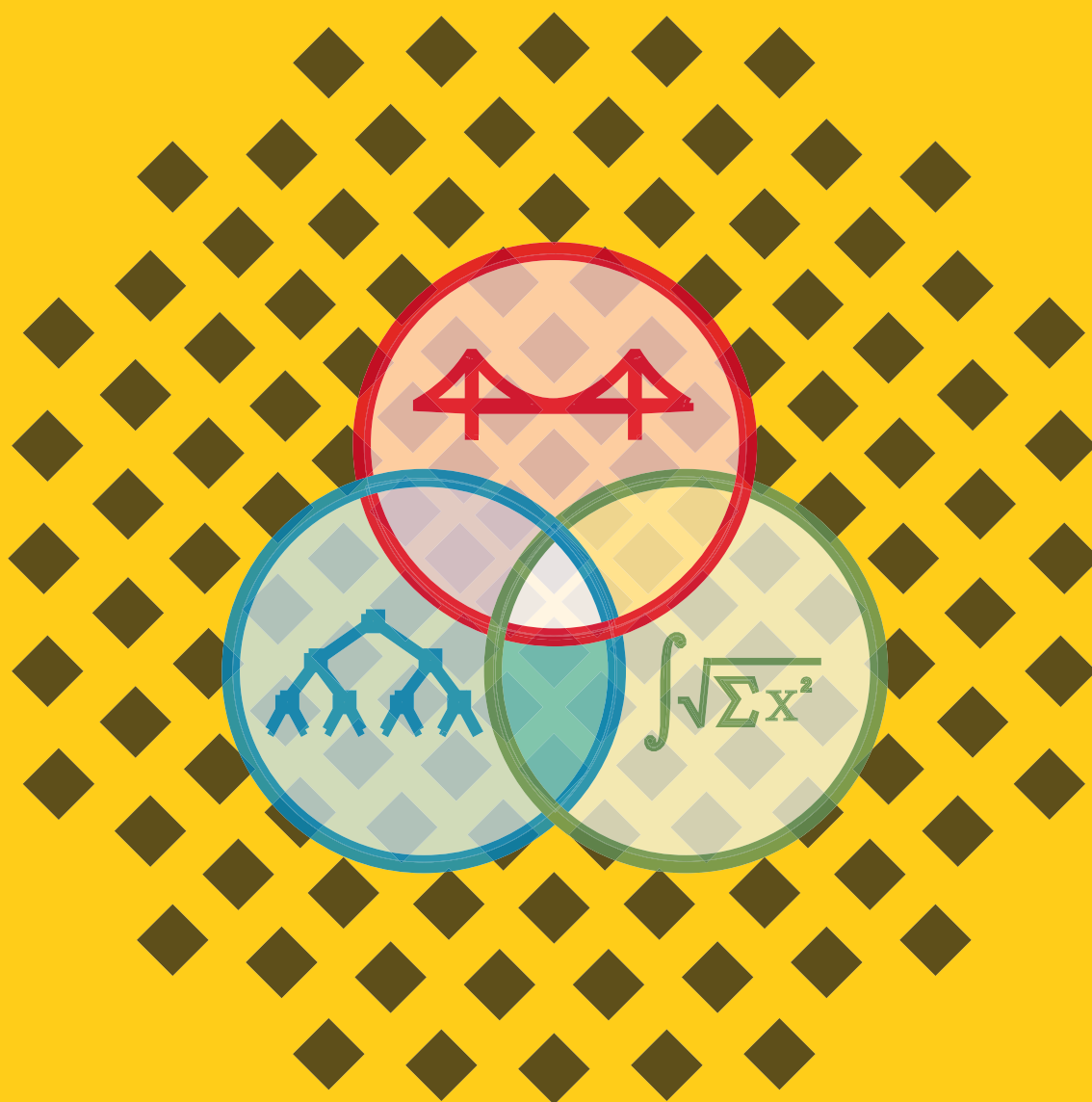


# Geometrische Modellierung mit Simplizialkomplexen

Vom CAD-Modell zur numerischen Analyse

Martin Bernreuther





# Geometrische Modellierung mit Simplizialkomplexen

Vom CAD-Modell zur numerischen Analyse

von

Martin Bernreuther

Bericht Nr. 1  
Informationsverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau  
Prof. Dr.-Ing. Stefan M. Holzer  
Stuttgart 2002



©Martin Bernreuther

*Berichte können bezogen werden über:*

Informationsverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: (0711) 685-7048

Fax.: (0711) 685-6602

<http://www.uni-stuttgart.de/iv-kib/>

bzw.

<mailto:martin@bernreuther.net>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

Der Satz wurde mit pdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X erstellt.

# **Geometrische Modellierung mit Simplizialkomplexen**

**Vom CAD-Modell zur numerischen Analyse**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der  
Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Martin Bernreuther**

aus Illerkirchberg

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Stefan M. Holzer
Mitberichter:	Prof. Dr. habil. Hans-Joachim Bungartz
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Rainer Helmig

Tag der mündlichen Prüfung:	18. Juli 2002
-----------------------------	---------------

Fachgebiet Informationsverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau  
der Universität Stuttgart  
Stuttgart 2002



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand in der Zeit von 2000 bis 2002 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Stuttgart am Fachgebiet *Informationsverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau*.

Besonderen Dank möchte ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Holzer aussprechen. Seine Offenheit für neue Ideen und meine Freiheit in der Umsetzung und Ausarbeitung machten die Arbeit in dieser Form erst möglich. Der Gedankenaustausch durch zahlreiche Diskussionen und seine Unterstützung während der gesamten Bearbeitungszeit trugen wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei. Der Kontakt war auch nach seinem Wechsel an die Universität der Bundeswehr in München im Jahre 2001 außerordentlich gut. Einen großen Dank geht auch an Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans-Joachim Bungartz. Er nahm sich die Zeit für manche Diskussion und die Beantwortung meiner Fragen. Das entgegengebrachte Interesse an diesem Thema und seine kritischen Fragen waren ebenso hilfreich. Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Rainer Helmig möchte ich für die Übernahme des Mitberichts danken.

Dank auch an die ehemaligen Kollegen Oliver Hoffmann, Carsten Riker und Kai Schwebke für die gute Arbeitsatmosphäre und kollegiale Unterstützung. Besonders in einem Fachgebiet ohne Professor und weitere Mitarbeiter ist für den reibungslosen Arbeitsablauf auch die Arbeit der studentischen Hilfskräfte nicht zu unterschätzen. Einen Dank an alle HiWis und insbesondere an Herrn cand.-Ing. Rosenbusch, der noch bis zur Auflösung am Fachgebiet beschäftigt war. Eine Universität lebt von der Interdisziplinarität. Besonders den Kollegen von der Fakultät Mathematik und Informatik möchte ich für die Offenheit und das mir entgegengebrachte Verständnis danken.

Der Kontakt zu Kollegen an anderen Universitäten, der über das Forum Bauinformatik und anderer Arbeitstreffen auch persönlich zustande kam, ist ebenfalls wichtig. Herrn Kruschwitz aus Berlin danke ich für die Übersendung

seiner Dissertation und Herrn Milbradt aus Hannover für eine Vorversion seiner Habilitationsschrift. Einen Dank für Einladungen zu Arbeitstreffen und die damit verbundenen Diskussionen gehen an Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Beucke von der Bauhaus-Universität Weimar und Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Rank von der Technischen Universität München.

Auf dem langen Weg von der Schule über das Studium bis hin zur Promotion war die Unterstützung durch meiner Eltern besonders wertvoll. Sie waren all die Jahre immer für mich da und haben mir geholfen, wo immer sie konnten. Ein Dank geht auf diesem Weg auch an sie. Meinem Bruder Dietmar, einem angehenden Informatiker, danke ich für die kritischen Bemerkungen in Bezug auf diese Arbeit.

Nicht zuletzt bedanken möchte ich mich bei meiner Frau Daniela. Das Korrekturlesen war sicher nicht leicht und ohne Ihre Mithilfe bei der Betreuung unseres Sohnes Kai wäre sicherlich keine Dissertation zustande gekommen.



FÜR DANIELA & KAI  
UND MEINE ELTERN



## Zusammenfassung

Im Zentrum steht die geometrische Modellierung eines Körpers als Grundlage für numerische Berechnungsverfahren, die sich auf elliptische partielle Differentialgleichungen gründen. Hierzu wird die geometrische Modellierung mit Simplizialkomplexen untersucht. Die Zielsetzungen, die mit einer Volumenmodellierung verbunden sind, beeinflussen die Umsetzung einer Lösung in erheblichen Maße. Deshalb werden zunächst die Modelle eingeführt, welche für die numerischen Berechnungsverfahren eine Rolle spielen. Ein großer Teil der Arbeit widmet sich den nötigen Grundlagen aus dem Gebiet der Mathematik. Während die Topologie vor allem für die Volumenmodellierung wichtig ist, hat die Interpolation auch in der Numerik einen hohen Stellenwert. Partielle Differentialgleichungen, die ebenfalls kurz abgehandelt werden, bilden den Kern vieler Ingenieurprobleme. Um eine Form der geometrischen Modellierung beurteilen zu können, muß sie mit alternativen Verfahren verglichen und beurteilt werden. Der Simplizialkomplex basiert auf einer DELAUNAY-Triangulierung, die in einem separaten Kapitel behandelt wird. Zum Abschluß wird ein auf einem DELAUNAY-Simplizialkomplex aufbauender Hybridmodellierer vorgestellt.

## Abstract

The main topic is the geometric modeling of a solid for numerical methods dealing with elliptic partial differential equations. For this purpose geometric modeling with simplicial complexes will be examined. The objective addressed with solid modeling have a big influence on the design of a solution. Therefore the models used in the numerical methods are introduced. A substantial part of the work is related to necessary fundamentals in the field of mathematics. Whereas topology is mostly important for solid modeling, interpolation also plays an important role in numerics. There are a lot of problems in engineering related to partial differential equations, which are also mentioned. To rate a method of geometric modeling the comparison and review of known methods in this field is needed. The simplicial complex is based on a DELAUNAY triangulation, which is the topic of another chapter. Finally a hybrid modeler based on DELAUNAY simplicial complexes is presented.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	2
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modelle</b>	<b>5</b>
2.1	CAD Modell . . . . .	6
2.2	Physikalisch/mathematisches Modell . . . . .	7
2.3	Numerisches Modell . . . . .	7
2.4	Ergebnismodell . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Topologie und Geometrie</b>	<b>11</b>
3.1	Graphentheorie . . . . .	12
3.2	Räume . . . . .	17
3.2.1	Topologische Räume . . . . .	17
3.2.2	Metrische Räume . . . . .	21
3.2.3	Lineare Räume . . . . .	23
3.2.4	EUKLIDScher Vektorraum . . . . .	24
3.2.5	Mannigfaltigkeiten . . . . .	25
3.2.6	Projektive Räume . . . . .	27
3.3	Simplexe . . . . .	31
3.3.1	Schwerpunkt . . . . .	33
3.3.2	Umsphäre . . . . .	34
3.4	Zellkomplexe . . . . .	41
3.4.1	Simpliziale Komplexe . . . . .	41
3.4.2	CW-Komplexe . . . . .	43
3.5	Homotopie . . . . .	44
3.6	Simpliziale Homologie . . . . .	47
3.7	Topologische Invarianten . . . . .	53
3.7.1	EULERSche Charakteristik . . . . .	53
3.7.2	BETTI-Zahlen . . . . .	53
3.8	Polyeder . . . . .	56

<b>4</b>	<b>Interpolation</b>	<b>63</b>
4.1	Polynome . . . . .	63
4.2	LAGRANGE-Interpolation . . . . .	64
4.3	BÉZIER-Techniken . . . . .	66
4.3.1	BERNSTEIN-Polynome . . . . .	66
4.3.2	BÉZIER-Kurven . . . . .	67
4.3.3	BÉZIER-Techniken für simpliziale Topologien . . . . .	71
4.3.4	Rationale BÉZIER-Kurven . . . . .	73
4.4	Splineinterpolation . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>77</b>
5.1	Typen von Differentialgleichungen . . . . .	77
5.2	Elliptische partielle Differentialgleichungen . . . . .	79
5.3	Variationsformulierung . . . . .	80
5.4	Diskretisierung . . . . .	81
5.5	Methode der finiten Elemente . . . . .	82
5.6	Generalisierte Finite Elemente Methode . . . . .	86
5.7	Netzfremde Methoden . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Geometrische Modellierung</b>	<b>91</b>
6.1	Beurteilungskriterien . . . . .	93
6.2	Regularisierte Mengenoperatoren . . . . .	94
6.3	Syntaktische Modellierung . . . . .	96
6.4	Direkte Darstellung eines Körpers . . . . .	98
6.4.1	Normzellen . . . . .	98
6.4.2	Spacetrees . . . . .	100
6.4.3	Binäre Raumaufteilung . . . . .	104
6.4.4	Allgemeine Zellzerlegungen . . . . .	105
6.5	Implizite Modellierung . . . . .	106
6.5.1	Implizite Darstellung von Halbräumen . . . . .	107
6.5.2	Implizitisierung einer Kurve bzw. Fläche in Parameterdarstellung . . . . .	108
6.5.3	BOOLEsche Operatoren für implizite Modellierung . . . . .	112
6.6	Indirekte Darstellung eines Körpers . . . . .	116
6.6.1	Zellinzidenzgraph . . . . .	116
6.6.2	Datenstrukturen . . . . .	118
6.7	Hybride Modellierer . . . . .	120
6.8	Anmerkung zur Geschichte . . . . .	121

<b>7</b>	<b>Algorithmen zur Punktlokalisierung</b>	<b>123</b>
7.1	Algorithmen . . . . .	123
7.1.1	Auswahlkriterien . . . . .	124
7.2	Datenstrukturen für Punkte-Mengen . . . . .	125
7.2.1	Punkte-k-d-Baum . . . . .	125
7.2.2	Punkte-Spacetree . . . . .	127
7.3	Punkt-Lokalisierung in einer Triangulierung . . . . .	128
7.3.1	Lineare Suche . . . . .	128
7.3.2	Gerichtete geometrische Suche . . . . .	128
7.3.3	Verbesserte und spezialisierte Suchtechniken . . . . .	135
<b>8</b>	<b>DELAUNAY-Triangulation</b>	<b>139</b>
8.1	VORONOI-Diagramme . . . . .	139
8.2	Topologie . . . . .	144
8.2.1	DELAUNAY-Graph . . . . .	144
8.2.2	DELAUNAY-Simplizialkomplex . . . . .	144
8.2.3	Zugrundeliegender topologischer Raum . . . . .	148
8.3	Geometrie . . . . .	151
8.3.1	Umsphärenbedingung . . . . .	151
8.3.2	Winkelbedingung im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	152
8.3.3	„Infront“-Ordnungsrelation . . . . .	154
8.4	Konstruktion . . . . .	154
8.4.1	Einfügen eines Punktes . . . . .	154
8.4.2	Löschen eines Punktes . . . . .	158
8.5	Konforme DELAUNAY-Triangulierungen . . . . .	159
8.5.1	DELAUNAY-Triangulierungen mit Zwangsbedingungen . . . . .	159
8.5.2	Verfeinerung der DELAUNAY-Triangulierung . . . . .	161
8.6	Algorithmische Umsetzung . . . . .	164
8.6.1	Übersicht . . . . .	164
8.6.2	Inkrementelle Algorithmen . . . . .	166
8.6.3	Lokalisierung in einer DELAUNAY-Triangulierung . . . . .	167
8.6.4	Einfügen von Punkten . . . . .	172
8.6.5	Löschen von Punkten . . . . .	176
8.6.6	Software-Entwurf . . . . .	176
<b>9</b>	<b>Simpliziale Modellierung</b>	<b>183</b>
9.1	Simpliziale Modellierung . . . . .	183
9.1.1	Direkte Darstellung . . . . .	184
9.1.2	Indirekte Darstellung . . . . .	184
9.1.3	Modellierung des Raums . . . . .	184
9.1.4	Bewertung . . . . .	187

9.1.5	Anwendungen . . . . .	187
9.2	Konstruktives Vorgehen . . . . .	190
9.2.1	Extrusion . . . . .	190
9.2.2	Schnitt . . . . .	192
9.2.3	CSG-Konstruktion . . . . .	193
9.3	Software-Entwurf . . . . .	194
9.4	Algorithmische Umsetzung . . . . .	197
9.4.1	BOOLEsche Operatoren . . . . .	197
9.4.2	Bestimmung von Verschneidungen . . . . .	198
9.4.3	Konforme Triangulierung . . . . .	201
9.4.4	Vergrößerung . . . . .	202
9.5	Berücksichtigung gekrümmter Ränder . . . . .	203
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>205</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzende Kapitel</b>	<b>207</b>
A.1	EULER-Operatoren . . . . .	207
A.1.1	Beispiele zur Konstruktion mit EULER-Operatoren . . . . .	209



# Kapitel 1

## Einleitung

Vor der Umsetzung eines Projektes steht dessen Planung und konstruktive Durchbildung. Der Ingenieur muß sich schon vorher ein Bild der neu zu erschaffenden Konstruktion machen. Komplexe Zusammenhänge werden hierbei vereinfacht, um das Wesentliche nicht aus den Augen zu verlieren. Die *Modellierung* bietet dem Ingenieur eine von unwichtigen Details abstrahierende Sichtweise auf das System und stellt deshalb ein Kernthema dar. Bei der Erschaffung neuer virtueller Welten ebenso wie beim Bau einer Modelleisenbahn — im Vordergrund steht zunächst einmal ein geometrisches Modell<sup>1</sup>. Auch bei der Berechnung physikalischer Phänomene spielt die Geometrie der betrachteten Körper oft eine herausragende Rolle. Neben der Geometrie sind in der Mechanik die Gesetzmäßigkeiten des Materialverhaltens wichtig. Für die konstitutiven Gleichungen werden üblicherweise analytische Funktionen herangezogen (s. [Ber00]). Sind diese unbekannt, kann z. B. analog zum Gehirn, das Zusammenhänge intuitiv erfaßt, mit Hilfe von *Neuronalen Netze* eine Approximation der Zusammenhänge erreicht werden (s. [Ber98]). Am Ende dieses Schrittes steht ein weiteres formales Modell. Dieses mathematisch geprägtes Modell führt auf ein zu lösendes Gleichungssystem. Das Ergebnis der Berechnungen wird vom Ingenieur beurteilt. Änderungen machen weitere Berechnungen nötig. Der iterative Prozess, der zu Verbesserung des Entwurfs führt, entspricht einer Optimierung.

**Eine Kette ist so stark wie ihr schwächstes Glied**

Dieses Sprichwort kann in diesem Zusammenhang auf mehrere Aspekte übertragen werden. Die Modellierung abstrahiert und macht durch Vereinfachungen gewisse Fehler. Es macht wenig Sinn, diese Fehler für einen Modellierschritt zu betrachten und zu minimieren, um die „Kette“ an einer Stelle stark

---

<sup>1</sup> Das geometrische Modell induziert ein topologisches Modell.

zu machen. Eine numerische Berechnung, die sich z. B. für einen Körper auf eine falsche Geometrie stützt und das Materialverhalten immer genauer wiedergibt (oder umgekehrt), liefert auch bei einem hohen Aufwand falsche Ergebnisse. Für eine computergestützte Konstruktion und Fertigung ist auch die Verzahnung der einzelnen Arbeitsschritte und Methoden wichtig. Das geometrische Modell bildet die Basis und zieht sich durch eine Vielzahl von Modellen. Eine Minimierung der Berechnungszeit eines numerischen Verfahrens wird kaum wahrgenommen, wenn die Eingabe der Geometrie des Körpers um Größenordnungen mehr Zeit beansprucht. Jedem Teilschritt ist Beachtung zu widmen. Die geometrische Modellierung spielt sicherlich eine besonders wichtige Rolle.

## 1.1 Problemstellung

Das geometrische Modell muß bei einem computerorientierten Vorgehen im Rechner gespeichert werden. Die Anforderungen an die geometrische Modellierung werden von den Anwendungen vorgegeben. Die Arbeit beschäftigt sich mit geometrischer Modellierung für numerische Verfahren, die sich auf elliptische partielle Differentialgleichungen stützen. Beispiele hierfür sind die Berechnung von Spannungen oder Wärmeverteilungen in Körpern unter vorgegebenen äußeren Beanspruchungen. Das geometrische Modell sollte sich nahtlos in die verwendeten numerischen Verfahren einfügen. Zudem muß es flexibel genug sein, denn Anforderungen gängiger Anwendungen gerecht zu werden.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich grob in drei Teile:

- mathematische Grundlagen (Kapitel 3–5)
- Grundlagen aus der Informatik (Kapitel 6,7)
- Umsetzung einer Problemlösung (Kapitel 2,8,9)

Die Bauinformatik stellt ein Bindeglied zwischen Mathematik, Informatik und Ingenieurwesen her. Die vorliegende Arbeit spiegelt dies wieder und ist in der Schnittmenge dieser Gebiete für das Themengebiet *geometrische Modellierung* angesiedelt. Die einzelnen Kapitel behandeln folgende Schwerpunkte:

**Kapitel 2:** Darstellung der Modelle, die in der vorliegenden Arbeit von Bedeutung sind. Die Anforderungen für ein geometrisches Modell werden hierdurch deutlich.

**Kapitel 3:** Auf die mathematische Grundlagen wird in den Folgekapiteln referenziert und Notationen übernommen. Die Topologie erfährt im Ingenieurwesen keine besondere Beachtung. Geometrische Modelle gründen sich auf topologische. Die Topologie und Geometrie sind somit wichtig für die Validierung und Umsetzung von Lösungen.

**Kapitel 4:** Die Interpolation ist eine wichtige Grundlage sowohl für numerische Verfahren, als auch der Darstellung von Freiformflächen in der Computergeometrie.

**Kapitel 5:** Partielle Differentialgleichungen stellen eine wichtige Problemgruppe im Ingenieurwesen dar, für die numerische Verfahren und Lösungen betrachtet werden.

**Kapitel 6:** Um Vor- und Nachteile von gängigen Methoden zur geometrischen Modellierung besser abwägen zu können, werden diese gegenübergestellt und bewertet.

**Kapitel 7:** Kriterien zur Bewertung von Algorithmen werden vorgestellt. In den Folgekapiteln wird auf allgemeinen Grundalgorithmen der computergestützten Geometrie aufgebaut, die hier besprochen und durch Modifikationen angepaßt werden.

**Kapitel 8:** DELAUNAY-Simplizialkomplexe erfüllen besondere Kriterien. Neben den Eigenschaften werden auch Algorithmen zur Erzeugung präsentiert.

**Kapitel 9:** Eine besondere Form der geometrischen Modellierung und insbesondere die softwaretechnische Umsetzung bilden den Kern der Arbeit.

**Kapitel 10:** Das Schlußwort fasst die wichtigsten Punkte zusammen und zeigt das zu erwartende Potential der Methode für die Zukunft auf.

Im Anhang finden sich noch ergänzende Kapitel, die Teilaspekte ausführlicher darstellen.



# Kapitel 2

## Modelle

Der folgende Ausschnitt aus einer Definition des aus dem Lateinisch stammenden Wortes *Modell* ist [dD90, S. 507] entnommen:

Mo|dell [lat.-vulgärlat.-it.] das; -s,  
-e: [...]

7. vereinfachte Darstellung der Funktion eines Gegenstands od. des Ablaufs eines Sachverhalts, die eine Untersuchung od. Erforschung erleichtert od. erst möglich macht.  
[...]

Als Motivation ein Modell zu erstellen, finden sich unter [RBP<sup>+</sup>93, S. 19] folgende Beispiele:

- Testen einer physikalischen Entität, bevor sie gebaut wird.
- Kommunikation mit Kunden
- Visualisierung
- Verringerung der Komplexität

Im Ingenieurwesen stellt ein Modell im Vergleich zum Original üblicherweise eine Vereinfachung dar. Wichtig ist die spezielle Fragestellung, die ein Modell beantworten soll. Hier soll es, trotz Vereinfachung, eine möglichst gute Verhaltenstreue aufweisen. Anhand einer Simulation am Modell können auch Voraussagen zu Eigenschaften des Originals gemacht werden. Die Äquivalenz des Modells in für die Fragestellung relevanten Punkten ist entscheidend für alle weiteren Schritte. Das kommt auch in den Modellierungsprinzipien in [BRJ99, S. 8ff] zum Ausdruck:

- Die Auswahl der zu erstellenden Modelle hat starken Einfluss darauf, wie ein Problem angegangen und gelöst wird.
- Jedes Modell kann in unterschiedlichen Präzisionsgraden ausgedrückt werden.
- Die besten Modelle haben einen Realitätsbezug.
- Ein einzelnes Modell ist nie ausreichend. Jedem nichttrivialen System nähert man sich am besten durch eine kleine Menge fast unabhängiger Modelle.

Im Gegensatz zum Modellbau, der greifbare Modelle schafft, werden in den Naturwissenschaften auch abstrakte Modelle eingesetzt, die sich z. B. durch math. Formeln ausdrücken. Ein Ziel der Informatik ist es in diesem Zusammenhang, Modelle im Computer abzubilden.

Schon in einem frühen Stadium der Entwurfsphase eines Projekts werden Modelle angefertigt, die einen ersten Eindruck von dem Vorhaben geben sollen. Techniken der Visualisierung und der „Virtual Reality“ machen es möglich dies ausschließlich am Computer durchzuführen. Die Beschreibung eines Körpers anhand von Datenstrukturen ist hier von zentraler Bedeutung.

Im folgenden werden Modelle dargestellt, die für die computerunterstützte Strukturmechanik besonders wichtig sind:

- Physikalisch/mathematisches Modell (mechanisches Modell)
- numerisches (Diskretisierungs-)Modell
- Ergebnismodell

Da die Ergebnisse üblicherweise grafisch dargestellt werden müssen, schließt sich hier ein Visualisierungsmodell an. Das physikalisch/mathematische Modell wird aus einem Entwurfsmodell generiert. Die eigentliche Konstruktion erfolgt anhand eines CAD Modells.

## 2.1 CAD Modell

Das „Computer Aided Design“ ist ein Teilbereich des „Computer Aided Engineering“. Während bei einfache Systeme des „Computer Aided Drafting“ noch nicht von Modellierung gesprochen werden konnte, wird vom CAD-Konstrukteur heute am Rechner ein Objekt modelliert. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf der Topologie und Geometrie. Von zentraler Bedeutung

ist also das Geometriemodell (s. [Goe92, S. 111ff]). Die i. a. dreidimensionale Struktur muß im Rechner dargestellt werden. Grundlage und wichtiger Teilbereich des CAD ist somit die geometrische Modellierung (s. 6 auf Seite 91). Auch Materialbeschaffenheit, sowie fertigungstechnische Besonderheiten können modelliert werden. Das CAD-Modell ist z. B. Basis für Visualisierung, computergestützte Berechnung oder automatisierte Fertigung durch NC-Maschinen.

## 2.2 Physikalisch/mathematisches Modell

Das physikalisch/mathematische Modell basiert auf einer volumen-, flächen- oder linienförmiger Struktur, die meist aus einem CAD-Modell stammt. Zudem müssen die auf eine Oberfläche oder den Körper bezogenen Randbedingungen, wie Auflagerbedingungen oder angreifende Kräfte im Rechner abgebildet werden.

Vor der Umsetzung dieses Problems im Sinne der Informatik steht die mathematische Beschreibung. Gegeben sei ein *Gebiet*  $\Omega$ . Der *Rand*  $\partial\Omega$  des Gebietes wird mit  $\Gamma$  bezeichnet. Das betrachtete Gebiet stellt ein Teilgebiet eines Gesamtgebietes dar. Die Schnittstelle zum Gesamtgebiet bildet der Rand. Die *Randbedingungen* idealisieren das Verhalten des Gebietes am Rand. Neben der geometrischen Beschreibung ist auch eine Modellierung des Materialverhaltens für eine strukturmechanische Berechnung erforderlich. Die konstitutiven Gleichungen setzen ein physikalisches Verhalten in mathematische Formeln um.

Die Umsetzung der Realität in ein mathematisch/physikalisches Modell ist eine Ingenieurleistung und nicht eindeutig. Dabei wird i. a. ein möglichst einfaches Modell gewählt, welches das Phänomen noch möglichst gut beschreibt. Im Bauingenieurwesen ist hierbei oft eine Reduktion der Dimensionen möglich. Die Einteilung in linien- und flächenförmige als auch irreduzierbar dreidimensionale Bauteile führt zu der Theorie der Stabwerke, Scheiben und Platten sowie des 3D Kontinuums, wie in Tabelle 2.1 dargestellt. Ebenso muß ein geeignetes Materialmodell gewählt werden (s. z. B. Tab. 2.2).

Die Beschreibung des Problems soll aber unabhängig vom gewählten Berechnungsverfahren erfolgen.

## 2.3 Numerisches Modell

Das physikalisch/mathematische Modell liefert für Probleme der Strukturmechanik meist eine partielle Differentialgleichung, die auf einem beliebigen

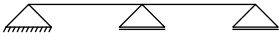
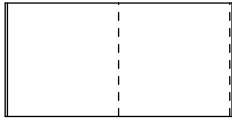
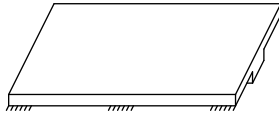
1D	2D	3D
		
Balkentheorie nach BERNOULLI, TIMOS- HENKO	Plattentheorie nach KIRCHHOFF, REISSNER-MINDLIN	3D Kontinuumstheorie

Tabelle 2.1: Dimensionsabhängige physikalisch/mathematische Modellierung

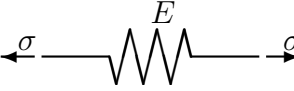
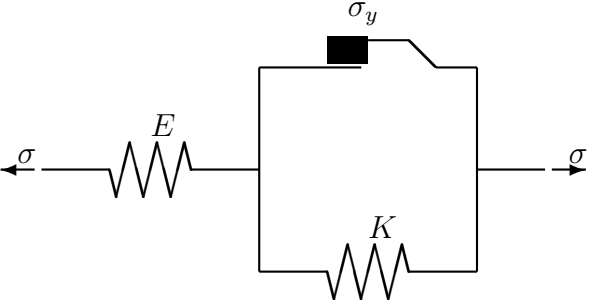
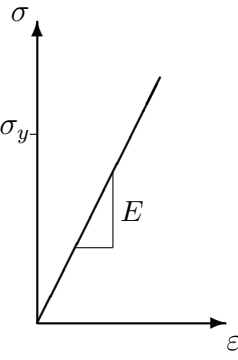
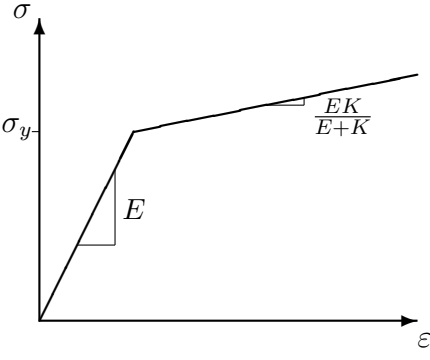
	lineare Elastizität	ratenunabhängige Plastizität mit Verfestigung
Rheologisches Modell		
Spannungs- /Dehnungs- Beziehung		

Tabelle 2.2: Materialmodelle



Gebiet  $\Omega$  i. a. nicht geschlossen gelöst werden kann. Zur Lösung werden numerische Näherungsverfahren eingesetzt, die den Lösungsraum diskretisieren. Dies erfolgt zum einen geometrisch, indem das Gebiet zerlegt wird und zum anderen durch die Wahl einer diskreten Anzahl von Basis-Funktionen. Das hieraus hervorgehende *Diskretisierungsmodell* muß ebenfalls im Rechner erzeugt und dargestellt werden. Die Wahl des Diskretisierungsmodells erfolgt weitestgehend automatisiert. Durch eine einzelne Berechnung kann bei einem numerischen Modell kein Fehler abgeschätzt werden. Ein adaptiver Prozeß bestimmt die bestmögliche Verfeinerung des Modells und gibt eine obere Schranke für den Fehler in einer Norm an.

## 2.4 Ergebnismodell

In der Ingenieurpraxis wird ein Gebiet  $\Omega$  verschiedenen Randbedingungen unterworfen. Ein Gebäude wird z. B. durch Eigen-, Verkehrs-, Wind- und Schneelasten belastet. Während die Eigenlasten immer vorhanden sind, können andere Lasten in Kombinationen auftreten. In den in der Praxis meist durchgeführten linearen Berechnungen ist es möglich, die Ergebnisse der Berechnungen der einzelnen Lastfälle zu überlagern. Eine solche Lastfall-Superposition entspricht der Addition oder Subtraktion der einzelnen Ergebnisse an einer Position. Werden die Berechnungen, einer adaptiven Strategie folgend, mit unterschiedlichen Diskretisierungen durchgeführt, ist es vorteilhaft, ein übergeordnetes Modell zur einheitlichen Speicherung der Daten zu verwenden. Hier sind Interpolationstechniken gefragt, um auch Ergebniswerte schnell annähern zu können, die nicht direkt gespeichert sind.

Eine weitere Verwendung erfährt dieses übergeordnete Modell in der Speicherung der Materialgeschichte bei Berechnungen mit inkrementeller Plastizität. Anstatt diese Daten bei einer Neuvernetzung auf das neue Netz zu interpolieren, werden sie von Anfang an dort gespeichert.



# Kapitel 3

## Topologische und geometrische Grundlagen

Dieses Kapitel stellt die Grundlagen der Topologie und angrenzende Themen für die weitere Arbeit zusammen und legt die verwendeten Notationen fest. Eine ausführliche Darstellung ist in allgemeinen Werken wie [Zei96, GZZZ95, PD00] oder fachspezifischer Literatur, die in den einzelnen Abschnitten aufgeführt werden, zu finden.

Die *Graphentheorie* stellt einen Teilbereich der Topologie dar und ist ein im Ingenieurwesen und in der Informatik gängiges Instrument um Beziehungen zwischen Objekten zu modellieren. Die Literatur zur Topologie selbst läßt sich in zwei Gruppen aufteilen:

**mengentheoretische Topologie:** Die *mengentheoretische Topologie*, die auch als *allgemeine Topologie* bezeichnet wird, beschreibt durch den topologischen Raum eine Art „Nähe“ von Elementen einer Menge zueinander ohne einen (geometrischen) Abstand zu definieren. Hierzu dient der Begriff der „Umgebung“. Die Festlegung der Umgebungen definiert Räume. Detaillierte Beschreibungen finden sich in [Arm83, Jän99, Sch69].

**algebraische Topologie:** Die *algebraische* oder *kombinatorische Topologie* baut auf Strukturen auf. Von zentraler Bedeutung sind Mannigfaltigkeiten, Zellkomplexe, Invarianten von Körpern und Abbildungen. Diese Themen sind in [BE86, ES92, tom91, Mas91, SZ94] dargestellt.

### 3.1 Graphentheorie

Grundlagen und Beweise zur Graphentheorie sind in [Har74, Wil76, Vol91, MTYS94, Jun94, Die00]) aufgeführt. Zum Verständnis folgt eine kleine Einführung in dieses Themengebiet.

**Graphen:** Ein *Graph* besteht aus zwei endlichen Mengen  $(V, E)$ :

- $V(G)$  ist die Menge der *Knoten* des Graphen  $G$ .
- $E(G)$  ist die Menge der Kanten des Graphen  $G$ . *Kanten* sind Paare von Knoten aus  $V$ , welche die Endknoten der Kante definieren. Die Endknoten sind *inzident* mit der Verbindungskante und *adjazent* bzw. benachbart zueinander.

Bei *ungerichteten* Graphen enthält  $E$  ungeordnete Paare von Knoten. Falls *Mehrfachkanten* ausgeschlossen sind, ist  $E$  ein Mengensystem mit Mengen von jeweils zwei Knoten. Mehrfachkanten sind mehrere Kanten zwischen zwei Punkten und charakterisieren einen *Multigraphen*.

Für *gerichtete* Graphen bzw. *Digraphen*<sup>1</sup> werden die Kanten durch geordnete Paare von Knoten definiert. Jede dieser gerichteten Kanten ist somit eindeutig ein *Anfangs-* und ein *Endknoten* zugeordnet. Kanten mit gleichem Anfangs- und Endpunkt werden als *parallele Kanten* bezeichnet. Existieren keine parallele Kanten, ist die Menge  $E$  eine zweistellige Relation mit  $E \subseteq V \times V$ . Der Anfangsknoten ist der *Vorgänger* des Endknotens und der Endknoten der *Nachfolger* des Anfangsknotens. Eine Kante mit gleichem Anfangs- und Endknoten ist eine *Schlinge*. Ein Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen ist ein *schlichter* Graph. Im Gegensatz hierzu läßt ein *Pseudograph* beides zu. Ungerichtete Graphen können durch gerichtete Graphen modelliert werden, indem eine Kante des ungerichteten Graphen zwei entgegengesetzten Kanten des gerichteten Graphen gleichgesetzt wird. Wird jeder Kante ein Wert oder Tupel zugeordnet, erhält man einen *bewerteten* Graphen.

**Teilgraphen:** Für einen *Teilgraphen*  $H$  eines Graphen  $G$ , der in diesem Zusammenhang als *Obergraph* bezeichnet wird, ist  $V(H) \subseteq V(G)$  und  $E(H) \subseteq E(G)$ . Für den Fall, daß  $V(H) = V(G)$  heißt  $H$  *aufspannender* Teilgraph. Sind für  $V(H) \subseteq V(G)$  alle Kanten von  $G$  enthalten, die inzident zu einem Knoten aus  $V(H)$  sind, so ist  $H$  *Untergraph* von  $G$ .

---

<sup>1</sup>„Digraph“ steht für „directed graph“

**Graphenisomorphismus:** Kann jedem Knoten aus  $V(H)$  ein Knoten aus  $V(G)$  und jeder Kante aus  $E(H)$  eine Kante aus  $E(G)$  bijektiv zugeordnet werden, so sind die Graphen  $G$  und  $H$  *isomorph*. Sie sind somit topologisch äquivalent.

**Visualisierung:** Ein Graph kann visualisiert werden, indem die Knoten als Punkte und die Kanten als Verbindungskurve auf einer Ebene dargestellt werden (s. 3.2). Die Lage der Punkte sowie die Art der Kurven sind beliebig.

**planare Graphen:** Falls es möglich ist den Graphen ohne sich überschneidende Kanten darzustellen, spricht man von einem *planaren* bzw. *plättbaren* Graphen (s. Abb. 3.2(b)). Jeder planare Graph kann durch gerade Kanten dargestellt werden [Har74, S. 116].

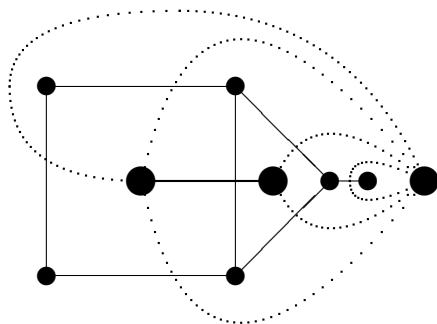


Abbildung 3.1: dualer Graph

**dualer Graph:** Gegeben sei ein planarer ungerichteter Graph. Die Knoten und Kanten bilden Flächen, wobei eine Kante zwei Flächen abgrenzt. Die äußere Umgebung ist ebenfalls eine solche Fläche. Für jede dieser Flächen existiert im dualen Graphen genau ein Knoten und für jede Kante genau eine Kante. Diese Kante verbindet die Knoten, die den abgegrenzten Flächen im Ausgangsgraphen zugeordnet sind. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 3.1 dargestellt.

**Matrixdarstellung:** Die Darstellung eines Graphen kann als Matrix erfolgen. Die *Adjazenzmatrix*  $A_{ij}$  des Graphen  $G$  hat für  $n$  Knoten  $V(G)$  die Dimension  $n \times n$ . Für jede Kante  $E(G)$  erfolgt ein Eintrag in der Matrix durch

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } \langle V_i, V_j \rangle \in E(G) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

Für ungerichtete Graphen wird eine Kante durch eine Menge von Knoten beschrieben und die Matrix ist immer symmetrisch. Gewichtete Graphen speichern die Wichtung als Eintrag, die ansonsten konstant 1 ist. Eine *Inzidenzmatrix*  $I_{ij}$  eines Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten  $V(G)$  und  $m$  Kanten  $E(G)$  hat die Dimension  $n \times m$  und erhält in jeder Spalte für jede Kante den Eintrag 1 für den Startknoten und den Eintrag  $-1$  für den Endknoten:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } V_i \text{ Startknoten von } E_j \\ -1 & \text{falls } V_i \text{ Endknoten von } E_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2)$$

Beim ungerichteten Graphen erhalten die Endknoten jeweils den Eintrag 1.

Die Matrizen sind oft dünn besetzt und in Computerprogrammen sind deshalb Felder als Datenstruktur nicht gut geeignet. Als Alternative können *Adjazenzlisten* in jedem Knoten die Nachbarknoten speichern, während bei der *Kantentabelle* zu jeder Kante der Anfangs- und Endknoten gespeichert wird.

**Grad:** Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der adjazenten Knoten bzw. inzidenten Kanten. Beim gerichteten Graphen kann zwischen der Anzahl der Kanten, die den Knoten als Endpunkt und den Kanten, die den Knoten als Anfangspunkt haben, differenziert werden. Man spricht hier von einem *Eingangsgrad* respektive *Ausgangsgrad*.

**Kantenzug, Weg, Kreis:** Gegeben sei eine Knotenfolge  $V_0, \dots, V_n$ . Durch  $(V_0, V_1), \dots, (V_{n-1}, V_n)$  ist die zugehörige Kantenfolge der Länge  $n$  definiert. Gilt für alle Kanten dieser Kantenfolge  $(V_i, V_{i+1}) \in E$ , so wird sie als *Kantenzug* bezeichnet. Falls jede Kante des Kantenzugs nur einmal durchlaufen wird spricht man von einem *Weg*. Ein geschlossener Weg mit identischem Anfangs- und Endknoten ist ein *Kreis* bzw. *Zyklus*. Bei einem *einfachen* Weg kommt jeder Knoten des Kantenzugs nur einmal vor. Beim einfachen Kreis sind ausschließlich der Anfangs- und Endpunkt identisch. Die Schlinge ist ein einfacher Kreis mit einer Kante.

**Zusammenhang:** Für einen zusammenhängenden Graphen existiert für zwei beliebige Knoten ein Kantenzug, der diese verbindet. Ist diese Voraussetzung bei gerichteten Graphen für einen gerichteten Kantenzug erfüllt, spricht man von einem *stark zusammenhängenden Graphen*.

*Einseitig zusammenhängend* ist er, falls für jedes beliebige Knotenpaar ein Knoten den anderen über einen gerichteten Kantenzug erreicht, aber nicht immer beide Richtungen möglich sind. Ein gerichteter Graph, dessen zugehöriger ungerichteter Graph zusammenhängend ist, wird als *schwach zusammenhängend* bezeichnet. Den *zugehörigen ungerichteten Graph* eines gerichteten Graphen erhält man, indem man jede gerichtete Kante durch eine ungerichtete ersetzt. Um keinen Multigraphen zu erhalten wird jede Mehrfachkante durch eine einzelne Kante ersetzt.

Ein zusammenhängender (Teil-)Graph wird als *Zusammenhangskomponente* bezeichnet. Ein nicht zusammenhängender Graph zerfällt somit in mehrere Zusammenhangskomponenten.

**EULERSCHE (Polyeder-)Formel:** Gegeben sei ein planarer Graph  $G(V, E)$  mit  $|V| = v$  und  $|E| = e$ . Dieser Graph teilt die Ebene in  $f$  Gebiete auf. Dann gilt [Har74, S. 113]:

$$v - e + f = 2 \quad (3.3)$$

**Beispiel:** Es sei mit

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

und

$$E(G) = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle a, e \rangle\}$$

ein gerichteter Graph  $G$  definiert, der in Abb. 3.2 dargestellt ist. Werden die Knoten und Kanten in der oben angeschriebenen Reihenfolge betrachtet, ergibt sich nach (3.1):

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und nach (3.2)

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

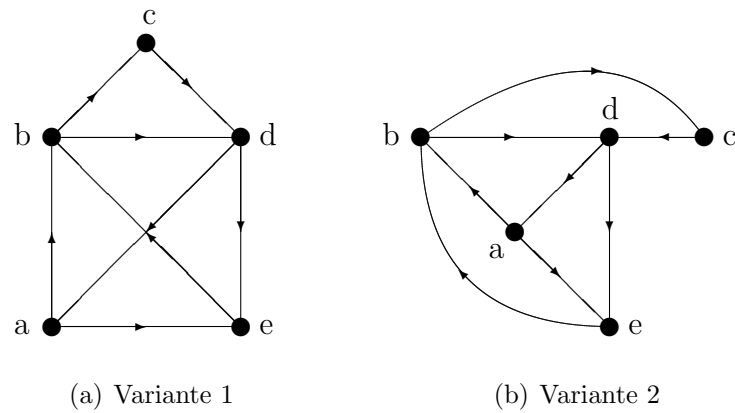


Abbildung 3.2: gerichteter Graph

Die EULERSche Formel (3.3) ist für den in Abb. 3.2(b) dargestellten Graphen durch

$$n - e + f = 5 - 8 + 5 = 2$$

erfüllt. Der Graph enthält einen Kreis, der alle Kanten genau einmal enthält<sup>2</sup>. Ein solcher Graph wird als *EULERScher Graph* bezeichnet.

**Hypergraphen** Das Konzept des Graphen kann durch Erweiterung der Kanten von Mengen aus zwei Knoten oder 2-Tupel zu *Hyperkanten*, die Mengen von  $n$  Knoten oder  $n$ -Tupel mit  $n \geq 2$  sind, verallgemeinert werden. Graphen und Hypergraphen sind durch die *Simplizialkomplexe* zusammengefaßt, die in Abschn. 3.4.1 behandelt werden. Der Graph ist hier zum 1-Simplizialkomplex bzw. 1-Gerüst äquivalent.

<sup>2</sup> Dieser EULERSche Kantenzug ist als „Das ist das Haus vom Nikolaus“ bekannt.



## 3.2 Räume

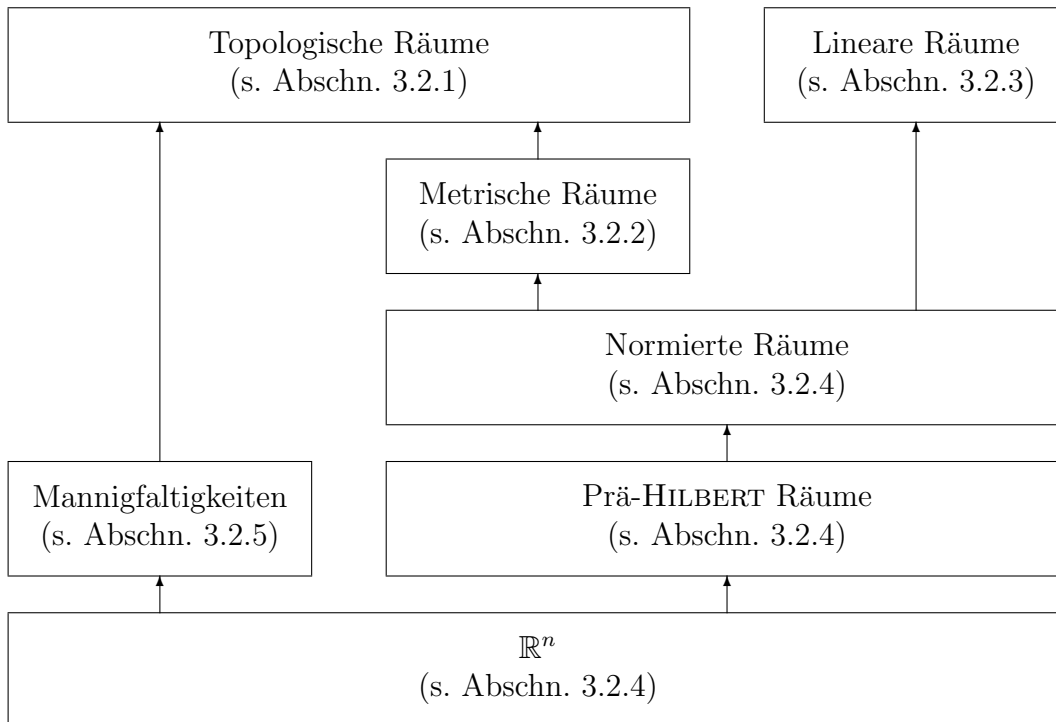


Abbildung 3.3: Übersicht über die im Kapitel vorkommenden Räume

### 3.2.1 Topologische Räume

Weiterführende Inhalte sind neben allgemeinen Werken zur Topologie in [Kow61, Con79] nachzulesen.

**Topologie:** Eine *Topologie* auf der Menge  $X$  ist ein Mengensystem von Teilmengen von  $X$ . Die Teilmengen werden *offene Mengen* genannt. Es müssen bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Die Menge  $X$  selbst und die leere Menge  $\emptyset$  sind offen.
2. Die Vereinigungsmenge beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.
3. Die Durchschnittsmenge endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

Eine Topologie auf der Trägermenge  $X$  stellt eine Teilmenge der Potenzmenge von  $X$  dar. Die größte Topologie, die nur  $\emptyset$  und  $X$  enthält, wird als *indiskrete Topologie* bezeichnet. Die *diskrete Topologie* ist durch die Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  gegeben. Die Elemente der offenen Mengen werden Punkte genannt.

Ein Beispiel einer Topologie kann einfach konstruiert werden indem man die Potenzmenge einer Teilmenge als Ausgangsbasis verwendet und die Menge selbst hinzufügt. Gegeben sei die Menge  $\{a, b, c\}$ . Eine Topologie ist z. B.  $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ . Die Voraussetzungen sind eingehalten, denn

1. die Menge selbst und die leere Menge  $\emptyset$  sind enthalten.
2. die Vereinigungsmenge beliebig vieler Elemente ist wieder enthalten, z. B.  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
3. die Durchschnittsmenge endlich vieler Elemente ist wieder enthalten, z. B.  $\{a\} \cap \{b\} = \{\}$

**Abgeschlossene Mengen:** Der Komplement einer offenen Menge ist eine *abgeschlossenen Menge* und umgekehrt. Eine Topologie kann analog zu den offenen Mengen auch auf Basis von abgeschlossenen Mengen definiert werden (s. [Jän99, S. 9]).

**topologischer Raum:** Der *topologischer Raum* ist das Paar einer Menge mit zugehöriger Topologie und beinhaltet somit offene Mengen.

**Umgebung:** Eine offene Menge, die einen Punkt  $p$  enthält, wird als *offene Umgebung* von  $p$  bezeichnet. Eine Menge, die eine dieser offenen Umgebungen enthält, heißt Umgebung  $U(p)$ .

**Trennbarkeit:** Falls zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen, ist der Raum *separiert*. Man spricht dann von einem **HAUSDORFF-Raum**, welcher das  $T_2$  Trennungaxiom erfüllt. Im weiteren werden ausschließlich separierte Räume verwendet.

**Inneres:** Das *Innere* einer Menge eines topologischen Raums ist die Vereinigungsmenge aller Umgebungen, die Teilmenge der Menge und Element der Topologie sind. Alle Punkte, die Element des Inneren einer Menge sind, heißen *innere Punkte*. Entsprechend gehört eine Umgebung eines inneren Punktes zur Menge. Das Innere (bzw. *offener Kern*) einer Menge int  $X$  ist die größte offene Menge, die in einer Menge enthalten ist.

**Rand:** Ein *Randpunkt* einer Menge eines topologischen Raums ist ein Punkt, bei dem jede Umgebung einen Punkt aus der Menge und einen Punkt außerhalb der Menge enthält. Ein Randpunkt muß nicht selbst Element der entsprechenden Menge sein. Der Rand  $\partial A$  der Menge  $A$  ist die Menge aller Randpunkte von  $A$ .

**Abschluß:** Die Vereinigungsmenge der Menge  $A$  mit ihrem Rand  $\partial A$  bildet den *Abschluß*  $\bar{A} := A \cup \partial A$  der Menge. Der Abschluß von  $A$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält.

**Äußeres:** Bei den *äußeren Punkten* einer Menge gehört eine Umgebung nicht zum Abschluß der Menge. Alle äußeren Punkte bilden das *Äußere* einer Menge.

**Zusammenhängende Mengen:** Eine Menge  $A$  ist dann *zusammenhängend*, wenn für zwei beliebige disjunkte, offene Teilmengen  $U, V$  mit  $U \cup V = A$  entweder  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$  folgt.  $A$  ist *bogenweise zusammenhängend*, falls zu zwei beliebigen Punkten der Menge stets eine stetige Verbindungskurve in  $A$  existiert. Eine zusammenhängende Menge, die keine echte Teilmenge einer zusammenhängenden Menge ist, heißt *Komponente*. Bei *einfach zusammenhängenden Mengen* kann jede geschlossene stetige Kurve in der Menge zu einem Punkt zusammengezogen werden.

**Teilräume:** Die Teilraumtopologie einer Teilmenge  $X_0$  der Trägermenge enthält ausschließlich Umgebungen die vollständig in  $X_0$  enthalten sind. Ein *Teilraum* setzt sich aus der Trägermenge und einer Teilraumtopologie zusammen.

**Summe von topologischen Räumen:** Die *topologische Summe* ergibt sich aus den Summen der Trägermengen und Umgebungen der beiden Ausgangsräumen. Als Summe zweier Mengen bezeichnet man ihre disjunkte Vereinigung, deren Kardinalität der Summe der Kardinalitäten der Operanden entspricht.

**Produkttopologie:** Das *Produkt* zweier topologischer Räume baut auf dem kartesischen Produkt der Trägermengen auf. Zwei Punkte der Produkttopologie sind sich „nahe“, wenn sie sich in den Ausgangsteilräumen „nahe“ sind [BE86, S. 145]. Geometrisch läßt sich das als Extrusion oder „sweeping“ deuten. Zwei linienartige orthogonale Räume werden zum Rechteck oder zwei kreisartige orthogonale Räume zur Kugel.

**Homöomorphismus:** Ein *Homöomorphismus*<sup>3</sup> oder *topologische Abbildung* ist eine bijektive Abbildung eines topologischen Raums in einen anderen, bei der sowohl die Abbildung als auch die Umkehrabbildung stetig sind. Existiert ein solcher Homöomorphismus sind die Räume *homöomorph* bzw. *topologisch äquivalent*.

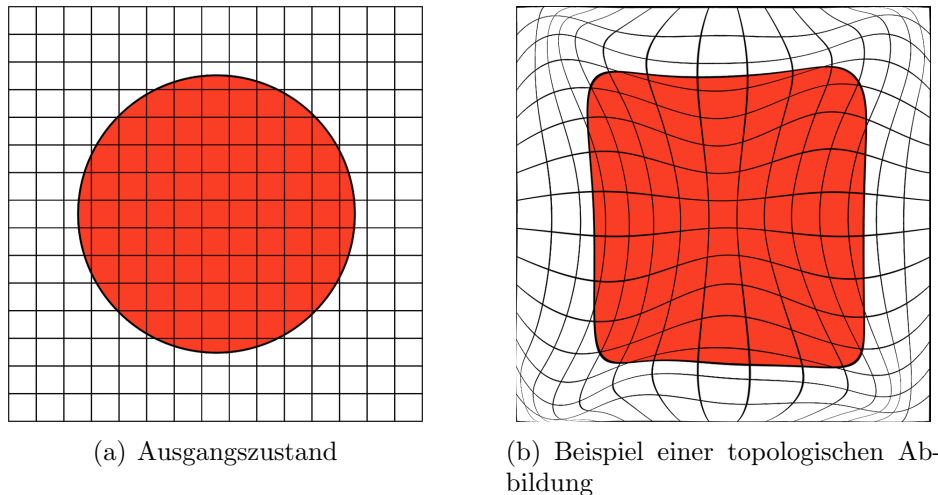


Abbildung 3.4: Gummituch-Topologie

In [MW76] wird zur Veranschaulichung ein Vergleich mit den elastischen Transformationen einer „Gummituch-Topologie“ gezogen. Hierbei stellt man sich ein gummiartiges Kontinuum vor, das elastisch deformiert werden kann. Erlaubt sind

- Verlängern/Verkürzen
- Verbiegen
- Umklappen
- Zerschneiden und Verformen, aber Schnittkante an derselben Stelle wieder anfügen. (Ansonsten ist ein Zerschneiden oder Anfügen nicht zulässig.)

Der letzte Punkt geht über die Möglichkeiten einer elastischen Verformung hinaus.

---

<sup>3</sup>nicht zu verwechseln mit Homomorphismus

### 3.2.2 Metrische Räume

Im *metrischen Raum* existiert ein *Abstand* zwischen zwei Punkten.

**metrischer Raum:** Eine nichtleere Menge von Punkten heißt *metrischer Raum*, falls zwei beliebigen Elementen  $u, v$  eine reelle Zahl  $d$ , die als *Abstand* bezeichnet wird, zugeordnet ist, für die gilt:

1.  $d(u, v) \geq 0$ ,  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
2. Symmetrie:  $d(u, v) = d(v, u)$
3. Dreiecksungleichung:  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Die leere Menge ist ebenfalls ein metrischer Raum.

Eine Möglichkeit der Definition des Abstands im reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  ist durch die MINKOWSKI- bzw.  $L_p$ -Metrik

$$d(u, v) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |u_i - v_i|^p} \quad (3.4)$$

gegeben.

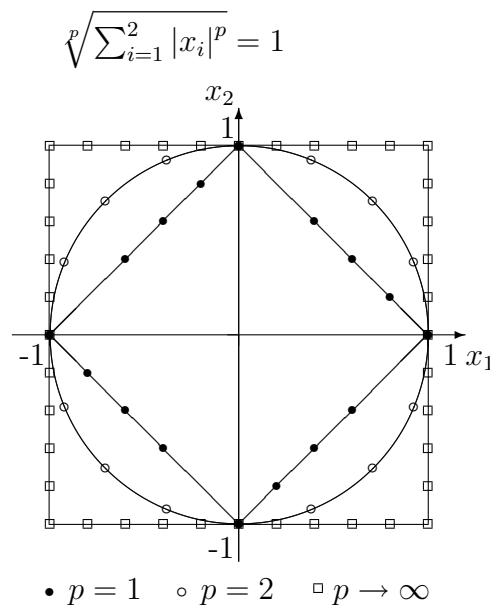


Abbildung 3.5: Einheitskreis um Ursprung in verschiedenen Metriken

- Für  $p = 2$  erhält man die *EUKLIDische Metrik*:

$$d(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \quad (3.5a)$$

Sie ist invariant gegenüber einer Rotation der Basis. Die EUKLIDische Metrik entspricht der Luftlinien-Entfernung und die gängigste Wahl im Ingenieurwesen. Die Einheitskugel entspricht anschaulich betrachtet der Kugel.

- Die Metrik mit  $p = 1$  wird als *Manhattan-Metrik* oder *City-Block-Metrik* bezeichnet <sup>4</sup>:

$$d(u, v) = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \quad (3.5b)$$

Im dreidimensionalen Raum entspricht die Form einer Einheitskugel mit dieser Metrik einem Oktaeder.

- Beim Bilden des Grenzwertes  $p \rightarrow \infty$  kann der Ausdruck der *Maximum-Metrik* gleichgesetzt werden:

$$d(u, v) = \max \{|u_i - v_i|\} \quad (3.5c)$$

Man erhält hier für die Einheitskugel im dreidimensionalen Raum eine Würfelform.

Aufgrund der Symmetriebedingung für Metriken müssen Einheitskugeln punktsymmetrisch zum Zentrum sein.

**Einheitskugel, -sphäre:** Die abgeschlossene,  $n$ -dimensionale *Einheitskugel* bzw. -kreisscheibe um den Ursprung ist durch

$$\mathbb{E}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

definiert, wobei die  $n - 1$ -dimensionale *Einheitssphäre*<sup>5</sup>

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

den Rand bildet. Abbildung 3.5 zeigt die vorgestellten Metriken anhand des Einheitskreises  $\mathbb{S}^1$ .

---

<sup>4</sup>Für den Namen ist das gitterartig strukturierte Straßennetz eines Stadtteils von New York verantwortlich. Eine Entfernung zwischen zwei Kreuzungspunkten berechnet sich als Summe der WO- und NS-Abstände.

<sup>5</sup> für  $n = 2$  spricht man von einem Einheitskreis

**$\varepsilon$ -Umgebung:** Die  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $u$  ist die Menge von Punkten im metrischen Raum  $X$ , die für eine Zahl  $\varepsilon > 0$  einen Abstand  $d < \varepsilon$  von  $u$  haben:

$$U_\varepsilon(u) := \{v \in X \mid d(u, v) < \varepsilon\}$$

Die  $\varepsilon$ -Umgebung entspricht dem Umgebungsbegriff des topologischen Raums.

**Topologie:** Eine *offene Menge* eines metrischen Raums ist eine Menge von Punkten, für die jeweils eine Umgebung existiert, die zur Menge gehört. Hierdurch wird eine Topologie definiert und somit ist ein metrischer Raum ein separierter topologischer Raum.

### 3.2.3 Lineare Räume

Ein *linearer Raum* definiert eine *Linearkombination*  $\alpha u + \beta v$  zweier Elemente. Endlichdimensionale lineare Räume bilden die Grundlage für das *Matrizenkalkül*. Sie werden deshalb auch als *Vektorräume* bezeichnet.

Die einzelnen Vektoren bzw. Punkte, werden als  $n$ -Tupel  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  reeler (oder komplexer) Zahlen  $x_i$  dargestellt. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich reelle lineare Räume verwendet. Die Zahlen des  $n$ -Tupels werden als *Koordinaten*<sup>6</sup> bezeichnet.

**linearer Raum:** Eine nichtleere Menge von Punkten heißt *linearer Raum*, falls mit beliebigen Punkten  $u, v, w$  und reellen (bzw. komplexe) Zahlen  $\alpha, \beta$  durch Additions- und skalare Multiplikationsoperationen neue Elemente gebildet werden können, für die gilt:

- Addition:
  1. Kommutativität:  $u + v = v + u$
  2. Assoziativität:  $(u + v) + w = u + (v + w)$
  3. Es existiert ein eindeutig bestimmtes
    - (a) Nullelement  $o$ :  $u = u + o$
    - (b) Inverses Element  $-u$ :  $u + (-u) = o$
- Multiplikation:
  1. Distributivität:  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ,  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
  2. Assoziativität:  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

---

<sup>6</sup> Koordinaten wurden als kartesische Koordinaten von René Descartes eingeführt.

3.  $1u = u$ 

**linearer Unterraum:** Ein *linearer Unterraum* ist die Teilmenge eines Raumes, der selbst ein linearer Raum ist. Wird zu einem linearen Unterraum, bzw. zu den enthaltenen Punkten, ein Vektor addiert<sup>7</sup>, so erhält man eine *lineare Untermannigfaltigkeit*.

**lineare Hülle:** Eine *lineare Hülle*  $\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$  ist die Menge aller Linearkombinationen  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$  einer endlichen Anzahl von Punkten  $u_i$  eines linearen Raumes mit reellem (bzw. komplexen)  $\alpha_i$ . Die lineare Hülle stellt den kleinsten linearen Unterraum dar, der diese Punkte enthält.

**lineare Operatoren:** Für einen *linearen Operator*  $A$  mit einem linearen Unterraum als Definitionsbereich  $D(A)$  gilt:

$$\begin{aligned} A : D(A) \subseteq X &\rightarrow Y, \forall u, v \in D(A) : \\ A(\alpha u + \beta v) &= \alpha A(u) + \beta A(v) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$X, Y$  sind hierbei lineare Räume. Affine Transformationen sind Beispiele linearer Operatoren.

**Bilinearformen:** Eine *Bilinearform* eines linearen Raums  $X$  ist eine in ihren beiden Argumenten lineare Abbildung auf einen linearen Raum  $Y$ :

$$\begin{aligned} B : X \times X &\rightarrow Y, \forall u, v, w \in X : \\ B(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha B(u, w) + \beta B(v, w) \\ B(w, \alpha u + \beta v) &= \alpha B(w, u) + \beta B(w, v) \end{aligned} \quad (3.7)$$

**konvexe Menge:** Für eine *konvexe Punktmenge*  $M$  ist die Verbindungsstrecke zweier Elemente  $x, y \in M$  vollständig in der Menge enthalten:

$$(\forall x, y (x, y \in M \wedge t \in [0, 1] \Rightarrow tx + (1 - t)y \in M) \Rightarrow M \text{ konvex}) \quad (3.8)$$

### 3.2.4 EUKLIDSCHER VEKTORRAUM

**Normierte Räume:** Ein *normierter Raum* ist ein linearer Raum (s. 3.2.3), in dem eine *Norm*  $\|u\|$  als reelle Zahl definiert ist:

---

<sup>7</sup> entspricht einer Verschiebung



1.  $\|u\| \geq 0$ ;  $\|u\| = 0$  iff  $u = 0$
2.  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (MINKOWSKI- bzw. Dreiecksungleichung)

Durch  $d(u, v) := \|u - v\|$  wird eine Metrik induziert. Ein normierter Raum ist somit ein metrischer Raum (s. 3.2.2).

**Prä-HILBERT-Räume:** Ein *Prä-HILBERTraum* ist ein linearer Raum (s. 3.2.3), in dem ein *Skalarprodukt*  $(u, v)$  definiert ist:

1.  $(u, u) \geq 0$ ;  $(u, u) = 0$  iff  $u = 0$
2.  $(w, \alpha u + \beta v) = \alpha(w, u) + \beta(w, v)$
3.  $(u, v) = (v, u)$

Das Skalarprodukt definiert die *Orthogonalität* für  $(u, w) = 0$ . Durch das Skalarprodukt wird eine *Norm* induziert:  $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ . Ein Prä-HILBERTraum ist somit ein normierter Raum.

Der  $n$ -dimensionale euklidische Vektorraum  $\mathbb{E}^n$  ist ein reeler Prä-HILBERTraum mit euklidischer Metrik und wird im folgenden mit dem  $n$ -Tupel reeller Zahlen  $\mathbb{R}^n$  gleichgesetzt.

### 3.2.5 Mannigfaltigkeiten

**Mannigfaltigkeit:** Eine  *$n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit* ist eine Figur, für die jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zur  $n$ -dimensionalen offenen Vollkugel ist (s. [BE86, S. 158]).

Nach [tom91, S. 1] ist eine Mannigfaltigkeit eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  (s. Abschn. 3.2.4), die als topologischer (Unter-)Raum das HAUSDORFFSche Trennungssaxiom erfüllt. In [GZZZ95, S. 576] wird die Erzeugung einer  $n$ -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit anschaulich durch das Zusammenkleben von nichtleeren offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  definiert.

Diese Teilmengen werden als *Karten* bezeichnet und die Menge aller Karten als *Atlas*. Für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit existiert eine bijektive Abbildung auf eine Karte mit eindeutigen lokalen Koordinaten. Ist ein Punkt auf mehr als einer Karte enthalten, existieren glatte Transformationsabbildungen, um zwischen den lokalen Koordinaten zu wechseln. Als Beispiel soll eine rechteckige Fläche als 2-dimensionale bzw. 2-Mannigfaltigkeit dienen. Werden zwei gegenüberliegende Seiten so „zusammengeklebt“, daß die beiden anderen Seitenkanten zu Kreisen werden, kann die Fläche im dreidimensionalen als Zylinderoberfläche (ohne „Deckel“) dargestellt werden. Um eine

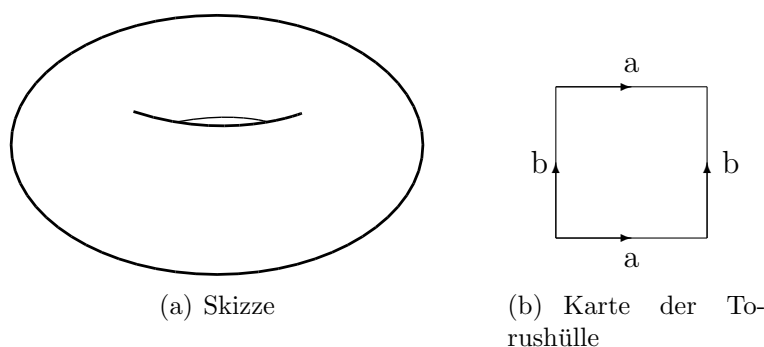


Abbildung 3.6: Torus

Torusoberfläche zu formen, wiederholt man den Vorgang entsprechend für die beiden verbliebenen Seitenkanten<sup>8</sup> (s. Abb. 3.6(b)).

Ein Beispiel einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist auch die  $n$ -dimensionale *Sphäre*. Die Erdoberfläche kann in erster Näherung als 2-dimensionale Sphäre betrachtet werden<sup>9</sup>. Es sind diverse Projektionen bekannt, die als Abbildung dieser Oberfläche auf Karten dienen. Der Begriff „Karte“ und „Atlas“ sind in diesem Zusammenhang auch im allgemeinen Sprachgebrauch bekannt.

Es existiert allerdings kein Homöomorphismus<sup>10</sup> zwischen einer Sphäre  $S^n$  und der Ebene  $\mathbb{R}^n$ . Ein Atlas aus zwei Karten, bei denen jeweils eine Hemisphäre als Vollkugel  $\mathbb{E}^n$  dargestellt wird, ist möglich (vgl. Abschn. 3.2.6).

**Duale Zerlegung** Es sei  $M$  eine zusammenhängende, geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , der eine Simplicialzerlegung  $\mathbb{K}$  zugrundeliegt:  $|\mathbb{K}| = M$  (vgl. Abschn. 3.4.1). Eine *duale Zerlegung* der Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein CW-Komplex (s. Abschn. 3.4.2), bei dem jedem  $q$ -Simplex von  $\mathbb{K}$  eine  $(n - q)$ -Zelle bijektiv zugeordnet wird.  $n$ -Simplex wird der Schwerpunkt als 0-Zelle zugeordnet. Die Adjazenzbeziehungen zwischen Simplex aus  $\mathbb{K}$  gelten entsprechend für die zugeordneten Zellen der dualen Zerlegung.

<sup>8</sup> Bekannt sind Bastelbögen bzw. Schnittmuster, bei denen einzelne Flächen aus Papier bzw. Stoff ausgeschnitten und durch Klebe- bzw. Nahtkanten gegenseitig oder mit sich selbst befestigt werden, um die Hülle eines Gegenstands bzw. ein Kleidungsstück zu formen. Bei Verbindung einer Kante mit dem Inneren einer Fläche, werden die Voraussetzungen für eine 2-Mannigfaltigkeit verletzt.

<sup>9</sup> Bereits 1884 beschrieb ABBOTT in *Flatland* Räume mit verschiedenen Dimensionen. Insbesondere wird die beschränkte Sichtweise der Einwohner von „Linienland“ gegenüber denen von „Flach-“ und „Raumland“ dargestellt und zeigt die Grundbedeutung des Begriffs 1, 2 bzw. 3-Mannigfaltigkeit.

<sup>10</sup> Die topologische Invariante  $\beta_n$  von  $S^n$  und  $\mathbb{R}^n$  ist nicht identisch (s. Abschn. 3.7). Für  $n = 2$  kann auch der Satz von Borsuk und Ulam angewendet werden ([SZ94, S. 57]).

### 3.2.6 Projektive Räume

Ein projektiver Raum vervollständigt den affinen Raum durch „unendlich ferne Punkte“ (s. [tom91, S. 52]). Er ist dadurch abgeschlossen und kompakt.

Gegeben sei ein  $n$ -dimensionaler EUKLIDischer Vektorraum  $\mathbb{E}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ , der als Hyperebene in einen Raum  $\mathbb{E}^{n+1}$  eingebettet ist, sowie der *projektive Raum*  $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ . Es existiere eine Abbildung

$$p: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$$

Es sei  $\Omega \in \mathbb{E}^{n+1}$  das Projektionszentrum mit

$$\Omega \notin \mathbb{E}^n$$

$\mathbb{P}^n$  ist die Menge aller Geraden, die durch  $\Omega$  verlaufen (s. [BY98, S. 149]).

#### Zentralprojektion

Eine offene Halbsphäre ist topologisch äquivalent zur Ebene. Die *Zentralprojektion* bildet einen Punkt der Halbsphäre bijektiv auf eine Ebene ab. Hierzu wird der Schnittpunkt der Geraden vom Mittelpunkt durch den Punkt der Halbsphäre mit der Ebene bestimmt (vgl. Abb. 3.7). Punkte auf dem Rand der Halbsphäre werden so ins Unendliche projiziert. Ergänzt man die zweite Halbsphäre erhält man einen zweiten Durchstoßpunkt. Die beiden Durchstoßpunkte definieren die Projektionsgerade und die Sphäre kann zur geometrischen Interpretation des projektiven Raums herangezogen werden. Für eine zweidimensionale Ebene  $\mathbb{R}^2$  kann z. B. als Hyperebene  $x_3 = 1$  im  $\mathbb{R}^3$  eingebettet sein. Als Projektionszentrum  $\Omega$  wird der Ursprung gewählt, der auch den Mittelpunkt der Einheits-Halbsphäre bildet. Mit dieser Art der Abbildung werden Punkte des  $\mathbb{R}^n$  als Geraden im  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch *homogene Koordinaten* dargestellt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \\ t \end{pmatrix}$$

Für  $t = 1$  erhält man eine Normierung und die Koordinatenwerte entsprechen den Ursprungswerten. Für homogene Koordinaten kann auch die Translation als Projektionsmatrix dargestellt werden.

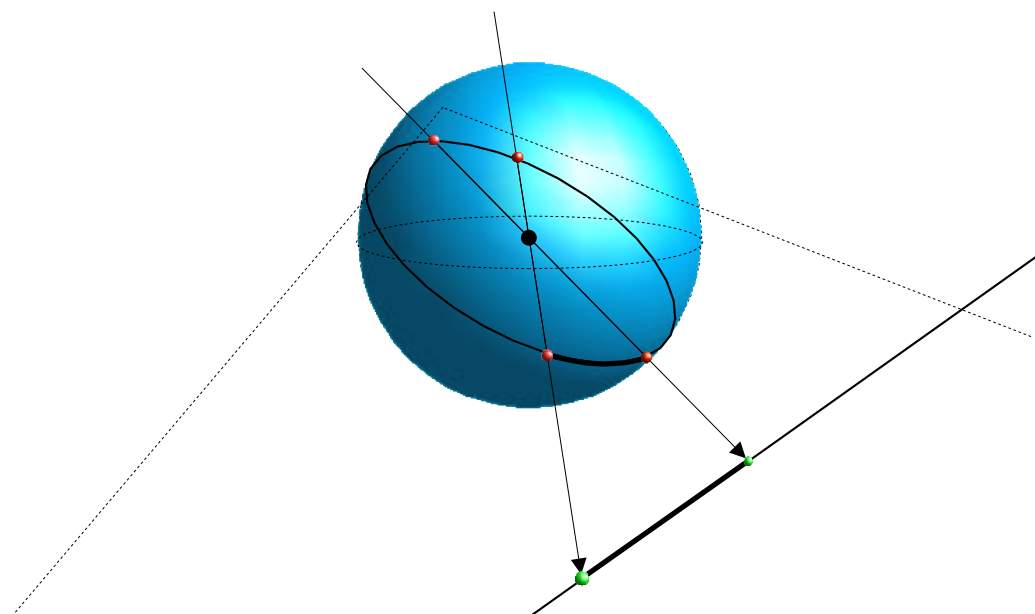


Abbildung 3.7: Zentralprojektion

### Stereographische Projektion

Im Zusammenhang der projektiven Räume soll eine weitere Möglichkeit der Kompaktifizierung eines affinen Raums aufgezeigt werden: die Ergänzung der Ebene durch einen einzelnen „unendlich fernen Punkt“ zur Sphäre.

Wird bei der Sphäre ein Punkt  $\Omega$  entfernt, so ist sie topologisch äquivalent zur Ebene (s. [ES92, S. 31]) und es existiert eine bijektive Abbildung

$$p : \mathbb{S}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Eine solche Abbildung ist die *stereographische Projektion*, bei der ein Punkt  $x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  auf den Schnittpunkt der Geraden  $\Omega x$  mit der Hyperebene  $\mathbb{R}^n$  abgebildet wird (s. [Arm83, S. 34], [SZ94, S. 5], [BS89, S. 511]<sup>11</sup>). Das Projektionszentrum  $\Omega = (0, \dots, 1)^T$  ist hier der „Nordpol“ der Sphäre. Für  $n = 2$  ergibt sich für eine Sphäre mit Radius  $r$  die konformen Abbildungen

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \frac{r}{r - z_s} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

<sup>11</sup> Hier tangiert der Südpol die Ebene. Der Mittelpunkt der Sphäre ist entsprechend  $(0, 0, 1)^T$  und der Nordpol  $(0, 0, 2)^T$  das Projektionszentrum.

sowie

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{r}{x_p^2 + y_p^2 + r^2} \begin{pmatrix} 2rx_p \\ 2ry_p \\ x_p^2 + y_p^2 - r^2 \end{pmatrix}$$

mit  $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Ein „Punkt im Unendlichen“ wird auf das Projektionszentrum (den „Nordpol“)  $\Omega$  projiziert:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  wird z. B. auf eine kreisförmige Kurve auf  $\mathbb{S}^2$  abgebildet, die durch den fehlenden Punkt  $N$  verläuft und hier unterbrochen ist (s. Abb. 3.8). Ein Kreis auf der Ebene wird wiederum auf eine kreisförmige Kurve auf  $\mathbb{S}^2$  abgebildet, die nicht durch  $N$  verläuft. Die stereographische Projektion

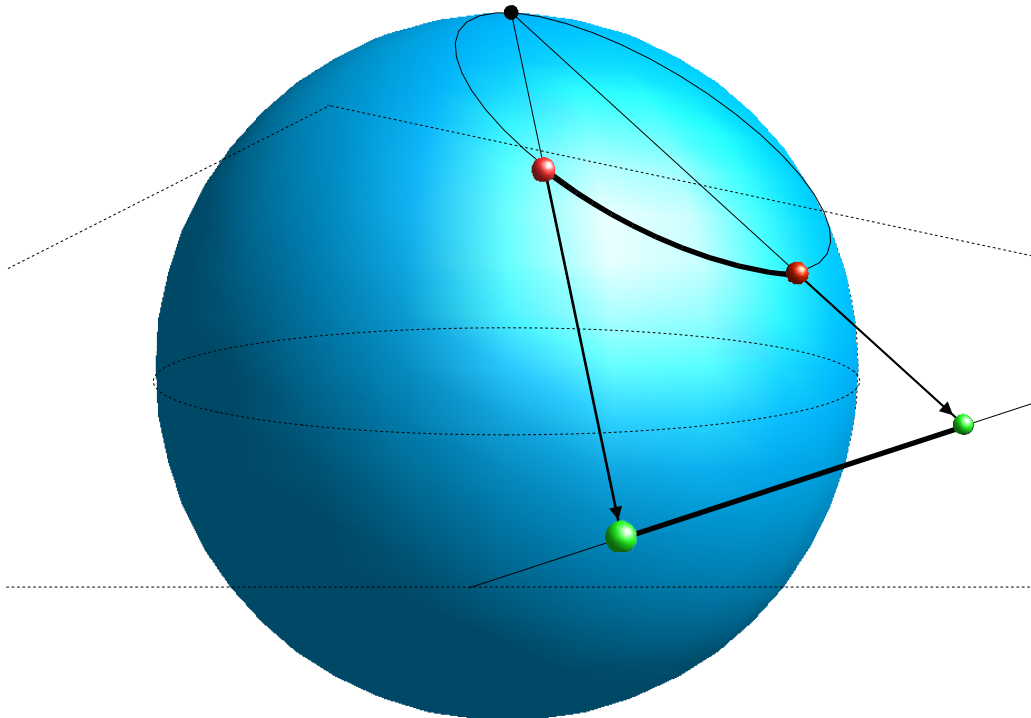


Abbildung 3.8: stereographische Projektion

wird für die RIEMANNsche Zahlenkugel verwendet, welche die komplexe Zahlenebene auf eine Kugel „ohne Nordpol“ projiziert (s. [BS89, S. 511], [Fen01,

S. 111ff]) und durch Hinzunahme dieser Punkte einen Abschluß der *endlichen Zahlenebene* schafft. Die um den unendlichen Punkt erweiterte, und dadurch abgeschlossene Zahlenebene wird als *geschlossene Zahlenebene* bezeichnet.

### 3.3 Simplexe

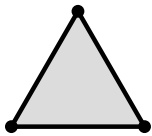
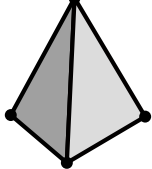
Dimension	Beschreibung	Skizze
-1	$\emptyset$	
0	Punkt	•
1	Strecke	• — •
2	Dreieck	
3	Tetraeder	

Tabelle 3.1: Simplexe

**Simplexe:** Ein  $n$ -dimensionales (affines) Simplex oder kurz  $n$ -Simplex ist die konvexe Hülle von  $n + 1$  linear unabhängigen Eckpunkten  $x^{(i)}$  mit  $i \leq n \in \mathbb{N}$ . Das entspricht der Punktmenge

$$s_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x^{(i)} \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \wedge \lambda_i \geq 0 \forall i \right\} \quad (3.9)$$

Die  $\lambda_i$  werden als *baryzentrische Koordinaten* bezeichnet. Baryzentrische

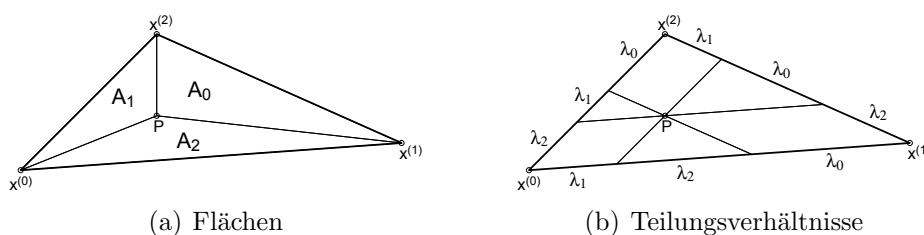


Abbildung 3.9: Geometrische Deutung der baryzentrischen Koordinaten für ein 2-Simplex

Koordinaten sind für ein 2-Simplex bzw. Dreieck geometrisch anschaulich interpretierbar. Wird ein Punkt  $P = \sum_{i=0}^2 \lambda_i x^{(i)}$  mit den Eckknoten  $x^{(i)}$  verbunden, so entstehen Dreiecke mit Flächeninhalt  $A_i$ , wobei das zu einem Eckknoten abgewandte, nicht adjazente Dreieck, diesem

zugeordnet wird (s. Abb. 3.9(a)). Es ist  $\lambda_i = \frac{A_i}{A}$  mit  $A = \sum_{i=0}^2 A_i$  als Gesamtfläche des 2-Simplex. Parallelen zu den Randkanten durch  $P$  teilen die Randkanten in einem Teilungsverhältnis, welches den  $\lambda_i$  entspricht (s. Abb. 3.9(b)).

Das  $n$ -Simplex ist somit die konvexe Hülle<sup>12</sup> der  $n + 1$  Eckpunkte:

$$s_n = \text{conv}(\{x^{(i)} \mid 0 \leq i \leq n\}) \in \mathbf{s}_n \quad (3.10)$$

Die Menge aller  $n$ -Simplexe wird als  $\mathbf{s}_n$  bezeichnet. Ein Simplex der Dimension  $-1$  wird als leere Menge definiert. Im Bereich der geometrischen Modellierung werden vor allem die in Tab. 3.1 aufgeführten Simplexe der Dimension  $\leq 3$  eingesetzt.

$s_n$  besitzt  $\binom{n+1}{k+1}$   $k$ -dimensionale *Teilsimplexe* mit  $0 \leq k \leq n$ , welche die konvexe Hülle einer  $k + 1$ -elementigen Teilmenge der Eckpunkte des Simplex darstellen. Ein *offenes Simplex* ist die Differenz des Simplex mit der Vereinigungsmenge seiner echten Teilsimplexe, die den Rand des Simplex bildet. Ein Punkt liegt auf dem Rand eines Simplex, falls eine der baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_i = 0$  ist.

**Orientierung** Ein  $n$ -Simplex mit  $n \geq 2$  kann eine positive oder negative Orientierung nach Abschn. 3.6 zugeordnet werden. Die Berechnung dieser Orientierung erfolgt über das Vorzeichen einer Determinante (s. [Ede01, S. 18], [She99b, S. 8]):

$$\begin{aligned} \text{Orient}_n(x) &= \text{sgn} \left( \begin{vmatrix} x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(0)} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \text{sgn} \left( (-1)^n \begin{vmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} - x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(n)} - x_n^{(0)} \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Zeilen der Matrix können als normierte homogene Koordinaten gedeutet werden. Die Determinante wird dann 0, falls das Simplex degeneriert ist. Das ist der Fall, wenn ein Teilsimplex Teilmenge eines anderen Teilsimplex ist wie z. B. bei kollinearen Punkten.

<sup>12</sup> Ein Simplex ist ein topologisches Konstrukt. Die Definition über die konvexe Hülle verwendet die konvexe Menge des linearen Raums (s. Abschn. 3.2.3).



**Flächen bzw. Volumenmaßzahl** Die Determinante der Matrix aus (3.11), die der Berechnung der Orientierung zugrundeliegt, ergibt mit einem Faktor versehen eine Maßzahl für ein  $n$ -Simplex im  $\mathbb{R}^n$  (s. [Mil01, S. 52]):

$$V_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \begin{array}{ccc|c} x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(0)} & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \end{array} \right) \quad (3.12)$$

Durch die Basistransformation  $\tilde{\bullet} := \bullet - \bullet^{(0)}$  kann die Dimension der Matrix in (3.12) reduziert werden:

$$V_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{x}_1^{(1)} & \dots & \tilde{x}_n^{(1)} & \\ \vdots & & \vdots & \\ \tilde{x}_1^{(n)} & \dots & \tilde{x}_n^{(n)} & \end{array} \right) \quad (3.13)$$

Für das 2-Simplex erhält man die orientierte (vorzeichenbehaftete) Fläche

$$V_2(x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(2)} - \tilde{x}_1^{(2)} \tilde{x}_2^{(1)} \right) \quad (3.14)$$

und den 3-Simplex erhält man das orientierte (vorzeichenbehaftete) *Volumen*

$$\begin{aligned} V_3(x) = & \frac{1}{6} \left( \tilde{x}_1^{(1)} \left( \tilde{x}_3^{(2)} \tilde{x}_2^{(3)} - \tilde{x}_2^{(2)} \tilde{x}_3^{(3)} \right) \right. \\ & + \tilde{x}_2^{(1)} \left( \tilde{x}_1^{(2)} \tilde{x}_3^{(3)} - \tilde{x}_3^{(2)} \tilde{x}_1^{(3)} \right) \\ & \left. + \tilde{x}_3^{(1)} \left( \tilde{x}_2^{(2)} \tilde{x}_1^{(3)} - \tilde{x}_1^{(2)} \tilde{x}_2^{(3)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3.1 Schwerpunkt

Setzt man in (3.9) für  $\lambda_i = \frac{1}{n+1} \forall i$  erhält man durch

$$x^{(c)} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x^{(i)}$$

den Schwerpunkt. Für ein 0-Simplex ist der Schwerpunkt mit dem Simplex identisch.

### 3.3.2 Umsphäre

Für einen metrischen  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$  definieren  $n + 1$  Punkte eine Sphäre. Entsprechend wird die Sphäre, die von einem  $n$ -Simplex im  $\mathbb{R}^n$  definiert wird, im folgenden als Umsphäre<sup>13</sup> bezeichnet. Ausgehend vom Mittelpunkt  $x^{(m)}$  und dem Radius  $r$  der Umsphäre ist

$$d(x^{(i)}, x^{(m)}) = r \quad \forall i \in 0, \dots, n$$

bzw. für eine MINKOWSKI-Metrik nach (3.4):

$$\sum_{j=1}^n \left| x_j^{(i)} - x_j^{(m)} \right|^p = r^p \quad \forall i \in 0, \dots, n \quad (3.16)$$

Wird der EUKLIDSche Vektorraum nach 3.2.4 zugrundegelegt, so ist eine Transformation zur Bestimmung der Umsphäre hilfreich, bei der ein Punkt im  $\mathbb{R}^n$  auf ein Paraboloid im  $\mathbb{R}^{n+1}$  projiziert wird:

$$T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : T(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \end{pmatrix}$$

Die  $n + 1$  projizierten Punkte eines Simplex definieren eine Hyperebene. Die Schnittmenge dieser Hyperebene mit dem Paraboloid ergeben ein Ellipsoid, welches nach der Rücktransformation die Umsphäre darstellt (s. [O'R98, S. 185] für  $n = 2$ ). Die Hyperebene teilt den Raum und die projizierten Punkte des Paraboloids in zwei disjunkte Teilmengen. Die Rückprojektion zeigt die Aufteilung in Punkte innerhalb und außerhalb der Umsphäre. Dieser Ansatz ist nicht einfach auf beliebige Metriken verallgemeinerbar (s. auch [Kle97, S. 307]). Die EUKLIDSche Metrik ist die einzig rotationsinvariante MINKOWSKI-Metrik.

Es ist (vgl. [Ede01, S. 19], [She99b, S. 8]):

$$-Orient_n(x) \cdot Insphere_n(x) \begin{cases} = 0 & \text{falls } x \text{ auf Umsphäre} \\ > 0 & \text{falls } x \text{ außerhalb} \\ < 0 & \text{falls } x \text{ innerhalb} \end{cases} \quad (3.17)$$

<sup>13</sup> Im Zweidimensionalen wird auch der Begriff „Umkreis“ verwendet.

mit  $Orient_n(x)$  nach Abschn. 3.3 und

$$\begin{aligned} Insphere_n(x) &= \begin{vmatrix} x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(0)} & \sum_{i=1}^n (x_i^{(0)})^2 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & \sum_{i=1}^n (x_i^{(n)})^2 & 1 \\ x_1 & \dots & x_n & \sum_{i=1}^n (x_i)^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(1)} - x_n^{(0)} & \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n)} - x_1^{(0)} & \dots & x_n^{(n)} - x_n^{(0)} & \sum_{i=1}^n (x_i^{(n)} - x_i^{(0)})^2 \\ x_1 - x_1^{(0)} & \dots & x_n - x_n^{(0)} & \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Das Vorgehen entspricht der *impliziten* Darstellung eines Gebiets (s. Abschn. 6.5). Die Sphäre erfordert eine quadratische Gleichung der Form

$$(x_1 \ \dots \ x_n \ 1) \begin{pmatrix} c_2 & \dots & 0 & \frac{c_{x_1}}{2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & c_2 & \frac{c_{x_n}}{2} \\ \frac{c_{x_1}}{2} & \dots & \frac{c_{x_1}}{2} & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

oder

$$c_2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n c_{x_i} x_i + c_0 = 0 \quad (3.20)$$

**Umkreis** Der Kreis ist als Kegelschnitt eine quadratische Kurve bzw. Form und kann als implizite Polynomgleichung zweiten Grades dargestellt werden (s. [Zei96, S. 789], [Fen01, S. 214f]). Die Koordinaten  $x_1$  werden im folgenden mit  $x$  und  $x_2$  mit  $y$  bezeichnet. So ergibt sich im zweidimensionalen Fall mit  $n = 2$  für (3.17) unter Berücksichtigung von (3.20):

$$c_2 (x^2 + y^2) + c_x x + c_y y + c_0 \begin{cases} = 0 & \text{falls } x \text{ auf Umkreis} \\ > 0 & \text{falls } x \text{ außerhalb Umkreis} \\ < 0 & \text{falls } x \text{ innerhalb Umkreis} \end{cases} \quad (3.21)$$

Wird ein positiv orientiertes Simplex gewählt erhält man für die Koeffizienten<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} c_2 &= (y^{(1)} - y^{(2)}) x^{(0)} \\ &+ (y^{(2)} - y^{(0)}) x^{(1)} \\ &+ (y^{(0)} - y^{(1)}) x^{(2)} \end{aligned} \quad (3.22a)$$

<sup>14</sup>  $c_2$  ist hierbei identisch zu  $Orient_n(x)$  nach (3.11)

$$\begin{aligned}
c_x &= (y^{(2)} - y^{(1)}) (x^{(0)^2} + y^{(0)^2}) \\
&+ (y^{(0)} - y^{(2)}) (x^{(1)^2} + y^{(1)^2}) \\
&+ (y^{(1)} - y^{(0)}) (x^{(2)^2} + y^{(2)^2})
\end{aligned} \tag{3.22b}$$

$$\begin{aligned}
c_y &= (x^{(1)} - x^{(2)}) (x^{(0)^2} + y^{(0)^2}) \\
&+ (x^{(2)} - x^{(0)}) (x^{(1)^2} + y^{(1)^2}) \\
&+ (x^{(0)} - x^{(1)}) (x^{(2)^2} + y^{(2)^2})
\end{aligned} \tag{3.22c}$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= (x^{(2)}y^{(1)} - x^{(1)}y^{(2)}) (x^{(0)^2} + y^{(0)^2}) \\
&+ (x^{(0)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(0)}) (x^{(1)^2} + y^{(1)^2}) \\
&+ (x^{(1)}y^{(0)} - x^{(0)}y^{(1)}) (x^{(2)^2} + y^{(2)^2})
\end{aligned} \tag{3.22d}$$

$c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_2$  und  $c_0$  ergeben sich aus der Berechnung der Unterdeterminanten bzw. Adjunkten (s. [BS89, S. 149]) durch Entwicklung nach letzter Zeile von (3.18) für  $n = 2$ . Der Mittelpunkt des Umkreises befindet sich bei

$$\begin{pmatrix} x^{(m)} \\ y^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2c_2} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

und ist das Minimum der Funktion aus (3.21). Im folgenden ist durch (3.25b) eine Berechnungsmöglichkeit für den Radius  $r$  angegeben<sup>15</sup>. Ein Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten  $(x^{(m)}, y^{(m)})$  und dem Radius  $r$  ergibt nach (3.16) mit  $p = 2$  folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
(x - x^{(m)})^2 + (y - y^{(m)})^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 - 2x^{(m)}x - 2y^{(m)}y + (x^{(m)})^2 + (y^{(m)})^2 - r^2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (3.21) führt ebenfalls auf (3.23) und

$$r = \sqrt{(x^{(m)})^2 + (y^{(m)})^2 - \frac{c_0}{c_2}} \tag{3.25a}$$

<sup>15</sup> Es ist natürlich auch möglich den Radius  $r$  durch Einsetzen von (3.23) in (3.16) mit  $p = 2$  als Abstand zu einem Eckpunkt zu berechnen.

Aus (3.23) und (3.25a) folgt

$$r = \frac{1}{2c_2} \sqrt{(c_x)^2 + (c_y)^2 - 4c_2c_0} \quad (3.25b)$$

Nach Shewchuk ([She99b, S. 8],[She96, She97]) wird die Rechengenauigkeit durch Verwendung relativer Koordinaten verbessert. Die affine Koordinatentransformation bzw. Basistransformation des Nullpunkts in  $x^{(0)}$  ergibt mit  $\tilde{\bullet} := \bullet - \bullet^{(0)}$  für (3.21):

$$\tilde{c}_2 (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \tilde{c}_x \tilde{x} + \tilde{c}_y \tilde{y} \quad \begin{cases} = 0 & \text{falls x auf Umkreis} \\ > 0 & \text{falls x au\u00e4erhalb} \\ < 0 & \text{falls x innerhalb} \end{cases} \quad (3.26)$$

Auch bei der Berechnung der Unterdeterminanten wird zur Vereinfachung  $\tilde{\bullet}^{(i)} := \bullet^{(i)} - \bullet^{(0)}$  gesetzt und da  $\tilde{\bullet}^{(0)} = 0$  ergibt sich f\u00fcr (3.22):

$$\tilde{c}_2 = \tilde{y}^{(2)} \tilde{x}^{(1)} - \tilde{y}^{(1)} \tilde{x}^{(2)} \quad (3.27a)$$

$$\tilde{c}_x = \tilde{y}^{(1)} (\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2}) - \tilde{y}^{(2)} (\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2}) \quad (3.27b)$$

$$\tilde{c}_y = \tilde{x}^{(2)} (\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2}) - \tilde{x}^{(1)} (\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2}) \quad (3.27c)$$

Der Umkreismittelpunkt befindet sich bei

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^{(m)} \\ \tilde{y}^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\tilde{c}_2} \begin{pmatrix} \tilde{c}_x \\ \tilde{c}_y \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

bei einem Radius von

$$r = \frac{1}{2\tilde{c}_2} \sqrt{(\tilde{c}_x)^2 + (\tilde{c}_y)^2} \quad (3.29)$$

**Umkugel** Analog erh\u00e4lt man im dreidimensionalen Raum bei Bezeichnung der Koordinaten  $x_3$  mit  $z$  f\u00fcr die Umkugel als Fl\u00e4che zweiter Ordnung bzw. Quadrik (s. [Zei96, S. 790])

$$c_2 (x^2 + y^2 + z^2) + c_x x + c_y y + c_z z + c_0 \quad \begin{cases} = 0 & \text{falls x auf Umsph\u00e4re} \\ > 0 & \text{falls x au\u00e4erhalb} \\ < 0 & \text{falls x innerhalb} \end{cases} \quad (3.30)$$

mit den Adjunkten

$$c_2 = \begin{vmatrix} x^{(0)} & y^{(0)} & z^{(0)} & 1 \\ x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} & 1 \\ x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} & 1 \\ x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.31a)$$

$$c_x = - \begin{vmatrix} y^{(0)} & z^{(0)} & x^{(0)^2} + y^{(0)^2} + z^{(0)^2} & 1 \\ y^{(1)} & z^{(1)} & x^{(1)^2} + y^{(1)^2} + z^{(1)^2} & 1 \\ y^{(2)} & z^{(2)} & x^{(2)^2} + y^{(2)^2} + z^{(2)^2} & 1 \\ y^{(3)} & z^{(3)} & x^{(3)^2} + y^{(3)^2} + z^{(3)^2} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.31b)$$

$$c_y = \begin{vmatrix} x^{(0)} & z^{(0)} & x^{(0)^2} + y^{(0)^2} + z^{(0)^2} & 1 \\ x^{(1)} & z^{(1)} & x^{(1)^2} + y^{(1)^2} + z^{(1)^2} & 1 \\ x^{(2)} & z^{(2)} & x^{(2)^2} + y^{(2)^2} + z^{(2)^2} & 1 \\ x^{(3)} & z^{(3)} & x^{(3)^2} + y^{(3)^2} + z^{(3)^2} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.31c)$$

$$c_z = - \begin{vmatrix} x^{(0)} & y^{(0)} & x^{(0)^2} + y^{(0)^2} + z^{(0)^2} & 1 \\ x^{(1)} & y^{(1)} & x^{(1)^2} + y^{(1)^2} + z^{(1)^2} & 1 \\ x^{(2)} & y^{(2)} & x^{(2)^2} + y^{(2)^2} + z^{(2)^2} & 1 \\ x^{(3)} & y^{(3)} & x^{(3)^2} + y^{(3)^2} + z^{(3)^2} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.31d)$$

$$c_0 = - \begin{vmatrix} x^{(0)} & y^{(0)} & z^{(0)} & x^{(0)^2} + y^{(0)^2} + z^{(0)^2} \\ x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} & x^{(1)^2} + y^{(1)^2} + z^{(1)^2} \\ x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} & x^{(2)^2} + y^{(2)^2} + z^{(2)^2} \\ x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} & x^{(3)^2} + y^{(3)^2} + z^{(3)^2} \end{vmatrix} \quad (3.31e)$$

und den Umsphärenmittelpunkt

$$\begin{pmatrix} x^{(m)} \\ y^{(m)} \\ z^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2c_2} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Eine 2-Sphäre mit den Mittelpunktskoordinaten  $(x^{(m)}, y^{(m)}, z^{(m)})$  und dem Radius  $r$  ergibt nach (3.16) mit  $p = 3$  folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} (x - x^{(m)})^2 + (y - y^{(m)})^2 + (z - z^{(m)})^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x^{(m)}x - 2y^{(m)}y - 2z^{(m)}z \\ + (x^{(m)})^2 + (y^{(m)})^2 + (z^{(m)})^2 - r^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

und der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x^{(m)})^2 + (y^{(m)})^2 + (z^{(m)})^2 - \frac{c_0}{c_2}} \\ &= \frac{1}{2c_2} \sqrt{(c_x)^2 + (c_y)^2 + (c_z)^2 - 4c_2c_0} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Im dreidimensionalen Raum vereinfacht sich (3.30) durch eine Basistransformation mit  $\tilde{\bullet} := \bullet - \bullet^{(0)}$  zu:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2 (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) + \tilde{c}_x \tilde{x} + \tilde{c}_y \tilde{y} + \tilde{c}_z \tilde{z} \\ \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{falls } x \text{ auf Umsphäre} \\ > 0 \quad \text{falls } x \text{ außerhalb} \\ < 0 \quad \text{falls } x \text{ innerhalb} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.35)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2 &= (\tilde{y}^{(2)} \tilde{z}^{(3)} - \tilde{y}^{(3)} \tilde{z}^{(2)}) \tilde{x}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{y}^{(3)} \tilde{z}^{(1)} - \tilde{y}^{(1)} \tilde{z}^{(3)}) \tilde{x}^{(2)} \\ &\quad + (\tilde{y}^{(1)} \tilde{z}^{(2)} - \tilde{y}^{(2)} \tilde{z}^{(1)}) \tilde{x}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.36a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_x &= (\tilde{y}^{(3)} \tilde{z}^{(2)} - \tilde{y}^{(2)} \tilde{z}^{(3)}) (\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2} + \tilde{z}^{(1)2}) \\ &\quad + (\tilde{y}^{(1)} \tilde{z}^{(3)} - \tilde{y}^{(3)} \tilde{z}^{(1)}) (\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2} + \tilde{z}^{(2)2}) \\ &\quad + (\tilde{y}^{(2)} \tilde{z}^{(1)} - \tilde{y}^{(1)} \tilde{z}^{(2)}) (\tilde{x}^{(3)2} + \tilde{y}^{(3)2} + \tilde{z}^{(3)2}) \end{aligned} \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_y &= (\tilde{z}^{(3)} \tilde{x}^{(2)} - \tilde{z}^{(2)} \tilde{x}^{(3)}) (\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2} + \tilde{z}^{(1)2}) \\ &\quad + (\tilde{z}^{(1)} \tilde{x}^{(3)} - \tilde{z}^{(3)} \tilde{x}^{(1)}) (\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2} + \tilde{z}^{(2)2}) \\ &\quad + (\tilde{z}^{(2)} \tilde{x}^{(1)} - \tilde{z}^{(1)} \tilde{x}^{(2)}) (\tilde{x}^{(3)2} + \tilde{y}^{(3)2} + \tilde{z}^{(3)2}) \end{aligned} \quad (3.36c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_z &= (\tilde{x}^{(3)} \tilde{y}^{(2)} - \tilde{x}^{(2)} \tilde{y}^{(3)}) (\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2} + \tilde{z}^{(1)2}) \\ &\quad + (\tilde{x}^{(1)} \tilde{y}^{(3)} - \tilde{x}^{(3)} \tilde{y}^{(1)}) (\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2} + \tilde{z}^{(2)2}) \\ &\quad + (\tilde{x}^{(2)} \tilde{y}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)} \tilde{y}^{(2)}) (\tilde{x}^{(3)2} + \tilde{y}^{(3)2} + \tilde{z}^{(3)2}) \end{aligned} \quad (3.36d)$$

Mit Hilfe der Koeffizienten (6.11), die mit der impliziten Formulierung der Trägerebene des 2-Teilsimplex  $\langle x_0, x_i, x_j \rangle$  zusammenhängen (s. Abschn. 6.5.1), läßt sich (3.36) verkürzt schreiben:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_2 &= c_{x,23}\tilde{x}^{(1)} + c_{x,31}\tilde{x}^{(2)} + c_{x,12}\tilde{x}^{(3)} \\ &= c_{y,23}\tilde{y}^{(1)} + c_{y,31}\tilde{y}^{(2)} + c_{y,12}\tilde{y}^{(3)} \\ &= c_{z,23}\tilde{z}^{(1)} + c_{z,31}\tilde{z}^{(2)} + c_{z,12}\tilde{z}^{(3)}\end{aligned}\tag{3.37a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_x &= c_{x,32}\left(\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2} + \tilde{z}^{(1)2}\right) \\ &\quad + c_{x,13}\left(\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2} + \tilde{z}^{(2)2}\right) \\ &\quad + c_{x,21}\left(\tilde{x}^{(3)2} + \tilde{y}^{(3)2} + \tilde{z}^{(3)2}\right)\end{aligned}\tag{3.37b}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_y &= c_{y,32}\left(\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2} + \tilde{z}^{(1)2}\right) \\ &\quad + c_{y,13}\left(\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2} + \tilde{z}^{(2)2}\right) \\ &\quad + c_{y,21}\left(\tilde{x}^{(3)2} + \tilde{y}^{(3)2} + \tilde{z}^{(3)2}\right)\end{aligned}\tag{3.37c}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_z &= c_{z,32}\left(\tilde{x}^{(1)2} + \tilde{y}^{(1)2} + \tilde{z}^{(1)2}\right) \\ &\quad + c_{z,13}\left(\tilde{x}^{(2)2} + \tilde{y}^{(2)2} + \tilde{z}^{(2)2}\right) \\ &\quad + c_{z,21}\left(\tilde{x}^{(3)2} + \tilde{y}^{(3)2} + \tilde{z}^{(3)2}\right)\end{aligned}\tag{3.37d}$$

Der Umsphärenmittelpunkt befindet sich bei

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^{(m)} \\ \tilde{y}^{(m)} \\ \tilde{z}^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\tilde{c}_2} \begin{pmatrix} \tilde{c}_x \\ \tilde{c}_y \\ \tilde{c}_z \end{pmatrix}\tag{3.38}$$

bei einem Radius von

$$r = \frac{1}{2\tilde{c}_2} \sqrt{(\tilde{c}_x)^2 + (\tilde{c}_y)^2 + (\tilde{c}_z)^2}\tag{3.39}$$



## 3.4 Zellkomplexe

### 3.4.1 Simpliziale Komplexe

**Simplizialer Komplex:** Eine Menge  $\mathbb{K}$  von Simplexen heißt *simplizialer Komplex* oder *Polyeder*, falls gilt<sup>16</sup> (s. [Jän99, S. 110])

1. Für jedes Simplex, welches Element der Menge ist, sind auch dessen Teilsimplexe Elemente der Menge.
2. Für je zwei Simplexe der Menge ist deren Durchschnitt entweder die leere Menge oder jeweils ein Teilsimplex beider Simplexe.

Ein  $n$ -dimensionaler Simplizialkomplex enthält mindestens einen  $n$ -Simplex, aber keine  $n + 1$ -Simplexe:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathbf{s}_i \mid 0 \leq i \leq n\}$$

Ist für einen  $n$ -dimensionalen Simplizialkomplex jedes  $m$ -Simplex mit  $m < n$  Teilsimplex eines  $n$ -Simplex ist der Komplex *homogen* (s. [BY98, S. 244]).

Die 0-Simplexe  $\mathbf{s}_0$  werden als *Ecken* und die 1-Simplexe  $\mathbf{s}_1$  als *Kanten* bezeichnet. Ein eindimensionaler Komplex heißt *Graph* (s. Abschn. 3.1).

Wird ein topologischer Raum auf einen simplizialen Komplex abgebildet, so spricht man von einer *simplizialen Zerlegung* oder *Triangulation*. Den einem Simplizialkomplex  $\mathbb{K}$  zugrundeliegenden topologischen Raum bezeichnet man als  $|\mathbb{K}|$ .

**Unterkomplex:** Eine Teilmenge von Simplexen mit allen Teilsimplexen wird als *Unterkomplex* bezeichnet.

**Gerüst:** Ein  $n$ -Gerüst oder  $n$ -Skelett  $\mathbb{K}^n$  ist die Vereinigung aller Zellen der Dimension kleiner oder gleich  $n$ . Es stellt einen Unterkomplex dar.

**Unterteilung:** Es seien  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{K}^*$  Simplizialkomplexe mit  $|\mathbb{K}^*| = |\mathbb{K}|$ . Falls jedes Simplex  $s_i^* \in \mathbf{s}_i^* \subseteq \mathbb{K}^*$  in einem Simplex  $s_j \in \mathbf{s}_j \subseteq \mathbb{K}$  mit  $j \geq i$  enthalten ist, heißt  $\mathbb{K}^*$  Unterteilung von  $\mathbb{K}$ . Die in einem Unterkomplex von  $\mathbb{K}$  enthaltenen Simplexe von  $\mathbb{K}^*$  bilden eine Unterteilung dieses Unterkomplexes.

---

<sup>16</sup> Es wird von einem endlichen Simplizialkomplex ausgegangen.

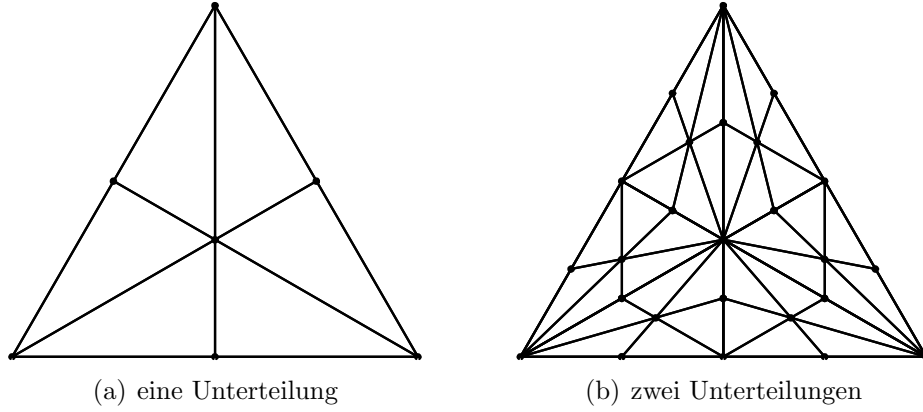


Abbildung 3.10: Normalunterteilungen eines 2-Simplex

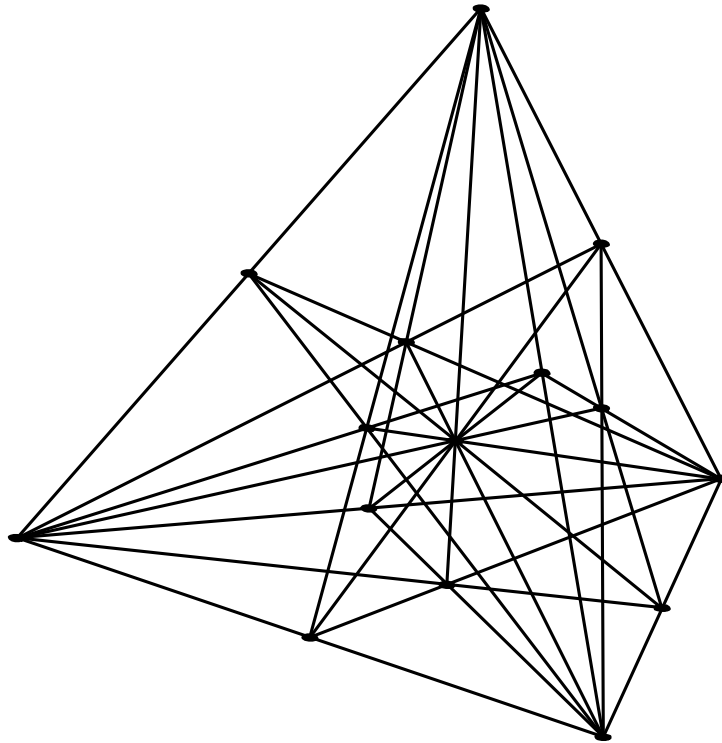


Abbildung 3.11: Normalunterteilung eines 3-Simplex (Drahtgittermodell)

**Normalunterteilung:** Die *Normalunterteilung* oder *baryzentrische Unterteilung* eines Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}$  fügt diesem die Schwerpunkte (s. Abschn. 3.3.1) der Simplexe  $s_i \in \mathbf{s}_i \subseteq \mathbb{K}$  hinzu und bildet eine Unterteilung  $\mathbb{K}'$ , die sich rekursiv aufbaut (s. Abb. 3.10 und 3.11). Da der Schwerpunkt eines 0-Simplex identisch zum Simplex selbst ist, ergibt sich für die Normalunterteilung eines 0-Simplicialkomplexes der Komplex selbst:  $\mathbb{K}'_0 = \mathbb{K}_0$ . Die Normalunterteilung eines  $n$ -Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}'_n$  für  $n > 0$  baut auf der Normalunterteilung des  $n - 1$ -Gerüsts auf. Die  $n - 1$ -Simplexe  $s_{n-1}$  sind jeweils in  $n!$  Simplexe  $s'_{n-1}$  aufgeteilt. Der Rand eines  $n$ -Simplexes  $s_n$  enthält durch seine  $n + 1$  unterteilten  $n - 1$ -Teilsimplexe somit  $(n + 1)!$  Simplexe  $s'_{n-1}$ . Durch den Schwerpunkt des  $n$ -Simplexes sowie der Simplexe  $s'_{n-1}$  auf dem Rand werden  $(n + 1)!$   $n$ -Simplexe  $s'_n$  als Unterteilung von  $s_n$  erzeugt.

Wird ein metrischer Raum zugrundegelegt und mit  $d(s_n)$  die Distanz zweier Punkte des Simplexes  $s_n \in \mathbb{K}$  bezeichnet, so gilt für ein Simplex  $s'_n \in \mathbb{K}'$  der Normunterteilung  $\mathbb{K}'$  von  $s_n$ :

$$d(s'_n) \leq \frac{n}{n+1} \max(d(s_n)) \quad (3.40)$$

### 3.4.2 CW-Komplexe

*CW-Komplexe* sind allgemeinere Zellkomplexe als die Simplicialkomplexe. Der Namen kommt von „Closure finite“ und „Weak topologie“, was „hüllenendlich“ und „schwache Topologie“ bedeutet. Diese Begriffe sind zwei Axiomen entnommen, die bei den CW-Komplexen erfüllt sein müssen, bei einer endlichen Zellenzerlegung aber trivialerweise immer erfüllt sind: Die abgeschlossene Hülle einer jeden Zelle trifft nur auf endlich viele Zellen und eine Teilmenge der Trägermenge ist genau dann abgeschlossen, wenn die Schnittmenge mit jeder abgeschlossenen Zelle abgeschlossen ist. Wichtiger im Rahmen der Anwendung hier ist die Forderung nach einer

**Charakteristische Abbildung:** Zu jeder  $n$ -Zelle gibt es eine stetige Abbildung, die eine offene Vollkugel homöomorph auf die Zelle und eine  $n - 1$ -Sphäre in die Vereinigung der höchstens  $n - 1$ -dimensionalen Teilzellen abbildet.

Eine  $n$ -Zelle, die homöomorph zur offenen Vollkugel sein muß, wird folglich über eine Abbildung an das  $n - 1$ -Gerüst angeheften.

Die gegenüber dem Simplicialkomplex erweiterten Möglichkeiten der Definition der Zellen bieten eine größere Flexibilität. CW-Komplexe lassen z. B.

auch Produkttopologien zu. Oft ist auch ein einfacherer Aufbau gegeben. Eine 2-Sphäre läßt sich z. B. aus zwei CW-Zellen zusammensetzen: einem Punkt (0-Zelle) und der Sphäre ohne den Punkt (2-Zelle). Der zur Sphäre homöomorphe Tetraeder besteht aus 4 Punkten, 6 Kanten und 4 Flächen. Es sind beim Simplicialkomplex also 14 Zellen nötig.

### 3.5 Homotopie

Zwei stetige Abbildungen  $f$  und  $g$  zwischen topologischen Räumen sind dann *homotop*,  $f \simeq g$ , wenn es eine *Homotopie*  $h$  zwischen ihnen gibt. Eine Homotopie ist eine stetige Abbildung zwischen den Abbildungen.

$$\begin{aligned} f, g &: X \rightarrow Y \\ h &: X \times [0, 1] \rightarrow Y \\ f \simeq g &: \exists h(x, t) \mid h(x, 0) = f(x) \wedge h(x, 1) = g(x) \forall x \in X \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Parametrisierung der Abbildungen, deren Parameterwert man sich als Zeitintervall vorstellen kann. Die Homotopie kann somit auch als *Deformation* aufgefaßt werden. Anschaulich wird dies durch den Graph einer Funktion  $f$ , der als Gummiband modelliert wird. Ist es möglich durch eine Deformation des Bandes eine Funktion  $g$  darzustellen, so sind  $f$  und  $g$  homotop (s. Abb. 3.12). Der Definitionsbereich darf hierbei nicht verlassen werden. Ist  $g(x)$  eine konstante Funktion spricht man bei  $h$  von einer *Nullhomotopie*, bzw. ist  $f$  *nullhomotop* zu  $g$ , für  $f = g$  ist  $h$  *konstant* bzw. *stationär*.

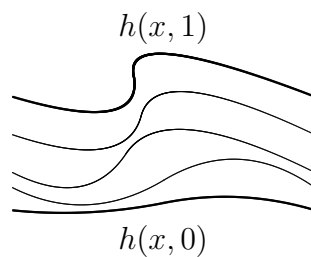
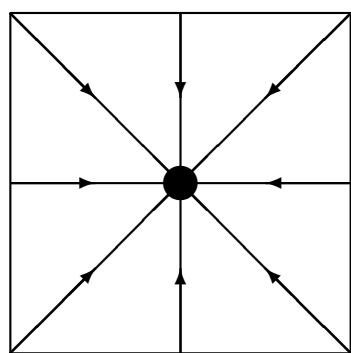


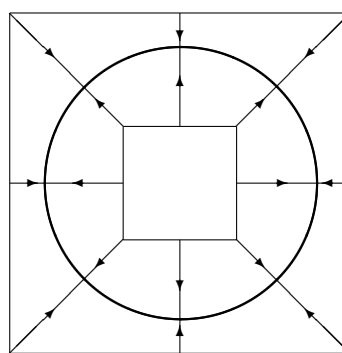
Abbildung 3.12: homotope Abbildungen

**Homotopie-Äquivalenz:** Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen *homotopieäquivalent*, falls stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$

existieren, für die  $fg$  und  $gf$  homotop zur identischen Abbildung sind.  $f$  wird als *Homotopie-Äquivalenz* und  $g$  als *Homotopie-Inverses* von  $f$  bezeichnet. Besteht eine Homotopie-Äquivalenz zum einpunktigen Raum, so heißt ein topologischer Raum *zusammenziehbar*. Dies ist für jeden sternförmigen Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  sowie  $\mathbb{R}^n$  selbst gegeben (s. Abb. 3.13(a)).



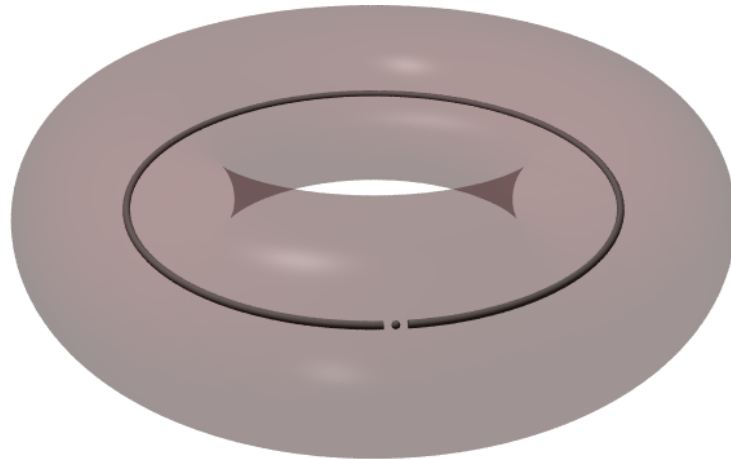
(a) zusammenziehbarer top. Raum



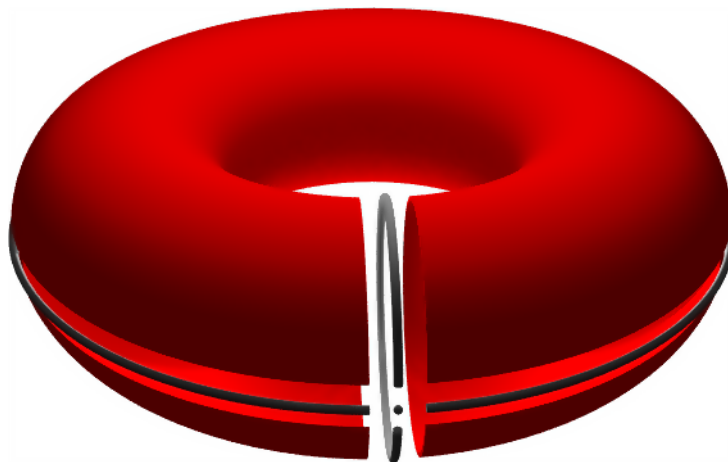
(b) Retraktion nach  $S^1$

Abbildung 3.13: Deformationsretrakte

**Retrakte:** Ein Teilraum heißt *Retrakt* eines Raumes, falls eine *Retraktion* existiert. Eine Retraktion ist die stetige Abbildung des Raumes auf den Teilraum. Ist diese Abbildung ebenfalls homotop zur Identitätsabbildung auf den Raum selbst, dann spricht man von einer *Deformationsretraktion* bzw. -retrakt. Bleiben die Punkte des Teilraums während der Deformation fest, so liegt ein *starker* Deformationsretrakt vor. Beispiel eines starken Deformationsretraktes ist die Zusammenziehung von  $\mathbb{R}^n$  auf den Nullpunkt durch  $h(x, t) = (1 - t)x$ , bei welcher der Nullpunkt fest bleibt (s. Abb. 3.13(a)). Nach dem BROUWERSchen Fixpunktsatz (s. [tom91, S. 72]) besitzt jede solcher stetigen Abbildungen mindestens einen Punkt, der auf sich abgebildet wird. Die schrittweise Retraktion zeigt wesentliche Zyklen auf (s. Abschn. 3.5). Dies wird für den Torus in Abb. 3.14 dargestellt.



(a) Volltorus



(b) Torushülle

Abbildung 3.14: Retraktion des Torus

## 3.6 Simpliciale Homologie

Der Abschnitt widmet sich der *simplicialen Homologie*. Die Ergebnisse sind auf die für CW-Komplexe zugeschnittene zelluläre Homologie übertragbar.

**Orientierte Simplexe:** Die Reihenfolge der  $n + 1$  Ecken eines  $n$ -Simplex definiert eine Anordnung:  $\sigma_n = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ . Zwei der  $(n + 1)!$  möglichen Anordnungen sind dann *äquivalent*, falls sie durch eine gerade Anzahl an Vertauschungs-Permutationen ineinander überführbar sind. Äquivalente Anordnungen bilden die Klasse einer *Orientierung*. Für ein Simplex mit  $n \geq 2$  sind zwei Orientierungen möglich, wobei das *entgegengesetzt orientierte* Simplex mit  $-\sigma_n$  bezeichnet wird [ES92, S. 219]. Der 0-Simplex (Punkt) erhält definitionsgemäß eine Orientierung.

Die Orientierung eines Simplex induziert die Orientierungen seiner Teilsimplexe. Zur Bestimmung eines orientierten Teilsimplex der Dimension  $n - 1$  wird für den  $n$ -Simplex eine äquivalente Anordnung der Ecken gewählt, bei welcher die nicht zum Teilsimplex gehörende Ecke an erster Stelle steht. Den zu bestimmenden Teilsimplex erhält man, indem man diesen an erster Stelle stehenden Eintrag eliminiert.

Ein orientiertes 1-Simplex ist eine gerichtete Kante, bei der offensichtlich zwei Richtungen möglich sind. Beim orientierten 2-Simplex, einem Dreieck, entspricht die Orientierung dem positiven oder negativen Umlaufsinn. Die orientierten 1-Teilsimplexe, bzw. Umrandungskanten, richten sich nach dem gewählten Umlaufsinn.

Zwei benachbarte  $n$ -Simplexe sind *kohärent* orientiert, falls dem gemeinsamen  $n - 1$ -Simplex jeweils eine entgegengesetzte Orientierung induziert wird. Ein Beispiel hierfür sind die 2-Simplexe in Abb. 3.15(b).

**Ketten:** Eine  $n$ -Kette  $c \in C_n(\mathbb{K})$  eines Simplicialkomplexes ist eine Linearkombination der orientierten  $n$ -Simplexe des Komplexes mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$c = \sum_i \lambda_i \sigma_n^i$$

$C_n(\mathbb{K})$  ist die Gruppe von  $n$ -Ketten, die von den  $n$ -Simplexen des Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}$  erzeugt wird.

**Rand:** Der Rand eines orientierten Simplex ist die  $(n - 1)$ -Kette

$$\partial \sigma_n = \partial \langle x_0, \dots, x_n \rangle = \begin{cases} \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n \rangle & \text{für } n > 1 \\ x_1 - x_0 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

(3.41)

mit

$$\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n \rangle := \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_n \rangle & \text{für } i = 0 \\ \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle & \text{für } i = n \\ \langle x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rangle & \text{sonst} \end{cases}$$

$\partial$  bezeichnet den *Randoperator*. Der Rand einer Kette entspricht der Linearkombination der Ränder der einzelnen Simplexe (Distributivgesetz):

$$\partial \sum_i \lambda_i \sigma_n^i = \sum_i \lambda_i \partial \sigma_n^i$$

**Randkette:** Eine *berandende* oder *nullhomologe*  $n$ -Kette  $c \in C_n(\mathbb{K})$  ist gegeben, falls eine  $n + 1$ -Kette  $b \in C_{n+1}(\mathbb{K})$  mit  $\partial b = c$  existiert. Die Gruppe der  $n$ -Randketten eines Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}$  wird mit  $B_n(\mathbb{K})$  bezeichnet.

**Zyklen:** Ein  $n$ -Zyklus ist eine  $n$ -Kette, deren Rand 0 ist. Man spricht auch von einer *geschlossenen* Kette. Jede 0-Kette ist ein Zyklus. Die Gruppe der  $n$ -Zyklen eines Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}$  wird mit  $Z_n(\mathbb{K})$  bezeichnet. Da der Rand einer Kette  $c$  ein Zyklus ist, gilt [SZ94, S. 178]:

$$\partial \partial c = 0$$

Ein Zyklus ist nicht notwendigerweise nullhomolog. Als einfaches Beispiel hierfür kann der Zyklus eines Simplex und seines entgegengesetzt orientierten Simplexes dienen. Der Zyklus  $\langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_0 \rangle$  in Abb. 3.16 ist ebenfalls keine Randkette. Nicht berandende Zyklen werden als *wesentliche* Zyklen bezeichnet.

**linear unabhängige Zyklen:** Zyklen werden als linear bzw. homolog unabhängig bezeichnet, wenn ihre Linearkombination ausschließlich für Null-Koeffizienten nullhomolog ist. Für die linear unabhängigen Zyklen  $c_i \in Z_n$  mit den Koeffizienten  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  muß gelten:

$$\sum_i \lambda_i c_i \in B_n \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$$

Linear unabhängige Zyklen können selbst nicht nullhomolog sein, denn sonst ist für einen Koeffizientenwert  $\neq 0$  für den betreffenden Zyklus



und  $= 0$  für alle anderen die Linearkombination ebenfalls nullhomolog. Somit scheiden alle Randketten aus. Wesentliche Zyklen sind z. B. linear abhängig, falls ein Zyklus ein Loch bzw. Hohlraum des anderen darstellt.

In einer Zusammenhangskomponente existiert immer genau ein linear unabhängiger 0-Zyklus. Wie bereits erwähnt ist jede 0-Kette und damit jeder 0-Simplex ein Zyklus. Für einen zweiten 0-Simplex existiert in einer Zusammenhangskomponente immer eine verbindende 1-Kette, deren Rand die beiden 0-Simplexe sind. Zusammen bilden die beiden 0-Simplexe dann also eine nullhomologe Kette und somit keinen wesentlichen Zyklus.

Ein  $n$ -dimensionaler Simplicialkomplex kann linear unabhängige Zyklen bis zur Dimension  $n - 1$  enthalten:

$$B_n(\mathbb{K}) = 0 \quad \forall n \geq \dim \mathbb{K}$$

**homologe Ketten:** Zwei Ketten  $c, c' \in C_n(\mathbb{K})$  sind *homolog*, falls die Kette  $b = c - c'$  eine Randkette ist:  $b \in B_n(\mathbb{K})$ .

Das kann anhand von 2-Ketten veranschaulicht werden. Gegeben seien zwei Kantenzüge  $c$  und  $c'$ , die jeweils von  $x_1$  nach  $x_2$  verlaufen und zusammen eine Fläche einschließen. Für  $c - c'$  wird  $c'$  in entgegengesetzter Richtung durchlaufen und ergänzt  $c$  zum Rand der Fläche. Eine alternative Vorstellung ist das Verschieben von  $c$  nach  $c'$ , ohne den Raum zu verlassen (s. Homotopie 3.5). Ein weiteres Beispiel für einen Typ homologer Ketten ist ein Zyklus  $c'$ , der gleich orientiert in einem Zyklus  $c$  liegt.  $c - c'$  ist hier der Rand einer Fläche mit Loch.

**Homologiegruppen:** Jede Kette bildet mit allen homologen Ketten jeweils eine *Homologieklass*e. Die Homologieklassen für alle  $n$ -Ketten eines Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}$  bilden die *Homologiegruppe*  $H_n(\mathbb{K})$

**Rang einer Homologiegruppe:** Der Rang einer Homologiegruppe  $H_n(\mathbb{K})$  heißt  $n$ -dimensionale *BETTIsche Zahl*  $\beta_n$  und ist die maximale Anzahl linear unabhängiger  $n$ -Zyklen [BE86, S. 140f][SZ94, S. 181].

**Inzidenzen:** Die Linearkombination der  $n - 1$ -Simplexe, die der Rand eines  $n$  Simplex beinhaltet, kann durch eine *Inzidenzmatrix* beschrieben werden<sup>17</sup>. Die Dimensionen ergeben sich aus der Anzahl der  $n$ - und  $n - 1$ -Simplexe. Die Matrix enthält die Koeffizienten der Linearkombination, die als *Inzidenzzahlen* bezeichnet werden und die Werte

---

<sup>17</sup>vgl. Abschnitt 3.1: inzidente Knoten (0-Simplexe) bei Graphen entsprechen Rändern von Kanten (1-Simplexe).

$\mathbf{0}$  nicht im Rand enthalten,  
 $\mathbf{1}$  gleich orientiert im Rand enthalten  
 $-\mathbf{1}$  entgegengesetzt orientiert im Rand enthalten  
 annehmen.

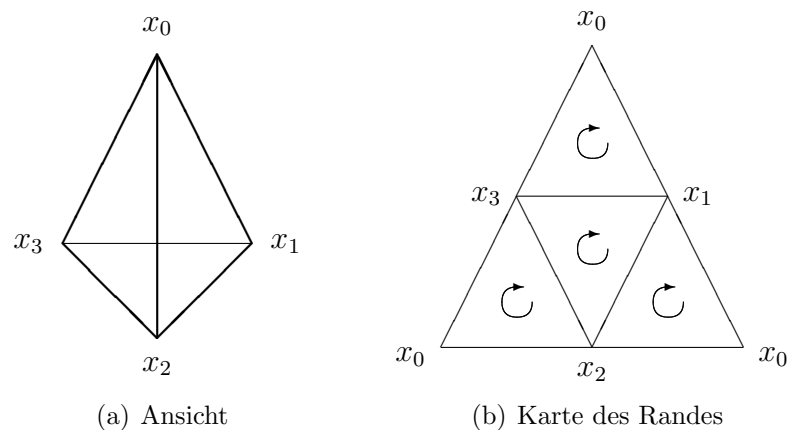


Abbildung 3.15: 3-Simplex

**Beispiel „Tetraeder“:** Betrachtet man den Rand des in Abb. 3.15 dargestellten 3-Simplexes, erhält man nach (3.41):

$$\begin{aligned} \partial \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle &= \langle x_1, x_2, x_3 \rangle - \langle x_0, x_2, x_3 \rangle \\ &\quad + \langle x_0, x_1, x_3 \rangle - \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \end{aligned}$$

Beachtet man das Vorzeichen, so erhalten alle zweidimensionalen Oberflächensimplexe dieselbe Orientierung<sup>18</sup>. Die Randsimplexe eines 2-Simplex der Oberfläche, wie z. B.

$$\partial \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_2, x_3 \rangle - \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle$$

sind entsprechend dessen Orientierung ausgerichtet. Auch der Rand (bzw. die Randkette) einer Teilmenge von Simplexen wie z. B.

$$\begin{aligned} \partial(\langle x_1, x_2, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1, x_3 \rangle) &= \partial \langle x_1, x_2, x_3 \rangle + \partial \langle x_0, x_1, x_3 \rangle \\ &= \langle x_2, x_3 \rangle - \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle \\ &\quad + \langle x_1, x_3 \rangle - \langle x_0, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle \\ &= \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle \end{aligned}$$

<sup>18</sup>entsprechend der „Rechte-Hand-Regel“ zeigen alle Normalen nach außen.

besitzt diese Orientierung. Die Oberfläche ist *orientierbar* bzw. zweiseitig. Körper, die nicht orientierbar sind, wie z. B. das MÖBIUSband oder die KLEINSche Flasche werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet. Der Rand der Oberfläche  $\partial\partial\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle = 0$ , da jeder 1-Simplex von den Rändern der beiden angrenzenden kohärenten 2-Simplexen jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Als Inzidenzmatrizen ergeben sich:

$$\begin{array}{cccc}
 & \langle x_1, x_2, x_3 \rangle & \langle x_0, x_3, x_2 \rangle & \langle x_0, x_1, x_3 \rangle & \langle x_0, x_2, x_1 \rangle \\
 \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \\
 & \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \langle x_0, x_3 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_3 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\
 \langle x_1, x_2, x_3 \rangle & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 \langle x_0, x_3, x_2 \rangle & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 \langle x_0, x_1, x_3 \rangle & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 \langle x_0, x_2, x_1 \rangle & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 \\
 & \langle x_0 \rangle & \langle x_1 \rangle & \langle x_2 \rangle & \langle x_3 \rangle \\
 \langle x_0, x_1 \rangle & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 \langle x_0, x_2 \rangle & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 \langle x_0, x_3 \rangle & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \langle x_1, x_2 \rangle & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 \langle x_1, x_3 \rangle & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 \langle x_2, x_3 \rangle & 0 & 0 & -1 & 1
 \end{array}$$

Zu  $\langle x_1, x_2 \rangle$  homologe Ketten sind z. B.  $\langle x_1, x_0 \rangle + \langle x_0, x_2 \rangle$ ,  $\langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_3, x_2 \rangle$  oder  $\langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_3, x_0 \rangle + \langle x_0, x_2 \rangle$ . Sie bilden zusammen jeweils einen unwesentlichen Zyklus und sind Teil einer Homologiegruppe. Ein beliebig gewählter 0-Simplex ist der einzige linear unabhängige Zyklus.

**Beispiel „Fläche mit Loch“:** Für dieses Beispiel, das zur Kreisscheibe mit Loch homöomorph ist, werden die linear unabhängigen Zyklen bestimmt. Wie in Abb. 3.16 ersichtlich, handelt es sich um eine Zusammenhangskomponente. Es kann ein beliebiger 0-Simplex als linear unabhängiger 0-Zyklus gewählt werden. Ein wesentlicher 1-Zyklus ist z. B.  $\langle x_4, x_3 \rangle + \langle x_3, x_5 \rangle + \langle x_5, x_4 \rangle$ . Auch  $\langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_0 \rangle$  schließt z. B. ein Loch ein, ist aber linear abhängig zum vorherigen Zyklus, da beide die Gesamtfläche beranden. Alle weiteren 1-Zyklen sind ebenfalls linear abhängig zu den bereits aufgeführten. Es existiert ein linear unabhängiger 1-Zyklus, der aus der Menge dieser wesentlichen 1-Zyklen gewählt werden kann. Linear unabhängige 2-Zyklen können bei einem zweidimensionalen Simplizialkomplex nicht mehr vorkommen.

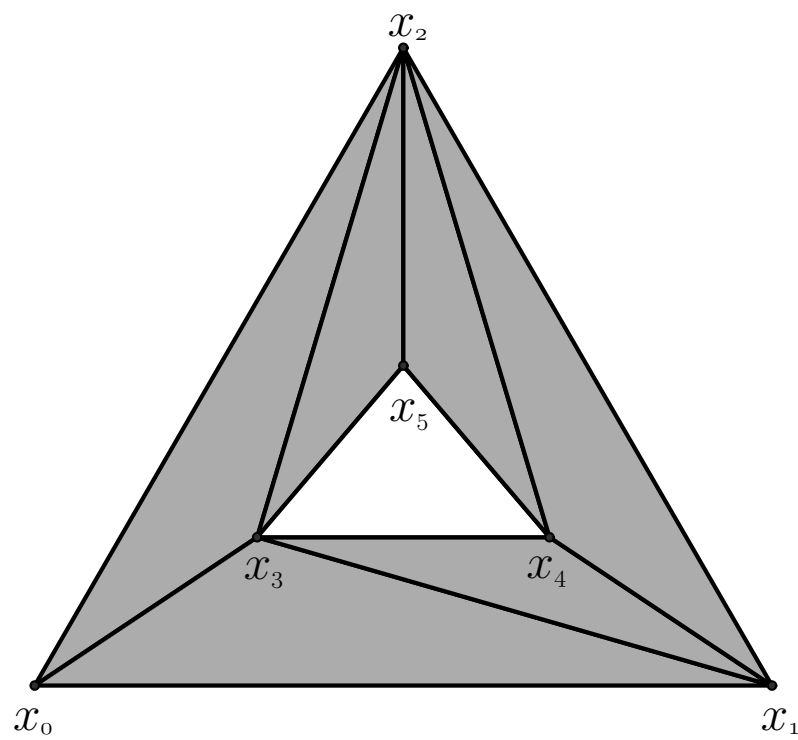


Abbildung 3.16: Fläche mit Loch

## 3.7 Topologische Invarianten

### 3.7.1 EULERSche Charakteristik

Für eine als Zellkomplex dargestellte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  ist die EULERSche Charakteristik durch

$$\chi(M) := \sum_{d=0}^n (-1)^d \alpha_d \quad (3.42)$$

als topologische Invariante gegeben (s. [Jän99, S. 88], [tom91, S. 331]).  $\alpha_d$  steht für die Anzahl der  $d$ -Zellen. Ein Vergleich von (3.42) mit (3.3) zeigt, daß für den Rand eines regulären bzw. sphärischen Polyeders die EULERSche Charakteristik  $\chi(P_{reg}) = 2$  und damit homöomorph zur Sphäre ist. Ist  $M$  eine zusammenhängende, geschlossene und triangulierbare  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, so ist für ungerades  $n$   $\chi(M) = 0$  (s. [SZ94, S. 353]).

### 3.7.2 BETTI-Zahlen

In Abschn. 3.6 wurde bereits die Homologiegruppen eingeführt. Die BETTI-Zahlen stehen für den Rang der Homologiegruppen. Sie lassen eine genauere Charakterisierung als die Eulersche Charakteristik zu. Das  $n$ -Zahlentupel der BETTI-Zahlen ist eine topologische Invariante, die mit der Eulerschen Charakteristik in folgender Weise zusammenhängt (Satz von Poincaré) [BE86, S. 141][tom91, S. 331]:

$$\chi(M) = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d \beta^d(M) \quad (3.43)$$

$\beta^d$  steht für die  $d$ -te BETTI-Zahl. Anschaulich lassen sich für Polyeder die BETTI-Zahlen mit Hilfe der Homotopie (s. Abschn. 3.5) bestimmen [BE86, S. 136], denn homotope Zyklen sind auch homolog. Diese hinreichende Bedingung läßt die BETTI-Zahl  $\beta^i$  aus der Anzahl der wesentlichen  $i$ -Zyklen bestimmen. Im zweidimensionalen Raum entspricht damit

- $\beta^0$  der Anzahl der Zusammenhangskomponenten,
- $\beta^1$  der Anzahl der Löcher
- $\beta^i = 0 \forall i > 1$

und im dreidimensionalen Raum

- $\beta^0$  der Anzahl der Zusammenhangskomponenten,

- $\beta^1$  der Anzahl der Löcher erster Art, bzw. Durchbohrungen
- $\beta^2$  der Anzahl der Löcher zweiter Art, bzw. Hohlräume
- $\beta^i = 0 \forall i > 2$

(s. auch [Kru96, S. 40]) In Tabelle 3.2 ist dies anhand eines Würfels demonstriert. Gegeben sei eine zusammenhängende, geschlossene und triangulierbare  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ . Aufbauend auf der POINCARÉ-Dualität besagt ein Satz (s. [SZ94, S. 353]), daß für die BETTIZahlen  $\beta^i = \beta^{n-i}$  gilt, falls  $M$  orientierbar ist. Dies kann für die Hüllen der Körper in Tab. 3.2, die 2-Mannigfaltigkeiten sind, verifiziert werden.

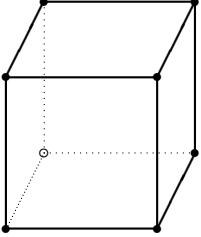
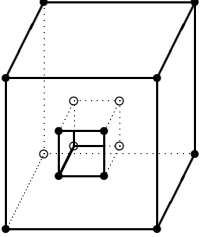
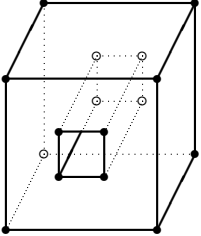
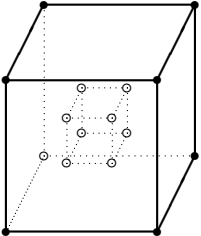
 <p style="text-align: center;">Würfel</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>v = \alpha_0</math></td> <td><math>e = \alpha_1</math></td> <td><math>f = \alpha_2</math></td> <td>s</td> <td>h</td> <td>r</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>12</td> <td>6</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <th colspan="4">Volumenkörper</th> <th colspan="4">Hülle</th> </tr> <tr> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">homöomorph zur Kugel/Sphäre</p>	$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r	8	12	6	1	0	0	Volumenkörper				Hülle				$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	1	0	0	1	1	0	1	2
$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r																																
8	12	6	1	0	0																																
Volumenkörper				Hülle																																	
$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$																														
1	0	0	1	1	0	1	2																														
 <p style="text-align: center;">Würfel mit Vertiefung</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>v = \alpha_0</math></td> <td><math>e = \alpha_1</math></td> <td><math>f = \alpha_2</math></td> <td>s</td> <td>h</td> <td>r</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>24</td> <td>11</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <th colspan="4">Volumenkörper</th> <th colspan="4">Hülle</th> </tr> <tr> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">homöomorph zur Kugel/Sphäre</p>	$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r	16	24	11	1	0	1	Volumenkörper				Hülle				$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	1	0	0	1	1	0	1	2
$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r																																
16	24	11	1	0	1																																
Volumenkörper				Hülle																																	
$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$																														
1	0	0	1	1	0	1	2																														
 <p style="text-align: center;">Würfel mit Durchbohrung</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>v = \alpha_0</math></td> <td><math>e = \alpha_1</math></td> <td><math>f = \alpha_2</math></td> <td>s</td> <td>h</td> <td>r</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>24</td> <td>10</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <th colspan="4">Volumenkörper</th> <th colspan="4">Hülle</th> </tr> <tr> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">homöomorph zum Torus/Torusoberfläche</p>	$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r	16	24	10	1	1	2	Volumenkörper				Hülle				$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	1	1	0	0	1	2	1	0
$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r																																
16	24	10	1	1	2																																
Volumenkörper				Hülle																																	
$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$																														
1	1	0	0	1	2	1	0																														
 <p style="text-align: center;">Würfel mit Hohlraum</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>v = \alpha_0</math></td> <td><math>e = \alpha_1</math></td> <td><math>f = \alpha_2</math></td> <td>s</td> <td>h</td> <td>r</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>24</td> <td>12</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <th colspan="4">Volumenkörper</th> <th colspan="4">Hülle</th> </tr> <tr> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> <td><math>\beta^0</math></td> <td><math>\beta^1</math></td> <td><math>\beta^2</math></td> <td><math>\chi</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>0</td> </tr> </table>	$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r	16	24	12	2	0	0	Volumenkörper				Hülle				$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	1	0	1	2	2	0	2	0
$v = \alpha_0$	$e = \alpha_1$	$f = \alpha_2$	s	h	r																																
16	24	12	2	0	0																																
Volumenkörper				Hülle																																	
$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$	$\beta^0$	$\beta^1$	$\beta^2$	$\chi$																														
1	0	1	2	2	0	2	0																														

Tabelle 3.2: Topologische Invarianten eines Würfels

### 3.8 Polyeder

Nach [Zei96, S. 13]:

**Polyeder:** Unter einem *Polyeder* versteht man einen Körper, der von Ebenenteilen begrenzt wird.

Ein dreidimensionales Polyeder kann als dreidimensionales Gegenstück zum (zweidimensionalen) Polygon betrachtet werden (s. [Kle97, S. 19]), da es von ebenen Flächen begrenzt wird (s. [dvOS00, S. 64]). Das entspricht der Begrenzung durch gerade Strecken beim Polygon. Allgemein werden  $n$ -dimensionale Polyeder als  $n$ -Polyeder  $p_n \in \mathbf{p}_n$  bezeichnet. Polyeder der Dimension 0 und 1 sind Simplexe. Die Seitenflächen, welche die Hülle bzw. Berandung eines  $n$ -Polyeders bilden und wiederum  $n - 1$ -Polyeder sind, werden als *Facetten* bezeichnet.

Ein Polyeder entspricht nach [Jän99, S. 110] einem Simplicialkomplex (s. Abschn. 3.4.1), bzw. dem triangulierbaren topologischen Raum, der einem Simplicialkomplex zugrunde liegt (s. [Sch69, S. 167], [SZ94, S. 72]). Jede kompakte Fläche (Satz von RADO), kompakte 3-Mannigfaltigkeit (Satz von MOISE) sowie kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension (Satz von CAIRNS) ist triangulierbar (s. [SZ94, S. 73]).

**konvexe Polyeder:** *Konvexe Polyeder* sind Polyeder, die aus einer konvexen Punktmenge bestehen (s. Abschn. 3.2.3). Sie können als Schnittmenge einer endlichen Anzahl von abgeschlossenen Halbräumen konstruiert werden (s. [PS85, S. 97], [Ede87, S. 16]). Die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten ergibt ein konvexes *Polytop* (s. [dvOS00, S. 237]), das einem berandeten (und damit endlichen) konvexen Polyeder (s. [PS85, S. 97]) und einer Zelle (s. [Ede87, S. 17]) entspricht<sup>19</sup>.

**simpliziale Polyeder:** Bei einem *simplizialen Polyeder* der Dimension  $n$  sind die Facetten ausschließlich  $n - 1$ -Simplexe.

**duale Polyeder:** Zur Konstruktion eines *dualen Polyeders* wird für jede Facette eines Polyeders ein Punkt (z. B. Schwerpunkt) gewählt. Diese Punkte bilden die Ecken des dualen Polyeders. Es werden diejenigen Ecken mit Kanten verbunden, deren erzeugende Facetten adjazent sind. Jeder ursprünglichen Ecke kann somit eine so erzeugte Facette zugeordnet werden. Die Vorgehensweise ist analog zum dualen Graphen.

---

<sup>19</sup> Das Polytop wird durch die Eckpunkte beschrieben, während das Polyeder durch Ebenen begrenzt wird. Im linearen Raum resultieren äquivalente Körper.



**einfache Polyeder:** Ein zu einem simplizialen Polyeder duales Polyeder ist *einfach*. Zu jeder Ecke des  $n$ -Polyeders sind  $n$  Facetten adjazent. Mit Ausnahme des Simplexes selbst, sind einfache Polyeder keine simplizialen Polyeder.

**reguläre Polyeder:** Es existieren fünf *reguläre Polyeder*, die auch als **PLATONSche Körper** bezeichnet werden und schon in der griechischen Antike bekannt waren (s. Tab. 3.3). Reguläre Polyeder besitzen kongruente, regelmäßige Vielecke als Seitenflächen. In den Ecken stoßen bei diesen Körpern immer die gleiche Anzahl Seitenflächen zusammen. Während der Hexaeder und Oktaeder, sowie der Dodekaeder und Ikosaeder zueinander duale Polyeder darstellen, ist der dem 3-Simplex entsprechende Tetraeder zu sich selbst dual.

**EULERSche Polyederformel** Oberflächen von 3-Polyedern können topologisch als planare Graphen  $G(V, E)$  dargestellt werden. In Abschnitt 3.1 wurde bereits die **EULERSche Polyederformel** (3.3) eingeführt:

$$v - e + f = 2$$

Betrachtet man die Anzahl der Ecken bzw. 0-Simplexe  $v := \text{card}(V) = \text{card}(\mathbf{p}_0)$ , Kanten (1-Simplexe)  $e := \text{card}(E) = \text{card}(\mathbf{p}_1)$  und Flächen<sup>20</sup>  $f = \text{card}(\mathbf{p}_2)$  in Tab. 3.3, kann deren Gültigkeit leicht verifiziert werden. Diese

Bezeichnung	Seitenflächen	v	e	f
Tetraeder	Dreiecke	4	6	4
Hexaeder (Würfel)	Quadrate	8	12	6
Oktaeder	Dreiecke	6	12	8
Dodekaeder	Fünfecke	20	30	12
Ikosaeder	Dreiecke	12	30	20

Tabelle 3.3: Reguläre Polyeder

Formel gilt auch für die Hülle allgemeiner dreidimensionaler *sphärischer Polyeder*, die homöomorph zu einer Sphäre sind. Der in Abb. 3.17(a) dargestellte Würfel besteht aus sechs 3-Simplexen. Die Hülle erfüllt mit  $v = 8$ ,  $e = 18$  und  $f = 12$  die EULERSche Formel (3.3):  $8 - 18 + 12 = 2$ . Der in Abb. 3.17(b) dargestellte Würfel mit Durchbohrung hingegen, der aus 24 2-Simplexen besteht, erfüllt das Kriterium hingegen nicht. Für die Hülle mit  $v = 16$ ,  $e = 48$  und  $f = 32$  ergibt sich  $16 - 48 + 32 = 0 \neq 2$ . Der Würfel ist homöomorph zur

<sup>20</sup> Flächen sind keine Elemente eines Graphen und werden in planaren Graphen nur indirekt dargestellt.

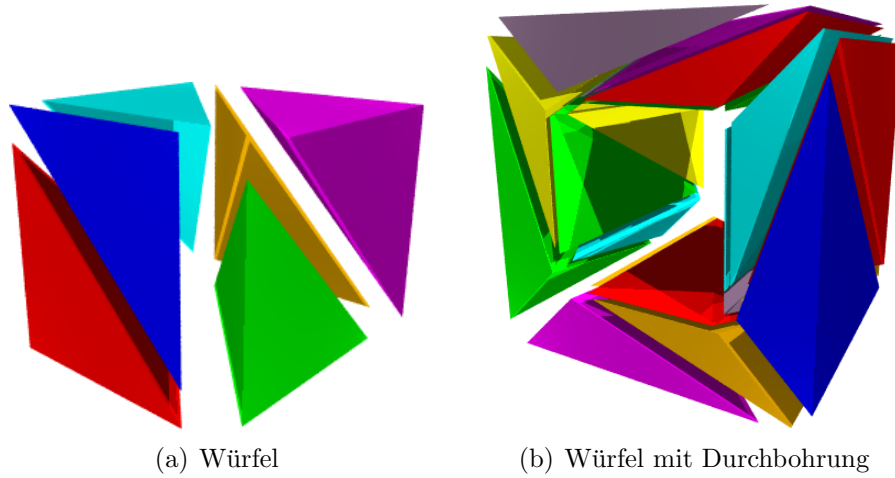


Abbildung 3.17: Simplicialkomplexe (Explosionszeichnung)

Vollkugel, bzw. die Würfeloberfläche homöomorph zur Sphäre. Der Würfel mit Durchbohrung bzw. dessen Hülle hingegen ist homöomorph zum Torus bzw. dessen Hülle. Die Summen 2 und 0 tragen dem Rechnung (vgl. Abschn. 3.7.1).

**DEHN-SOMMERVILLE Beziehungen** Für ein einfaches  $n$ -Polyeder ergeben sich die  $n + 1$  Gleichungen: (s. [Ede87, S. 104], [BY98, S. 144]):

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n-i}{n-k} \text{card}(p_i) = \text{card}(p_k) \quad \forall k \in \{i \mid 0 \leq i \leq n\} \quad (3.44)$$

Für ein dreidimensionales Polyeder ergibt sich mit  $n = 3$ :

$$3 \text{card}(p_0) = 2 \text{card}(p_1) \quad \text{für } k = 1, 2 \quad (3.45a)$$

$$\text{card}(p_0) - \text{card}(p_1) + \text{card}(p_2) = 2 \text{card}(p_3) \quad \text{für } k = 3 \quad (3.45b)$$

Die sich für  $n = k = 3$  ergebende DEHN-SOMMERVILLE Gleichung (3.45b) entspricht der EULERSche Polyederformel (3.3).

Beim zweidimensionalen Polygon mit  $n = 2$  erhält man:

$$\text{card}(p_0) = \text{card}(p_1) \quad (3.46)$$

### EULER-POINCARÉ-Formel

Aus (3.42) und (3.43) folgt:

$$\sum_{d=0}^n (-1)^d \alpha_d = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d \beta^d(M) \quad (3.47)$$

Für eine zweidimensionale Fläche erhält man für (3.47):

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \beta^0 - \beta^1 \quad (3.48)$$

und für einen dreidimensionalen Körper:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = \beta^0 - \beta^1 + \beta^2 \quad (3.49)$$

Die Gleichungen können als HESSESche Normalform einer Hyperebene identifiziert werden (vgl. (6.5)):

$$nx = d \quad (3.50)$$

Ausgehend von (3.49) ist

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.51a) \quad x = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix} \quad (3.51b)$$

und dem Abstand zum Nullpunkt

$$d = nx_0 = 0 \quad (3.51c)$$

Dieser Ansatz wird in Kruschwitz [Kru96, S. 59ff] weiterverfolgt.

Ein regulärer dreidimensionaler Körper kann durch seine zweidimensionale Oberfläche beschrieben werden. Diese wird hier auf 2-Mannigfaltigkeiten beschränkt, bei der jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zur zweidimensionalen offenen Vollkugel ist (s. Abschn. 3.2.5). Für die Oberflächendarstellung eines Körpers ist

$$\alpha_0 = v \quad (3.52a)$$

$$\alpha_1 = e \quad (3.52b)$$

$$\alpha_2 = f \quad (3.52c)$$

$$\alpha_3 = 0 \quad (3.52d)$$

Die Oberflächen sind Zusammenhangskomponenten, deren Anzahl durch

$$\beta^0 = \beta^2 = s \quad (3.53a)$$

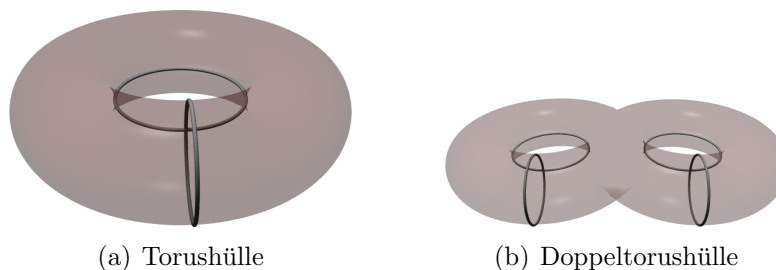


Abbildung 3.18: Wesentliche 1-Zyklen

bestimmt werden kann. Da bei jeder Durchbohrung zwei wesentliche 1-Zyklen (s. Abb. 3.18) entstehen, ist

$$\beta^1 = 2h \tag{3.53b}$$

Ein Zellkomplex läßt ein Loch in einer Zelle nicht zu. Als Korrektur können zwei Kanten und eine Fläche hinzugefügt werden. Hieraus folgt der Korrektursummand  $r$ .

Die folgende Form der EULER-POINCARÉ-Formel

$$v - e + f = 2(s - h) + r \tag{3.54}$$

mit

**v:** Ecken (*vertices*)

**e:** Kanten (*edges*)

**f:** Flächen (*faces*)

**s:** Zusammenhangskomponenten (*shells*)

**h:** Löcher (erster Art) in Körpern (*holes*)

**r:** Löcher in Flächen (*rings*)

findet sich sowohl in [Män83, S. 15] als auch in [BGZ96, S. 81]. Sie folgt durch Einsetzen von (3.52) und (3.53) in (3.49). Auch diese Gleichung läßt sich als HESSESche Normalform einer Ebene im  $\mathbb{N}^6$  ausdrücken:

$$v - e + f - 2s + 2h - r = 0 \tag{3.55}$$

Mit

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.56a)$$

$$x = \begin{pmatrix} v \\ e \\ f \\ s \\ h \\ r \end{pmatrix} \quad (3.56b)$$

und (3.51c) läßt sich (3.50) in (3.55) überführen.

Im zweidimensionalen Fall ergibt sich als Ebenengleichung, ausgehend von (3.48):

$$v - e + f - s + r = 0 \quad (3.57)$$

Dies entspricht einer vierdimensionalen Ebene im fünfdimensionalen Raum. Wird hier nur eine Zusammenhangskomponente und eine Fläche ohne Löcher betrachtet, so reduziert sich die Gleichung auf eine zweidimensionale Ebene.

Die EULER-POINCARÉ-Formeln bilden die Grundlage für die EULER-Operatoren (s. Anhang A.1). Eine praktische Umsetzung und Anpassung an Probleme der geometrischen Modellierung zeigt [Wil85].



# Kapitel 4

## Grundlagen der Interpolation

Die polynomiale Interpolation ist ein grundlegender Bestandteil der numerischen Mathematik und wird in der Literatur oft behandelt (z. B. [Sch97, S. 108ff], [DH93, S. 191ff], [QSS00, S. 327ff], [Her01, S. 299ff], [SW93, S. 139ff], [TS90, S. 5ff], [Spä94, S. 18ff], [Pla00, S. 1ff], [FB94, S. 60ff]).

### 4.1 Polynome

Die folgende Gleichung stellt ein Polynom vom Grad  $n$  dar:

$$P_n(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in \mathbf{P}_n \quad (4.1)$$

Hierbei ist  $P_n(x)$  vom *echten* Grad  $n$  falls  $a_n \neq 0$ .

Der WEIERSTRASSsche Approximationssatz besagt, daß eine auf einem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $f(x)$  beliebig genau durch ein Polynom  $P(x)$  approximiert werden kann:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \varepsilon < 0 \quad (4.2)$$

Dies ist auch Grundlage für die TAYLOR-Entwicklungen, die eine Funktion durch ein Polynom annähert. In der Praxis bedeutet dies, daß aufbauend auf Polynome auch nicht-polynomielle Kurvenverläufe beliebig genau angenähert werden können und sich diese Funktionenklasse gut für allgemeine Probleme eignet.

**Polynomiale Kurve** Auch eine polynomiale Kurve  $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d \in \mathbf{P}_n^d$  kann durch  $n + 1$  Stützstellen der Form  $(t^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_d^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d+1}$  mit  $i \in 0, \dots, n$  eindeutig definiert werden. Zu beliebigen  $n + 1$  paarweise verschiedenen Stützstellen  $t^{(i)} \neq t^{(j)} \forall i \neq j$  existiert genau ein Polynom vom

Grad<sup>1</sup>  $n$ . Für den Funktionenraum  $\mathbf{P}_n^d$ , der die Polynome vom Grad  $n$  im  $\mathbb{R}^d$  enthält, ist eine *monomiale Basis*  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  definiert. Durch Einsetzen der Stützstellen in (4.1), wobei die Koeffizienten  $a_i$  hier Vektoren  $a^{(i)} \in \mathbb{R}^d$  sind, erhält man:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t^{(0)} & t^{(0)^2} & \dots & t^{(0)^n} \\ 1 & t^{(1)} & t^{(1)^2} & \dots & t^{(1)^n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & t^{(n)} & t^{(n)^2} & \dots & t^{(n)^n} \end{pmatrix}}_{V_n} \begin{pmatrix} a_1^{(0)} & \dots & a_d^{(0)} \\ a_1^{(1)} & \dots & a_d^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)} & \dots & a_d^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} & \dots & x_d^{(0)} \\ x_1^{(1)} & \dots & x_d^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_d^{(n)} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Die Determinante der sog. VANDERMONDE-Matrix  $V_n$  ergibt sich zu

$$\det V_n = \prod_{i=0}^n \prod_{j=i+1}^n (t^{(i)} - t^{(j)}) \quad (4.4)$$

Die Matrix ist für Stützstellen, die nicht paarweise verschieden sind singular. Sind mehr als  $n + 1$  Stützstellen gegeben ist das Gleichungssystem in (4.3) überbestimmt und i. a. nicht mehr eindeutig lösbar.

## 4.2 LAGRANGE-Interpolation

Die LAGRANGE-Polynome  $L_i$  stellen eine weitere Basis für den Funktionenraum  $\mathbf{P}_n$  dar. Für gegebene Stützstellen  $(x_i, y_i)$  mit  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  ist

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5)$$

und somit

$$L_i^n(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (4.6)$$

Als Interpoland ergibt sich

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i^n(x) \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup> bzw. echter Grad  $\leq n$



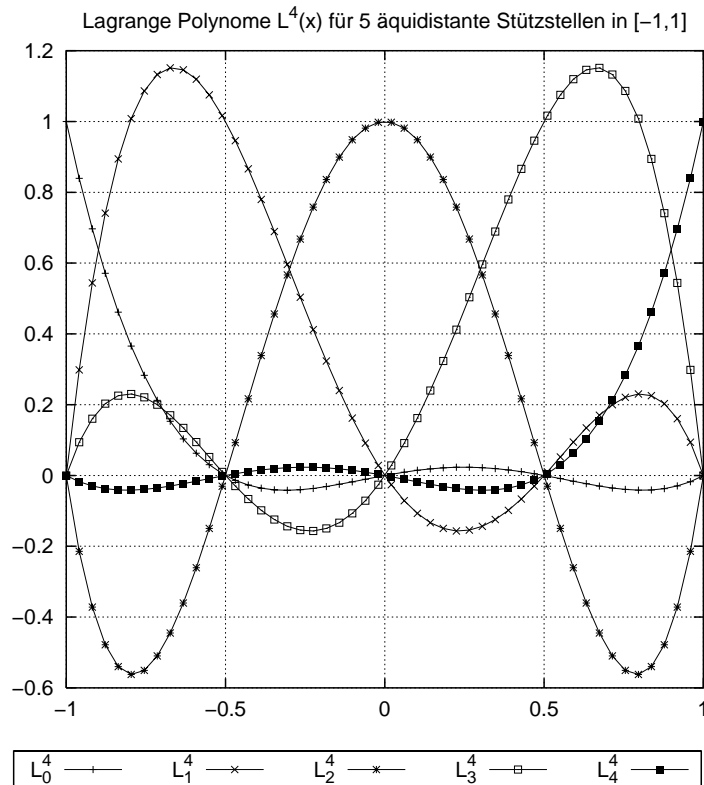


Abbildung 4.1: Beispiel für LAGRANGE-Polynome

Die interpolierende Eigenschaft von  $P_n$  für die gegebenen Stützstellen läßt sich durch Einsetzen von (4.5) in (4.7) zeigen. Ausgehend von  $y_i = 1 \forall i$  in (4.7) wird  $f(x) = 1$  interpoliert und man erhält

$$\sum_{i=0}^n L_i^n(x) = 1 \quad (4.8)$$

Durch Umformung von (4.7) ergibt sich die *baryzentrische Formel*:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_i y_i}{\sum_{i=0}^n \mu_i} \quad (4.9a)$$

mit

$$\mu_i(x) = \frac{1}{(x - x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (4.9b)$$

Die Interpolation ist auch für einen Parameter  $t$  anstelle der Abszisse  $x$  und für Ortsvektoren von Stützstellen anstelle der Funktionswerte durchführ-

bar. Diese Technik wird selten eingesetzt, da Polynom-Interpolanden für hohe Polynomgrade zu *Oszillationen* neigen.

Die klassische Finite Elemente Methode verwendet LAGRANGE-Interpolanden häufig als Formfunktionen (s. z. B. [Hug00, S. 126ff], [CMP89, S. 97f], [GN89, S. 597f], [Bet97, S. 132f]).

### 4.3 BÉZIER-Techniken

BÉZIER-Techniken sind ausführlich in [Far94] erläutert.

#### 4.3.1 BERNSTEIN-Polynome

BERNSTEIN-*Polynome*, bilden die Basis der in Abschn. 4.3.2 vorgestellten BÉZIER-KURVEN. Auf das Intervall  $[0, 1]$  bezogen sind sie durch

$$B : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] : B_i^n(\lambda) = \binom{n}{i} \lambda^i (1 - \lambda)^{n-i} \in [0, 1] \quad (4.10)$$

bzw.

$$B_i^n(\lambda) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} \lambda^j \quad (4.11)$$

definiert<sup>2</sup>. Eine Transformation auf ein Intervall  $[a, b]$  ist durch  $t = \frac{\lambda-a}{b-a}$  möglich.

Für  $\lambda = 0$  liegt eine  $i$ -fache, für  $\lambda = 1$  eine  $n - i$ -fache Nullstelle vor. Das einzige Maximum befindet sich bei  $\lambda_{max} = \frac{i}{n}$ . Jeweils zwei Polynome eines Grades sind zueinander symmetrisch:  $B_i^n(\lambda) = B_{n-i}^n(1 - \lambda)$ . Betrachtet man den *binomischen Satz*  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  und (4.10) erkennt man:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(\lambda) = (\lambda + (1 - \lambda))^n = 1 \quad (4.12)$$

BERNSTEIN-Polynome können auch rekursiv definiert werden:

$$B_i^n(\lambda) = \begin{cases} (1 - \lambda)B_i^{n-1}(\lambda) + \lambda B_{i-1}^{n-1}(\lambda) & \text{falls } 0 \leq i \leq n \wedge n > 0 \\ 1 & \text{falls } i = 0 \wedge n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.13)$$

<sup>2</sup> Die *Binominalkoeffizienten* berechnen sich mit Hilfe von

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{falls } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

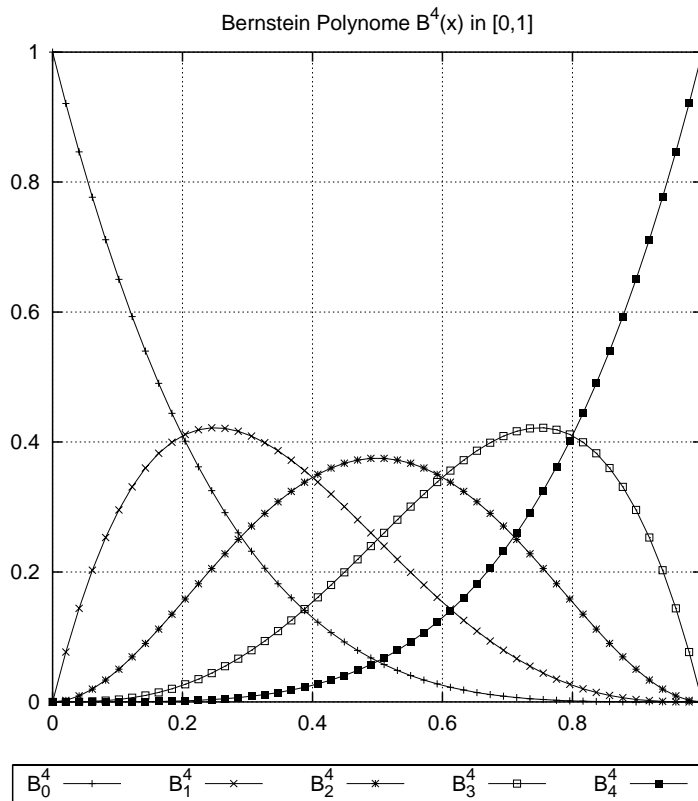


Abbildung 4.2: Beispiel für BERNSTEIN-Polynome

Da  $B_0^n(\lambda) = (1 - \lambda)^n$  und  $B_n^n(\lambda) = \lambda^n$  ergibt sich daraus auch  $B_0^{n+1}(\lambda) = (1 - \lambda)B_0^n(\lambda)$  und  $B_{n+1}^{n+1}(\lambda) = \lambda B_n^n(\lambda)$ . Die Ableitung nach dem Parameter  $\lambda$  berechnet sich durch

$$\frac{d}{d\lambda} B_i^n(\lambda) = n (B_{i-1}^{n-1}(\lambda) - B_i^{n-1}(\lambda)) \quad (4.14)$$

### 4.3.2 BÉZIER-Kurven

Ein Polynom in BÉZIER-Darstellung verwendet die BERNSTEIN-Polynome als Basis:

$$P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(\lambda) \quad (4.15)$$

Die Koeffizienten  $b_i$  werden als Kontrollpunkte bezeichnet. Aufgrund der bereits in Abschn. 4.3.1 aufgeführten Eigenschaften der BERNSTEIN-Polynome

definiert der erste Kontrollpunkt den Start- und der letzte den Endpunkt der Kurve, also

$$P_n(0) = b_0 \quad (4.16a)$$

$$P_n(1) = b_n \quad (4.16b)$$

Eine inverse Reihenfolge der Kontrollpunkte erzeugt eine identische BÉZIER-Kurve. Für einen linearen Operator  $\phi$  gilt nach (3.2.3):

$$\phi(P_n) = \sum_{i=0}^n \phi(b_i) B_i^n$$

Für eine affine Transformation ist demzufolge die transformierte Kurve gleich der durch die transformierten Kontrollpunkte definierten Kurve. Unter Berücksichtigung von (4.14) ergibt sich für  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} P_n(\lambda) &= \sum_{i=0}^n b_i \frac{d}{d\lambda} B_i^n(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i n (B_{i-1}^{n-1}(\lambda) - B_i^{n-1}(\lambda)) \\ &= n \left( \sum_{i=1}^n b_i B_{i-1}^{n-1}(\lambda) + 0 - \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(\lambda) - 0 \right) \\ &= n \left( \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} B_i^{n-1}(\lambda) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(\lambda) \right) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(\lambda) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Speziell im Start- und Endpunkt verläuft der Kontrollpunkt-Polygonzug tangential zur Kurve:

$$\frac{d}{d\lambda} P_n(0) = n(b_1 - b_0) \quad (4.18a)$$

$$\frac{d}{d\lambda} P_n(1) = n(b_n - b_{n-1}) \quad (4.18b)$$

Eine Verallgemeinerung von (4.17) für höhere Ableitungen ist durch

$$\frac{d^l}{d\lambda^l} P_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{i=0}^{n-l} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^{l-j} b_{i+j} B_i^{n-l}(\lambda) & \text{für } l \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.19)$$

gegeben. Es seien für  $i + k \leq n$  Teilpolynome vom Grad  $k$  definiert:

$$b_i^k(\lambda) = \sum_{j=0}^k b_{i+j} B_j^k(\lambda) \quad (4.20)$$

Es ist  $b_0^n(\lambda) = P_n(\lambda)$ . Für diese Teilpolynome gilt folgende Rekursionsvorschrift:

$$b_i^k(\lambda) = (1 - \lambda)b_i^{k-1}(\lambda) + \lambda b_{i+1}^{k-1}(\lambda) \quad (4.21)$$

mit  $b_i^0(\lambda) = b_i$ . Ausgehend von (4.21) und (3.8) stellt man fest, daß ein Teilpolynom des Grades  $l < k$  innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte des Teilpolynoms des Grades  $k$  liegt. Unter Verwendung der Definition der Teilpolynome kann (4.19) für  $n \geq k$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d^l}{d\lambda^l} P_n(\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^{l-j} b_j^{n-l}(\lambda) \quad (4.22)$$

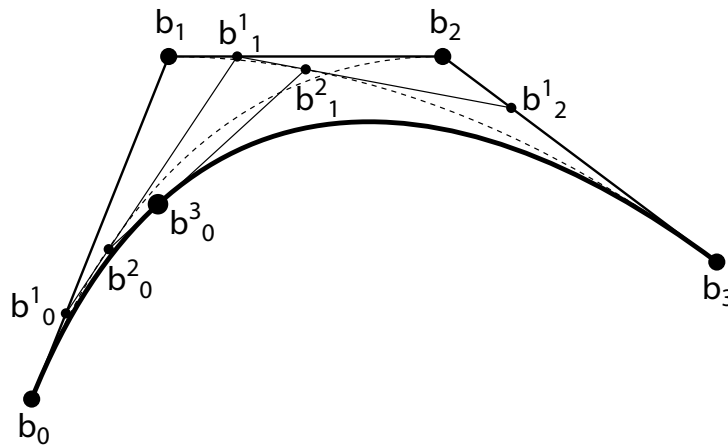


Abbildung 4.3: Geometrische Interpretation des DECASTELJAU-Algorithmus

**DECASTELJAU-Algorithmus** Der DECASTELJAU-Algorithmus nutzt die Rekursionsvorschrift (4.21) aus, indem jeweils rekursiv zwischen zwei Kontrollpunkten linear interpoliert und ein neuer Zwischenpunkt erzeugt wird. Das Vorgehen ist in Tab. 4.1 dargestellt, die geometrische Interpretation in Abb. 4.3. Für die Berechnung eines Punktes  $b_i^k$  werden jeweils nur die Punkte  $b_i^{k-1}$  und  $b_{i+1}^{k-1}$  benötigt. Der Berechnungsalgorithmus muß deshalb die  $b_i^k$  nur für einen Iterationsschritt vorhalten und kann den Eintrag für  $b_i^k$  mit

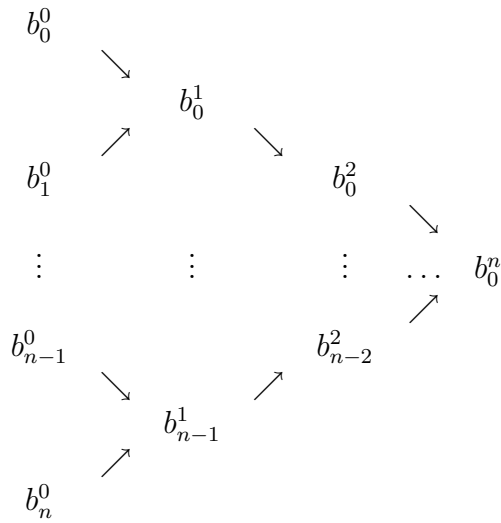


Tabelle 4.1: DECASTELJAU-Schema

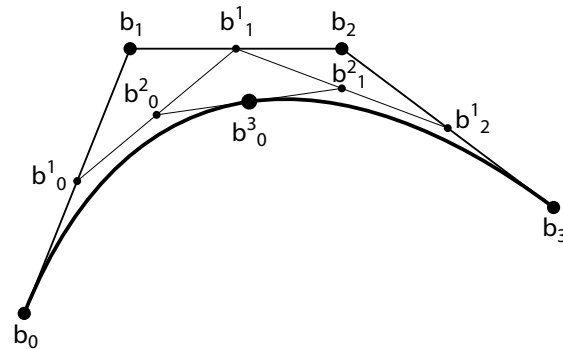
$b_i^{k+1}$  überschreiben. Da der Algorithmus  $\frac{1}{2}n(n+1)$  Berechnungen von neuen Kontrollpunkten erfordert ( $O(n^2)$ ), ist es vorteilhafter ein HORNER-Schema zur Berechnung der Werte nach (4.15) mit (4.10) zu verwenden (s. [SW93, S. 213]):

$$P_n(\lambda) = (1 - \lambda)^n \sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^i \quad (4.23)$$

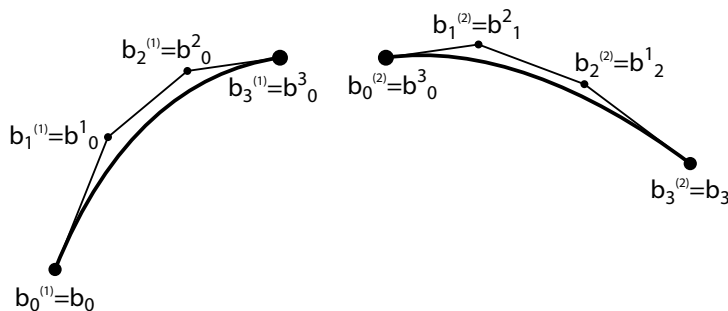
**Subdivision** Im folgenden soll eine BÉZIER-Kurve  $P_n$  an einem durch den Parameterwert  $\lambda_s$  definierten Punkt in zwei BÉZIER-Kurven  $P_n^{(1)}$  und  $P_n^{(2)}$  aufgeteilt werden. Es gilt (s. [AS93, S. 358f])

$$\begin{aligned} P_n^{(1)}(\lambda) &= P_n^{(1)}(\lambda_s \lambda) = b_0^n(\lambda_s \lambda) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(\lambda_s \lambda) \\ &= \sum_{i=0}^n b_0^i(\lambda_s) B_i^n(\lambda) \\ P_n^{(2)}(\lambda) &= P_n^{(1)}(\lambda - \lambda_s \lambda + \lambda_s) = b_0^n(\lambda - \lambda_s \lambda + \lambda_s) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(\lambda - \lambda_s \lambda + \lambda_s) \\ &= \sum_{i=0}^n b_{n-i}^i(\lambda_s) B_i^n(\lambda) \end{aligned}$$

Die Kontrollpunkte der Teilkurven (vgl. Abb. 4.4) werden beim DECASTELJAU-



(a) DECASTELJAU-Schema



(b) Subdivision

Abbildung 4.4: kubische BÉZIER-Kurve

Algorithmus bei der Berechnung des Teilungspunktes als Zwischenwerte berechnet (vgl. auch Tab. 4.1). In der Standardimplementierung werden die Kontrollpunkte einer Teilkurve allerdings überschrieben. Der Polygonzug der Kontrollpunkte konvergiert für eine ausreichende Anzahl an Unterteilungen gegen die Kurve selbst (s. [Far94, S. 44]). Das kann für die Bestimmung von Schnittpunkten von BÉZIER-Kurven ausgenutzt werden.

### 4.3.3 BÉZIER-Techniken für simpliziale Topologien

Die Kontrollpunkte aus Abschn. 4.3.2 sind in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet. Ein Punkt eines um eine Ordnung niedrigeren Teilpolynoms, wie er im DECASTELJAU-Algorithmus berechnet wird, liegt auf der Verbindungslinie zweier aufeinanderfolgender und damit benachbarter Punkte. Durch diese Adjazenzbeziehung können die Punkte als Knoten bzw. 0-Simplex eines Graphen, bzw. 1-Simplizialkomplexes gedeutet werden, bei dem je zwei aufeinanderfolgende Punkte durch eine Kante bzw. 1-Simplex inzident sind. Aus

jeder Kante resultiert ein Kontrollpunkt im berechneten Teilpolynom und es entsteht ein weiterer Graph, wobei die Graphen eine hierarchische Struktur aufweisen. Diese Betrachtungsweise ermöglicht die einfache Erweiterung des Vorgehens auf beliebige Dimensionen. Im folgenden soll zunächst die zweidimensionale, auf Dreiecken bzw. 2-Simplexen aufbauende BÉZIER-Fläche (s. [Far79]) vorgestellt werden.

Die dem DECASTELJAU-Algorithmus zugrundeliegenden baryzentrischen Koordinaten (3.9) der einzelnen Simplexe sind auf beliebige Dimensionen erweiterbar, wobei eine Koordinate jeweils linear abhängig und somit implizit gegeben und berechenbar ist. Die Rekursionsvorschrift für Teilpolynomflächen lautet:

$$b_i^k(\lambda_1, \lambda_2) = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)b_{i,j}^{k-1}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1 b_{i+1,j}^{k-1}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_2 b_{i,j+1}^{k-1}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (4.25)$$

Abb. 4.5(a) stellt das Vorgehen geometrisch dar. Eine Erweiterung für höhe-

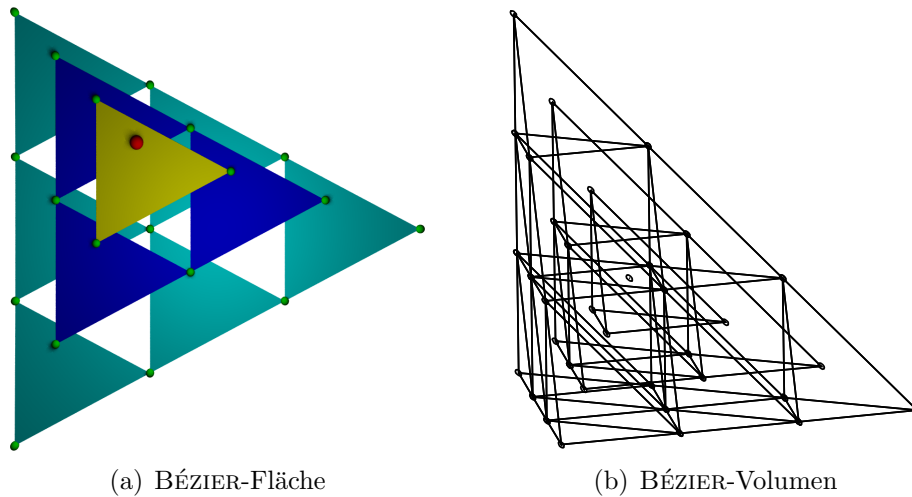


Abbildung 4.5: DE CASTELJAU-Algorithmus für simpliziale Topologien

re Dimensionen erfolgt analog. Die Randkurven einer solchen BÉZIER-Fläche ( $\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \vee \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ) sind die durch die Rand-Kontrollpunkte gebildeten BÉZIER-Kurven. Die grundlegenden Eigenschaften der BÉZIER-Kurve lassen sich auf die BÉZIER-Fläche übertragen. Die Punkte der BÉZIER-Fläche sind konstruktionsbedingt eine Teilmenge der konvexen Hülle der Kontrollpunkte. Das Kontrollpunkt-Polyeder bildet am Rand eine Tangentialfläche an die BÉZIER-Fläche. Auch die Subdivision ist analog der BÉZIER-Kurve möglich und ein Nebenprodukt des DECASTELJAU-Algorithmus.



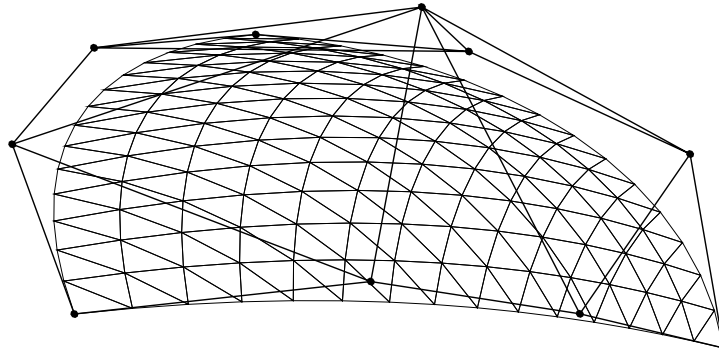


Abbildung 4.6: BÉZIER-Fläche mit Simplextopologie

#### 4.3.4 Rationale BÉZIER-Kurven

Verwendet man homogene Koordinaten  $w_i x_1^{(i)}, \dots, w_i x_d^{(i)}, w_i$  für die Darstellung der Punkte in einem projektiven Raum  $\mathbb{R}^{d+1}$ , so müssen die Werte zur Rückprojektion auf  $x_1^{(i)}, \dots, x_d^{(i)}, 1$  normiert werden. Die polynomiale Funktion aus (4.15) wird hierdurch rational:

$$R_n(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(\lambda)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(\lambda)} \quad (4.26)$$

mit den Zwischenpunkten

$$b_i^k(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^k w_{i+j} b_{i+j} B_j^k(\lambda)}{\sum_{j=0}^k w_{i+j} B_j^k(\lambda)} \quad (4.27)$$

Die den Kontrollpunkten zusätzlich zugeordneten Faktoren  $w_i$  werden als *Gewichte* bezeichnet, für die  $w_i > 0$  gelten soll. Die polynomialen BÉZIER-Kurven aus 4.3.2 sind für den Unterraum  $w_i = 1 \forall i$  als Spezialfall in den rationalen BÉZIER-Kurven enthalten. Für positive Gewichte bleibt die Eigenschaft der BÉZIER-Kurven erhalten, innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte zu liegen. Eine Multiplikation aller Gewichte mit einem konstanten Faktor ändert die Kurve nicht. Die Modifikation der Gewichte durch  $\bar{w}_i = c^i w_i$  ergibt eine *Umparametrisierung*, welche die Gestalt der Kurve zwar nicht ändert, jedoch die Lage eines Punktes in Abhängigkeit des Parameters. Eine Umparametrisierung mit  $c = \sqrt[n]{\frac{w_0}{w_n}}$  ergibt  $\bar{w}_n = \bar{w}_0 = w_0$ . Es existiert somit immer eine Standardform der Darstellung einer rationalen BÉZIER-Kurve mit  $w_0 = w_n = 1$ . Prinzipiell ist es möglich die Algorithmen aus Abschn. 4.3.2 im  $d + 1$ -dimensionalen Raum anzuwenden.

**Rationaler DECASTELJAU-Algorithmus** Der DECASTELJAU-Algorithmus im  $\mathbb{R}^{d+1}$  entspricht der Berechnung einer  $d$ - und einer eindimensionalen Kurve, die dem Zähler und Nenner in (4.26) gleichgesetzt werden. Über die Berechnung des Quotienten erfolgt die Normierung bzw. Transformation in den  $\mathbb{R}^d$ . Diese Vorgehensweise ist von der numerischen Stabilität her ungünstig und es wird vorzugsweise ein modifizierter rationaler DECASTELJAU-Algorithmus verwendet (s. [Far94, S. 193]). Hier erfolgt die Normierung der homogenen Koordinaten bei der Berechnung jedes Zwischenpunktes indem zunächst das neue Gewicht

$$w_i^k(\lambda) = (1 - \lambda)w_i^{k-1}(\lambda) + \lambda w_{i+1}^{k-1}(\lambda) \quad (4.28a)$$

berechnet wird, um bei der Berechnung der Koordinatenwerte

$$b_i^k(\lambda) = (1 - \lambda) \frac{w_i^{k-1}(\lambda)}{w_i^k(\lambda)} b_i^{k-1}(\lambda) + \lambda \frac{w_{i+1}^{k-1}(\lambda)}{w_i^k(\lambda)} b_{i+1}^{k-1}(\lambda) \quad (4.28b)$$

durch dieses Gewicht zu teilen. Mit  $w_i^k$  wird hierbei das Gewicht des Punktes  $b_i^k$  bezeichnet.

**Gradanhebung** Gegeben sei eine BÉZIER-Kurve des Grades  $n$ . Gesucht seien die Kontrollpunkte und Gewichte einer identischen BÉZIER-Kurve des Grades  $n + 1$ . Die Start- und Endpunkte bleiben mit den entsprechenden Gewichten unverändert:  $\hat{b}_0 = b_0$ ,  $\hat{w}_0 = w_0$  und  $\hat{b}_{n+1} = b_n$ ,  $\hat{w}_{n+1} = w_n$ . Ausgehend von  $\alpha_i = \frac{i}{n+1}$  bestimmen sich mit

$$\hat{w}_i = \alpha_i w_{i-1} + (1 - \alpha_i) w_i \quad (4.29a)$$

die neuen Gewichte und mit

$$\hat{b}_i = \frac{\alpha_i w_{i-1} b_{i-1} + (1 - \alpha_i) w_i b_i}{\hat{w}_i} \quad (4.29b)$$

die neuen Kontrollpunkte, wobei  $i \in [0, \dots, n + 1]$ .

**Kegelschnitte** Für die Anwendung rationaler BÉZIER-Kurven ist es wichtig, daß rationale quadratische BÉZIER-Kurven Kegelschnitt-Abschnitte wie z. B. den Kreisbogen *exakt* darstellen können. Für die Standardform einer quadratischen BÉZIER-Kurve mit  $b_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan \alpha \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und dem Gewicht  $w_1 = c \cos \alpha$  gibt [Far94, S. 189] die Gleichung

$$c(\lambda) = \frac{(1 - t)^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2ct(1 - t) \cos \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \tan \alpha \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1 - t)^2 + 2ct(1 - t) \cos \alpha + t^2} \quad (4.30)$$

für den Kegelschnitt an. Für  $c = 1$  erhält man einen Kreisbogen. Falls der Kontrollpunkt gegen Unendlich strebt, was als *Kontrollvektor* oder *Fernpunkt* (s. [HL92, S. 144]) bezeichnet wird, ist  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} w_1 b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ . In diesem Fall bietet sich eine Gradanhebung zur Elimination der Kontrollvektoren an. Die sich ergebende kubische BÉZIER-Kurve für den entsprechenden Einheits-Halbkreis besitzt die Kontrollpunkte  $b_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 4.4 Splineinterpolation

Die Splineinterpolation teilt den Definitionsbereich der Interpolationsfunktion zwischen den Stützstellen in einzelne Teilintervalle auf. Auf jedem dieser Teilintervalle ist ein Polynom definiert. Zwischen den einzelnen Polynomen sind an den Stützstellen Übergangsbedingungen definiert. Es wird vorgegeben welche Ableitungen stetig sind, wobei  $n$  stetige Ableitungen als  $C^n$ -Stetigkeit bezeichnet werden. Für parametrisierte Kurven ist es möglich, daß die Richtung der Kurve übereinstimmt, die Parametrisierung aber unstetig ist. Die Kurven werden „unterschiedlich schnell“ durchlaufen. In diesem Fall spricht man von einer *geometrischen Stetigkeit* bzw.  $G^n$ -Stetigkeit. Die Bezeichnung „spline“ kommt von einer biegsamen Zeichenhilfe (Straklatte), welche an bestimmten Stellen fixiert wurde, um die sich ergebende Biegelinie nachzuzeichnen. Dies entspricht dem im Bauingenieurwesen weit verbreiteten Durchlaufträger unter dem Lastfall Stützensenkung. Da das Gesamtpotential minimiert wird (s. z. B. [MH94, S. 12] ), werden Oszillationen vermieden.



# Kapitel 5

## Diskretisierende Berechnungsverfahren für Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen

Eine Reihe von Fragestellungen im Ingenieurwesen, die sich auf kontinuierliche Systeme beziehen, erfordert die Lösung einer partiellen Differentialgleichung (s. [KA00, GR94, Hac96]).

### 5.1 Typen von Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen sind Gleichungen, die *partielle Ableitungen*  $u_{x_i \dots x_j}$  im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$u_{x_i \dots x_j} := \frac{\partial^o u(x_1, \dots, x_n)}{\underbrace{\partial x_i \dots \partial x_j}_o}$$

enthalten. Die Ordnung  $o$  wird durch die höchste vorkommende Ableitung festgelegt. Eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung im  $\mathbb{R}^n$  ist als Linearkombination einer Funktion  $u$  und seiner ersten und zweiten partiellen Ableitungen durch

$$Lu(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (5.1a)$$

mit dem linearen Operator

$$L := \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} + 1 \quad (5.1b)$$

gegeben, wobei die Koeffizienten in einer symmetrischen<sup>1</sup> Matrix  $A$  und einem Vektor  $b$  angegeben werden können:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.2a)$$

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (5.2b)$$

In Abhängigkeit der Koeffizienten kann der *Typ* der partiellen Differentialgleichung für gegebene Abszissenwerte bestimmt werden. Die Gleichung ist in einem Punkt

**elliptisch**, falls die Determinante  $\det(A) > 0$  bzw.  $A$  positiv oder negativ definit ist. Eine Matrix  $A$  ist positiv (negativ) definit, falls  $x^T A x > 0$  ( $< 0$ )  $\forall x \neq 0$  bzw. alle Eigenwerte der Matrix positiv (negativ) sind.

**hyperbolisch**, falls die Determinante  $\det(A) < 0$  bzw. ein Eigenwert das entgegengesetzte Vorzeichen der  $n - 1$  Eigenwerte mit gleichem Vorzeichen besitzt.

**parabolisch**, falls die Determinante  $\det(A) = 0$  bzw. ein Eigenwert Null ist und alle anderen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen besitzen. Zudem muß der Rang der Matrix  $\text{rank}(A, b) = 2$  sein mit  $b := (b_1, \dots, b_n)^T$ .

Eine partielle Differentialgleichung wird einem Typ zugeordnet, falls die Voraussetzungen im gesamten Definitionsbereich erfüllt sind. Die Bezeichnungen der Typen orientiert sich an den Kegelschnitten, bei denen die quadratischen Terme der Gleichung analog zu den zweiten Ableitungen der partiellen Differentialgleichung vorkommen. Wichtig ist die Typeinteilung in Bezug auf deren numerische Behandlung. Um ein *sachgemäß gestelltes* Problem aufzustellen müssen je nach Typ *Anfangsrandwertvorgaben* oder *Anfangswertvorgaben* gemacht werden. Es existiert dann eine eindeutige Lösung, die stetig von den Vorgaben abhängt. In hyperbolischen und parabolischen Gleichungen wird meist die Zeit  $t$  neben den Raumkoordinaten als Abszisse verwendet und diese *instationären* Gleichungen benötigen Anfangswertvorgaben. Ein Beispiel für eine parabolische Gleichung ist das Problem der Wärmeleitung. Die Fluidmechanik liefert z. B. durch die Wellengleichung ein Beispiel für eine hyperbolische Gleichung. Lokale Änderungen und Störungen werden hier

<sup>1</sup> Aus  $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$  folgt  $a_{ij} = a_{ji}$

transportiert und wirken sich in einem großen Gebiet aus. Diese anschauliche ingenieurmäßige Beobachtung macht sich auch in den mathematischen Grundlagen und der Numerik bemerkbar. Die im folgenden betrachteten elliptischen Gleichungen enthalten nur die Raumkoordinaten als Abszissenwerte, sind demzufolge *stationär* und benötigen Anfangsrandwertvorgaben.

## 5.2 Elliptische partielle Differentialgleichungen

Eine Vertreterin dieser Klasse, die oft als Beispiel vorgestellt wird, ist die auf einem Gebiet  $\Omega$  definierte *POISSON-Gleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (5.3a)$$

mit dem LAPLACE-Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (5.3b)$$

Für  $f = 0$  wird diese Gleichung als LAPLACE- oder *Potentialgleichung* bezeichnet. Zur Lösung müssen Anfangsrandwertvorgaben auf dem Rand  $\Gamma := \partial\Omega$  gemacht werden, wie z. B.

$$u = \varphi \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.4)$$

Die Vorgabe des Funktionswertes auf dem Rand wird als Bedingung 1. Art oder *DIRICHLET-Bedingung* bezeichnet. Bei Randwertvorgaben von Ableitungen, spricht man von Bedingungen 2. Art oder *NEUMANN-Bedingungen*. Für eine *DIRICHLET*-Problem kann eine Reduktion auf homogene Randbedingungen  $u = 0$  erfolgen, falls eine Funktion  $u_0$  bekannt ist, welche die Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= \tilde{f} & \text{in } \Omega \\ &= f - \Delta u_0 \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= 0 & \text{auf } \Gamma \\ &= u - u_0 \end{aligned} \quad (5.5b)$$

Im folgenden wird von dieser Problemstellung ausgegangen und  $\bullet := \tilde{\bullet}$  gesetzt.

### 5.3 Variationsformulierung

Die sog. *starke Formulierung* einer elliptischen partiellen Differentialgleichung kann in ein äquivalentes Optimierungsproblem umgewandelt werden (s. z. B. auch [SF88, S. 8]):

$$I(v) = \frac{1}{2}(Lv, v) - (f, v) \longrightarrow \min \quad (5.6)$$

mit  $v \in V$ , einem linearen Raum. Im Bereich der Strukturmechanik taucht dieses Problem als „Minimierung der potentiellen Energie“ auf. Dies entspricht für den vorliegenden Fall wiederum der Variationsgleichung

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall v \quad (5.7)$$

welche als *schwache Formulierung* bezeichnet wird. Die sog. *Testfunktionen*  $v$  sind hier als Wichtungsfunktionen deutbar, mit der das Fehler-Residuum gewichtet wird. Nur die Lösung  $u$  erfüllt die Gleichung für alle Testfunktionen  $v$ . Testfunktionen entsprechen den im Ingenieurwesen bekannten virtuellen Verschiebungen.

Nach dem Lemma von LAX-MILGRAM existieren für diese Gleichungen eindeutige Lösungen, falls  $V$  eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge eines HILBERT-Raums ist. Ein HILBERT-Raum ist ein vervollständigter<sup>2</sup> Prä-HILBERT-Raum (s. Abschn. 3.2.4). Ein HILBERT-Raum ist somit auch ein BANACH-Raum (vervollständigter<sup>2</sup> normierter Raum). Für den gewählten LEBESGUERaum  $L_2$  (s. [HS92, S. 175]) wird das Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad (5.8)$$

definiert. Die Norm ist durch

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)} \quad (5.9)$$

gegeben. Eine Umformung<sup>3</sup> von (5.7) unter Berücksichtigung von (5.8) und

<sup>2</sup> Das CAUCHY-Kriterium ist erfüllt. Jede CAUCHY-Reihe konvergiert gegen ein Element des Raums. Zur Vervollständigung normierter Räume siehe auch [Jän99, S. 69ff].

<sup>3</sup> Für ein eindimensionales Problem mit  $u' := \frac{du}{dx}$  folgt aus der Produktregel der Differentialrechnung  $(uv)' = u'v + uv'$  die Regel für die partielle Integration  $\int uv' = uv - \int u'v$ . Also ergibt sich aus  $\int_{\Omega} u''v = u'v|_{\Omega} - \int_{\Omega} u'v'$  und  $u'v|_{\Omega} = 0$  aufgrund von (5.5b) für (5.7) mit (5.8):  $a(u, v) := \int_{\Omega} u''v = - \int_{\Omega} u'v' = \int_{\Omega} fv = (f, v)$ .



partieller Integration liefert mit  $n$  als Normalenvektor des Randes:

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &:= \int_{\Omega} \Delta uv = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma} vn \nabla u \\
 &= - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \\
 &= \int_{\Omega} f v = (f, v)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Bilinearform  $a(u, v)$  erhält eine symmetrische Struktur. Die Anforderungen an  $V$  sind hierdurch geringer, denn es muß nur noch ein Integral mit ersten Ableitungen existieren. Zweite Ableitungen kommen nicht mehr vor. Der SOBOLEV-Raum  $W_2^1(\Omega)$ , der auch mit  $H^1(\Omega)$  bezeichnet wird, erfüllt diese Anforderungen (vgl. [Ped00, S. 111ff]).

## 5.4 Diskretisierung

Der Diskretisierungsschritt ersetzt den unendlichdimensionalen linearen Raum  $V$  durch einen endlichdimensionalen Raum  $V_h$ . Die Funktionen, welche die Basis von  $V_h$  bilden, werden als *Ansatzfunktionen* bezeichnet. Die Forderung, daß die resultierende Näherungen die Differentialgleichung an ausgewählten Punkten erfüllt, führt zum *Kollokationsverfahren*. Eine weitere Möglichkeit stellt die Minimierung von Fehlerquadraten für ein überbestimmtes Gleichungssystem dar. Statt den Fehler an diskreten Punkten zu kontrollieren wird meist der Fehler im Integral betrachtet. Aufbauend auf Abschn. 5.3 können die Näherungen das Fehlerresiduum minimieren. Der Diskretisierungsschritt ist für das Optimierungsproblem nach (5.6) als RITZ- und für die variationelle Formulierung nach (5.7) als GALERKIN-Verfahren bekannt. Im vorliegenden elliptischen Fall sind beide Verfahren äquivalent. Die eindeutige Lösbarkeit wird durch den Lemma von CÉA fundiert. Das Verfahren führt auf eine Gleichung der Form

$$Ku = f \tag{5.11}$$

Die Matrix  $K$  wird in Anlehnung an Anwendungen in der Strukturmechanik als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet. Der Vektor  $u$  steht für die Koeffizienten der Ansatzfunktionen und  $f$  für die Linearkombination der „rechten Seite“.

Auch von den Testfunktionen wird im diskretisierten Problem nur eine endliche Anzahl verwendet. Eine gängige Wahl ist es, den Funktionenraum der Ansatzfunktionen auch für die Testfunktionen einzusetzen. Die Bilinearform und somit auch die resultierende Steifigkeitsmatrix wird hiermit symmetrisch. Als Verallgemeinerung des (BUBNOV-)GALERKIN-Verfahrens werden beim PETROV-GALERKIN-Verfahren unterschiedliche Funktionenräume

für Ansatz- und Testfunktionen zugelassen. Das RITZ-GALERKIN-Verfahren bildet die Grundlage für die Methode der finiten Elemente.

## 5.5 Methode der finiten Elemente

Zum Thema der Methode der finiten Elemente (FEM) existiert bereits eine große Anzahl an Literatur aus dem Umfeld der Mathematik und des Ingenieurwesens wie z. B. [Cia80, SF88, CMP89, Bat90, SB91, Sch91, BS94, Bra97, Bet98, ZT00, Hug00]. In Abschn. 5.4 wurde bereits das RITZ-GALERKIN-Verfahren vorgestellt und in Abschn. 5.3 die Voraussetzungen angesprochen, die Funktionenräume erfüllen müssen. Finite Elemente Funktionenräume basieren auf einer speziellen Wahl von Ansatz- und Testfunktionen. Diese Funktionen werden nicht global gewählt sondern besitzen einen lokalen Träger. Eine gängige Wahl für diese stückweise definierten Funktionen sind Polynome. Diese Funktionenklasse wurde als Splines schon in Abschn. 4.4 angesprochen. Vorteilhaft ist die Bandstruktur, die eine Steifigkeitsmatrix für diese Funktionenklasse bei einer geschickten Anordnung der Ansätze besitzt. Diese Unterteilung in Gebiete entspricht den in Abschn. 3.4.2 aufgeführten CW-Zellkomplexen, wobei eine Zelle einen abschnittsweise glatten Rand aufweisen muß. Die Zelle wird als Element bezeichnet. Einem *finiten Element* wird auf diesem Element ein endlichdimensionaler Funktionenraum zugeordnet, der sich auf eine Basis gründet. Die Funktionen der Basis können in drei Gruppen eingeteilt werden:

- *Knoten-Funktionen*, die nur an den zu jeweils einem Knoten inzidenten Kanten des Elements einen Wert  $\neq 0$  aufweisen (Kardinalitätseigenschaft).
- *Kanten-Funktionen*, die nur an jeweils einer Kante des Elements einen Wert  $\neq 0$  aufweisen.
- *Innere Funktionen*, die am gesamten Rand den Wert Null aufweisen.

Die konstanten und linearen Basisfunktionen können den Knotenfunktionen zugeordnet werden und sind nötig, um eine *Starrkörpertranslation* und *-rotation* darstellen zu können. Dabei sind die linearen Formfunktionen für eine linearisierte (kleine) Rotation zuständig. Wird eine auf der LAGRANGE-Interpolation (s. Abschn. 4.2) aufbauende Formulierung der Basisfunktionen gewählt, werden zusätzlich zu den Knoten des Elements weitere Knoten zur Beschreibung der Formfunktionen hinzugefügt. Dies ist bei der Verwendung

von LEGENDRE- oder BERNSTEIN-Polynome nicht nötig. Eine LAGRANGE-Interpolation mit den Knoten der GAUSS-Integration führt zu effizienten Algorithmen (s. [MGS01]). Der Funktionenraum eines Elements ist in den Funk-

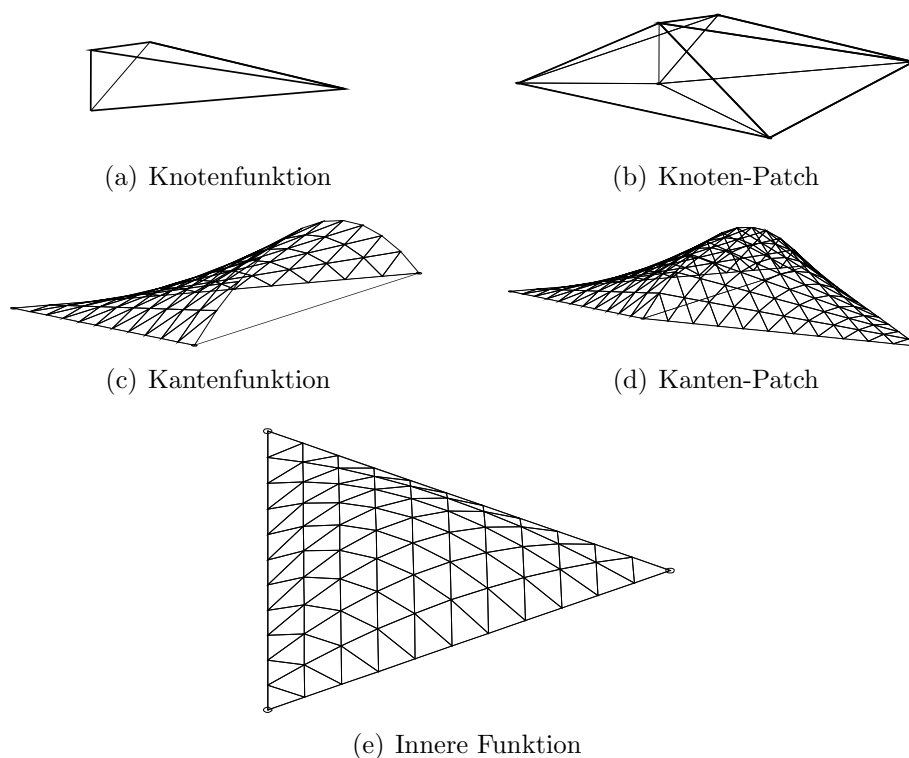


Abbildung 5.1: Ansatzfunktionen

tionenraum des Gesamtgebiets eingebettet und muß die geforderten Stetigkeitsanforderungen genügen. Deshalb entsprechen sich die Knotenfunktionen und Kantenfunktionen der daran angrenzenden Elemente und bilden einen Patch.

Sehr verbreitet sind Vierecks- und Hexaederelemente. In dieser Arbeit sollen auf Simplicialkomplexen (s. Abschn. 3.4.1) basierende finite Elemente Methoden im Vordergrund stehen. Besonders Dreieckselemente sind bereits vielfach untersucht worden (s. z. B. [Hau96]). Für die Integration erfolgt eine Transformation des Gebiets auf ein Referenzdreieck (s. Abb. 5.2) nach [SB91, S. 102]<sup>4</sup> mit den Koordinaten  $(\xi_i, \eta_i) = (-1, 0), (1, 0), (0, \sqrt{3})$  für  $i = 1, 2, 3$ .

<sup>4</sup> Alternativ wird in [Cia80, S. 87] ein  $n$ -Einheitssimplex mit den Koordinaten  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0)$  gewählt.

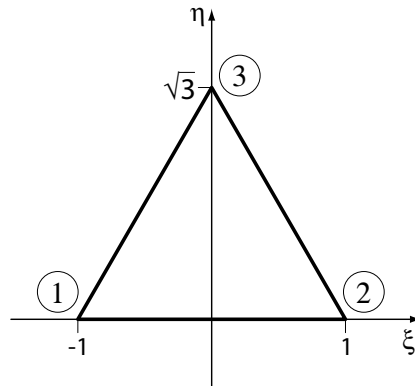


Abbildung 5.2: Referenzdreieck

Für den Abschluß gilt:

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\eta - 1 \leq \xi \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta \leq 1 \quad (5.12a)$$

$$0 \leq \eta \leq \sqrt{3}(1 - |\xi|) \leq \sqrt{3} \quad (5.12b)$$

Die Integration wird über eine *Funktionaldeterminante*, die als *JACOBI-Determinante* bezeichnet wird, transformiert. Ein effizientes Verfahren zur numerischen Integration über Dreiecksflächen wird in [Dun85] vorgestellt. Gekrümmte Kanten können durch die *Blending*-Methode mittransformiert werden (s. [SB91, S. 107f]). Für die Knotenfunktionen verwendet man auf *baryzentrischen Koordinaten* basierende Ansatzfunktionen, für die  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$  gilt:

$$L_1 := \frac{1}{2} \left( 1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \quad (5.13a)$$

$$L_2 := \frac{1}{2} \left( 1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \quad (5.13b)$$

$$L_3 := \frac{\eta}{\sqrt{3}} \quad (5.13c)$$

$$(5.13d)$$

Für höhere Polynomgrade  $p$  kann eine auf LEGENDRE-Polynome aufbauende hierarchische Basis für Kanten- und innere Funktionen geschaffen werden (s. [SB91, S. 103f]). Für die  $3(p-1)$  Kantenfunktionen der Kante vom Knoten  $i$  nach  $j$  ist

$$N_q^{(ij)} = L_i L_j \varphi_q(L_j - L_i) \quad q \geq 2 \quad (5.14)$$

mit z. B.

$$\varphi_2(\xi) = -\sqrt{6} \quad (5.15a)$$

$$\varphi_3(\xi) = -\sqrt{10}\xi \quad (5.15b)$$

$$\varphi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{7}{8}}(5\xi^2 - 1) \quad (5.15c)$$

$$(5.15d)$$

In die  $p(p-1)+1$  innere Funktionen fließen die LEGENDRE-Polynome  $P$  direkt ein:

$$N_{qr}^{(123)} = L_1 L_2 L_3 P_q(L_2 - L_1) P_r(2L_3 - 1) \quad (5.16)$$

**Adaptivität** Adaptive Finite Elemente Verfahren versuchen die Diskretisierung der Fehlerverteilung anzupassen, um die Effizienz der Berechnung zu steigern (s. [Mau01]). *Fehlerindikatoren* dienen dazu die Fehlerverteilung festzustellen. Können diese Größen mit oberen und unteren Schranken begrenzt werden, spricht man von *Fehlerschätzern*. *A priori* Fehlerschätzer sagen den Fehler voraus, während *a posteriori* Fehlerschätzer den Fehler nach einem Rechengang ermitteln. Prinzipiell sind bei adaptiven Berechnungsverfahren immer mehrere Rechengänge erforderlich. Zwei Techniken sind von besonderer Bedeutung für adaptive Finite-Elemente-Verfahren. Die sog. *h-Version*<sup>5</sup> der FEM steuert den Fehler über die Wahl der Elementgröße und die *p-Version*<sup>6</sup> der FEM über die Wahl der Ansatzfunktionen bzw. dem Polynomgrad. Auch die Kombination beider Techniken ist als *hp-Version* der FEM möglich. Die p-Version eignet sich hier für glatte Lösungen besonders gut, während eine h-Version für Sprünge weniger Oszillationen aufweist. Die optimale exponentielle Konvergenz wird theoretisch mit einer hp-Version erzielt [SB91, S. 66].

Besondere Beachtung verdient, vor allem im Hinblick auf geometrische Modellierung, die Beschreibung des Gebiets  $\Omega$ , welches durch die Diskretisierung ebenfalls nur approximiert wird. In [Bab63, S. 18f] wird ein Phänomen beschrieben, das als BABUŠKA-Paradoxon (s. [Cia80, S. 379]) bekannt ist. Eine kreisförmige Platte unter Gleichlast wird als regelmäßiges  $n$ -Polygon angenähert. Gesucht ist das Moment im Mittelpunkt. Die wahre Lösung dieser elliptischen partiellen Differentialgleichung kann analytisch bestimmt werden. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Diskretisierung gegen einen Wert, der sich allerdings vom wahren Wert unterscheidet! Die angemessene Darstellung des Gebiets ist also entscheidend für tragfähige Berechnungsergebnisse.

---

<sup>5</sup> Das h symbolisiert die Elementgröße

<sup>6</sup> Das p symbolisiert den Polynomgrad

**Implementierung** Die Implementierung eines Finite Elemente Programms mit Elementen höheren Polynomgrades erfordert die Objektklassen „Knoten“, „Kanten“ und „Elemente“, da die Ansatzfunktionen jeweils an diese Objekte gebunden sind. Eine LAGRANGE-Formulierung kommt ohne die Objektklasse „Kanten“ aus, da alle Funktionen über Knoten definiert werden. Für Ansätze höherer Ordnung kommen auf den Kanten und im Inneren Knoten hinzu. Auch gekrümmte Kanten werden durch die zusätzlichen Kantenknoten definiert, wobei für *isoparametrische Elemente* der Grad der Funktion der Kantenkrümmung an den Grad der Ansatzfunktion gekoppelt ist. Dies führt für Ansätze hohen Polynomgrades allerdings zu Elementen mit einer großen Anzahl von Knoten. Im Sinne einer einfachen Implementierung auf Basis von Simplizialkomplexen ist eine Formulierung gesucht, die zwar nur mit einer „Knoten“- und „Elemente“-Objektklasse auskommt, aber die simpliziale Topologie beibehält und zwischen geometrischer Beschreibung und der Ansatzfunktion selbst trennt. Das ist durch die im folgenden angesprochene *Generalisierte Finite Elemente Methode* möglich.

## 5.6 Generalisierte Finite Elemente Methode

Die Generalisierte Finite Elemente Methode (GFEM) (s. [Mel95], [SBC98], [DBO00], [SCB01]) ging aus der „Zerlegung der Eins“- bzw. „Partition of Unity“-FEM (PUFEM) (s. [MB96]) hervor und verbindet die Finite Elemente Methoden mit den sog. netzfreien Methoden nach Abschn. 5.7. Die „Erweiterte“- bzw. „Extended“-FEM (XFEM)<sup>7</sup> (s. [Dol99]) entspricht der GFEM. Träger der Ansatzfunktionen stellen sich überlappende Knotenpatches in Form von Polyedern dar. Es wird eine lineare Wichtungsfunktion definiert, deren Wert am Rand Null und am Knoten selbst Eins ist. Bei Addition aller dieser Funktionen erhält man global den Wert Eins und man spricht von einer Zerlegung der Eins. Im Vergleich zur PUFEM wird die Gewichtungsfunktion speziell auf einem Knotenpatch in einer Triangulierung definiert. Die Basisfunktionen des Funktionenraums werden durch Multiplikation von ausgewählten Funktionen für den Patch mit der Gewichtungsfunktion erzeugt. Diese Funktionen sind für eine globale, vom Patch unabhängige Basis definiert Abb. 5.3 zeigt über der Gewichtungsfunktion eine Parabel und die aus der Multiplikation resultierende Basisfunktion. Wird die konstante Einheitsfunktion multipliziert, erhält man die Gewichtungsfunktion als Basisfunktion. Das entspricht den bereits in Abschn. 5.5 angesprochenen Knotenpatches der FEM. Die linearen Basisfunktionen müssen vorhanden

<sup>7</sup> s. z.B. <http://www.tam.nwu.edu/X-FEM/> oder <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/xfem/>

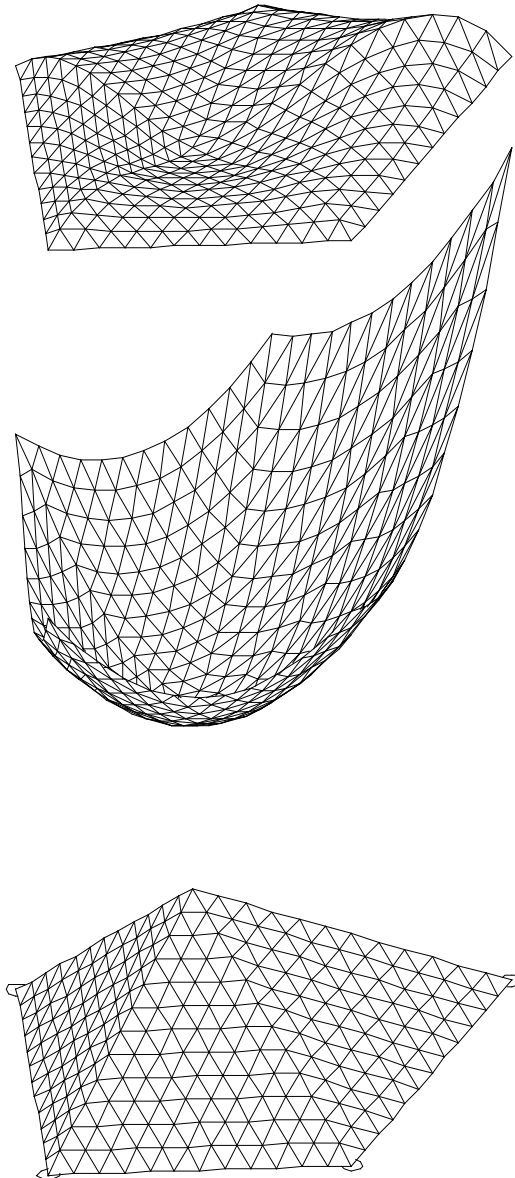


Abbildung 5.3: GFEM Wichtungsfunktion, globale Funktion und resultierende Ansatzfunktion

sein, können aber durch weitere Basisfunktionen erweitert werden. Hierbei sind nicht nur algebraische oder trigonometrische Polynome (s. [BBO01]), sondern auch spezielle, dem Problem angepaßte globale Funktionen möglich. Ein Beispiel hierfür ist die Reißspitzenfunktion aus der Kontinuumsmechanik. Neben analytisch vorgegebenen können die globalen Funktionen auch durch numerisch berechnete erweitert werden. Ein Beispiel hierfür ist die die Erweiterungen zur Anpassung an Randbedingungen durch Stützen bei einer Plattenberechnung. Hier kann die Einwirkung der Stützen durch eine FEM-Nebenrechnung bestimmt werden. Es ist ein Katalog machbar, der für jedes Problem die passende analytische oder numerisch vorberechnete Ansatzfunktion bereitstellt. Netzverfeinerungen können so vermieden werden.

Besondere Maßnahmen erfordern die Berücksichtigung der Randbedingungen und das Vorhandensein von linear abhängigen Ansatzfunktionen, welche die Ursache für ein überbestimmtes und damit singuläres lineares Gleichungssystem sind (s. [BBO02]). Im Gegensatz zur FEM mit LAGRANGE-Ansatzfunktionen ist bei der GFEM der Funktionenraum unabhängig von der Beschreibung des Gebiets durch die Zellzerlegung erweiterbar.

## 5.7 Netzfrie Methoden

Die GFEM stellt über die PUFEM ein Bindeglied zwischen der FEM und den netzfreien Methoden dar. Auch hier erfolgt ein Übergang vom physikalisch/mathematischen zum Diskretisierungsmodell, der durch eine geeignete geometrische Modellierung unterstützt wird.

Netzfrie Methoden verwenden knotenbasierte Ansatzfunktionen, die auf keinem Zellkomplex aufbauen. Die Funktionen sind in Abhängigkeit vom Abstand zum Knoten monoton fallend und besitzen ihr Maximum somit am Knoten selbst. Ein Beispiel hierfür sind *radiale Basisfunktionen* (s. [Wen99], [SW00]). Es existieren eine Reihe von netzfreien Methoden (s. [Dua95]). Auch die im Abschn. 5.6 angesprochene PUFEM wird zu dieser Kategorie gezählt. Weitere Methoden sind z. B. die „Smoothed Particle Hydrodynamics Method“ (SPH), die „hp-clouds“, sowie die auf der „Moving Least Squares“ (MLS) Approximationstechnik aufbauende „Element Free Galerkin Method“ (EFGM) und „Diffuse Element Method“ (DEM). Auch wenn die Ansatzfunktionen kein Netz erfordern; die Methoden zur numerische Integration benötigen meist eine Gebietszerlegung. Hierbei müssen die Glattheitsanforderungen des numerischen Integrationsverfahrens an die aus den Ansatzfunktionen zusammengesetzte Lösung beachtet werden. Im Gegensatz zur FEM können DIRICHLET-Randbedingungen nicht a-priori mit der Wahl der Ansatzfunktionen erfüllt werden und die Einhaltung der Randbedingungen erweist sich



bei den netzfreien Methoden als ein eigenständiges Problem, für das verschiedene Lösungsansätze existieren (s. [Kar00, S. 34]).

Um eine dünne Besetztheit der Steifigkeitsmatrix zu erreichen, müssen die Träger beschränkt sein. Zur Lösbarkeit des System muß die (evtl. mehrfache) Überdeckung des Gebiets mit diesen Trägern sichergestellt werden. Um für einen Punkt im Gebiet festzustellen, in welchen Trägern er sich befindet, bietet es sich an die benachbarten Knoten zu ermitteln. Eine geeignete Datenstruktur hierfür ist das VORONOI-Diagramm, das in Abschn. 8.1 ausführlich dargestellt wird.

**Natürliche Elemente Methode** Die *Natürliche Elemente Methode*<sup>8</sup> (s. [Suk98], [SMB98], [SMSB01]) ist ein Beispiel einer netzfreien Methode, die auf Basis eines VORONOI-Zellkomplexes (s. Abschn. 8.1) konstruiert wird. Sie baut auf der *Sibson-* bzw. *Natürlicher Nachbar Interpolation* auf, die für verstreute Punktdaten eingesetzt wird. Ein „natürlicher Nachbar“ ist ein THIESEN-Nachbar. Wird ein Punkt  $x$  im Gebiet in den DELAUNAY-

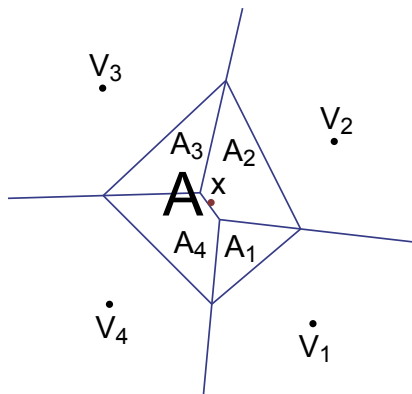


Abbildung 5.4: Natürliche Nachbarn Koordinaten

Simplizialkomplex (s. Abschn. 8.2) der Knoten eingefügt, sind alle adjazenten Knoten somit „natürliche Nachbarn“ und gehen in die Berechnung eines Interpolationswertes ein. Die sog. *Natürliche Nachbarn Koordinaten* entsprechen im zweidimensionalen Raum einem Verhältnis von Flächeninhalten<sup>9</sup>. Es wird die Schnittmenge der VORONOI-Zelle des Knotens vor dem Einfügen des Punktes  $x$  mit derjenigen des Punktes gebildet, um VORONOI-Zellen zweiter Ordnung zu erhalten. Die Quotienten der Flächeninhalte dieser Zellen  $A_i$  mit dem Flächeninhalt der VORONOI-Zelle des Punktes  $A$  bilden die Koordinaten (s. Abb. 5.4). Analog zu den baryzentrischen Koordinaten beim Simplex

<sup>8</sup> s. z. B. <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/>

<sup>9</sup> i. a. LEBESGUE Maße wie z. B. Flächeninhalte und Volumen

erhält man eine Zerlegung der Eins. Die mit diesen Koordinaten als Gewichtung gebildeten Ansatzfunktionen bilden wie bei den simplizialen Finiten Elementen aus Abschn. 5.5 den Funktionenraum der linearen Polynome. Die Methode kann als eine weitere Spezialisierung der PUFEM angesehen werden und damit ähnlich zur GFEM (Abschn. 5.6).

# Kapitel 6

## Geometrische Modellierung

Die geometrische Modellierung bzw. Volumenmodellierung dient zur Darstellung eines Körpers im Rechner. Ein Volumenmodell kann zur Beantwortung



Abbildung 6.1: Visualisierung einer Kanne<sup>1</sup>

verschiedener Fragestellungen dienen, wie z. B. :

- Visualisierung, Virtual Reality: Wie sieht der Körper aus?
- Kollisionserkennung: Berühren sich Körper?

---

<sup>1</sup>von Mike Miller mit POVray erzeugt, s. <http://www.povray.org/ftp/pub/povray/Hall-Of-Fame/kettle.jpg>

- Volumen- bzw. Massenberechnung: Wieviel Material wird benötigt? Wie schwer ist der Körper?
- Wärme-, Festigkeitsberechnungen: Wie verhält sich ein Körper bei einer Belastung?
- Fluid-Struktur-Interaktion: Bestimmung des Luftwiderstandes, Auftriebs.

Das Volumenmodell ist die Grundlage von Modellen, die zur Simulation dienen. Mit Hilfe der Simulation kann ein Entwurf frühzeitig kontrolliert und optimiert werden. Der Schwerpunkt weiterer Betrachtungen soll auf Festigkeitsberechnungen in der Strukturmechanik gelegt werden.

Je nach Fragestellung sind unterschiedliche Kriterien wichtig. Für die Visualisierung ist z. B. ausschließlich die das Licht reflektierende Oberfläche eines Körpers von Bedeutung. Das Innere spielt keine Rolle. Während bei einer Kollision die Oberfläche immer mit betroffen ist bezieht sich eine Volumenberechnung, wie auch Wärme- und Festigkeitsberechnungen, auf das Volumen selbst bzw. die Materie. Für eine gegebene Oberfläche müssen die Berechnungen transformiert werden. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die GAUSSsche Flächenformel, die einen Flächeninhalt über den Rand berechnet. Diese Formel, die auch auf den dreidimensionalen Raum übertragen werden kann, basiert auf dem GAUSSschen Integralsatz bzw. den GREENSchen Formeln. Für partielle Differentialgleichungen existiert ebenfalls eine Methode, die sich auf die Oberfläche stützt: die *Randintegralmethode* (**B**oundary **E**lement **M**ethod). Die meisten Berechnungsverfahren gehen hier aber von einer Diskretisierung des Volumens selbst aus. Einer der bekanntesten Vertreter ist hier die **F**inite **E**lemente **M**ethode, die bereits im Abschn. 5.5 vorgestellt wurde. Aufgrund der unterschiedlichen Anforderungen an das zugrundeliegende geometrische Modell können unterschiedliche Darstellungsformen vorteilhaft sein.

Die Realität wird zunächst durch ein mathematisches Modell beschrieben: Es sei ein starrer Körper durch die Punktmenge  $X$  gegeben mit  $X \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Da  $\Omega$  ein topologischer Raum ist (s. Abschn. 3.2.1), kann ein beliebiger gegebener Punkt  $x \in \Omega$  eindeutig den Mengen der Außen-, Innen- oder Randpunkte von  $X$  zugeordnet werden. Die Oberfläche des Körpers entspricht dem Rand  $\Gamma$  und muß

- geschlossen
- orientierbar
- ohne Selbstüberschneidungen

- zusammenhängend

sein (s. [BEH79]). Die Geometrische Modellierung muß sowohl die Topologie als auch die Geometrie eines Körpers darstellen. In (s. [GM97]) wird zusätzlich noch die Morphologie betrachtet.

## 6.1 Beurteilungskriterien für Darstellungsschemata

Das *Darstellungsschema*  $\mathbf{S}$  ist eine Relation, die einem Element des mathematischen Modellraums  $\mathbf{M}$  ein Element des Repräsentationsraums  $\mathbf{R}$  zuordnet ([Req80], [BGZ96, S. 56f]):  $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{M} \times \mathbf{R}$ .

Folgende Beurteilungskriterien dienen zum Vergleich der verschiedenen Ansätze der Darstellungsschemata und Repräsentationsräume (s. auch [BM01, S. 168f]):

**Domäne:** Die Domäne des Darstellungsschemas soll möglichst mächtig sein.

$$\forall m \in \mathbf{M} \exists r \in \mathbf{R} \mid \langle m, r \rangle \in \mathbf{S}$$

Die Mächtigkeit der Domäne hängt von der Mächtigkeit des Repräsentationsraums  $R$  ab, welche der Mächtigkeit des mathematischen Modellraums  $M$  möglichst entsprechen sollte:  $|\mathbf{R}| = |\mathbf{M}|$ .

**Eindeutigkeit:** Jedem mathematischen Modell soll durch das Darstellungsschema genau ein Repräsentationsmodell eindeutig zugeordnet werden. Das Darstellungsschema ist dann eine eindeutige Abbildung.

**Injektivität:** Zudem muß einem Repräsentationsmodell durch das Darstellungsschema genau ein mathematisches Modell zugeordnet sein. Das Darstellungsschema ist dann eine eineindeutige Abbildung, bzw. Injektion. Eine Mehrdeutigkeit in der Interpretation des Repräsentationsmodells ist dann ausgeschlossen.

**Surjektivität:** Jedes Repräsentationsmodell muß sich auf ein mathematisches Modell abbilden lassen. Es darf keine illegalen Körper geben.

**Kompaktheit:** Das Repräsentationsmodell soll möglichst kompakt darstellbar sein.

**Effizienz:** Es müssen effiziente Algorithmen zur Modifikation und Abfrage existieren.

## 6.2 Regularisierte Mengenoperatoren

Da ein Körper eine Menge von Punkten darstellt, sind Mengenoperatoren, wie

- Vereinigung ( $\cup$ , binär)
- Schnitt ( $\cap$ , binär)
- Differenz ( $\setminus$ , binär)
- Komplement ( $\setminus$ , unär)

anwendbar (vgl. [Mor85, S. 403ff]). Sie bilden die Basis für die Konstruktion komplizierter Körper. Die mathematischen Operationen können als Herstellungsprozesse gedeutet werden (s. [VR77]). Hierbei ist es wichtig, daß das Ergebnis der Operation wieder durch das Darstellungsschema darstellbar ist, bzw. die Operation abgeschlossen ist. Aus diesem Grund ist es nötig die Operationen zu *regularisieren* (vgl. [TR80, Til80],[Hof89, S. 21ff]). Ein Beispiel hierfür ist der Schnitt zweier dreidimensionaler Körper, der als Ergebnis eine zweidimensionale Fläche oder einen eindimensionalen Punkt liefert. Die Regularisierung bewirkt einen Abschluß der Operation: das Ergebnis muß ebenfalls ein dreidimensionales Objekt oder die leere Menge sein. Im Beispiel ergibt der regularisierte Schnitt die leere Menge. Die regularisierten Mengenoperatoren werden durch  $\cup^*$ ,  $\cap^*$  und  $\setminus^*$  gekennzeichnet. Eine Regularisierung erhält man durch den Abschluß des offenen Kerns der Ergebnismenge  $M$ :  $\overline{\text{int } M}$ .

Die Notwendigkeit der Regularisierung wird auch deutlich, falls man die Punkte in innere Punkte (i), äußere Punkte (o) und Randpunkte (b) eingruppiert und eine auf ein Punktepaar bezogene Operation betrachtet. Treffen bei

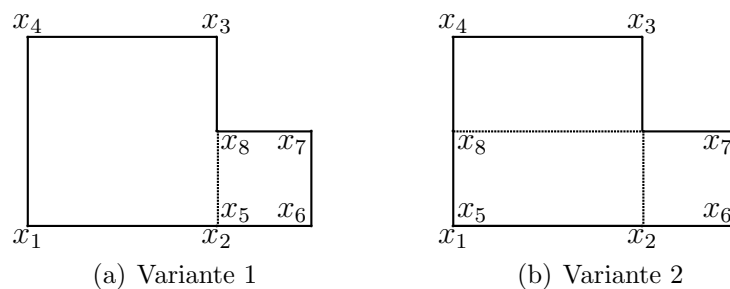


Abbildung 6.2: Vereinigung zweier Gebiete

der Vereinigung z. B. zwei innere Punkte zusammen, ergibt das im Resultat wieder einen inneren Punkt. Für zwei Randpunkte kann das Ergebnis je

nach Situation unterschiedlich sein. In Abb. 6.2 werden die beiden Quadrate  $x_1x_2x_3x_4$  und  $x_5x_6x_7x_8$  vereinigt. Hierbei liegt die Strecke  $x_5x_8$  auf der Strecke  $x_2x_3$ . Die inneren Punkte der Strecke  $x_5x_8$  treffen auf Randpunkte und stellen im Ergebnis innere Punkte dar. Die Punkte  $x_3$  und  $x_8$  selbst hingegen treffen ebenfalls auf Randpunkte, stellen im Ergebnis aber wieder Randpunkte dar. Es kann hier also vorab keine Aussage über das Ergebnis getroffen werden.

(a) Vereinigungsmenge

$\cup$	b	o	i
b	i/b (?)	b	i
o	b	o	i
i	i	i	i

(b) Schnittmenge

$\cap$	b	o	i
b	o/b (?)	o	b
o	o	o	o
i	b	o	i

(c) Differenz

$\setminus$	b	o	i
b	o/b (?)	b	o
o	o	o	o
i	b	i	o

(d) Komplement

$\setminus$	b	o	i
b	i	o	b
o	o	o	o
i	b	i	o

Tabelle 6.1: Diskrete Mengenoperatoren angewandt auf innere Punkte (i), äußere Punkte (o) und Randpunkte (b)

### 6.3 Syntaktische Modellierung

Die Anwendung der Mengenoperatoren nach Abschn. 6.2 auf Körper schafft ausgehend von einfachen Ausgangskörpern (Primitiven) komplexe geometrische Formen. Die unter der Bezeichnung *konstruktive Körpergeometrie* ([AM91, S. 279]) oder *Constructive Solid Geometry* bekannte Technik bildet die Konstruktion des Körpers nach. Die Darstellungsform ist nicht eindeutig. Durch Normalisierung (s. [GMTF89]) oder Optimierung (s. [SV91]) des CSG-Baums kann die Ausführungsgeschwindigkeit von Programmen verbessert werden.

Die Mengenoperatoren können durch arithmetische Operatoren, den MIN-KOWSKI-Operatoren ([AM91, S. 303]) ergänzt werden. Die Operationen sind weitestgehend mit affinen Transformationen, wie einer Translation, Rotation oder Skalierung, gleichzusetzen. Im folgenden werden die binären Mengenoperatoren „Vereinigung“, „Schnitt“ und „Differenz“ verwendet. Die kommutativen Operatoren „Vereinigung“ und „Schnitt“ können auch auf eine Menge von Operanden angewendet werden. In diesem Fall kann durch eine mehrfache Anwendung des entsprechenden binären Operators dasselbe Resultat erzielt werden. Das unäre Komplement führt bei einem endlichen Körper zu einem Körper mit unendlicher Ausdehnung, der nicht mit jedem Darstellungsschema abgebildet werden kann.

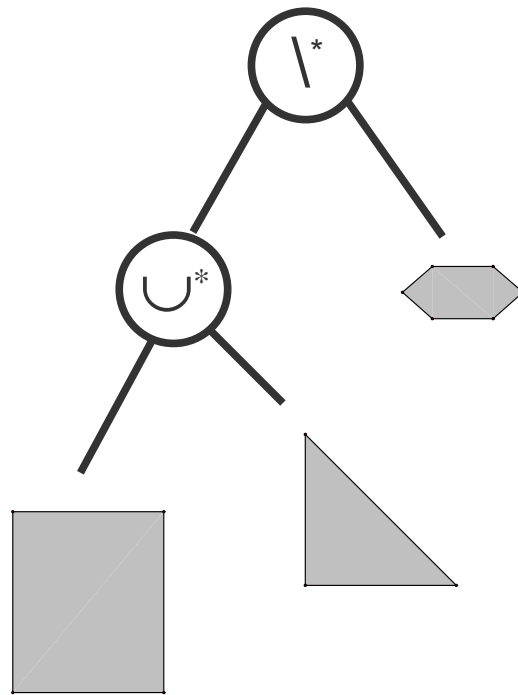
Die Informatik beschreibt die Vorgehensweise durch eine Grammatik wie z. B. [BGZ96, S. 61]:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Objekt} \rangle & ::= \langle \text{Primitiv} \rangle \mid \langle \text{Objekt} \rangle \langle \text{op} \rangle \langle \text{Objekt} \rangle \\
 & \quad \mid \langle \text{Objekt} \rangle \langle \text{transformation} \rangle \\
 \langle \text{Primitiv} \rangle & ::= \text{Würfel} \mid \text{Kugel} \mid \dots \\
 \langle \text{op} \rangle & ::= \cup^* \mid \cap^* \mid \setminus^* \\
 \langle \text{transformation} \rangle & ::= \text{Translation} \mid \text{Rotation} \mid \text{Skalierung}
 \end{aligned}$$

In [AM91, S. 311] wird dies als kontextfreie bzw. Typ-2 CHOMSKY-Grammatik ausführlicher dargestellt. Ein Ausdruck kann auch als Baum dargestellt werden (s. Abb. 6.3).

Anstelle der Primitive können auch Halbräume aus Ausgangsbasis der Modellierung mit Mengenoperatoren dienen ([Män88, S. 77ff], [Pet86]). In diesem Fall spricht man von einem *Halbraum-Modell*.





(a) CSG Baum

$$(\text{Quadrat} \cup \text{Dreieck}) \setminus \text{Sechseck}$$

(b) Formel

Abbildung 6.3: Constructive Solid Geometry

## 6.4 Direkte Darstellung eines Körpers durch Zellzerlegung

Der durch die Punktmenge  $X$  beschriebene Körper wird durch eine Gebietszerlegung in disjunkte Grundobjekte aufgeteilt. Eine Vereinigung aller Grundobjekte ergibt den darzustellenden Körper.

### 6.4.1 Normzellen

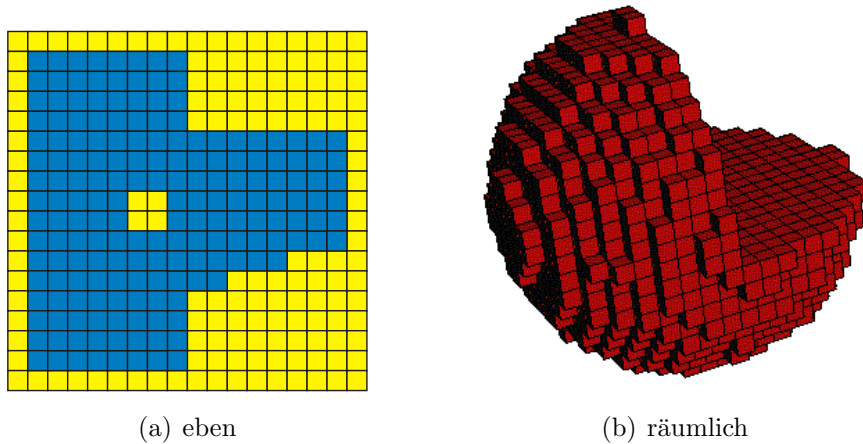
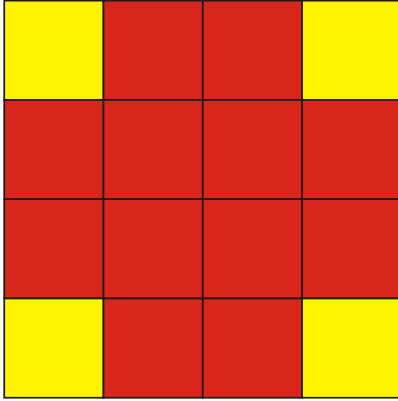


Abbildung 6.4: Normzellenzerlegung

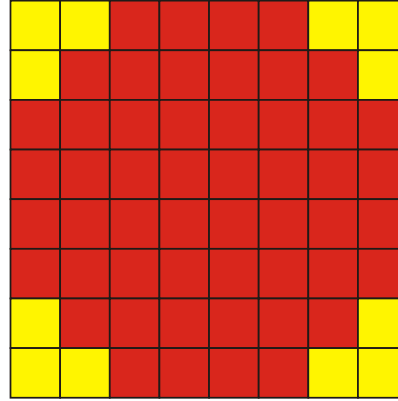
Im einfachsten Fall dienen würfelförmige *Normzellen*, als Grundobjekte. Die dreidimensionalen Voxel sind das Analogon der zweidimensionalen Pixel, welche als Normquadrate Flächen aufteilen und in der Computergrafik bzw. den dort weitverbreiteten Rastergeräten eine bedeutende Rolle spielen. Eine gegebene Maschenweite  $h$  gibt ein  $d$ -dimensionales Raster vor. Zellen können sich entweder vollständig innerhalb, außerhalb oder im Falle von Randzellen auch teilweise innerhalb und außerhalb befinden<sup>2</sup>. Eine binäre Darstellung verlangt die eindeutige Zuordnung der Randzellen zur Menge der inneren oder äußeren Zellen. Hierfür wird z. B. für jede Zelle anhand des Schwerpunkts bestimmt, ob sie innerhalb oder außerhalb des Körpers liegt. Man erhält für das gegebene Raster eine eindeutige Repräsentation, die für  $h \rightarrow \infty$  den Körper zwar exakt darstellt, eine Oberfläche aber nur stückweise konstant beschreibt. Abb. 6.5 zeigt Diskretisierungen einer Kreisscheibe,

<sup>2</sup> Die Attributierung kann noch erweitert werden, indem z. B. Zellen innerhalb des Körpers verschiedene Materialien zugeordnet werden.

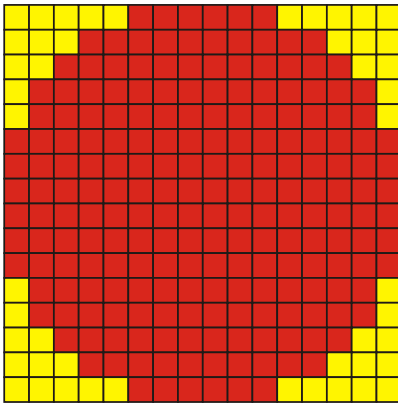
deren Umfang dem des umschließenden Rechtecks entsprechen und somit nicht konvergieren ( $8 \neq 2\pi$ ). Problematisch ist der hohe Speicherbedarf des



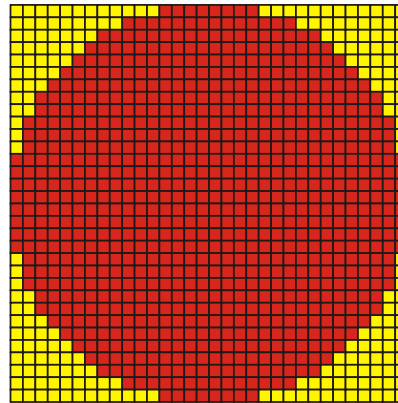
(a)  $4 \times 4$  Raster ( $h = \frac{1}{2}r$ ):  
 $A = 12 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 3r^2$   
 $U = 16 \cdot \frac{r}{2} = 8r$



(b)  $8 \times 8$  Raster ( $h = \frac{1}{4}r$ ):  
 $A = 52 \cdot \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{13}{4}r^2 = 3.25r^2$   
 $U = 32 \cdot \frac{r}{4} = 8r$



(c)  $16 \times 16$  Raster ( $h = \frac{1}{8}r$ ):  
 $A = 208 \cdot \left(\frac{r}{8}\right)^2 = \frac{13}{4}r^2 = 3.25r^2$   
 $U = 64 \cdot \frac{r}{8} = 8r$



(d)  $32 \times 32$  Raster ( $h = \frac{1}{16}r$ ):  
 $A = 812 \cdot \left(\frac{r}{16}\right)^2 = \frac{203}{64}r^2 = 3.171875r^2$   
 $U = 128 \cdot \frac{r}{16} = 8r$

Abbildung 6.5: Diskretisierung einer Kreisscheibe mit Radius  $r$   
(Fläche  $A = \pi r^2$ , Umfang  $U = 2\pi r$ )

verwendeten  $d$ -dimensionalen Feldes, der sich im  $d$ -dimensionalen Raum bei einer  $\alpha$ -fachen Verkleinerung der Maschenweite  $\alpha^d$ -fach vergrößert. Die Verwendung von Speicherkompressionstechniken ist möglich, verlangsamt aber den Zugriff auf eine einzelne Zelle. Die im folgenden Abschnitt beschriebenen Spacetrees können als eine Art der verlustfreien Kompression einer Normzel-

lenzerlegung angesehen werden.

**Bewertung** Die Domäne der Normzellenzerlegung ist beschränkt und auf einen vorgegebenen Bereich („space of interest“) festgelegt. Hierzu dient meist ein achsenparalleler, den Körper beinhaltender Quader („bounding box“). Die Normzellenzerlegung kann i. a. bereits Körper, die der Klasse der Polyeder (s. Abschn. 3.8) angehören, nicht mehr exakt darstellen. Der Fehler der Approximation konvergiert für eine Verkleinerung der Maschenweite gegen Null. Der hohe Speicherbedarf ( $O\left(\left(\frac{1}{h}\right)^d\right)$ ) und somit die Kompaktheit der Darstellung ist hierbei ein großes Problem. Eine Eindeutigkeit ist nur für eine vorgegebene Maschenweite erzielbar, wobei die Repräsentation vom vorgegebenen Bereich abhängt. Eine (affine) Transformation des Körpers verändert die Repräsentation. Topologie und Geometrie sind eng verwoben. Die Darstellung selbst ist eindeutig und immer gültig. Das gilt auch für Mengenoperationen, die abgeschlossen sind. Die auf den Feldern operierenden Algorithmen sind äußerst effizient. Der Zugriff bzw. die Abfrage, ob ein Punkt innerhalb des Körpers liegt, ist direkt ( $O(1)$ ) möglich. Mengenoperationen können diskret für die einzelnen Zellenpaare durchgeführt werden.

Die Normzellenzerlegung wird in der Computergrafik für pixelorientierte Ausgabegeräte wie z. B. Bildschirm und Drucker eingesetzt. Im Ingenieurwesen soll exemplarisch die materielle Topologieoptimierung erwähnt werden (s. [Ben95], [Mau98, S. 47ff]), bei der jeder Normzelle eine Materialdichte zugewiesen wird, um so eine optimale Verteilung des Materials in einem Entwurfsraum unter einer gegebenen Belastung zu ermitteln.

### 6.4.2 Spacetrees

Der Speicherbedarf einer Normzellenzerlegung kann vermindert werden, indem bei einer Darstellung von einem groben Startgitter ausgehend diejenigen Zellen gleichmäßig aufgeteilt werden, die nicht vollständig Teil des Körpers sind. Dieses Vorgehen wird rekursiv auf die zu verfeinernden Zellen bis zu einer vorgegebenen Rekursionstiefe angewandt. Die hieraus resultierende Datenstruktur entspricht einem Baum. Jeder innere Knoten hat  $2^d$  Nachfolger. Jedes Blatt befindet sich entweder innerhalb oder außerhalb des Gebiets. Für ein dreidimensionales Gebiet erhält man den sog. *Oktalbaum* bzw. *Oc-tree*, (s. [Män88, S. 63ff]), ein zweidimensionales Gebiet wird durch einen sog. *Quadtree* beschrieben. Da jedes Blatt des Baumes eine Zelle bzw. ein Teilgebiet darstellt, ist in [Sam94, S. 3] von einem „Region“-Quadtree die Rede.

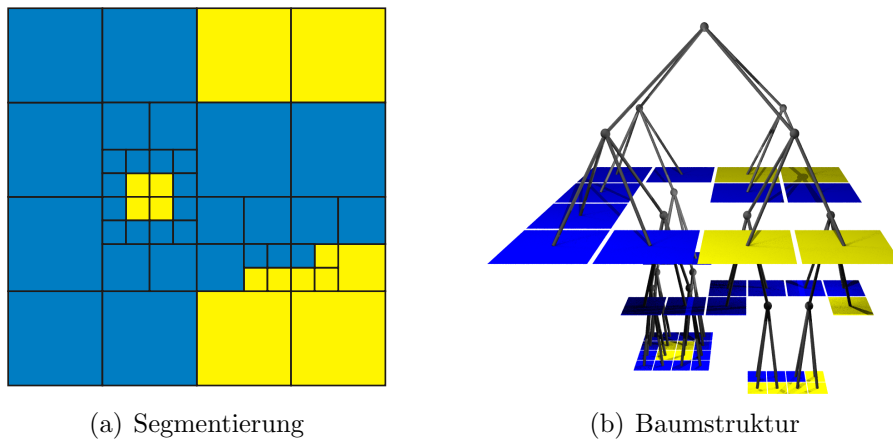


Abbildung 6.6: Region-Quadtree

Die Verallgemeinerung auf  $d$  Dimensionen führt zum *Spacetree*<sup>3</sup> (s. [Fra00, S. 37ff]). Ein Gebiet wird durch zu den Basisvektoren normalen Hyperebenen rekursiv aufgeteilt. Jedes Gebiet zerfällt so in  $2^d$  Teilgebiete.

Neben einem Zeigergeflecht läßt sich ein Spacetree auch als rechtslineare Typ-3 CHOMSKY- bzw. reguläre Grammatik beschreiben bzw. serialisieren:

$$A \rightarrow nA^{2^d} | lt$$

mit  $t \in \{i, o\}$ . Das Token „n“ steht für einen inneren Knoten (node), „l“ für ein Blatt (leave), „i“ für innen (inside) und „o“ für außen (outside). Der in Abb. 6.6 dargestellte Quadtree bei einer Kind-Ordnungsrelation nach 6.2(a) wird durch

```
nlllililnlililnlilililnlilililnlilililoli
nlolonlinlololililililinnlololilololilili
nlinnlilolililnlolilililililililililili
nlilililolo
```

kodiert<sup>4</sup>. Setzt man für  $n := 1$ ,  $l := 0$  und  $i := 1$ ,  $o := 0$  wird diese Darstellung in das Binärsystem überführt<sup>5</sup>:

```
11010101110101110101010010101000110000101100000101010111000001000
001011101110100010110001010101010101011101010000
```

<sup>3</sup> Der verallgemeinerte Oktalbaum wird auch als *Hyperoctree* bezeichnet (s. [AM91, S. 353]).

<sup>4</sup>Schriftsatz erfordert Zeilenumbrüche

<sup>5</sup> Für eine Beschreibung mehrerer Zellentypen ist die Menge  $\{i, o\}$  erweiterbar und die einzelnen Typen durch eine mehrstellige Dualzahl kodierbar.

Verglichen mit der binären Raumaufteilung im Abschn. 6.4.3 könnte auch eine ungleichmäßige Aufteilung der Zellen durchgeführt werden. Hierzu ist es allerdings nötig, die Position des Teilungspunktes zu speichern.

Ein Blatt eines Spacetrees ist mit Hilfe einer Positionskodierung eindeutig identifizierbar. Hierzu wird jedem der  $2^d$  Kindknoten in Abhängigkeit ihrer Lage jeweils eine eindeutige Kodierung gegeben. Für den Quadtree ist das, aufbauend auf einer LEBESGUE-Kurve, die 0 für „unten links“, 1 für „unten rechts“, 2 für „oben links“ und 3 für „oben rechts“ (s. 6.2(a)). Diese Anordnung wird als MORTON-Reihenfolge bezeichnet (s. [Sam94, S. 14]) und minimiert die maximale Differenz von benachbarten Kodierungen. Die Positionskodierung eines Blattes ist eine Wegbeschreibung von der Wurzel aus, bei der die Kodierungen der Kindknoten rechtslinear angeordnet werden. Das Loch in Abb. 6.6 besteht z. B. aus den Zellen 0323, 0332, 2101 und 2110.

(a) Kind-Kodierung

		N	
	2	3	
W	0	1	E
		S	

(b) Nachbarschaft-Matrix

	0	1	2	3
W	-	0	-	2
E	1	-	3	-
S	-	-	0	1
N	2	3	-	-

Tabelle 6.2: Benachbarte Quadtree-Zellen (nach [Fra00, S. 42])

**Bestimmung der Nachbarzelle** Die Bestimmung einer Nachbarzelle ist nach [Fra00, S. 41f] mit Hilfe der Matrix aus Tab. 6.2(b) möglich, welche an die Kind-Kodierung angepaßt ist. Nach Tab. 6.2(a) besitzt z. B. für den linken unteren Kindknoten mit der Kodierung 0 der rechte Nachbar in Richtung E die Kodierung 1 und der obere Nachbar in Richtung N die Kodierung 2. In der Spalte 0 der Matrix ist deshalb in der Zeile E eine 1 und in der Zeile N eine 2 eingetragen. Je nachdem, ob der linke, rechte, untere oder obere Nachbar gesucht wird, ist die entsprechende Zeile W, E, S oder N ausschlaggebend. Ausgehend von der Positionskodierung eines Knotens wird jeweils das letzte Zeichen entfernt. In der dem Nachbarn zugeordneten Zeile der Matrix wird entsprechend dem Zeichen der zugeordnete Eintrag ermittelt. Ist dies eine Zahl, wird sie an die aktuelle Positionskodierung angehängt und das Verfahren beendet, ansonsten wiederholt sich der Vorgang. Der rechte Nachbar (E) von 0323 ist z. B. 033—:

$$0323 \xrightarrow{E3 \rightarrow -} 032 \xrightarrow{E2 \rightarrow 3} 033$$

Da die Einteilung auf der untersten Ebene inkompatibel sein kann, ist topologisch betrachtet neben 0332 auch die Zelle 0330 ein potentieller Kandidat und 033 beinhaltet beide dieser Zellen. Wird für einen spezifischen Punkt auf dem Rand der Zelle 0323 die entsprechende Zelle im übergeordneten benachbarten Bereich 033 gesucht, kann das entsprechende Blatt durch Absteigen im Baum ab 033 bestimmt werden.

**Alternatives Vorgehen zur Bestimmung der Nachbarzelle** Geht man von einem vollständigen Quadtree aus, für den zu jeder inneren Zelle eine Nachbarzelle derselben Größe existiert, so soll diese für eine Zelle mit gegebener Positionskodierung bestimmt werden. Nach Tab. 6.3(a) findet sich z. B. für den linken unteren Kindknoten mit der Kodierung 0 ein linker Nachbar in Richtung W, der von seinem Vorgänger aus betrachtet die Kodierung 1 besitzt. Die Nachbarschaftsbeziehungen zu Knoten, die nicht „Geschwister“ sind, wird in der Nachbarschaft-Matrix nach 6.3(b) zusätzlich aufgenommen. Man startet an der letzten Position der Positionskodierung. Je nach Eintrag

(a) Kind-Kodierung	(b) Nachbarschaft-Matrix																									
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;">0</th> <th style="border: none;">1</th> <th style="border: none;">2</th> <th style="border: none;">3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th style="border: none;">W</th> <td>1 <math>\leftrightarrow</math></td> <td>0 <math>\checkmark</math></td> <td>3 <math>\leftrightarrow</math></td> <td>2 <math>\checkmark</math></td> </tr> <tr> <th style="border: none;">E</th> <td>1 <math>\checkmark</math></td> <td>0 <math>\leftrightarrow</math></td> <td>3 <math>\checkmark</math></td> <td>2 <math>\leftrightarrow</math></td> </tr> <tr> <th style="border: none;">S</th> <td>2 <math>\leftrightarrow</math></td> <td>3 <math>\leftrightarrow</math></td> <td>0 <math>\checkmark</math></td> <td>1 <math>\checkmark</math></td> </tr> <tr> <th style="border: none;">N</th> <td>2 <math>\checkmark</math></td> <td>3 <math>\checkmark</math></td> <td>0 <math>\leftrightarrow</math></td> <td>1 <math>\leftrightarrow</math></td> </tr> </tbody> </table>		0	1	2	3	W	1 $\leftrightarrow$	0 $\checkmark$	3 $\leftrightarrow$	2 $\checkmark$	E	1 $\checkmark$	0 $\leftrightarrow$	3 $\checkmark$	2 $\leftrightarrow$	S	2 $\leftrightarrow$	3 $\leftrightarrow$	0 $\checkmark$	1 $\checkmark$	N	2 $\checkmark$	3 $\checkmark$	0 $\leftrightarrow$	1 $\leftrightarrow$
	0	1	2	3																						
W	1 $\leftrightarrow$	0 $\checkmark$	3 $\leftrightarrow$	2 $\checkmark$																						
E	1 $\checkmark$	0 $\leftrightarrow$	3 $\checkmark$	2 $\leftrightarrow$																						
S	2 $\leftrightarrow$	3 $\leftrightarrow$	0 $\checkmark$	1 $\checkmark$																						
N	2 $\checkmark$	3 $\checkmark$	0 $\leftrightarrow$	1 $\leftrightarrow$																						

Tabelle 6.3: Benachbarte Zellen in vollständigem Quadtree

ergibt sich aus Tab. 6.3(b) ein neuer Eintrag, der den vorigen ersetzt. Für  $\checkmark$  ist der Nachbar bestimmt, bei  $\leftrightarrow$  wandert die aktuelle Position eine Stelle nach links und aus der Tabelle wird ein neuer Eintrag ermittelt. Ist es nicht mehr möglich die aktuelle Position nach links zu verschieben (weil man an der vordersten Position angelangt ist), existiert in diesem Fall kein Nachbar (weil sich die Zelle am Rand befindet). Der rechte Nachbar (E) von 0323 ist hier z. B. 0332:

$$0323 \xrightarrow{E3 \rightarrow 2 \leftrightarrow} 0322 \xrightarrow{E2 \rightarrow 3 \checkmark} 0332$$

Für einen durch ein Zeigergewebe gespeicherten Quadtree muß zur Bestimmung des entsprechenden Blattes der Baum von der Wurzel her entspre-

chend der Positionskodierung traversiert werden. Bei einem nicht vollständigen Quadtree muß beim Abstieg evtl. abgebrochen werden, falls vorzeitig ein Blatt erreicht wird.

**Bewertung** Spacetrees wurden als Abkömmlinge der Normzellenzerlegungen eingeführt. Viele Eigenschaften leiten sich demnach von dieser Darstellungsform ab. Verbessert wird vor allem der Speicherverbrauch. Der Zugriff ist dagegen linear von der Tiefe der Baumstruktur, bzw. logarithmisch von der Anzahl der Zellen ( $O(\log_{2^d}(n))$ ) abhängig.

### 6.4.3 Binäre Raumaufteilung

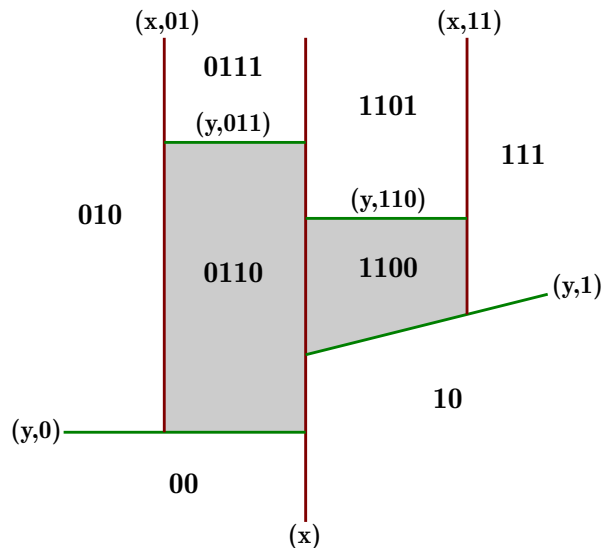


Abbildung 6.7: Binäre Raumaufteilung in der Ebene

Während die Familie der Quad- und Octrees den Raum rekursiv in  $2^d$  Teilräume aufteilt, ist es auch möglich jeweils rekursiv zwei Halbräume zu bilden. Die entstehende Datenstruktur ist dann ein Binärbaum. Jedes Knoten repräsentiert eine Zelle, die von den Kindknoten weiter aufgeteilt wird. Ein Körper ist die Vereinigung aller innenliegenden Blätter (s. Abb. 6.7). Die Wahl der Hyperebenen ist zunächst frei. Meist werden alternierend Ebenen verwendet, die normal zu den Basisvektoren sind. Diese Vorgehensweise findet man für den  $\mathbb{R}^k$  bei den  $k$ -d Bäumen. Im  $\mathbb{R}^2$  dient z. B. abwechselnd eine Gerade parallel zur  $x$ - und  $y$ -Richtung als Aufteilungskriterium. Analog zu den Spacetrees aus Abschn. 6.4.2 kann als weitere Spezialisierung der binären



Raumaufteilung die Zelle jeweils gleichmäßig in zwei Teilzellen gleicher Größe aufgeteilt werden.

#### 6.4.4 Allgemeine Zellzerlegungen

Aufbauend auf den Regeln der CW-Zellkomplexe (s. Abschn. 3.4.2) sind eine Vielzahl von Zellen für die Modellierung geeignet. Neben parametrisierten Grundprimitiven sind vor allem einfache Grundformen verbreitet. Im zweidimensionalen Raum werden vor allem Dreiecke und Vierecke und im dreidimensionalen Tetraeder und Hexaeder verwendet. Die Dreiecke und Tetraeder sind Simplexe. Auf simpliziale Zellzerlegung (s. Abschn. 3.4.1) basierende geometrische Modellierung stellt den Kern dieser Arbeit dar und wird ausführlich in Kapitel 9 dargestellt.

## 6.5 Implizite Modellierung

Einer Kurve bzw. Fläche der Dimension  $n - 1$  im  $\mathbb{R}^n$  ist in seiner impliziten geschlossenen Form durch

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (6.1)$$

gegeben. Im  $\mathbb{R}^2$  sind hier die impliziten Polynomgleichungen zweiten Grades als *Kegelschnitte* bekannt. Entsprechende Flächen im  $\mathbb{R}^3$  sind *Quadriken* (z. B. Ellipsoid, Paraboloid, Hyperbel). Die Gleichungen beschreiben den Rand eines Gebiets. Dies entspricht zunächst einer indirekten Darstellung eines Körpers. Da für einen Punkt über das Vorzeichen der Gleichung direkt die Zugehörigkeit zu einem Körper bestimmt werden kann (s. [AM91, S. 179]), wird ein Körper direkt dargestellt:

$$F(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} = 0 & \text{falls Rand} \\ > 0 & \text{falls außerhalb Körper} \\ < 0 & \text{falls innerhalb Körper} \end{cases} \quad (6.2)$$

Nach dem JORDANSchen Kurvensatz wird die Ebene  $\mathbb{R}^2$  durch eine einfach geschlossene Kurve in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt. Für höhere Dimensionen wird dieser Satz durch den JORDAN-BROUWERSchen Separationssatz verallgemeinert (s. [SZ94, S. 299]). Auch eine Gerade bzw. Hyperebene teilt die Ebene bzw. den Raum z. B. in zwei Halbebenen bzw. Halbräume auf. Ein Körper muß in der impliziten Darstellung also nicht beschränkt sein.

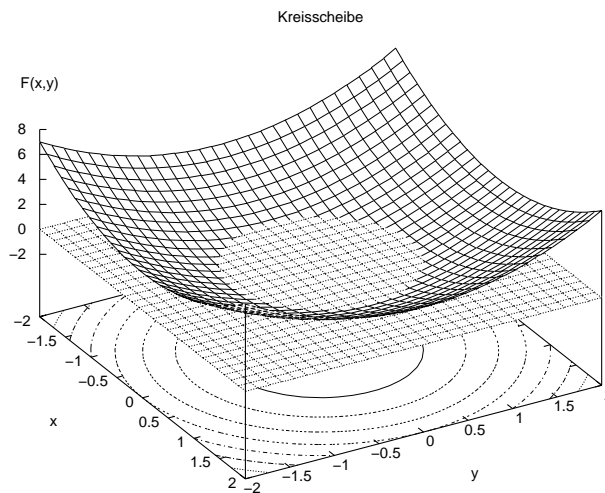


Abbildung 6.8: Kreisscheibe

**Beispiel:** Als Beispiel soll eine Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung im  $\mathbb{R}^n$  dienen. Sie kann durch

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - r^2 \begin{cases} = 0 & \text{falls auf Kugeloberfläche} \\ > 0 & \text{falls außerhalb} \\ < 0 & \text{falls innerhalb} \end{cases} \quad (6.3)$$

### 6.5.1 Implizite Darstellung von Halbräumen

Die HESSESche Normalform einer Hyperebene durch einen Punkt  $\vec{x}_0$  mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  lautet

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad (6.4)$$

Durch

$$d(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6.5)$$

kann der Abstand  $d(\vec{x})$  eines Punktes  $\vec{x}$  zur Hyperebene vorzeichenbehaftet bestimmt und somit ein Halbraum geometrisch modelliert werden.

**Halbebene** Im zweidimensionalen Raum kann der Normalenvektor zu einem gegebenen Richtungsvektor durch

$$\begin{pmatrix} -r_y \\ r_x \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Die Gerade durch zwei Punkte  $\vec{x}_0 = (x^{(0)}, y^{(0)})$  und  $\vec{x}_1 = (x^{(1)}, y^{(1)})$  mit  $\tilde{\bullet}^{(1)} := \bullet^{(1)} - \bullet^{(0)}$  ergibt sich zu

$$(x - x^{(0)}) \tilde{y}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)} (y - y^{(0)}) = 0 \quad (6.7)$$

Die entsprechende Halbebene wird durch

$$(x - x^{(0)}) \tilde{y}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)} (y - y^{(0)}) \begin{cases} = 0 & \text{falls Punkt auf Gerade} \\ > 0 & \text{falls Punkt außerhalb Halbebene} \\ < 0 & \text{falls Punkt innerhalb Halbebene} \end{cases} \quad (6.8)$$

beschrieben.

**Dreidimensionaler Halbraum** Im dreidimensionalen Raum dient das Kreuzprodukt zur Berechnung eines orthogonalen Vektors:

$$\begin{pmatrix} r_x^{(1)} \\ r_y^{(1)} \\ r_z^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x^{(2)} \\ r_y^{(2)} \\ r_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y^{(1)} r_z^{(2)} - r_z^{(1)} r_y^{(2)} \\ r_z^{(1)} r_x^{(2)} - r_x^{(1)} r_z^{(2)} \\ r_x^{(1)} r_y^{(2)} - r_y^{(1)} r_x^{(2)} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} r_x^{(1)} \\ r_y^{(1)} \\ r_z^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_x^{(2)} \\ r_y^{(2)} \\ r_z^{(2)} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Eine Ebene ist durch drei Punkte  $(x^{(i)}, y^{(i)})$  mit  $0 \leq i < 3$  definiert. Mit  $\tilde{\bullet}^{(i)} := \bullet^{(i)} - \bullet^{(0)}$  für  $1 \leq i < 3$  lautet die implizite Form:

$$\begin{aligned} (\tilde{y}^{(1)} \tilde{z}^{(2)} - \tilde{y}^{(2)} \tilde{z}^{(1)}) (x - x^{(0)}) + (\tilde{z}^{(1)} \tilde{x}^{(2)} - \tilde{z}^{(2)} \tilde{x}^{(1)}) (y - y^{(0)}) \\ + (\tilde{x}^{(1)} \tilde{y}^{(2)} - \tilde{x}^{(2)} \tilde{y}^{(1)}) (z - z^{(0)}) = 0 \end{aligned} \quad (6.10a)$$

Der Halbraum wird analog zu (6.8) durch das Vorzeichen des Ausdrucks bestimmt.

$$c_{x,12} \tilde{x} + c_{y,12} \tilde{y} + c_{z,12} \tilde{z} \begin{cases} = 0 & \text{falls Punkt auf Ebene} \\ > 0 & \text{falls Punkt außerhalb Halbraum} \\ < 0 & \text{falls Punkt innerhalb Halbraum} \end{cases} \quad (6.10b)$$

mit  $\tilde{\bullet} := \bullet - \bullet^{(0)}$  und

$$c_{x,ij} := \tilde{y}^{(i)} \tilde{z}^{(j)} - \tilde{y}^{(j)} \tilde{z}^{(i)} = -c_{x,ji} \quad (6.11a)$$

$$c_{y,ij} := \tilde{z}^{(i)} \tilde{x}^{(j)} - \tilde{z}^{(j)} \tilde{x}^{(i)} = -c_{y,ji} \quad (6.11b)$$

$$c_{z,ij} := \tilde{x}^{(i)} \tilde{y}^{(j)} - \tilde{x}^{(j)} \tilde{y}^{(i)} = -c_{z,ji} \quad (6.11c)$$

Vergleicht man die Gleichung mit derjenigen der Umsphäre (3.35) in Abschn. 3.3.2, so stellt man fest, daß die Umsphäre zur Ebene degeneriert, falls ein Punkt des Simplexes ins Unendliche wandert.

### 6.5.2 Implizitisierung einer Kurve bzw. Fläche in Parameterdarstellung

Eine Kurve bzw. Fläche der Dimension  $n - 1$  ist im  $\mathbb{R}^n$  durch  $n$  Gleichungen der Form

$$x_i(t_1, \dots, t_{n-1}) = f_i(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (6.12)$$

mit  $1 \leq i \leq n$  gegeben. Prinzipiell können die Parameter  $t_1, \dots, t_{n-1}$  eliminiert werden, um aus den  $n$  Gleichungen eine Gleichung der Form (6.1) zu erhalten. Das ist i. a. aber nicht möglich. Es sei

$$g_i(x_i, t_1, \dots, t_{n-1}) := x_i - f_i(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (6.13)$$

Gesucht sind die Parameter  $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{n-1}$ , für die gilt:

$$g_i(x_i, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{n-1}) := 0 \quad (6.14)$$

Zur Berechnung gemeinsamer Nullstellen von Polynomen dienen *Resultanten* (s. [Zei96, S. 652f],[AM91, S. 180]). Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des Problems ist die Berechnung einer GRÖBNER-Basis (s. [Hof89, S. 282f]).

### Polynomiale Kurve im zweidimensionalen Raum

Im folgenden wird der zweidimensionale Fall für Polynome mit

$$f_x(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad (6.15a)$$

$$f_y(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i \quad (6.15b)$$

und

$$g_x(x, t) = x - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i t^i \quad (6.16a)$$

$$g_y(y, t) = y - b_0 - \sum_{i=1}^m b_i t^i \quad (6.16b)$$

für (6.13) betrachtet und mit Hilfe einer Resultanten gelöst. Gebrochenrationale Funktionen für (6.15a) lassen sich ebenfalls in Polynome für (6.16a) überführen. Nach SYLVESTER erhält man für zwei Polynome

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \quad (6.17)$$

mit  $n, m \geq 1$  folgende als Determinante einer Matrix zu berechnende Resultante:

$$R = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \hline & \overbrace{\quad\quad\quad}^{n+1} & & & \overbrace{\quad\quad\quad}^{m-1} & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & & & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & & & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & & & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & \\ \hline \underbrace{\quad\quad\quad}_{n-1} & & & & \underbrace{\quad\quad\quad}_{m+1} & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array} \quad (6.18)$$

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Berechnung einer Resultante nach CAYLEY-BEZOUT (s. [AM91, S. 180], [HL92, S. 478f]):

$$R = \begin{vmatrix} r_{0,0} & \cdots & r_{0,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k,0} & \cdots & r_{k,k} \end{vmatrix} \quad (6.19a)$$

mit

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} r_{i,j} x^i \alpha^j = \frac{\begin{vmatrix} p(x) & q(x) \\ p(\alpha) & q(\alpha) \end{vmatrix}}{x - \alpha} \quad (6.19b)$$

$$= \frac{p(x)q(\alpha) - p(\alpha)q(x)}{x - \alpha} \quad (6.19c)$$

$$k := \max(n, m)$$

wobei sich die zusätzliche Variable  $\alpha$  mit dem Nenner herauskürzt. Die resultierende Matrix ist kleiner als bei (6.18), aber voll besetzt und komplizierter zu berechnen. Die beiden Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$  nach (6.17) haben dann eine gemeinsame Nullstelle, wenn für  $a_n, b_m \neq 0$  die Resultante nach (6.18) oder (6.19)  $R = 0$  ist.

**Beispiel** Als Beispiel dient die Halbebene aus Abschn. 6.5.1, die als Rand eine Gerade der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \tilde{x}^{(1)} \\ \tilde{y}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

besitzt (vgl. (6.15a) und (6.12)). Hieraus ergibt sich für (6.16a)

$$g_x(x, t) = -\tilde{x}^{(1)}t + (x(t) - x^{(0)}) \quad (6.21a)$$

$$g_y(y, t) = -\tilde{y}^{(1)}t + (y(t) - y^{(0)}) \quad (6.21b)$$

In (6.17) werden die Gleichungen (6.21a) mit dem Parameter  $t$  als Variable  $x$  und  $n = m = 1$  eingesetzt und man erhält für (6.18):

$$R = \begin{vmatrix} -\tilde{x}^{(1)} & x - x^{(0)} \\ -\tilde{y}^{(1)} & y - y^{(0)} \end{vmatrix} \quad (6.22)$$

Die Bedingung  $R = 0$  liefert die implizite Gleichung des Randes einer Halbebene nach (6.7).

### Polynomiale Fläche im dreidimensionalen Raum

Im dreidimensionalen Fall für Polynome mit

$$f_x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} u^i v^j \quad (6.23a)$$

$$f_y(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j} u^i v^j \quad (6.23b)$$

$$f_z(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{i,j} u^i v^j \quad (6.23c)$$

werden bivariate Resultanten zur Lösung benötigt. Gegeben seien drei Polynome

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j, & q(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j} x^i y^j \\ r(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{i,j} x^i y^j \end{aligned} \quad (6.24)$$

Die bivariate CAYLEY-BEZOUT-Resultante ergibt sich zu (s. [AM91, S. 184])

$$R = \begin{vmatrix} r_{(0,0),(0,0)} & \cdots & r_{(0,0),(n-1,2m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{(2n-1,m-1),(0,0)} & \cdots & r_{(2n-1,m-1),(n-1,2m-1)} \end{vmatrix} \quad (6.25a)$$

mit

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{2m-1} r_{(i,j),(k,l)} x^k y^l \right) \alpha^i \beta^j = \frac{\begin{vmatrix} p(x, y) & q(x, y) & r(x, y) \\ p(\alpha, y) & q(\alpha, y) & r(\alpha, y) \\ p(\alpha, \beta) & q(\alpha, \beta) & r(\alpha, \beta) \end{vmatrix}}{(x - \alpha)(y - \beta)} \quad (6.25b)$$

Die Polynome  $p(x)$ ,  $q(x)$  und  $r(x)$  nach (6.24) haben dann eine gemeinsame Nullstelle, wenn für  $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m} \neq 0$  die Resultante nach 6.25  $R = 0$  ist.

**Beispiel** Der Halbraum im  $\mathbb{R}^3$  wird von einer Ebene nach Abschn. 6.5.1 berandet:

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \tilde{x}^{(1)} \\ \tilde{y}^{(1)} \\ \tilde{z}^{(1)} \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \tilde{x}^{(2)} \\ \tilde{y}^{(2)} \\ \tilde{z}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Hieraus ergibt sich

$$g_x(x, u, v) = -\tilde{x}^{(1)}u - \tilde{x}^{(2)}v + (x(u, v) - x^{(0)}) \quad (6.27a)$$

$$g_y(y, u, v) = -\tilde{y}^{(1)}u - \tilde{y}^{(2)}v + (y(u, v) - y^{(0)}) \quad (6.27b)$$

$$g_z(z, u, v) = -\tilde{z}^{(1)}u - \tilde{z}^{(2)}v + (z(u, v) - z^{(0)}) \quad (6.27c)$$

$$(6.27d)$$

Diese Gleichungen setzt man mit  $n = m = 1$  und den Parametern  $u, v$  als Variablen  $x, y$  in (6.24) ein und erhält

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 \left( \sum_{l=0}^1 r_{(i,0),(0,l)} v^l \right) \alpha^i &= \frac{\begin{vmatrix} g_x(u, v) & g_y(u, v) & g_z(u, v) \\ g_x(\alpha, v) & g_y(\alpha, v) & g_z(\alpha, v) \\ g_x(\alpha, \beta) & g_y(\alpha, \beta) & g_z(\alpha, \beta) \end{vmatrix}}{(u - \alpha)(v - \beta)} \\ &= (\tilde{y}^{(1)}\tilde{z}^{(2)} - \tilde{z}^{(1)}\tilde{y}^{(2)}) (x - x^{(0)}) \\ &\quad + (\tilde{z}^{(1)}\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)}\tilde{z}^{(2)}) (y - y^{(0)}) \\ &\quad + (\tilde{x}^{(1)}\tilde{y}^{(2)} - \tilde{y}^{(1)}\tilde{x}^{(2)}) (z - z^{(0)}) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Für  $R = 0$  ergibt sich (6.10a).

### 6.5.3 BOOLEsche Operatoren für implizite Modellierung

Gegeben sind zwei implizite Gleichungen zur Darstellung eines Körpers nach (6.2)  $F_1$  und  $F_2$ . Gesucht sind die Körper, welche sich für Mengenoperationen nach Abschn. 6.2 ergeben. Es sollen zunächst nichtregularisierte Mengenoperationen untersucht werden. Die Punkte  $x$  können je nach Funktionswert von  $F$  in drei topologische Bereiche eingeteilt werden:

$$F(x) \begin{cases} = 0 & \text{auf Rand} \\ > 0 & \text{außerhalb} \\ < 0 & \text{innerhalb} \end{cases}$$

Für die Mengenoperatoren ergeben sich Anforderungen an den Funktionswert des resultierenden Körpers nach Tab. 6.4. Gesucht werden binäre bzw. unäre Funktionen, die diesen Anforderungen genügen, wie z. B. nach Tab. 6.5. Die Regularisierung muß in einem gesonderten Schritt erfolgen.

**pseudo BOOLEschen Operatoren** Die *pseudo BOOLEschen Operatoren* sind eine Näherung der BOOLEschen Operatoren. Die Maximum-Funktion



	$\cup$		$F_2$		
		$= 0$	$> 0$	$< 0$	
$F_1$	$= 0$	$\leq 0$ (?)	$= 0$	$< 0$	
	$> 0$	$= 0$	$> 0$	$< 0$	
	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	

	$\cap$		$F_2$		
		$= 0$	$> 0$	$< 0$	
$F_1$	$= 0$	$\geq 0$ (?)	$> 0$	$= 0$	
	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	
	$< 0$	$= 0$	$> 0$	$< 0$	

	$\setminus$		$F_2$		
		$= 0$	$> 0$	$< 0$	
$F_1$	$= 0$	$\geq 0$ (?)	$= 0$	$> 0$	
	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	
	$< 0$	$= 0$	$< 0$	$> 0$	

	$\setminus F$	$= 0$	$> 0$	$< 0$
		$= 0$	$< 0$	$> 0$

Tabelle 6.4: nichtregularisierte Mengenoperatoren für implizite Modellierung

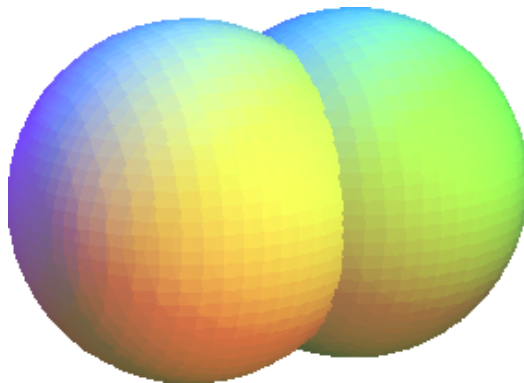


Abbildung 6.9: Vereinigung zweier Kugeln in impliziter Darstellung durch min-Funktion

Mengenoperation	Funktion
$F_1 \cup F_2$	$\min(F_1, F_2)$
$F_1 \cap F_2$	$\max(F_1, F_2)$
$\setminus F$	$-F$

Tabelle 6.5: Funktionen zur Umsetzung von Mengenoperationen für implizite Modellierung

kann für positive Werte durch einen Grenzwert beschrieben werden<sup>6</sup>:

$$\max(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x^p + y^p} \quad \text{für } x, y \geq 0 \quad (6.29)$$

Analog ist

$$\min(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{x^p} + \frac{1}{y^p}}} \quad \text{für } x, y > 0 \quad (6.30)$$

Durch ein großes gewähltes  $p$ , kann eine Näherung erzielt werden. Dieser Ansatz, BOOLEsche Operatoren wie die Schnitt- oder Vereinigungsmenge durch geschlossene Funktionen anzunähern, geht auf RICCI zurück (s. [Ric72]). Für die Formulierung des Gebietes nach (6.2) wird der Wertebereich z. B. durch  $\tilde{F} := a^F$  mit  $a > 1$  nach  $\mathbb{R}^+$  transformiert:

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+ \begin{cases} = 1 & \text{falls Rand} \\ > 1 & \text{falls außerhalb} \\ < 1 & \text{falls innerhalb} \end{cases} \quad (6.31)$$

Die Wurzelfunktion in (6.29) und (6.30) ändert die Klassifizierung nach (6.31) nicht. Hierauf basieren die *modifizierten RICCI Operatoren* (s. [GS93]):

$$F_1 \cup F_2 \approx F_1^p + F_2^p \quad (6.32a)$$

$$F_1 \cap F_2 \approx \frac{1}{F_1^{-p} + F_2^{-p}} \quad (6.32b)$$

$$F_1 \setminus F_2 \approx F_1^p + F_2^{-p} \quad (6.32c)$$

<sup>6</sup> vgl. MINKOWSKI-Metrik nach (3.4), die für  $p \rightarrow \infty$  der Maximum-Metrik entspricht.

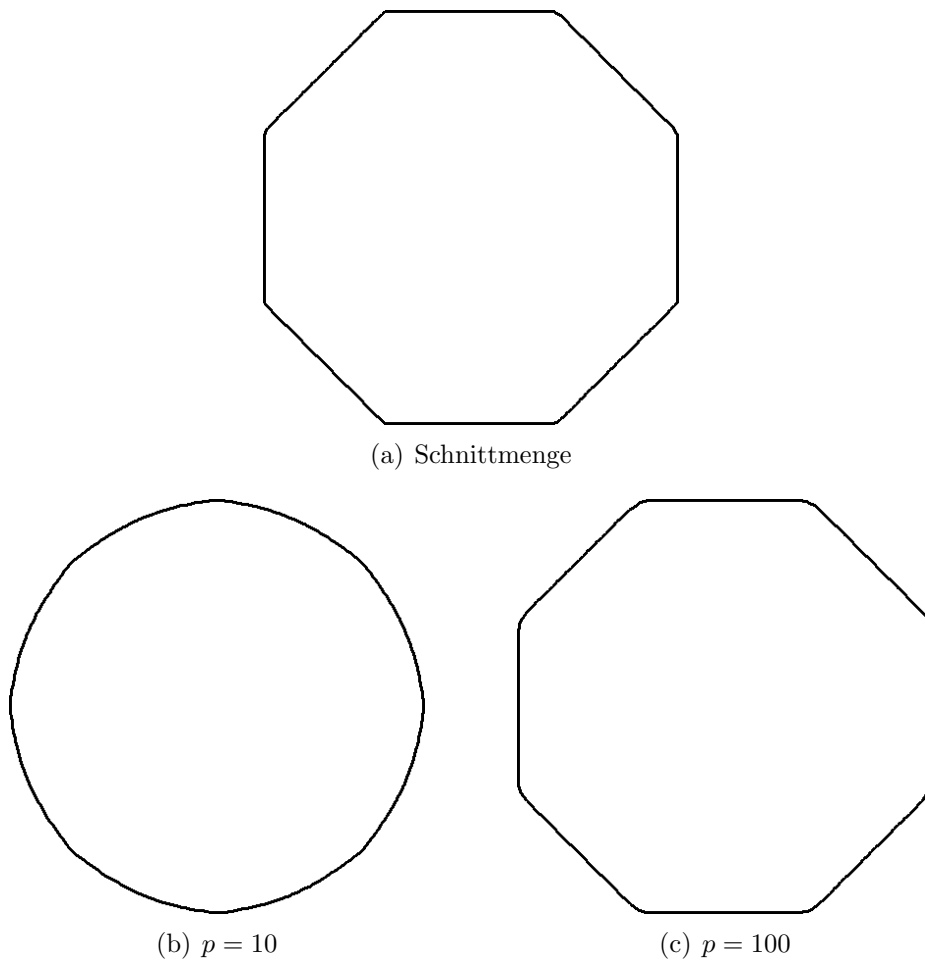


Abbildung 6.10: Anwendung modifizierter RICCI Operatoren für die Schnittmenge von  $\exp(|x| + |y| - \frac{1}{2}\sqrt{2})^p$  und  $\exp(\max(|x|, |y|) - \frac{1}{2})^p$ .

## 6.6 Indirekte Darstellung eines Körpers durch Oberflächenrepräsentation

Die indirekte Darstellung definiert einen Körper über die Oberfläche, was in der Bezeichnung *Oberflächenrepräsentation* bzw. *Boundary Representation* zum Ausdruck kommt. Hierbei muß eindeutig sein, was innen und was außen ist. Den Oberflächenfacetten werden Normalen zugeordnet. Die „Brep“-Darstellung ist für 3D-CAD-Systeme weit verbreitet. Ein Beispiel hierfür ist der oft lizenzierte *ACIS-Modellierkern* (s. [CL01, Spa01]). Erfolgt die Konstruktion mit Hilfe von EULER-Operatoren (s. Anhang A.1) ist ein topologisch konsistenter Zustand des Modells sichergestellt.

### 6.6.1 Zellinzidenzgraph

Die zweimannigfaltige Oberfläche eines regulären Körpers wird als Zellkomplex durch Punkte( $V$ ), Kanten( $E$ ) und Flächen( $F$ ) beschrieben. Die Beschreibung benötigt neben den Elementen auch Relationen zwischen den Elementen, die durch einen Zellinzidenzgraphen bzw. *vef*-Graphen (s. [BGZ96, S. 71ff])  $G = (V, E, F; R)$  dargestellt werden können. Die möglichen Relationen sind in Tab. 6.6 aufgeführt. Bei Betrachtung aller Zellinzidenzen sind redun-

	V	E	F
V	$VV \subseteq V \times V$ Punkt ist adjazent zu Punkt	$VE \subseteq V \times E$ Punkt ist Endpunkt von (bzw. inzident zu) Kante	$VF \subseteq V \times F$ Punkt ist Eckpunkt von Fläche
E	$EV \subseteq E \times V$ Kante hat Punkt als Endpunkt	$EE \subseteq E \times E$ Kante ist benachbart zu (hat gemeinsamen Punkt mit) Kante	$EF \subseteq E \times F$ Kante begrenzt Fläche
F	$FV \subseteq F \times V$ Fläche hat Punkt als Eckpunkt	$FE \subseteq F \times E$ Fläche hat Kante als Begrenzungskante	$FF \subseteq F \times F$ Fläche ist benachbart zu (hat gemeinsame Kante mit) Fläche

Tabelle 6.6: mögliche Zellinzidenzen

dante Informationen zu finden. Die Speicherung aller Relationen ermöglicht einen optimal schnellen Zugriff auf die Daten. Eine Modifikation der Daten erfordert allerdings die Anpassung aller Relationen. Die Konsistenz der Daten muß sichergestellt werden. Das Abspeichern redundanter Daten erhöht

zudem das Datenvolumen. Werden nur die nötigsten Relationen abgespeichert, müssen bei Modifikationen weniger Daten angepaßt werden und es wird weniger Speicher verwendet. Die Abfrage nicht gespeicherter Daten erfordert hier allerdings einen Berechnungsschritt, der aufwendig sein kann. Die im folgenden vorgestellten Datenstrukturen suchen einen sinnvollen Mittelweg zwischen diesen beiden Extremen.

Diese Beziehungen können als ein Graph dargestellt werden, in dem jede Kante eine gespeicherte Relation und die Knoten die Elemente V, E und F repräsentiert. Die jeweils symmetrische Relation kann durch eine totale Enumeration der betreffenden Relation ermittelt werden. So kann z. B. die  $VE$ -Relation durch Untersuchung aller  $EV$ -Paare gewonnen werden. Sollen lokale Größen die Komplexität des Aufwandes bestimmen, berechnet man eine Relation aus zusammenhängenden Relationen. Zu beachten ist, daß nicht alle Verknüpfungen von einzelnen Relationen das gewünschte Ergebnis liefert. Wird z. B. durch die Relation  $FE$  alle Kanten einer Fläche und anschließend über  $EV$  alle Knoten dieser Kanten ermittelt, so erhält man alle Knoten einer Fläche, was der Relation  $FV$  entspricht. Ebenso führt  $VE$  und  $EF$  zu  $VF$ . Werden aber alle Knoten einer Fläche mit  $FV$  ermittelt, um die zugehörigen Kanten anschließend mit  $VE$  zu bestimmen, erhält man auch Kanten, die nicht zur Relation  $FE$  gehören. Aufbauend auf Verknüpfungen von Relationen muß der Graph zusammenhängend sein, um alle fehlenden Relationen zu berechnen. Wählt man z. B. die Relationen  $VE$ ,  $EV$ ,  $EF$  und  $FE$  ergibt sich für die Adjazenzmatrix des Graphen

$$A = \begin{pmatrix} VV & VE & VF \\ EV & EE & EF \\ FV & FE & FF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

und für die transitive Hülle

$$\begin{aligned} T &= A + A^2 + A^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Der Graph ist zusammenhängend und die nicht gespeicherten Zellinzidenzen können nach Tab. 6.7 berechnet werden. Die Speicherung der gewählten Zellinzidenzen ist somit ausreichend.

	V	E	F
V	$VE \otimes EV$	$VE$	$VE \otimes EF$
E	$EV$	$EV \otimes VE$	$EF$
F	$FE \otimes EV$	$FE$	$FE \otimes EF$

Tabelle 6.7: gespeicherte und berechnete Zellinzidenzen

### 6.6.2 Datenstrukturen

„**Winged-Edge**“ Im Zentrum der „*Winged-Edge*“ Datenstruktur [Bau75] steht die Kante. Es werden alle Kanten-Relationen gespeichert: Die Kante speichert Referenzen der Endknoten  $v_p$  und  $v_n$  ( $EV$ ), der angrenzenden Flächen  $f_l$  und  $f_r$  ( $EF$ ), sowie der anschließenden Kanten der Flächen in Uhrzeiger- und Gegenuhrzeigerrichtung  $e_{ccwp}$ ,  $e_{cwn}$ ,  $e_{ccwn}$  und  $e_{cwp}$  (Teilmenge von  $EE$ ). Die Lage der zur Kante inzidenten Zellen ist in Abb. 6.11 dargestellt<sup>7</sup>. Jeder Knoten und jede Fläche speichert eine anschließende Kante.

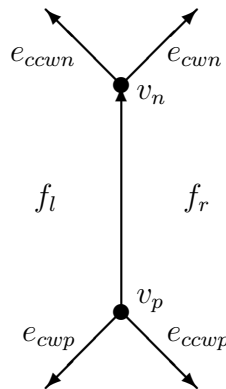


Abbildung 6.11: „Winged-Edge“ Datenstruktur

Die Relationen können bestimmt werden, indem man durch die Kantenringlisten iteriert. Für  $VE$  ermittelt man zunächst die dem Knoten inzidente Kante und bestimmt deren an diesem Knoten anschließende Kante in Uhrzeiger- bzw. Gegenuhrzeigerrichtung. Von dieser Kante aus wird das Vorgehen so lange wiederholt, bis die Ursprungskante wieder erreicht ist und alle Kanten bestimmt sind. Auch für  $FE$  ist ein analoges Vorgehen möglich. Ausgehend von einer Begrenzungskante kann im Uhrzeigersinn oder Gegenuhrzeigersinn über alle Begrenzungskanten der Fläche iteriert werden. Es

<sup>7</sup> Der Namen „Winged Edge“ stammt von der Form dieser Darstellung, die an (Schmetterlings-)Flügel erinnern könnte.

wird deutlich, daß es eigentlich nicht erforderlich ist, die Verweise auf die Kanten im Uhrzeigersinn und Gegenuhzeigersinn zu speichern. Zwei dieser Verweise ( $\{e_{ccwn}, e_{ccwp}\}$  bzw.  $\{e_{cwn}, e_{cwp}\}$ ) reichen aus. Man erhält die „*Half Winged-Edge*“ Datenstruktur (s. [BGZ96, S. 79]). Eine Komplexitätsanalyse der „*Winged-Edge*“ Datenstruktur ist unter [Woo85, NB94] zu finden. Weiler ([Wei85],[Wei86, S. 131f]) kombiniert in der „*Modified Winged-Edge*“ Datenstruktur die „*Winged-Edge*“ Datenstruktur mit der „*Half-Edge*“ Datenstruktur, die im folgenden beschrieben wird.

„**Half-Edge**“ Die *Halbkanten Datenstruktur* (s. [Män88, S. 161ff], [CGA01]) bzw. *Doubly Connected Edge List* (DCEL) (s. [PS85], [dvOS00, S. 29ff]) oder *Face-Edge* Datenstruktur [Wei86], teilt die *Winged-Edge* Datenstruktur in zwei Teile. Jede Halbkante erhält den Verweis auf einen Knoten, eine Fläche und zwei zu dieser Fläche gehörende angrenzende Halbkanten. Die „*Winged-*

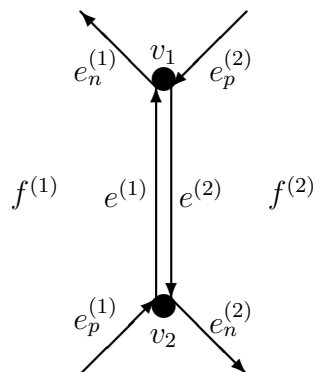


Abbildung 6.12: „Half-Edge“ Datenstruktur

Edge“ Datenstruktur wird hiermit in zwei Teile aufgespalten. Beim Iterieren entfällt die Abfrage, ob eine Kante in ihrer Orientierung oder entgegengesetzten Orientierung durchlaufen wird. Allerdings muß bei der Attributierung der Kante ein zusätzliches Kantenobjekt geschaffen werden, das auf seine beiden Halbkanten verweist und auf das beide zurückverweisen.

„**Radial-Edge**“ Während die „*Winged-Edge*“- und die *Halbkanten-Datenstruktur* nur für die Darstellung von 2-Mannigfaltigkeiten geeignet sind, wird der Darstellungsbereich durch die „*Radial-Edge*“ Datenstruktur (s. [Wei86, S. 193ff]) auf Nichtmannigfaltigkeiten erweitert. Der Name bezieht sich auf

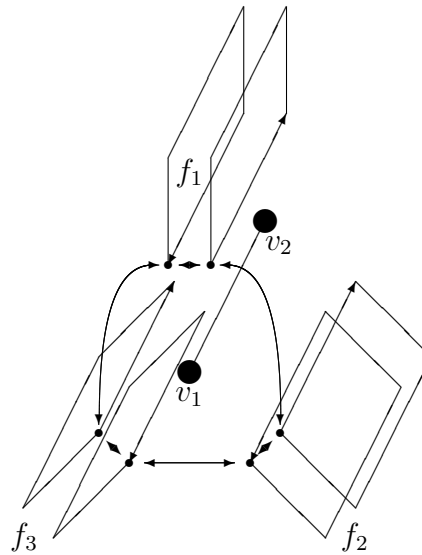


Abbildung 6.13: „Radial-Edge“ Datenstruktur

die zahlreich verwendeten Ringlisten. Jede Fläche besitzt zwei Oberflächen, die über eine Ringliste an einer Kante hängen (s. Abb. 6.13).

**Halbfacetten** In [Bor96] wird eine *Halbfacetten* Datenstruktur als Erweiterung der Halbkanten Datenstruktur zur Darstellung von Nichtmannigfaltigkeiten vorgestellt.

## 6.7 Hybride Modellierer

Um die Stärken und Schwächen der einzelnen Ansätze optimal zu verbinden, bietet es sich an, diese zu einem *Hybridmodell* zu verbinden (s. [BGZ96, S. 70], [Goe92, S. 156]). Zur Eingabe wird meist das CSG-Modell (s. Abschn. 6.3) verwendet (vgl. [LaC95]). Die interne Darstellung erfolgt jedoch überwiegend auf Basis eines Oberflächenmodells. Bekannte Vertreter dieser Kombination aus dem Bereich der 3D-CAD-Systeme sind z. B. *AutoDesk's AutoCAD* oder *Bentley's Microstation* (s. [Pet97]). Zur Erzeugung eines numerischen Modells (s. Abschn. 2) muß dann evtl. eine Zellzerlegung generiert werden.



## 6.8 Anmerkung zur Geschichte

Während die Ursprünge des CAD aus der akademischen Welt kommen, spielt die Automobil-, Luft- und Raumfahrtindustrie bei der praktischen Umsetzung eine wichtige Rolle. Freiformflächen für dünne schalenartige Strukturen lagen hier im Zentrum des Interesses. Zweck der geometrischen Modellierung war zu Beginn hauptsächlich die Visualisierung, Kontrolle der Konstruktion und Fertigung der Bauteile. Ein Modellersystem muß dem Rechnung tragen.

Zu Beginn der Entwicklung waren die Ressourcen äußerst begrenzt und die Zielsetzung kein echtes Volumenmodell. Drahtgitter- und Flächenmodelle waren Wegbereiter für die indirekte Darstellung eines Volumens durch ein Oberflächenmodell. Die Verwendung eines CW-Komplexes mit komplexen Flächen ersetzt eine größere Anzahl einfacher Flächen durch weniger, komplexer aufgebaute Konstrukte. Diese Herangehensweise hat eine lange Tradition.



# Kapitel 7

## Algorithmen zur Punktlokalisierung

### 7.1 Algorithmen

Der Begriff *Algorithmus* wird in [Bro98, S. 31] wie folgt definiert:

*Definition* (Algorithmus). Ein *Algorithmus* ist ein Verfahren mit einer *präzisen* (d.h. in einer eindeutigen Sprache abgefaßten) *endlichen Beschreibung* unter Verwendung *effektiver* (im Sinne von tatsächlich ausführbarer) Verarbeitungsschritte.

Ein Algorithmus ist eine Vorschrift zur Lösung einer Problemstellung. Die Lösungsvorschrift ist hierbei nicht eindeutig. Es können mehrere Algorithmen zu einem Problem existieren.

Knuth ([Knu80, S. 4ff]) führt folgende notwendigen Eigenschaften an:

**Endlichkeit:** Ein Algorithmus muß immer in endlicher Zeit terminieren.

**Eindeutigkeit:** Jeder Schritt muß in jedem Fall eindeutig definiert sein.

**Eingabe:** Ein Algorithmus benötigt Eingaben oder auch nicht.

**Ausgabe:** Ein Algorithmus liefert eine Ausgabe.

**Effektivität:** Ein Algorithmus soll aus hinreichend einfachen, nachvollziehbaren Einzelschritten aufgebaut sein.

„Randomisierte“ Algorithmen liefern bei einem nichtdeterministischen Weg ein deterministisches Ergebnis (s. [BY98, S. 63ff]).

Wichtig ist die *Korrektheit* des Algorithmus. Der Nachweis durch einen Beweis ist hierbei nicht trivial. Einfaches Testen mit unterschiedlichen Eingaben ist i. a. nicht ausreichend, da eine totale Enumeration aller möglichen Eingaben oft nicht getestet werden kann<sup>1</sup>.

### 7.1.1 Auswahlkriterien

Um mehrere Algorithmen zu einem Problem zu vergleichen, ist ein Bewertungsmaßstab notwendig. Dieser orientiert sich am Ressourcenverbrauch, der mit Hilfe eines *Kostenmaßes* bewertet wird. Für die *Effizienz* sind die folgenden beiden Fragestellungen von zentraler Bedeutung:

1. Wie viele Rechenschritte benötigt der Algorithmus, bzw. wie viel Rechenzeit wird verbraucht?
2. Wie viel Speicherplatz wird benötigt?

Weiterer Verbrauch von Ressourcen, wie z. B. die Datenbewegungen in einem Netzwerk oder auf Massenspeicher werden meist nicht betrachtet. Zudem sollte der Algorithmus möglichst leicht verständlich sein, um die Wartung des resultierenden Programms zu vereinfachen (s. [AHU87, S. 16], [AU96, S. 130ff]).

In der Praxis wird meist der schnellste Algorithmus, der nicht mehr als den zur Verfügung stehenden Speicherplatz benötigt, gewählt. Da in vielen Programmen ein Großteil der Rechenzeit durch einen relativ kleinen Teil des Programms („Hot spots“) verbraucht wird, lohnt es sich vor allem diesen Teil zu optimieren.

Das Ergebnis kann durch die Wahl der zur Verfügung stehenden Rechnerplattform beeinflusst werden. Für die Analyse von Algorithmen wird hierfür ein Modell zugrundegelegt. Das kann die *TURING-Maschine* oder eine *Registermaschine* (Random Access Machine, RAM) sein<sup>2</sup> (s. [GZZZ95, S. 4ff]). Nach der *CHURCHschen These* kann ein auf einer solchen Maschine ausführbares Programm mit einem Algorithmus gleichgesetzt werden (s. [OW96, S. 1]).

Insbesondere parallele Rechnerarchitekturen erfordern speziell angepaßte Algorithmen (s. [Brä93], [Ber96]). Algorithmen sind auch eng an die zugrundeliegenden Datenstrukturen geknüpft. Einzelschritte lassen sich für unterschiedliche Datenstrukturen verschieden effizient ausführen.

---

<sup>1</sup>In der Praxis wird diese Vorgehensweise aber oft zum Aufspüren von Fehlern verwendet.

<sup>2</sup>Knuth verwendet hier das von Ihm eingeführte MIX (s. [Knu80]).

Durch den deterministischen Ablauf eines Algorithmus hängt die Laufzeit und der Speicherverbrauch direkt von der Eingabe ab. Hierbei ist zum einen die Größe bzw. der *Umfang*  $N$ , zum anderen die Art der Eingabe von großer Bedeutung. Der Ressourcenverbrauch wird hier als *Aufwand*  $T(N)$  bezeichnet. Die *Komplexität* eines Problems kennzeichnet den geringsten Aufwand, den man zur Lösung benötigt. Die Eingabe kann auch den Umfang der Ausgabe entscheidend beeinflussen. Ein Algorithmus kann auch in Bezug auf seine Ausgabe analysiert werden (s. [BY98, S. 5]). Bei der Analyse des Aufwands (z. B. Laufzeit) unterscheidet man zwischen dem Verhalten im

- besten Fall („best case“) mit günstigstem (geringstem) Aufwand
- durchschnittlichen Fall („average case“) mit mittlerem Aufwand
- schlechtesten Fall („worst case“) mit ungünstigstem (höchstem) Aufwand.

Die Wahl der Eingabe für den durchschnittlichen Fall ( $T_{avg}(N)$ ) ist i. a. nicht eindeutig. Meist wird der schlechteste Fall analysiert und mit  $T(N)$  bezeichnet. Oft besitzen der durchschnittliche und der schlechteste Fall dieselbe Komplexität (s. [CLR97, S. 9]). Vor allem große Eingabesätze spielen eine Rolle. Aus diesem Grund betrachtet man bevorzugt den *asymptotischen Aufwand* und die *Komplexität* für  $N \rightarrow \infty$ . Das Wachstum der Funktion  $T(N)$  ist hier entscheidend. Die Algorithmen werden in Abhängigkeit der Aufwandsfunktion in Klassen eingeteilt. Hierzu dient das O-Kalkül (s. z. B. [Goo97], [Wei94]).

## 7.2 Datenstrukturen für Punkte-Mengen

### 7.2.1 Punkte-k-d-Baum

In Abschnitt 6.4.3 wurde bereits der k-d-Baum als Grundlage der geometrischen Modellierung für die Darstellung von Körpern vorgestellt. Statt jedem Knoten des Baums eine Zelle zuzuweisen, steht beim Punkte- $k$ -d-Baum ein Knoten für einen Punkt. Durch die Koordinaten eines Punktes wird der Raum implizit zerlegt und ebenfalls eine binäre Raumaufteilung durchgeführt. Üblicherweise wird der Punkte- $k$ -d-Baum aber zur Speicherung einer Menge von Punkten verwendet. Für Punkte in der Ebene ist das in Abb. 7.1 dargestellt.

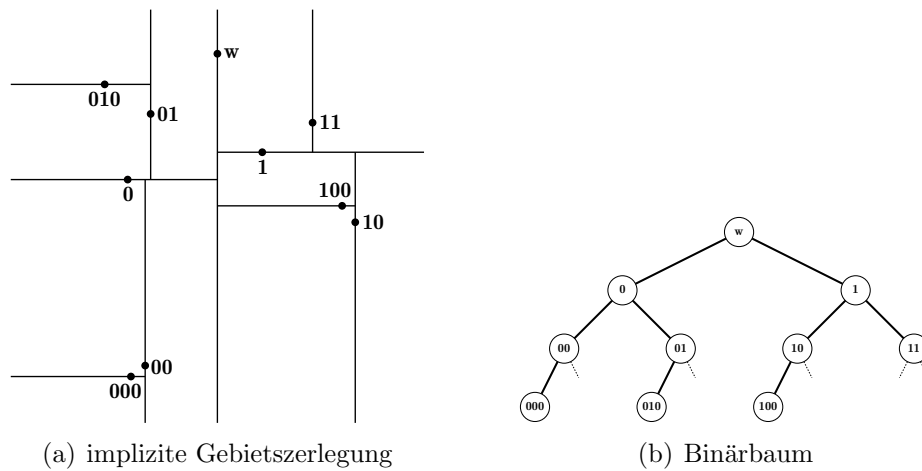


Abbildung 7.1: Punkte-k-d-Baum

**Suche:** Die Suche nach einem Punkt oder den Punkten in einem rechteckigen Bereich ist in  $O(\log(n))$  möglich<sup>3</sup>. Ein voll besetzter Binärbaum mit  $n$  Punkten besteht aus  $\log_2(n+1)$  Ebenen. Um den Baum von der Wurzel bis zu einem Blatt zu durchlaufen, benötigt man also  $\log_2(n+1)$  Schritte, die den maximalen Aufwand zur Suche eines Punktes bestimmen.

**Konstruktion:** Ein neu einzufügender Punkt durchläuft den Punkte-k-d-Baum von der Wurzel aus und wird für jeden Knoten aufgrund des entsprechenden Koordinatenwertes an ein Kind „weitergereicht“ bis der Eintrag frei ist.

Zur Erzeugung eines balancierten Punkte-k-d-Baums aus einer vorgegebenen Menge von  $n$  Punkten werden  $k$  Hilfslisten angelegt, welche Verweise auf die Punkte enthalten. Jede dieser Listen wird für je eine Koordinate sortiert ( $O(kn \log(n))$ ). Alternierend wird aus einer Hilfsliste der Median ermittelt und die Liste an dieser Stelle aufgeteilt. Der Median bestimmt die Teilungs-Hyperebene des Knotens und die zwei Teillisten werden, falls sie nicht leer sind, an neu zu erzeugende Kindknoten weitergegeben. Alle anderen Hilfslisten werden jeweils linear durchlaufen und die Einträge in zwei Listen aufgeteilt, so daß sich in jeder Liste die Elemente des entsprechenden Kindelements befinden. Jedes Kindelement erhält somit wiederum  $k$  sortierte Teillisten und der Algorithmus kann rekursiv fortgeführt werden.

<sup>3</sup> Zur geometrischen Suche von Punkten in einem Bereich s. [Mat94].

## 7.2.2 Punkte-Spacetree

Diesselbe Datenstruktur wie bereits in Abschn. 6.4.2 vorgestellt, kann als „Point“-Quadtree auch dazu verwendet werden, eine Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$  zu speichern. Jeder Knoten entspricht hier einem Punkt, der die Ebene achsenparallel in vier Gebiete aufteilt. Der Punkte-Quadtree beschreibt hierdurch,

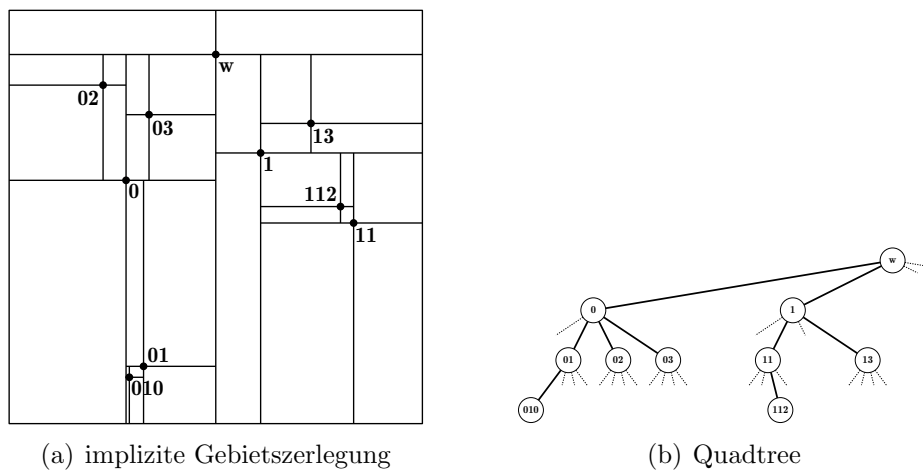


Abbildung 7.2: Punkte-Quadtree

wie in Abb. 7.2(a) dargestellt, ebenfalls implizit eine Gebietszerlegung. Die Zellengrößen einer Ebene sind allerdings variabel<sup>4</sup>.

Beim „Point-Region“-Quadtree (PR-Quadtree) wird ein charakteristischer Punkt einer Fläche gespeichert, um diese Flächen zu verwalten. Ein vorgegebenes Gebiet wird so lange durch den Quadtree aufgeteilt, bis nur noch ein Punkt bzw. Fläche in einem Bereich zu finden ist.

Die Konzepte sind als Spacetrees auch auf höherdimensionale Räume verallgemeinerbar. Ein voll besetzter  $d$ -dimensionaler Baum mit  $n$  Punkten besteht aus  $\log_{2^d}((2^d - 1)n + 1)$  Ebenen.

<sup>4</sup> Für eine Nachbarschaftssuche der impliziten Gebiete muß das Vorgehen in Abschn. 6.4.2 auf Seite 103 aus diesem Grund modifiziert werden. Für den linken unteren Kindknoten mit der Kodierung 0 ist als linker Nachbar (W) neben der Zelle mit der Kodierung 1 im Nachbarblock auch die Zelle mit der Kodierung 3 ein potentieller Nachbar. Der entsprechende Eintrag in der Matrix aus Tab. 6.3(b) muß also  $\{1, 3\} \leftrightarrow$  lauten. Statt der Kodierung 0, 1, 2 und 3 kann auch  $2^0$ ,  $2^1$ ,  $2^2$  und  $2^3$  verwendet werden. Die Kodierung der Vereinigungsmenge von Zellen ist durch eine bitweise logische „ODER“-Operation möglich. Statt 1 und 3 kann z. B. also  $2^1 + 2^3 = 2 + 8 = 10$  geschrieben werden. Dies ist ein Teilproblem der Punkt-Nachbarschaftssuche für Knoten, die keine entsprechende Kindknoten besitzen.

## 7.3 Punkt-Lokalisierung in einer Triangulierung

Gegeben sei eine Triangulierung  $\mathcal{T}$  als homogener Simplizialkomplex des Raums  $\overline{\mathbb{R}^2}$ , sowie ein Punkt  $P \in \mathcal{T}$ . Gesucht ist das 2-Simplex, in welchem sich der Punkt befindet. Untersucht wird im folgenden der mittlere Aufwand  $T_{avg}(N)$  für  $N = \text{card}(\mathcal{T})$  der hierfür im Durchschnitt erforderlich ist. In numerischen Experimenten werden

1. 10000 Ecken zufällig in einem quadratischen Teilraum generiert, wodurch 19998 2-Simplexe erzeugt werden
2. 100 Ecken zufällig auf einem Kreis erzeugt, was zu 198 2-Simplexen führt.

Da der zugrundeliegende Algorithmus die Triangulierung inkrementell aufbaut, wird die Suche für jede neu eingefügte Ecke durchgeführt.

### 7.3.1 Lineare Suche

Der einfachste Weg ist es, die 2-Simplexe der Reihe nach zu untersuchen. Die Wahrscheinlichkeit, daß das gesuchte 2-Simplex einem 2-Simplex der Menge entspricht sind gleichverteilt. Der Erwartungswert liegt bei  $\frac{N+1}{2}$  Punkt-in-Dreieck Tests (s. [Kin98, S. 18]). Im ungünstigsten Fall müssen  $N$  Tests durchgeführt werden. Die Komplexität ist jeweils  $O(N)$ . Wie in Abb. 7.3 zu sehen ist, wird dies im Experiment bestätigt.

### 7.3.2 Gerichtete geometrische Suche

#### Algorithmus

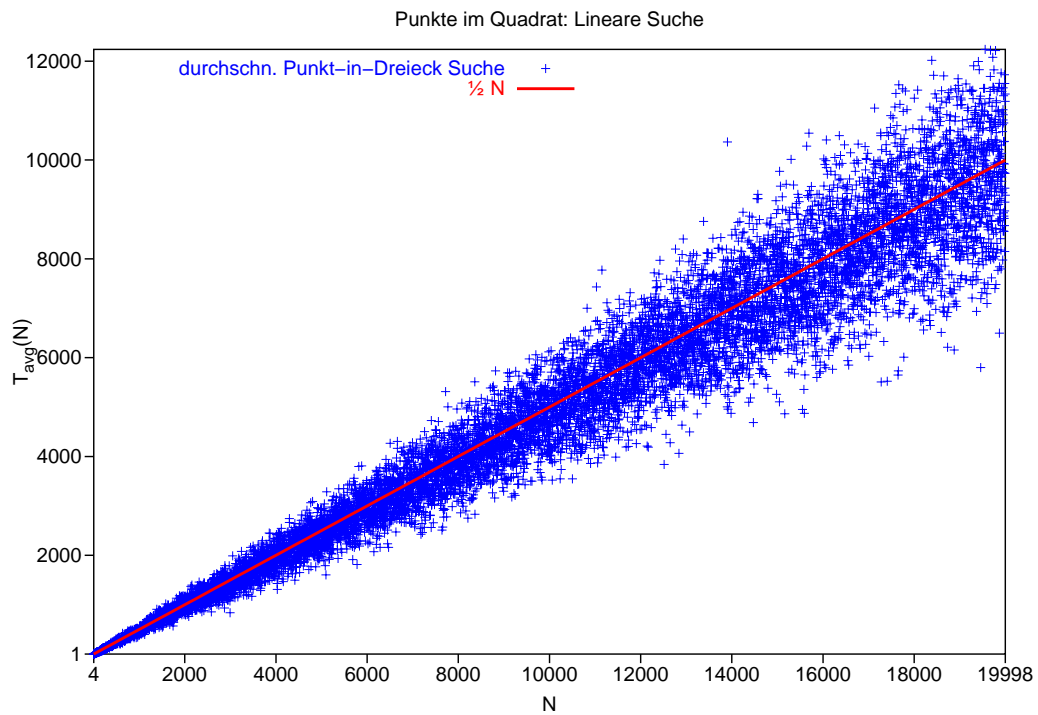
Bei der gerichteten Suche wird ausgehend von einem beliebig gewählten 2-Simplex jeweils das adjazente 2-Simplex betrachtet, welches sich in Richtung zum gesuchten Punkt befindet. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis das gesuchte Element gefunden ist<sup>5</sup>. Das Verfahren ist allgemein für konvexe Zellen geeignet.

Ein Simplex ist eine konvexe Menge, die sich deshalb als Schnittmenge von Halbräumen darstellen läßt. Jeder  $n - 1$  Teilsimplex des Randes eines

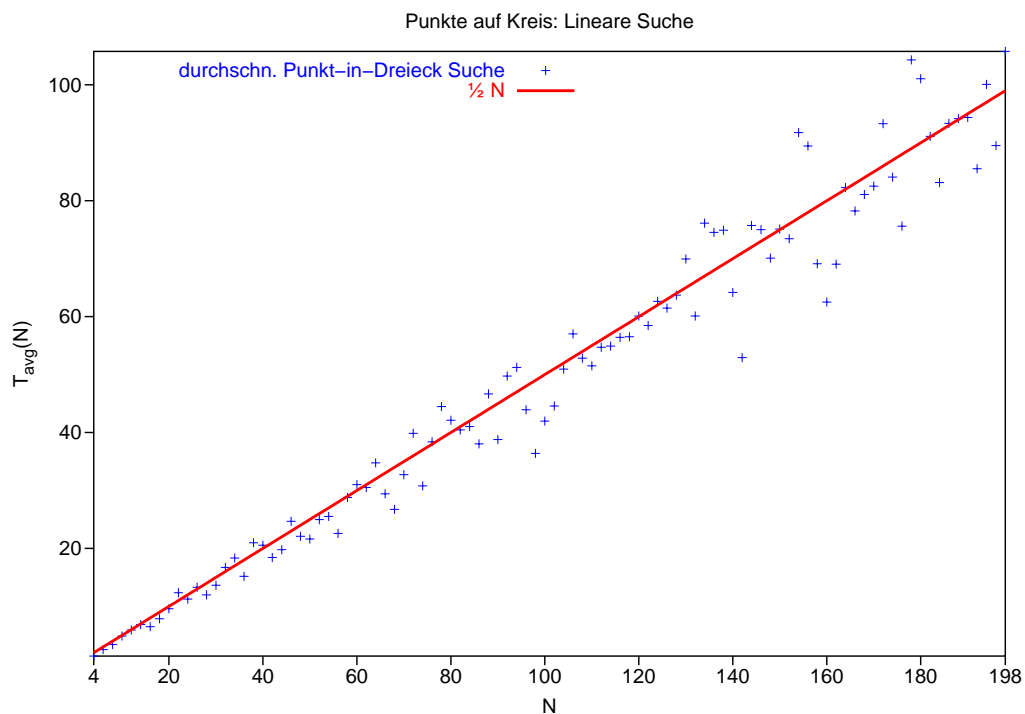
---

<sup>5</sup> Eine denkbare Herangehensweise wäre es, das Dreieck auf seinen Schwerpunkt zu reduzieren und die Richtung zum Zielpunkt mit den Richtungen zu den benachbarten Schwerpunkten oder den Normalenrichtungen der Seiten zu vergleichen. Dies ist für langgezogene („skinny“) Dreiecke nicht zielführend.





(a) Punkte im Quadrat



(b) Punkte auf Kreis

Abbildung 7.3: Lineare Suche zur Lokalisierung eines 2-Simplexes in einer DELAUNAY-Triangulierung

$n$ -Simplex definiert eine Träger-Hyperebene, die den Raum in einen abgeschlossenen „inneren“ Halbraum, der das  $n$ -Simplex enthält, und einen offenen „äußeren“ Halbraum aufteilt. Liegt der gesuchte Punkt in allen „inneren“ Halbräumen, so ist der gesuchte Punkt im aktuellen Simplex enthalten.

Der „Oriented Walk“-Algorithmus nach LAWSON (vgl. [Law77, S. 171]) wird in [Wel00, S. 18ff] beschrieben und dessen Korrektheit für eine Klasse von Triangulierungen nachgewiesen. Er entspricht dem in [DPT01] untersuchten „Visibility Walk“. Der Algorithmus untersucht für ein Simplex, das den gesuchten Punkt nicht enthält, die „äußeren“ Halbräume. Wird ein Halbraum gefunden, welcher den Punkt enthält, ist das entsprechende Nachbarsimplex das nächste zu untersuchende Element. Die Wahl ist hierbei nicht immer eindeutig. In [Reh95, S. 112f] wird eine analoge Herangehensweise für die Suche nach einem Hintergrundelement in einem FE-Netz verwendet. Weitere in [DPT01] aufgeführte Varianten einer gerichteten Suche besuchen alle Simplexe, die auf einem Pfad vom Start- zum Zielpunkt liegen. Der „Simple Walk“ verwendet hierbei die (im EUKLIDischen Sinne) direkte Verbindung, während der „Orthogonal Walk“ einen im  $\mathbb{R}^n$  in  $n$  Abschnitte aufgeteilten achsenparallelen Pfad ablauft.

Es soll in dieser Arbeit eine modifizierte Variante des „Oriented Walk“-Algorithmus vorgestellt werden, die einen metrischen Raum benötigt. Der Algorithmus ist dimensionsunabhängig. Der Abstand  $d$  eines Punktes zu einer Ebene bzw. Gerade ist durch (6.5) gegeben. Der Normalenvektor sei hierbei vom Simplex aus nach außen gerichtet. Zu jeder Hyperebene der Randsimplexe kann ein vorzeichenbehafteter Abstand des gesuchten Punktes berechnet werden. Da mindestens ein Abstand negativ sein muß, folgen daraus  $2^{n+1} - 1$  mögliche Vorzeichenkombinationen. Ist der Abstand für alle Ebenen negativ, so ist der Punkt jeweils im „inneren“ Halbraum und der Simplex enthält den Punkt. Ansonsten wird der Nachbarsimplex als Nachfolgeelement gewählt, dessen entsprechende Hyperebene den größten (vorzeichenbehafteten) Abstand  $d$  zum gesuchten Punkt aufweist. Anschaulich betrachtet, teilt das Verfahren den  $n$ -dimensionalen Raum durch die  $n + 1$  Randsimplexe und die  $\frac{1}{2}n(n + 1)$  Winkelhalbierenden der Hyperebenen in das Simplex und  $n + 1$  unbeschränkte Zellen auf. Die Winkelhalbierende selbst wird jeweils einer Zelle zugeordnet<sup>6</sup>. Das entspricht einem VORONOI-Zellkomplex, der von  $n + 2$  Zentren gebildet wird. Ein Zentrum entspricht dem Mittelpunkt der Innenkugel und die weiteren  $n + 1$  Zentren gehen durch Spiegelung dieses Punktes an den Randsimplexen hervor (s. Abb. 7.5). Man erhält  $n + 2$  disjunkte Zellen bzw. Simplexe, die eine Überdeckung und damit einen kompakten Raum bilden. Legt man die in Abschn. 8.2.3 beschriebene Topologie zugrunde, entsprechen

---

<sup>6</sup> basierend auf der Orientierung des Simplex

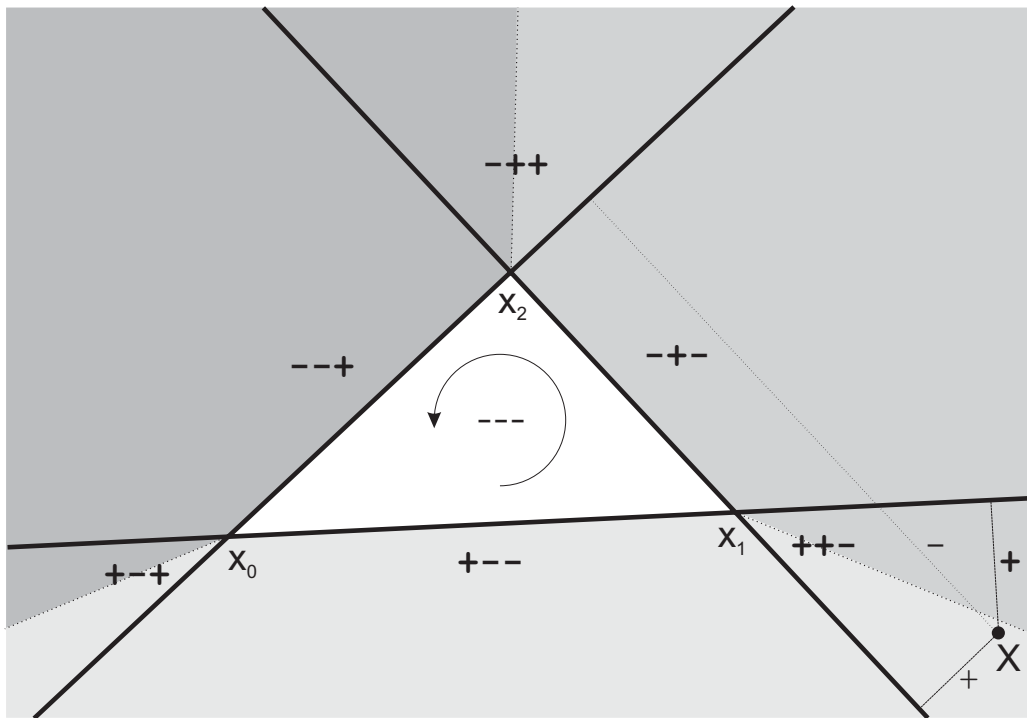


Abbildung 7.4: Gerichtete Suche durch Halbebenenmodell

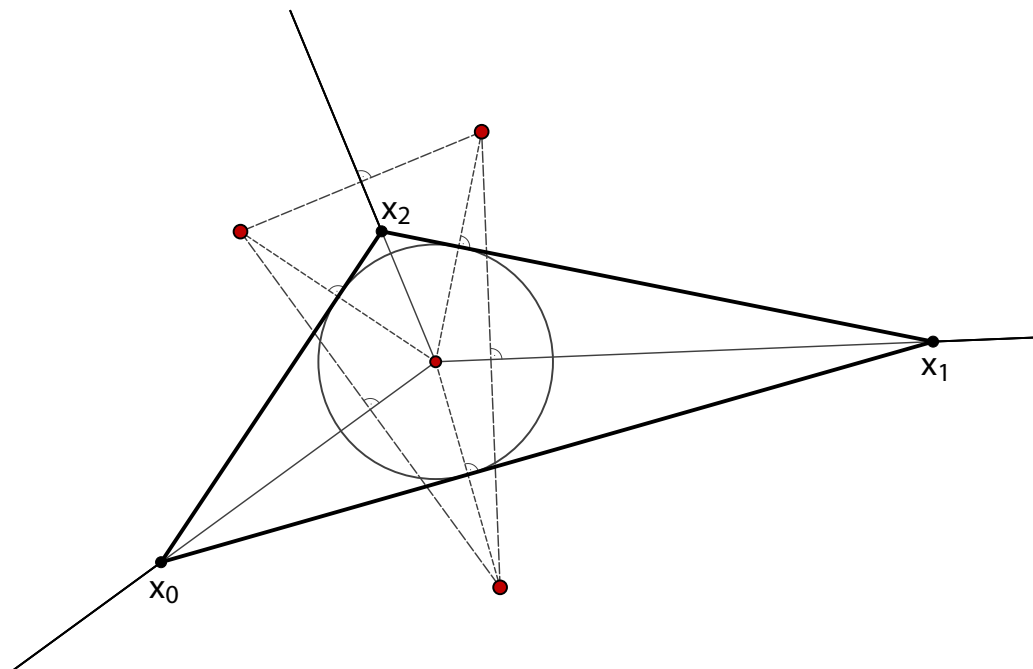


Abbildung 7.5: Konstruktion der VORONOI Zentren

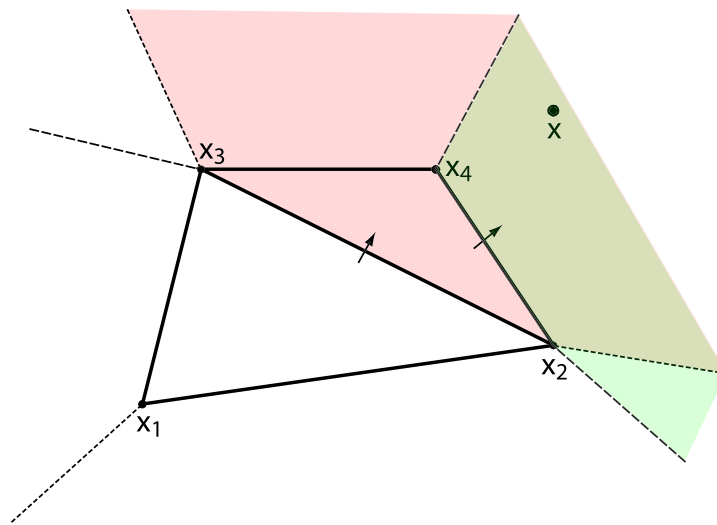


Abbildung 7.6: Wahl des Nachfolgesimplexes

diese unbeschränkten Zellen den infinitesimalen Simplexen. Die Aufteilung ist in Abb. 8.6 dargestellt. Im Gegensatz zum klassischen Verfahren werden alle  $2^{n+1} - 1 - (n + 1) - 1 = 2^{n+1} - n - 3$  Zellen, die als Schnittmengen von „äußeren“ Halbräumen schwache Nachbarn des Simplex sind, unter den  $n + 1$  starken Nachbarn aufgeteilt. Abb. 7.4 zeigt für ein 2-Simplex, welche Bereiche den Nachbarsimplexen zugeordnet werden (vgl. auch Abb. 8.6(a)). Punkte auf einer Winkelhalbierenden weisen dieselbe Entfernung von den jeweiligen Randgeraden auf. Abb. 7.6 zeigt die Wahl des Nachfolgesimplexes. Man erkennt, daß sich der Raum, in dem sich der Punkt  $x$  befindet, konvex ist und in jedem Schritt kleiner wird.

### Korrektheit

Der modifizierte Algorithmus ist eine Spezialisierung des „Oriented Walk“, der jeweils ein Nachfolgesimplex aus der Menge der dort möglichen Nachfolgesimplexe eindeutig auswählt. Somit ist er für alle Fälle korrekt, für die dieser Algorithmus korrekt ist. Im folgenden soll die Terminierung des Algorithmus untersucht werden. Hierfür wird ein gerichteter Teilgraph des dualen Graphen der Triangulierung betrachtet, der für jedes Simplex auf die Nachbarsimplexe verweist, die für einen gegebenen Zielpunkt als nächstes gewählt werden. Dieser wird hier als „Routengraph“ bezeichnet. Für den modifizierten Algorithmus erhält man einen Teilgraphen der „Oriented Walk“-Variante des Routengraphen (vgl. 7.7(b) und 7.8(b)). Insbesondere ist der Ausgangsgrad eines jeden Knotens für einen Simplex, welcher den Punkt nicht enthält,

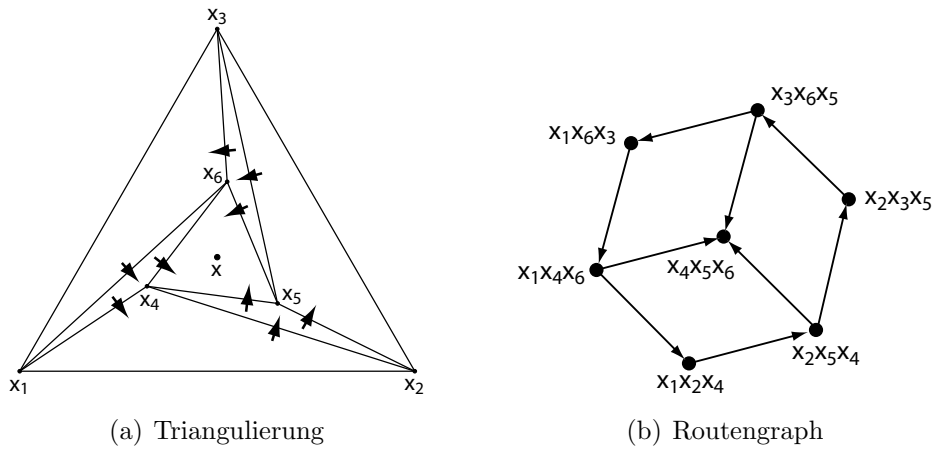


Abbildung 7.7: Beispiel für „Oriented Walk“

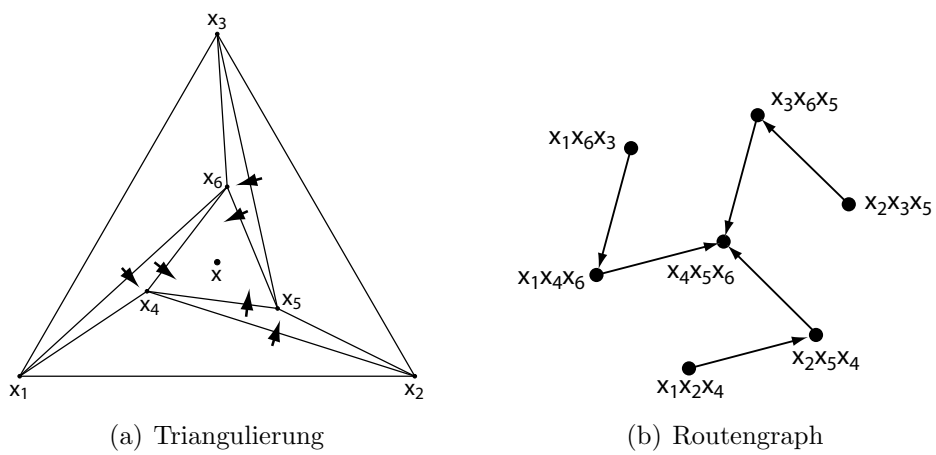


Abbildung 7.8: Beispiel für modifizierten Algorithmus

genau eins (und für das gesuchte Simplex null). Es existiert also genau ein Weg. Da aber immer ein Weg zum gesuchten Simplex existieren muß, kann im Routengraphen kein Zyklus mehr vorkommen. Dies ist auch auf höherdimensionale Simplexe und allgemeinere konvexe Zellen übertragbar. Beim „Oriented Walk“ kann der Ausgangsgrad hingegen zwei betragen.

### Komplexität

Die Anzahl der Elemente, die bei der gerichteten Suche durchlaufen werden, hängen von der ursprünglichen Entfernung  $l_m$  und der Entfernung  $l_\Delta$  ab, die durchschnittlich pro Element zurückgelegt wird:

$$n = \frac{l_m}{l_\Delta} \quad (7.1)$$

Der Faktor  $\lambda$  dient nun dazu, einer Fläche  $A$  eine Entfernung  $l$ , wie z. B. den durchschnittlichen Durchmesser oder Abstand von zwei Punkten zuzuordnen.

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{A}} \quad (7.2)$$

Für die  $N$  Dreiecke der Triangulierung gilt  $NA_\Delta = A$  und man erhält

$$n = \frac{\lambda_m \sqrt{A}}{\lambda_\Delta \sqrt{A_\Delta}} = \frac{\lambda_m}{\lambda_\Delta} \sqrt{N} \quad (7.3)$$

Für ein quadratisches Gebiet der Seitenlänge  $a$  ist  $A = a^2$ . Zur näherungsweisen Ermittlung von  $\lambda_m$  wird das Gebiet nun in  $t^2$  Normzellen der Breite und Höhe  $h = \frac{a}{t}$  aufgeteilt. Der mittlere Abstand zwischen zwei Normzellen beträgt im Grenzwert:

$$l_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h \sum_{j_0=0}^{t-1} \sum_{i_0=0}^{t-1} \sum_{j_1=0}^{t-1} \sum_{i_1=0}^{t-1} \sqrt{(i_1 - i_0) + (j_1 - j_0)}}{t^4} \quad (7.4)$$

Numerisch berechnet konvergiert der Wert gegen  $l_m \approx 0.5214a$  und daraus resultiert  $\lambda_m \approx 0.5214$ . Der mittlere Abstand in einem  $n$ -dimensionalen Gebiet kann auch statistisch gedeutet werden. Wenn man aus der Menge aller Punkte des Gebiets nacheinander mit Zurücklegen zwei Punkte zieht und die Distanz zwischen diesen Punkten berechnet, kann  $l_m$  als Mittelwert der Stichproben gedeutet werden. Die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt zu ziehen ist für jeden Punkt innerhalb des Gebiets gleich (und außerhalb Null). Ein Punkt ist ein gleichverteilter Zufallsvektor der Koordinaten.

Die Abschätzung von  $l_\Delta$  wird nur grob vorgenommen. Geht man einmal von rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken mit  $A = \frac{1}{2}a^2$  aus, so ist  $l_\Delta$  zwischen  $\frac{1}{2}a$  und  $\frac{1}{3}\sqrt{2}a$  und wird mit dem arithmetischen Mittel  $\frac{3+2\sqrt{2}}{12}a$  angenommen. Es ergibt sich  $\lambda_\Delta \approx \frac{\frac{3+2\sqrt{2}}{12}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3} \approx 0.687$  und  $n = \frac{0.5214}{0.687}\sqrt{N} = 0.759\sqrt{N}$ . Im ungünstigsten Fall liegen alle Dreiecke nebeneinander und müssen linear durchlaufen werden. Das entspricht der linearen Suche nach Abschn. 7.3.1 mit einer Komplexität von  $O(N)$ .

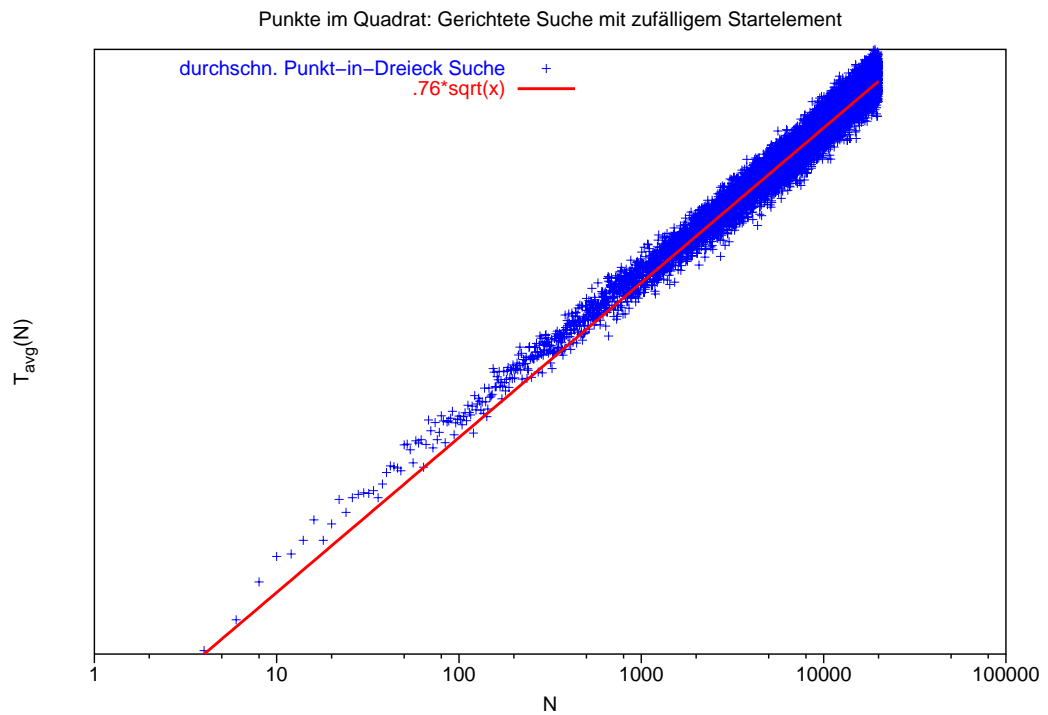
### Wahl des Startsimplex

Die Anzahl der Iterationen bei einer gerichteten Suche kann maßgeblich durch die geeignete Wahl des Startsimplex beeinflusst werden („Jump and Walk“). Es erscheint zunächst naheliegend, den geometrisch nächsten Nachbarn unter den bereits in der Triangulierung befindlichen Punkten zu ermitteln und dessen adjazente Simplexe zuerst zu untersuchen. Selbst bei einer DELAUNAY-Triangulierung muß ein geometrisch naheliegender Punkt aber nicht topologisch nahe bzw. inzident zum gesuchten Simplex sein. In der Praxis liefern aber selbst Näherungen des nächsten Nachbarn gute Startsimplexe. Abschn. 8.6.3 auf Seite 167 zeigt dies unter Verwendung der Punktbäume aus Abschn. 7.2.1 bzw. 7.2.2.

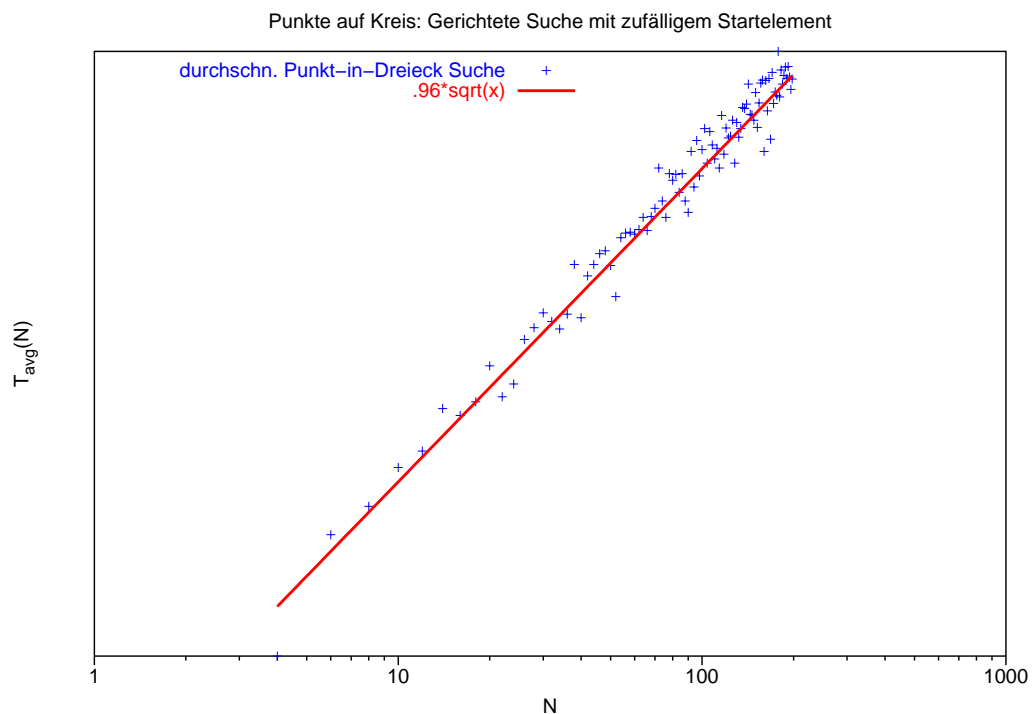
### 7.3.3 Verbesserte und spezialisierte Suchtechniken

Ein Weg zur Verbesserung der Komplexität ist die „Divide and Conquer“-Strategie ([AHU87, S. 306], [Wei94, S. 359], [Kin98, S. 65]) Eine durch einen planaren Graphen mit geradlinigen Kanten (**P**lanar **S**trait **L**ine **G**raph) beschriebene Gebietszerlegung kann rekursiv durch monotone Polygonzüge (Ketten), einfache Wege im PSLG, jeweils in zwei Teile aufgeteilt werden ([PS85, S. 48], [Ede87, S. 246]). Dies führt zu baumartigen Datenstrukturen. Die „Bridged chain“ Methode erreicht hierauf aufbauend eine Suchkomplexität von  $O(\log N)$  bei  $O(N)$  Speicherverbrauch und  $O(N \log N)$  Vorverarbeitung ([PS85, S. 60]). In [Ede87, S. 256] wird die zugrundeliegende Datenstruktur dieser Methode als „überlagerter“ *gerichteter, zyklensfreier Graph* („Directed Acyclic Graph“, DAG) bezeichnet.

Die „Trapezmethode“ bildet aufbauend auf der Triangulierung trapezförmige horizontale Streifen mit einer Schnittlinie durch den jeweiligen Medianpunkt. Diese werden in einem balancierten Binärbaum verwaltet. Man benötigt weniger als  $4\log_2 N$  Tests bei  $O(N \log N)$  Speicherverbrauch und Vorverarbeitung ([PS85, S. 69]). Eine weiterführende Ausführung ist in [dvOS00, S. 122] zu finden.



(a) Punkte im Quadrat



(b) Punkte auf Kreis

Abbildung 7.9: Gerichtete Suche zur Lokalisierung eines 2-Simplexes in einer DELAUNAY-Triangulierung



Als zugrundeliegende Datenstruktur sind auch räumliche Datenstrukturen wie die binäre Raumaufteilung<sup>7</sup> oder der Quadtree möglich. Eine solche Raumaufteilung ist i. a. inkompatibel zur Triangulierung. Ein Dreieck ist somit nicht eindeutig einem Bereich zuzuordnen. Falls nun einem Bereich mehrere Dreiecke zugeordnet werden, steigert das den Speicherverbrauch und es muß bei Verwendung von Überlauf Listen<sup>8</sup> in diesen linear gesucht werden.

Eine weitere Technik besteht darin, den Dreiecksflächen *repräsentative Punkte* ([Sam94, S. 186]) zuzuordnen. Die Wahl fällt meist auf den Schwerpunkt. Dies ist vor allem bei langgestreckten („skinny“) Dreiecken problematisch, da ein Punkt keine Flächeneigenschaften besitzt. Für Finite Elemente Netze wird diese Technik in [KR95] mit dem *Point-Region Quadtree* (s. Abschn. 7.2.2) verbunden. Für den allgemeinen Fall sind in [Sam94, S. 196] Probleme geschildert. Das Gebiet ist nicht nachträglich erweiterbar und die Tiefe des Baumes maßgeblich vom geringsten Abstand zweier Punkte abhängig.

Zur Lokalisierung eines Simplex in einer DELAUNAY-Triangulierung wird in Abschn. 8.6.3 ein Verfahren vorgestellt.

---

<sup>7</sup> Eine Spezialisierung hiervon ist der k-d Baum.

<sup>8</sup> analog zu Hash-Tabellen



# Kapitel 8

## DELAUNAY-Triangulation

### 8.1 VORONOI-Diagramme

**VORONOI-Zellkomplex:** Gegeben sei ein metrischer Raum  $\mathbf{M}$  nach Abschn. 3.2.2 mit einer endlichen Menge von Punkten  $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\} \subset \mathbf{M}$ , die im folgenden als Zentren bezeichnet werden. Für jeden Punkt  $P$  läßt sich zu jedem Zentrum  $S_i$  die Distanz  $d_i = d(P, S_i)$  bestimmen und eine Ordnungsrelation über alle Distanzen bilden. Bei einem VORONOI-Zellkomplex  $k$ -ter Ordnung mit  $1 \leq k \leq n - 1$  werden alle Punkte, deren Menge der  $k$  nächsten Zentren übereinstimmen, zu Zellen  $\mathbf{V}$  zusammengefaßt<sup>1</sup>. Im folgenden werden VORONOI-Zellkomplexe 1. Ordnung<sup>2</sup> betrachtet. Hier wird jedem Zentrum  $S_i$  eine VORONOI-Zelle  $V_i$  zugeordnet mit

$$V_i := \{x \mid x \in \mathbf{M} \wedge d(x, S_i) < d(x, S_j) \quad \forall j \neq i\} \subseteq \mathbf{M}$$

Diese Zellen werden auch als THIESSEN-*Gebiete* bezeichnet (s. [Law77, S. 178]). Der Abstand eines Punktes zum Zentrum der VORONOI-Zelle, in der sich der Punkt befindet, ist definitionsgemäß kleiner als der Abstand zu jedem anderen Zentrum. Hieraus folgt, daß eine offene Kugel mit dem Punkt als Mittelpunkt und dem Abstand zum zugehörigen Zentrum als Radius für die gewählte Metrik keine weiteren Zentren enthalten kann.

Für die geometrische Modellierung sind hauptsächlich VORONOI-Zellkomplexe im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  von Bedeutung.

---

<sup>1</sup> Es ist auch eine Definition möglich, welche ein geordnetes  $k$ -Tupel für den Vergleich heranzieht (s. [Mil01, S. 73]).

<sup>2</sup> VORONOI-Zellkomplexe 1. Ordnung werden auch als DIRICHLET-Mosaik bezeichnet.

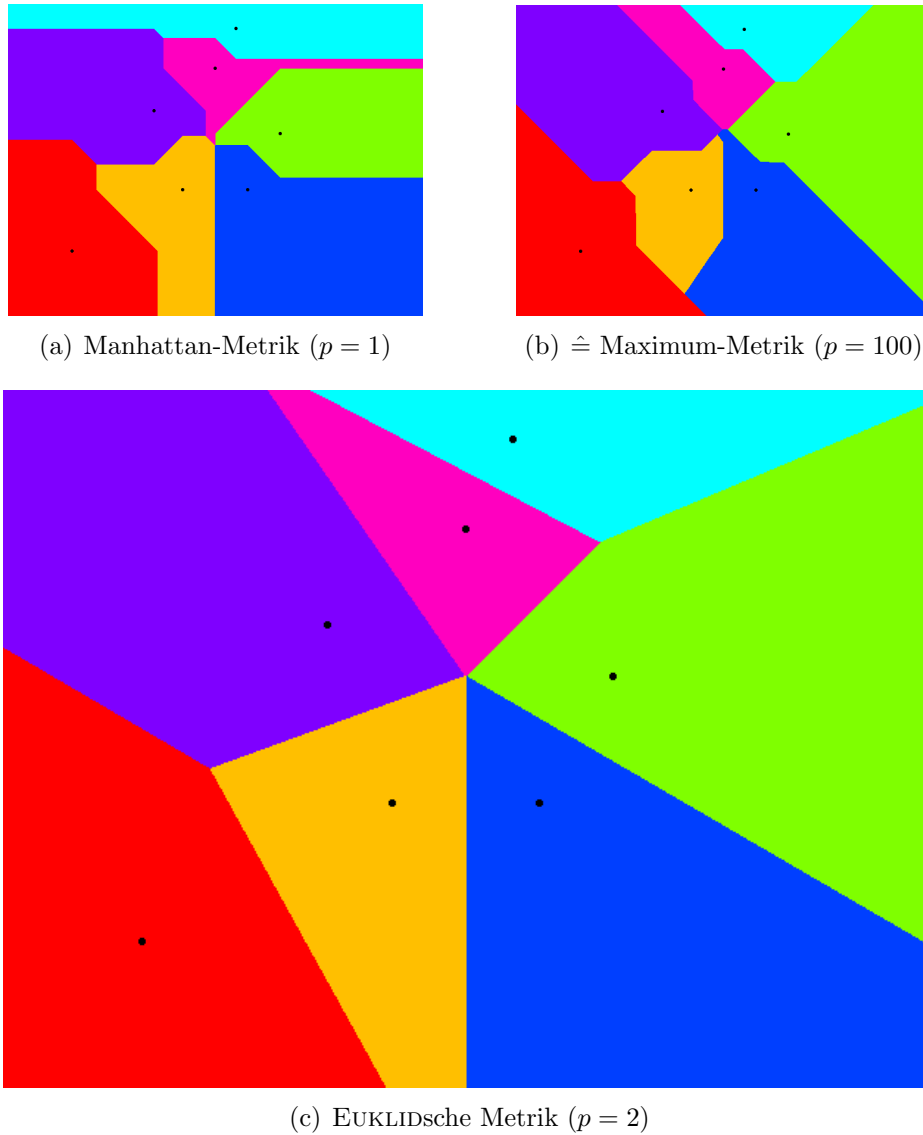


Abbildung 8.1: VORONOI-Zellkomplexe im  $\mathbb{R}^2$  für ausgewählte MINKOWSKI-Metriken

Die Berechnung des Diagramms erfolgte nach einem adaptiven Quadtree-Algorithmus. Hierzu wird die Normzellenzerlegung (Bitmap) in 4 gleichartige Quadranten zerlegt und für den Teilungspunkt und die Eckpunkte die VORONOI-Zellen-Zugehörigkeit ermittelt. Falls die Eckpunkte eines Quadranten nicht der gleichen Zelle angehören, wird dieser Quadrant weiter rekursiv aufgeteilt und für den Teilungspunkt die VORONOI-Zellen-Zugehörigkeit ermittelt.

Ein Beispiel für ein VORONOI-Zellkomplex mit 7 Zentren ist für unterschiedliche MINKOWSKI-Metriken nach (3.4) in Abbildung 8.1 dargestellt.

Bekannt geworden sind VORONOI-Zellkomplexe in Zusammenhang mit dem „Post Office Problem“ ([Ede87, S. 298f], [Kle97, S. 221f], [dvOS00, S. 147]). Gefragt ist der Zuständigkeitsbereich eines Postamts unter der Prämisse, daß jeweils das nächstgelegene Postamt zuständig ist.

Ein Beispiel für *gewichtete* VORONOI-Diagramme, die jedem Zentrum einen Wichtungsfaktor zuordnen, ist der Einflußbereich der Massenanziehung von punktförmigen stationären Objekten. Die Distanzfunktion wird hier durch die NEWTONSche Gravitationskraft  $G \frac{M_i m}{d^2}$  zwischen einem Testkörper  $m$  und den Objekten  $M_i$  ersetzt. VORONOI-Zellen sind Teilgebiete, in denen das Objekt im Zentrum die größte Anziehungskraft auf einen Testkörper in der Zelle ausübt. Hierbei müssen die einzelnen Zentren durch ihre Massen  $M_i$  gewichtet werden. *Potenzdiagramme* führen eine andere Art der Distanzfunktion ein, die ebenfalls Wichtungen für Zentren vorsehen und sind ebenfalls eine Verallgemeinerung der VORONOI-Diagramme. Eine Reihe weiterer Anwendungen und Variationen von VORONOI-Diagrammen werden in [Aur91] vorgestellt.

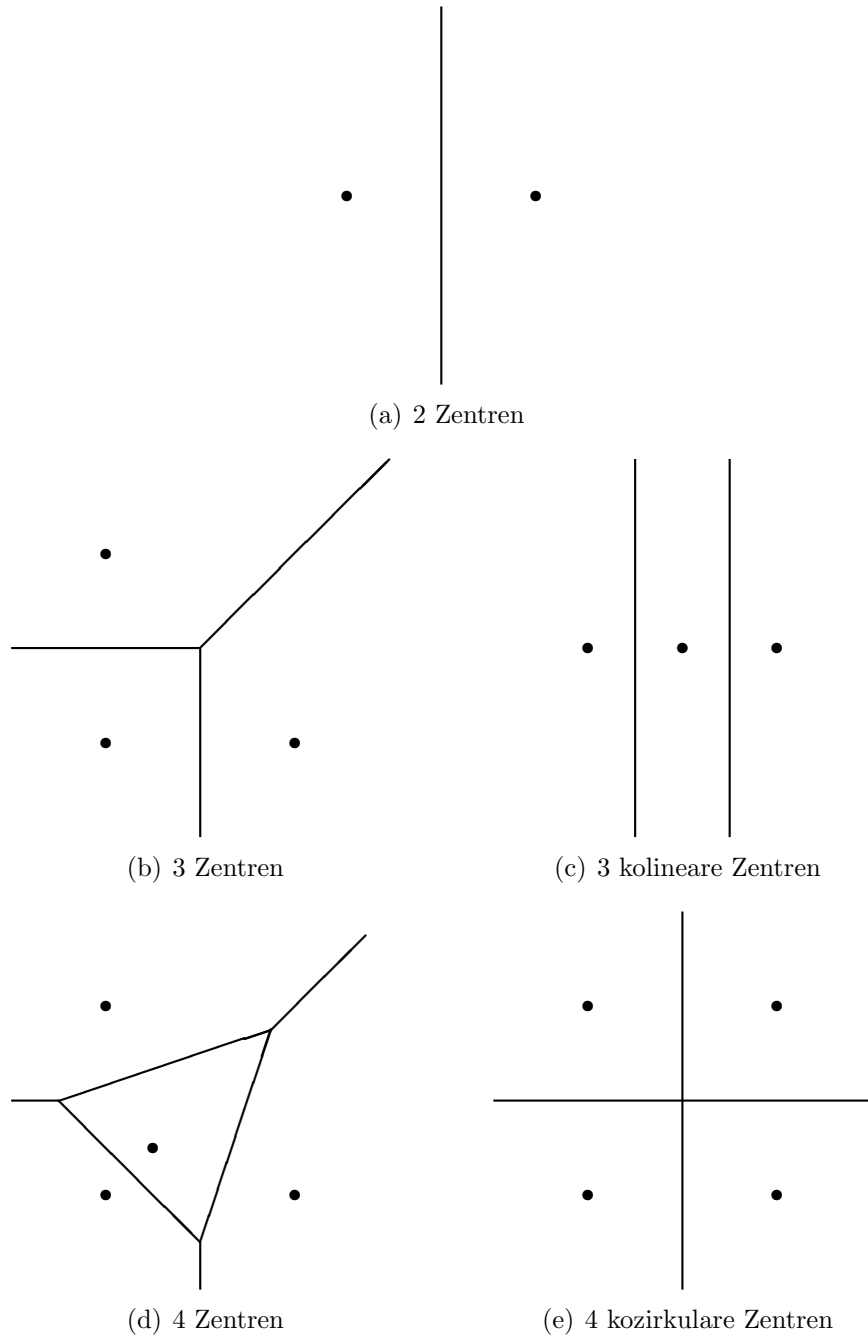
**VORONOI-Diagramm:** Punkte, die zu mehreren Zentren denselben Abstand haben, bilden das Gerüst des VORONOI-Zellkomplexes, welches als VORONOI-Diagramm bezeichnet wird. Ein VORONOI-Diagramm  $\mathbf{V}^{n-1}$  im  $\mathbb{R}^n$  ist für die Zentren  $\mathbf{S}$  durch

$$\mathbf{V}^{n-1} := \{x \mid x \in \mathbf{M} \wedge \exists i, j \text{ mit } i \neq j \wedge d(x, S_i) = d(x, S_j) \leq d(x, S_k) \forall k \notin \{i, j\}\} \subset \mathbf{M} \quad (8.1)$$

definiert. Es besteht im  $\mathbb{R}^2$  aus VORONOI-Kanten und VORONOI-Knoten. VORONOI-Kanten können Geraden oder Halbgeraden sein.

Die Zentren zweier VORONOI-Zellen, die eine nichtleere Schnittmenge besitzen und somit benachbart sind, werden als *THIESEN-Nachbarn* bezeichnet. Für eine gemeinsame trennende Kante mit einer Länge größer Null liegt eine *starke* und für einen einzelnen gemeinsamen Punkt eine *schwache* Nachbarschaft vor.

Betrachtet man z. B. zwei Zentren (S. Abb. 8.2(a)), so trennt die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke die beiden VORONOI-Zellen ab, die Halbräume sind. Bei drei Zentren (S. Abb. 8.2(b)) erhält man drei Halbgeraden als VORONOI-Kanten, die von einem VORONOI-Knoten ausgehen. Auch hier sind die VORONOI-Zellen unbeschränkt und gehen aus einer Schnittmenge von Halbräumen hervor. Als Sonderfall können die drei Punkte auf

Abbildung 8.2: VORONOI-Diagramme im  $\mathbb{R}^2$

einer Geraden liegen (S. Abb. 8.2(c)) und die zwei resultierenden VORONOI-Kanten sind Geraden. Bei vier Punkten (s. Abb. 8.2(d)) erhält man für das innere Zentrum ein Polygon als VORONOI-Zelle. Die drei VORONOI-Knoten haben hier jeweils den Grad 3. Man erkennt, daß die Halbgeraden jeweils zwei Zentren abgrenzen, die auf der konvexen Hülle liegen. Liegen die vier Punkte allerdings auf einem Kreis (s. Abb. 8.2(e)), so steigert sich der Grad des resultierenden VORONOI-Knotens auf 4. Der Grad eines VORONOI-Knotens gibt an, wie viele Zentren denselben Abstand haben und somit kozyklisch sind.

Um unbeschränkte VORONOI-Zellen und die damit resultierenden (Halb-)Geraden zu vermeiden, wird ein *beschränktes VORONOI-Diagramm* gebildet, indem man einen einfach geschlossenen Weg  $\Lambda$  als Umrandung eines Gebiets  $\Gamma$  einführt, der nur unbeschränkte VORONOI-Kanten kreuzt (s. [Kle97, S. 220]). Dieser Ansatz wird im folgenden mit Hilfe eines zur RIEMANNschen Zahlenkugel (s. Abschn. 3.2.5) analogen Ansatzes hergeleitet. Für die zur Ebene homöomorphe „gelochte“ Sphäre  $\mathbb{S}^d \setminus p$  kann durch Hinzunahme des fehlenden Punktes  $p$  ein Abschluß erreicht werden. Führt man diesen Punkt als zusätzliches virtuelles, infinitesimales Zentrum ein, läßt sich der Weg  $\Lambda$  als VORONOI-Kanten zu diesem Zentrum deuten. Ohne dieses zusätzliche Zentrum treffen sich alle (Halb-)Geraden im infinitesimalen Punkt  $p$  und können formal als Kante behandelt werden. In beiden Fällen wird der Sonderfall unbeschränkter Zellen und Kanten aus topologischer Sicht ausgeräumt. Ein VORONOI-Diagramm im  $\mathbb{S}^2$  ist somit ein planarer Graph (s. Abschn. 3.1).

## 8.2 Topologie der DELAUNAY-Triangulierung

### 8.2.1 DELAUNAY-Graph

Der duale Graph zu einem VORONOI-Diagramm nach Abschn. 8.1 wird im folgenden als DELAUNAY<sup>3</sup>-Graph bezeichnet. Für den DELAUNAY-Graphen sind starke THIESSEN-Nachbarn adjazent. Beide Graphen sind im  $\mathbb{R}^2$  planar. Abb. 8.3 zeigt die DELAUNAY-Graphen für die in Abb. 8.2 dargestellten VORONOI-Diagramme. Für  $n \geq 3$  Knoten ergeben sich im  $\mathbb{R}^2$  Dreiecke, falls die Knoten nicht kozyklisch sind. Um eine Triangulierung zu erhalten, können bei kozyklischen Knoten Facetten bzw. Kanten ergänzt werden. Hierbei geht die Eindeutigkeit verloren, da ein konvexes Polygon durch eine Vielzahl von Varianten triangulierbar ist (s. Tab. 8.1 auf Seite 148). In Abb. 8.3(e) kann z. B. eine der beiden Diagonalen hinzugefügt werden, um eine DELAUNAY-Triangulierung zu erhalten. Dies läßt sich auch auf  $\mathbb{R}^d$  und  $d$ -Simplexe verallgemeinern. Die Dreiecke bzw.  $d$ -Simplexe werden im Graph allerdings nur indirekt repräsentiert<sup>4</sup>. Eine DELAUNAY-Triangulierung ist ein Obergraph des DELAUNAY-Graphen, der geometrisch attribuiert ist. Er ist planar und somit im zugrundeliegenden metrischen Raum kreuzungsfrei darstellbar.

**GABRIELgraph:** Ein GABRIELgraph ist ein Teilgraph des DELAUNAY-Graphen. Für jede Kante wird die offene Kugel betrachtet, für welche die Endpunkte der Kante diametral auf dem Rand liegen. Die Kugel hat für die vorgegebenen Randpunkte einen minimalen Durchmesser, der durch die Kante definiert wird. Der GABRIELgraph enthält alle Kanten, deren offene Kugel minimalen Durchmessers keine weiteren Knoten enthält (s. [Tin98, S. 22f]).

### 8.2.2 DELAUNAY-Simplizialkomplex

Ein allgemeinerer Ansatz ist der DELAUNAY-Simplizialkomplex, welcher den Nerv eines VORONOI-Diagramms darstellt ([Ede01, S. 48]).

**Nerv:** Der Nerv  $\text{nrv}(\mathbb{M})$  eines Mengensystems  $\mathbb{M}$  ist ein Simplizialkomplex, dessen 0-Simplexe die Mengen und dessen  $n$ -Simplexe für  $n > 0$  die nichtleeren Schnittmengen von  $n + 1$  Mengen bzw. die  $n + 1$ -Überdeckungen darstellen:

$$\text{nrv}(\mathbb{M}) = \left\{ X \subset \mathbb{M} \mid \bigcap X \neq \emptyset \right\}$$

<sup>3</sup> benannt nach dem russischen Mathematiker *Boris Nikolaevich Delone* (1890–1973) (s. <http://www.mathsoc.spb.ru/pantheon/delone/>)

<sup>4</sup> Zur Repräsentation der  $d$ -Simplexe ist ein Hypergraph oder Simplizialkomplex nötig.



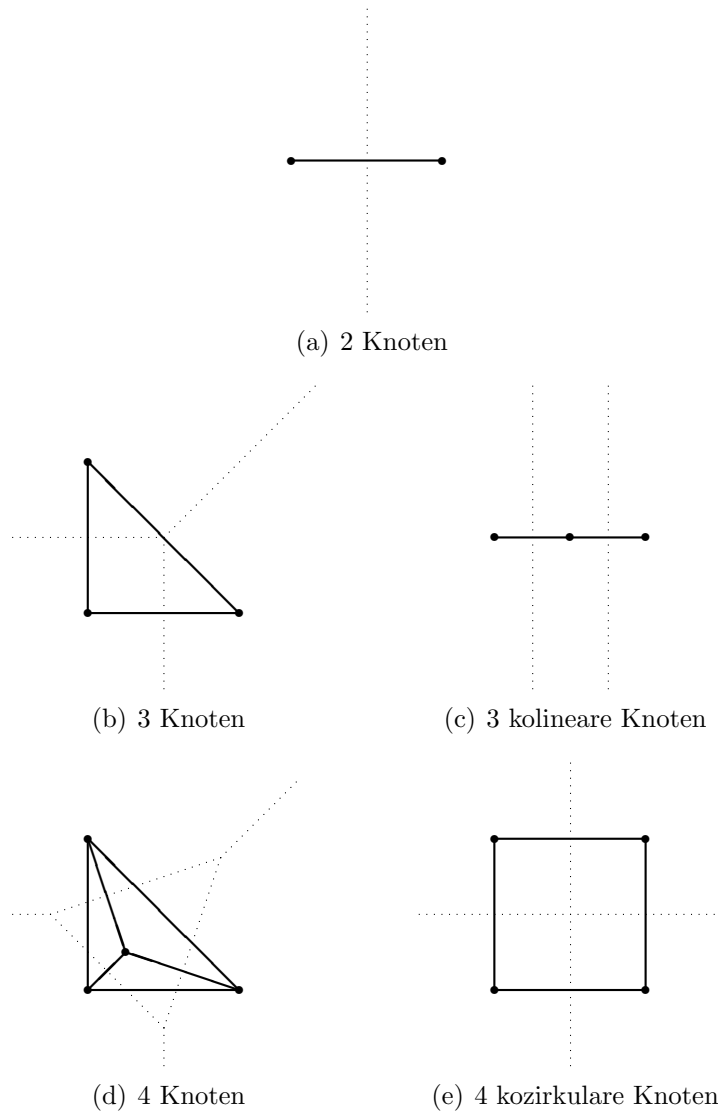
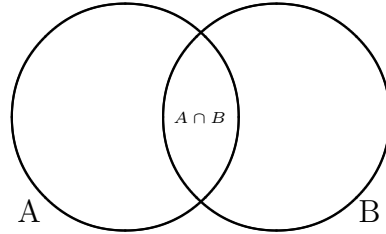


Abbildung 8.3: Duale Adjazenzgraphen zu VORONOI-Diagrammen aus Abb. 8.2

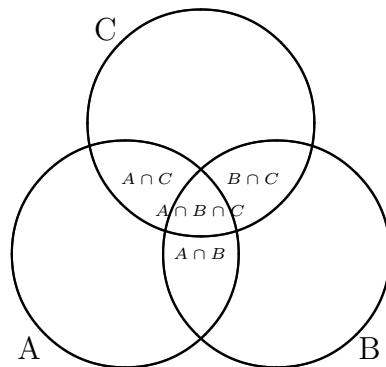
Die Schnittmenge zweier Mengen in Abb. 8.4(a) werden für den Nerv



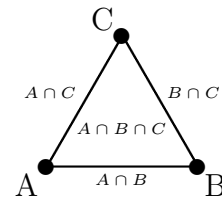
(a) 2 sich schneidende Mengen



(b) Nerv von 2 sich schneidenden Mengen



(c) 3 sich schneidende Mengen



(d) Nerv von 3 sich schneidenden Mengen

Abbildung 8.4: Nerven von Mengensystemen

in Abb. 8.4(b) als 1-Simplex dargestellt, der die Adjazenz der beiden 0-Simplexe ausdrückt. Schnittmengen sind wiederum Mengen, so daß der Schnitt von Schnittmengen in Abb. 8.4(c) beim Nerv in Abb. 8.4(d) das Vorhandensein eines 2-Simplex nach sich zieht, welches die Adjazenz von drei 0-Simplexen ausdrückt. Hierbei gilt für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= (A \cap B) \cap (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cap (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich drei Adjazenzbeziehungen von jeweils zwei 0-Simplexen bzw. 1-Teilsimplexe.

VORONOI-Zellen sind Mengen. Benachbarte Zellen bilden Schnittmengen, die als VORONOI-Facetten bezeichnet werden. Der Nerv dieses Mengensystems bildet den DELAUNAY-Simplizialkomplex. Die Zentren der VORONOI-Zellen werden 0-Simplexen und die VORONOI-Facetten höherdimensionalen

Simplexen zugeordnet. Die Schnittmenge von  $n + 1$  VORONOI-Zellen entspricht hierbei einem  $n$ -Simplex, das die  $n + 1$  0-Simplexe als Teilsimplexe enthält. Die in Abschn. 8.2 vorgestellten DELAUNAY-Graphen sind Unterkomplexe der DELAUNAY-Simplizialkomplexe. Die Kante eines DELAUNAY-Graphen, wie sie z. B. in Abb. 8.3(a) dargestellt ist, ergibt sich als 1-Simplex, welcher der Schnittmenge zweier VORONOI-Zellen bzw. einer VORONOI-Kante zugeordnet ist.

Die geometrischen  $n$ -Simplexe degenerieren, falls die enthaltenen Knoten linear abhängig bzw. in einem Unterraum  $\mathbb{R}^m$  mit  $m < n$  enthalten sind. Dieser Fall tritt ein, falls im  $\mathbb{R}^d$  mehr als  $d + 1 - i$  VORONOI-Zellen eine gemeinsame  $i$ -dimensionale VORONOI-Facette besitzen. Degenerierte  $n$ -Simplexe sind für eine DELAUNAY-Triangulierung unerwünscht. Die  $n$ -Simplexe werden in diesem Fall trianguliert und durch  $m$ -Simplexe ersetzt werden. Ein  $n$ -Simplex enthält Teilsimplexe der Dimension  $m$ , welche hierfür herangezogen werden können. Im  $\mathbb{R}^2$  enthält der DELAUNAY-Simplizialkomplex für kozyklare Punkte statt eines Polygons, wie im Fall des GABRIELgraphen, einen höherdimensionalen Simplex und damit alle Triangulierungsmöglichkeiten des Polygons als dessen Teilsimplexe. Für vier kozyklare Punkte (s. Abb. 8.3(e))

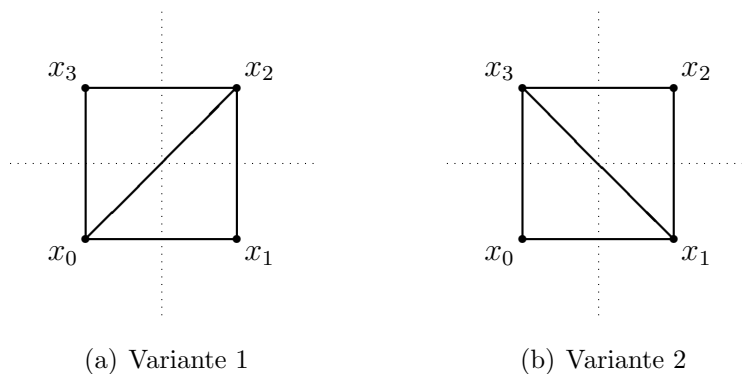


Abbildung 8.5: DELAUNAY-Triangulierung von 4 kozyklaren Knoten

erhält man topologisch einen Tetraeder. Für die Triangulierung ergeben sich zwei Varianten (s. Abb 8.5). Wird, wie im Beispiel in Abschn. 3.6 gezeigt, der Rand des Tetraeders nach (3.41) bestimmt, so läßt sich die Randkette aufgrund der unterschiedlichen Orientierungen der einzelnen Simplexe in zwei homologe Teilketten aufspalten. Jede Teilkette entspricht einer Triangulierungsvariante.

$$\begin{aligned} \partial \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle &= \langle x_1, x_2, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1, x_3 \rangle \\ &\quad - (\langle x_0, x_2, x_3 \rangle + \langle x_0, x_1, x_2 \rangle) \end{aligned}$$

Für die aus  $n > 4$  kozyklischen Punkten resultierenden höherdimensionalen

Ecken	Varianten
4	2
5	5
6	14
7	42
8	132
9	429
10	1430
11	4862

Tabelle 8.1: Anzahl von Varianten zur Triangulierung eines konvexen Polygons mit  $n$ -Ecken

Simplexe kann durch mehrfaches Anwenden des Randoperators auf homologe Teilketten eine Triangulierungsvariante ermittelt werden. Für ein (zweidimensionales) konvexes Polygon existieren (s. [BG95, S. 102])

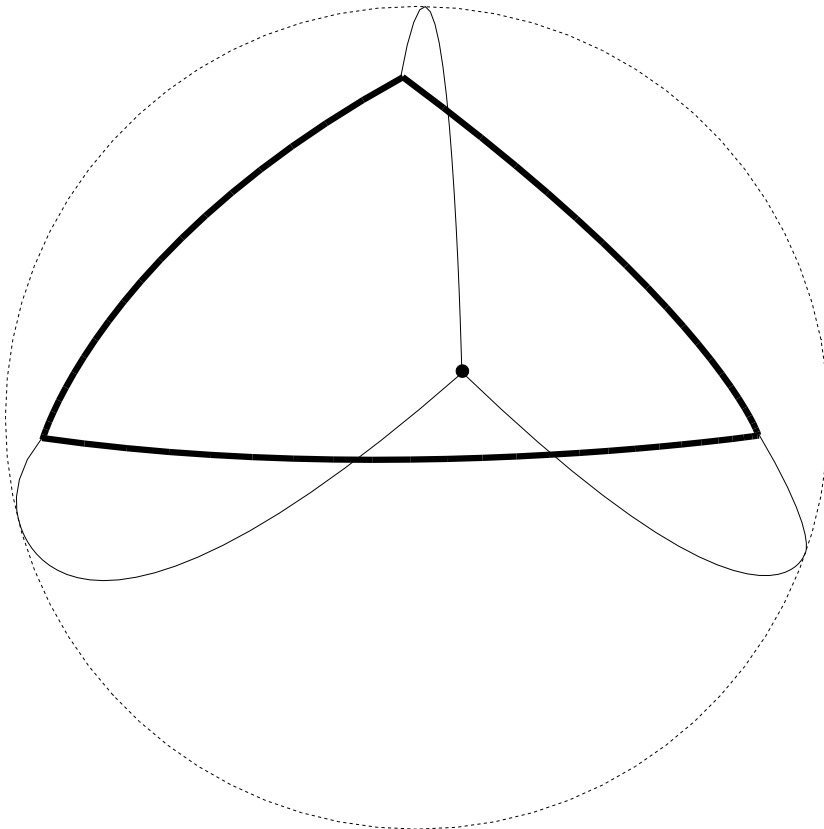
$$N_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \leq 3 \\ \sum_{i=3}^n N_{i-1} N_{n+2-i} & \text{für } n > 3 \end{cases} \quad (8.2)$$

Varianten der Triangulierung (s. Tab. 8.1).

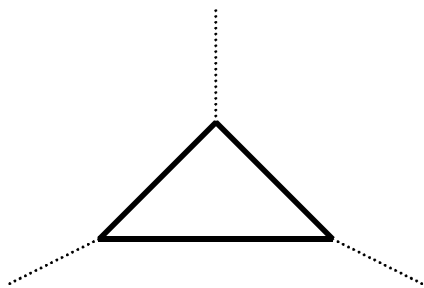
### 8.2.3 Zugrundeliegender topologischer Raum

Die DELAUNAY-*Triangulierung* entspricht einem DELAUNAY-Graphen oder -Simplizialkomplex, wobei für kozyklische Punkte eine beliebige Triangulierung gewählt wird. In der Regel wird eine Triangulierung im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  für eine endliche Menge Punkte gesucht. Die Triangulierung besteht somit aus einer Menge von Simplexen  $s^d$  der Dimensionen  $d \in \{0, \dots, 2\}$  bzw.  $d \in \{0, \dots, 3\}$ .

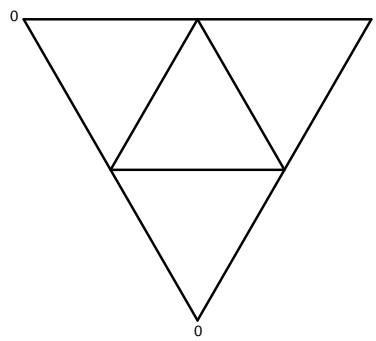
Wie schon bereits erwähnt ist der  $\mathbb{R}^d$  homöomorph zur „gelochten“ Sphäre  $\mathbb{S}^d \setminus p$ . Analog zum VORONOI-Diagramm (s. Abschn. 8.1) kann auch hier ein Abschluß durch Hinzufügen des Punktes  $p$  erreicht werden, der als *infinitesimaler* Punkt gedeutet wird. In der *stereographischen Projektion*, die eine geometrische Deutung für  $d = 2$  erlaubt, ist dieser Punkt das Projektionszentrum (s. Abschn. 3.2.6). Geraden werden als Kreise durch  $p$  und Halbebenen entsprechend als von diesen Kreisen umrandete Sphärenabschnitte abgebildet. Kreise auf der Ebene werden auf Kreise der Sphäre abgebildet, die  $p$  nicht schneiden. Der Punkt  $p$  wird der Triangulierung als „infinitesimale



(a) Stereographische Projektion



(b) Triangulierung



(c) 2-Mannigfaltigkeit

Abbildung 8.6: Stereographische Projektion einer Triangulierung

Ecke“ hinzugefügt, die somit eine endliche, kompakte Überdeckung des  $\mathbb{S}^d$  darstellt. Die Triangulierungen enthalten „infinitesimale“ Simplexe  $s^d$ .

**Infinitesimale Simplexe:** Als „infinitesimale“ Simplexe werden im folgenden Simplexe bezeichnet, welche inzident zur „infinitesimale Ecke“ sind.  $d$ -Simplexe sind Polyeder, die als Schnittmenge von  $d + 1$  durch Hyper-ebenen definierten Halbräumen gebildet werden. Bei einem „infinitesimalen“ Simplex ist von diesen Ebenen eine durch die Trägerebene des endlichen Teilsimplexes eindeutig bestimmt. Die Orientierung legt den zugehörigen Halbraum fest, der teilweise in Algorithmen mit dem infinitesimalen Simplex selbst gleichgesetzt wird. Im Falle der DELAUNAY-Triangulierung kommen die infinitesimalen Simplexe nur inzident zum Rand der konvexen Hülle der triangulierten Punkte vor. Ein  $d - 1$ -Randsimplex besitzt  $d$  Nachbarn. Zwischen den adjazenten Randsimplexen können winkelhalbierende Ebenen konstruiert werden, welche mit den Randsimplexen den geometrisch definierten Rand der infinitesimalen Simplexe bilden.

Abb. 8.6 zeigt eine aus einem einzigen endlichen 2-Simplex bestehende Triangulierung des  $\mathbb{R}^2$ , die in Abb. 8.6(a) geometrisch als stereographische Projektion dargestellt ist. Eine weitere, oft verwendete Möglichkeit der Konstruktion eines topologischen Raums ist die Verwendung von (orientierten) projektiven Räumen, die auf der Zentralprojektion (s. Abschn. 3.2.6) beruhen (s. [BY98, S. 158]).

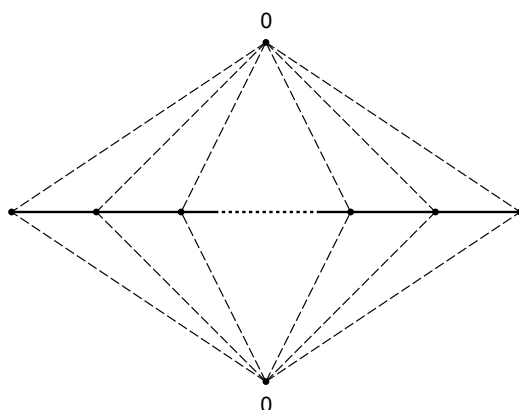
Die Kompaktifizierung bewirkt, daß der Raum  $\mathbb{R}^d$  zu  $\mathbb{S}^d$  erweitert wird. Hier entsteht bereits für  $d$  Punkte, die im  $\mathbb{R}^{d-1}$  linear unabhängig sind und ein  $d$ -Simplex bilden, eine Triangulierung mit zwei infinitesimalen Simplexen. Kritisch sind kollineare bzw. koplanare Punkte. In diesem Fall bilden  $d$  Punkte kein korrektes „infinitesimales“ Simplex und  $d + 1$  Punkte kein geometrisch korrektes Simplex. Für  $n > d$  Punkte, die im  $\mathbb{R}^{d-1}$  linear unabhängig sind kann dennoch eine Triangulierung erzeugt werden (s. Abb. 8.7).

**Topologische Invarianten** Als topologische Invarianten erhält man für  $\mathbb{S}^d$  die BETTI-Zahlen:

$$\beta^i = \begin{cases} 1 & i \in \{0, d\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eingesetzt in die EULER-POINCARÉ-Formel (3.47) ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^d (-1)^n \text{card}(s_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0 \\ 0 & \text{für } d \text{ ungerade} \\ 2 & \text{für } d \text{ gerade} \end{cases} \quad (8.3)$$

Abbildung 8.7: Triangulierung von kollinearen Punkten im  $\mathbb{S}^2$ 

Für die Sphäre  $\mathbb{S}^2$  ist diese äquivalent mit der DEHN-SOMMERVILLE-Beziehung (3.45b) oder der EULER-Beziehung (3.3).

Aufgrund der Kohärenz der orientierbaren  $d$ -Simplexe ist jedes der  $d + 1$   $(d - 1)$ -Teilsimplexe im benachbarten  $d$ -Simplex mit entgegengesetzter Orientierung enthalten<sup>5</sup>. Der topologische Raum ist eine geschlossene zusammenhängende  $d$ -Mannigfaltigkeit und somit ist

$$\text{card}(s_{d-1}) = \frac{d+1}{2} \text{card}(s_d) \quad (8.4)$$

Setzt man (8.4) in (8.3) ein, so erhält man im  $\mathbb{S}^2$ :

$$\text{card}(s^2) = 2(\text{card}(s^0) - 2) \quad (8.5)$$

wobei in der Knotenanzahl  $\text{card}(s^0)$  der infinitesimale Knoten enthalten ist.

## 8.3 Geometrische Eigenschaften der DELAUNAY-Triangulierung

### 8.3.1 Umsphärenbedingung

Eine DELAUNAY-Zelle ist dual zu einem VORONOI-Knoten. Dieser weist im  $\mathbb{R}^n$  zu mindestens  $n + 1$  Zentren denselben Abstand auf, der nach Abschn. 8.1 Radius einer leeren offenen Kugel ist. Mittelpunkt der Kugel ist der VORONOI-Knoten. Ein weiteres Zentrum, welches näher zum VORONOI-Knoten ist, steht aufgrund der Symmetrie des Abstandes im metrischen

<sup>5</sup> vgl. „Half-Edge Datenstruktur“ (Abschn. 6.6.2)

Raum (s. Abschn. 3.2.2) im Widerspruch zur Voraussetzung für einen VORONOI-Knoten. Betrachtet man nun für  $n + 1$  Zentren eine durch die Umsphäre begrenzte offene Kugel, so ergibt sich der Umkehrschluß, daß diese offene Kugel keine Zentren enthält, der Mittelpunkt ein VORONOI-Knoten und der entsprechende Simplex Element des Adjazenz-Simplizialkomplexes ist.

Im  $\mathbb{R}^2$  sind DELAUNAY-Kanten zu VORONOI-Kanten dual. Punkte einer VORONOI-Kante haben zu jeweils zwei Zentren denselben Abstand. Es ergeben sich offene Kugeln mit diesen Radien um die jeweiligen Punkte der VORONOI-Kante, die leer sein müssen. Auch hier wird eine offene Kugel betrachtet, für die sich beide Zentren auf der Oberfläche befinden und es gilt der Umkehrschluß, daß falls eine solche offene Kugel existiert, die keine Zentren enthält, die entsprechende Kante Teil des Adjazenz-Simplizialkomplexes ist.

Überträgt man dieses Prinzip auf ein  $n$ -Simplex im  $\mathbb{R}^d$ , so ist dieses Simplex ein *lokales* DELAUNAY-Simplex, falls eine offene Kugel existiert, deren Rand die Knoten des Simplex und deren Inneres keine Knoten enthält. Man spricht von *starken* DELAUNAY-Simplexen, falls auf der Hülle der Kugel außer den Simplex-Knoten keine weiteren Knoten liegen (s. [She99a, S. 16]). Die Kugel kann für unterschiedliche Metriken angesetzt werden.

Die Bedingung einer leeren offenen durch die Umsphäre begrenzten Kugel eines Simplex der DELAUNAY-Triangulierung ist äquivalent zu den topologischen, auf dem VORONOI-Diagramm aufbauenden Betrachtungen (s. [Law77, S. 180]). Auch die Winkelbedingung im folgenden Abschnitt läßt sich hieraus, speziell für den  $\mathbb{R}^2$  mit EUKLIDischen Metrik, ableiten.

### 8.3.2 Winkelbedingung im $\mathbb{R}^2$

Eine DELAUNAY-Triangulierung maximiert den minimalen Winkel. Diese im folgenden aufgezeigte Winkelbedingung gilt nur im  $\mathbb{R}^2$ . Betrachtet man vier kozyklische Punkte, so existieren zwei Triangulierungsvarianten. Abb. 8.8(b) (s. [Fen01, S. 81]) zeigt, daß Winkel für die Dreiecke der Triangulierungsvarianten jeweils wechselseitig gleich sind. In *Sehnenvierecken* bilden gegenüberliegende Winkel eine Winkelsumme von  $\pi$  (s. [Fen01, S. 81], [BS89, S. 193]). Die Winkelsumme in Dreiecken beträgt ebenfalls  $\pi$ . Hieraus folgt für  $\alpha_i := \sum_{j,k} \alpha_{ijk}$ , daß z. B.  $\alpha_0 := \alpha_{000} + \alpha_{010} = \alpha_{101} + \alpha_{311}$  und somit  $\alpha_0 > \alpha_{101}$  und  $\alpha_0 > \alpha_{311}$ . Entsprechendes gilt für  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_3$ . Der kleinste Winkel einer Triangulierung muß somit an der inneren Kante liegen und für beide Triangulierungsvarianten gleich sein. Es sei oBdA  $\alpha_{310}$  der kleinste Winkel. Verschiebt man nun  $x_3$  nach außen, so wird der Winkel  $\alpha_{310}$  kleiner. Das entsprechende Dreieck  $\langle x_0, x_1, x_3 \rangle$  ist jetzt nicht mehr Teil der DELAUNAY-Triangulierung, da im Umkreis der Punkte  $x_2$  liegt. Somit wird der kleinste



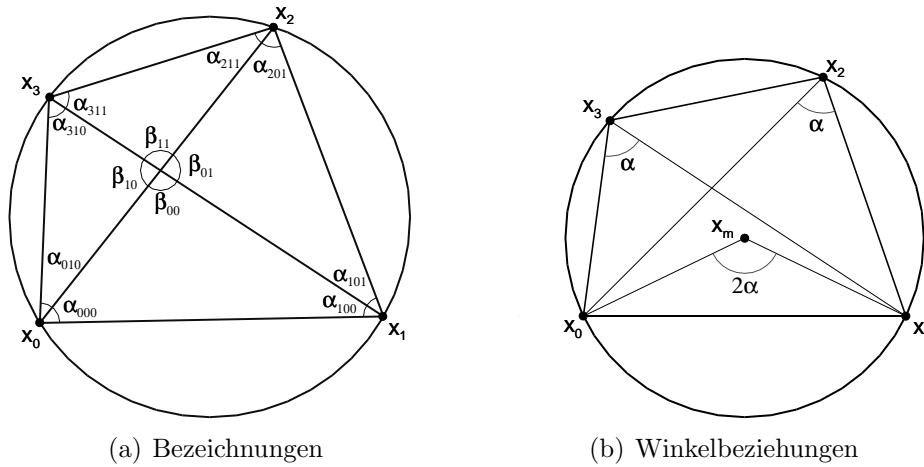


Abbildung 8.8: Winkelbeziehung für vier kozirkulare Punkte

Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  liegt  $x_m$  auf  $\overline{x_0x_1}$  und man erhält in Abb. 8.8(b) einen THALESkreis.

Winkel maximiert, da  $\alpha_{201} > \alpha_{310}$  jetzt kleinster Winkel ist. Dies läßt sich auch im allgemeinen zeigen.

**Anmerkungen zur Finite Elemente Netzgenerierung:** Im  $\mathbb{R}^2$  werden für die DELAUNAY-Triangulierung die minimalen Innenwinkel der Dreiecke maximiert. Für die Finite Elemente Berechnung (s. Abschn. 5.5) ist nach [BA76] allerdings eine Minimierung der maximalen Winkel erforderlich. Hierfür existiert ein Algorithmus, der durch Entfernen und Einfügen von Kanten eine Triangulation im  $\mathbb{R}^2$  unter anderem nach diesem Kriterium optimiert (a. [BEE<sup>+</sup>93]). Während der Algorithmus aus [BMR95] den maximalen Winkel auf  $\frac{\pi}{2}$  limitiert, wird bei den fast regulären Triangulierungen (ART) versucht, gleichseitige (reguläre) Dreiecke zu erhalten (s. [Fuc97]).

Im  $\mathbb{R}^3$  (und in höheren Dimensionen) existiert kein Winkelkriterium. Die DELAUNAY-Triangulierung liefert für eine Finite Elemente Berechnung Zellzerlegungen, die gegebenenfalls durch Hinzunahme von STEINER-Punkten verbessert werden müssen.

In wie weit die Elementgeometrie Berechnungsergebnisse beeinflusst, hängt vom numerischen Verfahren ab. Experimentell ist zu beobachten, daß bei einer p-Adaption der FEM für höhere Polynomgrade auch stark verzerrte Elemente keine starke Minderung der Genauigkeit und Konvergenzgeschwindigkeit bedeuten. Insbesondere für die GFEM, bei der sich ein Träger auf einen Knotenpatch ausdehnt, sind keine großen Schwierigkeiten zu erwarten. Eine Transformation eines verzerrten Simplexes auf ein Referenzsimplex

findet hier nicht statt.

### 8.3.3 „Infront“-Ordnungsrelation

Es kann eine „Infront“-Ordnungsrelation für Simplexe einer DELAUNAY-Triangulierung bezüglich eines Punktes  $x$  definiert werden. Falls für  $x$  eine Halbgerade existiert, welche zuerst ein Simplex  $s^{(1)}$  und dann ein Simplex  $s^{(2)}$  schneidet, so ist  $s^{(1)}$  vor  $s^{(2)}$ , also  $s^{(1)} \prec s^{(2)}$ . Während für allgemeine Tri-

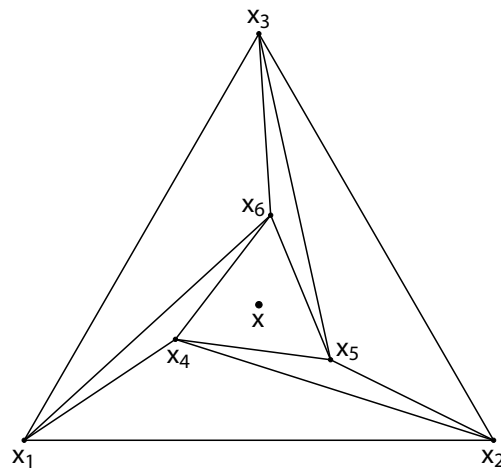


Abbildung 8.9: Zyklus in „Infront“-Ordnungsrelation der Dreiecke bezüglich des Punktes  $x$

angulierungen  $s^{(1)} \prec s^{(2)} \prec \dots \prec s^{(1)}$  vorkommen kann (s. Abb. 8.9), ist das bei DELAUNAY-Triangulierungen nicht möglich (s. [Ede01, S. 5]). Die Eigenschaft ist z. B. für den Tiefensortier-Algorithmus in der Computergraphik eine notwendige Voraussetzung (s. [FvFH96, S. 673]).

## 8.4 Konstruktion

### 8.4.1 Einfügen eines Punktes

Betrachtet wird eine DELAUNAY-Triangulation im  $\mathbb{R}^2$ . Es sei  $x$  ein neu einzufügender Punkt, der sich nicht schon bereits in der Triangulation befindet. Liegt der Punkt  $x$  innerhalb des Umkreises eines Dreiecks  $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ , so erhält man neue DELAUNAY-Kanten<sup>6</sup>  $\langle x_0, x \rangle$ ,  $\langle x_1, x \rangle$  und  $\langle x_2, x \rangle$ . Im Umkreis

<sup>6</sup> Die Kanten sind ungerichtet angegeben und kommen in der Triangulierung aufgrund der Kohärenz der Simplexe in beiden Orientierungen vor.

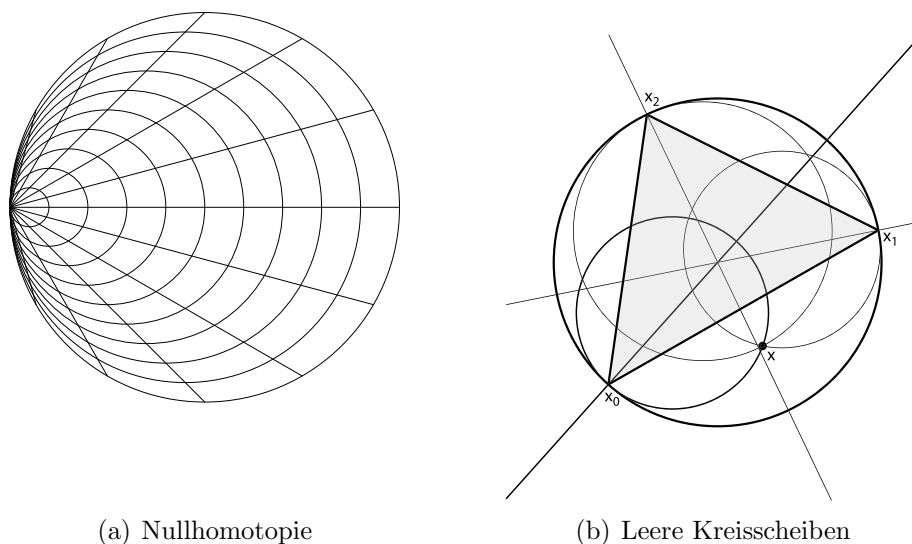


Abbildung 8.10: Einzufügender Punkt innerhalb Umkreis

des Dreiecks  $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$  kann laut Definition der DELAUNAY-Triangulierung kein weiterer Punkt liegen. Untersucht wird die Existenz einer abgeschlossenen Kreisfläche, deren Rand  $x_0$  und  $x$  enthält und die eine Teilmenge der Umkreisfläche ist. Falls sie existiert, kann sich auch kein Punkt in ihr befinden und  $\langle x_0, x \rangle$  ist nach Satz (s. 8.3) eine lokale DELAUNAY-Kante.

Hierzu betrachtet man die Nullhomotopie

$$(x + t - 1)^2 + y^2 = (1 - t)^2$$

bzw.

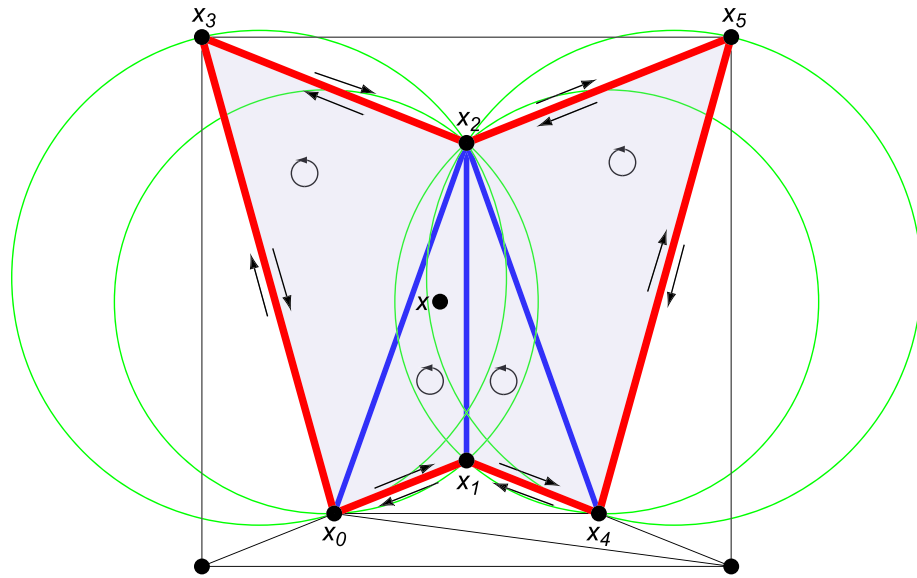
$$x(\alpha, t) = (1 + \cos(2\pi\alpha))(1 - t)$$

$$y(\alpha, t) = \sin(2\pi\alpha)(1 - t)$$

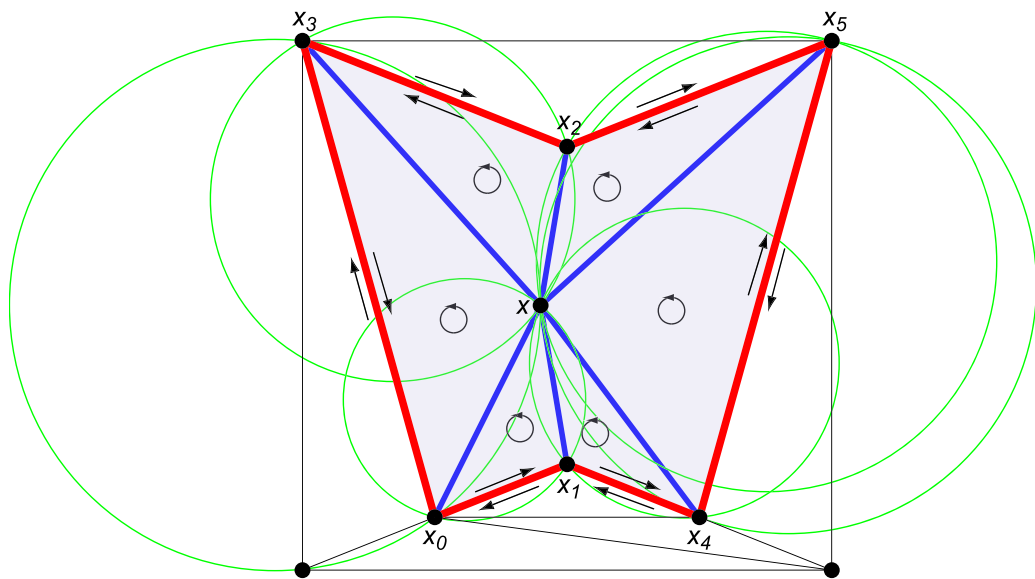
mit  $\alpha, t \in [0, 1] \in \mathbb{R}$  und  $(x, y) \in \mathbb{E}^2$  (s. Abb. 8.10(a)). Die Deformation ist linear, also stetig und monoton. Abb. 8.10(b) zeigt einen neu einzufügenden Punkt mit offenen leeren Kreisflächen. Als Sonderfall der letzten Aussage liegt der Punkt  $x$  auf einer Kante  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . In diesem Fall wird  $\langle x_1, x_2 \rangle$  in  $\langle x_1, x \rangle$  und  $\langle x, x_2 \rangle$  aufgeteilt und  $\langle x_0, x \rangle$  neu erzeugt (vgl. [dvOS00, S. 192]). Diese Ausführungen lassen sich auf höherdimensionale Räume übertragen.

Die Menge der Simplexe, die durch den neu einzufügenden Punkt  $x$  entfernt<sup>7</sup> werden, weil sie die DELAUNAY-Bedingung nicht mehr erfüllen, bilden

<sup>7</sup> engl.: killed



(a) zu löschende Simplexe



(b) neu erzeugte Simplexe

Abbildung 8.11: Einfügen eines Punktes in eine DELAUNAY-Triangulierung

als Unterkomplex ein *sternförmiges* „Loch“ (s. Abb. 8.11(a)). Das folgt aus der Tatsache, daß jedes Ecksimplex direkt mit dem Punkt  $x$  durch eine Kante verbunden und dadurch „sichtbar“ ist (s. Abb. 8.11(b)). Dieser Unterkomplex wird durch einen Simplicialkomplex ersetzt, der zusätzlich den Punkt  $x$  beinhaltet.

Für eine Triangulierung im  $\mathbb{R}^d$  kann der Rand des zur Vollkugel homöomorphen Unterkomplexes mit Hilfe des Randoperators (s. Abschn. 3.6) gewonnen werden. Die  $n - 1$ -Randkette ist homöomorph zu  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Die Orientierung der Simplexe der Randkette wird durch den Unterkomplex induziert. Die Nachbarschaftsrelationen übertragen sich von der Randkette auf den neu gebildeten Unterkomplex. Zwei benachbarte Randsimplexe  $\langle x_i, x_k, \dots, x_l \rangle$  und  $-\langle x_j, x_k, \dots, x_l \rangle$  bilden mit dem neuen Punkt  $x$  die adjazenten Simplexe  $\langle x, x_i, x_k, \dots, x_l \rangle$  und  $-\langle x, x_j, x_k, \dots, x_l \rangle$ , wobei der erstere  $x_j$  gegenüber liegt und der letztere  $x_i$ .

**Beispiel** Betrachtet man Abb. 8.11, so ergibt sich der Unterkomplex

$$\mathbb{H} := \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle x_0, x_2, x_3 \rangle + \langle x_1, x_4, x_2 \rangle + \langle x_4, x_5, x_2 \rangle$$

mit der Randkette

$$\partial\mathbb{H} = \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_2 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_0 \rangle$$

deren 1-Simplexe Teilsimplexe der zu entfernenden Simplexe sind:

entferntes Simplex	Teilsimplexe des Randes	Teilsimplexe innen
$\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$	$\langle x_0, x_1 \rangle$	$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_0 \rangle$
$\langle x_0, x_2, x_3 \rangle$	$\langle x_2, x_3 \rangle, \langle x_3, x_0 \rangle$	$\langle x_0, x_2 \rangle$
$\langle x_1, x_4, x_2 \rangle$	$\langle x_1, x_4 \rangle$	$\langle x_4, x_2 \rangle, \langle x_2, x_1 \rangle$
$\langle x_4, x_5, x_2 \rangle$	$\langle x_4, x_5 \rangle, \langle x_5, x_2 \rangle$	$\langle x_2, x_4 \rangle$

Die inneren Teilsimplexe „löschen sich gegenseitig aus,.. Die neu erzeugten Simplexe bilden sich aus den Randsimplexen. Ein Randsimplex  $\langle x_i, x_j \rangle$  ergibt mit dem neu einzufügenden Punkt  $x$  das Simplex  $\langle x, x_i, x_j \rangle$ . Für zwei adjazente Randsimplexe  $\langle x_i, x_j \rangle$  und  $\langle x_j, x_k \rangle$  sind auch die erzeugten Simplexe adjazent: Der  $x_i$  gegenüberliegende Nachbar von  $\langle x, x_i, x_j \rangle$  ist  $\langle x, x_j, x_k \rangle$ . Im Gegenzug ist der  $x_k$  gegenüberliegende Nachbar von  $\langle x, x_j, x_k \rangle$  das Simplex  $\langle x, x_i, x_j \rangle$ .

Im  $\mathbb{R}^3$  bildet ein Randsimplex  $\langle x_i, x_j, x_k \rangle$  mit dem neuen Punkt  $x$  das Simplex  $\langle x, x_i, x_j, x_k \rangle$ . Zwei adjazente kohärente Randsimplexe  $\langle x_i, x_j, x_k \rangle$  und

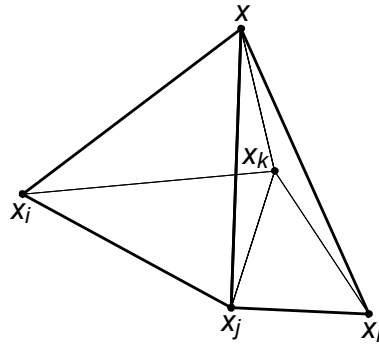


Abbildung 8.12: Adjazente 3-Simplexe

$\langle x_k, x_j, x_l \rangle$  bilden adjazente 3-Simplexe (s. Abb. 8.12): Der  $x_i$  gegenüberliegende Nachbar von  $\langle x, x_i, x_j, x_k \rangle$  ist  $\langle x, x_k, x_j, x_l \rangle$  und der  $x_l$  gegenüberliegende Nachbar von  $\langle x, x_k, x_j, x_l \rangle$  ist  $\langle x, x_i, x_j, x_k \rangle$ .

### 8.4.2 Löschen eines Punktes

Beim Löschen eines Punktes  $x$  einer Triangulierung im  $\mathbb{R}^d$  werden alle  $n$  inzidenten  $d$ -Simplexe entfernt und es entsteht ein sternförmiges „Loch“. Dieses Loch muß neu trianguliert werden. Ein Unterkomplex des Simplicialkomplexes wird durch einen anderen ersetzt. Im  $\mathbb{R}^2$  sind dafür  $n - 2$  neu zu erzeugende 2-Simplexe nötig (vgl. (8.5)). Jedes zu entfernende  $d$ -Simplex besitzt mindestens ein  $d - 1$ -Teilsimplex, welches Element des Lochrandes ist. Die Orientierung des Randsimplexes wird durch die Orientierung des Simplexes induziert. Es existieren in der Menge der zu entfernenden  $d$ -Simplexe ebenso wie in der Menge der  $d - 1$ -Randsimplexe zu jedem Simplex  $d$  adjazente Simplexe. Das kann durch einen Graphen modelliert werden, der für jedes Simplex einen Knoten mit Grad  $d$  und für jede Adjazenzbeziehung eine Kante aufweist.

Da eine DELAUNAY-Triangulierung immer eine konvexe Hülle dieser Randpunkte vernetzt, muß die Erzeugung von Simplexen außerhalb des „Lochs“ verhindert oder entsprechende Simplexe gelöscht werden. Die asymptotische Komplexität des Algorithmus ist nicht von großer Bedeutung, da nur ein lokaler kleiner Bereich neuvernetzt wird. Auch wenn im ungünstigsten Fall  $n$  die Kardinalität der Menge aller Punkte sein kann, erhält man für einen zufällig zu löschenden Punkt  $x$  im  $\mathbb{R}^2$  für  $n$  den Erwartungswert 6. Im  $\mathbb{R}^3$  ergibt sich für eine POISSON-Verteilung für  $n$  ein Wert von  $\frac{96}{35}\pi^2 \approx 27$  (s. [Dev99]).

Für eine zweidimensionale Triangulierung werden drei aufeinanderfolgen-

de Punkte  $x_i, x_j$  und  $x_k$  des Lochrandes als „Ohr“ bezeichnet, falls die Verbindungslinie des ersten zum letzten Punkt vollständig innerhalb des Lochs liegt. Die Orientierung des entsprechenden Dreiecks bzw. 2-Simplex  $\langle x_i, x_j, x_k \rangle$  wird durch die Teilsimplexe  $\langle x_i, x_j \rangle$  und  $\langle x_j, x_k \rangle$  vorgegeben. Ein Orientierungstest (s. Abschn. 3.3) filtert die im Loch liegenden Dreiecke aus. Das Dreieck ist ein DELAUNAY-Dreieck, falls die Umkreisscheibe keine weiteren Punkte des Lochrandes enthält. Wird ein solches „Delaunay-Ohr“ gefunden, kann für eine DELAUNAY-Triangulierung das Dreieck erzeugt und das Loch entsprechend verkleinert werden. Eine wiederholte Abspaltung dieser Dreiecke vernetzt das Loch (s. [Dev99]). Für höherdimensionale Triangulierungen kann analog vorgegangen werden. Im  $\mathbb{R}^d$  wird ein „Ohr“ durch  $d$  Randsimplexe definiert, die jeweils paarweise ein  $d - 2$ -Teilsimplex gemeinsam haben und aufgrund der Orientierung ein innenliegendes Simplex bilden. Zur Konstruktion werden zwei beliebige benachbarte Randsimplexe  $\langle x_i, x_k, \dots, x_l \rangle$  und  $-\langle x_j, x_k, \dots, x_l \rangle$  herausgegriffen. Aus deren Knoten wird der Simplex  $\langle x_j, x_i, x_k, \dots, x_l \rangle$  erzeugt, der positiv orientiert sein muß.

## 8.5 Konforme DELAUNAY-Triangulierungen

### 8.5.1 DELAUNAY-Triangulierungen mit Zwangsbedingungen

Es soll aus einem „stückweise linearen Komplex“ (Piecewise Linear Complex) der Dimension  $d - 1$  für  $d > 1$  eine DELAUNAY-Triangulierung der Dimension  $d$  erzeugt werden. Der PLC ist ein CW-Komplex, der aus Polyedern besteht, die je nach Dimension als Zwangskanten bzw. Zwangsfacetten bezeichnet werden<sup>8</sup>. Wird ein Simplizialkomplex verwendet, so müssen alle enthaltenen Simplexe in der Triangulierung enthalten sein und stellen die Zwangsbedingungen dar. Die Aufteilung eines Polyeders in einen Simplizialkomplex bringt weitere Restriktionen mit sich, da z. B. für die Zerlegung einer rechteckigen Fläche in zwei Dreiecke eine Teilungskante als Zwangsbedingung hinzugefügt wird, für die zwei alternative Varianten existieren.

Eine DELAUNAY-Triangulierungen mit den beschriebenen Zwangsbedingungen existiert i. a. nicht. Die Kriterien der DELAUNAY-Triangulierung müssen so weit gelockert werden, daß die Triangulierung unter Einhaltung der Zwangsbedingungen möglich wird, aber die Eigenschaften möglichst erhalten bleiben. Hierzu wird eine *Sichtbarkeitsbedingung* eingeführt.

---

<sup>8</sup> Die Definition eines CW-Komplexes bringt es mit sich, daß sich Zwangsfacetten nicht im Inneren schneiden. In diesem Fall muß die Facette aufgeteilt und die Zwangsbedingungen damit konsistent gemacht werden.

**Zweidimensionale Triangulierungen:** Im  $\mathbb{R}^2$  werden die Zwangskanten durch einen planaren Graphen mit geraden Kanten definiert. Diese Kanten sind definitionsgemäß in der Triangulierung enthalten. Die Bedingung für eine lokale DELAUNAY-Kante wird gelockert, indem ein weiterer Punkt im Inneren einer offenen Kreisscheibe mit den Endpunkten als Randpunkte liegen darf, der nicht von beiden Endpunkten „sichtbar“ ist (s. [Che87], [Ede01, S. 28f]). Ein Punkt ist von einem Punkt aus „sichtbar“, falls die Verbindungsstrecke keine Zwangskante schneidet. Die Zwangskanten stellen Sichtbarkeitshindernisse dar, die aus den DELAUNAY-Kreisscheiben Teile ausschneiden<sup>9</sup>. Die Existenz einer solchen Triangulierung ist im  $\mathbb{R}^2$  garantiert und hält die in Abschn. 8.3.2 gezeigte Winkelbedingung der Maximierung minimaler Winkel unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen ein.

**Höherdimensionale Triangulierungen:** Für höherdimensionale Räume sind die Zwangsbedingungen selbst Restriktionen unterworfen, um die Existenz einer DELAUNAY-Triangulierungen mit Zwangsbedingungen zu garantieren (s. [She98],[She99a, S. 26ff]): Die  $d-2$ -Simplexe des PLC müssen starke DELAUNAY-Simplexe sein.

**Beurteilung:** DELAUNAY-Triangulierungen mit Zwangsbedingungen sind keine DELAUNAY-Triangulierungen mehr, da das DELAUNAY-Kriterium abgeschwächt wird. Algorithmen, welche diese besonderen Eigenschaften voraussetzen, können nicht eingesetzt werden. Es werden zur Einhaltung der Zwangsbedingungen keine weiteren Punkte eingefügt und man erhält die größt mögliche Triangulierung mit den gegebenen Zwangsbedingungen. Im  $\mathbb{R}^2$  ist diese optimal und immer existent, aber für höherdimensionale Räume und insbesondere dem  $\mathbb{R}^3$  müssen die Zwangsbedingungen bei Nichtexistenz der Triangulierung durch Aufteilung angepaßt werden. Im Anwendungsbereich dieser Arbeit ist die Einhaltung einer abgeschwächten Form des DELAUNAY-Kriteriums ausreichend und die Grobheit der Triangulierung sowie die Stabilität des Algorithmus stehen im Vordergrund. Für die Berechnung nötige Verfeinerungen werden vom einem adaptiven numerischen Algorithmus vorgegeben. Die einfachere Umsetzung in einen Algorithmus machen allerdings die folgenden Verfeinerungsstrategien zur Umsetzung der Konformität attraktiv.

---

<sup>9</sup> Dies kann auch als Diskontinuität in der Metrik an dieser Stelle gedeutet werden.



### 8.5.2 Verfeinerung der DELAUNAY-Triangulierung

Gegeben seien  $m$  Punkte im  $\mathbb{R}^n$  mit  $m > n$ , sowie eine Menge  $P$  von ausgewählten Punkten mit  $\text{card}(P) = n$ . Falls eine offene Kugel existiert, auf deren Oberfläche die Punkte  $P$  liegen und die keine Punkte enthält, beschreiben diese Punkte einen lokalen DELAUNAY- $n - 1$ -Simplex (s. 8.3). Falls keine solche Kugel existiert, sollen durch Hinzufügen weiterer Punkte  $n - 1$ -Simplexe erzeugt werden, deren Vereinigungsmenge das durch  $P$  beschriebene  $n - 1$ -Simplex bildet. Beim inkrementellen Hinzufügen von Punkten werden Simplexe in einer DELAUNAY-Triangulierung gelöscht und ersetzt (s. Abschn. 8.4.1). Hiermit soll erreicht werden, daß nichtkonforme Simplexe durch konforme ersetzt werden. Von einem anderen Blickwinkel aus betrachtet wird durch Hinzufügen der Punkte a priori die Konformität der erzeugten DELAUNAY-Triangulierung gewährleistet (vgl. [PF98]). Beim inkrementellen Hinzufügen der Punkte wird zunächst die Konformität für eine Facette hergestellt. Es werden aber evtl. andere Facetten entfernt, die für die Konformität nötig sind. Beim Einfügen eines Punktes wird ein Unterkomplex durch einen anderen ersetzt. Falls der entfernte Unterkomplex innere Zwangsfacette enthält, so müssen diese in eine Liste abzuarbeitender Facetten aufgenommen werden. Wenn diese Liste leer ist, sind alle Zwangsbedingungen berücksichtigt. Besonders spitzen Ecken sind hier für eine Körperhülle problematisch. Im  $\mathbb{R}^2$  können zwei adjazente Randkanten mit spitzen Winkel ein alternierendes Verfeinern beider Kanten bewirken (s. [Rup95, S. 38]).

Die neu hinzuzufügenden Punkte werden im folgenden mit Hilfe einer

- rekursiven gleichmäßigen Unterteilung oder
- iterativen schnittbasierten Technik

bestimmt. Ein Beispiel hierzu ist in Abb. 8.16 dargestellt.

**Rekursive Bisektion:** Es wird für den zweidimensionalen Fall gezeigt, daß es immer möglich ist, mittels rekursiver Bisektion einer Zwangskante Konformität zu erzielen. Hierfür wird als „Testkugel“ die Kreisfläche mit kleinstem Radius  $r$  gewählt, für den das 1-Simplex der Punkte  $P$  den Durchmesser darstellt. Für eine Normalunterteilung des Simplex durch Hinzufügen des Mittelpunktes werden zwei neue Punktmenge  $\tilde{P}$  und  $\tilde{\tilde{P}}$  untersucht, die sich aus dem Mittelpunkt und je einem der Ausgangspunkte zusammensetzen (s. Abb. 8.13). Die Kreisflächen der neuen Mengen sind vollständig in der Ausgangskreisfläche enthalten und es ist  $\tilde{r} = \frac{r}{2}$  (analog für  $\tilde{\tilde{P}}$ ). Der maximale Radius und der durch die Testkreisflächen überdeckte Raum wird in jedem Schritt verkleinert. Es ergibt sich eine CAUCHY-Folge  $r^{(i+1)} = \frac{1}{2}r^{(i)}$  mit

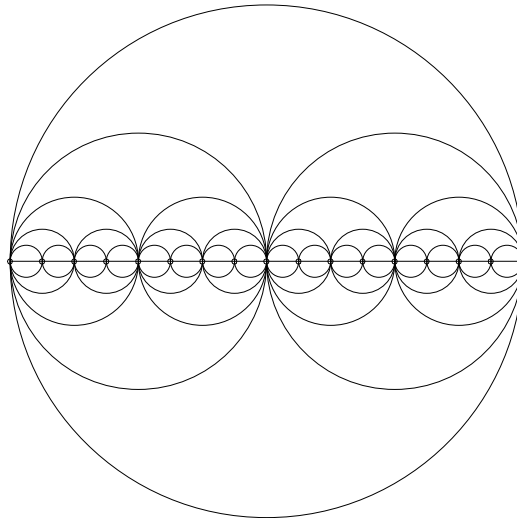


Abbildung 8.13: Rekursive Bisektion durch Einfügen von Punkte im  $\mathbb{R}^2$

$r^{(0)} := r$  bzw. daraus resultierend  $r^{(i)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(i)} r$ . Für eine unendliche Anzahl an Unterteilungen strebt diese Folge  $\lim_{i \rightarrow \infty} r^{(i)} = 0$  und somit der maximale Radius und der überdeckte Raum gegen Null. Die einzelnen Kreisscheiben können keinen Punkt mehr enthalten und es ergeben sich lokale DELAUNAY-Simplexe. Diese sind konform zum ursprünglichen Simplex. In Abb. 8.13 ist die Überdeckung für fünf Rekursionsstufen dargestellt. Das Prinzip läßt sich nicht direkt auf höhere Dimensionen übertragen.

Im dreidimensionalen Raum erhält man Dreiecke als zu verfeinernde Seitenflächen. Es werden die Umkugeln betrachtet, deren Mittelpunkte auf der Trägerebene des Dreiecks liegen. Die Schnittmenge mit dieser Ebene ergibt jeweils den Umkreis des Dreiecks. Zerteilt man das Dreieck, indem man die Seitenmittelpunkte verbindet, erhält man vier kongruente Dreiecke, die jeweils halb so groß wie das ursprüngliche Dreieck sind (s. Abb. 8.14). Die Zerlegung wird im folgenden in Anlehnung an die simpizialen BÉZIER-Flächen aus Abschn. 4.3.3 im folgenden als „quadratische Zerlegung“ bezeichnet und kann als Teil einer regulären Parketierung<sup>10</sup> betrachtet werden.

Die Umkreise überdecken sich gegenseitig und der innere Umkreis ragt evtl. aus dem Umkreis des Ursprungsdreiecks hinaus. Da die Umkreise jeweils den halben Durchmesser des vorhergehenden Umkreises besitzen, ist auch hier eine Nullfolge festzustellen. Analog zum zweidimensionalen Fall deutet dies auf eine gesicherte Terminierung des Algorithmus hin. Die algorithmische Umsetzung bereitet jedoch größere Schwierigkeiten, da die einzelnen

<sup>10</sup> Die reguläre Parketierung entspricht nach [BW94, S. 26] einem Laves-Netz 666 mit Symmetriegruppe  $p2$ , das aus drei Linien in zwei Lagen aufgebaut ist.

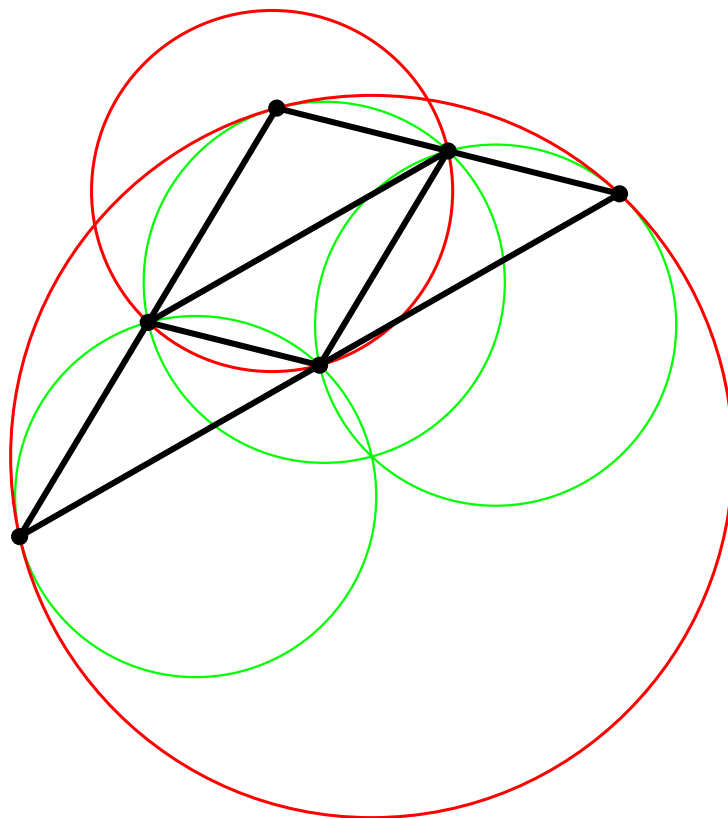
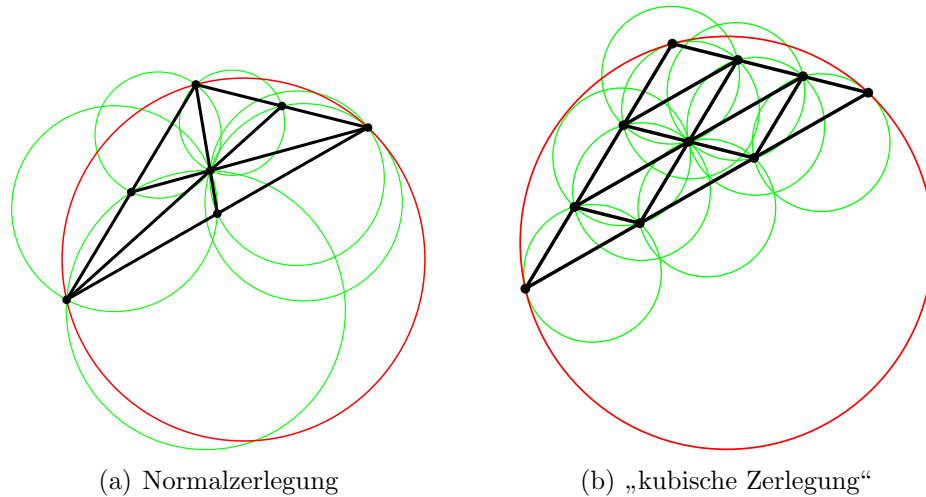


Abbildung 8.14: „Quadratische Zerlegung“ eines 2-Simplex

Teildreiecke aufgrund der Überlappungen nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden können. Eine Drittelung nach Abb. 8.15(b) verspricht



(a) Normalzerlegung

(b) „kubische Zerlegung“

Abbildung 8.15: Weitere Zerlegungen eines 2-Simplex

keine weiteren Vorteile. Für die in der Topologie bekannte Normalzerlegung können keine Aussagen in dieser Form gemacht werden.

**Iterative schnittbasierte Technik:** Ist im zweidimensionalen Raum eine Zwangskante nicht in einer DELAUNAY-Triangulation enthalten, so schneidet die Zwangskante notwendigerweise eine Kante der Triangulation. Wird der Schnittpunkt der Zwangskante mit der ersten kreuzenden Kante als Punkt hinzugefügt, so ist nach Abschn. 8.4.1 der Teil der Zwangskante vom Start- zum Schnittpunkt in der DELAUNAY-Triangulation enthalten. Für die gekürzte Teil-Zwangskante vom Schnitt- zum Endpunkt kann das Verfahren iterativ angewendet werden. Das Verfahren kann aber nicht direkt auf höherdimensionale Räume übertragen werden, da die Schnittmenge der Facetten i. a. kein Punkt mehr ist.

## 8.6 Algorithmische Umsetzung der DELAUNAY-Triangulierung

### 8.6.1 Übersicht

In [SD95] bzw. [Su94, S. 12ff] werden unterschiedliche Techniken zur Erzeugung zweidimensionaler DELAUNAY-Triangulierungen vorgestellt und vergli-

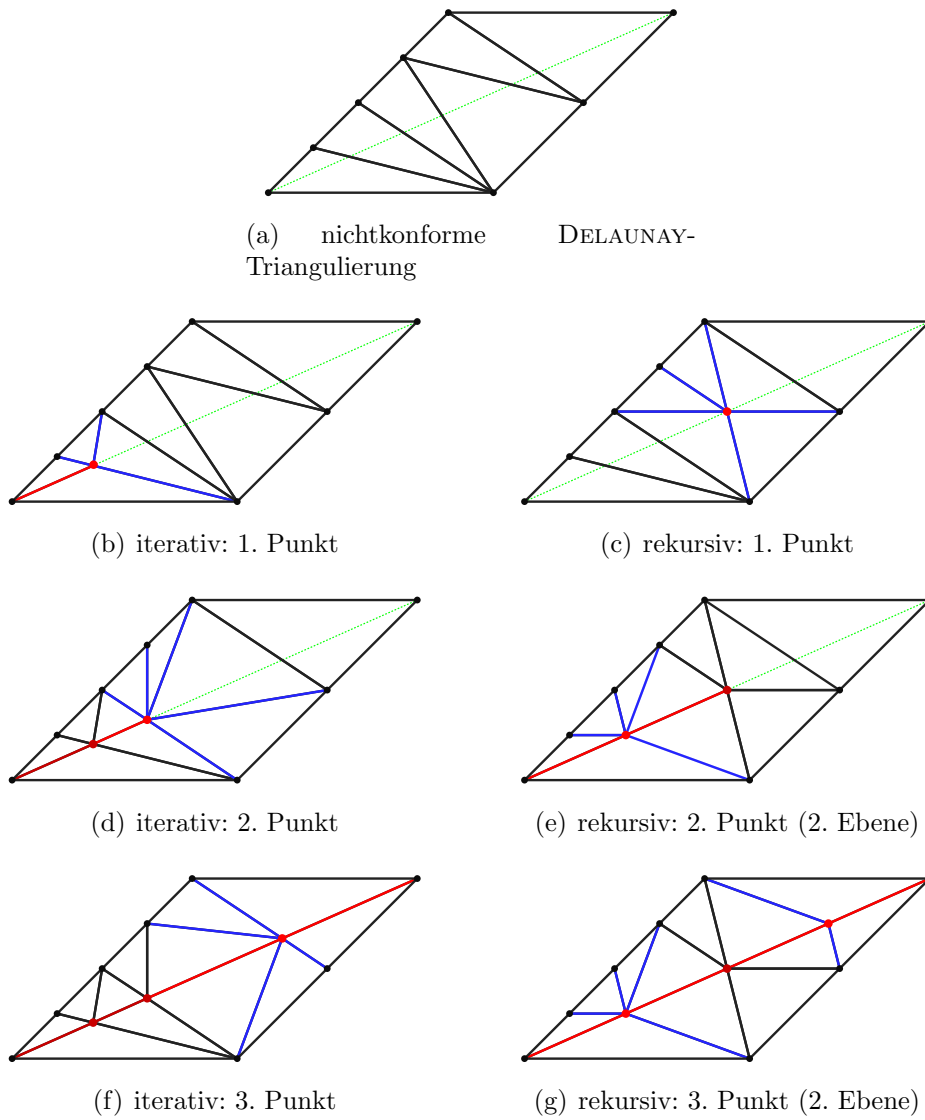


Abbildung 8.16: Konformität durch Verfeinerung

chen:

- „Teile und Herrsche“ Algorithmen
- „Sweep-line“ Algorithmen
- Inkrementelle Algorithmen
- Einhüllungsalgorithmen
- „Konvexe Hülle“ Algorithmen

Die Algorithmen sind auch zur Erzeugung des dualen VORONOI-Diagramms geeignet und teilweise für diesen Zweck entwickelt worden.

### 8.6.2 Inkrementelle Algorithmen

Im folgenden sollen inkrementelle Algorithmen betrachtet werden. Hier können Punkte in eine bestehende DELAUNAY-Triangulierung eingefügt werden. Bei der Vereinigung zweier DELAUNAY-Triangulierungen kann so die Triangulierung mit weniger Punkten in diejenige mit mehr Punkten eingefügt werden. Für diesen Fall existieren für VORONOI-Diagramme auch spezielle Algorithmen ([PS85, S. 213ff]), die bei „Teile und Herrsche“-Konstruktionen von VORONOI-Diagrammen eingesetzt werden und für DELAUNAY-Triangulierungen ebenfalls anwendbar sind. Ein weit verbreiteter Algorithmus zum inkrementellen Aufbau einer DELAUNAY-Triangulation im zweidimensionalen Raum (und analog auch für höherdimensionale Räume) verwendet einen Kanten-tausch, um Dreiecke, die das DELAUNAY-Kriterium nicht erfüllen, durch DELAUNAY-Dreiecke zu ersetzen (s. [Ede01, S. 9f], [dvOS00, S. 191ff]).

Unter Berücksichtigung der zuvor aufgeführten Eigenschaften wird im folgenden ein Algorithmus verwendet, der zunächst alle Nicht-DELAUNAY-Simplexe löscht und anschließend die neu zu erzeugenden Simplexe einfügt. Er wird als BOWYER-WATSON-Algorithmus (s. [Bow81, Wat81]) bezeichnet. Ein neu einzufügender Punkt entfernt, wie bereits in Abschn. 8.4.1 gezeigt, die Simplexe in einem sternförmigen Gebiet. Beim Löschen der Simplexe muß für die verwendete Datenstruktur evtl. eine Inkonsistenz der Daten in Kauf genommen werden, die allerdings im nachfolgenden Schritt behoben wird. Der Punkt bildet mit den Rand-Teilsimplexen zusammen neue Simplexe eines Unterkomplexes, der dieses „Loch“ ausfüllt.

Zu Beginn muß allerdings erst einmal eine Triangulierung existieren, in welche die Punkte eingefügt werden. Die Bildung ist nach Abschn. 8.2.3 bereits mit  $d$  linear unabhängigen Punkten möglich, die entweder zu Beginn übergeben oder in einem Container „gesammelt“ werden. Die Triangulierung

enthält dann zwei infinitesimale Simplexe. Ein weiterer linear unabhängiger Punkt ist nötig um eine darstellbare Triangulierung mit einem geometrischen Simplex zu erhalten.

### 8.6.3 Lokalisierung eines Simplex in einer DELAUNAY-Triangulierung

Entscheidend für die Komplexität eines inkrementellen DELAUNAY-Algorithmus ist das Auffinden des Simplexes, in dem ein neu einzufügender Punkt liegt. Dieses Simplex muß auf jeden Fall entfernt werden. Eine lineare Suche erfordert für  $n$  Simplexe im Durchschnitt  $\frac{n}{2}$  Schritte.

#### Azyklischer DELAUNAY-Graph

Der *azyklische DELAUNAY-Graph* (Directed Acyclic Graph, DAG) speichert die Historie der inkrementellen Konstruktion der DELAUNAY-Triangulierung (s. [BT89]<sup>11</sup>, [Kle97, S. 277ff]). Hierfür wird ein Graph konstruiert, dessen Knoten die Simplexe und Kanten die „Ersetzt“- bzw. „Schneidet“-Beziehungen darstellen. Durch das Einfügen eines Punktes wird eine Menge von Simplexen entfernt und durch eine Menge neuer Simplexe ersetzt. Ein entferntes Simplex ist „Vater“ eines neu erzeugten Simplexes, falls beide ein gemeinsames Teilsimplex besitzen und die Schnittmenge der offenen Simplexe nicht leer ist. Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, spricht man von einem „Stiefvater“. Von beiden verläuft im Graph eine Kante zum neu erzeugten Simplex. Die Definition ist für infinitesimale Simplexe erweiterbar. Ein Punkt der sich in der Umsphäre eines Simplex befindet kann sich in der Umsphäre des „Vaters“ oder des „Stiefvaters“ befinden.

Es bildet sich eine ebenenartige Struktur aus, die einem Baum ähnelt. Das Startsimplex kann als Wurzelement und die Simplexe der Triangulierung als Blätter betrachtet werden. Zur Suche wird der Graph von der Wurzel aus durchlaufen bis ein Blatt erreicht wird, wobei unter den „Kind“-Elementen jeweils das Element gewählt wird, in dem sich der Lokalisierungspunkt befindet.

#### Gerichtete geometrische Suche

Die bereits in Abschn. 7.3.2 vorgestellte gerichtete Suche kann auch im Spezialfall einer DELAUNAY-Triangulierung eingesetzt werden. Die Wahl des Startsimplexes soll in diesem speziellen Kontext nochmals betrachtet werden.

---

<sup>11</sup> Es ist hier von DELAUNAY *Tree* die Rede, da der DAG einen Baum als aufspannenden Teilgraph enthält.

**Nächster Nachbar** Es erscheint zunächst naheliegend, den geometrisch nächsten Nachbarn unter den bereits in der Triangulierung befindlichen Punkten zu ermitteln und dessen adjazente Simplexe zu untersuchen. Betrachtet

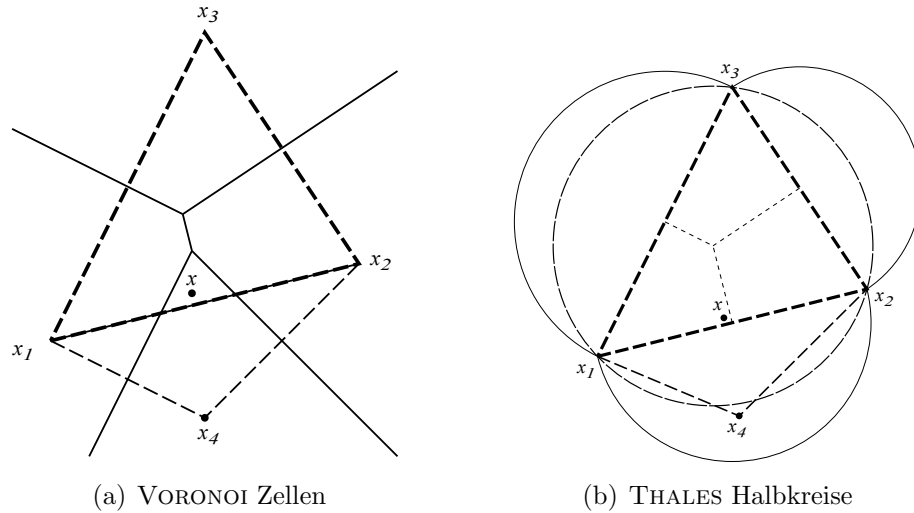


Abbildung 8.17: Nächster Nachbar

man Abb. 8.17(a), so stellt man fest, daß im gewählten zweidimensionalen Beispiel eine VORONOI-Zelle in ein DELAUNAY-Dreieck hineinragt. Für den eingezeichneten Punkt  $x$  ist der Punkt  $x_4$  der nächste Nachbar, obwohl er Element des Simplexes  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  ist<sup>12</sup>. Der Punkt  $x_4$  muß sich aufgrund des DELAUNAY-Kriteriums außerhalb des Umkreises von  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  befinden. Abb. 8.17(b) macht deutlich, daß sich ein Punkt  $x_4$ , der dieses Kriterium erfüllt, innerhalb des Thales-Halbkreises einer Kante befinden kann. Hierzu muß der gegenüberliegende Winkel des Dreiecks, welches  $x$  enthält, kleiner  $90^\circ$  sein und  $x$  sich entsprechend nahe dem Mittelpunkt der Kante befinden. Dieses Beispiel zeigt, daß ein geometrisch naher Punkt nicht topologisch nahe sein muß. Für gleichmäßig verteilte Punkte ist der nächste Nachbar dennoch eine mögliche Wahl für den Startknoten einer direkten geometrischen Suche. Aber auch eine Näherung des nächsten Nachbarn erscheint erfolgversprechend angesichts der Tatsache, daß auch beim nächsten Nachbarn selbst keine „Erfolgsgarantien“ existieren.

**Näherung für den nächsten Nachbarn** In [MSZ96] wird aus einer Anzahl beliebig gewählter Punkte der Triangulierung derjenige ausgewählt, der

<sup>12</sup> Es handelt sich hiermit also um keine PITTSWAY-Triangulierung, bei der jede interne DELAUNAY-Kante die assoziierte VORONOI-Kante schneidet.



die geringste Entfernung zum gesuchten Punkt besitzt. Anschließend wird ein „Simple Walk“ durchgeführt. Die Wahl des nächsten Nachbarn einer Teilmenge kann als eine Näherung für den nächsten Nachbarn aller Punkte betrachtet werden. Der im folgenden vorgestellte Algorithmus ist eine Spezialisierung der Wahl der Teilmenge.

Es seien alle Punkte einer zweidimensionalen Triangulierung in einem *Punkte-Quadtree* oder *Punkte-k-d Tree* gespeichert. Beide Datenstrukturen sind auf höherdimensionale Räume erweiterbar (*Punkte-Spacetree*). Statt eine Anzahl beliebig gewählter Punkte zu untersuchen, wird beim Einfügen derjenige Vorgänger des Punktes in der Baumstruktur ermittelt, der die geringste Entfernung aufweist. Entspricht der gesuchte Punkt einem Punkt der Triangulierung, so wird dieser direkt gefunden. Der ermittelte Startpunkt stellt ansonsten eine Näherung für den nächsten Nachbarn dar, der durch diese Datenstrukturen i. a. nicht direkt ermittelbar ist.

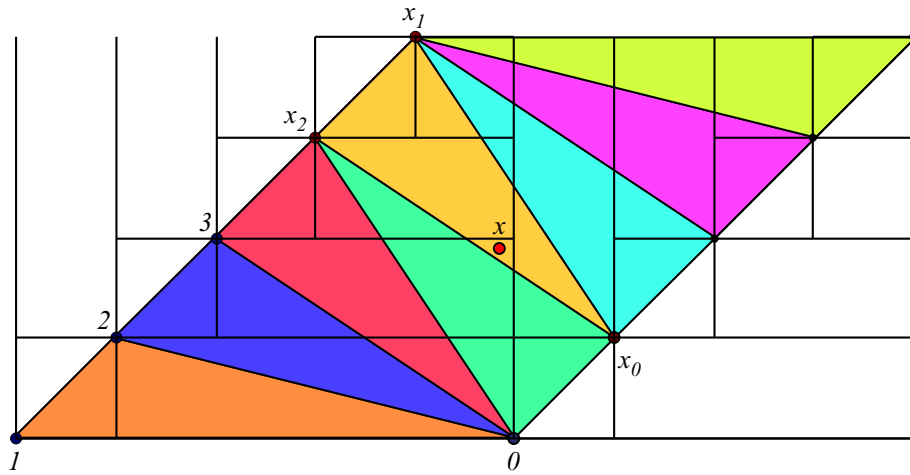
Die Datenstrukturen erzeugen implizit eine Zerlegung der Ebene bzw. eine Aufteilung in disjunkte Teilräume. Beim Einordnen eines neuen Punktes erreicht man den Teilraum, in dem dieser Punkt liegt und kann auf dem Weg dorthin einen zu diesem Raum inzidenten Punkt ermitteln. Um den eigentlichen nächsten Nachbarn mit Hilfe des Baums zu ermitteln, müßten auch die Nachbar-Teilräume ermittelt (s. Abschn. 6.4.2) und untersucht werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Simplizialkomplex heranzuziehen und den Abstand der adjazenten Punkte zu vergleichen, bzw. eine gerichtete Suche nach dem nächsten Nachbar durchzuführen. Dieser zusätzliche Aufwand scheint unangemessen, da nicht der nächste Nachbar, sondern ein geeignetes Startsimplex für die gerichtete Suche gefunden werden soll. Die implizite Zerlegung des Raums durch die Bäume und die Gebietszerlegung des Simplizialkomplexes sind allerdings inkompatibel, wie Abb. 8.18 zeigt. Es finden sich polygonale Überlappungsgebiete von Simplexen mit rechteckigen Gebieten des k-d Baums oder Quadrees, deren Knoten nicht inzident zu den Simplexen sind. Für Punkte, die in diesen Gebieten liegen, können die inzidenten Punkte des Simplexes, in dem sie liegen, nicht direkt durch die Datenstruktur ermittelt werden. In Abb. 8.18(a) und 8.18(b) ist jeweils ein solcher Punkt  $x$  in einem dreieckigen Überlappungsgebiet angegeben, dessen Simplex  $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$  nicht direkt gefunden wird.

**Komplexität** Das Einfügen eines Punktes in eine Baum-Datenstruktur erfordern einen Aufwand von  $O(\log N)$ . Der Startpunktes ist direkt beim Einfügen ohne Steigerung des Aufwands<sup>13</sup> ermittelbar.

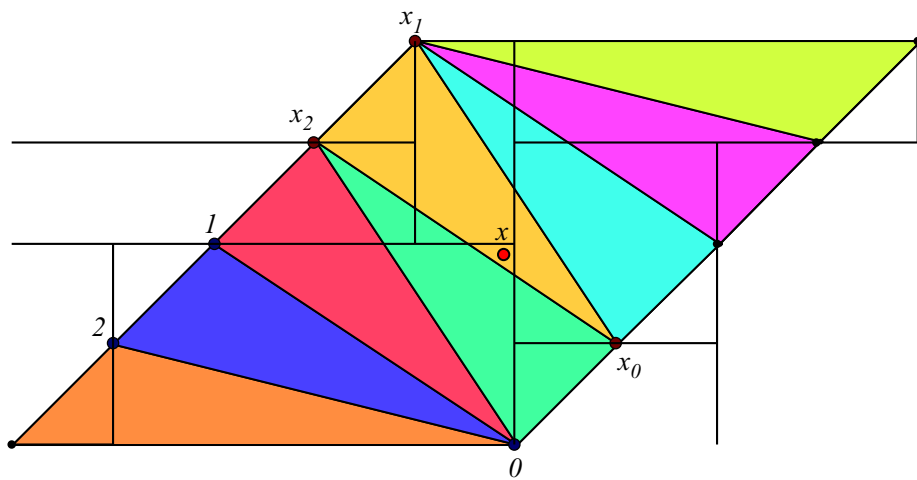
Nach der Bestimmung des Startpunktes wird im folgenden

---

<sup>13</sup> Eine Steigerung des Faktors geht nicht in die Komplexität ein.

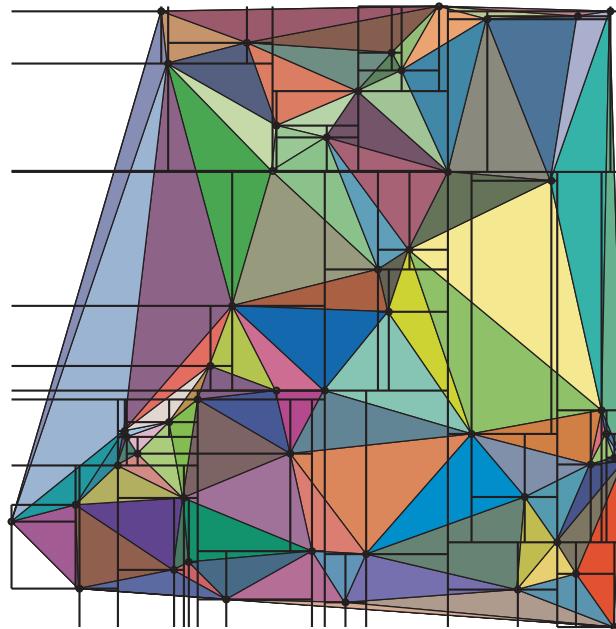


(a) Quadtree

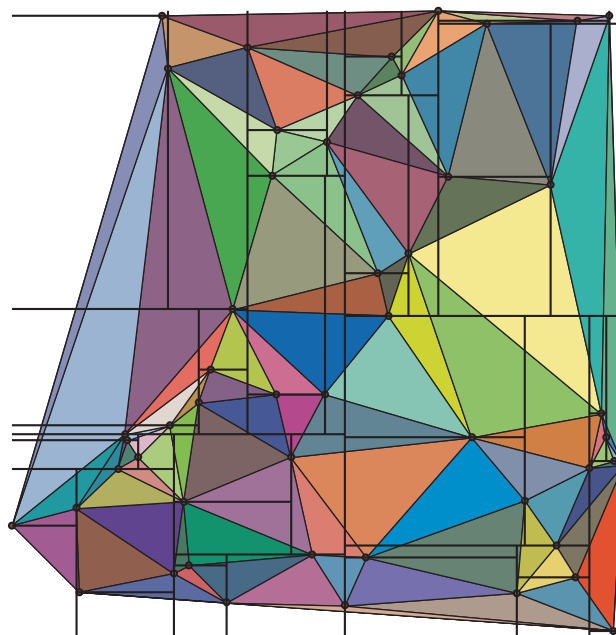


(b) k-d Baum (balanciert)

Abbildung 8.18: Gebietszerlegungen durch DELAUNAY-Simplizialkomplex und Punktebaum (implizit) für 10 Punkte



(a) Quadtree



(b) k-d Baum

Abbildung 8.19: Gebietszerlegungen für 50 zufallsverteilte Punkte

1. ein beliebiges inzidentes
2. das in der Richtung zum neu einzufügen Punkt liegende inzidente

Simplex als Startsimplex für eine gerichtete geometrische Suche gewählt. Für die gleichverteilten Punkte nach Abschn. 7.3 ergibt sich für beide Varianten eine konstante Komplexität des mittleren Suchaufwands für die gerichtete Suche ab dem Startsimplex nach Abb. 8.20 und 8.21. Der Vergleich zeigt, daß sich bei Auswahl des in Richtung auf den Zielpunkt liegenden Simplexes die mittlere Anzahl der Schritte zwar verringert, die Aufwand aber in beiden Fällen konstant ist. Die Ermittlung des entsprechenden Simplex benötigt ebenfalls Rechenschritte, so daß von dem beliebigen adjazenten Startsimplex ausgegangen werden kann. Die Komplexität für die Suche entspricht somit der Komplexität der Bestimmung des Startsimplex von  $O(\log N)$ .

#### 8.6.4 Einfügen von Punkten

Werden alle  $n$  Simplexe der Reihe nach linear abgesucht, ergibt sich eine Komplexität von  $O(n)$ . Speziell im Falle von cozirkularen Punkten ergibt sich ein numerisches Problem. Die Triangulierung ist nicht eindeutig und ein neuer cozirkularer Punkt liegt für alle Simplexe genau auf der Umsphäre. Diese Simplexe können alle gelöscht oder alle beibehalten werden. Wenn aufgrund von Rundungsungenauigkeiten einzelne Simplexe herausfallen, ergibt sich eine unzusammenhängende Menge von Simplexen.

Aufgrund der Komplexität und Stabilität wird ein Algorithmus gewählt, der zunächst das Simplex bestimmt, in welchem sich der neu einzufügende Punkt befindet und dann ausgehend von diesem Simplex das „Loch“ bestimmt, welches die zu löschenden Simplexe ausfüllt. Das Startsimplex wird nach dem in Abschn. 8.6.3 beschriebenen Algorithmus gesucht und muß auf jeden Fall gelöscht werden.

**SeedKill-Algorithmus:** Der anschließend ausgeführte „SeedKill“-Algorithmus ist an den in der Computergrafik bekannten „Seed-fill“-Algorithmus<sup>14</sup> angelehnt, der zum Ausfüllen einer umrandeten Fläche in einer Pixelgrafik verwendet wird (s. [FvFH96, S. 980]). Der Algorithmus färbt das Startpixel ein und ruft den Algorithmus rekursiv für alle Nachbarpixel auf, die nicht der Randfarbe bzw. der vorherigen Hintergrundfarbe entsprechen. Im Falle

---

<sup>14</sup> Eine Differenzierung zwischen „Boundary-fill“ und „Flood-fill“ ist hier nicht erforderlich.

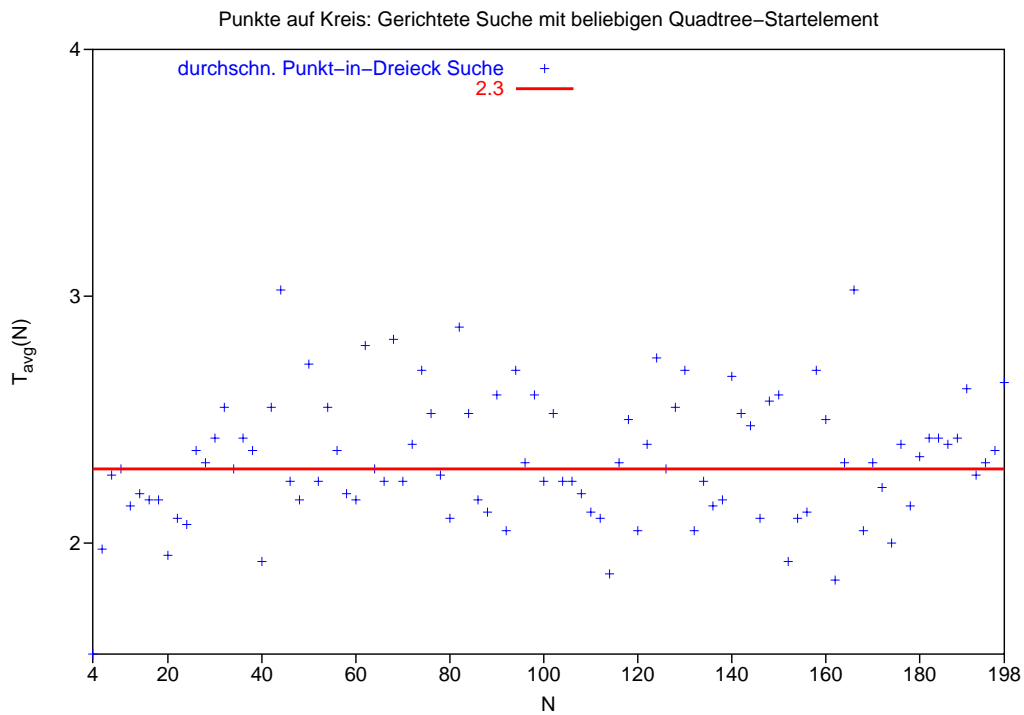
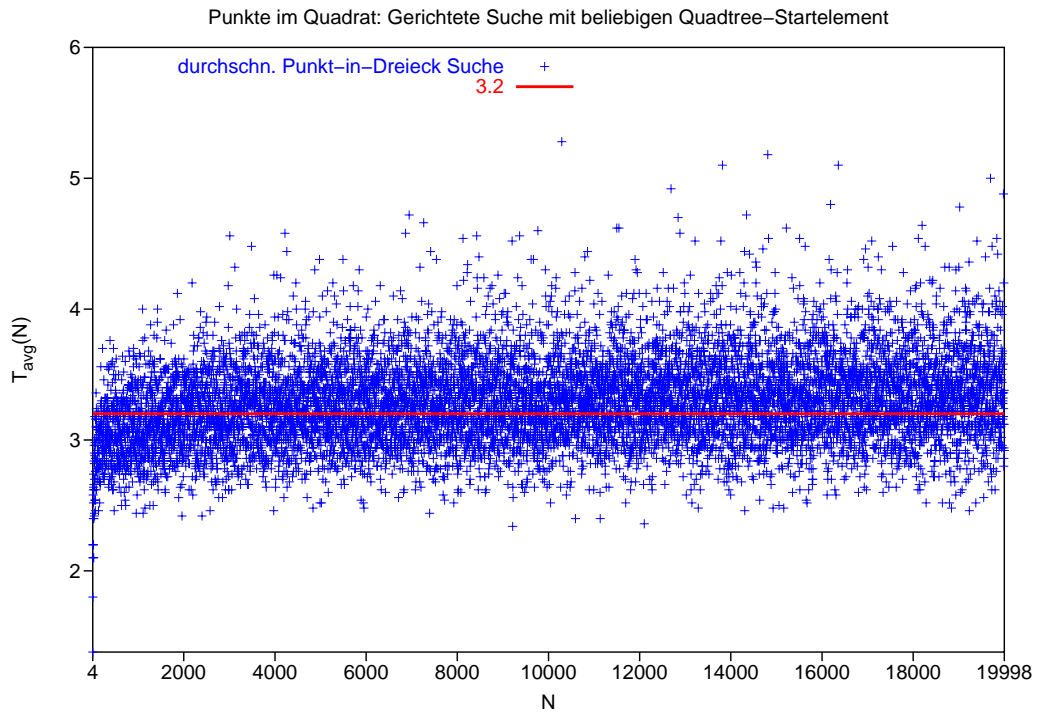
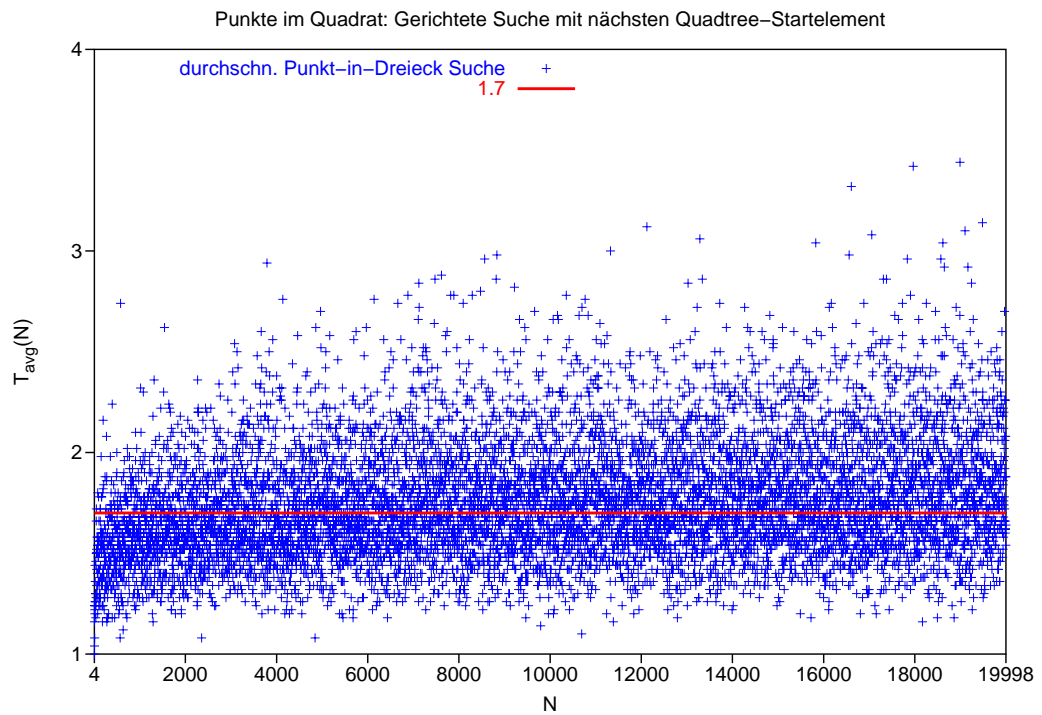
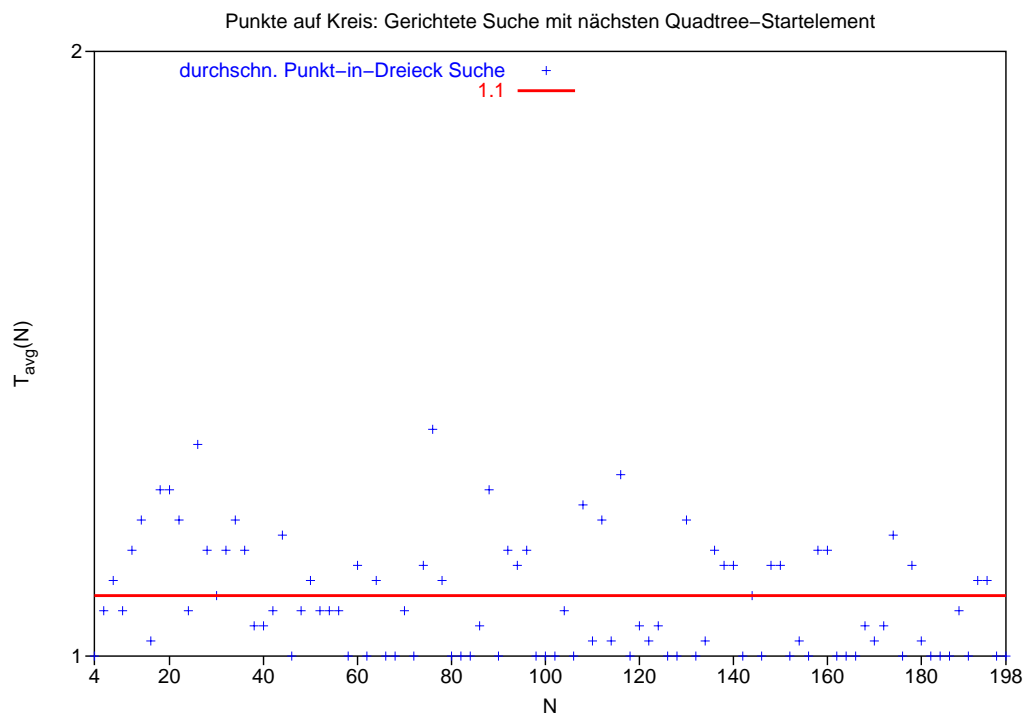


Abbildung 8.20: Gerichtete Suche zur Lokalisierung eines 2-Simplexes in einer DELAUNAY-Triangulierung nach Variante 1



(a) Punkte im Quadrat



(b) Punkte auf Kreis

Abbildung 8.21: Gerichtete Suche zur Lokalisierung eines 2-Simplexes in einer DELAUNAY-Triangulierung nach Variante 2

des Simplicialkomplexes unterscheidet sich die Topologie von der einer Normzellenzerlegung, wie sie bei einer Pixelgrafik vorliegt. Ein  $n$ -Simplex ist mit seinen  $n + 1$  Nachbarn direkt verbunden.

**Umsetzung** Das erste Simplex, das entfernt werden muß, ist das Simplex, in dem sich der neu einzufügende Punkt befindet. Die zu entfernenden Simplexe werden einer der rekursiven Prozedur übergebenen Liste angehängt. Es ist vorteilhaft der Prozedur den Vorgänger zu übergeben, von dem aus das aktuelle Simplex bestimmt wurde. Der Vorgänger muß bei einem weiteren rekursiven Aufruf nicht mehr berücksichtigt werden. Falls das Simplex selbst nicht mehr Element des zu löschenden Unterkomplexes ist und sich damit außerhalb des „Loches“ befindet, kann mit Hilfe des Vorgängers das Teilsimplex bestimmt werden, das zum Rand des Loches gehört. Diese Teilsimplexe haben aufgrund der Kohärenz die entgegengesetzte Orientierung zu den Randsimplexen des „Loches“. Eine weitere übergebene Liste sammelt diese Teilsimplexe des Randes. Alternativ hierzu könnten auch alle Teilsimplexe gesammelt werden und diejenigen, welche kohärent sind, als innere Facetten identifiziert und eliminiert werden. Der rekursive Prozedur wird durch eine Schleife und einen Stapel der noch zu bearbeitenden Elemente mit Vorgänger ersetzt. Solange sich Elemente im Stapel befinden, werden diese vom Stapel genommen und bearbeitet.

Am Ende können alle zu entfernenden Simplexe gelöscht werden. Das wird zeitverzögert ausgeführt, indem die Referenzen der zu löschenden Simplexe in einem Container gepuffert werden. Vor dem Einfügen werden jeweils alle Simplexe im Container, die vom vorausgehenden Einfügeprozeß herrühren, gelöscht und der Container geleert. Aufgrund der Nachbarschaftsrelationen existieren Verweise auf die Simplexe des „Loches“. Ein Simplex wird durch den Puffer erst dann gelöscht, wenn es keine solchen Verweise mehr gibt<sup>15</sup>. Über den Puffer kann abgefragt werden, welche Simplexe beim letzten Einfügeprozeß aus der Triangulierung entfernt wurden.

Der neue Punkt erzeugt mit den Teilsimplexen des Randes die neuen Simplexe. Falls die Nachbarschaftsrelationen gespeichert werden, müssen diese gesetzt werden. Hierbei wird der Graph der Nachbarschaftsrelationen der Randsimplexe, die homöomorph zur Sphäre sind, auf die neu erzeugten Simplexe übertragen. Die Referenzen der neu erzeugten Simplexe werden ebenfalls in einem Container abgelegt und können abgefragt werden. Zusammen mit den entfernten Simplexen ist es einfach möglich, den Einfügeprozeß rückgängig zu machen.

---

<sup>15</sup> Die „Garbage Collection“ (z. B. in Java) zum automatischen Löschen von Objekten löscht ebenfalls nur Objekte, auf die nicht mehr verwiesen wird.

Da die Anzahl der zu entfernenden Simplexe i. a. eine lokale Größe darstellt, wird die Komplexität des Algorithmus von der Lokalisierung des Startsimplexes bestimmt. Probleme, welche durch die rekursive Natur des „Seed-Kill“-Algorithmus resultieren, sind nicht kritisch.

### 8.6.5 Löschen von Punkten

Beim Löschen eines Punktes müssen zunächst die inzidenten Simplexe ermittelt werden. Im  $\mathbb{R}^2$  kann ausgehend von einem Startsimplex mit Hilfe des „Circulators“ über alle inzidenten Dreiecke iteriert werden. Für den  $\mathbb{R}^3$  ist ein Algorithmus analog zum bereits beim Einfügen von Punkten angesprochenen „Seedfill“-Algorithmus möglich, der alle inzidenten Tetraeder „einsammelt“. Ausgehend von einem Startsimplex werden rekursiv alle Nachbarn inzident zum zu löschenden Punkt abgearbeitet, die noch nicht besucht wurden. Für das Löschen eines Punktes muß auch das Löschen im Spacetree bzw. k-d-Baum implementiert sein.

### 8.6.6 Software-Entwurf

Eine Triangulierung ist ein simpliziale Zerlegung des Raums (s. Abschn. 3.4.1). Die Datenstruktur muß einen solchen Simplizialkomplex darstellen. Wie bereits in Abschn. 3.6 beschrieben wurde, können für ein orientiertes Simplex durch den Randoperator (s. 3.6 auf Seite 47) stets auch alle Teilsimplexe sowie deren Orientierung bestimmt werden. Es ist also ausreichend für einen  $d$ -Simplizialkomplex die Menge der  $d$ -Simplexe zu speichern. Die Komplexität zur Ermittlung von Adjazenzen ist allerdings mit  $O(n)$  für  $n$  Simplexe linear, da für die Bestimmung eines Nachbarn alle Simplexe nach dem entsprechend kohärent orientierten  $d - 1$ -Teilsimplex durchsucht werden müssen. Es bietet sich an Verweise zu den  $d + 1$  direkten Nachbarn eines  $d$ -Simplexes zu speichern. Dies wurde bereits in [Law77, S. 165f] für zweidimensionale Triangulierungen beschrieben. Die Nachbarschaftsverweise werden den gegenüberliegenden Knoten zugeordnet. Das Konzept entspricht der „Winged Representation“ aus [PBCF93] und wird auch in der CGAL-Bibliothek (s. [CGA01]) eingesetzt. Der 0-Simplex wiederum speichert genau einen  $d$ -Simplex, der zu ihm inzident ist. Weitere Simplexe können durch eine Breitensuche von diesem Startsimplex aus ermittelt werden. Im zweidimensionalen Fall sind alle inzidenten 2-Simplexe zirkular durchlaufbar und es kann eine Art *Iterator* (s. [GHJV96, S. 335ff]) bereitgestellt werden, der oft als „Circulator“ bezeichnet wird.

Nachbarschaftsrelationen werden z. B. für die gerichtete Suche in Abschn.



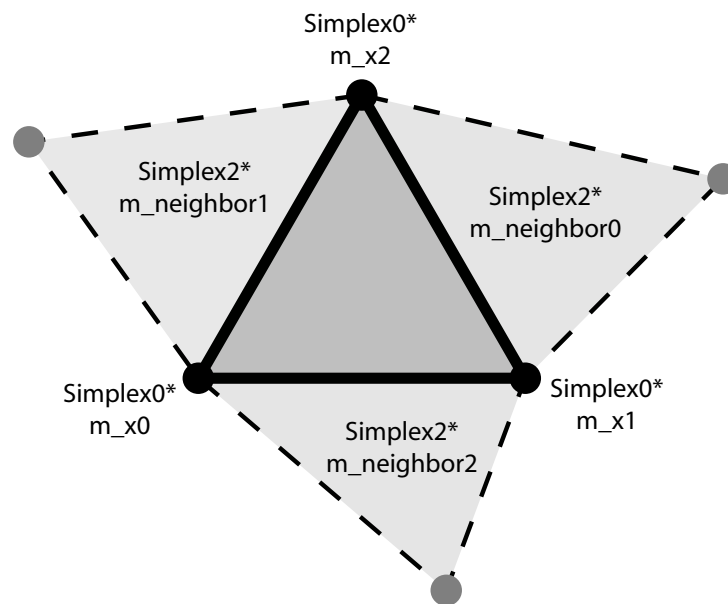


Abbildung 8.22: Datenstruktur für 2-Simplex

8.6.3 sowie für weitergehende Anwendungen wie Finite Elemente Berechnungen (s. Abschn. 5.5) benötigt.

Neben den topologischen Beziehungen müssen auch die geometrischen Eigenschaften festgelegt werden. Die Koordinaten eines Punktes werden im 0-Simplex als Attribut gespeichert. Eine Änderung der geometrischen Eigenschaften eines Punktes zieht i. a. eine Modifikation der DELAUNAY-Triangulierung nach sich. Die in einem DELAUNAY-Simplizialkomplex verwendeten 0-Simplexe lassen aus diesem Grund keine direkte Änderung der Geometrie zu. In diesem Fall muß der Punkt und die zugehörigen höherdimensionalen Simplexe entfernt und ein neuer Punkt eingefügt werden. Als Datentyp für die Koordinaten werden (doppeltgenaue) Gleitkommavariablen verwendet. Dies ist für die numerische Stabilität nicht unproblematisch, aber vorteilhaft für eine schnelle Verarbeitungsgeschwindigkeit.

Durch Generalisierung (s. [BRJ99, S. 68]) über Vererbung ist

- ein Punkt ein 0-Simplex
- eine Linie ein 1-Simplex
- ein Dreieck ein 2-Simplex
- ein Tetraeder ein 3-Simplex

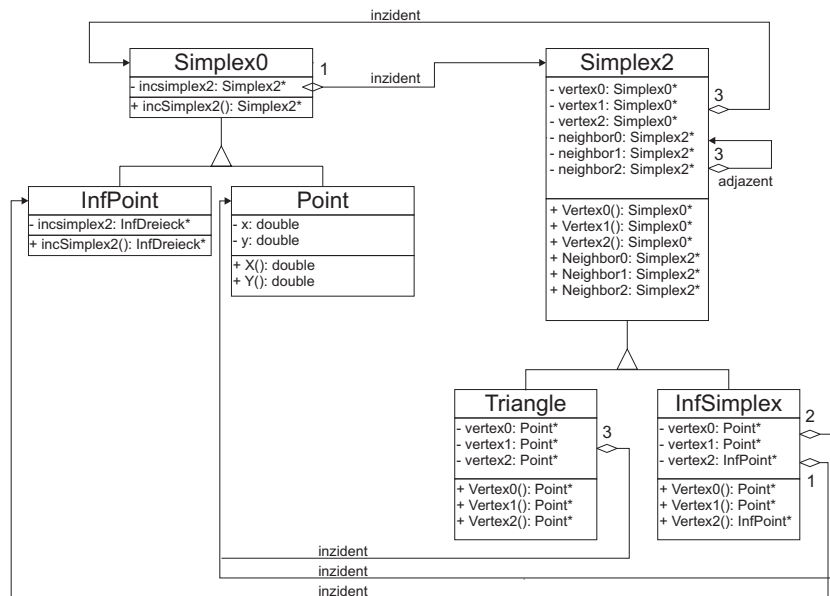


Abbildung 8.23: Versuch einer Trennung von Topologie und Geometrie durch Generalisierung

Der Versuch einer Umsetzung nach Abb. 8.23 bereitet in der verwendeten Programmiersprache C++ Probleme. Bei einem Dreieck ist ein Typumwandlung der abgeleiteten Simplex0-Verweise zu „Point“-Verweisen nötig. Parameterlose Methoden, mit denen diese Verweise abgefragt werden können, müßten mit geändertem Rückgabotyp überladen werden. Ein topologisches Objekt und das zugehörige geometrische Objekt können allerdings durch eigenständige, unabhängige Klassen modelliert und assoziativ verbunden werden.

In der Implementierung (s. Abb. 8.24) wurde auf eine Trennung von Topologie und Geometrie für das 0-Simplex verzichtet, da ein rein topologisches 0-Simplex nicht vorkommt. Alle höherdimensionalen Simplexe sind rein topologisch und bauen auf dem mit Geometriedaten attributierten 0-Simplex auf.

Der Nutzer der Triangulierungsklasse soll die Möglichkeit erhalten, die Objektklassen 0- und 2- bzw. 3-Simplex zu erweitern. Eine einfache Möglichkeit ist es einen Zeiger vorzusehen, der auf ein zusätzliches Attribut verweist. Um den untypisierten „void\*-Zeiger zu vermeiden, können abstrakte Basisklassen definiert werden, von denen die Attributierungsklassen abgeleitet werden können. Eleganter ist es allerdings, eigene Klassen für die Simplexe definieren zu können, die von vorgegebenen Basisklassen abgeleitet werden. Das wird durch eine *Fabrikmethode* (s. [GHJV96, S. 131ff]) bewerkstelligt,

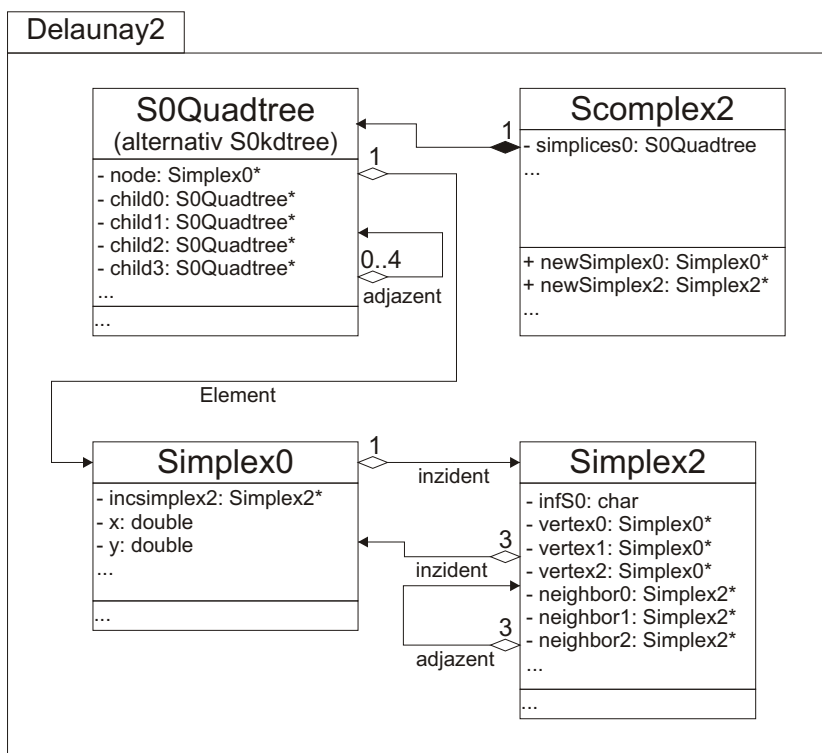


Abbildung 8.24: Umsetzung des zweidimensionalen Simplicialkomplexes

die vom Benutzer überladen wird, um die eigenen, vom den bereitgestellten Basistypen abgeleitete Simplexe zu erzeugen.

**Forderungen durch inkrementellen Aufbau** Geht man zunächst einmal davon aus, daß die Triangulierung ausschließlich durch Hinzufügen von Punkten aufgebaut wird, so stellt man fest, daß ein einmal erzeugtes 0-Simplex bestehen bleibt, die  $d$ -Simplexe aber auch wieder gelöscht werden und teilweise nur temporär existieren. Besonders für die  $d$ -Simplexe muß die gewählte Datenstruktur dynamisch aufgebaut sein, um Elemente auch effizient löschen zu können. Ein 0-Simplex, das durch die Koordinaten geometrisch attribuiert ist, darf nur einmal in der Triangulierung vorhanden sein. Doppeltes Einfügen eines Punktes muß demnach verhindert werden. Die verwendete Datenstruktur soll auch diesem Umstand Rechnung tragen. Fügt man die Eckpunkte in einen *Punkte- $k$ - $d$ -Tree* oder *Punkte-Quadtree* ein, so werden doppelte Punkte mit Aufwand  $O(\log(n))$  erkannt. Ansonsten erhält man das Startsimplex für eine gerichtete Suche zur Lokalisierung des Simplex, in dem der Punkt liegt (s. Abschn. 8.6.3).

Zur Ermittlung der zu entfernenden  $d$ -Simplexe nach Abschn. 8.6.4 muß untersucht werden, ob ein Punkt innerhalb der Umsphäre (s. 3.3.2) des Simplex liegt. Zur Steigerung der Verarbeitungsgeschwindigkeit können die Koeffizienten nach (3.22) bzw. (3.31) bei der Initialisierung des Objekts berechnet und gespeichert werden. Bei der Verwendung von relativen Koordinaten nach (3.27) bzw. (3.36) werden auch die Bezugskoordinaten gespeichert. Auch die Bestimmung der Entfernung eines Punktes von den Trägerebenen eines Teilsimplexes nach (6.8) bzw. (6.10b) kann beschleunigt werden, wenn die Koeffizienten wie (6.11) gespeichert werden. Hierbei muß ein erhöhter Speicherbedarf in Kauf genommen werden.

### Klassenübersicht

- $d$ -Simplizialkomplex
  - $k$ - $d$  Tree bzw. Quadtree für 0-Simplexe
  - Container für  $d$ -Simplexe
  - Fabrikmethoden zur Erzeugung der Simplexe
- $d$ -Simplexe
  - verweisen auf inzidente 0-Simplexe
  - verweisen auf Nachbarn

- 0-Simplexe
  - geometrisch attribuiert
  - verweisen auf einen  $d$ -Simplex
  - werden in Punkte-Spacetree gespeichert

**Affine Transformationen** Das VORONOI-Diagramm und somit auch der duale DELAUNAY-Simplizialkomplex sind invariant gegenüber Ähnlichkeitsabbildungen. Diese werden als Verkettung von Kongruenzabbildungen wie Verschiebungen und Rotationen und zentrischen Streckungen gebildet. Die Topologie ändert sich nicht und es ist ausreichend die geometrischen Attribute der 0-Simplexe anzupassen. Die baumartige Datenstruktur zur Speicherung der 0-Simplexe muß allerdings, ausgenommen für reine Translationen, neu aufgebaut werden, da diese sich am Basis-Koordinatensystem orientiert.

**Konformität** Konformität wird durch Verfeinerung nach Abschn. 8.5.2 auf Seite 161 erreicht. Der  $d$ -Simplex speichert für seine  $d - 1$ -Teilsimplexe, ob sie Teil eines vorgegebenen Randes sind. Durch Hinzufügen weiterer Punkte können Simplexe mit Rand-Teilsimplexen gelöscht werden. Diese Rand-Teilsimplexe werden in einer Warteschlange gesammelt und für jedes untersucht, ob es im Gerüst des Simplizialkomplexes enthalten ist. Falls nicht, wird die Konformität durch eine (rekursive) Verfeinerung wiederhergestellt. Alternativ ist auch die Verwendung einer DELAUNAY-Triangulierung mit Zwangsbedingungen nach Abschn. 8.5.1 auf Seite 159 möglich, bei der Rand-Teilsimplexe nicht gelöscht werden.



# Kapitel 9

## Ein Modellierer auf Basis simplicialer Zellzerlegung

### 9.1 Simpliciale Modellierung

Der Kern dieser Arbeit ist die *simpliciale Modellierung* als Teilbereich der geometrischen Modellierung (s. Kapitel 6). Ein Körper wird hierbei durch einen Simplicialkomplex (s. Abschn. 3.4.1) repräsentiert. Die simpliciale Modellierung wird in der Literatur zur geometrischen Modellierung nur selten und dann nur am Rande erwähnt (wie z. B. [BM01, S. 174]). Das ist aus heutiger Sicht erstaunlich, aus der Historie der Entwicklung heraus aber erklärbar (s. Abschn. 6.8). Der Beitrag von PAOLUZZI et al. ([PBCF93]) zur Umsetzung einer simplicialen Modellierung fand wenig Anklang. Das Thema wird hier wieder aufgegriffen, um Alternativen in der Vorgehensweise aufzuzeigen und die Vorteile der Methode im Hinblick auf numerisch, diskretisierende Verfahren aufzuzeigen. Der Kopplung zur numerischen Analyse wird bei der geometrischen Modellierung als Teilbereich des CAD meist eine untergeordnete Bedeutung beigemessen.

EDELSBRUNNER ([Ede94]) beschreibt mathematische Grundlagen der simplicialen Modellierung und erwähnt in diesem Zusammenhang auch die DELAUNAY-Triangulierungen. Die Zielsetzung ist hier mit Hilfe eines  $\alpha$ -Komplexes einen durch Punkte definierten Körper zu beschreiben. Eine ausführlichere, weitergehende Arbeit hierzu ist [Sha94].

Auf dem Gebiet der in Kapitel 8 vorgestellten DELAUNAY-Triangulierungen sind seither Fortschritte erzielt worden. Triangulierungen bilden die Basis simplicialer Modellierung und die besonderen Eigenschaften der DELAUNAY-Triangulierungen bieten Vorteile für numerische Verfahren (s. Kapitel 5).

In Abschn. 3.8 wurden bereits die Polyeder als dem Simplicialkomplex zu-

grundlegender triangulierbarer topologischer Raum eingeführt. Die Klasse der eben begrenzten Körper ist somit durch einen Simplizialkomplex darstellbar. Die betrachteten realen regulären Körper ergeben *orientierbare* Simplizialkomplexe, die im  $\mathbb{R}$  als  $d$ -Mannigfaltigkeit dargestellt werden können und *homogen* sind.

### 9.1.1 Direkte Darstellung

Eine Repräsentation des Körpers im  $\mathbb{R}$  durch einen  $d$ -Simplizialkomplex  $\mathbb{K}_d$  entspricht einer direkten Darstellung durch Zellzerlegung, wie sie bereits in Abschn. 6.4 für andere Zellzerlegungen vorgestellt wurde. Abb. 9.1(a) zeigt ein einfaches Beispiel im dreidimensionalen Raum und 9.2(a) sowie 9.3(a) zweidimensionale Gebiete. Dieser Ansatz wird in [PBCF93] verwendet.

### 9.1.2 Indirekte Darstellung

Simplizialkomplexe können auch zur indirekten Darstellung durch Oberflächenrepräsentation nach Abschn. 6.6 dienen. Hierzu wird ein Simplizialkomplex der Dimension  $d - 1$  verwendet. Dieser läßt sich durch Anwendung des Randoperators  $\partial$  auf den  $n$ -Simplizialkomplex der direkten Darstellung eindeutig bestimmen. Abb. 9.1(b), 9.2(b) und 9.3(b) zeigen hierfür Beispiele. Im Gegensatz zu den gängigen, auf CW-Komplexen basierenden Implementierungen der „Boundary Representation“, existieren nur Simplexe als Facetten. Man erhält im Vergleich zu den CW-Komplexen eine größere Anzahl Elemente, die alle topologisch gleich und einfacher aufgebaut sind. Das wirkt sich auch auf die zugrundeliegende Datenstrukturen aus. Im Bereich der 3D-Computergrafik-Hardware werden fast ausschließlich Dreiecke (2-Simplexe) zur Darstellung von Körper-Oberflächen verwendet. Die Oberfläche des Würfels aus Abb. 9.1(b) besteht z. B. aus 12 Dreiecken. Sie kann im Gegenzug auch mit 6 Vierecksfacetten dargestellt werden.

### 9.1.3 Modellierung des Raums

Analog zum Vorgehen für die Normzellenzerlegung (s. Abschn. 6.4.1) ist es auch möglich ein Gebiet darzustellen, welches den Körper enthält und die offenen Zellen mit den Attributen „innen“ und „außen“ zu versehen. Die Attributierung kann auch auf mehrere Materialien ausgedehnt werden. Der Rand  $\Gamma$  muß im  $d - 1$ -Gerüst enthalten sein und wird durch Teilsimplexe beschrieben. In Abb. 9.4(a) und 9.4(b) ist das für die konvexe Hülle des Körpers als Domäne gezeigt. Wird das Gebiet durch eine Triangulierung einer Punktmenge generiert, so muß diese Triangulierung *konform* zum Rand



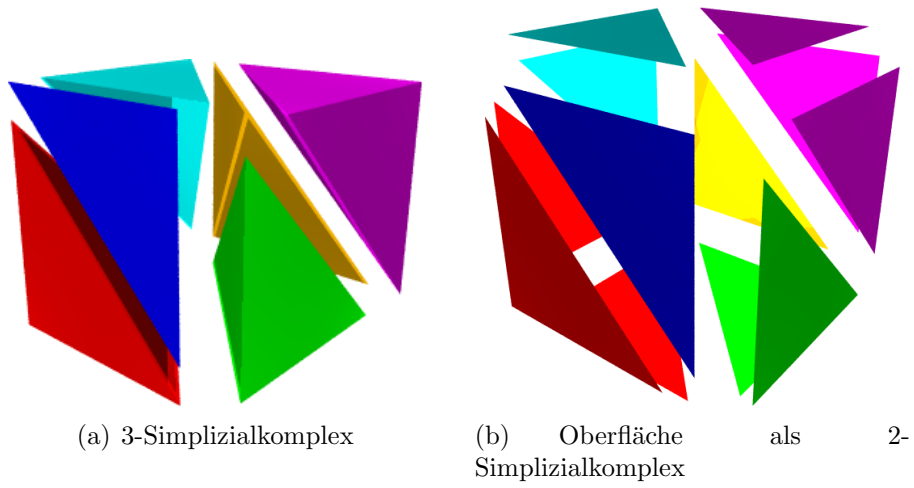


Abbildung 9.1: Würfel (Explosionszeichnung) und Oberfläche

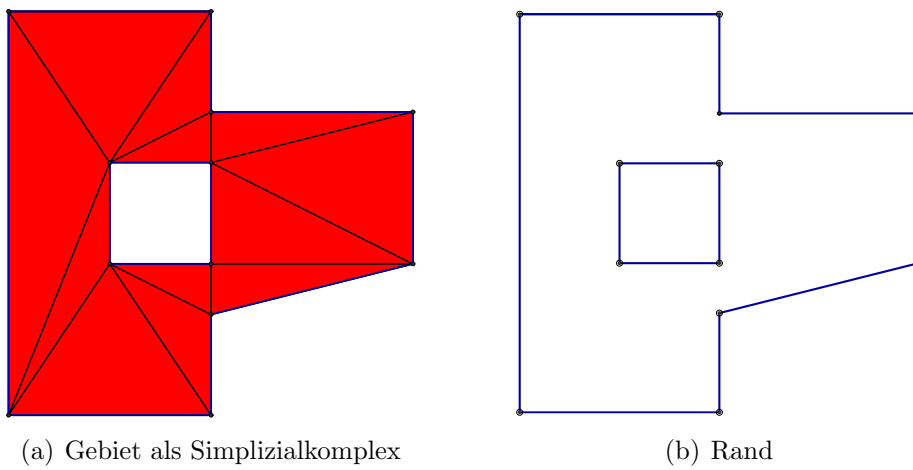


Abbildung 9.2: Wandscheibe

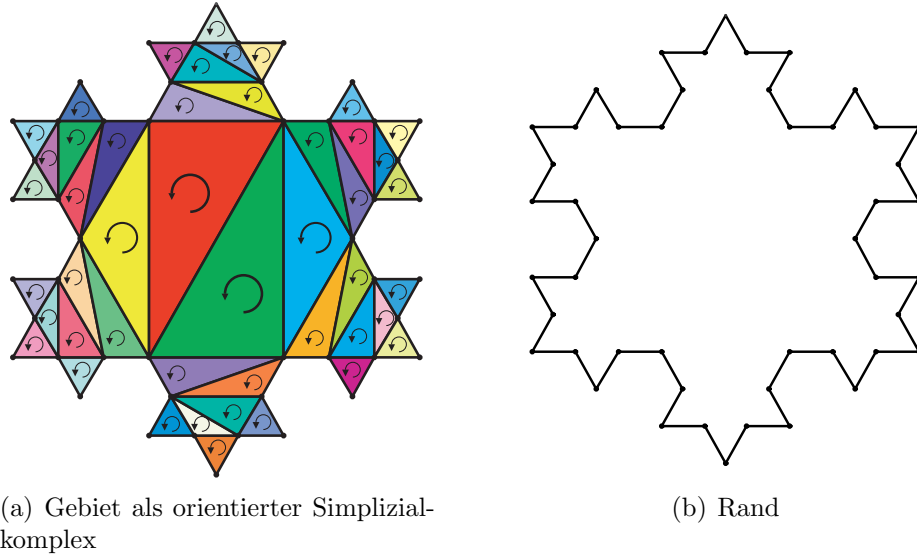


Abbildung 9.3: KOCHSche Schneeflocke

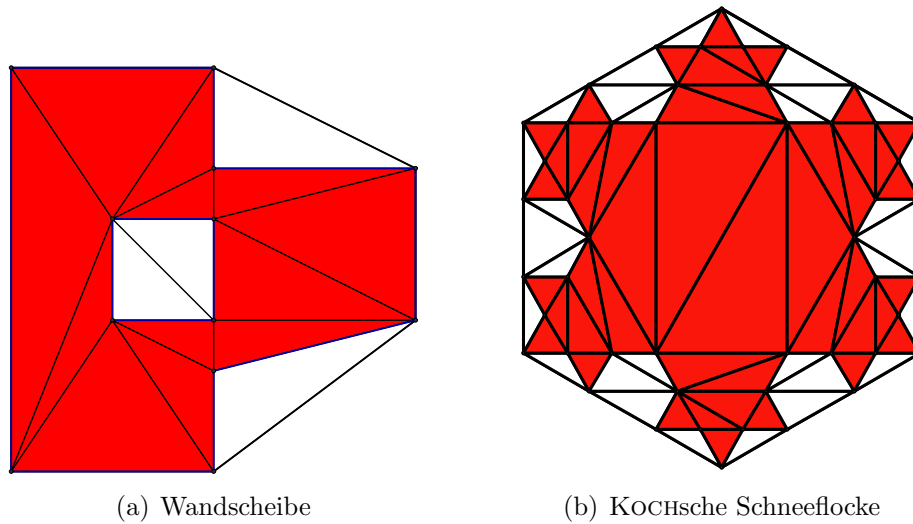


Abbildung 9.4: DELAUNAY-Triangulierungen

sein. In der vorliegenden Arbeit werden DELAUNAY-Triangulierungen (s. Abschn. 8) verwendet. Es wird hierbei das durch die Punkte definierte Polytop vernetzt und die Konformität durch zusätzliche Maßnahmen sichergestellt (s. Abschn. 8.5). Der Randoperator liefert auf den Simplizialkomplex angewandt den Rand des Polytops und damit die konvexe Hülle des Körpers. Der Rand des Körpers selbst ist nur noch als Grenzfläche zwischen Simplexen mit unterschiedlichen Attributierungen identifizierbar.

**Kompaktifizierung** Analog zur DELAUNAY-Triangulierung (s. Abschn. 8.2.3) bietet es sich an einen Abschluß des  $\mathbb{R}^d$  zu bilden, um eine Kompaktifizierung zu erreichen. Im Gegensatz zur Verwendung der konvexen Hülle als Domäne entledigt man sich somit jeglicher Beschränkung bei der Erweiterung des geometrischen Modells. Der Randoperator liefert, auf den zur Sphäre homöomorphen Simplizialkomplex angewandt, die leere Menge.

#### 9.1.4 Bewertung

Die Domäne der simplizialen Modellierung ist unbeschränkt. Körper, die der Klasse der Polyeder (s. Abschn. 3.8) angehören, sind exakt darstellbar. Gekrümmte Ränder können durch lineare Approximation angenähert werden. In Abschn. 9.5 wird eine Erweiterung vorgestellt, die eine exakte Modellierung von Körper mit gekrümmten Rändern erlaubt. Es existiert für allgemeine Triangulierungen keine Eindeutigkeit der Darstellung, da für einen topologischen Raum mehrere Möglichkeiten der Triangulierung bestehen. Bei der Verwendung einer DELAUNAY-Triangulierung wird hingegen bei allgemeiner Lage der Knoten eine Eindeutigkeit erzielt. Topologie und Geometrie sind getrennt. Eine (affine) Transformation des Körpers verändert die Repräsentation nicht, solange die relativen Entfernungen der Knoten zueinander nicht verändert werden. Ansonsten (z. B. durch Scherung) wird die DELAUNAY-Triangulierung allerdings zerstört. Die Darstellung selbst ist eindeutig und immer gültig.

#### 9.1.5 Anwendungen

**Visualisierung** Während des Konstruktionsprozesses ist die Visualisierung für die Kontrolle der einzelnen Schritte unerlässlich. Hier spielt im dreidimensionalen Raum allein die Oberfläche des Körpers eine Rolle. Diese reflektiert das Licht, das der Betrachter wahrnimmt und verarbeitet. Nicht jeder Teil der Oberfläche ist hierbei relevant. Im Simplizialkomplex, der den Körper darstellt, ist die Oberfläche Teil des Gerüsts und damit ein Unterkomplex, der extrahierbar ist. Visualisierungsbibliotheken und Computer-

hardware verwenden auf einer unteren Ebene meist Dreiecke. Hier zeigt sich die Kompatibilität mit der Welt der Simplexe. Im DELAUNAY-Simplizialkomplex gilt die „Infront“-Ordnungsrelation (s. Abschn. 8.3.3). Die Voraussetzung für einfache Tiefensortier-Algorithmen.

**Kollisionserkennung** Die direkte Repräsentation des Körpers erlaubt es für einen Punkt festzustellen, ob er sich innerhalb oder außerhalb des Körpers befindet. Hierzu ist beim Simplizialkomplex der Lokalisierungsalgorithmus und dessen Komplexität entscheidend. Da durch den Abschluß der gesamte Raum modelliert wird, sind zwei Körper immer kompatibel. Die Bildung einer Schnittmenge liefert die Durchdringung.

**Volumenberechnung** Die Volumenberechnung ist im Fall des Simplizialkomplexes die einfache Summe der Volumen aller innenliegenden Simplexe (s. Abschn. 3.3).

**Vom CAD zur numerischen Berechnung** Das physikalisch/mathematische Modell verlangt neben der geometrischen Modellierung des Gebiets auch die Modellierung der Randbedingungen und konstitutiven Gesetze. Dies ist die Arbeit des Berechnungsingenieurs, der das reine geometrische Modell anreichert. Die Randbedingungen stellen zusätzliche Anforderungen an die Konformität des Simplizialkomplexes, die durch Verfeinerungstechniken erreicht werden können. Materialeigenschaften werden im Simplex als zusätzliche Attribute gespeichert.

**Numerische Methoden** Zellzerlegungen sind auch die Grundlage für diverse, auf Diskretisierungen beruhende numerische Näherungsverfahren in der Strukturmechanik. Während die Oberflächendarstellung Assoziationen zur Randelementmethode (**B**oundary **E**lement **M**ethod) und die Normzellenzerlegungen zur **F**initen **D**ifferenzen **M**ethode weckt, sind Simplizialkomplexe offensichtlich für Finite Elemente Methoden (s. Abschn. 5.5) prädestiniert. Die FEM kann direkt auf einem Simplizialkomplex aufgebaut werden. Es können aber auch weitere Elementtopologien und damit CW-Komplexe, ausgehend von einem Simplizialkomplex, gebildet werden (z. B. ein Vierecksnetz aus einem Dreiecksnetz). Die DELAUNAY-Triangulierung dient, besonders im  $\mathbb{R}^2$  aufgrund der Winkelbedingung, bevorzugt als Ausgangspunkt für Verfeinerungen und Netzverbesserungen. Die indirekte Darstellung eines Körpers durch Oberflächenrepräsentation (s. Abschn. 6.6) ist weit verbreitet. Der Übergang zu einem FEM-Modell stellt aber einen Bruch dar, da dieses

auf einer Zellzerlegung aufbaut. Wird nun bei der Konstruktion des mathematisch/physikalischen Modells ein Simplizialkomplex zur Modellierung der Geometrie verwendet, ist das ein optimaler Ausgangspunkt zur Generierung des Diskretisierungsmodells. Besonders die DELAUNAY-Triangulierung bietet hier Vorteile. Aufgrund der Dualität zum VORONOI-Diagramm werden benachbarte Punkte zu Elementen zusammengefaßt.

Die netzfreien Methoden (s. Abschn. 5.7) profitieren von der Datenstruktur der DELAUNAY-Triangulierung, da die nächsten Nachbarn leicht gefunden werden. Die NEM baut sogar direkt auf den dualen VORONOI-Zellen auf. Die GFEM wiederum vereint Vorteile beider Methoden.

**Kopplung der simplizialen Modellierung mit der GFEM** Die in Abschn. 5.6 vorgestellte Generalisierte Finite Elemente Methode ist ein besonders geeignetes Berechnungsverfahren in Verbindung mit simplizialer Modellierung. Zunächst ist es möglich, direkt mit dem Simplizialkomplex zu arbeiten. Da die GFEM knotenzentriert aufgebaut ist, kann die in Abschn. 8.6.6 vorgestellte Datenstruktur als Basis verwendet werden.

Für eine numerische Berechnungen sollte der Fehler kontrolliert werden. Die adaptive Algorithmen (s. Abschn. 5.5) kontrollieren und verbessern einfache, grobe durch nachfolgende feinere Berechnungen. Hierzu wird die Diskretisierung des Funktionenraums durch die Wahl der Gebietsdiskretisierung und Ansatzfunktionen gesteuert. Um eine sinnvolle Adaption zu ermöglichen, muß das Gebiet bei möglichst exakter Repräsentation zu Beginn möglichst grob diskretisiert werden. Einen Fehler in der Geometrie kann der adaptive numerische Algorithmus nicht aufspüren, da er von einem anderen Modell ausgeht. Eine feine Startdiskretisierung im Gebiet ist hingegen unwirtschaftlich. Eine Verfeinerung wird durch den adaptiven numerischen Algorithmus gezielt vorgenommen.

Ein besonderer Augenmerk liegt auf die Trennung der Darstellung des Gebiets durch den Zellkomplex und der Wahl des Funktionenraums. So ist es möglich eine adaptive Verbesserung der Berechnungsergebnisse zu erzielen, ohne den Zellkomplex zu ändern. Bei der GFEM werden einfach globale Funktionen hinzugefügt, um neue Basis- bzw. Ansatzfunktionen zu generieren. Der Simplizialkomplex, für den die Gewichtungsfunktionen und damit die Träger der Ansatzfunktionen definiert sind, bleibt unverändert.

## 9.2 Konstruktives Vorgehen

### 9.2.1 Extrusion

Ein Konstruktionshilfsmittel, mit dem aus einem Körper der Dimension  $d$  ein Körper der Dimension  $d+1$  generiert wird, ist die Extrusion. Der Körper wird längs eines Weges verschoben und bildet eine Produkttopologie. Von jedem Simplex  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  des erzeugenden Körpers erfolgt eine Translation einer Kopie  $\langle \check{x}_0, \dots, \check{x}_n \rangle$ , die ebenfalls Teil des Randes des resultierenden Körpers ist. Der resultierende Simplizialkomplex aus einer Extrusion eines Simplex ergibt sich nach [PBCF93] durch

$$\mathbb{K}_{d+1}(s_d \times [0, 1]) = \{s^{(i)} \mid s^{(i)} = (-1)^{id} \langle x_i, \dots, x_d, \check{x}_0, \dots, \check{x}_i, 0 \leq i \leq d \rangle\} \quad (9.1)$$

wobei  $x_i \in K_0(s_d \times 0)$  und  $\check{x}_i \in K_0(s_d \times 1)$ . Ausgehend von einem DELAUNAY-Simplex erhält man im extrudierten Körper schwache DELAUNAY-Simplexe, da durch die leeren Umsphärenkugeln eines Simplexes und seiner Kopie eine leere Kugel der Dimension  $d+1$  konstruiert werden kann. Extrudiert man einen einzelnen Simplex, so sind die Umsphärenkugel der erzeugten Simplexe mit der Umsphärenkugel für alle 0-Simplexe, die in diesem Fall cozirkular sind.

Um einen kompaktifizierten, zu  $\mathbb{S}^d$  homöomorphen Simplizialkomplex nach Abschn. 9.1.3 zu extrudieren, werden zunächst für jedes Simplex  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  und  $\langle \check{x}_0, \dots, \check{x}_n \rangle$  durch Hinzunahme des „infinitesimalen Punktes“ ein Simplex  $\langle x_{inf}, x_0, \dots, x_n \rangle$  und  $\langle \check{x}_0, \dots, \check{x}_n, x_{inf} \rangle$  generiert. Es ist  $\check{x}_{inf} := x_{inf}$  und für infinitesimale Simplexe mit  $x_d := x_{inf}$  ist

$$\mathbb{K}_{d+1}(s_d \times [0, 1]) = \{s^{(i)} \mid s^{(i)} = (-1)^{id} \langle x_i, \dots, x_d, \check{x}_0, \dots, \check{x}_i, 0 \leq i < d \rangle\} \quad (9.2)$$

Um bei der geometrische Modellierung eines Körpers im dreidimensionalen Raum die Extrusion verwenden zu können, wird der zweidimensionale Simplizialkomplex, der extrudiert wird, in den  $\mathbb{R}^3$  eingebettet. Hierzu werden ein Koordinatenursprung und zwei orthogonale, normierte Richtungsvektoren in der Ebene als Basis definiert und gespeichert. Die zweidimensionalen Koordinaten dieser Ebene können in dreidimensionale Koordinaten des  $\mathbb{R}^3$  transformiert werden.

**Beispiel** Gegeben sei ein zweidimensionaler Simplizialkomplex nach Abb. 8.6 mit einem Simplex  $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$  und drei infinitesimalen Simplexen  $\langle x_{inf}, x_0, x_1 \rangle$ ,

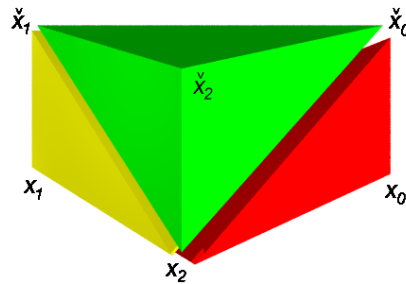


Abbildung 9.5: Extrusion eines 2-Simplex

$\langle x_{inf}, x_1, x_2 \rangle$  und  $\langle x_{inf}, x_2, x_0 \rangle$ . Der Simplex wird nach  $\langle \check{x}_0, \check{x}_1, \check{x}_2 \rangle$  kopiert. Bei der Erzeugung des Simplicialkomplexes werden zunächst die infinitesimalen Simplexe

- $\langle x_{inf}, x_0, x_1, x_2 \rangle$  und
- $\langle x_{inf}, \check{x}_0, \check{x}_1, \check{x}_2 \rangle$

erzeugt. Die infinitesimalen Simplexe liefern nach (9.2) jeweils zwei infinitesimale Simplexe:

- $\langle x_0, x_1, x_{inf} \rangle$ :
  - $\langle x_0, x_1, x_{inf}, \check{x}_0 \rangle$
  - $\langle x_1, x_{inf}, \check{x}_0, \check{x}_1 \rangle$
- $\langle x_1, x_2, x_{inf} \rangle$ :
  - $\langle x_1, x_2, x_{inf}, \check{x}_1 \rangle$
  - $\langle x_2, x_{inf}, \check{x}_1, \check{x}_2 \rangle$
- $\langle x_2, x_0, x_{inf} \rangle$ :
  - $\langle x_2, x_0, x_{inf}, \check{x}_2 \rangle$
  - $\langle x_2, x_{inf}, \check{x}_2, \check{x}_0 \rangle$

Durch  $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$  erhält man nach (9.1)

- $\langle x_0, x_1, x_2, \check{x}_0 \rangle$ ,
- $\langle x_1, x_2, \check{x}_0, \check{x}_1 \rangle$  und
- $\langle x_2, \check{x}_0, \check{x}_1, \check{x}_2 \rangle$ .

Es ergeben sich 3 Simplexe und 8 infinitesimale Simplexe.

### 9.2.2 Schnitt

Gegeben sei ein Simplizialkomplex der Dimension  $d$  und eine Hyperebene der Dimension  $d - 1$ . Die Schnittmenge der Hyperebene mit dem Simplizialkomplex bildet einen Polyederkomplex der Dimension  $d - 1$ . Wird ein Simplex von einer Ebene geschnitten, so resultiert ein Polyeder niedriger Dimension. Im zweidimensionalen Raum bildet die Schnittmenge einer Gerade mit einem Dreieck (2-Simplex) eine Strecke (1-Simplex), einen Punkt (0-Simplex) oder die leere Menge. Im dreidimensionalen schneidet eine Ebene einen Tetraeder (3-Simplex) in einem Dreieck (2-Simplex) oder Viereck, einer Strecke (1-Simplex), einem Punkt (0-Simplex) oder der leeren Menge. Das Viereck kann einfach durch Hinzufügen einer Diagonalen in zwei Dreiecke aufgeteilt werden und man erhält so einen Simplizialkomplex.

Zur Berechnung wird für jeden Punkt des Simplexes bestimmt, in welchem Halbraum er in Bezug auf die Schnittebene liegt oder ob er Element der Schnittebene selbst ist. Das kann über den vorzeichenorientierten Abstand (6.5) erfolgen<sup>1</sup>. Es werden alle Paare von Punkten ermittelt, die sich in unterschiedlichen Halbräumen befinden bzw. ein unterschiedliches Vorzeichen aufweisen. Für diese Punktepaare  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  bestimmt man den Schnittpunkt der entsprechenden Strecke bzw. Gerade mit der Ebene durch  $\vec{x}_0$  mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$ . Die Geradengleichung  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$  kann in die Ebenengleichung (6.4) eingesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned} \vec{n}(\lambda_S(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \vec{x}_1 - \vec{x}_0) &= 0 \\ \lambda_S &= \frac{\vec{n}(\vec{x}_0 - \vec{x}_1)}{\vec{n}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \end{aligned} \quad (9.3a)$$

und für den Schnittpunkt

$$\vec{x}_S = (1 - \lambda_S)\vec{x}_1 + \lambda_S\vec{x}_2 \quad (9.3b)$$

Das resultierende Polytop definiert sich durch

- die Eckpunkte des Simplexes, die sich auf der Schnittebene befinden, sowie
- die Schnittpunkte der Strecken.

Bei der geometrischen Modellierung dreidimensionaler Körper erhält man nach einer Triangulierung einen in den  $\mathbb{R}^3$  eingebetteten zweidimensionalen Simplizialkomplex, der schon in Abschn. 9.2.1 beschrieben wurde. Abb. 9.6

---

<sup>1</sup> Für die Bestimmung ob ein Punkt auf der Ebene liegt, ergeben sich hier numerische Probleme.



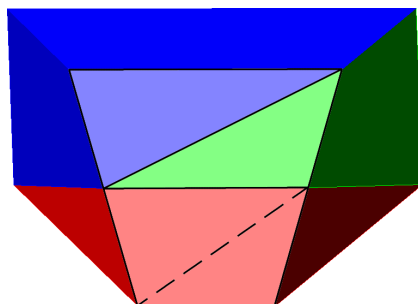


Abbildung 9.6: Ebener Schnitt durch Simplicialkomplex aus Abb. 9.5

zeigt einen einfachen Körper, der durch einen Simplicialkomplex mit drei Tetraedern beschrieben wird und mit einer schräg verlaufenden Ebene geschnitten wird. Die resultierenden zwei Dreiecke, sowie das Rechteck, welches noch in zwei Dreiecke aufgeteilt werden muß, bilden den zweidimensionalen Schnitt-Simplicialkomplex.

### 9.2.3 CSG-Konstruktion

Zur Eingabe und Bildung komplexerer Körper der Dimension  $d$  dient die syntaktischen Modellierung (s. Abschn. 6.3). Als Grundkörper wird das  $d$ -Simplex gewählt:

$\langle \text{Objekt} \rangle$	::=	$\langle \text{Primitiv} \rangle \mid \langle \text{Objekt} \rangle \langle \text{op} \rangle \langle \text{Objekt} \rangle$ $\mid \langle \text{Objekt} \rangle \langle \text{transformation} \rangle$
$\langle \text{Primitiv} \rangle$	::=	Simplex (bzw. vordef. Simplicialkomplex)
$\langle \text{op} \rangle$	::=	$\cup^* \mid \cap^* \mid \setminus^*$
$\langle \text{transformation} \rangle$	::=	Translation $\mid$ Rotation $\mid$ Skalierung

Teilausdrücke können jeweils als  $d$ -Simplicialkomplex dargestellt werden. Auch die Berechnung des Gesamtausdrucks liefert einen Simplicialkomplex, der den Körper repräsentiert. Zur Auswertung muß eine BOOLEsche Algebra über die Klasse der Polyeder definiert sein (s. [PRS89]). Dabei werden ausschließlich Elemente gleicher Dimension  $d$  verknüpft.

In der praktischen Umsetzung wird die Domäne der Grundkörper auf Simplicialkomplexe erweitert und die Teilausdrücke können als neue Grundkörper gedeutet werden. Diese Bausteine sind in Variantenkonstruktionen einsetzbar. Eine Bauteilbibliothek kann die Konstruktion vereinfachen. Die Berechnung des Gesamtausdrucks liefert einen Simplicialkomplex, welcher den Körper repräsentiert.

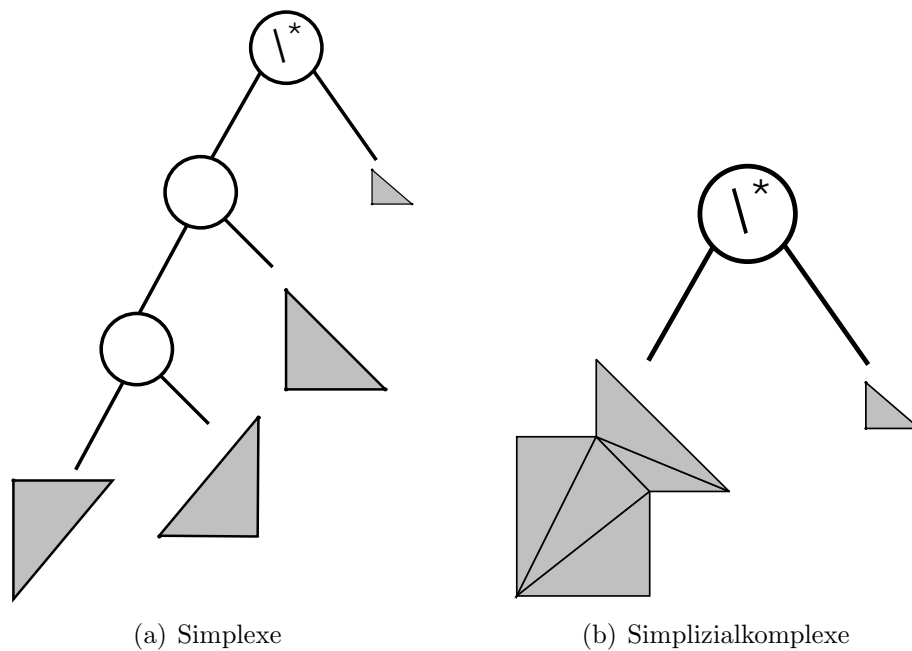


Abbildung 9.7: CSG Baum basierend auf Simplizialkomplexen

### 9.3 Software-Entwurf

Die eigentliche Repräsentation eines  $n$ -dimensionalen Körpers ( $n \in \{2, 3\}$ ) erfolgt über  $n$ -Simplizialkomplexe, die durch DELAUNAY-Triangulierungen und den vorgestellten Algorithmen gewonnen werden. Die hierfür verwendete Datenstruktur wird in Abschn. 8.6.6 vorgestellt. Der umgesetzte Hybridmodellieren, der auf die Kombination mit der syntaktischen Modellierung setzt, ist in Abb. 9.8 skizziert. Die  $n$ -Simplexe erhalten eine Eigenschaft, die sie als innen oder außen liegendes Simplex kennzeichnen oder nicht definiert ist. Hierfür ist eine Spezialisierung des Simplex aus der Triangulierung nötig. Da die  $n - 1$ -Teilsimplexe nicht explizit gespeichert werden, muß vom  $d$ -Simplex auf ein Objekt mit diesbezüglichen Zusatzattributen verwiesen werden. Das gilt z. B. für BÉZIER-Kontrollpunkte zur Darstellung gekrümmter Ränder. Eine Eigenschaft zur Kennzeichnung des Randes ist nicht nötig, da über die Nachbarschaftsrelationen ermittelt werden kann, ob sich das Nachbarsimplex innen oder außen befindet.

Die Wurzel des CSG-Baums repräsentiert den resultierenden Körper, innere Knoten temporär, während der Konstruktion auftretende Körper und die Blätter Primitive bzw. Variantenbausteine. Die Dimension der Elemente des CSG-Baums ist konstant.

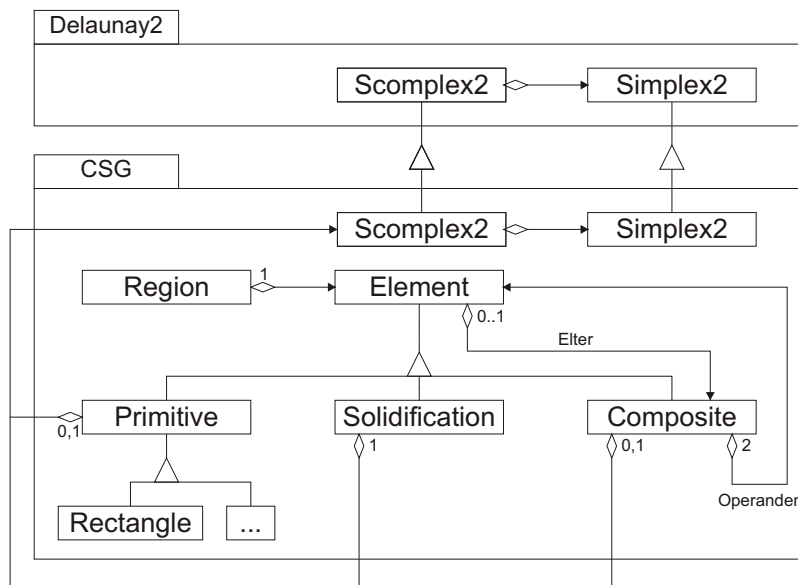


Abbildung 9.8: Umsetzung des Hybridmodellierers

**Primitive** (Klasse „Primitive“) werden durch Parameter spezifiziert. Eine Kugel kann z. B. durch die Mittelpunktskoordinaten und dem Radius beschrieben werden. Im CSG-Baum sind Primitive die Blätter und enthalten somit keine Verweise auf Kindelemente. Da eine Vielzahl von Primitiven existieren, erfolgt für die einzelnen Arten eine Spezialisierung durch Vererbung.

**Zusammengesetzte Körper** (Klasse „Composite“) stellen während der Konstruktion temporär auftretende Teilkörper (innere Knoten des CSG-Baums) oder den resultierenden Körper (Wurzel des CSG-Baums) dar. Für binäre Mengenoperatoren sind zwei Verweise auf Kindelemente nötig.

Transformationen können als unäre Operationen ebenfalls als innere Knoten des CSG-Baums modelliert werden. Ähnlichkeitsabbildungen können direkt auf die 0-Simplexe und BÉZIER-Punkte angewendet werden, da die DELAUNAY-Triangulierung invariant gegenüber diesen Transformationen ist. Für Transformationen, welche Längenverhältnisse zwischen den Punkten verändert, muß eine neue DELAUNAY-Triangulierung durchgeführt werden.

Die Frage, ob sich ein Punkt innerhalb oder außerhalb des Körpers befindet, kann bereits berechnet werden, indem durch die implizite Modellierung der Primitive für jedes Blatt eine Entscheidung getroffen und in den inneren Knoten verknüpft wird.

Jedes Element des CSG-Baums enthält einen Verweis auf einen Simplizialkomplex. Dieser kann für ein Primitiv oder einen zusammengesetzten Körper auch „leer“ sein. Diese Elementtypen werden mit einem „Caching Mechanismus“ versehen. Der Simplizialkomplex wird berechnet und temporär gespeichert, wenn er benötigt wird. Eine BOOLEsche Variable zeigt als Eigenschaft an, ob der Simplizialkomplex erzeugt wurde und „up to date“ oder „nicht vorhanden“ ist. Bei einer Änderung (z. B. eines Parameters eines Primitivs) wird der temporäre Simplizialkomplex gelöscht und der Eigenschaftswert angepaßt. Beim nächsten Zugriff muß er wieder neu erzeugt werden. Für zusammengesetzte Körper ist bei solch einer Invalidierung eines Knotens auch der Elter-Knoten betroffen. Aus diesem Grund sind die Elterelemente mit den Kindelementen doppelt verkettet. Der ansonsten unübliche Verweis des Kindes auf das Elterelement im Baum dient zur rekursiven, im Baum aufsteigenden Invalidierung der vom Element abhängigen Elterelemente. Für die Wurzel ist der Verweis leer.

Die oben angesprochene Punkt-Lokalisierung wird bei Vorhandensein eines Simplizialkomplexes bevorzugt direkt mit dessen Hilfe beantwortet. Für Volumenberechnungen wird immer ein Simplizialkomplex erzeugt und das Volumen der inneren Simplexe aufaddiert.

**Umwandlung eines Teilbaums in einen Knoten:** Ein übergeordnetes Element kann in der Umsetzung in ein Blatt verwandelt werden: Falls der Simplizialkomplex nicht schon bereits existiert, wird er erzeugt und alle Kindelemente rekursiv gelöscht. Für das neu entstandene Blatt ist der Simplizialkomplex nicht mehr temporär und ein „Caching Mechanismus“ nicht mehr sinnvoll. Die Verwandlung vereinfacht den CSG-Baum. Durch das Löschen aller Kindelemente wird Speicherplatz frei. Ein Zugriff auf Teilkonstruktionselemente kann allerdings nicht mehr erfolgen. Der Körper wird bildlich gesprochen eingefroren bzw. er erstarrt. Die Klasse „Solidification“ stellt einen solchen erstarrten Körper dar, der sich ausschließlich auf einen Simplizialkomplex stützt.

Die Elemente des CSG-Baums besitzen also mehrere *Zustände* (s. [GHJV96, S. 398ff]). In der Modellierung wird für den CSG-Baum („Tree“) eine Aggregation des eigentlichen Elementes (Klasse „Element“) vorgenommen. Hierbei handelt es sich um eine Generalisierung der unterschiedlichen Typen der Primitive, zusammengesetzten und erstarrten Körper.

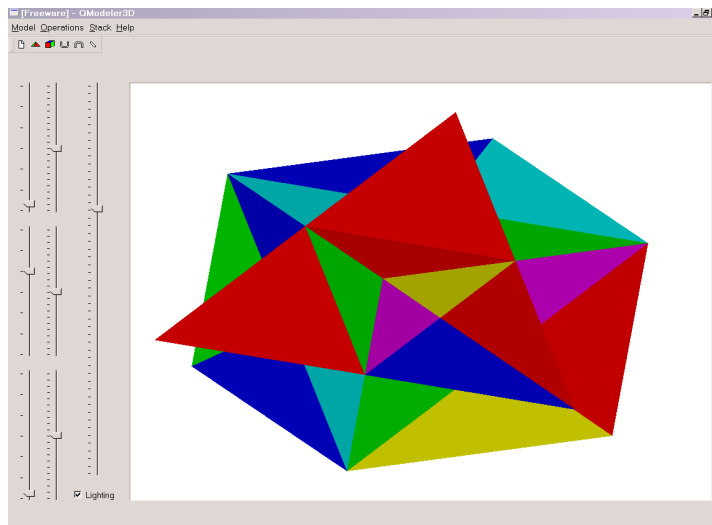


Abbildung 9.9: Vereinigung zweier Körper

## 9.4 Algorithmische Umsetzung

### 9.4.1 BOOLEsche Operatoren

Die offenen Simplexe werden mit „innen“ (i) und „außen“ (o) nach Abschn. 9.1.3 attribuiert. Für endliche Körper sind „infinitesimale“ Simplexe immer „außen“. Es sind weitergehende Attributierungen z. B. durch verschiedene Materialien möglich<sup>2</sup>. Für die Anwendung BOOLEscher Operatoren müssen dann aber alle Fälle definiert werden, was Probleme bereiten kann<sup>3</sup>.

Die BOOLEschen Operationen werden diskret auf der Basis der Simplexe durchgeführt. Abb. 9.10 zeigt das Vorgehen für das Komplement eines Körpers. Das Komplement ist ein unärer BOOLEscher Operator. Entsprechend der Vorschrift (s. Tabelle) wird jedem Simplex mit Attribut „i“ das Attribut „o“ und umgekehrt zugewiesen. Das Ergebnis wird in der Abbildung durch die Farbe repräsentiert und stellt einen Körper mit unendlicher Ausdehnung dar. Für die Abgeschlossenheit der BOOLEschen Operatoren, einschließlich des Komplements, ist es wichtig auch diesen Zustand darstellen zu können<sup>4</sup>.

Zur Ausführung von binären BOOLEschen Operatoren wird ein konformer Simplicialkomplex  $\mathbb{K}_d$  erzeugt (s. Abschn. 9.4.3), dessen Gerüst  $\mathbb{K}_{d-1}$  die

<sup>2</sup> z. B. Stahl, Holz, außen

<sup>3</sup> z. B. Stahl vereinigt mit Holz

<sup>4</sup> Auch für endliche Körper kann es ein Zwischenschritt einer Konstruktion sein.

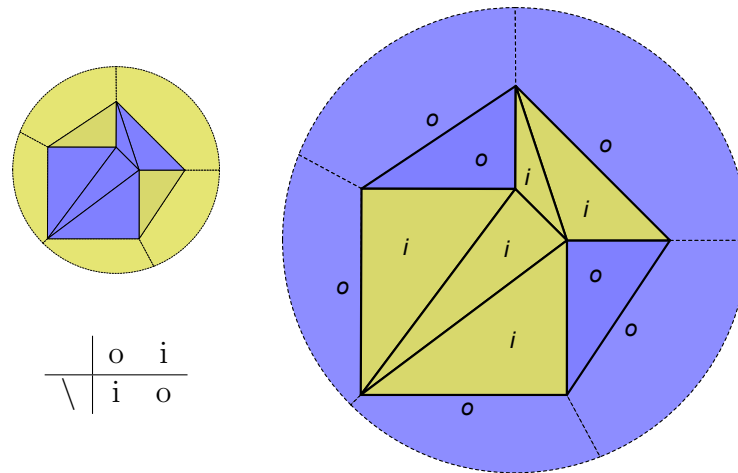


Abbildung 9.10: Komplement (unärer BOOLSCHER Operator) angewandt auf Simplizialkomplex

Ränder  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$  beider Operanden-Simplizialkomplexe  $\mathbb{K}_d^{(1)}$ ,  $\mathbb{K}_d^{(2)}$  enthält:

$$\Gamma^{(1)} \subseteq \mathbb{K}_{d-1}^{(1)} \qquad \Gamma^{(2)} \subseteq \mathbb{K}_{d-1}^{(2)} \qquad (9.4a)$$

$$\Gamma^{(1)} \subseteq \mathbb{K}_{d-1} \qquad \Gamma^{(2)} \subseteq \mathbb{K}_{d-1} \qquad (9.4b)$$

Durch eine Lokalisierung eines inneren Punktes (z. B. Schwerpunkt) für jedes Simplex des Ergebnis-Simplizialkomplexes in beiden Operanden-Simplizialkomplexen ist das Attribut für jeden Operanden zu bestimmen und das Ergebnisattribut kann entsprechend gesetzt werden. Abb. 9.11 zeigt einen konformen Ergebnis-Simplizialkomplex bei dem für jedes Simplex bestimmt wurde, ob es in den Operanden-Simplizialkomplexen innen oder außen liegt. Die Auswertung für binäre BOOLEsche Operatoren zeigt Abb. 9.12.

Eine Regularisierung nach Abschn. 6.2 ist gegeben, indem ein homogener Simplizialsimplex generiert wird. Mit der gewählten Datenstruktur nach Abschn. 9.3 bzw. 8.6.6 wird dies implizit erfüllt. Der aus Teilsimplex zusammengesetzte Rand wird nicht direkt abgespeichert, sondern ergibt sich aus den Simplexen.

### 9.4.2 Bestimmung von Verschneidungen

Die Erzeugung eines konformen Simplizialkomplexes  $\mathbb{K}_d$  aus Abschn. 9.4.1 ist aufbauend auf der Vereinigungsmenge der Körper-Ränder beider Operanden i. a. nicht möglich. Die Verschneidungen der Ränder müssen als Schnittmenge generiert und eingefügt werden (s. Abb. 9.13). Hierzu müssen die Ränder  $\Gamma^{(1)}$  und  $\Gamma^{(2)}$  aus den Operanden-Simplizialkomplexen extrahiert werden. Sind im

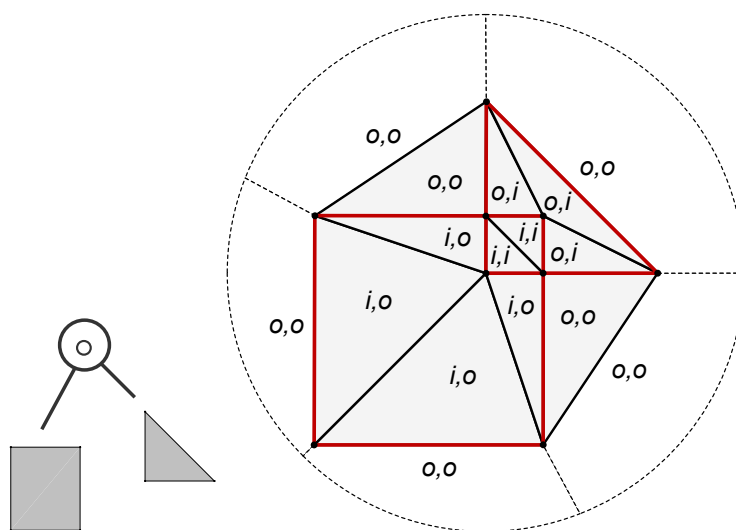


Abbildung 9.11: Bestimmen und Markieren innen- (i) bzw. außenliegender (o) Simplexe für Operanden

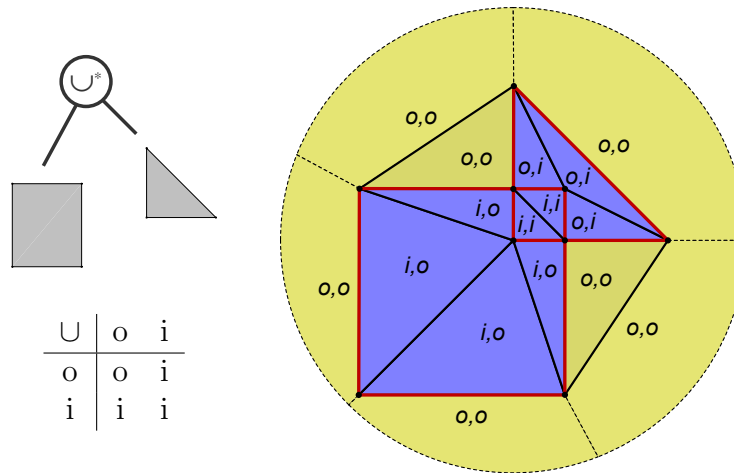
Inneren eines Körpers keine Punkte zugelassen, enthält jedes  $d$ -Simplex mindestens ein  $d - 1$ -Teilsimplex, das Element des Randes ist. Der Rand ist ein Simplizialkomplex der Dimension  $d - 1$ . Zur Bestimmung des Randes durchläuft ein Algorithmus, der dem „Seedfill“-Algorithmus (vgl. auch Abschn. 8.6.4) entspricht nach der Ermittlung eines inneren Startsimplex alle inneren Simplexe und sammelt alle Randfacetten<sup>5</sup>.

Die  $d - 1$ -Simplexe der Ränder müssen paarweise verschritten werden. Das erfordert für  $n$  Simplexe bei naiver Herangehensweise  $O(n^2)$  Tests. Die Komplexität kann wesentlich verbessert werden, indem ausgenutzt wird, daß bereits eine baumartige Datenstruktur der Punkte und Simplizialkomplexe der einzelnen Operandenkörper vorliegen.

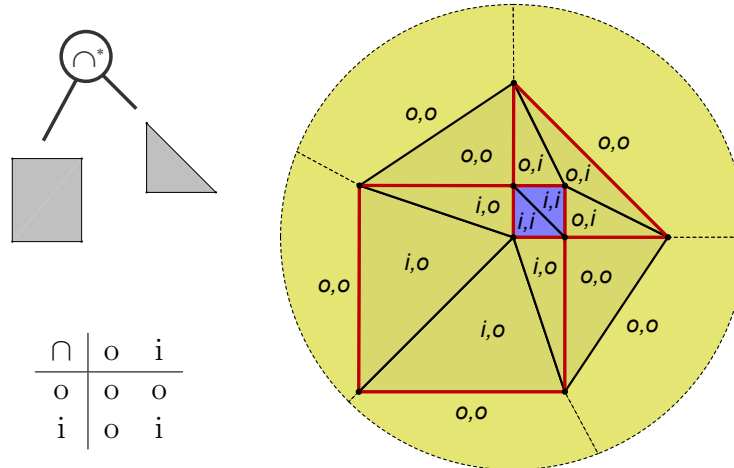
Für jede Randfacette wird ein Punkt im zweiten Operanden-Simplizialkomplex nach Abschn. 8.6.3 lokalisiert. Die Teilsimplexe des gefundenen Simplex, die zum Rand gehören werden mit der Randfacette getestet und Verschneidungen bestimmt. Nachbarsimplexe, welche die Randfacette schneiden werden weiter iterativ untersucht. Die Verschneidungen werden den Randfacetten zugeordnet.

Dieser Schritt wird in die folgende konforme Triangulierung integriert. Hier wird die Lokalisierung beim Einfügen des Punktes durchgeführt (s.

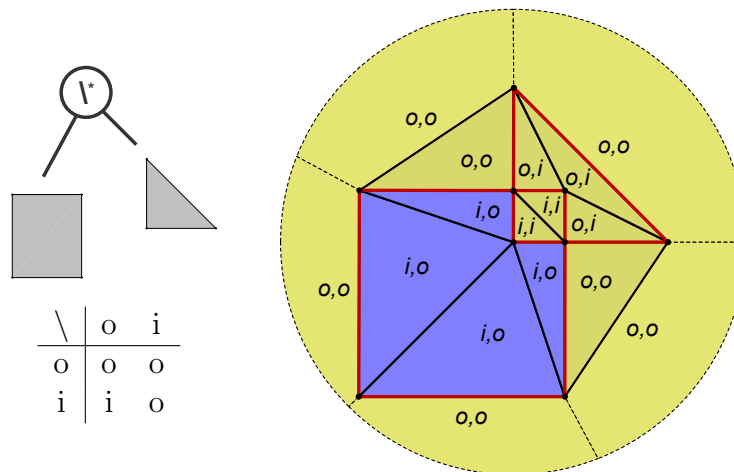
<sup>5</sup> Es wurden auch Experimente unternommen, den Rand in einer gesonderten Datenstruktur, dem „Arrangement“ zu speichern. Die Datenstruktur ist nicht gleichwertig zu einer Oberflächenrepräsentation, sondern eher zu einem einfachen Flächenmodell. Der Ansatz führt allerdings zu einer Redundanz der Datenhaltung.



(a) Vereinigung



(b) Durchschnitt



(c) Differenz

Abbildung 9.12: binäre BOOLSCHKE Operatoren angewandt auf konformen Simplicialkomplex



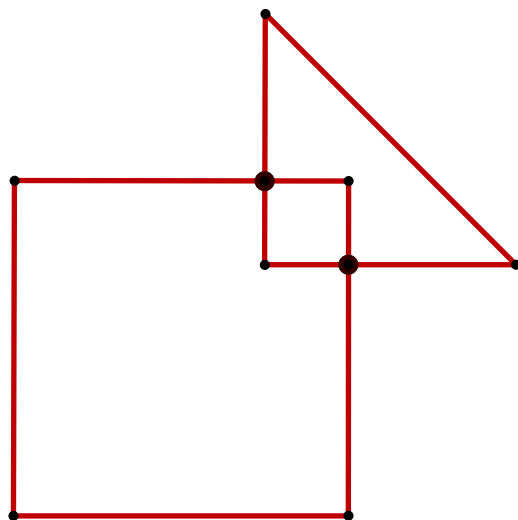


Abbildung 9.13: Bestimmung von Verschneidungen

8.6.3).

### 9.4.3 Konforme Triangulierung

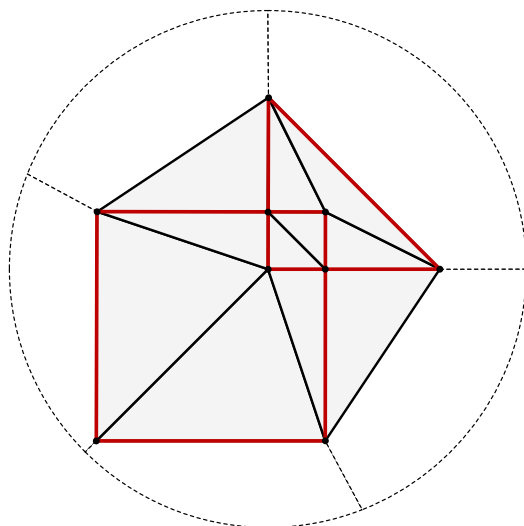


Abbildung 9.14: Konforme Triangulierung

Entscheidend für die Erzeugung des konformen Simplicialkomplexes  $\mathbb{K}_d$  aus Abschn. 9.4.1 ist es, daß die Ränder auch wirklich existieren (s. Abb. 9.14). Hierfür sind die in Abschn. 8.5 aufgeführten Techniken der DELAUNAY-

Triangulierung mit Zwangsbedingungen und der Verfeinerung einsetzbar. Es wird aus Gründen der Implementierung eine rekursive Strategie der Verfeinerung gewählt, die auch für gekrümmte Ränder einsetzbar ist. Details zur Einbeziehung von gekrümmten Rändern finden sich in Abschn. 9.5.

Durch die CSG-Struktur nach Abschn. 9.3 bleiben die Simplizialkomplexe der beiden Operanden erhalten. Der Simplizialkomplex eines Operanden (der größere) wird kopiert und die Punkte des anderen eingefügt.

Wurden die Verschneidungen bereits bestimmt, werden auch Verschneidungspunkte eingefügt und kontrolliert, ob die evtl. durch Verschneidungen zerteilten Randfacetten im Simplizialkomplex vorliegen.

Im folgenden soll der in Abschn. 9.4.2 beschriebene Schritt integriert werden. Hierzu werden beim Einfügen eines Punktes alle inzidente Randfacetten bestimmt und wie in 9.4.2 beschrieben durch die iterative schnittbasierten Technik aus Abschn. 8.5.2 zugleich Verschneidungen berechnet und die Konformität durch Verfeinerung sichergestellt. Beim Einfügen neuer Punkte wird kontrolliert, ob Randfacetten entfernt werden. In diesem Fall muß mit Hilfe einer Verfeinerung die entsprechende Randfacette wiederhergestellt werden.

Es ist denkbar, auch die Attributierung der neu erzeugten Simplexe im selben Schritt zu erledigen.

#### 9.4.4 Vergrößerung

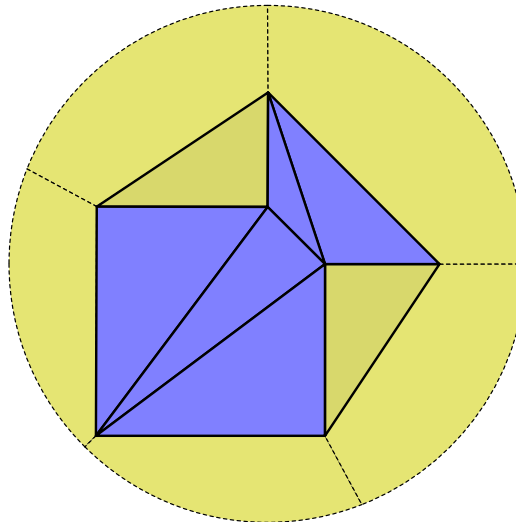


Abbildung 9.15: Vergrößerung des Simplizialkomplexes aus Abb. 9.12(a)

Innenliegende Knoten (und evtl. Zwangsbedingungen) können entfernt werden (s. Abschn. 8.4.2), falls ein Körper homogene Eigenschaften aufweist

und keine Abgrenzung in Teilkörper stattfindet. Durch die Elimination der innenliegenden Knoten wird zum einen die Anzahl der Knoten und Simplexe reduziert. Für Triangulationen im  $\mathbb{R}^2$  werden für jeden gelöschten Punkt zwei Dreiecke eingespart. Es wird aber vor allem sichergestellt, daß jedes Simplex einen Teil des Gebietsrandes  $\Gamma$  beinhaltet.

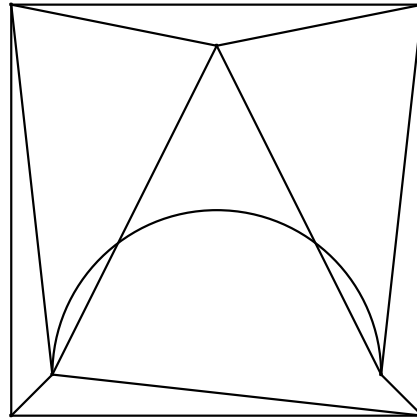
## 9.5 Berücksichtigung gekrümmter Ränder

Eine Zelle, deren Rand gekrümmt ist, kann von topologischer Sicht aus als äquivalent zur geradlinig berandeten Zelle angesehen werden, falls die Voraussetzungen der Zelle nach Abschn. 3.4.2 nicht verletzt sind: die Zelle muß homöomorph zur offenen Vollkugel sein. Die charakteristische Abbildung kann nur existieren, falls es keine Selbstüberschneidungen gibt. Ein (gekrümmtes) offenes  $n - 1$ -Teilsimplex eines  $n$ -Simplex darf ein weiteres  $n - 1$ -Teilsimplex nicht schneiden, da sonst singuläre Doppelpunkte vorliegen.

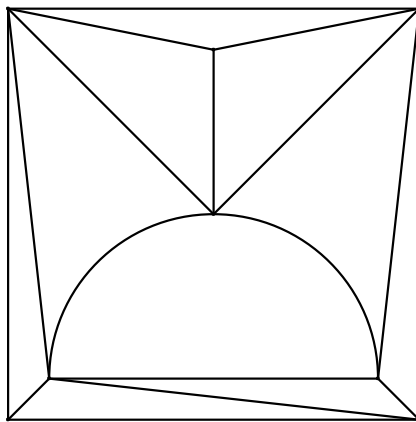
Die gekrümmten Ränder werden als (rationale) BEZIÉR-Kurven oder -Flächen nach Abschn. 4.3.2 dargestellt. Besonders vorteilhaft ist hier die „Konvexe Hülle“-Eigenschaft der Kontrollpunkte. Statt der eigentlichen Kurve oder Fläche kann das Polyeder der Kontrollpunkte getestet werden. Ist nur ein Teilsimplex gekrümmt, vereinfacht sich die Kontrolle auf einen Test, ob alle Kontrollpunkte innerhalb des Simplex oder des entsprechenden äußeren Halbraums des Teilsimplexes liegen. Die „infinitesimalen Simplexe“ enthalten nur ein geometrisch attributiertes Teilsimplex und kann keine Selbstüberschneidung aufweisen. Für den verwendeten kompakten  $n$ -dimensionalen Raum gehört jedes (gekrümmte)  $n - 1$ -Teilsimplex zu genau zwei  $n$ -Simplexen, die getestet werden müssen. Die geometrische Modellierung benötigt gekrümmte Teilsimplexe nur an den Rändern. Für ein Simplex, das mehrere inzidente gekrümmte Randsimplexe besitzt, wird eine Selbstüberschneidung vermieden, da sie bei der Verschneidung der Ränder behoben wird.

Wird eine Selbstüberschneidung festgestellt, ist das Vorgehen analog zur Sicherstellung der Konformität durch Verfeinerung nach Abschn. 8.5. Die rekursive Verfeinerung bewirkt für die gewählte gekrümmte Kante oder Fläche eine Linearisierung und Annäherung der konvexen Hülle der Kontrollpunkte an die wahre Kante oder Fläche.

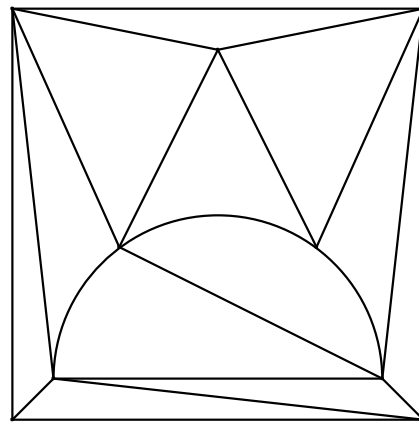
Die Lokalisierung eines Simplex mit gekrümmten Rändern kann in zwei Schritte aufgeteilt werden. Zunächst werden die gekrümmten Ränder vernachlässigt und die Lokalisierung nach Abschn. 8.6.3 durchgeführt. Aufgrund der gekrümmten Ränder kann sich der Punkt nun auch in einem benachbarten Simplex befinden. Dies wird in einem weiteren separaten Schritt getestet.



(a) Selbstüberschneidung



(b) Mittelpunkte



(c) Schnittpunkte

Abbildung 9.16: Vermeidung von Selbstüberschneidung durch Hinzufügen von Punkten

# Kapitel 10

## Zusammenfassung und Ausblick

Die geometrische Modellierung mit Simplizialkomplexen ist mathematisch fundiert und es ergeben sich aus theoretischer Sicht keine Bedenken für den Einsatz. Auch für die Praxis kann es ein leistungsfähiges Werkzeug für ein breites Anwendungsspektrum (s. Abschn. 9.1.5) sein. Erste Software-Prototypen bestätigen diese optimistische Sichtweise. Zur Untermauerung dieser Hypothese ist allerdings die Untersuchung weiterer Anwendungsfälle nötig. Ein auf dieser Technik aufbauender Modellierkern steht allerdings in Konkurrenz zu etablierten, am Markt befindlichen Systemen, die eine lange Entwicklungszeit hinter sich haben und entsprechend ausgereift sind. CAD-Systeme setzen üblicherweise ein Nebeneinander verschiedener Techniken in Form von Hybridmodellierer (s. Abschn. 6.7) ein, um für das heterogene, breite Feld der Anwendungen von geometrischer Modellierung gewappnet zu sein. Alternative Techniken stehen nicht im Widerspruch zu bestehenden, sondern können diese ergänzen. Ein weiterer Faktor sind die Fortschritte der Computerhardware. Der Standard-PC von heute entspricht einem Hochleistungsrechner von gestern. Das Anforderungsspektrum an die Algorithmen und Datenstrukturen verschiebt sich. Ein höherer Speicherverbrauch kann z. B. durch einfache, flexiblere Algorithmen wettgemacht werden.

Zur erfolgreichen Bearbeitung dieses Themas ist die Interdisziplinarität von Gebieten wie der Mathematik, der Informatik und des Ingenieurwesens nötig. Während die mathematischen Grundlagen schon gelegt sind, ist es vor allem die Informatik, bei der mit weiteren Neuerungen zu rechnen ist. Von den Entwicklungen auf dem Gebiet der Algorithmen für DELAUNAY-Triangulierungen profitiert auch der vorgestellte Ansatz zur simplizialen Modellierung. Parallel zu einer eigenen Umsetzung eines DELAUNAY-Triangulierers wurde auch alternativ die Bibliothek CGAL<sup>1</sup> eingesetzt.

---

<sup>1</sup> s. <http://www.cgal.org/>

Während die Umsetzung im zweidimensionalen Raum noch vergleichsweise einfach ist, ergeben sich im dreidimensionalen eine Reihe von Schwierigkeiten. Eine große Problematik stellt die Sicherstellung der Konformität dar. Die Triangulierung mit Zwangsbedingungen liefert zwar theoretisch die größten Triangulierungen, ist in der Praxis aber schwer zu verwirklichen. Im  $\mathbb{R}^3$  ist die Existenz einer solchen Triangulierung ohne Verfeinerung nicht gesichert. Aus diesem Grund wurde hier der Verfeinerungsansatz gewählt. Dieser kann aber theoretisch sehr feine Triangulierungen erzeugen und das Verfahren unwirtschaftlich machen.

Weitere Problematiken ergeben sich durch die gekrümmten Ränder. Im dreidimensionalen ergeben Verschneidungen von gekrümmten Oberflächen gekrümmte Kanten, welche im Simplizialkomplex berücksichtigt werden müssen. Verschneidungen von gekrümmten Rändern treten aber für traditionelle Ansätze ebenfalls auf. Die dort bereits erarbeiteten Lösungsansätze müssen aber meist noch auf die simpliziale Modellierung angepaßt und optimiert werden.

Die in Kapitel 9.4 vorgestellten Algorithmen können in ihrer Komplexität verbessert werden. Hier findet sich ein noch großes Potential zur Verbesserung der Gesamtkomplexität.

Ein eigenständiges Themengebiet ist die numerische Robustheit, die gerade in der computergestützten Geometrie ein großes Problem darstellt. Auch hier gibt es ein breites Feld an bereits publizierten Arbeiten, die angepaßt und implementiert werden können.

# Anhang A

## Ergänzende Kapitel

### A.1 EULER-Operatoren

EULER-Operatoren ermöglichen eine topologisch konforme Modifikation eines Polyeders. Gesucht ist eine Basis zum Teilraum  $\mathbb{N}^5$  der dreidimensionalen Polyeder. Wie bereits in Abschn. 3.8 angesprochen bildet dieser Teilraum eine Ebene im  $\mathbb{N}^6$  mit dem in (3.56a) angegebenen Normalenvektor. Die fünf gesuchten Basisvektoren müssen orthogonal zum Normalenvektor und linear unabhängig voneinander sein. Aus (3.51c) folgt, daß die Ebene durch den Nullpunkt geht und kein Ortsvektor benötigt wird. Jeder Basisvektor entspricht einer Operation. Eine mögliche Auswahl ist [Män83, S. 16, Table I] entnommen und in Tabelle A.1 mit den Abkürzungen der englischen Bezeichnungen aufgeführt (s. auch [MS82, Män88] bzw. [Mor85, AM91, BGZ96]).

Operation	v	e	f	s	h	r
mvfs	1	0	1	1	0	0
kvfs	-1	0	-1	-1	0	0
mev	1	1	0	0	0	0
kev	-1	-1	0	0	0	0
mef	0	1	1	0	0	0
kef	0	-1	-1	0	0	0
kemr	0	-1	0	0	0	1
mekr	0	1	0	0	0	-1
kfmrh	0	0	-1	0	1	1
mfkrh	0	0	1	0	-1	-1

Tabelle A.1: EULER Operatoren

Die lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren und des Normalenvektors

(3.56a) kann durch Bestimmung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

nachgewiesen werden. Weitere Vektoren in der Ebene sind linear abhängig. Die Basisvektoren entsprechen den Euler-Operatoren. Die Verwendung weiterer, linear abhängiger Euler-Operatoren kann die Konstruktion bei Erhaltung der Konsistenz des Modells vereinfachen, die Eindeutigkeit geht aber verloren.

**Make Vertex & Face & Shell / Kill Vertex & Face & Shell** Der *mufs*-Operator wird üblicherweise zu Beginn der Konstruktion eines Körpers verwendet. Aus dem leeren Modell wird ein Körper, der aus einem Vertex, einer Fläche und einer Oberfläche besteht. Einen solchen Körper kann man sich als eine Kugel vorstellen. Auch Hohlräume werden mit diesem Operator erzeugt. *kfs* bezeichnet den inversen Operator, der die Operation rückgängig macht und eine aus einer Fläche und einem Vertex bestehende Oberfläche löscht.

**Make Edge & Vertex / Kill Edge & Vertex** *mev* fügt eine weitere Kante an einen bestehenden Vertex an. Zunächst muß der zweite Vertex erzeugt werden. Eine Sonderform dieses Operators ist durch *semv* gegeben. Hier wird eine Kante geteilt („split edge“), indem ein Vertex („make vertex“) und eine weitere Kante erzeugt wird. *kev* löscht eine freie Kante mit dem entsprechenden Vertex. *jev* („join edge, kill vertex“) löscht einen Vertex mit Grad 2, und bei der Vereinigung eine der zwei adjazenten Kanten.

**Make Edge & Face / Kill Edge & Face** *mef* schließt einen Kantenzug mit einer neu erzeugten Kante und erzeugt hiermit eine neue Fläche. *kef* löst hingegen eine Fläche auf, indem er eine Begrenzungskante herausnimmt.

**Kill Edge & Make Ring / Make Edge & Kill Ring** Ist der äußere Rand einer umschlossenen Fläche durch eine Kante mit dem äußeren Rand der umschließenden Fläche verbunden, so entsteht beim Löschen dieser Kante mit *kemr* eine Fläche in einer Fläche. *mekr* hingegen löscht ein Loch in einer Fläche, indem durch eine Kante eine einfach zusammenhängende umschließende Fläche entsteht.



**Kill Face & Make Ring & Hole / Make Face & Kill Ring & Hole**  $kfmrh$  löscht eine Fläche und läßt den äußeren Rand Loch einer anderen Fläche werden. Hierbei entsteht ein Volumenloch und das Geschlecht des Körpers wird inkrementiert.

In [Wei86, S. 151] wird ein leicht modifizierten Satz an EULER-Operatoren verwendet. Hier werden der äußere Rand einer Fläche sowie die *ring*-Elemente unter dem Begriff *loop* zusammengefaßt. Beim Erzeugen einer Fläche oder statt eines *rings* muß ein *loop* erzeugt werden. Die Unterscheidung zwischen Flächen-*loop* und ring-*loop* ist implizit durch die Reihenfolge der Entstehung gegeben: der erste loop einer Fläche ist deren äußerer Rand. Analog können die *shells* „Hohlraum“ und „äußeren Rand eines Körpers“ unterschieden werden.

Auf zweidimensionale Flächen bezogene Euleroperatoren stellen sicher, daß (3.57) erfüllt wird. Hierfür sind vier linear unabhängige Operatoren nötig. Zunächst einmal muß eine Fläche generiert werden, die (3.57) erfüllt, wie z. B. ein 2-Simplex mit 3 Knoten, 3 Kanten, einer Fläche und einer Zusammenhangskomponente. Für eine zusammenhängende Fläche ohne Löcher sind ausgehend von einer bereits bestehenden Fläche die beiden bereits vorgestellten Operatorenpaare  $mev/kev$  und  $mef/kef$  ausreichend. Ein Loch kann erzeugt werden, indem man eine Flächen löscht:  $mrkf$  (make ring, kill face). Entsprechend schließt  $krmf$  ein Loch. Wird eine Zusammenhangskomponente in zwei Teile zerschnitten, so muß die Schnittkante dupliziert werden. Es entstehen beim  $mves$  also  $n$  neue Knoten,  $n - 1$  Kanten und eine neue Zusammenhangskomponente, die beim Zusammenfügen durch  $kves$  gelöscht werden. Diese Auswahl stellt eine Möglichkeit linear unabhängiger Euleroperatoren in der Ebene dar.

Euler-Operatoren sichern die topologische Korrektheit des Modells. Ist ein Oberflächennetz gegeben kann auch in einem inversen Schritt festgestellt werden, ob das Netz korrekt ist und gegebenenfalls eine Sequenz von Euleroperatoren ermittelt werden, die dieses Netz erzeugen (s. [Mä83]). Die reverse Ausführung von inversen Operatoren ermöglicht es, eine Veränderung rückgängig zu machen (s. [TSUC86]).

### A.1.1 Beispiele zur Konstruktion mit EULER-Operatoren

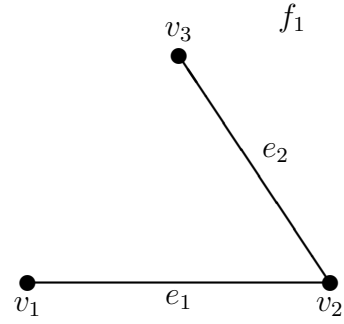
#### Tetraeder

Zur Konstruktion eines Tetraeders benötigt man 7 Operationen:

1.  $mvfs$  erzeugt  $v_1, f_1$  und die Hülle

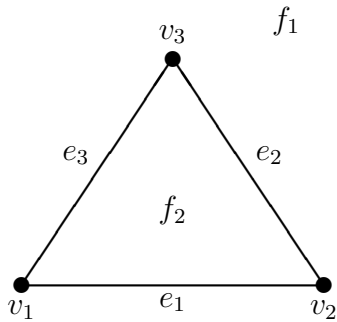


2.  $mev$  erzeugt  $e_1, v_2$



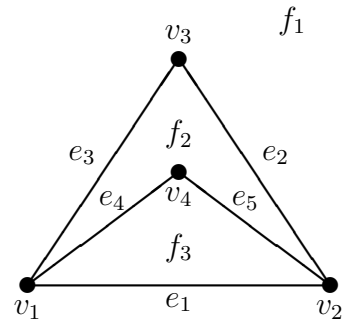
3.  $mev$  erzeugt  $e_2, v_3$

4.  $mef$  erzeugt  $e_3, f_2$

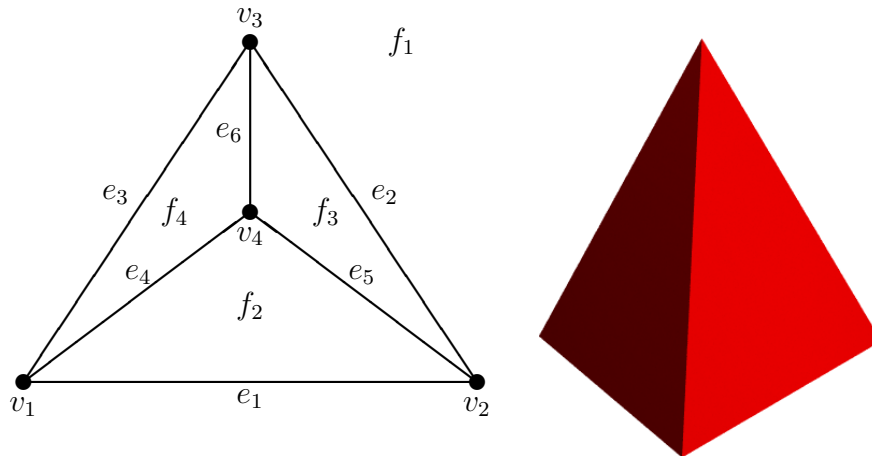


5.  $mev$  erzeugt  $e_4, v_4$

6.  $mef$  erzeugt  $e_5, f_3$



7.  $mef$  erzeugt  $e_6, f_4$

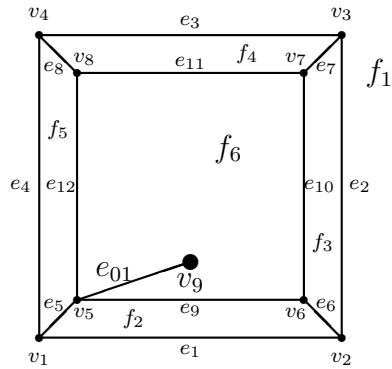


Werden die Abbildungen als Draufsichten interpretiert, kann die im ersten Schritt erzeugte Fläche  $f_1$  als Grundfläche angesehen werden.

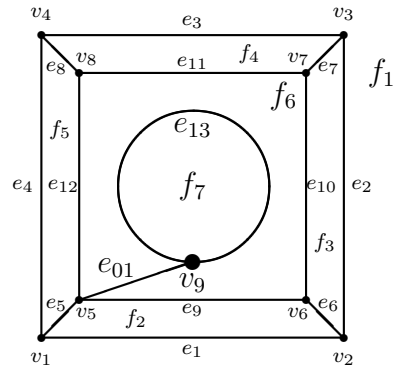
### Würfel mit Durchbohrung

Der Würfel wird in 13 Schritten analog zum Tetraeder in Abschnitt A.1.1 konstruiert. Im folgenden werden die Schritte zur Konstruktion einer zylinderförmigen Durchbohrung dargestellt.

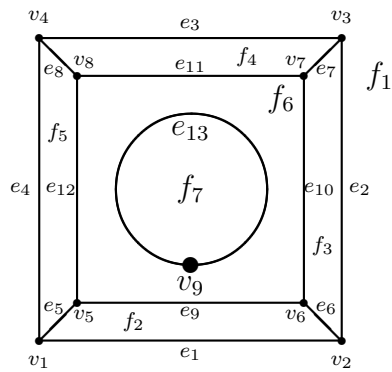
1.  $mev$  erzeugt  $e_{01}, v_9$



2.  $mef$  erzeugt  $e_{13}, f_7$



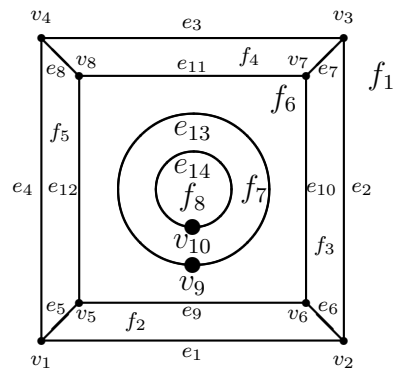
3.  $kemr$  löscht  $e_{01}$   
und definiert  $f_7$  in  $f_6$



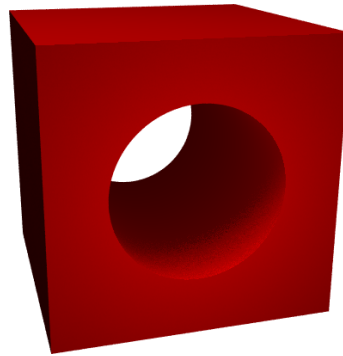
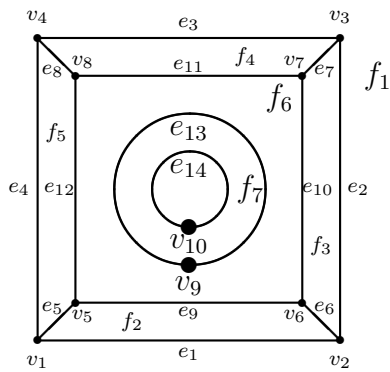
4.  $mev$  erzeugt  $e_{02}, v_{10}$

5.  $mef$  erzeugt  $e_{14}, f_8$

6.  $kemr$  löscht  $e_{02}$   
und definiert  $f_8$  in  $f_7$   
Man erhält einen Würfel mit Vertiefung



7.  $kfmrh$  löscht  $f_8$   
 und definiert dessen Umgrenzung als  
 Loch von  $f_1$ .  
 Hierdurch wird eine Durchbohrung er-  
 zeugt.





# Abbildungsverzeichnis

3.1	dualer Graph . . . . .	13
3.2	gerichteter Graph . . . . .	16
	(a) Variante 1 . . . . .	16
	(b) Variante 2 . . . . .	16
3.3	Räume . . . . .	17
3.4	Gummituch-Topologie . . . . .	20
	(a) Ausgangszustand . . . . .	20
	(b) topologische Abbildung . . . . .	20
3.5	Einheitskreis um Ursprung in verschiedenen Metriken . . . . .	21
3.6	Torus . . . . .	26
	(a) Skizze . . . . .	26
	(b) Karte der Torushülle . . . . .	26
3.7	Zentralprojektion . . . . .	28
3.8	stereographische Projektion . . . . .	29
3.9	baryzentrischen Koordinaten . . . . .	31
	(a) Flächen . . . . .	31
	(b) Teilungsverhältnisse . . . . .	31
3.10	Normalunterteilungen eines 2-Simplex . . . . .	42
	(a) eine Unterteilung . . . . .	42
	(b) zwei Unterteilungen . . . . .	42
3.11	Normalunterteilung eines 3-Simplex . . . . .	42
3.12	homotope Abbildungen . . . . .	44
3.13	Deformationsretrakte . . . . .	45
	(a) zusammenziehbarer top. Raum . . . . .	45
	(b) Retraktion nach $\mathbb{S}^1$ . . . . .	45
3.14	Retraktion des Torus . . . . .	46
	(a) Volltorus . . . . .	46
	(b) Torushülle . . . . .	46
3.15	3-Simplex . . . . .	50
	(a) Ansicht . . . . .	50
	(b) Karte des Randes . . . . .	50

3.16	Fläche mit Loch . . . . .	52
3.17	Simplizialkomplexe . . . . .	58
	(a) Würfel . . . . .	58
	(b) Würfel mit Durchbohrung . . . . .	58
3.18	Wesentliche 1-Zyklen . . . . .	60
	(a) Torushülle . . . . .	60
	(b) Doppeltorushülle . . . . .	60
4.1	Beispiel für LAGRANGE-Polynome . . . . .	65
4.2	Beispiel für BERNSTEIN-Polynome . . . . .	67
4.3	DECASTELJAU-Algorithmus . . . . .	69
4.4	kubische BÉZIER-Kurve . . . . .	71
	(a) DECASTELJAU-Schema . . . . .	71
	(b) Subdivision . . . . .	71
4.5	DE CASTELJAU-Algorithmus für simpliziale Topologien . . . . .	72
	(a) BÉZIER-Fläche . . . . .	72
	(b) BÉZIER-Volumen . . . . .	72
4.6	BÉZIER-Fläche mit Simplextopologie . . . . .	73
5.1	Ansatzfunktionen . . . . .	83
	(a) Knotenfunktion . . . . .	83
	(b) Knoten-Patch . . . . .	83
	(c) Kantenfunktion . . . . .	83
	(d) Kanten-Patch . . . . .	83
	(e) Innere Funktion . . . . .	83
5.2	Referenzdreieck . . . . .	84
5.3	GFEM Funktionen . . . . .	87
5.4	Natürliche Nachbarn Koordinaten . . . . .	89
6.1	Visualisierung einer Kanne . . . . .	91
6.2	Vereinigung zweier Gebiete . . . . .	94
	(a) Variante 1 . . . . .	94
	(b) Variante 2 . . . . .	94
6.3	Constructive Solid Geometry . . . . .	97
	(a) CSG Baum . . . . .	97
	(b) Formel . . . . .	97
6.4	Normzellenzerlegung . . . . .	98
	(a) eben . . . . .	98
	(b) räumlich . . . . .	98
6.5	Diskretisierung einer Kreisscheibe . . . . .	99
	(a) $4 \times 4$ Raster . . . . .	99



(b)	8 × 8 Raster . . . . .	99
(c)	16 × 16 Raster . . . . .	99
(d)	32 × 32 Raster . . . . .	99
6.6	Region-Quadtree . . . . .	101
(a)	Segmentierung . . . . .	101
(b)	Baumstruktur . . . . .	101
6.7	Binäre Raumaufteilung in der Ebene . . . . .	104
6.8	Kreisscheibe . . . . .	106
6.9	Vereinigung zweier Kugeln . . . . .	113
6.10	Anwendung modifizierter RICCI Operatoren . . . . .	115
(a)	Schnittmenge . . . . .	115
(b)	$p = 10$ . . . . .	115
(c)	$p = 100$ . . . . .	115
6.11	„Winged-Edge“ Datenstruktur . . . . .	118
6.12	„Half-Edge“ Datenstruktur . . . . .	119
6.13	„Radial-Edge“ Datenstruktur . . . . .	120
7.1	Punkte-k-d-Baum . . . . .	126
(a)	implizite Gebietszerlegung . . . . .	126
(b)	Binärbaum . . . . .	126
7.2	Punkte-Quadtree . . . . .	127
(a)	implizite Gebietszerlegung . . . . .	127
(b)	Quadtree . . . . .	127
7.3	Lineare Suche . . . . .	129
(a)	Punkte im Quadrat . . . . .	129
(b)	Punkte auf Kreis . . . . .	129
7.4	Gerichtete Suche durch Halbebenenmodell . . . . .	131
7.5	Konstruktion der VORONOI Zentren . . . . .	131
7.6	Wahl des Nachfolgesimplexes . . . . .	132
7.7	Beispiel für „Oriented Walk“ . . . . .	133
(a)	Triangulierung . . . . .	133
(b)	Routengraph . . . . .	133
7.8	Beispiel für modifizierten Algorithmus . . . . .	133
(a)	Triangulierung . . . . .	133
(b)	Routengraph . . . . .	133
7.9	Gerichtete Suche . . . . .	136
(a)	Punkte im Quadrat . . . . .	136
(b)	Punkte auf Kreis . . . . .	136
8.1	VORONOI-Zellkomplexe . . . . .	140
(a)	Manhattan-Metrik ( $p = 1$ ) . . . . .	140

	(b)	$\hat{=}$ Maximum-Metrik ( $p = 100$ ) . . . . .	140
	(c)	EUKLIDische Metrik ( $p = 2$ ) . . . . .	140
8.2		VORONOI-Diagramme im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	142
	(a)	2 Zentren . . . . .	142
	(b)	3 Zentren . . . . .	142
	(c)	3 kollineare Zentren . . . . .	142
	(d)	4 Zentren . . . . .	142
	(e)	4 kozyrkulare Zentren . . . . .	142
8.3		Duale Adjazenzgraphen . . . . .	145
	(a)	2 Knoten . . . . .	145
	(b)	3 Knoten . . . . .	145
	(c)	3 kollineare Knoten . . . . .	145
	(d)	4 Knoten . . . . .	145
	(e)	4 kozyrkulare Knoten . . . . .	145
8.4		Nerven von Mengensystemen . . . . .	146
	(a)	2 sich schneidende Mengen . . . . .	146
	(b)	Nerv von 2 sich schneidenden Mengen . . . . .	146
	(c)	3 sich schneidende Mengen . . . . .	146
	(d)	Nerv von 3 sich schneidenden Mengen . . . . .	146
8.5		DELAUNAY-Triangulierung von 4 kozyrkularen Knoten . . . . .	147
	(a)	Variante 1 . . . . .	147
	(b)	Variante 2 . . . . .	147
8.6		Stereographische Projektion einer Triangulierung . . . . .	149
	(a)	Stereographische Projektion . . . . .	149
	(b)	Triangulierung . . . . .	149
	(c)	2-Mannigfaltigkeit . . . . .	149
8.7		Triangulierung von kollinearen Punkten im $\mathbb{S}^2$ . . . . .	151
8.8		Winkelbeziehung für vier kozyrkulare Punkte . . . . .	153
	(a)	Bezeichnungen . . . . .	153
	(b)	Winkelbeziehungen . . . . .	153
8.9		Zyklus in „Infront“-Ordnungsrelation . . . . .	154
8.10		Einzufügender Punkt innerhalb Umkreis . . . . .	155
	(a)	Nullhomotopie . . . . .	155
	(b)	Leere Kreisscheiben . . . . .	155
8.11		Einfügen eines Punktes in eine DELAUNAY-Triangulierung . . . . .	156
	(a)	zu löschende Simplexe . . . . .	156
	(b)	neu erzeugte Simplexe . . . . .	156
8.12		Adjazente 3-Simplexe . . . . .	158
8.13		Rekursive Bisektion durch Einfügen von Punkte im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	162
8.14		„Quadratische Zerlegung“ eines 2-Simplex . . . . .	163
8.15		Weitere Zerlegungen eines 2-Simplex . . . . .	164

(a)	Normalzerlegung . . . . .	164
(b)	„kubische Zerlegung“ . . . . .	164
8.16	Konformität durch Verfeinerung . . . . .	165
(a)	nichtkonforme DELAUNAY-Triangulierung . . . . .	165
(b)	iterativ: 1. Punkt . . . . .	165
(c)	rekursiv: 1. Punkt . . . . .	165
(d)	iterativ: 2. Punkt . . . . .	165
(e)	rekursiv: 2. Punkt (2. Ebene) . . . . .	165
(f)	iterativ: 3. Punkt . . . . .	165
(g)	rekursiv: 3. Punkt (2. Ebene) . . . . .	165
8.17	Nächster Nachbar . . . . .	168
(a)	VORONOI Zellen . . . . .	168
(b)	THALES Halbkreise . . . . .	168
8.18	Gebietszerlegungen für 10 Punkte . . . . .	170
(a)	Quadtrees . . . . .	170
(b)	k-d Baum (balanciert) . . . . .	170
8.19	Gebietszerlegungen für 50 zufallsverteilte Punkte . . . . .	171
(a)	Quadtrees . . . . .	171
(b)	k-d Baum . . . . .	171
8.20	Lokalisierung, Variante 1 . . . . .	173
(a)	Punkte im Quadrat . . . . .	173
(b)	Punkte auf Kreis . . . . .	173
8.21	Lokalisierung, Variante 2 . . . . .	174
(a)	Punkte im Quadrat . . . . .	174
(b)	Punkte auf Kreis . . . . .	174
8.22	Datenstruktur für 2-Simplex . . . . .	177
8.23	Generalisierung . . . . .	178
8.24	Umsetzung des zweidimensionalen Simplizialkomplexes . . . . .	179
9.1	Würfel und Oberfläche . . . . .	185
(a)	3-Simplizialkomplex . . . . .	185
(b)	Oberfläche als 2-Simplizialkomplex . . . . .	185
9.2	Wandscheibe . . . . .	185
(a)	Gebiet als Simplizialkomplex . . . . .	185
(b)	Rand . . . . .	185
9.3	KOCHSche Schneeflocke . . . . .	186
(a)	Gebiet als orientierter Simplizialkomplex . . . . .	186
(b)	Rand . . . . .	186
9.4	DELAUNAY-Triangulierungen . . . . .	186
(a)	Wandscheibe . . . . .	186
(b)	KOCHSche Schneeflocke . . . . .	186

9.5	Extrusion eines 2-Simplex . . . . .	191
9.6	Ebener Schnitt durch Simplizialkomplex . . . . .	193
9.7	CSG Baum basierend auf Simplizialkomplexen . . . . .	194
	(a) Simplexe . . . . .	194
	(b) Simplizialkomplexe . . . . .	194
9.8	Umsetzung des Hybridmodellierers . . . . .	195
9.9	Vereinigung zweier Körper . . . . .	197
9.10	Komplement angewandt auf Simplizialkomplex . . . . .	198
9.11	Bestimmen und Markieren innen- bzw. außenliegender Simplexe	199
9.12	binäre BOOLSCHHE Operatoren . . . . .	200
	(a) Vereinigung . . . . .	200
	(b) Durchschnitt . . . . .	200
	(c) Differenz . . . . .	200
9.13	Bestimmung von Verschneidungen . . . . .	201
9.14	Konforme Triangulierung . . . . .	201
9.15	Vergrößerung des Simplizialkomplexes . . . . .	202
9.16	Vermeidung von Selbstüberschneidung . . . . .	204
	(a) Selbstüberschneidung . . . . .	204
	(b) Mittelpunkte . . . . .	204
	(c) Schnittpunkte . . . . .	204

# Tabellenverzeichnis

2.1	Dimensionsabhängige physikalisch/mathematische Modellierung	8
2.2	Materialmodelle . . . . .	8
3.1	Simplexe . . . . .	31
3.2	Topologische Invarianten eines Würfels . . . . .	55
3.3	Reguläre Polyeder . . . . .	57
4.1	DECASTELJAU-Schema . . . . .	70
6.1	Diskrete Mengenoperatoren . . . . .	95
	(a) Vereinigungsmenge . . . . .	95
	(b) Schnittmenge . . . . .	95
	(c) Differenz . . . . .	95
	(d) Komplement . . . . .	95
6.2	Benachbarte Quadtree-Zellen . . . . .	102
	(a) Kind-Kodierung . . . . .	102
	(b) Nachbarschaft-Matrix . . . . .	102
6.3	Benachbarte Quadtree-Zellen . . . . .	103
	(a) Kind-Kodierung . . . . .	103
	(b) Nachbarschaft-Matrix . . . . .	103
6.4	nichtregularisierte Mengenoperatoren . . . . .	113
	(a) $F_1 \cup F_2$ . . . . .	113
	(b) $F_1 \cap F_2$ . . . . .	113
	(c) $F_1 \setminus F_2$ . . . . .	113
	(d) $\setminus F$ . . . . .	113
6.5	Mengenoperationen für implizite Modellierung . . . . .	114
6.6	mögliche Zellinzidenzen . . . . .	116
6.7	gespeicherte und berechnete Zellinzidenzen . . . . .	118
8.1	Anzahl von Varianten zur Triangulierung eines konvexen Polygons . . . . .	148

A.1 EULER Operatoren . . . . .	207
--------------------------------	-----

# Literaturverzeichnis

- [AHU87] AHO, ALFRED V., JOHN E. HOPCROFT, and JEFFREY D. ULLMAN: *Data structures and algorithms*. Computer Science and information processing. Addison-Wesley, 1987.
- [AM91] ABRAMOWSKI, S. und H. MÜLLER: *Geometrisches Modellieren*, Band 75 der Reihe *Reihe Informatik*. BI Wissenschaftsverlag, 1991.
- [Arm83] ARMSTRONG, M. A.: *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1983. Original edition published in 1979 by McGraw-Hill Book Company (UK) Ltd., Maidenhead, Berkshire, England.
- [AS93] AUMANN, GÜNTER und KLAUS SPITZMÜLLER: *Computerorientierte Geometrie*, Band 89 der Reihe *Reihe Informatik*. BI Wissenschaftsverlag, 1993.
- [AU96] AHO, ALFRED V. und JEFFREY D. ULLMAN: *Informatik: Datenstrukturen und Konzepte der Abstraktion*. Informatik Lehrbuch-Reihe. International Thomson Publishing, 1. Auflage, 1996.
- [Aur91] AURENHAMMER, F.: *Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure*. ACM Comput. Surv., 23(3):345–405, September 1991.
- [BA76] BABUŠKA, I. and A. AZIZ: *On the angle condition in the finite element method*. SIAM J. Numer. Analysis, (13):214–227, August 1976.
- [Bab63] BABUŠKA, I.: *The theory of small changes in the domain of existence in the theory of partial differential equations and its applications*.

- In BABUŠKA, IVO (editor): *Differential equations and their applications: Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962*, Symposia ČSAV, pages 13–26. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1963.
- [Bat90] BATHE, KLAUS JÜRGEN: *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*. Springer-Verlag, 1990.  
original english language edition, entitled *Finite Element Procedures in Engineering Analysis* published by Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs/NJ, USA 1982.
- [Bau75] BAUMGART, BRUCE G.: *A polyhedron representation for computer vision*. AFIPS Conf. Proc., 44:589–596, May 1975.
- [BBO01] BABUŠKA, IVO, UDAY BANERJEE, and JOHN E. OSBORN: *On principles for the selection of shape functions for the generalized finite element method*. Report 01-16, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, June 2001.
- [BBO02] BABUŠKA, IVO, UDAY BANERJEE, and JOHN E. OSBORN: *Meshless and generalized finite element methods: A survey of some major results*. Report 02-03, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, January 2002.
- [BE86] BOLTJANSKIJ, V. G. und V. A. EFREMOVIČ: *Anschauliche kombinatorische Topologie*. Vieweg, 1986.
- [BEE<sup>+</sup>93] BERN, M., H. EDELSBRUNNER, D. EPPSTEIN, S. MITCHELL, and T. S. TAN: *Edge insertion for optimal triangulations*. *Discrete & Computational Geometry*, 10:47–65, 1993.
- [BEH79] BAER, A., C. EASTMAN, and M. HENRION: *Geometric modelling: a survey*. *Computer-Aided Design*, 11(5):253–272, September 1979.
- [Ben95] BENDSØE, MARTIN P.: *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Springer, 1995.



- [Ber96] BERNREUTHER, MARTIN: *Diskrete Optimierung mit Evolutionsstrategien auf parallelen, verteilten Systemen*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, August 1996.
- [Ber98] BERNREUTHER, MARTIN: *Funktionsapproximation mit Hilfe von künstlichen neuronalen Feedforward-Netzen*.  
In: GROSCHKE, ANDREAS, ULRICH SCHNEIDER und ROLF SCHUMANN (Herausgeber): *10. Forum Bauinformatik — Junge Wissenschaftler forschen — Weimar '98*, Fortschrittberichte Reihe 4: Bauingenieurwesen, Nr. 147, Seiten 207–214. VDI-Verlag, 1998.  
Tagungsband zum 10. Forum Bauinformatik, Bauhaus-Universität Weimar, 23.-25. September 1998.
- [Ber00] BERNREUTHER, MARTIN: *Numerische Behandlung von Problemen der materiell nichtlinearen Strukturmechanik mit Hilfe der Deformationstheorie*.  
In: HANFF, J., E. KASPAREK, M. RUESS und G. SCHUTTE (Herausgeber): *Forum Bauinformatik 2000 — Junge Wissenschaftler forschen*, Fortschrittberichte Reihe 4: Bauingenieurwesen, Nr. 163, Seiten 207–214. VDI-Verlag, 2000.  
Tagungsband zum 12. Forum Bauinformatik, TU-Berlin, 20.-22. September 2000.
- [Bet97] BETTEN, JOSEF: *Finite Elemente für Ingenieure 1: Grundlagen, Matrixmethoden, Elastisches Kontinuum*. Springer-Verlag, 1. Auflage, 1997.
- [Bet98] BETTEN, JOSEF: *Finite Elemente für Ingenieure 2: Variationsrechnung, Energiemethoden, Näherungsverfahren, Nichtlinearitäten*. Springer-Verlag, 1. Auflage, 1998.
- [BG95] BRIÉRE DE L'ISLE, ERIC and PAUL LOUIS GEORGE: *Optimization of tetrahedral meshes*.  
In BABUŠKA, IVO, JOSEPH E. FLAHERTY, WILLIAM D. HENSHAW, JOHN E. HOPCROFT, JOSEPH E. OLIGER, and TAYFUN TEZDUYAR (editors): *Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations*, volume 75 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 97–127. Springer-Verlag, 1995.  
based on the proceedings of the 1993 IMA summer program.

- [BGZ96] BUNGARTZ, HANS-JOACHIM, MICHAEL GRIEBEL und CHRISTOPH ZENGER: *Einführung in die Computergraphik*. Mathematische Grundlagen der Informatik. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1996.
- [BM01] BRÜDERLIN, BEAT und ANDREAS MEIER: *Computergrafik und Geometrisches Modellieren*. Leitfäden der Informatik. B. G. Teubner GmbH, 2001.
- [BMR95] BERN, MARSHALL, SCOTT MITCHELL, and JIM RUPPERT: *Linear-size nonobtuse triangulation of polygons*. Discrete & Computational Geometry, 14:411–428, 1995.
- [Bor96] BORKNER-DELCARLO, OLAF: *Eine Halbfacetten Datenstruktur für die Modellierung von „non-manifold“-Körpern*. Doktorarbeit, Technische Universität München, München, April 1996.
- [Bow81] BOWYER, A.: *Computing Dirichlet tessellations*. The Computer Journal, 24(2):162–166, 1981.
- [Brä93] BRÄUNL, THOMAS: *Parallele Programmierung: eine Einführung*. Vieweg & Sohn, 1993.
- [Bra97] BRAESS, DIETER: *Finite Elemente*. Springer, 2. Auflage, 1997.
- [BRJ99] BOOCH, GRADY, JIM RUMBAUGH und IVAR JACOBSON: *Das UML-Benutzerhandbuch*. Professionelle Softwareentwicklung. Addison-Wesley-Longman, 2. Auflage, 1999.  
amerikanische Originalausgabe trägt den Titel The Unified Modeling Language User Guide.
- [Bro98] BROY, MANFRED: *Informatik, Eine grundlegende Einführung*, Band 1: Programmierung und Rechnerstrukturen. Springer, 2. Auflage, 1998.
- [BS89] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 24. Auflage, 1989.
- [BS94] BRENNER, SUSANNE C. and L. RIDGWAY SCOTT: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer Verlag, 1994.

- [BT89] BOISSONNAT, JEAN-DANIEL and MONIQUE TEILLAUD: *On the randomized construction of the delaunay tree.*  
Rapport INRIA 1140, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Programme 4: Robotique, Image et Vision, Sophia Antipolis B.P. 109 06561 Valbonne Cedex France, December 1989.  
revise en Janvier 1991.
- [BW94] BIGALKE, HANS-GÜNTHER und HEINRICH WIPPERMANN:  
*Reguläre Parkettierungen: Mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie, Baugewerbe, Design und Kunst.*  
BI-Wissenschaftsverlag, 1994.
- [BY98] BOISSONNAT, J-D. and M. YVINEC: *Algorithmic Geometry.*  
Cambridge University Press, 1998.
- [CGA01] *CGAL Basic Library.*  
<http://www.cgal.org/>, 2.3 edition, August 2001.
- [Che87] CHEW, L. P.: *Constrained Delaunay triangulations.*  
In *Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry*, pages 215–222, October 1987.
- [Cia80] CIARLET, PHILIPPE G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems.*  
North-Holland Publishing Company, 1980.  
reprinted from 1978, series Studies in Mathematics and its Applications Vol. 4.
- [CL01] CORNEY, JONATHAN and THEODORE LIM: *3D Modeling with ACIS.*  
Saxe-Coburg Publications, 2001.
- [CLR97] CORMEN, THOMAS H., CHARLES E. LEISERSON, and RONALD L. RIVEST: *Introduction to Algorithms.*  
The MIT Electrical Engineering and Computer Science Series.  
The MIT Press, 1997.
- [CMP89] COOK, ROBERT D., DAVID S. MALKUS, and MICHAEL E. PLESHA: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.*  
John Wiley & Sons, 3rd edition, 1989.
- [Con79] CONSTANTINESCU, CORNELIU: *Topologische Räume.*  
Verlag der Fachvereine, 2. Auflage, 1979.

- [DBO00] DUARTE, C. A., I. BABUŠKA, and J. T. ODEN: *Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems*.  
Computers and Structures, 77:215–232, 2000.
- [dD90] DUDENRED., WISSENSCHAFTL. RAT D. (Herausgeber):  
*Fremdwörterbuch*.  
Der Duden; Bd. 5. Dudenverlag, 5. Auflage, 1990.
- [Dev99] DEVILLERS, OLIVIER: *On Deletion in Delaunay Triangulations*.  
In: *Symposium on Computational Geometry*, Seiten 181–188,  
1999.
- [DH93] DEUFLHARD, PETER und ANDREAS HOHMANN: *Numerische Mathematik I, Eine algorithmisch orientierte Einführung*.  
Walter de Gruyter, 2. Auflage, 1993.
- [Die00] DIESTEL, REINHARD: *Graphentheorie*.  
Springer, 2. Auflage, 2000.
- [Dol99] DOLBOW, JOHN E.: *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*.  
PhD thesis, Theoretical & Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, December 1999.
- [DPT01] DEVILLERS, OLIVIER, SYLVAIN PION, and MONIQUE TEILLAUD: *Walking in a triangulation*.  
In *Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 106–114, 2001.
- [Dua95] DUARTE, C. ARMANDO: *A review of some meshless methods to solve partial differential equations*.  
Report 95-06, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, May 1995.
- [Dun85] DUNAVANT, D. A.: *High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle*.  
International journal for numerical methods in engineering, 21:1129–1148, 1985.
- [dvOS00] DE BERG, MARK, MARC VAN KREVELD, MARK OVERMARS, and OTFRIED SCHWARZKOPF: *Computational Geometry: Algorithms and Applications*.  
Springer, second edition, 2000.
- [Ede87] EDELSBRUNNER, HERBERT: *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*.

- Springer, 1987.
- [Ede94] EDELSBRUNNER, H.: *Modeling with simplicial complexes: Topology, geometry, and algorithms.*  
In *Proc. 6th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pages 36–44, 1994.
- [Ede01] EDELSBRUNNER, HERBERT: *Geometry and topology for mesh generation*, volume 7 of *Cambridge Monographs on applied and computational mathematics.*  
Cambridge University Press, 2001.
- [ES92] ENGELKING, RYSZARD and KAROL SIEKLUCKI: *Topology, A Geometric Approach.*  
Sigma Series in Pure Mathematics, Volume 4. Heldermann, 1992.
- [Far79] FARIN, GERALD: *Subsplines über Dreiecken.*  
Doktorarbeit, Technische Universität Carolo-Wilhemina zu Braunschweig, September 1979.
- [Far94] FARIN, GERALD: *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design.*  
Vieweg Verlag, 1994.  
deutsche Ausgabe von Gerald Farin: *Curves and Surfaces for CAGD. A practical Guide*, 3rd edition, 1993 by ACADEMIC PRESS, INC.
- [FB94] FAIRES, J. DOUGLAS und RICHARD L. BURDEN: *Numerische Methoden, Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung.*  
Spektrum, Akademischer Verlag, 1994.
- [Fen01] FENN, ROGER: *Geometry.*  
Springer Undergraduate Mathematics Series; ISSN 1615-2085.  
Springer-Verlag, 2001.
- [Fra00] FRANK, ANTON CHRISTIAN: *Organisationsprinzipien zur Integration von geometrischer Modellierung, numerischer Simulation und Visualisierung.*  
Doktorarbeit, Technische Universität München, München, März 2000.
- [Fuc97] FUCHS, ALEXANDER: *Almost regular delaunay-triangulations.*  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:4595–4610, 1997.

- [FvFH96] FOLEY, JAMES D., ANDRIES VAN DAM, STEVEN K. FEINER, and JOHN F. HUGHES: *Computer Graphics: Principles and Practice (C edition)*.  
The systems programming series. Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 1996.
- [GHJV96] GAMMA, ERICH, RICHARD HELM, RALPH JOHNSON und JOHN VLISSIDES: *Entwurfsmuster: Elemente wiederverwendbarer objektorientierter Software*.  
Professionelle Softwareentwicklung. Addison-Wesley-Longman, 1996.  
amerikanische Originalausgabe trägt den Titel Design Patterns.
- [GM97] GOMES, ABEL and ALAN MIDDLEDITCH: *Synthesis of a unified approach to shape modeling*.  
In STRASSER, W., R. KLEIN, and R. RAU (editors):  
*Geometric Modeling: Theory and Practice, The State of the Art*, pages 226–246. Springer, 1997.
- [GMTF89] GOLDFEATHER, JACK, STEVEN MOLNAR, GREG TURK, and HENRY FUCHS: *Near real-time csg rendering using tree normalization and geometric pruning*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 9(3):20–28, May 1989.
- [GN89] GHALI, A. and A. M. NEVILLE: *Structural analysis: a unified classical and matrix approach*.  
Chapman and Hall, 3rd edition, 1989.
- [Goe92] GOEBL, REINHARD: *Computer aided design: Produktionsmodelle und Konstruktionssysteme als Kern von CIM; eine Einführung für Anwender und Informatiker*,  
Band 76 der Reihe *Reihe Informatik*.  
BI Wissenschaftsverlag, 1992.
- [Goo97] GOOS, GERHARD: *Vorlesungen über Informatik*, Band 1:  
Grundlagen und funktionales Programmieren.  
Springer, 2. Auflage, 1997.
- [GR94] GROSSMANN, CHRISTIAN und HANS-GÖRG ROOS: *Numerik partieller Differentialgleichungen*.  
Teubner, 2. Auflage, 1994.
- [GS93] GANTER, M. A. und D. W. STORTI: *Implicit Solid Modeling: A renewed method for geometric design*, 1993.

- [GZZZ95] GROSCHE, G., V. ZIEGLER, D. ZIEGLER und E. ZEIDLER  
(Herausgeber): *Teubner – Taschenbuch der Mathematik*,  
Band II.  
Teubner Verlagsgesellschaft, 7. Auflage, 1995.
- [Hac96] HACKBUSCH, WOLFGANG: *Theorie und Numerik elliptischer  
Differentialgleichungen*.  
Teubner, 2. Auflage, 1996.
- [Har74] HARARY, FRANK: *Graphentheorie*.  
R. Oldenbourg Verlag, 1974.
- [Hau96] HAUSSER, CHRISTOF: *Effiziente Dreieckselemente für  
Flächentragwerke*.  
Doktorarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, Februar 1996.  
Institut für Baustatik 21(1996).
- [Her01] HERMANN, MARTIN: *Numerische Mathematik*.  
Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2001.
- [HL92] HOSCHEK, JOSEF und DIETER LASSER: *Grundlagen der  
geometrischen Datenverarbeitung*.  
B. G. Teubner, 1992.
- [Hof89] HOFFMANN, CHRISTOPH M.: *Geometric & Solid Modeling: An  
Introduction*.  
Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1989.
- [HS92] HOFFMANN, DIETER und FRIEDRICH-WILHELM SCHÄFKE:  
*Integrale*.  
BI Wissenschaftsverlag, 1992.
- [Hug00] HUGHES, THOMAS J. R.: *The Finite Element Method: Linear  
Static and Dynamic Finite Element Analysis*.  
Dover Publications, 2000.  
reprint, originally published by Prentice-Hall, Inc. 1987.
- [Jän99] JÄNICH, KLAUS: *Topologie*.  
Springer, 6. Auflage, 1999.
- [Jun94] JUNGnickel, DIETER: *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*.  
BI-Wissenschaftsverlag, 3. Auflage, 1994.
- [KA00] KNABNER, PETER und LUTZ ANGERMANN: *Numerik partieller  
Differentialgleichungen: Eine anwendungsorientierte  
Einführung*.  
Springer, 2000.

- [Kar00] KARUTZ, HOLGER: *Adaptive Koppelung der Elementfreien Galerkin-Methode mit der Methode der Finiten Elemente bei Reißfortschrittproblemen.*  
Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Mai 2000.  
Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 255.
- [Kin98] KINGSTON, JEFFREY H: *Algorithms and Data Structures: Design, Correctness, Analysis.*  
Addison-Wesley, 2nd edition, 1998.
- [Kle97] KLEIN, ROLF: *Algorithmische Geometrie.*  
Addison Wesley Longman, 1. Auflage, 1997.
- [Knu80] KNUTH, DONALD ERVIN: *The Art of Computer Programming, volume 1: Fundamental Algorithms of Addison-Wesley series in computer science and information processing.*  
Addison-Wesley, second edition, 1980.
- [Kow61] KOWALSKY, H.-J.: *Topologische Räume.*  
Mathematische Reihe; 26. Birkhäuser, 1961.
- [KR95] KRAUSE, ROLAND and ERNST RANK: *A fast algorithm for point-location in a finite element mesh.*  
Report 95-3-NMI, Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, June 1995.  
to appear in: Computing.
- [Kru96] KRUSCHWITZ, ERWIN: *Euler-Modellierung dreidimensionaler Körper.*  
Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Berlin, April 1996.  
D 83.
- [LaC95] LACOURSE, DONALD E. (editor): *Handbook of Solid Modeling.*  
McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [Law77] LAWSON, C. L.: *Software for  $c^1$  surface interpolation.*  
In RICE, JOHN R. (editor): *Mathematical Software III*, pages 161–194. Academic Press, 1977.  
Publication of the Mathematics Reserch Center, the University of Wisconsin-Madison; no. 39.
- [Mä83] MÄNTYLÄ, MARTTI: *Topological analysis of polygon meshes.*  
Computer-Aided Design, 15(4):228–234, July 1983.



- [Män83] MÄNTYLÄ, MARTTI: *Computational Topology: A Study of Topological Manipulations and Interrogations in Computer Graphics and Geometric Modeling*.  
PhD thesis, Helsinki University of Technology, SF-02150 Espoo 15, Finland, June 1983.  
Mathematics and Computer Science Series No. 37.
- [Män88] MÄNTYLÄ, MARTTI: *An introduction to Solid Modeling*.  
Computer Science Press, 1988.
- [Mas91] MASSEY, WILLIAM S.: *A Basic Course in Algebraic Topology*.  
Graduate texts in mathematics; 127. Springer-Verlag, 1991.
- [Mat94] MATOUŠEK, JIŘÍ: *Geometric range searching*.  
ACM Computing Surveys, 26(4):421–461, December 1994.
- [Mau98] MAUTE, KURT: *Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken*.  
Doktorarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, Februar 1998.  
Institut für Baustatik 25(1998).
- [Mau01] MAUTE, ASTRID: *Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik*.  
Doktorarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, Februar 2001.  
Institut für Baustatik 33(2001).
- [MB96] MELENK, J. M. and I. BABUŠKA: *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*.  
Research Report 96-01, Seminar für Angewandte Mathematik, January 1996.  
<ftp://ftp.sam.math.ethz.ch/pub/sam-reports/reports/reports96/96-01.ps.Z>.
- [Mel95] MELENK, JENS MARKUS: *On Generalized Finite Element Methods*.  
PhD thesis, University of Maryland, Maryland, 20742, May 1995.
- [MGS01] MELENK, J. M., K. GERDES, and C. SCHWAB: *Fully discrete hp-finite elements: fast quadrature*.  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(33):4339–4364, May 2001.
- [MH94] MARSDEN, JERROLD E. and THOMAS J. R. HUGHES: *Mathematical Foundations of Elasticity*.  
Dover Publications, 1994.

- unabridged, corrected republication, first published by  
Prentice-Hall, Inc. 1983.
- [Mil01] MILBRADT, PETER: *Algorithmische Geometrie in der Bauinformatik*, Januar 2001.  
Habilitationsschrift, Universität Hannover.
- [Mor85] MORTENSON, MICHAEL E.: *Geometric Modeling*.  
John Wiley & Sons., 1985.
- [MS82] MANTYLA, MARTTI and REIJO SULONEN: *GWB: A solid modeler with euler operators*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 2(7):17–31,  
September 1982.
- [MSZ96] MÜCKE, ERNST P., ISAAC SAIAS, and BINHAI ZHU: *Fast randomized point location without preprocessing in two- and three-dimensional Delaunay triangulations*.  
In *Proc. 12th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages  
274–283, 1996.
- [MTYS94] MELNIKOV, O., R. TYSHKEVICH, V. YEMELICHEV, and  
V. SARVANOV: *Lectures on Graph Theory*.  
BI Wissenschaftsverlag, 1994.
- [MW76] MÜLLER, K. P. und H. WÖLPERT: *Anschauliche Topologie*.  
Mathematik Lehrerausbildung. B.G. Teubner, 1976.
- [NB94] NI, XIUJUN and M. SUSAN BLOOR: *Performance evaluation of boundary data structures*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 14(6):66–77,  
November 1994.
- [O'R98] O'ROURKE, JOSEPH: *Computational Geometry in C*.  
Cambridge University Press, second edition, 1998.
- [OW96] OTTMANN, THOMAS und PETER WIDMAYER: *Algorithmen und Datenstrukturen*.  
Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 3. Auflage, 1996.  
Die ersten Auflagen erschienen in der Reihe Informatik im  
B.I.-Wissenschaftsverlag.
- [PBCF93] PAOLUZZI, A., F. BERNARDINI, C. CATTANI, and  
V. FERRUCCI: *Dimension-independent modeling with simplicial complexes*.  
ACM Transactions on Graphics, 12(1):56–102, January 1993.

- [PD00] PAHL, PETER JAN und RUDOLF DAMRATH: *Mathematische Grundlagen der Ingenieurinformatik*. Springer, 2000.
- [Ped00] PEDERSEN, MICHAEL: *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [Pet86] PETERSON, D. P.: *Boundary to constructive solid geometry mappings: a focus on 2d issues*. Computer-Aided Design, 18(1):3–14, January 1986.
- [Pet97] PETERS, BRIAN F.: *Microstation modeler: The design and implementation of an extensible solid modeling system*. In STRASSER, W., R. KLEIN, and R. RAU (editors): *Geometric Modeling: Theory and Practice, The State of the Art*, pages 363–378. Springer, 1997.
- [PF98] PÉBAY, PHILIPPE P. and PASCAL J. FREY: *A priori delaunay-conformity*. In *Proc. 7th International Meshing Roundtable*, pages 321–333, PO Box 5800, MS 0441, Albuquerque, NM, 87185-0441, 1998. Sandia National Laboratories.
- [Pla00] PLATO, ROBERT: *Numerische Mathematik kompakt*. Vieweg Verlag, 2000.
- [PRS89] PAOLUZZI, A., M. RAMELLA, and A. SANTARELLI: *Boolean algebra over linear polyhedra*. Computer-Aided Design, 21(8):474–484, October 1989.
- [PS85] PREPARATA, FRANCO P. and MICHAEL IAN SHAMOS: *Computational Geometry: An introduction*. Springer, 1985.
- [QSS00] QUARTERONI, ALFIO, RICCARDO SACCO, and FAUSTO SALERI: *Numerical Mathematics*. Texts in Applied Mathematics 37. Springer-Verlag, 2000.
- [RBP<sup>+</sup>93] RUMBAUGH, JAMES, MICHAEL BLAHA, WILLIAM PREMERLANI, FREDERICK EDDY und WILLIAM LORENSEN: *Objektorientiertes Modellieren und Entwerfen*. Hanser Verlag, 1993.  
amerikanische Originalausgabe Object-Oriented Modeling and Design, 1991; General Electric Research and Development Center Schenectady, New York.

- [Reh95] REHLE, NORBERT: *Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken*.  
Doktorarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, Dezember 1995.  
Institut für Baustatik 20(1996).
- [Req80] REQUICHA, ARISTIDES A. G.: *Representations for rigid solids: Theory, methods, and systems*.  
ACM Computing Surveys, 12(4):437–464, December 1980.
- [Ric72] RICCI, A.: *A constructive geometry for computer graphics*.  
The Computer Journal, 16(2):157–160, February 1972.
- [Rup95] RUPPERT, J.: *A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation*.  
Journal of Algorithms, 18(3):548–585, May 1995.
- [Sam94] SAMET, HANAN: *The Design and analysis of spatial data structures*.  
Addison-Wesley Series in Computer Science. Addison-Wesley, 1994.
- [SB91] SZABÓ, BARNA and IVO BABUŠKA: *Finite Element Analysis*.  
John Wiley & Sons, 1991.
- [SBC98] STROUBOULIS, T., I. BABUŠKA, and K. COPPS: *The design and analysis of the generalized finite element method*.  
1998.
- [SCB01] STROUBOULIS, T., K. COPPS, and I. BABUŠKA: *The generalized finite element method*.  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(32):4081–4193, 2001.
- [Sch69] SCHUBERT, HORST: *Topologie*.  
Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, 2. Auflage, 1969.
- [Sch91] SCHWARZ, HANS RUDOLF: *Methode der Finite Elemente*.  
Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM, Band 47. Teubner-Verlag, 3. Auflage, 1991.
- [Sch97] SCHWARZ, HANS RUDOLF: *Numerische Mathematik*.  
B. G. Teubner Verlag, 4. Auflage, 1997.
- [SD95] SU, PETER and ROBERT L. SCOT DRYSDALE: *A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms*.  
In *Proc. 11th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 61–70, 1995.

- [SF88] STRANG, GILBERT and GEORGE J. FIX: *An analysis of the finite element method*.  
Wellesley-Cambridge Press, 1988.  
original published by Prentice Hall, 1973.
- [Sha94] SHAH, NIMISH RAMESHBHAI: *Topological Modeling with Simplicial Complexes*.  
PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign,  
Urbana, Illinois, August 1994.  
UIUCDCS-R-94-1877.
- [She96] SHEWCHUK, JONATHAN RICHARD: *Robust Adaptive Floating-Point Geometric Predicates*.  
In *Proceedings of the Twelfth Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 141–150. Association for Computing Machinery, May 1996.
- [She97] SHEWCHUK, JONATHAN RICHARD: *Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates*.  
Discrete & Computational Geometry, 18(3):305–363, October 1997.
- [She98] SHEWCHUK, JONATHAN R.: *A condition guaranteeing the existence of higher-dimensional constrained Delaunay triangulations*.  
In *Proc. 14th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 76–85, 1998.
- [She99a] SHEWCHUK, JONATHAN RICHARD: *Lecture notes on delaunay mesh generation*, 1999.
- [She99b] SHEWCHUK, JONATHAN RICHARD: *Lecture notes on geometric robustness*, 1999.
- [SMB98] SUKUMAR, N., B. MORAN, and T. BELYTSCHKO: *The natural element method in solid mechanics*.  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43(5):839–887, 1998.
- [SMSB01] SUKUMAR, N., B. MORAN, A. YU SEMENOV, and V. V. BELIKOV: *Natural neighbor galerkin methods*.  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50(1):1–27, 2001.
- [Spä94] SPÄTH, HELMUTH: *Numerik, Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker*.

- Vieweg Verlag, 1994.
- [Spa01] SPATIAL, <http://www.spatial.com/>: *ACIS 3D Components 7.0 Online Help*, acscd8700 edition, September 2001.
- [Su94] SU, P.: *Efficient parallel algorithms for closest point problems*. PhD thesis, Dartmouth College, 1994. Number PCS-TR94-238.
- [Suk98] SUKUMAR, NATARAJAN: *The natural element method in solid mechanics*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, June 1998. Theoretical and Applied Mechanics.
- [SV91] SHAPIRO, VADIM and DONALD L. VOSSLER: *Construction and optimization of csg representations*. Computer-Aided Design, 23(1):4–20, January 1991.
- [SW93] SCHABACK, ROBERT und HELMUT WERNER: *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, 4. Auflage, 1993.
- [SW00] SCHABACK, ROBERT and HOLGER WENDLAND: *Numerical techniques based on radial basis functions*. In COHEN, A., C. RABUT, and L. L. SCHUMAKER (editors): *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 1999*, pages 359–374. Vanderbilt University Press, 2000.
- [SZ94] STÖCKER, R. und H. ZIESCHANG: *Algebraische Topologie: Eine Einführung*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, 2. Auflage, 1994.
- [Til80] TILOVE, ROBERT B.: *Set membership classification: A unified approach to geometric intersection problems*. IEEE Transactions on Computers, C-29(10):874–883, October 1980.
- [Tin98] TINNEFELD, KARSTEN: *Stabilität in Delaunaytriangulierungen und Voronoidiagrammen unter Störungen der Eingabepunkte*. Diplomarbeit, Universität Dortmund, Dortmund, April 1998. Fachbereich Informatik, Lehrstuhl Informatik VII.
- [tom91] TOM DIECK, TAMMO: *Topologie*. de Gruyter, 1991.

- [TR80] TILOVE, R. B. and A. A. G. REQUICHA: *Closure of boolean operations on geometric entities*.  
Computer-Aided Design, 12(5):219–220, September 1980.
- [TS90] TÖRNIG, WILLI und PETER SPELLUCCI: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Band 2*.  
Springer-Verlag, 2. Auflage, 1990.
- [TSUC86] TORIYA, HIROSHI, TOSHIAKI SATOH, KENJI UEDA, and HIROAKI CHIYOKURA: *Undo and redo operations for solid modeling*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 6(4):35–42, April 1986.
- [Vol91] VOLKMANN, LUTZ: *Graphen und Digraphen: Eine Einführung in die Graphentheorie*.  
Springer, 1991.
- [VR77] VOELCKER, HERBERT B. and ARISTIDES A. G. REQUICHA: *Geometric modeling of mechanical parts and processes*.  
Computer, 10(12):48–57, December 1977.
- [Wat81] WATSON, D. F.: *Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes*.  
The Computer Journal, 24(2):167–172, 1981.
- [Wei85] WEILER, KEVIN: *Edge-based data structures for solid modeling in curved-surface environments*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 5(1):21–40, January 1985.
- [Wei86] WEILER, KEVIN J.: *Topological Structures for Geometrical Modeling*.  
PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y., August 1986.  
Technical Report TR-86032.
- [Wei94] WEISS, MARK ALLEN: *Data structures and algorithm analysis*.  
Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., second edition, 1994.
- [Wel00] WELLER, FRANK: *Geometrische Algorithmen in der Flächenrückführung*.  
Doktorarbeit, Universität Dortmund, Fachbereich Informatik, Dortmund, September 2000.  
D 290, DissDo 2000/142.

- [Wen99] WENDLAND, HOLGER: *Meshless galerkin methods using radial basis functions*.  
Mathematics of Computation, 68:1521–1531, 1999.
- [Wil76] WILSON, ROBIN J.: *Einführung in die Graphentheorie*.  
Moderne Mathematik in elementarer Darstellung; 15.  
Vandenhoeck und Ruprecht, 1976.
- [Wil85] WILSON, P. R.: *Euler formulas and geometric modeling*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 5(8):24–36, August 1985.
- [Woo85] WOO, TONY C.: *A combinatorial analysis of boundary data structure schemata*.  
IEEE Computer Graphics & Applications, 5(3):19–27, March 1985.
- [Zei96] ZEIDLER, E. (Herausgeber): *Teubner – Taschenbuch der Mathematik*.  
Teubner Verlagsgesellschaft, 1996.
- [ZT00] ZIENKIEWICZ, O. C. and R. L. TAYLOR: *The Finite Element Method, Volume 1: The Basis*.  
Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.



# Index

DELAUNAY-Triangulierung, 148

Abbildung

topologische, 20

Abstand, 21

ACIS-Modellierkern, 116

Adjazenzmatrix, *siehe* Graphen,

Adjazenzmatrix

Algorithmen, 123–125

Algorithmus

Definition, 123

Anfangsrandwertvorgaben, 78

Anfangswertvorgaben, 78

Ansatzfunktionen, 81

Atlas, 25

Aufwand, 125

asymptotisch, 125

Azyklischer DELAUNAY-Graph,

167

BÉZIER-Techniken, 75

BERNSTEIN-Polynome, 66–67

BETTI-Zahlen, 53–54

BETTISCHE Zahlen, *siehe*

BETTI-Zahlen

Bezier-Kurven

rationale, 73–75

BÉZIER-Kurven, 67–71

Bezier-Techniken

simpliziale Topologien, 71–72

BÉZIER-Techniken, 66

Bezierkurven

Gradanhebung, 74

Bilinearformen, 24

Binäre Raumaufteilung, 104–105

Binary space subdivision, *siehe*

Binäre Raumaufteilung

Binominalkoeffizienten, 66

Blending, 84

Boundary Element Method, *siehe*

Randintegralmethode

Boundary Representation, *siehe*

Oberflächenrepräsentation

BUBNOV-GALERKIN-Verfahren,

81

CAD, *siehe* Computer Aided

Design

CAE, *siehe* Computer Aided

Engineering

CAUCHY-Kriterium, 80

CÉA, 81

Charakteristische Abbildung, 43

Chomsky-Grammatik, 96

Churchsche These, 124

Combinatorial Solid Geometry,

*siehe* Constructive Solid

Geometry

Computer Aided Design, 6

Computer Aided Engineering, 6

Constructive Solid Geometry, 96

CSG, *siehe* Constructive Solid

Geometry

DAG, 135, *siehe* Azyklischer

DELAUNAY-Graph

Darstellungsschema, 93

Domäne, 93

- Deformationsretrakt, 45
- DEHN-SOMMERVILLE
  - Beziehungen, 58
- DELAUNAY-Graph, 144
- DELAUNAY-Simplizialkomplex, 144–148
- DELAUNAY-Triangulation, 139–181
- Delaunay-Triangulierung
  - ‘Infront’ Ordnungsrelation, 154
  - Umsphärenbedingung, 151–152
  - Winkelbedingung, 152–154
- Delaunaytree, 167
- Differentialgleichungen
  - partielle, 77–90
    - elliptische, 79
    - schwache Formulierung, 80
    - starke Formulierung, 80
  - Typen, 77–79
- Digraphen, 12
- DIRICHLET-Bedingungen, 79
- DIRICHLET-Mosaik, 139
- Diskretisierungsmodell, 9
- Domäne, 93
- Doubly Connected Edge List, 119
- $\mathbb{E}^n$ , *siehe* Einheitskugel
- Ecken, 41
- Effizienz, 124
- Einheitskugel, 22
- Einheitssphäre, 22
- $\varepsilon$ -Umgebung, 23
- Ergebnismodell, 9
- EUKLIDischer Vektorraum, 24–25
- Euler-Operatoren, 207–213
- Euler-Poincaré-Formel, 58
- EULERSche Charakteristik, 53
- EULERSche Formel, 15, 57
- Fehlerindikatoren, 85
- Fehlerschätzern, 85
- FEM, *siehe* Finite Elemente
  - Methode
- Fernpunkt, 75
- Finite Elemente Methode, 82–86
  - h-Version, 85
  - hp-Version, 85
  - p-Version, 85
- Funktionaldeterminante, 84
- GABRIELgraph, 144
- GALERKIN-Verfahren, 81
- Gebiet, 7
- Generalisierte Finite Elemente
  - Methode, 86–88
- Geometrische Modellierung, 91–121
- geometrische Stetigkeit, 75
- GFEM, *siehe* Generalisierte Finite Elemente Methode
- Grad, 14, 63
  - Ausgangs-, 14
  - Eingangs-, 14
- Graph, 41
  - EULERScher, 16
  - Obergraphen, 12
  - zugehöriger ungerichteter, 15
- Graphen, 12
  - Adjazenzlisten, 14
  - Adjazenzmatrix, 13
  - bewertete, 12
  - duale, 13
  - einseitig zusammenhängende, 15
  - gerichtete, 12
  - Inzidenzmatrix, 14
  - isomorphe, 13
  - Isomorphismus, 13
  - Kantentabelle, 14
  - Matrixdarstellung, 13
  - Multigraphen, 12

- plättbare, 13
- planare, 13
- Pseudographen, 12
- schlichter, 12
- schwach zusammenhängende, 15
- stark zusammenhängende, 14
- Teilgraphen, 12
- ungerichtete, 12
- Untergraphen, 12
- Visualisierung, 13
- zusammenhängende, 14
- Graphentheorie, 12–16
  
- Halbkanten Datenstruktur, 119
- Halbraum-Modelle, 96
- „Half-Edge“ Datenstruktur, 119
- Half-space models, *siehe* Halbraum-Modelle
- HILBERT-Raum, 80
- Homöomorphismus, 19
- homogene Koordinaten, 27
- Homologie, 47–51
  - simplizial, 47
- Homologiegruppen, 49
  - Rang, 49
- Homologieklassen, 49
- Homotopie, 44–45
  - Äquivalenz, 44
  - Deformationsretrakt, 45
  - Inverses, 45
  - konstant, 44
  - Retraktion, 45
  - stationär, 44
- Hybridmodellierer, 120
- Hypergraphen, 16
- Hyperkanten, 16
- Hyperoctree, 101
  
- Implizite Modellierung, 106–114
- Innere Funktionen, 82
  
- Interpolation, 63–75
- Invarianten
  - topologische, 53–54
- Inzidenzen, 49
- Inzidenzmatrix, *siehe* Graphen, Inzidenzmatrix
- Inzidenzzahlen, 49
- isoparametrische Elemente, 86
  
- JACOBI-Determinante, 84
- JORDAN-BROUWERScher Separationssatz, 106
- JORDANScher Kurvensatz, 106
  
- Kanten, 12, 41
  - Mehrfach-, 12
  - parallele, 12
- Kanten-Funktionen, 82
- Kantenzug, 14
- Karten, 25
- Kegelschnitte, 74, 106
- Ketten, 47
  - homologe, 49
- KLEINSche Flasche, 51
- Knoten, 12
  - adjazent, 12
  - Anfangs-, 12
  - End-, 12
  - inzident, 12
- Knoten-Funktionen, 82
- kohärent, 47
- Kollokationsverfahren, 81
- Komplexität, 125
  - asymptotisch, 125
- Komponente, 19
- konstruktive Körpergeometrie, 96
- Kontrollvektor, 75
- Koordinaten, 23
  - baryzentrisch, 31
- Kostenmaß, 124
- Kreis, 14

- einfach, 14
- Lagrange
  - baryzentrische Formel, 65
- LAGRANGE-Interpolation, 64–66
- LAGRANGE-Polynome, 64
- LAPLACE-Gleichung, 79
- LAX-MILGRAM, 80
- lineare Hülle, 24
- Lineare Räume, 17
- lineare Räume, 23–24
- lineare Untermannigfaltigkeit, 24
- linearer Unterraum, 24
- Linearkombination, 23
- loop, 209
- MÖBIUSband, 51
- Mannigfaltigkeiten, 17, 25–26
  - duale Zerlegung, 26
- Mathematische Grundlagen, 61
- Matrizenkalkül, 23
- Mengen
  - Äußeres, 19
  - abgeschlossene, 18
  - Abschluß, 19
  - bogenweise
    - zusammenhängende, 19
  - einfach zusammenhängende, 19
  - Inneres, 18
  - konvexe, 24
  - offene, 17, 23
  - zusammenhängende, 19
- Mengenoperationen
  - regularisierte, 95
- Mengenoperatoren
  - regularisierte, 94
- Metrik
  - Euklidische, 22
  - $L_p$ , *siehe* MINKOWSKI
  - Manhattan, 22
  - Maximum, 22
  - Minkowski, 21
- Metrische Räume, 17
- metrische Räume, 21–23
- Modell
  - CAD, 6–7
  - Definition, 5
  - Ergebnis-, *siehe*
    - Ergebnismodell
  - numerisches, 7–9
  - Physikalisch/mathematisches, 7
- Modelle, 5–9
- Modellierung, 1
  - syntaktische, 96
- monomiale Basis, 64
- Nachbarschaft
  - schwach, 141
  - stark, 141
- Nachfolger, 12
- Natürliche Elemente Methode, 89
- NEM, *siehe* Natürliche Elemente Methode
- Nerv, 144
- NEUMANN-Bedingungen, 79
- Neuronalen Netze, 1
- Norm, 24
- Normalunterteilung, 43
- Normierte Räume, 17, 24
- Normzellen, 98–100
- Nullhomotopie, 44
- Oberflächenrepräsentation, 116–120
  - Datenstrukturen, 118–120
- Octrees, *siehe* Oktalbäume
- offener Kern, 18
- Oktalbäume, 100
- Operatoren
  - lineare, 24

- partielle Ableitungen, 77
- PETROV-GALERKIN-Verfahren, 81
- Pixel, 98
- PLC, 159
- POINCARÉ-Dualität, 54
- POISSON-Gleichung, 79
- Polyeder, 41, 56–61
  - duale, 56
  - einfache, 57
  - Facetten, 56
  - konvexe, 56
  - reguläre, 57
  - simpliziale, 56
  - sphärisch, 57
- Polynome, 63–64
- Polytop, 56
- Potentialgleichung, 79
- Potenzdiagramme, 141
- PR-Quadtree, *siehe*
  - Qadtree, Point-Region-127
- Prä-HILBERT Räume, 17
- Prä-HILBERT-Räume, 25
- Produkttopologie, 19
- Projektive Räume, 27–30
- PUFEM, 86
- Punkte
  - äußere, 19
  - innere, 18
- Punkte-k-D-Tree, 169
- Punkte-k-d-Tree, 180
- Punkte-Quadtree, 169, 180
  
- Quadriken, 106
- Quadtree, 100
  - Point-Region-, 137
- Quadtrees
  - Point-, 127
  - Point-Region-, 127
  - Region-, 100
  
- Räume, 17–30
  - Hausdorff-, 18
  - lineare, *siehe* Lineare Räume
  - metrische, *siehe* Metrische Räume
  - normierte, *siehe* Normierte Räume
  - Prä-HILBERT, *siehe* Prä-HILBERT-Räume
  - Projektive, *siehe* Projektive Räume
  - separierte, 18
  - topologische, *siehe* Topologische Räume
  - Summe, 19
    - zusammenziehbare, 45
  - „Radial-Edge“ Datenstruktur, 119
  - radiale Basisfunktionen, 88
  - Rand, 7, 19
  - Randbedingungen, 7
  - Randintegralmethode, 92
  - Randkette, 48
  - Randpunkte, 19
  - Registermaschine, 124
  - repräsentative Punkte, 137
  - Resultanten, 109
  - Retrakte, 45
  - RIEMANNsche Zahlenkugel, 29
  - RITZ-Verfahren, 81
  
  - $\mathbb{S}^{n-1}$ , *siehe* Einheitssphäre
  - Schlinge, 12
  - SeedKill-Algorithmus, 172
  - Sehnenvierecke, 152
  - Sichtbarkeitsbedingung, 159
  - Simplex
    - Fläche, 33
    - Rand, 47
    - Randoperator, 48
    - Volumen, 33
  - Simplexe, 31–40
    - infinitesimale, 150

- offene, 32
- orientierte, 47
- Orientierung, 32
- Schwerpunkt, 33
- Simpliziale Modellierung, 183–203
- simpliziale Zerlegung, 41
- Simplizialer Komplex, 41
  - baryzentrische Unterteilung, *siehe* Normalunterteilung<sup>43</sup>
  - Normalunterteilung, 43
- Simplizialkomplexe
  - homogene, 41
- Skalarprodukt, 25
- SOBOLEV-Räume, 81
- Software-Entwurf, 194–196
- Spacetrees, 100–104
- Sphäre, 26
- Splineinterpolation, 75
- Starrkörperrotation, 82
- Starrkörpertranslation, 82
- Steifigkeitsmatrix, 81
- stereographische Projektion, 28–30
- stereographischen Projektion, 148
- Stetigkeit
  - C, 75
  - G, 75
- Teilräume
  - topologische, 19
- Teilsimplexe, 32
- Testfunktionen, 80
- THIESSEN-Gebiete, 139
- THIESSEN-Nachbarn, 141
- Topologie, 11–23
  - algebraische, 11
  - allgemeine, *siehe* mengentheoretische
  - diskrete, 18
  - indiskrete, 18
  - kombinatorische, *siehe* algebraische
  - mengentheoretische, 11
  - Teilraum-, 19
- Topologische Räume, 17–20
  - Delaunay-Triangulierung, 148–151
- Transformationen
  - affine, 24
- Trennbarkeit, 18
- Triangulation, 41
- TURING-Maschine, 124
- Umfang, 125
- Umgebung, 18
- Umkreis, *siehe* Umsphäre
- Umsphäre, 34–40
- Unterkomplex, 41
- vef*-Graph, *siehe* Zellinzidenzgraph
- Vektorräume, 23
- Vektorraum
  - EUKLIDScher, *siehe* EUKLIDScher Vektorraum
- Volumenmodellierung, *siehe* Geometrische Modellierung
- Vorgänger, 12
- VORONOI
  - Kanten, 141
  - Knoten, 141
  - Zellen, 139
  - Zellkomplex, 139
- Voronoi-Diagramme
  - gewichtete, 141
- VORONOI-Diagramme, 139–143
  - beschränkte, 143
- Voxel, 98
- Weg, 14
  - einfach, 14

- WEIERSTRASSsche
  - Approximationssatz, 63
  - „Winged-Edge“ Datenstruktur, 118
- XFEM, 86
- Zahlenebene
  - endliche, 30
  - geschlossene, 30
- Zellinzidenzgraph, 116–117
- Zellkomplexe, 41–44
  - CW, 43–44
  - Simpliziale, 41–43
- Zellzerlegung, 98–105
  - Gerüst, 41
  - Skelett, 41
  - Unterteilung, 41
- Zentralprojektion, 27
- Zusammenhang, 14
- Zusammenhangskomponente, 15
- Zyklen, 48
  - linear unabhängige, 48
  - wesentlich, 48
- Zyklus, *siehe* Kreis





# Lebenslauf

Name: Martin Friedrich Bernreuther

Geburtsdatum: 07. 04. 1969 in Ulm-Söflingen

Eltern: Friedrich Bernreuther und  
Elisabeth Bernreuther, geb. Ringwald  
verheiratet, 1 Kind

1975 – 1979 Grundschule Unterkirchberg (heute Ortsteil von Illerkirchberg)

1979 – 1988 Gymnasium Ulm-Wiblingen

1988 Abitur (Leistungskurse Mathematik und Physik)

1990 – 1996 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart

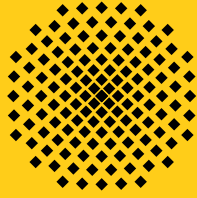
1993 – 1994 Studium des Bauingenieurwesens an der University of Calgary, Kanada

1996 Abschluß Diplom-Ingenieur (Diplomarbeitsthema: „Diskrete Optimierung mit Evolutionsstrategien auf parallelen, verteilten Systemen“)

1996 – 2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet „Informationsverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau“ der Fakultät Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart







Universität Stuttgart  
Fakultät Bauingenieurwesen  
Informationsverarbeitung im  
Konstruktiven Ingenieurbau  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart  
Germany

