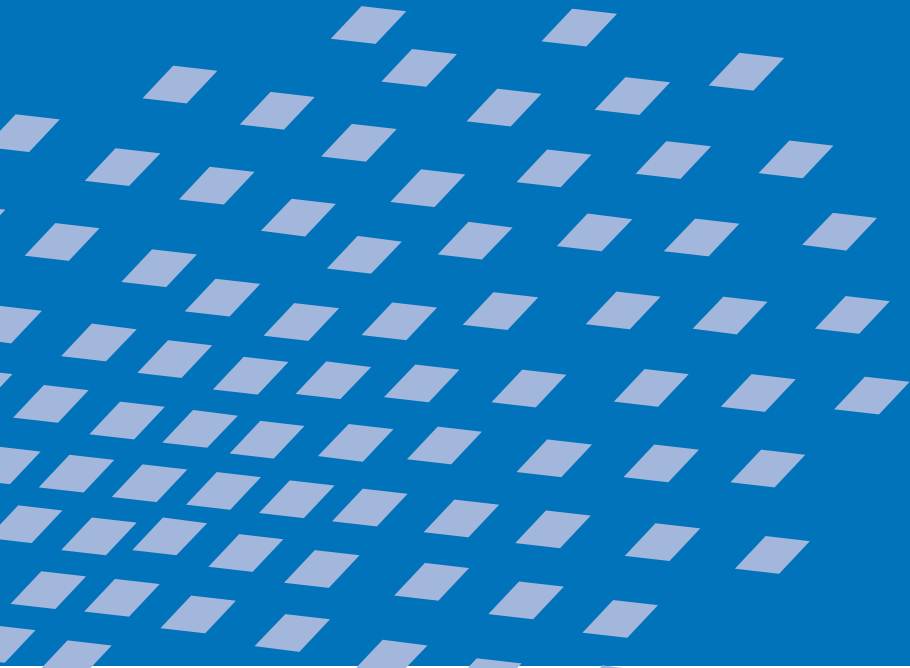




Universität Stuttgart
Institut für Baustatik
Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Große Verschiebungen und Stabilität in der Topologie– und Formoptimierung

Roman Kemmler



Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung

von

Roman Kemmler

Bericht Nr. 41 (2004)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 2004



© Roman Kemmler

Berichte können bezogen werden über:

Institut für Baustatik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: 0711 / 685 6123

Fax: 0711 / 685 6130

<http://www.uni-stuttgart.de/ibs/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

ISBN 3-00-013114-0

Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung

Von der Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Roman Kemmler

aus Hilzingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm

Mitberichter: Prof. Dr. Ole Sigmund

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Januar 2004

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Stuttgart 2004

Zusammenfassung

Die anhand der Strukturoptimierung generierten Tragwerke sind bezüglich den getroffenen Annahmen für den Optimierungsprozess optimal. Aus diesem Grund müssen alle diejenigen Effekte im Optimierungsprozess aufgenommen werden, welche einen bedeutenden Einfluss auf das Ergebnis haben können.

Mit der Berücksichtigung einer nichtlinearen Kinematik können zwei Phänomene beschrieben werden. Zum einen ist es die nichtlineare Beziehung zwischen Einwirkung und Strukturantwort. Zum anderen können kritische Punkte einer Struktur bestimmt werden. Ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die Annahme von großen Verschiebungen bei der Topologieoptimierung. Auf der Basis der nichtlinearen Kinematik können verschiedene Steifigkeitskriterien entwickelt werden. Für die materielle Topologieoptimierung wird ein Vorschlag unterbreitet, anhand dessen lokale Entwurfskriterien ohne explizite Abhängigkeit zu den Entwurfsvariablen berücksichtigt werden können.

Zur Generierung von flexiblen Strukturen werden zwei Problemstellungen untersucht. Bei den Transport-Mechanismen ist das Ziel, die Aktuatorleistung so gut wie möglich auf ein Werkstück zu übertragen. Es wird gezeigt, dass die Erweiterung auf eine nichtlineare Kinematik zu einem besseren Verhältnis zwischen Aktuatorleistung und der im Werkstück gespeicherten Dehnungsenergie führt. Auf der gleichen Annahme werden Pfadverfolgungsmechanismen entworfen, welche einer gekrümmten Bahn folgen können. Zur Erzielung einer möglichst eindeutigen Materialverteilung im Entwurfsraum werden verschiedene Steifigkeitskriterien, welche den Kontakt mit dem Werkstück approximativ beschreiben, diskutiert.

Um Strukturen zu generieren, welche für ein vorgegebenes Sicherheitsniveau kein Instabilitätsverhalten aufzeigen, werden kritische Lasten anhand zweier verschiedener Verfahren ermittelt. Eine Abschätzung der kritischen Laststufe erfolgt durch eine lineare Eigenwertanalyse und wird als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem eingearbeitet. Um auch bei nichtlinearem Vorbeulverhalten eine gute Vorhersage zu erhalten werden in einem nächsten Schritt kritische Punkte direkt mit einem erweiterten System berechnet. Hierdurch kann auch die Antwort imperfekter Strukturen berücksichtigt werden, wobei diese in der Regel ein stark nichtlineares Vorbeulverhalten aufweisen. Anhand der vorgestellten Verfahren werden ebenfalls maßgebende Imperfektionsformen generiert.

Die nichtlinearen Optimierungsaufgaben werden unter Zuhilfenahme gradientenbasierter Verfahren gelöst. Für alle Fragestellungen werden die Sensitivitäten auf Basis des adjungierten Ansatzes hergeleitet. Zur effizienten Lösung der Entwurfsaufgaben werden Anmerkungen zur Nutzung der Potentialeigenschaft gemacht. Anhand von ausgewählten Beispielen werden die vorgestellten Entwurfsaufgaben und die algorithmische Umsetzung verifiziert.

Abstract

Structures generated by structural optimization are optimal with regard to the assumptions made for the optimization process. Therefore, all effects that could have a significant influence on the result have to be included in the optimization process.

Taking non-linear kinematics into consideration, two phenomena can be described. Firstly, the non-linear relation between effect and structural response. Secondly, critical points of a structure can be determined. A main focus of this thesis is the assumption of large displacements in topology optimization. Several stiffness criteria can be developed on the basis of the non-linear kinematics. For material topology optimization a proposal is made that allows local design criteria to be taken into consideration without explicit dependency on the design variables.

In order to generate flexible structures two types of the problem will be investigated. For transport mechanisms, the object is to transfer the actuator power in the best way as possible to a work piece. It is shown that the enhancement towards non-linear kinematics yields a better relationship between the actuator power and the strain energy stored in the work piece. Based on the same assumption path tracing mechanisms are designed, which can follow a curved path. To achieve the clearest possible material distribution in the design space, various stiffness criteria are discussed that describe approximately the contact of actuator and work piece.

To create structures that do not show unstable behavior for a prescribed safety level, critical loads are determined using two different methods. The critical load level is estimated by a linear eigenvalue analysis and is incorporated into the optimization problem as a constraint. In the next step, critical points are calculated directly with an extended system in order to obtain a good prediction even for non-linear pre-buckling behavior. This also allows taking into consideration the response of imperfect structures, which generally show a strong non-linear pre-buckling behavior. The method presented is also utilized to generate the decisive imperfection shape.

Non-linear optimization problems are solved using gradient-based methods. For all problems the sensitivities are determined on the basis of the adjoint approach. Further more, the use of potential character in finding efficient solutions to the design problems are commented. Finally, the design cases presented and the algorithmic implementation are verified by selected examples.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Stipendiat des DFG Graduiertenkollegs "Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen" am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm, der mir an seinem Institut einen optimalen Rahmen für meine Forschungsarbeit bot. Seine Anregungen zu diesem Thema sowie sein förderndes wissenschaftliches Interesse haben diese Arbeit entscheidend geprägt.

Herrn Prof. Dr. Ole Sigmund möchte ich recht herzlich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts danken. Ich habe mich sehr über seine spontane Bereitschaft gefreut, meine Arbeit zu begutachten und extra zu meiner Doktorprüfung aus Dänemark anzureisen.

Meinen Kollegen am Institut für Baustatik danke ich für die angenehme Zeit, ihre Hilfsbereitschaft und die zahlreichen wissenschaftlichen Diskussionen und wertvollen Hinweise, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ein besonderer Dank gebührt dabei Stefan Schwarz, Holger Steeb und Kurt Maute, durch die ich nicht nur bei fachlichen Themen neue Einblicke gewonnen, sondern in denen ich auch echte Freunde gefunden habe. Darüber hinaus danke ich Gian Antonio D'Addetta für die angenehme Zeit während unseres gemeinsamen Pendelns zwischen Karlsruhe und Stuttgart.

Bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft möchte ich mich für das Stipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen an der Universität Stuttgart bedanken.

Schließlich möchte ich mich ganz besonders herzlich bei meinen Eltern, meiner Frau Nicole und den Kindern Elena und Felix bedanken. Ihr Verständnis für meine Arbeit und die ständigen Motivationsschübe waren ein unverzichtbarer Rückhalt.

Stuttgart, im Januar 2004

Roman Kemmler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	3
1.3	Gliederung	5
2	Konzept der Strukturoptimierung	7
2.1	Einleitung	7
2.2	Optimierungsmodell	10
2.3	Optimierungsalgorithmen	13
2.4	Entwurfsmodell	15
2.5	Analysemodell	16
3	Strukturverhalten bei nichtlinearer Kinematik	17
3.1	Nichtlineare Strukturantwort	17
3.2	Kritische Punkte und Imperfektionsverhalten	19
4	Grundlagen der nichtlinearen Strukturanalyse	23
4.1	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	23
4.1.1	Kinematik	23
4.1.2	Spannungen	25
4.1.3	Werkstoff	25
4.2	Gleichgewichtsaussage	26
4.2.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	26
4.2.2	Linearisierung des PvV in diskretisierter Form	27
4.3	Pfadverfolgung und Stabilitätsberechnung	29
4.3.1	Pfadverfolgung	29
4.3.2	Bestimmung kritischer Punkte	31
5	Grundlagen der Topologie- und Formoptimierung	35
5.1	Topologieoptimierung	35
5.2	Formoptimierung	41
6	Grundelemente der Sensitivitätsanalyse	45
6.1	Einleitung	45
6.2	Typen von Sensitivitätsanalysen	46
6.2.1	Numerische Differentiation	46
6.2.2	Analytische Differentiation	47

6.3	Grundbausteine der diskreten Sensitivitätsanalyse	49
6.3.1	Explizite Ableitungen	50
6.3.2	Implizite Ableitungen	51
6.4	Anmerkungen zu den Kosten einer Sensitivitätsanalyse	52
7	Erweiterungen der Topologieoptimierung	55
7.1	Strukturen maximaler Steifigkeit	55
7.1.1	Definition verschiedener Entwurfskriterien	55
7.1.2	Sensitivitätsanalyse der Steifigkeitskriterien	58
7.1.3	Algorithmische Umsetzung	61
7.1.4	Beispiel 1: Ein einführendes, analytisches Beispiel	61
7.1.5	Beispiel 2: Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte	64
7.1.6	Beispiel 3: Vergleich der unterschiedlichen Steifigkeitskriterien	65
7.1.7	Beispiel 4: Strukturen mit stark nichtlinearem Verhalten	68
7.2	Lokale Entwurfskriterien in der Topologieoptimierung	70
7.2.1	Verschiebungsnebenbedingungen in der Topologieoptimierung	71
7.2.2	Sensitivitätsanalyse von Verschiebungsgrößen	73
7.2.3	Beispiel 5: Vermeidung der Kollision zweier Bauteile	74
7.2.4	Beispiel 6: Gleichmäßige Pressung in Lagerfugen	77
8	Generierung von flexiblen Strukturen	81
8.1	Entwurf von Transport-Mechanismen	82
8.1.1	Entwurfskriterien	82
8.1.2	Sensitivitätsanalyse	85
8.1.3	Algorithmische Umsetzung	86
8.1.4	Beispiel 7: Verschiebungs-Inverter-Mechanismus	86
8.2	Entwurf von Pfadverfolgungsmechanismen	90
8.2.1	Entwurfskriterien	90
8.2.2	Sensitivitätsanalyse	97
8.2.3	Algorithmische Umsetzung	98
8.2.4	Beispiel 8: Greifmechanismus	98
8.3	Konvergenzprobleme bei der Gleichgewichtssiteration	103
9	Stabilitätskriterien in der Strukturoptimierung	107
9.1	Kritische Punkte bestimmt durch eine Eigenwertanalyse	108
9.1.1	Sensitivitätsanalyse einfacher kritischer Punkte	108
9.1.2	Beulmoden in hochporösen Bereichen bei der Topologieoptimierung	109
9.1.3	Beispiel 9: Berücksichtigung von Stabilitätsnebenbedingungen	113
9.2	Kritische Punkte bei nichtlinearen Strukturanalysen	117
9.2.1	Sensitivität einfacher kritischer Punkte und Eigenwerte	118
9.2.2	Algorithmische Umsetzung	124
9.2.3	Beispiel 10: Einfluss der Imperfektion	126
9.3	Generierung geometrischer Imperfektionsformen	129
9.3.1	Beispiel 11: Ermittlung maßgebender Imperfektionsform	130

10 Bewertung und Ausblick	137
10.1 Zusammenfassung und Bewertung	137
10.2 Fazit und Ausblick	140
A Herleitung der Imperfektionsempfindlichkeit	153
B Herleitung eines hyperelastischen Materials	157

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiel eines Wechselspiels zwischen Form und Kraft in der Natur anhand eines Oberschenkelknochens	2
1.2	Berücksichtigung des nichtlinearen Strukturverhaltens in der Optimierung .	4
2.1	Teildisziplinen der Strukturoptimierung aus RAMM ET AL. [99]	8
2.2	Modellierung des diskretisierten Optimierungsproblems	9
2.3	Mehrkriterienoptimierung aus MAUTE [78]	13
2.4	GERMEIER–Methode	13
2.5	Abbildungen mit gleicher und veränderter Topologie	15
3.1	Spannungsprobleme und deren Last–Verschiebungs–Charakteristiken	18
3.2	Kritische Punkte und deren Imperfektionscharakteristiken (Bild 1)	20
3.3	Kritische Punkte und deren Imperfektionscharakteristiken (Bild 2)	21
4.1	Kinematik des Kontinuums	24
4.2	Pfadverfolgungsstrategien	29
5.1	Geometrische und materielle Methoden der Topologieoptimierung (aus MAUTE [78])	36
5.2	Steifigkeits–Dichte–Funktion für den SIMP–Ansatz	39
5.3	Stabilisierung suboptimaler Werkstoffmodelle mit der Filtermethode	40
5.4	Formänderung auf der Basis natürlicher Entwurfsgeschwindigkeitsfelder . .	42
5.5	Aufbau der Design–Elemente aus BLETZINGER [18] bzw. BLETZINGER ET AL. [19]	43
7.1	Unterschiede der Steifigkeitskriterien beider Theorien	57
7.2	Systembeschreibung des Beispiels 1	62
7.3	Verschiebungen und Dehnungsenergien in Abhängigkeit der Entwurfsvariable s des Beispiels 1	63
7.4	Geometrie, Lasten und Materialdaten des Beispiels 2	64
7.5	Generierte Strukturen des Beispiels 2	65
7.6	Vergleich zweier Strukturen des Beispiels 2 (Viertel–System)	66
7.7	Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 3	66
7.8	Generierte Strukturen des Beispiels 3 und deren Vergleich	67
7.9	Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 4	69
7.10	Generierte Strukturen des Beispiels 4	69
7.11	Strukturverhalten der Tragwerke des Beispiels 4	70
7.12	Problemstellung von lokalen Entwurfskriterien in der Topologieoptimierung	71

7.13	Definition von angrenzenden Elementen für Verschiebungsnebenbedingungen	72
7.14	Funktionsverlauf für Modifikationsfaktor β_u und SIMP–Ansatz	73
7.15	Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 5	75
7.16	Generierte Strukturen des Beispiels 5 in ihrer undeformierten sowie deformierten Lage	76
7.17	Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 6	77
7.18	Generierte Strukturen des Beispiels 6	78
8.1	Prinzipskizze des Entwurfsproblems von Transport–Mechanismen	83
8.2	Materialdaten, Geometrie und Entwurfssfälle des Beispiels 7	87
8.3	Ergebnisse für System 1 & 2 des Beispiels 7 und deren geometrisch nicht-lineare Verhaltensweisen	88
8.4	Ergebnisse für System 3 & 4 des Beispiels 7 und deren geometrisch nicht-lineare Verhaltensweisen	89
8.5	Prinzipskizze des Deformationsverhaltens für Pfadverfolgungsmechanismen	91
8.6	Abstandskriterien zwischen Ist– und Solllage	92
8.7	Vorgehensweise beim Greifen eines Werkstückes	92
8.8	Prinzipskizze der Steifigkeitskriterien für Pfadverfolgungsmechanismen	94
8.9	Materialdaten, Geometrie und vorgegebene Bahn des Beispiels 8	99
8.10	Generierte Struktur für die unterschiedlichen Steifigkeitskriterien des Beispiels 8	101
8.11	Generierte Struktur und deren Deformationsverhalten des Beispiels 8	102
8.12	Ursache der Konvergenzprobleme bei der Gleichgewichtssiteration	104
8.13	Verzerrungsenergieverlauf für unterschiedliche hyperelastische Werkstoffe	105
9.1	Wirkungsweise der geschichteten Penalty–Faktoren in der materiellen Topologieoptimierung	111
9.2	Numerisches Beispiel zur Verifizierung geschichteter Penalty–Faktoren	112
9.3	Geometrie, Lasten und Materialdaten des Beispiels 9	114
9.4	Generierte Strukturen des Beispiels 9 und deren Vergleich	115
9.5	Fehler der Sensitivität der kritischen Laststufe des imperfekten Tragwerks unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von der variablen Imperfektionsform.	122
9.6	Algorithmische Umsetzung bei Berücksichtigung von Stabilitätsnebenbedingungen	125
9.7	Geometrie, Lasten und Materialdaten des Beispiels 10	127
9.8	Generierte Strukturen des Beispiels 10 und deren Vergleich	128
9.9	Stabilitätsphänomen des poltreu belasteten Stabes	129
9.10	Last–Verschiebungsdiagramme der formoptimierten Strukturen des Beispiels 10 im Vergleich	130
9.11	Materialdaten, Geometrie und Belastung des Beispiels 11	131
9.12	Strukturverhalten des perfekten und geometrisch imperfekten Tragwerks des Beispiels 11	132
9.13	Vergleich des Strukturverhaltens des Systems 1 und das des perfekten Systems des Beispiels 11	132

9.14 Eigenformen des Beispiels 11 für drei verschiedenen Randbedingungen, welche als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder verwendet werden 134

9.15 Ergebnisse des Beispiels 11 in Abhängigkeit der Parametrisierung für eine vorgegebene Imperfektionsamplitude 135

9.16 Kleinste imperfekte Stabilitätslast Systems 5 in Abhängigkeit berücksichtigter Eigenformen des Beispiels 11 136

Bezeichnungen

Auf die folgenden Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen. Lokale Größen werden in den jeweiligen Abschnitten eingeführt.

Abkürzungen

BEM	Randelement–Methode, Boundary Element Method
CAD	Computer Aided Design
CAGD	Computer Aided Geometric Design
CARAT	Computer Aided Research and Analysis Tool – FEM Programmsystem
EP	EDGEWORTH–PARETO Optimum
FEM	Methode der Finiten Elemente
FO	Formoptimierung
MEMS	Micro–Electro–Mechanical–Systems
MMA	Method of Moving Asymptotes
MP	Mathematische Programmierung
NB	Nebenbedingung
OC	Optimalitätskriterienverfahren
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
SA	Sensitivitätsanalyse
SCP	Sequentielle Konvexe Programmierung
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalty for intermediate density
SLP	Sequentielle Lineare Programmierung
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung
TO	Topologieoptimierung
TL	totale LAGRANGE Betrachtungsweise
UL	fortschreitende LAGRANGE Betrachtungsweise

Symbole

$\delta(\cdot)$	Variationen
(\cdot)	kontinuierliche Größen
$d(\cdot)$	infinitesimale Größen
$(\cdot)^h$	Näherungsfunktionen
$\Delta(\cdot)$	Inkrementelle Größen
$(\cdot)^*$	Lösungspunkt des Optimierungsproblems
$(\cdot)_k$	Index zur Beschreibung des Optimierungsfortschrittes
$(\bar{\cdot})$	Größen bei Lastvorgabe

$(\hat{\cdot})$	Größen bei Verschiebungsvorgabe
$(\overset{\circ}{\cdot})$	Größen am Instabilitätspunkt
$(\dot{\cdot})$	vorgegebene Größen für den Entwurfsprozess

Gradientenoperatoren

$\nabla_{\mathbf{s}}(\cdot)$	Ableitung nach den Entwurfsvariablen
$\nabla_{\mathbf{s}}^{ex}(\cdot)$	bekannte Ableitung nach den Entwurfsvariablen
$\nabla_{\mathbf{u}}(\cdot)$	Ableitung nach den Verschiebungsgrößen
$\nabla_{\lambda}(\cdot)$	Ableitung nach dem Laststeigerungsparameter
$\nabla_{\mathbf{X}}(\cdot)$	Ableitung nach den Koordinaten der Referenzkonfiguration
$\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$	Ableitung nach den Koordinaten der Momentankonfiguration

Optimierungsgrößen

L	LAGRANGE-Funktion
f	Zielfunktion
\tilde{f}	modifizierte Zielfunktion, adjungierte Sensitivitätsanalyse
\mathbf{h}	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen
\mathbf{g}	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen
$\boldsymbol{\eta}$	LAGRANGE-Multiplikatoren für die Gleichheitsnebenbedingungen
$\boldsymbol{\gamma}$	LAGRANGE-Multiplikatoren für die Ungleichheitsnebenbedingungen
$\boldsymbol{\mu}$	LAGRANGE-Multiplikatoren für die adjungierte Sensitivitätsanalyse
$\mathbf{I}(\cdot)$	Filtervektor
s	eine diskrete Entwurfsvariable
\mathbf{s}	Vektor der diskreten Entwurfsvariablen
\mathbf{s}_L	Vektor der unteren Restriktion der Entwurfsvariablen
\mathbf{s}_U	Vektor der oberen Restriktion der Entwurfsvariablen
n_f	Anzahl der Zielfunktionen
n_s	Anzahl der Optimierungsvariablen
n_h	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
n_g	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
k	Optimierungsschritt
$\chi(\mathbf{X}, k)$	Abbildungsfunktion
$\chi(\mathbf{X}, k)$	Indikatorfunktion

Geometriebeschreibung

\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration
\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration
$\chi_{\mathbf{X}}$	Abbildungsfunktion des Deformationsprozesses
\mathbf{J}	JACOBI-Matrix
$ \mathbf{J} $	JACOBI-Determinante
$\tilde{\mathbf{s}}$	normierte Imperfektionsform
ζ	Imperfektionsamplitude

Kinematik

\check{u}	kontinuierliche Verschiebungen
u^h	approximierte Verschiebungen
u	diskrete Verschiebungsgrößen
E	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor bzw. -matrix
F	materieller Deformationsgradient
B	Kinematik-Operator

Spannungen, äußere Belastung

σ	CAUCHY-Spannungstensor
S	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor bzw. -matrix
σ_v	v. Mises-Spannungen
λ	Laststeigerungsfaktor
$\bar{\lambda}$	Laststeigerungsfaktor für eine vorgegebene Laststufe
$\hat{\lambda}$	Laststeigerungsfaktor für eine vorgegebene Verschiebungsstufe
$\check{\lambda}$	kritischer Laststeigerungsfaktor
$\tilde{\lambda}$	abgeschätzter kritischer Laststeigerungsfaktor
$\tilde{\lambda}_i$	kritischer Laststeigerungsmultiplikator (Eigenwert)
$\tilde{\lambda}^{\check{e}}$	abgeschätzter kritischer Laststeigerungsfaktor für den neuen Entwurf
\tilde{b}	Volumenlasten
\tilde{t}	Oberflächenlasten
P	Lastvektor
R	interne Knotenkräfte
G	Ungleichgewichtskräfte

Arbeitsausdrücke

W	Arbeit
W^{int}	interne Arbeit
W^{ext}	externe Arbeit
δW	virtuelle Arbeit
δW^{int}	virtuelle interne Arbeit
δW^{ext}	virtuelle externe Arbeit
W_S	volumenspezifische Verzerrungsenergie

Steifigkeitsmatrizen

K_e	linear elastische Steifigkeitsmatrix
K_u	Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix
K_{eu}	Summe linear elastischer und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix
K_g^I	erste Anfangsspannungsmatrix, erste geometrische Steifigkeitsmatrix
K_g^{II}	zweite Anfangsspannungsmatrix, zweite geometrische Steifigkeitsmatrix
K_g	Summe erste und zweite geometrische Steifigkeitsmatrix
K_T	tangentiale Steifigkeitsmatrix

Werkstoff, Material

\mathbf{C}	Materialtensor bzw. -matrix
$\underline{\lambda}$	LAMÉ-Konstante
$\underline{\mu}$	LAMÉ-Konstante
n	Materialparameter zur Beschreibung des Grades der Nichtlinearität
E	Elastizitätsmodul
E_0	Elastizitätsmodul des Referenzmaterials
ν	POISSON-Zahl, Querdehnzahl
ρ	Dichte, Porosität
ρ_0	Referenzdichte
β	Exponent für das makroskopische Werkstoffmodell (Penalty Faktor)

Sonstige Größen

\mathbf{A}	Assemblierungssymbol
\mathbf{I}	Identitätstensor
ϕ	Singularitätsvektor
ψ	Eigenvektor
H_i	Glättungsoperator
\check{r}	Glättungsradius (Filtermethode)
$\check{\kappa}$	Glättungsexponent (Filtermethode)

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die klassische Vorgehensweise des Ingenieurs ist die Analyse eines am ‘Reißbrett’ entworfenen Tragwerks. Ein erster Entwurf beruht auf dem Wissen und der Erfahrung des Konstrukteurs. Der anschließend von Hand betriebene, iterative Prozess zur Verbesserung des Entwurfes wird in der Regel so lange wiederholt, bis ein sicheres und nicht wesentlich überdimensioniertes Tragwerk entwickelt ist. Heute begrenzt meist die zur Entwicklung eines Bauteils vorgesehene Zeit die weitere Verbesserung einer Struktur.

Optimierungsläufe, ob manuell oder automatisiert, verfolgen im Wesentlichen zwei unterschiedliche Ziele. Eines davon ist die Entwicklung wirtschaftlicherer Lösungen bei gleicher Qualität. Dazu gehören z. B. Strukturen mit geringerem Materialaufwand oder reduzierten Entwicklungskosten für vergleichbare Produkte. Die andere Motivation ist die Verschiebung der Grenzen bezüglich der technischen Realisierbarkeit, was sich durch das Bestreben des menschlichen Tuns nach ‘höher, schneller und weiter’ begründet.

Die Natur zeigt deutlich, wie Konstruktionen aus organischen Materialien der unterworfenen Beanspruchung angepasst sind. Sehr anschaulich verdeutlicht dies z. B., wie in Abbildung 1.1 zu sehen, die Ausbildung von Knochenmaterial. Das linke Bild zeigt anhand eines Röntgenbildes die Dichteverteilung der Knochenbälkchen eines Oberschenkelhalses. Das rechte Bild verdeutlicht anhand des Spannungsfeldes den am Kraftfluss orientierten Aufbau des Knochens. Bemerkenswert ist weiterhin, dass Tragwerke der Natur sich innerhalb ihres Lebenszyklus an veränderte Lebenssituationen anpassen. Dieses Prinzip der Selbststeuerung des Wachstums zeigt sich deutlich bei Bäumen, welche sich z. B. nach Erdbeben durch entsprechendes Wachstum wieder aufrichten können.

Diese dynamische Anpassungsfähigkeit an veränderte Randbedingungen ist für technische Konstruktionen aus anorganischen Baustoffen noch recht selten, aber das Prinzip ‘Form folgt Kraft’ fördert innovatives Denken. In der klassischen Vorgehensweise des Ingenieurs wird, wie bereits oben erwähnt, der Entwurf so lange modifiziert, bis er den Vorgaben, wie z. B. zulässigen Spannungen und Verschiebungen, genügt. Hier folgt also die Kraft der Form. Auf dem Umkehrprinzip, wie es in der Natur zu beobachten ist, baut die Strukturoptimierung auf. Dabei wird der Aufbau eines Tragwerks gesucht, welcher unter Vorgabe von Randbedingungen die Aufgabenstellung optimal erfüllt.

Erste Bestrebungen in diese Richtung stammen von GALILEO GALILEI, der bereits im 17. Jahrhundert das Gewicht eines Kragbalkens minimierte. Dabei wurde die Form dem

Biegemomentenverlauf angepasst (SZABO [130]). Die Basis der mathematischen Optimierung wurde jedoch erst mit der Einführung der Differential- und Integralrechnung von LEIBNIZ und NEWTON Ende des 17. Jahrhunderts geschaffen. Hierdurch war die Suche nach einer Extremalstelle einer Funktion lösbar geworden. In der Folge beschäftigten sich weitere namhafte Wissenschaftler wie BERNOULLI, EULER und LAGRANGE mit verschiedenen Fragestellungen der Strukturoptimierung. Als Schwerpunkt dieser Untersuchungen galt dabei die Verifikation mechanischer Gesetze.

Um 1870 wurde von MAXWELL [83] erstmals versucht, die Ansätze des Umkehrprinzips in der Strukturoptimierung für den Entwurf von Tragwerken einzuführen. Ziele der Untersuchung waren rein zug- oder druckbeanspruchte Fachwerkstrukturen mit minimalem Gewicht bei Begrenzung der zulässigen Spannungen. Ergebnis seiner Untersuchungen war, dass der notwendige Materialaufwand unabhängig von dem strukturellen Aufbau bei vordefinierten, äußeren Belastungen ist (WIEDEMANN [138]). Anfang des 20. Jahrhunderts erweiterte MICHELL [85] die Arbeiten von MAXWELL auf allgemeine Fachwerke. In der Arbeit von MICHELL sind die notwendigen Bedingungen für gewichtsoptimale Tragwerke angegeben. Die MICHELL-Strukturen bestehen aus einem unendlich feinen Netz von orthogonalen Stäben, welche an den Trajektorien eines kontinuierlichen Tragwerks ausgerichtet sind. Diese für begrenzte Spannungen gewichtsoptimale Strukturen sind durch ihre Komplexität nicht praktikabel, doch dienen sie noch heute als Referenzlösungen. Erst Ende der 50er-Jahre des letzten Jahrhunderts wurde von HEMP (1958) und später von COX (1965), PRAGER (1967) und ROZVANY (1977) die Arbeit MICHELLS fortgeführt und verallgemeinert. Die Lösungen beruhten weiterhin auf analytischen Zugängen und blieben deshalb auf Fach- und Stabtragwerke beschränkt.

Wie in vielen Disziplinen brachten die aufkommenden Computer den Durchbruch bei der Bearbeitung allgemeiner Optimierungsprobleme. Nun war der Weg offen alle, für eine Strukturoptimierung notwendigen Analysen approximativ bzw. numerisch zu lösen. Für die Strukturanalyse setzte sich die Methode der finiten Elemente durch, welche auf lokalen RITZ-Ansätzen beruht. Die Steigerung der Leistungsfähigkeit von Optimierungsalgorithmen und der geometrischen Beschreibung der Tragwerke mittels ‘Computer Aided Design’ (CAD) ermöglichte den Durchbruch der Strukturoptimierung. Anfänglich konzentrierte

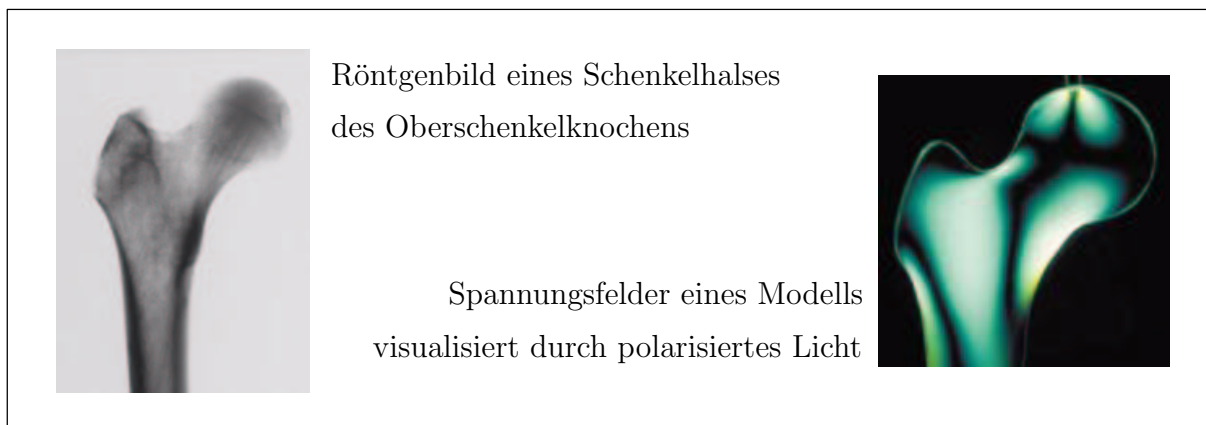


Abbildung 1.1: Beispiel eines Wechselspiels zwischen Form und Kraft in der Natur anhand eines Oberschenkelknochens

sich die wissenschaftliche Arbeit auf die Optimierung von topologisch bekannten Fach- und Stabtragwerken. Später wurden die Formoptimierungsprobleme auf kontinuierliche Systeme wie Platten und Schalen sowie um mechanisch anspruchsvollere Fragestellungen erweitert.

Erst Ende der 80er-Jahre wurde die Suche nach topologisch unbekanntem Tragwerken durch die richtungsweisende Arbeit von BENDSØE und KIKUCHI [12] wieder aufgenommen. Die Geometrie eines kontinuierlichen Tragwerks wird durch die Materialverteilung in einem Entwurfsraum beschrieben. Zur Steuerung der Materialverteilung wird ein poröses Materialmodell eingeführt. Durch die Anlagerung von Material in Bereichen mit hoher Beanspruchung bildet sich, wie beim Knochen in Abbildung 1.1 sichtbar, ein Traggerüst aus.

Bereits die von MICHELL entworfenen Tragwerke zeigen eine hohe Spezialisierung. Die Empfindlichkeit derartiger Tragwerke gegenüber einer geringen Parametervariation, wie z. B. eine Imperfektion der Belastung oder Lagerung, ist enorm. Diesen Effekt zeigen ebenfalls numerisch generierte Entwürfe. Auf diesen Sachverhalt hat THOMPSON [131] in einer Abhandlung mit dem Titel: ‘Optimization as a generator of structural instability’ hingewiesen, in der er vor der Imperfektionsempfindlichkeit hoch spezialisierter Tragwerke warnt. Die Schlussfolgerung aus dieser berechtigten Kritik kann nur die Erweiterung der Optimierungsaufgaben auf alle relevanten mechanischen Aspekte sein.

1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, geometrisch nichtlineare Effekte bereits in dem Optimierungsprozess zu berücksichtigen. Dadurch wird bei der Generierung von Tragwerken eine Steigerung der Aussagekraft erreicht. Insbesondere mit der Berücksichtigung des Instabilitätsphänomens wird versucht, den Einwand von THOMPSON [131] zu widerlegen, dass die Optimierung generell ein Generator empfindlicher Tragwerke ist.

Die einzelnen Schwerpunkte dieser Arbeit sind:

- Die Berücksichtigung einer nichtlinearen Kinematik bei der Topologieoptimierung. Unter der Annahme einer linearen Theorie haben sich für die Steifigkeitsoptimierung verschiedene Begriffe eingebürgert. Die Zielkriterien unterscheiden sich lediglich um einen vom Lastniveau unabhängigen Faktor. Aus diesem Grund generieren alle Ansätze identische Ergebnisse. Wird nun eine nichtlineare Kinematik berücksichtigt, so sind verschiedene Kriterien definierbar, welche unterschiedliche Tragwerke generieren. Neben den verschiedenen Entwurfskriterien spielt das Lastniveau, durch das nichtlineare Verhalten zwischen Last und Verschiebung, eine bedeutende Rolle.
- Die Generierung von flexiblen Mikrostrukturen. Hier zeigt sich, dass sich die Aussagekraft durch die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität deutlich steigern lässt. Die an sich kinematischen Strukturen, die auf der Basis einer linearen Theorie generiert werden, neigen vor Erreichen ihrer geplanten Enddeformation zum Blockieren. Weiterhin besteht die Möglichkeit der Bahnkontrolle von ausgewählten Teilen einer Struktur. Hierdurch können z. B. Greifkonstruktionen mit einem präzise vordefinierten Bewegungsablauf erzeugt werden.

- Der dritte Schwerpunkt ist die Generierung von Tragwerken, bei denen das Instabilitätsproblem bereits im Optimierungsprozess berücksichtigt wird. Das Instabilitätsproblem wird zuerst auf der Basis einer linearen Vorbeulanalyse untersucht. Zur Steigerung der Genauigkeit wird anschließend eine vollständig geometrisch nichtlineare Analyse vorgenommen. Bei diesem Verfahren lässt sich sehr gut das Verhalten des imperfekten Tragwerks berücksichtigen. Ein letzter Aspekt dieses Schwerpunktes ist die Suche nach der Imperfektionsform, welche zur kleinsten Instabilitätslast unter Vorgabe einer geometrischen Imperfektionsamplitude führt.

Abbildung 1.2 zeigt anhand anschaulicher Beispiele den Einfluss der geometrischen Nichtlinearität im Optimierungsprozess für den ersten und den dritten Schwerpunkt. Die oberen beiden Tragwerke zeigen diesen Einfluss bei der Generierung von steifen Strukturen. Die Auswirkung unter Berücksichtigung des Instabilitätsproblems wird anhand der beiden unteren Tragwerke verdeutlicht.

Für die in dieser Arbeit gezeigten Beispiele wurden ausschließlich finite Schalenelemente verwendet, um die Verschiebungen aus der Tragwerkebene berücksichtigen zu können. Hierdurch lassen sich deutliche Unterschiede zwischen einer membranorientierten und einer biegeorientierten Abtragungsweise herauskristallisieren. Weiterhin zeigen gekrümmte Schalen zum Teil eine erhebliche Imperfektionsempfindlichkeit.

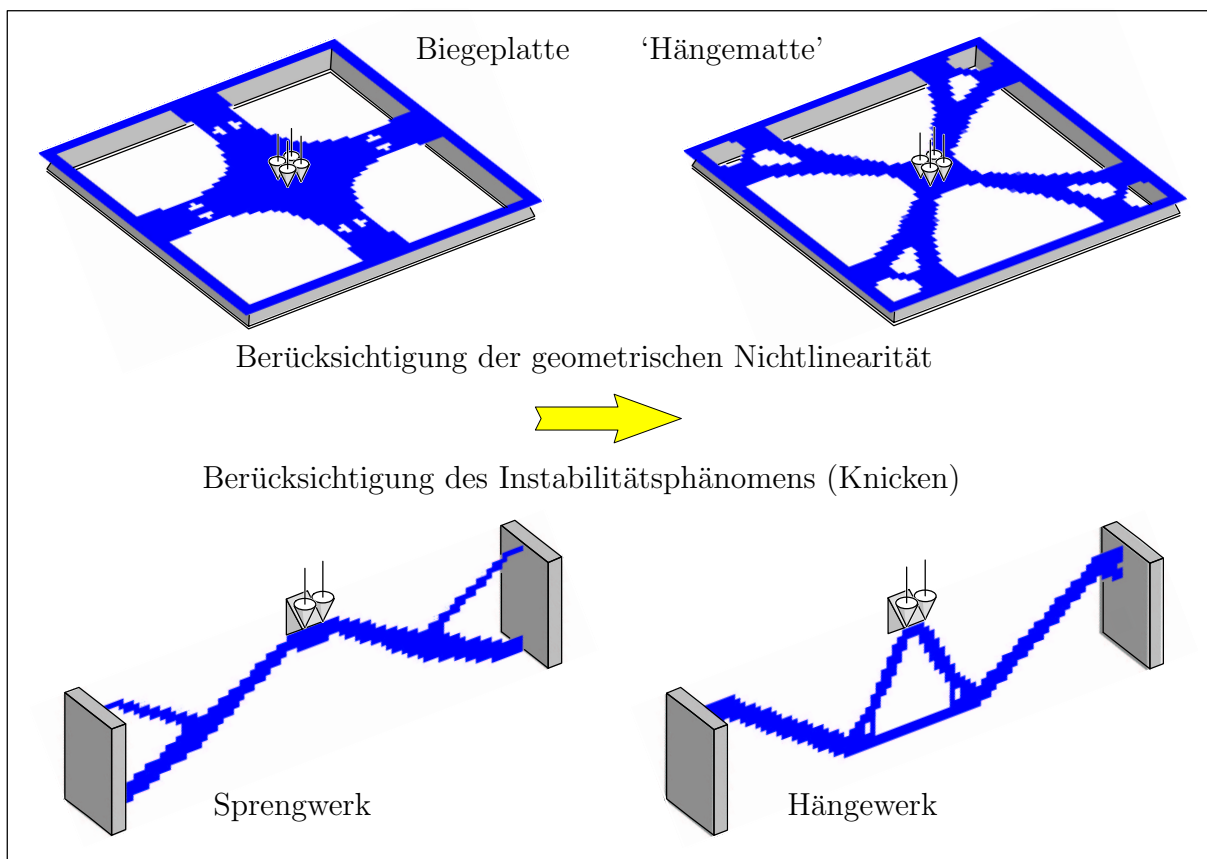


Abbildung 1.2: Berücksichtigung des nichtlinearen Strukturverhaltens in der Optimierung

Anmerkung:

Die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren und Algorithmen wurden im Programm CARAT [28] implementiert. Dieses Programmsystem wurde am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart entwickelt. Dabei wurden insbesondere die Anforderungen der Strukturoptimierung bei der Entwicklung berücksichtigt (BLETZINGER [18], BLETZINGER ET AL. [20], KIMMICH [65], REITINGER [102], MAUTE [78], SCHWARZ [116]).

1.3 Gliederung

Im Folgenden wird die Gliederung dieser Arbeit beschrieben.

In Kapitel 2 werden zuerst die für einen Optimierungsprozess notwendigen Grundbausteine erläutert. Dabei steht das Zusammenspiel der Modelle der drei beteiligten Teildisziplinen im Vordergrund: Das Optimierungsmodell (das eigentliche Problem wird mathematisch abstrahiert), das Entwurfsmodell (Parametrisierung der Entwurfsaufgabe) und das Analysemodell (Strukturanalyse mittels FEM).

Eine kurze anschauliche Beschreibung der mit der geometrischen Nichtlinearität verbundenen Phänomene enthält Kapitel 3. Diese Phänomene bilden die Grundlage für die im Weiteren definierten Entwurfskriterien der Strukturoptimierung.

Die verwendeten mechanischen Grundlagen und die auf der Basis der Finiten Element Methode entstehenden Algorithmen werden im Kapitel 4 behandelt. Dazu gehören neben den Prozeduren zur Ermittlung des nichtlinearen Last-Verschiebungs-Pfades die Algorithmen, welche das Aufsuchen von Instabilitätspunkten ermöglichen.

Die Art der Parametrisierung bei der Form- und Topologieoptimierung wird in Kapitel 5 beschrieben. Für die Topologieoptimierung werden verschiedene Materialmodelle vorgestellt und deren Vor- und Nachteile diskutiert. Das in dieser Arbeit verwendete Materialmodell wird begründet. Des Weiteren werden verschiedene Arten der Parametrisierung bei der Formoptimierung kurz vorgestellt.

Um den Optimierungsprozess mit gradientenbasierten Optimierungsverfahren vorantreiben zu können, benötigt man eine Sensitivitätsanalyse. Die Basis der Sensitivitätsanalyse bilden die in Kapitel 4 angegebenen mechanischen Grundlagen. Die Bausteine der Sensitivitätsanalyse, welche sich für verschiedene Fragestellungen wiederholen, werden in Kapitel 6 angegeben.

Wie die einzelnen Grundbausteine zusammengefügt werden, ist Teil der folgenden Kapitel, in denen die Schwerpunkte dieser Arbeit behandelt werden. Kapitel 7 befasst sich mit der Erweiterung der klassischen materiellen Topologieoptimierung. Zuerst steht die Frage nach der Definition und dem Einfluss verschiedener Steifigkeitskriterien im Vordergrund. Weiterhin wird die Auswirkung unterschiedlicher Belastungsstufen auf die Generierung von Tragwerken dargestellt. Ein weiterer Punkt untersucht den Einfluss lokaler Entwurfskriterien in der Topologieoptimierung. Zur Sicherstellung sinnvoller Optimierungsergebnisse wird eine einfache Ergänzung zur klassischen Vorgehensweise vorgestellt. Verifiziert wird dies anhand von Verschiebungsnebenbedingungen.

Die Steuerung des Deformationsprozesses von Mikrostrukturen wird in Kapitel 8 beschrieben. Dabei stehen zwei unterschiedliche Typen von Entwurfsaufgaben zur Diskussion. Der

erste Ansatz befasst sich mit dem Entwurf von Strukturen, welche die geleistete Arbeit eines Antriebs möglichst effizient auf ein Werkstück übertragen sollen. Die zweite Aufgabe dient der Generierung von Systemen, welche kinematisch einer vorgegebenen Bahn folgen sollen und dann bei Kontakt mit einem Werkstück die zum Greifen nötige Steifigkeit aufweisen.

Der Einfluss von Instabilitätsphänomenen bei der Generierung von Tragwerken ist Thema des 9.ten Kapitels. Neben der klassischen linearen Vorbeulanalyse kommt eine vollständige geometrisch nichtlineare Strukturberechnung zum Einsatz. Die Suche nach der maßgebenden Imperfektionsform für eine vorgegebene Struktur bildet den Abschluss dieses Kapitels. Diese Umkehrung des gewöhnlichen Vorgehens, bei der die Form vorgegeben wird, lässt sich ebenfalls mit Hilfe der Strukturoptimierung beantworten.

Abschließend werden in Kapitel 10 die wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Es folgt eine Bewertung der Ergebnisse und ein Ausblick auf mögliche weitere Entwicklungen.

Der für diese Arbeit wichtige Sachverhalt der Imperfektionsempfindlichkeit wird in Anhang A hergeleitet. Anhang B enthält den für den Entwurf von Mikrostrukturen wichtigen Ansatz eines hyperelastischen Materials.

Kapitel 2

Konzept der Strukturoptimierung

2.1 Einleitung

Ziel jeder wirtschaftlichen Planung in den verschiedenen Wissenschaftsgebieten ist es, eine bessere Lösung mit geringerem Zeitaufwand zu erarbeiten. Zwar unterscheiden sich die verschiedenen Anwendungsgebiete in ihren konkreten Zielen, doch die Vorgehensweisen und Methodiken sind verwandt.

Ziel der Strukturoptimierung ist die Generierung von ‘ausgereiften’ Tragwerken, welche die vorgegebenen Kriterien erfüllen. Diese Kriterien sind in der Regel von geometrischer oder mechanischer Natur. Der weitere wesentliche Aspekt der Herstellungskosten kann nur approximativ in den Optimierungsprozess eingehen, da die Ermittlung dieser Größe nur bedingt an die Geometrie geknüpft werden kann. Der Einfluss des Herstellungsverfahrens, der Stückzahlen oder auch der anfallenden Lohnkosten sind in diesem frühen Stadium der Produktentwicklung noch schwer mathematisch zu quantifizieren. Aus diesem Grund konzentrieren sich bis heute die Forschungsschwerpunkte auf die geometrischen und mechanischen Größen. Typische geometrische Fragestellungen sind z. B. das Strukturvolumen bzw. das Gewicht. Die Bandbreite der mechanischen Entwurfskriterien ist groß. Neben der klassischen Fragestellung zur Einhaltung von Verschiebungen werden Spannungskriterien beispielsweise von KIMMICH [65] und DUYSINX & BENDSØE [36] behandelt. Die Berücksichtigung von Eigenfrequenzen untersuchen OLHOFF [90] und DIAZ & KIKUCHI [34]. MEYER [84] beschäftigt sich mit der Erweiterung auf nichtlineare dynamische Probleme. Das Problem der Stabilität ist z. B. in REITINGER & RAMM [104] und NEVES ET AL. [88] beschrieben. FORYS [43] untersucht die dynamische Stabilität. Die Auswirkung elasto-plastischer Materialeigenschaften werden unter anderem in den Arbeiten von BENDSØE & SOKOLOWSKI [15], YUGE & KIKUCHI [143], MAUTE ET AL. [82] und SCHWARZ ET AL. [117] berücksichtigt. BARTHOLD [5] behandelt den Einfluss hyperelastischer Materialien. Diesen Sachverhalt in Kombination mit Kontaktproblemen untersucht die Arbeit von KIM ET AL. [64]. MAUTE ET AL. [79] beschäftigt sich mit dem gekoppelten Problem der Fluid-Struktur-Interaktion. Die Kopplung mehrerer physikalischer Felder für den Entwurf von Antrieben ist in SIGMUND [123] beschrieben.

Unabhängig von der zu untersuchenden Fragestellung ist in der Regel die Definition lediglich eines Kriteriums nicht ausreichend. So würde z. B. die Aufgabe mit minimalem Gewicht zu einer nicht existierenden Struktur führen, was natürlich für eine tatsächliche Belastung nicht möglich ist. Ein Optimierungsproblem ist erst dann sinnvoll gestellt, wenn

verschiedene Kriterien die Bandbreite der Lösungen begrenzen oder sich sogar widersprechen. So kann z. B. bei der Suche nach einer möglichst leichten Struktur die Begrenzung der Spannungen und/oder der Verschiebungen zweckmäßig sein. Das Ziel bzw. die Zielfunktion ist also eine Gewichtsminimierung unter Berücksichtigung der Spannungs- und der Verschiebungsnebenbedingungen. Für das Optimierungsproblem an sich ist es unbedeutend, welches der Entwurfskriterien als Zielfunktion definiert wird und welches als Nebenbedingung.

Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass das Gleichgewicht der Struktur ebenfalls als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem eingehen kann. In der vorliegenden Arbeit wird immer davon ausgegangen, dass der Gleichgewichtszustand a priori erfüllt ist und dadurch nicht im Optimierungsproblem auftaucht.

Die Strukturoptimierung kann in verschiedene Teildisziplinen unterteilt werden (siehe Abbildung 2.1). Die Topologieoptimierung ermöglicht den allgemeinsten Zugang. Bei diesem Zugang steht der topologische Aufbau der Struktur im Vordergrund, d. h. die Frage welche der materiellen Punkte eine Nachbarschaftsbeziehung miteinander eingehen. Dadurch wird die Generierung des prinzipiellen Aufbaus von Tragwerken zur Hauptaufgabe. Auf einer bereits topologisch bekannten Struktur baut die Formoptimierung auf. Ziel dieser Disziplin ist die detaillierte Formgebung der Oberflächen einer Struktur. Ein Sonderfall der Formoptimierung ist die Querschnittsoptimierung. Die Formbeschreibung reduziert sich dabei auf die Querschnittsabmessungen der einzelnen Tragglieder. Eine weitere Teildisziplin der Strukturoptimierung ist die Materialoptimierung, welche den materiellen Aufbau untersucht. Hier stehen z. B. die Orientierung von Fasern in verstärkten Materialien, aber auch die Suche eines mikroskopischen Aufbaus zur Erzielung definierter, makroskopischer Materialeigenschaften im Vordergrund. Die Ansätze der drei voran beschriebenen Teildisziplinen werden je nach Anforderung beim Entwurf des Materialaufbaus verwendet.

In den wenigsten Fällen kann eine geschlossene Lösung für die verschiedenen Optimierungsprobleme angegeben werden. Um mit Hilfe von numerischen Verfahren Lösungen für beliebige Fragestellungen erzielen zu können, werden die Größen des Optimierungs-

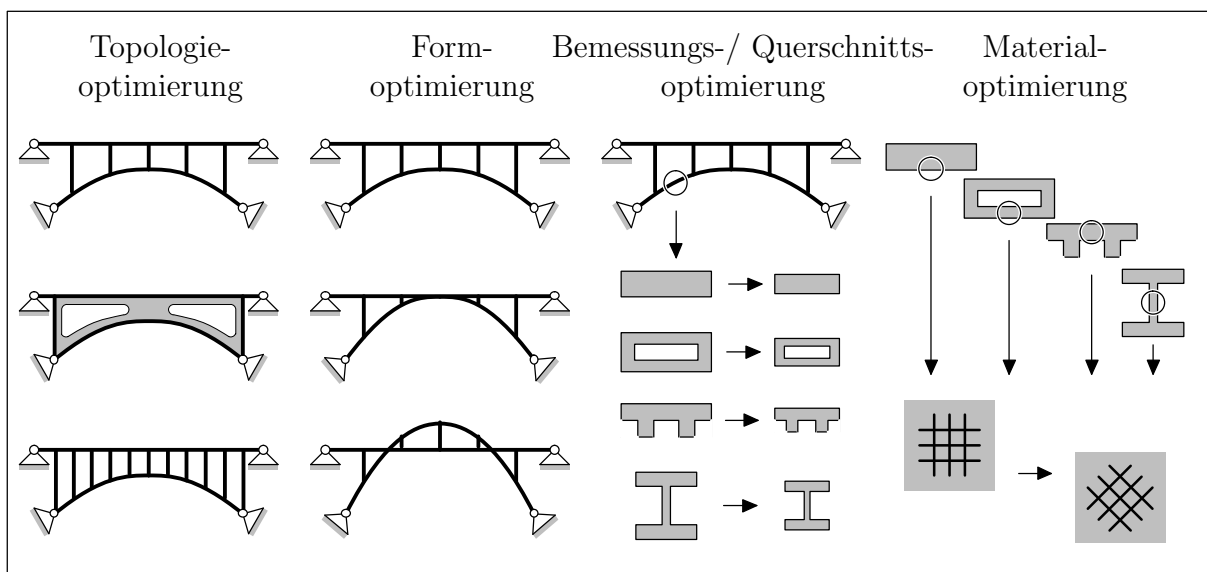


Abbildung 2.1: Teildisziplinen der Strukturoptimierung aus RAMM ET AL. [99]

problems diskretisiert:

$$\check{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{s}^h(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (2.1)$$

wobei \mathbf{s} ein Satz von Parametern ist, welcher die Gestalt $\check{\mathbf{s}}$ anhand von Funktionen \mathbf{s}^h im Raum ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) approximiert. Die freien Parameter, die in dem Vektor \mathbf{s} eingetragen sind, werden im Folgenden Entwurfsvariablen genannt.

Die im Optimierungsmodell zusammengefassten Entwurfskriterien (Zielfunktion $f(\mathbf{s})$ und Nebenbedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ und $\mathbf{h}(\mathbf{s})$) bilden das mathematisch abstrakt formulierte Optimierungsproblem. Zur Bestimmung der von der Strukturantwort abhängigen Entwurfskriterien bedarf es eines Analyseverfahrens. Da für die Berechnung von Strukturantworten in den seltensten Fällen eine geschlossene Lösung vorliegt, werden auch diese, wie das Optimierungsproblem, diskretisiert. In dieser Arbeit kommt die Methode der finiten Elemente zum Einsatz, bei der die Verschiebungen $\check{\mathbf{u}}$ approximiert werden:

$$\check{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.2)$$

Die diskreten Verschiebungen sind in dem Vektor \mathbf{u} zusammengefasst.

Die drei Säulen Optimierungs-, Entwurfs- und Analysemodell bilden das Gesamtmodell der Strukturoptimierung (ESCHENAUER [37]). Da die Funktionsverläufe der Entwurfskriterien bezüglich der Entwurfsvariablen hochgradig nichtlinear sind, muss das in Abbildung 2.2 dargestellte Verfahren mehrmals durchlaufen werden. Zu Beginn des Iterationsprozesses erfolgt für einen Ausgangsentwurf eine Strukturanalyse des diskretisierten Optimierungsproblems. Anhand der Ergebnisse des Analysemodells (Strukturantwort) werden die Entwurfskriterien (Zielfunktion und Nebenbedingungen) ausgewertet. Nach Beurteilung der Qualität des Entwurfes benötigen gradientenbasierende Optimierungsstrategien die Sensitivitätsinformation der Entwurfskriterien bezüglich jeder Entwurfsvariablen. Diese Gradienteninformation wird innerhalb des Analysemodells berechnet. Mit der Information der Entwurfskriterien und der Gradienten kann nun ein modifizierter Satz von Entwurfsvariablen bestimmt werden. Dieser verbesserte Entwurf wird wiederum analysiert

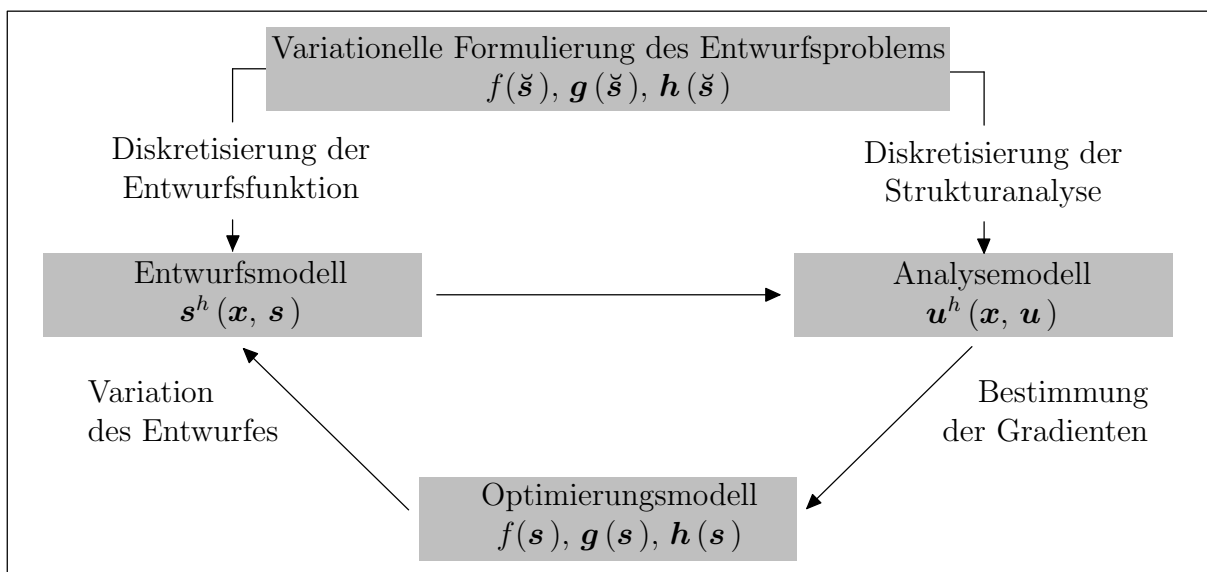


Abbildung 2.2: Modellierung des diskretisierten Optimierungsproblems

und ausgewertet. Die Prozedur wird solange durchlaufen, bis eine ausreichende Konvergenz erzielt wurde.

Der modulare Aufbau des Verfahrens erlaubt eine Anwendung für die unterschiedlichsten Aufgabenstellungen. Die Möglichkeiten sind unter anderem in ESCHENAUER ET AL. [40], BLETZINGER [18], KIMMICH [65], BARTHOLD [5] und MAUTE [78] beschrieben. In den letzten Jahren sind weitere Lehrbücher zu dieser Problematik erschienen: ESCHENAUER & OLHOFF [39], KIRSCH [66], HAFTKA ET AL. [50], ROZVANY [110], wobei die Liste keinen Anspruch auf Vollständigkeit hat.

Im Folgenden werden die Grundlagen der einzelnen Säulen der Strukturoptimierung näher erläutert.

2.2 Optimierungsmodell

Das Optimierungsmodell ist eine mathematisch abstrakte Formulierung der Entwurfsaufgabe. Im Regelfall beschränkt man sich darauf, das Optimierungsproblem als Minimierungsaufgabe zu formulieren:

$$\min_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \quad ; \quad f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Eine Maximierungsaufgabe kann durch die Skalierung mit ‘-1’ in eine Minimierungsaufgabe überführt werden. Nebenbedingungen treten in den Optimierungsproblemen als Gleichheits- oder Ungleichheitsnebenbedingungen auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{s}) = 0 & \quad ; \quad \mathbf{h}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_h} \\ \mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq 0 & \quad ; \quad \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g} \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei n_h die Anzahl der Gleichheits- und n_g die Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen sind. Wird ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen formuliert, so spricht man von einem unbeschränkten, anderenfalls von einem beschränkten Problem. Weiterhin kann es sinnvoll sein, den Wertebereich der Entwurfsvariablen, welche in einem Vektor zusammengefasst sind, zu begrenzen:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad (2.5)$$

wobei \mathbf{s}_L die unteren Restriktionen und \mathbf{s}_U die oberen Restriktionen sind.

Sind die Entwurfskriterien (2.3) und (2.4) von \mathbf{s} linear abhängig, so spricht man von einem linearen Programm, anderenfalls von einem nichtlinearen Programm. Die in dieser Arbeit behandelte Problematik zählt zu der kontinuierlich nichtlinear beschränkten Aufgabenstellung.

Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen

Zur effizienten Lösung wird das beschränkte Optimierungsproblem in ein quasi-unbeschränktes Problem anhand der LAGRANGE-Funktion überführt:

$$L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{h}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g}(\mathbf{s}) \quad (2.6)$$

Die LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n_h}$ und $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_g}$ werden auch ‘duale’ Variablen genannt. Der Lösungspunkt ist dadurch definiert, dass die LAGRANGE-Funktion bezüglich der ‘primale’ Variablen \mathbf{s} minimal und bezüglich der dualen Variablen $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ maximal wird (Sattelpunkt):

$$L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) \leq L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \leq L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \quad (2.7)$$

wobei $(\cdot)^*$ die Lösung kennzeichnet. Die notwendigen Bedingungen (siehe KUHN-TUCKER [72]) für einen Sattelpunkt ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der LAGRANGE-Funktion nach den primalen und dualen Variablen:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) &= \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}^*) + \boldsymbol{\eta}^{*T} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) + \boldsymbol{\gamma}^{*T} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) = 0 \\ \nabla_{\boldsymbol{\eta}} L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) &= \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) = 0 \\ \gamma_i^* \nabla_{\gamma_i} L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) &= \gamma_i^* g_i(\mathbf{s}^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

mit $\gamma_i^* \geq 0$

Die Zusatzbedingung $\gamma_i^* \geq 0$ der Gleichung (2.8_c) verhindert, dass nicht-optimale Lösungen die KUHN-TUCKER-Bedingung erfüllen. Gleichung (2.8_a) kann dahingehend geometrisch interpretiert werden, dass der negative Gradient der Zielfunktion im Optimum gleich der Linearkombination der aktiven Nebenbedingungen ist:

$$-\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}^*) = \boldsymbol{\eta}^{*T} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) + \boldsymbol{\gamma}^{*T} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) \quad (2.9)$$

Die dualen Variablen $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ sind nur dann eindeutig bestimmbar, wenn die Gradienten $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{h}$ und $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{g}$ unabhängig voneinander sind. Die LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ können im Optimum als Gradient der Zielfunktion bezüglich der zugehörigen Nebenbedingung gedeutet werden (siehe z. B. WELL [136]).

Für ein lokales Minimum ist die hinreichende Bedingung, dass die LAGRANGE-Funktion bezüglich der Entwurfsvariablen (primale Variablen) in einer endlich kleinen Umgebung des Lösungspunktes konvex ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass für zweifach stetig differenzierbare Funktionen $f(\mathbf{s})$, $\mathbf{h}(\mathbf{s})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ die HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion positiv definit sein muss:

$$\mathbf{v}^T \nabla_{\mathbf{s}}^2 L \mathbf{v} > 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \mathbf{v} \neq 0\} \quad (2.10)$$

Ist die LAGRANGE-Funktion im gesamten Lösungsraum bezüglich der primalen Variablen konvex, so liegt ein globales Optimum vor.

Entwurfskriterien

Der in der Einleitung erläuterte modulare Aufbau erlaubt eine vielfältige Anwendung des Verfahrens. So können verschiedene Entwurfskriterien – dieser Begriff wird im Weiteren als Sammelbezeichnung für Zielfunktion und Nebenbedingungen verwendet – Eingang finden.

In den meisten Fällen handelt es sich bei der Strukturoptimierung um mechanische bzw. geometrische Entwurfskriterien. Typische Vertreter von mechanischen Kriterien sind z. B. Spannungen und Verschiebungen, aber auch kritische Laststeigerungsfaktoren. Das Strukturgewicht und das -volumen sind dagegen typische geometrische Entwurfskriterien.

Für die mechanischen Entwurfskriterien besteht die Möglichkeit weiterer Unterscheidungen. So sind z. B. Spannungen lokale Größen, da sie sich auf einen im Tragwerk definierten Punkt beziehen. Dagegen sind Eigenfrequenzen oder kritische Laststeigerungsfaktoren globale Kriterien (Strukturverhalten des Gesamttragwerks). Es wird von integralen Kriterien gesprochen, wenn lokale Größen über Linien, Flächen oder Volumen aufintegriert werden. Typische Kriterien hierfür sind die Dehnungsenergie und der Spannungsausgleich.

Die Berücksichtigung mehrerer Zielfunktionen ist Thema der Mehrkriterienoptimierung. Dabei wird der skalarwertige Zielfunktionswert (2.3) auf einen Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_f}$ erweitert. Die Forderung, dass jede Komponente des Zielfunktionsvektors minimal wird, ist nur bei speziell geformten Lösungsräumen möglich (siehe Teilbild a. der Abbildung 2.3). In den meisten Fällen ist dies zu restriktiv.

Aus diesem Grund hat sich für die Mehrkriterienoptimierung die Definition des sogenannten EDGEWORTH–PARETO–Optimums (EP-Optimum) etabliert. EP-Punkte sind dadurch definiert, dass eine Modifikation des Satzes der Entwurfsvariablen zwar eine Verbesserung einer Zielfunktionskomponente zur Folge hat, dies aber gleichzeitig eine Verschlechterung von mindestens einer anderen Komponente mit sich bringt. Für Zielfunktionen die sich widersprechen gibt es deshalb unendlich viele EDGEWORTH–PARETO–Punkte (siehe Teilbild b. der Abbildung 2.3).

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten können die verschiedenen Zielfunktionen anhand einer Norm zu einer skalarwertigen Ersatzgröße $\tilde{f} \in \mathbb{R}$ zusammengefasst werden. Unter anderem werden folgende Verfahren angewendet:

– Wichtungsmethode:
$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n_f} w_i f_i \quad ; \quad w_i > 0 \quad (2.11)$$

– Distanzmethode:
$$\tilde{f} = \left(\sum_{i=1}^{n_f} |f_i - \bar{f}_i|^p \right)^{1/p} \quad ; \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (2.12)$$

– GERMEIER–Methode:
$$\tilde{f} = \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{i=1}^{n_f} e^{p w_i f_i} \right) \quad ; \quad p > 0 \quad (2.13)$$

Die Wichtungsmethode, wie sie im Teilbild c. der Abbildung 2.3 dargestellt ist, kommt aufgrund der einfach abschätzbaren Wichtungparameter w_i häufig zum Einsatz. Nur in seltenen Fällen liegt die Lösung außerhalb des EP-Raums (Steuerung durch Wahl der

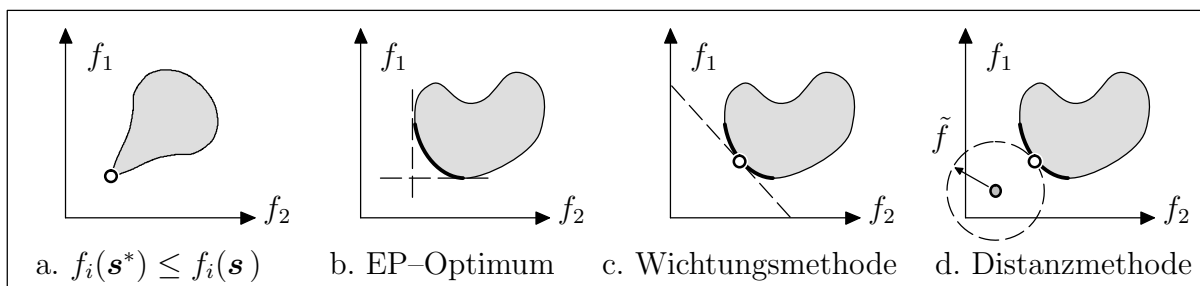


Abbildung 2.3: Mehrkriterienoptimierung aus MAUTE [78]

Wichtungsparameter). Für die Distanzmethode (siehe Teilbild d. der Abbildung 2.3) ist die Wahl der Parameter wesentlich schwieriger. Dadurch steigt die Gefahr, dass der gefundene Punkt keine EP-Lösung ist.

Bei der GERMEIER-Methode werden die n_f Zielfunktionen unter Zuhilfenahme der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion zu einem Zielfunktionswert \tilde{f} zusammengefasst. Der Parameter p steuert dabei die ‘Eintauchtiefe’ der einhüllenden Funktion (siehe Abbildung 2.4). Zu numerischen Problemen kann es kommen, wenn für p ein zu großer Wert vorgegeben wurde.

Ein typischer Anwendungsfall für die Mehrkriterienoptimierung sind die min-max- bzw. max-min-Probleme. Dazu gehört unter anderem die Maximierung des kleinsten Eigenwerts (Eigenfrequenzen oder kritische Laststeigerungsfaktoren). Bei derartigen Fragestellungen ermöglicht die Verwendung der Einhüllenden \tilde{f} in der Regel einen guten Konvergenzverlauf des Optimierungsproblems. Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass zur Gradientenbildung der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion die Ableitungen aller n_f Zielfunktionen notwendig sind. Zur Berechnung der notwendigen Richtungsableitungen mehrfacher Eigenwerte sei auf HAUG ET AL. [52] oder LUND [75] verwiesen.

2.3 Optimierungsalgorithmen

Zur Lösung der in \mathbf{s} nichtlinearen KUHN-TUCKER-Bedingungen (2.8) stehen verschiedene iterative Verfahren bereit. Eine ausführliche Darstellung der unterschiedlichen Strategien enthalten die Arbeiten von GILL ET AL. [47], LUENBERGER [74], ARORA [4] und BLETZINGER [18]. Im Weiteren werden die gängigen Verfahren kurz erläutert, ohne dabei einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Diese Teildisziplin der Strukturoptimie-

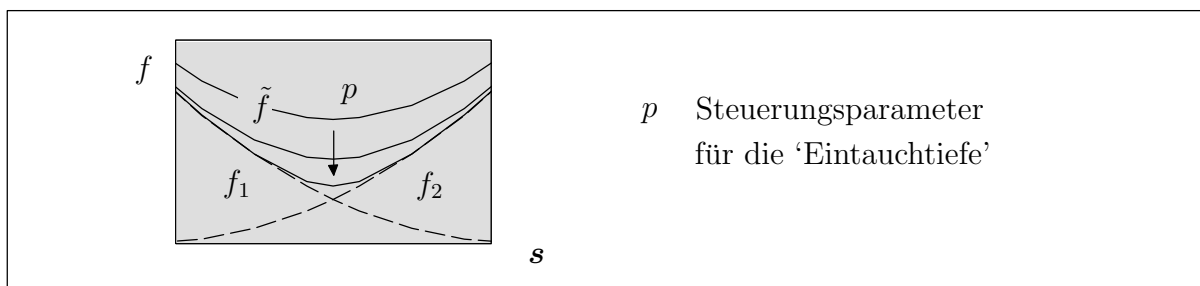


Abbildung 2.4: GERMEIER-Methode

rung ist ein eigenständiger Wissenschaftszweig und wird besonders von Mathematikern vorangetrieben.

Die verschiedenen Optimierungsstrategien können in zwei Hauptgruppen aufgeteilt werden. Verfahren, welche ohne Sensitivitäten auskommen, sind z. B. das Monte-Carlo-Verfahren oder die Evolutionsstrategie. Das Monte-Carlo-Verfahren wählt einen Satz von Entwurfsvariablen rein zufällig. Dadurch findet dieses Verfahren zwar das globale Optimum, aber die extrem hohen numerischen Kosten beschränken den Einsatzbereich. Die Evolutionsstrategie baut auf der Theorie von DARWIN auf. Dieses Verfahren, welches durch die Schritte Mutation, Selektion und Rekombination eine Geschwindigkeitssteigerung gegenüber dem Monte-Carlo-Verfahren ermöglicht, ist z. B. in RECHENBERG [100] näher erläutert.

Gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen können in weitere Untergruppen aufgeteilt werden. Zu der Gruppe der ‘Mathematischen Programmierung’ (MP) gehören unter anderem die Verfahren der Suchmethoden und der konjugierten Gradienten. Die derzeit bedeutungsvollsten Verfahren sind allerdings die LAGRANGE- bzw. die Approximations-Methoden. Zu den LAGRANGE-Verfahren gehören z. B. die Methoden der ‘Sequentiellen Linearen Programmierung’ (SLP) und der ‘Sequentiellen Quadratischen Programmierung’ (SQP). Die SQP erhält gewöhnlich aufgrund der höheren Konvergenzgeschwindigkeit den Vorzug gegenüber der SLP. Der in dieser Arbeit verwendete SQP-Algorithmus stammt von SCHITTKOWSKI [114] und wurde hauptsächlich bei Formoptimierungsproblemen eingesetzt.

Für die Approximationsverfahren haben sich die Methode der bewegten Asymptoten (‘Method of Moving Asymptotes’, MMA) von SVANBERG [128] und die ‘Sequentielle Konvexe Programmierung’ (SCP) etabliert. Dabei stellt die MMA eine Sonderform des SCP dar. Für den SCP-Algorithmus sind insbesondere die Arbeiten von FLEURY & BRAIBANT [42] sowie von ZILLOBER [148], [149] zu erwähnen. Der Algorithmus von ZILLOBER wurde in dieser Arbeit erfolgreich in der Topologieoptimierung mit mehreren Nebenbedingungen eingesetzt.

Eine weitere Untergruppe der gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen sind die Verfahren der Optimalitätskriterien (OC). Dabei können nach KIRSCH [66] diese in physikalisch intuitive und mathematische Verfahren unterteilt werden. Ein bekannter Vertreter der physikalisch intuitiven Verfahren ist das ‘Fully Stressed Design’. In der Regel wird das tatsächliche Optimum mit derartigen Kriterien nicht gefunden. Bei den mathematischen Verfahren wird dagegen die KUHN-TUCKER-Bedingung direkt gelöst. Ein effizienter Algorithmus stammt von MAUTE [78] und wurde in dieser Arbeit mit einer modifizierten Schrittweitenbegrenzung erfolgreich für die Topologieoptimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen eingesetzt.

Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die gradientenlosen Verfahren mit den gradientenbehafteten Verfahren zu kombinieren. Bei der ‘Response Surface Methodology’ (RSM) wird eine polynomiale Ersatzfunktion für die Entwurfskriterien anhand diskreter Stützstellen entwickelt. Jede Stützstelle bedarf einer Strukturanalyse. Die Suche nach der Minimalstelle dieser Ersatzfunktionen kann anhand von gradientenbasierten Optimierungsstrategien erfolgen. Die Sensitivitäten müssen nur bezüglich der approximierten Funktionen gebildet werden. Der numerische Aufwand wird bei diesem Verfahren von der Berechnung der Sensitivitäten des eigentlichen mechanischen Problems auf die Bestimmung der

Ersatzfunktion verlagert. MYERS & MONTGOMERY [87] geben einen generellen Überblick.

2.4 Entwurfsmodell

Das Entwurfsmodell ist das Bindeglied zwischen dem mathematisch abstrakten Optimierungsmodell und dem zu optimierenden Tragwerk. In dem Optimierungsmodell ist die Struktur in ihrem topologischen und gestalterischen Aufbau parametrisch beschrieben. Ein Teil dieser Parameter werden für den Optimierungslauf in den Vektor der Entwurfsvariablen \mathbf{s} eingetragen.

Auf die prinzipiellen Unterschiede der vier Teildisziplinen der Strukturoptimierung (Topologie-, Form-, Querschnitts- und Materialoptimierung, siehe Abbildung 2.1) wurde bereits in der Einleitung dieses Kapitels eingegangen. Zur Gestaltsbeschreibung von Tragwerken sind zwei unterschiedliche Zugänge bekannt. Mit dem kontinuierlichen Ansatz wird der Raum der Materie, welcher die Struktur bildet, anhand der Berandung (Kanten und Flächen) eindeutig beschrieben. Dadurch kann jedem materiellen Punkt zu jeder Zeit k im Entwurfsprozess eindeutig ein Ort im $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ zugeteilt werden. Die Veränderung des Ortes eines materiellen Punktes wird durch eine Abbildungsfunktion $\chi(\mathbf{X}, k)$ beschrieben. Diese Betrachtungsweise nach LAGRANGE ist äquivalent zu der des Deformationsprozesses in der Strukturmechanik und ermöglicht ‘nur’ räumlich und zeitlich stetige Abbildungsfunktionen. Dadurch sind lediglich topologische Abbildungen innerhalb des Entwurfsprozesses möglich (siehe Abbildung 2.5). Diese Reduktion der Formvielfalt ist bei der Problembeschreibung mit einer geringeren Anzahl von Parametern verbunden, welche die Oberfläche beschreiben. Verschiedene Methoden der Oberflächenbeschreibung und deren Modifikationen im Entwurfsprozess werden in Abschnitt 5.2 beschrieben.

Damit sich während des Entwurfsprozesses die Nachbarschaftsbeziehung zweier materieller Punkte ändern kann, muss die räumliche Abbildungsfunktion jederzeit Unstetigkeiten zulassen. Folglich ist es erforderlich, dass jeder materielle Punkt eine eigene Abbildungsfunktion besitzt. Dies führt zu einer EULER-Formulierung. Das Tragwerk ist nun durch die Definition des Materials für einen räumlichen Punkt anhand der Indikatorfunktion χ

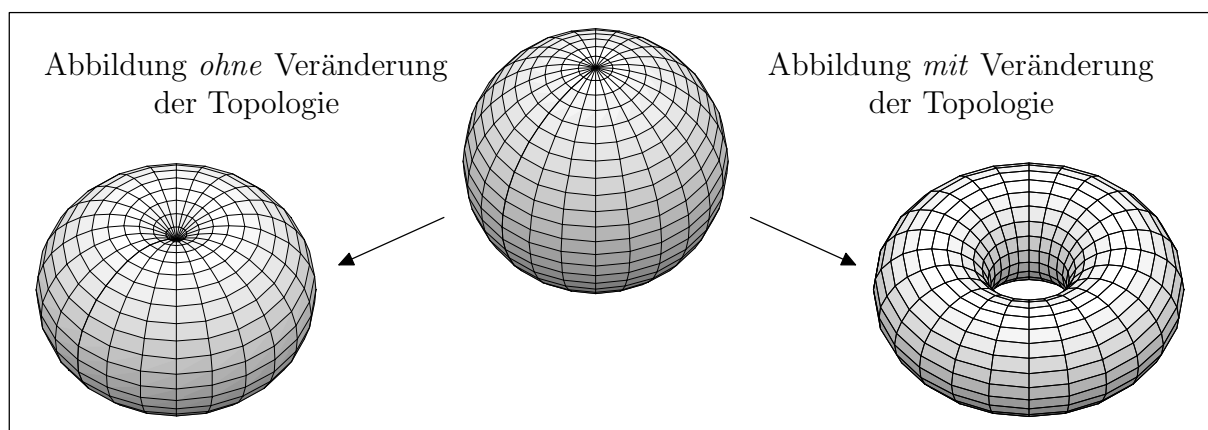


Abbildung 2.5: Abbildungen mit gleicher und veränderter Topologie

bestimmt:

$$\chi(\mathbf{X}, k) = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{Material} \\ 0 & \rightarrow \text{kein Material} \end{cases} \quad (2.14)$$

Durch diese räumliche Formulierung sind Abbildungen mit veränderlicher Topologie möglich (siehe rechtes Bild der Abbildung 2.5).

Aus der größeren Entwurfsvielfalt folgt eine erhöhte Anzahl von Entwurfsvariablen. In Kombination mit der Methode der finiten Elemente (Analysemodell) besitzen die materiellen Punkte eines finiten Elementes in der Regel gleiche Indikatorfunktionen. Dadurch bestimmt die Netzfeinheit die Anzahl der Entwurfsvariablen.

2.5 Analysemodell

Zur Auswertung der mechanisch orientierten Entwurfskriterien (siehe Abschnitt 2.2) und deren Sensitivitäten bezüglich der Entwurfsvariablen ist eine Analyse des Tragwerks erforderlich. Wie bei der reinen Strukturanalyse ist ein dem Problem angepasstes mechanisches Modell (z. B. Balken, Scheiben oder Volumenmodell) zu wählen. Weiterhin ist zu definieren, welche physikalischen Effekte in der Strukturberechnung Berücksichtigung finden sollen (z. B. linear oder nichtlinear, statisch oder dynamisch). Die Strukturantwort wird in der Regel mit einem Diskretisierungsverfahren (z. B. FEM oder BEM) numerisch approximiert. Anhand der Ergebnisse können die Entwurfskriterien ausgewertet werden. Auf der Basis des Analysemodells werden in Abhängigkeit der Problemklasse die Sensitivitäten der mechanisch orientierten Entwurfskriterien simultan oder im Nachlauf zu der Strukturanalyse bestimmt. Für Probleme mit Potentialcharakter ist es möglich, an die Strukturanalyse eine Sensitivitätsanalyse anzuschließen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Strukturantworten unter Zuhilfenahme der Finiten Element Methode berechnet. Die dafür notwendigen Grundlagen sind in Kapitel 4 dargestellt. Die Arbeit beschränkt sich auf Probleme mit Potentialcharakter. Folglich konnte auf eine inkrementelle Sensitivitätsanalyse verzichtet werden, wie sie bei dynamischen (z. B. MEYER [84]) oder elasto-plastischen Problemen (z. B. SCHWARZ [116]) notwendig ist. Bei einer inkrementellen Sensitivitätsanalyse werden die Gradienteninformationen bezüglich benachbarter Gleichgewichtspunkte nach jeder Gleichgewichtssiteration bestimmt und aufsummiert. Dadurch erhält man die Sensitivitätswerte zwischen Referenz- und Momentan-konfiguration. Lediglich für die in Kapitel 8 beschriebenen Mikrostrukturen ist eine simultane Sensitivitätsanalyse zweckmäßig. Bei der simultanen Sensitivitätsanalyse werden die Gradienten bezüglich der Referenzkonfiguration nach jeder Gleichgewichtssiteration berechnet. Die Grundlagen der Sensitivitätsanalyse werden in Kapitel 6 und in den Abschnitten der verschiedenen Problemstellungen erläutert.

Kapitel 3

Strukturverhalten bei nichtlinearer Kinematik

Ziel dieses Kapitels ist die Beschreibung des Strukturverhaltens unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität. Weiterhin dient es der Begriffsdefinition und bildet die Basis für die im Weiteren definierten Entwurfskriterien.

In den folgenden zwei Abschnitten wird auf die beiden Phänomene eingegangen, welche durch die Berücksichtigung einer nichtlinearen Kinematik beschreibbar werden. Dies ist zum einen die nichtlineare Beziehung zwischen Einwirkung und Strukturantwort und zum anderen das Erreichen von kritischen Zuständen. Bei dem Problem kritischer Punkte handelt es sich um ein Mehrdeutigkeitsproblem, d. h. für ein Lastniveau gibt es mehrere Gleichgewichtszustände.

3.1 Nichtlineare Strukturantwort

Mit den Verfahren, die in Abschnitt 4.3.1 erläutert werden, können für diskrete Laststufen eindeutige Verschiebungszustände berechnet werden. Dadurch lassen sich Last-Verschiebungs-Diagramme für einzelne Verschiebungskomponenten angeben. Die Eindeutigkeit eines Verschiebungszustandes kann nur dann gewährleistet werden, wenn das Strukturverhalten Potentialcharakter aufweist und keine kritischen Punkte für den untersuchten Belastungsbereich auftreten. Für Fragestellungen, die kein Potential aufweisen, ist die Eindeutigkeit nur dann gegeben, wenn die Belastungsgeschichte bekannt ist.

Im Weiteren werden verschiedene Verhaltensweisen an Beispielen verdeutlicht, ohne dabei detailliert auf die gewählten Größen einzugehen. Manche Strukturen versteifen sich durch die Deformation. Zur Veranschaulichung dient Beispiel 1 der Abbildung 3.1, eine kreisrunde Platte mit einer flächigen Belastung. Die Abtragung der Belastung erfolgt anfänglich über Biegung. Aufgrund der zunehmenden Deformation ändert sich das Verhalten in eine membranorientierte Abtragungsart ('Hängematte'). Dadurch reduziert sich für eine Laststeigerung $\Delta\lambda$ die zusätzliche Verschiebung in Plattenmitte Δu_1 bei anwachsender Deformation (siehe Last-Verschiebungs-Diagramm).

Der inverse Effekt kann bei einem Zylindersegment mit mittiger Linienbelastung, siehe Beispiel 2 der Abbildung 3.1, festgestellt werden. Hier verliert die Schale aufgrund der Deformation an Konstruktionshöhe. Die dadurch abnehmende Biegesteifigkeit des Tragwerks führt zu einem überproportionalen Verschiebungszuwachs. Dies zeigt das Last-

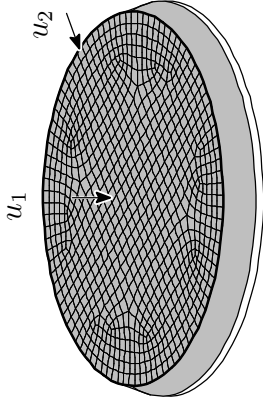
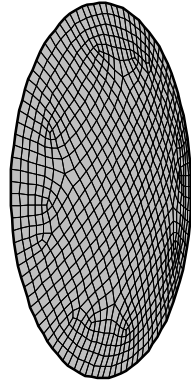
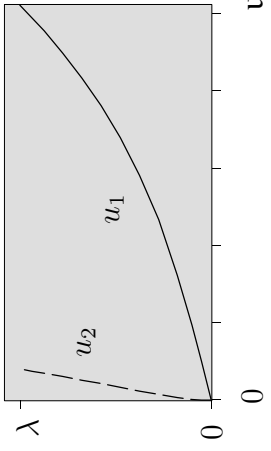
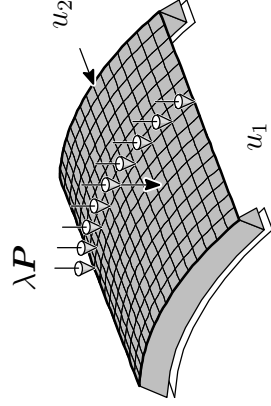
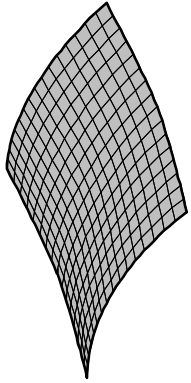
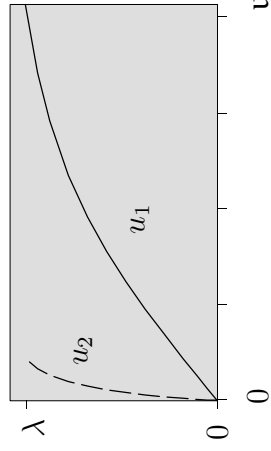
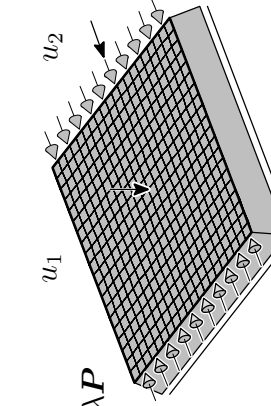
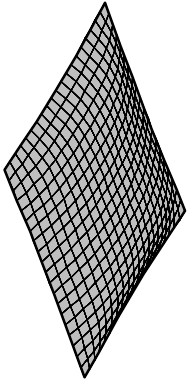
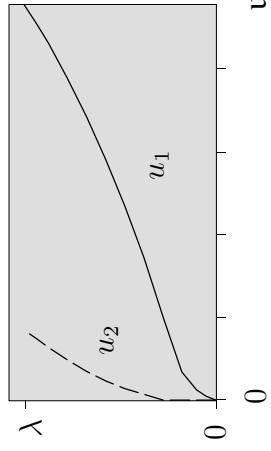
Typ	Beispiel	Endzustand	Last–Verschiebungs–Diagramm
versteifend	<p>1. Flächig belastete Kreisplatte</p> 		
aufweichend	<p>2. Zylindersegment</p> 		
wechselnd	<p>3. Exzentrisch belastete Platte</p> 		

Abbildung 3.1: Spannungsprobleme und deren Last–Verschiebungs–Charakteristiken

Verschiebungs–Diagramm in Abbildung 3.1 für die vertikale Verschiebung im Systemmittelpunkt.

Neben dem rein über- bzw. unterproportionalen Zuwachs der Verschiebungen sind auch Mischformen bekannt. Ein derartiges Verhalten zeigt Beispiel 3 der Abbildung 3.1, eine Platte mit einer in Dickenrichtung exzentrischen Linienlast. Das seitliche Ausweichen der Platte aufgrund der exzentrischen Lasteinleitung wird durch die Druckbeanspruchung überproportional gesteigert. Wie bei dem ersten Beispiel versteift sich anschließend das System bei anwachsender Deformation durch die größer werdende Konstruktionshöhe. Besonders das dritte Beispiel zeigt, dass unterschiedliche Punkte eines Tragwerks gänzlich verschiedene Charakteristiken aufweisen können. So zeigt die Verschiebung des belasteten Randes keinen Krümmungswechsel im Last–Verschiebungs–Diagramm auf.

3.2 Kritische Punkte und Imperfektionsverhalten

In den Ingenieur Anwendungen erhalten kritische Punkte aufgrund ihrer zum Teil katastrophalen Auswirkungen besondere Aufmerksamkeit. Für dieses Phänomen sind verschiedene Definitionen bekannt. Die dynamische Stabilität nach LIAPUNOV ist wie folgt definiert (siehe THOMPSON & HUNT [132]):

- Der Zustand ist *stabil*, wenn für alle Zeiten alle dynamischen Bewegungen in der Umgebung einer statischen Gleichgewichtslage bleiben.
- Wenn zusätzlich alle Bewegungen zum statischen Gleichgewichtspunkt in einer unbestimmten Zeit zurückkehren, wird die Gleichgewichtslage als *asymptotisch stabil* bezeichnet.
- Der Zustand ist *instabil*, wenn durch eine beliebige dynamische Bewegung die Umgebung einer statischen Gleichgewichtslage verlassen wird.

Die ursprüngliche Definition von LIAPUNOV wurde durch den zweiten Punkt von THOMPSON & HUNT ergänzt. Dies ermöglicht die Diskussion über Systeme mit geringer Dämpfung. EULER definiert im Gegensatz dazu die statische Stabilität wie folgt:

- Gibt es für ein gleiches Lastniveau zwei Gleichgewichtslagen in infinitesimaler Nachbarschaft, so ist die Stabilitätsgrenze erreicht.

Derartige kritische Punkte können mathematisch durch einen Rangabfall der tangentialen Steifigkeitsmatrix charakterisiert werden (siehe Abschnitt 4.3.2). Grundsätzlich werden die zwei Gruppen ‘Durchschlagen’ und ‘Verzweigen’ unterschieden. Im Weiteren werden die verschiedenen Versagensarten anhand von Beispielen diskutiert, ohne dabei auf die Größenverhältnisse detailliert einzugehen.

Bei dem Durchschlagen eines Systems tritt bei Erreichen der Grenzbelastung ein dynamisches Verhalten auf. In einer verschiebungsgesteuerten Versuchsanlage kann dagegen ein Abfallen der Belastung im Nachbeulbereich beobachtet werden. Ein derartiges Verhalten zeigen z. B. flache Kreisbögen (siehe Beispiel 1 in Abbildung 3.2). Nach dem Durchschlagen der Struktur kann die Last wieder deutlich gesteigert werden, da aus dem Druckgewölbe eine Hängekonstruktion wird. Bei diesem Zustand wurde die Pfadverfolgung abgebrochen (gekennzeichnet durch Δ und im Weiteren mit ‘BZE’). Die Lastverschiebungscharakteristik ist im linken Diagramm dargestellt. Bei derartigen Strukturen überschätzt

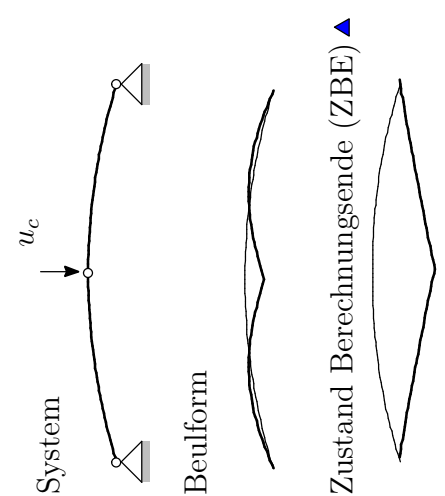
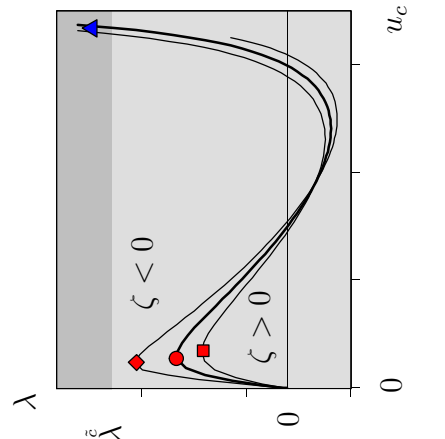
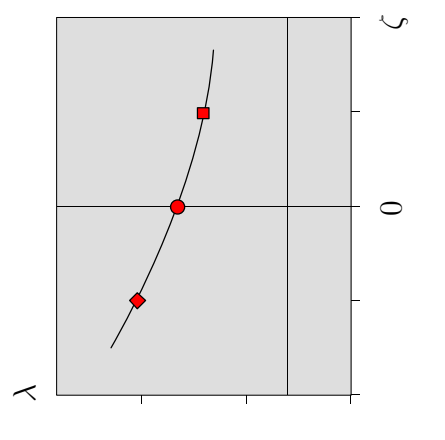
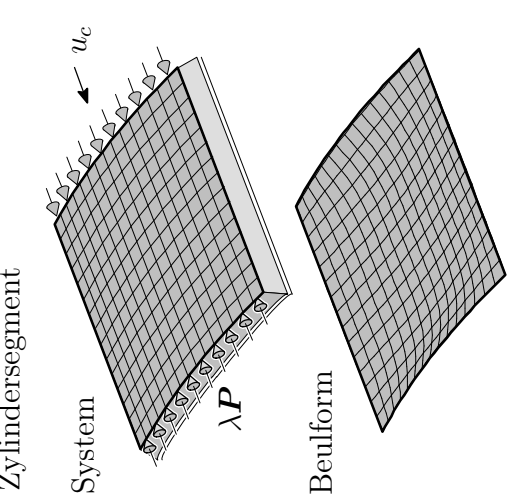
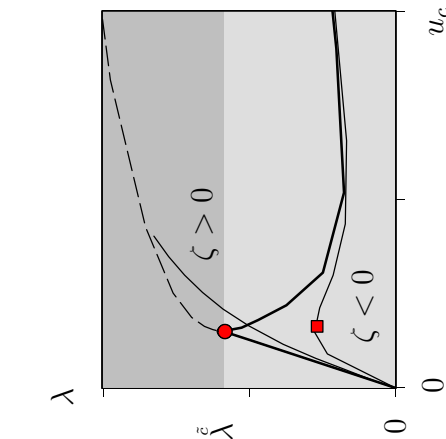
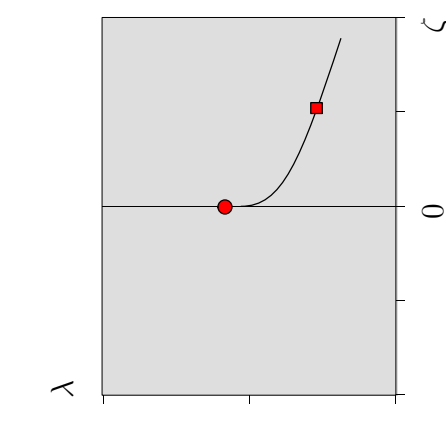
Problem	Beispiel	Last-Verschiebungs-Diagramm	Imperfektionscharakteristik
Durchschlagen	<p>1. Dreigelenkbogen unter Eigengewicht</p>  <p>System u_c</p> <p>Beulform</p> <p>Zustand Berechnungsende (ZBE) \blacktriangle</p>	 <p>λ</p> <p>$\bar{\lambda}$</p> <p>0</p> <p>u_c</p> <p>$\zeta < 0$</p> <p>$\zeta > 0$</p>	 <p>λ</p> <p>0</p> <p>ζ</p>
asymmetrische Verzweigung	<p>2. Zylindersegment</p>  <p>System u_c</p> <p>λP</p> <p>Beulform</p>	 <p>λ</p> <p>$\bar{\lambda}$</p> <p>0</p> <p>u_c</p> <p>$\zeta > 0$</p> <p>$\zeta < 0$</p>	 <p>λ</p> <p>0</p> <p>ζ</p>

Abbildung 3.2: Kritische Punkte und deren Imperfektionscharakteristiken (Bild 1)


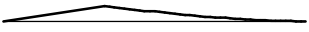

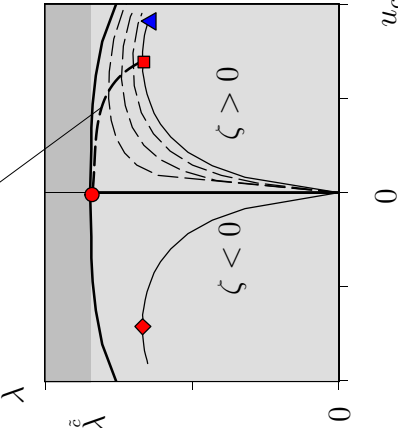
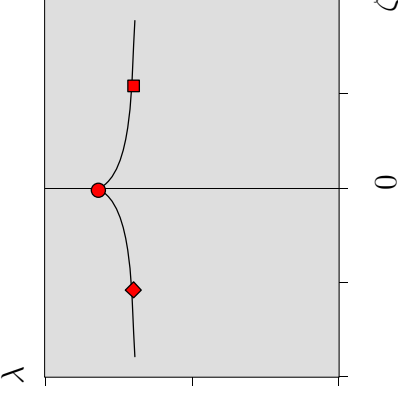

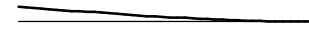

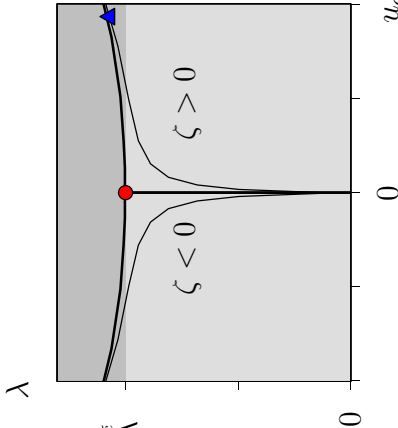
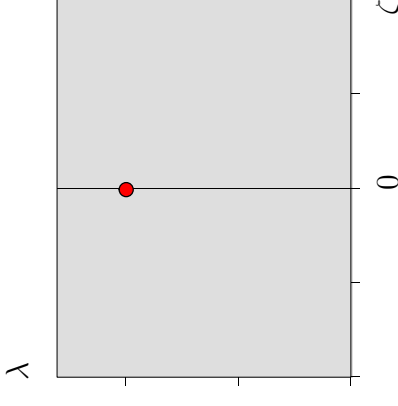
Problem	Beispiel	Last-Verschiebungs-Diagramm	Imperfektionscharakteristik
symmetrisch instabile Verzweigung 3. Poltreu belasteter Stab System  λ_P Beulform  ZBE  \blacktriangle			
symmetrisch stabile Verzweigung 4. Eingespannter Stab System  λ_P Beulform  ZBE  \blacktriangle			

Abbildung 3.3: Kritische Punkte und deren Imperfektionscharakteristiken (Bild 2)

das Ergebnis der linearen Vorbeulanalyse $\tilde{\lambda}$ (näheres siehe Abschnitt 4.3.2) in der Regel deutlich den tatsächlichen kritischen Laststeigerungsfaktor (gekennzeichnet durch \circ im Last-Verschiebungsdiagramm). Wird nun eine geometrisch imperfekte Struktur untersucht, wobei hier die Imperfektionsform affin zur Beulform gewählt wurde, spielt das Vorzeichen der Amplitude ζ eine deutliche Rolle. So senkt eine positive Imperfektionsamplitude das kritische Lastniveau (gekennzeichnet durch \square), während ein negatives ζ dieses erhöht (gekennzeichnet durch \diamond). Diese Imperfektionscharakteristik ist im rechten Diagramm dargestellt.

Bei Verzweigungsproblemen kann am kritischen Punkt der primäre Belastungspfad verlassen und auf einen sekundären Ast abgezweigt werden. Die Gruppe der Verzweigungsprobleme kann in weitere Untergruppen gegliedert werden. Dabei spielt die Symmetrie bzw. die Asymmetrie der Struktur eine Rolle. Asymmetrische Verzweigungspunkte treten z. B. bei axial belasteten Zylindersegmenten auf (siehe Beispiel 2 in Abbildung 3.2). Bei einer Lastkontrolle würde, wie bereits beim Durchschlagen, ein dynamischer Prozess entstehen. Je nach Vorzeichen der Imperfektionsamplitude hat hier das imperfekte System einen Durchschlagpunkt oder keinen kritischen Punkt mehr. Dies verdeutlicht das rechte Imperfektions-Diagramm mit lediglich einem Ast für $\zeta \geq 0$. Durch das lineare Verhalten der perfekten Struktur kann bei diesem Beispiel die lineare Vorbeulanalyse das kritische Lastniveau gut abschätzen. Für das imperfekte Tragwerk, mit seinem nichtlinearen Vorbeulverhalten, trifft dies allerdings nicht mehr zu.

Die symmetrischen Verzweigungspunkte können in stabil und instabil aufgeteilt werden. Systeme mit instabilen Verzweigungspunkten zeigen unter Berücksichtigung geometrischer Imperfektionen (affin zur Beulform) einen Durchschlagpunkt auf. Die Imperfektionscharakteristik ist symmetrisch zu $\zeta = 0$. Ein dafür typisches System ist der poltreu belastete Stab (siehe Beispiel 3 in Abbildung 3.3). Für die Abschätzung der kritischen Last anhand einer linearen Vorbeulanalyse gilt für dieses Beispiel das Analoge wie für das Beispiel 2. Die Last-Verschiebungskurven ermöglichen die Erläuterung des Begriffs Singulärpfad. Die gestrichelten Linien zeigen Last-Verschiebungs-Beziehungen für verschiedene Imperfektionsamplituden. Die Verbindungslinie der Instabilitätspunkte wird als Singulärpfad bezeichnet.

Neben dem symmetrisch instabilen ist noch das symmetrisch stabile Verzweigen bekannt. Bei derartigen Problemen ist der Instabilitätspunkt isoliert, d. h. ein Stabilitätsproblem tritt lediglich für perfekte Systeme auf. Der klassische Vertreter dieses Problems ist der eingespannte Stab.

Für Systeme mit Verzweigungspunkten gilt unter der Annahme einer zur Beulform affinen geometrischen Imperfektionsform, dass der Gradient der kritischen Last $\tilde{\lambda}$ bezüglich ζ nach KOITER [71] folgende Eigenschaft aufzeigt:

$$\left. \frac{d\tilde{\lambda}}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \rightarrow -\infty \quad (3.1)$$

Da die geometrische Modifikation in der Formoptimierung gleichbedeutend einer geometrischen Imperfektion ist, kann dieser Fall ebenfalls bei der Gradientenbildung bezüglich der Entwurfsvariablen auftreten (siehe z. B. REITINGER [103]). Abhilfe kann mit einer veränderten Parametrisierung der Entwurfsaufgabe geschaffen werden. Zur Herleitung von Gleichung (3.1) sei auf Anhang A verwiesen.

Kapitel 4

Grundlagen der nichtlinearen Strukturanalyse

In Abschnitt 2.5 wurde die Notwendigkeit einer Strukturanalyse zur Bestimmung mechanischer Entwurfskriterien erläutert. Dieses Kapitel widmet sich der Analyse von Tragwerken unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität. Die für die Optimierung notwendige Gradienteninformation der mechanischen Entwurfskriterien bezüglich der Entwurfsvariablen baut auf den in diesem Kapitel dargestellten Grundlagen auf.

Auf der Basis einer kurzen Zusammenfassung der kontinuumsmechanischen Grundlagen wird im Weiteren die schwache Formulierung des Gleichgewichts angegeben. Die anschließende Diskretisierung anhand der Finiten Element Methode (FEM) ermöglicht die Strukturanalyse beliebiger Tragwerke.

Zur Vertiefung der mechanischen Grundlagen sei z. B. auf die Werke von ALTENBACH & ALTENBACH [1], BETTEN [17], MALVERN [77] und STEIN & BARTHOLD [126] verwiesen. Zum Verständnis des mathematischen Hintergrundes der Methode der finiten Elemente sind unter anderem die Bücher von ARGYRIS & MLEJNEK [3], BATHE [6], HUGHES [56] und ZIENKIEWICZ & TAYLOR [147] empfehlenswert.

4.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt wird eine kurze Zusammenfassung der im Weiteren benötigten Grundlagen der Kontinuumsmechanik angegeben. Es werden lediglich die Bereiche dargestellt, welche für die Problemklasse der geometrischen Nichtlinearität notwendig sind, d. h., dass von einer nichtlinearen Beziehung zwischen Verschiebungen und Verzerrungen und einer linearen Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen ausgegangen wird. Weiterhin beschränken sich die Erläuterungen auf kleine Verzerrungen.

4.1.1 Kinematik

In der Festkörpermechanik ist die LAGRANGESche Betrachtungsweise, auch unter der materiellen oder referenzbezogenen Betrachtungsweise bekannt, zweckmäßig. Die folgende numerische Umsetzung kann in eine ‘totale’ bzw. ‘fortschreitende’ Formulierung unterschieden werden. Hier wird lediglich auf die ‘totale LAGRANGESche Betrachtungsweise’

(TL) eingegangen, bei der sich die kinematischen Größen auf die undeformierte Referenzkonfiguration beziehen.

Die Bewegung eines materiellen Körpers wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte beschrieben. Jeder dieser materiellen Punkte wird durch einen Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ in einem raumfesten Koordinatensystem identifiziert (siehe Abbildung 4.1). Die Lage in der Referenzkonfiguration ($t = 0$) wird mit \mathbf{X} bezeichnet. Jeder Punkt kann anhand seiner Abbildungsfunktion $\chi_{\mathbf{X}}$ von der Referenz- in die Momentankonfiguration abgebildet werden:

$$\mathbf{x} = \chi_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) \quad (4.1)$$

Folglich ergibt sich für die Verschiebung $\check{\mathbf{u}}$ zur Zeit t :

$$\check{\mathbf{u}} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (4.2)$$

Die Kennzeichnung $(\check{\cdot})$ verdeutlicht, dass es sich um Größen des kontinuierlichen Problems handelt. Für den hier untersuchten Fall ist unter der Zeit t die Parametrisierung des Deformationsprozesses und nicht die physikalische Größe zu verstehen. Die Differentiation des Ortsvektors der Momentankonfiguration nach der Referenzkonfiguration führt auf den materiellen Deformationsgradienten:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \check{\mathbf{F}} d\mathbf{X} \quad \text{mit} \quad \check{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \check{\mathbf{u}} \quad (4.3)$$

wobei \mathbf{I} der zweistufige Identitätstensor ist. Auf der Basis von $\check{\mathbf{F}}$ kann nun der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor $\check{\mathbf{E}}$ definiert werden:

$$\check{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\check{\mathbf{F}}^T \check{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \quad (4.4)$$

Mit Gleichung (4.3_b) kann der Verzerrungstensor (4.4) auch direkt mit den Verschiebungsableitungen dargestellt werden:

$$\check{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} \check{\mathbf{u}} + (\nabla_{\mathbf{X}} \check{\mathbf{u}})^T + (\nabla_{\mathbf{X}} \check{\mathbf{u}})^T \nabla_{\mathbf{X}} \check{\mathbf{u}}) \quad (4.5)$$

Dieser in den Verschiebungen $\check{\mathbf{u}}$ nichtlineare Verzerrungstensor ist objektiv, d. h. für Starrkörperbewegungen ist $\check{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{0}$.

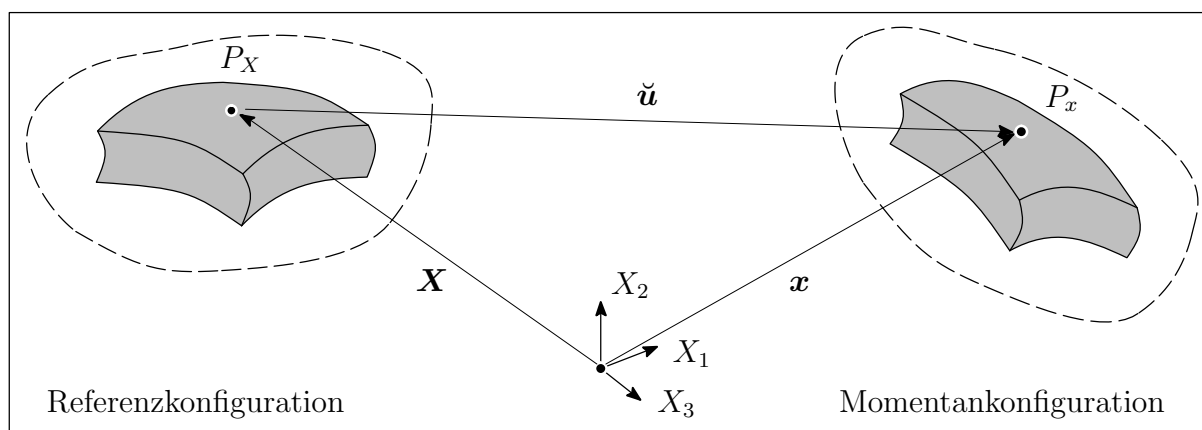


Abbildung 4.1: Kinematik des Kontinuums

Nach Gleichung (4.3_a) bildet der Deformationsgradient ein infinitesimales Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration in das Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration ab. Für die Transformation eines Flächenelementes kann folgendes gezeigt werden:

$$d\mathbf{a} = \det\check{\mathbf{F}} \check{\mathbf{F}}^{-T} d\mathbf{A} \quad (4.6)$$

Für ein Volumenelement gilt:

$$dv = \det\mathbf{F} dV \quad (4.7)$$

4.1.2 Spannungen

Zur Herleitung des zweiten PIOLA–KIRCHHOFFSchen–Spannungstensors $\check{\mathbf{S}}$ wird ein Spannungsvektor $\check{\mathbf{t}}$ in der Momentankonfiguration definiert:

$$\check{\mathbf{t}} = \check{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \quad (4.8)$$

In der nach CAUCHY benannten Gleichung (4.8) ist \mathbf{n} die Normale einer nach dem EULERSchen Schnittprinzip erzeugten ‘inneren Fläche’ in der Momentankonfiguration. Unter Anwendung der Gleichung (4.3_a) auf den Spannungsvektor $\check{\mathbf{t}}$ kann mit Hilfe der NANSONSchen Formel (4.6) folgendes definiert werden:

$$\check{\mathbf{S}} = \det\check{\mathbf{F}} \check{\mathbf{F}}^{-1} \check{\boldsymbol{\sigma}} \check{\mathbf{F}}^{-T} \quad (4.9)$$

Über die Spannungsleistung kann gezeigt werden, dass der zweite PIOLA–KIRCHHOFFSche–Spannungstensor $\check{\mathbf{S}}$ die arbeitskonjugierte Größe zu dem GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungstensor $\check{\mathbf{E}}$ ist.

4.1.3 Werkstoff

Neben der Definition der Kinematik und der Spannungen sind konstitutive Gleichungen, welche diese beiden Größen miteinander in Beziehung setzen, notwendig. Für den in dieser Arbeit verwendete hyperelastischen Werkstoff wird zur Herleitung von einer volumenspezifischen Verzerrungsenergie W_S ausgegangen. Das ST. VENANT–KIRCHHOFFSche–Material, welches für die Beschreibung von Problemen mit großen Verschiebungen, aber kleinen Verzerrungen geeignet ist, setzt den GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungstensor und den zweiten PIOLA–KIRCHHOFFSchen–Spannungstensor in Beziehung.

Die volumenspezifische Verzerrungsenergie W_S für das ST. VENANT–KIRCHHOFFSche–Material lautet:

$$W_S = \frac{1}{2} \underline{\lambda} (\text{tr } \check{\mathbf{E}})^2 + \underline{\mu} (\text{tr } \check{\mathbf{E}}^2) \quad (4.10)$$

Dabei sind $\underline{\lambda}$ und $\underline{\mu}$ die beiden LAMÉSchen Konstanten. Der Spannungstensor ergibt sich durch Ableitung der Gleichung (4.10) nach dem Verzerrungstensor zu:

$$\check{\mathbf{S}} = \nabla_{\check{\mathbf{E}}} W_S = \underline{\lambda} (\text{tr } \check{\mathbf{E}}) \mathbf{1} + 2 \underline{\mu} \check{\mathbf{E}} \quad (4.11)$$

Die erneute Ableitung des Spannungstensors $\check{\mathbf{S}}$ nach den Verzerrungen liefert den vierstufigen Materialtensor \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \nabla_{\check{\mathbf{E}}} \check{\mathbf{S}} = \underline{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \underline{\mu} \mathbf{I} \quad (4.12)$$

Gleichung (4.12) verdeutlicht, dass das ST. VENANT–KIRCHHOFFSche–Material unabhängig vom Deformationsgrad ist. Die Umrechnung der LAMÉschen Konstanten in die geläufigen Größen E (Elastizitätsmodul) und ν (Querdehnzahl) und die Darstellung von \mathbf{C} in Matrixschreibweise können z. B. STEIN & BARTHOLD [126] entnommen werden.

4.2 Gleichgewichtsaussage

In diesem Abschnitt wird die Methode der finiten Elemente (FEM) zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes in kurzer Form eingeführt. Basis dafür bilden die in Abschnitt 4.1 aufgezeigten Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Die folgende Darstellung beschränkt sich auf die LAGRANGESche Betrachtungsweise mit der energetischen Paarung des zweiten PIOLA–KIRCHHOFFSchen–Spannungstensors und dem GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungstensor.

4.2.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das ‘Prinzip der virtuellen Verschiebungen’ (PvV) bildet die Grundlage für den verschiebungsbasierenden Finiten Element Ansatz. Dieses Prinzip sagt aus, dass für einen im Gleichgewicht befindlichen Körper die innere virtuelle Arbeit δW^{int} infolge virtueller Verschiebungen $\delta \check{\mathbf{u}}$ gleich der äußeren virtuellen Arbeit δW^{ext} ist (‘schwache Form der Gleichgewichtsaussage’):

$$\underbrace{\int_V \delta \check{\mathbf{E}} \check{\mathbf{S}} dV}_{\delta W^{int}} = \underbrace{\int_V \delta \check{\mathbf{u}} \check{\mathbf{b}} dV + \int_{A_t} \delta \check{\mathbf{u}} \check{\mathbf{t}} dA_t}_{\delta W^{ext}} \quad (4.13)$$

Dabei ist zu beachten, dass die virtuellen Verschiebungen den homogenen DIRICHLET–Randbedingungen genügen müssen. In Gleichung (4.13) sind $\delta \check{\mathbf{E}}$ die den $\delta \check{\mathbf{u}}$ zugehörigen virtuellen Verzerrungen. Weiterhin ist $\check{\mathbf{b}}$ die eingeprägte Volumenbelastung und $\check{\mathbf{t}}$ die aufgebrachte Oberflächenbelastung. Für die spätere numerische Behandlung dieser in $\check{\mathbf{u}}$ nichtlinearen Gleichung werden die Belastungen $\check{\mathbf{b}}$ und $\check{\mathbf{t}}$ in eine Grundlast und in einen gemeinsamen Laststeigerungsfaktor λ aufgeteilt:

$$\check{\mathbf{b}} = \lambda \cdot \mathbf{b} \quad ; \quad \check{\mathbf{t}} = \lambda \cdot \mathbf{t} \quad (4.14)$$

Der Laststeigerungsfaktor λ kann bei der Integration vor das Integral gezogen werden. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (4.3) und (4.4) können die virtuellen GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungen wie folgt dargestellt werden:

$$\delta \check{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\delta \check{\mathbf{F}}^T \check{\mathbf{F}} + \check{\mathbf{F}}^T \delta \check{\mathbf{F}}) \quad \text{mit} \quad \delta \check{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{X}} \delta \check{\mathbf{u}} \quad (4.15)$$

Dabei ist zu beachten, dass $\delta \check{\mathbf{E}}$ eine Funktion der tatsächlichen Verschiebungen $\check{\mathbf{u}}$ und der virtuellen Verschiebungen $\delta \check{\mathbf{u}}$ ist.

4.2.2 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in diskretisierter Form

Die Ableitungen der Gleichgewichtsaussage nach den Verschiebungen treten in dieser Arbeit häufig auf. Sie sind neben der Gleichgewichtssiteration anhand des NEWTON–RAPHSON–Verfahrens ebenfalls bei der Bestimmung von Sensitivitäten mechanischer Größen erforderlich. An dieser Stelle soll, vorgreifend auf die folgenden Abschnitte und Kapitel, die erste und zweite Ableitung der inneren virtuellen Arbeiten (4.13) angegeben werden.

Da im Weiteren Schalenelemente verwendet werden, entstehen gegenüber der Herleitung von klassischen Kontinuums-elementen zusätzliche Terme. Dieser Unterschied beruht auf der Interpolation des Verschiebungsfeldes anhand von Rotationsfreiheitsgraden. Die dafür notwendigen trigonometrischen Funktionen sind beliebig oft differenzierbar. Aus diesem Grund muss bei derartigen Elementen vor der Ableitung diskretisiert werden. Dieser Sachverhalt wurde von FREY & CESCOTTO [44] und SURANA [127] erkannt. Die zusätzlichen Terme sind unter anderem in RAMM & MATZENMILLER [98] angegeben.

Die folgende Ableitung beschränkt sich auf die Materialfunktion (4.12). Bei der Verwendung nichtlinearer Materialien ist die Deformationsabhängigkeit des Materialtensors bei der Linearisierung zu berücksichtigen.

Für die Formulierung des diskreten Problems werden die kontinuierlichen Verschiebungen $\check{\mathbf{u}}$ und deren Variation $\delta\check{\mathbf{u}}$ anhand von Ansatzfunktionen elementweise approximiert:

$$\check{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad ; \quad \delta\check{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \approx \delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}) \quad (4.16)$$

Die diskreten Knotenverschiebungen sind in dem Vektor \mathbf{u} zusammengefasst. Eine unterschiedliche Kennzeichnung von den Vektoren der Systemfreiheitsgrade und der Elementfreiheitsgrade findet aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht statt. Desweiteren werden die approximierten Größen $(\cdot)^h$ nicht mehr besonders gekennzeichnet. In diskretisierter Form geht Gleichung (4.15) dann über in:

$$\delta\mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{E} \delta\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{F} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \delta\mathbf{u} \quad (4.17)$$

Im Weiteren wird die Matrizen-schreibweise der Finiten Element Methode eingeführt. Die entstehenden Integralgleichungen werden auf Elementebene im Parameterraum Ω ausgewertet (siehe z. B. ZIENKIEWICZ & TAYLOR [147]). Die Abbildungen zwischen Parameterraum und physikalischem Raum erfolgt anhand der JACOBI–Matrix \mathbf{J} . Die Integration über das Elementvolumen dv kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$dv = |\mathbf{J}| d\Omega \quad (4.18)$$

Der Zusammenbau (‘Assemblierung’) der Elementmatrizen zu den Systemmatrizen wird im Weiteren mit \mathbf{A} symbolisiert. Die internen diskretisierten Knotenkräfte \mathbf{R} des Systems können, unter Berücksichtigung von Gleichung (4.17), aus den internen virtuellen Arbeiten hergeleitet werden:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{S}} |\mathbf{J}| d\Omega \quad (4.19)$$

Bei dieser Herleitung wurde bereits die Symmetrieeigenschaften von \mathbf{E} und \mathbf{S} berücksichtigt. Die Matrix $\tilde{\mathbf{S}}$ enthält die aktuellen zweiten PIOLA–KIRCHHOFFSchen–Spannungen \mathbf{S} in einer speziellen Anordnung. Die Ableitung des Deformationsgradienten \mathbf{F} nach den Verschiebungen \mathbf{u} enthält die Matrix \mathbf{B} , wobei diese die Verzerrungs–Verschiebungs–Matrix der linearen Theorie ist.

Mit den Gleichungen (4.14) und (4.19) kann die Gleichgewichtsbedingung des Systems wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

wobei \mathbf{P} der äußere Belastungsvektor und λ der Laststeigerungsfaktor ist.

Die Ableitung der internen Kräfte (4.19) nach den Verschiebungen führt auf die Definition der tangentialen Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} = \mathbf{K}_T = \mathbf{A} \left[\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\mathbf{K}_{eu}} + \right. \\ \left. \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\mathbf{K}_g^I} + \underbrace{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\mathbf{K}_g^{II}} \right] \quad (4.21) \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{S}}$ und $\hat{\mathbf{F}}$ enthalten die gleichen Einträge wie \mathbf{S} bzw. \mathbf{F} , lediglich in unterschiedlicher Anordnung. Die Matrix \mathbf{N} beinhaltet die zweite Ableitung des Deformationsgradienten nach den diskreten Knotenvariablen \mathbf{u} . Die einzelnen Matrizen für das in dieser Arbeit verwendete Schalelement können den Arbeiten von RAMM [96] bzw. RAMM & MATZENMILLER [98] entnommen werden.

Der erste Anteil \mathbf{K}_{eu} der Gleichung (4.21) umfasst die aus der linearen Theorie bekannte elastische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e und die Anfangsverschiebungs–Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_u . Die Anfangsverschiebungsmatrix \mathbf{K}_u kann wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_{eu} - \mathbf{K}_e \quad (4.22)$$

\mathbf{K}_g^I wird als Anfangsspannungsmatrix bzw. als geometrische Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Der letzte Integralausdruck der Gleichung (4.21) kommt nur bei Elementformulierungen mit Rotationsfreiheitsgraden vor und ist unter dem Namen der zweiten geometrischen Steifigkeitsmatrix bekannt.

Die erneute Richtungsableitung der tangentialen Steifigkeitsmatrix nach den Verschiebungen tritt an mehreren Stellen in dieser Arbeit auf. Eine Matrizendarstellung erfolgt erst im Zusammenhang mit der Sensitivitätsanalyse (siehe Abschnitt 6.3.2). Wie in der Arbeit von REITINGER [102] wird für die Algorithmen der Strukturanalyse, welche in Abschnitt 4.3 näher erläutert werden, auf eine numerische Differentiation zurückgegriffen. Basierend auf der tangentialen Steifigkeitsmatrix (4.21) folgt:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \left[\mathbf{K}_T \boldsymbol{\eta}_1 \right] \boldsymbol{\eta}_2 = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathbf{K}_T (\bar{\mathbf{u}} + \epsilon \boldsymbol{\eta}_1) \right] \boldsymbol{\eta}_2 \right|_{\epsilon=0} \quad (4.23)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}} + \epsilon \boldsymbol{\eta}_1) - \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) \right] \boldsymbol{\eta}_2 \quad (4.24)$$

$$\approx \frac{1}{\epsilon} \left[\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}} + \epsilon \boldsymbol{\eta}_1) - \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) \right] \boldsymbol{\eta}_2 \quad (4.25)$$

wobei $\bar{\mathbf{u}}$ die Stelle ist, an der die Ableitung ausgewertet werden soll. $\boldsymbol{\eta}_1$ und $\boldsymbol{\eta}_2$ sind Platzhalter für unterschiedliche mechanische Größen. So entspricht z. B. bei dem ‘erweiterten System’ (näheres siehe Abschnitt 4.3.2) $\boldsymbol{\eta}_1$ dem Singularitätsvektor und $\boldsymbol{\eta}_2$ den inkrementellen Verschiebungen.

4.3 Pfadverfolgung und Stabilitätsberechnung

In Kapitel 3 wurde bereits anschaulich gezeigt, welche Phänomene durch die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität untersucht werden können. Im Folgenden werden die zur Strukturanalyse notwendigen Algorithmen vorgestellt. Die Algorithmen der Pfadverfolgung und deren verschiedenen Steuerungen werden in Abschnitt 4.3.1 erläutert. Zur Berechnung kritischer Punkte werden zwei Möglichkeiten vorgestellt. Über eine begleitende Eigenwertanalyse kann die Laststufe des singulären Punktes abgeschätzt werden. Weiterhin wird zur exakten Bestimmung des kritischen Punktes das Lösungsverfahren des ‘erweiterten Systems’ beschrieben. Dieses Verfahren ist im Englischen unter dem Namen ‘extended system’ bekannt und wird in Abschnitt 4.3.2 eingeführt.

4.3.1 Pfadverfolgung

Zur Bestimmung des Gleichgewichts zwischen der äußeren Belastung und den internen Kräften ist aufgrund des nichtlinearen Verhaltens ein iterativer Lösungsalgorithmus notwendig. Für die Lösung dieser Probleme wird häufig das NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet, welches in der Umgebung des Lösungspunktes eine quadratische Konvergenz besitzt. Die Berechnung der Lösung erfolgt anhand eines Prädiktorschrittes mit anschließenden Korrektorschritten. Die im Folgenden erläuterten Begriffe sind skizzenhaft in Abbildung 4.2 dargestellt.

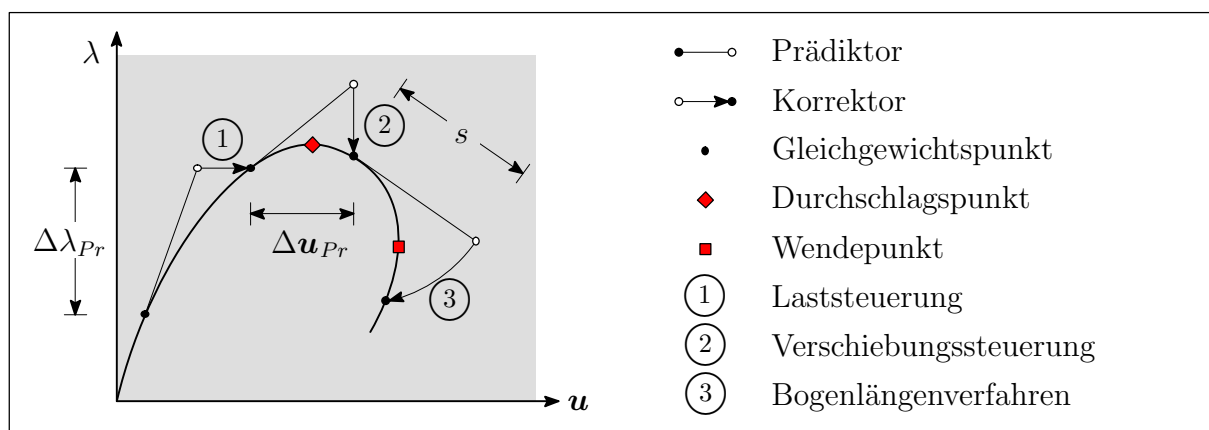


Abbildung 4.2: Pfadverfolgungsstrategien

Ausgangspunkt für die Herleitung eines Iterationsschemas bildet die Gleichgewichtsbedingung (4.20):

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

Zur Bestimmung eindeutiger Deformationszustände wird eine Nebenbedingung eingeführt:

$$c(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (4.27)$$

Für Gleichung (4.27) sind unterschiedliche Kriterien bekannt. Wird ein Gleichgewichtspunkt auf einer vorgeschriebenen Laststufe $\bar{\lambda}$ gesucht, so definiert sich Gleichung (4.27) zu:

$$c = \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad (4.28)$$

Die Vorgabe eines Lastniveaus ist nur dann erfolgreich, wenn für dieses ein Gleichgewichtspunkt existiert. Ist dies, wie z. B. bei Erreichen eines Durchschlagspunktes (siehe Abschnitt (3.2) und Abbildung 4.2) nicht gegeben, versagt dieses Kriterium. Wird dagegen eine Verschiebungssteuerung gewählt:

$$c = u_i - \hat{u}_i = 0 \quad (4.29)$$

bei der die Verschiebung eines Freiheitsgrades u_i während der Gleichgewichtsiteration konstant gehalten wird, können Durchschlagspunkte überwunden werden. Weist der kontrollierte Last–Verschiebungspfad einen Umkehrpunkt auf, versagt ebenfalls die Verschiebungskontrolle. Aus diesem Grund wurde u. a. von WEMPNER [137], RIKS [105], [106], RAMM [97] und CRISFIELD [33] eine Bogenlängengleichung vorgeschlagen:

$$c = \sqrt{\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2(\lambda - \tilde{\lambda})} - s = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \psi \leq \infty \quad (4.30)$$

Mit $(\tilde{\cdot})$ sind die Größen des zuletzt berechneten Gleichgewichtspunktes gekennzeichnet. Da in Gleichung (4.30) unterschiedliche Größen verknüpft sind, wird der Laststeigerungsparameter durch ψ skaliert. Für $\psi \rightarrow \infty$ geht die Nebenbedingung in die der Lastkontrolle (4.28) über. Für $\psi \rightarrow 0$ entsteht eine Verschiebungssteuerung in normierter Form.

Die konsistente Linearisierung der um eine der Nebenbedingungen (4.28)–(4.30) erweiterten Gleichgewichtsaussage (4.26) führt zum Iterationsschema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ c(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{lin.}} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ \nabla_{\mathbf{u}} c & \nabla_{\lambda} c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ c \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

wobei $\Delta \mathbf{u}$ die inkrementellen Verschiebungen und $\Delta \lambda$ der Zuwachs des Laststeigerungsfaktors ist. Diese beiden unbekanntenen Größen werden je nach Speichertechnik des Gleichungslösers nicht direkt, sondern anhand einer Partitionierungsmethode gelöst. Die neuen Verschiebungen \mathbf{u}_{n+1} und der neue Laststeigerungsfaktor λ_{n+1} werden wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u} \quad ; \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda \quad (4.32)$$

Dieser Prozess wird solange durchlaufen, bis die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{G} einen Grenzwert unterschreiten. Eine ausführlichere Beschreibung dieser Thematik kann z. B. BATHE

[6], WAGNER [135] oder REITINGER [102] entnommen werden.

Für die in dieser Arbeit untersuchten Fragestellungen der Strukturoptimierung kommen alle drei Steuerungsverfahren zum Einsatz. Insbesondere bei Berücksichtigung der Stabilitätskriterien sind Wechsel der Steuerungsverfahren innerhalb einer Strukturanalyse sinnvoll und zum Teil auch notwendig.

4.3.2 Bestimmung kritischer Punkte

In Abschnitt 3.2 wurde das Phänomen singulärer Punkte anhand von Beispielen veranschaulicht. Im Weiteren werden zwei verschiedene Verfahren zur Bestimmung der kritischen Laststufen und der dazugehörigen Beulformen vorgestellt. Das erste Verfahren der begleitenden Eigenwertanalyse ermöglicht lediglich eine Abschätzung der Laststufe, bei der ein kritischer Zustand auftritt. Die Güte der Abschätzung hängt dabei wesentlich von dem Grad der strukturellen Nichtlinearität des Vorbeulverhaltens ab. Mögliche verschiedene Definitionen werden im Folgenden angesprochen.

Zur exakten Bestimmung des kritischen Punktes wurde ein weiteres Verfahren entwickelt, bei dem die Gleichgewichtsaussage (4.26) um ein Singularitätskriterium erweitert wird. Eine Einführung folgt auf die der linearen Eigenwertanalyse.

Lineare Eigenwertanalyse

Eine Eigenwertanalyse ermöglicht es von einem beliebigen Lastniveau λ das tatsächliche kritische Lastniveau $\check{\lambda}$ auf einen Wert $\tilde{\lambda}_i$ abzuschätzen. Der kritische Punkt ist durch $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ bzw. $\det \mathbf{K}_T = 0$ definiert. Um eine Eigenwertformulierung zu erhalten, wird die erste Definition verwendet. Dabei wird \mathbf{K}_T durch zwei Anteile ersetzt, wobei der zweite proportional mit einem Faktor $\tilde{\lambda}_i$ (Eigenwert) gesteigert wird. Daraus sind z. B. folgende Eigenwertformulierungen konstruierbar:

$$\left(\mathbf{K}_T + \tilde{\lambda}_i \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

$$\left(\mathbf{K}_T + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_g \right) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

$$\left(\mathbf{K}_{eu} + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_g \right) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (4.35)$$

$$\left(\mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_{ug} \right) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

Die einzelnen Steifigkeitsmatrizen sind in Abschnitt 4.2.2 beschrieben. Zusätzlich gilt hier, dass die Matrizen \mathbf{K}_g^I und \mathbf{K}_g^{II} zu \mathbf{K}_g zusammengefasst werden. Die von den Verschiebungen abhängigen Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_g werden mit den Verschiebungsgrößen der Laststufe λ ausgewertet.

Die Eigenwertformulierung (4.33) enthält mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} keine Steifigkeitsanteile in dem zu steigernden Anteil. Dadurch ist die mechanische Aussagekraft dieser Formulierung begrenzt. Durch die Diagonalform von \mathbf{I} können allerdings sehr kostengünstige Eigenwertlöser (z. B. inverse Iteration) zum Einsatz kommen. Eine Steigerung der Aussagekraft gelingt, wenn der zu steigernde Anteil Steifigkeiten der Struktur enthält.

Bei Eigenwertformulierungen vom Typ (4.33) bzw. (4.34) ist der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i = 0$, falls die Auswertung auf dem tatsächlichen, kritischen Lastniveau $\check{\lambda}$ erfolgt. Eine Auswertung

unterhalb des kritischen Punktes führt zu einem positiven ansonsten zu einem negativen Wert. Durch diesen Sachverhalt lässt sich das kritische Niveau wie folgt abschätzen:

$$\tilde{\lambda}_i^{\tilde{c}} = \tilde{\lambda}_i + \lambda \quad (4.37)$$

Für Formulierungen bei denen der erste Term nicht \mathbf{K}_T ist (siehe Gleichung (4.35) und (4.36)) erhält man für eine Auswertung auf der kritischen Laststufe $\tilde{\lambda}$ den Eigenwert $\tilde{\lambda}_i = 1$, entsprechend $\tilde{\lambda}_i > 1$ für eine Auswertung unterhalb und $\tilde{\lambda}_i < 1$ für eine Auswertung oberhalb von $\tilde{\lambda}$. Eine Abschätzung von $\tilde{\lambda}_i^{\tilde{c}}$ ist möglich anhand:

$$\tilde{\lambda}_i^{\tilde{c}} = \tilde{\lambda}_i \cdot \lambda \quad (4.38)$$

Zur Lösung von Eigenwertproblemen stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Einen Überblick darüber bietet das Standardwerk von BATHE [6]. Die Eigenwertanalysen der in dem folgenden Kapitel gezeigten Beispiele wurden mit einem Unterraum-Iterationsverfahren durchgeführt.

Direkte Berechnung von kritischen Punkten

Durch die bereits erläuterten Eigenwertanalysen können kritische Punkte nur näherungsweise bestimmt werden. Analog zu dem Iterationsschema zur Verfolgung des Gleichgewichtspfad nach Abschnitt 4.3.1 wurden Verfahren entwickelt, welche eine direkte Berechnung von kritischen Punkten ermöglichen. Derartige Formulierungen werden in der mathematischen Literatur seit den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts diskutiert (siehe u. a. KEENER & KELLER [60], SEYDEL [118], MOORE & SPENCE [86]). Die Anwendung auf beliebige Systeme im Zusammenspiel mit der Methode der finiten Elemente sind von der Ingenieurseite her u. a. die Arbeiten von WRIGGERS ET AL. [140], WRIGGERS & SIMO [139], WAGNER [135] und REITINGER [102] zu erwähnen.

Zur Entwicklung eines Iterationsschemas wird die Gleichgewichtsbedingung (4.26) um ein Singularitätskriterium erweitert. In den Arbeiten von WAGNER [135] und PLANINC & SAJE [94] wird gezeigt, dass bei der Verwendung des Kriteriums $\det \mathbf{K}_T = 0$ im zugehörigen Iterationsschema so viele rechte Seiten gelöst werden müssen, wie unbekannte Systemfreiheitsgrade vorhanden sind. Aus diesem Grund eignet sich dieses Kriterium im Zusammenspiel mit der Methode der finiten Elemente nur bedingt.

Aufbauend auf der Arbeit von WAGNER [135] wurde u. a. von REITINGER [102] die Bedingung $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ zur Herleitung eines Iterationsschemas verwendet, wobei $\boldsymbol{\phi}$ der Singularitätsvektor ist. Im Weiteren soll das in dieser Arbeit verwendete Verfahren kurz erläutert werden.

Unter Berücksichtigung einer Nebenbedingung kann ein erweitertes System mit der Bedingung $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ wie folgt definiert werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda)\boldsymbol{\phi} \\ l(\boldsymbol{\phi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Die zusätzliche Nebenbedingung (4.39_c) ist notwendig, um die triviale Lösung der Gleichung (4.39_b) auszuschließen. Eine Möglichkeit ist die Vorgabe eines Werts für die euklidische Norm des Singularitätsvektors ($l(\phi) = \|\phi\| - 1 = 0$). Durch den Satz von Gleichungen (4.39) können einfache singuläre Punkte bestimmt werden. Das Iterationsschema erhält man anhand der Linearisierung des Gleichungssystems (4.39):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \\ \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{K}_T \phi) & \mathbf{K}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{\phi} l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{K}_T \phi \\ l \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

wobei hier bereits die Annahme einer verformungsunabhängigen Belastung eingearbeitet wurde. Wie bei der Gleichgewichtsiteration findet auch hier aus Gründen der Speichertechnik eine Lösung anhand einer Partitionierungstechnik statt. Die Reihenfolge der Operationen soll in kurzer Form dargestellt werden und kann ausführlicher z. B. REITINGER [102] entnommen werden:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_P &= \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} & \Delta \mathbf{u}_G &= -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G} \\ \Delta \phi_P &= -\mathbf{K}_T^{-1} [\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{K}_T \phi) \Delta \mathbf{u}_P] & \Delta \phi_G &= -\mathbf{K}_T^{-1} [\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{K}_T \phi) \Delta \mathbf{u}_G] \end{aligned} \quad \downarrow$$

$$\Delta \lambda = \frac{-\phi^T \Delta \phi_G + \|\phi\|}{\phi^T \Delta \phi_P} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n + \Delta \lambda \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta \lambda \cdot \Delta \mathbf{u}_P + \Delta \mathbf{u}_G \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta \lambda \cdot \Delta \phi_P + \Delta \phi_G \end{aligned}$$

In die Bestimmungsgleichung für $\Delta \lambda$ des Partitionierungsschemas (4.41) wurde die oben genannte Nebenbedingung bereits eingearbeitet. Zudem ist n der Index für die Iterationsschleife.

Gelangt man anhand des Iterationsprozesses auf den singulären Punkt, so ist eine Invertierung bzw. Faktorisierung von \mathbf{K}_T zur Lösung der unbekanntenen Größen $\Delta \mathbf{u}_P$, $\Delta \phi_P$, $\Delta \mathbf{u}_G$ und $\Delta \phi_G$ nicht mehr möglich. Dadurch wird bei der Annäherung an den kritischen Punkt das Konvergenzverhalten des Verfahrens gestört. Dies kann bis zur Divergenz des Verfahrens führen. Um diesem Sachverhalt zu begegnen, wurden verschiedene Penalty-Formulierungen entwickelt. Im Folgenden wird die in dieser Arbeit verwendete und von REITINGER [102] vorgestellte Formulierung näher erläutert.

Unter Zuhilfenahme einer Penalty-Formulierung wird nicht mehr der kritische Punkt direkt, sondern ein Gleichgewichtspunkt in der Nachbarschaft berechnet. Dafür wird die Bedingung für den singulären Punkt ($\mathbf{K}_T \phi = \mathbf{0}$) modifiziert. Zur Herleitung eines Iterationsschemas wird nach REITINGER [102] \mathbf{K}_T der Gleichung (4.39_b) mit dem skalierten Dyadenprodukt $\hat{c} \cdot \phi \phi^T$ addiert. Die Nebenbedingung lautet für diesen Fall $l(\phi) = \phi^T \phi - 1 = 0$. Nach der Linearisierung der modifizierten Gleichungen wird wiederum die Partitionierungstechnik zur Bestimmung der Lösung angewendet. Der Betrag des Faktors \hat{c} steuert dabei den Abstand zwischen dem kritischen Punkt und dem

berechneten Gleichgewichtspunkt. Das Vorzeichen von \hat{c} bestimmt, ob sich der Gleichgewichtspunkt vor ($\hat{c} > 0$) oder nach ($\hat{c} < 0$) dem singulären Punkt befindet.

Um die Konvergenzeigenschaften des Iterationsschemas (4.41) zu verbessern, kann es sinnvoll sein, einen geeigneten Startvektor für ϕ zu wählen. Eine von WAGNER [135] und REITINGER [102] vorgeschlagene Vorgehensweise ist den Startvektor für ϕ mittels dem speziellen Eigenwertproblem (4.33) zu berechnen. Zwar widerspricht diese Vorgehensweise dem Ansatz des erweiterten Systems, den Singularitätsvektor ϕ simultan mitzuberechnen, aber es kann zum Teil eine reduzierte Gesamtberechnungszeit durch die höhere Konvergenzgeschwindigkeit des erweiterten Systems erzielt werden. Weiterhin wird die Stabilität des Verfahrens deutlich gesteigert. Zum einen wird die Gefahr der Divergenz verringert und zum anderen kann in der Regel ein Konvergieren zu einem benachbarten kritischen Punkt vermieden werden.

Mit bekanntem Singularitätsvektor können Durchschlags- von Verzweigungspunkten unterschieden werden:

$$\phi^T \mathbf{P} \quad \begin{cases} = 0 & : \text{ Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 & : \text{ Durchschlagspunkt} \end{cases} \quad (4.42)$$

Die unterschiedliche Bezeichnung für ψ nach Gleichung (4.33)–(4.36) und ϕ , der an sich gleichen mechanischen Größen, wurde zur Unterscheidung der Bestimmungsweise gewählt. Insbesondere bei der Sensitivitätsanalyse der kritischen Punkte, auf die näher in Kapitel 9 eingegangen wird, ist dies zweckmäßig.

Kapitel 5

Grundlagen der Topologie- und Formoptimierung

Dieses Kapitel dient der Grundlagenbeschreibung einzelner Teildisziplinen der Strukturoptimierung. Die Darstellung erfolgt in einem kurzen Abriss, da die in dieser Arbeit untersuchte Thematik auf bereits geschaffene Grundlagen aufbaut.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels geht auf die Topologieoptimierung ein. Diese Teildisziplin der Strukturoptimierung eignet sich im Besonderen für die Generierung der prinzipiellen Gestalt eines Tragwerks. Neben den bekannten Ansätzen wird detaillierter auf die verbreitete materielle Topologieoptimierung eingegangen. Weiterhin werden verschiedene Materialdefinitionen erläutert und das hier gewählte Modell begründet. Für eine detaillierte Beschreibung sei auf die Arbeiten von BENDSØE & MOTA SOARES [13], BENDSØE [10], ESCHENAUER & OLHOFF [39] sowie MAUTE [78] verwiesen. Insbesondere auf die Arbeit von MAUTE wurde im Bereich der materiellen Topologieoptimierung aufgebaut. In dem darauf folgenden Abschnitt werden die notwendigen Grundlagen der Formoptimierung erläutert. Die Formoptimierung dient in dieser Arbeit der Feintuning der aus der Topologieoptimierung gewonnenen Tragwerke. Die eingesetzten Verfahren zur Bestimmung der Geometrieänderung werden in den grundlegenden Zügen erklärt. Für eine ausführlichere Beschreibung sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von IMAM [57], BRAIBANT & FLEURY [22], BARTHOLD [5] und BLETZINGER [18] verwiesen. Die hier angewandten Grundlagen der Formoptimierung stammen von BLETZINGER.

Historisch gesehen sind die Formoptimierungsansätze vor denen der Topologieoptimierung angesiedelt. Diese beiden Teildisziplinen werden in diesem Kapitel, allerdings in der für den Entwurf eines Tragwerks sinnvollen Reihenfolge, erläutert.

5.1 Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung ist zur Zeit der allgemeinste Lösungsansatz zur Generierung von Tragwerken. Dabei steht im Gegensatz zur Formoptimierung nicht die detaillierte Bestimmung der Geometrie jedes einzelnen Tragwerkselementes im Vordergrund, sondern der prinzipielle topologische Aufbau. Hierunter wird die Anordnung und Verbindung einzelner Tragwerkselemente (Nachbarschaftsbeziehung) verstanden.

Für die Topologieoptimierung ist ein geometrischer und ein materieller Ansatz bekannt.

Die Gruppe der materiellen Topologieoptimierung kann in diskret bzw. kontinuierlich unterschieden werden (siehe Abbildung 5.1). Bei dem materiellen diskreten Ansatz erfolgt die Optimierung auf Basis von diskreten Stab- und Balkenelementen. Die besondere Bedeutung dieser ‘Layout’-Optimierung liegt in der analytischen Lösbarkeit. Die ersten Arbeiten stammen von MAXWELL [83] und MICHELL [85]. Beide beschäftigten sich mit dem grundlegenden Tragwerksaufbau bei minimalem Materialeinsatz. Der Ansatz der anfänglichen quasi-kontinuierlichen Stabverteilung (‘structural universe’) im Entwurfsraum führt zu einem orthogonalen Gitter. Diese Strukturen, auch MICHELL-Strukturen genannt, sind lediglich für einen Lastfall optimal und können nur für wenige Sonderfälle gelöst werden. Weiterhin besteht die Einschränkung, dass die Knoten keinen wesentlichen Einfluss auf das mechanische Verhalten haben dürfen, was gleichbedeutend zu der Aussage ist, dass die Stablängen deutlich größer sein müssen als die Querschnittsabmessungen. Die Ansätze wurden von COX [32], HEMP [53] sowie PRAGER & ROZVANY [95] weiterverfolgt und sind in ROZVANY ET AL. [111] zusammengefasst beschrieben.

In der geometrischen Topologieoptimierung wird ein Zweischnittverfahren eingesetzt. Der erste Schritt hat die Aufgabe einer Neupositionierung von Löchern. In dem folgenden Schritt wird die Suche nach der optimalen Geometrie der eingefügten Löcher anhand der Formoptimierung (näheres siehe Abschnitt 5.2) bewerkstelligt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die Zielfunktion nicht mehr verbessert werden kann. Für die Positionierung der Löcher schlägt ROSEN & GROSSE [108] heuristisch die Lage geringer Vergleichsspannungen vor. Dagegen positionieren ESCHENAUER ET AL. [38] und SCHUMACHER [115] die neuen Löcher, in diesen Arbeiten auch ‘bubble’ genannt, unter Berücksichtigung der Sensitivität der Zielfunktion in Abhängigkeit der Lochgröße. Durch das ST. VENANT-Prinzip ist gewährleistet, dass die Modifikation anhand der Löcher lediglich lokale Auswirkungen auf das mechanische Verhalten hat. Die geometrischen Ansätze haben den Vorteil, dass die Geometrie des optimierten Tragwerks, wie bei der Formoptimierung, anhand weniger Entwurfsvariablen sehr gut beschrieben werden. Nachteilig ist,

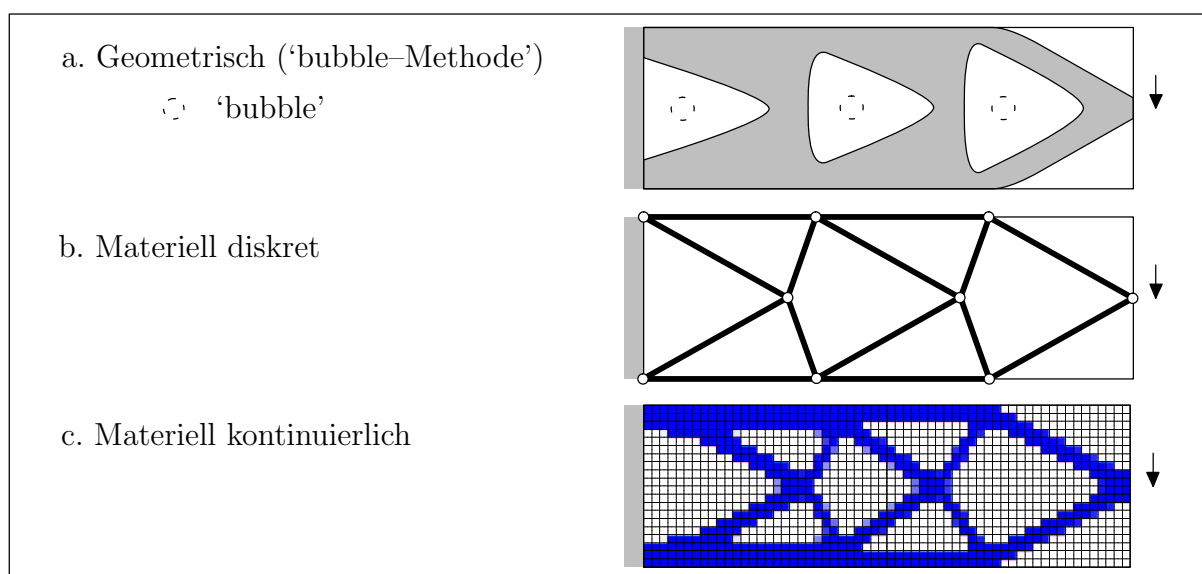


Abbildung 5.1: Geometrische und materielle Methoden der Topologieoptimierung (aus MAUTE [78])

dass das Einfügen von Löchern, eine topologische Veränderung mit sich bringt, welche nicht differenzierbar und irreversibel ist. Dadurch ist das Schließen eines Loches nicht mehr möglich.

Aus diesem Grund haben sich für allgemeine Problemstellungen die materiellen kontinuierlichen Ansätze in der Topologieoptimierung durchgesetzt. Die Idee dieser Vorgehensweise ist, das Optimierungsproblem als Materialverteilungsproblem in einem vorgegebenen Entwurfsraum zu formulieren (EULER-Formulierung). ROSSOW & TAYLOR [109] machten einen ersten Ansatz anhand einer Dickenoptimierung von Scheibenproblemen. Die Interpretation der generierten Dickenverteilung erwies sich für die Definition eines topologischen neuen Tragwerks als problematisch. Einen analogen Ansatz wählte OLHOFF [90] bei der Optimierung von KIRCHHOFF-Platten bezüglich Eigenfrequenzen. In dieser Arbeit stellte sich die von der Feinheit der Diskretisierung abhängige Lösung heraus, wobei mit anwachsender Anzahl von finiten Elementen die Zahl der generierten Strukturelemente wuchs. Aus diesem Sachverhalt wurde von CHENG & OLHOFF [29] auf eine im Optimum unendlich fein gegliederte Struktur geschlossen. Diese numerische Instabilität infolge des ‘0–1’ Integer-Problems begründet sich in der Unlösbarkeit des nicht-konvexen Optimierungsproblems. Die auftretenden oszillierenden Strukturverschiebungen weisen auf einen Aufbau mit unbegrenzter Anzahl von Poren hin. KOHN & STRANG zeigen in Ihren Arbeiten [69] und [70] eine Lösung durch die Verbindung dreier Disziplinen auf:

- Strukturoptimierung
- Relaxation von nicht-konvexen Funktionalen
- Homogenisierung von Mikrostrukturen

Durch die Einführung poröser Werkstoffgesetze kann das Problem der oszillierenden Verschiebungen behoben werden. Mit der Homogenisierung von Mikrostrukturen werden die stark oszillierenden mikroskopischen Verschiebungen auf der makroskopischen Ebene gemittelt. Das ursprüngliche ‘0–1’ Integer-Problem wird durch die Definition poröser Materialien in ein kontinuierliches überführt:

$$0 \leq \rho(\mathbf{X}) \leq \rho_0 \quad (5.1)$$

wobei der Index ‘0’ das isotrope homogene Grundmaterial kennzeichnet.

Die Relaxation des Problems erfolgt durch die Erweiterung des Verschiebungsfeldes anhand des porösen Materials. Der zu definierende Materialtensor $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \rho)$ beschreibt die makroskopischen Eigenschaften des porösen Materials. Die mathematischen Bedingungen an den Materialtensor, welche zur Relaxation des Problems führen, sind in KOHN & STRANG [70] aufgeführt.

Die Materialien bzw. Mikrostrukturen, welche diese Bedingungen erfüllen, werden als optimal bezeichnet. Der bekannteste Vertreter dieser optimalen Materialien ist das ‘Rank- n ’ Laminat. Dabei handelt es sich um ein periodisch aufgebautes ‘mathematisches’ Modell mit n Ebenen. Jede dieser Ebenen enthält jeweils einen Bereich aus homogenem und heterogenem Werkstoff. Der heterogene Teil wird auf einer feineren Skala beschrieben. Diese Skala besteht ebenfalls aus einem Bereich mit homogenem und einem mit heterogenem Werkstoff. Die Ebene mit der feinsten Skala besteht aus zwei homogenen isotropen Materialien unterschiedlicher Eigenschaften. Eines der beiden Materialien hat eine annähernde ‘Null-Steifigkeit’. Die Abbildung der Eigenschaften der feineren Skala auf eine gröbere

erfolgt anhand der Homogenisierung. Je nach Anzahl der Ebenen können die Optimierungsprobleme vollständig gelöst werden. Ein Rank-2 Laminat, welches einem orthogonalen Netz von Fasern (\rightarrow keine Schubsteifigkeit) entspricht, erfüllt die Bedingungen für 2-dimensionale Probleme bei Beanspruchung lediglich eines Lastfalles (siehe MICHELL-Strukturen). Dieses Material wird z. B. von KOHN & STRANG [70] und BENDSØE [9] in der Topologieoptimierung eingesetzt. Steigt die Dimension des Problems und/oder mehrfache Lastfälle sollen berücksichtigt werden, so muss die Anzahl der Ebenen erhöht werden. Für 3-dimensionale Strukturen unter Berücksichtigung mehrerer Lastfälle sind sechs Ebenen notwendig (siehe z. B. OLHOFF ET AL. [92]). Dieses Materialmodell, welches im Wesentlichen ein mathematisches Werkzeug ist, tendiert im Optimum zu großen porösen Bereichen und erschwert somit die ingenieurmäßige Umsetzung in reale Strukturen.

Aus diesem Grund wurden neben den optimalen Materialmodellen ebenfalls suboptimale entwickelt. Diese relaxieren das Problem nicht mehr vollständig, ermöglichen dafür eine Umsetzung in ein aus isotropem homogenem Material bestehendes Tragwerk. Die suboptimalen Materialmodelle werden in mikro- und makroskopische Ansätze unterschieden. Der bekannteste Vertreter der mikroskopischen Materialmodelle ist das ‘mikro-hole’-Modell von BENDSØE & KIKUCHI [12]. Bei diesem numerisch zu homogenisierenden Materialmodell sind die beiden Abmessungen des Rechteckloches und der Winkel zur räumlichen Orientierung die Entwurfsvariablen (gilt für 2-dimensionale Fälle). Mit der Wahl eines makroskopischen Ansatzes entfällt der Aufwand der Homogenisierung.

RINGERTZ [107] und BENDSØE ET AL. [11] unterbreiten den Vorschlag die Komponenten des Werkstoffensors, unter Berücksichtigung der notwendigen positiven Definitheit, direkt als Entwurfsvariablen zu verwenden. Der Bezug zum Materialaufwand wird anhand von Invarianten des Werkstoffensors gelöst. Nachteil dieses Verfahrens ist die Umsetzung eines generierten, makroskopischen Werkstoffensors in ein realistisches Material. Somit dient dieser Ansatz zur Generierung von Referenzlösungen.

Den einfachsten Zugang bieten die ingenieurmäßig definierten, makroskopischen Werkstoffgesetze. Der verbreitetste Vertreter dieser Gruppe stammt von BENDSØE [9]. Das unter dem Namen SIMP (‘Solid Isotropic Microstructure with Penalty for intermediate density’) bekannte Werkstoffmodell verbindet den Elastizitätsmodul direkt mit der relativen Dichte ρ/ρ_0 :

$$E = E_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta \quad \text{mit} \quad 0 < \rho \leq \rho_0 \quad ; \quad \beta \geq 1 \quad (5.2)$$

wobei β den Grad der Nichtlinearität steuert. E_0 ist der Elastizitätsmodul des Vollmaterials. Der Funktionsverlauf für verschiedene β 's ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Da lediglich der Elastizitätsmodul an die Dichte gekoppelt wird ist der effektive Werkstofftensor ein skalierter Werkstofftensor des Vollmaterials:

$$\mathbf{C}(\rho) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta \mathbf{C}_0 \quad (5.3)$$

Bei diesem Ansatz bilden die Dichten ρ jedes finiten Elementes die Entwurfsvariablen. Diese sind in dem Vektor der Entwurfsvariablen \mathbf{s} zusammengefasst. Von ZHOU & ROZVANY [145] sowie von ROZVANY ET AL. [113] wird diese Vorgehensweise als Penalty-Formulierung, wie sie auch für ganzzahlige Optimierungsaufgaben verwendet wird, verstanden. In der Regel wird der Parameter β im Optimierungsverlauf konstant gehalten.

Dagegen wird bei SIGMUND [119] sowie bei SWAN ET AL. [129] zur Reduktion der Netzabhängigkeit der Penalty-Parameter im Optimierungsverlauf gesteigert. Darauf wird im Folgenden näher eingegangen. In der Arbeit von BENDSØE & SIGMUND [14] wird gezeigt, dass poröse Zwischenstufen auf der makroskopischen Ebene physikalisch interpretiert werden können. Bei Einhaltung gewisser Grenzen für β ist es möglich eine eindeutige Materialverteilungen auf der mikroskopischen Ebene zu finden, welche durch Homogenisierung den Eigenschaften von $\mathbf{C}(\rho)$ auf makroskopischer Ebene entsprechen.

Den beiden Vorteilen des SIMP-Ansatzes, die einfache Implementierung in ein bestehendes FE-Paket und die Reduktion der Entwurfsvariablen, steht die Netzabhängigkeit gegenüber. Dies ist für eine Quadratscheibe, unter Berücksichtigung einer nichtlinearen Kinematik, mit der Zielfunktion ‘Minimierung der Dehnungsenergie’ (siehe Gleichung (7.2)) und mit einer vorgegebenen Masse in der linken Seite der Abbildung 5.3 dargestellt. Ohne Stabilisierung nimmt die Feingliedrigkeit der Struktur in Abhängigkeit von der anwachsenden Netzfeinheit zu. Dies gilt neben dem SIMP-Ansatz auch für alle anderen suboptimalen Werkstoffmodelle. Zur Behebung dieses Defekts ist eine zusätzliche Maßnahme der Berandungsbegrenzung der Struktur notwendig. Die Umfangsmethode nach HABER ET AL. [48], [49] führt die Nebenbedingung der Seminorm der Dichteverteilung explizit ein.

In dieser Arbeit kommt die von MAUTE [78] leicht modifizierte Variante der Filtermethode von SIGMUND [119] zum Einsatz. Die Netzabhängigkeit wird bei dieser Vorgehensweise implizit durch einen Glättungsoperator behoben. Für die Zielfunktion ‘Minimierung der Dehnungsenergie’ (7.2) für eine vorgeschriebene Laststufe $\bar{\lambda}$ kann das Optimierungsproblem bei einer konstanten Masse \bar{m} wie folgt formuliert werden:

$$\min_{\mathbf{s}} \sum_{i=1}^{n_{ele, \Omega_s}} \left[H_i(f_{\Psi, j}) \right] \quad \text{mit} \quad f_{\Psi, j} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |\mathbf{J}| d\Omega_j \quad ; \quad \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{u}}(\bar{\lambda}))$$

$$\sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| d\Omega \right] - \bar{m} = 0 \quad (5.4)$$

wobei der Operator H_i wie folgt definiert ist:

$$H_i = \frac{\sum_j \overset{\triangleleft}{H}_{ij}}{\sum_j \overset{\triangleright}{H}_{ij}} \quad \text{mit} \quad \overset{\triangleleft}{H}_{ij} = \begin{cases} (2 - r_{ij}/\check{r})^{\check{\kappa}} f_{\Psi, j} & \forall r_{ij} \leq \check{r} \\ 0 & \forall r_{ij} > \check{r} \end{cases}$$

$$\overset{\triangleright}{H}_{ij} = \begin{cases} (2 - r_{ij}/\check{r})^{\check{\kappa}} & \forall r_{ij} \leq \check{r} \\ 0 & \forall r_{ij} > \check{r} \end{cases} \quad (5.5)$$

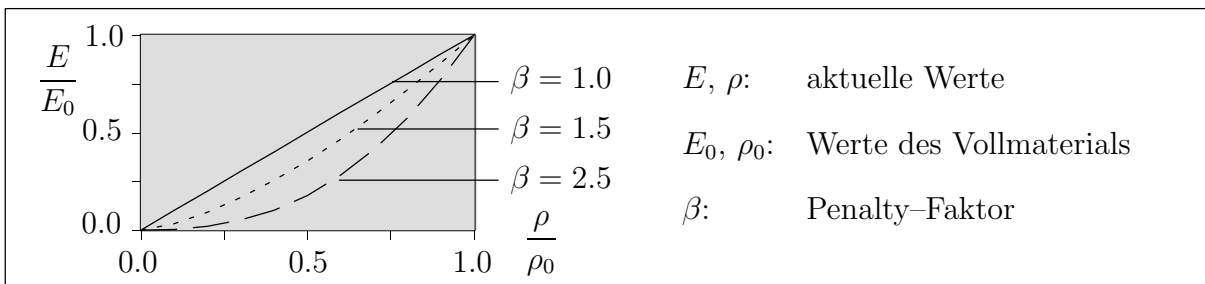


Abbildung 5.2: Steifigkeits-Dichte-Funktion für den SIMP-Ansatz

In die Glättung werden die j umliegenden Elemente des Elementes i , welche innerhalb des Radius \tilde{r} liegen, einbezogen. r_{ij} ist der Mittelpunktsabstand der Elemente und $\tilde{\kappa}$ ein Wichtungsfaktor. Mit abnehmendem Radius \tilde{r} und/oder $\tilde{\kappa}$ verliert der Glättungsoperator an Einfluss. In SIGMUND [119] ist die Wirksamkeit für den SIMP-Ansatz und in MAUTE [78] für das in MAUTE & RAMM [80] vorgestellte makroskopisch orthotrope Werkstoffmodell, unter Berücksichtigung einer linearen Kinematik, veranschaulicht. Die linken, unteren Bilder der Abbildung 5.3 zeigen die Wirksamkeit der Glättung. Für beide untersuchten Netzfeinheiten werden unter Verwendung der Filtermethode topologisch identische Tragwerke generiert.

In dieser Arbeit kommt ausschließlich das SIMP-Werkstoffmodell zum Einsatz, da sich dieses Modell gut mit der geometrischen Nichtlinearität verbinden lässt. Bei zu homogenisierenden mikroskopischen Materialmodellen müsste ansonsten der Einfluss mikroskopischer Instabilitätsprobleme auf der makroskopischen Ebene berücksichtigt werden. Die Berücksichtigung dieses Effekts hat eine deutliche Steigerung des numerischen Aufwandes zur Folge. Derartige Fragestellungen werden z. B. in den Arbeiten von GEYMONAT ET AL. [46] und NEVES ET AL. [89] untersucht.

Neben der Netzabhängigkeit von suboptimalen Werkstoffmodellen kann für alle Modelle ein weiterer Defekt auftreten. Es handelt sich dabei um schachbrettartige Dichteverteilungen ('Checkerboard'-Moden). Diese treten dann auf, wenn die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen der finiten Elemente nicht zu denen der Dichte passen. Ein Beispiel

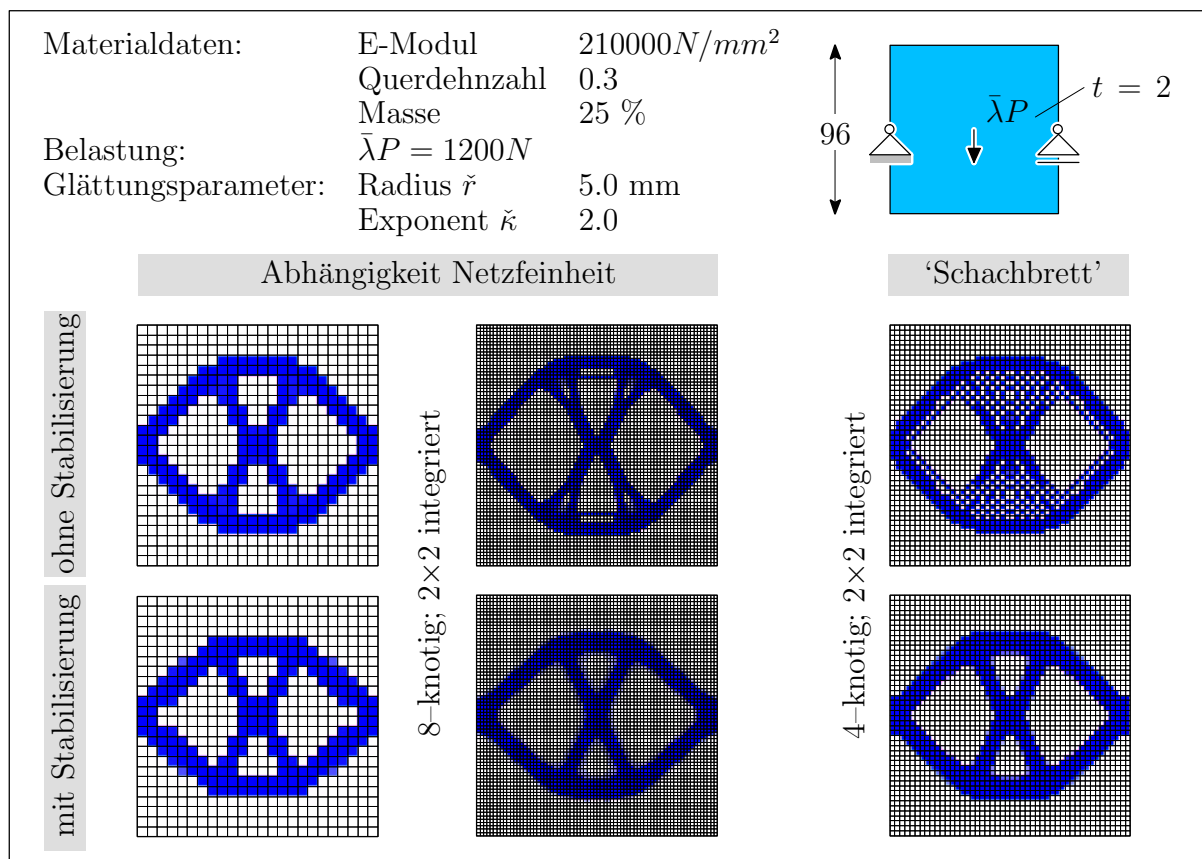


Abbildung 5.3: Stabilisierung suboptimaler Werkstoffmodelle mit der Filtermethode

ist mit dem rechten, oberen Bild der Abbildung 5.3 angegeben. Falls bei den Verschiebungen eine zweifach höhere Ordnung als bei der Dichteverteilung vorliegt, werden keine Moden generiert (siehe BENDSØE [10]). Diesen Zusammenhang verdeutlichen die linken Strukturen der Abbildung 5.3 anhand derer die Abhängigkeit von der Netzfeinheit gezeigt wurde. Daraus folgt, dass bei konstanter Dichte im finiten Element mindestens quadratische Ansatzfunktionen für die Verschiebungen notwendig sind, um ein numerisch stabiles Ergebnis zu erhalten. DIAZ & SIGMUND [35] zeigen anschaulich, dass für bilineare Verschiebungsansätze in Kombination mit konstanten Dichten die Energie geringer als jene optimaler Mikrostrukturen ist. In dem rechten unteren Bild der Abbildung 5.3 ist die Wirkungsweise des oben erläuterten Glättungsoperators (5.4) dargestellt. Einen detaillierteren Überblick über die verschiedenen Verfahren und Strategien zur Vermeidung der numerischen Probleme enthält die Veröffentlichung von SIGMUND & PETERSSON [125]. In dieser Arbeit wird der Glättungsoperator bei der Steifigkeitsoptimierung (siehe Abschnitt 7.1) und bei dem Entwurf von flexiblen Mikrostrukturen (siehe Kapitel 8) eingesetzt.

5.2 Formoptimierung

Unter Formoptimierung versteht man die Suche nach einer Strukturberandung, welche für 2–dimensionale Probleme aus Kanten und für 3–dimensionale Probleme aus Oberflächen besteht, bei der die gewünschten Struktureigenschaften optimal sind. Da in dieser Teildisziplin der Strukturoptimierung der topologische Aufbau unveränderlich ist, ist es sinnvoll die Formoptimierung auf Basis einer Struktur zu starten, welche anhand der Topologieoptimierung generiert wurde.

Die eigentliche Variationsaufgabe der Formoptimierung kann für beliebige Aufgabenstellungen kaum geschlossen gelöst werden. Artverwandt zum klassischen Ansatz der Methode der finiten Elemente (z. B. Approximation des Verschiebungsfeldes) wird die Berandung anhand von Funktionen und deren Stützstellen approximiert und das Variationsproblem in eine Parameteroptimierungsaufgabe überführt. Je nach Feinheit der Parametrisierung strebt die Lösung des Optimierungsproblems gegen die Lösung des Variationsproblems. Die Feinheit kann dabei p - bzw. h -adaptiv (Steigerung des Grades der Formfunktionen bzw. der Anzahl der Teilabschnitte) gesteigert werden. Die Koordinatenwerte der diskreten unabhängigen Stützstellen, welche die Entwurfsvariablen sind, werden in dem Vektor \mathbf{s} zusammengefasst. Für das Auffinden einer Lösung muss die Unabhängigkeit jeder Entwurfsvariablen sichergestellt sein.

Bei dem Zusammenspiel mit der Finiten Element Methode ist ein naheliegender Lösungsweg die Parametrisierung des Optimierungsproblems direkt mit der Lage der FE–Knoten zu formulieren. Diese von ZIENKIEWICZ & CAMPBELL [146] vorgeschlagene und an die von Fachwerkstrukturen angelehnte Vorgehensweise hat wesentliche Nachteile. Zum einen besteht die Gefahr, dass etwaige ‘Defekte’ der finiten Elementformulierung (z. B. Locking) das Optimierungsergebnis stark beeinflussen. Ein typisches Beispiel dafür ist die Generierung von Zick–Zack–Rändern bei der Steifigkeitsoptimierung von Scheibenproblemen aufgrund der Schubversteifung verzerrter Elemente (siehe z. B. KIKUCHI ET AL. [63] oder HAFTKA ET AL. [50]). Ein anderes Problem ist die Parametrisierung der Konstruktion in einem CAD–System mit einer anschließenden NC–orientierten Produktion. Sollen an-

hand der Formoptimierung große Modifikationen an den Rändern vorgenommen werden, so müssen im Inneren der Struktur weitere Knoten für die Netzverschiebung variabel sein. Dadurch steigt die Anzahl der Entwurfsvariablen stark an, und zudem tritt der Effekt der Zick-Zack-Ränder ebenfalls im Inneren der Struktur auf.

Eine Lösung dieser Probleme ist die Verknüpfung der einzelnen Knotenverschiebungen zu strukturübergreifenden Formänderungen. Diese können weiterhin mechanisch orientiert und auf der Basis des zur Strukturanalyse notwendigen FE-Modells definiert werden. Diese auf Deformationen basierende Ansätze werden oft als ‘natürliche’ Entwurfsgeschwindigkeitsfelder bezeichnet. So wurde z. B. von BELEGUNDU & RAJAN [8] bzw. ZHANG & BELEGUNDU [144] die Deformation infolge fiktiver Lasten, unter der Annahme eines linearen Strukturverhaltens, als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder verwendet. Die Entwurfsvariablen sind hier die Lastgrößen der einzelnen Lastfälle. Statt der zusätzlichen, fiktiven NEUMANN-Randbedingungen können, wie z. B. von CHOI & CHANG [30] vorgeschlagen, DIRICHLET-Randbedingungen verwendet werden. Folglich sind die Größen der Verschiebungen die Entwurfsvariablen. Ein weiterer, mechanisch orientierter Ansatz stammt von TORTORELLI [133], der die Deformationen anhand thermischer Einwirkungen als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder interpretiert. Anforderungen an die Glattheit der Berandung der optimierten Struktur können bei diesem Verfahren allerdings nur bedingt befriedigt werden. Eine Verbesserung der Glattheit gelingt anhand der Verwendung von Eigenformen. Diese können dynamische Moden sowie Beulformen sein. Der letzte Vorschlag findet in dieser Arbeit bei der Suche der maßgebenden geometrischen Imperfektionsform Verwendung (siehe Abschnitt 9.3). Durch die Orthogonalität der Eigenformen ist die Unabhängigkeit der einzelnen Entwurfsgeschwindigkeitsfelder gewährleistet.

Das Berechnungsmodell für die natürlichen Entwurfsgeschwindigkeitsfelder kann sich gegenüber dem eigentlichen, mechanischen Problem in den Randbedingungen unterscheiden (siehe Abbildung 5.4). So werden Berandungen, welche für den Entwurfsprozess nicht variabel sind, anhand zusätzlicher DIRICHLET-Randbedingungen fixiert. Dagegen werden

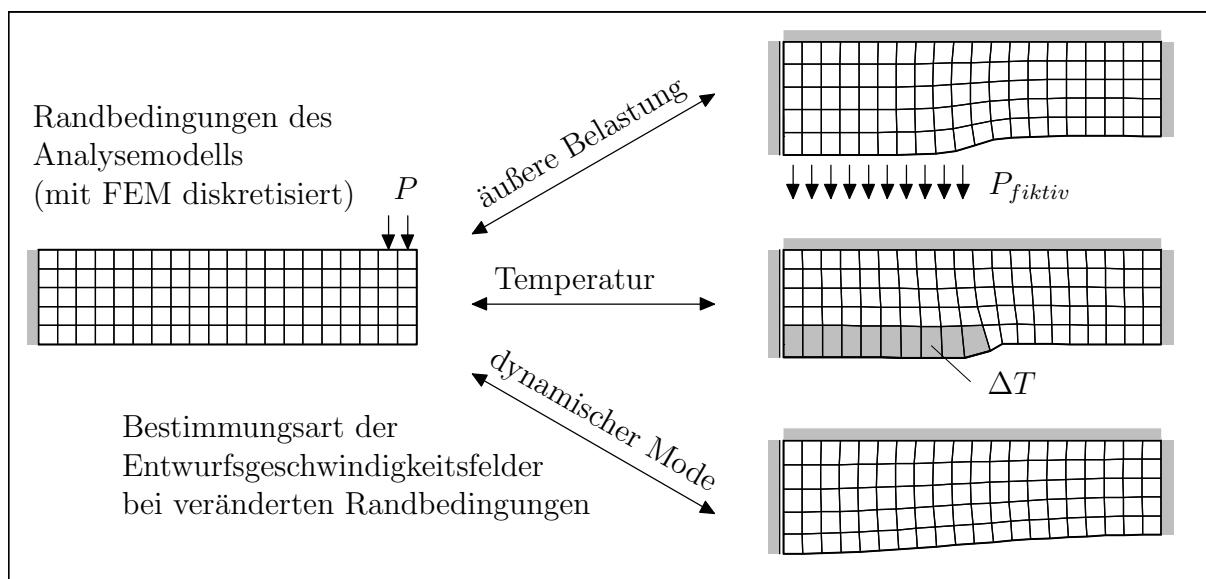


Abbildung 5.4: Formänderung auf der Basis natürlicher Entwurfsgeschwindigkeitsfelder

Lagerbedingungen, welche für den Entwurfsprozess variabel sind, bei der Bestimmung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder freigegeben. Soll die geometrische Modifikation der zu optimierenden Struktur nur gering sein, reicht für den Entwurfsprozess lediglich die Bestimmung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder im Voraus aus. Bei größeren Netzverschiebungen sollten die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder auf der Basis der aktuellen Geometrie des Analysemodells bestimmt werden (symbolisiert durch \longleftrightarrow in Abbildung 5.4). Zwar kann anhand dieser Art von natürlichen Entwurfsgeschwindigkeitsfelder eine glatte Berandung an der optimierten Struktur erzielt werden, aber eine Überführung der generierten Struktur in ein CAD-Modell ist weiterhin problematisch.

Dieser Nachteil wird durch Verwendung einer Formbeschreibung mittels der Methode des ‘Computer Aided Geometric Design’ (CAGD) behoben. Dieser zur CAD-Technik verwandte Ansatz ermöglicht die Geometriebeschreibung anhand weniger Parameter (siehe FAUX & PRATT [41] und BÖHM ET AL. [21]). Die Geometrie der gesamten Struktur wird dabei in Teilbereiche, sogenannte ‘Design-Elemente’, aufgeteilt. Der Aufbau dieser Design-Elemente ist hierarchisch, d. h. dass mit definierten Knoten und der Wahl von Ansatzfunktionen Kanten definiert werden können (z. B. LAGRANGE, Splines bzw. Spiralen, siehe Abbildung 5.5). Aufbauend auf diesen Kanten erfolgt die Beschreibung von Flächen (z. B. LAGRANGE, COONS bzw. BÉZIER) wiederum mit entsprechenden Ansatzfunktionen. Für den Fall der Volumenbeschreibung besteht eine äquivalente Vorgehensweise. Der Einsatz dieses Verfahrens in der Formbeschreibung und die daraus ableitbaren Entwurfsgeschwindigkeitsfelder sind auf IMAM [57] zurückzuführen. In diesem Zusammenhang sind weiterhin die Arbeiten von BRAIBANT & FLEURY [22] bzw. BENNETT & BOTKIN [16] zu erwähnen.

Durch den hierarchischen Aufbau der Design-Elemente ist die Parametrisierung der Geometrie lediglich mit den Koordinaten der Kontroll-Knoten möglich. Die Lage der Knoten des strukturiert vernetzten FE-Modells (Analysemodell) werden anhand der formbeschreibenden Funktionen der Design-Elemente berechnet.

1-D Kurven-Elemente	$\xi \in \mathbb{R}^1$	o Kontroll-Knoten
<p>LAGRANGE</p> <p>linear quadratisch kubisch</p>	<p>Splines</p> <p>BÉZIER B-Spline</p>	<p>Kreise, Spiralen</p>
2-D Flächen-Elemente	$\xi \in \mathbb{R}^2$	o Kontroll-Knoten
<p>LAGRANGE</p> <p>3 4 6 8 9</p>	<p>COONS</p>	<p>BÉZIER</p>

Abbildung 5.5: Aufbau der Design-Elemente aus BLETZINGER [18] bzw. BLETZINGER ET AL. [19]

Nachteil dieses Verfahrens ist, dass bei beliebig komplexen Geometrien die Definition der Design-Elemente im Inneren des Gebietes sehr kostspielig werden kann. Dabei ist in der Regel eine Beschreibung des Randes bzw. der Oberfläche für die Definition der Geometrie ausreichend. Folgt man dieser Strategie, so liegen keine Ansatzfunktionen zur Geometriebeschreibung des innenliegenden Gebietes mehr vor. Bei einer derartigen Geometriebeschreibung ist der Einsatz eines Freivernetzers notwendig. Der in dieser Arbeit für 2-dimensionale Problemstellungen verwendete Vernetzer wurde von REHLE [101] entwickelt und beruht auf der ‘advancing front’-Methode. Anhand der mathematischen Beschreibung sind die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder lediglich auf der Berandung definiert. Da im Gebietsinneren keine formbeschreibende Funktion mehr definiert ist, schlägt MAUTE [78] zur Bestimmung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder im Inneren des Gebietes eine modifizierte LAPLACE-Glättung vor. Dieser iterative Prozess für das Gebietsinnere wird so oft durchlaufen, bis die Änderung aufeinanderfolgender Glättungsschritte einen Schwellenwert unterschreitet. Nachteil dieses Verfahrens ist, dass jede Entwurfsvariable das gesamte Gebiet modifiziert. Dies kann den numerischen Aufwand bei dem expliziten Anteil der Sensitivitätsanalyse steigern (näheres siehe Abschnitt 6.4).

Kapitel 6

Grundelemente der Sensitivitätsanalyse

Um den Optimierungsprozess vorantreiben zu können, benötigen gradientenbasierte Optimierungsstrategien die Sensitivitätswerte aller Entwurfskriterien bezüglich der Entwurfsvariablen \mathbf{s} . Wie bereits in Kapitel 5 beschrieben, kann zwischen mechanischen und geometrischen Entwurfskriterien unterschieden werden. Nach der Einleitung werden die Grundelemente, welche die Basis für die Hauptkapitel 7–9 bilden, bereitgestellt. In Abschnitt 6.2 werden die prinzipiellen Strategien angesprochen und die für diese Arbeit getroffene Wahl begründet. Die Grundbausteine der diskreten Sensitivitätsanalyse sind in Abschnitt 6.3 angegeben. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird noch kurz auf einige Aspekte bezüglich des numerischen Aufwandes eingegangen.

6.1 Einleitung

In der Strukturoptimierung spielt die Sensitivitätsanalyse eine bedeutende Rolle. Sie gibt Aufschluss über die Empfindlichkeit der berücksichtigten Entwurfskriterien bezüglich der Parametern (Entwurfsvariablen). Dabei ist neben der qualitativen auch eine quantitative Aussage möglich. Je nach Fragestellung sind verschiedene Entwurfsvariablen definiert. Für die in dieser Arbeit untersuchte Form- und Topologieoptimierung wurden die verschiedenen Entwurfsvariablen in Kapitel 5 beschrieben.

Die Sensitivitätsanalyse ist heute nicht nur eine Teildisziplin der Strukturoptimierung, sondern auch eigener Bestandteil vieler, verschiedener Fachgebiete. Aus diesem Grund kann heute die Sensitivitätsanalyse als eigenständige Disziplin verstanden werden. Insbesondere die Arbeiten von HAUG ET AL. [52], HAFTKA ET AL. [50] und KLEIBER ET AL. [67] unterstreichen dies.

So benötigt man z. B. die Sensitivitätsanalyse weiterhin bei sogenannten inversen Problemen. Dies kann unter anderem die Fragestellung nach der einwirkenden Belastung sein, wobei Deformationen und/oder Spannungen als bekannt gelten. Derartige Probleme werden in der Regel mit einem ‘least-square’-Verfahren gelöst. Nicht immer sind Probleme dieser Art eindeutig lösbar (siehe z. B. TORTORELLI [134]). Ein analoges Problem stellt die Parameteridentifikation dar, bei der z. B. Materialparameter anhand von Versuchsergebnissen in ihrer Größe bestimmt werden sollen (siehe z. B. MAHNKEN [76]).

In der Strukturoptimierung besitzt die Sensitivitätsanalyse eine ausschlaggebende Rolle und kann wesentlich die Kosten eines Optimierungslaufes bestimmen. Zwei Kriterien sind dabei von großer Bedeutung. Nämlich die Zeit, die tatsächlich für eine Sensitivitätsanalyse aufgewendet wird und die Genauigkeit der berechneten Gradienten. Letzteres beeinflusst den möglichen Fortschritt im Optimierungsalgorithmus und dadurch die Anzahl der insgesamt notwendigen Optimierungsschritte. Auf der einen Seite können Anteile eines Sensitivitätswertes sehr kostspielig in der Ermittlung sein, ohne den absoluten Wert deutlich zu verändern. Andererseits können schlechte Gradienteninformationen die Optimierungsstrategie in eine falsche Suchrichtung leiten. Welche Anteile einer Sensitivitätsanalyse die Dominanten sind, ist nicht immer eindeutig vorherzusagen.

Allgemein kann gesagt werden, dass je komplexer und aufwendiger die Strukturanalyse ist, desto größer ist der numerische Aufwand für die Sensitivitätsanalyse. So ist z. B. die Gradientenbestimmung für linear elastische Probleme deutlich günstiger, als jene bei Crash-Untersuchungen (geometrisch und materiell nichtlinear, Kontakt und Dynamik). Der am einfachsten zu realisierende Ansatz ist die numerische Differentiation. Dabei stehen der einfachen Implementierung hohe Rechenzeiten gegenüber. Die analytische Sensitivitätsanalyse hat den Vorteil der numerischen Effizienz, doch benötigt sie den Zugang zum Analysecode. Die semi-analytische Vorgehensweise hat als Basis die analytische Sensitivitätsanalyse und berechnet die einzelnen Bausteine auf Elementebene numerisch. Dadurch unterscheidet sich die semi-analytische von der analytischen Vorgehensweise lediglich in der Implementierung.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal in der analytischen Sensitivitätsanalyse ist die Reihenfolge der Auswertung der zu berechnenden Komponenten. Es wird ein adjungierter und ein direkter Ansatz unterschieden. Detaillierter wird darauf in Abschnitt 6.2.2 eingegangen. Mit der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in der Strukturantwort ergibt sich ein weiteres Unterscheidungsmerkmal. Die in dieser Arbeit untersuchte Problemklasse besitzt Potentialcharakter. Dadurch ist eine inkrementelle Sensitivitätsanalyse, wie z. B. bei der Berücksichtigung der Plastizität (siehe z. B. KLEIBER ET AL. [68], SCHWARZ [116]), nicht notwendig.

6.2 Typen von Sensitivitätsanalysen

Die Bestimmung der Gradienten kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. In diesem Abschnitt werden zuerst die gängigen Verfahren kurz erläutert, um anschließend die in dieser Arbeit bevorzugte Variante zu begründen.

6.2.1 Numerische Differentiation

Der einfachste Zugang zur Bestimmung von Gradienten ermöglicht das numerische Differenzenverfahren. Dieses Verfahren beruht auf einer abgebrochenen TAYLOR-Reihenentwicklung:

$$f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) + \nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s}) \Delta\mathbf{s} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^2 f(\mathbf{s}) (\Delta\mathbf{s})^2 + \text{Rest} \quad (6.1)$$

$$f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) - \nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s}) \Delta\mathbf{s} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^2 f(\mathbf{s}) (\Delta\mathbf{s})^2 + \text{Rest} \quad (6.2)$$

Das Vorwärtsdifferenzenverfahren kann aus Gleichung (6.1) hergeleitet werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) - f(\mathbf{s})}{\|\Delta \mathbf{s}\|} \quad (6.3)$$

Analoges Vorgehen bei Gleichung (6.2) führt zu dem Rückwärtsdifferenzenverfahren:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} - \Delta \mathbf{s})}{\|\Delta \mathbf{s}\|} \quad (6.4)$$

Da beide Verfahren lediglich das erste Reihenglied berücksichtigen, sind diese von erster Ordnung genau. Um die Qualität der berechneten Gradienten auf die zweite Ordnung zu steigern, kann das zentrale Differenzenverfahren, welches aus der Subtraktion der Gleichung (6.2) von (6.1) folgt, verwendet werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) - f(\mathbf{s} - \Delta \mathbf{s})}{2 \cdot \|\Delta \mathbf{s}\|} \quad (6.5)$$

Der Wegfall der analytischen Berechnung der Gradienten wird bei diesen Verfahren durch die mehrfache Strukturanalyse erkauft. Dies bedeutet, dass für das Vorwärts- sowie Rückwärtsdifferenzenverfahren $n_s + 1$ Strukturanalysen notwendig sind, wobei n_s die Anzahl der Entwurfskriterien ist. Für das zentrale Differenzenverfahren steigert sich die Zahl der Analysen sogar auf $2 \cdot n_s + 1$.

Ein weiteres Problem stellt der Betrag der Störung $\Delta \mathbf{s}$ dar. Bei zu kleinen Werten können Rundungs- bzw. Konditionierungsfehler auftreten. Bei zu großen Störwerten erhält man nicht mehr die ‘Neigung der Tangente’, sondern einer ‘Sekante’.

Zur Absicherung der Herleitung und Implementierung der im Folgenden beschriebenen analytisch bestimmten Gradienten dient oft die numerische Differentiation. Hierzu wird die Größe des Störparameters solange angepasst bis eine Konvergenz für die gewünschte Genauigkeit des Sensitivitätswertes eintritt.

6.2.2 Analytische Differentiation

Die Nachteile der numerischen Differentiation können mit der analytischen Sensitivitätsanalyse behoben werden. Dabei werden die Sensitivitäten der Entwurfskriterien analytisch hergeleitet und implementiert. Zwar benötigt die Implementierung einen Zugang zum Programmcode des Analyseprogramms, doch die Effizienzsteigerung ermöglicht häufig eine Anwendung.

Für die Herleitung der Gradienten gibt es verschiedene Zugänge. Es kann einerseits von dem kontinuierlichen Problem (4.13) oder andererseits von den bereits diskretisierten Gleichungen (4.19) ausgegangen werden. Die erste Variante ist unter dem Namen variationelle Sensitivitätsanalyse bekannt und ist z. B. in den Arbeiten von HAUG & CEA [51], HAFTKA ET AL. [50] und KLEIBER ET AL. [67] beschrieben. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass die Sensitivitäten aller mechanischen Größen separat vorliegen. Dies hat bei verschiedenen Fragestellungen, wie z. B. bei der Berücksichtigung der Plastizität (siehe z. B. SCHWARZ ET AL. [117]), große Vorteile bei der Herleitung. Nach der Ableitung der variationellen Gleichungen werden diese konform zur Methode der Strukturanalyse diskretisiert.

Die diskrete Sensitivitätsanalyse startet von den bereits diskretisierten Gleichungen. Ist eine direkte Sensitivitätsanalyse praktikabel, so erlaubt sie in der Regel eine kompaktere Darstellungsweise der Herleitung. Es soll an dieser Stelle angemerkt sein, dass beide Zugänge identische Ergebnisse liefern, wenn die gleichen Voraussetzungen gelten. Für die Problemstellungen dieser Arbeit hat sich die diskrete Sensitivitätsanalyse bewährt. Prinzipiell kann die Ableitung der mechanischen Entwurfskriterien in zwei Anteile aufgespalten werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f = \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} f + \nabla_{\mathbf{u}} f \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u} \quad (6.6)$$

Der erste Anteil enthält die von den Entwurfsvariablen explizit abhängigen Anteile, der zweite enthält jene, welche implizit von der Strukturantwort \mathbf{u} abhängig sind. Diese implizite Abhängigkeit entsteht durch die Änderung der Strukturantwort bei der Modifikation des Entwurfes.

Diskrete, direkte Sensitivitätsanalyse

Wird der Weg der direkten Sensitivitätsanalyse eingeschlagen, so wird zuerst die diskretisierte Gleichgewichtsbedingung (4.20) abgeleitet:

$$\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{R}}}_{\bar{\mathbf{K}}_T} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \underbrace{(\bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} - \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}})}_{\mathbf{P}^{pseudo}} \quad (6.7)$$

Es wurde davon ausgegangen, dass der Lastvektor \mathbf{P} unabhängig von der Verschiebung und der Laststeigerungsfaktor $\bar{\lambda}$ unabhängig von den Entwurfsvariablen ist. Diese Unabhängigkeit des Laststeigerungsfaktors ist im Weiteren mit $(\bar{\cdot})$ gekennzeichnet. Die Auflösung der abgeleiteten Gleichgewichtsbedingung (6.7_a) nach $\nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}}$ führt formal zu einer analogen Gleichung wie sie bei der Gleichgewichtsiteration auftritt (siehe Abschnitt 4.3.1). Aus diesem Grund wird die rechte Seite der Gleichung (6.7_b) auch als ‘pseudo’ Lastvektor bezeichnet. Mit nun bekanntem $\nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}}$ kann Gleichung (6.6) ausgewertet werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f = \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} f + \nabla_{\mathbf{u}} f \left[\bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{P}^{pseudo} \right] \quad (6.8)$$

Diskrete, adjungierte Sensitivitätsanalyse

Für den adjungierten Ansatz wird von einem modifizierten Entwurfskriterium aus gestartet:

$$\tilde{f} = f - \boldsymbol{\mu}^T \left[\underbrace{\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \mathbf{P}}_{= \mathbf{0}} \right] \quad (6.9)$$

Der Vektor der LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}$, auch adjungierte Variablen genannt, verjüngt den Nullvektor der Gleichgewichtsaussage (4.20) auf eine skalarwertige Größe. Der entstandene Nullterm wird vom Zielfunktionswert subtrahiert. Die Ableitung des modifizierten Entwurfskriteriums (6.9) nach \mathbf{s} mit anschließender Ordnung der Komponenten

führt zu:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f} = \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} f + \left[\nabla_{\mathbf{u}} f - \boldsymbol{\mu}^T \bar{\mathbf{K}}_T \right] \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mu}^T \underbrace{\left[\bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} - \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} \right]}_{\mathbf{P}^{pseudo}} \quad (6.10)$$

Der adjungierte Vektor ist zwar von \mathbf{s} abhängig, $\nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\mu}$ muss aber nicht ermittelt werden, da er mit der Gleichung des erfüllten Gleichgewichts verjüngt wurde. Der wesentliche Unterschied zur direkten Vorgehensweise ist, dass bei der adjungierten Sensitivitätsanalyse die Bestimmung von $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}$ entfällt. Dies wird durch eine entsprechende Wahl von $\boldsymbol{\mu}$ erreicht:

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{u}} f \right] \quad (6.11)$$

wobei die Symmetrieeigenschaften von $\bar{\mathbf{K}}_T$ ausgenutzt werden. Durch die Wahl von $\boldsymbol{\mu}$ nach Gleichung (6.11) reduziert sich Gleichung (6.10) auf die rein expliziten Anteile:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f} = \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} f + \boldsymbol{\mu}^T \underbrace{\left[\bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} - \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} \right]}_{\mathbf{P}^{pseudo}} \quad (6.12)$$

Vergleich der beiden Ansätze

Der wesentliche Unterschied beider Zugänge, direkt bzw. adjungiert, liegt in der Reihenfolge der Operationen. Bei der direkten Sensitivitätsanalyse ist für jede Entwurfsvariable die Lösung für den ‘pseudo’ Lastvektor zu bestimmen. Da nach der Strukturanalyse die Steifigkeitsmatrix bereits faktorisiert ist, entsteht lediglich der Zusatzaufwand des Vorwärts–Rückwärts–Einsetzens. Für den adjungierten Zugang müssen diese Operationen für jedes Entwurfskriterium ausgeführt werden. Je nach Verhältnis der Anzahl von den Entwurfsvariablen n_s zu den Entwurfskriterien ($n_f + n_g + n_h$) ist eine der beiden Vorgehensweisen kostengünstiger:

$$\frac{n_s}{n_f + n_g + n_h} \begin{cases} > 1 & \rightarrow \text{adjungierte Sensitivitätsanalyse} \\ < 1 & \rightarrow \text{direkte Sensitivitätsanalyse} \end{cases} \quad (6.13)$$

Vergleicht man die Bestimmungsgleichungen der direkten Sensitivitätsanalyse (Gleichungen (6.6) und (6.7_b)) mit denen der adjungierten Vorgehensweise (Gleichungen (6.11) und (6.12)), fällt für die letzte Form die strikte Trennung zwischen impliziten und expliziten Gradientenanteilen auf. Je nachdem, wie der Algorithmus implementiert ist, können daraus unterschiedliche Berechnungszeiten entstehen. Dabei ist immer zu beachten, welche Anteile einer Sensitivitätsanalyse identisch sind und ob eine Speicherung der Datenmenge möglich ist. Je nach Implementierung werden dadurch die Grenzen der Gleichung (6.13) verschoben. Weitere Anmerkungen zur Effizienz in der Sensitivitätsanalyse enthält Abschnitt 6.4. Die im Weiteren diskutierten Sensitivitätsanalysen basieren auf der adjungierten Vorgehensweise, da in der Regel die Zahl der Entwurfsvariablen gegenüber der Zahl der Entwurfskriterien dominiert.

6.3 Grundbausteine der diskreten Sensitivitätsanalyse

In den folgenden Kapitel 7–9 werden für die einzelnen Fragestellungen die Sensitivitätsanalysen in einer kompakten Darstellung angegeben. Es treten wiederholt gleiche bzw. ähnliche Bausteine auf. Im Folgenden werden die einzelnen Elemente einer Sensitivitätsanalyse angegeben. Dabei wird die Darstellung auf die Größen beschränkt, welche sich durch Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik gegenüber der linearen Theorie ändern. Dies sind im Wesentlichen die internen Kräfte und die tangentiale Steifigkeitsmatrix.

Wie bereits in Abschnitt 6.2.2 dargestellt, besitzen mechanische Größen explizite und implizite Abhängigkeiten von den Entwurfsvariablen \mathbf{s} . In Abschnitt 6.3.1 werden für die oben erwähnten mechanischen Größen die expliziten Ableitungen vorgestellt. Die impliziten Ableitungen sind Thema des Abschnitts 6.3.2.

Bei den expliziten Ableitungen wird in die Typen der verschiedenen Optimierungsdisziplinen unterschieden. So sind es bei der Formoptimierung die räumlichen Lagen der FE-Knoten und bei der Topologieoptimierung die Parameter, welche den Materialtensor beeinflussen. Dagegen haben die impliziten Ableitungen keine von der Optimierungsdisziplin abhängigen Besonderheiten.

Die folgende Darstellung ist nicht auf eine spezielle Elementformulierung ausgerichtet. Doch sind die Erweiterungen, welche durch Verwendung von Rotationsfreiheitsgraden (Balken- bzw. Schalenelemente) entstehen, berücksichtigt.

6.3.1 Explizite Ableitungen

Im Wesentlichen sind die Ableitungen des internen Kraftvektors (4.19) und die Anteile der tangentialen Steifigkeitsmatrix (4.21) von Bedeutung. Wie bereits erwähnt sind für die einzelnen Teildisziplinen der Strukturoptimierung die Komponenten nach verschiedenen Größen abzuleiten. Ableitungen, welche sowohl für Form- als auch für Topologieoptimierungsprobleme vorkommen, besitzen im Folgenden keine Kennzeichnung. Anteile, welche lediglich bei der Formoptimierung auftreten, werden dagegen mit einem einfachen Unterstrich gekennzeichnet. Dagegen sind diejenigen Anteile, welche nur bei der Topologieoptimierung relevant sind mit einem doppelten Unterstrich hervorgehoben.

Die explizite Ableitung des internen Kraftvektors (4.19) nach den Entwurfsvariablen folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (4.18) aus der Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{R} = \mathbf{A} \left(\underbrace{\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{S}} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\text{explizit}} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{S}} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\text{explizit}} \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \tilde{\mathbf{S}} |\mathbf{J}| d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\text{explizit}} \right) \quad (6.14) \end{aligned}$$

Der \mathbf{B} -Operator enthält die Ableitungen der Ansatzfunktionen und ist dadurch von der Form des Elementes abhängig. Die explizite Geometrie-Abhängigkeit von \mathbf{F} entsteht dadurch, dass sich für festgehaltene Verschiebungen mit veränderlicher Geometrie der Deformationsgradient ändert. Die Spannungen $\tilde{\mathbf{S}}$ hängen einerseits direkt von dem Material-

tensor und andererseits über die Verzerrungsdefinition (4.4) vom Deformationsgradienten ab:

$$\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{C} \left(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{C} \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{F} \right) \quad (6.15)$$

Dadurch ist der dritte Anteil der Gleichung (6.14) sowohl für Form- als auch für Topologieoptimierungsprobleme ungleich null. Für die JACOBI-Determinante $|\mathbf{J}|$ besteht nur eine Abhängigkeit von der Geometrie.

Analog zu Gleichung (6.14) kann die explizite Abhängigkeit der tangentialen Steifigkeitsmatrix (4.21) von den Entwurfsvariablen wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_T = \mathbf{A} & \left(\underbrace{\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \right. \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{S} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \\ & \left. + \underbrace{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{F}} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{N} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} |\mathbf{J}| d\Omega}_{\Omega} \right) \quad (6.16) \end{aligned}$$

Gegenüber Gleichung (6.14) tritt in Gleichung (6.16) auch der weitere Term $\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{N}$ auf. \mathbf{N} enthält die zweite Ableitung des Deformationsgradienten und ist dadurch nur von der Geometrie abhängig.

6.3.2 Implizite Ableitungen

Wie in der Einführung zu diesem Abschnitt bereits erläutert, treten die im Folgenden aufgeführten, impliziten Ableitungen anhand der Abhängigkeit der Strukturantwort von den Entwurfsvariablen auf. Da in dieser Arbeit von verschiebungsunabhängigen Lasten ausgegangen wird, sind lediglich die Ableitungen des internen Kraftvektors (4.19) und der tangentialen Steifigkeitsmatrix (4.21) nach den Verschiebungen von Interesse.

In Abschnitt 4.2.2 wurde bereits gezeigt, dass die Ableitung des internen Kraftvektors nach den Verschiebungen zu der tangentialen Steifigkeitsmatrix führt:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} = \mathbf{K}_T \quad (6.17)$$

die somit bereits vorliegt.

Die Ableitung von \mathbf{K}_T nach den Verschiebungsgrößen kann in die einzelnen Komponenten, welche bereits in Abschnitt 4.2.2 eingeführt wurden, aufgespalten werden:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_T = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_u + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_g^I + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_g^{II} \quad (6.18)$$

Durch die Unabhängigkeit der elastischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e von den Verschiebungen verschwindet deren Ableitung nach \mathbf{u} . Die einzelnen Komponenten der Gleichung (6.18) lassen sich anhand der Kettenregel wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_u = & \mathbf{A} \left(\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega + \boxed{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega} \right. \\ & + \boxed{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega} + \left. \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_g^I = & \mathbf{A} \left(\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega + \boxed{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega} \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_g^{II} = & \mathbf{A} \left(\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^T \nabla_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{F}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\Omega \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die in den Gleichungen (6.19) – (6.21) eingerahmten Terme treten lediglich dann auf, wenn die Elementformulierung keine Rotationsfreiheitsgrade besitzt. Die einzelnen Matrizenbezeichnungen wurden hier konform zu der diskretisierten, tangentialen Steifigkeitsmatrix (4.21) gewählt. Es soll noch Angemerkt werden, dass in den Gleichungen (6.19) – (6.21) $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}$ und \mathbf{B} bzw. $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{B}$ und \mathbf{N} identische Anteile, aber in unterschiedlicher Anordnung enthalten.

Die in Gleichungen (6.20) und (6.21) enthaltene Ableitung der Spannung nach den Verschiebungen kann wie folgt bestimmt werden:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{C} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F} \right) \quad (6.22)$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass das Material unabhängig vom Deformationsgradient ist. Ist dies nicht der Fall, muss dies in den Gleichungen (6.19)–(6.22) berücksichtigt werden.

6.4 Anmerkungen zu den Kosten einer Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt sollen noch einige Ergänzungen zu den Kosten, die bei der Sensitivitätsanalyse anfallen, gemacht werden. Dabei werden neben den Unterschieden zwischen der materiellen Topologieoptimierung und der Formoptimierung auch verschiedene Auswertungsstrategien angesprochen.

Die in Abschnitt 6.3.1 dargestellten expliziten Sensitivitätsanteile müssen lediglich für die finiten Elemente berechnet werden, auf die die Entwurfsvariable einen Einfluss hat. Weiterhin spielt der bereits erläuterte Unterschied in den Integrationsanteilen, diese sind in den Gleichungen (6.14) bzw. (6.16) durch die verschiedenen Unterstreichungen gekennzeichnet, eine bedeutende Rolle.

Bei der materiellen Topologieoptimierung hat jede Entwurfsvariable Einfluss auf nur ein finites Element. Folglich entspricht der numerische Aufwand zur Bestimmung des expliziten Anteils einer Entwurfsvariablen maximal dem einer Integration der Gleichung (6.14) bzw. (6.16) über das Elementvolumen. Für Formoptimierungsprobleme, die auf dem CAGD-Konzept aufbauen, ist für jede Entwurfsvariable über das Teilgebiet zu integrieren, auf welches sie Einfluss hat. Dadurch sind die Kosten, welche für eine Entwurfsvariable anfallen, deutlich höher als bei der Topologieoptimierung. Wird lediglich die Geometrie des Randes bzw. der Oberfläche der Struktur anhand von Design-Elementen parametrisiert, ist eine Freivernetzung des gesamten Gebietes notwendig. Dies hat zur Folge, dass jede Entwurfsvariable Einfluss auf jedes finite Element hat. Dadurch wird der numerische Aufwand für eine Entwurfsvariable gegenüber dem bei Verwendung des CAGD-Konzeptes erhöht. Der Unterschied der Integrationsgebiete lässt sich vergleichen mit dem der Finiten Element Methode und der Randelementmethode.

Gegenüber den expliziten sind die impliziten Anteile der Sensitivitätsanalyse unabhängig von den Entwurfsvariablen und eine Auswertung muss immer über die gesamte Struktur erfolgen. Die Anteile mit der Form $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_T \boldsymbol{\eta}_i$ sind besonders teure Komponenten einer Sensitivitätsanalyse, wobei hier $\boldsymbol{\eta}_i$ ein Platzhalter für verschiedene, mechanische Größen ist. So sind z. B. in der Sensitivitätsanalyse für kritische Laststufen der Vektor $\boldsymbol{\eta}_i$ gleich der Beulform $\boldsymbol{\phi}$ zu setzen (siehe Abschnitt 9.2.1). Äquivalente Sensitivitätsanteile treten in dieser Arbeit unter anderem in der Steifigkeitsoptimierung (siehe Abschnitt 7.1.2) und bei dem Entwurf von Mikrostrukturen (siehe Abschnitt 8.2.2) auf. Bei der Auswertung können zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden. Zum einen ist die partielle Ableitung von \mathbf{K}_T nach allen Verschiebungen mit anschließender Verjüngung mit den Vektoren $\boldsymbol{\eta}_i$ möglich, zum anderen kann die Ableitung von \mathbf{K}_T in die Richtungen von $\boldsymbol{\eta}_i$ erfolgen. Da die Bestimmung dieser Anteile auf Elementebene erfolgt, ist die bevorzugte Vorgehensweise davon abhängig, ob die Anzahl der Elementfreiheitsgrade oder die Anzahl der Vektoren $\boldsymbol{\eta}_i$ geringer ist.

Kapitel 7

Erweiterungen der klassischen Topologieoptimierung

Aufbauend auf die in Kapitel 2 bis 6 vorgestellten Grundlagen werden in den folgenden Abschnitten verschiedene Entwurfskriterien eingeführt. Ein wesentliches Ziel ist es, den Einfluss der geometrischen Nichtlinearität bei der Generierung von Tragwerken bei der Topologieoptimierung herauszuarbeiten. Abschnitt 7.1 beschäftigt sich mit der Steifigkeitsoptimierung. Durch die Erweiterung auf die nichtlineare Kinematik können verschiedene Entwurfskriterien entwickelt werden. Inwiefern lokale Entwurfskriterien in dem Topologieoptimierungsprozess möglich sind, ist Thema des Abschnitts 7.2. Diese Thematik wird in Zusammenhang mit Verschiebungsnebenbedingungen untersucht.

7.1 Strukturen maximaler Steifigkeit

Strukturen maximaler Steifigkeit bei vorgegebener Masse stellt eines der meist diskutierten Probleme in der Topologieoptimierung dar. Derzeitig beinhalten die meisten Veröffentlichungen Ergebnisse, die auf einer geometrisch und materiell linearen Theorie basieren. Das Buch von Bendsøe [10] enthält für derartige Fragestellungen ein ausführliches Literaturverzeichnis. Mit der geometrischen Nichtlinearität beschäftigten sich die Arbeiten von JOG [58], BRUNS & TORTORELLI [24], BUHL ET AL. [27], KEMMLER ET AL. [61] und GEA & LUO [45]. Im Folgenden werden die möglichen unterschiedlichen Steifigkeitskriterien zur Erzielung unterschiedlicher Strukturcharakteristiken diskutiert. Dies erfolgt auf der Basis des Kapitels 3, in dem die möglichen Last–Verschiebungs–Charakteristiken erläutert wurden. Der anschließende Abschnitt befasst sich mit der Sensitivitätsanalyse der definierten Entwurfskriterien. Die folgenden Beispiele untermauern die vorgestellten Ansätze und Strategien.

7.1.1 Definition verschiedener Entwurfskriterien

Wird der Strukturanalyse eine lineare Theorie zugrunde gelegt, so charakterisiert die im System gespeicherte Dehnungsenergie sowohl den inneren Spannungs–Dehnungszustand als auch die äußeren Verformungen. Deshalb bedarf es keiner Unterscheidung zwischen den verschiedenen Steifigkeitskriterien. Unter Beachtung der geometrischen Nichtlinearität können dagegen mehrere, unabhängige Steifigkeitskriterien definiert werden. Dies

hängt im Wesentlichen von den verschiedenen Last–Verschiebungs–Charakteristiken unterschiedlicher Strukturen ab. In Abschnitt 3.1 wurde bereits anhand anschaulicher Beispiele auf die Unterschiede eingegangen. Wesentliches Merkmal ist dabei der Zuwachs der Verschiebungen (unterproportional bzw. überproportional) infolge einer Laststeigerung. Aufbauend auf Abschnitt 3.1 können folgende Entwurfskriterien für eine vorgegebene Laststufe $\bar{\lambda}$ definiert werden:

- Minimierung der Komplementärarbeit:

$$f_C = \int_0^{\bar{\lambda}} \mathbf{P}^T \mathbf{u}(\lambda) d\lambda \quad (7.1)$$

- Minimierung der Dehnungsenergie bei linearem Materialverhalten (ST.VENANT–KIRCHHOFF):

$$f_\Psi = \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} |\mathbf{J}| d\Omega = \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |\mathbf{J}| d\Omega \quad (7.2)$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{u}}(\bar{\lambda}))$$

- Maximierung der Steigung in einem Last–Verschiebungs–Diagramm (End–Steifigkeit):

$$f_\nu = \nu_i = \mathbf{I}_\nu^T \boldsymbol{\nu} \quad (7.3)$$

$$\text{mit } \|\mathbf{I}_\nu\| = 1, \quad \bar{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\nu} = \bar{\lambda} \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{K}}_T = \bar{\mathbf{K}}_T(\bar{\mathbf{u}}(\bar{\lambda}))$$

Zur Verdeutlichung der Wirkungsweisen sind mögliche Last–Verschiebungs–Diagramme in Abbildung 7.1 dargestellt. Das Entwurfskriterium (7.1) führt zu Strukturen, welche anfänglich eine hohe Steifigkeit aufweisen und bei zunehmender Deformation an Steifigkeit verlieren. Ein derartiges Verhalten zeigt unter anderem das Beispiel 2 der Abbildung 3.1. Dagegen wird das Kriterium Minimierung der Dehnungsenergie (7.2) eher Strukturen mit ansteigender Steifigkeit generieren (vgl. Beispiel 1 der Abbildung 3.1). Da dieses Entwurfskriterium eine integrale Aussage ist, besteht kein direkter Zusammenhang zu der Steifigkeit einer bestimmten Laststufe. Dies ermöglicht das Kriterium der End–Steifigkeit (7.3) für eine Verschiebungskomponente ν_i . Diese Größe wird anhand eines Filtervektors \mathbf{I}_ν aus dem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\nu}$ herausgefiltert. Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\nu}$ ist dabei über die tangentielle Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}_T$ des Lastniveaus $\bar{\lambda}$ mit der Belastung $\bar{\lambda} \mathbf{P}$ verbunden. Wobei $\boldsymbol{\nu}$ ein skalierter Vektor der Prädiktorverschiebung $\Delta \mathbf{u}_{Pr}$ der Laststufe $\bar{\lambda}$ ist (siehe Abschnitt 4.3.1).

Gegenüber der Komplementärarbeit (7.1) können die Dehnungsenergie (7.2), im Falle des hier vorausgesetzten linear elastischen Materialverhaltens und die End–Steifigkeit (7.3) ohne vollständiges Wissen der Last–Verschiebungs–Pfade ausgewertet werden. Für die Dehnungsenergie gilt dies ebenfalls bei Berücksichtigung nichtlinearer Materialien, solange

der Materialtensor auf der Basis einer volumenspezifischen Verzerrungsenergie abgeleitet werden kann (hyperelastische Materialien).

In der Arbeit von BUHL ET AL. [27] ist neben der numerischen Auswertung (Trapezregel) der Gleichung (7.1) ein weiteres vereinfachtes Entwurfskriterium angegeben. Unter dem Namen ‘End-Compliance’ wird die Minimierung der Verschiebung auf dem vorgegebenen Lastniveau $\bar{\lambda}$ definiert:

$$f_{EC} = \bar{\lambda} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} \quad ; \quad \text{mit } \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\lambda}) \quad (7.4)$$

Trotz verwandter Namensgebungen sind die Entwurfskriterien ‘Komplementärarbeit’ (7.1) und ‘End-Komplementärarbeit’ (7.4) als eigenständig zu betrachten.

Inwiefern die oben genannten Entwurfskriterien zu unterschiedlichen Optimierungsergebnissen führen, ist im Wesentlichen von der Vielfalt möglicher Last-Deformations-Charakteristiken abhängig. Welches Entwurfskriterium im konkreten Anwendungsfall zu bevorzugen ist, hängt vom gewünschten Charakter der Struktur ab. Da das Kriterium Komplementärarbeit (7.1) neben der teuren integralen Auswertung auch zu Strukturen mit geringer ‘End-StEIFigkeit’ führen kann, wird auf dieses Kriterium im Weiteren nicht näher eingegangen.

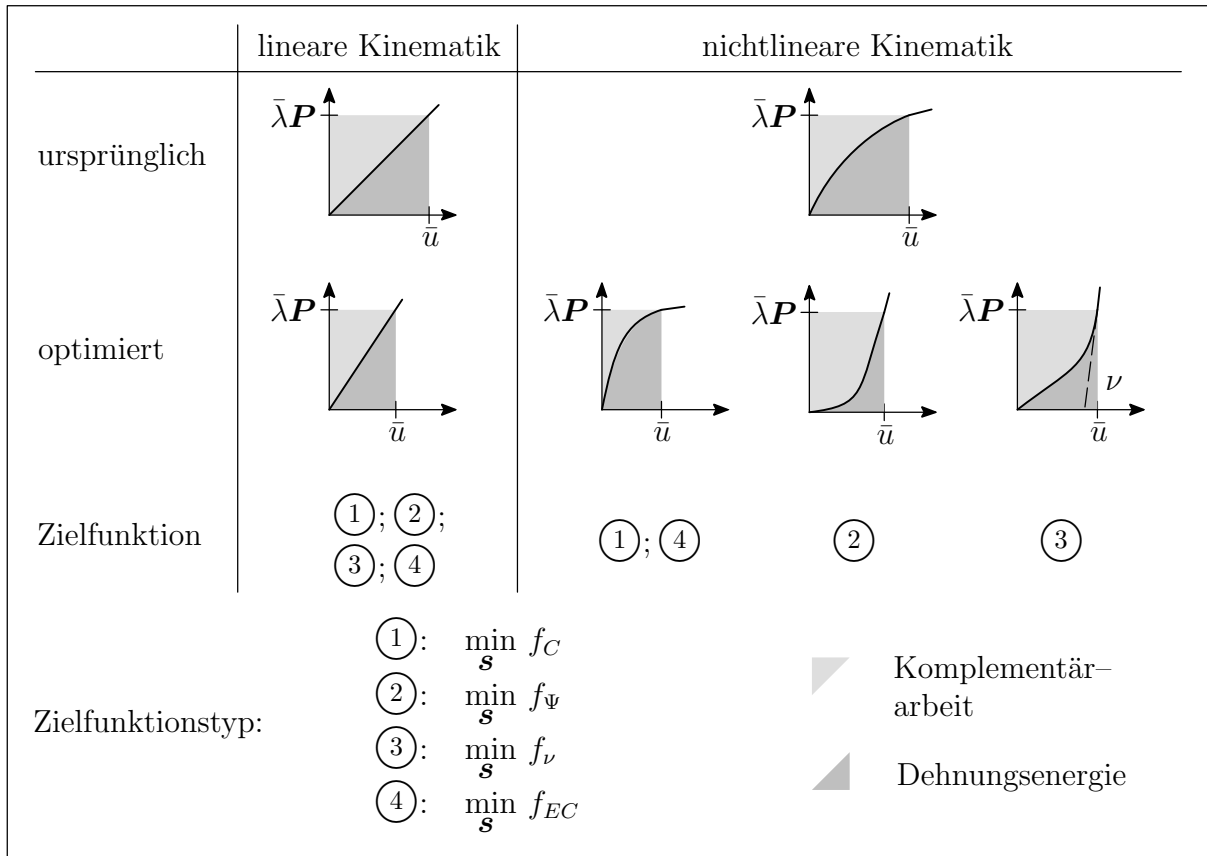


Abbildung 7.1: Unterschiede der Steifigkeitskriterien beider Theorien

Bei Vorgabe einer konstanten Masse im Entwurfsraum gestalten sich die Optimierungsprobleme folgendermaßen:

$$\min_{\mathbf{s}} f_q \quad \text{mit} \quad q = \Psi, \nu, EC$$

$$\sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| d\Omega \right] - \check{m} = 0 \quad (7.5)$$

$$0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U$$

7.1.2 Sensitivitätsanalyse der Steifigkeitskriterien

Im Folgenden wird die Herleitung der Sensitivitäten für die Entwurfskriterien Dehnungsenergie (7.2), End-Komplementärarbeit (7.4) sowie End-Steifigkeit (7.3) bezüglich der Entwurfsvariablen \mathbf{s} anhand einer adjungierten Vorgehensweise dargestellt. Da die beiden zuerst genannten Kriterien bei der Sensitivitätsanalyse (SA) einige Gemeinsamkeiten besitzen, findet ihre Herleitung zusammen statt.

SA für die Entwurfskriterien Dehnungsenergie und End-Komplementärarbeit

Ausgangspunkt ist die bereits in Kapitel 6.2.2 aufgeführte prinzipielle Vorgehensweise der adjungierten Sensitivitätsanalyse. Die beiden Gleichungen (7.2) und (7.4) werden um das Skalarprodukt der Gleichgewichtsbedingung (4.26) mit dem Vektor der LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}$ erweitert. Ist das Gleichgewicht erfüllt, so werden die Entwurfskriterien betragsmäßig nicht verändert. Die um den Nullterm erweiterten Gleichungen sind im Folgenden mit \tilde{f} bezeichnet:

$$\tilde{f}_{\Psi, EC} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |\mathbf{J}| d\Omega \\ \bar{\lambda} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} - \boldsymbol{\mu}^T \left[\underbrace{\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \mathbf{P}}_{= \mathbf{0}} \right] \quad (7.6)$$

Die totale Ableitung der Gleichung (7.6) nach dem Satz der Entwurfsvariablen \mathbf{s} ergibt:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f}_{\Psi, EC} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |\mathbf{J}| d\Omega \right] + \bar{\lambda} \mathbf{P} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} + \bar{\lambda} \mathbf{P} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} - \boldsymbol{\mu}^T \left[\bar{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P} \right] \quad (7.7)$$

wobei die Sensitivität des LAGRANGE-Vektors bei Erfüllung des Gleichgewichts nicht zu ermitteln ist. In Gleichung (7.7) ist bereits der Sachverhalt eingearbeitet, dass die Ableitung der Dehnungsenergie nach den Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ der äußeren Belastung $\bar{\lambda} \mathbf{P}$ entspricht. Weiterhin ist mit Gleichung (6.17) die Ableitung der internen Kräfte $\bar{\mathbf{R}}$ nach den Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ gleich der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}_T$. Werden die Anteile der Gleichung (7.7), welche $\nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}}$ enthalten zusammengefasst, lässt sich bei entsprechender

Wahl des LAGRANGE-Vektors die Bestimmung der Verschiebungssensitivitäten vermeiden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f}_{\Psi, EC} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |J| d\Omega \\ \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} - \boldsymbol{\mu}^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P} \right] - \underbrace{\left[\boldsymbol{\mu}^T \bar{\mathbf{K}}_T - \bar{\lambda} \mathbf{P} \right]}_{= \mathbf{0}} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}} \quad (7.8)$$

Unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften der Tangentensteifigkeitsmatrix ($\bar{\mathbf{K}}_T = \bar{\mathbf{K}}_T^T$) erfordert das für beide Entwurfskriterien identische, adjungierte Problem lediglich ein weiteres Lösen der bekannten rechten Seite:

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{P} \quad (7.9)$$

Mit nun bekanntem $\boldsymbol{\mu}$ reduziert sich Gleichung (7.8) auf:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f}_{\Psi, EC} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |J| d\Omega \\ \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} - \boldsymbol{\mu}^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P} \right] \quad (7.10)$$

Die expliziten Ableitungen der Gleichung (7.10) können dem Abschnitt 6.3.1 entnommen werden. Falls der Strukturanalyse lediglich eine lineare Theorie zugrunde gelegt wird, ginge die Tangentensteifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}_T$ in die der linear elastischen Matrix \mathbf{K}_e über und folglich wäre $\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{u}}$. Für diesen Fall besteht der weitere Zusammenhang:

$$\sum_{i=1}^{n_{ele}} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |J| d\Omega = \mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} \quad (7.11)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (7.11) geht Gleichung (7.10) in das bekannte selbst-adjungierte Problem über:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f}_{\Psi, EC} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} |J| d\Omega + \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} \\ -\bar{\mathbf{u}}^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \bar{\mathbf{R}} + 2 \cdot \bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{c} \text{bei linearem} \\ \text{Strukturverhalten} \end{array} \right) \quad (7.12)$$

Die daraus folgende Beziehung $\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f}_{EC} = 2 \cdot \nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f}_{\Psi}$ lässt sich ebenfalls anschaulich aus dem entsprechenden Last-Verschiebungs-Diagramm der Abbildung 7.1 ableiten ($f_C = f_{\Psi} \rightarrow f_{EC} = 2 \cdot f_C = 2 \cdot f_{\Psi}$).

SA für das Entwurfskriterium End-Steifigkeit

Die adjungierte Sensitivitätsanalyse kann nur dann sinnvoll zum Einsatz kommen, wenn für die Entwurfsaufgabe keine direkte Information über die Gradienten aller Verschiebungen benötigt werden. Für das Kriterium End-Steifigkeit (7.3) kann jedoch eine adjungierte SA zweckmäßig sein, da lediglich die Sensitivität einer Verschiebungskomponente und nicht die des gesamten Verschiebungsfeldes benötigt wird. Zur Ermittlung der gesuchten Gradienten einer einzigen Verschiebungskomponente bezüglich \mathbf{s} wird zuerst die

Bestimmungsgleichung für ν mit einem LAGRANGE-Vektor $\tilde{\mu}$ verjüngt. Die nun skalarwertige Größe wird mit dem Skalarprodukt, bestehend aus einem weiteren LAGRANGE-Vektor μ und der erfüllten Gleichgewichtsbedingung (4.26), erweitert:

$$\tilde{\mu}^T \left[\underbrace{\bar{K}_T \nu - \bar{\lambda} P}_{=0} \right] - \mu^T \left[\underbrace{\bar{R} - \bar{\lambda} P}_{=0} \right] = 0 \quad (7.13)$$

Unter Berücksichtigung der beiden Nullterme ist die totale Ableitung nach den Entwurfsvariablen s :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^T \left[\nabla_u \bar{K}_T \nabla_s \bar{u} \nu + \nabla_s^{ex} \bar{K}_T \nu + \bar{K}_T \nabla_s \nu - \bar{\lambda} \nabla_s P \right] \\ - \mu^T \left[\bar{K}_T \nabla_s \bar{u} + \nabla_s^{ex} \bar{R} - \bar{\lambda} \nabla_s P \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Isoliert man zuerst den Term $(\tilde{\mu}^T \bar{K}_T \nabla_s \nu)$ und separiert weiterhin die Anteile mit $\nabla_s \bar{u}$ so erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^T \bar{K}_T \nabla_s \nu &= \tilde{\mu}^T \left[\bar{\lambda} \nabla_s P - \nabla_s^{ex} \bar{K}_T \nu \right] + \mu^T \left[\nabla_s^{ex} \bar{R} - \bar{\lambda} \nabla_s P \right] \\ &\quad - \left[\underbrace{\tilde{\mu}^T \nabla_u \bar{K}_T \nu - \mu^T \bar{K}_T}_{=0} \right] \nabla_s \bar{u} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Wird unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften von \bar{K}_T der Vektor $\tilde{\mu}$ wie folgt bestimmt:

$$\bar{K}_T \tilde{\mu} = I_\nu \quad \implies \quad \tilde{\mu} = \bar{K}_T^{-1} I_\nu \quad (7.16)$$

kann mit bekanntem $\tilde{\mu}$ der zweite LAGRANGE-Vektor μ so ermittelt werden, dass der dritte Klammerausdruck von Gleichung (7.15) einen Nullvektor ergibt:

$$\mu = \bar{K}_T^{-1} \left[\tilde{\mu}^T \nabla_u \bar{K}_T \nu \right] \quad (7.17)$$

Gegenüber der rechten Seite der Gleichung (7.16_b) benötigt der adjungierte Lastvektor der Gleichung (7.17) eine Integration auf Elementebene. Abschnitt 6.3.2 enthält detailliert die implizite Ableitung der tangentialen Steifigkeitsmatrix. Zur effektiven Auswertung des Klammerausdrucks der Gleichungen (7.17) sei auf Abschnitt 6.4 verwiesen. Unter Verwendung von Gleichung (7.16) und (7.17) reduziert sich Gleichung (7.15), bei Beachtung von $\nu_i = I_\nu^T \nu = \tilde{\nu}_i$ (siehe Gleichung (7.3)), auf den gesuchten Gradient der Verschiebungskomponente:

$$\nabla_s \tilde{f}_\nu = \nabla_s \tilde{\nu}_i = \tilde{\mu}^T \left[\bar{\lambda} \nabla_s P - \nabla_s^{ex} \bar{K}_T \nu \right] + \mu^T \left[\nabla_s^{ex} \bar{R} - \bar{\lambda} \nabla_s P \right] \quad (7.18)$$

Gleichung (7.18) enthält nur noch explizite Ableitungen, welche in einem Zuge bestimmt werden können und in Abschnitt 6.3.1 beschrieben sind.

7.1.3 Algorithmische Umsetzung

In diesem Abschnitt wird auf die Besonderheiten der in dieser Arbeit vorausgesetzten Potentialeigenschaft der Strukturantwort und deren möglichen Nutzen bei der Reduzierung der Rechenzeit des Entwurfsprozesses eingegangen. Ein derartiges Strukturverhalten hat die positive Eigenschaft, dass unterhalb des kritischen Punktes jeder Laststufe genau ein Verschiebungszustand zugewiesen werden kann. Zur Erweiterung um kritische Laststufen wird auf Kapitel 9 verwiesen. Durch die Wegunabhängigkeit derartiger Probleme ist eine inkrementelle Sensitivitätsanalyse, welche die komplette Pfadinformation benötigt, nicht notwendig. Beschränkt man sich im Weiteren auf Entwurfskriterien, denen zur Auswertung lediglich die Information eines Gleichgewichtspunktes ausreichen (siehe Gleichungen (7.2) bis (7.4)), ist eine vollständige, inkrementelle Berechnung des Last-Verschiebungspfad nach der Modifikation der Entwurfsvariablen nicht notwendig. Hier wird vorgeschlagen, das nicht vorhandene Gleichgewicht \mathbf{G} , welches durch die veränderten Steifigkeiten der Struktur des Optimierungsschrittes $k + 1$ bei festgehaltenem Verschiebungsfeld des Schrittes k entsteht:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}(\mathbf{s}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_k) - \bar{\lambda} \mathbf{P} \neq \mathbf{0} \quad (7.19)$$

anhand einer Korrekturiteration wiederherzustellen. Um für diese Vorgehensweise innerhalb des Konvergenzradius zu liegen, kann es erforderlich sein, die Veränderung der Entwurfsvariablen zu limitieren. Um dies zu erreichen, werden zwei Strategien untersucht. Die erste sichert die Konvergenz des Gleichgewichtsproblems anhand einer Reduzierung der Modifikation der Entwurfsvariablen seitens der Optimierungsstrategie. Die weitere Möglichkeit besteht darin, dass bei Divergenz mit dem neuen Satz von Entwurfsvariablen mit einem zuerst reduzierten Schritt von $\mathbf{s}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{k+1} + \mathbf{s}_k)$ ein Gleichgewichtspunkt ermittelt wird, bevor dies für die Entwurfsvariablen des Schrittes $k + 1$ erfolgt. Die Wahl der zum Einsatz kommenden Strategie ist für die gesamte Rechenzeit unbedeutend, da in der Regel nur die ersten Optimierungsschritte für die Konvergenz kritisch sind.

An dieser Stelle wird angemerkt, dass bei Verwendung der direkten Sensitivitätsanalyse für die Korrekturiteration die Ermittlung eines verbesserten Startpunktes möglich ist. Werden die Sensitivitäten der Verschiebungen bezüglich aller Entwurfsvariablen abgespeichert, kann $\bar{\mathbf{u}}_k$ der Gleichung (7.19) durch:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \left(\nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{u}}_k \right)^T \left(\mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k \right) + \bar{\mathbf{u}}_k \quad (7.20)$$

ersetzt werden.

7.1.4 Beispiel 1: Ein einführendes, analytisches Beispiel

Bevor auf numerische Untersuchungen eingegangen wird, sollen anhand eines einfachen und überschaubaren Beispiels die wesentlichen Unterschiede der zugrunde gelegten Kinematik aufgezeigt werden. Zur Untersuchung dient das Beispiel zweier gekoppelter Fachwerkstäbe, wie sie in Abbildung 7.2 dargestellt sind. Die Struktur ist an beiden Enden unverschieblich gelagert. Am mittleren Knoten, welcher vertikal gelagert ist, greift eine horizontale Last P an. Für beide Stäbe sind die Dehnsteifigkeiten $EA_{1,2}$ die Entwurfsvariablen. Weiterhin erfolgt die Optimierung unter Berücksichtigung einer konstanten Summe

beider Dehnsteifigkeiten ($EA_1 = EA \cdot (1 - s)$; $EA_2 = EA \cdot s$). Die lineare Abhängigkeit zwischen den Dehnsteifigkeiten und der Entwurfsvariable s wurde gewählt, um im Weiteren den Effekt der nichtlinearen Kinematik deutlicher herauszuarbeiten. Da die beiden Fälle Querschnittsoptimierung (A variabel) und materielle Topologieoptimierung (E variabel) hier äquivalent sind, wurde die Dehnsteifigkeit als Entwurfsgröße deklariert.

Um für den Fall der nichtlinearen Kinematik die beschreibenden Gleichungen in ihrer Komplexität, aber nicht in ihrer allgemein gültigen Aussage zu reduzieren, werden Werte für die Dehnsteifigkeit ($EA = 1$) und für die Länge der Fachwerkstäbe in der Referenzkonfiguration ($l_0 = 1$) vorgegeben.

Für den Fall, dass dem Entwurfsprozess eine lineare Kinematik zugrunde liegt, ist die Verschiebung des mittleren Knotens unter einer Belastung von $P = 0.05$:

$$u = \frac{P l_0}{EA} = 0.05 \quad (7.21)$$

und dadurch unabhängig von s . Hierdurch ist die im System gespeicherte Dehnungsenergie Ψ_{lin} für alle Entwürfe gleich:

$$\Psi_{lin} = \frac{1}{2} P^2 \frac{l_0}{EA} = 0.00125 \quad (7.22)$$

Verwendet man in der Untersuchung die nichtlineare Kinematik des GREEN-LAGRANGE-schen-Verzerrungstensors, so ergeben sich diese in Abhängigkeit der Verschiebung u zu:

$$E_1 = \frac{u}{l_0} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{l_0^2} \quad \text{bzw.} \quad E_2 = -\frac{u}{l_0} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{l_0^2} \quad (7.23)$$

In Kombination mit dem zweiten PIOLA-KIRCHHOFFSchen-Spannungstensor können hieraus die Stabkräfte wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{EA}{l_0^3} u (2 \cdot l_0^2 + 3 \cdot l_0 u + u^2) (1 - s) \\ F_2 &= \frac{EA}{l_0^3} u (2 \cdot l_0^2 - 1 \cdot l_0 u - u^2) s \end{aligned} \quad (7.24)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung am mittleren Knoten ($P = F_1 - F_2 = 0.05$) und den oben angegebenen Werten ist in dem linken Diagramm der Abbildung 7.3 die Lösung der in u kubischen und in s linearen Gleichung:

$$u + 3 \cdot u^2 \left(\frac{1}{2} - s \right) + \frac{1}{2} u^3 = 0.05 \quad (7.25)$$

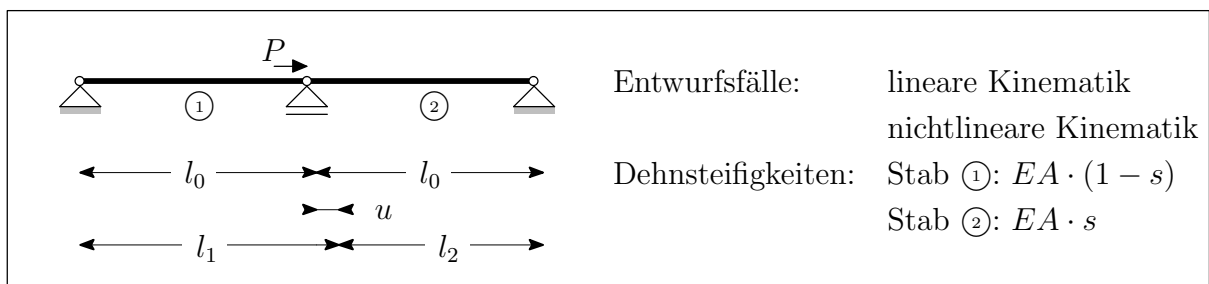


Abbildung 7.2: Systembeschreibung des Beispiels 1

grafisch dargestellt. Durch Einsetzen der Lösung von Gleichung (7.25) in die folgenden Gleichungen für die Dehnungsenergie der beiden Stäbe:

$$\begin{aligned}\Psi_{nli,1} &= \frac{1}{2} \cdot (1-s) \cdot \left(u + \frac{1}{2}u^2\right)^2 & \Psi_{nli,2} &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot \left(-u + \frac{1}{2}u^2\right)^2 \\ \Psi_{nli} &= \left(\Psi_{nli,1} + \Psi_{nli,2}\right)\end{aligned}\quad (7.26)$$

können die Graphen für die Dehnungsenergien der Einzelstäbe und deren Summe gezeichnet werden (siehe rechtes Diagramm der Abbildung 7.3). Zum Vergleich ist ebenfalls die konstante Größe der linearen Kinematik eingetragen.

Bemerkenswert ist, dass bei gleicher Dehnsteifigkeit EA der beiden Stäbe ($EA_1 = EA_2 \rightarrow s = 0.5$) die gespeicherte Dehnungsenergie im System und die Verschiebung des mittleren Knotens für die lineare und nichtlineare Kinematik nahezu gleich sind. Grund dafür ist, dass die quadratischen Anteile der Größe u der Gleichung (7.25) bei $s = 0.5$ verschwinden und dadurch der lineare Anteil noch dominanter wird. Zudem ist auffallend, dass in dem rechten Druckstab die Dehnungsenergie Ψ_2 für $s = 0.5$ geringer ist, als jene Ψ_1 in der linken Zugstrebe. Aber der Funktionsverlauf der im System gespeicherten Dehnungsenergie Ψ_{1+2} fällt, wenn die Dehnsteifigkeit des Druckstabes reduziert wird ($s \rightarrow 0$). Dies ist gleichbedeutend mit der Erhöhung der Dehnungsenergie in der Zugstrebe. Dieser Zusammenhang lässt sich auf den Sachverhalt zurückführen, dass in dem Druckstab im Gegensatz zur Zugstrebe der quadratische Anteil von u in den Verzerrungen ein unterschiedliches Vorzeichen wie der lineare Anteil hat (siehe Gleichung (7.23)).

Wäre die Zielfunktion der Entwurfsaufgabe die End-Komplementärarbeit, so würde das Optimierungsergebnis dem der Minimierung der Dehnungsenergie entsprechen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass unter Verwendung einer nichtlinearen Kinematik mit den energetisch konjugierten Größen der GREEN-LAGRANGESchen-Verzerrungen und den zweiten PIOLA-KIRCHHOFFSchen-Spannungen bei diesen Zielkriterien Zugkonstruktionen gegenüber Druckkonstruktionen bevorzugt werden.

Inwieweit die oben vorgestellten Entwurfskriterien bei allgemeinen Aufgabenstellungen Unterschiede aufzeigen, wird in weiteren numerischen Beispielen untersucht.

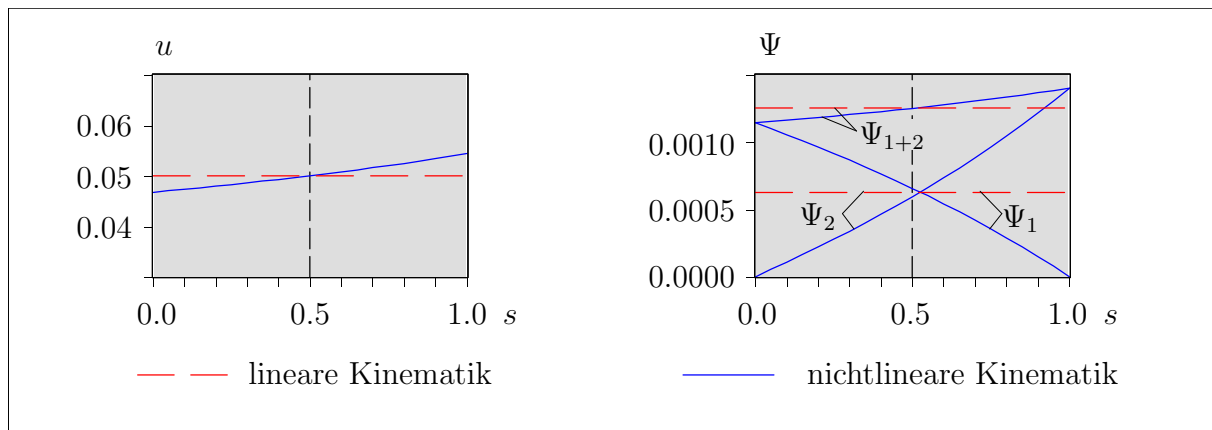


Abbildung 7.3: Verschiebungen und Dehnungsenergien in Abhängigkeit der Entwurfsvariable s des Beipfels 1

7.1.5 Beispiel 2: Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte

Dieses Beispiel soll aufbauend auf das vorangegangene Beispiel verdeutlichen, welchen Einfluss die Berücksichtigung der nichtlinearen gegenüber der linearen Kinematik auf allgemeine Optimierungsergebnisse haben kann. Im Weiteren wird auf die Auswirkung unterschiedlicher Laststufen im Falle eines nichtlinearen Strukturverhaltens eingegangen. Als Zielfunktion dient hier die Minimierung der Dehnungsenergie (vgl. Gleichung (7.2)) bei vorgegebener Masse.

In Abbildung 7.4 sind für eine quadratische Platte mit steifem, außen liegendem Rahmen die Materialdaten, die Geometrie und die unterschiedlichen Laststufen für die Topologieoptimierung angegeben. Aus Gründen der Symmetrie fand die Strukturanalyse am Viertelsystem statt. Das Entwurfsgebiet der Platte ist mit 900 und der außen liegende Rahmen mit 124, 8-knotigen, isoparametrischen, unterintegrierten Schalenelementen diskretisiert. Das Plattentragwerk ist vertikal an der Verbindung zwischen Entwurfsraum und dem umgebenden Rahmen gelagert. Die äußere Belastung greift im Zentrum der Struktur an. Die Dichten der finiten Elemente, welche die Entwurfsvariablen darstellen, sind derart gekoppelt, dass die Diagonalen der Platte weitere Symmetrieachsen sind.

Die Auswirkung der geometrischen Nichtlinearität und die der unterschiedlichen Laststufen ist in Abbildung 7.5 verdeutlicht. Dabei können die generierten Strukturen in zwei Gruppen zusammengefasst werden. Die erste Gruppe, zu der das lineare und das für das geringe Lastniveau $4 \times 10 \text{ N}$ optimierte Tragwerk gehört, trägt die Belastung direkt zu den Lagern. Die Torsionssteifigkeit des außen liegenden Rahmens wird zur Einspannung der inneren Struktur herangezogen. Zu der zweiten Gruppe gehören die Tragwerke, welche unter Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik ab dem Lastniveau $4 \times 100 \text{ N}$ generiert wurden. Diese Strukturen nutzen im Gegensatz zu denen der ersten Gruppe den Rahmen als Druckring. Dadurch ist bei diesen Strukturen der Wechsel von einer biege- zu einer membranorientierten Abtragungsweise mit zunehmender Deformation wesentlich ausgeprägter. In Abbildung 7.6 ist dieser Sachverhalt exemplarisch für das lineare und für das mit dem Lastniveau $4 \times 500 \text{ N}$ entworfene Tragwerk dargestellt. Gezeigt sind auf Basis einer geometrisch nichtlinearen Strukturanalyse die Vergleichsspannungen der Mittelfläche und der Oberseite beider Strukturen für zwei unterschiedliche Laststufen.

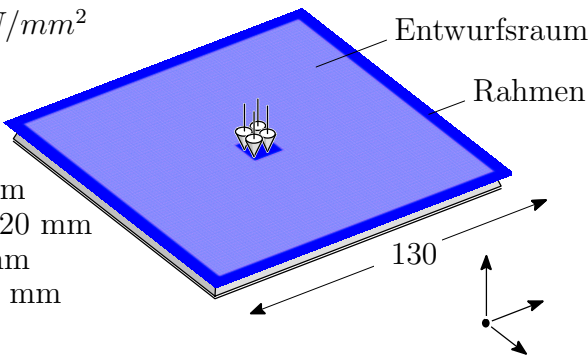
Materialdaten:	E-Modul	21000 N/mm^2	
	Querdehnzahl	0.3	
	Penalty-Faktor β	4.0	
	Masse	30 %	
Geometrie:	Plattendicke	$t = 2 \text{ mm}$	
	Platte	$120 \times 120 \text{ mm}$	
	Rahmen	$5 \times 5 \text{ mm}$	
	Lastfläche	$12 \times 12 \text{ mm}$	
Entwurfssfälle:	lineare Kinematik		
	nichtlineare Kinematik	$\bar{\lambda}P = 4 \times [10 / 100 / 500 / 2000 \text{ N}]$	

Abbildung 7.4: Geometrie, Lasten und Materialdaten des Beispiels 2

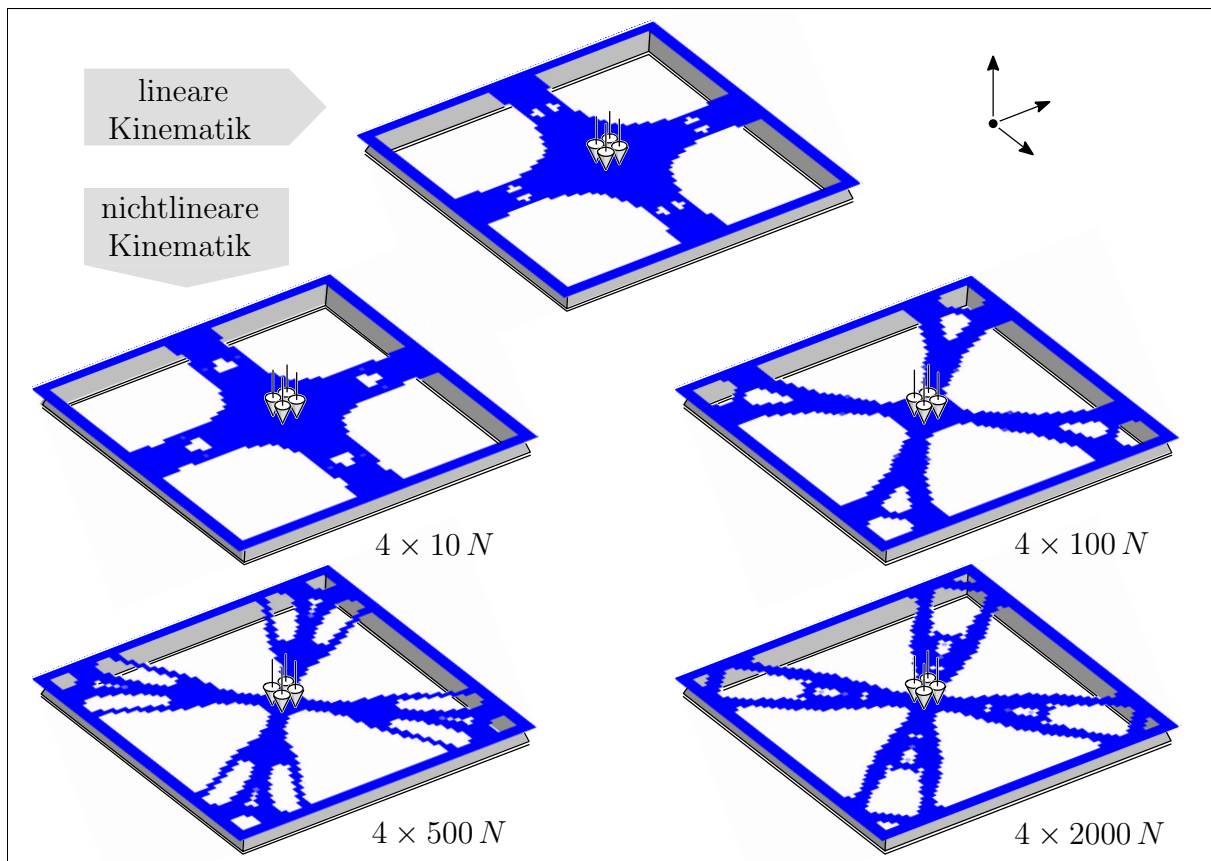


Abbildung 7.5: Generierte Strukturen des Beispiels 2

Der linear ermittelte Entwurf zeigt selbst bei einer Belastung von 500 N auf ein Viertel des Systems keine nennenswerten Spannungen in der mittleren Ebene. Die Bereiche mit großen Spannungen an der Oberseite verdeutlichen die biegeorientierte Abtragungsweise. Die nichtlinear optimierte Struktur weist derartige Bereiche lediglich an den Übergängen der einzelnen Tragwerkselemente auf. Für die geringe Laststufe zeigt dagegen die linear entworfene Struktur aufgrund der kürzeren Spannweite einen günstigeren Spannungsverlauf. In den Diagrammen der Abbildung 7.6 ist die Dehnungsenergie, welche hier als Zielfunktion diente, die vertikale Verschiebung an der Lasteinleitungsstelle (u_P) und die horizontale Verschiebung der Rahmenmitte (u_R) bei anwachsender Belastung dargestellt. Nur für sehr kleine Lastniveaus zeigt die linear optimierte Struktur eine bessere Charakteristik auf. Bei steigender Belastung fällt der Unterschied am deutlichsten bei der horizontalen Verschiebung der Rahmenmitte (u_R) aus.

7.1.6 Beispiel 3: Vergleich der unterschiedlichen Steifigkeitskriterien

Beispiel 3 widmet sich den Wirkungsweisen der unterschiedlichen Steifigkeitskriterien. Die in Abschnitt 7.1.1 aufgestellte Behauptung, dass die genannten Entwurfskriterien zu unterschiedlichen Topologien führen, soll im Weiteren verifiziert werden.

Abbildung 7.7 zeigt für ein T-Profil die Materialdaten, die Geometrie und die Belastung. An der Stirnseite des Profils ist der Obergurt vertikal starr und horizontal federnd gelagert.

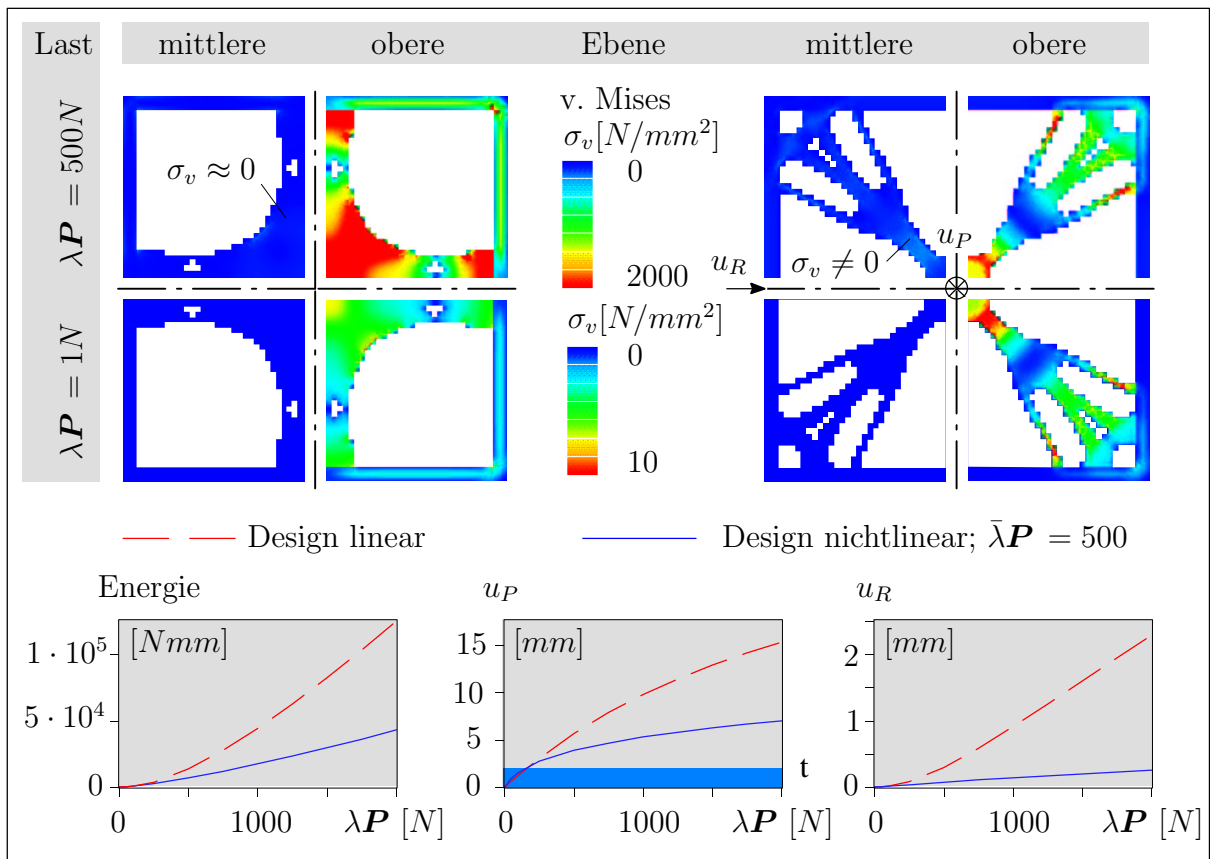


Abbildung 7.6: Vergleich zweier Strukturen des Beispiels 2 (Viertel-System)

Die nichtlineare Charakteristik der kontinuierlich angeordneten, voneinander unabhängig wirkenden Federn ist in dem Diagramm der Abbildung 7.7 gezeigt. Die Feder gewinnt ab einer Deformation von $1 mm$ deutlich an Steifigkeit. Um die Existenz der Gradienten

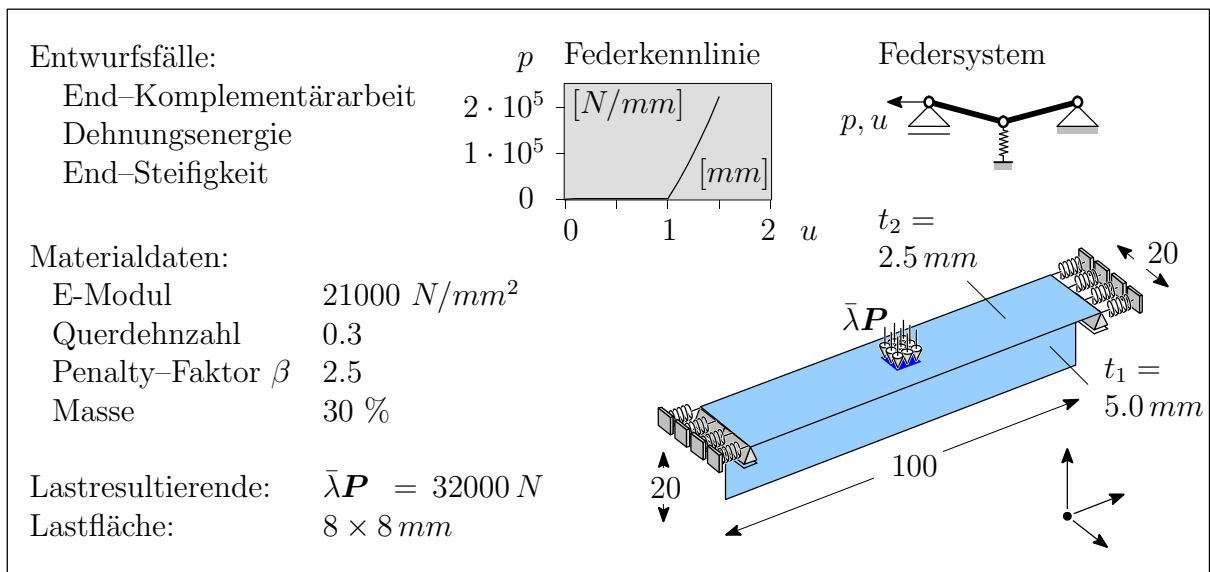


Abbildung 7.7: Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 3

der Strukturantwort bezüglich der Entwurfsvariablen \mathbf{s} für alle Deformationszustände zu gewährleisten, muss die Ableitung der Federkennlinie stetig sein (Übergangsbereich bei circa 1 mm ist ausgerundet). Dazu wurde, wie der Federsystemskizze zu entnehmen ist, ein vertikales Federelement in das System eingebaut. Da kein Stabilitätsversagen berücksichtigt wird, kann die Analyse am Viertelsystem erfolgen. Zur Diskretisierung des Entwurfsraums wurden 1500, 4-knotige, isoparametrische, vollintegrierte Schalelemente verwendet. Das Federsystem benötigte 30 Elemente gleichen Typs. Es wird ein orthotropes Materialmodell mit einem Schubmodul von null verwendet. Der Obergurt des Entwurfsraums und das Federsystem sind lediglich in Strukturlängsrichtung gekoppelt. Zur Vermeidung von ‘Checkerboard’-Moden, die aufgrund der bilinearen Ansatzfunktionen auftreten können, wird die in MAUTE [78] beschriebene, modifizierte Filtermethode von SIGMUND [119] verwendet.

Abbildung 7.8 zeigt die generierten Strukturen für die Zielfunktionen End-Komplementärarbeit, Dehnungsenergie und End-Steifigkeit bei vorgegebener Masse. Die Komponente ν_i des zuletzt genannten Entwurfskriteriums ist hier die vertikale Verschiebung des Lasteinleitungszentrums.

Jede Struktur weist für das Entwurfskriterium, für welches es optimiert wurde, den besten Funktionswert auf. Dies zeigt das λ - u_P -Diagramm für die Struktur, welche mit der Zielfunktion End-Komplementärarbeit generiert wurde. Entsprechend enthält die Struktur, auf der Basis der Zielfunktion Dehnungsenergie, den geringsten Anteil an gespeicherter

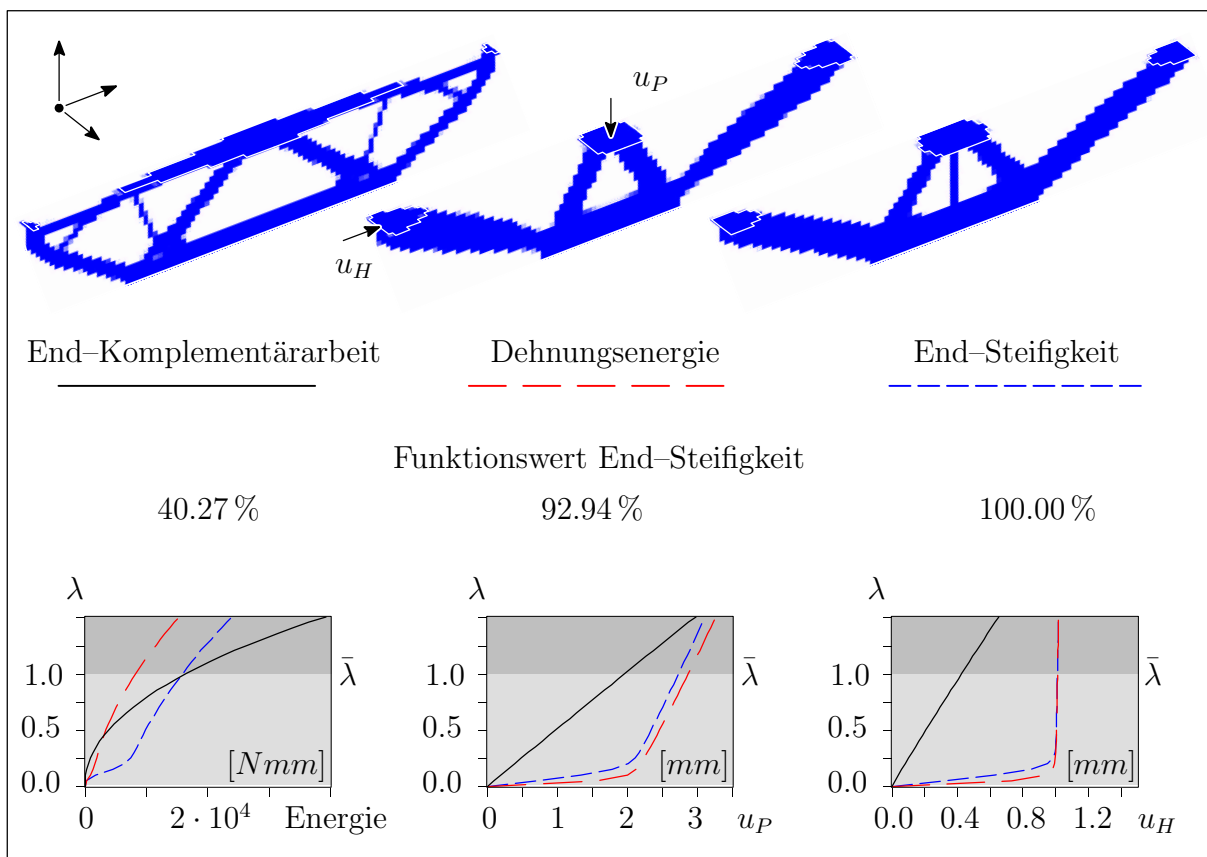


Abbildung 7.8: Generierte Strukturen des Beispiels 3 und deren Vergleich

Energie im System. Die Funktionswerte der End-Steifigkeit ν_i sind als skalierte Kehrwerte angegeben. Diese sind äquivalent zu den Steigungen der Last-Verschiebungs-Linien im λ - u_P -Diagramm bei der Laststufe $\bar{\lambda}$. Die Skalierung fand bezüglich der Größe der Struktur ‘End-Steifigkeit’ statt. Den etwas höheren Funktionswert des Tragwerks ‘End-Steifigkeit’ gegenüber ‘Dehnungsenergie’ ist vermutlich auf die vertikale Mittelstütze zurückzuführen. Die Struktur generiert mit der Zielfunktion End-Komplementärarbeit ist gegenüber den beiden anderen Tragwerken im topologischen Aufbau gänzlich verschieden. Dies lässt sich dadurch begründen, dass eine beträchtliche Deformation der Lasteinleitungsstelle notwendig ist, bis die Federn nennenswert zur Lastabtragung beitragen. Da die Kriterien Dehnungsenergie und End-Steifigkeit keine direkte Information über den Deformationsgrad enthalten, besteht die Möglichkeit die Federn zu aktivieren. Die für die Dehnungsenergie optimierte Struktur zeigt eine deutliche Verjüngung der Zugdiagonalen am Übergang zum Untergurt auf. Grund hierfür ist die Reduzierung der ‘Biegebeanspruchung’ am genannten Übergangsbereich.

Weiterhin fällt bei den Funktionsverläufen der Dehnungsenergien auf, dass für kleine Laststufen ($\lambda < 0.35$) die Struktur ‘End-Komplementärarbeit’ den geringsten Wert aufweist. Die beiden anderen Tragwerke zeigen durch die Aktivierung der Federsteifigkeit einen annähernd bilinearen Last-Verschiebungscharakter auf. Die im Verhältnis zur Struktur hohe Federsteifigkeit verursacht in dem λ - u_H -Diagramm, ab einer Verschiebung von circa 1 mm , fast vertikale Verläufe. Das Last-Verschiebungsverhalten der Struktur, welches für eine minimale vertikale Verschiebung an der Lasteinleitungsstelle optimiert wurde, ist im angegebenen Bereich fast linear.

7.1.7 Beispiel 4: Strukturen mit stark nichtlinearem Verhalten

Die vorangegangenen Beispiele haben gezeigt, dass die zugrunde gelegte Kinematik und die unterschiedlichen Steifigkeitskriterien einen Einfluss auf die Optimierungsergebnisse haben. Dieses Beispiel 4 widmet sich der möglichen Generierung von anfänglich quasi kinematischen Strukturen. Damit ist der Sachverhalt gemeint, dass die entworfenen Strukturen bei kleiner Belastung zuerst große Deformationen erleiden, um im Weiteren dann in eine steifere Konfiguration zu gelangen. Derartige Struktureigenschaften sind dementsprechend nur möglich, wenn der Strukturanalyse während des Optimierungsprozesses eine nichtlineare Kinematik zugrunde gelegt wird.

Die Materialdaten, die Geometrie und die Belastung einer quadratischen Platte mit einer mittigen Aussparung können der Abbildung 7.9 entnommen werden. Die Struktur ist an den vier Innenecken der Aussparung belastet und mit acht kurzen Linienlagern mit einer Länge von 20 mm vertikal unterstützt. Ein Viertel des Entwurfsraums ist mit 551, 8-knotigen, isoparametrischen, unterintegrierten Schalenelementen diskretisiert. Die Dichten der finiten Elemente (Entwurfsvariablen) sind derart gekoppelt, dass die Diagonalen der Platte weitere Symmetrieachsen sind.

Im Weiteren werden zwei Optimierungsergebnisse miteinander verglichen. Der einen Entwurfsaufgabe lag eine lineare und der anderen eine nichtlineare Kinematik zugrunde. Das Ziel beider Fälle ist die Minimierung der End-Komplementärarbeit bei vorgegebener Masse. Die generierten Topologien sind in Abbildung 7.10 aufgezeigt. Die nichtlinear optimierte Struktur nutzt im Gegensatz zur linear ermittelten Struktur nicht die Eckauflager und

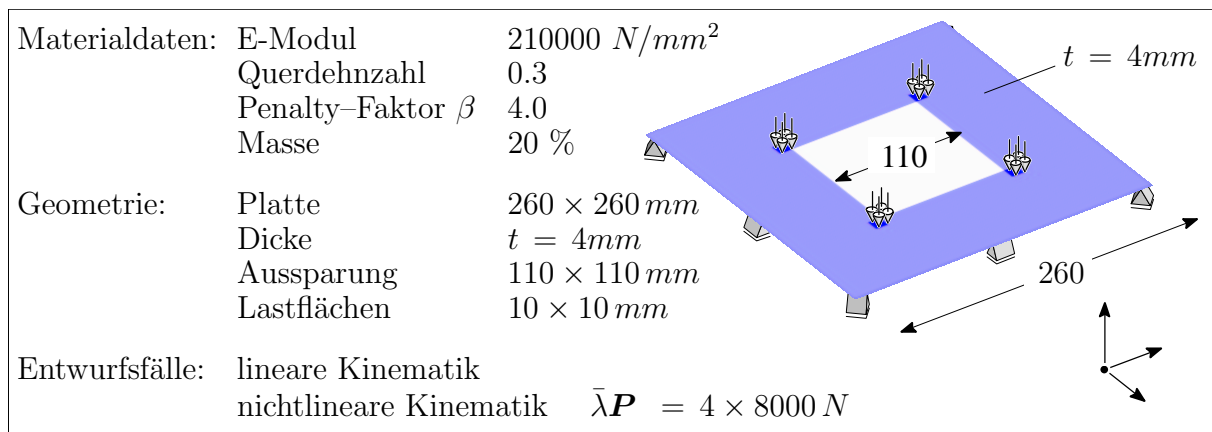


Abbildung 7.9: Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 4

besitzt acht ‘Quasi-Gelenke’. Die materielle Topologieoptimierung ist nicht in der Lage ein echtes Gelenk zu produzieren; da aber die Einschnürung in Kombination mit porösen Elementen eine ähnliche Wirkungsweise besitzt, dient hier der Begriff ‘Quasi-Gelenk’ zur Charakterisierung. Zur Quantifizierung der unterschiedlichen mechanischen Verhaltensweisen sind für beide Topologien die nichtlinearen Strukturantworten in Abbildung 7.11 dargestellt. Die drei Diagramme zeigen die vertikale Verschiebung unter der Last (u_P), die vertikale Verschiebung der ‘Quasi-Gelenke’ (u_G) und die horizontale Verschiebung der mittleren Lager (u_L). Weiterhin enthält Abbildung 7.11 die nichtlinear optimierte Struktur in ihrer deformierten Lage. Die gelagerten, außen liegenden Strukturelemente gelangen durch den Deformationsprozess von der horizontalen Referenzkonfiguration in eine annähernd vertikale Lage. Der rechtwinklig zum Rand vorhandene Abstand zwischen Gelenk und genutztem Lager bestimmt das Maß der Spannweitenverkürzung. Die Absenkung, welche mit der Spannweitenreduzierung einhergeht, kann durch Verringerung der elastischen Deformation der inneren Strukturelemente mehr als ausgeglichen werden. Dieser Sachverhalt ist ebenfalls schematisch für einen äquivalenten 1-D Fall in der Prinzipskizze der Abbildung 7.11 dargestellt. Durch die Exzentrizität der Lastangriffsfläche zu einer gedachten Verbindungslinie diagonal benachbarter ‘Quasi-Gelenke’, ist der angeordnete innenliegende Zugring erforderlich. Diese Beanspruchung wird durch die

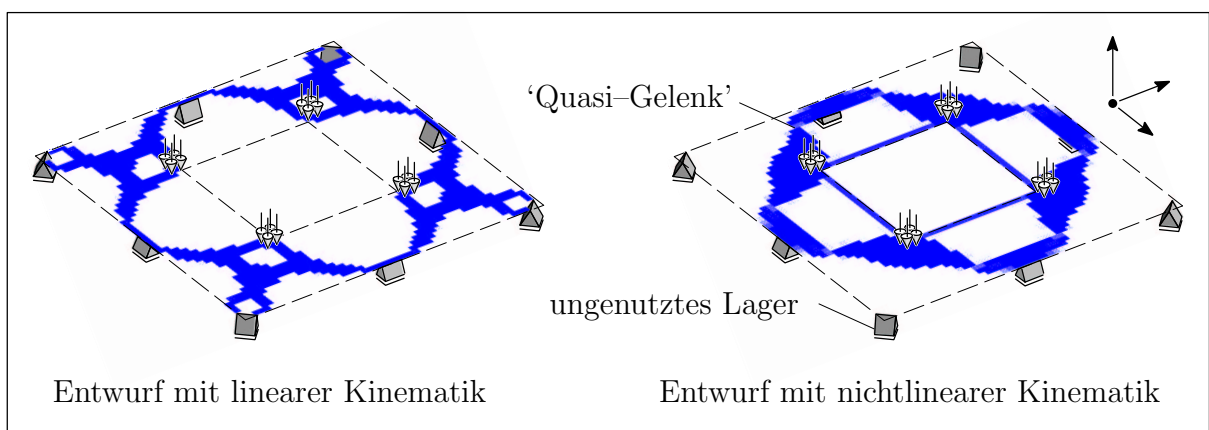


Abbildung 7.10: Generierte Strukturen des Beispiels 4

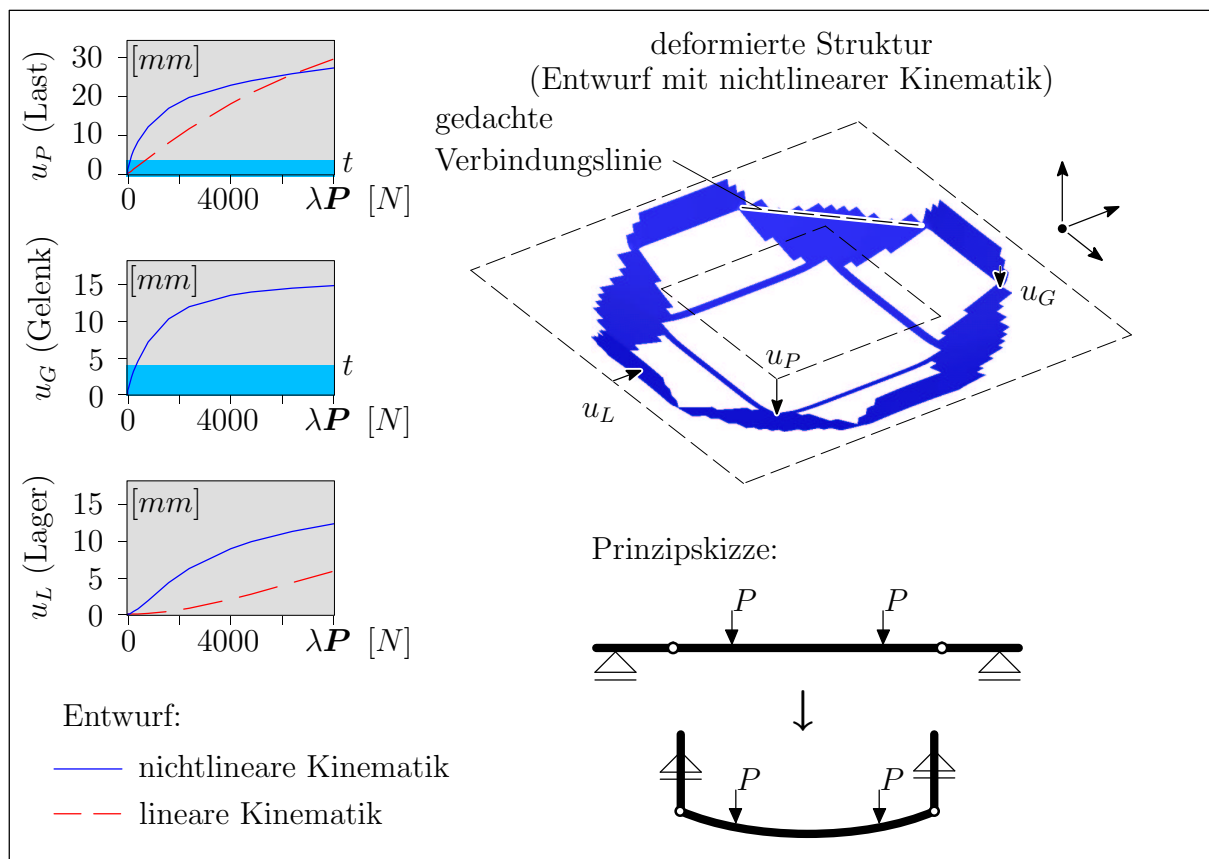


Abbildung 7.11: Strukturverhalten der Tragwerke des Beispiels 4

größere Deformation der Lastangriffsflächen (u_P) gegenüber den ‘Quasi-Gelenken’ (u_G) (siehe Diagramme in Abbildung 7.11) aktiviert. Der aus Gründen des Gleichgewichts notwendige Druckring wird durch die belasteten Strukturelemente in Kombination mit den gelagerten Tragwerksteilen ausgebildet.

Zwar zeigt die nichtlinear optimierte Struktur für das vorgegebene Lastniveau einen etwas besseren Zielfunktionswert (vertikale Verschiebung unter der Last, siehe u_P - λP -Diagramm der Abbildung 7.11) als das linear generierte Tragwerk, doch die erzielte Charakteristik ist zu hinterfragen (anfängliche Weichheit, Lagerverschiebung u_L). Ein Versuch die horizontalen Verschiebungen der mittleren Lager durch eine Verschiebungsnebenbedingung (Thema des folgenden Abschnitts 7.2) zu restringieren scheiterte, da der eingesetzte Optimierungsalgorithmus SQP keine Lösung zur Einhaltung der anfänglich stark verletzen Nebenbedingung fand.

7.2 Lokale Entwurfskriterien in der Topologieoptimierung

Die Begrenzung von Verschiebungsgrößen gehört zu den meist verwendeten Entwurfskriterien in der Strukturoptimierung. So stellen diese neben vielen weiteren lokalen Entwurfskriterien in der Form- und Querschnittsoptimierung kein wesentliches Problem dar. Dagegen bedarf es in der materiellen Topologieoptimierung einer weiteren Überlegung.

Grund hierfür ist die mögliche Definition einer lokalen Entwurfsgröße im endgültigen hochporösen Bereich (siehe Abbildung 7.12). In diesen Bereichen wird das FE-Netz weiterhin deformiert. Im Nachlauf der Topologieoptimierung werden die hochporösen Bereiche der Struktur nicht mehr zugewiesen. Deshalb müssen derartige Entwurfskriterien im Falle einer Berücksichtigung als Nebenbedingung im hochporösen Bereich immer erfüllt sein, auch wenn die zu kontrollierende Verschiebungskomponente durch die Deformation des FE-Netzes dies nicht gewährleistet. Sind sie dagegen Bestandteil der Zielfunktion dürfen sie zu dieser keinen Beitrag leisten. Diese Zusatzbedingung ist in der Form- und Querschnittsoptimierung durch die LAGRANGESche-Betrachtungsweise nicht notwendig, da der gesamte diskretisierte Bereich immer Bestandteil der Struktur ist. Der Unterschied zur EULERSchen-Betrachtungsweise, welche der materiellen Topologieoptimierung zugrunde liegt, wurde bereits in Abschnitt 2.4 erläutert.

7.2.1 Verschiebungsnebenbedingungen in der Topologieoptimierung

Die in DUYSINX & BENDSØE [36], YANG & CHEN [141] sowie MAUTE [78] untersuchten Spannungsnebenbedingungen für die materielle Topologieoptimierung unterscheiden sich gegenüber Verschiebungsnebenbedingungen in einem wesentlichen Sachverhalt. Durch die explizite Abhängigkeit der Spannungen \mathbf{S} von dem Materialtensor $\mathbf{C}(\rho)$ ist für $\mathbf{C}(\rho) \rightarrow \mathbf{0}$ ebenfalls $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{0}$ gewährleistet. Hierdurch blenden sich Spanningskriterien eigenständig aus der Entwurfsaufgabe aus. Für eine Verschiebungskomponente besteht diese explizite Abhängigkeit zu den Entwurfsvariablen der materiellen Topologieoptimierung nicht. Um diese Abhängigkeit auch für Verschiebungen sicherzustellen, werden modifizierte Verschiebungskomponenten eines Knotens r in die Entwurfsaufgabe eingebracht:

$$\underline{u}_i = u_i \cdot \gamma_u \quad (7.27)$$

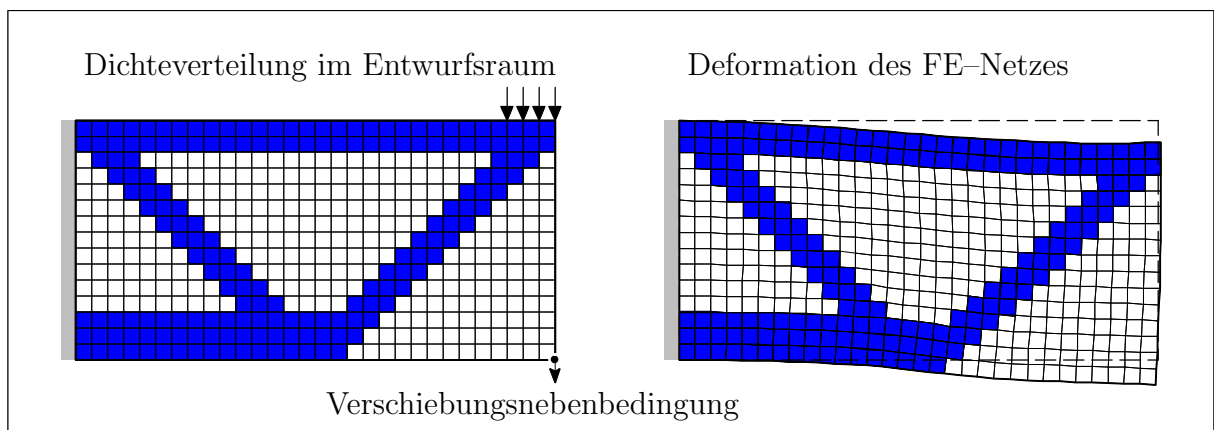


Abbildung 7.12: Problemstellung von lokalen Entwurfskriterien in der Topologieoptimierung

Dabei sollte γ_u wie folgt definiert sein:

$$\gamma_u = \begin{cases} 0 & : (\rho_{\max} - \rho^l) = 0 \\ 1 & : (\rho_{\max} - \rho^l) > 0 \end{cases} \quad \text{mit } \rho_{\max} = \max[\rho_i], \quad i = 1, n_{ele} \quad (7.28)$$

wobei ρ^l die untere Restriktion der Dichten ρ_i der n_{ele} angrenzenden Elemente ist. Zur Verdeutlichung der Situation sei auf Abbildung 7.13 verwiesen.

Kommen gradientenbasierte Optimierungsstrategien zum Einsatz, ist für γ_u anstelle der Gleichung (7.28) eine mindestens C^1 -kontinuierliche Ersatzgleichung erforderlich. Zur Sicherstellung einer monoton wachsenden Funktion besteht eine weitere Anforderung an den Wertebereich der differenzierten Funktion:

$$0 < \nabla_{\rho}(\gamma_u) < \infty \quad \text{für } \rho^l \leq \rho \leq \rho^u \quad (7.29)$$

Um diese Anforderungen zu gewährleisten, wird eine Funktion für γ_u wie folgt definiert:

$$\gamma_u = -\beta_u \ln \left(e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} \right) \quad \text{mit } \alpha_1 = -\frac{\tilde{\rho}_m}{\beta_u^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\beta_u} \quad (7.30)$$

wobei β_u ein Faktor mit dem Wertebereich $0 < \beta_u < 1$ ist. Da der ‘max-Operator’ der Gleichung (7.28) ebenfalls keine stetige Ableitung bezüglich der Entwurfsvariablen ermöglicht, wird in Gleichung (7.30) eine mittlere Dichte $\tilde{\rho}_m$ der am Knoten r anliegenden n_{ele} finiten Elemente eingeführt:

$$\tilde{\rho}_m = \frac{1}{n_{ele}} \sum_{j=1}^{n_{ele}} \frac{\rho_j - \rho_j^l}{\rho_j^u - \rho_j^l} \quad (7.31)$$

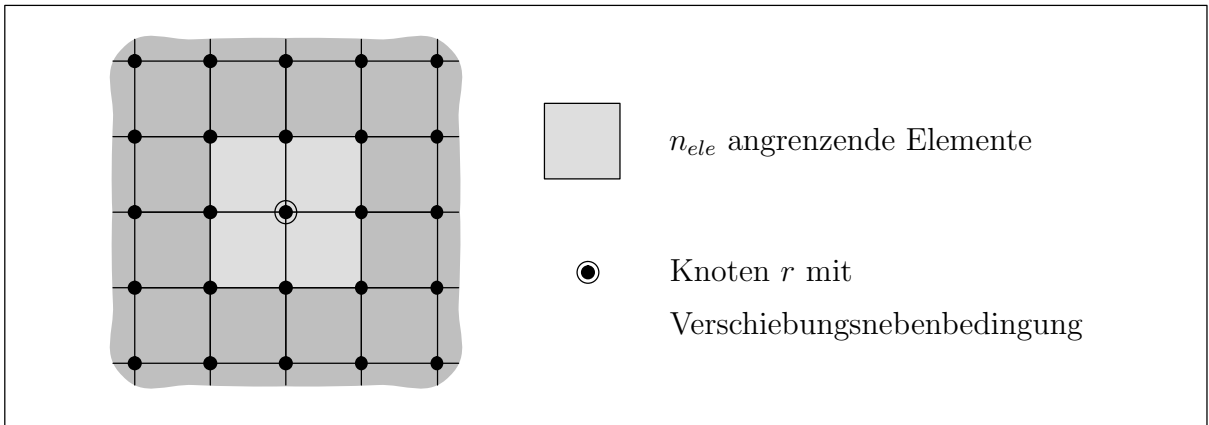


Abbildung 7.13: Definition von angrenzenden Elementen für Verschiebungsnebenbedingungen

Die Funktionsverläufe von γ_u sind für verschiedene β_u -Werte in dem Diagramm der Abbildung 7.14 dargestellt. Zum Vergleich enthält dieses Diagramm ebenfalls den Funktionsverlauf des SIMP-Ansatzes (5.2). Für $\beta_u \rightarrow 0$ gehen die Funktionswerte γ_u der Gleichung (7.30) trotz Mittelung der Dichten (7.31) in Gleichung (7.28) über. Bei der Wahl von β_u sollte folgendes beachtet werden. Kleine β_u führen in einem großen Bereich zu $\nabla_{\tilde{\rho}_m} \gamma_u \rightarrow 0$ (siehe Abbildung 7.14). Folglich wird im Optimierungsprozess erst für sehr kleine mittlere Dichten (7.31) der explizite Einfluss der Entwurfsvariablen zu den modifizierten Verschiebungen relevant. Für $\beta_u = 1$ ist $\gamma_u(\tilde{\rho}_m = 1) \approx 0.3$. Zu große Werte für β_u führen also zur Aufweichung der Verschiebungsnebenbedingung. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, dass der in Abbildung 7.14 angegebene Wertebereich für β_u ($0.15 \leq \beta_u \leq 0.30$) im Zusammenspiel mit dem SIMP-Ansatz sinnvoll ist.

Zur Beschreibung des Optimierungsproblems wird das der reinen Steifigkeitsoptimierung (7.5) um die Anzahl der zu berücksichtigten Verschiebungsnebenbedingungen n_u erweitert:

$$\min_{\mathbf{s}} f_q \quad \text{mit} \quad q = \Psi, \nu, EC$$

$$\sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| d\Omega \right] - \tilde{m} = 0 \quad ; \quad \underline{u}_i - \check{u}_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_u \quad (7.32)$$

$$0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U$$

7.2.2 Sensitivitätsanalyse von Verschiebungsgrößen

In Abschnitt 7.1.2 wurde bereits auf die Sensitivitätsanalyse von Verschiebungsgrößen eingegangen. Die Grundidee des Filtervektors \mathbf{I}_ν der Gleichung (7.3) und die prinzipielle Vorgehensweise der adjungierten Sensitivitätsanalyse finden hier wiederum Eingang:

$$\tilde{u}_i = \mathbf{I}_{u_i}^T \bar{\mathbf{u}} - \mu_i^T \left[\underbrace{\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \mathbf{P}}_{= \mathbf{0}} \right] \quad (7.33)$$

Mit $\bar{\mathbf{u}}$ wurde bereits der Vektor der diskreten Verschiebungen und mit $\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \mathbf{P}$ die erfüllte Gleichgewichtsbedingung (4.26) auf der vorgeschriebenen Laststufe $\bar{\lambda}$ eingeführt. Die Gleichung (7.33) unterscheidet sich zur Ausgangsgleichung für die Gradientenbestimmung des Entwurfskriteriums End-Komplementärarbeit (7.6) lediglich in den Vektoren

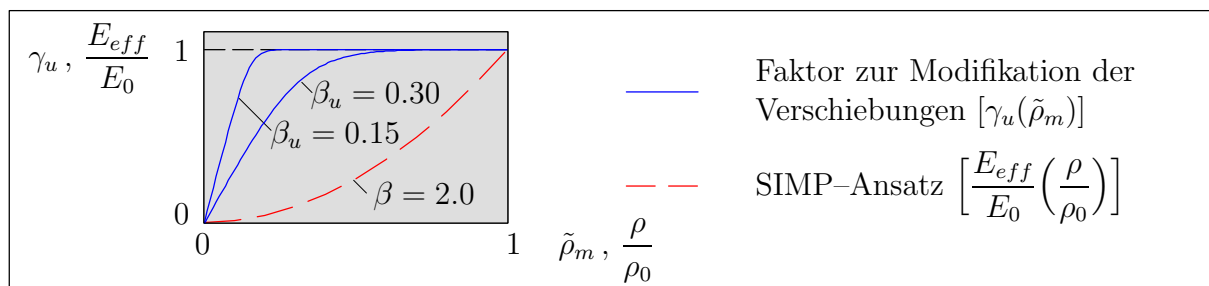


Abbildung 7.14: Funktionsverlauf für Modifikationsfaktor β_u und SIMP-Ansatz

ren \mathbf{I}_{u_i} und $\bar{\lambda}\mathbf{P}$. Dadurch kann der Gradient der Verschiebung in Anlehnung an Gleichung (7.10) direkt angegeben werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}}\tilde{u}_i = -\boldsymbol{\mu}_i^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex}\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda}\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{P} \right] \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_i = \bar{\mathbf{K}}_T^{-1}\mathbf{I}_{u_i} \quad (7.34)$$

wobei bei der Überführung der Gleichung (7.6) in (7.34) bereits die Unabhängigkeit des Filter-Vektors \mathbf{I}_{u_i} von den Entwurfsvariablen berücksichtigt wurde.

Läge der Berechnung eine lineare Theorie zugrunde, so ginge die tangentielle Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}_T$ in die linear elastische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e über und folglich würde der LAGRANGE-Vektor $\boldsymbol{\mu}_i$ die diskreten Größen der Einflussfunktion der Verschiebung u_i repräsentieren.

Die Ermittlung der Sensitivität der modifizierten Verschiebungskomponente (7.27) folgt aus der Äquivalenz von $\tilde{u}_i = u_i$:

$$\nabla_{\mathbf{s}}\underline{u}_i = \nabla_{\mathbf{s}}\tilde{u}_i \cdot \gamma_u + \tilde{u}_i \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex}\gamma_u \quad (7.35)$$

Nur für die Dichten (Entwurfsvariablen) der angrenzenden n_{ele} Elemente des Knotens r ist der zweite Teil der Gleichung (7.35) nicht null. Die Bildung der Ableitung $\nabla_{\mathbf{s}}^{ex}\gamma_u$ bringt keine Probleme mit sich und wird aus diesem Grund hier nicht dargestellt.

7.2.3 Beispiel 5: Vermeidung der Kollision zweier Bauteile

Anhand dieses Beispiels wird verdeutlicht, welche unbefriedigende Ergebnisse entstehen können, wenn Verschiebungsnebenbedingungen in der herkömmlichen Art und Weise in dem Topologieoptimierungsprozess eingearbeitet werden. Diesem Ergebnis wird die positive Auswirkung der modifizierten Verschiebungsnebenbedingung (7.27) gegenübergestellt. Die Idee der Aufgabenstellung ist die Optimierung des in Abbildung 7.15 dargestellten Scheibentragwerks, welches nicht in Berührung mit dem benachbarten Bauteil kommen darf. Als Zielfunktion dient in dieser Entwurfsaufgabe die Minimierung der Dehnungsenergie.

Die zu optimierende Struktur ist horizontal an dem oberen Ende und unverschieblich am unteren Ende der linken Stirnseite gehalten. An der Unterseite der Kragarmspitze und an dem äußeren Drittelpunkt greifen Lasten an. Die Belastung an der Kragarmspitze ist dabei doppelt so groß wie am Drittelpunkt. In direkter Nachbarschaft der Lastangriffsstelle im Drittelpunkt liegt das nicht zu berührende Bauteil in einem vertikalen Abstand von 2.5 mm. Die Struktur wurde mit 2250, 4-knotigen, 2×2 integrierten Scheibenelementen diskretisiert. Weiterhin liegt ein ebener Spannungszustand vor. Die zulässige Gesamtmasse beträgt 35 % der maximal möglichen Masse im Entwurfsgebiet.

Insgesamt fanden drei Untersuchungen statt. System 1 dient hier unter Vernachlässigung des Kollisionsproblems (keine Verschiebungsnebenbedingungen) dem Vergleich der beiden anderen Systeme. Das zweite Optimierungsproblem (System 2) berücksichtigt aufgrund herkömmlicher Verschiebungsnebenbedingungen (keine Modifikation mittels γ_u) die Kollision. Hierzu wurden sechs Nebenbedingungen an den FE-Knoten der 1. Reihe (siehe angedeutetes FE-Netz in Abbildung 7.15) definiert. Gegenüber System 2 sind bei System 3 für die Verschiebungsnebenbedingungen die modifizierten Verschiebungen eingesetzt. Der Faktor β_u der Gleichung (7.30) wurde hier zu 0.2 gewählt. Da im Voraus die zu erwartende

Deformation der Struktur nicht bekannt ist, wurde an weiteren FE-Knoten der 2. Reihe Nebenbedingungen definiert. Bei der Bestimmung der zulässigen Deformationsgröße ging hier der Abstand zur Unterkante der Struktur ein. Allen drei Untersuchungen wurde eine nichtlineare Kinematik zugrunde gelegt. Aus Gründen der niedrigen Ansatzfunktionen der finiten Elemente wurden die Sensitivitäten der Zielfunktion und die der Verschiebungsnebenbedingungen anhand der von MAUTE [78] und SIGMUND [119] beschriebenen Filtermethode geglättet.

Die Topologien der Systeme 1 bis 3 sind in der undeformierten sowie in der unskalieren deformierten Lage in Abbildung 7.16 visualisiert. Durch die fehlende Information während des Optimierungsprozesses kollidiert bzw. überlappt das System 1 bei Aufbringung der vorgeschriebenen Laststufe $\bar{\lambda} = 1.0$ das benachbarte Bauteil. Wird nun durch gewöhnliche Verschiebungsnebenbedingungen das Kollisionsproblem in den Entwurfsprozess eingearbeitet, entsteht eine Struktur, welche gerade das benachbarte Bauteil nicht berührt. Hierzu wurde bei System 2 der Untergurt im Kollisionsgebiet in zwei Einzelstreben aufgeteilt. Die untere der beiden Streben ist in ihrer Dichteverteilung so ausgeführt, dass sie durch ihre exzentrische Belastung bezüglich der darüberliegenden Strebe eine Aufwärtsbewegung vollzieht. Die modifizierten Verschiebungsnebenbedingungen des Systems 3 löst die Problematik durch die Aussparung von Material. Die Größe der finiten Elemente steuert dabei die Dimension der Aussparung. Durch die entstehenden Abtriebskräfte der geknickten Untergurte links vom Kollisionsbereich besitzen die Systeme 2 & 3 weitere Zugstreben, welche wiederum Druckstützen zwischen den beiden Auflagerbereichen zur Folge haben.

Die Modifikation der Topologie des Systems 3 gegenüber System 1 hat lediglich eine geringe Auswirkung auf die Dehnungsenergie (siehe Abbildung 7.16). Hingegen wächst für System 3 die Zielfunktion um circa 15 % gegenüber System 1 an. Die Größe der Dehnungsenergie sowie die Komplexität des strukturellen Aufbaus des Systems 2 zeigen deutlich, welche Auswirkungen die Einbindung von klassischen Verschiebungsnebenbedingungen auf die Topologie haben kann. Welcher Typ von Nebenbedingung im Optimierungspro-

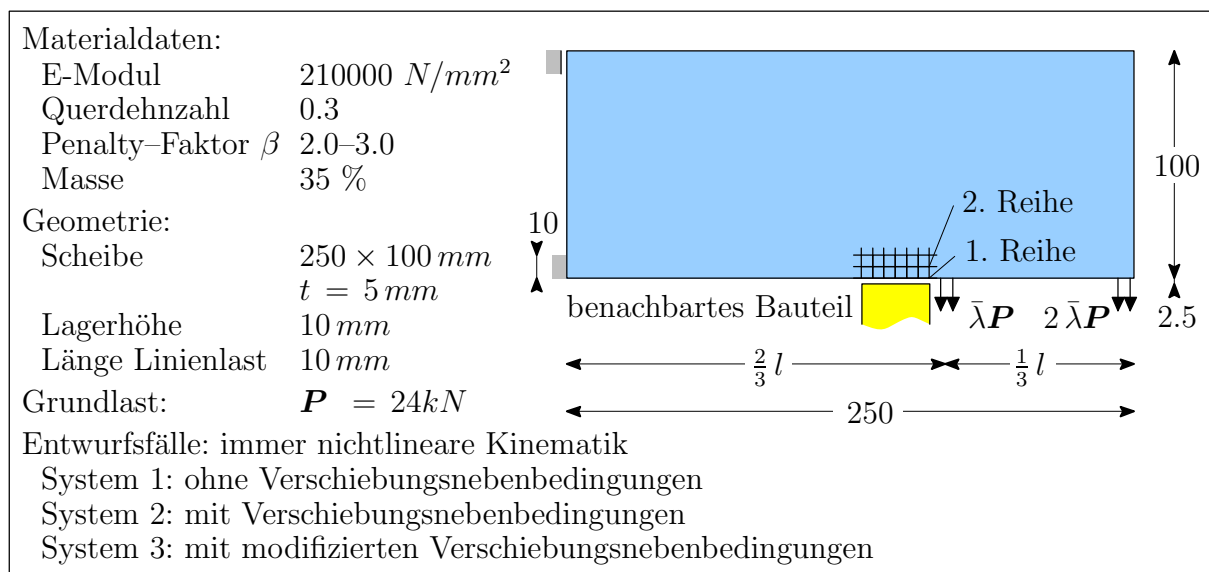


Abbildung 7.15: Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 5

blem sinnvoll ist, hängt vom Einzelfall ab und bedarf im Zweifelsfall vergleichender Untersuchungen.

Anmerkungen zur Generierung der Tragwerke

An dieser Stelle soll ergänzend erwähnt werden, dass bei der Generierung von System 2 gegenüber den anderen beiden Entwurfsaufgaben die Masse während des Optimierungsprozesses nicht konstant gehalten wurde. Hier war eine Ungleichheitsnebenbedingung der maximalen Masse in Kombination mit einer Startmasse von 100 % notwendig, da sonst die anfängliche extreme Verletzung der Verschiebungsnebenbedingungen für die Optimierungsstrategie, hier SCP, ein unüberwindbares Problem darstellt. Die Verschiebung der Struktur bei 100 % Materialfüllung auf der Höhe des benachbarten Bauteils liegt mit circa 2.3 mm leicht unterhalb des vorgegebenen Abstandes von 2.5 mm . Die anfängliche Ver-

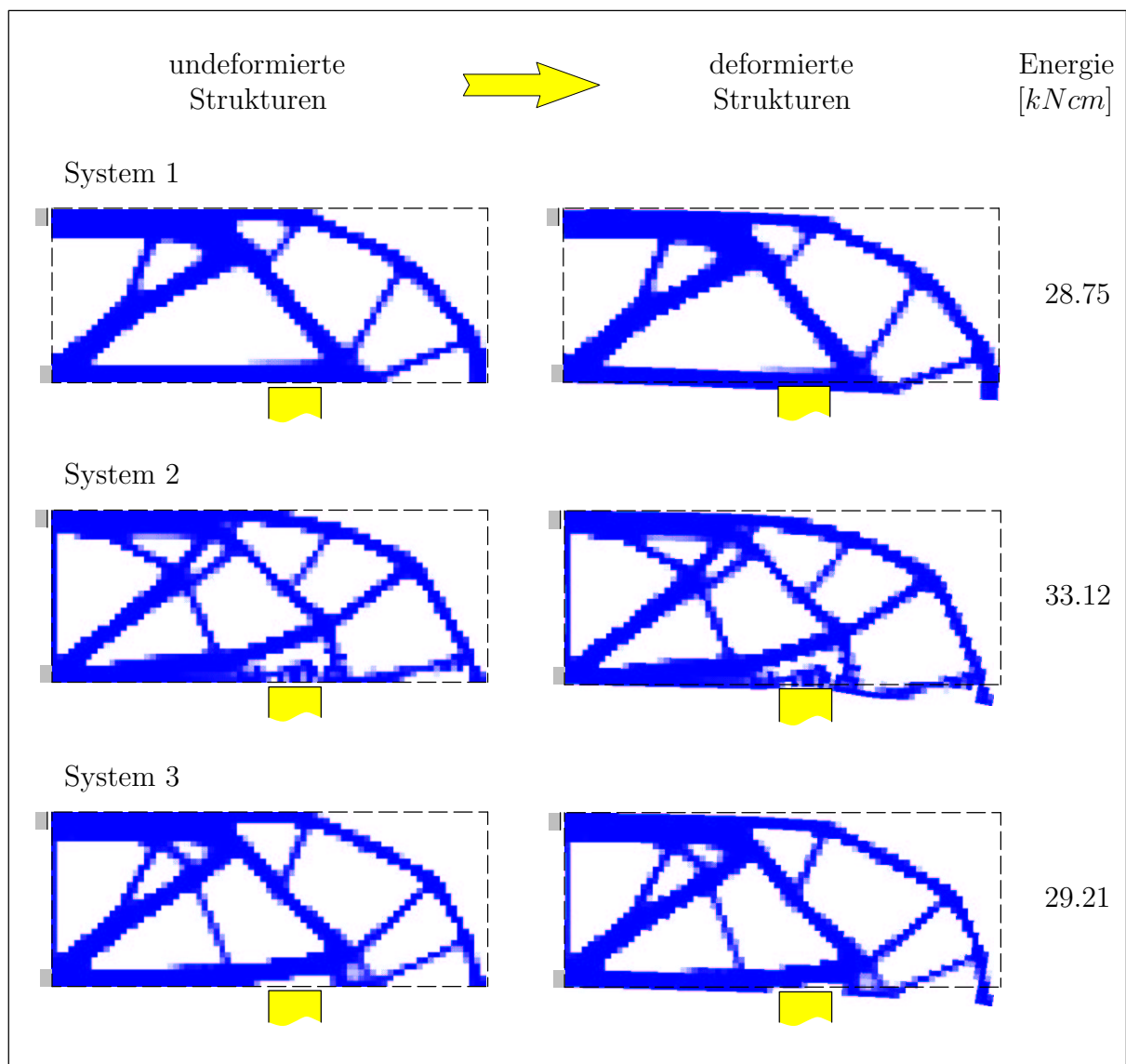


Abbildung 7.16: Generierte Strukturen des Beispiels 5 in ihrer undeformierten sowie deformierten Lage

letzung der Massennebenbedingung ist für den Optimierungsalgorithmus kein Problem. Durch die Kopplung der Verschiebungen mit den Dichten der umliegenden finiten Elemente (siehe Gleichung (7.27)) sind für System 3 die Nebenbedingungen, trotz anfänglicher großer Strukturdeformation, durch Herausnahme der Masse in den entsprechenden Elementen einfach zu erfüllen. Aus diesem Grund war hier eine Optimierung mit konstanter Masse möglich. Bei dieser Problemstellung hat sich ebenfalls bei weiteren numerischen Untersuchungen gezeigt, dass die mechanischen Entwurfskriterien auch im Falle von hochwertigeren Ansatzfunktionen der finiten Elemente mit der Filtermethode zu glätten sind. Dies begründet sich darin, dass ein anfänglicher Ausbau des Materials in den umliegenden finiten Elementen des kontrollierten FE-Knotens zur zügigen Erfüllung der Verschiebungsnebenbedingungen von allein nicht reversibel ist. Diesem Problem des lokalen Optimums kann wirkungsvoll durch Glättung der Sensitivitäten begegnet werden.

7.2.4 Beispiel 6: Gleichmäßige Pressung in Lagerfugen

Dieses Beispiel widmet sich der möglichen Kontrolle von Pressungen elastischer Lager anhand von Verschiebungsnebenbedingungen. Die Arbeit von MAUTE [78] enthält ein Beispiel, bei dem die Berücksichtigung von Spannungskriterien einen wesentlichen Einfluss auf den topologischen Aufbau einer abschnittsweise gelagerten Wandscheibe hat. Angelehnt an dieses Beispiel sind in Abbildung 7.17 für eine wandartige Struktur die Materialdaten, die Geometrie, die Belastung und zwei verschiedene Entwurfsaufgaben dargestellt. Die Wandscheibe wird mit zwei kurzen Streckenlasten mit einer Lastbreite von 0.2 m belastet und ist an mehreren Stellen vertikal durch Federn unterstützt. Diese Federn werden als Kontinuum anhand eines orthotropen Materials mit vernachlässigbarer Schubsteifigkeit modelliert. Ziel der beiden Entwurfsaufgaben ist jeweils die Minimierung der Dehnungsenergie (ermittelt anhand einer linearen Kinematik) unter Vorgabe einer konstanten Masse im Entwurfsraum. Für die erste Aufgabe sind die Auflager eindeutig definiert. Bei der zweiten Entwurfsaufgabe ist die Steifigkeitsverteilung der äußeren Lager

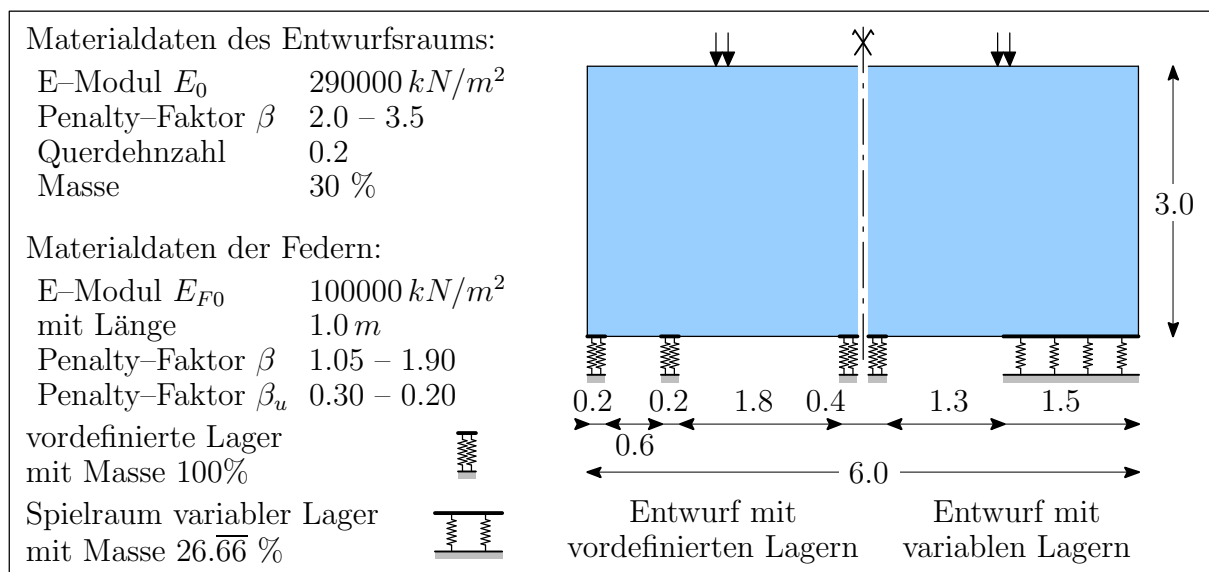


Abbildung 7.17: Materialdaten, Geometrie und Lasten des Beispiels 6

ebenfalls Bestandteil des Optimierungsproblems. Um hier eine eindeutige Lagerausbildung zu erhalten, findet eine Bestrafung des E-Moduls E_{F0} des orthotropen Materials anhand des SIMP-Ansatzes statt. Ein verwandter Ansatz enthält die Arbeit von BUHL [26]. Dort werden die Knoten anhand einzelner Federn gelagert. Die Bestimmung der effektiven Federsteifigkeiten ist äquivalent zu dem des SIMP-Ansatzes. In der Arbeit von BUHL wird aber lediglich die Lage und nicht die zugehörige Lagerpressung untersucht. In beiden untersuchten Fällen ist die Summe der Steifigkeiten aller elastischen Lager identisch. Zur Regulierung der Pressungsverteilung wird die vertikale Verschiebung der Auflagerfedern auf 5% über den gemittelten Verschiebungen (ohne Berücksichtigung der Bestrafung des orthotropen Materials) durch Nebenbedingungen beschränkt. Die Hälfte der Struktur ist mit 900, 8-knotigen, unterintegrierten Scheibenelementen diskretisiert. Das Material ist im Entwurfsraum isotrop. Weiterhin wird ein ebener Spannungszustand angenommen. Zur Diskretisierung der elastischen Lager kommen bei der ersten Entwurfsaufgabe 6 und bei der zweiten 17 Scheibenelemente gleichen Typs zum Einsatz. Wie bereits oben erwähnt, werden unter Zuhilfenahme eines orthotropen Materials mit sehr geringer Schubsteifigkeit die entkoppelten Federn modelliert. Der Entwurfsraum ist mit den elastischen Lagern lediglich in vertikaler Richtung gekoppelt. Zur Stabilisierung der Entwurfsaufgabe werden die Verschiebungen der Federn mit dem Faktor γ_u der Gleichung (7.27) für die Verschiebungsnebenbedingungen modifiziert. Zur Bestimmung der mittleren Dichte $\tilde{\rho}_m$ nach Gleichung (7.31) werden lediglich die Dichten

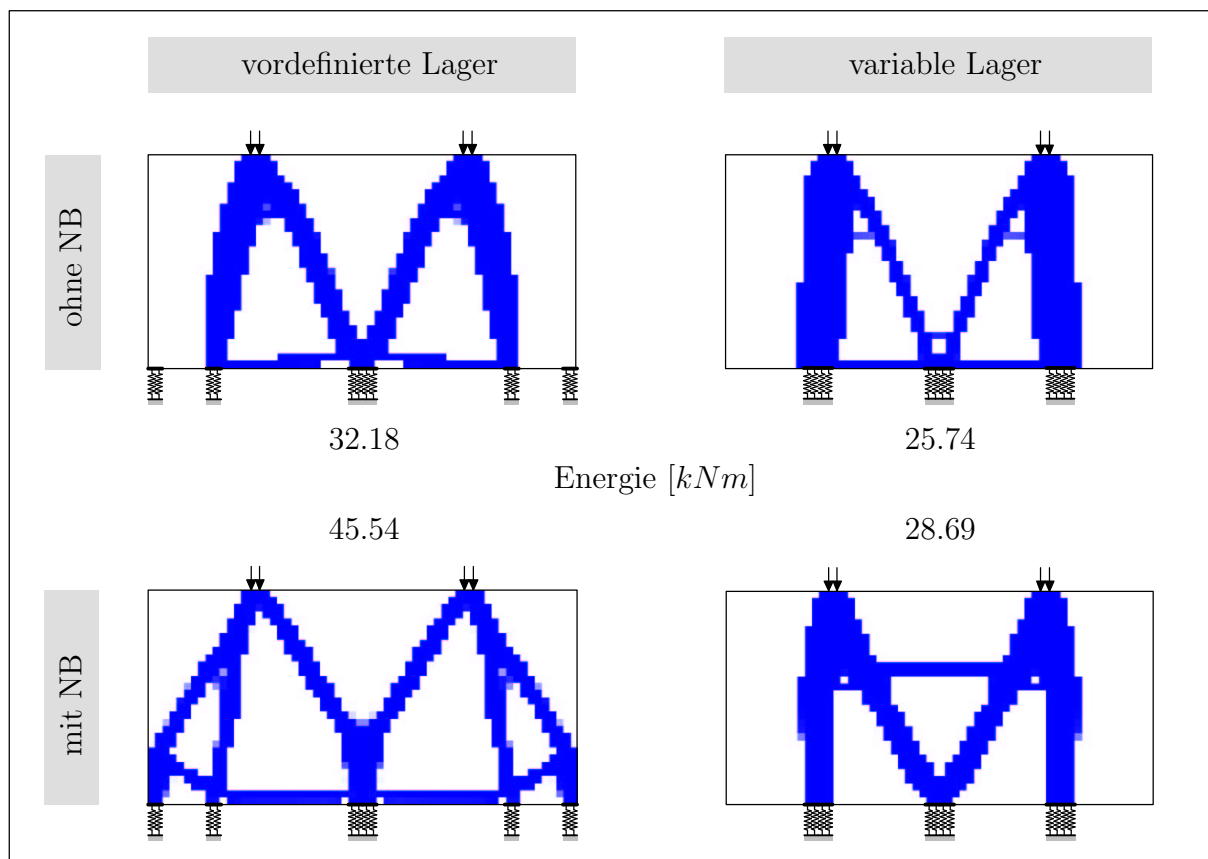


Abbildung 7.18: Generierte Strukturen des Beispiels 6

der benachbarten Elemente des Entwurfsraums einbezogen. Die Modifikation der Verschiebungen ist prinzipiell nicht notwendig, doch sie ermöglicht der Optimierungsstrategie (hier SQP) eine anfänglich einfache Erfüllung der Nebenbedingungen durch Herausnahme von Material an den Auflagern. Weiterhin wurden zur Stabilisierung des Entwurfsprozesses die Penalty-Faktoren für die E-Module des Entwurfsraums und die der Federn sowie β_u sukzessive im voranschreitenden Optimierungsprozess verschärft.

Der Einfluss der Nebenbedingungen beider Entwurfsaufgaben ist in Abbildung 7.18 dargestellt. Für das System mit fixen Lagern, jedoch ohne Nebenbedingungen, werden zwei voneinander unabhängige Sprengwerke generiert. Durch die fehlende Einbindung der äußeren, elastischen Lager übernehmen die eins weiter nach innen liegenden Federn den wesentlichen Teil der Belastung. Bei Berücksichtigung der Verschiebungsnebenbedingungen werden dagegen alle Lager in das System eingebunden. Die Pressung des inneren schmalen Lagers ist dabei auf den maximal zulässigen Wert (5% über dem gemittelten Wert) ausgenutzt.

Sind die äußeren Auflagerfedern ebenfalls variabel, entsteht ohne Nebenbedingungen eine topologisch äquivalente Struktur zu der Variante mit festen Lagern. Dabei werden die in ihrer Lage variablen Federn an die innere Grenze des vorgegebenen Spielraums (siehe Abbildung 7.17) platziert. Dies gilt weiterhin für den Fall, dass die Nebenbedingungen Bestandteil der Optimierungsaufgabe sind. Um die geforderte gleichmäßige Pressung zu bewerkstelligen, wird die Unterspannung der entkoppelten Sprengwerke zur Erzielung einer Durchlaufwirkung nach oben verschoben und die Steifigkeit der beiden inneren Druckdiagonalen erhöht.

Die erzielten Dehnungsenergien, welche ebenfalls in Abbildung 7.18 angegeben sind, spiegeln das Maß der Einschränkungen durch die Nebenbedingungen wider.

Kapitel 8

Generierung von flexiblen Strukturen

Nachdem im vorangegangenen Kapitel 7 Erweiterungen für die klassischen Anwendungen der Topologieoptimierung und die Auswirkung geometrisch nichtlinearer Effekte verdeutlicht wurden, wird nun der Entwurf von flexiblen Strukturen, im Weiteren auch Mechanismus genannt, diskutiert. Ein Mechanismus ist im technischen Bereich nach BROCKHAUS folgendermaßen definiert: ‘*Mechanismus: das Zusammenwirken der mechanischen Teile einer Maschine oder eines Werkes*’. Der in der englischen Sprache für nachfolgende Fragestellungen verwendete Begriff ‘compliant mechanism’ verdeutlicht, dass es sich hier nicht um die bekannten Mechanismen handelt, bei denen die mechanischen Teile durch Bolzen verbunden sind, sondern um Strukturen, die ihre Beweglichkeit durch die Flexibilität der einzelnen Strukturkomponenten erhalten.

Einen möglichen Zugang zur Generierung von flexiblen Mechanismen ist in der Arbeit von HOWELL & MIDHA [55] für ein Mehrschrittverfahren beschrieben. Im ersten Schritt wird der Entwurf eines Starrkörpermechanismus um Gelenkfedern erweitert. Im endgültigen Schritt wird dieser so genannte ‘Pseudo-Starrkörpermechanismus’ in einen flexiblen Mechanismus überführt. Bei diesem sind die einzelnen mechanischen Teile und deren Übergänge anhand von Balkenelementen diskretisiert. In allen Schritten finden Optimierungsschritte statt, wobei die Entwurfsvariablen Winkel benachbarter Bauteile und deren Abmessungen sind.

Die Methode der Topologieoptimierung bietet eine weitere Möglichkeit flexible Strukturen zu generieren. Eine erste Untersuchung erfolgte von ANANTHASURESH ET AL. [2] anhand der Zielfunktion die ‘Minimierung der Dehnungsenergie’. Die Arbeit von YIN & ANANTHASURESH [142] nimmt diesen Ansatz als Grundlage und erweitert ihn auf die Verwendung mehrerer Materialien. In den Arbeiten von LARSEN ET AL. [73] sowie SIGMUND [121] wurde der Sachverhalt zwischen geometrischer und mechanischer Übersetzung in die Zielfunktion aufgenommen. Auf diese beiden Begriffe wird in Abschnitt 8.1.1 noch näher eingegangen.

In der Veröffentlichung von BRUNS & TORTORELLI [24] sowie PEDERSEN ET AL. [93] wird bei der Optimierung von Mechanismen zusätzlich die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt. SIGMUND [120] stellt die Generierung von thermisch betriebenen Mechanismen vor. Die Erweiterung auf elektro-thermo-mechanische Antriebe ist in seinen Veröffentlichungen [122] und [123] für ‘Ein-Material-’ bzw. in [124] für ‘Zwei-Material-’

Strukturen' enthalten. In den Arbeiten [123] und [124] sind ebenfalls geometrisch nichtlineare Effekte während des Entwurfes berücksichtigt. Diese Art des Antriebs findet hauptsächlich bei 'Micro-Electro-Mechanical-Systems' (MEMS) Anwendung.

Zwei unterschiedliche Optimierungsprobleme werden in dieser Arbeit näher betrachtet. Das erste beschäftigt sich mit Strukturen, welche die aufgewendete Arbeit eines mechanischen Antriebs (Aktuator) möglichst effektiv auf ein Werkstück überträgt. Die Steifigkeit dieses Werkstückes wird hier durch eine lineare Feder repräsentiert. Da es sich um den Transport von erbrachter Arbeit seitens des Aktuators zu dem Werkstück handelt, soll dieses Entwurfsproblem mit dem Namen 'Transport-Mechanismus' verbunden werden. Dabei liegt ein weiteres Augenmerk auf dem Einfluss der linearen bzw. nichtlinearen Kinematik.

Motiviert durch das Beispiel des Abschnitts 7.1.7, bei dem eher unfreiwillig eine anfänglich quasi-kinematische Struktur generiert wurde, ist das Ziel der zweiten Entwurfsaufgabe, den Deformationsprozess einer Struktur zu kontrollieren. Insbesondere die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität ermöglicht den Entwurf von Mechanismen, welche beliebigen, also auch gekrümmten Bahnen folgen können. Zur Erzielung möglichst eindeutiger Materialverteilungen werden zusätzliche Entwurfskriterien diskutiert.

In den nachfolgenden Abschnitten werden für die beiden oben erläuterten Optimierungsaufgaben die Zielfunktionen und Nebenbedingungen eingeführt und diskutiert. Anhand von Beispielen wird die Tauglichkeit der Kriterien verifiziert. In einem abschließenden Abschnitt wird auf die Hintergründe beobachteter numerischer Probleme und einem Lösungsvorschlag eingegangen.

8.1 Entwurf von Transport-Mechanismen

Bei diesem Typ von Entwurfsaufgabe handelt es sich um den 'Transport von Arbeit' von einer Eingabestelle (Aktuator) zu einer Ausgabestelle (Werkstück, hier im Weiteren eine lineare Feder mit der Steifigkeit k_W) mit möglichst geringem 'Verlust'. Der Begriff 'Verlust' ist hier nicht im Sinne von Dissipation zu verstehen, sondern als eine Speicherung in Form von Dehnungsenergie in der für den Transport notwendigen Struktur. Die Entwurfsaufgabe ist zur Verdeutlichung in Abbildung 8.1 skizziert.

Nach einer Diskussion möglicher Entwurfskriterien und der Formulierung der Sensitivitätsanalyse findet eine Verifizierung des vorgestellten Entwurfsproblems anhand eines Verschiebungs-Inverter-Mechanismus statt.

8.1.1 Entwurfskriterien

Im Weiteren wird die Formulierung des Optimierungsproblems behandelt. Würde die Zielfunktion, für das in Abbildung 8.1 dargestellte System, die Maximierung der in der linearen Feder gespeicherten Energie Ψ_W sein, wäre eine Richtungsvorgabe der Verschiebung u_W nur durch eine Nebenbedingung möglich. Aus diesem Grund wird die Verschiebung u_W maximiert, indem die Differenzverschiebung zu einem in keinem Fall erreichbaren Verschiebungswert \check{u}_W minimiert wird:

$$\max_{\mathbf{s}} \Psi_W = \max_{\mathbf{s}} \left(\frac{1}{2} R_W \cdot u_W \right) = \max_{\mathbf{s}} \left(\frac{1}{2} k_W \cdot u_W^2 \right) \implies \min_{\mathbf{s}} \left(\check{u}_W - u_W \right) \quad (8.1)$$

Wie dieses Ziel erreicht werden kann, soll zunächst auf der Basis eines linearen Strukturverhaltens diskutiert werden. Bei dieser Annahme ist die geleistete Arbeit des Aktuators:

$$\Psi_A = \frac{\lambda}{2} P_A \cdot u_A \quad (8.2)$$

und mit der im System gespeicherten Dehnungsenergie Ψ_{el} folgt:

$$\Psi_A = \Psi_{el} + \Psi_W \quad \Longrightarrow \quad \Psi_W = \Psi_A - \Psi_{el} \quad (8.3)$$

Dadurch lässt sich die Aussage von Gleichung (8.1) unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens von Ψ_{el} wie folgt umformulieren:

$$\max_{\mathbf{s}} \Psi_W = \max_{\mathbf{s}} \Psi_A - \min_{\mathbf{s}} \Psi_{el} \quad (8.4)$$

Für die weitere Herleitung wird folgender Zusammenhang benötigt. Für einen Starrkörpermechanismus ist die gespeicherte Dehnungsenergie $\Psi_{el} = 0$. Daraus folgt mit Gleichung (8.4), dass die Arbeit des Aktuators gleich der gespeicherten Energie im Werkstück ist. Dadurch lässt sich unter Zuhilfenahme von Gleichung (8.1) und (8.2) folgender Zusammenhang zwischen geometrischer und mechanischer Übersetzung angeben:

$$\underbrace{\left(\frac{u_A}{u_W} \right)}_{\text{geometrische Übersetzung}} = \underbrace{\left(\frac{\lambda \cdot P_A}{R_W} \right)^{-1}}_{\text{mechanische Übersetzung}} \quad (8.5)$$

Das in Gleichung (8.5) angegebene Verhältnis stellt folglich einen oberen Grenzwert dar und kann von elastischen bzw. flexiblen Mechanismen niemals erreicht werden. Aufgrund der Annahme in Gleichung (8.2) gilt die Gesetzmäßigkeit von Gleichung (8.5) nur für lineare Last-Verschiebungs-Beziehungen.

Für die Generierung von flexiblen Mechanismen kann die Lösung der mit Gleichung (8.4) beschriebenen Entwurfsaufgabe nicht darin liegen, die Arbeit des Aktuators Ψ_A zu maximieren, da beliebig große Kräfte und/oder Verschiebungen von Aktuatoren in der Regel nicht erbracht werden können. Für die nun folgende Diskussion ist es von großer Bedeutung, dass die Deformation der Struktur in die beiden Anteile Starrkörperbewegung und

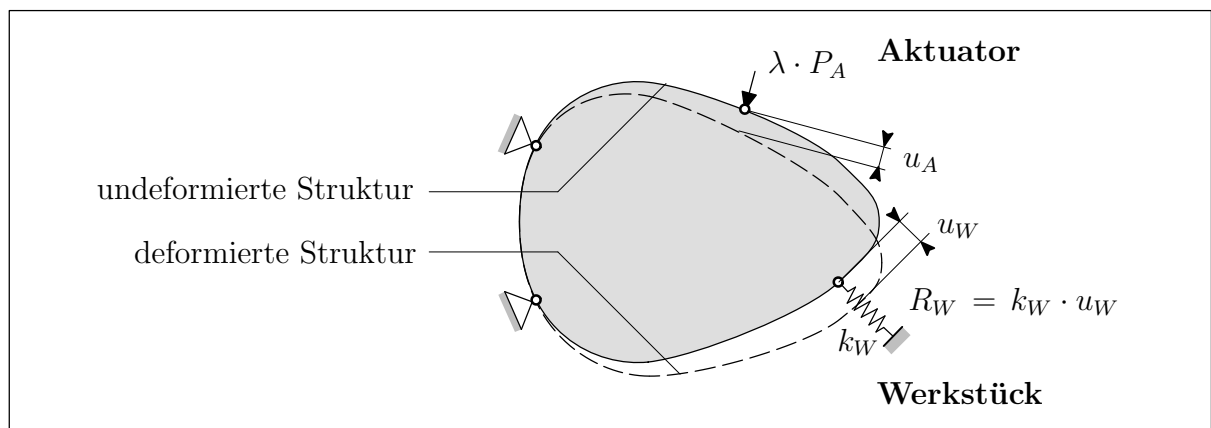


Abbildung 8.1: Prinzipskizze des Entwurfsproblems von Transport-Mechanismen

Dehnung aufteilbar ist. Lediglich die Dehnungen liefern einen Beitrag für den Energieanteil Ψ_{el} . Würde für die Entwurfsaufgabe am Aktuator eine Last $\bar{\lambda} \cdot P_A$ vorgegeben, so könnte folglich anhand großer Verschiebungen am Aktuatorangriffspunkt die erbrachte Arbeit maximiert werden, ohne dabei zwangsläufig einen großen Wert für Ψ_{el} zu erhalten (kleine Aktuatorkraft \rightarrow geringe Spannungen; kleine Aktuatorkraft bei großer Aktuatorverschiebung \rightarrow großes Ψ_W). Aus diesem Grund wurde in PEDERSEN ET AL. [93] bei vorgegebener Last die Verschiebung des Aktuators anhand einer Nebenbedingung limitiert.

Wird für den Aktuator nicht eine Last, sondern eine Verschiebung \hat{u}_A vorgegeben, kann die Leistung des Aktuators nur durch Erhöhung der Aktuatorkraft erfolgen. Dies ist allerdings nur dann möglich, wenn das Werkstück in Kombination mit der Struktur einen Widerstand aufweist. Die reine Erhöhung des Strukturwiderstandes ist für die Entwurfsaufgabe der Gleichung (8.4) nicht sinnvoll, da die erbrachte Arbeit des Aktuators aufgrund der erhöhten Dehnungsenergie nicht die Auslenkung der Feder (Werkstück) maximiert. Hierdurch wächst die notwendige Kraft des Aktuators zur Erzielung der vorgeschriebenen Verschiebung \hat{u}_A nicht über alle Maße, sondern nur solange bis die Steigerung der Aktuatorarbeit nicht komplett in Dehnungsenergie umgewandelt ist. Deshalb wird im Weiteren die Entwurfsaufgabe (8.4) unter Vorgabe der Aktuatorverschiebung \hat{u}_A und der Masse \tilde{m} der Struktur bearbeitet, da prinzipiell keine zusätzliche mechanische Nebenbedingung notwendig ist. Sollte sich nach einem Optimierungslauf herausstellen, dass der vorgesehene Aktuator die Leistung nicht erbringt, kann das Optimierungsproblem um eine Begrenzung der Aktuatorlast erweitert werden. Die Deformationsgröße des Werkstückes hängt von dem Verhältnis der Federsteifigkeit zu der möglichen Struktursteifigkeit ab, da dieses die Verteilung der Aktuatorleistung auf die beiden Komponenten ‘Struktur’ und ‘Feder’ steuert.

Liegt dem Entwurfsprozess eine nichtlineare Kinematik zugrunde, verliert die lineare Beziehung zwischen Last und Verschiebung der Gleichung (8.2) an Gültigkeit und muss in der allgemeinen Form aufgestellt werden:

$$\Psi_A = \int_0^{\hat{u}_A} \lambda(u) \cdot P_A \, du \quad (8.6)$$

Die prinzipielle Aussage der vorangegangenen Diskussion bei Vorgabe der Auslenkung des Aktuators auf den Wert \hat{u}_A gilt jedoch weiterhin. Die Gültigkeit der Beziehung zwischen geometrischer und mechanischer Übersetzung der Gleichung (8.5) ist im Falle einer nichtlinearen Kinematik lediglich für die Umgebung der undeformierten Konfiguration gültig. Damit lässt sich das Optimierungsproblem unter Beschränkung einer maximal möglichen Masse wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}} \left(\tilde{u}_W - u_W \right) \\ & \sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| \, d\Omega \right] - \tilde{m} \leq 0 \\ & 0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \end{aligned} \quad (8.7)$$

Warum sich für diesen Typ von Optimierungsproblem eine Ungleichheitsnebenbedingung für die Masse eher eignet als die übliche Gleichheitsnebenbedingung, ist in dem Beispiel

des Abschnitts 8.1.4 erläutert. Die Entwurfsvariablen \mathbf{s} sind hier die Dichten der finiten Elemente (Topologieoptimierung).

8.1.2 Sensitivitätsanalyse

Das einzige mechanische Kriterium der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Entwurfsaufgabe ist die Verschiebung u_W an der Ausgabestelle. In Abschnitt 7.2.2 wurde bereits die Sensitivitätsanalyse für Verschiebungsgrößen einer im Entwurfsprozess konstanten Laststufe erläutert. Darauf aufbauend werden die notwendigen Erweiterungen angegeben, wenn statt einer Last eine Verschiebung während des Entwurfsprozesses konstant ist. Mit dem bereits eingeführten Vektor \mathbf{I}_{u_i} zur Herausfilterung der Verschiebungsgröße u_i ($i = A, W$) aus dem Vektor der diskreten Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ (die Kennzeichnung $(\hat{\cdot})$ verdeutlicht die Beziehung zu einem vorgeschriebenen Verschiebungsniveau eines kontrollierten Knotens) gestaltet sich Gleichung (7.33) wie folgt:

$$\tilde{u}_i = \mathbf{I}_{u_i}^T \hat{\mathbf{u}} - \underbrace{\boldsymbol{\mu}_i^T [\hat{\mathbf{R}} - \hat{\lambda} \mathbf{P}_A]}_{= \mathbf{0}} \quad (8.8)$$

wobei $\hat{\lambda} \mathbf{P}_A$ die aufgebrachte Last am Aktuator ist. Unter Berücksichtigung der nun veränderlichen Laststufe des Aktuators ergibt sich die totale Ableitung der Gleichung (8.8) zu:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{u}_i = \mathbf{I}_{u_i}^T \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\mu}_i^T \left[\hat{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} \mathbf{P}_A \right] \quad (8.9)$$

Der Vektor von LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}_i$ wird genutzt, um die Ermittlung der Sensitivität des Verschiebungsvektors zu vermeiden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{u}_i = -\boldsymbol{\mu}_i^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} \mathbf{P}_A \right] \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_i = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{I}_{u_i} \quad (8.10)$$

Für die Bestimmung der Sensitivität des von den Entwurfsvariablen abhängigen Lastniveaus $\hat{\lambda}$ wird für \tilde{u}_i der Gleichung (8.10) die im Entwurfsprozess konstante Aktuatorverschiebung u_A eingesetzt und anschließend nach der gesuchten Sensitivität des Lastniveaus $\hat{\lambda}$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} \tilde{u}_A = 0 &= -\boldsymbol{\mu}_A^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} \mathbf{P} \right] \\ &\quad \downarrow \\ \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} &= \boldsymbol{\mu}_A^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} \left[\boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{P} \right]^{-1} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_A = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{I}_{u_A} \quad (8.11)$$

Mit nun bekanntem $\nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda}$ kann die Gleichung (8.10) zur Ermittlung des Gradienten der Ausgabeverschiebung u_W verwendet werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{u}_W = -\boldsymbol{\mu}_W^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} \mathbf{P} \right] \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_W = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{I}_{u_W} \quad (8.12)$$

Da die adjungierten Lastvektoren $\mathbf{I}_{u_{A,W}}$ direkt vorliegen und die Vektorprodukte $\boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{P}$ und $\boldsymbol{\mu}_W^T \mathbf{P}$ nach dem Lösen der beiden rechten Seiten der Gleichungen (8.11) und (8.12) auf Strukturebene erfolgen, ist lediglich einmal die Ableitung $\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}}$ auf Elementebene zu bestimmen. Die notwendigen Skalar- und Vektorprodukte zur Bestimmung von $\nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda}$ und $\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{u}_W$ können nun hintereinander auf Elementebene erfolgen.

8.1.3 Algorithmische Umsetzung

Wie bereits in Abschnitt 7.1.3 beschrieben, ist auch hier eine Reduzierung der Rechenzeit möglich, indem nach der Aktualisierung der Entwurfsvariablen keine vollständige Pfadanalyse erfolgt. Die Ungleichgewichtskräfte, welche durch die Entwurfsvariablen des Optimierungsschrittes $k + 1$ bei festgehaltenem Verschiebungsfeld des Schrittes k entstehen, werden für die vorgegebene Verschiebung des Aktuatorpunktes anhand der Korrekturiteration wieder ausgeglichen. Treten Konvergenzprobleme auf, so ist, wie in Abschnitt 7.1.3 erläutert, ein Zwischenschritt für die Modifikation der Entwurfsvariablen möglich. Führt dies ebenfalls nicht zum Erfolg, findet eine Neuberechnung des Pfades statt. Die Schrittweitensteuerung für die vollständige Pfadanalyse erfolgt in diesem Fall aus Gründen der Effizienz adaptiv, da sich das Strukturverhalten während des Entwurfsprozesses stark ändert. Diese komplette Neuanalyse war in den untersuchten Beispielen nur für wenige Optimierungsschritte notwendig.

Es treten dann Konvergenzprobleme auf, wenn sich in der Struktur ‘Quasi-Gelenke’ ausbilden. Der Begriff ‘Quasi-Gelenk’ wird im Weiteren dafür verwendet, wenn zwei steife finite Elemente über ihre Eckknoten verbunden sind und die weiche Umgebung eine Flexibilität der Struktur ermöglicht. Die Charakterisierung ‘Quasi’ dient der Kennzeichnung, da der kontinuierliche Ansatz der materiellen Topologieoptimierung die Ausbildung von Gelenken nicht beinhaltet. Die Ursachen der Konvergenzprobleme und ein möglicher Lösungsvorschlag sind detailliert in Abschnitt 8.3 beschrieben. Die Diskussion erfolgt dort unabhängig vom Typ der Entwurfsaufgabe, da die Konvergenzprobleme in der vorliegenden Arbeit sowohl für Transport- als auch bei Pfadverfolgungsmechanismen auftraten.

8.1.4 Beispiel 7: Verschiebungs-Inverter-Mechanismus

Die in Abschnitt 8.1.1 erläuterte Entwurfsaufgabe, die Verschiebung an der Ausgabestelle bei vorgegebener Aktuatorverschiebung zu maximieren, wird anhand der in Abbildung 8.2 gezeigten Struktur untersucht. Neben der Geometrie sind die Materialdaten angegeben. Diese sind der Arbeit von PEDERSEN ET AL. [93] entnommen. Im Folgenden werden vier Systeme untersucht. Ziel aller Entwurfsaufgaben ist die Maximierung der Federdehnung für eine vorgegebene Aktuatorverschiebung von $7.5 \mu\text{m}$. Bei System 1 liegt dem Entwurfsprozess eine lineare Strukturanalyse zugrunde. Die Steifigkeit der Feder beträgt $k_W = 4 \cdot 10^{-5} \text{ N}/\mu\text{m}$. System 2 wird gegenüber dem ersten Optimierungsproblem um eine nichtlineare Kinematik erweitert. Für System 3 und System 4 wurde gegenüber den ersten beiden Problemstellungen die Federsteifigkeit um das 10fache auf $k_W = 4 \cdot 10^{-4} \text{ N}/\mu\text{m}$ angehoben. Beim Entwurf liegt dem System 3 eine lineare und dem System 4 eine nichtlineare Kinematik zugrunde. Die Untersuchungen mit höheren Federsteifigkeiten dienen der Herausarbeitung des Einflusses der Federsteifigkeit im Verhältnis zur möglichen Struktursteifigkeit.

Aus Symmetriegründen fand die Analyse am halben System statt. Mit 4014, 4-knotigen, isoparametrischen, 2×2 integrierten Scheibenelementen wurde der Entwurfsraum diskretisiert. Zudem wurde von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen. Da bilineare Ansatzfunktionen für die Verschiebungen der finiten Elemente gewählt wurden, fand ei-

ne Glättung der Zielfunktion statt (siehe Abschnitt 5.1). Die Bereiche an den Auflagern, am Aktuator und an der Ausgabestelle waren unveränderlich. Dies hat sich für den Entwurfsprozess als günstig erwiesen, da in den ersten Optimierungsschritten an diesen Stellen die anfänglich sehr hohen Sensitivitäten zu dominant gewesen wären. Insbesondere in der Umgebung des Aktuator- und des Federangriffspunktes würde sich die Steifigkeit sofort stark reduzieren. Weiterhin hat es sich für die ersten Optimierungsschritte als günstig erwiesen, die Masse nicht konstant, sondern variabel anhand einer Ungleichheitsnebenbedingung mit vorgegebener Maximalmasse zu definieren. Dadurch wird der Optimierungsstrategie die Möglichkeit gegeben durch anfängliche Herausnahme von Material die Flexibilität der Struktur zu erhöhen.

Die generierten Strukturen der beiden ersten Entwurfsaufgaben sind in ihrer undefor-mierten und deformierten Lage in Abbildung 8.3 dargestellt. Die verschiedenen Konfi-gurationen des Systems 1 sind mit \circ und die des Systems 2 mit \triangle gekennzeichnet. System 1 erzielt auf der Basis der linearen Theorie bei einer Aktuatorverschiebung von $u_A = 7.5 \mu m$ die Ausgabeverschiebung $u_W = 80.55 \mu m$. Damit ist die geometrische Übersetzung 10.74. Wird in einer Nachlaufuntersuchung die geometrische Nichtlinea-rität berücksichtigt, so ‘blockiert’ der Mechanismus bei einer Aktuatorauslenkung von $u_A \approx 4.0 \mu m$ (siehe das durch $\textcircled{1}$ gekennzeichnete Bild in Abbildung 8.3). Der Begriff blockieren wird für den Sachverhalt verwendet, dass die oberen Streben bei $u_W \approx 20.0 \mu m$ eine horizontale Lage einnehmen und dadurch die vertikale Relativverschiebung der bei-den Strebenenden nicht gesteigert werden kann. Durch weiteres Ausfahren des Aktuators lässt sich zwar die Ausgabeverschiebung rechnerisch steigern, doch die großen Deforma-tionen in Teilbereichen der Struktur, sind bezüglich der Ertragbarkeit seitens des Ma-terials zu hinterfragen (siehe das durch $\textcircled{2}$ gekennzeichnete Bild in Abbildung 8.3). Es soll hier angemerkt werden, dass es sich bei dem Ausweichen der Druckstreben nicht um ein Stabilitätsphänomen, sondern um ein Spannungs- bzw. Steifigkeitsproblem handelt ($\det \mathbf{K}_T > 0$ für $0 < u_A \leq 7.5 \mu m$). Das Verhalten zwischen Ein- und Ausgabeverschiebung ist in dem oberen Diagramm dargestellt. Wird im Optimierungsprozess nun das

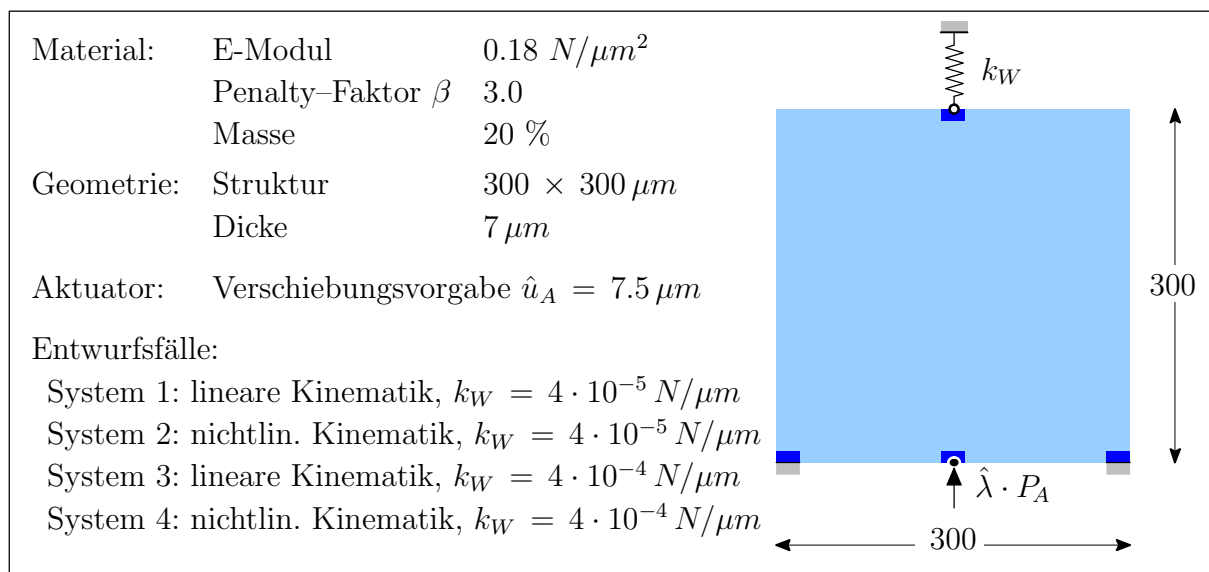


Abbildung 8.2: Materialdaten, Geometrie und Entwurfsvfälle des Beispiels 7

nichtlineare Strukturverhalten berücksichtigt, ergibt sich eine veränderte Struktur (siehe das durch $\hat{\Delta}$ gekennzeichnete Bild in Abbildung 8.3). Die anfängliche geometrische Übersetzung ist mit 3.74 deutlich unter der des linear optimierten Tragwerkes, doch die Struktur des Systems 2 blockiert nicht bis zu der vorgegebenen Aktuatorverschiebung $u_A = 7.5 \mu m$. Die erzielte Ausgabeverschiebung ist mit $u_W = 44.29 \mu m$ deutlich höher als die des optimierten linearen Systems 1. Die Aktuatorkraft über die Aktuatorverschiebung ist für beide Systeme im unteren, mittleren Diagramm aufgetragen. Dabei steigt für System 1 gegenüber System 2 die Antriebskraft wesentlich schneller an. In den beiden äußeren Diagrammen sind für beide Strukturen die verschiedenen Arbeitsanteile über die Aktuatorverschiebung u_A aufgetragen. Dabei ist auffallend, dass für System 1 die Dehnungsenergie zügig ansteigt. Bei dem direkten Vergleich der Diagramme beider Systeme sind die unterschiedlichen Skalen zu beachten. Bei System 2 ist erst ab $u_A \approx 6.5 \mu m$ ein

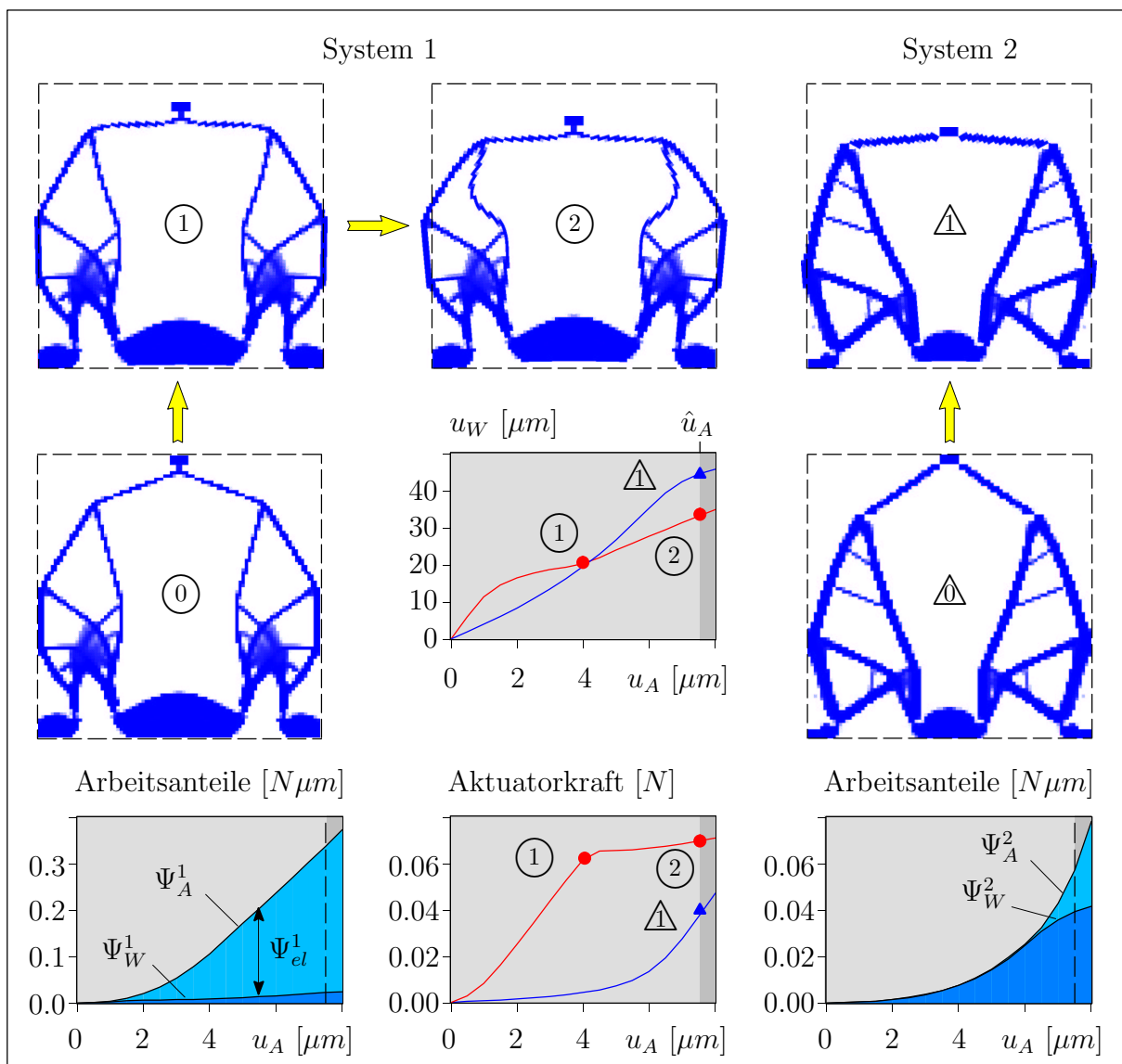


Abbildung 8.3: Ergebnisse für System 1 & 2 des Beispiels 7 und deren geometrisch nicht-lineare Verhaltensweisen

sichtbarer Anteil der geleisteten Arbeit des Aktuators als Dehnungsenergie in der Struktur gespeichert.

Die generierten Strukturen mit erhöhten Federsteifigkeiten sind in Abbildung 8.4 dargestellt. Die Ergebnisse des Systems 3 sind mit \odot und die von System 4 mit \triangle gekennzeichnet. Die Unterschiede sind, wie erwartet, für System 3 & 4 wesentlich geringer als die bei System 1 & 2. Der linear optimierte Mechanismus blockiert bei der Aktuatorverschiebung $u_A = 7.5 \mu m$ noch nicht und erreicht eine Ausgabeverschiebung von $26.11 \mu m$ (siehe oberes Diagramm und Bild gekennzeichnet mit \odot). Der nichtlinear optimierte Mechanismus erzielt zwar nur einen unwesentlich höheren Wert ($u_W = 26.75 \mu m$), doch ist dieser noch deutlich von einer Blockierung entfernt (siehe Bild gekennzeichnet mit \triangle). Die steilere Stellung der oberen Streben bei vorgeschriebener Aktuatorverschiebung wirkt sich auf die Aktuatorkraft positiv aus (siehe mittlere Spalte, unteres Diagramm in Abbildung 8.4). Die Auswirkung auf die verschiedenen Arbeitsanteile sind in den beiden äußeren Dia-

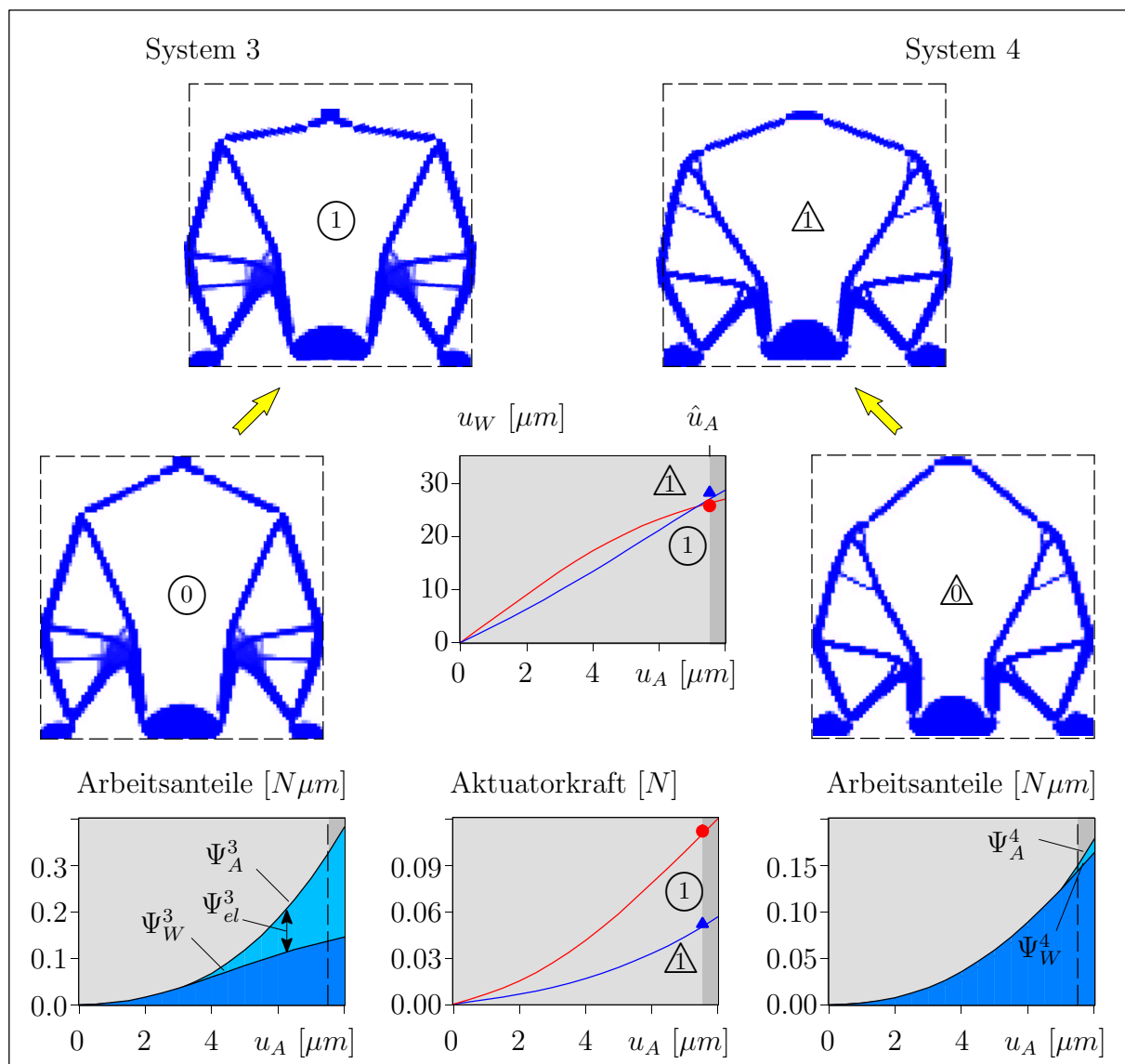


Abbildung 8.4: Ergebnisse für System 3 & 4 des Beispiels 7 und deren geometrisch nicht-lineare Verhaltensweisen

grammen dargestellt. Die gespeicherte Energie in der Feder ist für beide Entwurfssfälle zwar annähernd gleich, doch die geleisteten Arbeiten der Aktuatoren unterscheiden sich deutlich.

Die vorgestellten Untersuchungen zeigen eindrucksvoll, dass bei vorgegebener Aktuatorverschiebung die Aktuatorkraft zur Steigerung der geleisteten Arbeit nicht über alle Maße wächst. Vielmehr zeigen insbesondere die nichtlinear optimierten Strukturen einen sehr geringen Anteil an gespeicherter Dehnungsenergie. Hierdurch kommt man dem Ideal eines Starrkörpermechanismus sehr nahe. Vergleicht man die Entwurfsaufgaben bezüglich der Federsteifigkeit, so fällt auf, dass die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität umso relevanter wird je flexibler das Werkstück ist. Dieser Sachverhalt beruht darauf, dass größere Verschiebungen an der Ausgabestelle möglich sind. Vor allem durch die Berücksichtigung des tatsächlich vorhandenen hochgradig nichtlinearen Last-Verschiebungs-Verhaltens im Entwurfsprozess kann ein frühzeitiges Blockieren des Mechanismus vermieden werden.

Die ‘Quasi-Gelenke’ zweier benachbarter Bauteile, welche große Winkelveränderungen vollbringen müssen, werden immer durch zwei finite Elemente über Eck ausgebildet. Insbesondere die niedrig gewählten Ansatzfunktionen der Elemente begünstigen diese Bestrebung. Die tatsächlich vorhandene Beanspruchung in diesen Regionen ist dadurch nur unbefriedigend abgebildet. Zur Detaillierung der flexiblen Übergangsbereiche wäre eine Formoptimierung unter Berücksichtigung des tatsächlichen Materialverhaltens bei großen Verzerrungen notwendig.

8.2 Entwurf von Pfadverfolgungsmechanismen

Im vorangegangenen Abschnitt stand die Maximierung einer Ausgabeverschiebung bzw. die Maximierung der gespeicherten Dehnungsenergie in einem Werkstück zur Diskussion. Im Weiteren wird zur Generierung von Pfadverfolgungsmechanismen eine mögliche Entwurfsformulierung untersucht. Dabei steht die Einhaltung einer vorgegebenen Bahn im Vordergrund. Nach der Erörterung weiterer relevanter Entwurfskriterien zur Erzielung möglichst eindeutiger ‘0–1’ Materialverteilungen wird auf die Sensitivitätsanalyse und auf algorithmische Aspekte eingegangen. Anhand eines Greifmechanismus findet die Verifikation statt.

8.2.1 Entwurfskriterien

An Pfadverfolgungsmechanismen wird die Anforderung gestellt, dass die Deformation relevanter, ausgewählter Stellen einem vorgeschriebenen Pfad folgen. Tritt der Mechanismus nach einer vorgegebenen Deformation in Kontakt mit einem Werkstück, soll die Struktur weiterhin Steifigkeit aufweisen. Dadurch können Kräfte vom Aktuator auf das Werkstück übertragen werden. Zur Sicherstellung einer ausreichenden Flexibilität des Mechanismus wird die Aktuatorkraft limitiert.

Im Folgenden wird zur Generierung derartiger Mechanismen auf die verschiedenen Entwurfskriterien im Detail eingegangen.

Kontrolle der Deformation

Der Kontrolle des vorgeschriebenen Deformationsverhaltens kommt im Entwurfsprozess eine bedeutende Rolle zu. Deswegen wird für verschiedene diskrete Aktuatorverschiebungen die Lage der zu kontrollierenden Punkte im Raum berechnet. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 8.5 skizziert. Anschließend findet eine Abstandsberechnung zwischen der vorgegebenen Solllage und der vorhandenen Istlage für verschiedene Aktuatorstellungen statt.

Neben der in PEDERSEN ET AL. [93] vorgestellten Kontrolle bezüglich der Fixpunkte wurden, wie bereits in HOCHHOLDINGER [54] beschrieben, weitere Abstandskriterien implementiert. In Abbildung 8.6 ist für den 2-D Fall der Sachverhalt für einen Fixpunkt, eine Linie, einen Kreisbogen und für eine Relativverschiebung verdeutlicht. Wegen des begrenzten Definitionsbereichs findet für Linien und Kreisbögen eine Unterscheidung des Abstandes zwischen den Endpunkten und dem Normalenabstand statt. Der kleinste Abstand ist im Weiteren maßgebend. Wird ein Linienzug definiert, entfallen die Abstandsberechnungen zu den inneren Knoten. Die Berücksichtigung von Linien ermöglicht gegenüber den Fixpunkten der Optimierungsstrategie eine größere Freiheit beim Entwurf des Mechanismus. Dies gilt ebenfalls für das Kriterium der Relativverschiebung. Hier wird nicht mehr wie bei den vorangegangenen Abstandskriterien die Einhaltung bezüglich einer Raumkoordinate gefordert, sondern die relative Verschiebung zweier Knoten. Dies kann insbesondere dann von Interesse sein, wenn die relative Lage zweier Punkte untereinander für den Entwurf von größerer Bedeutung ist, als jene der absoluten Lage. Ein typisches Beispiel ist die Kontrolle der Parallelverschiebung von Greifbacken.

Wie die einzelnen Abstandsbeträge $|d|$ in die Definition des Optimierungsproblem eingehen ist weiter unten beschrieben.

Steifigkeitskriterien

Die alleinige Kontrolle der Strukturdeformation ist für einen Pfadverfolgungsmechanismus mit klarer und steifer '0-1' Materialverteilung nicht ausreichend. Dieser Sachverhalt kann an zwei topologisch und geometrisch äquivalenten, aber in den Dehnsteifigkeiten der

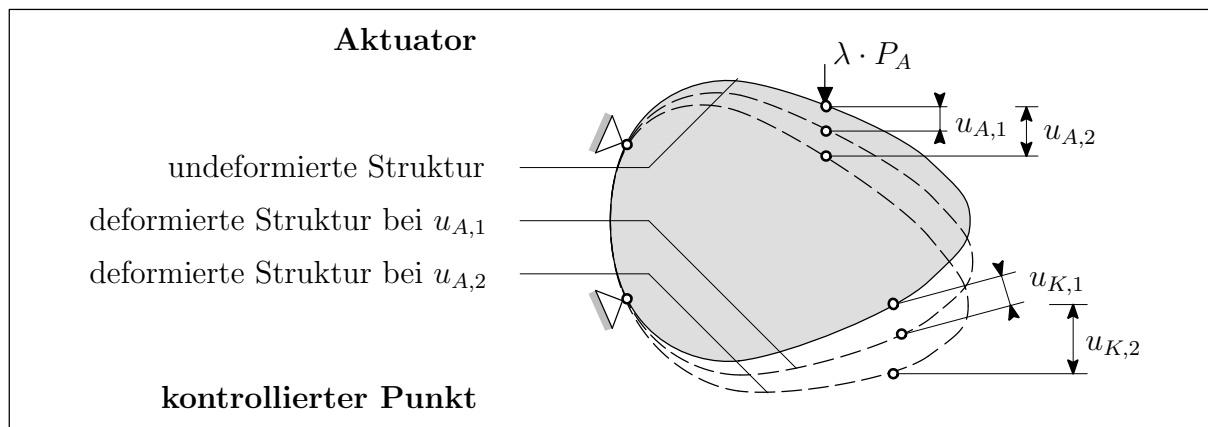


Abbildung 8.5: Prinzipskizze des Deformationsverhaltens für Pfadverfolgungsmechanismen

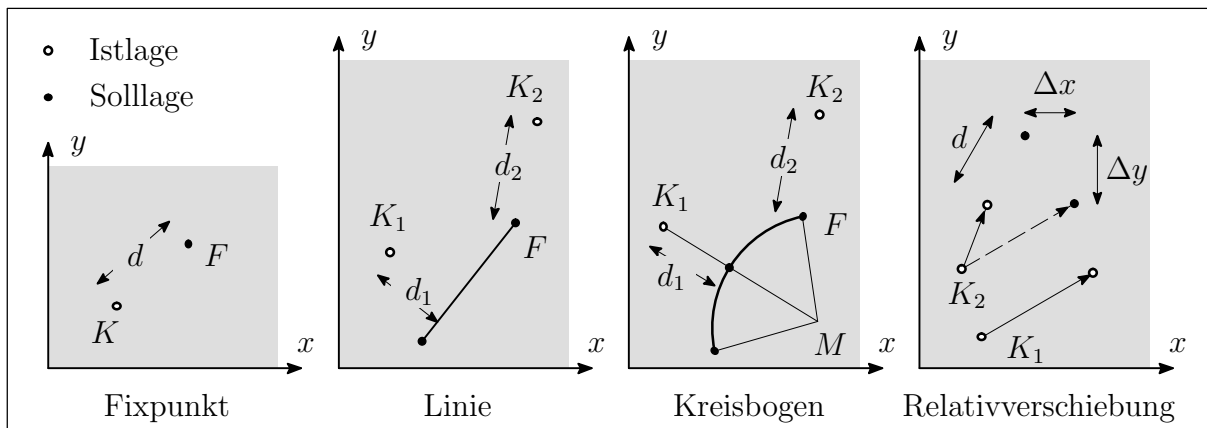


Abbildung 8.6: Abstandskriterien zwischen Ist- und Sollage

Stäbe unterschiedlichen Mechanismen verdeutlicht werden. Beide Strukturen beschreiben durch ihre statische Unterbestimmtheit die gleiche Bahn, doch bei Kontakt mit einem Werkstück spielt die Steifigkeit eine wesentliche Rolle für das mechanische Verhalten. Im Weiteren wird die Berührung des Mechanismus mit dem Werkstück nicht ‘exakt’ anhand eines Kontaktalgorithmus gelöst, sondern approximativ durch gewichtete Lastfälle (siehe Abbildung 8.7). Dazu werden am Angriffspunkt des Aktuators und am Strukturelement des Mechanismus, bei dem der Kontakt mit dem Werkstück vorgesehen ist, Kräfte ($\kappa_A P_A$ bzw. $\kappa_W P_W$) mit noch zu definierender Größe aufgebracht. Dabei ist zu beachten, dass die Position der Greifbacke bei der Kontakt erwartet wird, lediglich Bestandteil der oben erläuterten Deformationskontrolle ist. Dies hat zur Folge, dass die vorgestellten Steifigkeitskriterien an den vorgegebenen Aktuatorstellungen ausgewertet werden und nicht, wenn die Greifbacke die Kontakt-Position einnimmt. Hierdurch ist zwar die Wirklichkeit nur vereinfacht abgebildet, doch diese Vorgehensweise ermöglicht die Auswertung des Steifigkeitskriteriums für jeden Optimierungsschritt.

Zur Erzielung klarer und steifer ‘0–1’ Dichteverteilungen werden verschiedene Entwurfskriterien diskutiert. Prinzipiell kann die Aussage gemacht werden, dass für Steifigkeitskriterien immer ein Bezug zwischen Kraft und Verschiebung hergestellt werden muss. Zur vereinfachten Simulation des Kontaktproblems werden im Weiteren gewichtete Lastfälle

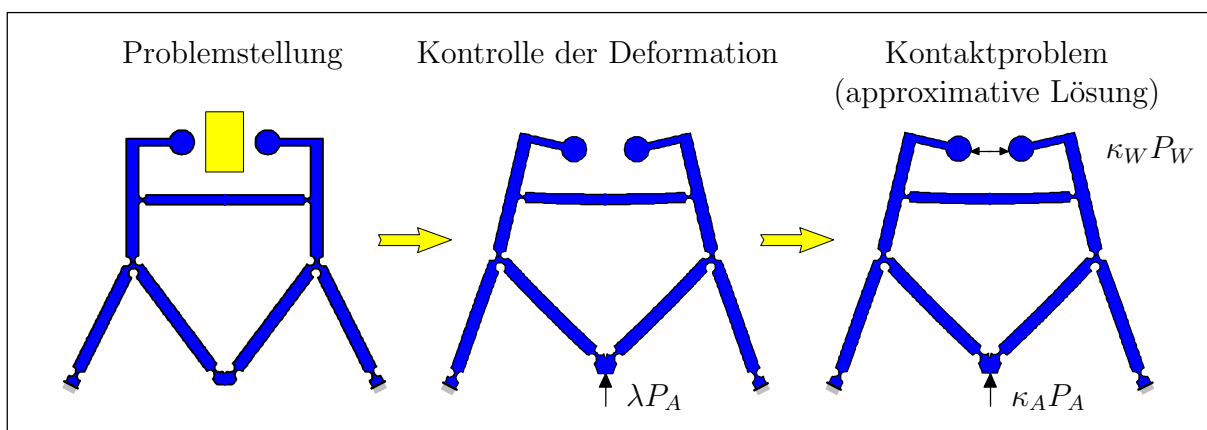


Abbildung 8.7: Vorgehensweise beim Greifen eines Werkstückes

an der Angriffsstelle des Aktuators (\mathbf{P}_A) und das mit dem Werkstück in Kontakt tretende Strukturteil (\mathbf{P}_W) superponiert. Die Ermittlung der Verschiebungen beider Lastfälle beruht auf einer linearen Abbildung anhand der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_T$, wobei $\hat{\mathbf{K}}_T$ eine Funktion der Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ ist und $\hat{\mathbf{u}}$ zu der vorgegebenen Aktuatorverschiebung korrespondiert. Durch die Annahme der Superponierung kann es sich nur um infinitesimale Verschiebungen handeln. Aus diesem Grund werden diese Verschiebungen als $\boldsymbol{\nu}$ bezeichnet und sind strikt von denen der Pfadverfolgung $\hat{\mathbf{u}}$ zu unterscheiden. Zur Bestimmung der Verschiebungen $\boldsymbol{\nu}$ ist es notwendig, dass $\hat{\mathbf{K}}_T$ regulär ist. Da der Ansatz des Entwurfes auf einem kontinuierlichen Problem beruht (kein Starrkörpermechanismus) ist dies sichergestellt. Die infinitesimalen Verschiebungen der beiden Lastfälle können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Verschiebungen} & \text{Verschiebungen} \\
 \text{aus Aktuatorkraft} & \text{aus Kontaktkraft am Werkstück} \\
 \boldsymbol{\nu}_A = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{P}_A & \boldsymbol{\nu}_W = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{P}_W \quad (8.13) \\
 \text{mit } \hat{\mathbf{K}}_T = \hat{\mathbf{K}}_T(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda}) &
 \end{array}$$

Die in der folgenden Diskussion benötigten Verschiebungskomponenten werden anhand von Filtervektoren, wie bereits in Abschnitt 7.1.1 vorgestellt, aus den Lösungen der Gleichung (8.13) ermittelt:

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Verschiebungen} & \text{Verschiebungen} \\
 & \text{am Aktuator} & \text{am Werkstück} \\
 \text{Lastfall } \mathbf{P}_A & \nu_A^A = \mathbf{I}_A^T \boldsymbol{\nu}_A & \nu_W^A = \mathbf{I}_W^T \boldsymbol{\nu}_A \quad (8.14) \\
 \text{Lastfall } \mathbf{P}_W & \nu_A^W = \mathbf{I}_A^T \boldsymbol{\nu}_W & \nu_W^W = \mathbf{I}_W^T \boldsymbol{\nu}_W
 \end{array}$$

Bei den Verschiebungskomponenten ν kennzeichnet der untere Index den Ort der Verschiebung und der obere Index den Ort der Belastung. Zur Realisierung der folgenden Entwurfskriterien werden Laststeigerungsfaktoren κ für beide Lastfälle eingeführt.

Ein mögliches Entwurfskriterium, welches bereits bei HOCHHOLDINGER [54] vorgeschlagen wurde, ist in Abbildung 8.8 unter dem Namen ‘Steifigkeitskriterium 1’ dargestellt. Hierbei handelt es sich um die Minimierung der Verschiebung am Aktuatorpunkt ν_A unter der Annahme eines starren Werkstückes. Für dieses Entwurfskriterium wird der Laststeigerungsfaktor $\kappa_W = 1.0$ gesetzt. Zur Ermittlung der ‘Null-Verschiebung’ an der Stelle des erwarteten Kontakts mit dem Werkstück wird \mathbf{P}_A mit einem Laststeigerungsfaktor κ_A skaliert:

$$\nu_W = \kappa_A \cdot \nu_W^A + \nu_W^W = 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa_A = -\frac{\nu_W^W}{\nu_W^A} \quad \text{mit } \kappa_W = 1.0 \quad (8.15)$$

Mit nun bekanntem Laststeigerungsfaktor κ_A kann die zu minimierende Verschiebung am Aktuatorpunkt ermittelt werden:

$${}^1af_S = |\nu_A| = |\kappa_A \cdot \nu_A^A + \nu_A^W| \quad (8.16)$$

Alternativ zu der Annahme von Gleichung (8.15) könnte κ_W variabel definiert werden. Mit nun vorgegebenem κ_A lassen sich die Gleichungen (8.15) und (8.16) folgendermaßen umschreiben:

$$\overset{1b}{Sf} = |\nu_A| = |\nu_A^A + \kappa_W \cdot \nu_A^W| \quad \text{mit} \quad \kappa_W = -\frac{\nu_W^A}{\nu_W^W}; \quad \kappa_A = 1.0 \quad (8.17)$$

Dabei ist κ_W der Gleichung (8.17) der Kehrwert von κ_A der Gleichung (8.15). Folglich unterscheiden sich die Zielfunktionswerte der Gleichungen (8.16) und (8.17_a) lediglich um den Quotienten dieser beiden Laststeigerungsfaktoren. Zwar ist für das Optimierungsergebnis die absolute Last auf der Basis einer linearen Abschätzung der Strukturantwort ohne Auswirkung (siehe Erläuterungen des Abschnitts 7.1), aber es ist von großer Wichtigkeit, dass der Laststeigerungsfaktor κ_A und nicht κ_W eine Funktion der Entwurfsvariablen ist. Ansonsten könnte eine Struktur entstehen, welche keine Verbindung zwischen Aktuator und Werkstück besitzt. Dies wird deutlich, da es sich bei dem Steifigkeitskriterium der Gleichung (8.17_a) im Gegensatz zu dem der Gleichung (8.16) um die Simulation einer Lagerung und nicht um eine Belastung seitens des Werkstückes handelt. Aufgrund der Betragsstriche sind die Entwurfskriterien (8.16) und (8.17_a) unabhängig von der Belastungsrichtung des Werkstückes. Dadurch können mit den Steifigkeitskriterien 1a und 1b nicht direkt kontrolliert werden, ob durch ein weiteres Ausfahren des Aktuators eine ‘rechnerische’ Zug- oder Druckkraft in der Kontaktfläche entsteht. Indirekt ist eine Druckkraft allerdings über die Kontrolle der Deformation sichergestellt.

Angelehnt an die in Abschnitt 8.1 vorgestellten Entwurfskriterien zur Generierung von Transport-Mechanismen werden im Folgenden zwei weitere Kriterien aufgezeigt. Diese unterscheiden sich in der Annahme der Werkstücksteifigkeit. Für das ‘Steifigkeitskriterium 2’, welches ebenfalls in Abbildung 8.8 angegeben ist, wird das Werkstück als starr angenommen. Durch die gemeinsame Annahme der starren Werkstücke gilt die linke Prinzipskizze der Abbildung 8.8 für die ‘Steifigkeitskriterien 1 & 2’. Der folgenden Idee liegt die Maximierung der auf das Werkstück wirkenden Kraft bei einer Einheitsverschie-

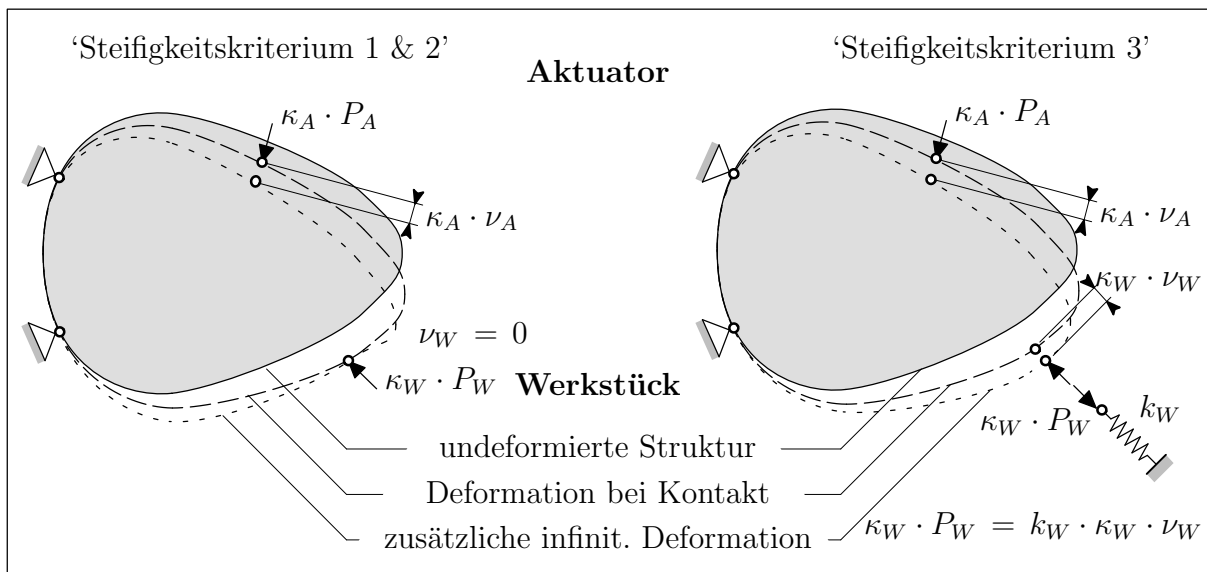


Abbildung 8.8: Prinzipskizze der Steifigkeitskriterien für Pfadverfolgungsmechanismen

bung am Aktuatorpunkt zugrunde. Dazu wird der Laststeigerungsfaktor des Aktuators in $\kappa_A = \hat{\kappa}_A \cdot \kappa_W$ aufgeteilt, wobei κ_W der Laststeigerungsfaktor des Werkstücklastfalles ist. Somit ergibt sich der Laststeigerungsfaktor $\hat{\kappa}_A$ durch die Bedingung der Null-Verschiebung am Werkstück zu:

$$\nu_W = \kappa_W \left(\underbrace{\hat{\kappa}_A \cdot \nu_W^A + \nu_W^W}_{=0} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\kappa}_A = -\frac{\nu_W^W}{\nu_W^A} \quad (8.18)$$

Mit der Bedingung der Einheitsverschiebung am Aktuator $\nu_A = 1.0$ kann nun κ_W ermittelt werden:

$$\kappa_W \left(\hat{\kappa}_A \cdot \nu_A^A + \nu_A^W \right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{S}f = -\kappa_W = -\frac{1}{\hat{\kappa}_A \cdot \nu_A^A + \nu_A^W} \quad (8.19)$$

Es ist noch anzumerken, dass dieses Kriterium vorzeichenbehaftet ist und die Gleichungen (8.18) und (8.19) auf den angegebenen Richtungen der Abbildung 8.8 beruhen.

Das ‘Steifigkeitskriterium 3’, welches in der rechten Prinzipskizze der Abbildung 8.8 dargestellt ist, berücksichtigt nun die Flexibilität des Werkstückes approximativ durch eine Feder mit der Steifigkeit k_W . Die Vorgehensweise der Herleitung des Entwurfskriteriums ist äquivalent zu der des zweiten Kriteriums. Gleichung (8.18) erweitert sich auf:

$$\kappa_W \left(\underbrace{\hat{\kappa}_A \cdot \nu_W^A + \nu_W^W + P_W \cdot k_W^{-1}}_{=0} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\kappa}_A = -\frac{\nu_W^W + P_W \cdot k_W^{-1}}{\nu_W^A} \quad (8.20)$$

und die Bestimmungsgleichung für den Laststeigerungsfaktor κ_W infolge der Einheitsverschiebung am Aktuator ist wiederum:

$$\kappa_W \left(\hat{\kappa}_A \cdot \nu_A^A + \nu_A^W \right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{S}f = -\kappa_W = -\frac{1}{\hat{\kappa}_A \cdot \nu_A^A + \nu_A^W} \quad (8.21)$$

Auch dieses Problem ist wie das vorherige vorzeichenbehaftet. Dieses Kriterium ist identisch dem des Transport-Mechanismus und die Nachgiebigkeit der Feder steuert die geometrische Übersetzung (siehe Gleichung (8.5)).

Die Ziele und die Annahmen der einzelnen Steifigkeitskriterien sind zur Übersicht in der Tabelle 8.1 zusammengefasst.

Kontrolle der Aktuatorlast

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 8.1 diskutierten Transport-Mechanismen ist hier prinzipiell eine Einbindung der zur Bewegung des Mechanismus notwendigen Aktuatorlast in

Kriterium	Ziel	Annahme	Werkstück
$\frac{1a}{S}f$	min. Aktuatorverschiebung	Einheitsbelastung Werkstück	starr
$\frac{1b}{S}f$	min. Aktuatorverschiebung	Einheitsbelastung Aktuator	starr
$\frac{2}{S}f$	max. Kontaktkraft	Einheitsverschiebung Aktuator	starr
$\frac{3}{S}f$	max. Kontaktkraft	Einheitsverschiebung Aktuator	flexibel

Tabelle 8.1: Zusammenfassung der Steifigkeitskriterien

den Entwurfsprozess notwendig. Dies begründet sich dadurch, dass in dem Entwurfskriterium der Pfadverfolgung keine Aussage über die in der Struktur gespeicherten Dehnungsenergie enthalten ist. Um eine ausreichende Flexibilität des Mechanismus zu gewährleisten wird die notwendige Aktuatorlast zur Verfolgung des vorgeschriebenen Pfades in den Entwurfsprozess mit eingearbeitet. Der Betrag des Laststeigerungsfaktors der Aktuatorlast $\hat{\lambda}$ wird für den letzten Verschiebungsschritt $n_{\hat{u}}$ auf den Wert $\hat{\lambda}$ beschränkt.

Definition des Optimierungsproblems

Die vorangegangenen drei unterschiedlichen Kriterien zur Generierung von Pfadverfolgungsmechanismen müssen nun zu einem Optimierungsproblem zusammengefasst werden. Hierbei stellt sich die Frage, welche Kriterien als Zielfunktion und welche als Nebenbedingung eingearbeitet werden. Da über die Erreichbarkeit der Solldeformation einzelner Stellen des Mechanismus kaum eine Aussage getroffen werden kann, ist es sinnvoll dieses Kriterium der Zielfunktion zuzuweisen. Dazu werden die Summen der Abstandsbeträge $|d|$ der zu kontrollierenden Knoten zu ihren Solllagen zu einem Wert \tilde{f}_d zusammengefasst:

$$\tilde{f}_d = \sum_{i=1}^{n_{\hat{u}}} \sum_{j=1}^{n_d^i} \left({}_d\alpha_j^i \cdot |d_j^i| \right) \quad (8.22)$$

wobei i hier der Summationsindex über alle Aktuatorstellungen $n_{\hat{u}}$ ist. Der Index j ist eine fortlaufende Nummer für alle zu kontrollierende Abstände n_d^i der Aktuatorstellung i . Mit den Parametern ${}_d\alpha_j^i$ besteht die Möglichkeit der Wichtung einzelner Komponenten untereinander. Hierdurch kann die bevorzugte Einhaltung relevanter Solllagen erzielt werden. Gleichung (8.22) stellt dabei die Wichtungsmethode der Mehrkriterienoptimierung, wie sie in Abschnitt 2.2 bereits beschrieben wurde, dar.

Wie bei der Deformationskontrolle ist bei den Steifigkeitskriterien eine Aussage über die Erreichbarkeit kaum möglich. Aus dieser Überlegung heraus ist es sinnvoll, diese beiden Anteile zu einer skalarwertigen Zielfunktion zu vereinigen. Da es sich bei der Pfad- und Steifigkeitskontrolle um Größen handelt, welche sich im Optimierungsverlauf unterschiedlich verhalten, scheint eine Gewichtung anhand der GERMEIER-Methode (siehe Abschnitt 2.2) zweckmäßig. Diese Art der Wichtungsmethode hat den Vorteil, dass sie dem Wunsch einer anfänglichen Übergewichtung der Bahnkontrolle entgegenkommt. Durch die Betragsfunktion der Gleichung (8.22) ist der Wertebereich für f_d auf positive Werte beschränkt. Dies gilt allerdings nicht für die ‘Steifigkeitskriterien 2 & 3’. Damit sich ihre Anteile \tilde{f}_S am Zielfunktionswert bei Erhöhung der Struktursteifigkeit nicht auf null reduzieren, ist ein Verschieben (${}_1\alpha_j^i$) mit gleichzeitigem Skalieren (${}_2\alpha_j^i$) der einzelnen Steifigkeitswerte ${}_S^q f_j^i$ notwendig:

$$\tilde{f}_S = \sum_{i=1}^{n_{\hat{u}}} \sum_{j=1}^{n_S^i} {}_1\alpha_j^i + {}_2\alpha_j^i \cdot {}_S^q f_j^i \quad ; \quad q = 1a, 1b, 2, 3 \quad (8.23)$$

mit den Gewichtungsfaktoren ${}_1\alpha_j^i > 0$; ${}_2\alpha_j^i > 0$

wobei hier j der Summationsindex über alle Steifigkeitskriterien der Aktuatorstellung i ist.

Unter der Berücksichtigung einer maximal zulässigen Masse im Entwurfsraum und den Zielfunktionsanteilen \tilde{f}_d und \tilde{f}_s gestaltet sich das Optimierungsproblem folgendermaßen:

$$\min_{\mathbf{s}} \frac{1}{p} \ln \left(e^{p \cdot \tilde{f}_d} + e^{p \cdot \tilde{f}_s} \right) \quad \text{mit} \quad 0 < p \leq \infty$$

$$\sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| d\Omega \right] - \tilde{m} \leq 0 \quad ; \quad |\hat{\lambda}_{n_i}| - \check{\lambda} \leq 0 \quad (8.24)$$

$$0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U$$

Die Begründung für die Wahl einer Massen–Ungleichheitsnebenbedingung wird in dem Beispiel des Abschnitts 8.2.4 gegeben.

8.2.2 Sensitivitätsanalyse

In dem vorangegangenen Abschnitt wurden die Entwurfskriterien für Pfadverfolgungsmechanismen vorgestellt. Das Kriterium der Bahnabweichung enthält lediglich Verschiebungskomponenten der endlichen Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$. Dadurch ist die zugehörige Sensitivitätsanalyse mit der für Transport–Mechanismen identisch (siehe Abschnitt 8.1.2). Da bei der Bestimmung der Bahnabweichungsgradienten unter Vorgabe einer Aktuatorverschiebung die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors $\hat{\lambda}$ ebenfalls bekannt sein muss, wird im Weiteren nur auf die Sensitivitätsanalyse der Steifigkeitskriterien eingegangen.

Sensitivitätsanalyse der Steifigkeitskriterien

Die drei vorgestellten Steifigkeitskriterien beruhen auf Verschiebungsgrößen zweier Lastfälle, welche durch die lineare Abbildung der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_T$ des Verschiebungszustandes $\hat{\mathbf{u}}$ ermittelt wurden. Hierdurch ist die folgende Herleitung der Sensitivität der Verschiebungen $\boldsymbol{\nu}$ mit der des Kriteriums ‘End–Steifigkeit’ des Abschnitts 7.1.2 verwandt. Unterschiedlich ist lediglich das von den Entwurfsvariablen abhängige Lastniveau $\hat{\lambda}$. Zur Bestimmung dieser Abhängigkeit wird, wie in Abschnitt 8.1.2, die Verschiebung des Aktuatorknotens während des Optimierungsprozesses als konstante Größe eingearbeitet. Ausgehend von der folgenden Gleichung:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \left[\underbrace{\hat{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\nu}_i}_{= \mathbf{0}} - \mathbf{P}_i \right] - \boldsymbol{\mu}_{ji}^T \left[\underbrace{\hat{\mathbf{R}} - \hat{\lambda} \mathbf{P}_A}_{= \mathbf{0}} \right] = 0 \quad (8.25)$$

ist die Sensitivität der einzelnen Verschiebungskomponenten ν_j^i (mit $i = A, W$ und $j = A, W$) der beiden Lastvektoren \mathbf{P}_A und \mathbf{P}_W :

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\nu}_i^j = -\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\nu}_j + \boldsymbol{\mu}_{ji}^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} \mathbf{P}_A \right] \quad (8.26)$$

Die unbekanntenen Größen der Gleichung (8.26) sind wie folgt zu bestimmen:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{I}_{u_i} \quad (8.27)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ji} = \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \left[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \nabla_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\nu}_j \right] \quad (8.28)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}} \hat{\lambda} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_A^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \hat{\mathbf{R}} \left[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_A^T \mathbf{P}_A \right]^{-1} \quad (8.29)$$

Die Gleichungen (8.27) bis (8.29) sind in der angegebenen Reihenfolge auszuwerten. Aufgrund identischer expliziter Ableitungen ist es sinnvoll, für die Gleichungen (8.26) und (8.29) die einzelnen Komponenten simultan auszuwerten.

Da die Bestimmung der Sensitivitäten der einzelnen Steifigkeitskriterien (siehe Gleichungen (8.15) bis (8.21)) keine Probleme aufwerfen, wird auf deren Darstellung verzichtet.

8.2.3 Algorithmische Umsetzung

Gegenüber der algorithmischen Umsetzung der Transport–Mechanismen (siehe Abschnitt 8.1.3) erfordert hier die Bahnkontrolle eine vollständige Neuanalyse der Struktur nach der Modifikation des Entwurfs. Prinzipiell wären zwei verschiedene Strategien denkbar. Erste würde auf der Basis von gespeicherten Verschiebungsfeldern die Ungleichgewichtskräfte, welche durch neue Steifigkeitsverhältnisse entstehen, wieder ausgleichen. Für den Entwurf von Pfadverfolgungsmechanismen wurde allerdings als zweiter Vorschlag eine vollständige Neuanalyse der Struktur gewählt. Dies beruht auf den Erfahrungen, welche bei den Transport–Mechanismen gewonnen wurden. Wie bereits in Abschnitt 8.1.3 erläutert wurde, treten bei der Ausbildung von Gelenken Probleme bei der Gleichgewichtsiteration auf. Nähere Angaben können dem Abschnitt 8.3 entnommen werden.

8.2.4 Beispiel 8: Greifmechanismus

Anhand eines Greifmechanismus, der zwei unterschiedlich große quadratische Werkstücke exakt greifen soll, wird das Verfahren der Bahnkontrolle verifiziert. Die strukturelle Situation ist in Abbildung 8.9 angegeben. Die vorgegebene Bahn kann der Detailskizze entnommen werden. Die Sollbahn ist durch einen Viertelkreis (VK) mit einer anschließenden Geraden vorgegeben. Diese Gerade ist in zwei Linien (G1 & G2) unterteilt, um die Fixpunkte bei erwartetem Kontakt mit den Werkstücken einzuarbeiten. Zur Bahnkontrolle der Greifbacken werden für sechs gleiche Verschiebungsschritte à $1 \mu\text{m}$ am Aktuatorpunkt \textcircled{A} verschiedene Deformationen vorgeschrieben. Abbildung 8.9 enthält die Liste der Solllagen, welche die obere Ecke der Greifbacke in Abhängigkeit der Aktuatorposition \textcircled{A} einnehmen soll. Zur Sicherstellung einer vertikalen Position der Greifbacken wird bei den Verschiebungsschritten, bei denen der Kontakt erwartet wird, eine horizontale Relativverschiebung zwischen oberer und unterer innerer Ecke der Backen eingearbeitet. Die Wichtungsfaktoren ${}_d\alpha$ für die Abweichungen von der Solllage (siehe Gleichungen (8.22)) sind für den Viertelkreis und für die Geraden 1.0. Um den Kontakt mit den Werkstücken bei entsprechender Vorgabe der Aktuatorposition zu gewährleisten, wird diese Abweichung von der Solllage mit dem Faktor 10.0 gewichtet. Die höchste Gewichtung von 20.0 für die vertikale Position der Backen bei erwartetem Kontakt wurde gewählt, um sicherzustellen, dass die Werkstücke nicht nur punktuell gegriffen werden.

In einer Voruntersuchung wurden die verschiedenen Steifigkeitskriterien des Abschnitts 8.2.1 ohne Bahnoptimierung in der undeformierten Konfiguration untersucht. Die Beschreibung der Ergebnisse und die Wahl des Kriteriums für den zu optimierenden Greifmechanismus erfolgt nach der Problembeschreibung.

Zur Sicherstellung der ausreichenden Flexibilität des zu generierenden Mechanismus wird die Antriebskraft des Aktuators auf einen Wert von $4.5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ anhand einer Ungleich-

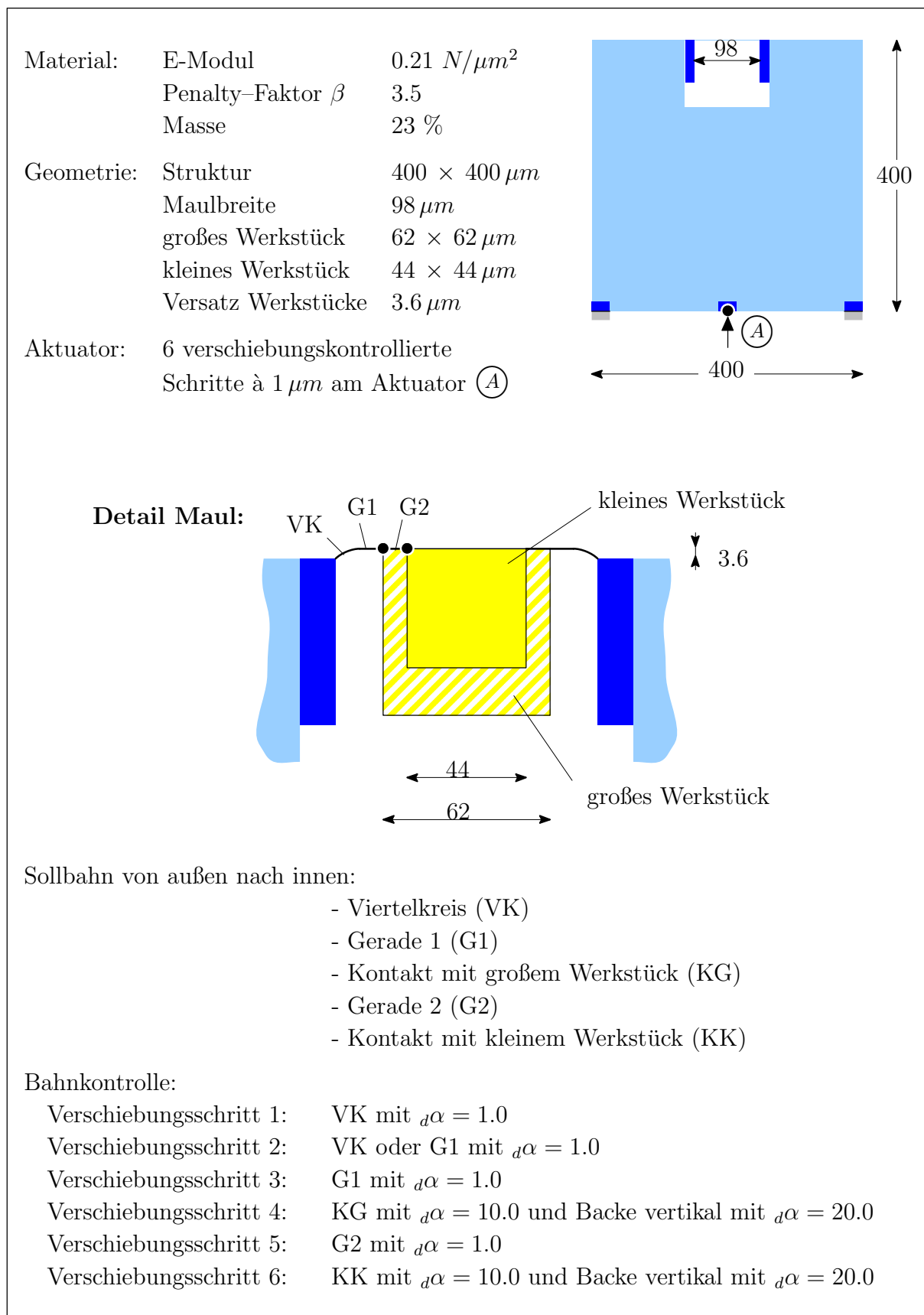


Abbildung 8.9: Materialdaten, Geometrie und vorgegebene Bahn des Beispiels 8

heitsnebenbedingung beschränkt.

Für den Entwurfsraum werden für das halbe System 3715, 4-knotige, 2×2 integrierte Scheibenelemente verwendet. Die Bereiche der Auflager und des Aktuators sind nicht variabel definiert. Dies hat sich in Vergleichsrechnungen als günstig erwiesen, da die anfängliche Auseinanderbewegung der Backen und die zu hohe Aktuatorlast bei homogener Dichteverteilung im Entwurfsraum zu einer zügigen Entnahme des Materials in diesen Bereichen führte. Insbesondere die komplette Entnahme des Materials in der Umgebung des Aktuatorangriffspunktes hat eine annähernde Null-Deformation der Backen zur Folge und kann zu einer Stagnation im Entwurfprozess führen (lokales Optimum). Durch den nicht variablen Bereich findet in den ersten Optimierungsschritten lediglich eine Entnahme oberhalb des Aktuatorpunktes statt und die entstehende Struktur schließt seitlich an den fixen Bereich an.

Die Masse im Entwurfsraum ist auf 23 % der maximal möglichen beschränkt. Für die anfänglich höhere Gewichtung der Bahnkontrolle hat sich gezeigt, dass eine Entnahme der Masse im Entwurfsraum für den Optimierungsprozess günstig ist. Aus diesem Grund wurde die für den Entwurf zur Verfügung stehende Masse anhand einer Ungleichheitsnebenbedingung restringiert. Für den Wiedereinbau der zulässigen Masse ist das im Laufe des Optimierungsprozesses dominanter werdende Steifigkeitskriterium verantwortlich.

Bevor auf die Generierung des Pfadverfolgungsmechanismus eingegangen wird, soll zuerst qualitativ eine Untersuchung der unterschiedlichen Steifigkeitskriterien erfolgen. In Abbildung 8.10 sind für die drei Steifigkeitskriterien des Abschnitts 8.2.1 die generierten Topologien dargestellt, wobei zusätzlich beim ersten Steifigkeitskriterium zwischen Gleichung (8.16) (Kriterium 1a) und Gleichung (8.17) (Kriterium 1b) unterschieden wird. Die Optimierung fand in der undeformierten Lage statt, d. h. die tangentielle Steifigkeitsmatrix der Gleichung (8.13) reduziert sich auf den linear elastischen Anteil. Die beiden oberen Strukturen wurden mit dem ‘Steifigkeitskriterium 1’ ermittelt, wobei für das linke System der Laststeigerungsfaktor des Aktuators und für das rechte System der des Werkstückes variabel war. Mit veränderlicher Werkstücklast wird eine unbrauchbare Struktur entwickelt, die keine Verbindung zwischen Aktuator und Werkstück mehr aufweist. Die oben aufgeführten Erläuterungen des Abschnitts 8.2.1 zur Wahl des variablen Laststeigerungsfaktors sind dadurch verifiziert. Die beiden unteren Strukturen entstanden anhand der ‘Steifigkeitskriterien 2 & 3’. Die Zielfunktion für beide Entwürfe ist die Maximierung der Kontaktkraft zwischen Werkstück und Greifbacken. Diese beiden Strukturen unterscheiden sich zwar in ihrem topologischen Aufbau, aber beide Tragwerke üben eine Druckkraft auf das Werkstück aus. Durch die berücksichtigte Flexibilität des Werkstückes bei dem ‘Steifigkeitskriterium 3’, repräsentiert durch eine Feder mit der Steifigkeit $k_w = 2.1 \cdot 10^{-6} N/\mu m$, besitzt diese Struktur ausgeprägte ‘Gelenk-Bereiche’. Durch diese Bereiche wird die zur Stauchung der Feder notwendige Flexibilität erzielt. Ein weiterer, interessanter Aspekt fällt bei dem Vergleich der generierten Entwürfe auf. Werden für die Entwürfe der Kriterien 2 & 3 die Bahnbewegungen untersucht, so bewegen sich diese bereits in die richtige Richtung. Für den Entwurf des ‘Steifigkeitskriteriums 1a’ ist dies allerdings nicht zutreffend (Zug). Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes sind die Kraftvektoren P_A und P_W in Abbildung 8.10 dargestellt.

Zur Generierung des Pfadverfolgungsmechanismus wird, aufbauend auf der vorangegangenen Untersuchung, das ‘Steifigkeitskriterium 2’ zur Erzielung klarer ‘0–1’ Materialvertei-

lungen verwendet. Die Auswertung dieses Kriteriums erfolgt in den Verschiebungsschritten 4 und 6 (erwarteter Kontakt mit Werkstücken). Der entwickelte Mechanismus ist in Abbildung 8.11 dargestellt. Weiterhin sind die deformierten Strukturen beim tatsächlichen Kontakt mit dem großen bzw. dem kleinen Werkstück angegeben. In den drei Diagrammen ist das Deformationsverhalten der linken Backe mit ihrem Sollverhalten verglichen. Durch die geringe Gewichtung der Bahnabweichung bei den ersten drei Verschiebungsschritten fallen die Abstände zum Viertelkreis und zur ersten Geraden deutlich aus. Die horizontale Verschiebung der Backe ist geringer als vorgegeben. Dadurch wird eine etwas größere Aktuatorverschiebung zum Greifen der Werkstücke benötigt. Das untere Diagramm zeigt die horizontale Differenzverschiebung von der oberen und der unteren Ecke der Backe in Abhängigkeit zur horizontalen Verschiebung der oberen Ecke. Die höchste Gewichtung dieser Entwurfskomponente zeigt deutlich seine Wirkung, denn die Backe bewegt sich in einer annähernd vertikalen Position.

Es soll noch angemerkt werden, dass für dieses Beispiel eine Zweischritt-Strategie für das Optimierungsproblem notwendig war. In dem ersten Schritt war das Optimierungsproblem identisch zu dem der Gleichung (8.24). Bei einem Zielfunktionswert der Bahnabweichung von circa 0.2 traten Oszillationen bei der Modifikation der Entwurfsvariablen auf. Ein Wert von $\tilde{f}_d = 0.2$ ist bereits unter Berücksichtigung der oben genannten Wichtungsfaktoren ein sehr geringer Wert. Die Oszillation im Entwurfsprozess beruht

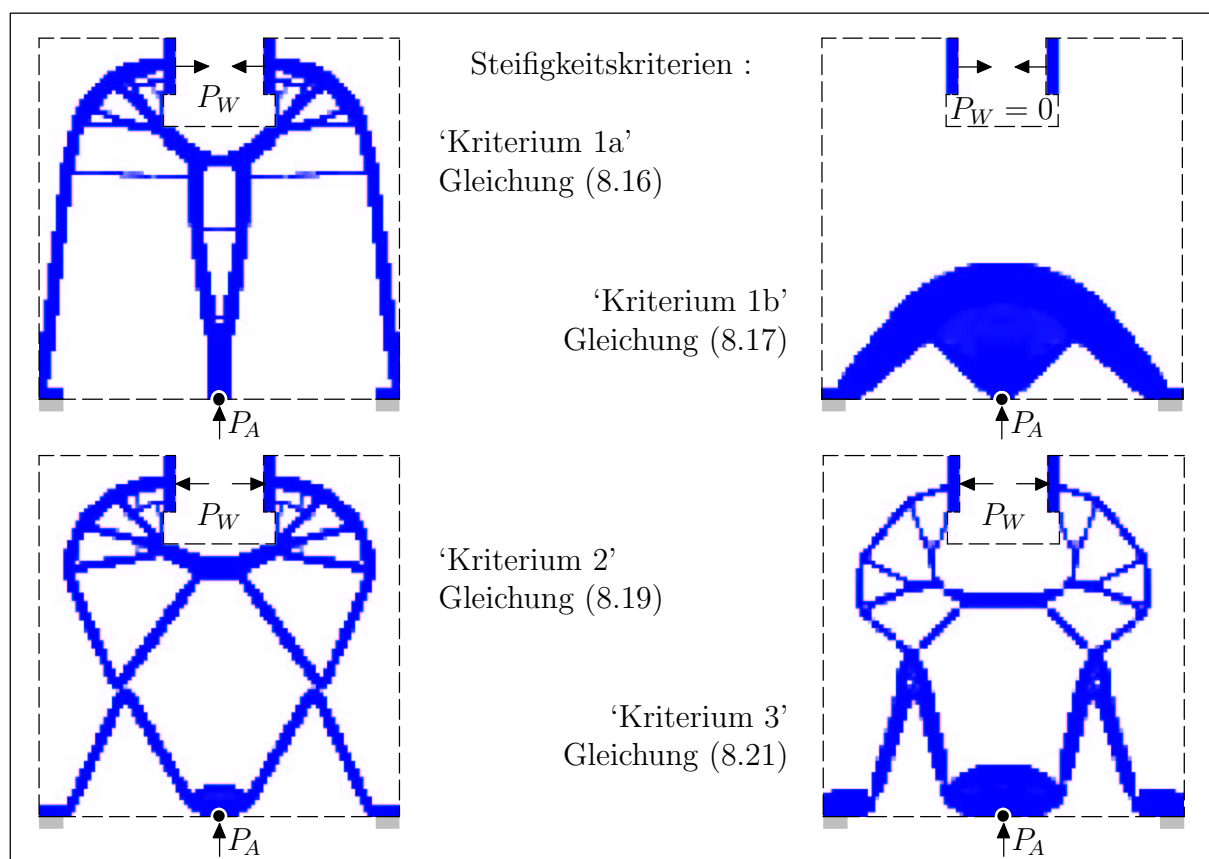


Abbildung 8.10: Generierte Struktur für die unterschiedlichen Steifigkeitskriterien des Beispiels 8

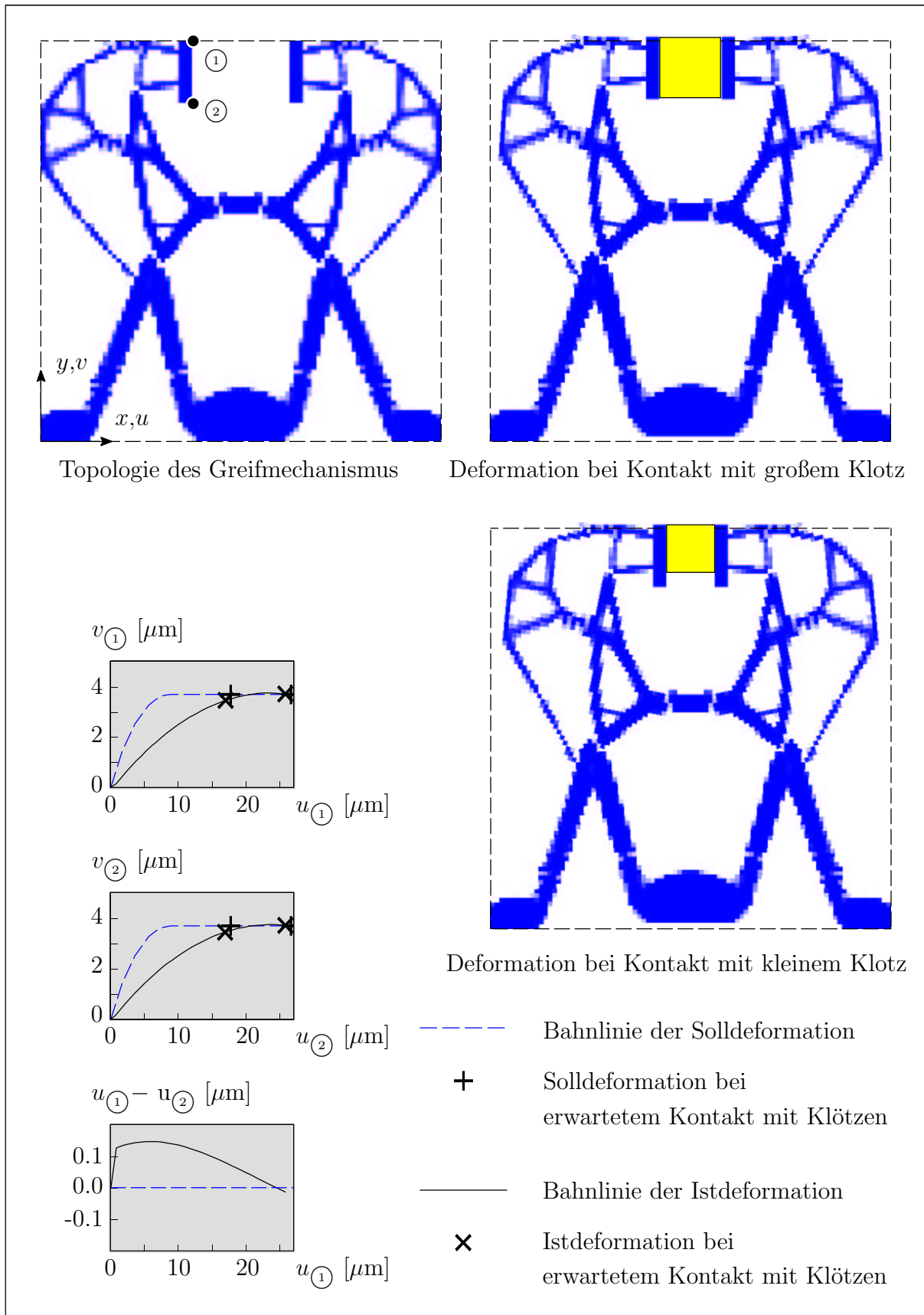


Abbildung 8.11: Generierte Struktur und deren Deformationsverhalten des Beispiels 8

auf unterschiedlichen Vorzeichen der Gradienten der Zielfunktionsanteile, welche sich im Extremfall sogar gegenseitig aufheben können. In dem zweiten Schritt wurde zur Informationsanreicherung für die Optimierungsstrategie die Bahnabweichung im Weiteren als Ungleichheitsnebenbedingung berücksichtigt. Der zulässige Maximalwert der Abweichung wurde, unter Berücksichtigung der oben stehenden Wichtungsfaktoren, auf einen Wert von 0.25 gesetzt. Mit dieser zusätzlichen Information konnte eine relativ deutliche ‘0–1’ Materialverteilung erzielt werden. Die lediglich geringfügige Verschlechterung der Bahnabweichung bei der zweiten Entwurfsphase begründet sich dadurch, dass für den Idealfall eines Starrkörpermechanismus die beschriebene Bahn unabhängig von der Steifigkeit der Struktur ist. Ob diese Zweischritt-Strategie prinzipiell für diese Art von Optimierungsproblemen notwendig ist, müssten weitere numerische Untersuchungen zeigen.

In einer Nachlaufanalyse wurde untersucht, wie sensitiv die Aktuatorkraft zur Deformation des Mechanismus in Bezug zu dem Penalty-Faktor des SIMP-Ansatzes ist. Dazu wurde für die generierte Struktur der Penalty-Faktor von 3.5 auf 2.5 reduziert. Es ergab sich daraus ein Anstieg der maximalen Aktuatorkraft um circa 45%. Dieser deutliche Anstieg begründet sich in der relativ hohen Steifigkeit der porösen Bereiche im Verhältnis zu der fast kinematischen Struktur. Weiterhin ist, wie bereits in dem Beispiel des Abschnitts 8.1.4 erläutert, das mechanische Verhalten der flexiblen Übergangsbereiche zwischen den steifen Strukturelementen nur unzureichend erfasst. Diese beiden Sachverhalte verdeutlichen die Parameterempfindlichkeit des Problems und machen die Vorgabe einer maximal zulässigen Antriebskraft nur sehr schwer möglich. Aus diesem Grund sollte die Nebenbedingung der Antriebskraft in der Entwurfsphase der materiellen Topologieoptimierung lediglich als Hilfsmittel gesehen werden, um Entwürfe zu generieren, welche Stellen mit sinnvollen Einschnürungen enthalten.

Wie bei den Transport-Mechanismen traten Probleme bei der Gleichgewichtsiteration auf. Den Hintergrund dieses Problems und ein möglicher Lösungsvorschlag enthält der folgende Abschnitt.

8.3 Konvergenzprobleme bei der Gleichgewichtsiteration

Dieser Abschnitt zeigt den Hintergrund für die aufgetretenen Konvergenzprobleme bei der Gleichgewichtsiteration der vorangegangenen Beispiele auf. Weiterhin wird ein möglicher Lösungsvorschlag, welcher erfolgreich bei den Beispielen der Abschnitte 8.1.4 und 8.2.4 angewendet wurde, angegeben. Da die folgenden Probleme bei beiden vorangegangenen Entwurfsaufgaben auftraten, sollen sie an dieser Stelle unabhängig vom Optimierungsproblem diskutiert werden.

Schlechtes Konvergenzverhalten, aber auch Divergenz, tritt immer dann auf, wenn Elemente mit sehr geringer Steifigkeit von Elementen mit deutlich höherer Steifigkeit umgeben sind. Unter Verwendung des ST. VENANT-KIRCHHOFFSchen-Materialgesetzes in Kombination mit den GREEN-LAGRANGESche-Verzerrungen strebt die im Element gespeicherte Dehnungsenergie nicht gegen unendlich für $\det \mathbf{F} \rightarrow 0$ (ein Volumenelement wird auf ‘Nullvolumen’ komprimiert, siehe Gleichung (4.7)). Aufgrund dieser Tatsache ist es während des Iterationsprozesses numerisch möglich, Elemente mit negativer Determi-

nante des Deformationsgradienten zu erhalten. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 8.12 für einen Zwischenzustand des Entwurfsprozesses für den in Abschnitt 8.2.4 beschriebenen Greifmechanismus dargestellt. Die gestrichelte Linie in der Detailzeichnung der Dichteverteilung markiert die Elemente, welche während des Deformationsprozesses ‘negatives Volumen’ erhalten. Das linke FE-Netz in Abbildung 8.12 verdeutlicht diesen Effekt. Ein Indikator für diesen Sachverhalt ist, dass die tangentielle Steifigkeitsmatrix eine negative Determinante hat.

Es soll an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, dass das ST. VENANT-KIRCHHOFFsche-Material nicht zur Beschreibung großer Verzerrungen geeignet ist (siehe Abschnitt 4.1.3). Zur Vermeidung derartiger Probleme wird die volumenspezifische Verzerrungsenergiefunktion W_S für das ST. VENANT-KIRCHHOFFsche-Material (4.10) künstlich nur für den Optimierungsprozess um den Term $(\det \mathbf{F})^{-n}$ erweitert:

$$W_S = \frac{1}{(\det \mathbf{F})^n} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \underline{\lambda} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \underline{\mu} (\text{tr } \mathbf{E}^2) \right]}_{\text{ST. VENANT - KIRCHHOFF}} \quad (8.30)$$

Neben $\underline{\lambda}$ und $\underline{\mu}$ ist n ein weiterer Materialparameter. Eine detaillierte Herleitung des daraus folgenden Werkstoffensors ist in Anhang B gegeben. Unter Verwendung des Werkstoffes auf der Basis von Gleichung (8.30) wird die ‘Überlappung’ von Elementen vermieden und eine deutlich bessere Konvergenz erzielt. Den Effekt dieser Erweiterung von W_S zeigt das rechte FE-Netz in Abbildung 8.12.

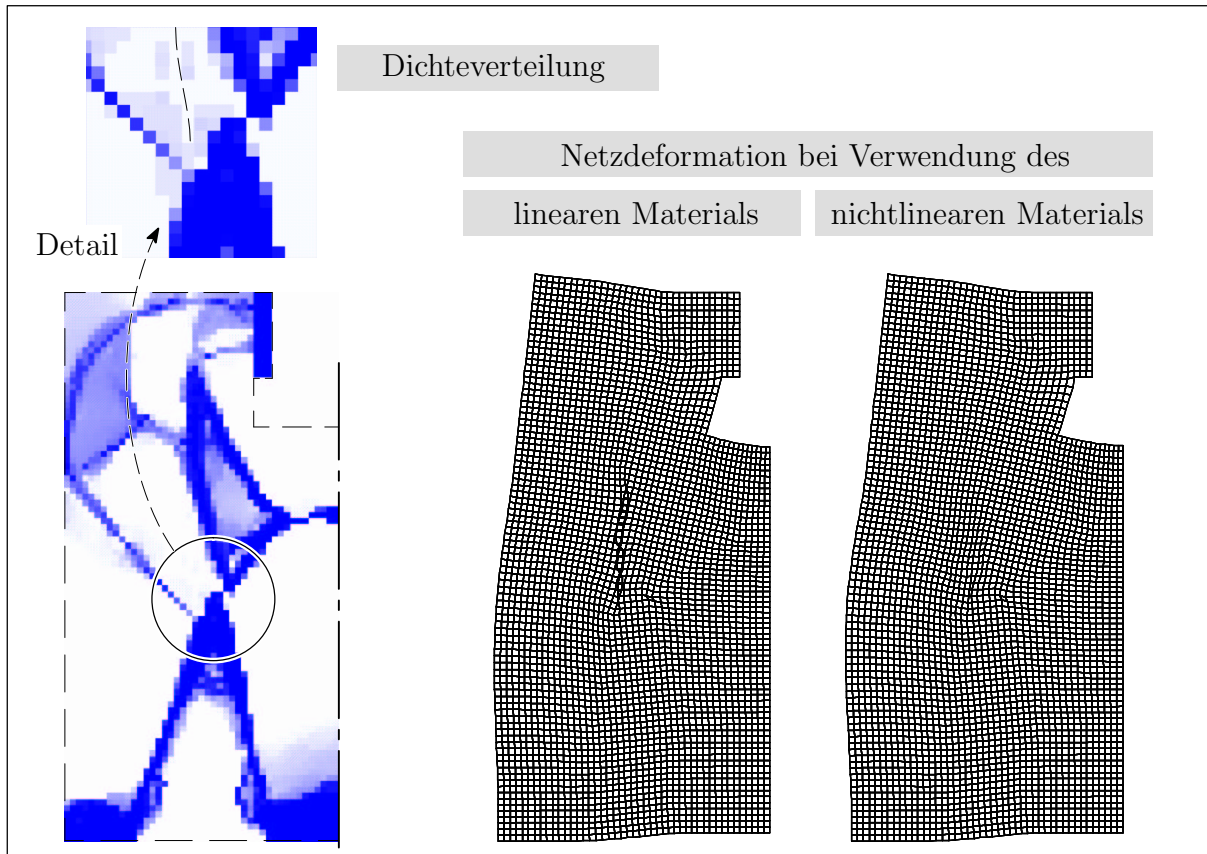


Abbildung 8.12: Ursache der Konvergenzprobleme bei der Gleichgewichtsiteration

Die Unterschiede zwischen den beiden Werkstoffen (W_S^I nach Gleichung (4.10) und W_S^{II} nach Gleichung (8.30)) werden im Weiteren noch analytisch anhand eines Würfels mit der Kantenlänge a aufgezeigt (siehe Abbildung 8.13). Der Würfel wird unter Behinderung der Querdehnung einaxial gedehnt und gestaucht. Die beschreibenden Gleichungen für diesen Fall können der Abbildung 8.13 entnommen werden. Weiterhin sind die Funktionsverläufe zur Verdeutlichung zweier, wichtiger Erkenntnisse grafisch dargestellt. Zum einen zeigt das bereits erwähnte Verhalten der Dehnungsenergie, dass für $\det \mathbf{F} \rightarrow 0$ W_S^{II} gegen unendlich strebt. Zum anderen ist für den Entwurf von Mikrostrukturen von Bedeutung, dass sich die Energieverläufe in der Umgebung des dehnungslosen Zustandes gleichen. Dadurch ist sichergestellt, dass der Einfluss des Materialparameters n für den Entwurf unbedeutend ist.

In PEDERSEN ET AL. [93] werden äquivalente Probleme für das Mechanismendesign angesprochen. Dort werden die Freiheitsgrade, welche nur von hochporösen Elementen umgeben sind, aus dem Konvergenzkriterium herausgenommen. Dieser Lösungsvorschlag konnte hier leider nicht erfolgreich eingesetzt werden. Ein wesentliches Problem dieses Verfahrens stellt die Vorgabe des Grenzwerts dar. Weiterhin ist der Fall von einem hochporösen Element zwischen angrenzenden steifen Elementen, wie sie besonders bei Gelenken auftreten, nicht abgedeckt. In BRUNS & TORTORELLI [24] und BUHL ET AL. [27] wurden bereits für die Steifigkeitsoptimierung von Scheiben, unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität, Konvergenzprobleme festgestellt. BRUNS & TORTORELLI benutzen ebenfalls ein hyperelastisches Materialgesetz zur Behebung dieses Problems. In der Arbeit von BUHL ET AL. [27], die sich mit der Steifigkeitsoptimierung unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität beschäftigt, ist der gleiche Ansatz wie bei PEDERSEN ET AL. [93] zu finden. Warum in der vorliegenden Arbeit derartige Konvergenzprobleme bei der Steifigkeitsoptimierung nicht auftraten, mag am Typ des mechanischen Modells (Schale bzw. Platte statt Scheibe) und an der Belastungshöhe liegen.

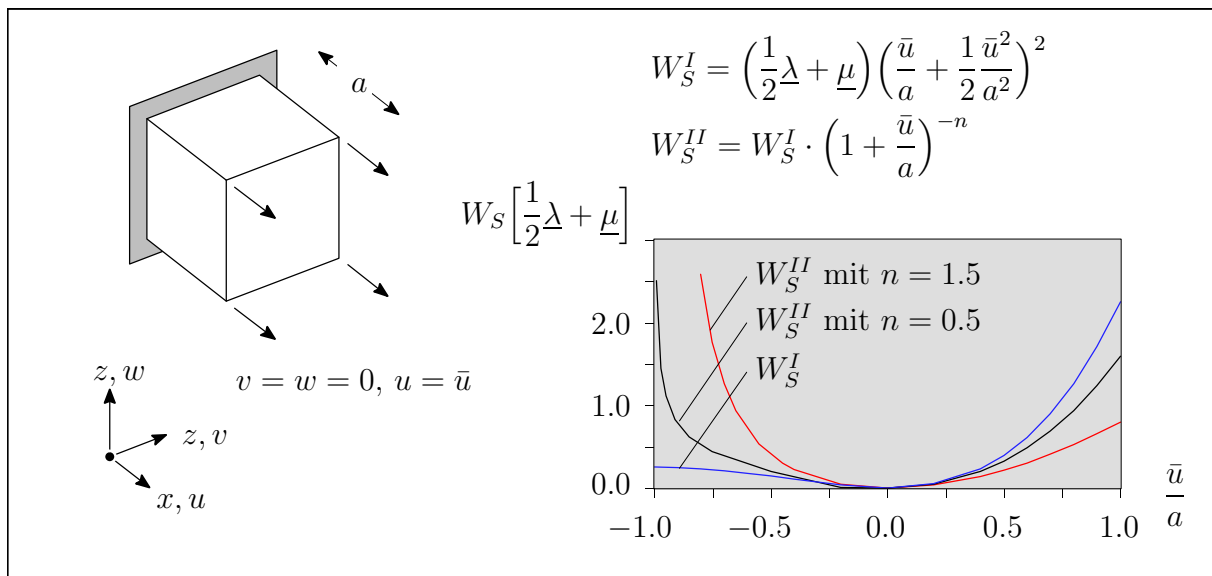


Abbildung 8.13: Verzerrungsenergieverlauf für unterschiedliche hyperelastische Werkstoffe

Kapitel 9

Stabilitätskriterien in der Strukturoptimierung

Dieses Kapitel widmet sich der Berücksichtigung von Stabilitätskriterien in der Strukturoptimierung. Im Zusammenhang mit der Formoptimierung wird diese Problematik seit längerer Zeit diskutiert. Für diese Fragestellungen sind unter anderem die Arbeiten KHOT ET AL. [62], KAMAT & RUANGSILASINGHA [59], BECKER [7] und REITINGER & RAMM [104] zu erwähnen. Die Berechnungen der kritischen Punkte fanden sowohl anhand einer linearen Vorbeulanalyse als auch anhand einer vollständig nichtlinearen Strukturanalyse statt. Weiterhin wurden die Stabilitätskriterien in das Optimierungsproblem als Zielfunktion oder Nebenbedingung eingearbeitet. Die Arbeit von REITINGER & RAMM ist insofern hervorzuheben, da sie neben einer vollständig nichtlinearen Strukturanalyse ebenfalls die Problematik der Imperfektionsempfindlichkeit im Optimierungsprozess berücksichtigt. In der Topologieoptimierung sind dagegen nur wenige Arbeiten bekannt, die sich mit dieser Fragestellung beschäftigen. In NEVES ET AL. [88] und MAUTE [78] wird die Maximierung der kleinsten Instabilitätslast auf der Basis einer linearen Vorbeulanalyse diskutiert. Die Arbeit von BRUNS ET AL. [23] untersucht die Fragestellung, inwiefern Strukturen mit gewollten Durchschlagspunkten generiert werden können. In BUHL ET AL. [27] und BRUNS & TORTORELLI [25] wird gezeigt, dass durch Steifigkeitsoptimierung indirekt Strukturen ohne Instabilitätsproblem generiert werden können. Dies trifft allerdings nur für Durchschlagsprobleme zu.

Im Folgenden werden verschiedene Fragestellungen untersucht. Abschnitt 9.1 behandelt den Einfluss von Stabilitätsnebenbedingungen. Die Bestimmung des Instabilitätspunktes findet anhand einer linearen Vorbeulanalyse statt. Weiterhin steht ein Ansatz zur Diskussion, wie bei der materiellen Topologieoptimierung den lokalen Beulmoden in hochporösen Bereichen begegnet werden kann.

In Abschnitt 9.2 wird auf die Erweiterung einer geometrisch nichtlinearen Strukturanalyse eingegangen. In diesem Zusammenhang wird die Auswirkung geometrischer Imperfektionen untersucht. Die Suche nach der maßgebenden Imperfektionsform behandelt der letzte Abschnitt 9.3 dieses Kapitels. Da das Thema nicht zu den klassischen Fragestellungen der Strukturoptimierung gehört, wird es in einem separaten Abschnitt behandelt.

9.1 Kritische Punkte bestimmt durch eine Eigenwertanalyse

Gegenüber der Formoptimierung gibt es nur wenige Arbeiten, welche sich mit dem Problem des Stabilitätsphänomens in der materiellen Topologieoptimierung befassen. Die Berücksichtigung dieses Phänomens bei dem prinzipiellen Entwurf eines Tragwerks ist von großer Bedeutung. Da vor allem die Topologieoptimierung oft ein Generator von schlanken Stabwerksstrukturen ist, sollte die Gefahr des Knickens bzw. Beulens im Entwurf Berücksichtigung finden. Derzeitig liegen lediglich die Arbeiten von NEVES ET AL. [88] und MAUTE [78] vor, die sich mit dieser Fragestellung in der materiellen Topologieoptimierung beschäftigten. Ziel beider Arbeiten war die Maximierung der kleinsten kritischen Last bei vorgegebener Masse im Entwurfsraum. Die zu optimierenden Bereiche dienten dabei im Wesentlichen nicht der Lastabtragung, sondern lediglich der Aussteifung der Struktur. In der Arbeit von MAUTE wird erwähnt, dass eine Maximierung der kleinsten kritischen Last für Strukturen ohne festes vorgegebenes Traggerüst nicht erfolgreich ist. Numerische Untersuchungen zeigten, dass bei derartigen Optimierungsproblemen die erzielten Ergebnisse oft hohe Anteile hochporöser Bereiche aufweisen. Aus diesem Grund steht hier bei der Anwendung nicht die Maximierung des kritischen Lastniveaus im Vordergrund. Da die Steifigkeitskriterien, wie sie bereits in Kapitel 7 diskutiert wurden, zu interpretierbaren ‘0–1’ Ergebnissen führen, wird das Instabilitätsverhalten im Optimierungsproblem mit zusätzlichen n_λ Nebenbedingungen berücksichtigt:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}} f_\Psi \\ & \sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| d\Omega \right] - \tilde{m} = 0 \quad ; \quad \tilde{\lambda}_i - \underline{\lambda} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_\lambda \quad (9.1) \\ & 0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \end{aligned}$$

wobei hier f_Ψ nach Gleichung (7.2) auf der Basis einer linearen Kinematik ausgewertet wird. Die Laststufe bei der Instabilität eintritt ($\tilde{\lambda}_i$), wird anhand einer noch zu definierenden Eigenwertanalyse und einer zugehörigen Abschätzung nach Gleichung (4.37) bzw. (4.38) berechnet und gegen den Laststeigerungsfaktor $\underline{\lambda}$ abgesichert. Die Berücksichtigung mehrerer Eigenwerte ist sinnvoll, da es ansonsten zu oszillierenden Beulmoden während des Optimierungsprozesses kommen kann.

Im Weiteren wird auf die Sensitivitätsanalyse kurz eingegangen. Anschließend wird ein Lösungsvorschlag zur Vermeidung von Beulmoden in hochporösen Bereichen aufgezeigt. Ein abschließendes Beispiel zeigt die Wirkungsweise der Stabilitätsnebenbedingungen in der Strukturoptimierung.

9.1.1 Sensitivitätsanalyse einfacher kritischer Punkte

Auf der Basis einer linearen Theorie lässt sich folgendes Eigenwertproblem aus der Formulierung (4.35) bzw. (4.36) ableiten:

$$\left[\mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_g \right] \Psi_i = \mathbf{0} \quad (9.2)$$

Dabei ist, wie bereits in Abschnitt 4.2.2 erwähnt, \mathbf{K}_e die linear elastische und \mathbf{K}_g die geometrische Steifigkeitsmatrix. Der Anteil der zweiten geometrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g^{II} (4.21) ist in \mathbf{K}_g nicht enthalten, da hier lediglich kleine Deformationen berücksichtigt werden. Während \mathbf{K}_e nur explizit von den Entwurfsvariablen \mathbf{s} abhängt, ist \mathbf{K}_g zusätzlich eine Funktion von den diskreten Verschiebungen \mathbf{u} , die aus der linearen Theorie bestimmt werden:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{P} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1.0 \quad (9.3)$$

Durch die Definition $\lambda = 1$ in Gleichung (9.3) entsprechen die abgeschätzten kritischen Laststufen $\tilde{\lambda}_i$ nach Gleichung (4.38) den Eigenwerten $\tilde{\lambda}_i$ nach Gleichung (9.2).

Die Ausgangsgleichung für die adjungierte Sensitivitätsanalyse ergibt sich durch Vervielfachung der Gleichung (9.2) mit den Eigenformen Ψ_i und der anschließenden Erweiterung um das Produkt von LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}$ mit der linearen Gleichgewichtsaussage (9.3):

$$\Psi_i^T \left[\mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_g \right] \Psi_i - \underbrace{\boldsymbol{\mu}^T \left[\mathbf{K}_e \mathbf{u} - \mathbf{P} \right]}_{= \mathbf{0}} = 0 \quad (9.4)$$

Durch die Kontraktion der Gleichung (9.2) mit Ψ_i kann die Ermittlung der Sensitivität der Eigenformen vermieden werden. Mit Hilfe des Vektors von LAGRANGE-Multiplikatoren kann analog zu Abschnitt 7.1.2, die Bestimmung des Gradienten der Verschiebungen vermieden werden. Die totale Ableitung der Gleichung (9.4) nach den Entwurfsvariablen ist:

$$\Psi_i^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e + \nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_g + \tilde{\lambda}_i \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_g \right] \Psi_i - \boldsymbol{\mu}^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e \mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right] + \underbrace{\left[\tilde{\lambda}_i \Psi_i^T \mathbf{K}_g \Psi_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}_e \right]}_{= \mathbf{0}} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u} = 0 \quad (9.5)$$

Die Sensitivität der Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ erhält man durch Umformung der Gleichung (9.5):

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i = -\Psi_i^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_g \right] \Psi_i^T + \boldsymbol{\mu}^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e \mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right] \quad (9.6)$$

wobei der Vektor von LAGRANGE-Multiplikatoren wie folgt zu bestimmen ist:

$$\boldsymbol{\mu} = \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_e^{-1} \left[\Psi_i^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_g \Psi_i \right] \quad (9.7)$$

und zusätzlich die Bedingung:

$$\Psi_i^T \mathbf{K}_g \Psi_i = 1 \quad (9.8)$$

erfüllt sein muss. Dies gelingt durch entsprechende Skalierung des Eigenvektors. Es ist noch anzumerken, dass die Gleichungen (9.6)–(9.8) nur für einfache Eigenwerte gültig sind. Da im Weiteren die Instabilitätslaststufen als Nebenbedingungen in das Optimierungsproblem eingehen, ist die Gefahr mehrfacher Eigenwerte sehr gering.

9.1.2 Beulmoden in hochporösen Bereichen bei der materiellen Topologieoptimierung

In den Arbeiten ROZVANY ET AL. [111] sowie ROZVANY und ZHOU [112] wurde auf einen Effekt bei der Querschnittsoptimierung von Fachwerken hingewiesen, bei dem die Reduzierung der Abmessungen einzelner Stäbe zu deren Instabilität führt. Dies begründet

sich dadurch, dass sich die Biegesteifigkeit bei kleiner werdenden Abmessungen schneller reduziert als die Dehnsteifigkeit. Hierdurch kann eine Reduzierung der Querschnittsabmessungen auf eine untere Restriktion unmöglich werden. Bei der materiellen Topologieoptimierung treten äquivalente Probleme auf. Aus diesem Grund wurde zur Vermeidung dieser ‘künstlichen’ Instabilitäten für die materielle Topologieoptimierung von Scheibenproblemen von NEVES ET AL. [88] und später von MAUTE [78] die geometrische Steifigkeitsmatrix unterhalb eines zu definierenden Schwellenwerts der Dichte ρ_{lim} zu null gesetzt. In der weiteren Arbeit von NEVES ET AL. [89], welche sich mit dem Beulen von periodischen Mikrostrukturen beschäftigt, kommt ebenfalls diese Idee zum Einsatz. Nachteil dieses Verfahrens ist, dass durch die nicht differenzierbare Stelle bei ρ_{lim} Oszillationen im Optimierungsverlauf auftreten können.

Werden anhand von Schalen- bzw. Faltwerkselementen die Beulmoden aus der Strukturebene heraus berücksichtigt, so können mit Hilfe ‘geschichteter’ Penalty-Faktoren derartige Eigenformen in hochporösen Bereichen vermieden werden. Unter dem Begriff ‘geschichtet’ wird hier verstanden, dass die gesamte Dicke in drei Bereiche aufgeteilt wird. Die äußeren beiden Schichten erhalten zur Bestimmung des effektiven E-Moduls einen eigenen Penalty-Faktor β . Die Dichten sind für alle Schichten gleich. Ist der Penalty-Faktor in den beiden äußeren Schichten geringer als jener im Kernbereich des Querschnitts, so ergibt sich bei Herausnahme des Materials eine schnellere Reduktion der Dehnsteifigkeit als die der Biegesteifigkeit. Da die für die geometrische Steifigkeitsmatrix maßgebende Membrankraft von der Dehnsteifigkeit abhängt und zum anderen das Beulversagen von dem Biegegewiderstand abhängt, können lokale Beulmoden in hochporösen Bereichen vermieden werden.

Zur Verdeutlichung der Wirkungsweise der ‘geschichteten’ Penalty-Faktoren dienen im folgenden zwei akademische Beispiele. Der erste Fall ist ein analytisches Beispiel und zeigt die prinzipielle Problematik auf. Der zweite Fall zeigt die untersuchten Effekte anhand eines übersichtlichen, numerischen Beispiels. In Abbildung 9.1 ist eine ebene Zweistabkonstruktion dargestellt, anhand der das Problem analytisch veranschaulicht wird. Für den in der Strukturebene beulgefährdeten rechten Druckstab sind die Schichten der unterschiedlichen Penalty-Faktoren übereinander angeordnet. Die einzige veränderliche Größe ist die Dichte des rechten Druckstabes $\rho_{\textcircled{2}}$. Für die anderen Größen sind zur Vereinfachung der beschreibenden Strukturgleichung Zahlenwerte vorgegeben.

Die Beziehung zwischen der Druckkraft in der rechten Strebe und der Dichte $\rho_{\textcircled{2}}$ ist:

$$N_{\textcircled{2}} = \frac{0.2\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_1} + 0.8\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_2}}{1 + 0.2\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_1} + 0.8\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_2}} \cdot P \quad (9.9)$$

Für den kleinsten positiven kritischen Laststeigerungsfaktor ergibt sich für dieses System die Beziehung:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\dot{P}}{N_{\textcircled{2}}} = \frac{25}{3} \pi^2 \frac{(0.488\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_1} + 0.512\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_2})(1 + 0.2\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_1} + 0.8\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_2})}{(0.2\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_1} + 0.8\rho_{\textcircled{2}}^{\beta_2}) \cdot P} \quad (9.10)$$

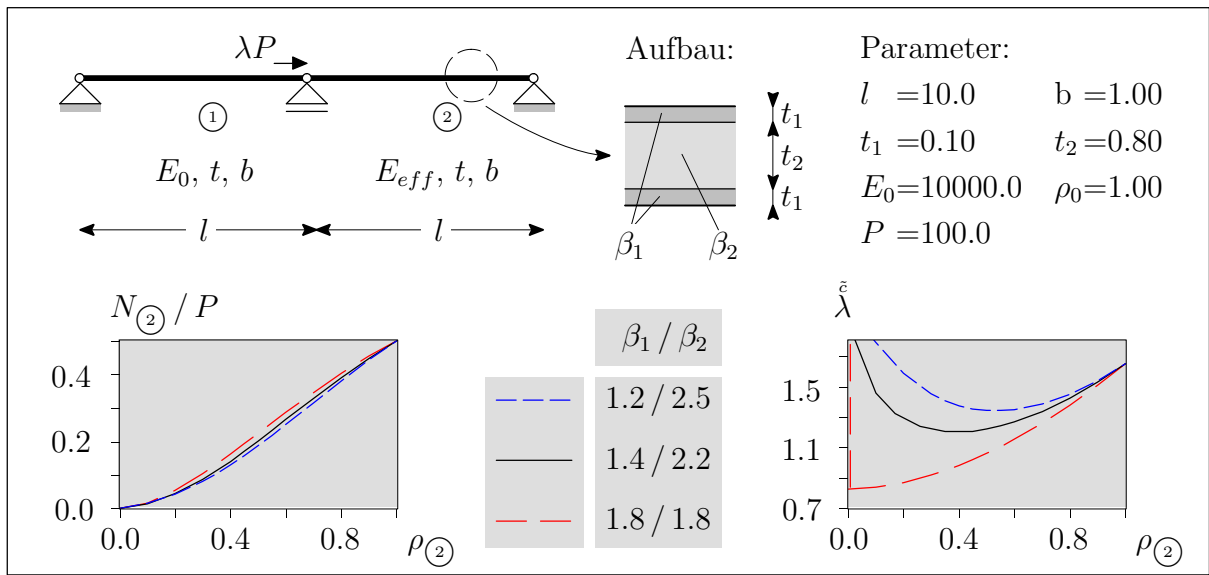


Abbildung 9.1: Wirkungsweise der geschichteten Penalty-Faktoren in der materiellen Topologieoptimierung

Im Falle gleicher Penalty-Faktoren kann ein Grenzwert für $\tilde{\lambda}$ ungleich null bestimmt werden:

$$\lim_{\rho_{\textcircled{2}} \rightarrow 0} \tilde{\lambda} = \frac{25 \cdot \pi^2}{3 \cdot P} \quad \text{mit} \quad \beta_1 = \beta_2 \quad (9.11)$$

Die unteren Diagramme der Abbildung 9.1 zeigen die ausgewerteten Gleichungen (9.9) und (9.10) für unterschiedliche Kombinationen von Penalty-Faktoren. Diese Kombinationen wurden so gewählt, dass durch die Ähnlichkeit der Beziehung zwischen $N_{\textcircled{2}}$ und $\rho_{\textcircled{2}}$ alle drei Fälle vergleichbar werden (siehe linkes Diagramm). Für den Fall identischer Penalty-Faktoren ($\beta_1 = \beta_2 = 1.8$) – dies entspricht dem homogenen bzw. traditionellen Fall – reduziert sich der kritische Laststeigerungsfaktor kontinuierlich mit der Herausnahme des Materials. Die Lösung ohne Steifigkeit der rechten Druckstrebe ($\rho_{\textcircled{2}} = 0$) ist in diesem System nicht enthalten (siehe Gleichung (9.10)). Ein System ohne rechte Druckstütze hingegen würde kein Stabilitätsproblem für positive Laststeigerungswerte aufzeigen, was gleichbedeutend mit $\tilde{\lambda} = \infty$ ist. Dieser Sachverhalt ist als singuläres Optimum¹ bekannt und kann durch numerische Optimierungsstrategien nicht gefunden werden. Nur eine Untersuchung mit veränderter Topologie der Struktur würde hier Aufschluss geben.

Wird nun eine Schichtung der Penalty-Faktoren β vorgenommen, so verdeutlicht das rechte Diagramm der Abbildung 9.1, dass die ursprünglich ‘unendlich schmale Nische’ für $\tilde{\lambda}$ mit $\rho_{\textcircled{2}} \rightarrow 0$ aufgeweitet werden kann (Regularisierung des Problems). Der Minimalwert von $\tilde{\lambda}$ und dessen Lage ist nun durch die Wahl von β_1 und β_2 kontrollierbar. Hier gilt, dass für größer werdende Unterschiede der Penalty-Faktoren β_1 und β_2 sich der Minimalwert für $\tilde{\lambda}$ erhöht.

¹Ein singuläres Optimum ist dadurch gekennzeichnet, dass der Lösungsraum in der Umgebung der Lösung eingeschränkt ist, d. h. der vorhandene Unterraum ist kleiner als der, der durch die Entwurfsvariablen aufgespannt ist.

Aus den Diagrammen der Abbildung 9.1 kann nun für verschiedene Entwurfsaufgaben das Verhalten eines möglichen Optimierungslaufes abgeleitet werden. Würde als Zielfunktion die Maximierung der kleinsten kritischen Last definiert werden, so ergäbe sich für gleiche Penalty-Faktoren $\rho_{(2)} = 1.0$ und für abgestufte Penalty-Faktoren würde $\rho_{(2)}$ auf die untere Restriktion gesetzt werden. Wäre die Zielfunktion z. B. die Masse der gesamten Struktur und als Ungleichheitsnebenbedingung käme die kleinste kritische Last zum Einsatz, so würde für gleiche Penalty-Faktoren die Lösung ein ‘poröser’ Stab sein. Für abgestufte Penalty-Faktoren könnte wiederum $\rho_{(2)}$ auf die untere Restriktion gesetzt werden.

Nach dem vorangegangenen, analytischen Beispiel wird der Ansatz ‘geschichteter’ Penalty-Faktoren an einem weiteren numerischen Beispiel getestet. Auf der linken Seite der Abbildung 9.2 ist das Tragwerk mit den zugehörigen Parametern dargestellt. Dabei handelt es sich um zwei Stützen, die anhand eines gemeinsamen Stempels belastet werden. Die rechte der beiden Stützen ist am Fußpunkt eingespannt. Das Prinzip des Schichtenaufbaus und die Definition der Faktoren β_1 und β_2 können der Abbildung 9.2 entnommen werden. ‘System 1’ hat einen homogenen und ‘System 2’ einen geschichteten Aufbau der Penalty-Faktoren. Zur Vergleichbarkeit der Entwürfe wurden für System 2 die Penalty-Faktoren so gewählt, dass sich jeweils die zwei ersten Eigenwerte der Ausgangsstrukturen beider Systeme gleichen ($\lambda_1^1 \approx \lambda_1^2$ und $\lambda_2^1 \approx \lambda_2^2$).

Dieses akademische Beispiel ermöglicht sehr anschaulich, die unterschiedlichen Wirkungs-

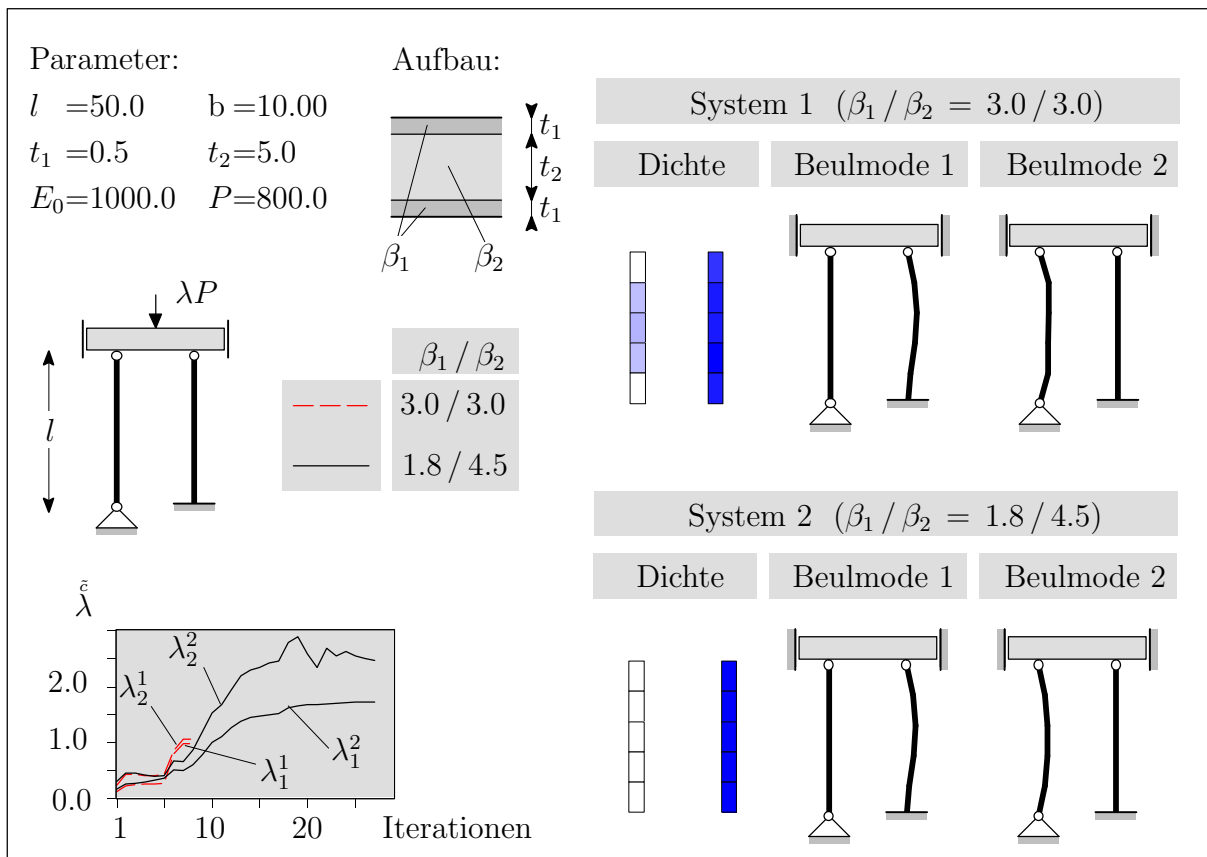


Abbildung 9.2: Numerisches Beispiel zur Verifizierung geschichteter Penalty-Faktoren

weisen der Ansätze darzustellen. Das zur Verfügung stehende Material erlaube lediglich die Ausbildung einer Stütze mit Vollmaterial (Masse = 50%, für den Entwurf konstant). Bei der Strukturanalyse werden nur die Beulmoden in der Ebene untersucht. Das Ziel der Optimierung ist die Maximierung des kleinsten Eigenwerts. Insgesamt wurden die zwei kleinsten Eigenwerte berechnet und anhand der GERMEIER-Methode (2.13) ($p = 5$, $w_1 = w_2 = 1$) zu einer skalarwertigen Zielfunktion zusammengefasst.

Auf der rechten Seite in Abbildung 9.2 sind die generierten Strukturen dargestellt. Für das System 1, welches einen homogenen Aufbau ($\beta_1 = \beta_2$) hat, bricht die Optimierungsstrategie bei einem Tragwerk mit porösen Stützen ab. Die Lösung (siehe Diagramm in Abbildung 9.2) konvergierte zügig gegen den ersten Instabilitätspunkt bei $\lambda_1^1 = 0.972$ und den zweiten von $\lambda_2^1 = 1.045$. Mit den geschichteten Penalty-Faktoren (System 2) wird nun eine eindeutige Materialverteilung erzielt. Die voll ausgebildete, eingespannte Stütze versagt bei einem Laststeigerungsfaktor von $\lambda_1^2 = 1.702$. Dagegen beult die hochporöse Stütze erst bei einem Lastwert von $\lambda_2^2 = 2.454$ und blendet sich dadurch eigenständig aus dem Optimierungsproblem aus. Dadurch wird die tatsächliche und intuitiv erwartete Lösung gefunden.

Anmerkungen zur Optimierung von Eigenfrequenzen

Ein artverwandtes Problem tritt bei der Optimierung von Eigenfrequenzen auf, wie sie z. B. in DIAZ und KIKUCHI [34], BENDSØE und KIKUCHI [12] oder MAUTE [78] untersucht wurden. In diesem Fall ist der Effekt von Eigenformen in hochporösen Bereichen noch deutlicher als bei der Berücksichtigung des Beulphänomens im Optimierungsprozess. Dies beruht auf dem Sachverhalt, dass für Eigenwerte die Masse (ermittelt über die Dichte) nicht durch Faktoren bestraft wird. Hingegen sind bei Stabilitätsuntersuchungen die Spannungen an die Steifigkeiten gekoppelt, welche wiederum eine Funktion der bestrafte Dichten sind.

9.1.3 Beispiel 9: Berücksichtigung von Stabilitätsnebenbedingungen

Ziel dieser Untersuchung ist es den Einfluss von Stabilitätsnebenbedingungen bei der Steifigkeitsoptimierung aufzuzeigen. Die Material- und Geometriedaten sowie die Lastangaben sind für einen wandartigen Träger in Abbildung 9.3 dargestellt. Die Struktur ist an den Stirnseiten eingespannt. Weitere Lager befinden sich an der Stelle der kurzen Linienlast in beiden horizontalen Richtungen. Dieses Scheibenproblem wurde bereits von MAUTE [78] und SCHWARZ [116] auf die Maximierung der Duktilität hin optimiert. Hier finden im Weiteren Untersuchungen für drei unterschiedliche Systeme statt. System 1 ist die klassische Aufgabenstellung der Topologieoptimierung. Unter Vorgabe der Masse wird die steifste Struktur unter Vernachlässigung des Stabilitätsphänomens während des Optimierungsprozesses ermittelt. Die Aufgabenstellung des Systems 2 ist gegenüber System 1 um die Begrenzung positiver kritischer Lastniveaus von $\hat{\lambda}_+ \geq 1.2$ erweitert. Zusätzlich zu System 2 enthält System 3 die Mindestanforderung an negative Instabilitätsniveaus (kritische Laststufe bei Lastumkehr, $|\hat{\lambda}_+| \geq 1.2$). Wegen der zugrunde gelegten linearen Kinematik ist die Lastrichtung für die Auswertung der Zielfunktion sowie der Neben-

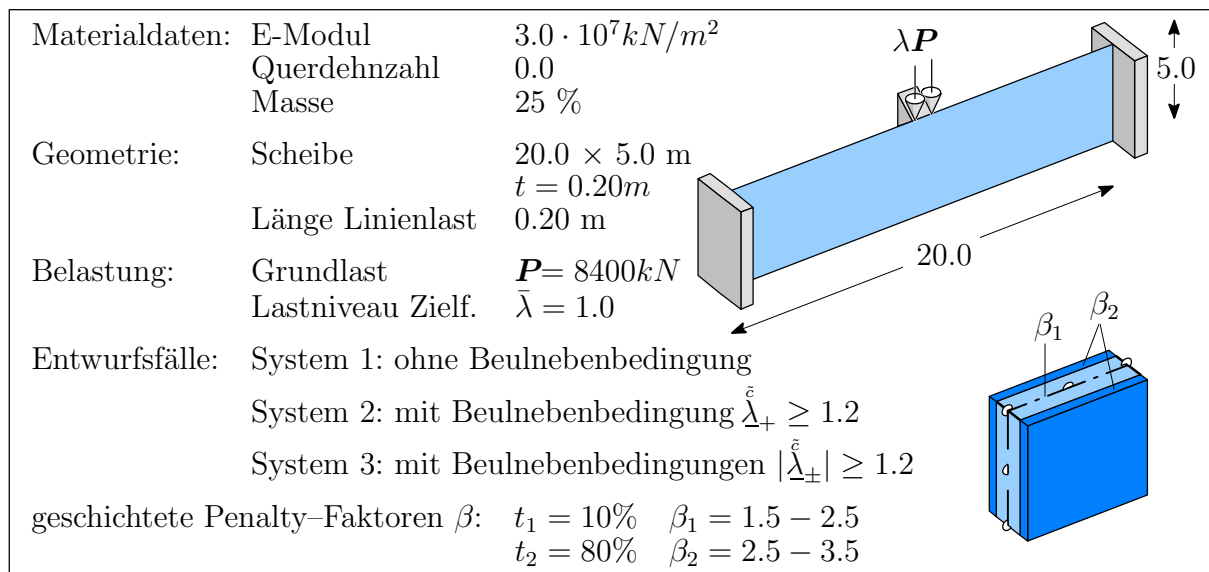


Abbildung 9.3: Geometrie, Lasten und Materialdaten des Beispiels 9

bedingungen ohne Belang. Um ein Oszillieren der Beulform der betragsmäßig kleinsten Eigenwerte zu vermeiden, wurden die vier kleinsten positiven kritischen Laststufen für System 2 bzw. jeweils die drei betragsmäßig kleinsten positiven sowie negativen Lastniveaus für System 3 im Optimierungsprozess berücksichtigt. Zum effektiven Auffinden der für die Nebenbedingungen maßgebenden Eigenwerte wurde ein Suchalgorithmus, gekoppelt an den verwendeten Sub-Space-Eigenwertlöser, implementiert.

Aus Symmetriegründen fand die Optimierung am halben System statt. Die dadurch entstehende Einschränkung auf symmetrische Beulformen erwies sich im Nachlauf als zulässig. Die Beulform des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes ist symmetrisch.

Für den hier beschriebenen Fall, bei dem die Instabilität der Struktur als Nebenbedingung in den Entwurfsprozess eingeht, ist es sinnvoll, die Penalty-Faktoren innerhalb des Optimierungslaufs zu staffeln. Hierdurch kann der Startentwurf mit anfänglich geringen Werten für die Penalty-Faktoren im zulässigen Bereich des Entwurfsraums platziert werden (größere Steifigkeit \rightarrow größere kritische Last). Die im Optimierungsprozess anwachsenden Penalty-Faktoren sorgen für die gewünschte deutliche ‘0–1’ Verteilung des Materials.

Für die Topologieoptimierung kamen für das halbe System 800, 8-knotige, isoparametrische, unterintegrierte Schalenelemente zum Einsatz. Mit den links angeordneten Bildern der Abbildung 9.4 sind die generierten Topologien der Systeme 1–3 dargestellt. Unter Vernachlässigung von Stabilitätskriterien wurde mit System 1 eine Struktur entwickelt, welche die Belastung über lange Druckstreben zu den Auflagern abträgt. Die im Nachlauf ermittelten betragsmäßig kleinsten positiven und negativen Eigenwerte sowie der Wert der Zielfunktion sind in der Tabelle der Abbildung 9.4 angegeben. Der kleinste positive kritische Laststeigerungsfaktor liegt mit ca. 1.0 unterhalb dem für System 2 und 3 geforderten Wert. Die Erweiterung auf System 2 führt zu einer Hängestruktur mit einem eingehaltenen kritischen positiven Lastniveau. Durch die Biege- und Torsionssteifigkeit der Unterspannung ist eine resultierende Auflagerkraft oberhalb des Lastangriffspunktes möglich (Problem des poltreu belasteten Stabes, siehe auch Abbildung 9.9). Für eine Lastumkehr wäre für dieses Tragwerk allerdings bereits ab einem Lastniveau von 0.85 ein

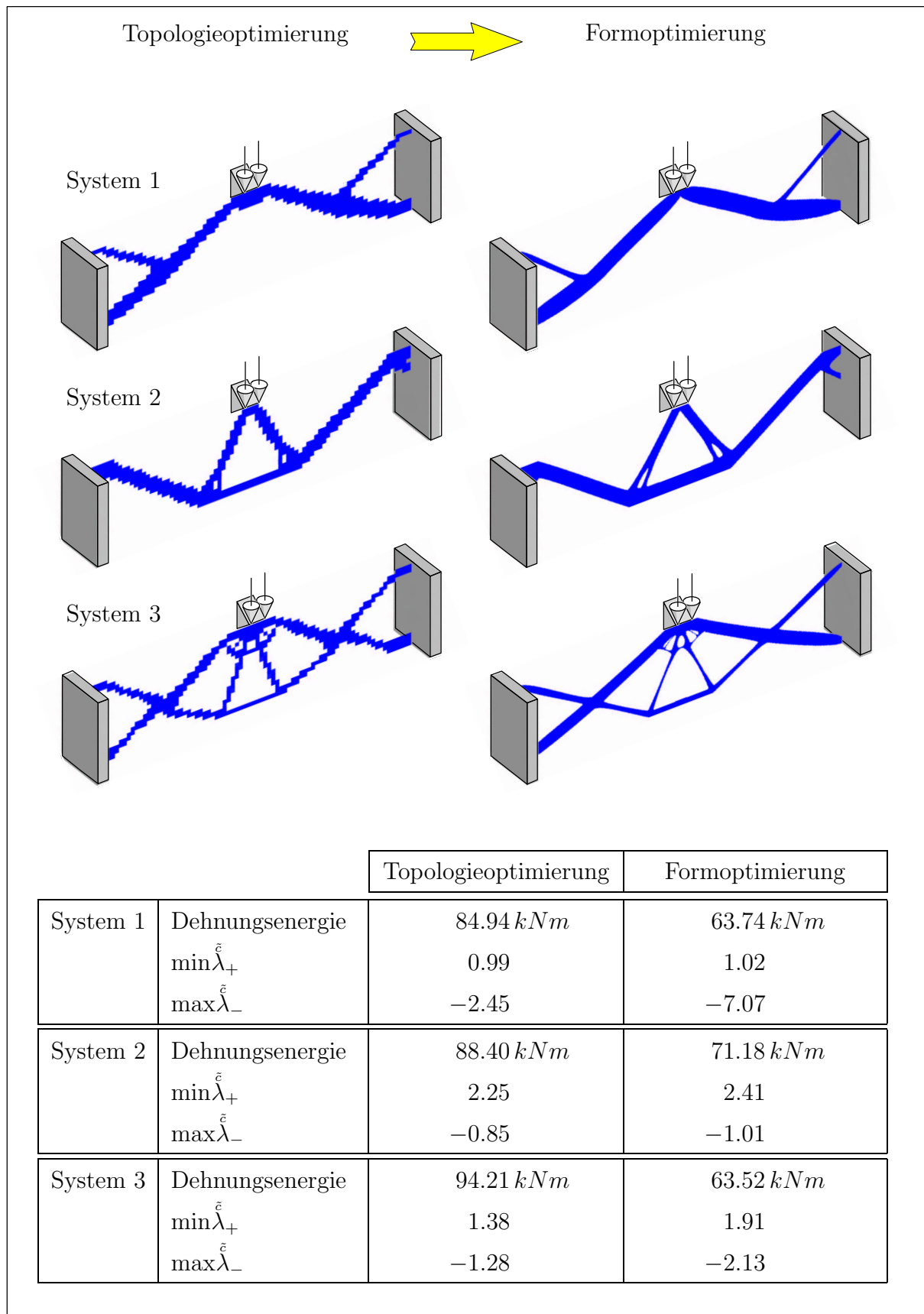


Abbildung 9.4: Generierte Strukturen des Beispiels 9 und deren Vergleich

kritischer Zustand erreicht. Die generierte Topologie des Systems 3 ist eine Kombination der Ergebnisse von 1 und 2. Die für beide Lastrichtungen stabilisierende Wirkung der sich kreuzenden Zug- und Druckstreben bewirkt die Einhaltung der geforderten Stabilitätsniveaus. Zwar sind in keinem der drei Fälle die Nebenbedingungen für die kritischen Lastniveaus im Optimum aktiv, doch ihre Berücksichtigung während des Optimierungsprozesses bewirkt die Topologieänderung. Der Vergleich der Dehnungsenergien zeigt, dass die vorgegebenen Begrenzungen der kritischen Lastniveaus sich negativ auf den Zielfunktionswert auswirken.

Eine anschließende Formoptimierung soll die tatsächliche Leistungsfähigkeit der anhand der Topologieoptimierung generierten Strukturen aufzeigen. Ein automatisiertes Verfahren, wie es von MAUTE & RAMM [81] zur Überführung von Topologieoptimierungsergebnissen in ein CAGD orientiertes Formoptimierungsmodell vorgestellt wurde, wird hier nicht angewendet, da die Art und Weise der Parametrisierung schwer zu kontrollieren ist. Hier wird ein analoges Verfahren zu OLHOFF ET AL. [91] eingesetzt, bei dem auf eine nichtadaptive Topologieoptimierung eine Formoptimierung folgt. Die Strukturen der anschließenden Feinjustierung anhand einer Formoptimierung sind mit den rechten Bildern der Abbildung 9.4 dargestellt. Das halbe System 1 wurde dabei mit 6 BÉZIER-Splines und 4 linearen LAGRANGE-Interpolationen parametrisiert. Die Übergänge benachbarter BÉZIER-Splines sind dabei C^1 -kontinuierlich. Insgesamt wurden von den 22 Design-Knoten 28 Bewegungsmöglichkeiten in der Tragwerksebene variabel definiert. Die Freivernetzung der durch die Design-Kanten beschriebenen Fläche erfolgte anhand der in REHLE [101] erläuterten ‘advancing front’-Methode. Das halbe System wurde anhand 598, 8-knotigen, isoparametrischen, unterintegrierten Schalenelemente diskretisiert. Zwar konnte für die formoptimierte Struktur die Dehnungsenergie gegenüber der Topologieoptimierung deutlich gesenkt werden, doch die Stabilitätskriterien sind weiterhin nicht aktiv. Für System 2 erfolgte die Parametrisierung des Optimierungsproblems und die Vernetzung der Struktur anhand der oben genannten Vorgehensweise. Die Beschreibung der Berandung erfolgte mittels 8 BÉZIER-Splines und 7 linearen LAGRANGE-Interpolationen sowie 3 BÉZIER-Splines für die Auffächerung der Druckstrebe. Die Anzahl der unabhängigen Optimierungsvariablen ist 50 und die der eingesetzten finiten Elemente 688. Wie bereits in System 1 konnte die Zielfunktion deutlich verbessert werden. Dies ist im Wesentlichen auf die größere Untergurthöhe zurückzuführen. Die Dimensionen der Auffächerung und der Aussparung am Endauflager wurden gegenüber denen der Topologieoptimierung vergrößert.

Die Parametrisierung des Systems 3 für die Formoptimierung erfolgte anhand 19 BÉZIER-Splines und 7 linearen LAGRANGE-Interpolationen. Hieraus ergaben sich dann 80 unabhängige Entwurfsvariablen. Die Diskretisierung erfolgte mittels 916 finiten Schalenelementen. Trotz der schlank wirkenden Streben werden für System 3 ebenfalls die geforderten Stabilitätskriterien durch die Kreuzung von Zug- und Druckstreben erfüllt. Die extrem dünnen Streben, welche die beiden äußersten kleinen Löcher an der Lasteinleitungsstelle voneinander trennen, können allerdings in ihrer mechanischen Relevanz angezweifelt werden.

Bei dem Vergleich, der in der Tabelle der Abbildung 9.4 aufgeführten mechanischen Kenngrößen der sechs untersuchten Strukturen, fällt die Dehnungsenergie des formoptimierten Systems 3 aus der erwarteten Reihenfolge. Das für die Topologieoptimierung verwendete

Material (SIMP–Ansatz, vgl. Abschnitt 5.1) ist sub–optimal und neigt zur Konzentration des zur Verfügung stehenden Materials auf wenige Strukturelemente. Da die Nebenbedingungen der dritten Entwurfsaufgabe eine aufgelöstere Struktur erzwingen, wie sie ebenfalls unter Verwendung des optimalen ‘rank–n Laminates’ entstehen würde, ist in der Formoptimierung diese überdurchschnittliche Verbesserung gegenüber der Topologieoptimierung möglich.

9.2 Kritische Punkte bei nichtlinearen Strukturanalysen

Im vorangegangenen Abschnitt 9.1 wurde bereits auf die Berücksichtigung des Instabilitätsproblems im Optimierungsprozess eingegangen. In diesem Abschnitt wird die Erweiterung anhand einer exakten Stabilitätsuntersuchung aufgezeigt. Das ‘erweiterte System’, wie es in Abschnitt 4.3.2 beschrieben wurde, findet hier Anwendung. Dadurch ist eine aussagekräftige Bestimmung des kritischen Lastniveaus ebenfalls bei einem nichtlinearen Vorbeulverhalten möglich. Diese Verhaltensmuster zeigen im Weiteren insbesondere geometrisch imperfekte Tragwerke.

Auf die Problematik von Beulmoden in hochporösen Bereichen wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt eingegangen. Das dort beschriebene Verfahren zur Vermeidung derartiger Probleme wird auch hier eingesetzt. Des Weiteren wird wie in dem vorangegangenen Abschnitt nur auf Fragestellungen mit Instabilitätsnebenbedingungen eingegangen, da nur dadurch Optimierungsprobleme ohne feste Tragstrukturen aussagekräftige Ergebnisse liefern. Die kleinste kritische Last der perfekten Struktur $\check{\lambda}^p$ wird anhand des ‘erweiterten Systems’ direkt berechnet. Von dieser Laststufe aus werden höhere kritische Punkte $\check{\lambda}_i$ anhand der Eigenwertanalyse (4.36) in Kombination mit dem Kriterium (4.38) abgeschätzt und gegen den Laststeigerungsfaktor $\check{\lambda}$ abgesichert. Dadurch können für die perfekte Struktur Oszillationen der Beulmoden, zugehörig zum kleinsten kritischen Laststeigerungsfaktor, innerhalb des Optimierungsprozesses vermieden werden. Für das imperfekte Tragwerk wird dagegen lediglich die kleinste kritische Last $\check{\lambda}^i$ berechnet. Eine Absicherung gegen höhere Instabilitätslasten, wie es für die perfekte Struktur erfolgt, wird nicht angestellt, da in der Regel imperfekte Tragwerke durch die geometrische Imperfektionsform weniger kritische Punkte aufweisen. Das Optimierungsproblem lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} f_q \quad & \text{mit} \quad q = \Psi, \nu, EC \\ & \sum_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \rho |\mathbf{J}| d\Omega \right] - \check{m} = 0 \\ & \check{\lambda}^p - \check{\lambda} \leq 0 \quad ; \quad \check{\lambda}^i - \check{\lambda} \leq 0 \quad ; \quad \check{\lambda}_i - \check{\lambda} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\lambda} \\ & 0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \end{aligned} \tag{9.12}$$

Die Definitionen der Steifigkeitskriterien können Abschnitt 7.1.1 entnommen werden. Im Folgenden wird auf die verschiedenen Möglichkeiten der Sensitivitätsanalyse von kritischen Laststeigerungsfaktoren eingegangen. Weiterhin lässt sich die Wahl der Eigenwertformulierung anhand der Sensitivitätsanalyse begründen. Ein anschließender Abschnitt

beschäftigt sich mit der Umsetzung des notwendigen Algorithmus zur Bestimmung aller mechanischen Größen des Optimierungsproblems. Ein weiteres Beispiel, bei dem das Imperfektionsverhalten eine wichtige Rolle spielt, dient der Verifizierung des vorgestellten Verfahrens.

9.2.1 Sensitivität einfacher kritischer Punkte und Eigenwerte

Für die Sensitivitätsanalyse von einfachen kritischen Lastfaktoren sind zwei verschiedene Vorgehensweisen, je nach Typ des kritischen Punktes, möglich. Der erste Typ ist sowohl für Verzweigungs- als auch für Durchschlagspunkte zulässig. Für Durchschlagspunkte ist des Weiteren eine selbstadjungierte Vorgehensweise möglich. Mit Gleichung (4.42) ist ein mathematisches Unterscheidungskriterium zwischen beiden Versagensmechanismen gegeben. Im Weiteren wird dann auf die Sensitivitätsanalyse der Imperfektionsform und der Eigenwerte, bestimmt anhand des Eigenwertproblems (4.36), eingegangen. Inwiefern die Sensitivitätsgleichungen direkt bestimmter kritischer Punkte mit denen von Eigenwerten übereinstimmen, ist die letzte Fragestellung dieses Abschnitts. Im Folgenden wird bei der Herleitung der Sensitivitäten nicht unterschieden, ob es sich um den kritischen Punkt des perfekten oder imperfekten Tragwerks handelt. Davon ausgenommen ist die Ableitung der Imperfektionsform.

Allgemeine Sensitivitätsanalyse einfacher kritischer Punkte

Zur Ermittlung der Gradienten eines kritischen Laststeigerungsfaktors $\dot{\lambda}$ bezüglich der Entwurfsvariablen kann wie bei den erweiterten Systemen (siehe Abschnitt 4.3.2) von verschiedenen Formulierungen ausgegangen werden. Zuerst soll auf der Basis von $\dot{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ die Bestimmungsgleichung für den Gradienten der kritischen Laststufe bezüglich der Entwurfsvariablen erfolgen. Anschließend erfolgt die Diskussion auf der Grundlage des Determinantenkriteriums.

Wie in den vorangegangenen adjungierten Sensitivitätsanalysen wird die Ausgangsgleichung wiederum mit der erfüllten Gleichgewichtsbedingung (4.26) erweitert:

$$\boldsymbol{\phi}^T \underbrace{\dot{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\phi}}_{=\mathbf{0}} - \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \left[\underbrace{\dot{\mathbf{R}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{P}}_{=\mathbf{0}} \right] = \mathbf{0} \quad (9.13)$$

wobei hier $(\dot{\cdot})$ den Bezug zu dem kritischen Lastniveau kennzeichnet. Durch die Verjüngung des Instabilitätskriteriums mit dem Singularitätsvektor lässt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\dot{\mathbf{K}}_T$ die Bestimmung dieser Sensitivität vermeiden. Die Vorgehensweise der hier aufgezeigten Gradientenbestimmung ist analog zu denen der vorangegangenen und wird aus diesem Grund kurz gehalten. Nach der totalen Ableitung der Gleichung (9.13) wird der adjungierte LAGRANGE-Vektor $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ verwendet, um die Bestimmung des Gradienten der Verschiebungen zu vermeiden. Die Sensitivität des kritischen Laststeigerungsfaktors ergibt sich zu:

$$\nabla_s \dot{\lambda} = - \left[\boldsymbol{\phi}^T \nabla_s^{ex} \dot{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\phi} - \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \left(\nabla_s^{ex} \dot{\mathbf{R}} - \dot{\lambda} \cdot \nabla_s^{ex} \mathbf{P} \right) \right] [\dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{P}]^{-1} \quad (9.14)$$

wobei $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ folgendermaßen zu bestimmen ist:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\mathbf{K}}_T^{-1} \left[\boldsymbol{\phi}^T \nabla_u \dot{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\phi} \right] \quad (9.15)$$

Zur effektiven Auswertung des Klammerausdruckes der Gleichung (9.15) sei auf Abschnitt 6.4 verwiesen. Weiterhin muss beachtet werden, dass Gleichung (9.15) nur dann ausgewertet werden kann, wenn der instabile Punkt nicht exakt bestimmt wurde, sondern unter Verwendung einer Penalty-Formulierung (siehe Abschnitt 4.3.2) lediglich ein Gleichgewichtspunkt in der Nachbarschaft des singulären Punktes bestimmt wurde.

Wird nun das Instabilitätskriterium von Gleichung (9.13) gegen das des Determinantenkriteriums ausgetauscht, so ist die Ausgangsgleichung für die Sensitivitätsanalyse:

$$\underbrace{\det \dot{\mathbf{K}}_T}_{=0} - \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \left[\underbrace{\dot{\mathbf{R}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{P}}_{=0} \right] = \mathbf{0} \quad (9.16)$$

Im Weiteren soll nur die totale Ableitung des ersten Terms nach den Entwurfsvariablen untersucht werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \det \dot{\mathbf{K}}_T = \nabla_{\mathbf{u}} \det \dot{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \det \dot{\mathbf{K}}_T \quad (9.17)$$

Daraus kann der erste Term z. B. nach CIARLET [31] wie folgt bestimmt werden:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \det \dot{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{u}} = \det \dot{\mathbf{K}}_T \operatorname{tr} \left[\dot{\mathbf{K}}_T^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{u}} \right) \right] \quad (9.18)$$

Neben dem Sachverhalt, dass $\nabla_{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{u}}$ für das Lösen des adjungierten Problems nicht aus der Spurfunktion herauslösbar ist, ist selbst für eine direkte Sensitivitätsanalyse die Ausgangsgleichung (9.16) nicht geeignet, da für jede Entwurfsvariable so viel rechte Seiten wie Systemfreiheitsgrade zu lösen sind (Operation innerhalb der eckigen Klammer). Analoge Probleme treten, wie bereits in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, bei der Formulierung eines erweiterten Systems zur Berechnung von singulären Punkten auf. Es soll hier noch angemerkt werden, dass die Wahl der Formulierung des erweiterten Systems nicht mit der der Sensitivitätsanalyse übereinstimmen muss, da alle Instabilitätskriterien in ihrer Aussage äquivalent sind.

Sensitivitätsanalyse einfacher Durchschlagspunkte

Im Gegensatz zur vorangegangenen allgemeinen Herleitung ist für Durchschlagspunkte eine effizientere Gradientenbestimmung möglich. Ausgegangen wird von folgender Gleichung:

$$\boldsymbol{\phi}^T \left[\underbrace{\dot{\mathbf{R}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{P}}_{=0} \right] = \mathbf{0} \quad (9.19)$$

und damit ist die totale Ableitung:

$$\boldsymbol{\phi}^T \left[\dot{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \dot{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \dot{\lambda} \cdot \mathbf{P} - \dot{\lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right] = \mathbf{0} \quad (9.20)$$

Bei der Betrachtung der Gleichung (9.20) fällt auf, dass der erste Term $\boldsymbol{\phi}^T \dot{\mathbf{K}}_T = \mathbf{0}$ gleich der Bedingung für einen kritischen Punkt ist und deshalb die Sensitivität des Verschiebungsvektors nicht bestimmt werden muss. Dadurch kann anhand der Gleichung (9.20) die Sensitivität des kritischen Laststeigerungsfaktors direkt ermittelt werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \dot{\lambda} = \boldsymbol{\phi}^T \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \dot{\mathbf{R}} - \dot{\lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right] \left[\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} \right]^{-1} \quad (9.21)$$

Da hier durch das Vektorprodukt von Singularitäts- und Lastvektor dividiert wird, ist Gleichung (9.21) nur für Durchschlagpunkte definiert, da für Verzweigungspunkte nach Gleichung (4.42) dieses Produkt null ergibt.

Sensitivitätsanalyse geometrischer Imperpektionsformen

Die oben stehenden und erläuterten Sensitivitätsanalysen gelten uneingeschränkt für die Ermittlung der Gradienten kritischer Laststufen perfekter Tragwerke. Für imperfekte Strukturen sind die genannten Bestimmungsgleichungen nur dann exakt, wenn die Imperpektionsform unabhängig von den Entwurfsvariablen ist. Ist die angenommene Imperpektionsform z. B. affin zur Beulform der kleinsten kritischen Last der perfekten Struktur des aktuellen Entwurfes, so entstehen weitere implizite Abhängigkeiten von $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^i$ und $\overset{\circ}{\mathbf{R}}^i$, welche folglich zu weiteren Termen (z. B. in der Gleichung (9.14)) führen:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^i &= \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^i(\overset{\circ}{\mathbf{u}}^i, \mathbf{s}, \phi^p) &\rightarrow \nabla_{\phi^p} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^i \nabla_{\mathbf{s}} \phi^p \\ \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i &= \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i(\overset{\circ}{\mathbf{u}}^i, \mathbf{s}, \phi^p) &\rightarrow \nabla_{\phi^p} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i \nabla_{\mathbf{s}} \phi^p\end{aligned}\quad (9.22)$$

Der zusätzliche obere Index i symbolisiert hier den Bezug zu der imperfekten Struktur. Zur Unterscheidung zum perfekten Tragwerk erfolgt dort im Weiteren eine Kennzeichnung mit dem Index p . Stellvertretend für beliebige Beulformen, welche als geometrische Imperpektion genutzt werden können, wird die Sensitivität des Singularitätsvektors der perfekten Struktur bezüglich der Entwurfsvariablen bestimmt.

Bei der Ausgangsgleichung (9.13), bei der die Bestimmung von der skalarwertigen Größe $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}^p$ erfolgte, wurde das Instabilitätskriterium $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p \phi^p$ mit dem Singularitätsvektor ϕ^p verjüngt, um die Bestimmung von $\nabla_{\mathbf{s}} \phi^p$ zu vermeiden. Zur Berechnung des Gradienten von ϕ^p , welcher im Gegensatz zu $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}^p$ vektorwertig ist, kann nun nicht mehr das Skalarprodukt des LAGRANGE-Multiplikator-Vektors und der Gleichgewichtsbedingung an die Ausgangsgleichung $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p \phi^p$ angehängt werden. Die Ableitung von $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p \phi^p = \mathbf{0}$ nach den Entwurfsvariablen \mathbf{s} und das anschließende Auflösen nach $\nabla_{\mathbf{s}} \phi^p$ liefert:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \phi^p = -\left(\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p\right)^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p \phi^p \right] - \left(\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p\right)^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{u}} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p \phi^p \nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\mathbf{u}}^p \right] \quad (9.23)$$

Der für eine adjungierte Sensitivitätsanalyse unerwünschte Term $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\mathbf{u}}^p$ der Gleichung (9.23) kann zwar durch die Ableitung des Gleichgewichts am kritischen Punkt mit anschließendem Auflösen nach $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\mathbf{u}}^p$ ersetzt werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\mathbf{u}}^p = \left(\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^p\right)^{-1} \left[-\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^p + \nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}^p \mathbf{P} + \overset{\circ}{\lambda}^p \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right] \quad (9.24)$$

doch eine Aufspaltung der entstehenden Gleichungen in rein implizite und explizite Anteile, wie es für die effektive adjungierte Vorgehensweise notwendig ist, gelingt nicht. Dadurch entspricht der numerische Aufwand zur Auswertung der Gleichungen (9.23) und (9.24) dem einer direkten Vorgehensweise.

Aus diesem Grund soll im Weiteren untersucht werden, welchen Einfluss die Berücksichtigung der Komponenten der Gleichung (9.22) auf die Bestimmung von $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}^i$ hat. Dazu werden die Sensitivitäten von $\overset{\circ}{\lambda}^i$ eines eingespannten flachen Parabelbogens, wie er in

Abbildung 9.5 dargestellt ist, einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der oben genannten Sensitivitätsanteile ermittelt. Weiterhin enthält diese Abbildung die Material-, Geometrie- und Lastdaten des mit 20, 8-knotigen, isoparametrischen Schalenelementen untersuchten Beispiels. Bei der Berücksichtigung einer geometrischen Imperfektion, welche affin zur Beulform der perfekten Struktur ist, sinkt der kritische Laststeigerungsfaktor von 0.942 auf 0.892 bei einer Imperfektionsamplitude von 10 mm.

Analysiert wird der Einfluss bei der Querschnitts-, Form- sowie Dichtevariation. Für die beiden ersten Disziplinen wird das Designkonzept, wie es in Abschnitt 5.2 beschrieben wurde, verwendet. Weiterhin werden für jede Teildisziplin zwei Variablen untersucht. Bei der Querschnittsvariation ist es zum einen die Schalendicke am Scheitel des Bogens (s_1) sowie die Dicke am rechten Kämpfer (s_2). Die Formvariable ist die Scheitelhöhe (s_3) sowie die vertikale Position des rechten Kämpfers (s_4). Bei der Dichtevariation wird die Sensitivität der kritischen Lasten bezüglich der Dichten (unter Annahme des SIMP-Ansatzes) für je ein finites Element am Scheitel (s_5) bzw. Kämpfer (s_6) ermittelt (dunkelgraue Elemente).

In der unten stehenden Tabelle der Abbildung 9.5 sind die Sensitivitäten der sechs oben erläuterten Variablen angegeben. Dabei wurden hier die Sensitivitäten numerisch ermittelt. Um die Güte dieser Werte zu verifizieren, wurden die analytisch bestimmten Größen $\nabla_{\mathbf{s}} \check{\lambda}^p$ und $\nabla_{\mathbf{s}} \check{\lambda}^i$ (unter Vernachlässigung des Anteils $\nabla_{\mathbf{s}} \check{\phi}^p$) ebenfalls angegeben. Mit Ausnahme der Dichtevariation des Kämpferelementes (s_6) liegen die Fehler der Sensitivitätswerte von $\nabla_{\mathbf{s}} \check{\lambda}^i$ bei Vernachlässigung des Anteils $\nabla_{\mathbf{s}} \check{\phi}^p$ im Promillebereich. Dem relativ hohen Fehler von $\nabla_{s_6} \check{\lambda}^i$ bei Vernachlässigung von $\nabla_{s_6} \check{\phi}^p$ steht absolut gesehen im Verhältnis zu $\nabla_{s_5} \check{\lambda}^i$ ein geringer Wert gegenüber.

Sensitivitätsanalyse einfacher Eigenwerte

In der Einleitung dieses Abschnitts wurde dargelegt, warum es für den Entwurfsprozess sinnvoll ist, höhere kritische Laststeigerungswerte anhand einer Eigenwertanalyse abzuschätzen. Neben der Darstellung der Sensitivitätsgleichungen steht hier die Begründung der Wahl der Eigenwertformulierung mit im Vordergrund. Im Vergleich zur Ausgangsgleichung (9.13) wird für die Sensitivitätsanalyse von direkt ermittelten kritischen Punkten hier die gewählte Eigenwertformulierung eingesetzt:

$$\underbrace{\psi_i^T \left[\mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \check{\mathbf{K}}_{ug} \right] \psi_i}_{=0} - \underbrace{\tilde{\mu}_i^T \left[\check{\mathbf{R}} - \check{\lambda} \cdot \mathbf{P} \right]}_{=0} = 0 \quad (9.25)$$

Dabei wurde angenommen, dass das Lastniveau, von welchem das Eigenwertproblem aus formuliert wird, dem des kleinsten kritischen Wertes entspricht. Es soll hier angemerkt sein, dass dies nicht zwingend notwendig ist.

Wie in den vorangegangenen Abschnitten erfolgt zuerst die totale Ableitung der Ausgangsgleichung (9.25) nach der gleichen Systematik. Wie bei den vorher bereits erläuterten adjungierten Sensitivitätsanalysen kann mit dem Vektor der LAGRANGE-Multiplikatoren die Bestimmung von $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}$ vermieden werden. Nach der Durchführung dieser Operation erhält man die Sensitivität des Eigenwerts $\tilde{\lambda}_i$:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i = - \left[\psi_i^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \check{\mathbf{K}}_{ug} \right) \psi_i - \tilde{\mu}_i^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \check{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \check{\lambda} \mathbf{P} - \check{\lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right) \right] \quad (9.26)$$

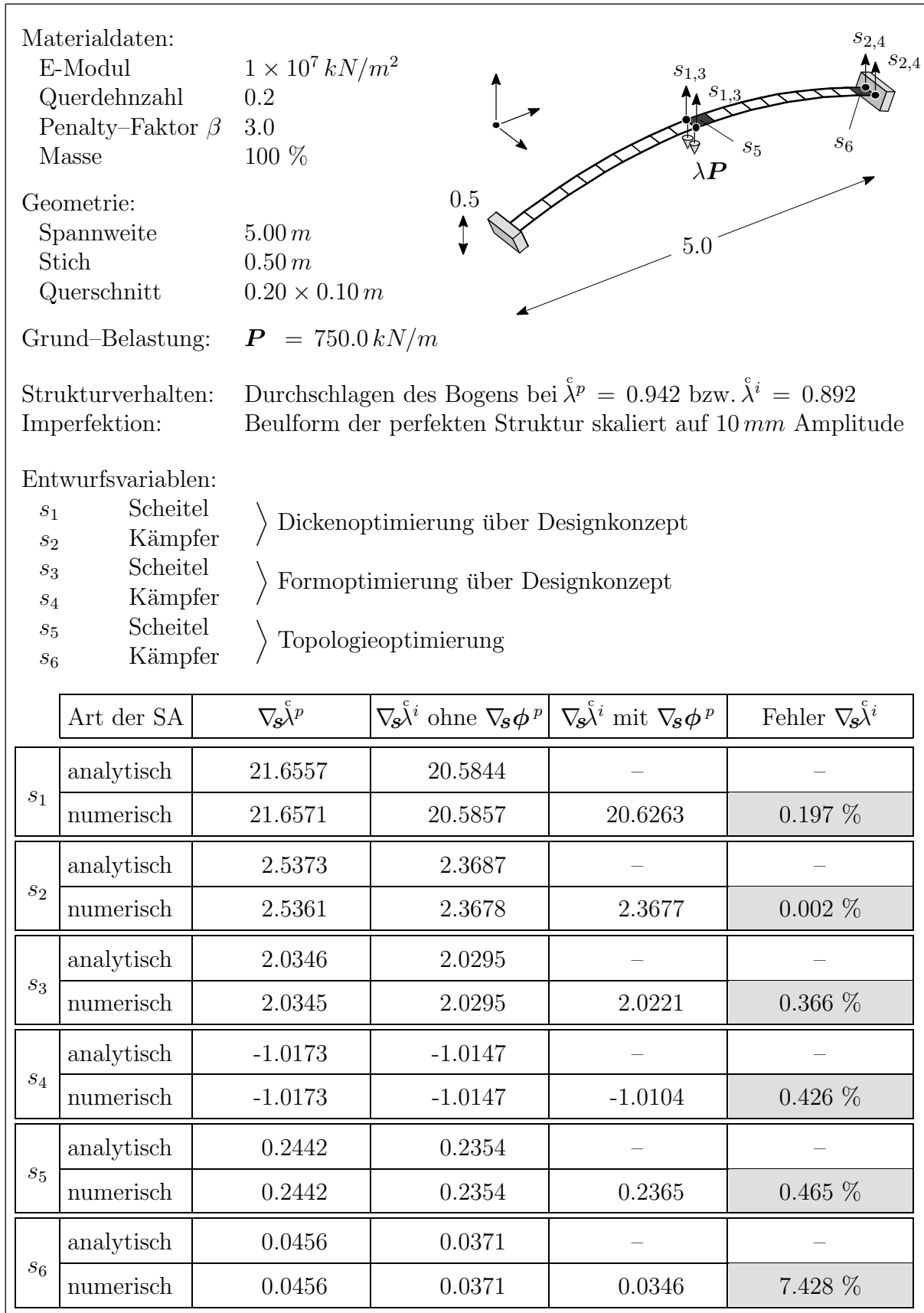


Abbildung 9.5: Fehler der Sensitivität der kritischen Laststufe des imperfekten Tragwerks unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von der variablen Imperfektionsform.

unter Berücksichtigung von skalierten Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ug} \boldsymbol{\psi}_i = 1 \quad (9.27)$$

und der Lösung des adjungierten Lastvektors:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i &= \tilde{\lambda}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T^{-1} \left[\boldsymbol{\psi}_i^T \underbrace{\nabla_{\mathbf{u}} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ug}}_{\overset{\circ}{\nabla}_{\mathbf{u}} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T} \boldsymbol{\psi}_i \right] \\ &= \overset{\circ}{\nabla}_{\mathbf{u}} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T \end{aligned} \quad (9.28)$$

Bei dem Vergleich der Gleichung (9.28) mit (9.15) fällt auf, dass sich die beiden adjungierten Lastvektoren durch die von \mathbf{u} unabhängige elastische Steifigkeitsmatrix gleichen. Hierauf begründet sich die Entscheidung der gewählten Eigenwertformulierung, da diese anhand gleicher Routinen erfolgen kann.

Damit kann die Sensitivität der abgeschätzten höheren kritischen Lastniveaus, unter Berücksichtigung von Gleichung (4.38), wie folgt bestimmt werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i = \nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i \cdot \overset{\circ}{\lambda} + \tilde{\lambda}_i \cdot \nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda} \quad (9.29)$$

Eine numerisch etwas effizientere Formulierung lässt sich durch folgenden Gedankengang erreichen. Wie bei der Sensitivitätsanalyse für Eigenwerte nach Abschnitt 9.1.1 würde von einem von \mathbf{s} unabhängigen Lastwert aus das Eigenwertproblem gelöst werden. Da dieses Lastniveau beliebig wählbar ist, kann die Eigenwertformulierung weiterhin auf der kritischen Laststufe $\overset{\circ}{\lambda}$ ausgewertet werden. Wird nun gedanklich für die Sensitivitätsanalyse $\overset{\circ}{\lambda}$ fixiert, reduziert sich Gleichung (9.26) um den Anteil mit $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}$:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i = - \left[\boldsymbol{\psi}_i^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ug} \right) \boldsymbol{\psi}_i - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{R}} - \overset{\circ}{\lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right) \right] \quad (9.30)$$

und folglich Gleichung (9.29) auf:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i = \nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i \cdot \overset{\circ}{\lambda} \quad (9.31)$$

wobei weiterhin für die Auswertung von Gleichung (9.30) die Bedingung (9.27) und $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ nach Gleichung (9.29) beachtet werden müssen. Da der Wert $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}$ bei der Berechnung von $\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_i$ bereits vorliegt, reduziert sich der Aufwand lediglich um das Vektorprodukt $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \mathbf{P}$. Der Unterschied zu der vorangegangenen Strategie ist in Bezug auf den Gesamtaufwand unbedeutend.

Im Folgenden wird gezeigt, wie es bei den beiden Bestimmungsgleichungen der Sensitivitäten für Eigenwerte (9.26) und den direkt ermittelten kritischen Laststufen (9.14) zu der unterschiedlichen Gestalt kommt und für welchen Fall sie ineinander übergehen.

Vergleich der Sensitivitätsanalyse einfacher Eigenwerte und direkt bestimmter kritischer Lastniveaus und deren Überführung

Um den Hintergrund der unterschiedlichen Bestimmungsgleichungen für die Sensitivitätsanalysen der mechanisch verwandten Größen darzulegen, wird zuerst der Fall der Übereinstimmung dargestellt. Entspricht der Laststeigerungsfaktor von dem aus das Eigenwertproblem gelöst wird, dem des kleinsten kritischen Lastniveaus, so ist der kleinste positive

Eigenwert $\tilde{\lambda}_1 \equiv 1$. Erfolgt dies für alle Entwürfe, so ist der Gradient dieses Eigenwerts gleich null. Wird dieser Zusammenhang in Gleichung (9.26) eingearbeitet, so ist die Skalierung des maßgebenden Eigenvektors nach Gleichung (9.28) hinfällig, und Gleichung (9.26) lässt sich wie folgt umformulieren:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{\lambda}_1 = 0 = - \left[\boldsymbol{\psi}_1^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e + \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ug} \right) \boldsymbol{\psi}_1 - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{R}} - \nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda} \mathbf{P} - \overset{\circ}{\lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right) \right] \quad (9.32)$$

Das Auflösen dieser Bestimmungsgleichung nach der unbekanntem $\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda}$ liefert mit dem Zusammenhang $\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T \equiv \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{K}_e + \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ug}$:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \overset{\circ}{\lambda} = - \left[\boldsymbol{\psi}_1^T \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\psi}_1 - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \left(\nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \overset{\circ}{\mathbf{R}} - \overset{\circ}{\lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}^{ex} \mathbf{P} \right) \right] \left[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^T \mathbf{P} \right]^{-1} \quad (9.33)$$

Dadurch, dass der Singularitätsvektor ein Vielfaches des Eigenvektors $\boldsymbol{\psi}_1$ ist und unter Beachtung der Übereinstimmung der adjungierten Probleme (9.15) und (9.28) ist Gleichung (9.33) äquivalent zu (9.14). Eine Übereinstimmung liegt also dann vor, wenn das Lastniveau auf dem das Eigenwertproblem ausgewertet wird, bereits das kritische Niveau ist. Die Unterschiede beruhen folglich auf den unterschiedlichen Lastniveaus der Gleichgewichtsbedingungen und der Abschätzung kritischer Laststeigerungsfaktoren anhand von Eigenwertformulierungen.

Es soll hier noch angemerkt sein, dass dieser Zusammenhang unabhängig von dem gewählten Eigenwertproblem ist und ebenfalls für Formulierungen des folgenden Typs zutrifft:

$$\left[\overset{\circ}{\mathbf{K}}_T + \tilde{\lambda}_i \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ug} \right] \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (9.34)$$

Hier ist zu beachten, dass für eine Auswertung an dem kleinsten kritischen Punkt $\tilde{\lambda}_i \equiv 0$ ist.

9.2.2 Algorithmische Umsetzung

Bei der algorithmischen Umsetzung des Optimierungsproblems (9.12) sind mehrere Aspekte zu berücksichtigen. Die strategische Vorgehensweise ist in Abbildung 9.6 skizziert. Zur Auswertung des Steifigkeitskriteriums muss die Strukturantwort für ein definiertes Lastniveau berechnet werden. Dies wird am effektivsten anhand einer Lastkontrolle (siehe Abschnitt 4.3.1) bewerkstelligt. Um für das erweiterte System (siehe Abschnitt 4.3.2) einen möglichst guten Startwert zu erhalten, wird der Last-Verschiebungs-Pfad bis in die Nähe des ersten kritischen Punktes verfolgt. In das Verfahren des erweiterten Systems wird nach Passierung des kritischen Lastniveaus eingestiegen. Wann dies der Fall ist, kann anhand der Anzahl der negativen Pivot-Elemente nach der Faktorisierung von \mathbf{K}_T festgestellt werden. Dies ist gleichbedeutend mit einem Vorzeichenwechsel von $\det \mathbf{K}_T$. Da im Voraus nicht bekannt ist, ob es sich um einen Verzweigungs- oder Durchschlagspunkt handeln wird, ist eine Annäherung mit dem Bogenlängenverfahren zweckmäßig. Nach der Bestimmung dieses untersten kritischen Punktes können höhere Instabilitätspunkte anhand einer Eigenwertanalyse abgeschätzt werden.

Für die Sensitivitätsanalyse aller Entwurfskriterien ist es von Vorteil, die Lösungen der adjungierten Lastvektoren simultan zur Strukturanalyse zu berechnen. Bei einer Sensitivitätsanalyse nach der vollständigen Strukturanalyse wäre ansonsten für jedes adjungierte

Problem wiederum die tangentielle Steifigkeitsmatrix für den entsprechenden Verschiebungszustand aufzustellen und zu faktorisieren (siehe Gleichungen (9.15) und (9.28)). Da sich zum Teil die Bausteine des expliziten Sensitivitätsanteils gleichen, können sie kostengünstig im Anschluss der vollständigen Strukturanalyse bestimmt werden. Die strikte Trennung zwischen impliziten und expliziten Anteilen in der adjungierten Sensitivitätsanalyse kommt dem hier vorgestellten Algorithmus entgegen.

Mit den Sensitivitäten wird ein neuer Satz von Entwurfsvariablen bestimmt. Wie bereits bei der algorithmischen Umsetzung der Steifigkeitsoptimierung kann der Potentialcharakter für die Bestimmung der neuen gesuchten Punkte ausgenutzt werden. Für das Steifigkeitskriterium erfolgt dies analog nach Abschnitt 7.1.3 mittels eines Korrektorschrittes zum Ausgleich der Ungleichgewichtskräfte infolge neuer Entwurfsvariablen und altem Verschiebungsfeld. Ähnliches ist zweckmäßig für den kleinsten kritischen Laststeigerungsfaktor. Das neue zu erwartende kritische Niveau $\check{\lambda}_2$ kann wie folgt approximiert werden:

$$\check{\lambda}_2 = \overset{c}{\lambda}_1 + \delta \cdot [\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1]^T \nabla_{\mathbf{s}} \overset{c}{\lambda} \tag{9.35}$$

wobei δ ein Korrekturparameter ist, welcher besonders für Durchschlagspunkte bedeutend ist. Da ein Gleichgewichtspunkt lastkontrolliert auf dem neuen Last-Verschiebung-Pfad gesucht wird, wird von einer Existenz dieses Punktes ausgegangen. Um dies sicherzustellen sollten folgende Grenzen für δ beachtet werden:

$$[\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1]^T \nabla_{\mathbf{s}} \overset{c}{\lambda} \begin{cases} > 0 & : \delta < 0 \\ < 0 & : \delta > 0 \end{cases} \tag{9.36}$$

Bei der Korrekturiteration zur Bestimmung des neuen Gleichgewichtspunktes in der Nachbarschaft von $\check{\lambda}_2$ sind die Ungleichgewichtskräfte infolge eines modifizierten Entwurfes und einem neuen Laststeigerungswert in Kombination mit den Verschiebungen des alten Entwurfes auszugleichen. Eine direkte Berechnung mittels dem erweiterten System erwies sich

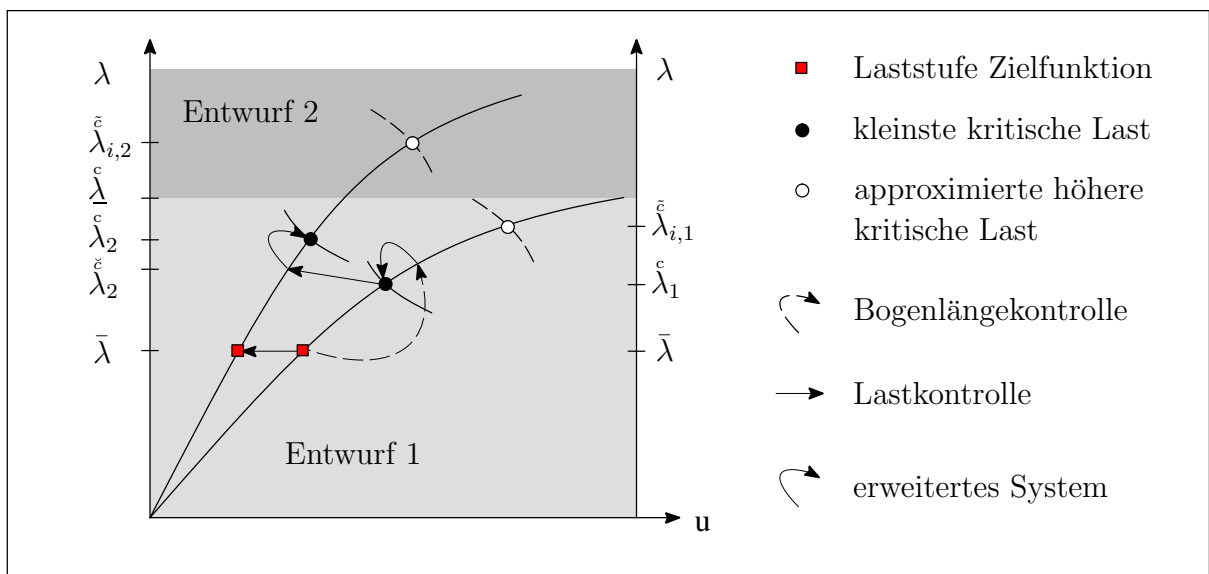


Abbildung 9.6: Algorithmische Umsetzung bei Berücksichtigung von Stabilitätsnebenbedingungen

nicht als numerisch stabil. Analog zu der Berechnung des kleinsten kritischen Punktes der perfekten Struktur erfolgt die Berechnung der neuen kritischen Laststufe des imperfekten Tragwerks. Dies ist nicht in Abbildung 9.6 dargestellt.

Für die Topologieoptimierung ist anzumerken, dass ein erster Entwurf es ermöglichen muss, alle mechanischen Entwurfskriterien auszuwerten (z. B. kein Durchschlagspunkt unterhalb von $\bar{\lambda}$). Aus diesem Grund wurden die Penalty-Faktoren zur Bestrafung porösen Materials im Optimierungsverlauf gestaffelt. Sollte dies nicht ausreichen, ist die Massengleichheitsbedingung des Optimierungsproblems (9.12) in eine Ungleichheitsbedingung abzuändern. Dies erlaubt dann, wie im Beispiel des Abschnitts 7.2.3, mit einer anfänglich verletzten Massennebenbedingung zu starten. Die daraus resultierende höhere Steifigkeit erlaubt eine Auswertung der mechanischen Entwurfskriterien.

Die folgenden Anmerkungen beziehen sich lediglich auf den Einsatz des erweiterten Systems im Zusammenspiel mit der Topologieoptimierung, weshalb sie in Zusammenhang mit den Anmerkungen des Abschnitts 4.3.2 zu verstehen sind. Wie dort bereits erwähnt wurde, kann die Bestimmung eines Startvektors für das erweiterte System vorteilhaft sein. Dazu eignet sich die Eigenwertformulierung $(\mathbf{K}_T + \tilde{\lambda}_i \mathbf{I})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ (siehe Gleichung (4.33)) nicht mehr. Dies liegt daran, dass bei dieser Formulierung keine Unterscheidung zwischen der ‘quasi’ Singularität von \mathbf{K}_T infolge sehr geringer Steifigkeit in hochporösen Bereichen und dem Instabilitätsphänomen infolge Druckspannungen möglich ist. Weiterhin muss bei der numerischen Differentiation nach Gleichung (4.25) beachtet werden, dass die großen Steifigkeitsunterschiede innerhalb \mathbf{K}_T in Kombination mit einem festen Störungsparameter ϵ für alle finiten Elemente zu numerischen Schwierigkeiten führen kann. Da die Steifigkeiten der hochporösen Bereiche einen geringen Einfluss auf das globale Tragverhalten haben, werden für die numerische Differentiation (4.25) die Verschiebungskomponenten von $\boldsymbol{\phi}$ in diesen Bereichen zu null gesetzt.

9.2.3 Beispiel 10: Einfluss der Imperfektion

Zur Verdeutlichung des Einflusses der Imperfektionsempfindlichkeit wird das Beispiel des Abschnitts 9.1.3 in modifizierter Form nochmals aufgegriffen. Die Beschreibung der Struktur enthält Abbildung 9.7. Wesentlicher Unterschied zur Struktur des Beispiels in Abschnitt 9.1.3 ist die Einführung einer horizontalen gefederten Lagerung am Lastangriffspunkt. Für die Topologieoptimierung wurde das halbe System mit 800, 8-knotigen, isoparametrischen Schalenelementen diskretisiert. Durch die Wahl des Elementtyps wird die Berücksichtigung von Beulmoden aus der Ebene ermöglicht.

Insgesamt werden drei Entwurfscfälle untersucht, wobei das Ziel immer die Minimierung der Dehnungsenergie für eine vorgegebene Masse ist. Das erste System, welches identisch zum System 1 des Abschnitts 9.1.3 ist, beinhaltet lediglich eine lineare Kinematik. Die Erweiterung zum System 2 ist die nichtlineare Kinematik sowie die Berücksichtigung der kritischen Last für das perfekte Tragwerk. Gegenüber System 2 wird System 3 um die Nebenbedingung einer Stabilitätslast für das imperfekte Tragwerk ergänzt. Imperfektionsform ist hierbei der skalierte Singularitätsvektor der perfekten Struktur.

Die anhand der materiellen Topologieoptimierung generierten Strukturen sind auf der linken Seite der Abbildung 9.8 dargestellt. Wie bereits im Beispiel des Abschnitts 9.1.3 führt die Berücksichtigung einer Stabilitätsnebenbedingung von einem Sprengwerk zu ei-

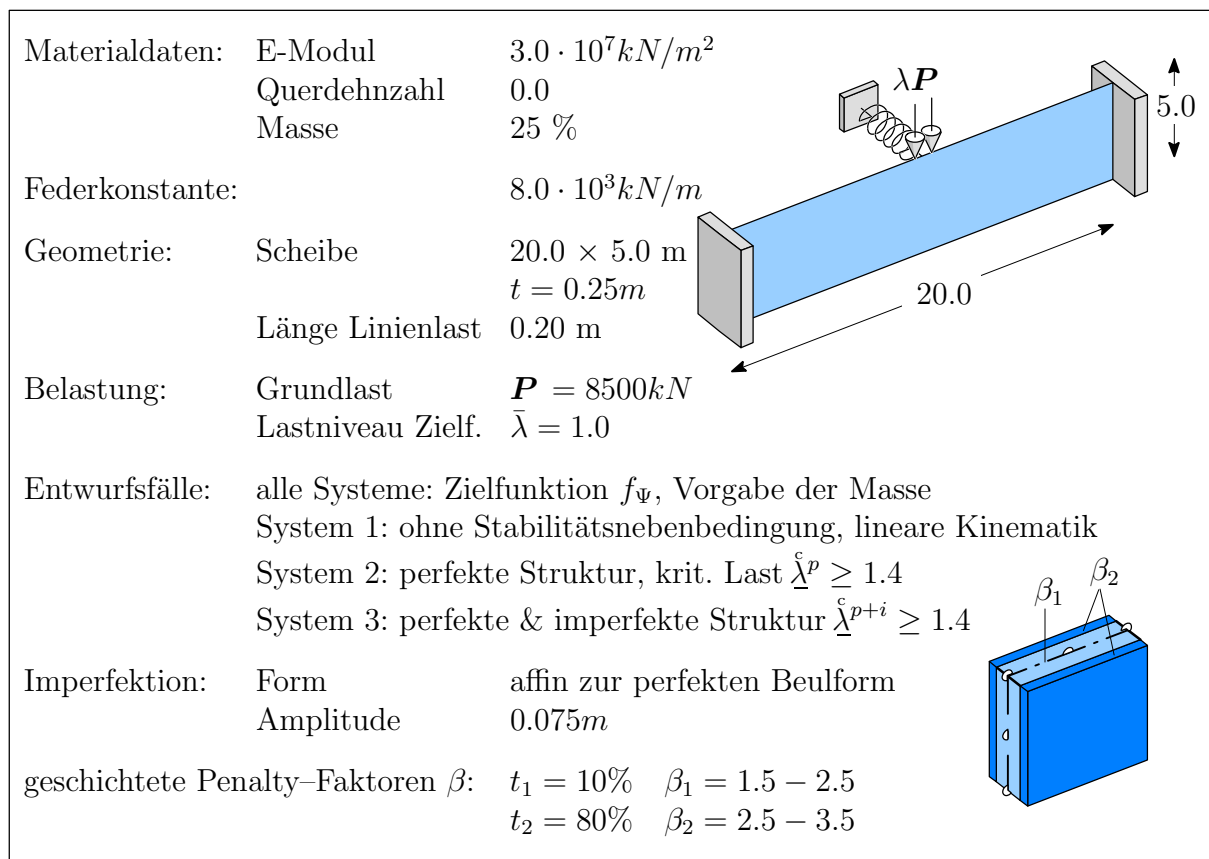


Abbildung 9.7: Geometrie, Lasten und Materialdaten des Beispiels 10

ner unterspannten Konstruktion. Das Strukturverhalten des Systems 2 weist zwar für das perfekte Tragwerk keinen Instabilitätspunkt unterhalb des geforderten Werts von $\bar{\lambda}^p \geq 1.4$ auf, doch eine nachträgliche Analyse der imperfekten Struktur zeigt einen kritischen Lastwert von 1.31. Wird nun das Stabilitätsverhalten der imperfekten Struktur im Entwurfsprozess berücksichtigt, so wird die erweiterte Aufgabe wesentlich durch einen tieferliegenden Anschlusspunkt der Zugdiagonalen an der Lagerstelle gelöst. Die erzielten Werte, welche auf einer nichtlinearen Strukturanalyse basieren, sind für die Zielfunktionen und für die kritischen Laststeigerungsfaktoren in der Tabelle der Abbildung 9.8 aufgelistet. Auffallend ist, dass die definierten Instabilitätsnebenbedingungen der Systeme 2 und 3 für die endgültigen Strukturen nicht aktiv sind. Dies lässt sich aus der Abhängigkeit der kritischen Last bezüglich der Lagerungshöhe der Zugdiagonalen zurückführen. Dieses in der Stabilitätslehre bekannte Phänomen des poltreu belasteten Stabes ist in Abbildung 9.9 skizziert (Einfluss der Stablänge auf den $P-\Delta$ -Effekt). Die in diesem Beispiel vorhandene elastische Lagerung des belasteten Knotens führt dazu, dass selbst kürzere Zug- als Druckstäbe zu einem Stabilitätsproblem führen. Gegenüber der gelenkigen Stabstruktur der Abbildung 9.9 weist die hier untersuchte Struktur weiterhin Torsions- und Biegesteifigkeiten der einzelnen Strukturelemente auf. Die zu grob gewählte Diskretisierung lässt aktive Instabilitätsnebenbedingungen nicht zu (hohe Empfindlichkeit der kritischen Last bezüglich der Lagerungshöhe).

Aus diesem Grund wurde eine anschließende Formoptimierung gemacht. Die aus der Topologieoptimierung ableitbaren Berandungen wurden anhand von linearen LAGRANGE-

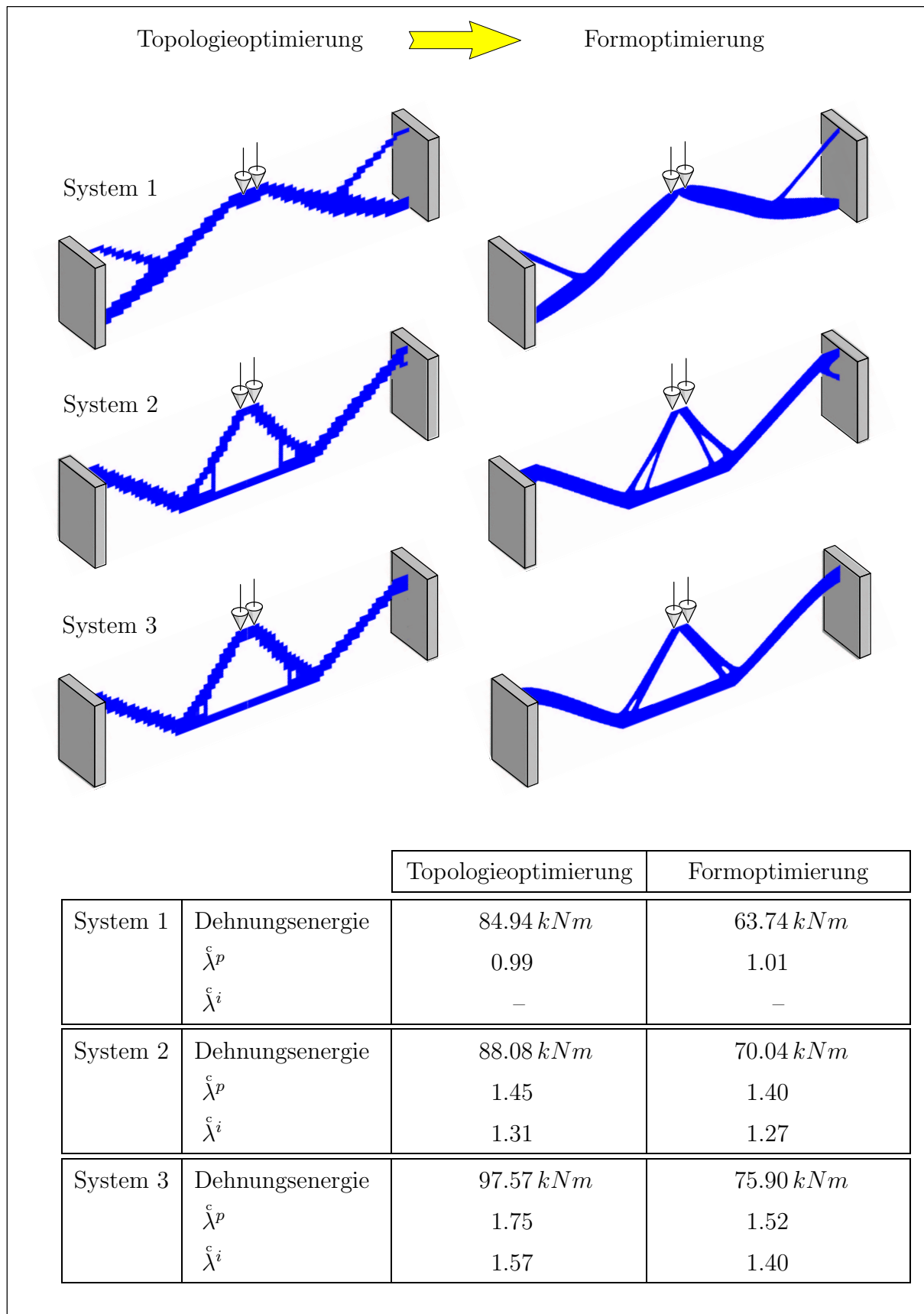


Abbildung 9.8: Generierte Strukturen des Beispiels 10 und deren Vergleich

und kubischen BÉZIER-Kanten diskretisiert. System 1 ist identisch zu dem des Abschnitts 9.1.3. Für System 2 wurden 36 und für System 3 31 unabhängige Entwurfsvariablen für das halbe Tragwerk definiert. Neben einer deutlichen Verbesserung der Zielfunktionen wurde jeweils eine Stabilitätsnebenbedingung im Optimum aktiv. Diese Strukturparameter sind in der rechten Spalte der Tabelle in Abbildung 9.8 aufgeführt, wobei die angegebenen Größen auf einer nichtlinearen Strukturanalyse basieren.

In Abbildung 9.10 sind die nichtlinear berechneten Strukturverhalten der formoptimierten Strukturen detaillierter dargestellt. Hier fanden die Untersuchungen am Gesamtsystem statt. Alle drei Systeme weisen für die perfekten Tragwerke lineare Vorbeulbereiche auf. System 1 besitzt einen stabilen Verzweigungspunkt, bei dem die beiden Druckstreben antisymmetrisch ausknicken. Wird diese Beulform als Imperfektion aufgebracht, so ergibt sich für diese Struktur kein Instabilitätsproblem mehr. Demgegenüber zeigen die beiden unterspannten Tragwerke einen instabilen Verzweigungspunkt. Die Versagensform ist dabei ein gegenseitiges horizontales Ausweichen der Lasteinleitungsstelle und des Untergurtes. Die imperfekten Tragwerke zeigen gegenüber den perfekten den bereits oben erwähnten Abfall der kritischen Last.

Abschließend soll zu diesem Beispiel bemerkt werden, dass der strukturelle Unterschied zwischen dem System 2 und 3 gering ist. Hintergrund ist der durch Abbildung 9.9 erläuterte Sachverhalt der großen Sensitivität von λ bezüglich der Höhe der Lagerpunkte. Dass das imperfekte System 1 kein Instabilitätsverhalten aufweist, liegt an der Wahl bzw. an der hier getroffenen Definition der Imperfektionsform. Die Suche nach der maßgebenden Imperfektionsform kann ebenfalls anhand von Optimierungsstrategien gefunden werden. Diese Fragestellung ist Inhalt des folgenden Abschnitts 9.3.

9.3 Generierung geometrischer Imperfektionsformen

Anhand des Beispiels in Abschnitt 9.2.3 wurde ersichtlich wie hilfreich die Generierung maßgebender geometrischer Imperfektionsformen sein könnte. In der Arbeit von REITINGER [102] wurden Formoptimierungsprobleme untersucht, welche die Maximierung der kleinsten kritischen Laststufe zum Ziel hatten. Weiterhin wurde von REITINGER das perfekte sowie das imperfekte Tragwerk im Optimierungsprozess berücksichtigt. Die dort gewählte geometrische Imperfektionsform war, wie auch im Beispiel des Abschnitts 9.2.3, affin zur Beulform des perfekten Systems. Dem Optimierungsprozess folgte eine manuelle Suche nach der maßgebenden Imperfektionsform für die kleinste kritische Last. Dieses

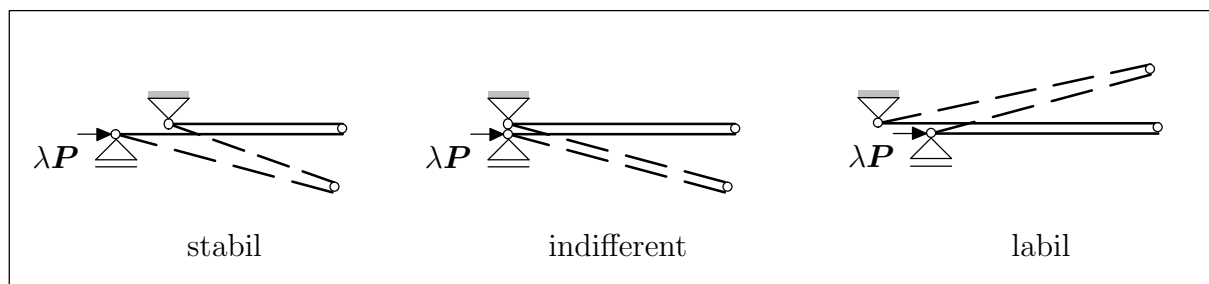


Abbildung 9.9: Stabilitätsphänomen des poltreu belasteten Stabes

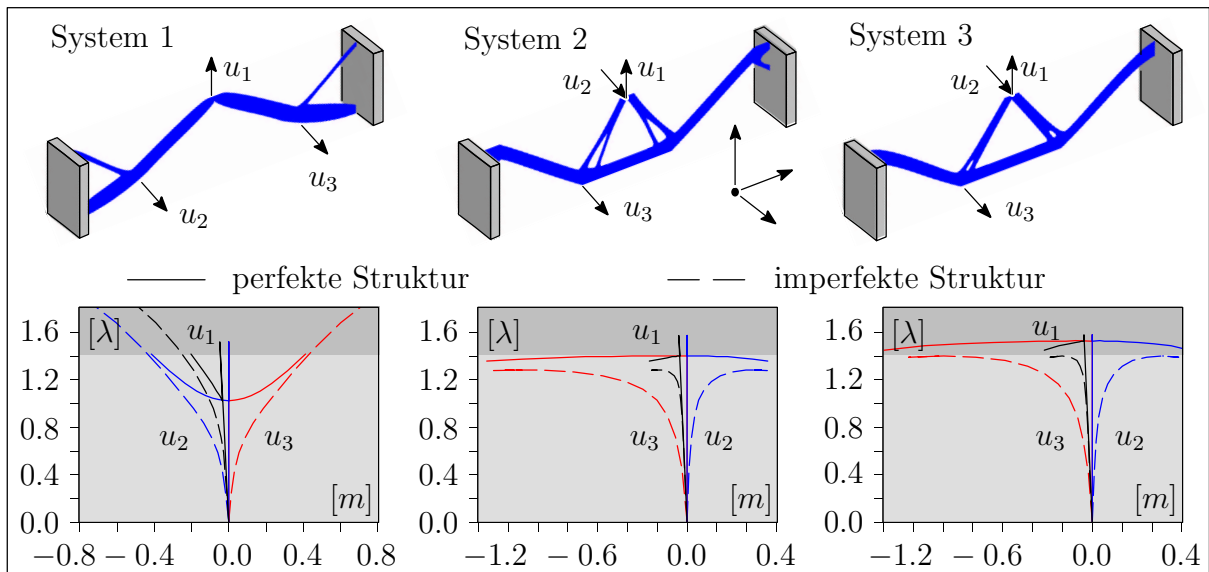


Abbildung 9.10: Last-Verschiebungsdiagramme der formoptimierten Strukturen des Beispiels 10 im Vergleich

Problem kann ebenfalls als Optimierungsaufgabe formuliert werden. Das folgende Ziel ist die Minimierung der kritischen Last unter Vorgabe einer maximalen Imperfektionsamplitude $\check{\zeta}$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \left[\min^c \lambda \right] \\ \zeta_i - \check{\zeta} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_\zeta \\ 0 < \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \end{aligned} \quad (9.37)$$

Die Formulierung des Optimierungsproblems stellt wie die Bereitstellung der Sensitivitäten und der algorithmischen Umsetzung mit dem Wissen des Abschnitts 9.2 kein neues Problem dar. Zu klären gilt noch die Wahl der Entwurfparameter. Die Definition von Entwurfgeschwindigkeitsfeldern mittels des CAGD-Konzeptes (siehe Abschnitt 5.2) erscheint hier nicht sinnvoll, da die mathematische Geometriebeschreibung die notwendige Formvielfalt nicht zulässt. Die größte Vielfalt wird dem Optimierungsproblem gewährt, wenn jeder einzelne FE-Knoten in seiner Lage optimiert wird. Werden die theoretischen Ergebnisse der Imperfektionsempfindlichkeit beachtet (siehe Abschnitt 3.2 und Anhang A) so lassen diese den Schluss zu, dass sich Beulmoden sehr gut als Entwurfgeschwindigkeitsfelder eignen können. Dabei handelt es sich nach Abschnitt 5.2 um natürliche Entwurfgeschwindigkeitsfelder. Im folgenden Beispiel wird numerisch die Wirkungsweise verschiedener Entwurfgeschwindigkeitsfelder untersucht.

9.3.1 Beispiel 11: Ermittlung maßgebender Imperfektionsform

Für ein flaches Zylindersegment, wie es in Abbildung 9.11 dargestellt ist, werden die vorangegangenen Ausführungen diskutiert. Die Wahl auf diesen Typ von Struktur fiel aus Gründen der bekannten hohen Imperfektionsempfindlichkeit, wie sie bereits anhand des Beispiels 2 der Abbildung 3.2 verdeutlicht wurde. Die folgende erste Untersuchung widmet sich der Suche nach der maßgebenden Imperfektionsform bei Vorgabe einer maximal

zulässigen Imperfektionsamplitude. Dabei steht insbesondere die Wahl der Parametrisierung für das Optimierungsproblem im Vordergrund. Die dann anschließende Untersuchung hat zum Ziel, das Problem der maximal sinnvollen geometrischen Imperfektion aufzuzeigen. Dabei handelt es sich um das Auffinden der Sprungstelle der $\min\text{-}\min\text{-}$ Funktion (9.37_a) der kleinsten kritischen Last. Diese Sprungstelle tritt genau dann ein, wenn die Maximalstelle des Last-Verschiebungs-Pfades (Durchschlagspunkt) in einen Sattelpunkt übergeht.

Die gesamte Struktur ist mit 225, 8-knotigen, isoparametrischen, unterintegrierten Schalelementen diskretisiert. Die Ränder sind normal zur Zylinderfläche gelagert. Drei weitere Freiheitsgrade wurden zur Vermeidung eines kinematischen Systems festgehalten. Die gekrümmten Ränder sind mit einer konstanten Streckenlast belastet.

In Abbildung 9.12 ist der Vergleich der Systemantwort der perfekten Struktur und einer geometrisch imperfekten Struktur veranschaulicht. Die Imperfektionsform ist dabei affin zur ersten Beulform des perfekten Systems (siehe Bild in Abbildung 9.12). Die maximale Imperfektionsamplitude beträgt 10 mm , dies entspricht $l/300$. Der Laststeigerungsfaktor von 1.169 des perfekten Systems reduziert sich auf 0.548 für das imperfekte System. Das linke Diagramm der Abbildung 9.12 zeigt für beide Strukturen die horizontale Deformation des Scheitelpunktes des gekrümmten Randes über den Laststeigerungsfaktor. Das rechte Diagramm enthält die Information für die vertikale Verschiebung des Strukturzentrums. Der asymmetrische Verzweigungspunkt der perfekten Struktur geht für das imperfekte Tragwerk in einen Durchschlagspunkt über.

Auf der Basis dieser Untersuchungen soll im Weiteren die Suche nach der maßgebenden geometrischen Imperfektionsform erfolgen. Dazu werden im ersten Schritt (System 1) die Koordinaten sämtlicher nicht gelagerten FE-Knoten variabel definiert. Hierdurch ist die größtmögliche Formvielfalt gegeben. Um die Anzahl der Entwurfsvariablen zu reduzieren, ohne dabei wesentlich die Lösung zu beeinträchtigen, werden die Bewegungsrichtungen der FE-Knoten auf die Richtung normal zum Zylindersegment eingeschränkt. Damit hat das Problem 616 Formoptimierungsvariablen. Die Reglementierung der vorgegebenen maximalen Imperfektionsamplitude von 10 mm wird anhand von Restriktionen der Entwurfsvariablen vorgenommen. Durch die Freigabe aller FE-Knoten im Optimierungsprozess würde eine erste Modifikation im Entwurf affin zur ersten Beulform generiert

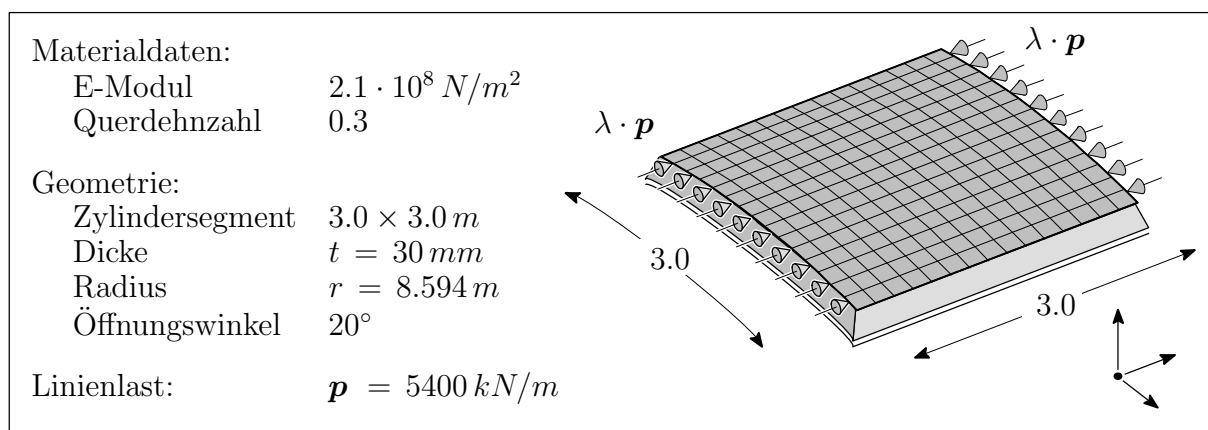


Abbildung 9.11: Materialdaten, Geometrie und Belastung des Beispiels 11

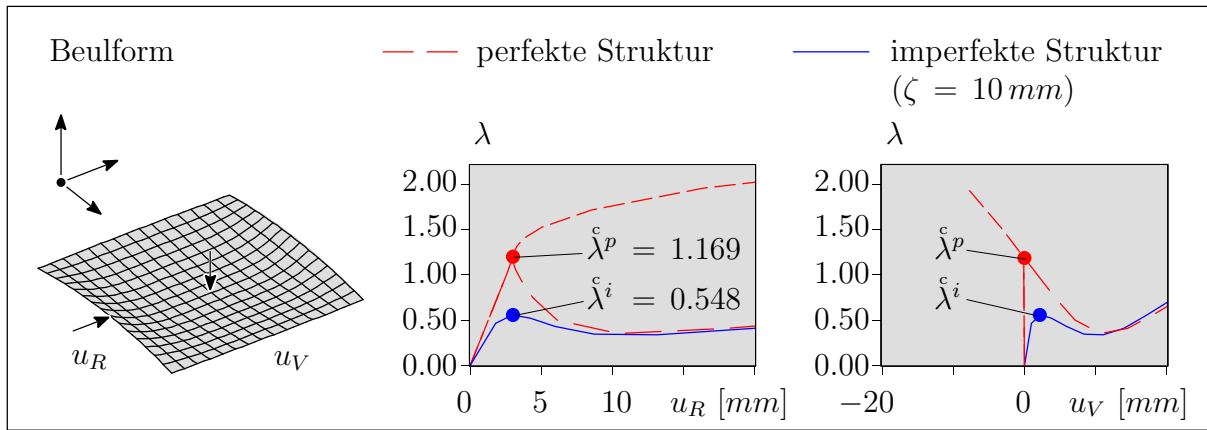


Abbildung 9.12: Strukturverhalten des perfekten und geometrisch imperfekten Tragwerks des Beispiels 11

werden. Dies führt, wie in Anhang A gezeigt, zu $\nabla_s \lambda = -\infty$. Zur Vermeidung numerischer Schwierigkeiten wurde einer der mittleren FE-Knoten auf die untere Restriktion gesetzt. Die generierte Form des Systems 1 ist in Abbildung 9.13 im Vergleich zur perfekten Struktur dargestellt. Die Modifikation bezüglich der perfekten Struktur wurde dabei 7fach überskaliert; es entsteht ein hochwelliges Imperfektionsmuster. In großen Teilen der Struktur stoßen die Eckknoten der finiten Elemente an die obere und die Kantennittemknoten an die untere Restriktion an. Diese Reduktion der Membransteifigkeit führt zur Konzentration der für die Durchleitung notwendigen Membrankräfte auf schmale Bereiche. Dadurch kann der kleinste kritische Laststeigerungsfaktor auf 0.424 reduziert werden, doch inwiefern die generierte Imperfektionsform mit einer möglichen gemessenen Form übereinstimmen kann, ist sehr fraglich. Aus diesem Grund und mit dem Wissen von Anhang A finden weitere Untersuchungen auf der Basis von Eigenformen als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder statt.

Um im Weiteren ebenfalls die Empfindlichkeit der Struktur gegenüber der Imperfektion der Lagerungsgeometrie berücksichtigen zu können werden für drei verschiedene Randbedingungen Eigenformen bestimmt (siehe Abbildung 9.14). Die erste Randbedingung

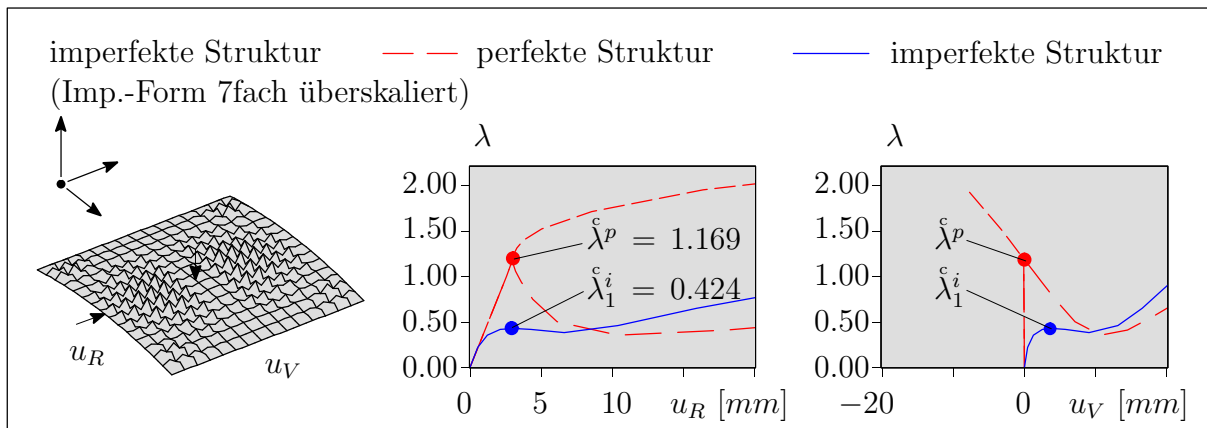


Abbildung 9.13: Vergleich des Strukturverhaltens des Systems 1 und das des perfekten Systems des Beispiels 11

entspricht der des Optimierungsproblems. Hierfür wurden die ersten 15 Eigenformen ermittelt (siehe Abbildung 9.14, Randbedingung 1). Für die zweite Eigenwertanalyse waren lediglich die DIRICHLET-Randbedingungen am gekrümmten Rand vorhanden. Die NEUMANN-Randbedingungen entsprechen dem eigentlichen Problem. Die Eigenformen der fünf kleinsten Eigenwerte sind in Abbildung 9.14, Randbedingung 2 dargestellt. Die fortlaufende Nummerierung wurde aufgrund der späteren Verwendung als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder gewählt. Gegenüber der ersten Eigenwertformulierung wurden für den dritten Fall lediglich die DIRICHLET-Randbedingung des geraden Randes berücksichtigt. Wiederum wurden die Eigenformen der fünf kleinsten Eigenwerte bestimmt (siehe Abbildung 9.14, Randbedingung 3). Die maximale Amplitude aller dargestellten Eigenformen ist auf einen gleichen Wert skaliert. Für die folgenden Entwurfsaufgaben ist dieser Wert gleich eins.

Für die Entwurfsaufgabe des Systems 2 (Randbedingungen entsprechen der perfekten Ausgangsstruktur) wurden die ersten sieben Eigenformen der Abbildung 9.14 zur Modifikation der Geometrie verwendet. Da die Einhaltung der vorgegebenen Maximalamplitude der Imperfektionsform hier nicht mehr anhand von Restriktionen erfolgen kann (Extremstellen der einzelnen Eigenformen nicht am gleichen Ort), wurden an 306 FE-Knoten 612 Nebenbedingungen definiert. Diese Nebenbedingungen kontrollieren das Maß der geometrischen Imperfektionsform. Da die Formänderung der 1. Entwurfsvariable affin zu dem Beulmode des perfekten Systems ist, wurde zur Vermeidung von $\nabla_{s_1} \hat{\lambda}^p = -\infty$ von einer imperfekten Struktur aus das Optimierungsproblem gestartet. Die Imperfektionsform des Startentwurfes entsprach der der 1. Entwurfsvariablen. Der gewählte Wert von 0.005 entspricht dabei einer Imperfektionsamplitude von 5 mm. Das Ergebnis des Optimierungsproblems ist in Abbildung 9.15 angegeben. Die 1. Entwurfsvariable wurde auf den Wert 0.01 gesetzt. Die Werte der weiteren Entwurfsvariablen sind mit zwei Zehnerpotenzen kleiner und für die Imperfektionsform unbedeutend. Die kleinste kritische Last entspricht dadurch der der ursprünglich imperfekt untersuchten Struktur.

Gegenüber System 2 wurde für System 3 die ersten 15 Eigenformen im Optimierungsproblem berücksichtigt. An der Imperfektionsform ist nun neben der 1. Eigenform die 11. ebenfalls beteiligt. Die Werte der Entwurfsvariablen können der Abbildung 9.15 entnommen werden. Dadurch sinkt der kleinste kritische Laststeigerungsfaktor von 0.548 des Systems 2 auf 0.525 des Systems 3. Dies zeigt, dass zwar die 1. Eigenform weiterhin die dominante ist (siehe dazu Anhang A), aber für eine vorgegebene Imperfektionsamplitude die Beteiligung höherer Moden zur weiteren Reduzierung von $\hat{\lambda}$ führen können.

Wird anhand aller 25 ermittelten Eigenformen ebenfalls die geometrische Modifikation der gelagerten Ränder zugelassen, so ist gegenüber System 2 & 3 eine deutliche Verringerung der maßgebenden kritischen Last auf 0.356 möglich. Die im Wesentlichen aktivierten Moden und deren Variablenwerte zur Bildung der Imperfektionsform ist in der rechten Auflistung der Abbildung 9.15 angegeben. Zum Vergleich sind alle drei imperfekten Strukturen mit 15facher Überskalierung der Imperfektionsform in Abbildung 9.15 dargestellt. Eine gemeinsame Charakteristik aller aktivierten Eigenformen ist, dass sie, wie die Struktur, doppelt symmetrisch sind. Die beiden Diagramme dieser Abbildung zeigen die Last-Verschiebungskurven der Komponenten u_R und u_V im Vergleich. Auffallend ist, dass die Strukturen mit den höheren kritischen Lasten einen ausgeprägteren Abfall von λ im Nachbeulbereich aufzeigen.

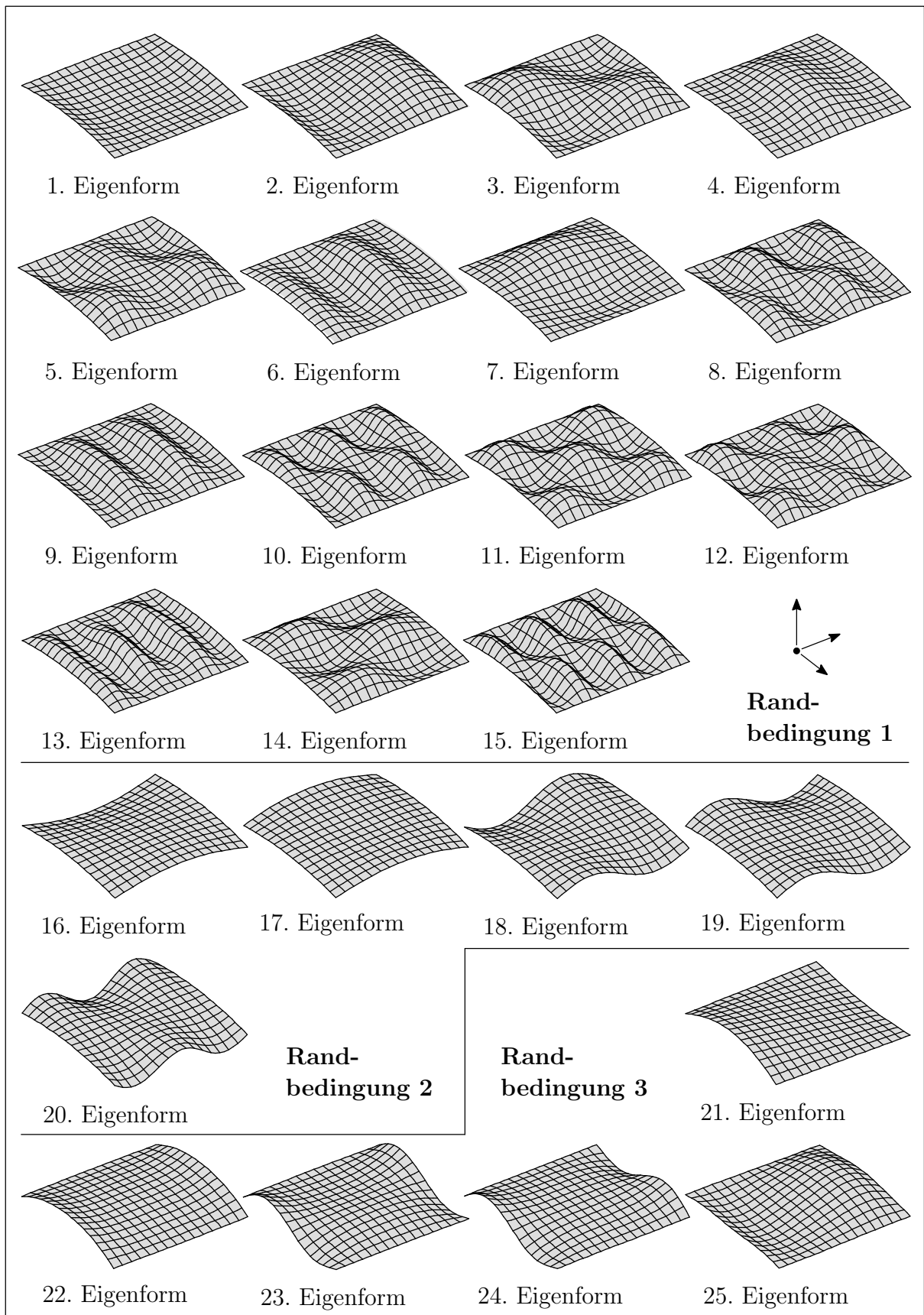


Abbildung 9.14: Eigenformen des Beispiels 11 für drei verschiedenen Randbedingungen, welche als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder verwendet werden

Dieser Zusammenhang zwischen Höhe des kritischen Lastniveaus und des Nachbeulverhaltens wirft die Frage nach einer maximal sinnvollen Imperfektion auf. Auf Basis dieser Überlegung wird nun die Fragestellung des Systems 4 dahin gehend vereinfacht, dass die Nebenbedingungen zur Reglementierung der Imperfektionsamplitude entfallen. Abbildung 9.16 zeigt die Lösung dieser Entwurfsaufgabe als System 5. Die kritische Laststufe liegt nun bei 0.248. Die Variablenwerte der überlagerten Eigenformen zur Bildung der Imperfektionsform sind in der Tabelle der Abbildung 9.16 gegeben. Dadurch ergibt sich eine maximale Imperfektionsabweichung von 21.4 mm. Im Gegensatz zu System 4 wurden für System 5 anstatt 6 lediglich 3 Eigenformen zur Bildung der Imperfektionsform verwendet. Diese 3 Eigenformen sind jeweils die ersten symmetrischen Beulformen der drei verschiedenen Randbedingungen (siehe Abbildung 9.14). In den Diagrammen ist der Vergleich der Last-Verschiebungskurven für u_R und u_V zwischen der perfekten Struktur und System 5 angegeben. Für System 5 sind die Äste der Last-Verschiebungskurven nach Erreichen des kritischen Punktes nahezu horizontal bevor sie wiederum ansteigen. Der Gleichgewichtspfad des Systems 5 hat eine weitere kritische Laststufe bei 1.433 (in den Diagrammen der Abbildung 9.16 nicht dargestellt). Bei geringer Steigerung der Imperfektionsamplitude würde der kritische Punkt bei $\lambda_5^i = 0.248$ verschwinden und auf einen Wert in der Nähe von 1.433 anwachsen. Hierdurch ist ersichtlich, dass es für diese Entwurfsaufgabe von großer Bedeutung ist, dass die eingesetzte Optimierungsstrategie eine ‘Line-Search’

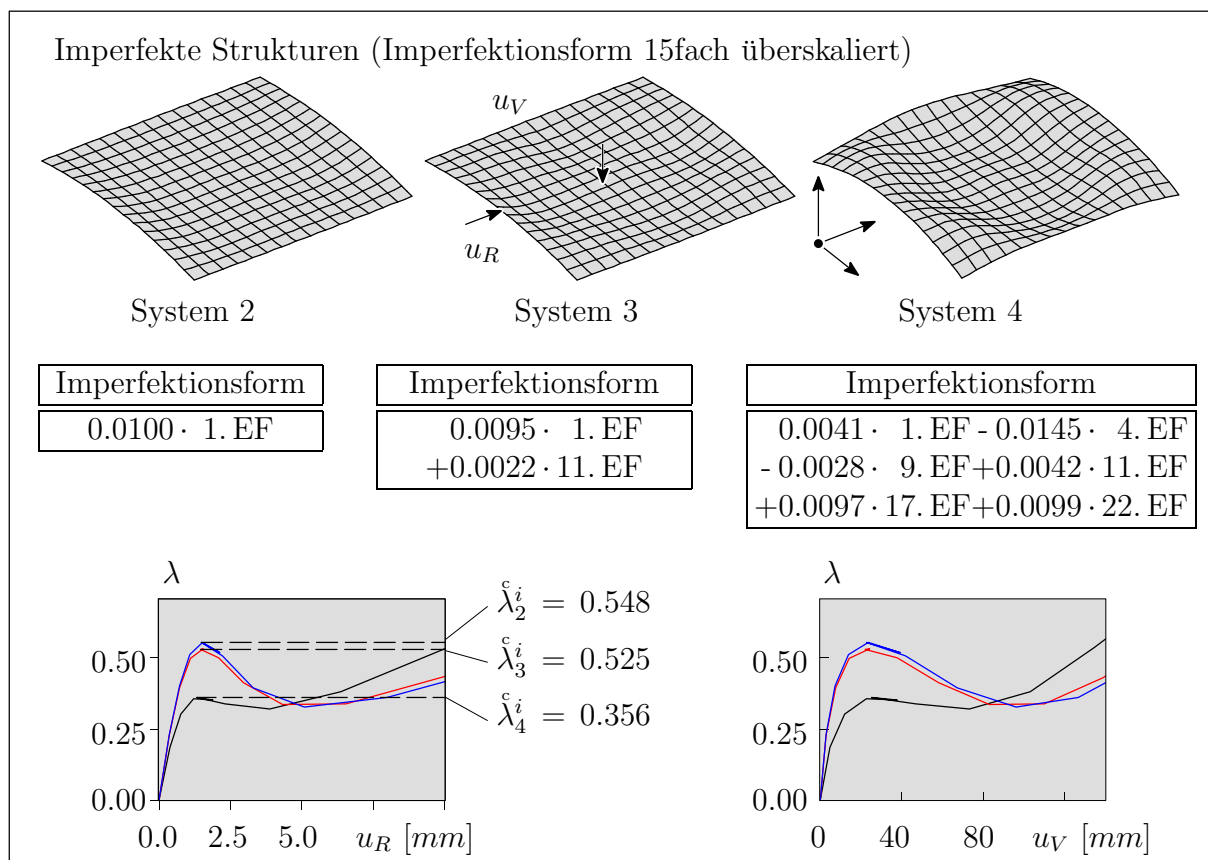


Abbildung 9.15: Ergebnisse des Beispiels 11 in Abhängigkeit der Parametrisierung für eine vorgegebene Imperfektionsamplitude

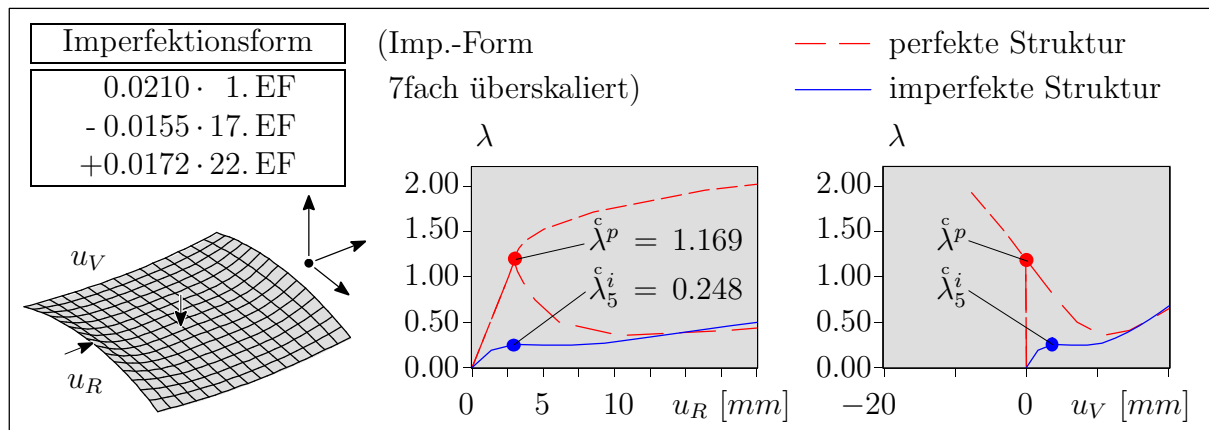


Abbildung 9.16: Kleinste imperfekte Stabilitätslast Systems 5 in Abhängigkeit berücksichtigter Eigenformen des Beispiels 11

Technologie besitzt, da die min–min–Zielfunktion des Optimierungsproblems (9.37_a) eine Sprungfunktion bezüglich der Entwurfsvariablen aufweist.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass sich Eigenformen sehr gut zur Definition von geometrischen Imperfektionen eignen. Die Dominanz der ersten Eigenform des eigentlichen Problems fällt wie erwartet deutlich aus. Werden zusätzliche Imperfektionen der Lager berücksichtigt, wird sich dies ebenfalls auf die kritische Last auswirken. Aus dem Vergleich des Systems 4 mit dem System 5 kann weiterhin gefolgert werden, dass die maßgebende Imperfektionsform auch eine Funktion der Imperfektionsamplitude ist.

Kapitel 10

Bewertung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung und Bewertung

Mit den Verfahren der Strukturoptimierung erhält der Konstrukteur ein Hilfsmittel, welches ihm gegenüber der konventionellen Vorgehensweise erlaubt, in kürzerer Zeit bessere Tragwerke zu entwickeln. Mit der Topologieoptimierung ist es möglich den prinzipiellen Aufbau einer Struktur zu generieren. Dadurch eignet sich dieses Verfahren besonders für die ersten Entwurfsstudien. Die Formoptimierung ermöglicht auf der Grundlage einer topologisch bekannten Struktur die Feinjustierung. Hier steht die detaillierte Beschreibung der Geometrie im Vordergrund.

Die Verfahren der Strukturoptimierung können nur dann aussagekräftige Ergebnisse liefern, wenn die wesentlichen Effekte der Problemstellung während des Optimierungsprozesses berücksichtigt werden. Daraus folgt, dass für einen erfolgreichen Einsatz die Wirklichkeitsnähe des Analysemodells eine zentrale Bedeutung besitzt. Gegenüber der konventionellen Vorgehensweise muss bei dem Einsatz der Strukturoptimierung beachtet werden, dass die Ergebnisse bezüglich der berücksichtigten Entwurfskriterien und der mechanischen Formulierung ‘optimal’ sind. Dies birgt die Gefahr, dass der generierte Entwurf bei Vernachlässigung eines wesentlichen Aspekts unbrauchbar ist. Beim Aufbau des Analysemodells muss deshalb auf die Wahl des mechanischen Modells, die Qualität des zur Berechnung notwendigen Diskretisierungsverfahrens und die zugrunde gelegte Mechanik geachtet werden. Mit der Methode der finiten Elemente steht heute ein für viele Fragestellungen ausgereiftes Verfahren zur Verfügung. In der Strukturanalyse können unter anderem geometrisch und physikalisch nichtlineare Effekte berücksichtigt werden.

Die vorliegende Arbeit hat sich im Wesentlichen auf Problemstellungen konzentriert, bei denen die geometrische Nichtlinearität von großer Bedeutung ist. Auf der Basis einer nichtlinearen Kinematik kann das nichtlineare Last–Verschiebungs–Verhalten von Strukturen analysiert werden. Weiterhin besteht die Möglichkeit, die Laststufe, bei der das Tragwerk instabil wird, exakt zu berechnen. Einer anschaulichen Beschreibung dieser Phänomene folgte in dieser Arbeit eine kurze Einführung in die benötigte Mechanik und die zur Analyse notwendigen Algorithmen.

Durch die Berücksichtigung einer nichtlinearen Kinematik verliert das Steifigkeitskriterium der linearen Theorie an Eindeutigkeit. Aus diesem Grund wurden verschiedene Steifigkeitskriterien definiert und anhand vergleichender numerischer Beispiele untersucht. Die unterschiedlichen Kriterien zeigen deutlich ihre Wirkung in der Topologieoptimierung.

Neben den Kriterien besitzt die für den Optimierungslauf definierte Laststufe einen deutlichen Einfluss. Sind für ein Tragwerk die Randbedingungen relativ eindeutig, lassen sich Strukturen generieren, welche ihrer Situation optimal angepasst sind. Allerdings besteht auch die Gefahr, dass die Ergebnisse zwar bezüglich ihrer Zielfunktion optimal sind, aber die Strukturantwort, dargestellt durch die Last–Verschiebungs–Charakteristiken, nicht befriedigend ist. Eine generierte Struktur kann ein anfänglich quasi–kinematisches Verhalten aufzeigen, bevor es bei größerer Deformation in eine steife Konfiguration gelangt.

Im Anschluss an die Steifigkeitsoptimierung wurde auf einen weiteren Aspekt bei der Topologieoptimierung eingegangen. Aufgrund der EULERSchen–Betrachtungsweise (Materialfluss durch das Entwurfsgebiet) sind bei der Berücksichtigung lokaler Entwurfskriterien weitere Überlegungen notwendig. Es wurde ein einfacher Ansatz vorgestellt, bei dem durch Kopplung der lokalen Entwurfskriterien mit den Dichten der umliegenden finiten Elemente eine explizite Abhängigkeit zu den Entwurfsvariablen entsteht. Dadurch können auch solche Entwurfskriterien erfolgreich in der Topologieoptimierung berücksichtigt werden, welche keine explizite Abhängigkeit zu den Entwurfsvariablen haben. Anhand von Verschiebungsnebenbedingungen wurde dies verifiziert. Die Erweiterung zeigt deutlich ihre Wirkung, wodurch die Aussagekraft des untersuchten Beispiels gesteigert werden konnte. Das Beispiel der Steifigkeitsoptimierung, welches anfänglich kinematisch ist, motivierte die Fragestellung nach der gezielten Kontrolle von Deformationsprozessen. Derartige Fragestellungen sind insbesondere bei dem Entwurf von Mikrostrukturen relevant. Für diesen Typ von Aufgabe wurden zwei Problemstellungen untersucht. Eine Fragestellung beschäftigt sich mit dem Entwurf von Systemen, welche mit möglichst hohem Wirkungsgrad die Kraft eines Aktuators auf ein Werkstück übertragen. Die Flexibilität des Werkstückes steuert dabei die Beweglichkeit der Struktur. Entwürfe auf der Basis einer linearen Kinematik zeigen bei einer anschließenden nichtlinearen Analyse ein frühzeitiges Blockieren. Dies kann durch die Berücksichtigung des tatsächlichen Verhaltens im Entwurfsprozess vermieden werden.

Neben der generellen Beweglichkeit stand bei den Pfadverfolgungsmechanismen die Kontrolle des Deformationsverhaltens ausgewählter Systempunkte im Vordergrund. Weitere Kriterien wurden zur Sicherstellung einer möglichst eindeutigen Materialverteilung eingeführt. Der Kontakt mit einem Werkstück wurde anhand gewichteter und superpositionierter Lastfälle approximiert. Anhand des vorgestellten Beispiels wurde die generelle Tauglichkeit der Optimierungsformulierung verifiziert. Die Einstellung der einzelnen Wichtungsfaktoren der Entwurfskriterien zur Bildung einer skalarwertigen Zielfunktion erwies sich als sensitiv.

Bei beiden Mikrostruktur–Entwurfsaufgaben traten anfänglich Probleme in der Gleichgewichtsiteration auf. Diese beruhen darauf, dass das ST. VENANT–KIRCHHOFFSche–Materialgesetz nicht zur Beschreibung großer Verzerrungen geeignet ist. Diese treten zwar nur in den an sich uninteressanten hochporösen Bereichen auf, doch führten sie aufgrund der Probleme bei der Gleichgewichtsiteration zum Abbruch des Optimierungsprozesses. Anhand einer modifizierten hyperelastischen Materialformulierung konnte dieses Problem behoben werden.

Ein weiteres Phänomen, welches durch die Berücksichtigung einer nichtlinearen Kinematik beschreibbar wird, ist das der Instabilität. Zuerst wurden zwei Aspekte auf der Grundlage einer linearen Vorbeulanalyse untersucht. Zur Lösung des bereits bekannten Problems der

lokalen Beulmoden in hochporösen Bereichen wurde ein Vorschlag gemacht. Der Ansatz umfasst die Definition unterschiedlicher Penalty-Faktoren über die Dicke des Tragwerks und ist für Platten- sowie Scheibenprobleme anwendbar, bei denen die Beulmoden aus der Strukturebene dominieren. Wird das Entwurfskriterium der Instabilität als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem mit aufgenommen, können auch Strukturen ohne festes Traggerüst optimiert werden. Als Zielfunktion kann hier ein Steifigkeitskriterium dienen. Die Topologieoptimierung ist für derartige Fragestellungen lediglich in der Lage, einen prinzipiellen Strukturaufbau zu generieren. Unter Zuhilfenahme einer anschließenden Formoptimierung konnte für die gleiche Optimierungsaufgabe eine Struktur, bei der die Instabilitätsnebenbedingung im Optimum aktiv ist, gefunden werden.

Anhand des ‘erweiterten Systems’ besteht die Möglichkeit, kritische Laststeigerungsfaktoren bei einem nichtlinearen Vorbeulverhalten exakt zu bestimmen. Auf der Basis dieses Verfahrens wurde insbesondere die Empfindlichkeit gegenüber geometrischen Imperfektionen untersucht. Die Aspekte, welche bereits bei der Berücksichtigung des Instabilitätsproblems anhand einer linearen Vorbeulanalyse erörtert wurden (lokale Beulmoden und kein festes Traggerüst), fanden hier wiederum Eingang. Die Topologieoptimierung erwies sich erneut lediglich in der Lage, den prinzipiellen Aufbau der Struktur zu generieren. Auch hier konnten anhand der Formoptimierung Strukturen, bei denen eine Stabilitätsnebenbedingung im Optimum aktiv ist, gefunden werden. Insgesamt erwies sich die Kombination von dem erweiterten System und der Topologieoptimierung als sehr empfindlich. Grund hierfür sind die großen Veränderungen des Strukturcharakters innerhalb eines Optimierungslaufs. Insbesondere das Verschwinden und Auftauchen neuer Instabilitätspunkte bereitet algorithmische Probleme. Die Berücksichtigung höherer, kritischer Punkte, ermittelt anhand einer Eigenwertanalyse, stabilisieren den Algorithmus zwar, aber die Robustheit wie bei der Formoptimierung konnte nicht erreicht werden.

Bei den Beispielen der vorangegangenen Fragestellung wurde a priori davon ausgegangen, dass die maßgebende Imperfektionsform affin zur Beulform des perfekten Systems ist. Inwiefern dies zutrifft war die abschließende Fragestellung der vorliegenden Arbeit. Auf der Basis der Imperfektionsempfindlichkeit wurden insbesondere die Auswirkungen von Modifikationen affin zu den Beulformen der perfekten Struktur untersucht. Eine weitere Fragestellung war der Einfluss der geometrischen Lagerimperfektion. Dazu wurden Beulformen zur Modifikation der Strukturgeometrie verwendet, welche auf der Basis einer Struktur mit veränderten DIRICHLET-Randbedingungen bestimmt wurden. Bei Berücksichtigung der Beulformen, welche zu dem eigentlichen, perfekten System gehören, konnte die Dominanz der ersten Eigenform bei Vorgabe einer maximal zulässigen Imperfektionsamplitude bestätigt werden. Durch die Verwendung von Beulformen, welche anhand modifizierter Randbedingungen berechnet wurden, konnte die kritische Last nochmals deutlich gesenkt werden. Dies bestätigt den großen Einfluss einer möglichen Lagerimperfektionen. Wie in der vorangegangenen Untersuchung erwies sich der vorgestellte Algorithmus für Formoptimierungsprobleme als robust.

10.2 Fazit und Ausblick

Insgesamt konnte gezeigt werden, dass der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität bedeutend auf den Entwurf von Tragwerken ist. Insbesondere bei der Topologieoptimierung waren die Auswirkungen durch die Generierung von teilweise topologisch verschiedenen Tragwerken am auffälligsten. Aber erst anhand der Formoptimierung gelingt es, ein bezüglich der Entwurfskriterien ausgereiftes Tragwerk zu generieren.

Zur weiteren Steigerung der Aussagekraft der Ergebnisse wären Ergänzungen zu den vorgestellten Optimierungsproblemen denkbar. Vor allem weitere mechanische Problemklassen verdienen, in einem möglichen Zusammenhang mit Mikrostrukturen, Beachtung. Anhand einer realistischen Analyse des Kontaktes von Struktur und Werkstück gelänge eine Qualitätssteigerung der Ergebnisse. Darauf aufbauend könnte wiederum eine Stabilitätsanalyse erfolgen. Zur besseren Beschreibung der flexiblen Übergangsbereiche wären Materialmodelle, welche große Verzerrungen beschreiben können, notwendig. Dies trifft im Besonderen für eine mögliche Formoptimierung zu. Ein weiteres interessantes Gebiet ist die Kopplung von mehreren physikalischen Problemklassen, wie sie z. B. bei den 'MEMS' auftreten. Alle diese Problemklassen sind natürlich auch für andere Anwendungsgebiete von großem Interesse.

Die mechanisch komplexeren Fragestellungen erfordern in Zukunft numerisch ausgereifere Verfahren. Insbesondere die Parallelisierung der Algorithmen wird erst weitere Schritte mehr akzeptablen Berechnungszeiten ermöglichen. Bei der zukünftigen Entwicklung von Algorithmen sollte ebenfalls die Robustheit mehr im Vordergrund stehen.

Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, J. & H. ALTENBACH [1994]. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart.
- [2] ANANTHASURESH, G. K., S. KOTA & Y. GIANCHANDANI [1994]. ‘A methodical approach to the design of compliant micromechanisms.’ In *Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, S. 189–192. Hilton Head Island, South Carolina, USA.
- [3] ARGYRIS, J. H. & H.-P. MLEJNEK [1987]. *Die Methode der Finiten Elemente, Band I–III*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden.
- [4] ARORA, J. S. [1989]. *Introduction to optimum design*. McGraw–Hill, New York.
- [5] BARTHOLD, F.-J. [1993]. *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [6] BATHE, K.-J. [2002]. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [7] BECKER, A. [1992]. *Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenbestimmung*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [8] BELEGUNDU, A. D. & S. D. RAJAN [1988]. ‘A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **66**, S. 87–106.
- [9] BENDSØE, M. P. [1989]. ‘Optimal shape design as a material distribution problem.’ *Structural Optimization*, **1**, S. 193–202.
- [10] BENDSØE, M. P. [1995]. *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer–Verlag, Berlin.
- [11] BENDSØE, M. P., J. M. GUEDES, R. B. HABER, P. PEDERSEN & J. E. TAYLOR [1994]. ‘An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design.’ *J. Appl. Mech.*, **61**, S. 930–937.
- [12] BENDSØE, M. P. & N. KIKUCHI [1988]. ‘Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **71**, S. 197–224.

- [13] BENDSØE, M. P. & C. A. MOTA SOARES [1993]. *Topology design of structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [14] BENDSØE, M. P. & O. SIGMUND [1999]. ‘Material interpolation schemes in topology optimization.’ *Archive of Applied Mechanics*, **69**, S. 635–654.
- [15] BENDSØE, M. P. & J. SOKOLOWSKI [1987]. ‘Sensitivity analysis and optimization of elasto–plastic structures.’ *Engineering Optimization*, **11**, S. 31–38.
- [16] BENNETT, J. A. & M. E. BOTKIN [1985]. ‘Structural shape optimization with geometric description and adaptive mesh generation.’ *AIAA Journal*, **23**, S. 458–464.
- [17] BETTEN, J. [1993]. *Kontinuumsmechanik: Elasto–, Plasto– und Kriechmechanik*. Springer–Verlag, Berlin.
- [18] BLETZINGER, K.-U. [1990]. *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 11, Universität Stuttgart.
- [19] BLETZINGER, K.-U., S. KIMMICH & E. RAMM [1991]. ‘Efficient modeling in shape optimal design.’ *Comp. Systems in Eng.*, **2**, S. 483–495.
- [20] BLETZINGER, K.-U., R. REITINGER, S. KIMMICH & E. RAMM [1993]. ‘Shape optimization with program CARAT.’ In *Software Systems of Structural Optimization*, herausgegeben von K. Schittkowski, H. R. E. M. Hörnlein & C. A. Mota Soares, S. 97–124. Birkhäuser, Basel.
- [21] BÖHM, W., G. FARIN & J. KAHMANN [1984]. ‘A survey of curve and surface methods in CAGD.’ *Computer Aided Geometric Design*, **1**, S. 1–60.
- [22] BRAIBANT, V. & C. FLEURY [1984]. ‘Shape optimal design using B–splines.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **44**, S. 247–267.
- [23] BRUNS, T. E., O. SIGMUND & D. A. TORTORELLI [2002]. ‘Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap–through.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **55**, S. 1215–1237.
- [24] BRUNS, T. E. & D. A. TORTORELLI [1998]. ‘Topology optimization of geometrically nonlinear structures and compliant mechanisms.’ In *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, S. 1874–1882. St. Louis, USA.
- [25] BRUNS, T. E. & D. A. TORTORELLI [2001]. ‘Topology optimization of nonlinear elastic structures and compliant mechanisms.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190**, S. 3443–3460.
- [26] BUHL, T. [2002]. ‘Simultaneous topology optimization of structure and support.’ *Struct. Multidisc. Optim.*, **23**, S. 336–346.

- [27] BUHL, T., C. B. W. PEDERSEN & O. SIGMUND [2000]. ‘Stiffness design of geometrically non-linear structures using topology optimization.’ *Structural Optimization*, **19**, S. 93–104.
- [28] CARAT [2000]. ‘Programmsystem CARAT, Eingabebeschreibung und Dokumentation.’ *Unveröffentlichter Bericht des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart*.
- [29] CHENG, K. T. & N. OLHOFF [1981]. ‘An investigation concerning optimal design of solid elastic plates.’ *Int. J. Solids Struct.*, **17**, S. 305–323.
- [30] CHOI, K. K. & K.-H. CHANG [1994]. ‘A study of design velocity field computation for shape optimal design.’ *Finite Elements in Analysis and Design*, **15**, S. 317–341.
- [31] CIARLET, P. G. [1988]. *Mathematical Elasticity. Vol. 1: Three Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo.
- [32] COX, H. L. [1965]. *The design of structures of least weight*. Oxford: Pergamon.
- [33] CRISFIELD, M. A. [1981]. ‘A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through.’ *Computers & Structures*, **13**, S. 55–62.
- [34] DIAZ, A. & N. KIKUCHI [1992]. ‘Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **35**, S. 1487–1502.
- [35] DIAZ, A. & O. SIGMUND [1995]. ‘Checkerboard patterns in layout optimization.’ *Structural Optimization*, **10**, S. 40–45.
- [36] DUYSINX, P. & M. P. BENDSØE [1997]. ‘Topology optimization of continuum structures with stress constraints.’ In *Proceedings of the 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, herausgegeben von W. Gutkowski & Z. Mróz, S. 527–532. Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw, Poland.
- [37] ESCHENAUER, H. A. [1985]. *Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen*. Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) 1980–1984, Technischer Bericht, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität-Gesamthochschule Siegen.
- [38] ESCHENAUER, H. A., V. V. KOBELEV & A. SCHUMACHER [1994]. ‘Bubble method for topology and shape optimization of structures.’ *Structural Optimization*, **8**, S. 42–51.
- [39] ESCHENAUER, H. A. & N. OLHOFF (EDS.) [1983]. *Optimization methods in structural design*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.
- [40] ESCHENAUER, H. A., P. U. POST & M. BREMICKER [1988]. ‘Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteilkomponenten.’ *Bauingenieur*, **63**, S. 515–526.

- [41] FAUX, I. D. & M. J. PRATT [1979]. *Computational geometry for design and manufacture*. Ellis Horwood Publishers, Chichester.
- [42] FLEURY, C. & V. BRAIBANT [1986]. ‘Structural optimization: A new dual method using mixed variables.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, S. 409–428.
- [43] FORYS, A. [1994]. ‘Variational formulation of optimization against loss of dynamic stability.’ *Structural Optimization*, **8**, S. 257–261.
- [44] FREY, F. & S. CESCOTTO [1977]. ‘Some new aspects of the incremental total lagrangian description in nonlinear analysis.’ In *Int. Conf. ‘Finite elements in nonlinear mechanics’*, Geilo, Norway, Volume 1.
- [45] GEA, H. C. & J. LUO [2001]. ‘Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities.’ *Computers & Structures*, **79**, S. 1977–1985.
- [46] GEYMONAT, G., S. MÜLLER & N. TRIANTAFYLIDIS [1993]. ‘Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity.’ *Arch. Rational Mech. Anal.*, **122**, S. 231–290.
- [47] GILL, P. E., W. MURRAY & M. H. WRIGHT [1981]. *Practical optimization*. Academic Press, London.
- [48] HABER, R. B., C. S. JOG & M. P. BENDSØE [1995]. ‘The perimeter method – a new approach to variable–topology shape design.’ In *Proceedings of the 1st World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 28. Mai – 2. Juni 1995, Goslar, Germany*, herausgegeben von N. Olhoff & G. I. N. Rozvany.
- [49] HABER, R. B., C. S. JOG & M. P. BENDSØE [1996]. ‘A new approach to variable–topology shape design using a constraint on perimeter.’ *Structural Optimization*, **11**, S. 1–12.
- [50] HAFTKA, R. T., Z. GÜRDAL & M. P. KAMAT [1990]. *Elements of structural optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [51] HAUG, E. J. & J. CEA (EDS.) [1981]. *Optimization of distributed parameter structures, Vol. 1, 2*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- [52] HAUG, E. J., K. K. CHOI & V. KOMKOV [1986]. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, Orlando, New York.
- [53] HEMP, W. S. [1973]. *Optimum structures*. Clarendon Press, Oxford.
- [54] HOCHHOLDINGER, B. [2001]. *Generierung von Mechanismen mit Hilfe der Topologieoptimierung*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [55] HOWELL, L. L. & A. MIDHA [1994]. ‘A method for design of compliant mechanisms with small length flexural pivots.’ *Transaction of the ASME*, **116**, S. 280–290.
- [56] HUGHES, T. J. R. [1987]. *The finite element method*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- [57] IMAM, M. H. [1982]. ‘Three-dimensional shape optimization.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**, S. 661–673.
- [58] JOG, C. [1996]. ‘Distributed-parameter optimization and topology design for non-linear thermoelasticity.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **132**, S. 117–134.
- [59] KAMAT, M. P. & P. RUANGSILASINGHA [1985]. ‘Optimization of space trusses against instability using design sensitivity derivatives.’ *Engineering Optimization*, **8**, S. 177–188.
- [60] KEENER, J. P. & H. B. KELLER [1973]. ‘Perturbed bifurcation theory.’ *Arch. Rational Meth. Anal.*, **50**, S. 159–175.
- [61] KEMMLER, R., S. SCHWARZ & E. RAMM [1999]. ‘Topology optimization including geometrically nonlinear response.’ In *Proceedings of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May, 17–21, 1999, Buffalo, USA*, herausgegeben von C. L. Bloebaum, K. E. Lewis & R. W. Magne.
- [62] KHOT, N. S., V. B. VENKAYYA & L. BERKE [1976]. ‘Optimum structural design with stability constraints.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, S. 1097–1114.
- [63] KIKUCHI, N., K. Y. CHUNG, T. TORIGAKI & J. E. TAYLOR [1986]. ‘Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **57**, S. 67–89.
- [64] KIM, N. H., Y. H. PARK & K. K. CHOI [2001]. ‘Optimization of a hyper-elastic structure with multibody contact using continuum-based shape design sensitivity analysis.’ *Structural Optimization*, **21**, S. 196–208.
- [65] KIMMICH, S. [1990]. *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr.12, Universität Stuttgart.
- [66] KIRSCH, U. [1993]. *Structural optimization: Fundamentals and applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [67] KLEIBER, M., H. ANTÚNEZ, T. D. HIEN & P. KOWALCZYK [1997]. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics: Theory and finite element computations*. Wiley & Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.
- [68] KLEIBER, M., T. D. HIEN, H. ANTÚNEZ & P. KOWALCZYK [1995]. ‘Parameter sensitivity of elastoplastic response.’ *Engineering Computations*, **12**, S. 263–280.
- [69] KOHN, R. V. & G. STRANG [1983]. ‘Optimal design for torsional rigidity.’ In *Hybrid and mixed finite element methods*, herausgegeben von S. N. Atluri, R. H. Gallagher & O. C. Zienkiewicz, S. 281–288. Wiley & Sons, Chichester.
- [70] KOHN, R. V. & G. STRANG [1986]. ‘Optimal design and relaxation of variational problems. I–III.’ *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**, S. 113–137, 139–182, 353–377.

- [71] KOITER, W. T. [1967]. *On the stability of elastic equilibrium; Translation of 'Over de Stabieliteit van het elastisch evenwicht'*. H. J. Paris Publisher Amsterdam 1945.
- [72] KUHN, H. W. & A. W. TUCKER [1951]. 'Nonlinear programming.' In *2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, herausgegeben von J. Neyman, S. 487–492. University of California Press, Berkeley.
- [73] LARSEN, U. D., O. SIGMUND & S. BOUWSTRA [1997]. 'Design and fabrication of compliant mechanisms and material structures with negative Poisson's ratio.' *Journal of Microelectromechanical Systems*, **6**, S. 99–106.
- [74] LUENBERGER, D. G. [1984]. *Linear and nonlinear programming*. Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [75] LUND, E. [1994]. *Finite element based design sensitivity analysis and optimization*. Dissertation, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [76] MAHNKEN, R. [1998]. *Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht–Nr. 98/2.
- [77] MALVERN, L. E. [1969]. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice–Hall, London.
- [78] MAUTE, K. [1998]. *Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 25, Universität Stuttgart.
- [79] MAUTE, K., M. NIKBAY & C. FARHAT [2001]. 'Coupled analytical sensitivity analysis and optimization of three-dimensional nonlinear aeroelastic systems.' *AIAA Journal*, **39**, S. 2051–2061.
- [80] MAUTE, K. & E. RAMM [1995]. 'Adaptive topology optimization.' *Structural Optimization*, **10**, S. 100–112.
- [81] MAUTE, K. & E. RAMM [1995]. 'General shape optimization – an integrated model for topology and shape optimization.' In *Proc. of the 1st World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, herausgegeben von N. Olhoff & G. I. N. Rozvany, S. 299–306. Oxford: Pergamon.
- [82] MAUTE, K., S. SCHWARZ & E. RAMM [1998]. 'Adaptive topology optimization of elastoplastic structures.' *Structural Optimization*, **15**, S. 81–91.
- [83] MAXWELL, C. [1869]. *Scientific papers II*. University Press, Cambridge.
- [84] MEYER, L. [1998]. *Formoptimierung in der Strukturdynamik*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik Nr. F 97/2, Universität Hannover.

- [85] MICHELL, A. G. M. [1904]. ‘The limits of economy of material in frame structures.’ *Philosophical Magazine, Serie 6*, **8**, S. 589–597.
- [86] MOORE, O. & A. SPENCE [1980]. ‘The calculation of turning points of nonlinear equations.’ *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **17**, S. 567–576.
- [87] MYERS, R. H. & D. C. MONTGOMERY [1995]. *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley, New York.
- [88] NEVES, M. M., H. RODRIGUES & J. M. GUEDES [1995]. ‘Generalized topology design of structures with buckling load criterion.’ *Structural Optimization*, **10**, S. 71–78.
- [89] NEVES, M. M., O. SIGMUND & M. P. BENDSØE [2002]. ‘Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **54**, S. 809–834.
- [90] OLHOFF, N. [1974]. ‘Optimal design of vibrating rectangular plates.’ *Int. J. Solids Struct.*, **10**, S. 93–109.
- [91] OLHOFF, N., M. P. BENDSØE & J. RASMUSSEN [1991]. ‘On CAD-integrated structural topology and design optimization.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **89**, S. 259–279.
- [92] OLHOFF, N., E. RØNHOLT & J. SCHEEL [1997]. ‘Three-dimensional structural topology optimization based on optimum microstructures.’ In *Proceedings of the Second World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, S. 557–562. Zakopane, Poland.
- [93] PEDERSEN, C. B. W., T. BUHL & O. SIGMUND [2001]. ‘Topology optimization of large displacement compliant mechanism.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **50**, S. 2683–2705.
- [94] PLANINC, I. & M. SAJE [1999]. ‘A quadratically convergent algorithm for the computation of stability points: The application of the determinant of the tangent stiffness matrix.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **169**, S. 89–105.
- [95] PRAGER, W. & G. I. N. ROZVANY [1977]. ‘Optimization of structural geometry.’ In *Dynamical systems*, herausgegeben von A. R. Bednarek & L. Cesari, S. 265–293. Academic Press, New York.
- [96] RAMM, E. [1976]. *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*. Habilitationsschrift, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 76–2.
- [97] RAMM, E. [1981]. ‘Strategies for tracing the nonlinear response near limit points.’ In *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, herausgegeben von W. Wunderlich, E. Stein & K.-J. Bathe, S. 63–89. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

- [98] RAMM, E. & A. MATZENMILLER [1986]. ‘Large deformation shell analyses based on the degeneration concept.’ In *State-of-the-art Texts on Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, herausgegeben von T. J. R. Hughes & E. Hinton. Pineridge Press.
- [99] RAMM, E., K. MAUTE & S. SCHWARZ [1998]. ‘Conceptual design by structural optimization.’ In *Proceedings of the Euro-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, herausgegeben von R. de Borst, N. Bićanić, H. Mang & G. Meschke, S. 879–896. A.A. Balkema, Rotterdam, Badgastein, Austria.
- [100] RECHENBERG, I. [1989]. ‘Evolution strategy: Nature’s way of optimization.’ In *Optimization: Methods and Applications, Possibilities and Limitations*, herausgegeben von H. Bergmann, S. 106–126. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [101] REHLE, N. [1996]. *Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächen-tragwerken*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 20, Universität Stuttgart.
- [102] REITINGER, R. [1994]. *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 17, Universität Stuttgart.
- [103] REITINGER, R. & E. RAMM [1994]. ‘Maximizing structural efficiency including buckling and imperfection sensitivity.’ In *Proc. 5th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium multidisciplinary analysis and optimization*, S. 1228–1238.
- [104] REITINGER, R. & E. RAMM [1995]. ‘Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures.’ *Thin-Walled Structures*, **23**, S. 159–177.
- [105] RIKS, E. [1972]. ‘The application of Newtons method to the problem of elastic stability.’ *J. Appl. Mech.*, **39**, S. 1060–1066.
- [106] RIKS, E. [1979]. ‘An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems.’ *Int. J. Solids Struct.*, **15**, S. 529–551.
- [107] RINGERTZ, U. T. [1993]. ‘On finding the optimal distribution of material properties.’ *Structural Optimization*, **5**, S. 265–267.
- [108] ROSEN, D. W. & I. R. GROSSE [1992]. ‘A feature based shape optimization technique for the configuration and parametric design of flat plates.’ *Eng. with Comp.*, **8**, S. 81–91.
- [109] ROSSOW, M. P. & J. E. TAYLOR [1973]. ‘A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets.’ *AIAA Journal*, **11**, S. 1566–1568.
- [110] ROZVANY, G. I. N. [1993]. *Optimization of large structural systems, NATO ASI Series E231-I*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [111] ROZVANY, G. I. N., M. P. BENDSØE & U. KIRSCH [1995]. ‘Layout optimization of structures.’ *Appl. Mech. Rev.*, **48**, S. 41–119.

- [112] ROZVANY, G. I. N. & M. ZHOU [1996]. ‘Advances in overcoming computational pitfalls in topology optimization.’ In *Proc. 6th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium multidisciplinary analysis and optimization*, S. 1122–1132. Bellevue, USA.
- [113] ROZVANY, G. I. N., M. ZHOU & T. BIRKER [1992]. ‘Generalized shape optimization without homogenization.’ *Structural Optimization*, **4**, S. 250–252.
- [114] SCHITTKOWSKI, K. [1985]. ‘NLPQL: A FORTRAN subroutine for solving constrained nonlinear programming problems.’ *Ana. Oper. Res.*, **5**, S. 485–500.
- [115] SCHUMACHER, A. [1996]. *Topologieoptimierung von Bauteilkonstruktionen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien*. Dissertation, FOMAAS, Universität–Gesamthochschule Siegen, TIM–Bericht T09-01.96.
- [116] SCHWARZ, S. [2001]. *Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [117] SCHWARZ, S., R. KEMMLER & E. RAMM [1999]. ‘Shape and topology optimization with nonlinear structural response.’ In *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics, August 31 - September 3, 1999, München, Germany*, herausgegeben von W. Wunderlich. Lehrstuhl für Statik, TU München, Germany.
- [118] SEYDEL, R. [1979]. ‘Numerical computation of branch points in nonlinear equations.’ *Numer. Math.*, **33**, S. 339–352.
- [119] SIGMUND, O. [1994]. *Design of material structures using topology optimization*. Dissertation, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Denmark.
- [120] SIGMUND, O. [1997]. ‘Design of thermomechanical actuators using topology optimization.’ In *Proceedings of the Second World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, S. 393–398. Zakopane, Poland.
- [121] SIGMUND, O. [1997]. ‘On the design of compliant mechanisms using topology optimization.’ *Mech Struct. & Mach.*, **25**, S. 493–524.
- [122] SIGMUND, O. [1998]. ‘Topology optimization in multiphysics problems.’ In *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, S. 1492–1500. St.Louis, USA.
- [123] SIGMUND, O. [2001]. ‘Design of multiphysics actuators using topology optimization – Part I: One–material structures.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190**, S. 6577–6604.
- [124] SIGMUND, O. [2001]. ‘Design of multiphysics actuators using topology optimization – Part II: Two–material structures.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190**, S. 6605–6627.

- [125] SIGMUND, O. & J. PETERSSON [1998]. ‘Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedure dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima.’ *Structural Optimization*, **16**, S. 68–75.
- [126] STEIN, E. & F.-J. BARTHOLD [1996]. ‘Elastizitätstheorie.’ In *Der Ingenieurbau: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, herausgegeben von G. Mehlhorn. Ernst & Sohn.
- [127] SURANA, K. S. [1983]. ‘Geometrically nonlinear formulation for curved shell elements.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, S. 581–615.
- [128] SVANBERG, K. [1987]. ‘The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, S. 359–373.
- [129] SWAN, C. C. & J. S. ARORA [1997]. ‘Topology design of material layout in structured composites of high stiffness and strength.’ *Structural Optimization*, **13**, S. 45–59.
- [130] SZABO, I. [1979]. *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart.
- [131] THOMPSON, J. [1972]. ‘Optimization as a generator of structural instability.’ *Int. J. Mech. Sci.*, **14**, S. 627–629.
- [132] THOMPSON, J. M. T. & G. W. HUNT [1984]. *Elastic instability Phenomena*. Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- [133] TORTORELLI, D. A. [1993]. ‘A geometric representation scheme suitable for shape optimization.’ *Mech. Struct. & Mach.*, **21**, S. 95–121.
- [134] TORTORELLI, D. A. [1997]. *Non-linear and time-dependent structural systems: Sensitivity analysis and optimization*. Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Denmark, Lecture Notes.
- [135] WAGNER, W. [1991]. *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 91/1.
- [136] WELL, K. H. [1996]. *Bahnoptimierung*. Unterlagen zur Vorlesung ‘Bahnoptimierung’, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart.
- [137] WEMPNER, G. A. [1971]. ‘Discrete approximations related to nonlinear theories of solids.’ *Int. J. Solids Struct.*, **7**, S. 1581–1599.
- [138] WIEDEMANN, J. [1989]. *Leichtbau, Band 2*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo.
- [139] WRIGGERS, P. & J. C. SIMO [1990]. ‘A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **30**, S. 155–176.

- [140] WRIGGERS, P., W. WAGNER & C. MIEHE [1988]. ‘A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **70**, S. 329–347.
- [141] YANG, R. J. & C. J. CHEN [1996]. ‘Stress-based topology optimization.’ *Structural Optimization*, **12**, S. 98–105.
- [142] YIN, L. & G. K. ANANTHASURESH [2001]. ‘Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme.’ *Struct. Multidisc. Optim.*, **23**, S. 49–62.
- [143] YUGE, K. & N. KIKUCHI [1995]. ‘Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation.’ *Structural Optimization*, **10**, S. 197–208.
- [144] ZHANG, S. & A. D. BELEGUNDU [1992]. ‘A systematic approach for generating velocity fields in shape optimization.’ *Structural Optimization*, **5**, S. 84–94.
- [145] ZHOU, M. & G. I. N. ROZVANY [1991]. ‘The COC-algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **89**, S. 309–336.
- [146] ZIENKIEWICZ, O. C. & J. S. CAMPBELL [1973]. ‘Shape optimization and sequential linear programming.’ In *Optimum structural design: Theory and applications*, herausgegeben von R. H. Gallagher & O. C. Zienkiewicz, S. 109–126. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto.
- [147] ZIENKIEWICZ, O. C. & R. L. TAYLOR [2000]. *The finite element method, Volume I, II*. Butterworth-Heinemann.
- [148] ZILLOBER, C. [1993]. ‘SCP – an implementation of a sequential convex programming algorithm for nonlinear programming.’ *Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung*, Report 470, S. 1–21.
- [149] ZILLOBER, C. [2001]. ‘Global convergence of a nonlinear programming method using convex approximation.’ *Numerical Algorithms*, **27**, S. 256–289.

Anhang A

Herleitung der Imperfektionsempfindlichkeit

In Abschnitt 3.2 wurde auf das Stabilitäts- und Imperfektionsverhalten eingegangen. Im Folgenden wird die Herleitung für die Imperfektionsempfindlichkeit (Gleichung (3.1)) gezeigt. Die geometrische Imperfektion $\check{\mathbf{s}}$ wird in eine normierte Imperfektionsform $\hat{\mathbf{s}}$ und einem Amplitudenparameter ζ aufgeteilt:

$$\check{\mathbf{s}} = \zeta \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{A.1})$$

Basis der Herleitung ist die Beschreibung des singulären Punktes eines geometrisch imperfekten Tragwerks anhand des Imperfektionsparameters ζ bezogen auf den Instabilitätspunkt des perfekten Systems:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{G}}(\check{\mathbf{u}}(\zeta), \check{\lambda}(\zeta), (\zeta)) &= \mathbf{0} \\ \check{\mathbf{K}}_T(\check{\mathbf{u}}(\zeta), \check{\lambda}(\zeta), (\zeta)) \phi(\zeta) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Die Kurve, welche die singulären Punkte miteinander verbindet, wird als Singulärpfad bezeichnet (siehe Beispiel 3 der Abbildung 3.3). Die notwendige erste Ableitung für eine asymptotische Näherung von Gleichung (A.2) nach dem Imperfektionsparameter ζ an der Stelle $\zeta = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{K}}_T \nabla_{\zeta} \check{\mathbf{u}} - \nabla_{\zeta} \check{\lambda} \mathbf{P} + \nabla_{\check{\mathbf{s}}} \check{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{0} \\ \left[\nabla_{\mathbf{u}} \check{\mathbf{K}}_T \nabla_{\zeta} \check{\mathbf{u}} + \nabla_{\check{\mathbf{s}}} \check{\mathbf{K}}_T \hat{\mathbf{s}} \right] \phi + \check{\mathbf{K}}_T \nabla_{\zeta} \phi &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

In den Gleichungen (A.3) wurde bereits davon ausgegangen, dass die Belastung unabhängig von den Verschiebungen ist. Die Kontraktion der Gleichung (A.3_a) mit dem Singularitätsvektor ϕ liefert:

$$\begin{aligned} \underbrace{\phi^T \check{\mathbf{K}}_T}_{=0} \nabla_{\zeta} \check{\mathbf{u}} - \nabla_{\zeta} \check{\lambda} \underbrace{\phi^T \mathbf{P}}_{=0} + \phi^T \nabla_{\check{\mathbf{s}}} \check{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{s}} &= 0 \\ &= 0 : \text{Verzweigungspunkt} \\ &\neq 0 : \text{Durchschlagspunkt} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Für den Fall eines Durchschlagspunktes kann die Imperfektionsempfindlichkeit direkt aus Gleichung (A.4) gewonnen werden:

$$\nabla_{\zeta}^{\dot{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{\phi}^T \nabla_{\dot{\mathbf{s}}} \dot{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{s}}}{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P}} \quad (\text{A.5})$$

Falls das perfekte System einen Verzweigungspunkt aufweist, sind zwei Fälle zu unterscheiden. Besitzt weiterhin das imperfekte Tragwerk einen Verzweigungspunkt, so ist die Ableitung von \mathbf{G} nach der Imperfektion orthogonal zu $\boldsymbol{\phi}$. Dann kann Gleichung (A.3_a) in partitionierter Form wie folgt gelöst werden:

$$\nabla_{\zeta}^{\dot{\mathbf{u}}} = \nabla_{\dot{\lambda}}^{\dot{\mathbf{u}}} \Delta \dot{\mathbf{u}}_P + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{\zeta} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{u}}_P &= \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \\ \Delta \dot{\mathbf{u}}_{\zeta} &= -\mathbf{K}_T^{-1} \left[\nabla_{\dot{\mathbf{s}}} \dot{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{s}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Wurde der singuläre Punkt unter Zuhilfenahme eines Penalty-Verfahrens, wie es in Abschnitt 4.3.2 beschrieben wurde, bestimmt, so ist die fast singuläre Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T noch faktorisierbar. Wird Gleichung (A.6) in die mit $\boldsymbol{\phi}$ verzüngte Form von Gleichung (A.3_b) eingesetzt, so ergibt sich für diesen Fall die Imperfektionsempfindlichkeit zu:

$$\nabla_{\zeta}^{\dot{\lambda}} = -\frac{\boldsymbol{\phi}^T \nabla_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\phi} \Delta \dot{\mathbf{u}}_{\zeta} + \boldsymbol{\phi}^T \nabla_{\dot{\mathbf{s}}} \dot{\mathbf{K}}_T \dot{\mathbf{s}} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \nabla_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{K}}_T \boldsymbol{\phi} \Delta \dot{\mathbf{u}}_P} \quad (\text{A.7})$$

Diese Gleichung ist auch dann anwendbar, falls das perfekte System einen Durchschlagspunkt aufweist. Die Lösung von Gleichung (A.7) entspricht der von Gleichung (9.14), wenn die Imperfektionsform als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld interpretiert wird. Dabei ist zu beachten, dass im Zusammenhang zur Sensitivitätsanalyse Gleichung (A.7) einer direkten und (9.14) einer adjungierten Vorgehensweise entspricht.

Geht der Verzweigungspunkt des perfekten Systems bei Berücksichtigung der Imperfektion in einen Durchschlagspunkt über, verschwindet der letzte Term in Gleichung (A.4) nicht (siehe REITINGER & RAMM [103]). Dies tritt dann ein, falls die Imperfektionsform affin zum Singularitätsvektor $\boldsymbol{\phi}$ ist. Die Herleitung der Imperfektionsempfindlichkeit erfolgt unter Zuhilfenahme eines Pfadparameters r . Die Gleichungen (A.2) lassen sich dann wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} \left(\dot{\mathbf{u}}(r), \dot{\lambda}(r), \zeta(r) \right) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{K}}_T \left(\dot{\mathbf{u}}(r), \dot{\lambda}(r), \zeta(r) \right) \boldsymbol{\phi}(r) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mit dem Parameter r kann nun neben $\dot{\lambda}$ und $\dot{\mathbf{u}}$ auch die Imperfektionsamplitude ζ anhand einer TAYLORreihe am kritischen Punkt entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^{\zeta} &= \dot{\lambda} + \nabla_r \dot{\lambda} \Delta r + \frac{1}{2} \nabla_r^2 \dot{\lambda} \Delta r^2 + \dots \\ \dot{\mathbf{u}}^{\zeta} &= \dot{\mathbf{u}} + \nabla_r \dot{\mathbf{u}} \Delta r + \frac{1}{2} \nabla_r^2 \dot{\mathbf{u}} \Delta r^2 + \dots \\ \zeta &= 0 + \nabla_r \zeta \Delta r + \frac{1}{2} \nabla_r^2 \zeta \Delta r^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Die erste Ableitung von (A.8) nach dem Pfadparameter r ist:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_T \nabla_r \dot{\mathbf{u}} - \nabla_r \dot{\lambda} \mathbf{P} + \nabla_{\dot{\mathbf{s}}} \dot{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{s}} \nabla_r \zeta &= \mathbf{0} \\ \left[\nabla_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{K}}_T \nabla_r \dot{\mathbf{u}} + \nabla_{\dot{\mathbf{s}}} \dot{\mathbf{K}}_T \dot{\mathbf{s}} \nabla_r \zeta \right] \boldsymbol{\phi} + \dot{\mathbf{K}}_T \nabla_r \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Unter Berücksichtigung folgender Sachverhalte für einen Verzweigungspunkt und einer Imperfektionsform affin zu ϕ :

$$\mathring{\mathbf{K}}_T \phi = \mathbf{0} \quad , \quad \phi^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \phi^T \nabla_{\mathring{\mathbf{s}}} \mathring{\mathbf{G}} \mathring{\mathbf{s}} \neq 0 \quad (\text{A.11})$$

folgt:

$$\nabla_r \zeta = 0 \quad (\text{A.12})$$

Gleichungen (A.10) reduziert sich unter Berücksichtigung von Gleichung (A.12) auf:

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_r \mathring{\mathbf{u}} - \nabla_r \mathring{\lambda} \mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_r \mathring{\mathbf{u}} \phi + \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_r \phi &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Mit:

$$\nabla_r \mathring{\mathbf{u}} = \Delta \mathring{\mathbf{u}}_P \nabla_r \mathring{\lambda} + \phi \quad (\text{A.14})$$

lässt sich eine Lösung für Gleichung (A.13_a) angeben. $\Delta \mathring{\mathbf{u}}_P$ kann dabei nach Gleichung (A.6) bestimmt werden. Um die Lösung des Gradienten von λ nach dem Pfadparameter zu erhalten wird Gleichung (A.14) in die mit ϕ verjüngte Gleichung (A.13_b) eingesetzt:

$$\nabla_r \mathring{\lambda} = - \frac{\phi^T \mathring{\mathbf{K}}_T \phi \phi}{\phi^T \mathring{\mathbf{K}}_T \Delta \mathring{\mathbf{u}}_P \phi} \quad (\text{A.15})$$

Die zweite Ableitung von (A.8_a) nach r unter Berücksichtigung von Gleichung (A.12) ist:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_r \mathring{\mathbf{u}} \nabla_r \mathring{\mathbf{u}} + \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_r^2 \mathring{\mathbf{u}} - \mathbf{P} \nabla_r^2 \mathring{\lambda} + \nabla_{\mathring{\mathbf{s}}} \mathring{\mathbf{G}} \mathring{\mathbf{s}} \nabla_r^2 \zeta = \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

Unter Zuhilfenahme der Kontraktion dieser Gleichung mit ϕ erhält man:

$$\nabla_r^2 \zeta = - \frac{\phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_r \mathring{\mathbf{u}} \nabla_r \mathring{\mathbf{u}}}{\phi^T \nabla_{\mathring{\mathbf{s}}} \mathring{\mathbf{G}} \mathring{\mathbf{s}}} \quad (\text{A.17})$$

Da $\Delta \mathring{\mathbf{u}}_P$ die Tangente an den Primärpfad beschreibt, gilt:

$$\Delta \mathring{\mathbf{u}}_P = \nabla_{\mathring{\lambda}} \mathring{\mathbf{u}} \quad \rightarrow \quad \mathring{\mathbf{K}}_T \Delta \mathring{\mathbf{u}}_P = \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathring{\lambda}} \mathring{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \quad (\text{A.18})$$

Ableitung von Gleichung (A.18) nach dem Lastparameter λ liefert:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathring{\lambda}} \mathring{\mathbf{u}} \nabla_{\mathring{\lambda}} \mathring{\mathbf{u}} + \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathring{\lambda}}^2 \mathring{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.19})$$

Aus der anschließenden Kontraktion mit ϕ lässt sich dann folgende Beziehung ableiten:

$$\phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \nabla_{\mathring{\lambda}} \mathring{\mathbf{u}} \nabla_{\mathring{\lambda}} \mathring{\mathbf{u}} = \phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \Delta \mathring{\mathbf{u}}_P \Delta \mathring{\mathbf{u}}_P = \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (A.20), dem Zusammenhang für $\Delta \mathbf{u}_P$ nach Gleichung (A.6) und der Bedingung für Verzweigungspunkte ($\phi^T \mathbf{P} = 0$) kann Gleichung (A.17) umgeformt werden in:

$$\nabla_r^2 \zeta = - \frac{\phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathring{\mathbf{K}}_T \phi \phi}{\phi^T \nabla_{\mathring{\mathbf{s}}} \mathring{\mathbf{G}} \mathring{\mathbf{s}}} \quad (\text{A.21})$$

Um die Imperfektionsempfindlichkeit für diesen Fall anzugeben, werden die Terme von Gleichung (A.9_c) bis zum zweiten Reihenglied berücksichtigt. Unter Beachtung von Gleichung (A.12) und (A.21) folgt:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{2\zeta}{\nabla_r^2 \zeta}} = \sqrt{\frac{2\phi^T \nabla_{\hat{s}} \mathbf{G} \hat{s} \zeta}{\phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_T \phi \phi}} \quad (\text{A.22})$$

Im Weiteren wird Gleichung (A.9_a) bis zum ersten Reihenglied berücksichtigt:

$$\dot{\lambda}^\zeta = \dot{\lambda} - \nabla_r \lambda \Delta r \quad (\text{A.23})$$

Einsetzen von Δr und Gleichung (A.15) in Gleichung (A.23) liefert dann:

$$\dot{\lambda}^\zeta = \dot{\lambda} - \sqrt{\frac{2 \left[\phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_T \phi \phi \right] \left[\phi^T \nabla_{\hat{s}} \mathbf{G} \hat{s} \right] \zeta}{\left[\phi^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_p \phi \right]^2}} \quad (\text{A.24})$$

Gleichung (A.24) entspricht der Gleichung nach KOITER und beweist den Zusammenhang, welcher in Abschnitt 3.2 angegeben wurde:

$$\left. \frac{d\dot{\lambda}^\zeta}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \rightarrow -\infty \quad (\text{A.25})$$

Anhang B

Herleitung eines hyperelastischen Materials

In Abschnitt 8.3 wurde für den Mechanismenentwurf ein nichtlineares Materialgesetz eingeführt, da bei derartigen Optimierungsaufgaben Konvergenzprobleme auftraten. Um dieses Problem zu beheben wurde ein Materialmodell verwendet, bei dem die volumenspezifische Verzerrungsenergie W_S für $\det \mathbf{F} \rightarrow 0$ gegen ∞ strebt. Dies ist bei Verwendung des linear elastischen ST. VENANT–KIRCHHOFFschen–Materialgesetzes in Kombination mit den GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungen nicht gegeben. Hierdurch kann es aufgrund der großen Deformationen des FE–Netzes in Gebieten mit geringen, aber stark unterschiedlichen Steifigkeiten zur ‘Lokalisierung’ der Verzerrungen kommen. Dies geht soweit, dass einzelne Elemente bzw. Elementreihen ‘negatives Volumen’ ($\det \mathbf{F} < 0$) erhalten (siehe Abbildung 8.12). Damit ist die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse gefährdet. Eine Abhilfe kann auch nicht durch die Verwendung der EULER–ALMANZI–Verzerrungen in Kombination mit dem ST. VENANT–KIRCHHOFFschen–Material erzielt werden. Zwar strebt in dieser Kombination die Energie für $\det F \rightarrow 0$ gegen ∞ , doch die zugehörige Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen in der deformierten Lage (Updated–LAGRANGE) führt zu Problemen. Dies beruht im Wesentlichen auf der schlechten Abbildung des Parameterraums in den physikalischen Raum anhand der JACOBI–Determinante. Mit der so berechneten Steifigkeitsmatrix trat in Vergleichsrechnungen ein sehr schlechtes Konvergenzverhalten bei der Gleichgewichtssiteration auf.

Aus diesem Grund wird ein hyperelastisches Materialgesetz definiert, welches durch die folgende volumenspezifische Verzerrungsenergie W_S definiert ist:

$$W_S = \frac{1}{(\det F)^n} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \underline{\lambda} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \underline{\mu} (\text{tr } \mathbf{E}^2) \right]}_{\text{ST. VENANT–KIRCHHOFF}} \quad (\text{B.1})$$

wobei \mathbf{E} der GREEN–LAGRANGESche–Verzerrungstensor und $\underline{\lambda}$, $\underline{\mu}$ die LAMÉ–Parameter für das Verhalten in der Umgebung der verzerrungsfreien Referenzkonfiguration sind. Mit dem Parameter n kann der Grad der materiellen Nichtlinearität gesteuert werden. Der Anteil in der eckigen Klammer der Gleichung (B.1) entspricht der volumenspezifischen Verzerrungsenergie des ST. VENANT–KIRCHHOFFschen–Materials. Da $\det F$ die dritte Invariante des Deformationsgradienten ist, ist die materielle Objektivität gewährleistet (siehe z. B. CIARLET [31]). Aufgrund des Zusammenhangs, dass der 2. PIOLA–KIRCHHOFFsche–

Spannungstensor \mathbf{S} die erste und der vierstufige tangentielle Materialtensor \mathbf{C} die zweite Ableitung der Energiefunktion nach den Verzerrungen sind, wird zur einfachen Herleitung dieser Größen die Determinante des Deformationsgradienten \mathbf{F} in Abhängigkeit des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors \mathbf{E} ausgedrückt:

$$\left(\det \mathbf{F}\right)^{-1} = \left(\det(2\mathbf{E} + \mathbf{I})\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.2})$$

Damit lässt sich Gleichung (B.1) wie folgt umschreiben:

$$W_S = \left(\det(2\mathbf{E} + \mathbf{I})\right)^{-\frac{1}{2}n} \left[\frac{1}{2} \underline{\lambda} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \underline{\mu} (\text{tr } \mathbf{E}^2) \right] \quad (\text{B.3})$$

Hieraus ergibt sich dann durch partielle Ableitung nach dem GREEN-LAGRANGESchen-Verzerrungstensor der 2. PIOLA-KIRCHHOFFSche-Spannungstensor in Indexschreibweise:

$$S_{ij} = -\frac{1}{2}n A_1^{-\frac{1}{2}n-1} \frac{\partial A_1}{\partial E_{ij}} A_2 + A_1^{-\frac{1}{2}n} \left[\underline{\lambda} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) \delta_{ij} + 2 \underline{\mu} E_{ij} \right] \quad (\text{B.4})$$

und durch erneute partielle Ableitung der Gleichung (B.4) erhalten wir den Materialtensor der Referenzkonfiguration:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \left(\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n \right) A_1^{-\frac{1}{2}n-2} \frac{\partial A_1}{\partial E_{ij}} \frac{\partial A_1}{\partial E_{kl}} A_2 - \frac{1}{2}n A_1^{-\frac{1}{2}n-1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} A_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}n A_1^{-\frac{1}{2}n-1} \frac{\partial A_1}{\partial E_{kl}} \left[\underline{\lambda} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) \delta_{ij} + 2 \underline{\mu} E_{ij} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}n A_1^{-\frac{1}{2}n-1} \frac{\partial A_1}{\partial E_{ij}} \left[\underline{\lambda} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) \delta_{kl} + 2 \underline{\mu} E_{kl} \right] + A_1^{-\frac{1}{2}n} A_3 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Die in den Gleichungen (B.4) und (B.5) verwendeten Abkürzungen sind:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\det(2\mathbf{E} + \mathbf{I}) \right) \\ A_2 &= \left[\frac{1}{2} \underline{\lambda} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \underline{\mu} (\text{tr } \mathbf{E}^2) \right] \\ A_3 &= \left[\underline{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \underline{\mu} \mathbf{I} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

wobei alle Größen in den eckigen Klammern identisch zu denen des linear elastischen ST.VENANT-KIRCHHOFFSchen-Materials sind.

Die Ableitung der Determinante des Deformationsgradienten nach den Komponenten des

GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungstensors ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial E_{11}} &= 8 E_{22} E_{33} + 4(E_{22} + E_{33}) + 2 - 8 E_{23} E_{32} \\
\frac{\partial A_1}{\partial E_{22}} &= 8 E_{11} E_{33} + 4(E_{11} + E_{33}) + 2 - 8 E_{13} E_{31} \\
\frac{\partial A_1}{\partial E_{33}} &= 8 E_{11} E_{22} + 4(E_{11} + E_{22}) + 2 - 8 E_{12} E_{21} \\
\frac{\partial A_1}{\partial E_{12}} &= 8 E_{31} E_{23} - 4 E_{21} - 8 E_{21} E_{33} \\
\frac{\partial A_1}{\partial E_{13}} &= 8 E_{21} E_{32} - 4 E_{31} - 8 E_{31} E_{22} \\
\frac{\partial A_1}{\partial E_{23}} &= 8 E_{31} E_{12} - 4 E_{32} - 8 E_{32} E_{11}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Die Ableitungen der Gleichung (B.6_a) nach den Komponenten E_{21} , E_{31} und E_{32} sind entsprechend denen nach E_{12} , E_{13} und E_{23} . Aus Gründen der Symmetrie von \mathbf{S} und \mathbf{C} sind sie hier nicht dargestellt.

Für den tangentialen Materialtensor der Referenzkonfiguration werden die erneuten Ableitungen der Größen der Gleichung (B.7) nach den Komponenten des GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungstensors benötigt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{11} \partial E_{22}} &= 8 E_{33} + 4 & \frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{11} \partial E_{33}} &= 8 E_{22} + 4 \\
\frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{11} \partial E_{23}} &= -8 E_{32} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{22} \partial E_{33}} &= 8 E_{11} + 4 \\
\frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{22} \partial E_{13}} &= -8 E_{31} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{33} \partial E_{12}} &= -8 E_{21} \\
\frac{\partial^2 A_1}{\partial E_{12} \partial E_{23}} &= 8 E_{31}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitungen gilt der Vertauschungssatz nach SCHWARZ. Alle noch nicht aufgeführten zweiten Ableitungen sind identisch null.

Da der 2. PIOLA–KIRCHHOFFsche–Spannungstensor (B.4) nichtlinear vom GREEN–LAGRANGESchen–Verzerrungstensors abhängt, muss im Falle eines ebenen Spannungszustandes die Bedingung:

$$S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0 \tag{B.9}$$

iterativ ermittelt werden. Auf die exakte Ermittlung dieser Größen wurde bei dem Mechanismenentwurf verzichtet, da die endgültigen Systeme nur Verzerrungen in den hochporösen und für das globale Verhalten uninteressante Bereiche aufweisen. Um in der verzerrungsfreien Umgebung ‘exakt’ zu bleiben, werden für diesen Fall die rechteckigen Klammerausdrücke der Gleichungen (B.4) – (B.6) durch die bekannten Größen des ebenen Spannungszustandes ersetzt.

Lebenslauf

Name	Roman Eduard Manfred Kemmler
Geburtstag	01.04.1969
Geburtsort	Singen am Htwl.
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet mit Nicole Kemmler, zwei Kinder
08/1975 – 07/1980	Besuch der Grundschule in Hilzingen
08/1980 – 07/1985	Besuch der Zeppelin Realschule in Singen am Htwl.
08/1985 – 07/1988	Ausbildung zum Zimmerer
08/1988 – 07/1989	Fachhochschulreife
01/1990 – 12/1990	Wehrdienst in Pfullendorf
03/1991 – 02/1995	Studium des Bauingenieurwesens an der FH Karlsruhe Abschluss Diplom-Ingenieur (FH) Preis Bund Deutscher Baumeister
04/1995 – 12/1997	Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart Abschluss Diplom-Ingenieur Artur-Fischer-Preis für hervorragende Studienleistungen bei kurzer Studiendauer
12/1997 – 07/2001	Stipendiat des Graduiertenkollegs 'Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen' am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
08/2001 – 02/2002	Entwicklungsingenieur Fairchild-Dornier in Oberpfaffenhofen
seit 03/2002	Planungsingenieur im Ingenieurbüro Kemmler in Hilzingen

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74–1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang–Lendorff, K. Papailiou, J.M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74–2 **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74–3 **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74–4 **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75–1 **G. Müller, R. M. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75–2 **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75–3 **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76–1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.–H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76–2 **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77–1 **B.–M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78–1 **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79–1 **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79–2 **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.

- 79–3** **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragswerken (in englischer Sprache).
- 80–1** **R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80–2** **R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragswerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80–3** **J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82–1** **L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82–2** **K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragswerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82–3** **H.–P. Andrä:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983)** **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983)** **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983)** **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984)** **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985)** **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit 'degenerierten' Schalenelementen.
- 6 (1987)** **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.

- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.–U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) T. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.

- 36 (2001) D. P. Mok:**
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten von gemauerten Tonnengewölben mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.



Universität Stuttgart

ISBN 3-00-013114-0