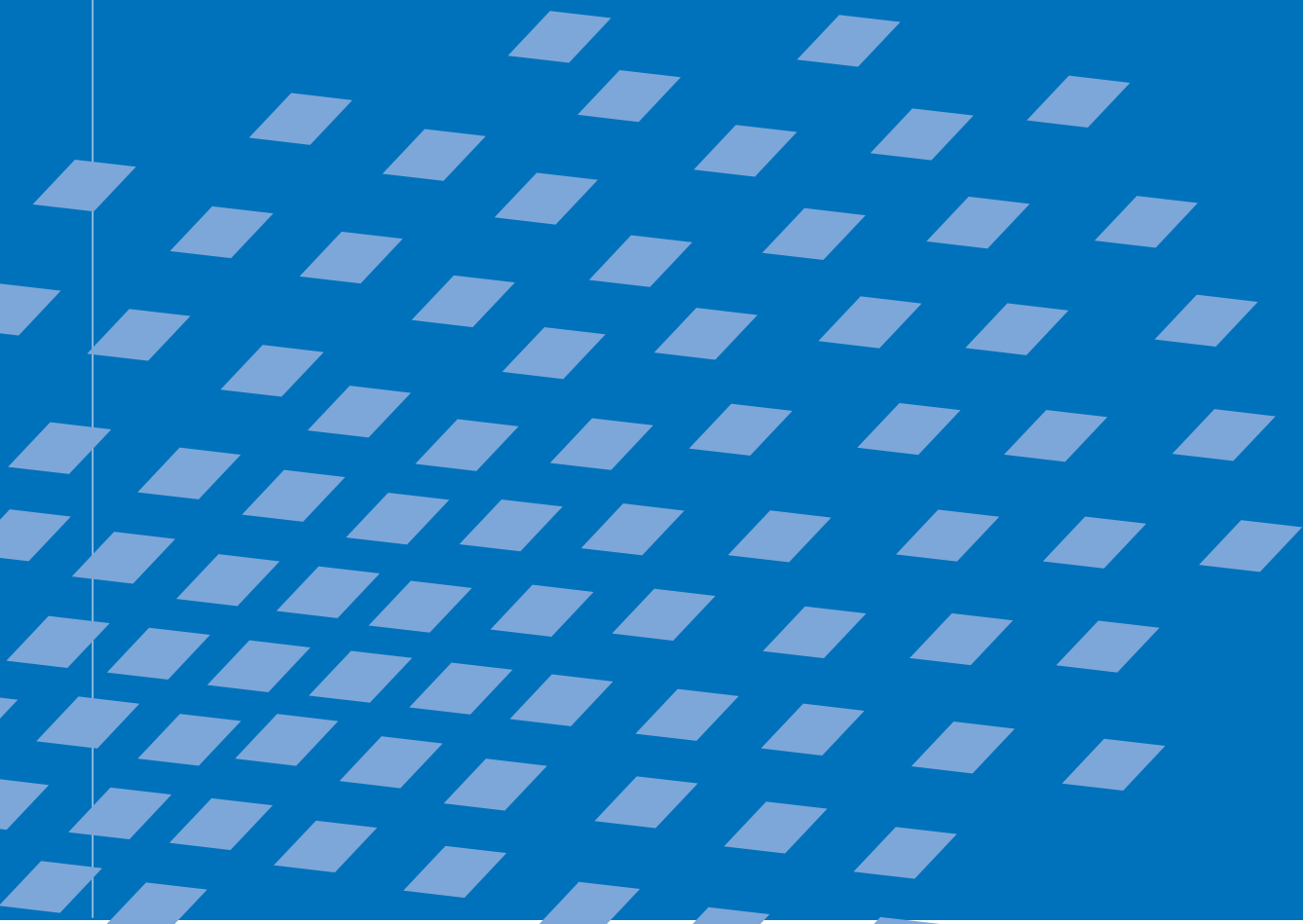




Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten

Tobias Erhart



Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten

von

Tobias Erhart

Bericht Nr. 44 (2004)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Dr. h. c. E. Ramm
Stuttgart 2004



© Tobias Erhart

Berichte können bezogen werden über:

Institut für Baustatik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
D-70550 Stuttgart
Tel.: 07 11 / 6 85 61 23
Fax: 07 11 / 6 85 61 30
<http://www.uni-stuttgart.de/ibs/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 3-00-015443-4

Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Tobias Erhart

aus Waiblingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Dr. h. c. Ekkehard Ramm

Mitberichter: Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Günter Hofstetter

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Dezember 2004

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einem Spezialfall der Festkörpermechanik, bei dem Strukturen kurzzeitig einer hoch konzentrierten Belastung ausgesetzt sind. Derartige transiente Impaktvorgänge treten in der zivilen und militärischen Schutztechnik, der dynamischen Bodenverdichtung, dem Fahrzeugcrash oder der Befestigungs- und Abbautechnik auf und sind durch unterschiedliche Nichtlinearitäten, wie z.B. große Deformationen und Verzerrungen, stark nichtlineares Materialverhalten, reibungsbehafteten Kontakt zwischen mehreren Körpern und Ausbreitung von Spannungswellen gekennzeichnet. Ziel dieser Arbeit ist es, ein stimmiges Gesamtkonzept zur numerischen Simulation solch hochdynamischer Prozesse zu entwickeln, mit dem eine realitätsnahe quantitative Beschreibung der komplexen physikalischen Abläufe möglich ist. Die Bereitstellung und Zusammenführung unterschiedlicher Verfahren aus den Bereichen Adaptivität, Konstitutivmodelle, Elementtechnologie, effiziente Zeitdiskretisierung und Kontakt ist notwendig, um letztendlich praxisrelevante Ingenieuraufgaben aus dem Bereich transienter Impaktvorgänge zuverlässig berechnen und Vorhersagen für industrielle Anwendungen treffen zu können.

Ausgehend von einem Grundgerüst, das sich aus der Kinematik großer Deformationen, der allgemeinen Formulierung finiter Plastizität, expliziter Zeitintegration und einem Ansatz für den Kontakt zusammensetzt, werden wichtige Aspekte der wesentlichen Themengebiete vertieft behandelt und neue Verfahren entwickelt. Bei der Lösung der komplexen Fragestellungen sind Genauigkeit, Robustheit und Effizienz die maßgebenden Anforderungen.

Für die räumliche Diskretisierung werden Elementformulierungen für ebene Verzerrungszustände und axialsymmetrische Zustände bereitgestellt, die speziell für die hier behandelten Problemstellungen geeignet sind. Dabei wird insbesondere ein unterintegriertes, stabilisiertes Vierknotenelement auf den Bereich geometrischer und materieller Nichtlinearität erweitert. Aufgrund der auftretenden großen Deformationen und der verwendeten Lagrange'schen Betrachtungsweise ist außerdem eine wiederholte Neuvernetzung der betrachteten Gebiete notwendig. Um eine hohe Lösungsqualität bei gleichzeitig optimaler Ausnutzung bestehender Rechenressourcen zu erzielen, kommt eine adaptive Neuvernetzungsstrategie zum Einsatz. Der Kern eines derartigen Verfahrens ist die Bewertung der Diskretisierungsfehler mit Hilfe adäquater Fehlerindikatoren. Hierfür werden unterschiedliche Ansätze vorgestellt und neue Verfahren entwickelt, die besonders für die Simulation transienter Impaktvorgänge geeignet sind. Das verwendete explizite Zeitintegrationsverfahren wird durch die Einführung einer adaptiven Schrittweitensteuerung bzw. räumlich variierender Zeitschritte - sogenanntes Subcycling - erweitert. Basierend auf der finiten Plastizität werden konstitutive Modelle für thermoviskoplastische Metalle und kohäsive bzw. nichtkohäsive Reibungsmaterialien vorgestellt und entwickelt. Im Vordergrund steht dabei eine neue Formulierung für den Übergang kompakten, spröden Materials in loses, granulares Medium unter hoher Druckbeanspruchung. Dazu wird ein Drucker-Prager-Cap-Modell weiterentwickelt. Die Eigenschaften und Wirkungsweisen des entstehenden Pulvers werden detailliert untersucht. Anhand von Modellproblemen und praxisrelevanten Anwendungsbeispielen werden die entwickelten Verfahren einzeln und im Zusammenspiel verifiziert und ihre Aussagekraft bewertet.

Abstract

The present study is concerned with a special case of solid mechanics, where structures are exposed to short-time, highly concentrated loading. Such transient impact processes appear in civil and military security technology, dynamic soil compaction, vehicle crash or fastening and demolition technology. They are characterized by varying non-linearities, as e.g. large deformations and strains, highly non-linear material behavior, frictional contact between multiple bodies and stress wave propagation. The aim of this study is the development of a coherent overall strategy for the numerical simulation of such highly dynamic processes, which allows for a realistic quantitative description of associated complex physical events. Preparation and combination of different methods in the fields of adaptivity, constitutive modeling, element technology, efficient time discretization and contact are essential for the reliable computation of practical relevant engineering tasks and for predictions in industrial applications.

Starting from a basis containing large deformation kinematics, a general formulation of finite plasticity, explicit time integration and an approach for contact, important aspects of different topics are examined and new methods are developed. Accuracy, robustness and efficiency are the authoritative requirements for the solution of those complex problems.

For the spatial discretization of plane strain and axisymmetric situations, Finite Element formulations are provided, which are especially qualified for the problems at hand. Particularly, a reduced integrated quadrilateral with stabilization is extended to geometrical and material non-linear cases. Since large deformations occur and a Lagrangean description is used, repeated re-meshing of individual domains is essential. To achieve quality controlled solutions and an optimal distribution of used computational resources at the same time, an adaptive strategy is applied. The core of this strategy is the assessment of discretization errors by adequate error indicators. For this purpose, different possibilities are presented and new methods are developed, which are appropriate for the simulation of transient impact processes. The used explicit time integration procedure is enhanced by introducing adaptive time step control and spatially varying time step ratios - so-called subcycling. Based on the theory of finite plasticity, constitutive models for thermoviscoplastic metals and cohesive as well as non-cohesive frictional materials are presented and developed. Here, the main focus will be on a new formulation for the transition of compact brittle materials into loose, granular media under high pressure loadings as it appears in impact situations. Therefore, a Drucker-Prager-Cap model is modified and enhanced concerning the evolution of material parameters and a modified hardening behavior in case of powderization. The properties and effects of the developing powder will be examined in detail.

The proposed methods are verified individually and in combination for model problems and their performance in practical relevant applications is evaluated.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in der Zeit von Januar 2000 bis Dezember 2004.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Professor Ekkehard Ramm für seine fachliche und persönliche Unterstützung und für die Übernahme des Hauptberichts. Sein Vertrauen, sein Interesse an meiner Arbeit und seine Offenheit waren der ideale Rahmen für ein motiviertes wissenschaftliches Arbeiten. Als besonders schön wird mir das sehr gute persönliche Verhältnis in Erinnerung bleiben.

Desweiteren gebührt mein Dank Herrn Professor Günter Hofstetter vom Institut für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre der Universität Innsbruck für die Übernahme des Mitberichts. Sein positives Interesse an meiner Arbeit hat mich sehr gefreut.

Herrn Professor Wolfgang Wall vom Institut für Numerische Mechanik der Technischen Universität München danke ich ebenfalls für die Übernahme des Mitberichts. Bei ihm möchte ich mich außerdem für sein von Beginn an entgegengebrachtes Vertrauen, für die anregenden wissenschaftlichen Diskussionen, für sein Engagement hinsichtlich meiner Projekte und für das freundschaftliche Verhältnis ganz herzlich bedanken.

Bei Lars Taenzer, Ralf Diekmann, Ralf Baumann, Hans-Peter Gänser, Thomas Engleder und Bernhard Winkler möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit und die freundschaftlichen Beziehungen bedanken. Sie haben zum Entstehen und zum Fortgang dieser Arbeit wesentlich beigetragen.

Mein Dank gilt auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik. Ihre Hilfsbereitschaft und Freundlichkeit haben für ein sehr angenehmes Arbeitsklima gesorgt. Neben den fachlichen Diskussionen wird mir besonders die schöne Zeit in Kaffeepausen, bei Ausflügen und auf weihnachtlichen Festen noch lange in guter Erinnerung bleiben. Enge Freundschaft verbindet mich mit meinen "Frühstückspartnern" Andreas Lipka und Matthias Hörmann.

Ganz besonders herzlich möchte ich mich bei meiner lieben Andrea bedanken. Sie hat wesentlichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit. Dies betrifft nicht nur die sorgfältige Durchsicht, sondern insbesondere die Motivation und das Verständnis auch in schwierigen Phasen. Ihre Energie und Lebensfreude sind für mich von unschätzbarem Wert.

Nicht zuletzt möchte ich meinem Vater für seine Unterstützung und die Korrektur dieser Arbeit danken. Das gemeinsame Erleben der Höhen und Tiefen des Lebens hat uns für immer eng zusammengeschweißt.

Meiner lieben Mama danke ich für alles.

Tobias Erhart

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	3
1.3	Übersicht	4
2	Grundlagen	6
2.1	Nichtlineare Kontinuumsmechanik	6
2.1.1	Kinematik großer Deformationen	6
2.1.2	Bilanzsätze	8
2.1.3	Materialgleichungen: Finite Plastizität	9
2.1.4	Anfangs-Randwertproblem	12
2.2	Lösungsverfahren	14
2.2.1	Räumliche Diskretisierung	14
2.2.2	Zeitliche Diskretisierung	15
2.2.3	Integration der inelastischen Materialgleichungen	19
2.2.4	Vollständiger Algorithmus	24
2.3	Kontaktformulierung	26
2.3.1	Kinematik	26
2.3.2	Werkstoffgesetze	28
2.3.3	Schwache Form des Kontaktproblems	28
2.3.4	Räumliche und zeitliche Diskretisierung	29
2.3.5	Einfache Methode zur Kontaktkraftberechnung	30
2.3.6	Kontaktalgorithmus	32
2.3.7	Ergänzung: Glatter Kontakt	33
3	Elementtechnologie	36
3.1	Einführung	36
3.2	Reduziert integriertes Vierknotenelement mit Stabilisierung	37
3.2.1	Physikalische Hourglass-Stabilisierung für lineare Probleme	38
3.2.2	Erweiterung auf große Verzerrungen und materielle Nichtlinearität ..	42
3.3	Selektiv integriertes Vierknotenelement	44
3.4	Numerische Beispiele	46
3.4.1	Kerbe und Elastoplastizität	46
3.4.2	Kompression eines elasto-plastischen Blocks	47
3.4.3	Cook's Membran	48

4	Adaptive Neuvernetzung	50
4.1	Einführung	50
4.2	Fehlerorientierte Adaptivität	51
4.2.1	Begriffe und Definitionen	51
4.2.2	Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren	53
4.3	Adaptive Strategie für nichtlineare, transiente Probleme	56
4.3.1	Remeshing-Entscheidung und Kontrolle der Netzqualität	56
4.3.2	Fehlerbewertung und Netzdichte Verteilung	58
4.3.3	Neuvernetzung	64
4.3.4	Transfer der Zustandsvariablen	65
4.4	Wiederherstellung der Randgeometrie	68
4.5	Numerische Beispiele	71
4.5.1	Taylor Bar-Impakt	71
4.5.2	Elastischer Impakt: Smooth Contact	77
5	Effiziente zeitliche Diskretisierung	80
5.1	Einführung	80
5.2	Zeitschrittabhängige Stabilität	80
5.2.1	Abschätzung des kritischen Zeitschritts	80
5.2.2	Abschätzung durch Reduktion auf 1-D Fall: CFL-Bedingung	81
5.2.3	Abschätzung durch Eigenwertbestimmung	82
5.2.4	Verifikationstests	84
5.2.5	Adaptive Zeitschrittsteuerung im Algorithmus	85
5.3	Räumlich variierende Zeitschritte: Subcycling	86
5.3.1	Idee und Überblick	86
5.3.2	Automatische knotenweise Partitionierung	87
5.3.3	Subcycling-Algorithmus	90
5.4	Numerische Beispiele	91
5.4.1	Lineares 1D-Stabproblem	91
5.4.2	Stoß gegen Metallzylinder	94
6	Ein konstitutives Modell für Metalle	97
6.1	Einführung	97
6.2	Charakterisierung und Modellierung von Metallen	97
6.2.1	Phänomenologie	97
6.2.2	Materialmodelle	98
6.3	Thermoviskoplastisches Materialmodell	99
6.3.1	Ausgangspunkt: Von Mises-Plastizität	99
6.3.2	Erweiterung: Johnson-Cook-Modell	101

6.4	Numerische Beispiele	103
6.4.1	Dynamische Kompression eines Blocks aus Wolframlegierung	103
6.4.2	Stab-Impakt mit adiabatischer Scherbandbildung	105
7	Ein konstitutives Modell für Reibungsmaterialien	108
7.1	Einführung	108
7.2	Charakterisierung von Reibungsmaterialien	109
7.2.1	Kohäsives Reibungsmaterial: Kompaktes Ausgangsmaterial	109
7.2.2	Druckpulverisierung: Übergang vom intakten Material zum Pulver ..	110
7.2.3	Nichtkohäsives Reibungsmaterial: Pulver	111
7.3	Modellierung von Reibungsmaterialien	114
7.3.1	Überblick	114
7.3.2	Plastizitätsmodell "Drucker-Prager-Cap"	116
7.4	Erweitertes Drucker-Prager-Cap-Modell	116
7.4.1	Nichtlineare Elastizität	117
7.4.2	Fließkriterien	117
7.4.3	Fließregeln	120
7.4.4	Verfestigungsgesetz	121
7.4.5	Rückprojektionsalgorithmus mit Modifikation	123
7.4.6	Erweiterung durch Berücksichtigung der 3. Spannungsinvariante ...	127
7.4.7	Erweiterung auf Viskoplastizität	130
7.5	Beschreibung der Pulverisierung im Modell	131
7.5.1	Entstehungskriterium	132
7.5.2	Abnahme von Kohäsion und Zugfestigkeit	133
7.5.3	Abnahme der Viskosität	134
7.5.4	Abnahme der Druckfestigkeit: Auflockerung	134
7.5.5	Zunahme der plastischen Kompressibilität	135
7.6	Kalibrierung des DPC-Modells	136
7.7	Numerische Beispiele	138
7.7.1	Statische Kompression kompakter, kohäsiver Reibungsmaterialien ..	138
7.7.2	Statische Kompression loser, nichtkohäsiver Reibungsmaterialien ..	140
7.7.3	Dynamische Pulverkompaktierung	142
8	Anwendungsbeispiele	147
8.1	Hochgeschwindigkeitsimpakt eines Wolfram-Stabes auf Stahl	147
8.2	Dynamische Sandbodenverdichtung	151
8.3	Dreifacher Kugel-Impakt auf Feinbeton	153

9	Zusammenfassung und Ausblick	155
9.1	Zusammenfassung	155
9.2	Ausblick	157
Literatur	159
Anhang	170
A1	Hauptrichtungen bei der Rückprojektion	170
A2	Element-Eigenwert-Berechnung	171

Abkürzungen, Bezeichnungen

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen:

Abkürzungen

AXI	axialsymmetrischer Zustand
DEM	Diskrete-Element-Methode
DPC	Drucker-Prager-Cap
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Element-Methode
JC	Johnson-Cook
MEM	Modifizierte Euler-Methode
RI4	Reduziert integriertes Vierknotenelement
SI4	Selektiv integriertes Vierknotenelement
TXC	Triaxial-Kompressionsversuch
TXE	Triaxial-Extensionsversuch
VI4	Voll integriertes Vierknotenelement
ZDV	Zentrales Differenzenverfahren

Mathematische Notationen

∇	Gradientenoperator
div_x	Divergenz bezüglich räumlichem Koordinatensystem x
grad_x	Gradient bezüglich räumlichem Koordinatensystem x
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}^3	Dreidimensionaler Euklidischer Raum

Bezeichnungen

Kontinuumsmechanik und Finite Plastizität

C	rechter Cauchy-Green Tensor
C^e	elastischer Werkstofftensor(/-matrix)
C^p	plastische Metrik
D	Deformationsgeschwindigkeitstensor
\mathfrak{D}	Dissipation
F	Deformationsgradient

F^e	elastischer Anteil des Deformationsgradienten
F^p	plastischer Anteil des Deformationsgradienten
I_1	erste Invariante des Kirchhoff-Spannungstensors
J_2	zweite Invariante des Kirchhoff-Spannungsdeviators
J_3	dritte Invariante des Kirchhoff-Spannungsdeviators
\mathcal{L}_v	Lie-Differentialoperator
P	mechanische Leistung der äußeren Kräfte
Q	thermische Leistung bzw. Wärmezufuhr
V	Volumen
W^{ges}	Gesamtenergie
W^{kin}	kinetische Energie
W^{int}	innere Energie
W^{ext}	äußere Energie
W^p	plastische Arbeit
X	Ortsvektor eines materiellen Punktes der Referenzkonfiguration
a	Beschleunigungsfeld
b_a^e	elastische Hauptstreckung
b^e	elastischer Finger-Tensor
b	linker Cauchy-Green Tensor (Finger-Tensor)
\bar{b}	Volumenkraftvektor
f	Fließfunktion
l	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
m_q, m_τ	Fließrichtung
n	Normalenvektor auf eine Schnittfläche (Cauchy-Theorem)
n_a	Eigenrichtungen aus einer Spektralzerlegung
q	interne Variable des Spannungsraums
s	Kirchhoff-Spannungsdeviator
\bar{t}	Oberflächenkraftvektor
u	spezifische innere Energie
u	Verschiebungsfeld
δu	virtuelle Verschiebungen
v	Geschwindigkeitsfeld
x	Ortsvektor eines materiellen Punktes der Momentankonfiguration
J	Jakobideterminante
Γ	Gebietsrand der Referenzkonfiguration
Γ_u, Γ_σ	Dirichlet-, Neumann-Rand der Referenzkonfiguration
Ω	Referenzkonfiguration

ψ	Freie Energie-Funktion
α	interne Variable des Verzerrungsraums, Materialparameter des DPC-Modells
$\bar{\epsilon}^p$	äquivalente plastische Verzerrung
ϵ	lineare Ingenieurdehnungen (Tensor)
ϵ	logarithmische Dehnungen (Tensor)
γ	plastischer Multiplikator
φ	Abbildung Referenzkonfiguration \rightarrow Momentankonfiguration
$\varphi(\Gamma)$	Gebietsrand der Momentankonfiguration
$\varphi(\Omega)$	Momentankonfiguration
ρ	Massendichte
σ	Cauchy-Spannungstensor
τ_a	Kirchhoff-Hauptspannung
τ	Kirchhoff-Spannungstensor

Kontaktformulierung

F^M, F^S	Master-, Slave-Kontakt-Knotenkraft
W^{con}	Kontaktarbeit
f^{con}	Kontakt-Knotenkraftvektor
g_N	Penetrationsfunktion in Normalenrichtung
g_T	Gleitweg bzw. Penetrationsfunktion in Tangentialrichtung
n^M	Normalenvektor des Master-Randes
p_N	Kontaktdruck
t_T	tangentiale Kontaktspannung
t^M	Tangentenvektor an den Master-Rand
v_{rel}	Relativgeschwindigkeit
x^M	Ortsvektor eines Punktes auf dem Master-Rand
x^S	Ortsvektor eines Punktes auf dem Slave-Rand
Γ_c	Kontaktrand der Referenzkonfiguration
λ_N, λ_T	Lagrange-Multiplikatoren
μ_G, μ_H	Gleit-, Haftreibungskoeffizient

Räumliche Diskretisierung und Adaptivität

B	B-Operatormatrix
M	Massenmatrix
N	Matrix der Ansatzfunktionen
\mathfrak{R}	Residuum
d, \dot{d}, \ddot{d}	Vektor der Knotenverschiebungen, -geschwindigkeiten, und -beschleunigungen
d_k	Knotenverschiebungen

e	Diskretisierungsfehler bzw. wahrer Fehler
\mathbf{f}^{int}	interner Knotenkraftvektor
\mathbf{f}^{ext}	externer Knotenkraftvektor
g_k	Gradient für gradientenbasierte Indikatoren
h_e	Elementgröße bzw. Elementkantenlänge
\mathbf{h}	Hourglassvektor
\mathbf{t}	Translationsvektor
\mathbf{u}^h	diskretes Verschiebungsfeld
w	Gauss-Wichtungsfaktor
Ω_e	Elementgebiet
ϕ_l	direkte, physikalisch motivierte Verfeinerungsindikatoren
ψ_k	gradientenbasierte Fehlerindikatoren
$\boldsymbol{\gamma}$	Stabilisierungsvektor
$\bar{\kappa}$	diskrete Randkrümmung
ξ	konvektive Koordinate
ξ	lokale Elementkoordinaten

Zeitliche Diskretisierung

c^{1D}, c^{3D}	eindimensionale, dreidimensionale Wellengeschwindigkeit
\bar{m}^N	Zeitschrittverhältnis beim Subcycling
t	Zeit
Δt	Zeitschrittweite
Δt_{krit}	kritische Zeitschrittweite
λ	Eigenwert
ω	Eigenfrequenz

Materialparameter

B, C	Materialparameter des JC-Materialmodells
D	Materialparameter des DPC-Modells
E	Elastizitätsmodul
E_t	Verfestigungsmodul
$I_{1,crush}$	Parameter für Pulver-Entstehungskriterium
M	Materialparameter der nichtlinearen Elastizität
R	Elliptizität der Kappe im DPC-Modell
T	Temperatur im JC-Modell, Hydrostatische Zugfestigkeit im DPC-Modell
T^*, T_0, T_m	homologe, Raum- und Schmelz-Temperatur
W	maximale volumetrische plastische Verzerrung im DPC-Modell
X_0	hydrostatische Anfangsdruckfestigkeit im DPC-Modell

c_v	spezifische Wärmekapazität
e	Exzentrizität der Willam-Warnke-Funktion
k_1, k_2	Materialparameter des JC-Materialmodells
β	Materialparameter der DPC-Modells
δ_{crush}	Parameter für Pulver-Entstehungskriterium
η	Relaxationszeit
η_d	Dissipationsgrad bei der Umwandlung plastischer Arbeit in Wärme
κ	Kompressionsmodul
λ	Lamé-Konstante, Materialparameter des DPC-Modells
μ	Schubmodul bzw. Lamé-Konstante
ν	Querdehnzahl
σ_y	Fließspannung
θ	Materialparameter des DPC-Modells
ν	Lode-Winkel
ϕ	Mohr-Coulombscher Reibungswinkel

Weitere Bezeichnungen werden beim jeweiligen Auftreten erläutert.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Ein transients Impaktvorgang ist ein komplexer Spezialfall innerhalb der Festkörpermechanik, bei dem eine Struktur kurzzeitig einer hoch konzentrierten Belastung ausgesetzt ist. Typische Anwendungsgebiete sind die zivile und militärische Sicherheitstechnik, also der Schutz von Personen, Gebäuden oder Fahrzeugen. Hier sei z.B. der Aufprall auf eine Windschutzscheibe oder der Projektil-Beschuss einer Panzerung zu nennen. Ein anderer Bereich, für den das genaue Verständnis von Stoßvorgängen Bedeutung hat, ist die dynamische Bodenverdichtung zur Verbesserung des Baugrunds: Schwere Gewichte werden aus großer Höhe fallen gelassen, und die Aufprallenergie bewirkt die Kompaktion des vormals lockeren Bodens. Auch auf dem Gebiet der Befestigungs- oder Abbautechnik werden Impaktvorgänge genutzt: Zur Herstellung punktueller Verbindungen oder zur lokalen Zerstörung von Material kann es hilfreich sein, dies mit hoher Geschwindigkeit durchzuführen. Das Explosiv-Schweißen und das Stanzen sind zwei weitere typische Anwendungen. Das Phänomen 'Impakt' kann allerdings auch auf einer weitaus größeren Längenskala beobachtet werden, so z.B. beim Einschlag eines Meteoriten. In Bild 1.1 sind einige Beispiele für Impaktereignisse dargestellt.

Die Analyse von Impaktvorgängen stellt aufgrund der verschiedenen zu beachtenden Effekte besondere Anforderungen. Da ein solcher Prozess in einem sehr kurzen Zeitraum von wenigen Millisekunden stattfindet, spielen Trägheitseffekte eine wesentliche Rolle. Sie sind für die Wellenausbreitung in der betroffenen Struktur verantwortlich. Der aufgebrachte Impuls wird in den Festkörper durch Interaktion von Molekülen bzw. Partikeln zeitlich verzögert weitergegeben. Die ausgelösten Spannungswellen können elastisch, plastisch oder diskontinuierlich sein, sie können sich längs oder quer zur Lastrichtung ausbreiten und sie können sich überlagern oder reflektiert werden und damit maßgeblich die Physik des Prozesses beeinflussen (Ruppert (2000)). Weiterhin sind derartige Stoßvorgänge meistens mit sehr großen Deformationen, Topologieänderungen und hohen Dehnraten verbunden. Aufgrund der lokal begrenzten Beanspruchung treten Spitzenlasten auf, die extreme Verformungen auf kleinstem Raum hervorrufen und zur Penetration oder zur Zerstörung der Struktur führen können. Hinzu kommt, dass verschiedene Körper mit zum Teil sehr unterschiedlichen Eigenschaften, wie z.B. verschiedenen Steifigkeiten, miteinander "interagieren" und somit immer das ganze System betrachtet werden muss. Das Materialverhalten unter Impaktbelastung variiert stark und ist zumeist hochgradig nichtlinear. Je nach verwendetem Werkstoff können plastisches Fließen, Verfestigung, Entfestigung, Disintegration, Lokalisierung, Bruch, Fragmentierung und/oder Temperaturerhöhung beobachtet werden.

Aus der Beschreibung der komplexen physikalischen Abläufe wird klar, dass die Simulation derartiger Prozesse eine Herausforderung für mechanische Modelle und numerische Verfahren darstellt. Die Bestrebung ist es, leistungsfähige Methoden zu entwickeln, mit denen eine realitätsnahe Beschreibung transients Impaktvorgänge möglich ist und gleichzeitig eine Balance zwischen Lösungsqualität, Robustheit und Effizienz erzielt werden kann. So sollten durch eine

numerische Simulation quantitative Informationen nicht nur über globale Größen wie Gesamtkraft oder Verschiebung eines Körpers, sondern auch über lokale Größen wie Spannungen oder Verzerrungen in hoch beanspruchten Bereichen zur Verfügung gestellt werden. Denn hier liegt ein Vorteil gegenüber Experimenten: Die Messung von lokalen Größen ist bei kurzzeitdynamischen Tests nahezu unmöglich. Nur mit Hilfe der Simulation können neue Erkenntnisse z.B. über komplizierte Spannungsverläufe gewonnen werden. Dazu kommt die Forderung - insbesondere aus dem industriellen Bereich - nach robusten Algorithmen: Die Simulation soll als verlässliches Instrument sinnvolle Ergebnisse liefern, ohne dass aufwändige Justierungen oder häufige Benutzereingriffe notwendig sind. Der Programmablauf soll also in hohem Maße automatisch und stabil sein. Außerdem ist natürlich die Dauer der Berechnungen von hohem Interesse. Die vorhandenen Rechenressourcen sind optimal einzusetzen, d.h. es sind effiziente Strategien gefragt, mit denen so schnell wie möglich Ergebnisse zur Verfügung stehen.



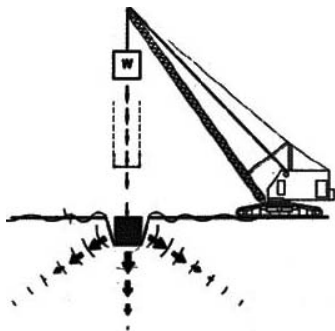
Aufeinanderstoßen zweier Geschosse (Hochgeschwindigkeitsaufnahme)



Stab-Impakt



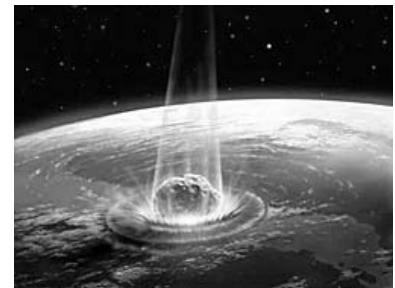
Aufprall auf Windschutzscheibe



Dynamische Bodenverdichtung



Abbautechnik



Meteoriteneinschlag

Bild 1.1: Anwendungsbeispiele für Impaktvorgänge

Wie bereits erwähnt, kommt es bei den hier behandelten Problemen zu sehr großen Deformationen. Deshalb ist es unbedingt notwendig, die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen in geometrisch nichtlinearer Form aufzustellen und zu verwenden, siehe Kapitel 2. Die Frage ist nun, mit welcher räumlichen Diskretisierungsstrategie die Grundgleichungen gelöst werden sollen, um die großen Deformationen numerisch zu bewältigen. In den wissenschaftlichen und industriellen Bemühungen zur Modellierung von Impaktvorgängen wurden und werden dazu verschiedene Ansätze entwickelt. In ersten Arbeiten zu diesem Thema wurde die in der Festkörpermechanik unübliche Euler'sche Betrachtungsweise mit Fixierung auf einen festen Raumpunkt gewählt (McGlaun et al. (1990)): Mit einem festen FE-Netz und sich hindurchbewegenden Körpern ist die Beschreibung großer Deformationen relativ unproblematisch. Der gravierende

Nachteil der Euler'schen Betrachtungsweise ist allerdings die ungenügende Darstellung von Gebietsrändern, wie z.B. dem Kontaktrand. Die Lösungsqualität ist somit gerade in den entscheidenden Bereichen relativ gering. Deshalb ist es sinnvoller, mit der Lagrange'schen Betrachtungsweise zu arbeiten, bei der die Diskretisierung den Deformationen des Festkörpers folgt. Ränder der Struktur(en) sind damit einfach und genau zu beschreiben. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist jedoch das Auftreten großer Elementverzerrungen, für deren "Behandlung" Zusatzmaßnahmen notwendig sind, wie z.B. das "Löschen" von Elementen, wie es in derzeitigen kommerziellen Codes Verwendung findet (Hallquist (1998)). Wesentlich intelligenter sind jedoch adaptive Neuvernetzungsstrategien, bei denen das FE-Netz während der Berechnung wiederholt automatisch neu generiert wird und gleichzeitig Diskretisierungsfehler vermindert werden. Eine solche Strategie wird ausführlich in Kapitel 4 präsentiert. Alternativ könnten ALE-Formulierungen oder netzfreie Verfahren verwendet werden. Mit der 'Arbitrary Lagrangean Eulerian'-Betrachtungsweise wird versucht, die Vorteile der beiden Betrachtungsweisen zu kombinieren. Auf transiente Probleme angewendet findet sich ein ALE-Ansatz z.B. bei Huerta & Casadei (1994). Netzfrie Verfahren sind eine weitere Variante, mit der große Deformationen relativ einfach dargestellt werden können: Ein Kontinuum wird durch eine Reihe von Knotenpunkten diskretisiert, ohne die Beschränkungen, die durch ein Netz entstehen. Es ist jedoch anzumerken, dass netzfreie Methoden mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden sind und dass an Gebietsrändern abermals - wie bei der Euler'schen Betrachtungsweise - eine geringe Genauigkeit zu erwarten ist. Dennoch kommen diese Verfahren für Impaktberechnungen zum Einsatz, so z.B. die 'Smooth Particle Hydrodynamics'-Methode (Johnson et al. (1996)) oder die elementfreie Galerkin-Methode (Belytschko et al. (1997)).

1.2 Zielsetzung

In dieser Arbeit sollen Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge vorgestellt und entwickelt werden, mit denen eine realitätsnahe und quantitative Beschreibung der komplexen physikalischen Prozesse möglich ist. Dabei sollen die genannten Forderungen nach hoher Lösungsqualität, Robustheit und Effizienz in die Formulierungen mit einfließen. Im Rahmen der geometrischen Nichtlinearität werden verschiedene Aspekte der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung, der Kontaktbehandlung und der nichtlinearen Materialmodellierung behandelt. Das endgültige Ziel ist ein stimmiges Gesamtkonzept für die Simulation hochdynamischer Impaktvorgänge.

Es sollen geeignete Ansätze aus der Literatur vorgestellt und an die in dieser Arbeit verwendeten Formulierungen angepasst werden. Diese Ansätze sollen untersucht und kritisch bewertet werden. Des Weiteren sollen Methoden weiterentwickelt und neue Strategien erarbeitet werden. Einzelne Modelle aus den Bereichen der Elementtechnologie, der Adaptivität, der intelligenten Zeitschrittsteuerung und der konstitutiven Gesetze sollen jeweils anhand geeigneter numerischer Tests verifiziert und diskutiert werden. Das Gesamtkonzept soll schließlich in praxisrelevanten, komplexen Anwendungen getestet und kritisch beurteilt werden. Die verschiedenen Themen, die in dieser Arbeit behandelt werden, sind:

- *Elementtechnologie.* Für Axialsymmetrie und ebene Verzerrungszustände werden robuste und effiziente Finite Element-Formulierungen benötigt, die außerdem eine hohe Genauigkeit, d.h. gutes Konvergenzverhalten für unregelmäßige Netze zeigen.
- *Adaptivität.* Um die großen Deformationen numerisch in den Griff zu bekommen und dabei in effizienter Weise eine hohe Lösungsqualität zu garantieren, ist der Einsatz einer adaptiven Neuvernetzungsstrategie notwendig. Besonders wichtig ist dabei die Bewertung von Diskretisierungsfehlern und die Entwicklung von Netzdichte-Indikatoren, die für die betrachtete Problemklasse geeignet sind. Des Weiteren gehören ein Remeshing-Entscheidungskriterium, ein Freivernetzer und die Übertragung physikalischer Größen zum Repertoire einer entsprechenden Strategie. Spezielle Probleme bei einer Neuvernetzung ergeben sich in Kontaktsituationen: hierfür müssen ebenfalls adäquate Lösungen gefunden werden.
- *Effiziente Zeitdiskretisierung.* Wie bei kurzzeitdynamischen Strukturberechnungen üblich, wird für die zeitliche Diskretisierung ein explizites Zeitintegrationsverfahren verwendet. Die dabei geltende Stabilitätsgrenze erfordert eine intelligente Anpassung des Zeitschritts. Dies soll durch eine zeitlich und räumlich adaptive Zeitschrittsteuerung erreicht werden.
- *Konstitutive Modelle für Metalle und Reibungsmaterialien.* Das besondere Materialverhalten unter Impaktbeanspruchung soll in den Formulierungen makroskopischer, phänomenologischer Konstitutivmodelle Eingang finden. Dazu werden im Rahmen der Finiten Plastizität Ansätze vorgestellt und entwickelt, in denen Dehnrate, Temperatur, usw. berücksichtigt werden. Im Vordergrund steht dabei eine Formulierung für den Übergang kompakten, spröden Materials in loses, granulares Medium unter hoher Druckbeanspruchung. Die Charakterisierung und die algorithmische Umsetzung der Modelle wird eine zentrale Rolle spielen.

Die algorithmische Umsetzung der Methoden erfolgt in einem bestehenden Basis-FE-Code für zweidimensionale Probleme (Axialsymmetrie und ebener Verzerrungszustand).

1.3 Übersicht

In *Kapitel 2* werden die notwendigen Grundlagen bereitgestellt. Diese umfassen die Formulierungen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik mit der Kinematik großer Deformationen, den entsprechenden Bilanzgleichungen, der Finiten Plastizität und die Aufstellung des Anfangsrandwertproblems. Zur numerischen Lösung werden räumliche und zeitliche Diskretisierungsverfahren und die inkrementelle Form der inelastischen Materialgleichungen bereitgestellt und der zugehörige Algorithmus präsentiert. Ergänzt werden die Ausführungen durch einen kurzen Einblick in die Beschreibung der Kontaktproblematik.

Zwei verschiedene Finite Element-Formulierungen, die für den Einsatz in der numerischen Simulation ebener bzw. rotationssymmetrischer transienter Impaktvorgänge geeignet sind, werden in *Kapitel 3* vorgestellt. Dies ist zum einen das unterintegrierte Vierknotenelement mit Stabilisierung und zum anderen das selektiv integrierte Vierknotenelement. Einfache numerische Beispiele sollen die Leistungsfähigkeit der Formulierungen aufzeigen.

Kapitel 4 befasst sich mit der adaptiven Neuvernetzung. Nachdem Begriffe und Definitionen zur fehlerorientierten Adaptivität und ein Überblick über mögliche Fehlerbewertungen gegeben

sind, wird die speziell für transiente Probleme entwickelte Strategie ausführlich erläutert. Sie umfasst ein auf der Netzqualität basierendes Entscheidungskriterium für Remeshing, eine Bewertung der Fehler mit Hilfe von geeigneten Indikatoren, eine dichtegesteuerte Freivernetzung und eine Methode zum Transfer relevanter Zustandsgrößen von der alten auf die neue Diskretisierung. Besonderheiten bei der Wiederherstellung des Gebietsrandes werden zusätzlich diskutiert. Die entwickelten Modelle werden anhand numerischer Beispiele untersucht, wobei insbesondere die Diskussion der entwickelten Fehlerindikatoren im Vordergrund steht.

Die Ermittlung des kritischen Zeitschritts einer expliziten FE-Berechnung und eine damit mögliche Umsetzung adaptiver Zeitschrittsteuerung ist Inhalt von *Kapitel 5*. Außerdem wird mit dem 'Subcycling' eine Methode vorgestellt, bei der Teilgebiete einer Diskretisierung mit jeweils unterschiedlichen Zeitschrittweiten integriert werden können, was insbesondere für abgestufte Netze eine Effizienzsteigerung bewirkt. Einfache numerische Beispiele sollen die Wirkungsweise der Strategien verdeutlichen.

In *Kapitel 6* wird ein konstitutives Modell für Metalle vorgestellt. Das Verhalten solcher Werkstoffe unter hochdynamischer Beanspruchung wird maßgeblich durch die Dehnrates und die sich entwickelnde hohe Temperatur beeinflusst. Dementsprechend wird ein Materialgesetz verwendet, bei dem die Fließgrenze des Materials von diesen Größen abhängt. Mit Hilfe dynamischer Beispiele wird das Modell untersucht.

Ein konstitutives Modell für Reibungsmaterialien wird in *Kapitel 7* präsentiert. Bei einer Impactbeanspruchung sind unterschiedliche Versagensmechanismen in einer belasteten Struktur zu beobachten. Der Schwerpunkt in dieser Arbeit liegt auf dem maximal beanspruchten Prozessbereich, in dem aus kompaktem Ausgangsmaterial durch Druckpulverisierung ein loses, granulares Medium wird. Es wird ein Drucker-Prager-Cap-Modell weiterentwickelt, um das Verhalten von sowohl kohäsiven als auch nichtkohäsiven Reibungsmaterialien und den Übergang vom einen zum anderen wiedergeben zu können. Die Kalibrierung des Modells, d.h. die Ermittlung der Materialparameter, wird ebenfalls beschrieben. Statische und dynamische Versuche werden mit Berechnungen verglichen und die Ergebnisse erörtert.

Das in den Kapiteln 2 bis 7 vorgestellte Gesamtkonzept wird in *Kapitel 8* zur Simulation praxisrelevanter Anwendungen eingesetzt. Das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten - insbesondere die Adaptivität und das Materialverhalten - wird untersucht und kritisch bewertet.

Eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der behandelten Themen folgt schließlich in *Kapitel 9*.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen, die für die weiteren Untersuchungen notwendig sind, zur Verfügung gestellt. Dabei werden insbesondere die verschiedenen nichtlinearen Effekte diskutiert, die bei den in dieser Arbeit behandelten Problemen auftreten. So sind bei transienten Impact- und Penetrationsvorgängen sehr große Deformationen, stark nichtlineares Materialverhalten, hohe Frequenzen bei Wellenausbreitung und reibungsbehafteter Kontakt zwischen mehreren Körpern zu berücksichtigen.

Zunächst sollen im Rahmen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik die Kinematik großer Deformationen, die Bilanzsätze und die Finite Plastizität vorgestellt werden. Das sich daraus ergebende Anfangs-Randwertproblem wird anschließend numerisch gelöst. Die dazu notwendigen räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsverfahren münden in einen Algorithmus zur Simulation hochdynamischer Prozesse. Ergänzt werden die Ausführungen durch die Beschreibung der Theorie und der numerischen Umsetzung des Kontaktproblems.

2.1 Nichtlineare Kontinuumsmechanik

In einer kurzen Zusammenfassung werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen vorgestellt, die Ausgangspunkt für die anschließenden numerischen Lösungsverfahren sind. Ausführliche und aktuelle Darstellungen der Themen finden sich z.B. bei Simo und Hughes (1998), Zienkiewicz und Taylor (2000), Holzapfel (2000), Belytschko et al. (2000) oder Wriggers (2001).

2.1.1 Kinematik großer Deformationen

Die geometrische Beschreibung von großen Deformationen beruht im wesentlichen auf der Betrachtung eines materiellen Körpers in verschiedenen Konfigurationen. Ein *materieller Körper* ist ein physikalisches Objekt, das mit physikalischen Eigenschaften, wie z.B. Textur oder Dichte, ausgestattet ist. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik wird angenommen, dass diese Eigenschaften kontinuierlich verteilt sind. Dieser Körper besetzt zur Zeit t ein Gebiet Ω im dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Er ist definiert als Menge von materiellen Punkten $\mathcal{P} \in \Omega$, die im Euklidischen Raum plaziert werden. Diese Abbildung wird auch als *Konfiguration* bezeichnet. Die *Bewegung* eines materiellen Körpers ist eine Sequenz solcher Konfigurationen, die durch die Zeit t parametrisiert sind. Nun werden zwei Konfigurationen aus dieser Sequenz betrachtet. Zum einen ist dies die *Referenz-* oder auch *materielle Konfiguration* Ω mit der Oberfläche Γ , die in der Festkörpermechanik i. Allg. durch einen natürlichen, d.h. spannungsfreien und unbelasteten, Ausgangszustand gegeben ist. Zum anderen beschreibt die *Momentan-* bzw. *räumliche Konfiguration* $\varphi(\Omega)$ mit der Oberfläche $\varphi(\Gamma)$ die aktuelle bzw. verformte Lage. Sie geht durch die nichtlineare Deformationsabbildung

$$\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

aus der Referenzkonfiguration hervor. φ bildet durch Ortsvektoren \mathbf{X} beschriebene Punkte der Referenzkonfiguration Ω auf Punkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ der Momentankonfigu-

ration $\varphi(\Omega)$ ab (siehe Bild 2.1). In einer Lagrange'schen Betrachtungsweise stellen X die unabhängigen Variablen bei der Beschreibung der Bewegung dar. Die elementare Unbekannte ist das Verschiebungsfeld \mathbf{u} , das sich aus der Differenz der Ortsvektoren eines materiellen Punktes zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration ergibt

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{x}(X, t) - \mathbf{X} . \quad (2.2)$$

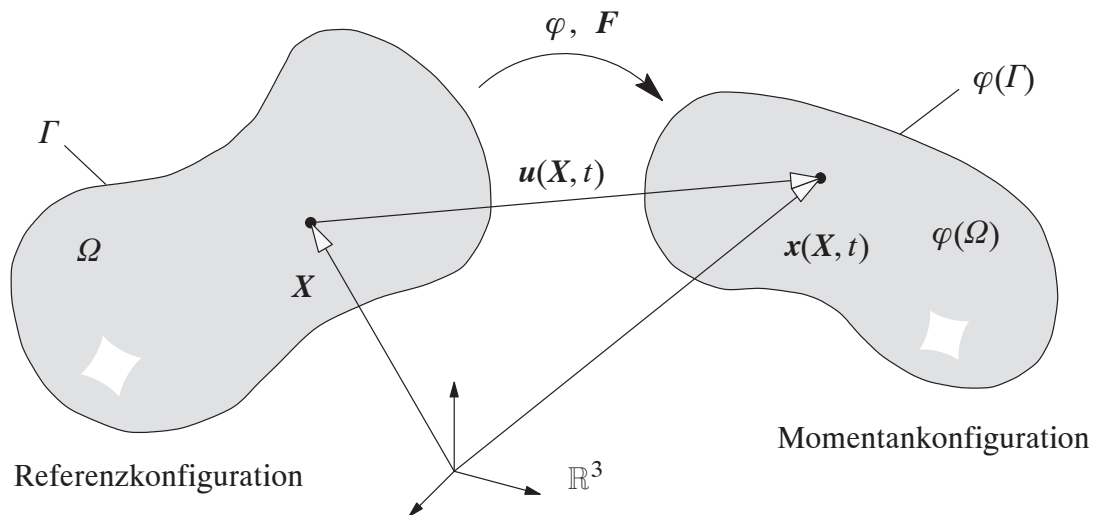


Bild 2.1: Bewegung und Deformation eines materiellen Körpers

Da die hier behandelten Materialien geschichtsabhängig sein sollen (z.B. Plastizität) und die betrachteten Prozesse dynamischer Natur sind, muss die Abhängigkeit der Deformation von der Zeit berücksichtigt werden. Deshalb werden hier die Zeitableitungen kinematischer Größen angegeben. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} des materiellen Punktes bezogen auf die Referenzkonfiguration wird durch die materielle Zeitableitung¹

$$\mathbf{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}(X, t)}{\partial t} =: \dot{\mathbf{x}} \quad (2.3)$$

definiert. Analog ist die Beschleunigung \mathbf{a} durch zweimaliges Ableiten nach der Zeit gegeben

$$\mathbf{a}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi(X, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}(X, t)}{\partial t} =: \ddot{\mathbf{x}} . \quad (2.4)$$

Eine zentrale Rolle bei der Beschreibung der Kinematik finiter Verzerrungen spielt der unsymmetrische Deformationsgradient \mathbf{F} . Er ist die Fréchet-Ableitung der nichtlinearen Deformationsabbildung

$$\mathbf{F}(X, t) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial X} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X} \quad (2.5)$$

1. Im mathematischen Sinne entspricht die materielle Zeitableitung der totalen Zeitableitung. Physikalisch stellt die materielle Zeitableitung die Änderung der Größe dar, die ein Beobachter feststellt, der sich mit dem materiellen Punkt mitbewegt.

und kann als lineare Abbildung von Tangenten materieller Kurven interpretiert werden. Da φ die Orientierung des materiellen Körpers erhalten soll (keine Durchdringungen, keine Spiegelungen), muss für die Jakobideterminante J gelten:

$$J = \det(\mathbf{F}) > 0 . \quad (2.6)$$

Bei der Deformation des Kontinuums lassen sich mit Hilfe des *rechten Cauchy-Green Tensors*

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.7)$$

und des *Finger-Tensors (linker Cauchy-Green Tensor)*

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.8)$$

Streckungen und Winkeländerungen lokal an $\mathbf{X} \in \Omega$ oder $\mathbf{x} \in \varphi(\Omega)$ berechnen. Auf der Grundlage dieser symmetrischen, positiv definiten Tensoren können beliebig viele Verzerrungstensoren definiert werden (Ogden (1984)). Hier soll beispielhaft der Verzerrungstensor vom Hencky-Typ vorgestellt werden

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}) , \quad (2.9)$$

da im weiteren Verlauf diese logarithmischen bzw. natürlichen Verzerrungen verwendet werden. Sie sind besonders für die Beschreibung elastischen Verhaltens bei großen Dehnungen geeignet. Außerdem ergeben sich bei Verwendung dieses Verzerrungsmaßes substantielle Vereinfachungen in den Algorithmen zur Spannungsberechnung, wie im Folgenden noch gezeigt wird.

2.1.2 Bilanzsätze

Bilanzprinzipie sind universelle physikalische Aussagen für Kontinua. Sie stellen die fundamentalen Beziehungen der Kontinuumsmechanik dar, sind anwendbar auf beliebige Materialien und müssen zu jeder Zeit erfüllt sein. In diesem Abschnitt sollen die Bilanzgleichungen bezüglich der Momentankonfiguration zusammengefasst werden, soweit sie im weiteren Verlauf benötigt werden.

Die *Massenerhaltung* besagt, dass in einem geschlossenen System die Masse während des Deformationsprozesses gleich bleibt. Eine mögliche Darstellung der entsprechenden lokalen Form lautet

$$\varrho(\mathbf{x}, t) J = \varrho_0(\mathbf{X}) \quad \text{bzw.} \quad dV J = dv , \quad (2.10)$$

d.h. die Beziehung zwischen Ausgangsdichte ϱ_0 und momentaner Dichte ϱ bzw. zwischen Volumelementen der Referenzkonfiguration dV und der Momentankonfiguration dv ist über die Jakobideterminante J gegeben.

Die Aussage der *Impulsbilanz* lautet: Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Summe aller von außen auf den Körper wirkenden Kräfte. Die dazugehörige lokale Form mit Bezug auf die Momentankonfiguration wird mathematisch durch

$$\varrho \mathbf{a} = \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \varrho \bar{\mathbf{b}} \quad (2.11)$$

beschrieben. Darin stellt σ den wahren bzw. *Cauchy'schen Spannungstensor* und $\varrho \bar{\mathbf{b}}$ die Volumenkraft (z.B. infolge Schwerkraft) dar. Gleichung (2.11) ist Grundlage für die Darstellung der schwachen Form des dynamischen Gleichgewichts (siehe Abschnitt 2.1.4).

Die lokale *Drallbilanz* führt zu der Forderung der Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors, d.h. es muss gelten:

$$\sigma = \sigma^T . \quad (2.12)$$

Eine weitere Bilanzangabe, die die *Erhaltung der Energie* eines thermodynamischen Prozesses postuliert, ist der 1. Hauptsatz der Thermodynamik. Er sagt aus, dass die zeitliche Änderung (materielle Zeitableitung) der totalen Energie W^{ges} gleich der Summe aus der mechanischen Leistung P der äußeren Kräfte (und eventuell der Wärmezufuhr Q) ist

$$\dot{W}^{ges} = P (+ Q) . \quad (2.13)$$

Die totale Energie W^{ges} setzt sich dabei aus der kinetischen Energie

$$W^{kin} = \int_{\varphi(\Omega)} \frac{1}{2} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv \quad (2.14)$$

und der inneren Energie

$$W^{int} = \int_{\varphi(\Omega)} \varrho u \, dv \quad (2.15)$$

mit der spezifischen inneren Energie u zusammen, d.h. es gilt $W^{ges} = W^{kin} + W^{int}$. Die mechanische Leistung der äußeren Kräfte erhält man aus der Summe der mechanischen Leistung der Volumen- und Oberflächenkräfte

$$P = \int_{\varphi(\Omega)} \varrho \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\varphi(I)} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, da \quad (2.16)$$

mit der Randspannung $\bar{\mathbf{t}}$. Die thermische Leistung Q soll hier nicht weiter berücksichtigt werden. Die Berechnung und Überprüfung dieser Energiegrößen ist im Folgenden insofern wichtig, als sie die Kontrolle der Lösung numerischer Berechnungen ermöglichen. Darauf wird später im Abschnitt 2.2.2 noch genauer eingegangen.

2.1.3 Materialgleichungen: Finite Plastizität

Bei transienten Impaktprozessen ist häufig nichtlineares bzw. elastisch-plastisches Materialverhalten zu beobachten. Zur Beschreibung dieses Phänomens wird hier der theoretische Rahmen der Finiten Plastizität verwendet. Die Formulierungen basieren auf den Arbeiten von Simo und Miehe (1992), Simo (1992), Miehe (1998) und Simo und Hughes (1998). An dieser Stelle wird noch nicht auf spezielle Materialien eingegangen. Konkrete Materialgleichungen für Metalle und Reibungsmaterialien werden in Kapitel 6 und 7 vorgestellt.

Zunächst wird ein konvexer elastischer Bereich E_τ durch ein Fließkriterium im Spannungsraum definiert

$$E_\tau := \{(\boldsymbol{\tau}, q) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0\} , \quad (2.17)$$

wobei die Fließfunktion f in Abhängigkeit des *Kirchhoff'schen Spannungstensors* $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ und einer skalaren internen Variable q des Spannungsraums formuliert ist. (Zur Vereinfachung der Notation wird hier ohne Verlust an Allgemeinheit der Spezialfall mit nur einer internen Variablen zur Beschreibung isotroper Verfestigung betrachtet.) \mathbb{S} ist der Vektorraum der symmetrischen Tensoren zweiter Stufe. Definition (2.17) besagt, dass ein von der Belastungsgeschichte abhängiger Spannungszustand innerhalb eines zulässigen Bereichs liegen muss. Die zweite grundlegende Annahme der Elastoplastizität bei finiten Verzerrungen ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p . \quad (2.18)$$

Diese erstmals von Lee (1969) eingeführte Postulierung wurde aus der Struktur kristallplastischer Plastizitätsmodelle motiviert. Aus mikromechanischer Sicht ist \mathbf{F}^p eine interne Variable, die den Anteil der bleibenden Versetzungsbewegungen im Kristallgitter beschreibt. $\mathbf{F}^{e^{-1}}$ hingegen definiert - phänomenologisch gesehen - die lokale spannungsfreie und unbelastete Zwischenkonfiguration (Simo und Miehe (1992)). (2.18) stellt eine geeignete Verallgemeinerung des additiven Splits des linearen Verzerrungstensors dar, der in der Elastoplastizität bei kleinen Verzerrungen verwendet wird². Für die weitere Herleitung werden außerdem die Tensoren

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}^{p^{-1}} = \mathbf{F}^{p^{-1}} \mathbf{F}^{p^{-1}T} \quad (2.19)$$

eingeführt. Der elastische Finger-Tensor \mathbf{b}^e ist das Ergebnis einer push-forward-Operation der inversen plastischen Metrik $\mathbf{C}^{p^{-1}}$ von der Referenz- zur Momentankonfiguration

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F} \mathbf{C}^{p^{-1}} \mathbf{F}^T . \quad (2.20)$$

Die Differentiation der Gleichung (2.20) nach der Zeit ergibt

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \quad (2.21)$$

mit dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ und der Lie-Ableitung des elastischen Finger-Tensors

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = \mathbf{F} \dot{\mathbf{C}}^{p^{-1}} \mathbf{F}^T . \quad (2.22)$$

Die volumenspezifisch lokal in einem deformierten Körper gespeicherte Energie wird durch die Verzerrungsenergie oder freie Energie beschrieben. Sie repräsentiert aus mikromechanischer Sicht die gespeicherte Energie, die durch elastische Gitterdeformationen entsteht und bei Entlas-

2. Auch bei Finiter Plastizität ist ein additiver Split in elastischen und plastischen Anteil möglich, allerdings nur, wenn elastische und plastische Deformationsraten betrachtet werden bzw. wenn eine inkrementelle Formulierung mit logarithmischen Dehnungen verwendet wird (Peric et al. (1992)). Der Deformationsgradient wird jedoch immer multiplikativ zerlegt.

tung wieder freigesetzt wird. Deshalb wird angenommen, dass die *Freie Energie-Funktion* ψ lokal vom elastischen Anteil des Deformationsgradienten abhängt. Unter Verwendung des Prinzips der materiellen Objektivität und der Annahme isotropen Materialverhaltens gelangt man zu folgender funktioneller Form für isotherme Prozesse

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \alpha) , \quad (2.23)$$

d.h. die freie Energie ist eine Funktion des elastischen Finger-Tensors \mathbf{b}^e und einer skalaren internen Variablen α des Verzerrungsraums, die eine isotrope Verfestigung beschreibt. Weiterhin muss bei inelastischem Materialverhalten die Evolution der freien Energie $\dot{\psi}$ stets kleiner oder gleich der lokalen Spannungsleistung $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}$ sein, d.h. das so genannte Dissipationspostulat

$$\mathfrak{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.24)$$

muss gelten, wobei in dieser Ungleichung $\mathbf{D} = \text{sym}[\mathbf{I}]$ den Deformationsgeschwindigkeitstensor darstellt. Die "*Clausius-Duhem-Ungleichung*" (2.24) ist ein Sonderfall des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und besagt, dass die in einem geschlossenen Kreisprozess an einem Materialelement geleistete Arbeit stets null oder positiv sein muss. Die darin enthaltene zeitliche Ableitung der Freien Energie-Funktion berechnet sich unter Verwendung von (2.21) zu

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} : \dot{\mathbf{b}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} : [\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e] + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e : [2\mathbf{D} + (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1}] + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dabei wurde die Symmetrie von $\partial \psi / \partial \mathbf{b}^e$ und die Annahme von Isotropie genutzt. Außerdem gilt $2\mathbf{D} = \mathbf{l} + \mathbf{l}^T$. Einsetzen von (2.25) in (2.24) liefert

$$\mathfrak{D} = \left[\boldsymbol{\tau} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \right] : \mathbf{D} + \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \right] : \left[-\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 . \quad (2.26)$$

Die Forderung, dass Gleichung (2.26) für alle zulässigen mechanischen Prozesse gelten muss, führt auf den Kirchhoff-Spannungstensor als energetisch konjugierter Größe zum elastischen Finger-Tensor

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e . \quad (2.27)$$

Definiert man jetzt die interne Variable des Spannungsraums zu $q := -\partial \psi / \partial \alpha$, so lautet die reduzierte Dissipationsungleichung

$$\mathfrak{D} = \boldsymbol{\tau} : \left[-\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] + q \dot{\alpha} \geq 0 . \quad (2.28)$$

Nun sollen geeignete Evolutionsgleichungen für die internen Variablen definiert werden, um die konstitutive Theorie der Finiten Plastizität zu vervollständigen. Dazu wird das Postulat vom *Maximum der plastischen Dissipation* angewendet. Es besagt, dass der wahre Spannungszustand $(\boldsymbol{\tau}, q) \in E_\tau$ die innere Dissipation maximiert. Mit dieser Annahme muss für alle zulässigen Spannungszustände $(\boldsymbol{\tau}^*, q^*) \in E_\tau$ Folgendes gelten

$$[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*] : \left[-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] + [q - q^*] \dot{\alpha} \geq 0 . \quad (2.29)$$

Gleichung (2.29) definiert ein restringiertes Optimierungsproblem mit Ungleichheitsnebenbedingungen. Dieses kann in ein Sattelpunktproblem überführt werden:

$$L = -\mathfrak{D} + \dot{\gamma} f = -\boldsymbol{\tau} : \left[-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] - q \dot{\alpha} + \dot{\gamma} f \rightarrow \text{stat.} \quad (2.30)$$

Hierin ist $\dot{\gamma}$ der plastische Multiplikator, mit dessen Hilfe die Nebenbedingung bzw. Fließbedingung $f \leq 0$ (physikalisch zulässige Zustände) eingebracht wird. Die Auswertung von (2.30) liefert folgende Fließregeln

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\tau}} = 0 : \quad -\frac{1}{2}(\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{b}^e = \dot{\gamma} \mathbf{m}_\tau \mathbf{b}^e , \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 : \quad \dot{\alpha} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial q} = \dot{\gamma} m_q \quad (2.32)$$

und die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q) = 0 , \quad (2.33)$$

die hinsichtlich der Beschreibung von Be- und Entlastung in der weiteren Herleitung wichtig sind. Hinzu kommt die Konsistenzbedingung

$$\dot{\gamma} \dot{f} = 0 , \quad (2.34)$$

mit der die Forderung, dass der Spannungszustand im Fall von $\dot{\gamma} > 0$ genau auf dem Rand des elastischen Bereichs liegen muss, automatisch erfüllt wird. Einsetzen von (2.22) in (2.31) führt zu folgender Evolutionsgleichung für die inverse plastische Metrik

$$\dot{C}^{p-1} = -2\dot{\gamma} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{m}_\tau \mathbf{b}^e \mathbf{F}^{-T} = -2\dot{\gamma} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{m}_\tau \mathbf{F}) \mathbf{C}^{p-1} . \quad (2.35)$$

Die Anwendung des Postulats vom Maximum der plastischen Dissipation führt mit den Fließrichtungen $\mathbf{m}_\tau = \partial f / \partial \boldsymbol{\tau}$ und $m_q = \partial f / \partial q$ zu den *assoziierten* Fließregeln (2.31), (2.32) und (2.35). Bei der Beschreibung des plastischen Verhaltens von Metallen ist dies auch aus physikalischer Sicht sinnvoll. Bei Reibungsmaterialien dagegen führt die Anwendung assoziierter Fließregeln üblicherweise zu einer Überschätzung der Dilatation. Das bedeutet, dass der volumetrische Anteil der plastischen Verzerrungen (z.B. die Auflockerung von dichtem Sand) im Modell größer ist als in der Realität. Um eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen zu erreichen, werden deshalb häufig *nicht-assoziierte* Fließregeln mit einer verminderten volumetrischen Komponente des Fließvektors eingeführt. Darauf wird später im Rahmen der Materialmodellierung für Reibungsmaterialien noch genauer eingegangen.

2.1.4 Anfangs-Randwertproblem

Die *starke Form* des Anfangs-Randwertproblems der geometrisch nichtlinearen Strukturmechanik setzt sich nun aus den folgenden Feldgleichungen

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (\text{Kinematik}) , \quad (2.36)$$

$$\varrho \mathbf{a} = \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \varrho \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{Dynamisches Gleichgewicht}) , \quad (2.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{b}) \quad (\text{Materialgesetz}) \quad (2.38)$$

und den Anfangs- bzw. Randbedingungen zusammen. Hierbei wurde in (2.38) der für isotrope nichtlineare Materialien geltende funktionale Zusammenhang zwischen den Cauchy-Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und dem Finger-Tensor \mathbf{b} verwendet. Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Verschiebungen \mathbf{u} und die Geschwindigkeiten \mathbf{v} lauten

$$\mathbf{u}(t = 0) =: \mathbf{u}_0 , \quad \mathbf{v}(t = 0) =: \mathbf{v}_0 . \quad (2.39)$$

Außerdem sind auf dem Rand $\varphi(\Gamma)$ des aktuellen Gebiets Bedingungen für die Verschiebungen und die Spannungen vorzugeben. Die geometrischen Randbedingungen sind auf dem Dirichlet-Rand $\varphi(\Gamma_u)$ zu erfüllen, d.h. dort werden Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ vorgeschrieben

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \varphi(\Gamma_u) . \quad (2.40)$$

Auf dem Neumann-Rand $\varphi(\Gamma_\sigma)$ sind dagegen dynamische Randbedingungen vorgeschrieben. Mit der Bezeichnung \mathbf{n} für die momentane Normale auf den Rand und $\bar{\mathbf{t}}$ für die vorgeschriebenen Spannungen erhält man

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \varphi(\Gamma_\sigma) . \quad (2.41)$$

Mit der Methode der Finiten Elemente soll nun das Anfangs-Randwertproblem (2.36) bis (2.41) gelöst werden. Dazu ist eine Überführung der starken Form in eine *schwache Form* notwendig. Im Sinne des Galerkin-Verfahrens folgt die schwache Form des dynamischen Gleichgewichts durch Multiplikation der lokalen Impulsbilanz (2.37) mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ (virtuelle Verschiebungen) und einer anschließenden Integration über das räumliche Lösungsgebiet $\varphi(\Omega)$:

$$\int_{\varphi(\Omega)} \delta \mathbf{u} \cdot \varrho \mathbf{a} \, dv = \int_{\varphi(\Omega)} \delta \mathbf{u} \cdot (\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \varrho \bar{\mathbf{b}}) \, dv . \quad (2.42)$$

Unter Anwendung der partiellen Integration und des Cauchy-Theorems $\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ auf dem Neumann-Rand der Momentankonfiguration $\varphi(\Gamma_\sigma)$ folgt

$$\underbrace{\int_{\varphi(\Omega)} \delta \mathbf{u} \cdot \varrho \mathbf{a} \, dv}_{\delta W^{kin}} = - \underbrace{\int_{\varphi(\Omega)} \operatorname{grad}_x \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, dv}_{-\delta W^{int}} + \underbrace{\int_{\varphi(\Omega)} \delta \mathbf{u} \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} \, dv + \int_{\varphi(\Gamma_\sigma)} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, da}_{\delta W^{ext}} . \quad (2.43)$$

Formal entspricht diese Beziehung dem Prinzip der virtuellen Arbeiten der geometrisch linearen Theorie. Die Nichtlinearität kommt dadurch ins Spiel, dass die Integrale und die Spannungs- und virtuellen Verzerrungsgrößen in der Momentankonfiguration auszuwerten sind.

2.2 Lösungsverfahren

Im Folgenden sollen Diskretisierungsstrategien vorgestellt werden, mit deren Hilfe das Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Strukturmechanik (siehe Abschnitt 2.1.4) numerisch gelöst werden kann. Als erstes erfolgt dazu eine *räumliche Diskretisierung*, d.h. die Zerlegung des Gebiets in eine endliche Anzahl von Teilgebieten bzw. Finiten Elementen mit dazugehörigen Knoten. Diese FE-Diskretisierung der schwachen Form des dynamischen Gleichgewichts im Raum führt zu einem nichtlinearen, gekoppelten System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die die zeitliche Evolution der Knotenfreiheitsgrade beschreiben. Im Sinne einer sequentiellen Diskretisierung folgt anschließend eine *zeitliche Diskretisierung* des Differentialgleichungssystems mittels eines geeigneten Zeitintegrationsverfahrens. Dies führt auf ein nichtlineares algebraisches Problem für die Lage der Knoten, das in inkrementeller Weise gelöst werden kann. Auf die *Integration der Materialgleichungen* mit dem Ziel einer inkrementellen, iterativen Formulierung zur Spannungsberechnung wird gesondert eingegangen. Das Resultat ist ein *Algorithmus*, der die Vorgehensweise zur numerischen Berechnung hochdynamischer Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten beschreibt.

2.2.1 Räumliche Diskretisierung

Der erste Schritt zu einer räumlichen Diskretisierung ist die Unterteilung des kontinuierlichen Körpers Ω in n_e Finite Elemente

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e . \quad (2.44)$$

Für die zu approximierenden Feldgrößen aus (2.43) sind innerhalb der einzelnen Elemente Ansatzfunktionen zu wählen, so z.B. für die Verschiebungen und die virtuellen Verschiebungen

$$\mathbf{u}_{(e)}^h(\xi, t) = N_{(e)}(\xi) \mathbf{d}_{(e)}(t) \quad \text{bzw.} \quad \delta \mathbf{u}_{(e)}^h(\xi, t) = N_{(e)}(\xi) \delta \mathbf{d}_{(e)}(t) , \quad (2.45)$$

für die Beschleunigungen

$$\mathbf{a}_{(e)}^h(\xi, t) = N_{(e)}(\xi) \ddot{\mathbf{d}}_{(e)}(t) \quad (2.46)$$

und den Gradienten der virtuellen Verschiebungen

$$\text{grad}_x \delta \mathbf{u}_{(e)}^h(\xi, t) = \frac{\partial N_{(e)}(\xi)}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{d}_{(e)}(t) = \mathbf{B}_{(e)}(\xi) \delta \mathbf{d}_{(e)}(t) . \quad (2.47)$$

Hierbei wurde die bei der Methode der Finiten Elemente benötigte Matrizenformulierung verwendet. In (2.45), (2.46) und (2.47) sind N die in lokalen Elementkoordinaten ξ formulierten Ansatzfunktionen. Mit \mathbf{d} , $\delta \mathbf{d}$ und $\ddot{\mathbf{d}}$ sind die Vektoren bezeichnet, die die diskreten, zeitabhängigen Knotenwerte der interpolierten Feldgrößen enthalten, und \mathbf{B} ist der so genannte kinematische B-Operator. Basierend auf diesen Verschiebungsansätzen wird die Diskretisierung der schwachen Form (2.43) durchgeführt. Dies führt auf die semidiskrete Form der Bewegungsgleichungen (ohne Dämpfung) für das gesamte System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{f}^{ext}(t) \quad (2.48)$$

mit der Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\varphi(\Omega_e)} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dv \right]_{(e)}, \quad (2.49)$$

dem internen Knotenkraftvektor \mathbf{f}^{int} mit den in Vektorform zusammengefassten Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]^T$

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}(t)) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\varphi(\Omega_e)} \mathbf{B}^T(\mathbf{d}(t)) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}(\mathbf{d}(t))) \, dv \right]_{(e)} \quad (2.50)$$

und dem Vektor der zeitabhängigen äußeren Belastungen

$$\mathbf{f}^{ext}(t) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\varphi(\Omega_e)} \mathbf{N}^T \rho \bar{\mathbf{b}}(t) \, dv + \int_{\varphi(\Gamma_e)} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{i}}(t) \, da \right]_{(e)}. \quad (2.51)$$

Die Beziehungen gleichen der linearen Theorie. Der entscheidende Unterschied liegt darin, dass sich die B-Matrix und die Spannungen auf die Momentankonfiguration beziehen und deshalb für jeden Deformationszustand aktualisiert werden müssen.

Es ist denkbar, in der Bewegungsgleichung eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung einzuführen, um eine Bewegung mit vorhandener Systemdämpfung zu beschreiben. Dazu wird üblicherweise Gleichung (2.48) um einen viskosen Dämpfungsterm $\mathbf{C}^S \dot{\mathbf{d}}$ ergänzt

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}^S \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{f}^{ext}(t). \quad (2.52)$$

Konkrete Element-Ansätze, die für die hier behandelten transienten Impaktvorgänge besonders geeignet sind, werden in Kapitel 3 vorgestellt.

2.2.2 Zeitliche Diskretisierung

Zur numerischen Integration des semidiskreten Anfangs-Randwertproblems (2.48) muss eine Diskretisierung in der Zeit durchgeführt werden. Dazu wird die gesamte Beobachtungszeit T in Zeitintervalle $[t_{n-1}, t_n]$ bzw. Zeitschritte $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ zerlegt. Dadurch sind alle zeitabhängigen Größen nicht mehr kontinuierlich, sondern nur noch zu diskreten Zeitpunkten bestimmbar. Grundsätzlich werden zwei Arten der Zeitintegration unterschieden, je nachdem wann die Bewegungsgleichung in die Entwicklung des Zeitintegrationsalgorithmus eingebracht wird, d.h. ob die Lösung in expliziter oder impliziter Weise erfolgt.

Explizite Zeitintegrationsverfahren sind dadurch gekennzeichnet, dass die Lösung zum aktuellen Zeitpunkt t_n nur von der alten, bekannten Lösung bei t_{n-1} abhängt. Deshalb sind diese Me-

thoden sehr effizient und einfach zu implementieren. Besondere Effizienz kann erreicht werden, wenn eine diagonalisierte Massenmatrix verwendet wird. Dann führt die Zeitintegration der diskreten Bewegungsgleichung auf entkoppelte skalare, lineare Gleichungen, die sehr einfach auszuwerten sind. Der Nachteil dieser Verfahren ist, dass die Stabilität der Lösung von der Größe der Zeitschrittweite Δt abhängt, d.h. sie sind nur bedingt stabil. Konkret bedeutet dies, dass für typische Berechnungen viele sehr kleine Zeitschritte notwendig sind. Diese "feine" zeitliche Auflösung lässt sich für transiente Probleme der Strukturmechanik jedoch auch physikalisch rechtfertigen. So ist die genaue Abbildung der dort auftretenden hochfrequenten Anteile (z.B. Wellenausbreitung durch Schock) nur mit sehr kleinen Zeitschritten möglich, weshalb explizite Verfahren im Bereich der Kurzzeitdynamik (Impakt, Crash, usw.) sehr häufig Verwendung finden. Auch in dieser Arbeit wird die explizite Zeitintegration zur Simulation transienter Impaktvorgänge eingesetzt.

Grundsätzlich andere Eigenschaften haben die *impliziten Zeitintegrationsverfahren*, bei denen die Lösung zum Zeitpunkt t_n von alten und neuen, noch unbekanntem Größen bei t_{n-1} und t_n abhängen. Dies erfordert die Lösung eines nichtlinearen, gekoppelten Gleichungssystems in jedem Zeitschritt, wodurch diese Verfahren relativ aufwändig bezüglich Berechnung und Implementierung sind. Im Gegensatz zu den expliziten Methoden ist eine Linearisierung der Modelle sowie die Kombination mit einem geeigneten Lösungsverfahren (Newton-Raphson, Fixpunktiteration, usw.) notwendig. Der große Vorteil der impliziten Vorgehensweise ist die Möglichkeit, erheblich größere Zeitschritte wählen zu können. Die Verfahren können sogar so konstruiert werden, dass sie unbedingt stabil sind. Geeignet ist die implizite Zeitintegration für Probleme, bei denen sich die Antwort des Systems hauptsächlich aus niederfrequenten Anteilen zusammensetzt, wie z.B. bei Maschinenschwingungen, Erdbeben usw.. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass implizite Verfahren zwar stabiler und verlässlicher sind als explizite Verfahren, jedoch relativ aufwändig und ungeeignet für die Simulation transienter Impaktvorgänge, bei denen aus physikalischer Sicht die Wahl kleiner Zeitschritte unumgänglich ist.

Die hier verwendete explizite Zeitintegration ist ein Einschritt-Verfahren erster Ordnung, das von Hahn (1991) als *Modifizierte Euler-Methode* (MEM) bezeichnet wird. Ausgehend von der diskreten Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_n

$$M\ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n) = \mathbf{f}_n^{ext} \quad (2.53)$$

erhält man die aktuellen Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = M^{-1} [\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n)] . \quad (2.54)$$

Die Verwendung einer diagonalisierten Massenmatrix M macht die Invertierung sehr einfach und es sind lediglich Vektorauswertungen zur Berechnung von $\ddot{\mathbf{d}}_n$ erforderlich. Mit Hilfe der im letzten Zeitschritt berechneten und damit bekannten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_n$ und Verschiebungen \mathbf{d}_n können die entsprechenden Größen für den nächsten Zeitschritt mit Hilfe der MEM (Heiduschke (1990), Hahn (1991)) berechnet werden:

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n , \quad (2.55)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n . \quad (2.56)$$

Der Unterschied zwischen der MEM und einer Standard Euler Methode (SEM) liegt in der Verwendung der neuen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$ anstelle der aktuellen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_n$ in (2.56). Diese Modifikation bewirkt, dass aus einer absolut instabilen und damit für strukturdynamische Untersuchungen unbrauchbaren Zeitintegration (SEM) ein bedingt stabiles Verfahren (MEM) wird.

Zum besseren Verständnis des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens sollen nun dessen wichtigsten Eigenschaften beschrieben werden. Dazu werden Genauigkeit, Stabilität, Energieerhaltung und numerische Dissipation analysiert, diskutiert und mit dem in expliziten FE-Codes häufig verwendeten zentralen Differenzenverfahren (ZDV), das einen Sonderfall der Ansätze nach Newmark (1959) darstellt, verglichen.

Die *Genauigkeit* der MEM ist von erster Ordnung für die Verschiebungen, und damit weniger genau als das ZDV, das von zweiter Ordnung ist. Diese geringere Genauigkeit wird durch die größere Einfachheit der Umsetzung aufgewogen. Ein weiterer Vorteil der MEM ist, dass im Unterschied zum ZDV sowohl die aktuellen Verschiebungen als auch die aktuellen Geschwindigkeiten während eines Zeitschritts direkt zur Verfügung stehen (Heiduschke (1990)). Die Möglichkeit der Einflussnahme auf die Geschwindigkeiten ist für die Formulierung der Randbedingungen wichtig, wie z.B. bei reibungsbehafteten Kontaktproblemen.

Zur Analyse der *spektralen Stabilität* des hier verwendeten Zeitintegrationsverfahrens wird die homogene Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers mit der Eigenfrequenz ω betrachtet (übliche Vorgehensweise, siehe z.B. Hahn (1991))

$$\ddot{d}_n + \omega^2 d_n = 0 . \quad (2.57)$$

Verwendet man das Zeitintegrationsverfahren (2.55) bis (2.56), so kann die diskrete Evolution der Verschiebung und der Geschwindigkeit als lineare Abbildung dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} d_{n+1} \\ \dot{d}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 \Delta t^2 & \Delta t \\ -\omega^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_n \\ \dot{d}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d_n \\ \dot{d}_n \end{bmatrix} . \quad (2.58)$$

Mit der so genannten Vergrößerungsmatrix (amplification matrix) A erhält man die Lösungen des nächsten Zeitschritts aus den Lösungen des vorangegangenen Zeitschritts. Ein Zeitintegrationsverfahren kann als "stabil" bezeichnet werden, wenn die mit einem beliebigen Zeitschritt Δt ermittelte Lösung nicht über alle Grenzen wächst. Mathematisch ausgedrückt müssen dazu die Hauptinvarianten A_1 und A_2 der Matrix A i. Allg. folgende Bedingungen erfüllen (Hughes (1983)):

$$-\frac{1}{2}(A_2 + 1) \leq A_1 \leq \frac{1}{2}(A_2 + 1), \quad -1 \leq A_2 \leq 1 \quad (2.59)$$

und

$$-1 < A_1 < 1, \quad A_2 = 1 . \quad (2.60)$$

Setzt man die konkreten Werte $A_1 = 1 - 0.5\omega^2\Delta t^2$ und $A_2 = 1$ ein, so erhält man die Stabilitätsbedingung für das hier verwendete Zeitintegrationsverfahren

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega} , \quad (2.61)$$

d.h. die Größe der Eigenfrequenz des betrachteten Systems begrenzt den Zeitschritt. Beim ZDV gelangt man zu derselben Stabilitätsbedingung. Wird der kritische Zeitschritt $\Delta t_{krit} = 2/\omega_{max}$ in nur geringem Maße überschritten, so kann ein unbegrenztes Anwachsen bzw. "numerisches Instabilwerden" der Lösung beobachtet werden. Um nun einerseits Stabilität zu garantieren und andererseits eine hohe Effizienz (geringe numerische Kosten) zu erreichen, ist es notwendig, einen Zeitschritt zu verwenden, der unter, aber möglichst nahe an der Stabilitätsschranke liegt. Da die dazu notwendige Bestimmung der System-Eigenfrequenz ω einer FE-Diskretisierung sehr aufwändig ist, wird i. Allg. eine Abschätzung durchgeführt. Dies wird in Kapitel 5 noch genauer beschrieben.

Die Stabilitätsbedingungen (2.59) und (2.60) beruhen auf einer modalen Analyse der linearen Bewegungsgleichung. Für beliebige nichtlineare Probleme, wie z.B. Plastizität, Kontakt, usw., existieren derzeit keine vergleichbaren Stabilitäts-Theoreme, d.h. selbst bei Einhaltung von (2.61) kann es bei nichtlinearen Systemen zur Entwicklung von Instabilitäten³ kommen. Eine geeignete Alternative für nichtlineare Probleme ist die Überprüfung der *energetischen Stabilität*. Dazu wird die Energiebilanz kontrolliert und die kinetische, interne und externe Energie betrachtet (siehe auch Abschnitt 2.1.2), die sich in räumlich und zeitlich diskretisierter Form berechnen durch

$$W_{n+1}^{kin} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{d}}_{n+1})^T \mathbf{M}_{n+1} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} , \quad (2.62)$$

$$W_{n+1}^{int} = W_n^{int} + (\mathbf{f}_{n+1}^{int})^T (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) = W_n^{int} + \Delta W_{n+1}^{int} \text{ und} \quad (2.63)$$

$$W_{n+1}^{ext} = W_n^{ext} + (\mathbf{f}_{n+1}^{ext})^T (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) = W_n^{ext} + \Delta W_{n+1}^{ext} . \quad (2.64)$$

Ein Zeitintegrationsverfahren ist dann energetisch stabil, wenn die aus kinetischer und interner Energie bestehende Gesamtenergie innerhalb eines Zeitschritts um nicht mehr als die von externen Lasten (und gegebenenfalls Dämpfungskräften) geleistete Arbeit zunimmt (Belytschko und Schoeberle (1975)):

$$(W_{n+1}^{kin} - W_n^{kin}) + \Delta W_{n+1}^{int} \leq \Delta W_{n+1}^{ext} . \quad (2.65)$$

3. Ein Beispiel eines physikalischen Modells, bei dem eine so genannte "arretierte Instabilität" (Belytschko (1983)) auftreten kann, ist das elastisch-plastische Antwortverhalten einer Struktur bei großen Deformationen. Durch geometrische Versteifung (geometrische Nichtlinearität) wird eine Instabilität hervorgerufen, wobei sich das Material zunächst elastisch verhält. Diese Instabilität bewirkt lokal in einem kleinen Bereich ein exponentielles Ansteigen der Lösung und führt dadurch zu plastischem Verhalten. Infolgedessen sinkt die Steifigkeit bzw. die Eigenfrequenz und der kritische Zeitschritt wird größer. Die Rechnung bleibt dann scheinbar stabil.

In Bild 2.2 ist die Energiebilanz eines typischen Impaktvorgangs dargestellt (genauere Beschreibung dieses Beispiels in Kapitel 4.5.1). Man erkennt, wie die anfänglich rein kinetische Energie in innere Energie umgewandelt wird: Die abnehmende Geschwindigkeit des Schwerpunkts v_S geht mit zunehmenden irreversiblen Deformationen einher. Die Gesamtenergie bleibt nahezu konstant, d.h. das Verfahren verhält sich in diesem Fall energetisch stabil.

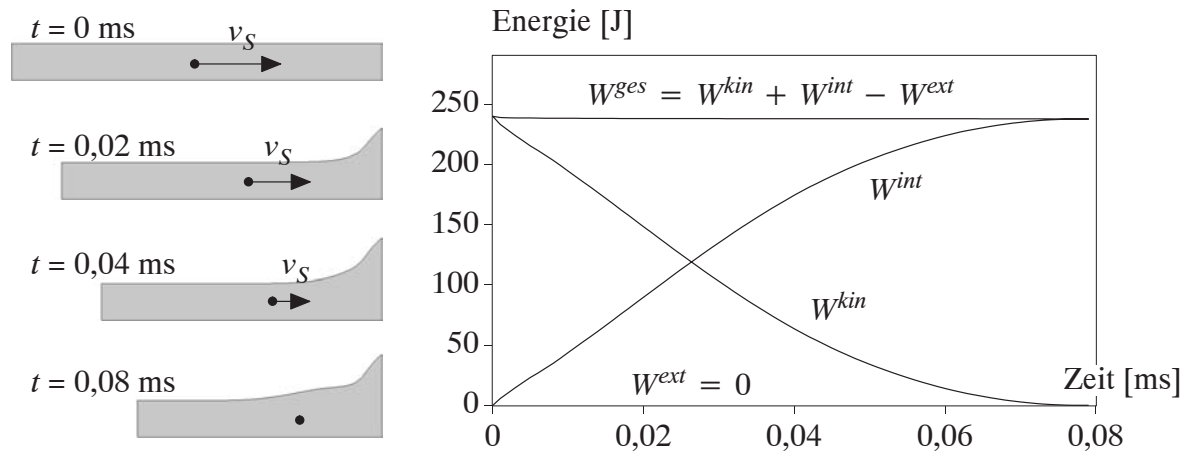


Bild 2.2: Energiebilanz eines typischen Impaktvorgangs (hier: Taylor Bar)

Zur Analyse der *numerischen Dissipation* der MEM wird die numerische Dämpfungsrate $\bar{\xi}$ betrachtet. Hughes (1983) definiert diesen Wert wie folgt:

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{2\bar{\omega}\Delta t} \ln(A_2) , \quad (2.66)$$

wobei $\bar{\omega}$ die algorithmische Eigenfrequenz darstellt. Da bei der MEM $A_2 = 1$ gilt, erhält man $\bar{\xi} = 0$, d.h. das Verfahren besitzt keine numerische Dissipation, wie es auch beim zentralen Differenzenverfahren der Fall ist. Inwieweit dies noch für stark nichtlineares Verhalten zutrifft, kann analytisch nicht gezeigt werden. Erfahrungen haben jedoch gezeigt, dass eine geringe numerische Dissipation auftreten kann, so ist z.B. in Bild 2.2 eine Abnahme der Gesamtenergie W^{ges} von ca. 1 % festzustellen.

2.2.3 Integration der inelastischen Materialgleichungen

Zur Umsetzung in einem diskretisierenden Verfahren wird noch die inkrementelle Formulierung der in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen Materialgleichungen benötigt (Simo und Miehe (1992), Simo (1992)). Gegeben ist das Zeitintervall $[t_{n-1}, t_n]$ mit dem Zeitschritt $\Delta t = t_n - t_{n-1}$. Die inverse plastische Metrik C_{n-1}^{p-1} und die interne Variable α_{n-1} aus dem letzten Zeitschritt sowie der aktuelle totale Deformationsgradient F_n seien bekannt. Nun soll für die beschriebenen Evolutionsgleichungen der Plastizitätstheorie ein algorithmisches, deformationsgetriebenes Approximationsverfahren konstruiert werden, so dass aus den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_{n-1} die neuen Spannungen und die interne Variable zum Zeitpunkt t_n hervorgehen. Zunächst wird für die Evolution der inversen plastischen Metrik C_n^{p-1} ein exponentieller Ansatz gewählt, der sich aus der Lösung folgender linearer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{z}(t) = A z(t) \quad \text{in} \quad [t_{n-1}, t_n] \quad (2.67)$$

motiviert. Die Anwendung einer impliziten Integration führt zu der Lösung

$$z(t_n) = \exp(\Delta t A_n) z(t_{n-1}) . \quad (2.68)$$

Analog ergibt sich die inkrementelle Form der Evolutionsgleichung (2.35) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^{p-1} &= \exp\left(-2 \dot{\gamma}_n \Delta t \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{m}_{\tau,n} \mathbf{F}_n\right) \mathbf{C}_{n-1}^{p-1} \\ &= \mathbf{F}_n^{-1} \exp\left(-2 \dot{\gamma}_n \Delta t \mathbf{m}_{\tau,n}\right) \mathbf{F}_n \mathbf{C}_{n-1}^{p-1} . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Einsetzen in (2.20) mit der Abkürzung $\Delta\gamma_n = \dot{\gamma}_n \Delta t$ ergibt für den elastischen Finger-Tensor

$$\mathbf{b}_n^e = \exp\left(-2\Delta\gamma_n \mathbf{m}_{\tau,n}\right) \mathbf{F}_n \mathbf{C}_{n-1}^{p-1} \mathbf{F}_n^T . \quad (2.70)$$

Zur Integration der Fließregel (2.32) für die interne Variable wird - wie bei kleinen Verzerrungen - ein implizites Rückwärts-Euler-Verfahren verwendet. Die entsprechende inkrementelle Form lautet damit

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \Delta\gamma_n m_{q,n} . \quad (2.71)$$

Nun wird im Rahmen des inkrementellen Lösungsverfahrens zunächst angenommen, dass die Materialantwort rein elastisch ist, d.h. das plastische Fließen ist "eingefroren" und es gilt zunächst $\Delta\gamma_n = 0$. Der *elastische Prädiktor* hat damit die Form

$$\boldsymbol{\tau}_n^{trial} = 2 \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{b}_n^{e,trial}} \mathbf{b}_n^{e,trial} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_n^{e,trial} = \mathbf{F}_n \mathbf{C}_{n-1}^{p-1} \mathbf{F}_n^T , \quad (2.72)$$

$$q_n^{trial} = - \frac{\partial \psi_n}{\partial \alpha_n^{trial}} \quad \text{mit} \quad \alpha_n^{trial} = \alpha_{n-1} . \quad (2.73)$$

Als Nächstes wird überprüft, ob die Fließbedingung im Trialzustand verletzt ist (Spannungszustand außerhalb des elastischen Bereichs) oder nicht, d.h. ob die Materialantwort plastisch oder elastisch ist

$$f(\boldsymbol{\tau}_n^{trial}, q_n^{trial}) : \begin{cases} \leq 0 & \text{elastisch} \rightarrow \Delta\gamma_n = 0 \\ > 0 & \text{plastisch} \rightarrow \Delta\gamma_n > 0 \end{cases} . \quad (2.74)$$

Im elastischen Fall ist der Trialzustand die Lösung zum Zeitpunkt t_n und der Schritt ist abgeschlossen. Gilt dagegen $f_n > 0$, d.h. der Zustand $(\boldsymbol{\tau}_n^{trial}, q_n^{trial})$ ist unzulässig, so müssen mit Hilfe des *plastischen Korrektors* die Spannungen auf die Fließfläche zurückprojiziert werden, um den tatsächlichen Spannungszustand zu finden:

$$\boldsymbol{\tau}_n = 2 \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{b}_n^e} \mathbf{b}_n^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_n^e = \exp\left(-2\Delta\gamma_n \mathbf{m}_{\tau,n}\right) \mathbf{b}_n^{e,trial} , \quad (2.75)$$

$$q_n = - \frac{\partial \psi_n}{\partial \alpha_n} \quad \text{mit} \quad \alpha_n = \alpha_n^{trial} + \Delta\gamma_n m_{q,n} . \quad (2.76)$$

Die rechte Gleichung in (2.75) erhält man durch Einsetzen von (2.72) in (2.70). Die Forderung, dass das Fließkriterium zum Zeitpunkt t_n genau erfüllt sein muss und die diskreten Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

$$\Delta\gamma_n \geq 0, \quad f_n(\boldsymbol{\tau}_n, q_n) \leq 0, \quad \Delta\gamma_n f_n(\boldsymbol{\tau}_n, q_n) = 0 \quad (2.77)$$

führen auf ein nichtlineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\Delta\gamma_n$, $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\tau},n}$ und $m_{q,n}$. Das Gleichungssystem wird mit Hilfe einer (lokalen) Newton-Iteration gelöst. Nun soll ein Ansatz vorgestellt werden, mit dem sich die funktionelle Form der Rückprojektion relativ einfach, nämlich wie in der infinitesimalen Theorie, darstellen lässt. Dazu wird eine Spektralzerlegung des Kirchhoff-Spannungstensors und des Finger-Tensors eingeführt, wodurch man einen in logarithmischen Hauptverzerrungen formulierten Algorithmus erhält (Simo und Miehe (1992)).

- **Spektralzerlegung**

Allgemein folgt die Spektralzerlegung eines zweistufigen Tensors \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \sum_{a=1}^{n_{\text{dim}}} \Lambda_a^2 \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \quad (2.78)$$

mit den Eigenwerten $\{\Lambda_a\}_{a=1\dots n_{\text{dim}}}$ und den damit assoziierten Eigenrichtungen $\{\mathbf{N}_a\}_{a=1\dots n_{\text{dim}}}$ aus der Lösung folgenden speziellen Eigenwertproblems

$$\left[\mathbf{T} - \Lambda_a^2 \mathbf{1} \right] \mathbf{N}_a = \mathbf{0} . \quad (2.79)$$

Damit lassen sich der elastische Finger-Tensor \mathbf{b}^e und der Kirchhoff-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ in ihrer Spektralform darstellen

$$\mathbf{b}_n^e = \sum_{a=1}^3 (b_{a,n}^e)^2 \mathbf{n}_{a,n} \otimes \mathbf{n}_{a,n} , \quad (2.80)$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \sum_{a=1}^3 (\tau_{a,n})^2 \mathbf{n}_{a,n} \otimes \mathbf{n}_{a,n} , \quad (2.81)$$

wobei zu beachten ist, dass aufgrund der Isotropie-Annahme die Hauptrichtungen $\{\mathbf{n}_a\}_{a=1,2,3}$ beider Tensoren übereinstimmen. Mit $\{b_a^e\}_{a=1,2,3}$ können die elastischen Hauptstreckungen identifiziert werden; $\{\tau_a\}_{a=1,2,3}$ sind die Hauptspannungen. In Anhang A1 wird gezeigt, dass die Hauptrichtungen \mathbf{n}_a des Endzustands mit den Hauptrichtungen $\mathbf{n}_a^{\text{trial}}$ des Trialzustands übereinstimmen. Dies hat die vorteilhafte Konsequenz, dass der Rückprojektionsalgorithmus bei festgehaltenen Hauptachsen erfolgt und dass diese Richtungen durch den Trialzustand definiert werden. Kombiniert man diese Erkenntnis mit dem vorgestellten Prädiktor-Korrektor-Verfahren, so gelangt man zu einem Schema, dessen formale Struktur identisch ist mit dem Rückprojektionsalgorithmus der infinitesimalen Theorie, nun allerdings formuliert in Kirchhoff-Hauptspannungen.

- **Spannungsberechnung mit Bezug auf Hauptachsen**

Die Spektralzerlegung der Verzerrungen und Spannungen erlaubt es jetzt, die algorithmische Fließregel (2.75) in elastischen Hauptstreckungen b_a^e und Hauptspannungen τ_a darzustellen

$$(b_{a,n}^e)^2 = \exp\left(-2\Delta\gamma_n \frac{\partial f}{\partial \tau_a}\bigg|_n\right) (b_{a,n}^{e,trial})^2. \quad (2.82)$$

Mit der Einführung der elastischen logarithmischen Hauptverzerrungen $\epsilon_a^e := \ln(b_a^e)$ folgt

$$\epsilon_{a,n}^{e,trial} = \epsilon_{a,n}^e + \Delta\gamma_n \frac{\partial f}{\partial \tau_a}\bigg|_n. \quad (2.83)$$

Es ergibt sich also eine additive Aufspaltung der elastischen Trial-Verzerrungen in elastische und plastische Anteile. Für die weitere Herleitung soll nun (2.83) in Matrixform als Vektor geschrieben werden

$$\hat{\epsilon}_n^{e,trial} = \hat{\epsilon}_n^e + \Delta\gamma_n \hat{m}_{\tau,n} \quad \text{mit} \quad \hat{\epsilon}^e = [\epsilon_1^e, \epsilon_2^e, \epsilon_3^e]^T. \quad (2.84)$$

Die Hauptspannungen und die entsprechenden Fließrichtungen werden ebenfalls in Matrixnotation eingeführt

$$\hat{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T, \quad \hat{m}_{\tau} = \left[\frac{\partial f}{\partial \tau_1}, \frac{\partial f}{\partial \tau_2}, \frac{\partial f}{\partial \tau_3} \right]^T. \quad (2.85)$$

Die Annahme isotropen Materialverhaltens impliziert, dass die Freie Energie als Funktion der elastischen Hauptstreckungen und damit als Funktion der elastischen logarithmischen Hauptverzerrungen formuliert werden kann. Verwendet man nun die vorangegangene Matrixnotation, so gilt

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \alpha) = \tilde{\psi}(\hat{\epsilon}^e, \alpha), \quad (2.86)$$

und man erhält folgende Spannungs-Dehnungs-Beziehung für die (Kirchhoff-)Hauptspannungen

$$\hat{\tau}_n = \frac{\partial}{\partial \hat{\epsilon}_n^e} \tilde{\psi}(\hat{\epsilon}_n^e, \alpha_n). \quad (2.87)$$

- **Algorithmus**

Aufbauend auf den obigen Ergebnissen lässt sich ein Algorithmus formulieren, bei dem die Spannungsberechnung für jeden Integrationspunkt in drei Schritten erfolgt (siehe Algorithmus 2.1). Der erste Teil (*tensorieller Vorprozess*) und der dritte Teil (*tensorieller Nachprozess*) des Algorithmus sind materialunabhängig. Dort finden Tensor-Operationen und Spektralzerlegungen statt. Im mittleren Teil erfolgt die Auswertung des Konstitutivgesetzes (konkrete Fließfunktion(en), Verfestigung, usw.).

-
- (i) *Tensorieller Vorprozess.* Berechne Trialzustand des elastischen Finger-Tensors aus aktuellem Deformationsgradienten \mathbf{F}_n und inverser plastischer Metrik des Trialzustands $\mathbf{C}_{n-1}^{p^{-1}}$ nach Gleichung (2.72)

$$\mathbf{b}_n^{e,trial} = \mathbf{F}_n \mathbf{C}_{n-1}^{p^{-1}} \mathbf{F}_n^T .$$

Führe Spektralzerlegung durch (Lösung eines Eigenwertproblems)

$$\mathbf{b}_n^{e,trial} = \sum_{a=1}^3 (b_{a,n}^{e,trial})^2 \mathbf{n}_{a,n}^{trial} \otimes \mathbf{n}_{a,n}^{trial}$$

und berechne die elastischen logarithmischen Hauptverzerrungen des Trialzustands

$$\epsilon_{a,n}^{e,trial} = \ln(b_{a,n}^{e,trial}) .$$

- (ii) *Konstitutivgesetz.* Berechne elastische Dehnungen $\epsilon_{a,n}^e$ und Hauptspannungen $\tau_{a,n}$ im Eigenraum sowie den Verfestigungsparameter α_n . Dazu ist im allgemeinen Fall eine lokale Newton-Iteration für ein konkretes Materialmodell notwendig.
- (iii) *Tensorieller Nachprozess.* Berechne die aktuelle inverse plastische Metrik

$$\mathbf{C}_n^{p^{-1}} = \mathbf{F}_n^{-1} \left[\sum_{a=1}^3 \exp(2 \epsilon_{a,n}^e) \mathbf{n}_{a,n}^{e,trial} \otimes \mathbf{n}_{a,n}^{e,trial} \right] \mathbf{F}_n^{-T}$$

sowie aktuelle *Kirchhoff*- und *Cauchy*-Spannungstensoren

$$\boldsymbol{\tau}_n = \sum_{a=1}^3 (\tau_{a,n})^2 \mathbf{n}_{a,n}^{trial} \otimes \mathbf{n}_{a,n}^{trial} ,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{1}{J_n} \boldsymbol{\tau}_n .$$

Algorithmus 2.1 Spannungsberechnung bei Finiter Plastizität

Mit dem hier vorgestellten Algorithmus steht nun ein für isotrope, plastische Materialien bei finiten Verzerrungen gültiges Grundgerüst zur Verfügung, in dessen allgemeinen Rahmen sich spezielle Formulierungen konkreter Materialien "einbauen" lassen. Solch konkrete Ansätze werden in den Kapiteln 6 und 7 vorgestellt. Dort wird auch auf die hier nur angedeutete Rückprojektion näher eingegangen.

2.2.4 Vollständiger Algorithmus

Das komplette Ablaufschema einer FE-Berechnung mit großen Deformationen, expliziter Zeitintegration, inelastischem Materialverhalten und Berücksichtigung von Kontakt (siehe Kapitel 2.3) ist im Algorithmus 2.2 zusammengefasst. Demnach erfolgt nach einer globalen Initialisierung, in der u.a. auch die Knotenmassen berechnet werden, die Berechnung innerhalb einer globalen Zeitschrittsschleife. Die benötigte Zeitschrittgröße Δt kann entweder konstant gewählt oder adaptiv an die Lösung angepasst werden. Hierauf wird in Kapitel 5 noch genauer eingegangen. In einer Schleife über alle Integrationspunkte wird zunächst aus der aktuellen Elementgeometrie \mathbf{x}_n und der Referenzgeometrie \mathbf{X} der aktuelle totale Deformationsgradient \mathbf{F}_n ermittelt. In diskretisierter Form ergibt sich

$$\mathbf{F}_n = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{x}_n^N \frac{\partial \mathbf{N}(\xi)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{x}_n^N \mathbf{B}_0 . \quad (2.88)$$

Hierin ist \mathbf{x}_n das kontinuierliche Feld der aktuellen Lage und \mathbf{x}_n^N bezeichnet die aktuellen Knotenpositionen. Dann wird am Integrationspunkt mit Hilfe des Materialgesetzes der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_n$ berechnet (Algorithmus 2.1). Durch numerische Integration wird anschließend der Anteil des Integrationspunkts am internen Knotenkraftvektor ermittelt (Gleichung (2.50)). Das bedeutet, dass der jeweilig am Integrationspunkt berechnete Anteil direkt an die zugehörigen Knoten des betrachteten Elements übergeben wird. Die externen Knotenkräfte werden anschließend ermittelt (Gleichung (2.51)). Nach Abschluss der Integrationspunktschleife werden die errechneten Knotenkraftanteile assembliert, und man erhält ein System aus FE-Knoten mit konzentrierten Massen, an denen die internen und externen Knotenkräfte angreifen. Im nächsten Schritt des Algorithmus erfolgt die Berechnung der aktuellen Knotenbeschleunigungen aus der Lösung der Bewegungsgleichung (2.53), d.h. aus der Bildung dynamischen Gleichgewichts. Anschließend werden die Geschwindigkeiten und Verschiebungen des nächsten Zeitschritts mittels expliziter Zeitintegration berechnet. Dabei werden zunächst zeitschrittweise Durchdringungen benachbarter Körper zugelassen. Im letzten Schritt wird der Kontaktalgorithmus durchlaufen: Aus den Penetrationsvektoren werden die Knotenkräfte so bestimmt, dass die Durchdringungen bei Berücksichtigung der Kontaktkräfte in der Zeitintegration gerade aufgehoben werden. Entsprechend werden dann die Geschwindigkeiten und Verschiebungen der Knoten korrigiert. Auf die Behandlung des Kontakts wird im nächsten Abschnitt genauer eingegangen.

-
- (i) Globale Initialisierung: $\mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_0, t = 0, n = 0, \boldsymbol{\sigma}_0$, interne Variablen, Berechnung von \mathbf{M} (konzentrierte Knotenmassen)
 - (ii) Globale Zeitschrittsschleife
 - (iii) Bei adaptiver Zeitschrittsteuerung: Bestimmung der aktuellen Zeitschrittgröße

$$\Delta t \leq \Delta t_{krit}$$
 - (iv) Integrationspunktschleife
 - (v) Berechnung des aktuellen Deformationsgradienten \mathbf{F}_n mit Gl. (2.88)
 - (vi) Berechnung des Cauchy-Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}_n)$ mit Algorithmus 2.1
 - (vii) Berechnung des Anteils am internen Knotenkraftvektor $\mathbf{f}_n^{int} = \mathbf{f}^{int}(\boldsymbol{\sigma}_n)$ mit Gl. (2.50)
 - (vii) Berechnung des Anteils am externen Knotenkraftvektor \mathbf{f}_n^{ext} mit Gl. (2.51)
 - (viii) Assemblierung der Knotenkräfte
 - (ix) Schleife über alle FE-Knoten
 - (x) Dynamisches Gleichgewicht

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}_n^{int}]$$
 - (xi) Explizite Zeitintegration: Prädiktorwerte (noch ohne Kontakt)

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{pred} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n, \quad \mathbf{d}_{n+1}^{pred} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{n+1}$$
 - (xii) Kontaktalgorithmus: Kontaktsuche und Korrektur der Verschiebungen und Geschwindigkeiten (siehe Abschnitt 2.3)
 - (xiii) $n \leftarrow n + 1$ goto (ii)
-

Algorithmus 2.2 FE-Berechnungsalgorithmus mit expliziter Zeitintegration

2.3 Kontaktformulierung

Ein wesentlicher Bestandteil der Simulation transienter Impaktvorgänge ist die Behandlung des Kontakts zwischen mehreren sich bewegenden und sich deformierenden Körpern bzw. Oberflächen. Ohne vorherige Kenntnis des Prozessablaufs müssen Kontakt ereignisse erkannt und mechanisch sinnvoll und mathematisch/numerisch korrekt behandelt werden. Die Vorgehensweise in einem expliziten Zeitintegrationsalgorithmus ist üblicherweise wie folgt: In jedem Zeitschritt wird für die einzelnen Körper zunächst getrennt voneinander, d.h. ohne Berücksichtigung von Kontakt, dynamisches Gleichgewicht gebildet. Die dabei entstehenden Durchdringungen werden erst am Ende des Zeitschritts behoben. Dazu muss ein *Suchalgorithmus* bereitgestellt werden, der die Detektion von Kontakt garantiert und dabei effizient und schnell ist. Nach der Feststellung von Kontakt findet eine *Korrektur* der entstandenen Penetrationen statt, so dass am Ende des Zeitschritts keine Überlappungen mehr vorhanden sind. Zwischen den betroffenen Oberflächen wirken dann Kontaktkräfte. In diesem Abschnitt werden nun die wichtigsten Grundzüge der zugrunde liegenden Theorie und der Algorithmus mit den Phasen Suche und Korrektur beschrieben. Außerdem wird kurz auf glatten Kontakt eingegangen. Ausführliche Darstellungen zur Kontaktmechanik finden sich z.B. in Wriggers (2002), Laursen (2002), Özdemir (2003) oder Gee (2004). Detaillierte Hinweise zur Kontaktmodellierung für explizite transiente Dynamik geben Hallquist et al. (1985), Belytschko & Neal (1991), Anderheggen et al. (1993) oder Heinstein et al. (2000).

2.3.1 Kinematik

Zunächst sollen die wichtigsten Beziehungen zusammengefasst werden, die notwendig sind, um Kontakt *kinematisch* zu beschreiben. Im Hinblick auf die Betrachtung zweidimensionaler Probleme wird angenommen, dass sich zwei ebene Körper Ω^M und Ω^S , die i. Allg. als *Master* und *Slave* bezeichnet werden, einander annähern und berühren (siehe Bild 2.3). Zur Beschreibung des Normalkontakts dient die Vorstellung, dass es zu einer geringfügigen Eindringung des *Slave*-Randes $\varphi^S(\Gamma_c^S)$ in den *Master*-Rand $\varphi^M(\Gamma_c^M)$ der Momentankonfiguration kommt. Der Index 'c' steht für Kontakt, so dass sich nun der gesamte Rand eines Gebiets aus Dirichlet-Rand $\varphi(\Gamma_u)$, Neumann-Rand $\varphi(\Gamma_\sigma)$ und möglichem Kontakt-Rand $\varphi(\Gamma_c)$ zusammensetzt:

$$\varphi(\Gamma) = \varphi(\Gamma_u) \cup \varphi(\Gamma_\sigma) \cup \varphi(\Gamma_c) , \quad \varphi(\Gamma_u) \cap \varphi(\Gamma_\sigma) \cap \varphi(\Gamma_c) = \emptyset . \quad (2.89)$$

Um zu überprüfen ob Punkte des *Slave*-Randes in den *Master*-Rand eingedrungen sind, wird für alle Punkte $\mathbf{x} \in \varphi^S(\Gamma_c^S)$ der kürzeste Abstand zwischen dem jeweils betrachteten *Slave*-Punkt \mathbf{x}^S und dem durch eine konvektive Koordinate ξ parametrisierten *Master*-Rand $\varphi^M(\Gamma_c^M)$ bestimmt. Der Lösungspunkt $\bar{\mathbf{x}}^M = \mathbf{x}^M(\bar{\xi})$ hat den kürzesten Abstand zu \mathbf{x}^S . Man erhält ihn aus der Lösung des Minimalproblems

$$\| \mathbf{x}^S - \bar{\mathbf{x}}^M \| = \min_{\mathbf{x}^M \in \varphi^M(\Gamma_c^M)} \| \mathbf{x}^S - \mathbf{x}^M(\xi) \| . \quad (2.90)$$

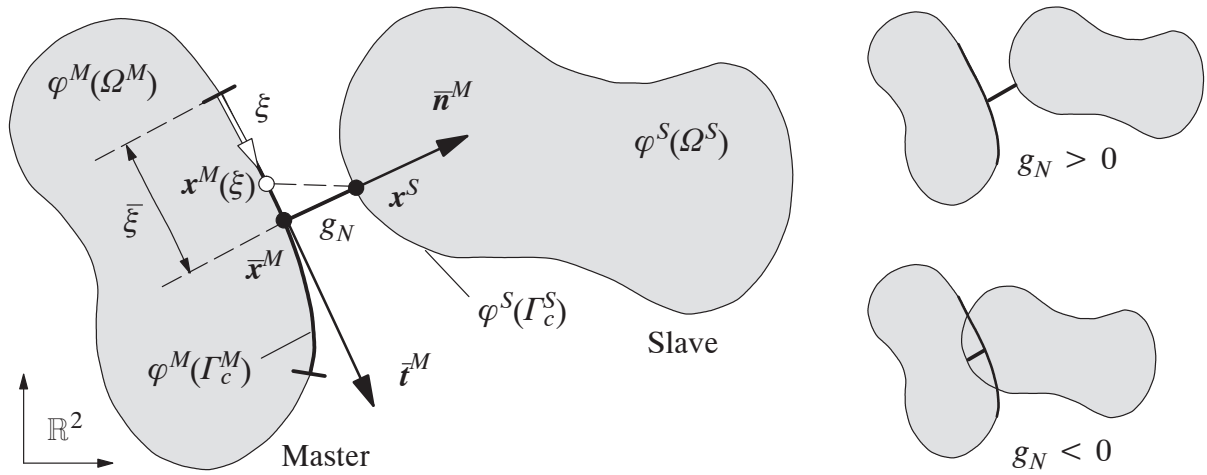


Bild 2.3: Kontaktgeometrie zweier materieller Körper in Momentankonfigurationen

• Normalkontakt

In dem ermittelten Lösungspunkt $\bar{x}^M = x^M(\bar{\xi})$ werden der nach außen gerichtete Normalenvektor $\bar{n}^M = n^M(\bar{\xi})$ und der Tangentenvektor $\bar{t}^M = t^M(\bar{\xi})$ an den Rand $\varphi^M(\Gamma_c^M)$ definiert (siehe Bild 2.3). Sind diese Größen bekannt, so lässt sich eine Ungleichungsnebenbedingung aufstellen, die das Nichteindringen der Körper (*non-penetration condition*) beschreibt:

$$g_N = (x^S - \bar{x}^M) \cdot \bar{n}^M \geq 0, \quad (2.91)$$

wobei g_N die so genannte *Abstandsfunktion* bzw. *Penetrationsfunktion* ist. Forderung (2.91) ist die für den Kontakt wichtigste kinematische Zwangsbedingung. Sie dient einerseits der Kontaktsuche, da durch $g_N < 0$ eine Penetration angezeigt wird. Andererseits kann g_N als lokale kinematische Variable in der konstitutiven Beziehung für den Kontaktdruck verwendet werden. Die später in der schwachen Form benötigte virtuelle Änderung der Penetrationsfunktion g_N lautet

$$\delta g_N = (\delta u^S - \delta \bar{u}^M) \cdot \bar{n}^M \quad (2.92)$$

mit den virtuellen Verschiebungen δu^S und $\delta \bar{u}^M$.

• Tangentialkontakt

Die tangentiale Relativbewegung der zwei Körper kann durch die Länge des Gleitwegs g_T des Slave-Punktes x^S auf dem Master-Rand ausgedrückt werden

$$g_T = \int_{\xi_0}^{\hat{\xi}} \|\bar{t}^M\| d\xi = \int_{\xi_0}^{\hat{\xi}} \|x_{,\xi}^M(\bar{\xi})\| d\xi = \int_{\xi_0}^{\hat{\xi}} \sqrt{x_{,\xi}^M(\bar{\xi}) \cdot x_{,\xi}^M(\bar{\xi})} d\xi. \quad (2.93)$$

ξ_0 ist dabei der Ort auf dem Master-Rand, von dem der Slave-Punkt bis zur Lage $\hat{\xi}$ gleitet, wobei sich bei einem gekrümmten Rand die Richtung der Tangente $\bar{t}^M = x_{,\xi}^M(\bar{\xi})$ ändert. Mit (2.93) errechnet sich somit der Weg, den der Slave-Punkt auf dem Master-Rand zurücklegt. Die virtuelle Änderung des tangentialen Gleitens, die in der schwachen Form benötigt wird, ist das Produkt aus dem Integranden von (2.93) und der virtuellen Änderung der konvektiven Koordinate $\delta \xi$

$$\delta g_T = \|\dot{\mathbf{t}}^M\| \delta \xi . \quad (2.94)$$

In der weiteren Herleitung ist außerdem die tangentielle Relativgeschwindigkeit v_{rel} zwischen dem Slave-Punkt und dem Master-Rand eine wichtige Größe. Sie berechnet sich zu

$$v_{rel} = (\mathbf{v}^S - \bar{\mathbf{v}}^M) \cdot \dot{\mathbf{t}}^M . \quad (2.95)$$

2.3.2 Werkstoffgesetze

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens in der Kontaktzone existieren verschiedene Ansätze (siehe z.B. Oden und Martins (1985)). So ist für den Normalkontakt die Postulierung elastischer oder elastisch-plastischer konstitutiver Gleichungen auf der Kontaktfläche möglich. Meistens wird allerdings die geometrische Zwangsbedingung des Nichteindringens verwendet, mit der sich ohne ein Werkstoffgesetz direkt der Normalkraftanteil der Kontaktspannung - der so genannte Kontaktdruck p_N - ergibt, wie in Abschnitt 2.3.3 gezeigt wird.

Der Tangentialkontakt wird theoretisch von verschiedenen Faktoren, wie z.B. Adhäsion, Reibung, Abrieb oder Temperatur beeinflusst. Dementsprechend gibt es viele unterschiedliche Werkstoffgesetze in der Literatur (Oden und Martins (1985), Wriggers et al. (1990)). Am häufigsten kommt jedoch das klassische Coulomb'sche Reibgesetz zum Einsatz, bei dem zwischen *Haften* (stick) und *Gleiten* (slip) unterschieden wird. Für den Fall des Haftens ergibt sich die Reaktionsspannung t_T aus dem Produkt des Haftkoeffizienten μ_H und dem Kontaktdruck p_N

$$t_T = -\mu_H |p_N| \quad \text{wenn} \quad |t_T| \leq \mu_H |p_N| . \quad (2.96)$$

Wie man sieht, kommt Gleichung (2.96) nur dann zur Anwendung, wenn die Haftbedingung $|t_T| \leq \mu_H |p_N|$ erfüllt ist. Weitere Bedingungen, die dann gelten, sind $g_T = 0$ (kein Gleitweg) und $v_{rel} = 0$ (keine Relativgeschwindigkeit). Sobald die Haftbedingung nicht mehr erfüllt ist, tritt eine Bewegung ein und die Körper gleiten aneinander. Dies führt mit dem Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G \leq \mu_H$ und dem Kontaktdruck p_N zu folgender Formulierung für die tangentielle Kontaktspannung t_T im Fall von *Gleiten*:

$$t_T = -\mu_G |p_N| \text{sign}(v_{rel}) . \quad (2.97)$$

Das Vorzeichen (sign) der Relativgeschwindigkeit v_{rel} beeinflusst demnach das Vorzeichen von t_T .

2.3.3 Schwache Form des Kontaktproblems

Nach der Bereitstellung der kinematischen Beziehungen und eines Reibgesetzes kann nun die schwache Form des Kontaktproblems aufgestellt werden. Die Ungleichung (2.91) wird wie eine Randbedingung in die schwache Form des Anfangs-Randwertproblems (2.43) eingebracht, wodurch sich eine Variationsungleichung ergibt. Ist jedoch der Kontaktbereich bekannt, so kann die schwache Form für zwei Körper ($\gamma = 1, 2$) wieder als Gleichung geschrieben werden (vergleiche (2.43))

$$\sum_{\gamma=1}^2 \{ \delta W_{\gamma}^{kin} + \delta W_{\gamma}^{int} - \delta W_{\gamma}^{ext} \} + \delta W^{con} = 0 , \quad (2.98)$$

wobei δW^{con} die zusätzlichen Kontaktbeiträge darstellen.

Es existieren verschiedene Ansätze für die Formulierung dieser Kontaktanteile, wobei das *Penalty-Verfahren* und die *Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren* die beiden wichtigsten Vertreter sind. Beim ersten Verfahren wird die Zwangsbedingung $g_N = 0$ durch Hinzufügen eines Strafterms bzw. "Penalty-Parameters" in der Variationsgleichung berücksichtigt. Dieser Strafterm muss theoretisch sehr groß gewählt werden, um das Eindringen zu vermeiden, was jedoch zu numerischen Schwierigkeiten führen kann. Eine angemessene Wahl des Penalty-Parameters bewirkt dagegen eine nur näherungsweise Erfüllung der genannten Zwangsbedingung, d.h. es bleiben Überlappungen bestehen. Diese Methode eignet sich deshalb für Problemstellungen, bei denen nicht die möglichst genaue Abbildung der Geometrie und der Kontaktkräfte, sondern die globale Antwort einer Struktur im Vordergrund steht. Bei dynamischen Impakt- oder Penetrationsvorgängen spielen sich jedoch die relevanten Prozesse in oder in der Nähe der Kontaktzone ab. Aus diesem Grund ist es erforderlich, ein sehr genaues Verfahren für diesen Bereich zu verwenden. Hierfür ist die in dieser Arbeit verwendete Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren besser geeignet, bei der die Zwangsbedingung des Nichteindringens exakt erfüllt werden kann. Dazu werden zusätzlich zu bestimmende *Lagrange-Multiplikatoren* λ_N und λ_T eingeführt, mit denen die Zwangsbedingung zur schwachen Form hinzugefügt wird. Dadurch ergibt sich folgender Ausdruck für die Kontaktbeiträge der aktiven Kontaktzone

$$\delta W^{con} = \int_{\varphi(\Gamma_c^{akt})} (\lambda_N \delta g_N + \lambda_T \delta g_T) da . \quad (2.99)$$

Darin ist λ_N der zur Zwangsbedingung $g_N = 0$ gehörende Lagrange-Multiplikator, der als Kontaktdruck p_N identifiziert werden kann. λ_T ist entweder die zum Haften zugehörige Reaktionsspannung t_T nach Gleichung (2.96) oder - im Fall von Gleiten - die eingeprägte, tangentielle Kontaktspannung t_T nach Gleichung (2.97). Die aus (2.99) ersichtliche Beschränkung auf die *aktive Kontaktzone* $\varphi(\Gamma_c^{akt})$ stellt im vorliegenden Fall kein Problem dar, da aufgrund des bereits erwähnten Ablaufschemas (erst Penetrationen zulassen, dann korrigieren) der entsprechende Randbereich a-priori bekannt ist. Gleichung (2.98) mit (2.99) stellt den Ausgangspunkt für die folgende Diskretisierung dar.

2.3.4 Räumliche und zeitliche Diskretisierung

Der Rand eines mit Finiten Elementen diskretisierten ebenen Körpers wird durch Elementkanten am Gebietsrand (Randsegmente) und Randknoten beschrieben. Beim Kontakt zweier Körper gleiten die FE-Randknoten des einen Körpers (Slave) auf den Randsegmenten des anderen (Master) und vice versa, wenn Slave und Master vertauscht werden. Diese Kinematik wird auch als Knoten-zu-Segment (*node-to-segment*)-Kontakt bezeichnet. Mit dementsprechenden - hier nicht detailliert aufgeführten - Ansätzen führt die *räumliche Diskretisierung* der Kontakt-Variationsgleichung (2.98) auf folgende semidiskrete Bewegungsgleichung:

$$M\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}(t)) + \mathbf{f}^{con}(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{f}^{ext}(t) . \quad (2.100)$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.48) zeigt, dass auf der linken Seite die Kontaktkräfte $\mathbf{f}^{con}(\mathbf{d})$ dazugekommen sind, die auch als Korrekturkräfte zur Einhaltung des Nichteindringens angesehen werden können.

Bei der *zeitlichen Diskretisierung* erfolgt eine Aufspaltung des Problems in einen Kontakt-unabhängigen und einen Kontakt-abhängigen Anteil. Dementsprechend werden die Beschleunigungen in zwei Terme zerlegt (siehe Kane et al. (1999)):

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \ddot{\mathbf{d}}_n^{int} + \ddot{\mathbf{d}}_n^{con} . \quad (2.101)$$

Wendet man diese Aufteilung auf die Bewegungsgleichung (2.100) an, so erhält man zum einen den Anteil aus internen und externen Knotenkräften

$$\ddot{\mathbf{d}}_n^{int} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n)] , \quad (2.102)$$

und zum anderen den Anteil aus Kontaktkräften

$$\ddot{\mathbf{d}}_n^{con} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}^{con}(\mathbf{d}_n)] . \quad (2.103)$$

Das Zeitintegrationsverfahren (2.55) bis (2.56) wird nun insofern modifiziert, als der Kontakt-unabhängige Teil explizit ist wie bisher, der neu hinzugekommene Kontaktanteil jedoch in impliziter Weise berücksichtigt wird (Kane et al. (1999)):

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n^{int} + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{con} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{pred} + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{con} , \quad (2.104)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n^{int} + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{con} = \mathbf{d}_{n+1}^{pred} + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{con} . \quad (2.105)$$

Im Algorithmus wird diese additive Aufspaltung insofern genutzt, als zunächst Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}_n^{int}$, Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{pred}$ und Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1}^{pred} ohne Berücksichtigung von Kontakt berechnet werden (siehe Algorithmus 2.2). Die entstehenden Durchdringungen werden behoben und die sich daraus ergebenden Kontaktkräfte und Kontaktbeschleunigungen ermittelt. Schließlich werden die kinematischen Größen korrigiert.

Die Berechnung der Knotenkräfte \mathbf{f}^{con} mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren erfordert i. Allg. die iterative Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems z.B. mit Hilfe der Newton-Raphson-Methode. Es können allerdings vereinfachende Annahmen getroffen werden, die die Nichtlinearitäten beseitigen, so dass lineare Gleichungssysteme entstehen, die direkt gelöst werden können. Ein solcher Ansatz wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

2.3.5 Einfache Methode zur Kontaktkraftberechnung

Eine von Anderheggen et al. (1993) entwickelte Methode erlaubt es, die Kontaktkräfte direkt näherungsweise zu berechnen. Dazu ist die Verwendung konzentrierter Knotenmassen und die einfache Annahme linearer Beziehungen zwischen Korrekturkräften und Korrekturverschiebungen notwendig, wie im Folgenden gezeigt wird. Die Bestimmung der Kontakt-Knotenkräfte

soll hier exemplarisch anhand der einfachst möglichen Konstellation vorgestellt werden. Betrachtet wird dazu eine "Kontaktgruppe" bestehend aus einem Slave-Knoten \mathbf{x}^S und einem Master-Segment, das zwischen den Knoten \mathbf{x}_1^M und \mathbf{x}_2^M liegt und durch $\xi \in [0, 1]$ parametrisiert ist (siehe Bild 2.4).

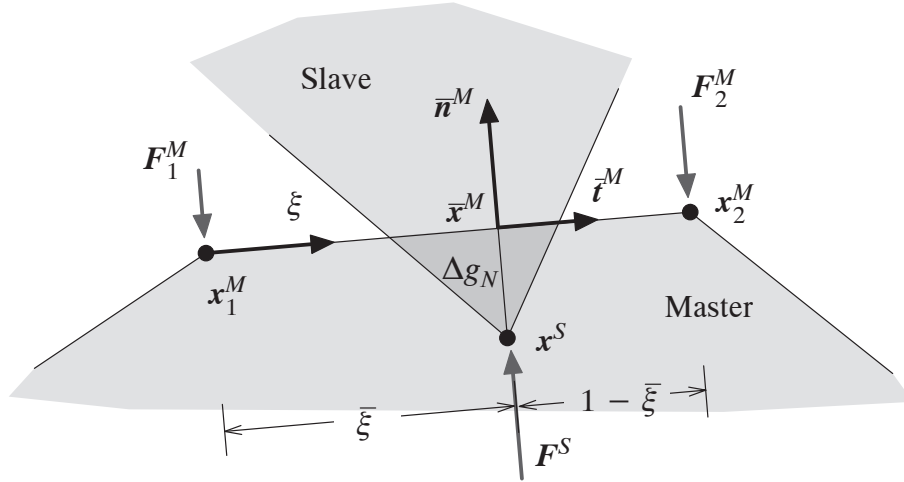


Bild 2.4: Kontaktgruppe bestehend aus einem Slave-Knoten und einem Master-Segment

In einem Zeitschritt ist eine Penetration $\Delta g_N < 0$ entstanden, die durch die Aufbringung von entsprechenden Knotenkräften korrigiert werden muss. Die notwendige Nicht-Penetrationsbedingung lautet in diesem Fall:

$$\Delta g_N + \left[\Delta \mathbf{d}^S - (1 - \bar{\xi}) \Delta \mathbf{d}_1^M - \bar{\xi} \Delta \mathbf{d}_2^M \right] \cdot \bar{\mathbf{n}}^M \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.106)$$

d.h. die entstandene Überlappung Δg_N soll durch die Korrektur-Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}^S$, $\Delta \mathbf{d}_1^M$ und $\Delta \mathbf{d}_2^M$ der drei beteiligten Knoten aufgehoben werden. $\bar{\xi}$ beschreibt die Position des Punktes $\bar{\mathbf{x}}^M$ auf dem Mastersegment, der den kürzesten Abstand zum Slave-Knoten \mathbf{x}^S hat und $\bar{\mathbf{n}}^M$ ist der Normalenvektor an dieser Stelle. Die Knotenverschiebungen stehen nach dem Newton'schen Bewegungsgesetz in folgender linearer Relation zu den Kontakt-Knotenkräften \mathbf{F}^S und \mathbf{F}_I^M (Anderheggen et al. (1993), Camacho und Ortiz (1997), Diekmann et al. (2000))

$$\Delta \mathbf{d}^S = \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{m^S} \mathbf{F}^S, \quad \Delta \mathbf{d}_I^M = \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{m_I^M} \mathbf{F}_I^M, \quad I = 1, 2 \quad (2.107)$$

mit den Knotenmassen m^S und m_I^M . Diese Annahme ist bei Verwendung der konzentrierten Massenmethode möglich und ist dafür verantwortlich, dass keine iterative Prozedur zur Lösung des Kontaktproblems notwendig wird. Das Verhältnis zwischen Slave-Knotenkraft und Master-Knotenkräften ist abhängig von der Lage des Lösungspunktes bei $\bar{\xi}$

$$\mathbf{F}_1^M = (1 - \bar{\xi}) \mathbf{F}^S, \quad \mathbf{F}_2^M = \bar{\xi} \mathbf{F}^S. \quad (2.108)$$

Die Verwendung des Coulomb'schen Reibgesetzes führt auf folgende Formulierung für die Slave-Knotenkraft für den Fall von *Gleiten*, d.h. wenn die Haftbedingung im letzten Zeitschritt nicht erfüllt war

$$\mathbf{F}^S = \left[\bar{\mathbf{n}}^M - \mu_G \operatorname{sign}(v_{rel}) \bar{\mathbf{t}}^M \right] p_N, \quad (2.109)$$

wobei der Kontaktdruck $p_N = \mathbf{F}^S \cdot \bar{\mathbf{n}}^M$ der (skalare) Normalkraftanteil ist. μ_G ist dabei der Gleitreibungskoeffizient, $\bar{\mathbf{t}}^M$ der Tangentenvektor und v_{rel} die relative Tangentialgeschwindigkeit zwischen Slave-Knoten \mathbf{x}^S und Lösungspunkt $\bar{\mathbf{x}}^M$, gegeben durch

$$v_{rel} = \left[(1 - \bar{\xi}) \dot{\mathbf{d}}_1^M + \bar{\xi} \dot{\mathbf{d}}_2^M - \dot{\mathbf{d}}^S \right] \cdot \bar{\mathbf{t}}^M. \quad (2.110)$$

Die Geschwindigkeiten der Knoten sind bekannt. Wenn die Relativgeschwindigkeit v_{rel} vom letzten Zeitschritt zum aktuellen Zeitschritt das Vorzeichen gewechselt hat, so wird von Gleiten auf *Haften* "umgeschaltet" und die Slave-Knotenkraft lautet:

$$\mathbf{F}^S = \left[\bar{\mathbf{n}}^M - \mu_H \bar{\mathbf{t}}^M \right] p_N. \quad (2.111)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.107) bis (2.111) in die Zwangsbedingung (2.106) liefert eine lineare Gleichung zur Bestimmung von p_N , woraus wiederum die Kontaktknotenkräfte \mathbf{F}^S und \mathbf{F}_I^M und die notwendigen Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}^S$ und $\Delta \mathbf{d}_I^M$ berechnet werden können.

Normalerweise bestehen Kontaktgruppen aus mehreren Master-Segmenten und mehreren Slave-Knoten (siehe Bild 2.5). Wendet man nun dasselbe prinzipielle Vorgehen auf solche größeren entkoppelten Kontaktgruppen an, so gelangt man zu mehreren linearen Gleichungssystemen für die Anteile am gesuchten Kontaktknotenkraftvektor $\mathbf{f}^{con}(\mathbf{d})$.

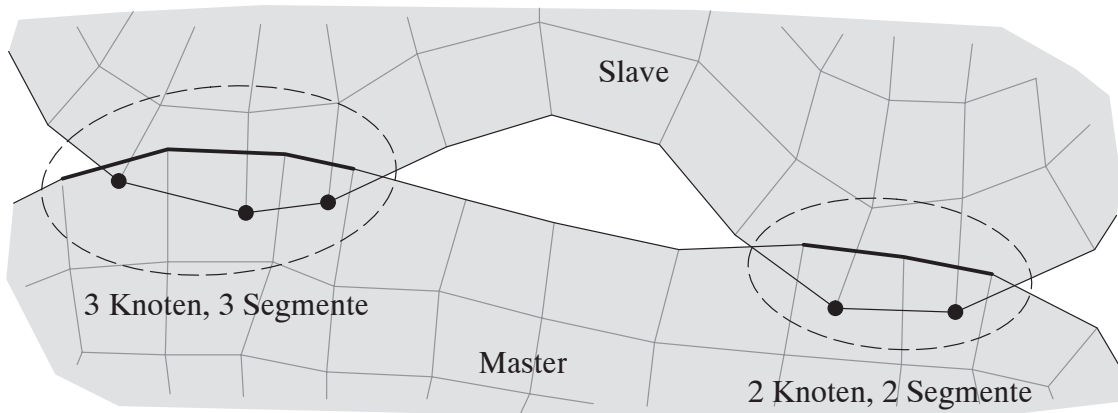


Bild 2.5: Entkoppelte Kontaktgruppen

2.3.6 Kontaktalgorithmus

Der Kontaktalgorithmus besteht im wesentlichen aus den beiden Teilen *Suche* und *Korrektur*. Effiziente Verfahren teilen des Weiteren die automatische Kontaktsuche in eine globale und eine lokale Phase (z.B. Diekmann et al. (2000)). In der globalen Suchphase werden alle möglichen Kontaktpaare (Segment, Knoten) der folgenden k Zeitschritte mit Hilfe einer konservativen Abschätzung bestimmt. Dazu wird um jedes Oberflächensegment ein Bereich (*bounding box*) definiert, in dem alle Knoten liegen, die in dieser Zeit auf das Segment treffen können. Im Rahmen

der lokalen Suche werden dann zu Beginn jedes Zeitschritts nur die Knoten innerhalb dieses Kontaktbereichs mit dem jeweiligen Segment auf Kontakt überprüft. Nachdem alle Penetrationen bekannt sind, werden zusammenhängende Kontaktlinien mit eingedrungenen Knoten in *Kontaktgruppen* zusammengefasst. Die Wechselwirkungen der einzelnen Positionsänderungen von Knoten und Segmenten einer Kontaktgruppe werden in Form eines linearen Gleichungssystems wie oben beschrieben berücksichtigt. Dadurch wird das globale (Optimierungs)problem des Kontakts in entkoppelte, lokale Probleme von Kontaktgruppen zerlegt. Das beschriebene Verfahren ist numerisch stabil, da keine iterative Kontaktkraftbestimmung notwendig ist. In jedem Zeitschritt findet für jede Kontaktgruppe ein Gegenabgleich statt (*two pass algorithm*), d.h. Master- und Slave-Oberflächen werden vertauscht, wodurch jegliche Durchdringungen ausgeschlossen werden können. Anzumerken ist noch, dass der Algorithmus die Behandlung beliebiger Oberflächenpaarungen ohne Vordefinition von Kontaktzonen sowie Selbstkontakt erlaubt. Im Algorithmus 2.3 ist das Ablaufschema noch einmal zusammengefasst: Die im Algorithmus 2.2 berechneten Prädiktor-Werte für die Geschwindigkeiten und Verschiebungen werden hier endgültig korrigiert.

-
- (i) Kontaktsuche: global - lokal
 - (ii) Bestimmung von Kontaktgruppen (Knoten und Segmente)
 - (iii) Aufstellung und Lösung der linearen Gleichungssysteme für Kontaktgruppen: Berechnung der Knotenkräfte $f^{con}(d_{n+1})$
 - (iv) Berechnung der "Korrektur"-Beschleunigungen: $\ddot{d}_{n+1}^{con} = M^{-1} f^{con}(d_{n+1})$
 - (v) Korrektur der Geschwindigkeiten und Verschiebungen

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_{n+1}^{pred} + \Delta t \ddot{d}_{n+1}^{con}$$

$$d_{n+1} = d_{n+1}^{pred} + \Delta t^2 \ddot{d}_{n+1}^{con}$$

Algorithmus 2.3 Kontakt: Suche, Kräfteberechnung und Korrektur

2.3.7 Ergänzung: Glatter Kontakt

Eine aus Elementkanten bestehende polygonale Randbeschreibung wie in Bild 2.5 ist nur C^0 -kontinuierlich. Dies erfordert an den Randknoten eine spezielle algorithmische Behandlung, da die Normalen- und Tangentenvektoren dort nicht eindeutig definiert sind. Außerdem können diese Diskontinuitäten im Fall stark gekrümmter Oberflächen zu numerischen Problemen führen: Bei großen Deformationen und starkem tangentialem Gleiten können gegenüber liegende Kontaktflächen richtiggehend "verhaken", so dass scharfe Ecken entstehen, die wiederum dieses Verhaken verstärken usw. (siehe Bild 2.6 links). Abhilfe schaffen hier so genannte "Smooth Contact"-Formulierungen, bei denen die Oberfläche mit Polynomen höherer Ordnung beschrieben wird. Verschiedene Autoren wie z.B. El-Abbasi et al. (2001), Padmanabhan und Laursen (2001)

oder Wriggers et al. (2001) verwenden Hermite-, Spline- und/oder Bézier-Interpolationen und erreichen damit C^1 -kontinuierliche Randapproximationen. Hier soll nun in kurzer Form eine auf Bézier-Polynomen basierende, glatte Kontakttrand-Beschreibung vorgestellt werden (siehe Bild 2.6 rechts), die für den Einsatz in Impaktsimulationen mit starken Randkrümmungen, erheblichen Topologieänderungen und großen Relativverschiebungen geeignet ist.

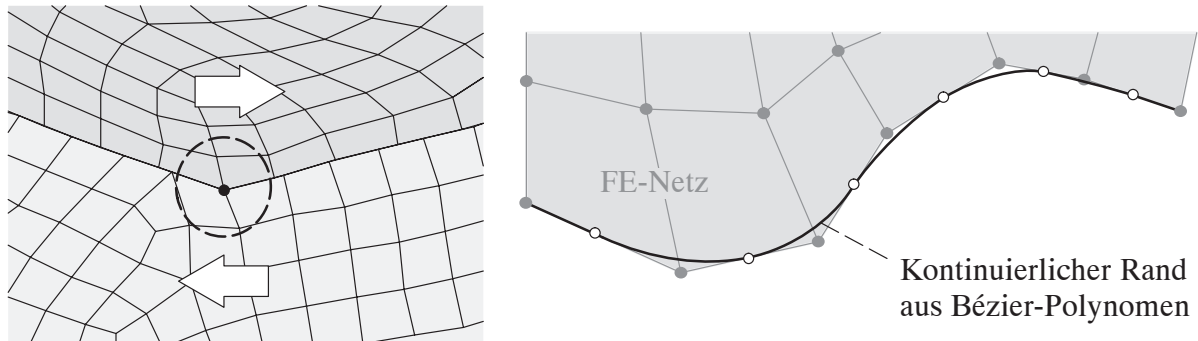


Bild 2.6: "Verhaken" bei nichtglatterm Kontakt (links); Glatter Rand (rechts)

Ausgehend von zwei benachbarten Randsegmenten wird ein kubischer Bézier-Spline eingeführt, der zwischen den Segmentmittelpunkten liegt (siehe Bild 2.7 links). Er ist definiert durch die zwei Mittelpunkte und die Segment-Tangenten in diesen Punkten, so dass mehrere dieser Splines eine C^1 -kontinuierliche Randbeschreibung ergeben. Ein einzelnes Polynom liegt stets innerhalb eines Trapezes, das von den zwei Mittelpunkten und zwei Viertelpunkten aufgespannt wird. Die Parameterdarstellung der Bézier-Polynome erhält man aus den Koordinaten der drei betroffenen FE-Netz-Randknoten \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3 (Wriggers et al. (2001))

$$\mathbf{x}^{BS} = \frac{1}{4} \left[(2 - 3\xi + \xi^3) \mathbf{x}_1 + (2 + 3\xi - 3\xi^2) \mathbf{x}_2 + (3 - \xi) \xi^2 \mathbf{x}_3 \right] \quad (2.112)$$

mit dem Kurvenparameter $\xi \in [0, 1]$. Die für die Kontaktberechnungen notwendigen Tangentenvektoren $\mathbf{t}^{BS}(\xi)$ ergeben sich durch Differentiation

$$\mathbf{t}^{BS}(\xi) = \frac{1}{4} \left[(-3 + 3\xi^2) \mathbf{x}_1 + (3 - 6\xi) \mathbf{x}_2 + (6 - 3\xi) \xi \mathbf{x}_3 \right]. \quad (2.113)$$

Daraus folgen die Normalenvektoren $\mathbf{n}^{BS}(\xi)$, die orthogonal zu den Tangentenvektoren stehen

$$\mathbf{n}^{BS}(\xi) = \begin{bmatrix} -t_2^{BS}(\xi) \\ t_1^{BS}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

Beim glatten Kontakt werden die Bézier-Polynome in der Art berücksichtigt, dass nicht die FE-Knoten, sondern die Segmentmittelpunkte (virtuelle Randknoten) auf Penetration überprüft und gegebenenfalls korrigiert werden. In Bild 2.7 rechts ist eine mögliche Penetrations-Konfiguration einer glatten Slave-Oberfläche und einer nicht-glatten Master-Oberfläche dargestellt. Letztendlich sind jedoch beliebige Kontakt-Kombinationen denkbar: glatt vs. glatt, glatt vs. nicht-glatt, usw.

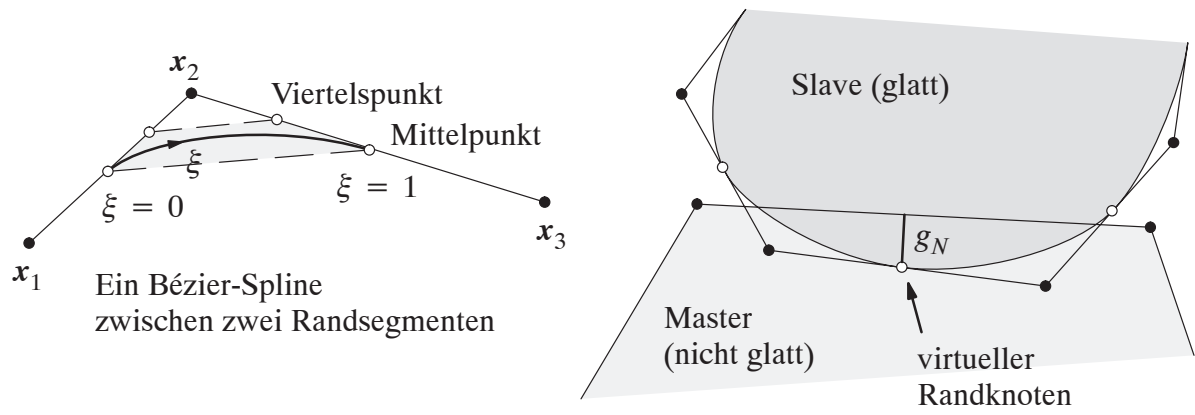


Bild 2.7: Einzelner Bézier-Spline (links) und Penetrations-Konfiguration (rechts)

Anmerkung: Geometrisch vorhandene, scharfe Ecken dürfen durch die glatte Randbeschreibung natürlich nicht ausgerundet werden und erhalten deshalb eine spezielle Behandlung (Wriggers et al. (2001)), auf die hier nicht näher eingegangen wird.

3 Elementtechnologie

3.1 Einführung

In diesem Kapitel sollen Elementformulierungen vorgestellt und diskutiert werden, die insbesondere für die in dieser Arbeit behandelten Probleme geeignet sind. Die Anforderungen, die im Allgemeinen an Finite Elemente gestellt werden (z.B. Wriggers (2001)), sind deswegen hier nach der Wichtigkeit für praxisrelevante Impakt- und Penetrationssimulationen geordnet:

1. Robustheit (z.B. Stabilität gegenüber Hourglassing)
2. Geschwindigkeit, Effizienz → niedrige Ansatzordnungen
3. Gute Genauigkeit (Konvergenz) bei groben Netzen, Unanfälligkeit bei Netzverzerrung
4. Kein volumetrisches Locking bei inkompressiblen Materialien
5. Kein Schub-Locking, d.h. gute Biegeeigenschaften
6. Einfache Implementierung von nichtlinearen Materialgleichungen

Diese hier vorgeschlagene Reihenfolge ist nicht als absolut anzusehen, sondern sollte als grobe Richtlinie verstanden werden, d.h. einzelne Punkte sind für ein spezielles Problem eventuell weiter oben bzw. weiter unten in der Liste anzusiedeln. Auch die gegenseitige Beeinflussung der Eigenschaften ist in Betracht zu ziehen. Detaillierte Erörterungen der verschiedenen Anforderungen - insbesondere die Beschreibung der Locking-Phänomene - sind z.B. bei Bischoff (1999) oder Wriggers (2001) zu finden. Zu Punkt 4 ist anzumerken, dass Inkompressibilität nicht nur bei gummiartigen Materialien zu beobachten ist, sondern auch für elastisch-plastische Modelle mit isochorem, d.h. volumenerhaltendem plastischem Fließen, eine wichtige Rolle spielt.

In den letzten Jahren wurden viele unterschiedliche spezielle Finite Elemente entwickelt, um die Nachteile der klassischen Verschiebungselemente - insbesondere das als "Locking" bekannte zu steife Verhalten - zu beseitigen und die oben genannten Anforderungen zu erfüllen. Im Kontext der geometrisch linearen Theorie haben sich unter anderem die von Simo und Rifai (1990) beschriebenen *Enhanced-Assumed-Strain Methoden* etabliert, die im weitesten Sinne auch die häufig verwendeten Verfahren der inkompatiblen Moden (Taylor et al. (1976)) und die B-bar-Methoden (Hughes (1980)) mit einschließen. Im Hinblick auf geometrische Nichtlinearität wurden diese Strategien weiterentwickelt. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier u.a. die gemischten variationellen Methoden von Simo et al. (1985), die gemischten u/p Formulierungen von Sussman und Bathe (1987), die nichtlinearen B-bar-Methoden von Moran et al. (1990), die EAS-Elemente von Wall et al. (2000) und die Elemente von Simo und Armero (1992) genannt.

Alternativ wurden Formulierungen entwickelt, bei denen die Integrationsordnung verringert wird, um die für das Locking verantwortlichen Anteile zu eliminieren und gleichzeitig die Effizienz zu erhöhen. Diese *Unterintegration* bringt allerdings das Problem mit sich, dass innere Elementkinematiken ("hourglass modes") entstehen können, die mit geeigneten Zusatzmaßnahmen zu stabilisieren sind. Einer der ersten Artikel, in denen die Notwendigkeit zur Stabilisierung

erkannt wurde, stammt von Kavanagh und Key (1972). Die ersten Verfahren zur Stabilisierung gehen auf die Gruppe um Belytschko zurück. So waren es Flanagan und Belytschko (1981), die eine Methode entwickelten, um die unerwünschten Moden zu isolieren und mit der Einführung künstlicher Steifigkeit bzw. künstlicher Viskosität (*perturbation hourglass control*) zu stabilisieren. Von Belytschko et al. (1984) wurde dieser Ansatz von zunächst linearen auf nichtlineare Probleme erweitert. Allerdings fehlte bei diesen Verfahren eine physikalische Basis für die entsprechenden Stabilisierungskräfte, und für praktische Anwendungen musste die Stabilisierung mittels eines empirischen Faktors für jedes Beispiel kalibriert werden. Daraufhin entwickelten Belytschko und Bindeman (1991, 1993) aus der Kombination einer speziellen Darstellung des Verschiebungsfeldes zur direkten Identifizierung der "hourglass modes" (Belytschko und Bachrach (1986)) und der Methode der angenommenen Verzerrungen ("assumed strains") eine neue Strategie: Ein Verzerrungsfeld wird derart konstruiert, dass diejenigen Anteile, die für volumetrisches Locking und Schublocking verantwortlich sind, eliminiert werden. Basierend auf diesen "assumed strains" werden dann die Stabilisierungskräfte berechnet. Das entstehende Element besitzt damit eine auf Elementgeometrie und Materialeigenschaften beruhende Stabilisierung (*physical hourglass stabilization*) und ist sehr gut für nichtlineare Probleme und inkompressible Materialien geeignet. Alternative, aber aufwändigere Strategien zur Stabilisierung unterintegrierter Elemente für Finite Elastizität wurden z.B. von Reese und Mitarbeitern (Reese et al. (1999), Reese und Wriggers (2000), Reese et al. (2000)) entwickelt.

In dieser Arbeit werden nun zwei verschiedene bilineare Vierknotenelemente für ebene Verzerrungszustände bzw. axialsymmetrische Zustände vorgestellt, die besonders für praxisrelevante Impakt-Simulationen mit finiten inelastischen Deformationen geeignet sind. Zum einen ist dies ein *reduziert integriertes Element mit Stabilisierung*, das auf den Ideen von Belytschko und Bindeman (1991) basiert und hier für große Dehnungen in die Total Lagrange-Formulierung eingebunden wird. Zum anderen wird ein *selektiv integriertes Element* präsentiert, das Ähnlichkeiten zu den so genannten *B-bar*-Methoden (Hughes (1980)) besitzt und bei dem volumetrisches Locking durch Einführung eines modifizierten Deformationsgradienten beseitigt wird (de Souza Neto et al. (1996)). Beide Elemente werden anschließend anhand typischer Testbeispiele untersucht und bewertet.

Anmerkung: Die in allen numerischen Beispielen verwendeten räumlichen Diskretisierungen erfolgen hauptsächlich mit diesen bilinearen Vierknotenelementen. Nur in seltenen Ausnahmefällen (z.B. spitze Ecken) werden zusätzlich einzelne Standard-Dreiknotenelemente (CST - constant strain triangle) verwendet.

3.2 Reduziert integriertes Vierknotenelement mit Stabilisierung

Die Unterintegration bzw. reduzierte Integration des bilinearen Vierknotenelements, d.h. die numerische Integration mit nur einem Gauss-Punkt, führt zu einer deutlichen Effizienzsteigerung. Sowohl die Anzahl der Rechenoperationen als auch der Speicherbedarf sind weitaus geringer als beim vollintegrierten Element. Ein weiterer Vorteil ist die Verhinderung von volumetrischem Locking und Schublocking bei geeignet gewählter Formulierung (s.u.). Die Methode hat allerdings den Nachteil, dass unter Umständen innere Elementkinematiken auftreten, die im

betrachteten Integrationspunkt keine Verzerrung und damit keine Energie hervorrufen und deshalb auch als *zero energy modes* oder ihrer Form wegen als *hourglass modes* bezeichnet werden (siehe Bild 3.1). Diese geometrischen Instabilitäten können sich in einem FE-Netz ausbreiten und die Lösung unbrauchbar machen.

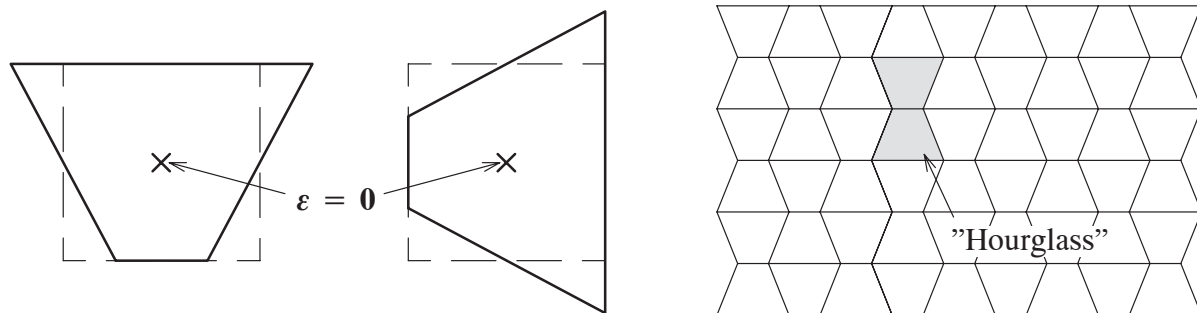


Bild 3.1: Innere Kinematiken: Verzerrungs- bzw. energiefreie Elementdeformationen

Das Auftreten dieser speziellen Eigenformen muss deshalb durch eine geeignete Stabilisierung verhindert werden. Dazu müssen zunächst die entsprechenden Moden identifiziert werden und darauf basierend Stabilisierungskräfte eingeführt werden, die dem Entstehen der Instabilitäten entgegenwirken. Um dieser Stabilisierung eine physikalische Grundlage zu geben, verwenden Belytschko und Bindeman (1991) die von Simo und Hughes (1986) eingeführte Form des Variationsprinzips nach Hu-Washizu (Dreifeldfunktional) zur Herleitung der *assumed strain*-Methode. Darin werden die Spannungen orthogonal zur Differenz zwischen den Standard-Verzerrungen (Verschiebungsgradient) und den angenommenen Verzerrungen gewählt, damit die Spannungen aus dem Dreifeldfunktional eliminiert werden können. Das entstehende Zweifeldfunktional beinhaltet dann die Verschiebungen und die angenommenen Verzerrungen. Durch geeignete Wahl der angenommenen Verzerrungen können dann sowohl volumetrisches Locking als auch Schublocking eliminiert werden.

Im Folgenden werden die Strategie der physikalischen Stabilisierung und die daraus entwickelten Elemente genauer vorgestellt. Ausgehend von der Formulierung für kleine Verzerrungen und lineares Materialverhalten wird anschließend die notwendige Erweiterung auf nichtlineare Probleme beschrieben.

3.2.1 Physikalische Hourglass-Stabilisierung für lineare Probleme

Die bekannte Interpolation des Verschiebungsfelds $\mathbf{u}^h = [u_x^h, u_y^h]^T$ des bilinearen Vierknotenelements mit

$$\mathbf{u}_k^h = \mathbf{N} \mathbf{d}_k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_{k_1} \\ d_{k_2} \\ d_{k_3} \\ d_{k_4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_{k_1} \\ d_{k_2} \\ d_{k_3} \\ d_{k_4} \end{bmatrix}, \quad k = x, y \quad (3.1)$$

mit den isoparametrischen Ansatzfunktionen \mathbf{N} , den Knotenverschiebungsvektoren $\mathbf{d}_k = [d_{k_1}, d_{k_2}, d_{k_3}, d_{k_4}]^T$, $k = x, y$ und den lokalen Elementkoordinaten ξ und η kann in eine

alternative Darstellung überführt werden (Belytschko und Bachrach (1986)), die sehr gut zur Identifizierung der Elementeigenformen (Moden) geeignet ist:

$$u_k^h = \mathbf{N}d_k = (\mathbf{\Delta}^T + x \mathbf{b}_x^T + y \mathbf{b}_y^T + h \boldsymbol{\gamma}^T) d_k, \quad k = x, y. \quad (3.2)$$

Der Ansatz wird demnach additiv in einen konstanten Anteil $\mathbf{\Delta}$, zwei lineare Anteile $x\mathbf{b}_x$ und $y\mathbf{b}_y$ und einen dazu orthogonalen, bilinearen Anteil $h\boldsymbol{\gamma}$ zerlegt, wobei folgende Definitionen gelten:

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{4}[\mathbf{t} - (\mathbf{t}^T\mathbf{x})\mathbf{b}_x - (\mathbf{t}^T\mathbf{y})\mathbf{b}_y], \quad (3.3)$$

$$\mathbf{b}_x^T = \frac{1}{2A}[y_{24}, y_{31}, y_{42}, y_{13}], \quad \mathbf{b}_y^T = \frac{1}{2A}[x_{42}, x_{13}, x_{24}, x_{31}], \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{4}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}^T\mathbf{x})\mathbf{b}_x - (\mathbf{h}^T\mathbf{y})\mathbf{b}_y], \quad (3.5)$$

$$\mathbf{t}^T = [1, 1, 1, 1], \quad \mathbf{h}^T = [1, -1, 1, -1], \quad (3.6)$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3, x_4], \quad \mathbf{y}^T = [y_1, y_2, y_3, y_4], \quad (3.7)$$

$$A = \frac{1}{2}(x_{31}y_{42} + x_{24}y_{31}), \quad (3.8)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad \text{und} \quad h = \xi\eta. \quad (3.9)$$

\mathbf{t} und \mathbf{h} sind die Translations- und Hourglassvektoren des Referenzelements, \mathbf{x} und \mathbf{y} die Knotenkoordinatenvektoren und A die Elementfläche. Während durch \mathbf{h} das Hourglassmuster im quadratischen Referenzelement des Parameterraums definiert ist, dient $\boldsymbol{\gamma}$ zur genauen Identifizierung dieses unerwünschten Deformationszustands im beliebig geformten Vierknotenelement des wirklichen Raums (Flanagan und Belytschko (1981)). Dieser Vektor $\boldsymbol{\gamma}$ wird deshalb im Folgenden zur Konstruktion der Stabilisierung verwendet. Zur besseren Veranschaulichung sind die Basisvektoren $\mathbf{\Delta}$, \mathbf{b}_x , \mathbf{b}_y und $\boldsymbol{\gamma}$ aus Gleichung (3.2) in Bild 3.2 graphisch am quadratischen Referenzelement des Parameterraums dargestellt.

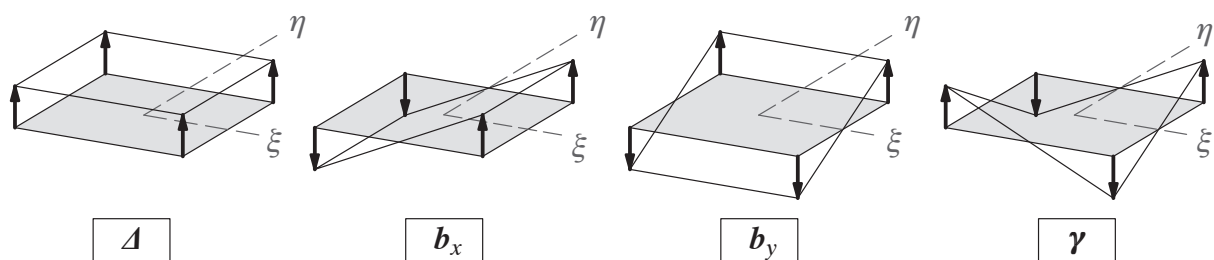


Bild 3.2: Basisvektoren des Vierknotenelements aus Gleichung (3.2)

Zunächst werden die linearen Standard-Verzerrungen ε (nicht zu verwechseln mit den logarithmischen Verzerrungen ϵ) betrachtet, wie sie sich als Gradient der Verschiebungen (3.2) ergeben (der hochgestellte Index 'h', der für die Diskretisierung des betrachteten Feldes steht, wird im Folgenden zugunsten einer besseren Lesbarkeit weggelassen):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{tt} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ \frac{1}{x}u_x \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T + h_{,x}\boldsymbol{\gamma}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_y^T + h_{,y}\boldsymbol{\gamma}^T \\ a\frac{N}{x} & 0 \\ \mathbf{b}_y^T + h_{,y}\boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{b}_x^T + h_{,x}\boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Hierbei kann durch die Wahl von a zwischen ebenem Verzerrungszustand 'EVZ' mit $a = 0$ und axialsymmetrischem Zustand 'AXI' mit $a = 1$ unterschieden werden. Im axialsymmetrischen Zustand ist x die Radialrichtung (häufig r genannt), y die Axialrichtung (häufig z) und t die Umfangsrichtung. Wie zu erwarten, bewirkt das Auftreten einer der beiden Hourglassmoden $\mathbf{d} = \pm [h, \mathbf{0}]^T$ bzw. $\mathbf{d} = \pm [\mathbf{0}, h]^T$ (siehe Bild 3.1) am Elementmittelpunkt ($\xi, \eta = 0$) keinerlei Dehnung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B}(\xi, \eta = 0) \begin{bmatrix} h \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B}(\xi, \eta = 0) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

d.h. bei einer Unterintegration mit einem Gausspunkt in Elementmitte entsteht keine Energie. Nun wird für die Berechnung der Verzerrungen der Standard-B-Operator \mathbf{B} durch eine modifizierte Matrix $\bar{\mathbf{B}}$ ersetzt, mit der die durch Unterintegration entstehenden Null-Energie-Moden stabilisiert werden können, ohne dass bei dieser Stabilisierung wieder Schublocking oder volumetrisches Locking entstehen. Wird zusätzlich eine Aufspaltung in einen element-konstanten Anteil $\bar{\mathbf{B}}_0$ und einen von ξ und η abhängigen Anteil $\bar{\mathbf{B}}_s$ vorgenommen, so ergibt sich:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{d} = (\bar{\mathbf{B}}_0 + \bar{\mathbf{B}}_s)\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_y^T \\ a\frac{1}{4x_0}\mathbf{t}^T & 0 \\ \mathbf{b}_y^T & \mathbf{b}_x^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 h_{,x}\boldsymbol{\gamma}^T & e_2 h_{,y}\boldsymbol{\gamma}^T \\ e_2 h_{,x}\boldsymbol{\gamma}^T & e_1 h_{,y}\boldsymbol{\gamma}^T \\ e_3 h_{,x}\boldsymbol{\gamma}^T & e_3 h_{,y}\boldsymbol{\gamma}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

wobei x_0 der Abstand des Elementmittelpunkts von der Rotationsachse ist. Die auf einer modifizierten Form des Variationsprinzips nach Hu-Washizu basierende Herleitung der Form (3.12) findet sich z.B. bei Belytschko und Bindeman (1991). Demnach führt folgende Wahl der Konstanten e_1 , e_2 und e_3 zu stabilen Elementen ohne volumetrisches Locking und ohne Schublocking (Belytschko und Bindeman (1991), Zhu und Cescotto (1995)):

$$\begin{aligned} \text{EVZ } (a = 0) : e_1 &= 1/2, \quad e_2 = -1/2, \quad e_3 = 0, \\ \text{AXI } (a = 1) : e_1 &= 2/3, \quad e_2 = -1/3, \quad e_3 = -1/3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Damit ergibt sich analog die Zerlegung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ in einen element-konstanten Anteil $\boldsymbol{\sigma}_0$ und einen von ξ und η abhängigen Anteil $\boldsymbol{\sigma}_s$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{tt}, \sigma_{xy}]^T = \mathbf{C}^e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^e (\bar{\mathbf{B}}_0 + \bar{\mathbf{B}}_s)\mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_s \quad (3.14)$$

mit der linear elastischen, isotropen Werkstoffmatrix

$$C^e = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

und den Lamé-Konstanten λ und μ . Die internen Knotenkräfte f^{int} können nun additiv in einen "zentralen" Anteil f_0 und einen Stabilisierungsanteil f_s aufgespalten werden:

$$f^{int} = \int_{\Omega_e} \bar{B}^T \sigma \, dV = \int_{\Omega_e} \bar{B}_0^T \sigma_0 \, dV + \int_{\Omega_e} \bar{B}_s^T \sigma_s \, dV = f_0 + f_s . \quad (3.16)$$

Einsetzen von (3.12), (3.13), (3.14) und (3.15) in (3.16) liefert für den ebenen Verzerrungszustand

$$f_0^{EVZ} = A \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 \mathbf{b}_x + \sigma_{xy}^0 \mathbf{b}_y \\ \sigma_{yy}^0 \mathbf{b}_y + \sigma_{xy}^0 \mathbf{b}_x \end{bmatrix}, \quad f_s^{EVZ} = \mu \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T (H_{xx} \mathbf{d}_x - H_{xy} \mathbf{d}_y) \\ \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T (H_{yy} \mathbf{d}_y - H_{xy} \mathbf{d}_x) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

bzw. für den axialsymmetrischen Zustand (mit Substitution: $r = x, z = y$)

$$f_0^{AXI} = 2\pi r_0 A \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^0 \mathbf{b}_r + \frac{\sigma_{tt}^0}{4r_0} \mathbf{t} + \sigma_{zr}^0 \mathbf{b}_z \\ \sigma_{zz}^0 \mathbf{b}_z + \sigma_{zr}^0 \mathbf{b}_r \end{bmatrix}, \quad f_s^{AXI} = \frac{2}{3} \mu \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T (2H_{rr} \mathbf{d}_r - H_{zr} \mathbf{d}_z) \\ \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T (2H_{zz} \mathbf{d}_z - H_{zr} \mathbf{d}_r) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

mit den darin enthaltenen Werten

$$H_{ij} = \int_{\Omega_e} h_{,i} h_{,j} \, dV, \quad i, j = \begin{cases} x, y & \dots \text{EVZ} \\ r, z & \dots \text{AXI} \end{cases} . \quad (3.19)$$

Diese Integrale können entweder durch eine 2x2-Gauss-Integration mit den üblichen Gausspunktkoordinaten (ξ_Q, η_Q) und den dazugehörigen Wichtungsfaktoren w_Q berechnet werden (im Fall kleiner Verzerrungen nur einmal zu Beginn der Berechnung notwendig)

$$H_{ij} = \sum_{Q=4}^4 w_Q h_{,i}(\xi_Q, \eta_Q) h_{,j}(\xi_Q, \eta_Q) \| \mathbf{J}(\xi_Q, \eta_Q) \| \left\{ \frac{1}{2\pi r_Q} \right\} \quad (3.20)$$

oder unter Annahme einer konstanten Jakobideterminante direkt angegeben werden:

	H_{xx} / H_{rr}	H_{yy} / H_{zz}	H_{xy} / H_{rz}	
EVZ	$\frac{2y_{31}^2 + y_{42}^2}{3A}$	$\frac{2x_{31}^2 + x_{42}^2}{3A}$	$-\frac{2x_{31}y_{31} + x_{42}y_{42}}{3A}$	(3.21)
AXI	$\frac{4\pi r_0 z_{31}^2 + z_{42}^2}{3A}$	$\frac{4\pi r_0 r_{31}^2 + r_{42}^2}{3A}$	$-\frac{4\pi r_0 r_{31}z_{31} + r_{42}z_{42}}{3A}$	

Die Stabilisierung des reduziert integrierten Elements ist am besten an Gleichung (3.16) zu erkennen: Den ersten Term f_0 erhält man durch die 1-Punkt-Gauss-Integration. Die Stabilisierung

steckt somit im zweiten Term f_s . Er enthält Informationen über die Elementgeometrie ($\boldsymbol{\gamma}$, H_{ij}), das verwendete Material (μ) und die aktuelle Elementverformung (\boldsymbol{d}_j). Ein besonderes Merkmal der Stabilisierungskräfte ist, dass sie unabhängig vom Kompressionsmodul und damit ideal für Anwendungen mit inkompressiblem Materialverhalten geeignet sind.

Anmerkung: Das Element ist aufgrund der Wahl der angenommenen Verzerrungen (Gleichung (3.12)) auch dann frei von volumetrischem Locking und Schublocking, wenn es mit 2x2 Gausspunkten integriert wird. In dem Fall wird in Gleichung (3.16) keine Aufspaltung der internen Kräfte in zentralen Anteil und Stabilisierungsanteil durchgeführt und es ist keine Stabilisierung notwendig. Allerdings ist das Element mit höherer Anzahl an Integrationspunkten aufwändiger als das unterintegrierte Element.

3.2.2 Erweiterung auf große Verzerrungen und materielle Nichtlinearität

Die für kleine Verzerrungen und linear elastisches Materialverhalten vorgestellte Stabilisierungsstrategie soll nun auf große Verzerrungen und materielle Nichtlinearität erweitert werden. Die zugrunde liegende Idee besteht darin, die unterintegrierte Spannungsberechnung am Elementmittelpunkt nach wie vor mit Bezug auf die Referenzkonfiguration durchzuführen. Die Stabilisierung erfolgt dagegen in zeitlich inkrementeller Weise mit Bezug auf die Konfiguration des vorangegangenen Zeitschritts - in Anlehnung an die Strategie von Belytschko und Bindeman (1991). So sollen in jedem Zeitschritt aus *inkrementellen Hourglassverzerrungen* $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_s$ mit Hilfe einer *momentanen Element-Schubsteifigkeit* μ^{tan} aktuelle *Stabilisierungs-Spannungen* $\boldsymbol{\sigma}_s$ ermittelt werden, die dann in die Berechnung der stabilisierenden Kräfte eingehen. Dazu wird zunächst der in den Stabilisierungskräften (siehe Gleichungen (3.17) und (3.18)) enthaltene Anteil

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{d}_x \\ \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{d}_y \end{bmatrix} =: \boldsymbol{q}_s \quad (3.22)$$

betrachtet, der die Stärke des Hourglassmodes wiedergibt und auch als *verallgemeinerte Hourglassverzerrung* \boldsymbol{q}_s bezeichnet wird (Belytschko et al. (2000)). In Analogie dazu wird ein Stabilisierungs-Deformationsgradient \boldsymbol{F}_s definiert

$$\boldsymbol{F}_s := \mathbf{1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{y} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

der in der Referenzkonfiguration gleich der Identität ist, d.h. $\boldsymbol{F}_s|_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} = \mathbf{1}$. Dabei ist der Stabilisierungsvektor $\boldsymbol{\gamma}$ jetzt eine Größe der Referenzkonfiguration

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{4} \left[\boldsymbol{h} - (\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{X}) \boldsymbol{b}_X - (\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{Y}) \boldsymbol{b}_Y \right]. \quad (3.24)$$

Als nichtlineares Hourglass-Verzerrungsmaß werden logarithmische Dehnungen verwendet

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \frac{1}{2} \ln(\boldsymbol{F}_s \boldsymbol{F}_s^T). \quad (3.25)$$

Durch zeitliche Integration des Zusammenhangs zwischen Hourglass-Verzerrungsrate $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_s$ und Hourglass-Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$

$$\dot{\sigma}_s = 2\mu^{\tan} \dot{\epsilon}_s \quad (3.26)$$

erhält man die aktuellen Hourglass-Spannungen zum Zeitpunkt t_n

$$\sigma_{s,n} = \sigma_{s,n-1} + 2\mu_n^{\tan} (\epsilon_{s,n} - \epsilon_{s,n-1}) = \sigma_{s,n-1} + 2\mu_n^{\tan} \Delta\epsilon_{s,n} . \quad (3.27)$$

Diese inkrementelle Aktualisierung der Cauchy-Spannungen ist mechanisch nicht ganz korrekt, wird jedoch hier für die Stabilisierung als näherungsweise ausreichend genau erachtet. Der momentane Schubmodul μ_n^{\tan} eines isotropen, materiell nichtlinearen (z.B. plastischen) Prozesses ergibt sich nach zeitlicher Integration aus dem Verhältnis eines aktuellen deviatorischen Spannungsinkrements von $\Delta\mathbf{S}_n$ zu einem aktuellen deviatorischen Dehnungsincrement von $\Delta\mathbf{E}_n$. Im Fall des unterintegrierten Vierknotenelements werden dazu die Werte am zentralen Gausspunkt ausgewertet:

$$\mu_n^{\tan} = \frac{1}{2} \frac{\|\text{dev}(\Delta\mathbf{S}_{0,n})\|}{\|\text{dev}(\Delta\mathbf{E}_{0,n})\|} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{dev}(\Delta\mathbf{S}_{0,n}) : \text{dev}(\Delta\mathbf{S}_{0,n})}{\text{dev}(\Delta\mathbf{E}_{0,n}) : \text{dev}(\Delta\mathbf{E}_{0,n})} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3.28)$$

Dabei werden als inkrementell arbeitskonjugiertes Paar das Inkrement des Euler-Almansi-Verzerrungstensors

$$\Delta\mathbf{E}_{0,n} = \Delta\mathbf{e}_{0,n} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_{0,n}^{-T} \mathbf{F}_{0,n}^{-1}) - \mathbf{e}_{0,n-1} \quad (3.29)$$

und das Cauchy-Spannungsincrement

$$\Delta\mathbf{S}_{0,n} = \Delta\sigma_{0,n} = \sigma_{0,n} - \sigma_{0,n-1} \quad (3.30)$$

verwendet. Es ergeben sich schließlich die Stabilisierungskräfte

$$\mathbf{f}_{s,n} = \int_{\varphi(\Omega_e)} \bar{\mathbf{B}}_{s,n}^T \sigma_{s,n} \, dv = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{H}_n \sigma_{s,n} \quad (3.31)$$

mit

$$\mathbf{H}^{\text{EVZ}} = \begin{bmatrix} H_{xx} & -H_{xy} \\ -H_{xy} & H_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H}^{\text{AXI}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}H_{rr} & -\frac{2}{3}H_{rz} \\ -\frac{2}{3}H_{rz} & \frac{4}{3}H_{zz} \end{bmatrix} . \quad (3.32)$$

Anmerkung 1: Stainier und Ponthot (1994) weisen darauf hin, dass die Hourglass-Moden der Axialsymmetrie sich von denen des ebenen Verzerrungszustandes geringfügig unterscheiden. So fällt insbesondere in der Nähe der Rotationsachse die variable Dicke der axialsymmetrischen Elemente ins Gewicht. Die exakte Berücksichtigung dieses Umstands führt allerdings zu erheblich aufwändigeren und weniger allgemeinen Formulierungen (Matejovic und Adamik (1988), Matejovic (1991)).

Anmerkung 2: In der Literatur (z.B. Peric et al. (1999)) wird darauf hingewiesen, dass selbst mit geeigneter Stabilisierung eine absolute Sicherheit gegen das Auftreten innerer Elementkinema-

tiken nicht für alle Fälle garantiert werden kann. Dies gilt natürlich im Besonderen für den Fall geometrischer und materieller Nichtlinearitäten. Praktisch bedeutet das, dass die Verwendung dieses Elements immer mit einer gewissenhaften Kontrolle der Lösung verbunden sein sollte. Dies kann durch eine Betrachtung der Netzdeformationen und der durch die Stabilisierungskräfte entstehenden Energie - in kommerziellen Codes oft "Hourglassenergie" genannt (Hallquist (1998)) - bewerkstelligt werden. Treten z.B. deutlich sichtbare Netzin stabilitäten auf und die Hourglassenergie ist sehr gering, so ist die Höhe der Stabilisierung anscheinend nicht ausreichend.

3.3 Selektiv integriertes Vierknotenelement

Eine alternative Verbesserung des Standard-Verschiebungselements stellt das selektiv integrierte Vierknotenelement von de Souza Neto et al. (1996) dar. Durch die Einführung eines modifizierten Deformationsgradienten ("F-bar Element") mit Unterscheidung zwischen volumetrischem und deviatorischem Anteil wird volumetrisches Locking bei inkompressiblem Materialverhalten vermieden.

Die numerische Integration des internen Knotenkraftvektors (Gleichung (2.50)) erfordert die Berechnung der Spannungen an den Integrationspunkten. Bei standardmäßig vollintegrierten⁴ Vierknotenelementen werden die Cauchy-Spannungen σ , die eine Funktion des Deformationsgradienten F und einer geschichtsabhängigen Variablen α sind

$$\sigma = \hat{\sigma}(F, \alpha) \quad (3.33)$$

an vier Gauss-Punkten ermittelt, d.h. auch der Deformationsgradient wird an den vier Gauss-Punkten berechnet. Diese vollintegrierten Elemente haben den Nachteil, dass sie im Zusammenspiel mit annähernd inkompressiblem Materialverhalten ein zu steifes Verhalten zeigen, das aus der Unfähigkeit entsteht, mit niedrigen bilinearen Polynomansätzen volumenerhaltende Verschiebungsfelder adäquat darzustellen. Dieses numerische Phänomen wird als volumetrisches Locking bezeichnet.

Für die hier vorgestellte Element-Formulierung ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen deviatorischen (volumenerhaltenden) und einen volumetrischen (gestalterhaltenden) Anteil von zentraler Bedeutung. Dies geschieht nach Simo et al. (1985) gemäß folgendem Ausdruck

$$F = F_{dev} F_{vol} , \quad (3.34)$$

wobei F_{dev} und F_{vol} der deviatorische und der volumetrische Anteil von F sind, jeweils definiert durch:

4. Der Begriff "vollintegriert" steht hier für eine 2x2-Gauss-Integration mit dem Standard-Deformationsgradienten und einer Standard-B-Matrix. Es ist zu beachten, dass bei nichtlinearem Materialverhalten mit einer Gauss-Integration eigentlich keine vollständige, d.h. exakte Integration möglich ist.

$$\mathbf{F}_{dev} = (\det[\mathbf{F}])^{-1/3} \mathbf{F} , \quad \mathbf{F}_{vol} = (\det[\mathbf{F}])^{1/3} \mathbf{1} . \quad (3.35)$$

Der multiplikative Split (3.34) wird auf den Deformationsgradienten \mathbf{F}_Q an den vier Gauss-Punkten $\xi = \xi_Q$ und auf den Deformationsgradienten \mathbf{F}_0 am Elementmittelpunkt $\xi = \mathbf{0}$ (siehe Bild 3.3) angewendet:

$$\mathbf{F}_Q = (\mathbf{F}_Q)_{dev} (\mathbf{F}_Q)_{vol} , \quad \mathbf{F}_0 = (\mathbf{F}_0)_{dev} (\mathbf{F}_0)_{vol} . \quad (3.36)$$

Die Schlüssel-Idee besteht nun darin, einen *modifizierten Deformationsgradienten* $\bar{\mathbf{F}}_Q$ einzuführen, der sich zum einen aus dem deviatorischen Anteil von \mathbf{F}_Q und zum anderen aus dem volumetrischen Anteil von \mathbf{F}_0 zusammensetzt, d.h.

$$\bar{\mathbf{F}}_Q = (\mathbf{F}_Q)_{dev} (\mathbf{F}_0)_{vol} = \left[\frac{\det[\mathbf{F}_0]}{\det[\mathbf{F}_Q]} \right]^{1/3} \mathbf{F}_Q . \quad (3.37)$$

Das bedeutet anschaulich, dass an jedem der vier Gauss-Punkte derselbe gemittelte Wert für den volumetrischen Anteil verwendet wird. Das entspricht einer selektiven Integration, bei der deviatorische Anteile mit vier und volumetrische Anteile mit nur einem Gauss-Punkt integriert werden (Bild 3.3). Aus diesem Grund wird diese Vorgehensweise auch häufig als *constant* oder *mean dilatational method* (Methode mit konstanter/gemittelter Dilatation) bezeichnet. Die Idee geht auf die Arbeit von Nagtegaal et al. (1974) zurück.

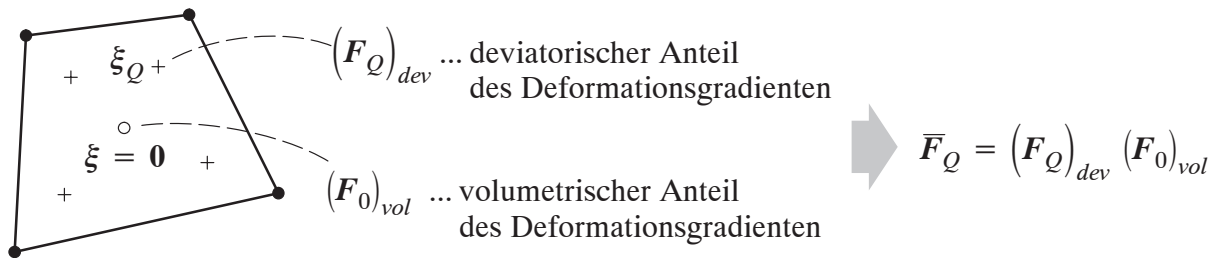


Bild 3.3: Selektive Integration des Vierknotenelements

Der positive Effekt, der sich aus dieser Modifikation ergibt, ist die "Beseitigung" der für das volumetrische Locking verantwortlichen parasitären Spannungen. Für Materialgesetze mit entkoppeltem volumetrisch/deviatorischem Antwortverhalten erhält man mit dieser Formulierung eine konstante Druckverteilung im Element. Der Unterschied zum voll integrierten Vierknotenelement besteht letztendlich in der Verwendung des modifizierten Deformationsgradienten anstelle des normalen Deformationsgradienten zur Berechnung der Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{F}}, \alpha) . \quad (3.38)$$

Der interne Knotenkraftvektor berechnet sich dann zu

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\varphi(\Omega_e)} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{F}}, \alpha) \, dv . \quad (3.39)$$

Das hier vorgestellte Verfahren besitzt Ähnlichkeiten mit den so genannten "B-bar"- oder auch ANS-Methoden (Hughes (1980), Bischoff (1999)). So findet auch dort ein Austausch des Deformationsgradienten durch ein modifiziertes Pendant statt, um unerwünschten Locking-Phänomenen zu begegnen. Dieser Austausch führt bei den B-bar-Methoden zu einer Modifikation des B-Operators. Dagegen wird bei der hier vorgestellten Methode der B-Operator nicht beeinflusst, wie an Gleichung (3.39), in der die Standard-B-Matrix verwendet wird, zu erkennen ist. Anstatt also mit einem modifizierten Deformationsgradienten die Verzerrungen zu ermitteln, wie es bei B-bar-Methoden üblich ist, wird hier direkt die Spannungsberechnung verändert.

Die numerische Umsetzung des selektiv integrierten Elements bzw. die entsprechende Erweiterung des Standard-Verschiebungselements ist relativ einfach. Es muss lediglich der modifizierte Deformationsgradient nach Gleichung (3.37) ermittelt werden, um damit die Spannungen an den vier Gausspunkten zu berechnen. Ansonsten ist die Formulierung identisch mit dem vollintegrierten Vierknotenelement. Außerdem ist die Verwendung dieses Elements unabhängig vom verwendeten Materialmodell und es kommen keine neuen (künstlichen oder physikalisch motivierten) Parameter ins Spiel.

Im Kontext einer impliziten FE-Berechnung wäre eine konsistente Linearisierung notwendig. Die sich dann ergebende Steifigkeitsmatrix wird durch den Einsatz des modifizierten Deformationsgradienten (3.37) unsymmetrisch (Souza Neto et al. (1996)). Im hier vorliegenden, expliziten Fall spielt dieser Nachteil jedoch keine Rolle.

3.4 Numerische Beispiele

Die beiden Elemente aus den Kapiteln 3.2 und 3.3 werden an drei verschiedenen kleinen Beispielen getestet und bewertet. Die Leistungsfähigkeit der reduziert integrierten Vierknotenelemente (RI4) und der selektiv integrierten Vierknotenelemente (SI4) wird mit dem Verhalten der standardmäßig vollintegrierten Elemente (VI4) verglichen. Die Beispiele sind relativ einfacher Natur, um die verschiedenen Eigenschaften und Phänomene (Stabilität, Effizienz, Locking, usw.) separat analysieren zu können. Die dabei verwendeten, gebräuchlichen Materialparameter Elastizitätsmodul E , Querdehnzahl ν , Fließspannung σ_y und Verfestigungsmodul E_t werden in Kapitel 6 genauer vorgestellt.

3.4.1 Kerbe und Elastoplastizität

Eine Probe mit zwei Kerben wird im ebenen Verzerrungszustand auf Zug beansprucht. In Bild 3.4 sind die Geometrie, die Materialparameter und die Diskretisierung des Viertelsystems mit Randbedingungen dargestellt. Es wird ein linear elastisch-ideal plastisches Materialverhalten angenommen. Dieser auch von Nagtegaal et al. (1974) und de Souza Neto et al. (1996) verwendete Test gibt Aufschluss über die Leistungsfähigkeit der Elemente bei plastischem Materialverhalten unter Annahme isochoren plastischen Fließens, d.h. Inkompressibilität. Die Last-Verschiebungskurven in Bild 3.4 zeigen, dass die Elemente RI4 und SI4 in der Lage sind, die Existenz einer Grenzlast (ideale Plastizität!) darzustellen. Die zu beobachtende leichte Entfestigung ist in der geometrischen Nichtlinearität begründet. Mit dem Standardelement VI4 ergibt

sich dagegen aufgrund volumetrischen Lockings ein zu steifes, "künstlich verfestigendes" Verhalten.

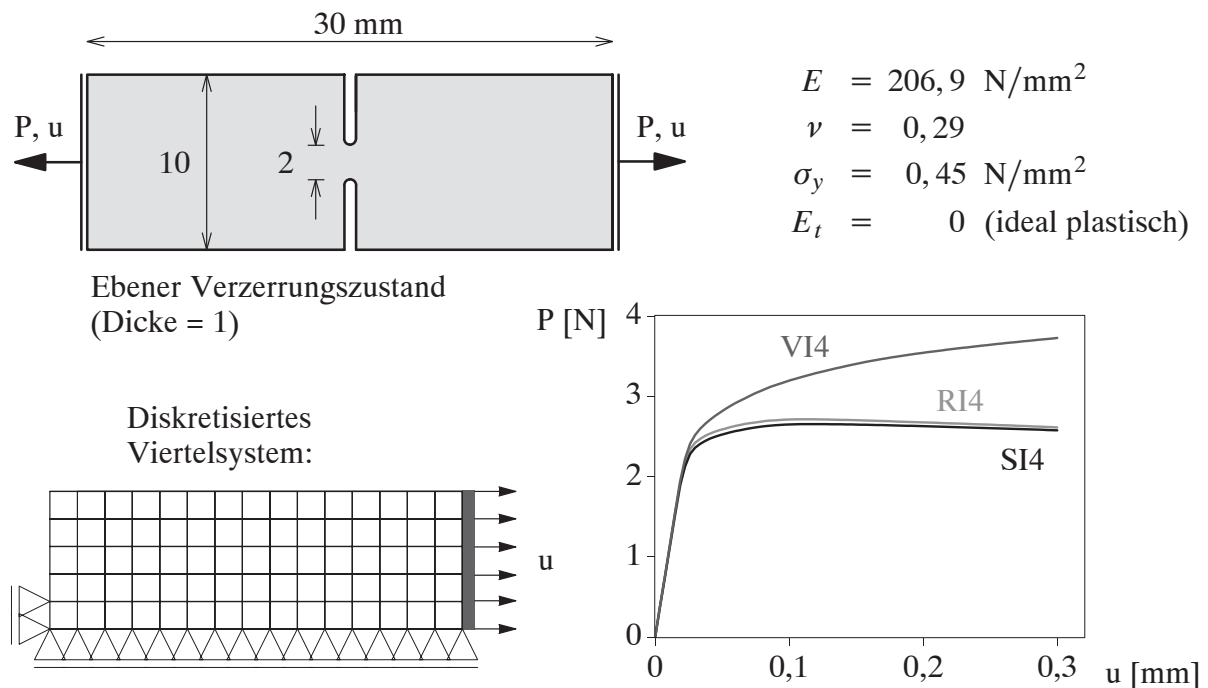


Bild 3.4: Gekerbte Scheibe: Geometrie, Materialparameter, Diskretisierung und Last-Verschiebungskurven

3.4.2 Kompression eines elasto-plastischen Blocks

Ein quadratischer Block aus ideal elasto-plastischem Material wird verschiebungsgesteuert um 15% komprimiert. Die zugehörigen Daten sind in Bild 3.5 zusammengefasst. Durch die dort dargestellte "Schwächung" von vier Elementen soll die Entstehung eines Scherbands kontrolliert werden. Ein ähnliches Beispiel verwenden Crisfield et al. (1995) und César de Sá et al. (2001) zur Validierung ihrer Elementformulierungen und stellen fest, dass einerseits mit Standardverschiebungselementen keine Lokalisierung darstellbar ist und andererseits viele "verbesserte" Elementformulierungen zu Instabilitäten in Form von Hourglassing neigen.

Bei Betrachtung der Last-Verschiebungskurve in Bild 3.6 ist kein entscheidender Unterschied zwischen den hier verwendeten Elementen festzustellen. Selbst das vollintegrierte Element VI4 zeigt ein nur geringfügig steiferes globales Systemverhalten als die verbesserten Elemente RI4 und SI4. Dafür sind die Unterschiede in den deformierten Netzen deutlich zu erkennen: Mit zunehmender "Weichheit" der Elemente (VI4 \rightarrow SI4 \rightarrow RI4) nimmt die Ausprägung des Scherbands zu. Die Verwendung des reduziert integrierten Elements ohne Stabilisierung führt zu starkem Hourglassing. Die damit verbundene Entartung der Elemente führt bereits nach 7,3%-iger Kompression zum Abbruch der Berechnung. Dieses Testbeispiel zeigt, dass die beschriebene Stabilisierung bei großen inelastischen Deformationen sehr gut funktioniert. Die Rechenzeit wird in diesem Beispiel durch die Unterintegration halbiert.

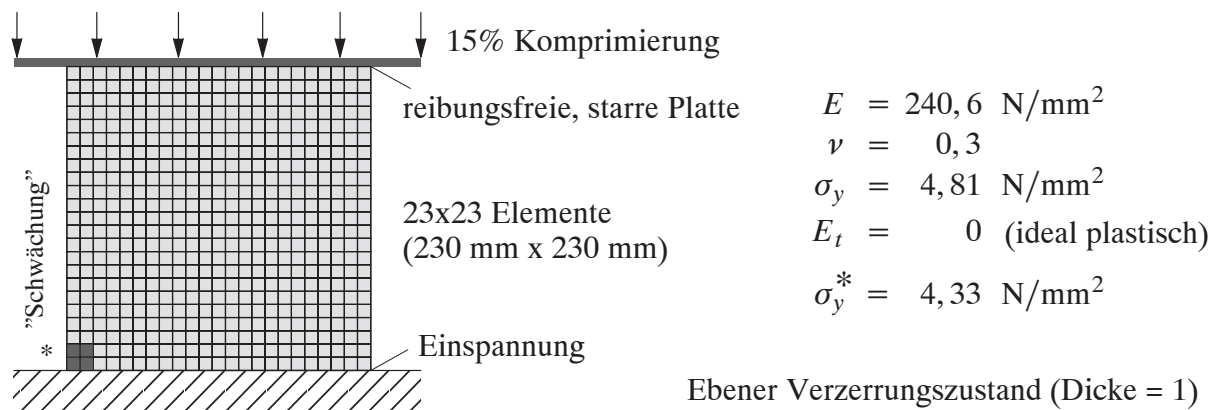


Bild 3.5: Elasto-plastischer Block: Geometrie, Diskretisierung und Materialparameter

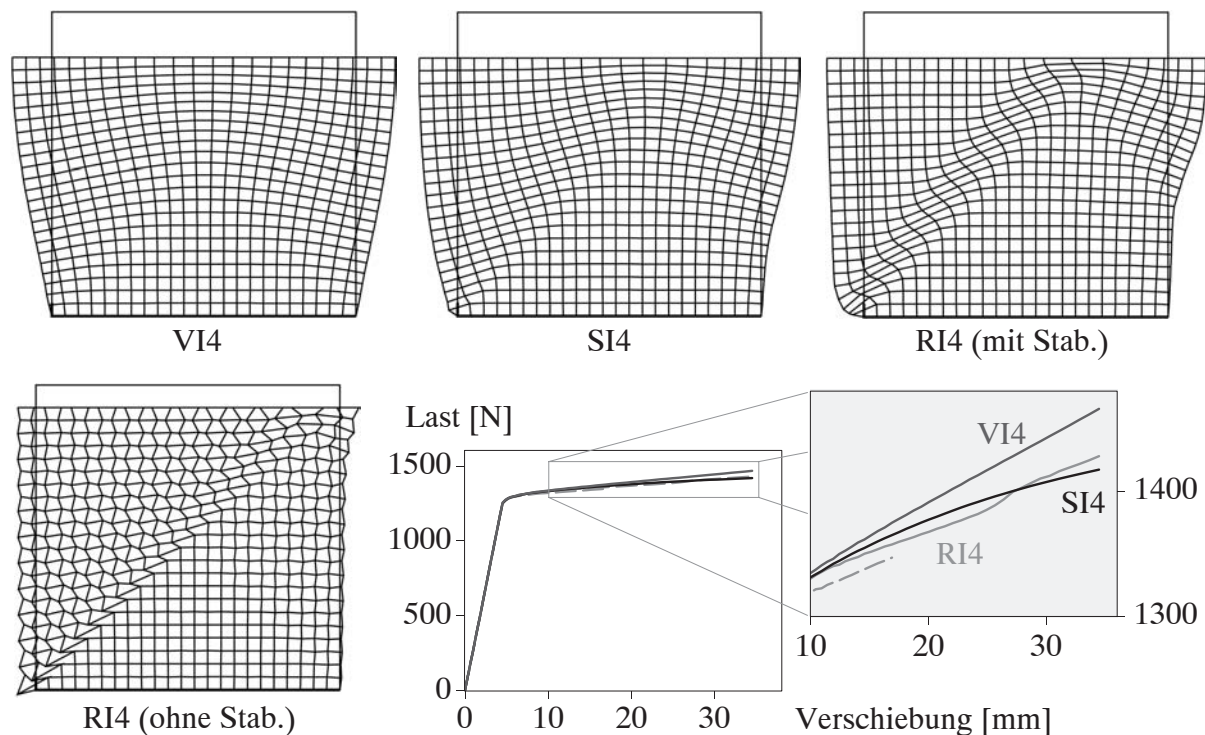


Bild 3.6: Elasto-plastischer Block: Deformierte Netze und Last-Verschiebungskurve

3.4.3 Cook's Membran

Ein eingespannter, trapezförmiger, elastischer Körper erfährt im ebenen Verzerrungszustand eine konstante Schubbeanspruchung von $p = 2,5 \text{ N/mm}$. Dieses Beispiel wird in der Literatur häufig verwendet, um die Leistungsfähigkeit der Finiten Elemente bei Problemen mit Biegung und Schub zu testen (z.B. Zienkiewicz und Taylor (2000) oder Puso (2000)). Geometrie, Randbedingungen, Materialdaten und deformierte Diskretisierung sind in Bild 3.7 dargestellt. In Berechnungen mit ansteigendem Diskretisierungsgrad ($2 \times 2 \rightarrow 4 \times 4 \rightarrow 8 \times 8 \rightarrow 16 \times 16 \rightarrow 32 \times 32$ Elemente) wird die Vertikalverschiebung des Punktes A ermittelt. Die Ergebnisse von Konvergenzstudien sind Bild 3.8 zu entnehmen. Schon bei einer „unkritischen“ Querdehnzahl von $\nu = 0,333$ zeigt sich mit den Elementen RI4 und SI4 ein im Vergleich zum Standardelement VI4 verbessertes Konvergenzverhalten aufgrund von geringerem Locking. Besonders deutlich

wird die Verbesserung dann bei nahezu inkompressiblem Material ($\nu = 0,495$): Die Konvergenzgeschwindigkeit von RI4 und SI4 ist deutlich höher als beim vollintegrierten Element VI4.

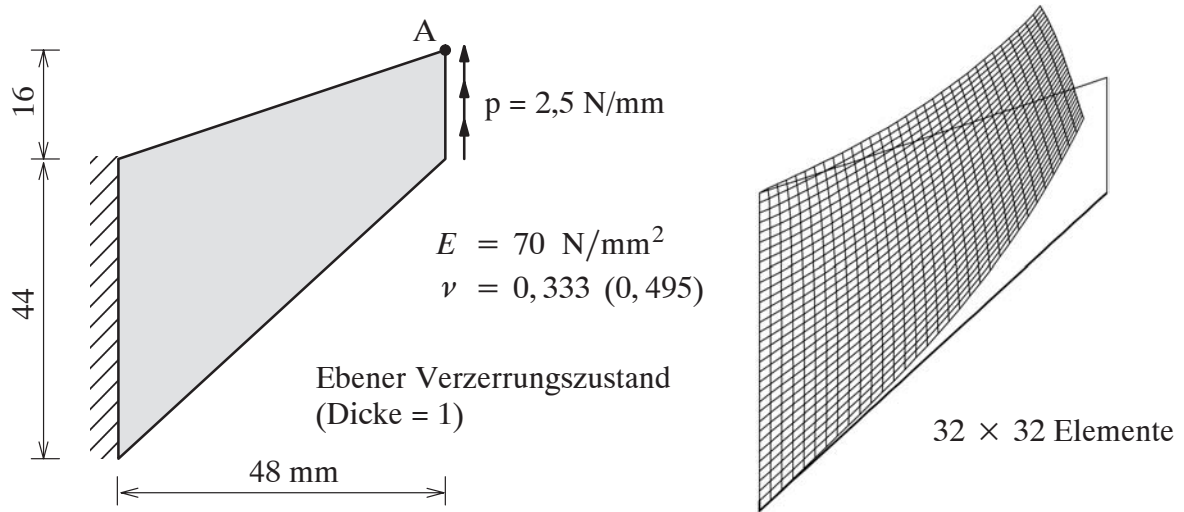


Bild 3.7: Cook's Membran: Daten und verformte Diskretisierung

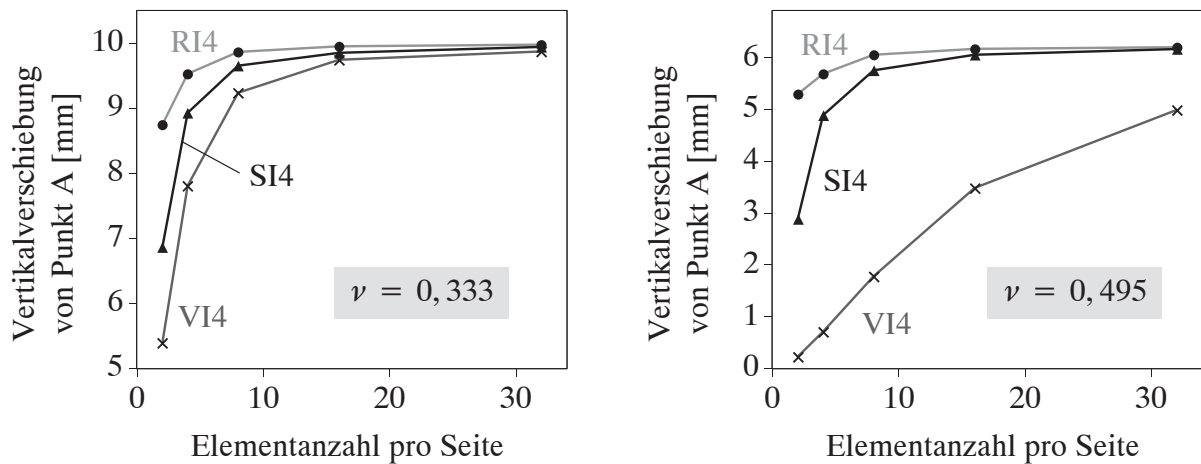


Bild 3.8: Cook's Membran: Konvergenzstudien für unterschiedliche Querdehnzahlen

Abschließend kann für die durchgeführten numerischen Beispiele festgehalten werden, dass die Elemente 'RI4' und 'SI4' im Vergleich zum Standardelement 'VI4' weitaus geringeres Locking und damit ein besseres Konvergenzverhalten zeigen. Das reduzierte integrierte Element 'RI4' ist sehr effizient, muss jedoch nach Abschnitt 3.2 stabilisiert werden, um das Auftreten von Hourglassmoden zu verhindern.

4 Adaptive Neuvernetzung

4.1 Einführung

Bei den in dieser Arbeit behandelten Impaktvorgängen und einer Vielzahl anderer praxisrelevanter transienter Probleme der Festkörpermechanik mit großen elasto-plastischen Deformationen ändern sich Geometrie und Lösung im Belastungsprozess sehr stark. Das kann die numerische Berechnung mit nur einer initial gewählten räumlichen Diskretisierung erschweren bzw. sogar unmöglich machen. Starke Elementverzerrungen führen entweder zu einer deutlichen Verschlechterung der Lösungsqualität in zumeist für den Prozess relevanten Bereichen oder bewirken im Extremfall sogar das Ende der Berechnung, z.B. wenn Elementdurchdringungen auftreten. Eine geeignete Möglichkeit, diesen Problemen zu begegnen, ist die adaptive Neuvernetzung während der Simulation. Durch automatisches und wiederholtes *Remeshing* wird gewährleistet, dass die Berechnung bis zum gewünschten Endzeitpunkt überhaupt durchgeführt werden kann und die Lösungsqualität nicht unter großen Elementverzerrungen leidet. Durch *Adaptivität* kann dabei für eine optimierte Netz-Konfiguration, d.h. die Minimierung von Diskretisierungsfehlern, gesorgt werden.

Die Vorteile des Einsatzes einer adaptiven Neuvernetzungsstrategie sind hier noch einmal in drei wesentlichen Punkten zusammengefasst:

- *Robustheit.* Bei einigen nichtlinearen Problemen kommt es bei Lagrange'scher Betrachtungsweise aufgrund großer Deformationen zu erheblichen Netzverzerrungen bis hin zur Entartung einzelner Elemente, was zum Abbruch der Simulation führt. In diesen Fällen ist eine Berechnung nur mit wiederholter Neuvernetzung möglich.
- *Qualität der Lösung.* Durch den intelligenten Einsatz adaptiver Methoden werden Diskretisierungsfehler minimiert bzw. reduziert. Die Genauigkeit der FE-Berechnung kann quantitativ oder zumindest qualitativ kontrolliert werden. → "Eine Verfeinerung von zu grob vernetzten Bereichen erhöht die Qualität der Lösung."
- *Effizienz.* Durch eine lösungsabhängige (adaptive) Diskretisierung mit lokal veränderlichem Approximationsgrad ergibt sich eine intelligente, optimale Verteilung der eingesetzten Rechenleistung. → "Eine Vergrößerung von zu fein vernetzten Bereichen erhöht die Effizienz der numerischen Berechnung."

Die theoretische und algorithmische Ausgestaltung einer adaptiven Strategie hängt stark von der betrachteten Fragestellung ab. Die offensichtlich komplexe Kombination aus großen Deformationen, nichtlinearem Materialverhalten, transienter Dynamik und Berücksichtigung von reibungsbehaftetem Kontakt stellt hohe Anforderungen an ein adaptives Konzept. Die oben aufgelisteten Vorteile können nur dann zur Geltung kommen, wenn die Strategie auf die beschriebenen Rahmenbedingungen intelligent abgestimmt ist. Außerdem sollte der Ablauf soweit wie möglich automatisch sein.

Der Kern einer adaptiven Strategie ist die Abschätzung und Beurteilung der Diskretisierungsfehler. Deshalb sollen im Folgenden mögliche Fehlerbewertungen aufgeführt und hinsichtlich ihrer

Eignung für transiente, nichtlineare Probleme diskutiert werden (Kapitel 4.2). Der gesamte Ablauf der adaptiven Strategie wird in Abschnitt 4.3 beschrieben. Dabei werden u.a. die speziell für diese Problematik entwickelten und implementierten Fehler- und Verfeinerungsindikatoren vorgestellt. In Kapitel 4.4 wird auf die Besonderheiten der Wiederherstellung des Gebietsrandes beim Remeshing im Kontext einer glatten Kontaktformulierung eingegangen. Abschließend wird in Abschnitt 4.5 anhand zweier numerischer Beispiele die Wirkungsweise der adaptiven Neuvernetzungsstrategie untersucht und bewertet.

4.2 Fehlerorientierte Adaptivität

In diesem Abschnitt sollen zunächst ein paar Begriffe und Definitionen zur Fehlerrechnung erläutert und Strategien zur Adaption der räumlichen Diskretisierung vorgestellt werden. Anschließend werden unterschiedliche Arten von Fehlerschätzern und Fehlerindikatoren genauer beschrieben und auf ihre Qualifikation für den Einsatz in einer adaptiven Neuvernetzungsstrategie zur Simulation transienter Impaktvorgänge hin überprüft.

4.2.1 Begriffe und Definitionen

Finite Element-Lösungen sind im allgemeinen aufgrund der endlichen Diskretisierung eines Gebiets und des endlichdimensionalen Funktionenraums, aus dem die Ansatzfunktionen gewählt werden, mit *Diskretisierungsfehlern* behaftet, d.h. sie stimmen nicht mit der exakten Lösung des mechanischen Modells überein. Es ist sehr wichtig, diesen Fehler zu kontrollieren, d.h. seine Größe abzuschätzen. Diese *Abschätzung von Fehlern* gehört zu den zentralen Aufgaben der numerischen Mathematik, da nur so die Qualität numerischer Lösungen beurteilt werden kann. Nicht zu verwechseln sind die Diskretisierungsfehler mit den *Modellierungsfehlern*, mit denen die unerwünschten Differenzen zwischen wirklicher Struktur und physikalischem - hier mechanischem - Modell bezeichnet werden. Wenn also im Folgenden von "Fehlern" gesprochen wird, sind immer die Diskretisierungsfehler gemeint.

Die FE-Methode erfüllt die ursprüngliche Differentialgleichung - im vorliegenden Fall die Impulsbilanz (2.11) - nicht exakt. Das Einsetzen der diskreten Lösung \mathbf{u}^h in die starke Form der Differentialgleichung führt auf den Fehler bzw. das *Residuum* $\mathfrak{R}(\mathbf{u}^h)$

$$\mathfrak{R}(\mathbf{u}^h) = \rho \ddot{\mathbf{u}}^h - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}^h - \rho \bar{\mathbf{b}}^h . \quad (4.1)$$

Der *Fehler in den Verschiebungen* \mathbf{e} ist definiert als die Differenz zwischen der exakten, kontinuierlichen Lösung \mathbf{u} und der diskreten, approximierten FE-Lösung \mathbf{u}^h

$$\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}^h . \quad (4.2)$$

Das Ziel einer Fehlerkontrolle ist es nun, eine Diskretisierung und eine diskrete Lösung \mathbf{u}^h zu finden, für die mit einer gegebenen Toleranz TOL und einer gegebenen Norm $\|\cdot\|$ die Bedingung

$$\|\mathbf{e}\| \leq TOL \quad (4.3)$$

für den wahren Fehler \mathbf{e} erfüllt wird, wobei der Rechenaufwand möglichst gering sein soll. Eine häufig verwendete Norm ist die Energienorm $\|\cdot\|_E$

$$\| \mathbf{u} \|_E := \left[\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dv \right]^{1/2}, \quad (4.4)$$

die eine natürliche Norm für Problemstellungen der Elastizitätstheorie darstellt.

Da die exakte Lösung in den meisten Fällen unbekannt ist, muss eine Abschätzung bzw. Bewertung des Fehlers erfolgen. Kann eine tatsächliche Abschätzung des wahren Fehlers \mathbf{e} mit einer garantierten oberen und unteren Schranke in der Form

$$C_1 \eta \leq \| \mathbf{e} \| \leq C_2 \eta \quad (4.5)$$

gefunden werden, so heißt η (globaler, a posteriori) *Fehlerschätzer*. C_1 und C_2 sind positive Konstanten, die unabhängig von der exakten Lösung \mathbf{u} , dem gewählten FE-Netz oder den Materialparametern sind. Damit ist eine Aussage über die Größe des Gesamtfehlers möglich und es kann iterativ eine optimale räumliche Diskretisierung bezüglich einer Fehlertoleranz (Gleichung (4.3)) ermittelt werden. Fehlerschätzer benötigen eine gesicherte mathematische Grundlage und sind relativ aufwändig in ihrer Umsetzung und Berechnung. Insbesondere die Bestimmung der Konstanten C_i , die vom Typ der partiellen Differentialgleichung abhängen und für die *Schärfe* der Schranken verantwortlich sind, ist für komplexe Problemstellungen schwierig bzw. (noch) nicht möglich. Genauer dazu findet sich z.B. bei Johnson und Hansbo (1992).

Es kann oftmals jedoch sehr wohl eine Größe bestimmt werden, die einen Hinweis auf die Verteilung des Diskretisierungsfehlers gibt. Diese Größe wird dann als *Fehlerindikator* bzw. *Verfeinerungsindikator* bezeichnet. Solche Indikatoren basieren meistens auf anschaulichen physikalischen Überlegungen und sind relativ leicht zu ermitteln und umzusetzen. Allerdings liefern sie im Gegensatz zu Fehlerschätzern nur qualitative Informationen über den Fehler. Man erfährt also nur, *wo* das Netz verfeinert werden muss, aber nicht genau *um wie viel*, d.h. die garantierte Einhaltung einer vorgegebenen Fehlertoleranz ist nicht möglich (Huerta et al. (1999)).

Wenn die Verteilung des Fehlers im betrachteten Gebiet bekannt ist, gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, die räumliche Diskretisierung dieser Fehlerverteilung entsprechend zu adaptieren: *h*-, *p*- und *r*-Adaptivität. Bei der *h-Adaptivität* wird ein Netz erzeugt, bei dem sich die Anzahl und Größe der Elemente nach den Anforderungen der Lösung richtet: In Bereichen, in denen die Genauigkeit erhöht werden muss, werden die Elementgrößen reduziert und umgekehrt. Die Anszordnung der Elemente bleibt dabei unverändert. Die Modifikation der Elementgrößen kann durch Unterteilung bzw. Verschmelzung von bestehenden Elementen (*Refinement*) oder durch eine komplette Neuvernetzung (*Remeshing*) erfolgen. *r-Adaptivität* bedeutet, dass lediglich die Knoten des bestehenden Netzes neu positioniert werden, um die Genauigkeitsordnung lokal zu verändern (z.B. Diaz et al. (1983)). Die Anzahl der Elemente und Knoten bleibt konstant. Dies ist im allgemeinen auch bei der *p-Adaptivität* der Fall, deren Idee darin besteht, durch Erhöhung der Element-Ansatzordnungen eine Anreicherung der Interpolation und damit eine Steigerung der Genauigkeit zu erreichen (z.B. Babuska et al. (1981), Rank et al. (1998)). In Bild 4.1 ist an einem kleinen FE-Netz schematisch dargestellt, wie sich die drei unterschiedlichen adaptiven Methoden auswirken.

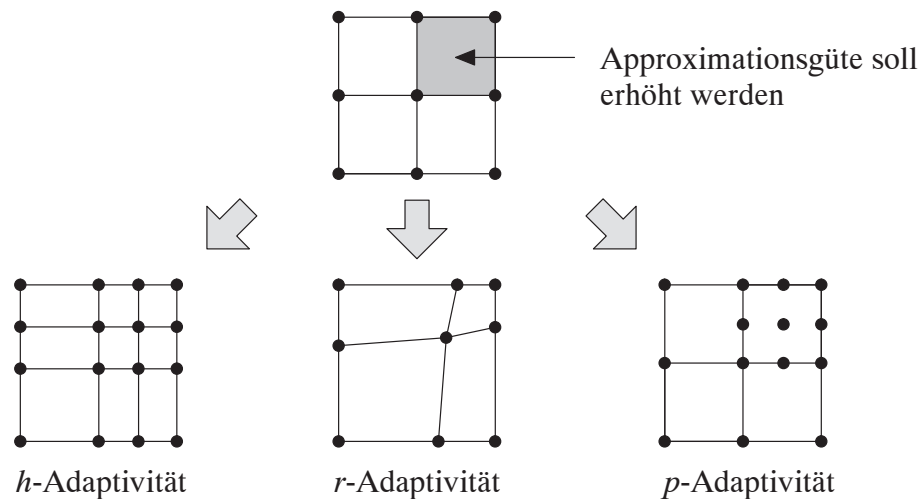


Bild 4.1: Unterschiedliche Strategien zur Adaption der räumlichen Diskretisierung

Die in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen sind durch große Deformationen und damit einhergehenden erheblichen Änderungen der Netz-Topologie gekennzeichnet. Die dafür notwendige hohe geometrische Flexibilität bietet im Grunde nur die h -Adaptivität mit wiederholter, kompletter Neuvernetzung des betrachteten Gebiets. Weitere Vor- und Nachteile der Verfahren werden z.B. bei Huerta et al. (1999) diskutiert.

4.2.2 Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren

Nun soll detaillierter auf die verschiedenen Strategien zur Fehlerschätzung bzw. Fehlerbewertung eingegangen werden und dabei ihre Eignung für die in dieser Arbeit behandelten Probleme beurteilt werden. Die hier getroffene Klassifizierung in residuenbasierte Fehlerschätzer, glättungsbasierte Fehlerschätzer/-indikatoren, gradientenbasierte Fehlerindikatoren, physikalisch motivierte und geometrische Verfeinerungsindikatoren ist im Hinblick auf die in dieser Arbeit verwendeten Indikatoren gewählt worden.

- **Residuenbasierte Fehlerschätzer**

Sie bauen auf den Ideen von Babuska und Rheinboldt (1978a, 1978b) auf. Das dabei zugrunde liegende Prinzip ist die Abschätzung des Fehlers in der Energienorm durch das Residuum bzgl. der starken Form der Differentialgleichung. Residuale Fehlerschätzer liefern im Idealfall garantierte obere und untere Grenzen für den wahren Fehler (siehe Gleichung (4.5)). Man unterscheidet zwischen impliziten und expliziten residualen Fehlerschätzern. Bei der *impliziten* Variante wird das Gebiet in entkoppelte Teilprobleme zerlegt, die jeweils aus einem oder mehreren Finiten Elementen bestehen. Die Ränder der Teilprobleme erhalten entweder feste Lager (*lokale Dirichlet-Probleme*) oder vorgeschriebene Spannungen (*lokale Neumann-Probleme*), um das lokale Gleichgewicht sicherzustellen. Diese Teilprobleme werden jeweils mit Residuen belastet, die aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems hervorgehen, und anschließend näherungsweise berechnet (Cirak (1998)). Die inneren Energien der Teilprobleme werden aufsummiert und liefern somit eine Abschätzung für den Energienormfehler der betrachteten Gesamtstruktur. Bei der *expliziten* Fehlerschätzung werden direkt die bekannten Residuen der aktuellen FE-Approximation verwendet, weshalb diese Variante numerisch weniger aufwändig ist. Die lokalen

Probleme werden mit geeigneten Methoden für ein Referenzelement abgeschätzt. Eine genauere Beschreibung dieser Strategien findet sich z.B. bei Bank und Weiser (1985) oder Ainsworth und Oden (1993, 2000). Ist man nicht primär an der Kontrolle eines globalen Fehlers (z.B. Energie) interessiert, sondern an lokalen Größen (z.B. Auflagerkräfte, Verschiebungen an einer bestimmten Stelle), wie es für viele Ingenieur-Fragestellungen der Fall ist, so ist es wünschenswert, auch den Fehler für diese lokalen Größen zu kontrollieren. Dies erfüllen so genannte *zielorientierte Fehlerschätzer*. Bei dieser Art der Fehlerabschätzung wird zusätzlich zum primalen Problem (System mit Ausgangsbelastung) ein duales Problem (System mit lokaler Belastung für die interessierende lokale Größe) gelöst. Im Sinne einer Einflussfunktion werden die Fehleranteile für eine bestimmte Größe gewichtet, wodurch globale Stabilitätskonstanten wegfallen. Solche Ansätze finden sich u. a. bei Becker und Rannacher (1996), Suttmeier (1997), Cirak (1998), Cirak und Ramm (1998, 2000), Oden und Prudhomme (2001), Steeb (2002) oder Steeb et al. (2002). Für komplexe mechanische Probleme - etwa dem in dieser Arbeit betrachteten, geometrisch und materiell nichtlinearen, transienten Fall - stehen derzeit keine derartigen Fehlerschätzer zur Verfügung. Ebenso sind Fragen der Fehlerakkumulation und Fehlerkopplung in Raum und Zeit für solche Problemstellungen noch weitestgehend unbeantwortet. Man ist daher an alternativen Techniken zur Verwirklichung "fehlerkontrollierter" und damit "qualitätsgesicherter" Simulationen interessiert.

- **Glättungsbasierte Fehlerschätzer/-indikatoren**

Sie beruhen auf einem Vergleich der FE-Lösung mit einer lokal "verbesserten" Lösung. Da die Gradienten von FE-Lösungen (z.B. Spannungen) im allgemeinen Sprünge an Elementgrenzen aufweisen, berechnet man die "verbesserten" Gradienten durch lokale Glättungs- bzw. Extrapolationsoperationen (Zienkiewicz und Zhu (1992a), Blacker und Belytschko (1994), Booromand und Zienkiewicz (1997)). Der Fehler berechnet sich dann aus der Energiemom der Differenz der verbesserten Spannungen σ^* und den Spannungen aus der FE-Lösung σ^h

$$\|e^{zz}\|_E^2 \approx \int_{\varphi(\Omega)} \left((\sigma^* - \sigma^h) : C^{e-1} : (\sigma^* - \sigma^h) \right) dv . \quad (4.6)$$

C^e ist hierbei der elastische Werkstofftensor. Im linearen Sonderfall kann gezeigt werden, dass diese von Zienkiewicz und Zhu (1987, 1992b) erstmals vorgestellte Methode eine echte Abschätzung des wahren Fehlers liefert (Carstensen und Funken (2001)). Für allgemeine nichtlineare Probleme können mit dieser Art der Fehlerbewertung jedoch mathematisch keine Schranken für den wahren Fehler bewiesen werden, weshalb man dann von Fehlerindikatoren spricht. In zahlreichen Arbeiten wurde festgestellt, dass trotzdem in vielen Fällen numerisch sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Insbesondere sind diese Indikatoren auf eine größere Klasse von Problemen anwendbar als die residuen-basierten Fehlerschätzer und werden deshalb in der Praxis häufig eingesetzt.

Anmerkung: Obwohl die Herleitung und Umsetzung residuen- und glättungsbasierter Fehlerschätzer sehr unterschiedlich ist, kann eine Verwandtschaft dieser Verfahren für ausgewählte Problemstellungen und bestimmte Glättungstechniken gezeigt werden (Rank und Zienkiewicz (1987), Zhu (1997), Zhu und Zhang (1999)).

Der für lineare Probleme konzipierte, glättungsbasierte Fehlerschätzer von Zienkiewicz und Zhu (1987) wurde von verschiedenen Autoren modifiziert und auf komplexere Probleme angewandt. So vergleichen z.B. Belytschko und Tabbara (1993) die Verzerrungen aus der FE-Lösung mit verbesserten Verzerrungen anstelle von Spannungen (Gleichung (4.6)) für die Fehlerindikation bei dynamischen, materiell nichtlinearen Problemen mit Lokalisierung. Fourment und Chenot (1995) wenden für die Simulation von Umformprozessen einen modifizierten ZZ-Indikator an, bei dem ein Korrekturterm zum Einsatz kommt, der die Erfüllung des Gleichgewichts auch für die geglätteten Spannungen garantiert. Peric et al. (1999) erweiterten den Einsatzbereich glättungsbasierter Fehlerschätzer auf transiente Probleme mit finiten elasto-plastischen Verzerrungen und großen Deformationen. Weitere Hinweise zur Anwendung von glättungsbasierten Indikatoren findet sich u. a. bei Selman und Hinton (1993), Lee und Bathe (1994), Peric et al. (1994), Wiberg und Li (1994), Owen und Vaz (1999) oder Mathisen et al. (1999).

- **Gradientenbasierte Fehlerindikatoren**

Bei dieser Methode wird die Tatsache ausgenutzt, dass Finite Element-Lösungen im allgemeinen in Bereichen hoher Lösungs-Gradienten eine geringere Genauigkeit aufweisen als in Bereichen mit niedrigen Gradienten (Moshfegh et al. (2000), Erhart et al. (2001), Luo und Häussler-Combe (2003)). Mit 'Gradienten' sind hier nicht nur die Spannungen gemeint, sondern lokale Änderungen beliebiger Größen, wie z.B. Verzerrungen, plastische Arbeit, usw.. Die Netzverfeinerungsstrategie besteht aus der gleichmäßigen Verteilung dieser Gradienten im Lösungsgebiet, was dazu führt, dass Bereiche mit hohen Gradienten verfeinert werden und Bereiche mit geringen Gradienten eine Vergrößerung der Netzdichte erfahren. In Anlehnung an ein Verfahren zur Glättung von Spannungen (superconvergence patch recovery, Zienkiewicz und Zhu (1992a)) können lokal die notwendigen Gradienten maßgebender Größen, wie z.B. Spannungen oder Verzerrungen, bestimmt werden. Da diese Indikatoren sehr gut für transiente Impakt-Probleme geeignet sind, werden sie in dieser Arbeit in der adaptiven Strategie eingesetzt und in Kapitel 4.3.2 genauer beschrieben.

- **Direkte, physikalisch motivierte Verfeinerungsindikatoren**

Aufgrund physikalischer Überlegungen lassen sich relativ einfache, lokale Verfeinerungsindikatoren entwickeln. Hierbei werden für das mechanische Problem relevante Größen, wie z.B. die plastische Arbeit oder die Dehnrates, direkt zur Ermittlung einer Elementgrößenverteilung für die Netzverfeinerung bzw. -vergrößerung herangezogen, d.h. die Berechnung einer verbesserten Lösung oder von Gradienten kann entfallen. Das Ziel ist es, durch eine gleichmäßige Verteilung solcher relevanten Größen im FE-Netz die Diskretisierungsfehler kleinzuhalten. Bei einer sinnvollen Wahl der Größe(n) können physikalisch lokale Phänomene erkannt werden und die Diskretisierung folgt den entscheidenden physikalischen Vorgängen auf intelligente Art und Weise. Direkte, physikalisch motivierte Verfeinerungsindikatoren werden z.B. von Baehmann et al. (1988), Pastor et al. (1991), Batra und Ko (1992), Cuitiño und Ortiz (1992), Marusich und Ortiz (1995), Deb et al. (1996), Petersen und Martins (1997), Camacho und Ortiz (1997) und Yadav et al. (2001) im Rahmen adaptiver Strategien verwendet. In Abschnitt 4.3.2 werden derartige Indikatoren im Detail vorgestellt.

- **Geometrische Verfeinerungsindikatoren**

Hier werden geometrische Eigenschaften des FE-Netzes, wie z.B. Elementverzerrungen oder Oberflächenkrümmungen dazu verwendet, die Netzdichte beim Remeshing zu modifizieren. So wird z.B. bei Dyduch et al. (1992) die Diskretisierung dort lokal verfeinert, wo stark verzerrte Elemente auftreten. Die Anwendbarkeit derartiger "a-priori"-Indikatoren ist allerdings beschränkt, da das physikalische Verhalten der Struktur nicht in Betracht gezogen wird. Sie eignen sich jedoch gut zur einfachen Analyse der Netzqualität und als Entscheidungshilfe, ob eine Neuvernetzung notwendig ist oder nicht (siehe Abschnitt 4.3.1). Eine gute Übersicht über derartige Indikatoren findet sich z.B. bei Haufe (1995) oder Field (2000). In Kapitel 4.3.2 wird ein geometrischer Verfeinerungsindikator eingeführt, mit dem die Diskretisierungsfehler in stark gekrümmten Randbereichen kontrolliert werden können.

Anmerkung 1: In der mathematik-nahen Literatur zur Fehlerschätzung werden im Grunde nur residuenbasierte und glättungsbasierte Fehlerschätzer behandelt. Eine gute Einführung/Übersicht zur mathematischen Begründung der Fehlerschätzer findet sich z.B. bei Johnson und Hansbo (1992), Verfürth (1995) oder Ainsworth und Oden (2000).

Anmerkung 2: Die glättungsbasierten und die gradientenbasierten Fehlerindikatoren haben gemeinsam, dass eine Mittelung der diskreten Integrationspunktwerte in einem Elementpatch durchgeführt wird. Allerdings unterscheiden sie sich in der Form, wie diese gemittelte Lösung zur Entwicklung eines Indikators eingesetzt wird. Bei den glättungsbasierten Indikatoren geht die Differenz zwischen FE-Lösung und gemittelter Lösung in die Energienorm ein und gibt damit einen Hinweis auf die Größe des Fehlers. Bei den gradientenbasierten Indikatoren wird dagegen die gemittelte Lösung dazu verwendet, die lokale Änderung bzw. den Gradienten der Lösung festzustellen und daraus Rückschlüsse auf die Größe des Fehlers zu ziehen.

4.3 Adaptive Strategie für nichtlineare, transiente Probleme

Die wesentlichen Bestandteile einer Strategie zur adaptiven Neuvernetzung sind (i) ein Kriterium für eine Remeshing-Entscheidung, (ii) eine sinnvolle Bewertung der Diskretisierungsfehler und ein Ansatz zur Überführung der Fehlerverteilung in eine Netzdichteverteilung, (iii) ein Werkzeug zur automatischen Netzgenerierung und (iv) Methoden zur Weitergabe der relevanten Informationen von der alten an die neue Diskretisierung. Die theoretische Ausgestaltung und die numerische Umsetzung der einzelnen Punkte ist Inhalt dieses Kapitels.

Gute Beschreibungen alternativer adaptiver Strategien für nichtlineare, transiente Probleme finden sich bei Camacho und Ortiz (1997), Peric et al. (1999) oder Cottrell et al. (2003).

4.3.1 Remeshing-Entscheidung und Kontrolle der Netzqualität

Innerhalb einer adaptiven Strategie gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten, zu entscheiden, wann eine Neuvernetzung notwendig ist. Zum einen können zu Beginn der Berechnung konkrete Zeitpunkte für Remeshing festgelegt werden, was allerdings ohne vorherige

Kenntnis des Simulationsablaufs schwierig bzw. i. Allg. nicht sinnvoll ist. Bei der zweiten Möglichkeit wird in regelmäßigen Abständen anhand *geeigneter Kontrollkriterien* automatisch überprüft, ob die Berechnung mit der bestehenden Diskretisierung weitergeführt werden kann oder ob eine Neuvernetzung durchgeführt werden muss. Dafür sind zwei verschiedene Kontrollkriterien mit unterschiedlichen Eigenschaften denkbar:

- *Lösungsqualität.* Die Qualität der FE-Lösung wird mit Hilfe einer Fehlerbewertung, wie in Kapitel 4.2.2 vorgestellt, überprüft. Dieses Vorgehen erlaubt eine relativ genaue Beurteilung, ist allerdings für eine reine Remeshing-Entscheidung zu aufwändig und wird deshalb nach Kenntnis des Autors in diesem Zusammenhang nicht verwendet.
- *Netzqualität.* Die Geometrieigenschaften der Finiten Elemente werden anhand verschiedener Qualitätsmaße kontrolliert. Wird eine vorgegebene Toleranzbedingung von einem oder mehreren Elementen verletzt, d.h. treten erhebliche Elementverzerrungen auf, wird eine Neuvernetzung gestartet. Diese Methode ist für Probleme mit großen Deformationen gut geeignet und wird deshalb sehr häufig in adaptiven Strategien verwendet (Habraken und Cescotto (1990), Dyduch et al. (1992), Camacho und Ortiz (1997)). Im Folgenden werden entsprechende Qualitätsmaße vorgestellt.

Es existieren verschiedene Qualitätsmaße für Finite Elemente. Häufig werden unterschiedliche Kriterien, wie z.B. Seitenverhältnisse oder Winkelabweichungen zu einem Gesamtmaß kombiniert, um verschiedene Verzerrungsphänomene gleichzeitig zu erfassen (Lee und Bathe (1993), Haufe (1995) und Field (2000)).

An dieser Stelle werden die verwendeten Qualitäts-Kriterien für Drei- und Vierknotenelemente und das daraus resultierende Gesamtqualitätsmaß genauer vorgestellt. Das *In/Umkreis-Kriterium* IU_{Δ} für Dreiecke ist definiert als das Verhältnis des Inkreisradius r_i zum Umkreisradius r_u (siehe Bild 4.2). Für ein gleichseitiges Dreieck nimmt dieses Verhältnis den Wert 0.5 an und so bietet sich folgende Skalierung an

$$IU_{\Delta} = 2 \frac{r_i}{r_u} , \quad IU_{\Delta} \in [0, 1] . \quad (4.7)$$

Auch die weiteren Kriterien sind so normiert, dass der Wertebereich zwischen 0 (irreguläres Element) und 1 (optimales Element) liegt. Diese Normierung ist für die Vergleichbarkeit verschiedener Kriterien hilfreich und für eine spätere Kombination unbedingt notwendig. Um das In/Umkreis-Kriterium IU_{\square} für ein Viereck zu erhalten, wird das Element gedanklich in vier Dreiecke unterteilt und die entsprechenden Inkreis- und Umkreisradien berechnet. Der kleinste Verhältniswert bestimmt dann die Größe des Kriteriums:

$$IU_{\square} = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)} \min_{t=1..4} \left\{ \left(\frac{r_i}{r_u} \right)_t \right\} , \quad IU_{\square} \in [0, 1] . \quad (4.8)$$

Ein weiteres Qualitätskriterium für Dreiecke ist das *Innenwinkel-Kriterium* CA_{Δ} (corner angle), bei dem die maximale Abweichung der drei Innenwinkel α_c vom "optimalen Winkel" 60° entscheidend ist (siehe Bild 4.2 Mitte):

$$CA_{\Delta} = 1 - \max_{c=1..3} \begin{cases} \frac{60^{\circ} - \alpha_c}{60^{\circ}} & \text{für } 0 \leq \alpha_c \leq 60^{\circ} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_c - 60^{\circ}}{60^{\circ}} \right) & \text{für } 60^{\circ} \leq \alpha_c \leq 180^{\circ} \end{cases} \quad (4.9)$$

mit $CA_{\Delta} \in [0, 1]$. Für das Innenwinkel-Kriterium eines Vierecks CA_{\square} wird der Innenwinkel α_c mit der größten Abweichung vom "optimalen Winkel" 90° betrachtet (siehe Bild 4.2 rechts):

$$CA_{\square} = 1 - \max_{c=1..4} \left\{ \frac{|\alpha_c - 90^{\circ}|}{90^{\circ}} \right\}, \quad CA_{\square} \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

Bei einer Analyse der Netzqualität werden für alle Elemente - Dreiecke und Vierecke - diese beiden Kriterien berechnet und jeweils zu einem Gesamtmaß kombiniert:

$$QUAL_{\Delta} = \frac{1}{2} (IU_{\Delta} + CA_{\Delta}), \quad QUAL_{\Delta} \in [0, 1], \quad (4.11)$$

$$QUAL_{\square} = \frac{1}{2} (IU_{\square} + CA_{\square}), \quad QUAL_{\square} \in [0, 1]. \quad (4.12)$$

Anstelle dieser Mittelwertbildung wäre auch eine andere Gewichtung der Kriterien denkbar. Wird nun vom Element mit dem niedrigsten Qualitätswert ein vorgegebener Toleranzwert unterschritten, wird automatisch eine Neuvernetzung des gesamten Gebiets eingeleitet.

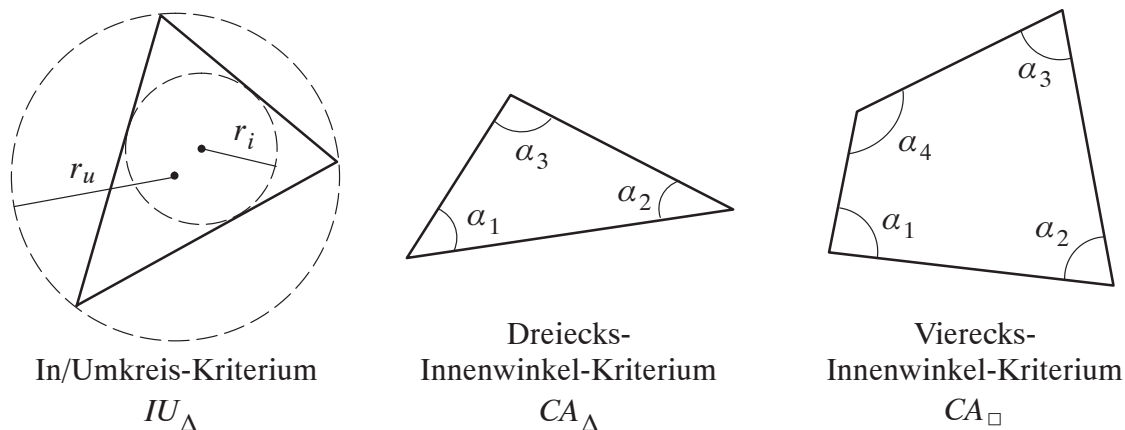


Bild 4.2: Definitionen für Qualitätskriterien von Drei- und Vierknotenelementen

4.3.2 Fehlerbewertung und Netzdichteverteilung

Von den in Kapitel 4.2.2 aufgeführten Möglichkeiten zur Fehlerbewertung eignen sich für den geometrisch und materiell nichtlinearen, transienten Fall die gradienten-basierten Fehlerindikatoren, die physikalisch motivierten und die geometrischen Verfeinerungsindikatoren. Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden werden im Folgenden vorgestellt. Dabei wird auch beschrieben, wie jeweils aus den Indikatoren eine Netzdichte bzw. Elementgröße für die adaptive Neuvernetzungs-Strategie ermittelt wird.

• Gradientenbasierte Fehlerindikatoren

Gradientenbasierte Indikatoren nutzen den Zusammenhang zwischen der Größe lokaler Gradienten und der Qualität der Lösung. Welche physikalischen Größen zur Herleitung eines sol-

chen Indikatoren am besten geeignet sind, hängt im wesentlichen vom betrachteten Problem ab. Hier sollen fünf verschiedene Größen vorgestellt und diskutiert werden. In Tabelle 4.1 sind die entsprechenden Definitionen zusammengefasst, wobei κ der Kompressionsmodul und μ der Schubmodul ist.

Volumetrischer Anteil der Verzerrungsenergie	$\psi_1 := \frac{1}{2} \kappa (\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e))^2$
Deviatorischer Anteil der Verzerrungsenergie	$\psi_2 := \mu (\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}^e) : \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}^e))$
Hydrostatische Spannung	$\psi_3 := \kappa \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e)$
Von Mises-Spannung	$\psi_4 := \mu \sqrt{2(\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}^e) : \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}^e))}$
Plastische Arbeit	$\psi_5 := \int_{t_0}^t J^{-1} \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dt$

Tabelle 4.1 Relevante Größen für gradientenbasierte Fehlerindikatoren

Es ist offensichtlich, dass durch die Größen ψ_1 und ψ_3 vor allem elastische Volumenänderungen erfasst werden, wohingegen ψ_2 und ψ_4 hauptsächlich elastisches Formänderungsverhalten berücksichtigen. Durch die plastische Arbeit ψ_5 werden plastische Zonen der betrachteten Struktur erfasst. Das Einsatzgebiet und die Wirksamkeit der entsprechenden Gradientenindikatoren wird in späteren Beispielen aufgezeigt.

Zur Herleitung des Indikators müssen an allen Knoten⁵ des alten Netzes die Gradienten der relevanten Größen berechnet werden. Da die Werte der Größen nur an den Integrationspunkten vorliegen, werden zur Berechnung der Knotenwerte jeweils die an einen Knoten angeschlossenen Elemente (Elementpatch) betrachtet. Je nach Lage des Knotens und der Art der Integration - voll oder reduziert - stehen unterschiedlich viele Stützstellen zur Verfügung (siehe Bild 4.3). Um aus den Werten an den Stützstellen den Gradienten am Knoten zu bestimmen, wird die SPR-Methode (superconvergent patch recovery) verwendet, die ursprünglich entwickelt wurde, um aus den an Integrationspunkten vorliegenden Spannungen die dazugehörigen Werte an den Knoten zu erhalten (Zienkiewicz und Zhu (1992a)). Mit Hilfe dieser Ergebnisglättung erhält man lokal im Elementpatch einen kontinuierlichen Verlauf der Lösung, wodurch die Berechnung des Lösungsgradienten am betrachteten Knoten möglich wird.

5. Der Grund hierfür ist, dass der später vorgestellte Freivernetzer Informationen über die zu generierenden Elementgrößen an den Knoten des alten Netzes benötigt.

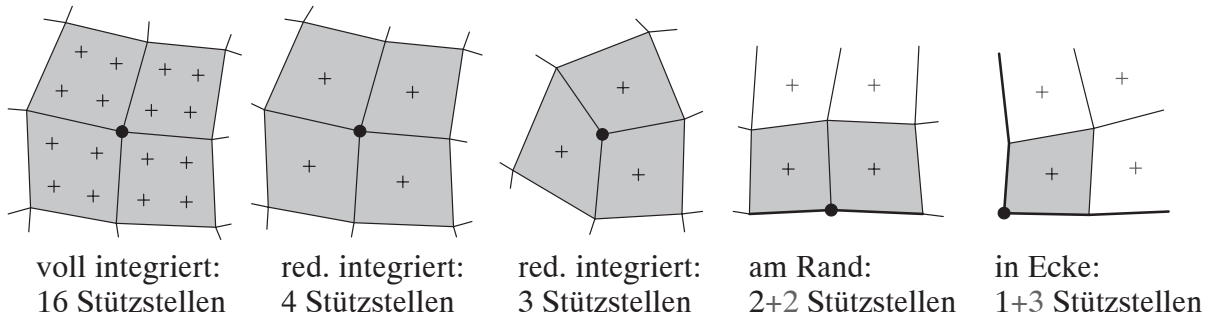


Bild 4.3: Verschiedene Elementpatches zur Gradientenberechnung

Zur Ermittlung einer kontinuierlichen Lösung, die lokal die diskrete FE-Lösung bestmöglich approximiert, wird zunächst für die betrachtete Größe ψ_k im Elementpatch ein Polynomansatz gemacht

$$\psi_k(x, y) := \mathbf{P}(x, y) \mathbf{a} . \quad (4.13)$$

Im Vektor $\mathbf{P}(x, y)$ sind die "Ansatzfunktionen" für die Interpolation und im Vektor \mathbf{a} die zugehörigen, noch unbekanntenen Koeffizienten enthalten. Für Elementpatches mit mehr als drei Stützstellen wird - den Formfunktionen von Drei- bzw. Vierknotenelementen entsprechend - ein bilinearer Ansatz verwendet, d.h.

$$\mathbf{P}(x, y) = [1, x, y, xy] , \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T . \quad (4.14)$$

Stehen nur drei Integrationspunkte zur Verfügung (siehe Bild 4.3 mitte), so werden dagegen folgende Vektoren verwendet

$$\mathbf{P}(x, y) = [1, x, y] , \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T . \quad (4.15)$$

Bei weniger als drei Stützstellen muss der Patch erweitert werden, so dass mindestens drei Punkte im Einzugsbereich liegen (siehe Bild 4.3 rechts). Der nächste Schritt ist eine lokale Fehlerquadratminimierung zwischen dem gewählten Ansatz ψ_k und den diskreten Werten $\tilde{\psi}_{k,Q}$ an den n Integrationspunkten. Die Summe der Fehlerquadrate

$$D(\mathbf{a}) = \sum_{Q=1}^n \left(\psi_k(x_Q, y_Q) - \tilde{\psi}_{k,Q} \right)^2 = \sum_{Q=1}^n \left(\mathbf{P}(x_Q, y_Q) \mathbf{a} - \tilde{\psi}_{k,Q} \right)^2 \quad (4.16)$$

wird minimiert durch die Stationaritätsbedingung

$$\frac{\partial D(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = 0 . \quad (4.17)$$

Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten \mathbf{a} des Polynomansatzes:

$$\sum_{Q=1}^n \mathbf{P}^T(x_Q, y_Q) \mathbf{P}(x_Q, y_Q) \mathbf{a} = \sum_{Q=1}^n \mathbf{P}^T(x_Q, y_Q) \tilde{\psi}_{k,Q} . \quad (4.18)$$

Nach der Lösung dieses Gleichungssystems kann der Betrag des Gradienten am betrachteten Knoten (x_N, y_N) berechnet werden

$$g_k := \|\nabla\psi_k(x_N, y_N)\| = \left(\nabla\psi_k(x_N, y_N) \cdot \nabla\psi_k(x_N, y_N)\right)^{1/2}. \quad (4.19)$$

Graphische Interpretation: In Bild 4.4 ist nochmal schematisch an einer eindimensionalen Konfiguration die Idee der Gradientenberechnung dargestellt: Es wird eine kontinuierliche Fehlerquadratminimum-Kurve mit einem Polynomansatz $\psi_k(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{a}$ ermittelt, mit der die diskreten Integrationspunktswerte $\tilde{\psi}_{k,Q}$ bestmöglich approximiert werden. An der Position des betrachteten Knotens x_N kann nun der Gradient $g_k = \|\nabla\psi_k(x_N)\|$, d.h. die Steigung der kontinuierlichen Kurve, berechnet werden.

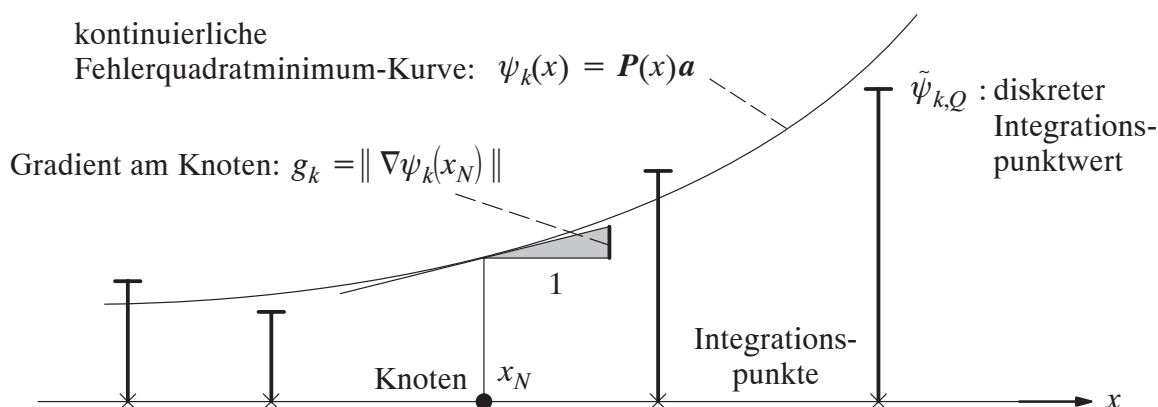


Bild 4.4: Bestimmung des Gradienten an einem Knoten (eindimensional)

Zur Entwicklung der gradientenbasierten Fehlerindikatoren wird nun folgender Zusammenhang zwischen dem Gradienten und der FE-Approximationsgüte verwendet: Die lokale Elementgröße des neuen Netzes muss invers proportional zur Größe des lokalen Gradienten sein, um eine Verfeinerung bei hohen Gradienten und eine Vergrößerung bei kleinen Gradienten zu erhalten. Da der Gradient nur eine qualitative und keine quantitative Aussage über den Diskretisierungsfehler macht, ist eine Kontrolle des Verfeinerungsgrads notwendig. Dazu wird der Gradient g_k mit einem vorgegebenen Faktor $\Delta\psi_k$ skaliert, der die maximal erlaubte Änderung der relevanten Größe pro Element beschreibt. Die neue Elementgröße $h_{e,k}^{neu}$ berechnet sich schließlich zu

$$h_{e,k}^{neu} = \frac{\Delta\psi_k}{g_k}. \quad (4.20)$$

- **Direkte, physikalisch motivierte Verfeinerungsindikatoren**

Das Ziel physikalisch motivierter Verfeinerungsindikatoren ist es, aus physikalischen Phänomenen direkt eine Information über den notwendigen Diskretisierungsgrad zu beziehen. Die entsprechende adaptive Neuvernetzungsstrategie besteht dann aus der gleichmäßigen Verteilung einer aussagekräftigen Größe, wodurch jedes Finite Element näherungsweise dieselbe Menge an "physikalischer Aktivität" erfahren soll. Bezüglich ihrer Implementierung und Berechnung sind diese Indikatoren relativ einfach, da keine Gradienten ermittelt werden müssen.

Im Folgenden sollen drei ausgewählte Indikatoren vorgestellt und diskutiert werden.

Ortiz und Quigley (1991) schlagen eine Strategie vor, die auf der gleichmäßigen Verteilung der Variation des Geschwindigkeitsfeldes beruht. Für ihren Indikator verwenden sie deshalb eine Norm, die die Variation der Geschwindigkeit in einem Element begrenzt. Für ein zweidimensionales Element wird dazu die maximale Differenz der Geschwindigkeitskomponenten zweier Knoten a und b ermittelt

$$\phi_1 := \max_i \left\{ \max_{a,b} |v_{ia}^e - v_{ib}^e| \right\}, \quad i = x, y, \quad a, b = 1 \dots n_{nodes} . \quad (4.21)$$

Dieser Indikator ist für die Analyse transienter Prozesse mit Wellenausbreitung oder Lokalisierung geeignet. Er erfasst allerdings keine statischen oder quasi-statischen Diskretisierungsfehler.

Batra und Ko (1992) verwenden die zweite Invariante des deviatorischen Verzerrungsratentensors als relevante Größe für ihren physikalisch motivierten Verfeinerungsindikator

$$\phi_2 := \int_{\varphi(\Omega_e)} \sqrt{\frac{1}{2} \text{dev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \text{dev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \, dv . \quad (4.22)$$

Dieser Indikator wird von Chen und Batra (1993), Camacho und Ortiz (1997) und Yadav et al. (2001) in adaptiven Strategien für die Simulation von Impact- und Penetrationsvorgängen verwendet.

Marusich und Ortiz (1995) setzen die Rate der plastischen Arbeit für ihre adaptive Neuvernetzungsstrategie ein

$$\phi_3 := \int_{\varphi(\Omega_e)} \dot{W}^p \, dv = \int_{\varphi(\Omega_e)} J^{-1} \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \, dv \quad (4.23)$$

und simulieren damit Maschinenbearbeitungsvorgänge bei hoher Geschwindigkeit, wie z.B. das Zerspanen von Metall. Dieser Indikator wird ebenfalls elementweise berechnet und ist besonders für nichtlineare, hochdynamische Probleme mit großen plastischen Deformationen geeignet.

Die drei hier vorgestellten Indikatoren sind noch einmal in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Variation des Geschwindigkeitsfeldes	$\phi_1 := \max_i \left\{ \max_{a,b} v_{ia}^e - v_{ib}^e \right\}$	Ortiz & Quigley (1991)
Integral der 2. Invariante des deviator. Verzerrungsratentensors	$\phi_2 := \int_{\varphi(\Omega_e)} \sqrt{\frac{1}{2} \text{dev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \text{dev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \, dv$	Batra & Ko (1992)
Rate der plastischen Arbeit	$\phi_3 := \int_{\varphi(\Omega_e)} \dot{W}^p \, dv$	Marusich & Ortiz (1995)

Tabelle 4.2 Relevante Größen für physikalisch motivierte Verfeinerungsindikatoren

Zur Ermittlung einer Netzdichte aus den elementweise berechneten, physikalisch motivierten Indikatoren wird eine ähnliche Strategie wie bei den gradientenbasierten Indikatoren verwendet

und damit die Kombination verschiedener Indikatoren ermöglicht. Die in einem "alten" Element berechnete Größe ϕ_l wird auf die dazugehörige alte Elementgröße h_e^{alt} bezogen

$$\tilde{g}_l = \frac{\phi_l}{h_e^{alt}} . \quad (4.24)$$

Die neue Elementgröße $h_{e,l}^{neu}$ soll invers proportional zu dieser elementbezogenen Größe \tilde{g}_l sein und mit einem Faktor $\Delta\phi_l$ skaliert werden

$$h_{e,l}^{neu} = \frac{\Delta\phi_l}{\tilde{g}_l} . \quad (4.25)$$

Da die Information über die neue Elementgröße an den Knoten des alten Netzes vorliegen muss, werden die Werte der angrenzenden Elemente noch arithmetisch gemittelt.

- **Geometrischer Verfeinerungsindikator für die Randgeometrie**

Stark gekrümmte Randbereiche (Oberflächen) eines Körpers müssen ausreichend fein diskretisiert werden, um signifikante "geometrische Fehler" zu vermeiden. Dies ist bei einer Neuvernetzung speziell für die Erhaltung der Masse und in Kontaktsituationen sehr wichtig. Zur Kontrolle dieses Problems wird ein geometrischer Indikator für die Randgeometrie eingeführt, der zum Einsatz kommt, wenn die mechanischen Indikatoren eine nur unzureichende Verfeinerung bewirken.

In der Differentialgeometrie ist die Krümmung $\bar{\kappa}$ einer Kurve im Punkt P der Grenzwert des Verhältnisses des Winkels ϑ , den die Tangente in einem benachbarten Punkt P' mit der Tangente im Punkt P einschließt, zur Länge s des Bogens, der zwischen diesen Punkten liegt, wenn der Abstand zwischen den Punkten P und P' gegen null strebt (siehe Bild 4.5 links)

$$\bar{\kappa} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\vartheta}{s} . \quad (4.26)$$

Im Falle einer diskreten Randbeschreibung, z.B. dem polygonalen Rand eines FE-Netzes (siehe Bild 4.5 rechts), lässt sich eine "diskrete Krümmung" $\bar{\kappa}^h$ in einem Knoten als Verhältnis des von zwei benachbarten Segmenten eingeschlossenen (kleineren) Winkels ϑ zum Mittelwert der Segmentlängen definieren

$$\bar{\kappa}^h := \frac{\vartheta}{\frac{1}{2}(s_1 + s_2)} . \quad (4.27)$$

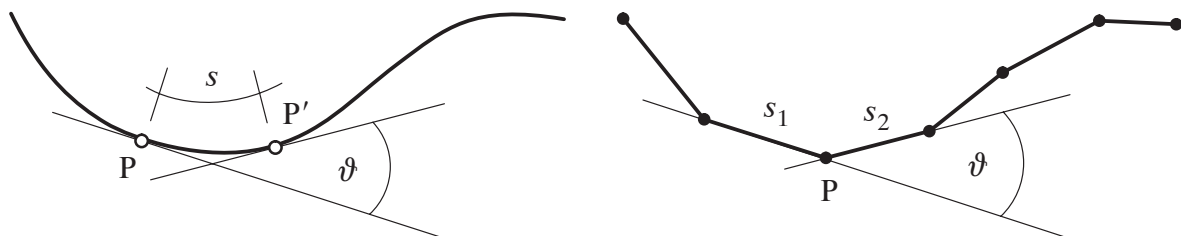


Bild 4.5: Krümmung einer Kurve (links) und eines Polygonzugs (rechts)

Die Elementgröße im neuen Netz ergibt sich damit zu

$$h_{e,g}^{neu} = \frac{\vartheta_{zul}}{\bar{\kappa}^h}, \quad (4.28)$$

wobei ϑ_{zul} der vorgeschriebene, maximal zulässige Winkel zwischen zwei benachbarten Randsegmenten ist. Ein ähnlicher Indikator wird von Camacho und Ortiz (1997) zur Kontrolle der Randkrümmung verwendet.

Im allgemeinen besteht nach Anwendung dieses Indikators kein Zusammenhang mehr zwischen der geforderten Netzdichte im Inneren und der Netzdichte an den Rändern des Gebiets. In solchen Fällen wird eine Technik zur Netzglättung verwendet, um große Elementgrößenunterschiede zu vermeiden (siehe Abschnitt 4.3.3).

- **Auswahl der Indikatoren und Netzdichteverteilung**

Es stehen nun verschiedene Fehler- bzw. Verfeinerungsindikatoren zur Verfügung, deren mögliche Anwendungsbereiche erwähnt wurden. Für reale, komplexe Problemstellungen stellt sich die Frage, welcher Indikator oder welche Kombination aus Indikatoren am besten geeignet ist. Die richtige Auswahl erfordert die genaue Kenntnis der ausschlaggebenden physikalischen Vorgänge des betrachteten Problems, da die Indikatoren auf unterschiedliche Phänomene abzielen. So kommen eventuell manche Indikatoren von vornherein nicht in Betracht, da sie die wesentlichen Effekte gar nicht erfassen. Andere können dagegen dem Verhalten der Lösung intelligent folgen, indem Bereiche hoher mechanischer Aktivität adaptiv verfeinert werden. Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Auswahl der Indikatoren ist die Erwartung an das Ergebnis einer Simulation, d.h. welche physikalische Größe steht im Mittelpunkt des Interesses? Anhand eines numerischen Impakt-Beispiels werden in Kapitel 4.5.1 die unterschiedlichen Wirkungsweisen der Indikatoren kritisch beleuchtet.

Es ist, wie bereits erläutert, in manchen Fällen sinnvoll, verschiedene Fehlerindikatoren zu kombinieren. Um dann die endgültige Netzdichte zu erhalten, wird das Minimum der unterschiedlichen neuen Elementgrößen $h_{e,k}^{neu}$ (bis zu fünf gradienten-basierte Indikatoren), $h_{e,l}^{neu}$ (bis zu drei direkte, physikalisch motivierte Indikatoren) und $h_{e,g}^{neu}$ (geometrischer Indikator für den Rand) gewählt:

$$h_e^{neu} = \min\{h_{e,k}^{neu}, h_{e,l}^{neu}, h_{e,g}^{neu}\}. \quad (4.29)$$

Des Weiteren ist es üblich und sinnvoll, die Elementgröße durch vorgegebene Grenzwerte einzuschränken, um unerwünscht kleine oder große Elemente zu vermeiden

$$h_e^{\min} \leq h_e^{neu} \leq h_e^{\max}. \quad (4.30)$$

4.3.3 Neuvernetzung

Das neue Netz wird mit Hilfe der so genannten "Advancing Front Methode" basierend auf den Arbeiten von Lo (1985) und Peraire et al. (1987) generiert (Rehle (1996)). Dabei müssen zur Erzeugung eines neuen, adaptiv abgestuften FE-Netzes zwei Informationen zur Verfügung stehen. Dies ist zum einen die *Beschreibung des Randes* und zum anderen die *Elementgrößenverteilung* im Inneren des Gebiets. Im Fall großer Deformationen und einer sich stark ändernden Topo-

logie bietet es sich an, das Netz aus dem vorangegangenen Zeitschritt als Informationsgrundlage zu verwenden. Für dieses "Hintergrundnetz" wird, wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, eine Fehlerbewertung durchgeführt und daraus eine Elementgrößenverteilung ermittelt. Die polygonale Randbeschreibung des neu zu vernetzenden Gebiets ergibt sich dann aus der Elementgrößeninformation an den Randknoten des Hintergrundnetzes (Erhart (1999)). Ausgehend von den neuen Randknoten wird ein Netz erzeugt, das vorzugsweise aus Vierknotenelementen besteht. In Ausnahmefällen, z.B. spitzen Ecken, werden allerdings auch Dreiknotenelemente zugelassen. Dies hat den Vorteil, dass keine Vierknotenelemente mit sehr schlechter Qualität generiert werden müssen, was die Zeitspanne bis zum nächsten automatischen Remeshing erhöht (siehe auch Lo und Lee (1992, 1994), Rees (1997), Diekmann et al. (2002)).

Zur Vermeidung großer lokaler Unterschiede in der Elementgröße kann eine Glättung der Netzdichte verwendet werden. Dazu wird die durch Fehler- bzw. Verfeinerungsindikatoren ermittelte Elementgrößenverteilung noch einmal überprüft. Variieren die Werte benachbarter Knoten in zu hohem Maße, so findet eine nachträgliche Modifikation statt. Diese Netzdichteglättung erhöht die Robustheit des Neuvernetzungs-Algorithmus, da der Freivernetzer unterstützt wird, möglichst quadratische Elemente zu erzeugen. Ein weiterer Vorteil der Netzdichteglättung ist, dass seltener eine Neuvernetzung durchgeführt werden muss, da die Qualität der generierten Elemente höher ist. In Bild 4.6 ist der Unterschied zwischen einem geglätteten und einem ungeglätteten adaptiven Remeshing dargestellt.

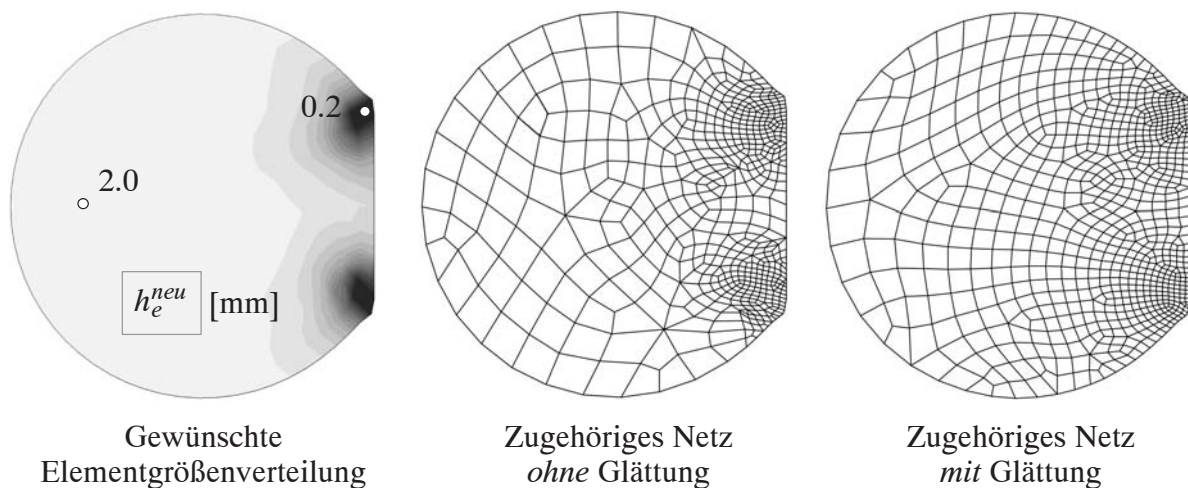


Bild 4.6: Netzgenerierung ohne und mit Dichteglättung

4.3.4 Transfer der Zustandsvariablen

Das neu erstellte FE-Netz besitzt zunächst keine Informationen über den aktuellen Verzerrungs- oder Spannungszustand des Körpers. Deshalb ist es notwendig, alle wesentlichen Größen von der alten auf die neue Diskretisierung zu übertragen. Dieses 'Mapping' ist insofern sehr wichtig, als bei nichtlinearen und/oder dynamischen Rechnungen die Ergebnisse in einem iterativen oder zeitlich inkrementellen Vorgang ermittelt werden. Variablen, die transferiert werden müssen, sind Knoten- und Integrationspunktdaten wie z.B. Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Verzerrungen, Spannungen, Geschichtsvariablen, Randbedingungen usw.. Durch die komplette Neuvernetzung des Gebiets ändert sich die Lage und Anzahl der Knoten und der Integrationspunkte.

Deshalb ist es notwendig, mit Hilfe eines intelligenten *Suchalgorithmus* die Lage der neuen Punkte im alten Hintergrundnetz zu ermitteln, und anschließend geeignete Verfahren für das *Datenmapping* zu verwenden.

- **Suchalgorithmus**

Zu einem gegebenen Punkt (Knoten oder Integrationspunkt) der neuen Diskretisierung muss das zugehörige Hintergrundelement gefunden werden. Ein einfacher und schneller Algorithmus ist die *gerichtete Suche* (Peraire et al. (1987)). Dabei wird für ein willkürlich oder besser "günstig gewähltes" Startelement durch Einsetzen der neuen Knotenkoordinaten in die invertierten Ansatzfunktionen getestet, ob der gegebene Punkt in diesem Element liegt. Falls dies nicht der Fall ist, wird die Prozedur im Nachbarelement, das dem Punkt am nächsten ist, wiederholt, usw., bis das Hintergrundelement gefunden ist. In seltenen Ausnahmefällen, wie z.B. Löchern im Gebiet, kann es vorkommen, dass das Verfahren nicht zum Erfolg führt. Dann wird alternativ eine aufwändigere, aber 100% zuverlässige Vollsuche über alle Elemente durchgeführt.

- **Datenmapping**

Eine Strategie für den Transfer von Knoten- und Integrationspunktdaten muss eine möglichst genaue Übertragung der Werte garantieren. Eine Übersicht über verschiedene Strategien findet sich z.B. bei Ammann (1998) oder Gee (1999). Die Qualität eines solchen Schemas ist besonders im Kontext eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens äußerst wichtig, da dort keine Gleichgewichtssiterationen durchgeführt werden. Weitere Gesichtspunkte, die beim Mapping in Betracht zu ziehen sind, sind u.a. die Konsistenz der konstitutiven Gleichungen, die Kompatibilität mit entstehenden Randbedingungen (Kontakt) und die Minimierung der numerischen Diffusion der transferierten Zustandsvariablen (Peric et al. (1999)).

Das Problem, das sich beim Datenmapping stellt, ist, dass Knoten bzw. Integrationspunkte der alten und neuen Diskretisierung nicht "übereinander" liegen. Ein Mappingverfahren muss deshalb in der Lage sein, Werte der Feldgrößen an beliebigen Stellen des Hintergrundnetzes zu ermitteln. Dazu eignen sich verschiedene Methoden:

- *Inter-/Extrapolation*. Relativ einfache Methode, bei der die Variablen auf die Stützstellen der neuen Diskretisierung mit Hilfe der Element-Ansatzfunktionen inter- bzw. extrapoliert werden. Bei Knotenwerten genügt eine einfache Interpolation. Um dagegen Werte an neuen Integrationspunkten zu erhalten, müssen zunächst die alten Integrationspunktswerte auf die alten Knoten extrapoliert, dann auf die Knoten des neuen Netzes interpoliert und zum Schluss von den neuen Knoten auf die neuen Integrationspunkte interpoliert werden (Pedersen (1998), Peric et al. (1999)).
- *Inverse Abstandswichtung*. Ein Knoten oder Integrationspunkt des neuen Netzes bezieht seine Informationen aus einem definierten Bereich des Hintergrundnetzes. Die Werte an den in diesem "patch" befindlichen Punkten werden aufsummiert und in Abhängigkeit ihres Abstandes zur betrachteten Stützstelle der neuen Diskretisierung invers gewichtet (Habraken und Cescotto (1990), Dyduch et al. (1992)).
- *(Gewichtete) Fehlerquadratminimierung*. Die zur Glättung von Spannungen entwickelte SPR-Methode (superconvergence patch recovery) von Zienkiewicz und Zhu (1992a) kann

für den Transfer der Zustandsvariablen verwendet werden. Die lokal in einem "patch" des Hintergrundnetzes geglättete Feldgröße kann an der gesuchten Stelle ausgewertet werden. Eine Gewichtung mit einer Verteilungsfunktion (z.B. Glockenkurve), die die Abstände der Stützstellen berücksichtigt, ist zusätzlich möglich (Tabbara et al. (1994)).

Die verschiedenen Verfahren wurden implementiert und getestet (Gee (1999)). Als geeignete Variante hat sich erwiesen, einerseits die Knotenwerte mittels der Interpolationsmethode und andererseits die Integrationspunktdaten mit der gewichteten Fehlerquadratminimierung zu transferieren (siehe Bild 4.7). Diese Mapping-Strategie wird in ähnlicher Weise auch von Lee und Bathe (1994) und Boroomand und Zienkiewicz (1999) verwendet. Die Spannungen werden nach dem Mapping mit Hilfe der transferierten Größen neu berechnet. Sollte der neue Spannungszustand die Fließbedingung(en) verletzen, so findet eine Korrektur, d.h. die Rückprojektion auf die Fließfläche(n), statt.

Es ist außerdem zu beachten, dass ein Wechsel der Diskretisierung mit stark unterschiedlichen Elementgrößen vermieden werden sollte, da ansonsten eventuell erhebliche Übertragungsfehler bzw. Mappingfehler entstehen. Insbesondere der Wechsel von einem feinen zu einem groben Netz ist problematisch, da die Approximationsgüte sinkt.

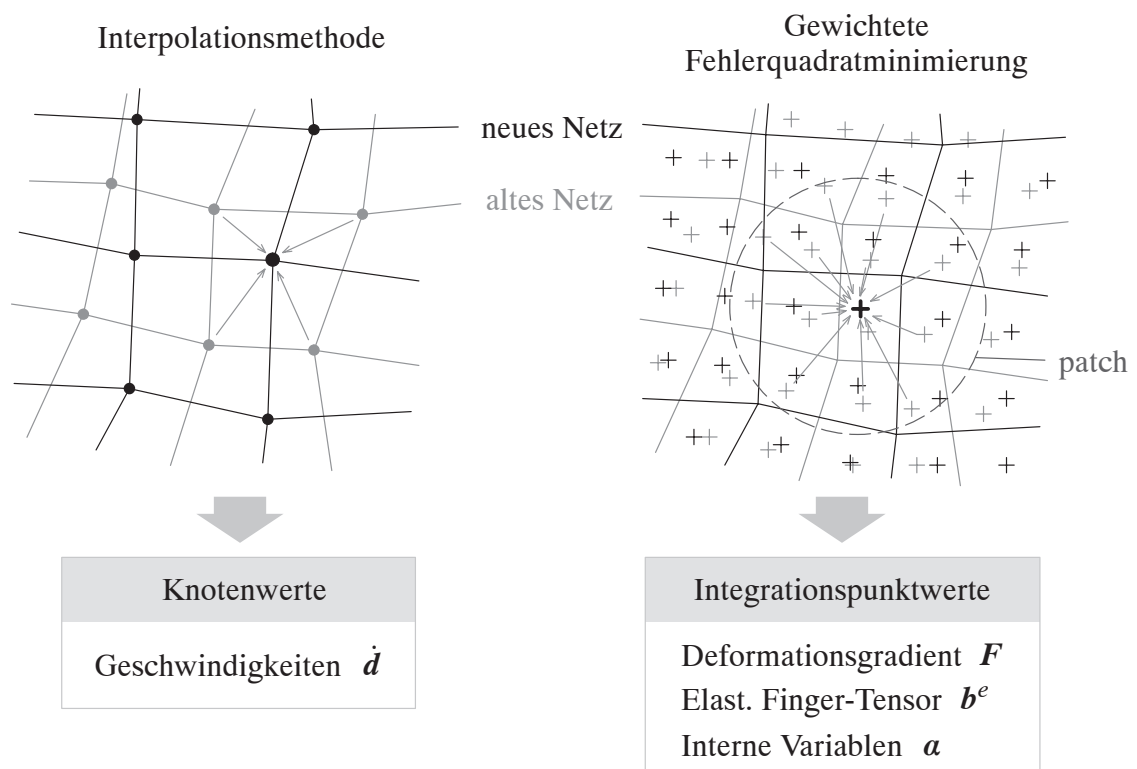


Bild 4.7: Transfer der Zustandsvariablen vom alten auf das neue Netz

Einige Teile der in diesem Abschnitt vorgestellten adaptiven Strategie waren bereits in dem verwendeten expliziten FE-Programm umgesetzt: ein auf Elementqualitäten beruhendes Remeshingkriterium (Gee (1999)), der größte Teil des Neuvernetzers (Rehle (1996)) und das Mapping (Gee (1999)). Im Rahmen dieser Arbeit wurden die zur Vervollständigung der Strategie notwendigen Methoden eingeführt und implementiert: Einheitliche Qualitätskriterien für Drei- und

Vierknotenelemente, die Generierung der neuen Randknoten als Ausgangspunkt für den Frei- vernetzer und vor allem die Fehlerbewertung mit den verschiedenen Indikatoren und die zugehörige Ermittlung der Netzdichte.

4.4 Wiederherstellung der Randgeometrie

Im Augenblick einer Neuvernetzung müssen die neuen Randknoten so positioniert werden, dass sowohl die gewünschte Netzdichteverteilung erreicht wird, als auch die Form der Oberfläche möglichst genau erhalten bleibt. Im Falle einer polygonalen Randbeschreibung (kein glatter Kontakt) werden die neuen Randknoten auf den Randsegmenten des alten Netzes erzeugt (Erhart (1999)). Ein sich daraus ergebender Effekt ist, dass bei einer konvex gekrümmten Oberfläche ein wenig Masse verloren geht und bei konkav gekrümmten Oberflächen etwas Masse hinzukommt (siehe Bild 4.8), d.h. die Massenerhaltung ist nicht exakt erfüllt. Der Fehler, der dadurch entsteht, sollte kontrolliert bzw. minimiert werden.

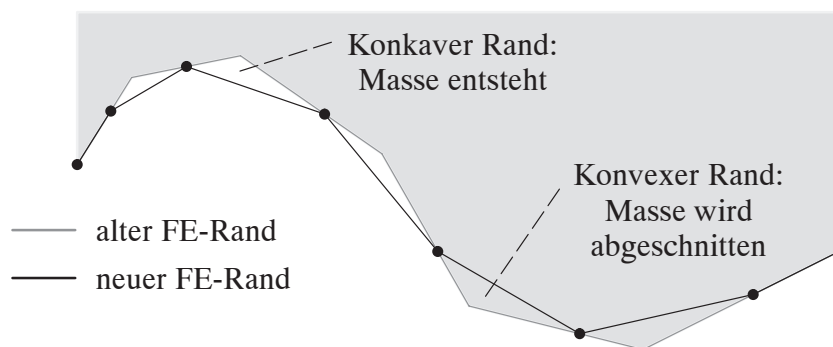


Bild 4.8: Neuvernetzung des Randes: Massenänderungen

Ein zweites Problem ergibt sich in Kontaktsituationen. Die beschriebene geringfügige Veränderung der Randgeometrie kann zu unphysikalischen Kräften führen, die einen so genannten "Remeshing-Schock" bewirken (Erhart et al. (2001)). Zur Erläuterung dieses Phänomens ist in Bild 4.9 eine entsprechende Konstellation ohne glatten Kontakt dargestellt: Ein Körper mit konvexer Oberfläche wird neuvernetzt, wobei die neuen Randknoten auf den Randsegmenten des Hintergrundnetzes erzeugt werden. Man erkennt, dass daraufhin eine Lücke zwischen den zwei Gebieten entsteht. Die vor dem Remeshing wirkenden Kontaktkräfte sind direkt nach dem Remeshing nicht mehr vorhanden. Dadurch bewegen sich die Körper ein paar Zeitschritte lang ungehindert aufeinander zu, bis wieder Kontakt entsteht, wobei die Knoten in diesem kurzen Zeitraum stärker beschleunigt werden als zuvor. Dieser neue, initiale Kontakt ist deshalb mit größeren Penetrationen und damit auch größeren Kräften als vor der Neuvernetzung verbunden. Es sind einige weitere Zeitschritte mit oszillierenden Kräften notwendig, bis der "Remeshing-Schock" überstanden ist.

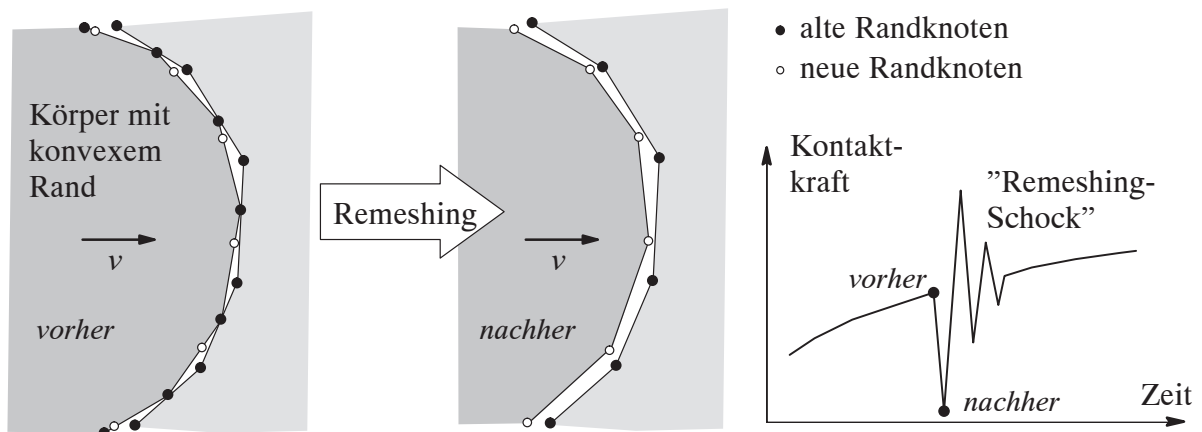


Bild 4.9: Neuvernetzung eines in Kontakt befindlichen Körpers mit konvexem Rand

Um die Fehler in der Massenerhaltung und die unphysikalischen Oszillationen in den Kontaktkräften zu verringern, muss die Wiederherstellung der Oberfläche beim Remeshing eine besonders hohe Genauigkeit aufweisen. Dies kann durch die Verwendung der bestehenden glatten Randbeschreibung (Smooth Contact) aus Kapitel 2.3.7 in Kombination mit einem hier neu eingeführten, speziellen Verfahren für die Randknotengenerierung erreicht werden. "Speziell" deshalb, weil nicht der Polygonrand, sondern der glatte Rand möglichst gut rekonstruiert werden muss. In Bild 4.10 ist der Unterschied zwischen einer Neudiskretisierung des Randes ohne und mit Smooth Contact dargestellt: Bei der Version ohne glatten Kontakt werden die neuen Knoten in Abhängigkeit von der geforderten Netzdichte genau auf dem alten Polygonrand generiert und der geometrische "Fehler" ist relativ hoch (siehe Bild 4.10 links). Wird dagegen die Randbeschreibung mit den Bézier-Splines verwendet, so müssen die neuen FE-Randknoten derart erzeugt werden, dass der neue glatte Rand möglichst genau mit dem alten glatten Rand übereinstimmt. Wie man erkennt, können die neuen Randknoten, die als Bézier-Kontrollknoten fungieren, sowohl innerhalb als auch außerhalb des alten FE-Netzes liegen (siehe Bild 4.10 rechts).

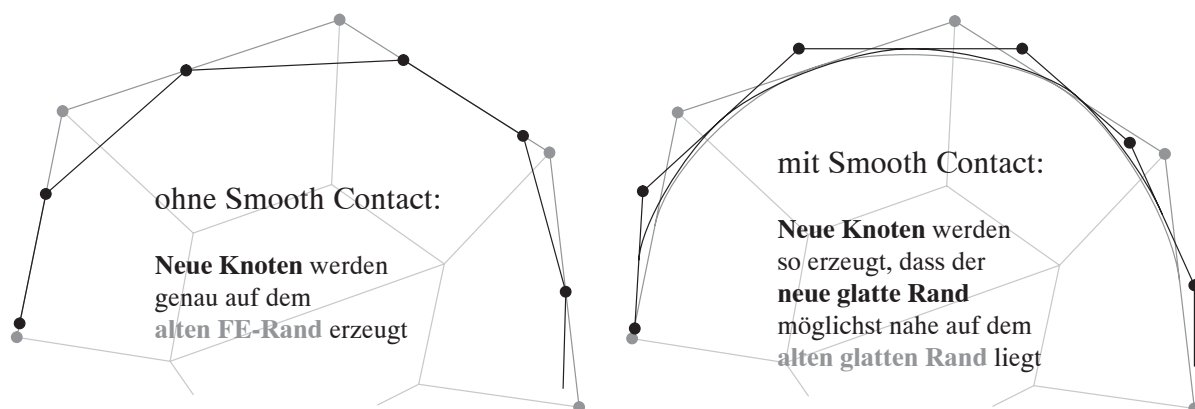


Bild 4.10: Wiederherstellung der Randgeometrie: nicht-glatt (links) - glatt (rechts)

Eine exakte Rekonstruktion der glatten Randgeometrie ist im vorliegenden Fall allerdings nicht möglich, da zum einen die durch Indikatoren ermittelte Netzdichte am Rand nicht verändert werden soll und zum anderen die Wichtung der Bézier-Funktionen (siehe Kapitel 2.3.7) nicht modi-

fiziert werden soll, d.h. die relative Lage von Segmentmittelpunkten und Segmentviertelspunkten bleibt erhalten.

Im Folgenden wird ein Ansatz beschrieben, mit dem die Wiederherstellung der Randgeometrie mit minimalem Abstand zwischen altem und neuem glattem Rand gelingt (Erhart et al. (2001)). Dazu werden die Randknoten in der Weise erzeugt, dass die Summe der Fehlerquadrate zwischen Soll- und Ist-Mittelpunkten sowie zwischen Soll- und Ist-Viertelspunkten minimal wird. Durch die Berücksichtigung der Mittelpunkte einerseits und der Viertelspunkte andererseits wird sowohl der Abstand zwischen den Mittelpunkten als auch die Neigung der Tangenten kontrolliert.

In Abhängigkeit von der durch Indikatoren ermittelten Netzdichte werden zunächst neue, vorläufige Randknoten auf dem alten FE-Rand erzeugt (siehe 1. in Bild 4.11). In der Mitte zwischen diesen Knoten werden Hilfspunkte generiert: Dazu wird der Abstand zweier Knoten auf dem fiktiv abgerollten Polygonrand halbiert (siehe 2. in Bild 4.11). Im kürzesten Abstand zu diesen Hilfspunkten werden dann die Soll-Mittelpunkte $\mathbf{m}_i^{\text{soll}}$ auf dem alten, glatten Rand ermittelt (siehe 3. in Bild 4.11). Anschließend werden mit Hilfe der entsprechenden Tangenten die dazugehörigen Soll-Viertelspunkte $\mathbf{p}_i^{\text{soll}}$ und $\mathbf{q}_i^{\text{soll}}$ bestimmt (siehe 4. in Bild 4.11). Wie man erkennt, sind die so entstandenen Tangenten nicht kompatibel, d.h. die Endpunkte benachbarter Tangenten stimmen nicht überein. Aus diesem Grund muss die Lage der Mittel- und Viertelspunkte modifiziert werden. Dies geschieht durch die bereits angedeutete Fehlerquadratminimierung, bei der die endgültigen IST-Werte $\mathbf{m}_i^{\text{ist}}$, $\mathbf{p}_i^{\text{ist}}$ und $\mathbf{q}_i^{\text{ist}}$ ermittelt werden. Das entsprechende Optimierungsproblem lautet:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n \left(\|\mathbf{m}_i^{\text{soll}} - \mathbf{m}_i^{\text{ist}}\|^2 + \|\mathbf{p}_i^{\text{soll}} - \mathbf{p}_i^{\text{ist}}\|^2 + \|\mathbf{q}_i^{\text{soll}} - \mathbf{q}_i^{\text{ist}}\|^2 \right) \rightarrow \min, \quad (4.31)$$

d.h. die Summe der quadrierten Abstände zwischen Soll- und Ist-Werten der n Tangenten soll minimal sein. Die unbekanntenen Mittel- und Viertelspunkte $\mathbf{m}_i^{\text{ist}}$, $\mathbf{p}_i^{\text{ist}}$ und $\mathbf{q}_i^{\text{ist}}$ sind abhängig von der Lage der noch unbekanntenen neuen Randknoten $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$

$$\mathbf{m}_i^{\text{ist}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{p}_i^{\text{ist}} = \frac{1}{4}(3\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, n \text{ und} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{q}_i^{\text{ist}} = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_{i-1} + 3\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.34)$$

Einsetzen von (4.32), (4.33) und (4.34) in (4.31) und Minimierung durch

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial \mathbf{x}_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.35)$$

führt auf ein System von $2n$ linearen Gleichungen. Dieses Gleichungssystem ist aufgrund der kleinen Bandbreite sehr leicht zu lösen und liefert direkt die gesuchten Randknoten. Die vorgestellte Strategie gewährleistet eine Wiederherstellung von Gebietsrändern bei Neuvernetzungen, mit der geometrische Fehler in Abständen und Gradienten der Splines minimiert werden. Die

angesprochenen Probleme der Massenänderung und der "Remeshing-Schocks" können dadurch verringert werden, wie in einem späteren Testbeispiel (Abschnitt 4.5.2) gezeigt wird.

1. Neue, vorläufige Randknoten auf altem FE-Rand (Polygon) mit Hilfe der Netzdichte
2. Hilfspunkte in der Mitte zwischen zwei neuen Randknoten auf altem FE-Rand
3. Am nächsten liegende Punkte zu den Hilfspunkten auf altem Smooth-Rand
→ Soll-Mittelpunkte
4. Tangenten und Tangentenlängen in den Soll-Mittelpunkten
→ Soll-Viertelspunkte
5. Fehlerquadratminimierung nach Abschnitt 4.4 (ohne Bild)
→ Ist-Mittel-/Viertelspunkte und neue Randknoten

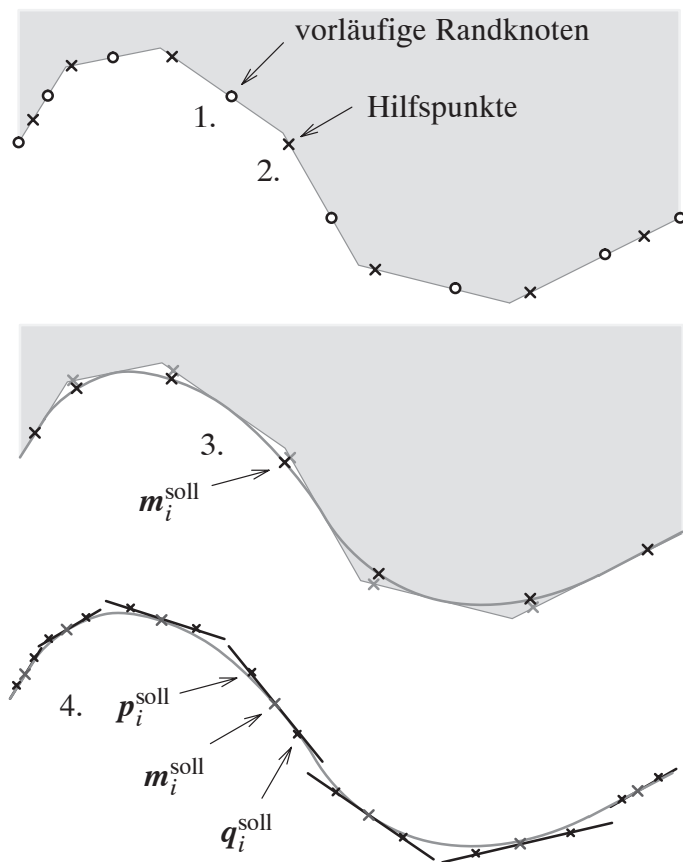


Bild 4.11: Ablaufschema der Randknotengenerierung für glatten Rand

4.5 Numerische Beispiele

4.5.1 Taylor Bar-Impakt

Um die Wirkungsweise der vorgestellten adaptiven Strategie aufzuzeigen und dabei insbesondere die Eignung der verschiedenen Fehlerindikatoren für transiente Probleme mit großen Deformationen zu untersuchen, wird das Benchmarkbeispiel eines Metallstab-Impakts betrachtet. Dieser auch häufig nach Taylor (1948) benannte Test wurde schon früh zur Bestimmung dynamischer Fließspannungen theoretisch (Taylor (1948)) und experimentell (Whiffin (1948), Carrington und Gayler (1948)) analysiert. Diesen und späteren Untersuchungen ist gemeinsam, dass ein zylindrischer Stab aus weichem Metall mit relativ hoher Geschwindigkeit gegen eine starre Wand stößt. Durch den Impact werden eine schnelle elastische und eine langsamere plastische Welle initiiert, die daraufhin den Stab in hauptsächlich axialer Richtung durchlaufen, reflektiert werden, sich wieder treffen usw.. Die Überschreitung der Fließgrenze des Materials führt zu plastischen Verzerrungen und damit einhergehenden großen irreversiblen Deformationen. Die anfänglich hohe kinetische Energie wird in innere Energie umgewandelt (siehe Bild 2.2). Das Endergebnis entsprechender Versuche sind je nach Anfangsgeschwindigkeit v_0 unterschiedlich stark

deformierte Probekörper (siehe Bild 4.12). Die in diesem Beispiel noch vernachlässigte Wärmeentwicklung dieses eigentlich thermo-mechanisch gekoppelten Problems wird in Kapitel 6 thematisiert.

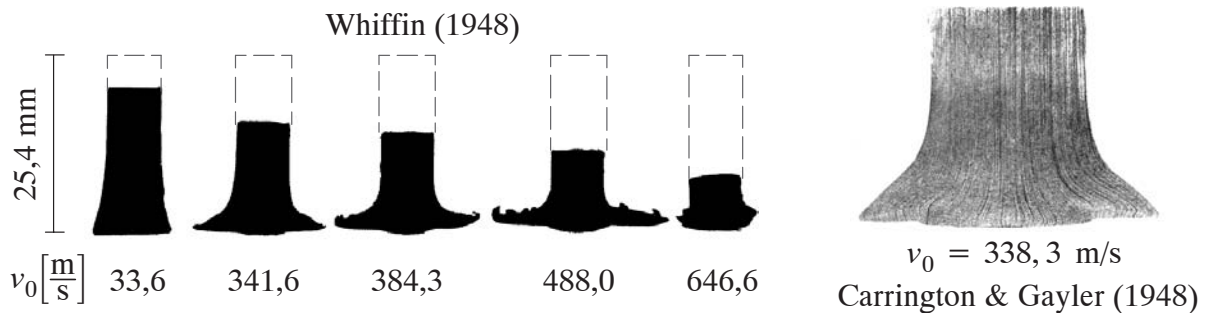


Bild 4.12: Stab-Impakt-Experimente mit unlegiertem Stahl (mild steel): Endzustände

Für die hier durchgeführte Analyse der adaptiven Strategie wird der Stoß eines Kupferstabes mit den in Bild 4.13 angegebenen Abmessungen und Materialparametern betrachtet. Diese von Kamoulakos (1990) eingeführten Werte wurden von verschiedenen Autoren (z.B. Zhu und Cescotto (1995), Camacho und Ortiz (1997)) gewählt, um die Ergebnisse miteinander vergleichen zu können. Für das Kupfer wird ein linear elastisch-plastisches Materialgesetz (von Mises-Plastizität) verwendet, das nach Überschreiten der Fließspannung σ_y mit einem Verfestigungsmodul E_t linear isotrop verfestigt. Die Dauer des Impaktvorgangs beträgt $80\mu\text{s}$, d.h. nach dieser Zeit ist die kinetische Anfangsenergie komplett in plastische Deformation umgewandelt worden.

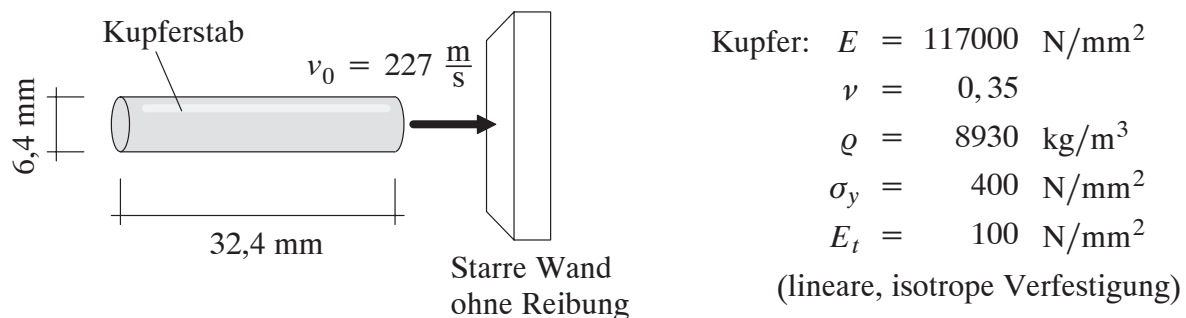


Bild 4.13: Geometrie und Materialdaten für Stab-Impakt

Es werden verschiedene Berechnungs-Strategien verglichen. In vier adaptiven Varianten werden unterschiedliche Indikatoren (Gradient der von Mises Spannungen ψ_4 , Gradient der plastischen Arbeit ψ_5 , Variation der Geschwindigkeit ϕ_1 und Rate der plastischen Arbeit ϕ_3) aus Abschnitt 4.3.2 verwendet. Die Werte der entsprechenden Skalierungsfaktoren sind $\Delta\psi_4 = 60\text{N/mm}^3$, $\Delta\psi_5 = 18\text{N}$, $\Delta\phi_1 = 9\text{m/s}$ und $\Delta\phi_3 = 0,7\text{Nm/s}$. Die Größe der bilinearen, axialsymmetrischen, selektiv integrierten Vierknotenelemente 'SI4' in den abgestuften Netzen wird durch die Werte $h_e^{\min} = 0,16\text{mm}$ und $h_e^{\max} = 0,8\text{mm}$ begrenzt. In zwei nichtadaptiven Berechnungen werden konstante Netzdichten verwendet (grob: $h_e = h_e^{\max}$, fein: $h_e = h_e^{\min}$). Der Zeitschritt wird bei allen hier vorgestellten Berechnungen konstant gewählt: $\Delta t = 0,004\mu\text{s}$. Aus Vergleichbarkeitsgründen findet bei allen Simulationen Remeshing zu den Zeitpunkten $6\mu\text{s}$, $18\mu\text{s}$, $38\mu\text{s}$ und $68\mu\text{s}$ statt. Die Entwicklung der Deformation und der Diskretisierungen ist in den Bildern 4.14 bis 4.18 dargestellt.

In den nichtadaptiven Berechnungen ist die Netzdichte immer konstant (Bild 4.14). Aufgrund der sehr großen Verzerrungen (bis 300% !) wird der Körper auch in diesen Fällen wiederholt neuvernetzt, um das Irregulärwerden einzelner Elemente oder das Instabilwerden der Lösung zu verhindern.

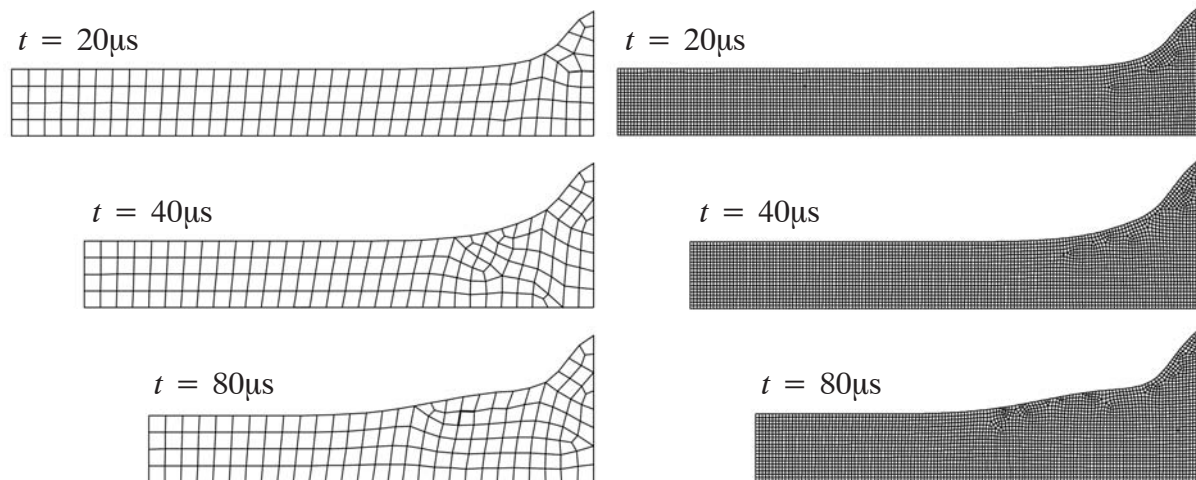


Bild 4.14: Ohne Adaptivität: grobe vs. feine Diskretisierung

Bei der Verwendung von Adaptivität ist eine Abstufung der Elementgrößen zu erkennen, die sich nach dem verwendeten Indikator richtet. Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen adaptiven Netzen und Indikatorgrößen sind Diskretisierungen und FE-Lösungen in den Abbildungen nebeneinandergestellt. Neuvernetzungen, die sich an den Gradienten der von Mises Spannungen orientieren, sind aufgrund des zeitlich rauen Verlaufs der Lösung (elastische Welle) relativ großen Schwankungen unterworfen (siehe Bild 4.15). Dieser Wechsel von Netzen mit sehr unterschiedlichen Elementdichten kann sich, wie in Abschnitt 4.3.4 erwähnt, beim Mapping negativ auswirken. Im Gegensatz dazu bewirkt der Indikator 'Gradient der plastischen Arbeit' ein kontinuierliches Anwachsen des fein vernetzten Bereichs im Einklang mit der sich entwickelnden plastischen Zone (Bild 4.16). Die Verwendung der variierenden Geschwindigkeit als Verfeinerungsindikator hat zur Folge, dass analog zur abnehmenden Gesamtgeschwindigkeit des Körpers die Netzdichte mit jedem Remeshing geringer wird (Bild 4.17): Dieser Indikator ist ungeeignet, wenn am Ende des Abbremsprozesses eine hohe Lösungsqualität, z.B. der Dehnungen, erwünscht ist. Auch der Indikator 'Rate der plastischen Arbeit' zeigt sehr gut den direkten Zusammenhang zwischen Diskretisierung und dazugehörigem physikalischen Prozess: Eine Verfeinerung findet jeweils dort statt, wo die Rate der plastischen Verzerrungen hoch ist, d.h. wo das Material gerade "fließt". Dadurch kommt es zu einer der propagierenden plastischen Welle entsprechenden Verlängerung der feinen Vernetzung (Bild 4.18).

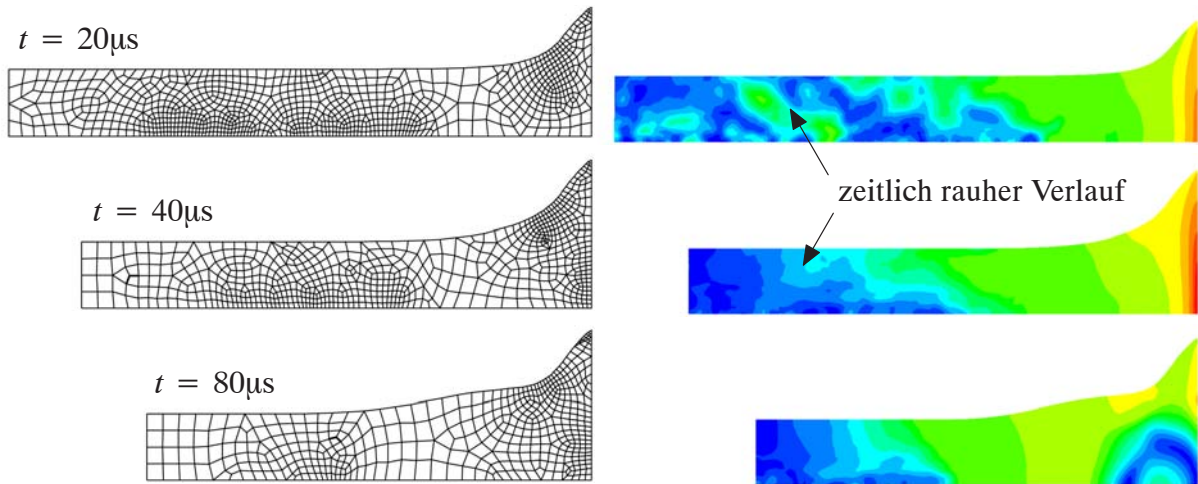


Bild 4.15: Indikator 'Gradient der von Mises Spannungen', adaptive Netze und von Mises Spannungen: 0(blau)–700(rot) N/mm²

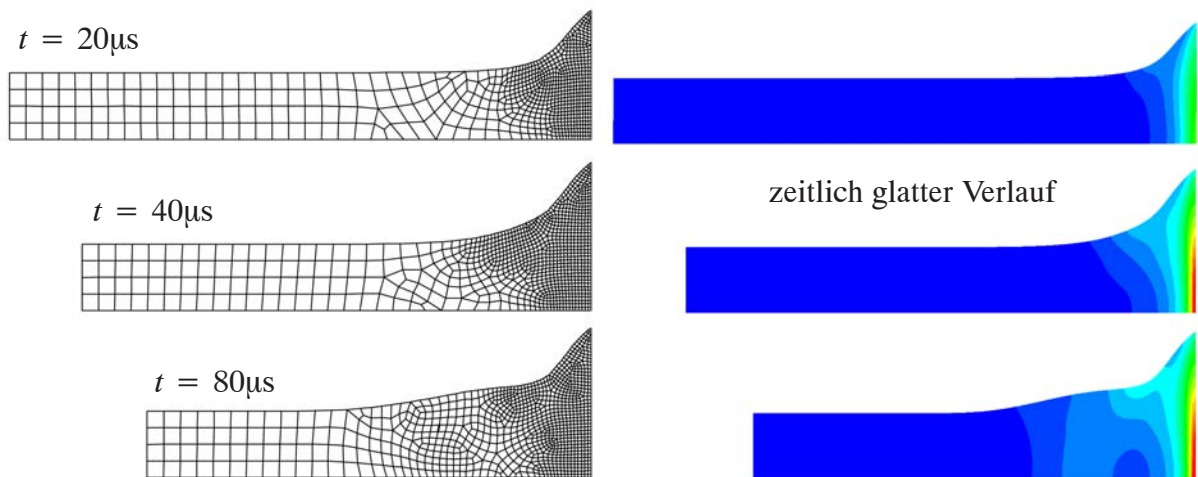


Bild 4.16: Indikator 'Gradient der plastischen Arbeit', adaptive Netze und plastische Energie: 0(blau)–1500(rot) Nmm

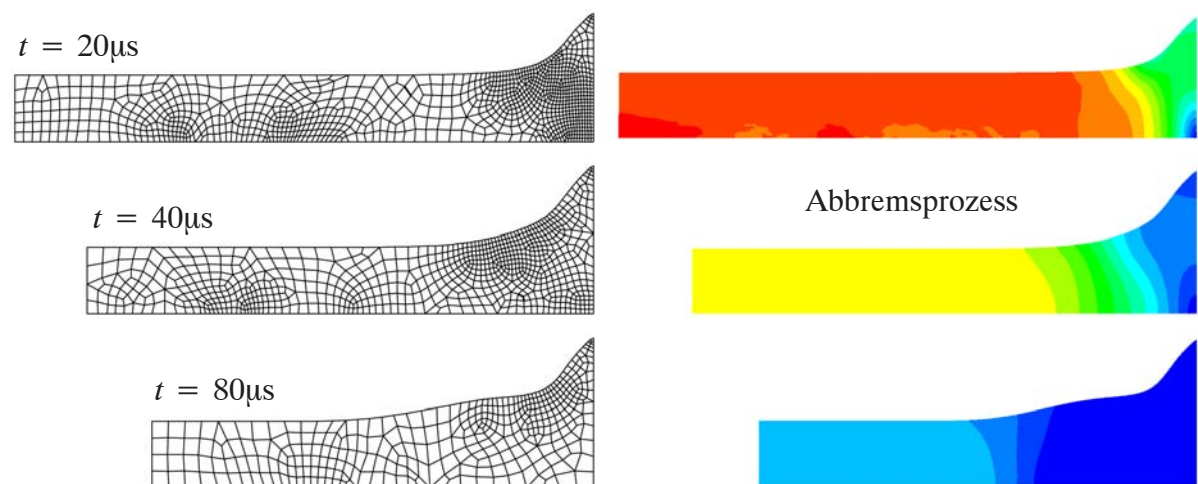


Bild 4.17: Indikator 'Variation der Geschwindigkeit', adaptive Netze und Geschwindigkeitsfeld: 0(blau)–227(rot) m/s

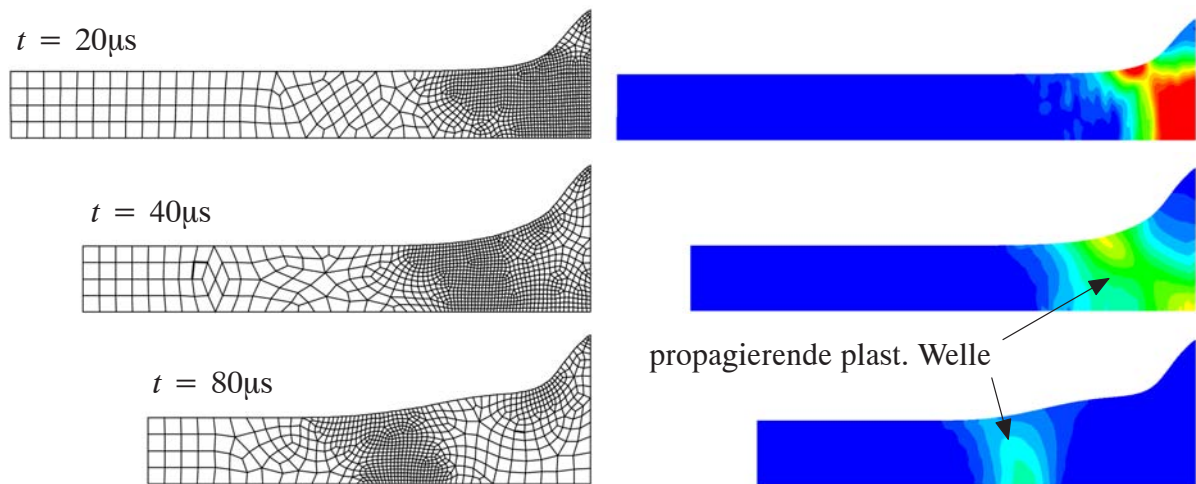


Bild 4.18: Indikator 'Rate der plastischen Arbeit', adaptive Netze und Rate der plast. Verzerrungen: 0(blau)–75000(rot) 1/s

In Tabelle 4.3 sind die berechnete Stablänge, der Radius des "aufgepilzten" Stabendes, die maximale äquivalente plastische Verzerrung zum Endzeitpunkt und die benötigte Rechenzeit für die unterschiedlichen Varianten aufgelistet. Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse von Kamoulakis (1990), Zhu und Cescotto (1995) und Camacho und Ortiz (1997) aufgeführt.

Wie zu erwarten, zeugen die Ergebnisse der nichtadaptiven 'groben' Berechnung von einem zu steifen Verhalten, wie man im Vergleich zur Variante mit hoher konstanter Netzdichte erkennt. Bei den adaptiven Berechnungen liegen die Werte für die Stablänge und den Pilzradius im Bereich der nichtadaptiven 'feinen' Variante, was auf die hohe Qualität dieser Lösungen hinweist. Beim Vergleich der maximalen äquivalenten plastischen Verzerrungen ergeben sich größere Unterschiede, wobei mit dem Indikator 'Gradient der plastischen Arbeit' das beste Ergebnis erzielt wird. Der Grund ist die durchgehend feine Diskretisierung der relevanten plastischen Zone. Bei den anderen Indikatoren kommt es am Ende zu einer Netz-Vergrößerung und damit einer geringeren Auflösung der Ergebnisse in diesem Bereich (siehe auch Bild 4.19). Dies ist ein Beispiel dafür, dass bei der Wahl eines Indikators darauf zu achten ist, welche Ergebnisgröße bei der Simulation von Interesse ist.

Die Effizienz adaptiver Verfahren geht aus dem Vergleich der Rechenzeiten hervor (siehe Tabelle 4.3). Es ist eine deutliche Ersparnis im Vergleich zur durchgehend feinen Vernetzung zu erkennen, die im Zusammenhang mit der Anzahl der verwendeten Elemente steht. Zur Verdeutlichung ist in Bild 4.20 die Entwicklung der Elementanzahl für die verschiedenen Varianten dargestellt. Bei nichtadaptiver 'feiner' Berechnung mit konstanter Netzdichte kommt es bei jedem Remeshing zu einem leichten Absinken der Elementanzahl, was in der abnehmenden Fläche (das Volumen bleibt gleich!) begründet ist. In den adaptiven Fällen wird mit derselben feinen Diskretisierung (4000 Elemente) gestartet. Bei der ersten Neuvernetzung sinkt die Elementanzahl jedoch drastisch und bleibt dann relativ niedrig, was an der bereits beschriebenen Vergrößerung von Bereichen mit niedrigen Indikatorwerten liegt.

Die Analysen dieses Benchmarkbeispiels zeigen, dass die *robuste* adaptive Neuvernetzungs-Strategie die erwünschte *Steigerung der Effizienz* bei gleichzeitig hoher *Lösungsqualität* bewirkt. Dabei ist die richtige Auswahl eines Fehlerindikators oder einer Kombination aus mehreren Fehlerindikatoren von zentraler Bedeutung.

	Endlänge [mm]	Endradius 'Pilz' [mm]	Max. äqu. plast. Verzerrung [-]	Rechenzeit [s]
Ohne Adaptivität				
'grob'	21,45	7,03	1,98	92
'fein'	21,40	7,19	2,99	2442
Mit Adaptivität				
Indikator 'GvM'	21,42	7,18	2,67	683
Indikator 'GpA'	21,42	7,20	2,98	697
Indikator 'VarGe'	21,41	7,20	2,09	723
Indikator 'RpA'	21,41	7,20	2,08	842
Andere Autoren				
Kamoulakis '90	21,47 - 21,66	7,02 - 7,12	2,47 - 3,24	-
Zhu & Cescotto '95	21,26 - 21,49	6,89 - 7,18	2,75 - 3,03	-
Camacho & Ortiz '97	21,42 - 21,44	7,21 - 7,24	2,97 - 3,25	-

Tabelle 4.3 Stab-Impakt: Vergleich der Ergebnisse

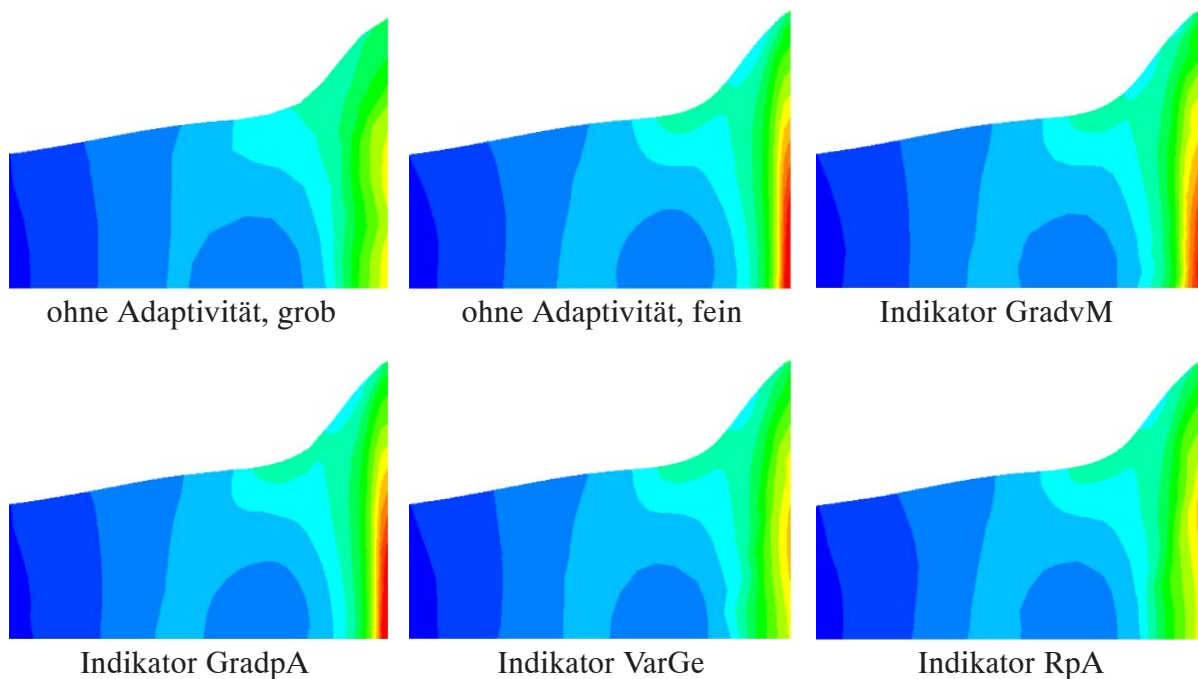


Bild 4.19: Äquivalente plastische Verzerrungen (0–2,75) zum Endzeitpunkt $t = 80 \mu s$

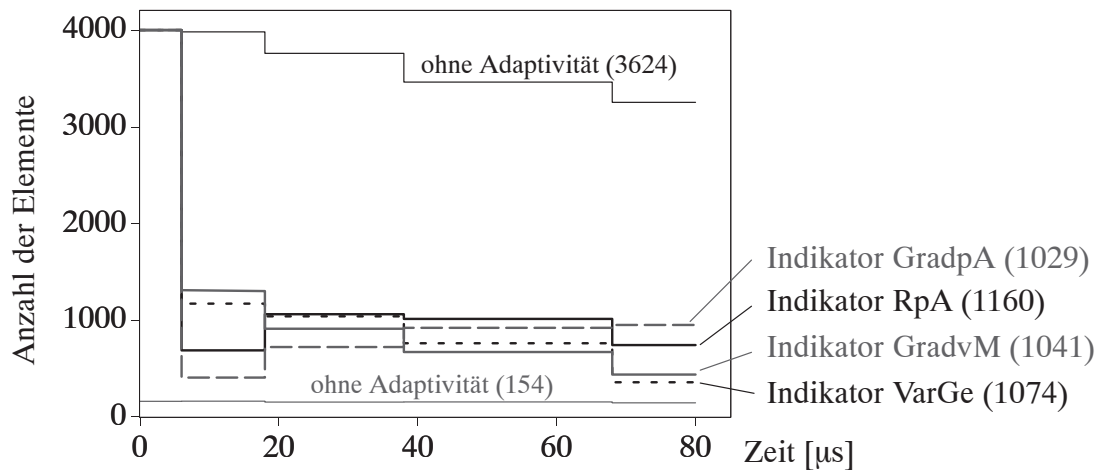


Bild 4.20: Stab-Impakt: Entwicklung der Elementanzahl (Durchschnitt in Klammern)

4.5.2 Elastischer Impact: Smooth Contact

Zur Validierung der in Kapitel 4.4 vorgestellten Strategie zur Wiederherstellung des Randes beim Remeshing wird ein einfaches Testbeispiel verwendet: Im ebenen Verzerrungszustand stößt ein elastischer Zylinder mit dem Durchmesser $d = 48\text{ mm}$ auf einen rundherum eingespannten, elastischen Körper mit einer runden Kerbe (Durchmesser $d = 50\text{ mm}$). Die Daten des Versuchs sind in Bild 4.21 zusammengefasst. Im Verlauf des Impactvorgangs wird der Zylinderquerschnitt zweimal neuvernetzt, um die Auswirkungen auf die Massenänderung und die Störung der Kontaktkräfte zu untersuchen. Verglichen werden dabei zwei verschiedene Varianten: mit und ohne glatten Kontakt. Die Unterschiede wurden in Abschnitt 4.4 und mit Bild 4.10 erklärt.

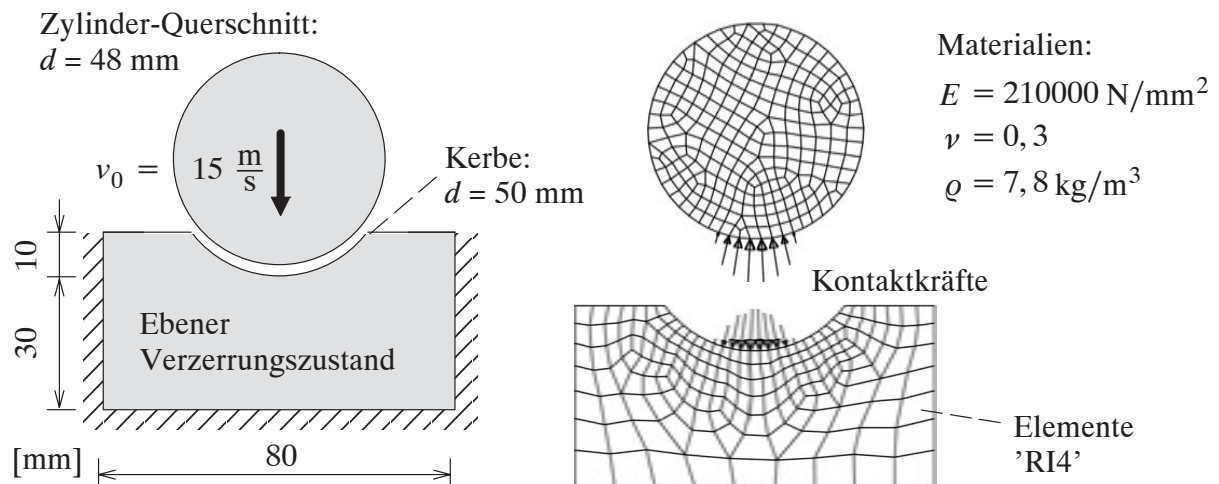


Bild 4.21: Elastischer Impact: Geometrie, Diskretisierung, Materialdaten

Aufgrund der konvex gekrümmten Oberfläche des Zylinderquerschnitts erfährt die Masse aus den in Abschnitt 4.4 erläuterten Gründen beim Remeshing eine Reduktion. Durch die Einführung der glatten Kontakttrandbeschreibung und die in dieser Arbeit verwendete Methode zur Randknotengenerierung kann die Massenänderung von durchschnittlich $-0,16\%$ (ohne Smooth Contact) auf $-0,03\%$ (mit Smooth Contact) in diesem Beispiel reduziert werden.

Betrachtet man die Kontaktkräfte zwischen den Körpern, so wird eine weitere Verbesserung ersichtlich. In Bild 4.22 sind dazu die Verläufe der vertikalen Gesamt-Kontaktkraft dargestellt. Die "Remeshing-Schocks" sind an den starken Ausschlägen zu erkennen, wobei diese mit glattem Kontakt deutlich schwächer und zeitlich kürzer ausfallen (rechts) als ohne Smooth Contact (links). Im Vergleich mit einer Berechnung ohne Remeshing (graue Kurve) sieht man, dass durch die Remeshing-Schocks nicht nur kurzfristig eine Störung entsteht, sondern sogar der globale Verlauf beeinflusst werden kann. Dieser Fehler wird durch die Randknotengenerierungsmethode aus Kapitel 4.4 minimiert.

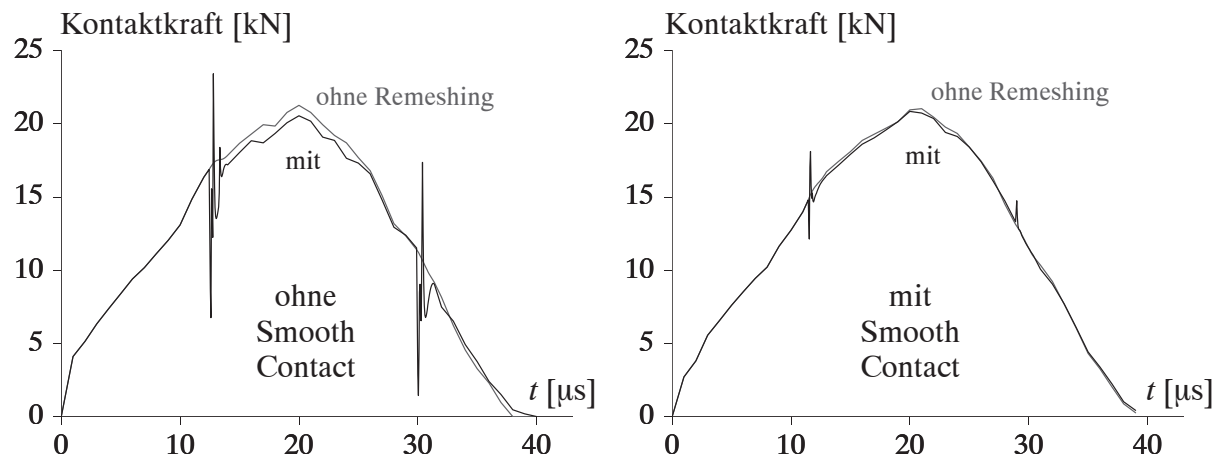
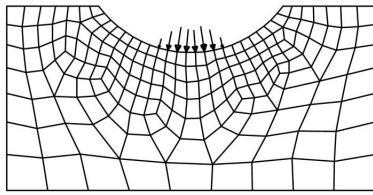
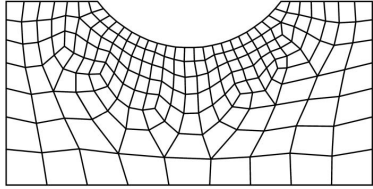
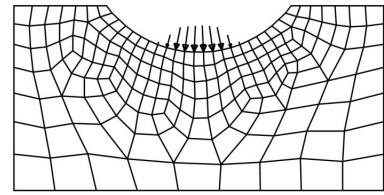


Bild 4.22: Elastischer Impact: Kontaktkraftverläufe mit Remeshing-Stößen

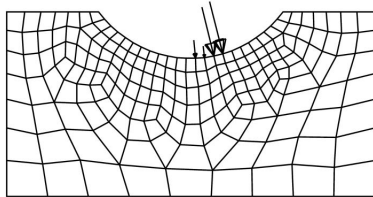
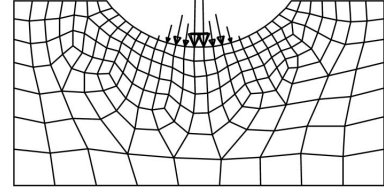
In Bild 4.23 sind die Kontakt-Knotenkräfte, die von dem Zylinder auf den anderen Körper wirken, dargestellt. Kurz vor der zweiten Neuvernetzung ergibt sich ein gleichmäßiger Kraftverlauf, der der Hertz'schen Pressung ähnelt. Ohne glatten Kontakt verschwinden diese Kräfte direkt nach dem Remeshing komplett und sind fünf Zeitschritte später zu groß und unregelmäßig. Wird dagegen der glatte Kontakt verwendet, so sind die Störungen weitaus geringer und nach wenigen Zeitschritten ist der ursprüngliche Zustand bereits wieder hergestellt.



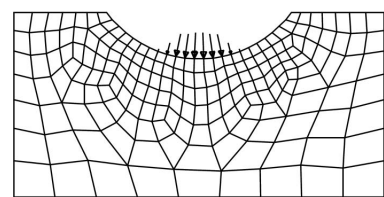
vor Remeshing
des Zylinders



ein Zeitschritt
nach Remeshing



fünf Zeitschritte
nach Remeshing



ohne Smooth Contact

mit Smooth Contact

Bild 4.23: Elastischer Impakt: Kontaktkräfte vor und kurz nach dem zweiten Remeshing

5 Effiziente zeitliche Diskretisierung

5.1 Einführung

In Kapitel 2.2.2 wurde mit der modifizierten Euler Methode (Hahn (1991)) ein explizites Zeitintegrationsverfahren vorgestellt und dessen numerische Eigenschaften diskutiert. Nun sollen wichtige Aspekte noch einmal hervorgehoben und genauer untersucht werden, u.a. die numerische Stabilität und Möglichkeiten zur *Abschätzung des kritischen Zeitschritts*. Bei transienten Impaktvorgängen kommt es insbesondere durch die großen Deformationen und die damit einhergehenden Elementverzerrungen häufig zu einer signifikanten Veränderung des kritischen Zeitschritts, weshalb eine *adaptive Zeitschrittsteuerung* sinnvoll ist. Des Weiteren kann in Fällen stark abgestufter Diskretisierungen durch einen räumlich variierenden Zeitschritt, das so genannte *Subcycling*, die Rechenzeit reduziert werden. Dafür wird ein Algorithmus bereitgestellt, der automatisch die betrachtete Struktur in gekoppelte Teilgebiete zerlegt und jedem dieser Teilgebiete "seinen" stabilen Zeitschritt zuordnet, mit dem dieser dann integriert wird.

5.2 Zeitschrittabhängige Stabilität

5.2.1 Abschätzung des kritischen Zeitschritts

In Kapitel 2 wurde die Stabilitätsbedingung für das verwendete explizite Zeitintegrationsverfahren hergeleitet. Nach Gleichung (2.61) wird der Zeitschritt Δt durch die System-Eigenfrequenz ω nach oben hin beschränkt: $\Delta t \leq 2/\omega$. Der kritische, d.h. der größtmögliche Zeitschritt Δt_{krit} ist also durch die maximale Eigenfrequenz ω_{max} bzw. den maximalen Eigenwert λ_{max} des Systems definiert

$$\Delta t_{krit} = \frac{2}{\omega_{max}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{max}}} . \quad (5.1)$$

Je steifer ein System ist, desto größer ist die maximale Eigenfrequenz und desto kleiner die kritische Zeitschrittweite. Die Eigenwerte eines diskretisierten Systems folgen aus der Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 . \quad (5.2)$$

Da in effizienten expliziten Berechnungen weder eine Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , noch eine Gesamtmassenmatrix \mathbf{M} aufgestellt wird, und außerdem eine Eigenwert-Berechnung für große Systeme sehr rechenaufwändig ist, wird üblicherweise eine Abschätzung durchgeführt: Gemäß dem *globalen Eigenwert-Theorem* (Flanagan und Belytschko (1984), Lin (1991)) wird der maximale Eigenwert eines FE-Systems λ_{max} durch den maximalen Eigenwert der einzelnen Elemente λ_{max}^e begrenzt

$$\lambda_{max} \leq \max_e(\lambda_{max}^e) . \quad (5.3)$$

Es ist also ausreichend, den maximalen Eigenwert bzw. den kritischen Zeitschritt einzeln für jedes Element zu berechnen, um eine Abschätzung für die kritische Zeitschrittweite des Gesamtsystems zu erhalten. Die Eigenwerte eines Finiten Elements lassen sich mit Hilfe der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{K}^e - \lambda^e \mathbf{M}^e) = 0 \quad (5.4)$$

bestimmen, wobei \mathbf{K}^e und \mathbf{M}^e die Elementsteifigkeitsmatrix und die Elementmassenmatrix sind. Die Abschätzungen, die auf dem globalen Eigenwert-Theorem basieren, sind konservativ. Für regelmäßige Netze ist der Unterschied zwischen tatsächlicher kritischer Zeitschrittweite und geschätzter kritischer Zeitschrittweite gering. Wenn sich dagegen die Elementgröße oder die Elementsteifigkeit zwischen benachbarten Elementen stark ändert, wie z.B. in adaptiven Netzen, so werden die Abschätzungen zunehmend konservativ (Belytschko et al. (2000)).

Es gibt nun grundsätzlich zwei Möglichkeiten, die kritische Zeitschrittweite für konkrete Finite Elemente, also z.B. für die Vierknotenelemente aus Kapitel 3, abzuschätzen. Zum ersten kann eine Reduktion auf den eindimensionalen Fall, für den Gleichung (5.4) in einfacher Weise analytisch gelöst werden kann, durchgeführt werden. Dieses häufig verwendete Vorgehen wird in Abschnitt 5.2.2 genauer beschrieben. Eine alternative Methode ist die von Gleichung (5.3) ausgehende Abschätzung der Elementeneigenwerte im mehrdimensionalen Fall, wie sie in Abschnitt 5.2.3 erläutert wird. Beide Verfahren wurden im Rahmen dieser Arbeit numerisch umgesetzt.

5.2.2 Abschätzung durch Reduktion auf 1-D Fall: CFL-Bedingung

Für einen eindimensionalen Dehnstab mit der Länge L , der Querschnittsfläche A , dem E-Modul E , der Dichte ρ und den Elementmatrizen

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}^e = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ist nach Lösung von Gleichung (5.4) der maximale Eigenwert

$$\lambda_{\max}^e = 4E/\rho L^2 \quad (5.6)$$

und damit der kritische Zeitschritt

$$\Delta t_{\text{krit}}^{\text{CFL}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}^e}} = \frac{L}{\sqrt{E/\rho}} = \frac{L}{c^{1D}} \quad (5.7)$$

$\Delta t_{\text{krit}}^{\text{CFL}}$ ist genau die Zeit, die eine Welle mit der eindimensionalen Wellengeschwindigkeit c^{1D} benötigt, um den Stab der Länge L zu durchlaufen. Die Stabilitäts-Forderung, dass der Zeitschritt kleiner als das Verhältnis von Elementlänge zu Wellengeschwindigkeit sein muss, wird auch häufig als *CFL-Bedingung* (Courant, Friedrichs und Lewy (1928)) bezeichnet.

Möchte man diese Bedingung auch auf zwei- und dreidimensionale Probleme anwenden, so stellt sich die Frage nach geeigneten Werten für die skalaren Größen L und c , d.h. es wird eine Reduktion auf den eindimensionalen Fall benötigt. Als effektive Elementlänge L wird zumeist der kürzeste Knotenabstand verwendet. Die Geschwindigkeit, mit der sich eine elastische Welle

in einem dreidimensionalen Festkörper ausdehnt, unterscheidet sich von der eindimensionalen Wellengeschwindigkeit (siehe Bild 5.1) durch den Einfluss der Querdehnung:

$$c^{1D} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}, \quad c^{3D} = \left(\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}\right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

In Bild 5.1 rechts ist das Verhältnis von c^{3D} zu c^{1D} für Querdehnzahlen zwischen 0 und 0,5 dargestellt. Je weniger kompressibel sich das Material verhält ($\nu \rightarrow 0,5$), desto größer wird dieses Verhältnis und desto kleiner wird der kritische Zeitschritt.

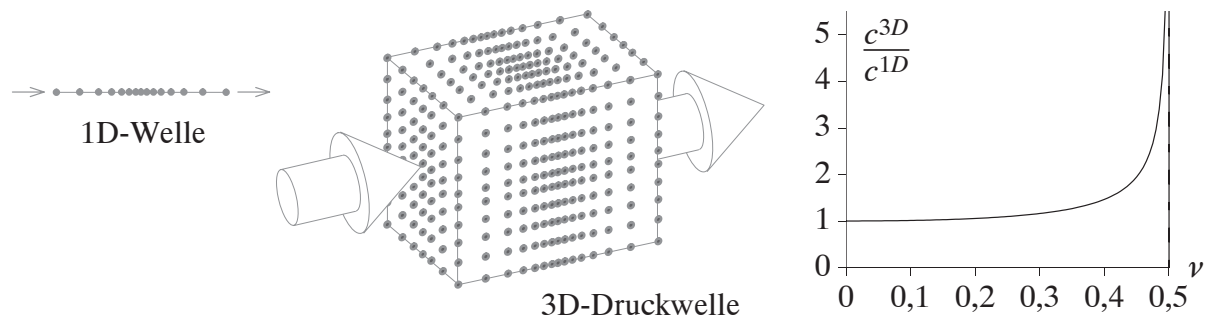


Bild 5.1: Einfluss der Querdehnung auf die Wellengeschwindigkeit

Die dreidimensionale Wellengeschwindigkeit kann für den ebenen Verzerrungszustand 'EVZ' und den axialsymmetrischen Zustand 'AXI' übernommen werden

$$c^{2D,EVZ/AXI} = c^{3D}. \quad (5.9)$$

Für den Fall des ebenen Spannungszustands 'ESZ' ergibt sich dagegen

$$c^{2D,ESZ} = \left(\frac{E(1-\nu)}{(1-\nu^2)\rho}\right)^{1/2}. \quad (5.10)$$

Die Abschätzung der kritischen Zeitschrittweite unter der Annahme elastischen Materialverhaltens stellt für nichtlineare (z.B. plastische) Materialien einen konservativen Grenzwert dar, da diese eine geringere Steifigkeit und damit eine geringere Wellenausbreitungsgeschwindigkeit besitzen.

5.2.3 Abschätzung durch Eigenwertbestimmung

Anstatt die kritische Zeitschrittweite mit Hilfe der CFL-Bedingung zu bestimmen, kann eine obere Grenze für den maximalen Eigenwert λ_{\max} (Gleichung (5.3)) für konkrete zwei- oder dreidimensionale Finite Elemente ermittelt werden. Für eine "kostengünstige" Abschätzung werden vereinfachende Annahmen getroffen und geeignete Theoreme und Transformationen verwendet, wie im Folgenden erläutert wird.

Zusätzlich zum globalen Eigenwert-Theorem (5.3) gilt das *Element-Eigenwert-Theorem* (Lin (1991)), das besagt, dass die Summe der maximalen Eigenwerte an den Integrationspunkten λ_{\max}^Q eines Elements eine obere Grenze für den maximalen Element-Eigenwert λ_{\max}^e darstellt:

$$A_{\max}^e \leq \sum_{Q=1}^{n_Q} A_{\max}^Q . \quad (5.11)$$

Zur Ermittlung der Integrationspunkt-Eigenwerte muss die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{K}^Q - A^Q \mathbf{M}) = 0 \quad (5.12)$$

mit dem Gausspunkt-Anteil an der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^Q und der Element-Massenmatrix \mathbf{M} gelöst werden (Lin (1991)). Um das allgemeine Eigenwertproblem in ein spezielles Eigenwertproblem zu überführen, wird eine im Element konstante, konzentrierte Massenmatrix $\mathbf{M} = m\mathbf{1}$ mit der jedem Knoten zugeteilten Masse m und der Identitätsmatrix $\mathbf{1}$ angenommen. Mit der Neu-Definition des Elementsteifigkeitsanteils des Integrationspunktes Q

$$\bar{\mathbf{K}}^Q := \frac{w_Q}{m} \mathbf{B}_Q^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_Q J_Q \quad (5.13)$$

erhält man das spezielle Eigenwertproblem

$$\det(\bar{\mathbf{K}}^Q - A^Q \mathbf{1}) = 0 . \quad (5.14)$$

In Gleichung (5.13) ist w_Q der Gauss-Wichtungsfaktor, J_Q die Jakobideterminante, \mathbf{B}_Q der am Integrationspunkt ausgewertete B-Operator und \mathbf{C}^e die elastische Werkstoffmatrix. Da die Lösung dieses Problems immer noch relativ aufwändig ist (z.B. 8 Eigenwerte für bilineares Vierknotenelement), wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass der Ausdruck $\mathbf{B}_Q^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_Q$ dieselben von null verschiedenen Eigenwerte wie $\mathbf{C}^e \mathbf{B}_Q \mathbf{B}_Q^T$ besitzt (Lin (1991)). Mit der Definition

$$\mathbf{S}^Q := \frac{w_Q}{m} \mathbf{C}^e \mathbf{B}_Q \mathbf{B}_Q^T J_Q \quad (5.15)$$

lautet die zu lösende charakteristische Gleichung schließlich

$$\det(\mathbf{S}^Q - A^Q \mathbf{1}) = 0 . \quad (5.16)$$

Der Vorteil dieser Transformation des Eigenwertproblems ist, dass die Größe des Eigenwertproblems nun nicht mehr vom Elementtyp und damit von der Anzahl der Elementfreiheitsgrade abhängt, sondern nur noch von der Dimension von \mathbf{C}^e . So ist für den ebenen Verzerrungszustand der maximale Eigenwert aus drei und für den rotationssymmetrischen Zustand aus vier Eigenwerten zu ermitteln. Letztlich wird also die Suche nach dem maximalen System-Eigenwert (Gleichung (5.1)) mit den Theoremen (5.3) und (5.11) durch die Suche nach den maximalen Element-Eigenwerten und damit die maximale Summe der maximalen Integrationspunkt-Eigenwerte ersetzt:

$$\Delta t_{krit} = \frac{2}{\sqrt{A_{\max}}} \geq \frac{2}{\sqrt{\max_e(A_{\max}^e)}} \geq 2 \left[\max_e \left[\sum_{Q=1}^{n_Q} A_{\max}^Q \right] \right]^{-1/2} =: \Delta t_{stab} . \quad (5.17)$$

Δt_{stab} ist der abgeschätzte, stabile Zeitschritt, der garantiert unter dem tatsächlichen kritischen Zeitschritt Δt_{krit} liegt. Die analytische Ermittlung der Integrationspunkt- bzw. Elementeigen-

werte der in dieser Arbeit konkret verwendeten bilinearen Vierknotenelemente wird in Anhang A2 beschrieben.

Mit (5.15), (5.16) und (5.17) stehen einfach zu implementierende und schnell zu berechnende Abschätzungen zur Verfügung. Wie bereits erwähnt, wird in der CFL-Bedingung (5.7) der kleinste Knotenabstand im FE-Netz als effektive Elementlänge L berücksichtigt. Mit (5.15) geht dagegen die tatsächliche, mehrdimensionale Elementgeometrie in die Abschätzung ein.

5.2.4 Verifikationstests

An vier kleinen Beispielen mit regelmäßigen und unregelmäßigen Netzen werden die vorgestellten Abschätzungen untersucht (siehe Bild 5.2). Die nach Kapitel 5.2.3 geschätzten kritischen Zeitschrittweiten (grau gestrichelt) der beiden Elemente SI4 und RI4 werden für die Querdehnungen $\nu = 0$, $\nu = 0,15$, $\nu = 0,3$ und $\nu = 0,45$ mit den exakten Werten (schwarz gestrichelt) verglichen. Die exakten Werte wurden durch trial-and-error in zeitlich ausreichend langen Rechnungen ermittelt: Ein geringfügig größerer Zeitschritt führte zu instabilen Lösungen. Zur besseren Vergleichbarkeit werden alle Werte auf den exakten kritischen Zeitschritt des unterintegrierten Elements RI4 bei einer Querdehnung $\nu = 0$ skaliert:

$$\frac{\Delta t_{krit}(\nu)}{\Delta t_{krit,exakt}^{RI4}(\nu = 0)} . \quad (5.18)$$

Zusätzlich ist die CFL-Stabilitätsgrenze nach Kapitel 5.2.2 (schwarz durchgezogen) dargestellt. Man erkennt, dass durch die Eigenwertbestimmung immer konservative Abschätzungen erzielt werden, die relativ unabhängig von der Diskretisierung bei durchschnittlich ca. 75% des exakten Wertes liegen. Die CFL-Bedingung kann dagegen zu einer Überschätzung führen, so wie es für $\nu = 0,45$ beim regulären Netz (Bild 5.2 links oben und rechts oben) der Fall ist.

Die Abschätzung der kritischen Zeitschrittweite durch Bestimmung der maximalen Element-Eigenwerte ist etwas aufwändiger, jedoch deutlich diskretisierungsunabhängiger und zuverlässiger als die CFL-Bedingung, die in manchen Fällen keine garantierte Schranke liefert und deshalb häufig mit einem Sicherheitsfaktor $\alpha < 1$ versehen wird (Belytschko et al. 2000):

$$\Delta t_{stab} = \alpha \Delta t_{krit}^{CFL} . \quad (5.19)$$

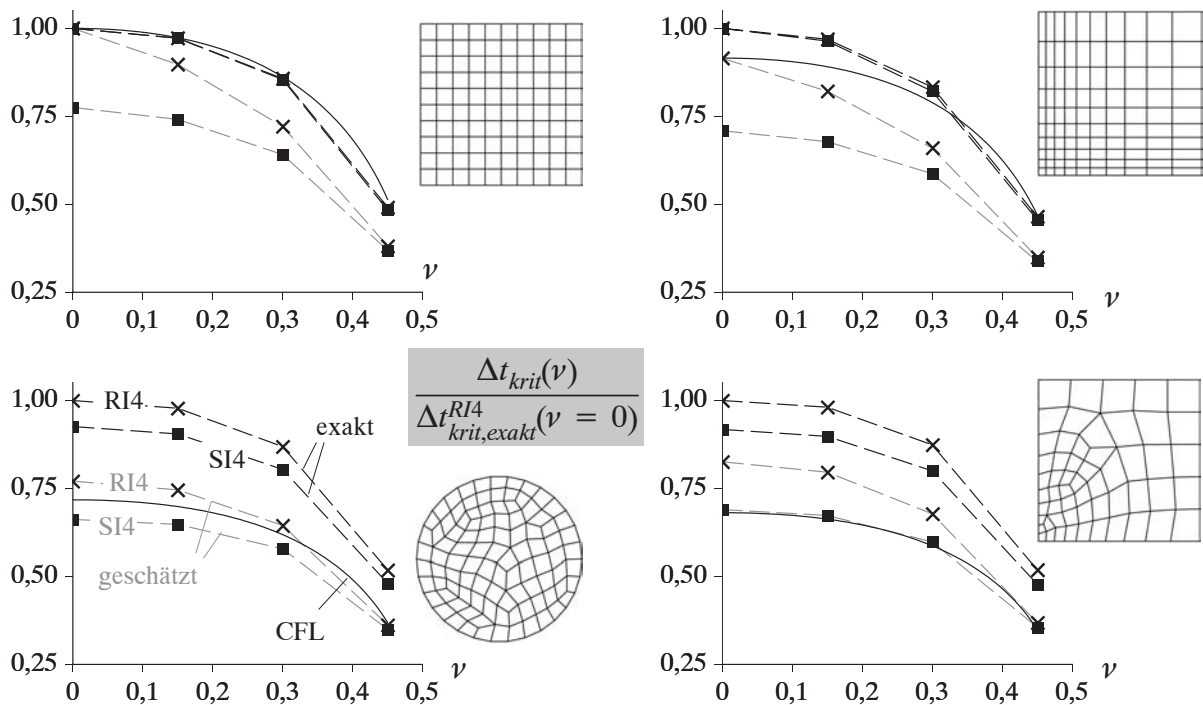


Bild 5.2: Exakte (schwarz gestrichelt) und geschätzte (grau gestrichelt) kritische Zeitschrittweiten für unterschiedliche Netze, Elemente und Querdehnungen

5.2.5 Adaptive Zeitschrittsteuerung im Algorithmus

Die Abhängigkeit des kritischen Zeitschritts von der Elementgeometrie und vom Material hat Auswirkungen auf Strukturberechnungen mit großen Deformationen. So bewirken zunehmende Elementverzerrungen bei transienten Impact-Simulationen ein Absinken des kritischen Zeitschritts während der Berechnung. Diesem Umstand kann Rechnung getragen werden, indem ein durchweg konstanter Zeitschritt verwendet wird, der deutlich unter der initial berechneten kritischen Zeitschrittweite liegt. Intelligenter und effizienter ist jedoch eine adaptive Zeitschrittsteuerung: In jedem Zeitschritt bzw. in regelmäßigen Abständen wird der kritische Wert des Gesamtsystems mit (5.7) oder (5.17) abgeschätzt und dementsprechend der aktuelle Zeitschritt verändert (siehe Algorithmus 2.2).

Durch die Darstellung in Bild 5.3 wird der Effekt deutlich: Die numerische Berechnung des Stab-Impakts mit adaptivem Remeshing (siehe Abschnitt 4.5.1) erfolgt einmal mit einem konstanten Zeitschritt von $\Delta t = 10\text{ns}$ und einmal mit einem adaptiv veränderlichen, sich der Diskretisierung automatisch anpassenden Zeitschritt im Bereich: $11,4\text{ns} \leq \Delta t \leq 24,7\text{ns}$. Man erkennt, dass zunehmende Elementverzerrungen die Zeitschrittgröße verringern. Bei jeder Neuvernetzung steigt die Qualität der Elemente abrupt an (siehe Bild 5.3 rechts), wodurch auch die Größe des stabilen Zeitschritts wieder deutlich steigt. Die Gesamtanzahl der verwendeten Zeitschritte wird im vorliegenden Fall deutlich von 8000 auf 4708 gesenkt, d.h. die Rechenzeit kann durch adaptive Zeitschrittsteuerung erheblich reduziert werden.

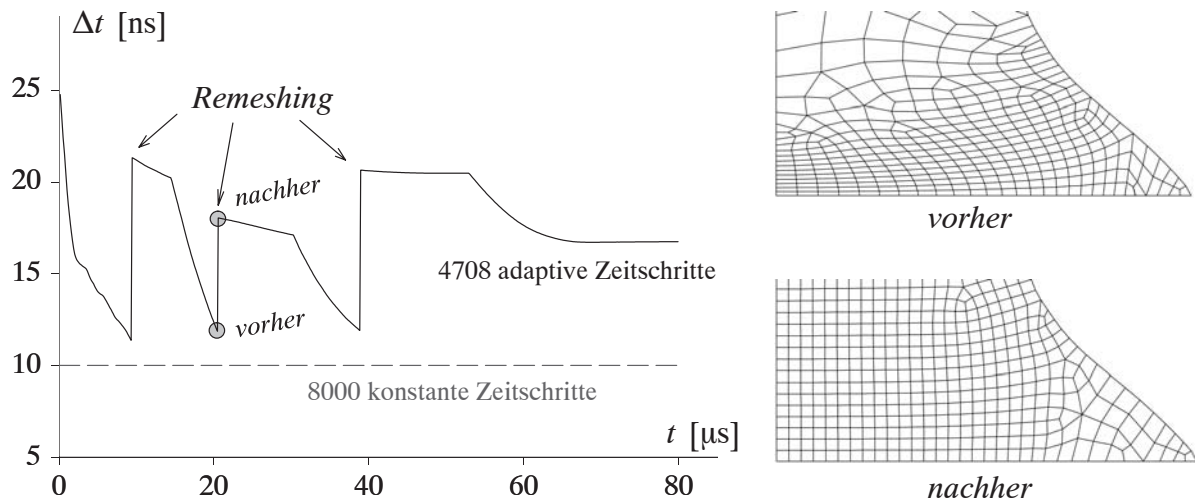


Bild 5.3: Stab-Impakt: Zeitlicher Verlauf der Zeitschrittgröße

5.3 Räumlich variierende Zeitschritte: Subcycling

5.3.1 Idee und Überblick

Die Abhängigkeit des System-Zeitschritts von der Größe, Steifigkeit und Dichte eines einzelnen Elements kann zu einer erheblichen Beeinträchtigung der Effizienz des expliziten Zeitintegrationsverfahrens führen. Dies gilt insbesondere für h-adaptive Diskretisierungen mit lokaler Netzverfeinerung, bei denen wenige sehr kleine bzw. sehr steife Elemente für die Berechnungsdauer des gesamten Systems verantwortlich sind. Zur Illustration der Problematik ist in Bild 5.4 die Verteilung der nach Kapitel 5.2.3 geschätzten kritischen Zeitschrittweite pro Element für ein stark abgestuftes FE-Netz dargestellt: Für das Gesamtsystem muss aus Stabilitätsgründen ein Zeitschritt $\Delta t = 45$ ns gewählt werden, obwohl für die meisten Elemente ein bis zu 14-facher Wert möglich wäre.

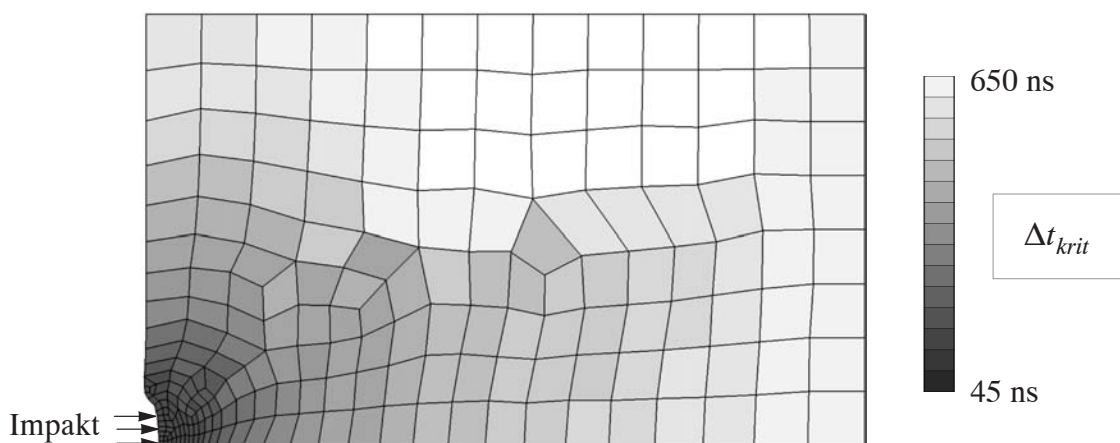


Bild 5.4: Elementweise Verteilung des kritischen Zeitschritts

Um die Rechenzeit zu senken, wurden so genannte "Subcycling"- oder "Multi-time-step"-Verfahren entwickelt (Belytschko et al. (1979)). Die Idee dieser Methoden besteht darin, das Gebiet

in Teilbereiche zu zerlegen, in denen unterschiedliche Zeitschritte verwendet werden. Jeder Partition wird ihr kritischer Zeitschritt zugewiesen. Die numerische Ersparnis entsteht durch die Reduzierung der Rechenoperationen (z.B. Spannungsberechnung) in gröber vernetzten Teilgebieten.

Der betrachtete Körper kann entweder elementweise (Smolinski (1987)) oder knotenweise (Smolinski et al. (1988), Daniel (1997,1998a,1998b)) unterteilt werden. Bei *elementweiser Partitionierung* wird das Netz in Elementgruppen zerlegt, wodurch zwischen benachbarten Teilgebieten Kopplungs- oder Interfaceknoten entstehen, die zu beiden Bereichen gehören. Bei *knotenweiser Partitionierung* werden dagegen FE-Knoten gruppiert und es entstehen Elemente zwischen benachbarten Teilgebieten, die sich überlappen und zu beiden Bereichen gehören. Dadurch ist die Kopplung zwischen den Teilgebieten stärker und es zeigt sich ein günstigeres Stabilitätsverhalten. Dies ist speziell für die hier vorliegenden transienten Probleme entscheidend, weshalb diese Variante im Folgenden verwendet wird.

Die Hauptproblematik der Multi-time-step-Verfahren besteht in der während der Subcycling-Zeitschritte jeweils vorzugebenden Dirichlet-Kopplungsrandbedingungen für die Partition mit dem kleineren Zeitschritt. Da diese Zwischenwerte in der Partition mit dem großen Zeitschritt nicht berechnet werden, muss hier für die übergebene Bewegungsvariable auf dem Kopplungsrand eine Annahme getroffen werden. Dies wird in den folgenden Abschnitten genauer beschrieben.

Einen allgemeinen Überblick über verschiedene partitionierte Lösungsverfahren findet sich z.B. bei Mok (2001). Nach der dort vorgestellten Klassifikation kann das in dieser Arbeit verwendete Subcycling-Verfahren als einfach gestaffelter, explizit-expliziter, synchroner Ansatz mit überlappender bzw. knotenweiser Partitionierung eingeordnet werden. *Einfach gestaffelt* bedeutet, dass keine Iteration über die Teilgebiete erfolgt und die Kopplungsbedingungen daher nur näherungsweise erfüllt werden. Alle Partitionen werden explizit in der Zeit integriert, wodurch sich die Bezeichnung *explizit-explizit* ergibt. Für die Zeitintegration werden in den Teilgebieten jeweils identische Zeitintervalle verwendet, d.h. es handelt sich um einen *synchronen* Ansatz.

Der in dieser Arbeit verwendete Algorithmus besteht aus zwei Teilen. Dies ist zum einen die automatische, knotenweise Partitionierung des diskretisierten Gebiets und zum anderen das eigentliche Subcycling mit der entsprechenden Modifikation der Zeitintegration. Beide Themen werden im Folgenden genauer vorgestellt und diskutiert.

5.3.2 Automatische knotenweise Partitionierung

Beim knotenweisen Partitionierungskonzept werden die FE-Knoten zur Unterteilung der Diskretisierung herangezogen und jeweils eindeutig einem Teilgebiet zugeordnet. Dadurch entsteht zwischen zwei angrenzenden Partitionen eine Schicht von Elementen, die zu beiden Teilgebieten gehören. Sie werden auch als Interface-Elemente bezeichnet. Für ein zweidimensionales Beispiel ist eine knotenweise Partitionierung eines Gebiets Ω in zwei Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 mit dazugehörigen Kopplungsrändern Γ_1 und Γ_2 in Bild 5.5 dargestellt.

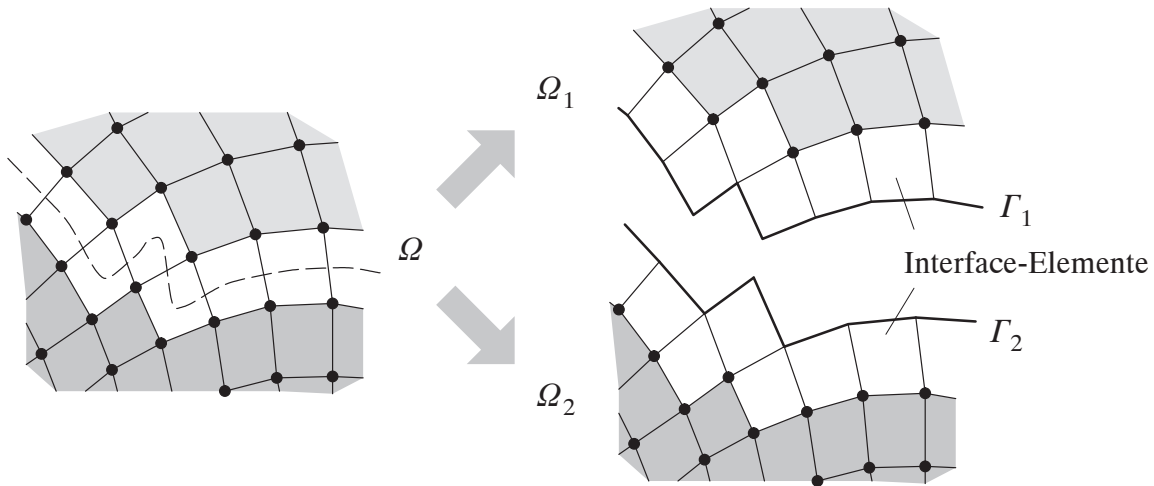


Bild 5.5: Knotenweise Partitionierung in zwei Teilgebiete

An beiden Kopplungsrändern sind die Dirichletrandbedingungen d_{Γ_i} zu bestimmen. Sie sind die durch das jeweils benachbarte Teilgebiet vorgeschriebenen Verschiebungen. Die Verschiebungen am Kopplungsrand können zeitlich linear oder quadratisch interpoliert werden, d.h. im Teilgebiet mit dem größeren Zeitschritt werden entweder die Geschwindigkeiten (*constant velocity subcycling algorithm*, Neal und Belytschko (1989), Daniel (1998a)) oder die Beschleunigungen (*constant acceleration subcycling algorithm*, Belytschko und Lu (1992), Daniel (1997)) in Zwischenschritten konstant gehalten.

In den verschiedenen Partitionen können theoretisch verschiedene beliebige Zeitschrittweiten, die kein ganzzahliges Verhältnis aufweisen müssen, verwendet werden, d.h. eine so genannte "non-integer time step ratio" (Neal und Belytschko (1989)) ist möglich:

$$\Delta t_{\Omega_2} = m \Delta t_{\Omega_1}, \quad m > 1 \in \mathbb{R}. \quad (5.20)$$

Üblich und einfacher zu implementieren ist jedoch ein ganzzahliges Verhältnis zwischen den Zeitschritten, auch "integer time step ratio" genannt (z.B. Daniel (1997)):

$$\Delta t_{\Omega_2} = m \Delta t_{\Omega_1}, \quad m > 1 \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Im Folgenden wird eine anschauliche Methode zur automatischen Partitionierung mit ganzzahligen Zeitschrittverhältnissen zwischen den Teilgebieten vorgestellt. Zunächst wird der kritische Zeitschritt Δt_{krit}^e nach Kapitel 5.2 für jedes Element e abgeschätzt. Dann wird für jeden Knoten N die kleinste kritische Zeitschrittweite ermittelt, indem die angrenzenden Elemente e betrachtet werden und der Minimalwert gewählt wird:

$$\Delta t_{krit}^N = \min_e \{ \Delta t_{krit}^e \}. \quad (5.22)$$

Anschließend wird die kleinste kritische Zeitschrittweite im System ermittelt, indem alle Knoten N im FE-Netz betrachtet werden

$$\Delta t_{\min} = \min_N \{ \Delta t_{krit}^N \}. \quad (5.23)$$

Mit Hilfe der berechneten Größen wird jedem Knoten ein Zeitschrittverhältnis m^N zugeordnet. Dies ist das ganzzahlige Verhältnis der kritischen Zeitschrittweite Δt_{krit}^N des betrachteten Knotens zum minimalen System-Zeitschritt Δt_{min}

$$m^N = \text{floor}\left(\frac{\Delta t_{krit}^N}{\Delta t_{min}}\right) \rightarrow m^N = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.24)$$

Mit der Funktion $\text{floor}(x)$ wird die größte Integer-Zahl bestimmt, die nicht größer als x ist, also z.B. $\text{floor}(1,3562)=1$ oder $\text{floor}(2,8743)=2$. Die Anwendung von Gleichung (5.24) kann zu nicht ganzzahligen Zeitschritt-Verhältnissen zwischen benachbarten Knoten führen, also z.B. 2 zu 3 oder 3 zu 5. Für einen *synchronen* Subcycling-Algorithmus werden jedoch ganzzahlige Zeitschritt-Verhältnisse zwischen benachbarten Knoten benötigt. Dies wird durch den modifizierten Ausdruck

$$\bar{m}^N = 2^{\text{floor}\left(\frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\Delta t_{krit}^N}{\Delta t_{min}}\right)\right)} \rightarrow \bar{m}^N = 1, 2, 4, 8, 16, \dots \quad (5.25)$$

erreicht. Dadurch ist gewährleistet, dass in regelmäßigen, nicht zu großen Abständen ein simultaner Update der Knoten an Kopplungsrändern stattfindet. Jeder einzelne Knoten hat damit die Information, zu welchen Zeitpunkten neue Knotenbeschleunigungen bzw. neue Knotenkräfte berechnet werden sollen, nämlich wenn

$$(\text{aktueller Zeitschritt} - 1) \% \bar{m}^N = 0 \quad (5.26)$$

gilt. Mit dem "Modulo"-Ausdruck $a \% b$ wird der ganzzahlige Rest der Division a durch b ermittelt. In Bild 5.6 ist die Ermittlung der Partitionen eines Gebiets dargestellt. Beispielhaft ist für einen Knoten gezeigt, wie aus dem kritischen Zeitschritt Δt_{krit}^N ein Verhältniswert \bar{m}^N berechnet wird und daraufhin die Zuordnung zum entsprechenden Teilgebiet erfolgt. In diesem Fall findet alle $\bar{m}_{max}^N = 8$ Zeitschritte ein gemeinsamer Update aller Knoten statt.

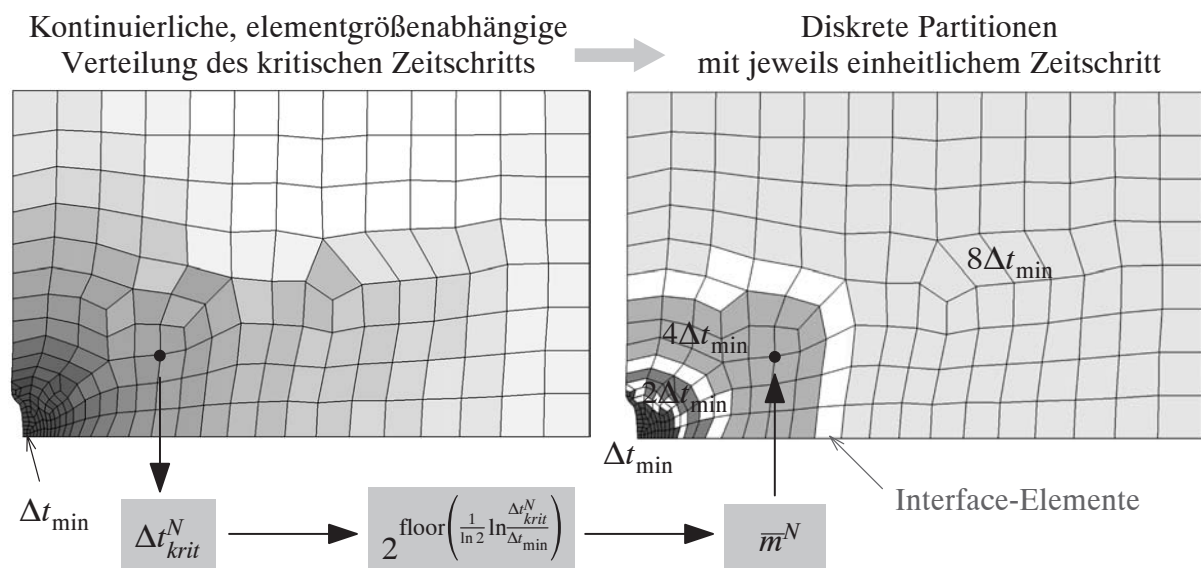


Bild 5.6: Automatische Partitionierung

5.3.3 Subcycling-Algorithmus

In der folgenden Beschreibung des Subcycling-Algorithmus werden zur Vereinfachung zunächst nur 2 Teilgebiete S (*small time step region*) und L (*large time step region*) betrachtet. Die Idee des Subcycling kann auf zwei verschiedene Arten interpretiert und umgesetzt werden, wie in Bild 5.7 grafisch dargestellt ist.

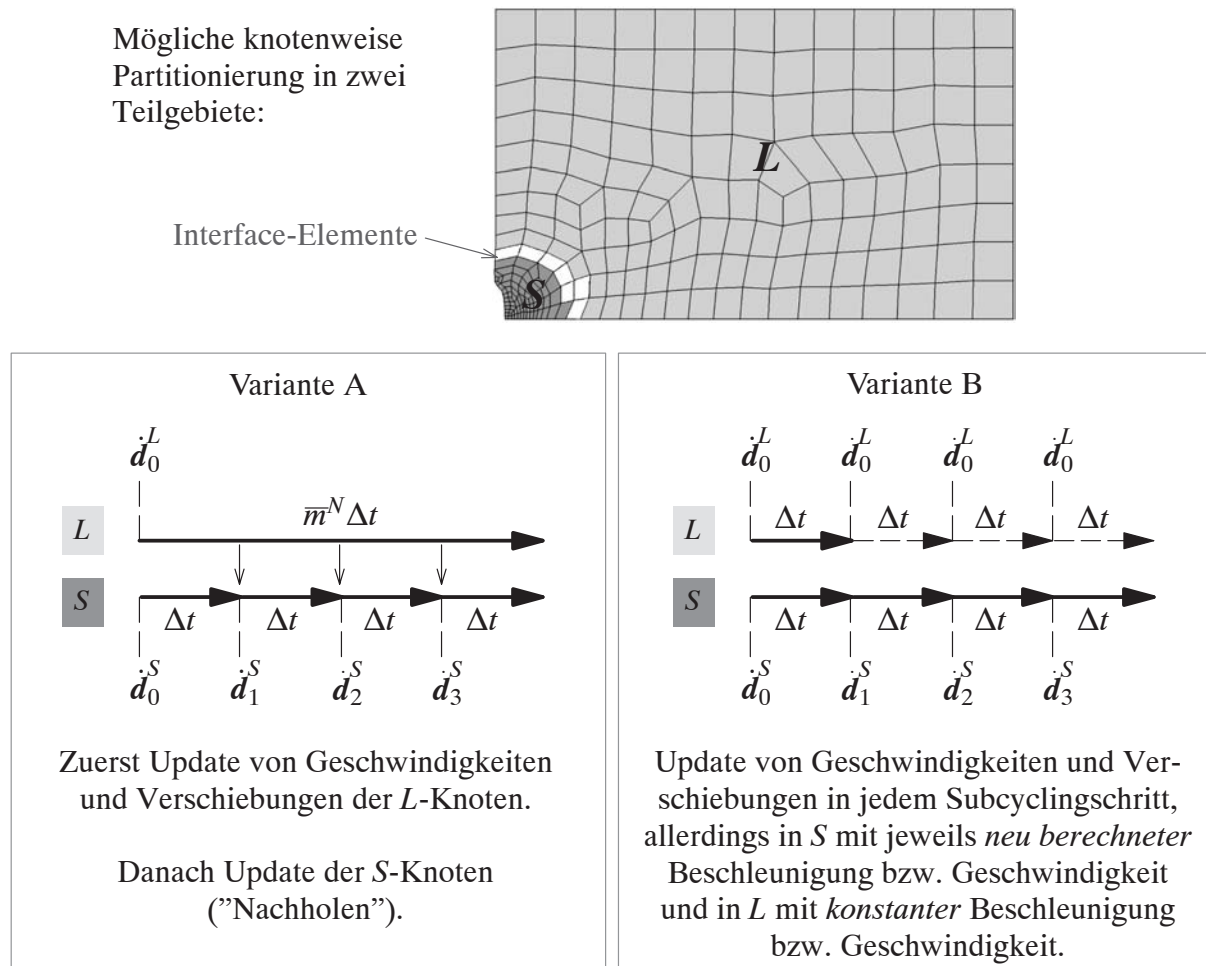


Bild 5.7: Umsetzungsvarianten von Subcycling

Die erste Möglichkeit (Variante A) wird sehr häufig verwendet: Zum Zeitpunkt der gemeinsamen Aktualisierung beider Teilgebiete werden zunächst die L -Knoten mit dem großen Zeitschritt $\bar{m}^N \Delta t$ integriert. Anschließend findet die Aktualisierung der S -Knoten mit zugehörigem kleinen Zeitschritt Δt in jedem Subcycle statt, wobei am Partitionsrand zeitliche Zwischenwerte, z.B. Verschiebungen, von benachbarten L -Knoten verwendet werden. Dies stellt die Kopplung zwischen den Partitionen her.

Im Gegensatz dazu werden in der zweiten Umsetzungsmöglichkeit (Variante B) Verschiebungen und Geschwindigkeiten *aller Knoten* in jedem Subcycle gleichzeitig aktualisiert. Allerdings findet die Aktualisierung der L -Knoten in den Zwischenschritten mit konstanter Beschleunigung (*constant acceleration method*) bzw. mit konstanter Geschwindigkeit (*constant velocity method*)

statt, d.h. die Neuberechnung von Knotenkräften entfällt. Dadurch wird die angestrebte Rechenzeiterparnis erzielt.

Variante B mit dem gemeinsamen Update der Teilgebiete in jedem Zeitschritt ist für Probleme mit Kontakt notwendig, da die Verschiebungen in den Zwischenzuständen auch für den L -Bereich vorliegen müssen.

Da die Methode der konstanten Beschleunigungen zu Instabilitäten neigt (Gupta und Ramirez (1997)), beschränkt sich die weitere Betrachtung auf die Methode der konstanten Geschwindigkeiten. Der Ablauf der expliziten Zeitintegration mit Subcycling ist im Algorithmus 5.1 dargestellt. Darin wird der Ablauf eines großen Zeitschritts des Teilgebiets L als *Cycle* bezeichnet. Die kleinen Zeitschritte des Teilgebiets S , die innerhalb eines solchen Cycles ablaufen, werden dagegen als *Subcycles* bezeichnet. Der Zeitindex ' i ' steht für die Nummer des jeweiligen Subcycles.

Aktuelle Behandlungen des Themas 'Subcycling' finden sich in Gravouil und Combescure (2001) und Daniel (2003).

Anmerkung 1: Remeshing erfordert im Ablauf der expliziten Zeitintegration mit Subcycling besondere Aufmerksamkeit. Eine Neuvernetzung sollte nur dann durchgeführt werden, wenn im Zeitschritt vorher eine Aktualisierung aller Elemente und aller Knoten stattgefunden hat, ansonsten werden keine oder falsche Werte von der alten auf die neue Diskretisierung übertragen. Nach dem Remeshing muss neu partitioniert werden und das Subcycling beginnt von neuem.

Anmerkung 2: Es wäre denkbar, die adaptive Zeitschrittsteuerung aus Abschnitt 5.2.5 und das hier vorgestellte Subcycling gemeinsam zu verwenden, um die Effizienz eventuell weiter zu steigern. Allerdings müsste dann in regelmäßigen Abständen überprüft werden, ob die initial gewählte Gebietszerlegung noch gültig ist: Treten große Elementverzerrungen und damit erhebliche Änderungen der kritischen Zeitschrittweite auf, so ist eine häufige Neu-Partitionierung notwendig, was wiederum die Effizienz absenkt. In den Beispielen dieser Arbeit wird entweder adaptive Zeitschrittsteuerung ohne Subcycling oder Subcycling mit konstantem Zeitschritt verwendet.

5.4 Numerische Beispiele

5.4.1 Lineares 1D-Stabproblem

An einem einfachen Beispiel werden nun die *Genauigkeit* und die *Stabilität* des Subcycling-Algorithmus untersucht. Ein eindimensionaler, geometrisch linear modellierter, linear elastischer und einseitig eingespannter Stab wird plötzlich am anderen Ende in Längsrichtung belastet (siehe Bild 5.8). Dadurch wird eine Kompressionswelle erzeugt, die aufgrund der gewählten Materialparameter mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von 1,0 m/s periodisch vor- und zurückläuft (Smolinski und Sleith (1992), Mok (2001)). Die Diskretisierung mit bilinearen Elementen ist zweigeteilt: Der "grob" diskretisierte Bereich zwischen $x = 0$ und $x = 10$ m enthält 10 Elemente mit einer Länge von jeweils $h = 1$ m. Im "fein" diskretisierten Bereich zwischen $x = 10$ m und $x = 11$ m sind 10 Elemente mit einer Länge von $h = 0,1$ m.

-
- (i) Daten einlesen und Anfangsbedingungen setzen: z.B. Anfangsverschiebungen, Anfangsgeschwindigkeiten, Dauer der Berechnung, usw.
- (ii) Räumliche, knotenweise Partitionierung in ein Teilgebiet S mit Zeitschritt Δt und ein Teilgebiet L mit \bar{m}^N -fach größerem Zeitschritt und Zuordnung der entsprechenden stabilen Zeitschrittweite

$$\Delta t_{stab}^S = \Delta t, \quad \Delta t_{stab}^L = \bar{m}^N \Delta t \quad (5.27)$$

\bar{m}^N ist die "integer time step ratio" und damit die Anzahl der Subcycles pro Cycle.

- (iii) Berechnung der Beschleunigungen \ddot{d}_0^S und \ddot{d}_0^L für beide Teilgebiete zu Beginn eines Cycles, d.h. für den ersten Subcycle ($i = 0$)

$$\ddot{d}_0^S = (\mathbf{M}^S)^{-1} \mathbf{f}_0^S, \quad \ddot{d}_0^L = (\mathbf{M}^L)^{-1} \mathbf{f}_0^L \quad (5.28)$$

mit den Massen \mathbf{M}^S bzw. \mathbf{M}^L und den Knotenkräften \mathbf{f}_0^S bzw. \mathbf{f}_0^L .

- (iv) Aktualisierung der Geschwindigkeiten \dot{d}_1^S und \dot{d}_1^L sowie der Verschiebungen d_1^S und d_1^L in beiden Partitionen für den ersten Subcyclingschritt, wobei bei der Methode der konstanten Geschwindigkeiten die gesamte Beschleunigung im ersten Subcyclingschritt aufgebracht wird

$$\dot{d}_1^S = \dot{d}_0^S + \Delta t \ddot{d}_0^S, \quad \dot{d}_1^L = \dot{d}_0^L + \bar{m}^N \Delta t \ddot{d}_0^L \quad (5.29)$$

$$d_1^S = d_0^S + \Delta t \dot{d}_1^S, \quad d_1^L = d_0^L + \Delta t \dot{d}_1^L \quad (5.30)$$

- (v) Berechnung der Beschleunigungen zu Beginn jedes weiteren Subcycles ($i = 1 \dots \bar{m}^N - 1$) für das Teilgebiet S durchführen, die Beschleunigungen im Teilgebiet L werden dagegen nicht berechnet (Ermittlung der Knotenkräfte entfällt)

$$\ddot{d}_i^S = (\mathbf{M}^S)^{-1} \mathbf{f}_i^S, \quad - \quad (5.31)$$

- (vi) Aktualisierung von Geschwindigkeiten und Verschiebungen in beiden Teilbereichen mit jeweils neu berechneten Geschwindigkeiten für S bzw. mit konstanten Geschwindigkeiten für L

$$\dot{d}_{i+1}^S = \dot{d}_i^S + \Delta t \ddot{d}_i^S, \quad \dot{d}_{i+1}^L = \dot{d}_i^L \quad (5.32)$$

$$d_{i+1}^S = d_i^S + \Delta t \dot{d}_{i+1}^S, \quad d_{i+1}^L = d_i^L + \Delta t \dot{d}_{i+1}^L \quad (5.33)$$

- (vii) Wiederholung von (v) und (vi) bis $i = \bar{m}^N - 1$, dann Neustart eines Cycles bei (iii)

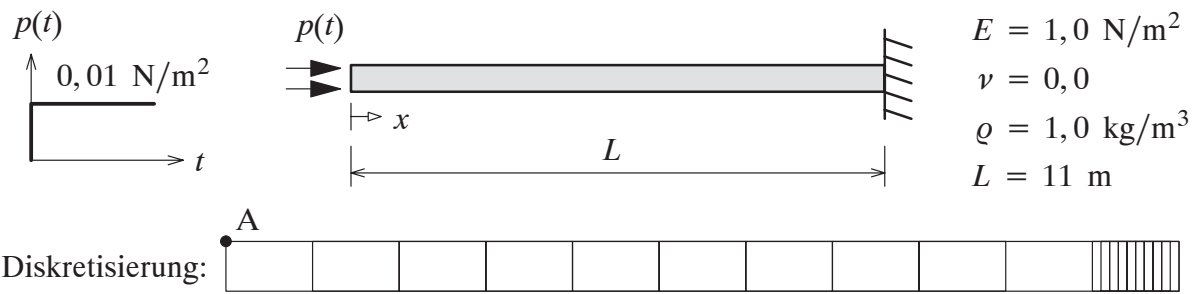


Bild 5.8: Subcycling-Testbeispiel: Geometrie, Belastung, Material, Diskretisierung

Durch die automatische knotenweise Partitionierung ergeben sich für eine Subcycling-Berechnung zwei Teilgebiete mit unterschiedlichen kritischen Zeitschritten. Im fein vernetzten Bereich wird $\Delta t^S = 0,05 \text{ s} < \Delta t_{krit} = 0,1 \text{ s}$ verwendet. Gemäß Gleichung (5.25) kann im grob vernetzten Bereich mit $\Delta t^L = 0,4 \text{ s}$ ein 8-fach größerer Zeitschritt zum Einsatz kommen. Bei der Betrachtung der Horizontalverschiebung d^A des Knotens A (siehe Bild 5.9) sind nur sehr geringe Unterschiede zwischen der Berechnung ohne und mit Subcycling zu erkennen, was auf eine gute Genauigkeit und hohe numerische Stabilität in diesem Beispiel schließen lässt.

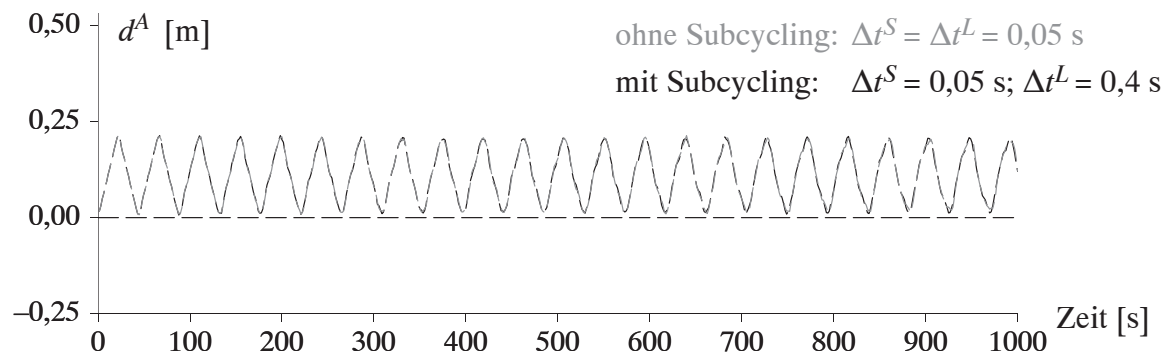


Bild 5.9: Schwingungsverläufe des Knotens A

Noch deutlicher wird dies, wenn ein längerer Zeitraum und mit dem aufsummierten Fehler err_n^A (Gupta und Ramirez (1997), Mok (2001)) eine andere Größe betrachtet wird. err_n^A ist als L^2 -Norm des bis zum Zeitpunkt t_n aufsummierten Absolutwerts der momentanen Knotenverschiebungsdifferenz $d_{mit}^A - d_{ohne}^A$ zwischen einer Berechnung mit und ohne Subcycling definiert:

$$err_n^A = \left[\sum_{j=1}^n \left(d_{j,mit}^A - d_{j,ohne}^A \right)^2 \right]^{1/2} . \quad (5.34)$$

Die Kurven in Bild 5.10 zeigen, dass selbst für einen sehr langen Zeitraum keine Instabilität beobachtet werden kann. Außerdem ist festzustellen, dass das Subcycling-Verfahren erster Ordnung genau ist, d.h. eine Verkleinerung des Zeitschritts um einen bestimmten Faktor bewirkt eine Reduktion des Fehlers der partitionierten Lösung im Vergleich zur simultanen Lösung um denselben Faktor.

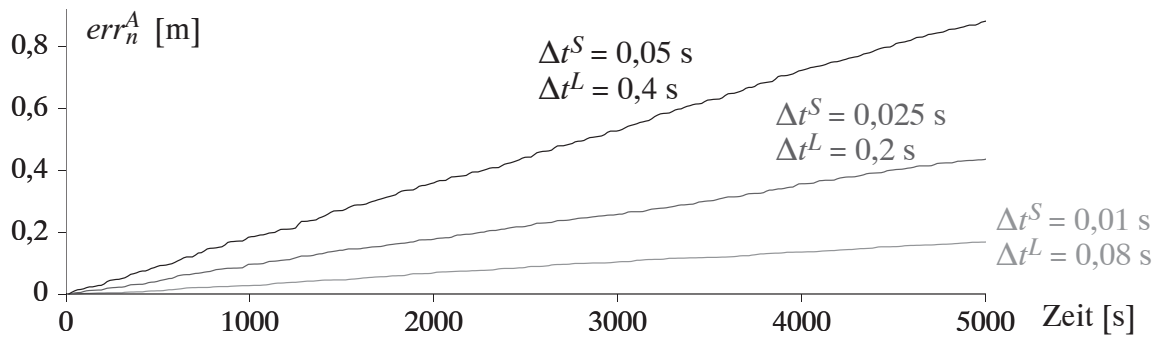


Bild 5.10: Akkumulierter Fehler in der Verschiebung

5.4.2 Stoß gegen Metallzylinder

Ein eingespannter, zylindrischer Körper aus Kupfer ist das Ziel einer zentrischen, sinusförmigen Stoßbelastung. Die notwendigen Daten des Versuchs sind in Bild 5.11 zusammengefasst. Die zweidimensionale Diskretisierung der axialsymmetrischen Probe wurde bereits in Bild 5.4 dargestellt. Der $50\mu\text{s}$ dauernde Stoß bewirkt irreversible Deformationen im fein diskretisierten Impaktbereich und eine sich im gesamten Zylinder ausbreitende Kompressionswelle, die den Körper auch nach dem Stoß elastisch weiter schwingen lässt. Anhand dieses Tests wird der beschriebene Subcycling-Algorithmus hinsichtlich Effizienz, Genauigkeit und Stabilität analysiert.

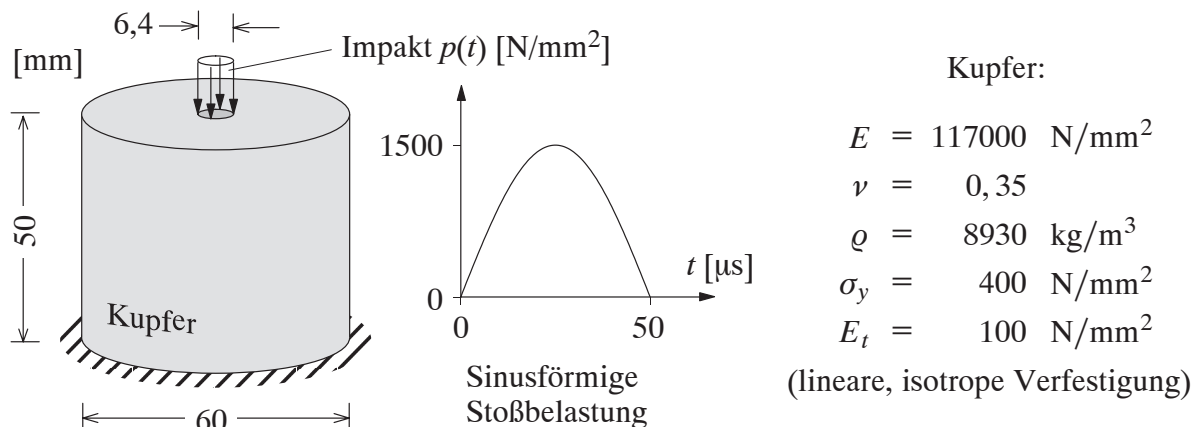


Bild 5.11: Stoß gegen Zylinderblock: Geometrie, Belastung und Materialdaten

Der kritische Zeitschritt dieses Beispiels beträgt $73,4\text{ ns}$ (Nanosekunden) und wird durch Gleichung (5.23) mit $48,5\text{ ns}$ konservativ abgeschätzt. Gewählt wird ein kleinster Zeitschritt von $\Delta t = 20,0\text{ ns}$ ohne adaptive Zeitschrittsteuerung und ohne Remeshing. Die automatische Partitionierung des Gebiets führt zu einer Zerlegung in 4 Teilbereiche mit jeweils Δt , $2\Delta t$, $4\Delta t$ und $8\Delta t$, wie bereits in Bild 5.6 dargestellt. Wird das Zeitschrittverhältnis auf maximal $\bar{m}^N = 2$ bzw. $\bar{m}^N = 4$ beschränkt, so erhält man lediglich 2 bzw. 3 Partitionen. Die Effizienzsteigerung durch Subcycling wird anhand einer $200\mu\text{s}$ langen Berechnung untersucht. Bezogen auf eine simultane Berechnung ohne Subcycling, d.h. mit einem Zeitschritt $\Delta t = 20\text{ ns}$ im ganzen Gebiet, ergibt sich eine Rechenzeitreduktion auf bis zu $52,2\%$ (siehe Bild 5.12).

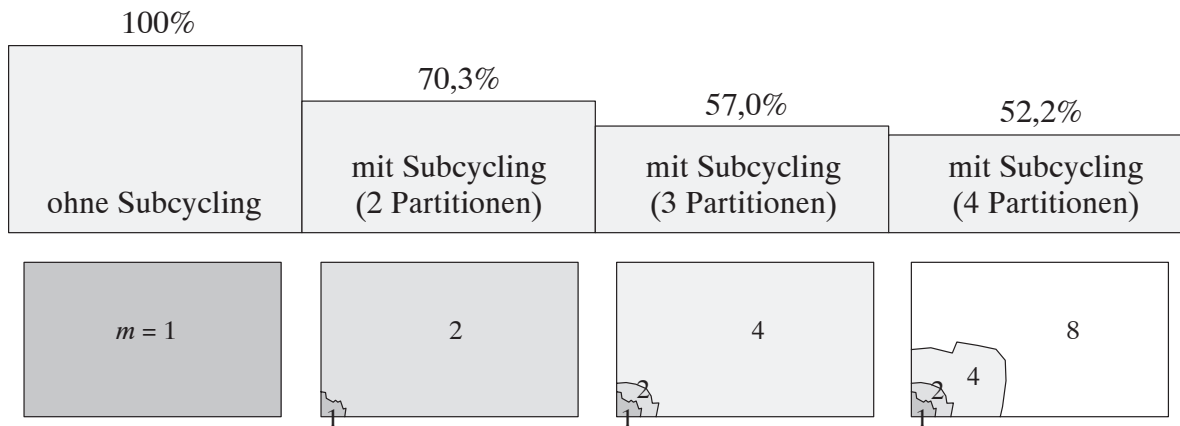


Bild 5.12: Rechenzeitvergleich: Effizienzsteigerung durch Subcycling

Zur Analyse der Genauigkeit wird die Verschiebung des auf der Rotationsachse liegenden, durch den Impuls belasteten Knotens betrachtet (siehe Bild 5.13). Durch die sinusförmige Stoßbelastung entsteht zunächst eine große irreversible Verformung, gefolgt von einer elastischen Schwingungsbewegung. Zwischen der simultanen Lösung und der Subcycling-Lösung bestehen nur geringe Unterschiede. Auch die Betrachtung der äquivalenten plastischen Verzerrungen in Bild 5.14 zeugt von der Genauigkeit des Subcycling-Verfahrens.

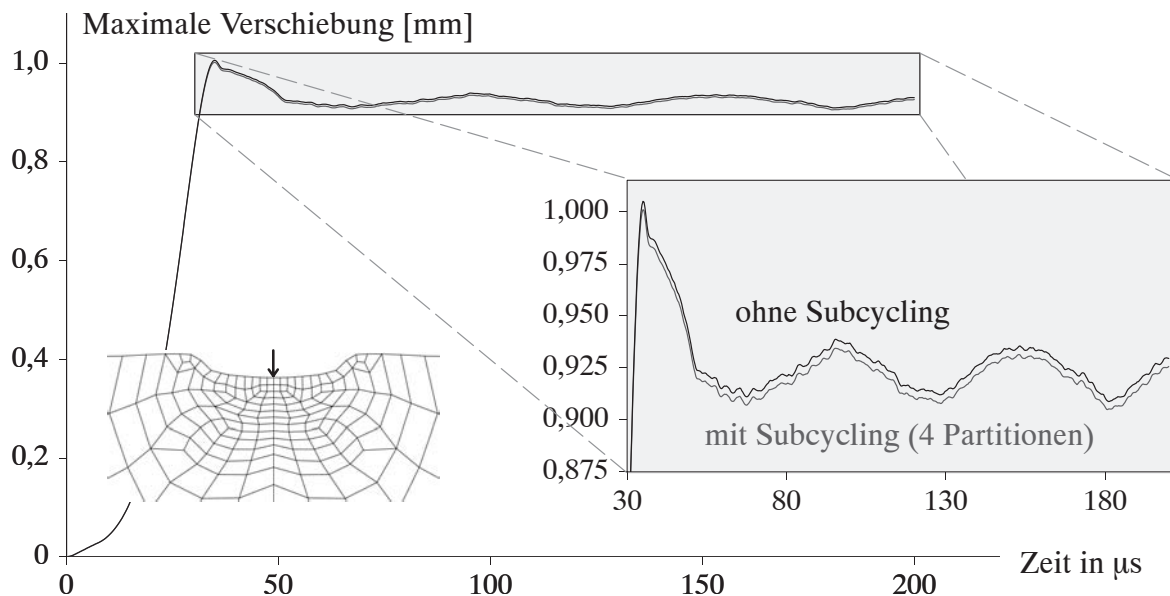


Bild 5.13: Schwingungsverlauf des zentralen Knotens

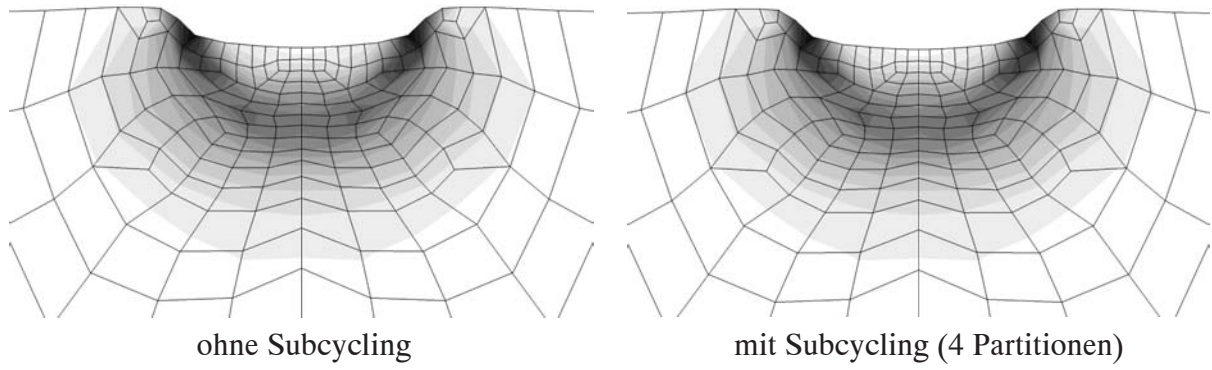


Bild 5.14: Äquivalente plastische Verzerrungen (0 – 0,4)

6 Ein konstitutives Modell für Metalle

6.1 Einführung

In den Kapiteln 2.1.3 und 2.2.3 wurden die Materialgleichungen der Finiten Plastizität in Ratenform sowie die entsprechende zeitliche Integration dieser Gleichungen, d.h. die inkrementelle Formulierung, beschrieben. Der sich daraus ergebende algorithmische Rahmen (Algorithmus 2.1) stellt ein Grundgerüst für verschiedene plastische isotrope Materialien dar. In diesem Kapitel werden nun konkrete Ansätze für metallische Werkstoffe, in Kapitel 7 für kohäsive und nichtkohäsive Reibungsmaterialien vorgestellt und diskutiert. Dabei soll das spezielle Verhalten bei Impaktbelastungen unter hohem Druck, großen Verzerrungen und hohen Dehnraten im Vordergrund stehen.

In diesem Kapitel wird zunächst kurz auf die Phänomenologie *metallischer Werkstoffe* eingegangen. Es folgt ein Überblick über Konstitutivgesetze für Metalle unter Berücksichtigung hochdynamischer und thermischer Effekte. Anschließend wird das in dieser Arbeit verwendete phänomenologische Materialmodell für Metalle vorgestellt: In die Formulierung der klassischen von Mises-Plastizität werden Viskosität und Temperaturabhängigkeiten eingebracht. Schließlich wird an zwei numerischen Beispielen das konstitutive Modell verifiziert und das Zusammenspiel mit der adaptiven Neuvernetzungsstrategie aus Kapitel 4 diskutiert.

6.2 Charakterisierung und Modellierung von Metallen

6.2.1 Phänomenologie

Metalle sind duktile Materialien mit kristallinem Aufbau, die sich unter makroskopischer Betrachtung bei geringen Verzerrungen elastisch verhalten. Nach Überschreiten der Fließgrenze treten inelastische Deformationen auf und es ist ein ver- oder entfestigendes Verhalten zu beobachten. Die plastischen Deformationen entstehen durch Gleitvorgänge entlang bestimmter Gitterebenen, wobei das Volumen des Materials erhalten bleibt. Bei Belastungen mit hoher Intensität und hoher Belastungsgeschwindigkeit sind die Fließgrenze und das Ver- und Entfestigungsverhalten des Materials zusätzlich von der plastischen Dehnraten und der Temperatur abhängig.

Das typische Verhalten von Metallen unter Stoßbelastung soll anhand von experimentellen Ergebnissen erläutert werden: Kim et al. (1998) untersuchten eine Wolfram(93%)-Eisen(4,9%)-Nickel(2,1%)-Legierung unter kompressiver Belastung für verschiedene Dehnraten und verschiedene Temperaturen. Zwei experimentelle Ergebnisse sind in Form von Spannungs-Dehnungskurven in Bild 6.1 dargestellt. Auf der linken Seite ist der Unterschied zwischen einer quasi-statischen und einer hochdynamischen Belastung zu erkennen: Bei quasi-statischer Belastung zeigt sich das für Metalle typische Verfestigungsverhalten nach Überschreiten der Fließgrenze. Durch die Erhöhung der Belastungsgeschwindigkeit werden die elastische Steifig-

keit und die Fließgrenze erhöht. Nach dem Spannungsmaximum entfestigt das dynamisch beanspruchte Material aufgrund einer Temperaturerhöhung von 25°C auf ca. 250°C: Die dehnrateabhängige *Verfestigung* und die temperaturabhängige *Entfestigung* sind zwei gleichzeitig ablaufende, konkurrierende Phänomene, bei denen die Entfestigung zumeist die Oberhand behält (Wright (2002)), wie an der "dynamischen Kurve" in Bild 6.1 links zu erkennen ist. Auf der rechten Seite in Bild 6.1 sind Spannungs-Dehnungskurven von vier verschiedenen Versuchen mit einer Dehnrates von 3000 1/s und unterschiedlichen Anfangstemperaturen dargestellt: Je höher die Temperatur ist, desto geringer ist die Fließspannung und die thermische Entfestigung. Bei Betrachtung der Probekörper nach dem Versuch zeigen sich Lokalisierungen in Form von so genannten adiabatischen Scherbändern. Grund dafür sind lokalisierende, thermisch induzierte Entfestigungen und dadurch aktivierte Versetzungsbewegungen auf Kristallgitterebene. Dieser Lokalisierungseffekt wird anhand eines numerischen Beispiels in Kapitel 6.4.1 näher beleuchtet.

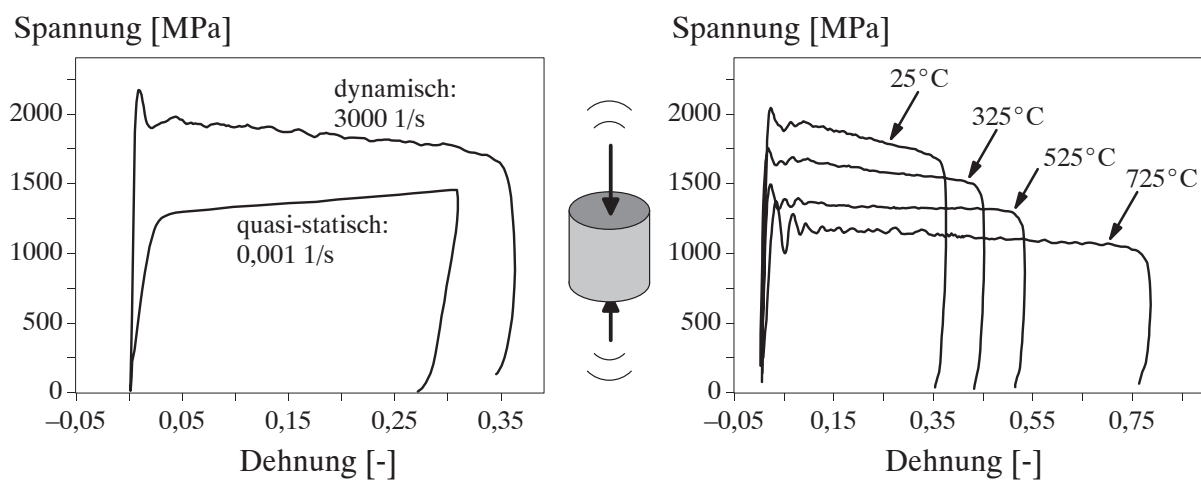


Bild 6.1: Wolframlegierung unter kompressiver Belastung (Kim et al. (1998)); links: zwei versch. Dehnrates bei gleicher Anfangstemperatur von 25°C, rechts: vier versch. Anfangstemperaturen bei gleicher Dehnrates von 3000 1/s

6.2.2 Materialmodelle

Zumeist werden für Metalle Plastizitätsmodelle verwendet, bei denen Fließen einsetzt, wenn die zweite Invariante des Spannungstensors J_2 einen kritischen Wert - die Fließgrenze - erreicht, und bei denen das plastische Fließen ein isochorer, d.h. volumenerhaltender Prozess mit isotroper und/oder kinematischer Ver- bzw. Entfestigung ist. Solche Modelle werden häufig als "von Mises"- oder J_2 -Plastizität bezeichnet. An dieser Stelle sollen drei Ansätze genannt werden, die den Einfluss der Dehnrates und der Temperatur auf die Fließgrenze berücksichtigen.

Steinberg, Cochran und Guinan (1980) entwickelten ein empirisches Modell zur Beschreibung dynamischen Materialverhaltens von Metallen, bei dem die Fließgrenze σ_y von der plastischen Dehnung ϵ^p und einem Schubmodul μ , der eine Funktion des hydrostatischen Drucks p und der Temperatur T ist, abhängt: $\sigma_y = \sigma_y(\epsilon^p, \mu(p, T))$. Dieser Ansatz wurde für extrem hohe Dehnrates ($> 10^5 \text{ s}^{-1}$) unter der Annahme entwickelt, dass in diesem Bereich (fast) keine Abhängigkeit von der plastischen Dehnrates $\dot{\epsilon}^p$ mehr vorhanden ist. Um das Modell für einen größeren

Dehnratenbereich ($10^{-4} - 10^6 \text{s}^{-1}$) nutzbar zu machen, wurde es von Steinberg und Lund (1989) um diese Dehnratenabhängigkeit erweitert.

Beim empirischen *Johnson-Cook-Modell* (Johnson und Cook (1985)) ist die Fließspannung σ_y eine Funktion der plastischen Dehnung ε^P , der plastischen Dehnrates $\dot{\varepsilon}^P$ und der Temperatur T : $\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon^P, \dot{\varepsilon}^P, T)$. Die notwendigen Materialparameter dieser Formulierung erhält man aus statischen und dynamischen Versuchen bei unterschiedlichen Umgebungstemperaturen. Das Johnson-Cook-Modell kommt in der Regel bei der Simulation von hochfesten Metallen in Impakt- und Penetrationsvorgängen zum Einsatz (Camacho und Ortiz (1997), Batra und Stevens (1998)). In dieser Arbeit wird dieser anschauliche Ansatz verwendet und in Abschnitt 6.3.2 detaillierter beschrieben.

Zerilli und Armstrong (1987) entwickelten ein weiteres physikalisch basiertes Modell, das dem von Johnson und Cook sehr ähnelt. Auch dort beeinflussen die plastische Dehnung ε^P , die plastische Dehnrates $\dot{\varepsilon}^P$ und die Temperatur T die Höhe der Fließgrenze: $\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon^P, \dot{\varepsilon}^P, T)$. Allerdings wird bei dieser Methode die unterschiedliche Kristallstruktur von Metallen mit ihren verschiedenen Versetzungsmechanismen berücksichtigt: Für kubisch flächenzentrierte Metalle, wie z.B. Kupfer oder Aluminium, wird eine andere Formulierung verwendet als für kubisch raumzentrierte Metalle, wie z.B. Eisen, Wolfram oder Chrom.

6.3 Thermoviskoplastisches Materialmodell

Im Folgenden wird ein phänomenologisches Modell in algorithmischer Form vorgestellt, dass die in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Effekte im Wesentlichen erfasst:

- *Linear elastisches* Verhalten bis zur Fließgrenze, danach plastische Deformationen
- *Isochores plastisches Fließen*: Plastisches Fließen ist unabhängig vom volumetrischen Anteil des Spannungstensors
- *Isotrope Verfestigung*: Erhöhung der Fließgrenze durch zunehmende plastische Dehnungen und plastische Dehnrates
- *Isotrope Entfestigung*: Absenkung der Fließgrenze durch Temperaturerhöhung

6.3.1 Ausgangspunkt: Von Mises-Plastizität

Zunächst wird die klassische J_2 - bzw. Huber-von Mises-Plastizität mit assoziiertem Fließen vorgestellt, die als Ausgangspunkt für das thermoviskoplastische Materialmodell dient.

Analog zu Simo (1992) wird zunächst folgende entkoppelte Freie Energie-Funktion

$$\psi(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \alpha) = \frac{1}{2} \kappa \left[\text{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) \right]^2 + \mu \left(\text{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) \right)^T \text{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) + \tilde{K}(\alpha) \quad (6.1)$$

mit

$$\text{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) \mathbf{1}, \quad \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) = (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e)^T \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} = [1, 1, 1]^T, \quad (6.2)$$

dem Kompressionsmodul κ und dem Schubmodul μ gewählt. Die Funktion ψ ist quadratisch in den elastischen logarithmischen Hauptverzerrungen $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e = [\ln(b_1^e), \ln(b_2^e), \ln(b_3^e)]^T$ und der Ausdruck $\tilde{K}(\alpha)$ charakterisiert das isotrope Verfestigungsverhalten. Nach den Ausführungen von Simo (1992) können mit diesem Ansatz die klassischen Rückprojektionsmethoden der geometrisch linearen Theorie auf den nichtlinearen Fall übertragen werden, so wie es in Abschnitt 2.2.3 beschrieben wurde. Demnach ist dieses Modell gut geeignet für moderate elastische und finite plastische Verzerrungen. Die in Vektorform notierten Kirchhoff-Hauptspannungen $\hat{\boldsymbol{\tau}} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ ergeben sich mit Gleichung (2.87) zu

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e} = \kappa \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) \mathbf{1} + 2\mu \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) . \quad (6.3)$$

Der elastische Bereich der klassischen J_2 -Metallplastizität wird durch die Huber-von Mises-Fließfläche begrenzt, die hier in Kirchhoff-Spannungen $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ formuliert ist

$$f(\hat{\boldsymbol{\tau}}, q) = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}} q(\bar{\epsilon}^p) \leq 0 . \quad (6.4)$$

Dabei ist $q(\bar{\epsilon}^p)$ die ver- und entfestigungsabhängige Fließgrenze und $\bar{\epsilon}^p$ die äquivalente plastische Verzerrung und damit die einzige freie interne Variable $\alpha := \bar{\epsilon}^p$ in dieser Formulierung. Fließen setzt ein, wenn $\|s\| =: \sqrt{2J_2}$ den kritischen Wert - die äquivalente Spannung $\bar{\sigma} = \sqrt{2/3} q(\bar{\epsilon}^p)$ - erreicht, wobei J_2 die zweite Invariante des Kirchhoff-Spannungsdeviators $s = \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \hat{\boldsymbol{\tau}} - 1/3 \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{1}$ ist. Die entsprechende Fließfläche stellt sich im Hauptspannungsraum als Zylinder um die hydrostatische Achse dar.

Im aktuellen Zeitschritt t_n wird anhand der Fließbedingung (6.4) überprüft, ob der elastische Prädiktor $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{trial}, q_n^{trial})$ mit

$$s_n^{trial} = \left. \frac{\partial \psi_n}{\partial \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n)} \right|_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{e,trial}} = 2\mu \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{e,trial}) \quad (6.5)$$

$$q_n^{trial} = q(\bar{\epsilon}_{n-1}^p) \quad (6.6)$$

zulässig ist oder nicht (siehe Gleichung (2.74)). Bei Verletzung der Fließbedingung müssen die Spannungen durch den plastischen Korrektur auf die Fließfläche zurückprojiziert werden:

$$s_n = s_n^{trial} - 2\mu \Delta\gamma_n \frac{\partial f_n}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_n} = s_n^{trial} - 2\mu \Delta\gamma_n \frac{s_n}{\|s_n\|} , \quad (6.7)$$

$$\bar{\epsilon}_n^p = \bar{\epsilon}_{n-1}^p - \Delta\gamma_n \frac{\partial f_n}{\partial q_n} = \bar{\epsilon}_{n-1}^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma_n , \quad (6.8)$$

wobei $\|s_n\| := \sqrt{s_n^T s_n}$. Zusätzlich gilt für die assoziierte, normierte, aktuelle Fließrichtung $s_n / \|s_n\|$, dass sie mit der entsprechenden Richtung des Prädiktor-Zustands übereinstimmt (Simo (1992))

$$\frac{s_n}{\|s_n\|} = \frac{s_n^{trial}}{\|s_n^{trial}\|} \quad (6.9)$$

und man erhält

$$\|s_n\| = \|s_n^{trial}\| - 2\mu \Delta\gamma_n . \quad (6.10)$$

Einsetzen von (6.10) und (6.8) in (6.4) und Anwendung der diskreten Kuhn-Tucker Bedingungen (2.77) führt zu einer nichtlinearen Gleichung für den unbekanntem plastischen Multiplikator $\Delta\gamma_n$:

$$\|s_n^{trial}\| - 2\mu \Delta\gamma_n - \sqrt{\frac{2}{3}} q(\bar{\epsilon}_n^p) = 0 \quad \text{mit } \bar{\epsilon}_n^p = \bar{\epsilon}_{n-1}^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma_n . \quad (6.11)$$

Die Lösung erhält man durch eine lokale Newton-Iteration. Nach der Ermittlung von $\Delta\gamma_n$ können die elastischen logarithmischen Hauptdehnungen $\hat{\epsilon}_n^e$ mit

$$\hat{\epsilon}_n^e = \hat{\epsilon}_n^{e,trial} - \Delta\hat{\epsilon}_n^p = \hat{\epsilon}_n^{e,trial} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma_n \frac{s_n}{\|s_n\|} \quad (6.12)$$

und die Kirchhoff-Hauptspannungen $\hat{\tau}_n$ mit

$$\hat{\tau}_n = \kappa \operatorname{tr}(\hat{\epsilon}_n^e) + 2\mu \operatorname{dev}(\hat{\epsilon}_n^e) \quad (6.13)$$

berechnet werden. Es sei daran erinnert, dass diese beiden Größen des Eigenraums in Vektorform vorliegen (siehe Gleichungen (2.84) und (2.85)) und erst im tensoriellen Nachprozess die Tensoren berechnet werden (siehe Algorithmus 2.1).

Anmerkung: Für die isotrope lineare Verfestigung mit einer initialen Fließgrenze σ_y und einem Verfestigungsmodul E_t

$$q(\alpha) = q(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_y + E_t \bar{\epsilon}^p \quad (6.14)$$

ist Gleichung (6.11) linear in $\Delta\gamma_n$ und der plastische Multiplikator kann direkt berechnet werden:

$$\Delta\gamma_n = \frac{\|s_n^{trial}\| - \sqrt{2/3} (\sigma_y + E_t \bar{\epsilon}_{n-1}^p)}{2\mu + 2/3 E_t} . \quad (6.15)$$

Bisher ist die Fließgrenze $q(\bar{\epsilon}^p)$ nur eine Funktion der äquivalenten plastischen Verzerrung $\bar{\epsilon}^p$. Um nun die Dehnraten- und Temperaturabhängigkeit in das Modell mit aufzunehmen, wird das Modell im nächsten Abschnitt erweitert.

6.3.2 Erweiterung: Johnson-Cook-Modell

Bei Belastungsvorgängen mit hoher Impulsübertragung, wie etwa beim Hochgeschwindigkeitsimpakt oder bei Detonationsvorgängen, wird häufig das Modell von Johnson und Cook (1985) verwendet, das eine Erweiterung der von Mises-Plastizität darstellt. In diesem Ansatz wird auf empirische Art und Weise die Abhängigkeit der Fließgrenze q von der plastischen Dehnung $\bar{\epsilon}^p$, der plastischen Dehnraten $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ und der aktuellen Temperatur T berücksichtigt:

$$q(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, T) = \underbrace{\left(\sigma_y + B (\bar{\epsilon}^p)^{k_1}\right)}_{\text{statisch}} \underbrace{\left(1 + C \ln\left(1 + \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}_0}\right)\right)}_{\text{dynamisch}} \underbrace{\left(1 - (T^*)^{k_2}\right)}_{\text{thermisch}} . \quad (6.16)$$

Der Ausdruck besteht aus einem statischen, einem dynamischen und einem thermischen Anteil. Dabei bezeichnet der Parameter σ_y die Fließspannung bei quasi-statischer Belastung. Die Materialkonstanten B und k_1 beschreiben die Dehnverfestigung. Mit dem zweiten Term in (6.16) wird die Festigkeitsteigerung durch hohe Dehnraten, d.h. die Viskosität, berücksichtigt. Der Faktor C quantifiziert die eigentliche Dehnratenabhängigkeit, wobei die Rate der plastischen Dehnung $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ mit $\dot{\bar{\epsilon}}_0 = 1\text{s}^{-1}$ normiert wird. Der die Festigkeit mindernde Einfluss höherer Temperaturen wird im letzten Teil der Formel (6.16) wiedergegeben. In Bild 6.2 ist grafisch dargestellt, in welcher Form die drei Terme die Fließspannung beeinflussen.

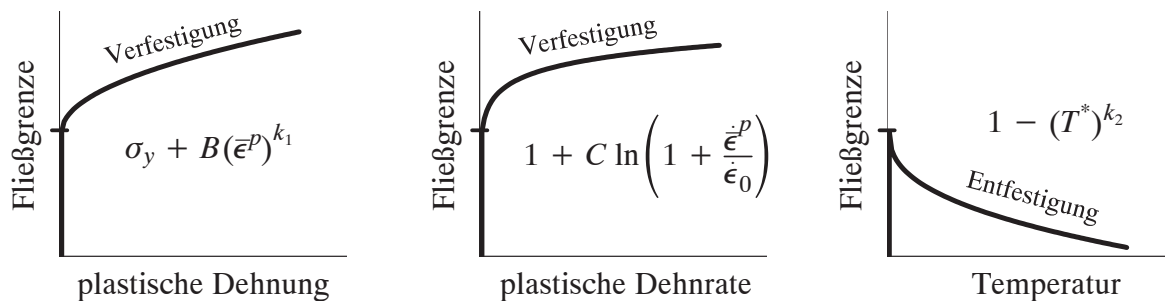


Bild 6.2: Abhängigkeit der Fließspannung von Dehnung, Dehnrate und Temperatur

Die homologe Temperatur T^* ist ein Maß für die Beweglichkeit der Gitterbausteine. Sie wird bestimmt aus der aktuellen Temperatur T , sowie den Raum- und Schmelztemperaturen T_0 und T_m :

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} . \quad (6.17)$$

Diese einheitenlose Größe besitzt einen Wertebereich zwischen 0 (aktuelle Temperatur = Raumtemperatur) und 1 (aktuelle Temperatur = Schmelztemperatur). Die Form der thermischen Entfestigung wird mit Hilfe des Exponenten k_2 gesteuert. Im Folgenden wird eine adiabatische Temperaturänderung angenommen, d.h. der Wärmeaustausch eines Materiepunktes mit seiner Umgebung, also insbesondere Wärmeleitung, wird nicht berücksichtigt. Diese Annahme ist für die Modellierung von Impakt und Penetration geeignet, da solche Prozesse in sehr kurzer Zeit (Mikrosekundenbereich) ablaufen. Wärmeleitung ist dagegen ein Vorgang, der auf einer weit höheren Zeit-Skala stattfindet. Die Berechnung der lokalen Temperaturänderung erfolgt mit der empirischen Annahme, dass 90-100% der plastischen Arbeit in Wärme umgewandelt wird (Hodowany et al. (2000))

$$\dot{T} = \frac{\eta_d}{\rho c_v} \dot{W}^p = \frac{\eta_d}{\rho c_v} \left(J^{-1} \hat{\tau}^T \dot{\bar{\epsilon}}^p \right) , \quad 0,9 \lesssim \eta_d \lesssim 1,0 . \quad (6.18)$$

Darin ist η_d der "Dissipationsgrad" und c_v die spezifische Wärmekapazität. Die aktuelle Temperatur T_n wird im Zeitintegrationsalgorithmus in inkrementeller Weise mit

$$T_n = T_{n-1} + \frac{\eta_d}{\rho c_v} \left(J^{-1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{n-1}^T \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n-1}^p \right) \quad (6.19)$$

ermittelt. Diese Temperatur wird bei der Rückprojektion im Sinne einer expliziten Zeitintegration berücksichtigt: In die Spannungsberechnung geht nicht die aktuelle sondern die "alte" Temperatur T_{n-1} ein. Damit findet also keine vollständige thermo-mechanische Kopplung statt, was aber aufgrund der sehr kleinen Zeitschritte relativ unproblematisch ist.

Die in (6.16) benötigte plastische Dehnrates $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ ist in der diskreten Formulierung das Verhältnis des skalaren plastischen Dehnungsincrements $\Delta \bar{\epsilon}^p$ zum aktuellen Zeitschritt Δt

$$\dot{\bar{\epsilon}}_n^p = \frac{\Delta \bar{\epsilon}_n^p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \gamma_n . \quad (6.20)$$

Einsetzen von (6.8), (6.10) und (6.20) in die Fließbedingung

$$f(\hat{\boldsymbol{\tau}}_n, q_n) = \|s_n\| - \sqrt{\frac{2}{3}} q(\bar{\epsilon}_n^p, \dot{\bar{\epsilon}}_n^p, T_{n-1}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.21)$$

liefert schließlich eine nichtlineare Gleichung zur Bestimmung des plastischen Multiplikators $\Delta \gamma_n$, die mit einer lokalen Newton-Iteration gelöst wird. Die Berechnung der elastischen Dehnungen und der Spannungen erfolgt analog zu (6.12) und (6.13).

6.4 Numerische Beispiele

Das in diesem Kapitel vorgestellte konstitutive Modell für Metalle kommt nun in zwei dynamischen Beispielen zum Einsatz.

6.4.1 Dynamische Kompression eines Blocks aus Wolframlegierung

Ein prismatischer Metallblock mit rechteckigem Querschnitt wird im ebenen Verzerrungszustand bei einer Dehnrates von 5000 1/s komprimiert (Batra und Peng (1995)). Dazu wird eine zunächst linear ansteigende und dann konstante Geschwindigkeit von 50 m/s am oberen und unteren Rand aufgebracht (siehe Bild 6.3). Als Material wird eine Wolframlegierung verwendet, wobei die zugehörigen Johnson-Cook-Materialparameter von Batra und Peng (1995) übernommen wurden (siehe Tabelle 6.1).

Durch den hohen Druck entstehen große plastische Verzerrungen, die wiederum zu einer deutlichen Temperaturerhöhung führen. Die damit verbundene thermische Entfestigung resultiert schließlich in so genannten adiabatischen Scherbändern, also wärmebedingten Verzerrungslokalisierungen. Für eine genauere Beschreibung der genauen Phänomenologie sei hier auf Wright (2002) verwiesen. In dieser Arbeit soll anhand dieses transienten Beispiels das konstitutive Modell überprüft und das Zusammenwirken der adaptiven Neuvernetzungsstrategie mit dem vorgestellten thermoviskoplastischen Materialmodell untersucht und bewertet werden.

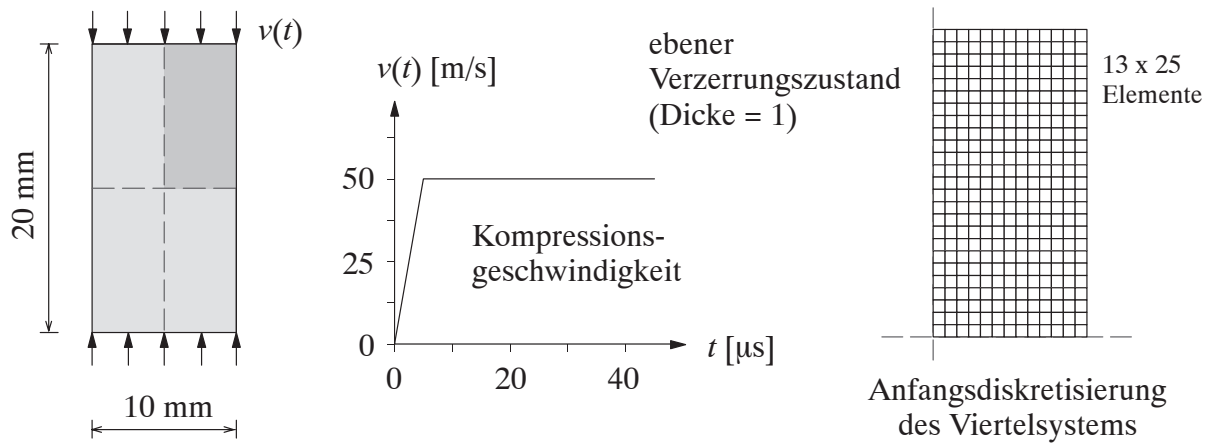


Bild 6.3: Block aus Wolframlegierung: Geometrie, Belastung und Diskretisierung

	ρ [kg/m ³]	E [N/mm ²]	ν [-]	σ_y [N/mm ²]	B [N/mm ²]	
Wolframlegierung	17000	340300	0,28	1505,8	176,5	
	C [-]	k_1 [-]	k_2 [-]	T_m [K]	T_0 [K]	c_v [J/kgK]
Wolframlegierung	0,016	0,12	1,0	1450,0	293,15	134

Tabelle 6.1 Materialparameter für das Metallblock-Kompressionsbeispiel

Zu Beginn wird das Viertelsystem der Struktur mit 325 reduziert integrierten Elementen 'RI4' diskretisiert. Für adaptive Neuvernetzungen wird der von Ortiz und Quigley vorgeschlagene, physikalisch motivierte Verfeinerungsindikator 'Variation der Geschwindigkeit' mit dem Skalierungsfaktor $\Delta\phi_1 = 4,0\text{m/s}$ verwendet (siehe Abschnitt 4.3.2). Dieser Indikator eignet sich gut für dieses Beispiel, da die Verzerrungslokalisierungen damit "aufgespürt" werden können. Die Elementgröße in den abgestuften Netzen wird durch die Werte $h_e^{\min} = 0,04\text{ mm}$ und $h_e^{\max} = 0,4\text{ mm}$ begrenzt. Die minimale Elementlänge von $40\text{ }\mu\text{m}$ liegt damit im Bereich der physikalisch beobachtbaren Scherbanddicke von mehreren Mikrometern (Kim et al. (1998)).

In Bild 6.4 ist die Entwicklung der adiabatischen Scherbänder im Zeitraum zwischen $30\text{ }\mu\text{s}$ und $42\text{ }\mu\text{s}$ anhand der Temperaturverteilungen und der entsprechenden Diskretisierungen dargestellt. Man erkennt, dass die Entstehung der Lokalisierungen zu sinnvollen Netzverfeinerungen führen, die eine hohe Auflösung der entsprechenden Bereiche ermöglichen. Innerhalb der Scherzonen treten große plastische Verzerrungen und dadurch bedingt hohe Temperaturen auf, die wiederum zur Absenkung der Fließgrenze des Materials und damit zu großen plastischen Dehnungen führen usw..

Die Last-Verschiebungs-Kurve dieses Beispiels ist in Bild 6.5 auf der linken Seite dargestellt. Die Impakt-bedingte Ausbreitung von Spannungswellen führt zu erkennbaren Oszillationen im Kraftverlauf. Bei einer Verschiebung von ca. $3,5\text{ mm}$ beginnt das entfestigende Verhalten durch Entstehung der beschriebenen Lokalisierungen. Der Unterschied zwischen einer nicht-adaptiven Rechnung mit grobem Netz (325 Elemente) und der Simulation mit adaptiver Verfeinerung (bis zu 4188 Elemente) im post-kritischen Bereich weist auf die Netzabhängigkeit der Lösung hin. Hier wäre der Einsatz von Regularisierungsstrategien zur Behebung der Schlechtgestellttheit

des Problems sinnvoll (z.B. Sluys (1992)), was aber nicht Thema dieser Arbeit war. Eine gewisse Regularisierung wird hier durch die Berücksichtigung viskoser Effekte erzielt.

Durch die Lokalisierung in Scherbändern entstehen in dem Block vier mehr oder weniger entlastende Bereiche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, sowohl in der Richtung als auch im Betrag (siehe Bild 6.5 rechts). In den Scherzonen zwischen den Bereichen ergeben sich sehr hohe Geschwindigkeitsgradienten, weshalb der Verfeinerungsindikator 'Variation der Geschwindigkeit' genau dort seine Wirkung entfaltet. Auch andere Indikatoren aus Abschnitt 4.3.2 wären hier gut geeignet, so z.B. die 'Rate der plastischen Arbeit' oder der Indikator nach Batra und Ko (1992). Nicht besonders sinnvoll wären dagegen Indikatoren, die nur auf elastische Deformationen abzielen oder bei denen keine Rateneffekte berücksichtigt werden.

6.4.2 Stab-Impakt mit adiabatischer Scherbandbildung

In einem zweiten Beispiel trifft ein zylindrischer Stab der Länge 60 mm und einem Durchmesser von 10 mm mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 150 m/s auf eine starre Oberfläche. In diesem von Stevens (1996) bzw. Batra und Stevens (1998) verwendeten Beispiel ist das Material ebenfalls eine Wolframlegierung. Die dazugehörigen Materialparameter sind in Tabelle 6.2 zusammengestellt. In der adaptiven Simulation liegen die Elementgrößen h_e zwischen minimal 0,2 mm und maximal 0,8 mm. Als Verfeinerungsindikator kommt der Gradient der plastischen Arbeit mit dem zugehörigen Skalierungsfaktor $\Delta\psi_5 = 10N$ (siehe Abschnitt 4.3.2) zum Einsatz.

In den Bildern 6.6 und 6.7 sind die deformierten Strukturen zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit der Verteilung der äquivalenten plastischen Dehnrate und der Temperatur dargestellt. Die großen plastischen Deformationen bewirken u.a. das Ansteigen der Temperatur, wodurch die Fließspannung sinkt und das Material teilweise entfestigt. Die dadurch entstehende Lokalisierung ist in diesem axialsymmetrischen Zustand nicht so stark ausgeprägt, wie es im ebenen Verzerrungszustand der Fall ist, was z.B. auch von Batra und Stevens (1998) beobachtet wurde. Aufgrund der Bildung der adiabatischen Scherzone kann ein weiterer Effekt im Vergleich zum Kupferstift aus Abschnitt 4.5.1 festgestellt werden: Das nach außen gedrängte Material hebt nach oben ab.

Der Verfeinerungsindikator wurde in diesem Fall so gewählt, dass der komplette vordere Bereich mit großen plastischen Deformationen relativ hoch aufgelöst wird. Eine gezielte Verdichtung des Netzes nur im Bereich der Lokalisierung würde zu einer unerwünschten Vergrößerung des "abknickenden" Bereichs führen, der zu Beginn des Impakt-Prozesses stark beansprucht wurde.

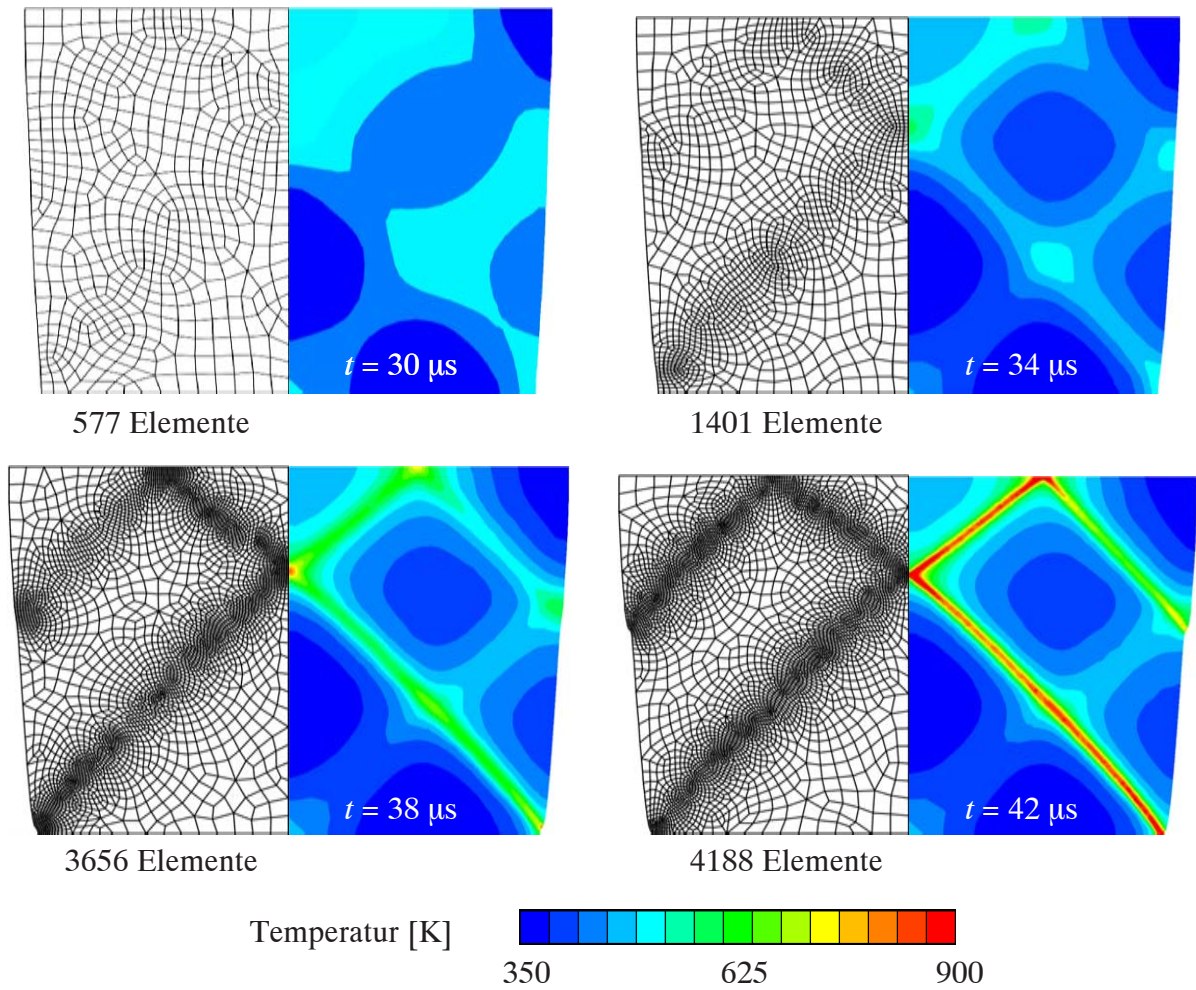


Bild 6.4: Deformierte, adaptive Netze und Temperaturverteilung

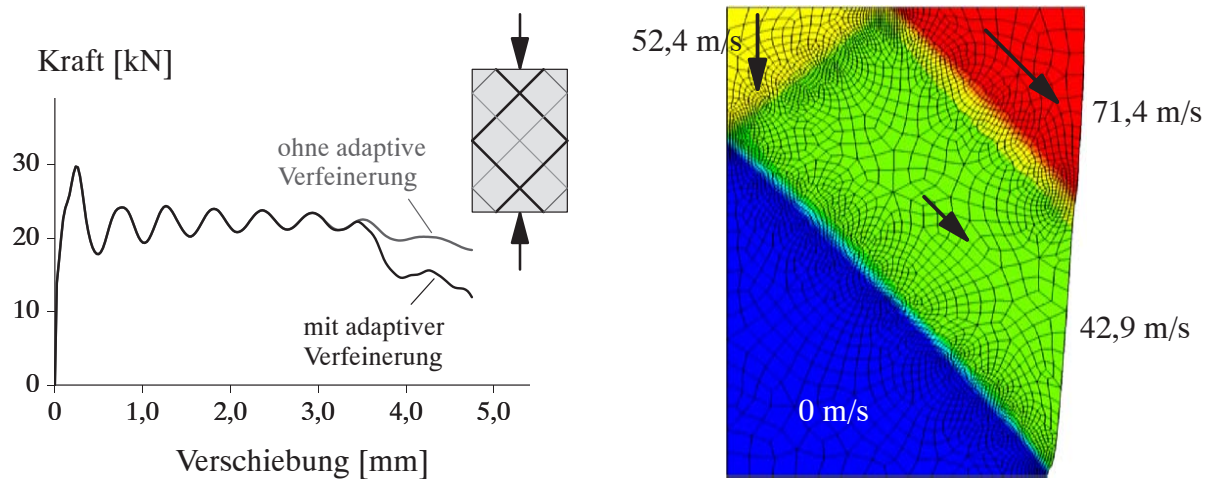


Bild 6.5: Last-Verschiebungskurve und Geschwindigkeitsverteilung bei $t = 38 \mu\text{s}$

	ρ [kg/m ³]	E [N/mm ²]	ν [-]	σ_y [N/mm ²]	B [N/mm ²]	
Wolframlegierung	18600	412900	0,29	1506,0	177,0	
	C [-]	k_1 [-]	k_2 [-]	T_m [K]	T_0 [K]	c_v [J/kgK]
Wolframlegierung	0,016	0,12	0,5	1723,0	293,15	134

Tabelle 6.2 Materialparameter für den Stab-Impakt

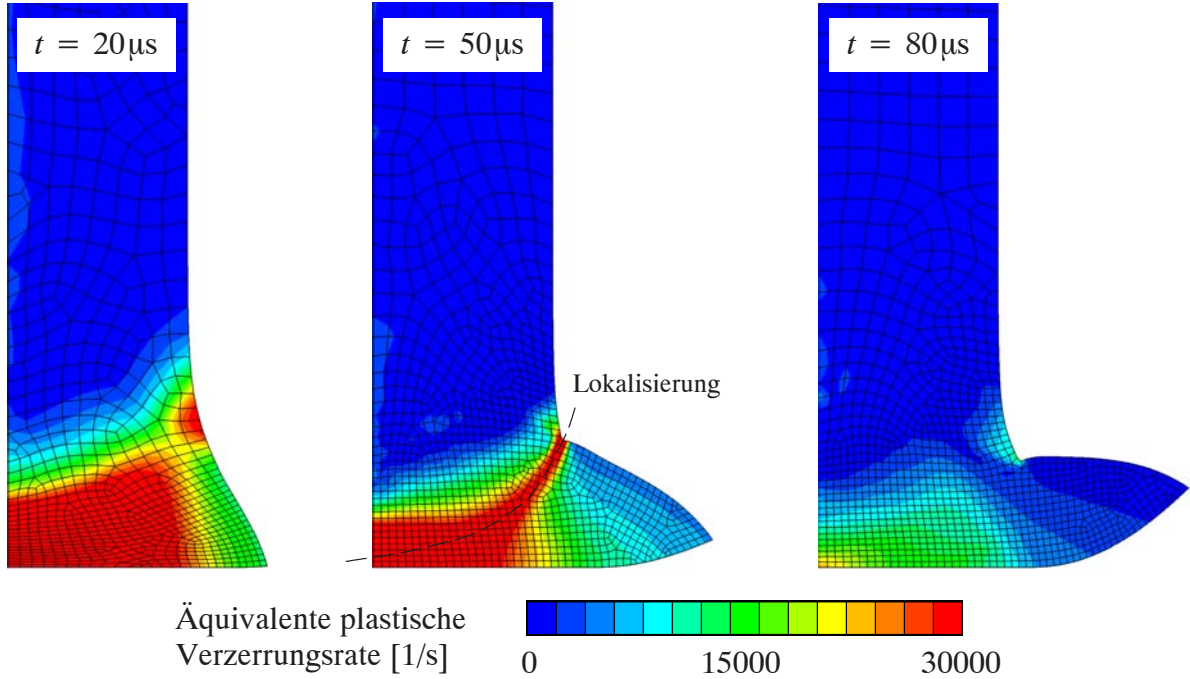


Bild 6.6: Deformierte Strukturen mit Verteilung der äquivalenten plastischen Dehnrate

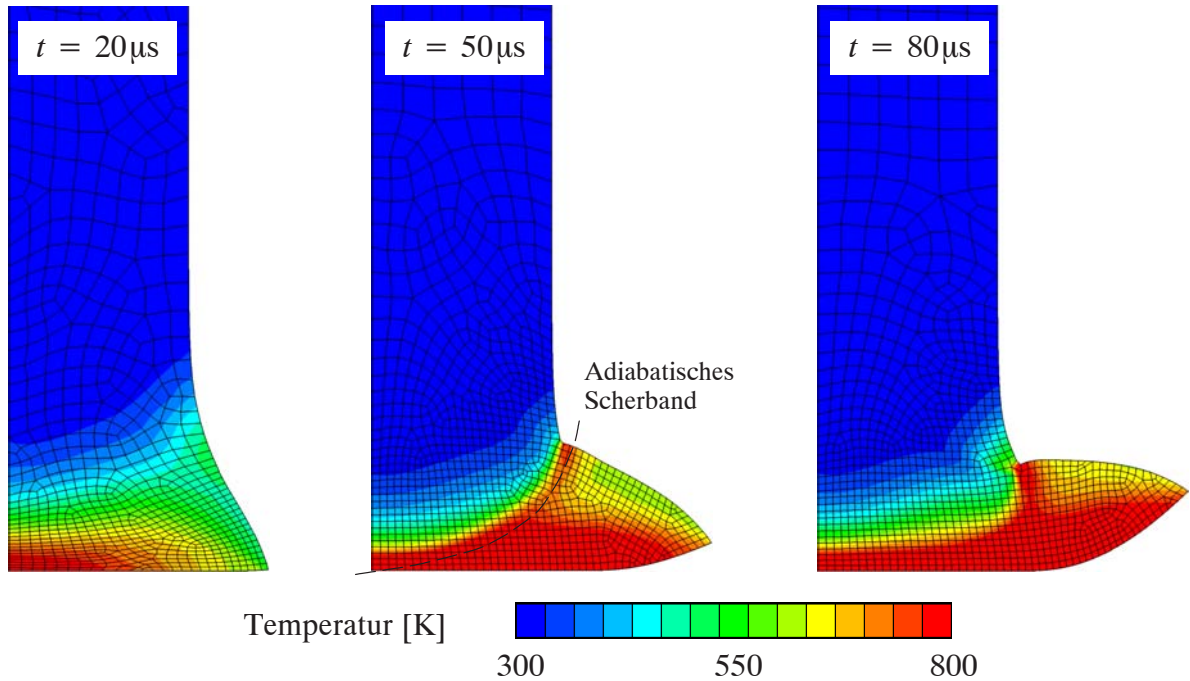


Bild 6.7: Deformierte Strukturen mit Temperaturverteilung

7 Ein konstitutives Modell für Reibungsmaterialien

7.1 Einführung

In diesem Kapitel wird ein konstitutives Modell für Reibungsmaterialien vorgestellt, das speziell für die numerische Simulation von Impaktvorgängen geeignet ist. Das Hauptaugenmerk soll auf jenem hoch beanspruchten Bereich liegen, in dem intaktes, kohäsives Reibungsmaterial (z.B. Fels, Beton, Sandstein, Keramik) durch extreme Druckbeanspruchung "zermalmt" wird und dadurch zerkleinertes, kohäsionsloses Reibungsmaterial (Pulver, "Gesteinsmehl") entsteht. Die realitätsnahe Beschreibung dieser *Druckpulverisierung* und die Materialmodellierung des *Pulvers* an sich sind Kernpunkte dieser Arbeit. Zunächst soll jedoch die komplette Bandbreite des Materialverhaltens unter Stoßbeanspruchung phänomenologisch betrachtet werden.

Erfährt ein Körper aus intaktem, kohäsivem Reibungsmaterial eine transiente Impaktbelastung, so treten verschiedene Spannungszustände auf, wodurch lokal unterschiedliche Versagensmechanismen aktiviert werden, die hier räumlich in drei Bereiche unterteilt werden (siehe auch Bild 7.1):

- *Druckpulverisierung* (Bereich I): In der Prozesszone direkt unter dem Impaktor - auch Mescallzone genannt (Mescall (1983)) - herrscht sehr hoher allseitiger Druck. Aufgrund der Umschnürung durch das umgebende Material und darin wirkender Trägheitskräfte ist der Spannungszustand ähnlich wie bei einem einaxialen Druckversuch mit verhinderter Seitendehnung. Die Folge dieser hohen Druckspannungen sind ungerichtete Mikrorissbildungen in der Matrix, Partikelbrechen und somit die vollständige Zerkleinerung bzw. Pulverisierung des vorher kompakten, kohäsiven Materials (Gailly und Espinosa (2002)). Das mikroskopisch spröde Versagen stellt sich makroskopisch betrachtet als duktiler, isotroper Kollaps dar (Burlion et al. (2001)): Das zerkleinerte, nahezu kohäsionslose Material (Pulver) lässt sich mit geringem Kraftaufwand im bestehenden Porenraum erheblich verdichten und es entstehen plastische Deformationen. Bei einem Rückprall des Impaktors kann es aufgrund der Dynamik zu einer gegenläufigen Zug- oder Schubbeanspruchung des losen Materials kommen und das entstandene Pulver lockert wieder auf.
- *Moderate Kompaktierung* (Bereich II): Mit zunehmendem Abstand von der Mescall-Zone nimmt die Druckbeanspruchung ab. Eine moderate Volumenabnahme entsteht durch das Schließen vor der Belastung bestehender Mikrorisse und das Zerquetschen der relativ weichen, porösen Matrix (Krajcinovic (1996)). Für das Brechen der härteren Körner und eine dadurch bedingte Zerkleinerung bzw. Pulverisierung reicht die Druckbeanspruchung nicht aus. Das Material wird nur moderat kompaktiert, ist jedoch nicht lose. Beim Rückprall des Impaktors bleiben geringe irreversible Deformationen und es kommt zu keiner nennenswerten Auflockerung.
- *Rissbildung* (Bereich III): In größerem Abstand vom Aufprallbereich entstehen je nach Geometrie der Struktur durch elastische Wellenausbreitung Zug- und/oder Scherbeanspruchungen (Burlion et al. (2001)). Das spröde Material wird dort anisotrop geschädigt und es können sich aus Mikrorissen einzelne lokalisierende Risse entwickeln.

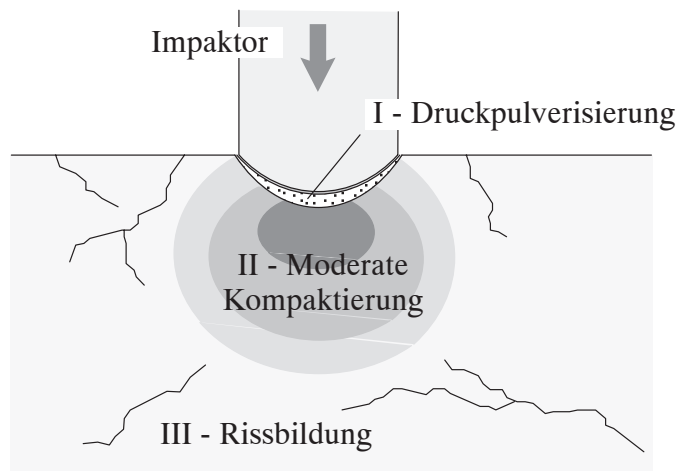


Bild 7.1: Versagensbereiche bei der Stoßbelastung eines kohäsiven Reibungsmaterials

Die verschiedenen Versagensmechanismen beeinflussen sich gegenseitig. So ist es z.B. möglich, dass die kinetische Energie des Impaktors durch die geleistete Verdichtungsarbeit am entstehenden Pulver derart verringert wird, dass die Beanspruchung in den Bereichen II und III geringer ist, als wenn das Pulver den Stoß nicht gedämpft hätte. Eine der wichtigsten Größen, die für das Verhalten von Reibungsmaterialien unter Impaktbelastung verantwortlich ist, ist die Dichte bzw. die Porosität.

Im Folgenden sollen die Eigenschaften des zu Beginn intakten, kompakten Materials (kohäsives Reibungsmaterial) und des durch Druckpulverisierung entstandenen losen Materials (nichtkohäsives Reibungsmaterial) genauer beschrieben werden. Die Druckpulverisierung selbst, d.h. der Übergang von z.B. Beton zu Pulver, wird ebenfalls charakterisiert (Kapitel 7.2). Anschließend wird in Abschnitt 7.3 ein Überblick über mögliche Modellierungsmethoden gegeben und das in dieser Arbeit entwickelte Modell in seinen Grundideen vorgestellt. Detailliert beschrieben wird das auf der Plastizitätstheorie basierende Materialmodell für kohäsive und nichtkohäsive Reibungsmaterialien dann in Kapitel 7.4. Dabei wird auch auf die numerische Umsetzung eingegangen. Dieses Konstitutivgesetz wird in Kapitel 7.5 dahingehend erweitert, dass auch die Druckpulverisierung, d.h. der Übergang von intaktem Material zu zerstörtem, losem Material dargestellt werden kann. Die Kalibrierung des Modells, d.h. die Bestimmung der Materialparameter wird danach in Abschnitt 7.6 erläutert. Anhand verschiedener statischer und dynamischer Beispiele wird das Modell schließlich verifiziert und getestet (Kapitel 7.7).

7.2 Charakterisierung von Reibungsmaterialien

7.2.1 Kohäsives Reibungsmaterial: Kompaktes Ausgangsmaterial

Kohäsive, spröde-poröse Reibungsmaterialien sind Verbundwerkstoffe, die aus einem Korngerüst, einer umgebenden Matrix und einem gewissen Porenanteil bestehen. Die Körner besitzen meistens eine höhere Steifigkeit als das Matrixmaterial und die Porosität kann erheblich variieren. Je nachdem, ob sie in der Natur vorkommen (z.B. Fels) oder industriell hergestellt werden (z.B. Beton), spricht man von natürlichen oder künstlichen Reibungsmaterialien.

Das nichtlineare mechanische Verhalten von kohäsiven Reibungsmaterialien wie z.B. Fels, Beton, Sandstein oder Keramik ist stark abhängig von Art, Höhe und Dauer der Beanspruchung. Im Gegensatz zu Metallen variieren Steifigkeit und Festigkeit mit dem Spannungsniveau, wobei hier insbesondere die stark unterschiedliche Zug- und Druckfestigkeit zu nennen sind. Während unter Zug ein sprödes Verhalten zu beobachten ist, kann die Art des Versagens unter Druckbeanspruchung je nach eingprägtem Seitendruck ("Umschnürung") vom spröden Schubversagen mit Entfestigung und Lokalisierung bis zu einem duktilen Druckversagen mit Porenkollaps und anschließender Verfestigung variieren (siehe Bild 7.2). Außerdem können diese Werkstoffe zeitabhängiges Verhalten zeigen, wie z.B. Festigkeitssteigerung bei hohen Dehnraten oder Kriechen und Schwinden in Langzeitversuchen.

Für ausführlichere Beschreibungen des mehraxialen Verhaltens von Beton als häufig untersuchtem Vertreter der kohäsiven Reibungsmaterialien sei hier auf Hofstetter und Mang (1995), Menrath (1999) oder Haufe (2001) verwiesen.

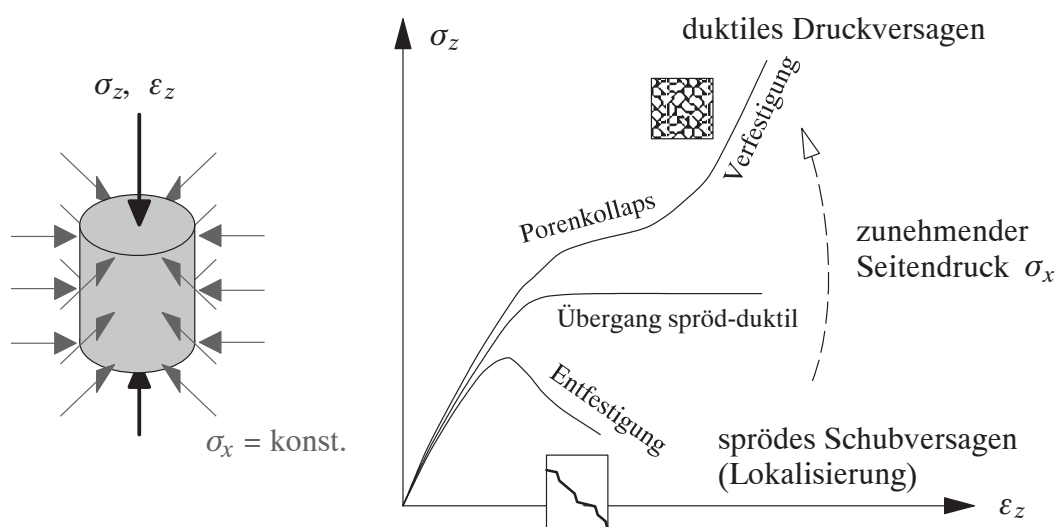


Bild 7.2: Versagensmechanismen von kohäsivem Reibungsmaterial im Triaxialversuch

7.2.2 Druckpulverisierung: Übergang vom intakten Material zum Pulver

Bei der Druckpulverisierung kommt es, wie bereits erwähnt, zu einer Zerkleinerung der Zuschläge und des Matrixmaterials. Aus dem vormals kompakten Material wird ein granulares Pulver, wobei der kohäsive Zusammenhalt verloren geht. Das Material wird durch die hohe Druckbeanspruchung feinkörniger (Hardin (1985), Blenkinsop (1991), Hagerty et al. (1993) und Lade et al. (1996)). Dieser Vorgang des Zermalmens wird im Folgenden auch als "Crushing" bezeichnet.

Die Druckpulverisierung verändert natürlich auch die mechanischen Eigenschaften des Materials. So kann durch die Zerkleinerung eine höhere Dichte erreicht werden als bei moderater Kompaktion. Diese "Komprimierungsreserve" führt zu einer vorübergehenden Abnahme der Verfestigung des Materials und einer Erhöhung der maximal erreichbaren Dichte. Dieses Phänomen zeigt sich bei hydrostatischen Druckversuchen an porösem Sandstein von Zhang et al. (1990), Wong et al. (1992) oder Klein et al. (2001) sehr deutlich (siehe Bild 7.3): Bis zu einer gewissen

Belastung entstehen moderate irreversible Verzerrungen durch das Schließen anfänglicher Mikrorisse, durch die Kompression der Matrix mit Porenkollaps und durch geringe Umordnung der Körner auf Mikroebene (Phase 1: moderate Kompaktion). Dabei ist ein verfestigendes Verhalten zu beobachten, bis relativ schlagartig ein Knick auftritt, der auf den Beginn intensiver Kornbrüche zurückzuführen ist. Dies geht aus der Messung der akustischen Emissionen hervor, deren Aktivität zu diesem Zeitpunkt stark zunimmt. Die Folge ist eine vorübergehend geringere Kurvensteigung und eine stärkere Volumenabnahme als zuvor (Phase 2: Druckpulverisierung). Durch die Zerkleinerung der Körner und den Kollaps der Poren wird eine dichtere Packung erreicht. Eine weitere Laststeigerung ist möglich, wobei die Verfestigung in dem Maße zunimmt, in dem der Verdichtungsgrad gegen den maximalen Verdichtungsgrad des pulverisierten Materials strebt. Das weitgehend elastische Entlastungsverhalten ist nichtlinear (Phase 3). Bei Versuchen mit einem weniger porösen Ausgangsmaterial, wie z.B. Beton oder Mörtel können die Unterschiede zwischen moderater Kompaktion (1) und Druckpulverisierung (2) nicht so ausgeprägt beobachtet werden. Trotzdem verursachen dieselben Mechanismen - in kombinierter Form - die Pulverentstehung.

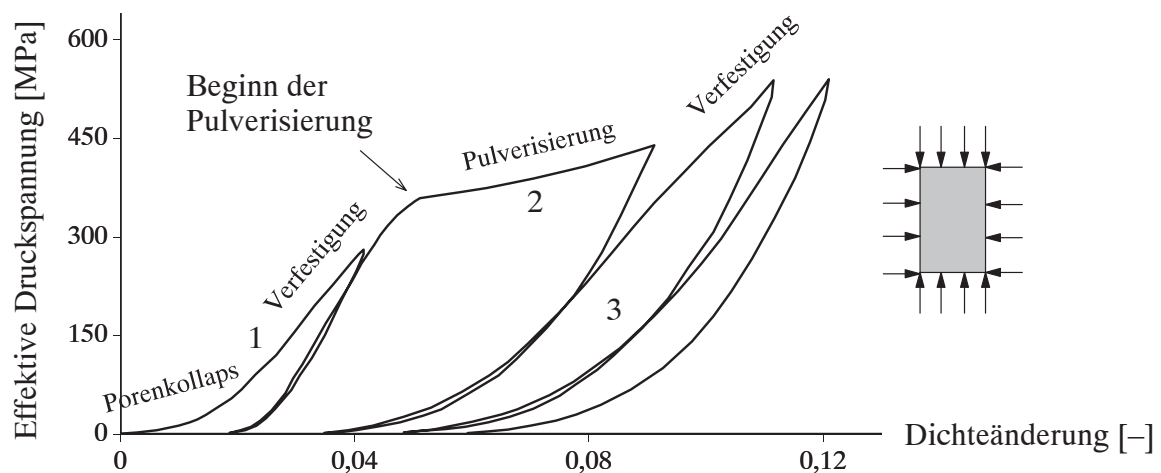


Bild 7.3: Hydrostatischer Druckversuch an Sandstein (Wong et al. (1992))

Eine weitere Folge der Druckpulverisierung ist der Verlust des inneren Zusammenhalts des Materials durch das Brechen der Partikel und der Matrix. Dies führt makroskopisch gesehen zu einer vollständigen Abnahme von Kohäsion und Zugfestigkeit. Die Auswirkungen werden bei einer gegenläufigen Belastung (Zug, Schub) des entstandenen Pulvers deutlich: Ohne Zugfestigkeit und ohne Kohäsion ist ein relativ ungehindertes Gleiten der Körner möglich, was zu einer nahezu widerstandslosen Materialauflockerung führt (dilatantes Verhalten).

Durch die Abnahme der Kohäsion wird auch die Ratenabhängigkeit des Materials gesenkt. So schreibt z.B. Heeres (2001), dass trockener Sand als Vertreter der nichtkohäsiven Reibungsmaterialien praktisch kein zeitabhängiges Verhalten besitzt. Im Gegensatz dazu zeigt das kohäsive Reibungsmaterial Lehm bzw. Ton deutliche Festigkeitssteigerungen bei höherer Belastungsrate.

7.2.3 Nichtkohäsives Reibungsmaterial: Pulver

Das durch die Druckpulverisierung entstehende trockene Pulver ist eine Ansammlung sehr kleiner diskreter Feststoffpartikel, die je nach Bewegungszustand in mehr oder weniger engem

Kontakt zueinander stehen. Der Zwischenraum ist üblicherweise mit Luft gefüllt, weshalb die Dichte des Pulvers immer geringer als die Dichte der einzelnen Partikel ist. Man bezeichnet Pulver auch als Zweiphasen-System mit den dispersen Partikeln und der Luft als Dispersionsmittel. Brown und Richards (1970) unterteilen granulare Materialien nach der Größe der Partikel in ultra-feines Pulver (0,1 bis 1 μm), super-feines Pulver (1 bis 10 μm), granulares Pulver (10 bis 100 μm) und granularen Feststoff (100 bis 3000 μm). Die wichtigsten *geometrischen Eigenschaften* individueller Teilchen sind die Korngröße, die Partikelform, die Korndichte und die Oberflächenrauigkeit (Rietema (1991), Gotoh et al. (1997)). In Bild 7.4 ist beispielhaft der Ausschnitt einer Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme eines Gesteinspulvers und die entsprechende Korngrößenverteilung dargestellt.

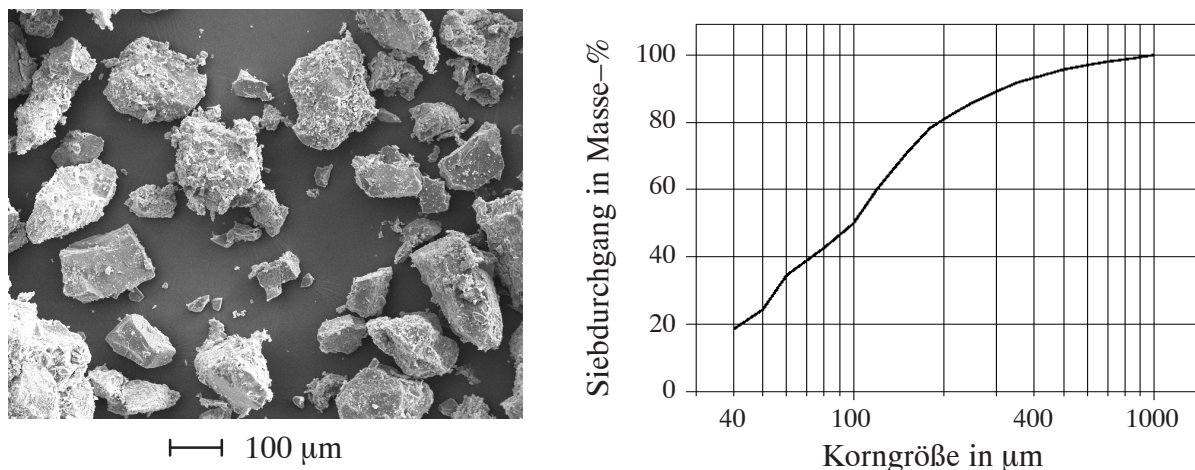


Bild 7.4: Pulverteilchen (Rasterelektronenmikroskop) und exemplarische Sieblinie

Eine zentrale Eigenschaft von Pulver ist dessen Dichte, wobei die Dichte ρ der Pulver-Packung von der Dichte der diskreten Partikel ρ_s unterschieden wird. Die Relation zwischen diesen Größen wird durch

$$\rho = (1 - \ell) \rho_s \quad \text{mit} \quad \ell = \frac{V_\ell}{V} \quad (7.1)$$

beschrieben. ℓ , V_ℓ und V sind die Porosität, das Porenvolumen und das Gesamtvolumen, bestehend aus Partikeln und Poren. Die Porosität ℓ hängt unter anderem von den Partikeleigenschaften, der Packungsstruktur und dem Belastungs- bzw. Bewegungszustand ab.

Die *Mikromechanik* trockener Pulver ist vor allem durch die Interaktion der Teilchen gekennzeichnet. Durch äußere Belastung entstehen inter-granulare Kontaktkräfte, die reibungsbehaftetes Gleiten, das Neuordnen der Partikel und sogar das Brechen einzelner Körner bewirken können. Die relevanten kinematischen und physikalischen Größen auf Mikroebene sind Verschiebungen, Rotationen und Kontaktkräfte (siehe Bild 7.5 links).

Wird trockenes Pulver dagegen makroskopisch als Kontinuum betrachtet (siehe Bild 7.5 rechts), so können folgende *mechanische Eigenschaften* beobachtet werden (Pulvermechanik):

- Rein elastisches Verhalten nur bei sehr kleinen Deformationen; dabei sind die Elastizitätsparameter Funktionen der Dichte und der Spannung.

- Bei größeren Verformungen prägen sich irreversible Deformationen ein, die bei Entlastung bestehen bleiben.
- Unter Schubbeanspruchung kommt es, je nach Dichte und Umschnürungsdruck, zu einer Erhöhung bzw. Verringerung des Volumens, auch als Dilatation und Kontraktion bezeichnet.
- Trockenes Pulver besitzt kaum Zugfestigkeit oder Kohäsion und verhält sich nahezu ratenunabhängig.

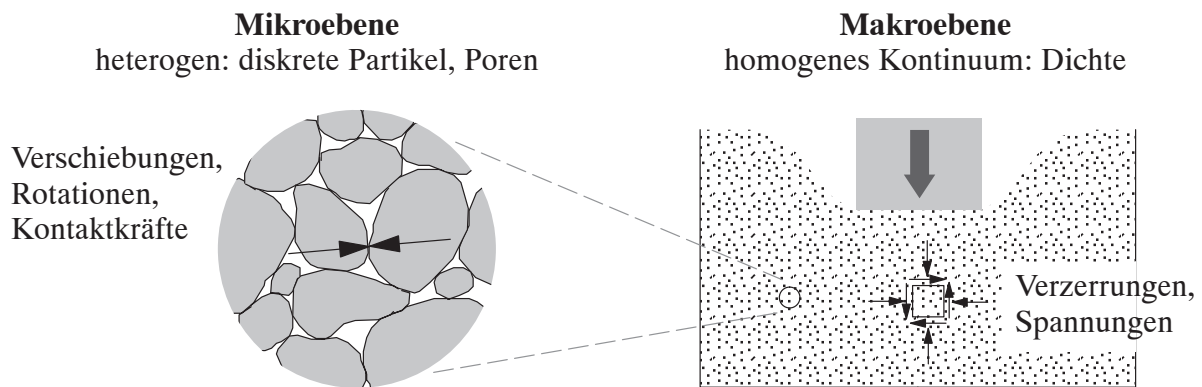


Bild 7.5: Pulver auf zwei verschiedenen Längenskalen

Besonders wichtig für das mechanische Verhalten von granularen Materialien unter dynamischer Stoßbelastung ist die Verdichtungsfähigkeit und die dadurch entstehenden Auswirkungen auf den Impakt selbst. Dazu ist das typische Spannungs-Dehnungsverhalten von Pulver unter hydrostatischer Druckbeanspruchung in Bild 7.6 dargestellt. Das lockere Material lässt sich zunächst relativ leicht ohne große Spannungen komprimieren. Ist eine hohe Verdichtung erreicht, so ist eine deutlich zunehmende Verfestigung zu beobachten; die Spannung steigt stark an, ohne dass eine weitere nennenswerte Verdichtung möglich ist. Die in Bild 7.6 schraffierte Fläche unter der Kurve entspricht der durch das Pulver absorbierten Energie. Bei einem Impaktprozess wirkt sich dieses Absorptionsvermögen derart aus, dass die aufgebrachte kinetische Energie in interne Energie umgewandelt wird und dadurch der Stoß gedämpft wird.

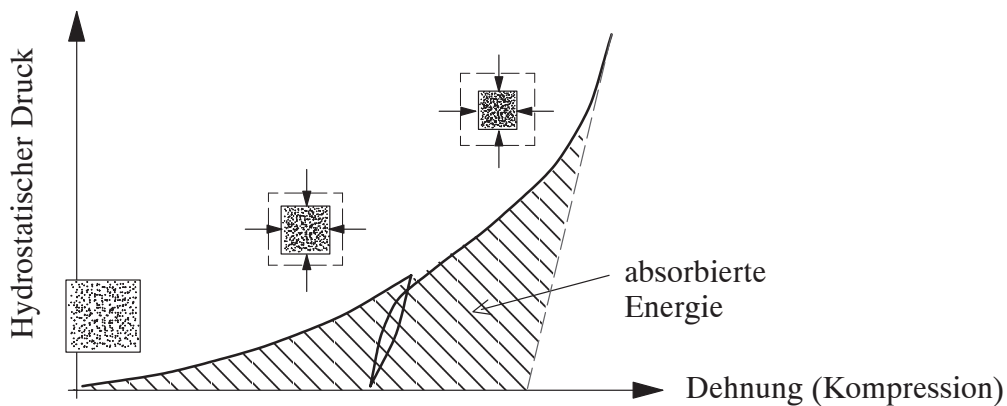


Bild 7.6: Typisches Kompaktionsverhalten von Pulver

7.3 Modellierung von Reibungsmaterialien

Die in Kapitel 7.2 beschriebenen Phänomene sollen nun in ein konstitutives Modell überführt werden. Bevor der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz vorgestellt wird, soll an dieser Stelle ein kurzer Überblick über verschiedene Möglichkeiten zur Modellierung von kohäsiven und nichtkohäsiven Reibungsmaterialien gegeben werden. Dabei wird zwischen Kontinuumsformulierungen und diskreten Methoden unterschieden. Das dem in dieser Arbeit verwendeten Drucker-Prager-Cap-Plastizitätsmodell zugrundeliegende Konzept wird genauer erläutert.

7.3.1 Überblick

- **Kontinuumsformulierungen**

In der Literatur existiert eine Vielzahl von makroskopischen Materialmodellen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von kohäsiven und nichtkohäsiven Reibungsmaterialien. Zumeist kommen dabei Kontinuumsformulierungen mit makroskopischen Plastizitäts- oder Schädigungsmodellen oder eine Kopplung der beiden zum Einsatz. Kontinuumsmechanische *Plastizitätsmodelle* für Reibungsmaterialien dienen der Darstellung irreversibler Deformationen und basieren meistens auf den Ideen von Mohr/Coulomb und Drucker/Prager. Bei entsprechenden Modellen wird die hydrostatische Spannungskomponente bei der Formulierung der Versagensfläche berücksichtigt, da bei derartigen Materialien eine geringe Zugfestigkeit und mit zunehmendem hydrostatischem Druck eine steigende Festigkeit zu beobachten ist. Häufig wird zusätzlich im hohen Druckbereich eine Begrenzung eingeführt, mit der das verfestigende Verhalten unter allseitigem Druck dargestellt werden kann. Einen guten Überblick über diese Materialtheorien und deren numerische Umsetzung bieten z.B. Chen und Han (1988) oder Hofstetter und Mang (1995). Plastizitätsmodelle kommen sowohl für kohäsive Reibungsmaterialien wie Beton (Menrath (1999), Haufe (2001)) als auch für nichtkohäsive, granulare Böden (DiMaggio und Sandler (1971), Sture et al. (1989)) oder trockenen Sand und Pulver (Oliver et al. (1996), Anand und Gu (2000), Erhart et al. (2003, 2004)) zum Einsatz. *Schädigungsformulierungen* werden dazu verwendet, den Steifigkeitsverlust des Materials darzustellen, was meistens durch die Verminderung der elastischen Parameter realisiert wird. Einen guten Einblick in diese Thematik mit weitergehenden Literaturhinweisen geben Kuhl (2000) oder Hörmann (2002). Die Anwendung von Druck- und Zugschädigung auf dynamische Probleme findet sich z.B. bei Burlion et al. (2000). Eine besondere Schwierigkeit üblicher kontinuumsmechanischer Modelle stellt der Bereich des spröden Zug-/Schubversagens mit Entfestigung und *Lokalisierung* dar, da dies aus mathematischer und numerischer Sicht nach wie vor eine Herausforderung an Modelle und Algorithmen darstellt. Der Grund dafür ist der Verlust der Gutgestelltheit des Randwertproblems bei lokalen Kontinuumsmodellen und sich daraus ergebende Probleme, wie z.B. Netzabhängigkeit oder die Frage nach den Grenzen der Gültigkeit einer Kontinuumsformulierung. Gute Ein- und Überblicke zu dieser Thematik und Hinweise zur Beseitigung der Probleme finden sich z.B. bei Sluys (1992), Steinmann et al. (1997) oder Kuhl (2000).

Eine alternative kontinuumsmechanische Modellierungsmöglichkeit für kohäsive Reibungsmaterialien liefert das *Microplane-Konzept*, bei dem das makroskopisch dreidimensionale Verhalten auf eine Beschreibung auf charakteristischen Ebenen reduziert wird. Mit relativ einfachen

Materialgesetzen auf diesen Ebenen lässt sich nach einer Homogenisierung makroskopisch anisotropes Verhalten abbilden. Ausführliche Darstellungen und Literaturhinweise zu diesem Thema finden sich bei Kuhl (2000).

- **Diskrete Methoden**

Bei diskreten Methoden wird die Bewegung einzelner, diskreter Partikel eines betrachteten Systems verfolgt und die Interaktion zwischen Partikeln sowie zwischen Partikeln und Gebietsrändern berücksichtigt. Diese Simulationsmethoden werden in der Literatur meistens als *Diskrete-Element-Methoden* (DEM) bezeichnet. Ihre Wurzel haben diese Methoden im Bereich der Molekulardynamik (Alder und Wainwright (1959)), wo die Bewegung individueller Atome oder Moleküle unter dem Einfluss externer Kräfte - jedoch ohne Energiedissipation - untersucht wird. Erst später wurde diese Idee von Cundall und Strack (1979) wieder aufgegriffen, um das Verhalten von Partikeln innerhalb granularer Medien zu beschreiben. Gut geeignet sind diese Verfahren nicht nur für die Simulation des Fließens granularer Medien, sondern z.B. auch für die Darstellung diskontinuierlichen Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien (D'Addetta et al. (2001), D'Addetta (2004)). Vorteile dieser Methode sind die relativ einfachen konstitutiven Gesetze zur Beschreibung des Partikelkontakts und die Reproduktion lokaler Effekte auf Mikroebene. Allerdings ergibt sich bei der Simulation praxisrelevanter Probleme mit sehr hoher Teilchenanzahl und beliebigen Kornformen ein extrem hoher Rechenaufwand (Sawley und Cleary (1999)). Außerdem sind Fragen nach der Bestimmung der Materialparameter, nach der Homogenisierung (D'Addetta et al. (2004)) und nach der quantitativen Aussagekraft für praktische Anwendungen noch nicht ausreichend beantwortet (Kawaguchi et al. (1998), Cleary (1999)).

- **Kombination: Kontinuum/Diskret**

Die in Kapitel 7.2 getroffene Unterscheidung zwischen kompaktem Reibungsmaterial und granularem Pulver legt die Frage nahe, ob es möglich bzw. sinnvoll ist, ein Kontinuumsmodell mit einem diskreten Modell zu kombinieren. Dies würde bei einer Impaktsimulation bedeuten, dass das Ausgangsmaterial zunächst kontinuierlich mit Finiten Elementen modelliert wird. Beim Impact verhält sich das Material dann zunächst bis zu einer gewissen Beanspruchung elastisch-plastisch. Bei lokaler Überschreitung eines Kriteriums, das z.B. auf einem Verzerrungsmaß basiert, werden dann Finite Elemente durch diskrete Elemente ersetzt. Eine Möglichkeit zur Umsetzung dieser Idee besteht darin, einzelne Finite Elemente aus dem ursprünglichen Netz herauszutrennen und diese dann als diskrete, deformierbare Körper zu behandeln. Beispiele für derartige Ansätze finden sich bei Camacho und Ortiz (1996), Cottrell et al. (2003) oder Klerck et al. (2004). Die abgelösten Finiten Elemente sind jedoch um ein Vielfaches größer als die durch Druckpulverisierung entstehenden Teilchen. Um die Pulverisierung realistisch darzustellen, müssten viele kleine Partikel verwendet werden, was aufgrund der Anzahl und der elementgrößenbedingten Senkung des kritischen Zeitschritts den Speicher- und Rechenaufwand immens steigern würde. Außerdem kommt es bei Kombinationen von Modellen (FEM - DEM) immer zu einem Verlust der Approximationsgüte an den Kopplungsrändern.

7.3.2 Plastizitätsmodell "Drucker-Prager-Cap"

Beim Vergleich der Methoden wird offensichtlich, dass es nicht *das* Modell für die Simulation von Reibungsmaterialien gibt. Es hängt vielmehr stark von der betrachteten Fragestellung ab, welcher Ansatz am besten geeignet ist. In dieser Arbeit soll der Schwerpunkt auf der möglichst genauen Beschreibung des duktilen Druckversagens unter hohem Druck bis zur Pulverentstehung und dem Pulver selbst liegen. Deshalb wird hier ein kontinuumsmechanisches Plastizitätsmodell zum Einsatz kommen, innerhalb dessen sowohl kohäsives Reibungsmaterial, nichtkohäsives Reibungsmaterial als auch der Übergang vom einen zum anderen dargestellt werden kann. Zur phänomenologischen Beschreibung von Reibungsmaterialien eignen sich im Rahmen der Plastizitätstheorie insbesondere die so genannten *Drucker-Prager-Cap*-Modelle, die im wesentlichen auf DiMaggio und Sandler (1971) zurückgehen. Bei *DPC*-Modellen beschreibt ein Drucker-Prager-Kegel das Versagen unter Schub und eine sich ausdehnende elliptische Kappe das Verfestigungsverhalten unter überwiegend allseitiger Kompression. Vervollständigt wird der Ansatz durch eine Begrenzung des elastischen Verhaltens im Zugbereich, häufig 'Tension cutoff' genannt. Die Fließflächen des Modells sind in Bild 7.7 in der Meridianebene dargestellt. In der Deviatorebene kann der Einfluss des Lode-Winkels durch Abweichungen vom Drucker-Prager-Kreis berücksichtigt werden (siehe Bild 7.14). Unter Zug- oder Schubbeanspruchung im Bereich des Drucker-Prager-Kegels oder des Tension cutoff kann sich die Kappe zusammenziehen, allerdings nur so weit, bis der aktuelle Spannungspunkt in der Ecke zwischen Kappe und Drucker-Prager liegt (Druckkante in Bild 7.7): Dann ist das plastische Fließen rein isochor, d.h. durch ein geeignetes Verfestigungsgesetz für die Kappe kann die Dilatation begrenzt bzw. kontrolliert werden. *DPC*-Modelle wurden von verschiedenen Autoren (z.B. Sandler und Rubin (1979), Chen und Baladi (1985), Simo et al. (1988b), Hofstetter et al. (1993), Lubarda et al. (1996)) modifiziert und verbessert, und für unterschiedliche Probleme verwendet, wie z.B. dynamische Kompaktierung von Sand (Poran und Rodriguez (1992), Gu und Lee (2002)), Formpressen von Metallpulver (Oliver et al. (1996), Lewis und Khoei (1998), Zeuch et al. (2001), Pérez-Foguet et al. (2003)) oder Impaktbelastung keramischen Pulvers (Gailly und Espinosa (2002)). In dieser Arbeit wird ein Drucker-Prager-Cap-Modell weiterentwickelt.

7.4 Erweitertes Drucker-Prager-Cap-Modell

Als Ausgangspunkt für das hier verwendete *DPC*-Modell dient der von Hofstetter et al. (1993) vorgestellte Ansatz eines ratenunabhängigen Zwei-Invarianten-Kappenmodells mit assoziierten Fließrichtungen (siehe auch Suanno (1995)). Die Erweiterungen betreffen das elastische Verhalten, die Richtungen des plastischen Fließens, das Verfestigungsgesetz für die Kappe und die Berücksichtigung der dritten Spannungsinvariante sowie viskoser Effekte. Außerdem wird eine Modifikation des Rückprojektions-Algorithmus entwickelt, mit der numerische Stabilität gewährleistet werden kann. Das komplette Modell wird im Folgenden vorgestellt. Es ist, wie das Materialmodell für Metalle, so formuliert, dass es in den algorithmischen Rahmen der Finiten Plastizität aus Abschnitt 2.2.3 (siehe Algorithmus 2.1) "eingebaut" werden kann. Das bedeutet, dass die Spannungsberechnung im Eigenraum erfolgt, und dadurch dieselbe Form annimmt wie in der infinitesimalen Theorie (Simo (1992)).

7.4.1 Nichtlineare Elastizität

Es wird dasselbe Elastizitätsgesetz wie in Kapitel 6.3.1 verwendet (siehe Gleichung (6.3)), um aus den logarithmischen Hauptdehnungen $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e = [\ln(b_1^e), \ln(b_2^e), \ln(b_3^e)]^T$ die Kirchhoff-Hauptspannungen $\hat{\boldsymbol{\tau}} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ zu berechnen:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \kappa \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) \mathbf{1} + 2\mu \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e) = \frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} + \mathbf{s} , \quad (7.2)$$

wobei $I_1 = \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ die erste Spannungsinvariante, $\mathbf{s} = \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\tau}})$ der Spannungsdeviator und $\mathbf{1} = [1, 1, 1]^T$ der Einheitsvektor sind. Der Kompressionsmodul κ und der Schubmodul μ stehen mit dem Elastizitätsmodul E und der konstanten Querdehnzahl ν in folgendem Zusammenhang:

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} , \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (7.3)$$

Reibungsmaterialien und insbesondere granulare Pulver zeigen mit zunehmender Verdichtung ein zunehmend steiferes Verhalten im elastischen Bereich (siehe Abschnitt 7.2.3), also bei Ent- und Wiederbelastung unterhalb der Fließgrenze. Aus diesem Grund wird hier der Elastizitätsmodul E als Funktion der volumetrischen plastischen Verzerrung $\epsilon_{vol}^p = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^p)$ eingeführt:

$$E = E(\epsilon_{vol}^p) = \begin{cases} E_0 - M \epsilon_{vol}^p & \text{if } \epsilon_{vol}^p \leq 0 \\ E_0 & \text{if } \epsilon_{vol}^p > 0 \end{cases} , \quad (7.4)$$

wobei E_0 ein initialer bzw. minimaler Wert ist und mit $M \geq 0$ die lineare Zunahme des Elastizitätsmoduls mit betragsweise zunehmendem ϵ_{vol}^p , d.h. mit zunehmender Verdichtung, gesteuert werden kann. Für die Querdehnzahl ν wird ein konstanter Wert angenommen. Anstelle des einfachen linearen Gesetzes (7.4) könnten alternative Funktionen zum Einsatz kommen, die die dichte- und/oder spannungsabhängige Variation der elastischen Parameter beschreiben (z.B. Lade und Nelson (1987) oder Molenkamp (1988)).

7.4.2 Fließkriterien

Das hier verwendete Plastizitätsmodell ist ein Mehrflächenmodell bestehend aus einem nichtlinearen Drucker-Prager-Kegel, mit dem Schubversagen beschrieben werden kann, einer elliptischen Kappe für die Druckverfestigung und einer Begrenzung im Zugbereich zur Darstellung des Zugversagens. Der elastische Bereich wird damit durch drei Fließkriterien begrenzt:

- *Nichtlinearer Drucker-Prager ohne Ver- bzw. Entfestigung*

$$f_1(\hat{\boldsymbol{\tau}}) := \| \mathbf{s} \| - F_e(I_1) \leq 0 \quad (7.5)$$

- *Elliptische Kappe mit isotroper Verfestigung*

$$f_2(\hat{\boldsymbol{\tau}}, q) := F_c(\| \mathbf{s} \|, I_1, q) - F_e(q) \leq 0 \quad (7.6)$$

- *Zugversagen ohne Entfestigung*

$$f_3(\hat{\boldsymbol{\tau}}) := I_1 - T \leq 0 \quad (7.7)$$

Die drei Fließflächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ sind Funktionen der Spannungsinvarianten I_1 und $\|s\| = \sqrt{2J_2}$ sowie der Hilfsfunktionen

$$F_e(I_1) := \alpha - \lambda \exp(\beta I_1) - \theta I_1 \quad (7.8)$$

und

$$F_c(\|s\|, I_1, q) := \sqrt{\|s\|^2 + \frac{1}{R^2}(q - I_1)^2} . \quad (7.9)$$

Mit F_e wird der nichtlineare Drucker-Prager-Kegel definiert und mit F_c die elliptische Kappe beschrieben. Ein Schnitt der Fließflächen mit der Meridianebene mit der Abszisse I_1 und der Ordinate $\|s\|$ ist in Bild 7.7 dargestellt. Die Fließflächen sind zunächst unabhängig von der 3. Spannungsinvariante und somit rotationssymmetrisch um die hydrostatische Achse I_1 . (Die Berücksichtigung der 3. Spannungsinvariante führt erst in Abschnitt 7.4.6 zu einer Erweiterung des Modells.) Die Übergänge zwischen den Fließflächen sind diskontinuierlich mit zwei so genannten Eckregionen: der so genannten "compressive corner" oder Druckkante und der "tensile corner" bzw. Zugkante. An der Stelle, wo Kappe und Schubversagensfläche zusammentreffen, gilt

$$F_e(I_1 = q) = \frac{q - X(q)}{R} \quad (7.10)$$

mit der hydrostatischen Druckfestigkeit

$$X(q) = q - R (\alpha - \lambda \exp(\beta q) - \theta q) . \quad (7.11)$$

Materialkennwerte dieser Formulierung sind die Drucker-Prager-Parameter α , λ , β und θ , die Elliptizität R der Kappe, die hydrostatische Anfangsdruckfestigkeit $X_0 < 0$ und die hydrostatische Zugfestigkeit T . $q < 0$ ist die interne Variable des Spannungsraums, die eine Funktion der volumetrischen plastischen Verzerrung ϵ_{vol}^p ist und mit der die Lage der Kappe gesteuert wird. Das zugehörige Verfestigungsgesetz wird in Abschnitt 7.4.4 genauer beschrieben. Es gelten die in der Strukturmechanik üblichen Vorzeichenregeln, d.h. Dehnung bzw. Zug sind positiv und Kompression bzw. Druck sind negativ.

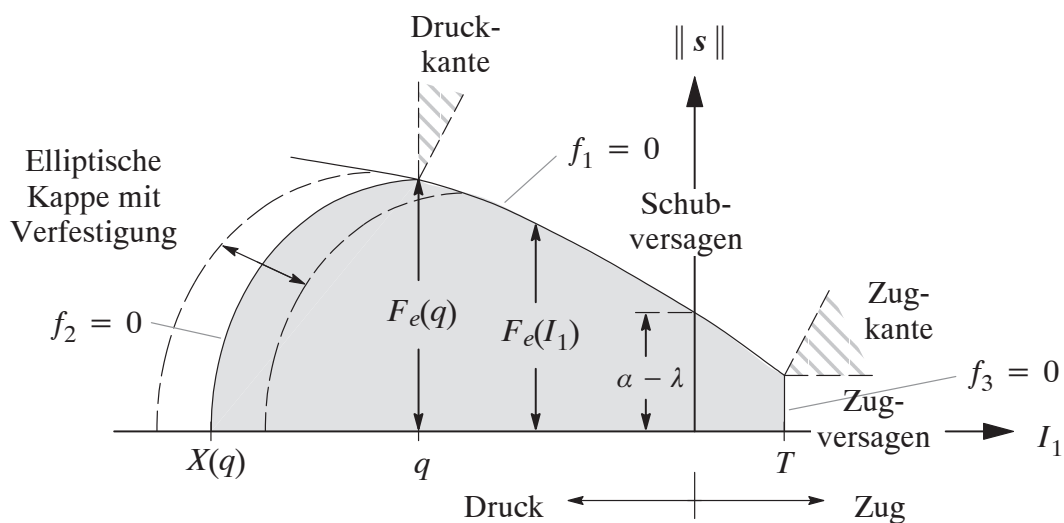


Bild 7.7: Fließflächen des Modells in der Meridianebene

Wie sich die Variation der Parameter α , λ , β und θ des nichtlinearen Drucker-Prager-Kegels auswirken, ist in Bild 7.8 zu erkennen: Es wird jeweils ein Parameter variiert, während die anderen konstant gehalten werden. Durch $\alpha - \lambda$ wird die Schubfestigkeit bei $I_1 = 0$ und durch θ die Neigung der Fließfläche bei $I_1 \rightarrow -\infty$ festgelegt. λ und β sind für die nichtlineare Form des Kegels im Zug- und im geringen Druckbereich zuständig.

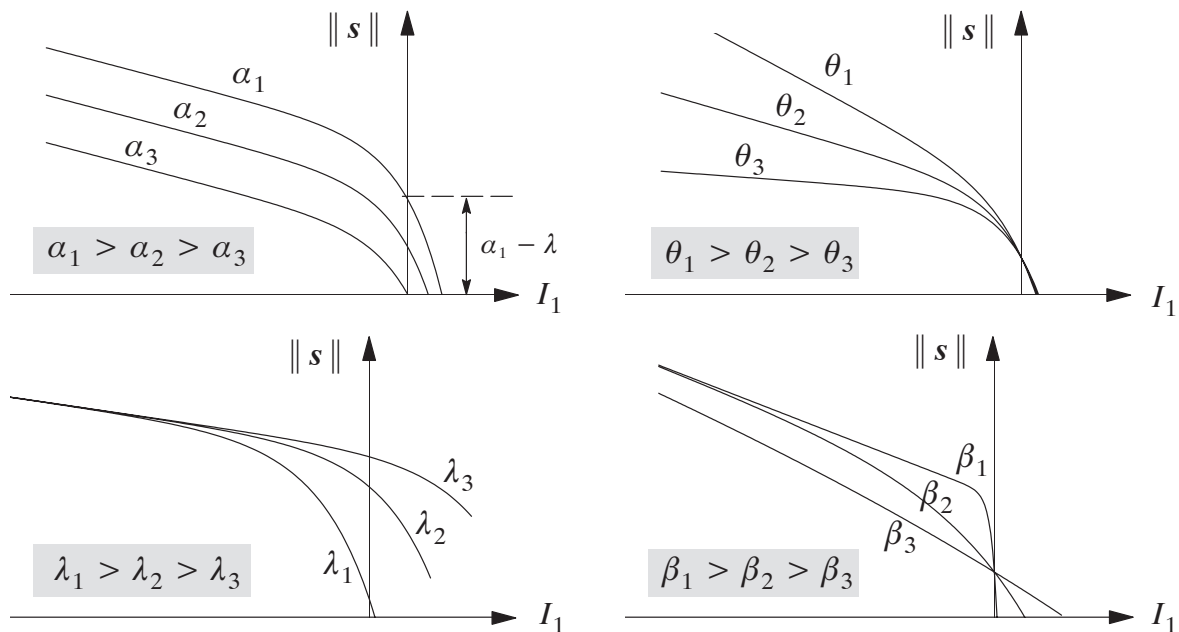


Bild 7.8: Variation der Drucker-Prager-Parameter

Mit R wird die Elliptizität der Kappe, d.h. das Verhältnis der Halbachse $q - X(q)$ zur Halbachse $F_e(q)$ beschrieben. Eine Variation von R ist in Bild 7.9 dargestellt.

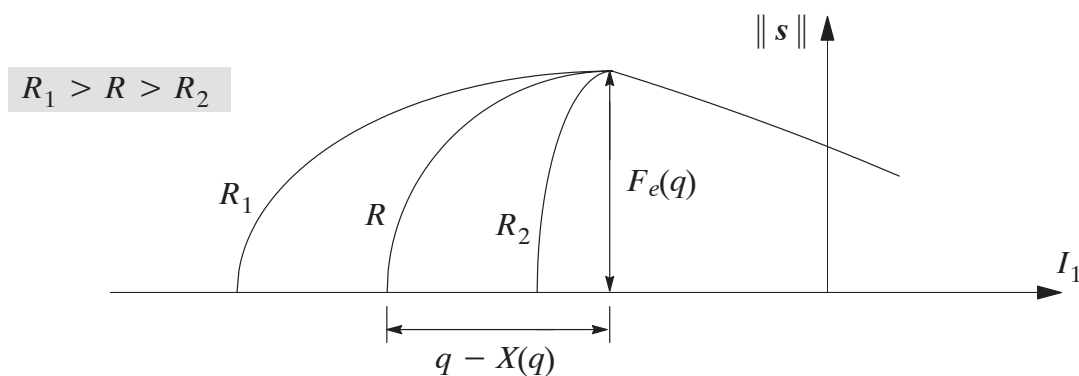


Bild 7.9: Variation der Kappen-Elliptizität

Mit der hydrostatischen Anfangsdruckfestigkeit $X_0 < 0$ wird die initiale Lage der Kappe festgelegt. Um daraus einen Initialwert für den Verfestigungsparameter q_0 zu ermitteln, muss einmal zu Beginn der Rechnung folgende nichtlineare Gleichung gelöst werden:

$$X_0 = X(q_0) = q_0 - R (\alpha - \lambda \exp(\beta q_0) - \theta q_0) . \quad (7.12)$$

7.4.3 Fließregeln

Das auf Hofstetter et al. (1993) basierende Mehrflächenplastizitätsmodell verwendet assoziierte Fließrichtungen in den drei Versagensbereichen Drucker-Prager (1), Kappe (2) und Tension cut-off (3) wie in Bild 7.10 links dargestellt. Diese sind gegeben durch die Gradienten der Fließfunktionen nach den Spannungen:

$$\hat{\mathbf{m}}_1 = \frac{\partial f_1(\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} - \frac{\partial F_e(I_1)}{\partial I_1} \mathbf{1} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + (\lambda\beta \exp(\beta I_1) + \theta) \mathbf{1} , \quad (7.13)$$

$$\hat{\mathbf{m}}_2 = \frac{\partial f_2(\hat{\boldsymbol{\tau}}, q)}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\|\mathbf{s}\|}{F_c(\|\mathbf{s}\|, I_1, q)} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} - \frac{q - I_1}{R^2 F_c(\|\mathbf{s}\|, I_1, q)} \mathbf{1} \quad \text{und} \quad (7.14)$$

$$\hat{\mathbf{m}}_3 = \frac{\partial f_3(\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{1} . \quad (7.15)$$

In den Eckregionen setzt sich die Rate der plastischen Dehnung nach dem Theorem von Koiter (1953) aus den betreffenden plastischen Multiplikatoren $\dot{\gamma}_i$ und den Fließrichtungen $\hat{\mathbf{m}}_i$ additiv zusammen:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i \hat{\mathbf{m}}_i , \quad i = 1 \dots 3 \text{ Fließflächen} \quad (7.16)$$

Die Fließrichtungen des Schubversagensbereichs und des Zugversagensbereichs werden nun aus physikalischen und numerischen Gründen modifiziert. So haben Triaxialversuche mit Reibungsmaterialien ergeben, dass die Volumenvergrößerung (Dilatation) mit steigendem Seitendruck immer kleiner wird (Smith et al. (1989), Haufe (2001)). Diesem Umstand kann Rechnung getragen werden, wenn anstelle der bisherigen assoziierten Fließrichtung $\hat{\mathbf{m}}_1$ - mit der die Dilatation überschätzt wird - die neue, nichtassoziierte Fließrichtung

$$\tilde{\mathbf{m}}_1 := \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} - \left(\frac{I_1 - q}{T - q} \right) \frac{\partial F_e(I_1)}{\partial I_1} \mathbf{1} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + (\lambda\beta \exp(\beta I_1) + \theta) \left(\frac{I_1 - q}{T - q} \right) \mathbf{1} \quad (7.17)$$

eingeführt wird. Die Modifikation des volumetrischen Anteils bewirkt, dass der plastische Fluss bei $I_1 = q$ rein deviatorisch gerichtet ist und bei $I_1 = T$ assoziiert ist bezüglich der Schubversagensfläche. Ein weiterer positiver Effekt der so eingeführten Fließrichtung ist die Beseitigung des Eckbereichs zwischen Schubversagensfläche und elliptischer Kappe, d.h. der Übergang der Fließrichtung von *dilatant* nach *kontraktant* verläuft glatter als bisher, was ein Vorteil für die Numerik ist.

Analog wird aus numerischen Gründen die bisherige assoziierte Fließrichtung des Tension cut-off-Bereichs \mathbf{m}_3 so modifiziert, dass der Eckbereich im Zug verschwindet und der Wechsel des plastischen Flusses kontinuierlicher erfolgt als bisher:

$$\tilde{\mathbf{m}}_3 := \frac{\|\mathbf{s}\|}{F_e(T)} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \left[1 - \left(1 + \frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1} \right) \frac{\|\mathbf{s}\|}{F_e(T)} \right] \mathbf{1} . \quad (7.18)$$

Die assoziierte Fließrichtung der Kappe wird beibehalten:

$$\tilde{m}_2 := \hat{m}_2 . \quad (7.19)$$

Die Ergebnisse der neu eingeführten Fließrichtungen \tilde{m}_1 und \tilde{m}_3 sind physikalisch "sinnvollere" plastische Formänderungen im Schubversagensbereich und die Beseitigung der Diskontinuitäten im plastischen Potential, was die numerische Stabilität des Algorithmus erhöht. Außerdem sind im Algorithmus weniger Fallunterscheidungen notwendig, da sich die Anzahl der plastischen Belastungsbereiche von fünf (Hofstetter et al. (1993)) auf drei reduziert (siehe Bild 7.10).

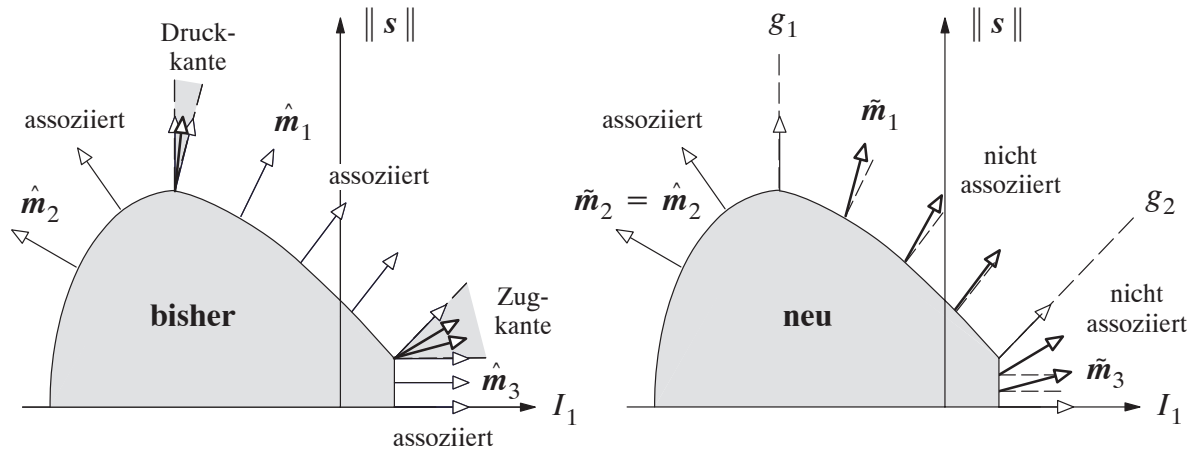


Bild 7.10: Beseitigung der Ecken durch Einführung nichtassoziierter Fließrichtungen

Um bei der Rückprojektion entscheiden zu können, in welchem der drei Bereiche man sich befindet (siehe Abschnitt 7.4.5), werden die in Bild 7.10 rechts dargestellten Geraden g_1 und g_2 benötigt:

$$g_1 : I_1 = q , \quad (7.20)$$

$$g_2 : \|s\| = F_e(T) - \frac{2\mu I_1 - T}{9\kappa \frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1}} = F_e(T) + \frac{2\mu}{9\kappa} \frac{I_1 - T}{(\lambda\beta \exp(\beta T) + \theta)} . \quad (7.21)$$

7.4.4 Verfestigungsgesetz

Bei der Charakterisierung von Reibungsmaterialien in Kapitel 7.2 wurde das verfestigende Verhalten unter allseitiger Druckbeanspruchung erläutert. Diesem Phänomen wird hier im Modell durch ein Ausdehnen der elliptischen Kappe Rechnung getragen. Ist die Beziehung zwischen Druck- und Volumenänderungen unter dreiaxialer Druckbelastung aus Experimenten bekannt, so kann dafür ein Verfestigungsgesetz definiert werden, das die Abhängigkeit des internen Parameters q - der die Lage der Kappe steuert (siehe Bild 7.7) - von der volumetrischen plastischen Verzerrung $\epsilon_{vol}^p = \text{tr}(\epsilon^p)$ beschreibt. Sandler und Rubin (1979) definieren folgenden Zusammenhang zwischen der hydrostatischen Druckfestigkeit $X(q)$ und ϵ_{vol}^p

$$\epsilon_{vol}^p = W \left(e^{D(X(q) - X_0)} - 1 \right) . \quad (\text{Verfestigungsgesetz 1}) \quad (7.22)$$

Hierin ist W die maximal erreichbare volumetrische plastische Verzerrung und D ein weiterer Materialparameter, mit dem die Höhe der Verfestigung gesteuert wird. Alternativ dazu wird hier

eine gebrochen rationale Funktion eingeführt, mit der eine bessere Anpassung an experimentelle Daten erreicht werden kann (siehe späteres Beispiel in Abschnitt 7.7.2):

$$\epsilon_{vol}^p = DW \frac{X(q) - X_0}{1 - D(X(q) - X_0)} \quad \text{(Verfestigungsgesetz 2)} \quad (7.23)$$

In Bild 7.11 sind die beiden Verfestigungsgesetze abgebildet, wobei die dort aufgeführten Formeln durch Auflösen der Gleichungen (7.22) und (7.23) nach $X(q)$ entstehen. Der qualitative Verlauf beider Funktionen ähnelt sich: Die Verfestigung verläuft zunächst in Abhängigkeit von D nahezu linear, um dann nichtlinear asymptotisch gegen die maximale volumetrische plastische Verzerrung W anzuwachsen. Der Unterschied zwischen den beiden Funktionen besteht in der Annäherung an die senkrechte Asymptote, die die maximale Verdichtung darstellt. Mit dem neuen Vorschlag (Gleichung (7.23)) ist der Anstieg moderater, was nicht nur eine bessere Anpassung an bestimmte Versuchsergebnisse ermöglicht, sondern auch Vorteile für die Stabilität des Rückprojektionsalgorithmus mit sich bringt, da die Singularität schwächer ausgeprägt ist.

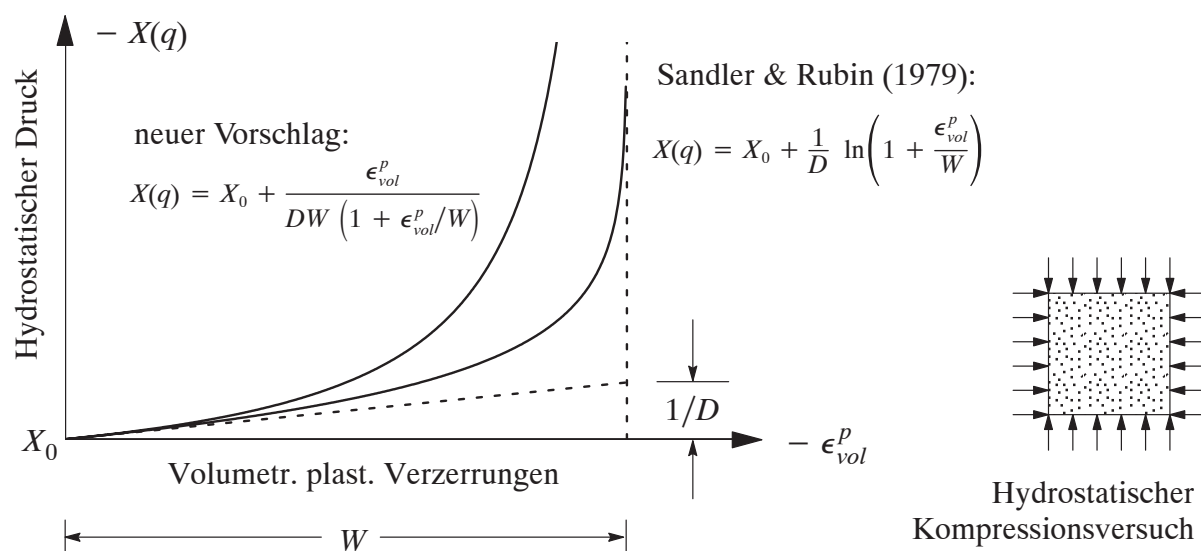


Bild 7.11: Verfestigungsgesetze: Kompressionsverhalten unter hydrostatischem Druck

Es ist anzumerken, dass die Kappe infolge des Verfestigungsgesetzes sowohl "wachsen" als auch "schrumpfen" kann. Bei Belastungen im Bereich der elliptischen Kappe erhält man negative volumetrische plastische Dehnungszunahmen $\Delta\epsilon_{vol}^p$, wodurch sich die Kappe ausdehnt, d.h. die Druckfestigkeit steigt (Kontraktion). Belastungen im Bereich des Drucker-Prager-Kegels bzw. des Zugversagens bewirken dagegen positive plastische Dehnungszunahmen $\Delta\epsilon_{vol}^p$ und die Kappe zieht sich zusammen, d.h. die Druckfestigkeit verringert sich, das Material lockert auf (Dilatation). Wenn die Kappe den aktuellen Spannungszustand erreicht, ist kein weiteres Zusammenziehen mehr möglich, d.h. die Dilatation ist begrenzt. In Sandler und Rubin (1979) bzw. Hofstetter et al. (1993) wird darauf hingewiesen, dass es für loses, granulares Material sinnvoll ist, das Verfestigungsgesetz so zu formulieren, dass ein Zusammenziehen der Kappe möglich ist. Bei kompaktem Material ("rock material") soll sich die Kappe dagegen nur ausdehnen, d.h. eine Abnahme der Druckfestigkeit findet im Grunde nicht statt.

Anmerkung: Die Kombination aus kappenförmiger Fließfläche und nichtlinearem Verfestigungsgesetz hat Ähnlichkeiten zu den häufig in *Hydrocodes*⁶ verwendeten Zustandsgleichungen zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens unter hohen hydrostatischen Drücken (z.B. Segletes (1991), Gebbeken und Ruppert (1999), Ruppert (2000), Schmidt-Hurtienne (2001), Hiermaier (2003)). So beschreibt in der Schockwellentheorie die so genannte *Hugoniot*-Kurve, die eine Zustandsgleichung vom Mie-Grüneisen-Typ (Grüneisen (1926)) ist, den Zusammenhang zwischen hydrostatischem Druck und der Dichte (anstelle der volumetrischen plastischen Verzerrungen) mit einem ähnlichen qualitativen Verlauf wie in Bild 7.11. Eine Zustandsgleichung (equation of state 'EOS') für hochbeanspruchte Materialien stellt also eine Alternative zur Verwendung einer verfestigenden Kappe dar, die allerdings hier nicht weiter verfolgt wird. Ein ausführlicherer Vergleich der beiden Möglichkeiten findet sich z.B. bei Ruppert (2000).

7.4.5 Rückprojektionsalgorithmus mit Modifikation

Mit dem Elastizitätsgesetz (7.2), den Definitionen der Fließflächen (7.5), (7.6) und (7.7), den Fließrichtungen (7.17), (7.18) und (7.19) sowie dem Verfestigungsgesetz (7.22) bzw. (7.23) ist das in Kapitel 2.1.3 vorgestellte allgemeine plastische Konstitutivmodell spezifiziert. Für diesen konkreten nichtlinearen Gleichungssatz soll nun der entsprechende Rückprojektionsalgorithmus vorgestellt werden (vergleiche Algorithmus 2.1). Es wird ein so genannter 'Closest Point'-Lösungsalgorithmus verwendet, um den endgültigen Spannungszustand zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Prädiktor-Spannungen

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{trial} = \kappa \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{e,trial}) \mathbf{1} + 2\mu \operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{e,trial}) = \frac{1}{3} I_1^{trial} \mathbf{1} + \mathbf{s}^{trial} \quad (7.24)$$

zusammen mit dem internen, "eingefrorenen" Verfestigungsparameter q_{n-1} des letzten Zeitschritts in die Fließfunktionen eingesetzt, um die Art der Belastung festzustellen

$$f_{i,n}^{trial}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{trial}, q_{n-1}) \begin{cases} \leq 0 & \rightarrow \text{elastisch} \\ > 0 & \rightarrow \text{plastisch} \end{cases} \quad (7.25)$$

Im elastischen Fall sind die Trial-Werte bereits die endgültigen Werte

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^e = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{e,trial}, \quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_n = \hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{trial}, \quad (7.26)$$

d.h. es ist keine Korrektur notwendig. Handelt es sich dagegen um einen plastischen Prozess, d.h. liegen die Prädiktor-Spannungen außerhalb des zulässigen elastischen Bereichs (Gleichung (2.17)), so muss eine Korrektur bzw. Rückprojektion vorgenommen werden. Sie ergibt sich für die elastischen Hauptdehnungen $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^e$, für die erste Spannungsinvariante $I_{1,n}^e$ und den Spannungsdeviator \mathbf{s}_n zu:

6. Hydrocodes sind dadurch gekennzeichnet, dass volumetrische und deviatorische Anteile des Spannungstensors getrennt, d.h. entkoppelt, behandelt werden. Der hydrostatische Druck wird aus einer Zustandsgleichung (Equation of State "EoS") bestimmt, wobei Dichte, Temperatur und/oder innere Energie die entsprechenden Eingangsgrößen sind. Für die deviatorischen Spannungen werden separat Materialgesetze formuliert, die die Abhängigkeit von Dehnungen, Dehnraten, Temperatur, usw. wiedergeben.

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^e = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{e,trial} - \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{e,trial} - \Delta \gamma_{i,n} \tilde{\boldsymbol{m}}_{i,n} , \quad (7.27)$$

$$I_{1,n} = I_{1,n}^{trial} - 3\kappa \operatorname{tr}(\Delta \gamma_{i,n} \tilde{\boldsymbol{m}}_{i,n}) \text{ und} \quad (7.28)$$

$$s_n = s_n^{trial} - 2\mu \operatorname{dev}(\Delta \gamma_{i,n} \tilde{\boldsymbol{m}}_{i,n}) \quad (7.29)$$

mit $i = 1, 2$ oder 3 . Im jeweils letzten Term dieser Gleichungen wird *nicht* die Einsteinsche Summationskonvention verwendet: Es ist immer nur ein Belastungsbereich aktiv. Der Grund dafür ist die in Abschnitt 7.4.3 erwähnte Beseitigung der Eckregionen mit den neu eingeführten Fließrichtungen $\tilde{\boldsymbol{m}}_{i,n}$. Die Bestimmung des plastischen Dehnungsincrements $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p$ bzw. des plastischen Multiplikators $\Delta \gamma_{i,n}$ und der Fließrichtung $\tilde{\boldsymbol{m}}_{i,n}$ ist von der jeweils betroffenen Fließfläche abhängig und wird im Folgenden für die drei verschiedenen Belastungsbereiche genauer erläutert. Zur Verbesserung der Lesbarkeit wird hierbei der aktuelle Zeit-Index $()_n$ weggelassen und der Index $()_{n-1}$ durch den Ausdruck "alt" ersetzt.

- **Nichtlineare Drucker-Prager-Schubversagensfläche**

Liegt der Prädiktor-Spannungszustand im Bereich außerhalb des nichtlinearen Drucker-Prager-Kegels und zwischen den Geraden g_1 und g_2 (siehe Bild 7.10 rechts), d.h. es gelten die Bedingungen

$$f_1^{trial} > 0 \wedge I_1^{trial} \geq q_{alt} \wedge \|s^{trial}\| \geq F_e(T) - \frac{2\mu I_1^{trial} - T}{9\kappa \frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1}} , \quad (7.30)$$

so erfolgt die Rückprojektion auf die Fließfläche $f_1 = 0$. Setzt man Gleichung (7.28) mit der nichtassozierten Fließrichtung $\tilde{\boldsymbol{m}}_1$ (Gleichung (7.17)) in die Fließbedingung $f_1(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = 0$ ein, so erhält man folgende nichtlineare skalare Gleichung für die unbekannte Verfestigungsvariable q

$$- 3K H(q) - \frac{9\kappa}{2\mu} \left(\frac{I_1(q) - q}{T - q} \right) \frac{\partial F_e(I_1(q))}{\partial I_1} (\|s^{trial}\| - F_e(I_1(q))) = 0 \quad (7.31)$$

mit

$$I_1(q) = I_1^{trial} - 3\kappa H(q) , \quad (7.32)$$

$$H(q) = W \left[e^{DX(q)} - e^{DX(q_{alt})} \right] \quad (\text{Verfestigung 1}) \quad (7.33)$$

bzw.

$$H(q) = DW \left[\frac{X(q)}{1 - DX(q)} - \frac{X(q_{alt})}{1 - DX(q_{alt})} \right] . \quad (\text{Verfestigung 2}) \quad (7.34)$$

Gleichung (7.31) wird mit einer lokalen Newton-Iteration gelöst. Mit Hilfe der Lösung q erhält man schließlich den plastischen Multiplikator $\Delta \gamma_1$ mit

$$\Delta \gamma_1 = \frac{\|s^{trial}\| - \|s\|}{2\mu} = \frac{\|s^{trial}\| - F_e(I_1(q))}{2\mu} \quad (7.35)$$

die aktuelle Fließrichtung $\tilde{\mathbf{m}}_1$ mit Gleichung (7.17) und damit das plastische Dehnungsincrement $\Delta\epsilon^p = \Delta\gamma_1 \tilde{\mathbf{m}}_1$. Da der Verfestigungsparameter in diesem Beanspruchungsfall immer zunimmt, wird sich die Kappe erwartungsgemäß zusammenziehen, d.h. das Material lockert auf und die Druckfestigkeit $X(q)$ sinkt.

Sonderfälle: Nach Sandler und Rubin (1979) sollte das Schrumpfen der Kappe bei kompakten kohäsiven Reibungsmaterialien verhindert werden. Außerdem soll der Verfestigungsparameter q im vorliegenden Modell nicht positiv werden, d.h. dem Schrumpfen der Kappe ist eine Grenze gesetzt: Ergibt sich nach Lösung von (7.31) ein $q > 0$, so wird $q = 0$ gesetzt. In diesen beiden Sonderfällen ist q konstant und es ergibt sich eine von (7.31) verschiedene Gleichung

$$I_1 - I_1^{trial} - \frac{9\kappa}{2\mu} \left(\frac{I_1}{T} \right) \frac{\partial F_e(I_1)}{\partial I_1} (\|s^{trial}\| - F_e(I_1)) = 0, \quad (7.36)$$

die nach I_1 gelöst werden muss, was wiederum durch eine Newton-Iteration geschieht.

- **Elliptische Kappe**

Liegt der Prädiktor-Spannungszustand außerhalb der elliptischen Kappe und "links" der Gerade g_1 (siehe Bild 7.10 rechts), d.h. es gelten die Bedingungen

$$f_2^{trial} > 0 \wedge I_1^{trial} < q_{alt}, \quad (7.37)$$

so erfolgt die Rückprojektion auf die Fließfläche $f_2 = 0$. Setzt man Gleichungen (7.28) und (7.29) mit der assoziierten Fließrichtung $\tilde{\mathbf{m}}_2$ (Gleichung (7.19)) in die Fließbedingung $f_2(\hat{\mathbf{r}}, q) = 0$ ein, so erhält man folgende nichtlineare skalare Gleichung für die unbekannte Verfestigungsvariable q

$$y(q) = \left[\frac{\|s^{trial}\| F_e(q)}{F_e(q) + 2\mu \Delta\gamma_2(q)} \right]^2 + \left[\frac{(q - I_1^{trial}) R F_e(q)}{R^2 F_e(q) + 9\kappa \Delta\gamma_2(q)} \right]^2 - F_e(q)^2 = 0 \quad (7.38)$$

mit

$$\Delta\gamma_2(q) = \frac{R^2 F_e(q) H(q)}{3(I_1^{trial} - 3\kappa H(q) - q)}. \quad (7.39)$$

Gleichung (7.38) wird üblicherweise mit einer Newton-Iteration gelöst, wobei q_{alt} als Startwert verwendet wird. In manchen Fällen kann allerdings keine Konvergenz erzielt werden. Der Grund dafür wird deutlich, wenn man eine qualitative Skizze der Funktion $y(q)$, deren Nulldurchgang gesucht ist, betrachtet (siehe Bild 7.12). Der mögliche Lösungsbereich ist durch das Intervall $[I_1^{trial}, q_{alt}]$ gegeben. Man erkennt, dass die Kurve geringe Steigungen, ein Minimum, eine Singularitätsstelle, eine falsche Lösung nahe der vertikalen Asymptote und die richtige Lösung q^* besitzt. Bei der Newton-Iteration kann eine "Zwischenlösung" weit außerhalb des Intervalls liegen, sie kann nicht definiert sein (q_{undef}) oder im Minimum landen. Diese verschiedenen Probleme führen schließlich zu Divergenz oder zu Konvergenz zur falschen Lösung. Im Sinne eines robusten Algorithmus kann deshalb in solchen Fällen mit der Intervallhalbierung

(Bisektion) eine langsamere aber zuverlässigere Iterationsmethode aktiviert werden. Für dieses Verfahren wird ein Startintervall $[q_{links}, q_{rechts}]$ benötigt, für das die betrachtete Funktion an den Intervallgrenzen unterschiedliche Vorzeichen hat:

$$y(q_{links}) \cdot y(q_{rechts}) < 0 \quad (7.40)$$

und das die tatsächliche Lösung q^* beinhaltet. An der rechten Intervallgrenze ist die Funktion immer positiv

$$y(q_{rechts}) = y(q_{alt}) > 0 . \quad (7.41)$$

Das bedeutet, es muss ein Wert q_{links} gefunden werden, für den $y(q_{links}) < 0$ gilt. Ein negatives Vorzeichen von $y(q)$ erhält man, wenn die ersten beiden Terme in (7.38) verschwinden. Dies ist der Fall, wenn der plastische Multiplikator $\Delta\gamma_2$ (Gleichung (7.39)) unendlich groß wird, d.h. wenn dessen Nenner null wird:

$$I_1^{trial} - 3\kappa H(q_{links}) - q_{links} = 0 . \quad (7.42)$$

Diese nichtlineare Gleichung wird wieder mit dem Newton-Verfahren für q_{links} gelöst. Nach der Bestimmung beider Intervallgrenzen beginnt die Bisektion, mit der die Konvergenz zur richtigen Lösung garantiert ist (Erhart et al. (2003)).

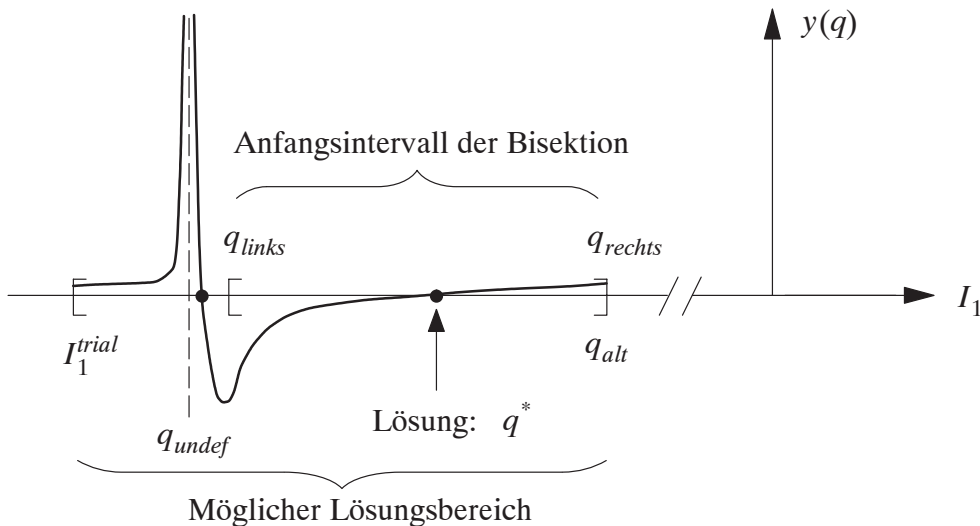


Bild 7.12: Qualitativer Verlauf der Funktion $y(q)$: Gleichung (7.38)

- **Zugversagen**

Liegt der Prädiktor-Spannungszustand außerhalb des Tension cutoff und "unterhalb" der Gerade g_2 (siehe Bild 7.10 rechts), d.h. gelten die Bedingungen

$$f_3^{trial} > 0 \wedge \|s^{trial}\| < F_e(T) - \frac{2\mu}{9\kappa} \frac{I_1^{trial} - T}{\frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1}} , \quad (7.43)$$

so erfolgt die Rückprojektion auf die Fließfläche $f_3 = 0$. Einsetzen von (7.28) mit der nichtassozierten Fließrichtung \tilde{m}_3 (Gleichung (7.18)) in die Fließbedingung $f_3(\hat{\tau}) = 0$ führt zu folgender skalaren Gleichung für den unbekanntem plastischen Multiplikator $\Delta\gamma_3$

$$I_1^{trial} - T - 9\kappa \left[1 - \left(1 + \frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1} \right) \frac{\|s^{trial}\|}{(F_e(T) + 2\mu\Delta\gamma_3)} \right] \Delta\gamma_3 = 0 . \quad (7.44)$$

Diese quadratische Gleichung kann direkt gelöst werden und man erhält

$$\Delta\gamma_3 = \frac{1}{4\mu} \left(-b + \sqrt{b^2 - 8\mu c} \right) \quad (7.45)$$

mit

$$b = F_e(T) - \frac{2\mu}{9\kappa} (I_1^{trial} - T) - \left(1 + \frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1} \right) \|s^{trial}\| \quad (7.46)$$

und

$$c = -\frac{F_e(T)}{9\kappa} (I_1^{trial} - T) . \quad (7.47)$$

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Fällen (nichtlinearer Drucker-Prager-Kegel, elliptische Kappe), bei denen der Verfestigungsparameter gemeinsam mit dem plastischen Dehnungszinkrement ermittelt wird, muss q hier noch aktualisiert werden. Dies geschieht durch Lösung der nichtlinearen Gleichungen (7.22) bzw. (7.23)

$$\Delta\epsilon_{vol}^p = W \left[e^{DX(q)} - e^{DX(q_{alt})} \right] \quad (\text{Verfestigung 1}) \quad (7.48)$$

bzw.

$$\Delta\epsilon_{vol}^p = DW \left[\frac{X(q)}{1 - DX(q)} - \frac{X(q_{alt})}{1 - DX(q_{alt})} \right] . \quad (\text{Verfestigung 2}) \quad (7.49)$$

Die linke Seite in (7.48) bzw. (7.49) ist das aus der Rückprojektion bekannte Inkrement der volumetrischen plastischen Dehnungen

$$\Delta\epsilon_{vol}^p = 3 \left(1 - \left(1 + \frac{\partial F_e(T)}{\partial I_1} \frac{\|s\|}{F_e(T)} \right) \right) \Delta\gamma_3 . \quad (7.50)$$

Sonderfälle: Wie beim nichtlinearen Drucker-Prager-Kegel gibt es auch hier die zwei Ausnahmen, bei denen der Verfestigungsparameter q konstant bleibt: zum einen bei kompakten kohäsiven Reibungsmaterialien wie z.B. Fels oder Beton und zum anderen bei einer sehr kleinen Kappe ($q = 0$). Dann erübrigt sich die Ermittlung von q , d.h. die Lösung von (7.48) bzw. (7.49) kann entfallen.

7.4.6 Erweiterung durch Berücksichtigung der 3. Spannungsinvariante

Sowohl kohäsionslose granulare Medien als auch kohäsive Reibungsmaterialien zeigen in Triaxialversuchen ein von der 3. Invariante des Spannungsdeviators

$$J_3 = \det(\text{dev}(\hat{\mathbf{r}})) = \det(\mathbf{s}) \quad (7.51)$$

abhängiges Versagensverhalten. So tritt das Versagen in Triaxial-Extensions-Versuchen früher auf als in Triaxial-Kompressions-Versuchen (siehe Bild 7.15). Um dieses Verhalten in der Simulation wiedergeben zu können, werden die Versagensflächen des DPC-Modells mit Hilfe der Willam-Warnke-Funktion (Willam und Warnke (1975))

$$r(v, e) = \frac{2(1 - e^2) \cos v + (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 v + 5e^2 - 4e}}{4(1 - e^2) \cos^2 v + (2e - 1)^2} \quad (7.52)$$

skaliert (siehe auch Haufe (2001)). Hierin ist

$$v = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right] \quad (7.53)$$

der so genannte Lode-Winkel. Er berechnet sich aus den Spannungen und ist zwischen 0° (Extensionsmeridian) und 60° (Kompressionsmeridian) definiert. Des Weiteren wird über die Exzentrizität e die Form der Versagensfläche in der Deviatorebene festgelegt. Der Definitionsbereich von e liegt zwischen 1,0 (Drucker-Prager-Kreis) und 0,5 (Rankine-Dreieck). Eine variable, von der hydrostatischen Spannung abhängige Exzentrizität wäre möglich (Haufe (2001)), wird jedoch hier zugunsten der Ersparnis eines weiteren Materialparameters nicht verwendet. In Bild 7.13 sind Versuchsergebnisse von Lade und Duncan (1973) und die Willam-Warnke-Funktion in der Deviatorebene und die damit skalierte Versagensfläche dargestellt. Der Einfluss der Exzentrizität e auf die Form der Willam-Warnke-Funktion ist in Bild 7.14 zu erkennen. Ist der Mohr-Coulombsche Reibungswinkel ϕ des Materials bekannt, so kann eine Exzentrizität bestimmt werden, mit der die Willam-Warnke-Funktion das Mohr-Coulomb-Hexagon optimal annähert:

$$e = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (7.54)$$

So ergibt sich z.B. für einen Reibungswinkel von $\phi = 30^\circ$ eine Exzentrizität von $e = 0,71$ (siehe Bild 7.14).

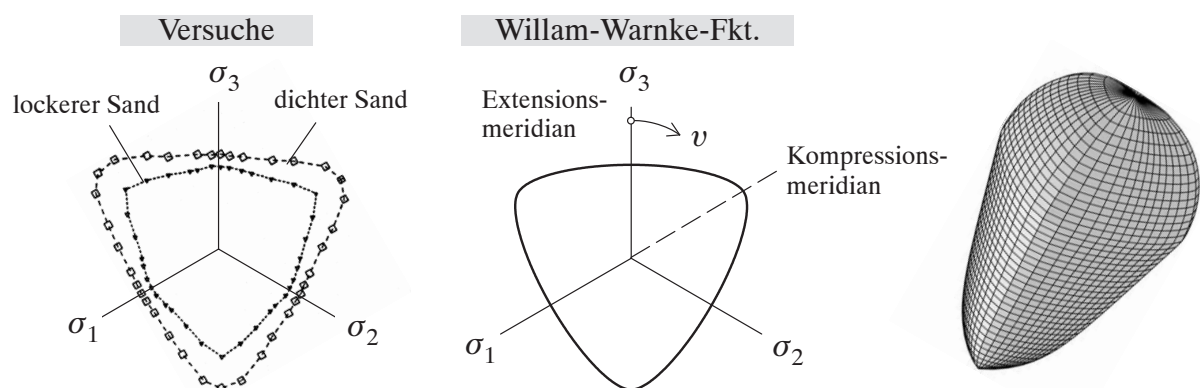


Bild 7.13: Versuchsergebnisse (Lade und Duncan (1973)) und Willam-Warnke-Funktion in Deviatorebene; Versagensfläche im dreidimensionalen Spannungsraum

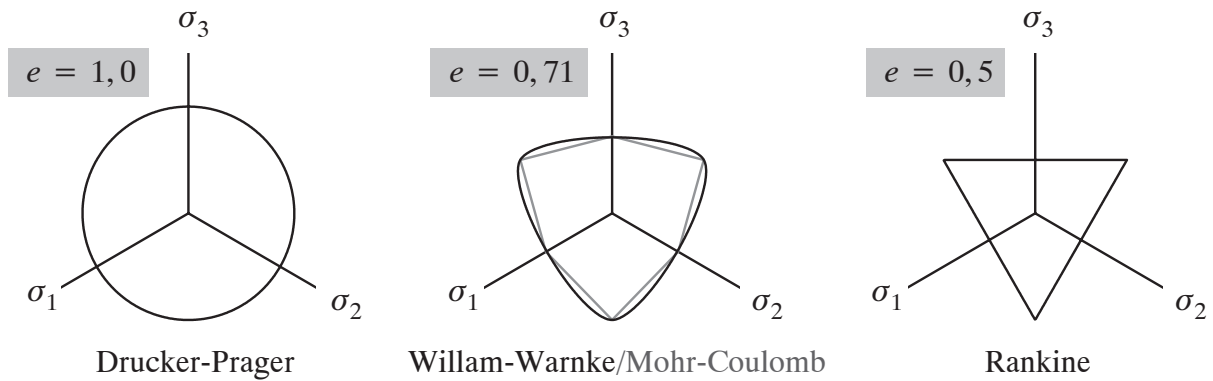


Bild 7.14: Willam-Warnke-Funktion: Einfluss der Exzentrizität

In Bild 7.15 ist dargestellt, wie sich die Berücksichtigung der 3. Spannungsinvariante bei der Simulation von Triaxialversuchen auswirkt. Je nachdem, ob es sich um einen Kompressionsversuch (TXC) oder Extensionsversuche (TXEr oder TXEc) handelt, ergibt sich ein anderer Spannungspfad. Wird der Lode-Winkel nicht berücksichtigt, so liegen alle Versagensorte auf dem Kompressionsmeridian, was im Widerspruch zu entsprechenden Experimenten steht (Chen (1982)). Mit Berücksichtigung des Lode-Winkels findet das Versagen dagegen jeweils am "richtigen" Ort statt.

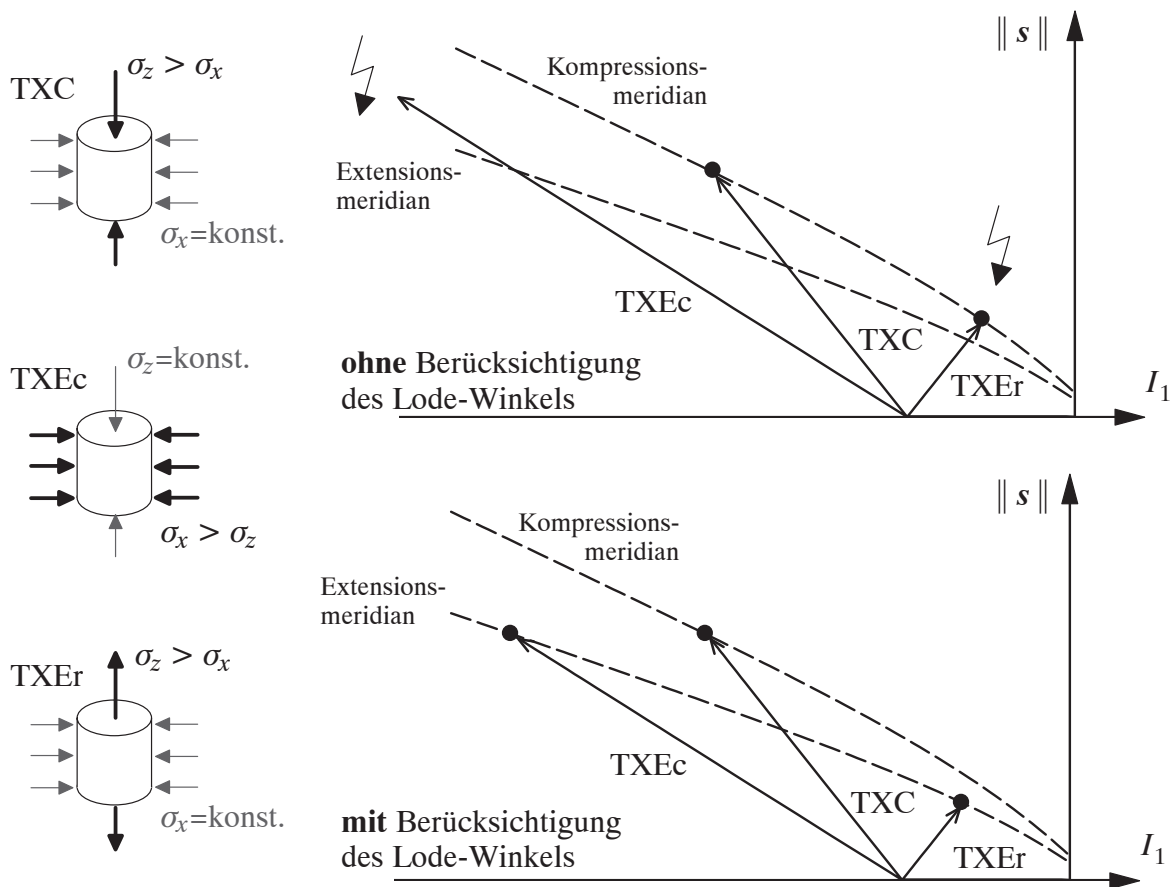


Bild 7.15: Versagensorte bei verschiedenen Triaxialversuchen

Anmerkung: Im Algorithmus wird die 3. Spannungsinvariante im expliziten Sinn berücksichtigt. Das bedeutet, dass im Zeitschritt t_n der Wert des Lodewinkels berechnet wird, um dann im nächsten Zeitschritt t_{n+1} mit dem entsprechenden Wert der Willam-Warneke-Funktion die Fließflächen zu skalieren. Der Rückprojektionsalgorithmus wird deshalb nicht beeinflusst.

7.4.7 Erweiterung auf Viskoplastizität

Unter dynamischer Beanspruchung lassen sich bei kohäsiven Reibungsmaterialien Festigkeitssteigerungen feststellen, die auf Trägheitseffekte bei der Mikrorissbildung zurückzuführen sind (Schmidt-Hurtienne (2001)). Eine Möglichkeit, diesen Einfluss der Dehnrates auf die Materialfestigkeit zu beschreiben, ist die Anwendung der Viskoplastizitätstheorie. Im Gegensatz zur ratenunabhängigen Plastizitätstheorie wird die Entstehung plastischer Verformungen geschwindigkeitsabhängig definiert. Eine Konsequenz für die Formulierung ist, dass Spannungszustände außerhalb der Fließfläche zugelassen sind, um die erwünschte ratenabhängige Festigkeitssteigerung zu erreichen.

Je nach Wahl der viskoplastischen Verzerrungsrate wird meistens zwischen den Ansätzen nach Perzyna (1966) und nach Duvaut und Lions (1972) unterschieden. Da die Duvaut-Lions-Viskoplastizität für Mehrflächenplastizität besser geeignet ist (Simo et al. (1988a)), wird diese für das DPC-Modell verwendet und im Folgenden beschrieben. Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes ist die algorithmische Trennung von ratenunabhängiger und ratenabhängiger Plastizität bei der Berechnung von Spannungen und internen Variablen. Ausgangspunkt des Ansatzes ist das in Bild 7.16 dargestellte rheologische Modell einer Parallelschaltung von modifiziertem Prandtl-Reuss-Körper und Maxwell-Körper (Sluys (1992)).

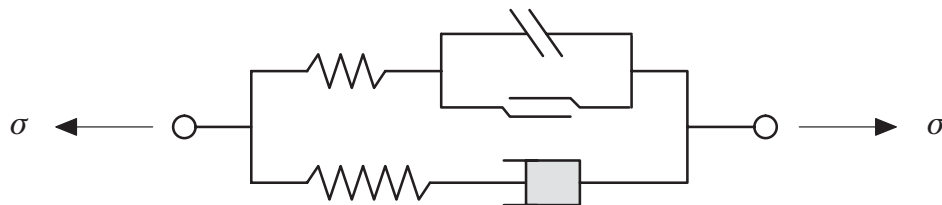


Bild 7.16: Rheologisches Modell für die Duvaut-Lions-Viskoplastizität

Ausgehend von der additiven Zerlegung⁷ der Rate der logarithmischen Verzerrungen in elastische und viskoplastische Anteile

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp} \quad (7.55)$$

wird die viskoplastische Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}^{vp}$ als Differenz zwischen ratenabhängigen und ratenunabhängigen Größen wie folgt definiert

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} C^{e-1} : (\tau - \bar{\tau}) . \quad (7.56)$$

7. Die additive Zerlegung in elastischen und plastischen Anteil ist im Rahmen der Finiten Plastizität für die Rate der logarithmischen Dehnungen möglich (Peric et al. (1992)), siehe auch Gleichung (2.83) der inkrementellen Formulierung.

Hierin ist C^{e-1} die Inverse des elastischen Materialtensors. Durch linksseitige Multiplikation mit C^e und Einsetzen von (7.55) in (7.56) erhält man:

$$C^e : \dot{\epsilon} - \dot{\tau} = \frac{1}{\eta} (\tau - \bar{\tau}) . \quad (7.57)$$

Analog zu (7.56) ergibt sich die Evolution der internen Variablen q

$$\dot{q} = -\frac{1}{\eta} (q - \bar{q}) . \quad (7.58)$$

$\bar{\tau}$ und \bar{q} sind die ratenunabhängigen Lösungen. η stellt die Relaxationszeit dar. Durch numerische Integration im Zeitinkrement $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ erhält man aus (7.57) bzw. (7.58) im Sinne eines Rückwärts-Euler-Verfahrens die Spannungen

$$\tau_n = \frac{\eta \tau_n^{trial} + \Delta t \bar{\tau}_n}{\eta + \Delta t} \quad (7.59)$$

und die interne Variable

$$q_n = \frac{\eta q_{n-1} + \Delta t \bar{q}_n}{\eta + \Delta t} \quad (7.60)$$

des aktuellen Zeitschritts (siehe Simo et al. (1988a, 1988b), Schwer und Murray (1994)). Diese Formeln sind 1. Ordnung genau. Der große Vorteil dieser Formulierung ist, dass nur der Trial-Zustand und die ratenunabhängige Lösung bekannt sein müssen. Alternativ wäre auch eine vollständige Integration unter Verwendung von Näherungen möglich (Simo et al. (1988a), Hörmann (2002)). Führt man eine Grenzbetrachtung durch, so erkennt man, dass die Duvaut-Lions-Viskoplastizität die ratenunabhängige Lösung beinhaltet, wenn die Relaxationszeit gegen null geht:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \tau_n = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta \tau_n^{trial} + \Delta t \bar{\tau}_n}{\eta + \Delta t} \rightarrow \bar{\tau}_n . \quad (7.61)$$

Die rein elastische Materialantwort erhält man dagegen, wenn die Relaxationszeit unendlich groß wird

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tau_n = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta \tau_n^{trial} + \Delta t \bar{\tau}_n}{\eta + \Delta t} \rightarrow \tau_n^{trial} . \quad (7.62)$$

7.5 Beschreibung der Pulverisierung im Modell

Mit dem vorgestellten Materialmodell kann das mechanische Verhalten sowohl von kompakten, kohäsiven Reibungsmaterialien (Keramik, Sandstein, Beton, usw.) als auch von losen, granularen Materialien (Sand, Pulver, usw.) dargestellt werden. Die Unterscheidung geschieht durch die Wahl der Materialparameter. Das Modell soll nun dahingehend ergänzt werden, dass auch der Übergang vom kompakten zum losen Material, d.h. die Pulverisierung unter hohem Druck, beschrieben werden kann. Dazu wird als erstes ein Kriterium benötigt, das abhängig vom lokalen Zustand des Materials den Beginn der Pulverentstehung anzeigt. Weiterhin muss der Übergang

von "kompakt" zu "lose" konsistent dargestellt werden. Hierfür wird ein Übergangsmodell entwickelt, mit dem einerseits mittels einer neuen internen Variablen die Materialparameter Zugfestigkeit (T), Kohäsion (α, λ) und Viskosität (η) verändert werden. Andererseits wird das Verfestigungsverhalten bei Be- und Entlastung modifiziert. Ein ähnliches Vorgehen zur Darstellung von Druckpulverisierung findet sich bei Cecconi et al. (2002).

7.5.1 Entstehungskriterium

Die Lage und Abmessungen pulverisierter Zonen, die beim Impakt auf kompaktes Ausgangsmaterial entstehen, lassen sich in der Regel nicht genau vorhersagen. Daher muss ein Kriterium abhängig vom lokalen Zustand des Materials aufgestellt werden, anhand dessen punktweise entschieden wird, ob das Material sich noch als kohäsives Reibungsmaterial verhält oder ob die Pulverisierung beginnt. Größen, die einen Einfluss darauf haben, ob und in welchem Maße Zerkleinerung stattfindet, sind sowohl Zustandsgrößen wie Spannungen und Verzerrungen als auch Materialeigenschaften wie Dichte, Partikelhärte, Partikelformen usw. (Hardin (1985), Hagerty et al. (1993), Lade et al. (1996), Bohác et al. (2001)). Um ein relativ einfaches und trotzdem realitätsnahes Kriterium zu entwickeln, wird im Folgenden lediglich der Spannungszustand am Materialpunkt als Entscheidungsgrundlage verwendet.

In der Literatur werden häufig die Versagensarten *cracking*, *crushing* und *mixed mode* unterschieden. Hofstetter und Mang (1995) definieren dafür einen von den Spannungsinvarianten abhängigen Faktor δ

$$\delta = - \frac{I_1}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}\cos v} \quad (7.63)$$

mit dessen Hilfe die drei verschiedenen Versagensarten identifiziert werden können:

$$\delta < 1 \quad \Rightarrow \text{Diskrete Rißbildung (cracking)} \quad (7.64)$$

$$1 \leq \delta \leq \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad \Rightarrow \text{gemischter Versagensmode} \quad (7.65)$$

$$\delta > \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad \Rightarrow \text{Crushing} \quad (7.66)$$

Diese Unterteilung besagt, dass Belastungen wie z.B. einaxialer Zug oder einaxialer Druck zu einem diskreten anisotropen Rissversagen führen. Wird das kompakt kohäsive Reibungsmaterial dagegen einem hydrostatischen Druckversuch oder einem Triaxialversuch mit hohem Seitendruck unterzogen, so kommt es zu einem isotropen Kollaps des Materials (Crushing). Im dazwischen liegenden Belastungsbereich werden beide Versagensarten aktiv (gemischter Versagensmode). Geht man nun davon aus, dass "Crushing" die Ursache der Pulverbildung ist, so kann ausgehend von (7.66) ein Kriterium aufgestellt werden, das zum einen die Lastrichtung beinhaltet

$$\frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \delta > \delta_{crush} \quad (7.67)$$

und zum anderen den Lastwert

$$I_1 < I_{1,crush} \quad (7.68)$$

Sind beide neu eingeführten Bedingungen (7.67) und (7.68) erfüllt, so beginnt der Prozess, bei dem kompaktes, kohäsives Reibungsmaterial in loses, nichtkohäsives Material umgewandelt wird, wobei δ_{crush} und $I_{1,crush}$ Materialparameter sind, mit denen die Pulverentstehung gesteuert werden kann. Wird dieses Kriterium an geeigneten Versuchen kalibriert, so entsteht Pulver bei sehr hohen Drücken und starker "Umschnürung". Bei Impaktvorgängen ist dies im allgemeinen in der Prozesszone (Mescallzone) direkt unter dem Impaktor der Fall. In Bild 7.17 sind die Versagensbereiche des Modells in einem Meridianschnitt dargestellt. Zug- und Schubversagen werden nach wie vor durch Tension cutoff und Drucker-Prager wiedergegeben. Für die elliptische Kappe wird jetzt jedoch eine Unterscheidung vorgenommen: Die Prozesse *Kompaktierung* und *Pulverisierung* werden unterschiedlich behandelt. Die *Kompaktierung* stellt wie bisher das Verfestigungsverhalten des kohäsiven Reibungsmaterials dar. Dagegen erhalten Spannungszustände, die in den grau unterlegten Bereich der *Pulverisierung* gelangen, eine "Sonderbehandlung", auf die im Folgenden detailliert eingegangen wird.

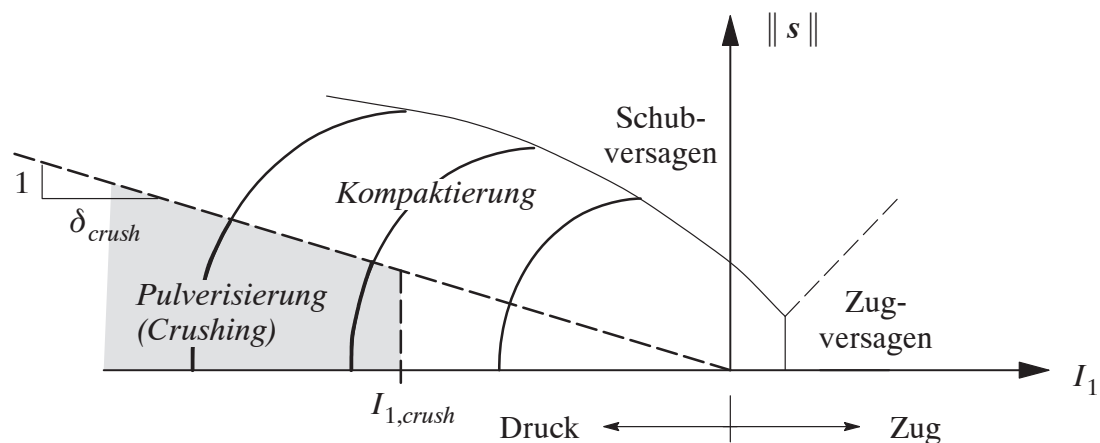


Bild 7.17: Versagensbereiche des modifizierten DPC-Modells (Meridianschnitt)

7.5.2 Abnahme von Kohäsion und Zugfestigkeit

Ein Effekt der Pulverisierung ist der Verlust der Bindungen auf Mikroebene durch die Bildung unzähliger Mikrorisse und das Brechen der Partikel. Bohác et al. (2001) nennen diesen Vorgang "debonding" und "grain crushing". Diese Zermalmung bzw. Zerkleinerung führt makroskopisch gesehen zur Abnahme der Kohäsion und der Zugfestigkeit des Materials. Für das konstitutive Modell bedeutet das, dass eine Entfestigung im Schub- und im Zugbereich stattfindet, wenn das Material "pulverisiert", d.h. wenn der Spannungszustand die Kriterien (7.67) und (7.68) erfüllt. Dies wird hier realisiert, indem die bisher konstanten Materialparameter für Kohäsion α , λ und die Zugfestigkeit T nun als Funktion einer internen "Crushing"-Variablen q_c definiert werden. Diese Geschichtsvariable wird in Anlehnung an das Verfestigungsgesetz (Abschnitt 7.4.4) so gewählt, dass sie identisch ist mit den mit $1/D$ skalierten volumetrischen plastischen Verzerrungen, die nach Beginn der Pulverisierung auftreten:

$$\dot{q}_c = \begin{cases} \frac{1}{D} \dot{\epsilon}_{vol}^p & \text{falls } \dot{\epsilon}_{vol}^p > \dot{\epsilon}_{vol}^{p,crush} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (7.69)$$

Die Schubfestigkeit $\alpha - \lambda$ bei $I_1 = 0$ wird durch Modifikation der nichtlinearen Drucker-Prager-Fließfläche verringert. Dazu wird für die Parameter α und λ eine exponentielle Entfestigung gewählt (siehe Bild 7.18):

$$\lambda_{n+1} = \alpha_n - (\alpha_n - \lambda_0) \exp\left(-\frac{q_{c,n}}{q_{cu}}\right), \quad (7.70)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \exp(\beta q_n), \quad (7.71)$$

wobei q_{cu} ein Materialparameter ist, der die Stärke der Abnahme steuert. Gleichungen (7.70) und (7.71) werden so formuliert, dass der Schnittpunkt der Schubversagensfläche mit der Kappe im aktuellen Zeitschritt gleich bleibt und damit auch die Lage der Kappe nicht verändert wird. Anschließend wird noch die aktuelle Zugfestigkeit T_n durch die Lage des Tension cutoff bestimmt, indem folgende nichtlineare Gleichung gelöst wird:

$$\frac{F_e(T_n)}{T_n} = \frac{F_e(T_0)}{T_0}. \quad (7.72)$$

Gleichung (7.72) gewährleistet, dass Kohäsion und Zugfestigkeit bei der Pulverisierung im selben Maße vermindert werden. In Bild 7.18 ist die Entwicklung der Fließfläche dargestellt: Bei einer Beanspruchung im Crushing-Bereich wird die Form von Drucker-Prager und Tension cutoff modifiziert, so dass bei einer eventuell folgenden Belastung im Zug- oder Schubbereich das Versagen früher einsetzt.

Anmerkung: Aus numerischen Gründen werden Zugfestigkeit und Kohäsion nicht bis auf null reduziert, sondern maximal auf ein Zehntel der ursprünglichen Werte vermindert.

7.5.3 Abnahme der Viskosität

Wie bereits erwähnt, nimmt die Ratenabhängigkeit beim Übergang vom kompakten, kohäsiven Material zum losen, nichtkohäsiven Pulver ab. In dem hier vorgestellten Konstitutivmodell wurde diesem Umstand auf sehr einfache Art und Weise Rechnung getragen: Die Relaxationszeit η wird in wenigen Zeitschritten komplett auf null abgesenkt.

7.5.4 Abnahme der Druckfestigkeit: Auflockerung

Der Anstieg der hydrostatischen Druckfestigkeit $X(q)$ bei zunehmender plastischer Kompression (Fließen im Bereich der Kappe: Kontraktion) wird durch das Verfestigungsgesetz (7.22) oder alternativ (7.23) gesteuert. Kommt es dagegen zu einer plastischen Volumenzunahme (Dilatation) durch Fließen im Zug- oder Schubbereich, so ist es vom Material abhängig, ob sich die Kappe zusammenzieht oder ob sie "stagniert" (Sandler und Rubin (1979), Hofstetter et al. (1993)). Lose, granulare Materialien wie Sand oder Gesteinspulver können aufgrund der fehlenden inneren Kohäsion relativ leicht auflockern, d.h. ein Zusammenziehen der Kappe bei Dilata-

tion ist physikalisch plausibel (siehe Bild 7.19 links). Bei kompakten kohäsiven Reibungsmaterialien ist dieses Phänomen dagegen nicht sehr ausgeprägt, weshalb das Verhindern des Zusammenziehens der Kappe eine gute Modellvorstellung ist (siehe Bild 7.19 rechts).

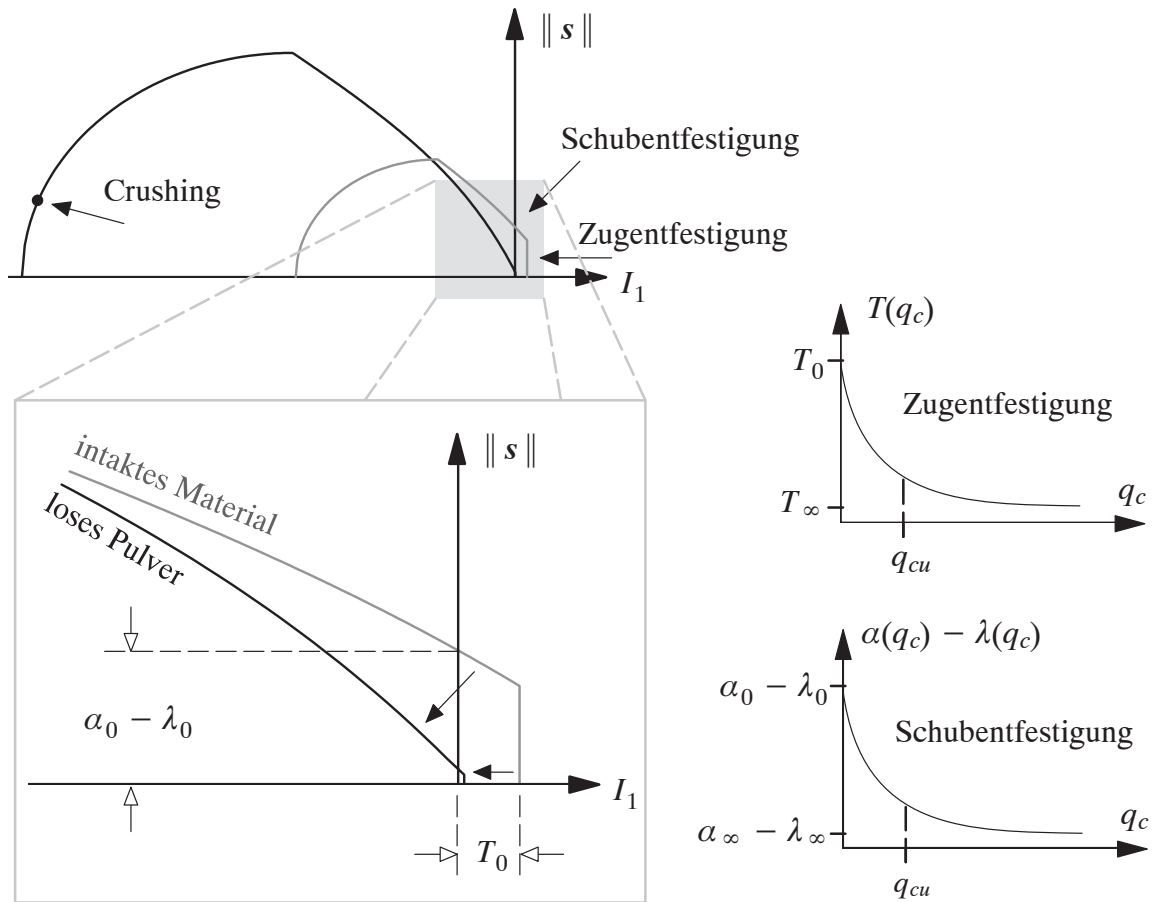


Bild 7.18: Abnahme von Kohäsion und Zugfestigkeit bei der Pulverisierung

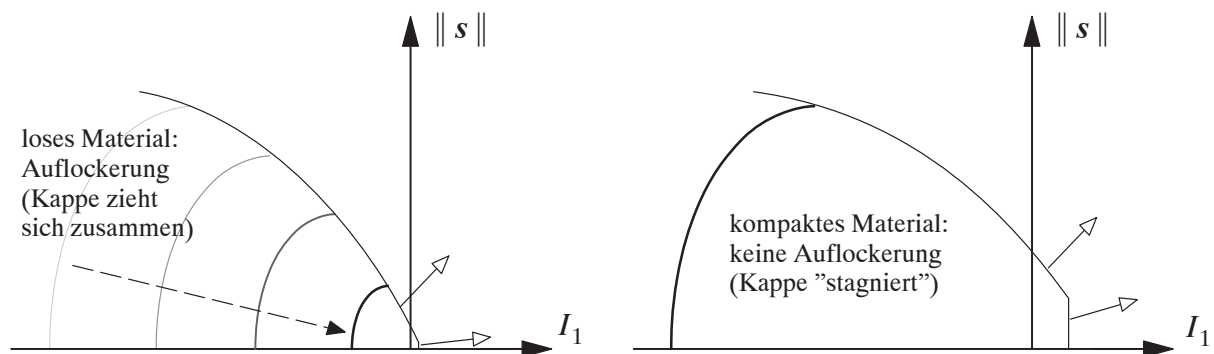


Bild 7.19: Unterscheidung bei Belastung im Zug-/Schubbereich (Dilatation)

7.5.5 Zunahme der plastischen Kompressibilität

Wie bereits in Abschnitt 7.2.2 erwähnt, hat die Zerkleinerung des kompakten Ausgangsmaterials zur Folge, dass eine höhere Verdichtung des Materials möglich ist, wobei die Größe dieser Komprimierungsreserve natürlich von der Ausgangsdichte abhängt. Dieses von Zhang et al. (1990)

und Wong et al. (1992) beobachtete Phänomen kann im Modell durch eine Zunahme der plastischen Kompressibilität bzw. durch eine Modifikation des Verfestigungsgesetzes dargestellt werden. In Bild 7.20, in dem die Druckfestigkeit $X(q)$ über der volumetrischen plastischen Dehnung ϵ_{vol}^p aufgetragen ist, ist das dementsprechend modifizierte Verfestigungs-/Auflockerungsverhalten schematisch dargestellt. Der Punkt **A** markiert den Zustand, an dem das kompakte Ausgangsmaterial beginnt, sich unter Druck plastisch zu verformen. Eine weiter ansteigende Belastung führt zur Zunahme von Dichte und Druckfestigkeit des Materials (*Kompaktierung*). Überschreitet die Last eine gewisse Höhe, so beginnt die Zerkleinerung (**B**) und die Verfestigung nimmt plötzlich (Knick) weniger schnell zu als vorher. Bei weiterer Beanspruchung wird das Material gleichzeitig zerkleinert und verdichtet, wodurch eine höhere Kompression erreicht werden kann (**C**) als wenn es nicht zur Pulverisierung gekommen wäre (**C'**). Der Übergang von **B** nach **C** wird durch zwei neue Materialkennwerte W_{crush} und D_{crush} in analoger Weise zur üblichen Verfestigung definiert. Beide Werte sind größer zu wählen, als die Parameter W und D der "normalen" Verfestigung. Wird das stark verdichtete Pulver nun in umgekehrter Richtung (Zug oder Schub) mit Dilatation belastet, so kommt es zu einer Auflockerung und damit einer Abnahme der Druckfestigkeit (**C**→**D**). Ist die Druckfestigkeit minimal (**D**) und wird das Pulver weiter aufgelockert (**D**→**E**), so muss die Größe dieser Volumendilatation am Materialpunkt "gespeichert" werden. Bei einer eventuellen Wiederbelastung wird die gespeicherte Volumenänderung wieder aufgebraucht (**E**→**D**→**C**).

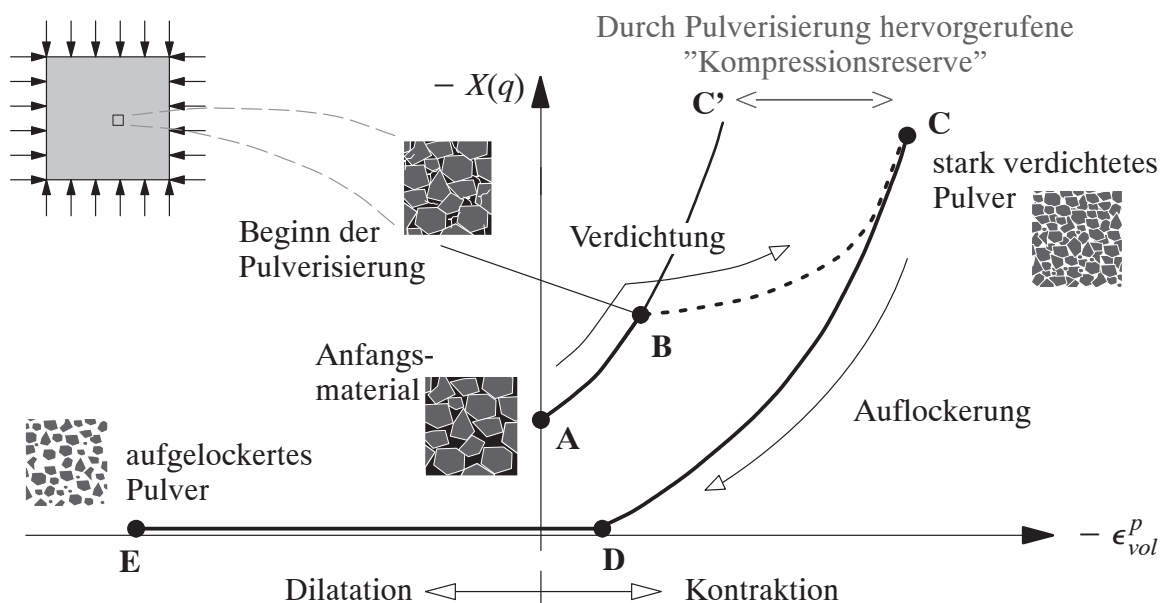


Bild 7.20: Modifizierte Verfestigung für Reibungsmaterial mit Pulverisierung

7.6 Kalibrierung des DPC-Modells

Das in Abschnitt 7.4 vorgestellte Materialmodell für Reibungsmaterialien besitzt 3 Materialkennwerte für das elastische Verhalten (E, M, ν), 7 für die Versagensflächen ($\alpha, \lambda, \beta, \theta, T, R, X_0$), 2 für das Verfestigungsgesetz (W, D), 1 für die Berücksichtigung der dritten Spannungsinvariante (e), 1 für die Ratenabhängigkeit (η) und bis zu 5 für die Pulverisierung ($(I_1, \delta, W, D)_{crush}, q_{cu}$),

d.h. den Übergang von intaktem zu losem Reibungsmaterial. Zur Bestimmung dieser Materialparameter müssen Experimente mit verschiedenen Beanspruchungen durchgeführt werden. An dieser Stelle soll das prinzipielle Vorgehen zur Ermittlung der Kennwerte kurz erläutert werden.

In Bild 7.21 ist beispielhaft eine zylinderförmige Laborprobe dargestellt, die deformiert wird und dabei die zugehörigen Kräfte bzw. Spannungen ermittelt werden. Je nach Beanspruchungsrichtung und Verhältnis zwischen den axialen Spannungen σ_1 und den radialen Spannungen σ_2 ergibt sich ein anderer Lastpfad. Einen guten Überblick über praktische Durchführung und Auswertung entsprechender bodenmechanischer Tests findet sich z.B. bei Bardet (1997). Die Belastung bei einaxialen Zugversuchen, einaxialen Druckversuchen und Triaxialversuchen wird bis zum Versagen gesteigert. Die Versagenspunkte im $\|s\| - I_1$ -Diagramm liefern dann die Form des nichtlinearen Drucker-Prager-Kegels mit den Parametern α , λ , β und θ und den Tension cutoff mit dem Kennwert T . Durch den Vergleich von Triaxial-Kompressionsversuchen und Triaxial-Extensionsversuchen (siehe auch Abschnitt 7.4.6) gelangt man zur Exzentrizität e der Willam-Warnke-Funktion (7.52). Stehen keine Ergebnisse aus Triaxial-Extensionsversuchen zur Verfügung, so kann mit Kenntnis des Mohr-Coulombschen Reibungswinkels und Gleichung (7.54) ein guter Anhaltswert für e gefunden werden. Mit Hilfe von Ödometerversuchen lassen sich die elastischen Parameter E_0 und M aus Gleichung (7.4) durch die Auswertung von Be- und Entlastungsschleifen bestimmen. Zur Ermittlung der Querdehnzahl $\nu = (3\kappa - E)/6\kappa$ ist zusätzlich die Bestimmung des Kompressionsmoduls κ aus einem hydrostatischen Druckversuch notwendig. Einen guten Anhaltswert bietet jedoch auch der für Reibungsmaterialien typische Bereich: $0,15 < \nu < 0,35$. Das Halbachsenverhältnis R der Kappe kann ebenfalls durch Ödometerversuche ermittelt oder der Literatur entnommen werden (z.B. Simo et al. (1988b) oder Hofstetter et al. (1993)). Hydrostatische Druckversuche liefern Werte für die Materialparameter X_0 , W und D . Die hydrostatische Anfangsdruckfestigkeit X_0 kennzeichnet den Beginn des Porenkollaps (siehe Bild 7.2). Mit W und D wird dann das Verfestigungsverhalten beschrieben, d.h. es ist eine Kurvenanpassung an eine Versuchskurve im entsprechenden Diagramm (Bild 7.11) notwendig. Zur Ermittlung der Relaxationszeit η für die viskoplastische Erweiterung sind dynamische Versuche durchzuführen und mit entsprechenden statischen Experimenten zu vergleichen.

Die Ermittlung der Materialparameter $I_{1,crush}$, δ_{crush} , q_{cu} , W_{crush} und D_{crush} , die das Verhalten bei der Pulverisierung kennzeichnen, ist mit Ödometer- und hydrostatischen Druckversuchen möglich. Wie $I_{1,crush}$ und δ_{crush} zu bestimmen sind, geht aus den Erklärungen in Kapitel 7.5.1 hervor. Die restlichen drei Kennwerte erhält man durch Vergleich numerischer Berechnungen mit experimentellen Ergebnissen.

Bei der Betrachtung von Versuchsergebnissen muss auf die verwendeten Dehnungs- und Spannungsmaße geachtet werden. In Versuchen werden häufig aus Längen- bzw. Volumenänderungen die Ingenieursdehnungen ε_i und aus Kräften bezogen auf Belastungsflächen die Cauchy-Spannungen σ_i ermittelt. Im Gegensatz dazu beruht das vorgestellte DPC-Modell auf den Beziehungen zwischen logarithmischen Dehnungen ϵ_i und Kirchhoff-Spannungen τ_i . Dazu ist folgende Umrechnung erforderlich:

$$\epsilon_a = \ln(1 + \varepsilon_a) \quad \text{und} \quad \tau_a = \frac{V}{V_0} \sigma_a, \quad (7.73)$$

wobei $a = 1, 2, 3$ die drei Hauptrichtungen sind und mit V/V_0 das Verhältnis von aktuellem Volumen zu Ausgangsvolumen bezeichnet wird.

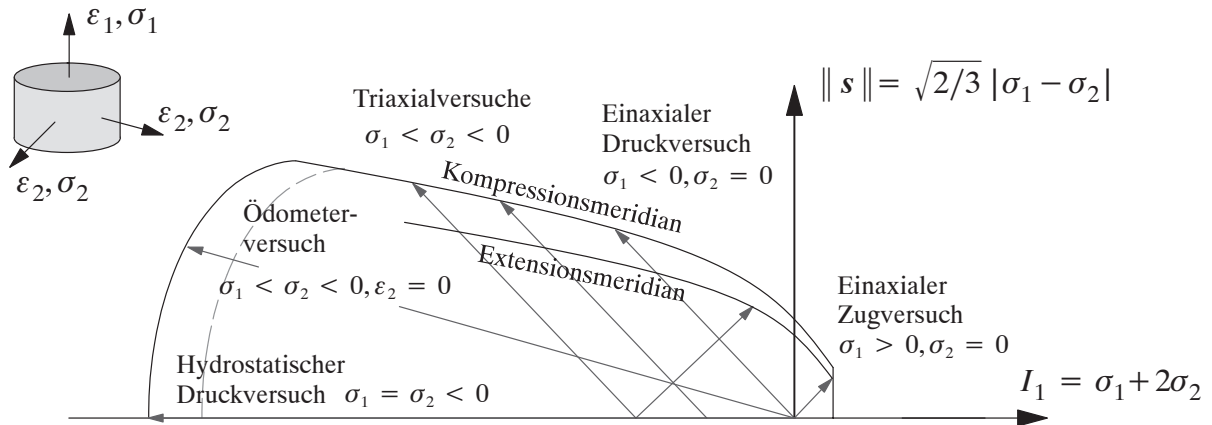


Bild 7.21: Versuche und Lastpfade

7.7 Numerische Beispiele

7.7.1 Statische Kompression kompakter, kohäsiver Reibungsmaterialien

Anhand verschiedener statischer Kompressionsversuche an kompakten, kohäsiven Reibungsmaterialien soll das vorgestellte Materialmodell verifiziert und bewertet werden. Dazu werden Ergebnisse von Experimenten mit *Beton*, *Zementstein*, *Mörtel* und *Sandstein* betrachtet. Im Blickpunkt stehen hier hohe Druckbelastungen, wie sie bei Stoßvorgängen in der Prozesszone direkt unter dem Impaktor auftreten.

Bazant et al. (1986) bzw. Burlion et al. (2001) führten Ödometerversuche an Beton, Zementstein und Mörtel bis zu axialen Druckspannungen σ_1 von 2070 N/mm^2 bzw. 1200 N/mm^2 mit mehreren Entlastungs- und Wiederbelastungsschleifen durch (siehe graue Kurven Bild 7.22 links und Mitte). Als Dehnungsmaß wird das Verhältnis der Längenänderung zur Ausgangslänge und als Spannungsmaß die Kraft, bezogen auf den gleichbleibenden Querschnitt, verwendet. Beiden Spannungs-Dehnungs-Diagrammen ist zu entnehmen, dass sich das Material zunächst kurz elastisch verhält. Danach kommt es aufgrund von Porenkollaps/Kompaktion und Kornbrüchen/Crushing zu großen irreversiblen Verformungen bei einer relativ geringeren Steigung der Belastungskurve. Mit zunehmender Belastung und damit zunehmender Verdichtung nimmt die Steigung wieder deutlich zu, bis schließlich annähernd die elastische Steifigkeit erreicht wird. Das Resultat der Experimente ist ein "S-förmiger" Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve. Ein etwas anderes Verhalten zeigt poröser Sandstein im hydrostatischen Druckversuch (Wong et al. (1992)): Durch Porenkompaktierung wird das Material von Beginn an plastisch verformt (Bild 7.22 rechts). Bei einer effektiven Druckspannung $p = I_1/3$ von ca. 330 N/mm^2 wird dann ein kritischer Punkt erreicht, an dem die Pulverisierung einsetzt, was durch eine plötzliche Abnahme der Steigung der Belastungskurve zu erkennen ist. Das entstandene und entstehende Pulver wird weiter komprimiert und verhält sich daher wieder zunehmend verfestigend.

Für die numerische Berechnung dieser Tests wurde das modifizierte DPC-Materialmodell mit den Parametern aus den Tabellen 7.1 und 7.2 verwendet. Da es sich bei Ödometerversuchen und bei hydrostatischen Druckversuchen um räumlich konstante Verzerrungs- und Spannungszustände handelt, wurden die Berechnungen jeweils an einem Element (SI4) durchgeführt. Da die Beanspruchungen nur den Kappen-Modus aktivieren, werden der Einfachheit halber für alle vier Materialien dieselben Parameter α , λ , β und θ für den nicht-aktiven Drucker-Prager-Bereich gewählt. Die elastischen Kennwerte Elastizitätsmodul E (hier konstant) und Querdehnzahl ν , die Anfangsdruckfestigkeit X_0 und die Parameter für die Verfestigung W , D und die Pulverentstehung $I_{1,crush}$, W_{crush} und D_{crush} sind dagegen für Beton, Zement, Mörtel und Sandstein verschieden. Die Simulationsergebnisse (schwarze Kurven in Bild 7.22) zeigen gute qualitative und quantitative Übereinstimmungen mit den Versuchskurven.

	α [N/mm ²]	θ [-]	λ [N/mm ²]	β [mm ² /N]
kompakt	44,0	0,32	34,0	0,008

Tabelle 7.1 "Drucker-Prager"-Materialparameter für Beton, Zement, Mörtel und Sandstein

	E [N/mm ²]	ν [-]	X_0 [N/mm ²]	W [-]	D [mm ² /N]	$I_{1,crush}$ [N/mm ²]	W_{crush} [-]	D_{crush} [mm ² /N]
Beton	38000	0,18	-150	0,1	0,0003	400	0,11	0,0004
Zement	25000	0,25	-215	0,14	0,0012	450	0,16	0,002
Mörtel	20000	0,2	-110	0,16	0,001	400	0,18	0,0014
Sandstein	20000	0,25	-0,1	0,04	0,002	990	0,12	0,004

Tabelle 7.2 Weitere Materialparameter für Beton, Zement, Mörtel und Sandstein

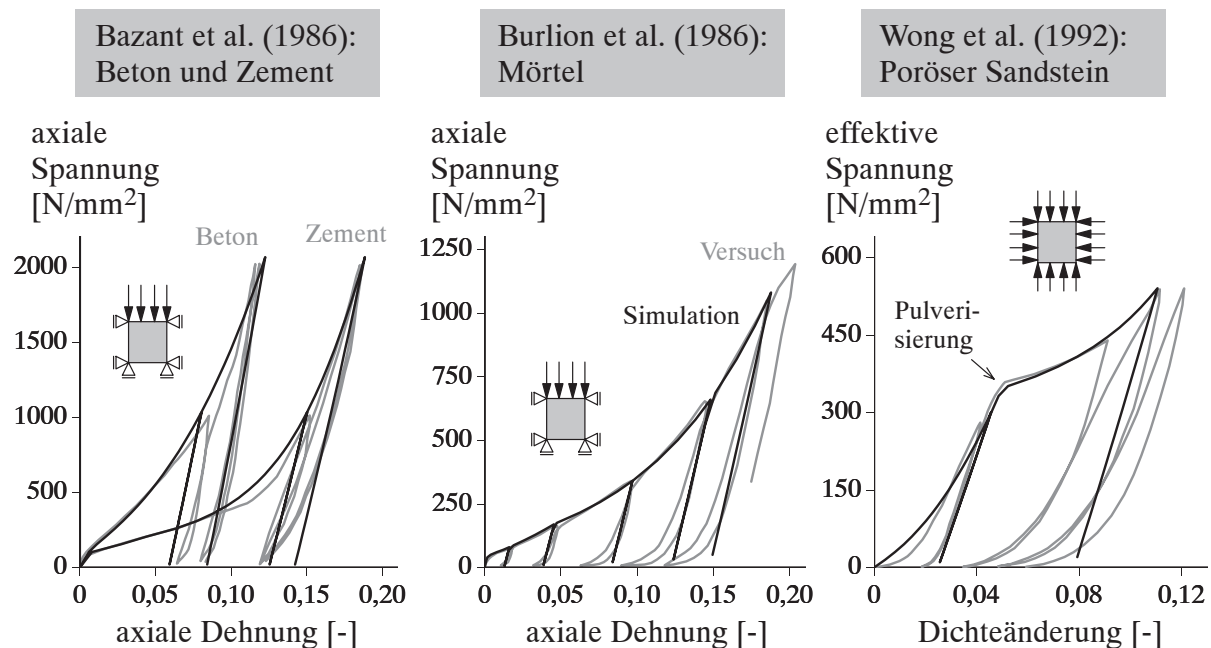


Bild 7.22: Ödometerversuche und hydrostatischer Druckversuch

7.7.2 Statische Kompression loser, nichtkohäsiver Reibungsmaterialien

Zunächst wurden an *Gesteinspulver* eigens zwei verschiedene statische Ödometerversuche mit Entlastungen und Wiederbelastungen durchgeführt (Erhart et al. (2003)). In einer ersten Variante wurde ein anfänglich lockeres Pulver im Bereich zwischen 0 und 78,6 N/mm² untersucht. Die zweite Serie von Ödometertests umfasste einen Beanspruchungsbereich von 0 bis 0,8 N/mm² für ein initial dichteres Pulver. Die variierenden Anfangsdichten, Kornverteilungen und Belastungshöhen führen zu unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen. Davon ausgehend ergeben sich teilweise verschiedene Parameterwerte für das Materialmodell. Sie sind für das lockere Pulver (Variante 1) und das dichte Pulver (Variante 2) in Tabelle 7.3 zusammengefasst.

	ν [-]	α [N/mm ²]	θ [-]	λ [-]	R [-]	X_0 [N/mm ²]	T [N/mm ²]
Pulver	0,3	0,002	0,49	0	2,5	-0,006	0,004

	ρ_0 [kg/m ³]	E_0 [N/mm ²]	M [N/mm ²]	W [-]	D [mm ² /N]
Pulver (1a)	1100	10,0	23000,0	0,209	0,05
Pulver (1b)	1100	10,0	4600,0	0,15	0,07
Pulver (1c)	1100	10,0	23000,0	0,233	0,05
Pulver (2a)	1650	55,0	0,0	0,085	0,8
Pulver (2b)	1650	10,0	2000,0	0,085	0,8

Tabelle 7.3 Materialparameter für Pulver im statischen Kompressionsversuch

Bei der numerischen Berechnung von Variante 1 werden die beiden verschiedenen Verfestigungsgesetze - die exponentielle Funktion (7.22) und die neue, rationale Funktion (7.23) - miteinander verglichen. Mit der exponentiellen Funktion nach Sandler und Rubin (1979) können entweder die Ent- und Wiederbelastungspfade (Variante 1a) oder die Verfestigung selbst (Variante 1b) reproduziert werden (siehe Bild 7.23). Beides zur selben Zeit ist allerdings mit diesem Verfestigungsgesetz nicht möglich. Dagegen können mit der neu eingeführten, rationalen Funktion beide Phänomene gut erfasst werden (siehe Bild 7.24): Variante 1c.

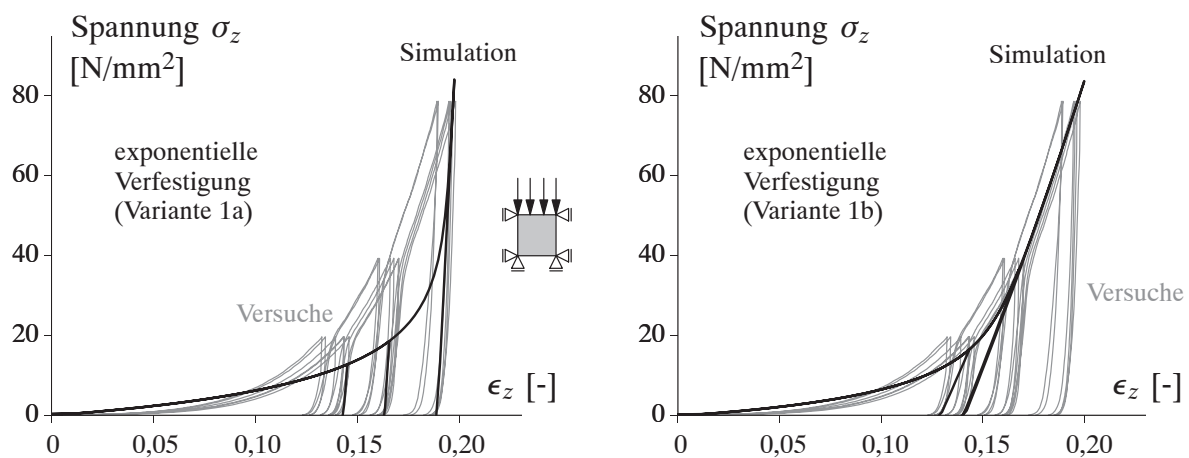


Bild 7.23: Statischer Ödometerversuch mit Pulver: Varianten 1a und 1b

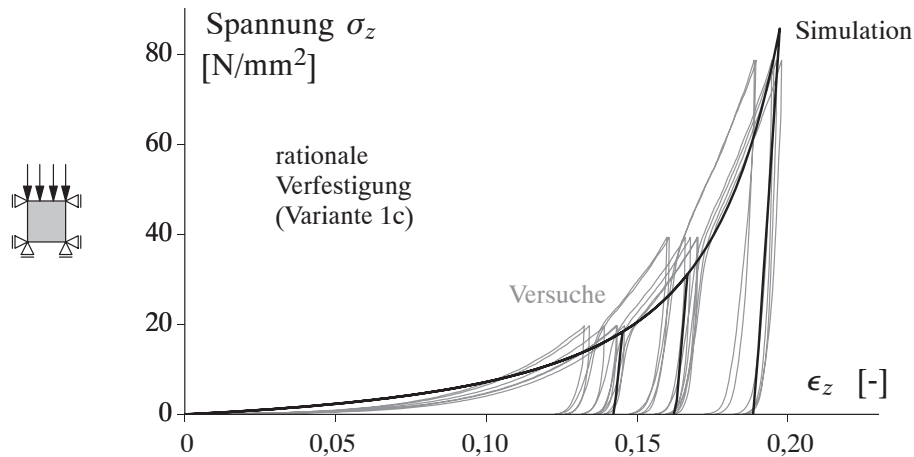


Bild 7.24: Statischer Ödometertest mit Pulver: Variante 1c

Für das dichtere Pulver soll die Auswirkung der Verwendung eines variablen, verzerrungsabhängigen Elastizitätsmoduls gezeigt werden. Mit einem konstanten E-Modul von $E = 55,0 \text{ N/mm}^2$ (Variante 2a) ist die Steigung der Entlastungen immer gleich, was den experimentellen Beobachtungen widerspricht (siehe Bild 7.25 links). Wird dagegen ein variabler E-Modul zwischen $E_0 = 10 \text{ N/mm}^2$ und $E_{\text{max}} = E_0 + MW = 180 \text{ N/mm}^2$ verwendet (Variante 2b), so erhält man mit der Kompression zunehmende Steigungen und damit eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchskurven (Bild 7.25 rechts).

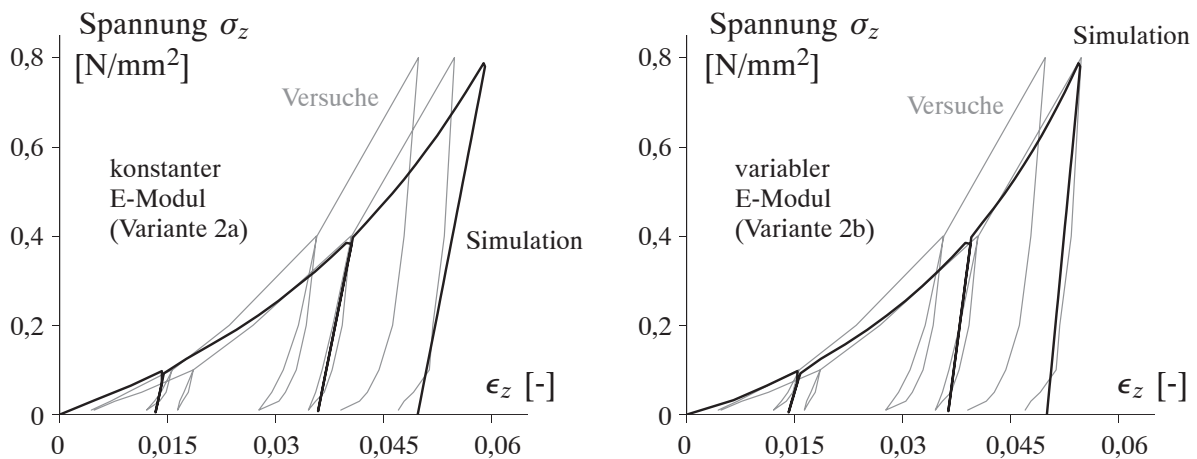


Bild 7.25: Statischer Ödometertest mit Pulver: Varianten 2a und 2b

Das anfänglich lockere Pulver wird nun statisch komprimiert, wobei die seitliche Ausdehnung nicht behindert wird, d.h. der Test entspricht einem Ödometerversuch ohne begrenzenden Ring. Dieses Experiment soll die Leistungsfähigkeit des Modells bei kombinierter Druck-/Schubbelastung für dünne Pulverschichten belegen. Dazu wird ein Druckstempel mit einem Durchmesser von 18 mm in verschieden hohe Pulverschichten eingedrückt (siehe Bild 7.26 links). Im Versuch werden Stempelkraft und Eindringtiefe gemessen. Die für die rotationssymmetrische Simulation notwendigen Materialparameter sind die aus den beschriebenen Ödometerversuchen und Triaxialversuchen gewonnenen Werte (Variante 1c in Tabelle 7.3). Es kommen die selektiv integrierten, bilinearen Vierknotenelemente 'SI4' zum Einsatz. In Bild 7.26 rechts sind Last-Verschiebungskurven dargestellt, die eine gute Übereinstimmung der experimentellen und der

numerischen Ergebnisse zeigen. Die maximalen Deformationen der Diskretisierungen und die relative Volumenänderungen sind in Bild 7.27 dargestellt. Wie im Versuch kann eine hohe Verdichtung unter dem Druckstempel beobachtet werden, die zum Rand hin abnimmt. Das granulare Material kann aufgrund der fehlenden seitlichen Behinderung in lateraler Richtung "fließen". Außerhalb der Druckbelastung lockert das Material entsprechend auf.

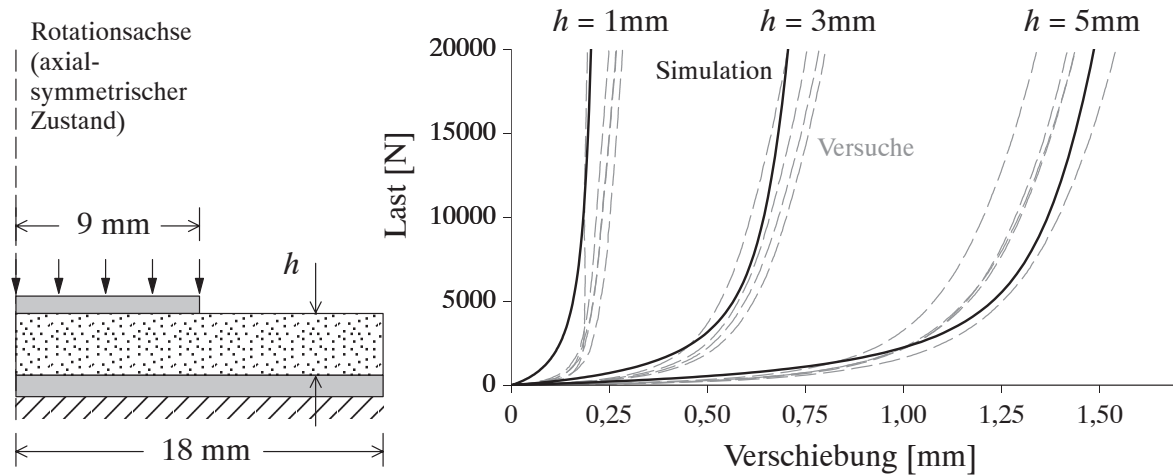


Bild 7.26: Pulver-Kompaktion ohne seitliche Behinderung, Last-Verschiebungskurven

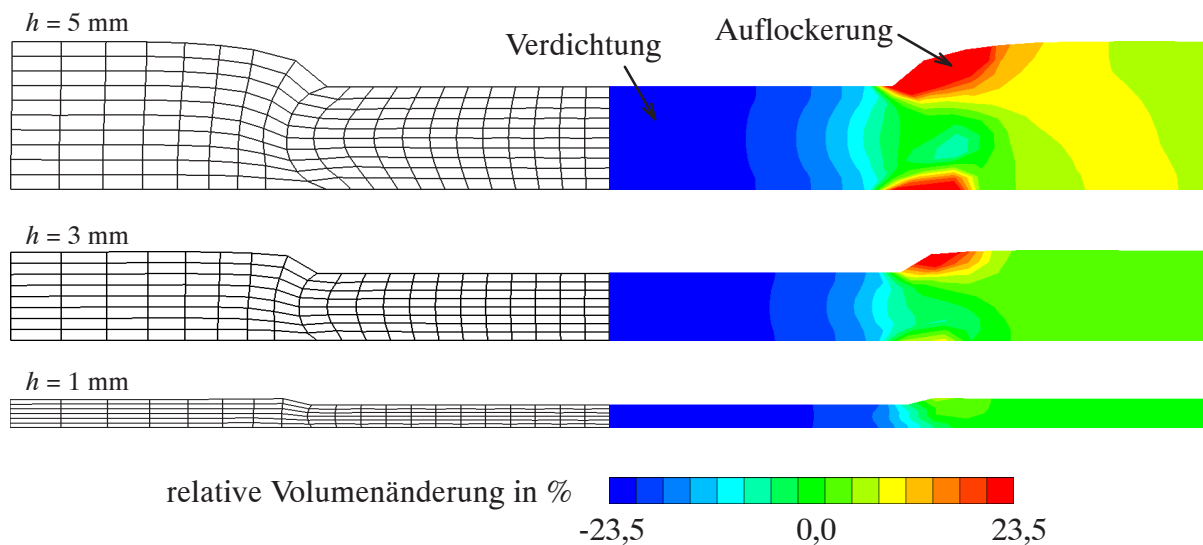


Bild 7.27: Netzdeformationen und relative Volumenänderung bei Pulver-Kompaktion

7.7.3 Dynamische Pulverkompaktierung

Das Verhalten von Pulver unter Impulsbelastung wird mit Hilfe eines dynamischen Ödometer-tests experimentell und numerisch untersucht. Pulverschichten unterschiedlicher Dicke (1 bis 5 mm) werden dazu in einen Stahl-Ödometerring mit einem Durchmesser von 18,2 mm gefüllt (siehe Bild 7.28). Auf dem Pulver steht ein zylinderförmiger Stahlstab mit einer Länge von 49,5 cm und einem Durchmesser von 18 mm. Nun wird auf diesen Stab von oben ein 137,7 g schweres Gewicht (Fallkörper) fallen gelassen, das zum Zeitpunkt des Kontakts mit dem Stab eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 10,16\text{ m/s}$ besitzt. Daraufhin propagiert eine Beschleunigung

gungswelle durch den Stab, die aufgrund von Reflektionen an den Stabenden vor- und zurückläuft, wodurch das Pulver in regelmäßigen Intervallen einen Verdichtungsstoß erfährt. Mit jedem Impact erhöht sich die Dichte bis schließlich ein Maximum erreicht ist. Danach verhält sich das Pulver erheblich steifer und der Stab federt nach oben zurück. Im Experiment wird die Vertikalverschiebung des Stabes und damit die Eindringtiefe ins Pulver direkt gemessen. Die Stoßkraft wird dagegen indirekt mit einer Speicheroszilloskopmessung ermittelt.

In der axialsymmetrischen Simulation werden der Fallkörper, der Stahlstab, das Pulver, der Ödometerring und der darunter liegende Untergrund mit bilinearen Vierknotenelementen 'SI4' diskretisiert (Ausschnitt siehe Bild 7.28). Die Materialparameter der elastischen Komponenten und des Pulvers sind in Tabelle 7.4 bzw. in Tabelle 7.5 zusammengestellt. Die Materialparameter wurden aus den oben beschriebenen statischen Versuchen gewonnen. Die Unterschiede in den Werten von M , W und D für unterschiedliche Schichtdicken werden anhand der experimentellen Ergebnisse (s.u.) erläutert. Für den Kontakt zwischen Pulver und Stahl werden Haft- und Gleitreibungskoeffizienten von $\mu_H = 0,3$ und $\mu_G = 0,3$ verwendet.

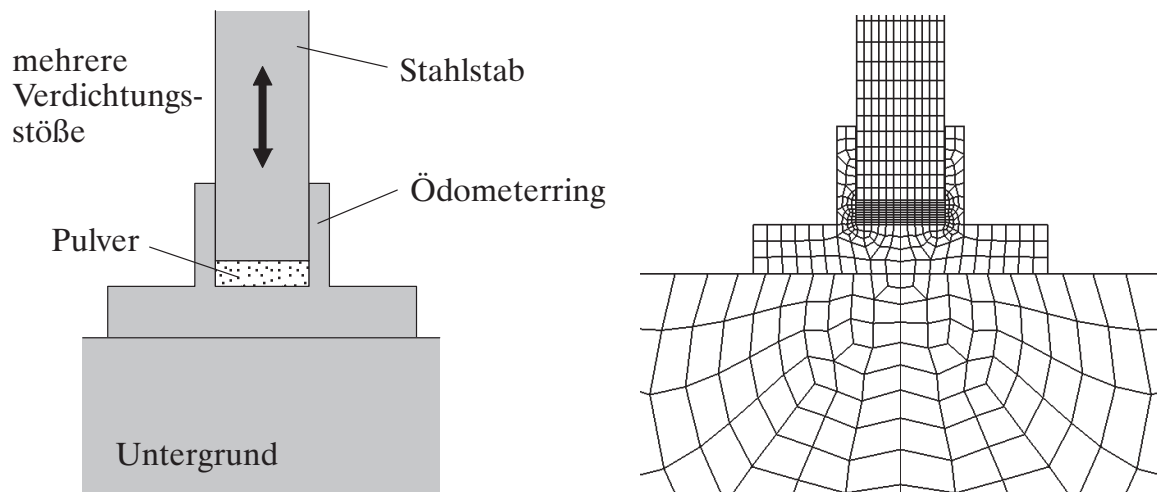


Bild 7.28: Dynamischer Ödometerversuch: Geometrie und Diskretisierung

	ρ [kg/m ³]	E [N/mm ²]	ν [-]
Fallkörper, Ödometerring	7723	210000	0,30
Stab	8098	210000	0,30
Untergrund	2500	30000	0,25

Tabelle 7.4 Materialparameter für elastische Körper im dynamischen Ödometerversuch

	ν [-]	α [N/mm ²]	θ [-]	λ [-]	R [-]	X_0 [N/mm ²]	T [N/mm ²]
Pulver	0,3	0,002	0,49	0	2,5	-0,006	0,004

	ρ_0 [kg/m ³]	E_0 [N/mm ²]	M [N/mm ²]	W [-]	D [mm ² /N]
Pulver (1 mm)	1100	10,0	12000,0	0,44	0,025
Pulver (3/5 mm)	1100	10,0	24000,0	0,19	0,055

Tabelle 7.5 Materialparameter für Pulver im dynamischen Ödometerversuch

Der zeitliche Verlauf der Vertikalverschiebung des Stahlstabes (Bild 7.29) zeigt die periodischen Eindringungen für die unterschiedlichen Pulverschichtdicken. Nachdem eine maximale Kompression erreicht ist, nimmt die Verschiebung wieder ab, da der Stahlstab zurückfedert und das Pulver dabei auflockert. Das Verhältnis der maximalen Eindringtiefe zur initialen Schichtdicke ergibt die maximale Ingenieur-Dehnung ε_{\max} , die für die 1 mm dicke Pulverschicht ungefähr doppelt so groß ist wie für die 3 bzw. 5 mm dicken Pulverschichten. Hierin ist auch die unterschiedliche Wahl der verdichtungsabhängigen Parameter M , W und D begründet (siehe Tabelle 7.5), wobei W der maximalen Dehnung entspricht. Die numerischen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den experimentellen Resultaten überein.

Auch bei der Betrachtung des zeitlichen Verlaufs der Kontaktkraft erweist sich die hohe Qualität der numerischen Ergebnisse (siehe Bild 7.30). Diese Diagramme belegen außerdem die dämpfende Wirkung des Pulvers bei dynamischer Impaktbelastung, selbst für geringe Pulverschichtdicken. Die periodischen Stöße bewirken Belastungsspitzen in regelmäßigen Abständen, wobei die Werte von der jeweiligen Schichtdicke abhängen. Je mehr Pulver vorhanden ist, desto geringer sind die Höchstwerte und desto später treten die Spitzenlasten auf, weil eine hohe Verdichtung erst nach höherer Energiezufuhr, also einer höheren Anzahl an Stößen, erreicht ist.

Einen weiteren Beleg für die dämpfende und energieabsorbierende Wirkung des Pulvers liefern die numerisch ermittelten von Mises-Spannungen $\sigma_{vM} = \sqrt{3/2 \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})}$ im Untergrund direkt nach dem ersten Impakt zum Zeitpunkt $t = 0,129 \text{ms}$ (siehe Bild 7.31). Die durch den Stoß initiierte Beschleunigungswelle bewirkt das Auftreten einer "Druckzwiebel", wenn kein Pulver vorhanden ist. Diese Spannungen sind bei einer 1 mm starken Pulverschicht erheblich geringer, da die kinetische Energie hauptsächlich plastische Formänderungen (Verdichtung) des Pulvers bewirkt. Im Fall einer 3 oder 5 mm dicken Schicht treten zu diesem Zeitpunkt überhaupt keine Spannungen im Untergrund auf.

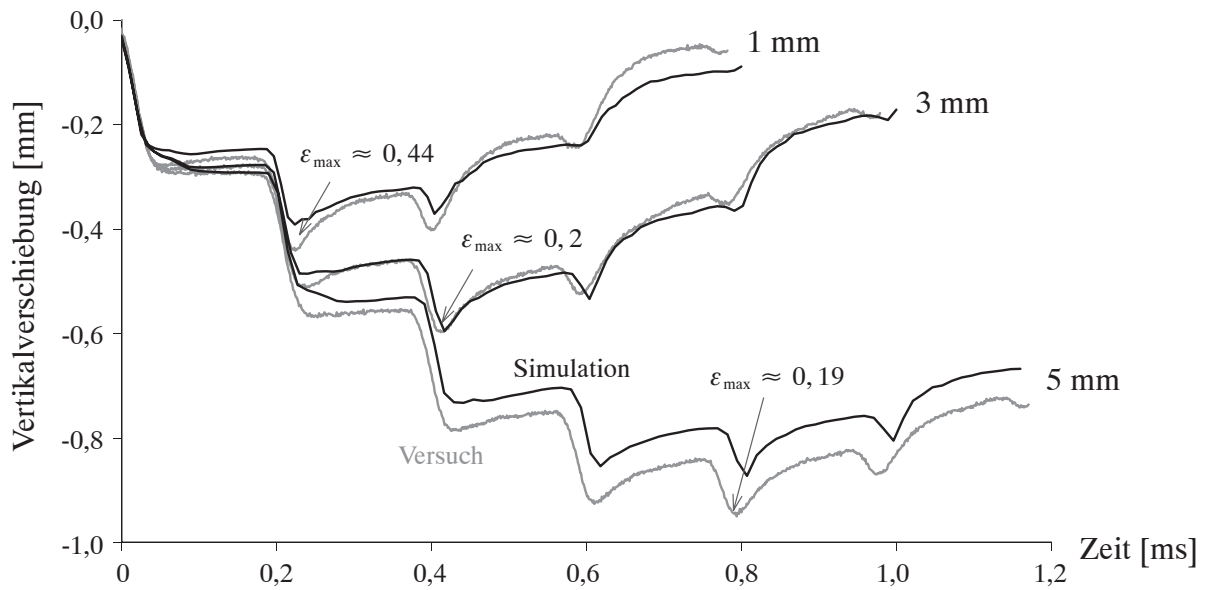


Bild 7.29: Zeitlicher Verlauf der Vertikalverschiebung des Stahlzylinders (Impaktor)

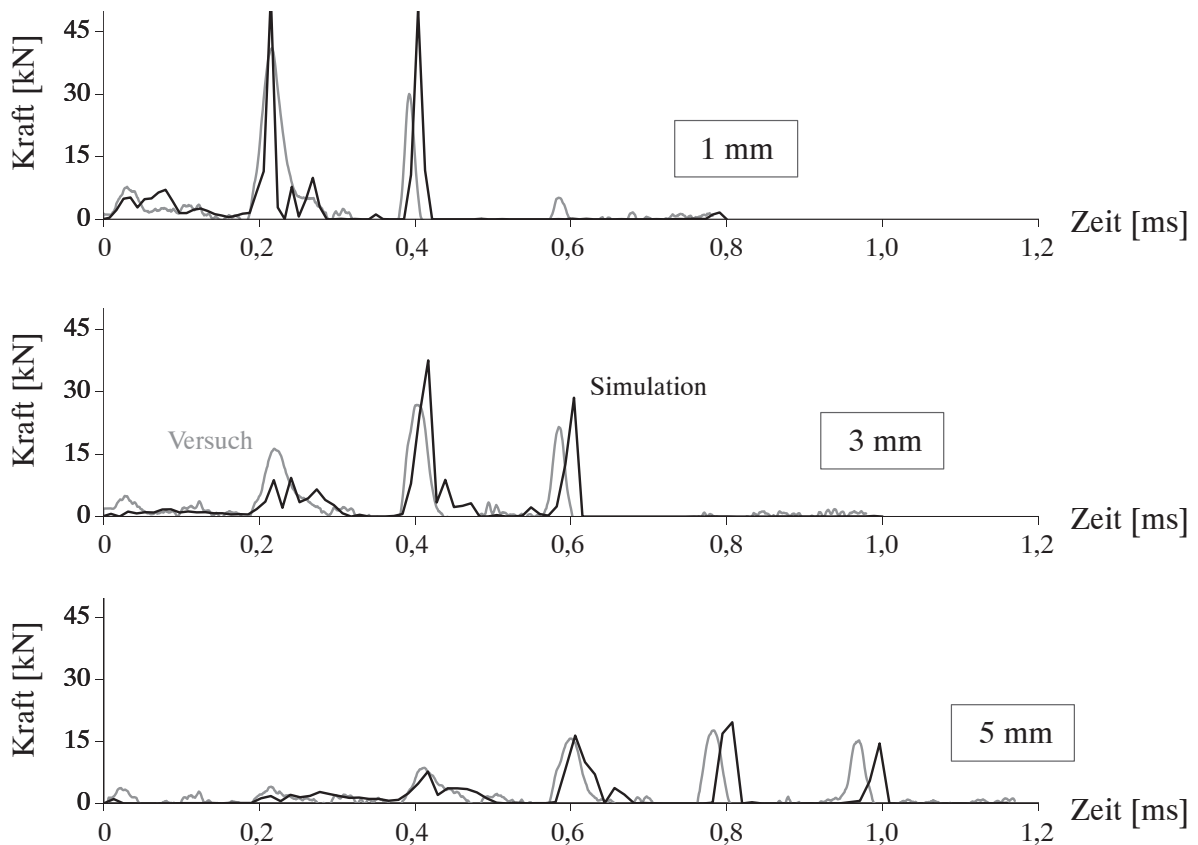


Bild 7.30: Zeitlicher Verlauf der Kontaktkraft zwischen Stahlzylinder und Pulver

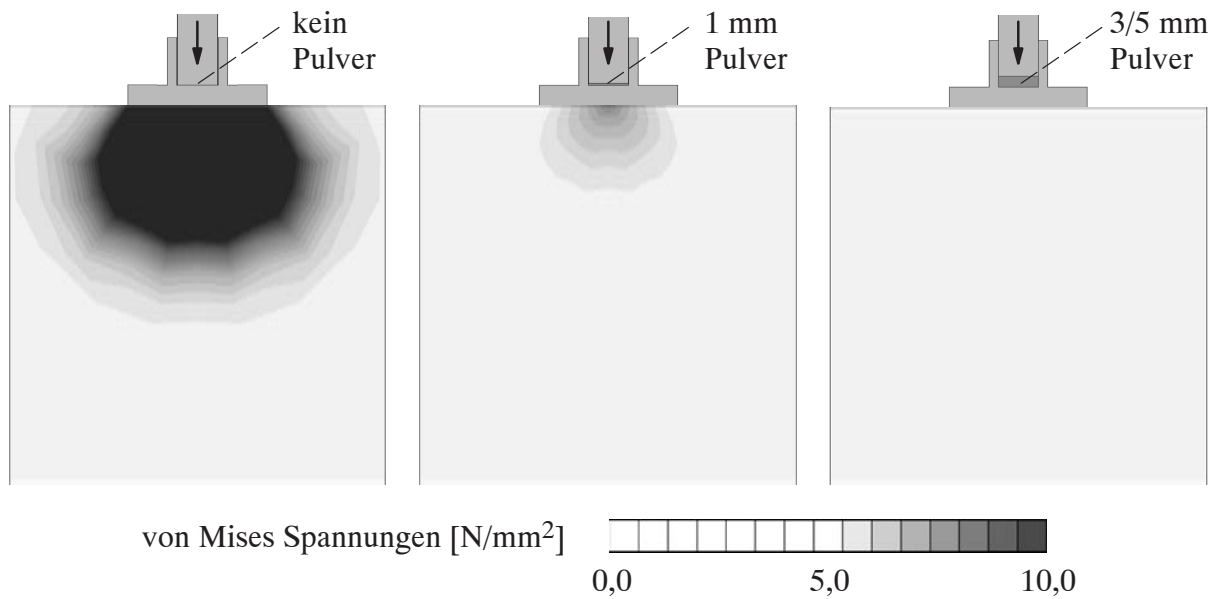


Bild 7.31: Spannungen im Körper unterhalb des Pulvers nach erstem Impakt ($t=0,129\text{ ms}$)

Abschließend kann für die numerischen Beispielen festgehalten werden, dass mit dem konstitutiven Modell für Reibungsmaterialien gute Ergebnisse sowohl im statischen als auch im dynamischen Bereich erzielt werden können. Weitere Untersuchungen an Anwendungsbeispielen folgen in Kapitel 8.

8 Anwendungsbeispiele

In den vorangegangenen Kapiteln wurden jeweils passend zum behandelten Thema numerische Beispiele gezeigt. Diese waren teilweise recht einfacher Natur, um die verschiedenen Modelle und Strategien gezielt zu untersuchen. Nun sollen drei praxisrelevante Anwendungsbeispiele betrachtet werden, um die Wirkungsweise der Methoden bei komplexen dynamischen Impaktsimulationen aufzuzeigen.

8.1 Hochgeschwindigkeitsimpakt eines Wolfram-Stabes auf Stahl

Ein zylindrischer Stab aus einer Wolframlegierung trifft mit sehr hoher Geschwindigkeit auf einen außen fest eingespannten, gedrunenen Zylinder aus hochfestem Stahl. Die notwendigen Daten des Versuchs von Anderson et al. (1995) und die hier verwendeten Anfangsdiskretisierungen sind in Bild 8.1 dargestellt. Für beide Metalle wird das dehnraten- und temperaturabhängige Johnson-Cook Materialmodell aus Kapitel 6 mit denselben Parametern wie in Anderson et al. (1995) bzw. Camacho und Ortiz (1997) verwendet (siehe Tabelle 8.1). Diese Anwendung ist dem Bereich der zivilen bzw. militärischen Schutztechnik entnommen.

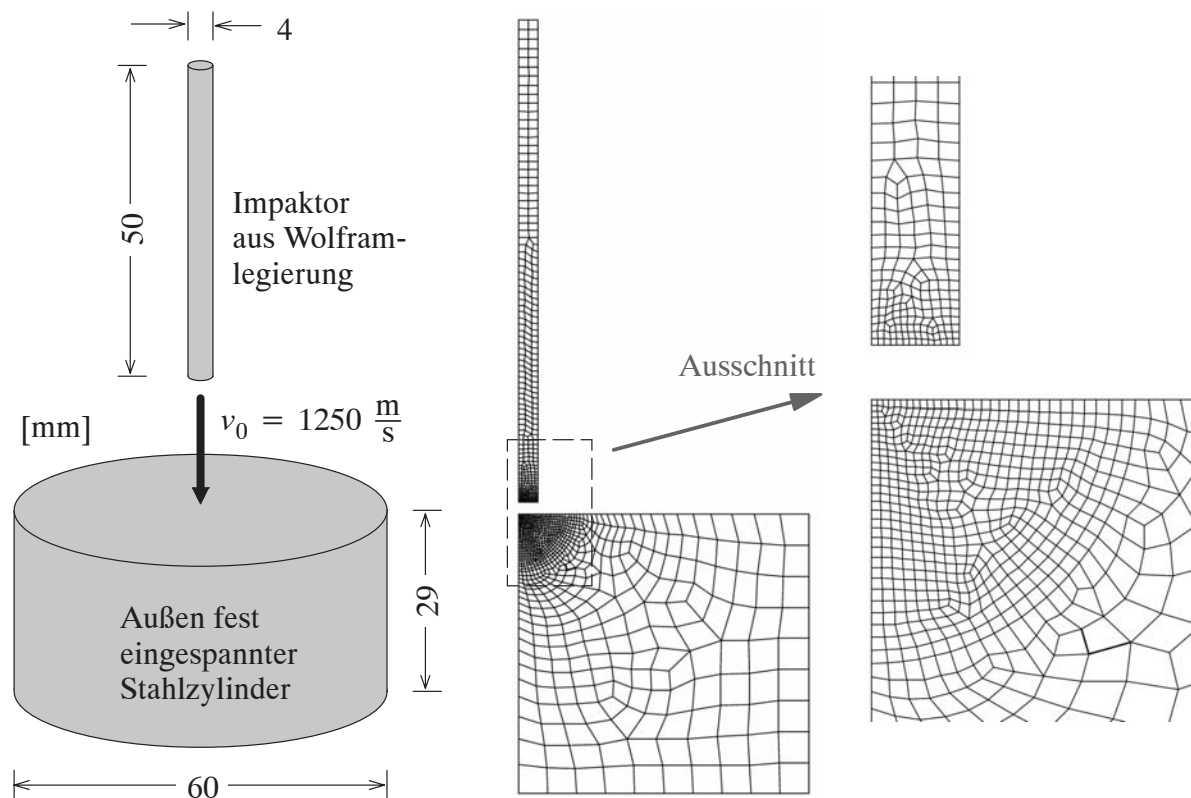


Bild 8.1: Stab-Impakt: Geometrie und Anfangs-Diskretisierung

	ρ [kg/m ³]	E [N/mm ²]	ν [-]	σ_y [N/mm ²]	B [N/mm ²]
Wolframlegierung	17600	322400	0,30	1510,0	177,0
Hochfester Stahl	7850	199400	0,29	1500,0	569,0

	C [-]	k_1 [-]	k_2 [-]	T_m [K]	T_0 [K]	c_v [J/kgK]
Wolframlegierung	0,016	0,12	1,0	1723,0	293,15	134
Hochfester Stahl	0,003	0,22	1,17	1777,0	293,15	477

Tabelle 8.1 Materialparameter für Stab-Impakt

Der Wolfram-Stab wird zu Beginn und während der Berechnung mit wiederholtem adaptivem Remeshing und Elementkantenlängen zwischen $h_e^{\min} = 0,15\text{mm}$ und $h_e^{\max} = 1,0\text{mm}$ diskretisiert. Die Grenzen der Elementgrößen für den eingespannten Stahlzylinder sind $h_e^{\min} = 0,15\text{mm}$ und $h_e^{\max} = 3,0\text{mm}$. Für den Kontakt wird ein konstanter Gleitreibungskoeffizient von $\mu_G = 0,05$ und ein konstanter Haftkoeffizient von $\mu_H = 0,1$ angenommen. Bei der adaptiven Berechnung dieses Problems wurde als Fehlerindikator für beide Körper der Gradient der plastischen Arbeit verwendet (siehe Abschnitt 4.3.2), wobei der Skalierungsfaktor $\Delta\psi_5 = 30\text{N}$ gewählt wurde.

In Bild 8.2 sind die deformierten Netze und die dazugehörigen Verteilungen der äquivalenten plastischen Verzerrungen für die Zeitpunkte $t = 20\mu\text{s}$, $t = 40\mu\text{s}$, $t = 60\mu\text{s}$ und $t = 80\mu\text{s}$ dargestellt, wobei zu beachten ist, dass wie bei Camacho und Ortiz (1997) ein logarithmisches Spektrum verwendet wird. Der physikalische Ablauf wird damit ersichtlich: Der Impaktor dringt in den Zielkörper ein und bewirkt die Bildung eines tiefen Kraters, wobei das nahezu geschmolzene Wolfram nach außen gedrängt wird und der Stab fast komplett erodiert. Die plastischen Deformationen sind in beiden Körpern sehr groß. Diese Phänomene sind in derselben Weise beim Versuch (Anderson et al. (1995)) und in vergleichbaren Simulationen (Camacho und Ortiz (1997)) zu beobachten.

Die Diskretisierung folgt adaptiv dem transienten Prozess. So ist zu Beginn eine starke Verfeinerung im Bereich der Impaktor-Spitze festzustellen, also dort, wo die maximalen plastischen Formänderungen auftreten. Außerhalb dieses Bereichs verhält sich das Material sowohl im Stab als auch im gedrunenen Zylinder elastisch, weshalb das Netz dort eine vergleichsweise geringe Netzdichte aufweist. Mit fortschreitender Eindringtiefe wächst der fein vernetzte Bereich. Der Fehlerindikator "Gradient der plastischen Arbeit" ist offensichtlich gut geeignet, der Physik dieses Beispiels intelligent zu folgen.

Für den Zeitpunkt $t = 20\mu\text{s}$ ist ein vergrößerter Ausschnitt der diskretisierten Kontaktzone in Bild 8.3 dargestellt. Die entsprechende Temperaturverteilung zeigt deutlich, wie die großen plastischen Dehnungen eine starke Temperaturerhöhung mit hohen Gradienten bewirken. Insbesondere das nach außen gedrückte Wolfram erreicht mit bis zu 1550 K fast seine Schmelztemperatur von 1723 K und verhält sich dementsprechend wie ein zähviskoses Fluid (siehe Bild 8.3).

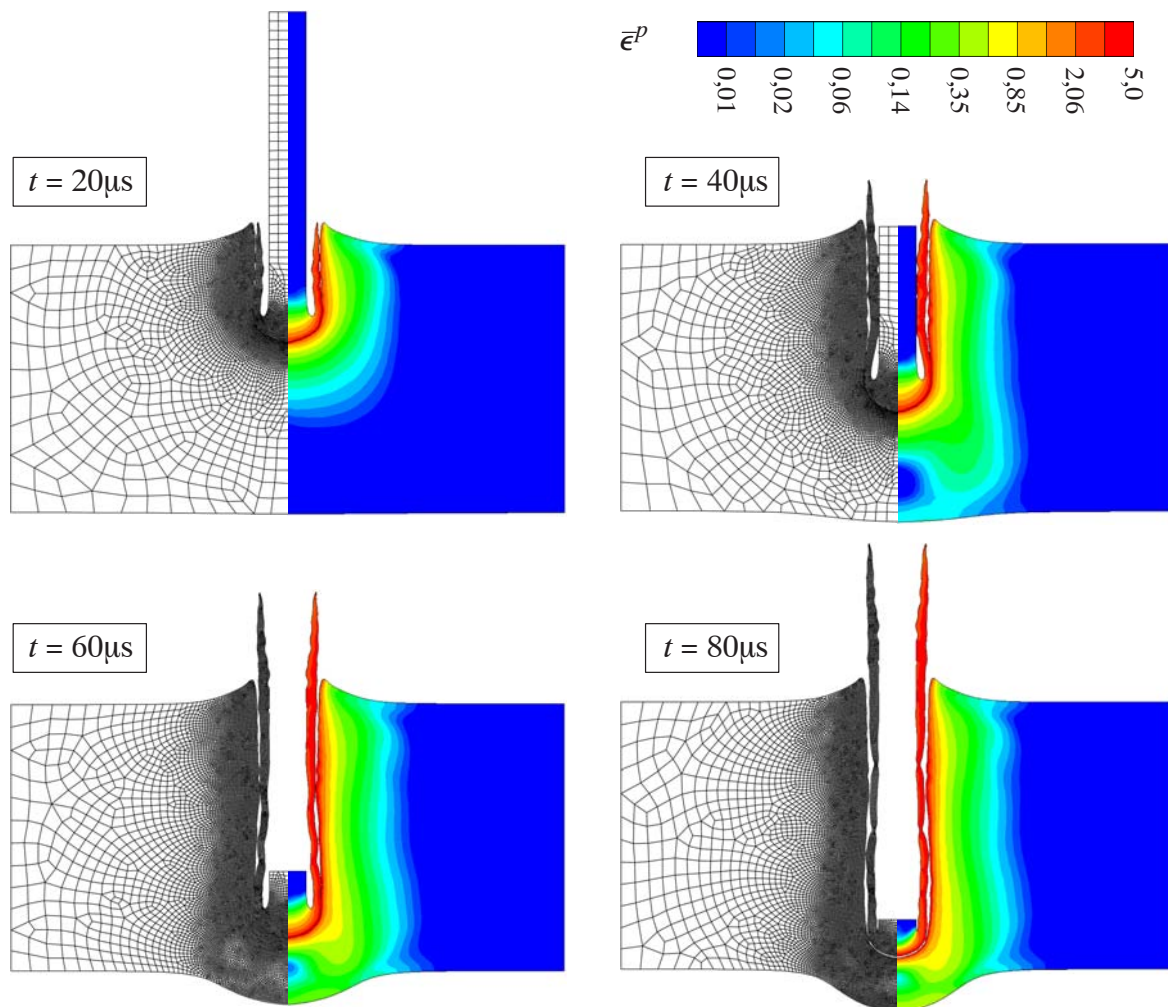


Bild 8.2: Stab-Impakt: Adaptive Netze und äquivalente plastische Verzerrungen

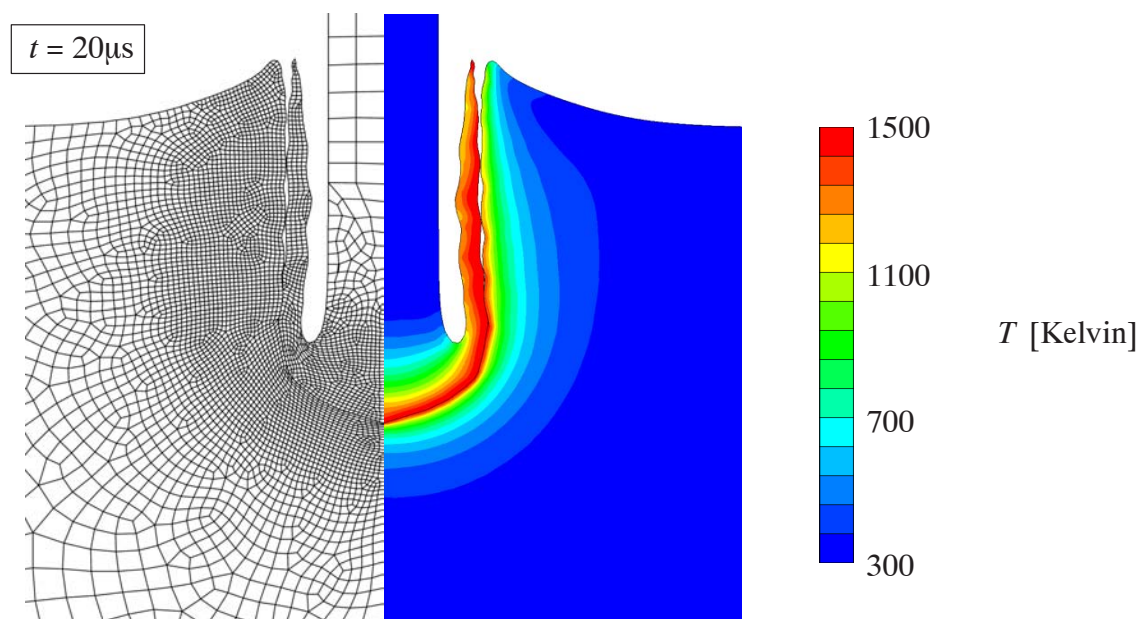


Bild 8.3: Stab-Impakt: Diskretisierung und Temperaturverteilung (Ausschnitt)

In den Experimenten von Anderson et al. (1995) wurden mit Hilfe von einzelnen Röntgenaufnahmen die Positionen der vorderen und hinteren Stabenden zu verschiedenen Zeitpunkten direkt ermittelt (Kreuze in Bild 8.4). Aus diesen Werten wurden dann durch Mittelung und zeitlicher Differentiation indirekt die entsprechenden Geschwindigkeiten berechnet (gestrichelte Linien in Bild 8.5). Der Vergleich mit den Simulationsergebnissen zeigt gute bis sehr gute Übereinstimmungen. Die Verschiebungsergebnisse sind nahezu identisch und auch die Geschwindigkeiten des hinteren Stabendes werden sehr gut getroffen. Die Geschwindigkeit des vorderen Stabendes weicht etwas ab, was unter anderem auf die indirekte Ermittlung der Werte in den Versuchen zurückzuführen ist. Die hochfrequente Strukturantwort in der Prozesszone bewirkt die in Bild 8.5 zu erkennenden Oszillationen in der Geschwindigkeit, wobei diese hier geringer ausfallen als bei Camacho und Ortiz (1997).

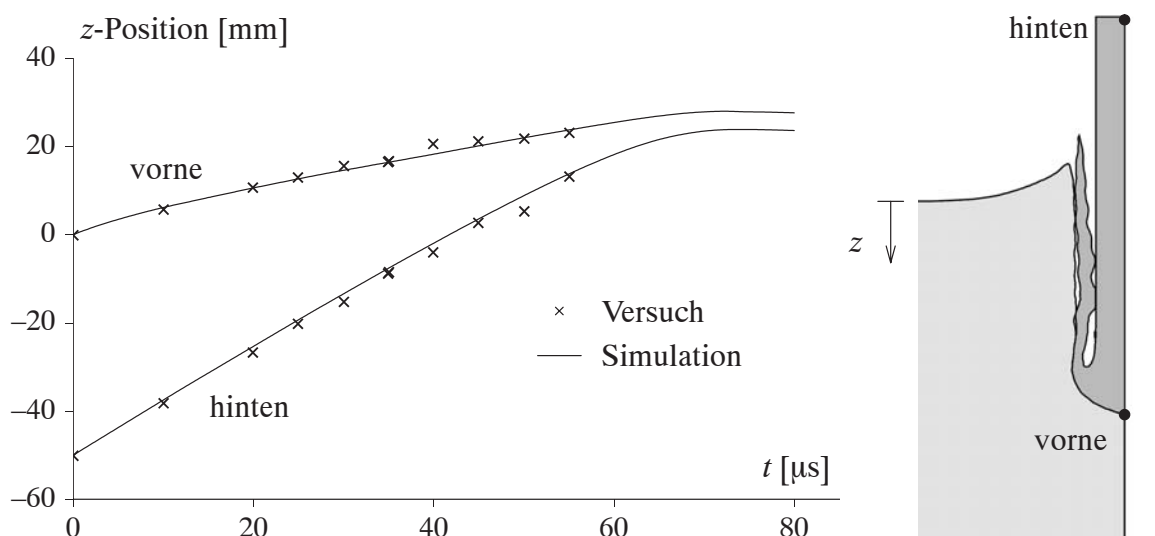


Bild 8.4: Stab-Impakt: Verschiebungsverläufe

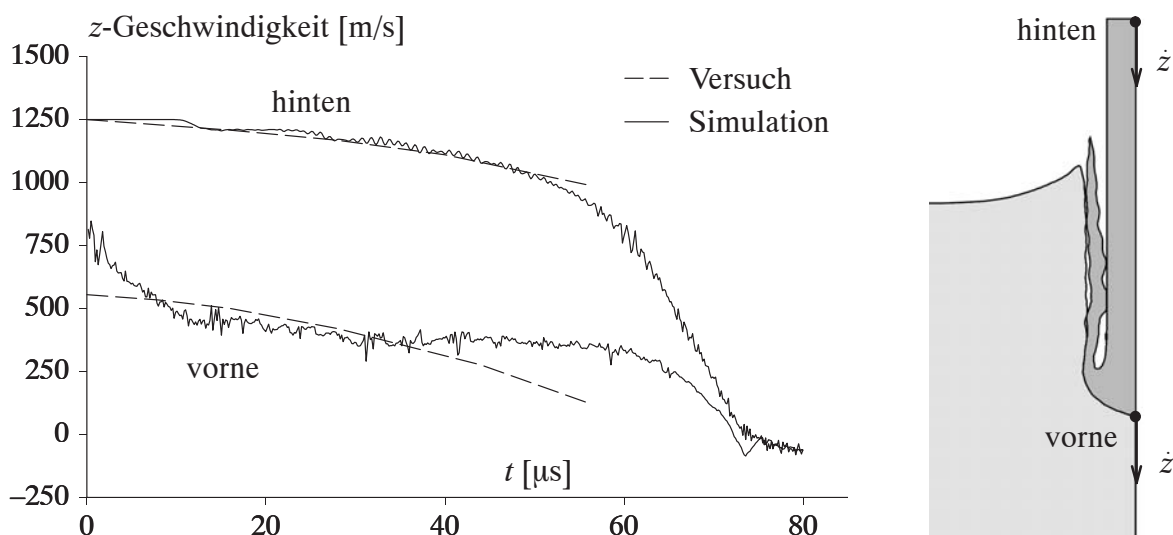


Bild 8.5: Stab-Impakt: Geschwindigkeitsverläufe

8.2 Dynamische Sandbodenverdichtung

Die dynamische Verdichtung ist eine Technik zur Verbesserung des Baugrunds im Fall sandiger Böden. Hier wird das Beispiel einer dynamischen Verdichtung von Gu und Lee (2002) übernommen, bei dem ein 62,5 t schweres Gewicht aus einer Höhe von 15 m auf eine Kreisplatte aus Holz fallen gelassen wird. Die Platte liegt auf dem Sandboden. Durch den Impact bilden sich Kompressionswellen aus, die die Kompaktion des Bodens bewirken. Die geometrischen Daten, die Diskretisierung und die Materialparameter des DPC-Modells sind in Bild 8.6 zusammengefasst. Für den Kontakt werden Gleitreibungs- und Haftkoeffizienten von $\mu_G = \mu_H = 0,3$ gewählt.

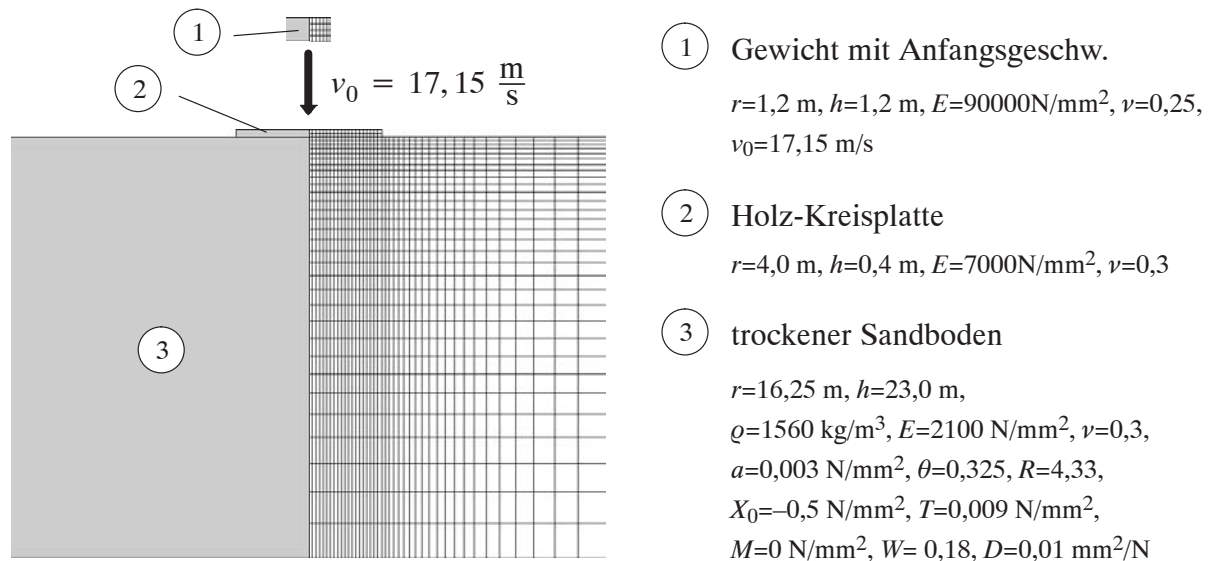


Bild 8.6: Dynamische Sandbodenverdichtung: Geometrie, Diskretisierung, Materialdaten

Eine Beobachtung der Knotengeschwindigkeiten und der korrespondierenden relativen Volumenänderungen unter der Kreisplatte zu verschiedenen Zeitpunkten zeigt den direkten Zusammenhang zwischen Kompressionswelle und Verdichtung (siehe Bild 8.7). Gleichzeitig wird das Material nach außen zum Rand der Platte gedrängt, was eine Auflockerung bewirkt.

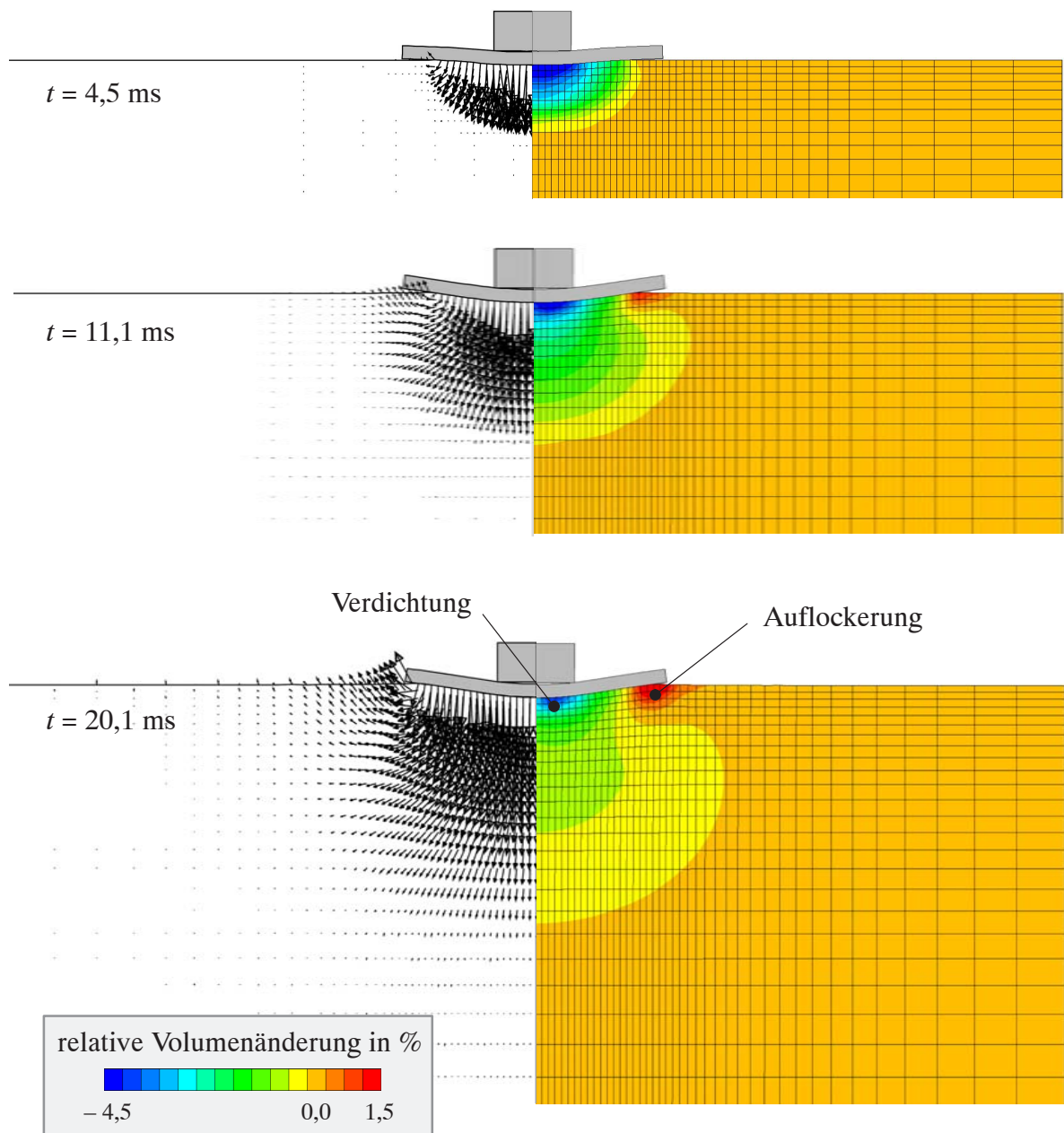


Bild 8.7: Dynamische Sandbodenverdichtung: Geschwindigkeiten und relative Volumenänderungen; Deformationen sind zweifach überhöht

8.3 Dreifacher Kugel-Impakt auf Feinbeton

An einem zylindrischen Metallstab mit einer Länge von 500 mm und einem Durchmesser von 18 mm ist am unteren Ende eine Halbkugel mit einem Durchmesser von 8 mm angebracht. Dieser Stab trifft dreimal hintereinander mit einer Geschwindigkeit von jeweils 4 m/s zentrisch auf einen Probekörper aus Feinbeton (Beton mit sehr kleinem Größtkorn von ca. 0,4 mm). Durch die Stöße wird die Kugel dynamisch in den Feinbeton eingedrückt, wobei der Stab nach jedem Schlag zurückfedert. Durch die Stöße entsteht in einer schmalen Zone (Mescall-Zone) unter dem Impaktor durch die Druckkonzentration eine Schicht Pulver. In Bild 8.8 sind ein Ausschnitt dieses Tests und die dazugehörige Diskretisierung dargestellt. Sowohl der Stahlstab als auch der Feinbetonkörper werden in der axialsymmetrischen Berechnung mit bilinearen Vierknotenelementen 'SI4' diskretisiert. Der Stahlstab erfährt keine irreversiblen Deformationen und wird deshalb als elastischer Körper mit $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$ modelliert. Für den Feinbeton wird das Konstitutivmodell aus Kapitel 7 verwendet. Die zugehörigen Materialparameter sind in Tabelle 8.2 zusammengefasst.

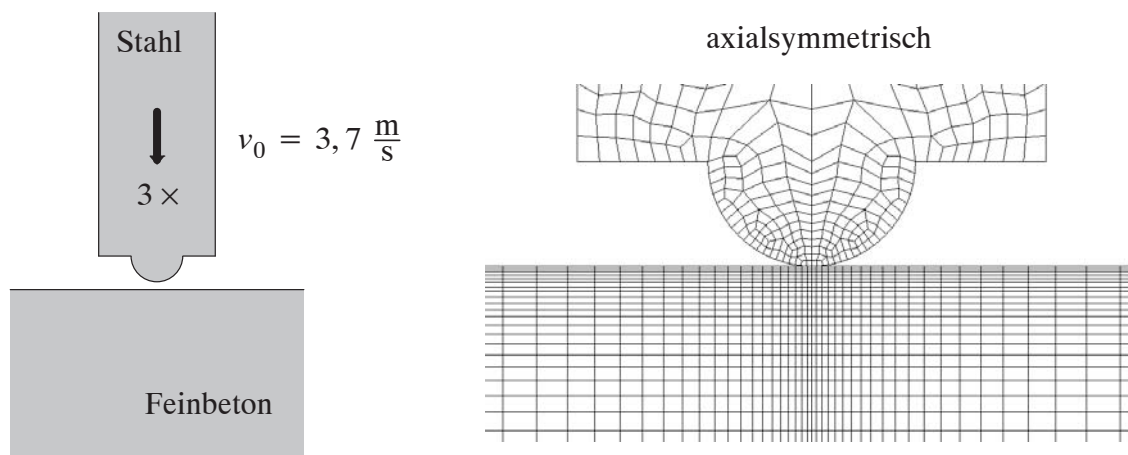


Bild 8.8: Kugel-Impakt auf Feinbeton: Geometrie und Diskretisierung

ρ [kg/m ³]	E [N/mm ²]	ν [-]	α [N/mm ²]	θ [-]	λ [N/mm ²]	β [mm ² /N]
2500	30000	0,25	44,0	0,32	34,0	0,008
X_0 [N/mm ²]		W [-]	D [mm ² /N]		η [s]	
-150,0		0,08	0,0002		0,00002	
$I_{I,crush}$ [N/mm ²]		δ_{crush} [-]	W_{crush} [-]		D_{crush} [mm ² /N]	
-500,0		1,1	0,09		0,0002	

Tabelle 8.2 Materialparameter für Feinbeton

Nun soll dieses Beispiel hinsichtlich der Pulverisierung untersucht werden, d.h. es sollen einerseits das Entstehungskriterium und andererseits die Auswirkungen des Modellübergangs betrachtet werden. In Bild 8.9 ist die Druckpulverisierung zu erkennen: In einigen Finiten Elementen unter dem Impaktor herrscht ein derart hoher allseitiger Druck, dass das Kriterium aus Abschnitt 7.5.1 erfüllt ist und deshalb die Entstehung von Pulver angezeigt wird.

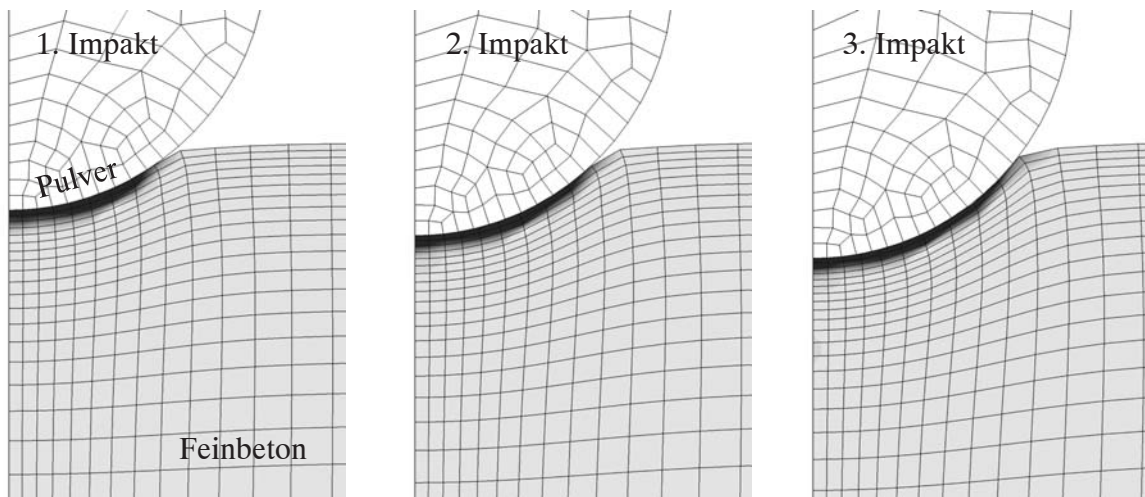


Bild 8.9: Kugel-Impakt: Druckpulverisierung in der "Mescall-Zone"

In Bild 8.10 ist die zeitliche Entwicklung der hydrostatischen Druckfestigkeit $X(q)$ an zwei verschiedenen Punkten dargestellt. Dort, wo Pulver entsteht (Punkt A) sind die drei Stöße deutlich zu erkennen: Mit jedem Impakt wird das Material komprimiert und die Druckfestigkeit wird gemäß der Verfestigung betragsmäßig größer. Bei den Rückfederungen des Stahlstabes kommt es zu einer Beanspruchung im Bereich des Drucker-Prager-Kegels bzw. des Tension cutoff und die Kappe zieht sich dementsprechend zusammen, d.h. die hydrostatische Druckfestigkeit nimmt ab. Beim darauffolgenden Impakt erfährt das Material im Punkt A wieder eine hohe Druckbeanspruchung im Bereich der Kappe, die sich daraufhin erneut ausdehnt und somit die hydrostatische Druckfestigkeit wieder anwachsen lässt. Hierbei wird ein Teil der kinetischen Schlagenergie dissipiert, d.h. der Stoß wird in geringem Maße durch die entstandene Pulverschicht gedämpft. Betrachtet man dagegen den Punkt B, an dem keine Pulverisierung stattfindet, so erkennt man, dass die Druckfestigkeit betragsmäßig nur zunehmen kann, d.h. es findet dort keine Auflockerung bei einer Rückfederung des Impaktors statt.

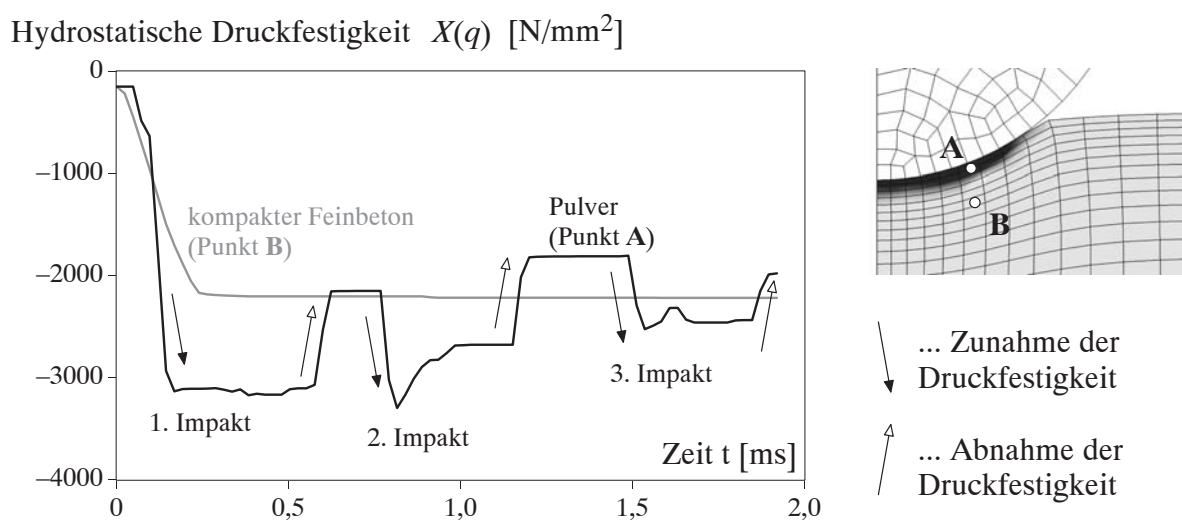


Bild 8.10: Unterschiedliches Ver- und Entfestigungsverhalten

9 Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Es wurde ein *schlüssiges Gesamtkonzept* zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten vorgestellt. Verschiedene Aspekte wie reibungsbehafteter Kontakt, Elementtechnologie, räumliche und zeitliche Adaptivität und Materialmodelle für Metalle und Reibungsmaterialien wurden theoretisch behandelt, in Algorithmen überführt, numerisch in einem expliziten Finite Element-Programm umgesetzt und an adäquaten Beispielen verifiziert. Dabei wurden bestehende Ansätze eingebracht, modifiziert und weiterentwickelt und neue Strategien erarbeitet, wobei immer ein deutliches Augenmerk auf die Robustheit und Effizienz der Algorithmen gerichtet war.

In den Grundlagen wurde eine Formulierung der *Finiten Plastizität* vorgestellt, bei der durch Verwendung logarithmischer Dehnungen und einer Spannungsberechnung im Eigenraum der Rückprojektionsalgorithmus die aus der infinitesimalen Theorie bekannte Form annimmt. Damit steht ein allgemeingültiger Rahmen für isotrope Werkstoffe zur Verfügung und die Implementierung unterschiedlicher Materialgesetze ist relativ einfach möglich. Der Einbau und Test neuer Konstitutivmodelle ist in expliziten FE-Codes im Allgemeinen schneller möglich als in impliziten Programmen, da die Herleitung und Berechnung einer (algorithmischen) Materialtangente entfällt.

Für den *Kontakt* konnte ein Ansatz zur direkten, iterationsfreien Bestimmung der Kontaktkräfte auf Basis der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren bereitgestellt werden. Der entsprechende Algorithmus besteht aus globaler und lokaler Suche nach Penetrationen und einer Korrektur, bei der nur relativ kleine lineare Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Das Verfahren hat sich in den numerischen Beispielen als schnell und robust erwiesen. Durch Verwendung von Bézier-Splines wurde außerdem eine C^1 -kontinuierliche Randbeschreibung realisiert.

Für die räumliche Diskretisierung wurden zwei verschiedene *Vierknotenelemente* für ebene und axialsymmetrische Zustände präsentiert. Das reduziert integrierte Element 'RI4' mit physikalisch motivierter Hourglass-Stabilisierung hat sich als sehr effizient erwiesen. Dieses von Belytschko und Bindeman (1991) vorgestellte Element wurde für den Einsatz in einer Total Lagrange-Formulierung erweitert. Die Verwendung des unterintegrierten Elements sollte mit einer gewissenhaften Kontrolle verbunden sein, da Stabilität nicht für alle Fälle garantiert werden kann. Das selektiv integrierte Element 'SI4' mit Modifikation des Deformationsgradienten ist etwas aufwändiger bezüglich Rechendauer und Speicherplatz, aber robuster als das reduziert integrierte Element und absolut unabhängig vom verwendeten Materialgesetz.

Zur Realisierung und Verbesserung der Simulation transienter Impaktvorgänge wurde eine umfassende Strategie für *adaptive Neuvernetzungen* präsentiert. Der Schwerpunkt lag dabei auf einer geeigneten Bewertung der Diskretisierungsfehler. Die Wahl eines Indikators oder einer Kombination aus Indikatoren sollte nach zwei Gesichtspunkten erfolgen. Ingenieur-Know-how und eine gute Kenntnis der Physik des betrachteten Prozesses ist eine wesentliche Basis für die

Auswahl adäquater Indikatoren. Außerdem sind bei einer Simulation eventuell bestimmte Zustandsgrößen von Interesse. Für diese Größen kann eine hohe Lösungsqualität durch die sinnvolle Wahl eines Indikators erreicht werden. Das numerische Beispiel des Taylor Bar-Impakts zeigte die Unterschiede zwischen den verschiedenen, teilweise aus der Literatur übernommenen und teilweise neu entwickelten Indikatoren. Der Zusammenhang zwischen Physik und adaptiver Netzverfeinerung wurde deutlich. In diesem und anderen Impakt-Beispielen hat sich der Indikator 'Gradient der plastischen Arbeit' als besonders geeignet erwiesen. Zusätzlich wurde ein Verfahren zur Wiederherstellung von Gebietsrändern beim Remeshing vorgestellt, mit dem eine bessere Massenerhaltung erreicht wird und Remeshing-Schocks deutlich vermindert werden können.

Die Stabilität des verwendeten expliziten Zeitintegrationsverfahrens ist nur gewährleistet, wenn der Zeitschritt klein genug gewählt wird. Zur Abschätzung des kritischen Zeitschritts wurde ein Verfahren zur Berechnung des maximalen Elementigenwerts bereitgestellt, das nur wenig aufwändiger, aber deutlich zuverlässiger als die gebräuchliche CFL-Bedingung ist. Auf Basis dieser Abschätzung konnte eine *adaptive Zeitschrittsteuerung* umgesetzt werden, die speziell für Probleme mit großen Deformationen sinnvoll ist und Zeitersparnis gegenüber der Verwendung einer konstanten Schrittweite bringt. Eine Effizienzsteigerung kann auch durch *Subcycling* erreicht werden. Dafür wurde ein Algorithmus zur automatischen knotenweisen Partitionierung entwickelt. Die einzelnen Teilgebiete werden mit jeweils unterschiedlichen Zeitschritten integriert, was bedeutet, dass in den Zwischenschritten die Beschleunigung einiger Knoten konstant gehalten wird. Für diese Knoten entfällt somit teilweise die aufwändige Berechnung der inneren Knotenkräfte, d.h. es wird eine Rechenzeiterparnis erzielt. Numerische Tests belegten die Genauigkeit und Stabilität der Methode.

Aufbauend auf phänomenologischen Beobachtungen von *metallischen Werkstoffen* unter Impaktbelastung wurde ein elastisch-plastisches Materialgesetz mit dehnraten- und temperaturabhängiger Fließgrenze präsentiert. Die Spannungsberechnung mit Rückprojektion wurde beschrieben und die Bedeutung der Materialparameter erläutert. Dynamische Beispiele dienen der Verifikation und der Verdeutlichung des spezifischen Werkstoffverhaltens. Die durch Temperaturerhöhungen hervorgerufene Ausbildung adiabatischer Scherbänder konnte durch das Materialmodell und den intelligenten Einsatz adaptiver Neuvernetzungen realitätsnah und effizient dargestellt werden.

Das Verhalten *kohäsiver und nichtkohäsiver Reibungsmaterialien* unter Stoßbelastung mit unterschiedlichen Versagensmechanismen wurde detailliert beschrieben. Die hoch beanspruchte Prozesszone direkt unter der Impaktorspitze ist dadurch gekennzeichnet, dass aus einem kompakten Ausgangsmaterial (z.B. Sandstein) durch Druckpulverisierung ein loses, granulares Medium (Pulver) entsteht. Die Vorüberlegungen motivierten die Verwendung eines Drucker-Prager-Cap-Modells von Hofstetter et al. (1993) als Grundlage für ein eigenes Materialgesetz. Aus physikalischen und numerischen Gründen wurde dieses Modell modifiziert und erweitert. Die Änderung der Fließregeln verminderte die Anzahl der verschiedenen Belastungsbereiche von fünf auf drei und das neu vorgeschlagene Verfestigungsgesetz ermöglicht eine bessere Anpassung an Ergebnisse aus Versuchen mit lockerem Pulver. Des Weiteren wurde das Modell hinsichtlich der Berücksichtigung der 3. Spannungsinvariante durch eine Skalierung mit der Wil-

lam-Warke-Funktion und hinsichtlich viskoplastischer Effekte durch Verwendung eines Duvaut-Lions-Ansatzes erweitert. Die Druckpulverisierung, d.h. der Übergang von kohäsivem Reibungsmaterial zu nichtkohäsivem Reibungsmaterial, wurde im Modell durch ein spannungsbasiertes Entstehungskriterium, durch die Evolution von Materialkennwerten und einer veränderten Verfestigung beschrieben und umgesetzt. In kurzer Form wurden die Grundzüge zur Kalibrierung des Modells erläutert. Statische Versuche und Berechnungen zeigten gute Übereinstimmungen und belegten damit die Leistungsfähigkeit des Modells für allseitige Druckbeanspruchungen. Anhand des Beispiels der dynamischen Pulverkompaktierung wurde die Wirkungsweise von anfänglich lockerem Pulver unter Impakt aufgezeigt: durch die plastische Deformation bzw. Verdichtung wird die aufgebrachte Stoßenergie absorbiert, was geringere Kontaktkräfte und geringere Spannungen im Bereich unter dem Pulver zur Folge hat.

Die abschließenden numerischen Beispiele zeichneten sich durch Praxisrelevanz und hohe Komplexität aus. Die Merkmale sind typisch für Impaktvorgänge: reibungsbehaftete Kontakte zwischen mehreren Körpern, große Deformationen mit Topologieänderungen, nichtlineares Materialverhalten und Wellenausbreitung. Mit Hilfe der adaptiven Neuvernetzungsstrategie war eine robuste und effiziente Berechnung dieser Anwendungen mit qualitativ und quantitativ guten Lösungen möglich.

9.2 Ausblick

Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Strategien ist die numerische Simulation zweidimensionaler Probleme im ebenen Verzerrungszustand und im axialsymmetrischen Zustand möglich. Eine Erweiterung auf Dreidimensionalität wäre natürlich wünschenswert und ist auch umsetzbar (z.B. Bessette et al. (2003)). Der numerische Aufwand steigt allerdings deutlich und die Freivernetzung beliebig geformter räumlicher Strukturen stellt nach wie vor ein großes Problem dar, insbesondere wenn Hexaederelemente zum Einsatz kommen sollen. Auch die Kontaktformulierung ist im Dreidimensionalen erheblich aufwändiger. Die Materialmodellierung ist dagegen relativ unproblematisch, da die Konstitutivgesetze bereits dreidimensional formuliert wurden.

Bei der Erweiterung der Stabilisierung des unterintegrierten Vierknotenelements auf geometrische Nichtlinearität wurde ein anschaulicher Ansatz aus Analogieüberlegungen entwickelt. Hierfür wäre eine genauere theoretische Absicherung wünschenswert.

Innerhalb der adaptiven Neuvernetzungsstrategie sind ebenfalls Verbesserungen in einigen Punkten denkbar. So wäre die Überprüfung oder sogar Abschätzung der Mappingfehler hilfreich, um noch zuverlässigere Lösungen zu erhalten. Die Entwicklung mathematisch fundierter Fehlerschätzer mit garantierten Schranken für derart komplexe Probleme bleibt wohl in nächster Zeit ein unerfüllbarer Wunsch. Die Wahl geeigneter Indikatoren wird weiterhin das intelligente Mitwirken eines Experten erfordern, d.h. eine Automatisierung ist schwer vorstellbar.

Im Rahmen der effizienten zeitlichen Diskretisierung wurde die adaptive Zeitschrittsteuerung und das Subcycling vorgestellt. Die gleichzeitige Anwendung beider Methoden wurde andiskutiert, jedoch noch nicht umgesetzt. Ob eine weitere Effizienzsteigerung erreicht werden kann, und welche Auswirkungen eventuell auf Stabilität und Genauigkeit entstehen, müsste überprüft werden.

Das konstitutive Modell für Reibungsmaterialien wurde mit Konzentration auf die Druckpulverisierung in der Prozesszone und das Pulver selbst entwickelt. Im Bereich des Tension cutoff und des nichtlinearen Drucker-Prager-Kegels wurde ideal plastisches Verhalten angenommen. Das für kohäsive Reibungsmaterialien typische entfestigende, schädigende Verhalten mit Lokalisierung und Rissbildung wurde damit nicht berücksichtigt. Eine dementsprechende Erweiterung wird die Frage aufwerfen, mit welcher Regularisierungsstrategie netzunabhängige Lösungen erreicht werden können. Als Möglichkeiten stehen hierfür nichtlokale Integralformulierungen, Gradientenerweiterung und andere Verfahren zur Auswahl. Für die Darstellung von Rissen im Modell kommen unter anderem fictitious, smeared oder embedded crack-Verfahren in Frage.

In dieser Arbeit kam der Bereich der Informatik nicht zur Sprache. Durch entsprechende Methoden wie Parallelisierung und/oder Vektorisierung der numerischen Algorithmen sind weitere Steigerungen der Rechengeschwindigkeit möglich.

Literatur

- Ainsworth, M., Oden, J. T. (1993):** 'A Unified Approach to A Posteriori Error Estimation Using Element Residual Methods', *Numerische Mathematik*, **44**, 283–301.
- Ainsworth, M., Oden, J. T. (2000):** *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Alder, B.J., Wainwright, T.E. (1959):** 'Studies in Molecular Dynamics: I. General Method', *The Journal of Chemical Physics*, **31**, 459–466.
- Ammann, M. (1998):** *Wiedervernetzungsstrategien und Datentransfer in der adaptiven FEM*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Anand, L., Gu, C. (2000):** 'Granular Materials: Constitutive Equations and Strain Localization', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**, 1701–1733.
- Anderheggen, E., Ekchian, D., Heiduschke, K., Bartelt, P. (1993):** 'A Contact Algorithm for Explicit Dynamic FEM Analysis', *Computational Techniques, Proc. 1st Int. Conf.*, M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia (eds.), Southampton, UK, 271–283.
- Anderson Jr., C.E., Hohler, V., Walker, J.D., Stilp, A.J. (1995):** 'Time-Resolved Penetration of Long Rods into Steel Targets', *International Journal of Impact Engineering*, **16**, 1–18.
- Babuska, I., Rheinboldt, W.C. (1978a):** 'A-posteriori Error Estimates for the Finite Element Method', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12**, 1597–1615.
- Babuska, I., Rheinboldt, W.C. (1978b):** 'Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations', *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **15**, 736–754.
- Babuska, I., Szabo, B.A., Katz, I.N. (1981):** 'The p-Version of the Finite-Element Method', *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **18**, 515–545.
- Baehmann, P.L., Shephard, M.S., Ashley, R.A., Jay, A. (1988):** 'Automated Metalforming Modeling Utilizing Adaptive Remeshing and Evolving Geometry', *Computers & Structures*, **30**, 319–325.
- Bank, R.E., Weiser, A. (1985):** 'Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations', *Mathematics of Computation*, **44**, 283–301.
- Bardet, J.-P. (1997):** *Experimental Soil Mechanics*. Prentice Hall, New Jersey.
- Batra, R.C., Ko, K.-I. (1992):** 'An Adaptive Mesh Refinement Technique for the Analysis of Shear Bands in Plane Strain Compression of a Thermoviscoplastic Solid', *Computational Mechanics*, **10**, 369–379.
- Batra, R.C., Peng, Z. (1995):** 'Development of Shear Bands in Dynamic Plane Strain Compression of Depleted Uranium and Tungsten Blocks', *International Journal of Impact Engineering*, **16**, 375–395.
- Batra, R.C., Stevens, J.B. (1998):** 'Adiabatic Shear Bands in Axisymmetric Impact and Penetration Problems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **151**, 325–342.
- Bazant, Z.P., Bishop, F.C., Chang, T.-P. (1986):** 'Confined Compression Tests of Cement Paste and Concrete up to 300 ksi', *Journal of the American Concrete Institute*, **83**, 553–560.
- Becker, R., Rannacher, R. (1996):** 'A Feed-Back Approach to Error Control in Finite Element Methods: Basic Analysis and Examples', *Journal of Numerical Mathematics*, **4**, 237–264.
- Belytschko, T., Schoeberle, D.F. (1975):** 'Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics', *Journal of Applied Mechanics*, **42**, 865–869.
- Belytschko, T., Yen, H.-J., Mullen, R. (1979):** 'Mixed Methods for Time Integration', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **17/18**, 259–275.
- Belytschko, T. (1983):** 'An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures', in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko, T.J.R. Hughes (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1–65.
- Belytschko, T., Ong, J.S., Liu, W.K., Kennedy, J.M. (1984):** 'Hourglass Control in Linear and Nonlinear Problems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **43**, 251–276.

- Belytschko, T., Bachrach, W.E. (1986):** ‘Efficient Implementation of Quadrilaterals with High Coarse–Mesh Accuracy’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **54**, 279–301.
- Belytschko, T., Bindeman, L.P. (1991):** ‘Assumed Strain Stabilization of the 4–Node Quadrilateral with 1–Point Quadrature for Nonlinear Problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **88**, 311–340.
- Belytschko, T., Neal, M.O. (1991):** ‘Contact–Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 547–572.
- Belytschko, T., Bindeman, L.P. (1993):** ‘Assumed Strain Stabilization of the Eight Node Hexahedral Element’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **105**, 225–260.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. (1992):** ‘An Explicit Multi–Time Step Integration for Parabolic and Hyperbolic Systems’, in: *New Methods in Transient Analysis*, ASME, PVP–Vol. **246**/AMD–Vol. **143**, 25–39.
- Belytschko, T., Tabbara, M. (1993):** ‘h–Adaptive Finite Element Methods for Dynamic Problems, with Emphasis on Localization’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 4245–4265.
- Belytschko, T., Krysl, P., Krongauz, Y. (1997):** ‘A Three–Dimensional Explicit Element–Free Galerkin Method’, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, 1253–1270.
- Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B. (2000):** *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, New York.
- Besette, G.C., Becker, E.B., Taylor, L.M., Littlefield, D.L. (2003):** ‘Modeling of Impact Problems Using an h–Adaptive, Explicit Lagrangian Finite Element Method in Three Dimensions’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 1649–1679.
- Bischoff, M. (1999):** *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Blacker, T., Belytschko, T. (1994):** ‘Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 517–536.
- Blenkinsop, T.G. (1991):** ‘Cataclasis and Processes of Particle Size Reduction’, *Pure and Applied Geophysics*, **136**, 59–86.
- Bohác, J., Fedá, J., Kuthan, B. (2001):** ‘Modelling of Grain Crushing and Debonding’, in: *Proc. of 15th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, E. Togrol (ed.), Lisse, Balkema, 43–46.
- Boroomand, B., Zienkiewicz, O.C. (1997):** ‘Recovery by Equilibrium in Patches (REP)’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 137–164.
- Boroomand, B., Zienkiewicz, O.C. (1999):** ‘Recovery Procedures in Error Estimation and Adaptivity. Part II: Adaptivity in Nonlinear Problems of Elasto–Plasticity Behaviour’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **176**, 127–146.
- Brown, R.L., Richards, J.C. (1970):** *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon Press, Oxford.
- Burlion, N., Gatuíngt, F., Pijaudier–Cabot, G., Daudeville, L. (2000):** ‘Compaction and Tensile Damage in Concrete: Constitutive Modelling and Application to Dynamics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **183**, 291–308.
- Burlion, N., Pijaudier–Cabot, G., Dahan, N. (2001):** ‘Experimental Analysis of Compaction of Concrete and Mortar’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **25**, 291–308.
- Camacho, G.T., Ortiz, M. (1996):** ‘Computational Modelling of Impact Damage in Brittle Materials’, *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 2899–2938.
- Camacho, G.T., Ortiz, M. (1997):** ‘Adaptive Lagrangian Modelling of Ballistic Penetration of Metallic Targets’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **142**, 269–301.
- Carrington, W.E., Gayler, M.L.V. (1948):** ‘The Use of Flat–Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress. III. Changes in Microstructure Caused by Deformation under Impact at High–Striking Velocities’, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **194**, 323–331.

- Carstensen, C., Funken, S.A. (2001):** ‘Averaging Technique for FE–a posteriori error control in elasticity. Part 1: Conforming FEM’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 2483–2498.
- Cecconi, M., Desimone, A., Tamagnini, C., Viggiani, G.M.B. (2002):** ‘A Constitutive Model for Granular Materials with Grain Crushing and its Application to a Pyroclastic Soil’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**, 1531–1560.
- César de Sá, J.M.A., Areias, P.M.A., Natal Jorge, R.M. (2001):** ‘Quadrilateral Elements for the Solution of Elasto–Plastic Finite Strain Problems’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, 883–917.
- Chen, W.F. (1982):** *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw Hill, New York.
- Chen, W.F., Baladi, G.Y. (1985):** *Soil Plasticity – Theory and Implementation*. McGraw Hill, New York.
- Chen, W.F., Han, D.J. (1988):** *Plasticity for Structural Engineers*. Springer–Verlag, New York.
- Chen, X., Batra, R.C. (1993):** ‘Axisymmetric Penetration of Thick Thermoviscoplastic Targets’, AMD–Vol. 171, *Advances in Numerical Simulation Techniques for Penetration and Perforation of Solids*, ASME, 125–132.
- Cirak, F. (1998):** *Adaptive Finite–Element–Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Bericht Nr. 27, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Cirak, F., Ramm, E. (1998):** ‘A Posteriori Error Estimation and Adaptivity for Linear Elasticity Using the Reciprocal Theorem’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **156**, 351–362.
- Cirak, F., Ramm, E. (2000):** ‘A Posteriori Error Estimation and Adaptivity for Elastoplasticity Using the Reciprocal Theorem’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **47**, 379–393.
- Cleary, P.W. (1999):** ‘DEM Simulation of Industrial Particle Flows: Case Studies of Dragline Excavators, Mixing in Tumblers and Centrifugal Mills’, *Powder Technology*, **109**, 83–104.
- Cottrell, M.G., Yu, J., Wei, Z.J., Owen, D.R.J. (2003):** ‘The Numerical Modelling of Ceramics Subject to Impact Using Adaptive Discrete Element Techniques’, *Engineering Computations*, **20**, 82–106.
- Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H. (1928):** ‘Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik’, *Mathematische Annalen*, **100**, 32–74.
- Crisfield, M.A., Moita, G.F., Jelenic, G., Lyons, L.P.R. (1995):** ‘Enhanced Lower–Order Element Formulation for Large Strains’, *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications. Proceedings of the Fourth International Conference*, D.R.J. Owen, E. Oñate, E. Hinton (eds.), Barcelona, Spain, 293–320.
- Cuitiño, A.M., Ortiz, M. (1992):** ‘Computational Modelling of Single Crystals’, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, **1**, 225–263.
- Cundall, P.A., Strack, O.D.L. (1979):** ‘A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies’, *Géotechnique*, **29**, 47–65.
- D’Addetta, G.A., Kun, F., Ramm, E., Herrmann, H.J. (2001):** ‘From Solids to Granulates – Discrete Element Simulations of Fracture and Fragmentation Processes in Geomaterials’, in: *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials*, Lectures Notes in Physics 568, Springer–Verlag, Berlin, 231–258.
- D’Addetta, G.A. (2004):** *Discrete Models for Cohesive Frictional Materials*. Dissertation, Bericht Nr. 42, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- D’Addetta, G.A., Ramm, E., Diebels, S., Ehlers, W. (2004):** ‘A Particle Center Based Homogenization Strategy for Granular Assemblies’, *Engineering Computations*, **21**, 360–383.
- Daniel, W.J.T. (1997):** ‘Analysis and Implementation of a New Constant Acceleration Subcycling Algorithm’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2841–2855.
- Daniel, W.J.T. (1998a):** ‘A Study of the Stability of Subcycling Algorithms in Structural Dynamics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **156**, 1–13.
- Daniel, W.J.T. (1998b):** ‘Subcycling First– and Second–Order Generalizations of the Trapezoidal Rule’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **42**, 1091–1119.

- Daniel, W.J.T. (2003):** ‘A Partial Velocity Approach to Subcycling Structural Dynamics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 375–394.
- Deb, A., Prevost, J.H., Lorent, B. (1996):** ‘Adaptive Meshing for Dynamic Strain Localization’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **137**, 285–306.
- Diaz, A.R., Kikuchi, N., Taylor, J.E. (1983):** ‘A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **41**, 29–45.
- Diekmann, R., Hungershöfer, J., Lux M., Taenzer, L., Wierum, J.–M. (2000):** ‘Efficient Contact Search for Finite Element Analysis’, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Proc. of ECCOMAS 2000, Barcelona.
- Diekmann, R., Taenzer, L., Gänser, H.–P. (2002):** ‘Robust Almost–All–Quad Meshing for Adaptive Large Deformation, High Velocity Contact Dynamics Simulations’, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*, H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner (eds.), Wien.
- DiMaggio, F.L., Sandler, I.S. (1971):** ‘Material Model for Granular Soils’, *Journal of Engineering Mechanics*, **97**, 935–950.
- Duvaut, G., Lions, J.L. (1972):** *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris.
- Dyduch, M., Habraken, A.M., Cescotto, S. (1992):** ‘Automatic Adaptive Remeshing for Numerical Simulation of Metalforming’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **101**, 283–298.
- El–Abbasi, N., Meguid, S.A., Czekanski, A. (2001):** ‘On the Modelling of Smooth Contact Surfaces Using Cubic Splines’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 953–967.
- Erhart, T. (1999):** *Zur gradientenbasierten Adaptivität für transiente Finite Elemente Berechnungen mit großen Deformationen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Erhart, T., Taenzer, L., Diekmann, R., Wall, W.A. (2001):** ‘Adaptive Remeshing Issues for Fast Transient, Highly Nonlinear Processes’, in: *Proc. of ECCM 2001*, Z. Waszczyszyn, J. Pamin (eds.), Krakau, Polen.
- Erhart, T., Wall, W.A., Ramm, E. (2003):** ‘A Continuum Approach for the Dynamic Simulation of Powder–like Materials’, in: *Proc. of COMPLAS VII*, Barcelona, Spain.
- Erhart, T., Wall, W.A., Ramm, E. (2004):** ‘A Robust Computational Approach for Dry Powders under Quasi–Static and Transient Impact Loadings’, accepted in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Field, D.A. (2000):** ‘Qualitative Measures for Initial Meshes’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **47**, 887–906.
- Flanagan, D.P., Belytschko, T. (1981):** ‘A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17**, 679–706.
- Flanagan, D.P., Belytschko, T. (1984):** ‘Eigenvalues and Stable Time Steps for the Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral’, *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 35–40.
- Fourment, L., Chenot, J.L. (1995):** ‘Error Estimators for Viscoplastic Materials: Application to Forming Processes’, *Engineering Computations*, **12**, 469–490.
- Gailly, B.A., Espinosa, H.D. (2002):** ‘Modelling of Failure Mode Transition in Ballistic Penetration with a Continuum Model Describing Microcracking and Flow of Pulverized Media’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**, 365–398.
- Gebbeken, N., Ruppert, M. (1999):** ‘On the Safety and Reliability of High Dynamic Hydrocode Simulations’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 839–851.
- Gee, M. (1999):** *Remeshing für Finite Elemente Berechnungen mit großen Deformationen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Gee, M. (2004):** *Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik*. Dissertation, Bericht Nr. 43, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Gotoh, K., Masuda, H., Higashitani, K. (1997):** *Powder Technology Handbook*. Marcel Dekker, New York.

- Gravouil, A., Combescure, A. (2001):** ‘Multi–Time–Step Explicit–Implicit Method for Non–Linear Structural Dynamics’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 199–225.
- Gu, Q., Lee, F.–H. (2002):** ‘Ground Response to Dynamic Compaction of Dry Sand’, *Géotechnique*, **52**, 481–493.
- Grüneisen, E. (1926):** ‘Zustand des festen Körpers’, *Handbuch der Physik*, **10**, 1–59.
- Gupta, S., Ramirez, M. (1997):** ‘Accuracy, Stability and Parallelization of Multi–Time Step Integration Schemes in Explicit Structural Dynamic Analysis’, in *Parallel Solution Methods in Computational Mechanics*, M. Papadrakakis (ed.), John Wiley & Sons, Chichester, 181–217.
- Habraken, AM., Cescotto, S. (1990):** ‘An Automatic Remeshing Technique for Finite Element Simulation of Forming Processes’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, 1503–1525.
- Hagerty, M.M., Hite, D.R., Ullrich, C.R., Hagerty, D.J. (1993):** ‘One–Dimensional High–Pressure Compression of Granular Media’, *Journal of Geotechnical Engineering*, **119**, 1–18.
- Hahn, G.D. (1991):** ‘A Modified Euler Method for Dynamic Analyses’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**, 943–955.
- Hallquist, J.O. (1998):** *LS–DYNA Theoretical Manual*. Livermore Software Technology Corporation, http://www.lstc.com/manuals/lstc-dyna_theory_manual.pdf.
- Hallquist, J.O., Goudreau, G.L., Benson, D.J. (1985):** ‘Sliding Interfaces with Contact–Impact in Large–Scale Lagrangian Computations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51**, 107–137.
- Hardin, B.O. (1985):** ‘Crushing of Soil Particles’, *Journal of Geotechnical Engineering*, **111**, 1177–1192.
- Haufe, A. (1995):** *A–priori Fehlerabschätzung bei finiten Elementen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Haufe, A. (2001):** *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie*. Dissertation, Bericht Nr. 35, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Heeres, O.M. (2001):** *Modern Strategies for the Numerical Modeling of the Cyclic and Transient Behavior of Soils*. Ph.D. Thesis, TU Delft, Niederlande.
- Heiduschke, K. (1990):** *Rotationssymmetrische Wellenausbreitung in Metallstäben jenseits der Elastizitätsgrenze*. Fortschritt–Berichte VDI Reihe 18 Nr. 77, VDI–Verlag, Düsseldorf.
- Heinstein, M.W., Mello, F.J., Attaway, S.W., Laursen, T.A. (2000):** ‘Contact–Impact Modeling in Explicit Transient Dynamics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **187**, 621–640.
- Hiermaier, S. (2003):** *Numerik und Werkstoffdynamik der Crash– und Impaktvorgänge*. Habilitation, Heft Nr. 1, Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst–Mach–Institut, Freiburg, Deutschland.
- Hodowany, J., Ravichandran, G., Rosakis, A.J., Rosakis, P. (2000):** ‘Partition of Plastic Work into Heat and Stored Energy in Metals’, *Experimental Mechanics*, **40**, 113–123.
- Hörmann, M. (2002):** *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Dissertation, Bericht Nr. 39, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Hofstetter, G., Simo, J.C., Taylor, R.L. (1993):** ‘A Modified Cap Model: Closest Point Solution Algorithms’, *Computers & Structures*, **46**, 203–214.
- Hofstetter, G., Mang, H.A. (1995):** *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
- Holzappel, G.A. (2000):** *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, New York.
- Huerta, A., Casadei, F. (1994):** ‘New ALE Applications in Non–linear Fast–Transient Solid Dynamics’, *Engineering Computations*, **11**, 317–345.
- Huerta, A., Rodríguez–Ferran, A., Díez, P., Sarrate, J. (1999):** ‘Adaptive Finite Element Strategies Based on Error Assessment’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 1803–1818.
- Hughes, T.J.R. (1980):** ‘Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1413–1418.

- Hughes, T.J.R. (1983):** ‘Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behavior’, in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko, T.J.R. Hughes (eds.), North-Holland, Amsterdam, 67–155.
- Johnson, G.R., Cook, W.H. (1985):** ‘Fracture Characteristics of Three Metals Subjected to Various Strains, Strain Rates, Temperatures and Pressures’, *Engineering Fracture Mechanics*, **21**, 31–48.
- Johnson, G.R., Stryk, R.A., Beissel, S.R. (1996):** ‘SPH for High Velocity Impact Computations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 347–374.
- Johnson, C., Hansbo, P. (1992):** ‘Adaptive Finite Element Methods in Computational Mechanics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **101**, 143–181.
- Kamoulakos, A. (1990):** ‘A Simple Benchmark for Impact’, *Benchmark*, July 1990, 31–35.
- Kane, C., Repetto, E.A., Ortiz, M., Marsden, J.E. (1999):** ‘Finite Element Analysis of Nonsmooth Contact’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **180**, 1–26.
- Kavanagh, K.T., Key, S.W. (1972):** ‘A Note on Selective and Reduced Integration Techniques in the Finite Element Method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4**, 148–151.
- Kawaguchi, T., Tanaka, T., Tsuji, Y. (1998):** ‘Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluidized Beds Using the Discrete Element Method (Comparison Between the Two- and Three-Dimensional Models)’, *Powder Technology*, **96**, 129–138.
- Kim, D.S., Nemat-Nasser, S., Isaacs, J.B., Lischer, D. (1998):** ‘Adiabatic Shearband in WHA in High-Strain-Rate Compression’, *Mechanics of Materials*, **28**, 227–236.
- Klein, E., Baud, P., Reuschle, T., Wong, T.-F. (2001):** ‘Mechanical Behaviour and Failure Mode of Bentheim Sandstone Under Triaxial Compression’, *Physics and Chemistry of the Earth (A)*, **26**, 21–25.
- Klerck, P.A., Sellers, E.J., Owen, D.R.J. (2004):** ‘Discrete Fracture in Quasi-Brittle Materials Under Compressive and Tensile Stress States’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 3035–3056.
- Koiter, W.T. (1953):** ‘Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with Singular Yield Surface’, *Quarterly of Applied Mathematics*, **11**, 350–354.
- Krajcinovic (1996):** *Damage Mechanics*. North-Holland, Amsterdam.
- Kuhl, E. (2000):** *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Dissertation, Bericht Nr. 32, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Lade, P.V., Duncan, J.M. (1973):** ‘Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil’, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, **99**, 793–812.
- Lade, P.V., Nelson, R.B. (1987):** ‘Modelling the Elastic Behaviour of Granular Materials’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **11**, 521–542.
- Lade, P.V., Yamamuro, J.A., Bopp, P.A. (1996):** ‘Significance of Particle Crushing in Granular Materials’, *Journal of Geotechnical Engineering*, **122**, 309–316.
- Laursen, T.A. (2002):** *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer-Verlag, Chichester.
- Lee, E.H. (1969):** ‘Elastic-Plastic Deformations at Finite Strains’, *Journal of Applied Mechanics*, **36**, 1–6.
- Lee, N.-S., Bathe, K.-J. (1993):** ‘Effects of Element Distorsions on the Performance of Isoparametric Elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 3553–3576.
- Lee, N.-S., Bathe, K.-J. (1994):** ‘Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis’, *Finite Elements in Analysis and Design*, **16**, 99–139.
- Lewis, R.W., Khoei, A.R. (1998):** ‘Numerical Modelling of Large Deformation in Metal Powder Forming’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **159**, 291–328.
- Lin, J.I. (1991):** ‘Bounds on Eigenvalues of Finite Element Systems’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**, 957–967.

- Lo, S.H. (1985):** ‘A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 1403–1426.
- Lo, S.H., Lee, C.K. (1992):** ‘On Using Meshes of Mixed Element Types in Adaptive Finite Element Analysis’, *Finite Elements in Analysis and Design*, **11**, 307–336.
- Lo, S.H., Lee, C.K. (1994):** ‘Generation of Gradation Meshes by the Background Grid Technique’, *Computers & Structures*, **50**, 21–32.
- Lubarda, V.A., Mastilovic, S., Knap, J. (1996):** ‘Brittle–Ductile Transition in Porous Rocks by Cap Model’, *Journal of Engineering Mechanics*, **122**, 633–642.
- Luo, Y.H., Häußler–Combe, U. (2003):** ‘A Gradient–Based Adaptation Procedure and its Implementation in the Element–Free Galerkin Method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **56**, 1335–1354.
- Marusich, T.D., Ortiz, M. (1995):** ‘Modelling and Simulation of High–Speed Machining’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 3675–3694.
- Matejovic, P., Adamik, V. (1988):** ‘A One–Point Quadrilateral with Hourglass Control in Axisymmetric Geometry’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **70**, 301–320.
- Matejovic, P. (1991):** ‘Quadrilateral with High Coarse–Mesh Accuracy for Solid Mechanics in Axisymmetric Geometry’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **88**, 241–258.
- Mathisen, K.M., Hopperstad, O.S., Okstad, K.M., Berstad, T. (1999):** ‘Error Estimation and Adaptivity in Explicit Nonlinear Finite Element Simulation of Quasi–Static Problems’, *Computers & Structures*, **72**, 627–644.
- McGlaun, J.M., Thompson, S.L., Elrick, M.G. (1990):** ‘CTH – a 3–Dimensional Shock–Wave Physics Code’, *International Journal of Impact Engineering*, **10**, 351–360.
- Menrath, H. (1999):** *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Bericht Nr. 29, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Mescall, J. (1983):** ‘Material Issues in Computer Simulations of Penetration Mechanics’, in: *Computational Aspects of Penetration Mechanics*, C.A.Brebbia, S.A. Orzag (eds.), Springer–Verlag, Berlin, 47–62.
- Miehe, C. (1998):** ‘A Formulation of Finite Elastoplasticity Based on Dual Co– and Contravariant Eigenvector Triads Normalized with Respect to a Plastic Metric’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **159**, 223–260.
- Mok, D.P. (2001):** *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturmechanik und in der Fluid–Struktur–Interaktion*. Dissertation, Bericht Nr. 36, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Molenkamp, F. (1988):** ‘A Simple Model for Isotropic Non–Linear Elasticity of Frictional Materials’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **12**, 467–475.
- Moran, B., Ortiz, M., Shih, F. (1990):** ‘Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Finite Deformation Plasticity’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 483–514.
- Moshfegh, R., Li, X., Nilsson, L. (2000):** ‘Gradient–Based Refinement Indicators in Adaptive Finite Element Analysis with Special Reference to Sheet Metal Forming’, *Engineering Computations*, **17**, 910–932.
- Nagtegaal, J.C., Parks, D.M., Rice, J.R. (1974):** ‘On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **4**, 153–177.
- Neal, M.O., Belytschko, T. (1989):** ‘Explicit–Explicit Subcycling with Non–Integer Time Step Ratios for Structural Dynamic Systems’, *Computers & Structures*, **31**, 871–880.
- Newmark, N.M. (1959):** ‘A Method of Computation for Structural Dynamics’, *Journal of Engineering Mechanics*, **85**, 67–94.
- Oden, J.T., Martins, J.A.C. (1985):** ‘Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **52**, 527–634.
- Oden, J.T., Prudhomme, S. (2001):** ‘Goal–Oriented Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method’, *Computers & Mathematics with Applications*, **41**, 735–756.

- Özdemir, I. (2003):** *An Approach to Contact in Computational Structural Dynamics*. Master's Thesis, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Ogden, R.W. (1984):** *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Chichester.
- Oliver, J., Oller, S., Cante, J.C. (1996):** 'A Plasticity Model for Simulation of Industrial Powder Compaction Processes', *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 3161–3178.
- Ortiz, M., Quigley, J.J. (1991):** 'Adaptive Mesh Refinement in Strain Localization Problems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **90**, 781–804.
- Owen, D.R.J., Vaz Jr., M. (1999):** 'Computational Techniques Applied to High-Speed Machining Under Adiabatic Strain Localization Conditions', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **171**, 445–461.
- Padmanabhan, V., Laursen, T.A. (2001):** 'A Framework for Development of Surface Smoothing Procedures in Large Deformation Frictional Contact Analysis', *Finite Elements in Analysis and Design*, **37**, 173–198.
- Pastor, M., Peraire, J., Zienkiewicz, O.C. (1991):** 'Adaptive Remeshing for Shear Band Localization Problems', *Archive of Applied Mechanics*, **61**, 30–39.
- Pedersen, T.Ø. (1998):** 'Remeshing in Analysis of Large Plastic Deformations', *Computers & Structures*, **67**, 279–288.
- Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., Zienkiewicz, O.C. (1987):** 'Adaptive Remeshing for Compressible Flow Simulations', *Journal of Computational Physics*, **72**, 449–466.
- Peric, D., Owen, D.R.J., Honnor, M.E. (1992):** 'A Model for Finite Strain Elasto-Plasticity Based on Logarithmic Strains: Computational Issues', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 35–61.
- Peric, D., Yu, J., Owen, D.R.J. (1994):** 'On Error Estimates and Adaptivity in Elastoplastic Solids: Applications to the Numerical Simulation of Strain Localization in Classical and Cosserat Continua', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1351–1379.
- Peric, D., Vaz Jr., M., Owen, D.R.J. (1999):** 'On Adaptive Strategies for Large Deformations of Elasto-Plastic Solids at Finite Strains: Computational Issues and Industrial Applications', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **176**, 279–312.
- Pérez-Foguet, A., Huerta, A. (1999):** 'Plastic Flow Potential for Cone Region of MRS-Lade Model', *Journal of Engineering Mechanics*, **125**, 364–366.
- Pérez-Foguet, A., Rodríguez-Ferran, A., Huerta, A. (2003):** 'Efficient and Accurate Approach for Powder Compaction Problems', *Computational Mechanics*, **30**, 220–234.
- Perzyna, P. (1966):** 'Fundamental Problems in Viscoplasticity', *Recent Advances in Applied Mechanics*, **9**, 243–377.
- Petersen, S.B., Martins, P.A.F. (1997):** 'Finite Element Remeshing: A Metal Forming Approach for Quadrilateral Mesh Generation and Refinement', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 1449–1464.
- Poran, C.J., Rodriguez, J.A. (1992):** 'Finite Element Analysis of Impact Behaviour of Sand', *Soils and Foundations*, **32**, 68–80.
- Puso, M.A. (2000):** 'A Highly Efficient Enhanced Assumed Strain Physically Stabilized Hexahedral Element', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**, 1029–1064.
- Rank, E., Zienkiewicz, O.C. (1987):** 'A Simple Error Estimator in the Finite Element Method', *Communications in Applied Numerical Methods*, **3**, 243–249.
- Rank, E., Krause, R., Preusch, K. (1998):** 'On the Accuracy of p-Version Elements for the Reissner-Mindlin Plate Problem', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 51–67.
- Reese, S., Küssner, M., Reddy, B.D. (1999):** 'A New Stabilization Technique for Finite Elements in Non-Linear Elasticity', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**, 1617–1652.

- Reese, S., Wriggers, P. (2000):** ‘A Stabilization Technique to Avoid Hourglassing in Finite Elasticity’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 79–109.
- Reese, S., Wriggers, P., Reddy, B.D. (2000):** ‘A New Locking–Free Brick Element Technique for Large Deformation Problems in Elasticity’, *Computers & Structures*, **75**, 291–304.
- Rees, M. (1997):** ‘Combining Quadrilateral and Triangular Meshing Using the Advancing Front Approach’, Proc. of 6th International Meshing Roundtable, Park City, Utah, 337–348.
- Rehle, N. (1996):** *Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Bericht Nr. 20, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Rietema, K. (1991):** *The Dynamics of Fine Powders*. Elsevier Applied Science, London/New York.
- Ruppert, M. (2000):** *Zur numerischen Simulation von hochdynamisch beanspruchten Betonstrukturen*, Ph.D.–Dissertation, Institut für Mechanik und Statik, Universität der Bundeswehr München.
- Sandler, I.S., Rubin, D. (1979):** ‘An Algorithm and a Modular Subroutine for the Cap Model’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **3**, 173–186.
- Sawley, M.L., Cleary, P.W. (1999):** ‘A Parallel Discrete Element Method for Industrial Granular Flow Simulations’, *EPFL Supercomputing Review*, **11**, 23–29.
- Schmidt–Hurtienne, B. (2001):** *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell für Beton unter Einschluß des Dehnrateneffekts bei Hochgeschwindigkeitsbelastung*. Dissertation, TH Karlsruhe.
- Schwer, L.E., Murray, Y.D. (1994):** ‘A Three–Invariant Smooth Cap Model with Mixed Hardening’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **18**, 657–688.
- Segletes, S.B. (1991):** ‘Thermodynamic Stability of the Mie–Grüneisen Equation of State, and its Relevance to Hydrocode Computations’, *Journal of Applied Physics*, **70**, 2489–2499.
- Selman, A., Hinton, E. (1993):** ‘Two–Dimensional Transient Dynamic Analysis with Adaptive Mesh Refinement’, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **9**, 825–836.
- Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K.S. (1985):** ‘Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Elasto–Plasticity’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51**, 177–208.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1986):** ‘On the Variational Foundations of Assumed Strain Methods’, *Journal of Applied Mechanics*, **53**, 51–54.
- Simo, J.C., Kennedy, J.G., Govindjee, S. (1988a):** ‘Non–Smooth Multisurface Plasticity and Viscoplasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithms’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 2161–2185.
- Simo, J.C., Wu, J.W., Pister, K.S., Taylor, R.L. (1988b):** ‘An Assessment of the Cap Model: Consistent Return Algorithms and Rate–Dependent Extensions’, *Journal of Engineering Mechanics*, **114**, 191–218.
- Simo, J.C., Rifai, S. (1990):** ‘A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 1595–1638.
- Simo, J.C. (1992):** ‘Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 61–112.
- Simo, J.C., Armero, F. (1992):** ‘Geometrically Non–Linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1413–1449.
- Simo, J.C., Miehe, C. (1992):** ‘Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, 41–104.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998):** *Computational Inelasticity*. Springer–Verlag, New York.
- Sluys, L.J. (1992):** *Wave Propagation, Localization and Dispersion of Softening Solids*. Ph.D.–Dissertation, Delft University of Technology Press.
- Smith, S.S., Willam, K.J., Gerstle, K.H., Sture, S. (1989):** ‘Concrete Over the Top, or: Is There Life After Peak?’, *ACI Materials Journal*, **86**, 491–497.

- Smolinski, P. (1987):** ‘Explicit Multi–Time Step Integration for the Non–Linear Thermal Analysis of Structures’, *Computers & Structures*, **26**, 439–444.
- Smolinski, P., Belytschko, T., Neal, M. (1988):** ‘Multi–Time Step Integration Using Nodal Partitioning’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 349–359.
- Smolinski, P., Sleith, S. (1992):** ‘Explicit Multi–Time Step Methods for Structural Dynamics’, in: *New Methods in Transient Analysis*, ASME, PVP–Vol. **246/AMD–Vol. 143**, 1–6.
- de Souza Neto, E.A., Peric, D., Dutko, M., Owen, D.R.J. (1996):** ‘Design of Simple Low Order Finite Elements for Large Strain Analysis of Nearly Incompressible Solids’, *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 3277–3296.
- Stainier, L., Ponthot, J.Ph. (1994):** ‘An Improved One–Point Integration Method for Large Strain Elastoplastic Analysis’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **118**, 163–177.
- Steeb, H. (2002):** *Fehlerschätzer für FE–Berechnungen bei entfestigenden Materialien*. Dissertation, Bericht Nr. 37, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Steeb, H., Maute, A., Ramm, E. (2002):** ‘Goal–Oriented Error Estimation in Solid Mechanics’, in *Error–Controlled Adaptive FEMs in Solid Mechanics*, E. Stein (ed.), John Wiley & Sons, Chichester, 211–261.
- Steinberg, D.J., Cochran, S.G., Guinan, M.W. (1980):** ‘A Constitutive Model for Metals Applicable at High Strain Rate’, *Journal of Applied Physics*, **51**, 1498–1504.
- Steinberg, D.J., Lund, C.M. (1989):** ‘A Constitutive Model for Strain Rates from 10^{-4} to 10^6 s $^{-1}$ ’, *Journal of Applied Physics*, **65**, 1528–1533.
- Steinmann, P., Larsson, R., Runesson, K. (1997):** ‘On the Localization Properties of Multiplicative Hyperelasto–Plastic Continua with Strong Discontinuities’, *International Journal of Solids and Structures*, **34**, 969–990.
- Stevens, J.B. (1996):** *Finite Element Analysis of Adiabatic Shear Banding in Impact and Penetration Problems*. M.Sc. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.
- Sture, S., Runesson, K., Macari, E.J.P. (1989):** ‘Analysis and Integration of a Three–Invariant Plasticity Model for Granular Materials’, *Applied Mechanics*, **59**, 253–266.
- Suanno, R. (1995):** *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*. Dissertation, Bericht Nr. 18, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Sussman, T., Bathe, K.–J. (1987):** ‘A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis’, *Computers & Structures*, **26**, 357–409.
- Suttmeier, F.–T. (1997):** *Adaptive Finite Element Approximations of Problems in Elasto–Plasticity Theory*. Ph.D. Thesis, Institut für Angewandte Mechanik, Universität Heidelberg, Deutschland.
- Tabbara, M., Blacker, T., Belytschko, T. (1994):** ‘Finite Element Derivative Recovery by Moving Least Square Interpolants’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **117**, 211–223.
- Taylor, G. (1948):** ‘The Use of Flat–Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress. I. Theoretical Considerations’, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **194**, 289–299.
- Taylor, R.L., Beresford, P.J., Wilson, E.L. (1976):** ‘A Non–Conforming Element for Stress Analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**, 1211–1220.
- Verfürth, R. (1995):** *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh–Refinement Techniques*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Wall, W.A. (1999):** *Fluid–Struktur–Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Bericht Nr. 31, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (2000):** ‘A Deformation Dependent Stabilization Technique, Exemplified by EAS Elements at Large Strains’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**, 859–871.

- Whiffin, A.C. (1948):** ‘The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress. II. Tests on Various Metallic Materials’, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **194**, 300–322.
- Wiberg, N.-E., Li, X.D. (1994):** ‘A Postprocessed Error Estimate and an Adaptive Procedure for the Semidiscrete Finite Element Method in Dynamic Analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 3585–3603.
- Willam, K.J., Warnke, E. (1975):** ‘Constitutive Model for Triaxial Behavior of Concrete’, *Proc. Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, International Association for Bridge and Structural Engineering, Section III, Zürich, 1–30.
- Wong, T.-F., Szeto, H., Zhang, J. (1992):** ‘Effect of Loading Path and Porosity on the Failure Mode of Porous Rocks’, *Applied Mechanics Review*, **45**, 281–293.
- Wriggers, P., Van, T.V., Stein, E. (1990):** ‘Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction’, *Computers & Structures*, **37**, 319–332.
- Wriggers, P. (2001):** *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Wriggers, P., Krstulovic-Opara, L., Korelc, J. (2001):** ‘Smooth C^1 -Interpolations for Two-Dimensional Frictional Contact Problems’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, 1469–1495.
- Wriggers, P. (2002):** *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Wright, T.W. (2002):** *The Physics and Mathematics of Adiabatic Shear Bands*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Yadav, S., Repetto, E.A., Ravichandran, G., Ortiz, M. (2001):** ‘A Computational Study of the Influence of Thermal Softening on Ballistic Penetration in Metals’, *International Journal of Impact Engineering*, **25**, 787–803.
- Zerilli, F.J., Armstrong, R.W. (1987):** ‘Dislocation-Mechanics-Based Constitutive Relations for Material Dynamics Calculations’, *Journal of Applied Physics*, **61**, 1816–1825.
- Zeuch, D.H., Grazier, J.M., Arguello, J.G., Ewsuk, K.G. (2001):** ‘Mechanical Properties and Shear Failure Surfaces for Two Alumina Powders in Triaxial Compression’, *Journal of Materials Science*, **36**, 2911–2924.
- Zhang, J., Wong, T.-F., Davis, D.M. (1990):** ‘Micromechanics of Pressure-Induced Grain Crushing in Porous Rocks’, *Journal of Geophysical Research*, **95**, 341–352.
- Zhu, J.Z. (1997):** ‘A Posteriori Error Estimation – The Relationship Between Different Procedures’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **150**, 411–422.
- Zhu, J.Z., Zhang, Z. (1999):** ‘The Relationship of Some A Posteriori Estimators’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **176**, 463–375.
- Zhu, Y.Y., Cescotto, S. (1995):** ‘Unified and Mixed Formulation of the 4-Node Quadrilateral Elements by Assumed Strain Method: Application to Thermomechanical Problems’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 685–716.
- Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1987):** ‘A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 337–357.
- Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992a):** ‘The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1331–1364.
- Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992b):** ‘The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1365–1382.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000):** *The Finite Element Method, Fifth Edition, Volume 2: Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford.

Anhang

A1 Hauptrichtungen bei der Rückprojektion

Die Hauptachsen des Kirchhoff-Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$, die aufgrund der Isotropieannahme mit den Hauptrichtungen des elastischen Finger-Tensors \mathbf{b}^e übereinstimmen, stimmen auch mit den Hauptachsen von $\mathbf{b}^{e,trial}$ im Trialzustand überein. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Da die Fließfunktion f eine isotrope Funktion der Kirchhoff-Spannungen ist, gilt folgende Spektralzerlegung der Fließrichtung zum Zeitpunkt t_n

$$\mathbf{m}_{\boldsymbol{\tau},n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}_n} = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \tau_{a,n}} \mathbf{n}_{a,n} \otimes \mathbf{n}_{a,n} . \quad (\text{A.1})$$

Einsetzen von

$$\mathbf{b}_n^e = \sum_{a=1}^3 (b_{a,n}^e)^2 \mathbf{n}_{a,n} \otimes \mathbf{n}_{a,n} \quad (\text{A.2})$$

und (A.1) in die Fließregel (siehe Gleichung (2.75))

$$\mathbf{b}_n^e = \exp(-2\Delta\gamma_n \mathbf{m}_{\boldsymbol{\tau},n}) \mathbf{b}_n^{e,trial} \quad (\text{A.3})$$

liefert

$$\mathbf{b}_n^{e,trial} = \sum_{a=1}^3 \exp\left[2\Delta\gamma_n \frac{\partial f}{\partial \tau_{a,n}}\right] (b_{a,n}^e)^2 \mathbf{n}_{a,n} \otimes \mathbf{n}_{a,n} \quad (\text{A.4})$$

mit den noch unbekanntenen Hauptrichtungen $\mathbf{n}_{a,n}$. Andererseits gilt

$$\mathbf{b}_n^{e,trial} = \sum_{a=1}^3 (b_{a,n}^{e,trial})^2 \mathbf{n}_{a,n}^{trial} \otimes \mathbf{n}_{a,n}^{trial} . \quad (\text{A.5})$$

Durch Vergleich der rechten Seiten von (A.4) und (A.5) und Berücksichtigung der Eindeutigkeit der Spektralzerlegung (Simo (1992)) ergibt sich

$$\exp\left[2\Delta\gamma_n \frac{\partial f}{\partial \tau_{a,n}}\right] (b_{a,n}^e)^2 = (b_{a,n}^{e,trial})^2 \quad (\text{A.6})$$

und

$$\mathbf{n}_{a,n} = \mathbf{n}_{a,n}^{trial} . \quad (\text{A.7})$$

Das heißt, die Hauptrichtungen \mathbf{n}_a des Endzustands stimmen mit den Hauptrichtungen \mathbf{n}_a^{trial} des Trialzustands überein.

A2 Element-Eigenwert-Berechnung

In Kapitel 5 wurde die Matrix

$$S^Q := \frac{w_Q}{m} C^e B_Q B_Q^T J_Q \quad (5.15)$$

in allgemeiner Form präsentiert, mit der die Berechnung der Integrationspunkt-Eigenwerte Λ^Q mit

$$\det(S^Q - \Lambda^Q \mathbf{1}) = 0 \quad (5.16)$$

relativ einfach möglich ist. Exemplarisch soll an dieser Stelle die Ermittlung des maximalen Integrationspunkt-Eigenwerts λ_{\max}^Q für das *bilineare Vierknotenelement* (Kapitel 3) für den *ebenen Verzerrungszustand* vorgestellt werden. Dazu werden die entsprechenden Matrizen

$$C^e = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B^Q = \begin{bmatrix} N_{i,x}^Q & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_{i,y}^Q & \dots \\ N_{i,y}^Q & N_{i,x}^Q & \dots \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots 4 \quad (A.8)$$

mit den Lamé-Parametern λ und μ und den Ansatzfunktionen N_i (siehe Kapitel 3.2.1) in (5.15) eingesetzt:

$$S^Q = \frac{w_Q}{m} J_Q \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) a_{xx}^Q & \lambda a_{yy}^Q & (2\lambda + 2\mu) a_{xy}^Q \\ \lambda a_{xx}^Q & (\lambda + 2\mu) a_{yy}^Q & (2\lambda + 2\mu) a_{xy}^Q \\ \mu a_{xy}^Q & \mu a_{xy}^Q & \mu (a_{xx}^Q + a_{yy}^Q) \end{bmatrix}, \quad (A.9)$$

wobei folgende Abkürzungen verwendet wurden

$$a^Q = \begin{bmatrix} a_{xx}^Q & a_{xy}^Q \\ a_{xy}^Q & a_{yy}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_{i,x}^Q & \sum_{i=1}^4 N_{i,x}^Q N_{i,y}^Q \\ \sum_{i=1}^4 N_{i,x}^Q N_{i,y}^Q & \sum_{i=1}^4 N_{i,y}^Q \end{bmatrix}. \quad (A.10)$$

Diese 2×2 -Matrix kann in Hauptrichtungen formuliert werden:

$$\hat{a}^Q = \begin{bmatrix} \hat{a}_1^Q & 0 \\ 0 & \hat{a}_2^Q \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{a}_{1,2}^Q = \frac{1}{2} \left[a_{xx}^Q + a_{yy}^Q \pm \sqrt{(a_{xx}^Q - a_{yy}^Q)^2 + 4a_{xy}^Q{}^2} \right], \quad (A.11)$$

wodurch sich Gleichung (A.9) weiter vereinfacht:

$$S^Q = \frac{w_Q}{m} J_Q \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \hat{a}_1^Q & \lambda \hat{a}_2^Q & 0 \\ \lambda \hat{a}_1^Q & (\lambda + 2\mu) \hat{a}_2^Q & 0 \\ 0 & 0 & \mu (\hat{a}_1^Q + \hat{a}_2^Q) \end{bmatrix}. \quad (A.12)$$

Der maximale Eigenwert von S^Q kann damit explizit angegeben werden:

$$A_{\max}^Q = \frac{1}{2} \frac{w_Q}{m} J_Q (\lambda + 2\mu) \left[\hat{a}_1^Q + \hat{a}_2^Q + \sqrt{\left(\hat{a}_1^Q - \hat{a}_2^Q \right)^2 + \frac{4\lambda^2 \hat{a}_1^Q \hat{a}_2^Q}{(\lambda + 2\mu)^2}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5.11) und (A.13) kann ein Grenzwert für den maximalen Elementeigenwert A_{\max}^e eines konkreten Elements berechnet werden. So ergibt sich für das reduziert integrierte Vierknotenelement 'RI4' mit der Knotenmasse $m = A_Q/4$, dem Wichtungsfaktor $w_0 = 4$ und der Jacobideterminanten $J_0 = A/4$ folgender Ausdruck

$$A_{\max}^e \leq \frac{2}{Q} (\lambda + 2\mu) \left[\hat{a}_1^0 + \hat{a}_2^0 + \sqrt{\left(\hat{a}_1^0 - \hat{a}_2^0 \right)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \hat{a}_1^0 \hat{a}_2^0} \right], \quad (\text{A.14})$$

wobei der Index '0' für den Integrationspunkt in Elementmitte steht. Für das selektiv integrierte Vierknotenelement 'SI4' mit $m = A_Q/4$ und $w_Q = 1$ wird S^Q in einen volumetrischen Anteil S_{vol}^Q und einen deviatorischen Anteil S_{dev}^Q aufgespalten:

$$S^Q = S_{vol}^Q + S_{dev}^Q = \frac{4}{Q} \begin{bmatrix} \lambda \hat{a}_1^0 & \lambda \hat{a}_2^0 & 0 \\ \lambda \hat{a}_1^0 & \lambda \hat{a}_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{4J_Q}{QA} \begin{bmatrix} 2\mu \hat{a}_1^Q & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu \hat{a}_2^Q & 0 \\ 0 & 0 & \mu (\hat{a}_1^Q + \hat{a}_2^Q) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Der Grenzwert für den maximalen Element-Eigenwert von 'SI4' lautet damit

$$A_{\max}^e \leq \frac{4}{QA} \left[A\lambda (\hat{a}_1^0 + \hat{a}_2^0) + 2\mu \sum_{Q=1}^4 J_Q \hat{a}_1^Q \right]. \quad (\text{A.16})$$

Lebenslauf

Name: *Tobias Hans Robert Erhart*

Geburtsdatum: *28. September 1973 in Waiblingen*

Eltern: *Werner und Marlis Erhart, geb. Castens*

Familienstand: *ledig*

Staatsangehörigkeit: *deutsch*

1980 – 1984: *Besuch der Grundschule in Aichwald*

1984 – 1993: *Besuch des Theodor-Heuss Gymnasiums in Esslingen am Neckar*

Juni 1993: *Abitur*

1993 – 1994: *Zivildienst in Esslingen am Neckar*

1994 – 1999: *Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart*

Dezember 1999: *Abschluss als Diplom-Ingenieur (mit Auszeichnung)*

2000 – 2004: *wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.

- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Hauber:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.

- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturmechanik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2002) D. P. Mok:**
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturmechanik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalysen von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G. A. D'Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.



Universität Stuttgart

ISBN 3-00-015443-4

