

**Vorgespannte Konstruktionen aus beschichteten Geweben
und die Rolle des Schubverhaltens
bei der Bildung von zweifach gekrümmten Flächen aus
ebenen Streifen**

von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Heidrun Bögner
aus Bad Urach

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Prof. h. c. H.-W. Reinhardt
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. B. H. Kröplin

Tag der mündlichen Prüfung: 16. April 2004

Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart

2004

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit im Labor Blum, Stuttgart.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Prof. h.c. H.-W. Reinhardt danke ich besonders für die bereitwillige Übernahme des Hauptberichts, die sorgfältige Durchsicht und die förderlichen Ratschläge.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. B. H. Kröplin danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Meinem Vorgesetzten und Leiter des Labor Blum, Herrn Dr.-Ing. habil. Rainer Blum, gilt mein besonderer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stete Bereitschaft zu wissenschaftlichen Diskussionen.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit vorgespannten - sowohl mechanisch gespannten als auch pneumatischen - Konstruktionen wie sie im Bauwesen und z. B. beim Bau von Luftschiffen vorkommen.

Ausgehend von den Grundlagen der Differentialgeometrie wird eine Theorie aufgestellt, die es ermöglicht, diejenige Schubverformung zu berechnen, die benötigt wird, um eine zweifach gekrümmte Fläche aus einem eben in Bahnen vorliegenden Material mit zwei orthogonalen Hauptrichtungen herzustellen.

Aufbauend auf einem Strukturmodell und einem phänomenologischen Modell wird ein gemischtes Materialmodell, das zusätzlich zur Beschreibung des fadenparallelen Verhaltens auch das Schubverhalten berücksichtigt, entwickelt.

Des Weiteren werden hochfeste Fasern und beschichtete Prototypen-Gewebe, die für den Einsatz im Luftschiffbau entwickelt wurden, vorgestellt. In zweiachsigen Versuchen werden die fadenparallelen Steifigkeiten und die Schubsteifigkeiten bestimmt und anhand eines Beispiels mit den aus dem Materialmodell berechneten Werten zur Verifizierung des Modells verglichen.

Aus den entwickelten Theorien ergibt sich die Möglichkeit, die zur Herstellung zweifach gekrümmter Flächen notwendige Schubverformung und die dadurch entstehende Spannungserhöhung zu berechnen und diese mit im Versuch ermittelten tatsächlichen möglichen Schubverformungen und Festigkeiten realer Materialien zu vergleichen.

Abstract

Tensile architecture using coated textiles has become increasingly popular since its beginning in the seventies in the last century. Since then materials are improved regarding durability, strength and stiffness. Due to the demand of new airship developments high sophisticated fabrics using fibres with enormous strength and stiffness were developed. The ongoing increase in stiffness also for architectural fabrics in view of Glass/PTFE and new airship materials which are presented in the thesis causes that cutting patterns have to be calculated and manufactured more precisely. One of the main subjects designing tensile fabric structures is to create a double curved surface out of a planar manufactured woven fabric. Here the shear stiffness plays an important role.

In the given thesis a calculation method based on differential geometry mathematics for the needed shear angle making a double curved surface of an anisotropic material with two main directions is developed.

Using a given airship geometry described of a defined function an example has been calculated.

An existing material law developed for yarn parallel force transfer in coated fabrics is extended by the phenomenological part describing the shear behaviour and thickness behaviour.

The extended material law model has been partly introduced into a calculation program. Taking account of the stiffness and geometry of the yarns and coating the complex behaviour under various stress conditions can be described.

Biaxial tests to measure the shear stiffness of fabrics are developed and undertaken for various high performance air ship materials and compared with common PVC coated Polyester fabric commonly used in textile architecture.

Further information for new high performance materials are given.

The required shear angle to cover any doubly curved surface can now be calculated and compared with the allowable shear angle and shear stiffness derived using the test methodology described.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung, Grund der Arbeit.....	1
2. Differentialgeometrie.....	3
2.1 Allgemeine Betrachtungen.....	3
2.2 Allgemeine Grundlagen der Differentialgeometrie: Begriffe der Kurventheorie	5
2.3 Allgemeine Grundlagen der Flächentheorie.....	8
2.4 Geodätische Krümmung und geodätische Streifen.....	12
2.5 Tschebyscheff-Netze.....	14
2.6 Streifentheorie.....	15
3. Berechnungsbeispiel	18
4. Materialien.....	31
4.1 Aufbau und Funktion von Faden und Beschichtung.....	31
4.2 Fadenmaterialien, die für Gewebe in Frage kommen und Beschichtung: Materialien und Funktion.....	34
4.2.1 Fasermaterialien.....	34
4.2.2 Beschichtungsmaterialien.....	42
4.3 Materialien für ein Luftschiff.....	43
4.3.1 Allgemeine Betrachtung für die notwendigen Eigenschaften für die Hülle.....	43
4.3.2 Potentielle Hüllenmaterialien: untersuchte Materialien.....	46
5. Das mechanisches Verhalten von Geweben.....	48
5.1 Einführung.....	48
5.2 Das fadenparallele Verhalten der Gewebe.....	48
5.2.1 Mikrogeometrie.....	48
5.2.2 Das Kraft-Dehnungs-Verhalten der Einheitszelle.....	52
5.2.3 Berücksichtigung der Beschichtung.....	53

5.2.4	Definition der tangentialen Moduln.....	53
5.2.5	Das Dreiecksmodell.....	54
5.2.6	Zusammenfassung der wichtigsten Formeln.....	57
5.3	Stoffgesetz für nicht-fadenparalleles Verhalten der Gewebe.....	59
5.3.1	Die Schubspannungs-Schubdehnungsbeziehung.....	59
5.3.2	Phänomenologisches Modell für fadenparalleles Verhalten und Schub.....	60
6.	Versuche an Luftschiffmaterialien.....	64
6.1	Fadenparallele Versuche.....	64
6.2	Versuche an aus dem Gewebe entnommenen Fäden.....	66
6.3	Einachsige Versuche an Gewebestreifen unterschiedlicher Breite.....	75
6.4	Zweiachsige Gewebeprüfung.....	77
6.4.1	Versuchseinrichtungen.....	77
6.4.2	Versuchsplanung fadenparalleler Versuche.....	82
6.4.3	Auswertung der elastischen Moduln.....	83
6.4.4	Ergebnisse der fadenparallelen Versuche.....	86
6.5	Schubversuche.....	90
6.5.1	Biaxversuche unter 45° , Versuchsplanung.....	90
6.5.2	Auswertung der Schubversuche.....	93
6.5.3	Ergebnisse der Schubversuche.....	98
7.	Versuche an Materialien aus dem Bereich Textile Architektur	119
7.1	Allgemeines.....	119
7.2	Versuche.....	119
7.2.1	Fadenversuche.....	119
7.2.2	Zweiachsiger fadenparalleler Versuch.....	120
7.2.3	Zweiachsiger Schubversuch.....	122
7.2.4	Einachsiger Ersatzversuch	128
7.2.4.1	Versuchsaufbau.....	128

7.2.4.2	Berechnung der Schubkraft.....	129
7.2.4.3	Auswertung und Ergebnisse.....	130
7.2.5	Vergleich mit den biaxialen Ergebnissen.....	131
8.	Auswertung	132
8.1	Simulationsmodell	132
8.2	Vergleich von Rechnung und Messung.....	136
9.	Zusammenfassung	142

1. Einführung

Bei der Konstruktion von vorgespannten und auch pneumatischen Konstruktionen aus beschichteten Geweben im Bauwesen oder auch beim Bau von Luftschiffen spielen die Materialsteifigkeiten eine bedeutende Rolle. Zur Berechnung von Spannungen und Verformungen werden die Steifigkeiten des anisotropen nichtlinearen Membranmaterials benötigt. Das zweiachsige Verhalten dieser Materialien unter Last und eine näherungsweise Bestimmung des E-Moduls sind weitgehend bekannt, das Schubverhalten wird jedoch in den meisten Fällen antiklastischer Form mit mechanischer Vorspannung vernachlässigt. Bei synklastischen pneumatisch gespannten Konstruktionen dagegen ist die Schubsteifigkeit für die Stabilität unabdingbar und wird deshalb in dieser Arbeit näher untersucht. Daneben wird aber auch auf die fadenparallelen elastischen Eigenschaften nochmals eingegangen und ein Modell zur E-Modulberechnung vorgestellt.

Darüber hinaus stellt sich beim Bauen mit Membranen nach Formfindung und Statik das Problem des Zuschnitts. Wie kann man aus einem eben vorliegenden Materialstück eine zweifach gekrümmte Fläche herstellen?

In der vorliegenden Arbeit soll ausgehend von den Materialeigenschaften von Geweben als Beispiel die Hülle eines Luftschiffes untersucht werden. Dabei wird der Schwerpunkt auf Prall-Luftschiffe gelegt, bei denen aufgrund des Fehlens einer Stützkonstruktion die Lasten komplett über die Hülle abgetragen und somit höchste Anforderungen vor allem auch an die mechanischen Eigenschaften des Materials gestellt werden. Ausgehend von der Form und den Aufgaben einer Luftschiffhülle werden beschichtete Gewebe auf ihre Eignung als potentielle Hüllenmaterialien untersucht.

Die Form von Prall-Luftschiffen kann annähernd als Rotationskörper beschrieben werden. Geht man davon aus, dass die Materialien, die als Hüllenwerkstoffe in Frage kommen, als beschichtete Gewebe in Bahnen vorliegen, ist es von Vorteil, den Hüllenzuschnitt aus Streifen entlang der Hauptkrümmungslinien herzustellen.

Beim Versuch einen Materialstreifen, der zuerst eben vorliegt, auf eine zweifach gekrümmte Fläche aufzubringen, stellt man fest, dass eine gewisse Schubverformung notwendig ist.

Es werden somit zur „Bekleidung“ dieser Flächen Materialien, deren Schubsteifigkeit man aus Versuchen bestimmen kann, benötigt, die den erforderlichen Winkel zulassen.

Ausgehend von den Grundlagen der Differentialgeometrie werden Flächen im Raum beschrieben. Die erforderlichen Beziehungen, um Streifen von der Ebene auf eine zweifach

gekrümmte Fläche aufzubringen, werden hergeleitet. Die erforderlichen Schubwinkel zur Bekleidung der Hüllenoberfläche werden am Beispiel der Geometrie einer Luftschiffhülle berechnet.

Chemiefasern für technische Anwendungen werden vorgestellt, und in Frage kommende Materialien für Luftschiffhüllen werden auf ihre mechanischen Eigenschaften hin untersucht. Dabei wird der Schwerpunkt auf die Messung der Schubsteifigkeit gelegt, hat man es hier doch mit deutlich schubsteiferen Materialien als im Bauwesen zu tun.

Darüber hinaus wird ein bekanntes mikromechanisches Gewebemodell zur Berechnung der elastischen Eigenschaften von Geweben vorgestellt, erweitert, angewendet und numerisch umgesetzt. Das Strukturmodell errechnet aus im Versuch ermittelten Fadeneigenschaften der verwobenen Fäden, ihrer Geometrie und ihrem Kraft-Dehnungsverhalten, die Spannungs-Dehnungsbeziehungen sowie die elastischen Moduln des Gewebes. Die errechneten Ergebnisse werden mit zweiachsigen Versuchsergebnissen verglichen.

Dazu wird ein vorhandenes phänomenologisches Materialgesetz für fadenparallele Belastung um einen Schubanteil erweitert und im Versuch verifiziert. Der ermittelte Schubanteil kann nun ebenso additiv zum mikromechanischen Modell hinzugefügt werden. Damit hat man ein vollständiges gemischtes Modell zur Beschreibung des elastischen Verhaltens von Geweben.

2. Differentialgeometrie

2.1. Allgemeine Betrachtungen

In diesem Kapitel sollen die geometrischen Eigenschaften einer Luftschiffhülle untersucht werden.



Bild 2.1: Zeppelin NT

Es wird von einer aus aerodynamischen Gründen bereits vorgegebenen rotationssymmetrischen Form ausgegangen. Die Spannungsverteilung unter Innendruck lässt sich einfach berechnen. Man erhält einen Spannungszustand, der hier als ideell bezeichnet werden soll. Nun erst wird die gewählte Form aus den Materialien, Geweben, die in Bahnen vorliegen, realisiert. Die Hülle als einen Rotationskörper auszubilden hat den Vorteil, dass man in der Längsrichtung geodätische Linien vorliegen hat. Geodätische Linien sind Kurven auf einer Fläche, deren Hauptnormale in jedem Flächenpunkt in die Richtung der Flächennormalen fällt, und sie zeichnen sich außerdem dadurch aus, dass sie in der Regel die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf einer Fläche darstellen.

Man wählt praktischerweise einen Zuschnitt aus Streifen längs der Geodätischen, die in die Ebene abwickelbar sind. Diese Streifen werden später materialisiert aus beschichteten Gewebematerialien, die in Bahnen vorliegen und unterschiedliche mechanische Eigenschaften in Bahnenrichtung, Kettrichtung, und quer zur Bahnenrichtung, Schussrichtung, haben.

Die Mittellinie der Gewebekbahnen wird so an die Form gelegt, dass sie mit einer geodätischen Linie zusammenfällt. „Drückt“ man nun diese eben vorliegenden Materialstreifen auf die Hüllenoberfläche, so nimmt die erforderliche Verformung zu den Rändern mit zunehmendem Abstand von der Mittellinie zu. Der entstehende Winkel zwischen den beiden

Fadenrichtungen, die aus unterschiedlicher Länge der Streifenmittellinie und der Streifenränder entsteht, muss durch Schubverformungen des Materials abgetragen werden.

Diese Schubverformungen sind verbunden mit Schubspannungen, die bei der Berechnung des ideellen Spannungszustandes noch nicht berücksichtigt wurden. Zur Abschätzung der Schubspannungen wird der Schubmodul benötigt.

Im Folgenden soll nun erst einmal auf die differentialgeometrischen Grundlagen, ausgehend von der Kurventheorie eingegangen werden. Mithilfe der Flächentheorie wird ein begleitendes Dreibein an eine Kurve auf einer Fläche erzeugt. Eine solche Kurve soll im Weiteren als Mittellinie eines Streifens ausgewählt werden.

Geodätische Streifen ohne Windung werden als spezielle Streifen, die aus diesen Streifen mit begleitendem Dreibein darstellbar sind, von besonderer Wichtigkeit für das Zuschnittsproblem hergeleitet.

Zur Berechnung der notwendigen Schubverformung für die Aufbringung eines Streifens auf eine zweifach gekrümmte Oberfläche werden Tschebyscheffsche Netze herangezogen.

Die geometrischen Betrachtungen werden auf eine gewählte Form angewandt, und die erforderliche Schubdeformation wird berechnet.

2.2. Allgemeine Grundlagen der Differentialgeometrie: Begriffe der Kurventheorie

Es sei eine Kurve C im euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 in Abhängigkeit des Parameters t dargestellt durch:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

Die Länge des Kurvenstücks wird als Bogenlänge s bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}} dt, \text{ wobei } \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \text{ oder auch kurz}$$

$$s^2 = \dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}.$$

Symbolisch schreibt man oft $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ und

$$ds^2 = d\mathbf{x} d\mathbf{x} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

für das Bogenelement ds der Kurve C .

Bemerkung: Ableitungen nach s werden durch Striche, Ableitungen nach t durch Punkte gekennzeichnet, z. B.

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}, \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}.$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\mathbf{x}(s)$ an die Kurve C ist gegeben durch:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s).$$

Er ist ein Einheitsvektor, wie man aus $s^2 = \dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$ mit $t=s$ erkennen kann.

Eine Parameterdarstellung der Tangente ist:

$$\mathbf{y}(u) = \mathbf{x} + u\mathbf{t},$$

wobei $|u|$ den Abstand vom Berührungspunkt der Tangente angibt.

Die Ableitung des Tangentenvektors nach der Bogenlänge s ist:

$\mathbf{k}(s) = \mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s)$ und heißt Krümmungsvektor der Kurve C im Punkt $\mathbf{x}(s)$.

Seine Länge kann mit

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{x}''(s)|$$

angegeben werden und wird als Krümmung von C im Punkt $\mathbf{x}(s)$ bezeichnet. Der reziproke Wert

$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ heißt Krümmungsradius von C .

Wird C durch $\mathbf{x}(t)$ dargestellt, gilt für die Krümmung κ :

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}) - (\ddot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}})^2}}{(\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}})^{3/2}}.$$

Für $\kappa \neq 0$ ist der Krümmungsvektor $\mathbf{k} = \mathbf{t}' \neq 0$ und steht senkrecht auf dem Tangentenvektor. Dies gilt auch für den Einheitsvektor:

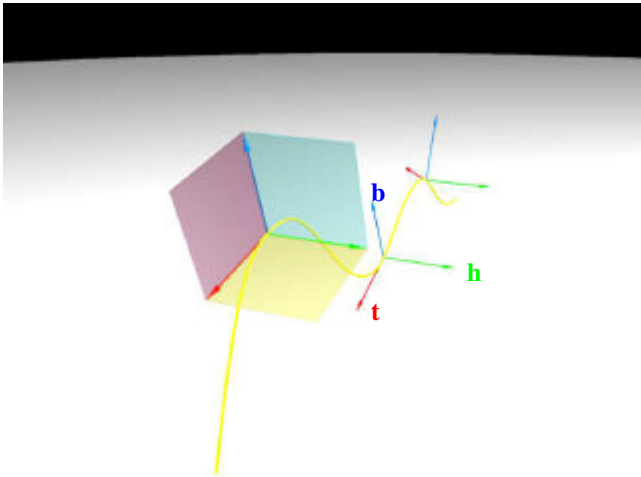
$\mathbf{h}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$, der als Hauptnormalenvektor von C in $\mathbf{x}(s)$ bezeichnet wird.

Damit hat man zwei orthogonale Einheitsvektoren an die Kurve C , \mathbf{t} und \mathbf{h} , und mithilfe des Vektorprodukts lässt sich dazu ein dritter zu \mathbf{t} und \mathbf{h} rechtwinkliger Vektor bilden:

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{h}(s),$$

der sogenannte Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ im Punkt $\mathbf{x}(s)$ an die Kurve C .

\mathbf{t} , \mathbf{h} und \mathbf{b} bilden ein rechtssinniges Tripel orthogonaler Einheitsvektoren an die Kurve C und werden als begleitendes Dreibein der Kurve C bezeichnet. Die Ebene, die von \mathbf{h} und \mathbf{b} aufgespannt wird, wird als Normalebene, die von \mathbf{t} und \mathbf{h} aufgespannte Ebene als Schmiegebene und die von \mathbf{t} und \mathbf{b} aufgespannte Ebene als Streckebene bezeichnet.

Bild 2.2: Dreibein der Kurve C: Vektoren \mathbf{t} , \mathbf{h} und \mathbf{b}

Die Krümmung κ gibt an, wie stark die Kurve C von der Tangente abweicht. Wie stark die Kurve C von der Schmiegebene, die von \mathbf{t} und \mathbf{h} aufgespannt wird, abweicht, wird durch die Torsion τ angegeben. Der Normalenvektor an die Schmiegebene ist $\mathbf{b}(s)$. Dessen Ableitung $\mathbf{b}'(s)$ hat die Richtung der Hauptnormalen \mathbf{h} und kann als Maß für die Lageänderung genommen werden. Man kann damit für die Torsion angeben:

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{h}.$$

Multipliziert man beide Seiten skalar mit \mathbf{h} , ergibt sich für die Torsion oder auch Windung τ der Kurve C :

$$\tau(s) = -\mathbf{h}(s) \mathbf{b}'(s).$$

Daneben gibt es entsprechende Formeln für die Ableitungen \mathbf{t}' und \mathbf{h}' . Für \mathbf{t}' erhält man sofort:

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{h},$$

$$\mathbf{h}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \mathbf{t}' = -\tau \mathbf{h} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \kappa \mathbf{h} = -\tau(-\mathbf{b}) + \kappa(-\mathbf{t}).$$

Damit hat man die wichtigsten Formeln der Kurventheorie, die Frenetschen Formeln für die Ableitungen des Dreibeins nach der Bogenlänge s , bestimmt:

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{h},$$

$$\mathbf{h}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \text{ und}$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{h}.$$

2.3. Allgemeine Grundlagen der Flächentheorie

Es werden die kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 im euklidischen Raum R_3 eingeführt und ebensolche Koordinaten u^1, u^2 für ein ebenes Gebiet G . Jedem Punkt (u^1, u^2) in G wird ein Punkt auf dem Flächenstück mithilfe des Ortsvektors $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ zugeordnet:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2).$$

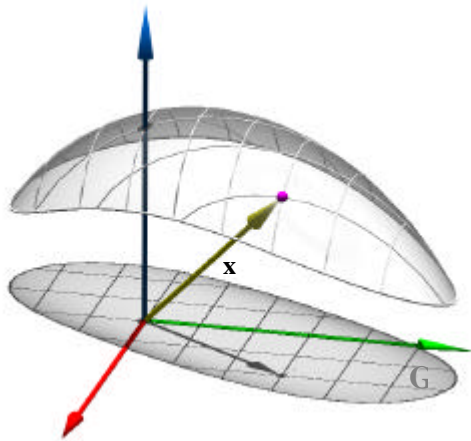


Bild 2.3: Fläche F im Raum, Ortsvektor \mathbf{x}

Auf einer Fläche F sei eine Kurve C der Form

$$u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$$

dargestellt.

Die Parameterdarstellung von C sei mit $\mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$ angegeben.

Der Vektor

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = \mathbf{x}_{u^1} \dot{u}^1 + \mathbf{x}_{u^2} \dot{u}^2$$

tangiert die Kurve C im Punkt P , wobei die Vektoren \mathbf{x}_{u^1} und \mathbf{x}_{u^2} die Tangentialebene $E(P)$ an die Fläche F im Punkt P aufspannen. Sie lässt sich in folgender Form

$$\mathbf{y}(q^1, q^2) = \mathbf{x} + q^1 \mathbf{x}_{u^1} + q^2 \mathbf{x}_{u^2}$$

darstellen, worin \mathbf{x} der Ortsvektor des Berührungspunktes P und q^1, q^2 die Koordinaten längs der Basisvektoren sind.

\mathbf{x}_{u^1} wird oftmals auch als \mathbf{g}_1 und \mathbf{x}_{u^2} als \mathbf{g}_2 bezeichnet.

Den Flächennormalenvektor \mathbf{n} kann man einfach bestimmen aus:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}|}.$$

Es wird eingeführt:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{u^\alpha} \cdot \mathbf{x}_{u^\beta},$$

also ist

$$g_{11} = \mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^1}, \quad g_{12} = \mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^2} = g_{21}, \quad g_{22} = \mathbf{x}_{u^2} \cdot \mathbf{x}_{u^2}.$$

Damit ist:

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta.$$

Das Bogenelement wird zu:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

oder ausführlich

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2.$$

Diese Formel bezeichnet man auch als erste Grundform oder metrische Grundform.

Führt man die Summationsvereinbarung ein, vereinfacht sich die Darstellung zu:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Die Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ bilden die Komponenten eines kovarianten Tensors 2. Stufe, dem sogenannten Maßtensor.

Für den Flächennormalenvektor lässt sich schreiben:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{\sqrt{g}} \quad \text{mit}$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Für orthogonale Koordinaten gilt:

$$g_{12} = 0.$$

Eine Metrik, die durch eine quadratische Differentialform gegeben ist, heißt Riemannsche Metrik.

Für die Transformation zweier zulässiger Darstellungen einer Fläche $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ und $\mathbf{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ gilt:

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\delta\epsilon} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial u^\beta}.$$

Aus der Überlegung, dass die Tangente einer Kurve C mit positiver Krümmung κ auf einer Fläche F in der Tangentialebene von F liegt und die Normalebene von C durch die Flächennormale geht, aber nur in Sonderfällen Hauptnormalenvektor \mathbf{h} oder Binormalenvektor \mathbf{b} von C in die Flächennormale fallen, kommt man auf:

$$\cos \gamma = \mathbf{h} \mathbf{n}.$$

Durch weitere Umformung ergibt sich schließlich

$$\kappa \cos \gamma = \frac{b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\delta\epsilon} du^\delta du^\epsilon}, \quad \text{wobei}$$

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left| \mathbf{x}_{u^1} \mathbf{x}_{u^2} \mathbf{x}_{u^\alpha} \mathbf{x}_{u^\beta} \right| = -\mathbf{x}_{u^\alpha} \mathbf{n}_{u^\beta}.$$

$\kappa \cos \gamma = \kappa_n$ wird als Normalkrümmung von F im Punkt P bezeichnet.

Bestimmt man aus diesen Formeln die Extrema der Normalkrümmungen κ_n , so kommt man auf die Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche F . Die zugehörigen Werte von κ_n heißen Hauptkrümmungsrichtungen von F in P und werden mit κ_1 und κ_2 bezeichnet.

Ihr Produkt

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{b}{g}$$

ist die Gaußsche Krümmung.

Obwohl b die Diskriminante der zweiten Grundform ist, hängt die Gaußsche Krümmung nicht von beiden Grundformen ab, wie das Theorema Egregium von Gauß besagt: „Die Gaußsche Krümmung K hängt nicht von der zweiten Grundform ab, sondern allein von den Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ der ersten Grundform und deren ersten und zweiten Ableitungen“.

In jedem Flächenpunkt liegt analog der Kurventheorie ein Dreiein aus den linear unabhängigen Vektoren

$$\mathbf{x}_{u^1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{x}_{u^2} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{\sqrt{g}}$$

vor. Damit lässt sich jeder Vektor der Fläche in diesem Punkt als Linearkombination dieser Vektoren darstellen.

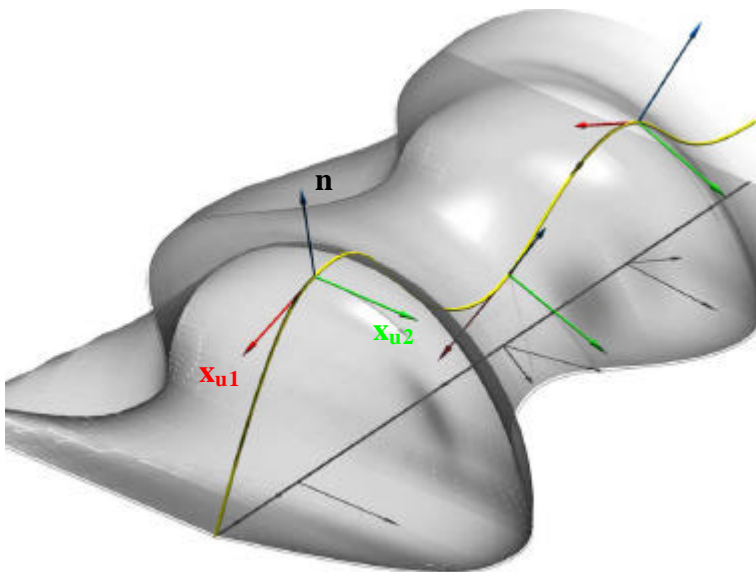


Bild 2.4: Das Dreiein \mathbf{x}_{u^1} , \mathbf{x}_{u^2} , \mathbf{n} an eine doppelt gekrümmte Fläche

Es existieren die partiellen Ableitungen

$$\mathbf{x}_{u^{\alpha}u^{\beta}} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}},$$

die sich nun als Linearkombination aus den oben aufgeführten Vektoren darstellen lassen:

$$\mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa} \mathbf{x}_{u^\kappa} + a_{\alpha\beta} \mathbf{n}.$$

Wegen $\mathbf{x}_{u^\kappa} \mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta} \mathbf{n} = b_{\alpha\beta}$, folgt $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$.

Für die Koeffizienten $\Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa}$, Christoffelsymbole 2. Art genannt, ergibt sich:

$$\mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta} \mathbf{x}_{u^\kappa} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa} \mathbf{x}_{u^\kappa} \mathbf{x}_{u^\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa} g_{\kappa\mu}.$$

Sie berechnen sich mit Berücksichtigung der Summationskonvention nach:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\mu} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial u^\beta} \right)$$

2.4. Geodätische Krümmung und geodätische Linien

Die geodätische Krümmung κ_g einer Kurve C auf einer Fläche F ist folgendermaßen definiert:

$|\kappa_g|$ ist gleich der Krümmung κ^* der orthogonalen Projektion der Kurve C in die Tangentialebene $E(P)$, Kurve C^* , im Punkt P , wobei für $\kappa^* > 0$ auch $\kappa_g > 0$ ist, wenn der Hauptnormalenvektor von C^* in P

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \times \mathbf{t} \text{ ist.}$$

Durch Umformung kommt man auf:

$$\kappa_g = |\dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}'' \mathbf{n}|,$$

Die Darstellung erfolgt hier entsprechend der Kurventheorie in Kapitel 2.2. Die gestrichelten Ableitungen bedeuten wieder Ableitungen der Kurve C , die auf F durch $u^1(s)$, $u^2(s)$ dargestellt wird, nach der Bogenlänge s .

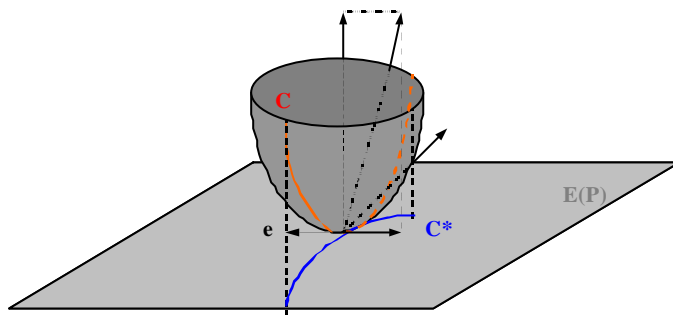


Bild 2.5: Die geodätische Krümmung

Die geodätische Krümmung κ_g der Kurve C auf einer Fläche F hängt nur von der ersten Grundform von F ab.

Für die geodätische Krümmung von Koordinatenlinien gilt folgendes: längs der Linien $u^1 = \text{const.}$ ist $(u^1)' = 0$. Also ist $ds^2 = g_{22}(du^2)^2$ oder $(u^2)' = \frac{du^2}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$. Daraus ergibt

sich

$$(\kappa_g)_{u^1=\text{const.}} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{g}}{g_{22}^{3/2}}$$

und entsprechend für $u^2 = \text{const.}$ und $(u^1)' = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$:

$$(\kappa_g)_{u^2=\text{const.}} = -\Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{g}}{g_{11}^{3/2}}.$$

Für ein orthogonales Koordinatensystem erhält man mit

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \quad \text{und} \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}:$$

$$(\kappa_g)_{u^1=\text{const.}} = \frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$(\kappa_g)_{u^2=\text{const.}} = \frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}.$$

Eine Kurve C , die auf einer Fläche F liegt, und bei der die geodätische Krümmung κ_g verschwindet,

$$\kappa_g = |\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{n}| = 0,$$

heißt geodätische Linie.

Die Koordinatenlinien $u^1 = \text{const.}$ und $u^2 = \text{const.}$ auf einem Flächenstück $F: \mathbf{x}(u^1, u^2)$ sind geodätische Linien, wenn gilt:

$$\Gamma_{22}^1 = 0 \text{ bzw. } \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Dies gilt bei orthogonalen Koordinaten genau dann, wenn g_{22} nicht von u^1 , bzw. g_{11} nicht von u^2 abhängt.

2.5. Tschebyscheff-Netze

Betrachtet wird ein in der Ebene liegendes Gewebe mit zwei orthogonalen Hauptrichtungen, Kette und Schuss, das auf eine gekrümmte Fläche aufgebracht werden soll. Aus dem in der Ebene vorliegenden Material wird ein Element der Seitenlängen dx^1 und dx^2 herausgenommen und mittels Parametertransformation auf die gekrümmte Ebene aufgebracht.

Tschebyscheff-Netze beschreiben Netze aus Fäden, bei denen die Fäden in beiden Netzrichtungen als undeformierbar angenommen werden. Die Anpassung des Netzes an die Oberfläche wird allein durch eine Winkeländerung zwischen den beiden Fadenrichtungen vorgenommen. Dieser Fall ist hier gut anwendbar, da die Steifigkeiten in Kett- und Schussrichtung im Vergleich zur Schubsteifigkeit um Größenordnungen höher sind.

Die Metrik einer ebenen Fläche $F: \mathbf{x}(x^1, x^2)$ eines aus senkrechten nichtdehnbaren Fäden gebildeten vorliegenden Materials ist:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Metrik des Tschebyscheff-Netzes auf der gekrümmten Fläche $S: u^1 = u^1(x^1, x^2)$, $u^2 = u^2(x^1, x^2)$ kann mit

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \gamma \\ \cos \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

angegeben werden.

Die Abstände der Koordinatenlinien sind dabei jeweils 1, γ sei der Winkel zwischen Kett- und Schussrichtung.

Das Abstandsgesetz des Tschebyscheff-Netzes ergibt sich damit zu:

$$ds^2 = (du^1)^2 + 2\cos\gamma du^1 du^2 + (du^2)^2.$$

Für die Transformation von F nach S bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial y}\right)^2 = 1$$

Die Gaußsche Krümmung des Tschebyscheff-Netzes lässt sich berechnen zu:

$$K = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^1 \partial u^2} = -\frac{\gamma_{u^1 u^2}}{\sin \gamma}$$

In der Literatur sind globale Tschebyscheff-Netze [1], [15], [24], [28] bekannt. Es ist jedoch klar, dass nicht jede Fläche im Großen überdeckt werden kann, wie man bei Samelson [28] nachlesen kann.

Ist jedoch die lokale Existenz eines Tschebyscheff-Netzes gesichert, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit Flächenstreifen zur Modellierung der Oberfläche anwenden.

2.6. Streifentheorie

Es seien Linien auf einer Fläche gegeben durch Angabe ihres Ortsvektors \bar{R} als Funktion ihrer Bogenlänge s :

$$\bar{R} = \bar{R}(u^1(s), u^2(s)) = \bar{R}(s).$$

Durch die Ableitung von \bar{R} nach s wird der Tangentialvektor an die Linie definiert:

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \mathbf{t}$$

oder auch:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial s} = g_\alpha \dot{u}^\alpha$$

Hieran erkennt man, dass der Tangentialvektor \mathbf{t} an die Linie in der Fläche liegt. Für den Vektor orthogonal zum Tangentialvektor \mathbf{t} und Normalenvektor an die Fläche \mathbf{n} gilt:

$\mathbf{h} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ bzw.

$$\mathbf{h} = E_{\alpha\beta} g^\beta \dot{u}^\alpha \quad \text{mit dem Permutationstensor } E_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

\mathbf{h} liegt, da er normal zu \mathbf{n} steht, in der Fläche.

Man kann in der Umgebung der Linie einen Streifen ST definieren, indem man in Richtung von \mathbf{h} einen Parameter t für den Abstand von der Linie $\bar{R}(s)$ einführt:

$$\bar{R}_{ST} = \bar{R}(s) + t\mathbf{h}$$

Die Streifenbreite ist damit t .

Dieser Streifen tangiert, wie schon oben erwähnt, die Fläche längs der Linie $R(s)$, steht aber mit wachsendem t von der Fläche ab.

Auf dem Streifen kann man nun eine Basis und eine Metrik definieren:

$$g_s = \frac{\partial \bar{R}_{ST}}{\partial s}$$

$$g_t = \frac{\partial \bar{R}_{ST}}{\partial t}.$$

Es ergeben sich die Zusammenhänge:

$$g_t = \mathbf{h}$$

und

$$g_s = \frac{\partial \bar{R}_s(s)}{\partial s} + t \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} = \mathbf{t} + t \frac{\partial}{\partial s} [(\mathbf{n} \times g_\alpha) \dot{u}^\alpha].$$

Nach einiger Rechnung erhält man:

$$\mathbf{g}_s = E_{\lambda\mu} g^\mu \left[\dot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \right] - b_\mu^\lambda E_{\lambda\alpha} \dot{u}^\mu \dot{u}^\alpha \mathbf{n}.$$

Man kann nun für die Metrik auf dem Streifen einsetzen:

$$\mathbf{g}_{ST} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_s \mathbf{g}_s & \mathbf{g}_s \mathbf{g}_t \\ \mathbf{g}_s \mathbf{g}_t & \mathbf{g}_t \mathbf{g}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ss} & \mathbf{g}_{st} \\ \mathbf{g}_{st} & \mathbf{g}_{tt} \end{bmatrix}.$$

Möchte man den Streifen in die Ebene abwickeln, so muss gelten:

$$\mathbf{g}_{ST} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgen die Bedingungen:

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0$$

und

$$E_{\lambda\alpha} b_\mu^\lambda \dot{u}^\mu \dot{u}^\alpha = 0.$$

Diese beiden Bedingungen kann man einfach interpretieren: während die erste Bedingung eine Linie kleinster Länge, eine sogenannte Geodätische beschreibt, stellt die zweite Bedingung die Windung eines Streifens dar, die hier verschwindet.

Nun sei u^1 geodätische Linie, d. h. $u^2 = \text{const.}$.

Mit den oben aufgeführten Gleichungen ergibt sich ausführlich:

$$\ddot{q}^1 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0$$

$$\ddot{q}^1 + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^1 \dot{u}^1 + \Gamma_{12}^1 \dot{u}^1 \dot{u}^2 + \Gamma_{22}^1 \dot{u}^2 \dot{u}^2 = 0,$$

wobei für $\dot{u}^1 = 0$, $\dot{u}^1 = 1$, $u^1 = s$ gilt.

Es ist also:

$$E_{12} b_\mu^1 \dot{u}^\mu \dot{u}^2 - E_{21} b_\mu^2 \dot{u}^\mu \dot{u}^1 = 0$$

$$-b_1^2 \dot{u}^1 \dot{u}^1 - b_2^2 \dot{u}^2 \dot{u}^1 = 0$$

$$-b_1^2 = 0,$$

d. h. es muss sich hierbei um eine Hauptkrümmungslinie handeln!

3. Berechnungsbeispiel

Nachdem die Grundlagen für die geometrische Beschreibung des Zuschnittsproblems erläutert wurden, soll nun die erforderliche Winkeländerung an einem konkreten Beispiel berechnet werden.

Zuerst einmal soll die Hüllenoberfläche eines Luftschiffes dargestellt werden. Die Hülle wird als Rotationskörper um die x -Achse angenommen.

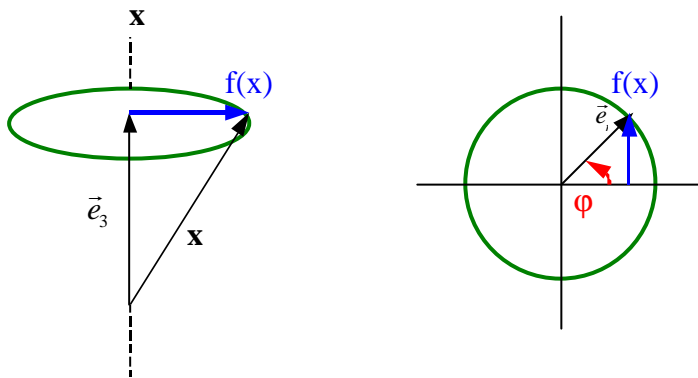


Bild 3.1: Einführung der Parameter

Eine Funktion $f(x)$ rotiere um die x -Achse. Dabei sei $\mathbf{x}(x,y,z)$ ein Punkt der Rotationsfläche. Die Flächenparameter seien x und φ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \cos \varphi \\ f(x) \sin \varphi \end{pmatrix}, \text{ wobei } (x, \varphi) \in B = [a, b] \times [0, 2\pi].$$

Die partiellen Ableitungen werden zu:

$$\mathbf{x}_x = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \cos \varphi \\ f'(x) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Somit lässt sich die Metrik berechnen:

$$g_{11} = \mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_x = 1 + f'^2(x)$$

$$g_{12} = \mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_\varphi = 0$$

$$g_{22} = \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\varphi = f^2(x).$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1+f'^2 & 0 \\ 0 & f^2(x) \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = f^2(1+f'^2)$$

Mit dem Vektorprodukt

$$\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_\varphi = f(x) \begin{pmatrix} f'(x) \\ -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

kann der Normalenvektor \mathbf{n} und der Normaleneinheitsvektor $\bar{\mathbf{n}}$ bestimmt werden:

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_\varphi}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \begin{pmatrix} f' \\ -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Damit lassen sich nun die Krümmungsvektoren berechnen:

$$B_\varphi = \bar{\mathbf{n}}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} (0, \sin \varphi, -\cos \varphi)$$

$$B_{\varphi\varphi} = \bar{\mathbf{n}}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} (0, \sin \varphi, -\cos \varphi) \cdot f(x) (0, -\sin \varphi, \cos \varphi) = \frac{f}{\sqrt{1+f'^2}} (-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$$

$$B_{\varphi\varphi} = \frac{-f}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$B_{x\varphi} = \bar{\mathbf{n}}_\varphi \cdot \mathbf{x}_x = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} (0, \sin \varphi, -\cos \varphi) \cdot (1, f' \cos \varphi, f' \sin \varphi) = 0$$

$$B_x = \bar{\mathbf{n}}_x = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} (f'', 0, 0) - \frac{f'f''}{\sqrt{(1+f'^2)^2}} (-f', \cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$B_{x\varphi} = B_x \cdot \mathbf{x}_x = 0$$

$$B_{xx} = B_x \cdot \mathbf{x}_x = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}$$

Die Gaußsche Krümmung lässt sich berechnen zu:

$$K(x, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{f \cdot f''}{1+f'^2}$$

Das Vorzeichen der Krümmung hängt damit nur von f'' ab.

Für die Gaußsche Krümmung eines Tschebyscheff-Netzes gilt die hyperbolische Differentialgleichung:

$$K(u^1, u^2) = -\frac{\gamma_{u^1 u^2}}{\sin \gamma}$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$K(u^1, u^2) = K(x(u^1, u^2), \varphi(u^1, u^2))$$

$$K(u^1, u^2) = -\frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^1 \partial u^2}$$

γ weicht wenig von $\frac{\pi}{2}$ ab, deshalb wird folgender Ansatz gewählt:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \delta$$

Damit ist:

$$\sin \gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \delta + \cos \frac{\pi}{2} \sin \delta = \cos \delta$$

Für kleine δ gilt:

$$\cos \delta = 1.$$

Damit kann man für die Gaußsche Krümmung vereinfacht angeben:

$$K(u^1, u^2) = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^1 \partial u^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u^1} = -\int K du^2 + f(u^1)$$

Für den Winkel γ gilt dann:

$$\gamma = -\int k_1 du^1 + \int f(u^1) du^1 + g(u^2)$$

$$\gamma = -k_2(u^1, u^2) + F(u^1) + g(u^2)$$

Um die rotierende Funktion $f(u^1)$ in Abhängigkeit von der Bogenlänge s auszudrücken, nähert man sie durch ein Polynom (s) an. u^1 wird als Koordinatenlinie in Richtung der Bogenlänge s gewählt.

Eingesetzt in die obenstehende Gleichung lässt sich γ nun berechnen aus:

$$\mathbf{g} = -\left(\int K(u^1) du^1\right) u^2 + \int f(u^1) du^1 + g(u^2).$$

Damit hat man nun ein, wie für hyperbolische Differentialgleichungen charakteristisch, Anfangswertproblem. Ausgehend von einem beliebigen Punkt $(u^1, u^2) = (0, 0)$ in Längsrichtung

und einem Winkel $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{p}}{2}$, ergibt sich:

$$\int f(u^1) = 0 \text{ und}$$

$$g(u^1) = \frac{\mathbf{p}}{2}.$$

Somit gilt für den Winkel \mathbf{g}

$$\mathbf{g} = -\left(\int K(u^1) du^1\right) u^2 + \frac{\mathbf{p}}{2}$$

In der Klammer steht damit im Wesentlichen die Gaußsche Krümmung, multipliziert mit der Variablen in Umfangrichtung u^2 und einem Term für den Ausgangswinkel von 90° zwischen den Fäden. Daran kann man ablesen, dass je größer die Gaußsche Krümmung wird, desto größer muss auch der erforderliche Winkel sein. Außerdem wächst \mathbf{g} mit ansteigendem u^2 , d.

h. also je größer die Breite des aufgelegten Streifens ist, desto mehr Schubverformung ist notwendig.

Ein weiterer interessanter Aspekt ist, dass der Winkel \mathbf{g} bei Flächen positiver Gaußscher Krümmung kleiner $\pi/2$ wird, während er bei Flächen negativer Gaußscher Krümmung größer als $\pi/2$ wird.

Beim Versuch einen Materialstreifen, der zuerst eben vorliegt, auf eine zweifach gekrümmte Fläche aufzubringen, stellt man fest, dass dazu eine gewisse Schubverformung notwendig ist.

Dies kann man folgendermaßen verdeutlichen: nimmt man einen Papierstreifen definierter Breite, der an beiden Seiten eingeschnitten ist, und hält ihn auf ein Modell eines Luftschiffes, so werden sich die Einschnitte im Fall einer Fläche mit positiver Gaußscher Krümmung überlappen. Den gegenteiligen Effekt erhält man bei einer Fläche negativer Gaußscher Krümmung, wie sie im Bauwesen an Membrandächern in vielen Fällen vorkommt.



Bild 3.2: Zuschnittstreifen auf eine zweifach gekrümmte Oberfläche

Nach Burgess [10] kann eine simple Form einer Luftschiffhülle mit geringem Luftreibungswiderstand mathematisch einfach formuliert werden durch Zusammensetzen eines halben Rotationsellipsoids für den Bug und eines halben Rotationsparaboloids für das Heck.

Er gibt als Gleichung für die Halbellipse des Bugs an:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{D^2} = 1$$

mit D =maximaler Durchmesser, a =Länge des vorderen Körpers.

Für das Heck formuliert er:

$$y = \frac{D}{2} - \frac{Dx^2}{4a^2}.$$

Die Länge des hinteren Teils ist dabei $a\sqrt{2}$. Die Geometrie wird im folgenden Bild dargestellt.

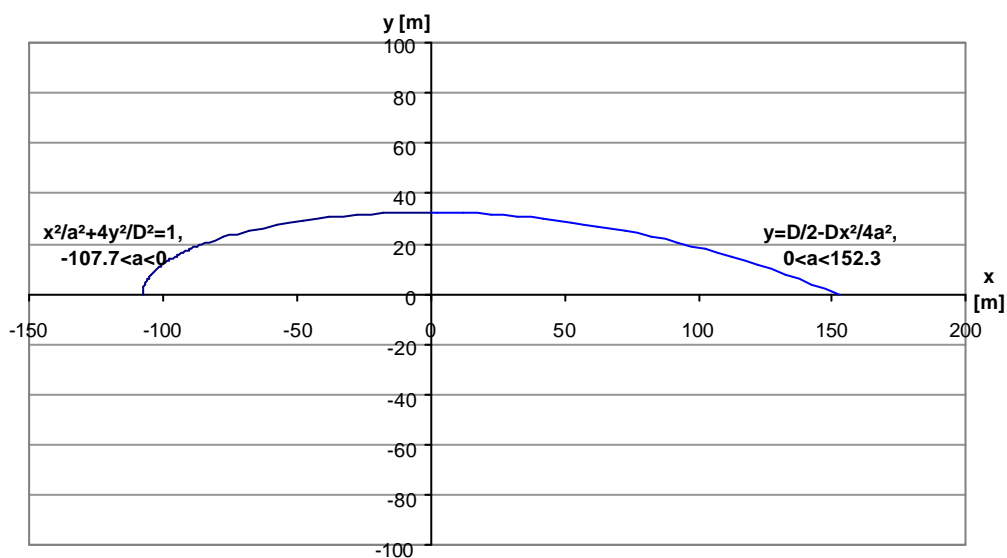


Bild 3.3: Hüllengeometriekurve nach Burgess bestehend aus einem Rotationsellipsoid als Bug und einem Rotationsparaboloid als Heck

Die Ableitungen ergeben sich zu:

$$f'(x) = \frac{Dx}{2a^2}$$

$$f''(x) = \frac{D}{2a^2}$$

Parametrisiert ergibt sich für den hinteren Teil mit $f(x) = \frac{D}{2} - \frac{Dx^2}{4a^2}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \cos \varphi \\ f(x) \sin \varphi \end{pmatrix} = \left[x, \left(\frac{D}{2} - \frac{Dx^2}{4a^2} \right) \cos \varphi, \left(\frac{D}{2} - \frac{Dx^2}{4a^2} \right) \sin \varphi \right]$$

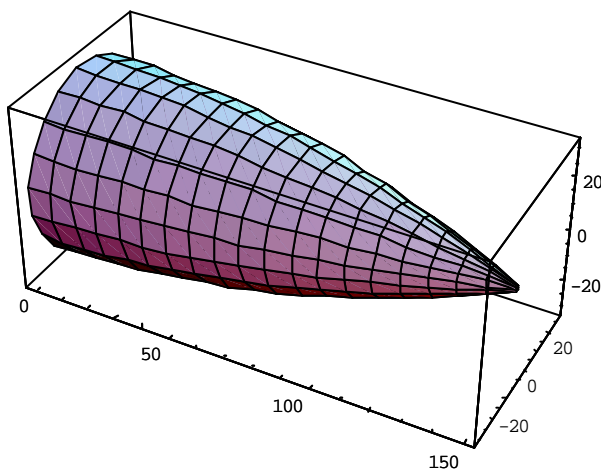


Bild 3.4: Rotationsparaboloid für das Heck

Nun soll ein Tschebyscheffnetz auf die gewählte Oberfläche aufgebracht werden.

Die Netzparameter seien u^1, u^2 . u^1 sei in Längsrichtung entlang der oben beschriebenen Randkurve gewählt und u^2 in Umfangrichtung.

Mit der Bogenlänge s als Parameter für u^1 kann man für das Heckpolynom näherungsweise angeben:

$$\begin{aligned} f(u^1) &= a + b \cdot u^1 + c \cdot (u^1)^2 \\ &= 32,5 + 3,64554 \cdot 10^{-11} \cdot u^1 + 0,00142 \cdot (u^1)^2 \end{aligned}$$

Für die Krümmung in Längsrichtung $k(x)$ gilt:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$$

Dieser Ausdruck reduziert sich in Abhängigkeit der Bogenlänge u^1 in Längsrichtung zu:

$$\mathbf{k}(u^1) = f''(u^1) = 0,00284 = \text{const.}$$

Die Hauptkrümmung κ_2 in Querrichtung an einer beliebigen Stelle u^1 ist:

$$\mathbf{k}_2(u^1) = \frac{1}{f(u^1)}.$$

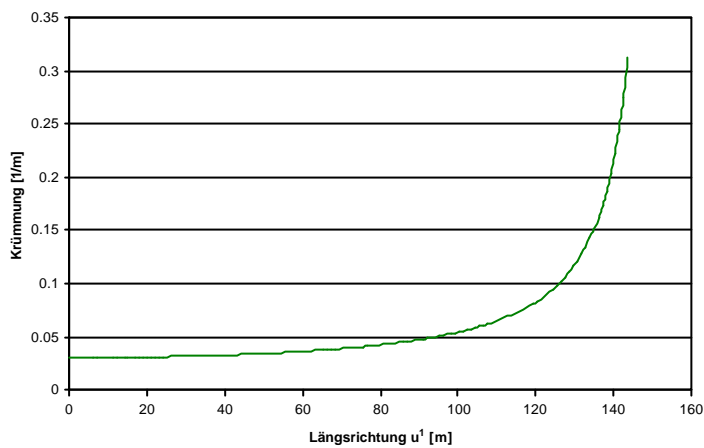


Bild 3.5: Krümmung in Querrichtung $\kappa_2(u^1)$

Für die Gaußsche Krümmung gilt allgemein:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

Die Gaußsche Krümmung in Abhängigkeit von u^1 sei im nächsten Bild dargestellt.

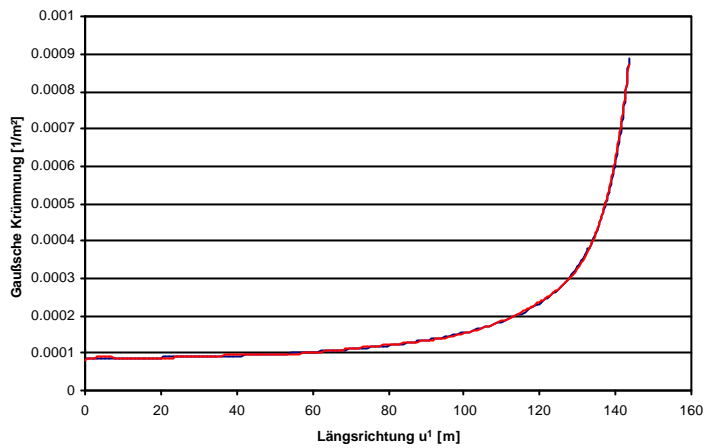


Bild 3.6: Gaußsche Krümmung in Abhängigkeit von der Bogenlänge u^1 in Längsrichtung und Fit

Die Gaußsche Krümmung wird durch ein Polynom gefittet und zur Berechnung des erforderlichen Schubwinkels integriert.

In den folgenden Bildern wird dargestellt, wie sich beim Aufbringen des Netzes auf die Luftschiffoberfläche der Winkel zum Heck hin ändert.

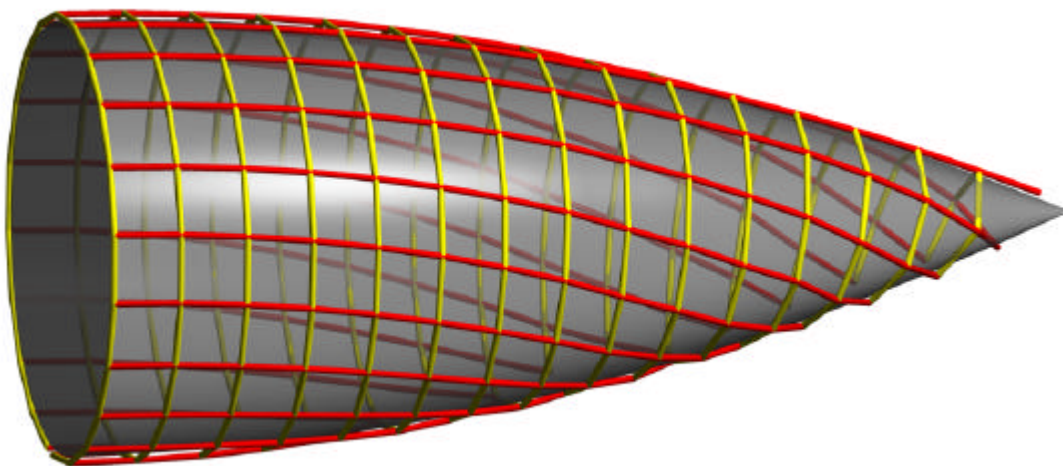


Bild 3.7: Das Netz wird über das gesamte Luftschiffheck gezogen

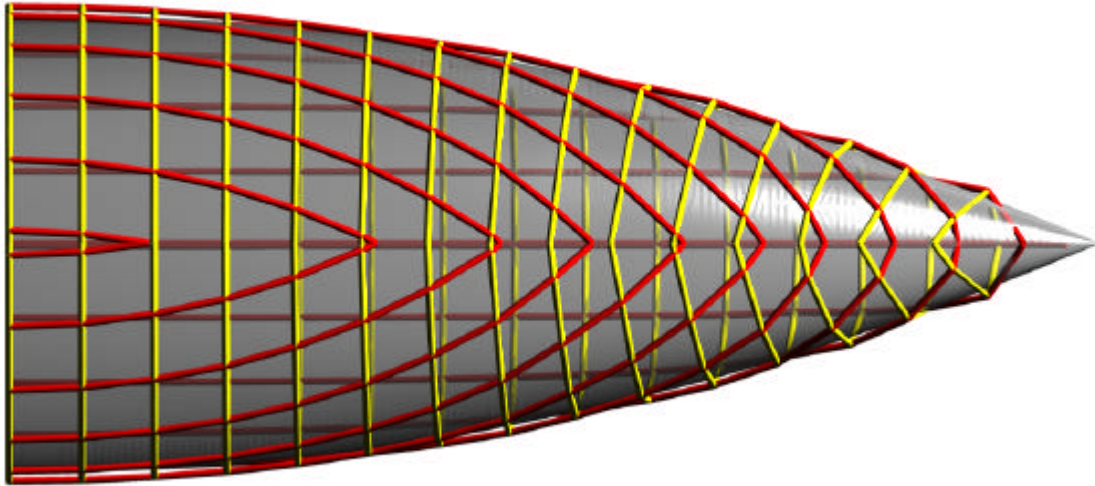


Bild 3.8: Ansicht von unten, in der die Winkeländerung, die zum Heck ansteigt, deutlich wird

Beginnend mit einem Anfangswinkel von 90° der Kett- und Schussfäden zueinander an der Stelle des maximalen Durchmessers, $u^1=0$, ergibt sich als notwendige Winkeländerung in Abhängigkeit von u^1 für das Heck der Hülle für aufgebrauchte Streifen unterschiedlicher Bahnbreite:

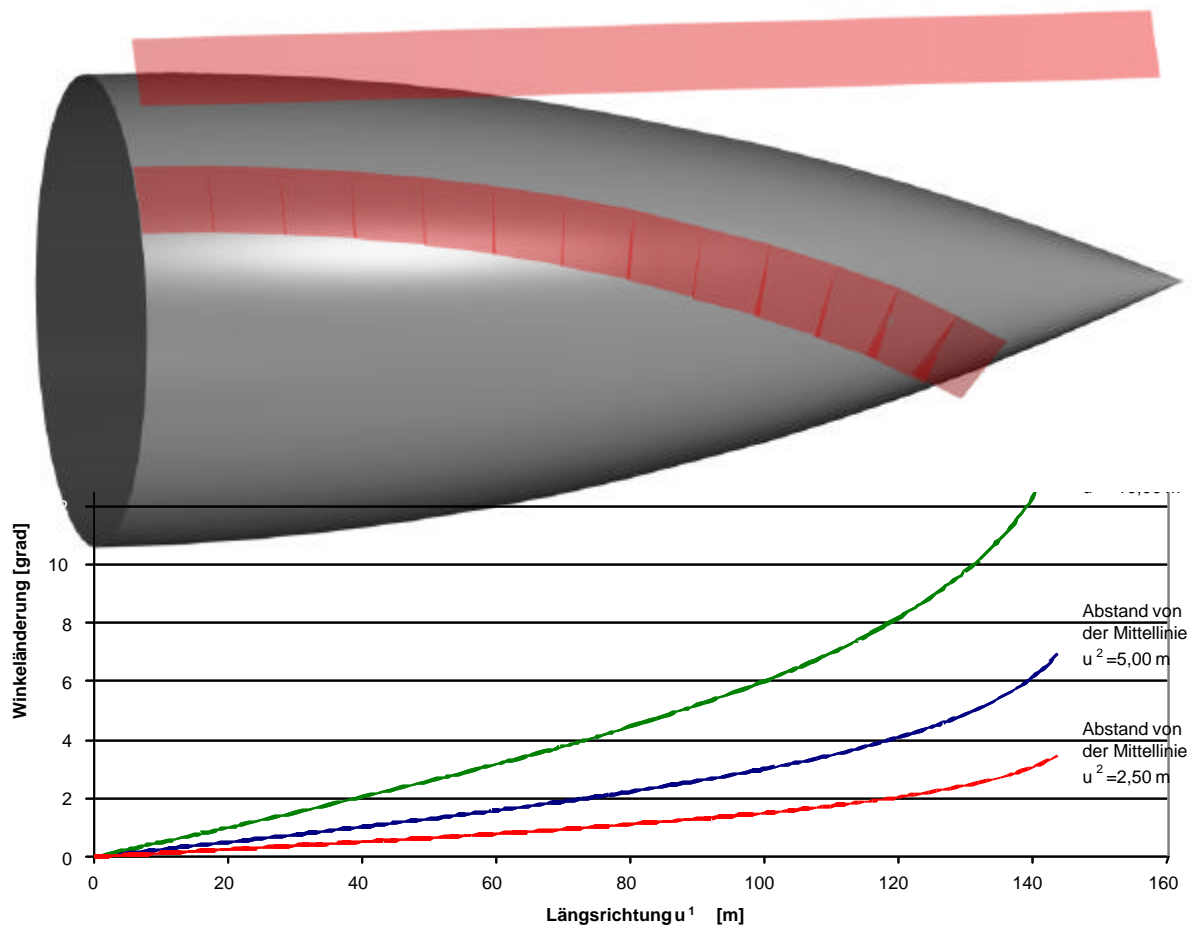


Bild 3.9: Winkeländerung in Grad in Abhängigkeit von u^1 für unterschiedliche Bahnbreiten in Richtung von u^2

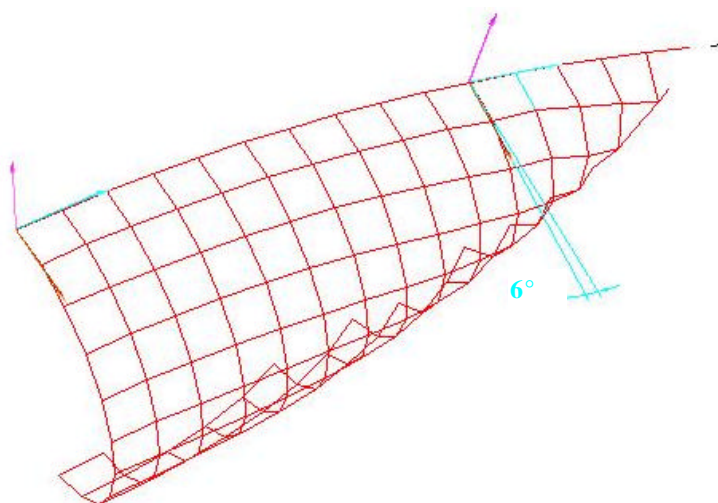


Bild 3.10: Tschebyscheffnetz auf der betrachteten Luftschiffoberfläche mit 10m-Maschen und einem beispielhaft eingezeichneten Winkel nach 100m in Längsrichtung und 10m in Querrichtung

Über eine Länge von 100m benötigt man damit bei einer Bahnenbreite von 10m ca. 6° als Verschiebungswinkel. Setzt man mehrere kürzere Stücke aneinander, reduziert sich der jeweilig notwendige Winkel entsprechend.

Aus den Schnittkräften in horizontaler Richtung im Hüllring, die im Gleichgewicht mit den Kräften aus dem Innendruck stehen müssen, erhält man:

$$2S \cos \alpha = fp$$

Darin sind $f = 1/R_2$ die Krümmung in Querrichtung und p der Innendruck.

Setzt man für $\tan \alpha$ die Tangente f' an, ergibt sich für den Kosinus:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Damit ist:

$$S = \frac{p}{2} \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

Für die Spannung in Längsrichtung wird angesetzt: $S = n_{11}$, die Krümmung in Längsrichtung ist R_1 .

Die Membrangleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{n_{11}}{R_1} + \frac{n_{22}}{R_2} = p$$

$$\frac{p}{2} \frac{1}{R_1} \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}} + \frac{n_{22}}{f} = p$$

$$\begin{aligned} n_{22} &= pf - \frac{f^2}{R_1} \frac{p}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} \\ &= pf \left(1 - \frac{f}{2R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} \right) \end{aligned}$$

Die Spannung nimmt von der Mittellinie des Streifens bis zu den Rändern infolge der notwendigen Schubverformung γ und in Abhängigkeit des Schubmoduls G zu. Man kann zur Abschätzung angeben:

$$n^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} n^{11} & \gamma G \\ \gamma G & n^{22} \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung der Hauptspannungen ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{vmatrix} n^{11} - \lambda & \gamma G \\ \gamma G & n^{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Damit sind die Eigenwerte λ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{n^{11} + n^{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(n^{11} - n^{22})^2 + 4G^2\gamma^2}$$

Die Schubsteifigkeiten G einiger beschichteter Gewebe werden später im Versuch bestimmt.

4. Materialien

4.1 Aufbau und Funktion von Faden und Beschichtung

In der vorliegenden Arbeit werden beschichtete Gewebe untersucht. Bei diesen im Bauwesen auch als Membranen bezeichneten Materialien handelt es sich um anisotrope, nichtlineare Verbundwerkstoffe, die in der Regel aus drei Lagen bestehen. Das Gewebe, das zwischen zwei Beschichtungslagen eingebettet ist, kann dabei in unterschiedlichen Bindungsarten hergestellt werden. Die beim Webprozess gespannten Kettfäden verlaufen in der Regel rechtwinklig zu den Schussfäden, deren Bezeichnung durch den Vorgang des „Durchschießens“ dieser Fäden durch die Kettfäden rührt. Je nachdem über und unter wie vielen Kettfäden durchgefädelt wird, entstehen unterschiedliche Bindungsarten. Von Leinwandbindung (L1/1) spricht man, wenn sich in jedem Gewebeknoten ein Kettfaden mit einem Schussfaden kreuzt, bei Panamabindungen (P2/2, P3/3) kreuzen sich mehrere Kettfäden mit mehreren Schussfäden.

Daneben gibt es verschiedene Sondervarianten und Gelege. Gelege bestehen normalerweise aus nicht miteinander verwobenen und nur lose aufeinandergelegten Fäden. Der Faden ist der Träger der Festigkeit eines Gewebes.

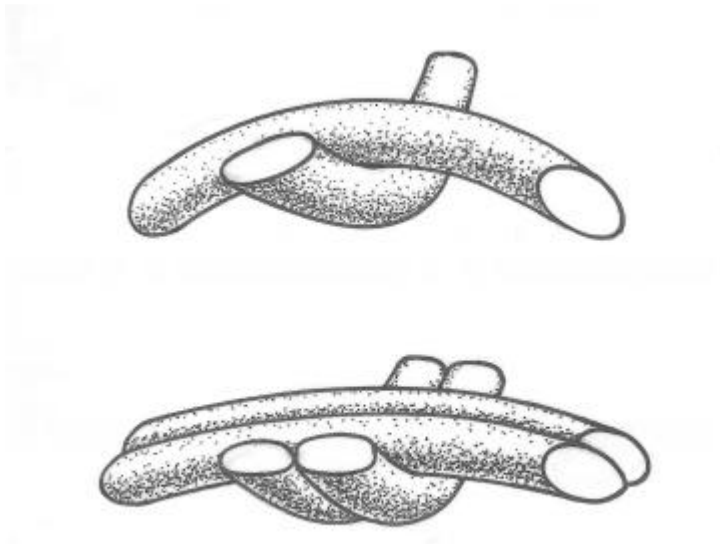


Bild 4.1.1: Bindungsarten Leinwandbindung und Panamabindung [7]

Durch den Webprozess und vor allem durch den Beschichtungsvorgang, bei dem in den meisten Fällen die Kettrichtung gespannt gehalten wird und die Schussrichtung lose bleibt, erhalten Kett- und Schussfäden unterschiedliche Geometrien im Querschnitt: Kettfäden weisen durch die gehaltene Spannung in der Regel weniger starke Abweichungen von der Fadenebene als Schussfäden auf. Führt man einen Schnitt durch ein Gewebe und betrachtet ihn unter dem Mikroskop, lassen sich die unterschiedlichen Fadenverläufe meist gut erkennen.

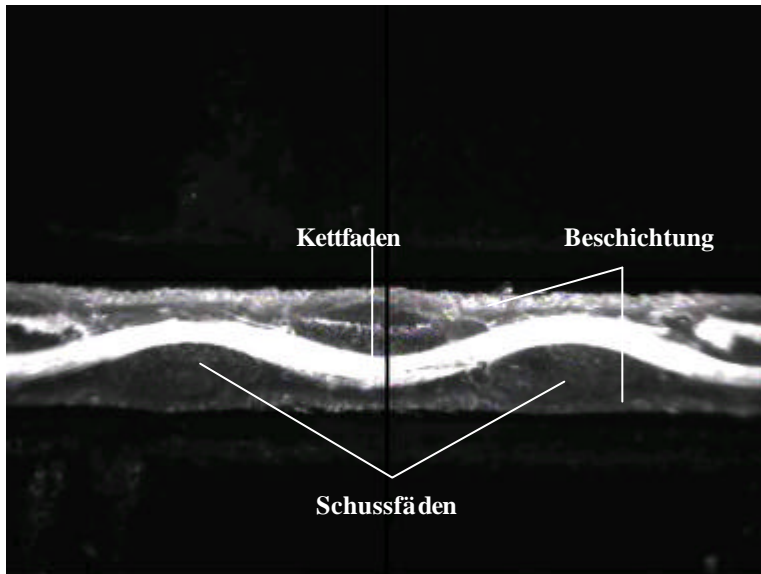


Bild 4.1.2: Schnitt durch ein beschichtetes Gewebe parallel zur Kettfadenlängsachse

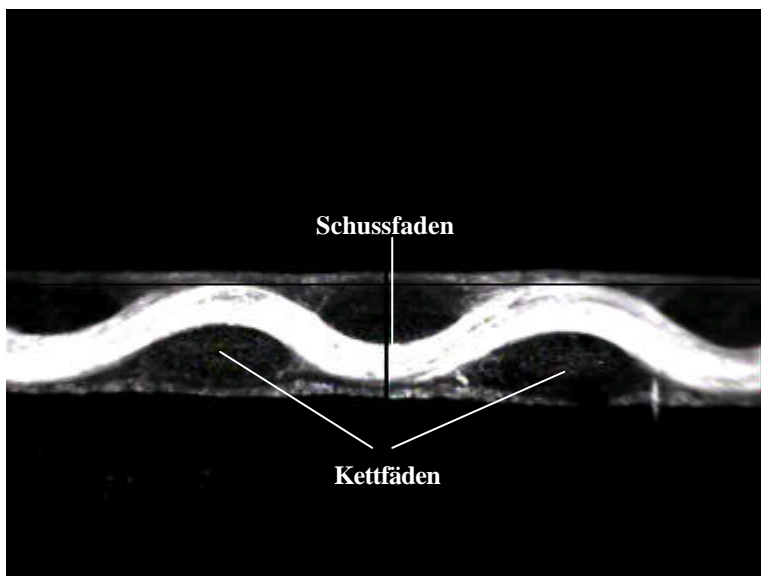


Bild 4.1.3: Schnitt durch ein beschichtetes Gewebe parallel zur Schussfadenlängsachse

In den Schnittbildern lassen sich gut die obere und untere Beschichtungslage und darin eingebettet die Gewebefäden erkennen. Die in ihrer Mittelachse geschnittenen Längsfäden zeigen einen sinusförmigen Verlauf. Die quer zur Schnittrichtung verlaufenden Fäden sind als dunkle ovale Schnittflächen sichtbar.

Durch den Herstellprozess des Webens wird bedingt, dass Gewebe in begrenzten Bahnbreiten von ca. 1,5 m bis 5 m vorliegen, die zur Herstellung einer größeren Fläche durch Nähte zusammengefügt werden müssen.

Die beiden Beschichtungslagen, in die Gewebe eingebettet sind, dient dazu, die Fäden vor äußeren Beanspruchungen wie z. B. mechanische Beschädigung, UV-Strahlung, Feuchte etc. zu schützen. Weiterhin ist es Aufgabe der Beschichtung, an Nahtstellen die Kraft von einem Schnittufer auf das andere zu übertragen. Im Luftschiffbau wird die Beschichtung der Hülle oder der Ballonets außerdem dazu benötigt, Gasdichtigkeit zu gewährleisten.

4.2 Fadenmaterialien, die für Gewebe in Frage kommen, und Beschichtungen: Materialien und Funktion

An dieser Stelle soll nun auf den Grundstoff der Gewebe, die Fasern, die für technische Textilien eingesetzt werden können, näher eingegangen werden. Am Anfang wird die im Luftschiffbau klassisch eingesetzte Faser Polyester [17] mit der im Bauwesen verwendeten zusätzlich gebräuchlichen Glasfaser verglichen. Anschließend werden neuere Entwicklungen mit verbesserten Eigenschaften betrachtet, Beschichtungsmaterialien vorgestellt und ihre Eignung für den Luftschiffbau untersucht.

4.2.1. Fasermaterialien

Die chemische Bezeichnung der **Polyesterfaser** lautet Polyethylterephthalat (PET), ein Thermoplast. PET-Fasern werden durch Polymerisation aus Monomeren gewonnen. Die Fasern werden aus einer Lösung durch Düsen gezogen und zu Fäden gesponnen. Die Moleküle liegen dann in langen Ketten vor, die normalerweise ineinander verknäuel sind. Werden die Polyesterfäden anschließend über heiße Rollen gestreckt, entwirren sich diese Knäuel und ordnen sich längs der Zugrichtung aus. Man nennt diesen Vorgang „Verstrecken“. Es wechseln sich nun die verstreckten kristallinen mit unverstreckten amorphen Bereichen in der Faser ab. Infolgedessen treten hohe Dehnungen auf, gleichzeitig erhöht sich damit aber auch die Festigkeit und der E-Modul.

Die Zugfestigkeit von Polyesterfasern liegt bei 1,1 GPa (80 cN/tex), und ihr E-Modul wird mit 17 GPa (1250 cN/tex) angegeben. Ihre Dichte liegt bei 1,38 g/cm³. Die Einheit cN/tex wird üblicherweise beim Umgang mit Fasern verwendet. Es gilt:

$$1 \text{ tex} = 10 \text{ dtex}$$

$$\text{dtex} = \text{Gewicht in Gramm}/10000 \text{ m Garmlänge}$$

Im englischsprachigen Raum wird dagegen eher die Maßeinheit denier verwendet. Diese wird folgendermaßen definiert:

$$\text{denier} = \text{Gewicht in Gramm}/9000 \text{ m Garmlänge}$$

Um nun im Ingenieurwesen gebräuchlichere Größen zu erhalten, werden die spezifische Festigkeit Σ [cN/tex] und der spezifische Modul mithilfe des spezifischen Gewichts ρ [g/cm³] in flächenbezogene Festigkeiten σ [N/mm²=Pa] und Moduln umgerechnet. Es gilt:

$$\sigma = \Sigma \cdot \rho.$$

Entsprechendes gilt für die Umrechnung der Moduln.

Polyesterfasern haben einen geringen Schrumpf unter Temperatur. Polyesterfäden sind empfindlich gegenüber UV-Strahlung und werden daher mit einer Beschichtung aus PVC geschützt. Gewebe aus Polyesterfäden werden schon seit ca. 40 Jahren im Luftschiffbau eingesetzt, so z. B. auch beim 42500m³ großen Luftschiff ZPG-3W [17].

Glasfasern werden mit Durchmessern von 5 – 13 µm aus einer 1400 – 1600 °C heißen Schmelze gezogen. Dabei kühlen sich die äußeren Bereiche der einzelnen Fäden schneller ab als der Kern. Als Folge entsteht ein Eigenspannungszustand, bei dem sich außen Druck- und innen Zugspannungen aufbauen.

Glasfasern zeigen ein sprödes Bruchverhalten. Ihre relative Zugfestigkeit nimmt mit zunehmendem Faserdurchmesser ab. Der Grund hierfür liegt in der Anfälligkeit gegenüber mechanischen Schäden (Fehlstellen, Risse, Kerben), deren Auftretswahrscheinlichkeit mit abnehmendem Volumen bzw. Querschnitt sinkt. Das Kraft-Dehnungsverhalten von Glasfasern ist linear bis zum Bruch. Die Zugfestigkeit von E-Glas wird mit 3,5 GPa (135 cN/tex) und der E-Modul mit 70 GPa (2700 cN/tex) bei einer Dichte von 2,6 g/cm³ angegeben.

Die Einzelfäden werden, wenn sie nicht zu Geweben weiterverarbeitet werden, in der Regel zu Faserbündeln, Rovings genannt, zusammengefasst. Diese werden meist mit einer haftmittelfreien Schlichte, z. B. Mineralöl, geschlichtet, wodurch sie eine glatte Oberfläche erhalten, und der Zusammenhalt des Rovings verbessert wird. Diese Schlichte wird in der Regel nach der textilen Endverarbeitung wieder entfernt. Sie dient dem Schutz vor Feuchte, Korrosion, und Schädigungen.

Normalerweise werden Glasfasern aus E-Glas, einem Aluminiumborsilikatglas, ohne Zusätze von Alkalien hergestellt. Dadurch sind Glasfasern empfindlich gegenüber Feuchteeinwirkung.

Glasfasern werden gegen Feuchte und wegen ihrer Empfindlichkeit gegenüber mechanischer Beschädigung in Geweben mit einer Beschichtung aus PTFE oder auch Silikon geschützt.

Unter **Hochleistungsfasern (High Performance Fibers)** versteht man Faserstoffe, die hinsichtlich ihrer spezifischen Eigenschaften, und vor allem was Festigkeit, E-Modul und Temperaturbeständigkeit betrifft, extreme Werte annehmen. Nach ihrer chemischen Struktur werden sie in **polyaromatische Faserstoffe** (z. B. p-Aramid (PPTA), flüssigkristalline Polymere (LCP)), **polyheterocyclische Faserstoffe** (z. B. Polyamidimid (PAI)), **homoaliphatische**

Faserstoffe (z. B. hochfestes Polyethylen (HPPE)), **Kohlenstoff-, Glas- und keramische Faserstoffe** auf anorganischer Basis unterschieden.

Hochfeste Polyethylenfasern (High Performance PolyEthylene-Fasern) werden als die „stärkste Faser der Welt“ bezeichnet. Sie werden im sogenannten Gelspinn-Verfahren erzeugt, bei dem Polyethylen mit extrem hohem Molekulargewicht (UHMW-PE) in einem organischen Lösemittel gelöst, versponnen und zu einem Filament mit der höchsten spezifischen Festigkeit aller existierenden Chemiefasern verstreckt wird. Dyneema SK 66 (DSM/Heerlen) erreicht so eine spezifische gewichtsbezogene Festigkeit von 3,2 GPa (330 cN/tex) und einen E-Modul von 100GPa (10100 cN/tex). Diese hohen Festigkeitswerte basieren auf einer optimalen Parallelorientierung der PE-Linearmoleküle (> 95%) und einem sehr hohen Kristallisationsgrad von 85%. Verglichen mit Stahl ist die spez. Festigkeit 15-mal höher, und der E-Modul wird nur von speziellen C-Fasern übertroffen. Das spez. Gewicht ist mit 0.97 g/cm³ äußerst gering, die Bruchdehnung liegt bei 3,5%. Der Schmelzpunkt der Fasern liegt zwischen 144 und 152°C. Bei höheren Temperaturen nehmen Zugfestigkeit und E-Modul ab, bei Temperaturen unter 0°C zu. Die Faser kann bei Temperaturen zwischen –150°C und 70-80°C eingesetzt werden. Weitere Eigenschaften sind hohe Kriechneigung, Beständigkeit gegen UV und gegen die meisten Chemikalien und Mikroorganismen, guter Abriebwiderstand, kein sprödes Verhalten, Wasser- und Feuchtigkeitsbeständigkeit. Durch ihre hohe Flexibilität sind HPPE-Fasern gut webbar. Markennamen und Hersteller: Dyneema (DSM, Heerlen NL), Spectra (Honeywell/ Longlaville F), Certran (Celanese/ Charlotte USA)

Hochfeste Polyvinylalkoholfasern (PVA) entstehen durch Verspinnen eines in organischer Lösung gelösten Polyvinylalkohols unter Kühlung. Anschließend wird das Lösemittel extrahiert, und die stabile Faser bleibt zurück. Man unterscheidet zwei Arten von PVA-Fasern. Bei niedrigem Verseifungsgrad entsteht eine leicht wasserlösliche Faser mit niedriger Festigkeit (40 bis 65 cN/tex), die biologisch abbaubar ist. Steigert man den Verseifungsgrad auf etwa 99,5%, entsteht eine gleichmäßig kristalline Struktur mit hoher Orientierung. Dadurch entsteht eine wasserunlösliche Faser mit höherem Schmelzpunkt, höherer Festigkeit (100 bis 160 cN/tex) und höherem E-Modul (3000 bis 4000 cN/tex) bei einer Bruchdehnung von 7 bis 10%. Markennamen und Hersteller: Kuralon K-II (Kuraray Co. Ltd; Osaka/ Japan)

Die wichtigsten handelsüblichen Aramidfasern, Poly-p-phenylen-terephthalamid (PPTA)-Faserstoffe oder auch **p-Aramidfasern**, werden durch Polykondensation von p-Phenyldiamin (PPD) und Terephthal-Dichlorid (TDC) gewonnen. Da Aramide kein deutliches Schmelzverhalten aufweisen, können sie nicht im herkömmlichen Schmelzspinnverfahren hergestellt werden, sondern benötigen einen speziellen Polymerisationsprozeß, bei dem die beiden Monomere in einem organischen Lösungsmittel gelöst werden. Anschließend wird das PPTA in einem aggressiven anorganischen Lösungsmittel z. B. 100%-ige Schwefelsäure zur Lösung gebracht. Diese Lösung wird auf ca. 80°C erhitzt und durch eine Spinn Düse in ein Wasserbad extrudiert. Im Mantelbereich der Spinn Düse werden durch hydrodynamische Effekte Scherspannungen erzeugt, die eine hohe Ausrichtung der Makromoleküle in Faserrichtung bewirken. Nach Waschen und Neutralisieren wird die Faser bei 65°C getrocknet. P-Aramidfasern (**aromatische Polyamidfasern**) besitzen eine fibrilläre, hochkristalline Struktur mit gestreckten Molekülketten, die eine stabförmige Struktur aufweisen und in Faserrichtung orientiert sind. Die Zugfestigkeit liegt bei 2,8 bis 3,5 GPa (200-240 cN/tex), die Dichte liegt bei 1,44 g/cm³. Der E-Modul kann entsprechend dem Verwendungszweck gewählt werden [20]. Die handelsüblichen Fasern sind unter dem Markennamen Kevlar von DuPont und Twaron vom gleichnamigen Hersteller Twaron bekannt. Beide Firmen vertreiben drei Fasertypen: DuPont Kevlar 29, Kevlar 49 und Kevlar 149 und Twaron Twaron HM, Twaron IM und Twaron SM. Sie unterscheiden sich in E-Modul, Festigkeit und Bruchdehnung. Die hochfesten Aramidfasern (z. B. Twaron SM/Twaron, Kevlar 29/DuPont) mit einer Zugfestigkeit von 205 cN/tex und mittlerem Modul von 59 GPa werden vorwiegend für beschichtete (auch mehrlagige) Gewebe eingesetzt, während man für Verbundwerkstoffe (Composite, FVW) eher die hochfesten p-Aramidfasern mit hohem Moduln (z. B. Twaron HM, Kevlar 49: 124 GPa) nimmt. Mit der Anhebung des E-Moduls verbunden ist eine Abnahme der Bruchdehnung. So besitzt Kevlar 49 nur noch eine Bruchdehnung von 2,2% (im Gegensatz von 3,9 % bei Kevlar 29). Die höchsten Moduln erreicht Kevlar 149 bei einer Bruchdehnung von 1,4%. Die Aramidfaser besitzt eine vergleichsweise geringe Querdruckfestigkeit. Dies lässt sich durch ein nichtlineares Verhalten der Faser bei Druckbeanspruchung erklären [12]. Die Ursache hierfür muss in der schwachen Bindung der Seitenketten der Makromoleküle liegen. Bei Schlingenbildung ergeben sich im Filament aufgrund der Biegebeanspruchung Druck- und Zugspannungen [12]. In den Druckzonen treten Beul- und Knickformen auf, die bei stärkerer Biegung zum Auflösen der Faser in Fibrillen führen. Dieses Verhalten kann auch in Aramidfasergeweben

beobachtet werden. So reicht teilweise die bloße Umschlingung des Rovings aus, das sogenannte „Mikrocracking“ hervorzurufen.

Weitere Eigenschaften sind die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße, duktils Verhalten, gute Chemikalienbeständigkeit, Wärmestabilität bis 170°C, nicht schmelzend, flammfest, selbstverlöschend, elektrisch isolierend. Die Faser fängt ab 425 °C an zu verkohlen.

Die Anwendung von Aramidfasern ist breitgefächert: als Gewebe (auch mehrlagig), Wirk- und Strickwaren, Rovings, Filamente und Gelege, p-aramidfaserverstärkte Kunststoffe (AFK), die ein geringeres Gewicht als CFK und GFK aufweisen bei gleichzeitig hoher Zugfestigkeit und Schlagfestigkeit, hoher Beschädigungstoleranz, Vibrations- und Schwingungsdämpfung, aber deutlich geringerer Druckfestigkeit als GFK (nur ca. 15 bis 20 % der erreichten Zugfestigkeit).

Eine weitere Aramidfaser ist das von Teijin produzierte Technora: ein Copolymer zum PPTA, bei dessen Herstellung 3,4-Diaminodiphenylether zugegeben wird. Dadurch entsteht eine Faser mit der extremen Zugfestigkeit von 3,3 GPa (240 cN/tex), einem E-Modul von 70 GPa (5000 cN/tex) und einem spezifischen Gewicht von 1,39 g/cm³, die selbst bei 250°C noch die Hälfte ihrer Zugfestigkeit und ihres E-Moduls behält.

Markennamen und Hersteller: Twaron (Twaron/ Wuppertal), Kevlar (DuPont/ Genf), Technora (Teijin)

Schmelzspinnbare Polyaromatfasern (LCP)

Aromatische Polyester, die durch Polykondensation aus Hydroxibenzoessäure und Hydroxynaphtoesäure gebildet werden, bilden in der Schmelze Bereiche mit parallel gelagerten Molekülen, sogenannte „flüssig-kristalline“ Polymerbereiche, die beim Spinnen bereits so stark orientiert und kristallisiert sind, dass die daraus entstandenen Filamentgarne ohne Streck- und Fixierungsprozesse hohe Festigkeiten und E-Moduln sowie geringe Dehnungs- und Schrumpfeigenschaften aufweisen. Das Polymer besitzt ein anisotropes Verhalten in der Schmelze. Nach dem Verpressen der flüssigen Polymere durch schmale Spinn Düsen, liegen die molekularen Bereiche parallel zueinander in Richtung der Faserachse in starker Gerichtheit vor. Die Zugfestigkeit liegt bei 3,2 GPa (230 cN/tex), der E-Modul wird mit 70 GPa (5000 cN/tex) angegeben.

Die Dichte liegt bei 1,4 g/cm³. Gute Vibrationsdämpfung, gute chemische Beständigkeit, minimale Feuchtigkeitsaufnahme und sehr gute Kriechbeständigkeit sind weitere Eigenschaften der LCP-Faser. Der Abriebwiderstand kann durch Oberflächenbehandlung verbessert werden.

Die Faser besitzt allerdings eine geringere Temperaturbeständigkeit als PPTA, bei 150°C wird nur noch die Hälfte der Festigkeit erreicht.

Als **LCP-Thermoplastfaser** (z. B. **Vectran**/ Celanese) besitzt der aromatische Polyester etwas geringere Dehnungen (2%) und Zugfestigkeiten (2/3) und damit einen geringeren E-Modul, der Schmelzpunkt liegt etwas tiefer (276°C i. Vgl. zu 330°C), wodurch sich diese Faser zur Herstellung von Hochleistungsverbundwerkstoffen eignet durch Mischung oder Hybridisierung mit z. B. Glasfilamentgarnen und PP-Folienlagen.

LCP-Moleküle sind steif und richten sich in zufällig angeordnete Bereiche mit sehr starker Orientierung und ohne Faltung der Molekülketten aus.

Markennamen und Hersteller von LCP: Vectran HS und Vectran M (Celanese/ Charlotte USA, Kuraray/ Japan), Exlan (Sumitomo/ Japan)

PTFE-Fasern werden durch einen Matrix-Spinnprozeß oder einen Spalt- bzw. Schälprozess gewonnen. Die hochfeste Gore HT (High Tenacity) - Faser beispielsweise besitzt eine hohe Abriebfestigkeit, eine hohe Reißfestigkeit, ist chemisch sehr gut beständig, UV-beständig und besitzt eine hohe Temperaturbeständigkeit. Zudem scheinen dynamische Lasten ihre einachsige Festigkeit nicht herabzusetzen. Im Versuch wurden Fäden zehnmal bis zu unterschiedlichen maximalen Zykluslasten und anschließend bis zum Bruch belastet. Trägt man die gemessenen Bruchlasten über der maximalen Zykluslast auf und vergleicht diese mit der einfachen einachsigen Festigkeit (Linie), zeigt sich keine Absenkung der Bruchlast, was auf gute Elastizität hindeutet.

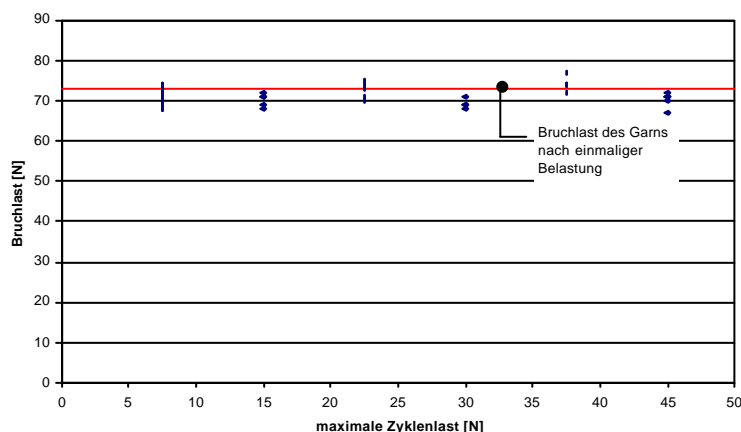


Bild 4.2.1: Vergleich der Garnfestigkeiten nach einmaliger Belastung (Linie) und zehnfacher zyklischer Belastung mit unterschiedlichen Zykluslasten an jeweils fünf Proben, Material Gore Hochfest 880 dtex, 2-fach

Im nächsten Diagramm sind die spezifischen Eigenschaften einiger Hochleistungsfasern dargestellt.

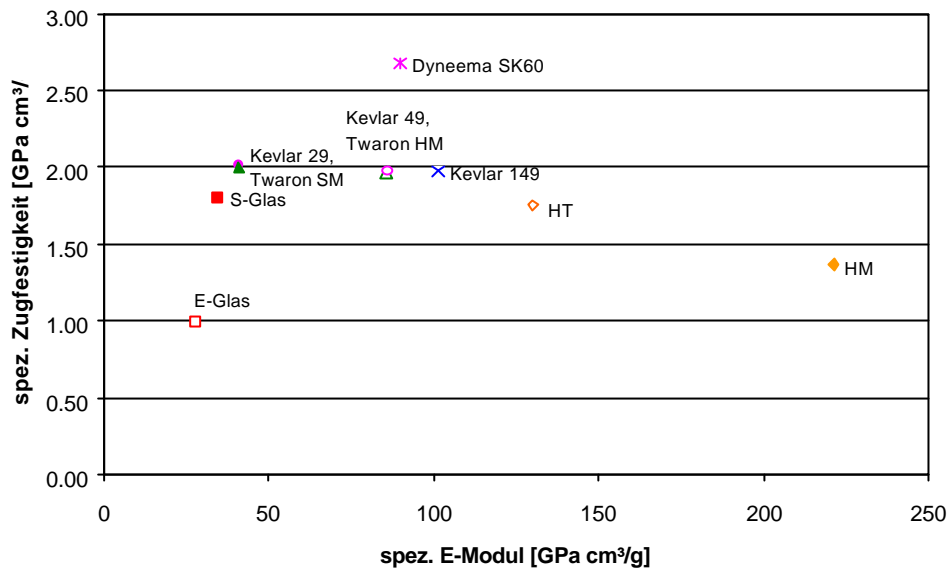


Bild 4.2.2: Vergleich spezifischer Eigenschaften einiger Hochleistungsfasern

Garne bestehen in der Regel aus ca. 400 Fasern mit einem schlechten Volumen-Oberflächen-Verhältnis, was sie korrosionsanfällig macht und damit in Geweben in den meisten Fällen eine Beschichtung zu ihrem Schutz bedingt.

Durch Verdrehung der einzelnen Fasern werden Fäden hergestellt. Dabei unterscheidet man S- und Z-Schlag je nach Richtung der Faserdrehung. Der Faden erreicht nie die Festigkeit der Summe der Festigkeiten seiner Fasern. Je stärker die Fasern verdreht sind, desto stärker beansprucht wird die einzelne Faser durch Querpressung und desto glatter wird die Fadenoberfläche. Dies wirkt sich wieder nachteilig auf die Haftung der Beschichtung aus, die eine gewisse Oberflächenrauigkeit benötigt. Auf weitere Eigenschaften und Aufgaben verschiedener Beschichtungsmaterialien soll im Folgenden eingegangen werden.

In Tabelle 4.2.1 sind die Eigenschaften der verschiedenen Fasern nochmals in der Übersicht dargestellt.

Tabelle 4.2.1: Übersicht über Fasern und Garne und deren Eigenschaften

Faser	Bezeichnung	Hersteller	Markenname	Typ	Zugfestigkeit [cN/tex]	Bruchdehnung [%]	E-Modul		spez. Gewicht Dichte [g/cm ³]	Schmelzpunkt [°C]
							[cN/tex]	[GPa]		
HPPE	Hochfeste	DSM/Heerden NL	Dyneema	SK 60	280	2.7	3.5	9100	91	144 - 155
	Polyethylen- faser			SK 66	330	3.2	3.5	10100	101	144 - 155
PVA	Hochfeste Po- lyvinylalkohol-	Honeywell/ Longlaville F Celanese/ Charlotte USA	Spectra Certran							
		Kuraray/ Osaka Japan	Kuralon	hoher Verseifungsgrad	100 - 160		7 - 10	3000 - 4000		
PPTA	p-Aramid- faser	Twaron/ Wuppertal	Twaron	Twaron SM	205	3.0			59	170
		DuPont/ Genf	Kevlar	Kevlar 29	205	3.0	3.9	4100	59	1.44
			Kevlar	Kevlar HT	235	3.4				ca. 1.45
			Twaron	Twaron HM						
			Kevlar	Kevlar 49	200	2.8	2.2/1.9	8600	125	1.45
LCP	Schmelzspinn- bare Poly- aromatfaser	Celanese/ Charlotte USA	Vectran HS		230	3.2	3.3	5000	70	1.39
		Celanese/ Charlotte USA	Vectran M		150	2.1	2	5000	70	1.4
		Sunimoto/ Japan	Exlan							330
		Dow Chemical/USA + Toyobo/Japan	Zylon AS Zylon HM		370	5.8	3.5	1150	18	1.54
		Alzo Nobel/ Arnhem NL	PBO MS		370	5.8	2.5	1720	27	1.56
Rein-PAN	Homopolyacryl- nitrifaser	Acordis/Kelheim	Dolanit		50 - 75		8 - 16	1300 - 1500		
		Montefibre/MEF Bielefeld	Ricem							
PET/ PEN	Hochfest-Poly- esterfilament- game	Kosa	Dacron		60 - 84	0.7 - 1.0	8 - 15	800 - 1200	9 - 14	1.18
		DuPont								
		Acordis	Diolen							
HMLS	High modulus low shrinkage	Celanese/ Charlotte USA	Vectran HS							
PA	Hochfestpoly- amidfilament- game				70.7	1.0	10.3			1.39 - 1.40
					70 - 80	0.9	18 - 23	600 - 900	7 - 10	1.14
C-Fasern	Kohlenstoff- bzw. Graphit- faser	Tenax Fibers/Wuppertal	Tenax HT		180	3.4-5.0	1.4	13400	238	1.8
			Tenax Fibers			5.0				
			Tenax HM			0.5-3.0	0.73	20000	410	2.1
Polyester			Tenax IM			5.4			295	
					80	1.1		1250	17	1.38
Glas			E-Glas		135	3.5		2700	70	2.6
					35	2.8			200	7.8

4.2.2. Beschichtungsmaterialien

Die im Bauwesen bisher vorwiegend eingesetzten Beschichtungsmaterialien sind PTFE und PVC.

PTFE (Polytetrafluorethylen) ist ein Thermoplast und besitzt eine starke Bindung zwischen Fluor- und Kohlenstoffatomen. Es verfügt über eine ausgezeichnete Chemikalienresistenz, ein geringes Adhäsionsvermögen und eine hohe Wärmestabilität. Der Schmelzpunkt von PTFE liegt bei 327°C, bis 280°C bleibt es dauerhaft stabil. PTFE kann nur als Dispersion bei 300°C auf das Trägergewebe aufgesintert werden. Damit kommt es als Beschichtungsmaterial für Fasern, die einen geringeren Schmelzpunkt aufweisen, wie z. B. Polyester, HPPE, PPTA, nicht in Frage. PTFE besitzt einen E-Modul von 500 MPa und eine Zugfestigkeit von 20 bis 35 MPa bei einer Bruchdehnung von 300-500%. PTFE gilt als nicht brennbar, die Wasseraufnahme ist vernachlässigbar klein, und es besitzt eine gute Abriebbeständigkeit. Damit eignet es sich sehr gut als Beschichtung für Glasfasergewebe. Es schützt die Glasfaser vor ihren gefährlichsten Einwirkungen: Beschädigung und Feuchteeinwirkung. Markenname und Hersteller: Teflon (DuPont)

PVC (Polyvinylchlorid) ist ebenfalls ein Thermoplast. Es wird bei 140°C auf das Gewebe aufgestrichen. PVC-Beschichtungen enthalten Weichmacher. Es ist gut beständig gegen Salzlösungen, anorganische Säuren mittlerer Konzentration, bedingt gegen Laugen. PVC besitzt eine gute Licht- und Alterungsbeständigkeit, die allerdings durch Ausschwitzen des Weichmachers, was zur Versprödung führt, reduziert werden kann.

Silikonkautschuk ist ein Elastomer. Es ist elastisch von -50°C bis 200°C. Es zeichnet sich durch gute Haftung auf dem Trägergewebe, gute UV- und Witterungsbeständigkeit, Filterwirkung gegen die kurzwellige UV-B-Strahlung und einen hydrophoben Charakter aus. Es gilt als schwerbrennbar und erreicht hohe mechanische Festigkeiten. Silikon wird im allgemeinen bei ca. 150-200°C vulkanisiert und durch Rakeln auf das Gewebe aufgebracht. Für die Vulkanisation werden teilweise Vernetzer (in Mengen von 1% bis 5% des Gesamtmasse der Beschichtung) benötigt, welche die Brückenbildung zwischen den Kautschukmolekülen verbessert und die mechanischen Eigenschaften günstig beeinflussen können. Weitere Zusatzstoffe können sein: Inhibitoren oder Katalysatoren, welche die Reaktionszeit verändern, Stabilisatoren und Viskositätsregler.

PVF (Polyvinylfluorid) besitzt eine äußerst gute Chemikalienresistenz. Normalerweise ist PVF transparent im ultravioletten, sichtbaren und infraroten Bereich des Sonnenlichts. Es gibt aber auch Typen, die ultraviolette Strahlung absorbieren, womit sich PVF zum Schutz UV-empfindlicher Fasern anbietet. PVF-Beschichtung auf einem Polyesterträgergewebe wurde z. B. schon am Zeppelin LZ N07 verwendet [22].

Markenname und Hersteller: Tedlar (DuPont)

PVDF (Polyvinylidenfluorid) ist wie PVF ein fluorhaltiger Thermoplast, der aus Modifikation des chemischen Aufbaus von PTFE entsteht. PVDF ist selbstverlöschend und besitzt bei einer Dichte von 1,75 bis 1,78 g/cm³ einen E-Modul von 1000 bis 3000 N/mm².

Die Beschichtung dient neben ihrem Schutz der Faser vor äußeren Einflüssen und der Kraftübertragung an Nahtstellen auch als Fixierung der Gewebegeometrie. Während im Bauwesen meist für den Raumeindruck, die Einsparung von Beleuchtungskosten und die Impression von Leichtigkeit eine hohe Transluzenz gewünscht wird, muss beim Einsatz hochfester Fasern aufgrund ihrer Lichtempfindlichkeit evtl. zumindest die äußere Beschichtungslage für ein Luftschiff lichtundurchlässig gemacht werden.

Beschichtungen mit polarem Aufbau lassen sich hochfrequenzschweißen, während nichtpolare Beschichtungen nur thermoimpuls- oder ultraschallverschweißbar sind.

4.3 Materialien für ein Luftschiff

4.3.1. Allgemeine Betrachtung der notwendigen Eigenschaften für die Hülle

Nachdem nun die auf dem Markt erhältlichen Faserarten, die sich für technische Gewebe eignen und in Frage kommende Beschichtungsmaterialien diskutiert wurden, sollen hier zuerst einmal die Anforderungen an ein beschichtetes Gewebe für ein Luftschiff untersucht werden. An die Ansprüche zur Materialauswahl gelangt man über folgende Überlegungen.

Nachdem die Form und die Spannungsverteilung im ideellen Fall bekannt sind, stellt sich die Frage nach den realen Steifigkeiten der einsetzbaren Materialien.

Daher werden in den folgenden Versuchen die **elastischen Moduln** eine entscheidende Rolle spielen.

Für Prallluftschiffe muss die Hülle alle Lasten aufnehmen, womit die Festigkeiten der Materialien von besonderer Wichtigkeit werden.

Hat man die Spannungen berechnet, muss man sich darüber klar werden, welche Festigkeiten maßgebend sein werden, d. h. man muss sich die möglichen Versagensarten der Hülle überlegen:

An erster Stelle ist hier die eigentliche **Materialfestigkeit** unter zweiachsigen Beanspruchungen von Bedeutung. Diese Festigkeit ist im Normalfall aber gegenüber anderen Festigkeitswerten so hoch, dass sie in den meisten Fällen nicht die ausschlaggebende Rolle spielen wird.

Die **Nahtfestigkeit** wird eine wichtige Rolle spielen, da die Hülle sowohl aus differentialgeometrischen Überlegungen heraus, aber auch aufgrund der Fertigungstechnik mit begrenzten Bahnbreiten aus Bahnen zusammengefügt werden muss. Die Art des Fügeprozesses hängt natürlich von der Beschichtung ab, da an der Naht die Spannung vom Faden des einen Nahtufers als Festigkeitsträger über die Beschichtung auf den Faden des zweiten Nahtufers übertragen werden muss. Die Beschichtungen müssen sich also miteinander verbinden lassen. Für die Kraftübertragung vom Trägergewebe auf die Beschichtung ist die **Haftung der Beschichtung auf dem Gewebe** entscheidend.

Zusätzlich hängt die Nahtfestigkeit von der Gewebeart ab. So ist es beispielsweise äußerst schwierig, bei Gelegen eine funktionierende Naht herzustellen.

Man muss davon ausgehen, dass während des Betriebes Schädigungen wie Risse oder Löcher in der Hülle auftreten können. Die wesentliche Frage, die sich hier stellt, ist, ob eine solche Schädigung stabil bleibt oder ob sie sich unter der gegebenen Belastung fortpflanzen kann. Hierfür muss man die **Weiterreißfestigkeit** des Hüllenmaterials kennen.

Entscheidend für die Lebensdauer eines Luftschiffes sind nicht nur die Kurzzeitfestigkeiten des Materials, sondern die **Zeitstandsfestigkeiten**. Dabei muss beachtet werden, dass man je nach verwendeter Faser erhöhte Belastungen durch UV-Strahlung zu berücksichtigen hat. Es ist also entweder die Stabilität der Faser unter UV-Belastung gefragt, bzw., wenn die Stabilität der Faser unter UV-Belastung nicht gegeben ist, ist eine Beschichtung zu wählen, die die UV-Strahlung sicher von der Faser fernhält.

In die Hülle müssen Kräfte, die aus einer Traglast resultieren, eingeleitet werden können. Werden diese Kräfte punktförmig z. B. über Seile eingeleitet, spielen **Querdehnzahl** und **Schubsteifigkeit** eine wesentliche Rolle.

Neben den mechanischen Eigenschaften hat die Hülle weitere Funktionen zu erfüllen.

Eine wesentliche Aufgabe der Hülle eines Luftschiffes ist es, das tragende Gas gegenüber der Außenluft abzuschließen, d. h. das Hüllenmaterial muss **heliumdicht** sein. Diese Heliumdich-

tigkeit kann entweder durch die Beschichtung selbst oder durch eine auflaminierte Zusatzschicht bewerkstelligt werden.

Es ist zu berücksichtigen, dass ein Luftschiff der Sonneneinstrahlung in verstärktem Maße ausgesetzt ist. Durch diese Strahlung wird die Hülle und damit das Helium aufgeheizt, wobei zu beachten ist, dass der Wärmeübergang von der Hülle zum Helium besonders schnell vor sich geht. Damit verbunden ist eine Druckänderung in dem in der Hülle eingeschlossenen Gas, was zu plötzlichen Auftriebsschwankungen führt. Diese Schwankungen müssen minimiert werden. Das kann beispielsweise dadurch geschehen, dass man die eingestrahlte Energie möglichst am Hüllenmaterial reflektiert, damit die Aufheizung vermieden wird. Die Oberfläche des Hüllenmaterials sollte also möglichst alle Strahlung von der Sonne, die zu einer Aufheizung führen könnte, reflektieren.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung der Steifigkeiten und Festigkeiten von Fäden und Geweben und die Schubsteifigkeit dieser Gewebe.

4.3.2. Potentielle Hüllenmaterialien: Untersuchte Materialien

In der folgenden Tabelle 4.3.1 sind die untersuchten Materialien, insgesamt sechs, mitsamt den vorab bekannten Eigenschaften aufgeführt.

Tabelle 4.3.1: Übersicht über die zur Verfügung stehenden Materialien

Labor-interne Nr. 1)	Lieferant 2)	Bezeichnung 3)		Faden ⁴⁾	Feinheit [denier] 5)	Dichte [g/m ²] 6)	Gewebe-art ⁷⁾	Fadendichte [n/cm] ⁸⁾
M00/155	Uretek	#3268	Kette1	Vectran	1500	1054	1/1	7.09
			Schuss1	Vectran	1500			7.09
			Kette2	Vectran	750			7.87
			Schuss2	Vectran	750			7.87
M00/156	Rexam	CL160H_4	Kette	Vectran	1500	771	P 2/2	9.2
			Schuss	Vectran	1500			9.2
M00/157	Contitech	CL10-AR-	Kette	p-Aramid	1680	680	1/1	10
		T25-P2-F4	Schuss	p-Aramid	1680			10
M00/158	Dover	ST12C3719	Kette	Vectran	1500	481	2-1-1-2	9.45
			Schuss	Vectran	1500			9.84
M00/159	Dover	ST12C3720	Kette	Vectran	2250	998	2-1-1-2	7.09
			Schuss	Vectran	2250			7.09
M00/160	Dover	ST12C3721	Kette1	Vectran	3750	728	Gelege	4.72
			Schuss1	Vectran	3750			4.72
			Kette2	Vectran	400			6.69
			Schuss2	Vectran	400			6.69

¹⁾ In der ersten Spalte ist die Nomenklatur aufgeführt, mit der das Material im Labor versehen wurde. Sie wird zur Vereinfachung bei den Versuchsbezeichnungen verwendet.

²⁾ In der zweiten Spalte steht der Hersteller der Membran, wobei hier im allgemeinen der Beschichter gemeint ist, der jedoch in manchen Fällen auch gleichzeitig Weber ist.

³⁾ Hier ist die herstellereigene Bezeichnung aufgeführt.

⁴⁾ In der fünften Spalte ist das Material des Fadens angeführt: das LCP des Herstellers Celanese und ein p-Aramid.

⁵⁾ Hier ist die Garnfeinheit in denier angegeben. Dabei ist zu beachten, dass die US-amerikanischen Hersteller die Feinheit in denier angeben, die europäischen in tex oder dtex = 0,1 tex. Es wurden hier alle Angaben in denier umgerechnet.

⁶⁾ In der siebten Spalte wird das spezifische Flächengewicht des gesamten Materials in g/m² aufgeführt, wobei sämtliche Werte nachgemessen wurden.

⁷⁾ In der achten Spalte findet sich die Gewebekonstruktion. Dabei bedeutet 1/1 Leinwandbindung, P2/2 Panamabindung mit Doppelfäden. Material M00/155 ist ein aufgedoppeltes Gewebe, bestehend aus zwei Geweben mit Leinwandbindung. Material M00/159 ist eine Raschelware. Bei Material M00/160 handelt es sich um ein Gelege. Dabei ist der Ausdruck Kett- und Schussfaden streng genommen nicht anwendbar. Er wird später aber trotzdem der Einfachheit halber verwendet, Kette bedeutet dann in Bahnenrichtung, Schuss rechtwinklig zur Bahnenrichtung.

⁸⁾ Die Fadendichte wird in Anzahl der Fäden pro Zentimeter angegeben. Sie wurde den Herstellerangaben entnommen und zusätzlich noch ausgezählt.

Nachdem nun einsetzbare Materialien und ihre Anforderungen für den Luftschiffbau vorgestellt wurden, soll im Weiteren das mechanische Verhalten der Gewebe genauer untersucht werden.

Das mechanische Verhalten von Geweben

5.1. Einführung

Das dieser Arbeit zugrunde liegende fadenparallele Stoffgesetz geht von der Mikrostruktur des Gewebes aus und berücksichtigt damit die Werkstoffeigenschaften der Gewebekomponenten. Strukturmodelle wurden u. a. von Meffert, Bednarczyk und Blum entwickelt. Der Ansatz des hier wieder aufgegriffenen mikromechanischen Modells stammt von Meffert [21] und wurde von Blum [3] hinreichend beschrieben. Da das Modell aber im Folgenden erweitert und als Grundlage für eine Computersimulation verwendet wird, soll es unten dargestellt werden. Die Erweiterung um einen Term zur Dickenänderung wird anschließend aufgezeigt.

5.2. Das fadenparallele Verhalten von Geweben

5.2.1. Mikrogeometrie

Dem Strukturmodell von Blum [3] liegt das Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Fäden im Gewebe zugrunde. Das aus diesen Fäden gebildete Gewebe wird durch Einheitszellen simuliert, aus deren Wiederholung in zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen das zu betrachtende Kontinuum entsteht.

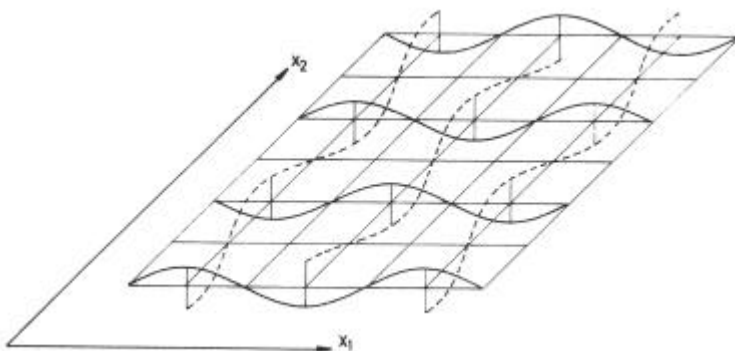


Bild 5.2.1 : Strukturmodell eines Gewebes, wobei die Fäden grob als Linien dargestellt sind. Das Gewebe wird in Einheitszellen unterteilt mit – Kettichtung, --- Schussrichtung [3].

In Bild 5.2.2 wird ein Viertel einer Einheitszelle mit den verwendeten Bezeichnungen und dem Koordinatensystem dargestellt. Großbuchstaben bezeichnen den undeformierten

Zustand. Die Größen im deformierten Zustand werden mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet. Geht man von der in den Gewebeschnitten im vorigen Kapitel dargestellten Geometrie eines Gewebes aus, kann man sich die Fadenverläufe im Querschnitt als Funktionen von X_1 in Ketttrichtung und X_2 in Schussrichtung vorstellen.

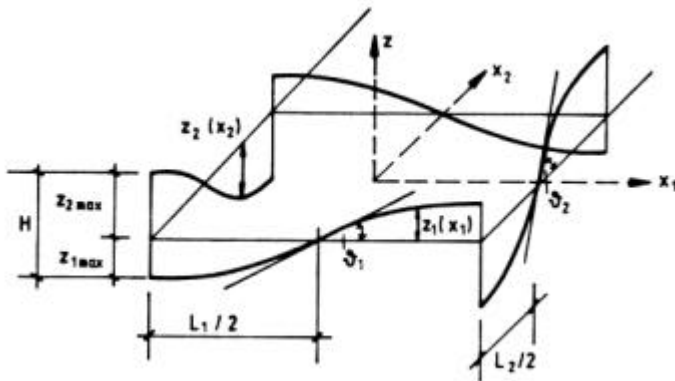


Bild 5.2.2: Einheitszelle mit Bezeichnungen und Koordinatensystem für die geometrischen Kenngrößen im Strukturmodell im undeformierten Zustand [3]

Der Verlauf der Mittelachse des Kett- bzw. des Schussfadens werde im undeformierten Zustand durch die Funktionen

$$Z_1 = Z_1(X_1)$$

$$Z_2 = Z_2(X_2)$$

und im deformierten Zustand durch

$$z_1 = z_1(x_1)$$

$$z_2 = z_2(x_2)$$

beschrieben. Die Periodenlängen sind $2L_1$ bzw. $2L_2$.

Die Bogenlängen der Kettfaden- und der Schussfadenachse in diesem Teil der Einheitszelle berechnen sich zu:

$$\Sigma_1 = \int \sqrt{1 + \left[\frac{dZ_1}{dX_1} \right]^2} dX_1$$

$$\Sigma_2 = \int \sqrt{1 + \left[\frac{dZ_2}{dX_2} \right]^2} dX_2$$

im undeformierten Zustand.

Im deformierten Zustand gilt entsprechend:

$$\mathbf{s}_1 = \int \sqrt{1 + \left[\frac{dz_1}{dx_1} \right]^2} dx_1$$

$$\mathbf{s}_2 = \int \sqrt{1 + \left[\frac{dz_2}{dx_2} \right]^2} dx_2$$

Der Abstand der Fadenachsen in den Knotenpunkten, in denen sich die Fäden kreuzen, ergibt sich zu:

$$H = -Z_1 \left(\frac{L_1}{2} \right) + Z_2 \left(\frac{L_2}{2} \right) \text{ im undefor mierten Zustand und}$$

$$h = -z_1 \left(\frac{l_1}{2} \right) + z_2 \left(\frac{l_2}{2} \right) \text{ im deformierten Zustand.}$$

Der Zusammenhang zwischen deformiertem und undefor mierten Zustand sei:

$$x_1 = x_1(X_1)$$

$$x_2 = x_2(X_2)$$

Die linearen Dehnungen der Einheitszelle in Kett- und Schussrichtung lassen sich schreiben als:

$$U_{11} = (l_1 - L_1) / L_1$$

$$U_{22} = (l_2 - L_2) / L_2,$$

Die lokalen von X_1 und X_2 abhängigen Dehnungen des Kett- und des Schussfadens sind:

$$\mathbf{e}_1 = \sqrt{\frac{1 + (dz_1/dx_1)^2}{1 + (dZ_1/dX_1)^2}} \frac{dx_1}{dX_1} - 1$$

$$\mathbf{e}_2 = \sqrt{\frac{1 + (dz_2/dx_2)^2}{1 + (dZ_2/dX_2)^2}} \frac{dx_2}{dX_2} - 1$$

Diese Dehnungen ε_1 bzw. ε_2 sind also Funktionen von X_1 bzw. X_2 . Bestimmt man die Dehnung über den Unterschied der Längen im undefor mierten und deformierten Zustand, erhält man:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{s}_1 - \Sigma_1}{\Sigma_1}$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{s}_2 - \Sigma_2}{\Sigma_2}$$

Für affine Gewebedeformationen gilt:

$$x_1 = \mathbf{m}_1 X_1$$

$$x_2 = \mathbf{m}_2 X_2$$

Für die Makrodehnungen U_{11} und U_{22} erhält man:

$$U_{11} = \mathbf{m}_1 - 1$$

$$U_{22} = \mathbf{m}_2 - 1.$$

Mit den Zusammenhängen der Steigungen im undeformierten und deformierten Zustand der Fadenkurven und den Abkürzungen

$$a_1 / \mathbf{m}_1 = k_1$$

$$a_2 / \mathbf{m}_2 = k_2$$

erhält man für die gemittelten Fadendehnungen

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{m}_1 g_1(k_1) - 1$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{m}_2 g_2(k_2) - 1$$

mit

$$g_1(k_1) = \frac{\int \sqrt{1 + k_1^2 (dZ_1 / dX_1)^2} dX_1}{\int \sqrt{1 + (dZ_1 / dX_1)^2} dX_1}$$

$$g_2(k_2) = \frac{\int \sqrt{1 + k_2^2 (dZ_2 / dX_2)^2} dX_2}{\int \sqrt{1 + (dZ_2 / dX_2)^2} dX_2}$$

5.2.2. Das Kraft-Dehnungsverhalten der Einheitszelle

Trennt man die Gewebefäden an den Nullstellen der Fadenkurve auf, verschwindet in diesen Wendepunkten die Fadenkrümmung wie sich am Bild 5.2.3 ablesen lässt.

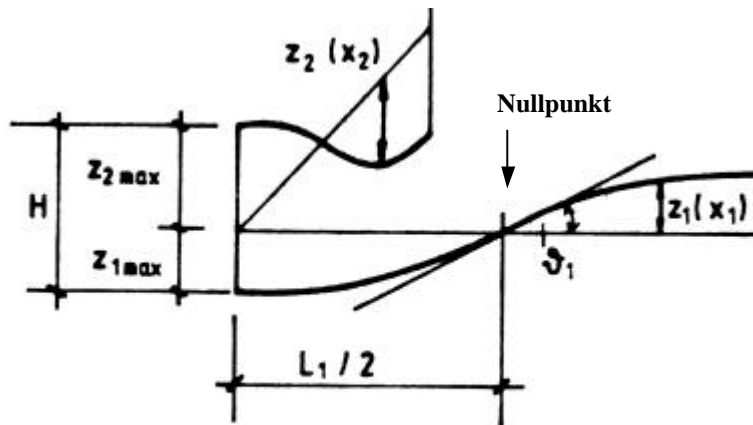


Bild 5.2.3: Nullpunkt der Fadenkurve [3]

Damit sind nur Schnittkräfte und keine Schnittmomente anzusetzen. Die Fadenkräfte in Z-Richtung lauten damit:

$$F_1 \sin \mathbf{j}_1 = F_2 \sin \mathbf{j}_2$$

wobei \mathbf{j} der Winkel ist, den die Kurve im deformierten Zustand zur X_1 - X_2 -Ebene hat. Mit

$$\tan \mathbf{j}_1 = dz_1 / dx_1(0)$$

$$\tan \mathbf{j}_2 = dz_2 / dx_2(0)$$

ergibt sich:

$$F_1 S_1 = F_2 S_2,$$

wobei:

$$S_1 = \frac{k_1 Z_1(0)}{\sqrt{1 + k_1^2 Z_1(0)^2}} = k_1 Z_1(0) c_1$$

$$S_2 = \frac{k_2 Z_2(0)}{\sqrt{1 + k_2^2 Z_2(0)^2}} = k_2 Z_2(0) c_2$$

Mit den gemittelten Dehnungen $\bar{\epsilon}_1$ und $\bar{\epsilon}_2$ ergeben sich als Stoffgesetze für Kett- und Schussfäden:

$$F_1 = F_1(\bar{\mathbf{e}}_1)$$

$$F_2 = F_2(\bar{\mathbf{e}}_1)$$

Projiziert man die Fadenkraft in die X_1 - X_2 -Ebene, erhält man die makroskopischen Eulerschen Spannungen n_{11} in Kettrichtung und n_{22} in Schussrichtung durch Division durch den Fadenabstand im deformierten Zustand:

$$n_{11} = F_1 / l_2 \cos \mathbf{j}_1 = F_1 / l_2 c_1$$

$$n_{22} = F_2 / l_1 \cos \mathbf{j}_2 = F_2 / l_1 c_2$$

Projiziert man die Fadenkraft auf den undeformierten Abstand, erhält man die Lagrangeschen Spannungen L_{11} und L_{22} :

$$L_{11} = F_1 / L_2 \cos \mathbf{j}_1 = F_1 / L_2 c_1$$

$$L_{22} = F_2 / L_1 \cos \mathbf{j}_2 = F_2 / L_1 c_2$$

5.2.3. Berücksichtigung der Beschichtung

Der Einfluss der Beschichtung wird durch eine Feder zwischen den aufeinanderfolgenden Knoten eines Fadens modelliert. Man verwendet je nach Beschichtung dabei ein elastisches oder viskoelastisches Element. Die Geometrie des Gewebes verändert sich dabei nicht, sodass auch die bestehenden Formeln einfach übernommen werden können. Zur Definition der Spannungen fügt man ein Zusatzglied hinzu:

$$n_{11}^* = \frac{F_1}{L_1} \cos \mathbf{j}_1 + P_1$$

$$n_{22}^* = \frac{F_2}{L_2} \cos \mathbf{j}_2 + P_2$$

5.2.4. Definition der tangentialen Moduln

Als tangentielle Moduln werden die Ableitungen der Spannungen nach den Verzerrungen verstanden, allgemein:

$$E_{abtd} = \frac{\partial L_{ab}}{\partial U_{td}}$$

Dies ist der Tensor vierter Stufe der tangentialen Steifigkeiten oder Moduln.

Für fadenparalleles Verhalten gilt:

$$E_{1111} = \frac{\partial L_{11}}{\partial U_{11}},$$

$$E_{2222} = \frac{\partial L_{22}}{\partial U_{22}},$$

$$E_{1122} = \frac{\partial L_{11}}{\partial U_{22}}$$

$$E_{2211} = \frac{\partial L_{22}}{\partial U_{11}}$$

Für ein hyperelastisches Materialgesetz lassen sich die Spannungen aus einer

Potentialdichte \mathbf{p} , die eine Funktion der Dehnungen U_{11} und U_{22} ist,

$\mathbf{p} = \mathbf{p}(U_{11}, U_{22})$, durch die Vorschrift

$$L_{11} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial U_{11}}, L_{22} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial U_{22}} \text{ bestimmen. In diesem Fall muss wegen}$$

$$E_{abtd} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial U_{ab} \partial U_{td}} \text{ und wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen gelten:}$$

$$E_{1122} = E_{2211} .$$

Daraus erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{L_2} \frac{\partial k_1}{\partial \mathbf{m}_2} (E_{11} \mathbf{m} g_{11} c_1 + F_1 c_{11}) = \frac{1}{L_1} \frac{\partial k_2}{\partial \mathbf{m}_1} (E_{22} \mathbf{m} g_{22} c_2 + F_2 c_{22})$$

5.2.5. Das Dreiecksmodell

Zur Vereinfachung können für die Fadenkennlinien lineare Verläufe zwischen den Knoten angenommen werden. Dieses Dreiecksmodell wird in Bild 5.2.4 gezeigt, zur deutlicheren Darstellung der Bezeichnungen wird in Bild 5.2.5 eine Einheitszelle herausvergrößert.

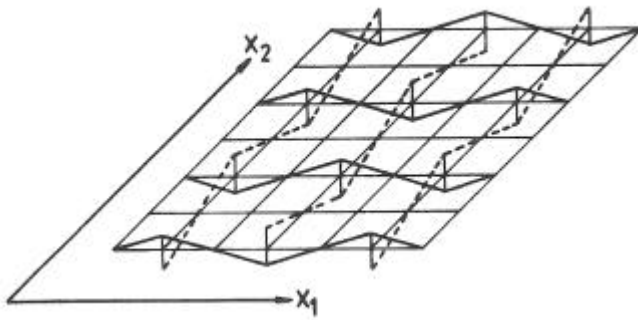


Bild 5.2.4: Dreiecksmodell mit - Kettrichtung,
 --- Schussrichtung [3]

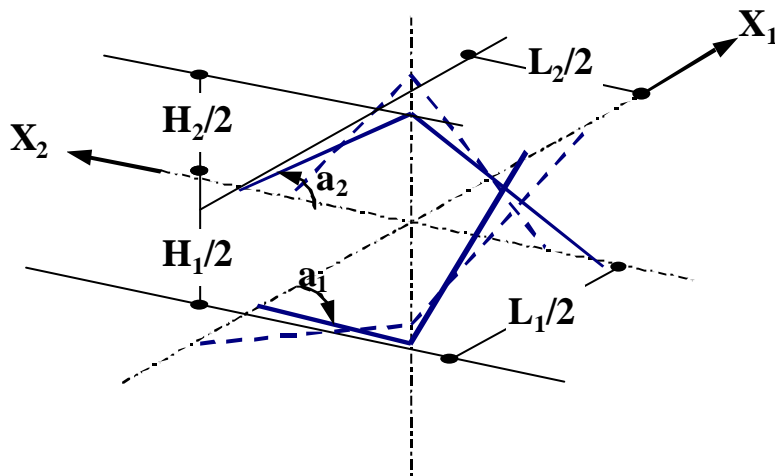


Bild 5.2.5: Dreiecksmodell, undeformierter Zustand mit Bezeichnungen, de-
 formierter Zustand gestrichelt, Bezeichnungen entsprechend mit Kleinbuchstaben

Im Unterschied zu den oben aufgeführten Formeln, wird angenommen, dass die Fadenkurven Z_1 und Z_2 lineare Funktionen von X_1 und X_2 sind:

$$Z_1 = -m_1 X_1, \quad 0 < X_1 < L_1$$

$$Z_2 = -m_2 X_2, \quad 0 < X_2 < L_2.$$

Im deformierten Zustand gilt entsprechend:

$$z_1 = a_1 m_1 X_1$$

$$z_2 = a_2 m_2 X_2.$$

Als Bogenlängen im betrachteten Intervall ergeben sich im undeformierten Zustand:

$$\Sigma_1 = L_1 \sqrt{1 + m_1^2}$$

$$\Sigma_2 = L_2 \sqrt{1 + m_2^2} ,$$

im deformierten Zustand:

$$\sigma_1 = \mu_1 L_1 \sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}$$

$$\sigma_2 = \mu_2 L_2 \sqrt{1 + k_2^2 m_2^2} .$$

Die gemittelten Fadendehnungen entsprechen hier den lokalen Fadendehnungen:

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 = \mu_1 \sqrt{\frac{1 + k_1^2 m_1^2}{1 + m_1^2}} - 1$$

$$\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 = \mu_2 \sqrt{\frac{1 + k_2^2 m_2^2}{1 + m_2^2}} - 1 .$$

Blum [3] nahm bisher die Knotenabstände als konstant an und gab an:

$$m_1 L_1 + m_2 L_2 = k_1 \mu_1 m_1 L_1 + k_2 \mu_2 m_2 L_2 .$$

Aufgrund von Messergebnissen vor allem an unbeschichteten Geweben, bei denen sich negative Querdehnzahlen ergaben, soll das Modell an dieser Stelle erweitert werden. Eine mögliche Erklärung für das Entstehen von negativen Querdehnzahlen ist in der bislang unberücksichtigten Dickenänderung des Gewebes zu finden. Deshalb wird hier nun ein Federelement am Knoten eingebaut.

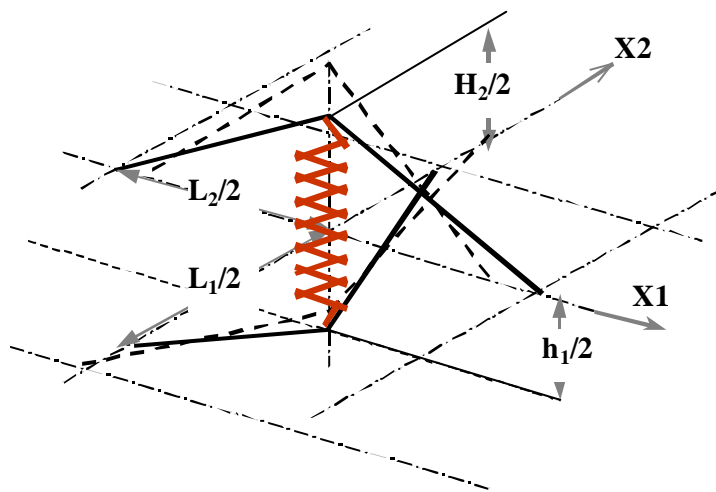


Bild 5.2.6: Berücksichtigung der Dickenänderung durch ein Federelement

Man erhält damit:

$$m_1 L_1 + m_2 L_2 - (k_1 \delta_1 m_1 L_1 + k_2 \delta_2 m_2 L_2) = d F_1 \frac{k_1 m_1}{\sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}}$$

worin δ die Federnachgiebigkeit ist.

Als Gleichgewicht in normaler Richtung am Knoten erhält man:

$$F_1 \frac{k_1 m_1}{\sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}} = F_2 \frac{k_2 m_2}{\sqrt{1 + k_2^2 m_2^2}}.$$

Damit sind die Spannungen:

$$L_{11} = \frac{1}{L_1} \left[F_1 \frac{k_1 m_1}{\sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}} + P_1 \right]$$

$$L_{22} = \frac{1}{L_2} \left[F_2 \frac{k_2 m_2}{\sqrt{1 + k_2^2 m_2^2}} + P_2 \right].$$

5.2.5. Zusammenfassung der wichtigsten Formeln

Zum Schluss sollen noch einmal die wichtigsten Formeln zusammengefasst werden:

$$L_{11} = 1/L_2 (F_1(\bar{\epsilon}_1) c_1(k_1) + P_1(\mathbf{m}_1))$$

$$L_{22} = 1/L_1 (F_2(\bar{\epsilon}_2) c_2(k_2) + P_2(\mathbf{m}_2))$$

$$\bar{\epsilon}_1 = \mathbf{m}_1 g_1(k_1) - 1$$

$$\bar{\epsilon}_2 = \mathbf{m}_2 g_2(k_2) - 1$$

$$F_1 = F_1(\bar{\epsilon}_1)$$

$$F_2 = F_2(\bar{\epsilon}_2)$$

$$F_1(\bar{\epsilon}_1) S_1(k_1) = F_2(\bar{\epsilon}_2) S_2(k_2)$$

$$m_1 L_1 - m_2 L_2 - (k_1 m_1 m_1 L_1 + k_2 m_2 m_2 L_2) = d F_1 \frac{k_1 m_1}{\sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}}$$

Für die Makrodehnungen U_{11} und U_{22} gilt:

$$\mathbf{m}_1 = 1 + U_{11}$$

$$\mathbf{m}_2 = 1 + U_{22}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} n'_{22} (l_1 \sin \alpha + l_2 \cos \alpha).$$

Für den Winkel α muss aus Gleichgewichtsgründen gelten:

$$\tan \alpha = \frac{n'_{11} l_s^2 + n'_{22} l_K^2}{n'_{11} l_K^2 + n'_{22} l_s^2}.$$

Damit ergeben sich die Schubspannungen der Einheitszelle aus der Differenz der Kraftkomponenten:

$$n_{12} l_s = F_2 \cos \alpha - F_1 \sin \alpha$$

$$n_{21} l_K = F_2 \sin \alpha - F_1 \cos \alpha.$$

Der Vollständigkeit halber werden noch die Dehnungsbeziehungen angegeben:

$$\epsilon'_{11} = \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha - \epsilon_{12} \sin^2 \alpha$$

$$\epsilon'_{22} = \epsilon_{11} \sin^2 \alpha + \epsilon_{22} \cos^2 \alpha + \epsilon_{12} \sin^2 \alpha$$

$$\epsilon'_{12} = \frac{1}{2} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin^2 \alpha + \epsilon_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

5.3.2. Phänomenologisches Modell für fadenparalleles Verhalten und Schub

Da mit dem in Kapitel 5.1 beschriebenen Strukturmodell des Gewebes nicht-fadenparallele Belastung und Schubspannungen nicht erfasst werden können, wurde von Blum, Losch und Luz [8] der Ansatz für ein phänomenologisches Stoffgesetz gemacht. Dabei wird für ein orthotropes Material von der inneren Energiedichte ausgegangen. Angenommen wurde das Dreiecksmodell wie oben beschrieben, das lokal hyperelastisch ist, womit die Definition einer inneren Potentialdichte π_C als Funktion der Verzerrungen $U_{\alpha\beta}$ möglich wird.

Es gilt:

$\pi_U = \pi_U(C_{\alpha\beta})$, und man erhält den Jaumannschen Spannungstensor $J_{\alpha\beta}$, der im Hauptachsensystem der Deformation gleich dem Lagrangeschen Spannungstensor ist:

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial \pi}{\partial U_{ab}}$$

Zur Berücksichtigung der Einschränkungen, der die Potentialdichte aufgrund der anisotropen Struktur unterliegt, wird die Symmetriegruppe des Gewebes, das als orthogonal anisotropes zweidimensionales Kontinuum betrachtet wird, aufgestellt.

Betrachtet wird eine Kreisscheibe des Materials, auf die ein homogener Spannungszustand aufgebracht wird. Der Kreis verformt sich zu einer Ellipse. Resultierende Dehnungen und die zur Deformation benötigte Energie werden gemessen. Das Material wird wieder entspannt, der ursprüngliche Kreis zeigt sich wieder und werde mit der Drehmatrix Ω um einen beliebigen Winkel verdreht. Nun wird räumlich gesehen derselbe Spannungszustand von vorn aufgebracht, die resultierenden Deformationen und die zugehörige Energie gemessen. Im allgemeinen Fall werden zu gleichen Spannungszuständen unterschiedliche Energien gehören. Bildlich dargestellt in Bild 5.3.2 wird dies noch deutlicher:

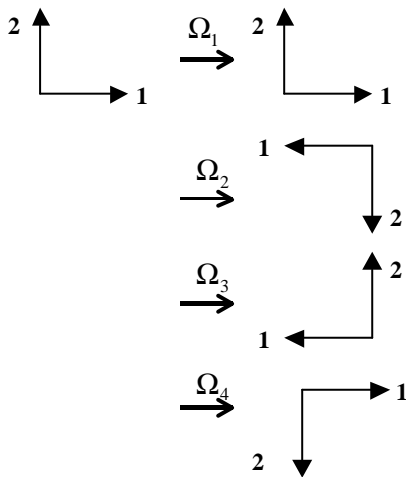


Bild 5.3.2: Darstellung zur Überlegung der Symmetriegruppen eines anisotropen Materials

Alle Drehungen, bei denen sich unter räumlich gleichem Spannungszustand die gleichen Deformationen und Energien ergeben, bilden die Symmetriegruppe des Materials. Die Verzerrungen C transformieren sich nach:

$$\tilde{C}_{\alpha\beta} = \Omega_{\tau\alpha} \Omega_{\sigma\beta} C_{\tau\sigma}$$

Für π muss dann gelten:

$$\pi(C_{\alpha\beta}) = \pi(\Omega_{\tau\alpha} \Omega_{\sigma\beta} C_{\tau\sigma}).$$

Legt man nun die 1-Achse parallel zur Kettrichtung und die 2-Achse parallel zur Schussrichtung, ergeben sich für die Matrizendarstellungen der Drehungen:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Drehung um } 2\pi,$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Drehung um } \pi,$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Spiegelung an der 2-Achse,}$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Spiegelung an der 1-Achse.}$$

Da in den Drehmatrizen der Symmetriegruppe nur die Komponenten 1 und -1 auftauchen, erhält man in ausgewählten Koordinatensystemen:

$$\tilde{C}_{11} = C_{11}$$

$$\tilde{C}_{22} = C_{22}$$

$$\tilde{C}_{12} = \pm C_{12}$$

für alle Drehungen der Symmetriegruppe. Damit kann man für die Invarianten angeben:

$$I_U = U_{11}$$

$$II_U = U_{22}$$

$$III_U = U_{12}^2.$$

Man kann nun die innere Potentialdichte π als Funktion dieser Invarianten ansetzen:

$$\pi = \pi_U(I_U, II_U, III_U).$$

Es wird wieder von einem Koordinatensystem ausgegangen, das parallel zu den Hauptanisotropierichtungen liegt. Im Fall fadenparalleler Belastungen ergibt sich die Potentialdichte des Gewebes aus der Summe der Potentiale der Einzelfäden. Aus

$$\pi_1 = \pi_1(\epsilon_1)$$

$$\pi_2 = \pi_2(\varepsilon_2)$$

ergibt sich bezogen auf die Längen der Fäden der Einheitszelle:

$$\pi = \pi_1(\varepsilon_1)\sqrt{1+m_1^2} + \pi_2(\varepsilon_2)\sqrt{1+m_2^2} .$$

Das Gesamtpotential wird als Summe des fadenparallelen Anteils und des Schubanteils angenommen:

$$\pi = \pi_p + \pi_s$$

bzw. ausführlich:

$$\pi = \pi_1(\varepsilon_1) + \pi_2(\varepsilon_2) + \pi_s(C_{12})$$

In Kapitel 7 wird näher darauf eingegangen und der Nachweis erbracht, dass die Zulässigkeit dieses Ansatzes im Versuch bestätigt werden konnte.

6. Versuche an Luftschiffmaterialien

6.1. Fadenparallele Versuche

Nun sind die Grundlagen, die theoretischen Betrachtungen der mechanischen Eigenschaften von beschichteten Geweben und die Überlegungen für die erforderlichen Kriterien für die Hülle eines Prallluftschiffes abgeschlossen. Damit kann es jetzt an die Untersuchung der ausgewählten Materialien gehen. Zuerst werden einachsige Versuche an Fäden und Gewebestreifen zum Kraft-Dehnungs-Verhalten und zur Bestimmung von Festigkeiten durchgeführt.

An erster Stelle steht hierbei **die Festigkeit des unverarbeiteten Fadens**. Da die Rohfäden nicht erhältlich waren, wurde beim Vectranfaden mit der rechnerischen Festigkeit gerechnet, die vom Hersteller mit 2,3 N/denier angegeben wurde. Die Festigkeitswerte für hochfeste p-Aramidfasern liegen zwischen $205 \text{ cN/tex} = 1,8 \text{ N/den}$ (Kevlar 29 von DuPont) und $235 \text{ cN/tex} = 2,08 \text{ N/den}$ (Kevlar HT von DuPont).

Als nächstes ist **die Festigkeit des aus dem Gewebe entnommenen Fadens** zu untersuchen. Dieser Wert kann nur bestimmt werden, wenn der Faden sich ohne größere Probleme und ohne sichtliche Zerstörung aus dem Gewebe herauslösen lässt. Das war bei den Geweben M00/156, M00/157, M00/158 und M00/160 der Fall. Beim Gewebe M00/155 handelt es sich um das Doppelgewebe, aus dem sich weder in Kett- noch in Schussrichtung Fäden ohne Schädigung extrahieren ließen. Dasselbe gilt für das Gewebe M00/159, eine Raschelware.

Aus dem Unterschied zwischen den Werten des Rohfadens und den Werten des entnommenen Fadens lässt sich die Sorgfalt des Webers und des Beschichters beim Umgang mit dem Faden ablesen. Angewendet wurde DIN 53 834 (01/79) sinngemäß.

Eine weitere sehr wichtige im einachsigen Versuch an Fäden messbare Größe ist **das Kraft-Dehnungs-Verhalten**. Dieser Wert ist später die entscheidende Eingangsgröße in das Gewebemodell. Man kann hiermit auch eine erste Abschätzung über die elastischen Moduln durchführen. Auch hier wurde wiederum DIN 53 834 (01/79) sinngemäß angewendet.

Nun beginnt man mit dem fertig beschichteten Gewebe und bestimmt **die Festigkeit eines Gewebestreifens**, der nach DIN EN ISO 13 934-1 (02/99) an den Rändern auf die erforderliche Breite ausgefädelt wurde. An diesen Werten relativ zu den Werten des bezogenen Fadens lässt sich der Einfluss der Einbindung der Fadens in das Gewebe ablesen. Führt man diesen Versuch mit Streifen unterschiedlicher Breiten durch, kann man aus der Abhängigkeit der Festigkeit von der Streifenbreite ebenfalls quantitative Aussagen über die Einbindung machen. Die auf die Masse bezogene Festigkeit ist eine sehr wichtige Größe für die Eignung zum Luftschiffbau, wo es sowohl auf Leichtigkeit als auch auf die Resistenz gegen hohe Kräfte und Stabilität ankommt. Angewendet wurde DIN EN ISO 13 934-1 (02/99) sinngemäß, die Streifenbreite wurde von einem Zentimeter bis zu 5 Zentimetern in 1-Zentimeter-Schritten variiert.

6.2 Versuche an aus dem Gewebe entnommenen Fäden

Bei der Untersuchung der mechanischen Eigenschaften wird mit dem Faden als dem für die Gewebefestigkeit maßgeblichen Bestandteil begonnen. Aus Mangel an rohen unverwebten Fäden wurden Versuchen an aus den Geweben entnommenen Fäden durchgeführt.

6.2.1 Material M00/156, Hersteller Rexam, Festigkeiten und Steifigkeiten des Fadens

6.2.1.1. Kettfaden

Zuerst seien die Messergebnisse für das elastische Verhalten von jeweils fünf Kett- und fünf Schussfäden aus Vectran der Feinheit 1500 denier dargestellt. Zu bemerken ist, dass bei diesem Gewebe jeweils zwei Fäden zusammen untersucht wurden, da dieses Gewebe eine Panama-Bindung hat und die beiden zusammenverwobenen Fäden nicht ohne Beschädigungen voneinander gelöst werden konnten.

Aus fünf gemessenen Kurven wurde der Mittelwert bestimmt. Der Mittelwert und eine gefittete Kurve werden in Bild 6.2.1 gezeigt. Der Fit gehorcht der Gleichung:

$$F = -147,06 + 142,69 \cdot \exp(\varepsilon/0,02621),$$

mit F = Kraft in N und ε = dimensionslose Dehnung,

woraus sich sofort die Steifigkeit C in kN durch Ableitung errechnen lässt. Es ergibt sich:

$$C = 142,69/0,02621 \cdot \exp(\varepsilon/0,02621).$$

Die gemittelte und die gefittete Kraftkurve sowie die berechnete Steifigkeitskurve des Fadens sind in Abhängigkeit von der Dehnung in den folgenden Bildern 6.2.1 und 6.2.2 dargestellt.

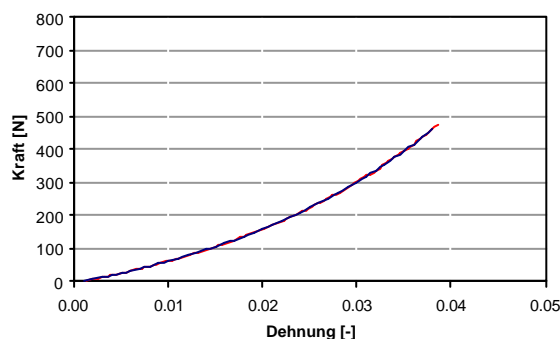


Bild 6.2.1: Mittelwert aller Messergebnisse und Fit im Vergleich für den Kettfäden aus M00/156, die Kurven liegen übereinander

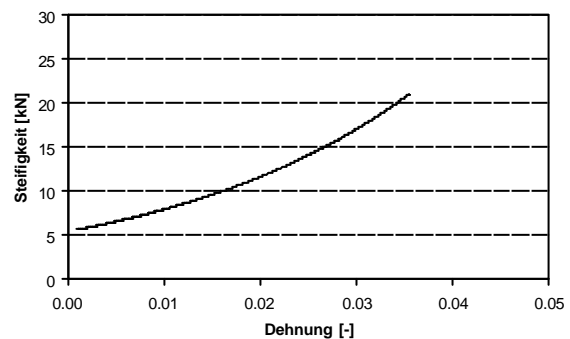


Bild 6.2.2: Gerechnete Steifigkeit des Doppelkettfadens M00/156 als Funktion der Dehnung

Die Übereinstimmung zwischen Mittelwert und Fit ist so gut, dass im Diagramm nur eine Kurve erkennbar wird. In Bild 6.2.2 wird die Steifigkeit des Doppelfadens, definiert durch die Ableitung der Kraft nach der Dehnung, gezeigt.

Aus dem Diagramm lässt sich ablesen, dass die Fadensteifigkeit mit der Dehnung überlinear zunimmt. Der Anfangswert der Steifigkeit liegt bei ca. 5 kN, der Endwert bei ca. 20 kN.

Zur Vervollständigung der Fadenkennwerte sei noch der Mittelwert der Festigkeit der doppelten Kettfäden angegeben: $F_B=517$ N.

6.2.1.2. Schussfäden

Nun werden die analogen Ergebnisse für den Schussfaden ohne weiteren Kommentar gezeigt.

Der Mittelwert aus den Messkurven und eine angefittete Kurve wird berechnet. Der Fit gehorcht der Gleichung:

$$F = -173 + 159 * \exp(\epsilon/0,0286),$$

woraus wieder die Steifigkeit C durch Ableitung errechnet wurde. Man erhält:

$$C = 159/0,0286 * \exp(\epsilon/0,0286).$$

Die entsprechenden Kurven sind in den Bildern 6.2.3 und 6.2.4 zu sehen.

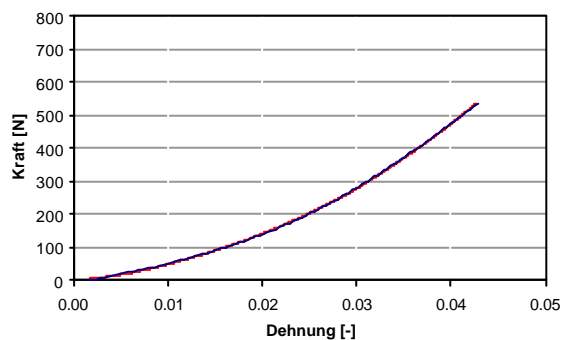


Bild 6.2.3: Mittelwert aller Messkurven und Fit zum Vergleich für den Doppelschussfaden M00/156

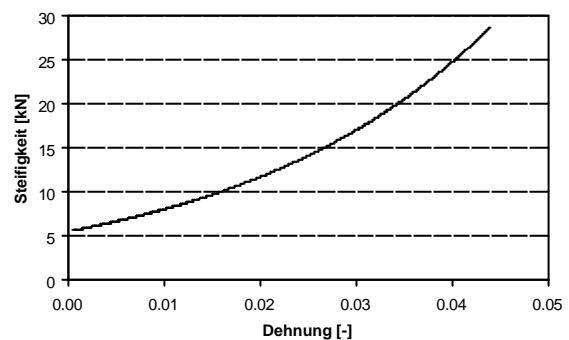


Bild 6.2.4: Steifigkeit des Doppelschussfadens M00/156 als Funktion der Dehnung

Die Bruchkraft der Doppelschussfäden lag im Durchschnitt bei: $F_B=595$ N.

6.2.1.3. Vergleich von Kette- und Schussfaden

Zum Abschluss der Darstellung des Kraft-Dehnungs-Verhaltens der Fäden aus M00/156 seien die mechanischen Eigenschaften von Kett- und Schussfaden gegenübergestellt. Dazu sind unten zuerst die graphische Darstellung des Kraft-Dehnungs-Verhaltens (Bild 6.2.5) und der Steifigkeit (Bild 6.2.6) abgebildet:

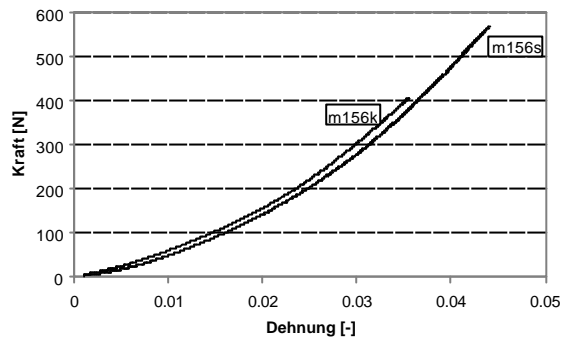


Bild 6.2.5. Kraft-Dehnungs-Verhalten von Kett- und Schussfäden M00/156

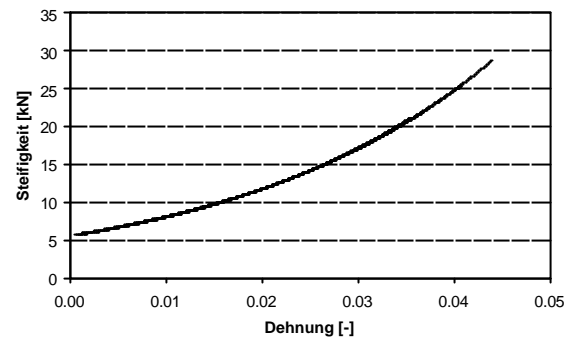


Bild 6.2.6: Steifigkeiten von Doppelkett- und Doppelschussfäden als Funktion der Dehnung im Vergleich M00/156

Der Kettfaden zeigt eine nur geringfügig größere Steifigkeit. Dies kommt auch darin zum Ausdruck, dass die Exponenten in den Fit-Kurven nur sehr geringe Unterschiede aufweisen: 0,0286 für den Kettfaden und 0,0262 für den Schussfaden. Die Festigkeit des Schussfadens ist mit 595 N höher als die des Kettfadens mit 517 N. Dieser Unterschied kann mit 13 % als signifikant angesehen werden. Der Kettfaden zeigt aber auch eine höhere Dehnung als der Schussfaden, was sich durch eine unterschiedliche geometrische Einbindung in das Gewebe erklären lässt.

6.2.2. Material M00/157, Hersteller Contitech, Festigkeiten und Steifigkeiten des Fadens

Zuerst seien wiederum die Messergebnisse für das Kraft-Dehnungs-Verhalten von jeweils fünf Kett- und fünf Schussfäden dargestellt.

6.2.2.1. Kettfäden

Im Bild 6.2.7 wird nur der Mittelwert an aus fünf entnommenen Kettfäden gemessenen Kraft-Dehnungslinien aus p-Aramid, Feinheit 1680 denier, gezeigt. Die zugehörige mit im Bild dargestellte Fitkurve gehorcht der Gleichung:

$$F = -79,70 + 804,70 \varepsilon + 104,71 * \exp(-\varepsilon/0,015) - 25,41 * \exp(-\varepsilon/0,093),$$

woraus wieder die Steifigkeit C durch Ableitung errechnet wurde. Die Steifigkeit ergibt sich zu:

$$C = 804,70 - 104,71/0,015 * \exp(-\varepsilon/0,015) + 25,41/0,093 * \exp(-\varepsilon/0,093).$$

Beim Aramidfaden hat man ein vom Vectranfaden deutlich verschiedenes Verhalten: Die Steifigkeit nähert sich beim Aramidfaden einem konstanten Wert an, während sie beim Vectranfaden bis zum Bruch ansteigt. Die entsprechenden Kurven werden in Bild 6.2.7 und Bild 6.2.8 gezeigt.

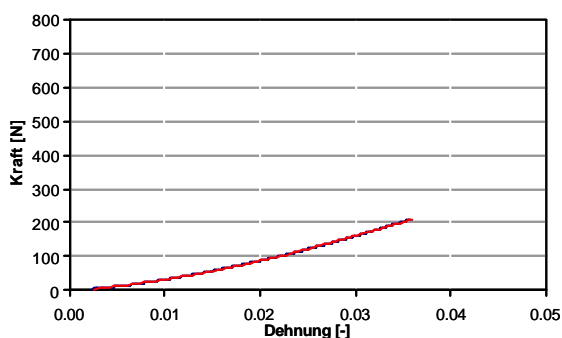


Bild 6.2.7: Mittelwert der gemessenen Kraft-Dehnungs-Kurven und Fit M00/157

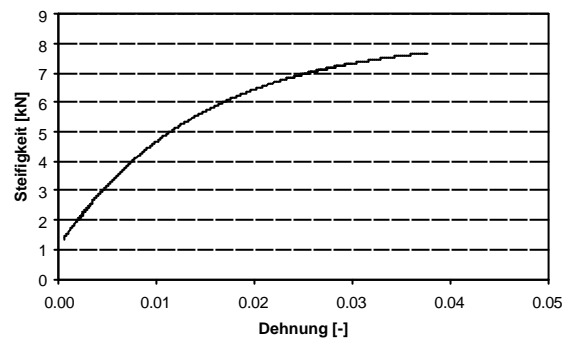


Bild 6.2.8: Steifigkeiten der Kettfäden als Funktion der Dehnung, M00/157

Bei der Steifigkeit der Aramidfäden kann man eine unterlineare Zunahme, die gegen einen Grenzwert geht, erkennen.

Die Festigkeiten der Kettfäden lagen im Mittel bei: $F_B=220 \text{ N}$.

6.2.2.2. Schussfäden

In Bild 6.2.9 wird der Mittelwert aus fünf Messkurven an p-Aramidfäden und eine angefittete Kurve gezeigt. Der Fit gehorchte der Gleichung:

$$F = -47,13 + 7957,70 \varepsilon + 39,82 * \exp(-\varepsilon/0,0094)$$

woraus man sofort die Steifigkeit C durch Ableitung errechnen kann. Es ergibt sich:

$$C = 7957,70 + 39,82/0,0094 * \exp(-\varepsilon/0,0094).$$

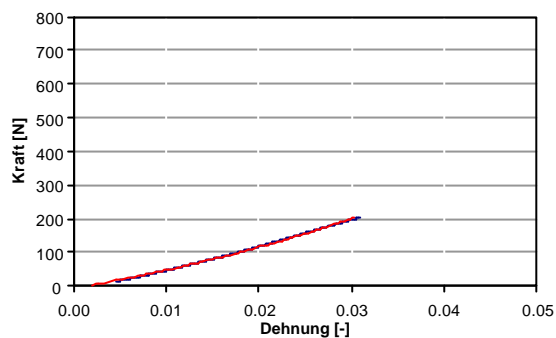


Bild 6.2.9: Mittelwert des Kraft-Dehnungs-Verhaltens des Schussfadens aus M00/157 und Fit

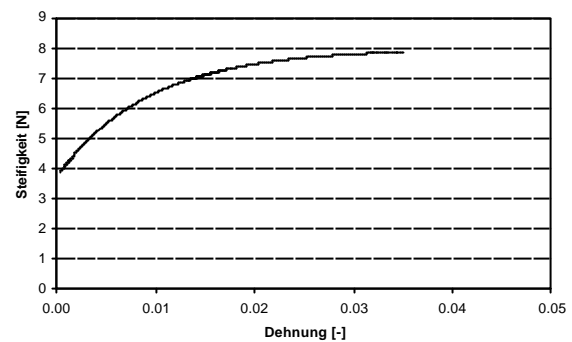


Bild 6.2.10: Steifigkeiten der Schussfäden als Funktion der Dehnung bei M00/157

Fit und Messkurve zeigen für höhere Dehnungen ein etwas unterschiedliches Verhalten. Die erreichten Steifigkeiten entsprechen aber denen der Kettfäden wie man aus Bild 6.2.10 ersehen kann.

Zum Schluss soll noch die gemessene Festigkeit der Schussfäden angegeben werden:

$$F_B = 247 \text{ N.}$$

6.2.2.3. Vergleich von Kettfäden und Schussfäden

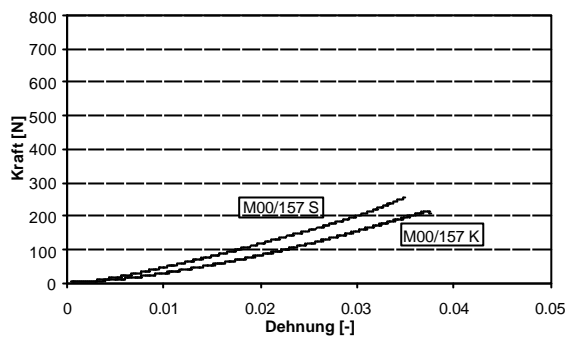


Bild 6.2.11: Kett- und Schussfäden von M00/157, Kraft-Dehnungs-Verhalten zum Vergleich

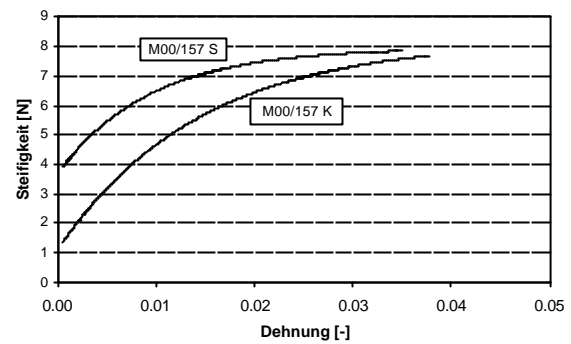


Bild 6.2.12: Steifigkeiten von Kett- und Schussfäden aus M00/157 als Funktion der Dehnung

Das Verhalten der Kettfäden unterscheidet sich hier deutlich von dem der Schussfäden: Die Schussfäden sind steifer und zeigen eine höhere Festigkeit. Dies ist ein Anzeichen dafür, dass, da für beide Webrichtungen der gleiche Faden eingesetzt wurde, der Schussfaden im Web- und Beschichtungsprozess schonender behandelt wird als der Kettfaden. Die daraus resultierenden verschiedenen Steifigkeiten sind klar im folgenden Bild zu erkennen.

6.2.3. Material M00/158, Hersteller Dover, Festigkeiten und Steifigkeiten

Zuerst werden wiederum die Messergebnisse für das Kraft-Dehnungs-Verhalten von jeweils fünf Kett- und Schussfäden aus Vectran 1500 denier dargestellt.

6.2.3.1. Kettfäden

Im nächsten Bild 6.2.13 wird der Mittelwert aus fünf Messkurven und eine angefittete Kurve gezeigt. Der Fit gehorchte der Gleichung:

$$F = 79,6964 + 76,286 * \exp(\epsilon/0,02693),$$

woraus sich die Steifigkeit C, die in Bild 6.2.14 dargestellt ist, durch Ableitung errechnen lässt. Man erhält:

$$C = 76,286/0,02693 * \exp(\epsilon/0,02693).$$

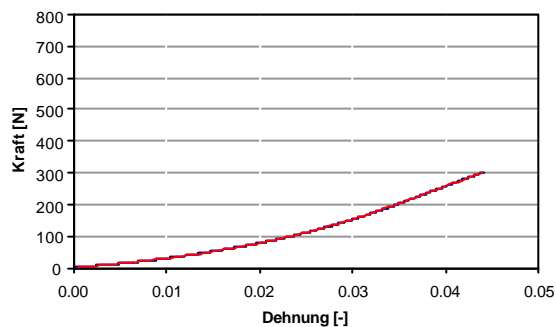


Bild 6.2.13: Mittelwert aus allen Messkurven und Fit, Kettfäden von M00/158

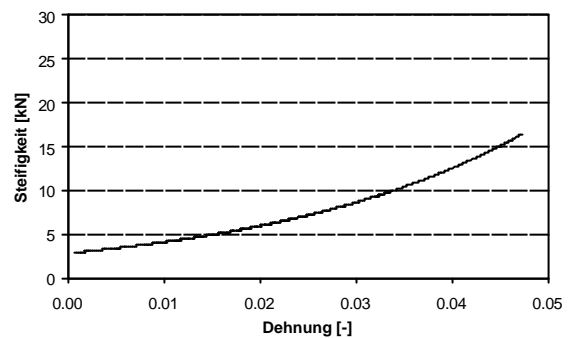


Bild 6.2.14: Steifigkeit als Funktion der Dehnung, Kettfäden aus M00/158

Die zugehörigen Bruchwerte lagen bei $F_B=314$ N.

6.2.3.2. Schussfäden

In Bild 6.2.15 wird der Mittelwert der an den Schussfäden ermittelten Messkurven und eine angefittete Kurve gezeigt. Der Fit gehorchte folgender Gleichung:

$$F = - 92,464 + 92,437 * \exp(\epsilon/0,02869),$$

woraus man die Steifigkeit C errechnen kann. Durch Ableiten ergibt sich:

$$C = 92,437/0,02869 * \exp(\epsilon/0,02869),$$

Die Steifigkeit ist in Bild 6.2.16 zu sehen.

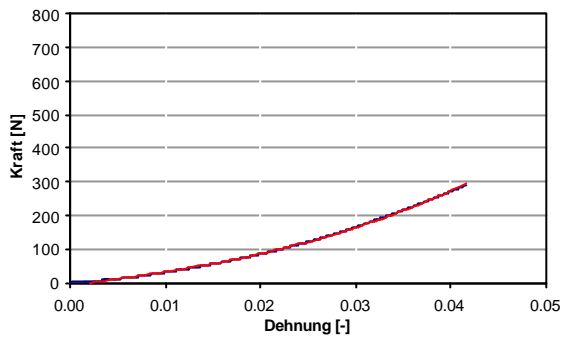


Bild 6.2.15: Mittelwert und Fit für Schussfäden aus M00/158

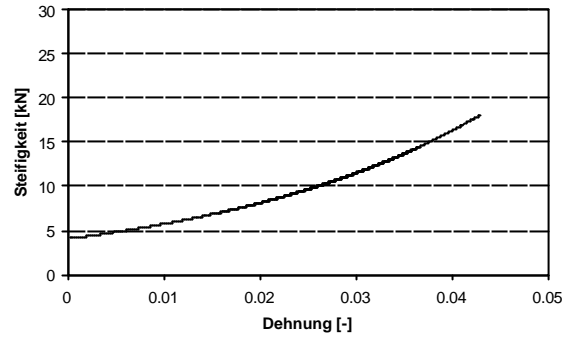


Bild 6.2.16: Steifigkeit als Funktion der Dehnung, M00/158, Schussfäden

Die Festigkeiten der Schussfäden aus M00/158 lag bei $F_B=306$ N.

6.2.3.3. Vergleich von Kett- und Schussfäden

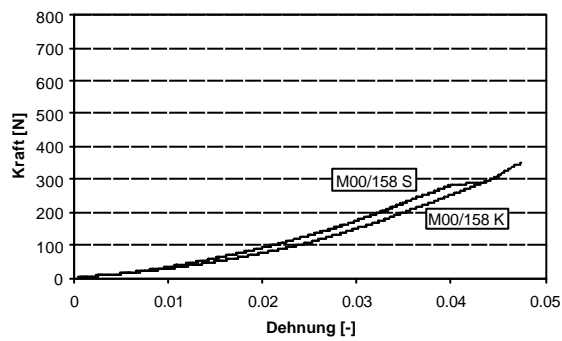


Bild 6.2.17: Vergleich der Kraft-Dehnungs-Kurven für Kett- und Schussfaden M00/158

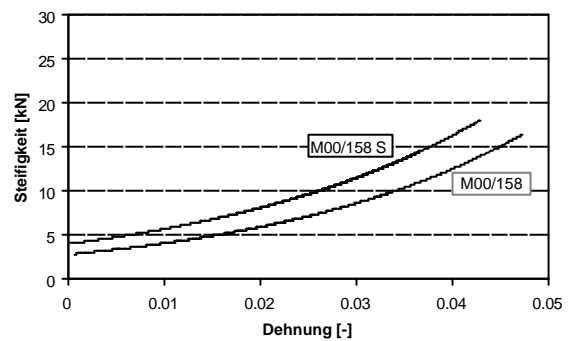


Bild 6.2.18: Vergleich der Steifigkeiten für Kett- und Schussfaden M00/158

6.2.4. Material M00/160, Hersteller Dover, Festigkeiten und Steifigkeiten

Hier waren zwischen Kettfäden und Schussfäden keine Unterschiede festgestellt worden, da es sich bei Material M00/160 um kein richtiges Gewebe, sondern ein Gelege aus lose übereinandergelegten Vectran-Fäden der Feinheit 3750 denier, die in ihrer Lage nur durch die Beschichtung fixiert werden, handelt. Dementsprechend werden die Fäden nur einmal dargestellt.

6.2.4.1. Kett- und Schussfäden

Der Fit der aus den gemessenen Kurven gemittelten Fadenkurve gehorchte der Gleichung:

$$F = -194 + 106,96 * \exp(\epsilon/0,0294),$$

woraus man die Steifigkeit C durch Ableitung errechnet zu:

$$C = 3.638 * \exp(\epsilon/0,0294).$$

Der Mittelwert der Messwerte der Fadenkurven ist im Vergleich mit dem Fit in Bild 6.2.19 zu sehen. Die daraus errechnete Steifigkeit ist in Bild 6.2.20 dargestellt.

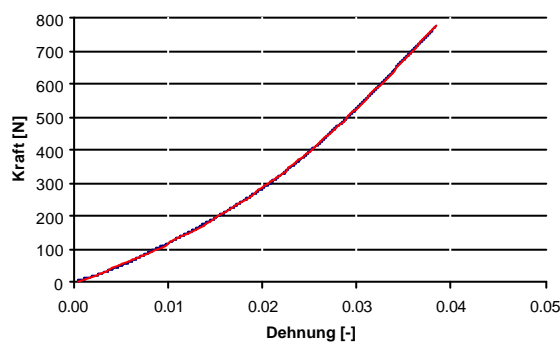


Bild 6.2.19: Kraft-Dehnungs-Verhalten des Fadens, Mittelwert und Fit M00/160

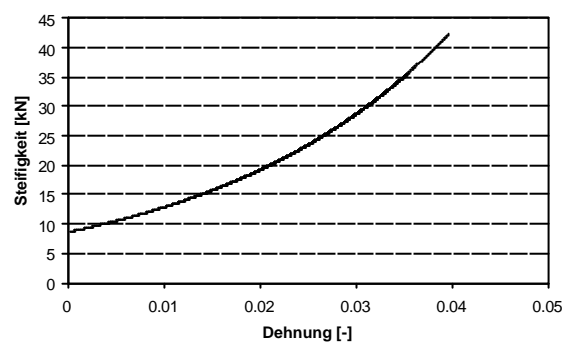


Bild 6.2.20: Steifigkeiten des Fadens M00/160

Die Bruchwerte lagen bei $F_B=782$ N.

6.3. Einachsige Versuche an Gewebestreifen unterschiedlicher Breite

Die einachsige Gewebefestigkeit wurde an Gewebestreifen unterschiedlicher Breite in einer einachsigen Zugprüfmaschine gemessen.

In der folgenden Tabelle sind nun alle im Zugversuch gemessenen Bruchwerte für die vorhandenen Gewebe dargestellt.

Tabelle 6.3.1: Ergebnisse der Zugversuche an Streifen unterschiedlicher Breite von 1 cm bis max. 4 cm ¹⁾

	Streifenbreite	Mittelwert bezogen auf die Breite	Standardabweichung	Mittelwert über alle Breiten	Standardabweichung
	[cm]	[kN/m]	[%]	[kN/m]	[%]
M00/155					
Kette	1	230	7,19		
	2	249	8,85		
	3	244	3,15	241	6,92
Schuss	1	303	14,08		
	2	258	10,72		
	3	275	3,65	279	11,72
M00/156					
	1	97	16,41		
	2	122	5,31		
	3	115	2,55	112	12,65
M00/157					
Kette	1	181	8,33		
	2	206	3,27		
	3	209	2,32		
	4	204	4,22		
	5	174	10,99	196	9,97
Schuss	1	204	18,83		
	2	154	5,86		
	3	191	22,76	183	20,22

Tabelle 6.3.1: Fortsetzung

M00/158					
Kette	1	227	22,76		
	2	216	7,02		
	3	248	5,79	230	13,58
Schuss	1	139	14,13		
	2	171	10,25		
	3	168	1,88	160	12,64
M00/160					
Kette	1	326	5,16		
	2	351	5,66		
	3	316	12,21	331	8,50
Schuss	1	272	15,39		
	2	313	2,55		
	3	328	4,28	304	11,05

¹⁾ Hierbei steht in der 2. Spalte die Breite der Versuchstreifen [cm], in der dritten der Mittelwert der Bruchspannung [kN/m] bei einer Mittelung über die Breite, in der vierten die zugehörige Standardabweichung, in der fünften der Mittelwert über alle Bruchspannungen, und in der letzten ist die dazu gehörige Standardabweichung aufgeführt.

Material M00/155, Hersteller Uretex, besteht aus zwei Geweben in Leinwandbindung, die zusammenkaschiert oder zusammenlaminiert wurden. Leider wurden hier nur Verbundbrüche in der Klemme erzielt, diese Messungen können deshalb nur als Anhaltswerte dienen.

Da bei **Material M00/156, Hersteller Rexam**, die Größe der Probe nicht ausreichend für die Herstellung von Streifenproben in Kettrichtung war, konnten nur Streifen in Schussrichtung untersucht werden.

Die Brüche traten teils in der freien Länge, teils in der Klemme auf. Da die Werte aber alle in der gleichen Größenordnung liegen, kann man von der Bruchkraft als einer signifikanten Messgröße sprechen.

Bei **Material M00/157, Hersteller Contitech**, traten die Brüche auch teils in der freien Länge, teils in der Klemme auf. Da aber wiederum alle Werte in der gleichen Größenordnung liegen, kann man auch die Messgröße als signifikant bezeichnen.

Bei **Material M00/158, Hersteller Dover**, traten die Brüche nochmals teils in der freien Länge, teils in der Klemme auf. Aber auch hier liegen alle Werte in der gleichen Größenordnung.

Für **Material M00/159, Hersteller Dover**, lag kein Material für Streifenversuche vor.

Bei den Streifenversuchen zum **Material M00/160, Hersteller Dover**, muss eigentlich nicht zwischen Kette und Schuss unterschieden werden, da die Konstruktion symmetrisch ist. Wie die Messung zeigt, liegen die Werte auch in derselben Größenordnung.

6.4. Zweiachsige Gewebeprüfungen

6.4.1. Versuchseinrichtung

Versuchseinrichtungen zur Messung des zweiachsigen Spannungs-Dehnungsverhaltens von Geweben gibt es schon seit Beginn des 20. Jahrhunderts. Neben Versuchen an Zylinderproben, die unter Innendruck gesetzt und mit zusätzlichen axialen Kräften versehen werden konnten, wurde schon damals von Haas [14] für Materialprüfungen im Luftschiffbau eine zweiachsige Prüfmaschine entworfen, die mit einer kreuzförmigen Probe bestückt und an zwei zueinander rechtwinkligen Seiten mit Gewichten belastet wurde. Die gegenüberliegenden Punkte waren fest bzw. ließen sich nur so weit verschieben, dass der Mittelpunkt des Kreuzes im Schnittpunkt der Belastungsachsen gehalten werden konnte.

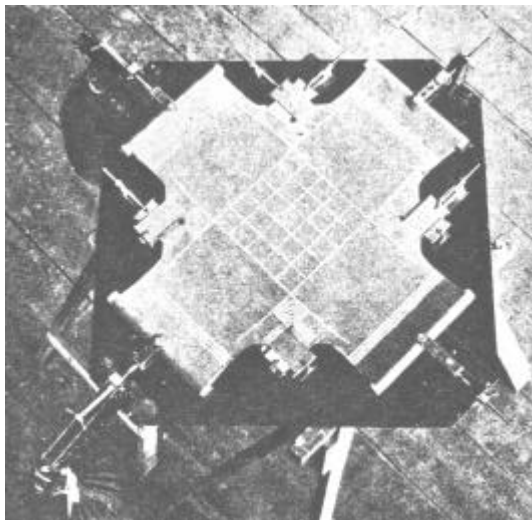


Bild 6.4.1: Zweiachsige Prüfeinrichtung [14]

Es wurde festgestellt, dass der Verzerrungszustand nicht homogen war. Deshalb wurden rechtwinklig zur Zugrichtung an den Seitenteilen der Probe Laschen mit Hilfsspanneinrichtungen angebracht.

Um auf diese Hilfsspanner verzichten zu können, wurde am Institut für Mechanik der Universität Stuttgart 1971 von Blum, Losch [19] und Reinhardt [26] eine zweiachsige Prüfmaschine mit hydraulischen Pressen konstruiert, bei der die Seitenarme in einzelne Laschen unterteilt wurden, an welche jeweils die gleiche Kraft angreift. Damit hat man zwar in den Laschen einen inhomogenen Spannungszustand, das Spannungs- und Verzerrungsfeld im mittleren Quadrat wird aber homogen.

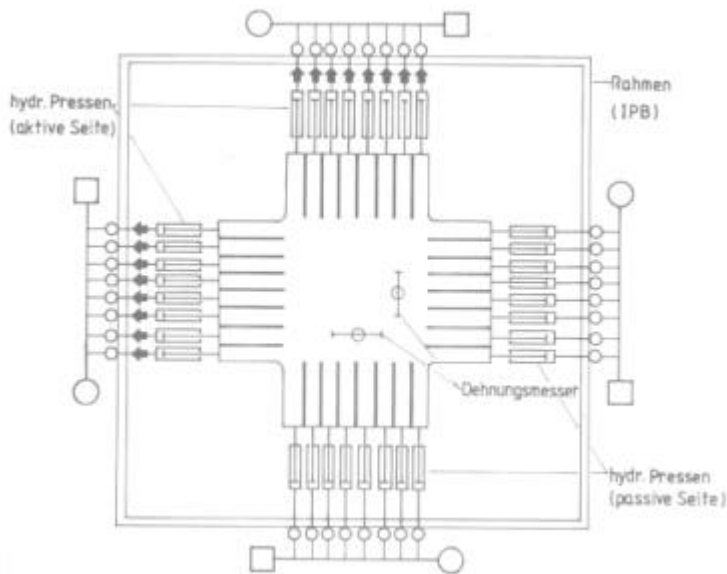


Bild 6.4.2: Prinzipskizze der an der Universität Stuttgart entwickelten Prüfeinrichtung zur Gewebeprüfung [19]

Die in dieser Arbeit vorgestellten zweiachsigen Zugversuche wurden an der vom Labor Blum selbst entwickelten Biaxmaschine mit Servomotorantrieb durchgeführt.

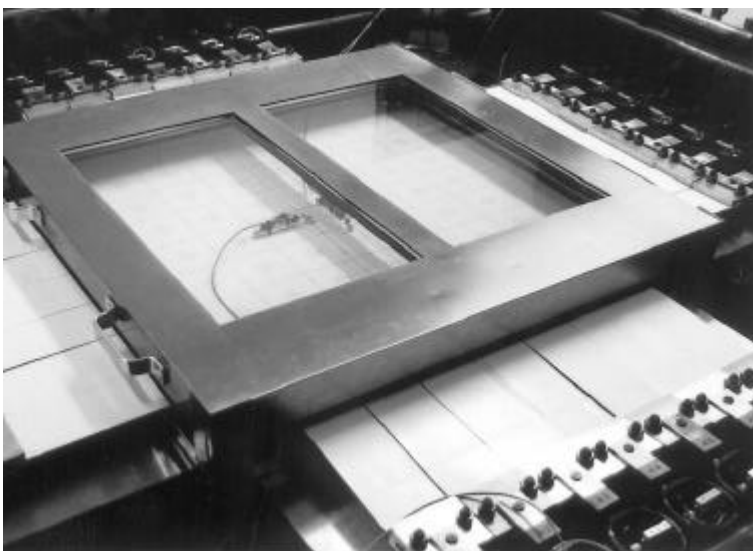


Bild 6.4.3: Biaxmaschine Labor Blum

Die Kraft wird über Klemmen, die an 10cm breiten Streifen befestigt sind, in die Gewebeprobe eingeleitet. Auf jeder Seite der quadratischen Probe gibt es sieben dieser Klemmen, die über eine Kraftmessdose an Kugelumlaufspindeln befestigt sind und zu insgesamt 28 Servomotoren führen, die alle einzeln geregelt werden. Diese sind auf Linearführungen montiert und können sich somit immer rechtwinklig zur Probe einstellen, um sicherzustellen, dass die Kraft immer einachsrig eingeleitet wird. Für die exakte Regelung wird die Kraft an jeder Spindel an selbst gebauten Kraftmessdosen mit einer Auflösung von weniger als 1% gemessen.

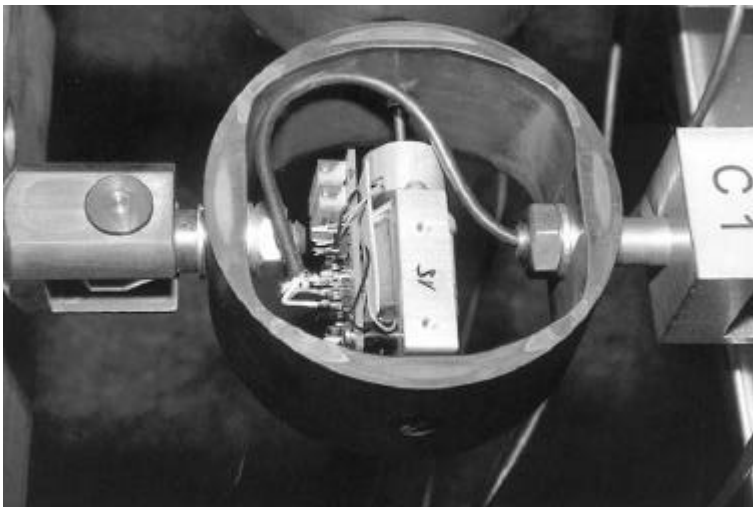


Bild 6.4.4: Kraftmessdose

Mit der Biaxmaschine können Kräfte bis zu 200 kN/m aufgebracht werden. Die Regelung erfolgt über zwei Regelkreise, die über einen Rechner gesteuert werden. Sowohl kraft- als auch dehnungsgesteuerte Versuche können gefahren werden.

Die Proben haben eine kreuzförmige Geometrie: in der Mitte ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 70cm, an das sich in jeder Richtung sieben Laschen der Breite 10cm und 27cm Länge anschließen. In die Laschenenden wird ein Keder eingeschweißt, der in die Klemmen der Biaxmaschine eingespannt wird.

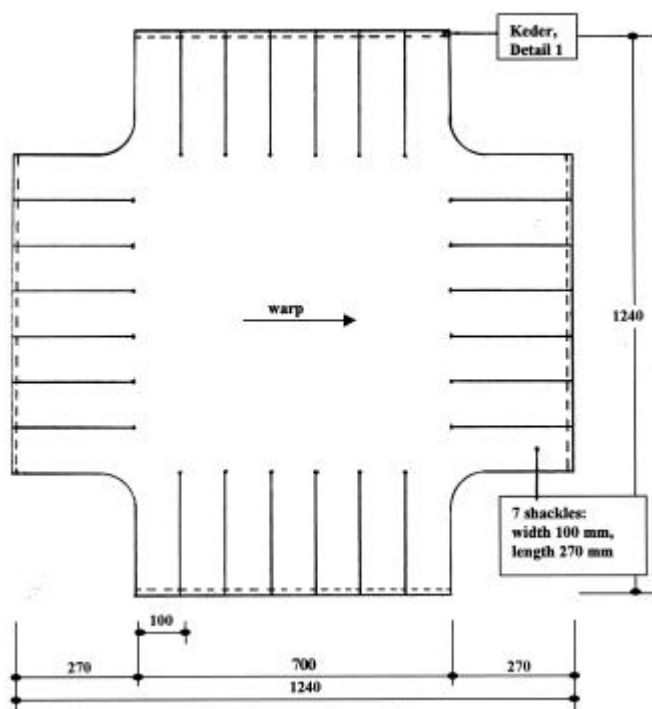


Bild 6.4.5: Biaxprobe

Zur Messung der Dehnung wird im mittleren Bereich der Biaxprobe, wo ein homogenes Spannungsfeld vorliegt, parallel zu Kett- und Schussrichtung jeweils ein potentiometrischer Längenaufnehmer angebracht. Die Längensensoren sind kalibriert mit einer nominalen Auflösung von $1 \mu\text{m}$.

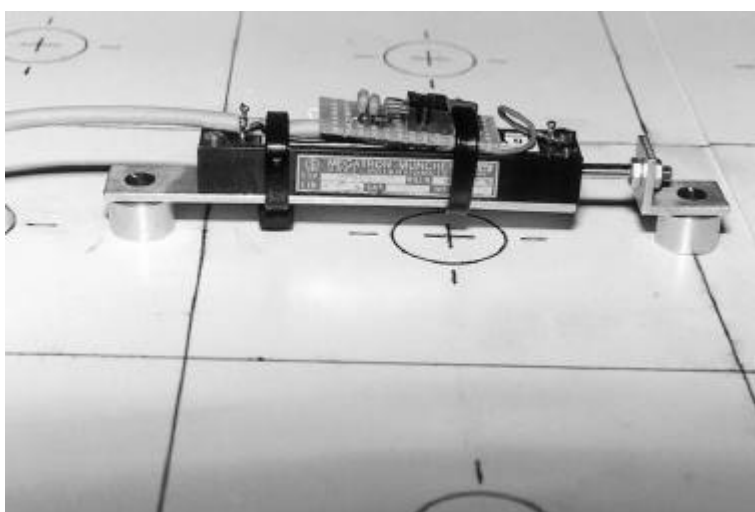


Bild 6.4.6: Potentiometrischer Längenaufnehmer

Als Versuchsanweisung wird das vom Labor Blum für die laboreigene Biaxprüfmaschine entwickelte Verfahren LBV-1106-1107 angewendet.

LBV-1106–1107

Zweiachsige Versuche:

Messung der Dehnungen als Funktion der Spannungen für die Spannungsverhältnisse 10/1, 5/1, 2/1, 1/1, 1/2, 1/5 und 1/10 mit jeweils n Zyklen unter -20, 20 und 70 °C für fadenparallele Hauptspannungen

Versuchseinrichtungen und Sensoren

Prüfeinrichtung: Biaxmaschine

Kraftsensor: Kraftmessdosen für Biaxmaschine, entweder 20 kN oder 5 kN

Längensensor: Potentiometer, auf die Probe aufgeschraubt, Anfangslänge 135 mm

Klemmen: Schraubklemmen entweder mit Stabeinlage oder mit Randkeder-

Sonstiges: -

Rechnerstart

Beim Starten zeigt der Rechner ein Bootmenu. Hier muss das booten ohne Netz gewählt werden, da sonst die Datenerfassungshardware nicht angesprochen werden kann. Als erstes wird ein Verzeichnis mit der Projektnummer des vorgesehenen Versuches erstellt.

Probenform und Präparation

Das Material muss in einer Kreuzprobe vorliegen, deren Abmessungen aus dem Bild zu entnehmen ist. Die Kreuzprobe sollte aus der Mitte der Bahn geschnitten sein. In der Mitte der Probe werden parallel zu Kette und Schuss jeweils eine 135 mm lange Strecke angezeichnet, an deren Enden mit einer Ahle ein kleines Loch gebohrt wird. In diese Löcher werden die Dehnungsaufnehmer mit Schrauben M3 so montiert, dass die abgeschätzte Verschiebung nach links und rechts sich ungehindert einstellen kann. Die Aufnehmer müssen nach den zu erwartenden Dehnungen und der notwendigen Auflösung ausgewählt werden. Ist an die Laschen der Probe ein Randkeder angeschweißt, können die vorliegenden Klemmplatten ohne Einlage verwendet werden. Ist kein Randkeder vorhanden, werden die Einlagestäbchen laut Zeichnung benützt.

Belastungsgeschichte

Dann ist eine Steuerdatei zu erstellen, in der die Spannungs- oder Dehnungsgeschichte des gewünschten Versuches definiert wird. Diese Steuerdatei und die entsprechenden Ergebnisdateien werden im erstellten Verzeichnis abgespeichert.

Gibt der Auftraggeber eine spezielle Belastungsgeschichte vor, muss diese in eine log-Datei umgesetzt werden.

Versuchsdurchführung

Alle Krafteinleitungsspindeln werden soweit wie möglich nach innen gefahren. Die Kraftmessdosen werden nach den maximal auftretenden Membranspannungen ausgewählt: Für Spannungen unterhalb 5 kN/m die kleineren und für höhere Spannungen die größeren. Danach wird die Probe eingespannt und manuell so gering wie möglich vorgespannt. Die Längensensoren werden aufgeschraubt, die Schraublöcher werden mit einer Ahle gestochen. Der Anfangsabstand (= der Messlänge) beträgt 135 mm. Alle Sensoren werden auf Null gesetzt und der Versuch wird gestartet.

Dokumentation

Nach dem Versuch wird der Rechner geschlossen und wieder neu gestartet. Beim neuen Booten wird die Bootversion mit Netz gewählt und die Versuchsdaten werden mitsamt der Log-Datei im Projekt auf der Platte L abgespeichert unter einem Verzeichnis mit dem Projektnamen abgespeichert.

Auswertung

Die Auswertung besteht darin, dass die Ergebnisse des Versuches mit den Ergebnissen der Rechnung verglichen und die freien Parameter angepasst werden müssen. Aus dem Programm können dann alle notwendigen Daten entnommen werden. Bei Vorgabe der Belastungsgeschichte von außen sind die geforderten Werte zu kennzeichnen und abzulegen.

6.4.2. Versuchsplanung fadenparalleler Zweiachsversuche

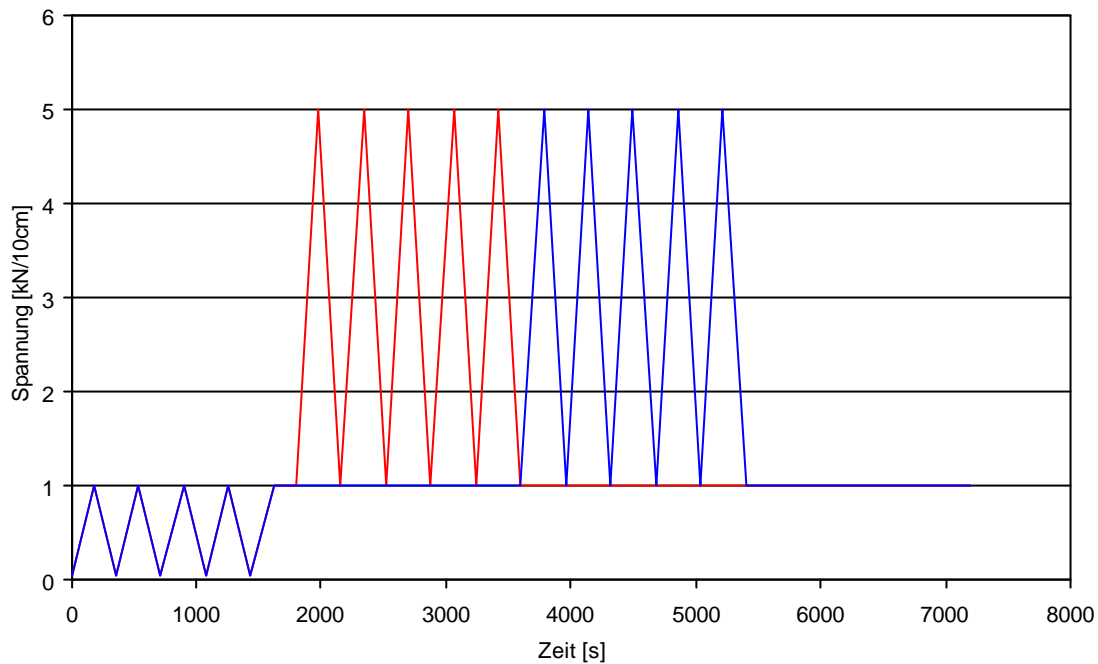


Bild 6.4.8: Lastgeschichte für die zweiachsigen Versuche an Geweben, rot: Kette, blau: Schuss

Die Belastungsgeschichte für die fadenparallelen Zweiachsversuche sieht folgendermaßen aus. Zu Beginn des Versuchs wird die Probe zyklisch viermal von ca. 0kN/m gleichzeitig in Kett- und in Schussrichtung auf den Wert 10kN/m gefahren. Danach wird die Kraft in Schussrichtung weiterhin konstant bei 10kN/m gehalten, in der Kettrichtung werden fünf Zyklen auf 50kN/m gefahren. Daraufhin wird die Kraft in Kettrichtung bei 10kN/m stehen gelassen, während in Schussrichtung fünf Mal zyklisch bis 50kN/m belastet wird. Am Ende wird die Kraft in beiden Richtungen noch einmal eine halbe Stunde auf 10kN/m gehalten.

6.4.3. Auswertung der elastischen Moduln

Nachfolgend werden Spannungen mit n bezeichnet, Dehnungen mit ε , E-Moduln mit E und Nachgiebigkeiten mit C , von englisch compliance. n_{11} bezeichnet die Spannung in Kettrichtung, n_{22} die Spannung in Schussrichtung. ε_{11} ist die Dehnung in Kettrichtung, ε_{22} die Dehnung in Schussrichtung.

Es ergeben sich die folgenden Abkürzungen:

E_{1111} Steifigkeit in Kettrichtung, E_{2222} Steifigkeit in Schussrichtung, E_{1122} Interaktion der Steifigkeit zwischen Kette und Schuss, $\nu_{12} = E_{1122}/E_{1111}$ Poissonzahl für die Interaktion zwischen Kette und Schuss $\nu_{21} = E_{1122}/E_{2222}$ Poissonzahl für die Interaktion zwischen Schuss und Kette, C_{1111} Nachgiebigkeit in Kettrichtung, C_{2222} Nachgiebigkeit in Schussrichtung, C_{1122} Interaktion der Nachgiebigkeit zwischen Kette und Schuss.

In linearer Näherung kann man angeben:

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} \\ E_{1122} & E_{2222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

oder als Inversion:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} \\ C_{1122} & C_{2222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \end{bmatrix}$$

Bei der Auswertung der Versuche werden zur Linearisierung des nichtlinearen Verhaltens im untersuchten Intervall die Spannungen n durch Δn und die Dehnungen ε durch $\Delta \varepsilon$ ersetzt. Das interessante Intervall ist für die betrachteten Fälle das Intervall zwischen Vorspannung und maximaler Arbeitsspannung.

Das folgende Diagramm 6.4.9 ist einem typischen Dehnungsverlauf für eine typische Lastgeschichte entnommen.

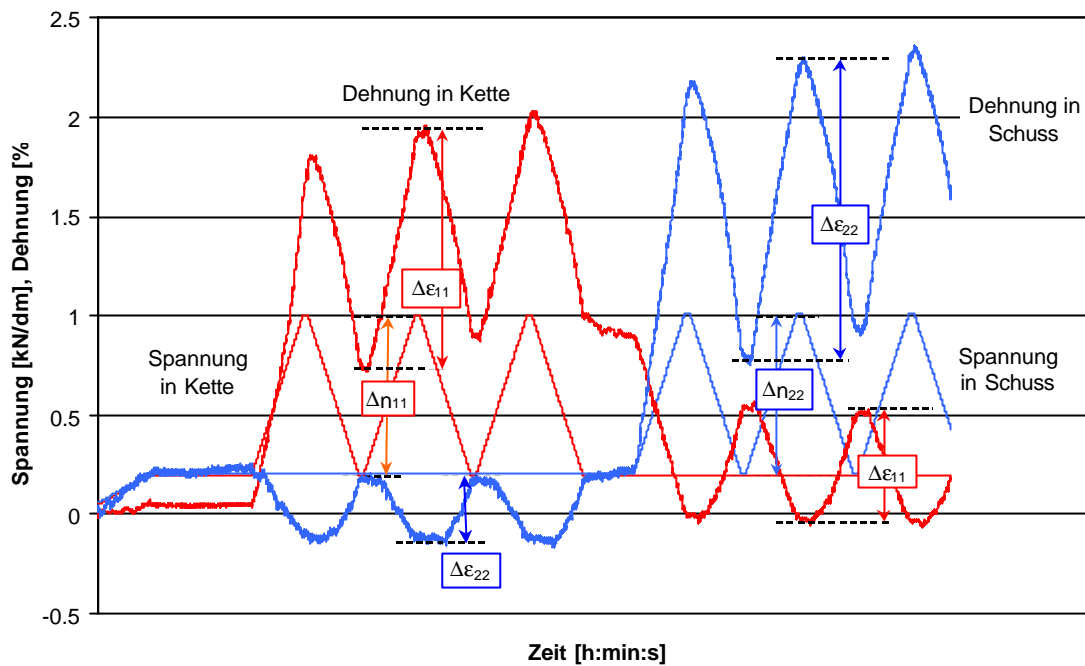


Bild 6.4.9: Auswertung der elastischen Moduln: Ausschnitt aus einer Lastgeschichte mit gemessenen Dehnungen aufgetragen über der Zeit [h:min:s]

Im ersten Teil der ersten Zyklen der Lastgeschichte ist $\Delta n_{11} \neq 0$, $\Delta n_{22} = 0$. Die analogen Dehnungswerte $\Delta \epsilon_{11}$ und $\Delta \epsilon_{22}$ können aus dem Ergebnisdiagramm abgelesen werden.

Im zweiten Teil dagegen ist $\Delta n_{11} = 0$, $\Delta n_{22} \neq 0$. Die analogen Dehnungen $\Delta \epsilon_{11}$ und $\Delta \epsilon_{22}$ werden wieder dem Ergebnisdiagramm entnommen.

$$\Delta \epsilon_{11} = C_{1111} \Delta n_{11} + C_{1122} \Delta n_{22}$$

$$\Delta \epsilon_{22} = C_{1122} \Delta n_{11} + C_{2222} \Delta n_{22}$$

C_{1111} , C_{1122} und C_{2222} sind die Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix. Für das Verhalten im ersten Teil mit konstanter Last in Schussrichtung ergibt sich: $\Delta n_{11} = 40 \text{ kN/m}$, $\Delta n_{22} = 0$ und mit den Messwerten $\Delta \epsilon_{11}$ und $\Delta \epsilon_{22}$:

$$\Delta \epsilon_{11} = 40 C_{1111},$$

$$\Delta \epsilon_{22} = 40 C_{1122},$$

für dasjenige im zweiten Teil ergibt sich mit $\Delta n_{11} = 0$ und $\Delta n_{22} = 40 \text{ kN/m}$ und mit den Messwerten $\Delta \epsilon_{11}$ und $\Delta \epsilon_{22}$:

$$\Delta \epsilon_{11} = 40 C_{1122},$$

$$\Delta \epsilon_{22} = 40 C_{2222}.$$

Daraus lässt sich die Nachgiebigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} \\ C_{1122} & C_{2222} \end{bmatrix}$$

berechnen, aus deren Invertierung die Steifigkeitsmatrix resultiert.

6.4.4. Versuchsergebnisse

Hier sind nun die Versuchsergebnisse als Dehnung über der Zeit für alle vorhandenen Biaxproben dargestellt. Für die Materialien M00/155, M00/157 und M00/159 lag bedauerlicherweise keine ausreichende Menge an Material vor, um Proben für die zweiachsige Prüfung fertigen zu können.

6.4.4.1. Biaxversuche Material M00/156, Hersteller Rexam

Die Belastungsgeschichte für die Biaxversuche wird wie oben beschrieben durchgeführt. Hier sind nun die Ergebnisse für die Probe M00/156. Die Dehnungen werden als Funktion der Zeit für die in Bild 6.4.8 dargestellte Belastungsgeschichte aufgezeichnet.

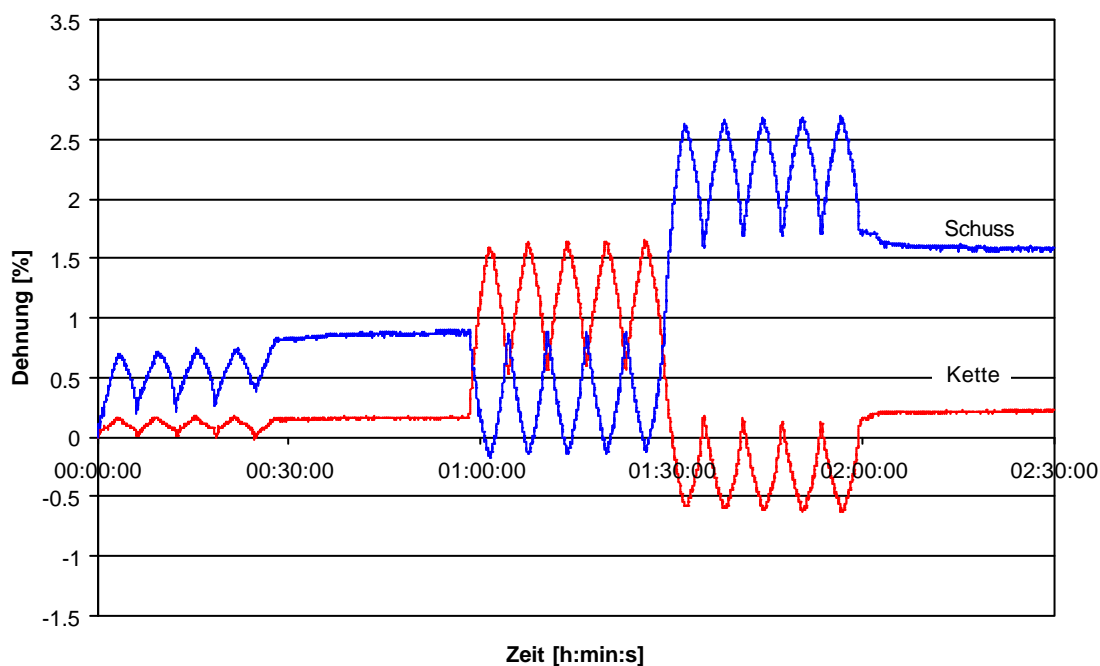


Bild 6.4.10: Dehnungen als Funktion der Zeit bei der in Bild 6.4.8 gezeigten Spannungsgeschichte, M00/156

Die elastischen Moduln werden wie oben beschrieben aus den beiden Phasen berechnet, in denen jeweils die Kraft in einer Richtung konstant gehalten wird.

Sie sind in der folgenden Tabelle 6.4.2 angegeben.

Tabelle 6.4.2: E-Moduln in linearer Näherung [kN/m]

E_{1111}	E_{1122}
9300	7600
E_{1122}	E_{2222}
7600	9700

Der Anisotropiekoeffizient, d. h. das Verhältnis zwischen E_{1111} und E_{2222} , ist hier relativ gering: Er beträgt $E_{1111}/E_{2222} = 0,96$. Das spricht für eine ausgewogene Gewebekonstruktion. Kett- und Schussfaden haben ungefähr die gleichen geometrischen Eigenschaften. Auffallend ist das große Verhältnis zwischen dem den Querdehneinfluss kennzeichnenden Modul E_{1122} und der Steifigkeit in Kettrichtung E_{1111} . Man errechnet für den Koeffizienten E_{1122}/E_{1111} den Wert 0,81. Dieser Wert ist charakteristisch für ein Gewebe und kennzeichnet die starke Interaktion zwischen Kett- und Schussfaden durch den sogenannten Crimp.

6.4.4.2. Biaxversuche Material M00/158, Hersteller Dover

Das Ergebnis der Biaxversuche mit der in Bild 6.4.8 angegebenen Spannungsgeschichte wird in Bild 6.4.11 gezeigt.

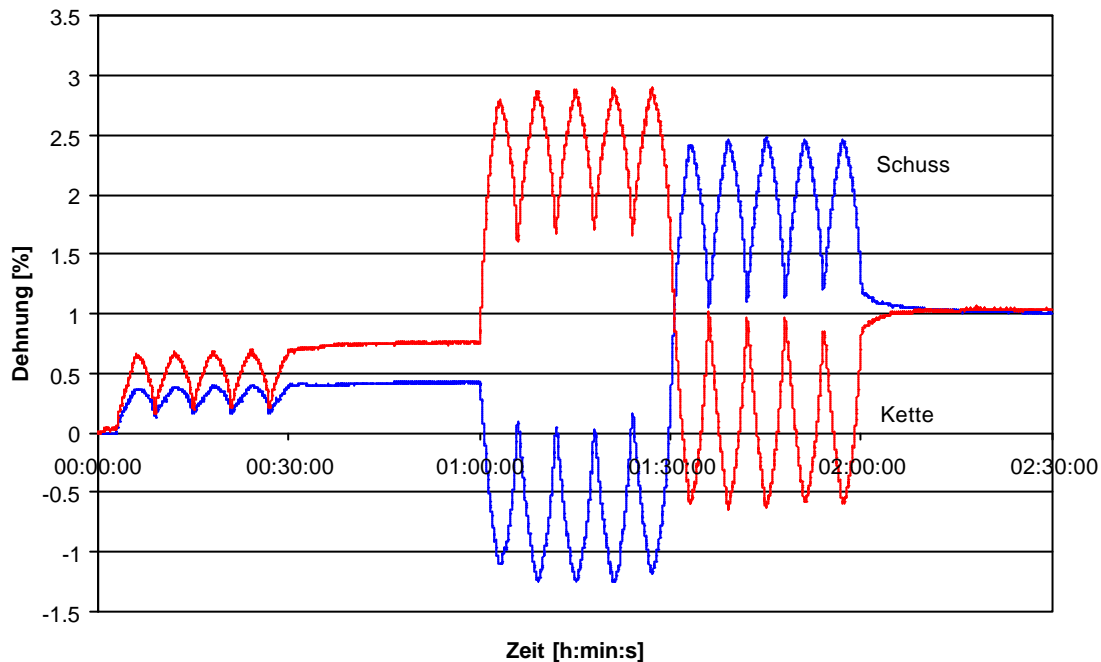


Bild 6.4.11: Dehnungen in Kette und Schuss als Funktion der Spannungen für M00/158

Die elastischen Moduln konnten errechnet werden zu:

Tabelle 6.4.3: E-Moduln

M00/158 [kN/m]

E_{1111}	E_{1122}
800	300
E_{1122}	E_{2222}
300	700

Der Anisotropiekoeffizient errechnet sich zu $E_{222}/E_{1111} = 0,88$. Die Anisotropie ist also höher als beim Gewebe M00/156, wo der Wert 0,96 betrug. Das Verhältnis des den Querdehneinfluss beschreibenden Moduls E_{1122} zu E_{1111} ergibt sich zu 0,33, ein Wert, der ebenfalls geringer als der obige mit 0,81 ist. Hier spiegelt sich der unterschiedliche Gewebeaufbau wider.

6.4.4.3. Biaxversuche Material M00/160, Hersteller Dover

Die gemessenen Dehnungen aus der in Bild 6.4.8 dargestellten Lastgeschichte sind in Bild 6.4.12 dargestellt.

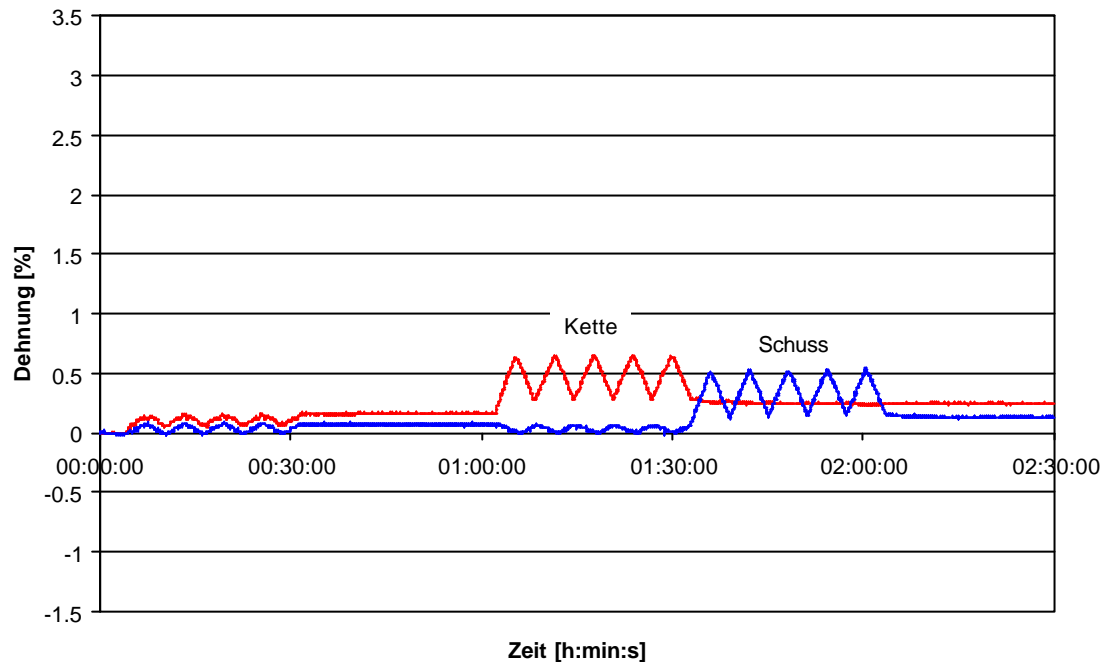


Bild 6.4.12: Kett- und Schussdehnungen als Funktion der Spannungen unter der oben angegebenen Spannungsgeschichte

Bei diesen Kurven fällt eine sehr niedrige Dehnung und die geringe Interaktion zwischen Kett- und Schussfaden auf, was sich aber sehr einfach durch die Gewebekonstruktion erklären lässt: Bei Material M00/160 handelt es nämlich um das Gelege, bei dem Kett- und Schussfäden nicht verwoben wurden, sondern nur lose übereinander liegen. Damit bemerkt der kreuzende Faden eine Spannungserhöhung im dazu senkrechten Faden nur über die Einwirkung der Beschichtung und über den fixierenden Faden. Es wird keine direkte Wechselwirkung ausgeübt. Die Moduln ergeben sich zu:

Tabelle 6.4.4: E-Moduln

M00/160 [kN/m]

E_{1111}	E_{1122}
10500	900
E_{1122}	E_{2222}
900	10100

Der Anisotropiekoeffizient E_{2222}/E_{1111} ist mit 0,96 von eins nicht sehr verschieden, das Gelege kann damit als isotrop bezeichnet werden. Das Verhältnis zwischen E_{1122} und E_{1111} liegt bei 0,081 und ist damit viel geringer als in den obigen Fällen und verdeutlicht damit nochmals, was schon im Diagramm erkennbar war: die geringe Wechselwirkung zwischen den beiden Fäden.

6.5 Schubversuche

6.5.1 Biaxversuche unter 45°-Winkel, Versuchsplanung

Für die Schubversuche wurden Biaxproben hergestellt, bei denen die Hauptanisotropierichtungen Kette und Schuss unter 45° zu den Rändern geneigt waren. Diese Proben wurden an den Rändern kraft- und fadenparallel verstärkt und in die zweiachsige Prüfeinrichtung eingespannt. Die Probengeometrie ist im folgenden Bild dargestellt.

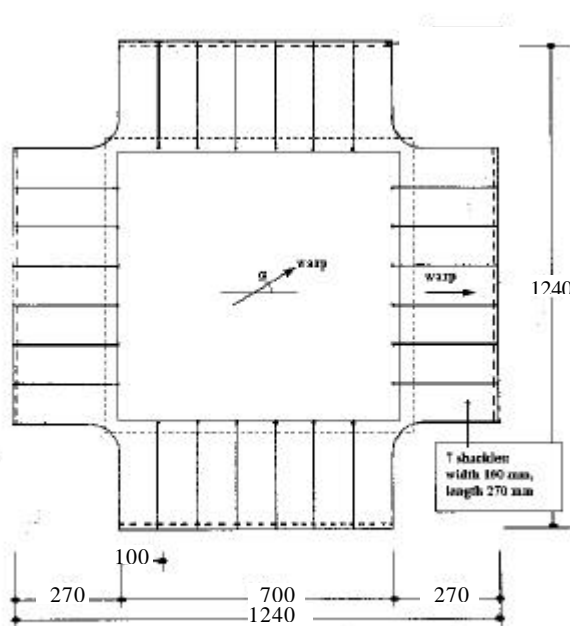


Bild 6.5.1: Schubprobe mit einem Winkel der Hauptanisotropieachsen von 45° zum Rand

Zusätzlich zu den Dehnungen in Kett- und in Schussrichtung wird in den Schubversuchen die Dehnung in der Winkelhalbierenden gemessen.

Als Belastung, die parallel zu den Probenrändern aufgebracht wurde, wurden zwei unterschiedliche Spannungsgeschichten ausgewählt.

Dabei wurden die Normallastgeschichten für den speziellen Fall ausgewählt, bei dem Schubspannung und Schubdehnung entkoppelt sind von den Spannungen bzw. Dehnungen in Kett- bzw. Schussrichtung. Damit vereinfachen sich die Auswertung und Berechnung des Schubmoduls.

Die erste Versuchsserie wurde mit der folgenden Lastgeschichte, in Bild 6.5.2 dargestellt, gefahren.

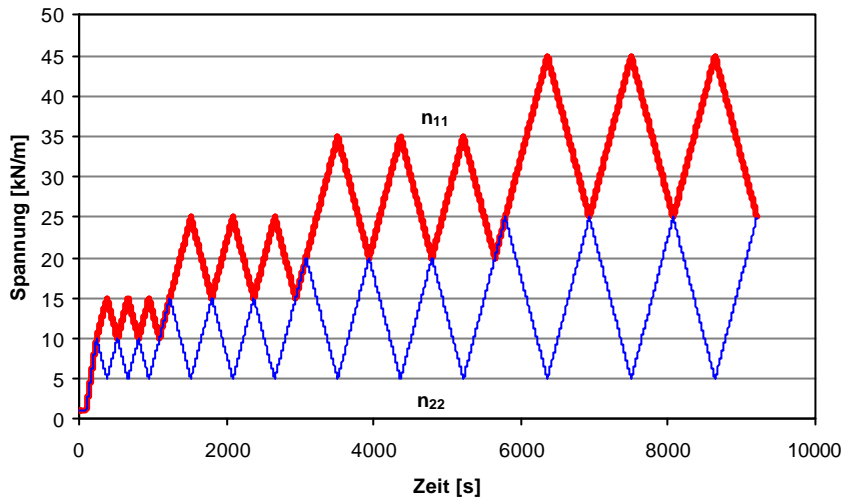


Bild 6.5.2: Lastgeschichte 1 für die zweiachsigen Schubversuche mit n_{11} aufgebraute Spannung parallel zur ersten Maschinenrichtung und n_{11} aufgebraute Spannung parallel zur zweiten Maschinenrichtung

Es wurden jeweils drei Zyklen, während denen die Differenz zwischen den beiden Richtungen gleich groß gehalten wurde, gefahren. Bei jedem Schritt wurde diese Differenz und damit die Schubbeanspruchung vergrößert. Für die Schubspannung ergab sich daraus die folgende Spannungsgeschichte:

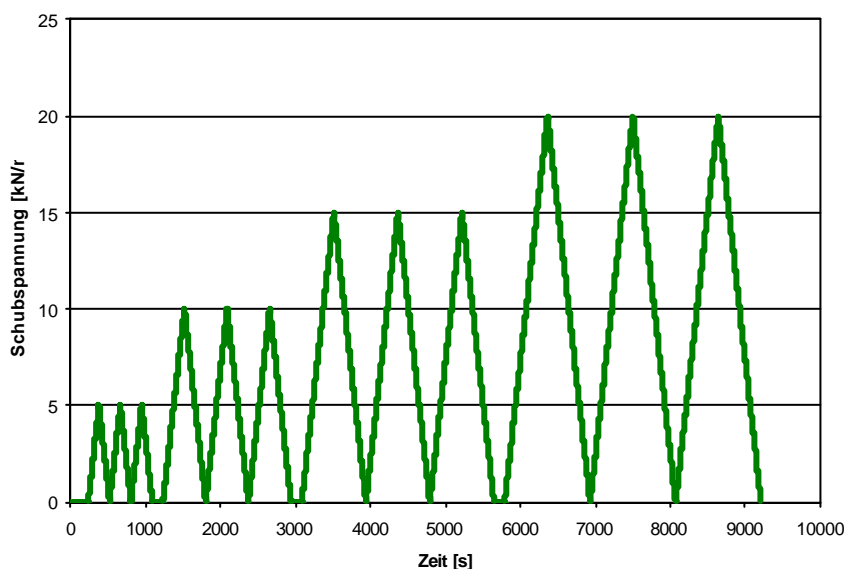


Bild 6.5.3: Schubspannungsgeschichte 1 zu Lastgeschichte 1

Für die zweite Versuchsreihe wurde eine Spannungsgeschichte ausgewählt, bei der sowohl positive als auch negative Schubspannungen aufgebracht wurden. Die entsprechenden aufgetragenen Normalspannungszyklen sind im folgenden Bild 6.5.4 und die daraus resultierenden Schubspannungen in Bild 6.5.5 dargestellt.

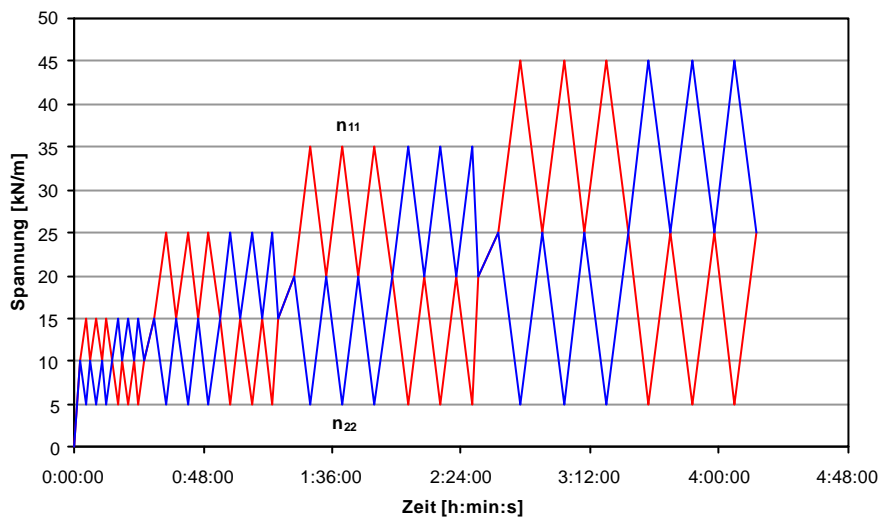


Bild 6.5.4: Schubversuche: Lastgeschichte 2

Als Schubspannungsgeschichte für diese Belastung ergibt sich:

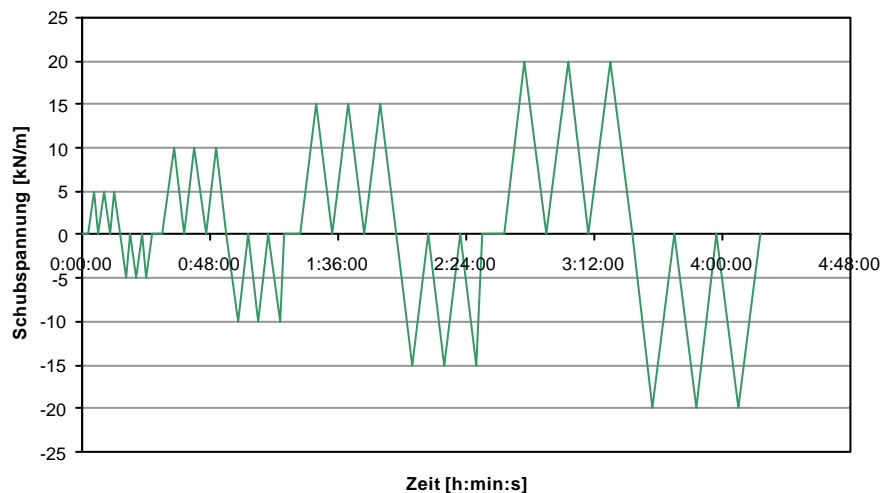


Bild 6.5.5: Schubspannungsgeschichte 2 mit negativen Schubspannungen

6.5.2. Auswertung der Schubversuche

Es werden die Dehnungen in Kettrichtung, in Schussrichtung und in der Winkelhalbierenden zwischen Kette und Schuss gemessen. Zuerst einmal müssen sowohl der Spannungs- wie der Dehnungstensor im Koordinatensystem der Hauptachsen berechnet werden. Nur in diesem Koordinatensystem hat die Spannungs-Dehnungs-Beziehung die einfache Form:

$$\begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 2E_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Allgemein kann man dafür auch schreiben:

$$n_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\delta\gamma} \varepsilon_{\gamma\delta}$$

wobei über alle doppelt vorkommenden Indizes von 1 bis 2 summiert wird. Der Faktor 2 bei E_{1212} rührt daher, dass der Verzerrungstensor symmetrisch ist und so in der Summation zweimal auftaucht. Man bezeichnet $2 E_{1212}$ auch als Schubmodul G bei isotropen Materialien:

$$2 E_{1212} = G.$$

Bei nichtlinearem Schubverhalten kann man den tangentialen Schubmodul G definieren durch:

$$G = \frac{\partial n_{12}}{\partial \varepsilon_{12}}.$$

Ist \mathbf{T} die Matrix der Drehungen zwischen dem Koordinatensystem der Hauptanisotropieachsen und demjenigen parallel zum Rand, so kann man für \mathbf{T} angeben:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

wobei $\text{Det}(\mathbf{T}) = 1$ und $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ gilt.

Nun muss man alle Größen im Koordinatensystem der Hauptanisotropieachsen berechnen. Gemessen wurden wie schon oben erwähnt:

Die Dehnung in Kettrichtung ε_{11} ,

die Dehnung in Schussrichtung ε_{22} ,

und die Dehnung in der Winkelhalbierenden ε'_{11} .

Für die Dehnung in der Winkelhalbierenden erhält man nach den Transformationsregeln der Tensorrechnung:

$$\varepsilon'_{11} = T_{1\mu} T_{1\nu} \varepsilon_{\mu\nu},$$

Diese Gleichung hat also folgendes Aussehen:

$$\varepsilon'_{11} = T_{11}T_{11}\varepsilon_{11} + 2T_{11}T_{12}\varepsilon_{12} + T_{12}T_{12}\varepsilon_{22}.$$

Sie lässt sich nach ε_{12} auflösen zu:

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{2T_{11}T_{12}}[\varepsilon'_{11} - T_{11}T_{11}\varepsilon_{11} - T_{12}T_{12}\varepsilon_{22}].$$

Für $\varphi = 45^\circ$ ergibt sich

$$\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und daraus folgt:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon'_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{22}.$$

Der Tensor der Verzerrungen im Hauptachsensystem der Anisotropie hat also folgendes Aussehen:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon'_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{22} \\ \varepsilon'_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{22} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

mit den gemessenen Größen ε_{11} entlang der Kettrichtung, ε_{22} entlang der Schussrichtung und ε'_{11} entlang der Winkelhalbierenden. Nun müssen noch die Koeffizienten des Verzerrungstensors gedeutet werden. Allgemein kann man sagen, dass der Verzerrungstensor im zweidimensionalen Fall die Änderung eines kartesischen Zweibeins mit den orthonormalen Maßvektoren \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 unter einer Deformation zu \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 beschreibt, und zwar genauer gesagt die Änderung der entsprechenden Skalarprodukte. Die Skalarprodukte der \mathbf{E}_α können wegen der Orthonormalität angegeben werden durch:

$$\mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta = |\mathbf{E}_\alpha| |\mathbf{E}_\beta| \cos(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diejenigen der \mathbf{e}_α , da sie nicht orthonormal sind, ergeben sich zu:

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = |\mathbf{e}_\alpha| |\mathbf{e}_\beta| \cos(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \begin{bmatrix} |\mathbf{e}_1|^2 & |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}_2| \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}_2| \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & |\mathbf{e}_2|^2 \end{bmatrix}$$

Die Hälfte der Differenz zwischen den Skalarprodukten $\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ und den Skalarprodukten $\mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta$ wird als Verzerrung bezeichnet:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta - \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta.$$

Damit gilt für das Längenquadrat in 1-Richtung im verzerrten Zustand

$$|\mathbf{e}_1|^2 = 1 + 2\varepsilon_{11}$$

und für die Länge selbst:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}$$

Für kleine ε_{11} kann man die Wurzel in eine Reihe entwickeln und erhält:

$$|\mathbf{e}_1| = 1 + \varepsilon_{11}$$

Damit wird denn ε_{11} die Änderung der Länge des Einheitsvektors \mathbf{E}_1 . Auf die gleiche Art und Weise wird ε_{22} die Längenänderung des Einheitsvektors \mathbf{E}_2 . Für ε_{12} erhält man wegen der Orthonormalität von \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 , wenn man den Winkel zwischen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 ansetzt als $90^\circ - \delta$ und unter Berücksichtigung des Additionstheorems für den cosinus :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{12} &= |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}_2| \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} \cos(90^\circ - \delta) = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} \sin \delta, \end{aligned}$$

woraus sich für δ ergibt:

$$\delta = \arcsin \left(\frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \right)$$

Für kleine Verzerrungen und kleine Winkeländerungen δ erhält man schließlich:

$$\sin \delta \approx \delta = 2\varepsilon_{12}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass ε_{12} absolut, also nicht in Prozent, angegeben werden muss und dass sich der Winkel in rad ergibt. Damit sind alle Verzerrungsgrößen definiert.

Die Spannungen in dieser Probe sind im gestrichenen Koordinatensystem parallel zu den Rändern der Probe gegeben durch:

$$\mathbf{n}'_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} n'_{11} & 0 \\ 0 & n'_{22} \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich im Koordinatensystem der Hauptanisotropieachsen und wegen $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$:

$$n_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_{\mu\alpha} \mathbf{T}_{\nu\beta} n'_{\mu\nu}.$$

Oder, in Komponenten ausgeschrieben:

$$n_{11} = \cos^2 \mathbf{j} n'_{11} + \sin^2 \mathbf{j} n'_{22}$$

$$n_{22} = \sin^2 \mathbf{j} n'_{11} + \cos^2 \mathbf{j} n'_{22}$$

$$n_{12} = \cos \mathbf{j} \sin \mathbf{j} (n'_{11} - n'_{22})$$

Will man also eine linear wachsende Schubspannung n_{12} herstellen, muss man die Differenz zwischen n'_{11} und n'_{22} linear ansteigen lassen. Für $\varphi = 45$ Grad ergibt sich:

$$n_{12} = \frac{1}{2}(n'_{11} - n'_{22}).$$

Bei Messergebnissen wird die lineare Dehnung angegeben, da diese natürlicherweise gemessen wird.

Der Vollständigkeit halber sei auch noch der Zusammenhang zwischen der Schubverzerrung ε_{12} und der Winkeländerung δ bei reinem Schub in einer Grafik gegenübergestellt.

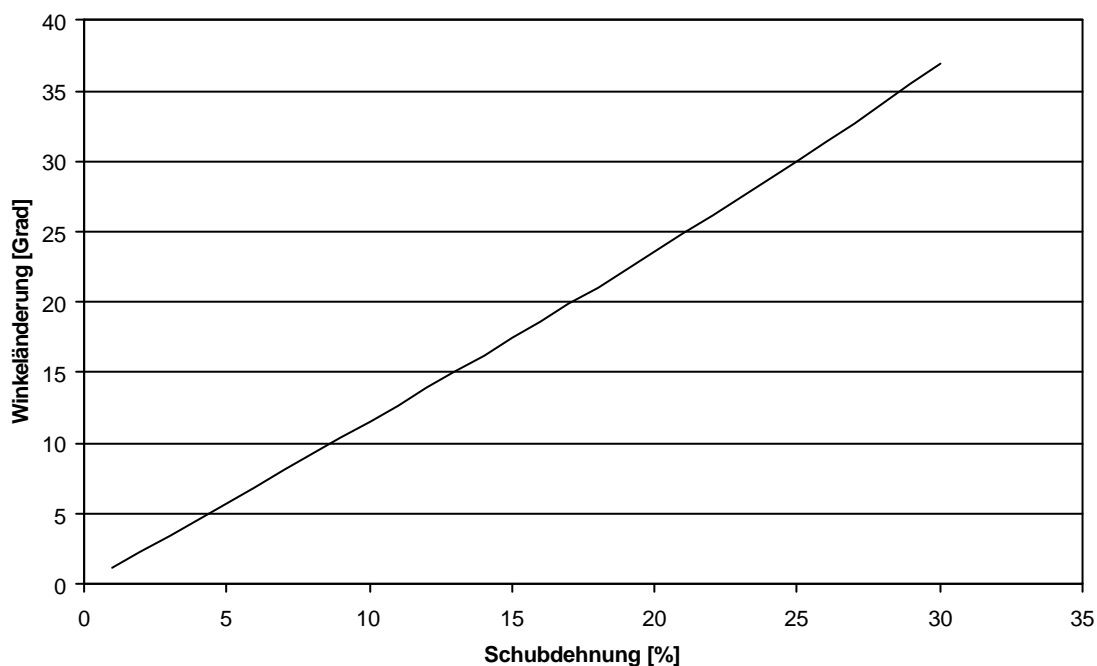


Bild 6.5.6: Zusammenhang zwischen Schubdehnung und Winkeländerung

Es wird darauf hingewiesen, dass in diesem speziellen Fall der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Schubdehnung entkoppelt ist von den Spannungen bzw. Dehnungen in Kett- und Schussrichtung. Damit wird die Auswertung und die Berechnung des Schubmoduls relativ einfach.

Eine zweite Bemerkung darf angefügt werden: Bei fadenparalleler Belastung zeigt das Gewebe weitgehend das Verhalten der Einzelfäden. Die Beschichtung spielt keine ausschlaggebende Rolle.

Bei einer Belastung nicht parallel zu den Fäden spielt die Beschichtung dagegen eine entscheidende Rolle. Die Beschichtung kann aber insbesondere in ihrer Wechselwirkung mit den Fäden nicht mehr als elastisch angesehen werden, sie besitzt ausgeprägte viskoelastische Eigenschaften. Daher ist hier auch ein viskoelastisches Schubverhalten zu erwarten.

6.5.3. Ergebnisse der Schubversuche

6.5.3.1. Material ST12C3720

6.5.3.1.1. Probe M01/015

Zuerst seien die Versuchsergebnisse im Überblick in Bild 6.5.6 präsentiert.

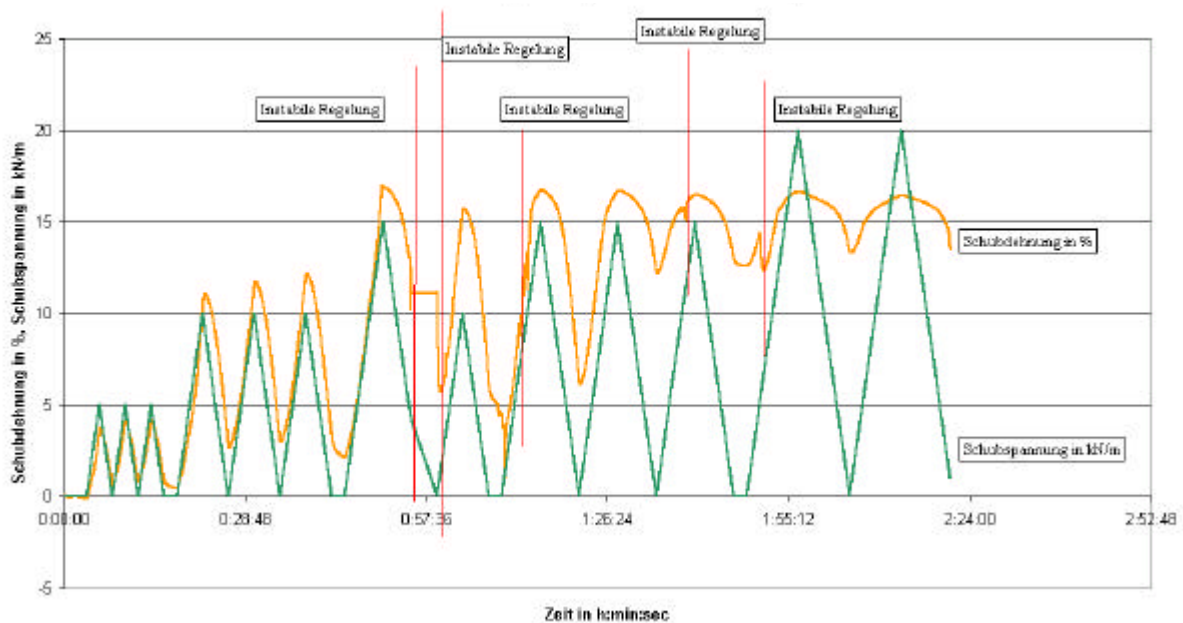


Bild 6.5.6: M01/015, Schubspannung und Schubdehnung als Funktion der Zeit, Dehnung in %, Spannung in kN/m

Dieser Versuch war der erste Schubversuch mit diesen steifen Materialien, bei dem die Spannung ohne Versagen so hoch gefahren werden konnte. Die Regelung wurde daher mehrere Male instabil, konnte aber immer wieder abgefangen werden. Die entsprechenden Stellen sind im Diagramm markiert.

Zur besseren Auswertung wird zuerst der Teil des Versuches besprochen, der vor der ersten Instabilität liegt. Für diesen Teil der Kurve sei nun die Schubverformung als Funktion der Schubspannung aufgezeichnet. Dabei wird der aufsteigende Belastungsast rot markiert und der absteigende blau. Die Dehnung wird in Prozent angezeigt, die Spannung in kN/m.

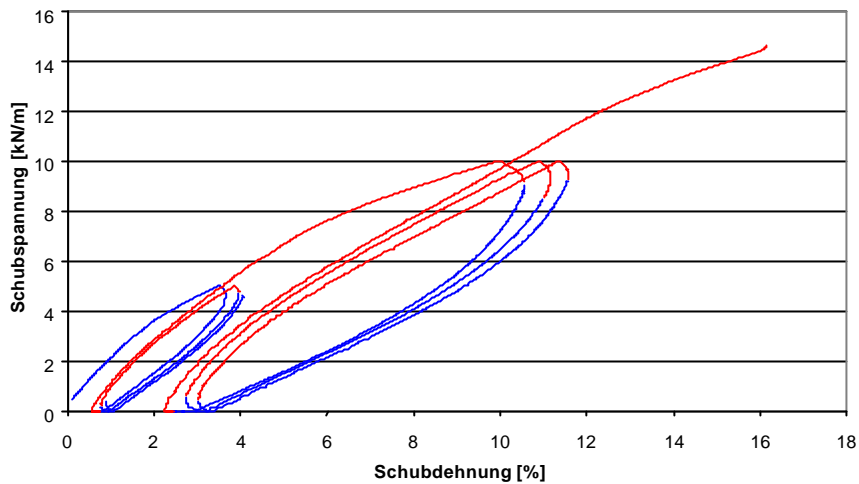


Bild 6.5.7: M01/015, Schubspannung als Funktion der Schubdehnung, Dehnung in %, Spannung in kN/m

Man erkennt eine relativ große Hysterese, was darauf hinweist, dass die Beschichtung eine entscheidende Rolle spielt. Weiter erkennt man eine mit der Zyklanzahl anwachsende bleibende Verformung. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Zyklenbereiche in Abschnitte unterteilt und jeweils abschnittsweise untersucht. Für den ersten Bereich werden ein aufsteigender und ein absteigender Ast gesondert betrachtet:

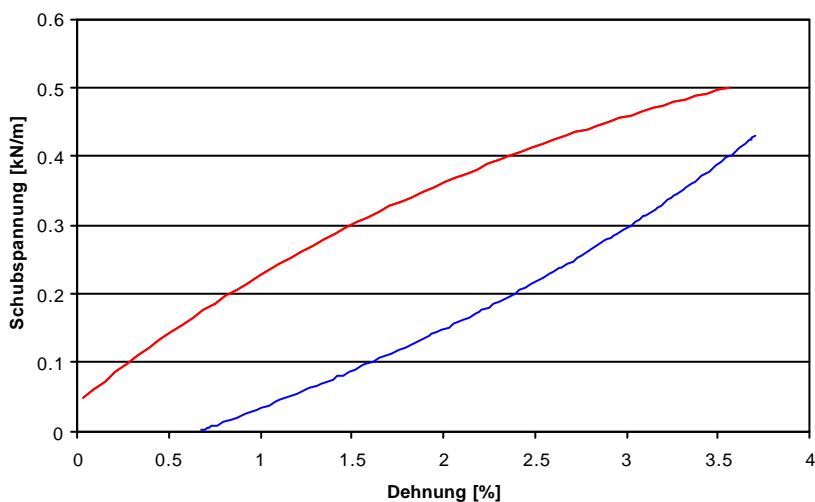


Bild 6.5.8: M01/015, Fit für den aufsteigenden (rot) und den absteigenden (blau) Ast des ersten Belastungszyklus

Für den aufsteigenden und den absteigenden Ast wurde jeweils eine Fit-Kurve errechnet und linear genähert.

Für den aufsteigenden Ast erhält man als Steigung 125 kN/m und für den absteigenden 142 kN/m. Die Umgebung des Umkehrpunktes wurde außer Betracht gelassen. Der Schubmodul

$G = 2 E_{1212}$ lässt sich hier aus der Steigung der angefitteten Kurven berechnen. Die sich ergebenden Kurven sind in Bild 6.5.9 dargestellt.

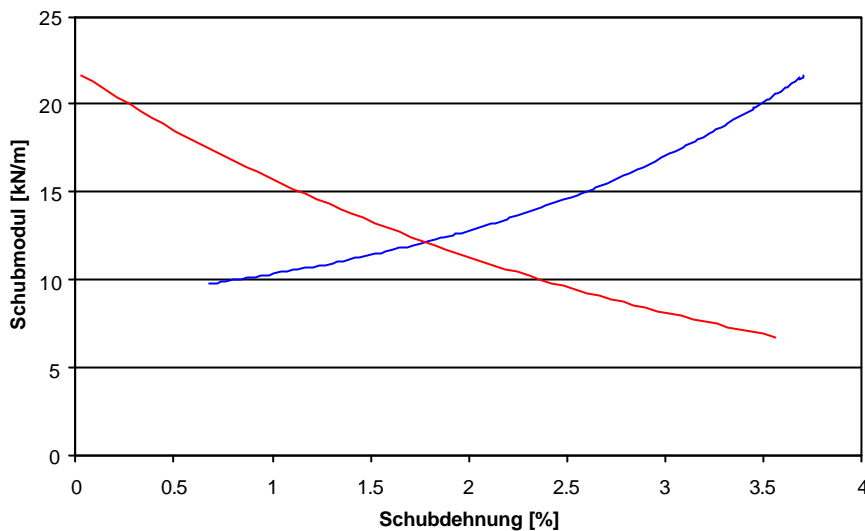


Bild 6.5.9: M01/015, Schubmodul als Funktion der Schubverzerrung für den aufsteigenden (rot) und für den absteigenden (blau) Ast unter der Annahme eines elastischen Materials.

Die Ergebnisse für den Versuch nach Stabilisierung der instabilen Phasen wurden um die Instabilitäten bereinigt und sind in Bild 6.5.10 gezeigt. Für die Korrektur wurden die entsprechenden Äste ganz aus der Kurve eliminiert.

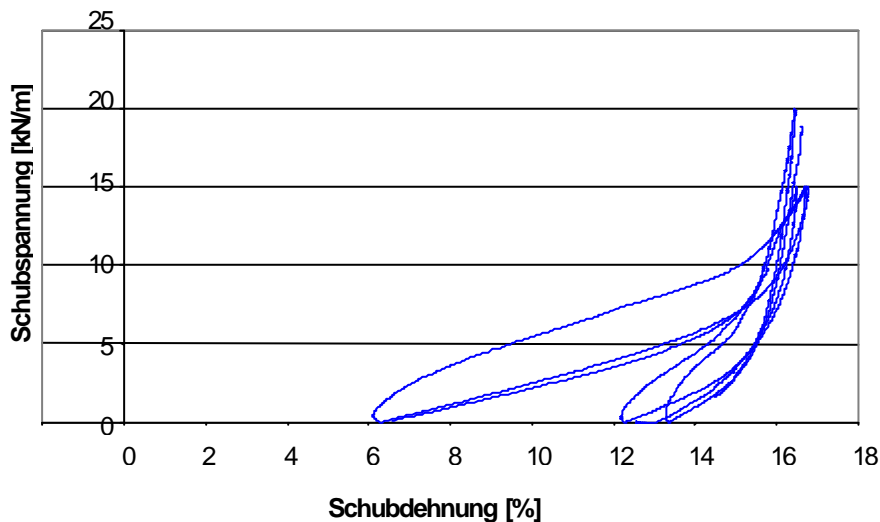


Bild 6.5.10: M01/015, Spannungs-Dehnungs-Kurven für höhere Belastungszyklen, die Instabilitäten sind eliminiert.

Die Instabilität der Regelung setzte immer im aufsteigenden Ast ein, dementsprechend sind weniger aufsteigende als absteigende Äste dargestellt.

Hier erkennt man ein neues Phänomen, das charakteristisch für das Verhalten eines beschichteten Gewebes ist: ab einer mehr oder minder exakt zu definierenden

Schubverformung steig die Schubspannung plötzlich stark an, der Schubmodul wird schlagartig größer. Die Ursache dieses plötzlichen Steifigkeitssprungs entsteht dadurch, dass die erst in lockerem Abstand verwebten Fäden aufgrund der durch die Schubbelastung erfolgten Schiebung näher zusammenrücken bis sie aneinander stoßen und somit keine weitere Schubverformung möglich ist. Dieser Effekt ist in Bild 6.5.11 in der Vergrößerung dargestellt.

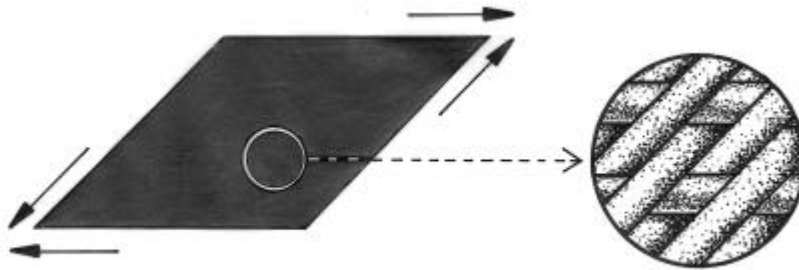


Bild 6.5.11: Gewebe unter Schubverformung in der Jamming Condition, wo die Abstände der parallelen Fäden gleich Null werden

Dieser Schubmodul soll nun als Funktion der Schubverformung für die erste Kurve errechnet werden, die noch einmal herausgezeichnet werden soll. Hier wurde zur Verdeutlichung die Kurve in drei Teile aufgespaltet, die durch verschiedene Farben gekennzeichnet wurden: blau für den ersten Teil, dunkelblau für den zweiten Teil in Bild 6.5.12 und Bild 6.5.13 und rot für den letzten Teil in Bild 6.5.14.

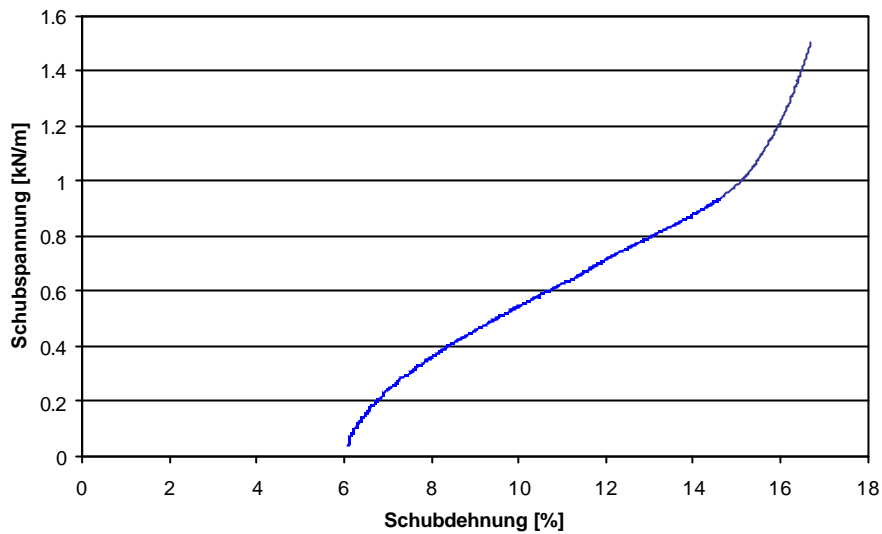


Bild 6.5.12: Schubspannung als Funktion der Schubdehnung für den ersten aufsteigenden Ast in Bild 6.5.10.

Der Fit für den ersten Teil ergibt als Steigung und damit Schubmodul:

$G_1=176$ kN/m, für den zweiten Teil ergab sich $G_2=85$ kN/m, und für den dritten $G_3=413$ kN/m.

Daraus ergeben sich die folgenden Kurven, Bild 6.5.13, für den Schubmodul.

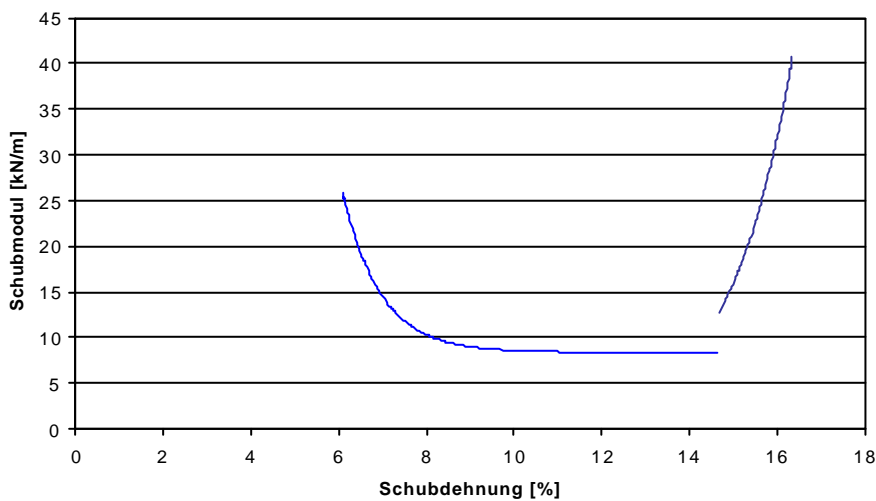


Bild 6.5.13: Schubmodul für den oben besprochenen aufsteigenden Ast, aufgeteilt in die ersten beiden Bereiche

Der Schubmodul fällt zuerst von 25 auf ca. 10 kN/m ab, um dann in der sogenannten Jamming-Condition bis auf ca. 40 kN/m, also auf das 4-fache, steil anzusteigen. Für weitere Verzerrungen verharrt er dann näherungsweise auf diesem Wert.

Für den letzten aufsteigenden Ast in Bild 6.5.10 sei der Schubmodul noch einmal errechnet, und zwar die obere Grenze. Zuerst sei dieser Ast einzeln herausgezeichnet. Der zu betrachtende Teil ist entsprechend markiert, Bild 6.5.14.

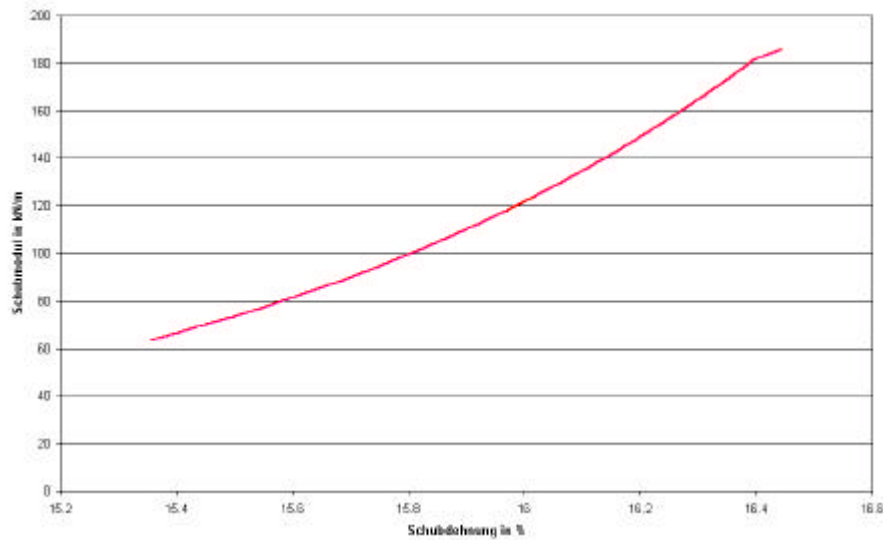


Bild 6.5.14: Schubmodul für den letzten aufsteigenden Ast

Zum Schluss sollen noch einmal der Vollständigkeit halber die Bilder des Schubverhaltens ineinander kopiert werden.

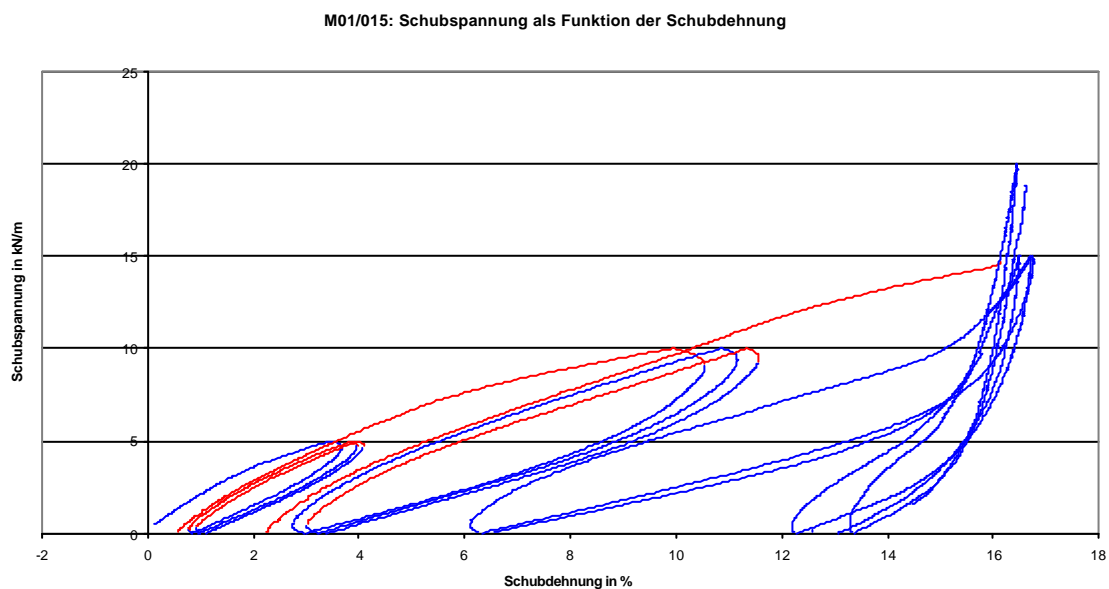


Bild 6.5.15: Schubspannung als Funktion der Schubdehnung

6.5.3.1.2. Probe M01/068

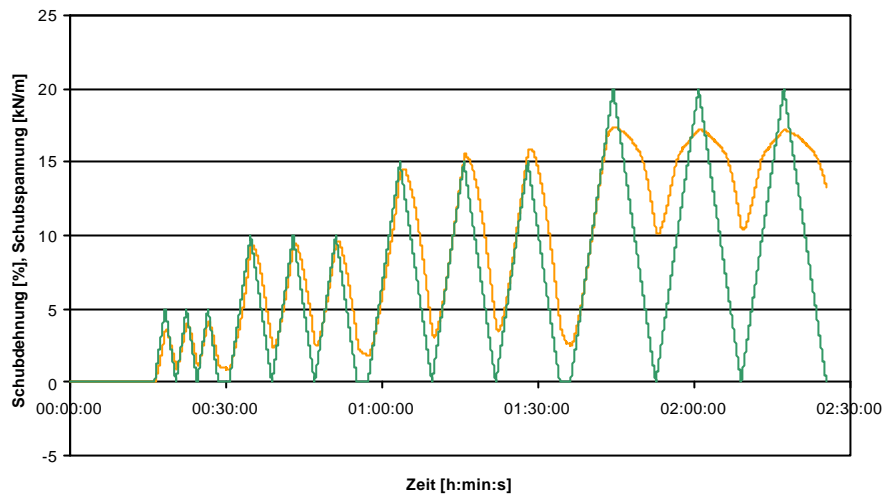


Bild 6.5.15: M01/068, Schubspannung und -dehnung als Funktion der Zeit, Dehnung in %, Spannung in kN/m

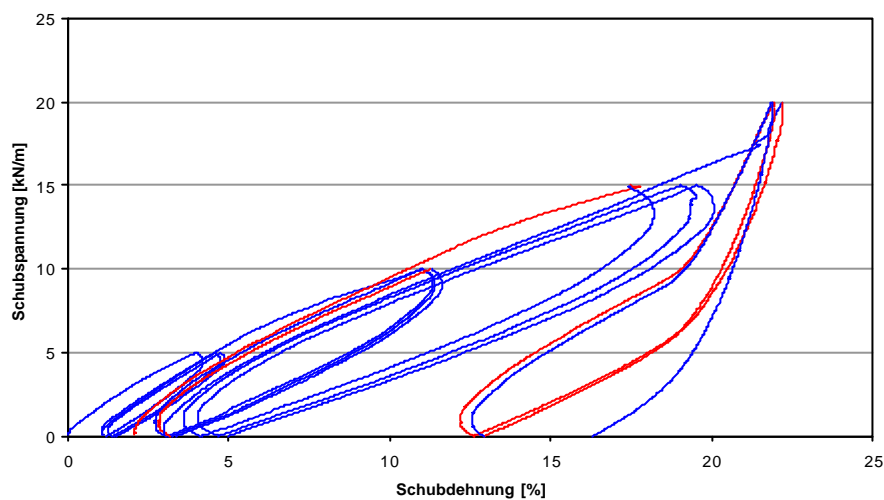


Bild 6.5.16: M01/068, Schubspannung als Funktion der Dehnung

Die Steigungen, die dem Schubmodul G (kN/m) entsprechen, ergeben sich von links nach rechts zu:

$G_1 =$	122 kN/m
$G_2 =$	116 kN/m
$G_3 =$	80 kN/m
$G_4 =$	75 kN/m
$G_5 =$	990 kN/m

6.5.3.1.3. Probe M01/69

An dieser Probe wurde Lastgeschichte 2 mit negativen Schubspannungen gefahren.

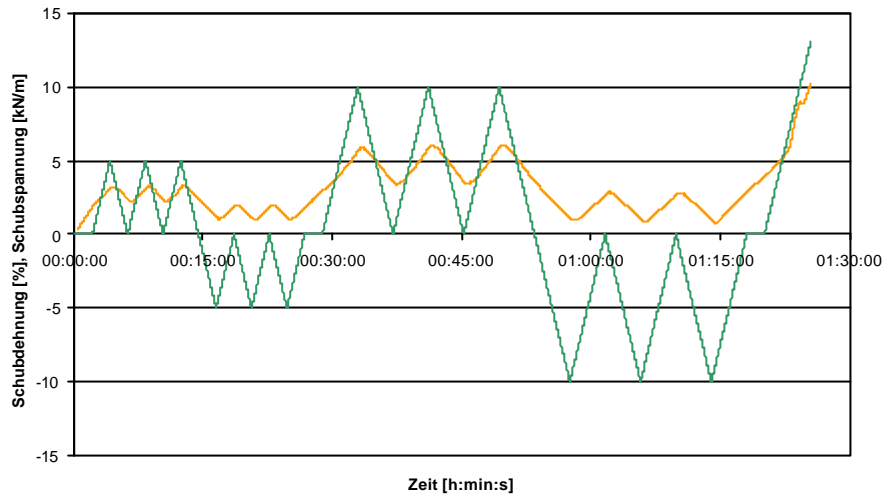


Bild 6.5.17: M01/069, Schubspannung und -dehnung als Funktion der Zeit, Spannung in kN/m, Dehnung in %

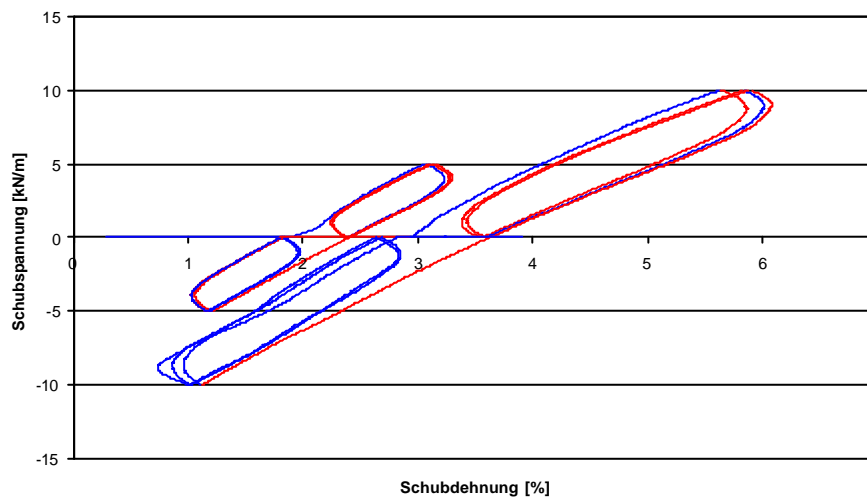


Bild 6.5.18: M01/069, Schubspannung als Funktion der Dehnung

Die Steigungen, die dem Schubmodul G (kN/m) entsprechen, ergeben sich zu:

- G1= 320 kN/m für den ersten Zyklus im pos. Schubbereich
- G2= 360 kN/m für den ersten Zyklus im neg. Schubbereich
- G3= 310 kN/m für den zweiten Zyklus im pos. Schubbereich
- G4= 430 kN/m für den zweiten Zyklus im neg. Schubbereich

6.5.3.2. Material ST12C3719

6.5.3.2.1. Probe M01/157, Material ST12C3719, Lieferant ILC Dover,

Die Schubspannungen (orange) und Schubdehnungen (grün) werden als Funktion der Zeit aufgezeichnet.

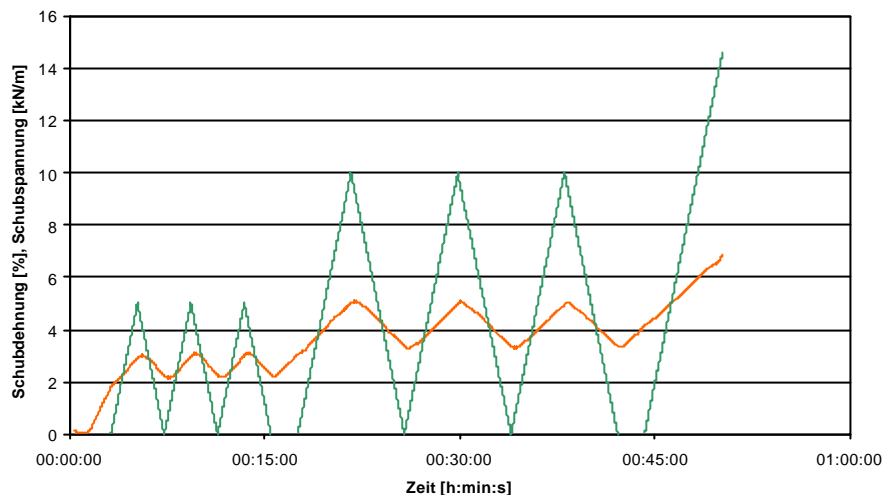


Bild 6.5.19: Schubdehnungen (in %) und Schubspannungen (in kN/m), M01/157

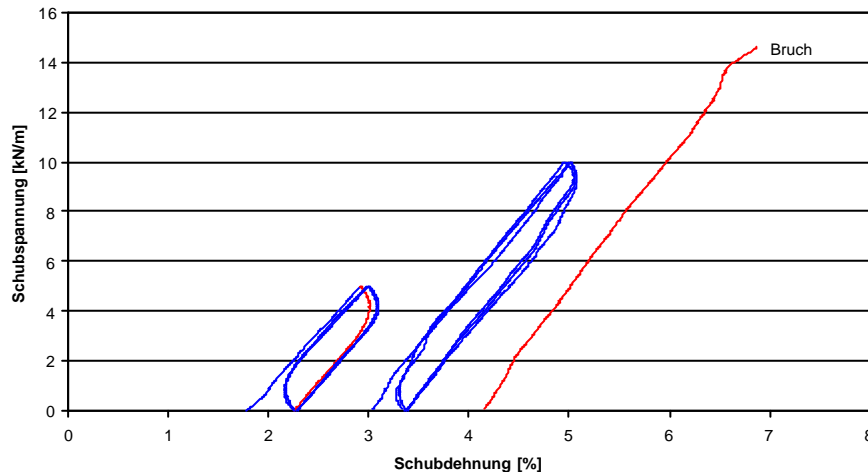


Bild 6.5.20: Gerechnete Schubspannungen als Funktion der Schubdehnung, M01/157

Bei dieser Probe ist zu anmerken, dass aufgrund ungenauer Fertigung Kett- und Schussrichtung bei der unbelasteten Probe keinen rechten Winkel zueinander bildeten, sondern erheblich davon abwichen. Das hat einen großen Einfluss auf das Ergebnis, worauf aber noch weiter unten eingegangen wird. Im oben dargestellten Diagramm kann man aber schon folgendes erkennen: Selbst bei verschwindender gerechneter Schubspannung (die grüne Linie zeigt keinen Wert am Anfang an) ergibt sich eine von Null verschiedene Schubdehnung

von fast 2 Prozent. Dies lässt sich folgendermaßen erklären: Ist der Winkel zwischen den Hauptanisotropieachsen kein rechter, so liegt kein orthogonal anisotropes Material vor. In diesem Fall bilden sich unter einem in beiden Richtungen gleichen Spannungszustand Schubverformungen aus, was bei der Messung erkennbar wird.

Man kann aus dem Diagramm ersehen, dass sich die Probe bei höheren Schubbelastungen versteift. Verbindet man die Nullpunkte der Spannungs-Dehnungs-Linien mit den Umkehrpunkten, wie oben skizziert, und errechnet sich daraus den Schubmodul G (kN/m), so ergeben sich für die unterschiedlichen Belastungszyklen folgende Werte:

$$G_1 = 380 \text{ kN/m}$$

$$G_2 = 500 \text{ kN/m}$$

$$G_3 = 520 \text{ kN/m.}$$

Dies sind jedoch nur Näherungswerte, die sich ungefähr einstellen würden, wäre das Material von Anfang an orthogonal anisotrop.

6.5.3.2.2. Probe Nummer M01/158

Bei diesem Versuch trat schon frühzeitig Verbundbruch im Laschensystem auf, der sofort zur Instabilität der Regelung führte.

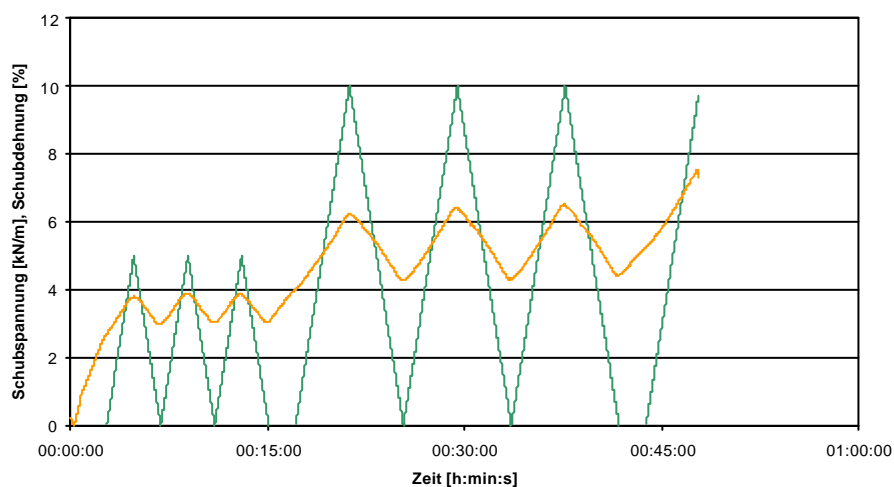


Bild 6.5.21: M01/158, Schubspannungen und Schubdehnungen als Funktion der Zeit

Auch bei dieser Probe hat man es nicht mit einem orthogonal anisotropen Material zu tun.

Wie schon bei Probe M01/157 zeigen sich unter gleichen Hauptspannungen schon Schubdeformationen.

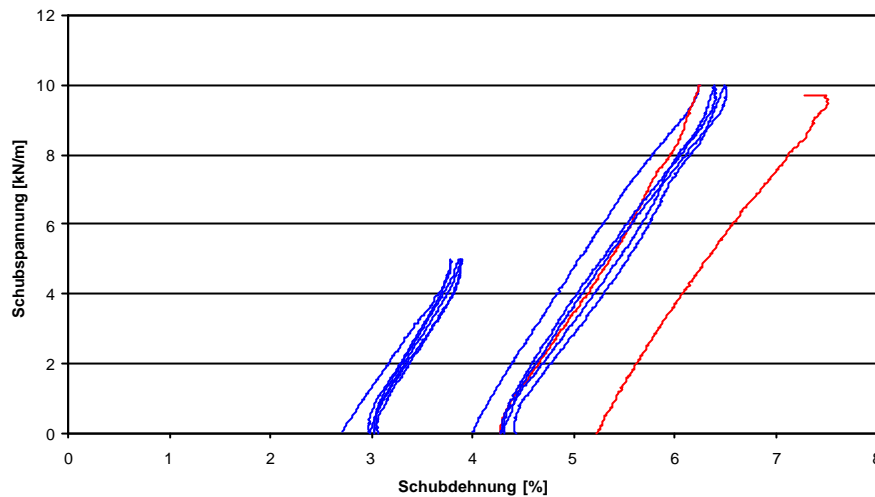


Bild 6.5.22: Schubspannungen als Funktion der Schubdehnungen, rot aufsteigender Ast, blau absteigender Ast

Verbindet man die Nullpunkte der Spannungs-Dehnungs-Linien mit den Umkehrpunkten, wie im Diagramm dargestellt, so ergeben sich die folgenden Werte für den Schubmodul G (kN/m):

$$\begin{aligned} G_1 &= 470 \text{ kN/m} \\ G_2 &= 420 \text{ kN/m} \\ G_3 &= 405 \text{ kN/m.} \end{aligned}$$

Die errechneten Schubmoduln sind etwas geringer. Ursache hierfür sind die durch die Fertigung entstandenen etwas voneinander unterschiedlichen Ausgangswinkel.

Auch hier gilt wieder: die Werte sind Näherungswerte, die sich ungefähr einstellen würden, wäre das Material von Anfang an orthogonal anisotrop.

6.5.3.2.3. Probe Nummer M01/159

Als erstes seien wieder die Schubspannungen (grün) und die Schubdehnungen (orange) als Funktion der Zeit aufgezeichnet. Die Probe wurde mit Schublastgeschichte 2 belastet.

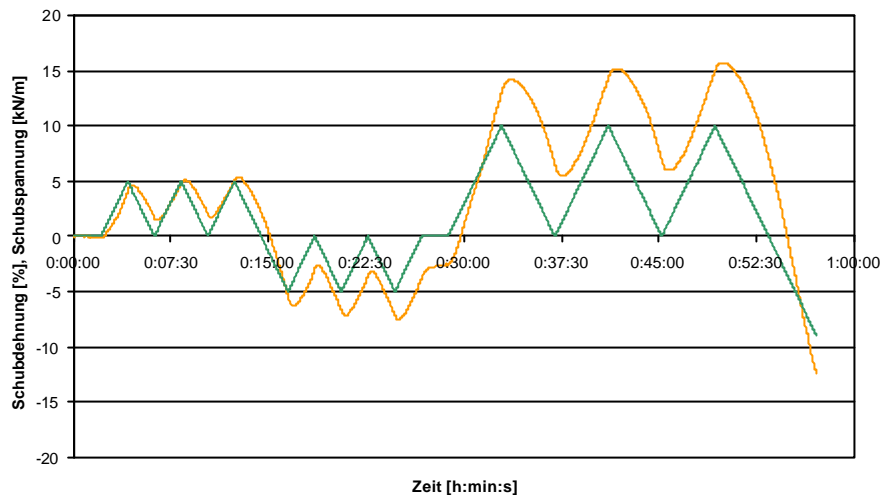


Bild 6.5.23: M01/159, Schubspannungen und Schubdehnungen als Funktion der Zeit

Bei dieser Probe war der Winkel zwischen Kette und Schuss am nächsten bei 90 Grad, was man auch daran erkennt, dass fast keine Schubdehnung auftritt, ist die Schubspannung verschwindend klein.

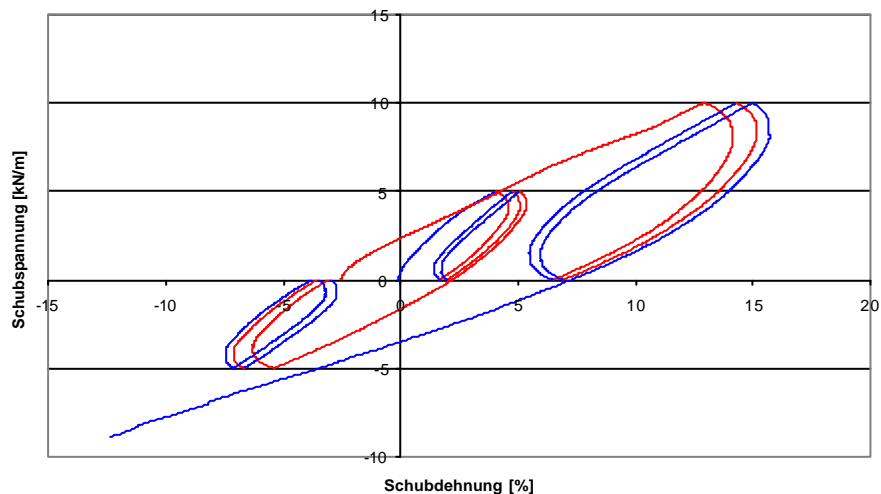


Bild 6.5.24: M01/159, Schubspannungen über Schubdehnungen

Man sieht auch bei dieser Probe, dass sie sich bei höheren Schubbelastungen versteift, wenn auch nicht ganz so deutlich wie die erste Probe.

Die Steigungen der fünf Geraden und damit der Schubmodul G (kN/m) ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} G1 &= 60 \text{ kN/m} \\ G2 &= 70 \text{ kN/m} \\ G3 &= 80 \text{ kN/m} \\ G4 &= 100 \text{ kN/m} \\ G5 &= 110 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Die Werte des Schubmoduls liegen im Vergleich zu den anderen Proben deutlich niedriger, so sind aber in der Größenordnung mit oben errechneten Moduln zu vergleichen, bei denen der Umkehrpunkt mit dem Nullpunkt verbunden wird.

6.5.3.2.4. Vergleich der Messungen an den drei Proben

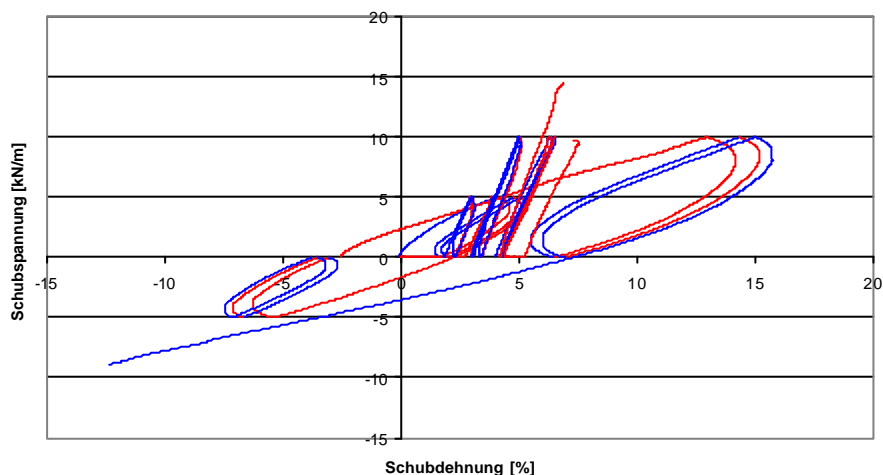


Bild 6.5.25: Vergleich der Ergebnisse der drei Schubproben des Materials ST12C3719

Die beiden Schubproben M01/157 und M01/158, die mit Schublastgeschichte 1 und damit ausschließlich positiven Schubspannungen getestet wurden, liegen sehr nahe beieinander. Die Steigungen und damit Moduln weisen vernachlässigbare Unterschiede, die aus den unterschiedlichen Fertigungswinkeln resultieren, auf.

Probe M01/159, die mit positiven und negativen Schubspannungen belastet wurde, ein deutlich weiches Schubverhalten zeigt.

6.5.3.3 Material ST12C3721

6.5.3.3.1. Probe M01/070

Aus diesem Material konnte nur diese eine Schubprobe gefertigt werden, die mit Schublastgeschichte 1 belastet wurde.

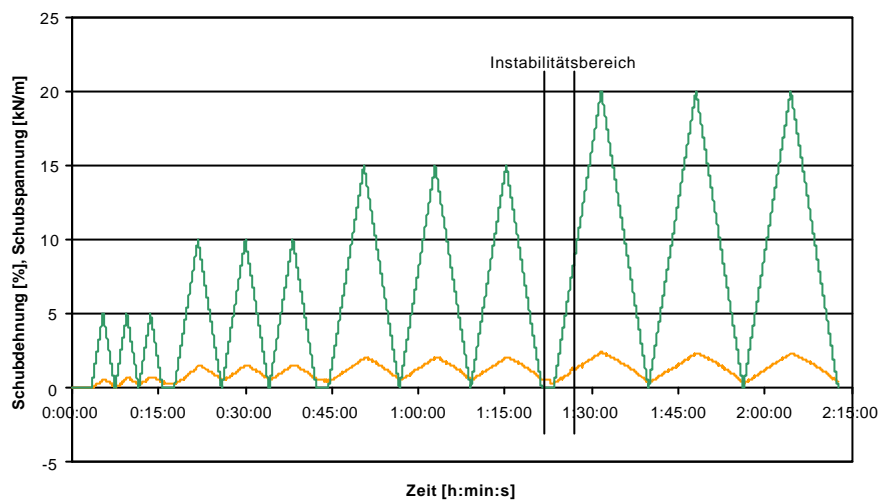


Bild 6.5.26: M01/070, Schubspannung (in kN/m) und Schubdehnung (%) als Funktion der Zeit

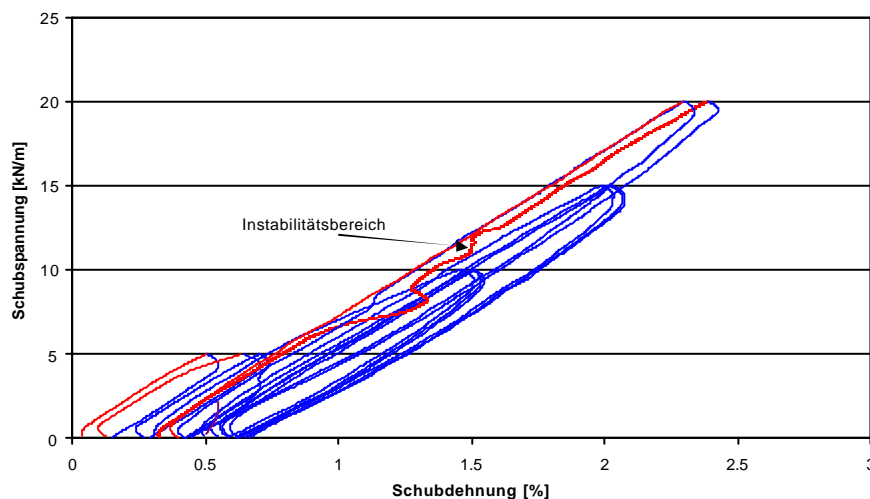


Bild 6.5.27: M01/070, Schubspannung als Funktion der Schubdehnung

Kleine Instabilitäten in der Regelung sind im Diagramm markiert.

Zur weiteren Auswertung wird die Schubspannung als Funktion der Schubdehnung in Bild 6.5.27 dargestellt, und die Schubmoduln werden berechnet.

Die Steigungen der vier Geraden und damit der Schubmodul G (kN/m) ergeben sich zu:

$$G_1 = 320 \text{ kN/m}$$

$$G_2 = 310 \text{ kN/m}$$

$$G_3 = 360 \text{ kN/m.}$$

$$G_4 = 430 \text{ kN/m}$$

6.5.3.4. Material CL160H-4,

6.5.3.4.1. Probe M01/031

Als erstes werden die Spannungen und die resultierenden Schubdehnungen über der Zeit aufgezeigt. Die angeschweißten Laschen versagten sehr schnell, so dass nur die ersten Zyklen ausgewertet werden konnten.

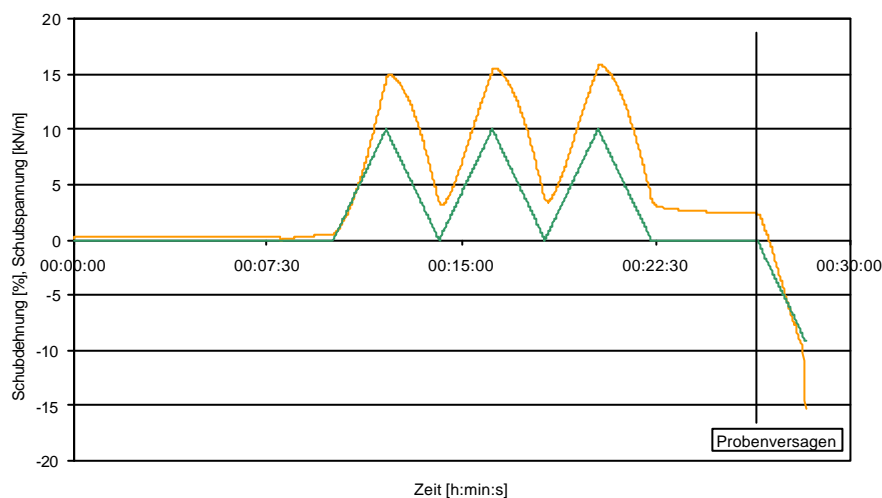


Bild 6.5.28: M01/031, Schubspannungen und -dehnungen als Funktion der Zeit

Die Ergebnisse, nämlich die Spannungen als Funktion der Dehnung, werden im folgenden Bild 6.5.29 vorgestellt. Der aufsteigende Ast ist rot, der absteigende blau gekennzeichnet. Man erkennt eine relativ große Hysterese und zwischen den Umkehrpunkten ein fast lineares Verhalten.

Die linearen Näherungen für diese Messkurven sind mit eingezeichnet.

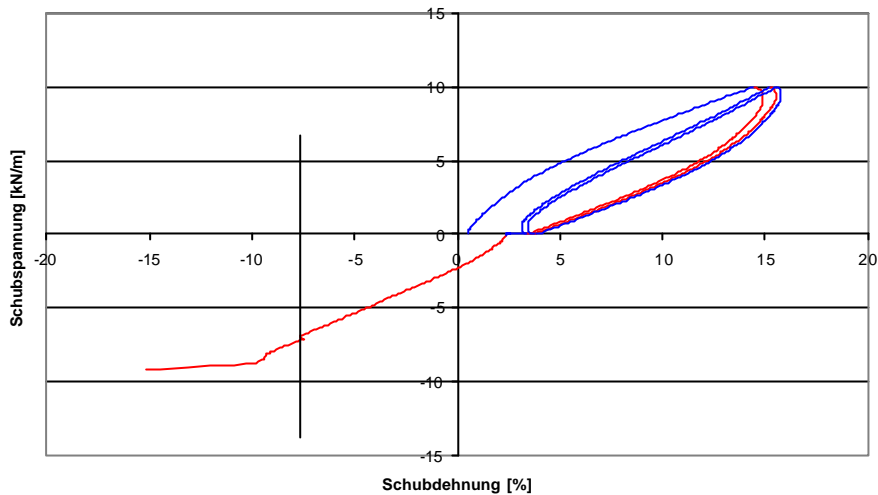


Bild 6.5.29: M01/031, Schubspannung als Funktion der Schubdehnung

Die Steigungen, die dem Schubmodul G entsprechen, ergeben sich jeweils ungefähr zu:

$$G = 60 \text{ kN/m.}$$

6.5.3.4.2. Probe M01/073

Hier werden wieder zuerst die Schubspannungen (orange) und Schubdehnungen (grün) als Funktion der Zeit gezeigt. Versagen trat an dieser Probe erst später auf, so konnten sowohl ein positiver wie auch ein negativer Anfangszyklus ganz durchfahren werden.

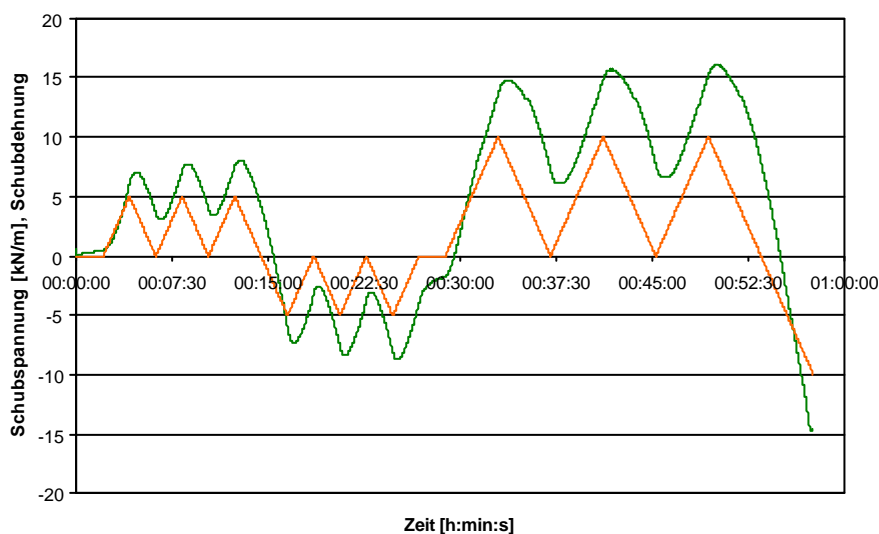


Bild 6.5.30: M01/073, Schubspannung und -dehnung als Funktion der Zeit

Im folgenden Bild 6.5.31 werden nun die Schubspannungen wieder als Funktion der Schubdehnungen vorgestellt. Dabei markiert rot wieder den aufsteigenden und blau den absteigenden Ast. Das Verhalten sieht auf den ersten Blick verschieden von dem der Probe mit der Nummer M01/031 aus. Die Hysterese erscheint größer.

Errechnet man sich auch hier die Steigung der linearen Näherung, verschwindet dieser erwähnte Unterschied jedoch weitgehend, wie man auch beim Vergleich der Moduln sieht.

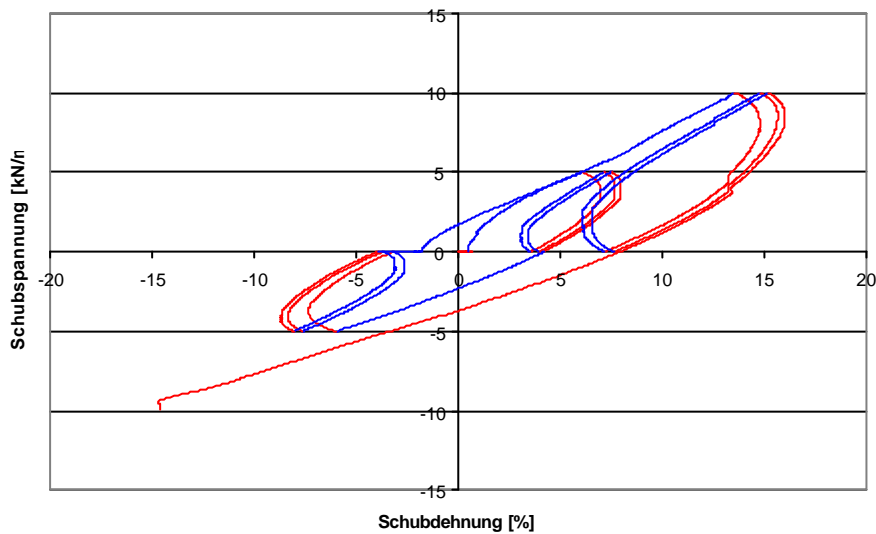


Bild 6.5.30: M01/073, Schubspannung als Funktion der Schubdehnung

Die entsprechenden Steigungen, die dem Schubmodul G (kN/m) entsprechen, ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} G_1 &= 70 \quad \text{kN/m} \\ G_2 &= 70 \quad \text{kN/m} \\ G_3 &= 65 \quad \text{kN/m} \\ G_4 &= 60 \quad \text{kN/m} \end{aligned}$$

6.5.3.4.3. Probe M01/074

Es werden wieder zuerst die Schubspannungen (grün) und Schubdehnungen (orange) als Funktion der Zeit gezeigt. Auch hier trat Versagen erst später auf, wieder konnten ein positiver und ein negativer Anfangszyklus ganz durchführen und gemessen werden.

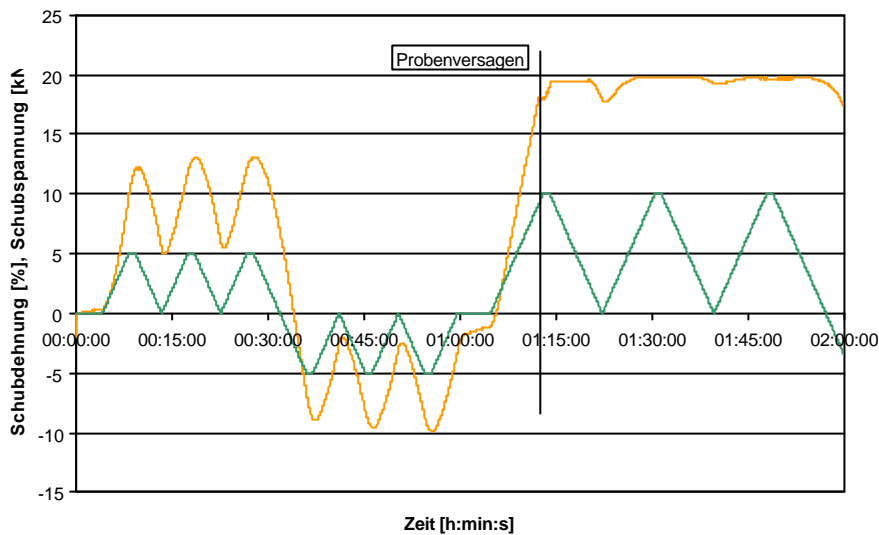


Bild 6.5.31: M01/074, Schubspannung und -dehnung als Funktion der Zeit

Im folgenden Bild werden wieder die Schubspannungen als Funktion der Schubdehnungen vorgestellt. Das Verhalten sieht auf den ersten Blick verschieden von dem der Probe mit der Nummer M01/031 aus, gleicht aber dem der Probe M01/073.

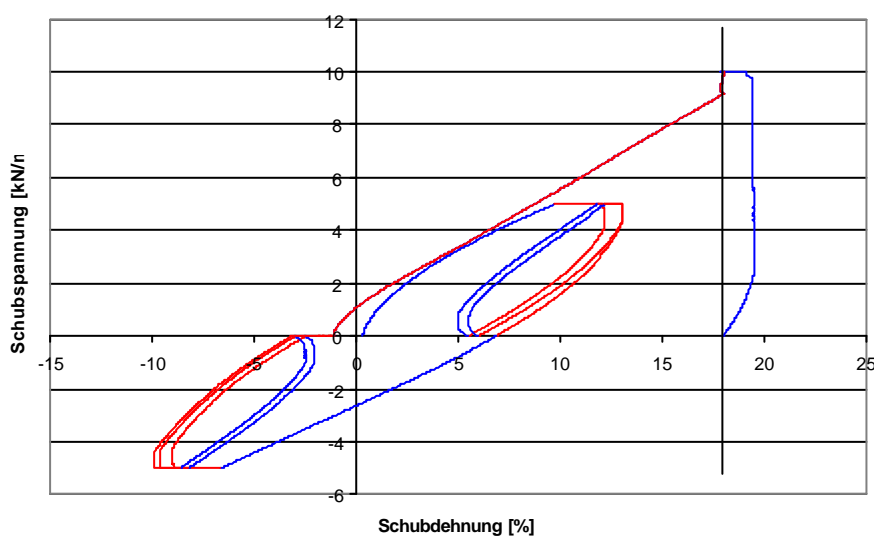


Bild 6.5.32: M01/074, Schubspannung als Funktion der Dehnung

Die entsprechenden Steigungen, die dem Schubmodul G (kN/m) entsprechen, ergeben sich zu:

$$G_1 = 40 \quad \text{kN/m}$$

$$G_2 = 65 \quad \text{kN/m}$$

$$G_3 = 55 \quad \text{kN/m}$$

6.5.3.4. Vergleich aller Ergebnisse

Zum Abschluss seien alle Ergebnisse noch einmal zusammenfassend in einem Diagramm dargestellt. Man sieht, dass die Proben mit den Nummern M01/73 und M01/74 in ihrem Verhalten eher vergleichbar sind, dass aber Probe M01/031 etwas davon abweicht. Das lässt sich möglicherweise darauf zurückführen, dass die beiden ersten Proben einen gleichen von 90 Grad verschiedenen Anfangswinkel zwischen Kette und Schuss aufzeigten, während Probe M01/31 hier fast genau 90 Grad aufweist.

Dies wird auch beim Vergleich der Steigungen nochmals erkennbar.

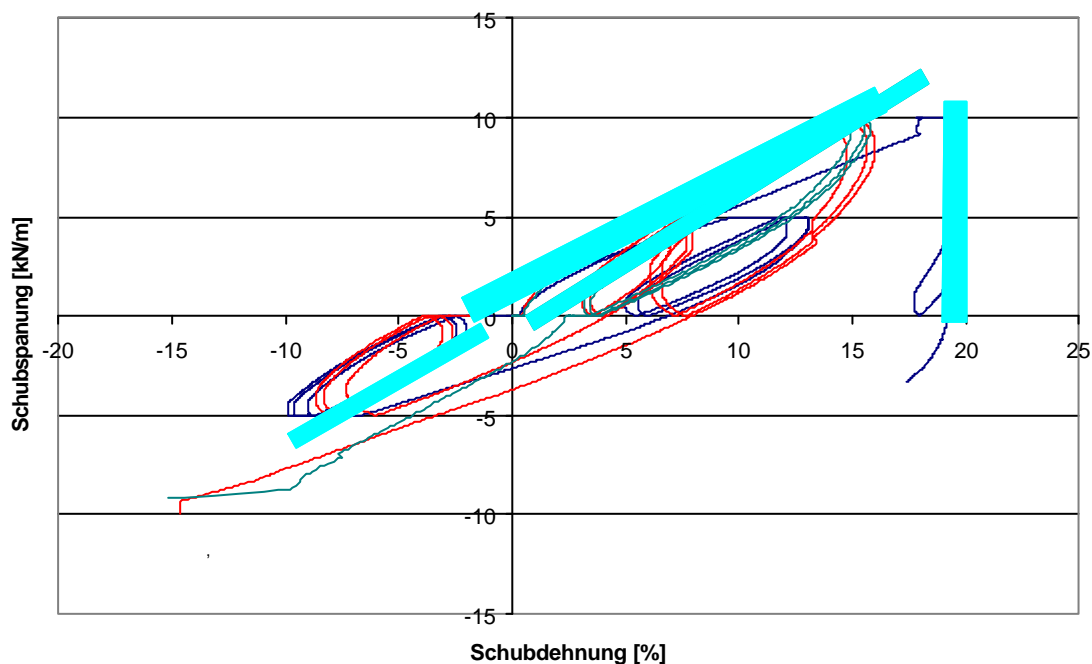


Bild 6.5.33: Vergleich der Messergebnisse der Proben M01/074 (blau), M01/073 (rot) und M01/031 (grün) mit vergleichbaren Steigungen (cyan)

Zeichnet man den Ast der ersten Belastung heraus, so kann man bei den Proben M03/031 und M03/073 den von 90° verschiedenen Anfangswinkel in Bild 6.5.34 ablesen.

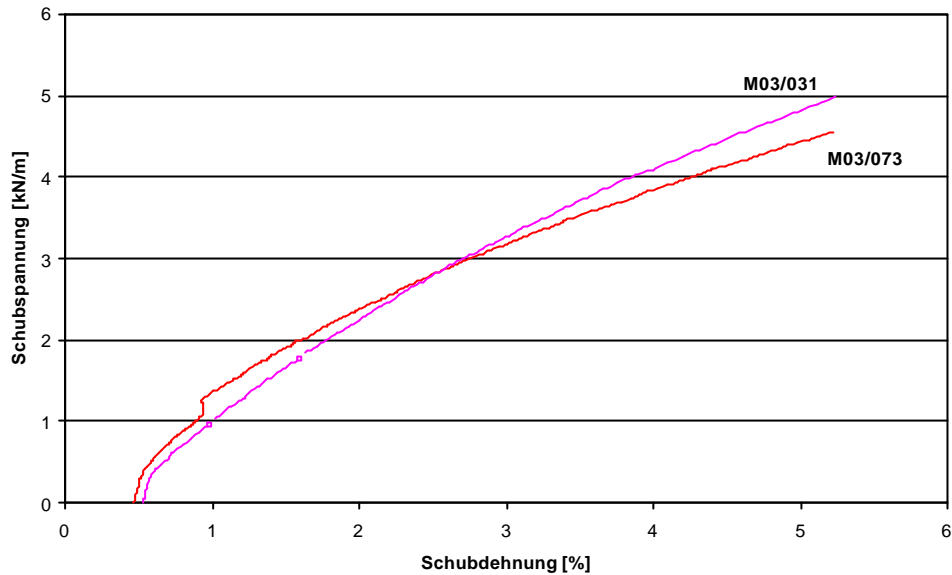


Bild 6.5.34: Erster Belastungsast der Proben M03/031 und M03/073

Die Steigung und damit Schubsteifigkeit bei der ersten Belastung nimmt bei beiden Proben vergleichbare Werte an.

Bei weiterer Belastung in Bild 6.5.35 wird dies noch deutlicher.

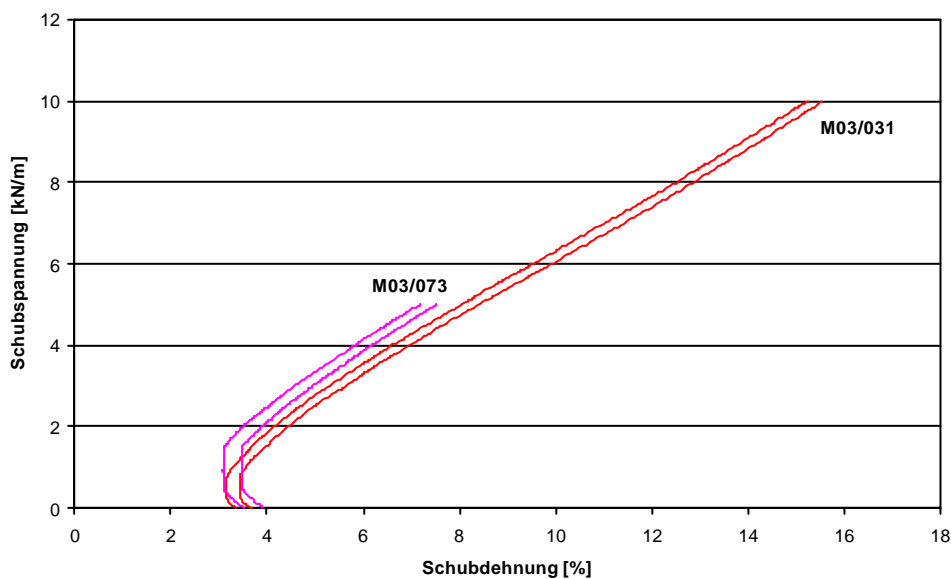


Bild 6.5.35: Weitere Belastungszyklen an den Proben M03/031 und M03/073

Die Steigungen und damit Schubsteifigkeiten der beiden Proben M03/031 und M03/073 weisen absolut vergleichbare Werte auf.

Nun sollen die Steifigkeiten an den beiden Proben M03/073 und M03/074, die mit negativer Schubbelastung getestet wurden, im negativen Bereich verglichen werden. Siehe dazu Bild 6.5.36.

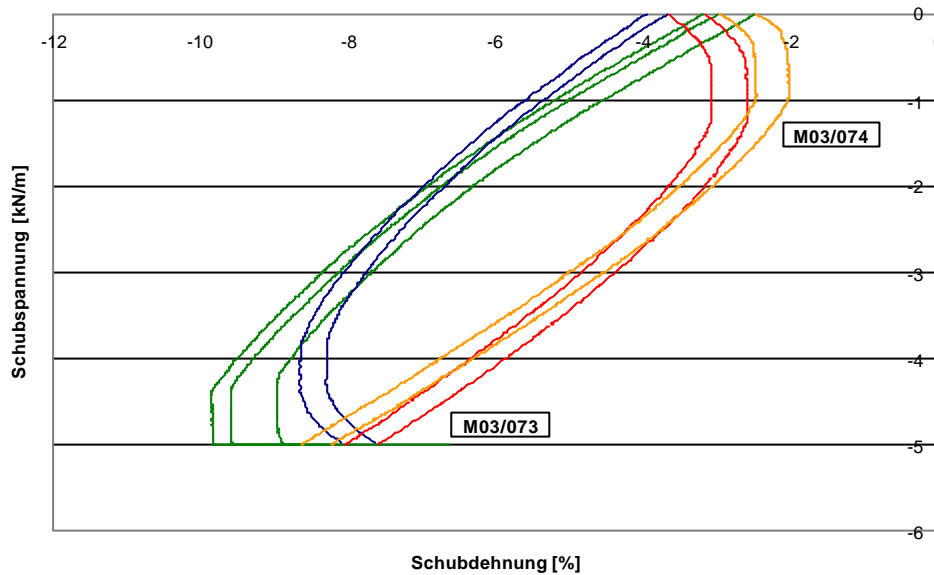


Bild 6.5.36: Versuch mit negativer Schubbelastung an den Proben M03/073 (Belastung rot, Entlastung blau) und M03/074 (Belastung orange, Entlastung grün)

Auch im negativen Bereich kann man die Schubsteifigkeiten der beiden Proben M03/073 und M03/074 am Material ST12C3721 als durchaus vergleichbar bezeichnen.

7. Versuche mit Material aus dem Bereich Textile Architektur

7.1. Allgemeines

Da die Prototyp-Gewebe für den Luftschiffbau nur in begrenzter Menge zur Verfügung standen, werden die folgenden Versuche mit einem aus dem Bauwesen bekannten Polyester-PVC-Gewebe der Fa. Ferrari, Précontraint 1002, durchgeführt.

7.2. Versuche

7.2.1. Fadenversuche

Aus dem Gewebe wurden in beiden Richtungen, Kette und Schuss, Fäden entnommen und deren Kraft-Dehnungsverhalten einzeln gemessen. Bei den verwebten Fäden handelt es sich um ein hochfestes Polyester, PES HT mit 1100 dtex.

Die Ergebnisse wurden jeweils zu einer Mittelwert-Kurve zusammengefasst, und die Fitfunktion wurde bestimmt.

Da Kett- und Schussfäden bei diesem Material dasselbe Kraft-Dehnungsverhalten aufweisen, wurde aus allen Versuchen nur eine Fitkurve bestimmt.

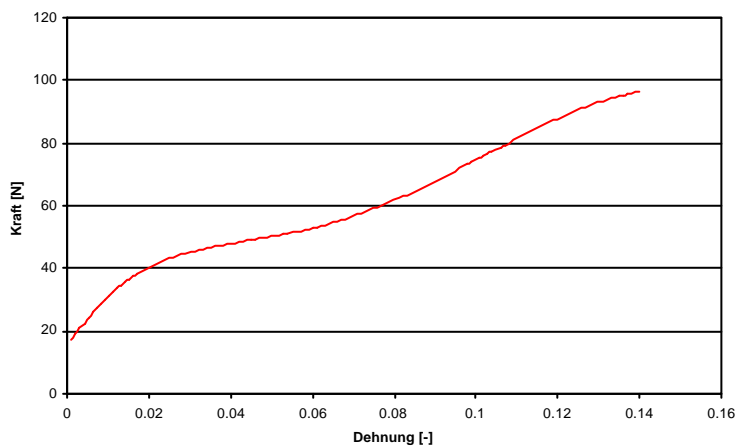


Bild 7.1: Fitkurve für das Kraftdehnungsverhalten von aus dem Gewebe entnommenen HT-Polyester-Kett- und Schussfäden 1100 dtex, Material M02/088

Die geringen Unterschiede im Kraft-Dehnungsverhalten zwischen Kett- und Schussfäden haben ihre Ursache in der speziellen Beschichtungsweise dieses Materials. „Précontraint“ (deutsch: vorgespannt) bedeutet in diesem Fall, dass im Gegensatz zur sonst üblichen Beschichtungsweise, das Gewebe beim Beschichtungsprozess in Schussrichtung gehalten

wird. Damit werden die Geometrien von Kett- und Schussfäden in ähnlicher Lage fixiert, was zu einem sehr ähnlichen mechanischen Verhalten in Kett- und Schussrichtung führt.

7.2.2. Zweiachsiger fadenparalleler Versuch

Die Biaxversuche wurde mit derselben Versuchseinrichtung wie in Kapitel 6.2 beschrieben durchgeführt.

Es wurde die folgende Lastgeschichte gefahren:

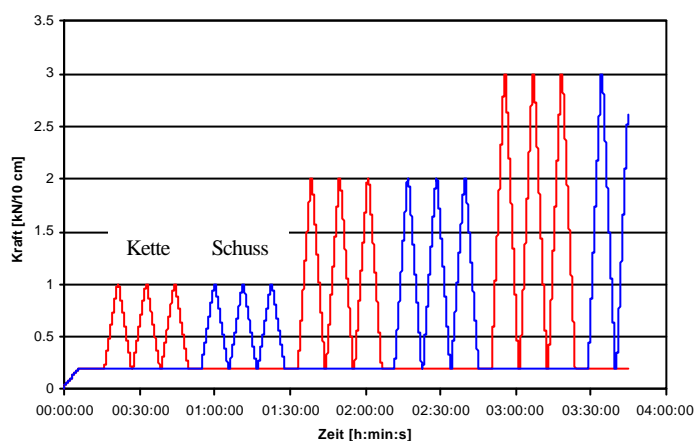


Bild 7.2: Lastgeschichte fadenparalleler Versuch

Dabei wurden an vier Proben aus unterschiedlichen Produktionschargen die folgenden Dehnungen gemessen:

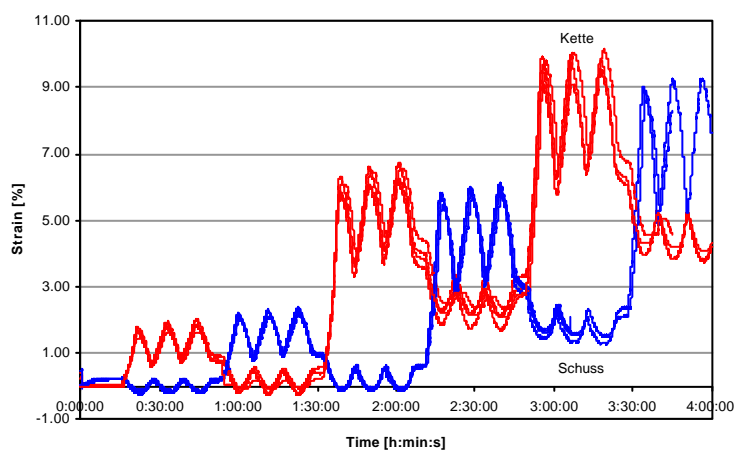


Bild 7.3: gemessene Dehnungen [%] Ferrari Précontraint 1002, Proben M02/462, M02/463, M02/464 und M02/465 als Funktion der Zeit

Das Ergebnis kann für ein beschichtetes Gewebe als sehr homogen bezeichnet werden.

Für jeden Belastungszyklus wurden nun die E-Moduln berechnet. Sie sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Tabelle 7.2.1: E-Moduln Précontraint 1002, Proben M02/462, M02/463, M02/464 und M02/465

	M01/462	M01/463	M01/464	M01/465	Mittelwert	Standard- abweichung	Standard- abweichung
Intervall 1-10 kN/m, Ergebnisse in kN/m					kN/m	kN/m	%
E ₁₁₁₁	973	1017	1093	1089	1043	58	5,58
E ₁₁₂₂	295	344	467	464	392	87	22,14
E ₂₂₂₂	778	804	1001	988	893	118	13,24
Intervall 1-20 kN/m, Ergebnisse in kN/m							
E ₁₁₁₁	818	876	962	955	901	67	7,42
E ₁₁₂₂	241	273	199	188	222	42	18,97
E ₂₂₂₂	743	755	778	777	763	17	2,18

Intervall 1-30 kN/m, Ergebnisse in kN/m			
E ₁₁₁₁		1039	
E ₁₁₂₂		281	
E ₂₂₂₂		803	

Verglichen mit den untersuchten Luftschiffmaterialien werden im Bauwesen Materialien mit deutlich geringeren Steifigkeiten verwendet. Dies hat zur Folge, dass für Luftschiffe Berechnungen und Zuschnitte exakter sein müssen als üblicherweise im Bauwesen und dass u. U. verfeinerte Modelle und Rechenmethoden einzusetzen sind.

7.2.3. Zweiachsiger Schubversuch

Der Schubversuch wurde mit demselben Versuchsaufbau wie die Schubversuche in Kapitel 6 durchgeführt.

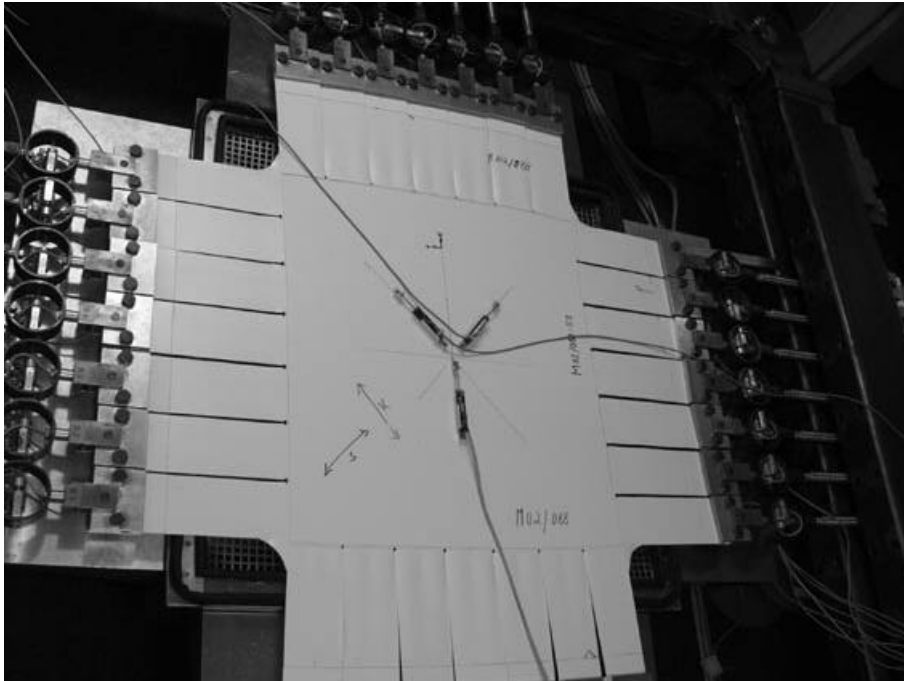


Bild 7.4: Versuchsaufbau Schubversuch

Als Belastung für den zweiachsigen Schubversuch mit einem Winkel der Anisotropierichtung von 45° zur Hauptspannungsrichtung wurde die im folgenden Bild dargestellte Lastgeschichte gefahren.

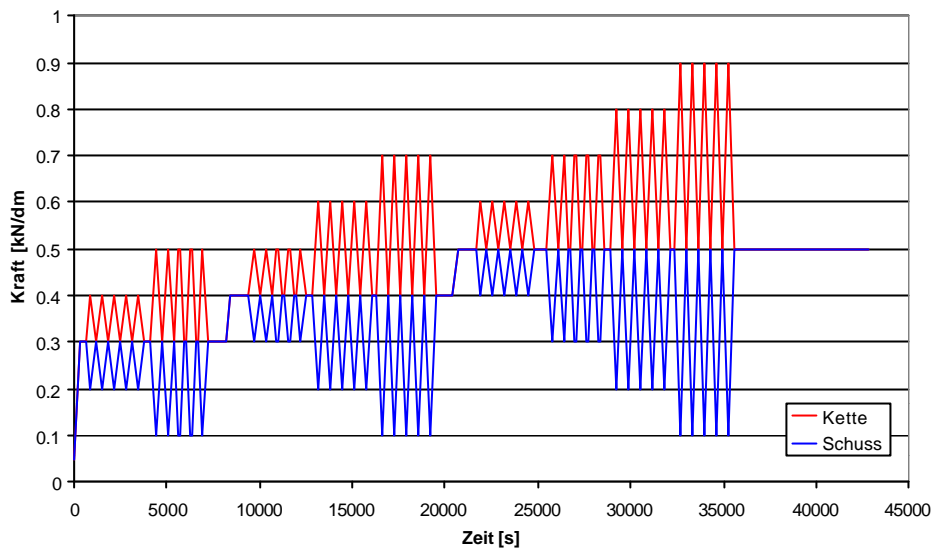


Bild 7.5: Lastgeschichte für den Schubversuch

Aus dieser Belastung erhält man die folgende Schubbelastung:

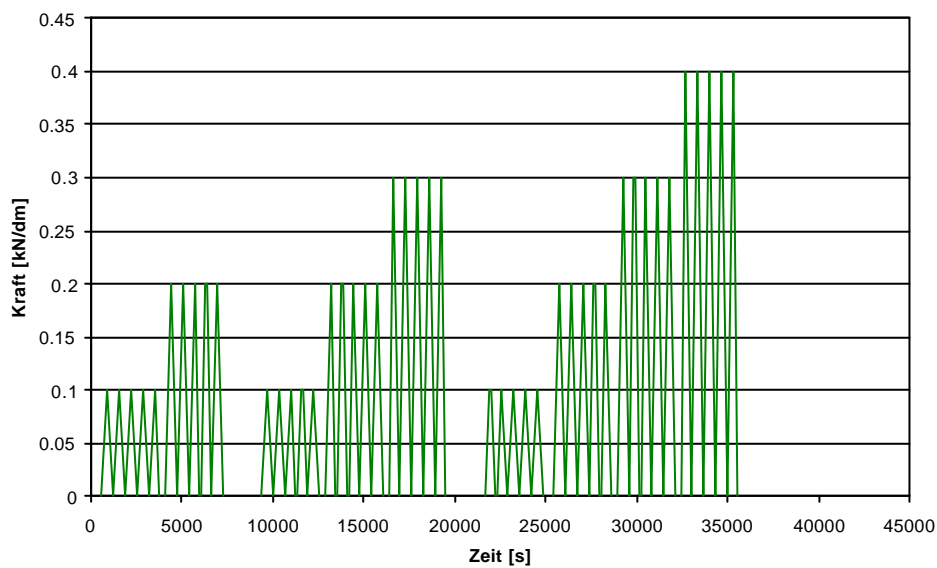


Bild 7.6: Schublastgeschichte

Im Versuch wurden die folgenden Schubdehnungen gemessen, dargestellt mit den zugehörigen Schubspannungen:

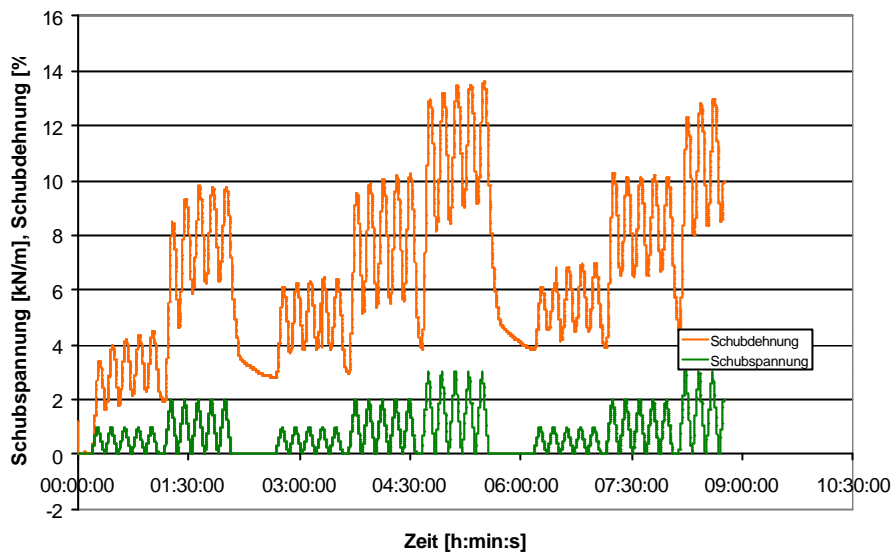


Bild 7.7: Schubspannungen und gemessene Schubdehnungen

Trägt man die Schubspannung über der Schubdehnung auf, ergibt sich folgendes Bild:

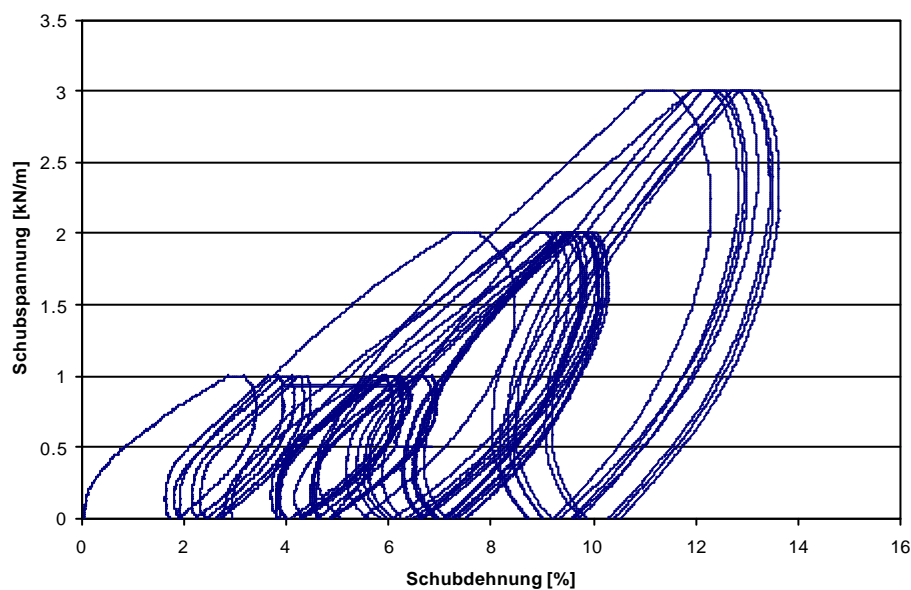


Bild 7.8: Schubspannung [kN/m] als Funktion der Schubdehnung [%]

Aus den Ableitungen der verschiedenen Belastungszyklen wurden die Schubmoduln berechnet.

Sie ergaben sich zu:

Belastungs- zyklus	Max. Schubspannung [kN/m]	Schubmodul G [kN/m]
1	1.0	29
2	2.0	32
3	1.0	24
4	2.0	27
5	3.0	33
6	1.0	24
7	2.0	32
8	3.0	32

Auch diese sind deutlich geringer als die Schubmoduln der Luftschiffmaterialien.

Weiterhin kann man aus den aufgetragenen Belastungen die zugehörigen fadenparallelen Kett- und Schussspannungen berechnen. Diese sind im nächsten Diagramm mit den zugehörigen gemessenen Kett- und Schussdehnungen dargestellt.

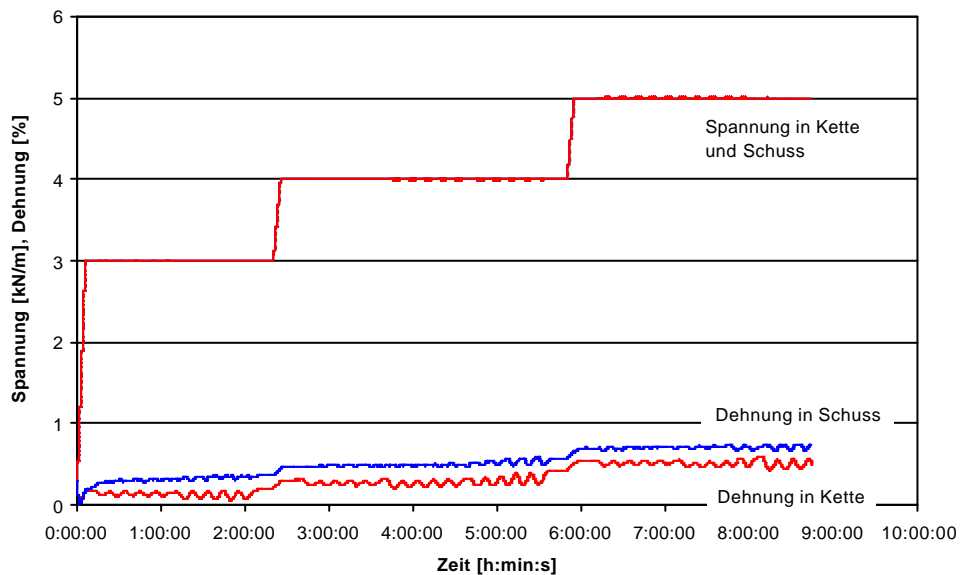


Bild 7.9: Kett- und Schussspannungen sowie die gemessenen Dehnungen in Kett- und Schussrichtung aus dem Schubversuch

In einem fadenparallelen Biaxversuch wird die aus dem Schubversuch errechnete Normallastgeschichte nachgefahren und die entsprechenden Dehnungen werden gemessen.

Das Ergebnis ist in Bild 7.10 dargestellt.

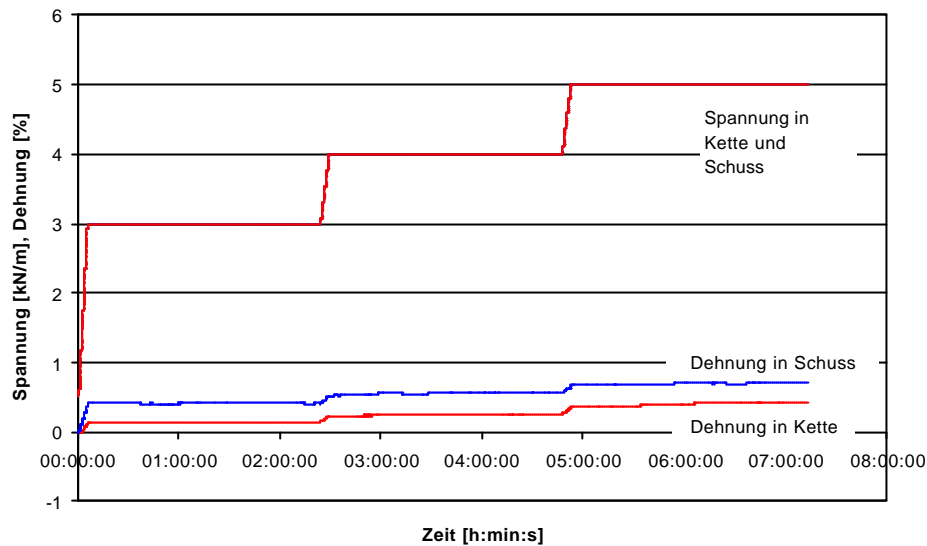


Bild 7.10: Fadenparalleler Versuch mit gleicher Kett- und Schussspannung und gemessenen Dehnungen in Kett- und Schussrichtung

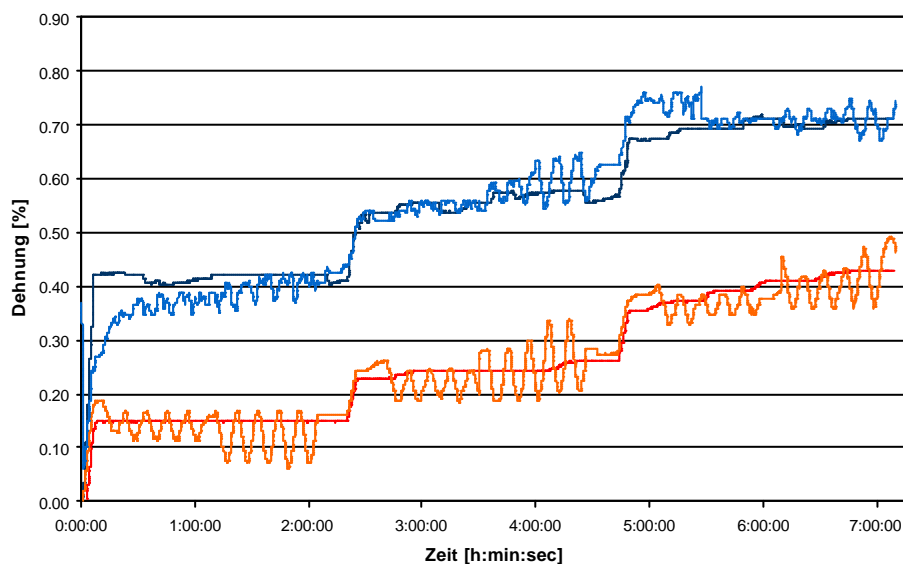


Bild 7.11: Vergleich der gemessenen Dehnungen aus fadenparallelem Versuch und Schubversuch

Vergleicht man die gemessenen Dehnungen in Kett- und Schussrichtung, so kann man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Schubversuch und fadenparallelem Versuch feststellen. Damit wäre der von Blum/ Bidmon [3] postulierte Summenansatz, der in Kapitel 5.3

wiederaufgegriffen wurde, bewiesen. Die innere Energiedichte ergibt sich aus den Summen der Energie in Kett- und Schussrichtung und einem Schubanteil zu:

$$\pi = \pi_1(\varepsilon_1) + \pi_2(\varepsilon_2) + \pi_s(C_{12}).$$

Fügt man nun diesen Schubanteil zum vorgestellten mikromechanischen Modell hinzu, was man aufgrund der Entkopplung wie man an den vorausgehenden gruppentheoretischen Überlegungen sehen konnte, machen kann, erhält man ein gemischtes Gewebemodell, das für den elastischen Fall sowohl für fadenparallele Belastungen als auch für Schubbelastungen eine gute Näherung darstellt, obwohl sich der Schubanteil nichtlinear und nichtelastisch verhält. Man hat damit ein Modell für das anisotrope nichtlineare elastische Gewebeverhalten. Auf eine viskoelastische Erweiterung des Modells wird an dieser Stelle verzichtet.

7.2.4. Einachsiger Ersatzversuch für Schub

7.2.4.1. Versuchsaufbau

Zur vereinfachten Ermittlung des Schubmoduls und des kritischen Schubwinkels, bei dem sich das Membranmaterial versteift oder Falten wirft, wird ein einachsiger Ersatzversuch konstruiert. Der Versuchsaufbau ist folgendermaßen: ein Gewebestreifen wird in eine einachsige Prüfmaschine eingespannt. An zwei Stellen wird der Streifen in horizontaler Richtung gehalten. In der Mitte zwischen den beiden horizontalen Halterungen sitzt eine dritte Klemme, die in horizontaler Richtung gezogen werden kann. Während des Ziehvorgangs werden die zur Auslenkung benötigte Kraft und die Verschiebung gemessen. Aus der Verschiebung wird der Auslenkwinkel zur senkrechten Probenachse errechnet.

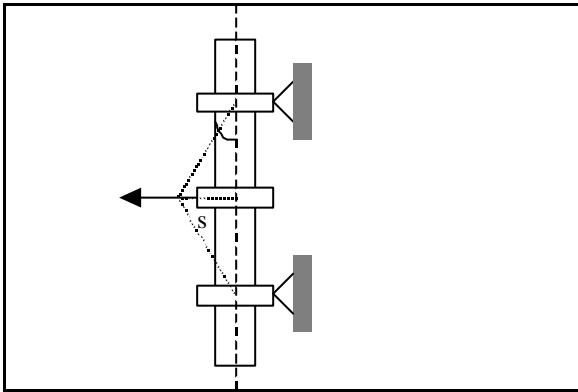


Bild 7.12: Versuchsprinzip

Im nächsten Bild wird der Versuchsaufbau ausschnittsweise gezeigt:

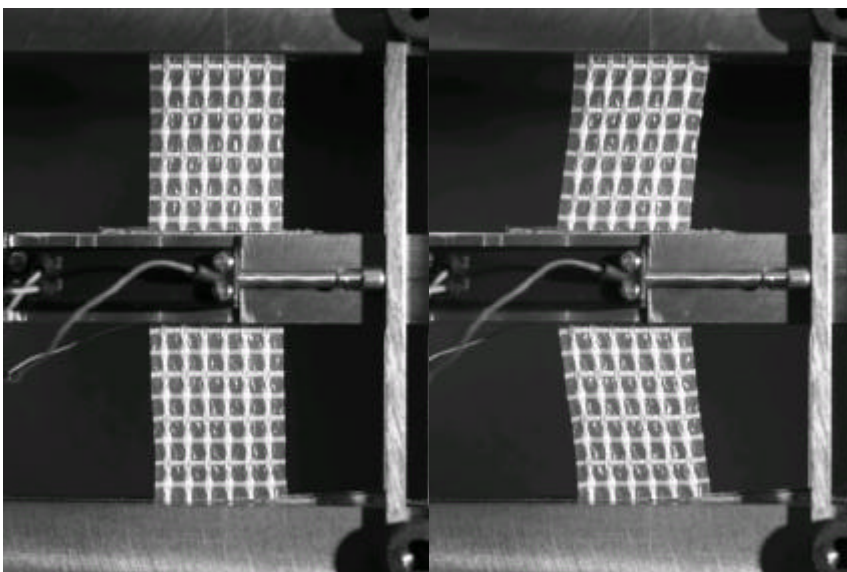


Bild 7.13: Versuchsaufbau im unbelasteten und im belasteten Zustand

7.2.4.2. Berechnung der Schubkraft

Im folgenden Bild sei nochmals der Versuch schematisch im unverformten und verformten Zustand dargestellt.

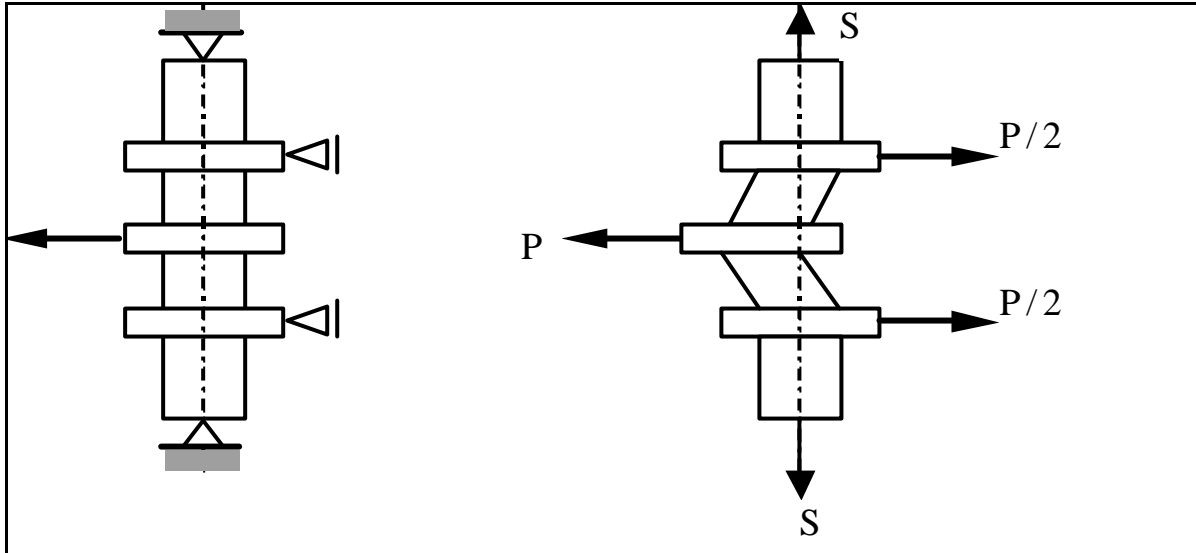


Bild 7.14: Schematische Darstellung des einachsigen Schubversuchs

Am verformten Element werden die Schnittkräfte angezeichnet:

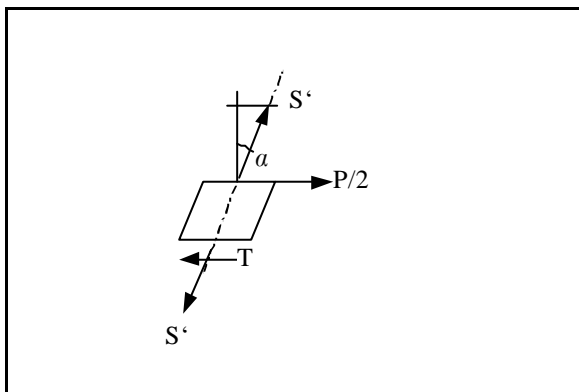


Bild 7.15: Kräftegleichgewicht am verformten Element

Damit ergibt sich für das Gleichgewicht in horizontaler Richtung:

$$-T + \frac{P}{2} + S \sin \alpha = 0$$

mit T = Schubkraft, P = Auslenkkraft, S = Vorspannkraft in vertikaler Richtung und α = Winkel zur Vertikalachse.

Für die Schubkraft τ bezogen auf die Streifenbreite b erhält man:

$$t = \left(\frac{P}{2} + S \sin \alpha \right) / b .$$

7.2.4.3. Auswertung und Ergebnisse

Stellt man die aus dem einachsigen Versuch ermittelte Schubspannung über der Schubdehnung dar, erhält man folgendes Bild für das PVC-beschichtetes Polyestergewebe Précontraint 1002:

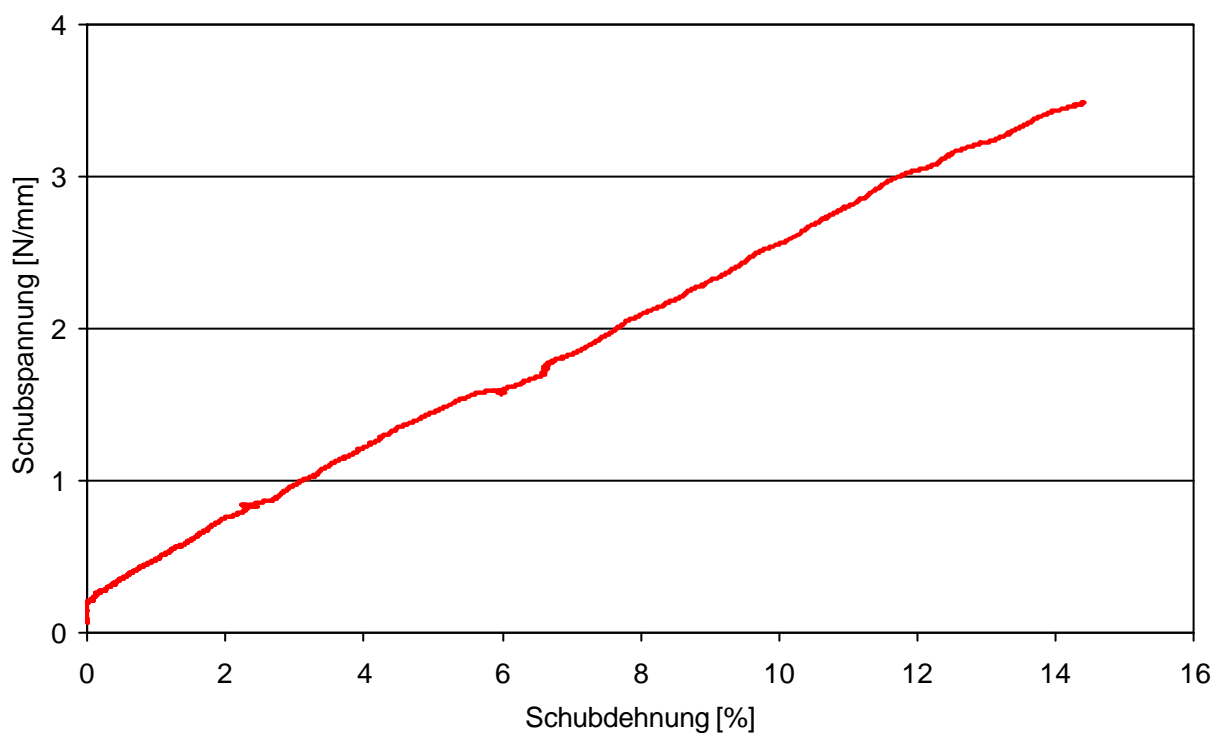


Bild 7.16: Im monoaxialen Versuch gemessene Schubspannung aufgetragen über der Schubdehnung bei einer Vorspannkraft in Längsrichtung $S=300$ N

7.2.5. Vergleich mit den Ergebnissen aus dem Biaxversuch

Im nächsten Bild sind die Ergebnisse des ein- und zweiachsigen Versuchs aufgetragen.

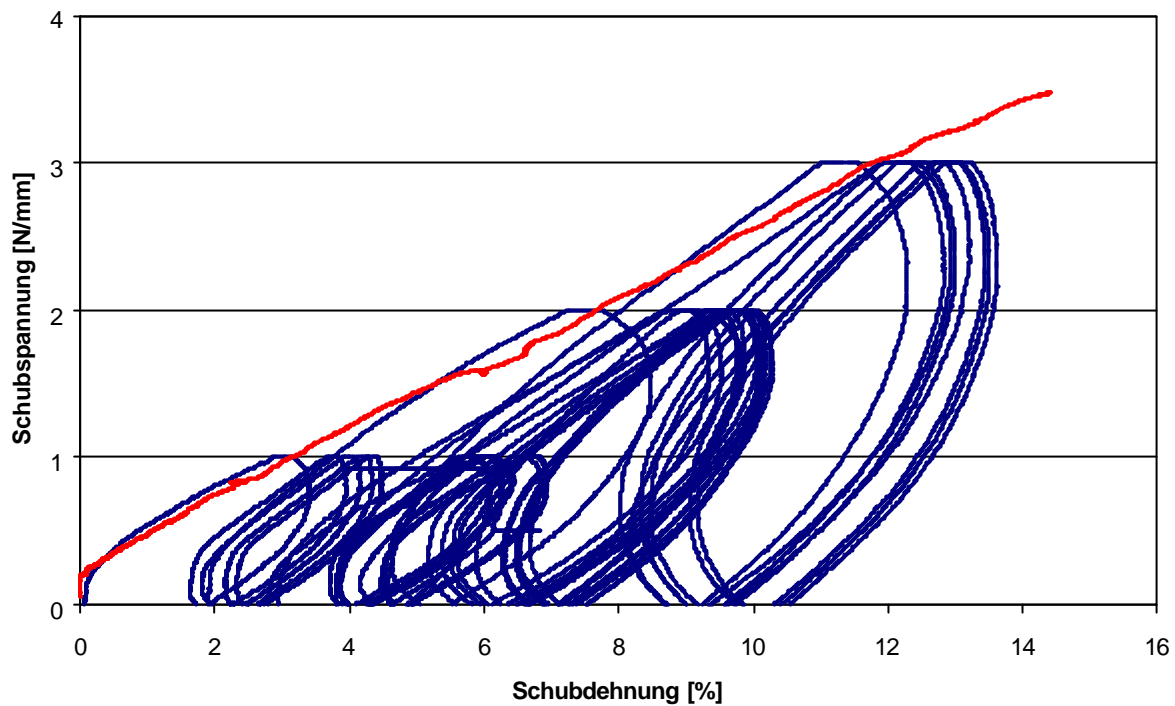


Bild 7.17: Vergleich der Ergebnisse aus dem monoaxialen und biaxialen Versuch

Vergleicht man die Steigungen der unterschiedlichen Belastungen und der beiden Versuche, kann eine große Ähnlichkeit festgestellt werden. V. a. die erste Belastung des Biaxversuchs lässt sich gut mit dem Werten aus dem einachsigen Versuch vergleichen. Für den Schubmodul erhält man im monoaxialen Versuch 24 kN/m und somit vergleichbare Werte wie im Zweiachsversuch, wo der Schubmodul ja nach Laststufe zwischen 24 und 33 kN/m liegt. Jedoch scheint der Zweiachsversuch insgesamt zuverlässiger und auch informativer zu sein, da hier unterschiedliche Laststufen untersucht werden können. Der Monoaxversuch kann aber durchaus zu einer ersten groben Abschätzung des Schubverhaltens hergenommen werden.

8. Auswertung

8.1. Simulationsmodell für das mechanische Verhalten von beschichteten Geweben

Nun soll aus dem in Kapitel 5 vorgestellten Gewebemodell [3] ein Rechenprogramm erstellt und später in ein Berechnungsprogramm für Membranen [32] übernommen werden. Aus

1. dem Fadenverhalten und

2. der Geometrie von Kett- und Schussfaden

soll das mechanische Verhalten von beschichteten Geweben errechnet werden.

Die Geometrie des Fadens im Gewebe wird bei der numerischen Umsetzung durch Dreiecke angenähert entsprechend dem oben beschriebenen Modell mit:

A_1 = Amplitude des Fadens in Kettrichtung,

A_2 = Amplitude des Fadens in Schussrichtung,

L_1 = Periodenlänge des Fadens in Kettrichtung,

L_2 = Periodenlänge des Fadens in Schussrichtung,

$$m_1 = \frac{A_1}{L_1} \text{ und}$$

$$m_2 = \frac{A_2}{L_2}.$$

Dazu geht man von folgenden Zusammenhängen aus:

- Die Spannungen in Kett- und Schussrichtung werden aus Projektion der Fadenkräfte auf die Mittelebene des Gewebes und Multiplikation mit der Fadendichte berechnet:

$$L_{11} = \frac{1}{L_1} \left[F_1 \frac{k_1 m_1}{\sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}} + P_1 \right]$$

$$L_{22} = \frac{1}{L_2} \left[F_2 \frac{k_2 m_2}{\sqrt{1 + k_2^2 m_2^2}} + P_2 \right].$$

- Der Zusammenhang zwischen Fadenkräften und Fadendehnungen ist bekannt:

$$F_1 = F_1(\mathbf{e}_1),$$

$$F_2 = F_2(\mathbf{e}_2).$$

- Als Gleichgewicht in Richtung normal zur Fadenmittelebene wird angesetzt:

$$F_2 \frac{k_2 m_2}{\sqrt{1 + k_2^2 m_2^2}} = F_1 \frac{k_1 m_1}{\sqrt{1 + k_1^2 m_1^2}}.$$

- Die Gewebedehnungen werden aus den Fadendehnungen und der Geometrie des verformten Gewebes berechnet

$$e_1 = \bar{e}_1 = m_1 \sqrt{\frac{1 + k_1^2 m_1^2}{1 + m_1^2}} - 1$$

$$e_2 = \bar{e}_2 = m_2 \sqrt{\frac{1 + k_2^2 m_2^2}{1 + m_2^2}} - 1.$$

- Und eine Annahme über den Zusammenhang zwischen Gewebedicke und Kontaktkraft im Gewebeknoten wird getroffen:

$$k_1 m_1 A_1 + k_2 m_2 A_2 - A_1 - A_2 - dF_1 S_1 = 0.$$

Diese Annahme beschreibt die Dickenänderung des beschichteten Gewebes unter Spannung.

Somit erhält man insgesamt acht Gleichungen für die insgesamt zehn Unbekannten aus:

Dehnungen im Faden, Dehnungen im Gewebe, Kräfte in den Fäden, Spannungen im Gewebe und Gewebegeometrie im deformierten Zustand.

Kann man zwei der als unabhängig anzusehenden Variablen vorgeben, lassen sich alle anderen Größen berechnen.

Für die Durchführung einer Simulation muss deshalb neben dem Kraft-Dehnungsverhalten auch die Geometrie des Fadens bestimmt werden.

Hierzu führt man einen Schnitt entlang eines Fadens parallel zur Kettrichtung und parallel zur Schussrichtung. Unter dem Mikroskop betrachtet lassen sich die Geometrien des Kett- und des Schussfadens deutlich erkennen und vermessen.

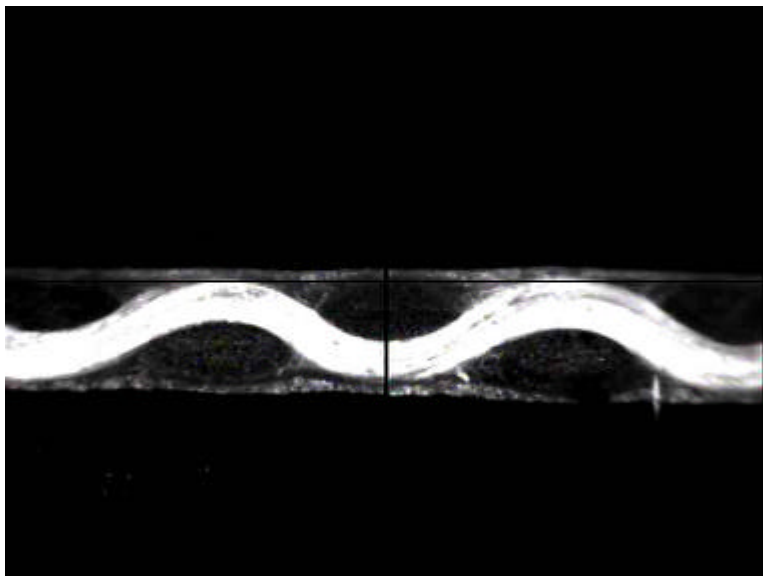


Bild 8.1: Geometrie des Kettfadens

Aus den Bildern der Gewebeschnitte wird nun die Geometrie berechnet. Dazu wandelt man das Bild in ein binäres Bild um, die Kanten des Fadens werden durch einen Kantenfilter extrahiert.

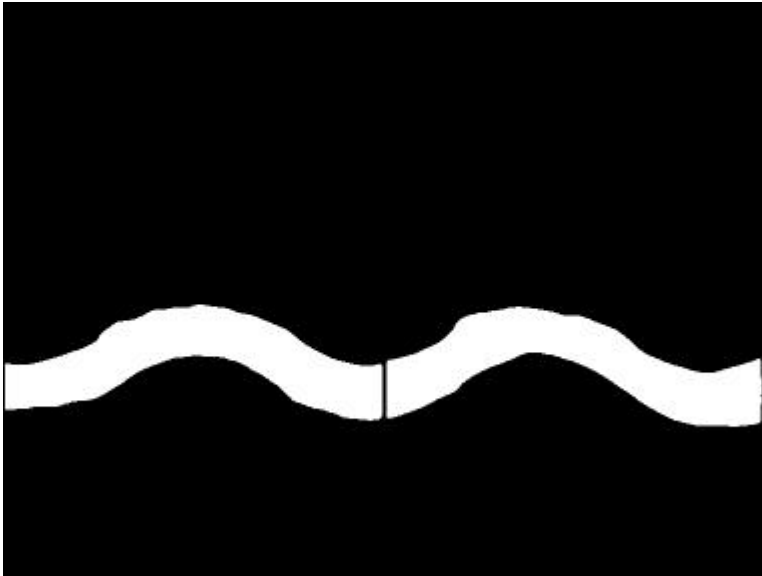


Bild 8.2: Binäres Bild der Fadengeometrie



Bild 8.3: Extrahierte Kanten

Diese beiden Kurven werden nun mithilfe eines Tracers digital in Tabellenwerte ausgelesen und abgespeichert.

Damit erhält man die x- und y-Werte der Fadenrandverläufe.

Bei der weiteren Bearbeitung stellt man die beiden Verläufe im Diagramm dar und errechnet sich die Mittelwerte der beiden Randkurven, um so den Verlauf der Fadenmittellachse zu erhalten.

Diese Fadenmittellinienkurven wird nun durch eine Sinusfunktion angenähert, und es werden die charakteristischen Werte Ortsfrequenz und Amplitude berechnet.

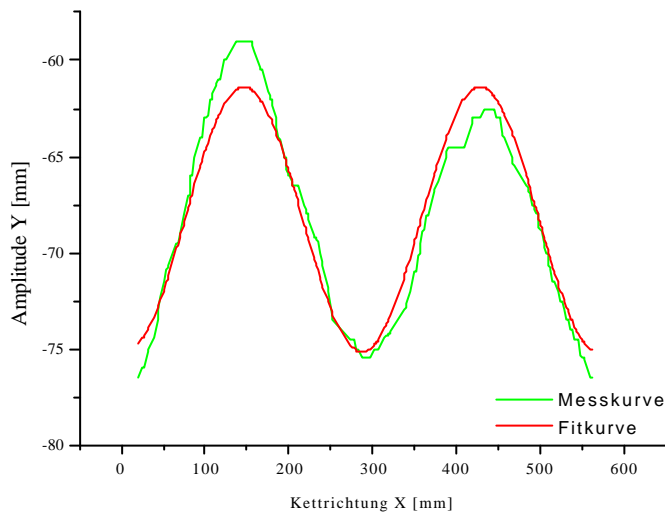


Bild 8.4: Fadengeometrie des Kettfadens und angenäherte Sinuskurve mit den charakteristischen Werten Ortsfrequenz und Amplitude

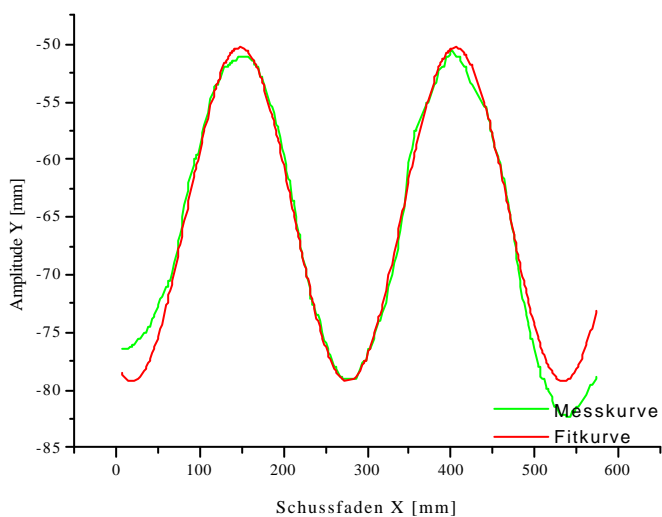


Bild 8.5: Fadengeometrie des Schussfadens und angenäherte Sinuskurve mit charakteristischen Werten

Damit hat man die geometrischen Größen zur Durchführung der Simulation bestimmt und kann damit in die Berechnung, für die man acht Gleichungen für acht Unbekannte vorliegen hat, gehen.

Die Standardabweichung der beiden charakteristischen Fadenverlaufswerte könnte man übrigens auch als Kennzeichen für die Gewebegüte hernehmen.

8.2. Vergleich von Rechnung und Messung

Der Vergleich von Rechnung und Messung wird am Beispiel des im vorigen Kapitel 7 untersuchten Ferrari-Gewebes untersucht. Als Eingangswerte für die Geometrie ergaben sich:

für die Periodenlänge L_1 in Kettrichtung $L_1 = 3,164$ mm,

für die Amplitude A_1 in Kettrichtung $A_1 = 0,4033$ mm,

für die Periodenlänge L_2 in Schussrichtung $L_2 = 3,474$ mm,

und für die Amplitude A_2 in Schussrichtung $A_2 = 0,4059$ mm.

Die Kraft-Dehnungslinien der Fadenversuche werden aus dem vorigen Kapitel übernommen.

Nun kann die Simulation durchgeführt werden.

Mit den eingegebenen Kraft-Dehnungslinien der Kett- und Schussfäden ergeben sich für die Spannungs-Dehnungslinien des Gewebes in Kett- und Schussrichtung folgende Kurven:

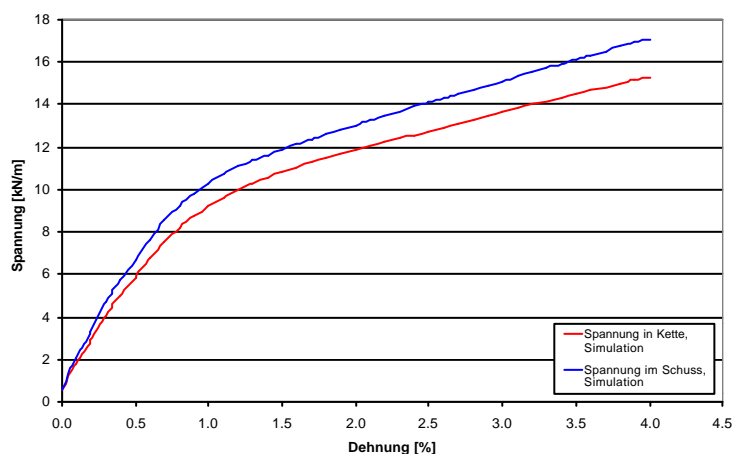


Bild 8.6: Spannungs-Dehnungs-Kurven des Gewebes, berechnet aus dem Kraft-Dehnungsverhalten der aus dem Gewebe entnommenen Kett- und Schussfäden

Die Spannungen können in Abhängigkeit der Dehnungen U_{11} und U_{22} dargestellt werden.
Es ergeben sich folgende Flächen:

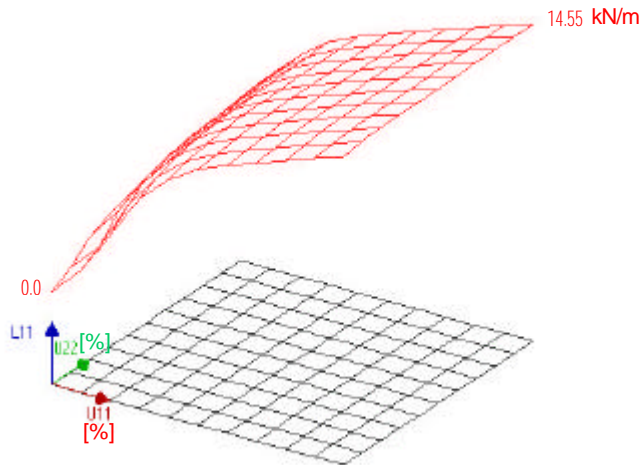


Bild 8.7: Kettspannung n_{11} [kN/m] als Funktion von Dehnung in Kett-
richtung U_{11} [%] und Dehnung in Schussrichtung U_{22} [%]

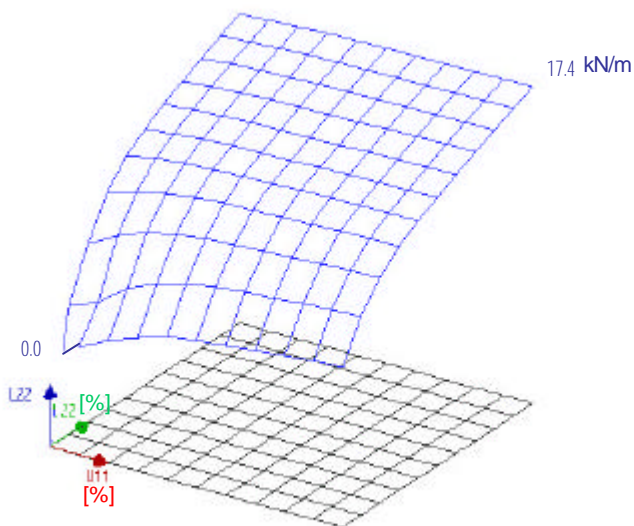


Bild 8.8: Schussspannung n_{22} [kN/m] als Funktion von Dehnung in Kett-
richtung U_{11} [%] und Dehnung in Schussrichtung U_{22} [%]

Zu den Grafiken ist anzumerken, dass die Flächen zur besseren Darstellung etwas nach oben verschoben wurden.

Mithilfe des Simulationsmodells können zudem die elastischen Moduln des Gewebes berechnet werden.

Man erhält für die Moduln E_{1111} , E_{1122} und E_{2222} folgende Flächen:

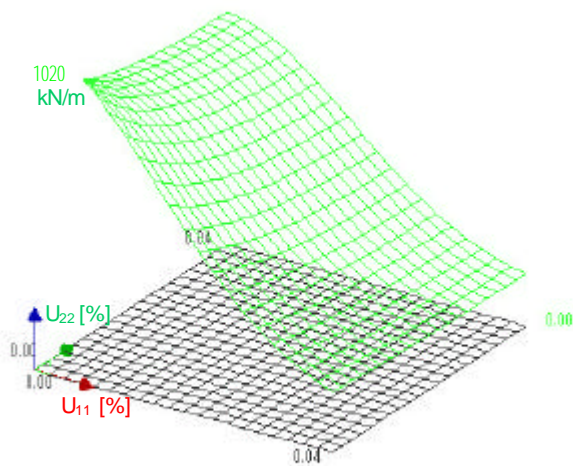


Bild 8.9: Elastischer Modul E_{1111} [kN/m]

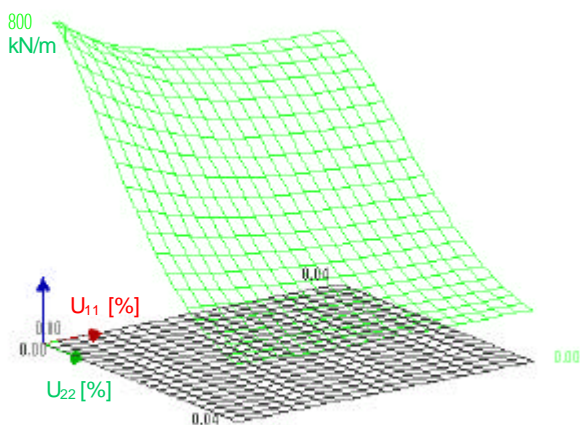


Bild 8.10: Elastischer Modul E_{2222} [kN/m]

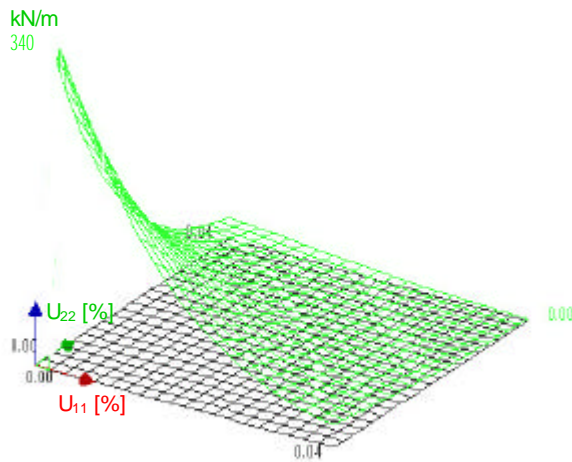


Bild 8.11: Interaktion zwischen Kette und Schuss E_{1122} [kN/m]

Um die Rechenergebnisse bestätigen zu können, wird ein zweiachsiger Versuch, auf dem ein auf der Fläche liegender Pfad nachgefahren wird, durchgeführt. Der Biaxversuch wird dehnungsgesteuert gefahren. Es wurde eine Dehnungsgeschichte ausgewählt, bei der die Dehnungen in Kette und Schuss gleichzeitig gleichmäßig auf denselben Wert gefahren wurden, während man die Spannungen in beiden Richtungen misst. Die Dehnungen sind in Bild 8.12 dargestellt:

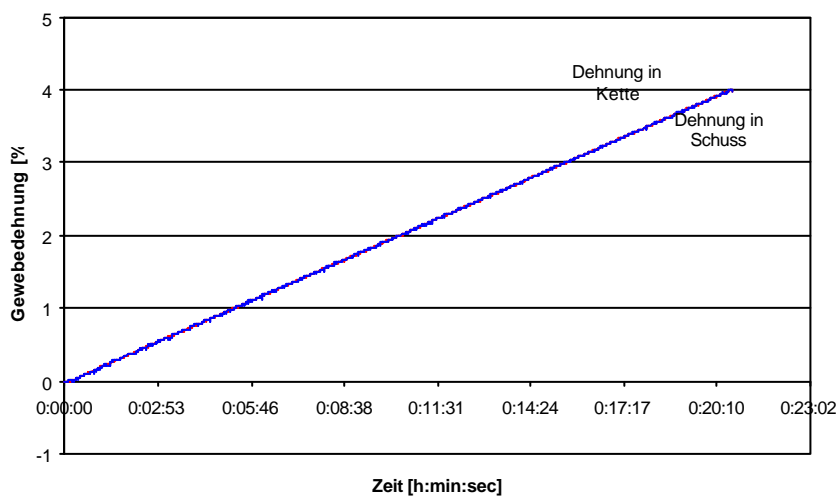


Bild 8.12: Dehnungsgesteuerter Biaxversuch

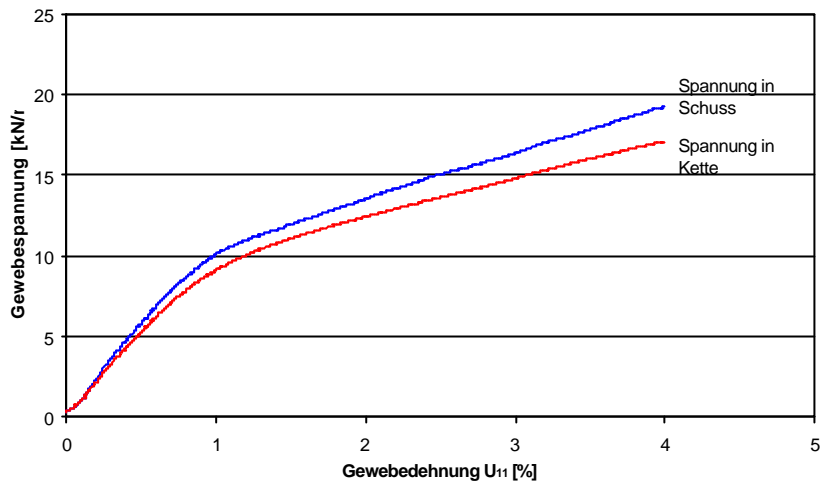


Bild 8.13: Dehnungsgesteuerter Biaxversuch, Kett- und Schussspannung in Abhängigkeit der Dehnung U_{11}

Der Vergleich des Versuchsergebnisses mit dem Ergebnis aus der numerischen Berechnung der Fadensteifigkeiten und Geometrie im Gewebe, das in Bild 8.6 gezeigt wird, ist im nächsten Bild dargestellt.

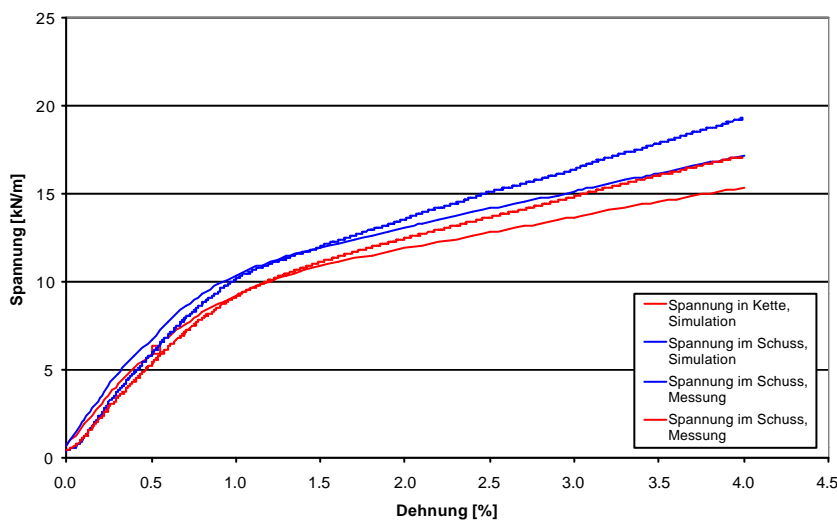


Bild 8.14: Vergleich der Kraft-Dehnungslinien aus Simulation und Messung

Wie man erkennen kann, liegen die berechneten Kurven im Anfangsbereich etwas über den Messkurven, während sie später etwas geringere Werte aufweisen. Dies kann man sich folgendermaßen erklären: im ersten Teil führt die Geometrieänderung der Knotenabstände zu einem etwas weicheren Materialverhalten als im Modell berücksichtigt. Im hinteren Bereich

dagegen spielt die Steifigkeit der Beschichtung mit, wodurch die aus der Simulation errechneten Spannungen geringer ausfallen als in Realität.

Zur Abschätzung der Größe des Beschichtungseinflusses soll eine überschlägige Rechnung angestellt werden: Nimmt man einen E-Modul von PVC von ca. 150 N/mm^2 und eine Beschichtungsdicke von maximal $0,3 \text{ mm}$ an, erhält man eine zusätzlich aus der Steifigkeit der Beschichtung resultierende Spannung von $1,8 \text{ kN/m}$ bei einer Dehnung von 4% . Dieser Wert ist vergleichbar mit den oben dargestellten Unterschieden aus Rechnung und Messung.

Damit kann man die Übereinstimmung von Versuch und Berechnungsmodell für dieses Beispiel als nachgewiesen betrachten. Natürlich müssen hier auf jeden Fall in Zukunft noch weitere Versuchsreihen an anderen beschichteten Geweben durchgeführt werden.

Als nächster Schritt soll das Materialgesetz als Unterprogramm in ein FEM-Programm integriert werden.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Im Membranbau, wo man im Gegensatz zu den biegesteifen Schalen, die in Beton gegossen werden, Flächen aus beschichteten Geweben oder Folien herstellt, ergibt sich immer zwangsläufig ein Zuschnittsproblem. D. h. man muss eine zweifach gekrümmte Fläche, sei sie negativer Gaußscher Krümmung wie bei mechanisch vorgespannten Konstruktionen oder positiver Gaußscher Krümmung wie bei pneumatischen Konstruktionen, wozu auch Luftschiffe und Ballons gehören, aus zuerst eben vorliegenden Streifen herstellen.

Bei halbstarren und Prallluftschiffen ist wie bei Membrandächern die Hülle das maßgebliche lastabtragende Element. Die wichtigsten Faktoren für das Funktionieren einer solchen Luftschiffhülle sind Geometrie, Konfektionierung und Material. Eine geeignete Geometrie, die sowohl aerodynamisch sinnvoll als auch für den Zuschnitt machbar ist, muss gefunden werden. Die vorliegende Arbeit geht von einem bereits vorliegenden Entwurf aus und stellt eine Theorie unter Verwendung Tschebyscheffscher Parameternetze zur Ermittlung der notwendigen Schubverformung für die Bekleidung einer zweifach gekrümmten Oberfläche vor. Ausgehend von der Mikrostruktur eines anisotropen Gewebes mit zwei Fadenhaupttrichtungen, Kette und Schuss, werden Streifen so auf eine zweifach gekrümmte Oberfläche aufgebracht, dass die Bekleidung der Oberfläche, wie es Tschebyscheff schon 1878 in seinem Aufsatz „sur la coupe des vêtements“ ausgedrückt hat, allein durch die Änderung des Winkels zwischen den als undeformbar betrachteten Fäden hergestellt wird. Auf diese Weise kann man den notwendigen Schubwinkel für beliebige Flächen berechnen.

Anschließend werden Materialien für technische Textilien eingeführt, ausgehend von der Faser, die für Fäden als lasttragendes Element des Trägergewebes eine besondere Wichtigkeit für die elastischen Eigenschaften des Werkstoffes einnehmen. Neben den klassisch im Bauwesen verwendeten Fasern Polyester und Glas wird auf neue Entwicklungen von Hochleistungsfasern und deren Eigenschaften sowie auf Beschichtungsmaterialien eingegangen.

Ein schon in den Siebziger Jahren entwickeltes mikromechanisches Modell wird wiederaufgegriffen. Aufgrund von Messungen, bei denen sich negative Querdehnzahlen ergaben, wurde entdeckt, dass die bisher unberücksichtigte Dickenänderung von Geweben unter Belastung, v. a. bei unbeschichteten Geweben nicht vernachlässigt werden darf. Deshalb wird ein Term für die Dickenänderung hinzugefügt.

Anhand des mikromechanischen Modells wird der Zusammenhang zwischen Fadensteifigkeit und der im Gewebe vorliegenden Fadengeometrie sowie der Membransteifigkeit dargestellt und am Beispiel eines PVC-beschichteten Polyesterwebes berechnet.

Zum Vergleich werden zweiachsige Versuche zur Berechnung der elastischen Moduln ausgewählter Materialien durchgeführt. Im Vergleich zwischen zweiachsigem Versuch am Polyesterwebes und Rechenmodell auf Basis der im Gewebe vorliegenden Fadengeometrien und den Fadensteifigkeiten kann eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden.

Des Weiteren werden zweiachsige Schubversuche in einer ebenen Biaxmaschine zur Ermittlung der Schubsteifigkeiten der vorgestellten Materialien mit unterschiedlichen Schublastzyklen aufgestellt und ausgewertet. Der Grenzschiebwinkel für die unterschiedlichen Materialien, bei dem sich das Material versteift oder sogar reißt, wird mit den an einem Beispiel berechneten Schubwinkel einer Luftschiffhülle verglichen. Um den Versuchsaufwand von Schubversuchen reduzieren zu können, werden Überlegungen zu einem vereinfachten einachsigen Schubversuch aufgestellt. Dieser soll zur schnellen einfachen Abschätzung des Schubverhaltens dienen. In einem Beispiel werden Übereinstimmung von zweiachsigen und einachsigen Messergebnissen untersucht und für einen Fall bestätigt. Dies wird jedoch in Zukunft noch genauer zu untersuchen sein.

Dagegen konnte aber ein phänomenologischer Ansatz mit Berücksichtigung des im mikromechanischen Modell nicht enthaltenen Schubanteils erweitert und im Versuch verifiziert werden, womit ein Modell zur Beschreibung des fadenparallelen und des nichtfadenparallelen Verhaltens gefunden ist. Aus den fadenparallelen Anteilen des mikromechanischen Modells und den nicht fadenparallelen Anteilen des phänomenologischen Modells wurde ein gemischtes Modell zur Beschreibung des nichtlinearen anisotropen elastischen Gewebeverhaltens entwickelt. Eine Erweiterung mit Berücksichtigung der Viskoelastizität ist in nachfolgenden Arbeiten noch zu untersuchen.

Anhand der im einachsigen Versuch gemessenen Festigkeitswerte für Fäden und Gewebestreifen können Materialien, die die erforderlichen Hüllenspannungen abtragen können, ausgewählt werden.

Aus den Steifigkeitswerten der Fäden und der Fadenverläufe im Gewebe können mithilfe des mikromechanischen Modells, das um einen Dickenanteil erweitert wurde, die Gewebesteifigkeiten errechnet werden.

Die erforderlichen Schubwinkel können aus der Geometrie berechnet werden. Dazu wird eine Oberfläche mit einem Tschebyscheffschen Parameternetz, einem Netz, das in beiden

Richtungen aus undeformbaren Fäden bestehend angenommen wird, die einen Winkel einschließen, bekleidet. Hier wird jedoch nicht wie bei den üblichen mathematischen Betrachtungen ein globales Tschebyscheffnetz angestrebt, sondern eine Bekleidung der Oberfläche mit Streifen, bei dem die Streifenrichtung bzw. die eine Parameterrichtung die Richtung der Geodätischen einnimmt.

Literaturverzeichnis

- [1] Aono, M.
Modeling Methods for the Design of 3D Broadcloth Composite Parts
Internet-Veröffentlichung, S. 1-5
 - [2] Bidmon, W.
Zum Weiterreißverhalten beschichteter Gewebe
Berichtsheft 1 zum 3. Internationalen Symposium „Weitgespannte Flächentragwerke“,
Stuttgart 1985, S. 31-34
 - [3] Blum, R. und Bidmon, W.
Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Bautextilien
SFB 64 Mitteilung 74, 1987
 - [4] Blaschke, W., Leichtweiss
Elementare Differentialgeometrie
Berlin, Heidelberg, New York 1973
 - [5] Blum, R., Bögner, H.
Evaluation Method for the Elastic Moduli
Tensinews Newsletter 3
Internet-Veröffentlichung 2002, S. 3
 - [6] Blum, R., Bögner, H.
A New Class of Biaxial Machine
Tensinews Newsletter 1
Internet-Veröffentlichung 2001, S. 4
 - [7] Blum, R.
Zeltbaumaterialien
in „Leicht und Weit“, Herausgeber Brinkmann, G.,
VCH Verlagsgesellschaft,
Weinheim 1990, S.200-223
 - [8] Blum, R., Losch, M., Luz, E.
Ein nichtlineares zweidimensionales Stoffgesetz für eine anisotrope hyperelastische
Membran unter endlichen Verzerrungen, in:
Beiträge zur Mechanik, Festschrift zum 70. Geburtstag von Herrn Prof. Dr. phil. Dr.-
Ing. E. h. Udo Wegener, herausgegeben vom Institut für Mechanik der Universität
Stuttgart,
Stuttgart 1972, S. 71-73
 - [9] Blum, R.
Beitrag zur nichtlinearen Membrantheorie
SFB 64 Mitteilungen 73, 1985
-

- [10] Burgess, C. P.
Airship Design
The Ronald Press Company,
New York 1927, S. 76-78
- [11] Do Carmo, M. P.
Differential Geometry of Curves and Surfaces
Prentice-Hall, Inc.
Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- [12] Flemming, M., Ziegmann, G., Roth, S.
Faserverbundbauweisen
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1995, S. 81-83, 104f.
- [13] Gray, A.
Differentialgeometrie
Spektrum Akademischer Verlag
Heidelberg Berlin Oxford 1994
- [14] Haas, R.
Stoffdehnung und Formänderung der Hülle von Prall-Luftschiffen,
Berlin 1913, S. 40-42
- [15] Hazzidakis, J. N.
Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmass,
J. für die reine und angewandte Mathematik, Ausgabe 88,
1880, S. 68-73
- [16] Hellerich, W., Harsch, G., Haenle, S.
Werkstoff-Führer Kunststoffe
Carl Hanser Verlag
München Wien 1996
- [17] Khoury, G. A., Gillett, J. D.
Airship Technology
University Press,
Cambridge, UK 1999
- [18] Kreyzsig, E.
Differentialgeometrie
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.
Leipzig 1968
- [19] Losch, M.
Bestimmung der mechanischen Konstanten für einen zweidimensionalen nichtlinearen
anisotropen elastischen Stoff am Beispiel beschichteter Gewebe,
Dissertation Stuttgart 1971
-

- [20] Loy, W.
Chemiefasern für technische Textilprodukte
Deutscher Fachverlag
Frankfurt 2001,
- [21] Meffert, B.
Mechanische Eigenschaften PVC-beschichteter Polyestergewebe
Dissertation Aachen 1978
- [22] Miller, T, Mandel, M.
Airship Envelopes: Requirements, Materials and Test Methods
Proceedings of the 3rd International Convention and Exhibition
Friedrichshafen, 2000
- [23] Münsch, R., Reinhardt, H.-W.
Zur Berechnung von Membrantragwerken aus beschichteten Geweben mit Hilfe
genäherter elastischer Materialparameter
Bauingenieur 70 (1995), S. 271-275
- [24] Pipkin, A. C.
Equilibrium of Tchebychev Nets
Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 95
1984, S. 82-96
- [25] Reinhardt, H. W.
Zweiachsige Prüfungen und Festigkeit von textilen Baustoffen
Die Bautechnik, 4/1976, S. 138-141
- [26] Reinhardt, H. W.
Ein- und zweiachsige Verformungs- und Festigkeitsuntersuchungen an einem
beschichteten Gittergewebe
SFB 64 Mitteilungen 31, 1975
- [27] Saechtling, H.
Kunststoff Taschenbuch
Carl Hanser Verlag
München Wien 1995
- [28] Samelson, S. L.
Global Tchebychev Nets on Complete Two-Dimensional Riemannian Surfaces
Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 114
1991
- [29] Schmidt, K. A. F.
Technologie textiler Glasfasern
Rudolf Zehner Verlag
Speyer/Rhein Wien Zürich 1964
-

- [30] Tschebyscheff, P. L.
Sur la coupe des vêtements
Assoc. Franc. pour l'Avancement des Sciences,
Congrès de Paris 1878, S. 154

 - [31] Tschebyscheff, P. L.
Oeuvres, Bd. 2
Chelsea Publishing Company,
New York, 1997, S.708

 - [32] Wagner, R., Reimann, K., Alber, R., Jentsch, M., Kröplin, B.
Computation of tailored membrane,
ECCOMAS 2004
-

Lebenslauf

Heidrun Birgit Bögner

geb. 1.06.1972 in Bad Urach

- | | |
|-------------|--|
| 1979 – 1983 | Grundschule Mozartschule in Neuhausen a. d. F. |
| 1983 – 1992 | Heinrich-Heine-Gymnasium in Ostfildern |
| 1993 – 1999 | Studium des Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart
mit der Vertiefungsrichtung Konstruktiver Ingenieurbau |
| seit 1999 | Bauingenieurin im Labor Dr. Blum, Stuttgart,
verantwortlich zuständig für Membran- und Seilprüfungen |
| seit 2002 | Stellvertretende Laborleiterin im Labor Blum |