

Adaptivität bei Flächentragwerken

Agnes Weilandt

Adaptivität bei Flächentragwerken

Von der Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

von Agnes Weilandt, geb. Landauer, aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Werner Sobek

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Manfred Bischoff

Tag der mündlichen Prüfung: 10.12.2007

Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, 2008

Vorwort

Die hier vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren der Universität Stuttgart in den Jahren 2001 bis 2005.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Werner Sobek möchte ich für die vielen fruchtbaren Diskussionen sowie für die Übernahme des Hauptberichtes danken. Weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff für die Übernahme des Mitberichtes und Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Miehe für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Meinen Kollegen am Institut danke ich für die schöne Zusammenarbeit.

Weiterhin gilt mein Dank meiner Familie für ihre Geduld und Unterstützung in dieser Zeit.

Frankfurt, März 2008

Kurzfassung

Scheiben und Schalen sind nur in ihrer Ebene beanspruchte Tragwerke bzw. Tragwerkselemente. Aus diesem Grund sind sie für den Leichtbau von großer Bedeutung. Ihre hohe Tragfähigkeit wird jedoch bei Störung des homogenen Spannungszustandes, z.B. durch Ausschnitte, lokale Lasteinleitungen oder Zwängungen an den Auflagern, stark reduziert. Bisherige Optimierungsversuche mittels Formoptimierung der Ausschnitte oder lokaler Verstärkungen führten nur für einzelne, in ihrer Richtung konstante Belastungen zu einer Reduktion der Störungen.

Adaptive Tragwerke sind eine neue Alternative für die Optimierung des Tragverhaltens von Scheiben und Schalen. Sie können mit Hilfe von Sensoren, Steuerungs- bzw. Regelungseinheiten und Aktuatoren verschiedene äußere Einwirkungen erfassen und sich an diese anpassen. Dieser Anpassungsprozess wird als Adaption bezeichnet und ermöglicht den adaptiven Tragwerken optimal auf unterschiedliche Beanspruchungen reagieren zu können.

Im Rahmen dieser Arbeit wird untersucht, inwiefern mittels adaptiver Systeme die Tragfähigkeit von Scheiben und Schalen erhöht werden kann. Hierbei werden Systeme betrachtet, deren Tragfähigkeit durch Störungen erheblich geschwächt ist. Ziel der Adaption ist eine Reduktion der Inhomogenitäten in den Spannungsfeldern, so dass die Scheiben bzw. Schalen bei konstanter Bauteildicke optimal ausgenutzt werden können.

Es werden drei verschiedene Typen adaptiver Systeme bei Scheiben und Schalen betrachtet:

1. Dehnungsaktivierte Scheiben, die in Teilbereichen oder über ihre gesamte Ausdehnung so gestaltet sind, dass in sie ein stetiger Dehnungsverlauf induziert werden kann. Diese induzierten Dehnungen bewirken eine Umverteilung der Scheibenbeanspruchungen, so dass die maximal auftretenden Inhomogenitäten in den Spannungsfeldern der betrachteten Systeme minimiert werden können. Entscheidend für die Effizienz solcher Systeme ist der Verlauf der induzierten Dehnungen, für deren Ermittlung - neben einer analytischen Lösung für das Beispiel der Scheibe mit Ausschnitt - zwei Verfahren auf Basis der Finiten-Element-Methode vorgeschlagen werden.
2. Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren, deren Wirkungsweise mit lokal begrenzten flächigen Verstärkungen verglichen werden kann. Für die Effizienz dieser Systeme sind vor allem die Lage der Aktuatoren, sowie deren Materialkennwerte und deren Höhe der Aktivierung von Bedeutung. Diese Werte können mit einem mehrstufigen Verfahren, das in dieser Arbeit vorgestellt wird, ermittelt werden.
3. Systeme mit aktiven Randbedingungen, bei denen der innere Beanspruchungszustand von außen manipuliert wird, werden stellvertretend anhand einer Schale untersucht. Hierzu wird eines der Verfahren zur Berechnung dehnungsaktivierter Scheiben entsprechend an die untersuchte Problemstellung angepasst.

Anhand von ausgewählten Beispielen wird zum einen die Effizienz der vorgeschlagenen Berechnungsverfahren zum anderen das hohe Potential der adaptiven Systeme bei Scheiben und Schalen aufgezeigt.

Abstract

Panes and shells as only in-plane loaded structural elements play an important role in lightweight structures. However their great bearing capacity will be reduced significantly when their homogeneous stress distribution is disturbed. These disturbances can be caused for example by cuttings, local loadings or constraints. Present research to reduce the disturbances by form optimization of the cuttings or by adding local bracing elements can only respond to particular loading conditions.

Adaptive structures are a new innovative alternative for the optimization of panes and shells. With the use of sensors, control units and actuators they can register different external stimuli and adapt to them. This allows an optimal reaction to different loading conditions.

Therefore, the scope of this thesis is to investigate the potential elevation of the load bearing capacity of panes and shells by introducing active elements. Here structures will be examined that have reduced load bearing capacities caused by disturbances. Hence it aims to decrease these disturbances. This allows a maximum utilization of panes or shells of constant thickness.

Three different types of adaptivity in panes and shells will be examined:

1. Strain induced panes. Their design induces strains of continuous distribution in sections or in the total area of the panes. These induced strains provoke a redistribution of the stresses in the panes so that the maximum stress concentrations can be minimized. A decisive factor for the efficiency of these systems is the distribution of the induced strains. In addition to an analytical solution for a pane with a circular hole two different numerical proceedings to determine the optimal distribution of the induced strains will be presented in this thesis.
2. Panes with integrated discrete strain actuators whose mode of functioning can be compared to panes with local bracings. The efficiency of these systems depends mainly on the positioning of the actuators, their material properties and their level of activation. These values can be determined by a two-stage process, which will be presented in this thesis.
3. Systems with active bearings, whose inner distribution of stresses is manipulated from the periphery, will be exemplified through a shell. Therefore, one of the procedures presented for strain induced panes will be adapted to the examined problem.

Selected examples demonstrate the efficiency of the proposed procedures and the great potential of adaptive panes and shells.

Inhalt

1	Einleitung	1
2	Adaptive Systeme	5
2.1	Definitionen	5
2.2	Aktuatoren bei Flächentragwerken	7
2.3	Entwicklungen und Anwendungen	8
3	Strukturoptimierung	17
3.1	Grundlagen	17
3.2	Methoden der Optimierung	18
3.3	Methoden der Formbeschreibung	24
4	Dehnungsaktivierte adaptive Scheibe: Analytische Lösung für eine Scheibe mit Ausschnitt	29
4.1	Spannungen im passiven System	30
4.2	Spannungen im adaptiven System	33
4.2.1	Allgemeines	33
4.2.2	Symmetrische Belastungen	33
4.2.3	Antimetrische Belastungen	41
4.2.4	Allgemeine Lösung	49
4.3	Vergleich des adaptiven Systems mit passiven optimierten Systemen	54
4.4	Zusammenfassung	56

5	Dehnungsaktivierte adaptive Scheibe: Allgemeine Lösung	57
5.1	Konzept und besondere Problematik	57
5.2	Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren	59
5.2.1	Grundlagen der Berechnung	59
5.2.2	Berechnungsverfahren mit beschreibender Gestaltfunktion der Aktivierung	59
5.2.3	Berechnungsverfahren mit direkter Berechnung der diskreten Aktivierungswerte und Skalierung	70
5.3	Dehnungsaktivierte Scheibe mit Ausschnitt - Numerische Lösungen	75
5.4	Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt: Vergleich der numerischen Lösungen mit der analytischen	82
5.5	Zusammenfassung	86
6	Adaptive Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren	87
6.1	Wirkungsweise der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren im Vergleich zu passiven lokalen Verstärkungen	88
6.2	Berechnungsverfahren für adaptive Scheiben mit aktiven Fasern bzw. aktiven lokalen Verstärkungen	92
6.2.1	Ermittlung der optimalen Lage nichtaktivierbarer lokaler Verstärkungen	92
6.2.2	Wahl der Parameter und Unterteilung der aktivierbaren lokalen Verstärkungen	109
6.2.3	Bestimmung der Höhe der Aktivierung	112
6.2.4	Zusammenfassung	114
6.3	Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren	115
6.4	Zusammenfassung	130
7	Tragwerksstudie: Abgewinkelter Kragträger	133
8	Adaptive Schale mit aktiven Randbedingungen	141
9	Zusammenfassung und Ausblick	151
	Literaturverzeichnis	155

Anhang

A	Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt: Analytische Lösung	A-1
A.1.	Rotationssymmetrische Anteile: Lösungen für beschränkt adaptiven Bereich	A-1
A.2.	Nichtrotationssymmetrische Anteile: Lösungen für beschränkt adaptiven Bereich	A-5
B	Adaptive Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren: Optimalitätskriterien bei mehreren globalen Spannungsrandbedingungen	B-1

Bezeichnungen

F	[-]	Airyische Spannungsfunktion
F_{sym}	[-]	rotationssymmetrischer Anteil der Airyischen Spannungsfunktion
F_{asym}	[-]	antimetrischer Anteil der Airyischen Spannungsfunktion
σ	[N/mm ²]	Spannung
σ_{∞}	[N/mm ²]	ungestörte Spannung
$\tilde{\sigma}$	[N/mm ²]	Spannungswerte im aktiven Bereich
$\hat{\sigma}$	[N/mm ²]	Spannungswerte im nicht aktiven Bereich
α	[°]	Richtung der maßgebenden Hauptspannung
τ	[N/mm ²]	Schubspannung
ε	[-]	Dehnungen
B		Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
K		Steifigkeitsmatrix
S		Sensitivitätsmatrix
p	[N/mm ²]	äußere Flächenlast
P	[N]	äußere Last
K	[N/mm]	Membrankraft
δ_{aktiv}	[-]	resultierende Dehnung aus Aktivierung am zwängungsfreien System
\mathbf{x}		Entwurfsvektor
R		Entwurfsraum
x, y, z		Kartesische Koordinaten
\mathbf{x}		Koordinatenvektor
v	[mm]	Verschiebungen
v_{aktiv}	[mm]	induzierte Verschiebung
u	[mm]	radiale Verschiebungen
v	[mm]	tangentiale Verschiebungen
u, v		Formparameter
\mathbf{r}		Gestaltfunktion
r		Kontrollpunkt der Gestaltfunktion
M, N		Basisfunktionen der B-Splines
r, φ	[mm], [°]	Zylinderkoordinaten: Radius und Winkel
d	[mm]/[m]	Durchmesser / Spannweite der Schale
h	[mm]	Scheiben- / Schalendicke
a	[mm]	Radius des Ausschnitts
b	[mm]	Radius des aktiven Bereichs
z_0	[m]	Schalenstich
E	[N/mm ²]	E-Modul
\underline{E}		Materialmatrix

μ	Querdehnzahl
c	Konstanten
LF	Lastfall
η	Wirkungsgrad
ξ	Konzentrationskoeffizient bezogen auf σ_∞
ξ_v	Konzentrationskoeffizient bezogen auf $\sigma_{v, \infty}$
W	Arbeit
W_{aktuator}	induzierte Arbeit der Aktuatoren
$W_{\text{schalenrand}}$	Integral der randparallelen Aktivierung im Quadrat $\int (v_{\text{aktiv II}}(\mathbf{x}))^2$
ele	Vektor der Elementnummern

Indizes:

aktiv	resultierend aus der aktivierten inneren Dehnung
passiv	resultierend aus passiven Einwirkungen
adapt	resultierend aus aktiven und passiven Einwirkungen
r	radial
φ	tangential
I	Hauptspannung I
II	Hauptspannung II
α	in maßgebende Richtung transformierter Spannungswert
sym	symmetrischer Anteil
asym	antimetrischer Anteil
∞	Werte des homogenen Spannungsfeldes
extr	lokales Extremum
extr glob	globales Extremum
h	homogener Lösungsanteil einer Differentialgleichung
p	partikulärer Lösungsanteil einer Differentialgleichung
knot	Wert im Elementknoten
ele	Wert in Elementmitte
LF	Lastfall
NO	Nachoptimierung
oNO	ohne Nachoptimierung
\sim	Werte im aktiven Bereich
\wedge	Werte im nicht aktiven Bereich

skal	skaliert
unskal	unskaliert
sch	Wert der Scheibe
aktuator	Wert der integrierten Dehnungsaktuatoren
nichtaktiv	nichtaktivierbare lokale Verstärkung
pfl	Pflaster, entspricht nicht aktiverbarer lokaler Verstärkung
wichtung	Wichtungsfaktor in Multikriterienoptimierung
T	Transponiert

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird eingesetzt:

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial r} = (\dots)'$$

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \varphi} = (\dots)''$$

$$\Delta(\dots) = (\dots)'' + \frac{(\dots)'}{r} + \frac{(\dots)}{r^2}$$

Gesonderte Abkürzungen Kapitel 6:

In Kapitel 6 werden die gängigen Abkürzungen aus dem Bereich der Topologieoptimierung verwendet. Somit ergeben sich zum Teil Überschneidungen mit den Abkürzungen aus den vorherigen Kapiteln. Im Folgenden sind deswegen die Abkürzungen mit einer gesonderten Bedeutung für diesen Abschnitt aufgelistet:

V	Zielfunktion: Volumen der lokalen Verstärkung
L	Lagrange-Funktion
F	Elementlastvektor
\bar{F}	Elementlastvektor des adjungierten Systems
P	Lastvektor des realen Systems
\bar{P}^v	Virtueller Lastvektor des adjungierten Systems
B	Gleichgewichtsmatrix
$v, \lambda, \alpha, \beta, \gamma$	Lagrange-Multiplikatoren
u	Verschiebungsvektor
S	Vektor zur Umrechnung der Elementkräfte in Spannungen
NE	Anzahl der Elemente
ND	Anzahl der globalen Randbedingungen
n	Anzahl der Freiheitsgrade
f	Nachgiebigkeitsmatrix

Untere Indizes

f	Werte aus der Nachgiebigkeitsformulierung (flexibility) bezogen auf die Freiheitsgrade eines Elementes abzüglich der Starrkörperverschiebungen
s	Werte aus der Steifigkeitsformulierung (stiffness) bezogen auf alle Freiheitsgrade eines Elementes
r	Werte bezogen auf Starrkörperverschiebungen (rigid body motion)

Obere Indizes

U	Obere (upper) Grenze
L	Untere (lower) Grenze
e	Element
c	Element der globalen Spannungsrandbedingung

1 Einleitung

Die Optimierung von Tragwerken hin zu immer leichteren und effizienteren Systemen ist Gegenstand vieler Untersuchungen. Wie sich hierbei immer wieder zeigt, bergen neue Bauweisen in den meisten Fällen ein höheres Optimierungspotential als die Ausdimensionierung bekannter Systeme [94].

Adaptive Systeme stellen eine solche neue Bauweise dar. Sie ersetzen Material, das nicht in allen Beanspruchungssituationen erforderlich ist, durch in das System induzierte Energie [75], [63] und ermöglichen somit eine bisher nicht erreichbare Leichtigkeit der Konstruktionen. Im Vergleich zu natürlichen Systemen, von denen viele Prinzipien der adaptiven Strukturen abgeleitet werden, erscheinen die derzeit untersuchten Aspekte an technischen Systemen zwar noch sehr einfach. Sie können jedoch bereits bei diesem hohen Grad an Einfachheit einen großen Einfluss auf die Form und die Effizienz der Strukturen haben.

Flächige, in ihrer Ebene beanspruchte Tragwerke, wie zum Beispiel Scheiben und Schalen, zählen zu den effizientesten Konstruktionen im Leichtbau. Zum einen erreichen sie durch die reinen Zug- und Druckbeanspruchungen eine effektive Ausnutzung des eingesetzten Materials über die Bauteilhöhe, zum anderen zeichnen sie sich, kontinuierliche Belastungen vorausgesetzt, auch durch homogene Spannungsfelder aus. Bei Systemen, deren Spannungsfelder durch Ausschnitte, Kerben, lokale Beanspruchungen oder falsche Formgebung gestört wird, ist die Tragfähigkeit in Relation zum Gewicht der Struktur jedoch stark reduziert. Um dies zu vermeiden, sind geeignete Maßnahmen zur Reduktion der Inhomogenitäten der Spannungsfelder zu treffen. Bisherige Ansätze beruhen darauf, diese Inhomogenitäten durch Anordnung von zusätzlichem Material oder durch eine verbesserte Formgebung zu reduzieren. Da diese Maßnahmen jedoch immer nur einzelnen Beanspruchungssituationen gerecht werden können, ergeben sich für andere Belastungszustände unter Umständen sehr viel ungünstigere Querschnittsausnutzungen. Gerade bei sehr leichten Konstruktionen, deren Formgebung nicht mehr durch einen signifikanten formgebenden Lastfall dominiert wird, können somit nur suboptimale Lösungen gefunden werden.

Die bisherigen Entwicklungen und Anwendungen adaptiver Systeme haben sich auf die Forschung von Stabtragwerken konzentriert. Wie diese Untersuchungen aufgezeigt haben [84], sind adaptive Systeme in der Lage, auf verschiedene Belastungssituationen aktiv zu reagieren. Somit können Inhomogenitäten in den Spannungsfeldern reduziert werden. Adaptive Systeme ermöglichen es darüber hinaus, auf Verformungs- und Schwingungsprobleme einzugehen, die für die Dimensionierung von Tragwerkselemente im Leichtbau eine große Rolle spielen können.

Es erscheint deswegen nahe liegend, flächige Tragwerke mit der Bauweise der adaptiven Systeme zu verbinden, um diese Leichtbaukonstruktionen noch effektiver gestalten zu können.

Ziel und Gliederung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung verschiedener Typen adaptiver Systeme bei Scheiben und Schalen. Ziel der Adaption ist hierbei jeweils die Reduktion von Inhomogenitäten in den Spannungsfeldern, so dass die Tragfähigkeit der Systeme bei konstanter Scheiben- bzw. Schalendicke optimal ausgenutzt werden kann. In dieser Arbeit werden zum einen Verfahren für den Entwurf dieser adaptiven Systeme entwickelt. Zum anderen wird an ausgewählten Beispielen das Potential der adaptiven Systeme bei Scheiben und Schalen aufgezeigt.

Nach einer Definition der adaptiven Systeme, der ihnen zugehörigen Elemente und deren Eigenschaften bzw. Verhalten (Kapitel 2.1), werden Überlegungen zur möglichen Ausbildung von adaptiven Flächentragwerken vorgestellt. Hierzu gehören dehnungsaktivierte Systeme, Systeme mit integrierten diskreten Aktuatoren und Systeme, deren Beanspruchungen von ihrem Rand aus manipuliert werden können (Kapitel 2.2). Hieran schließt sich eine Analyse der bisherigen Entwicklungen und Anwendungen adaptiver Systeme an (Kapitel 2.3).

In Kapitel 3 werden die erforderlichen Grundlagen, auf denen die Verfahren zum Entwurf der adaptiven Systeme aufbauen dargestellt.

In den folgenden Kapiteln werden die in Kapitel 2.2 definierten Typen adaptiver Systeme bei Flächentragwerken genauer betrachtet und auf ihr Potential hin untersucht. Zunächst wird anhand des bekannten Beispiels der Scheibe mit Ausschnitt eine analytische Lösung für den Aktivierungsverlauf einer dehnungsaktivierten Scheibe ermittelt (Kapitel 4). Diese analytische Lösung dient zur Verifizierung der in Kapitel 5 vorgestellten Verfahren zur Berechnung des erforderlichen Aktivierungsverlaufs zur Reduktion auftretender Inhomogenitäten in den Spannungsfeldern.

Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren werden im nächsten Abschnitt (Kapitel 6) behandelt. Nach einer generellen Betrachtung zur Wirkungsweise dieser Aktuatoren wird ein Verfahren zur Ermittlung ihrer Lage und ihrer erforderlicher Aktivierung vorgestellt. Das Beispiel der Scheibe mit Ausschnitt dient wiederum zur detaillierten Betrachtung des Verfahrens und zur Ermittlung des Wirkungsgrades solcher Aktuatoren in Flächentragwerken. Anhand der zu induzierenden Arbeit werden die in ihrem Verhalten sehr unterschiedlichen Systeme der dehnungsaktivierten Scheibe und der Scheibe mit integrierten Dehnungsaktuatoren verglichen.

Ein häufig untersuchtes Problem im Bereich der Strukturoptimierung von Flächentragwerken ist der abgewinkelte Kragträger. Die mögliche Effizienz, also Reduktion der Inhomogenitäten im Spannungsfeld, wird an diesem Beispiel sowohl für die Dehnungsaktivierung als auch für die integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren in Kapitel 7 untersucht. Hierbei können die bereits bei der Scheibe mit Ausschnitt gefundenen Erkenntnisse zur unterschiedlichen Wirkungsweise und Effizienz der verschiedenen Aktuatoren bestätigt werden.

Als dritte Form der Ausbildung von Aktuatoren bei Flächentragwerken werden Systeme betrachtet, deren Beanspruchungen von ihrem Rand aus adaptiert werden. Als Beispiel hierfür dient eine Schale, deren Form auf Grundlage einer pneumatischen Schalung bestimmt wurde (Kapitel 8). Die Inhomogenitäten im Spannungsfeld der Schale werden in diesem Fall als die Zugspannungen definiert, die in Folge der fehlenden Kompensation am Schalenrand unter Eigengewicht auftreten.

Die drei betrachteten Formen der Ausbildung von adaptiven Flächentragwerken und die ausgewählten Beispiele können nur einen kleinen Teil der möglichen Vielfalt adaptiver Systeme aufzeigen. Sie ermöglichen aber einen Ausblick auf das Potential zukünftiger Leichtbaustrukturen.

2 Adaptive Systeme

2.1 Definitionen

Adaptives System

Der Begriff der Adaptivität oder Adaption ist in vielen Naturwissenschaften, wie der Biologie, der Chemie oder der Medizin, aber auch in vielen Ingenieurwissenschaften weit verbreitet. Ausgehend vom lateinischen Ursprung „adaptare“ wird dabei „Adaption“ als autonome Anpassung eines Systems infolge von Einwirkungen aus seiner Umwelt mit dem Ziel der Erhöhung der Funktionalität verstanden.

Bei den adaptiven Systemen kann zwischen natürlichen und technischen Systemen unterschieden werden, wobei die technischen Systeme meist die in den natürlichen Systemen bekannten Vorgänge der Adaption übertragen:

Als Beispiel hierfür kann ein Auge genannt werden, das mit einer Verengung der Pupillen (Anpassung) auf einen erhöhten Lichteinfall (Einwirkung) reagiert, um bei unterschiedlichen Lichtsituationen stets kontrastreiches Sehen zu ermöglichen (Erhöhung der Funktionalität). Umgesetzt wird diese Anpassung für technische Systeme zum Beispiel bei Photoapparaten.

Viele ähnlicher Beispiele können jeweils abhängig von ihrer Reaktionszeit unterschieden werden [17]: Kurzfristige Adaptionsvorgänge erfolgen in Echtzeit, wie das oben genannte Beispiel der Verengung der Pupillen. Langfristige Vorgänge sind auf die Lebenszeit einer Generation beschränkt, wie zum Beispiel bei Wachstumsvorgängen von Bäumen oder Knochen [51]. Evolutionäre Prozesse hingegen entwickeln sich über Generationen hinweg und können die Funktionalität des Systems grundlegend verändern. Technische adaptive Systeme beschränken sich derzeit meist auf kurzfristige Adaptionsvorgänge.

Aufbau und Elemente eines adaptiven Systems

Um auf die Einwirkungen aus seiner Umwelt reagieren zu können, muss ein adaptives System in sich Elemente, die *Sensoren*, integrieren, die diese Einwirkungen erfassen. Die Sensoren geben die Informationen an den *Controller* weiter, der diese identifiziert und auswertet, um die notwendige Anpassung des Systems zu bestimmen und weiterzugeben. Die Effizienzsteigerung des Systems setzen schlussendlich die *Aktuatoren* durch Änderung ihrer Eigenschaften (z.B. eine Änderung der Länge, der Steifigkeit, der Dämpfung etc.) um.

Wertet der Controller lediglich Informationen über die äußeren Einwirkungen auf das System aus, so wird dieses System als gesteuert bezeichnet. Bei einem geregelten System werden von den Sensoren dagegen auch die internen Reaktionen des Systems, die durch die Eigenschaftsänderung der Aktuatoren hervorgerufen werden, erfasst, und durch den Controller ausgewertet. Durch diese interne Rückmeldung ergibt sich ein geschlossener Wirkungskreislauf (Regelkreis), der eine realistische Systemantwort auf die Störgrößen ermöglicht.

Für technische adaptive Strukturen sind deswegen Regelungen anzustreben, die basierend auf den Definitionen von Yao [98], dargestellt werden können, siehe Abb. 2-1.

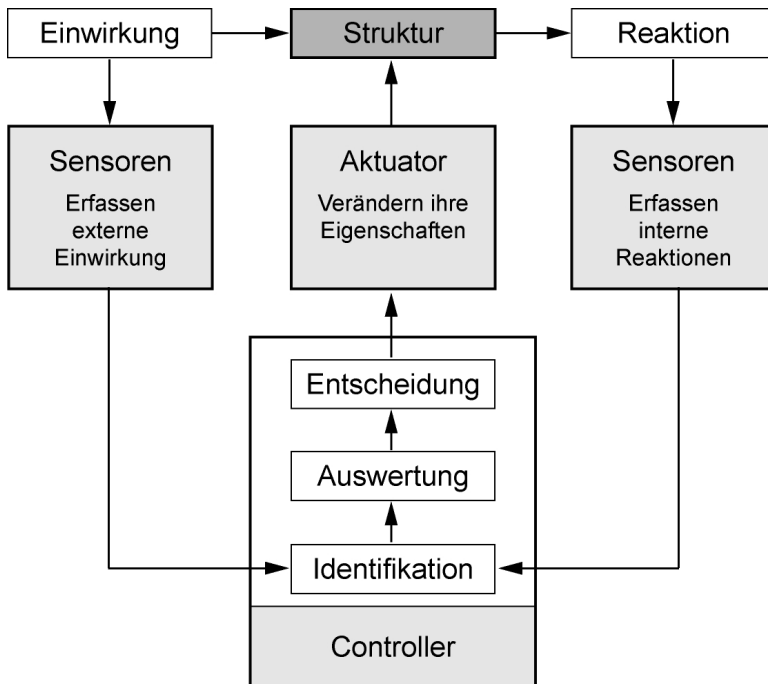


Abb. 2-1: Regelkreis eines adaptiven Systems

Vom adaptiven System zum adaptiven Tragwerk

Die oben beschriebenen Elemente adaptiver Systeme und ihre Funktion lassen sich direkt auf adaptive Tragwerke übertragen. Die Erhöhung der Funktionalität kann bei einem adaptiven Tragwerk die Reduzierung der Verformung oder Schwingungen, eine homogenere Spannungsverteilung oder ein geringerer Materialverbrauch sein.

Die Aktuatoren eines adaptiven Tragwerkes können in die beiden Hauptgruppen der Dehnungs- und Steifigkeitsaktuatoren, die auch in Kombination auftreten können, unterteilt werden. In die Gruppe der Dehnungsaktuatoren fallen neben größenveränderlichen Stab- bzw. Flächenelementen auch Auflagerverschiebungen oder -verdrehungen. Analog sind Steifigkeitsaktuatoren zum Beispiel Stab- bzw. Flächenelemente mit veränderlichen Steifigkeiten oder veränderliche Lagerungsbedingungen.

In ähnlicher Weise werden adaptive Tragwerke von Housner et al. [33] auch in passive, semi-aktive und aktive Systeme klassifiziert. Abhängig vom erforderlichen Energiebedarf wird hierbei nach Systemen ohne erforderliche externe Energie (passiv) und mit erforderlicher externer Energie (aktiv, semi-aktiv) zur Anpassung der Aktuatoreigenschaften unterschieden.

Die Reaktionen passiver Systeme werden durch die Verformung der Tragwerke selbst hervorgerufen. Unter diese Gruppe fallen zum Beispiel passive Schwingungsdämpfer oder sich im Wind ausrichtende Bauwerke [74].

Bei semi-aktiven Systemen wird die Adaption durch Änderung der Systemeigenschaften, wie zum Beispiel der Steifigkeit oder der Dämpfung, erreicht. Sie entsprechen also den Steifigkeitsaktuatoren und benötigen weniger Energie als die aktiven Systeme, bei denen die Adaption durch Erzeugung von Gegenkräften (Dehnungsaktuatoren) erzielt wird.

Zustände eines adaptiven Tragwerks

Bei einem adaptiven Tragwerk können drei verschiedene Beanspruchungszustände unterschieden werden [91]. Im passiven Zustand sind die Aktuatoreigenschaften konstant und es wirken nur die externen Einwirkungen. Der aktivierte Zustand hingegen stellt ausschließlich die internen Reaktionen des Systems auf die veränderten Aktuatoreigenschaften dar. Aus der Superposition dieser beiden Zustände ergibt sich somit der dritte Zustand, der als adaptiv bezeichnet wird:

Passiv + aktiviert = adaptiv

Zustandsgrößen können hierbei die Verformungen, die Schnittkräfte, die Spannungen usw. sein.

2.2 Aktuatoren bei Flächentragwerken

Für Flächentragwerke sind verschiedene Aktuatoren vorstellbar. Zum einen kann das Tragwerk selbst die Funktion des Aktuators übernehmen. Wird für diesen Fall der Aktuator als Dehnungsaktuator ausgebildet, so wird durch die Aktivierung ein kontrolliert verteilter Dehnungsverlauf in das Flächentragwerk induziert. Dieser induzierte Dehnungsverlauf kann abhängig von der Art der Aktivierung monoaxial oder mehraxial sein. Die Ausbildung eines Tragwerks als Steifigkeitsaktuator, also als semi-aktives System, ist ebenso möglich. Im Folgenden werden mit solchen Aktuatoren versehene Flächentragwerke als dehnungs- bzw. steifigkeitsaktivierte Flächentragwerke bezeichnet.

Zum anderen können Flächentragwerke mittels integrierter diskreter, also örtlich begrenzter, Dehnungs- bzw. Steifigkeitsaktuatoren adaptiert werden. Solche Aktuatoren können zum Beispiel als Pflaster auf die Tragwerke aufgebracht, oder mittels integrierter aktiver Fasern abgebildet werden. Sie stellen im Vergleich zu den dehnungs- bzw. steifigkeitsaktivierten Tragwerken bereits im passiven Zustand eine Versteifung des Grundsystems dar und ziehen im adaptiven Zustand zusätzliche Beanspruchungen auf sich, so dass das Tragwerk selbst entlastet wird.

Eine detaillierte Unterscheidung im Tragverhalten der dehnungsaktivierten Tragwerke und der Tragwerke mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren wird in Kapitel 6.1 gegeben.

Eine weitere Möglichkeit der Platzierung von Aktuatoren stellen die Randbereiche der Flächentragwerke dar. Dehnungs- bzw. Steifigkeitsaktuatoren können hier als aktive Randbedingungen entweder Verschiebungen oder Verdrehungen in das System induzieren oder durch veränderte Steifigkeiten eine Lastumlagerung bewirken.

Im Rahmen dieser Arbeit werden für alle drei genannten Gruppen Systeme untersucht. Die Betrachtungen beschränken sich hierbei jeweils auf Dehnungsaktuatoren. Eine Übertragung auf Steifigkeitsaktuatoren ist analog für alle Systeme möglich.

2.3 Entwicklungen und Anwendungen

In welcher Form die Elemente eines adaptiven Systems, Sensoren, Controller und Aktuatoren, ausgeführt werden, hängt von der Art der Anwendung und den sich daraus ergebenden Erfordernissen an das Bauteil ab.

Sensoren

Sensoren müssen je nach Bedarf mechanische, elektromagnetische, chemische oder auch andere Zustandsänderungen des adaptiven Systems erfassen. Die genaue Erfassung der Bewegungen von Gebäuden bei Erdbeben ist heute schon selbstverständlich.

Die am häufigsten verwendeten Sensoren sind Dehnmeßstreifen, die auf Dehnungen mit einer Veränderung ihres elektrischen Widerstandes reagieren [34]. Eine Alternative stellen faseroptische Sensoren dar. Sie können neben Dehnungen auch andere Zustandsänderungen, wie zum Beispiel Temperatur, Druck oder lokale Defekte, durch Änderung ihrer optischen Eigenschaften erfassen. Im Bauwesen werden sie zumeist zur zerstörungsfreien Überwachung (*Health Monitoring*) von Bauwerken eingesetzt.

Auch eine Gruppe der so genannten *Smart Materials*, deren Anwendung hauptsächlich im Bereich der Aktuatoren liegt, wird als Sensoren verwendet. Diese Materialien mit ungewöhnlichen physikalischen Eigenschaften ändern infolge einer Änderung des elektrischen, magnetischen Feldes oder der Temperatur zum Beispiel ihre Steifigkeit, Form, Dämpfungseigenschaften oder auch ihre Viskosität. Sie werden in der Literatur ausführlich unter anderem von Housner [33], Isermann [34] und Janocha [35] beschrieben.

Den umgekehrten Effekt ausnutzend wird die Gruppe der piezoelektrischen Materialien als Sensoren eingesetzt. Diese Materialien reagieren bereits auf sehr kleine Dehnungen mit einer Ausrichtung von elektrischen Dipolen, welche als Änderung des elektrischen Feldes erfasst und somit gemessen werden kann. Somit können dynamische und statische Kräfte und Drücke gemessen werden.

Aktuatoren

Aktuatoren können nach Isermann [34] in die drei Hauptgruppen elektromechanische, Fluidenergie und unkonventionelle Aktuatoren unterteilt werden. Die letzte Gruppe entspricht den bereits oben genannten *Smart Materials*.

Die für tragwerkstechnische Anwendungen relevanten *Smart Materials* können in phasen- und formveränderliche Materialien unterteilt werden [74], die dementsprechend als Steifigkeits- oder Dehnungsaktuatoren ausgebildet werden können.

Elektrorheologische oder magnetorheologische Fluide, als Beispiel für phasenveränderliche Materialien, können als Steifigkeitsaktuatoren in Schwingungsdämpfern eingesetzt werden. Bereits seit den 1990er Jahren werden solche semi-aktive Schwingungsdämpfer für das Bauwesen entwickelt und erforscht [33]. Infolge einer Anpassung des elektrischen oder magnetischen Feldes ändern diese Fluide ihre Viskosität und ermöglichen somit eine Adaption der Schwingungsdämpfer auf verschiedene Erregerfrequenzen.

Piezoelektrische Materialien reagieren nicht nur auf Dehnungen mit einer Änderung des elektrischen Feldes, siehe oben, sondern auch umgekehrt. Diesen so genannten inversen piezoelektrischen Effekt ausnutzend können piezoelektrische Materialien als Dehnungsaktuatoren verwendet werden [80]. Sie zeichnen sich dabei durch sehr kurze Reaktionszeiten, eine hohe Präzision und große aufnehmbare Kräfte aus. Die Stellweglängen piezoelektrischer Aktuatoren sind aber auch mit technischen Verstärkungsmaßnahmen (Stapelaktuatoren, Hebelübersetzungen) nur sehr gering, so dass sie als Dehnungsaktuatoren für baupraktische Anwendungen heutzutage noch ungeeignet erscheinen.

Ähnliches gilt für andere formveränderliche *Smart Materials*, wie zum Beispiel elektro- oder chemoaktive Polymere, die infolge einer chemischen Reaktion oder bei Stimulation durch ein elektrisches Feld ihr Volumen ändern. Die möglichen Verformungen und damit verbundenen Stellweglängen sind bei diesen Materialien zwar wesentlich höher als bei den piezoelektrischen, aufgrund ihrer damit verbundenen geringen Festigkeiten werden sie aber eher im biomedizinischen Bereich als im Bauwesen Verwendung finden.

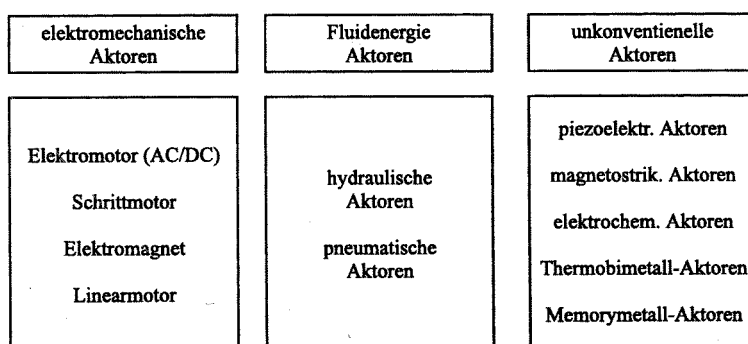


Abb. 2-2: Klassifikation verschiedener Aktuatorprinzipien, Isermann [34]

Die anderen zwei von Isermann definierten Gruppen der Aktuatoren werden auch als herkömmliche Aktuatoren bezeichnet. Sie basieren auf elektromechanischen oder fluidtechnischen Systemen und verfügen über die für das Bauwesen erforderlichen Stellweglängen bei ausreichend hohen Festigkeiten.

Die elektromechanischen Systeme, zu denen Elektro-, Schrittmotoren und auch Elektromagneten zählen, zeichnen sich durch eine große Typenvielfalt aus. Sie bieten eine hohe Positionierungsgenauigkeit und gute dynamische Eigenschaften, sind aber aufgrund ihres Aufbaus schwingungsempfindlich und empfindlich gegenüber hohen Temperaturen.

Die fluidtechnischen Systeme, die sich wiederum in pneumatische oder hydraulische Aktuatoren aufteilen lassen, zeichnen sich durch eine größere Robustheit und höhere Stellkräfte gegenüber den elektromechanischen Systemen aus. Ihr Wirkungsgrad ist jedoch geringer. Da sie so ausgelegt werden können, dass sie nur im dynamischen Zustand Leistung aufnehmen und im statischen Zustand hohe Gegenkräfte mit wenig Leistung halten können, sind sie für Anwendungen im Bauwesen interessant. Die nachteilige eingeschränkte Positioniergenauigkeit kann durch geeignete Regelungsmaßnahmen ausgeglichen werden.

Ebenso wie die Sensoren müssen die Aktuatoren anhand der angestrebten Anwendung ausgewählt werden. Neben den oben bereits genannten Auswahlkriterien – Stellweglängen, Reaktionszeiten, Festigkeit, Genauigkeit, dynamisches Verhalten, Robustheit gegenüber Störeinflüssen und Wirkungsgrad – können bei der Auswahl auch noch folgenden Kriterien eine Rolle spielen: Kosten, Wartung, Einbaugröße, Linearität, Ermüdungsverhalten, Verfügbarkeit der Hilfsenergien (Fluidenergie, elektrische, chemische oder thermische Energie).

Controller bzw. Regelung

Um auf äußere Einflüsse reagieren zu können, benötigt das adaptive System neben den Sensoren und Aktuatoren eine Regelung, die durch den Controller erfolgt. Diese Regelung kann abhängig von der Komplexität des Systems verschieden ausgelegt werden. Für einfachere technische Systeme sind klassische Regelungskreisläufe ausreichend, die auf einem zentralen Prozessor beruhen [33]. Eine Erweiterung stellen die adaptiven bzw. intelligenten Regelungen dar [17]. Bestandteile der intelligenten Regelung können zum Beispiel neuronale Netzwerke sein, die die Funktionsweise von Gehirnen nachbilden und somit lernfähig sind. Ein anderer Bereich der intelligenten Regelung, der unter dem Begriff *Fuzzy Logic* zusammengefasst wird, befasst sich mit dem Umgang mit vagen und unpräzisen Informationen.

Anwendungen und Entwicklungen im Bauwesen

Je nach Fachrichtungen haben sich bei der Entwicklung der adaptiven Systeme in den letzten Jahren verschiedene Schwerpunkte gebildet.

Im Bauwesen scheinen sich dabei neben dem Bereich des Health-Monitorings die Entwicklungen auf einen speziellen Fall von Schwingungsproblemen zu konzentrieren, bei denen sehr große und schwere Körper durch Änderung ihrer Schwingungseigenschaften mittels Gegengewichten kontrolliert werden [33]. Die ersten Konzepte hierzu wurden 1960 von Minai und Kobori vorgestellt [40]. Im Folgenden werden die verschiedenen angewandten Prinzipien kurz beschrieben. Einen Überblick und verschiedene Anwendungsbeispiele geben unter anderem Housner [33], Hirsch [31], Soong und Spencer [79], Sakamoto et al [67] oder Abdel-Rohmann [1].

Nach Hirsch [31] zeichnen sich die adaptiven Systeme im Bauwesen im Vergleich zu anderen Anwendungen durch hohe erforderliche Kontrollkräfte und Aktuatorverformungen ohne Erfordernis einer sehr hohen Genauigkeit aus. Anders als Housner [33] unterscheidet er nicht zwischen passiven, semi-aktiven und aktiven Systemen, siehe oben, sondern zwischen 3 Methoden, mit denen die Schwingungskontrolle erzielt werden kann. Diese können verallgemeinert werden zu: Energiedissipierenden Systemen, als Dehnungs- oder Steifigkeitsaktuatoren ausgebildete Tragwerkselemente oder induzierte pulsierende Lasten.

Die verschiedenen energiedissipierenden Systeme sind nach der Art der Energieumwandlung zu unterscheiden. Bei Schwingungstilgern wird die eingebrachte Energie in kinetische Energie umgesetzt, während sie bei Schwingungsdämpfern in Reibungswärme umgewandelt wird. Für beide Varianten sind sowohl passive oder aktive bzw. semi-aktive Systeme denkbar.

Passive Schwingungstilger, bestehend aus einem Feder-Masse-System (*Tuned Mass Damper* bzw. *Tuned Liquid Damper*), sind meist so eingestellt, dass sie erregte Schwingungen im Bereich der ersten Eigenfrequenz des Bauwerkes tilgen. Liegen die Erreger- oder Bauwerksschwingungen aber in einem anderen Frequenzbereich so können diese passiven Schwingungstilger wirkungslos sein oder sich sogar negativ auf die Schwingungen des Bauwerks auswirken. Diesem kann entweder durch mehrere Feder-Masse-Systeme oder durch eine Anpassungsfähigkeit der Schwingungstilger begegnet werden. Bei aktiven Schwingungstilgern (*Active Mass Damper*) kann hierzu die Masse aktiv bewegt werden, während bei semi-aktiven Schwingungstilgern die Eigenschaften des Feder-Masse-Systems entsprechend den Erfordernissen angepasst werden. Bei Dämpfern, deren Funktion auf einem Hin- und Herschwanen einer flüssigen Masse beruht (*Tuned Liquid Damper*), kann dies zum Beispiel durch die Änderung der Durchflussöffnungen oder der Tankgröße erfolgen.

Passive Schwingungsdämpfer werden bei seismischen Erregungen meist als metallische oder Reibungsdämpfer ausgebildet. Durch eine Veränderung des Reibwiderstandes können solche Reibungsdämpfer semi-aktiv so ausgebildet werden, dass sie das dynamische Verhalten der Struktur positiv beeinflussen. Ähnlich können auch viskoelastische oder viskofluide Dämpfungssysteme, deren Anwendungsbereich eher bei wind- oder verkehrsinduzierten Schwingungen zu sehen ist, semi-aktiv ausgebildet werden: Entweder durch eine Anpassungsfähigkeit der Materialien selbst (elektro- bzw. magnetorheologische Fluide) oder bei viskofluiden Dämpfern auch durch eine mechanische Regelung des Strömungswiderstandes mittels Drosseln oder Klappen.

Die Verwendung aktiver Tragwerkselemente in der Aussteifung wird unter anderem von Soong [78] anhand eines 6-geschossigen realen Gebäudes und von Abdel-Rohmann [1] anhand eines fiktiven 305 m hohen Hochhauses untersucht. Da die aktiven Aussteifungselemente im Gegensatz zu Schwingungstilgern auch im passiven Zustand zum Lastabtrag des Tragwerkes beitragen, sind diese Systeme für einen integralen Ansatz adaptiver Strukturen sehr attraktiv.

Die Schwingungen eines Tragwerks durch zusätzlich induzierte pulsierende Lasten zu reduzieren wurde von Traidá [31] und Masri et al. [48] untersucht, scheint aber keine weitere Bedeutung bei den heutigen Anwendungen zu haben.

Untersuchungen zu adaptiven Tragwerken, die sich nicht primär mit Schwingungsproblemen befassen, sind im Bauwesen weniger häufig:

Verschiedene Autoren, darunter Korvinc und Schlaich [41], Luo, De La Sen et al. [45] und Sobek und Teuffel [75], [76], untersuchen theoretisch bzw. experimentell (Preumont und Bossens [58]) neben der Schwingungskontrolle eine mögliche Verformungskontrolle von Schrägseilbrücken oder abgespannten Fachwerkmasten mittels Aktivierung der Seile.

Fest et al. [21] untersuchen die Verbesserung des Tragverhaltens von Tensegrity-Strukturen mit Dehnungsaktuatoren in den Druckelementen.

Domke [20] stellt einen 10 m langen Testträger zur Verformungskontrolle von Brücken vor, dessen Regelung von Bouten [12] realisiert wurde. Die Verformungskontrolle des Trägers, die durch eine aktive verstellbare Unterspannung erzielt wird, ist als zusätzliches Element integriert, ohne die mögliche Leistungssteigerung des Systems auszunutzen. Als Alternative schlägt Holnicki-Szulc [32] für Bahnbrücken eine aktive Lagerung der Schienen vor, die die Verformungen des unveränderten passiven Tragwerks ausgleichen soll.

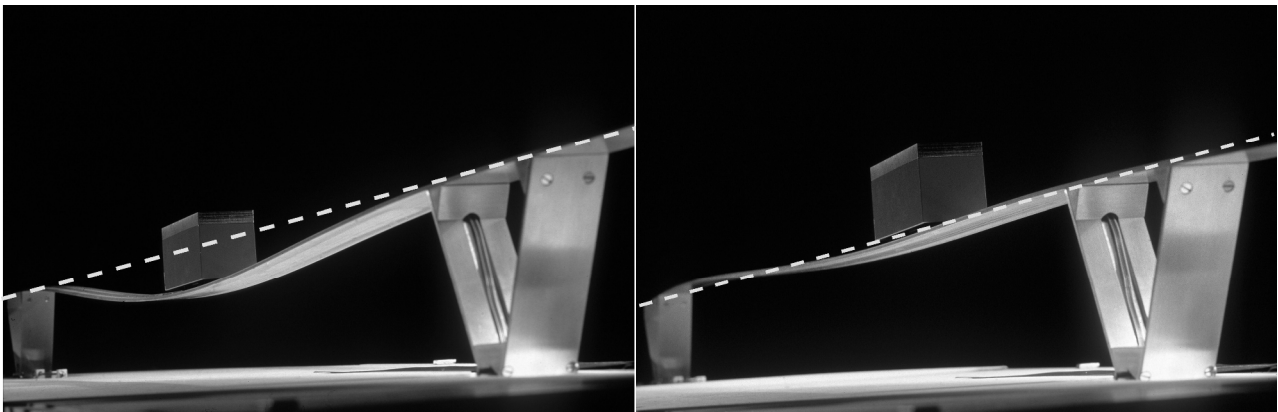


Abb. 2-3: „Stuttgarter Träger“ im passiven und adaptiven Zustand

Welche Querschnittsreduktionen bzw. Leistungssteigerungen in einem adaptiven Tragwerk möglich sind, zeigt der im Rahmen des Forschungsbereiches „Adaptive Tragwerke“ 2002 entstandene „Stuttgarter Träger“ auf [77]. Der 1,60 m weit spannenden Träger mit einer Bauhöhe von 3 mm wird durch eine induzierte Auflagerverschiebung so adaptiert, dass die im Lastangriffspunkt auftretende Verformung immer gleich Null ist.

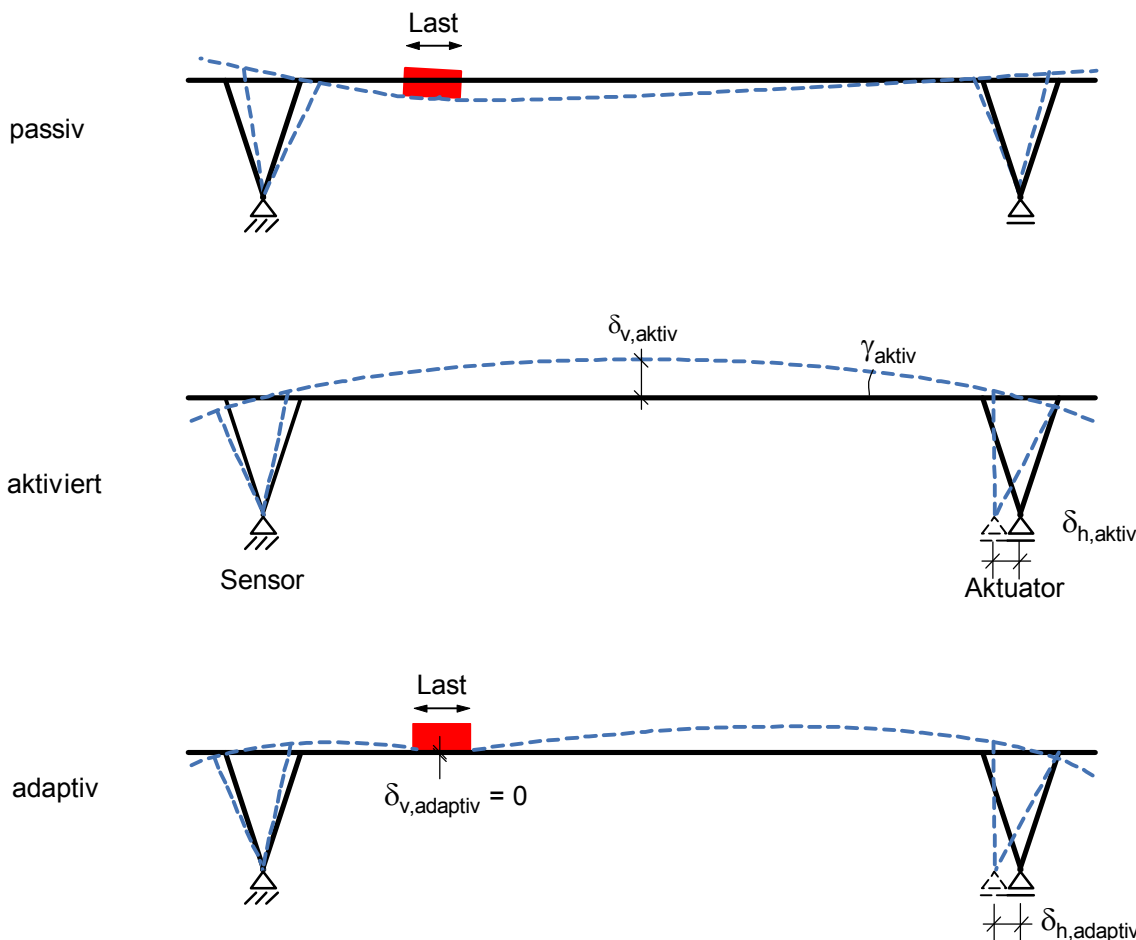


Abb. 2-4: Schematische Darstellung des „Stuttgarter Trägers“ in den drei verschiedenen Beanspruchungszuständen

Überlegungen, bei denen die aktiven Elemente und ihre Wirkungsweise von Anfang an mit in den Design-Prozess der Struktur integriert werden, sind noch rar: Weber [90], Furuya [24] und andere befassen sich mit der optimalen Positionierung von Aktuatoren in Stabtragwerken. Holnicki-Szulc [32] untersucht mit der Methode der virtuellen Verschiebungen die optimale Lage von Aktuatoren in Stabtragwerken zur Kontrolle von Schwingungen. Grundlegender ist der Ansatz von Teuffel [84]. Er stellt für statische Lasten ein Entwurfskonzept für adaptive Stabtragwerke vor, mit dem gewichtsminimale adaptive Tragwerke unter Beibehaltung von Spannungs- und Verformungskriterien auf Basis des Lastpfadmanagements entworfen werden können.

Adaptive Flächentragwerke

Im Bereich der flächigen Tragwerke sind die Forschungen hinsichtlich adaptiver Strukturen weniger weit vorangeschritten als bei den Stabtragwerken. Aus den Bereichen der Luft- und Raumfahrt und des Maschinenbaus werden im Folgenden einige Untersuchungen vorgestellt, die die Vielfältigkeit der untersuchten Problemstellungen und Lösungsansätze aufzeigen:

Ein Großteil der Untersuchungen zu adaptiven Flächentragwerken befasst sich mit der Regelung flächiger Aktuatoren, die zur Schwingungsreduktion auf Scheiben oder Schalen befestigt bzw. in diese integriert sind.

Einerseits werden hierfür finite Elemente entwickelt, die eine Mehrfeldberechnung und damit die Optimierung der Regelung solcher Systeme ermöglichen. Die in diesem Rahmen betrachteten Aktuatoren sind entweder flächig und bestehen aus piezoelektrischen oder anderen smarten Materialien (Balamurugan und Narayanan [3], Gupta et al. [28]). Oder sie sind aus Verbundstoffen mit integrierten piezoelektrischen Fasern oder Layern gefertigt (Gabbert et al. [25], Ray et al. [61], [62]).

Andererseits gibt es eine Vielzahl von Untersuchungen zur optimalen Lage und Form der Aktuatoren und Sensoren, die sich maßgeblich in zwei Hauptgruppen unterteilen lassen:

Die erste Gruppe befasst sich mit der Ermittlung der optimalen Lage der Aktuatoren oder Sensoren bei festgelegter Form. Kang et al. [36] oder Yang et al. [97] ermitteln die optimale Lage eines Aktuators bzw. Sensors entlang eines Kragträgers zur Schwingungskontrolle. Zur Lösung der Optimierungsaufgabe verwenden sie einfache Suchmethoden. Abdel-Motagaly et al. verwenden in [1] Sensitivitätsanalysen, um die optimale Lage von Aktuatoren zur Reduktion des Flatterns von Paneelen infolge von Überschallströmungen zu ermitteln. Alternativ werden genetische Algorithmen angewandt, um die optimale Lage von Aktuatoren zu bestimmen. Kapania und Sheng [37] berechnen zum Beispiel auf diese Weise 30 Aktuatorpositionen aus 193 Möglichen, um die thermischen Verformungen eines dünnen sphärischen Spiegels zu minimieren.

Die zweite Gruppe beschränkt sich nicht allein auf die Ermittlung der optimalen Lage der Aktuatoren, sondern ermittelt auch deren optimale Form oder Topologie: Silva, Kikuchi et al. [71], [72] optimieren zum Beispiel entweder die Topologie piezoelektrischer Elemente oder die angeschlossener passiver Elemente, die die piezoelektrischen Verformungen verstärken sollen. Somit kann zum Beispiel die optimale Topologie von akustischen Wandlern oder von Dehnungsaktuatoren (*Flextensional Actuators*) für eine bestimmte gewünschte Frequenz bzw. Verformung ermittelt werden.

Tanaka et al. [83] bestimmen mittels Topologieoptimierung die Verteilung von konventionellem und piezoelektrischem Material zur Erzielung einer aktiven kraftabhängigen Steifigkeit einer Scheibe. Sie gehen hierbei von passiven Scheiben aus, die sich unter einer Belastung so verformen, dass sich ihre Topologie, zum Beispiel durch Schließen einer Öffnung, und somit ihre Steifigkeit ändert. Die Einbettung aktiver Materialien erlaubt die aktive Steuerung solcher Topologie- bzw. Steifigkeitsänderungen und ermöglicht somit eine aktive Beeinflussung der Steifigkeit.

Einen anderen Ansatz wählen Sun, Tong et al. [81] für sehr kleine Platten, um die kompliziert zu regelnde Ansteuerung verschiedener piezoelektrischer Elemente, die sich gegenseitig beeinflussen können, zu vermeiden. Sie bestimmen die Verteilung der Dicke einer piezoelektrischen Platte so, dass sie mit einer über den gesamten Aktuator konstanten Aktivierungsspannung verschiedene Erregerschwingungen dämpfen kann. Für die statische Verformungskontrolle größerer Systeme schlagen Sun und Tong [82] hingegen vor, eine Grundplatte schachbrettartig mit piezoelektrischen Aktuatoren zu belegen, die jeweils einzeln angesteuert werden können.

Die Vielzahl der Untersuchungen zur Schwingungs- bzw. Verformungskontrolle flächiger Tragwerke, von denen hier nur die Wichtigsten aufgezeigt werden können, wird von Palenterä, Sensharma und Haftka [57] ergänzt, die anhand eines Beispiels die mögliche Spannungsreduktion dehnungsaktivierter Scheiben untersuchen. Sie ermitteln analytisch für einen Lastfall und einen gewünschten Wirkungsgrad die erforderliche Aktivierung einer Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt. Die dazugehörige vorgestellte numerische Optimierung wird zur Überprüfung der analytischen Lösung durchgeführt. Sie kann nicht ohne weiteres verallgemeinert werden. Der Verlauf der induzierten Dehnungen wird von Palenterä et al. iterativ mit verschiedenen Unterteilungen, für die jeweils eine konstante Dehnung angesetzt wird, ermittelt. Dieser sehr effektive Ansatz der Dehnungsaktivierung zur Reduktion der Spannungen wird in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert. Zum einen wird die analytische Lösung der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt für allgemeine Beanspruchungen und variable Aktivierungsbereiche hergeleitet und aufgestellt (siehe Kapitel 4). Zum anderen wird eine allgemeine numerische Lösung vorgeschlagen, die die Berechnung anderer und komplizierterer Systeme ermöglicht (siehe Kapitel 5).

Die dargelegten Beispiele zeigen das Potential adaptiver Systeme für Flächentragwerke auf. Dabei konzentriert sich die Forschung auf Systeme mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren zur Schwingungs- bzw. Verformungskontrolle. Die Beanspruchungen in den Flächentragwerken und/oder den Aktuatoren werden dabei nicht weiter betrachtet. Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Konzept zum Entwurf und zur Berechnung von Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren zur Adaption der Spannungen (siehe Kapitel 6) ergänzt somit die bestehenden Untersuchungen um diesen Aspekt.

Die in Kapitel 2.2 als dritte Möglichkeit zur Ausbildung von Aktuatoren in Flächentragwerken aufgezeigten aktiven Auflagerverschiebungen werden in Kapitel 8 anhand eines Beispiels untersucht. Obwohl diese Art der Aktivierung, wie die Untersuchungen zeigen, sehr effektiv und einfach zu realisieren ist, scheint sie bisher in der Forschung keine Beachtung zu finden. Das in der vorliegenden Arbeit aufgezeigte Beispiel möchte hierzu einen Anstoß darstellen.

3 Strukturoptimierung

3.1 Grundlagen

Ausgehend vom dem Ziel, ein Tragwerk mit minimalem Gewicht, mit größter Steifigkeit oder bester Ausnutzung der Querschnitte zu entwerfen, ist das Forschungsgebiet der Strukturoptimierung entstanden. Seit 1904, mit den Arbeiten von Michell [53] beginnend, verknüpft es dabei die Verfahren der mathematischen Optimierung mit der Tragwerksberechnung [10].

Das Optimum stellt die beste möglich Lösung für ein gestelltes Problem, welches durch ein Ziel und verschiedene einschränkende Randbedingungen definiert wird, dar. In der mathematischen Optimierung werden die einschränkenden Randbedingungen als Nebenbedingungen und das Ziel über eine Zielfunktion, die minimiert oder maximiert wird, mathematisch beschrieben. Die verschiedenen Verfahren der mathematischen Optimierung werden in der Literatur ([10], [9], [29], [85]) ausführlich beschrieben. In Abschnitt 3.2 wird deswegen nur ein kurzer Überblick gegeben werden.

Die Beschreibung der Zielfunktion und der Randbedingungen erfolgt in der mathematischen Optimierung in Abhängigkeit von Entwurfsvariablen, die in der Strukturoptimierung die Geometrie, die Querschnitts- und Materialkennwerte usw. umfassen können.

Abhängig von der Wahl der Entwurfsvariablen unterteilen Bletzinger und Kimmich [10] die Strukturoptimierung in drei hierarchische Stufen: In der obersten Stufe wird für gegebene Lasten nach einer optimalen Konfiguration aus verschiedenen Tragwerkstypen gesucht: Fachwerk – Biegeträger; Stabtragwerk – Flächentragwerk, usw. In der zweiten Stufe, der Entwurfsoptimierung, wird der gewählte Tragwerkstyp hinsichtlich seiner Topologie und/oder seiner Geometrie optimiert. Die Querschnittsoptimierung, als dritte Stufe, dient schließlich zur optimalen Auslegung der Tragwerkselemente für den gegebenen Entwurf.

Etwas anders fasst Wiedemann die Definitionen in [95]. Er unterscheidet zwischen den drei Variationsebenen Funktion, Technologie und Geometrie. Die Ebene der Funktion ist mit der Suche nach der optimalen Konfiguration von Bletzinger und Kimmich gleichzusetzen, und die Ebene der Geometrie fasst die Bereiche Entwurfs- und Querschnittsoptimierung zusammen. Der Aspekt der Technologie erweitert hingegen die oben genannten Stufen um die Frage nach Werkstoffen, Bauweisen und Fertigung.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit beschränken sich auf die von Wiedemann definierte Ebene der Geometrie, insbesondere Aspekte der Formoptimierung und Topologieoptimierung werden hierbei eine Rolle spielen.

Für Formoptimierungen wird häufig, so wie auch in der vorliegenden Arbeit, auf formbeschreibende Funktionen zurückgegriffen. Diese Funktionen ermöglichen es Computern bzw. Programmen Kurven und Flächen anzunähern bzw. abzubilden. Einen kurzen Überblick über die wichtigsten Methoden der Formbeschreibung gibt Abschnitt 3.3.

3.2 Methoden der Optimierung

Ein Optimierungsproblem wird in der mathematischen Optimierung in der Form:

$$(3-1) \quad \begin{aligned} & \text{Minimiere bzw. maximiere } f(\mathbf{x}) \\ & \text{Unter Berücksichtigung von:} \quad h_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } i=1, \dots, m_e \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ für } j=m_e+1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \mathbf{x} \in S \{ \mathbf{x}_{li} \leq \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_{ui}; i=1, \dots, n \} \subset R^n \end{aligned}$$

dargestellt.

Die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ hängt hierbei von den Entwurfsvariablen \mathbf{x} ab, welche im Entwurfsraum R^n definiert sind. Die Nebenbedingungen können in Gleichheitsnebenbedingungen $h_i(\mathbf{x})$, Ungleichheitsnebenbedingungen $g_j(\mathbf{x})$ und die oberen und unteren Schranken \mathbf{x}_{ui} und \mathbf{x}_{li} unterteilt werden. Die Schranken werden jedoch aufgrund ihrer mathematisch äußerst einfachen Formulierung getrennt von den übrigen Nebenbedingungen betrachtet und zur besseren Unterscheidung als Restriktionen bezeichnet.

Optimierungsprobleme, bei denen mehrere Zielfunktionen gleichzeitig behandelt werden, stellen eine Sonderform dar, welche im Bereich der Multikriterienoptimierung oder der Pareto-Optimierung behandelt werden. Für ihre Lösung werden zumeist Kompromissbedingungen so formuliert, dass sie in der in (3-1) dargestellten Form abgebildet werden und mit den üblichen Methoden der Optimierung gelöst werden können.

Entscheidend für die Wahl der Optimierungsmethode sind die Form der Zielfunktion, der Nebenbedingungen und die Komplexität der gestellten Aufgabe. Es wird zwischen den analytischen und numerischen Methoden unterschieden.

Die analytischen Methoden, die auf Basis der Arbeiten von Michell bis 1940 verstärkt entwickelt wurden ([10], [88]), haben heute an Bedeutung verloren, da sie meist nur für kleine und einfache Probleme anwendbar sind. Ihre Vor- und Nachteile werden in Kapitel 4 und 5 und anhand des Beispiels der dehnungsaktivierten Scheibe mit Ausschnitt noch verdeutlicht werden.

Die numerischen Methoden können unabhängig von der Komplexität des Problems verwendet werden. Sie lösen die Optimierungsaufgabe iterativ und näherungsweise und ihre Ursprünge gehen auf Schmit [69] zurück, der um 1960 als Erster

...mit Hilfe von Computern die Methoden der mathematischen Optimierung auf die Probleme der Strukturoptimierung anwandte [10].

Im Rahmen der numerischen Methoden bildeten sich zwei Entwicklungsrichtungen heraus. Um Schmit [69] wurden die Verfahren der *mathematischen Programmierung* weitergeführt, die zu Anfang aufgrund der geringen nutzbaren Rechenkapazitäten in ihrer Wirkungsweise eingeschränkt und dementsprechend nur bei kleineren Problemen mit wenigen

Entwurfsvariablen bzw. Nebenbedingungen wirkungsvoll waren. Eine Gruppe um Berke und Khot ([6]) entwickelte deswegen die sehr effizienten Verfahren der *Optimalitätskriterien*, die aber in den einfachen Versionen nicht unbedingt zum Optimum führten.

Diese zu Anfang sehr gegensätzlichen Ansätze haben sich, wie Fleury 1979 [22] darstellte, im Rahmen ihrer Entwicklung wieder angenähert. Weiterhin werden aber die Verfahren der Optimalitätskriterien aufgrund ihrer hohen Effizienz gerade bei sehr großen Problemen mit vielen Entwurfsvariablen eingesetzt.

Mathematische Programmierung

Die Verfahren der mathematischen Programmierung sind abhängig von der Form des zu lösenden Problems. Es wird zwischen linearen und nichtlinearen Problemen unterschieden.

Bei linearen Problemen können sowohl die Zielfunktion als auch alle Nebenbedingungen in einem linearen Zusammenhang zu den Entwurfsvariablen dargestellt werden. Technische Probleme können allerdings selten linear beschrieben werden. Somit liegen meistens nichtlineare Probleme vor, bei denen die Zielfunktion und/ oder die Nebenbedingungen einen nichtlinearen Zusammenhang beschreiben. Die bekannten Lösungsverfahren für lineare Probleme, wie das Simplex-Verfahren, sind jedoch sehr effektiv. Deswegen wird für nichtlineare Probleme, zum Beispiel durch Inversion der Entwurfsvariablen, eine Linearisierung angestrebt.

Weiterhin wird zwischen unbeschränkten und beschränkten Problemen unterschieden. Liegen keine Nebenbedingungen oder Schranken vor ist das Problem unbeschränkt, andernfalls beschränkt.

Das letzte Unterscheidungsmerkmal bildet die Anzahl der Entwurfsvariablen. Probleme mit nur einer Entwurfsvariablen werden als eindimensional bezeichnet, alle anderen als mehrdimensional. Eindimensionale Probleme haben in der Strukturoptimierung nur eine sehr geringe Bedeutung. Viele Verfahren der mathematischen Programmierung für mehrdimensionale Probleme greifen jedoch auf die Lösungsverfahren eindimensionaler Probleme zurück, um Schrittweiten für gewählte Suchrichtungen zu bestimmen.

Verfahren für unbeschränkte Probleme

Die eindimensionalen Verfahren für unbeschränkte Probleme, die auch unter dem Begriff *Line Search* bekannt sind, unterscheiden sich in ihrem Aufwand und ihrer Genauigkeit. Je nachdem, ob sie auf Informationen aus den Ableitungen der Zielfunktion zurückgreifen oder nicht. Die einfachsten Verfahren, die Einschachtelungsverfahren, greifen nur auf die Werte der Zielfunktion zurück. Bei den Interpolationsverfahren verwenden einige, wie die Lagrange- oder die Hermite-Interpolation, ebenso nur die Werte der Zielfunktion. Während andere auf Informationen aus der ersten oder sogar der zweiten Ableitung (Newton-Raphson-Verfahren) zurückgreifen.

Auch die Verfahren für mehrdimensionale unbeschränkte Probleme unterscheiden sich durch die Verwendung der Ableitung der Zielfunktion. Reine Suchmethoden, wie die Koordinatenstrategie, benötigen nur die Informationen aus der Zielfunktion. Gradientenverfahren, wie die Methode des steilsten Abstiegs, arbeiten mit den Werten der Zielfunktion und deren ersten partiellen Ableitungen. Die Newton-Methoden stellen die aufwendigsten Verfahren für mehrdimensionale beschränkte Probleme dar, da sie zusätzlich auf die zweiten partiellen Ableitungen zurückgreifen. Die reinen Suchmethoden und die Gradientenverfahren unterscheiden sich lediglich in der Festlegung der Suchrichtung. Bei den Suchmethoden werden hierfür vorab festgelegte Regeln verwendet, während die Gradientenmethoden die Suchrichtung anhand der ersten partiellen Ableitung festlegen. Anschließend wird mit einem *Line Search* die Schrittweite in der Suchrichtung bestimmt.

Die Newton-Methoden versuchen diese beiden Schritte durch eine quadratische Approximation in einem Schritt zu lösen. Da das Aufstellen der Matrix der zweiten partiellen Ableitung meist sehr aufwendig und deren erforderliche Invertierung teilweise unmöglich ist, konzentrieren sich verschiedene Verfahren, die als Quasi-Newton-Methoden bekannt sind, auf die Überwindung dieses Nachteils. Sie nähern im Laufe der Iteration die Hesse-Matrix oder auch ihre Inverse durch einen geeigneten Algorithmus an. Das von Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno 1970 vorgestellte Verfahren (BFGS-Verfahren) gilt hierbei als eines der effektivsten [49].

Die Wahl des Optimierungsverfahrens hängt stark von den Rechenzeiten der Iterationsschritte ab. Der Mehraufwand für die Berechnung der partiellen Ableitungen kann gerade bei großen Finiten-Element-Systemen durch die geringere Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte und somit der Neuberechnungen des Systems ausgeglichen werden.

Alle vorgenannten Verfahren für mehrdimensionale Probleme, die unter dem Begriff deterministische Methoden zusammengefasst werden können, zeichnen sich durch das gleiche prinzipielle Vorgehen aus: Ausgehend von einem Startpunkt wird in jedem Iterationsschritt eine Suchrichtung und eine Schrittweite bestimmt. Der gefundene Punkt wird im nächsten Iterationsschritt zum Startwert, usw.. Durch dieses Vorgehen bergen die deterministischen Methoden eine mehr oder weniger große Gefahr, in einem lokalen Minimum stecken zu bleiben.

Diese Gefahr versucht eine andere Verfahrensklasse, die heuristischen Methoden, zu überwinden. Die heuristischen Methoden unterscheiden zwischen einer reinen Zufallssuche, zu der die Monte-Carlo-Methode zählt, oder der sequentiellen Zufallssuche, die versucht, Wiederholungen zu vermeiden. Hierzu gehört die Gruppe der Evolutionsstrategien.

Verfahren für beschränkte Probleme

Die meisten Probleme der Strukturoptimierung sind beschränkt. Zur Lösung dieser Probleme greifen die Verfahren der beschränkten Optimierung auf die gängigen Verfahren der unbeschränkten Optimierung zurück. Hierzu passen sie entweder die Zielfunktion so an, dass sie die Problemstellungen in ein unbeschränktes Problem überführen (Penalty- bzw. Lagrange-Verfahren). Oder sie variieren bei Antreffen einer Nebenbedingung die Suchrichtung (Methode der zulässigen Richtungen).

Die Lagrange-Verfahren versuchen dabei das Optimierungsproblem durch Lösen der notwendigen Bedingung für Optimalität, der Kuhn-Tucker-Bedingungen, zu lösen. Die sich ergebenden Gleichungssysteme werden hierbei mit Newton- bzw. Quasi-Newton-Methoden gelöst. Bekannte Vertreter der Lagrange-Verfahren sind die Verfahren der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP-Verfahren) [9], die die Kuhn-Tucker-Bedingungen durch Lösen eines quadratischen Unterproblems mit linearen Nebenbedingungen lösen.

Die dualen Methoden gehen ähnlich wie die Lagrange-Methoden vor. Bei ihnen werden jedoch nur die Lagrange-Multiplikatoren als Optimierungsvariablen betrachtet, und die Variablen des Ursprungsproblems werden durch Rückrechnung bestimmt. Somit reduziert sich die Anzahl der Entwurfsvariablen signifikant, womit der Nachteil der Verfahren der mathematischen Programmierung gegenüber den Optimalitätskriterien bei großen Problemen ausgeglichen wird.

Optimalitätskriterien

Die Methoden der Optimalitätskriterien werden im Vergleich zur mathematischen Programmierung als indirekte Verfahren bezeichnet, da sie die Entwurfsvariablen auf Basis eines vorab definierten Optimalitätskriteriums neu bestimmen. Dies charakterisiert auch den grundlegenden Unterschied zwischen den beiden Ansätzen, wie Haug, Arora [29] und Berke [6] feststellen: Die Verfahren der mathematischen Programmierung konzentrieren sich darauf, Informationen über die direkte Umgebung um den laufenden Iterationspunkt herum zu ermitteln, um so eine neue Suchrichtung und Schrittweite zu bestimmen; die Methoden der Optimalitätskriterien hingegen versuchen die Bedingungen für das Optimum zu bestimmen und dieses dann durch Anpassung der Entwurfsvariablen zu erfüllen. Durch dieses Vorgehen können sich die Verfahren der Optimalitätskriterien meist in wenigen Iterationsschritten dem Optimum annähern und sind somit sehr effizient. Der Nachteil der Optimalitätskriterien ist darin begründet, dass für jede neue Problemstellung die Optimalitätskriterien neu hergeleitet werden müssen. Sie stellen also jeweils eine spezielle Lösung eines Problems dar und haben somit eine geringere Allgemeingültigkeit als die Verfahren der mathematischen Programmierung.

Bei der Ableitung der Optimalitätskriterien ist es erforderlich, die am Optimum aktiven Nebenbedingungen zu kennen und zu erfassen. Üblicherweise erfolgt dies über die Kuhn-Tucker-Bedingungen und die entsprechend zu ermittelnden Lagrange-Multiplikatoren, die für passive Nebenbedingungen den Wert 0 annehmen.

Die Verfahren, die als Optimalitätskriterium intuitiv gewählte Ansätze verwendeten, sind zwar einfach aufzustellen und iterieren auch bei einer hohen Anzahl von Entwurfsvariablen meist sehr schnell, sie führen aber nicht zwingend zu einem Optimum. Hierzu zählt zum Beispiel das *Fully Stressed Design*, das nur für statisch bestimmte Tragwerke zum globalen Optimum führt. Weiterhin können Ansätze, die auf der Beobachtung natürlicher Leichtbaukonstruktionen beruhen, dieser Gruppe zugeordnet werden. Hierzu gehören zum Beispiel die um Mattheck herum entwickelten Verfahren *CAO (Computer Aided Optimization)* und *SKO (Soft Kill Option)*, die die natürlichen Wachstumsprozesse von Holz und/oder Knochen nachbilden ([51], [52], [4]).

Die generalisierten Verfahren der Optimalitätskriterien hingegen verwenden das geforderte Ziel, wie das minimale Gewicht, explizit als Zielfunktion. Das Aufstellen der Optimalitätskriterien erfolgt über die Kuhn-Tucker-Bedingungen, wobei der Zusammenhang zwischen den Nebenbedingungen und den Entwurfsvariablen auf Grundlage der virtuellen Arbeit dargestellt wird. Auf Grundlage dieser generalisierten Form der Optimalitätskriterien zeigt Fleury 1979 die Gemeinsamkeiten zwischen den dualen Methoden der mathematischen Programmierung und den Optimalitätskriterien auf.

Die um Berke und Khot entwickelten, als *Discretized Optimality Criteria (DOC)* bezeichneten, Methoden verbanden diesen generalisierten Ansatz mit der Finiten Element Methode. Die DOC-Methoden erwiesen sich bei Anwendung auf große Probleme mit Verschiebungsrandbedingungen als sehr effektiv. Problematisch wird, wie auch Berke und Khot feststellen, der Umgang mit Spannungsrandbedingungen, wofür sie drei verschiedene Ansätze vorschlagen ([6], [38]): Die ersten zwei das *Fully Stressed Design* und die *Uniform Strain Energy Density* greifen dabei auf intuitive Ansätze zurück, und führen somit nicht unbedingt zu einem Optimum. Der dritte Ansatz, der auf einem Ersetzen der Spannungsrandbedingung durch eine äquivalente Verschiebungsrandbedingung beruht, ist ein korrektes Optimalitätskriterium. Er erfordert aber, vor allem bei vielen aktiven Spannungsrandbedingungen, einen sehr viel höheren Rechenaufwand.

Die Formulierung der Optimalitätskriterien auf Basis des Kraftgrößenverfahrens stellt, wie Gelattly, Thom und Berke aufzeigen ([6], [26]), für den Umgang mit Spannungsrandbedingungen eine Lösung dar.

Dieser Ansatz wird von Rozvany und Zhou streng von den DOC-Methoden unterschieden und als *Continuum-Based Optimality Criteria (COC)* Methode bezeichnet. Sein Hauptmerkmal ist neben der Formulierung auf Basis des Kraftgrößenverfahrens (Flexibility Formulation) die explizit als Gleichheitsnebenbedingungen formulierten analytischen Gleichungen ([66], [99], [100]). Algorithmen, die diese Methoden mit der Finiten Element Berechnung verbinden, werden von Zhou als *Discretized Optimaliy Cirteria (DCOC)* Methoden bezeichnet.

Die DCOC-Methoden, die ebenso von Sigmund, Bendsøe, Ollhoff, Maute und vielen anderen ([5], [70]) angewandt werden, bezeichnen das System der äußeren Lasten als reales System und das virtuelle Lastsystem als das Adjungierte. Von Bendsøe und Sigmund werden die DCOC-Methoden maßgeblich für selbst-adjungierende Probleme verwendet, also für Systeme, bei denen das adjungierte Lastsystem bei der Herleitung der

Optimalitätskriterien verschwindet. Bei nicht-selbstadjungierenden Systemen stellen aus ihrer Sicht die Verfahren der mathematischen Programmierung einen direkteren Weg zum Erreichen von Resultaten dar [5]. Rozvany und Zhou dagegen entwickeln einen Algorithmus zur Lösung von Problemen mit Spannungsrandbedingungen und einer Verschiebungsrandbedingung. Angewandt auf ein solches Problem zeigen sie, dass auch für nicht-selbstadjungierende Systeme die DCOC- Methoden eine sehr hohe Effizienz haben können [99].

In der vorliegenden Arbeit verwendete Methoden der Optimierung

Die Wahl der Optimierungsmethode hängt maßgeblich von der Größe des Problems, der Form der Zielfunktion (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Linearität) und der Nebenbedingungen ab. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden dementsprechend verschiedene Verfahren angewandt:

Die Ermittlung der Lage diskreten Dehnungsaktuatoren in Kapitel 6 erfolgt mittels einer Topologieoptimierung. Aufgrund der hohen Anzahl der Entwurfsvariablen und den zu erfüllenden Spannungsrandbedingungen werden zur Lösung dieser Problemstellung die Optimalitätskriterien nach der DCOC-Methode hergeleitet. Somit kann der von Zhou in [99] vorgestellte Algorithmus verwendet werden.

Die Ermittlung der Verläufe der Aktivierung bei den dehnungsaktivierten Scheiben, siehe Kapitel 5, entspricht einer Formoptimierung. Hierfür sind hinsichtlich der Zielfunktion optimale Funktionsverläufe zu ermitteln, die eine gesuchte meist kontinuierliche Form beschreiben.

Die Entwurfsvariablen, die zum Beispiel den Verlauf der Dicke einer Scheibe repräsentieren können, nehmen diskrete Werte an, wenn die Struktur mit einem diskretisierenden Verfahren, wie der finiten Elementmethode, berechnet wird. Um die Kontinuität einer gesuchten Form zu erreichen, müssen diese diskreten Entwurfsvariablen entsprechend gefasst bzw. eingeschränkt werden. Hierzu werden meist formbeschreibende Methoden, die in Kapitel 3.3 vorgestellt werden, verwendet. Sie ersetzen die diskreten Werte der finiten Elemente durch eine geringere Anzahl an Entwurfsvariablen, die die Zielfunktion beschreiben. Mit diesen Variablen erfolgt anschließend die Optimierung. Die diskreten Werte je finitem Element, die für die Neuberechnung der Systeme erforderlich sind, werden anschließend in jedem Iterationsschritt durch Rückrechnung neu bestimmt. Somit kann die Anzahl der Variablen deutlich reduziert und die üblichen Methoden der mathematischen Programmierung können auch im Bereich der Formoptimierung angewandt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieses Vorgehen gewählt.

3.3 Methoden der Formbeschreibung

Die Methoden der Formbeschreibung, die auch unter dem Begriff *Computer Aided Geometric Design (CAGD)* zusammengefasst werden, befassen sich mit der Annäherung und Abbildung von Kurven und Flächen, die mit Hilfe von Computern bzw. Programmen bearbeitet werden sollen [11].

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Abbildung von Kurven und deren Eigenschaften sind zum Beispiel von Böhm, Farin und Kahmann [11], Bletzinger [9], Ding [19] oder Braibant und Fleury [13] umfassend beschrieben worden. Deswegen sollen hier nach einem kurzen Überblick nur die für diese Arbeit wesentlichen Aspekte genannt werden.

Die Hauptprinzipien des CAGD bestehen in der Aufteilung der zu beschreibenden Kurven oder Flächen in Segmente, die dann jeweils einzeln behandelt werden. Kurven werden hierbei mit Knoten, Flächen mit Knotenlinien und oder mittels Triangularisierung segmentiert.

Für eine allgemeine Beschreibung der einzelnen Segmente werden lokale Koordinaten u , v so eingeführt, dass jedes Segment ein Abbild des Einheitsintervalls $u \in [0,1]$ und $v \in [0,1]$ ist.

Ein wichtiges und einfaches Instrument des CAGD ist die lineare Interpolation. Mit dieser wird, zum Beispiel, aus zwei Punktepaaren $r_{0,0}$, $r_{1,0}$ und $r_{0,1}$, $r_{1,1}$ die formbeschreibende Funktion eines hyperbolischen Paraboloids gegeben:

$$(3-2) \quad \mathbf{r}(u,v) = (r_{0,0}(1-u) + r_{1,0}u)(1-v) + (r_{0,1}(1-u) + r_{1,1}u)v$$

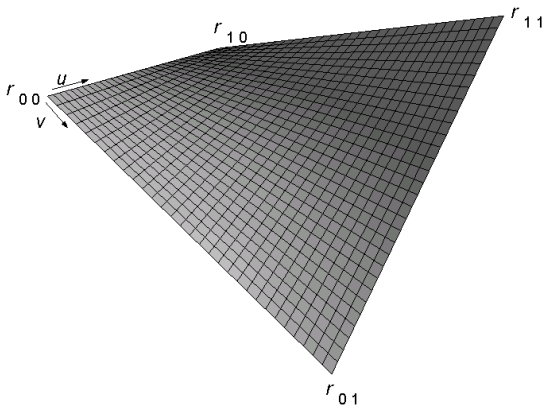


Abb. 3-1: Hyperbolisches Paraboloid

Die lineare Interpolation stellt einen Polynomansatz erster Ordnung dar. Polynomansätze erster und höherer Ordnung sind auch unter dem Begriff Lagrange-Elemente bekannt. Ein Nachteil der Interpolation mit Polynomansätzen, vor allem bei Ansätzen höherer Ordnung, ist das mögliche ungewünschte Oszillieren der Näherungskurven. Zudem ist die Formulierung von Kontinuitätsbedingungen zwischen einzelnen Segmenten bei diesen Ansätzen schwierig, da die Tangentenvektoren im Allgemeinen nicht direkt mit den Werten der Kontrollpunkte berechnet werden können.

Eine andere Möglichkeit zur Approximation von Kurven bzw. Flächen stellen die Bézier-Splines dar. Deren Approximationsvorschriften wurden von P. de Casteljau (um 1959) und P. Bézier (um 1962) unabhängig voneinander für die Automobilindustrie entwickelt [11]. Sie werden für Flächen mit

$$(3-3) \quad \mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{m!}{(m-i)!i!} \frac{n!}{(n-j)!j!} u^i (1-u)^{m-i} v^j (1-v)^{n-j} \mathbf{r}_{ij}$$

mit u, v lokale Koordinaten $u, v \in [0,1]$

m, n Grad der Polynome

r_{ij} Kontrollknoten

angegeben.

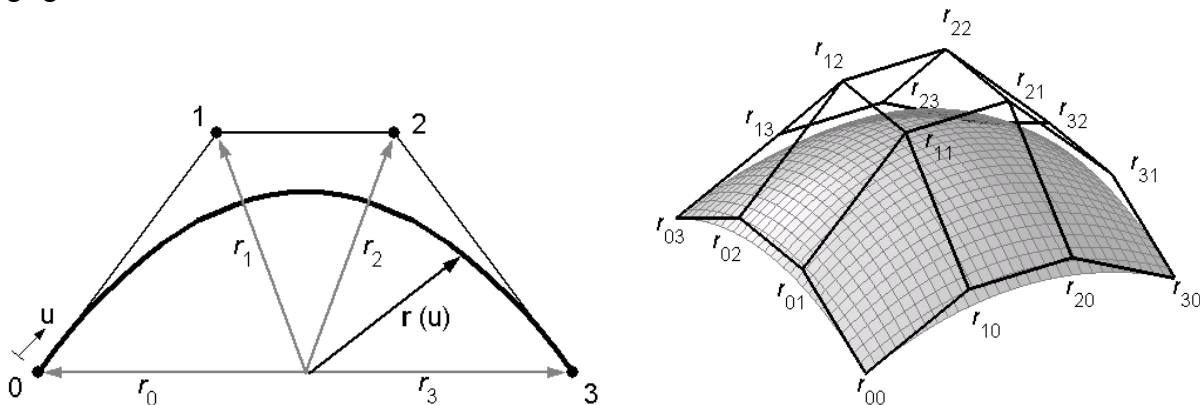


Abb. 3-2: Ein- und zweidimensionaler Bézier-Spline (kubisch)

Die Bézier-Splines zeichnen sich dadurch aus, dass die Kontrollpunkte nur am Kurvenanfang und -ende bzw. in den Eckpunkten der Fläche mit der zu approximierenden Form zusammenfallen. Die anderen Kontrollpunkte bilden ein charakteristisches Polynom, an dessen Geometrie für niedrige Grade des Polynoms bereits die resultierende Form abgeschätzt werden kann. Deswegen ist der am häufigsten verwendete Bézier-Spline der Kubische mit dem niedrigsten möglichen Polynomgrad n bzw. $m = 3$.

Bézier-Splines weisen globale Eigenschaften auf, das heißt eine Änderung eines Kontrollknotens wirkt sich auf die gesamte Kurve aus.

Da der Tangentenvektor an Anfang und Ende des Splines durch den Differenzvektor zwischen den Anfangs- bzw. Endknoten gebildet wird, sind die Bézier-Splines bei der Formulierung von Kontinuitätsbedingungen den Lagrange-Elementen vorzuziehen. Ebenso wie bei den Lagrange-Elementen bestimmt die Anzahl der Kontrollpunkte den Grad des Polynoms. Somit sind für die Approximation komplexe Geometrien, deren Beschreibung viele Kontrollpunkte erfordern, entweder Polynome hohen Grades oder eine kleinteilige Segmentierung der Geometrie erforderlich. Da Bézier-Splines hohen Grades zum Oszillieren neigen und auch der Vorteil des formbeschreibenden charakteristischen Polynoms verloren geht, ist eine kleinteilige Segmentierung empfehlenswert.

Die erforderliche starke Segmentierung bei komplexen Geometrien kann mit B-Splines, einer weiteren Methode der Formbeschreibung, vermieden werden [13].

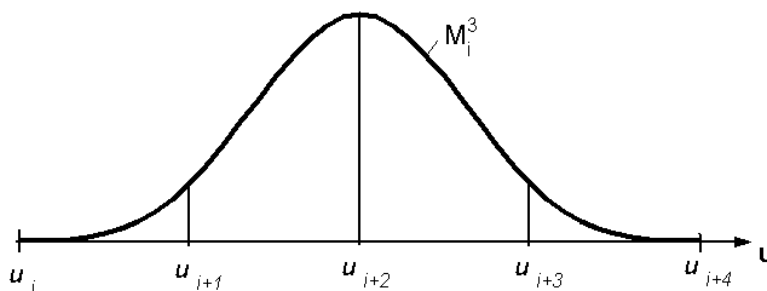


Abb. 3-3: kubischer B-Spline, Basisfunktion des i-ten Kontrollknotens

Die B-splines bestehen aus abschnittsweise aus Polynomen zusammengesetzten Basisfunktionen, die nur innerhalb eines Intervalls $u \in [u_i, u_{i+n+1}]$ ungleich Null sind. Die formbeschreibende Funktion des B-Splines ergibt sich aus der Summe der einzelnen Basisfunktionen.

$$(3-4) \quad \mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^m M_i^m(u) r_i$$

mit u lokale Koordinaten $u \in [0, 1]$

n Grad des B-Splines

$m+1$ Anzahl der Kontrollknoten r_i

r_i Kontrollknoten

$M_i^m(u)$ B-Spline bzw. Basisfunktion, die dem i-ten Kontrollknoten zugeordnet ist

Bei der Aufstellung von B-Splines sind die Kontroll- und Parameterknoten zu unterscheiden. Die Kontrollknoten r_i sind wie bei den Bézier-Splines für die Kontrolle der Form verantwortlich. Ihnen wird jeweils einer Basisfunktion zugeordnet, die je nach Grad n des B-Splines von $n+2$ Parameterknoten abhängt. Da sich im mittleren Bereich der B-Splines die Parameterknoten der einzelnen Basisfunktionen überlagern, ergibt sich ihre Gesamtanzahl aus der Anzahl der Kontrollknoten und dem Grad des B-Splines mit $m+n+2$.

Die Bildungsvorschrift der B-Splines bedingt, dass die Splines nur in den mittleren Bereichen, in denen $n+1$ Basisfunktionen überlagert werden, bestimmt sind. Somit sind für die Approximation einer Kurve bzw. einer Fläche ohne Formeinschränkung auch außerhalb dieser Fläche Kontrollpunkte anzuordnen.

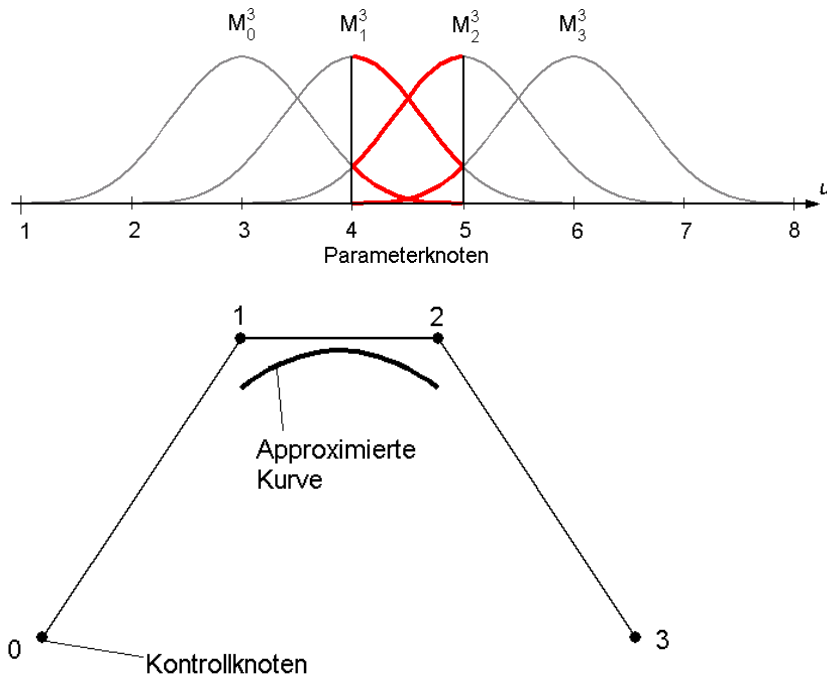


Abb. 3-4: Kubische B-Spline-Kurve mit 4 Kontrollknoten – Basisfunktionen und approximierte Kurve

Für konstante Abstände Δ zwischen den Parameterknoten werden die Abschnittspolynome eines kubischen B-Splines wie folgt angegeben:

$$(3-5) \quad M_i^3 = \begin{cases} \frac{1}{6} \bar{u}^3 & ; \bar{u} = \frac{1}{\Delta} (u - u_i), \quad u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ \frac{1}{6} (1 + 3\bar{u} + 3\bar{u}^2 - 3\bar{u}^3) & ; \bar{u} = \frac{1}{\Delta} (u - u_{i+1}), \quad u_{i+1} \leq u \leq u_{i+2} \\ \frac{1}{6} (4 - 6\bar{u}^2 + 3\bar{u}^3) & ; \bar{u} = \frac{1}{\Delta} (u - u_{i+2}), \quad u_{i+2} \leq u \leq u_{i+3} \\ \frac{1}{6} (1 - \bar{u})^3 & ; \bar{u} = \frac{1}{\Delta} (u - u_{i+3}), \quad u_{i+3} \leq u \leq u_{i+4} \end{cases}$$

Für Flächen werden B-Splines entsprechend mit (3-6) gebildet:

$$(3-6) \quad \mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n M_i^m(u) \cdot N_j^n(v) \cdot \mathbf{r}_{ij}$$

Da bei den B-Splines die Anzahl der Kontrollpunkte unabhängig vom Grad der Abschnittspolynome ist, weisen die B-Splines eine große Flexibilität auf. Diese erlaubt es komplexe Flächen ohne Unterteilung zu approximieren. Weiterhin haben die B-Splines im Gegensatz zu den Bézier-Splines lokale Eigenschaften, das heißt bei Änderung eines Kontrollpunktes sind nur $n+1$ Abschnitte der generierten Kurve betroffen. Dies ist für die Konvergenzeigenschaften der Optimierung sehr vorteilhaft. Eine abschnittsweise Beschreibung der Fläche mit Bézier-Splines niedrigen Grades, wie sie von Bletzinger [9] durchgeführt wird, weist aber die gleichen Eigenschaften auf.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Formbeschreibungen mit B-Splines durchgeführt. Sie sind in ihrer programmtechnischen Darstellung zwar aufwendiger als die Bézier-Splines, der Wegfall vieler zu beachtender Übergangsbedingungen wiegt diesen Nachteil jedoch auf.

4 Dehnungsaktivierte adaptive Scheibe: Analytische Lösung für eine Scheibe mit Ausschnitt

Die Entwicklungen der adaptiven Systeme in den letzten Jahren haben gezeigt, dass die Verformungen und die Schwingungen in flächigen Tragwerken mit Dehnungsaktuatoren erheblich reduziert werden können. Hinsichtlich der Beanspruchungen innerhalb des Tragwerkes wird das Potential der adaptiven Systeme jedoch noch nicht ausgenutzt. Um dieses Potential aufzuzeigen, wird im Folgenden für eine Scheibe mit Ausschnitt analytisch der mögliche Wirkungsgrad dehnungsaktivierter adaptiver Scheiben ermittelt. Ziel der Adaption ist hierbei die Reduktion bzw., wenn möglich, eine Neutralisierung der Inhomogenitäten im Spannungsfeld der Scheibe unter beliebigen Zug- und Druckbeanspruchungen.

Diese analytische Lösung dient weiterhin zur Verifizierung der in Kapitel 5 vorgestellten numerischen Verfahren zur Berechnung dehnungsaktivierter Scheiben.

Bei dehnungsaktivierten Scheiben wird der Spannungszustand durch induzierte Dehnungen mit variablem, stetigem Verlauf $\delta_{\text{aktiv}}(x, y)$ adaptiert. Der Bereich der Scheiben, in den Dehnungen induziert werden können und der somit den Aktuator des adaptiven Systems darstellt, wird in dieser Arbeit als *Aktivierungsbereich* bzw. *aktiver Bereich* bezeichnet. Dementsprechend werden Bereiche, in die keine Dehnungen induziert werden können, *passive Bereiche* genannt.

Die nachfolgenden Untersuchungen beschränken sich auf induzierten Dehnungen, die, wie zum Beispiel eine Temperaturdehnung oder das Quellen eines isotropen Materials, in alle Richtungen gleichförmig sind: $\delta_{\text{aktiv}, x} = \delta_{\text{aktiv}, y}$. Der stetige Übergang von aktiven zu passiven Bereichen wird dabei durch Nullsetzen der induzierten Dehnungen an der Grenze der aktiven Bereiche gewährleistet.

Zunächst werden der Beanspruchungszustand im passiven System analysiert und verschiedene Ansätze zur Homogenisierung der Spannungsfelder in den passiven Systemen vorgestellt. Die anschließende Herleitung der analytischen Lösung für eine dehnungsaktivierte adaptive Scheibe mit Ausschnitt zeigt den möglichen Wirkungsgrad solcher adaptiver Systeme auf, der in Kapitel 4.3 mit den Ansätzen zur Optimierung der passiven Systeme verglichen wird.

4.1 Spannungen im passiven System

Die Störung des homogenen Spannungsfeld im Bereich von Aussparungen kontinuierlich belasteter Scheiben wird bereits 1898 von Kirsch in „Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre“ [39] untersucht. Kirsch leitet die Verläufe der Spannungen für unendlich ausgedehnte Scheiben mit kreisrunden Ausschnitten für allseitigen Zug anhand der damals bereits von Bach angegebenen Spannungsverläufe in Zylindern her. Hierzu nimmt er einen Zylinder mit unendlich großem äußerem Rand, dessen äußerer Mantel auf Zug beansprucht wird und dessen Innendruck Null ist, an und betrachtet diesen scheibenweise. Für einachsige Beanspruchungen dieser Scheibe ermittelt er zunächst in mehreren Ansätzen die elastischen Verschiebungen und die daraus resultierenden Spannungsverläufe. Der richtige Ansatz ergibt sich dann aus dem Nachweis, dass bei aller Erfüllung aller Randbedingungen auch die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind.

Die von Kirsch unter versuchsweisen Annahmen gefundenen Lösungen wurden 1908 von Leon [44] durch Lösung der partikulären Integrale der Scheibengleichung unter Berücksichtigung aller Randbedingungen bestätigt.

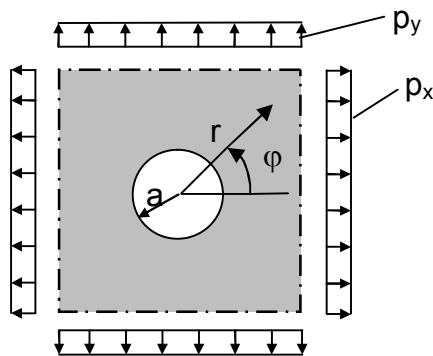


Abb. 4-1: Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt: geometrische Bezeichnungen und Belastungen

Alle Beanspruchungszustände der unendlich ausgedehnten Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt unter einer über die Scheibenbreite bzw. -länge gleichförmigen Belastung lassen sich mit einer Überlagerung eines zentralsymmetrischen und eines antimetrischen Belastungszustands beschreiben. Die Funktionen der Spannungsverläufe in Abhängigkeit vom Radius r und dem Winkel φ lauten somit:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \underbrace{\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right]}_{\text{symmetrischer Anteil}} + \underbrace{\cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - 4 \cdot \frac{a^2}{r^2} + 3 \cdot \frac{a^4}{r^4} \right]}_{\text{antimetrischer Anteil}} \\
 \sigma_\varphi &= \underbrace{\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right]}_{\text{symmetrischer Anteil}} + \underbrace{\cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[-1 - 3 \cdot \frac{a^4}{r^4} \right]}_{\text{antimetrischer Anteil}} \\
 \tau_{r\varphi} &= \underbrace{0}_{\text{symmetrischer Anteil}} + \underbrace{\sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[-1 - 2 \cdot \frac{a^2}{r^2} + 3 \cdot \frac{a^4}{r^4} \right]}_{\text{antimetrischer Anteil}}
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

Hierbei sind h die Dicke der Scheibe, a der Radius des Ausschnittes und p_x und p_y die Scheibenkräfte im ungestörten Bereich der Scheibe. Das homogene Spannungsfeld im ungestörten Bereich der Scheibe wird im Folgenden auch als Grundspannungszustand bezeichnet.

Der Spannungszustand wird häufig auch mit Hilfe der Spannungsfunktion, aus deren Ableitungen die Spannungen berechnet werden können, beschrieben. Diese lautet unter Aufteilung in den symmetrischen und antimetrischen Lastanteil:

$$F = \underbrace{\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot [r^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \ln r]}_{\text{symmetrischer Anteil}} + \underbrace{\cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[r^2 - 2 \cdot a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right]}_{\text{antimetrischer Anteil}}$$

$$(4-2) \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

Auf Basis dieser Gleichungen ergeben sich die im Folgenden beispielhaft dargestellten Spannungsverteilungen für einen symmetrischen ($p_x = p_y = 1$), einen einachsigen ($p_x = 1$; $p_y = 0$) und antimetrischen ($p_x = 1$; $p_y = -1$) Belastungszustand.

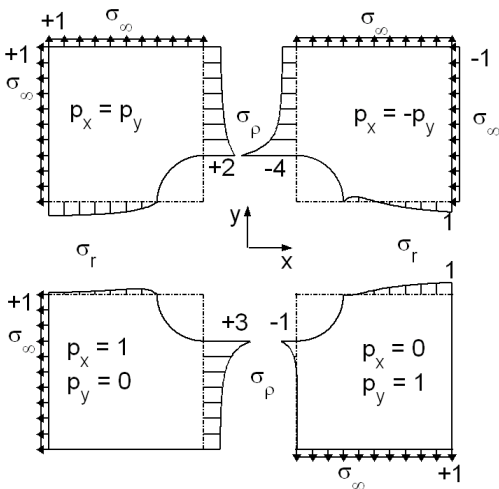


Abb. 4-2: Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt: Spannungen bei verschiedenen Belastungen

Je nach Belastungsrichtung erhöhen sich die Spannungen am Ausschnittsrand demnach um den Konzentrationskoeffizienten $\xi = 2 \div 4$. Der Konzentrationskoeffizient bezeichnet hierbei den Koeffizienten der maximal auftretenden Spannung gegenüber dem Wert des homogenen Spannungsfelds σ_∞ .

Leon [44], Bickley [7] und viele andere verwenden die Gleichungen (4-1) und (4-2) als Grundlage zur Herleitung der Spannungsfunktionen weiterer Probleme, wie zum Beispiel Scheiben mit Belastungen am Ausschnittsrand oder Halbscheiben mit Ausschnitten.

Weber erweitert 1922 [89] die Problematik auf mehrere kreisrunde Ausschnitte in einem Blech. Hierfür ermittelt er die Spannungsverteilungen mittels Umkehrung und Reihenentwicklung.

Ludwig Föppl befasst sich ebenso mit der Spannungsverteilung in Scheiben mit Ausschnitten unter verschiedenen Beanspruchungen. In „Drang und Zwang“ [23] leitet er für einen Kreisring die Spannungsverteilung unter einer Temperaturbeanspruchung her. Diese Herleitung dient in der vorliegenden Arbeit als Grundlage für die Ermittlung der Verläufe der induzierten Dehnungen.

Optimierungen des passiven Systems

Bei der Optimierung der Spannungsverteilung um einen Ausschnitt kann bei passiven Systemen zwischen zwei Ansätzen unterschieden werden. Der Erste befasst sich mit der Formoptimierung des Ausschnittes selbst. Hierbei ergeben sich für gerichtete Beanspruchungen ellipsoide Ausschnittsformen. Mit diesem Ansatz können jedoch die Inhomogenitäten des Spannungsfeldes im Ausschnittsbereich nur zum Teil und auch nur für bestimmte Belastungsrichtungen reduziert werden. Deswegen entwickeln Mansfield 1953 [47], Savin 1961 [68] und Rowland et al. 1982 [64] einen zweiten Ansatz. Bei diesem wird durch Einsetzen einer Randverstärkung um den Ausschnitt die Spannungsverteilung in der Scheibe, wenn möglich, auf den Grundspannungszustand zurückgeführt. Für Ausschnitte, die derart gestaltet sind, dass innerhalb der Scheibenfläche nur das ungestörte homogene Spannungsfeld auftritt, schafft Mansfield den Begriff „Neutral Holes“, der als „Neutraler Ausschnitt“ ins Deutsche von Wiedemann [95] übernommen wird.

Als Alternative zu den Randgurten, die vor allem für kleine Ausschnitte mit $d/h < 10$ schwer herzustellen sind, schlägt Wiedemann in [92], [93] und [95] flächenhafte Verstärkungen durch Aufdickung oder Pflaster im Ausschnittsbereich vor. Hierbei unterscheidet er zwischen dem Neutralisierungseffekt, für den am Rande des Pflasters der Konzentrationskoeffizient der Tangential- und Radialspannungen gleich Eins ist, und dem Optimum, für das der maximale Konzentrationskoeffizient in der Scheibe und im Pflasterbereich minimal ist.

Mit Hilfe einer flächenhaften Verstärkung können nicht für alle Belastungsrichtungen und Ausschnittsgrößen sinnvolle Lösungen zur Bildung eines neutralen Ausschnitts gefunden werden (siehe auch 4.3). Für konstante Verstärkungen kann der neutrale Ausschnitt zum Beispiel für kleine Löcher mit $r/h < 10$ unter zweiachsiger Zugbeanspruchung nur mit Verstärkungen, die höher als breit sind, erreicht werden. Diese sind dann kaum mehr als flächenhaft anzusehen. In einem solchen Fall führt eine Reduzierung der Höhe bei gleich bleibender Größe des Verstärkungsbereichs, oder eine nach außen hin abnehmende geringere Höhe mit einer größeren Verstärkungsfläche zu einer sinnvolleren Lösung aber auch zu einer Verschlechterung des Wirkungsgrads.

Das Beispiel der Scheibe mit Ausschnitt wird, so wie in dieser Arbeit, in einer Vielzahl von Arbeiten auch als Grundlage verwendet, um bestimmte Sachverhalte zu veranschaulichen oder Optimierungsverfahren zu verifizieren. Mattheck, Baumgärtner et al. [51], [52], [4] oder

Venkataraman et al. [86] belegen hiermit zum Beispiel die Effektivität von intuitiven Topologieoptimierungsverfahren, die natürliche Wachstumsprozesse nachbilden. Kriechbaum [42] und Ledermann [43] stellen wiederum anhand dieses Beispiels Verfahren zur Optimierung der Faserverläufe um Ausschnitte in faserverstärkten Kunststoffen vor.

Alle angebotenen Lösungen zur Reduktion der Inhomogenitäten des Spannungsfeldes in Ausschnittsnähe können jedoch nur für einen Belastungszustand optimale Lösungen anbieten. Für Systeme, die wechselnden Beanspruchungszuständen ausgesetzt sind, können die bisherigen Ansätze passiver Systeme nur suboptimale Lösungen bieten. Die adaptiven Systeme bieten hier eine Alternative, da sie sich bei gleichzeitig geringerem Materialverbrauch den Beanspruchungen anpassen und somit auf die verschiedenen Beanspruchungen reagieren können.

4.2 Spannungen im adaptiven System

4.2.1 Allgemeines

Zur Abbildung aller Belastungsrichtungen aus p_x und p_y im passiven Zustand ist es ausreichend die Beanspruchungen in zwei verschiedene Belastungszustände aufzuteilen; den rotationssymmetrischen mit $p_x = p_y$ und den antimetrischen mit $p_x = -p_y$. Die Herleitung der analytischen Lösung für den optimalen Verlauf der induzierten Dehnungen und damit die Berechnung der Spannungen im adaptiven Zustand erfolgt dementsprechend für diese beiden Beanspruchungszustände. Für allgemeine Belastungen wird zunächst angenommen, dass sich der optimale Verlauf der Aktivierung aus der anteiligen Superposition des rotationssymmetrischen und antimetrischen Zustandes ergibt.

Die induzierten Dehnungen werden dabei wie thermische Dehnungen in der Berechnung berücksichtigt. Föppl [23] gibt hierzu die Bestimmungsgleichung mit

$$(4-3) \quad \Delta\Delta F + E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t = 0$$

an. Die allgemeine Formulierung für induzierte Dehnungen kann dementsprechend formuliert werden:

$$(4-4) \quad \Delta\Delta F + E \cdot \Delta\delta_{\text{aktiv}} = 0$$

4.2.2 Symmetrische Belastungen

Für die Berechnung der rotationssymmetrischen Anteile des Belastungszustandes mit $p_x = p_y$ muss aus Symmetriegründen gelten:

$$(4-5) \quad \frac{\partial(\dots)}{\partial\varphi} = 0; \quad \tau_{r\varphi} = 0; \quad v_{r\varphi} = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen kann der optimale Verlauf der induzierten Dehnungen zur Reduktion der Inhomogenitäten des Spannungsfeldes direkt über die Verformungen, Dehnungen und Spannungen ermittelt werden. Die Betrachtung der Spannungsfunktion ist an dieser Stelle zunächst nicht erforderlich.

Unbeschränkter Aktivierungsbereich

Zunächst wird angenommen, dass sich der aktive Bereich über die gesamte Scheibenfläche erstreckt ($b = \infty$).

Der Vergleich der Spannungen des passiven Systems mit kreisrundem Ausschnitt (4-6) mit dem homogenen Grundspannungszustand (4-7) zeigt,

$$(4-6) \quad \begin{aligned} \sigma_{r \text{ passiv, Loch, sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\varphi \text{ passiv, Loch, sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right] \end{aligned}$$

$$(4-7) \quad \begin{aligned} \sigma_{r \text{ passiv, } \infty, \text{ sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \\ \sigma_{\varphi \text{ passiv, } \infty, \text{ sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \end{aligned}$$

dass die Spannungen im aktivierten Zustand die folgenden Randbedingungen erfüllen müssen, um eine Reduktion der Inhomogenitäten des Spannungsfeldes zu ermöglichen:

$$(4-8) \quad \begin{aligned} \sigma_{r \text{ aktiv}}(a) &= 0 \\ \sigma_{r \text{ aktiv}}(r \rightarrow \infty) &= 0 \quad \text{und} \\ \sigma_{\varphi \text{ aktiv}}(r \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned}$$

$$(4-9) \quad \sigma_{\varphi \text{ aktiv}}(a) = -\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h}$$

Weiterhin gilt als Zusammenhang zwischen Dehnungen und Verschiebungen,

$$(4-10) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r}$$

als Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen

$$(4-11) \quad \begin{aligned} \sigma_{r, \text{aktiv}} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_{\varphi} - (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot t] = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \mu \cdot \frac{u}{r} - (1+\mu) \cdot \delta_{\text{aktiv}} \right] \\ \sigma_{\varphi, \text{aktiv}} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{\varphi} + \mu \cdot \varepsilon_r - (1+\mu) \cdot \alpha_t \cdot t] = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - (1+\mu) \cdot \delta_{\text{aktiv}} \right] \end{aligned}$$

und als Verträglichkeitsbedingung zwischen den Spannungen:

$$(4-12) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi} - \sigma_r}{r}$$

Mit der Verschiebung u als Bezugsunbekannter lässt sich (4-12) schreiben als:

$$(4-13) \quad u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - (1+\mu) \cdot \frac{\partial \delta_{\text{aktiv}}}{\partial r} = 0$$

Der homogene Anteil der Differentialgleichung kann mit einer Linearkombination der zwei linear unabhängigen Lösungen gelöst werden:

$$(4-14) \quad u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad u(r) = c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r}$$

Wird der Verlauf der Aktivierung und somit der Verlauf der resultierenden zwängungsfreien Dehnungen δ_{aktiv} innerhalb der Scheibe mit

$$(4-15) \quad \delta_{\text{aktiv}}(r) = \frac{c_3}{r}$$

festgelegt, so ergibt sich die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4-13) zu:

$$(4-16) \quad u_{\text{aktiv}}(r) = c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r} + c_3 \cdot (1+\mu)$$

Eingesetzt in (4-11) können die Spannungen im aktivierten Zustand ermittelt werden:

$$(4-17) \quad \begin{aligned} \sigma_{r\text{aktiv}} &= E \cdot \left[\frac{c_1}{1-\mu} - \frac{c_2}{r^2 \cdot (1+\mu)} - \frac{c_3}{r} \right] \\ \sigma_{\varphi\text{aktiv}} &= E \cdot \left[\frac{c_1}{1-\mu} + \frac{c_2}{r^2 \cdot (1+\mu)} \right] \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (4-8) und (4-9) werden die Konstanten c_1 , c_2 , c_3 berechnet und es ergeben sich der Verlauf der induzierten Dehnungen und der Verlauf der aktivierten Spannungen zu:

$$(4-18) \quad \begin{aligned} \delta_{\text{aktiv,sym}} &= \frac{a}{E \cdot r} \cdot \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \\ \sigma_{r\text{aktiv,sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r} \right] \\ \sigma_{\varphi\text{aktiv,sym}} &= -\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{a^2}{r^2} \\ F_{\text{aktiv,sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \left[a^2 \cdot \ln(r) - a \cdot r \right] \end{aligned}$$

Anschließend können aus der Superposition der passiven und der aktivierten Spannungen die adaptiven Spannungen ermittelt werden:

$$(4-19) \quad \begin{aligned} \sigma_{r\text{adapt,sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a}{r} \right] \\ \sigma_{\varphi\text{adapt,sym}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \end{aligned}$$

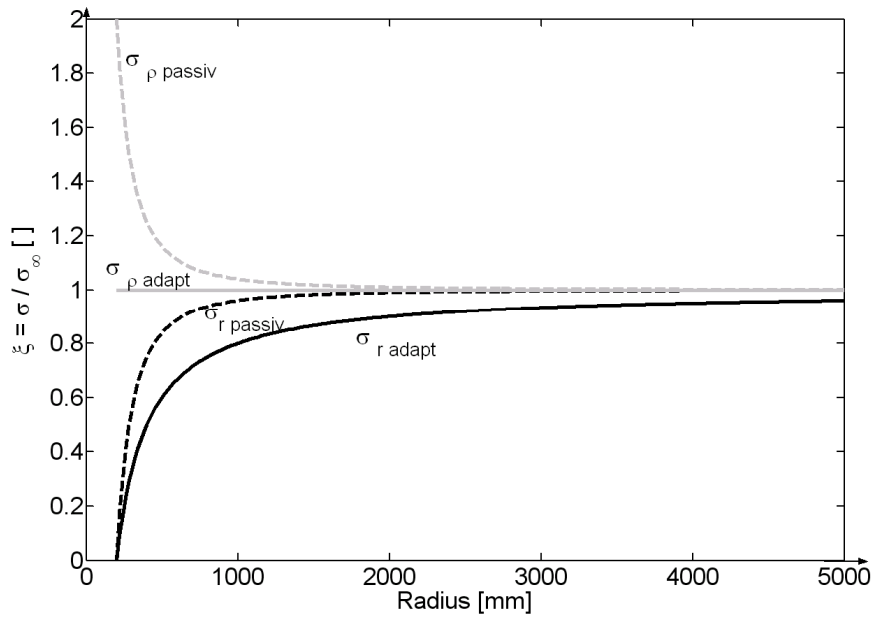


Abb. 4-3: Adaptive und passive Konzentrationskoeffizienten der Tangential- und Radialspannungen für $a = 200 \text{ mm}$, $p_x = p_y = 100 \text{ N/mm}^2$

Abb. 4-3 zeigt, dass die Erhöhung der Tangentialspannungen im Ausschnittsbereich mit dem angesetzten Verlauf der Aktivierung vollständig neutralisiert werden kann. Der Verlauf der radialen adaptiven Spannungen weist hingegen in einem größeren Bereich als im passiven Zustand Störungen auf. Da die adaptiven radialen Spannungen dabei aber immer kleinere Werte als im passiven Zustand annehmen, ist dies für die Optimierung des Systems irrelevant. Es bleibt aber zu berücksichtigen, dass infolge der Aktivierung in einem größeren Bereich der Scheibe die homogenen Spannungsfelder gestört werden.

Beschränkter Aktivierungsbereich

Da die Inhomogenitäten der Spannungsfelder nur in einem kleinen Bereich um den Ausschnitt herum signifikant sind, ist es sinnvoll, auch den Bereich der Aktivierung einzuschränken. Dementsprechend wird im Folgenden untersucht, inwiefern eine solche Beschränkung des aktiven Bereichs auf $r_{\text{aktiv}} = a \div b$ den Verlauf der Spannungen und den optimalen Verlauf der Aktivierung beeinflusst.

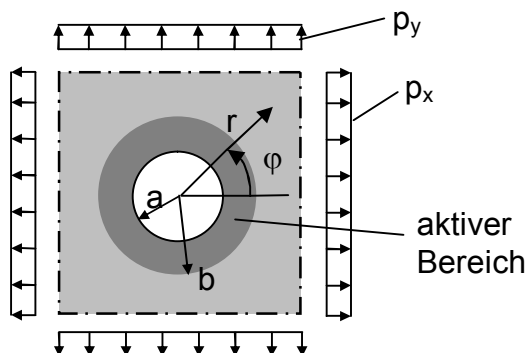


Abb. 4-4: Scheibe mit Kreisrundem Ausschnitt und beschränktem aktivem Bereich

Für die Ermittlung einer geschlossenen Lösung ist es erforderlich, die Spannungsfunktionen getrennt für den äußeren Bereich mit $r = b \div \infty$ und den inneren Bereich mit $r = a \div b$ aufzustellen. Neben den in (4-8) genannten Randbedingungen sind nun im Übergang zwischen innerem und äußerem Bereich die folgenden weiteren Randbedingungen zu erfüllen:

$$(4-20) \quad \begin{aligned} \sigma_{r \text{ aktiv, innen}}(b) &= \sigma_{r \text{ aktiv, außen}}(b) \\ \varepsilon_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) &= \varepsilon_{\varphi \text{ aktiv, außen}}(b) \end{aligned}$$

$$(4-21) \quad \delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$$

Die Lösung für den inneren Bereich wird, wie beim unbeschränkten aktiven Bereich, über die Verschiebung u als Bezugsunbekannte ermittelt. Zu der in (4-16) für den unbeschränkten aktiven Bereich gefundenen Lösung muss zur Erfüllung aller Randbedingungen der Verlauf von δ_{aktiv} entsprechend angepasst werden. Dies resultiert in einer zusätzlichen Inhomogenität des Spannungsfeldes im aktiven Bereich, die durch eine geeignete Wahl der Funktionen zu minimieren ist.

Die Minimierung der Inhomogenitäten des Spannungsfeldes wird an dieser Stelle mit einer weiteren Randbedingungen (4-22) und der folgenden Optimierungsaufgabe (4-23) festgelegt:

$$(4-22) \quad \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(a) + \sigma_{\varphi \text{ passiv, innen}}(a) = \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) + \sigma_{\varphi \text{ passiv, innen}}(b)$$

$$(4-23) \quad \begin{aligned} &\text{Minimiere} \\ f(r) &= \max\left(\left(\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(r) + \sigma_{\varphi \text{ passiv, innen}}(r)\right)^2\right) \{r \mid r \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Analog dem unbeschränkten adaptiven System wird für den Verlauf der induzierten Dehnungen δ_{aktiv} ein polynomischer Ansatz gewählt. Dementsprechend wird (4-15) erweitert zu:

$$(4-24) \quad \delta_{\text{aktiv, sym, beschr}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_3}{r} + c_4 \cdot r^{c_5} \right)$$

Mit der Differentialgleichung (4-13) können die Verläufe der Spannungen und Dehnungen ermittelt werden, die in Anhang 0 für alle c_5 dargestellt sind.

Für den äußeren Bereich gilt $\Delta\Delta F = 0$. Von den in [96] für die homogene Differentialgleichung gegebenen Elementarlösungen kann wegen $\sigma_r(r \rightarrow \infty) = 0$ und $\sigma_\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$ nur

$$\begin{aligned}
 F_{\text{außen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \ln(r) \cdot c_6 \\
 \sigma_{r\text{außen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{c_6}{r^2} \\
 \sigma_{\varphi\text{außen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{c_6}{r^2} \right) \\
 \varepsilon_{\varphi\text{außen}} &= -\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{c_6}{r^2 \cdot E}
 \end{aligned}
 \tag{4-25}$$

in Frage kommen.

Mit den Randbedingungen (4-8), (4-20), (4-21) und (4-22) können, wie in Anhang 0 dargestellt, die Konstanten c_1, \dots, c_4 und c_6 bestimmt werden. Die Konstante c_5 ergibt sich anschließend, wie im Folgenden, dargestellt:

Die adaptiven Tangentialspannungen im aktiven und passiven Bereich stellen sich abhängig von c_5 , wie in Abb. 4-5 für $a = 200$ mm und $b = 500$ mm dargestellt, ein. Hierbei haben sie für Werte $c_5 < 0$ im Bereich $r = a \div b$ ein Maximum, für Werte $c_5 > 0$ jedoch ein Minimum, so dass in diesem Fall die Spannungswerte an den Stellen a und b maßgebend sind.

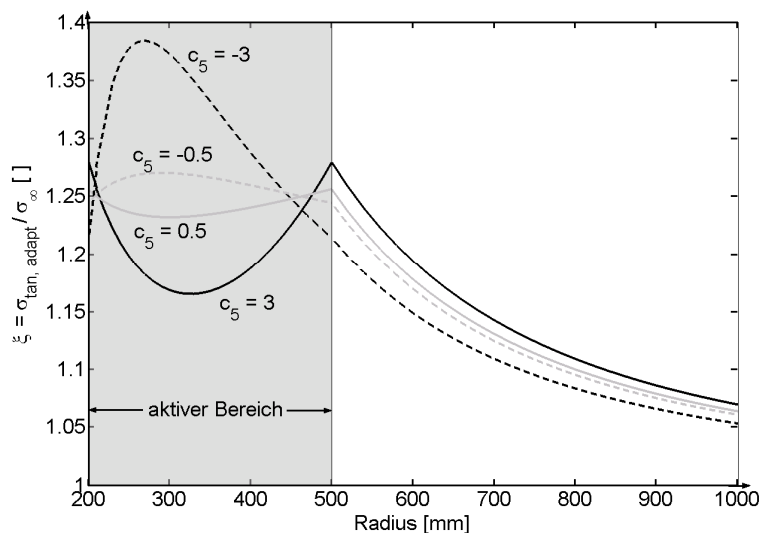


Abb. 4-5: Verlauf des Konzentrationskoeffizientens der adaptiven Tangentialspannungen über r für $a = 200$ mm, $b = 500$ mm und für verschiedene c_5 ($p_x = p_y = 100$ N/mm²)

Dieser Zusammenhang ist auch in Abb. 4-6 zu erkennen, in der der Verlauf des Extremwerts der adaptiven Spannungen im Bereich $r = a \pm b$ und der Wert an der Stelle a bzw. b über c_5 exemplarisch für verschiedene a und b dargestellt ist. Offensichtlich ergibt sich für alle b das gewünschte Minimum der erreichbaren adaptiven Tangentialspannungen für beschränkte Aktivierungsbereiche für $c_5 = 0$.

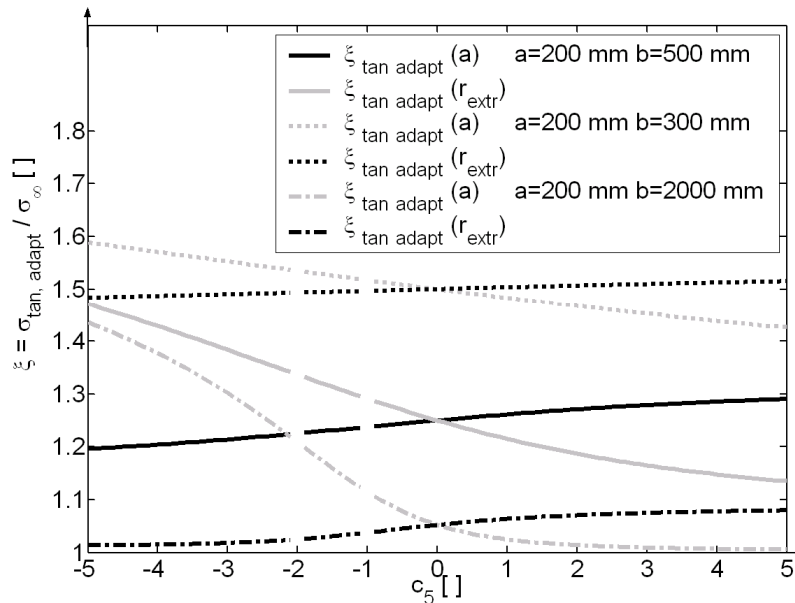


Abb. 4-6: Verlauf der maximalen adaptiven Tangentialspannung über c_5 ($p_x = p_y = 100 \text{ N/mm}^2$) für verschieden große aktive Bereiche

Der optimale Verlauf der induzierten Dehnungen und die daraus resultierenden aktivierten Spannungen im aktiven und passiven Bereich können somit mit $c_5=0$ ermittelt werden zu:

$$(4-26) \quad \delta_{\text{aktiv, sym, beschr}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{(b-r)}{(2 \cdot b - a)} \cdot \frac{2 \cdot a}{r}$$

$$\sigma_{\varphi \text{aktiv, sym, beschr, i}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a}{2 \cdot b - a} - \frac{a^2}{r^2} \right]$$

$$(4-27) \quad \sigma_{r \text{aktiv, sym, beschr, i}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a^2}{r^2} - 1 + \frac{2 \cdot b \cdot (r-a)}{r \cdot (2 \cdot b - a)} \right]$$

$$F_{\text{aktiv, sym, beschr, i}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \ln r \cdot a^2 - r^2) + \frac{b \cdot (r^2 - 2 \cdot a \cdot r)}{2 \cdot b - a} \right]$$

$$\sigma_{\varphi \text{aktiv, sym, beschr, a}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{a}{r^2} \cdot \left[\frac{(a-b)^2}{2 \cdot b - a} \right]$$

$$(4-28) \quad \sigma_{r \text{aktiv, sym, beschr, a}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left[a^2 - b^2 + \frac{2 \cdot b^2 \cdot (b-a)}{2 \cdot b - a} \right]$$

$$F_{\text{aktiv, sym, beschr, a}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \ln r \cdot \left[a^2 - b^2 + \frac{2 \cdot b^2 \cdot (b-a)}{2 \cdot b - a} \right]$$

Wie Abb. 4-7 zeigt, sind die tangentialen adaptiven Spannungen bei Beschränkung des aktiven Bereiches im Bereich des Ausschnitts gegenüber dem homogenen Spannungsfeld erhöht. Eine Neutralisierung dieser Erhöhung, wie bei dem System mit unbeschränktem aktivem Bereich, ist somit bei Beschränkung des aktiven Bereiches nicht mehr möglich. Die tangentialen adaptiven Spannungen sind jedoch bereits bei kleinen aktiven Bereichen signifikant kleiner als die passiven Spannungen, so dass auch beschränkte aktive Bereiche einen hohen Wirkungsgrad erzielen.

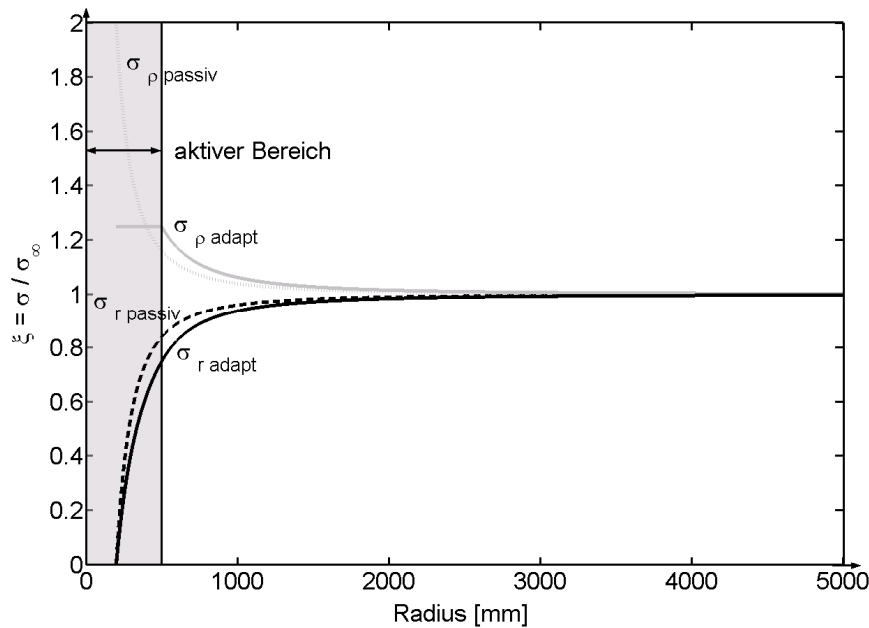


Abb. 4-7: Adaptive und passive Konzentrationskoeffizienten der Tangential- und Radialspannungen für $a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$, $p_x = p_y = 100 \text{ N/mm}^2$

Die Verläufe der resultierenden adaptiven Spannungen nehmen die Form an:

$$(4-29) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi \text{ adapt, sym, beschr, i}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{2 \cdot b}{2 \cdot b - a} \right] \\ \sigma_{r \text{ adapt, sym, beschr, i}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a \cdot (2 \cdot b - r)}{r \cdot (2 \cdot b - a)} \right] \end{aligned}$$

$$(4-30) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi \text{ aktiv, sym, beschr, a}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 + \frac{a \cdot b^2}{r^2 \cdot (2 \cdot b - a)} \right] \\ \sigma_{r \text{ aktiv, sym, beschr, a}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a \cdot b^2}{r^2 \cdot (2 \cdot b - a)} \right] \end{aligned}$$

4.2.3 Antimetrische Belastungen

Nachdem in 4.2.2 die optimalen Verläufe der Aktivierung für die rotationssymmetrischen Anteile des Systems gefunden worden sind, werden nun die Lösungen für die antimetrischen Anteile hergeleitet.

Da die in (4-5) verwendeten Vereinfachungen hier nicht mehr zutreffen, erfolgt die Herleitung nicht mehr direkt über die Verformungen und die Lösung der Verträglichkeitsbedingung (4-12), sondern über die Lösung der Spannungsfunktion und deren Bestimmungsgleichung (4-4).

Der Zusammenhang zwischen der Spannungsfunktion und den Verläufen der Spannungen ist, wie folgt, definiert:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ (4-31) \quad \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

Unbeschränkter Aktivierungsbereich

Aus dem Vergleich der Spannungen des passiven Systems mit kreisrundem Ausschnitt (4-32) mit dem Grundspannungszustand ohne Ausschnitt (4-33)

$$\begin{aligned} \sigma_{r \text{ passiv, Loch, asym}} &= \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \cos 2\varphi \cdot \left[1 - \frac{4 \cdot a^2}{r^2} + \frac{3 \cdot a^4}{r^4} \right] \\ (4-32) \quad \sigma_{\varphi \text{ passiv, Loch, asym}} &= \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \cos 2\varphi \cdot \left[-1 - \frac{3a^4}{r^4} \right] \\ \tau_{r\varphi \text{ passiv, Loch, asym}} &= \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \sin 2\varphi \cdot \left[-1 - \frac{2 \cdot a^2}{r^2} + \frac{3 \cdot a^4}{r^4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r \text{ passiv, } \infty, \text{ asym}} &= \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \cos 2\varphi \\ (4-33) \quad \sigma_{\varphi \text{ passiv, } \infty, \text{ asym}} &= \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \cos 2\varphi \cdot (-1) \\ \tau_{r\varphi \text{ passiv, } \infty, \text{ asym}} &= \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \sin 2\varphi \cdot (-1) \end{aligned}$$

können wiederum die Randbedingungen zur Reduktion der Inhomogenitäten des Spannungsfeldes bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{r \text{ aktiv}}(a) = 0 \\
 & \sigma_{r \text{ aktiv}}(r \rightarrow \infty) = 0 \\
 (4-34) \quad & \sigma_{\varphi \text{ aktiv}}(r \rightarrow \infty) = 0 \text{ und} \\
 & \tau_{r\varphi \text{ aktiv}}(a) = 0 \\
 & \tau_{r\varphi \text{ aktiv}}(r \rightarrow \infty) = 0
 \end{aligned}$$

$$(4-35) \quad \sigma_{\varphi \text{ aktiv}}(a) = \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot 3$$

Zu den zwei Lösungen der Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$, die zu gleich die Randbedingungen für $r \rightarrow \infty$ erfüllen und den Term $\cos(2\varphi)$ enthalten, ist der hier zu ermittelnden Spannungsfunktion ein dritter Term hinzuzufügen, der die homogene DGL $\Delta\Delta F = 0$ nicht erfüllt. Analog zur Lösung für den rotationssymmetrischen Anteil der Spannungsfunktion wird dieser Term so gewählt, dass für ihn der Radius in den Verläufen der Spannungen mit der Potenz $n = -1$ einfließt:

$$(4-36) \quad F_{\text{aktiv}} = \underbrace{\cos 2\varphi \cdot \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} \right]}_{\text{Lösungen von } \Delta\Delta F=0} + \cos 2\varphi \cdot c_3 \cdot r$$

Mit (4-31) lassen sich die zugehörigen Spannungsverläufe ermitteln:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{r \text{ aktiv}} = \cos 2\varphi \cdot \left[-\frac{4}{r^2} \cdot c_1 - \frac{6}{r^4} \cdot c_2 - \frac{3}{r} \cdot c_3 \right] \\
 (4-37) \quad & \sigma_{\varphi \text{ aktiv}} = \cos 2\varphi \cdot \left[\frac{6}{r^4} \cdot c_2 \right] \\
 & \tau_{r\varphi \text{ aktiv}} = \sin 2\varphi \cdot \left[-\frac{2}{r^2} \cdot c_1 - \frac{6}{r^4} \cdot c_2 \right]
 \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen (4-34) können die Konstanten berechnet werden und die aktiven Spannungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 & F_{\text{aktiv,nsym}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[-\frac{3 \cdot a^2}{2} + \frac{a^4}{2 \cdot r^2} + a \cdot r \right] \\
 & \sigma_{r \text{ aktiv,nsym}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{6 \cdot a^2}{r^2} - \frac{3 \cdot a^4}{r^4} - \frac{3 \cdot a}{r} \right] \\
 (4-38) \quad & \sigma_{\varphi \text{ aktiv,asym}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{3 \cdot a^4}{r^4} \right] \\
 & \tau_{r\varphi \text{ aktiv,asym}} = \sin 2\varphi \cdot \left[\frac{3 \cdot a^2}{r^2} - \frac{3 \cdot a^4}{r^4} \right] \\
 & \delta_{\text{aktiv,asym}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \left[\frac{3 \cdot a}{r} \right]
 \end{aligned}$$

Abb. 4-8 zeigt die Verläufe der Spannungen für $\varphi = 0^\circ$ (σ_r und σ_φ) bzw. $\varphi = 45^\circ$ ($\tau_{r\varphi}$).

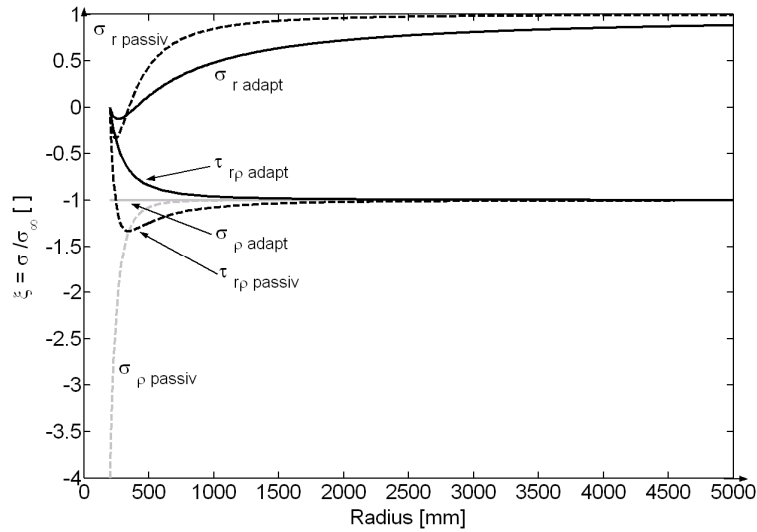


Abb. 4-8: Adaptive und passive Konzentrationskoeffizienten der Tangential-, Radial- und Schubspannungen für $a = 200$ mm, $p_x = -p_y = 100$ N/mm²; $\varphi = 0^\circ$ (σ_r und σ_φ) bzw. $\varphi = 45^\circ$ ($\tau_{r\varphi}$)

Mit dem so gewählten Ansatz der induzierten Dehnungen kann die Erhöhung der tangentialen Spannungen im Bereich der Aussparung neutralisiert werden. Die resultierenden Verläufe der adaptiven Spannungen nehmen die folgende Form an:

$$\sigma_{r\text{adapt,asym}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot a^2}{r^2} - \frac{3 \cdot a}{r} \right]$$

$$(4-39) \quad \sigma_{\varphi\text{adapt,asym}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot [-1]$$

$$\tau_{r\varphi\text{adapt,asym}} = \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[-1 + \frac{a^2}{r^2} \right]$$

Beschränkter Aktivierungsbereich

Auch für die nichtrotationssymmetrischen Lastanteile wird der Einfluss der Beschränkung des aktiven Bereichs auf $r = a \div b$ untersucht.

Zusätzlich zu den in (4-34) genannten Randbedingungen sind im Übergang zwischen aktivem und passivem Bereich folgende weitere Randbedingungen zu erfüllen:

$$(4-40) \quad \begin{aligned} \sigma_{r \text{ aktiv, innen}}(b) &= \sigma_{r \text{ aktiv, außen}}(b) \\ \tau_{r\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) &= \tau_{r\varphi \text{ aktiv, außen}}(b) \\ \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) &= \sigma_{\varphi \text{ aktiv, außen}}(b) \\ u_{\text{aktiv, innen}}(b) &= u_{\text{aktiv, außen}}(b) \end{aligned}$$

Weiterhin werden wiederum, die induzierten Dehnungen im Übergang zwischen aktivem und passivem Bereich zu Null gesetzt:

$$(4-41) \quad \delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$$

Wie bei der Ermittlung der Terme für die rotationssymmetrischen Lastanteile kann die zu erzielende Minimierung der Erhöhung der Tangentialspannungen, wie folgt, beschrieben werden:

$$(4-42) \quad \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(a) + \sigma_{\varphi \text{ passiv, innen}}(a) = \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) + \sigma_{\varphi \text{ passiv, innen}}(b)$$

$$(4-43) \quad \text{Minimiere } f(r) = \max\left(\left(\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(r) + \sigma_{\varphi \text{ passiv, innen}}(r)\right)^2\right), \{r \mid r \in [a, b]\}$$

Für Spannungsfunktion des aktiven Bereichs müssen nun neben den homogenen Lösungen der Scheibengleichung aus (4-36), für die die Verläufe der Spannungen für $r \rightarrow \infty$ gegen Null gehen, nun auch alle anderen homogenen Lösungen berücksichtigt werden. Eine Übersicht der möglichen Lösungen gibt Worch in [96].

$$(4-44) \quad F_{\text{innen, aktiv}} = \underbrace{\cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(c_1 + \frac{c_2}{r^2} + c_3 \cdot r^2 + c_4 \cdot r^4 \right)}_{\text{Lösungen von } \Delta\Delta F = 0} + F_{\text{partikulär}}$$

Hinzu kommt ein partikulärer Anteil der Spannungsfunktion, der die inhomogene Scheibengleichung

$$(4-45) \quad \Delta\Delta F = -E \cdot \Delta\delta_{\text{aktiv}}$$

löst. Entsprechend der Lösung für die rotationssymmetrischen Lastanteile wird δ_{aktiv} wie folgt gewählt:

$$(4-46) \quad \delta_{\text{aktiv, asym, beschr}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_5}{r} + c_6 \cdot r^{c_7} \right)$$

Und der partikuläre Anteil der Spannungsfunktion ergibt sich zu:

für $c_7 \neq -2; -1; 2; -4; 0$

$$F_{p,aktiv,asym,beschr} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{c_5 \cdot r}{3} - \frac{c_6 \cdot r^{c_7+2}}{c_7 \cdot (c_7 + 4)} \right)$$

für $c_7 = -4$

$$(4-47) \quad F_{p,aktiv,asym,beschr} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{c_5 \cdot r}{3} + \frac{c_6}{4 \cdot r^2} \cdot \left(\ln r + \frac{1}{4} \right) \right)$$

für $c_7 = -2; 2$

$$F_{p,aktiv,asym,beschr} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{c_5 \cdot r}{3} \right)$$

für $c_7 = 0$

$$F_{p,aktiv,asym,beschr} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{c_5 \cdot r}{3} + \frac{c_6 \cdot r^2}{4} \cdot \left(-\ln r + \frac{1}{4} \right) \right)$$

Mit (4-31) und

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \mu \cdot \sigma_\varphi) + \delta_{aktiv}$$

$$(4-48) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\varphi - \mu \cdot \sigma_r) + \delta_{aktiv}$$

$$u = \int \varepsilon_r \cdot dr$$

können die Verläufe der Spannungen und der Radialverschiebung ermittelt werden. Eine genaue Darstellung ist für alle c_7 in Anhang 0 gegeben.

Für den passiven Bereich gilt weiterhin $\Delta\Delta F = 0$. Von den in [96] für die homogene Differentialgleichung gegebenen Elementarlösungen können wegen $\sigma_r(r \rightarrow \infty) = 0$ und $\sigma_\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$ nur die Terme

$$F_{au\beta en} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{c_8}{r^2} + c_9 \right)$$

$$\sigma_{r,au\beta en} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{-6 \cdot c_8}{r^4} - \frac{4 \cdot c_9}{r^2} \right)$$

$$(4-49) \quad \sigma_{\varphi,au\beta en} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_8}{r^4} \right)$$

$$\sigma_{r,au\beta en} = \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{-6 \cdot c_8}{r^4} - \frac{2 \cdot c_9}{r^2} \right)$$

$$u_{au\beta en} = \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left((1 + \mu) \frac{2 \cdot c_8}{r^3} + \frac{4 \cdot c_9}{r} \right)$$

in Frage kommen.

Mit den Randbedingungen (4-34) und (4-40) bis (4-42) können, wie in Anhang A.2 dargestellt, die Konstanten c_1, \dots, c_6, c_8 und c_9 bestimmt werden. Die Konstante c_7 kann, wie im Folgenden dargestellt, mit der Optimierungsaufgabe (4-43) ermittelt werden.

Abhängig von c_7 ergeben sich die in Abb. 4-9 dargestellten Verläufe für die adaptiven Tangentialspannungen ($a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$).

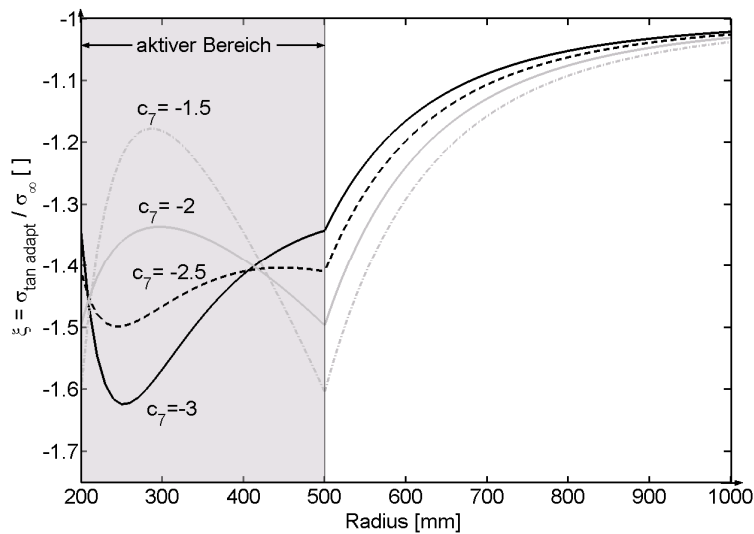


Abb. 4-9: Verlauf des Konzentrationskoeffizientens der adaptiven Tangentialspannungen über r für $a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$ und für verschiedene c_7 ($p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$)

Für die hier betrachteten Werte von c_7 hat der Verlauf der adaptiven Tangentialspannungen im aktiven Bereich jeweils ein Extremum. Aufgrund des höheren Ansatzes der Spannungsfunktion im Vergleich zu den rotationssymmetrischen Lastanteilen, können für andere c_7 jedoch weitere Extrema in diesem Bereich auftreten. Somit kann anders als am rotationssymmetrischen System die optimale Lösung hier nicht mehr mit einer einfachen Betrachtung ermittelt werden, und es sind genauere bzw. weitere Überlegungen erforderlich.

In Abb. 4-10 sind deswegen die Minimal- und Maximalwerte der adaptiven Tangentialspannungen $\sigma_{\phi, \text{adapt, innen, min}}$, $\sigma_{\phi, \text{adapt, innen, max}}$ und der Wert an der Stelle $r = a$ bzw. b für $a = 200 \text{ mm}$ und $b = 500 \text{ mm}$ über c_7 aufgetragen.

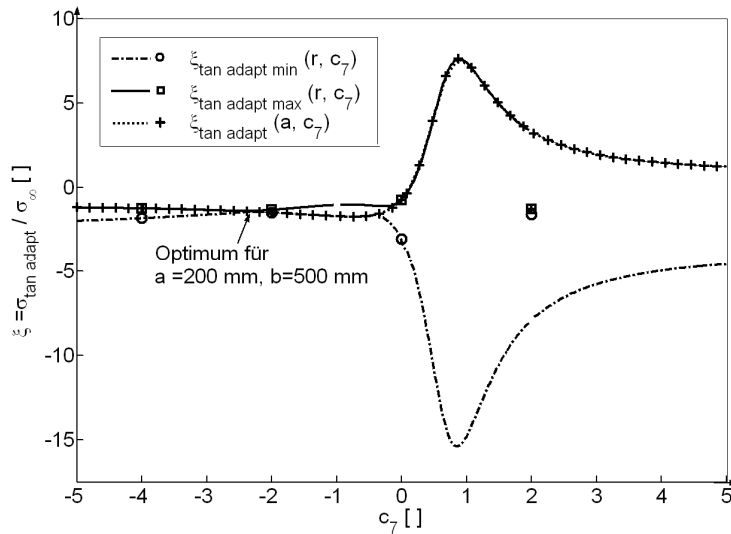


Abb. 4-10: Verlauf der max. und min. Spannungen $\sigma_{\varphi, \text{adapt, innen}}$ über c_7 ($a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$, $p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0$)

Im in Abb. 4-10 dargestellten Fall fällt das Optimum auf $c_7 \approx -2.25$. Für die c_7 , für die $\sigma_{\varphi, \text{adapt}}(a, c_7)$ nicht mit den Extrema zusammenfällt, haben die Tangentialspannungen mehr als ein Extremum im Bereich $a \leq r \leq b$.

Je nach Größe des aktiven Bereiches variiert jedoch der Wert von c_7 , für den die Beträge der adaptiven Tangentialspannungen minimal werden. Zur Verdeutlichung sind in Abb. 4-11 und Abb. 4-12 die Verläufe der maximalen und minimalen Tangentialspannungen jeweils für einen sehr kleinen und einen sehr großen aktiven Bereiches dargestellt.

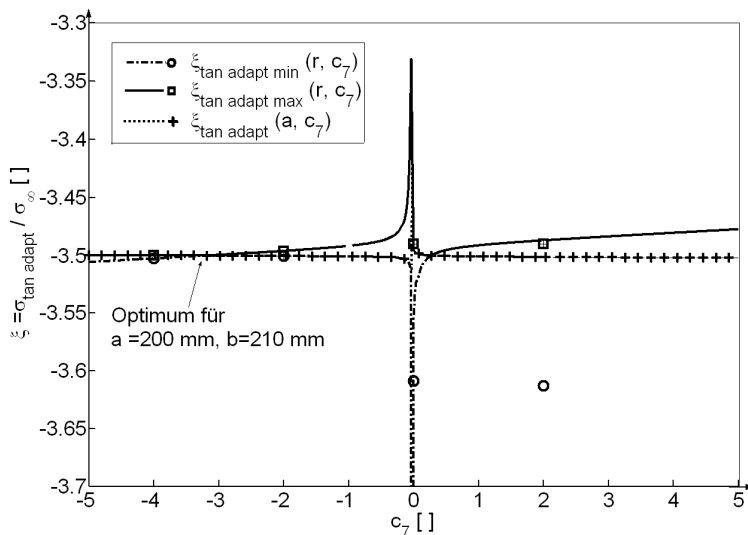


Abb. 4-11: Verlauf der max. und min. Spannungen $\sigma_{\varphi, \text{adapt, innen}}$ über c_7 ($a = 200 \text{ mm}$, $b = 210 \text{ mm}$, $p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0$)

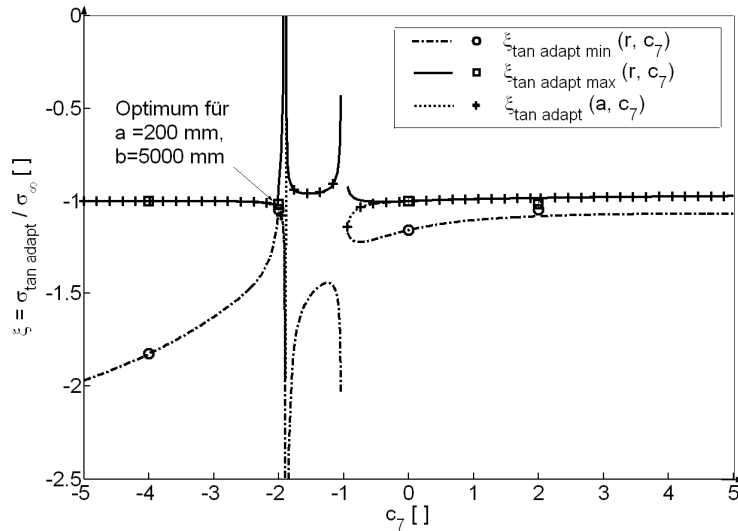


Abb. 4-12: Verlauf der max. und min. Spannungen $\sigma_{\varphi, \text{adapt, innen}}$ über c_7 ($a = 200 \text{ mm}$, $b = 5000 \text{ mm}$, $p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0$)

Der in Abb. 4-13 aufgetragene Einfluss der Größe des aktiven Bereichs auf die optimale Potenz der Aktivierungsfunktion zeigt, dass c_7 für große aktive Bereich ($b/a \rightarrow \infty$) gegen -2 strebt, und dass für kleine aktive Bereich ($b/a \rightarrow 1$) $c_7 \approx -3,5$ gilt.

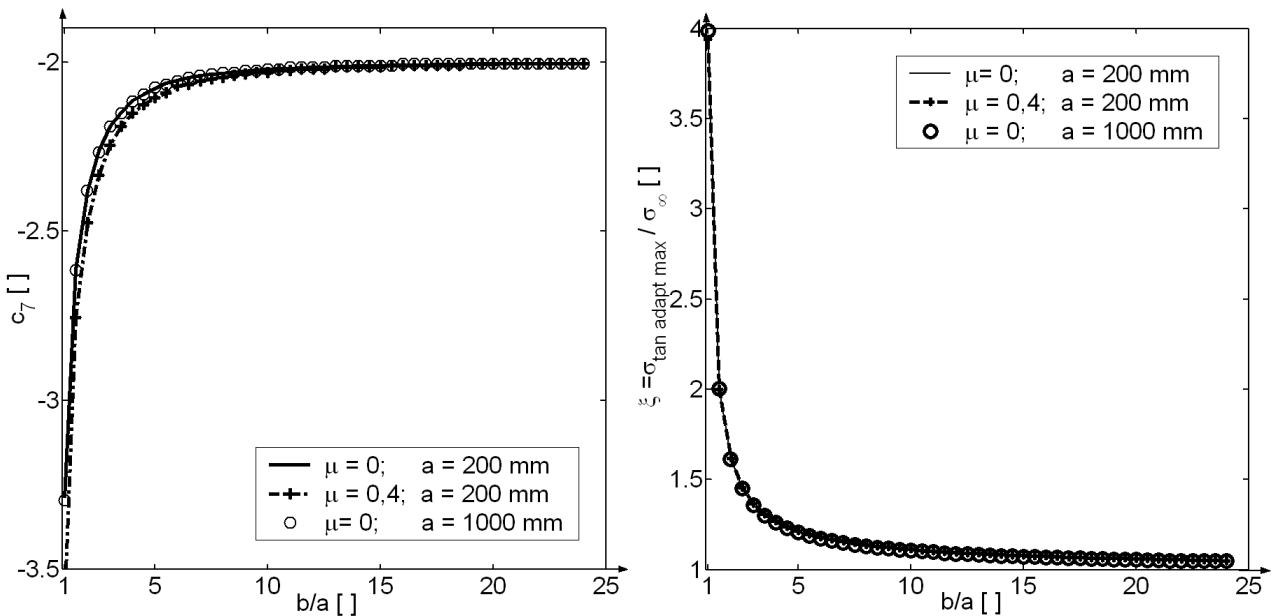


Abb. 4-13: Einfluss der Größe des aktiven Bereichs auf c_7 und dazugehörige maximale adaptive Tangentialspannung ($p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$)

Im Gegensatz zum symmetrischen Belastungszustand kann für den beschränkten aktiven Bereich des antisymmetrischen Belastungszustandes also keine für alle Aktivierungsbereiche gültige Lösung gefunden werden. Abb. 4-13 zeigt zudem, dass die Querdehnzahl μ einen, wenn auch geringen, Einfluss auf den Wert c_7 hat. Die dazugehörigen maximalen adaptiven Spannungen bleiben jedoch von μ unbeeinflusst. Weiterhin ist die Konstante c_7 unabhängig von der absoluten Größe a des Ausschnitts.

In Abb. 4-14 sind die optimalen adaptiven Spannungsverläufe ($c_7 = -2.25$) für den Fall $a = 200$ mm und $b = 500$ mm für $\varphi = 0^\circ$ (σ_r und σ_φ) bzw. $\varphi = 45^\circ$ ($\tau_{r\varphi}$) dargestellt. Im Vergleich zum symmetrischen Belastungszustand, siehe Abb. 4-7, sind hier die adaptiven Tangentialspannungen im aktiven Bereich nicht konstant.

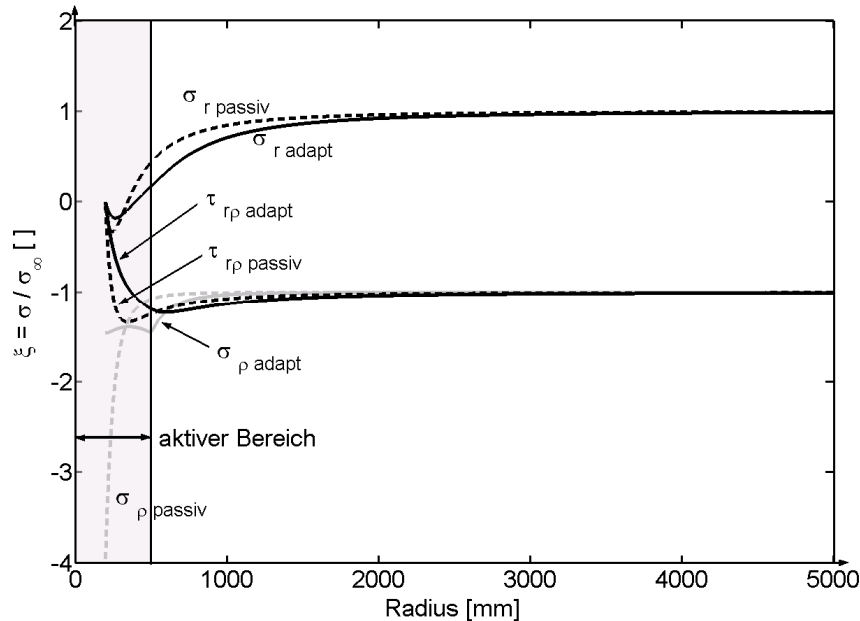


Abb. 4-14: Adaptive und passive Konzentrationskoeffizienten der Tangential-, Radial- und Schubspannungen für $a = 200$ mm, $b = 500$ mm, $p_x = -p_y = 100$ N/mm²; $\varphi = 0^\circ$ (σ_r und σ_φ) bzw. $\varphi = 45^\circ$ ($\tau_{r\varphi}$) $\mu = 0$, $c_7 = -2,25$

4.2.4 Allgemeine Lösung

Wie bereits oben beschrieben, wird zunächst angenommen, dass sich die allgemeine Lösung für alle Belastungsrichtung aus der anteiligen Superposition der symmetrischen und antisymmetrischen Lösungsanteile ergibt. Der Vergleich dieser Lösung mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungsverfahren wird jedoch zeigen, dass bei beschränkten Aktivierungsbereichen und zunehmend einachsigen Beanspruchungen eine weitere Reduktion der Spannungen im adaptiven Zustand möglich ist, siehe Kapitel 5.4.

Unbeschränkter Aktivierungsbereich

Wie oben dargestellt, kann die Erhöhung der Tangentialspannungen um den Ausschnitt bei einem unbegrenzten Aktivierungsbereich vollständig durch die induzierten Dehnungen neutralisiert werden, und der Ausschnitt kann somit für beliebige Lastkombinationen p_x , p_y als neutraler Ausschnitt ausgebildet werden.

Der erforderliche Verlauf der induzierten Dehnungen und die daraus resultierenden adaptiven Spannungen ergeben sich abhängig von der Belastungsrichtung zu:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{aktiv, unbeschr}} &= \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{a}{r} + \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{3 \cdot a}{r} \right] \\
 \sigma_{r \text{ adapt, unbeschr}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a}{r} \right] + \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{3 \cdot a}{r} + \frac{2 \cdot a^2}{r^2} \right] \\
 \sigma_{\varphi \text{ adapt, unbeschr}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} + \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot [-1] \\
 \tau_{r\varphi \text{ adapt, unbeschr}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[-1 + \frac{a^2}{r^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4-50}$$

Beschränkter Aktivierungsbereich

Für einen beschränkten Aktivierungsbereich lässt sich der optimale Verlauf der Aktivierung zur Reduzierung der Inhomogenitäten im Spannungsfeld, wie oben dargestellt, nicht mehr so einfach herleiten. Die Potenz der Aktivierungsfunktion und somit deren Verlauf für die antisymmetrischen Lastanteile hängt nun von der Größe des aktiven Bereichs ab. Die optimale Potenz kann Abb. 4-13 entnommen werden, und die Verläufe der Spannungen und der erforderliche Aktivierungsverlauf ergeben sich dann aus den in Anhang 0 gegebenen Formeln, auf deren explizite Darstellung an dieser Stelle verzichtet wird.

Durch die Beschränkung des aktiven Bereichs kann für keine Lastrichtung mehr die Erhöhung der Tangentialspannungen am Ausschnittsrand neutralisiert. Die am Ausschnittsrand auftretenden Inhomogenitäten des Spannungsfeldes können jedoch, wie Abb. 4-15 zeigt, auch schon bei relativ kleinen aktiven Bereichen deutlich reduziert werden. Ab einer Größe des aktiven Bereichs von $b/a \geq 10$ überschreiten die maximal auftretenden Spannungen den Wert des Grundspannungszustandes nur noch um maximal 10 %.

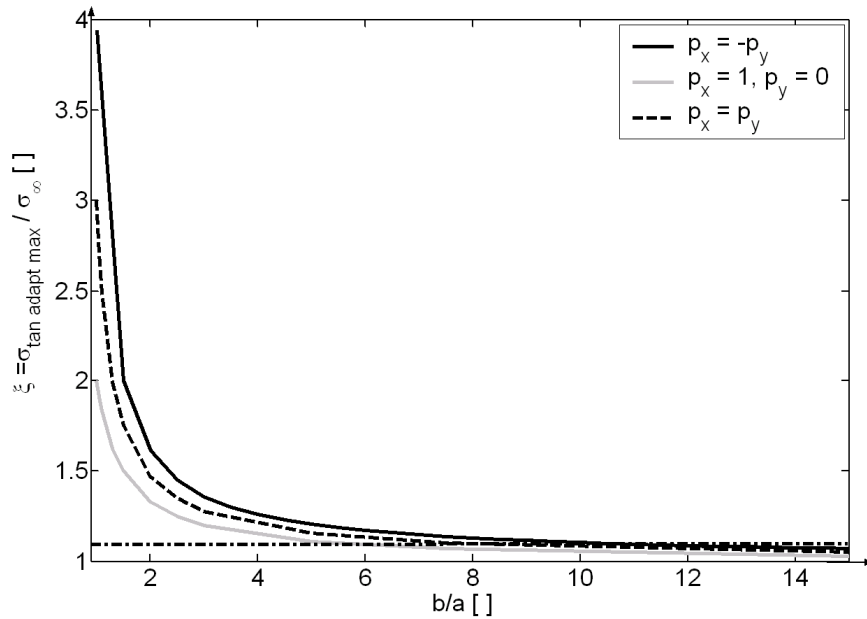


Abb. 4-15: Einfluss der Größe des aktiven Bereichs auf den Konzentrationskoeffizienten der adaptiven Tangentialspannungen für verschiedene Belastungsrichtungen

Für den antisymmetrischen Lastfall ergibt sich wegen des hohen Konzentrationskoeffizienten am Ausschnitttrand der beste Wirkungsgrad, der zum symmetrischen Lastfall hin abnimmt. Der Wirkungsgrad wird hierbei definiert als Koeffizient der maximal auftretenden Spannung im adaptiven Zustand zur Höhe der Spannung im passiven Zustand. In Abb. 4-16 ist der Einfluss der Lastrichtung auf den Wirkungsgrad für verschiedene Größen des aktiven Bereichs dargestellt.

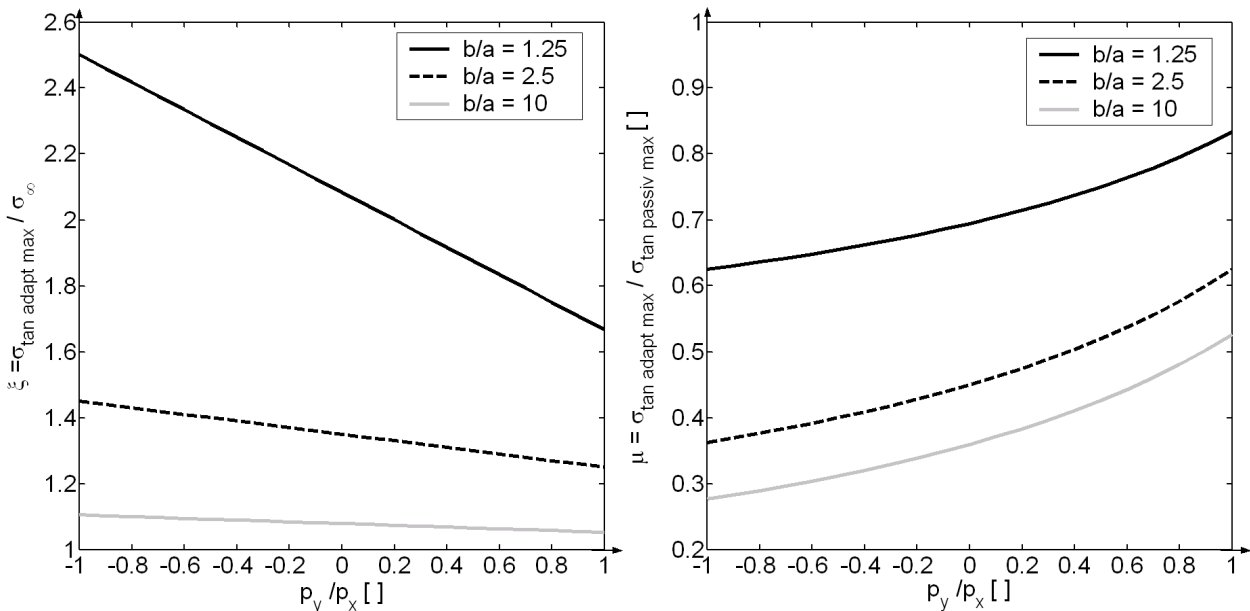


Abb. 4-16: Einfluss der Lastrichtung auf den Konzentrationskoeffizienten der maximalen Tangentialspannung und den Wirkungsgrad η für verschieden große aktive Bereiche

Die Entwicklung der Verläufe der induzierten Dehnungen bei zunehmender Größe der aktiven Bereiche ist für die untersuchten Belastungsrichtungen sehr unterschiedlich, siehe Abb. 4-17 und Abb. 4-18.

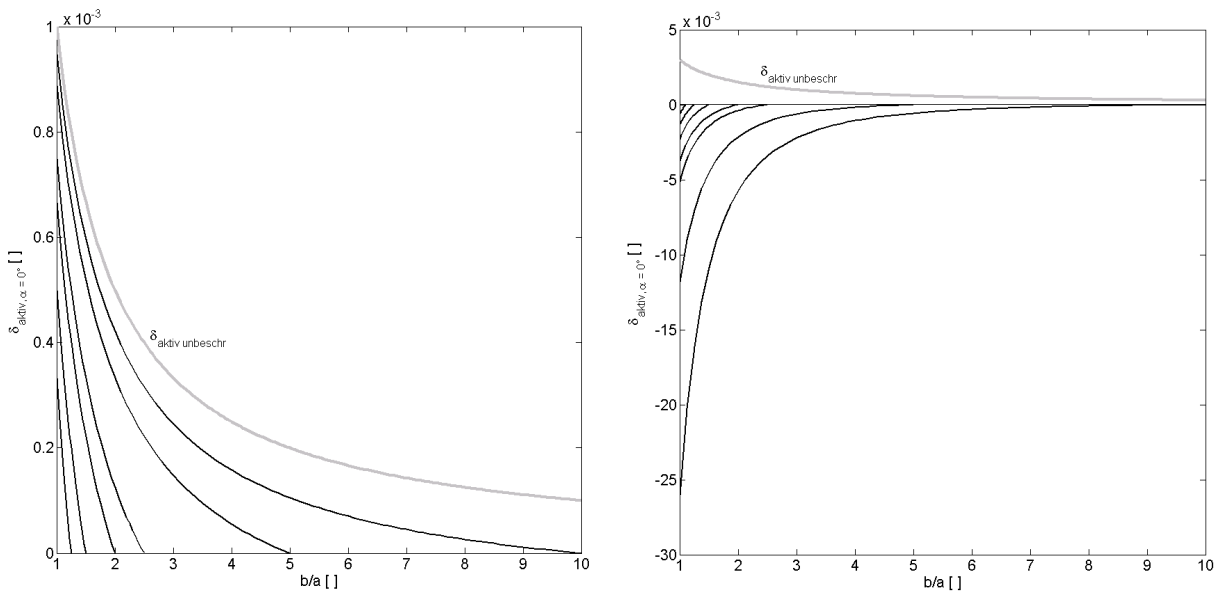


Abb. 4-17: Verlauf der induzierten Dehnungen für verschiedene Größen des aktiven Bereiches bei rotationssymmetrischer (links) und antisymmetrischer (rechts) Belastung für $\sigma_\infty/E = 1/1000$ und $\alpha = 0^\circ$

Während unter rotationssymmetrischen Lasten der Verlauf der Aktivierung sich zunehmend dem Verlauf des Systems mit unbeschränktem aktivem Bereich annähert, divergiert der Verlauf der induzierten Dehnungen unter antisymmetrischen Lasten. Zu Erfüllung der Randbedingung $\delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$ steigt der Parameter c_6 aus der Ansatzfunktion der induzierten Dehnungen (4-46) mit zunehmender Größe des aktiven Bereiches an. Dies führt für große aktive Bereiche zu einem exponentiellen Ansteigen des Maximalwertes der induzierten Dehnungen am Ausschnittsrand. Der Verlauf der adaptiven tangentialen Spannungen ist hiervon ab einer Größe des aktiven Bereiches $b/a \approx 10$ nur noch geringfügig beeinflusst, da ab dieser Größe c_7 gegen -2 konvergiert. Somit stellt der Term $c_6 \cdot r^{c_7}$ aus der Ansatzfunktion der induzierten Dehnungen (4-46) eine homogene Lösung von $\Delta\delta_{\text{aktiv}} = 0$ dar und hat auf den Verlauf der Spannungen keinen Einfluss. Zur Beschränkung des Maximalwertes der induzierten Dehnungen kann es deswegen eventuell sinnvoll sein, ab einer Größe des aktiven Bereiches von ca. $b/a = 10$ die Randbedingung $\delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$ zunächst in der Berechnung nicht zu berücksichtigen, und durch ein Verziehen des Aktivierungsverlaufs am äußeren Rand des aktiven Bereiches im Nachhinein zu erfüllen.

Bei diesem Vorgehen bzw. bei einem unbeschränkten aktiven Bereich springt der Verlauf der induzierten Dehnungen für antisymmetrische Lasten in der 0°-Achse auf Werte >0, siehe Abb. 4-17. Dies widerspricht zunächst dem gedanklichen Ansatz zum Tragverhalten dehnungsinduzierter Scheiben. Dieser Ansatz geht davon aus, dass hoch auf Druck beanspruchte Bereiche sich den äußeren Belastungen durch negative Dehnungen entziehen und umgekehrt. Bei kleinen aktiven Bereichen trifft dieses Verhalten zu, und die weniger beanspruchten nichtaktiven Bereiche werden durch dieses Entziehen der aktiven

Bereiche höher belastet. Bei dem hier untersuchten unbeschränkten aktiven Bereich hingegen sind auch die weniger beanspruchten ausschnittsfernen Bereiche aktiv. Sie können somit bei Druckbeanspruchungen und gleichzeitigen positiven induzierten Dehnungen Beanspruchungen so auf sich ziehen, dass die ausschnittsnahen Bereiche entlastet werden.

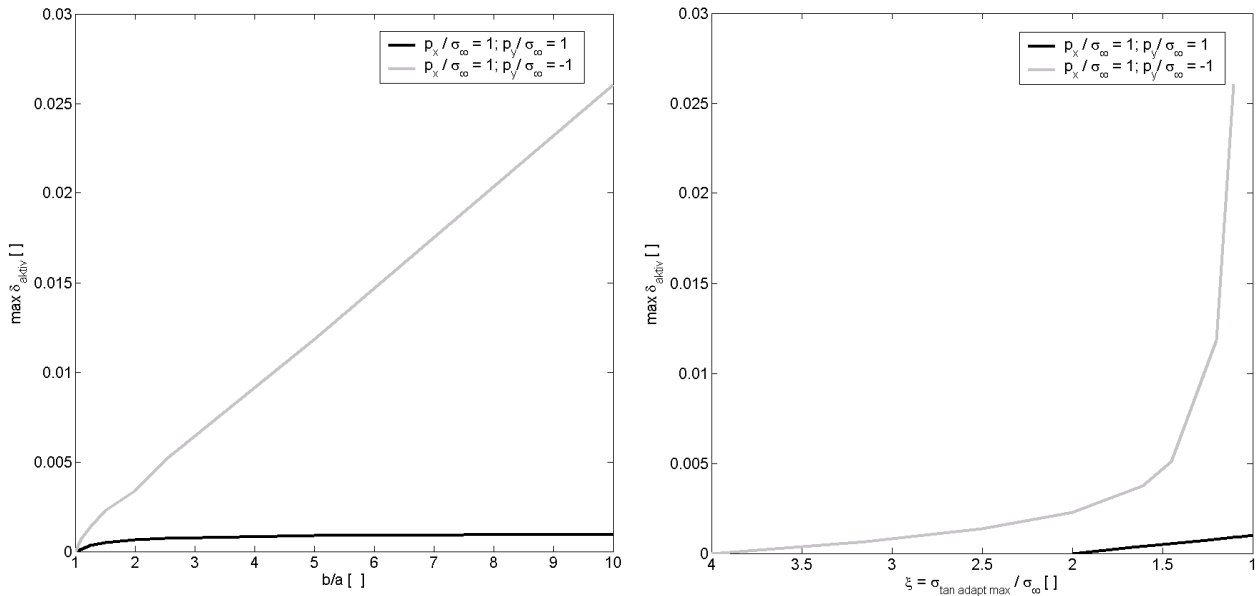


Abb. 4-18: Maximalwert der induzierten Dehnungen in Abhängigkeit von der Größe des aktiven Bereiches und dem Konzentrationskoeffizienten für $\sigma_{\infty}/E = 1/1000$ und $\alpha = 0^\circ$

4.3 Vergleich des adaptiven Systems mit passiven optimierten Systemen

Passive Systeme, die verschiedenen Belastungsrichtungen unterliegen, können immer nur suboptimale Lösungen zur Verbesserung des Beanspruchungszustandes bieten. Die Untersuchung des adaptiven Systems hat dagegen gezeigt, dass bei unbeschränkten aktiven Bereichen die Neutralisierung des Ausschnitts für alle Belastungsrichtungen innerhalb eines Systems möglich ist.

Zur Einordnung des Wirkungsgrades der dehnungsinduzierten Scheibe wird das System mit beschränktem aktivem Bereich mit der von Mansfield vorgeschlagenen Verstärkung mittels Randgurt verglichen. Drei Lastfälle werden hierbei betrachtet:

- Lastfall 1: $p_x=p_y=1$ (allseitiger Zug, symmetrischer Lastfall)
- Lastfall 2: $p_x=1$ $p_y=0$ (einachsiger Zug in x-Richtung)
- Lastfall 3: $p_x=1$ $p_y=-1$ (Zug in x-Richtung, Druck in y-Richtung, antimetrischer Lastfall)

Die Verstärkung des Ausschnittes durch einen Randgurt kann für einzelne Beanspruchungsrichtungen zum neutralen Ausschnitt führen. Sucht man das Optimum für wechselnde Beanspruchungsrichtungen, also die Form des Ausschnittes und des Gurtes, für die der Maximalwert der Spannungen für beliebige Beanspruchungsrichtung minimal wird, so ergibt sich ein kreisrunder Ausschnitt mit folgendem Randgurtaufwand:

$$E \cdot A_{\text{Randgurt}} / E \cdot h \cdot r_{\text{Ausschnitt}} = \frac{1}{(1-\mu)} \cdot 0,5$$

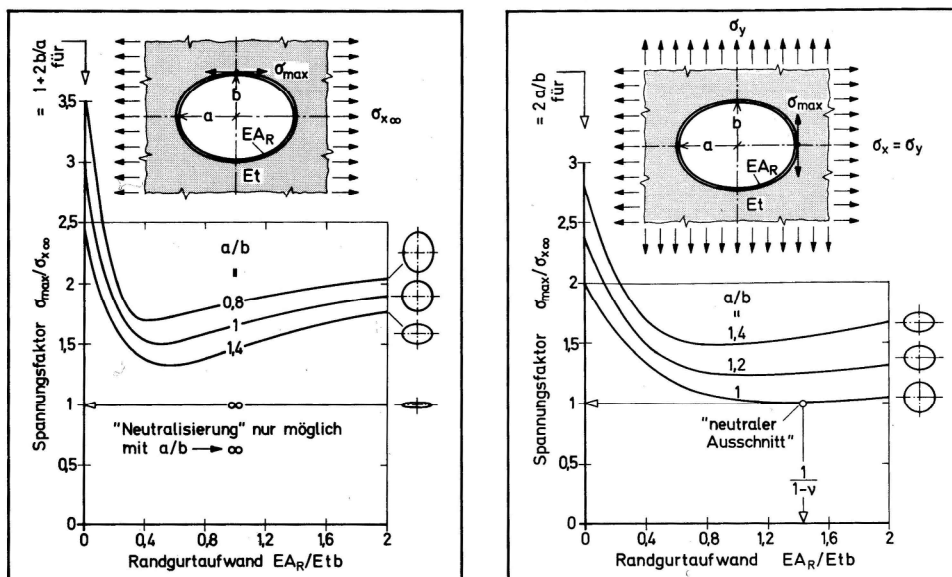


Abb. 4-19: Ausschnitt in isotroper Scheibe mit Randgurt konstanter Dehnsteifigkeit. Spannungsfaktor (Konzentrationskoeffizient) bei ein- und zweiachsigem Zug, abhängig vom Gurtaufwand; aus [95].

Anhand der in [95] gegebenen Diagramme (Abb. 4-19) können die maximal auftretenden Spannungen für die drei oben genannten Lastfälle ermittelt werden.

Mit den Konzentrationskoeffizienten der Tangentialspannung am Ausschnitttrand $\xi_{LF1} = \sigma_{\varphi \max LF1} / \sigma_{\varphi \infty} = 1,3$, $\xi_{LF2} = 1,5$ und $\xi_{LF3} = 1,7$ ergibt sich der Wirkungsgrad des Randgurtes zu $\eta_{\text{Randgurt}} = \xi_{LF3} / \sigma_{\max} = 0,425$. Dieser Wirkungsgrad wird beim adaptiven System bereits bei einem aktiven Bereich der Größe $b/a = 2$ erreicht.

Eine Gegenüberstellung der erforderlichen Volumina des Randgurtes und des aktiven Bereiches zeigt, dass für $\mu = 0$ das Volumen des aktiven Bereiches zwar das dreifache des Randgurtes einnimmt.

$$(4-51) \quad \begin{aligned} A_{\text{Aktuator}} &= \pi \cdot (b^2 - a^2) = \pi \cdot 3 \cdot a^2 & V_{\text{Aktuator}} &= 3 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot h \\ A_{\text{Randgurt}} &= \frac{0,5 \cdot h \cdot a}{1 - \mu} & V_{\text{Randgurt}} &= 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{0,5 \cdot h \cdot a}{1 - \mu} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot h}{1 - \mu} \\ \frac{V_{\text{Aktuator}}}{V_{\text{Randgurt}}} &= 3 \cdot (1 - \mu) \end{aligned}$$

Da aber bei der dehnungsinduzierten Scheibe der aktive Bereich Teil des Tragwerkes selbst ist, stellt das adaptive System dennoch bei gleichem Wirkungsgrad die leichtere Lösung dar. Anders kann sich das Verhältnis der Volumina bei flächigen Verstärkungen des passiven Systems darstellen:

Während bei einem verjüngten Pflaster mit hohem Wirkungsgrad $\eta = 0,95$ (Beispiel (4) aus Abb. 4-20) das Volumen der passiven Verstärkung $V_{\text{pfl}} = 12 \cdot \pi \cdot h \cdot a^2$ noch deutlich kleiner als das erforderliche Aktuatorvolumen mit demselben Wirkungsgrad $V_{\text{aktuator}} = 80 \cdot \pi \cdot h \cdot a^2$ ist, dreht sich das Verhältnis bei Pflastern konstanter Dicke um.

Zum Erreichen der Wirkungsgrade der Beispiele (3) und (5) aus Abb. 4-20 ist ein Radius des aktiven Bereich mit dem dreifachen Ausschnittsdurchmesser erforderlich ($b/a = 3$). Das in die Scheibe integrierte Aktuatorvolumen $V_{\text{aktuator}} = 8 \cdot \pi \cdot h \cdot a^2$ ist somit deutlich kleiner als die Volumina der passiven Verstärkungen $V_{\text{Pflaster, Bild (3)}} = 24 \cdot \pi \cdot h \cdot a^2$ und $V_{\text{Pflaster, Bild (5)}} = 48 \cdot \pi \cdot h \cdot a^2$.

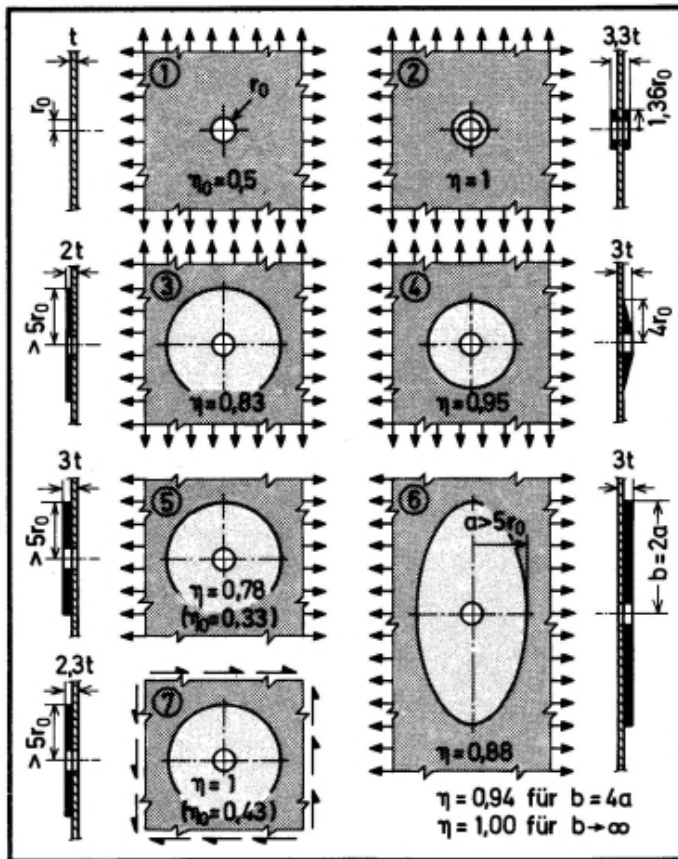


Abb. 4-20: Einzelloch mit flächigen Verstärkungen: Elastischer Wirkungsgrad η bei ein- und zweiachsigen Scheibenbelastungen; aus [95]

4.4 Zusammenfassung

Das dargestellte Beispiel zeigt auf, dass mit dehnungsaktivierten adaptiven Scheiben beinahe beliebige Manipulationen des Beanspruchungszustands möglich sind. Sie stellen somit die einzige Möglichkeit dar, inhomogene Spannungszustände um einen Ausschnitt für wechselnde Beanspruchungszustände vollständig zu neutralisieren. Bei einer lokalen Beschränkung des aktiven Bereiches ist zwar eine vollständige Neutralisierung der inhomogenen Spannungszustände um den Ausschnitt nicht mehr möglich, die unter wechselnden Beanspruchungen auftretenden Spannungen können jedoch so signifikant reduziert werden, dass das adaptive System eine deutlich leichtere Alternative zu den verschiedenen vorgeschlagenen passiven Systemen mit lokaler Verstärkung darstellt.

5 Dehnungsaktivierte adaptive Scheibe: Allgemeine Lösung

Eine geschlossene Lösung für den optimalen Verlauf der Aktivierung, wie im vorherigen Kapitel vorgestellt, kann nicht für alle Systeme gefunden werden. Zudem ist die Ermittlung relativ aufwendig, vor allem wenn verschiedene Systeme bzw. Belastungszustände zu untersuchen sind. Im Folgenden werden aus diesem Grund zwei numerische Verfahren auf Basis einer finiten Elementberechnung vorgestellt, mit denen die optimalen Verläufe der Aktivierung näherungsweise ermittelt werden können.

Zunächst wird die besondere Problematik des vorliegenden Optimierungsproblems erläutert. Hierbei wird insbesondere auf die sich ergebenden Anforderungen an die mathematische Programmierung und die Beschreibung der Verläufe der induzierten Dehnungen eingegangen.

Anhand der in Kapitel 3 vorgestellten Grundlagen werden zwei mögliche Berechnungsabläufe zur Bestimmung der induzierten Dehnungen hergeleitet. Das Kapitel schließt mit einem Vergleich und einer Bewertung der beiden Verfahren anhand des Beispiels der Scheibe mit Ausschnitt ab.

5.1 Konzept und besondere Problematik

Ziel des Berechnungsverfahrens ist es, den optimalen Verlauf der induzierten Dehnungen so zu ermitteln, dass der Maximalwert der auftretenden adaptiven Spannungen minimal wird. Mathematisch kann dies für einen einzelnen Belastungszustand wie folgt ausgedrückt werden:

(5-1) Minimiere:

$$f = \text{Max} |\sigma_{\text{adapt}}|$$

$$\text{mit } \sigma_{\text{adapt}} = \sigma_{\text{passiv}} + \sigma_{\text{aktiv}}$$

$$\sigma_{\text{passiv}} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{aktiv}} = g(\delta_{\text{aktiv}})$$

Hierbei sind die aktivierten Spannungen und damit auch die adaptiven Spannungen linear abhängig vom Verlauf der Aktivierung δ_{aktiv} . Das dargestellte Minimax-Problem zeichnet sich durch Unstetigkeit aus und ist somit nicht differenzierbar. Somit können zur Lösung nur Verfahren Verwendung finden, die entweder ohne Gradienteninformationen auskommen, oder die diese näherungsweise ermitteln. Verschiedene Ansätze zur Umschreibung von Minimax-Problemen mit Ersatzfunktionen, die im gesamten Entwurfsraum stetig und differenzierbar sind, werden in der Literatur vorgestellt. Gegenrechnungen haben jedoch aufgezeigt, dass diese bei dem hier vorliegenden Optimierungsproblem nicht unbedingt ziel führend sind:

Basiert zum Beispiel die Zielfunktion auf der Minimierung der Abweichungen vom Grundspannungszustand,

$$(5-2) \quad \text{Minimiere } f = \sum (\sigma_{\text{adapt}} - \sigma_{\infty})^2,$$

werden lokale Spannungsspitzen zugunsten niedrigerer Spannungen mit größeren Einflussbereichen in Kauf genommen, so dass eventuell keine Homogenisierung des Spannungsfeldes erreicht werden kann.

Ein anderer Ansatz, auf dessen Basis, zum Beispiel von Madsen [46], Brayton et. al. [14] oder Charalambous [16], verschiedene Verfahren zur Lösung von Minimax-Problemen vorgestellt werden, basiert auf der Formulierung einer alternativen Zielfunktion. Diese entspricht einer neuen unabhängigen Variablen, deren Nebenbedingungen die Werte der ursprünglichen Funktion berücksichtigen:

$$(5-3) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f = g \\ \text{mit} & \sigma_{\text{adapt}}(\mathbf{x}) \leq g \end{array}$$

Versuche, diesen Ansatz bei den hier untersuchten Problemen zu verwenden, führten jedoch zu Konvergenzproblemen, so dass im Weiteren auf die Umschreibung der Zielfunktion und die damit verbundene Möglichkeit, Gradienteninformationen explizit formulieren zu können, verzichtet wird.

Neben der geeigneten Wahl der Zielfunktion ist auch die Beschreibung des Verlaufs der Aktivierung genauer zu untersuchen. Grundsätzlich können hier zwei Möglichkeiten unterschieden werden [9], [11]:

Die Erste beruht darauf, im Rahmen der Optimierung jedem finiten Element des aktiven Bereiches eine Entwurfsvariable zuzuweisen. Nachteilig sind hierbei zum einen die hohe Anzahl der Optimierungsvariablen, zum anderen die Abhängigkeit von der Diskretisierung des Netzes.

Die zweite Möglichkeit nähert den Verlauf der Aktivierung durch eine formbeschreibende Gestaltfunktion, die über wenige Parameter bestimmt wird, an. Die hierfür zur Verfügung stehenden Methoden und deren Grundlagen sind in Kapitel 3.3 vorgestellt worden. Die Vorteile der wenigen Optimierungsvariablen und der damit einhergehenden Vereinfachung des Optimierungsproblems liegen auf der Hand. Nachteilig ist jedoch, dass eine schlechte Wahl der Gestaltfunktion bereits das Ergebnis einschränken und damit verfälschen kann. Zudem sind alle Gestaltfunktionen so ausgelegt, dass sie eine Glättung der zu beschreibenden Form bewirken, die eventuell nicht korrekt ist.

Auf dem ersten Ansatz beruht das in Kapitel 5.2.3 vorgestellte direkte Verfahren zur Berechnung des erforderlichen Verlaufs der Aktivierung, das zunächst für den aktiven Bereich allein die Aktivierung ermittelt und anschließend durch eine Skalierung die Randbedingungen am Übergang zwischen aktivem und passivem Bereich erfüllt. Die Berechnungen mit diesem Verfahren ergaben jedoch aufgrund teilweise schlecht konditionierter Sensitivitätsmatrizen mehrfach unbrauchbare Ergebnisse, so dass ein höherer Aufwand für Plausibilitätskontrollen in die Berechnungszeiten einzuplanen ist.

Das in Kapitel 5.2.2 vorgestellte Verfahren mit einer formbeschreibenden Funktion hat sich im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der größeren Allgemeingültigkeit, der numerischen Stabilität und der kürzeren Rechenzeiten als effektiver erwiesen. Für bestimmte Probleme, bei denen der aktive Bereich mit dem zu optimierenden, also dem Bereich der Spannungsspitzen zusammenfällt, kann die erste Variante jedoch eine interessante Alternative darstellen, weswegen sie an dieser Stelle auch im Detail anhand des Beispiels der Scheibe mit Ausschnitt vorgestellt wird. Ein Vergleich beider Berechnungsabläufe in Kapitel 5.3 zeigt für dieses Beispiel gute Übereinstimmungen der Ergebnisse.

5.2 Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren

5.2.1 Grundlagen der Berechnung

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Berechnungen das Programm MATLAB verwendet, das ein Softwarepaket für numerische Berechnungen und für die Visualisierung von Daten im technisch-wissenschaftlichen Bereich ist [50]. Spezielle Anwendungen werden hierbei in Toolboxen zusammengefasst, die vom Anwender je nach Bedarf erweitert oder neu aufgebaut werden können.

Aufbauend auf den bestehenden Toolboxen OPTIMIZATION TOOLBOX und CALFEM wurden im Rahmen dieser Arbeit Toolboxen zur Berechnung adaptiver flächiger Tragwerke erstellt. Die OPTIMIZATION TOOLBOX ist Teil des Programmpaketes von MATLAB und beinhaltet eine Vielzahl von Funktionen zur mathematischen Programmierung, deren detaillierte Beschreibung in [49] gegeben ist. Die Toolbox CALFEM [15] wurde im Department of Mechanics and Materials der Universität Lund, Schweden, entwickelt und beinhaltet Funktionen zur Berechnung finiter Elemente, die für die hier durchgeführten Untersuchungen entsprechend erweitert wurden.

Die Betrachtung der dehnungsaktivierten Scheiben beschränkt sich auf ebene Systeme mit Scheibenelementen, deren Berechnungen geometrisch und physikalisch linear erfolgen. Eine Erweiterung auf räumliche Systeme ist durch hinzufügen der z-Koordinaten programmtechnisch einfach umsetzbar. Für nichtlineare Berechnungen wären zusätzliche Iterationsschritte erforderlich, deren Zeitaufwand in der Berechnung eventuell durch die Verwendung von verbesserten Gleichungssolvern oder durch die Ermittlung von Gradienteninformationen reduziert werden könnte.

5.2.2 Berechnungsverfahren mit beschreibender Gestaltfunktion der Aktivierung

Zunächst wird das Berechnungsverfahren vorgestellt, das auf eine formbeschreibende Gestaltfunktion für die Aktivierung zurückgreift. Das Verfahren beruht auf einer zweistufigen Optimierung, die in der ersten Stufe den Spitzenwert der auftretenden Spannungen reduziert und in der zweiten Stufe Inhomogenitäten im Spannungsfeld der weniger hoch beanspruchten Bereiche abbaut. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte des Verfahrens detailliert beschrieben. Zum Abschluss gibt ein Ablaufdiagramm in Abb. 5-4 einen Überblick über den Verfahrensablauf.

Aufstellen der Systemmatrizen und Berechnen des passiven Systems

Für die Berechnung des adaptiven Systems müssen zunächst Systemmatrizen aufgestellt und die Spannungs- und Verformungszustände (σ_{passiv} und v_{passiv}) des passiven Systems ermittelt werden. Hierzu werden die Funktionen der CALFEM-Toolbox verwendet. Die Vernetzung des Systems erfolgt nach einem von Zienkiewicz [101] vorgestellten Verfahren. Dieses basiert auf einer Unterteilung des betrachteten Gesamtsystems in Teilflächen, deren Vernetzung selbst mittels Formfunktionen erfolgt.

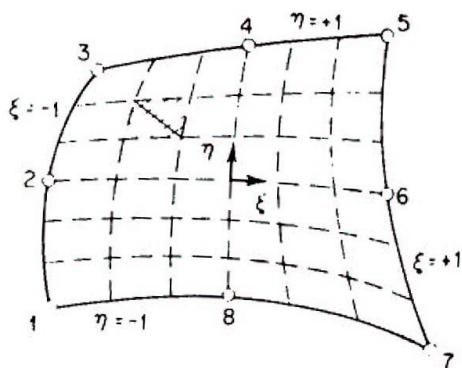


Abb. 5-1: Netzeinteilung nach Zienkiewicz: Vernetzung einer Teilflächen eines Systems [101]

In der Berechnung werden maßgeblich die Spannungswerte in der Mitte der finiten Elemente betrachtet. In Bereichen von Spannungsspitzen, wie zum Beispiel am Ausschnittsrand der Scheibe mit Ausschnitt, ist es jedoch erforderlich auch die Spannungswerte in den Knoten zu berücksichtigen. Im Weiteren werden deswegen im direkten Vergleich die Knotenwerte mit dem Index $_{\text{knot}}$ bzw. die Elementwerte mit $_{\text{ele}}$ gekennzeichnet. Spannungswerte ohne Index beziehen sich immer auf Werte in Elementmitte.

Definition der Zielfunktion

Zur Ermittlung der erforderlichen optimalen Aktivierung muss im nächsten Schritt das Optimierungsproblem definiert werden. Wie bereits oben beschrieben, soll eine Homogenisierung des Spannungsfeldes der Scheibe mit der Minimierung des maximalen Betrags der Spannung erreicht werden. Dies wird mathematisch für jeden Lastfall getrennt mit der folgenden nichtstetigen Zielfunktion beschrieben:

$$(5-4) \quad \text{Minimiere } f_{LF}(x) = \sigma_{\text{adapt}, LF, \text{max absolut}}$$

$$\text{mit} \quad \sigma_{\text{adapt}, LF, \text{max absolut}} = \max \left[\max |\sigma_{I, \text{adapt}, LF}| \quad \max |\sigma_{II, \text{adapt}, LF}| \right]$$

Zunächst werden hier die betragsmäßigen Maximalwerte der Hauptspannungen zur Ermittlung des Maximalwertes herangezogen. Diese werden nach den bekannten Formeln, siehe (5-5), aus den Werten des zweiachsigen Spannungszustandes berechnet. Alternativ können ebenso andere Spannungswerte, wie zum Beispiel die von-Mises-Spannungen, betrachtet werden. Der prinzipielle Ablauf der Berechnung bleibt davon unbeeinflusst.

$$(5-5) \quad \begin{aligned} \sigma_I &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{II} &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

Die adaptiven Spannungen berechnen sich für jeden Lastfall aus der Summe der passiven und aktivierten Spannungsvektoren. Diese wiederum setzen sich aus den Spannungswerten in Elementmitte bzw. den relevanten Knotenwerten im Bereich von Spitzenspannungen zusammen:

$$(5-6) \quad \sigma_{\text{adapt, LF}} = \sigma_{\text{passiv, LF}} + \sigma_{\text{aktiv, LF}} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \sigma_{\text{passiv, LF}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{\text{passiv, ele, LF}} \\ \sigma_{\text{passiv, knot, LF}} \end{bmatrix} \\ \sigma_{\text{aktiv, LF}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{\text{aktiv, ele}}(\delta_{\text{aktiv, LF}}) \\ \sigma_{\text{aktiv, knot}}(\delta_{\text{aktiv, LF}}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die passiven Spannungen sind für jeden Lastfall konstant, und die aktivierten Spannungen hängen, wie im Weiteren gezeigt wird, linear vom Verlauf der Aktivierung ab.

Zusammenhang zwischen Aktivierung und aktivierten Spannungen

Die Berechnung der aktivierten Spannungen σ_{aktiv} erfolgt über einen Lastvektors $P_{\delta_{\text{aktiv}}}$, der einer zur Aktivierung δ_{aktiv} äquivalenten äußeren Beanspruchung des Systems entspricht. Dieser Lastvektor kann aus dem Gleichgewicht zwischen innerer und äußerer Arbeit berechnet werden:

$$(5-7) \quad A_i = A_a = \int_V \sigma^T \cdot \varepsilon_0 dV = v^T \cdot P_{\delta_{\text{aktiv}}}$$

Hierbei gilt für eine isotrope Aktivierung:

$$(5-8) \quad \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot B \cdot v \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 = \delta_{\text{aktiv}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus (5-7) und (5-8) kann der äquivalente Lastvektor $P_{\delta_{\text{aktiv}}}$ bestimmt werden:

$$(5-9) \quad \begin{aligned} v^T \cdot P_{\delta_{\text{aktiv}}} &= v^T \int_V B^T \cdot E \cdot \varepsilon_0 dV \\ P_{\delta_{\text{aktiv}}} &= h \int_A B^T dA E \cdot \delta_{\text{aktiv}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit $P_{\delta \text{ aktiv}}$, der Steifigkeitsmatrix K des Systems und den Gleichgewichtsbedingungen können die Knotenverschiebungen v_{aktiv} und die Spannungen σ_{aktiv} infolge der Aktivierung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{aktiv}} &= K^{-1} \cdot P_{\delta \text{ aktiv}} \\
 (5-10) \quad \varepsilon_{\text{aktiv}} &= B \cdot v_{\text{aktiv}} - \varepsilon_0 \\
 \sigma_{\text{aktiv}} &= \underline{E} \cdot (B \cdot v_{\text{aktiv}} - \varepsilon_0)
 \end{aligned}$$

Der in (5-10) aufgestellte lineare Zusammenhang zwischen den aktivierten Spannungen und induzierten Dehnungen der Aktivierung kann bei der Lösung der Optimierungsaufgabe zur Reduktion des Rechenaufwandes ausgenutzt werden. Statt in jedem Optimierungsschritt die Verschiebungen und Spannungen durch Lösen der Gleichgewichtsbedingungen (5-10) zu berechnen, wird vor der Durchführung des Optimierungsverfahrens mit virtuellen Einheitsdehnungen eine Sensitivitätsmatrix aufgestellt, über die die Spannungen in jedem Optimierungsschritt direkt ermittelt werden können.

Aufstellen der formbeschreibenden Funktion für den Verlauf der Aktivierung

Vor dem Aufstellen der Sensitivitätsmatrix ist der Zusammenhang zwischen dem Entwurfsvektor und dem Verlauf der Aktivierung herzuleiten. Als formbeschreibende Funktionen werden hier zweidimensionale kubische B-Splines gewählt, deren Eigenschaften bereits in Kapitel 3.3 beschrieben wurden. Die Kontrollpunkte der B-Splines r_{ij} bilden die Entwurfsvariablen \mathbf{x} der Optimierung und werden mittels Interpolation gleichmäßig über den aktiven Bereich verteilt.

Abhängig von der Geometrie des aktiven Bereichs kann es erforderlich sein, die Aktivierung in mehrere Bereiche aufzuteilen und diese jeweils mit einzelnen B-Splines zu beschreiben.

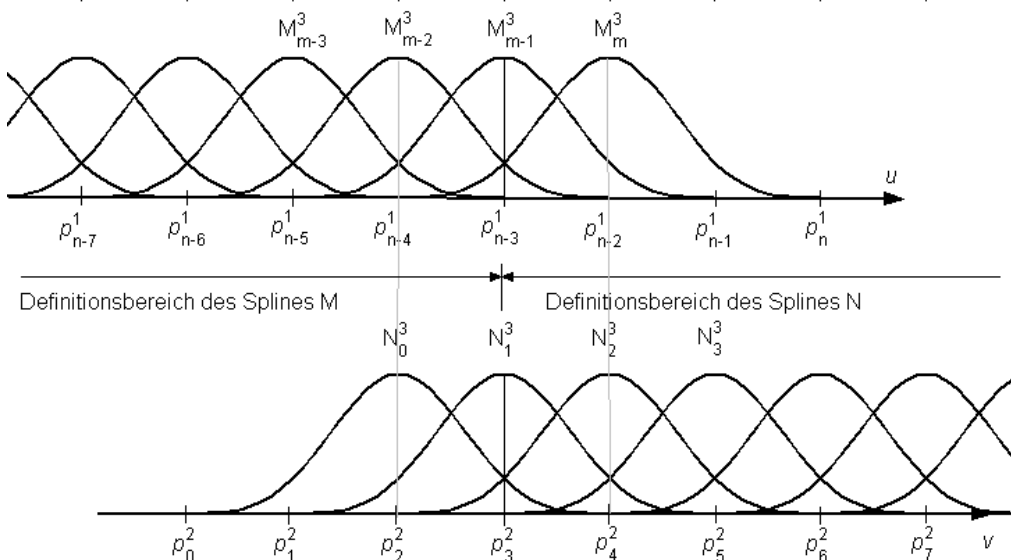


Abb. 5-2: Zwei aneinandergrenzende kubische B-Splines: Werte der Kontrollknoten

Die Kontinuität in den Übergängen verschiedener Bereiche kann bei gleichem Abstand der Parameter- und Kontrollknoten durch einfache Gleichheitsnebenbedingungen, siehe Abb.

5-2, beim Lösen der Optimierungsaufgabe gewährleistet werden. Hierbei werden die Werte der entsprechenden Kontrollknoten des zweiten Splines r_0^N, r_1^N und r_2^N denen des ersten Splines M r_{m-2}^M, r_{m-1}^M und r_m^M gleichgesetzt.

Um die Anzahl der Entwurfsvariablen zu reduzieren und die damit einhergehende Vereinfachung der Optimierungsaufgabe auszunutzen, wird in dieser Arbeit jedoch ein anderes Vorgehen gewählt: Hierzu werden die infolge der Kontinuitätsbedingungen voneinander abhängigen Kontrollpunkte r_0^N, r_1^N und r_2^N aus der Gruppe der Entwurfsvariablen herausgenommen, und die Kontinuitätsbedingungen werden bereits bei der Berechnung der formbeschreibenden Funktionen berücksichtigt. Wie Abb. 5-3 zeigt, fallen somit bei gleichem Abstand der Parameter- und Kontrollknoten die letzten vier Parameterknoten $p_{n-3:n}^1$ des ersten Splines mit den ersten vier $p_{0:3}^2$ des zweiten Splines zusammen, und die Randkontrollknoten r_m^1 und r_0^2 überlappen gerade nicht. Die Gewährleistung der Kontinuität erfolgt durch die Berücksichtigung der letzten drei Kontrollknoten r_{m-2}^M, r_{m-1}^M und r_m^M des ersten Splines bei der Berechnung des zweiten Splines.

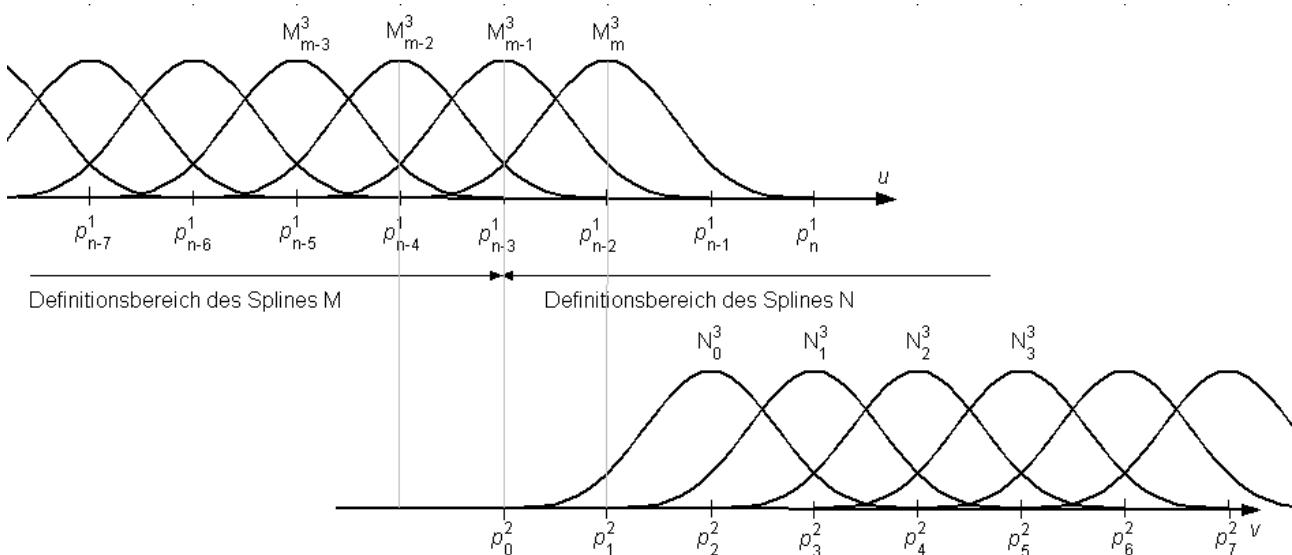


Abb. 5-3: Erforderliche minimale Überlappung zweier aneinandergrenzender kubischer B-Splines

Der Zusammenhang zwischen dem Vektor δ_{aktiv} , der die induzierten Dehnungen jedes finiten Elements des aktiven Bereiches bezogen auf seine Elementmitte enthält, und den Entwurfsvariablen \mathbf{x} wird nun wie folgt aufgestellt: Zunächst wird die Matrix der Kontrollpunkte r_{ij} , die den Entwurfsvariablen \mathbf{x} entsprechen und die dazugehörigen Koordinatenvektoren

$$(5-11) \quad \mathbf{x}_{\text{Kontroll}} = [\mathbf{x}_{\text{Kontroll } 0}, \dots, \mathbf{x}_{\text{Kontroll } i}]$$

$$\text{und } \mathbf{y}_{\text{Kontroll}} = [\mathbf{y}_{\text{Kontroll } 0}, \dots, \mathbf{y}_{\text{Kontroll } j}]$$

sowie die Koordinatenvektoren der Parameterpunkte

$$(5-12) \quad \mathbf{x}_{\text{parameter}} = [\mathbf{x}_{\text{parameter } 0-2}, \dots, \mathbf{x}_{\text{parameter } i+2}]$$

$$\text{und } \mathbf{y}_{\text{parameter}} = [\mathbf{y}_{\text{parameter } 0-2}, \dots, \mathbf{y}_{\text{parameter } j+2}]$$

aufgestellt. Hierbei fallen die Parameterpunkte mit den Kontrollpunkten gleicher Indizes geometrisch zusammen. Die Koordinaten der Parameter- und Kontrollpunkte und die Koordinaten $x_n = [x_n, y_n]$ der n finiten Elemente im aktiven Bereich werden anschließend auf die lokalen Koordinaten u, v ($u \in [0,1]$ und $v \in [0,1]$) der B-Splines skaliert und mit den Bildungsvorschriften für kubische zweidimensionale B-Splines, siehe (3-5) und (3-6), können dann die diskreten Werte der induzierten Dehnung δ_{aktiv} je finitem Element berechnet werden.

Da mittels B-Splines generierte Flächen und Kurven geometrisch nicht mit den Kontrollknoten zusammenfallen, können Randbedingungen, wie zum Beispiel $\delta_{\text{aktiv}} = 0$ am Übergang von aktivem zu passivem Bereich, nicht durch Zuweisen der entsprechenden Werte an die Kontrollknoten erfüllt werden. Solche Randbedingungen müssen somit als Gleichheitsnebenbedingungen des Optimierungsproblems formuliert werden:

$$(5-13) \quad \delta_{\text{aktiv Nebenbedingung}}(\mathbf{x}) - \delta_{\text{aktiv Rand}} = 0$$

Hierbei stellt $\delta_{\text{aktiv Rand}}$ den geforderten Verlauf der Aktivierungsfunktion im Bereich der Randbedingung dar. Diese Nebenbedingungen kann aufgrund der im Rahmen der finiten Elementberechnung durchgeführten Diskretisierung der Problemstellung nur näherungsweise erfüllt werden. Hierfür wird eine bestimmte Anzahl an Punkten $x_{\text{Randbedingung } i} = [x_i, y_i]$, die den Bereich der Randbedingung abdecken, gewählt. Mit diesen, den Kontroll- und Parameterpunkten aus (5-11) und (5-12) und den Bildungsvorschriften der B-Splines wird der Vektor $\delta_{\text{aktiv Nebenbedingung}}$ der Nebenbedingungen berechnet. Die Anzahl der erforderlichen Randbedingungspunkte hängt von der geforderten Genauigkeit und der Anzahl der Kontrollpunkte der B-Splines ab.

Aufstellen der Sensitivitätsmatrix

Nach dem Aufstellen des Zusammenhangs zwischen den Kontrollknotenwerten r_{ij} – also den Entwurfsvariablen \mathbf{x} – und dem Verlauf der Aktivierung δ_{aktiv} , können die Sensitivitätsmatrizen S , die den Zusammenhang zwischen den Entwurfsvariablen \mathbf{x} und den aktivierten Spannungen beschreiben, bestimmt werden. Da der Zusammenhang

zwischen dem Verlauf der Aktivierung und den aktivierten Spannungen, wie in (5-10) gezeigt, linear ist, hängen die aktivierten Spannungen auch linear von den Entwurfsvariablen ab und die Sensitivitätsmatrizen S können über Einheitsbelastungszustände berechnet werden. Hierzu wird zunächst der Vektor \mathbf{x} der Entwurfsvariablen aufgestellt, der alle Kontrollknoten r_{ij} enthält.

$$(5-14) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r_{01} \\ \vdots \\ r_{i1} \\ \vdots \\ r_{1j} \\ \vdots \\ r_{ij} \end{bmatrix}$$

Für jedes der $n = i \cdot j$ Elemente des Entwurfsvektors werden anschließend für jeden Einheitsbelastungszustand, siehe (5-15), die dazugehörigen Einheitsaktivierungsvektoren $\delta_{\text{aktiv, Einheit, } n}$ und Spannungen $\sigma_{\text{aktiv, Einheit, } n}$ berechnet. Bei einer Berücksichtigung der Übergangsbedingungen zwischen mehreren Splines, so wie in Abb. 5-3 dargestellt, sind in den Einheitsbelastungszuständen bereits alle Kontinuitätsbedingungen erfüllt und müssen in der späteren Optimierung nicht mehr als Nebenbedingungen aufgeführt werden.

$$(5-15) \quad \mathbf{x}_{\text{Einheitszustand } i} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = n \\ 0 & \text{für } i \neq n \end{cases}$$

Die Spannungsvektoren $\sigma_{x, \text{Einheit}}$, $\sigma_{y, \text{Einheit}}$ und $\tau_{xy, \text{Einheit}}$ infolge der Einheitszustände werden in den drei Matrizen S_{σ_x} , S_{σ_y} und $S_{\tau_{xy}}$ getrennt gespeichert.

$$(5-16) \quad S_{\sigma_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{x11}}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \dots \\ \vdots & \frac{\partial \sigma_{xst}}{\partial \mathbf{x}_t} & \\ \vdots & & \frac{\partial \sigma_{xmn}}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix}$$

So gibt das Element st (Zeile s , Spalte t) einer Sensitivitätsmatrix die Spannung im finiten Element s infolge der Belastung, die aus einer Einheitsänderung des Wertes des Kontrollknotens t resultiert, an. Die Spalten zeigen also den Einfluss eines Kontrollknotenwertes auf die Spannungen des gesamten Systems und die Zeilen den Einfluss aller Kontrollknotenwerte auf ein finites Element. Im gleichen Berechnungsschritt werden analog die Sensitivitäten S_{knot} für die relevanten Knotenwerte des Systems aufgestellt.

Mit den Sensitivitätsmatrizen können somit die adaptiven Spannungen in jedem Iterationsschritt der Optimierung ohne erneutes Lösen der Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden:

$$(5-17) \quad \sigma_{\text{adapt, LF}} = \sigma_{\text{passiv, LF}} + \sigma_{\text{aktiv, LF}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{passiv, LF}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{passiv, ele, LF}} \\ \sigma_{\text{passiv, knot, LF}} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\text{aktiv, LF}} = \begin{bmatrix} S_{\text{ele}} \cdot \mathbf{x} \\ S_{\text{knot}} \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

1. Optimierungsstufe

Nachdem der Zusammenhang zwischen den Entwurfsvariablen und den adaptiven Spannungen aufgestellt wurde, kann die in (5-4) bestimmte Zielfunktion gelöst werden. Aufgrund der einzuhaltenden Nebenbedingungen (5-13) am Übergang zwischen aktivem und passivem Bereich stellt sich diese nun als folgendes nichtlineares beschränktes Problem dar:

$$(5-18) \quad \begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad f_{\text{LF}}(\mathbf{x}) = \sigma_{\text{adapt, LF, max absolut}} \\ &\text{mit} \quad \sigma_{\text{adapt, LF, max absolut}} = \max \left[\max |\sigma_{\text{I, adapt, LF}}| \quad \max |\sigma_{\text{II, adapt, LF}}| \right] \\ &\text{mit} \quad \sigma_{\text{I, adapt, LF}} \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{II, adapt, LF}} \quad \text{aus (5-5) und (5-17)} \\ &\text{unter Einhaltung der nichtlinearen} \\ &\text{Gleichheitsnebenbedingungen} \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{aktiv, Nebenbedingung } i}(\mathbf{x}) - \delta_{\text{aktiv, Rand } i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

n Anzahl der Randbedingungspunkte

Die Optimierungsaufgabe wird mit der Funktion *fmincon*, die in der OPTIMIZATION TOOLBOX von Matlab implementiert ist, gelöst. Die Funktion verwendet zur Lösung der Optimierungsaufgabe ein Verfahren der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP). Werden, wie in diesem Fall, keine Informationen zu den Gradienten der Zielfunktion eingegeben, so werden diese bei jeder Neubestimmung der Hesse-Matrix mit einer finiten Differenzenmethode bestimmt. Die Ermittlung der Hesse-Matrix der Lagrange-Multiplikatoren erfolgt in jedem Iterationsschritt mit dem BFGS-Verfahren.

Als Ergebnis $f_{\text{LF}}(\mathbf{x})$ der ersten Optimierungsstufe erhält man für jeden Lastfall k den minimal möglichen Maximalwert der adaptiven Spannungen für die gewählte Aktivierung der Scheibe, der im Weiteren als $\sigma_{\text{maxmin, LF}}$ bezeichnet wird. Mit diesem Wert kann bereits der Wirkungsgrad des adaptiven Systems bestimmt werden.

$$(5-19) \quad f_{\text{LF}}(\mathbf{x}) = \sigma_{\text{maxmin, LF}}$$

Weiterhin erhält man mit den Entwurfsvariablen $\mathbf{x}_{1,\text{Stufe}}$ die Kontrollpunkte für einen möglichen Verlauf der Aktivierungsfunktion, mit dem dieser minimale Maximalwert $\sigma_{\text{maxmin, LF}}$ erreicht werden kann. Dieser Verlauf ist in den im passiven Zustand stark beanspruchten Teilen des aktiven Bereichs eindeutig, und jede Veränderung würde in diesen Bereichen zu einer Erhöhung des Werts $\sigma_{\text{maxmin, LF}}$ führen.

In den Teilen der aktiven Bereiche, die im passiven Zustand nur gering beansprucht sind, hat der Verlauf der Aktivierung jedoch keinen bzw. nur einen sehr geringen Einfluss auf $\sigma_{\text{maxmin, LF}}$ des Gesamtsystems. Aufgrund der Unstetigkeit der Zielfunktion der ersten Optimierungsstufe werden die Spannungen dieser Teilbereiche dementsprechend nie oder nur bei ungünstigen Verläufen der Aktivierungsfunktion für die Zielfunktion maßgebend.

Somit ist die erste Optimierungsstufe nicht in der Lage für diese Teilbereiche den optimalen Verlauf der Aktivierung zu bestimmen. Sie werden deswegen in einer zweiten Optimierungsstufe noch einmal gesondert betrachtet.

2. Optimierungsstufe

Im ersten Schritt der zweiten Optimierungsstufe sind die Teilbereiche auszuwählen, die weiter betrachtet werden sollen. Die erste Einschränkung wird durch die Größe der aktiven Bereiche gegeben. Im Weiteren sprechen folgende Kriterien für eine erforderliche Nachoptimierung: Passive Spannungen, die nur geringfügig größer oder kleiner als der Grundspannungszustand sind, Verschlechterung des Spannungszustandes innerhalb der ersten Optimierungsstufe oder stark vom minimalen Maximalwert $\sigma_{\text{maxmin, LF}}$ abweichende adaptive Spannungen.

Die Auswahl der Nachoptimierungsbereiche erfolgt interaktiv durch Eingabe der Koordinaten dieser Bereiche. Die Koordinaten x_{ui} und x_{oi} geben hierbei die untere und obere Grenze für jeden Nachoptimierungsbereich i an. Innerhalb der hier vorgestellten Toolbox werden mit diesen Daten die finiten Elemente in diesen Bereichen ele_{NO} und außerhalb ele_{oNO} ermittelt.

Die 2. Optimierungsstufe minimiert, wie die erste Stufe, den Maximalwert der auftretenden adaptiven Spannungen. Hier werden aber nur die Spannungen $\sigma(\text{ele}_{\text{NO}})$ der Elemente in den Nachoptimierungsbereichen berücksichtigt. Eine Verschlechterung der adaptiven Spannungen in den Bereichen ohne Nachoptimierung während der 2. Optimierungsstufe wird durch nichtlineare Ungleichheitsnebenbedingungen ausgeschlossen. Die Optimierungsaufgabe lässt sich damit, wie folgt, beschreiben:

Minimiere $f_{LF}(\mathbf{x}) = \sigma_{\text{adapt, LF, max absolut}}(\text{ele}_{\text{NO}})$
 unter Einhaltung der linearen Gleichheitsnebenbedingungen

$$\delta_{\text{aktiv Nebenbedingung } i}(\mathbf{x}) - \delta_{\text{aktiv Rand } i} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

n Anzahl der Randbedingungspunkte

und unter Einhaltung der unstetigen Ungleichheitsnebenbedingung

$$\sigma_{\text{adapt, LF, max absolut}}(\text{ele}_{\text{oNO}}) - \sigma_{\text{maxmin, LF}} \leq 0$$

(5-20) mit $\sigma_{\text{adapt, LF, max absolut}} = \max \left[\max |\sigma_{I, \text{adapt, LF}}| \quad \max |\sigma_{II, \text{adapt, LF}}| \right]$

mit $\sigma_{I, \text{adapt, LF}}$ und $\sigma_{II, \text{adapt, LF}}$ aus (5-5) und (5-17)

mit $\text{ele}_{\text{NO}} \in \text{ele} \{ x(\text{ele}) | x_{u1} \leq x(\text{ele}) \leq x_{o1} \vee \dots \vee x_{ui} \leq x(\text{ele}) \leq x_{oi} \}$

x_u untere Grenze eines Nachoptimierungsbereiches

x_o obere Grenze eines Nachoptimierungsbereiches

i Anzahl der Nachoptimierungsbereiche

mit $\text{ele}_{\text{oNO}} \in \{ j | j \in \text{ele} \wedge j \notin \text{ele}_{\text{NO}} \}$

Die Optimierungsaufgabe wird, wie die erste Optimierungsstufe, mit der in der OPTIMIZATION TOOLBOX implementierten Funktion *fmincon* gelöst. Als Startwerte werden hierbei die in der ersten Stufe gefundenen Entwurfsvariablen $\mathbf{x}_{1.\text{Stufe}}$ gewählt.

Abhängig von der Komplexität der Aufgabe kann es eventuell erforderlich sein, die zweite Optimierungsstufe mehrfach mit verschiedenen Nachoptimierungsbereichen zu durchlaufen. Mit der zweiten Optimierungsstufe ist die Berechnung des optimalen Verlaufs der Aktivierung abgeschlossen. Aus dem ermittelten Aktivierungsverlauf und den Sensitivitätsmatrizen werden anschließend die resultierenden adaptiven Spannungen des Systems berechnet.

Zusammenfassung

Ein graphischer Überblick über den gesamten Ablauf des Verfahrens gibt Abb. 5-4.

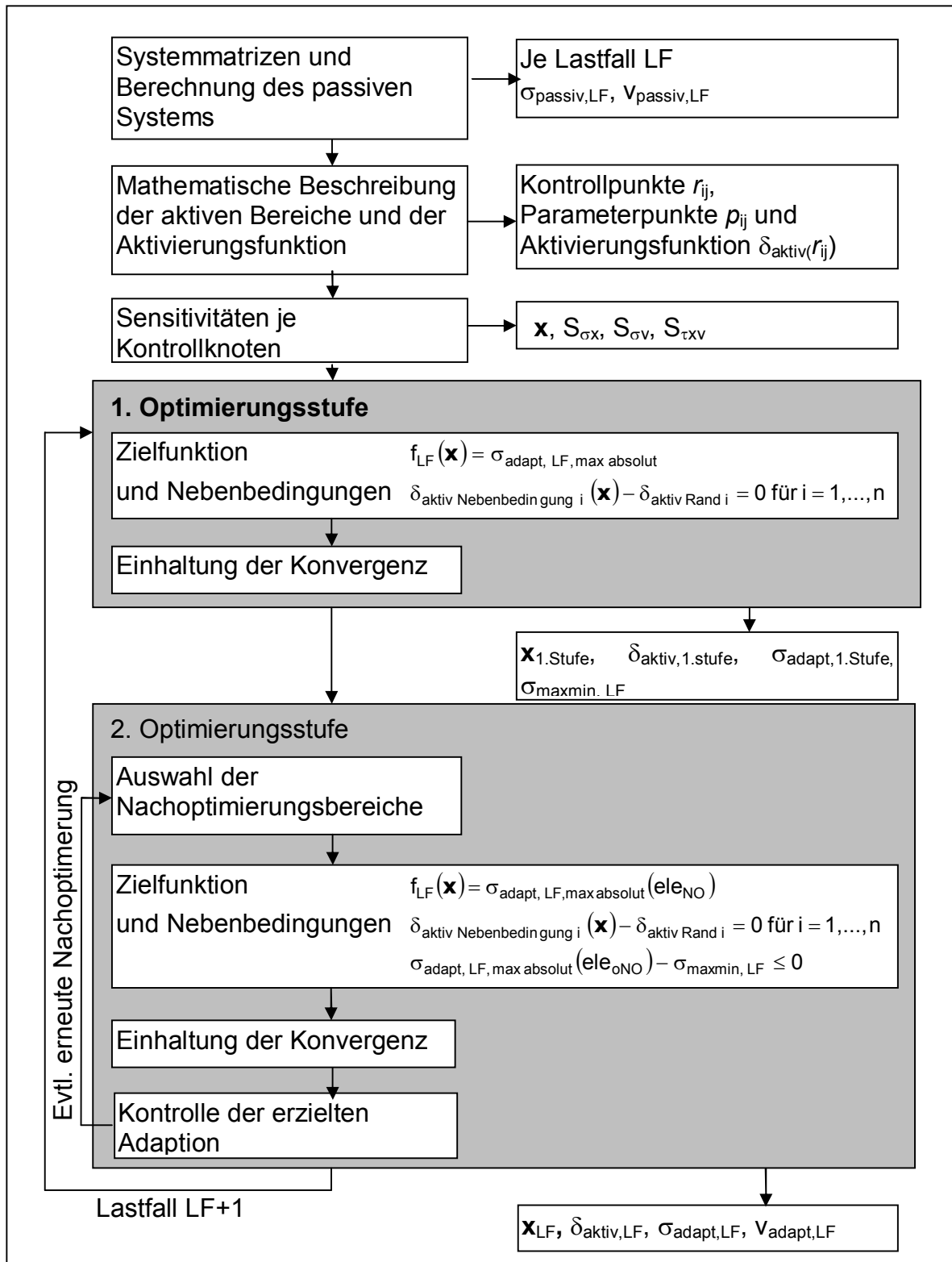


Abb. 5-4: Ablauf des Verfahrens mit formbeschreibenden B-Splines

Durch die Reduktion der Entwurfsvariablen, die mit der Einführung einer formbeschreibenden Funktion einhergeht und durch das Aufstellen der Sensitivitätsmatrizen, das eine Neuberechnung des Systems zwischen den Iterationsschritten erübrigt, ist das vorgestellte Verfahren zur Berechnung des optimalen Verlaufs der Aktivierung sehr effektiv. Der zweistufige und damit hierarchische Aufbau des Verfahrens gewährleistet zum einen das Erreichen der minimalen Maximalspannung $\sigma_{\min\max}$, zum anderen aber auch eine Optimierung des Aktivierungsverlaufs in den nicht maßgebenden Bereichen. Für diese zweite Stufe der Optimierung wird in dieser Arbeit die auftretende Maximalspannung in den weniger beanspruchten Bereichen als Optimalitätskriterium gewählt. Alternative Kriterien, wie zum Beispiel die zu induzierende Arbeit, könnten in der zweiten Stufe der Optimierung aber ebenso angesetzt werden. Soll lediglich der mögliche Wirkungsgrad eines gewählten aktiven Bereiches ermittelt werden, so kann die zweite Stufe der Optimierung entfallen.

Die Anzahl der erforderlichen Kontrollknoten kann nicht von vorneherein bestimmt werden. Aufgrund der lokalen Eigenschaften der B-Splines führt eine Erhöhung der Anzahl nur selten zu einem Oszillieren der Aktivierungsfunktion, wie das zum Beispiel bei Lagrange-Ansätzen oder Bézier-Splines der Fall ist. Somit führt eine höhere Anzahl an Kontrollknoten lediglich zu einer Erhöhung des Rechenaufwandes, ohne das Ergebnis zu verschlechtern. Die B-Splines gewährleisten zudem eine sehr große Formfreiheit der Aktivierungsfunktion, so dass keine Beschränkung des Ergebnisses durch die falsche Wahl der formbeschreibenden Funktion zu befürchten ist. Lediglich eine Kontinuität des optimalen Verlaufs der Aktivierung wird vorausgesetzt. Wie die analytische Lösung und das Verfahren mit der direkten Berechnung der diskreten Aktivierungswerte am Beispiel der Scheibe mit Ausschnitt zeigen, ist diese Annahme jedoch korrekt.

5.2.3 Berechnungsverfahren mit direkter Berechnung der diskreten Aktivierungswerte und Skalierung

Eine Alternative zur Annäherung der Aktivierungsfunktion mittels einer formbeschreibenden Funktion stellt die direkte Berechnung der diskreten Aktivierungswerte dar. In diesem Kapitel soll ein Verfahren vorgestellt werden, das diese Berechnung ermöglicht.

Grundlage des Verfahrens ist der lineare Zusammenhang zwischen der Größe der Aktivierung eines Elementes und des dazugehörigen Spannungswertes. Bei einem System, das in seiner gesamten Ausdehnung aktiv ist, kann also immer durch Lösen des linearen Gleichungssystems (5-21) der Verlauf der Aktivierung δ_{aktiv} so bestimmt werden, dass die maßgebenden adaptiven Spannungen σ_{adapt} den dazugehörigen Wert der Grundspannungen σ_{∞} einnehmen.

$$(5-21) \quad \sigma_{\infty} = \sigma_{\text{adapt}} = \sigma_{\text{passiv}} + \underbrace{\sigma_{\text{aktiv}}}_{S_{\sigma} \cdot \delta_{\text{aktiv}}}$$

$$S_{\sigma} \cdot \delta_{\text{aktiv}} = \sigma_{\infty} - \sigma_{\text{passiv}}$$

Erstreckt sich der aktive Bereich nicht über das ganze System, so wird das Gleichungssystem (5-21) unterbestimmt, und eine Lösung kann nur angenähert werden.

Für die Lösung eines solchen Gleichungssystems wird üblicherweise die Methode der kleinsten Quadrate verwendet. Wie aber bereits in Kapitel 5.1 beschrieben, führt diese nicht zu dem gewünschten Ergebnis, nämlich der Reduktion der Spitzenspannungen, da der Abbau der lokalen Spitzenspannungen im Gewicht hinter der erforderlichen großflächigen aber geringfügigen Erhöhung der Beanspruchungen in nicht maßgebend beanspruchten Bereichen zurückfällt.

Alternativ werden deswegen bei dem hier vorgestellten Vorgehen zunächst nur die aktiven Bereiche betrachtet. Da für sie das Gleichungssystem (5-21), wie bei einer im gesamten Entwurfsraum aktiven Scheibe, bestimmt ist, kann der Verlauf der Aktivierung für die aktiven Bereiche allein berechnet werden. Die Spannungen außerhalb der aktiven Bereiche werden jedoch von der Aktivierung ebenso beeinflusst, so dass anschließend noch eine Skalierung der berechneten Aktivierungswerte erforderlich ist. Ziel dieser Skalierung ist das Gleichsetzen der Maximalwerte der Spannungen in den aktiven und passiven Bereichen der Scheibe.

Der Ablauf des direkten Berechnungsverfahrens entspricht am Anfang dem des Verfahrens mit formbeschreibender Funktion: Die Systemmatrizen werden aufgestellt, die passiven Spannungszustände werden berechnet, und der Zusammenhang zwischen Aktivierung und den aktivierten Spannungen wird, wie oben beschrieben, ermittelt.

Die Größe des Entwurfsvektor \mathbf{x} ist somit aber nicht mehr durch die Anzahl der Kontrollpunkte, sondern durch die Anzahl n_{aktiv} der finiten Elemente im aktiven Bereich definiert. Mit den n_{aktiv} -en Einheitszuständen (5-22), die jeweils eine Einheitsaktivierung des i -ten Elementes im aktiven Bereich repräsentieren, werden die Spalten S_i der Sensitivitätsmatrizen S_{σ_x} , S_{σ_y} und $S_{\tau_{xy}}$ bestimmt.

$$(5-22) \quad \mathbf{x}_{\text{Einheitszustand}_i} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = n \\ 0 & \text{für } i \neq n \end{cases}$$

In jeder Spalte sind hierbei die Spannungen aller n_{ele} Elemente des Systems gespeichert, so dass die Sensitivitätsmatrizen aus n_{aktiv} Spalten und n_{ele} Zeilen bestehen.

Für das lineare Gleichungssystem (5-21) zur Berechnung der unskalierten Aktivierungswerte sind zunächst aber nur die Spannungen der Elemente des aktiven Bereiches von Interesse. Deswegen werden durch Löschen der Zeilen $ele_{\text{nichtaktiv}}$ in den Matrizen der Grundspannungen σ_{∞} und der Sensitivitäten S_{σ_x} , S_{σ_y} und $S_{\tau_{xy}}$ die reduzierten Matrizen $\tilde{\sigma}_{\infty}$, \tilde{S}_{σ_x} , \tilde{S}_{σ_y} und $\tilde{S}_{\tau_{xy}}$ der aktiven Elemente ele_{aktiv} gebildet. Die entsprechenden Werte für die nichtaktiven Elemente werden in den Matrizen $\hat{\sigma}_{\infty}$, \hat{S}_{σ_x} , \hat{S}_{σ_y} und $\hat{S}_{\tau_{xy}}$ gespeichert.

Bestimmung der maßgebenden Hauptspannungsrichtung

Im nächsten Schritt wird für jedes aktive Element i die maßgebende Richtung α_i des passiven Zustands, welche der Hauptspannungsrichtung mit dem betragsmäßig höheren Wert entspricht, bestimmt. Die passiven Spannungen $\tilde{\sigma}_{\text{passiv}}$, die Sensitivitäten der aktivierten Spannungen $\tilde{\sigma}_{\sigma_x}$, $\tilde{\sigma}_{\sigma_y}$ und $\tilde{\sigma}_{\tau_{xy}}$ und die Grundspannungen $\tilde{\sigma}_{\infty}$ werden für jedes Element i in die gefundene Richtung α_i transformiert und die transformierten Matrizen und Vektoren werden mit dem Index α gekennzeichnet. Die Bestimmung der maßgebenden Richtungen α_i und die anschließende Transformation der Spannungsvektoren und Sensitivitätsmatrizen wird hierbei für jeden Lastfall LF einzeln durchgeführt.

Mit diesen Werten kann das lineare Gleichungssystem (5-21) zur Bestimmung der Aktivierungswerte für jeden Lastfall LF aufgestellt und gelöst werden:

$$(5-23) \quad \tilde{\sigma}_{\sigma_{\alpha}, LF} \cdot \delta_{\text{aktiv, unskal, LF}} = \tilde{\sigma}_{\infty, \alpha, LF} - \tilde{\sigma}_{\text{passiv}, \alpha, LF}$$

Skalieren der Aktivierungswerte

Mit dem so bestimmten unskalierten Verlauf der Aktivierung erreichen die adaptiven Spannungen in den aktiven Bereichen den Wert des homogenen Grundspannungsfeldes. Am Übergang zu den nichtaktiven Bereichen können nun aber Spannungsspitzen auftreten, die durch eine geeignete Skalierung der Aktivierungswerte reduziert werden müssen.

Die Skalierung kann in zwei Abschnitte aufgeteilt werden. Zuerst müssen die Aktivierungswerte so angepasst werden, dass sie die Randbedingungen am Übergang von aktiven zu passiven Bereichen $\delta_{\text{aktiv, Rand}} = 0$ erfüllen. Hierfür wird der in (5-23) gefundene Verlauf der Aktivierung am Rand der aktiven Bereiche ermittelt. Abhängig von den Aktivierungswerten und dem geometrischen Verlauf des Randes werden die Aktivierungswerte entsprechend angepasst. Bei einem kreisrunden Aktivierungsbereich kann zum Beispiel der Randaktivierungsverlauf $\delta_{\text{aktiv, Rand}}$ abhängig vom Winkel φ bestimmt werden. Entsprechend der Lage der finiten Elemente φ_i kann dann die angepasste Aktivierungsfunktion $\delta_{\text{aktiv, LF, Randanpassung}}$ wie folgt berechnet werden:

$$(5-24) \quad \delta_{\text{aktiv, LF, Randanpassung } i} = \delta_{\text{aktiv, unskal, LF } i} - \delta_{\text{aktiv, LF, Rand}}(\varphi_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

mit n Anzahl der aktiven Elemente

φ_i Winkellage des i -ten finiten Elementes in zylindrischen Koordinaten

Der zweite Abschnitt der Skalierung befasst sich mit den Spannungsspitzen, die in den nichtaktiven Bereichen auftreten können: Hierfür werden für jeden aktiven Bereich lineare Skalierungsfaktoren f_{skal} so gesucht, dass der Maximalwert der adaptiven Spannungen in den aktiven Bereichen gleich dem Maximalwert in den nichtaktiven Bereichen ist. Mathematisch kann dies für jeden aktiven Bereich, wie folgt, beschrieben werden:

(5-25) Löse die nichtlineare Gleichung $g(\mathbf{f}_{\text{skal}})=0$

$$\text{mit } g(\mathbf{f}_{\text{skal}}) = \tilde{\sigma}_{\text{adapt, LF, maxabsolut}} - \hat{\sigma}_{\text{adapt, LF, maxabsolut}}$$

$$\text{mit } \sigma_{\text{adapt, LF, maxabsolut}} = \max \left[\max |\sigma_{\text{l, adapt, LF}}| \quad \max |\sigma_{\text{il, adapt, LF}}| \right]$$

$$\text{mit } \sigma_{\text{adapt, LF}} = \sigma_{\text{passiv, LF}} + \mathbf{S} \cdot \delta_{\text{aktiv, LF, Randanpassung}} \cdot \mathbf{f}_{\text{skal}}$$

Mit den gefundenen Skalierungsvektoren \mathbf{f}_{skal} für jeden aktiven Bereich können die skalierten Aktivierungswerte $\delta_{\text{aktiv, k, skal}}$, die skalierten resultierenden adaptiven Spannungswerte $\sigma_{\text{adapt, LF}}$ und der minimale Maximalwert $\sigma_{\text{maxmin, LF}}$ bestimmt werden. Diese Werte entsprechen den Spannungen infolge des optimalen Verlaufs der Aktivierung mit dem Ziel der Minimierung des Maximalwertes der Spannungen.

Zusammenfassung

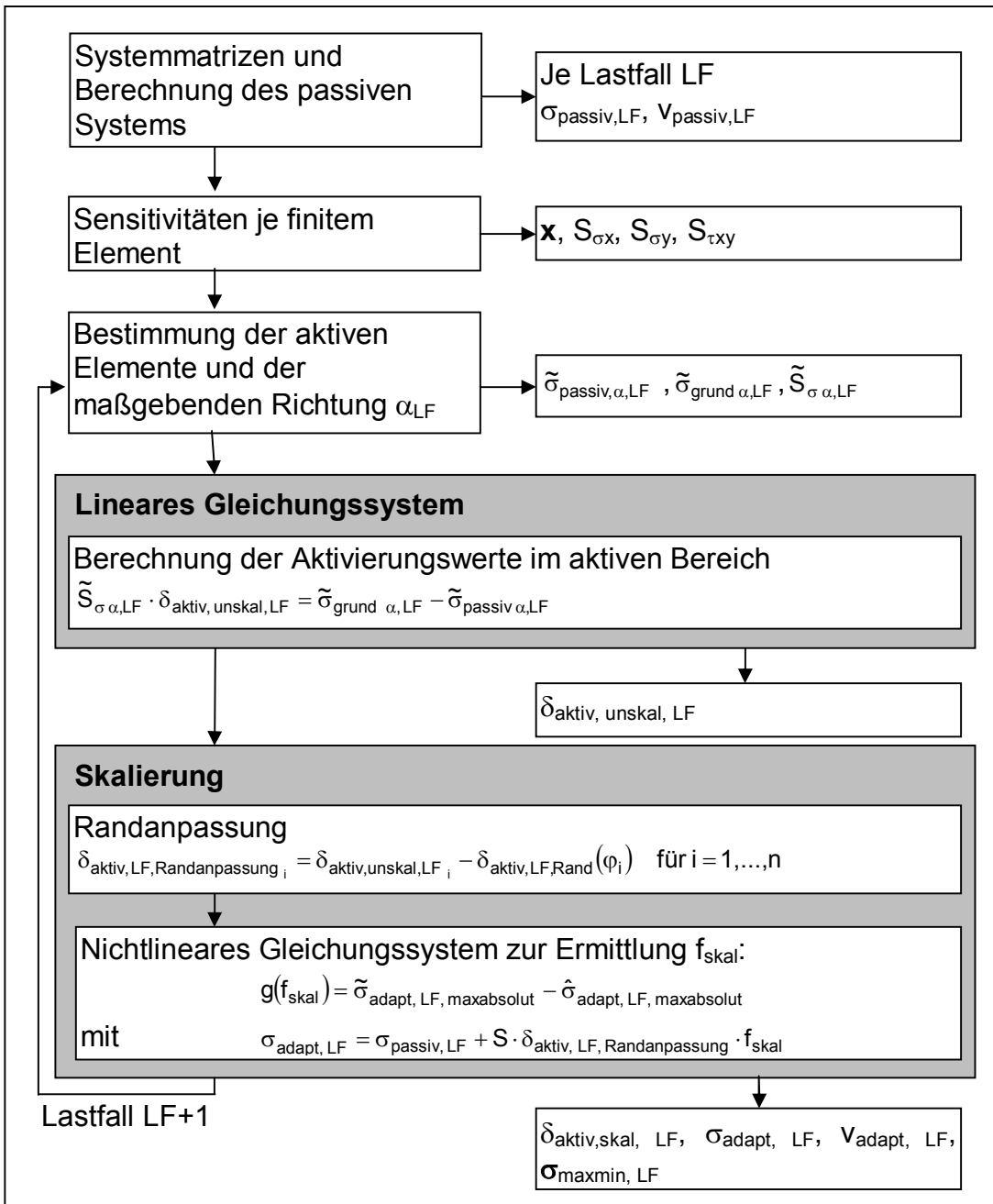


Abb. 5-5: Ablauf des Verfahrens mit direkter Berechnung der diskreten Aktivierungswerte und anschließender Skalierung

Das hier vorgestellte Verfahren mit der direkten Berechnung der diskreten Aktivierungswerte bietet den Vorteil, dass keine vorzeitige Einschränkung des Verlaufs der Aktivierung vorgenommen wird. Somit könnten auch nichtstetige Aktivierungsverläufe erfasst werden. Von Nachteil ist aber, dass dieses Verfahren nur anwendbar ist, wenn die aktiven Bereiche mit den zu optimierenden zusammenfallen, und eine geeignete Form der Skalierung gefunden werden kann. So kann zum Beispiel für unregelmäßig geformte aktive Bereiche die geeignete Wahl der Randanpassung des Aktivierungsverlaufes eine große Herausforderung darstellen.

Somit ist dieses Verfahren als alleiniges Verfahren zur Bestimmung des optimalen Aktivierungsverlaufes nur bedingt einsetzbar. Es stellt aber eine gute Methode dar, um die mit dem Verfahren mit formbeschreibender Funktion gefundenen Aktivierungsverläufe zu verifizieren.

5.3 Dehnungsaktivierte Scheibe mit Ausschnitt - Numerische Lösungen

Im Folgenden wird für das - bereits bei der Ermittlung der analytischen Lösung vorgestellte - Beispiel der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt mit beiden Berechnungsverfahren der optimale Verlauf der Aktivierung ermittelt. Hierbei werden zunächst die Wirkung der zweiten Optimierungsstufe des ersten Verfahrens und die der Skalierung des zweiten Verfahrens für bestimmte Belastungszustände genauer betrachtet. Ein Vergleich der Ergebnisse beider Verfahren mit der analytischen Lösung und eine Bewertung folgen in Kapitel 5.4.

Beschreibung des Systems

Es wird, wie bei der analytischen Lösung, eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit Ausschnitt untersucht. Der Radius des Ausschnitts ist mit $a = 200$ mm gewählt. Der untersuchte aktive Bereich ist ein um den Ausschnitt angeordneter Kreisring mit einem Außenradius $b = 500$ mm.

Die Scheibe hat eine Dicke $h = 10$ mm. Ihre Abmessungen sind im FE-Modell mit $l_x = l_y = 16.000$ mm so groß gewählt, dass der Rand keinen Einfluss auf die Spannungen im Ausschnittsbereich hat, und sie somit nahe des Ausschnitts als unendlich ausgedehnte Scheibe angesehen werden kann. Abb. 5-6 zeigt das FE-Modell mit seinen Lagerbedingungen und Belastungen.

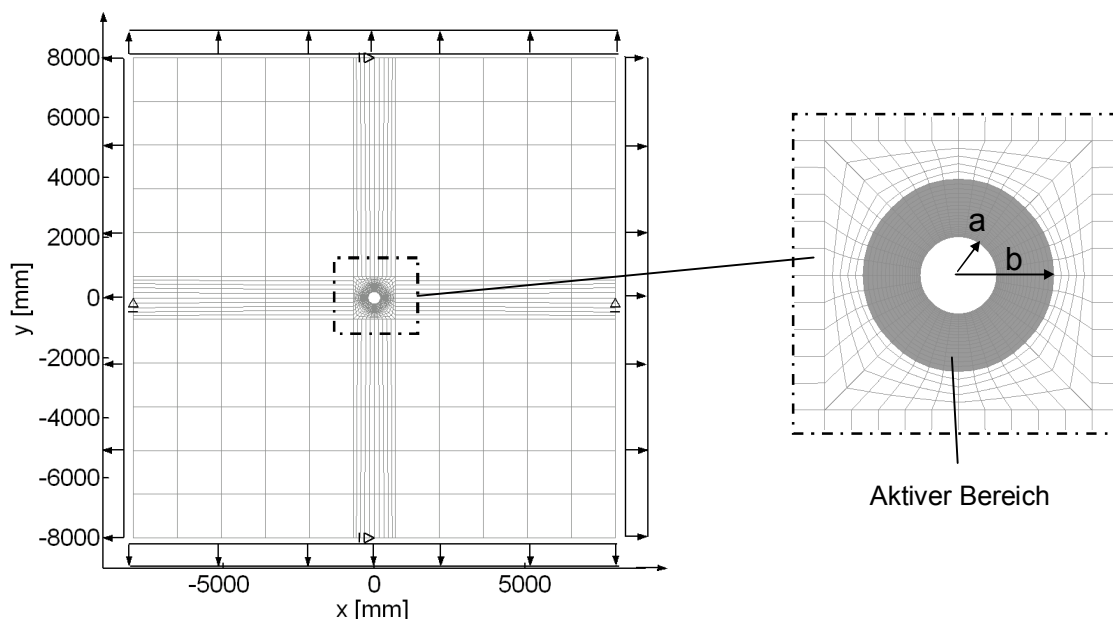


Abb. 5-6: FE-Modell der Scheibe mit Ausschnitt $a = 200$ mm, $b = 500$ mm, Lastfall $p_x = p_y = 100$ N/mm²

Die Materialkennwerte sind mit $E = 100.000 \text{ N/mm}^2$ und $\mu = 0,3$ festgelegt.

Die Scheibe wird an ihren Rändern jeweils mit einer konstanten Linienlast belastet. Hierbei ist die Belastung $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ in x-Richtung nicht variabel. Die Last p_y in y-Richtung hingegen ändert sich schrittweise von Lastfall LF = 1 bis LF = 9 um je -25 N/mm^2 von $p_{y1} = 100 \text{ N/mm}^2$ bis $p_{y9} = -100 \text{ N/mm}^2$. Die Beanspruchungskombinationen mit variablen Werten p_x können aufgrund der Symmetrie des Systems aus diesen 9 untersuchten Lastfällen abgeleitet werden.

Verfahren mit formbeschreibender Funktion

Für das Verfahren mit formbeschreibender Funktion wird zunächst die Wirkungsweise und die Erfordernis der zweiten Optimierungsstufe dargestellt. Dies erfolgt anhand der einachsigen Belastung im Lastfall LF = 5 mit $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$:

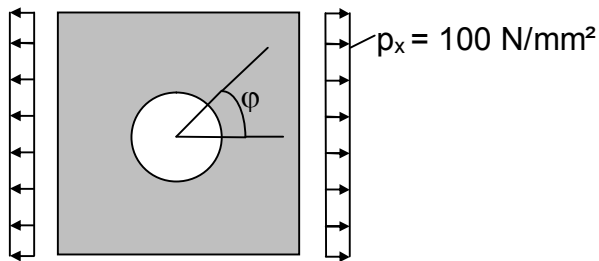


Abb. 5-7: System mit Belastungen aus Lastfall LF = 5: $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$

Der Verlauf des Konzentrationskoeffizienten $\xi = \sigma/\sigma_\infty$ mit $\sigma_\infty = 100 \text{ N/mm}^2$ im passiven Zustand im Bereich des Ausschnitts ist in Abb. 5-8 für die radiale und tangential Richtung dargestellt.

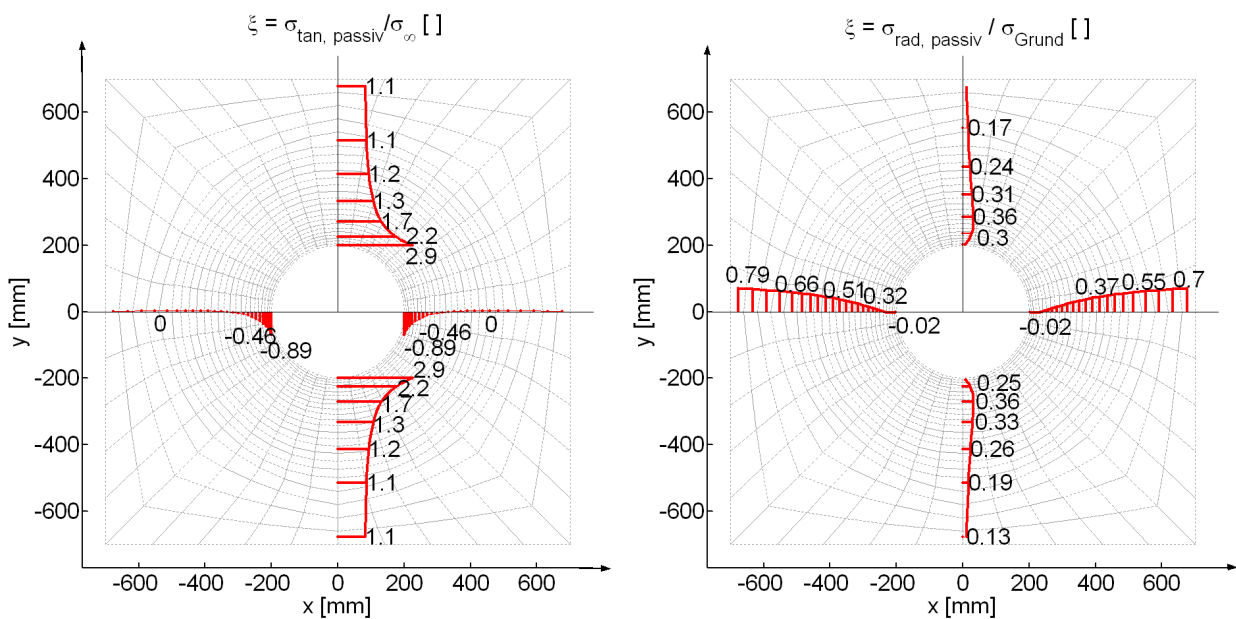


Abb. 5-8: Konzentrationskoeffizient ξ der radialen und tangentialen passiven Spannungen; $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$

Die maßgebenden Beanspruchungen sind die tangentialen Spannungen bei $\varphi = 90^\circ$ und 270° . In den Achsen $\varphi = 0^\circ$ und 180° dagegen steigen die tangentialen Spannungen am Ausschnitttrand nicht über den Wert der Grundspannung $\sigma_\infty = 100 \text{ N/mm}^2$ an.

Der Verlauf der adaptiven Tangentialspannungen nach der ersten Optimierungsstufe, siehe Abb. 5-9, im Vergleich zu den passiven Spannungen zeigt, dass sich in den wenig beanspruchten Bereichen $\varphi = 0^\circ$ und 180° die Beanspruchungen deutlich bis zum adaptiven minimalen Maximalwert des Konzentrationskoeffizienten $\xi_{\text{maxmin}, 5} = 1,23$ erhöhen. In den hoch beanspruchten Bereichen dagegen reduzieren sich die tangentialen Spannungen im aktiven Bereich auf diesen Wert.

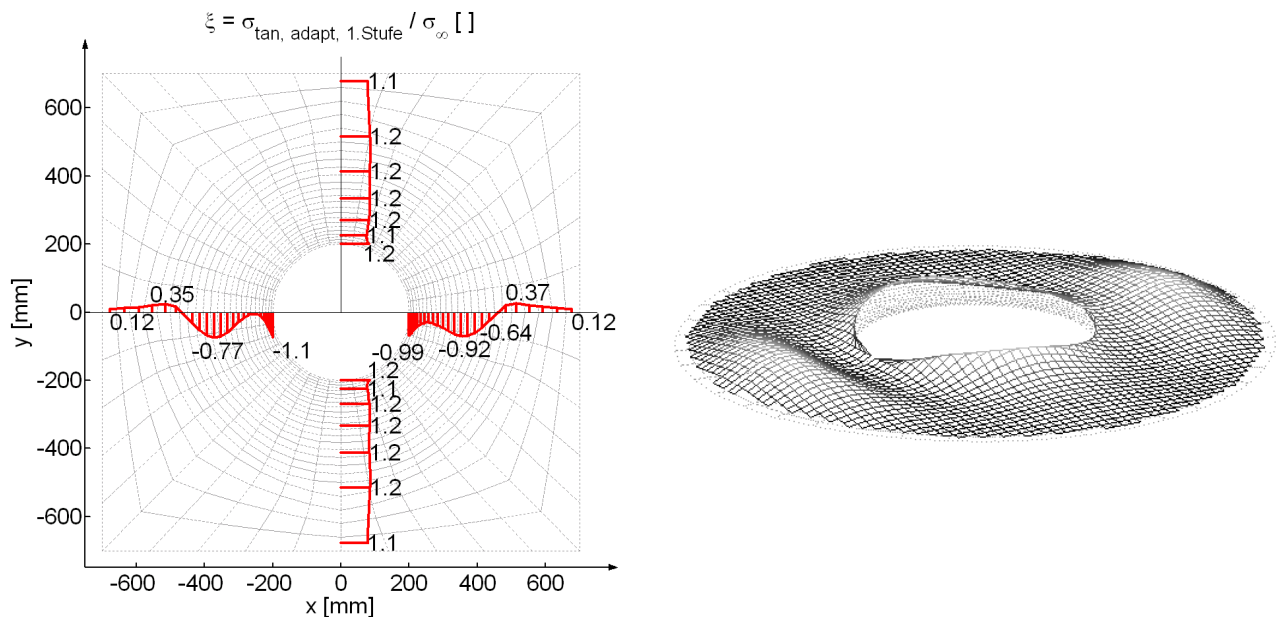


Abb. 5-9: Konzentrationkoeffizient der adaptiven Tangentialspannungen $\sigma_{\varphi \text{ adapt, 1.Stufe}}$ und Verlauf der Aktivierung $\delta_{\text{aktiv, 1.Stufe}}$ für Lastfall LF = 5, $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$ nach der ersten Optimierungsstufe

Als Nachoptimierungsbereiche werden diejenigen gewählt, deren Beanspruchungen sich infolge der Aktivierung verschlechtern. Die Geometrie dieser Bereiche wird somit mit $r_{\text{innen}} = 200 \text{ mm}$, $r_{\text{außen}} = 500 \text{ mm}$ und $\varphi = -30^\circ$ bis 30° bzw. $\varphi = 150^\circ$ bis 210° festgelegt.

Die in Abb. 5-10 dargestellten Spannungen zeigen, dass die adaptiven tangentialen Spannungen der Nachoptimierungsbereiche durch die 2. Optimierungsstufe um ca. 40 % gesenkt werden können. Gleichzeitig bleiben die Spannungen in den maximal beanspruchten Bereichen konstant gegenüber der ersten Optimierungsstufe. Ein Vergleich der Verläufe der Aktivierung für die erste und zweite Stufe der Optimierung ist in Abb. 5-11 gegeben. Diese weist über den gesamten Entwurfsraum deutliche Formänderungen auf.

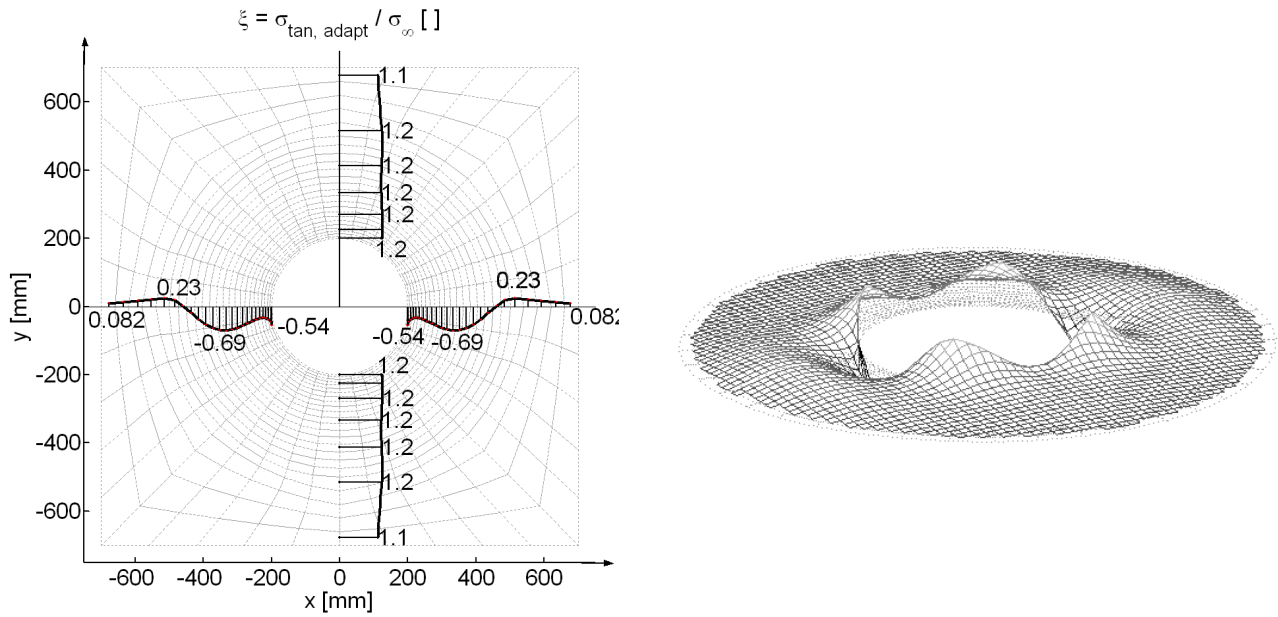


Abb. 5-10: Konzentrationskoeffizient der adaptiven Tangentialspannungen $\sigma_{\varphi \text{ adapt}}$ und Verlauf der Aktivierung δ_{aktiv} für Lastfall LF = 5, $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$

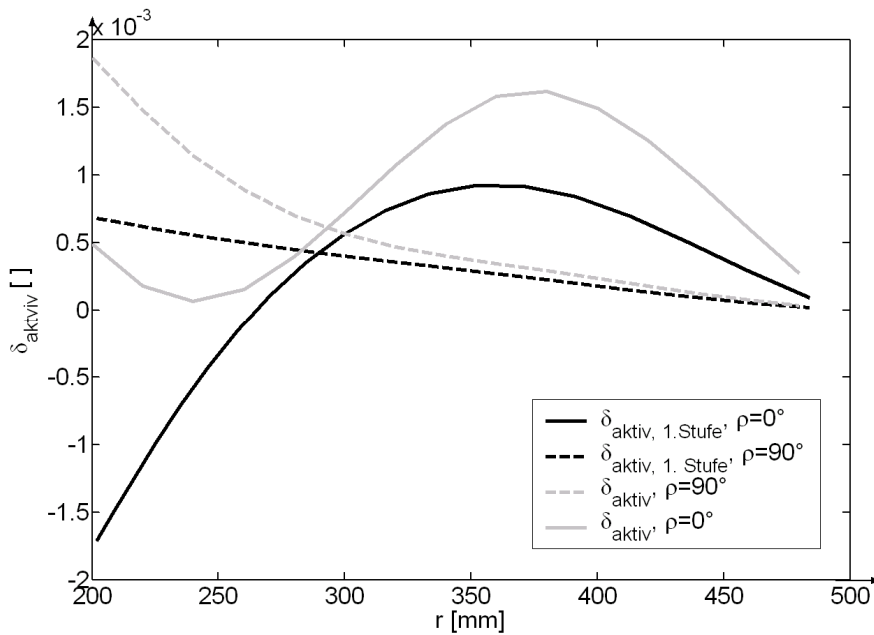
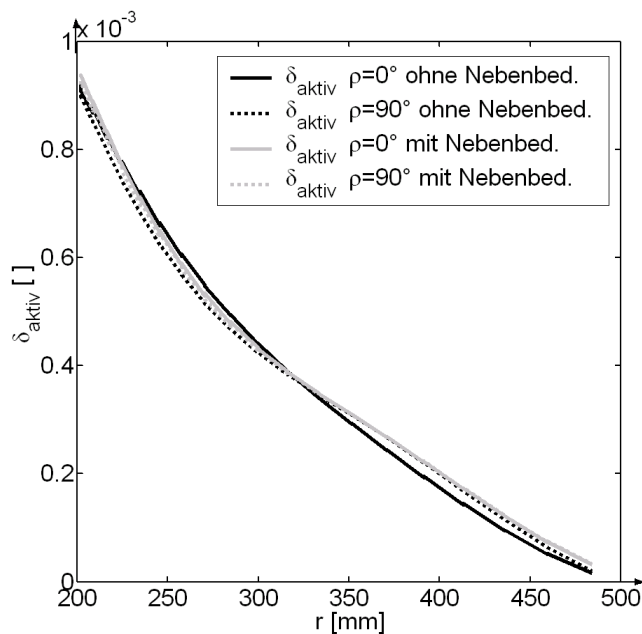


Abb. 5-11: Verlauf der Aktivierung δ_{aktiv} für Lastfall LF = 5, $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$ nach 1. und 2. Optimierungsstufe

Das dargestellte Beispiel zeigt, dass mit der 2. Stufe die Inhomogenitäten im Spannungsfeld des Systems weiter reduziert werden können. Der Wirkungsgrad des adaptiven Systems an sich bleibt aber gegenüber der ersten Stufe unverändert. Die Vielfältigkeit der Aktivierungsverläufe zur Erzielung eines gewünschten Wirkungsgrades ermöglicht dem Entwerfer weitere Optimalitätskriterien zu berücksichtigen.

Im Rahmen der gesamten Berechnungen (geschlossene Lösung und Näherungsverfahren) wurde bisher vorausgesetzt, dass die Aktivierungsfunktion am Übergang zwischen aktiven und nichtaktiven Bereichen den Wert Null annimmt. Dieser Ansatz wurde als Stetigkeitsbedingung zwischen passiven und aktiven Bereichen festgelegt, siehe Kapitel 4. Im Folgenden wird nun überprüft, inwieweit dieser Ansatz den möglichen Wirkungsgrad des adaptiven Systems beeinflusst. Hierfür werden die Ergebnisse einer Berechnung des Beispiels der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt mit bzw. ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung $\delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$ verglichen. Betrachtet werden die Lastfälle LF = 1, zweiachsiger Zug $p_x = p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, und LF = 9, zweiachsiger Zug bzw. Druck $p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$.

Lastfall LF = 1



Lastfall LF = 9

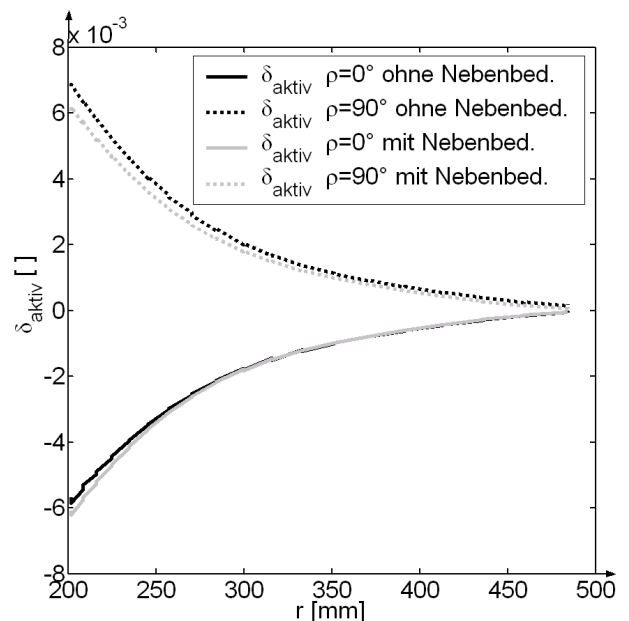
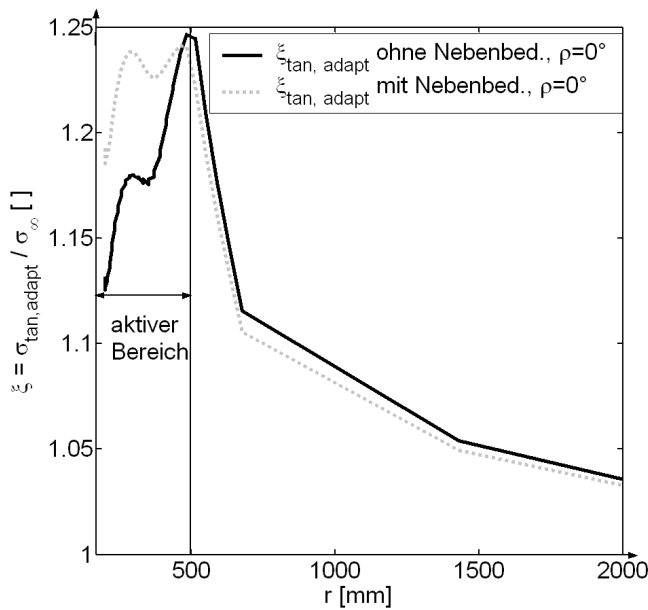


Abb. 5-12: Verlauf der Aktivierung für Berechnung mit bzw. ohne Nebenbedingungen für Lastfälle LF = 1 (links) und LF = 9 (rechts)

Anhand der Aktivierungsverläufe (Abb. 5-12) und der Spannungsverläufe (Abb. 5-13) kann man erkennen, dass die vorgegebene Nebenbedingung $\delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$ keinen bzw. einen nur sehr geringen Einfluss auf die Berechnung hat. Im Lastfall LF = 1, zweiachsiger Zug, wirkt sich die Nebenbedingung zudem positiv auf das Konvergenzverhalten der Optimierung aus. Deswegen wird sie im Weiteren in der Optimierung beibehalten.

Lastfall LF = 1



Lastfall LF = 9

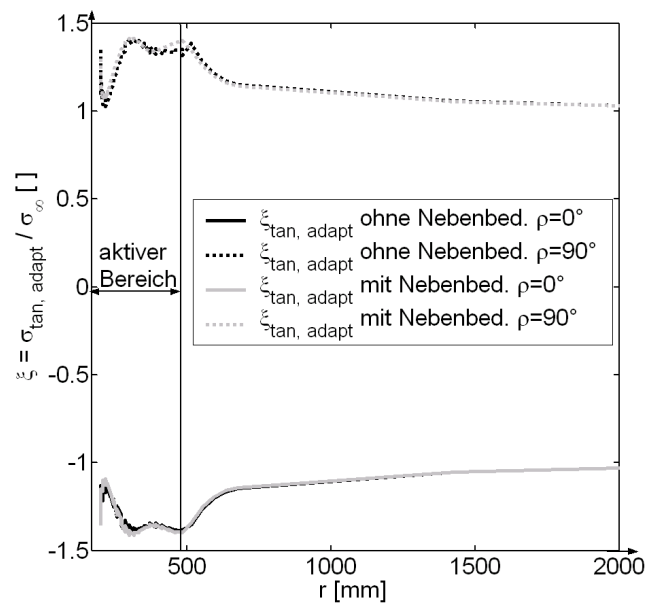


Abb. 5-13: Verlauf der adaptiven Tangentialspannungen für Berechnung mit bzw. ohne Nebenbedingungen für Lastfälle LF = 1 (links) und LF = 9 (rechts)

Verfahren mit direkter Berechnung der diskreten Aktivierungswerte

Eine Alternative zum Verfahren mit formbeschreibender Funktion stellt die direkte Berechnung der Aktivierungswerte mit anschließender Skalierung dar. Das Vorgehen bei der Skalierung und die dazugehörige Entwicklung der adaptiven Spannungen werden im Folgenden noch einmal kurz anhand des hier untersuchten Beispiels für den Lastfall LF = 9 aufgezeigt.

Die maßgebende Richtung der Beanspruchungen ist für die Scheibe mit Ausschnitt in jedem untersuchten Lastfall mit den Tangentialspannungen gegeben. Nach Lösen des linearen Gleichungssystems (5-21) können mit $\delta_{\text{aktiv, unskal, LF}}$ die unskalierten adaptiven Spannungen berechnet werden. Im unskalierten Zustand, siehe Abb. 5-14, erreichen die adaptiven Spannungen im aktiven Bereich die Werte der Grundspannung. Am Übergang zum nichtaktiven Bereich ist der Verlauf der Spannungen jedoch unstetig und springt auf einen Maximalwert deutlich über dem Wert der Grundspannung. Im ersten Skalierungsschritt erfolgt die Randanpassung der Aktivierungswerte abhängig vom Winkel φ der Elementmittelpunkte. Der Verlauf der Aktivierung am Rand $\delta_{\text{aktiv, Rand}}$ ist zum Beispiel im Lastfall 9 eine Funktion von $\cos(2\varphi)$.

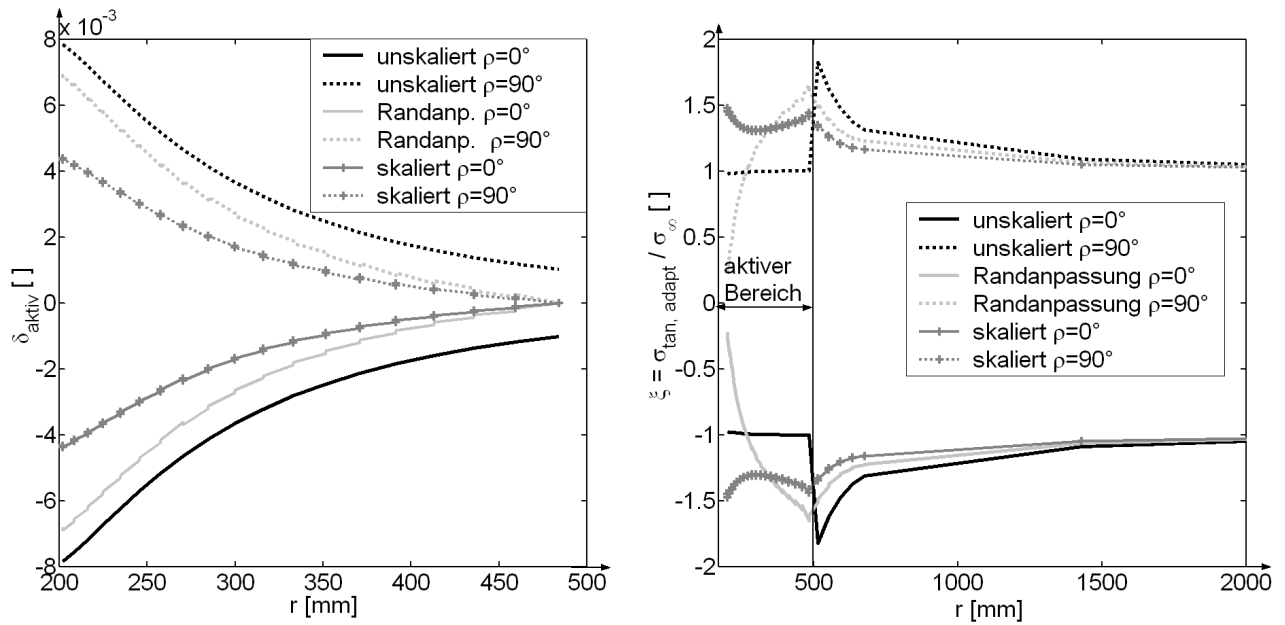


Abb. 5-14: Entwicklung der induzierten Dehnungen δ_{aktiv} und der adaptiven Tangentialspannungen und im Lastfall LF = 9 während des Skalierungsprozess

Nach der Randanpassung ist die Unstetigkeit am Übergang von aktivem zu nichtaktivem Bereich zwar verschwunden, die Spannungen nehmen aber immer noch an dieser Stelle einen Maximalwert ein. Erst mit der linearen Skalierung reduzieren sich die adaptiven Spannungen so, dass der Maximalwert gleichzeitig am Rand des Ausschnitts und am Rand des aktiven Bereiches auftritt. Der Verlauf der adaptiven Spannungen innerhalb des aktiven Bereiches wird dann nahezu konstant.

5.4 Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt: Vergleich der numerischen Lösungen mit der analytischen

Die analytische Lösung, die für eine Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt in Kapitel 4 für den rotationssymmetrischen Lastfall LF = 1 und den antimetrischen Lastfall LF = 9 hergeleitet wurde, wird nun mit den Ergebnissen aus dem Berechnungsverfahren mit formbeschreibender Funktion und dem mit direkter Berechnung der diskreten Aktivierungswerte verglichen.

Anhand diese Vergleiches wird aufgezeigt, warum eine lineare Interpolation zwischen der analytischen Lösung des symmetrischen Lastfalls LF = 1 und des antimetrischen Lastfalls LF = 9 nicht zum Optimum des einachsigen Belastungszustand $p_x = 1$ und $p_y = 0$ (LF = 5) führt.

In Abb. 5-15 sind über die untersuchten Lastfälle zum einen die Konzentrationskoeffizienten ξ der maximalen adaptiven Tangentialspannung aufgetragen, zum anderen wird der Wirkungsgrad, der je nach Berechnungsmethode erreicht wird, abhängig von der Belastungsrichtung dargestellt. Die Werte der Lastfälle LF = 2÷8 werden für die analytische Lösung hierbei zum Vergleich durch eine lineare Überlagerung der Lastfälle LF = 1 und LF = 9 ermittelt.

Beide Diagramme zeigen auf, dass unabhängig von der Berechnungsmethode für den rotationssymmetrischen und antimetrischen Lastfall ungefähr das gleiche Ergebnis erzielt wird. Die geringen Unterschiede lassen sich durch Toleranzen in der FE-Berechnung und der Optimierung erklären.

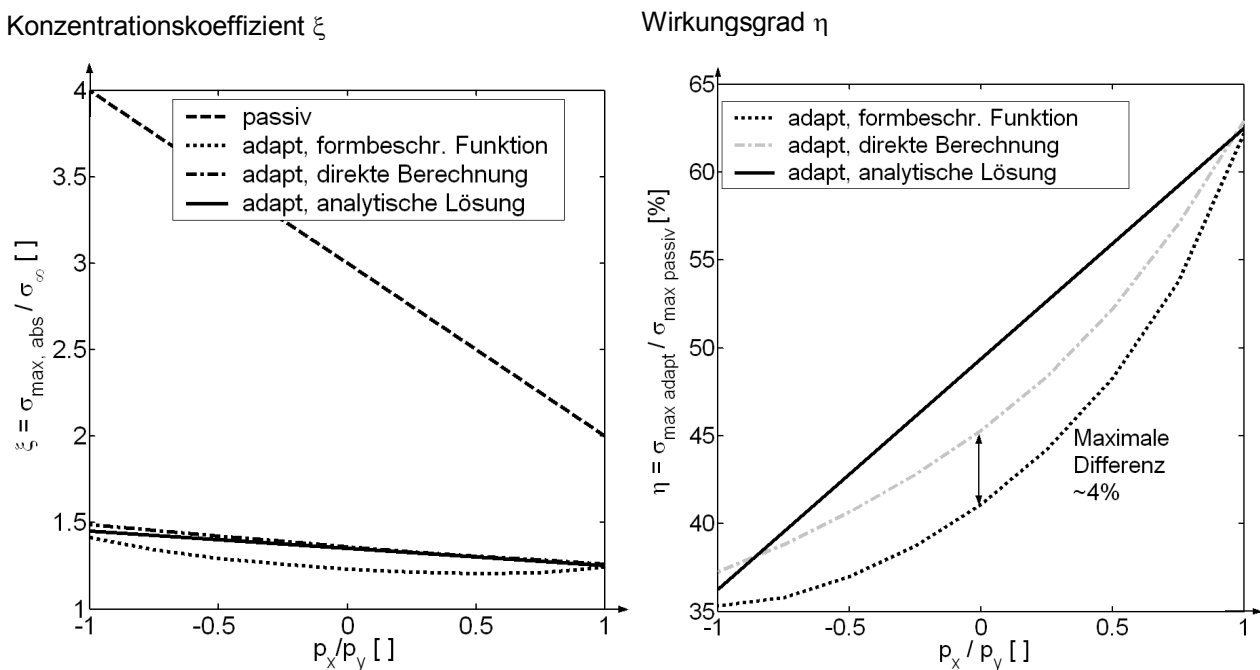


Abb. 5-15: Vergleich der Berechnungsverfahren und der analytischen Lösung für $a = 200$ mm, $b = 500$ mm und verschiedene Belastungszustände p_x, p_y

Die Verläufe der adaptiven Spannungen und der induzierten Dehnungen für die Lastfälle LF = 1 (Abb. 5-16) und LF = 9 (Abb. 5-18) bestätigen dies im Allgemeinen. Eine Ausnahme stellt der Verlauf der Aktivierung des direkten Berechnungsverfahrens in Achse $\varphi = 0^\circ$ dar. Infolge teilweise schlecht konditionierter Sensitivitätsmatrizen neigt dieses Verfahren zum Oszillieren. Dies führt entlang des Ausschnitttrandes zu schwankenden Werten der induzierten Dehnungen, die sich, wie Abb. 5-17 zeigt, bei ihrem Einfluss auf die tangentialen Spannungen gegenseitig ausgleichen. Die oszillierenden Werte der induzierten Dehnungen könnten mit geeigneten Methoden geglättet werden, um den ermittelten Verlauf der Aktivierung in einer Realisierung verwenden zu können.

Aufgrund der oben bereits beschriebenen Nachteile des direkten Verfahrens wird im Rahmen dieser Arbeit auf diesen weiteren Bearbeitungsschritt verzichtet.

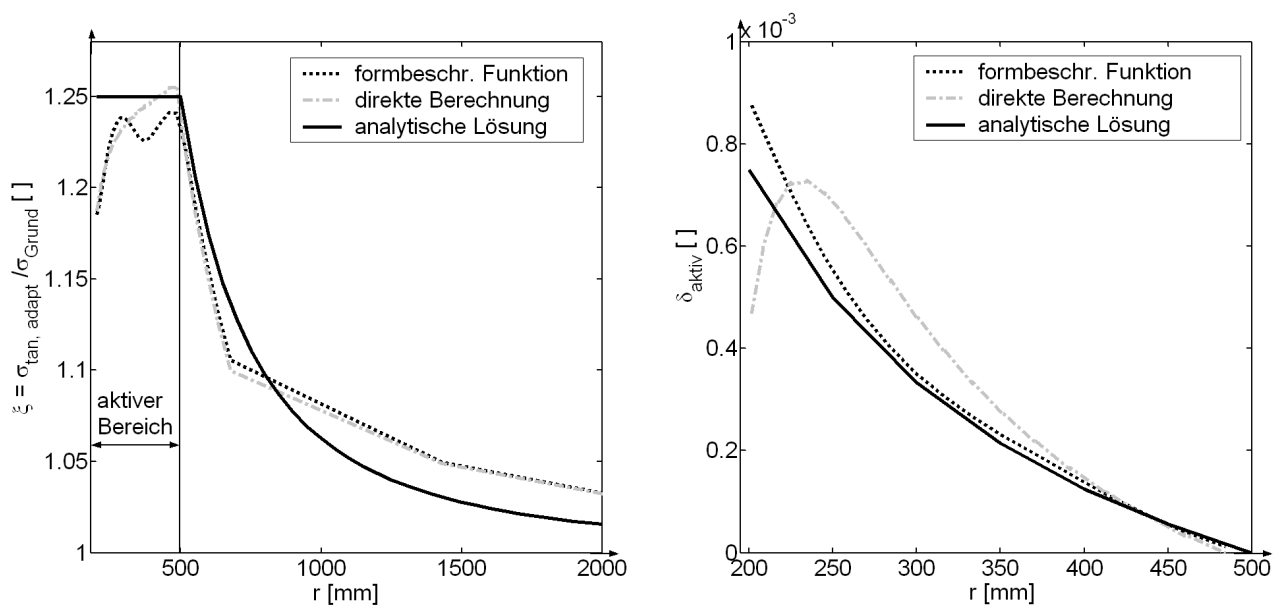


Abb. 5-16: Vergleich der adaptiven tangentialen Spannungen und induzierte Dehnungen δ_{aktiv} ; Lastfall LF = 1: $p_x = p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$, $\varphi = 0^\circ$

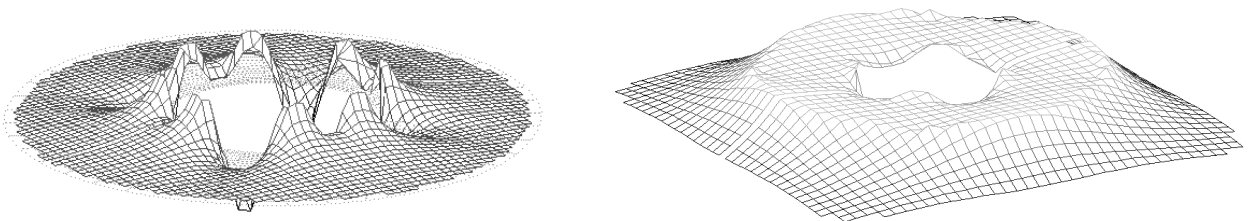


Abb. 5-17: Verlauf der induzierten Dehnungen (links) und der tangentialen adaptiven Spannungen (rechts), Lastfall LF = 1: $p_x = p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$, direktes Verfahren

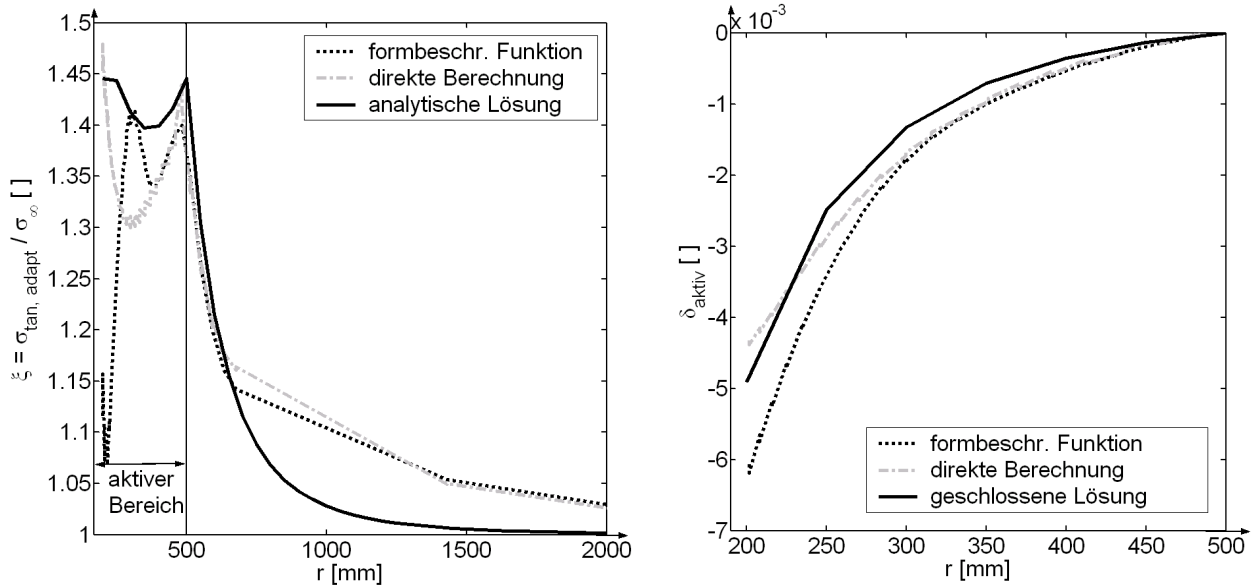


Abb. 5-18: Vergleich der adaptiven tangentialen Spannungen und der induzierten Dehnungen δ_{aktiv} ; Lastfall LF = 9: $p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$, $\varphi = 0^\circ$

Die Lastfälle, in denen einachsige Beanspruchungen dominieren (LF 2÷8), zeigen im Vergleich zu den bisher betrachteten jedoch deutliche Unterschiede zwischen den beiden Berechnungsverfahren und einer linearen Interpolation der ermittelten analytischen Lösung:

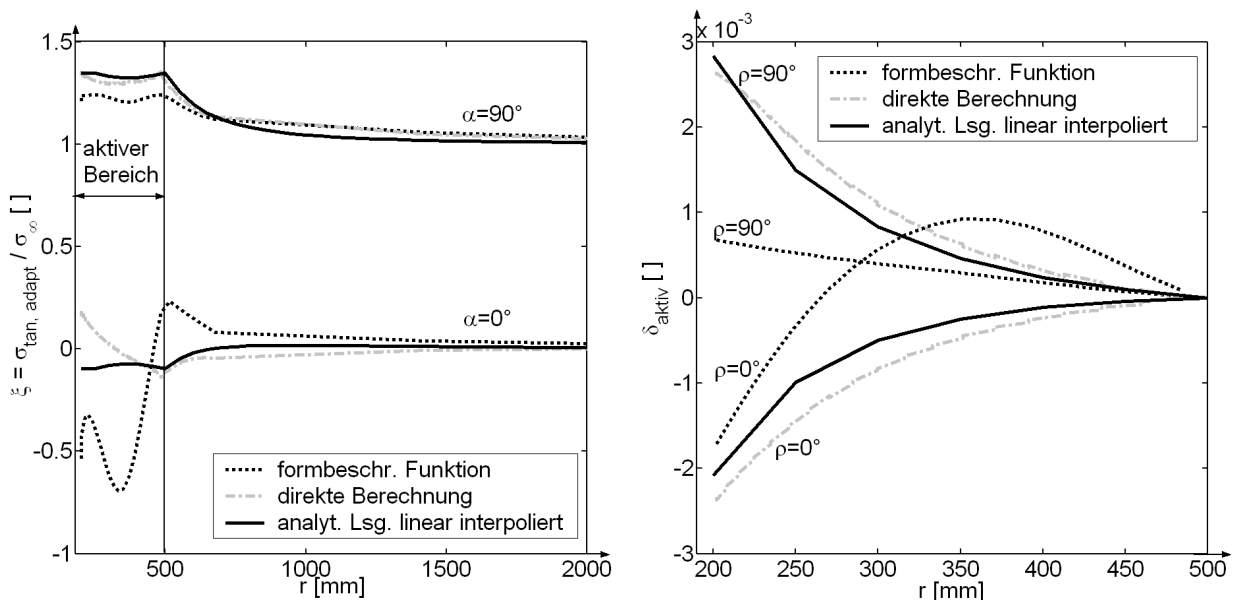


Abb. 5-19: Vergleich der adaptiven tangentialen Spannungen und der induzierten Dehnungen δ_{aktiv} ; Lastfall LF = 5: $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$, $p_y = 0$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$

Die analytische Lösung wurde für den symmetrischen Belastungszustand, $LF = 1$, und den antisymmetrischen, $LF = 9$, ermittelt. Im Gegensatz zu diesen Lastfällen sind die Beanspruchungen unter einer einachsigen Belastung nicht in allen Hauptachsen (0° - und 90° -Achse) maximal. In den geringer beanspruchten Achsen verliert die in der analytischen Lösung angesetzte Randbedingung $\sigma_{\text{adapt}}(a) = \sigma_{\text{adapt}}(b)$, wie man an der Lösung mit formbeschreibender Funktion erkennt, ihre Gültigkeit. Da eine lineare Interpolation der geschlossenen Lösungen von Lastfall $LF = 1$ und 9 diese Randbedingung für alle Winkel erfüllt, kann sie nicht zum Optimum führen.

Das Verfahren mit direkter Berechnung der Aktivierungswerte und anschließender Skalierung ermittelt zunächst die erforderliche Aktivierung zur Erreichung des maximalen Grundspannungswertes $\sigma_{\text{max}, \infty} = 100 \text{ N/mm}^2$ im gesamten aktiven Bereich. Da die Grundspannung in der Achse $\varphi = 0^\circ$ mit $\sigma_{\text{Grund}, LF=5} = 0$ aber deutlich geringer ist als der Maximalwert, der in der Achse $\varphi = 90^\circ$ auftritt, könnte im Rahmen der Skalierung in der 0° -Achse eine überproportionale Verschlechterung der Beanspruchungen in Kauf genommen werden. Die lineare gleichmäßige Skalierung der Aktivierungswerte über den gesamten Aktivierungsbereich kann dies jedoch nicht berücksichtigen, so dass auch mit diesem Verfahren das Optimum für den Verlauf der induzierten Dehnungen im einachsigen Beanspruchungszustand nicht gefunden werden kann.

Die mit den verschiedenen Verfahren ermittelten unterschiedlichen Verläufe der induzierten Dehnungen, bei denen nahezu die gleichen Werte der minimalen Maximalspannung $\sigma_{\text{maxmin}, LF}$ erreicht werden, zeigen, dass die gewählte Zielfunktion im Bereich des Optimums sehr flach ist. Dies wurde auch schon in Kapitel 4.2.3 bei der Ermittlung der Konstanten c_7 offensichtlich.

5.5 Zusammenfassung

Die vorgestellte Beispielrechnung zeigt auf, dass das Verfahren mit formbeschreibender Funktion ein effektives Instrument zur Berechnung des Wirkungsgrades und des dazugehörigen Aktivierungsverlaufs einer dehnungsinduzierten adaptiven Scheibe darstellt. Der Vergleich mit der analytischen Lösung für den symmetrischen und antimetrischen Belastungszustand zeigt hierbei eine sehr gute Übereinstimmung. Die geringfügigen Abweichungen liegen im Bereich der üblichen Toleranzen, die Näherungsberechnungen, wie die FE-Methode, mit sich bringen.

Die Methode der direkten Berechnung der Aktivierungswerte mit anschließender Skalierung führt, wie oben gezeigt, nicht in allen Belastungszuständen zu einem Optimum. Möglicherweise könnten aufwendigere Skalierungsalgorithmen diese Ergebnisse verbessern. Sie würden aber wiederum weitere Kenntnisse über den zu findenden optimalen Verlauf der Aktivierung erfordern. Dementsprechend kann dieses zweite vorgestellte Verfahren nur mit Einschränkung als geeignet angesehen werden, um damit eigenständig adaptive dehnungsaktivierte Scheiben zu berechnen. Aufgrund seiner Unabhängigkeit von den Verfahren der mathematischen Programmierung ist es jedoch ein sehr gutes Kontrollinstrument für Ergebnisse, die mit dem Verfahren mit formbeschreibender Funktion ermittelt werden.

Die Effektivität der Dehnungsaktivierung von Scheiben zur Reduktion von Störspannungen wird bereits in Kapitel 4 diskutiert. Mit dem hier vorgestellten Verfahren mit formbeschreibender Funktion können nun allgemeine Systeme, für die keine analytische Lösung gefunden werden kann, untersucht werden.

6 Adaptive Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren

Adaptive Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren weisen ein grundlegend anderes Tragverhalten als die im vorherigen Kapitel untersuchten dehnungsaktivierten Scheiben auf: Die integrierten Dehnungsaktuatoren stellen eine zusätzliche Verstärkungen des Systems dar, die bereits im passiven Zustand den Beanspruchungszustand der ursprünglich unverstärkten Scheibe beeinflussen. Im adaptiven Zustand ziehen sie durch die in sie induzierten Dehnungen zusätzliche Beanspruchungen auf sich und entlasten somit die mit ihnen verbundene Scheibe. Die induzierten Dehnungen müssen also bei Zugbeanspruchungen negativ und bei Druckbeanspruchungen positiv sein. Dehnungsaktivierte Scheiben hingegen entziehen sich hohen Beanspruchungen durch ihre induzierten Dehnungen. Hierfür sind also im Gegensatz zu den Systemen mit integrierten Dehnungsaktuatoren im Allgemeinen bei Zugbeanspruchungen positive induzierte Dehnungen und bei Druckbeanspruchungen entsprechend negative erforderlich.

Wie die anschauliche Darstellung in Kapitel 6.1 zeigt, ist die Wirkungsweise der integrierten Dehnungsaktuatoren mit der lokaler Verstärkungen passiver Systeme direkt zu vergleichen. Die Aktuatoren weisen jedoch durch ihre aktiv regelbaren Dehnungen quasi eine variable Steifigkeit auf, die einer in Realität nicht realisierbaren Dickenänderung der lokalen Verstärkungen des passiven Systems entsprechen würde. Dies ermöglicht beim adaptiven System eine Materialersparnis, da die für die maximale Beanspruchung erforderliche Steifigkeit, die im passiven System durch eine entsprechende Dicke der Verstärkung erzielt wird, nicht vorgehalten werden muss, sondern durch Energie erzeugt werden kann.

Wie bei der Optimierung passiver Systeme mit lokalen Verstärkungen sind für den Entwurf einer adaptiven Scheibe mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren zunächst die Ermittlung der optimalen Lage, Größe und Form der Aktuatoren entscheidend. Die Optimalität hängt hierbei von der gewählten Zielfunktion ab. Primäres Ziel der Untersuchung ist, wie bei den dehnungsaktivierten Scheiben, die Reduktion der auftretenden Inhomogenitäten im Spannungsfeld der Scheibe. Die integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren werden im Rahmen dieser Arbeit also dann als optimal definiert werden, wenn mit ihnen bei kleinstmöglichem Volumen eine vorab gewählte Reduktion der maximal auftretenden Spitzenspannung erzielt werden kann.

Ein mögliches Vorgehen zur Bestimmung der Lage und der Form der Aktuatoren wird in Kapitel 6.2 beschrieben. Hierbei werden integrierte diskrete Dehnungsaktuatoren mit folgenden Eigenschaften untersucht:

Innerhalb eines untersuchten Systems wird den Dehnungsaktuatoren eine konstante äquivalente Dicke h_{aktor} zugewiesen, die bei Ausführung der Aktuatoren als flächige Verstärkung gleich der Verstärkungsdicke ist. Bei Ausführung der Aktuatoren als integrierte Fasern kann diese Dicke entsprechend dem gewählten Faserabstand in einen Faserdurchmesser umgerechnet werden.

Das Material der Aktuatoren ist monoaxial ausgerichtet, um eine Ausführung der Aktuatoren als integrierte Fasern zu ermöglichen. Entsprechend den Erfordernissen wird es in Bereiche mit verschiedenen Ausrichtungen, die im Folgenden Zonen genannt werden, unterteilt.

In Bereichen bzw. Zonen, in denen zur Verbesserung der Scheibenbeanspruchungen induzierte Dehnungen in mehreren Richtungen erforderlich sind, können zwei monoaxiale Dehnungsaktuatoren halber äquivalenter Dicke um 90° gegeneinander verdreht angeordnet werden.

In der Berechnung werden die Aktuatoren als flächige Elemente berücksichtigt, so dass nicht zwischen den möglichen Ausführungsformen –flächige Verstärkung oder Fasern– unterschieden wird. Weiterhin wird ein vollkommener Verbund zwischen Grundscheibe und Aktuatoren angesetzt und eventuelle Exzentrizitäten werden vernachlässigt. Wie bei den Untersuchungen zu den dehnungsaktivierten Scheiben werden die Berechnungen mit dem Programm MATLAB durchgeführt. Für die finiten Element-Berechnungen wird wiederum auf Elemente der Toolbox CALFEM zurückgegriffen.

Eine Berechnung der bereits in Kapitel 4 und 5 untersuchten Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt, anhand der das vorgestellte Verfahren im Detail erläutert wird, schließt dieses Kapitel ab.

6.1 Wirkungsweise der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren im Vergleich zu passiven lokalen Verstärkungen

Zwei verschiedene Varianten der lokalen Verstärkung können unterschieden werden: Zum einen die lokalen Verstärkungen passiver Systeme, die im Folgenden als nichtaktivierbare bzw. passive Verstärkungen bezeichnet werden, zum anderen integrierte diskrete Dehnungsaktuatoren.

Die erzielten reduzierten Spannungen bzw. Beanspruchungen der verstärkten Grundscheibe sind in ihre Größe und ihrem Verlauf für beide Möglichkeiten bei entsprechender Höhe der Aktivierung bzw. bei entsprechender Höhe der passiven Aufdickung gleichwertig. Lediglich die Beanspruchungen in den Verstärkungselementen unterscheiden sich grundlegend.

In der passiven Verstärkung treten bei gleichen Materialeigenschaften für Verstärkung und Grundscheibe die gleichen Beanspruchungen wie in der Grundscheibe auf. Bei den integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren erhöhen sich dagegen die Beanspruchungen gegenüber denen der Grundscheibe. Diese Erhöhung ist dabei abhängig vom Maß der Spannungsreduktion, dem Verhältnis der Dicke und dem Verhältnis der E-Moduli des Pflasters und der Grundscheibe. Die dargelegten Zusammenhänge können anschaulich anhand des nachfolgenden statisch bestimmten Beispiels dargelegt werden. Dabei werden die Werte des passiven, also nicht aktivierbaren, Systems mit dem Index $n_{\text{nichtaktiv}}$ bezeichnet, um Überschneidungen mit dem Index n_{passiv} für den passiven Zustand eines adaptiven Systems zu vermeiden.

Ermittlung der erforderlichen Aktivierungen und Größen der diskreten Dehnungsaktuatoren am statisch bestimmten System

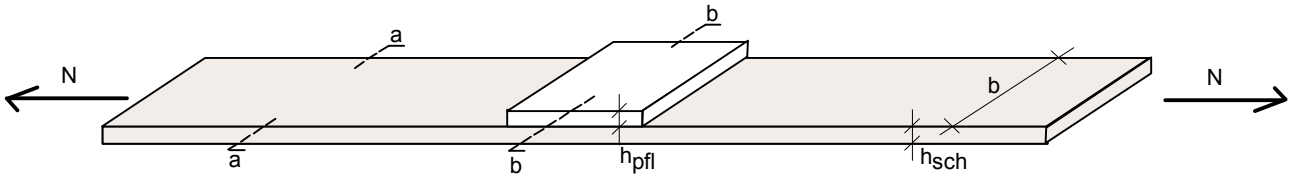


Abb. 6-1: Einaxial belasteter Streifen mit lokaler Verstärkung -passives System

Der in Abb. 6-1 dargestellte Streifen wird mit einer axialen Kraft N so beansprucht, dass die Spannungen im Bereich außerhalb der Verstärkung (Schnitt a-a) den Wert $\sigma_{\text{unverstärkt}}$ annehmen. Für eine nicht aktivierbare lokale Verstärkung der Dicke h_{pfl} , deren E-Modul $E_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}$ dem der Grundscheibe E_{sch} entspricht, ergeben sich bei die Spannungen im Schnitt b-b anteilig mit:

$$(6-1) \quad \sigma_{\text{sch b-b}}^{\text{nichtaktiv}} = \sigma_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}} = \frac{\sigma_{\text{unverstärkt}} \cdot h_{\text{sch}}}{h_{\text{sch}} + h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}}$$

mit $E_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}} = E_{\text{sch}}$

Die Beanspruchungen der Dehnungsaktuatoren hingegen setzen sich aus den gemäß den Steifigkeiten verteilten Beanspruchungen und aus den durch die Aktivierung δ_{aktiv} induzierten Beanspruchungen zusammen. Diese Beanspruchungen können mit der folgenden Gleichgewichts- und Verformungsbetrachtung ermittelt werden. Hierbei werden verschiedene E-Moduli für die Grundscheibe E_{sch} und die Dehnungsaktuatoren E_{aktuator} berücksichtigt:

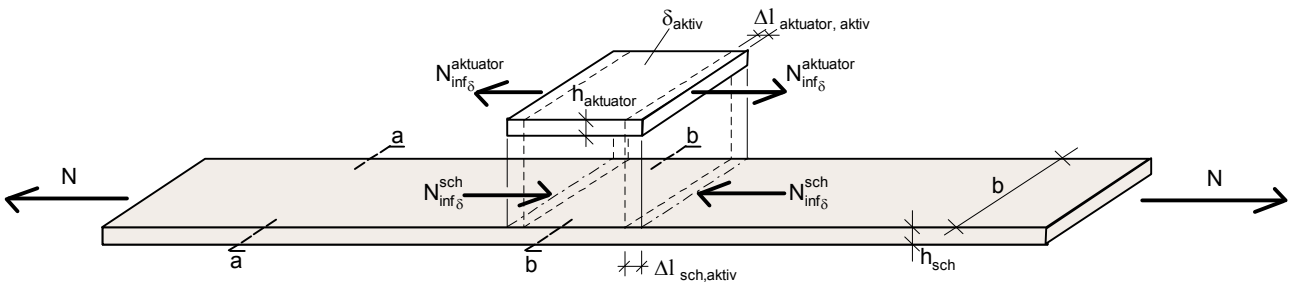


Abb. 6-2: Gleichgewicht und Kinematik eines integrierten Dehnungsaktuatoren

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta l_{\text{sch,aktiv}} &= \frac{N_{\text{inf } \delta}^{\text{sch}}}{E_{\text{sch}} \cdot b \cdot h_{\text{sch}}} = \frac{N_{\text{inf } \delta}}{E_{\text{sch}} \cdot b \cdot h_{\text{sch}}} \\ (6-2) \quad \Delta l_{\text{aktuator,aktiv}} &= \delta_{\text{aktiv}} + \frac{N_{\text{inf } \delta}^{\text{aktuator}}}{E_{\text{aktuator}} \cdot b \cdot h_{\text{aktuator}}} = \delta_{\text{aktiv}} - \frac{N_{\text{inf } \delta}}{E_{\text{aktuator}} \cdot b \cdot h_{\text{aktuator}}} \\ \Delta l_{\text{aktuator,aktiv}} &= \Delta l_{\text{sch,aktiv}} \end{aligned}$$

mit der Normalkraft $N_{\text{inf } \delta}$, die sich wie folgt berechnet:

$$(6-3) \quad N_{\text{inf } \delta} = \frac{\delta_{\text{aktiv}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}} \cdot b \cdot h_{\text{sch}} \cdot h_{\text{aktuator}}}{E_{\text{sch}} \cdot h_{\text{sch}} + E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{aktuator}}}$$

Somit ergibt sich für einen integrierten Dehnungsaktuator im Schnitt b-b die folgende Beanspruchung in Abhängigkeit von der Höhe der Aktivierung δ_{aktiv} :

$$\begin{aligned} (6-4) \quad \sigma_{\text{sch b-b}}^{\text{aktiv}} &= \frac{\sigma_{\text{unverstärkt}} \cdot h_{\text{sch}} \cdot E_{\text{sch}}}{h_{\text{sch}} \cdot E_{\text{sch}} + h_{\text{aktuator}} \cdot E_{\text{aktuator}}} + \frac{N_{\text{inf } \delta}}{b \cdot h_{\text{sch}}} \\ \sigma_{\text{aktuator b-b}} &= \frac{\sigma_{\text{unverstärkt}} \cdot h_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}}}{h_{\text{sch}} \cdot E_{\text{sch}} + h_{\text{aktuator}} \cdot E_{\text{aktuator}}} - \frac{N_{\text{inf } \delta}}{b \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{aktiv}}} \end{aligned}$$

Um gleiche Spannungen in der Grundscheibe, für das nichtaktivierbare und das aktivierbare System zu erzielen, muss die Höhe der Aktivierung in Abhängigkeit der Dicke der Scheibe und der Verstärkung und in Abhängigkeit der E-Moduli gewählt werden.

Aus (6-1) bis (6-4) ergibt sich mit

$$(6-5) \quad \sigma_{\text{sch b-b}}^{\text{nichtaktiv}} = \sigma_{\text{sch b-b}}^{\text{aktiv}}$$

der folgende Zusammenhang:

$$(6-6) \quad h_{\text{aktuator}} = \frac{\delta_{\text{aktiv}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}} + \sigma_{\text{aktuator,b-b}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}}{E_{\text{aktuator}} \cdot \sigma_{\text{aktuator,b-b}}}$$

Somit können bei statisch bestimmten Systemen die erforderlichen Parameter einer passiven Verstärkung und eines integrierten Dehnungsaktuators bestimmt werden. Bei statisch unbestimmten Systemen ist aufgrund der Umverteilung der Spannungen infolge der Änderung der Steifigkeitsverteilung der Zusammenhang zwischen den Spannungen des unverstärkten Systems $\sigma_{\text{unverstärkt}}$ und denen der verstärkten Systeme $\sigma_{\text{sch b-b}}^{\text{nichtaktiv}}$ und $\sigma_{\text{sch b-b}}^{\text{aktiv}}$ nicht mehr in dieser einfachen Form aufstellbar.

Übergang zum statisch unbestimmten System

Bei entsprechender Wahl der Dicken h_{pfl} und h_{aktuator} und der Aktivierung ist die Verteilung der Spannungen in der Grundscheibe für das nichtaktivierbare und das adaptive System gleich, wenn vereinfachend von einer in allen Richtungen gleich großen Aktivierung ausgegangen wird ($\delta_{\text{aktiv } x} = \delta_{\text{aktiv } y}$).

Das in (6-2) und in (6-3) aufgestellte Gleichgewicht und die Kinematik eines Elementes des aktivierten Systems ist unabhängig von der statischen Bestimmtheit des Systems. Somit können die in (6-4) und (6-5) aufgestellten Zusammenhänge des aktivierten Systems bezogen auf eine Belastung K des betrachteten Elementes aufgestellt und allgemein ausgedrückt werden:

$$(6-7) \quad \sigma_{sch,b-b}^{aktiv} = \sigma_{sch,adapt}^{aktiv} = \frac{K \cdot E_{sch}}{h_{sch} \cdot E_{sch} + h_{aktuator} \cdot E_{aktuator}} + \frac{N_{inf} \delta}{b \cdot h_{sch}}$$

$$\sigma_{aktuator,b-b} = \sigma_{aktuator,adapt} = \frac{K \cdot E_{sch}}{h_{sch} \cdot E_{sch} + h_{aktuator} \cdot E_{aktuator}} - \frac{N_{inf} \delta}{b \cdot h_{aktuator}}$$

Die Belastung K kann hierbei aus dem Spannungsverlauf des nicht aktivierten Systems ermittelt werden:

$$(6-8) \quad \sigma_{sch,b-b}^{nichtaktiv} = \sigma_{pfl}^{nichtaktiv} = \frac{K}{h_{sch} + h_{pfl}^{nichtaktiv}}$$

Setzt man nun, wie in (6-5), die Spannungen der Grundscheibe des nicht aktivierten Systems gleich denen des aktivierten Systems, so ergibt sich auch beim statisch unbestimmten System der in (6-6) aufgestellte Zusammenhang zwischen den Dicken der Verstärkung der beiden Systeme:

$$(6-9) \quad h_{aktuator} = \frac{\delta_{aktiv} \cdot E_{sch} \cdot E_{aktuator} \cdot h_{pfl}^{nichtaktiv} + \sigma_{aktuator,adapt} \cdot E_{sch} \cdot h_{pfl}^{nichtaktiv}}{E_{aktuator} \cdot \sigma_{aktuator,adapt}}$$

Diesen Zusammenhang kann man für die Auslegung der Parameter eines adaptiven Systems ausnutzen.

6.2 Berechnungsverfahren für adaptive Scheiben mit aktiven Fasern bzw. aktiven lokalen Verstärkungen

Zur Ermittlung der optimalen integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren könnten zunächst die Form, die Dicke, die Materialeigenschaften und die Höhe der induzierten Dehnungen frei gewählt werden. Die Vielzahl der daraus resultierenden Freiheitsgrade und deren gegenseitige Beeinflussung würden jedoch zu einer extrem aufwendigen Optimierung führen.

Aufgrund des oben dargestellten Zusammenhangs zwischen nichtaktivierbaren Verstärkungen und den integrierten Dehnungsaktuatoren kann die Optimierung jedoch durch eine schrittweise Ausführung vereinfacht werden:

Zunächst wird hierzu für jeden Belastungszustand die optimale Form und Dicke nichtaktivierbarer lokaler Verstärkung für die zu erzielenden Spannungsreduktion ermittelt, siehe Kapitel 6.2.1. Eine Vordimensionierung bzw. Auslegung des anzusetzenden Parameters h_{pfl} kann dabei auf Grundlage der oben aufgestellten Formeln (6-7) bis (6-9) erfolgen. Im nächsten Schritt können entsprechend der ermittelten Topologie der nichtaktivierbaren Verstärkungen die integrierten Dehnungsaktuatoren dimensioniert, platziert und ausgerichtet werden, siehe Kapitel 6.2.2. Hierbei sind die Verteilung und Ausrichtung der Spannungen der Grundscheibe in den verschiedenen Belastungszuständen maßgebend. Die in Kapitel 6.2.3 vorgestellte Berechnung der optimalen erforderlichen induzierten Dehnungen für die einzelnen Zonen schließt das Verfahren ab.

6.2.1 Ermittlung der optimalen Lage nichtaktivierbarer lokaler Verstärkungen

Der erste Schritt zur Berechnung adaptiver Scheiben mit integrierten Dehnungsaktuatoren besteht somit in der Ermittlung der optimalen Lage und Form nichtaktivierbarer lokaler Verstärkungen zur Reduktion der Spannungen der Grundscheibe σ_{sch} unter eine gewählte Grenzspannung σ^{grenz} . Als Optimum wird hierbei das minimale Volumen angesetzt. Mathematisch kann dies, wie folgt, ausgedrückt werden:

Minimiere

$$V(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$$

(6-10) unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\sigma_{\text{sch}}(\mathbf{x}) - \sigma^{\text{grenz}} \leq 0$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x}^e \leq \mathbf{x}^U$$

Hierbei stellt der Entwurfsvektor \mathbf{x} die Verteilung der Dicke der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkung und die Zielfunktion V ihr Volumen dar. Der Entwurfsvektor erhält zusätzlich mit $x^U = h_{\text{pfl}}$ eine Beschränkung nach oben, welche maßgebend die induzierten Dehnungen und Beanspruchungen der Dehnungsaktuatoren, die in den nächsten Schritten ermittelt werden, beeinflussen wird. Die Beschränkung nach unten mit $x^L = 0$ ist physikalisch begründet.

In Kapitel 3.2 wurden bereits die Vor- und Nachteile verschiedener Verfahren der Optimierung vorgestellt. Zur Lösung der hier gestellten Optimierungsaufgabe wird wegen der hohen Anzahl der Entwurfsvariablen und der einzuhaltenden Spannungsrandbedingungen ein auf der DCOC-Methode beruhendes Verfahren, das von Zhou in [99] vorgestellt wird, gewählt. Dieses Verfahren wurde für die Optimierung von Strukturen unter Einhaltung einer Verschiebungsrandbedingung und einer Vielzahl von Spannungsrandbedingungen entwickelt. Zhou verwendet dieses Verfahren maßgeblich zur optimalen Ausdimensionierung großer Stabtragwerke; es ist aber nicht auf diese Anwendung beschränkt und kann, wie im Folgenden gezeigt wird, ebenso für eine Topologieoptimierung eines flächigen Tragwerkes verwendet werden.

Herleitung der Optimalitätskriterien

Grundlage der Optimalitätskriterienverfahren sind die für jede Problemstellung individuell hergeleiteten Optimalitätskriterien, auf deren Basis die Entwurfsvariablen in jedem Iterationsschritt neu bestimmt werden.

Entscheidend hierfür ist das Vorhandensein mindestens einer globalen Randbedingung, die eine Neubestimmung aller Entwurfsvariablen, die nicht durch Schranken oder lokale Nebenbedingungen bestimmt werden, ermöglicht. Üblicherweise werden hierfür Verschiebungsrandbedingungen angesetzt. Sind, wie in dem hier vorliegenden Fall, keine Verschiebungsrandbedingungen zu erfüllen, können alternativ eine oder mehrere Spannungsrandbedingungen global in Abhängigkeit von den Verschiebungen des Systems formuliert werden. Diese globalen Nebenbedingungen werden im Folgenden mit dem Index ^c gekennzeichnet. Zunächst sollen die Optimalitätskriterien für ein System mit einer globalen Spannungsrandbedingung hergeleitet werden. Die Formulierung für mehrere globale Spannungsrandbedingungen ist entsprechend und wird anschließend bzw. in Anhang B kurz erläutert.

Die in (6-10) dargestellte Problemstellung erweitert sich somit um die globale Randbedingung und kann in diskretisierter Form, wie folgt dargestellt werden:

Minimiere

$$V(x) = \sum_{e=1}^{NE} A^e \cdot x^e$$

(6-11) unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\sigma_{sch}^c(x) - \sigma_{sch}^{c\ grenz} \leq 0$$

$$\sigma_{sch}^e(x) - \sigma_{sch}^{e\ grenz} \leq 0, \quad e = 1, \dots, NE$$

$$x^{eL} \leq x^e \leq x^{eU}, \quad e = 1, \dots, NE$$

Zur Herleitung der Optimalitätskriterien werden die Nebenbedingungen und die Zielfunktion als explizite Funktionen der Elementknotenkräfte und der Entwurfsvariablen x^e , also der Dicke der lokalen Verstärkung je finitem Element, aufgestellt.

Hierbei muss zwischen Werten aus der Kraft- und Weggrößenformulierung unterschieden werden. Die Werte der Weggrößenformulierung beinhalten alle n_s Freiheitsrade eines Elementes und werden im Folgenden ohne Index dargestellt. Die Werte der Kraftgrößenformulierung beinhalten jeweils nur die n_f Freiheitsgrade eines Elements, die den Freiheitsgraden eines Elementes abzüglich der möglichen Starrkörperverschiebungen n_r entsprechen, und werden mit dem Index f gekennzeichnet.

$$(6-12) \quad n_f = n_s - n_r$$

Für die Nachgiebigkeit einer Struktur gilt in der Kraftgrößenformulierung folgender Zusammenhang:

$$(6-13) \quad u_f^e = f^e \cdot F_f^e + u_{fi}^e, \quad e = 1, \dots, NE$$

Hierbei sind u_{fi}^e alle Anfangsverschiebungen, die durch innere Dehnungen oder verteilte Lasten im statisch bestimmt gelagerten Element e verursacht werden. Da im realen System des hier vorliegenden Problems keine solchen Anfangsverschiebungen auftreten, werden sie im Weiteren nicht berücksichtigt. F_f^e und f^e stellen den Elementlastvektor und die Nachgiebigkeitsmatrix des betrachteten Elementes e dar.

Fasst man die Vektoren u_f^e , f^e und F_f^e aller Elemente zusammen zu

$$(6-14a) \quad u_f = [u_f^1 \quad \dots \quad u_f^e \quad \dots \quad u_f^{NE}]^T$$

$$(6-14b) \quad F_f^e = [F_f^1 \quad \dots \quad F_f^e \quad \dots \quad F_f^{NE}]^T$$

$$(6-14c) \quad f^e = \begin{bmatrix} f^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & f^e & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f^{NE} \end{bmatrix}$$

so kann (6-13), wie folgt, ausgedrückt werden:

$$(6-15) \quad u_f = f \cdot F_f$$

Der Zusammenhang zwischen den Elementknotenkräften F_f und den äußeren Lasten P kann durch die folgende Gleichgewichtsbedingungen hergestellt werden:

$$(6-16) \quad P = B \cdot F_f$$

Hierbei ist B die Gleichgewichtsmatrix, mit der in Form der Transponierten die kinematische Verträglichkeit aufgestellt werden kann:

$$(6-17) \quad u_f = A \cdot u = B^T \cdot u$$

Mit den kinematischen Gleichungen und dem Materialgesetz können die Spannungen der Grundscheibe als Funktionen von \mathbf{x}^e und F_f^e ermittelt werden. Hierfür wird zunächst für ein Element der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verschiebungen aufgestellt:

$$(6-18) \quad \sigma_{\text{sch}}^e = \underline{\underline{E}} \cdot B_{\text{sch}} \cdot u^e$$

Der Zusammenhang des Elementverschiebungs- und des Elementknotenlastvektors ergibt sich mit (6-13) zu:

$$(6-19) \quad u^e = \phi^{eT} \cdot f^e \cdot F_f^e$$

Hierbei ist ϕ^e eine Transformationsmatrix, die den Zusammenhang zwischen dem Elementknotenvektor aus der Kraftgrößen- und Weggrößenformulierung darstellt:

$$(6-20) \quad F_f^e = \phi^e \cdot F^e$$

Somit ergeben sich die Spannungen eines Elementes in Abhängigkeit von \mathbf{x}^e und F_f^e aus (6-18) bis (6-20) mit:

$$(6-21) \quad \sigma_{\text{sch}}^e = \underline{\underline{E}} \cdot B_{\text{sch}} \cdot \underbrace{\phi^{eT} \cdot f^e}_{S^{eT}} \cdot F_f^e$$

Ist an Stelle des Spannungsvektors ein Einzelspannungswert gefordert, so wird der Vektor S^{eT} um den entsprechenden Transformationsfaktor θ^e erweitert.

$$(6-22) \quad S_{\theta}^{eT} = \theta^e \cdot \underline{\underline{E}}_{\text{sch}} \cdot B_{\text{sch}} \cdot \phi^{eT} \cdot f^e$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix f^e bzw. deren Inverse K^e setzen sich in dem hier untersuchten Problem aus Werten der Grundscheibe und der lokalen Verstärkung zusammen. Werden für die Grundscheibe und die lokale Verstärkung die gleichen Materialkennwerte gewählt, so ergeben sich die Matrizen in Abhängigkeit von der konstanten Dicke der Grundscheibe h_{sch} und der lokalen Verstärkung $h_{\text{plf}}^e = \mathbf{x}^e$ für jedes Element e mit:

$$(6-23) \quad K^e = K_{\text{sch}}^e + K_{\text{plf}}^e = (h_{\text{sch}} + \mathbf{x}^e) \cdot K_{\text{Einheit}}^e$$

$$f^e = \frac{1}{(h_{\text{sch}} + \mathbf{x}^e)} \cdot f_{\text{Einheit}}^e$$

Die Materialmatrix $\underline{\underline{E}}_{\text{sch}}$ und die Verzerrungs- und Verschiebungsmatrix B_{sch} in (6-22) hingegen enthalten nur Werte der Grundscheibe, da nur die Spannungswerte dieser für die Optimierung von Bedeutung sind.

Die lokalen Spannungsrandbedingungen werden als Von-Mises-Vergleichsspannungen formuliert, siehe (6-24). Somit kann eine Bestimmung der maßgebenden Beanspruchungsrichtung für jedes Element entfallen, die aufgrund von möglichen Spannungsumlagerungen zu dem in jedem Iterationsschritt erforderlich wäre.

$$(6-24) \quad \begin{aligned} (\sigma_V^e)^2 &= [S^{eT} \cdot F_f^e]^T \cdot V \cdot [S^{eT} \cdot F_f^e] \\ \text{mit } V &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bei der globalen Spannungsrandbedingung, für die jeweils ein Element im Bereich der maximalen Beanspruchungen ausgewählt wird, wird im Gegensatz dazu in jedem Iterationsschritt die maßgebende Spannungsrichtung bestimmt. Dies ist wegen der geringen Anzahl der globalen Spannungsrandbedingungen wenig rechenintensiv und ermöglicht, wie im Weiteren gezeigt wird, eine deutliche Vereinfachung des Algorithmus, da eine explizite Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren somit möglich ist.

Die Globalisierung der Spannungsrandbedingung erfolgt durch Ersetzen des Elementknotenvektors durch eine Funktion aller Knotenverschiebungen u . Durch die im Weiteren dargestellten Umformungen kann somit die Spannung als eine besondere Form einer Verformungsrandbedingung dargestellt werden.

$$(6-25) \quad \begin{aligned} \sigma_{sch}^c &= S_0^{cT} \cdot F_f^c \\ &= S_0^{cT} \cdot \phi^c \cdot F^c \\ \text{mit } F^c &= K^c \cdot u^c \\ &= K^c \cdot T_G^c \cdot u \end{aligned}$$

Hierbei ist T_G^c eine Transformationsmatrix, die den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen der Elementsfreiheitsgrade des betrachteten Elementes c und dem globalen Verschiebungsvektor darstellt. Somit ergibt sich:

$$(6-26) \quad \sigma_{sch}^c = \underbrace{S_0^{cT} \cdot \phi^c \cdot K^c \cdot T_G^c}_{\bar{Q}^{cT}} \cdot u$$

Betrachtet man \bar{Q}^c als einen virtuellen Lastvektor, so kann (6-26) ausgedrückt werden als

$$(6-27) \quad \sigma_{sch}^c = \bar{F}_f^T \cdot u_f = \bar{F}_f^T \cdot f \cdot F_f,$$

wobei \bar{F}_f virtuelle Kräfte sind, die die Gleichgewichtsbedingung erfüllen:

$$(6-28) \quad B \cdot \bar{F}_f = \bar{Q}^c$$

Vergleicht man wiederum den globalisierten Ausdruck der Spannung (6-27) mit dem Ausdruck für die Verschiebung eines Freiheitsgrades D auf Basis der virtuellen Arbeit

$$(6-29) \quad u_D = \sum_{e=1}^{NE} \bar{F}_f^{eT} \cdot u_f^e = \bar{F}_f^T \cdot u_f,$$

so ist die Übereinstimmung der Formulierungen klar zu erkennen. Hierbei sind \bar{F}_f^e die Elementknotenkräfte, die durch eine virtuelle Ersatzkraft \bar{P}^V auf den Freiheitsgrad D verursacht werden. \bar{Q}^c kann also als virtuelle Ersatzkraft für die Spannung im Element c interpretiert werden.

Mit diesen Umformungen kann das in (6-11) ausformulierte Optimierungsproblem in Abhängigkeit von Funktionen von \mathbf{x}^e und F_f^e aufgestellt werden:

Minimiere

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{NE} A^e \cdot \mathbf{x}^e$$

unter Einhaltung der Randbedingungen

$$\bar{F}_f^T \cdot u_f - \sigma_{sch}^{cgrenz} \leq 0$$

$$(6-30) \quad \text{mit} \quad B \cdot \bar{F}_f = \bar{P}^V$$

$$\left(F_f^{eT} \cdot S^e \right) \cdot V \cdot \left(S^{eT} \cdot F_f^e \right) - \left(\sigma_v^{egrenz} \right)^2 \leq 0, \quad e = 1, \dots, NE$$

$$\text{mit} \quad B \cdot F_f = P$$

$$x^{eL} \leq x^e \leq x^{eU}, \quad e = 1, \dots, NE$$

Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet somit:

$$(6-31) \quad \begin{aligned} L = & V(\mathbf{x}^e) + v \cdot \left(\bar{F}_f^T \cdot u_f - \sigma_{sch}^{cgrenz} \right) \\ & + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[\left(F_f^{eT} \cdot S^e \right) \cdot V \cdot \left(S^{eT} \cdot F_f^e \right) - \left(\sigma_v^{egrenz} \right)^2 \right] \\ & + \alpha^{RT} (P - B \cdot F_f) \\ & + \alpha^{VT} (\bar{P}^V - B \cdot \bar{F}_f) \\ & + \sum_{e=1}^{NE} \left[\beta^e \cdot (-\mathbf{x}^e + x^{eL}) + \gamma^e (\mathbf{x}^e - x^{eU}) \right] \end{aligned}$$

Hierbei sind v , λ^e , β^e und γ^e die Lagrange-Multiplikatoren der Ungleichheitsnebenbedingungen, die bei aktiven Nebenbedingungen nicht-negativ sind, bzw. bei nicht-aktiven Nebenbedingungen den Wert Null annehmen. α^R und α^V haben als Lagrange-Multiplikatoren der Gleichheitsnebenbedingungen nicht die Anforderung der Nicht-Negativität.

Die notwendige Bedingung für ein lokales Minimum des in (6-11) dargestellten Problems werden durch die Kuhn-Tucker-Bedingungen ausgedrückt:

$$(6-32a) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i^e} = 0, \quad i = 1, \dots, n(e) \\ e = 1, \dots, NE$$

$$(6-32b) \quad \frac{\partial L}{\partial (\bar{F}_f)_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N_f$$

und

$$(6-32c) \quad \frac{\partial L}{\partial (\bar{F}_f)_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N_f$$

Aus den Gleichungen (6-31) und (6-32) folgt:

$$(6-33a) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i^e} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i^e} + v \left(\bar{F}_f^{eT} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial \mathbf{x}_i^e} \right) \\ + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[2 \cdot \bar{F}_f^{eT} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}^e}{\partial \mathbf{x}_i^e} \cdot v \cdot \mathbf{S}^{eT} \cdot \bar{F}_f^e \right] - \beta_i^e + \gamma_i^e = 0 \\ i = 1, \dots, n(e), \quad e = 1, \dots, NE$$

$$(6-33b) \quad \frac{\partial L}{\partial (\bar{F}_f)_i} = v \cdot \bar{F}_f^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial (\bar{F}_f)_i} \\ + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[2 \cdot \bar{F}_f^{eT} \cdot \mathbf{S}^e \cdot v \cdot \mathbf{S}^{eT} \right] + \alpha^{RT} \cdot (-B) = 0 \\ i = 1, \dots, N_f$$

und

$$(6-33c) \quad \frac{\partial L}{\partial (\bar{F}_f)_i} = v \cdot \mathbf{u}_f + \alpha^{VT} \cdot B = 0 \\ i = 1, \dots, N_f$$

Hierbei gilt für die partiellen Ableitungen von u_f nach \mathbf{x}_i^e bzw. $(F_f)_i$ Folgendes:

$$(6-34a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{x}_i^e} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i^e} \cdot (\mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_f) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i^e} \cdot \left(\sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right) \\ &= \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \end{aligned}$$

$$(6-34b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial (F_f)_i} &= \frac{\partial}{\partial (F_f)_i} \cdot (\mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_f) = \frac{\partial}{\partial (F_f)_i} \cdot \left(\sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right) \\ &= \frac{1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \end{aligned}$$

Und für die partiellen Ableitung von S und W entsprechend:

$$(6-35) \quad \begin{aligned} \frac{\partial S^e}{\partial \mathbf{x}_i^e} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i^e} \cdot (\underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{B}_t \cdot \phi^{eT} \cdot \mathbf{f}^e) \\ &= \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{B}_t \cdot \phi^{eT} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \end{aligned}$$

$$(6-36) \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i^e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i^e} \left(\sum_{e=1}^{NE} A^e \cdot \mathbf{x}^e \right) = A^e$$

Bestimmt man

$$(6-37) \quad \bar{\mathbf{u}}_{fi} = [\bar{u}_{fi}^1 \quad \dots \quad \bar{u}_{fi}^e \quad \dots \quad \bar{u}_{fi}^{NE}]^T$$

mit

$$(6-38) \quad \bar{u}_{fi}^e = \frac{1}{v} \cdot \lambda^e \cdot [2 \cdot \mathbf{F}_f^{eT} \cdot \mathbf{S}^e \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}^{eT}],$$

kann Gleichung (6-33b) ausgedrückt werden als:

$$(6-39) \quad \begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{F}}_f + \bar{\mathbf{u}}_{fi} &= \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \text{mit } \bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{v} \cdot \alpha^R \end{aligned}$$

Analog kann Gleichung (6-33c) umgeformt werden zu:

$$(6-40) \quad \begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_f &= \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{u} \\ \text{mit } \mathbf{u} &= \frac{1}{v} \cdot \alpha^V \end{aligned}$$

Somit drückt (6-40) die kinematische Verträglichkeit des realen Systems aus, welche in Gleichung (6-31) zunächst vernachlässigt wurde. Gleichung (6-39) liefert die kinematische Verträglichkeit des virtuellen Lastsystems, welche im ursprünglichen Problem nicht zu erfüllen war. Das durch die kinematische Verträglichkeit (6-39) und die Gleichgewichtsbedingung (6-28) definierte fiktive System wird als adjungiertes System bezeichnet. Wenn keine der lokalen Spannungsrandbedingungen aktiv ist, reduziert sich das adjungierte System auf das in (6-28) definierte virtuelle Lastsystem der globalen Randbedingung. Bei aktiven lokalen Spannungsrandbedingungen wird das System erweitert durch fiktive Anfangsverformungen \bar{u}_{fi} , und es entsteht ein modifiziertes virtuelles Lastsystem.

Lösungsalgorithmus

Hiermit sind die erforderlichen Optimalitätskriterien für die Topologie- bzw. Dickenoptimierung der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkung unter Einhaltung der globalen und lokalen Spannungsrandbedingungen hergeleitet. Sie werden hier noch einmal zusammengefasst:

Gleichungen, die die Ungleichheitsbedingungen betreffen:

$$(6-41a) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i^e} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i^e} + v \left(\bar{\mathbf{F}}_f^{eT} \cdot \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right) + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[2 \cdot \mathbf{F}_f^{eT} \cdot \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{B}_t \cdot \boldsymbol{\phi}_e^T \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{eT} \cdot \mathbf{F}_f^e \right] - \beta^e + \gamma^e = 0$$

$$i = 1, \dots, n(e), \quad e = 1, \dots, NE$$

$$(6-41b) \quad v \cdot \left[\sum_{e=1}^{NE} \left(\bar{\mathbf{F}}_f^{eT} \cdot \frac{1}{h_{sch} + \mathbf{x}^e} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right) - \sigma_a^{cgrenz} \right] = 0 \text{ und } v > 0$$

$$(6-41c) \quad \lambda^e \cdot \left(\left(\mathbf{F}_f^{eT} \cdot \mathbf{S}^e \right) \cdot \mathbf{V} \cdot \left(\mathbf{S}^{eT} \cdot \mathbf{F}_f^e \right) - \left(\sigma_v^{egrenz} \right)^2 \right) = 0 \text{ und } \lambda^e \geq 0$$

$$e = 1, \dots, NE$$

$$(6-41d) \quad \left. \begin{array}{l} \beta^e \cdot \left[-\mathbf{x}^e + \mathbf{x}^{eL} \right] = 0 \text{ und } \beta^e \geq 0 \\ \gamma^e \cdot \left[\mathbf{x}^e - \mathbf{x}^{eU} \right] = 0 \text{ und } \gamma^e \geq 0 \end{array} \right\} e = 1, \dots, NE$$

Gleichungen, die das reale System betreffen:

$$(6-42a) \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_f = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{u}$$

$$(6-42b) \quad \mathbf{P}^V = \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_f$$

Gleichungen, die das adjungierte System betreffen:

$$(6-43a) \quad f \cdot \bar{F}_f + \bar{u}_{fi} = B^T \cdot \bar{u}$$

$$(6-43b) \quad \begin{aligned} \bar{u}_{fi} &= [\bar{u}_{fi}^1 \quad \dots \quad \bar{u}_{fi}^e \quad \dots \quad \bar{u}_{fi}^{NE}]^T \\ \bar{u}_{fi}^e &= \frac{1}{v} \cdot \lambda^e \cdot [2 \cdot F_f^{eT} \cdot S^e \cdot v \cdot S^{eT}] \end{aligned}$$

$$(6-43c) \quad \bar{P}^V = B \cdot \bar{F}_f$$

Da nicht alle Gleichungen auf einmal gelöst werden können, wird, wie bei allen generalisierten Optimalitätskriterienverfahren, ein iterativer Algorithmus aufgebaut, der sich aus folgenden zwei Hauptschritten zusammensetzt:

- Analysephase:
Berechnung des realen und des adjungierten Systems, die durch (6-42) und (6-46) definiert sind.
- Aktualisierungsphase:
Aktualisieren der Parameter x^e und der Kräfte F_f und \bar{F}_f auf Basis der Ergebnisse der Analysephase.

Analysephase

Die Berechnung des realen und adjungierten Systems in der Analysephase erfolgt mit der Finiten-Element-Methode, die auf dem Weggrößenverfahren beruht. Im Gegensatz dazu sind die Ansätze für das reale und das adjungierte System auf Basis des Kraftgrößenverfahrens formuliert. Wie bereits oben dargestellt, ist aufgrund der unterschiedlichen Anzahl der Freiheitsgrade eine Umrechnung der Werte aus dem Weggrößenverfahren in das Kraftgrößenverfahren und umgekehrt vorzunehmen. Die Ermittlung der Werte im Einzelnen wird hier noch einmal kurz dargestellt:

Die Gleichgewichtsbedingung des Weggrößenverfahrens ist mit

$$(6-44) \quad K \cdot u = P$$

gegeben. Hierbei ist K die Steifigkeitsmatrix, u der Verschiebungsvektor und P der äußere Lastvektor des betrachteten Systems mit n_s Freiheitsgraden. Der Lastvektor P setzt sich zusammen aus einem direkt auf die Knoten wirkenden Lastanteil P_N und einer äquivalenten Last P_E , der den verteilten Lasten und Anfangsverformungen entspricht.

$$(6-45) \quad P = P_n + P_E$$

Die Steifigkeitsmatrix K und der Lastvektor P können aus den Elementsteifigkeitsmatrizen K^e und den auf Elementebene bezogenen Knotenlasten P^e zusammengefügt werden. Der äquivalente Lastanteil P_E^e eines Elementes ist gleich den negativen Auflagerkräften F_F^e , die bei Festhaltung aller Freiheitsgrade am Element entstehen.

$$(6-46) \quad P_E^e = -F_F^e$$

Innerhalb der Elemente gilt somit folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$(6-47) \quad F^e = K^e \cdot u^e + F_F^e$$

Die so ermittelten Elementknotenlasten F^e und Elementverschiebungen beziehen sich auf alle n_s Freiheitsgrade des Elementes. Die Reduktion des Elementknotenlastvektors auf die n_f Freiheitsgrade des Kraftgrößenverfahrens erfolgt mit der in (6-20) gegebenen Transformation, bei der ϕ^e eine $n_f \times n_s$ -Matrix ist:

$$(6-48) \quad F_f^e = \phi^e \cdot F^e$$

Bei dem hier vorliegenden Problem treten nur für das adjungierte System Anfangsverschiebungen auf, die in der FE-Berechnung durch den entsprechenden äquivalenten Lastanteil zu berücksichtigen sind. Die Transformation der adjungierten Anfangsverschiebungen erfolgt analog zu (6-48) mit:

$$(6-49) \quad \bar{u}_i^e = \phi^{eT} \cdot \bar{u}_{fi}^e$$

Die den adjungierten Anfangsverschiebungen entsprechenden Auflagerkräfte F_F und somit die adjungierten äquivalenten Knotenlasten P_E können dann, wie folgt, ermittelt werden:

$$(6-50) \quad \bar{P}_E^e = -\bar{F}_F^e = K^e \cdot u_i^e$$

Der Lastvektor \bar{P} des adjungierten Systems wird aus den adjungierten äquivalenten Knotenlasten \bar{P}_E^e und dem virtuellen Lastvektor \bar{P}^V , der mit der globalen Spannungsrandbedingung korrespondiert, zusammengesetzt.

Mit diesen Zusammenhängen können die mit der Finiten-Element-Methode ermittelten Werte des adjungierten und realen Systems auf die Freiheitsgrade des Kraftgrößenverfahrens umgerechnet und die Analysephase abgeschlossen werden.

Aktualisierungsphase

Der Analysephase schließt sich die Aktualisierung der Parameter an. Hier ist wiederum ein iteratives Vorgehen erforderlich, da die zu ermittelnden Lagrange-Multiplikatoren von den aktiven Randbedingungen und diese wiederum von den Lagrange-Multiplikatoren abhängen.

Grundlage des gesamten Topologieoptimierungsverfahrens ist eine aktive globale Randbedingung, die hier als globale Spannungsrandbedingung gewählt wurde. Somit gilt $\nu > 0$ für alle Iterationsschritte, und mit Gleichung (6-41b) folgt:

$$(6-51) \quad \sum_{e=1}^{NE} \left(\bar{F}_f^{eT} \cdot \frac{1}{h_{sch} + \mathbf{x}^e} \cdot f_{Einheit}^e \cdot F_f^e \right) = \sigma_{sch}^{cgrenz}$$

Im Folgenden wird nun zwischen den Elementen, deren lokale Randbedingungen aktiv oder nicht aktiv sind, unterschieden. Elementen ohne aktive lokale Randbedingungen sind Elemente, deren Spannungen die lokale Grenzvergleichsspannung nicht überschreiten, oder deren Dicke \mathbf{x}^e im zulässigen Bereich zwischen oberer x^u und unterer Schranke x^l liegt. Diese Elemente werden dem Bereich R_d zugeordnet. Für sie gilt Gleichung (6-41a) mit $\lambda^e = \beta^e = \gamma^e = 0$:

$$(6-52) \quad A^e + v \left(\bar{F}_f^{eT} \cdot \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot f_{Einheit}^e \cdot F_f^e \right) = 0, \quad e = 1, \dots, NE \quad e \in R_d$$

Durch Umformen erhält man:

$$(6-53) \quad \mathbf{x}_d^e + h_{sch} = \sqrt{\frac{\bar{F}_f^{eT} \cdot f_{Einheit}^e \cdot F_f^e \cdot v}{A^e}}$$

Alle anderen Elemente $e \notin R_d$ haben mindestens eine aktive lokale Randbedingung. Ihr aktualisierter Wert \mathbf{x}^e berechnet sich entsprechend aus der maßgebenden lokalen Randbedingung, siehe unten. Der Multiplikator v kann somit mit (6-52) und (6-53) und den aktualisierten \mathbf{x}^e -Werten der Elemente mit aktiven lokalen Randbedingungen $e \notin R_d$, wie folgt, bestimmt werden:

$$(6-54) \quad v = \frac{\sum_{\substack{e=1 \\ e \in R_d}}^{NE} \sqrt{\bar{F}_f^{eT} \cdot f_{Einheit}^e \cdot F_f^e \cdot A^e}}{\sigma_{sch}^{c grenz} - \sum_{\substack{e=1 \\ e \notin R_d}}^{NE} \left(\frac{1}{\mathbf{x}^e + h_{sch}} \cdot \bar{F}_f^{eT} \cdot f_{Einheit}^e \cdot F_f^e \right)}$$

Hieraus wiederum bestimmen sich mit (6-53) die aktualisierten Werte für \mathbf{x}_d^e für alle $e \in R_d$.

Die Elemente mit aktiven Randbedingungen müssen jeweils nach Art der aktiven Randbedingung unterschieden werden. Diejenigen, deren lokale Spannungsrandbedingung aktiv ist, werden dem Bereich R_σ zugeordnet. Für sie gilt $\lambda_{ve} \neq 0$ und somit entsprechend Gleichung (6-41c):

$$(6-55) \quad (F_f^{eT} \cdot S^e) \cdot v \cdot (S^{eT} \cdot F_f^e) - (\sigma_v^{e grenz})^2 = 0$$

Durch Umformen und Auflösen nach \mathbf{x}^e resultiert daraus:

$$(6-56) \quad \mathbf{x}_\sigma^e = \frac{\sqrt{F_f^{eT} \cdot E \cdot B_t \cdot \phi^{eT} \cdot f_{Einheit}^e \cdot v \cdot (E \cdot B_t \cdot \phi^{eT} \cdot f_{Einheit}^e)^T \cdot F_f^e}}{\sigma_v^{e grenz}} - h_{sch}$$

Diejenigen Elemente, für die die obere bzw. untere Grenze von \mathbf{x}^e als Randbedingung aktiv wird, werden den Bereichen R_u und R_l zugeordnet und mit folgender Regel aktualisiert:

$$(6-57) \quad \mathbf{x}_u^e = \mathbf{x}^{eu} \text{ bzw. } \mathbf{x}_l^e = \mathbf{x}^{el}$$

Da nach jeder Aktualisierung der \mathbf{x}^e -Werte andere lokale Randbedingungen aktiv werden können, und sich somit R_d ändern kann, ist die Berechnung iterativ so lange durchzuführen, bis $R_{d,n} = R_{d,n+1}$ gilt.

Nach der Aktualisierung der \mathbf{x}^e -Werte können der adjungierte Lastvektor bzw. die Anfangsverschiebungen des adjungierten Systems neu bestimmt werden. Hierfür werden für die Elemente mit aktiver lokaler Spannungsrandbedingung $e \in R_\sigma$, die Lagrange-Multiplikatoren λ_e mit Gleichung (6-41a) bestimmt:

$$(6-58) \quad \lambda_e = \frac{\left[A^e - \nu \left(\bar{F}_f^{eT} \cdot \frac{1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot f_{Einheit}^e \cdot F_f^e \right) \right] \cdot (h_{sch} + \mathbf{x}^e)^3}{2 \cdot F_f^{eT} \cdot E \cdot B_t \cdot \phi_e^T \cdot f_{Einheit}^e \cdot V \cdot \left(E \cdot B_t \cdot \phi_e^T \cdot f_{Einheit}^e \right)^T \cdot F_f^e}$$

Für die Anfangsverschiebungen des adjungierten Systems gilt dann Gleichung (6-43b) mit:

$$(6-59) \quad \bar{u}_{fi}^e = \frac{1}{\nu} \cdot \lambda_e \cdot \left[2 \cdot F_f^{eT} \cdot S^e \cdot V \cdot S^{eT} \right]$$

Der hiermit abgeschlossenen Aktualisierungsphase schließt sich wiederum eine Analysephase unter Berücksichtigung des neuen virtuellen Lastsystems an, usw. Die Iteration wird so lange durchgeführt, bis das gewünschte Optimierungsziel erreicht ist, oder sich die Werte zwischen den einzelnen Iterationsschritten nicht mehr signifikant ändern.

In Abb. 6-3 ist zur Erläuterung das Ablaufschema der ganzen Topologieoptimierung aufgezeigt.

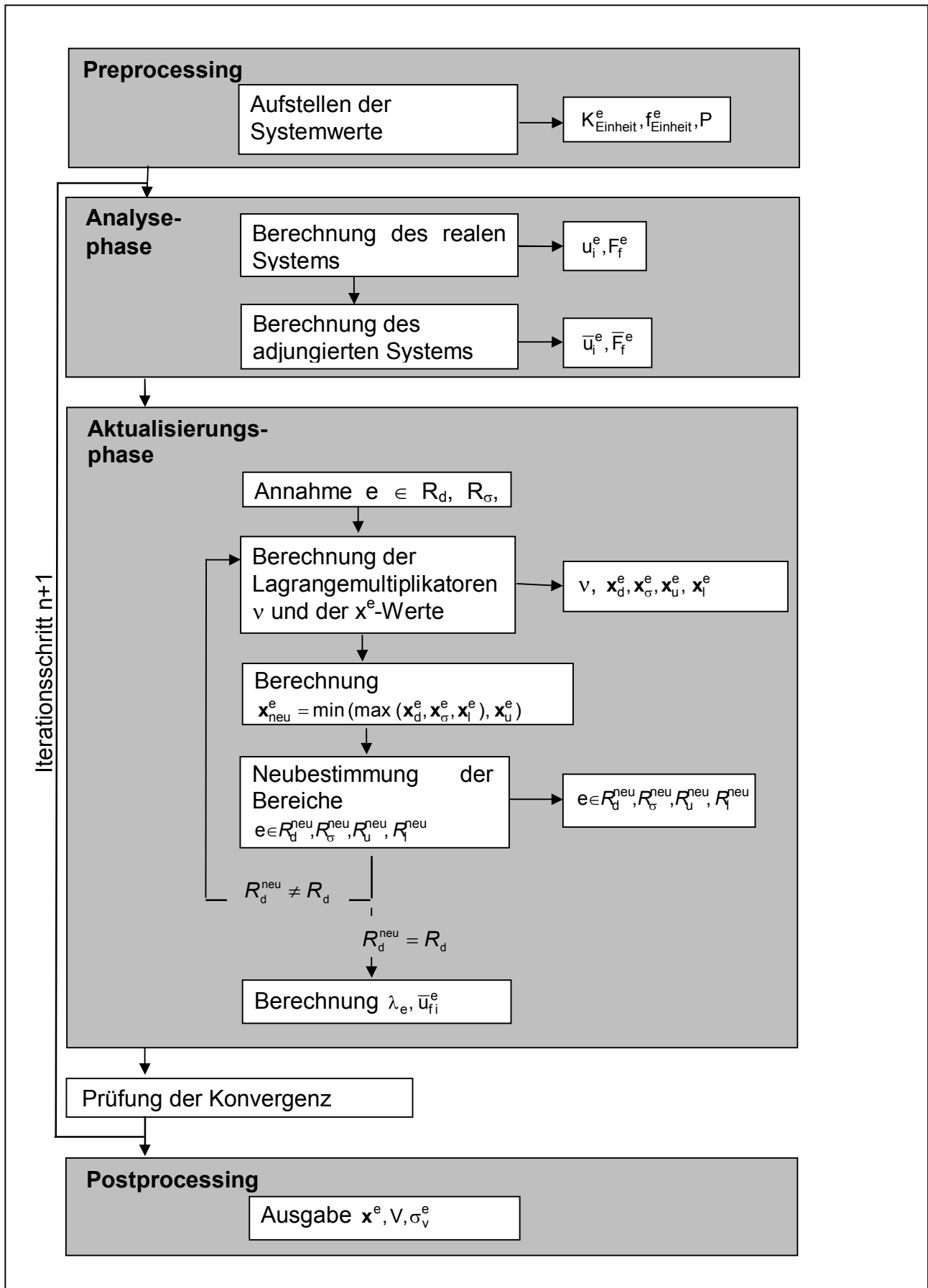


Abb. 6-3: Ablauf der Topologieoptimierung

Ansatz mit mehreren globalen Spannungsrandbedingungen

Der auf den vorherigen Seiten ausführlich dargestellte Ablauf der Berechnung basiert auf dem Ansatz einer globalen aktiven Spannungsrandbedingung. Bei Belastungszuständen, in denen in mehreren Bereichen die auftretenden Spannungsspitzen den geforderten Grenzwert überschreiten, muss der oben beschriebene Ansatz um weitere globale Spannungsrandbedingungen erweitert werden. Das prinzipielle Vorgehen hierfür wird ebenso von Zhou in [99] beschrieben und wird auf das hier vorliegende Problem übertragen. Mathematisch stellt sich das Problem mit mehreren globalen Spannungsrandbedingungen, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiere} \\
 & V(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{NE} A^e \cdot \mathbf{x}^e \\
 (6-60) \quad & \text{unter Einhaltung der Randbedingungen} \\
 & \sigma_{sch,k}^c(\mathbf{x}^c) - \sigma_{sch,k}^{c\text{ grenz}} \leq 0 \quad k = 1, \dots, ND \\
 & \sigma_{sch}^e(\mathbf{x}^e) - \sigma_{sch}^{e\text{ grenz}} \leq 0, \quad e = 1, \dots, NE \\
 & \mathbf{x}^{eL} \leq \mathbf{x}^e \leq \mathbf{x}^{eU}, \quad e = 1, \dots, NE
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $\sigma_{sch,k}^c(\mathbf{x})$ die Spannung, die der k-ten globalen Randbedingung zuzuordnen ist.

Die Ermittlung der Optimalitätskriterien und somit die Regel für die Aktualisierung der Parameter erfolgt analog zu dem oben beschriebenen Vorgehen für eine globale Randbedingung mit dem Kraftgrößenverfahren. Das direkte Auflösen der den Gleichungen (6-51) und (6-52) entsprechenden Gleichungen nach v und \mathbf{x}^e in der Aktualisierungsphase ist für mehrere aktive globale Randbedingungen nicht mehr möglich. In diesem Fall müssen die Gleichungen mit einem iterativen Verfahren, wie zum Beispiel dem Newton-Verfahren gelöst werden. Im Anhang B sind hierfür die entsprechenden verwendeten Formeln zusammengestellt. Ansonsten entspricht der Ablauf der Berechnung dem mit einer globalen Randbedingung und wird deswegen an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt.

Allgemeines zur Berechnung

Das hier vorgestellte Optimalitätskriterienverfahren ist sehr effektiv und robust. Maßgebend für ein sinnvolles Resultat ist jedoch die richtige Wahl der globalisierten Spannungsrandbedingungen. Bei den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Systemen erweist es sich als ziel führend, für jeden lokal begrenzten hoch beanspruchten Bereich mindestens eine Spannungsrandbedingung zu globalisieren. Hierfür werden jeweils die im passiven System am höchsten beanspruchten Elemente des jeweiligen Bereiches gewählt. Bei größeren sich weit erstreckenden hoch beanspruchten Bereichen ist, wie Vergleichsrechnungen zeigen, die Wahl mehrerer globalisierter Spannungsrandbedingungen für diese Bereiche zu empfehlen. Wegen der starken gegenseitigen Beeinflussung erschweren jedoch viele geometrisch nahe beieinander liegende globalisierte Spannungsrandbedingungen die Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren, so dass die Anzahl dieser Randbedingungen trotz allem begrenzt bleiben sollte.

Aufgrund dieser starken gegenseitiger Beeinflussung der Elementspannungen neigt das Verfahren zu einer langsamen, zum Teil instabilen, Iteration. Diese kann durch eine Schrittweitenbegrenzung sehr effektiv stabilisiert werden [99], welche dementsprechend in den hier vorliegenden Berechnungen verwendet wird.

Elemente, bei denen zwei lokale Randbedingungen gleichzeitig aktiv werden, müssen besonders beachtet werden. Hierzu, werden in der Literatur mehrere Lösungsvorschläge angeboten: Zhou [99] schlägt vor, die Spannungsrandbedingung eines solchen Elementes zu globalisieren, wogegen Birker [8] zur Vermeidung einer zu großen Anzahl globalisierter Randbedingungen eine Ersatzfunktion vorschlägt, die beide gleichzeitig aktiv werdenden Randbedingungen vereinigt.

Bei der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Problemstellung kann dieser Fall bei gleichzeitig aktiver lokaler Spannungsrandbedingung und Erreichen der oberen Grenze für die Dicke der lokalen Verstärkung auftreten. Die globalisierten Spannungsrandbedingungen haben einen sehr starken Einfluss auf ihre nahe Umgebung. Somit kann vereinfachend für Elemente nahe der Elemente mit globalisierter Spannungsrandbedingung auf eine Globalisierung der lokalen Randbedingung verzichtet werden und die Dickenbegrenzung als maßgebend angenommen werden. Bei allen in dieser Arbeit untersuchten Beispielen treten Elemente mit zwei gleichzeitig aktiven Randbedingungen nur nahe der globalisierten Randbedingungen auf. Deswegen wird dieses Vorgehen gewählt.

Das von Bendsøe eingeführte SIMP-Material (*Solid Isotropic Material with Penalization*), mit dem Topologieoptimierungs- bzw. Layoutprobleme häufig direkt in Verbindung gebracht werden, könnte in das Verfahren implementiert werden. Das SIMP-Material, das durch eine Bestrafung der Zwischenwerte eine Entwicklung der Entwurfsvariablen hin zu 0- und 1- Werten steuert, ermöglicht die Optimierung abstufungsfreier Geometrien. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird auf eine Implementierung dieses Ansatzes verzichtet, da er die Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren zusätzlich erschwert und somit zu deutlich längeren Rechenzeiten führt. Zudem repräsentiert die ermittelte Dicke der lokalen nichtaktivierbaren Verstärkungen die Höhe der Aktivierung der integrierten Dehnungsaktuatoren. Diese kann problemlos abgestuft werden, so dass eine Erfordernis nach 0- und 1- Werten nicht unbedingt gegeben ist.

Vergleich des vorgestellten Verfahrens mit einem intuitiven Verfahren

Zur Überprüfung der Effektivität des vorgestellten Verfahrens zu Ermittlung der lokalen nichtaktivierbaren Verstärkungen wird es anhand des Beispiels der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt (siehe Kapitel 3 und 4 bzw. unten) mit einem intuitiven Verfahren verglichen. Für den Vergleich wird das in [4] von Baumgartner et al. vorgestellte *SKO-Verfahren* mit folgenden Ansätzen verwendet:

- Dicke $h_{\text{pfl}}=h_{\text{sch}}=10$ mm
- E-Modul E_{pfl} variabel zwischen $E_{\text{min}}=1$ und $E_{\text{max}}=100.000$ N/mm²
- Referenzspannung $\sigma_{\text{ref}}=1,05 \cdot \sigma_{\infty}$
- Belastung $p_x=100$ N/mm², $p_y=0$ N/mm²

Nach Ende der Iteration ergeben sich die in Abb. 6-4 dargestellte Verteilung des E-Moduls und die maximal auftretende Vergleichsspannung mit $\sigma_v=1,9 \cdot \sigma_\infty$ in der 0° -Achse am Ausschnittsrand. Die Umrechnung der E-Modul-Verteilung in eine entsprechende Dicke der lokalen Verstärkung ergibt für dieses Beispiel ein Verstärkungsvolumen von $V_{SKO}=4,13 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$

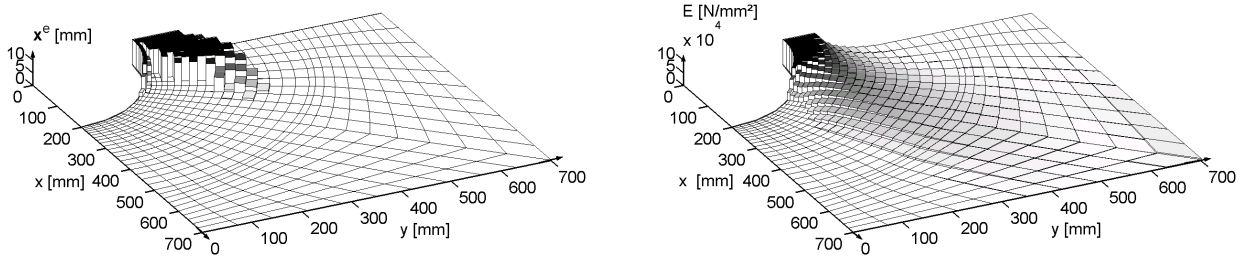


Abb. 6-4: Verlauf der Dicke x^e der lokalen Verstärkungen aus DCOC-Verfahren (rechts) und des E-Moduls aus SKO-Verfahren (links) für $\sigma_{v \max} = 190 \text{ N/mm}^2$, $p_x = 100 \text{ N/mm}^2$, $p_y = 0$

Das Volumen der lokalen nichtaktivierbaren Verstärkung, das mit dem DCOC-Verfahren ermittelt wurde, beträgt bei gleicher auftretender maximaler Vergleichsspannung und einem dem E-Modul E_{\max} entsprechendem x^u einen um 65 % kleineren Wert mit $V_{DCOC}=1,44 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$.

Die bereits in Kapitel 3.2 genannten Vorteile der auf generalisierten Optimalitätskriterien basierten Verfahren treten hier sehr deutlich in Erscheinung: Durch den globalen Ansatz der Randbedingungen ist beim DCOC-Verfahren eine Umverteilung der Beanspruchungen weg vom Ausschnittsrand durch die lokalen Verstärkungen möglich. Der rein lokale und intuitive Ansatz des SKO-Verfahrens führt allein zu einer Versteifung des Systems, die nicht zwingend mit einer Reduktion der maximal auftretenden Spannungen zusammenfällt. Somit führt die explizite Formulierung des Volumens der lokalen Verstärkung als Zielfunktion in diesem Fall zu einem deutlich besseren Ergebnis als die intuitive Annahme des SKO-Verfahrens.

Nachteilig ist weiterhin, dass die angesetzte Referenzspannung, ab der im SKO-Verfahren „Wachstum“ einsetzt nicht direkt in Verbindung mit der zu erreichenden Zielspannung steht. Bei der Anwendung des SKO-Verfahrens muss dementsprechend iterativ vorgegangen werden. Das SKO-Verfahren weist jedoch Vorteile hinsichtlich seiner Einfachheit und der schnellen Iterationsgeschwindigkeit auf. So kann seine Anwendung in Fällen, in denen die Optimalitätskriterien nur noch aufwendig zu ermitteln sind, sinnvoll sein.

Zusammenfassung

Das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren dient zur Ermittlung der minimalen erforderlichen nichtaktivierbaren Verstärkungen, die für jeden Lastfall einzeln ermittelt werden. Der Übergang zum adaptiven System, der die Wahl der Parameter und die Zonierung der Aktuatoren beinhaltet, erfolgt im nächsten Abschnitt.

6.2.2 Wahl der Parameter und Unterteilung der aktivierbaren lokalen Verstärkungen

Aus den mit der Topologieoptimierung ermittelten nicht aktivierbaren lokalen Verstärkungen für die jeweiligen Lastfälle muss im nächsten Schritt die Form, Lage, die Ausrichtung und die Unterteilung der integrierten Dehnungsaktuatoren gewählt werden.

Hierfür werden zum einen die Form und Lage der lokalen nichtaktivierbaren Verstärkungen betrachtet. Als Lage der Aktuatoren werden alle Bereiche ausgewählt, bei denen die Dicke der lokalen nichtaktivierbaren Verstärkung x^e in mindestens einem der untersuchten Lastfälle einen Grenzwert h_{grenz} überschreitet. Zum anderen werden die Spannungsverläufe der Grundscheibe in den passiven verstärkten Systemen für die jeweiligen Lastfälle analysiert.

Die Analyse des Systemverhaltens zeigt auf, dass hierfür folgende Kriterien zu berücksichtigen sind:

- Ausrichtung der maßgebenden Hauptspannungsrichtung
- Verhältnis der beiden Hauptspannungen
- Vorzeichen der maßgebenden Hauptspannung
- Veränderung der Hauptspannungsrichtung zwischen den jeweiligen Lastfällen

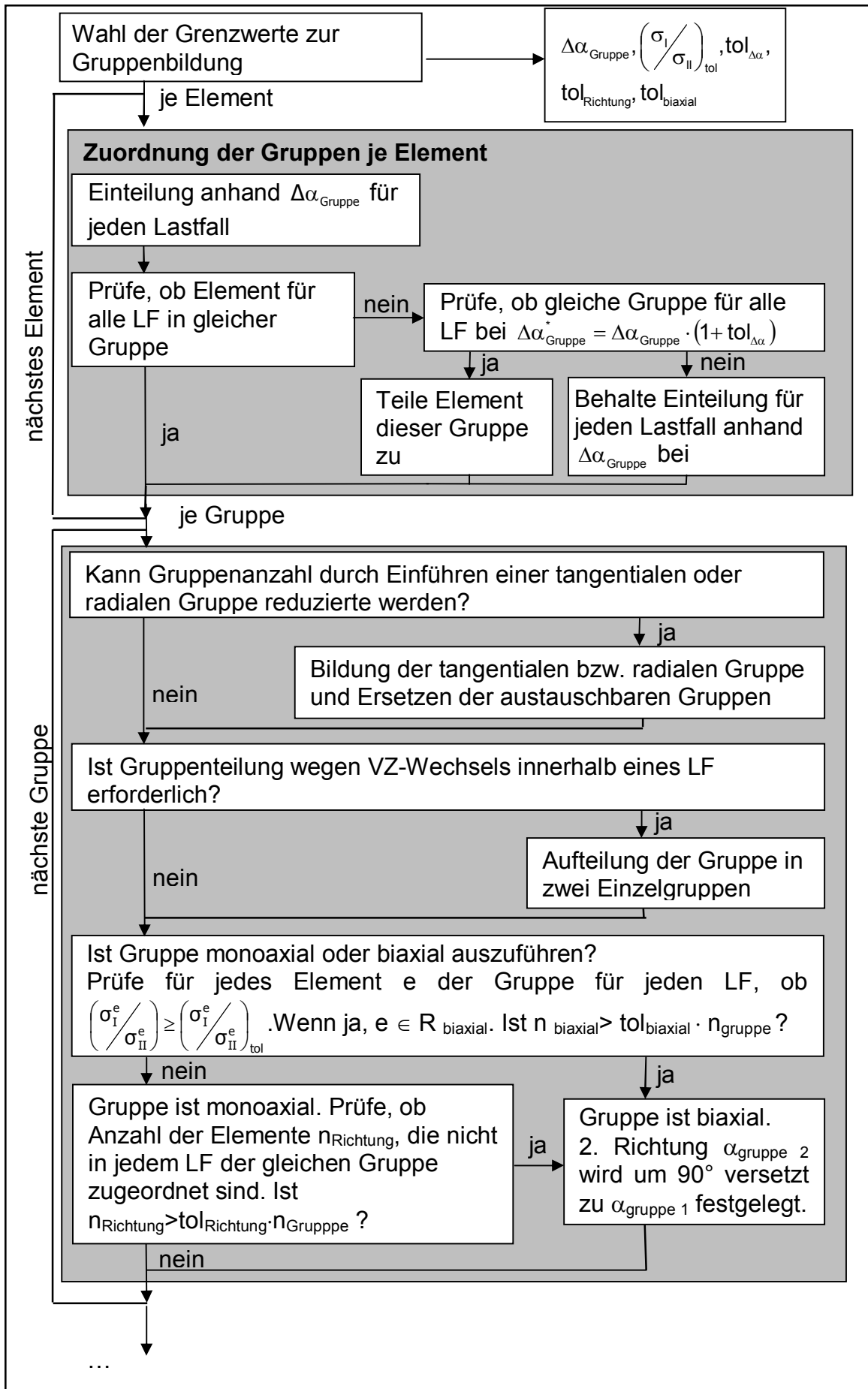
Auf diesen Kriterien baut das im Folgenden beschriebene automatisierte Verfahren auf, das eine Zonierung und Ausrichtung der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren ermöglicht. Hiermit kann zum einen für Standard- bzw. selbst eingestellte Parameter ein Vorschlag für die Zonierung ermittelt werden. Zum anderen können auch iterativ die Parameter und die Zonierungen für eine gewünschte Anzahl an Unterteilungen ermittelt werden. Eine schematische Übersicht des Zonierungsverfahrens ist abschließend in Abb. 6-5 gegeben:

Die Richtung der maßgebenden Hauptspannungsrichtung α_I bzw. α_{II} legt die Ausrichtung der Aktuatoren $\alpha_{\text{aktuator}} = \alpha_I$ bzw. α_{II} fest. Deswegen werden im ersten Schritt die lokalen Verstärkungen gemäß ihren Ausrichtungen in Gruppen gleicher Ausrichtung unterteilt. Hierbei werden alle Elemente, deren Ausrichtung α^e innerhalb eines tolerierten Winkelspektrums $\Delta\alpha$ liegt zu jeweils einer Zone zusammengefasst, deren Ausrichtung α_{zone} sich aus dem Mittelwert der Elementausrichtungen α^e ergibt. Zur Vermeidung von Einzelelementen, die zunächst keiner Zone mit anderen Elementen zugeordnet werden können, wird zusätzlich überprüft, ob solche Elemente bei einer prozentualen Erweiterung des tolerierten Winkelspektrums um $\text{tol}_{\Delta\alpha}$ in eine der bereits gebildeten Zonen fallen.

Überschreitet in einem Bereich das Verhältnis der Hauptspannungen σ_I/σ_{II} einen bestimmten Grenzwert $\sigma_I/\sigma_{II \text{ Tol}}$, so sind in dieser Zone die Aktuatoren durch eine um 90° gegenseitig verdrehte Ausrichtung biaxial auszuführen. In den als biaxial auszuführenden Bereichen wird dabei jeweils die Dicke der Einzelaktuatoren halbiert, so dass die äquivalente Gesamtdicke auch in den biaxialen Zonen nicht die gewählte Aktuartordicke h_{aktuator} übersteigt.

Im nächsten Schritt wird überprüft, ob eine weitere Zonierung aufgrund der folgenden Kriterien vorzunehmen ist: Wechselt innerhalb einer ausgewählten Zone in einem Lastfall das Vorzeichen der maßgebenden Spannung, so ist diese Zone noch einmal zu unterteilen. Mit der über jede Zone konstant angesetzten Aktivierung können passive Spannungen mit unterschiedlichen Vorzeichen nicht adaptiert werden.

Das gleiche gilt für Zonen, in denen sich die Hauptspannungsrichtung von einem Lastfall zu einem anderen signifikant ändert. Treten solche Bereiche innerhalb des betrachteten Systems auf, so sind in dieser Zone die Aktuatoren wiederum durch eine um 90° gegenseitig verdrehte Ausrichtung biaxial auszuführen. Somit kann die resultierende Wirkungsrichtung der sich überlagernden Aktivierungen auf die von einem Lastfall zum anderen wechselnden Beanspruchungsrichtung reagieren.



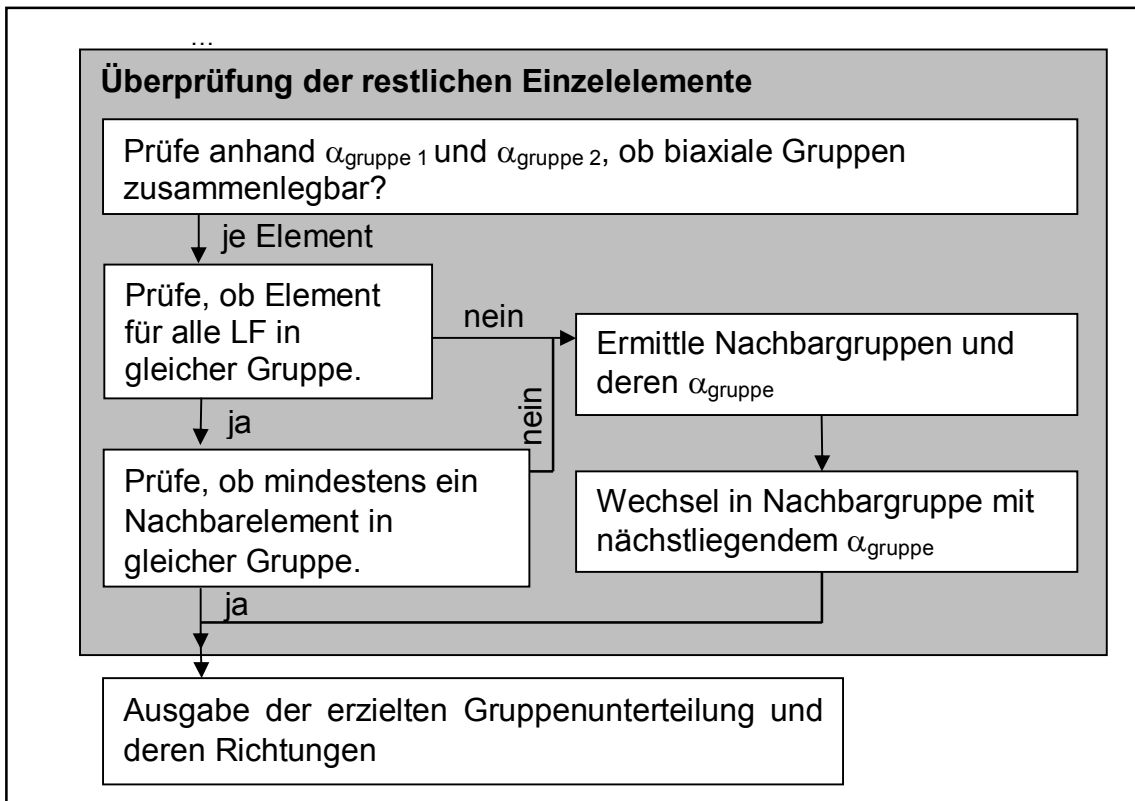


Abb. 6-5: Schematischer Ablauf der Unterteilung der lokalen Verstärkungen

Bei einer iterativen Berechnung der Parameter für eine gewünschte Zahl der Zonierungen passt das automatisierte Verfahren das tolerierte Winkelspektrum $\Delta\alpha$ der Zonierungen so lange an, bis die gewünschte Gruppenzahl erreicht ist. Die anderen Parameter werden, wie zu Beginn der Iteration gewählt, beibehalten.

6.2.3 Bestimmung der Höhe der Aktivierung

Die optimale Höhe der induzierten Dehnungen der einzelnen lokalen Verstärkungen wird im Anschluss an die Zonierung und Ausrichtung der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren ermittelt. Hierzu muss das folgende Optimierungsproblem gelöst werden:

Suche eine möglichst geringe induzierte Dehnungen je lokaler Verstärkung, so dass die maximal auftretende adaptive Spannung innerhalb der Grundscheibe minimal wird.

Hierbei stellen die induzierten Dehnungen $\delta_{\text{aktiv, zone}}$ der einzelnen lokalen Verstärkungen den Entwurfsvektor \mathbf{x} und die maximal auftretende adaptive Spannungen in Kombination mit der Höhe der Aktivierung die Zielfunktion dar. Als Maximalwert der adaptiven Spannungen wird der Maximalwert der von-Mises-Spannungen gewählt, da in diesem Fall die Ermittlung einer maßgebenden Spannungsrichtung entfallen kann. Abhängig von der Problemstellung können hier jedoch auch andere Werte eingesetzt werden.

Unnötig überhöhte induzierte Dehnungen werden durch eine Berücksichtigung der Aktivierungswerte in der Zielfunktion mit einem Wichtungsfaktor c_{wichtung} vermieden. Dieser Wichtungsfaktor c_{wichtung} wird abhängig von der Dimension der Spannungen und der

induzierten Dehnungen dabei so gewählt, dass die Reduktion des Maximalwerts der Spannungen weiterhin das dominierende Ziel der Optimierung bleibt.

Das Problem kann also mathematisch mit der folgenden Definition beschrieben werden:

$$\text{Minimiere} \quad \max(\sigma_{\text{sch,v}}^{\text{adapt}}) + c_{\text{Wichtung}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{\text{zonen}}} \delta_{\text{aktiv}}^i$$

$$\text{mit} \quad \sigma_{\text{sch}}^{\text{adapt}} = \sigma_{\text{sch}}^{\text{passiv}} + \sigma_{\text{sch}}^{\text{aktiv}}(\delta_{\text{aktiv}}^i)$$

unter Einhaltung der Ungleichheitsnebenbedingungen

$$(6-61) \quad \sigma_{\text{aktuator}}^{\text{adapt}} \leq \sigma_{\text{aktuator,zul}}$$

$$\text{mit} \quad \sigma_{\text{aktuator}}^{\text{adapt}} = \sigma_{\text{aktuator}}^{\text{passiv}} + \sigma_{\text{aktuator}}^{\text{aktiv}}(\delta_{\text{aktiv}}^i)$$

und der Schranken

$$-\delta_{\text{aktiv,zul}} \leq \delta_{\text{aktiv}}^i \leq \delta_{\text{aktiv,zul}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n_{\text{zonen}}$$

Hierbei sind $\sigma_{\text{aktuator,zul}}$ und $\delta_{\text{aktiv,zul}}$ die zulässigen Spannungen bzw. induzierten Dehnungen der Aktuatoren, die abhängig von der gewählten Ausführung der Aktuatoren festzulegen sind. Falls für die Aktuatoren keine solchen Grenzwerte gegeben sind, vereinfacht sich die Optimierungsaufgabe zu einem unbeschränkten Problem, das aufgrund seiner Unstetigkeit mit einer reinen Suchmethode oder einem heuristischen Verfahren, wie dem Monte-Carlo-Verfahren, effektiv gelöst werden kann.

Ansonsten wird zur Lösung des oben dargestellten beschränkten Optimierungsproblems, wie bei der Berechnung der dehnungsaktivierten Scheibe die in die OPTIMIZATION-TOOLBOX von Matlab implementierte Funktion *fmincon* verwendet. Zur Reduktion der Rechenzeiten werden hierbei ebenso vorab die Sensitivitäten der aktivierten Scheiben- und Aktuatorspannungen infolge von Einheitsaktivierungszuständen bestimmt. Mit diesen Sensitivitäten kann der Zusammenhang zwischen den aktivierten Spannungen und den Entwurfsvariablen δ_{aktiv}^i linear dargestellt werden (siehe (5-17)). Somit kann das Lösen der Gleichgewichtsbedingungen in den einzelnen Iterationsschritten entfallen.

6.2.4 Zusammenfassung

Mit der Berechnung der induzierten Dehnungen für jeden Belastungszustand schließt die Berechnung der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren ab. Das unten dargestellte Ablaufschema gibt abschließend einen Überblick über den Gesamtablauf der Berechnung.

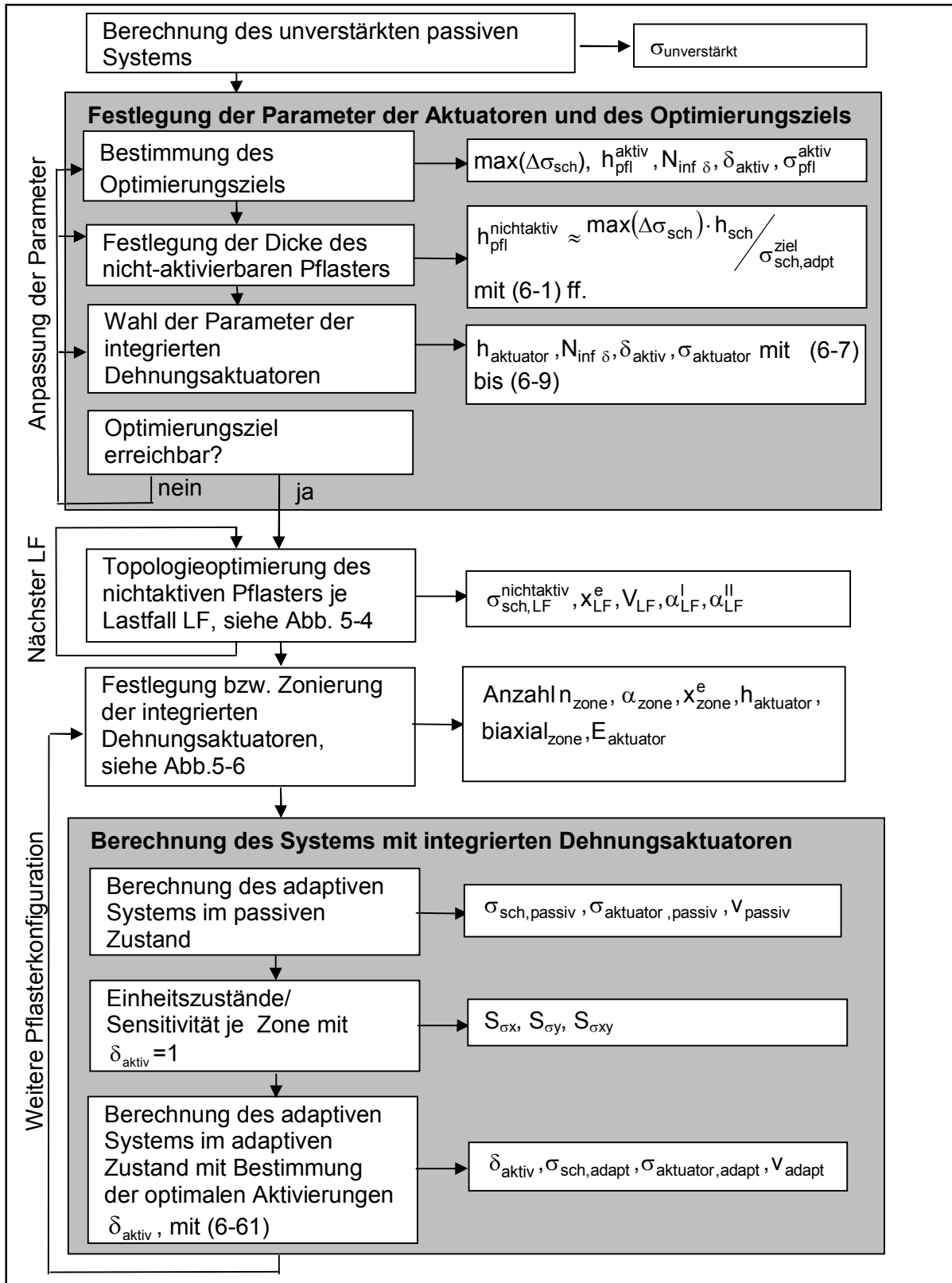


Abb. 6-6: Ablaufschema Ermittlung der lokalen Verstärkungen

Die Vielzahl der Entwurfsvariablen des anfangs gestellten Problems – suche die ideale Lage, Größe, Materialkennwerte und Aktivierung integrierter diskreter Dehnungsaktuatoren zur Reduktion der Spannungen in einer Grundscheibe – erfordert eine Vereinfachung des Problems durch eine schrittweise Lösung.

Falls vor der Berechnung bereits das Material der diskreten Dehnungsaktuatoren festgelegt wurde, können unter Berücksichtigung des (6-9) gegebenen Zusammenhangs vor der Optimierung die hierfür entscheidenden Parameter, wie die maximale Dicke der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen und die äquivalente Dicke der Aktuatoren bestimmt werden. Somit kann ein aufwendiges iteratives Vorgehen vermieden werden.

Andererseits ermöglicht das vorgestellte Verfahren auch mit einer Parameterstudie Optimierungspotentiale zu ermitteln, ohne sich vorab auf bestimmte Materialien festzulegen.

6.3 Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren

Im Folgenden wird der oben beschriebene Ablauf zur Ermittlung der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren anhand des in Kapitel 3 und 4 bereits vorgestellten Beispiels der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt mit den in Abb. 6-7 gegebenen Parametern diskutiert.

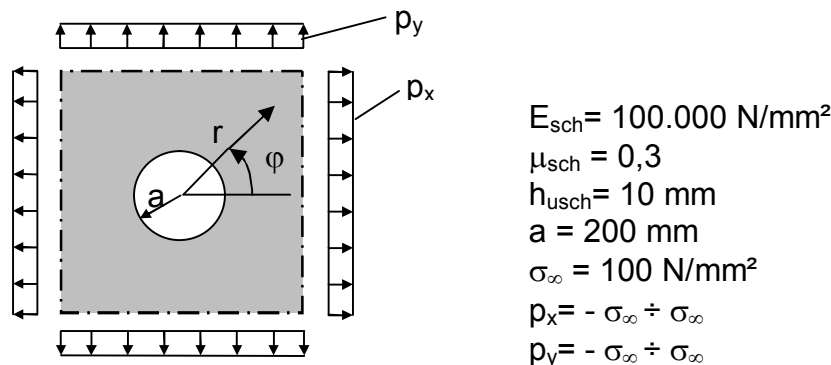


Abb. 6-7: Unendlich ausgedehnte Scheibe mit Kreisrundem Ausschnitt

Die Berechnung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie jeweils an einer Viertelscheibe.

Ermittlung der maximalen Dicken der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen

Für die Ermittlung der Lage der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen ist anhand des in (6-9) gegebenen Zusammenhangs zunächst die maximal anzusetzende Dicke der lokalen Verstärkung $h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}} = x^u$ abzuschätzen. Hierfür wird der Spannungszustand des nicht verstärkten Systems im maßgebenden Lastfall betrachtet. Bei der untersuchten Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt tritt dieser unter der Zug-Druckbelastung, $p_x=100 \text{ N/mm}^2$ und $p_y=-100 \text{ N/mm}^2$, ein.

Der in Abb. 6-8 dargestellte Verlauf der für diese Untersuchung maßgebenden Vergleichsspannungen zeigt, dass die Grundvergleichsspannung $\sigma_{V,\infty} = 173 \text{ N/mm}^2$ zum einen im Bereich der maximalen Beanspruchung mit $\sigma_{V, \text{unverstärkt, Max}} = 400 \text{ N/mm}^2$ am Ausschnittsrand in der 0° - und 90° -Achse überschritten wird. Zum anderen treten auch weiter vom Ausschnittsrand entfernt im Bereich der 45° -Achse mit $\sigma_{V, \text{unverstärkt}} \approx 220 \text{ N/mm}^2$ Werte größer der Grundvergleichsspannung auf.

Die maximal auftretende Beanspruchung $\sigma_{V, \text{unverstärkt, Max}}$ kann im ersten Ansatz für eine Auslegung der Parameter als Belastung $K = \sigma_{V, \text{unverstärkt, Max}} \cdot h_{\text{sch}}$ in den Gleichungen (6-7) und (6-8) angesetzt werden. Dabei wird die mögliche Umverteilung der Kräfte bei Aufbringen der lokalen Verstärkungen infolge der statischen Unbestimmtheit des Systems zunächst vernachlässigt.

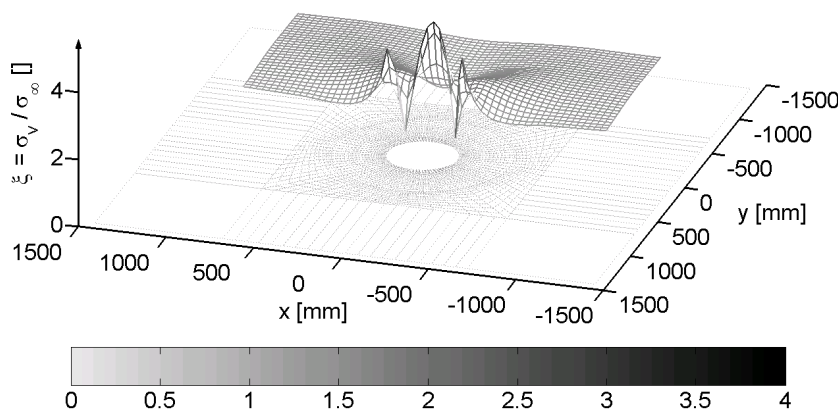


Abb. 6-8: Konzentrationskoeffizient der Vergleichsspannungen $\xi = \sigma_V / \sigma_\infty$ mit $\sigma_\infty = 100 \text{ N/mm}^2$ des passiven Systems bei Belastung $p_x = \sigma_\infty$ und $p_y = -\sigma_\infty$

Soll im verstärkten Zustand die Spannung der Grundscheibe um 50 % auf $\sigma_{\text{sch,adapt}}^{\text{ziel}} = 200 \text{ N/mm}^2$ reduziert werden, so muss die Dicke der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen $h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}$ im Bereich von

$$(6-62) \quad h = \frac{\Delta\sigma_{\text{sch}} \cdot h_{\text{sch}}}{\sigma_{\text{sch,adapt}}^{\text{ziel}}} \quad \text{mit} \quad \Delta\sigma_{\text{sch}} = \sigma_{\text{unverstärkt}} - \sigma_{\text{sch,adapt}}^{\text{ziel}}$$

gewählt werden. Bei einer Scheibendicke von $h_{\text{sch}} = 10 \text{ mm}$ ergibt sich also die Größenordnung $h = 10 \text{ mm}$. Dieser Wert kann auf Grund der möglichen Umverteilungen der Beanspruchungen jedoch nur als Richtwert betrachtet werden.

Entscheidender für die Wahl der maximalen Dicke der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen sind das Verhältnis der Dicken der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren und nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen und die Materialparameter E_{aktuator} , $\delta_{\text{aktiv, zul}}$ und $\sigma_{\text{aktuator, zul}}$ der Dehnungsaktuatoren. Um das in (6-62) ermittelte Optimierungspotential voll ausschöpfen zu können, sind die äquivalente Dicke der integrierten Dehnungsaktuatoren und die maximale Höhe der Aktivierung so zu wählen, dass $\Delta\sigma_{\text{sch}}$ erreicht werden kann.

Bei einer äquivalenten Dicke der integrierten Dehnungsaktuatoren $h_{\text{aktuator}} = 1 \text{ mm}$ und einer maximalen Höhe der Aktivierung von $\delta_{\text{aktiv}} = 2\%$ ergibt sich, zum Beispiel, mit (6-3) und (6-7) bei gleichem E-Modul für Scheibe und integrierten Dehnungsaktuator $E_{\text{sch}} = E_{\text{aktuator}} = 100.000 \text{ N/mm}^2$ eine maximale Reduktion der Spannungen in der Scheibe im Bereich von

$$(6-63) \quad \max(\Delta\sigma_{\text{sch}}) = \frac{N_{\text{inf } \delta}}{b \cdot h_{\text{sch}}} \approx -180 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{mit } N_{\text{inf } \delta} = \frac{\delta_{\text{aktiv}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}} \cdot b \cdot h_{\text{sch}} \cdot h_{\text{aktuator}}}{E_{\text{sch}} \cdot h_{\text{sch}} + E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{aktuator}}} \approx -182 \cdot \text{N/mm} \cdot b$$

Dieser Größenbereich deckt sich ungefähr mit dem oben als Optimierungspotential ermittelten Wert bei einer Dicke des nichtaktivierbaren Pflasters $h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}} = 10 \text{ mm}$. Mit (6-9) und diesen Werten können anschließend die maximal auftretenden Spannungen in den integrierten Dehnungsaktuatoren abgeschätzt werden:

$$(6-64) \quad \sigma_{\text{aktuator}}^{\text{adapt}} = \frac{\delta_{\text{aktiv}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}}{E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{aktuator}} - E_{\text{sch}} \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}} \approx 2220 \text{ N/mm}^2$$

Ist diese Spannung nicht von dem Verstärkungsmaterial aufnehmbar oder kann nur eine geringere Dehnung aktiviert werden, so müssen die Werte $h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}$, h_{aktuator} und E_{aktuator} oder der gewünschte Optimierungsgrad der Struktur entsprechend den oben genannten Zusammenhängen angepasst werden.

Im Weiteren wird zunächst von integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren ausgegangen, die eine Aktivierung im Bereich $\delta_{\text{aktiv, zul}} = 2\%$ und zulässige Spannungen von $\sigma_{\text{aktuator, zul}} \approx 20 \cdot \sigma_{\infty}$ aufnehmen können.

Lage der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen

Gemäß der oben durchgeführten Abschätzung kann in der Topologieoptimierung die Dicke der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen mit $x^u = 10$ mm begrenzt werden. Ermittelt man nun für die Belastung $p_x = -p_y = \sigma_\infty$ die minimal erforderliche lokale nichtaktivierbare Verstärkung, so ergeben sich abhängig von der gewünschten Reduktion der maximalen Vergleichsspannung die in Abb. 6-9 dargestellten lokalen Verstärkungen:

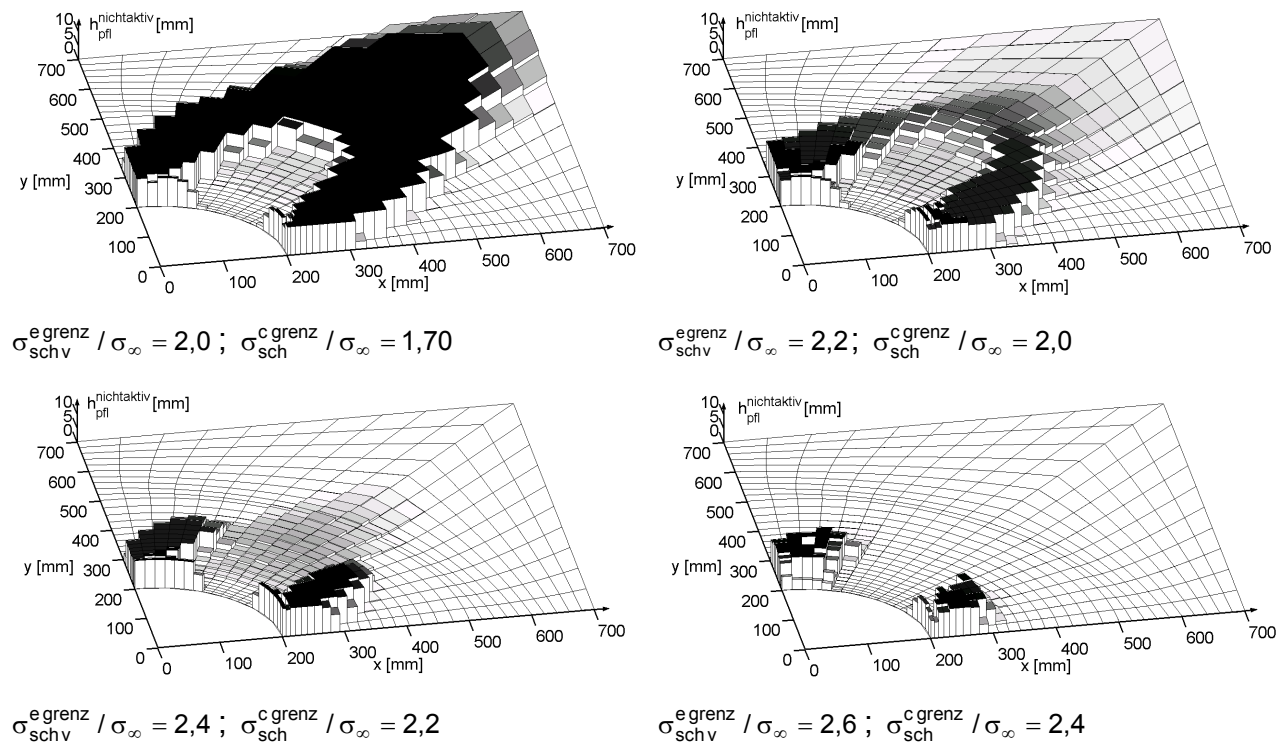
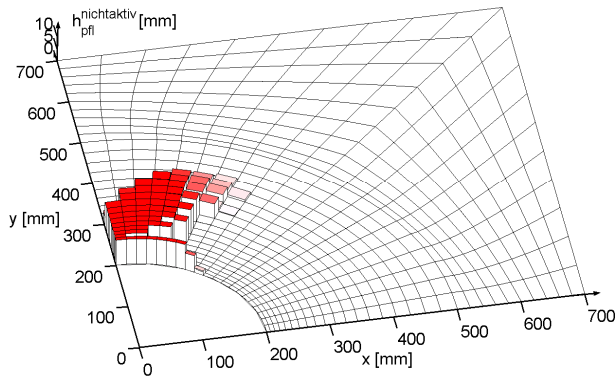


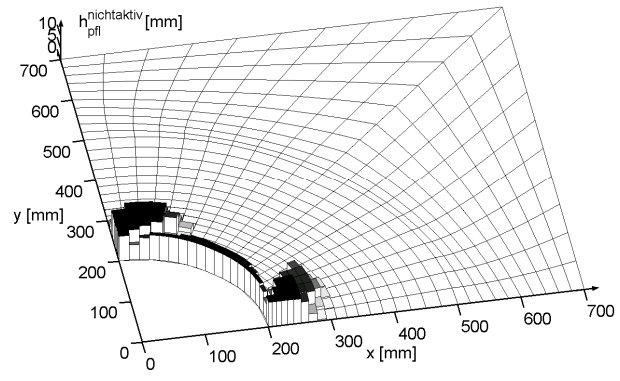
Abb. 6-9: Lokale nicht aktivierbare Verstärkungen für $p_x = -p_y = 1$, $x^u = 10$ für verschiedene lokale ($\sigma^{e\ grenz}$) und globale ($\sigma^{c\ grenz}$) Spannungsrandbedingungen

Eine weitere Reduktion der Spannungen unter $\sigma_{schv}^{e\ grenz} / \sigma_\infty = 2$ konnte in diesem Belastungszustand mit einer lokal begrenzten Verstärkung wegen der geringen Abweichungen von der Grundvergleichsspannung $\sigma_{v, \infty} = 1,73$ nicht erreicht werden.

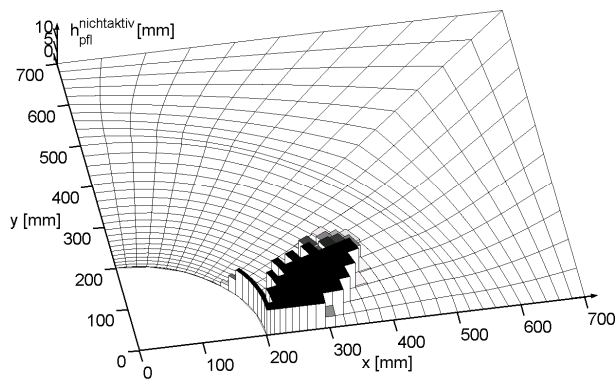
Da der hier betrachtete Belastungszustand $p_x = -p_y$ für das System maßgebend ist, ist es für die anderen Belastungszustände ausreichend, das entsprechende Optimierungsziel $\sigma_{schv}^{e\ grenz} / \sigma_\infty = 2$ anzusetzen.



$$p_x = \sigma_\infty; p_y = 0$$



$$p_x = \sigma_\infty; p_y = \sigma_\infty$$



$$p_x = 0; p_y = \sigma_\infty$$

Abb. 6-10: Lokale nicht aktivierbare Verstärkungen für $x^u=10$ mm, $\sigma_{schv}^{egrenz}/\sigma_\infty = 2,0$;
 $\sigma_{sch}^{cgrenz}/\sigma_\infty = 1,70$ und verschiedene p_x/p_y

Die Entwicklung der lokalen Verstärkung über die verschiedenen Belastungszustände zeigt auf, dass die Verstärkung maßgeblich in zwei bzw. drei Zonen aufgeteilt werden kann. Eine Verstärkung entlang des Ausschnitttrandes, die maßgeblich bei gleichgerichteter zweiachsiger Beanspruchung zunimmt, und eine bzw. zwei Verstärkungen, die ausgehend vom Bereich der 0° - bzw. 90° -Achse die Spannungsspitzen aus überwiegend einachsigen bzw. gegen gerichteten Beanspruchungen abbauen.

Diese von der 0°- bzw. 90°-Achse ausgehenden Verstärkungen erstrecken sich mit zunehmendem Abstand vom Ausschnittsrand in Richtung der 45°-Achse. Sie bewirken, wie ein Vergleich der Spannungen des unverstärkten Systems und des verstärkten Systems mit $\sigma_{schv}^{egrenz}/\sigma_\infty = 2,6$; $\sigma_{sch}^{cgrenz}/\sigma_\infty = 2,4$ zeigt, eine Umverteilung der Beanspruchungen vom Ausschnittsrand weg in den bereits im unverstärkten System mit erhöhten Beanspruchungen $\sigma_v/\sigma_\infty \approx 2,2$ belasteten Bereich der 45°-Achse, siehe Abb. 6-11. Dies begründet die in der Topologieoptimierung bereits bei einer Reduktion der Spannungen auf $\sigma_{schv}^{max}/\sigma_\infty = 2,4$ erforderlichen Verstärkungen im Bereich der 45°-Achse.

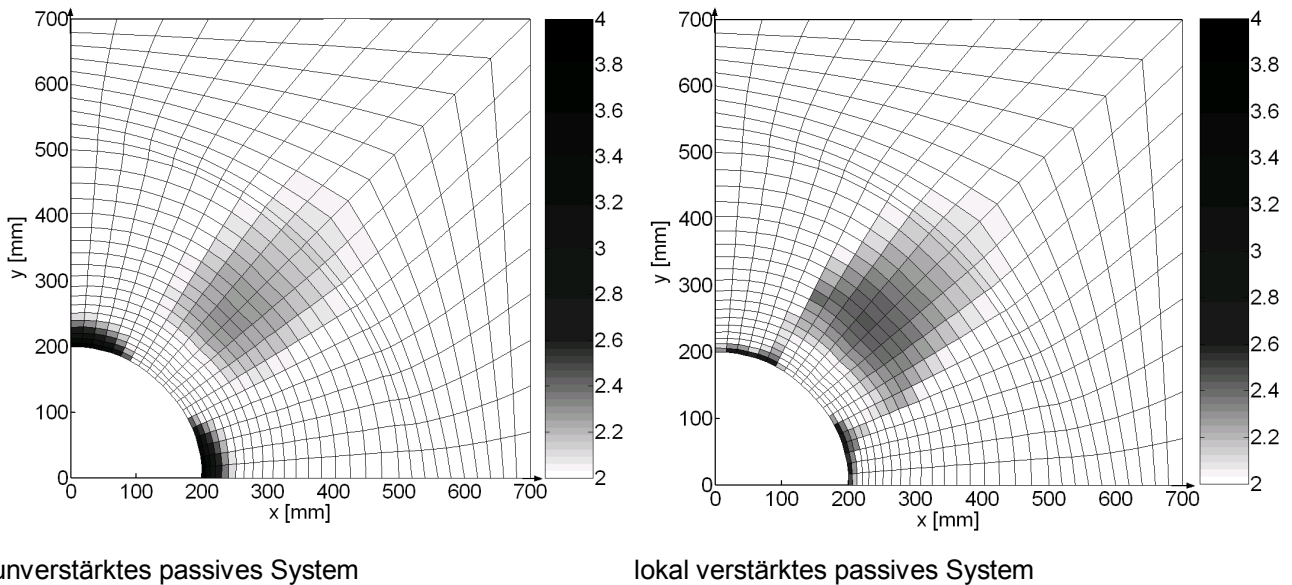


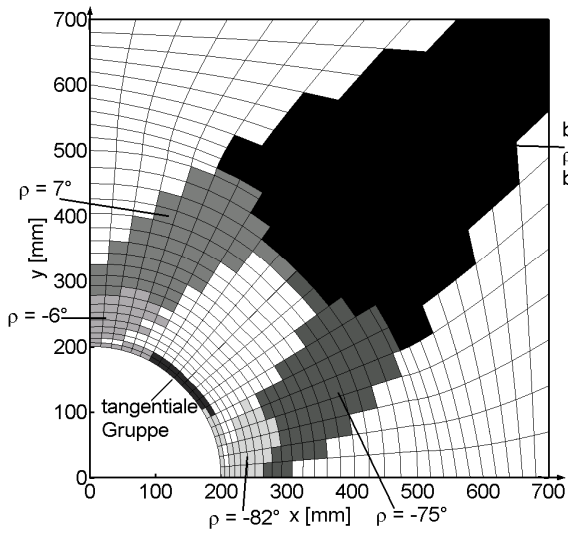
Abb. 6-11: Konzentrationskoeffizient der Vergleichsspannung (für alle $\xi = \sigma_v/\sigma_\infty > 2,0$) passives System und lokal verstärktes System mit $\sigma_{schv}^{egrenz}/\sigma_\infty = 2,6$; $\sigma_{sch}^{cgrenz}/\sigma_\infty = 2,4$; Belastung $p_x = -p_y = \sigma_\infty$, $x^u=10$ mm

Zonierung der diskreten Dehnungsaktuatoren

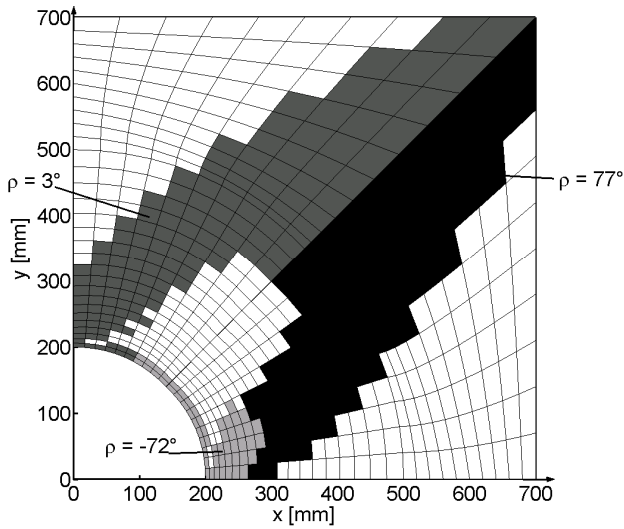
Aus den ermittelten nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen werden die Lage und die Ausrichtung der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren ermittelt. Dabei ist den oben aufgezeigten Beanspruchungszuständen in verschiedenen Bereichen durch eine geeignete Zonierung Rechnung zu tragen.

Das Vorgehen wird hier exemplarisch anhand der ermittelten nichtaktivierbaren Verstärkungen mit $x^u=10$ mm, $\sigma_v^{egrenz}/\sigma_\infty = 2$ und $\sigma_{sch}^{cgrenz}/\sigma_\infty = 1,7$ dargestellt. Zunächst werden alle Elemente bzw. Bereiche, deren Dicke der lokalen Verstärkung $h_{pfl}^{nichtaktiv}$ einen Grenzwert h_{grenz} überschreitet, ausgewählt. Dieser wird hier mit $h_{grenz}=1$ mm festgelegt. Anschließend wird die in Kapitel 6.2.2 beschriebene Zonierung der diskreten Dehnungsaktuatoren durchgeführt, für die im Folgenden einige Beispiele mit den dazugehörigen Parametern dargestellt sind.

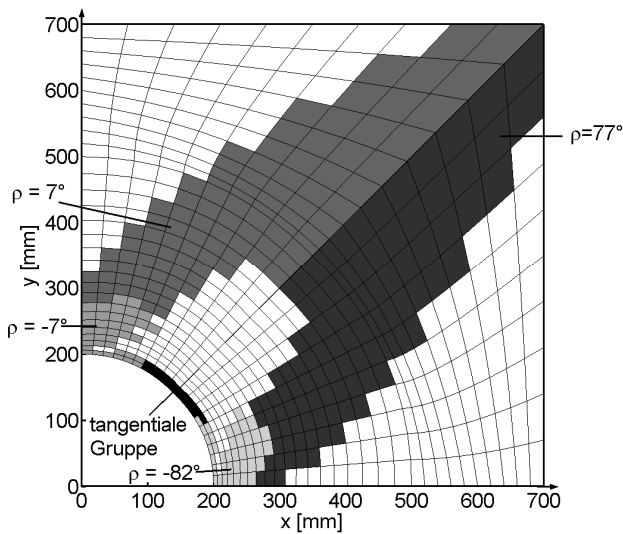
Die Effektivität der gefundenen Zonierungen kann nach einer Berechnung des adaptiven Systems überprüft werden.



Variante A: $n = 6$
 $\Delta\alpha_{\text{Gruppe}} = 30^\circ$, $\text{tol}_\alpha = 30\%$,
 $\left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}\right)_{\text{tol}} = 50\%$



Variante B: $n = 3$
 $\Delta\alpha_{\text{Gruppe}} = 30^\circ$, $\text{tol}_\alpha = 40\%$,
 $\left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}\right)_{\text{tol}} = 80\%$



Variante C: $n = 5$
 $\Delta\alpha_{\text{Gruppe}} = 30^\circ$, $\text{tol}_\alpha = 30\%$,
 $\left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}\right)_{\text{tol}} = 80\%$

Abb. 6-12: Zonierung der lokalen Verstärkung für verschiedene Parameter

Bestimmung der erforderlichen induzierten Dehnungen

Für die in Abb. 6-12 dargestellten und weitere Zonierungen wurde das adaptive System berechnet und die optimalen minimalen Aktivierungswerte berechnet. Hierbei wurden, wie oben festgelegt, die zulässigen induzierten Dehnungen auf 2 % und die zulässigen Aktuatorspannungen auf $\sigma_{\text{aktuator,zul}} = 2000 \text{ N/mm}^2$ – also auf den 20-fachen Wert der Grundspannung $\sigma_{\infty} = 100 \text{ N/mm}^2$ – begrenzt.

Die erreichten Minimalwerte der maximalen adaptiven Spannungen sind in Abb. 6-13 in Abhängigkeit von der Anzahl der Zonierungen für verschiedene Belastungen aufgetragen.

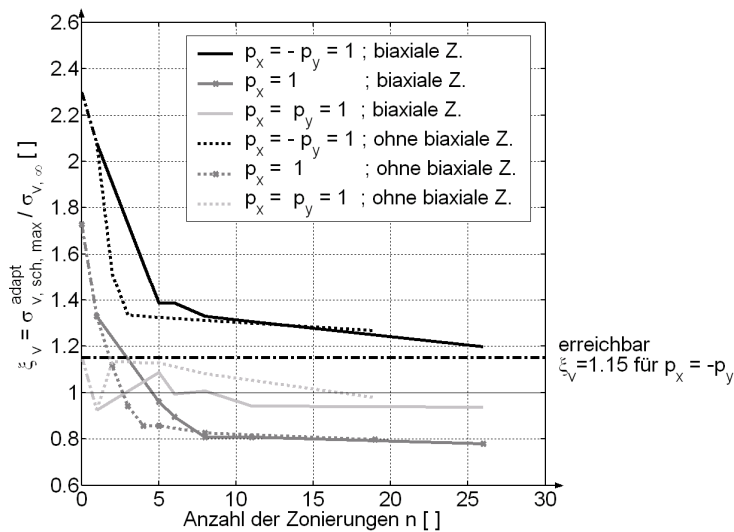


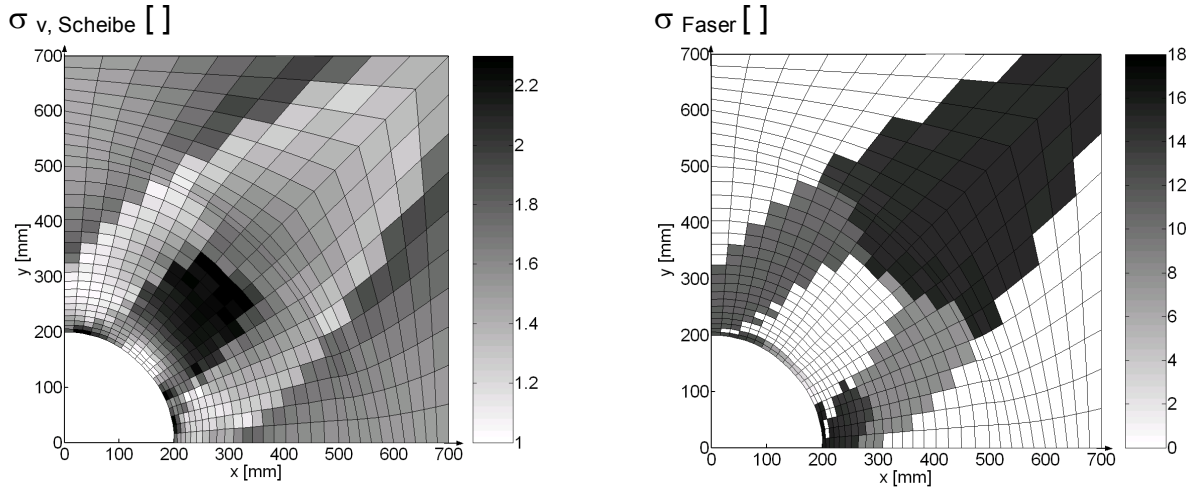
Abb. 6-13: Konzentrationskoeffizient der maximalen adaptiven Vergleichsspannungen bezogen auf die Grundvergleichsspannung $\sigma_{v,\infty} = 173 \text{ N/mm}^2$ für verschiedene Zonierungen bei $x^u = 10 \text{ mm}$

Hierbei wird zwischen zwei Varianten unterschieden: Bei der ersten Variante werden die entsprechend den Beanspruchungsrichtungen gefundenen Zonierungen ab einem Hauptspannungsverhältnis $(\sigma_I/\sigma_{II})_{\text{tol}} > 50\%$ in monoaxiale und biaxiale Bereiche unterteilt (Variante A). Aufgrund dieser zusätzlichen Unterteilung der Zonierungen können für diese Variante keine sinnvollen Lösungen mit weniger als 5 Zonen gefunden werden. Bei der zweiten Variante wird deswegen das tolerierte Hauptspannungsverhältnis $(\sigma_I/\sigma_{II})_{\text{tol}}$ so hoch angesetzt, dass alle Bereiche monoaxial ausgebildet werden können (Variante B). Eine Dritte Variante, bei der ab der Überschreitung eines festgelegten Hauptspannungsverhältnisses die gesamte Zone biaxial ausgebildet wird, hat sich als nicht relevant erwiesen und wird deswegen nicht weiter in die Betrachtung mit einbezogen.

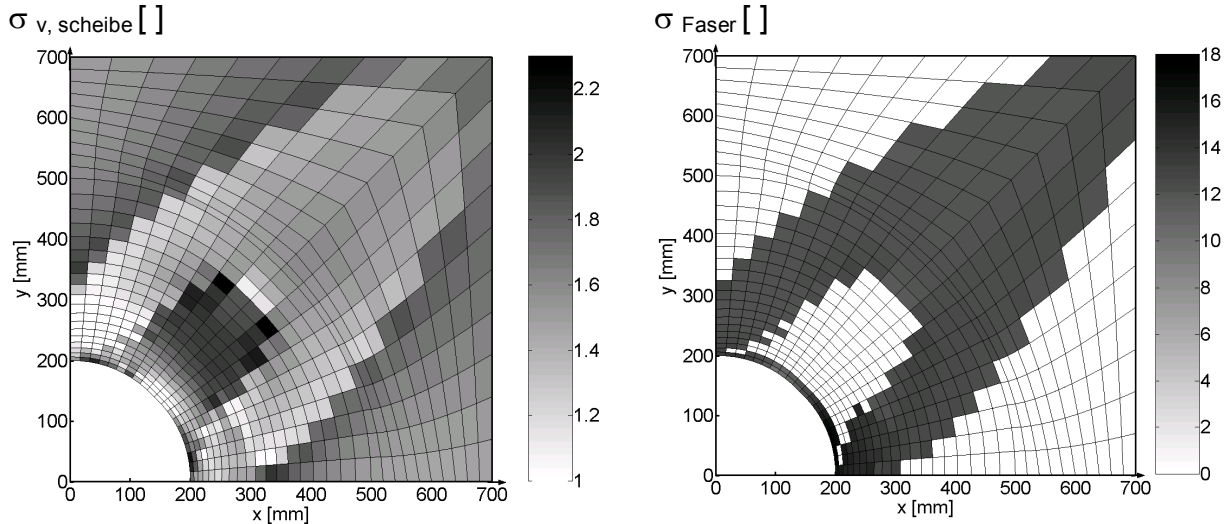
Es zeigt sich, wie in Abb. 6-13 dargestellt, dass bereits bei einer Unterteilung in zwei Zonen eine signifikante Reduzierung gegenüber dem passiven unverstärkten System erzielt werden kann. Im maßgebenden Beanspruchungszustand $p_x = -p_y = 100 \text{ N/mm}^2$ ist für $n=3$ Zonierungen der Konzentrationskoeffizient der maximal auftretenden Vergleichsspannung bezogen auf die Vergleichsspannung des homogenen Spannungsfeldes $\xi_v = 1,33$ nur um 15% größer als der in der Topologieoptimierung für nichtaktivierbare lokale Verstärkungen erreichbare Wert $\xi_v = 1,15$. Mit steigender Zahl der Zonierungen nähert sich der Konzentrationskoeffizient diesem Wert an.

Die bei niedriger Anzahl der Zonierungen auftretende Erhöhung der maximalen adaptiven Spannung im symmetrischen Belastungszustand $p_x = p_y = \sigma_\infty$ führt zu keiner Verschlechterung des Gesamtergebnisses, da die daraus resultierenden Beanspruchungen geringer als die Grundvergleichsspannungen des maßgebenden Lastfalls $p_x = -p_y$ sind.

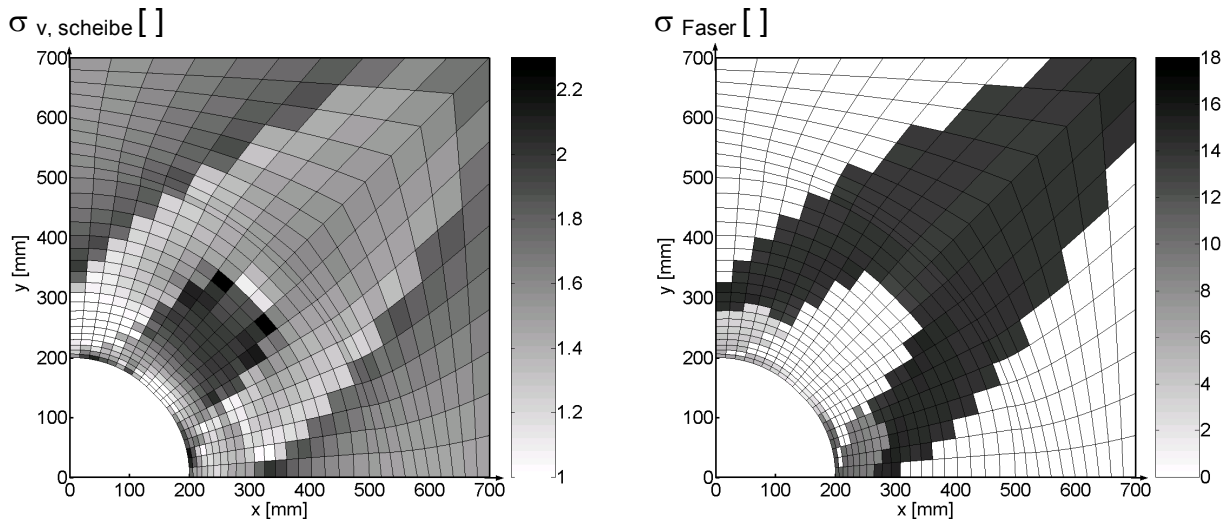
Die in Abb. 6-14 dargestellten adaptiven Spannungen der Scheibe und der Dehnungsaktuatoren zeigen, dass die am Anfang der Berechnung getroffene Abschätzung der adaptiven Aktuatorspannungen mit $\sigma_{\text{aktuator, zul}} = 20 \sigma_\infty$ und Dehnungen mit $\delta_{\text{aktiv, zul}} = 2\%$ ausreichend genau war. Die für dieses Beispiel gewählte zulässige Grenzspannung ($\sigma_{\text{sch v}}^{\text{grenz}} = 200 \text{ N/mm}^2$) wird nicht ganz erreicht ($\sigma_{\text{sch v max}}^{\text{adapt}} = 207 \text{ N/mm}^2$). Dies zeigt, dass eine weitere Verbesserung des Wirkungsgrades mit der gewählten Begrenzung der Dicke des nichtaktivierbaren Pflasters $x^u = 10 \text{ mm}$ nicht erreicht werden kann.



Variante A: Konzentrationskoeffizient $\xi_v = 1,39$, $\max(\delta_{aktiv}) = 1,28\%$, $\max(\sigma_{faser}) = 17,3 \cdot \sigma_\infty$



Variante B: Konzentrationskoeffizient $\xi_v = 1,33$, $\max(\delta_{aktiv}) = 1,28\%$, $\max(\sigma_{faser}) = 18,4 \cdot \sigma_\infty$



Variante C: Konzentrationskoeffizient $\xi_v = 1,32$, $\max(\delta_{aktiv}) = 1,26\%$, $\max(\sigma_{faser}) = 15,7 \cdot \sigma_\infty$

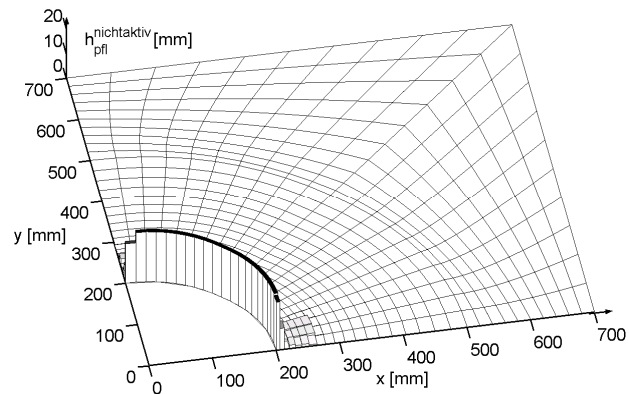
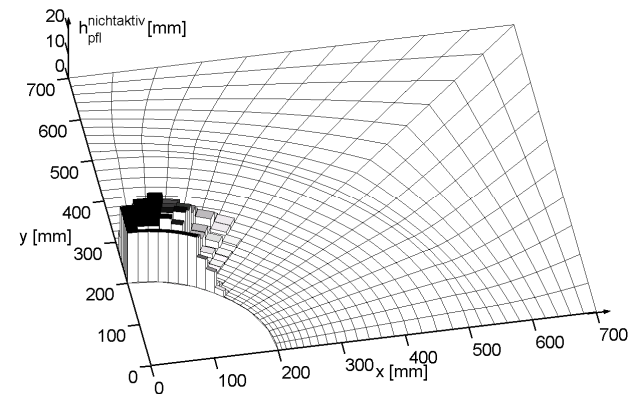
Abb. 6-14: Verlauf der adaptiven Vergleichsspannungen der Scheibe und der Aktuatorspannungen für verschiedene Zonierungen (siehe Abb. 6-12) für $p_x = -p_y = \sigma_\infty$

Einfluss des Grenzwertes x^u

Eine für dieses Beispiel durchgeführte Vergleichsrechnung mit einer Begrenzung $x^u = 20$ mm für die Topologieoptimierung des nichtaktivierbaren Pflasters zeigt, dass eine schlechte Abschätzung dieser Begrenzung in Abhängigkeit von den zulässigen Aktuatorspannungen und -dehnungen zu einer deutlichen Verschlechterung des Wirkungsgrades führen kann.

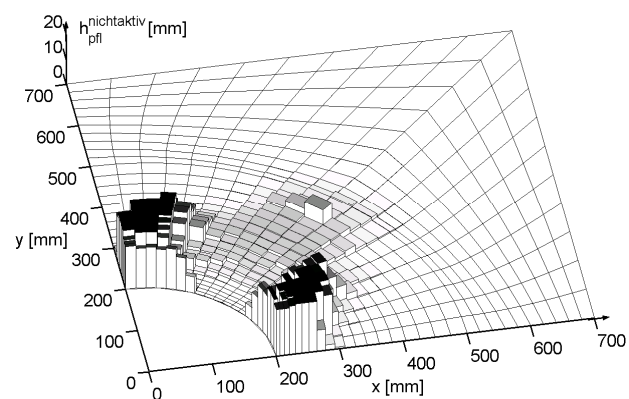
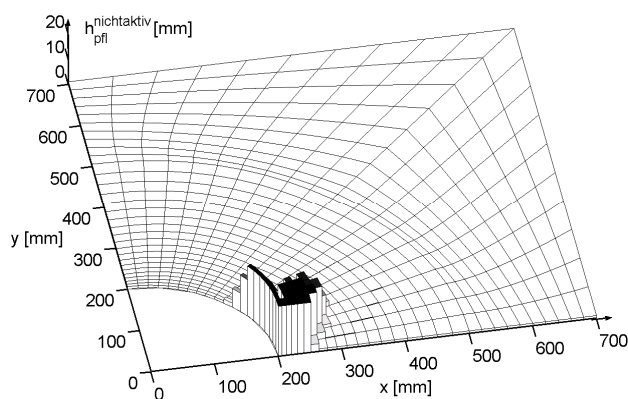
Wird $x^u = 20$ mm festgelegt, so ergibt sich gemäß (6-62) bei einer Grundscheibendicke $h_{sch} = 10$ mm ein Optimierungspotential $\Delta\sigma_{sch} \approx 2,7 \cdot \sigma_\infty$. Um dieses voll ausschöpfen zu können, sind bei einer gewählten Dicke der integrierten Aktuatoren von $h_{aktuator} = 1$ mm gemäß (6-3) und (6-7) Aktivierungsdehnungen im Bereich von $\delta_{aktiv, zul} = 2,9\%$ erforderlich, und die Spannungen der integrierten Dehnungsaktuatoren erreichen gemäß (6-9):

$$(6-65) \quad \sigma_{aktuator}^{adapt} = \frac{\delta_{aktiv} \cdot E_{sch} \cdot E_{aktuator} \cdot h_{pfl}^{nichtaktiv}}{E_{aktuator} \cdot h_{aktuator} - E_{sch} \cdot h_{pfl}^{nichtaktiv}} \approx 31,6 \cdot \sigma_\infty$$



$p_x = \sigma_\infty; p_y = 0$

$p_x = \sigma_\infty; p_y = \sigma_\infty$



$p_x = 0; p_y = \sigma_\infty$

$p_x = \sigma_\infty; p_y = -\sigma_\infty$

Abb. 6-15: Lokale nicht aktivierbare Verstärkung für $x^u=20$ und $\sigma_{sch}^{egrenz} / \sigma_\infty = 2,0$; $\sigma_{sch}^{cgrenz} / \sigma_\infty = 1,70$ für verschiedenen Belastungsrichtungen

Abb. 6-16 zeigt, dass nun bei einer Beschränkung der zulässigen Aktuatorspannungen auf $\sigma_{\text{aktuator, zul}} = 20 \cdot \sigma_{\infty}$ die Konzentrationskoeffizienten für verschiedene Zonierungen deutlich höher sind, als bei der Berechnung mit $x^u = 10$ mm. Ohne Begrenzung der zulässigen Aktuatorspannungen erreichen die Konzentrationskoeffizienten für $x^u = 20$ mm dagegen wieder ungefähr die Werte der obigen Berechnung. Hierbei treten im adaptiven Zustand bei $n = 20$ Zonierungen Aktuatorspannungen bis zu $\sigma_{\text{aktuator}}^{\text{adapt}} = 32 \cdot \sigma_{\infty}$ auf, was wiederum ungefähr dem in (6-65) ermittelten Wert entspricht.

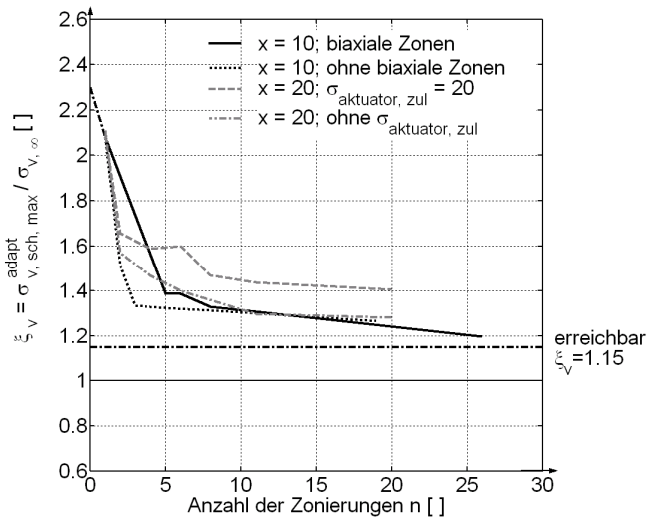


Abb. 6-16: Konzentrationskoeffizient der maximalen adaptiven Vergleichsspannungen bezogen auf die Grundvergleichsspannung $\sigma_v = 173 \text{ N/mm}^2$ für verschiedene Zonierungen mit bzw. ohne Berücksichtigung zulässiger Aktuatorspannungen

Dass die in der Abschätzung ermittelten Aktuatorspannungen im Fall $x^u = 10$ mm nicht erreicht und im Fall $x^u = 20$ mm überschritten werden, zeigt, dass in diesem Beispiel erhebliche Umverteilungen der Beanspruchungen in andere Bereiche der Scheiben erfolgen. Die Genauigkeit der Abschätzung erhöht sich bei Systemen mit geringeren Umverteilungen signifikant, wie das in Kapitel 7 vorgestellte Beispiel eines L-Winkels zeigt.

Induzierte Arbeit

Als weitere Indikatoren zum Vergleich verschiedener ermittelter Anordnungen der Aktuatoren können das erforderliche Volumen der Aktuatoren oder die in das System zu induzierende Arbeit herangezogen werden. Letztere berechnet sich ausgehend von der Höhe der Aktivierung δ_{aktiv} mit:

$$(6-66) \quad W_{\text{aktuator}} = \int E(\delta_{\text{aktiv}})^2 dV$$

Während das Volumen der integrierten Dehnungsaktuatoren für $x^u = 10$ mm mit $V_{x^u=10} = 2,25 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ um den Faktor 3 größer ist als für $x^u = 20$ mm ($V_{x^u=20} = 7,1 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$), sind die Abweichungen der zu induzierenden Arbeit relativ gering. Hierzu sind in Abb. 6-17 für verschiedene untersuchte Zonierungen die erforderliche induzierte Arbeit W_{aktuator} über den erreichbaren Konzentrationskoeffizienten für den Belastungszustand $p_x = \sigma_\infty$; $p_y = -\sigma_\infty$ aufgetragen.

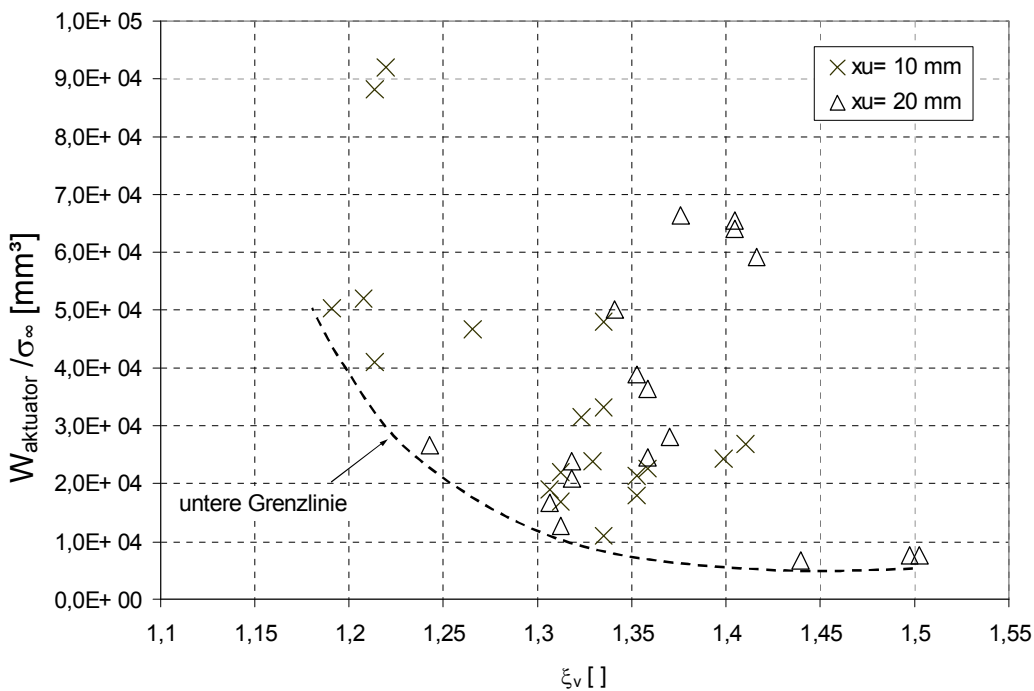


Abb. 6-17: Induzierte Arbeit für verschiedene Konzentrationskoeffizienten bei $x^u = 10$ mm und $x^u = 20$ mm; $p_x = \sigma_\infty$; $p_y = -\sigma_\infty$

Die große Streuung der Werte zeigt, dass zwischen der induzierten Arbeit und den erreichbaren Konzentrationskoeffizienten allein kein direkter Zusammenhang abgeleitet werden kann, da eine günstige Wahl der Zonierungen einen sehr großen Einfluss haben kann. Der Verlauf der unteren Begrenzungslinie zeigt jedoch, dass mit steigendem Wirkungsgrad – also einem sinkenden Konzentrationskoeffizienten ξ_v – die erforderliche induzierte Arbeit ansteigt. Dieser Anstieg ist für Konzentrationskoeffizienten unter $\xi_v = 1,3$ deutlich ausgeprägter, da ab diesem Wert nicht nur die passiven Vergleichsspannungen am Ausschnittsrand der 0° - bzw. 90° -Achse sondern auch die im ausschnittfernen Bereich der 45° -Achse, siehe Abb. 6-8 und Abb. 6-11, durch die Aktivierung zu reduzieren sind.

Um den Einfluss der Zonierungen auf die induzierte Arbeit zu überprüfen, ist dieser in Abb. 6-18 graphisch dargestellt. Hierbei wird wiederum für jede Zonierung die erforderliche induzierte Arbeit für den bestmöglich erreichbaren Konzentrationskoeffizienten im Belastungszustand $p_x = \sigma_\infty$; $p_y = -\sigma_\infty$ aufgetragen.

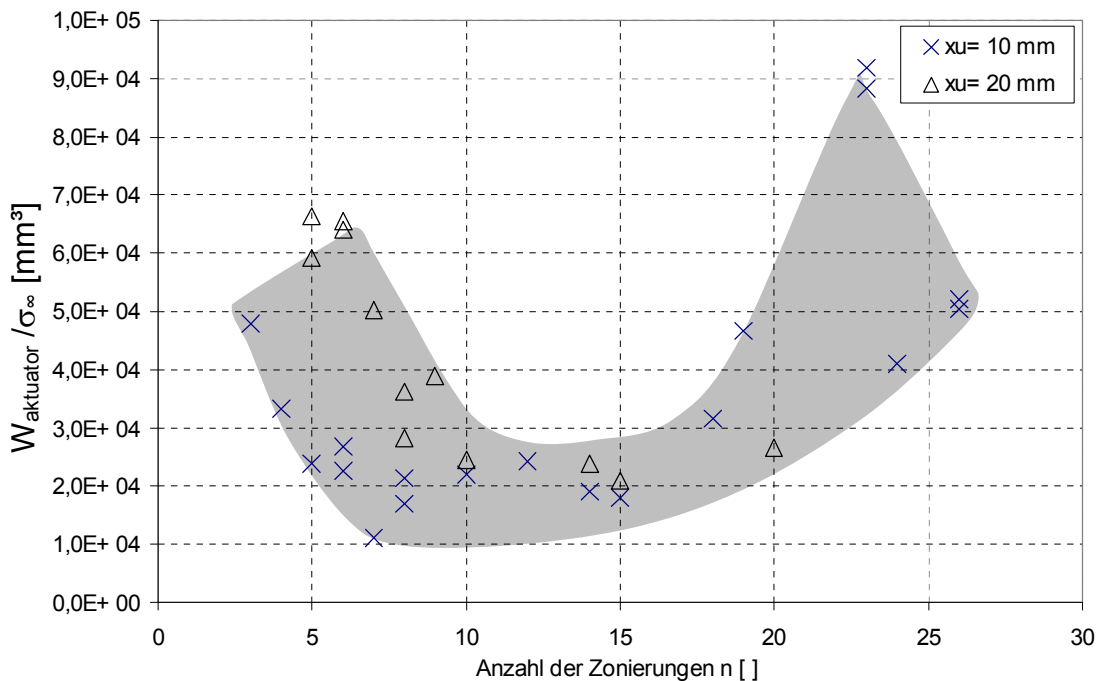


Abb. 6-18: Induzierte Arbeit für verschiedene Anzahl der Zonierungen n bei $x^u = 10$ mm und $x^u = 20$ mm; $p_x = \sigma_\infty$; $p_y = -\sigma_\infty$

Der sich ergebende talförmige Verlauf der induzierten Arbeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Zonierungen kann, wie folgt, erklärt werden: Für kleine Werte n bis ca. 5 oder 6 reichen die äußeren mit ca. 0° - bzw. 90° ausgerichteten Zonen vom ausschnittnahen bis - fernen Bereich, siehe zum Beispiel Varianten B und C in Abb. 6-12. Da für jede Zone die Höhe der Aktivierung als konstant festgelegt wurde, erfahren somit die großflächigen ausschnittfernen Bereiche sehr hohe induzierte Dehnungen, die in den ausschnittnahen Bereichen zur Reduktion der Spannungen erforderlich sind. Sobald eine ausreichende Abstufung nach außen durch eine genügend große Anzahl an Zonen (bei $x^u = 10$ mm ab $n = 5$) erreicht ist, bleibt die induzierte Arbeit zunächst ungefähr konstant.

Die größer werdende induzierte Arbeit für eine große Anzahl der Zonierungen hängt mit der steigenden Arbeit zur Erreichung geringerer Konzentrationskoeffizienten zusammen. Ab dieser Anzahl von Zonen n (für $x^u = 10$ mm $n \approx 18$) werden Konzentrationskoeffizienten $\xi_v < 1,3$ erreicht, so dass auch die äußeren integrierten Dehnungsaktuatoren hohe induzierte Dehnungen erfahren müssen, um die Spannungen im Bereich der 45° -Achse zu adaptieren.

Vergleich mit dehnungsaktivierter Scheibe

Gegenüber einer dehnungsaktivierten Scheibe ist das Volumen der integrierten diskreten Aktuatoren, aufgrund ihrer geringeren Dicke deutlich kleiner. Zum Erreichen des Konzentrationskoeffizientens $\xi_v = 1,2$ mit $\sigma_{v \text{ adapt}} = 207 \text{ N/mm}^2$ ist bei der dehnungsaktivierten Scheibe eine Aktivierung bis zum Radius $b/a = 2,5$ erforderlich. Somit ergibt sich das Aktuatorvolumen der dehnungsaktivierten Scheibe zu $V_{\text{aktuator, dehnungsaktiviert}} = 6,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$, welches ca. um den Faktor $f=30$ größer ist als das der integrierten Dehnungsaktuatoren $V_{x_u=10}$. Da aber bei den dehnungsaktivierten Scheiben deutlich geringere maximale induzierte Dehnungen erforderlich sind, siehe Abb. 5-18, ergibt sich für die induzierte Arbeit ein anderes Verhältnis. Die in Abb. 6-19 für verschiedene Konzentrationskoeffizienten in einer logarithmischen Skale dargestellten Werte der induzierten Arbeit zeigen dies auf.

Weiterhin ist bei den dehnungsaktivierten Scheiben die Zunahme der induzierten Arbeit zur Verbesserung des Wirkungsgrades viel deutlicher ausgeprägt. Während bei den Scheiben mit integrierten Dehnungsaktuatoren die erforderliche induzierte Arbeit zwischen $\xi_v = 1,4$ und $\xi_v = 1,2$ ungefähr um den Faktor 10 zunimmt, beträgt der Faktor der Zunahme bei den dehnungsaktivierter Scheiben ungefähr 60.

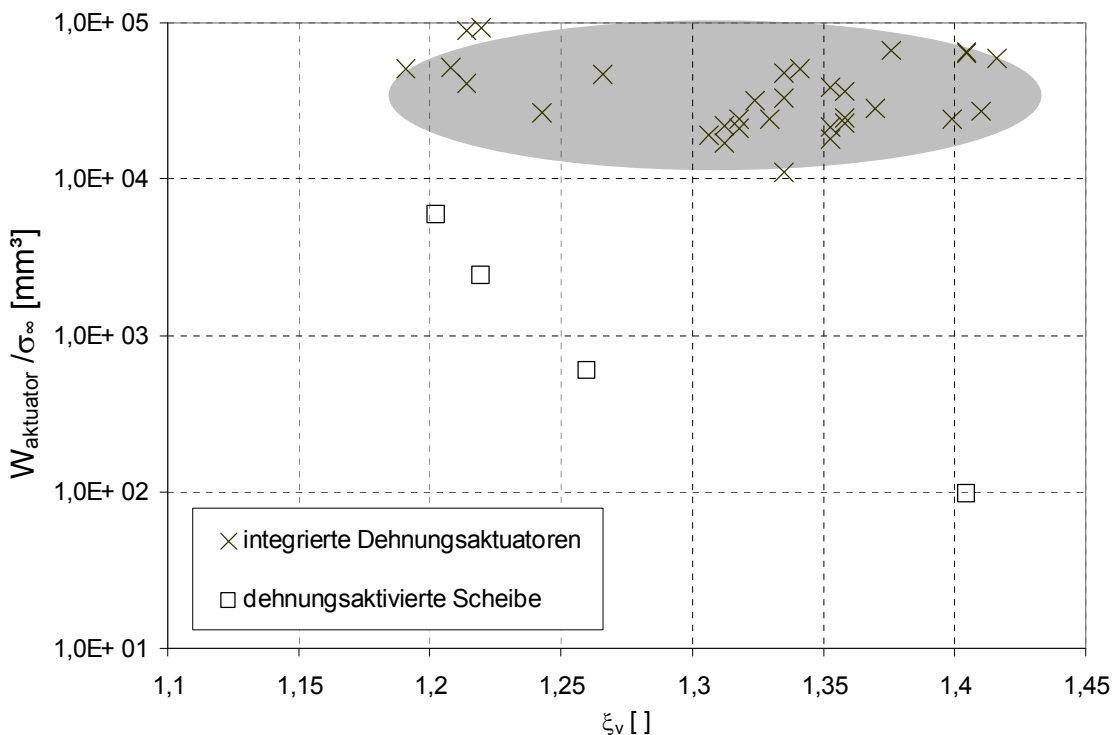


Abb. 6-19: Gegenüberstellung der induzierten Arbeit für dehnungsaktivierte Scheibe und Scheibe mit integrierten Dehnungsaktuatoren für verschiedene ξ_v ; $p_x = \sigma_{\infty}$; $p_y = -\sigma_{\infty}$

6.4 Zusammenfassung

Die hier dargestellte Untersuchung hat gezeigt, dass die Effektivität der integrierten Dehnungsaktuatoren maßgeblich vom Verhältnis der zulässigen Spannungen und den indizierbaren Dehnungen der Dehnungsaktuatoren abhängt. Weichen die zulässigen Spannungen der Aktuatoren zu wenig von denen der Grundscheibe ab, so wird der Vorteil des adaptiven Systems – das geringere Gewicht -gegenüber dem passiven System mit lokaler Verstärkung zu gering, um eine adaptive Ausbildung des Systems zu rechtfertigen.

Das vorgestellte mehrstufige Verfahren zur Ermittlung der Lage und Aktivierung der diskreten Dehnungsaktuatoren nutzt zunächst die Gleichwertigkeit der Spannungsverläufe der Grundscheibe zwischen nichtaktivierbaren Systemen mit lokalen Verstärkungen und adaptiven Systemen mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren aus. Das im ersten Schritt des Berechnungsverfahrens ausgewählte Optimalitätskriterienverfahren zur Berechnung der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen hat sich als sehr effektiv und robust erwiesen. In manchen Fällen kann dieses Verfahren aufgrund von geänderten Randbedingungen, zum Beispiel bei anisotropen Material der Grundscheibe, nicht oder nur mit einer aufwendigen iterativen Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren verwendet werden. In diesen Fällen können zur Berechnung der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen andere bekannte Verfahren, wie zum Beispiel die der mathematischen Programmierung oder intuitive Ansätze der Optimalitätskriterien, benutzt werden. Das weitere Vorgehen zur Berechnung der integrierten Dehnungsaktuatoren bleibt davon unberührt.

In der nächsten Stufe des Verfahrens werden die mit der Topologieoptimierung gefundenen Bereiche der Dehnungsaktuatoren entsprechend ihren Beanspruchungen zoniert, und für die gefundenen Konfigurationen werden die optimalen induzierten Dehnungen ermittelt. Die Zonierung, mit der eine Ausrichtung der monoaxialen Aktuatoren einhergeht, stellt immer eine Vereinfachung dar, so dass mit steigender Anzahl der Zonierungen die Effektivität der integrierten Dehnungsaktuatoren steigt. Die Untersuchung anhand des Beispiels der Scheibe mit Ausschnitt, hat jedoch aufgezeigt, dass bereits bei einer geringen Anzahl der Zonen der Konzentrationskoeffizient der Spannungen am Rand des Ausschnitts deutlich gesenkt werden kann.

Die abschließende Betrachtung der induzierten Arbeit hat für das Beispiel der Scheibe mit Ausschnitt sehr große Streuungen zwischen den verschiedenen Konfigurationen aufgezeigt. Da nicht die minimale induzierte Arbeit, sondern das minimale Aktuatorvolumen zur Reduktion des Konzentrationskoeffizienten Ziel dieser Untersuchung war, haben diese Streuungen keinen Einfluss auf die Qualität der Ergebnisse. Soll die induzierte Arbeit als Kriterium für die optimale Konfiguration mit herangezogen werden, so wird zum einen vorgeschlagen bereits bei der Ermittlung der nichtaktivierbaren Verstärkungen die Zielfunktion anzupassen. Statt des hier verwendeten Volumens sollte deswegen eine Zielfunktion der Form

$$\tilde{V}(x) = \sum_{e=1}^{NE} A^e \cdot (x^e)^2$$

verwendet werden. Die Dicke der nichtaktivierbaren Verstärkungen repräsentiert die Höhe der Aktivierungen, die in die induzierte Arbeit mit der Potenz 2 einfließt. Zum anderen wird vorgeschlagen die Arbeit auch bei der Zonierung der Aktuatoren zu berücksichtigen, indem die Zonen abhängig von der erforderlichen Höhe der Aktivierung zusätzlich abgestuft werden.

Die im Rahmen der FE-Berechnung ermittelten nichtstetigen Verläufe der integrierten Dehnungsaktuatoren können, wenn erforderlich, mit einem formbeschreibenden Verfahren geglättet werden. Da eine solche Glättung keinen globalen Einfluss hat, und somit der untersuchte Wirkungsgrad der adaptiven Systeme nicht wesentlich beeinflusst wird, wird auf diese zusätzliche Formoptimierung im Rahmen der vorliegenden Arbeit verzichtet.

Das dargestellte Beispiel der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt hat die Wirkungsweise integrierter diskreter Dehnungsaktuatoren in einer Scheibe aufgezeigt. Sie erfordern zur Erzielung eines gewünschten Wirkungsgrades zwar eine höhere induzierte Arbeit als die dehnungsaktivierten Scheiben, sind aber aufgrund der konstanten Aktivierung je Zone mit weniger Aufwand in ein System zu integrieren.

7 Tragwerksstudie: Abgewinkelter Kragträger

Anhand eines zweiten Beispiels werden die in den vorherigen Kapiteln vorgestellten Verfahren für dehnungsaktivierte adaptive Scheiben und für adaptive Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren auf ihre allgemeine Anwendbarkeit hin überprüft. Weiterhin werden die aus dem Beispiel der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt gezogenen Schlüsse im Vergleich zu diesem Beispiel diskutiert.

Systembeschreibung und Analyse des passiven Beanspruchungszustandes

Der betrachtete abgewinkelte Kragträger, der mit seinen Abmessungen in Abb. 7-1 dargestellt ist, ist an seinem oberen Schenkel in x- und y-Richtung fest gelagert. Die Belastungen greifen als Linienlast an der rechten Seite an; während ihre Richtung von $\alpha=0^\circ$ bis $\alpha=360^\circ$ variieren kann, bleibt ihr Betrag konstant mit $p=10 \text{ N/mm}^2$.

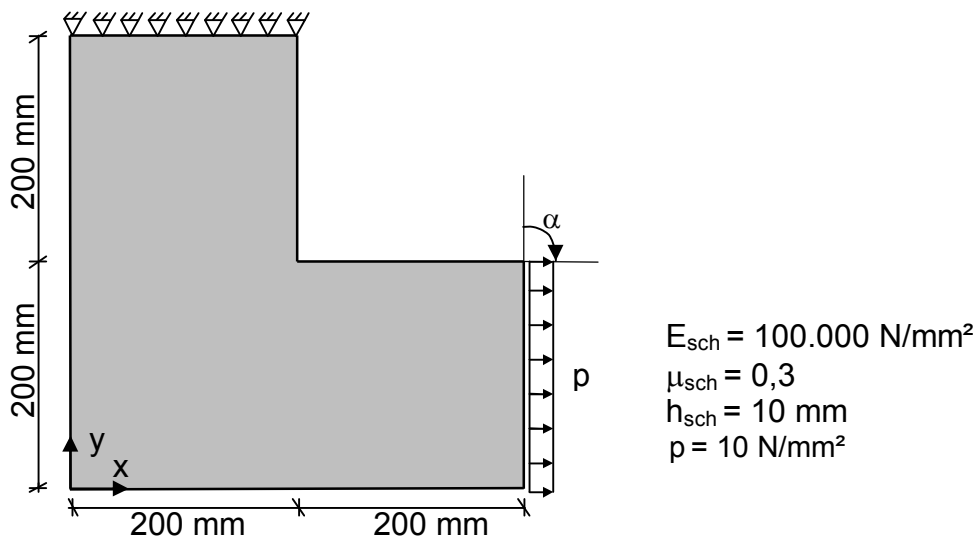


Abb. 7-1: System L-Winkel mit Belastungen

Wie die Konzentrationskoeffizienten ξ im passiven unverstärkten Systems für die Belastungszustände $p_x = 10 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$ bzw. $p_x = 0$ und $p_y = 10 \text{ N/mm}^2$ zeigen, sind die Beanspruchungen in drei Bereichen des Systems für die Dimensionierung maßgebend: Zum einen sind die äußeren Seiten des Auflagers infolge des auftretenden Momentes höher beansprucht. Der Konzentrationskoeffizient der Vergleichsspannungen $\xi = \sigma_{v, \max} / \sigma_\infty$ beträgt bei $\sigma_\infty = p = 10 \text{ N/mm}^2$ hier für beide betrachteten Beanspruchungszustände maximal ca. $\xi = 10$. Zum anderen treten bei Beanspruchungen in y-Richtung hohe Konzentrationsspannungen in der Winkelecke auf. Diese können bei der hier vorliegenden Berechnung mit $\xi = 20$ bestimmt werden. Der ermittelte Konzentrationskoeffizient stellt hierbei eine Näherung dar, die sich aufgrund der gewählten Netzeinteilung in der FE-Berechnung ergibt. Diese Näherung kann mit einer Ausrundung der Ecke verglichen werden.

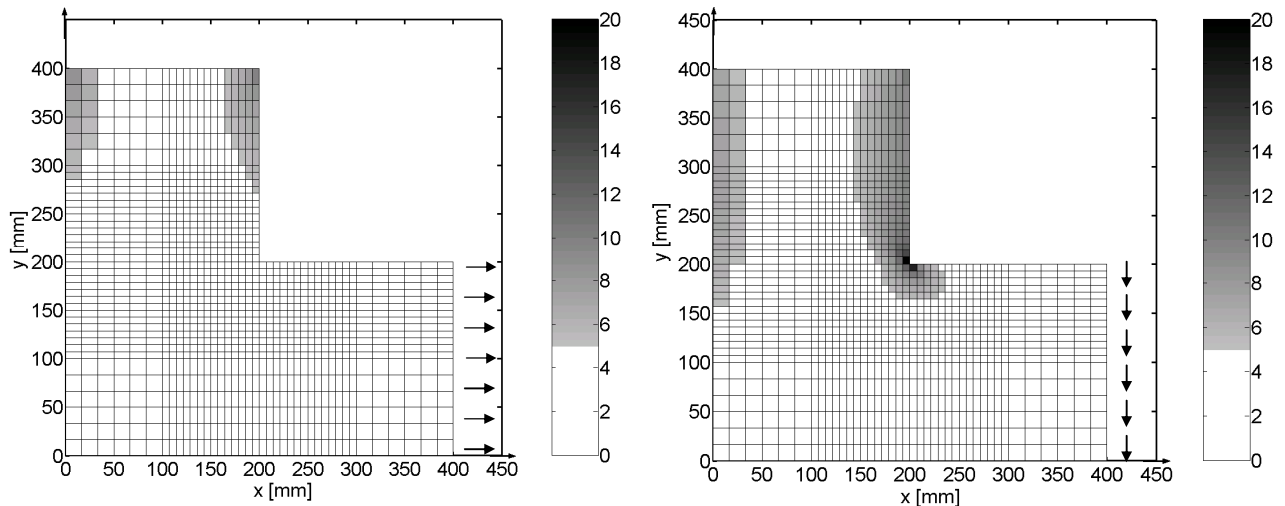


Abb. 7-2: Konzentrationskoeffizienten ξ im passiven System für die Belastungszustände $p_x = 10 \text{ N/mm}^2$ und $p_y = 0$ bzw. $p_x = 0$ und $p_y = 10 \text{ N/mm}^2$

Da die erhöhten Beanspruchungen an den Auflagern für alle Beanspruchungszustände auftreten, ist es sinnvoll, die Scheibe so auszubilden, dass diese im passiven Zustand des Systems aufgenommen werden können. Somit ergibt sich das Ziel der Adaption dahingehend, dass alle Beanspruchungen, die diese am Auflager auftretenden Werte ($\xi = 10$) überschreiten, durch die induzierten Dehnungen neutralisiert werden. Maßgebend hierfür sind die Beanspruchungen in y-Richtung. Weswegen sich die folgenden Betrachtungen nur noch auf diesen Belastungszustand beschränken.

Dehnungsaktivierter adaptiver L-Winkel

Durch die Festlegung des Adaptionziels auf $\xi = 10$, ist eine Reduktion der Inhomogenitäten des Spannungsfeldes nur in der Winkellecke erforderlich, so dass die Dehnungsaktivierung der adaptiven Scheibe auf diesen Bereich beschränkt werden kann. Der kleinste aktive Bereich, mit dem das Adaptionziel erreicht werden kann, ergibt sich bei dem untersuchten Beispiel mit $b_x = b_y = 100 \text{ mm}$, siehe Abb. 7-3. Dies entspricht einem Aktuatorvolumen von $V_{\text{aktuator, dehnungsaktiviert}} = 4 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$. Bei einer Reduktion des aktiven Bereichs durch Verkürzung der Winkelschenkel auf $b_{x,2} = b_{y,2} = 85 \text{ mm}$ steigt der erreichbare Konzentrationskoeffizient der adaptiven Vergleichsspannung auf $\xi = 11$ an.

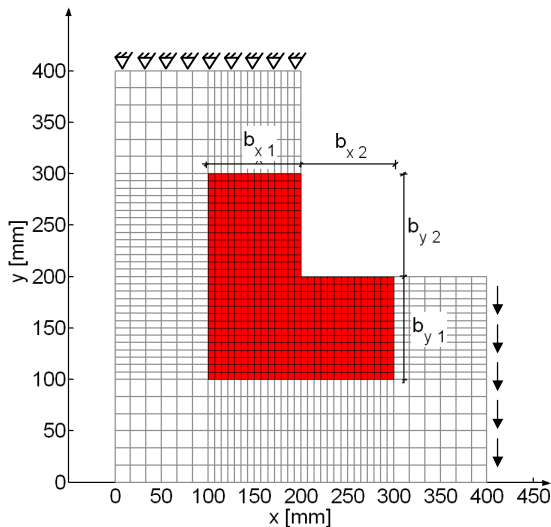


Abb. 7-3: Erforderlicher aktiver Bereich für Adaptionziel $\xi = 10$

Zur Ermittlung des optimalen Verlaufs der Aktivierung wird das in Kapitel 5.2.2 vorgestellte Verfahren mit formbeschreibender Gestaltfunktion verwendet. Die Kontrollknoten der formbeschreibenden kubischen B-Splines sind dabei im Bereich von $x = y = 50 \div 350$ mm verteilt. Es gilt, wie beim Beispiel der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt, dass die aktivierten Dehnungen am Übergang vom aktiven zu nichtaktiven Bereich den Wert Null annehmen.

Die berechnete Verteilung der induzierten Dehnungen mit dem Maximalwert $\delta_{\text{aktiv}} = 1,47\%$ ist in Abb. 7-4 dargestellt. Aus ihr kann die zu induzierende Arbeit mit (6-66) zu $W_{\text{dehnungsaktiviert}} = 3780$ Nmm bestimmt werden.

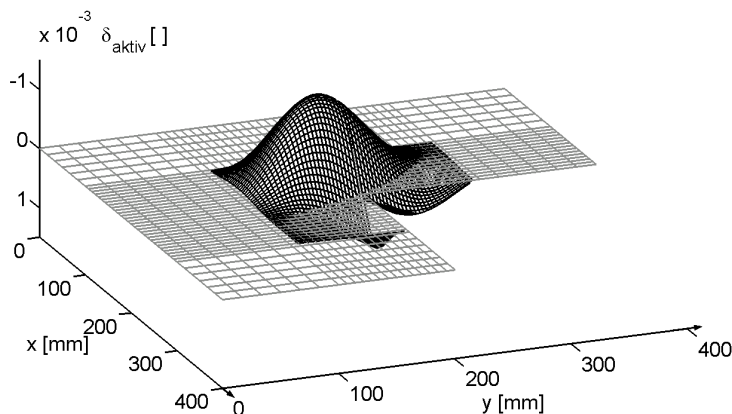


Abb. 7-4: Erforderlicher Verlauf der Aktivierung zum Erreichen des Adaptionziels $\xi = 10$

Die Spitzenspannungen in der Winkelecke werden zum einen aufgrund der positiven Dehnungen entlang des Randes reduziert. Zum anderen werden diese Bereiche durch die negativen Dehnungen und die damit einhergehende Versteifung der Mitte des aktiven Bereiches entlastet. Diese Versteifung ist auch im Verlauf des Konzentrationskoeffizienten der adaptiven Spannungen anhand der Erhöhung von ξ gegenüber dem passiven Zustand in diesem Bereich deutlich zu erkennen, siehe Abb. 7-5 bzw. Abb. 7-2.

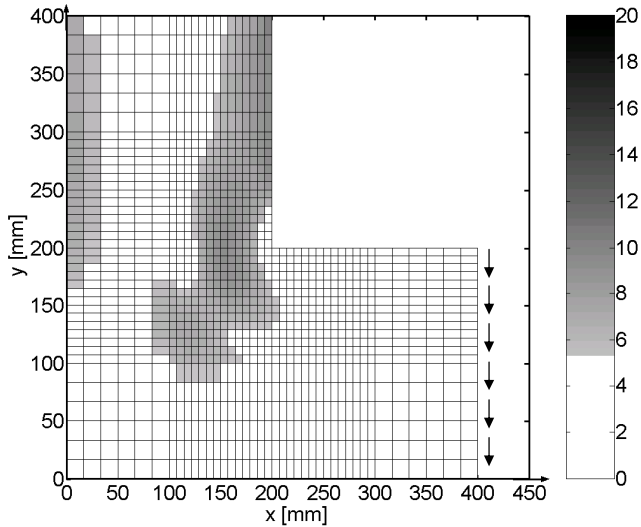


Abb. 7-5: Konzentrationskoeffizient der adaptiven Vergleichsspannungen $\xi = \sigma_{v,adapt}/\sigma_{\infty}$

Das oben beschriebene Tragverhalten des adaptiven Systems spiegelt sich auch in den Verformungen wieder, die in Abb. 7-6 überhöht dargestellt sind.

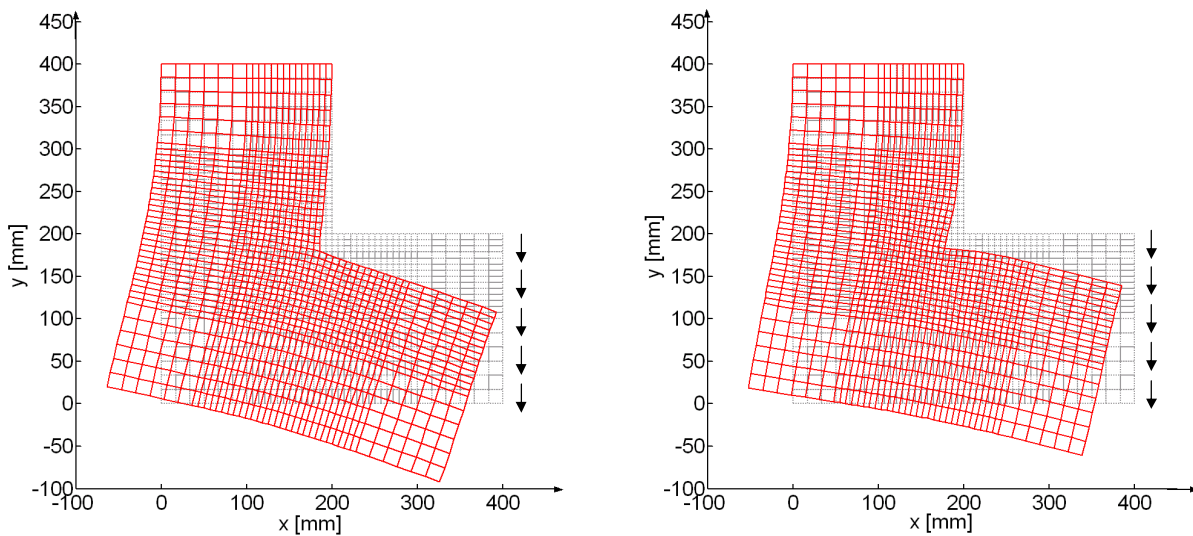


Abb. 7-6: Verformungen des Systems im passiven (links) und adaptiven (rechts) Zustand

Aufgrund der Versteifung des Systems in der Mitte des aktiven Bereiches reduziert sich die maximale Verschiebung in y-Richtung $v_{y, adapt}$ gegenüber der passiven Verschiebung um ca. 20%. Die Neigung des rechten Winkelschenkels bleibt aufgrund der positiven induzierten Dehnungen entlang des Randes in der Winkelecke jedoch nahezu konstant.

L-Winkel mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren

Zur Ermittlung der Lage der integrierten Dehnungsaktuatoren wird zunächst die Lage nichtaktivierbarer Verstärkungen zur Erreichung des Optimierungsziels berechnet. Da der Konzentrationskoeffizient gegenüber dem passiven System um den Faktor zwei reduziert werden soll, wird als maximale Dicke der nicht aktivierbaren lokalen Verstärkung $x^u = 10$ mm gewählt. Wird für die integrierten Dehnungsaktuatoren, wie beim Beispiel der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt, ein Material mit zulässigen induzierten Dehnungen $\delta_{\text{aktiv, zul}} = 2\%$ und mit gegenüber der Grundscheibe 10-fach höheren zulässigen Spannungen – also einem zulässigen Konzentrationskoeffizienten $\xi_{\text{Aktuator, zul}} = 200$ – gewählt, so kann die äquivalente Dicke der Aktuatoren mit (6-3) und (6-6), wie folgt, abgeschätzt werden:

$$\text{erf } N_{\text{inf } \delta} = \Delta\sigma_{\text{sch}} \cdot h_{\text{sch}} = 100 \text{ Nmm}$$

$$(7-1) \quad \text{erf } h_{\text{aktuator}} = \frac{\text{erf. } N_{\text{inf } \delta} \cdot E_{\text{sch}} \cdot h_{\text{sch}}}{\delta_{\text{aktiv, zul}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{sch}} - \text{erf. } N_{\text{inf } \delta} \cdot E_{\text{aktuator}}} = 0,52 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \sigma_{\text{aktuator}}^{\text{adapt}} \approx \frac{\delta_{\text{aktiv, zul}} \cdot E_{\text{sch}} \cdot E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}}{E_{\text{aktuator}} \cdot h_{\text{aktuator}} - E_{\text{sch}} \cdot h_{\text{pfl}}^{\text{nichtaktiv}}} = 2100 \text{ N/mm}^2$$

Um die zulässigen Aktuatorspannungen einhalten zu können, wird deswegen für die Aktuatoren eine äquivalente Dicke $h_{\text{aktuator}} = 0,6$ mm gewählt.

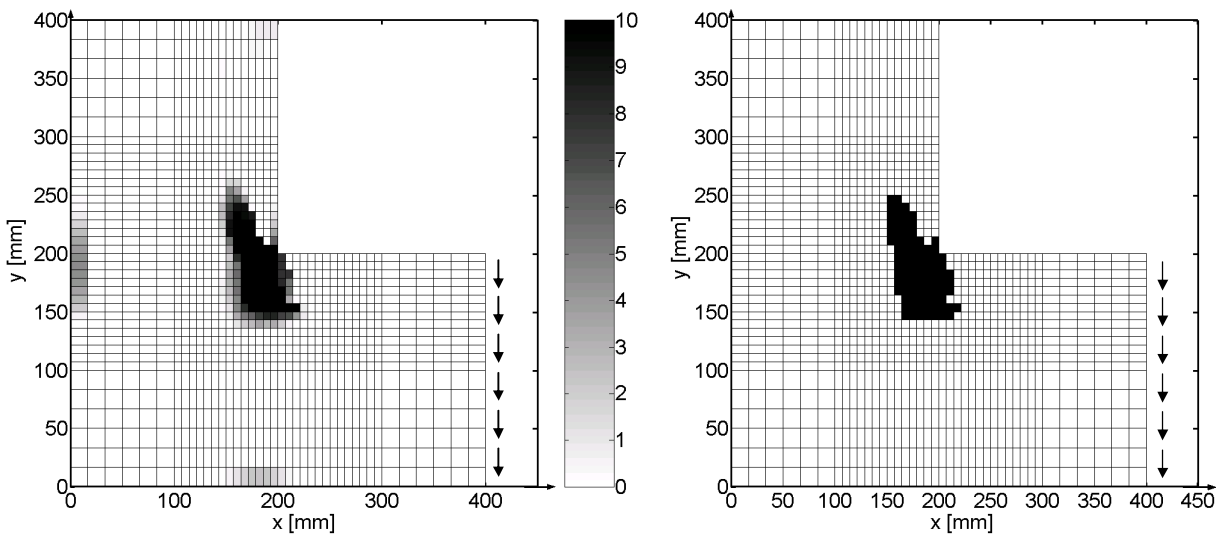


Abb. 7-7: Verteilung x^e aus Topologieoptimierung mit $x^u=10$ mm (links), und daraus resultierende Lage der diskreten Dehnungsaktuatoren mit $h_{\text{grenz}}=5$ mm (rechts)

Die Topologieoptimierung der nichtaktivierbaren Verstärkung ergibt mit $x^u = 10$ mm, $\sigma_{\text{schv}}^{\text{egrenz}} / \sigma_{\infty} = 10$ und $\sigma_{\text{sch}}^{\text{cgrenz}} / \sigma_{\infty} = 10$ die in Abb. 7-7 dargestellte Verteilung, aus der mit $h_{\text{grenz}} = 5$ mm die Lage der integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren bestimmt werden kann.

Bei der anschließenden Zonierung der Dehnungsaktuatoren ergibt sich bereits bei $n = 1$ monoaxialen Zone der Konzentrationskoeffizient der adaptiven Vergleichsspannungen zu $\xi_{\text{Sch, adapt, } n=1} = 10,6$. Das Optimierungsziel $\xi_{\text{Sch, adapt}} = 10$ wird ab $n = 3$ monoaxialen Zonen erreicht, die in Abb. 7-8 dargestellt sind.

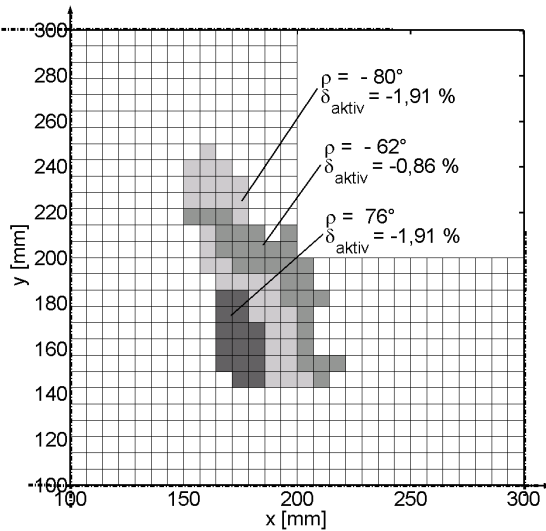
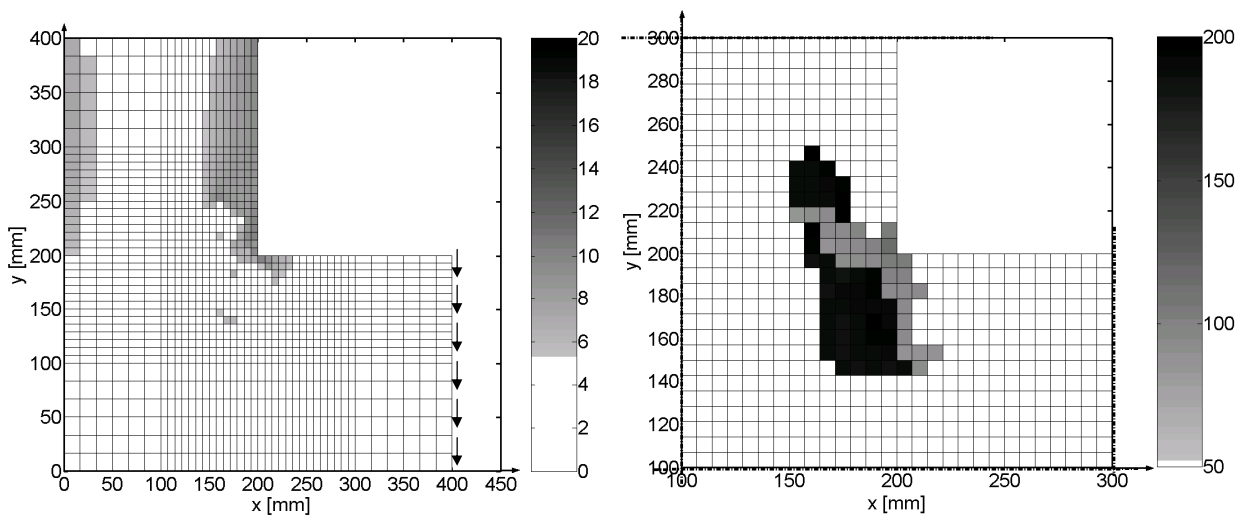


Abb. 7-8: Zonierung der integrierten Dehnungsaktuatoren mit Höhe der Aktivierung

Durch die höhere Aktivierung der Dehnungsaktuatoren, die nicht direkt in der Winkelecke liegen, wird das System so versteift, dass die hohen Spannungskonzentrationen aus der Winkelecke nach innen umverteilt werden. Somit muss der Aktuator in der Winkelecke selbst nicht mehr die volle in (7-1) ermittelte erforderliche Normalkraft, $\text{erf. } N_{\text{inf } \delta}$, durch die induzierten Dehnungen in das System einbringen. Der Maximalwert der induzierten Dehnungen und Aktuatorspannungen fällt in diesem Bereich somit niedriger, als in der Abschätzung (7-1) ermittelt, aus, siehe Abb. 7-9. Für die innen liegende Aktuatoren trifft diese Abschätzung dagegen relativ genau zu, so dass sie insgesamt als sehr effizient eingestuft werden kann.



$$\xi_{\text{Sch, adapt}} = \sigma_{v, \text{scheibe, adapt}} / \sigma_{\infty}$$

$$\xi_{\text{Aktuator, adapt}} = \sigma_{\text{Aktuator, adapt}} / \sigma_{\infty}$$

Abb. 7-9: Konzentrationskoeffizienten der adaptiven Vergleichsspannungen in der Grundplatte und in den Aktuatoren

Weiterhin ist anhand der – im Vergleich zur dehnungsaktivierten Scheibe – geringeren Spannungen der Scheibe im Bereich der Aktuatoren das unterschiedliche Tragverhalten der beiden Systeme zu erkennen: Während bei der dehnungsaktivierten Scheibe der Konzentrationskoeffizient allein durch eine Umverteilung der Beanspruchungen innerhalb der Scheibe gesenkt wird, wird bei den Scheiben mit integrierten Dehnungsaktuatoren die Entlastung der Scheibe maßgeblich durch eine Umverteilung auf die hoch beanspruchbaren Aktuatoren erreicht.

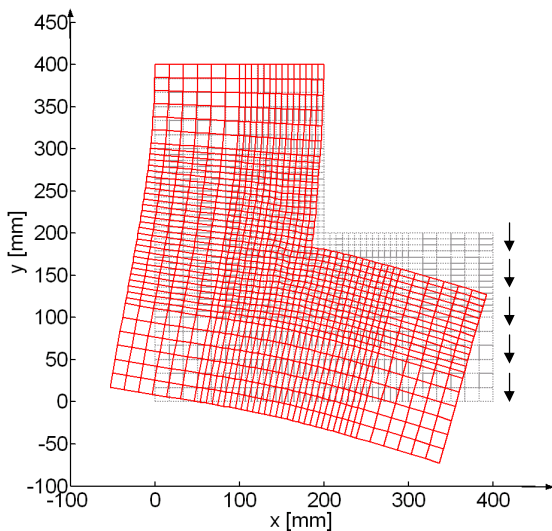


Abb. 7-10: Verformungen des Systems im adaptiven Zustand

Die Verformungen in y-Richtung im adaptiven Zustand sind um ca. 10 % geringer als im passiven Zustand, jedoch höher als bei der dehnungsaktivierten Scheibe, was auf die relativ hohen negativen Dehnungen in der Mitte des aktiven Bereiches zurückzuführen ist. Die bei der dehnungsaktivierten Scheibe auftretenden positiven Dehnungen entlang des Randes an der Winkellecke treten systembedingt bei den integrierten Dehnungsaktuatoren nicht auf, so dass trotz der größeren Verformungen $v_{y,adapt}$ der Neigungswinkel des rechten Winkelschenkels ungefähr konstant bleibt.

Zum Erreichen des Optimierungsziels ist bei dem System mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren die Arbeit $W_{\text{aktuator, integriert}} = 29820 \text{ Nmm}$ bei einem Aktuatorvolumen $V_{\text{aktuator, integriert}} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ zu induzieren. Die induzierte Arbeit ist somit, trotz des um den Faktor 160 kleineren Aktuatorvolumens, ca. 8-mal größer als die erforderliche Arbeit der dehnungsaktivierten Scheibe. Dies deckt sich mit den Ergebnissen der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt, bei der die dehnungsaktivierte Scheibe bei größerem Aktuatorvolumen eine deutlich geringere induzierte Arbeit und einen geringeren Maximalwert der induzierten Dehnungen erforderte.

Zusammenfassung

Das gewählte Optimierungsziel $\xi = 10$ kann sowohl mit der dehnungsaktivierten adaptiven Scheibe als auch mit den integrierten Dehnungsaktuatoren erreicht werden. Die am Beispiel der Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt ausgemachten Unterschiede im Tragverhalten der Scheibe und der Aktuatoren haben sich ebenso bestätigt wie die allgemeine Anwendbarkeit der vorgestellten Berechnungsverfahren.

8 Adaptive Schale mit aktiven Randbedingungen

Als dritte Form möglicher Aktuatoren für Flächentragwerke werden in 2.2 Dehnungs- bzw. Steifigkeitsaktuatoren am Rand der Systeme, also aktive Randbedingungen, vorgeschlagen. Anhand einer Schale, deren Form auf Grundlage einer pneumatisch gestützten Schalung bestimmt wurde, wird die Wirkungsweise dieser Aktuatoren überprüft.

Nachdem bereits im Rohrleitungsbau die Verwendung von Schlauchschalungen ein relativ übliches Verfahren war [55], [56], begannen um 1940 mit Neff die Untersuchungen zur Herstellung dünner Betonschalen auf pneumatisch gestützten Schalungen [30]. Sobek [73] untersuchte 1987 systematisch die möglichen Formen pneumatisch gestützter Schalungen und die daraus resultierenden Spannungszustände in den Betonschalen. Um die gewünschte Form und den Spannungszustand in der Schalungsmembran und der Betonschale zu erhalten, ist die richtige Herstellung der Schalung entscheidend. Hierbei ist zum einen eine geeignete Abwicklung der Gewebestücke, also ein geeigneter Zuschnitt, zu wählen. Zum anderen sind die Dehnungen, die sich beim Aufstellen der Schalung durch den inneren Überdruck in der Schalung aufbauen, bereits beim Zuschnitt auszugleichen. Dies entspricht sozusagen einer „Entspannung“ der zugeschnittenen Gewebestücke und wird als *Kompensation* bezeichnet. Sobek stellt fest, dass eine Kompensation nicht nur für die Schalungsmembran sondern auch für die Schalen an sich erforderlich ist: Da die Schalen erst bei Ablassen der Schalung und der damit einhergehenden Deformation ihren Spannungszustand aufbauen, ist die Schalung also entsprechend zu überhöhen. Auf diese Weise können die Verformungen der Schalen in Schalenmitte kompensiert werden. Entlang des Schalenrandes jedoch kann die Schalung diese Kompensation nicht leisten, sondern:

Die Lagerung müsste so beschaffen sein, dass einzelnen Punkten am Schalenrand gezielte Verschiebungen aufgezwungen werden [73].

Diese Eigenschaften können am Systemrand platzierte Dehnungsaktuatoren aufweisen. Im Folgenden wird deswegen überprüft, ob das oben beschriebene Kompensationsproblem von Schalen auf pneumatisch gestützten Schalungen mit solchen Aktuatoren gelöst werden kann. Ziel der Adaption ist hierbei, die in der Schale auftretenden Zugspannungen auf den Wert Null zu reduzieren.

Systembeschreibung und Analyse des passiven Beanspruchungszustandes

Die untersuchte Schale hat einen quadratischen Grundriss mit einer Spannweite $d = 12$ m, eine Dicke $h = 50$ mm, einen E-Modul $E = 30.000$ N/mm² und ist entlang ihres Randes in allen drei Koordinatenrichtungen fest gelagert. Die Form ihrer Schalung wird durch den Quotienten aus Innendruck p_i und Schalungsmembrankraft n , der hier mit $p_i/n = 0,1$ gewählt wird, bestimmt. Und sie wird, wie von Sobek [73] vorgeschlagen, näherungsweise durch die Lösung der Bedingungsgleichungen mit dem Differenzenverfahren [59], [60] berechnet. Es ergibt sich die in Abb. 8-1 dargestellte Geometrie der Schale, die bei einem Stich von 1,09 m ein Stich/Spannweitenverhältnis $z_0/d = 0,091$ aufweist. Die Schale wird unter ihrem Eigengewicht untersucht, das bei einer angesetzten Wichte $\gamma = 25$ kN/m³ einer Flächenlast $p = 1,25$ kN/m² entspricht.

Die Berechnungen des Systems erfolgen, wie in den vorherigen Kapiteln mit MATLAB. Die FE-Berechnungen werden hierbei mit der Toolbox CALFEM durchgeführt, die für das vorliegende Problem von Vinçon [87] erweitert wurde. Hierbei wird unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen jeweils die in Abb. 8-1 hervorgehobene Viertelschale betrachtet.

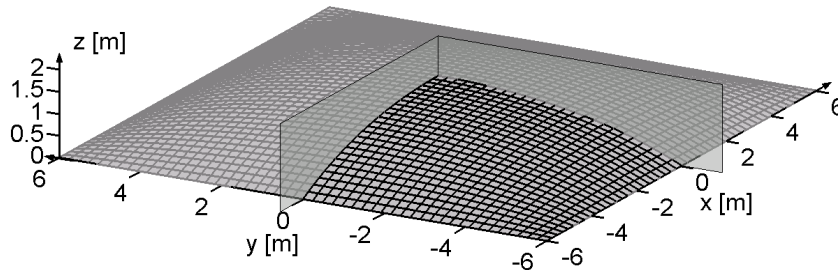


Abb. 8-1: Geometrie und Vernetzung der untersuchten Schale

Wie die Verteilung der passiven Spannungen zeigt, sind die Störungen des homogenen Spannungszustandes aufgrund der Richtungsabweichung zwischen Innendruck- und Eigengewichtslastvektoren und aufgrund der fehlenden Kompensation der Betonschalen erheblich. Gegenüber der nahezu ungestörten Beanspruchung in Schalenmitte mit $\sigma_{\infty} = \sigma_{1, \text{passiv}} = \sigma_{2, \text{passiv}} = -0,25 \text{ N/mm}^2$ treten am Schalenrand um bis zu 35 % erhöhte Druckspannungen ($\sigma_{II} / |\sigma_{\infty}| = -1,35$) auf. Zudem wird die Schalenecke mit Zugspannungen belastet, deren Betrag ca. 70 % der Grundspannung ($\sigma_I / |\sigma_{\infty}| = 0,7$) entspricht.

Hauptspannungstrajektorien

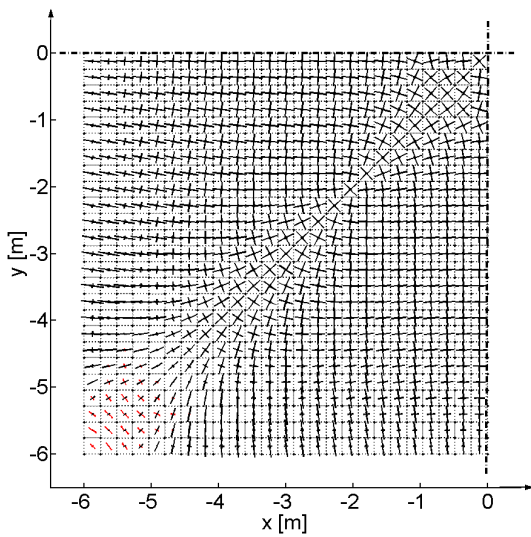
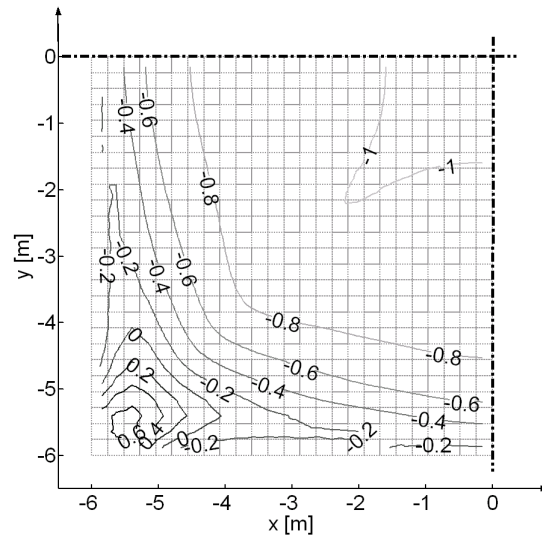
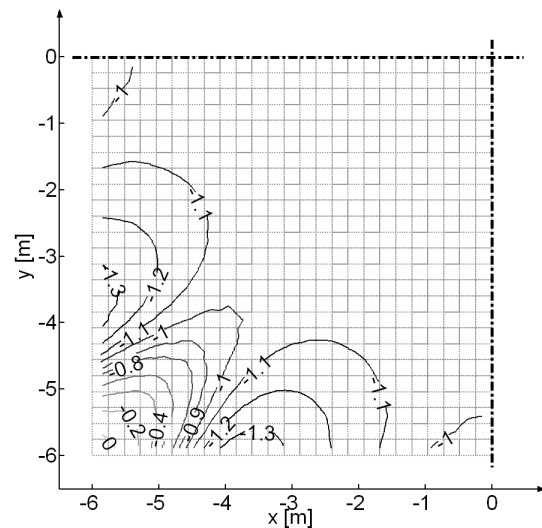
Verhältnis der Spannungen $\sigma_I / |\sigma_\infty|$ Verhältnis der Spannungen $\sigma_{II} / |\sigma_\infty|$ 

Abb. 8-2: Hauptspannungen der Schale im passiven Zustand unter Eigengewicht

Somit kann also für eine Homogenisierung des Beanspruchungszustandes neben dem bereits oben aufgestellten Ziel der Reduktion der Zugspannungen auf den Wert Null ein zweites, untergeordnetes Ziel definiert werden: Reduktion der erhöhten Druckspannungen im Schalenrandbereich.

Adaptives System

Die Dehnungsaktuatoren am Schalenrand werden so angeordnet, dass beliebige randparallele Verschiebungen in die Schale induziert werden können. Die randparallelen Verschiebungen einer Seite in der Schalenecke werden als senkrecht zum Schalenrand ausgerichtete Verschiebungen in der anschließenden Seite fortgeführt, siehe Abb. 8-3. Zur Erfüllung der Symmetriebedingungen müssen die randparallelen Verschiebungen $v_{\text{aktiv II}}$ in den Symmetrieachsen jeweils den Wert Null annehmen, so dass sich der beispielhaft dargestellte Verlauf der Randverschiebungen ergibt.

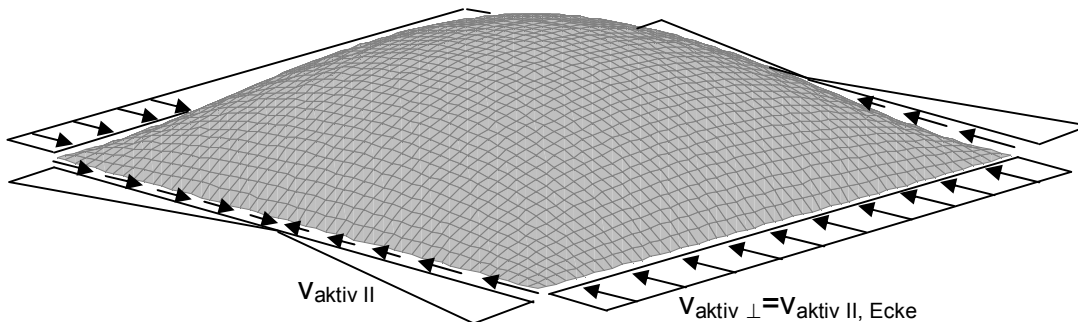


Abb. 8-3: Schematische Darstellung der Verschiebung des Schalenrandes am Beispiel einer linear zunehmenden Aktivierung auf einer Schalenseite

Ziel der Untersuchungen ist es, den optimalen Verlauf der randparallelen Auflagerverschiebungen $v_{\text{aktiv, II}}$ zu ermitteln. Hierzu wird, um eine Kontinuität der Randverschiebungen zu gewährleisten, wie bei den dehnungsaktivierten Scheiben, der Verlauf der Aktivierung mit formbeschreibenden Funktionen angenähert. An Stelle der diskreten Werte der induzierten Auflagerverschiebungen v_{aktiv} werden somit im Entwurfsvektor \mathbf{x} die Kontrollknotenwerte der formbeschreibenden Funktion berücksichtigt, und der Zusammenhang aus Kontrollknotenwerten und Auflagerverschiebungen wird mit der formbeschreibenden Funktion $v_{\text{aktiv}}=g(\mathbf{x})$ dargestellt.

Der Zusammenhang zwischen induzierten Auflagerverschiebungen und aktivierten Spannungen ist linear. Dies kann – analog zum Vorgehen bei der dehnungsaktivierten Scheibe, siehe Kapitel 5.2.2 – zur Verkürzung der Rechenzeiten ausgenutzt werden, indem zunächst für Einheitsänderungen der Kontrollknotenwerte die Sensitivitäten $S_{\sigma_x}, S_{\sigma_y}, S_{\tau_{xy}}$ der aktivierten Spannungen berechnet werden (siehe (5-16)). Die adaptiven Spannungen berechnen sich anschließend aus folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{adapt}} &= \sigma_{\text{passiv}} + \sigma_{\text{aktiv}} \\ (8-1) \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{aktiv}} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \\ \text{mit} \quad v_{\text{aktiv}} &= g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

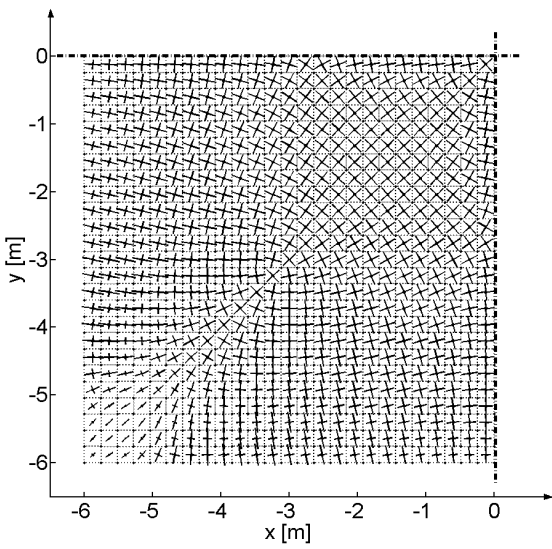
Die beiden oben definierten Ziele des adaptiven Systems – *minimiere die auftretenden Zugspannungen auf den Wert Null* und *reduziere dabei die auftretenden Druckspannungen so weit möglich* – können mit diesen Ansätzen und aufgrund ihrer eindeutigen Wichtung als folgende hierarchisch formulierte Optimierungsaufgabe dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiere } f(\mathbf{x}) = \sigma_{\text{adapt, min absolut}} \\
& \text{mit } \sigma_{\text{adapt, min absolut}} = \left| \text{Min} \left[\text{Min}(\sigma_{\text{I, adapt}}) \quad \text{Min}(\sigma_{\text{II, adapt}}) \right] \right| \\
& \text{unter Einhaltung der Ungleichheitsnebenbedingung} \\
& \quad \sigma_{\text{adapt, max}} \leq 0 \\
(8-2) \quad & \text{mit } \sigma_{\text{adapt, max}} = \text{Max} \left[\text{Max}(\sigma_{\text{I, adapt}}) \quad \text{Max}(\sigma_{\text{II, adapt}}) \right] \\
& \text{mit } \sigma_{\text{adapt}} = \sigma_{\text{passiv}} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \\
& \text{und unter Einhaltung der Gleichheitsnebenbedingung} \\
& \quad v_{\text{aktiv II, Symmetrieachse}} = 0 \\
& \text{mit } v_{\text{aktiv}} = g(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

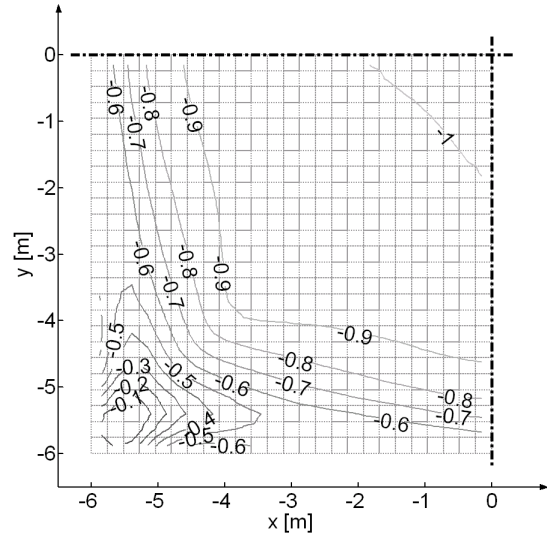
Die Optimierungsaufgabe wird mit der Funktion *fmincon*, die Teil der OPTIMIZATION TOOLBOX von MATLAB ist, gelöst.

Die Berechnungen zeigen, dass bereits bei Verwendung der einfachsten formbeschreibenden Funktion – einer Geraden – das primäre Optimierungsziel der Vermeidung aller Zugspannungen in der Schale erreicht werden kann, siehe Abb. 8-4. Die maximal auftretende adaptive Druckspannung nimmt hierbei den Wert $\sigma_{\text{adapt, min, abs}} = -1,27 |\sigma_{\infty}|$ an und ist somit um ca. 5 % kleiner als im passiven Zustand. Die Verwendung anderer formbeschreibender Funktionen, die beispielhaft für einen B-Spline mit 12 Kontrollknoten in Abb. 8-5 dargestellt ist, führt zu weiteren Verbesserungen des Spannungszustandes bis zum Wert $\sigma_{\text{adapt, min, abs}} = -1,21 |\sigma_{\infty}|$ für die maximal auftretende adaptive Druckspannung. Dieser Wert entspricht einer Reduktion um 12 % gegenüber dem passiven Zustand und wird ab einer Anzahl von $n_r = 8$ Kontrollknoten für alle Splines erreicht.

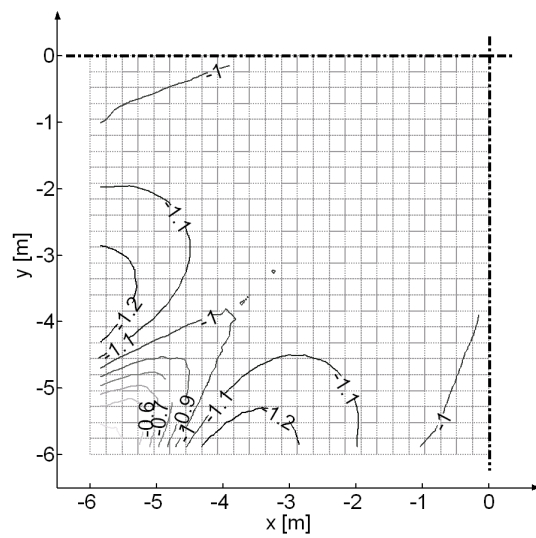
Hauptspannungstrajektorien



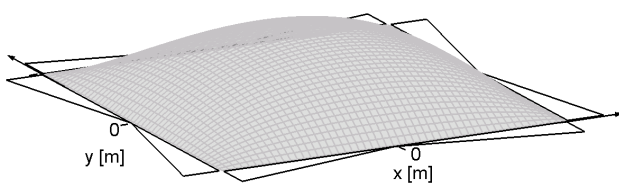
Verhältnis der Spannungen $\sigma_I / |\sigma_\infty|$



Verhältnis der Spannungen $\sigma_{II} / |\sigma_\infty|$



Verlauf der randparallelen Aktivierung



Schematische Darstellung der im Diagramm rechts dargestellten Verschiebungen v_{aktiv} am Gesamtsystem

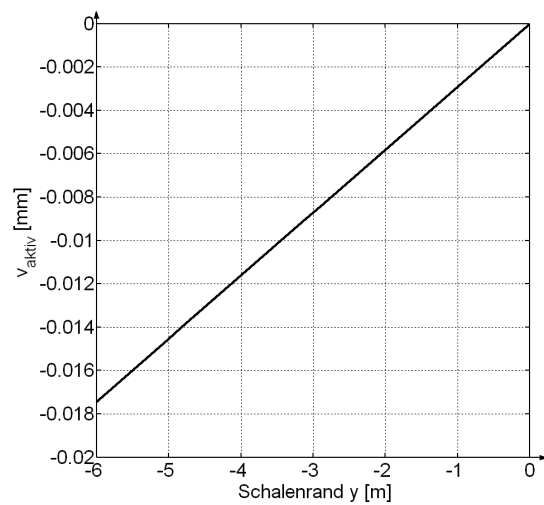
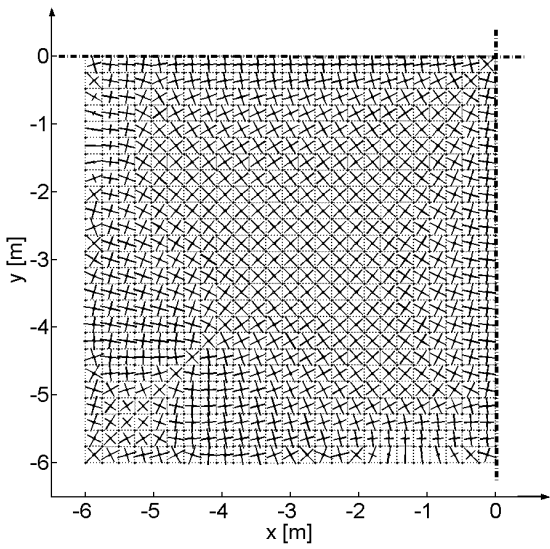
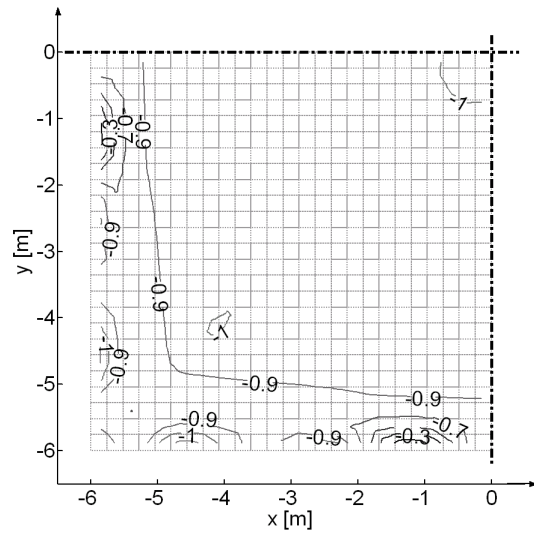


Abb. 8-4: Verlauf der adaptiven Hauptspannungen mit Gerade als formbeschreibender Funktion und zugehöriger Verlauf der randparallelen Aktivierung

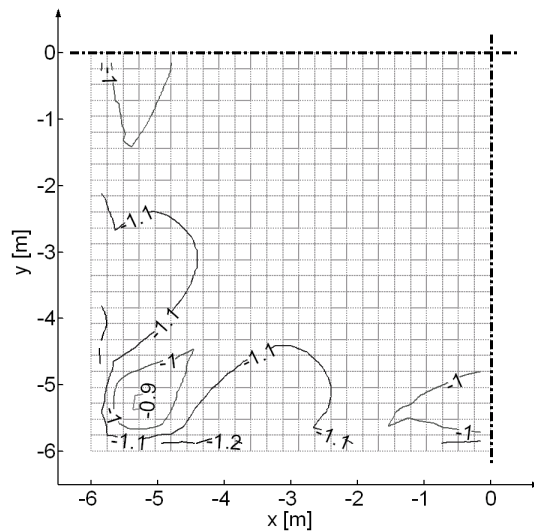
Hauptspannungstrajektorien



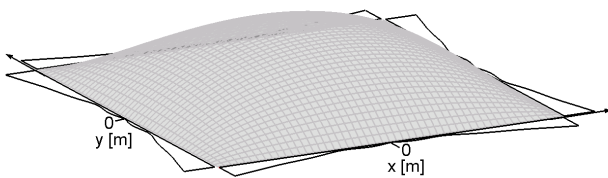
Verhältnis der Spannungen $\sigma_1 / |\sigma_\infty|$



Verhältnis der Spannungen $\sigma_{II} / |\sigma_\infty|$



Verlauf der randparallelen Aktivierung



Schematische Darstellung der im Diagramm rechts dargestellten Verschiebungen v_{aktiv} am Gesamtsystem

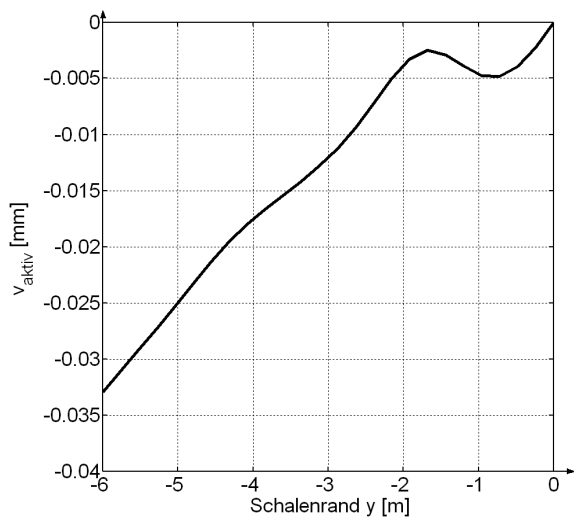


Abb. 8-5: Verlauf der adaptiven Hauptspannungen mit Spline als formbeschreibender Funktion und zugehöriger Verlauf der randparallelen Aktivierung (Anzahl der Kontrollknoten $n_r = 12$)

Die Reduktion der maximal auftretenden Druckspannung auf $\sigma_{\text{adapt, min, abs}} = -1,21 |\sigma_{\infty}|$ bei gleichzeitigem Vermeiden von Zugspannungen in der Schale kann jedoch mit verschiedenen verlaufenden Splines erzielt werden, so dass für diese ein weiteres Kriterium zur Bewertung der Lösungen bestimmt werden muss. Ein solches Kriterium kann die bereits in den vorherigen Abschnitten betrachtete induzierte Arbeit darstellen. Diese verhält sich proportional zum Integral der randparallelen Aktivierung im Quadrat, so dass die Optimierungsaufgabe aus (8-2) unter Einbeziehung der erreichten Spannungsgrenzen zu (8-3) umformuliert werden kann:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiere } f(\mathbf{x}) = W_{\text{schalenrand}} = \int (v_{\text{aktiv II}}(\mathbf{x}))^2 \\
 & \text{unter Einhaltung der Ungleichheitsnebenbedingungen} \\
 & \quad \sigma_{\text{adapt, max}} \leq 0 \\
 (8-3) \quad & \text{mit } \sigma_{\text{adapt, max}} = \text{Max}[\text{Max}(\sigma_{\text{I, adapt}}) \quad \text{Max}(\sigma_{\text{II, adapt}})] \\
 & \text{und } \sigma_{\text{adapt, min absolut}} \leq 1,21 \cdot \sigma_{\infty} \\
 & \text{mit } \sigma_{\text{adapt, min absolut}} = |\text{Min}[\text{Min}(\sigma_{\text{I, adapt}}) \quad \text{Min}(\sigma_{\text{II, adapt}})]| \\
 & \text{und unter Einhaltung der Gleichheitsnebenbedingung} \\
 & \quad v_{\text{aktiv II, Symmetrieachse}}(\mathbf{x}) = 0
 \end{aligned}$$

Die Berechnung dieser Optimierungsaufgabe für verschiedene Splines zeigt jedoch auf, dass die Werte $W_{\text{schalenrand}}$ sich bereits bei geringfügigen Änderungen der Ungleichheitsnebenbedingungen für $\sigma_{\text{adapt, min absolut}}$, zum Beispiel zu $\sigma_{\text{adapt, min absolut}} \leq -1,24 \cdot |\sigma_{\infty}|$, signifikant ändern. In Kombination mit den durch die Diskretisierung des Modells entstehenden Ungenauigkeiten können deswegen für diese Berechnung auf Grundlage von (8-3) keine weiteren Bewertungskriterien für die mit (8-2) gefundenen Lösungen ermittelt werden.

Die Empfindlichkeit der induzierten Arbeit in Bezug auf die auftretenden Druckspannungen in der Schale wirft jedoch die Frage auf, ob nicht im Sinne einer wirtschaftlichen Lösung die Reduktion der induzierten Arbeit als sekundäres Optimierungsziel neben der Vermeidung von Zugspannungen formuliert werden sollte. Wie Abb. 8-6 zeigt, steht nämlich einer erreichbaren Reduktion der Druckspannungen um max. 12 % gegenüber dem passiven Zustand eine Erhöhung der induzierten Arbeit um den Faktor $f \approx 10$ gegenüber.

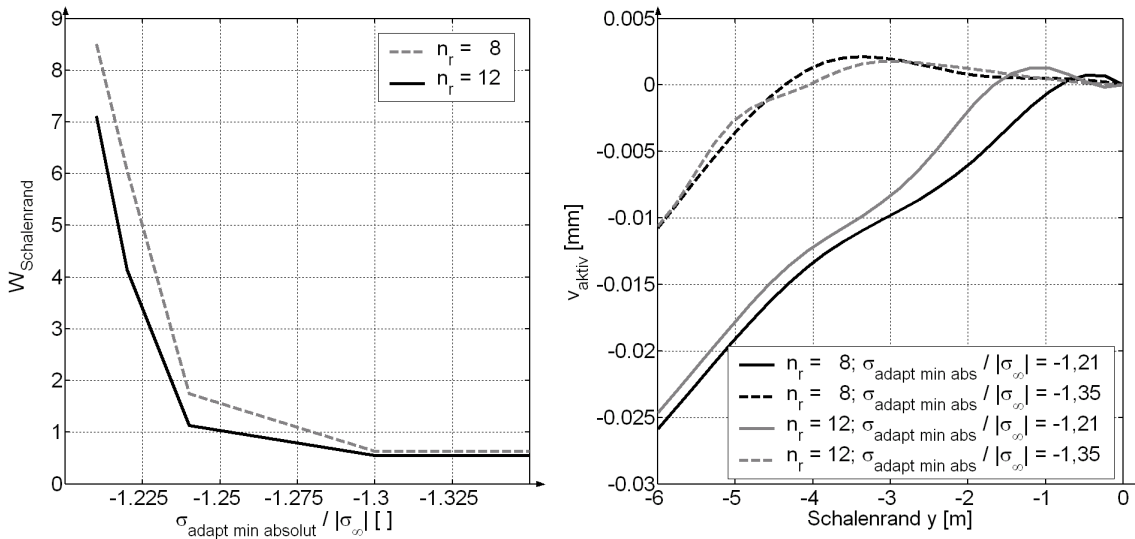


Abb. 8-6: Integral der induzierten randparallelen Verschiebungen $W_{\text{Schalenrand}} = \int (v_{\text{aktiv}}(\mathbf{x}))^2$ in Abhängigkeit von der maximalen adaptiven Druckspannung und zugehörige Verläufe der Aktivierung

Zusammenfassung

Das hier dargestellte Beispiel zeigt auf, dass mit am Rand angeordneten Aktuatoren das Tragverhalten von Flächentragwerken maßgeblich beeinflusst werden kann. Hierfür wurden Schalen mit Störungen des Spannungszustandes im Randbereich der Schale untersucht. Das von Sobek dargestellte Kompensationsproblem [73] kann mit diesem Ansatz insofern gelöst werden, dass in der Schale keine Zugspannungen mehr auftreten. Die adaptiven Druckspannungen können hierbei gegenüber dem passiven Zustand verringert werden. Ihrer relativ geringen möglichen Reduktion steht jedoch eine deutliche Erhöhung der induzierten Arbeit gegenüber, so dass im Rahmen einer Überprüfung der Wirtschaftlichkeit eventuell auf dieses sekundäre Optimierungsziel verzichtet werden sollte.

Bei dem dargestellten Beispiel sind die erforderlichen induzierten Verschiebungen und die damit verbundenen Dehnungen sehr klein, da nur Eigengewichtslasten der Schalen betrachtet wurden. Da die Druckspannungen im dargestellten Beispiel nur ca. $1/7$ der zulässigen Betonspannungen erreichen, ist mit der Reduktion der Zugspannungen auf den Wert Null nun aber eine deutliche Steigerung der Belastungen bzw. eine Reduktion der Dicke der Betonschalen möglich.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden drei verschiedene Ausbildungen von Aktuatoren in adaptiven Scheiben und Schalen betrachtet. Neben einer allgemeinen Betrachtung ihrer Wirkungsweise wird für alle Systeme ein Vorgehen zur Berechnung auf Basis der Finiten-Element-Methode vorgestellt und anhand von Beispielen überprüft. Bei den dehnungsaktivierten Scheiben und bei den Systemen mit adaptiven Randbedingungen konzentrieren sich die Berechnungen auf die Ermittlung des Verlaufs der Aktivierungen, die unter anderem mittels formbeschreibender Funktionen angenähert werden. Die Wahl der Lage der Aktuatoren, die bei diesen Systemen eine eher untergeordnete Rolle spielt, ist bei den Systemen mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren maßgebend. Das gewählte Vorgehen, das zunächst die Lage nichtaktivierbarer lokaler Verstärkungen mittels Topologieoptimierung bestimmt, ermöglicht die Bestimmung minimaler Aktuatorflächen unter Berücksichtigung zulässiger Aktuatorspannungen und -dehnungen.

Anhand der untersuchten Beispiele – Scheibe mit Ausschnitt, abgewinkelter Kragträger und Schale auf pneumatischer Schalung – kann das große Potential der adaptiven Systeme für Scheiben und Schalen verdeutlicht werden. Die gewählten Ziele der Adaption – Reduktion von Spannungskonzentrationen bzw. Reduktion der auftretenden Zugspannungen – ergeben sich dabei jeweils aus dem Tragverhalten der Systeme, deren Effektivität im Sinne des Leichtbaus auf einer gleichmäßigen Verteilung der Beanspruchungen und einer damit einhergehenden gleichmäßigen Ausnutzung des eingesetzten Materials beruht. Durch die Einführung der Adaptivität in diese Systeme kann nun auf Störungen homogener Spannungsfelder so effektiv reagiert werden, dass auf lokale Verstärkungen oder auf Überdimensionierung bei konstanter Querschnittsdicke verzichtet werden kann. Das bei nicht adaptiven Strukturen zusätzlich erforderliche Material wird bei adaptiven Strukturen durch Energie ersetzt und ermöglicht somit eine neue Dimension des Leichtbaus.

Weiterhin kann aufgezeigt werden, dass die Reduktion des Maximalwerts der auftretenden Spannung als alleiniges Optimierungsziel oft nicht zu einem eindeutigen Verlauf der Aktivierung führt. Wie die beispielhaften Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen, können weitere Optimierungsziele somit ohne Verschlechterung des Konzentrationskoeffizienten in den Entwurf miteinbezogen werden.

Für die dehnungsaktivierte Scheibe wird als weiteres Optimierungsziel die Reduktion der Spannungen in weniger hoch beanspruchten Bereichen gewählt. Der hierarchische Aufbau der Optimierung ermöglicht hierbei einen effizienten und verlässlich konvergierenden Berechnungsalgorithmus.

Bei den Scheiben mit integrierten Dehnungsaktuatoren ist aufgrund der lokalen Begrenzung der Aktuatoren die Manipulation der Beanspruchungen in gering beanspruchten Bereichen nur eingeschränkt möglich. Eine größere Bedeutung haben hier die Beanspruchungen der Aktuatoren, die deswegen als weiteres Optimierungsziel in der Zielfunktion mitberücksichtigt werden. Eine Wichtung der beiden Zielfunktionen – Reduktion des Konzentrationskoeffizientens und Reduktion der Aktuatorbeanspruchungen – erweist sich zur Lösung dieser Optimierungsaufgabe als geeignet.

Die Berechnungen der Schale mit adaptiven Randbedingungen zeigen, dass auch andere Kriterien – insbesondere die zu induzierende Arbeit – in die Betrachtung mit einbezogen werden können. Eine stärkere Integration der zu induzierenden Arbeit sollte Ziel weiterer Untersuchungen sein, da sie in adaptiven Systemen einen Teil der Kosten darstellt, die in der Bewertung der Effektivität eines Entwurfs mit einfließen.

Der Einfluss von Verformungsrestriktionen wird nicht systematisch untersucht. Das Beispiel des abgewinkelten Kragträgers zeigt jedoch auf, dass die Reduktion der Spannungskonzentrationen nicht unbedingt zu größeren Tragwerksverformungen führen muss, sondern sogar im Gegenteil eine gleichzeitige Reduktion der Verformungen möglich ist.

Mit diesen Betrachtungen können die vielfältigen bisher durchgeführten Untersuchungen zu flächigen adaptiven Tragwerken um den Aspekt der Optimierung des inneren Beanspruchungszustandes ergänzt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur zeitlich invariante Problemstellungen betrachtet, die in späteren Untersuchungen um den zeitlichen Aspekt erweitert werden sollten. Dies würde letztendlich eine Verbindung der bestehenden dynamischen Untersuchungen zum Schwingungsverhalten mit den hier vorliegenden Untersuchungen darstellen. Weiterhin sind hier noch Fragen der Stabilität zu klären.

Umsetzungen flächiger adaptiver Tragwerke mit dem Ziel der Verbesserung des Tragverhaltens sind im Bauwesen nicht bekannt. Für die Umsetzung dehnungsaktivierter Scheiben, die bei kleinen Dimensionen unter der Verwendung von Smart Materials möglich erscheint, fehlen heute noch die entsprechenden Untersuchungen bzw. Materialien im baupraktischen Größenbereich. Die Umsetzung integrierter diskreter Dehnungsaktuatoren ist schon weiter fortgeschritten und auch für baupraktische Dimensionen bei Ausbildung der Dehnungsaktuatoren als Fasern äquivalenter Dicke denkbar. Hier sind besonders die Verteilung der Fasern, der Verbund zwischen aktiven Fasern und Grundsystem und die Regelung des Systems zu beachten. Eine Aktivierung der Flächentragwerke von ihrem Rand aus ist technisch am einfachsten zu realisieren. Hier bleibt zu untersuchen, ob und welche anderen Beanspruchungszustände manipuliert werden können. Da die hier betrachtete Neutralisierung der Zugspannungen infolge Eigengewicht lediglich eine einmalig auszuführende Adaption der Randbedingungen darstellt, wären in diesem Fall die aktiven Elemente am Rand des Systems nur temporär – nämlich während der Bauphase – erforderlich. Der Vorteil der adaptiven Systeme, sich fortwährend an veränderte Umgebungsbedingungen anpassen zu können, würde somit nicht ausgeschöpft werden.

Entscheidend für die Durchsetzungsfähigkeit adaptiver Systeme ist eine grundlegend andere Herangehensweise an den Entwurf. Hierbei dürfen die Aktuatoren nicht nur als ergänzendes Element des passiven Systems angesehen werden, sondern sie müssen integraler Bestandteil der Gesamtstruktur werden. Nur so kann das Potential der adaptiven Systeme voll ausgenutzt werden. Dies bedeutet aber auch, dass Sensoren und Regelung von Anfang an Teil des Entwurfs sein müssen. Daraus ergibt sich die Erfordernis einer weit spannenden interdisziplinären Zusammenarbeit.

Literaturverzeichnis

- [1] Abdel-Motagaly, K.; Guo, X.; Duan B.; Mei, C. (2005): "Active Control of Nonlinear Panel Flutter under Yawed Supersonic Flow", AIAA Journal 43 (3), 671-680.
- [2] Abdel-Rohmann, M. (1987): "Feasibility of Active Control of Tall Buildings Against Wind", Journal of Structural Engineering 113 (2), 349-362.
- [3] Balamurugan, V.; Narayanan, S. (2001): "Active Vibration Control of Smart Shells Using Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators", Smart Materials and Structures 10, 173-180.
- [4] Baumgartner, A.; Harzheim, L.; Mattheck, C. (1992): „SKO (Soft Kill Option): The biological way to find an optimum structure topology"; International Journal of Fatigue 14 (6), 387-393.
- [5] Bendsoe, M.P.; Sigmund O. (2003): Topology Optimization- theory, Methods and Applications, Springer Verlag, Berlin.
- [6] Berke, L.; Khot, N.S. (1987): "Structural Optimization using Optimality Criteria", in Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems edited by Mota Soares C.A., NATO ASI Series, Series F 27, Springer, Berlin, 271-311.
- [7] Bickley, W. G. (1928): "The Distribution of Stress Round a Circular Hole, Philosophical Transaction of the Royal Society of London 227, 383-415.
- [8] Birker, T. (1996): New developments in structural Optimization using Optimality criteria, Dissertation, Universität Essen, VDI-Fortschrittsberichte Reihe 18, Nr. 199 VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [9] Bletzinger, K.-U. (1990): Formoptimierung von Flächentragwerken, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 11.
- [10] Bletzinger, K.-U.; Kimmich, S. (1985): Strukturoptimierung, Konzepte SFB 230 Heft 7.
- [11] Böhm W.; Farin G.; Kahmann, J.(1984): "A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD", Computer Aided Geometric Design 1,1-60.
- [12] Bouten, H. (1986): Aktive Unterdrückung von Durchbiegungen und Schwingungen bei Biegetragwerken, Dissertation, RWTH Aachen.
- [13] Braibant V.; Fleury, C. (1984): "Shape Optimal Design Using B-Splines", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 44, 247-267.
- [14] Brayton, R. K.; Director, S.W.; Hachtel, G.D.; Vivigal, L.M. (1979): "A New Algorithm for Statistical Circuit Design Based on Quasi-Newton-Methods and Function Splitting", IEEE Transactions on Circuits and Systems 26 (9), 784-794.

- [15] CALFEM, A finite element toolbox to MATLAB Version 3.3, Department of mechanics and Materials, University of Lund, Sweden.
- [16] Charalambous, C.; Conn, A.R. (1978): "An Efficient Method to Solve the Minimax Problem Directly"; SIAM Journal on Numerical Analysis 15 (1), 162-187.
- [17] Clark R. L.; Saunders, W. R.; Gibbs, G. P. (1998): Adaptive Structures- Dynamics and Control, John Wiley and Sons, New York.
- [18] Dent, R. N. (1971): Principles of Pneumatic Architecture, The Architectural Press, London.
- [19] Ding, Yunliang (1986): "Shape Optimization of Structures: A literature survey", Computers and Structures 24, 985-1004.
- [20] Domke, H. (1991): „Aktive Kontrolle von Tragwerken“, Der Bauingenieur 66, 205-213.
- [21] Fest, E.; Shea, K.; Smith, F.C. (2004): „Active Tensegrity Structure“, Journal of Structural Engineering, 130 (10), 1454-1465.
- [22] Fleury, C. (1979): "A Unified Approach to Structural Weight Minimization", Computer Methods in applied mechanics and engineering 20, 17-38.
- [23] Föppl, L. (1947): Drang und Zwang-Dritter Band: Der ebene Spannungszustand, Leibniz Verlag, München.
- [24] Furuya, H. (1997): „Simultaneous optimization for topology and actuator locations on truss structures“, in Computer Aided Optimum Design of Structure 5 edited by Hernández S., Brebbia C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, 437-445.
- [25] Gabbert, U. (2002): Abschlußbericht des DFG Innovationskollegs INK 25 B1-1, Adaptive Mechanische Systeme (ADAMES), Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.
- [26] Gellatly, R.; Thom, R. (1982): "Optimality Criteria Using a Force Method Analysis Approach", in Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach edited by Morris, A. J., John Wiley and Sons, Chichester, 237-272.
- [27] Girkmann, K. (1963): Flächentragwerke, Springer Verlag, Wien.
- [28] Gupta, V. K.; Sechu, P.; Issac, K. K. (2004): „Finite Element and Experimental Investigation of Piezoelectric Actuated Smart Shells“, AIAA Journal 42 (10), 2112-2123.
- [29] Haug, E. J.; Arora, J. S. (1979): Applied Optimal Design- Mechanical and Structural Systems, John Wiley & Sons, New York.

-
- [30] Herzog, T. (1976): Pneumatische Konstruktionen- Bauten aus Membranen und Luft, Verlag Gerd Hatje, Stuttgart.
- [31] Hirsch, G. (1999): "Adaptronics in Civil Engineering Structures" in Adaptronics and Smart Structures edited by Janocha, H., Springer Verlag, Berlin.
- [32] Holnicki-Szulc, J.; Gierlinski, J. T. (1995): Structural Analysis, Design and Control by the Virtual Distortion Method, John Wiley and Sons, Chichester.
- [33] Housner, G. W.; Bergmann L. A.; Caughey, T. K. et al. (1997): „Structural Control: Past, Present and Future“, Journal of Engineering Mechanics 123 (9), 897-971.
- [34] Isermann, R. (1999): Mechatronische Systeme – Grundlagen, Springer Verlag, Berlin.
- [35] Janocha, H. (1999): Adaptronics and Smart Structures, Springer Verlag, Berlin.
- [36] Kang, Y. K.; Park, H. C.; Hwagn, W.; Han, K.S. (1996): "Optimum Placement of Piezoelectirc Sensor/actuator for Vibration Control of Laminated Beams", AIAA Journal 34 (9),1921-1926.
- [37] Kapania, R. K.; Sheng, L. (2002): "Toward More Effective Genetic Algorithms for the Optimization of Piezoelectric Actuator Locations", AIAA Journal 40 (6), 1246-1250.
- [38] Khot, N. S.; Berke, L. (1984): "Structural Optimization using Optimality Criteria Methods", in New Directions in Optimum Structural Design edited by Atrek, E.; Gallagher R. H.; Ragsdell K. M.; Zinekiewicz, O. C., John Wiley and Sons, Chichester, 47-74.
- [39] Kirsch, G. (1898): „Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre“, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 42 (29),797-807.
- [40] Kobori, T.; Minai R. (1960): „Analytical Study on Active Seismic Response Control“, Transactions of the Architectural Institute of Japan 66, 257-260.
- [41] Korvinc, J. G.; Schlaich, M. (2000): „Autonome Brücken - ein Blick in die Ferne Zukunft des Brückenbaus“, Der Bauingenieur 75 (1), 29-34.
- [42] Kriechbaum, R. (1994): Ein Verfahren zur Optimierung der Faserverläufe in Verbundwerkstoffen durch Minimierung der Schubspannungen nach Vorbildern der Natur, Kernforschungszentrum Karlsruhe KfK 5406.
- [43] Ledermann, M. (2002):Beiträge zur Optimierung von Faserverbunden nach dem Vorbild der Natur, Dissertation, Institut für Materialforschung, Universität Karlsruhe, Forschungszentrum Karlsruhe Wissenschaftliche Berichte FZKA 6779 (2003).
- [44] Leon A. (1908): „Über die Spannungsstörungen durch Kerben und Tellen“, Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst 14, 770-776.

- [45] Luo, N.; De La Sen, M.; Rodellar, J.; Magaña, M. E. (1999): "Decentralized Sliding Mode Control of Two-Cable-Stayed Bridge" in Smart Structures edited by Holnicki-Szulc, J.; Rodellar, J., Dordrecht, Kluwer Academic, 183-192.
- [46] Madsen, K. (1975): "An Algorithm for Minimax Solution of Overdetermined Systems of Nonlinear Equations"; Journal of the Institute of Mathematics and its Applications 16, 321-328.
- [47] Mansfield, E. H. (1953): "Neutral Holes in Plane Sheets- Reinforced Holes which are Elastically Equivalent to the Uncut Sheet", The Quarterly Journals of Mechanics and Applied Mathematics 6 (3), 370-378.
- [48] Masri, S.F.; Bekey G.A.; Udwadia F.E. (1980): "On-Line Pulse Control of Tall Buildings", in Structural Control, Proceedings of the International IUTAM Symposium, University of Waterloo edited by Leipholz H.H.E., North Holland Publishing Company, Amsterdam, 471-492.
- [49] MathWorks (2002): Optimization Toolbox- For Use with MATLAB.
- [50] MathWorks (2002): Using MATLAB.
- [51] Mattheck, C. (1998): Design in nature-Learning from Trees; Springer Verlag, Berlin.
- [52] Mattheck, C.; Burkhardt S. (1990): " A new method of structural shape optimization based on biological growth"; International Journal of Fatigue 12 (3), 185-190.
- [53] Michell, A.G. M. (1904): „The limits of economy of materials in frame structures“, Philsophical magazine and journal of science 8 (47), 589-597.
- [54] Müller, S. (2000): Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken, Dissertation, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 122.
- [55] N.N. (1938): "Casting Pipes around a Rubber Core", Concrete and Constructional Engineering 11, 568-569.
- [56] N.N. (1947): "Culverts Constructued with Pneumatic Cores", Concrete and Constructional Engineering 9, 279.
- [57] Palenterä, M. J.; Sensharma, P.K.; Haftka, R. T. (1992): „Stress Reduction in an Isotropic Plate with Hole by Applied Induced Strains“ in Active Materials and Adaptive Structures, Proceedings of the ADPA/AIAA/ASME/SPIE Conference on Active Materials and Adaptive Structures edited by Knowles, G. E., Institute of Physics Publishing, Bristol, 645-650.
- [58] Preumont, A.; Bossens, F. (1999): "Application of Active Tendons to the Damping of Aerospace and Civil Engineering Structures" in Smart Structures edited by Holnicki-Szulc, J.; Rodellar, J., Dordrecht, Kluwer Academic, 275-284.

-
- [59] Pucher, A. (1934): "Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen", Beton und Eisen 33, 298-304.
- [60] Pucher, A. (1937): "Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzgleichungen", Der Bauingenieur 18 (9/10), 118-123.
- [61] Ray, M.C. (2003): "Optimal Control of Laminated Shells Using Piezoelectric Sensor and Actuator Layers", AIAA Journal 41 (6), 1151-1157.
- [62] Ray, M.C.; Mallik, N. (2004): "Finite Element Analysis of Smart Structures Containing Piezoelectric Fiber-Reinforced Composite Actuator", AIAA Journal 42 (7), 1398-1405.
- [63] Rogers, C.A.; Giurgiutiu, V. (1999): "Concept of Adaptronic Structures" in Adaptronics and Smart Structures edited by Janocha, H., Springer Verlag, Berlin.
- [64] Rowland, R.; Bjorkmann, G. (1982): "Neutral Holes: Theory and Design", Journal of the Engineering Mechanics Division 108, 945-960.
- [65] Rozvany, G.; Zhou, M.; Sigmund, O. (1992): Topology Optimization in Structural Design, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauingenieurwesen 59, Universität Essen.
- [66] Rozvany, G. I. N.; Zhou, M. (1991): "The COC Algorithm. Part I: Cross-Section Optimization or Sizing". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 89, 281-308.
- [67] Sakamoto, M.; Koshika, N.; Kobori, T. (2000): "Development and applications of structural control systems - Active-passive composite tuned mass damper", Stahlbau 69 (6), 455-463.
- [68] Savin, G. N. (1961): Stress Concentration around Holes, Pergamon Press, Oxford.
- [69] Schmit, L.A. (1981): "Structural Synthesis- Its Genesis and Development", AIAA Journal 19 (10), 1249-1263.
- [70] Schwarz, S. (2001): Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 34.
- [71] Sillva, E. C. N.; Kikuchi, N. (1999): „Design of Piezoelectric Transducers Using Topology Optimization“, Smart Materials and Structures 8, 350-364.
- [72] Sillva, E. C. N.; Nishiwaki, S.; Kikuchi, N. (1999): „Flexensional Actuator Design Using Topology Optimization and the Hopmogenization Method“ in Smart Structures edited by Holnicki-Szulc, J.; Rodellar, J., Dordrecht, Kluwer Academic, 313-320.

- [73] Sobek, W. (1987): Auf pneumatisch gestützten Schalungen hergestellte Betonschalen, Dissertation, Institut für Massivbau, Universität Stuttgart.
- [74] Sobek, W.; Haase, W.; Teuffel, P. (2000): "Adaptive Systeme", Stahlbau 69 (7), 544-555.
- [75] Sobek, W.; Teuffel, P. (2001): „Adaptive Systems in Architecture and Structural Engineering“, in Smart Structures and Materials, Smart Systems for Bridges, Structures and Highways, Proceedings of SPIE 4330, edited by Liu, S.C., 36-45.
- [76] Sobek, W.; Teuffel, P. (2002): "Adaptive Lightweight Structures", in Lightweight Structures in Civil Engineering, Proceedings of the IASS Symposium, 24-28 June 2002, Warsaw, Poland, edited by Obreski, J. B., 203-210.
- [77] Sobek, W.; Teuffel, P.; Landauer, A. (2002): Stuttgarter Träger, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart.
- [78] Soong, T. T. (1990): Active Structural Control-theory & Practice, Longman Scientific & Technical, Essex.
- [79] Soong, T.T.; Spencer Jr.; B.F. (2002): "Supplement energy dissipation: State-of-the-Art and State-of-the-Practice", Engineering Structures 24, 243-259.
- [80] Srinivasan, A.V.;McFarland, D.M. (2001): Smart Structures – Analysis and Design, Cambridge University Press, Cambridge.
- [81] Sun, D.; Tong, L.; Wang, D. (2002): "Modal Actuator/ Sensor by Modulating Thickness of Piezoelectric Layers for Smart Plates", AIAA Journal 40 (8), 1676-1679.
- [82] Sun, D.; Tong, L. (2003): "Optimum Control Voltage Design for Constrained Static Shape Control of Piezoelectric Structures", AIAA Journal 41 (12), 2444-2450.
- [83] Tanaka, M.; Todoh, M.; Naomi, A. (2003): "Adaptive Stiffness Design for Multimaterial Structural Systems", Journal of Intelligent Material Systems and Structures 14,323-329.
- [84] Teuffel, P. (2004): Entwerfen adaptiver Strukturen- Lastpfadmanagement zur Optimierung tragender Leichtbaustrukturen, Dissertation, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart.
- [85] Vanderplaats, G. N. (1987): "Numerical Optimization Techniques", in Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems edited by Mota Soares C.A., NATO ASI Series, Series F 27, Berlin, Springer, 197-239.
- [86] Venkataraman, S.; Haftka, R.T.; Rapoff, A.J. (2001): "Structural Optimization Using Biological Variables to Help Understand How Bones Design Holes", 4th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Dalian (China).

-
- [87] Vinçon, H. (2004): Adaptive Schalen - Entwicklung einer MATLAB-Toolbox zur Adaption von Schalen über Auflagerverschiebungen, Diplomarbeit, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart.
- [88] Wasiutynski, Z.; Brandt, A. (1963): "The present state of knowledge in the field of optimum design of structures", Applied Mechanics Reviews 16 (5), 341-350.
- [89] Weber, C. (1922): „Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisförmigen Löchern“, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 2, 267-273.
- [90] Weber, T. C. (1998): Ein Beitrag zur optimalen Positionierung von Aktoren in adaptiven mechanischen Strukturen, Dissertation, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 265, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [91] Weilandt, A.; Lemaitre, C.; Sobek, W. (2006): „Adaptive Systeme“, db-Deutsche Bauzeitung 2, 66-67.
- [92] Wiedemann, J.; Glahn, M. (1974): Scheibe oder Membran mit Kreisrundem Ausschnitt und aufgeklebtem Pflaster unter allseitigem Zug, Institut für Luft-und Raumfahrt, Technische Universität Berlin, ILR-Bericht 1.
- [93] Wiedemann J.; Griese, H.; Glahn, M. (1973): „Ausschnitte in GFK-Flächen - Festigkeit, Berechnung, konstruktive Maßnahmen“, Kunststoffe 63 (12), 867-873.
- [94] Wiedemann, J. (1989): Leichtbau – Band 1: Elemente, Springer Verlag, Berlin.
- [95] Wiedemann, J. (1989): *Leichtbau – Band 2: Konstruktionen*, Springer Verlag, Berlin.
- [96] Worch, G. (1956): „Elastische Scheiben“, Betonkalender 1956 2, Ernst & Sohn, Berlin, 31-120.
- [97] Yang, S. M.; Lee, Y. J. (1993): „Optimization of Non-Collocated Sensor/Actuator Location and Feedback Gain in Control Systems“, Smart Materials and Structures 2,96-102.
- [98] Yao, J.T.P. (1972): „Concept of Structural Control“, ASCE Journal of Structural Division 98 (7), 1567-1574.
- [99] Zhou, M. (1992): A New Discretized Optimality Criteria Method in Structural Optimization, Dissertation, VDI-Fortschrittsberichte Reihe 18, Nr. 115, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [100] Zhou, M.; Rozvany, G. I. N. (1991): "The COC Algorithm. Part II: topological, geometrical, and generalized shape optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 89, 309–336.
- [101] Zienkiewicz, P. (1971): "An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Element Domains", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, 519-528.

Anhang A Scheibe mit kreisrundem Ausschnitt: Analytische Lösung

Rotationssymmetrische Anteile: Lösungen für beschränkt adaptiven Bereich

Bereich außen

$$\begin{aligned} F_{\text{außen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \ln(r) \cdot c_6 \\ (A-1) \quad \sigma_{r\text{außen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{c_6}{r^2}; \quad \sigma_{\varphi\text{außen}} = \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{c_6}{r^2} \right) \\ \varepsilon_{\varphi\text{außen}} &= -\frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{c_6}{r^2 \cdot E} \end{aligned}$$

Bereich innen: $c_5 \neq -2, -1, 0$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{aktiv}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_3}{r} + c_4 \cdot r^{c_5} \right) \\ u_{\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r} + c_3 \cdot (1 + \mu) + c_4 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{r^{c_5+1}}{c_5 + 2} \right] \\ (A-2) \quad \sigma_{r\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot E \cdot \left[\frac{c_1}{1 - \mu} - \frac{c_2}{r^2 \cdot (1 + \mu)} - \frac{c_3}{r} - c_4 \cdot \frac{r^{c_5}}{c_5 + 2} \right] \\ \sigma_{\varphi\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot E \cdot \left[\frac{c_1}{1 - \mu} + \frac{c_2}{r^2 \cdot (1 + \mu)} - c_4 \cdot \frac{r^{c_5} (c_5 + 1)}{c_5 + 2} \right] \\ \varepsilon_{\varphi\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} + (1 + \mu) \cdot \frac{c_3}{r} + c_4 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{r^{c_5}}{c_5 + 2} \right] \end{aligned}$$

Bereich innen: $c_5 = -2$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{aktiv}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_3}{r} + \frac{c_4}{r^2} \right) \\ u_{\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r} + c_3 \cdot (1 + \mu) + c_4 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \right] \\ (A-3) \quad \sigma_{r\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot E \cdot \left[\frac{c_1}{1 - \mu} - \frac{c_2}{r^2 \cdot (1 + \mu)} - \frac{c_3}{r} - \frac{c_4}{r^2} \cdot \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \right] \\ \sigma_{\varphi\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot E \cdot \left[\frac{c_1}{1 - \mu} + \frac{c_2}{r^2 \cdot (1 + \mu)} + \frac{c_4}{r^2} \cdot \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \varepsilon_{\varphi\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} + (1 + \mu) \cdot \frac{c_3}{r} + c_4 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Bereich innen: $c_5=0$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{aktiv}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_3}{r} + c_4 \right) \\
 u_{\text{aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r} + c_3 \cdot (1 + \mu) \right] \\
 (A-4) \quad \sigma_{r \text{ aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot E \cdot \left[\frac{c_1}{1 - \mu} - \frac{c_2}{r^2 \cdot (1 + \mu)} - \frac{c_3}{r} - \frac{c_4}{1 - \mu} \right] \\
 \sigma_{\varphi \text{ aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot E \cdot \left[\frac{c_1}{1 - \mu} + \frac{c_2}{r^2 \cdot (1 + \mu)} - \frac{c_4}{1 - \mu} \right] \\
 \varepsilon_{\varphi \text{ aktiv,innen}} &= \frac{p_x + p_y}{2 \cdot h} \cdot \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} + (1 + \mu) \cdot \frac{c_4}{r} \right]
 \end{aligned}$$

Randbedingungen

Geometrierandbedingungen:

- (1) $\sigma_{r \text{ innen}}(a) = 0$
- (2) $\sigma_{r \text{ innen}}(b) = \sigma_{r \text{ außen}}(b)$
- (3) $\varepsilon_{\varphi \text{ innen}}(b) = \varepsilon_{\varphi \text{ außen}}(b)$

Randbedingungen für optimale Aktivierung

- (4) $\delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$
- (5) $\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) + \sigma_{\varphi \text{ passiv}}(b) = \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(a) + \sigma_{\varphi \text{ passiv}}(a)$
- (6) $f(c_5) = \max \left| \sigma_{\varphi \text{ aktiv}}(r) + \sigma_{\varphi \text{ passiv}}(r) \right| \rightarrow \text{Minimum für } a \leq r \leq b$

Aus den Randbedingungen (1) bis (5) können alle Konstanten außer c_5 bestimmt werden. Randbedingung (6) dient zur Bestimmung der optimalen Potenz der Aktivierungsfunktion, also der Konstante c_5 .

Ermittlung der Funktion $\sigma_{\varphi \text{aktiv,innen}}(r, c_5)$, $g(c_5, r) = \sigma_{\varphi \text{aktiv,innen}}(r, c_5) + \sigma_{\varphi \text{passiv}}(r)$ **und**

r_{extr} mit $\frac{\partial g}{\partial r}(r_{\text{extr}}, c_5) = 0$ **für alle c_5 :**

Für $c_5 \neq -2, -1, 0$

$$\sigma_{\varphi \text{aktiv,innen}} = \frac{px + py}{2 \cdot h} \cdot \frac{a}{r^2} \cdot \left[\frac{a^{c_5+2} \cdot (b^2 - a^2) + (c_5 + 2) \cdot b^{c_5} \cdot (b \cdot a^3 - b^3 \cdot a) + (c_5 + 1) \cdot r^{c_5+2} \cdot (b^2 - a^2)}{a^{c_5+1} \cdot b^2 \cdot (c_5 + 2) - a^{c_5+3} - a \cdot b^{c_5+2} \cdot (c_5 + 1) + b^{c_5+1} \cdot a^2 \cdot (c_5 + 2) - b^{c_5+3} \cdot (c_5 + 2)} \right]$$

(A-5) $g(c_5, r) = \frac{px + py}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a}{r^2} \cdot \frac{(c_5 + 1) \cdot (-a^{c_5+2} \cdot b^2 + a^2 \cdot b^{c_5+2} + r^{c_5+2} \cdot b^2 - r^{c_5+2} \cdot a^2)}{a^{c_5+1} \cdot b^2 \cdot (c_5 + 2) - a^{c_5+3} - a \cdot b^{c_5+2} \cdot (c_5 + 1) + b^{c_5+1} \cdot a^2 \cdot (c_5 + 2) - b^{c_5+3} \cdot (c_5 + 2)} + 1 \right]$

$$r_{\text{extr}} = c_5 + 2 \sqrt{\frac{2 \cdot a^2 \cdot b^{c_5+2} - 2 \cdot a^{c_5+2} \cdot b^2}{c_5 \cdot (b^2 - a^2)}}$$

Für $c_5 = -2$

$$\sigma_{\varphi \text{aktiv,innen}} = \frac{px + py}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a^2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \left(a + b \cdot \left(\ln \frac{r}{a} - 1 \right) \right)}{r^2 \cdot \left(b \cdot a^2 \cdot \left(\ln \frac{a}{b} + 1 \right) + a \cdot b^2 - b^3 - a^3 \right)} \right]$$

(A-6) $g(r, -2) = \frac{px + py}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{a^2 \cdot b \cdot (\ln r - \ln b) - b^3 \cdot (\ln r - \ln a)}{b \cdot a^2 \cdot (\ln a - \ln b + 1) + a \cdot b^2 - b^3 - a^3} + 1 \right]$

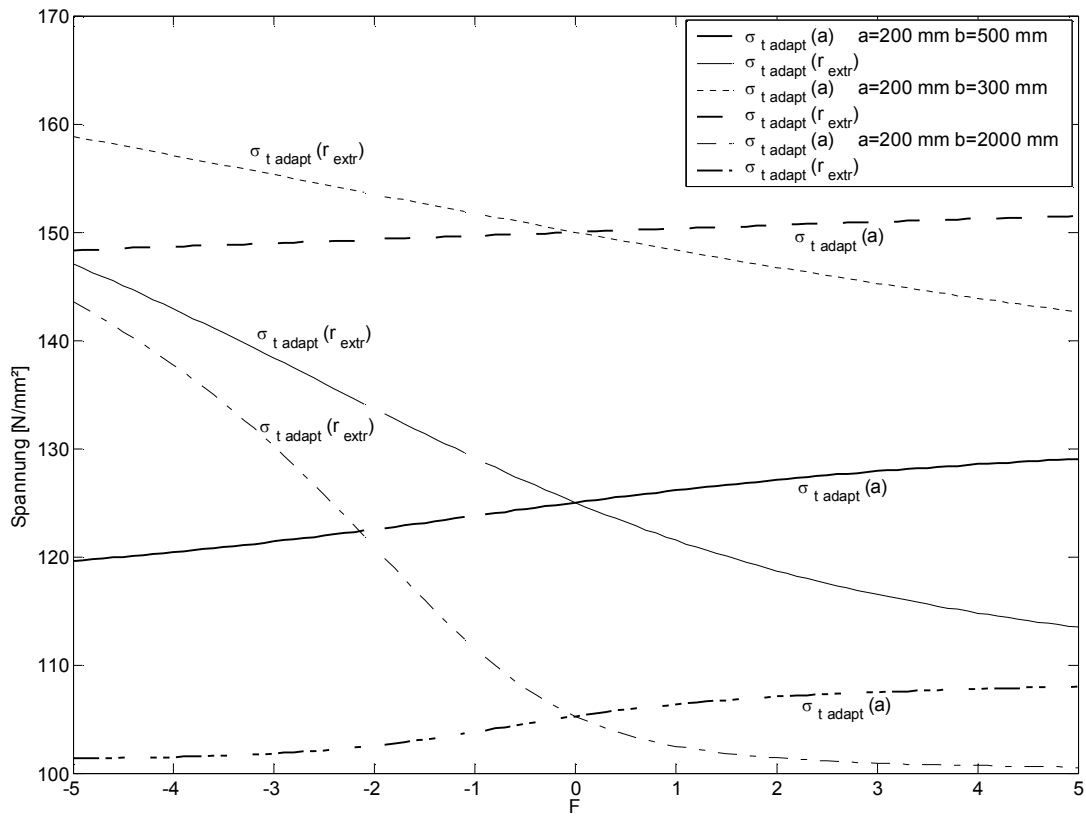
$$\ln r_{\text{extr}} = \frac{-2 \cdot a^2 \ln b + 2 \cdot b^2 \cdot \ln a - a^2 + b^2}{2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2}$$

Für $c_5 = 0$

(A-7) $\sigma_{\varphi \text{aktiv,innen}} = \frac{px + py}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{a}{2 \cdot b - a} - \frac{a^2}{r^2} \right]$

$$g(r, 0) = \frac{px + py}{2 \cdot h} \cdot \left[\frac{2 \cdot b}{2 \cdot b - a} \right]$$

Für $c_5 = 0$ ist $g(r)$ konstant und enthält somit im Bereich $a \leq r \leq b$ keine Extremalstellen.



Betrachtet man den Verlauf von $g(r_{\text{extr}}, c_5)$ über c_5 und vergleicht diesen mit $g(a, c_5)$, so zeigt sich, dass für $c_5 < 0$ die Extremalstelle maßgebend ist, für $c_5 > 0$ die Spannung in $r = a$ bzw. b .

Nichtrotationssymmetrische Anteile: Lösungen für beschränkt adaptiven Bereich

Bereich außen

$$\begin{aligned}
 F_{\text{außen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{c_8}{r^2} + c_9 \right) \\
 \sigma_{r, \text{ außen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{-6 \cdot c_8}{r^4} - \frac{4 \cdot c_9}{r^2} \right) \\
 \sigma_{\varphi, \text{ außen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_8}{r^4} \right) \\
 \sigma_{r, \text{ außen}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{-6 \cdot c_8}{r^4} - \frac{2 \cdot c_9}{r^2} \right) \\
 u_{\text{außen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left((1+\mu) \frac{2 \cdot c_8}{r^3} + \frac{4 \cdot c_9}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-8}$$

Bereich innen: $c_7 \neq -4, -2, -1, 0, 2$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{aktiv, innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_5}{r} + c_6 \cdot r^{c_7} \right) \\
 \sigma_{r, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{4 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} - 2 \cdot c_3 - \frac{c_5}{r} - \frac{c_6 \cdot r^{c_7} \cdot (c_7 - 2)}{c_7 \cdot (c_7 + 4)} \right) \\
 \sigma_{\varphi, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 12 \cdot c_4 \cdot r^2 - \frac{c_6 \cdot r^{c_7} \cdot (c_7 + 2) \cdot (c_7 + 1)}{c_7 \cdot (c_7 + 4)} \right) \\
 \tau_{r\varphi, \text{ innen}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{2 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 \cdot r^2 - \frac{c_6 \cdot r^{c_7} \cdot 2 \cdot (c_7 + 1)}{c_7 \cdot (c_7 + 4)} \right) \\
 u_{\text{innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{4 \cdot c_1}{r} + (1+\mu) \cdot \frac{2 \cdot c_2}{r^3} - (1+\mu) \cdot 2 \cdot c_3 \cdot r - \mu \cdot 4 \cdot c_4 \cdot r^3 + (1+\mu) \cdot \frac{c_6 \cdot r^{c_7+1} \cdot (c_7 + 2)}{c_7 \cdot (c_7 + 4)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-9}$$

Bereich innen: $c_5=-4$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{aktiv, innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_5}{r} + \frac{c_6}{r^4} \right) \\
 \sigma_{r, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{4 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} - 2 \cdot c_3 - \frac{c_5}{r} + \frac{c_6}{r^4} \cdot \left(-6 \cdot \ln r - \frac{1}{2} \right) \right) \\
 \sigma_{\varphi, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 12 \cdot c_4 \cdot r^2 + \frac{c_6}{r^4} \cdot \left(6 \cdot \ln r - \frac{7}{2} \right) \right) \\
 \tau_{r\varphi, \text{ innen}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{2 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 \cdot r^2 + \frac{c_6}{r^4} \cdot \left(-6 \cdot \ln r + \frac{1}{2} \right) \right) \\
 u_{\text{innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \\
 &\quad \left(\frac{4 \cdot c_1}{r} + (1 + \mu) \cdot \frac{2 \cdot c_2}{r^3} - (1 + \mu) \cdot 2 \cdot c_3 \cdot r - \mu \cdot 4 \cdot c_4 \cdot r^3 + (1 + \mu) \cdot \frac{c_6}{4 \cdot r^3} \cdot \left(2 \cdot \ln r - \frac{1}{2} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-10}$$

Bereich innen: $c_5=-2$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{aktiv, innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_5}{r} + \frac{c_6}{r^2} \right) \\
 \sigma_{r, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{4 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} - 2 \cdot c_3 - \frac{c_5}{r} \right) \\
 \sigma_{\varphi, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 12 \cdot c_4 \cdot r^2 \right) \\
 \tau_{r\varphi, \text{ innen}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{2 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 \cdot r^2 \right) \\
 u_{\text{innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{4 \cdot c_1}{r} + (1 + \mu) \cdot \frac{2 \cdot c_2}{r^3} - (1 + \mu) \cdot 2 \cdot c_3 \cdot r - \mu \cdot 4 \cdot c_4 \cdot r^3 - \frac{c_6}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-11}$$

Bereich innen: $c_5=0$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{aktiv, innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_5}{r} + c_6 \right) \\
 \sigma_{r, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{4 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} - 2 \cdot c_3 - \frac{c_5}{r} + c_6 \cdot \left(\frac{1}{2} \ln r - \frac{3}{8} \right) \right) \\
 \sigma_{\varphi, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 12 \cdot c_4 \cdot r^2 + c_6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln r - \frac{5}{8} \right) \right) \\
 \tau_{r\varphi, \text{ innen}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{2 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 \cdot r^2 + c_6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln r - \frac{3}{8} \right) \right) \\
 u_{\text{innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \\
 &\quad \left(\frac{4 \cdot c_1}{r} + (1 + \mu) \cdot \frac{2 \cdot c_2}{r^3} - (1 + \mu) \cdot 2 \cdot c_3 \cdot r - \mu \cdot 4 \cdot c_4 \cdot r^3 + (1 + \mu) \cdot c_6 \cdot \left(\frac{1}{2} \ln r \cdot r + \frac{1}{8} \cdot r \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-12}$$

Bereich innen: $c_5=2$

$$\begin{aligned}\delta_{\text{aktiv, innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{c_5}{r} + c_6 \cdot r^2 \right) \\ \sigma_{r, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{4 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} - 2 \cdot c_3 - \frac{c_5}{r} \right) \\ \text{(A-13)} \quad \sigma_{\varphi, \text{ innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 12 \cdot c_4 \cdot r^2 \right) \\ \tau_{r\varphi, \text{ innen}} &= \sin 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \left(-\frac{2 \cdot c_1}{r^2} - \frac{6 \cdot c_2}{r^4} + 2 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 \cdot r^2 \right) \\ u_{\text{innen}} &= \cos 2\varphi \cdot \frac{p_x - p_y}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{4 \cdot c_1}{r} + (1 + \mu) \cdot \frac{2 \cdot c_2}{r^3} - (1 + \mu) \cdot 2 \cdot c_3 \cdot r - \mu \cdot 4 \cdot c_4 \cdot r^3 - \frac{c_6}{3} \cdot r^3 \right)\end{aligned}$$

Randbedingungen

Geometrierandbedingungen:

- (1) $\sigma_{r \text{ innen}}(a) = 0$
- (2) $\tau_{r\varphi \text{ innen}}(a) = 0$
- (3) $\sigma_{r \text{ innen}}(b) = \sigma_{r \text{ außen}}(b)$
- (4) $\tau_{r\varphi \text{ innen}}(b) = \tau_{r\varphi \text{ außen}}(b)$
- (5) $\sigma_{\varphi \text{ innen}}(b) = \sigma_{\varphi \text{ außen}}(b)$
- (6) $u_{\text{innen}}(b) = u_{\text{außen}}(b)$

Randbedingungen für optimale Aktivierung

- (7) $\delta_{\text{aktiv}}(b) = 0$
- (8) $\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(b) + \sigma_{\varphi \text{ passiv}}(b) = \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(a) + \sigma_{\varphi \text{ passiv}}(a)$
- (9) $f(c_7) = \max \left| \sigma_{\varphi \text{ aktiv}}(r) + \sigma_{\varphi \text{ passiv}}(r) \right| \rightarrow \text{Minimum für } a \leq r \leq b$

Aus den Randbedingungen (1) bis (8) können außer c_7 alle Konstanten bestimmt werden. Randbedingung (9) dient zur Bestimmung der optimalen Potenz der Aktivierungsfunktion, also der Konstante c_7 .

Ermittlung der Funktionen $\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}}(r, c_7)$ für alle c_7 :

Für $c_7 = -4, -2, -1, 0, 2$

$$(A-14) \quad \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{px - py}{2 \cdot h} \cdot c_6 \cdot \left[\frac{b^{c_7} \cdot (3a^4 - 4a^3b + r^4)}{4 \cdot r^4} + \frac{b^{c_7} \cdot (1 + \mu) \cdot (-3a^4b^2 - b^2r^4 + 2a^6 + 2r^6)}{8 \cdot b^2 \cdot r^4} + \frac{(c_7 + 2) \cdot ((c_7 + 4) \cdot (3a^4b^{c_7} + b^{c_7}r^4) - 4r^{c_7+4} \cdot (c_7 + 1) - 12a^{c_7+4})}{4r^4c_7 \cdot (c_7 + 4)} \right]$$

$$\text{mit } c_6 = \frac{3 \cdot b^4 - 3 \cdot a^4}{\left(-\frac{b^{c_7}}{4a} \cdot (b^4 - a^4) \cdot (-3a + 4b) + \frac{b^{c_7} \cdot (1 + \mu)}{8b^2} \cdot (-5b^6 + 3b^2a^4 + 4a^2b^4 - 2a^6) + \frac{(c_7 + 2)}{4c_7} \cdot (4b^{c_7+4} - 3b^{c_7}a^4 - 4a^{c_7}b^4) + \frac{3 \cdot (c_7 + 2)}{4c_7(c_7 + 4)} \cdot (b^{c_7+4}c_7 + 4a^{c_7+4}) \right)}$$

Für $c_7 = -4$

(A-15)

$$\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{px - py}{2 \cdot h} \cdot \frac{(b^4 - a^4) \cdot 3a^4}{r^4} \cdot \left[\frac{(1 + \mu) \cdot (-2r^6 - 2a^6 + 3a^4b^2 + b^2r^4) + 8a^3b^3 - 9a^4b^2 - 3 \cdot b^2r^4 + b^6 \cdot \left(4 + 12 \cdot \ln \frac{a}{r} \right)}{(1 + \mu) \cdot a^4(2a^6 - 4a^2b^4 + 5b^6 - 3a^4b^2) + 8a^3b^7 - 13a^4b^6 - 8a^7b^3 + 9a^8b^2 + 4b^{10} - 12a^4b^6 \cdot \ln \frac{a}{b}} \right]$$

Für $c_7 = -2$

$$(A-16) \quad \sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{px - py}{2 \cdot h} \cdot \frac{(b^2 + a^2) \cdot 3a}{r^4} \cdot \left[\frac{(1 + \mu) \cdot (-2r^6 - 2a^6 + 3a^4b^2 + b^2r^4) + 2b^2 \cdot (4a^4b - 3a^5 - ar^4)}{(1 + \mu) \cdot (2b^4a + a(b^2 + a^2)) \cdot (-2a^2 + 3b^2) + 2b^2 \cdot (b^2 + a^2) \cdot (4b - 3a)} \right]$$

Für $c_7 = 0$

(A-17)

$$\sigma_{\varphi \text{ aktiv, innen}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{px - py}{2 \cdot h} \cdot \frac{(b^4 - a^4) \cdot 3a}{r^4} \cdot \left[\frac{(1 + \mu) \cdot (-2r^6 - 2a^6 + 3a^4b^2 + b^2r^4) + 8a^3b^3 - 9a^4b^2 + b^2r^4 + 12a^4b^2 \cdot \ln \frac{a}{b} + 4b^2r^4 \cdot \ln \frac{r}{b}}{(1 + \mu) \cdot (-4a^3b^4 + 5ab^6 + 2a^7 - 3a^5b^2) + 8b^7 - 9ab^6 - 8a^4b^3 + 9a^5b^2 + 4ab^2 \cdot (4b^4 - 3a^4) \cdot \ln \frac{a}{b}} \right]$$

Für $c_7 = 2$

$$(A-18) \quad \sigma_{\varphi \text{aktiv, innen}} = \cos 2\varphi \cdot \frac{px - py}{2 \cdot h} \cdot \frac{(b^4 - a^4) \cdot 3a}{r^4} \cdot \left[\frac{2r^6 + 2a^6 - 9a^4b^2 - 3b^2r^4 + 8a^3b^3 - \mu \cdot (2r^6 + 2a^6 - 3a^4b^2 - b^2r^4)}{4a^3b^4 - 11ab^6 - 2a^7 + 9a^5b^2 + 8b^7 - 8a^4b^3 - \mu \cdot (4a^3b^4 - 5ab^6 - 2a^7 + 3a^5b^2)} \right]$$

Anhang B Adaptive Scheiben mit integrierten diskreten Dehnungsaktuatoren: Optimalitätskriterien bei mehreren globalen Spannungsrandbedingungen

Werden bei der Berechnung der Lage der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen mehrere Spannungsrandbedingungen globalisiert, so können die Lagrange-Multiplikatoren in der Aktualisierungsphase nicht mehr direkt, sondern müssen iterativ ermittelt werden. Im Folgenden sind die hierfür erforderlichen Zusammenhänge aufgestellt. Der übrige Ablauf der Berechnung erfolgt, wie von Zhou [99] bzw. wie in Kapitel 6.2.1 beschrieben.

Die Optimierungsaufgabe kann unter Berücksichtigung mehrerer globaler Spannungsrandbedingungen, wie folgt dargestellt werden:

Minimiere

$$V(\mathbf{x}^e)$$

unter Berücksichtigung der
Ungleichheitsnebenbedingungen

$$\bar{F}_{fk}^T \cdot \mathbf{u}_f - \sigma_{sch}^{c \text{ grenz}} \leq 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, ND$$

$$\left(\mathbf{F}_f^{eT} \cdot \mathbf{S}^e \right) \cdot V \cdot \left(\mathbf{S}^{eT} \cdot \mathbf{F}_f^e \right) - \left(\sigma_v^{e \text{ grenz}} \right)^2 \leq 0 \quad \text{für } e = 1, \dots, NE$$

(B-1)

der Gleichheitsnebenbedingungen

$$P - B \cdot \mathbf{F}_f = 0$$

$$\bar{P}_k^V - B \cdot \bar{F}_{fk} = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, ND$$

und der Schranken

$$\left. \begin{array}{l} -\mathbf{x}^e + \mathbf{x}^{eL} \leq 0 \\ \mathbf{x}^e - \mathbf{x}^{eU} \leq 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } e = 1, \dots, NE$$

Die Lagrange-Funktion der Optimierungsaufgabe lautet somit:

$$\begin{aligned} L = & V(\mathbf{x}^e) + v_k \cdot \left(\bar{F}_{fk}^T \cdot \mathbf{u}_f - \sigma_{sch}^{c \text{ grenz}} \right) \\ & + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[\left(\mathbf{F}_f^{eT} \cdot \mathbf{S}^e \right) \cdot V \cdot \left(\mathbf{S}^{eT} \cdot \mathbf{F}_f^e \right) - \left(\sigma_v^{e \text{ grenz}} \right)^2 \right] \\ & + \alpha^{RT} (P - B \cdot \mathbf{F}_f) \\ & + \alpha_k^{VT} (\bar{P}_k^V - B \cdot \bar{F}_{fk}) \\ & + \sum_{e=1}^{NE} \left[\beta^e \cdot (-\mathbf{x}^e + \mathbf{x}^{eL}) + \gamma^e (\mathbf{x}^e - \mathbf{x}^{eU}) \right] \end{aligned}$$

(B-2)

Und die Kuhn-Tucker-Bedingungen ergeben sich zu:

$$(B-3) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i^e} = \mathbf{A}^e + \sum_{k=1}^{ND} v_k \left(\bar{\mathbf{F}}_{fk}^{eT} \cdot \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right) + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[2 \cdot \mathbf{F}_f^{eT} \cdot \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_t \cdot \boldsymbol{\phi}_e^T \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{eT} \cdot \mathbf{F}_f^e \right] - \beta^e + \gamma^e = 0$$

$$i = 1, \dots, n(\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = 1, \dots, NE$$

$$(B-4) \quad \frac{\partial L}{\partial (\mathbf{F}_f)_i} = \sum_{k=1}^{ND} v_k \cdot \bar{\mathbf{F}}_{fk}^T \cdot \frac{1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e + \sum_{e=1}^{NE} \lambda_e \cdot \left[2 \cdot \mathbf{F}_f^{eT} \cdot \mathbf{S}^e \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{eT} \right] + \boldsymbol{\alpha}^{RT} \cdot (-B) = 0$$

$$i = 1, \dots, N_f$$

$$(B-5) \quad \frac{\partial L}{\partial (\bar{\mathbf{F}}_{fk})_i} = v_k \cdot \mathbf{u}_f + \boldsymbol{\alpha}_k^{VT} \cdot B = 0$$

$$i = 1, \dots, N_f$$

Für globale aktive Spannungsrandbedingungen gilt $v_k \neq 0$. Für diese Randbedingungen muss also gelten:

$$(B-6) \quad \bar{\mathbf{F}}_{fk}^T \cdot \mathbf{u}_f - \sigma_{sch}^{cgrenz} = \bar{\mathbf{F}}_{fk}^T \cdot \frac{1}{\mathbf{x}^e + h_{sch}} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e - \sigma_{sch}^{cgrenz} = 0$$

Für Elemente, deren lokale Randbedingungen nicht aktiv sind - $\mathbf{e} \in R_d$ -, gilt mit $\lambda_e = \beta^e = \gamma^e = 0$:

$$(B-7) \quad \mathbf{A}^e + \sum_{k=1}^{ND} v_k \left(\bar{\mathbf{F}}_{fk}^{eT} \cdot \frac{-1}{(h_{sch} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right) = 0 \quad \text{für } \mathbf{e} \in R_d$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$(B-8) \quad \mathbf{x}^e = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{ND} v_k \left(\bar{\mathbf{F}}_{fk}^{eT} \cdot \mathbf{f}_{Einheit}^e \cdot \mathbf{F}_f^e \right)}{\mathbf{A}^e}} - h_{sch}$$

Eingesetzt in (B-6) ergeben sich daraus n Gleichungen f_n mit n Unbekannten v_k :

$$(B-9) \quad f_n = \sum_{\substack{e=1 \\ e \in R_d}}^{NE} \bar{F}_{f_n}^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e \cdot \frac{\sqrt{A^e}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{ND} v_k (\bar{F}_{f_k}^{eT} \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e)}} + \sum_{\substack{e=1 \\ e \in R_d}}^{NE} \bar{F}_{f_n}^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e \cdot \frac{1}{(\mathbf{x}^e + \mathbf{h}_{\text{sch}})} - \sigma_{\text{sch}}^{\text{c grenz}}$$

Diese Gleichungen können iterativ mit der Newton-Methode gelöst werden, deren Rekursionsformel im t-ten Iterationsschritt lautet:

$$(B-10) \quad v_{t+1} = v_t - J_t^{-1}(f_t)$$

mit $J_t(f_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_{ND}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{ND}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_{ND}}{\partial v_{ND}} \end{bmatrix}$

Für die partielle Ableitung der Gleichung f_n nach v_m gilt hierbei:

$$(B-11) \quad \frac{\partial f_n}{\partial v_m} = \sum_{\substack{e=1 \\ e \in R_d}}^{NE} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \bar{F}_{f_n}^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e \cdot \bar{F}_{f_m}^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e \cdot \sqrt{A^e}}{\left(\sum_{k=1}^{ND} v_k \cdot \bar{F}_{f_k}^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach der Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren v_k können die Werte \mathbf{x}^e der Elemente, deren lokale Randbedingungen nicht aktiv sind – $e \in R_d$ –, mit (B-8) berechnet werden. Für alle anderen Elemente wird \mathbf{x}^e , wie in Kapitel 6.2.1 beschrieben, ermittelt. Somit können die Lagrange-Multiplikatoren λ_e der Elemente mit aktiver lokaler Spannungsrandbedingung – $e \in R_\sigma$ –, wie folgt, bestimmt werden:

$$(B-12) \quad \lambda_e = \frac{\left[A^e - \sum_{k=1}^{ND} v_k \left(\bar{F}_{f_k}^{eT} \cdot \frac{1}{(\mathbf{h}_{\text{sch}} + \mathbf{x}^e)^2} \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot F_f^e \right) \right] \cdot (\mathbf{h}_{\text{sch}} + \mathbf{x}^e)^3}{2 \cdot F_f^{eT} \cdot \underline{E} \cdot \mathbf{B}_t \cdot \phi_e^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e \cdot \mathbf{V} \cdot (\underline{E} \cdot \mathbf{B}_t \cdot \phi_e^T \cdot f_{\text{Einheit}}^e)^T \cdot F_f^e}$$

Anschließend können die fiktiven Anfangsverformungen des adjungierten Systems berechnet werden. Gleichung (B-4) kann hierzu umgeformt werden zu:

$$(B-13) \quad \sum_k v_k \cdot \mathbf{f} \cdot \bar{F}_{f_k} + \bar{u}_{f_i} = \mathbf{B}^T \alpha^R$$

mit $\bar{u}_{f_i} = \lambda^e \cdot 2 \cdot F_f^{eT} \cdot S_j^e \cdot \mathbf{V} \cdot S_j^{eT}$

(B-13) stellt somit die kinematische Verträglichkeit eines kombinierten Lastsystems $\sum_k v_k \cdot \bar{F}_{f_k}$ dar.

Um die virtuellen Lastsysteme analysieren zu können, kann eine Auswahl aller möglichen Lösungen definiert werden, mit der (B-13) erfüllt werden kann:

$$\begin{aligned} & v_k \cdot f \cdot \bar{F}_{fk} + a_k \cdot \bar{u}_{fki} = B^T \bar{\alpha}_k \quad \text{mit } k = 1, \dots, ND \\ \text{(B-14)} \quad & \text{mit} \quad \sum_k a_k = 1 \\ & \text{und} \quad \sum_k \bar{\alpha}_k = \alpha^R \end{aligned}$$

Überführt man nun (B-13) in folgende Form der kinematischen Verträglichkeit des virtuellen Lastsystems,

$$\text{(B-15)} \quad f \cdot \bar{F}_{fk} + \bar{u}_{fki} = B^T \bar{u}_k$$

so ergeben sich die fiktiven Anfangsverformungen der virtuellen Lastsysteme je aktiver globaler Spannungsrandbedingung zu:

$$\text{(B-16)} \quad u_{fki} = \frac{a_k}{v_k} \cdot u_{fki} = \frac{a_k}{v_k} \cdot 2 \cdot F_f^{eT} \cdot S_j^e \cdot V \cdot S_j^{eT}$$

Mit den so aufgestellten Zusammenhängen kann wie in Kapitel 6.2.1 beschrieben die Berechnung der Lage der nichtaktivierbaren lokalen Verstärkungen iterativ erfolgen. Die iterative Ermittlung der Lagrange-Multiplikatoren v_k erfordert mit zunehmender Anzahl k immer längere Rechenzeiten, so dass eine Begrenzung der Anzahl der globalen Spannungsrandbedingungen anzustreben ist.

Lebenslauf

Name: Agnes Weilandt, geb. Landauer
Geburtsdatum: 5. Mai 1974
Geburtsort: Stuttgart
Familienstand: verheiratet, 1 Kind

Ausbildung

1984 - 1993 Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart;
Abschluss Allg. Hochschulreife
1993 - 1999 Studium des Bauingenieurwesens an der **RWTH Aachen**;
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau
1996 - 1997 Studienaufenthalt an der **Ecole des Ponts et Chaussées**, Paris

Auszeichnungen

2/1996 Aufnahme in die **Studienstiftung des deutschen Volkes**
7/1996 **Schüßler Preis**
6/2000 **1. Preis der Hünnebeck Stiftung**

Beruflicher Werdegang

1999- 2004 Projektingenieur bei **Werner Sobek Ingenieure**, Stuttgart
2001- 2005 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am **Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, ILEK**, der Universität Stuttgart
Seit 2006 Projektleiter bei **Bollinger + Grohmann Ingenieure**, Frankfurt am Main