskriterium und für den Rissfortschritt ein Energiekriterium (Griffith). Teßmer (2000) berichtet bei diesem Vorgehen allerdings von langen Rechenzeiten, die durch das wiederholte Öffnen und Schließen von „Versuchsrissen“ (*Trial-Crack*) und der daraus resultierenden großen Anzahl von Gleichgewichtsiterationen verursacht werden.

Beim kontinuumsmechanischen Ansatz wird hingegen nicht der Riss selbst, sondern lediglich seine Auswirkung auf das Kontinuum betrachtet. Die Topologie der Struktur bleibt daher unverändert und der im Versuch entstehende Riss wird mit seiner Rissöffnung über eine bestimmte Breite verschmiert, d.h. mit Hilfe lokalisierter Verzerrungen  $E_{loc}$  homogenisiert. Für viele reale Werkstoffe kann diese charakteristische Abmessung, die Rissbandbreite  $h_{loc}$ , sogar experimentell bestimmt und mit dem mikroskopischen Aufbau des Materials in Beziehung gesetzt werden, siehe beispielsweise Bazant und Oh (1983), Bazant und Pijaudier-Cabot (1989), Bazant (1991) bzw. de Borst und Mühlhaus (1991). Diese materialspezifische Größe wird dann direkt innerhalb einer nicht-lokalen Materialformulierung verwendet und berücksichtigt die räumliche Interaktion im Werkstoff bzw. den mikrostrukturellen Aufbau des Materials. Sie wird daher auch oft als interne Länge bezeichnet. Von Nachteil ist, dass bei Verwendung einer lokalen Materialformulierung die Rissbandbreite  $h_{loc}$  von der räumlichen Diskretisierung abhängt und zumeist auf eine Elementreihe, in dieser Arbeit die sogenannte Prozessschicht mit der Dicke  $h_{PS}$ , beschränkt ist, siehe beispielsweise Bazant und Oh (1983), Rots et al. (1985) und Willam et al. (1987).

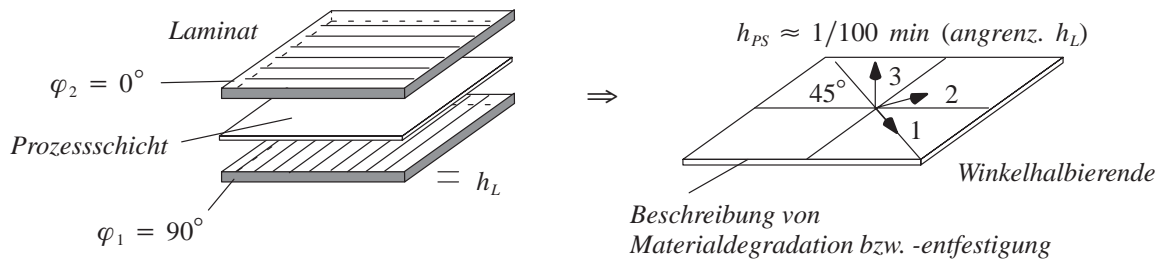


Abb. 7.2: Modellierung der Delamination mittels einer Prozessschicht

Die Rissinitiierung in der Prozessschicht  $h_{PS}$  ist allerdings durch ein Spannungs- oder Verzerungskriterium objektiv darstellbar, weil die Kontinuität der Struktur weiterhin gegeben bzw. keine Singularität an der fiktiven Rissspitze vorhanden ist. Das fortschreitende Versagen wird über die Reduktion der Materialfestigkeitswerte und/oder über die Degradation der elastischen Materialkennwerte beschrieben. Dabei muss bis zur vollständigen Entstehung des fiktiven Risses, was einer kompletten Entfestigung entspricht, die freigesetzte Energie identisch der kritischen Bruchenergie sein. Vorteilhaft ist bei diesem Ansatz, dass die Abbildung gekrümmter Delaminationsfronten ohne zusätzlichen Aufwand möglich ist.

Abb. 7.1 nach Weihe (1995) zeigt nochmals übersichtlich und zusammengefasst die Unterschiede der beiden Ansätze. Einen Überblick zur Verwendung von 'Interface'-Elementen bei der Beschreibung von Delaminationen ist beispielsweise in Alfano und Crisfield (2001), Schellekens und de Borst (1994), Chaboche et al. (1997) oder Chen et al. (1998) zu finden. 'Interface'-Elemente können dabei als Grenzübergang des kontinuumsmechanischen Ansatzes mit „gegen Null gehender Prozessschichtdicke“ angesehen werden.

Neuere Verfahren zur geometrischen Beschreibung von lokalen Effekten versuchen die jeweiligen Vorteile der diskreten und der verschmierten Rissbeschreibung zu kombinieren. In der Literatur sind hierzu zwei Verfahren gebräuchlich, die unter der Bezeichnung 'Embedded-Crack-Model' und 'Extended-Finite-Element-Method' bekannt sind. Beide Methoden arbeiten mit erweiterten Verschiebungs- und/oder Verzerrungsansätzen innerhalb der FE-Ansatzfunktionen. Damit können innerhalb eines Elements diskontinuierliche Verläufe in den Verschiebungen und/oder in den Verzerrungen abgebildet werden. Der Riss kann sich somit unabhängig vom FE-Netz entwickeln und fortsetzen. Einen detaillierten Überblick zu dem 'Embedded-Crack-Model' geben Jirásek (2000) sowie Jirásek und Zimmermann (2001). Die 'Extended-Finite-Element-Method' ist u.a. in Moës et al. (1999), Sukumar et al. (2000) sowie Belytschko et al. (2001) beschrieben. Einen Vergleich der beiden Verfahren ist in Jirásek und Belytschko (2002) zu finden.

Die vorliegende Arbeit verwendet den kontinuumsmechanischen Ansatz zur geometrischen Beschreibung der Delamination, wobei folgende zusätzliche Annahmen zu treffen sind:

1. Die Delamination verläuft in einer Grenzschicht (Prozessschicht) zwischen zwei benachbarten Schichten und kann nicht durch die angrenzenden Schichten hindurch wechseln (kein „Springen“ der Delamination).
2. Die Lage der Delamination und somit der Prozessschicht innerhalb des Laminates ist a priori bekannt. Dies ist zum einen für gewisse Schichtaufbauten ohnehin der Fall oder kann zum anderen durch eine Voruntersuchung mittels FPF-Versagenkriterien bestimmt werden.
3. Die Prozessschicht verwendet die Materialeigenschaften der homogenisierten Einzelschicht, wobei die Orientierung der Anisotropie in Richtung der Winkelhalbierenden erfolgt.

bierenden aus den angrenzenden Faserorientierungen angenommen wird, vergleiche Abb. 7.2 oder auch Ladevèze (1992) bzw. Allix und Ladevèze (1992).

4. Das gesamte nichtlineare Materialverhalten infolge Delamination wird gedanklich auf die Prozessschicht projiziert, d.h. die angrenzenden Schichten werden als linear elastisch angenommen, wenn es nur um die Schädigung durch Delamination geht.

Die vierte Annahme ist dabei nicht zwingend notwendig, sondern dient vorerst zur Trennung der Versagensphänomene; sie kann ohne weiteres fallen gelassen werden. Die Frage, die sich nun stellt, ist, welches Materialmodell innerhalb der Prozessschicht verwendet werden soll: ein Plastizitätsmodell oder ein Schädigungsmodell. Hierzu wird die Last-Verschiebungs-Antwort einer 'Double-Cantilever-Beam'-Probe (DCB) nach Agarwal und Broutman (1990) genauer betrachtet, siehe Abb. 7.3. Diese ist neben der 'End-Notched-Flexure'- (ENF), der 'Mixed-Mode-Flexure'- (MMF) und der 'Cracked-Laped-Shear'- (CLS) Probe ein gebräuchliches Experiment zur Untersuchung von Delaminations-Entstehung und -Fortschritt, siehe beispielsweise Allix et al. (1998). Folgendes ist hier festzustellen: Zum einen verbleibt auch bei vollständiger Entlastung eine gewisse Rissöffnung  $\delta$ , die auf irreversible bzw. bleibende Dehnungen zurückzuführen ist. Zum anderen wird eine Abnahme der elastischen Steifigkeit festgestellt. Diese entsteht einerseits aus der Materialdegradation selbst, andererseits aus der Vergrößerung der Risslänge  $C$ . Somit ist sowohl die Verwendung von Plastizitätsmodellen als auch die von Schädigungsmodellen bzw. deren Kombination denkbar. Deshalb werden im Weiteren ein Plastizitätsmodell und auch mehrere Schädigungsmodelle zur Simulation der fortschreitenden Delamination beschrieben bzw. entwickelt. Um vorerst plastische und schädigende Effekte klar zu trennen, wird keine Kopplung der Modelle berücksichtigt.

## 7.2 Plastizitätsmodell mit Brewer-Lagace-Kriterium

Nachfolgend wird ein Plastizitätsmodell beschrieben, das von Sprenger (2000) für fortschreitende Delaminationen entwickelt wurde und im Kontext einer entfestigenden Plastizitätstheorie formuliert ist. Dabei soll in Kapitel 7.2.2 insbesondere auf die Definition eines netzabhängigen Entfestigungsmoduls eingegangen werden. Dieser Modul ist nötig, um die Objektivität der Er-



Quelle:  
Carlsson und Pipes (1989)

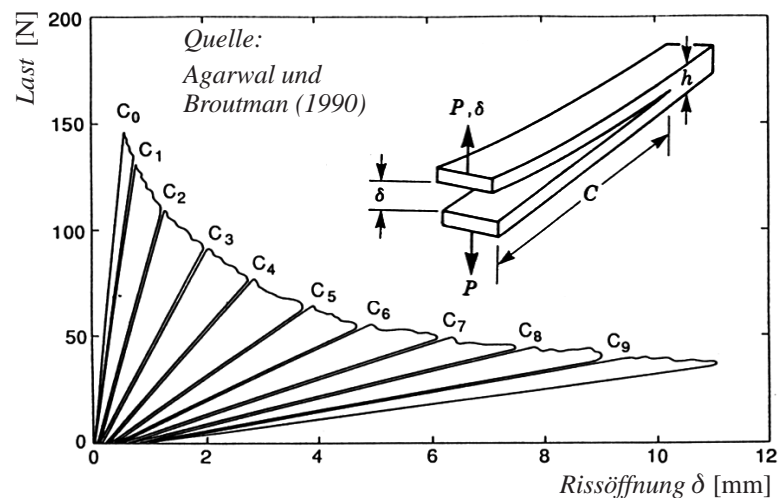


Abb. 7.3: Versuchsergebnisse: 'Double-Cantilever-Beam'-Probe

gebnisse im nachkritischen Bereich wieder zu gewährleisten, die aufgrund des *Verlustes von Elliptizität* verloren geht. Anschließend beschreibt Kapitel 7.2.3 die Rückprojektion, während in Kapitel 7.2.4 die elasto-plastische Materialtangente hergeleitet wird. Eine automatische visko-plastische Regularisierung, die auf der ratenunabhängigen elasto-plastischen Lösung aufbaut, stellt Kapitel 7.2.5 vor. Anhand von Untersuchungen des *akustischen Tensors*  $\mathbf{Q}^{ak}$  wird die Auswirkung der visko-plastischen Regularisierung auf den Verlust von Elliptizität untersucht.

### 7.2.1 Fließbedingung für Delamination

Das Versagenskriterium für Delamination nach Brewer und Lagace (1989) beinhaltet lediglich diejenigen interlaminaren Spannungskomponenten, die für die Initiierung und den Fortschritt von Delaminationen als maßgebend angesehen werden. Mit der Unterscheidung hinsichtlich positiver und negativer Dickenspannung  $S_{33}$  lautet es nach Gleichung (6.17):

$$\left( \frac{\langle S_{33} \rangle}{\bar{S}_{33}^t} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\bar{S}_{13}} \right)^2 + \left( \frac{S_{23}}{\bar{S}_{23}} \right)^2 = 1 \quad . \quad (7.1)$$

In Gleichung (7.1) bezeichnet  $\langle x \rangle$  die Rampenfunktion mit  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$  und berücksichtigt, dass lediglich positive Dickennormalspannungen  $S_{33}$  zur Entstehung von Delaminationen beitragen. Die einzelnen Spannungskomponenten  $S_{ij}$  des Spannungsvektors  $\mathbf{S}$  ergeben sich aus der Transformation des allgemeinen Spannungszustandes in die Materialhaupttrichtungen. Wird das Versagenskriterium auf den Festigkeitswert der Dickennormalspannung  $\bar{S}_{33}^t$  bezogen, so lässt sich Gleichung (7.1) auch als

$$\left( \langle S_{33} \rangle \right)^2 + S_{13} \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{13}} \right)^2 + S_{23} \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{23}} \right)^2 = \left( \bar{S}_{33}^t \right)^2 \quad (7.2)$$

darstellen und kann nach beiderseitigen Ziehen der Wurzel in Vektor-Matrix-Schreibweise geschrieben werden:

$$F(\mathbf{S}, q) = f(\mathbf{S}) - q = \sqrt{\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S}} - \bar{S}_{33}^t = 0 \quad . \quad (7.3)$$

Dabei wird in Gleichung (7.3) die Fließspannung  $f(\mathbf{S})$ , die lediglich Funktion des Spannungsvektors  $\mathbf{S}$  ist, wie folgt definiert:

$$f(\mathbf{S}) = \sqrt{\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S}} \quad . \quad (7.4)$$

Eine skalarwertige und noch konstante Vergleichsspannung  $q = \bar{S}_{33}^t$  findet ebenfalls Verwendung. Die Kopplungsmatrix  $\mathbf{P}$ , die den Spannungsvektor  $\mathbf{S}$  zu einem skalaren Vergleichswert verknüpft, kann man als Diagonalmatrix angeben

$$\mathbf{P} = \text{diag} \left[ 0, 0, 1, 0, \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{23}} \right)^2, \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{13}} \right)^2 \right] \quad , \quad (7.5)$$

wobei der dazugehörige Spannungsvektor folgendermaßen sortiert ist:

$$\mathbf{S} = [S_{11}, S_{22}, \langle S_{33} \rangle, S_{12}, S_{23}, S_{13}]^T \quad . \quad (7.6)$$

## 7.2.2 Entfestigungsfunktion und netzabhängiger Entfestigungsmodul

Bislang verhält sich das Delaminationsmodell, das durch Gleichung (7.3) gegeben ist, idealplastisch. Es wird nun auf entfestigendes Materialverhalten erweitert, indem man die skalarwertige Vergleichsspannung  $q$  als Funktion der skalarwertigen internen Variable  $\kappa$ , des dimensionslosen Entfestigungsmoduls  $\mu$  und der Fließspannung in Dickenrichtung  $\bar{S}_{33}^t$  definiert. Für die Fließbedingung zur Beschreibung fortschreitender Delamination auf Basis einer Entfestigung folgt somit

$$F(S, q(\kappa)) = f(S) - q(\kappa) = \sqrt{S^T P S} - q(\kappa) \leq 0 \quad , \quad (7.7)$$

mit  $f(S)$  nach Gleichung (7.4). Die Vergleichsspannung  $q(\kappa)$  ist dabei wie folgt definiert:

$$q(\kappa) = \begin{cases} \bar{q}_1(\kappa) = \bar{S}_{33}^t(1 - \mu\kappa) & \text{für } 0 \leq \kappa \leq \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\tau} - \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\mu\bar{S}_{33}^t} \right] \\ \bar{q}_2(\kappa) = (\bar{S}_{33}^t - \bar{S}_{33,\infty}^t) \exp \left[ \tau - 1 - \ln(\tau) - \kappa\tau\mu + \ln \left[ \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{33}^t - \bar{S}_{33,\infty}^t} \right] - \tau \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\bar{S}_{33}^t} \right] + \bar{S}_{33,\infty}^t & \text{für } \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\tau} - \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\mu\bar{S}_{33}^t} \right] < \kappa < \infty \quad . \end{cases} \quad (7.8)$$

Die Evolution der Vergleichsspannung  $q(\kappa)$  ist so gewählt, dass anfangs eine lineare Entfestigung stattfindet, die bei Erreichen der Übergangsstelle  $\tau$  in einen exponentiellen Verlauf übergeht, siehe Abb. 7.4. Der Grenzwert der Exponentialfunktion  $\bar{q}_2(\kappa)$  für äquivalente Verzerungen  $\kappa$  gegen unendlich ist

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \bar{q}_2(\kappa) = \bar{S}_{33,\infty}^t \quad (7.9)$$

und verursacht eine kleine Restspannung auch bei vollständiger Entfestigung. Die Definition der Restspannung  $\bar{S}_{33,\infty}^t$  soll numerische Schwierigkeiten im Übergang zur vollständigen Entfestigung vermeiden. Der Wechsel zwischen linearer und exponentieller Entfestigung wird  $C^1$ -kontinuierlich gewählt. Damit wird an dieser Stelle sowohl eine Unstetigkeit im Spannungs-Verzer-

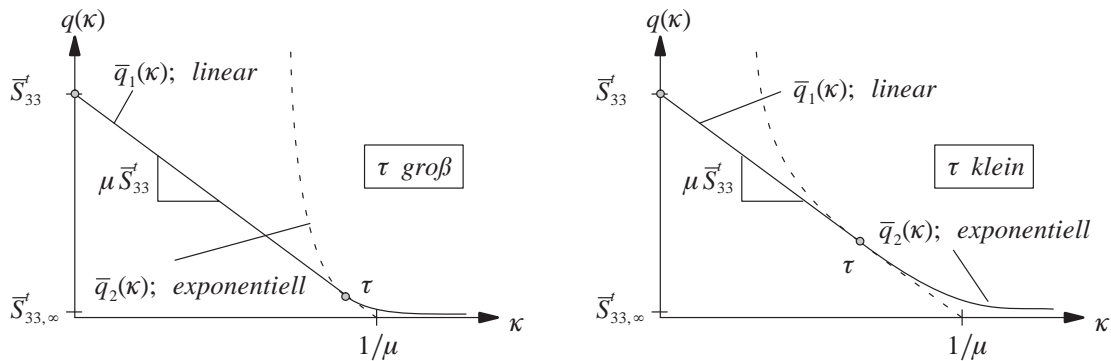


Abb. 7.4: Einfluss des Übergangsparameters  $\tau$

rungs-Diagramm als auch eine Unstetigkeit in der ersten Ableitung nach der äquivalenten Verzerrung vermieden. Diese Ableitung wird zum einen innerhalb der lokalen Newton-Iteration und zum anderen bei der Herleitung der elasto-plastischen Materialtangente benötigt. Eine Unstetigkeit könnte hier zu Konvergenzproblemen führen. Die Stelle des Übergangs steuert der Parameter  $\tau$ . Bei großen Werten von  $\tau$  findet der Übergang spät statt; bei kleinen Werten von  $\tau$  findet er früher statt, siehe Abb. 7.4.

Abb. 7.5 zeigt exemplarisch die Antwort einer Struktur, die einaxial in 3-Richtung belastet wird und vollständig aus entfestigendem Material besteht. Bis zum Erreichen der Fließspannung  $\bar{S}_{33}^f$  verhält sich das Material linear elastisch und es entstehen keine plastischen Verzerrungen. Nach Überschreiten der Fließspannung  $\bar{S}_{33}^f$  reduziert sich die Last proportional zu den aufgebrachten Verschiebungen und das Material entfestigt. Der dimensionslose, positive Entfestigungsmodul  $\mu$  gibt dabei den Grad der Entfestigung an und ist bis zum Erreichen der exponentiellen Entfestigungsfunktion gültig. Der stetige Übergang zwischen linearem und exponentiellem Verlauf der Vergleichsspannung  $q(\kappa)$  spiegelt sich auch im globalen Antwortverhalten der Struktur wider.

Vollständigkeitshalber muss noch erwähnt werden, dass bei Erreichen der kompletten Entfestigung, d.h. die Vergleichsspannung  $q(\kappa)$  hat den Wert  $\bar{S}_{33,\infty}^f$  erreicht, sämtliche Komponenten des Spannungsvektors  $S$  und der Materialmatrix  $C$  endgültig auf den Wert  $10^{-12}$  gesetzt werden. Der Grund hierfür ist die Vorstellung, die komplette Entfestigung der Prozessschicht mit der vollständigen Schädigung gleichzusetzen. Es werden somit auch die Spannungen, die für die Delamination nicht maßgebend sind ( $S_{11}, S_{12}, S_{22}$ ), auf diesen Wert reduziert. Die Hauptdiagonalewerte der Materialmatrix setzt man ebenfalls auf einen verschwindend geringen Wert von  $10^{-6}$ .

Im Weiteren muss man das Versagensphänomen der *Lokalisierung*, das aufgrund des gewählten entfestigenden Materialgesetzes auftritt, näher betrachten. Unter dem Begriff der Lokalisierung wird die Ausbildung schmaler Versagenszonen verstanden, in denen sich Deformationen konzentrieren, während die übrigen Bereiche der Struktur sich möglicherweise bereits elastisch entlasten. Der Versagensprozess ist dabei durch die Entstehung von Mikroporen und Mikrorissen gekennzeichnet, die sich bei weiterer Belastung zusammenschließen und die Zone der stark loka-

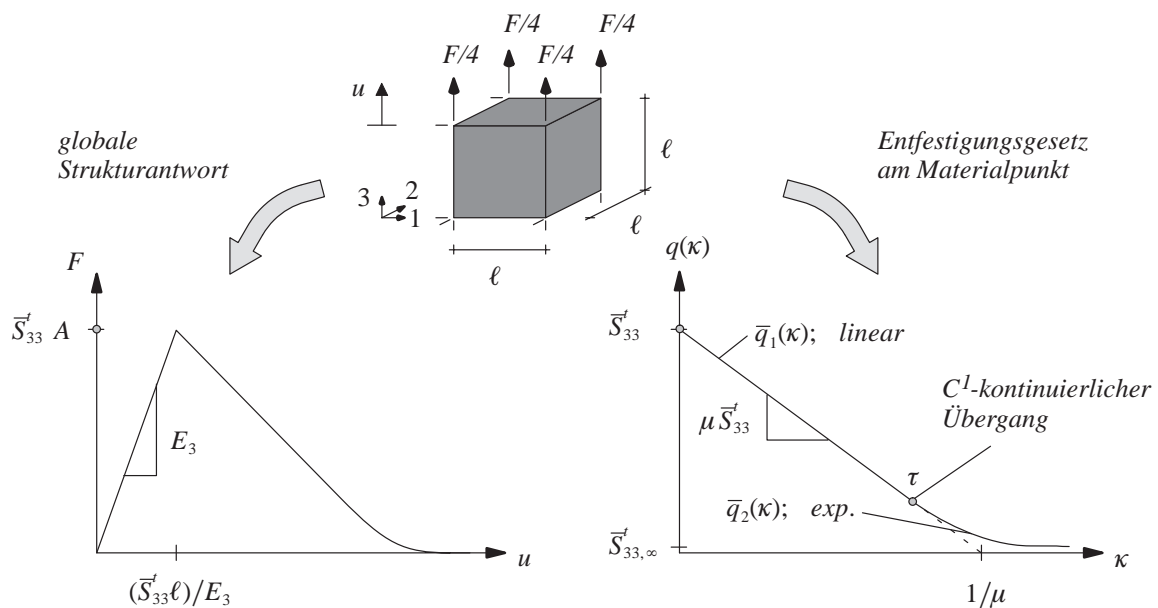


Abb. 7.5: Strukturantwort und Entfestigungsfunktion



lisierten Verzerrungen bilden, siehe exemplarisch Abb. 7.6a). Auf der Makroebene spiegelt sich dies als Entfestigung wider und kann sowohl bei metallischen Materialien, wie beispielsweise Eisen, Stahl und Kupfer, als auch bei Faserverbundwerkstoffen und Geomaterialien, wie Marmor, Sand, Gestein und Beton, gleichermaßen beobachtet werden. Bei näherer Betrachtung der Versagensvorgänge auf der Mikroebene sind allerdings entscheidende Unterschiede festzustellen: So ist bei spröden Materialien ein trennbruchartiges Modus I-Versagen dominierend, das durch das Auftrennen von kohäsiven Bindungen gekennzeichnet ist. Duktile Materialien zeigen auf der Mikroebene hingegen ein gleitbruchartiges bzw. schubbruchartiges Modus II- bzw. Modus III-Versagen, das durch ein Abgleiten entlang schwächerer Materialebenen charakterisiert ist. Für Faserverbundwerkstoffe kann man je nach Belastungsart und Faserorientierung Modus I-, Modus II- oder Modus III-Versagen sowie deren Kombinationen beobachten. Allen Versagensfällen ist aber die Ausbildung eines schmalen Bandes mit stark lokalisierten Verzerrungen gemeinsam. Zu einem späteren Zeitpunkt stellen diese unter Umständen den Ausgangspunkt für ein diskretes Versagen dar. Die Breite des Versagensbandes  $h_{loc}$  ist dabei eine werkstoffabhängige Größe und kann für verschiedene Materialien mitunter stark variieren. In Nádai (1931) sind sowohl für metallische Materialien als auch für Geomaterialien eine Vielzahl lokalisierter Versagensformen dargestellt und anschaulich erläutert.

Mit der Lokalisierung eng verbunden ist die ausgeprägte Diskretisierungsabhängigkeit der Ergebnisse im nachkritischen Bereich. Diese tritt bei Verwendung einer klassischen Kontinuums-theorie in Kombination mit einer lokalen Materialformulierung auf (Bazant (1976), Crisfield (1982, 1986), de Borst (1986)). Die Folge ist, dass sich der Typ der zugrunde liegenden partiellen Differenzialgleichungen bei quasi-statischen Problemen von elliptisch auf hyperbolisch (*'Loss of Ellipticity'*) sowie bei dynamischen Problemen von hyperbolisch auf elliptisch (*'Loss of Hyperbolicity'*) wechselt. In beiden Fällen geht die Gutgestelltheit des Randwertproblems bzw. des Anfangsrandwertproblems verloren und die numerischen Ergebnisse unterliegen einer Netzabhängigkeit, siehe Hill (1962) oder Sluys (1992). Die Lokalisierung und die Diskretisierungsabhängigkeit der Ergebnisse ist folglich sowohl bei entfestigenden Plastizitätsmodellen als auch bei Schädigungsmodellen vorhanden.

Zur Veranschaulichung der Netzabhängigkeit des Nachbruchverhaltens soll an dieser Stelle nicht das sonst übliche Modellproblem des Zugstabes im Übergang zu unendlich feiner Diskretisierung vorgestellt werden, sondern es wird lediglich im Vorgriff auf Abb. 7.9a) sowie auf die einschlägige Literatur wie beispielsweise de Borst (1986) und Jirásek (1999, 2001) verwiesen. Abb. 7.9a) zeigt anhand eines einaxialen Zugversuchs mit unterschiedlichen Prozessschichtdicken die Abhängigkeit des Nachbruchverhaltens von der Diskretisierung. Lediglich in der Prozessschicht (dunkelgrau eingefärbt in Abb. 7.7) wird entfestigendes Materialverhalten angenommen, während sich die übrigen Schichten rein elastisch verhalten sollen. Die Lokalisierung findet somit stets in der Prozessschicht statt. Man kann erkennen, dass kleinere Dicken zu einem steileren Entfestigungsverlauf führen und sogar ein *'Snap-Back'*-Verhalten hervorrufen können. Des Weiteren kann man sich vorstellen, dass keine Energiedissipation (Fläche unter der Last-Verschiebungs-Kurve) mehr stattfinden würde, wenn die Prozessschichtdicke gegen Null strebt. Dies entspricht beim sonst üblichen Modellproblem des Zugstabes dem Grenzübergang zu unendlich feiner Diskretisierung und Lokalisierung in einem Element. Der Nachbruchverlauf findet sodann auf dem elastischen Ast statt, siehe auch Bazant und Belytschko (1985). Das beschriebene Verhalten der numerischen Simulation ist physikalisch vollkommen unbegründet und die so erhaltenen Ergebnisse sind unbrauchbar.

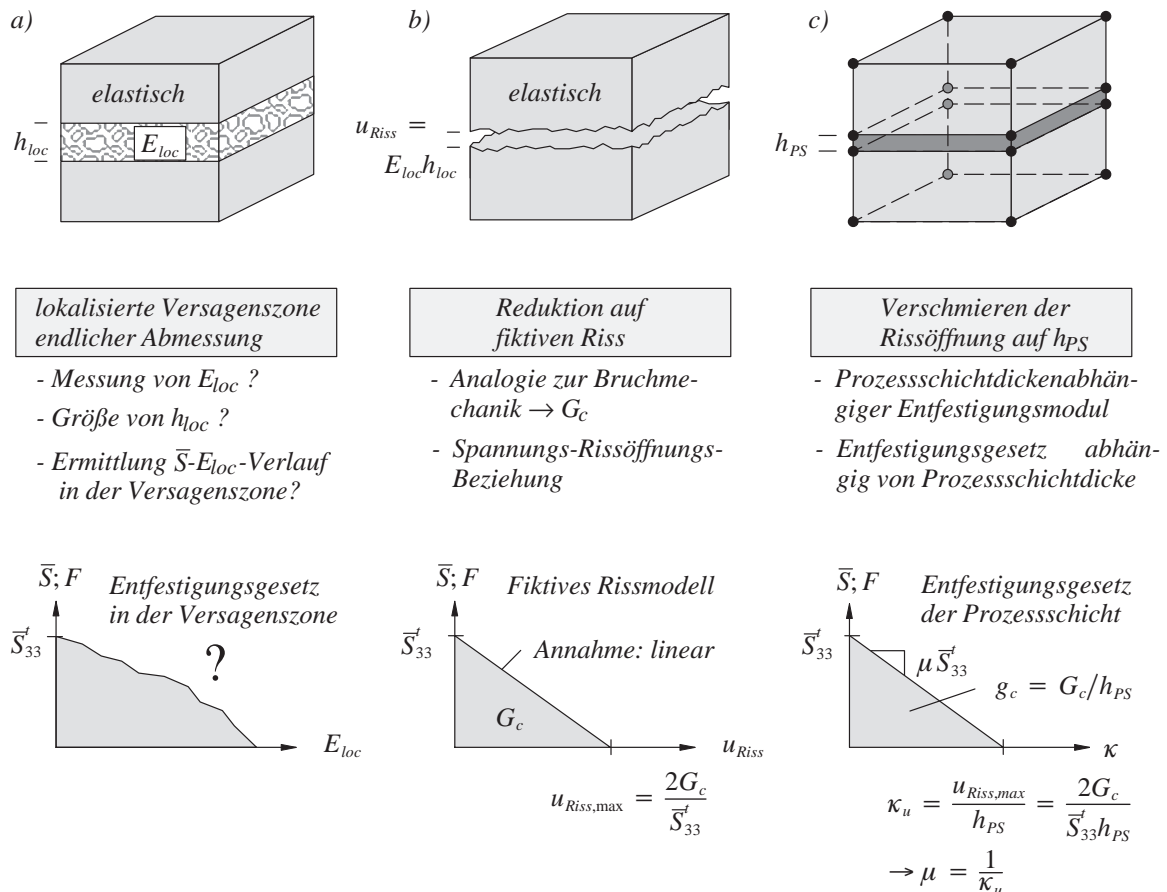


Abb. 7.6: Prozessschichtdickenabhängiger Entfestigungsmodul  $\mu$

Die Objektivität der Ergebnisse kann durch ein anschauliches und überaus einfaches Verfahren wiederhergestellt werden, das auf die Arbeiten von Pietruszczak und Mróz (1981), Bazant und Oh (1983) und Willam (1984) zurückgeht und unter den Begriffen der *Rissbandmethode*, der *Methode der verschmierten Rissbildung* oder der *Methode des netzadaptierten Entfestigungsmoduls* bekannt ist. Es steht in engem Zusammenhang wie auch in Analogie zur Bruchmechanik und wurde zur Berechnung von Delaminationen in Faserverbundwerkstoffen beispielsweise von Schellekens und de Borst (1994) übernommen. Das Vorgehen stützt sich dabei auf die Tatsache, dass die in einem Versuch gemessenen globalen Kraft-Verschiebungs- bzw. Spannungs-Dehnungs-Beziehungen ( $\bar{S} = F/A$  und  $E = \Delta\ell/\ell$ ) die Versagensvorgänge in der Lokalisierungszone nicht detailliert berücksichtigen. Könnte man hingegen die lokalisierten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Lokalisierungszone während eines Versuchs messen und würde man diese bei der numerischen Simulation verwenden, so fänden die Versagensvorgänge der Lokalisierungszone ausreichend Beachtung. Weiterhin würde stets die richtige Energie dissipiert.

Im Versuch ist es allerdings weder möglich, die lokalisierten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen  $\bar{S}$ - $E_{loc}$ , noch die Breite der Versagenszone  $h_{loc}$  exakt zu bestimmen. Ebenso wären diese Beziehungen nur für den jeweiligen Versuch und nicht allgemein gültig. Man behilft sich daher mit der Vorstellung eines fiktiven Risses, siehe Abb. 7.6 b). Hierbei werden gedanklich sämtliche lokalisierten Verzerrungen  $E_{loc}$  in der Versagenszone  $h_{loc}$  auf einen fiktiven Riss mit der Rissöffnung  $u_{Riss} = E_{loc} h_{loc}$  projiziert. Damit ist es möglich, eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung  $\bar{S}$ - $u_{Riss}$  aufzustellen, bei der in Analogie zur Bruchmechanik gilt: Die Fläche unter der Span-

nungs-Rissöffnungs-Beziehung  $\bar{S}-u_{Riss}$  entspricht der zur Erzeugung des Risses erforderlichen Energie, gleichbedeutend der kritischen Bruchenergie  $G_c$ , und kann als konstanter materialspezifischer Parameter verstanden werden, siehe Hillerborg et al. (1976).

$$G_c := \int \bar{S} du = \text{konst.} \quad (7.10)$$

Die kritische Bruchenergie  $G_c$  wird hier nur als der Flächenteil definiert, der unter der Entfestigungsfunktion gegeben ist, siehe Abb. 7.6b). Es besteht allerdings auch die Möglichkeit, die Bruchenergie identisch der Fläche unter der gesamten Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung zu definieren und somit den elastischen Teil zu berücksichtigen, siehe Carol et al. (2001). Bei der Simulation der fortschreitenden Delamination mittels einer dünnen Prozessschicht ist der elastische Anteil allerdings sehr klein und kann daher vernachlässigt werden.

Unter der Annahme eines rein linearen Entfestungsverlaufs nach Abb. 7.6b) lässt sich aus Gleichung (7.10) die maximale Rissöffnung, bei der die gesamte Bruchenergie  $G_c$  verbraucht wurde, wie folgt berechnen:

$$G_c = \frac{1}{2} \bar{S}_{33}^t u_{Riss,max} \quad \rightarrow \quad u_{Riss,max} = \frac{2G_c}{\bar{S}_{33}^t} . \quad (7.11)$$

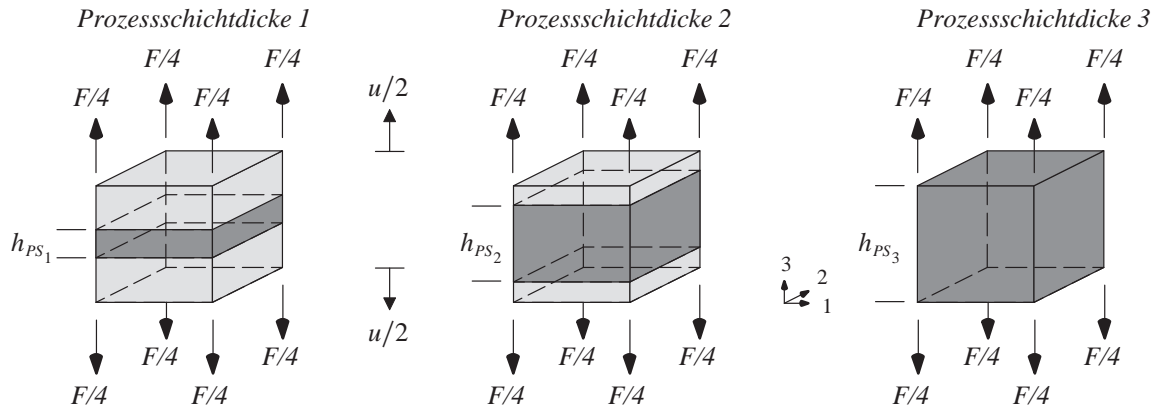
Die nun bekannte Größe der maximalen Rissöffnung  $u_{Riss,max}$  wird unter der Annahme, dass die Lokalisierung der Verzerrungen bei der FE-Simulation nur in einer Elementreihe stattfindet, über die Schichthöhe  $h_{PS}$  verschmiert, siehe Abb. 7.6c). Der Maximalwert der äquivalenten Verzerrungen  $\kappa_u$  und der Entfestigungsmodul  $\mu$  sind somit abhängig von der Prozessschichtdicke  $h_{PS}$  und berechnen sich aus

$$\kappa_u = \frac{u_{Riss,max}}{h_{PS}} = \frac{2G_c}{\bar{S}_{33}^t h_{PS}} \quad \text{und} \quad \mu(h_{PS}) = \frac{1}{\kappa_u} . \quad (7.12)$$

Die Prozessschichtdicke  $h_{PS}$  ist bei diesem Vorgehen folglich für die Objektivität des Nachbruchverhaltens entscheidend. Da für die Berechnung der maximalen äquivalenten Verzerrung  $\kappa_u$  allerdings ein rein linearer Verlauf der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung angenommen wurde, ist es wichtig, den Übergangsparameter  $\tau$  ausreichend groß zu wählen und somit den Übergang in den exponentiellen Verlauf hinauszuzögern. Der Fehler, der bei der Flächenberechnung ansonsten begangen wird, kann damit verringert werden.

Die Abbildungen 7.9a) und 7.9b) zeigen die Ergebnisse der numerischen Simulation eines einaxialen Zugversuchs nach Abb. 7.7. Der Quader mit der Kantenlänge 1 mm wird an der Ober- und Unterseite einaxial in 3-Richtung belastet und ist in der Schalenmittelfläche gelagert. Die Diskretisierung mit einem dreischichtigen finiten Schalenelement benutzt verschiedene Prozessschichtdicken, wobei die Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung des prozessschichtdickenabhängigen Entfestigungsmoduls gegenübergestellt werden. Die Materialparameter sind in Abb. 7.8 angegeben. Man kann bei Verwendung eines konstanten Entfestigungsmoduls  $\mu$  das diskretisierungsabhängige Nachbruchverhalten erkennen, das im Grenzfall unendlich kleiner Prozessschichtdicken zu keiner Energiedissipation führt, siehe Abb. 7.9a). Im Unterschied dazu entsteht bei der Verwendung des prozessschichtdickenabhängigen Entfestigungsmoduls  $\mu_i$  im-

**Einaxialer Zugversuch:**



**Geometrie:**

$$\begin{aligned} h_{PS_1} &= 0,04 \text{ mm} \hat{=} PS_1 \\ h_{PS_2} &= 0,70 \text{ mm} \hat{=} PS_2 \\ h_{PS_3} &= 1,00 \text{ mm} \hat{=} PS_3 \\ \ell &= 1,00 \text{ mm} \end{aligned}$$

**Diskretisierung:**

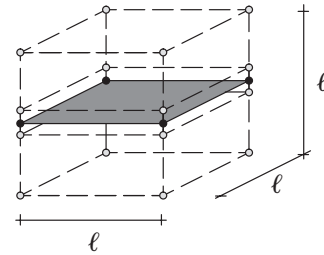


Abb. 7.7: Modellproblem des prozessschichtdickenabhängigen Entfestigungsmoduls

mer der gleiche Nachbruchverlauf und es wird stets dieselbe Energie dissipiert. Eine Dimensionsanalyse der in Abb. 7.9a) und 7.9b) angegebenen Gleichungen

$$\mu = \frac{\bar{S}_{33}^t}{2G_c} \quad \text{in} \quad \left[ \frac{1}{\text{m}} \right] \quad \text{und} \quad \mu_i = \frac{\bar{S}_{33}^t h_{PS_i}}{2G_c} \quad \text{in} \quad [-] \quad (7.13)$$

zeigt nochmals deutlich, dass ein Bezug auf die Prozessschichtdicke  $h_{PS}$  nötig ist, um einen dimensionslosen Entfestigungsmodul zu erhalten.

Durch die Einführung des netzabhängigen Entfestigungsmoduls wird somit die Objektivität des Nachbruchverhaltens wieder hergestellt. In einem allgemeinen Fall können die Ergebnisse allerdings noch geringfügig von der Netzorientierung sowie von der Elementgeometrie abhängig sein. Bei der Simulation der fortschreitenden Delamination in Faserverbundstrukturen hat dies jedoch keinen Einfluss, weil die Richtung und die Lage der Lokalisierung ohnehin durch die Schichtung bzw. die Prozessschicht vorgegeben ist. Allerdings findet die Lokalisierung a priori nur über eine Elementbreite bzw. über die Höhe der Prozessschicht statt. Die Breite der lokalisierten Versagenszone ist daher noch netz- bzw. schichtdickenabhängig. Folglich wird die im

**Materialparameter:**

$$\begin{aligned} E_1 &= 138000 \text{ N/mm}^2 & G_{12} &= 7100 \text{ N/mm}^2 & \nu_{12} &= 0,3 \\ E_2 &= 8960 \text{ N/mm}^2 & G_{23} &= 3448 \text{ N/mm}^2 & \nu_{23} &= 0,3 \\ E_3 &= 8960 \text{ N/mm}^2 & G_{13} &= 7100 \text{ N/mm}^2 & \nu_{13} &= 0,3 \\ \bar{S}_{33}^t &= 51,7 \text{ N/mm}^2 & \bar{S}_{33,\infty}^t &= 10^{-6} \text{ N/mm}^2 \\ \bar{S}_{23} &= 91,7 \text{ N/mm}^2 & \tau &= 80 \\ \bar{S}_{13} &= 91,7 \text{ N/mm}^2 & G_c &= 2,585 \text{ Nmm/mm}^2 \end{aligned}$$

Abb. 7.8: Materialparameter des Modellproblems

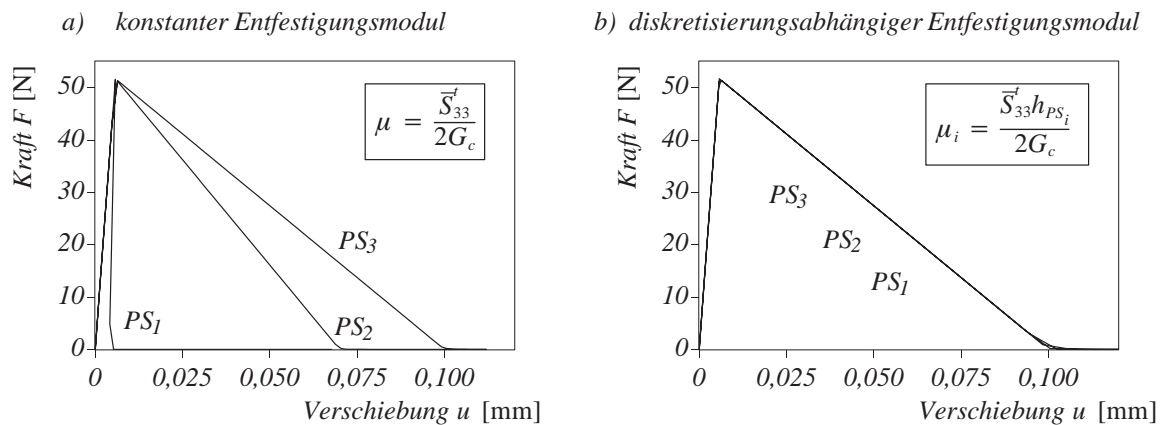


Abb. 7.9: Diskretisierungsabhängige und diskretisierungsunabhängige Strukturantwort

Versuch tatsächlich festgestellte Breite der lokalisierten Versagenszone  $h_{loc}$  im Allgemeinen durch die numerische Simulation nicht richtig abgebildet. Die Schlechtgestellttheit des Anfangsrandwertproblems ist daher weiterhin vorhanden und wird unter Umständen bei der numerischen Simulation von Strukturen zu Instabilitätsproblemen führen. Erst durch die Verwendung „höherwertiger“ Theorien, wie beispielsweise nichtlokale Integralkontinua (Bazant (1984), Pijaudier-Cabot und Bazant (1987)), gradientenerweiterte Kontinuumsmodelle (Mühlhaus und Aifantis (1991), Aifantis (1992)), Cosserat-Kontinuumstheorie (de Borst (1991), de Borst et al. (1993)) oder durch die Berücksichtigung viskoser Effekte (Sluys (1992), Wang (1997)), wird die Gutgestellttheit des Problems wieder gewährleistet. Die genannten Methoden ermöglichen durch die Berücksichtigung zusätzlicher Terme in den konstitutiven Gleichungen nicht nur ein netzunabhängiges Nachbruchverhalten, sondern sind vielmehr in der Lage, Lokalisierungszone endlicher Breite bzw. mit diskretisierungsunabhängiger Breite abzubilden. Sie werden aufgrund ihrer regularisierenden Wirkung auch häufig als Regularisierungsstrategien bezeichnet. In Kapitel 7.2.5 wird analog zu Sprenger (2000) auf die Regularisierung der Delaminationsplastizität durch die Berücksichtigung viskoser Effekte zurückgegriffen und ein Verfahren vorgestellt, das die automatische Bestimmung des Dämpfungsparameters erlaubt. Zunächst wird aber im nächsten Abschnitt der Rückprojektionsalgorithmus der Delaminationsplastizität vorgestellt.

### 7.2.3 Rückprojektionsalgorithmus

Verletzen die Prädiktorspannungen  $S_{n+1}^*$  (Gleichung (4.35)) zusammen mit den internen Variablen des Zeitpunktes  $t_n$  die Fließfunktion ( $F_{n+1}^* > 0$ , Gleichung (7.7)), so müssen sowohl neue Spannungen  $S_{n+1}$  als auch neue plastische Verzerrungen  $E_{n+1}^{pl}$  berechnet werden, die die Fließfunktion in Kombination mit der aktualisierten internen Variablen  $q_{n+1}$  wieder erfüllen.

Die neuen Spannungen  $S_{n+1}$  sind über die in Kapitel 4 angegebenen Gleichungen (4.41) und (4.43) zu bestimmen

$$S_{n+1} = S_{n+1}^* - C^{el} \Delta E_{n+1}^{pl} . \quad (4.41)$$

Im Sinne einer assoziierten Fließregel (Gleichung (4.10)) wird das plastische Verzerrungsincrement  $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl}$  über den plastischen Multiplikator  $\Delta \lambda_{n+1}$  und den Gradienten der Fließbedingung nach den Spannungen bestimmt:

$$\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \Delta \lambda_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad . \quad (7.14)$$

Dabei gilt für die Ableitung der Fließfunktion nach den Spannungen

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = \left\{ \frac{1}{f(\mathbf{S})} \mathbf{P} \mathbf{S} \right\}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1} \quad . \quad (7.15)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (7.14) und (7.15) in (4.41) kann man für die Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  nun schreiben:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^* - \Delta \lambda_{n+1} \frac{1}{f(\mathbf{S}_{n+1})} \mathbf{P} \mathbf{S}_{n+1} \quad . \quad (7.16)$$

Gleichung (7.16) muss nach den Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  aufgelöst werden, was aber wegen  $1/f(\mathbf{S}) = 1/\sqrt{\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S}}$  nicht geschlossen möglich ist. Abhilfe schafft hier die Ausnutzung der Fließbedingung, die durch Gleichung (7.7) gegeben ist. Diese muss gerade zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  und für die Spannungen  $\mathbf{S}_{n+1}$  erfüllt sein, so dass gilt:

$$f(\mathbf{S}_{n+1}) = q(\kappa_{n+1}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f(\mathbf{S}_{n+1})} = \frac{1}{q(\kappa_{n+1})} \quad . \quad (7.17)$$

Damit folgt aus Gleichung (7.16) für die Spannungen

$$\mathbf{S}_{n+1} = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}_{n+1}^* \quad (7.18)$$

mit  $\boldsymbol{\Theta}$  nach Gleichung (4.50) und hier im Speziellen

$$\boldsymbol{\Theta} = \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta \lambda_{n+1} \frac{1}{q(\kappa_{n+1})} \mathbf{P} \right]^{-1} \quad . \quad (7.19)$$

Aus der skalarwertigen Ratenform des Evolutionsgesetzes (Gleichung (4.18)) bzw. dessen diskretisierter Form nach Gleichung (4.44)<sub>2</sub>

$$\Delta q_{n+1} = - H \Delta \kappa_{n+1} \quad (7.20)$$

und der assoziierten Form des Entfestigungsgesetzes analog zu Gleichung (4.44)<sub>3</sub>

$$\Delta \kappa_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{n+1} \quad (7.21)$$

folgt für das Inkrement der äquivalenten Spannungen  $\Delta q_{n+1}$ :

$$\Delta q_{n+1} = H \Delta \lambda_{n+1} \quad . \quad (7.22)$$

Der Entfestigungsmodul  $H$  ist dabei wie folgt zu bestimmen:

$$H = \begin{cases} \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \kappa} = -\bar{S}_{33}^t \mu & \text{für } 0 \leq \kappa \leq \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\tau} - \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\mu\bar{S}_{33}^t} \right] \\ \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial \kappa} = -(\bar{S}_{33}^t - \bar{S}_{33,\infty}^t)\tau\mu & \\ \exp\left[\tau - 1 - \ln(\tau) - \kappa\tau\mu + \ln\left(\frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{33}^t - \bar{S}_{33,\infty}^t}\right) - \tau\frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\bar{S}_{33}^t}\right] & \\ \text{für } \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\tau} - \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\mu\bar{S}_{33}^t} \right] < \kappa < \infty . & \end{cases} \quad (7.23)$$

Man beachte, dass nach Gleichungen (7.22) und (7.23) das Inkrement der äquivalenten Spannungen  $\Delta q_{n+1}$  nur noch vom plastischen Multiplikator  $\Delta\lambda_{n+1}$  abhängt

$$q_{n+1} = q_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}, \Delta\kappa_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1})) = q_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}) . \quad (7.24)$$

Auch die Spannungen  $S_{n+1}$  sind nach Gleichung (7.18) und (7.19) nur noch Funktion des plastischen Multiplikators

$$S_{n+1} = S_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}, q(\Delta\lambda_{n+1})) . \quad (7.25)$$

Daher kann die Fließbedingung ebenfalls formal in Abhängigkeit von  $\Delta\lambda_{n+1}$  angeben werden:

$$F(S_{n+1}, q_{n+1}) = F(\Delta\lambda_{n+1}) = 0 . \quad (7.26)$$

Da Gleichung (7.26) sich nicht explizit nach  $\Delta\lambda_{n+1}$  auflösen lässt, wird zur Bestimmung von  $\Delta\lambda_{n+1}$ , gleichbedeutend mit der Nullstellensuche der skalarwertigen Funktion  $F(\Delta\lambda_{n+1})$ , eine lokale Newton-Iteration (Kopfzeiger  $j$ ) verwendet:

$$\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} = \Delta\lambda_{n+1}^j - \frac{F}{dF/d\lambda} \Big|_{n+1}^j . \quad (7.27)$$

Das dabei benötigte totale Differenzial der Fließfunktion nach dem plastischen Multiplikator bestimmt sich mit

$$\left\{ \frac{dF}{d\lambda} = \left( \frac{\partial F}{\partial S} \right)^T \left( \frac{\partial S}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right\}_{n+1}^j . \quad (7.28)$$

Die in Gleichung (7.28) verwendeten Gradienten lauten folgendermaßen:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{f(S)} \mathbf{P} \mathbf{S} = \mathbf{n} \right\}_{n+1}^j , \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \lambda} \right. &= - \boldsymbol{\Theta} \left[ \boldsymbol{\Theta}^{-1} \right]_{,\Delta \lambda} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}^* = - \frac{1}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}^* \\
&= - \frac{1}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P} \mathbf{S} = - \frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \left. \right\}_{n+1}^j
\end{aligned} \tag{7.30}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} \right. &= - \boldsymbol{\Theta} \left[ \boldsymbol{\Theta}^{-1} \right]_{,q} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}^* = \frac{\Delta \lambda}{q(\kappa)^2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}^* \\
&= \Delta \lambda \frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)^2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \left. \right\}_{n+1}^j .
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Des Weiteren kann man aus Gleichung (7.22) die Ableitung der Vergleichsspannung nach dem plastischen Multiplikator  $\partial q / \partial \Delta \lambda$  wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial q}{\partial \Delta \lambda} = H \tag{7.32}$$

mit  $H$  nach Gleichung (7.23). Weiterhin gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -1 . \tag{7.33}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (7.29) bis (7.33) in (7.28) und kurzes Umformen lautet das totale Differenzial der Fließfunktion nach dem plastischen Multiplikator  $\Delta \lambda_{n+1}$  folglich

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\lambda} \Big|_{n+1}^j &= \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \left( - \frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} + \Delta \lambda \frac{f(\mathbf{S}) H}{q(\kappa)^2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \right) - H \right\}_{n+1}^j \\
&= \left\{ \left( -1 + \Delta \lambda \frac{H}{q(\kappa)} \right) \frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} - H \right\}_{n+1}^j \\
&= - \left\{ \left( 1 - \Delta \lambda \frac{H}{q(\kappa)} \right) \frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} + H \right\}_{n+1}^j .
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Ist der Wert des plastischen Multiplikators  $\Delta \lambda_{n+1}$  bekannt, so lässt sich der neue Spannungszustand  $\mathbf{S}_{n+1}$  über die Gleichungen (7.18) und (7.19) sowie die äquivalente Spannung  $q_{n+1}$  über Gleichung (7.8) aktualisieren. Abb. 7.10 zeigt das Ablaufschema des Rückprojektionsalgorithmus und die Berechnung der algorithmischen Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$ , die im nächsten Kapitel hergeleitet werden soll.



**1. Initialisierung**  $\Delta\lambda_{n+1}^0 = 0$

**2. Lokale Newton-Iteration zur Berechnung von  $\Delta\lambda_{n+1}$**

- neue äquivalente Verzerrung und äquivalente Spannung

$$\kappa_{n+1}^j = \kappa_n + \Delta\lambda_{n+1}^j$$

$$q_{n+1}^j = q(\kappa_{n+1}^j) \quad \text{mit Gleichung (7.8)}$$

- neue Spannungen

$$S_{n+1}^j = \Theta C^{el-1} S_{n+1}^* \quad \text{mit} \quad \Theta = \left[ C^{el-1} + \Delta\lambda_{n+1}^j \frac{1}{q_{n+1}^j} \mathbf{P} \right]^{-1}$$

- neue Fließrichtung

$$\mathbf{n}_{n+1}^j = \frac{1}{f(S_{n+1}^j)} \mathbf{P} S_{n+1}^j \quad \text{mit} \quad f(S_{n+1}^j) = \sqrt{(S_{n+1}^j)^T \mathbf{P} S_{n+1}^j}$$

- aktualisierte Fließfunktion und deren Ableitung

$$F(S_{n+1}^j, q_{n+1}^j) = f(S_{n+1}^j) - q_{n+1}^j$$

$$\left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_{n+1}^j = - \left\{ \left( 1 - \Delta\lambda \frac{H}{q(\kappa)} \right) \frac{f(S)}{q(\kappa)} \mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} + H \right\}_{n+1}^j \quad \text{mit Gleichungen (7.29) bis (7.33)}$$

- verbessertes  $\Delta\lambda_{n+1}^{j+1}$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} = \Delta\lambda_{n+1}^j - \frac{F}{dF/d\lambda} \Big|_{n+1}^j$$

- Abbruchkriterium

$$\left| \frac{\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} - \Delta\lambda_{n+1}^j}{\Delta\lambda_{n+1}^{j+1}} \right| \begin{cases} > TOL & \rightarrow GOTO 2. \\ \leq TOL & \rightarrow \Delta\lambda_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1}^{j+1} \rightarrow GOTO 3. \end{cases}$$

**3. Aktualisierung der internen Variablen und der Spannungen**

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\kappa_{n+1} \quad \text{mit} \quad \Delta\kappa_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1}$$

$$q_{n+1} = q(\kappa_{n+1})$$

$$S_{n+1} = \Theta C^{el-1} S_{n+1}^* \quad \text{mit} \quad \Theta = \left\{ \left[ C^{el-1} + \Delta\lambda \frac{1}{q} \mathbf{P} \right]^{-1} \right\}_{n+1}$$

**4. Algorithmische elasto-plastische Materialtangente**

$$C_{n+1}^{ep,algo} = \left\{ \Theta - \frac{\Theta \mathbf{n} \mathbf{n}^T \Theta}{\mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} + \frac{H}{1 - \Delta\lambda \frac{H}{q}}} \right\}_{n+1}; \quad \Theta = \left\{ \left[ C^{el-1} + \Delta\lambda \frac{1}{q} \mathbf{P} \right]^{-1} \right\}_{n+1}$$

Abb. 7.10: Ablaufschema der ratenunabhängigen Delaminationsplastizität

#### 7.2.4 Algorithmische elasto-plastische Materialtangente

Die algorithmische elasto-plastische Tangente wird in Anlehnung an die in Kapitel 4.4.1 vorgestellten Gleichungen (4.45) bis (4.48) hergeleitet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sich sämtliche Größen als Funktion des plastischen Multiplikators ausdrücken lassen und eine assoziierte Formulierung ( $G = F$  bzw.  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ ) verwendet wird. Des Weiteren reduziert sich der Vektor der im Spannungsraum definierten internen Größen  $\mathbf{q}$  auf die skalarwertige Vergleichsspannung  $q$ . Die totalen Differenziale der Spannungen, der plastischen Verzerrungen, der äquivalenten Verzerrungen und der Konsistenzbedingung (Gleichungen (4.45) bis (4.48)) lauten somit

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \mathbf{C}^{el} (d\mathbf{E} - d\mathbf{E}^{pl}) \right\}_{n+1} , \quad (7.35)$$

$$d\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \left\{ \mathbf{n} d\lambda + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{S}^2} d\mathbf{S} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{S} \partial q} dq \right) \right\}_{n+1} , \quad (7.36)$$

$$d\kappa_{n+1} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial q} d\lambda + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \mathbf{S}} d\mathbf{S} \right) \right\}_{n+1} , \quad (7.37)$$

$$dF_{n+1} = \left\{ \mathbf{n}^T d\mathbf{S} + \frac{\partial F}{\partial q} dq \right\}_{n+1} = 0 . \quad (7.38)$$

Dabei bezeichnet  $d\lambda_{n+1}$  das totale Differenzial des inkrementellen Konsistenzparameters  $\Delta\lambda_{n+1}$ . Bei plastischer Belastung ( $\Delta\lambda_{n+1} > 0$ ) fordert die Konsistenzbedingung stets den Zusammenhang

$$\begin{aligned} d(F_{n+1}) &= d(f(\mathbf{S}_{n+1}) - q(\kappa_{n+1})) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\rightarrow d(f(\mathbf{S}_{n+1})) = d(q(\kappa_{n+1})) . \end{aligned} \quad (7.39)$$

Die Konsistenzbedingung fordert hier also, dass trotz einer Änderung der Größen  $\mathbf{S}$  und  $q$  bzw.  $\kappa$  die Fließbedingung erfüllt sein muss. Es gilt somit auch innerhalb der Herleitung der elasto-plastischen Materialtangente für den Gradienten der Fließfunktion nach den Spannungen

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = \frac{1}{f(\mathbf{S}_{n+1})} \mathbf{P} \mathbf{S}_{n+1} \equiv \frac{1}{q(\Delta\lambda_{n+1})} \mathbf{P} \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1} . \quad (7.40)$$

Wird der Gradient  $\partial F / \partial \mathbf{S}$  nach Gleichung (7.40) bestimmt, so kann die zweifache Ableitung der Fließfunktion nach den Spannungen mit

$$\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{S}^2} = \frac{1}{q} \mathbf{P} \right\}_{n+1} \quad (7.41)$$

und der Gradient  $\partial^2 F / (\partial \mathbf{S} \partial q)$  mit

$$\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{S} \partial q} = -\frac{1}{q^2} \mathbf{P} \mathbf{S} = -\frac{1}{q} \mathbf{n} \right\}_{n+1} \quad (7.42)$$

angeben werden. Weiterhin gilt für die Ableitungen der Fließfunktion nach der internen Variable

$$\left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{n+1} = -1 ; \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \right|_{n+1} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = 0 . \quad (7.43)$$

Durch Einsetzen der Gradientenausdrücke in die Gleichungen (7.35) bis (7.38) folgt schließlich

$$dS_{n+1} = \left\{ C^{el} (dE - dE^{pl}) \right\}_{n+1} , \quad (7.44)$$

$$dE_{n+1}^{pl} = \left\{ \mathbf{n} d\lambda + \Delta\lambda \left( \frac{1}{q} \mathbf{P} dS - \frac{1}{q} \mathbf{n} dq \right) \right\}_{n+1} , \quad (7.45)$$

$$d\kappa_{n+1} = - d\lambda_{n+1} , \quad (7.46)$$

$$dF_{n+1} = \left\{ \mathbf{n}^T dS - dq \right\}_{n+1} = 0 . \quad (7.47)$$

Gleichung (7.45) in (7.44) eingesetzt, liefert die Spannungsrate

$$dS_{n+1} = \left\{ \Theta \left( dE - d\lambda \mathbf{n} + \Delta\lambda \frac{1}{q} \mathbf{n} dq \right) \right\}_{n+1} , \quad (7.48)$$

mit  $\Theta$  nach Gleichung (7.19). Aus dem Evolutionsgesetz (7.22) erhält man das totale Differential der äquivalenten Spannung in Abhängigkeit des plastischen Multiplikators

$$dq_{n+1} = \left\{ H d\lambda \right\}_{n+1} \quad (7.49)$$

und somit für die Spannungen nach Gleichung (7.48)

$$dS_{n+1} = \left\{ \Theta \left( dE - d\lambda \mathbf{n} + \Delta\lambda \frac{H}{q} \mathbf{n} d\lambda \right) \right\}_{n+1} . \quad (7.50)$$

Ein Einsetzen von Gleichungen (7.50) und (7.49) in die Konsistenzbedingung (7.47) liefert das totale Differential des plastischen Multiplikators

$$d\lambda_{n+1} = \left\{ \frac{\mathbf{n}^T \Theta dE}{\mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} - \Delta\lambda \frac{H}{q} \mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} + H} \right\}_{n+1} . \quad (7.51)$$

Die Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungsrate lässt sich gewinnen, indem Gleichung (7.51) wiederum in (7.50) eingesetzt wird

$$dS_{n+1} = \left\{ \Theta - \frac{\Theta \mathbf{n} \mathbf{n}^T \Theta - \Delta\lambda \frac{H}{q} \Theta \mathbf{n} \mathbf{n}^T \Theta}{\mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} - \Delta\lambda \frac{H}{q} \mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} + H} \right\}_{n+1} dE_{n+1} . \quad (7.52)$$

Der Klammerausdruck entspricht dabei der algorithmischen elasto-plastischen Materialtangente

$$C_{n+1}^{ep,algo} = \left\{ \Theta - \frac{\Theta \mathbf{n} \mathbf{n}^T \Theta}{\mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n} + \frac{H}{1 - \Delta\lambda \frac{H}{q}}} \right\}_{n+1} . \quad (7.53)$$

In Gleichung (7.53) erkennt man deutlich die Symmetrieeigenschaft der algorithmischen elasto-plastischen Materialtangente, die aus der Assoziiertheit der Formulierung resultiert. Im Anhang C dieser Arbeit wird die algorithmische elasto-plastische Materialtangente  $C_{n+1}^{ep,algo}$  mit einem alternativen Vorgehen hergeleitet.

Das nun folgende Kapitel 7.2.5 stellt die visko-plastische Erweiterung in Kombination mit der automatischen Bestimmung des Viskositätsparameters nach Sprenger (2000) vor. Insbesondere werden die Auswirkungen der viskosen Regularisierung anhand von Untersuchungen auf der Materialpunktebene und auf der Strukturebene aufgezeigt.

### 7.2.5 Visko-plastische Regularisierung

In Kapitel 7.2.2 wurde gezeigt, dass ein von der Prozessschichtdicke abhängiger Entfestigungsmodul die Objektivität der Ergebnisse im Nachbruchbereich bezüglich der Diskretisierung gewährleistet. Er verhindert aber nicht den Typwechsel der Differenzialgleichung und somit die Schlechtgestelltheit des Problems. Bei der Berechnung von Strukturen kann dies unter Umständen numerische Instabilitäten hervorrufen, die eine Berechnung des Nachbruchbereichs unmöglich machen. Abhilfe liefern hier erweiterte Formulierungen, die einen internen Längenparameter einbringen und auch im nachkritischen Bereich die Gutgestelltheit des Randwertproblems gewährleisten. Mehrere Verfahren stehen hierfür zur Verfügung, u.a. nichtlokale Integralkontinua, gradientenerweiterte Kontinuumsmodelle, die Cosserat-Kontinuumsmechanik und die Berücksichtigung viskoser Effekte. Nachfolgend wird eine visko-plastische Regularisierung vorgestellt, die auf dem Modell der Viskoplastizität nach Duvaut und Lions (1972) basiert. Insbesondere wird dabei auf die automatische Bestimmung des adaptiven viskosen Dämpfungsparameters  $\eta^*$  eingegangen, die in Sprenger (2000) vorgeschlagen wird. Im Unterschied zum konstanten Dämpfungsparameter  $\eta$  wird der adaptive Dämpfungsparameter mit  $\eta^*$  bezeichnet. Anschließend werden die Auswirkungen der viskosen Regularisierung sowohl auf Materialpunktebene mittels Untersuchung des akustischen Tensors  $\mathbf{Q}^{ak}$  als auch auf Strukturebene aufgezeigt.

Die elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep,algo}$  ist im elastischen Bereich konstant und positiv definit. Dies ändert sich jedoch bei Überschreitung der Fließspannung und dem Beginn der Entfestigung. Je nach Belastungsrichtung können ein oder mehrere Hauptdiagonaleinträge der elasto-plastischen Materialtangente ihr Vorzeichen wechseln und somit zum Verlust der positiven Definitheit führen. Mit Hilfe der in Kapitel 4.3 vorgestellten Viskoplastizität nach Duvaut und Lions soll dem System nun gerade so viel numerische Dämpfung zugeführt werden, dass die positive Definitheit auch im Entfestigungsast bestehen bleibt und damit eine stabile numerische Berechnung ermöglicht wird. Folgende Punkte sind nach Sprenger (2000) jedoch zu beachten:

1. Die Strukturantwort ändert sich durch die viskose Dämpfung. Insbesondere wächst die Fläche unter der Entfestigungsfunktion (Abb. 7.6b) und c)) an, womit die Bruchenergie vergrößert wird.
2. Der Dämpfungsparameter  $\eta^*$  wirkt sich je nach Belastungsart und Strukturgeometrie am einzelnen Gauß-Punkt unterschiedlich stark auf die Lösung aus. Die Wahl eines für alle Gauß-Punkte konstanten Dämpfungsparameters ist daher nur bedingt sinnvoll.
3. Der Dämpfungsparameter  $\eta^*$  ist nicht das alleinige Maß für die Größe der viskosen Effekte, sondern geht stets in Verbindung mit der Zeitschrittweite  $\Delta t_{n+1}$  in die numerische Berechnung ein.

Die genannten Punkte wirken sich auf den Regularisierungsalgorithmus aus. So soll der Dämpfungsparameter nämlich automatisch und für jeden Gauß-Punkt individuell bestimmt werden.

Gleichzeitig soll er nur so groß sein, dass einerseits die positive Definitheit der elasto-plastischen Materialtangente gewährleistet ist und demnach keine negativen Hauptdiagonaleinträge entstehen, andererseits aber die Strukturantwort dabei nicht verändert wird. Die Zeitschrittweite  $\Delta t_{n+1}$  muss entsprechend klein sein. Aus dem dritten Punkt resultiert die wichtige Bedingung, dass der automatisch ermittelte Dämpfungsparameter nicht im aktuellen Zeitschritt  $t_{n+1}$ , sondern erst im darauf folgenden Zeitschritt  $t_{n+2}$  gültig ist.

**Anmerkung:** Die Verwendung eines Dämpfungsparameters, der im Verlauf der Rechnung und an jedem Gauß-Punkt variiert, dient hier ausschließlich zur Vermeidung numerischer Instabilitäten und beinhaltet keine physikalische Bedeutung.

Zur Bestimmung des adaptiven Dämpfungsparameters  $\eta^*$  geht man von Gleichung (4.64) aus. In dieser wird die visko-plastische Materialtangente  $C^{vp,algo}$  additiv und unter Berücksichtigung einer „Gewichtung“ aus der elastischen und der elasto-plastischen Materialtangente wie folgt berechnet:

$$C_{n+1}^{vp,algo} = \left[ \frac{1 - \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta_{n+1}^*}\right]}{\frac{\Delta t_{n+1}}{\eta_{n+1}^*}} \right] C^{el} + \left[ 1 - \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta_{n+1}^*}\right] \right] C_{n+1}^{ep,algo} . \quad (4.64)$$

Das Verhältnis  $\Delta t_{n+1}/\eta_{n+1}^*$  ist dabei der entscheidende Faktor für die Gewichtung der einzelnen Anteile. Zur Erinnerung sei nochmals wiederholt, dass für  $\Delta t_{n+1}/\eta_{n+1}^* \rightarrow \infty$  die ratenunabhängige Lösung und für  $\Delta t_{n+1}/\eta_{n+1}^* \rightarrow 0$  die elastische Lösung aus Gleichung (4.64) hervorgeht. Bei konstanter Zeitschrittweite ( $\Delta t_{n+1} = \Delta t = \text{konst}$ ) kann somit ein variierender Dämpfungsparameter  $\eta_{n+1}^*$  den elastischen Steifigkeitsanteil stärker oder schwächer einblenden. Ziel ist es nun, den Dämpfungsparameter  $\eta_{n+2}^*$  für den nächsten Zeitschritt  $t_{n+2}$  so zu bestimmen, dass der kleinste Hauptdiagonaleintrag der visko-plastischen Materialtangente gerade noch positiv ist und somit die positive Definitheit von  $C_{n+2}^{vp,algo}$  gewährleistet wird.

Der kleinste Hauptdiagonaleintrag der ratenunabhängigen Materialtangente  $C_{n+1}^{ep,algo}$  wird infolgedessen zur Ermittlung des Dämpfungsparameters herangezogen. Aufgrund einer kleinen Zeitschrittweite  $\Delta t$  ändert sich dieser stets nur geringfügig, so dass der auf Basis des „alten“ Zeitschritts berechnete Dämpfungsparameter auch tatsächlich die positive Definitheit des Materialensors im „neuen“ Zeitschritt gewährleistet. Durch die Einführung einer Toleranzschranke  $R^{Tol}$  und mit den Abkürzungen

$$R_{n+1}^{pl} = \left\{ \min (C_{ii}^{ep,algo}) \right\}_{n+1} , \quad R^{el} = C_{ii}^{el} , \quad R_{n+1}^{vp} = \left\{ C_{ii}^{vp,algo} \right\}_{n+1} , \quad (7.54)$$

kann man Gleichung (4.64) für den kleinsten Hauptdiagonaleintrag der Stelle  $i$  schreiben:

$$R_{n+1}^{vp} = \underbrace{\left[ \frac{1 - \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta_{n+1}^*}\right]}{\frac{\Delta t_{n+1}}{\eta_{n+1}^*}} \right] R^{el} + \left[ 1 - \exp\left[\frac{-\Delta t_{n+1}}{\eta_{n+1}^*}\right] \right] R_{n+1}^{pl}}_{G(\eta_{n+1}^*)} - R^{Tol} = 0 , \quad (7.55)$$

$$- R^{Tol} = 0 .$$

Die Linearisierung der in  $\eta_{n+1}^*$  nichtlinearen, skalarwertigen Gleichung (7.55) führt auf

$$\left\{ G(\eta^*) + \Delta\eta^* \frac{\partial G}{\partial \eta^*} - R^{Tol} \right\}_{n+1} = 0 \rightarrow \Delta\eta_{n+1}^* = \left\{ \frac{R^{Tol} - G(\eta^*)}{\partial G / \partial \eta^*} \right\}_{n+1} . \quad (7.56)$$

Unter der Voraussetzung, dass ein globaler Gleichgewichtszustand erreicht wurde, lässt sich der Dämpfungsparameter mit der in Abb. 7.11 dargestellten Iteration für den darauf folgenden Zeitschritt berechnen. Des Weiteren zeigt Abb. 7.11 das algorithmische Vorgehen bei der visko-plastischen Regularisierung.

Wird an einem Gauß-Punkt die Fließbedingung bei einer numerischen Simulation zum ersten Mal verletzt, liegt noch kein automatisch ermittelter Dämpfungsparameter  $\eta_{n+1}^*$  vor. Deshalb gibt man zu Beginn der Rechnung einen globalen Startdämpfungsparameter  $\eta_i^*$  vor, der in den folgenden Zeitschritten durch die automatisch bestimmten Dämpfungsparameter ersetzt wird. Der Wert des Startdämpfungsparameters  $\eta_i^*$  hat auf die Ergebnisse der Berechnung durch die kleine Zeitschrittweite  $\Delta t_{n+1}$  allerdings keinen Einfluss.

- Ratenunabhängige Lösung für Spannungen, äquivalente Verzerrung und für die elasto-plastische Materialtangente zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  nach Abb. 7.10:

$$\bar{S} = S_{n+1} , \quad \bar{\kappa} = \kappa_{n+1} , \quad \bar{C} = C_{n+1} = C_{n+1}^{ep,algo}$$

- Visko-plastische bzw. regularisierte Lösung nach Abb. 4.2:

$$\Delta\mu = \frac{\Delta t}{\eta_{n+1}^*} , \quad \beta = \exp(-\Delta\mu) \Rightarrow S_{n+1}^{vp} , \quad \kappa_{n+1}^{vp} , \quad C_{n+1}^{vp}$$

- Automatische Bestimmung des Dämpfungsparameters  $\eta_{n+2}^*$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R^{pl} = \min(C_{ii}^{ep,algo}) \Rightarrow i & \\ R^{el} = C_{ii}^{el} & R^{vp} = C_{ii}^{vp} \\ R^{Tol} = R^{el} \cdot 10^{-6} & \eta^0 = 10^{-16} \end{array} \right\}_{n+1}$$

Iteration falls  $R^{pl} < 0$

$$1. \quad \Delta\mu^j = \frac{\Delta t}{\eta^j} , \quad \beta^j = \exp(-\Delta\mu^j) , \quad \omega^j = 1 - \beta^j$$

$$2. \quad \Delta\eta^j = \left\{ \frac{R^{Tol} - \omega \eta R^{el} / \Delta t - \omega R^{pl}}{R^{el} (\omega / \Delta t - \beta / \eta) - \Delta t \beta R^{pl} / \eta^2} \right\}^j$$

$$3. \quad \eta^{j+1} = \eta^j + \Delta\eta^j$$

$$4. \quad |\Delta\eta^j| \begin{cases} \geq TOL & \rightarrow GOTO 1. \\ < TOL & \rightarrow GOTO 5. \end{cases}$$

$$5. \quad \eta_{n+2}^* = \eta^{j+1}$$

wenn globales Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  erfüllt ist

Abb. 7.11: Visko-plastische Regularisierung und automatische Bestimmung des Dämpfungsparameters am Gauß-Punkt

Es werden nun die Auswirkungen der visko-plastischen Regularisierung auf der Materialpunktebene aufgezeigt. Wie zu Beginn von Kapitel 7.2.2 schon erwähnt wurde, verliert das quasi-statische Randwertproblem bei der numerischen Simulation entfestigenden Materialverhaltens seine Elliptizitätseigenschaft (Typwechsel der Differenzialgleichung). Ein geeigneter Indikator zur Feststellung des Verlustes von Elliptizität ist die Auswertung des sogenannten akustischen Tensors  $\mathbf{Q}^{ak}$ , der auch als *Lokalisierungstensor* bezeichnet wird. Dabei stellt der Verlust von Elliptizität ein *lokales* Versagenskriterium dar (da es am Materialpunkt ausgewertet wird) und zeigt ein *diskontinuierliches Versagen* im Gegensatz zum *diffusen Versagen* an. Innerhalb der diskontinuierlichen Versagensformen unterscheidet man wiederum zwischen einer *schwachen* und einer *starken Diskontinuität*. Beiden ist die Ausprägung von Sprüngen bestimmter Feldgrößen entlang ausgezeichneter Versagensflächen  $s$  gemeinsam. Während bei der schwachen Diskontinuität die Kontinuität des Geschwindigkeitsfeldes  $\dot{\mathbf{u}}$  noch erhalten ist, zeichnet sich die starke Diskontinuität durch die Ausprägung von Sprüngen sowohl in der Rate des Verzerrungsfeldes  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  als auch im Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\mathbf{u}}$  aus. Die schwache Diskontinuität zeigt daher ein lokalisiertes Versagen an, während die starke Diskontinuität im Allgemeinen ein diskretes Versagensphänomen beschreibt, siehe Abb. 7.12. Der Verlust von Elliptizität, der sich durch eine Zone lokalisierter Verzerrungen bemerkbar macht, entspricht somit der Ausbildung einer schwachen Diskontinuität. Es müssen daher die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}^- - \dot{\mathbf{u}}^+ = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad [[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \neq \mathbf{0} . \quad (7.57)$$

In Gleichung (7.57) und im darauf folgenden wird der Sprung einer Feldgröße durch die Notation  $[[\dots]]$  gekennzeichnet. Unter Zuhilfenahme des *Maxwell*-Theorems für materielle Diskontinuitätsflächen erster Ordnung (siehe Truesdell und Toupin (1960)) kann der Sprung in der Verzerrungsrate folgendermaßen geschrieben werden:

$$[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = \xi \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{m}} \otimes \vec{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{n}} \otimes \vec{\mathbf{m}}) . \quad (7.58)$$

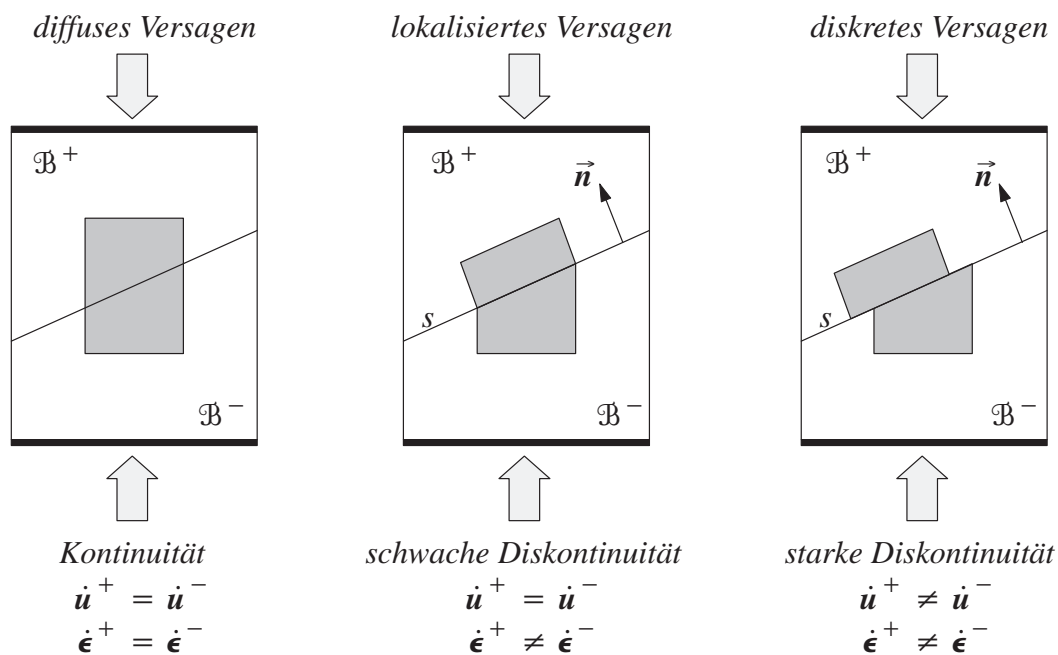


Abb. 7.12: Unterschiedliche Versagensformen

Dabei stellt  $\dot{\xi}$  die Amplitude des Sprunges,  $\vec{n}$  die Flächennormale auf die Diskontinuität  $s$  und  $\vec{m}$  den Sprungvektor, der die Bewegungsrichtung der materiellen Punkte angibt, dar. Mit dem *Cauchy*-Theorem  $\vec{t} = \vec{n} \cdot \dot{\sigma}$  folgt für die Gleichgewichtsbedingung über die Diskontinuität  $s$  hinweg

$$\dot{\vec{t}}^- - \dot{\vec{t}}^+ = [\vec{n} \cdot \dot{\sigma}]^- - [\vec{n} \cdot \dot{\sigma}]^+ = \vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} : [|\epsilon|] = \vec{0} . \quad (7.59)$$

In Gleichung (7.59) wurde nach Hill (1958) sowie nach Raniecki und Bruhns (1981) ein kontinuierlicher Verlauf der Materialtangente über die Diskontinuität hinweg angenommen. Zusammen mit Gleichung (7.58) lässt sich schreiben

$$\dot{\xi} (\vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{m} = \vec{0} . \quad (7.60)$$

Die durch Gleichung (7.60) gegebene Lokalisierungsbedingung kann nach Rice und Rudnicki (1980) bzw. Ottosen und Runesson (1991), Willam et al. (1994) und Iordache und Willam (1998) auch als Eigenwertproblem in der folgenden Form angeben werden:

$$\mathbf{Q}^{ak}(\vec{n}) \cdot \vec{m} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}^{ak}(\vec{n}) := \vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{n} . \quad (7.61)$$

$\mathbf{Q}^{ak}$  bezeichnet hier den zweistufigen akustischen Tensor. Im quasi-statischen Fall ist die Lokalisierungsbedingung (7.60) bzw. das Eigenwertproblem nach Gleichung (7.61) gleichbedeutend mit dem Verlust von Elliptizität und dem Singulärwerden des akustischen Tensors

$$\det \mathbf{Q}^{ak} = 0 . \quad (7.62)$$

Neben dem Eintreten des Verlustes der Elliptizität kann man aus dem Eigenwertproblem nach Gleichung (7.61) auch die Orientierung der entstehenden Diskontinuität und den dazugehörigen Versagensmodus bestimmen. Die Orientierung der Diskontinuität entspricht nämlich dem Normalenvektor  $\vec{n}_{krit}$ , der für die Determinante des akustischen Tensors den kleinsten Wert liefert:

$$\vec{n}_{krit} = \arg \left( \min_{\vec{n} \in \Omega} [\det \mathbf{Q}^{ak}(\vec{n})] \right) . \quad (7.63)$$

Der Versagensmodus kann durch einen Vergleich der Richtungen  $\vec{n}_{krit}$  und  $\vec{m}$  identifiziert werden, wobei sich der Sprungvektor  $\vec{m}$  aus  $\vec{n}_{krit}$  über das Eigenwertproblem nach Gleichung (7.61) berechnet. Ist  $\vec{n}_{krit} \parallel \vec{m}$ , so liegt ein reines Modus I-Versagen vor, das durch eine trennbruchartige Auftrennung der rechts- und linksseitigen Gebiete gekennzeichnet ist. Für  $\vec{n}_{krit} \perp \vec{m}$  tritt hingegen ein Modus II- bzw. Modus III-Versagen ein, das durch das Abgleiten der Teilgebiete entlang der Diskontinuität  $s$  gekennzeichnet ist.

Es wird im Folgenden auf die Vorstellung weiterer Versagenskriterien und ihrer formelmäßigen Herleitung verzichtet. Dies geschieht zum einen aus Gründen der Übersichtlichkeit und zum anderen aufgrund der Assoziiertheit der vorgestellten Delaminationsplastizität. Die assoziierte Formulierung liefert nämlich eine symmetrische Materialtangente, das wiederum ein Zusammenfallen der Versagenskriterien *Verlust von Eindeutigkeit*, *Verlust von Stabilität* und *Verlust von Elliptizität* zur Folge hat. Es wird daher lediglich auf Abb. 7.13, die einen Überblick der verschiedenen Versagenskriterien nach Haufe (2001) zeigt, sowie auf die umfangreiche Literatur wie beispielsweise Ottosen und Runesson (1991), Etse (1992), de Borst et al. (1993), Schreyer und Neilsen (1996), Willam (1998) und Kuhl et al. (1999) verwiesen.

Am Modellproblem des einaxialen Zugversuchs in Dickenrichtung (vergleiche Abb. 7.14) wird nun eine Lokalisierungsuntersuchung der Delaminationsplastizität durchgeführt. Die elasti-



<i>Verlust von ...</i>	<i>Bedingung</i>
<i>Eindeutigkeit</i>	$\det \mathbf{C}^{tan} = 0$
<i>Stabilität</i>	$\frac{1}{2} \det(\mathbf{C}^{tan} + \mathbf{C}^{T,tan}) = \det \mathbf{C}_{sym}^{tan} = 0$
<i>Elliptizität</i>	$\det(\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = \det \mathbf{Q}^{ak} = 0$
<i>starker Elliptizität</i>	$\frac{1}{2} \det(\mathbf{Q}^{ak} + \mathbf{Q}^{T,ak}) = \det \mathbf{Q}_{sym}^{ak} = 0$



Abb. 7.13: Versagensindikatoren auf Materialpunkzebene

schen und plastischen Materialwerte des Problems sind in Abb. 7.8 angegeben. Der Quader mit der Kantenlänge 1 mm besteht vollständig aus entfestigendem Material und wird mit einem finiten Schalenelement diskretisiert. Unter verschiebungsgesteuerter Belastung berechnet man in jedem Schritt und bei gleichzeitiger Erfüllung des globalen Gleichgewichts die Determinante des akustischen Tensors  $\mathbf{Q}^{ak}$  als Funktion des Vektors  $\vec{\mathbf{n}}$ , ausgedrückt durch den Winkel  $\beta$ . Die Normierung auf die Determinante des akustischen Tensors  $\mathbf{Q}_0^{ak}$ , die sich bei Verwendung des elastischen Materials  $\mathbf{C}^{el}$  ergibt, liefert die normierte Darstellung in den Lokalisierungsdiagrammen von Abb. 7.15a) bis d), siehe Willam et al. (1999).

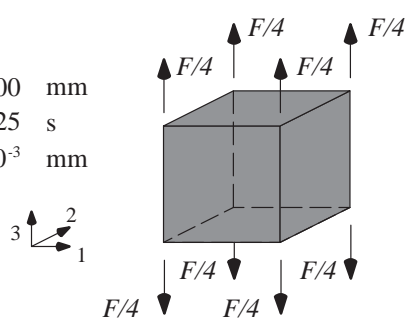
$$g(\beta, \mathbf{C}^{tan}) = \frac{\det(\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{\mathbf{n}})}{\det(\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^{el} \cdot \vec{\mathbf{n}})} = \frac{|\mathbf{Q}^{ak}|}{|\mathbf{Q}_0^{ak}|} \quad \text{mit} \quad \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{f}(\beta) \quad . \quad (7.64)$$

Das Verhältnis  $|\mathbf{Q}^{ak}|/|\mathbf{Q}_0^{ak}|$  wird in den Diagrammen über den Raumwinkel  $\beta$  zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  aufgetragen. Die Minima entsprechen den kritischen Richtungen  $\beta_{krit}$ , bei denen ein Verlust von Elliptizität möglich ist. In Abb. 7.15a) bis d) ist der Verlauf von  $|\mathbf{Q}^{ak}|/|\mathbf{Q}_0^{ak}|$  jeweils für drei verschiedene Verschiebungszustände dargestellt. Während sich Kurve ① noch auf einen Zustand im linear-elastischen Bereich bezieht, zeigt Kurve ② den Verlauf bei Entfestigungsbeginn und einer Verschiebung von  $u_3 = 6,4 \cdot 10^{-3}$  mm. Kurve ③ entspricht einer Verschiebung von  $u_3 = 6,4 \cdot 10^{-2}$  mm.

Das Verhältnis  $|\mathbf{Q}^{ak}|/|\mathbf{Q}_0^{ak}|$  bei ratenunabhängiger Rechnung ist in Abb. 7.15a) dargestellt. Im Bereich zwischen  $\beta \geq 60^\circ$  und  $\beta \leq 120^\circ$  ist es negativ und hat bei  $\beta = 90^\circ$  ein Minimum. Wie erwartet bildet sich die Lokalisierungsebene senkrecht zur Belastungsrichtung aus und es liegt ein reines Modus I-Versagen vor ( $\vec{\mathbf{n}}_{krit} \parallel \vec{\mathbf{m}}$ ). Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Determinante

**Geometrie:**

$$\begin{aligned} \ell &= 1,00 \text{ mm} \\ \Delta t &= 0,25 \text{ s} \\ \Delta u_3 &= 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned}$$



**Diskretisierung:**

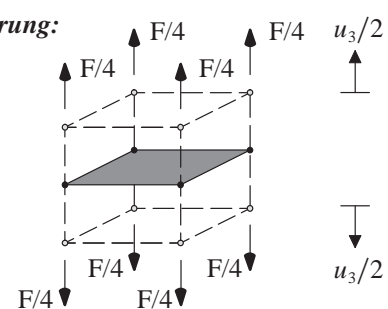


Abb. 7.14: Modellproblem für Lokalisierungsuntersuchung: Einaxialer Zugversuch

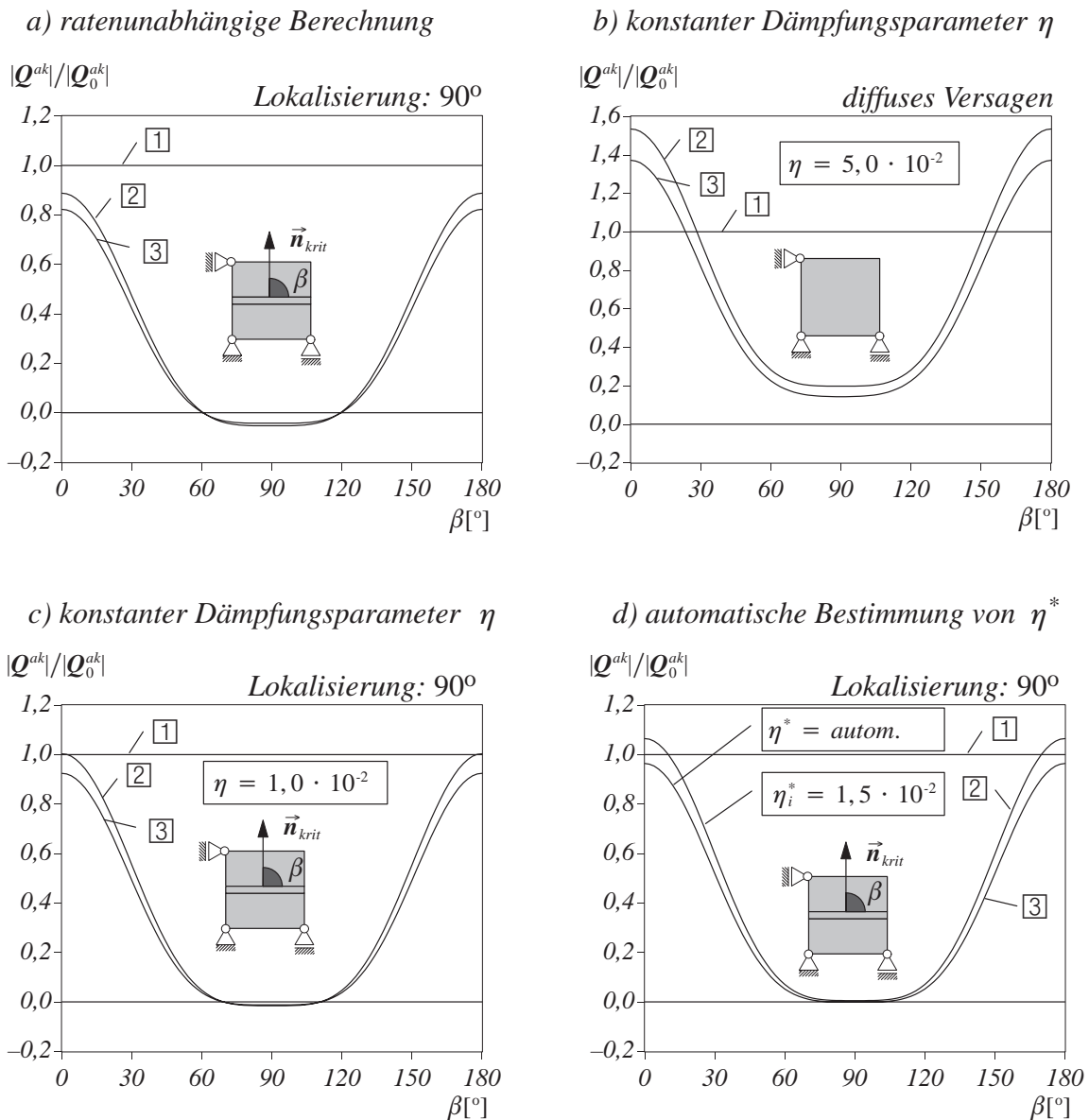


Abb. 7.15: Lokalisierungsdiagramme: Einaxialer Zugversuch

des akustischen Tensors bereits beim ersten Anzeichen von Entfestigung negativ wird. Die zugrunde liegende Differentialgleichung wechselt ihren Typ und es können numerische Instabilitäten entstehen. Die positive Definitheit des Materialtensors ist nicht mehr gegeben.

Im Unterschied hierzu findet bei einer visko-plastischen Rechnung mit konstantem und großem Dämpfungsparameter  $\eta$  ein diffuses Versagen statt und die Determinante des akustischen Tensors ist stets positiv, siehe Abb. 7.15b). Eine stabile numerische Berechnung des nachkritischen Bereiches ist daher möglich. Allerdings wird der Verlauf des Nachbruchbereiches und die dissipierte Bruchenergie durch die viskosen Effekte signifikant beeinflusst und verändert (siehe Abb. 7.17a)).

Die Reduktion des Dämpfungsparameters vermindert dies, allerdings auf Kosten der positiven Definitheit. In Abb. 7.15c) sind nämlich die Ergebnisse einer visko-plastischen Rechnung mit kleinem Dämpfungsparameter  $\eta$  dargestellt. Die Determinante des akustischen Tensors ist be-

reits ab dem ersten Schritt (Kurve [2]) des Nachbruchbereichs und für alle weiteren Schritte (Kurve [3]) negativ. Die Lokalisierungsebene bildet sich wieder senkrecht zur Belastungsrichtung aus und es entsteht ein reines Modus I-Versagen. Ein konstanter und möglichst kleiner Dämpfungsparameter kann folglich die positive Definitheit des akustischen Tensors  $\mathbf{Q}^{ak}$  nicht dauerhaft gewährleisten.

Bei der automatischen Bestimmung des Dämpfungsparameters  $\eta^*$  ist durch die Wahl des Startdämpfungsparameters  $\eta_i^*$  entweder die positive Definitheit für den ersten Schritt des Nachbruchbereichs (wie im vorliegenden Fall; Kurve [2]) gewährleistet oder nicht. Für alle folgenden Schritte (Kurve [3] in Abb. 7.15d)) ist die Determinante des akustischen Tensors fast Null, aber stets positiv. Die automatische Bestimmung eines adaptiven Dämpfungsparameters gewährleistet folglich die positive Definitheit und damit die stabile numerische Berechnung des Nachbruchbereichs. Gleichzeitig ist die Veränderung der Strukturantwort minimal, was Abb. 7.17c) zeigt.

Im Weiteren soll noch die Wirkung der visko-plastischen Regularisierung auf die Strukturantwort untersucht werden. Hierzu wird das in Abb. 7.16 dargestellte Modellproblem des einaxialen Zugversuchs herangezogen. Der Quader hat die Kantenlänge 1 cm und besteht aus drei Schichten, wobei eine Delamination lediglich in der mittleren, dunkelgrau eingefärbten Schicht entstehen kann. Zur Diskretisierung wird ein mehrschichtiges finites Schalelement nach Kapitel 3.2 mit drei Berechnungsschichten und somit 12 Freiheitsgraden je FE-Knoten verwendet. Die Delaminationsplastizität wirkt lediglich in der mittleren Schicht, die eine Schichtstärke von  $h_{PS} = 0,01$  mm aufweist. Die Materialparameter entsprechen denen aus Abb. 7.8. Die Last wird verschiebungsgesteuert sowohl an der Oberseite als auch an der Unterseite der Schale aufgebracht und die Schale ist in der Mittelfläche gelagert. Des Weiteren wird die Berechnung geometrisch linear durchgeführt.

In den Abbildungen 7.17a) bis c) ist jeweils die Last  $F$  über die gegenseitige Verschiebung  $u_3$  der Schalenoberseite und Schalenunterseite aufgetragen. Abb. 7.17a) zeigt dabei den Vergleich von ratenunabhängiger zu ratenabhängiger Berechnung bei Variation des Dämpfungsparameters. Mit der Reduktion des konstanten Dämpfungsparameters  $\eta$  nähert sich die ratenabhängige Berechnung der ratenunabhängigen Berechnung an. Hierbei geht allerdings die positive Definitheit des akustischen Tensors  $\mathbf{Q}^{ak}$  verloren. Hingegen ist bei großen Dämpfungsparametern ein deutliches Anwachsen der Fläche unter der Last-Verschiebungs-Kurve zu beobachten und es wird mehr Energie dissipiert als der vorgegebene Wert für  $G_c$  eigentlich fordert bzw. erlaubt. Die

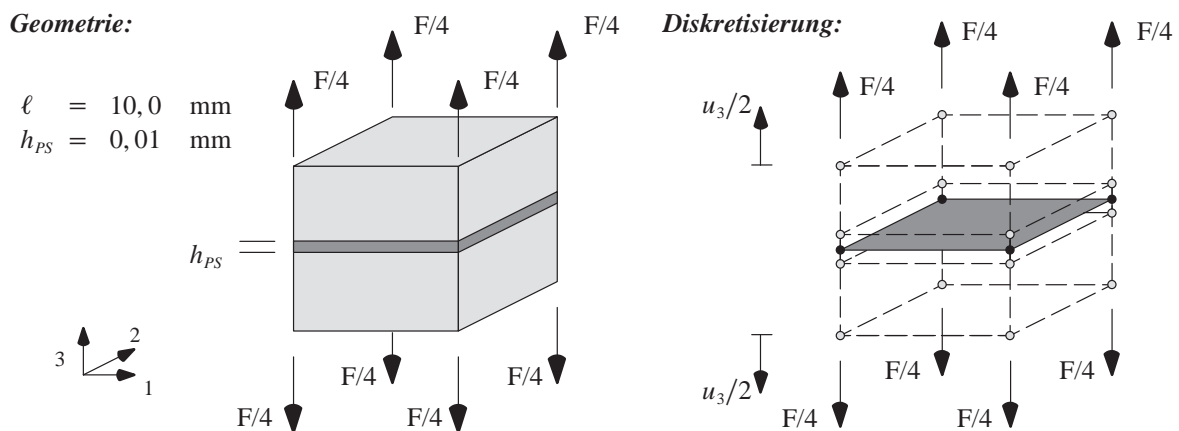


Abb. 7.16: Modellproblem für visko-plastische Regularisierung

Berücksichtigung viskoser Effekte verändert somit die dissipierte Bruchenergie  $G_c$ . Weiterhin können die in Kapitel 4.3 bereits erwähnten Überspannungen festgestellt werden, die erst bei einem sehr kleinen Dämpfungsparameter  $\eta = 10^{-4}$  nahezu verschwinden.

In Abb. 7.17b) sind die Berechnungen mit konstantem Dämpfungsparameter  $\eta$  und variierender Zeitschrittweite  $\Delta t$  dargestellt. Das Verschiebungsinkrement  $\Delta u_3$  wird dabei stets so gewählt, dass die Belastungsgeschwindigkeit  $\Delta u_3/\Delta t$  gleich ist. Man kann erkennen, dass bei kleineren Zeitschrittweiten eine Annäherung an die ratenunabhängige Lösung erfolgt. Dies scheint zunächst im Widerspruch zu den aufgezeigten Grenzfällen der Viskoplastizität zu stehen, die bei  $\Delta t/\eta \rightarrow 0$  eine Annäherung an die elastische Lösung fordern. Berücksichtigt man allerdings, dass die Belastungsgeschwindigkeit konstant gehalten wird, klärt sich dieser scheinbare Widerspruch auf: in beiden Fällen muss nämlich die gleiche visko-plastische Lösung hervorgehen. Es ist also noch zu hinterfragen, woher dieser offensichtliche Unterschied dennoch kommt. Der Grund hierfür liegt in den Näherungsgleichungen (4.57) bis (4.59), exemplarisch

$$\dot{E} \approx \Delta E_{n+1}/\Delta t_{n+1} \quad , \quad (4.57)$$

die bei der Viskoplastizität zur Herleitung der diskreten Formulierung verwendet wurden (Kapitel 4.4.2). Bei kleiner Zeitschrittweite  $\Delta t$  und gleichzeitig kleinem Belastungsinkrement  $\Delta u_3$  (folglich auch kleinem Verzerrungsinkrement  $\Delta E$ ) reduziert sich der Fehler, der durch die Näherungen begangen wird; eine Annäherung an den ratenunabhängigen Fall erfolgt. Die Zeitschrittweite ist daher möglichst klein zu wählen. Weiterhin bleibt festzustellen, dass auch bei einer vollständigen Entfestigung der Prozessschicht Überspannungen vorhanden sind.

Im Unterschied hierzu stehen die Ergebnisse in Abb. 7.17c), die mit dem adaptiven Dämpfungsparameter  $\eta^*$  nach Abb. 7.11 berechnet wurden. Es verbleiben dort keine Restspannungen im System und die dissipierte Energie stimmt mit der vorgegebenen Bruchenergie überein. Für eine Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,01$  s und gleich bleibender Belastungsgeschwindigkeit ist die visko-plastische Berechnung fast identisch mit der ratenunabhängigen Berechnung. Darüber hinaus haben die Untersuchungen am Materialpunkt gezeigt, dass die positive Definitheit des akustischen Tensors für die Berechnung des gesamten Nachbruchbereichs gegeben ist. Eine stabile numerische Simulation ist daher möglich. Abschließend ist für die visko-plastische Regularisierung mittels des adaptiven Dämpfungsparameters  $\eta^*$  folgendes festzuhalten:

1. Bei genügend kleiner Zeitschrittweite  $\Delta t$  und konstanter Belastungsgeschwindigkeit ist die vorgegebene Bruchenergie  $G_c$  eingehalten; eine Annäherung an die ratenunabhängige Lösung ist festzustellen.
2. Die positive Definitheit des akustischen Tensors  $Q^{ak}$  ist auch bei der Berechnung des Nachbruchbereichs gewährleistet; eine stabile numerische Berechnung ist somit möglich.
3. Infolge der Viskoplastizität verbleiben keine Restspannungen (Überspannungen) im System.
4. Der automatisch bestimmte Dämpfungsparameter ist an jedem Gauß-Punkt unterschiedlich und kann so auf variierende Spannungszustände und plastische Geschichtsvariablen „reagieren“.

Im nächsten Kapitel werden drei weitere Delaminationsmodelle entwickelt, die im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik formuliert sind. Dabei finden sowohl das Brewer-Lagace-Kriterium als auch ein Energiefreisetzungs-raten-Kriterium Verwendung.

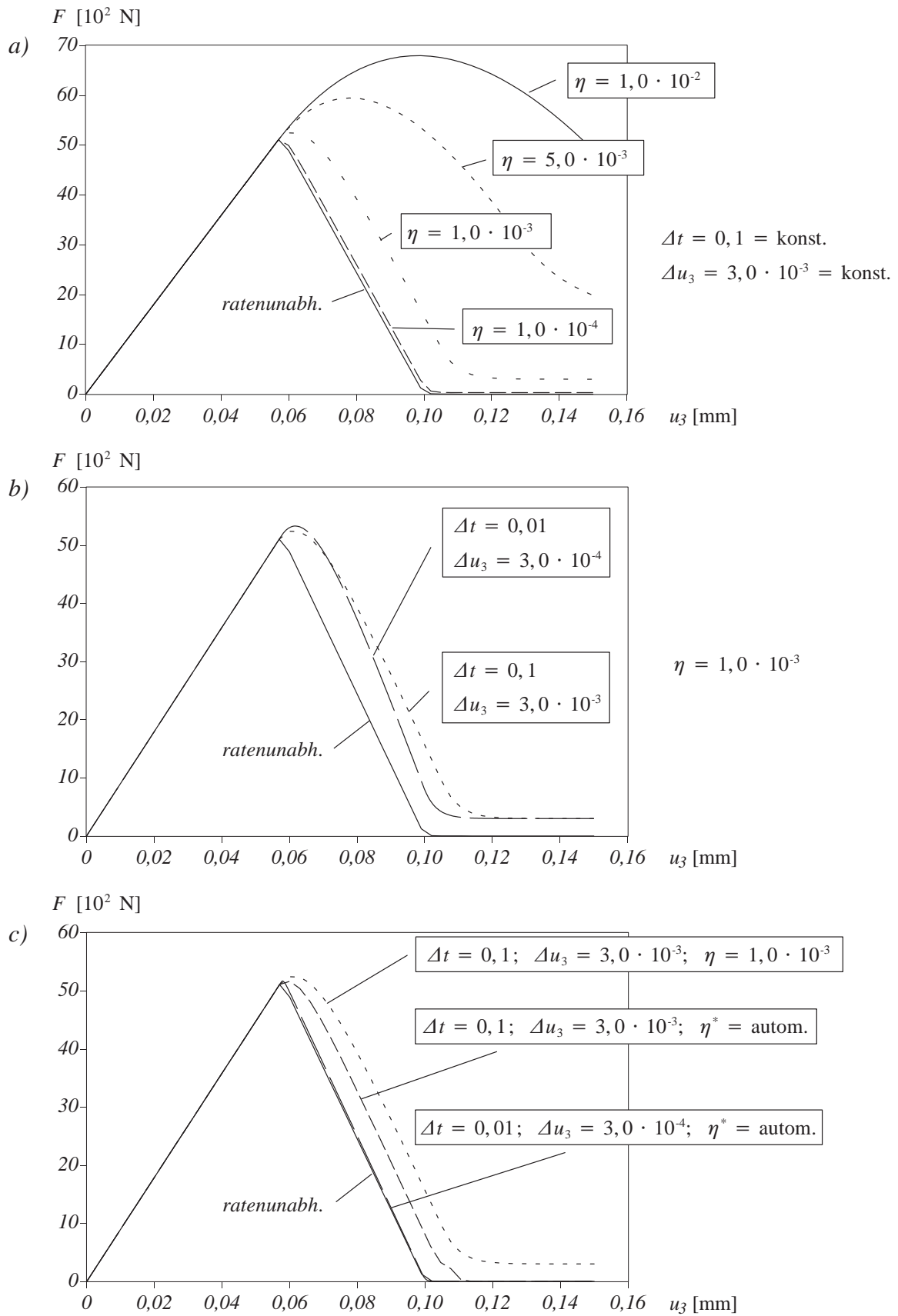


Abb. 7.17: Strukturantwort bei visko-plastischer Regularisierung

### 7.3 Schädigungsmodelle mit Brewer-Lagace-Kriterium

In diesem Kapitel werden zwei Schädigungsmodelle entwickelt, die zur Berechnung fortschreitender Delamination einsetzbar sind. Wie schon im vorherigen Kapitel 7.2 wird hierzu das quadratische Delaminationskriterium nach Brewer und Lagace (1988) (Gleichung (6.17) bzw. (7.4)) eingesetzt. Im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik kann eine verzerrungsbasierte Variante des Kriteriums als Definition für die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  dienen (Kapitel 7.3.2). Abweichend vom Vorgehen einer assoziierten Schädigungsformulierung (Gleichung (5.16)) wird die Vergleichsverzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  also nicht mit der Energiefreisetzungsrate  $Y$  gleichgesetzt. Eine solche Definition ist bei einer nicht-assozierten Schädigungsformulierung durchaus üblich und wird bei Schädigungsmodellen für Beton schon seit längerem angewendet, vergleiche Kapitel 5.3. Die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  geht über den Geschichtsparameter  $\gamma$  (Gleichung (5.27)) dann in die Schädigungsevolution  $\phi(\gamma)$  ein, die in Kapitel 7.3.3 definiert wird.

Zunächst wird allerdings in Kapitel 7.3.1 die Definition für die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  diskutiert. Deren Definition ist nämlich direkt mit der Fragestellung verknüpft, wie sich der skalare Schädigungsparameter  $d$  auf die konstitutiven Gleichungen, also auf die Materialmatrix, auswirken soll. An dieser Stelle wird neben der *isotropen Schädigung* noch ein ähnlicher Vorschlag von Schipperen (2001a/b) aufgegriffen. Dieser wendet den Schädigungsparameter  $d$  lediglich auf ausgewählte Komponenten der Materialmatrix an, um die Versagensart des transversalen Matrixbruches abzubilden. Durch dieses Vorgehen ist ein anisotropes Material- und Schädigungsverhalten darstellbar. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Konzept auf die Versagensart der Delamination übertragen. Da in diesem Fall nur einzelne Komponenten geschädigt werden, wird dies im Weiteren als *selektive* bzw. *anisotrope Schädigung* bezeichnet.

Die Wahl der zu schädigenden Komponenten der Werkstoffmatrix erfolgt dabei nach phänomenologischen Aspekten bzw. Überlegungen, wie man sie auch bei der in Kapitel 6 erwähnten ‘Stiffness-Reduction’-Methode anwendet. Bei dieser Methode wird ja angenommen, dass die Veränderung des Kontinuums, resultierend aus der Schädigung, durch Veränderungen der konstitutiven Gleichungen wiedergegeben werden kann (Allen et al. (1987)). Für die selektive Schädigung ist es daher nötig, Abhängigkeiten zwischen effektiven Materialeigenschaften und Schädigungsparametern zu definieren. Ähnliche Ansätze sind in der Literatur ebenfalls vorhanden. So werden bei Ladevèze (1983), Mazars (1985) bzw. La Borderie (1991) zwei skalare Schädigungsparameter direkt in die Flexibilitätsmatrix eingefügt, um volumetrische und deviatorische Schädigung bei Beton getrennt beschreiben zu können. Andere Ansätze (Ortiz (1985), Simo und Wu (1987), Yazdani und Schreyer (1988)) wählen sogar den Steifigkeits- oder den Nachgiebigkeitstensor selbst als internen Schädigungstensor. Man muss somit keinen Ausdruck mehr für die Verknüpfung der Schädigung mit den Steifigkeiten finden und das Aufstellen eines mehrstufigen Schädigungstensors entfällt. Allerdings ist das Evolutionsgesetz in Abhängigkeit des vierstufigen Nachgiebigkeitstensors bzw. des Steifigkeitstensors zu definieren.

Es sei noch angemerkt, dass auch bei einem Schädigungsmodell, wie schon beim entfestigenden Plastizitätsmodell, der Verlust von Elliptizität und eine Netzabhängigkeit der Ergebnisse auftritt. Es wird daher eine von der Dicke der Prozessschicht abhängige Schädigungsevolution verwendet. Der Maximalwert für die äquivalente Verzerrung ist folglich von der Dicke der Prozessschicht abhängig, siehe Kapitel 7.3.3. Des Weiteren wird in Kapitel 7.3.5 eine viskose Erweiterung der Schädigungsmodelle vorgestellt.

### 7.3.1 Definition der freien Helmholtz-Energie $\Psi$

Aufgrund der sehr geringen Dicke der Prozessschicht wird in einem ersten Ansatz angenommen, dass sich sämtliche Einträge der Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}^{el}$  um denselben Faktor und dabei gleichzeitig abmindern. Die Schädigung wirkt sich folglich isotrop aus. Es wird daher die Formulierung einer isotropen 1-Parameter Schädigung verwendet, die sich lediglich in Bezug auf die Definition der äquivalenten Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  von der thermodynamisch konsistenten Formulierung nach Kapitel 5.3 unterscheidet.

Die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  wird weiterhin als die mit dem Faktor  $(1 - d)$  skalierte elastische Energie  $\Psi^0$  definiert (siehe Gleichungen (5.10) und (5.11)):

$$\Psi(\mathbf{E}, d) := (1 - d)\Psi^0(\mathbf{E}) \quad \text{mit} \quad \Psi^0(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}^T\mathbf{C}^{el}\mathbf{E} \quad . \quad (7.65)$$

Analog zu den Gleichungen (5.12) und (5.13) lassen sich hieraus die Spannungen  $\mathbf{S}$  und die Energiefreisetzungsrate  $Y$  als jeweils energetisch konjugierte Größe zu den Verzerrungen  $\mathbf{E}$  bzw. zu dem Schädigungsparameter  $d$  ableiten:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}} = (1 - d)\mathbf{C}^{el}\mathbf{E} \quad \text{und} \quad Y = -\frac{\partial\Psi}{\partial d} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^T\mathbf{C}^{el}\mathbf{E} \quad . \quad (7.66)$$

Dabei muss die Energiefreisetzungsrate  $Y$  in Kombination mit der Rate des Schädigungsparameters  $\dot{d}$  die reduzierte Dissipationsungleichung (5.14) weiterhin erfüllen

$$D^{red} = Y \dot{d} \geq 0 \quad . \quad (5.14)$$

Im Unterschied zum Vorgehen einer assoziierten Schädigungsformulierung (Kapitel 5.3), bei der die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  mit der Energiefreisetzungsrate  $Y$  identifiziert wird (Gleichung (5.16)), definiert man im nächsten Kapitel 7.3.2 die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  über ein verzerrungsbasiertes Brewer-Lagace-Kriterium (Gleichung (7.73)). Man erhält somit eine nicht-assozierte Formulierung und infolgedessen eine unsymmetrische Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$ , vergleiche Kapitel 7.3.4 und speziell Gleichung (7.86). Die Definition einer geeigneten Schädigungsevolution  $\phi(\gamma)$  (Gleichung (7.76)) vervollständigt dann das isotrope Schädigungsmodell.

Beim zweiten Ansatz der selektiven Schädigung erfolgt die Wahl der geschädigten Komponenten von  $\mathbf{C}^{ed}$  zum einen in Anlehnung an die ‘Stiffness-Reduction’-Methode (siehe Kapitel 6.1). Zum anderen soll sich die Schädigung lediglich auf die Steifigkeitskomponenten auswirken, die über den Ausdruck  $\mathbf{C}^{elT}\mathbf{P}\mathbf{C}^{el}$  der Gleichung (7.73) in die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  eingehen und somit maßgebend für die Delaminationsentstehung sind. Dies sind die Steifigkeiten  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{55}$  und  $C_{66}$ , so dass die folgende, in diesen Komponenten geschädigte Materialmatrix  $\mathbf{C}^{ed}(d)$  definiert wird:

$$\mathbf{C}^{ed}(d) := \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & (1 - \bar{d})C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & (1 - \bar{d})C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - \bar{d})C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & (1 - d)C_{55} & 0 \\ & & & & & (1 - d)C_{66} \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

$$\text{mit} \quad \bar{d} = \begin{cases} d & \text{für } S_{33} > 0 \quad , \\ 0 & \text{für } S_{33} \leq 0 \quad . \end{cases} \quad (7.68)$$

Im Vergleich zur isotropen Schädigung entspricht die geschädigte Materialmatrix  $\mathbf{C}^{ed}(d)$  nun nicht der mit dem Faktor  $(1 - d)$  skalierten elastischen Materialmatrix  $\mathbf{C}^{el}$ . Des Weiteren führt Gleichung (7.68) den Schädigungsparameter  $\bar{d}$  so ein, dass ein unterschiedliches Schädigungsverhalten bei Zug- bzw. Druckbeanspruchung in Dickenrichtung berücksichtigt wird.

Die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  ist somit im Unterschied zu Gleichung (5.10) bzw. (7.65) als

$$\Psi(\mathbf{E}, d) := \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{C}^{ed}(d) \mathbf{E} \quad (7.69)$$

definiert. Die Spannungen  $\mathbf{S}$  und die Energiefreisetzungsrate  $Y$  leitet man hieraus mit

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}^{ed}(d) \mathbf{E} \quad \text{und} \quad Y = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} = - \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial \mathbf{C}^{ed}(d)}{\partial d} \mathbf{E} \quad (7.70)$$

ab. Die partielle Ableitung der geschädigten Materialmatrix  $\mathbf{C}^{ed}$  nach dem Schädigungsparameter lautet dabei unter der Annahme positiver Dickennormalspannungen ( $S_{33} > 0$ )

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{ed}(d)}{\partial d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & -C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & -C_{55} & 0 & \\ & & & & -C_{66} & \end{bmatrix}. \quad (7.71)$$

Auch bei diesem Schädigungsmodell muss die Energiefreisetzungsrate  $Y$  in Kombination mit der Rate des Schädigungsparameters  $\bar{d}$  die reduzierte Dissipationsungleichung (5.14) erfüllen. Das weitere Vorgehen mit der Definition für die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  nach Gleichung (7.73) sowie für die Schädigungsevolution  $\phi(\gamma)$  nach Gleichung (7.76) entspricht dem der oben beschriebenen isotropen Schädigung. Infolge der nicht-assozierten Formulierung wird auch beim selektiven Schädigungsmodell die Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  unsymmetrisch, vergleiche Kapitel 7.3.4 und speziell Gleichung (7.88).

### 7.3.2 Schädigungsfunktion für Delamination

Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt wurde, ist es bei der Kontinuumsschädigungsmechanik üblich, ein verzerrungsbasiertes Schädigungskriterium zu verwenden. Folglich muss man das spannungsbasierte Brewer-Lagace-Kriterium nach Gleichung (6.17) bzw. (7.4) in den Verzerrungsraum überführen. Bei Verwendung der klassischen Kontinuumsschädigungsmechanik in Kombination mit dem „Konzept der effektiven Spannungen“ (siehe Kapitel 5.2) ist zu beachten, dass zur Lastabtragung bzw. zur Spannungsübertragung nur die ungeschädigte Querschnittsfläche zur Verfügung steht. Der Spannungsvektor  $\mathbf{S}$  im spannungsbasierten Versagenskriterium nach Gleichung (7.4) ist daher als effektive Größe  $\tilde{\mathbf{S}}$  zu verstehen (Gleichung (5.1)). Demnach sind die effektiven Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}$  in das Kriterium einzusetzen, vergleiche auch Matzenmiller et al. (1995). Gleichung (7.4) kann man somit modifiziert angeben:

$$f(\tilde{\mathbf{S}}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{S}}} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \text{diag} \left[ 0, 0, 1, 0, \left( \frac{\tilde{S}_{33}^t}{\tilde{S}_{23}} \right)^2, \left( \frac{\tilde{S}_{33}^t}{\tilde{S}_{13}} \right)^2 \right]. \quad (7.72)$$



Mit den effektiven Spannungen  $\tilde{S} = C^{el}E$  nach Gleichung (5.1) kann die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  als

$$\bar{\epsilon}_v(\mathbf{E}) := \frac{1}{C_{33}} \sqrt{\mathbf{E}^T C^{elT} \mathbf{P} C^{el} \mathbf{E}} \quad (7.73)$$

definiert werden. Die Definition (7.73) hat formale Ähnlichkeiten mit den Vergleichsverzerrungen nach Gleichung (5.16) bis (5.18). Im Unterschied dazu führt sie jedoch durch die spezielle Kopplungsmatrix  $\mathbf{P}$  auf eine nicht-assozierte Schädigungsformulierung. Ferner soll in Gleichung (7.73) der Verzerrungsvektor

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{13}]^T \quad (7.74)$$

in Kombination mit der Werkstoffmatrix  $C^{el}$  nur positive Werte der Dickennormalspannung berücksichtigen, also

$$S_{33} = C_{13}E_{11} + C_{23}E_{22} + C_{33}E_{33} \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (7.75)$$

Negative Dickennormalspannungen liefern daher keinen Beitrag zur äquivalenten Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$ . Der Vorfaktor  $1/C_{33}$  in Gleichung (7.73) stellt eine Normierung auf den Steifigkeitswert in Dickenrichtung dar. Dies ist nötig, um eine dimensionslose Größe für  $\bar{\epsilon}_v$  zu erhalten, siehe auch Schipperen (2001a/b).

### 7.3.3 Definition der Schädigungsevolution

Grundsätzlich ist die Wahl der „richtigen“ Schädigungsevolution  $\phi(\gamma)$  nicht trivial, was sich auch durch die Vielzahl unterschiedlicher Ansätze in der Literatur ausdrückt. In Geers (1997) und Peerlings (1999) sind einige aufgeführt und graphisch dargestellt, siehe auch Mazars und Pijaudier-Cabot (1989) sowie Chaboche et al. (1995).

Wegen seiner größeren Flexibilität wird das sogenannte ‘*Modified-Power-Law*’ verwendet, das zu der Gruppe von Schädigungsevolutionen gehört, die den Schädigungswert  $d = 1$  bei einem endlichen Wert von  $\gamma$  erreichen, siehe Geers (1997). Es kann mit

$$d = \phi(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \gamma < \gamma_i \\ 1 - \left(\frac{\gamma_i}{\gamma}\right)^\beta \left(\frac{\gamma_u - \gamma}{\gamma_u - \gamma_i}\right)^\alpha & \text{für } \gamma_i \leq \gamma \leq \gamma_u \\ 1 & \text{für } \gamma_u < \gamma \end{cases} \quad (7.76)$$

angegeben werden. Dabei stellt  $\gamma$  den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert der äquivalenten Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  dar, der in Analogie zu Gleichung (5.27) mit

$$\gamma = \max_{-\infty < t < \tau} (\bar{\epsilon}_v) \quad (7.77)$$

gegeben ist. Die Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  in Gleichung (7.76) steuern den Verlauf der Schädigungsevolution und somit den Spannungsabfall bzw. den Entfestigungsverlauf. Sie verhelfen der Schädigungsevolution zu einer größeren Flexibilität als es bei einer rein linear-entfestigenden Formulierung der Fall ist, die durch  $\alpha = \beta = 1, 0$  gegeben ist, siehe auch Abb. 7.18 und Abb. 7.19.

Den Startwert der Schädigung  $\gamma_i$  in Gleichung (7.76) kann man über Gleichung (7.73) mit

$$\gamma_i = \frac{\bar{S}_{33}^t}{C_{33}} = \bar{E}_{33,i} \quad (7.78)$$

angeben. Eine Schädigung tritt also erst dann ein, wenn die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}_v$  den elastischen Wert der Dickennormalverzerrung  $\bar{E}_{33,i}$  überschreitet.

Der Maximalwert der äquivalenten Verzerrung  $\gamma_u$  ist wie in Kapitel 7.2.2 über die freigesetzte Bruchenergie  $G_c$  als Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu berechnen. Die Spannungskomponente in Dickenrichtung lautet unter der Annahme eines einaxialen Zugversuchs:

$$S_{33} = (1 - d) C_{33} E_{33} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma}\right)^\beta \left(\frac{\gamma_u - \gamma}{\gamma_u - \gamma_i}\right)^\alpha C_{33} E_{33} \quad (7.79)$$

wobei zusätzlich  $E_{33} = \gamma$  gilt. Somit ist die Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\int_{\gamma_i}^{\gamma_u} \left[ \left(\frac{\gamma_i}{\gamma}\right)^\beta \left(\frac{\gamma_u - \gamma}{\gamma_u - \gamma_i}\right)^\alpha C_{33} \gamma \right] d\gamma \stackrel{!}{=} \frac{G_c}{h_{PS}} \quad (7.80)$$

Mit konkreten Werten für  $\alpha$  und  $\beta$  lässt sich die Integration in Gleichung (7.80) ausführen und für den folgenden Sonderfall, dass  $\alpha = \beta = 1,0$  ist, explizit nach  $\gamma_u$  auflösen. Hingegen für Werte  $\alpha \neq 1,0$  oder  $\beta \neq 1,0$  muss  $\gamma_u$  iterativ bestimmt werden. Mit der Annahme einer sehr geringen Dicke der Prozessschicht führt dies auf

$$\gamma_u = \gamma_i + \frac{2G_c}{\bar{S}_{33}^t h_{PS}} \approx \frac{2G_c}{\bar{S}_{33}^t h_{PS}} \quad (7.81)$$

Abb. 7.18 zeigt die globale Strukturantwort und die Schädigungsevolution für den einaxialen Zugversuch nach Abb. 7.14 und den Materialparametern nach Abb. 7.8. Die gewählte Schädigungsevolution liefert mit den Exponenten  $\alpha = \beta = 1,0$  einen linearen Entfestungsverlauf bzw. einen linearen Spannungsabfall.

In Abb. 7.19 ist die Strukturantwort für den einaxialen Zugversuch nach Abb. 7.16 dargestellt, allerdings mit verschiedenen Werten für die Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$ . Während der Exponent  $\alpha$  le-

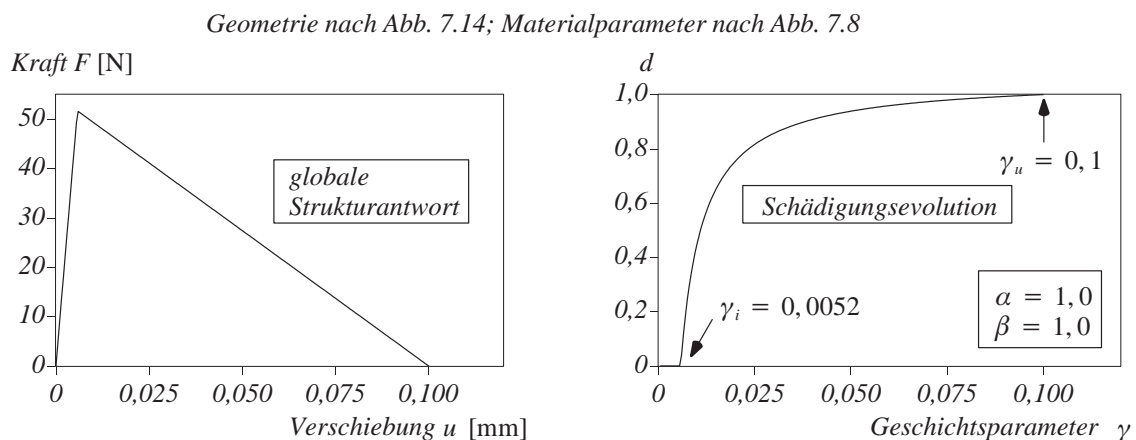


Abb. 7.18: Strukturantwort und Schädigungsevolution: Einaxialer Zugversuch

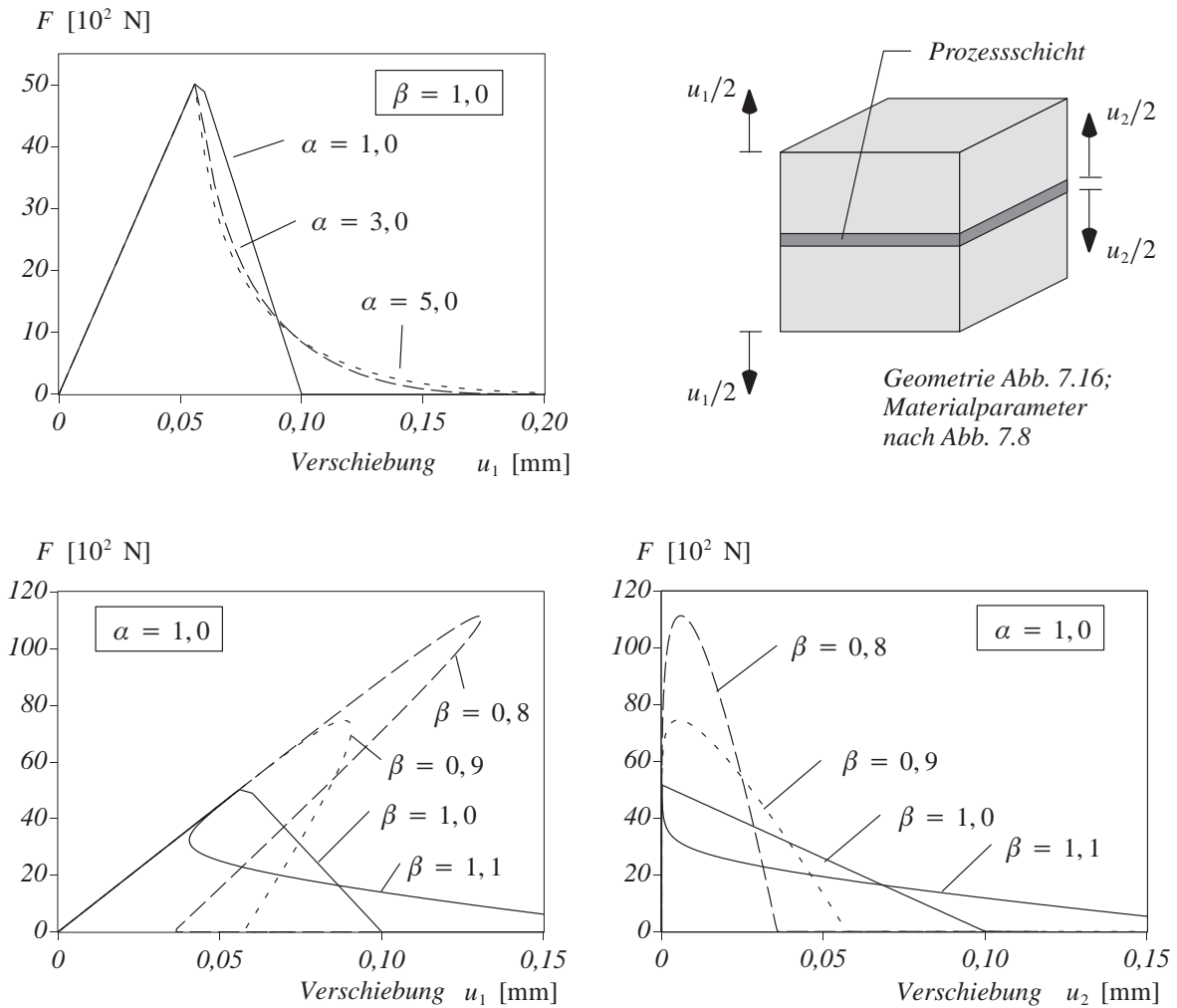


Abb. 7.19: Einfluss der Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$

diglich den Verlauf nach Erreichen der maximalen Last beeinflusst, verändert  $\beta$  den Maximalwert erheblich. Weiterhin kann bei Werten von  $\beta \neq 1,0$  ein ‘Snap-Back’-Verhalten der gegenseitigen Verschiebung  $u_1$  von Schalenoberseite und Schalenunterseite beobachtet werden. Die Energie, die dabei jeweils dissipiert wird, ist gleich, wie die Betrachtung der gegenseitigen Verschiebung  $u_2$  von Prozessschichtoberseite und -unterseite zeigt. Die Fläche unter den Last-Verschiebungs-Verläufen ist für alle Werte von  $\beta$  gleich.

Im Folgenden wird in Anlehnung an Kapitel 5.4 die Materialtangente  $C_{tan}^{ed}$  sowohl für die isotrope 1-Parameter Schädigung als auch für die selektive Schädigung hergeleitet.

### 7.3.4 Elasto-geschädigte Materialtangente

Für die isotrope 1-Parameter Schädigung ist die Spannungsrate nach Gleichung (5.28) mit

$$\dot{S} = (1 - d) C^{el} \dot{E} - \dot{d} C^{el} E \quad (5.28)$$

gegeben.

Die Ratenform des Schädigungsparameters ist in Abweichung zu Gleichung (5.29) wie folgt zu bestimmen:

$$\dot{d} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\epsilon}_v} \left( \frac{\partial \bar{\epsilon}_v}{\partial \mathbf{E}} \right)^T \dot{\mathbf{E}} \quad (7.82)$$

Die in Gleichung (7.82) verwendeten Gradienten lauten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \frac{1}{H} = (1 - \phi(\gamma)) \left[ \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma_u - \gamma} \right], \quad (7.83)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\epsilon}_v} = \begin{cases} 1 & \text{für weitere Schädigung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.84)$$

und

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_v}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{C_{33} \bar{\epsilon}_v} \mathbf{C}^{elT} \mathbf{P} \mathbf{C}^{el} \mathbf{E} = \hat{\mathbf{S}}. \quad (7.85)$$

Über die Beziehung der Spannungs- und Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}_{tan}^{ed} \dot{\mathbf{E}}$  kann die Materialtangente für die isotrope Elasto-Schädigung  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  schließlich als

$$\mathbf{C}_{tan}^{ed} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} - \frac{1}{H} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\epsilon}_v} \tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{S}}^T \quad (7.86)$$

angegeben werden. Im Vergleich mit der assoziierten Formulierung nach Kapitel 5.4 fällt auf, dass sich die Gleichungen (5.32) und (7.86) lediglich im zweiten Ausdruck unterscheiden. Des Weiteren sind die beiden Spannungsvektoren  $\hat{\mathbf{S}}$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  nicht parallel, wodurch eine unsymmetrische Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  entsteht.

Für die selektive Schädigung lautet hingegen die Ratenform der Spannungen:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{ed}(d) \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{C}^{ed}(d)}{\partial d} \dot{d} \mathbf{E}. \quad (7.87)$$

Die Rate des Schädigungsparameters  $\dot{d}$  ist dabei über Gleichung (7.82) und der Gradient  $\partial \mathbf{C}^{ed} / \partial d$  über Gleichung (7.71) gegeben. Unter Verwendung der Gleichungen (7.83) bis (7.85) erhält man die Materialtangente für die selektive Schädigung  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  als

$$\mathbf{C}_{tan}^{ed} = \mathbf{C}^{ed} + \frac{1}{H} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\epsilon}_v} \frac{\partial \mathbf{C}^{ed}}{\partial d} \mathbf{E} \hat{\mathbf{S}}^T. \quad (7.88)$$

Auch hier ist die Unsymmetrie der elasto-geschädigten Materialtangente zu erkennen, die aus der nicht-assozierten Formulierung und der Verwendung der äquivalenten Verzerrungen nach Gleichung (7.73) resultiert.

### 7.3.5 Viskose Regularisierung

Im Sinne eines Ansatzes nach Allix et al. (1998) bzw. Ladevèze et al. (2000) wird bei der viskosen Regularisierung die Rate der Schädigungsvariablen  $\dot{d}$  anstelle einer Auswertung über die Konsistenzbedingung als konstitutive Gleichung definiert. In der vorliegenden Arbeit wird die Rate des Schädigungsparameters gegenüber Gleichung (5.36) etwas modifiziert angenommen:

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \langle \phi(\gamma) - d \rangle. \quad (7.89)$$

Dabei bezeichnet  $\eta$  den Dämpfungsparameter und  $\langle x \rangle$  die Rampenfunktion. Gleichung (7.89) muss innerhalb des inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahrens integriert werden. Hierzu steht einerseits die vollständige Integration und andererseits das Rückwärts-Euler-Verfahren zur Verfügung, vergleiche Kapitel 4.4 bzw. Simo und Ju (1987) oder Ju (1992). Bei Verwendung des Rückwärts-Euler-Verfahrens und unter der Annahme, dass eine weitere Schädigung ( $\phi(\gamma) - d \geq 0$ ) stattfindet, erhält man für die Schädigungsvariable  $d_{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ :

$$d_{n+1} = d_n + \Delta d_{n+1} \quad \text{mit} \quad \Delta d_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\eta} (\phi(\gamma_{n+1}) - d_{n+1}) . \quad (7.90)$$

In Gleichung (7.90) bezeichnet  $\Delta t_{n+1}$  die Zeitschrittweite und es folgt durch Auflösen nach  $d_{n+1}$

$$d_{n+1} = \frac{d_n + \frac{\Delta t_{n+1}}{\eta} \phi(\gamma_{n+1})}{1 + \frac{\Delta t_{n+1}}{\eta}} . \quad (7.91)$$

Analog zur Viskoplastizität lassen sich folgende Grenzfälle untersuchen:

- Für  $\Delta\mu = \Delta t_{n+1}/\eta \rightarrow 0$  folgt  $d_{n+1} \rightarrow d_n$ . Man erhält somit die rein elastische Lösung.
- Für  $\Delta\mu = \Delta t_{n+1}/\eta \rightarrow \infty$  folgt  $d_{n+1} \rightarrow \phi(\gamma_{n+1})$ . Man erhält somit die ratenunabhängige Lösung.

In Abb. 7.20 sind für das Modellproblem nach Abb. 7.16 die Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Dämpfungsparameter  $\eta$  dargestellt. Man erkennt deutlich, dass bei größerer Dämpfung  $\Delta\mu = \Delta t/\eta \rightarrow 0$  die dissipierte Energie als Fläche unter der Last-Verschiebungs-Kurve größer wird und insgesamt mehr Bruchenergie  $G_c$  dissipiert wird als dem System eigentlich zur Verfügung steht.

Eine automatische Bestimmung eines adaptiven Dämpfungsparameters  $\eta^*$  analog zur Delaminationsplastizität in Kapitel 7.2 wurde bis dato noch nicht realisiert.

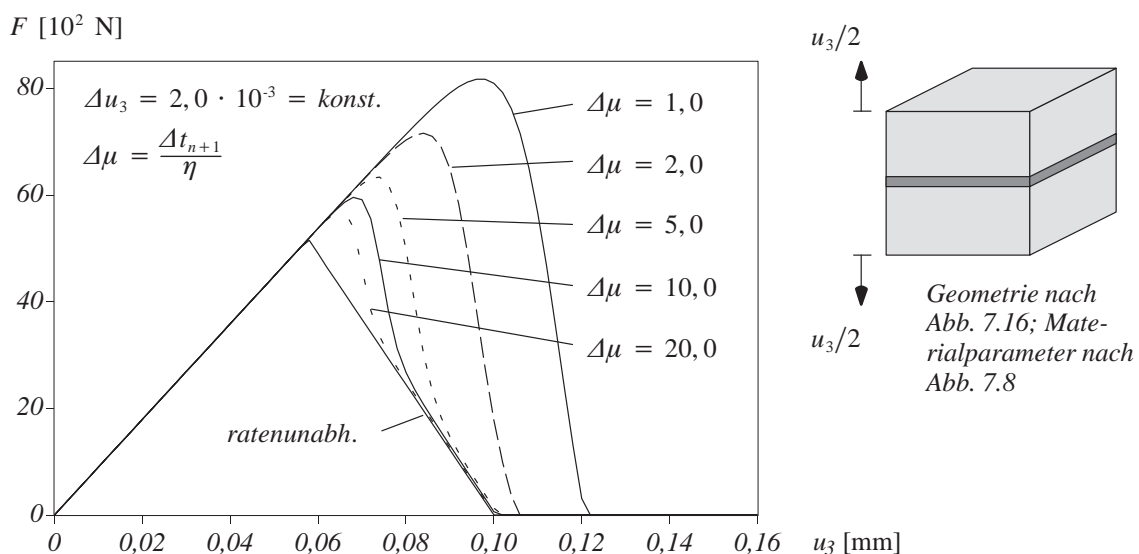


Abb. 7.20: Strukturantwort bei viskoser Schädigung

## 7.4 Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium

In diesem Abschnitt soll ein Schädigungsmodell hergeleitet werden, das anstelle einer verzerungsbasierten Schädigungsfunktion die Definition einer äquivalenten Energiefreisetzungsrates  $\bar{Y}$  verwendet. Für den Sonderfall, dass die kritischen Bruchenergien in den verschiedenen Bruchmodi ( $G_{cI}$ ,  $G_{cII}$ ,  $G_{cIII}$ ) gleich sind, führt dieses Schädigungsmodell auf eine symmetrische geschädigte Materialtangente  $C_{tan}^{ed}$ . Im Folgenden wird dieses Modell auch als ein *energiefreisetzungsraten-basiertes Schädigungsmodell* bezeichnet.

Aufbauend auf der Definition für die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  (Kapitel 7.4.1) wird zunächst in Kapitel 7.4.2 eine äquivalente Energiefreisetzungsrates  $\bar{Y}$  als Schädigungsfunktion definiert und erläutert. Anschließend geht Kapitel 7.4.3 auf die gewählte Schädigungsevolution  $\phi(Y)$  ein und bestimmt u.a. den Start- und Endwert für die Schädigungsentwicklung. Darauf folgend wird die elasto-geschädigte Materialtangente in Kapitel 7.4.4 und die viskose Erweiterung in Kapitel 7.4.5 vorgestellt.

### 7.4.1 Definition der freien Helmholtz-Energie $\Psi$

Die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  ist in ähnlicher Weise zum vorherigen Ansatz der selektiven Schädigung, siehe Gleichung (7.67), definiert, wobei die folgende geschädigte Materialmatrix  $C^{ed}$  angenommen wird:

$$C^{ed}(\mathbf{d}) := \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & (1 - \bar{d}_3)C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & (1 - \bar{d}_3)C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - \bar{d}_3)C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{symm.} & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & (1 - d_2)C_{55} & 0 \\ & & & & & (1 - d_1)C_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.92)$$

Die drei skalaren Schädigungsparameter  $d_1$ ,  $d_2$  und  $\bar{d}_3$  sind dabei den jeweiligen Bruchmodi II, III und I zugeordnet. In Gleichung (7.92) entspricht die Richtung 1 der Winkelhalbierenden, die durch die Faserorientierung der angrenzenden Schichten festgelegt ist. Richtung 2 ist hierzu senkrecht, während die dritte Richtung der Dickenrichtung entspricht, vergleiche Abb. 7.2. Wie schon beim selektiven Schädigungsmodell (siehe Gleichung (7.68)) führt man den Schädigungsparameter  $\bar{d}_3$  in (7.92) so ein, dass ein unterschiedliches Schädigungsverhalten bei Zug- bzw. Druckbeanspruchung in Dickenrichtung berücksichtigt wird.

$$\bar{d}_3 = \begin{cases} d_3 & \text{für } S_{33} > 0, \\ 0 & \text{für } S_{33} \leq 0. \end{cases} \quad (7.93)$$

Analog zu (7.69) lässt sich die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  mit

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{d}) := \frac{1}{2} \mathbf{E}^T C^{ed}(\mathbf{d}) \mathbf{E} \quad (7.94)$$

definieren. Der Ansatz nach Gleichung (7.92) bis (7.94) führt auf einen Ausdruck für die geschädigte Energie, der Analogien zu einem Schädigungsansatz von Allix et al. (1995), Allix und Corigliano (1996) bzw. Corigliano und Allix (2000) aufweist. Bei den genannten Autoren wird al-

lerdings die Delamination über ein ‘*Interface*’ beschrieben, so dass sich deren geschädigte freie Energie folgendermaßen angeben lässt:

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2}(1 - d_1)k_1[[u_1]]^2 + \frac{1}{2}(1 - d_2)k_2[[u_2]]^2 + \frac{1}{2}(1 - d_3)k_3(\langle [[u_3]] \rangle)^2 + \frac{1}{2}k_3(\langle -[[u_3]] \rangle)^2 . \quad (7.95)$$

Dabei bezeichnen die Größen  $k_i$  die ‘*Interface*’-Steifigkeiten in  $[\text{MN}/\text{m}^3]$ ,  $[[u_i]]$  die Komponenten der Verschiebungssprünge und  $d_i$  die Schädigungsparameter in den vorher genannten Richtungen. Auch dieser Ansatz berücksichtigt, dass nur positive Werte von  $\langle [[u_3]] \rangle$  einen Beitrag zur Schädigung leisten. Weitere Ansätze dieser Art, die aber auf der Definition der geschädigten Komplementärenergie des ‘*Interface*’ beruhen, gehen auf die Arbeiten von Ladevèze und Le Dantec (1992), Allix et al. (1998) und Ladevèze et al. (2000) zurück. Die weitere Herleitung wird aus Gründen einer einfacheren Schreibweise und ohne Beschränkung der Allgemeinheit für den Fall positiver Dickennormalspannungen durchgeführt.

Aus Gleichung (7.94) leiten sich die Spannungen

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}^{ed}(\mathbf{d})\mathbf{E} \quad (7.96)$$

in der üblichen Form ab. Die Energiefreisetzungsraten  $Y_i$ , die dem jeweiligen Bruchmodus zugeordnet sind, können aus der partiellen Ableitung der freien Energiefunktion  $\Psi$  nach den einzelnen Schädigungsparametern ( $d_1, d_2, d_3$ ) ermittelt werden, also

$$Y_3 = - \frac{\partial \Psi}{\partial d_3} = \frac{1}{2}E_{33}^2 C_{33} + E_{33}E_{11}C_{13} + E_{33}E_{22}C_{23} , \quad (7.97)$$

$$Y_2 = - \frac{\partial \Psi}{\partial d_2} = \frac{1}{2}(2E_{23})^2 C_{55} , \quad (7.98)$$

$$Y_1 = - \frac{\partial \Psi}{\partial d_1} = \frac{1}{2}(2E_{13})^2 C_{66} . \quad (7.99)$$

Der anliegende Belastungs- bzw. Verzerrungszustand wird somit hinsichtlich der Energiefreisetzungsraten  $Y_i$  in seine Modus-Komponenten aufgeteilt. Zusammen mit der Rate des jeweiligen Schädigungsparameters  $d_i$  müssen sie die reduzierte Dissipationsungleichung (5.14) erfüllen. Die infolge der Schädigung dissipierte Energie lautet somit

$$D^{red} = Y_1 \dot{d}_1 + Y_2 \dot{d}_2 + Y_3 \dot{d}_3 \geq 0 . \quad (7.100)$$

#### 7.4.2 Definition einer äquivalenten Energiefreisetzungsrates als Schädigungsfunktion

Im allgemeinen Fall können die drei Schädigungsparameter  $d_1, d_2$  und  $d_3$  unterschiedliche Werte haben und je nach Belastung unterschiedlich schnell aktiviert bzw. zu verschiedenen Zeitpunkten die vollständige Entfestigung ( $d_i = 1$ ) erreichen. Da allerdings die Prozessschicht sehr dünn ist, kann man davon ausgehen, dass auch dann eine vollständige Schädigung in allen Modi auftritt, wenn nur ein Schädigungsparameter den Wert Eins erreicht hat. Die Schädigungsentwicklung der einzelnen Schädigungsparameter ist somit stark gekoppelt, woraus sich analog zu Allix et al. (1998) eine äquivalente Energiefreisetzungsrates  $\bar{Y}$  definieren lässt:

$$\bar{Y} = \left[ (Y_3)^\alpha + (a_1 Y_1)^\alpha + (a_2 Y_2)^\alpha \right]^{1/\alpha} . \quad (7.101)$$

Gleichung (7.101) stellt in Kombination mit der Definition des Schädigungsbeginns in Gleichung (7.106)<sub>1</sub> die Schädigungsfunktion dar. Die Materialparameter  $a_1$  und  $a_2$  werden in Corigliano und Allix (2000) bzw. Ladevèze et al. (2000) mit den Verhältnissen der kritischen Bruchenergien für die einzelnen Versagensmodi gleichgesetzt:

$$a_1 = \frac{G_{cI}}{G_{cII}} ; a_2 = \frac{G_{cI}}{G_{cIII}} ; Y_c = \frac{G_{cI}}{h_{PS}} . \quad (7.102)$$

Sie können auch als Wichtungparameter angesehen werden, die die aktuellen Energiefreisetzungsraten  $Y_i$  proportional zum Verhältnis ihrer kritischen Bruchenergien gewichten. Durch die beschränkte Verfügbarkeit von Versuchsergebnissen wird bei den zuvor genannten Autoren wie auch in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass  $a_1 = a_2$  ist. Die Prozessschicht verhält sich also transversal isotrop.

Anhand von Versuchsergebnissen mit unterschiedlichen Faserorientierungen und Belastungsmodi können die Materialparameter  $\alpha$ ,  $a_1$  bzw.  $a_2$  und  $G_{cI}$  bzw.  $Y_c$  ermittelt werden, siehe Allix et al. (1998) und Ladevèze et al. (1998). Allerdings variieren diese je nach Faserorientierung der angrenzenden Schichten. Die Materialparameter sind somit abhängig vom Schichtaufbau und daher eher als 'Interface'-Parameter zu sehen. In Allix et al. (1998) sind für verschiedene Laminatschichtungen die identifizierten Materialparameter angegeben. Des Weiteren wird dort darauf hingewiesen, dass bei einer reinen Aufsummierung der Energiefreisetzungsraten ( $\alpha = 1$ ) in Gleichung (7.101) eine zufriedenstellende und darüber hinaus konservative Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen für sämtliche Faserorientierungen und sämtliche Belastungsmodi festzustellen ist.

Wie schon erwähnt kann Gleichung (7.101) zusammen mit Gleichung (7.106)<sub>1</sub> auch als Versagensfläche im Raum der Energiefreisetzungsraten ( $Y_i > 0$ ) dargestellt werden. Abb. 7.21 zeigt nun den Einfluss der Materialparameter  $\alpha$ ,  $a_1$  und  $a_2$  auf die Schädigungsfunktion bzw. auf die Schädigungsfläche. Während die Materialkenngröße  $\alpha$  die grundsätzliche Form der Fläche beeinflusst, gekrümmt oder eben, steuern die Materialparameter  $a_1$  bzw.  $a_2$  umgekehrt proportional die Achsenabschnitte auf der  $Y_1$ - bzw.  $Y_2$ -Achse, siehe Abb. 7.21b). Für Werte  $\alpha < 1,0$  ist die Versagensfläche nicht konvex (nach außen) sondern konkav (nach innen) gekrümmt. Hingegen ergibt sich bei  $\alpha = 1,0$  eine schräge Ebene im Raum, deren Normalenvektor für  $a_1 = a_2 = 1,0$  gleich der Raumdiagonale ist (Abb. 7.21a)). Ein Achtel einer Kugel erhält man bei  $\alpha = 2,0$  und  $a_1 = a_2 = 1,0$  (Abb. 7.21c)).

Des Weiteren soll noch auf einen Sachverhalt eingegangen werden, der die Objektivität der Nachbruchergebnisse betrifft. In Lemaître (1996) wird der Zusammenhang zwischen Bruchenergie  $G_c$  und Energiefreisetzungsrates  $Y_c$  aufgezeigt. Dies geschieht durch die Betrachtung der Schädigungsvorgänge auf der Mikroebene und der anschließenden Homogenisierung innerhalb eines repräsentativen Volumenelementes (RVE), das auf der Mesoebene definiert ist. Dabei nimmt man an, dass die im Rahmen der klassischen Bruchmechanik dissipierte Energie gleich der Energie sein muss, die im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik dissipiert wird. Auf die Darstellung des gesamten Vorgehens soll verzichtet werden. Lediglich das Ergebnis wird gezeigt, das die charakteristische Länge des RVE (auch als interne Länge bezeichnet) über den Zusammenhang zwischen Bruchenergie und Energiefreisetzungsrates liefert:

$$\ell \approx \frac{G_c}{Y_c} , \quad G_c [\text{MNm/m}^2] , \quad Y_c [\text{MN/m}^2] . \quad (7.103)$$



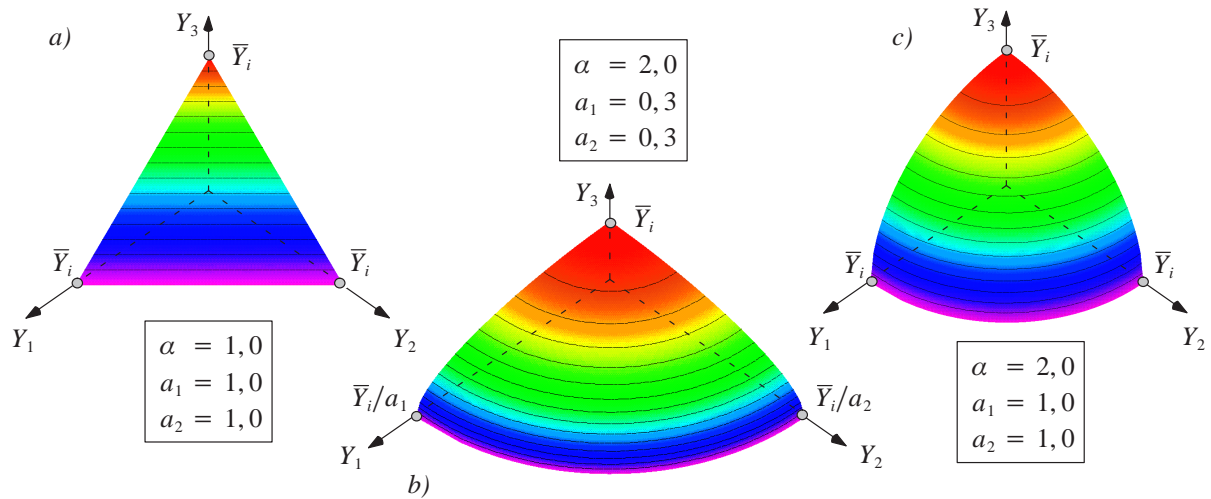


Abb. 7.21: Einfluss der Materialparameter auf die Schädigungsfläche

Bei der numerischen Simulation der Delamination mittels einer Prozessschicht endlicher Dicke entspricht  $\ell$  gerade der Prozessschichtdicke  $h_{PS}$ . In Gleichung (7.102) ist daher die kritische Energiefreisetzungsrate  $Y_c$  abhängig von der Prozessschichtdicke, so dass bei unterschiedlichen Dicken stets die gleiche Bruchenergie  $G_c$  dissipiert wird. Dasselbe Ergebnis liefert auch eine Dimensionsanalyse, was Gleichung (7.103) mit den angegebenen Einheiten verdeutlichen soll. In Allix et al. (1995, 1998) bzw. Corigliano und Allix (2000) ist diese Unterscheidung nicht nötig, weil die 'Interface'-Steifigkeiten mit der Einheit  $[MN/m^3]$  definiert sind. Die Energiefreisetzungsraten entsprechen bezüglich der Einheiten bereits den Bruchenergien.

### 7.4.3 Definition der Schädigungsevolution

Infolge der beschriebenen starken Kopplung der Schädigungsparameter reicht es, nicht nur eine äquivalente Energiefreisetzungsrate, sondern auch nur eine Schädigungsevolution, die für alle drei Schädigungsparameter gleich ist, zu definieren. Da die Verzerrungen in die äquivalente Energiefreisetzungsrate  $\bar{Y}$  quadratisch eingehen, für die Strukturantwort aber ein linearer Entfestigungsverlauf entstehen soll, wird die Schädigungsevolution in Anlehnung an Allix et al. (1995) als Wurzelfunktion der Energiefreisetzungsrate wie folgt definiert:

$$d_1 = d_2 = d_3 = d = \phi(Y) = 1 - \frac{\sqrt{\bar{Y}_i} \sqrt{\bar{Y}_u} - \sqrt{\bar{Y}}}{\sqrt{\bar{Y}} \sqrt{\bar{Y}_u} - \sqrt{\bar{Y}_i}} \quad (7.104)$$

mit

$$Y = \max(\bar{Y}_i, \max_{-\infty < t < \tau}(\bar{Y})) \quad (7.105)$$

In Gleichung (7.105) kann man  $Y$  wieder als den Geschichtsparameter ansehen, der sich aus dem maximal erreichten Wert der äquivalenten Energiefreisetzungsrate  $\bar{Y}$  und einem Schädigungsstartwert  $\bar{Y}_i$  ergibt. Die Schädigungsevolution nach Gleichung (7.104) beschreibt im Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine lineare Entfestigung, so dass es möglich ist, die verschiedenen Schädigungsmodelle mit dem Plastizitätsmodell zu vergleichen.

Die Materialparameter  $\bar{Y}_i$  und  $\bar{Y}_u$  in Gleichung (7.104) beschreiben den Schädigungsbeginn bzw. den Maximalwert der Energiefreisetzungsrate, der mit einer vollständigen Schädigung

gleichzusetzen ist. Zum Erhalt netzunabhängiger Nachbruchergebnisse muss  $\bar{Y}_u$  abhängig von der Prozessschichtdicke sein.  $\bar{Y}_i$  und  $\bar{Y}_u$  sind daher folgendermaßen definiert:

$$\bar{Y}_i = \frac{(\bar{S}_{33}^t)^2}{2 C_{33}} \quad \text{und} \quad \bar{Y}_u = \frac{2 G_{cI}^2 C_{33}}{(\bar{S}_{33}^t)^2 h_{PS}^2} = \frac{2 Y_c^2 C_{33}}{(\bar{S}_{33}^t)^2} . \quad (7.106)$$

Durch die Wahl von einer einzigen Schädigungsevolution erreichen alle Schädigungsparameter zum gleichen Zeitpunkt den Zustand der kompletten Schädigung. In Alfano und Crisfield (2001) wird dieser Umstand auch als eine Zwangsbedingung für die Schädigungsevolution bezeichnet.

Auf eine physikalische Unzulänglichkeit dieses Schädigungsmodells soll noch kurz hingewiesen werden. Bei beliebiger Wahl der Materialparameter  $a_1$  bzw.  $a_2$  und einer reinen Schubbeanspruchung (beispielsweise  $E_{13}$ ) beginnt das Versagen in der Regel nicht bei der Grenzspannung  $\bar{S}_{13}$ . Der Grund hierfür liegt zum einen in der Definition für  $\bar{Y}_i$ , die sich an der Dickenrichtung mit  $\bar{S}_{33}^t$  und  $C_{33}$  orientiert und zum anderen an den Definitionen der Materialparameter  $a_1$  bzw.  $a_2$ , die sich lediglich aus den Bruchenergien ergeben. Soll der Schädigungsbeginn tatsächlich bei Erreichen der Versagensspannung  $\bar{S}_{13}$  eintreten, siehe Abb. 7.22, so müssen  $a_1$  und  $a_2$  über die folgenden Ausdrücke bestimmt werden:

$$a_1 = \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{13}} \right)^2 \frac{C_{66}}{C_{33}} \quad \text{und} \quad a_2 = \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{23}} \right)^2 \frac{C_{55}}{C_{33}} . \quad (7.107)$$

Gleichungen (7.107)<sub>1</sub> und (7.107)<sub>2</sub> können auch für den Fall verwendet werden, dass die Bruchenergien  $G_{cII}$  und  $G_{cIII}$  nicht bekannt sind. Bei den vorgestellten Materialmodellen, die das Brewer-Lagace-Delaminationskriterium verwenden (Kapitel 7.2 und 7.3), taucht dieses Problem nicht auf, da die Kopplungsmatrix  $\mathbf{P}$  schon die Verhältnisse der Versagensspannungen enthält. Dafür muss bei diesen Modellen die globale kritische Bruchenergie  $G_c$  bekannt sein, die vom jeweiligen Verhältnis der Bruchmodi in der aktuellen Belastung abhängt. In der Literatur wird dieses Problem oft umgangen und die Schädigungsevolution ohne Startwert ( $\bar{Y}_i = 0$ ), also von Beginn an, definiert.

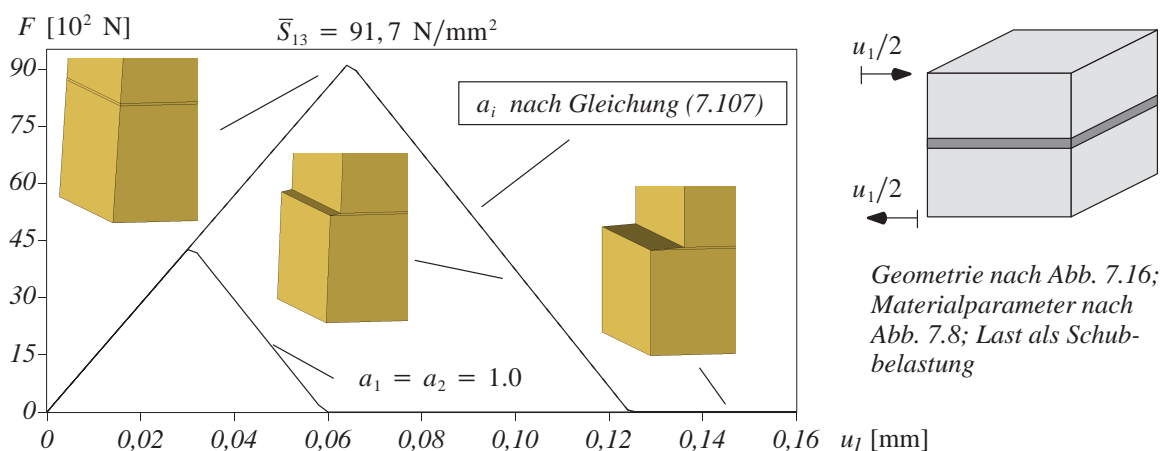


Abb. 7.22: Strukturantwort bei Schubbeanspruchung

#### 7.4.4 Elasto-geschädigte Materialtangente

Die Spannungsrate lässt sich analog zur selektiven Schädigung (Gleichung (7.87)) mit

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{ed} \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{C}^{ed}}{\partial d} \dot{d} \mathbf{E} \quad (7.87)$$

angeben. Der Gradient  $\partial \mathbf{C}^{ed} / \partial d$  wird dabei nach Gleichung (7.71) und die geschädigte Materialmatrix  $\mathbf{C}^{ed}$  nach Gleichung (7.92) bestimmt. Die Ratenform des Schädigungsparameter ist im Unterschied zu Gleichung (5.29) wie folgt zu bestimmen:

$$\dot{d} = \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} \left( \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \mathbf{E}} \right)^T \dot{\mathbf{E}} \quad (7.108)$$

Der Gradient der Schädigungsevolution nach der Energiefreisetzungsrates lautet dabei

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{\bar{Y}_u} - \sqrt{\bar{Y}}) \sqrt{\bar{Y}_i}}{\sqrt{Y^3} (\sqrt{\bar{Y}_u} - \sqrt{\bar{Y}_i})} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\bar{Y}_i}}{Y (\sqrt{\bar{Y}_u} - \sqrt{\bar{Y}_i})} = \frac{1}{H} \quad (7.109)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} = \begin{cases} 1 & \text{für weitere Schädigung ,} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (7.110)$$

Der Gradient  $\partial \bar{Y} / \partial \mathbf{E}$  lässt sich wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{Y}^\alpha} \begin{bmatrix} Y_3^\alpha E_{33} C_{13} / Y_3 \\ Y_3^\alpha E_{33} C_{23} / Y_3 \\ Y_3^\alpha (E_{33} C_{33} + E_{11} C_{13} + E_{22} C_{23}) / Y_3 \\ 0 \\ 2(a_2 Y_2)^\alpha E_{23} C_{55} / Y_2 \\ 2(a_1 Y_1)^\alpha E_{13} C_{66} / Y_1 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{S}}^T \quad (7.111)$$

Für die elasto-geschädigte Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  erhält man schließlich:

$$\mathbf{C}_{tan}^{ed} = \mathbf{C}^{ed} + \frac{1}{H} \frac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \mathbf{C}^{ed}}{\partial d} \mathbf{E} \hat{\mathbf{S}}^T \quad (7.112)$$

Sie ist symmetrisch, wenn die kritischen Bruchenergien der einzelnen Modi  $G_{cI}$ ,  $G_{cII}$  und  $G_{cIII}$  gleich sind ( $a_1 = a_2 = 1, 0$ ). Man erhält dann eine assoziierte Schädigungsformulierung.

#### 7.4.5 Viskose Regularisierung

Die ratenabhängige Form der Schädigungsevolution wird in gleicher Weise wie in Kapitel 7.3.5 definiert, so dass gilt:

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \langle \phi(Y) - d \rangle \quad (7.113)$$

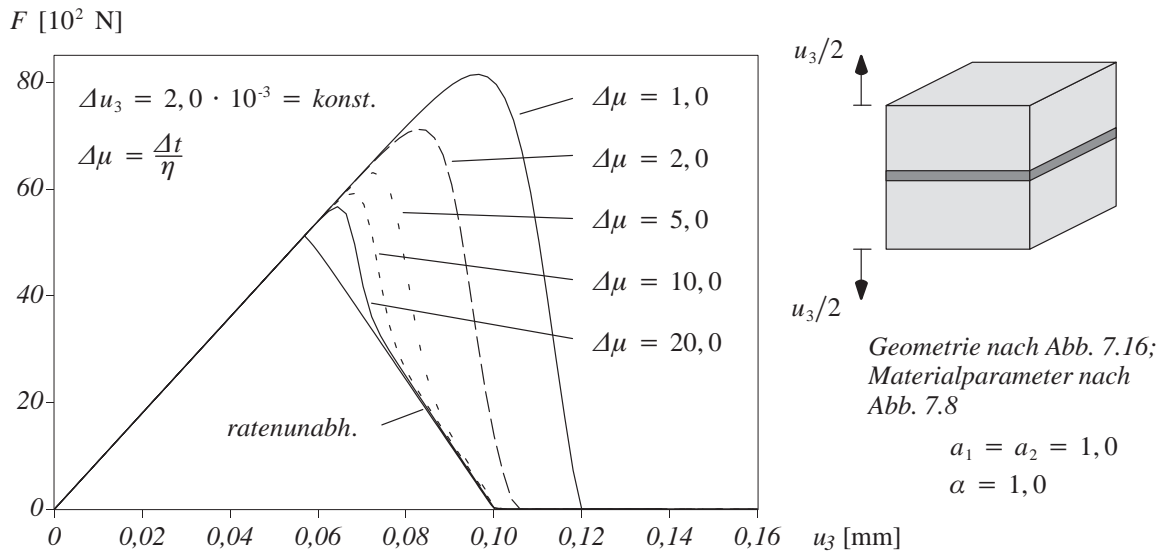


Abb. 7.23: Strukturantwort bei viskoser Schädigung

Für das Modellproblem nach Abb. 7.16 sind in Abb. 7.23 die Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Dämpfungsparameter dargestellt. Die Ergebnisse entsprechen qualitativ und nahezu quantitativ denen nach Abb. 7.20. Auch bei diesem Modell wurde eine automatische Bestimmung eines adaptiven Dämpfungsparameters  $\eta^*$  bis dato noch nicht realisiert.

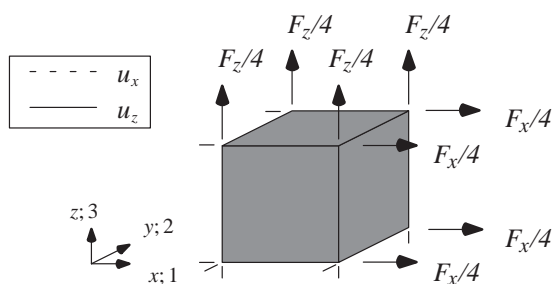
## 7.5 Modellbeispiel

Neben den bereits vorgestellten Modellbeispielen soll im Folgenden sowohl das Be- als auch das Entlastungsverhalten der verschiedenen Materialmodelle miteinander verglichen werden. Hierzu wird ein Quader mit Kantenlänge 1 mm untersucht, der vollständig aus einem entfestigenden Material besteht (vergleiche Abb. 7.14). Im Unterschied zu den in Abb. 7.8 angegebenen Materialparameter wird die Querdehnrzahl mit Null angenommen. Der Würfel sei zwangungsfrei gelagert und wird nach dem in Abb. 7.24 vorgegebenen Belastungsschema abwechselnd in  $x$ - und in  $z$ -Richtung be- und entlastet. In Abb. 7.25 sind die berechneten Last-Verschiebungs-Kurven aller Modelle dargestellt. Die Verschiebungen in  $x$ -Richtung  $u_x$  werden durch die gestrichelten Verläufe wiedergegeben, während die Verschiebungen in  $z$ -Richtung  $u_z$  durch die durchgezogenen Linien dargestellt sind.

Bei der ersten Be- und Entlastung in  $x$ -Richtung (Kurven 1 und 2) liefern alle Modelle zunächst die gleichen Last-Verschiebungs-Antworten, weil das Material noch ungeschädigt ist und sich rein elastisch verhält. Es können keine materiell nichtlinearen Effekte entstehen, da die Delaminationsmodelle nur auf Spannungen in Dickenrichtung  $S_{33}$  „ansprechen“ und die Querdehnrzahl mit Null gewählt wurde. Steigert man die Belastung allerdings nun in  $z$ -Richtung (Kurve 3), wird für alle Modelle beim Lastfaktor  $\lambda = 51,7$  die Grenzspannung in Dickenrichtung  $S_{33}^f$  erreicht und es findet eine Entfestigung mit identischem Verlauf statt. Die Entlastung (Kurve 4) aus diesem Zustand macht den ersten offensichtlichen Unterschied deutlich. Der Entlastungsast verläuft je nach verwendetem Modell (Plastizität oder Schädigung) entweder parallel zum elastischen Belastungsast oder auf den Ursprung zurück. Bei der erneuten Belastung in  $x$ -Richtung (Kurve 5) macht sich beim isotropen Schädigungsmodell nun die angenommene Isotropie bemerkbar. Die aus der Last in  $z$ -Richtung hervorgerufene Schädigung wirkt sich auch in die  $x$ -Richtung und in sämtliche andere Richtungen aus, so dass die Steifigkeit des Wiederbelastungsastes geringer ist als bei der Erstbelastung (Kurve 1). Die Delaminationsmodelle der selektiven und der energiefreisetzungs-raten-basierten Schädigung zeigen dieses Verhalten nicht, weil nur bestimmte Komponenten der Materialmatrix geschädigt werden. Die Schädigung wirkt sich daher anisotrop aus. Werden die Schädigungsmodelle für sehr dünne Prozessschichten verwendet, macht sich dieser Unterschied aber kaum bemerkbar. Das Plastizitätsmodell liefert bei Be- und Entlastung in die verschiedenen Richtungen selbstverständlich keinen Unterschied, da die Plastizität nicht die elastischen Materialparameter verändert (Plastizitätsmodell  $\rightarrow$  keine Materialdegradation).

Bei einer Belastungsumkehr bis in den Bereich negativer Dickennormalspannungen, siehe Abb. 7.26, unterscheiden sich die Schädigungsmodelle ebenfalls. Das selektive und das energiefrei-

**Belastungsanordnung:**

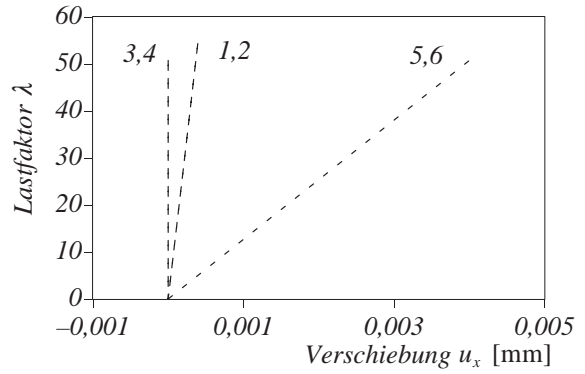
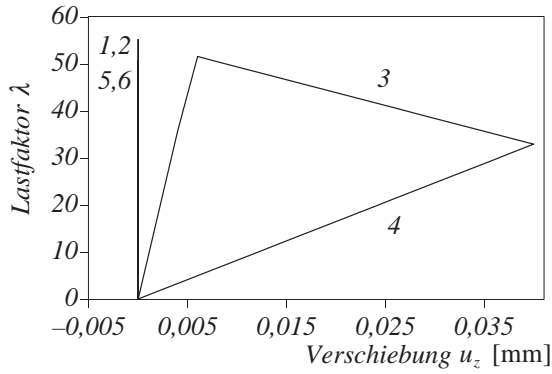


**Belastungsschema:**

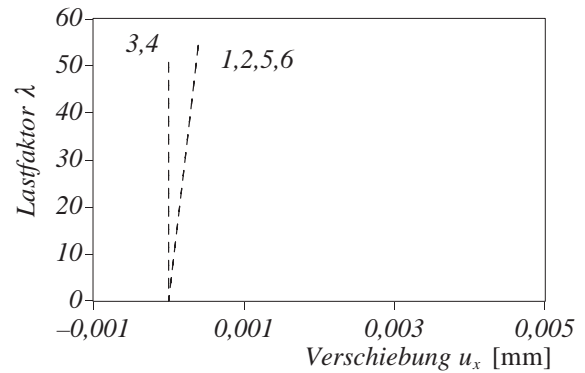
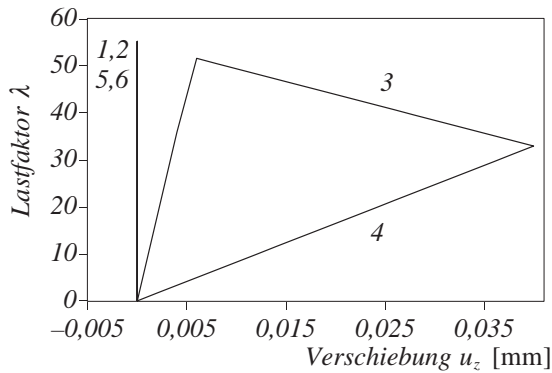
Schritt	$F_x$	$F_z$	Richtung
1	$\lambda$	0	belastend
2	$\lambda$	0	entlastend
3	0	$\lambda$	belastend
4	0	$\lambda$	entlastend
5	$\lambda$	0	belastend
6	$\lambda$	0	entlastend

Abb. 7.24: Be- und Entlastungsversuche in  $x$ - und  $z$ -Richtung

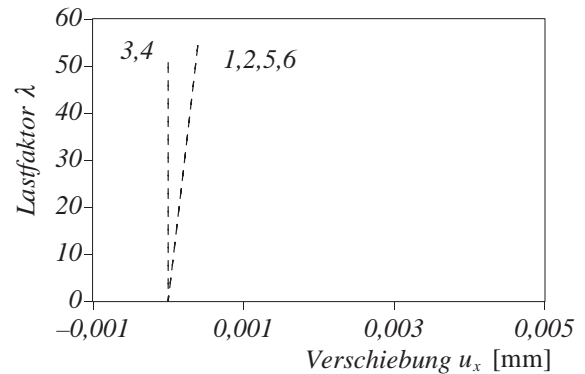
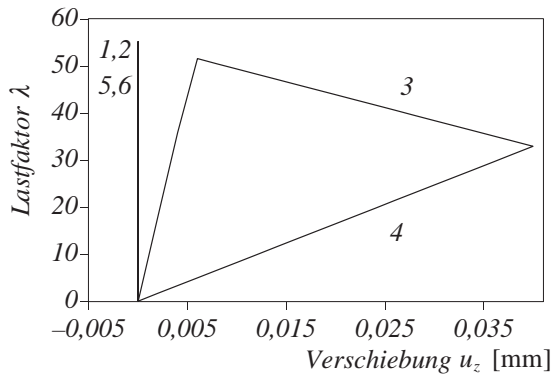
Isotropes Schädigungsmodell



Selektives Schädigungsmodell



Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium



Plastizitätsmodell

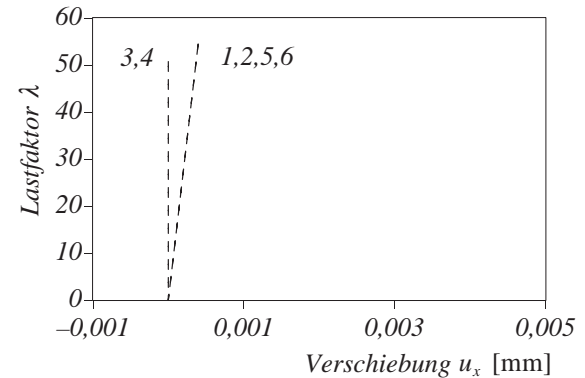
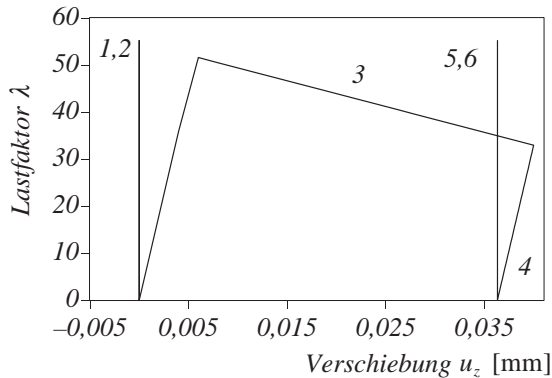


Abb. 7.25: Be- und Entlastungsversuche in x- und z-Richtung

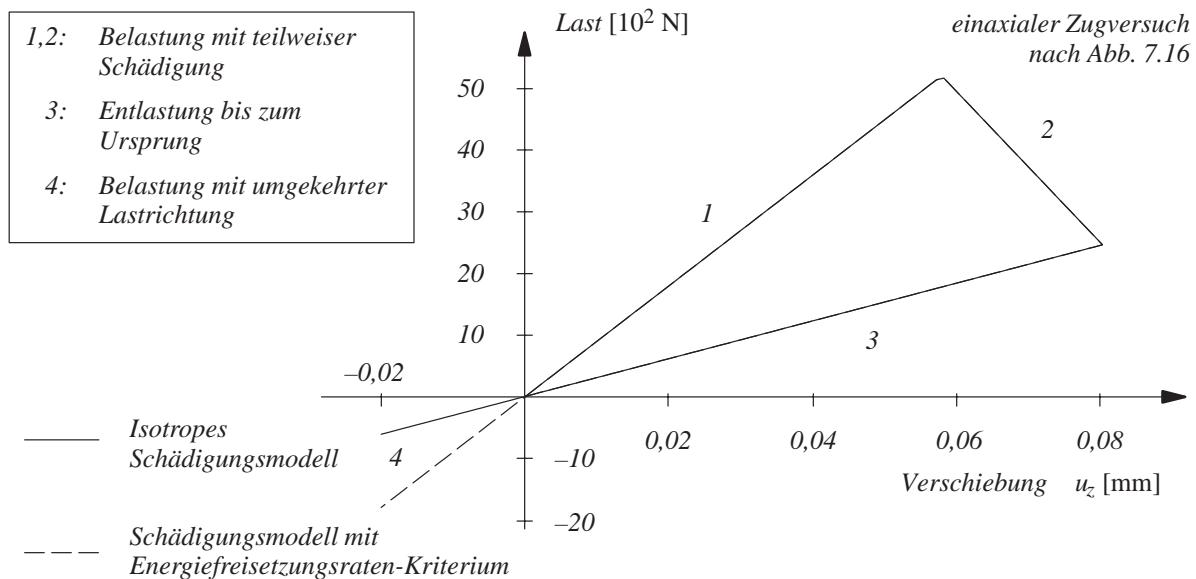


Abb. 7.26: Belastungsumkehr in den Druckbereich

setzungs-raten-basierte Schädigungsmodell verwenden nämlich bei Schließung des Risses wieder die ungeschädigten Größen für Steifigkeiten  $C_{13}$ ,  $C_{23}$  und  $C_{33}$  ('Stiffness-Recovery'). Das bedeutet, dass bei negativen Dickennormalspannungen eine uneingeschränkte Lastübertragung möglich ist. Dieses Verhalten ist durch die Einführung der Schädigungsparameter nach Gleichung (7.68) bzw. (7.93) modellierbar. Für die Schubsteifigkeiten  $C_{55}$  und  $C_{66}$  wird weiterhin der aktuelle Schädigungszustand berücksichtigt, so dass nur eine eingeschränkte Schubübertragung möglich ist. Das isotrope Schädigungsmodell berücksichtigt die Wiederherstellung der ungeschädigten Steifigkeiten  $C_{13}$ ,  $C_{23}$  und  $C_{33}$  infolge Riss-schließung überhaupt nicht und geht mit der Steigung des Entlastungsastes durch den Ursprung hindurch. Dieser „Defekt“ kann sich natürlich auch bei einer Strukturanalyse bemerkbar machen. Wurde eine vollständige Entfestigung ( $d = 1$ ) erreicht, kann eine gegenseitige Durchdringung ungehindert stattfinden, vergleiche Kapitel 8.9.

Selbstverständlich könnte man das isotrope Schädigungsmodell auch dahingehend erweitern, dass es die Wiederherstellung der Steifigkeiten  $C_{13}$ ,  $C_{23}$  und  $C_{33}$  bei Riss-schließung berücksichtigt. Es ist dann die folgende geschädigte Materialmatrix  $C^{ed}$  zu verwenden:

$$C^{ed}(d) := (1 - d) \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \frac{1}{(1 - \bar{d})} C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & \frac{1}{(1 - \bar{d})} C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{(1 - \bar{d})} C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (7.114)$$

mit  $\bar{d} = \begin{cases} 0 & \text{für } S_{33} > 0 \\ d & \text{für } S_{33} \leq 0 \end{cases}$ .





hin eine feinere Diskretisierung gewählt. Die Dickenrichtung ist in acht Berechnungsschichten eingeteilt, deren einzelne Schichtstärken ebenfalls angegeben sind. Die geringeren Schichthöhen zur Schalenmittelfläche hin können dabei als eine Diskretisierungsverfeinerung des Lasteinleitungsbereiches interpretiert werden. Infolge der acht Berechnungsschichten weist jeder FE-Knoten 27 Freiheitsgrade auf. Die Berechnung wird geometrisch und materiell linear durchgeführt.

Zum Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse wird eine Näherungslösung nach Girkmann (1963) herangezogen, die auch in Schultz (1996) angegeben ist. Die analytische Lösung für die Spannungsverteilung setzt sich dabei aus zwei Anteilen zusammen: aus der Lösung für den Einzellastangriff an einer unendlich ausgedehnten Scheibe und aus der Lösung für den Einzellastangriff an einer streifenförmigen Scheibe. Im Folgenden werden aufgrund der singulären Lasteinleitung Schnitte mit einem gewissen Abstand zum Rand untersucht.

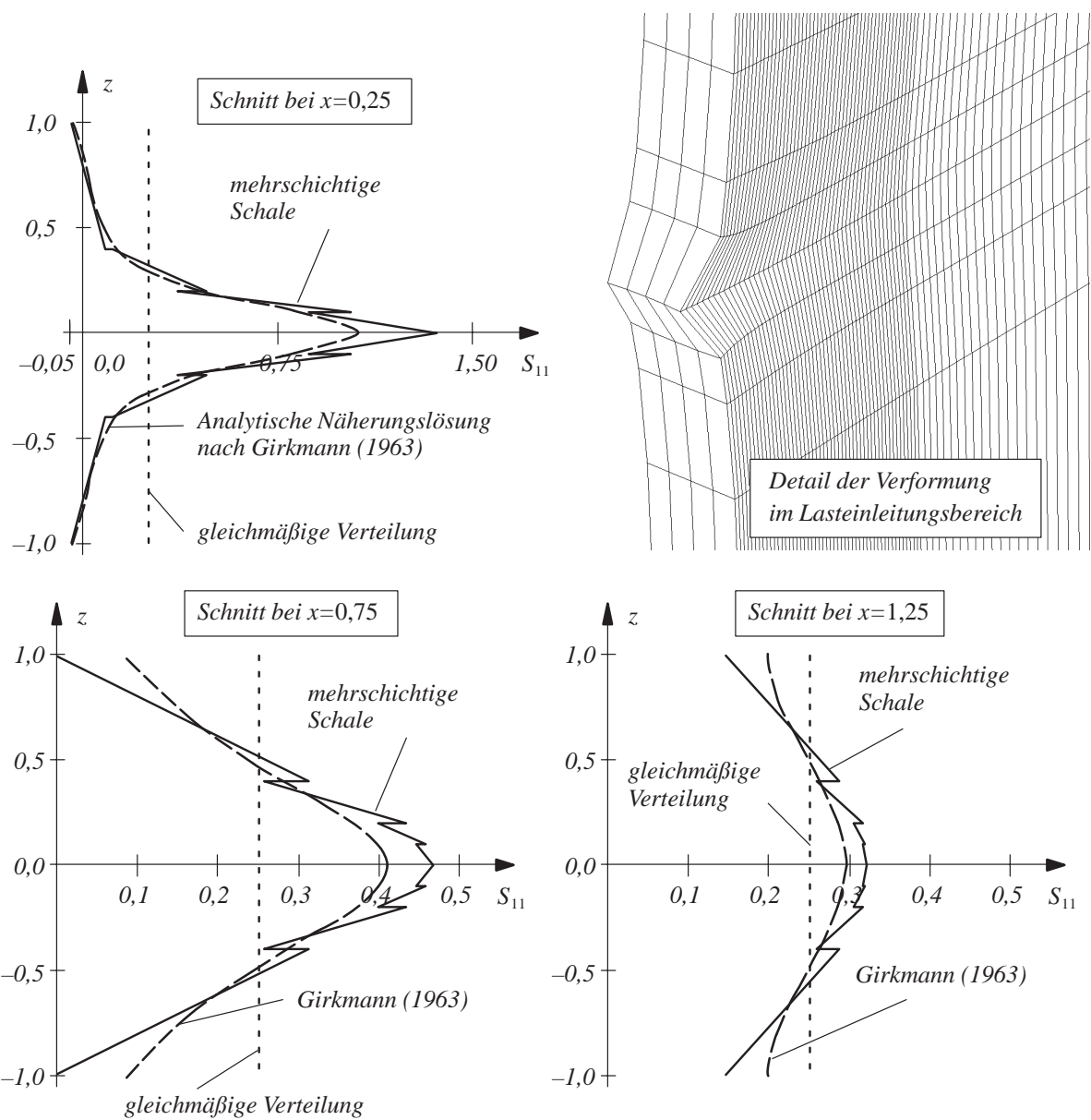


Abb. 8.2: Normalspannungsverteilung  $S_{11}$  über die Balkenhöhe

In Abb. 8.2 sind die Normalspannungsverläufe in  $x$ -Richtung und in der Scheibenmittelfläche ( $y = 0,05$ ) für einige Schnitte mit  $x = \text{const.}$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Verläufe sowohl qualitativ als auch quantitativ gut mit denen der analytischen Näherungslösung übereinstimmen. Die Sprünge, die in den Normalspannungsverläufen an den Übergängen der Berechnungsschichten zu sehen sind, entstehen dabei aus der linearen Extrapolation der Werte an den Gauß-Punkten (zwei pro Schicht) über die jeweilige Schichthöhe (linearer Verschiebungsansatz über die Schichthöhe). Außerdem ist in Abb. 8.2 noch die konstante Normalspannungsverteilung dargestellt, die sich aus der Berechnung mit nur einer Berechnungsschicht über die Balkenhöhe ergibt.

Deutlich kann in Abb. 8.2 auch das Abklingen der Randstörung bzw. der Singularität bei größerer Entfernung vom Rand beobachtet werden (Prinzip von de Saint-Venant). Eine annähernd konstante Normalspannungsverteilung, auf dessen Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird, liegt bei  $x = 1,75 b$  vor. Ebenso ist in Abb. 8.2 die Deformation des Balkens im Bereich der Lasteinleitung dargestellt. Die Deformation der mehrschichtigen Schale ist dabei als Schalenkörper visualisiert, wobei je Berechnungsschicht ein achtknotiges Schalenelement über vier achtknotige Volumenelemente abgebildet wird.

## 8.2 Zugprobe mit unsymmetrischem Schichtaufbau

Eine zweilagige Flachzugprobe mit unsymmetrischem Schichtaufbau nach Abb. 8.3 soll unter einaxialen Zugbedingungen untersucht werden. Die Zugprobe besteht aus zwei unidirektionalen Einzelschichten, die sich nur hinsichtlich ihrer Faserorientierung unterscheiden. Die verwendeten Materialkennwerte und Systemdaten sind in Abb. 8.4 angegeben. Als Vergleich dienen Ergebnisse von Dorninger (1989) bzw. Dorninger und Rammerstorfer (1990), die die Zugprobe sowohl geometrisch linear als auch geometrisch nichtlinear untersucht haben, siehe auch Klarman (1991). Anhand dieses Beispiels sollen speziell die Auswirkungen des unsymmetrischen Schichtaufbaus auf das Deformationsverhalten, das durch eine Kopplung von Membran- mit Biege- bzw. Torsionszuständen gekennzeichnet ist, verdeutlicht werden.

Die Berechnung wird materiall linear aber geometrisch nichtlinear mit achtknotigen Schalenelementen durchgeführt, die zwei Berechnungsschichten über die Dicke aufweisen. Die Anzahl der Berechnungsschichten entspricht hier somit der physikalischen Schichtanzahl und führt auf

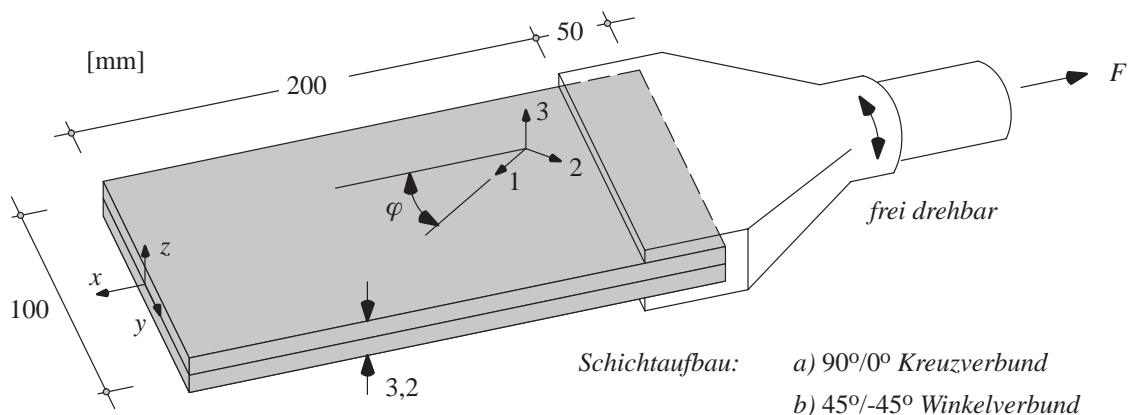


Abb. 8.3: Halbe Zugprobe mit Einspannvorrichtung

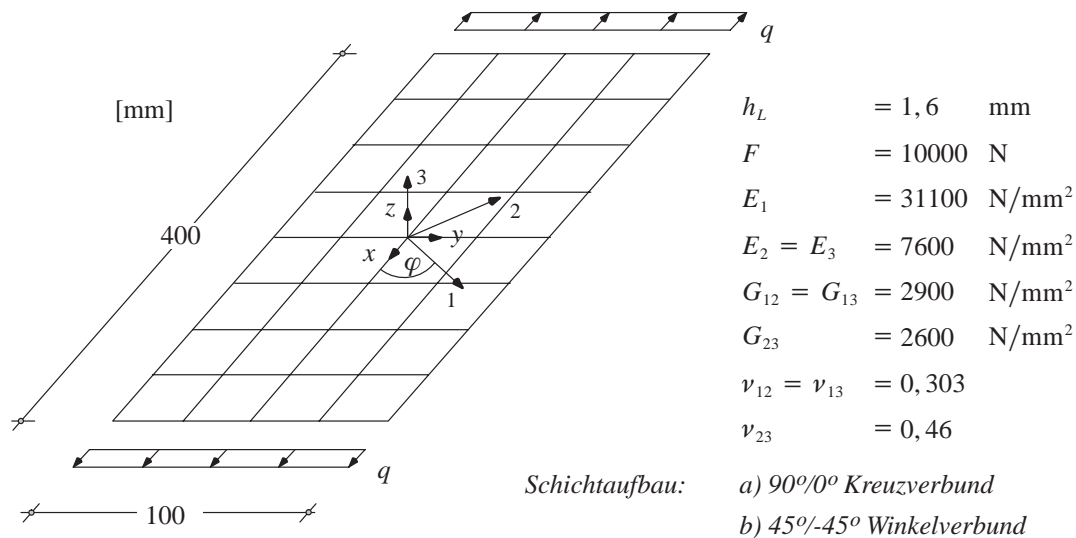


Abb. 8.4: Geometrie, System- und Materialdaten

neun Freiheitsgrade pro FE-Knoten. Darüber hinaus wird stets das gesamte System mit sechs Schalenelementen in Querrichtung und 12 Schalenelementen in Längsrichtung diskretisiert. Die Einleitung der Einzellast über die Einspannbacken wird als konstante Gleichstreckenlast bei gleichzeitiger Kopplung aller Freiheitsgrade in  $x$ -Richtung modelliert (konstante Verschiebung in  $x$ -Richtung). Zusätzlich sind beim Kreuzverbund (90°/0°) alle Freiheitsgrade außer den Verschiebungen in  $x$ -Richtung an beiden Seiten der Krafteinleitung behindert. Beim Winkelverbund (45°/-45°) wird entlang der  $y$ -Achse im Koordinatenursprung die Schalenmittelfläche in  $z$ -Richtung und die Differenzvektorkomponente in  $x$ -Richtung gehalten. Die Diskretisierung und die Lagerungsbedingungen entsprechen somit denen von Sprenger (2000), der achtknotige Volumenelemente verwendet.

In Abb. 8.5 sind die typischen Kopplungseffekte der unterschiedlichen Deformationsmoden zu sehen, die bei einem unsymmetrischen Schichtaufbau entstehen. Sowohl beim Kreuzverbund als auch beim Winkelverbund treten trotz reiner Membranbeanspruchung Deformationen in  $z$ -Richtung, also aus der Plattenebene heraus, auf. Beim Kreuzverbund ist der Membranzustand mit ei-

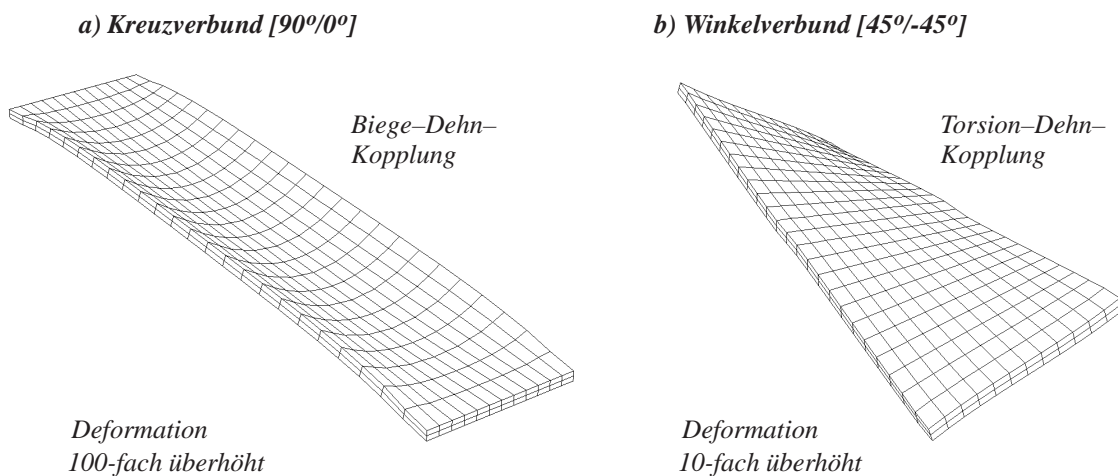


Abb. 8.5: Deformierte Struktur

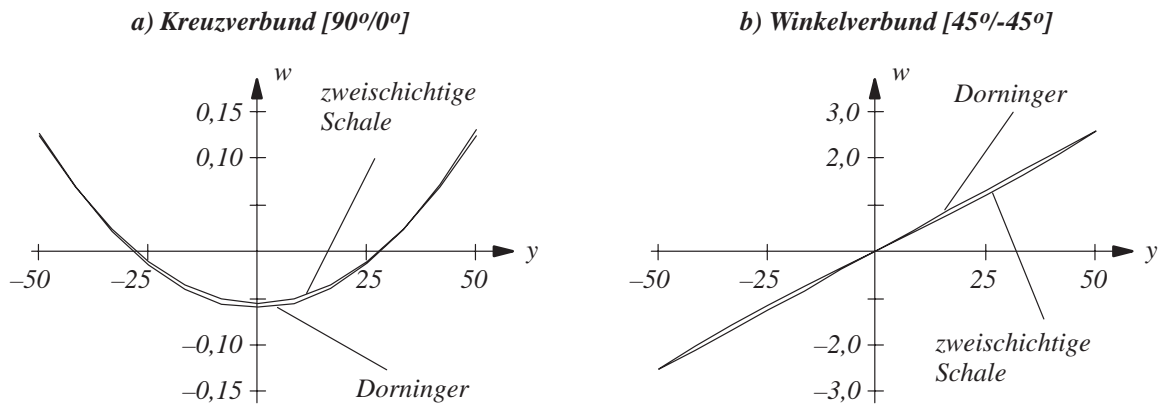


Abb. 8.6: Vergleich der Verformungsverläufe

ner Biegeverformung gekoppelt, während er beim Winkelverbund mit einer Torsionsverformung gekoppelt ist.

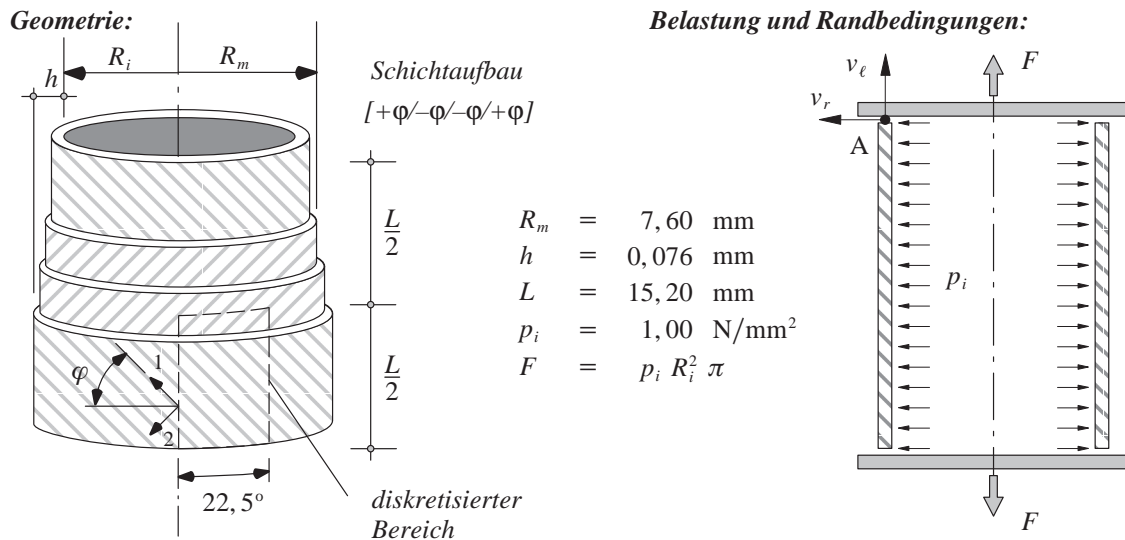
Die Deformation der mehrschichtigen Schale ist im Vergleich zu den Ergebnissen von Dorninger (1989) in Abb. 8.6 dargestellt. Es ist dabei die Durchsenkung  $w$  entlang der  $y$ -Achse für unterschiedliche Schnitte aufgetragen. Beim Kreuzverbund liegt der Schnitt im Koordinatenursprung bei  $x = 0$ , wogegen beim Winkelverbund ein Schnitt am Probenende bei  $x = 200$  geführt wird. In beiden Fällen ist eine sehr gute Übereinstimmung der Deformationsverläufe zu erkennen. Im Vergleich zu den Berechnungen von Sprenger (2000) mit Volumenelementen (nicht dargestellt) sind die hier vorgestellten Ergebnisse ebenfalls in guter Übereinstimmung und zeigen somit die Leistungsfähigkeit der mehrschichtigen Schalenformulierung.

### 8.3 Faserverbundrohr unter Innendruck

Das nachfolgende Beispiel eines Faserverbundrohres unter Innendruck ähnelt von der Grundidee her einem Beispiel von Holzapfel und Gasser (2001). Es soll an dieser Stelle verdeutlichen, dass das Antwortverhalten einer Struktur maßgeblich durch die Anisotropie des Faserverbundwerkstoffes bzw. der Faserorientierung beeinflusst wird. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, ein Strukturverhalten speziell nach eigenen Vorstellungen bzw. nach gewünschten Kriterien zu schaffen.

Das in Abb. 8.7 dargestellte Rohr ist bezüglich seiner Mittelfläche aus vier transversal-isotropen Einzelschichten symmetrisch aufgebaut. Zwischen den Schichten geht man von einem perfekten Verbund aus und jede Schicht soll die gleiche Dicke aufweisen. Die Faserorientierung der Schichten entspricht einem symmetrischen Winkelverbund, wobei der Faserwinkel variiert werden soll. Die Angabe des Faserwinkels bezieht sich dabei auf die Umfangsrichtung. Das Rohr ist durch den Innendruck  $p_i$  belastet, der infolge des Gleichgewichts und der Randbedingungen eine Zugbelastung  $F$  in Längsrichtung des Rohres hervorruft.

Da Geometrie und Randbedingungen axial-symmetrisch sind und darüber hinaus der Querschnitt bezüglich seines Schichtaufbaus ausgeglichen ist, genügt es, einen Ausschnitt des Rohres zu untersuchen bzw. zu diskretisieren, siehe Abb. 8.7. Hierzu wird eine Diskretisierung mit  $8 \times 8$  achtknotigen Schalenelemente verwendet, die vier Berechnungsschichten über die Dicke auf-



**Materialparameter:**

$E_1$	=	138000	N/mm <sup>2</sup>	$G_{23}$	=	3446	N/mm <sup>2</sup>
$E_2 = E_3$	=	8960	N/mm <sup>2</sup>	$\nu_{12} = \nu_{13}$	=	0,30	
$G_{12} = G_{13}$	=	7100	N/mm <sup>2</sup>	$\nu_{23}$	=	0,30	

Abb. 8.7: Rohr unter Innendruck: Geometrie, Belastung und Materialdaten

weisen. Auf den Symmetriekanten werden die typischen Symmetrierandbedingungen verwendet. Des Weiteren wird angenommen, dass während der Belastung der Rohrquerschnitt in Längsrichtung eben bleibt, die Freiheitsgrade am Rand des Rohres in Längsrichtung also gekoppelt sind. Zusätzlich soll die Aufweitung des Rohrquerschnittes unbehindert sein. Bei der geometrisch und materiell linearen Berechnung wird stets die Längsverschiebung  $v_\ell$  und die Radialverschiebung  $v_r$  eines Randpunktes A der Mittelfläche für variierende Faserwinkel  $\varphi$  aufgezeichnet.

In Abb. 8.8 sind die beiden Verschiebungsverläufe  $v_r$  und  $v_\ell$  über den veränderlichen Faserwinkel  $\varphi$  aufgetragen. Bei einem Faserwinkel von  $0^\circ$ , der gerade einer Orientierung der Fasern in Umfangsrichtung entspricht, ergeben sich kleine Radialverschiebungen  $v_r$  und somit eine geringe Aufweitung des Rohres. Mit größer werdendem Faserwinkel nehmen diese zu, wobei zunächst bei einem Faserwinkel von ca.  $20^\circ$  ein Minimum der Radialverschiebungen erreicht wird.

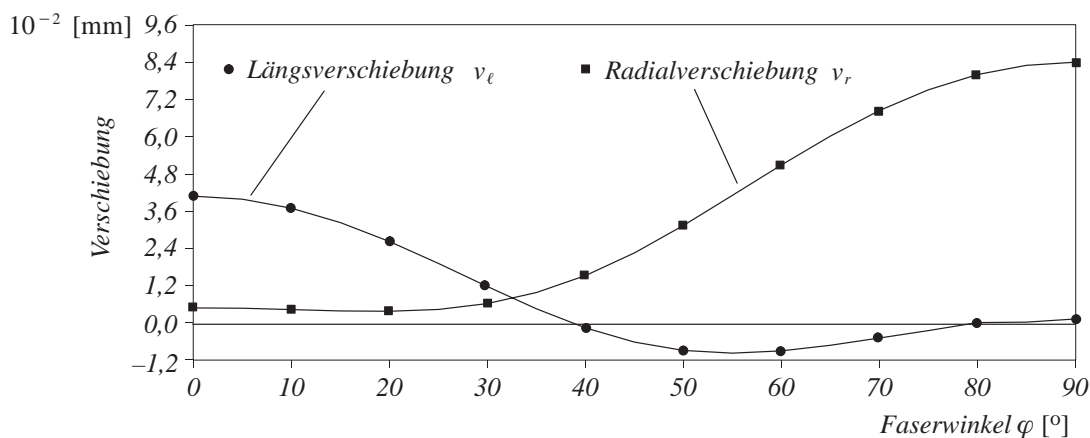


Abb. 8.8: Verschiebungen in Abhängigkeit des Faserwinkels

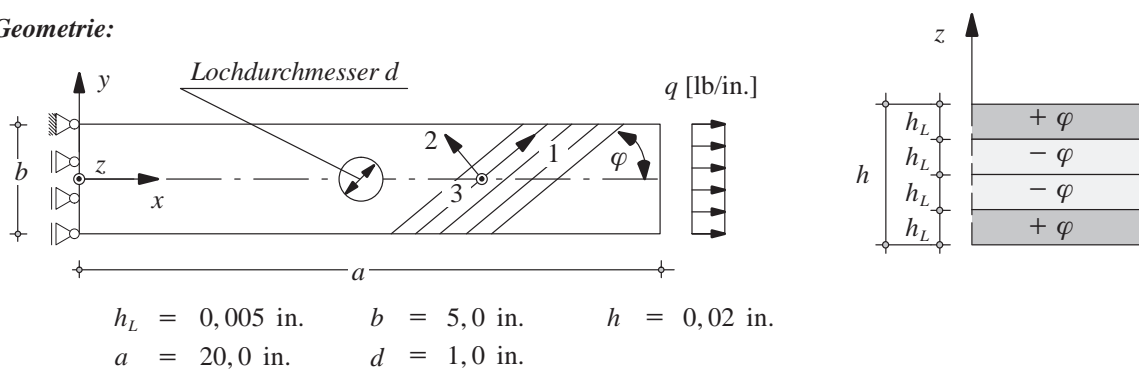
Bei den Längsverschiebungen  $v_\ell$  verhält es sich in etwa umgekehrt. Kleine Faserwinkel rufen eine große positive Längsverschiebung hervor, die mit zunehmendem Faserwinkel kleiner wird. Ab einem Winkel von ca.  $40^\circ$  entstehen sogar negative Längsverschiebungen; das Rohr verkürzt sich. Ursache hierfür ist die beginnende starke Zunahme der Radialverschiebungen bei gleichzeitig geringer Steifigkeit in Längsrichtung. Je mehr die Fasern allerdings in die Längsrichtung des Rohres gedreht werden ( $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ), desto weniger verkürzt sich das Rohr. Bei einem Faserwinkel von  $\varphi = 90^\circ$  ergibt sich wieder eine geringfügige Verlängerung des Rohrs. Das Deformationsverhalten wird daher maßgeblich durch die Faserorientierung bzw. durch die Ausrichtung der Anisotropie beeinflusst, vergleiche Herakovich (1998).

## 8.4 Versagenslasten einer anisotropen, gelochten Zugprobe

Am Beispiel einer anisotropen Zugprobe mit Loch, siehe Abb. 8.9, sollen die in Kapitel 6.2 vorgestellten Versagensindikatoren miteinander verglichen werden. Dieses Beispiel wurde bereits von Reddy und Pandey (1987), Hwang und Sun (1989) sowie von Schultz (1996) und Sprenger (2000) analysiert. Während die ersteren Autoren von einer Symmetrieeigenschaft der Struktur ausgehen, die allerdings in Wirklichkeit aufgrund der unterschiedlichen Faserorientierung nicht gegeben ist, erfolgten die Berechnungen von Schultz (1996) und Sprenger (2000) am Gesamtsystem. Systemabmessungen, Laminataufbau und Materialdaten des Graphit-Epoxid-Werkstoffes sind in Abb. 8.9 dargestellt.

Zur Berechnung der Anfangsschädigungslasten (FPF-Lasten) für einen variierenden Faserwinkel  $\varphi$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  wird das gesamte System modelliert bzw. diskretisiert. Hierzu werden achtknotige Schalenelemente mit vier Berechnungsschichten über die Dicke und zwei verschiedene Diskretisierungen mit 288 bzw. 388 Elementen (Abb. 8.10) verwendet. Sowohl die

### Geometrie:



### Materialparameter:

$E_1$	= $19,20 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\bar{S}_{11}^f$	= $219,50 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$E_2 = E_3$	= $1,56 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\bar{S}_{11}^c$	= $246,00 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$G_{12} = G_{13}$	= $0,82 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\bar{S}_{22}^f = \bar{S}_{33}^f$	= $6,35 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$G_{23}$	= $0,49 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\bar{S}_{22}^c = \bar{S}_{33}^c$	= $6,35 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$\nu_{12} = \nu_{13}$	= $0,24$	$\bar{S}_{12} = \bar{S}_{13}$	= $12,60 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$\nu_{23}$	= $0,49$	$\bar{S}_{23}$	= $9,80 \cdot 10^3 \text{ psi}$

Abb. 8.9: Lochscheibe unter Zugbelastung: Geometrie und Materialdaten

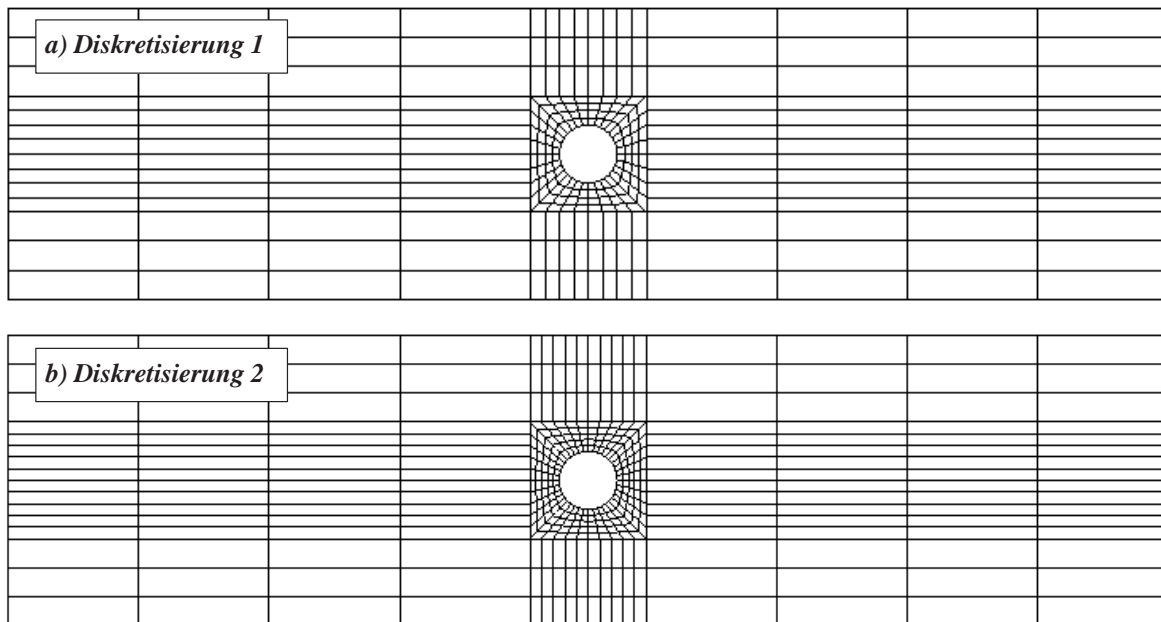


Abb. 8.10: Finite-Element-Diskretisierungen

Lagerung als auch die Lastaufbringung erfolgt in  $y$ -Richtung zwängungsfrei. Ferner sollen die Verschiebungen in  $x$ -Richtung am jeweiligen Ende über die Höhe des Querschnittes  $h$  gleich sein, d.h. die Differenzvektorkomponente  $w_x$  ist Null. Die Berechnung wird im Gegensatz zu Sprenger (2000) geometrisch linear durchgeführt, da die Berücksichtigung großer Verzerrungen ohne die gleichzeitige Einbeziehung einer Faserrotation nicht sinnvoll erscheint, siehe beispielsweise Sun und Zhu (1998) oder Herakovich et al. (2000). Unter Faserrotation versteht man bei großen Verzerrungen von bis zu 20% die Ausrichtung der Fasern in die Hauptzugrichtung und den damit verbundenen Anstieg der Steifigkeit.

Die Anfangsschädigungslasten werden jeweils mit dem Tsai-Wu-, dem Hashin- und dem Maximalspannungs-Kriterium berechnet. Es ist somit ein Vergleich zwischen Kriterien mit und ohne Berücksichtigung der Spannungsinteraktion möglich. Wegen den festgestellten Analogien und den geringen Unterschieden in den Ergebnissen von Tsai-Wu- und Hoffman-Kriterium, siehe Abb. 6.4, wird hier das Tsai-Wu-Kriterium verwendet.

In Abb. 8.11a) und b) sind die Anfangsschädigungslasten in Abhängigkeit des Faserwinkels  $\varphi$  aufgetragen. Zum Vergleich werden ebenfalls die Ergebnisse nach Sprenger (2000) dargestellt, die bei einer ähnlichen Diskretisierung mit Volumenelementen und unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität berechnet wurden. Die Ergebnisverläufe von Sprenger (2000) sind in beiden Abbildungen gleich dargestellt und können somit zum Vergleich der beiden Diskretisierungen herangezogen werden. Für Faserwinkel  $\varphi \leq 15^\circ$  und  $\varphi \geq 60^\circ$  liefern alle Versagensindikatoren ähnliche FPF-Lasten, während im Zwischenbereich ( $15^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$ ) das Maximalspannungskriterium deutlich größere Werte ermittelt. In diesem Bereich lässt sich nämlich die Versagensart nicht unbedingt eindeutig einem Faserzug- oder Matrixzugversagen zuweisen, so dass sich die fehlende Spannungsinteraktion beim Maximalspannungskriterium bemerkbar macht und das Tsai-Wu- bzw. das Hashin-Kriterium vorzuziehen ist. Bemerkenswert ist auch, dass die Kriterien nach Tsai-Wu und Hashin annähernd die gleichen Ergebnisse liefern.

Tendenziell sind die vorliegenden Verläufe im Vergleich zu denen von Sprenger (2000) gleichwertig, wobei die größeren Versagenslasten bei Sprenger (2000) wahrscheinlich aus einer Zug-

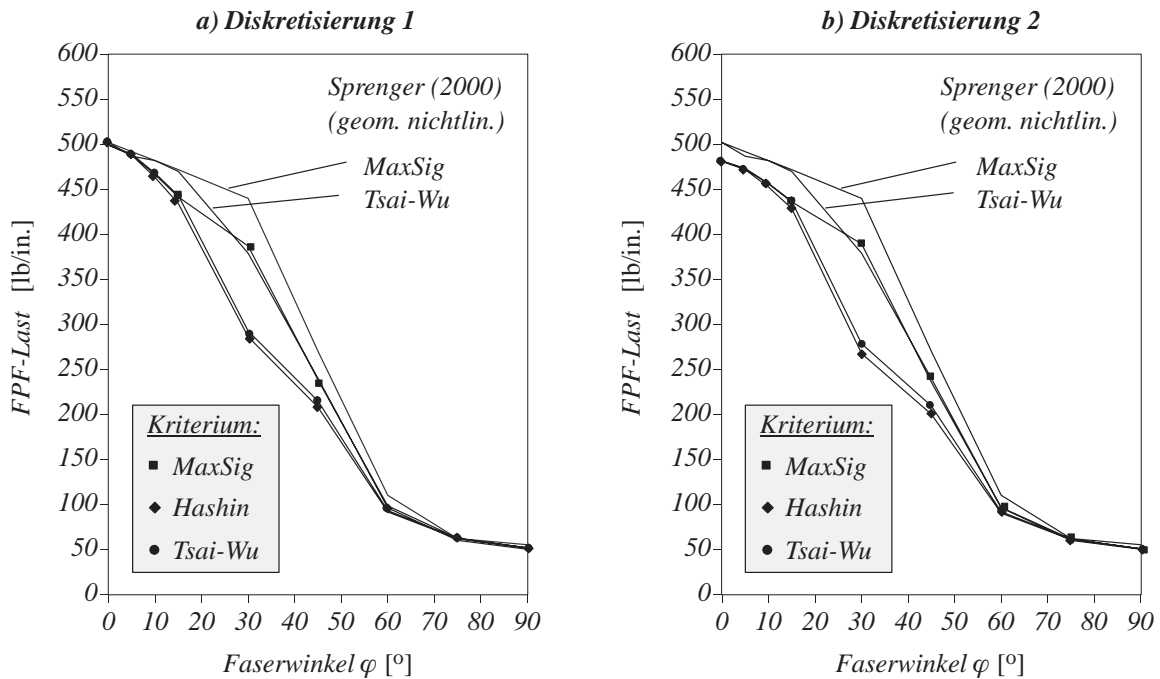


Abb. 8.11: Vergleich der Anfangsschädigungslasten

versteifung durch die geometrische Nichtlinearität entstehen. Ebenso ist festzustellen, dass ab einem Faserwinkel  $\varphi \geq 30^\circ$  die Diskretisierung keinen nennenswerten Einfluss auf die FPF-Last hat. Für Faserwinkel  $\varphi \leq 30^\circ$  liefert die feinere Diskretisierung geringere Versagenslasten, weil die Spannungen in der Nähe des Lochrandes besser erfasst werden. Für sämtliche Faserwinkel und für alle Versagenskriterien tritt die Erstschädigung stets in der unmittelbaren Umgebung des Loches auf.

Abb. 8.12 zeigt die deformierte Zugprobe für beide Diskretisierungen und einen Faserwinkel von  $\varphi = 45^\circ$ . Die Verschiebungen in  $z$ -Richtung (aus der Plattenebene heraus) sind dabei

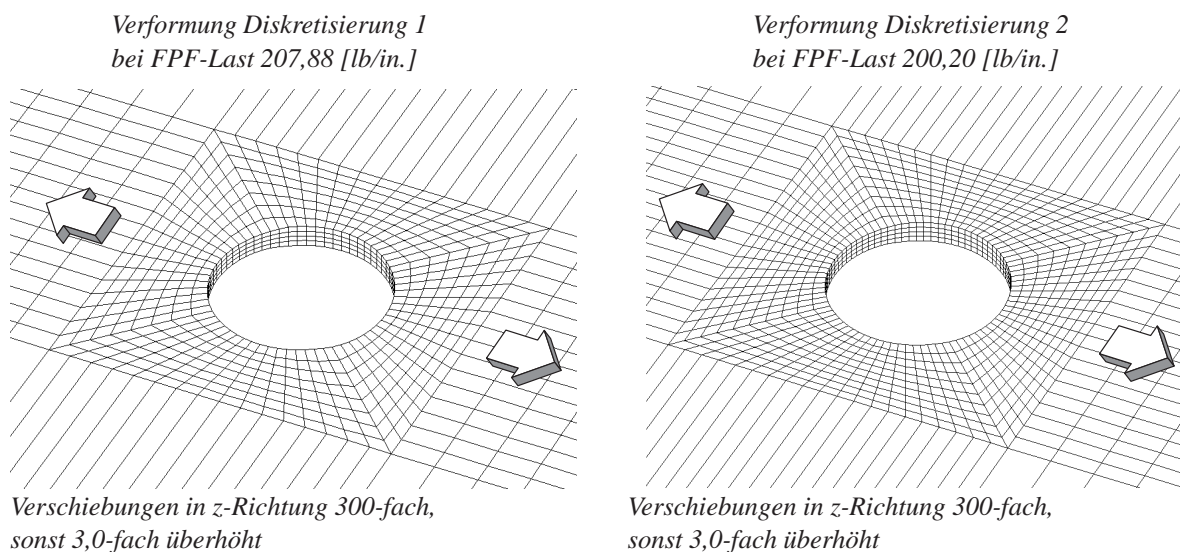


Abb. 8.12: Deformation des Lochbereiches



300-fach überhöht dargestellt, während die übrigen Verschiebungen lediglich 3,0-fach überhöht sind. Bei sehr genauer Betrachtung kann man eine Aufweitung der Scheibe in der Nähe des Lochbereichs feststellen, die auf vorhandene Dickennormalspannungen zurückzuführen ist. Diese entstehen aus den Kompatibilitätsanforderungen der unterschiedlich orientierten Einzelschichten in Kombination mit den am Lochrand herrschenden großen Normalspannungen in  $x$ -Richtung, siehe beispielsweise Abb. 2.5a).

## 8.5 Tonnenschale mit anisotroper Verfestigung

Mit dem folgenden Beispiel soll die in Kapitel 6.3 vorgestellte Hoffman-Plastizität mit anisotroper Verfestigung genauer untersucht und dabei insbesondere der Einfluss der anisotropen Verfestigung auf das Strukturverhalten aufgezeigt werden. Es wird hierzu auf ein Beispiel aus Hashagen (1998) zurückgegriffen, in dem die Scordelis-Lo-Schale mit verschiedenen Verfestigungsfällen untersucht wird. Die Geometrie sowie die Materialdaten sind in Abb. 8.13 angegeben und entsprechen denen von Hashagen (1998). Aufgrund der vorhandenen Symmetrie genügt es, ein Viertel des Systems zu modellieren. Die Diskretisierung erfolgt mit  $4 \times 4$  achtknotigen Schalenelementen, die acht Berechnungsschichten über die Dicke aufweisen. Die Schale ist durch ihr Eigengewicht  $q$  belastet und weist an den Endscheiben eine gelenkige Lagerung auf. Die Längsränder sind nicht gelagert und entsprechen einem freien Rand. Untersucht wird jeweils die Last-Verschiebungs-Antwort im Punkt A für verschiedene Verfestigungsfälle. Zunächst geht man von der Annahme geometrischer Linearität aus.

Im allgemeinsten Fall des anisotropen Plastizitätsmodells sind neun Verfestigungsgesetze zur Steuerung des Verfestigungsverhaltens nötig (vergleiche Gleichung (6.24)). Die vielfältigen Variationsmöglichkeiten, die sich hieraus ergeben, sollen im Weiteren etwas reduziert werden, indem nur die Zug- und Druckfließspannungen  $\bar{S}_{11}^t$ ,  $\bar{S}_{11}^c$ ,  $\bar{S}_{22}^t$  und  $\bar{S}_{22}^c$  mit einer Verfestigung versehen werden. Alle übrigen Komponenten sollen ein ideal-plastisches Materialverhalten aufweisen. Die Anfangsfließspannungen  $\bar{S}^0$  sowie die verschiedenen Fälle der Verfestigungsmoduli  $\mathbf{H}$  sind in Abb. 8.14 angegeben und entsprechen denen von Hashagen (1998).

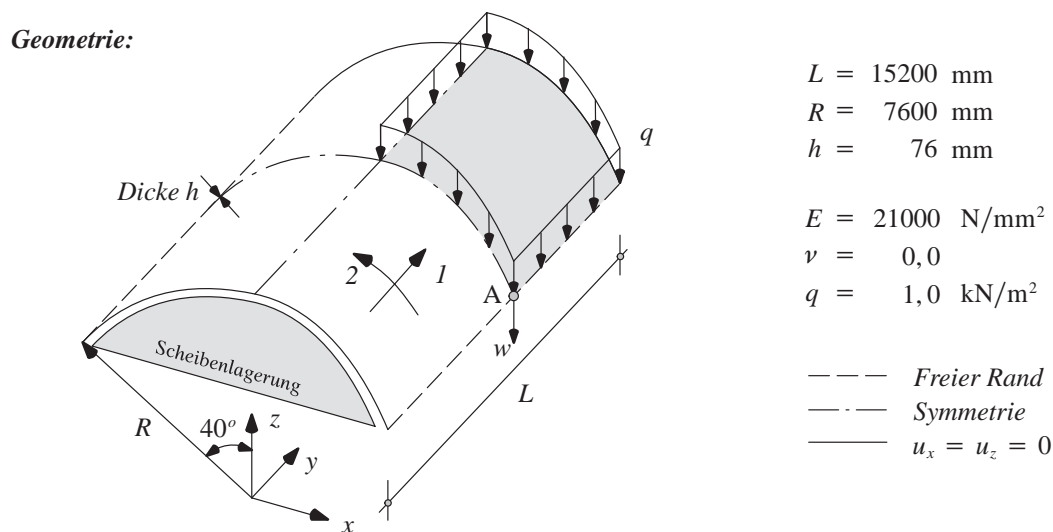


Abb. 8.13: Scordelis-Lo-Schale: Geometrie

**Anfangsfließspannungen:**

*t = Zug; c = Druck*

	$\bar{S}_1^0 = \bar{S}_{11}^t$	$\bar{S}_2^0 = \bar{S}_{11}^c$	$\bar{S}_3^0 = \bar{S}_{22}^t$	$\bar{S}_4^0 = \bar{S}_{22}^c$	$\bar{S}_5^0 = \bar{S}_{33}^t$	$\bar{S}_6^0 = \bar{S}_{33}^c$	$\bar{S}_7^0 = \bar{S}_{12}$	$\bar{S}_8^0 = \bar{S}_{23}$	$\bar{S}_9^0 = \bar{S}_{13}$
Fließbeginn	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2	2,4	2,4	2,4

**Verfestigungsmoduli siehe Gleichung (6.24):**

[N/mm<sup>2</sup>]

Fall	$H_{11}$	$H_{22}$	$H_{33}$	$H_{44}$	$H_{55}$	$H_{66}$	$H_{77}$	$H_{88}$	$H_{99}$
1	840	0	840	0	0	0	0	0	0
2	0	840	0	840	0	0	0	0	0
3	840	840	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	840	840	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0

[N/mm<sup>2</sup>]

Abb. 8.14: Scordelis-Lo-Schale: Materialdaten für anisotropes Plastizitätsmodell

In Abb. 8.15 sind die ermittelten Last-Verschiebungs-Kurven im Vergleich zu denen von Hashagen (1998) dargestellt. Dieser verwendet oberflächenorientierte Schalenelemente bei einer ähnlichen Diskretisierung. Die Übereinstimmung der jeweiligen Last-Verschiebungs-Kurven ist beachtlich und es können dieselben Schlussfolgerungen gezogen werden.

Die höchsten Lastwerte werden für Fall 1 erreicht, der eine Verfestigung der beiden Zugspannungen  $\bar{S}_{11}^t$  und  $\bar{S}_{22}^t$  vorsieht. Werden hingegen wie im Fall 2 nur die Druckspannungen  $\bar{S}_{11}^c$  und  $\bar{S}_{22}^c$  mit einer Verfestigung versehen, so wirkt sich dies kaum auf die Lastabtragung aus und das Strukturverhalten liegt nur unmerklich über dem Verlauf der idealen Plastizität (Fall 5). Fall 3, der sowohl für  $\bar{S}_{11}^t$  als auch für  $\bar{S}_{11}^c$  eine Verfestigung annimmt, liefert wesentlich größere Werte als Fall 4, bei dem die Zug- und Druckspannung in 2-Richtung verfestigt, da hauptsächlich die 1-Richtung die Lasten abträgt. Eine Verfestigung in dieser Richtung wirkt sich daher stärker auf

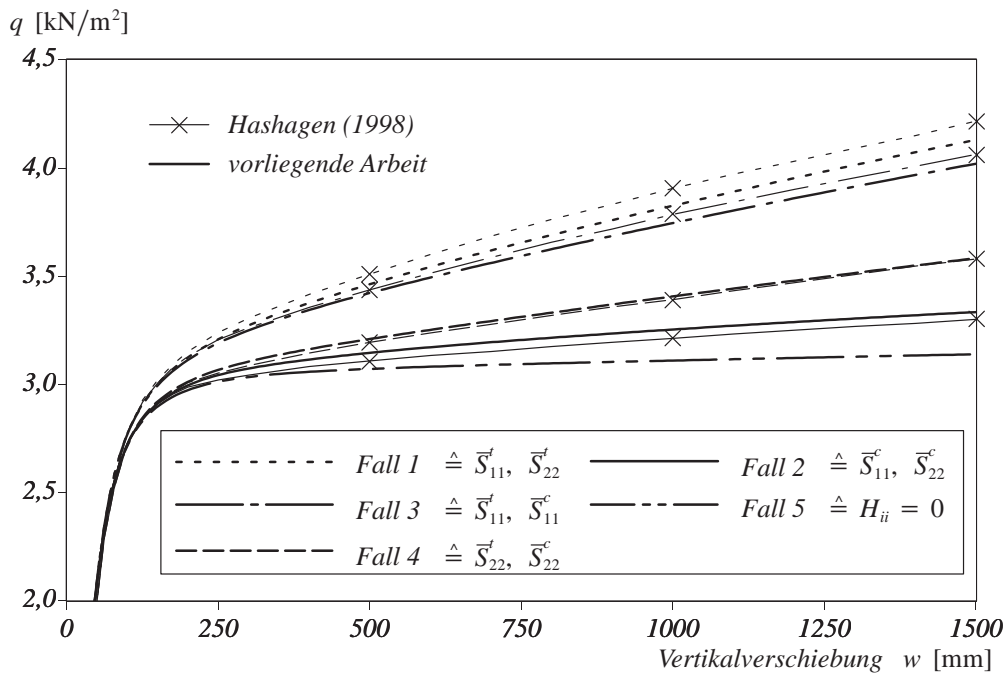


Abb. 8.15: Last-Verschiebungs-Kurven der Scordelis-Lo-Schale

die Strukturantwort aus. Im Vergleich zu Fall 1 liegt die Last-Verschiebungs-Kurve von Fall 3 etwas unterhalb.

Abschließend ist somit festzuhalten, dass die Verfestigung der Zugspannungen  $\bar{S}_{11}^t$  und  $\bar{S}_{22}^t$  einen wesentlich größeren Einfluss auf die Tragfähigkeit bzw. auf die Lastabtragung hat als die Verfestigung der Druckspannungen  $\bar{S}_{11}^c$  und  $\bar{S}_{22}^c$ . Außerdem wirkt sich eine Änderung der Materialeigenschaften in 1-Richtung stärker aus als quer dazu, weil hauptsächlich die 1-Richtung die Lasten abträgt.

In einem weiteren Schritt soll neben der materiellen auch die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt werden. Wie die Untersuchung der verschiedenen Verfestigungsfälle gezeigt hat, reagiert die Scordelis-Lo-Schale bezüglich einer Verfestigung der Zugspannungen sensibel. Es ist somit anzunehmen, dass die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität nicht nur einen großen Einfluss auf die Strukturantwort hat, sondern auch die maximal übertragbare Last vergrößert. Für das nichtlineare Material werden dieselben Parameter wie zuvor verwendet, wobei allerdings keine Verfestigung, sondern ideal-plastisches Materialverhalten angenommen werden soll. Zur besseren Erfassung des Versagensmodus findet eine feinere Diskretisierung mit  $8 \times 8$  und mit  $10 \times 10$  achtknotigen Schalenelementen Verwendung. Abb. 8.16 zeigt die ermittelten Last-Verschiebungs-Kurven im Vergleich zur geometrisch linearen Berechnung sowie zu einer Lösung von Roehl (1994) bzw. Roehl und Ramm (1996). Roehl (1994) verwendet eine Diskretisierung mit Volumenelementen in Verbindung mit einer ideal-plastischen  $J_2$ -Plastizität für große elasto-plastische Verzerrungen, basierend auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten. Im Vergleich zur geometrisch linearen Berechnung fällt auf, dass die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität deutlich größere Lasten liefert, die durch Zugversteifigungseffekte („Hängematteneffekt“) hervorgerufen werden. Im Vergleich zu den Ergebnissen von Roehl (1994) herrscht bis zu einer Vertikalverschiebung von etwa  $w = 750$  mm eine gute Übereinstimmung der Last-Verschiebungs-Kurven. Sobald jedoch die plastischen Verzerrungen im First- und im Auflagerbereich zu lokalisieren beginnen, weichen die Ergebnisse der beiden Modelle voneinander ab. In den lokalisierten Bereichen entstehen nämlich große plastische Ver-

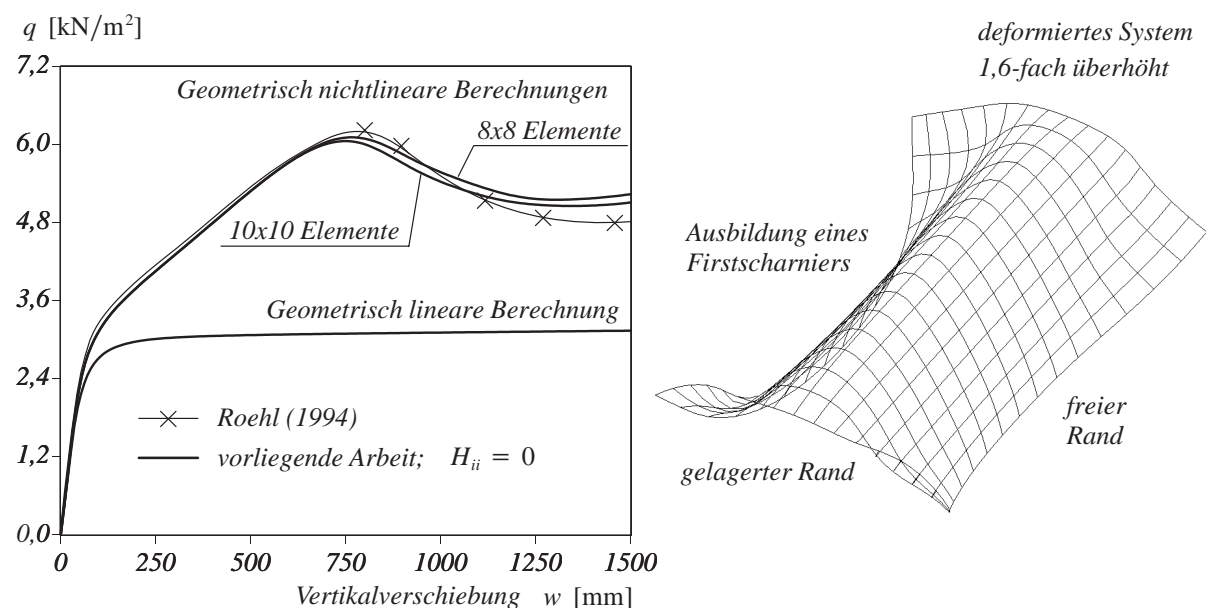
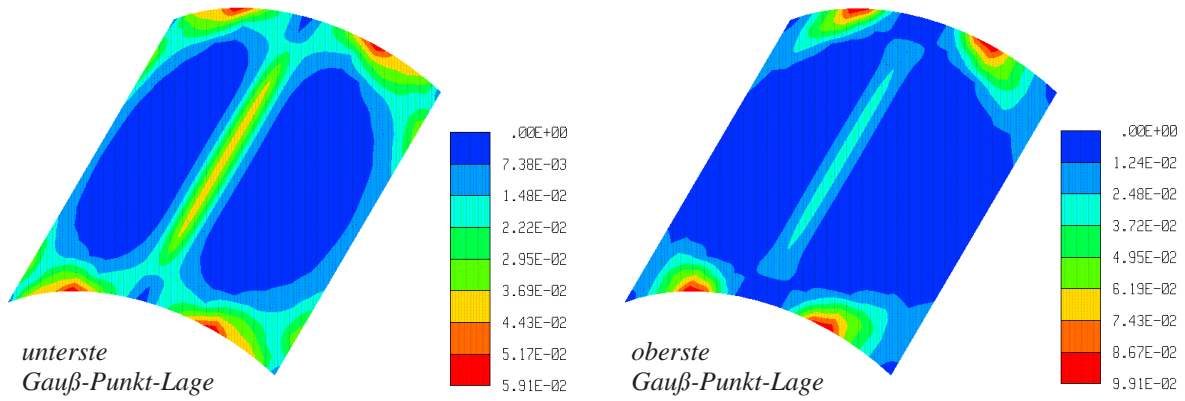


Abb. 8.16: Last-Verschiebungs-Kurven: Geometrisch linear, geometrisch nichtlinear

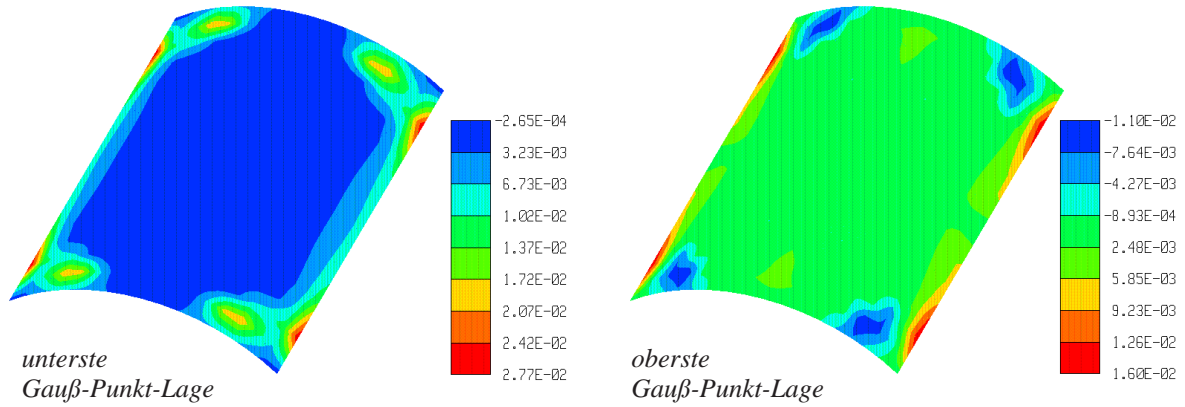
zerrungen (siehe Abb. 8.17), so dass der additive Verzerrungssplit des vorgestellten anisotropen Plastizitätsmodells, der auf der Annahme kleiner plastischer Verzerrungen beruht, nicht mehr zulässig ist. Dabei liefern die unterschiedlichen Diskretisierungen (8x8 und 10x10) annähernd die gleiche Last-Verschiebungs-Antwort. Als Versagensmodus bildet sich hier wie auch bei Roehl (1994) ein Firstscharnier aus, siehe Abb. 8.16 und 8.17.

Abb. 8.17 zeigt die Verteilung der äquivalenten plastischen Verzerrungen jeweils für die oberste und für die unterste Gauß-Punkt-Lage. Im obersten Bild ist die äquivalente plastische Verzerrung dargestellt, die man aus der Normbildung von  $\bar{\kappa}$  nach Gleichung (6.26) erhält. Während diese Größe keine Richtungsinformation beinhaltet, sind in den beiden anderen Abbildungen die Komponenten  $\bar{\kappa}_1$  und  $\bar{\kappa}_2$  aufgetragen, also die äquivalenten plastischen Verzerrungen in 1- und in 2-Richtung. Deutlich sind die Bereiche mit stark lokalisierten plastischen Verzerrungen zu erkennen. Die äquivalente plastische Verzerrung in 2-Richtung zeigt im unteren Bild deutlich das ausgebildete Firstscharnier.

Äquivalente plastische Verzerrung bei Vertikalverschiebung  $w=1500$  mm



Äquivalente plastische Verzerrung in 1-Richtung bei Vertikalverschiebung  $w=1500$  mm



Äquivalente plastische Verzerrung in 2-Richtung bei Vertikalverschiebung  $w=1500$  mm

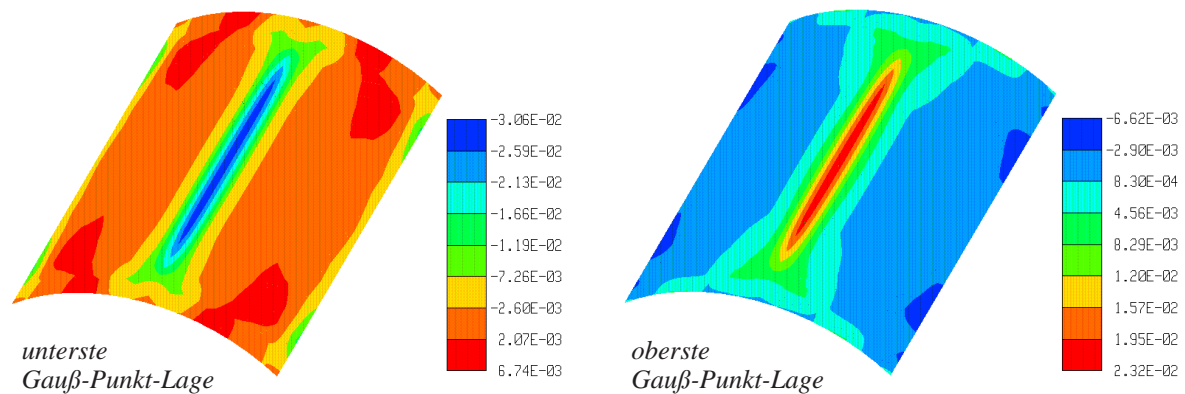


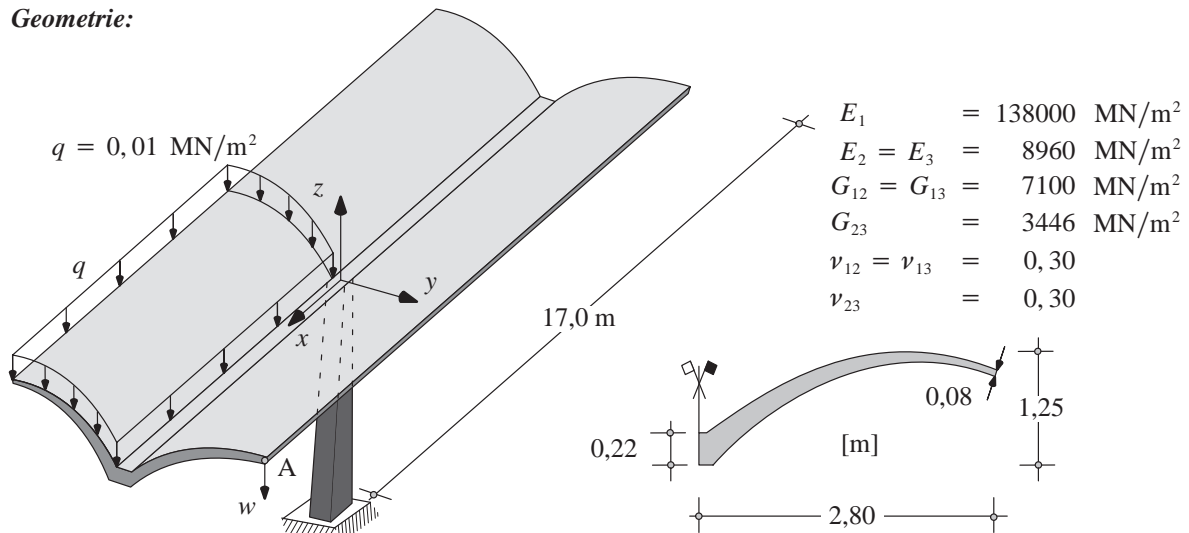
Abb. 8.17: Äquivalente Verzerrungsverteilung bei geometrischer und materieller Nichtlinearität

## 8.6 Die „Möwe“ mit anisotroper Verfestigung

Das nachfolgende Beispiel ist einem Bauwerk von Eladio Dieste nachempfunden, das auch unter dem Namen die „Möwe“ bekannt ist. Diese ehemalige Überdachung einer Tankstelle wurde im Jahre 1976 in Salto, Uruguay, gebaut und besteht aus Ziegelsteinen mit zusätzlicher Bewehrung. In dieser Arbeit soll jedoch nicht das nichtlineare Verhalten dieses Materials untersucht werden, sondern es werden die elastischen Materialparameter eines Graphit-Epoxid-Faserverbundwerkstoffes verwendet. Die Konstruktion von Dieste weist aufgrund der Lagerung keine typisch schalenartige Lastabtragung auf, sondern wird stark auf Biegung beansprucht. Die unteren Bereiche der „Flügel“ wurden daher bei dem Entwurf von Dieste dicker ausgeführt, während die folgende Parameterstudie zur anisotropen Verfestigung von einer einheitlich dicken Konstruktion mit  $h = 0,15$  m ausgeht. Eine detaillierte Geometriebeschreibung des Tragwerkes, insbesondere der „Flügel“, liegt nicht vor, sondern wird auf Basis der in Barthel (2001) angegebenen Konstruktionszeichnungen approximiert, siehe Abb. 8.18. Ferner wird angenommen, dass das System durch eine gleichförmige Flächenlast belastet wird.

Das Viertel-System wird mit achtknotigen Schalelementen diskretisiert, die über die Dicke vier Berechnungsschichten aufweisen. Für die in Abb. 8.19 angegebenen unterschiedlichen Ver-

**Geometrie:**



**Diskretisierung:**

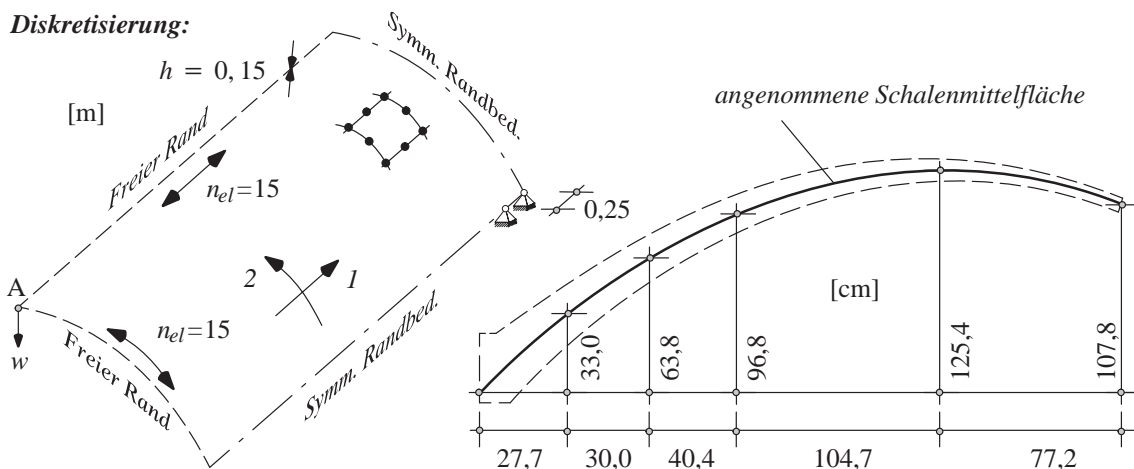


Abb. 8.18: Dieste-Schale: Geometrie, Diskretisierung und Materialdaten

**Anfangsfließspannungen:**

*t = Zug; c = Druck*

	$\bar{S}_1^0 = \bar{S}_{11}^t$	$\bar{S}_2^0 = \bar{S}_{11}^c$	$\bar{S}_3^0 = \bar{S}_{22}^t$	$\bar{S}_4^0 = \bar{S}_{22}^c$	$\bar{S}_5^0 = \bar{S}_{33}^t$	$\bar{S}_6^0 = \bar{S}_{33}^c$	$\bar{S}_7^0 = \bar{S}_{12}$	$\bar{S}_8^0 = \bar{S}_{23}$	$\bar{S}_9^0 = \bar{S}_{13}$
Fließbeginn	4, 2	4, 2	4, 2	4, 2	4, 2	4, 2	2, 4	2, 4	2, 4

[MN/m<sup>2</sup>]

**Verfestigungsmoduli siehe Gleichung (6.24):**

Fall	$H_{11}$	$H_{22}$	$H_{33}$	$H_{44}$	$H_{55}$	$H_{66}$	$H_{77}$	$H_{88}$	$H_{99}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	3780	3780	0	0	0	0	0
3	3780	0	3780	0	0	0	0	0	0
4	3780	3780	0	0	0	0	0	0	0
5	3780	3780	3780	3780	3780	3780	2160	2160	2160

[MN/m<sup>2</sup>]

Abb. 8.19: Dieste-Schale: Materialdaten für anisotropes Plastizitätsmodell

festigungsfälle wird jeweils die vertikale Verschiebung  $w$  im Punkt A aufgezeichnet. Die Anfangsfließspannungen  $\bar{S}_i^0$  sind mit denen des vorherigen Beispiels identisch, während die Verfestigungsmoduli  $H_{ij}$  frei gewählt wurden. Die verschiedenen Verfestigungskombinationen werden dabei so festgelegt, dass die Unterschiede der Last-Verschiebungs-Antworten möglichst groß werden. Es soll dadurch nochmals der signifikante Einfluss und die vielfältigen Variationsmöglichkeiten der anisotropen Verfestigung aufgezeigt werden. Der Auswirkung der geometrischen Nichtlinearität ist bei dieser hauptsächlich auf Biegung beanspruchten Struktur hingegen gering, wie die geometrisch nichtlineare Vergleichsrechnung für die ideale Plastizität zeigt (Abb. 8.20). Es wird daher von der geometrischen Linearität ausgegangen.

In Abb. 8.20 sind die berechneten Last-Verschiebungs-Kurven für die unterschiedlichen Verfestigungsfälle angegeben. Sämtliche Kurven befinden sich zwischen dem unteren Grenzfall der idealen Plastizität und dem oberen Grenzfall der Verfestigung aller Komponenten. Die Verfestigung aller Komponenten ist jedoch nicht gleichbedeutend mit einer isotropen Verfestigung. Die äußere Last ist bei einer Vertikalverschiebung von  $w = 12$  cm im oberen Grenzfall um ca. 70%

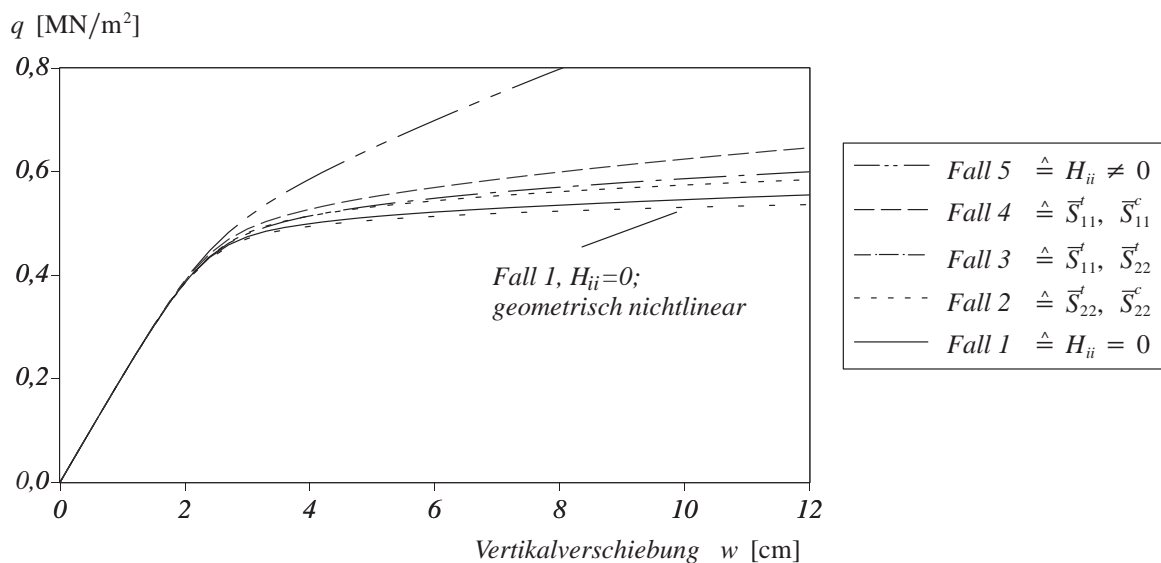


Abb. 8.20: Dieste-Schale: Last-Verschiebungs-Kurven

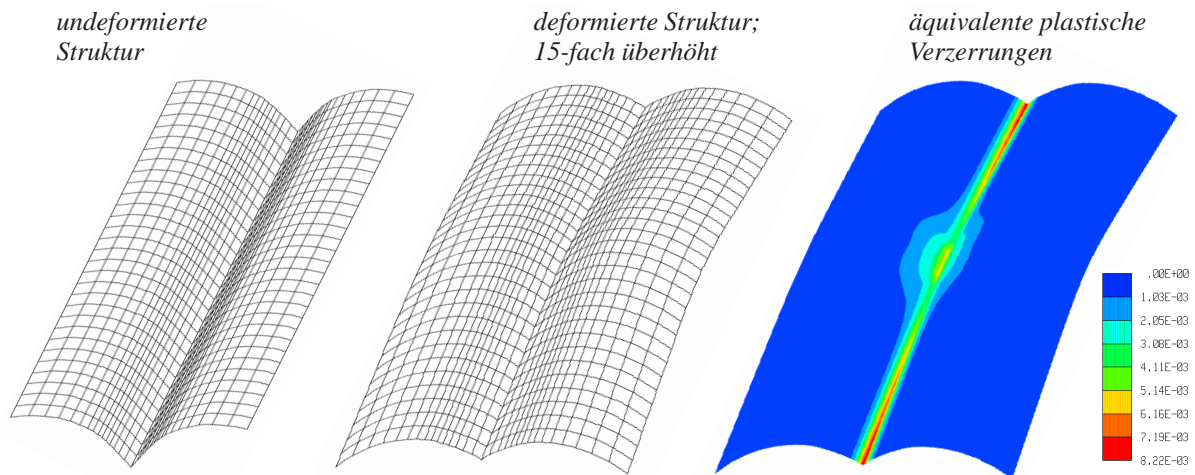


Abb. 8.21: Dieste-Schale: Deformation und äquivalente plastische Verzerrungen

höher als im Fall der idealen Plastizität. Die Verfestigungskombination 4, bei dem sowohl die Zug- als auch die Druckspannung in 1-Richtung  $\bar{S}_{11}^t$  und  $\bar{S}_{11}^c$  verfestigen, liefert bei den gewählten Verfestigungsfällen die höchsten Lasten. Im Gegensatz dazu hat die Verfestigung der Zug- und Druckspannung in 2-Richtung (Fall 2) fast keinen Einfluss auf das Strukturverhalten und liefert ungefähr das gleiche Ergebnis wie die ideale Plastizität. Die Verfestigung in 1- bzw.  $x$ -Richtung ist folglich maßgebend für die Strukturantwort. Dies entspricht auch der von Dieste gewählten Vorspannrichtung für die Flügel. Abb. 8.21 zeigt für den Verfestigungsfall 4 die 15-fach überhöhte Deformation und die Verteilung der äquivalenten plastischen Verzerrungen in der untersten Gauß-Punkt-Lage. Deutlich sind die großen äquivalenten plastischen Verzerrungen der Schale im Bereich der nicht membrangerechten Lagerung und im Bereich der vorderen Verschneidungsstelle der „Flügel“ zu erkennen. Diese Stellen, die für das Versagen maßgebend sind, berücksichtigte Dieste durch ein Einlegen von zusätzlicher Bewehrung. Anhand der deformierten Struktur ist gut zu erkennen, dass die Schale sprichwörtlich die „Flügel“ hängen lässt.

## 8.7 Faserverbundrohr mit anisotroper Verfestigung

In diesem Beispiel wird nochmals das Faserverbundrohr unter Innendruck aus Kapitel 8.3 aufgegriffen. Dies soll zum einen aufzeigen, dass der Faserwinkel nicht nur entscheidend das lineare, sondern auch das nichtlineare Materialverhalten beeinflusst. Zum anderen schließt es die Untersuchungen zur anisotropen Verfestigung ab. Die Geometrie, die Randbedingungen und die elastischen Materialparameter entsprechen denen aus Abb. 8.7. Die zur Steuerung des anisotropen Plastizitätsmodells notwendigen Materialparameter sind in Abb. 8.22 angegeben. Es wird nur eine Verfestigungskombination untersucht, bei der lediglich die Zugspannungen in der Faserlängsrichtung und quer dazu ( $\bar{S}_{11}^t$  und  $\bar{S}_{22}^t$ ) eine Verfestigung aufweisen sollen. Wie schon in Kapitel 8.3 werden die Radial- und die Längsverschiebung des Randpunktes A bei Steigerung des Innendrucks  $\lambda p_i$  beobachtet.

In Abb. 8.23 sind die Last-Verschiebungs-Antworten für drei ausgewählte Faserwinkel  $\varphi = 0^\circ/55^\circ/90^\circ$  dargestellt. Die  $0^\circ$ -Faserorientierung entspricht dabei der Umfangsrichtung, während die  $90^\circ$ -Orientierung die Ausrichtung der Fasern in Rohrlängsrichtung bedeutet. Die Kreis-Symbole bezeichnen die Längsverschiebungen, während die Radialverschiebungen durch



**Anfangsfließspannungen:**

*t = Zug; c = Druck*

	$\bar{S}_1^0 = \bar{S}_{11}^t$	$\bar{S}_2^0 = \bar{S}_{11}^c$	$\bar{S}_3^0 = \bar{S}_{22}^t$	$\bar{S}_4^0 = \bar{S}_{22}^c$	$\bar{S}_5^0 = \bar{S}_{33}^t$	$\bar{S}_6^0 = \bar{S}_{33}^c$	$\bar{S}_7^0 = \bar{S}_{12}$	$\bar{S}_8^0 = \bar{S}_{23}$	$\bar{S}_9^0 = \bar{S}_{13}$
Fließbeginn	42	42	42	42	42	42	24	24	24

**Verfestigungsmoduli siehe Gleichung (6.24):**

[N/mm<sup>2</sup>]

	$H_{11}$	$H_{22}$	$H_{33}$	$H_{44}$	$H_{55}$	$H_{66}$	$H_{77}$	$H_{88}$	$H_{99}$
	8400	0	8400	0	0	0	0	0	0

[N/mm<sup>2</sup>]

Abb. 8.22: Rohr unter Innendruck: Materialparameter für anisotropes Plastizitätsmodell

Rechtecke gekennzeichnet sind. Deutlich ist zu erkennen, dass der Faserwinkel nicht nur das linear-elastische Verhalten, sondern auch entscheidend das nichtlineare Materialverhalten beeinflusst.

Bei einem Faserwinkel von  $\varphi = 0^\circ$  sind die elastischen Radialverschiebungen aufgrund der Faserorientierung in Umfangsrichtung zunächst kleiner als die Längsverschiebungen. Sie nehmen jedoch bei weiterer Laststeigerung stärker als die Längsverschiebungen zu und sind bei einem Lastfaktor von  $\lambda = 1$  ähnlich groß. Der Grund für das größere Anwachsen der Radialverschiebungen ist, dass die Umfangsrichtung trotz gleicher Anfangsfließspannungen zuerst zu Fließen beginnt. Die Spannungen in Umfangsrichtung sind nämlich aufgrund der gewählten Belastung stets doppelt so groß wie die Spannungen in Längsrichtung.

Umgekehrt verhält es sich bei einem Faserwinkel von  $\varphi = 90^\circ$ . Hier wird im nichtlinearen Bereich der Unterschied zwischen Radial- und Längsverschiebung immer größer. Allerdings ist die Radialverschiebung schon von Anfang an wesentlich größer, da diesmal die Fasern mit ihrer höheren Steifigkeit in der Rohrlängsrichtung liegen. Der Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich findet wie zu erwarten auf gleichem Lastniveau statt. Die Größe der elastischen Spannungen in Längs- und Umfangsrichtung wird nämlich nicht von der Faserorientierung beeinflusst und die Anfangsfließspannungen wurden gleich groß gewählt. Die Charakteristik bzw. der Verlauf im nichtlinearen Bereich muss im Vergleich zum Faserwinkel  $\varphi = 0^\circ$  ebenfalls

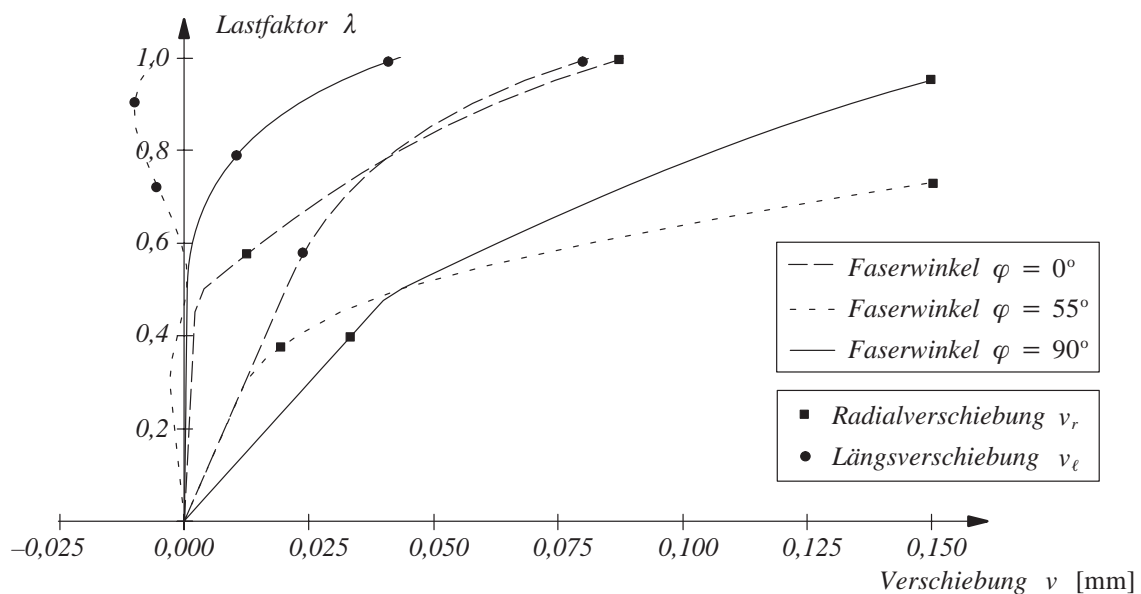


Abb. 8.23: Rohr unter Innendruck: Last-Verschiebungs-Kurven

gleich sein, da die Verfestigungsgesetze in beide Richtungen gleich sind. Der Hauptunterschied der Last-Verschiebungs-Kurven resultiert daher lediglich aus den Verschiebungen des linear-elastischen Bereichs.

Für den Faserwinkel  $\varphi = 55^\circ$  wird die Längsverschiebung minimal und sogar negativ, gleichzeitig erreicht die Radialverschiebung ihr Maximum. Das Rohr weitet sich somit stark auf und verkürzt sich dabei. Durch die Faserdrehung werden die Fließspannungen bei einem niedrigerem Lastniveau erreicht und der Übergang in den plastischen Bereich findet eher statt. Im elastischen Bereich baut sich zunächst eine negative Längsverschiebung auf, während die Radialverschiebung zunimmt. Beim Fließbeginn erreicht die Längsverschiebung einen Umkehrpunkt, d.h. sie nimmt wieder zu und erreicht in etwa den Wert Null. Im weiteren Verlauf wird sie allerdings wieder negativ und nimmt ein Minimum von  $v_\ell = -0,01$  mm bei  $\lambda = 0,9$  an. Das Strukturverhalten ist bei diesem Faserwinkel keineswegs trivial.

Die vorgestellten Beispiele zur Hoffman-Plastizität mit anisotroper Verfestigung (Kapitel 8.5 bis 8.7) haben den großen Einfluss der anisotropen Verfestigung auf das Strukturverhalten aufgezeigt. Darüber hinaus wurde verdeutlicht, dass das Plastizitätsmodell durch die Wahl der neun unabhängigen Verfestigungsgesetze so flexibel ist, dass eine Vielzahl von Verfestigungsszenarien beschreibbar ist. Es ist daher hervorragend zur Abbildung eines richtungsabhängigen, verfestigenden Materialverhaltens geeignet. Nachteilig sind die vielen Materialparameter (18 Werte), die zur Definition der Verfestigungsgesetze nötig sind.

## 8.8 Randdelamination

Im ersten Beispiel zur Versagensart der Delamination wird eine Rechteckscheibe unter gleichförmiger Dehnung untersucht. Der Laminataufbau besteht aus vier Schichten, die im Kreuzverbund  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  geschichtet sind, siehe Abb. 8.24. Infolgedessen entstehen in der Mittel­fläche am freien Rand Zugspannungen in Dickenrichtung, vgl. Abb. 2.5a), die eine Delamination im Versagensmodus I auslösen können. Dieser Umstand, der auch als *'Free-Edge-Effect'* und in Verbindung mit Delamination auch als *'Free-Edge'*-Delamination bezeichnet wird, wurde bereits von Pipes und Pagano (1970) und Pagano (1978) festgestellt und untersucht. Die elastischen Materialparameter entsprechen denen von Gruttmann (1996) und Teßmer (2000). Aufgrund der Symmetrie wird nur das Viertel-System untersucht.

Die Diskretisierung erfolgt mit achtknotigen Schalenelementen, die fünf Berechnungsschichten über die Dicke aufweisen. Während sich jeweils die beiden äußeren Schichten elastisch verhalten sollen, werden in der mittleren Schicht die in Kapitel 7.3 und 7.4 vorgestellten Delaminationsmodelle eingesetzt. Die Höhe der Prozessschicht wird mit 1% der Gesamthöhe angenom-

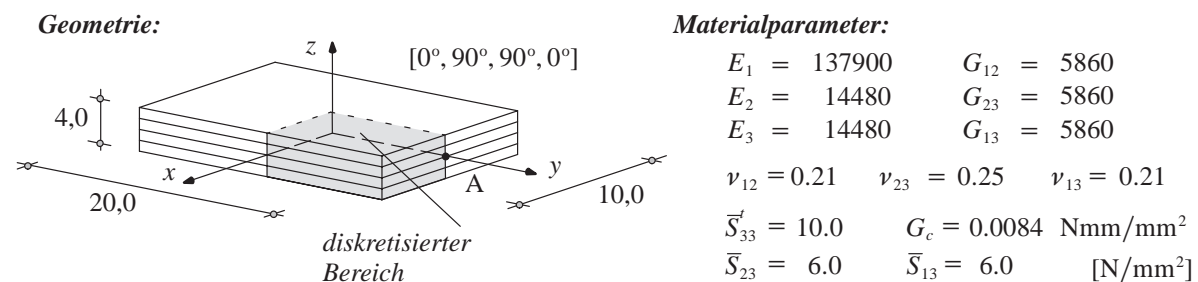


Abb. 8.24: Zugprobe mit Randdelamination: Geometrie und Materialparameter

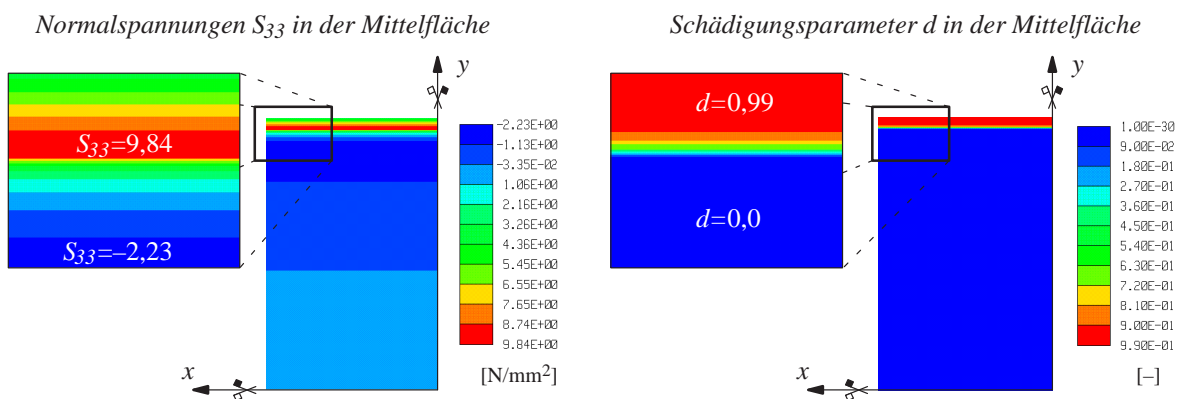
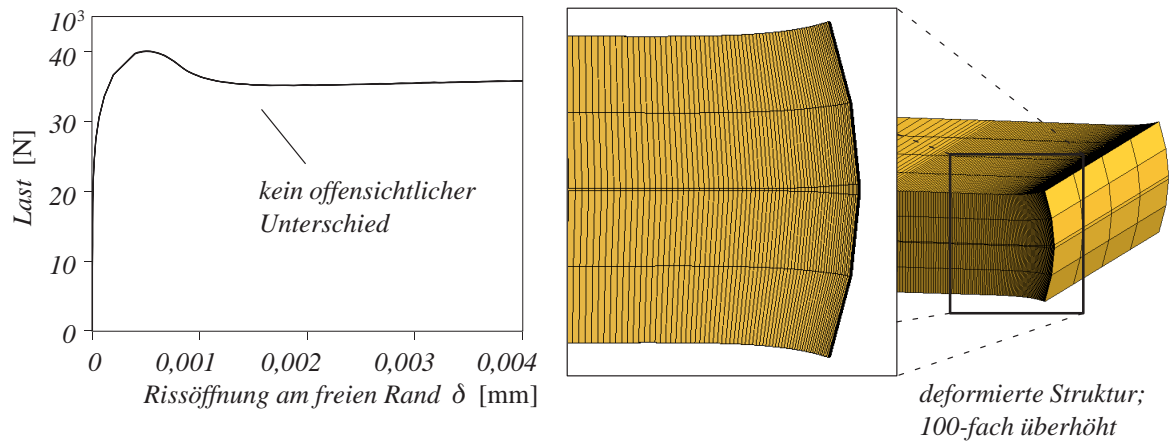


Abb. 8.25: Randdelamination: Last-Verschiebungs-Antworten

men. Die gleichförmige Dehnung in x-Richtung wird verschiebungsgesteuert aufgebracht und im Punkt A ( $x=0, y=10, z=0$ ) die Aufweitung der Prozessschicht in z-Richtung beobachtet. Die Aufweitung ist im Folgenden auch als Rissöffnung bezeichnet.

Abb. 8.25 zeigt die berechneten Last-Verschiebungs-Kurven für die verschiedenen Delaminationsmodelle. Alle Modelle, sowohl das entfestigende Plastizitätsmodell als auch die Schädigungsmodelle, liefern fast dieselbe Antwort, so dass sich die Kurven nur minimal unterscheiden. Dies war auch zu erwarten, da die verschiedenen Materialmodelle bereits beim einaxialen Zugversuch in Dickenrichtung (Modus I-Versagen) die selben Ergebnisse liefern und im Beispiel der Randdelamination der gleiche Versagensmodus angesprochen wird. Ebenfalls ist in Abb. 8.25 die 100-fach überhöhte deformierte Struktur dargestellt. Deutlich ist das zur Mittelfläche symmetrische Aufreißen und das Öffnen des Risses im Modus I zu erkennen. Dabei haben die Prozessschichtelementen direkt am freien Rand bereits eine fast vollständige Schädigung mit  $d = 0,99$  erreicht. Der Übergang zwischen geschädigtem und ungeschädigtem Bereich ist sehr schmal, was eine sehr feine Diskretisierung zum Rand hin erfordert. Außerdem ist in der Normalspannungsverteilung  $S_{33}$  zu erkennen, dass sich ein Bereich mit Druckspannungen vor der Delamination befindet. Mit fortschreitender Delamination verschiebt sich dieser in Richtung der Probenmitte.

## 8.9 Brettschichtholzbogen

Der in Abb. 8.26 dargestellte Brettschichtholzbogen soll hier auf Delaminationsversagen untersucht werden. Der Träger ist auf der Oberseite des Firstes durch eine linienförmige Last belastet und an den Fußpunkten eingespannt. Infolge des positiven Biegemoments und der Bogenkrümmung entstehen in der Nähe des Firstes Zugspannungen in Dickenrichtung, die eine Delamination hervorrufen können. Direkt unterhalb der Lasteinleitung wird allerdings erst spät eine Delamination entstehen, weil dieser Bereich durch die Last, angreifend auf der Oberseite, überdrückt wird.

Der Delaminationsvorgang kann hier als das Aufreißen der Klebefuge bzw. als das Reißen des Holzes unmittelbar oberhalb oder unterhalb der Klebefuge verstanden werden. Die Rissfläche sei über die Trägerbreite eben und wechsele nicht die Schicht. Dies stellt eine Näherung des wirklichen Verhaltens dar, wie Rissbilder von Holz infolge Querkzug verdeutlichen, siehe Abb. 8.26. Die Rissfläche soll in einer weiteren Näherung mit der Mittelfläche des Trägers übereinstimmen, so dass an dieser Stelle die Prozessschicht zur Beschreibung der Delamination eingeführt werden kann. Die Geometrie des Trägers wird analog zu Teßmer (2000) gewählt, während die verwendeten Materialdaten aus Neuhaus (1994) stammen. Aufgrund der vorliegenden Symmetrien genügt es, nur ein Viertel des Systems zu untersuchen.

Es werden achtknotige Schalenelemente zur Diskretisierung des Bogens verwendet, die fünf Berechnungsschichten über die Dicke aufweisen, siehe Abb. 8.27. Über die halbe Trägerbreite  $b/2$  werden zwei Elemente verwendet. Die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten beträgt somit 18; für das Gesamtsystem ergeben sich daraus 9846 Unbekannte. Die Last wird verschiebungssteuert im First aufgebracht und die Vertikalverschiebung des Punktes A in der Schalenmittelfläche aufgezeichnet. Die Berechnung erfolgt dabei geometrisch linear und der Bogen soll im First

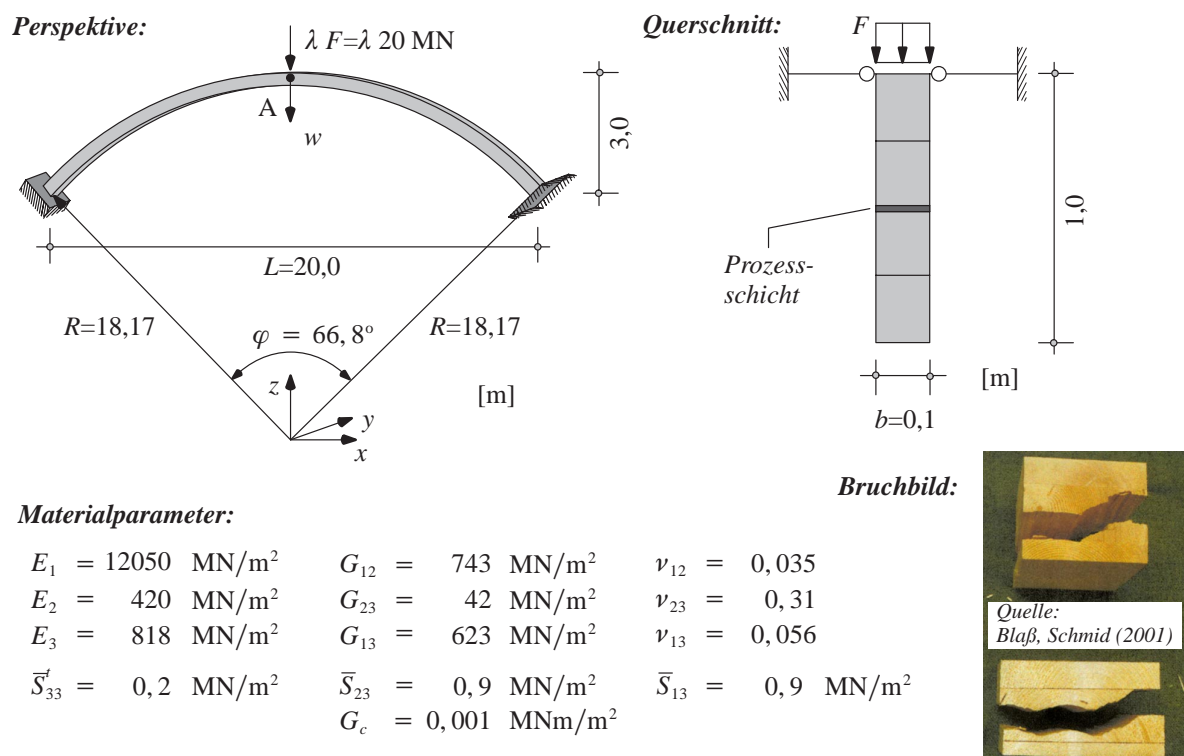


Abb. 8.26: Brettschichtholzbogen: Geometrie und Materialdaten

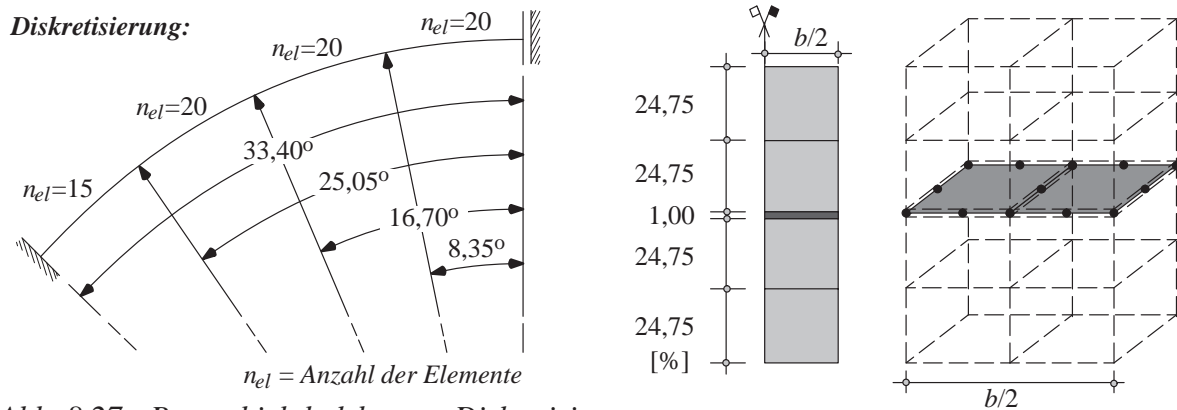


Abb. 8.27: Brettschichtholzbogen: Diskretisierung

gegen ein seitliches Verschieben gesichert sein. In der Prozessschicht werden die in Kapitel 7.3 und 7.4 vorgestellten Delaminationsschädigungsmodelle verwendet. Für das Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium (Kapitel 7.4) erfolgt die Berechnung mit verschiedenen Werten für die Bruchenergien  $G_{cII}$  und  $G_{cIII}$  und auch mit den automatisch bestimmten Werten nach Gleichung (7.107). Der Einfluss dieser Materialparameter wird in diesem Beispiel groß sein, da der maßgebliche Versagensmodus durch ein Schubversagen der Prozessschicht gegeben ist. Es werden keine viskosen Effekte berücksichtigt bzw. es wird keine visko-schädigende Erweiterung benutzt.

Abb. 8.28 zeigt die Last-Verschiebungs-Antworten der vorgestellten Delaminationsschädigungsmodelle. Die Kurve des isotropen Schädigungsmodells liegt etwas unterhalb der Ergebnisse der selektiven Schädigung, d.h. das isotrope Schädigungsmodell verhält sich durch die Schädigung aller Komponenten des Werkstoffensors weicher. Der Unterschied zur selektiven Schädigung ist aufgrund der dünnen Prozessschicht nur gering und macht sich erst bei größeren Vertikalverschiebungen bemerkbar. Die Ergebnisse des Schädigungsmodells mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium hängen, wie eingangs schon erwähnt, stark von der Wahl der Materialpa-

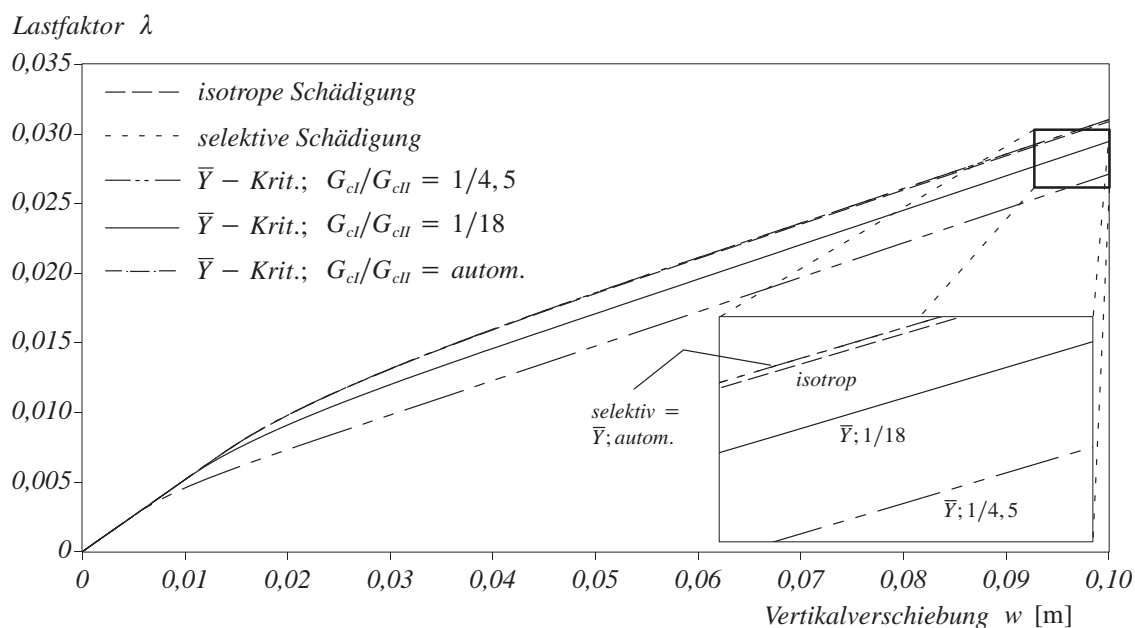


Abb. 8.28: Brettschichtholzbogen: Last-Verschiebungs-Kurven

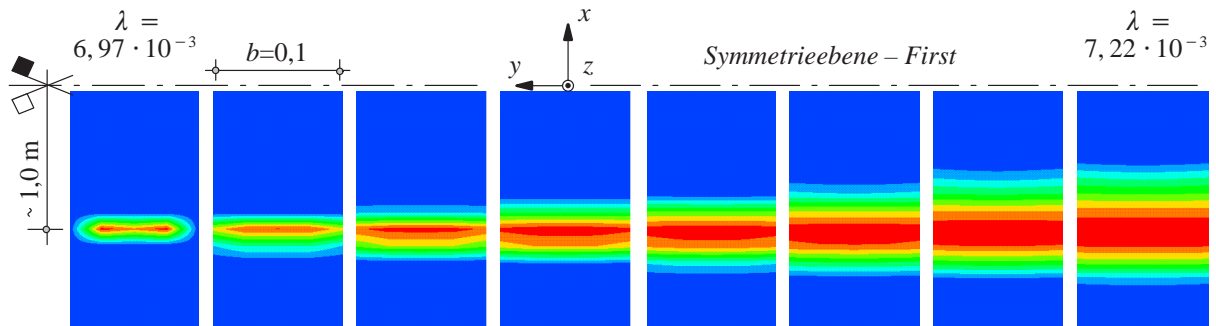


Abb. 8.29: Brett-schicht-holz-bogen: Schädigungsevolution im Firstbereich

parameter  $G_{cII}$  und  $G_{cIII}$  ab. Bei den angenommenen  $G_{cI}/G_{cII}$ -Verhältnissen 1/4, 5 und 1/18 beginnt, bei grundsätzlich gleicher Last-Verschiebungs-Charakteristik, das Versagen wesentlich früher. Werden  $G_{cII}$  und  $G_{cIII}$  hingegen nach Gleichung (7.107) bestimmt, liefert dieses Modell die gleichen Ergebnisse wie das selektive Schädigungsmodell.

Die Schädigungsevolution in der unmittelbaren Nähe des Firstes ist in Abb. 8.29 angegeben, wobei zur besseren Visualisierung die Trägerbreite 10-fach überhöht dargestellt ist. Demnach beginnt die Delamination an einer Stelle die ca. 1,0 m vom First entfernt liegt. Auch ist interessant, dass die Delamination in Balkenmitte (bezogen auf die Balkenbreite) anfängt und zuerst nach außen wandert. Erst anschließend breitet sich die Delaminationszone auch in Balkenlängsrichtung aus, wobei sie in Richtung des Firstes durch die oberseitige Lasteinleitung gebremst wird. Die Delaminationsfront ist dabei im Allgemeinen nicht gerade, sondern gekrümmt.

In einer weiteren Untersuchung wird der Brett-schicht-holz-bogen mit Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität berechnet. Bei der geometrisch nichtlinearen Rechnung ist ab einem bestimmten Punkt die gesamte Prozessschicht auch unterhalb der Lasteinleitung vollständig geschädigt: die Prozessschicht überträgt keine Spannungen mehr. Ohne die Verwendung „geeigneter Maßnahmen“ durchdringt beim isotropen Schädigungsmodell der obere Bogenteil dann den

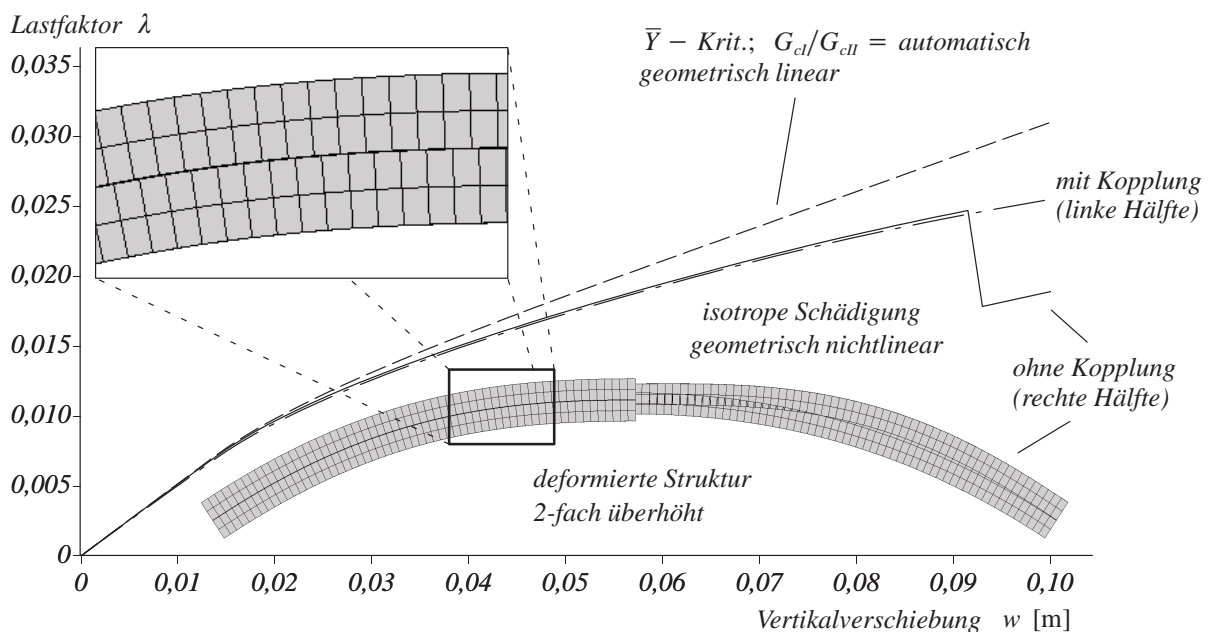


Abb. 8.30: Durchdringung bei geometrisch und materiell nichtlinearer Rechnung

unteren. Der untere Teil wird dabei vollständig entlastet und eine physikalisch unzulässige Versagensform entsteht, siehe rechte Bogenhälfte in Abb. 8.30. In der Last-Verschiebungs-Kurve macht sich dies durch einen abrupten Abfall der Last bemerkbar. Werden als einfache Abhilfe die Vertikalverschiebungen über die Bogenhöhe im First gekoppelt, kann die Durchdringung verhindert werden, siehe linke Bogenhälfte in Abb. 8.30. Bei Verwendung des selektiven Schädigungsmodells sowie beim Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium zeigt sich dieses Verhalten nicht. In diesen Modellen wird nämlich durch die Gleichungen (7.68) bzw. (7.93) die Rissschließung berücksichtigt und somit eine Durchdringung verhindert (vergleiche Abb. 7.26). Auf die Darstellung der Last-Verschiebungs-Kurven dieser Modelle wird verzichtet, weil sie die gleichen Verläufe wie das isotrope Schädigungsmodell mit Kopplung der Vertikalverschiebungen liefern. Des Weiteren zeigt die Detailansicht der deformierten linken Bogenhälfte in Abb. 8.30 einen deutlichen Schubversatz infolge des Modus II-Versagens der Prozessschicht.

Es ist daher abschließend festzuhalten, dass die Berücksichtigung der Rissschließung bzw. des Kontakts von entscheidender Bedeutung sein kann, weil damit ein physikalisch unzulässiges Versagensverhalten verhindert wird. Während beim isotropen Schädigungsmodell hierzu „geeignete Maßnahmen“ einzuführen sind, beachten das selektive Schädigungsmodell und das Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium dies automatisch. Des Weiteren zeigt dieses Beispiel den großen Einfluss der Bruchenergien  $G_{cII}$  und  $G_{cIII}$  beim Schädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium.

## 8.10 ‘Double-Cantilever-Beam’-Probe

Am Beispiel einer ‘Double-Cantilever-Beam’-Probe, die von Aliyu und Daniel (1985) experimentell untersucht wurde, werden die verschiedenen Delaminationsmodelle nochmals getestet und miteinander verglichen. Des Weiteren erfolgt eine Gegenüberstellung mit numerischen Simulationsergebnissen aus der Literatur, die von Sprenger (2000) und Teßmer (2000) stammen.

In Abb. 8.31 sind der exemplarische Versuchsaufbau und die Systemabmessungen des untersuchten DCB-Tests dargestellt. Aliyu und Daniel haben an diesem Beispiel den Rissfortschritt bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten studiert. Sie ermittelten experimentell bei

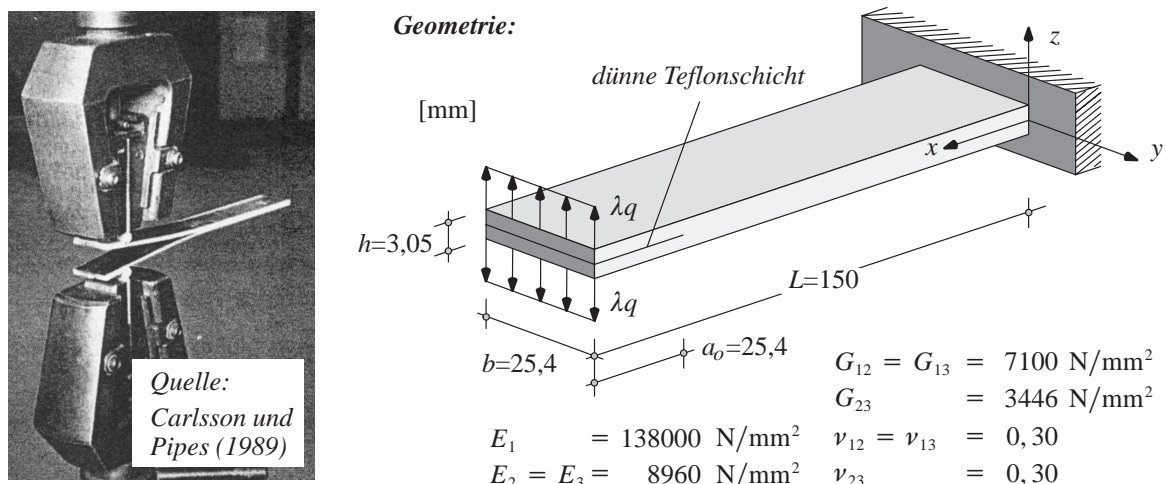


Abb. 8.31: DCB-Probe: exemplarischer Versuchsaufbau, Geometrie und Materialdaten

einer Rissöffnungsgeschwindigkeit  $\dot{u}_3 = 0,85 \text{ mm/s}$  eine kritische Energiefreisetzungsrate von  $G_c = 0,222 \text{ Nmm/mm}^2$ . Beide Größen kommen innerhalb der folgenden Berechnungen zum Einsatz. In den Versuchen von Aliyu und Daniel wurden Spannlaschen zur Lasteinleitung angebracht, die hier nicht separat modelliert werden. Es erfolgt lediglich eine Verlängerung des gerissenen Bereichs um  $6,35 \text{ mm}$  über die Balkenlänge hinaus, was gerade der Außermittigkeit infolge der Spannlasche entspricht. Die elastischen Materialdaten des verwendeten Graphit-Epoxid-Faserverbundwerkstoffes AS-4/3501-6 sind in Abb. 8.31 angegeben. Der Faserwinkel beträgt im gesamten Querschnitt  $0^\circ$  bezüglich der  $x$ -Richtung, so dass unter Ausnutzung der Symmetrie des Versuchs- und des Laminataufbaus lediglich das halbe System modelliert wird.

Die Diskretisierung erfolgt mit achtknotigen Schalenelementen, die drei Berechnungsschichten über die Dicke aufweisen. Die mittlere Berechnungsschicht berücksichtigt ein mögliches Delaminationsversagen, während die beiden äußeren Schichten als linear elastisch angenommen werden. Die halbe Breite der DCB-Probe ist mit einem Element diskretisiert. Abb. 8.32 stellt die Diskretisierung entlang des Rissfortschritts dar. Dabei kann der Bereich  $n_5$  bereits wieder gröber unterteilt werden, weil die Risstiefe nur ca.  $60 \text{ mm}$  beträgt und der Riss somit den Bereich  $n_4$  nicht verlässt. Die Höhe der Prozessschicht wird mit  $2/100h_{ges} = 0,061 \text{ mm}$  festgelegt, womit laut Sprenger (2000) das elastische Verhalten des Systems nur unwesentlich beeinflusst wird.

Die Berechnung erfolgt geometrisch linear und verschiebungsgesteuert über die Rissöffnung  $w$  am freien Probenende. Außerdem wird bei allen Delaminationsmodellen die viskose Regularisierung berücksichtigt, um eine stabile numerische Simulation zu gewährleisten. Die Simulation dieser DCB-Probe ohne die Berücksichtigung viskoser Effekte ist nämlich nicht möglich; es treten aufgrund der Schlechtgestelltheit des Problems numerische Instabilitäten auf. Es wird daher bei Verwendung der Delaminationsplastizität auf die automatische Bestimmung des Dämpfungsparameters  $\eta$  nach Kapitel 7.2.5 zurückgegriffen. Alle Delaminationsmodell

**Diskretisierung:**

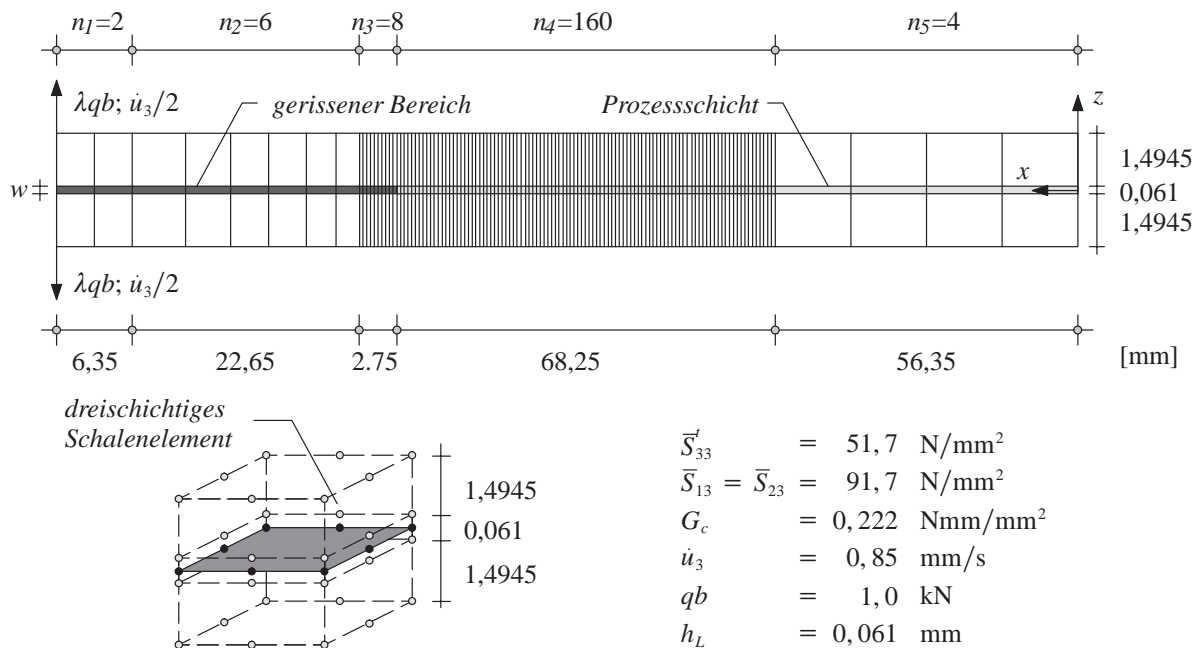


Abb. 8.32: DCB-Probe: Diskretisierung



verwenden hingegen einen konstanten Dämpfungsparameter. Um dessen Einfluss auf das Strukturverhalten aufzuzeigen, erfolgt die Berechnung mit unterschiedlichen Dämpfungsparametern.

Abb. 8.33 zeigt einige Last-Rissöffnungskurven, die in der Literatur zu finden sind. Neben der experimentellen nach Aliyu und Daniel (1985) sind noch einige weitere Kurven dargestellt, die sowohl mit einem vereinfachten analytischen Modell als auch mit der Methode der finiten Elemente ermittelt wurden. Die analytische Lösung beruht dabei auf einem vereinfachten Biegebalken-Modell der DCB-Probe und ist beispielsweise in Sprenger (2000) oder Teßmer (2000) angegeben. Die Finite-Elemente-Lösung nach Sprenger (2000) wurde mit achtknotigen Volumenelementen und der in Kapitel 7.2 vorgestellten Delaminationsplastizität mit viskoser Regularisierung berechnet. Hingegen verwendet Teßmer (2000) ein mehrschichtiges Schalenelement, in dem Rissöffnungsvektoren zur geometrischen Abbildung der Delamination eingeführt werden. Ist an der Risspitze das Brewer-Lagace-Delaminationskriterium verletzt, berechnet Teßmer (2000) die freiwerdende Energie mittels der virtuellen Rissschließungsmethode. Verletzt diese das Griffith-Kriterium, wird von einem Risswachstum ausgegangen und der Riss erweitert sich. Es fällt auf, dass die analytische Näherungslösung und die Rechenergebnisse von Teßmer (2000) nahezu identisch sind und im Mittel den Versuch gut abbilden. Hingegen überschätzt das Ergebnis von Sprenger (2000) die maximale Last deutlich, stimmt aber im späteren Nachbruchverlauf gut mit den experimentellen Ergebnissen überein.

In den nachfolgenden Abbildungen 8.35 bis 8.38 sind die Last-Rissöffnungskurven für die verschiedenen Materialmodelle zur Berechnung fortschreitender Delamination dargestellt, wobei stets die Last-Rissöffnungsverläufe nach Aliyu und Daniel (1985), nach Sprenger (2000) und nach Teßmer (2000) zum Vergleich eingetragen sind.

Zunächst zeigt jedoch Abb. 8.34 exemplarisch die deformierte halbe DCB-Probe bei einem bestimmten Lastfaktor. Die Delamination ist infolge der verschiebungsgesteuerten Rissöffnung schon bis zu einer bestimmten Risstiefe fortgeschritten und es entstehen vollständig entfestigte bzw. vollständig geschädigte Bereiche. Die vorderen, schon a priori gerissenen Bereiche  $n_1$  bis  $n_3$  werden im kontinuumsmechanischen Ansatz über die Annahme, dass kein Material in der

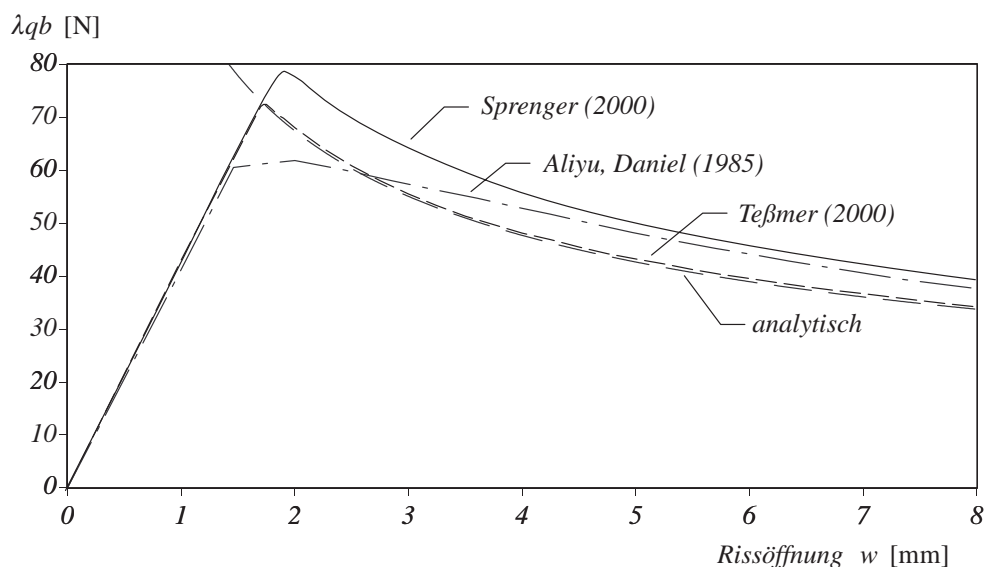


Abb. 8.33: Last-Rissöffnungskurven aus der Literatur

Prozessschicht vorhanden sein soll, abgebildet. Es ist deutlich das zur Schalenmittelfläche symmetrische Aufreißen der Probe zu erkennen.

Die in Abb. 8.35 dargestellten Ergebnisse der Delaminationsplastizität nach Kapitel 7.2 stimmen gut mit denen des Experiments und sehr gut mit denen von Teßmer (2000) überein. Für die kleinere Zeitschrittweite  $\Delta t$  reduziert sich der Einfluss der viskosen Effekte (wie schon in Zusammenhang mit Abb. 7.17 erläutert) und eine weitere Annäherung an das Ergebnis von Teßmer (2000) ist festzustellen, d.h. die Ergebnisse sind nahezu identisch. Im Vergleich zur Berechnung nach Sprenger (2000) sind die Last-Rissöffnungsverläufe qualitativ gleichwertig, liegen aber stets unterhalb. Im Gegensatz zum Ergebnis des Experiments überschätzen die Berechnungen dieser Arbeit die maximale Last etwas, während im Nachbruchverlauf ein wenig kleinere Lastwerte ermittelt werden. Das Plastizitätsmodell liefert hier also gute Ergebnisse und gewährleistet durch die visko-plastische Regularisierung eine stabile Berechnung des Nachbruchverlaufs. Allerdings sind die Rechenzeiten infolge der kleinen Zeitschrittweiten beträchtlich.

Die in Abb. 8.36 und 8.37 dargestellten Ergebnisse der isotropen und der selektiven Delaminationschädigung nach Kapitel 7.3 unterscheiden sich auf den ersten Blick kaum. Die unterschiedliche Definition der geschädigten Materialmatrix (isotrop oder selektiv) wirkt sich in diesem Beispiel aufgrund der sehr dünnen Prozessschicht ( $h_{PS} = 2\% h_{ges}$ ) nur minimal aus. Bei sehr genauer Betrachtung ist allerdings zu erkennen, dass die selektive Schädigung sowohl vor Erreichen der maximalen Last als auch bei der maximalen Last selbst größere Lastwerte liefert und sich dies im weiteren Nachbruchverlauf auch fortsetzt. Grundsätzlich stimmen die Nachbruchverläufe gut mit dem von Sprenger (2000) überein, wobei aber die Ergebnisse dieser Arbeit die maximale Last des Experiments besser abbilden. Weiterhin ist ein deutlicher Einfluss der Viskosität auf den Nachbruchverlauf und auf die dissipierte Energie festzustellen. Dieser große Einfluss resultiert aus der Verwendung des konstanten Dämpfungsparameters innerhalb der Visko-schädigung. Mit kleiner werdendem  $\Delta \mu$  und somit zunehmenden viskosen Effekten steigt die bei der Schädigung dissipierte Energie an und das Versagen findet verzögert statt. Hingegen liefert die Halbierung des Verschiebungsinkrements  $\Delta u_3$  bei gleich bleibendem  $\Delta \mu_3$  eine Annäherung an das Ergebnis von Teßmer (2000); die viskosen Effekte werden verringert. Der Nachbruchverlauf verliert allerdings dann etwas seine „Glattheit“ und neigt eher zu numerischen

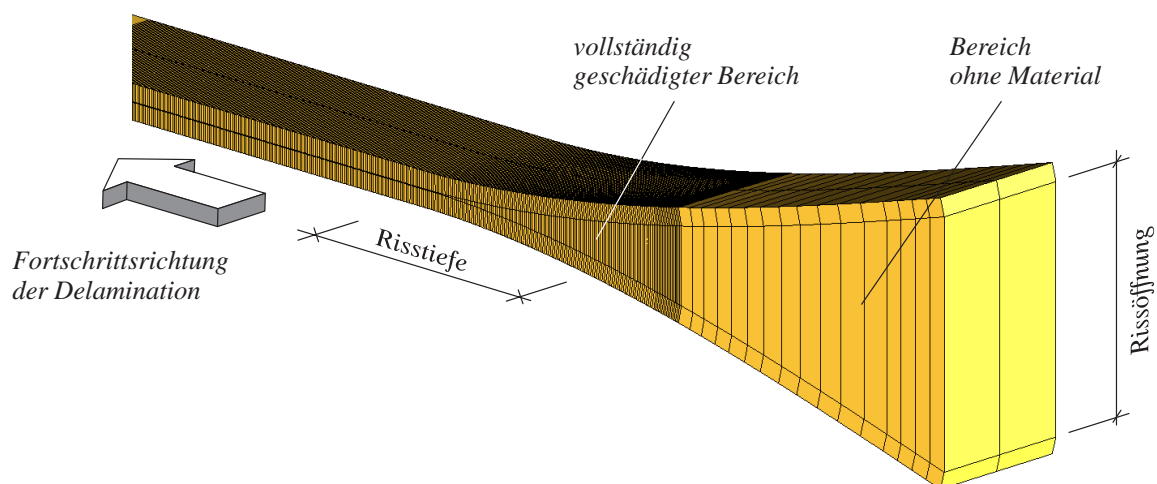


Abb. 8.34: DCB-Probe: Deformierte Struktur

Instabilitäten. Die Rechenzeiten sind im Vergleich zu denen des Plastizitätsmodells kleiner und es ist ein stärkerer Einfluss der viskosen Effekte festzustellen.

Das Delaminationsschädigungsmodell mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium nach Kapitel 7.4 liefert im Vergleich zum selektiven Schädigungsmodell beinahe identische Ergebnisse, vergleiche Abb. 8.37 und 8.38. Hierfür verantwortlich sind die Ähnlichkeit der beiden Schädigungsmodelle und die vorliegende Versagensart, die als ein nahezu reines Modus I-Versagen identifiziert werden kann. Für diesen Fall lieferten die beiden Modelle nämlich schon bei den im vorherigen Kapitel vorgestellten Modellbeispielen die gleichen Last-Verschiebungs-Antworten. Die Rechenzeiten entsprechen denen des isotropen und des selektiven Schädigungsmodells. Eine Halbierung des Verschiebungsinkrements  $\Delta u$  führt ebenfalls auf eine Annäherung der Ergebnisse an das von Teßmer (2000).

Abschließend ist somit festzuhalten, dass die Ergebnisse aller Delaminationsmodelle, sowohl des entfestigenden Plastizitätsmodells als auch der Schädigungsmodelle, eine gute Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis und mit den Ergebnissen von Sprenger (2000) und Teßmer (2000) aufweisen. Direkt nach Erreichen der maximalen Last ist bei den Schädigungsmodellen allerdings der Lastabfall weniger steil als bei der Delaminationsplastizität. Der Grund hierfür liegt wahrscheinlich in der Verwendung eines konstanten Dämpfungsparameters. Dieser wirkt sich direkt nach Erreichen der maximalen Last als etwas zu stark dämpfend aus und verzögert dadurch das Versagen. Es ist aber dennoch möglich, den Dämpfungsparameter so zu wählen, dass der Einfluss der viskosen Effekte auf die Ergebnisse möglichst klein ist und trotzdem noch genügend Regularisierung hinzugeführt wird, um eine numerisch stabile Berechnung gewährleisten zu können.

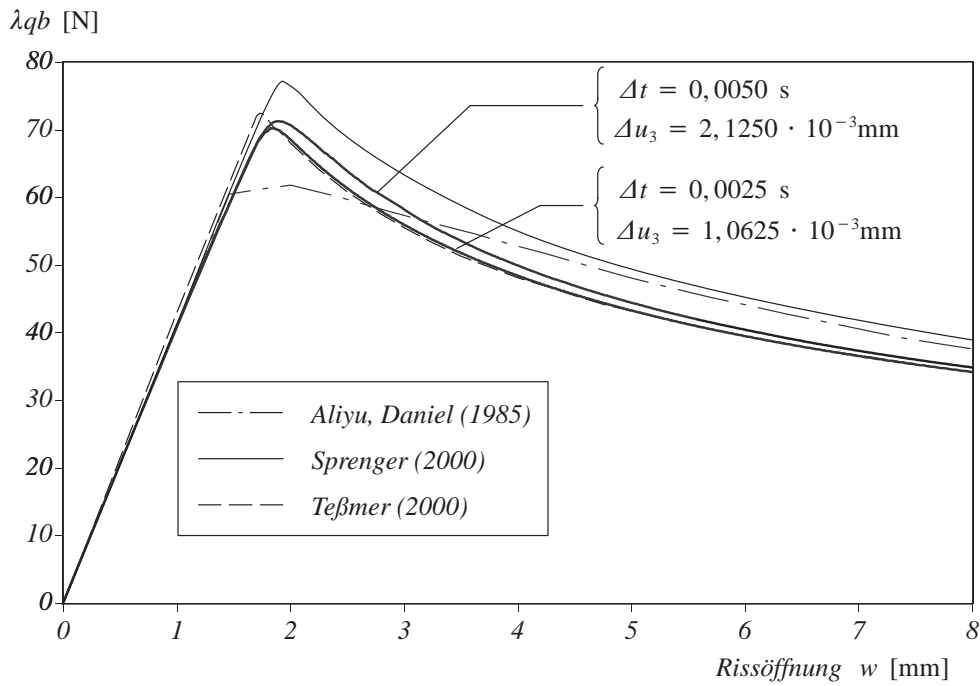


Abb. 8.35: Last-Rissöffnungskurven der **Delaminationsplastizität**

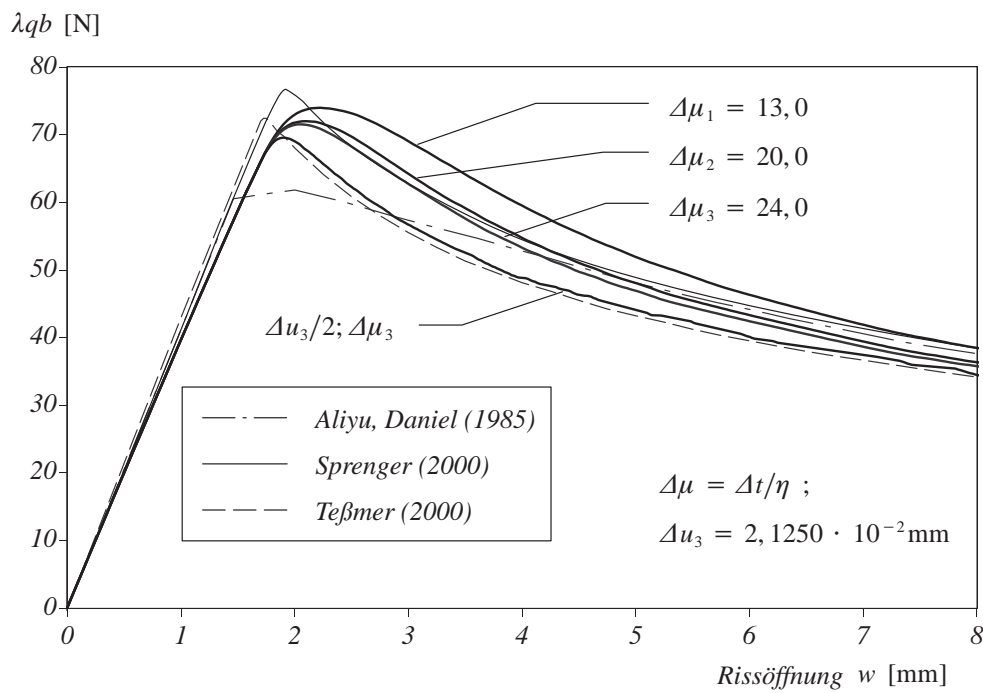


Abb. 8.36: Last-Rissöffnungskurven der **isotropen Delaminationsschädigung**

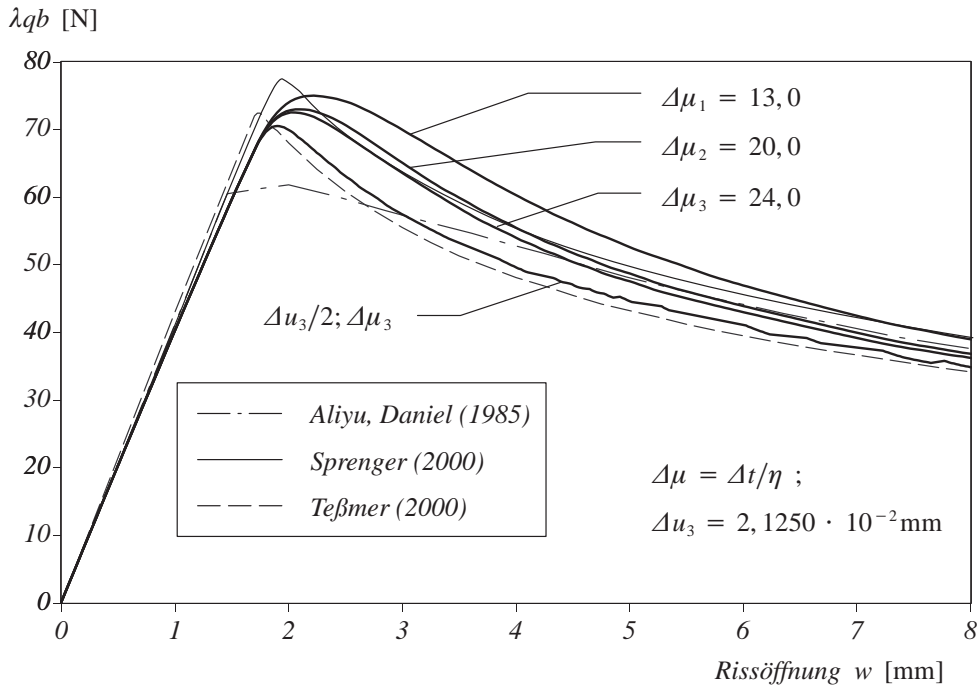


Abb. 8.37: Last-Rissöffnungskurven der **selektiven Delaminationsschädigung**

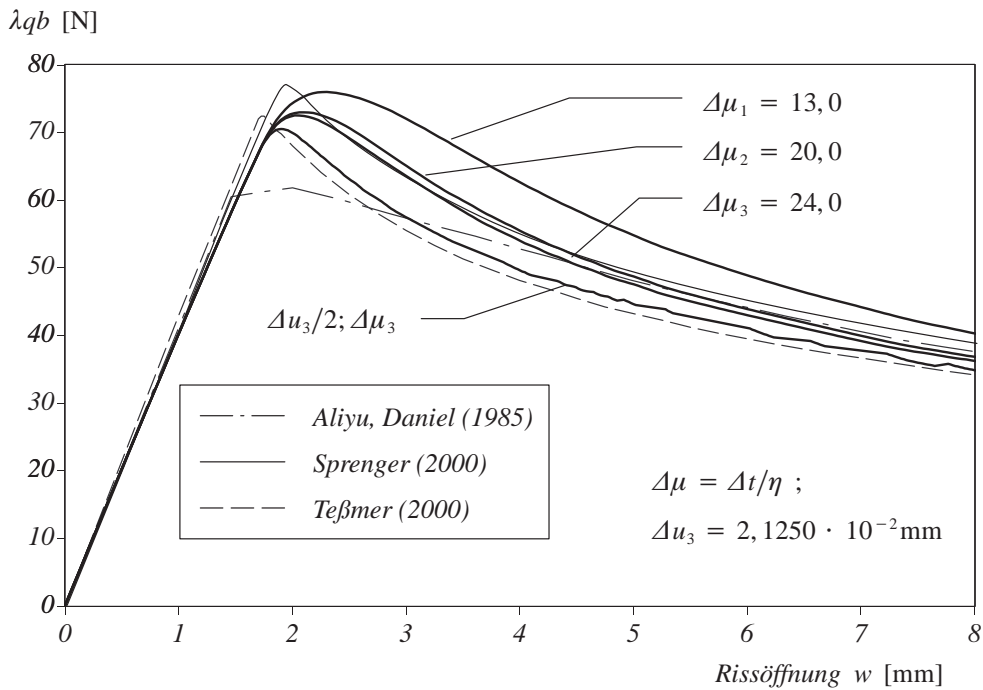


Abb. 8.38: Last-Rissöffnungskurven der **Delaminationsschädigung mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium**

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die numerische Simulation des nichtlinearen Verhaltens von dünnwandigen, geschichteten Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente. Eine zentrale Rolle spielte dabei die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens, vor allem unter Berücksichtigung der Versagensart der Delamination und der geometrischen Nichtlinearität. Hierzu wurden in dieser Arbeit mehrere Materialmodelle vorgestellt und entwickelt. Anhand geeigneter Beispiele sind die verschiedenen Materialmodelle getestet und miteinander verglichen worden. Wenn möglich, erfolgte auch eine Gegenüberstellung mit Versuchsergebnissen und/oder mit anderen Simulationsergebnissen aus der Literatur.

Zu Beginn der Arbeit wurden einige kurze, aber dennoch wichtige Einführungen gegeben. So erfolgte eine kurze Beschreibung des grundsätzlichen Material- und Versagensverhaltens von Faserverbundwerkstoffen, insbesondere von Laminaten mit geschichtetem Aufbau. Anschließend sind einige kontinuumsmechanische Grundlagen wiederholt und die Anforderungen an ein Strukturmodell beschrieben worden, die aus der Verwendung eines geschichteten Faserverbundquerschnittes hervorgehen. Hierbei ging die vorliegende Arbeit speziell auf die Verwendung einer Schalenformulierung ein, die zur Beschreibung dünnwandiger, geschichteter Faserverbundstrukturen geeignet ist. Die im Kapitel 8 vorgestellten numerischen Beispiele belegen eindrucksvoll, dass die mehrschichtige, dreidimensional orientierte Schalenformulierung mit schichtweiser extensibler Reissner-Mindlin-Kinematik in der Lage ist, einen über die Schalendicke zick-zack-förmigen Verschiebungsverlauf darzustellen. Um die Voraussetzungen zur Entwicklung plastizitäts- und schädigungsbasierter Materialmodelle zu schaffen, gab die Arbeit des Weiteren eine kurze Einführung in die Elastoplastizität und in die Kontinuumschädigungsmechanik. In beiden Fällen wurde zusätzlich eine viskose Erweiterung vorgestellt: bei der Elastoplastizität vom Typ Duvaut und Lions bzw. bei der Elastoschädigung vom Typ Perzyna.

In Vorbereitung der eigentlichen Schwerpunkte dieser Arbeit wurden in der Literatur verfügbare Versagensindikatoren aufgearbeitet und miteinander verglichen. Dabei erweisen sich das Maximalspannungs- bzw. das Maximalverzerrungskriterium allein als nicht ausreichend, um ein Versagen hinlänglich genau vorherzusagen. Für bestimmte Belastungssituationen überschätzen die Kriterien die maximal übertragbare Last, weil sie die Interaktion der Spannungskomponenten nicht einbeziehen. Polynomiale Versagenskriterien (Tsai-Wu, Tsai-Hill, Hoffman) tun dies und sind hauptsächlich wegen der Glattheit der Versagensfunktion attraktiv. Diese ist wiederum bei der numerischen Umsetzung von Materialmodellen vorteilhaft, wogegen die fehlende Aussage über den Bruchmodus von Nachteil ist. Aber auch diese Kriterien überschätzen die Versagenslasten bei bestimmten Versagensmodi, so dass hierfür spezielle Subkriterien entwickelt wurden. Klassische Vertreter dieser Gruppe der sogenannten 'Direct-Mode'-Kriterien sind das Hashin-Kriterium für Faserbruch und Matrixbruch sowie das Brewer-Lagace-Kriterium zur Beschreibung des Delaminationsversagens. Sie verbinden den Vorteil der polynomialen Versagenskriterien (Spannungsinteraktion) mit dem Vorteil, dass sie eigens für den jeweiligen Bruchmodus abgestimmt bzw. angepasst sind. Selbstverständlich geht bei diesen Kriterien die Glattheit der Versagensfunktion verloren. Abschließend ist somit festzuhalten, dass man sowohl die polyno-

mialen als auch die *'Direct-Mode'*-Kriterien zur Simulation des nichtlinearen Materialverhaltens verwendet kann. Welches Kriterium schließlich eingesetzt wird, ist allerdings nach vorliegendem Faserverbundwerkstoff und vorherrschender Versagensart abzuwägen.

Aufbauend auf den einführenden Kapiteln und dem vorgestellten Hoffman-Versagenskriterium wurde im ersten Schwerpunkt der Arbeit ein anisotrop verfestigendes Plastizitätsmodell vorgestellt, das auf Arbeiten von Hashagen und de Borst (1997a/b, 2001) sowie Hashagen (1998) zurückgeht. Mit diesem Modell ist die Beschreibung eines anisotrop verfestigenden Materialverhaltens möglich, das oft bei Faserverbundwerkstoffen mit metallischer Matrix und/oder metallischen Fasern festzustellen ist. Das Modell bietet durch die Verwendung von neun unabhängigen Verfestigungsgesetzen eine überaus große Flexibilität bzw. Variationsmöglichkeit. Deren experimentelle Bestimmung sowie die Ermittlung der zahlreichen Materialparameter (18 Werte) kann jedoch schon wieder schwierig sein. Die zu diesem Materialmodell vorgestellten Beispiele belegen den großen Einfluss der anisotropen Verfestigung auf das Antwortverhalten der Struktur. Je nach aktiviertem Verfestigungsfall können relativ große Unterschiede in den Last-Verschiebungs-Antworten entstehen. Das Beispiel der Scordelis-Lo-Schale (Kapitel 8.5) verdeutlicht überaus anschaulich, dass neben der materiellen Nichtlinearität auch die geometrische Nichtlinearität einen entscheidenden Einfluss haben kann. Ebenso zeigt es die Unterschiede in den Last-Verschiebungs-Antworten auf, die sich aus der Verwendung eines additiven Verzerrungssplits oder eines multiplikativen Deformationsgradientensplits ergeben. Bis kurz vor Ausbildung des Firstscharniers mit lokalisierten Verzerrungen ist der Unterschied noch gering. Im weiteren Belastungsverlauf nehmen die Verzerrungen in den plastifizierten Zonen jedoch stark zu, so dass die Annahme eines additiven Verzerrungssplit nicht mehr gerechtfertigt ist: die Ergebnisse weichen voneinander ab.

Der zweite und größere Schwerpunkt dieser Arbeit widmete sich dem Delaminationsversagen. Hierfür wurden Materialmodelle beschrieben und entwickelt, die entweder im Rahmen der Elastoplastizität oder im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik formuliert sind. Zunächst stellte die Arbeit ein entfestigendes Plastizitätsmodell mit automatischer visko-plastischer Regularisierung vor, das auf Sprenger (2000) zurückgeht. Die visko-plastische Regularisierung verwendet dabei einen variierenden Dämpfungsparameter, um einerseits die positive Definitheit des Materialensors auch im nachkritischen Bereich zu gewährleisten und um andererseits die Rechenergebnisse nur minimal zu verändern. Anhand von Untersuchungen auf der Materialpunktebene (durch Auswerten des akustischen Tensors) sowie auf der Strukturebene wurde der Einfluss der Regularisierung auf den Verlust von Elliptizität und auf die positive Definitheit aufgezeigt.

Gewisse Faserverbundwerkstoffe weisen ein nichtlineares Materialverhalten mit geringen plastischen und hauptsächlich schädigenden Effekten auf. Dieser Sachverhalt war die Motivation für die Entwicklung von drei Delaminationsschädigungsmodellen in dieser Arbeit. Als Schädigungsfunktion verwenden zwei Modelle ein verzerrungsbasiertes Brewer-Lagace-Delaminationskriterium, wohingegen für das andere ein äquivalentes Energiefreisetzungsraten-Kriterium definiert wurde. Das verzerrungsbasierte Brewer-Lagace-Kriterium erhält man unter Beachtung des „Konzepts der effektiven Spannungen“ aus der Überführung des spannungsbasierten Kriteriums in den Verzerrungsraum. Die resultierende nicht-assozierte Schädigungsformulierung unterscheidet sich ferner in der Wirkungsweise des Schädigungsparameters: isotrop oder selektiv. Während beim ersten Modell sämtliche Komponenten der Materialmatrix geschädigt werden, setzt man beim zweiten Modell nur bestimmte Komponenten, die mit dem Delaminationsversa-

gen assoziiert sind, durch die Schädigung herab. Die Herleitung des Materialmodells mit Energiefreisetzungsraten-Kriterium startete hingegen von der Definition einer speziellen freien Energiefunktion. Die freie Energie verwendet dabei eine in Komponenten geschädigte Materialmatrix in der drei Schädigungsparameter ( $d_1, d_2, d_3$ ) eingeführt werden, die den verschiedenen Bruchmodi (*I, II, III*) zugeordnet sind. Als jeweils energetisch konjugierte Größen lassen sich thermodynamisch konsistent die Spannungen zu den Verzerrungen sowie die Energiefreisetzungsraten zu den Schädigungsparametern herleiten. Die Energiefreisetzungsraten ( $Y_1, Y_2, Y_3$ ) sind ebenfalls mit den verschiedenen Versagensmodi assoziiert. Weil die Delaminationszone sehr dünn ist und somit die Schädigungsparameter untereinander stark gekoppelt sind, genügt es, lediglich eine äquivalente Energiefreisetzungsraten  $\bar{Y}$  als Schädigungsfunktion zu definieren. In diese gehen die Energiefreisetzungsraten ( $Y_1, Y_2, Y_3$ ) mit dem Gewichtungsfaktor ihrer Bruchenergie-Verhältnisse ein, d.h. die Energiefreisetzungsraten beteiligen sich im Verhältnis ihrer Bruchenergien ( $G_{cI}/G_{cII}, G_{cI}/G_{cIII}$ ). Sind diese Quotienten gleich groß, ergibt sich hieraus eine assoziierte Schädigungsformulierung. Die Evolution der Schädigungsparameter kann man ebenfalls als gekoppelt annehmen und die Schädigungsparameter gleich setzen. Bei sämtlichen Delaminationsschädigungsmodellen besteht ferner die Möglichkeit, viskose Effekte zu berücksichtigen. Im Gegensatz zum Delaminationsplastizitätsmodell bleibt allerdings der Dämpfungsparameter während der Rechnung konstant.

Die verschiedenen Delaminationsmodelle weisen schon in einem ersten Modellbeispiel (Kapitel 7.5) ein unterschiedliches Antwortverhalten auf. Ein offensichtlicher und auch entscheidender Unterschied ist, dass das selektive und das energiefreisetzungsraten-basierte Schädigungsmodell eine Rissschließung bei Druckbelastung in Dickenrichtung und die damit verbundene Wiederherstellung der ungeschädigten Steifigkeit  $C_{33}$  berücksichtigen, siehe Abb. 7.26. Die beiden Modelle beachten daher ein in Dickenrichtung unterschiedliches Zug- und Druckverhalten der Delamination: auf Druck volle Übertragung der Dickennormalspannung, auf Zug je nach aktuellem Schädigungsparameter. Die Schubkomponenten ( $C_{55}, C_{66}$ ) sind hiervon nicht betroffen; bei ihnen wirkt stets der aktuelle Schädigungsparameter. Das isotrope Schädigungsmodell berücksichtigt keine Rissschließung und liefert hierfür unrealistische Ergebnisse. Wenn eine vollständige Schädigung vorliegt, kann dies sogar zu einem Modellfehler mit einer gegenseitigen Durchdringung führen (vergleiche Beispiel 8.9). Weiterhin zeigen die Beispiele zur fortschreitenden Delamination, dass das selektive und das energiefreisetzungsraten-basierte Schädigungsmodell annähernd die gleichen Ergebnisse liefern. Liegt reines Modus I-Versagen vor, sind die Ergebnisse sogar identisch. Im Vergleich zu den Ergebnissen des entfestigenden Plastizitätsmodells zeigt sich bei den Last-Verschiebungs-Antworten der Schädigungsmodelle ein etwas stärkerer Einfluss der viskosen Regularisierung. Hierfür ist der verwendete konstante Dämpfungsparameter verantwortlich. Des Weiteren erfassen sämtliche Materialmodelle den Aufreißvorgang einer DCB-Probe sehr gut und die ermittelten Last-Verschiebungs-Antworten stimmen gut mit den experimentellen Ergebnissen und auch mit den Rechenergebnissen aus der Literatur überein.

Abschließend ist daher festzuhalten: Die vorgestellten Materialmodelle ermöglichen die Abbildung eines nichtlinearen, gerichteten bzw. anisotropen Verhaltens von Faserverbundwerkstoffen. Die Unterschiede der verschiedenen Modelle in Bezug auf die globale Last-Verschiebungs-Antwort sind im Allgemeinen gering, können aber dennoch für bestimmte Gegebenheiten bzw. für bestimmte Fälle große Auswirkungen haben, vergleiche Beispiel 8.9. Geringe Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Delaminationsplastizität und der Delaminationsschädigung treten erst bei Verwendung der viskosen Regularisierung auf und sind auf den Gebrauch des konstanten



Dämpfungsparameters zurückzuführen. Wird die Zeitschrittweite  $\Delta t$  bzw. das Verschiebungsincrement  $\Delta u$  reduziert, so nähern sich die Ergebnisse der Schädigungsmodelle an die des Plastizitätsmodells an.

## 9.2 Ausblick

Die Versagensart der Delamination wurde in der vorliegenden Arbeit unter der Annahme, dass sich die angrenzenden Schichten elastisch verhalten, durchgeführt. In Bezug auf die Delaminationsinitiierung ist dies kritisch zu hinterfragen, weil ein Matrixversagen der Einzelschicht, der sogenannte Zwischenfaserbruch (Abb. 2.4), vorangehen kann. Dieser Bruch ist unter Umständen für die Delaminationsinitiierung von großer Bedeutung. Er stellt nämlich einen freien Rand innerhalb des Laminats und darüber hinaus eine Diskontinuität mit dementsprechender Spannungsumlagerung dar. Zusätzlich kann der Matrixriss ohne großen Aufwand in die Grenzschicht zweier benachbarter Schichten abbiegen und so ein Delaminationsversagen auslösen. In dieser Arbeit wurden allerdings nur solche Beispiele untersucht, bei denen entweder eine Delamination, also ein Anriss, schon vorhanden war (DCB-Probe) oder die Annahme bestand, die Delamination entstehe stets vor einem anderen Versagen (*'Free-Edge'*-Effekt). Materialmodelle, die in zufriedenstellenderweise sämtliche Versagensarten berücksichtigen, gibt es nach Kenntnis des Autors derzeit noch nicht. Erste Ansätze sind in Puck (1996) zu finden, wo ein Faserbruch- und ein Zwischenfaserbruchkriterium vorgestellt wird, das auf Wirkebenen bezogen ist und das auf Vorarbeiten von Hashin (1980) basiert. Der numerische Mehraufwand, den die Ermittlung der maßgebenden Bruchebene (analog zur Mohr'schen Festigkeitshypothese) mit sich bringt, ist auch wahrscheinlich für die geringe Verbreitung und für die seltene Verwendung des Kriteriums verantwortlich. Die Entwicklung geeigneter Materialmodelle zur Beschreibung des Versagens von Faserverbundwerkstoffen kann insgesamt sicherlich noch nicht als abgeschlossen angesehen werden. Die vielfältigen Kombinationsmöglichkeiten der verwendeten Faser- und Matrixmaterialien sowie deren Anordnung und Geometrie kommen noch erschwerend hinzu. Vielversprechend hinsichtlich Genauigkeit, Effizienz und Einsatzmöglichkeit sind solche Materialmodelle, die auf homogenisierten Einzelschichten mit dazwischen liegenden Prozessschichten mit eigenständigen Werkstoffkomponenten basieren (Ladevèze und Koautoren). Aber auch Modelle, die den Übergang zwischen Mikro- und Makroebene beinhalten, sind sinnvoll und weiter zu erforschen (Döbert (2001)). Mit diesen Modellen erhält man vielleicht genauere Erkenntnisse über das experimentell nur schwer zu beobachtene Versagen auf der Faser-Matrix-Ebene. Das genaue Verständnis dieser Versagensvorgänge und deren Interaktion ist bei der Entwicklung genauer und effizienter Materialmodelle von entscheidender Bedeutung.

Darüber hinaus ist eine Verringerung der Rechenzeiten bei gleich bleibender Genauigkeit in Bezug auf die Abbildung der lokalen Effekte erstrebenswert. Dies kann man durch eine Diskretisierung nicht-delaminationsgefährdeter Gebiete mit herkömmlichen Schalenelementen (einfache Verschiebungskinetik über die Dicke) erreichen. Im Übergang vom konventionellen zum höherwertigen Schalenelement sind dann spezielle Übergangselemente zu verwenden, die eine kinematisch verträgliche Kopplung gewährleisten. Ebenso ist vorstellbar, beim Delaminationsfortschritt sukzessive und im ausreichenden Abstand vor der Delaminationsfront die „billigen“ Schalenelemente durch höherwertige Elemente zu ersetzen („Netzverfeinerung in Dickenrichtung“). Findet dieser Austausch vor dem ersten Versagen statt, so sind keine geschichtsabhängigen Größen, wie beispielsweise plastische oder äquivalente Verzerrungen, zu transformieren. Da

sich die Diskretisierung der Schalenmittelfläche ebenfalls nicht ändert, ist keine aufwendige Netzgenerierung nötig. Krüger und O'Brien (2000) verwenden einen vergleichbaren Ansatz mit konventionellen Schalenelementen im Übergang zu Volumenelementen.

Die Berücksichtigung dynamischer Effekte wäre zur vollständigen Beschreibung des Versagens ebenfalls sinnvoll, siehe Essebier (1999). Auch steht die Kopplung von Schädigung und Plastizität sowie die automatische Ermittlung des Dämpfungsparameters bei den Schädigungsmodellen noch aus.

Zusammenfassend kann somit gesagt werden, dass es für die zukünftige Forschung auf dem Gebiet der Versagensmodellierung von Faserverbundwerkstoffen noch genügend Herausforderungen gibt. Dabei wäre zur Bündelung von *'Know-How'* eine verstärkte Zusammenarbeit mit den Bereichen der Werkstoffkunde und der Prüftechnik nicht nur sehr wünschenswert, sondern vor allem notwendig.

# Literatur

- Agarwal, B.D. und Broutman, L.K. (1990):** *Analysis and Performance of Fiber Composites, Second Edition.* John Wiley&Sons, Inc., New York.
- Ahmad, S., Irons, B.M. und Zienkiewicz, O.C. (1968):** ‘Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems’, in: Berke, L. et al. (eds.), *Proceedings of the 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics.*
- Aifantis, E.C. (1992):** ‘On the role of gradients in the localization of deformation and facture’, *International Journal of Engineering Science*, **30**, 1279–1299.
- Aifantis, E.C. (1998):** ‘Recent progress on gradient theory and applications’, in: de Borst, R., van der Giessen, E. (eds.), *Material Instabilities in Solids*, John Wiley & Sons, New York, 533–548.
- Alfano, G. und Crisfield, M.A. (2001):** ‘Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 1701–1736.
- Aliyu, A.A. und Daniel, I.M. (1985):** ‘Effects of strain rate on delamination fracture toughness of graphite/epoxy’, in: Johnson, W.S. (eds.), *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, Philadelphia, 336-348.
- Allen, D.H., Harris, C.E. und Groves, S.E. (1987):** ‘A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage – I. Theoretical development’, *International Journal of Solids and Structures*, **23**, 1301–1318.
- Allix, O. und Corigliano, A. (1996):** ‘Modeling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens’, *International Journal of Fracture*, **77**, 111–140.
- Allix, O. und Deü, J.-F. (1997):** ‘Delay-damage modeling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading’, *Engrg. Trans.*, **45**, 29–46.
- Allix, O., Ladevèze, P. und Corigliano, A. (1995):** ‘Damage analysis of interlaminar fracture specimens’, *Composite Structures*, **31**, 61–74.
- Allix, O., Deü, J.-F. und Ladevèze, P. (1997):** ‘Some aspects of damage and fracture of composite laminates under dynamic loading’, in: Owen, D.R.J., Onate, E., Hinton, E. (eds.), *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, CIMNE, Barcelona, 1148–1155.
- Allix, O., Lévêque, D. und Perret, L. (1998):** ‘Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model’, *Composites Science and Technology*, **58**, 671–678.
- Altenbach, H., Altenbach, J. und Rikards, R. (1996):** *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke.* Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart.
- Ashkenazi, E.K. (1965):** ‘Problems of the anisotropic strength’, *Mekhanika Polimerov*, Vol. 1, 79; English translation *Polymer Mechanics*, Vol. 1 (1966), Farady Press, 60.
- Barthel, R. (2001):** *Eladio Dieste: Form und Konstruktion*, Das Beispiel GmbH, Darmstadt.
- Bazant, Z.P. (1976):** ‘Instability, ductility and size effect in strain softening concrete’, *Journal of Engineering Mechanics*, **102(2)**, 331–344.
- Bazant, Z.P. (1984):** ‘Imbricate continuum and its variational derivation’, *Journal of Engineering Mechanics*, **110**, 1693–1712.
- Bazant, Z.P. (1991):** ‘Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics arguments’, *Journal of Engineering Mechanics*, **117(5)**, 1070–1087.
- Bazant, Z.P. und Oh, B.H. (1983):** ‘Crack band theory for fracture of concrete’, *RILEM Materials & Structures*, **16**, 155–177.
- Bazant, Z.P. und Belytschko, T. (1985):** ‘Wave propagation in a strain-softening bar: Exact solution’, *Journal of Engineering Mechanics*, **111**, 381–389.

- Bazant, Z.P. und Pijaudier-Cabot, G. (1989):** ‘Measurement of characteristic length of nonlocal continuum’, *Journal of Engineering Mechanics*, **115(4)**, 755–767.
- Belytschko, T., Moës, N., Usui, S. und Parimi, C. (2001):** ‘Arbitrary discontinuities in finite elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 993–1013.
- Betten, J. (1986):** *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*. Vieweg-Verlag, Stuttgart.
- Bicanic, N., Pearce, C.J. und Owen, D.R.J. (1994):** ‘Failure predictions of concrete like materials using softening Hoffman plasticity model’, in: Mang, H., Bicanic, N., de Borst, R. (eds.), *Proceedings of EURO-C 1994 International Conference; Computer Modelling of Concrete Structures*, Vol. 1, Innsbruck, Austria, 185–198.
- Blackman, B.R.K. und Williams J.G. (1998a):** ‘Impact and high rate testing of composites: An overview’, in: Mota Soares, C.A., Mota Soares, C.M., Freitas, M.J. (eds.), *Mechanics of Composite Materials and Structures, Volume I*, NATO Advanced Study Institute, Tróia, Portugal, 215–224.
- Blackman, B.R.K. und Williams J.G. (1998b):** ‘Impact and high rate testing of composites: High rate delamination testing’, in: Mota Soares, C.A., Mota Soares, C.M., Freitas, M.J. (eds.), *Mechanics of Composite Materials and Structures, Volume I*, NATO Advanced Study Institute, Tróia, Portugal, 225–234.
- Blaß, H.J. und Schmid, M. (2001):** ‘Querzugfestigkeit von Vollholz und Brettschichtholz’, *Holz als Roh- und Werkstoff*, **58**, 456–466.
- De Borst, R. (1986):** *Non-linear analysis of frictional materials*. Ph.D.-Dissertation, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- De Borst, R. (1991):** ‘Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum’, *Engineering Computations*, **8**, 317–332.
- De Borst, R. und Mühlhaus, H.B. (1991):** ‘Computational strategies for gradient continuum models with a view to localization of deformation’, in: Bicanic, N. (eds.), *4th International Conference on Nonlinear Engineering Computation*, Swansea.
- De Borst, R., Sluys, L.J., Mühlhaus, H.-B. und Pamin, J. (1993):** ‘Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation’, *Engineering Computations*, **10**, 99–121.
- Braun, M. (1995):** *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken*. Dissertation, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Brewer, J.C. und Lagace, P.A. (1988):** ‘Quadratic stress criterion for initiation of delamination’, *Journal of Composite Materials*, **22**, 1141–1155.
- Brunner, A.J. (1998):** ‘Non-destructive testing techniques for delamination growth in composite materials’, in: Mota Soares, C.A., Mota Soares, C.M., Freitas, M.J. (eds.), *Mechanics of Composite Materials and Structures, Volume I*, NATO Advanced Study Institute, Tróia, Portugal, 299–308.
- Büchter, N. (1992):** *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*. Dissertation, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Büchter, N. und Ramm, E. (1992):** ‘3d-extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept’, in: Hirsch, C. (eds.), *Computational Methods in Applied Sciences*, Elsevier, 39–59.
- Büchter, N., Ramm, E. und Roehl, D. (1994):** ‘Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2551–2568.
- Burgoyne, C.J. (1999):** ‘Advanced composites in civil engineering in Europe’, *Structural Engineering International*, **99(4)**, 1–7.
- Carlsson, L.A. und Pipes, R.B. (1989):** *Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe; Herstellung und experimentelle Charakterisierung*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- Carol, I., Rizzi, E. und Willam, K.J. (1994):** ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’, *International Journal of Solids and Structures*, **31**, 2835–2865.
- Carol, I., Rizzi, E. und Willam, K.J. (2001):** ‘On the formulation of anisotropic elastic degradation. Part I – Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate, Part II – Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage’, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 491–518, 519–546.

- Chaboche, J.L. (1988):** ‘Continuum damage mechanics: Part I – General concepts, Part II – Damage growth, crack initiation and crack growth’, *Journal of Applied Mechanics*, **55**, 59–72.
- Chaboche, J.L. (1993):** ‘Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage’, *International Journal of Damage Mechanics*, **2**, 311–329.
- Chaboche, J.L. (1999):** ‘Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions’, in: Altenbach, H., Skrzypek, J. (eds.), *Creep and Damage in Materials and Structures*, Springer-Verlag, Wien, 209–283.
- Chaboche, J.L., Lesne, P.M. und Marie, J.F. (1995):** ‘Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites’, *International Journal of Damage Mechanics*, **4**, 5–20.
- Chaboche, J.L., Girard, R. und Schaff, A. (1997):** ‘Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models’, *Computational Mechanics*, **20**, 3–11.
- Chawla, K.K. (1987):** *Composite Materials*. Springer-Verlag, Berlin.
- Chen, J.K., Sun, C.T. und Chang, C.I. (1985):** ‘Failure analysis of a Graphite/Epoxy laminate subjected to combined thermal and mechanical loading’, *Journal of Composite Materials*, **9**, 408–423.
- Chen, J., Crisfield, M.A., Kinloch, A.J., Matthews, F.L., Busso, E. und Qiu, Y. (1998):** ‘The application of interface elements in predicting progressive delamination of composite material specimens’, in: Mota Soares A. et al. (eds.), *Proceedings of the Conference: Mechanics of Composite Materials and Structures, Volume IV*, NATO Advanced Study Institute, Tróia, Portugal, 1–16.
- Crisfield, M.A. (1982):** ‘Local instabilities in the nonlinear analysis of reinforced concrete beams and slabs’, *Proceedings of the Institution of the Civil Engineers*, **37**, Part 2, 55–62.
- Crisfield, M.A. (1986):** ‘Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**, 751–767.
- Christensen, R.M. (1979):** *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley & Sons, New York.
- Coleman, B.D. und Noll, W. (1963):** ‘The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity’, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **13**, 167–178.
- Coleman, B.D. und Gurtin, M.E. (1967):** ‘Thermodynamics with internal state variables’, *Journal of Chemical Physics*, **47(2)**, 597–613.
- Cordebois, J.P. und Sidoroff, F. (1982):** ‘Damage induced elastic anisotropy’, in: Boehler, J. (eds.), *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. EUROMECH Colloque 115, June 1979*, Martinus Nijhoff, The Netherlands, 761-774.
- Corigliano, A., Frassine, R. und Ricci, M. (1998):** ‘Rate-dependent fracture properties in the delamination of polymer-matrix composites’, in: *Proceedings of the WCCM-4*, 29 June-2 July, Buenos Aires.
- Corigliano, A. und Allix, O. (2000):** ‘Some aspects of interlaminar degradation in composites’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **185**, 203–224.
- Cui, W. und Wisnom, M.R. (1993):** ‘A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites’, *Composites*, **24(6)**, 467–474.
- Davidson, B.D. (1990):** ‘An analytical investigation of delamination front curvature in double cantilever beam specimens’, *Journal of Composite Materials*, **24**, 1124–1137.
- Davidson, B.D., Krüger, R. und König, M. (1996):** ‘Effect of stacking sequence on energy release rate distributions in multidirectional DCB and ENF specimens’, *Engineering Fracture Mechanics*, **55**, 557–569.
- Döbert, C. (2001):** *Meso-Makromechanische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung*. Dissertation, F01/3, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Dorninger, K. (1989):** *Entwicklung von nichtlinearen FE-Algorithmen zur Berechnung von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen*. Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 18, Nr. 65, VDI-Verlag, Düsseldorf.

- Dorninger, K. und Rammerstorfer, F.G. (1990):** ‘A layered composite shell element for elastic and thermoelastic stress and stability analysis at large deformations’, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **30**, 833–858.
- Dubé, J.-F., Pijaudier-Cabot, G. und La Borderie, C. (1996):** ‘Rate dependent damage model for concrete in dynamics’, *Journal of Engineering Mechanics*, **122**, 939–947.
- Duvaut, G. und Lion, J.L. (1972):** *Les Inequations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris.
- Epstein, M. und Huttelmaier, H.P. (1983):** ‘A finite element formulation for multilayered and thick plates’, *Computers and Structures*, **16**, 645–650.
- Essebie, S. (1999):** *Berechnung dynamischer Delaminationsvorgänge in Faserverbundplatten*. Dissertation, Bericht Nr. 30-99, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Etse, G. (1992):** *Theoretische und numerische Untersuchungen zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- Faria, R., Oliver, J. und Cervera, M. (1998):** ‘A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures’, *International Journal of Solids and Structures*, **35**, 1533–1538.
- Fiberline (2002):** <http://www.fiberline.com> bzw. <http://www.fiberline.com/Constructions/brdige1.htm>
- Frassine, R. und Pavan, A. (1995):** ‘Viscoelastic effects on the interlaminar fracture behaviour of thermoplastic matrix composites: rate and temperature dependence in unidirectional PEI/carbon fibre laminates’, *Composite Science and Technology*, **54**, 193–200.
- Garg, A.C. (1988):** ‘Delamination - A damage mode in composite structures’, *Engineering Fracture Mechanics*, **29(5)**, 557–584.
- Geers, M.G.D. (1997):** *Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture*. Ph.D.-Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- Gerstle, F.P. und Reedy, E.D. (1985):** ‘On the application of the maximum stress failure criterion to off-axis and angle-ply laminates’, *Journal of Composite Materials*, **19**, 505–512.
- Girkmann, K. (1963):** *Flächentragwerke: Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke*. Springer-Verlag, Wien.
- Gol'denblatt, I.I. und Kopnov, V.A. (1965):** ‘Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state’, *Mekhanika Polimerov*, Vol. 1, 70; English translation *Polymer Mechanics*, Vol. 1 (1966), Farady Press, 54.
- Green, A.E. und Naghdi, P.M. (1965):** ‘A general theory of an elastic-plastic continuum’, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **18**, 251–281.
- Green, A.E. und Zerna, W. (1968):** *Theoretical Elasticity*. 2. Auflage, At the Clarendon-Press, Oxford.
- Griffith, A.A. (1921):** ‘The phenomena of rupture and flow in solids’, *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, **A221**, 163–198.
- Griffith, A.A. (1924):** ‘The theory of rupture’, in: Biezeno, Burgers (eds.), *Proceedings of the 1st International Congress Applied Mechanics*, Delft, 55–63.
- Gruttmann, F. (1996):** *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*. Habilitation, Bericht-Nr. F96/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Gruttmann, F. und Wagner, W. (1994):** ‘On the numerical analysis of local effects in composite structures’, *Composite Structures*, **29**, 1–12.
- Gruttmann, F. und Wagner, W. (1996):** ‘Coupling of 2D- and 3D-composite shell elements in linear and nonlinear applications’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **129**, 271–278.
- Gudmundson, P. (1994):** ‘Fracture and damage of composite laminates’, in: Hult, J., Rammerstorfer, F.G. (eds.), *Engineering Mechanics of Fibre Reinforced Polymers and Composite Structures*, CSIM, Nr. 348, Udine, 111–139.
- Hartmann, S. (2002):** *Visualisierung und Analyse von Rückprojektionsalgorithmen der Elastoplastizität*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

- Hashagen, F. (1998):** *Numerical Analysis of Failure Mechanisms in Fibre Metal Laminates*. Ph.D.-Dissertation, Delft University Press, Delft, The Netherlands.
- Hashagen, F. und de Borst, R. (1997a):** ‘A model for anisotropic hardening combined with Hoffman plasticity’, in: Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E. (eds.), *Computational Plasticity*, CIMNE, Barcelona, 921–928.
- Hashagen, F. und de Borst, R. (1997b):** ‘A plasticity model including anisotropic hardening and softening for composite materials’, in: Hendriks, Jongedijk, Rots, van Spanje (eds.), *Finite Elements in Engineering and Science*, Balkema, Rotterdam, 261–272.
- Hashagen, F. und de Borst, R. (2001):** ‘Enhancement of the Hoffman yield criterion with an anisotropic hardening model’, *Computers & Structures*, **79**, 637–651.
- Hashin, Z. (1980):** ‘Failure criteria for unidirectional fiber composites’, *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 329–334.
- Hayhurst, D.R. (1972):** ‘Creep rupture under multi-axial state of stress’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **20**, 381–390.
- Hencky, H. (1924):** ‘Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen’, *ZAMM*, **4**, 323–334.
- Herakovich, C.T. (1998):** *Mechanics of fibrous composites*. John Wiley&Sons Inc., New York.
- Herakovich, C.T., Schroedter, R.D., Gasser, A. und Guitard, L. (2000):** ‘Damage evolution in  $[\pm 45]_s$  laminates with fiber rotation’, *Composites Science and Technology*, **60**, 2781–2789.
- Hill, R. (1948):** ‘A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials’, in: *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, **193**, 281–298.
- Hill, R. (1950):** *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- Hill, R. (1958):** ‘A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **6**, 236–249.
- Hill, R. (1962):** ‘Acceleration waves in solides’, *Journal of the Mechanics and the Physics of Solids*, **10**, 1–16.
- Hillerborg, A., Modéer, A.M. und Petersson, P.E. (1976):** ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’, *Cement & Concrete Research*, **6**, 773–782.
- Hoffman, O. (1967):** ‘The brittle strength of orthotropic materials’, *Journal of Composite Materials*, **1**, 200–206.
- Hofstetter, G. und Mang, H.A. (1995):** *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Vieweg&Sohn-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden.
- Holzapfel, G.A. und Gasser, T.C. (2001):** ‘A viscoelastic model for fiber–reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 4379–4430.
- Hull, D. (1981):** *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press, Great Britain.
- Hult, J. und Rammerstorfer, F.G. (1994):** *Engineering Mechanics of Fibre Reinforced Polymers and Composite Structures*. CIWM Courses and Lectures No. 348, Springer-Verlag, Wien, New York.
- Hwang, C. und Sun, C. (1989):** ‘Failure analysis of laminated composites by using iterative three-dimensional finite element method’, *Computers & Structures*, **33**, 41–47.
- Imminger, T. (2001):** *Numerische Untersuchungen von Faserverbundkonstruktionen unter Verwendung einer mehrschichtigen Schalentheorie*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Institution of Structural Engineers (IStructE) (1996):** *Interim Guidance of the Design of Reinforced Concrete Structures using Fibre Composite Reinforcement*. London.
- Iordache, M.-M. und Willam, K.J. (1998):** ‘Localized failure modes in cohesive frictional materials’, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, accepted for publication.
- JAD (2002):** <http://www.jad-bike.com> bzw. [http://www.jad-bike.com/bici\\_corsa/jr7-carbon.htm](http://www.jad-bike.com/bici_corsa/jr7-carbon.htm)
- Jirásek, M. (1999):** *Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials*. Ph.D.-Course, RWTH-Aachen, 3-7 May, Lecture Notes.

- Jirásek, M. (2000):** ‘Comparative study on finite elements with embedded discontinuities’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**, 307–330.
- Jirásek, M. (2001):** *Modeling of Damage and Fracture in Quasibrittle Materials*. M.S.-Course, Universität Stuttgart, 11-12 October, Lecture Notes.
- Jirásek, M. und Belytschko, T. (2002):** ‘Computational resolution of strong discontinuities’, in: Mang, H.A., Rammerstorfer, F.G., Eberhardsteiner, J. (eds.), *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, July 7–12, 2002, Vienna, Austria.
- Jirásek, M. und Zimmermann, T. (2001):** ‘Embedded crack model: I. Basic formulation; II. Combination with smeared cracks’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 1291–1305.
- Ju, J.W. (1989):** ‘On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects’, *International Journal of Solids and Structures*, **25**, 803–833.
- Ju, J.W. (1990):** ‘Isotropic and anisotropic damage variable in continuum damage mechanics’, *Journal of Engineering Mechanics*, **116**, 2764–2770.
- Ju, J.W. (1992):** ‘On algorithmic tangent moduli for a class of viscoplastic formulations’, in: Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E. (eds.), *Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, Pineridge Press, Swansea, U.K., 141-152.
- Kachanov, M. (1958):** ‘Time of the rupture process under creep conditions’, *Izv. Akad. Nauk, USSR*, (in Russian), **8**, 26–31.
- Kachanov, M. (1986):** *Introduction to Continuum Damage mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- Kelly, A. (1989):** *Concise Encyclopedia of Composite Materials*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Khan, A.S. und Huang, S. (1995):** *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Kim, C.W., Hwang, W., Park, H.C. und Han, K.S. (1997):** ‘Stacking sequence optimization of laminated plates’, *Journal for Composite Materials*, **39**, 283–288.
- Klarmann, R. (1991):** *Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragsystemen mit geschichtetem anisotropen Querschnitt*. Dissertation, Schriftenreihe Heft 12, Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH).
- Krajcinovic, D. (1983):** ‘Constitutive equations for damaging materials’, *Journal of Applied Mechanics*, **50**, 355–360.
- Krajcinovic, D. (1996):** *Damage Mechanics*. North-Holland, Amsterdam.
- Krieg, R.D. und Krieg, D.B. (1977):** ‘Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model’, *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, **99**, 510–515.
- Krüger, R. (1996):** *Delaminationswachstum in Faserverbundlaminate*. Dissertation, Bericht Nr. 13-96, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Krüger, R. und O’Brien, T.K. (2000):** *A shell / 3D modeling technique for the analysis of delaminated composite laminates*. NASA/TM-2000-210287, ARL-TR-2207, Langley Research Center, Virginia.
- Kuhl, E., Ramm, E. und Willam, K.J. (1999):** ‘Failure analysis for elasto-plastic material models on different levels of observation’, *International Journal for Solids and Structures*, **37**, 7259–7280.
- Kuhl, E. (2000):** *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Dissertation, Bericht-Nr.32, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- La Borderie, C. (1991):** *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: Modélisation et application à l’analyse des structures en béton*. Ph.D.-Dissertation, Université Paris VI, France.
- Ladevèze, P. (1983):** ‘Sur une théorie de l’endommagement anisotrope’ *Rapport interne L.M.T. 34, E.N.S. de Cachan*, Université Paris VI.
- Ladevèze, P. (1986):** ‘Sur la mécanique de l’endommagement des composites’, in: Bathias, C., Menkès, D. (eds.), *Comptes-Rendus des JNC5*, Pluralis Publication, 667–683, Paris.



- Ladevèze, P. (1992):** ‘A damage computational method for composite structures’, *Computers & Structures*, **44**, 79–87.
- Ladevèze, P. und Le Dantec, E. (1992):** ‘Damage modeling of the elementary ply for laminated composites’, *Composite Science and Technology*, **43 (3)**, 257–267.
- Ladevèze, P., Allix, O., Gornet, L., Lévêque, D. und Perret, L. (1998):** ‘A computational damage mechanics approach for laminates: Identification and comparison with experimental results’, in: Voyiadjis, G.Z., Wu, J.W., Chaboche, J.L. (eds.), *Damage Mechanics in Engineering Materials*, Elsevier, Amsterdam, 481–500.
- Ladevèze, P., Allix, O., Deü, J.-F. und Lévêque, D. (2000):** ‘A mesomodel for localisation and damage computation in laminates’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **183**, 105–122.
- Lagace, P.A. (1993):** ‘Delamination: From initiation to final failure’, in: *Proceedings of the 9th International Conference on Composite Materials (ICCM/9)*, Madrid, Spain.
- Lagace, P.A. und Bhat, N.V. (1992):** ‘On the prediction of delamination initiation’ *TELAC Report 92–10*, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- Lataillade, J.-L., Delaët, M. und Collombet, F. (1993):** ‘Damage testing of crossply laminates under high strain rate, effects of intralaminar shear stresses’, in: *Proceedings of the 9th International Conference on Composite Materials (ICCM/9)*, Madrid, Spain, 358–365.
- Leckie, F.A. und Hayhurst, D.R. (1974):** ‘Creep rupture of structures’, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, **340**, 323–347.
- Lee, J.D. (1982):** ‘Three dimensional finite element analysis of damage accumulation in composite laminate’, *Computers & Structures*, **15**, 335–350.
- Lemaître, J. (1971):** ‘Evaluation of dissipation and damage in metals’, in: *Proc. I.C.M.*, Vol. 1, Kyoto, Japan.
- Lemaître, J. (1983):** ‘A continuous damage mechanics model for ductile fracture’, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **107**, 83–89.
- Lemaître, J. (1984):** ‘How to use damage mechanics’, *Nuclear Engineering and Design*, **80**, 233–245.
- Lemaître, J. (1996):** *A Course on Damage Mechanics, Second Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin.
- Lemaître, J. und Chaboche, J.L. (1978):** ‘Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement’, *J. Méc. Appl.*, **2(3)**, 317–365.
- Lemaître, J. und Chaboche, J.L. (1985):** *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, Paris.
- Lemaître, J. und Chaboche, J.L. (1990):** *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Li, X., Duxbury, P.G. und Lyons, P. (1994):** ‘Considerations for the application and numerical impementation of strain hardening with the Hoffman yield criterion’, *Computers & Structures*, **52/4**, 633–644.
- Liu, D. und Malvern, L.E. (1987):** ‘Matrix cracking in impacted Glass/Epoxy plates’, *Journal of Composite Materials*, **21 (7)**, 594–609.
- Lubliner, J. (1990):** *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, New York.
- Luenberger, D.G. (1984):** *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesly Publishing Company, Reading.
- Mallik, P.K. (1988):** *Fiber-Reinforced Composites; Materials, Manufacturing, and Design*. Marcel Dekker.
- Malvern, L.E. (1969):** *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs.
- Mandel, J. (1972):** *Plasticité Classique et Viscoplasticité*. CISM Courses and Lectures No. 97, Springer-Verlag, Wien – New York.
- Matzenmiller, A. (1988):** *Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen*. Dissertation, Bericht-Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Matzenmiller, A., Lubliner, J. und Taylor, R.L. (1995):** ‘A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites’, *Mechanics of Materials*, **20(2)**, 125–152.

- Mazars, J. (1985):** ‘A model of a unilateral elastic damageable material and its application to concrete’, in: Wittmann, F. (eds.), *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, Elsevier, New York, Lausanne, Switzerland, 61–71.
- Mazars, J. und Pijaudier-Cabot, G. (1989):** ‘Continuum damage theory – Application to concrete’, *Journal of Engineering Mechanics*, **115**, 345–365.
- Meier, U., Deuring, M., Meier, H. und Schwegler, G. (1995):** ‘CFRP bonded sheets’, in: Nanni, A. (eds), *Fiber Reinforced Plastic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures: Properties and Applications*, Elsevier, 435-443.
- Meier, U. und Farshad, M. (1996):** ‘Connecting high-performance carbon-fiber-reinforced-polymer cables of suspension and cable-stayed bridges through the use of gradient materials’, *Journal of Computer-Aided Materials Design*, **3**, 379–384.
- Miehe, C. (1993):** *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität – Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*. Habilitationsschrift, Bericht-Nr. 93/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Miller, A.G., Lovell, D.T. und Seferis, J.C. (1994):** ‘The evolution on an aerospace material: Influence of design, manufacturing and in-service performance’, *Composite Structures*, **27**, 193–206.
- Moës, N., Dolbow, J. und Belytschko, T. (1999):** ‘A finite element method for crack growth without remeshing’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131–150.
- Mühlhaus, H.-B. und Aifantis, E.C. (1991):** ‘A variational principle for gradient plasticity’, *International Journal for Solids and Structures*, **28**, 845–857.
- Murakami, S. (1987a):** ‘Anisotropic damage theory and its application to creep crack growth analysis’, in: Desai, C.S., Krempl, E., Kiousis, P.D., Kundu, T. (eds.), *Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Elsevier, Tucson, USA, 187–194.
- Murakami, S. (1987b):** ‘Anisotropic aspects of material damage and applications of continuum damage mechanics’, in: Krajcinovic, D., Lemaitre, J. (eds.), *Continuum Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Wien, 91–133.
- Murakami, S. und Ohno, N. (1981):** ‘A continuum theory of creep and creep damage’, in: Ponter. A.R.S., Hayhurst, D.R. (eds.), *Creep in Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 422–444.
- Nádai, A. (1931):** *Plasticity*. Mc Graw-Hill, New York – London.
- Nagdegaal, J.C. (1982):** ‘On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**.
- Nahas, M.N. (1986):** ‘Survey of failure and post-failure theories of laminated fibre-reinforced composites’, *Journal of Composites Technology and Research*, **8**, 138–153.
- Narayanaswami, R. und Adelman, H.M. (1977):** ‘Evaluation of the tensor polynomial and Hoffman strength theories for composite materials’, *Journal of Composite Materials*, **11**, 366–377.
- Needleman, A. (1998):** ‘Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **76**, 69–85.
- Neuhaus, H. (1994):** *Lehrbuch des Ingenieurholzbaus*. Teubner, Stuttgart.
- Niederstadt, G., Hermann, A.S., Rohwer, K., Hanselka, H., Hoffmann, U., Block, J. und Hillger, W. (1997):** *Ökonomischer und ökologischer Leichtbau mit faserverstärkten Polymeren*. Expert-Verlag, Sindelfingen.
- Nilsson, K.F. und Storakers, B. (1990):** ‘On interface crack growth in composite plates’, *Journal of Applied Mechanics*, 530–538.
- Ochoa, O.O. und Reddy, J.N. (1992):** *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- Ogden, R.W. (1984):** *Non-Linear Deformations*. Ellis Horwood, Chichester.
- Ortiz, M. (1985):** ‘A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete’, *Mechanics of Materials*, **4(1)**, 67–93.

- Ortiz, M. und Popov, E. (1985):** 'Accuracy and stability of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 1561–1576.
- Ortiz, M. und Simo, J.C. (1986):** 'An Analysis of a new class of algorithms for elasto-plastic constitutive relations', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**, 353–366.
- Ottosen, N.S. und Runesson, K. (1991):** 'Properties of discontinuous bifurcation solutions of elasto-plasticity', *International Journal of Solids & Structures*, **27**, 401–421.
- Pagano, N.J. (1978):** 'Stress fields in composite laminates', *International Journal of Solids and Structures*, **14**, 385–400.
- Pankaj, P., Arif, M. und Kaushik, S.K. (1999):** 'Convexity studies of two anisotropic yield criteria in principal stress space', *Engineering Computations*, **16/2**, 215–229.
- Park, W.J. (1982):** 'An optimal design of simple symmetric laminates under the first ply failure criterion', *Journal for Composite Materials*, **16**, 341–355.
- Peerlings, R.H.J. (1999):** *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Ph.D.-Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- Perzyna, P. (1966):** 'Fundamental problems in viscoplasticity', *Recent Advances in Applied Mechanics*, Vol. **9**, Academic Press, New York, 243–377.
- Perzyna, P. (1971):** 'Thermodynamic theory of viscoplasticity', *Recent Advances in Applied Mechanics*, Vol. **11**, Academic Press, New York, 313–354.
- Pietruszczak, S. und Mróz, Z. (1981):** 'Finite element analysis of deformation of strain-softening materials', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17**, 327–334.
- Pijaudier-Cabot, G. und Bazant, Z.P. (1987):** 'Nonlocal damage theory', *Journal of Engineering Mechanics*, **113**, 1512–1533.
- Pinsky, P.M. und Kim, K.O. (1984):** 'A multi-director formulation for elastic-viscoelastic layered shells', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**, 2213–2244.
- Pipes, R.B. und Pagano, N.J. (1970):** 'Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension', *Journal of Composite Materials*, **4**, 538–544.
- Puck, A. (1992):** 'Praxisgerechte Bruchkriterien für hochbeanspruchte Faser-Kunststoff-Verbunde', *Kunststoffe*, **82**, 149–155.
- Puck, A. (1996):** *Festigkeitsanalyse an Faser-Matrix-Laminaten: Realistische Bruchkriterien und Degradationsmodelle*. Hanser, München.
- Rabotnov, Y.N. (1963):** 'On the equations of state for creep', in: *Progress on applied mechanics – The Prager anniversary volume*, Mac Millan, New York, 307–315.
- Rabotnov, Y.N. (1968):** 'Creep rupture', in: *Proc. 12th International Congress of Applied Mechanics*, Stanford.
- Rammerstorfer, F.G., Dorninger, K. und Starlinger, A. (1992):** 'Composite and sandwich shells', in: Rammerstorfer, F.G. (eds.), *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*, CISM, Courses and Lectures, No. 328, Springer-Verlag, Wien, S.131–194.
- Rammerstorfer, F.G., Dorninger, K. und Starlinger, A. (1994):** 'Combined micro- and macromechanical considerations of layered composite shells', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2609–2629.
- Raniecki, B. und Bruhns, O.T. (1981):** 'Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **29**, 153–172.
- Reddy, J.N. und Pandey, A.K. (1987):** 'A first-ply failure analysis of composite laminates', *Computers & Structures*, **25**, 371–393.
- Rice, J.R. und Rudnicki, J.W. (1980):** 'A note on some features of the theory of localization of deformation', *International Journal of Solids and Structures*, **16**, 597–605.
- Rinderknecht, S. (1999):** *Delamination in Faserverbundplatten - Ein vereinfachtes Berechnungsmodell*. Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.

- Roehl, D. (1994):** *Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua*. Dissertation, Bericht Nr. 16, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Roehl, D. und Ramm, E. (1996):** ‘Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept’, *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 3215–3237.
- Rots, J.G., Nauta, P., Kusters, G.M.A. und Blaauwendraad, J. (1985):** ‘Smearred crack approach and fracture localization in concrete’, *HERON*, **30(1)**, 1–48.
- Saadatmanesh, H., Ehsani, M.R. und Jin, L. (1996):** ‘Seismic strengthening of circular bridge pier models with fiber composites’, *American Concrete Institute Structural Journal*, **93(6)**, 639–647.
- Schellekens, J.C.J. (1992):** *Computational Strategies for Composite Structures*. Ph.D.-Dissertation, Department of Civil Engineering/TNO Institute for Building Materials and Structure, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Schellekens, J.C.J. und de Borst, R. (1990):** ‘The use of the Hoffman yield criterion in finite element analysis of anisotropic composites’, *Computers & Structures*, **37**, 1087–1096.
- Schellekens, J.C.J. und de Borst, R. (1994):** ‘Free edge delamination in carbon-epoxy laminates: A novel numerical/experimental approach’, *Composite Structures*, **28**, 357–373.
- Schipperen, J.H.A. (2001a):** *Computational Modelling of Failure in Fibre Reinforced Plastic*. Ph.D.-Dissertation, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- Schipperen, J.H.A. (2001b):** ‘An anisotropic damage model for the description of transverse matrix cracking in a graphite-epoxy laminate’, *Composite Structures*, **53**, 295–299.
- Schultz, R. (1996):** *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen*. Dissertation, Mitteilung Nr. 96–3, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Schreyer, H.L., Kulak, R.L. und Kramer, J.M. (1979):** ‘Accurate numerical solutions for elastic-plastic models’, *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, **101**, 226–234.
- Schreyer, H.L. und Neilsen, M.K. (1996):** ‘Analytical and numerical tests for loss of material stability’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 1721–1736.
- Seible, F., Priestly, M.J.N., Hagemier, G.A. und Innamorato, D. (1997):** ‘Seismic retrofit of reinforced concrete columns with continuous carbon fiber jackets’, *Journal of Composites for Construction*, **1(2)**, 52–62.
- Sidoroff, F. (1981):** ‘Description of anisotropic damage application to elasticity’, in: Hult, J., Lemaître, J. (eds.), *Physical Non-linearities in Structural Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 237–244.
- Simo, J.C. und Hughes, T.J.R. (1998):** *Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics*. Vol. 7, Springer-Verlag, New York, Inc.
- Simo, J.C. und Ju, J.W. (1987):** ‘Strain- and stress based continuum damage models: Part I – Formulation, Part II – Computational aspects’, *International Journal of Solids and Structures*, **23**, 821–869.
- Simo, J.C. und Taylor, R.L. (1985):** ‘Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **48**, 101–118.
- Simo, J.C. und Taylor, R.L. (1986):** ‘A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**, 649–670.
- Simo, J.C., Kennedy, J.G. und Govindjee, S. (1988):** ‘Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity: Loading/unloading conditions and numerical algorithms’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 2161–2185.
- Simo, J.C., Kennedy, J.G. und Taylor, R.L. (1989):** ‘Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **74**, 177–206.
- Skrna-Jakl, I. und Rammerstorfer, F.G. (1993):** ‘Numerical investigation of free edge effects in integrally stiffened layered composite panels’, *Composite Structures*, **25**, 129–137.

- Skrzypek, J.J. und Ganczarski, A. (1999):** *Modeling of Material Damage and Failure of Structures: Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- Sluys, L.J. (1992):** *Wave Propagation, Localization and Dispersion of Softening Solids*. Ph.D.-Dissertation, Delft University of Technology Press.
- Sluys, L.J. und Wang, W.M. (1998):** ‘Macroscopic modelling of stationary and propagative instabilities’, in: de Borst, R., van der Giessen, E. (eds.), *Material Instabilities in Solids*, John Wiley & Sons, New York, 489–505.
- Sluys, L.J. und de Borst, R. (1994):** ‘Dispersive properties of gradient-dependent and rate-dependent media’, *Mechanics of Materials*, **18**, 131–149.
- Sprenger, W (2000):** *Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, Bericht Nr. 6, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe.
- Stanovsky, J. (1985):** ‘A criterion for ascertaining the strength of composite materials’, *Computers & Structures*, **20**, 387–390.
- Stein, E. und Barthold, F.-J. (1996):** ‘Elastizitätstheorie’, in: Mehlhorn, G. (Hrsg.), *Der Ingenieurbau – Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, Ernst&Sohn-Verlag, Berlin, S.165–434.
- Steiner, K.V. (1992):** ‘Detect classifications in composite using ultrasonic nondestructive evaluation techniques’, in: Masters, J.E. (eds.), *Damage Detection in Composite Materials*, ASTM, Philadelphia, 72–84.
- Stiftinger, M.A. (1996):** *Semi-Analytical Finite Element Formulations for Layered Composite Shells with Consideration of Edge Effects*. Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 18, Nr. 203, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Stiftinger, M.A., Rammerstorfer, F.G. und Starlinger, A. (1996):** ‘Face layer wrinkling in anisotropic sandwiches’, in: Allen, H.G. (eds.), *Sandwich Construction 3*, Vol. I, EMAS, Warley, UK, 325–334.
- Strongwell (2002):** <http://www.strongwell.com> bzw. <http://www.strongwell.com/Special/bridges.htm>
- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. und Belytschko, T. (2000):** ‘Extended finite element method for three-dimensional crack modeling’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 1549–1570.
- Sun,C.T. und Zhu, C. (1998):** ‘Effect of deformation-induced change of fiber orientation on nonlinear behavior of polymeric composite laminates’, in: Davis, D.C. et al. (eds.), *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, ASME, Anaheim, California.
- Takahashi, K. und Chou, T.-W. (1987):** ‘Non-linear deformation and failure behavior of Carbon/Glass hybrid laminates’, *Journal of Composite Materials*, **21**, 396–420.
- Teßmer, J. (2000):** *Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschalen*. Dissertation, Bericht Nr. F00/3, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Tolson, S. und Zabaraz, N. (1991):** ‘Finite element analysis of progressive failure in laminated composite plates’, *Computers & Structures*, **38**, 361–376.
- Truesdell, C. und Noll, W. (1965):** *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Encyclopedia of Physics, Vol III/3 (Ed. S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin.
- Truesdell, C. und Toupin, R. (1960):** ‘The classical field theories’, in: Flügge, S. (Hrsg.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, Springer-Verlag, Berlin.
- Tsai, S.W. (1968):** ‘Strength theories of filamentary structures’, in: Schwartz, R.T., Schwartz, H.S. (eds.), *Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites*, Wiley Interscience, New York, 3–11.
- Tsai, S.W. (1984):** ‘A survey of macroscopic failure criteria for composite materials’, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **3**, 40–62.
- Tsai, S.W. und Wu, E.M. (1971):** ‘A general theory of strength for anisotropic materials’, *Journal of Composite Materials*, **5**, 58–80.
- Tsai, S.W. und Hahn, H.T. (1980):** *Introduction to Composite Materials*. Technomic Publishing Inc., Lancaster, Pennsylvania.

- USCAR(2002):** <http://www.uscar.org/techno/carbonfib.htm>
- Vinson, J.R. und Chou, T.-W. (1975):** *Composite Materials and Their Use in Structures*. Applied Science Publisher Ltd., London.
- De Vree, J.H.P., Brekelmans, W.A.M. und van Gils, M.A.J. (1995):** ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’, *Computers and Structures*, **55**, 581–588.
- Wang, S.S. und Choi, I. (1982):** ‘Boundary layer effects in composite laminates: Part I – Free edge singularities: Part II – Free edge solutions and basic characteristics’, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **49**, 541–548, 549–560.
- Wang, A.S.D., Slomiana, M. und Bucinell, R.B. (1995):** ‘Delamination crack growth in composite laminates’, in: Johnson, W.S. (eds.), *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM, Philadelphia, 135–167.
- Wang, M.W., Sluys, L.J. und de Borst, R. (1997):** ‘Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 3839–3864.
- Weihe, S. (1995):** *Modelle der fiktiven Rissbildung zur Berechnung der Initiierung und Ausbreitung von Rissen*. Dissertation, Bericht Nr. 09-95, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Willam, K.J. (1984):** ‘Experimental and computational aspects of concrete fracture’, in: Damjanic, F., Hinton, E., Owen, D.R.J., Bicanic, N., Simovic, V. (eds.), *Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, 33–69.
- Willam, K.J. (1998):** ‘Deterioration analysis of materials and structures’, in der Vorlesung ‘*Nichtlineare Strukturanalyse und Finite Elemente*’, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Vorlesungsmaterial.
- Willam, K.J., Pramono, E. und Sture, S. (1987):** ‘Fundamental issues of smeared crack models’, in: Shah, S.P., Swartz, S.E. (eds.), *International Conference on Fracture of Concrete and Rock*, SEM/RILEM, Houston, Texas, 142–153.
- Willam, K.J., Münz, T., Etse, G. und Menétrey, P. (1994):** ‘Failure conditions and localization in concrete’, in: Bicanic, N., de Borst, R., Mang, H. (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, EURO-C, Pineridge Press, Swansea, 263–282.
- Willam, K.J., Hansen, E. und Kang, H.D. (2001):** ‘Performance evaluation of damage and plasticity formulations for concrete’, in: Shing, P.B., Tanabe, T. (eds.), *Proceedings of the US-Japan Seminar on Post-Peak Behavior of Reinforced Concrete Structures subjected to Seismic Loads*, ASCE Special Publication of Modeling of Inelastic Behavior of RC Structures under Seismic Loads, ASCE Reston VA, 1–19.
- Yazdani, S. und Schreyer, H.L. (1988):** ‘An anisotropic damage model with dilatation for concrete’, *Mechanics of Materials*, **7(3)**, 231–244.
- Zhang, S.Y. (1998):** ‘A new model for the energy release rate of fibre/matrix interfacial fracture’, *Composites Science and Technology*, **58**, 163–166.
- Zhou, S.G. und Sun, C.T. (1990):** ‘Failure analysis of composite laminates with free edge’, *Journal of Composites Technology and Research*, **12(2)**, 91–97.

# Anhang

## A Tensorrechnung

- Darstellung eines Vektors in ko- und kontravarianter Basis

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i \quad (\text{A.1})$$

- Dyadisches Produkt zweier Vektoren

$$\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \quad , \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) \quad (\text{A.2})$$

- Darstellung eines Tensors zweiter Stufe in ko- und kontravarianter Basis

$$\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (\text{A.3})$$

- Darstellung eines Tensors n-ter Stufe in ko- und kontravarianter Basis

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \mathbf{g}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n} = T_{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}^{i_1} \otimes \mathbf{g}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{i_n} \quad (\text{A.4})$$

- Skalarprodukt zweier Vektoren (einfache Verjüngung)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i \quad (\text{A.5})$$

- Skalarprodukt zweier Tensoren zweiter Stufe (doppelte Verjüngung)

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} : \mathbf{T} = S_{ij} T^{ij} \quad (\text{A.6})$$

- Einfache Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe durch einen Vektor

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = T^{ij} u_j \mathbf{g}_i \quad , \quad \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} = u_i T^{ij} \mathbf{g}_j \quad (\text{A.7})$$

- Doppelte Verjüngung zweier Tensoren vierter Stufe

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{S} : \mathbf{T} &= (S_{ijkl} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l) : (T_{mnop} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}^o \otimes \mathbf{g}^p) \\ &= S_{ijkl} T_{mnop} g^{im} g^{jn} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^o \otimes \mathbf{g}^p \\ &= S^{mn}_{kl} T_{mnop} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^o \otimes \mathbf{g}^p = R_{klop} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^o \otimes \mathbf{g}^p \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

- Produktregel

$$\text{div} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{S}^T : \text{grad} \mathbf{u} + (\text{div} \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

- Gauß'scher Integralsatz (Divergenztheorem;  
Umwandlung von Volumen- in Flächenintegrale)

$$\int_V \text{div} \mathbf{S} \, dV = \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{A.10})$$

$$\int_V \text{div} \mathbf{u} \, dV = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{A.11})$$

- Partielle Integration

$$\int_V \text{grad } \mathbf{u} : \mathbf{P} \, dV = \int_A \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dA - \int_V \mathbf{u} \cdot \text{div } \mathbf{P} \, dV \quad (\text{A.12})$$

- Gradient eines Feldes bezüglich des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{T} = \text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{u}_{,\mathbf{x}} \quad (\text{A.13})$$

- Divergenz eines Feldes bezüglich des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{u} = \text{div } \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta^k} \cdot \mathbf{g}^k = \mathbf{T}_{,k} \cdot \mathbf{g}^k \quad (\text{A.14})$$

- Vierstufiger Einheitstensor  $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = I_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{für } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.15})$$



## B Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung in der Elastoplastizität

Die „freie Helmholtz-Energie“  $\Psi$  lässt sich additiv in einen elastischen, reversiblen und einen plastischen, irreversiblen Anteil zerlegen (siehe Gleichung (4.2))

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}) = \Psi_{el}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}) + \Psi_{pl}(\boldsymbol{\kappa}) \quad . \quad (4.2)$$

Dabei definiert man die spezifische Verzerrungsenergie  $\Psi_{el}$  über die zweifache doppelte Verjüngung des Materialtensors  $\mathbf{C}^{el}$  mit den elastischen Verzerrungen  $\mathbf{E}^{el}$  (Gleichung (4.3))

$$\Psi_{el}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) \quad , \quad (4.3)$$

während der plastische Anteil  $\Psi_{pl}$  dem Integral des Evolutionsgesetzes (Gleichung (4.4)) entspricht:

$$\Psi_{pl}(\boldsymbol{\kappa}) = \int_0^{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{q}(\bar{\boldsymbol{\kappa}}) \, d\bar{\boldsymbol{\kappa}} \quad . \quad (4.4)$$

Die „Clausius-Duhem-Ungleichung“ ( $D = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi} \geq 0$ ) benötigt bei der Auswertung nach Coleman und Noll (1963) bzw. nach Coleman und Gurtin (1967) die Ratenform der freien Energie  $\dot{\Psi}$ . Bei additiver Zerlegung in elastische und plastische Anteile gilt:

$$\dot{\Psi} = \dot{\Psi}_{el} + \dot{\Psi}_{pl} \quad . \quad (B.1)$$

Die Ratenformen lassen sich dabei wie folgt angeben:

$$\dot{\Psi}_{el} = \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{E}^{pl}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} \quad \text{und} \quad \dot{\Psi}_{pl} = \frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \quad , \quad (B.2)$$

mit

$$\frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) \quad , \quad \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{E}^{pl}} = -\mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) \quad , \quad -\frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{q} \quad . \quad (B.3)$$

Eingesetzt in die „Clausius-Duhem-Ungleichung“ schreibt sich diese:

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad . \quad (B.4)$$

Hieraus kann man den Spannungstensor  $\mathbf{S}$  als energetisch konjugierte Größe zum elastischen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}^{el}$  ableiten (vergleiche Gleichung (4.6))

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{el} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{el}} \quad . \quad (4.6)$$

Die verbleibende Dissipationsungleichung (Gleichung (4.7)) lautet dann:

$$D^{pl} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad . \quad (4.7)$$

## C Algorithmische elasto-plastische Materialtangente der Delaminationsplastizität

Die aktuellen Spannungen, die die Fließbedingung wieder erfüllen, lassen sich bei bekanntem plastischen Multiplikator  $\Delta\lambda_{n+1}$  nach Gleichung (7.18) zu

$$\mathbf{S}_{n+1} = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{C}^{el-1} \mathbf{S}_{n+1}^* \quad (\text{C.1})$$

berechnen, wobei für  $\boldsymbol{\Theta}$  nach Gleichung (4.50) und hier im Speziellen nach Gleichung (7.19) gilt:

$$\boldsymbol{\Theta} = \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta\lambda_{n+1} \frac{1}{q(\kappa_{n+1})} \mathbf{P} \right]^{-1}. \quad (\text{7.19})$$

Die Prädiktorspannungen  $\mathbf{S}_{n+1}^*$  können auch durch die aktuellen Gesamtverzerrungen  $\mathbf{E}_{n+1}$  und den zum Zeitpunkt  $t_n$  bekannten plastischen Verzerrungen  $\mathbf{E}_n^{pl}$  als

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^* &= \mathbf{S}_n + \Delta\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{C}^{el}(\mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n^{pl}) + \mathbf{C}^{el}\Delta\mathbf{E}_{n+1} \\ &= \mathbf{C}^{el}(\mathbf{E}_n + \Delta\mathbf{E}_{n+1}) - \mathbf{C}^{el}\mathbf{E}_n^{pl} = \mathbf{C}^{el}(\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ausgedrückt werden. Somit ergeben sich die aktuellen Spannungen mit

$$\mathbf{S}_{n+1} = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}). \quad (\text{C.3})$$

Ziel ist es nun, eine Beziehung zwischen den Ratenformen der Spannungen und der Verzerrungen unter Berücksichtigung sämtlicher zeitlicher Abhängigkeiten herzuleiten. Es muss also die zeitliche Ableitung in der folgenden Art gebildet werden:

$$d(\mathbf{S}_{n+1}) = d \left[ \left[ \mathbf{C}^{el-1} + \Delta\lambda_{n+1} \frac{1}{q(\kappa_{n+1})} \mathbf{P} \right]^{-1} (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}) \right]. \quad (\text{C.4})$$

Dabei bezeichnet  $d(\dots)$  das totale Differenzial der Größe  $(\dots)$ . Es lässt sich damit die zeitliche Ableitung der Spannungen in Abhängigkeit der Verzerrungsrate und der Rate des plastischen Multiplikators wie folgt schreiben:

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} d\mathbf{E} + \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right) d\lambda \right\}_{n+1}. \quad (\text{C.5})$$

Alternativ kann Gleichung (C.5) auch in der folgenden Form dargestellt werden:

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} + \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right) \frac{d\lambda}{d\mathbf{E}} \right\}_{n+1} d\mathbf{E}_{n+1}. \quad (\text{C.6})$$

Der Klammerausdruck entspricht dabei gerade der algorithmischen elasto-plastischen Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} + \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right) \frac{d\lambda}{d\mathbf{E}} \right\}_{n+1}. \quad (\text{C.7})$$

Allerdings ist  $C_{n+1}^{ep,algo}$  noch von dem Ratenverhältnis des plastischen Multiplikators mit den Verzerrungen  $d\lambda/d\mathbf{E}$  abhängig. Durch die Auswertung der Konsistenzbedingung kann  $d\lambda/d\mathbf{E}$  berechnet werden.

Die in der algorithmischen elasto-plastischen Materialtangente verwendeten Gradienten berechnen sich zu

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \left( C^{el-1} + \Delta\lambda \frac{1}{q(\kappa)} \mathbf{P} \right)^{-1} = \boldsymbol{\Theta} \right\}_{n+1}, \quad (\text{C.8})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} &= -\boldsymbol{\Theta} [\boldsymbol{\Theta}^{-1}]_{,\Delta\lambda} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{E} = -\frac{1}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{E} \\ &= -\frac{1}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P} \mathbf{S} = -\frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \end{aligned} \right\}_{n+1}, \quad (\text{C.9})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} &= -\boldsymbol{\Theta} [\boldsymbol{\Theta}^{-1}]_{,q} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{E} = \frac{\Delta\lambda}{q(\kappa)^2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{E} \\ &= \Delta\lambda \frac{f(\mathbf{S})}{q(\kappa)^2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \end{aligned} \right\}_{n+1}, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} = H = \begin{cases} \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \kappa} = -\bar{S}_{33}^t \mu & \text{für } 0 \leq \kappa \leq \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\tau} - \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\mu \bar{S}_{33}^t} \right] \\ \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial \kappa} = -(\bar{S}_{33}^t - \bar{S}_{33,\infty}^t) \tau \mu \\ \exp \left[ \tau - 1 - \ln(\tau) - \kappa \tau \mu + \ln \left( \frac{\bar{S}_{33}^t}{\bar{S}_{33}^t - \bar{S}_{33,\infty}^t} \right) - \tau \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\bar{S}_{33}^t} \right] \\ \text{für } \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\tau} - \frac{\bar{S}_{33,\infty}^t}{\mu \bar{S}_{33}^t} \right] < \kappa < \infty . \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Gleichung (C.6) lässt sich mit den eben vorgestellten Gradienten dann wie folgt ausdrücken:

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left\{ \left[ \boldsymbol{\Theta} + \left( -\frac{f}{q} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} + \Delta\lambda \frac{f}{q^2} H \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \right) \frac{d\lambda}{d\mathbf{E}} \right] \right\}_{n+1} d\mathbf{E}_{n+1}. \quad (\text{C.12})$$

Zur Berechnung des Gradienten  $d\lambda/d\mathbf{E}$  wird die Konsistenzbedingung

$$d(F(\mathbf{S}, q)) = 0 \quad (\text{C.13})$$

ausgenutzt, wobei Folgendes zu beachten ist: Die Spannungen sind vom plastischen Multiplikator und von den Verzerrungen abhängig, während die äquivalente Spannung nur vom plastischen Multiplikator abhängt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\Delta\lambda, q(\kappa(\Delta\lambda)), \mathbf{E}) \quad ; \quad q = q(\kappa(\Delta\lambda)) \quad . \quad (\text{C.14})$$

Die totale Ableitung der Fließfunktion bestimmt sich somit mit

$$\begin{aligned} dF_{n+1} = \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right) d\lambda + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} d\lambda \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} d\mathbf{E} \right\}_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

und lässt sich nach  $d\lambda/d\mathbf{E}$

$$\left. \frac{d\lambda}{d\mathbf{E}} \right|_{n+1} = \left\{ - \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}}{\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda}} = - \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}}{\frac{dF}{d\lambda}} \right\}_{n+1} \quad (\text{C.16})$$

auflösen. Mit dem Gradienten der Fließfunktion nach den Spannungen (Gleichung (7.15))

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n+1} = \frac{1}{f(\mathbf{S}_{n+1})} \mathbf{P} \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1} \quad (\text{7.15})$$

und den vorherigen Gradienten  $\partial \mathbf{S}/\partial \mathbf{E}$ ,  $\partial \mathbf{S}/\partial \Delta\lambda$ ,  $\partial \mathbf{S}/\partial q$ ,  $\partial F/\partial q$  und  $\partial q/\partial \Delta\lambda$  folgt für den Gradienten  $d\lambda/d\mathbf{E}$ :

$$\left. \frac{d\lambda}{d\mathbf{E}} \right|_{n+1} = \left\{ \frac{\mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta}}{\left( 1 - \Delta\lambda \frac{H}{q} \right) \frac{f}{q} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} + H} \right\}_{n+1} \quad . \quad (\text{C.17})$$

Gleichung (C.17) eingesetzt in (C.12) liefert dann

$$\left. \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{E}} \right|_{n+1} = \left\{ \boldsymbol{\Theta} - \frac{\frac{f}{q} \left( 1 - \Delta\lambda \frac{H}{q} \right) \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta}}{\left( 1 - \Delta\lambda \frac{H}{q} \right) \frac{f}{q} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} + H} \right\}_{n+1} \quad . \quad (\text{C.18})$$

Unter Berücksichtigung von  $f_{n+1} = q_{n+1}$  folgt für die algorithmische elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo}$

$$\left. \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{E}} \right|_{n+1} = \left\{ \boldsymbol{\Theta} - \frac{\boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta}}{\mathbf{n}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{n} + \frac{H}{1 - \Delta\lambda \frac{H}{q}}} \right\}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{ep,algo} \quad . \quad (\text{C.19})$$



## Lebenslauf

Name: *Matthias Ludwig Florian Hörmann*

Geburtsdatum: *13. Dezember 1971 in Oberstdorf*

Eltern: *Ludwig und Anneliese Hörmann, geb. Haslach*

Familienstand: *ledig*

1978 – 1982 *Besuch der Grundschule in Oberstdorf, Allgäu*

1982 – 1991 *Besuch des Gertrud-von-Le-Fort Gymnasiums in Oberstdorf, Allgäu*

Juni 1991 *Abitur*

1991 – 1992 *12-monatiger Grundwehrdienst in Sonthofen, Allgäu*

1992 – 1997 *Studium des Bauingenieurwesens  
an der Universität Stuttgart*

Mai 1997 –  
Oktober 1997 *6-monatiger Auslandsaufenthalt zur Anfertigung der  
Diplomarbeit in San Diego, Californien, USA*

Oktober 1997 *Abschluss als Diplom-Ingenieur (mit Auszeichnung)*

Juli 1998 *Emil-Mörsch-Studienpreis 1998 für besondere Studienleistungen*

November 1997 –  
Dezember 2002 *angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*

seit Februar 2003 *Berechnungsingenieur bei der Firma CAD-FEM GmbH*



## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.



- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.

- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2002) D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.



Universität Stuttgart

ISBN 3-00-010896-3