Institut für Formale Methoden der Informatik

Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Bachelorarbeit Nr. 60

Algebraische Charakterisierungen von positiver Quantorenalternierung bei Zwei-Variablen-Logik

Lukas Fleischer

Studiengang:	Informatik
Prüfer/in:	Prof. Dr. Volker Diekert
Betreuer/in:	Dr. Manfred Kufleitner
Beginn am:	17. Mai 2013
Beendet am:	16. November 2013
CR-Nummer:	F.4.1, F.4.3

Kurzfassung

Thérien und Wilke zeigten in einer Arbeit von 1998, dass Zwei-Variablen-Logik erster Stufe (FO^2) einer entscheidbaren Klasse endlicher Monoide entspricht. Insbesondere lässt sich damit für jede reguläre Sprache entscheiden, ob sie in FO^2 definierbar ist. Dieses Entscheidbarkeitsresultat konnte im vergangenen Jahr von Weil und Kufleitner auf die Alternierungshierarchie innerhalb von FO^2 ausgedehnt werden. In einer aktuellen Arbeit von Lauser und Kufleitner wurde dieses Ergebnis noch weiter verfeinert. Sie konnten zeigen, dass die positive Alternierungshierarchie innerhalb von FO^2 entscheidbar ist.

Krebs und Straubing konnten mit einem anderen Zugang ebenfalls das Entscheidbarkeitsresultat von Weil und Kufleitner beweisen. Anstelle von sogenannten *Rankern* basiert ihre Charakterisierung auf Blockprodukten. In dieser Arbeit wird diese Technik auf die positive Alternierungshierarchie übertragen. Es werden verschiedene, auf Blockprodukten basierende, algebraische Charakterisierungen der Level der positiven Alternierungshierarchie vorgestellt und deren Entscheidbarkeit bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

McNaughton und Papert konnten in einer 1971 erschienenen Publikation [MP71] zeigen, dass die Klasse der in Logik erster Stufe (FO) definierbaren Sprachen über endlichen Alphabeten äquivalent zur Klasse der sternfreien Sprachen ist. Ausgehend von diesem Resultat wurden Fragmente dieser Logik untersucht. In [Kam68] wurde gezeigt, dass drei Variablen bereits ausreichen, um jede FO-definierbare Sprache zu formulieren. Thérien und Wilke [TW98] leiteten eine algebraische Charakterisierung des Fragments Logik erster Stufe mit zwei Variablen (FO^2) her. Dieses Fragment wurde in den kommenden Jahren zum Objekt intensiver Forschung.

Weis und Immerman [WI09] initiierten die Untersuchung einer Hierarchie innerhalb von FO^2 auf der Grundlage von Quantorenalternierungen. Die Entscheidbarkeit dieser Hierarchie konnte im vergangenen Jahr unabhängig voneinander von Kufleitner und Weil [KW12] und von Krebs und Straubing [KS12] gezeigt werden. Während der Beweis von Weil und Kufleitner auf sogenannten *Rankern* und Mal'cev-Produkten beruht, verwendeten Krebs und Straubing Blockprodukte. Dieses Jahr gelang es Kufleitner und Lauser [KL13], ihr Resultat auf die positive Alternierungshierarchie zu verfeinern. In dieser Arbeit verallgemeinern wir das Konzept der Blockprodukte und benutzen diese Verallgemeinerung, um auch mithilfe des Ansatzes von Krebs und Straubing die Entscheidbarkeit der positiven Alternierungshierarchie nachzuweisen.

In Kapitel 2 werden die algebraischen Grundlagen dieser Arbeit eingeführt. Die auf Blockprodukten basierende Untersuchung der positiven Alternierungshierarchie erfordert die Verwendung geordneter Alphabete. Das algebraische Gegenstück zu geordneten Alphabeten sind geordnete Halbgruppen und Monoide. Wir definieren die mit geordneten Strukturen zusammenhängenden, grundlegenden algebraischen Begriffe und beweisen einige elementare Eigenschaften.

Der Hauptteil der Arbeit besteht aus drei Teilen. Zunächst verallgemeinern wir in Kapitel 3 Logik erster Stufe über Wörtern auf geordnete Alphabete und weisen einen einfachen Zusammenhang zwischen Logik erster Stufe über ungeordneten und geordneten Alphabeten nach, der später verwendet wird, um bekannte Resultate auf den ungeordneten Fall zu transferieren. In Kapitel 4 führen wir Blockprodukte von geordneten Monoiden ein. Diese erlauben uns schließlich, das Entscheidbarkeitsresultat von Krebs und Straubing ebenfalls auf die positive Alternierungshierarchie zu übertragen. Wir stellen in Kapitel 5 einige Charakterisierungen der positiven Alternierungshierarchie auf Basis von Blockprodukten und einen an dem ungeordneten Fall [KS12] orientierten Beweis für deren Entscheidbarkeit vor. Neben [KS12] basieren die Resultate des letzten Kapitels zu großen Teilen auf [Str11].

2 Algebraische Grundlagen

Dieses Kapitel führt die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften der geordneten Halbgruppen und Monoide ein, setzt aber einige Begriffe aus der Halbgruppentheorie voraus. Eine detaillierte Einführung in diese ist beispielsweise in [Pin86] zu finden.

2.1 Geordnete Mengen

Eine Menge P und eine Halbordnung $\leq$ auf P bilden zusammen eine *geordnete Menge* $(P, \leq)$. Ein *Ordnungsideal* von $(P, \leq)$ ist eine Teilmenge I von P, sodass $x \in I$, falls ein $y \in I$ mit $x \leq y$ existiert. Das durch eine Teilmenge Q von P generierte Ordnungsideal ist

$$\downarrow Q = \{ x \in P \mid \exists y \in Q \colon x \leq y \}.$$

Ein *minimales Element* einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist ein Element $x \in P$, sodass für alle $y \in P$ gilt: $y \leq x \Rightarrow y = x$. Analog dazu definieren wir

$$\uparrow Q = \{ x \in P \mid \exists y \in Q \colon y \leq x \}.$$

Seien $(P, \leq)$ und $(Q, \preceq)$ geordnete Mengen und $f \colon P \to Q$ eine Funktion. f heißt *ordnungserhaltend*, falls für alle $p, p' \in P$ aus $p \leq p'$ folgt, dass $f(p) \preceq f(p')$.

Wir schreiben im Folgenden P statt $(P, \leq)$, wenn die zugrunde liegende Ordnung aus dem Kontext ersichtlich ist.

Für geordnete Mengen $P_1, \ldots, P_n$ nennen wir jedes Element aus dem Abschluss von $\{ P_1, \ldots, P_n \}$ unter Vereinigung und Durchschnitt eine *positive boolesche Kombination* von $P_1, \ldots, P_n$. Folgende Proposition zeigt, dass die Menge aller Ordnungsideale einer geordneten Menge P unter positiven booleschen Kombinationen abgeschlossen ist, und folgt direkt aus der Definition eines Ordnungsideals:

Proposition 2.1.1. *Seien P eine geordnete Menge und Q, R Ordnungsideale von P. Dann sind $Q \cup R$ und $Q \cap R$ Ordnungsideale von P.*

Wir merken an, dass Ordnungsideale nicht unter Komplement abgeschlossen sind. Es gilt jedoch folgender Zusammenhang:

Proposition 2.1.2. *Sei P eine geordnete Menge und Q eine Teilmenge von P. Dann ist $P \setminus (\uparrow Q)$ ein Ordnungsideal von P.*

Beweis. Sei $p \in P \setminus (\uparrow Q)$ und $p' \in P$ mit $p' \leq p$. Angenommen, $p' \in \uparrow Q$, dann ist auch $p \in \uparrow Q$, da $p \geq p'$. Dieser Widerspruch liefert direkt $p' \in P \setminus (\uparrow Q)$. $\square$

2.2 Geordnete Halbgruppen und Monoide

Eine Halbordnung $\leq$ auf einer Halbgruppe S heißt *stabil*, falls für alle $x, y, z \in S$ mit $x \leq y$ gilt: $xz \leq yz$ und $zx \leq zy$. Eine Halbgruppe S mit einer stabilen Halbordnung $\leq$ auf S heißt *geordnete Halbgruppe*. Geordnete Monoide werden analog definiert. Wir schreiben $(S, \leq)$, wenn wir die Rolle der Halbordnung hervorheben möchten – andernfalls sei die Ordnung implizit und wir verwenden die Notation S. Je nach Kontext verwenden wir die Notation S bzw. $(S, \leq)$ auch für die der Halbgruppe zugrunde liegende geordnete Menge.

Seien S und T geordnete Halbgruppen. Ein *Homomorphismus geordneter Halbgruppen* $\varphi\colon S \to T$ ist ein ordnungserhaltender Halbgruppenhomomorphismus von S in T. S ist eine *geordnete Unterhalbgruppe* von T, falls S eine Unterhalbgruppe von T und die Halbordnung auf S die Einschränkung der Ordnung von T auf S ist. S heißt *geordneter Quotient* von T, falls ein surjektiver Homomorphismus geordneter Halbgruppen $\varphi\colon S \to T$ existiert. Wir sagen, S *teilt* T, und schreiben $S \prec T$, wenn S der geordnete Quotient einer geordneten Unterhalbgruppe von T ist. Wir merken an, dass die Notation $S \prec T$ oft auch für ungeordnete Quotienten verwendet wird. In dieser Arbeit sind alle Divisionen jedoch geordnet.

Das *direkte Produkt geordneter Halbgruppen* $(S_i, \leq_i)_{1 \leq i \leq n}$ sei das direkte Produkt der zugrunde liegenden Halbgruppen, zusammen mit der *Produktordnung*

$$(s_1, \ldots, s_n) \leq (s'_1, \ldots, s'_n) \text{ genau dann, wenn } s_i \leq_i s'_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Alle Definitionen aus diesem Abschnitt lassen sich analog für geordnete Monoide formulieren. Für Details sei auf [Pin95] verwiesen.

Proposition 2.2.1. *Seien X, Y, Z Mengen und $\phi\colon X \to Y, \varphi\colon X \to Z$ Funktionen, sodass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow \phi(x_1) = \phi(x_2).$$

Dann gilt für alle $x \in X$ und $S \subseteq Y$:

$$\phi(x) \in S \Leftrightarrow \varphi(x) \in \varphi(\phi^{-1}(S)).$$

Beweis. Sei $x \in X$ mit $\phi(x) \in S$. Dann ist $\varphi(x) \in \{\, \varphi(x') \mid x' \in X, \phi(x') \in S\} = \varphi(\phi^{-1}(S))$.

Sei umgekehrt $\varphi(x) \in \varphi(\phi^{-1}(S))$, das heißt, es existiert ein $x' \in X$, sodass $\varphi(x') = \varphi(x)$ und $\phi(x') \in S$. Aus $\varphi(x') = \varphi(x)$ folgt mit der Annahme direkt $\phi(x) = \phi(x')$. Also ist $\phi(x) \in S$. $\square$

Proposition 2.2.2. *Seien K, M, N endliche geordnete Monoide und $\phi\colon N \to M$, $\varphi\colon N \to K$ Funktionen, sodass für alle $n_1, n_2 \in N$ gilt:*

$$\varphi(n_1) \leq \varphi(n_2) \Rightarrow \phi(n_1) \leq \phi(n_2).$$

Dann gilt für alle $n \in N$ und $S \subseteq M$:

$$\phi(n) \in S \Leftrightarrow \varphi(n) \in \varphi(\phi^{-1}(S)).$$

Falls φ surjektiv ist, gelten zusätzlich folgende Eigenschaften:

1. *$\phi \circ \varphi^{-1}$ ist eine ordnungserhaltende Funktion.*
2. *Falls φ und ϕ Homomorphismen sind, dann ist $\phi \circ \varphi^{-1}$ ein Homomorphismus geordneter Monoide.*
3. *Falls P ein Ordnungsideal von M ist, dann ist $\varphi(\phi^{-1}(P))$ ein Ordnungsideal von K.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis dem ersten Teil der Behauptung. Aus $\varphi(n_1) \leq \varphi(n_2) \Rightarrow \phi(n_1) \leq \phi(n_2)$ folgt aufgrund der Antisymmetrie und Reflexivität der beiden Halbordnungen:

$$\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Rightarrow \phi(n_1) = \phi(n_2).$$

Proposition 2.2.1 liefert dann direkt den Beweis.

Für den zweiten Teil nehmen wir an, φ sei surjektiv. Seien $k, k' \in K$. Dann existieren $n, n' \in N$ mit $\varphi(n) = k$ und $\varphi(n') = k'$. Wir erinnern uns, dass für beliebige $n_1, n_2 \in N$ mit $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$ gilt: $\phi(n_1) = \phi(n_2)$. Also ist $\phi(\varphi^{-1}(k)) = \phi(n)$ und $\phi(\varphi^{-1}(k')) = \phi(n')$.

1. Mit $\phi(\varphi^{-1}(k)) = \phi(n)$ folgt direkt, dass $\phi \circ \varphi^{-1}$ eine Funktion ist. Sei nun $k \leq k'$. Dann ist $\varphi(n) \leq \varphi(n')$ und folglich $\phi(\varphi^{-1}(k)) = \phi(n) \leq \phi(n') = \phi(\varphi^{-1}(k'))$. Also ist $\phi \circ \varphi^{-1}$ ordnungserhaltend.
2. Sei φ ein Homomorphismus, also $\varphi(nn') = kk'$ und $\phi(\varphi^{-1}(kk')) = \phi(nn')$ wie oben. Es folgt: $\phi(\varphi^{-1}(k))\phi(\varphi^{-1}(k')) = \phi(n)\phi(n') = \phi(nn') = \phi(\varphi^{-1}(kk'))$. Also ist $\phi \circ \varphi^{-1}$ ein Homomorphismus. Da $\phi \circ \varphi^{-1}$ zudem ordnungserhaltend ist, ist $\phi \circ \varphi^{-1}$ ein Homomorphismus geordneter Monoide.
3. Für den letzten Teil nehmen wir an, P sei ein Ordnungsideal von M. Seien $k, k' \in K$ mit $k \leq k'$ und $k' \in \varphi(\phi^{-1}(P))$. Dann ist $\phi(\varphi^{-1}(k')) \in P$, sowie $\phi(\varphi^{-1}(k)) \leq \phi(\varphi^{-1}(k'))$. Letzteres gilt, da $\phi \circ \varphi^{-1}$ ordnungserhaltend ist. Es folgt $\phi(\varphi^{-1}(k)) \in P$. Also ist $k \in \varphi(\phi^{-1}(P))$ und $\varphi(\phi^{-1}(P))$ folglich ein Ordnungsideal.

□

2.3 Freie geordnete Monoide und geordnete Sprachen

Sei A ein Alphabet und A^* das zugehörige freie Monoid. Jede Halbordnung auf A induziert eine stabile Halbordnung auf A^* wie folgt:

$$a_1 \cdots a_m \leq b_1 \cdots b_n \text{ genau dann, wenn } m = n \text{ und } a_i \leq b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Das zugehörige geordnete Monoid $(A^*, \leq)$ heißt *freies geordnetes Monoid* über $(A, \leq)$. Jedes Ordnungsideal eines freien geordneten Monoids heißt *geordnete Sprache*.

Sei $\varphi \colon M \to N$ ein Homomorphismus geordneter Monoide. Eine Teilmenge H von M wird *durch φ erkannt*, falls ein Ordnungsideal I von N mit $H = \varphi^{-1}(I)$ existiert. In diesem Fall ist H ein Ordnungsideal von M. Wir erweitern den Begriff der Erkennbarkeit auf geordnete

Monoide, indem wir sagen, ein geordnetes Monoid N erkennt eine Teilmenge H von M, falls ein Homomorphismus geordneter Monoide $\varphi\colon M \to N$ existiert, der H erkennt.

Diese Definition gilt insbesondere für geordnete Sprachen. Eine geordnete Sprache $L \subseteq (A^*, \leq)$ wird von einem geordneten Monoid M genau dann erkannt, wenn es ein Ordnungsideal I von M und einen Homomorphismus geordneter Monoide $\varphi\colon (A^*, \leq) \to M$ mit $L = \varphi^{-1}(I)$ gibt. Zudem ist jede von einem geordneten Monoid erkannte Sprache eine geordnete Sprache über dem Ausgangsalphabet.

Wir werden in den folgenden Kapiteln Klassen von geordneten Monoiden durch die Klasse der jeweiligen erkannten Sprachen charakterisieren. Hierzu benötigen wir den Begriff der *Teilwörter* eines Wortes. Sei $w \in A^*$ ein Wort. Dann ist $a_1 \cdots a_k$ $(a_1, \ldots, a_k \in A)$ genau dann ein Teilwort von w, wenn $w \in A^* a_1 A^* a_2 A^* \cdots A^* a_k A^*$. Wir definieren für feste $a_1, \ldots, a_k \in A$ nun

$$\begin{aligned} \downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k} &= A^*(\downarrow a_1)A^*(\downarrow a_2)A^* \cdots A^*(\downarrow a_k)A^*, \\ \overline{\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}} &= \overline{A^*(\uparrow a_1)A^*(\uparrow a_2)A^* \cdots A^*(\uparrow a_k)A^*}. \end{aligned}$$

$\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ ist also die geordnete Sprache aller Wörter, die ein Teilwort aus der Menge $\downarrow a_1 \downarrow a_2 \cdots \downarrow a_k$ enthalten. Es kann gezeigt werden, dass $\overline{\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}}$ eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{b_1 b_2 \cdots b_k}$ ist. $\overline{\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}}$ ist also ebenfalls eine geordnete Sprache. Wir geben hierfür in Kapitel 5 einen Beweis.

2.4 Syntaktische geordnete Monoide

Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Die *syntaktische Ordnung* $\leq_L$ von L sei definiert durch $w \leq_L w'$ genau dann, wenn

$$uw'v \in L \Rightarrow uwv \in L$$

für alle $u, v \in A^*$. Die durch diese Halbordnung induzierte Äquivalenzrelation $\sim_L$, mit $w \sim_L w'$ genau dann, wenn

$$uwv \in L \Leftrightarrow uw'v \in L$$

für alle $u, v \in A^*$, ist eine Kongruenz [Pin95]. Sie heißt *syntaktische Kongruenz*. Das *syntaktische geordnete Monoid* $\mathrm{Synt}(L)$ von $L \subseteq (A^*, \leq)$ ist das Monoid $(A^*, \leq)/\sim_L$, zusammen mit der auf $(A^*, \leq)/\sim_L$ durch $\leq_L$ induzierten stabilen Halbordnung. Der zugehörige natürliche Homomorphismus $\phi_L\colon (A^*, \leq) \to \mathrm{Synt}(L)$ heißt *syntaktischer Homomorphismus*. Es ist einfach, zu prüfen, dass ϕ_L ein Homomorphismus geordneter Monoide ist. Ein geordnetes Monoid M erkennt eine Sprache L über $(A^*, =)$ genau dann, wenn $\mathrm{Synt}(L) \prec M$ [Pin95]. Insbesondere ist $\mathrm{Synt}(L)$ das kleinste Monoid, das L erkennt.

Wir merken an, dass sich dieser Zusammenhang nicht auf beliebige geordnete Sprachen übertragen lässt. Sei $A = \{\, a, b \,\}$ und $(A, \leq)$ geordnet durch $a \leq b$. Sei $L = \downarrow L_a \subseteq (A^*, \leq)$. Dann besteht $\mathrm{Synt}(L)$ aus den beiden Elementen $[\varepsilon]$ und $[a]$, geordnet durch $[a] \leq [\varepsilon]$, und ausgestattet mit der Verknüpfung $[\varepsilon] \cdot [\varepsilon] = [\varepsilon], [\varepsilon] \cdot [a] = [a] \cdot [\varepsilon] = [a] \cdot [a] = [a]$. Das geordnete Monoid M sei durch Äquivalenz geordnet und ansonsten identisch zu $\mathrm{Synt}(L)$. Offensichtlich ist $\mathrm{Synt}(L)$ ein Teiler von M. Wegen $a \leq b$ ist jedoch $\phi(a) = \phi(b)$ für jeden Homomorphismus $\phi\colon (A^*, \leq) \to M$, also erkennt M über diesem Alphabet nur die beiden Sprachen $\emptyset$ und A^*.

2.5 Pseudovarietäten geordneter Monoide und Gleichungen

Eine *Pseudovarietät geordneter Monoide* ist eine Klasse endlicher geordneter Monoide, die unter Division geordneter Monoide und unter endlichen direkten Produkten geordneter Monoide abgeschlossen ist.

Sei X ein abzählbares Alphabet. Wir definieren *ω-Terme* über X induktiv wie folgt: Das leere Wort 1 ist ein ω-Term, jeder Buchstabe aus X ist ein ω-Term und falls u und v ω-Terme sind, dann sind auch uv und u^ω ω-Terme. Für jeden ω-Term u und jedes geordnete Monoid M lässt sich jede Abbildung $\hat{\varphi}\colon X \to M$ auf eine Auswertung φ von u in M erweitern, indem man der Multiplikation und dem ω-Operator die übliche Bedeutung zuschreibt.

Für zwei ω-Terme u und v nennen wir $u \leq v$ eine *Gleichung*. Wir sagen, ein geordnetes Monoid S erfüllt eine Gleichung $u \leq v$, falls $\varphi(u) \leq \varphi(v)$ unter jeder Auswertung φ. Die Klasse der geordneten Monoide, die eine bestimmte Menge an Gleichungen erfüllen, formen eine Pseudovarietät geordneter Monoide [PW96]. Wir verwenden zur Beschreibung dieser Pseudovarietät die Notation

$$[\![\, u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, \ldots, u_k \leq v_k \,]\!].$$

Für die folgenden Beispiele erweitern wir diese Definition und lassen zudem Gleichungen der Form $u = v$ als Kurzschreibweise für $u \leq v, v \leq u$ zu.

Der *Join* $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ zweier Pseudovarietäten geordneter Monoide $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ ist die kleinste Pseudovarietät geordneter Monoide, die sowohl $\mathbf{U}$ als auch $\mathbf{V}$ enthält.

Proposition 2.5.1. *Seien $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ Pseudovarietäten geordneter Monoide und $J = \{M \mid \exists M' \in \mathbf{U}, M'' \in \mathbf{V} \colon M \prec (M', M'')\}$. Dann ist $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = J$.*

Beweis. Die Richtung $J \subseteq \mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ ist trivial. Die umgekehrte Richtung zeigen wir per Induktion über den Aufbau eines Monoids aus $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$.

Sei $M \in \mathbf{U}$. Wir setzen $\phi\colon M \to (M, M''), m \mapsto (m, 1)$, wobei M'' ein beliebiges Monoid aus $\mathbf{V}$ und 1 das neutrale Element aus M'' ist. ϕ ist ein Homomorphismus geordneter Monoide. Also teilt M das Monoid (M, M'') und es ist $M \in J$. Eine analoge Konstruktion zeigt $\mathbf{V} \subseteq J$.

Sei nun $M \in J$ und M' ein Monoid mit $M' \prec M$. Aufgrund der Transitivität der Teilbarkeitsrelation ist dann auch $M' \in J$.

Seien $k \geq 1$, $M_1, \ldots, M_k \in J$, $M'_1, \ldots M'_k \in \mathbf{U}$ und $M''_1, \ldots, M''_k \in \mathbf{V}$ mit $M_i \prec (M'_i, M''_i)$ für alle $1 \leq i \leq k$. Dann existiert für alle $1 \leq i \leq k$ ein Homomorphismus geordneter Monoide $\phi_i\colon M_i \to (M'_i, M''_i)$. Wir zerlegen jeden solchen Homomorphismus in zwei Homomorphismen geordneter Monoide $\phi'_i\colon M_i \to M'_i$ und $\phi''_i\colon M_i \to M''_i$, sodass $\phi_i = (\phi'_i, \phi''_i)$. Setze $\phi\colon (M_1, \ldots, M_k) \to ((M'_1, \ldots M'_k), (M''_1, \ldots, M''_k)), (m_1, \ldots, m_k) \mapsto ((\phi'_1(m_1), \ldots, \phi'_k(m_k)), (\phi''_1(m_1), \ldots, \phi''_k(m_k)))$. Es ist einfach zu prüfen, dass ϕ ein Homomorphismus geordneter Monoide ist. Also ist $(M_1, \ldots, M_k) \in J$.

Da jede Formel aus $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$, beginnend bei Monoiden aus $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$, induktiv durch Bildung geordneter Divisoren und endlicher direkter Produkte entsteht, ist $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} \subseteq J$. Dies vervollständigt den Beweis. $\square$

Wir benötigen in dieser Arbeit folgende Pseudovarietäten geordneter Monoide:

- $\mathbf{J}$, die Pseudovarietät aller $\mathcal{J}$-trivialen Monoide [Pin86]. Eine Gleichungsbeschreibung für $\mathbf{J}$ ist
$$\mathbf{J} = [\![(xyz)^\omega y = y(xyz)^\omega = (xyz)^\omega]\!].$$
- $\mathbf{J}^+ = [\![x \leq 1]\!]$, das positive Fragment von $\mathbf{J}$. Analog ist $\mathbf{J}^- = [\![1 \leq x]\!]$ das negative Fragment von $\mathbf{J}$. Es ist bekannt [ST88], dass $\mathbf{J} = \mathbf{J}^+ \vee \mathbf{J}^-$. Wir geben in den folgenden Kapiteln Charakterisierungen von $\mathbf{J}^+$ und $\mathbf{J}^-$ auf Sprachebene.
- $\mathbf{J}_1 = [\![xx = x, xy = yx]\!]$, die Pseudovarietät aller idempotenter, kommutativer Monoide, und das zugehörige positive Fragment $\mathbf{J}_1^+ = [\![xx = x, xy = yx, x \leq 1]\!]$.
- $\mathbf{DA} = [\![(xyz)^\omega y(xyz)^\omega = (xyz)^\omega]\!]$. Es existieren viele äquivalente Charakterisierungen dieser Pseudovarietät [TT02]. Die wichtigste weitere Charakterisierung für uns ist: $M \in \mathbf{DA}$ genau dann, wenn $e = e \cdot M_e \cdot e$ für alle Idempotente e von M. M_e ist hierbei das durch alle Elemente $m \in M$ mit $e \in MmM$ erzeugte Untermonoid von M. Außerdem ist $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{DA}$ genau dann, wenn L FO^2-definierbar ist [TW98].

Proposition 2.5.2. $\mathbf{J}_1^+ \subseteq \mathbf{J}^+ \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{DA}$.

Beweis. Die Inklusion $\mathbf{J}_1^+ \subseteq \mathbf{J}^+$ ist trivial. Sei $M \in \mathbf{J}^+ = [\![x \leq 1]\!]$. Dann ist

$$(xyz)^\omega y \leq (xyz)^\omega \cdot 1 = (xyz)^\omega \text{ und}$$

$$(xyz)^\omega = (xyz)^\omega (xyz)^\omega = (xyz)^\omega (xyz)^{\omega-1} xyz \leq (xyz)^\omega \cdot 1 \cdot y \cdot 1 = (xyz)^\omega y,$$

also $M \in [\![(xyz)^\omega y = (xyz)^\omega]\!]$. Analoge Umformungen liefern $M \in [\![y(xyz)^\omega = (xyz)^\omega]\!]$ und schließlich $M \in [\![(xyz)^\omega y = y(xyz)^\omega = (xyz)^\omega]\!] = \mathbf{J}$.

Für den Beweis der letzten Inklusion sei $M \in \mathbf{J}$. Wegen $(xyz)^\omega y = (xyz)^\omega$ ist

$$(xyz)^\omega y(xyz)^\omega = (xyz)^\omega (xyz)^\omega = (xyz)^\omega,$$

also $M \in [\![(xyz)^\omega y(xyz)^\omega = (xyz)^\omega]\!] = \mathbf{DA}$. $\square$

3 Logik erster Stufe über geordneten Alphabeten

Wir merken zunächst an, dass die Definitionen in diesem Abschnitt leicht von den üblichen Definitionen abweichen, da wir Fragmente der Logik erster Stufe über Wörtern aus geordneten Sprachen definieren.

Sei $(A, \leq)$ ein endliches geordnetes Alphabet. Wir betrachten zunächst Logik erster Stufe $\mathrm{FO} = \mathrm{FO}[<]$. Die Syntax von FO ist

$$\top \mid \bot \mid x = y \mid x < y \mid \lambda(x) \leq a \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \exists x \phi \mid \forall x \phi$$

wobei x und y Variablen, a ein Buchstabe aus A und ϕ, ψ Formeln aus FO sind. Wir interpretieren diese Formeln über Wörtern aus $(A^*, \leq)$: Variablen entsprechen Positionen im Wort und $\lambda(x) \leq a$ ist genau dann wahr, wenn für den Buchstaben b an Position x die Ungleichung $b \leq a$ erfüllt ist.

Eine zu einer Formel ϕ passende Zuweisung μ weist jeder freien Variable x_j aus ϕ einen Wert $i_j \in \mathbb{N}_+$ zu. Wir schreiben $(w, \mu) \models \phi$ für eine Formel ϕ und eine dazu passende Zuweisung μ, falls das Wort $w \in A^*$ die Formel ϕ unter μ erfüllt. Wir schreiben $w \models \phi$, falls $w \in A^*$ die Formel ϕ unter jeder passenden Zuweisung erfüllt. Ein Satz ϕ *definiert* die Sprache

$$L = \{\, w \in A^* \mid w \models \phi \,\}.$$

Jede Sprache, die durch einen Satz aus FO definiert wird, heißt FO-definierbar. Da die Interpretation von atomaren Formeln der Form $\lambda(x) \leq a$ von der Alphabetordnung abhängt, sagen wir, ein Satz ϕ *definiert eine Sprache über dem geordneten Alphabet* $(A^*, \leq)$, wenn wir die Rolle der Alphabetordnung hervorheben oder Mehrdeutigkeiten ausschließen möchten.

Wir definieren Logik erster Stufe ohne Negation $\mathrm{FO}^+ = \mathrm{FO}^+[<]$, indem wir FO auf Formeln beschränken, die keine Teilformel der Form $\neg\phi$ enthalten.

Proposition 3.0.3. *Jeder Satz aus* FO^+ *definiert eine geordnete Sprache* $L \subseteq (A^*, \leq)$.

Beweis. Sei ϕ ein beliebiger Satz aus FO^+. Seien $u = a_1 \cdots a_m$ $(a_1, \ldots, a_m \in A)$ und $v = b_1 \cdots b_n$ $(b_1, \ldots, b_n \in A)$ Wörter mit $u \leq v$ und $v \models \phi$. Insbesondere ist also $m = n$.

Sei $\hat{\phi}$ die Matrix einer zu ϕ äquivalenten Formel in bereinigter Pränexform und μ eine zu $\hat{\phi}$ passende Zuweisung. Wir nehmen an, dass $(v, \mu) \models \hat{\phi}$, und zeigen, dass dann auch $(u, \mu) \models \hat{\phi}$. Damit folgt unmittelbar $u \models \phi$. ϕ definiert also eine geordnete Sprache.

Der Beweis erfolgt per Induktion über den Formelaufbau von $\hat{\phi}$. Für atomare Formeln der Form $i_j = i_{j'}$ und $i_j < i_{j'}$ ist der Beweis trivial. Sei φ eine atomare Formel $\lambda(i_j) \leq b_{i_j}$ aus $\hat{\phi}$ mit $(v, \mu) \models \varphi$. Dann ist offensichtlich auch $(u, \mu) \models \varphi$, da laut Annahme $a_{i_j} \leq b_{i_j}$. Angenommen, $(v, \mu) \models \varphi \wedge \psi$, dann gilt $(v, \mu) \models \varphi$ und $(v, \mu) \models \psi$, laut Induktionsannahme also auch $(u, \mu) \models \varphi$ und $(u, \mu) \models \varphi$. Damit ist $(u, \mu) \models \varphi \wedge \psi$, wie gefordert. Der Induktionsschritt für Formeln der Form $\varphi \vee \psi$ erfolgt analog. □

Proposition 3.0.4. *Sei $(A, =)$ ein Alphabet, in dem die Halbordnung die Äquivalenz ist. Eine Sprache über $(A, =)$ ist genau dann* FO*-definierbar, wenn sie* FO$^+$*-definierbar ist.*

Beweis. Angenommen, $L \subseteq (A^*, =)$ sei FO-definierbar. Dann existiert eine Formel ϕ aus FO, die L definiert. Durch wiederholte Anwendung von $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$, $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$ und der Regeln von De Morgan formen wir ϕ in eine äquivalente Formel ϕ' um, in der Negationen nur unmittelbar vor atomaren Formeln stehen. Nun ersetzen wir jede Teilformel der Form $\neg x = y$ aus ϕ' durch $x < y \vee y < x$, jede Teilformel der Form $\neg x < y$ durch $x = y \vee y < x$ und jede Teilformel der Form $\neg\lambda(x) \leq a$ durch

$$\bigvee_{b \in A \setminus \{a\}} \lambda(x) \leq b.$$

Das Ergebnis ist eine zu ϕ' und damit auch zu ϕ äquivalente Formel, in der keine Negationen auftreten. Also ist L FO$^+$-definierbar.

Die umgekehrte Inklusion ist trivial. □

Ein ähnliches Resultat erhalten wir, wenn wir die Anzahl an Variablen und die Alternierungstiefe beschränken. Sei FO$^{2,+}$ das Fragment von FO$^+$, das nur zwei verschiedene Variablen benutzt. Wir betrachten nun Sequenzen von Quantoren entlang eines Pfades von der Wurzel zu einem Blatt im Syntaxbaum einer Formel. In diesen Sequenzen treten abwechselnd Blöcke aus Existenz- und Allquantoren auf. Die maximale Anzahl solcher Blöcke entlang aller Pfade über dem Syntaxbaum einer Formel nennen wir *Alternierungstiefe* der Formel. Eine Σ_n*-Formel* (bzw. Π_n-Formel) ist eine Formel mit Alternierungstiefe $\leq n$, in der jede aus n Blöcken bestehende Sequenz von Quantoren mit einem Existenzquantor (bzw. Allquantor) beginnt. Die maximale Länge der Sequenz von Quantoren über alle Pfade im Syntaxbaum einer Formel nennen wir *Quantorentiefe* der Formel.

Für $n \geq 1$ sei $\mathrm{FO}^{2,+}_\mathrm{n}$ das Fragment von FO$^{2,+}$ aller Formeln mit Alternierungstiefe $\leq n$. Das Fragment FO^2_n von FO^2 sei analog definiert. Es ist jedoch zu beachten, dass sich jede Formel aus FO^2 äquivalent als Formel aus FO^2_1 formulieren lässt, indem alle Teilformeln der Form $\forall x\phi$ durch $\neg\exists x\neg\phi$ ersetzt werden. Wir formen eine Formel aus FO^2 zur Bestimmung der Alternierungstiefe daher zunächst, wie in Proposition 3.0.4 beschrieben, in eine Normalform um, in der Negationen nur direkt vor atomaren Formeln auftreten. Die Formel

$$\neg\forall x\exists y\colon (x < y \vee y < x) \wedge \neg\lambda(y) \leq a$$

ist beispielsweise in FO^2_2, jedoch nicht in FO^2_1, während folgende Formel in FO^2_1 ist:

$$\forall x\neg\exists y\colon (x < y \vee y < x) \wedge \neg\lambda(y) \leq a$$

Weiter sei

- Σ^2_{n} das Fragment aller Σ_{n}-Formeln aus $\mathrm{FO}^2_{\mathrm{n}}$.
- $\Sigma^{2,+}_{\mathrm{n}}$ das Fragment aller Σ_{n}-Formeln aus $\mathrm{FO}^{2,+}_{\mathrm{n}}$.
- Π^2_{n} das Fragment aller Π_{n}-Formeln aus $\mathrm{FO}^2_{\mathrm{n}}$.
- $\Pi^{2,+}_{\mathrm{n}}$ das Fragment aller Π_{n}-Formeln aus $\mathrm{FO}^{2,+}_{\mathrm{n}}$.

Beschränken wir zusätzlich die Quantorentiefe m einer Formel, so erhalten wir die Fragmente $\mathrm{FO}^{2,+}_{\mathrm{n,m}}$, $\Sigma^{2,+}_{\mathrm{n,m}}$, $\Pi^{2,+}_{\mathrm{n,m}}$, $\mathrm{FO}^2_{\mathrm{n,m}}$, $\Sigma^2_{\mathrm{n,m}}$ und $\Pi^2_{\mathrm{n,m}}$.

Wir präzisieren nun Proposition 3.0.4, um den Zusammenhang zwischen Logik erster Stufe über geordneten Alphabeten und Logik erster Stufe über ungeordneten Alphabeten zu verdeutlichen:

Theorem 3.0.5. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Sei $\mathcal{C} \in \{ \mathrm{FO}^2, \mathrm{FO}^2_{\mathrm{n}}, \mathrm{FO}^2_{\mathrm{n,m}}, \Sigma^2_{\mathrm{n}}, \Sigma^2_{\mathrm{n,m}}, \Pi^2_{\mathrm{n}}, \Pi^2_{\mathrm{n,m}} \}$ und $\mathcal{C}^+$ das negationsfreie Fragment von $\mathcal{C}$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- *L ist über dem geordneten Alphabet $(A, \leq)$ $\mathcal{C}^+$-definierbar.*
- *L ist über dem Alphabet $(A, =)$ $\mathcal{C}^+$-definierbar.*
- *L ist über dem Alphabet $(A, =)$ $\mathcal{C}$-definierbar.*

Beweis. Der Beweis der Äquivalenz der zweiten und dritten Aussage erfolgt nach demselben Prinzip wie der Beweis von Proposition 3.0.4. Zu zeigen bleibt die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen.

Angenommen, L sei über dem geordneten Alphabet $(A, \leq)$ $\mathcal{C}^+$-definierbar. Sei $\varphi \in \mathcal{C}^+$ eine Formel, die L über $(A, \leq)$ definiert. Wir konstruieren nun eine zu φ äquivalente Formel φ', indem wir jede atomare Formel der Form $\lambda(x) \leq a$ aus φ durch

$$\bigvee_{b \in (\downarrow a)} \lambda(x) \leq b$$

ersetzen. Die entstandene Formel definiert über den Alphabeten $(A, \leq)$ und $(A, =)$ dieselbe Sprache. Also ist L über $(A, =)$ $\mathcal{C}^+$-definierbar.

Sei umgekehrt $\varphi \in \mathcal{C}^+$ eine Formel, die L über $(A, =)$ definiert. Da L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$ ist, definiert φ dann L auch über dem Alphabet $(A, \leq)$. $\square$

Dieser einfache Zusammenhang erlaubt uns, viele bekannte Resultate zu Logik erster Ordnung auf den geordneten Fall zu übertragen. Wir verwenden das Theorem nun, um exemplarisch das Resultat von Thérien und Wilke [TW98] für Logik erster Stufe über geordneten Alphabeten zu formulieren:

Theorem 3.0.6. *Sei L eine geordnete Sprache über einem geordneten Alphabet $(A, \leq)$. Dann ist L genau dann $\mathrm{FO}^{2,+}$-definierbar, wenn $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{DA}$.*

Beweis. Nach Theorem 3.0.5 ist L über $(A, \leq)$ genau dann $\mathrm{FO}^{2,+}$-definierbar, wenn L über $(A, =)$ FO^2-definierbar ist. Es ist (für den ungeordneten Fall) bekannt [TW98], dass das syntaktische Monoid einer Sprache genau dann in **DA** ist, wenn die Sprache FO^2-definierbar ist. Der Rest der Behauptung folgt, da das syntaktische geordnete Monoid einer Sprache unabhängig von der Alphabetordnung und das zugrunde liegende Monoid äquivalent zum syntaktischen Monoid der Sprache ist. $\square$

4 Zweiseitige semidirekte Produkte

Seien K und N endliche geordnete Monoide. Wir schreiben das Produkt in K additiv. Eine *linke Aktion* von N auf K ist eine Abbildung $(n, k) \mapsto n \cdot k$ von $N \times K$ in K, sodass für alle $n, n_1, n_2 \in N$ und $k, k_1, k_2 \in K$

$$n(k_1 + k_2) = nk_1 + nk_2 \tag{4.1}$$
$$(n_1 n_2)k = n_1(n_2 k) \tag{4.2}$$
$$1 \cdot k = k \tag{4.3}$$
$$n \cdot 0 = 0 \tag{4.4}$$
$$nk_1 \leq nk_2, \text{ falls } k_1 \leq k_2 \tag{4.5}$$
$$n_1 k \leq n_2 k, \text{ falls } n_1 \leq n_2 \tag{4.6}$$

Eine *rechte Aktion* $(n, k) \mapsto k \cdot n$ von N auf K ist analog definiert. Eine linke und rechte Aktion von N auf K sind *kompatibel*, wenn für alle $n_1, n_2 \in N$ und $k \in K$ folgendes Axiom erfüllt ist:

$$(n_1 k)n_2 = n_1(kn_2).$$

Es bietet sich daher an, im Folgenden $n_1 k n_2$ statt $(n_1 k)n_2$ oder $n_1(kn_2)$ zu schreiben.

Wir definieren das *zweiseitige semidirekte Produkt* $K ** N$ (bezüglich einem Paar aus einer kompatiblen linken und rechten Aktion von N auf K) auf der Menge $K \times N$ über die Multiplikation

$$(k, n)(k', n') = (kn' + nk', nn')$$

und die Halbordnung

$$(k, n) \leq (k', n') \text{ genau dann, wenn } k \leq k' \text{ und } n \leq n'.$$

Für alle $k_1, k_2, k_3 \in K$ und $n_1, n_2, n_3 \in N$ ist dann

$$\begin{aligned}
((k_1, n_1)(k_2, n_2))(k_3, n_3) &= ((k_1 n_2 + n_1 k_2)n_3 + n_1 n_2 k_3) \\
&= (k_1 n_2 n_3 + n_1 k_2 n_3 + n_1 n_2 k_3) \\
&= (k_1 n_2 n_3 + n_1(k_2 n_3 + n_2 k_3)) \\
&= (k_1, n_1)((k_2, n_2)(k_3, n_3))
\end{aligned}$$

und für alle $k \in K, n \in N$ ist $(k, n)(0, 1) = (k \cdot 1 + n \cdot 0, n \cdot 1) = (k, n)$, sowie $(0, 1)(k, n) = (0 \cdot n + 1 \cdot k, 1 \cdot n) = (k, n)$. Die Halbordnung $\leq$ auf $K \times N$ ist stabil, da für alle $k_1, k_2, k \in K$ und $n_1, n_2, n \in N$ mit $(k_1, n_1) \leq (k_2, n_2)$ gilt:

$$(k_1, n_1)(k, n) = (k_1 n + n_1 k, n_1 n) \leq (k_2 n + n_2 k, n_2 n) = (k_2, n_2)(k, n).$$

$K ** N$ ist also ein endliches geordnetes Monoid.

4.1 Blockprodukte

Seien K und N endliche geordnete Monoide. Dann existiert ein Paar kompatibler Aktionen von N auf ein direktes Produkt von $|N|^2$ Kopien von K. Betrachten wir dieses direkte Produkt als die Menge ordnungserhaltender Funktionen $f\colon N \times N \to K$, so sind die Aktionen gegeben durch

$$(nf)(n_1, n_2) = f(n_1, nn_2) \text{ und}$$
$$(fn)(n_1, n_2) = f(n_1 n, n_2).$$

Das Produkt zweier Funktionen $f_1, f_2\colon N \times N \to K$ ist dann gegeben durch die komponentenweise Multiplikation, das heißt $(f_1 * f_2)(n_1, n_2) = f_1(n_1, n_2) \cdot f_2(n_1, n_2)$. Zudem ist $f_1 \leq f_2$ genau dann, wenn $f_1(n_1, n_2) \leq f_2(n_1, n_2)$ für alle $n_1, n_2 \in N$.

Das zweiseitige semidirekte Produkt bezüglich diesem Paar von Aktionen heißt *Blockprodukt* $K \,\square\, N$ von K und N.

Wir verifizieren nun für die Operation nf, dass diese tatsächlich die Axiome einer linken Aktion erfüllt. Es ist leicht zu sehen, dass Axiome (4.1) bis (4.4) erfüllt sind. Betrachten wir zwei Funktionen $f_1, f_2\colon N \times N \to K$ mit $f_1 \leq f_2$, dann ist

$$nf_1(n_1, n_2) = f_1(n_1, nn_2) \leq f_2(n_1, nn_2) = nf_2(n_1, n_2).$$

für alle $n, n_1, n_2 \in N$. Für eine feste ordnungserhaltende Funktion $f\colon N \times N \to K$ seien nun $n_1, n_2, n, n' \in N$, dann ist

$$n_1 f(n, n') = f(n, n_1 n') \leq f(n, n_2 n') = n_2 f(n, n').$$

Mit einer analogen Schlussweise kann geprüft werden, dass fn eine rechte Aktion ist. Die beiden Aktionen sind zudem kompatibel, da

$$((n_1 f) n_2)(n, n') = f(nn_2, n_1 n') = (n_1 (f n_2))(n, n').$$

Der Zusammenhang zwischen Blockprodukten und zweiseitigen semidirekten Produkten geordneter Monoide ist derselbe wie im ungeordneten Fall.

Proposition 4.1.1. *Seien K und K geordnete Monoide. Dann teilt jedes zweiseitige semidirekte Produkt $K ** N$ das Blockprodukt $K \,\square\, N$.*

Beweis. Sei $\varphi : K ** N \to K \,\square\, N$ die durch $\varphi(k, n) = (f_k, n)$ mit $f_k : N \times N \to K, (n_1, n_2) \mapsto n_1 k n_2$ definierte Funktion. Es ist leicht zu überprüfen, dass φ ein Homomorphismus geordneter Monoide ist. $\square$

Seien $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ Pseudovarietäten geordneter Monoide, dann ist $\mathbf{V} ** \mathbf{W}$ die durch alle semidirekten Produkte $K ** N$ mit $K \in \mathbf{V}$ und $N \in \mathbf{W}$ erzeugte Pseudovarietät geordneter Monoide.

4.2 Von Blockprodukten erkannte Sprachen

Seien K und N endliche geordnete Monoide und $\psi\colon (A^*, \leq) \to N$ ein Homomorphismus geordneter Monoide. Wir definieren ein neues geordnetes Alphabet $A_N = (N \times A \times N, \leq)$ mit

$$(n_1, a, n_2) \leq (n'_1, a', n'_2) \text{ genau dann, wenn } n_1 \leq n'_1, a \leq a', n_2 \leq n'_2$$

für alle $n_1, n_2, n'_1, n'_2 \in N$ und $a, a' \in A$.

Zudem sei $\tau_\psi\colon (A^*, \leq) \to (A_N^*, \leq)$ eine längen- und ordnungserhaltende Abbildung mit $\tau_\psi(1) = 1$ und $\tau_\psi(a_1 \cdots a_n) = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, wobei

$$\sigma_i = (\psi(a_1 \cdots a_{i-1}), a_i, \psi(a_{i+1} \cdots a_n))$$

für alle $1 \leq i \leq n$.

Theorem 4.2.1 (Blockprodukt-Prinzip)**.** *Seien* $\mathbf{V}$ *und* $\mathbf{W}$ *Pseudovarietäten geordneter Monoide, M ein endliches geordnetes Monoid und $\phi\colon (A^*, \leq) \to M$ ein surjektiver Homomorphismus geordneter Monoide. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- $M \in \mathbf{V} ** \mathbf{W}$
- *Es existieren Homomorphismen geordneter Monoide $\psi\colon (A^*, \leq) \to N \in \mathbf{W}$ und $h\colon (A_N^*, \leq) \to K \in \mathbf{V}$, sodass für alle $w, w \in A^*$ gilt:*

$$\psi(w) \leq \psi(w') \wedge h(\tau_\psi(w)) \leq h(\tau_\psi(w')) \Rightarrow \phi(w) \leq \phi(w').$$

Beweis. Sei zunächst $M \in \mathbf{V} ** \mathbf{W}$. Wir können annehmen, dass $M = K \,\Box\, N$ mit $K \in \mathbf{V}$ und $N \in \mathbf{W}$, da jedes zweiseitige semidirekte Produkt aus $\mathbf{V} ** \mathbf{W}$ ein solches Blockprodukt teilt. Angenommen, $\phi(a) = (f_a, n_a)$ mit $f_a\colon N \times N \to K$ und $n_a \in N$. Wir setzen $\psi(a) = n_a$ und $h(n_1, a, n_2) = n_1 f_a n_2$ für alle $n_1, n_2 \in N$. Nun ist $\phi(w) = (h(\tau_\psi(w)), \psi(n))$. Die Behauptung folgt direkt, da das direkte Produkt von $|N|^2$ Kopien von K in $\mathbf{V}$ ist.

Wir nehmen nun an, dass Homomorphismen geordneter Monoide ψ und h, wie oben beschrieben, existieren. Für jedes $a \in A$ definieren wir eine ordnungserhaltende Funktion $f_a\colon N \times N \to K, (n_1, n_2) \mapsto h(n_1, a, n_2)$. Sei $\varphi\colon (A^*, \leq) \to K \Box N$ ein Homomorphismus mit $\varphi(a) = (f_a, \psi(a))$. Dann gilt für alle $w, w' \in A^*$ mit $\varphi(w) \leq \varphi(w')$

$$\psi(w) \leq \psi(w') \wedge h(\tau_\psi(w)) \leq h(\tau_\psi(w'))$$

und damit laut Annahme $\phi(w) \leq \phi(w')$. Also teilt M das Blockprodukt $K \,\Box\, N$ und ist folglich in $\mathbf{V} ** \mathbf{W}$. $\square$

Eine andere Formulierung dieses Resultats stellt einen direkten Zusammenhang zwischen der Beschaffenheit einer geordneten Sprache L und der Zugehörigkeit des syntaktischen geordneten Monoids von L zu $\mathbf{V} ** \mathbf{W}$ her:

Korollar 4.2.2. *Seien* $\mathbf{V}$ *und* $\mathbf{W}$ *Pseudovarietäten geordneter Monoide* $(A, \leq)$ *ein geordnetes Alphabet und* $L \subseteq (A^*, \leq)$ *eine geordnete Sprache. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V} ** \mathbf{W}$
- *L ist eine endliche Vereinigung von geordneten Sprachen der Form* $\tau_\psi^{-1}(L_K) \cap L_N$*, wobei* L_K *durch ein geordnetes Monoid aus* $\mathbf{V}$ *und* L_N *durch einen Homomorphismus geordneter Monoide* $\psi \colon (A^*, \leq) \to N \in \mathbf{W}$ *erkannt wird.*

Beweis. Sei $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V} ** \mathbf{W}$. Es existieren also Homomorphismen geordneter Monoide $\psi \colon (A^*, \leq) \to N \in \mathbf{W}$ und $h \colon (A_N^*, \leq) \to K \in \mathbf{V}$, sodass für alle $w, w \in A^*$ gilt:

$$\psi(w) \leq \psi(w') \wedge h(\tau_\psi(w)) \leq h(\tau_\psi(w')) \Rightarrow \phi_L(w) \leq \phi_L(w').$$

Sei im Folgenden $\varphi = (\psi, h \circ \tau_\psi)$, P ein Ordnungsideal von $\mathrm{Synt}(L)$ mit $L = \phi_L^{-1}(P)$ und $Q = \varphi(L)$. Wir nehmen an, φ sei surjektiv – ansonsten betrachten wir im Folgenden das Untermonoid $\varphi(A^*)$ von (N, K) anstatt (N, K) selbst. Nach Proposition 2.2.2 ist Q ein Ordnungsideal von (N, K) und $\varphi^{-1}(Q) = L$. Damit ist

$$\bigcup_{(n,k) \in Q} \varphi^{-1}(\downarrow n, \downarrow k) = \bigcup_{(n,k) \in Q} \varphi^{-1}(n, k) = \varphi^{-1}(Q) = L.$$

Da Q eine endliche Anzahl an Elementen enthält und $\varphi^{-1}(\downarrow n, \downarrow k)$ als Sprache der Form $\tau_\psi^{-1}(L_K) \cap L_N$ mit oben genannten Eigenschaften dargestellt werden kann, ist L eine endliche Vereinigung solcher Sprachen.

Sei nun L eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\tau_\psi^{-1}(L_K) \cap L_N$. Sei $K \in \mathbf{V}$ das direkte Produkt aller syntaktischen geordneten Monoide der zugehörigen L_K, $N \in \mathbf{W}$ das direkte Produkt aller syntaktischen geordneten Monoide zu L_N. $h \colon (A_N^*, \leq) \to K$ und $\psi \colon (A^*, \leq) \to N$ seien die zugehörigen kanonischen Homomorphismen geordneter Monoide und wir definieren $\varphi = (\psi, h \circ \tau_\psi)$, wie oben.

Betrachte $w, w' \in A^*$ mit $\varphi(w) \leq \varphi(w')$. Da ψ und $h \circ \tau_\psi$ ordnungserhaltend und K, N Produkte syntaktischer geordneter Monoide sind, gilt dann für jede Sprache der Form L_N (bzw. L_K) und alle $u, v \in A^*$: $uw'v \in L_N \Rightarrow uwv \in L_N$ (bzw. $uw'v \in L_K \Rightarrow uwv \in L_K$). Es folgt für alle $u, v \in A^*$ mit $uw'v \in L$: $uwv \in L$. Also ist $\phi_L(w) \leq \phi_L(w')$. □

5 Algebraische Charakterisierungen von $\Sigma_{\mathrm{n}}^{2,+}$

In diesem Abschnitt stellen wir algebraische Charakterisierungen jedes Levels der positiven Alternierungshierarchie vor, das heißt, wir geben algebraische Beschreibungen für eine Sequenz $\mathbf{V}_n$ von Klassen geordneter Monoide, sodass $L \subseteq (A^*, \leq)$ genau dann $\Sigma_{\mathrm{n}}^{2,+}$-definierbar ist, wenn $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_n$.

Die Basis aller unserer Charakterisierungen liefert $\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}^+$. Wir werden zeigen, dass folgende Charakterisierungen äquivalente algebraische Beschreibungen der $\Sigma_{\mathrm{n}}^{2,+}$-definierbaren Sprachen liefern:

1. $\mathbf{V}_{2n} = \mathbf{V}_{2n-1} ** \mathbf{J}^-$ und $\mathbf{V}_{2n+1} = \mathbf{V}_{2n} ** \mathbf{J}^+$
2. $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n ** \mathbf{J}$

für alle $n \geq 1$. Die erste Beschreibung dient im Folgenden als Definition für $\mathbf{V}_n$.

Wir merken an, dass sich iterierte zweiseitige semidirekte Produkte mit der Pseudovarietät geordneter Monoide $\mathbf{J}^+$ (bzw. $\mathbf{J}^-$) nicht zur Charakterisierung eignen, da diese Sequenz im ersten Level kollabiert:

Proposition 5.0.3. $\mathbf{J}^+ ** \mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^+$. $\mathbf{J}^- ** \mathbf{J}^- = \mathbf{J}^-$.

Beweis. Da die Ordnungsrelation auf einem geordneten Monoid $K ** N \in \mathbf{J}^+ ** \mathbf{J}^+$ die Produktordnung zweier geordneter Monoide $K, N \in \mathbf{J}^+$ ist und sich das neutrale Element von $K ** N$ aus den beiden neutralen Elementen von K und N zusammensetzt, ist $K ** N \in [\![x \leq 1]\!] = \mathbf{J}^+$ und folglich $\mathbf{J}^+ ** \mathbf{J}^+ \subseteq \mathbf{J}^+$. Die Inklusion $\mathbf{J}^+ \subseteq \mathbf{J}^+ ** \mathbf{J}^+$ ist trivial. Analoge Begründungen liefern den Beweis für $\mathbf{J}^- ** \mathbf{J}^- = \mathbf{J}^-$. $\square$

5.1 Charakterisierungen von $\Sigma_1^{2,+}$

Wir untersuchen zunächst das erste Level der Alternierungshierarchie. Für Σ_1^2 mit ungeordnetem Alphabet sind algebraische Charakterisierungen und Charakterisierungen auf Sprachebene bereits bekannt. Wir erweitern diese Resultate auf geordnete Sprachen.

Theorem 5.1.1. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^+$
- *L ist eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in A$.*

Beweis. Sei L eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1a_2\cdots a_k}$ und K das Maximum aller k aus dieser Vereinigung. Wir definieren eine geordnete Menge $M = (\mathcal{P}(A^{\leq K}), \leq)$ mit $m \leq m' \Leftrightarrow \forall y \in m' \exists x \in m\colon x \leq y$. Sei $\phi\colon (A^*, \leq) \to M$ der Homomorphismus geordneter Monoide, der jedes Wort w auf die Menge der Teilwörter der Länge $\leq K$ von w abbildet. M bildet, zusammen mit der durch ϕ induzierten Verknüpfung, ein geordnetes Monoid. Offensichtlich ist $\phi(\varepsilon) = \{\, \varepsilon \,\}$ das neutrale Element von M und es gilt $m \leq \{\, \varepsilon \,\}$ für alle $m \in M$. Also ist $M \in \mathbf{J}^+$. Betrachte nun zwei Wörter $w, w' \in A^*$ mit $\phi(w) \leq \phi(w')$. Wir behaupten, dass dann auch $\phi_L(w) \leq \phi_L(w')$. Folglich teilt $\mathrm{Synt}(L)$ das Monoid M und es ist $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^+$.

Für den Beweis der Behauptung betrachten wir $u, v \in A^*$ mit $uw'v \in L$. $uw'v$ ist dann in mindestens einer geordneten Sprache der Form $\downarrow L_{a_1a_2\cdots a_k}$ mit $k \leq K$ enthalten. Da $\phi(w) \leq \phi(w')$, enthält uwv ein Teilwort $b_1 \cdots b_k$ $(b_1, \ldots, b_k \in A)$ mit $b_1 \cdots b_k \leq a_1 \cdots a_k$. Da L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$ ist, folgt $uwv \in L$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Sei umgekehrt $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^+$ und I ein Ordnungsideal von $\mathrm{Synt}(L)$ mit $\phi_L^{-1}(I) = L$. Sei im Folgenden für ein Wort $w = a_1 \cdots a_k$ mit $a_1, \ldots, a_k \in A$ die Sprache $L_w = \downarrow L_{a_1a_2\cdots a_k}$. Wir setzen $P = \{\, w \in A^* \mid |w| < |\mathrm{Synt}(L)| \wedge \phi_L(w) \in I \,\}$ und behaupten

$$\phi_L^{-1}(I) = \bigcup_{w \in P} L_w.$$

Zunächst zeigen wir die Inklusion $L_w \subseteq \phi_L^{-1}(I)$ für $w \in P$. Die Ungleichung $\phi_L(xzy) = \phi_L(x)\phi_L(z)\phi_L(y) \leq \phi_L(x) \cdot 1 \cdot \phi_L(y) = \phi_L(xy)$ zeigt, dass jedes für jedes Wort $w' \in L_w$ gilt: $\phi_L(w') \leq \phi_L(w)$. Also ist $\phi_L(w') \in I$.

Umgekehrt ist zu zeigen, dass jedes Wort aus $\phi_L^{-1}(I)$ in mindestens einer Sprache L_w mit $w \in P$ enthalten ist. Für Wörter der Länge $< |\mathrm{Synt}(L)|$ ist der Beweis trivial. Sei also $w' = a_1 \cdots a_n \in \phi_L^{-1}(I)$ mit $|w'| \geq |\mathrm{Synt}(L)|$. Nach dem Standard-Pumping-Argument ist dann $\phi_L(w') = \phi_L(a_1 \cdots a_i a_j \cdots a_n)$ mit $i + (n - j + 1) < |\mathrm{Synt}(L)|$. Es folgt $w = a_1 \cdots a_i a_j \cdots a_n \in P$. $w' \in L_w$ vervollständigt den Beweis. □

Es sei angemerkt, dass im zweiten Teil des Beweises die Tatsache, dass $\mathrm{Synt}(L)$ das syntaktische geordnete Monoid einer geordneten Sprache ist, nicht benutzt wurde. Wir können Theorem 5.1.1 im Folgenden daher auch verwenden, um zu zeigen, dass jede von einem geordneten Monoid $M \in \mathbf{J}^+$ erkannte Sprache eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1a_2\cdots a_k}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in A$ ist[1]. Theorem 5.1.2 und Proposition 5.1.5, die im Verlauf des Kapitels vorgestellt werden, können analog interpretiert werden.

Theorem 5.1.2. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^-$
- *L ist ein endlicher Durchschnitt von Sprachen der Form $\overline{\uparrow L_{a_1a_2\cdots a_k}}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in A$.*

[1] Dies kann hinsichtlich des Varietätensatzes für Pseudovarietäten geordneter Monoide [Pin95] auch als direkte Konsequenz des Theorems gesehen werden.

Beweis. Wir betrachten zunächst eine Sprache L mit $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^-$. Sei I ein Ordnungsideal von $\mathrm{Synt}(L)$ mit $\phi_L^{-1}(I) = L$. Sei $\mathrm{Synt}'(L) = (\mathrm{Synt}(L), \geq_L) \in \mathbf{J}^+$ das geordnete Monoid, das wir durch Invertieren der Ordnungsrelation auf $\mathrm{Synt}(L)$ und $(A', \leq) = (A, \geq)$ das geordnete Alphabet, das wir durch Invertieren der Ordnungsrelation auf A erhalten.

Dann ist $\phi'_L \colon (A'^*, \leq) \to \mathrm{Synt}'(L)$ mit $\phi'_L(a) = \phi_L(a)$ ein Homomorphismus geordneter Monoide und $I' = \mathrm{Synt}'(L) \setminus I$ ein Ordnungsideal von $\mathrm{Synt}'(L)$. Offensichtlich ist $\mathrm{Synt}'(L)$ das syntaktische geordnete Monoid von $\overline{L}$. Theorem 5.1.1 zeigt nun, dass $\phi_L'^{-1}(I')$ eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ ist. $\overline{\phi_L^{-1}(I)}$ ist dann konstruktionsbedingt ein endlicher Durchschnitt von Sprachen der Form $\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$.

Der Beweis der umgekehrten Implikation erfolgt analog, indem wir das syntaktische geordnete Monoid für einen endlichen Durchschnitt der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ betrachten und dieses dann wie oben transformieren. $\square$

Wir können nun unser Hauptresultat aus diesem Abschnitt formulieren:

Korollar 5.1.3. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. L ist genau dann $\Sigma_1^{2,+}$-definierbar, wenn* $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^+$.

Beweis. Sei $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^+$. Theorem 5.1.1 zeigt, dass L dann notwendigerweise eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ ist. Wir konstruieren eine $\Sigma_1^{2,+}$-Formel für L aus einer Disjunktion von Formeln der Form

$$\exists x \colon \lambda(x) \leq a_1 \wedge \exists y \colon y > x \wedge \lambda(y) \leq a_2 \wedge \exists x \colon \cdots .$$

Sei nun $\varphi \in \Sigma_1^{2,+}$ eine Formel, die L definiert, und φ' eine zu φ äquivalente Formel in bereinigter Pränexform, deren Matrix in disjunktiver Normalform ist. Dann beschreibt jede Klausel von φ' eine Ordnung auf den verfügbaren Positionen und für jede Position ein Ordnungsideal von $(A, \leq)$. Die von L definierte geordnete Sprache ist also eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$. Mit Theorem 5.1.1 folgt $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^+$. $\square$

Analog zu Theorem 5.1.2 gibt es auch hiervon eine negative Version:

Korollar 5.1.4. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. L ist genau dann $\Pi_1^{2,+}$-definierbar, wenn* $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}^-$.

Für eine weitere Charakterisierung, die eine algebraische Beschreibung der Level verschiedener Quantorentiefe innerhalb des ersten Quantorenblocks erlaubt, benötigen wir folgendes Resultat aus [PW02]:

Proposition 5.1.5. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}_1^+$
- *L ist eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_a$ mit $a \in A$.*

Wir definieren nun eine Sequenz von Pseudovarietäten geordneter Monoide $\mathbf{U}_i$ durch $\mathbf{U}_1 = \mathbf{J}_1^+$ und $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n ** \mathbf{J}_1^+$ für alle $n \geq 1$.

Lemma 5.1.6. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Dann ist L genau dann $\Sigma_{1,m}^{2,+}$-definierbar, wenn* $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{U}_m$.

Beweis. Sei $\varphi \in \Sigma_{1,m}^{2,+}$ eine Formel mit $w \models \varphi \Leftrightarrow w \in L$. Für den Fall $m = 1$ beschreibt φ das Vorkommen eines Buchstaben aus einem bestimmten Ordnungsideal I von $(A, \leq)$. Also ist L eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_a$ und laut Proposition 5.1.5 $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}_1^+$.

Sei nun $m > 1$. Dann ist jede innerste Formel der Form $\exists \phi$ äquivalent zu einer Disjunktion von Formeln der Form

$$\exists x \colon x \mathcal{R} y \wedge \bigwedge_i \lambda(x) \leq a_i$$

mit $\mathcal{R} \in \{<, =, >\}$. Jede solche Formel beschreibt dann das Vorkommen eines Buchstabens aus einem Ordnungsideal $(\downarrow a)$ links oder rechts von y oder an Position y selbst. Wir betrachten im Folgenden nur eine Formel mit $<$-Relation. Interpretieren wir die Formel über Wörtern

$$w = a_1 \cdots a_{y-1} a_y a_{y+1} \cdots a_n,$$

so beschreibt die Formel also alle Wörter mit $a_1 \cdots a_{y-1} \in \downarrow L_a$. Wir konstruieren nun ein geordnetes Monoid $N \in \mathbf{J}_1^+$, das jede Sprache $\downarrow L_a$ erkennt. Proposition 5.1.5 zeigt, dass für jede Sprache $\downarrow L_a$ ein geordnetes Monoid $N_a \in \mathbf{J}_1^+$ existiert, das $\downarrow L_a$ erkennt. Es ist dann einfach zu sehen, dass das direkte Produkt

$$N = \bigtimes_{a \in A} N_a$$

jede Sprache $\downarrow L_a$ erkennt. Sei im Folgenden $\psi \colon (A^*, \leq) \to N$ der zu N zugehörige natürliche Homomorphismus geordneter Monoide und I_a ein Ordnungsideal von N mit $\downarrow L_a = \psi^{-1}(I_a)$.

Wir beschreiben nun oben genannte Eigenschaften von $w \in A^*$ durch Eigenschaften von $\tau_\psi(w)$. Offensichtlich ist $a_1 \cdots a_{y-1} \in \downarrow L_a$ genau dann, wenn an Position y in $\tau_\psi(w)$ ein Buchstabe (n, a', n') mit $n \in I_a$, $a' \in A$, $n' \in N$ steht. Wir können obige Formel also durch eine Disjunktion aller Formeln $\lambda(y) \leq (n, a', n')$ mit $n \in I_a$, $a' \in A$, $n' \in N$ ersetzen. Die Konstruktion für $>$ folgt analog. Alle atomaren Formeln der Form $\lambda(y) \leq a$ mit $=$-Relation oder außerhalb einer innersten $\exists$-Formel ersetzen wir durch eine Disjunktion aller Formeln $\lambda(y) \leq (n, a, n')$ mit $n, n' \in N$. Für die konstruierte Formel ϕ' ist dann $w \models \phi \Leftrightarrow \tau_\psi(w) \models \phi'$. Da die Quantorentiefe von ϕ' $m-1$ beträgt, ist die von ϕ' über dem Alphabet $(A_N, \leq)$ definierte Sprache L' laut Induktionsannahme durch ein Monoid aus $\mathbf{U}_{m-1}$ erkennbar. Mit Korollar 4.2.2 folgt: $\mathrm{Synt}(L) = \mathrm{Synt}(\tau_\psi^{-1}(L')) \in \mathbf{U}_{m-1} ** \mathbf{J}_1^+ = \mathbf{U}_m$.

Sei nun umgekehrt L eine Sprache mit $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{U}_m$. Für den Fall $m = 1$ ist L eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\downarrow L_a$. Es ist einfach, eine $\Sigma_{1,1}^{2,+}$-Formel zu konstruieren, die L definiert:

$$\exists x \colon \lambda(x) \leq a_1 \vee \lambda(x) \leq a_2 \vee \cdots \vee \lambda(x) \leq a_k$$

Sei $m > 1$ und $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{U}_m = \mathbf{U}_{m-1} ** \mathbf{J}_1^+$. Dann existiert ein Homomorphismus $\psi : (A^*, \leq) \to N \in \mathbf{J}_1^+$, sodass L eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\tau_\psi^{-1}(L_K) \cap L_N$ ist, wobei L_K durch ein Monoid aus $\mathbf{U}_m$ und L_N durch ψ erkannt wird. L_K ist laut Induktionsannahme $\Sigma_{1,\mathrm{m}-1}^{2,+}$-definierbar. Sei im Folgenden $\phi \in \Sigma_{1,\mathrm{m}-1}^{2,+}$ eine Formel, die L_K definiert. Wie wir oben gesehen haben, kann L_N durch eine Formel aus $\Sigma_{1,1}^{2,+}$ definiert werden. Es reicht also zu zeigen, dass $\tau_\psi^{-1}(L_K)$ durch eine Formel $\phi \in \Sigma_{1,\mathrm{m}}^{2,+}$ definiert werden kann. Wir ersetzen dazu jede atomare Formel der Form $\lambda(x) \leq (n, a, n')$ aus ϕ durch

$$\begin{aligned}\lambda(x) \leq a \wedge \exists y : (y < x \wedge (\lambda(y) \leq a_1 \vee \lambda(y) \leq a_2 \vee \cdots))\\ \wedge \exists y : (y > x \wedge (\lambda(y) \leq a_1' \vee \lambda(y) \leq a_2' \vee \cdots))\end{aligned}$$

ϕ' hat dann maximal Quantorentiefe m und ist folglich in $\Sigma_{1,\mathrm{m}}^{2,+}$. □

Korollar 5.1.7.

$$\mathbf{J}^+ = \bigcup_m \mathbf{U}_m.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus Korollar 5.1.3 und Lemma 5.1.6. □

5.2 Blockprodukte mit alternierenden Varietäten

Wir untersuchen jetzt die Charakterisierung $\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}^+$ und

$$\mathbf{V}_{2n} = \mathbf{V}_{2n-1} ** \mathbf{J}^-, \mathbf{V}_{2n+1} = \mathbf{V}_{2n} ** \mathbf{J}^+$$

für alle $n \geq 1$.

Theorem 5.2.1. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Sei außerdem $n \geq 1$. L ist genau dann $\Sigma_\mathrm{n}^{2,+}$-definierbar, wenn* $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_n$.

Beweis. Den Beweis für $n = 1$ liefert Korollar 5.1.3. Sei nun $n > 1$ ungerade.

Wir nehmen zunächst an, $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{n-1} ** \mathbf{J}^+$. Korollar 4.2.2 zeigt, dass L eine endliche Vereinigung von geordneten Sprachen der Form $\tau_\psi^{-1}(L_K) \cap L_N$ ist, wobei L_K durch ein Monoid $K \in \mathbf{V}_{n-1}$ und L_N durch einen Homomorphismus geordneter Monoide $\psi\colon (A^*, \leq) \to N \in \mathbf{J}^+$ erkannt wird. Korollar 5.1.3 zeigt, dass L_N $\Sigma_1^{2,+}$-definierbar ist. Es reicht also, $\tau_\psi^{-1}(L_K)$ zu untersuchen.

Laut Induktionsannahme ist L_K $\Sigma_{\mathrm{n}-1}^{2,+}$-definierbar. Wir schreiben eine Formel φ für L_K in eine Formel für $\tau_\psi^{-1}(L_K)$ um, indem wir jede atomare Formel der Form $\lambda(x) \leq (n, a, n')$ durch $\varphi_l \wedge \lambda(x) \leq a \wedge \varphi_r$ ersetzen. φ_l (bzw. φ_r) soll ausdrücken, dass der Faktor links (bzw. rechts) von Position x mindestens in einer von endlich vielen geordneten Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ enthalten ist (vgl. Theorem 5.1.1). Wir verwenden hierzu eine ähnliche Konstruktion wie im Beweis von Korollar 5.1.3. φ_l kann als Disjunktion von Formeln der Form

$$\exists y\colon y < x \wedge \lambda(y) \leq a_k \wedge \exists x\colon x < y \wedge \lambda(x) \leq a_{k-1} \wedge \exists y\colon \cdots$$

und φ_r als Disjunktion von Formeln der Form

$$\exists y\colon y > x \wedge \lambda(y) \leq a_1 \wedge \exists x\colon x > y \wedge \lambda(x) \leq a_2 \wedge \exists y\colon \cdots$$

formuliert werden. Wir erhöhen durch diese Ersetzungen die Alternierungstiefe von φ um maximal eins.

Sei nun umgekehrt L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$, die $\Sigma_{\mathrm{n}}^{2,+}$-definierbar ist. Wir nehmen an, dass φ eine Formel mit Alternierungstiefe n ist (andernfalls existiert ein $m < n$, sodass L bereits $\Sigma_{\mathrm{m}}^{2,+}$-definierbar ist und wir greifen auf einen kleineren Induktionsschritt zurück) und betrachten im Folgenden alle Blöcke der Tiefe n. Da n ungerade ist, besteht jeder solche Block aus Existenzquantoren. Die zugehörige Teilformel ϕ aus φ zu jedem solchen Block schreiben wir in bereinigte Pränexform mit einer Matrix $\hat{\phi}$ in disjunktiver Normalform um. Jeder Konjunktionsterm von $\hat{\phi}$ ist dann äquivalent zu einer Formel der Form

$$\begin{aligned}\lambda(x) \leq a \wedge \bigwedge_i (\lambda(y_i) \leq a_i \wedge y_i < x) \wedge \omega(y_1, \ldots, y_m) \\ \wedge \bigwedge_j (\lambda(y'_j) \leq a'_j \wedge y'_j > x) \wedge \omega'(y'_1, \ldots, y'_n),\end{aligned}$$

wobei ω und ω' die Ordnung innerhalb der y_i und y'_i festlegen. Grob gesagt verifiziert also jeder Konjunktionsterm, ob an einer Position ein Buchstabe aus $\downarrow a$ steht und prüft die links und rechts davon stehenden Faktoren auf Enthaltensein in jeweils einer Sprache der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$. Wählen wir ein Monoid $N \in \mathbf{J}^+$ ausreichend groß (vgl. Beweis von Theorem 5.1.1 für eine mögliche Konstruktion), können wir ϕ in eine Disjunktion von Formeln der Form $\lambda(x) \leq (n, a, n')$ umschreiben. Jede atomare Formel der Form $\lambda(x) \leq a$ außerhalb eines solches Blockes der Tiefe n ersetzen wir durch die Disjunktion aller $\lambda(x) \leq (n, a, n')$ mit $n, n' \in N$. Die entstehende Formel hat Alternierungstiefe $n - 1$, die dadurch definierte Sprache L' wird also laut Induktionsannahme von einem Monoid aus $\mathbf{V}_{n-1}$ erkannt. Da aufgrund unserer Konstruktion $L = \tau_\psi^{-1}(L')$ ist, folgt mit Korollar 4.2.2 direkt $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_{n-1} ** \mathbf{J}^+ = \mathbf{V}_n$.

Der Beweis für den Induktionsschritt mit geradem n folgt nach demselben Prinzip. □

5.3 Blockprodukte mit der Varietät J

Auf Grundlage des vorigen Abschnitts zeigen wir nun, dass wir auch durch Blockprodukte mit der Pseudovarietät **J** die einzelnen Level der Hierarchie hinaufsteigen können. Die resultierende Charakterisierung ist, bis auf den Rekursionsanfang, äquivalent zum ungeordneten Fall.

Theorem 5.3.1. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und L eine geordnete Sprache über $(A, \leq)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{J}$
- *L ist eine positive boolesche Kombination von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ und $\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in A$.*

Beweis. Es ist bekannt [ST88], dass $\mathbf{J}$ der Join der Pseudovarietäten geordneter Monoide $\mathbf{J}^+$ und $\mathbf{J}^-$ ist. Der Rest folgt durch eine Kombination von Proposition 2.5.1, Theorem 5.1.1, Theorem 5.1.2 und dem Varietätensatz für Pseudovarietäten geordneter Monoide, der in [Pin95] bewiesen wird. $\square$

Eine etwas andere Formulierung des Theorems halten wir in folgendem Korollar fest:

Korollar 5.3.2. *Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet und M ein geordnetes Monoid. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $M \in \mathbf{J}$
- *Jede von M erkannte geordnete Sprache über $(A, \leq)$ ist eine positive boolesche Kombination von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ und $\overline{\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in A$.*

Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis. Die Aussage kann als direkte Konsequenz von Theorem 5.3.1 und dem Varietätensatz für Pseudovarietäten geordneter Monoide [Pin95] gesehen werden.

Theorem 5.3.3. *Sei $n \geq 1$, dann ist $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n ** \mathbf{J}$.*

Beweis. Da $\mathbf{J}^+ \subseteq \mathbf{J}$ und $\mathbf{J}^- \subseteq \mathbf{J}$, ist $\mathbf{V}_{n+1} \subseteq \mathbf{V}_n ** \mathbf{J}$. Für den Beweis der umgekehrten Inklusion reicht es, zu zeigen, dass jedes syntaktische geordnete Monoid aus $\mathbf{V}_n ** \mathbf{J}$ in $\mathbf{V}_{n+1}$ enthalten ist [Pin95]. Die hierzu verwendete Konstruktion hat eine große Ähnlichkeit zu der aus dem Beweis von Theorem 5.2.1. Wir betrachten eine beliebige geordnete Sprache L mit $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_n ** \mathbf{J}$ und konstruieren eine $\Sigma^{2,+}_{\mathrm{n+1}}$-Formel, die L definiert. Mit Theorem 5.2.1 ist dann $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_{n+1}$, wie gefordert.

Wir untersuchen nun L. Sei $(A, \leq)$ ein geordnetes Alphabet. Korollar 4.2.2 zeigt, dass ein Homomorphismus geordneter Monoide $\psi\colon (A^*, \leq) \to N \in \mathbf{J}$ existiert, sodass L eine endliche Vereinigung von Sprachen der Form $\tau_\psi^{-1}(L_K) \cap L_N$ ist, wobei L_K durch ein Monoid aus $\mathbf{V}_n$ und L_N durch ψ erkannt wird. L_N ist, nach Korollar 5.3.2, eine positive boolesche Kombination von Sprachen der Form $\downarrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}$ und $\overline{\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}}$ und folglich $\Sigma^{2,+}_2$-definierbar.

Laut Theorem 5.2.1 existiert außerdem eine Formel $\phi \in \Sigma^{2,+}_{\mathrm{n}}$, die L_K definiert. Wir konstruieren daraus eine Formel $\phi' \in \Sigma^{2,+}_{\mathrm{n+1}}$ für $\tau_\psi^{-1}(L_K)$, indem wir wie im Beweis von Theorem 5.2.1 alle atomaren Formeln der Form $\lambda(x) \leq (n, a, n')$ ersetzen, ohne die Alternierungstiefe um mehr als 1 zu erhöhen. Das Enthaltensein des Faktors links von x in einer Sprache der Form $\overline{\uparrow L_{a_1 a_2 \cdots a_k}}$ können wir dabei durch eine Formel der Form

$$\neg \exists y\colon y < x \wedge \lambda(y) \geq a_k \wedge \exists x\colon x < y \wedge \lambda(x) \geq a_{k-1} \wedge \exists y\colon \cdots$$

beschreiben, wobei $\lambda(x) \geq a_i$ eine Abkürzung für eine Konjunktion von Formeln der Form $\neg \lambda(x) \leq b$ ist. Es ist einfach zu sehen, dass wir diese Formel äquivalent als eine Formel aus $\Pi^{2,+}_1$ schreiben können. Mit analoger Vorgehensweise können wir das Enthaltensein des Faktors rechts von x in einer solchen Sprache durch eine Formel aus $\Pi^{2,+}_1$ beschreiben.

$\square$

5.4 Eine effektive Charakterisierung von $\Sigma_{\mathrm{n}}^{2,+}$

In diesem Abschnitt geben wir eine effektive Charakterisierung der Level der positiven Alternierungshierarchie. Wir definieren hierzu eine Sequenz von Gleichungen $[\![U_n \leq V_n]\!]$ durch $U_1 = x$, $V_1 = 1$,

$$U_{n+1} = (U_n x_n)^\omega U_n (y_n U_n)^\omega$$

$$V_{n+1} = (U_n x_n)^\omega V_n (y_n U_n)^\omega$$

für alle $n \geq 1$ und zeigen $\mathbf{V}_n = [\![U_n \leq V_n]\!] \cap \mathbf{DA} = [\![U_n \leq V_n, (xyz)^\omega y (xyz)^\omega = (xyz)^\omega]\!]$. Dieses Resultat liefert direkt die Entscheidbarkeit der Level, da das syntaktische geordnete Monoid einer Sprache aus jeder geeigneten Darstellung (z.B. als DEA oder als regulärer Ausdruck) effektiv berechnet werden kann und die Gleichungen für jedes Monoid durch systematisches Einsetzen aller Kombinationen von Elementen verifiziert werden können. Insbesondere kann für jede reguläre geordnete Sprache das kleinste Level m berechnet werden, sodass L $\Sigma_{\mathrm{m}}^{2,+}$- und nicht $\Sigma_{\mathrm{m-1}}^{2,+}$-definierbar ist, indem man eine Variable i, beginnend bei 1, schrittweise inkrementiert und in jedem Schritt prüft, ob $\mathrm{Synt}(L)$ die Gleichungen $U_i \leq V_i$ erfüllt.

Seien M und N endliche geordnete Monoide und $\phi\colon (A^*, =) \to M$, $\psi\colon (A^*, =) \to N$ Homomorphismen geordneter Monoide. Wir betrachten $n_1, n_2 \in N$ und definieren nun einen Quotient des geordneten freien Monoids $M_{(n_1,n_2)} = (A^*, =)/\sim_{(n_1,n_2)}$ mit $u \sim_{(n_1,n_2)} v$ genau dann, wenn

$$\phi(zuy) = \phi(zvy)$$

für alle $z, y \in A^*$ mit $\psi(z) = n_1$ und $\psi(y) = n_2$. Analog sei die Ordnung in $M_{(n_1,n_2)}$ gegeben durch $u \leq v$ genau dann, wenn

$$\phi(zuy) \leq \phi(zvy)$$

für alle $z, y \in A^*$ mit $\psi(z) = n_1$ und $\psi(y) = n_2$. Dieses Monoid heißt *Basismonoid bezüglich* (ψ, ϕ). Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, verwenden wir für die Elemente von $M_{(n_1,n_2)}$ die Notation $[w]_{(n_1,n_2)}$, wobei

$$[w]_{(n_1,n_2)} = \{ w' \in A^* \mid w' \sim_{(n_1,n_2)} w \}.$$

Zudem sei in diesem Kapitel N_k ein durch die Äquivalenz geordnetes Monoid bestehend aus Elementen aus $\mathcal{P}(A^{\leq k})$. $\psi_k\colon (A^*, =) \to N_k$ sei der Homomorphismus, der jedes Wort $w \in A^*$ auf die Teilwörter der Länge $\leq k$ von w abbildet. Die Verknüpfung auf N_k sei die durch ψ_k induzierte. Korollar 5.3.2 zeigt, dass $N_k \in \mathbf{J}$ für alle $k \geq 1$.

Theorem 5.4.1. *Seien M und N endliche geordnete Monoide mit $N \in \mathbf{J}$ und $\phi\colon (A^*, =) \to M$, $\psi\colon (A^*, =) \to N$ Homomorphismen geordneter Monoide, wobei ϕ surjektiv ist. Sei $\mathbf{V}$ eine Pseudovarietät geordneter Monoide mit $\mathbf{J}_1^+ \subseteq \mathbf{V}$. Falls jedes Basismonoid aus (ψ, ϕ) in $\mathbf{V}$ ist, dann ist $M \in \mathbf{V} ** \mathbf{J}$.*

Beweis. Mit Korollar 5.3.2 folgt die Existenz zweier Homomorphismen geordneter Monoide $\psi_k\colon (A^*, =) \to N_k$ und $\psi'\colon N_k \to N$ mit $\psi' \psi_k = \psi$.

Betrachte $n_1', n_2' \in N_k$ und zwei Wörter $w, w' \in A^*$, sodass $\phi(uwv) \leq \phi(uw'v)$ für alle $u, v \in A^*$ mit $\psi(u) = \psi'(n_1')$ und $\psi(v) = \psi'(n_2')$. Dann ist $\phi(uwv) \leq \phi(uw'v)$ insbesondere für alle $u, v \in A^*$ mit $\psi_k(u) = n_1'$ und $\psi_k(v) = n_2'$. Also teilt das Basismonoid $M_{(\psi'(n_1'),\psi'(n_2'))}$ aus (ψ_k, ϕ) das Basismonoid $M_{(n_1',n_2')}$ aus (ψ, ϕ) und folglich ist jedes Basismonoid aus (ψ_k, ϕ) in $\mathbf{V}$. Wir nehmen im Folgenden zugunsten einer einfacheren Notation an, N sei das geordnete Monoid N_k und schreiben ψ statt ψ_k. Insbesondere gilt im Folgenden $\psi(w) \subseteq \psi(vwu)$ für alle $u, v, w \in A^*$ und die Ordnung auf A_N ist die Äquivalenz.

Wir definieren nun Homomorphismen geordneter Monoide

$$\mathsf{alph}\colon (A_N^*, =) \to \mathcal{P}(A_N^*), (P, a, S) \mapsto \{(P, a, S)\}$$

$$h_{(P,S)}\colon (A_N^*, =) \to M_{(P,S)} \text{ mit}$$

$$h_{(P,S)}(P', a, S') = \begin{cases} [a]_{(P,S)} & \text{falls } P = P' = P \cdot \psi(a), S = S' = S \cdot \psi(a) \\ [\varepsilon]_{(P,S)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Multiplikation auf alph sei durch Mengenvereinigung, die Halbordnung durch die Obermengen-Relation gegeben. Die Mengenvereinigung ist idempotent und kommutativ und jede Menge ist Obermenge der leeren Menge. Also ist $\mathsf{alph} \in \mathbf{J}_1^+$. Zudem sei M' das direkte Produkt von $\mathcal{P}(A_N^*)$ und $M_{(P,S)}$ für alle $P, S \in N$, sowie $h\colon (A_N^*, \leq) \to M'$ das direkte Produkt von alph und $h_{(P,S)}$ für alle $P, S \in N$. Das direkte Produkt zweier Homomorphismen geordneter Monoide $h_1\colon (A^*, \leq) \to M_1, h_2\colon (A^*, \leq) \to M_2$ sei dabei die Funktion

$$h_1 \times h_2\colon (A^*, \leq) \to M_1 \times M_2, w \mapsto (h_1(w), h_2(w)).$$

Insbesondere ist h ein Homomorphismus geordneter Monoide. Da jedes Basismonoid laut Annahme in $\mathbf{V}$ ist und außerdem $\mathbf{J}_1^+ \subseteq \mathbf{V}$ gilt, ist $M' \in \mathbf{V}$.

Wir betrachten nun $w, w' \in A^*$ mit $\psi(w) \leq \psi(w')$ und $h(\tau_\psi(w)) \leq h(\tau_\psi(w'))$ und zeigen $\phi(w) \leq \phi(w')$. Mit Theorem 4.2.1 folgt dann $M \in \mathbf{V} ** \mathbf{J}$.

Da die Halbordnung auf N durch die Äquivalenz gegeben ist, ist $\psi(w) = \psi(w')$. Wir faktorisieren nun

$$w = w_0 a_0 w_1 a_1 \cdots w_{r-1} a_{r-1} w_r$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $w_i \in A^*$ für alle $0 \leq i \leq r$
2. $a_i \in A$ für alle $0 \leq i \leq r - 1$
3. $\psi(\lhd_{w_i} w_i) = \psi(\lhd_{w_i})$ und $\psi(w_i \rhd_{w_i}) = \psi(\rhd_{w_i})$ für alle $0 \leq i \leq r$
4. $\psi(\lhd_{a_i} a_i) \neq \psi(\lhd_{a_i})$ oder $\psi(a_i \rhd_{a_i}) \neq \psi(\rhd_{a_i})$ für alle $0 \leq i \leq r - 1$

wobei $\lhd_{a_i} = w_0 a_0 \cdots a_{i-1} w_i$, $\lhd_{w_i} = w_0 a_0 \cdots w_{i-1} a_{i-1}$, $\rhd_{a_i} = w_{i+1} a_{i+1} \cdots a_r w_r$ und $\rhd_{w_i} = a_i w_{i+1} \cdots a_r w_r$. Für w' finden wir eine Faktorisierung

$$w' = w_0' a_0' w_1' a_1' \cdots w_{s-1}' a_{s-1}' w_s'$$

mit analogen Eigenschaften.

Wegen $h(\tau_\psi(w)) \leq h(\tau_\psi(w'))$ ist $\mathsf{alph}(\tau_\psi(w)) \supseteq \mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$. Betrachte ein beliebiges $i \in \{0, \ldots, s-1\}$. Es ist $(\psi(\lhd_{a'_i}), a'_i, \psi(\rhd_{a'_i})) \in \mathsf{alph}(\tau_\psi(w')) \subseteq \mathsf{alph}(\tau_\psi(w))$ und weiter $\psi(\lhd_{a'_i} a'_i) \neq \psi(\lhd_{a'_i})$ oder $\psi(a'_i \rhd_{a'_i}) \neq \psi(\rhd_{a'_i})$. Also existiert ein $j \in \{0, \ldots, r-1\}$ mit $(\psi(\lhd_{a_j}), a_j, \psi(\rhd_{a_j})) = (\psi(\lhd_{a'_i}), a'_i, \psi(\rhd_{a'_i}))$. Sei außerdem $i' \in \{0, \ldots, s-1\}$, $i' < i$ und $j' \in \{0, \ldots, r-1\}$ mit $(\psi(\lhd_{a_{j'}}), a_{j'}, \psi(\rhd_{a_{j'}})) = (\psi(\lhd_{a'_{i'}}), a'_{i'}, \psi(\rhd_{a'_{i'}}))$. Da $\psi = \psi_k$ für ein $k \geq 1$, ist dann $\psi(\lhd_{a'_{i'}}) \subseteq \psi(\lhd_{a'_i})$ und $\psi(\rhd_{a'_{i'}}) \supseteq \psi(\rhd_{a'_i})$, wobei mindestens eine der beiden Inklusionen echt ist. Es folgt $\psi(\lhd_{a_{j'}}) \subseteq \psi(\lhd_{a_j})$ und $\psi(\rhd_{a_{j'}}) \supseteq \psi(\rhd_{a_j})$ und schließlich $j' < j$. Alle Buchstaben $(\psi(\lhd_{a'_0}), a'_0, \psi(\rhd_{a'_0})), \ldots, (\psi(\lhd_{a'_{s-1}}), a'_{s-1}, \psi(\rhd_{a'_{s-1}}))$ erscheinen also in derselben Reihenfolge in $(\psi(\lhd_{a_0}), a_0, \psi(\rhd_{a_0})), \ldots, (\psi(\lhd_{a_{r-1}}), a_{r-1}, \psi(\rhd_{a_{r-1}}))$.

Angenommen, es existiert ein i, sodass $(\psi(\lhd_{a_i}), a_i, \psi(\rhd_{a_i})) \notin \mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$. Wähle das größte $j < i$ mit $(\psi(\lhd_{a_j}), a_j, \psi(\rhd_{a_j})) \in \mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$ und das kleinste $j' > i$ mit $(\psi(\lhd_{a_{j'}}), a_{j'}, \psi(\rhd_{a_{j'}})) \in \mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$[2]. Da die zu a_j und $a_{j'}$ zugehörigen Faktoren aus $a'_0, \ldots, a'_{s-1}$ in derselben Reihenfolge auftreten müssen, existiert ein l mit $(\psi(\lhd_{a'_l}), a'_l, \psi(\rhd_{a'_l})) = (\psi(\lhd_{a_j}), a_j, \psi(\rhd_{a_j}))$ und $(\psi(\lhd_{a'_{l+1}}), a'_{l+1}, \psi(\rhd_{a'_{l+1}})) = (\psi(\lhd_{a_{j'}}), a_{j'}, \psi(\rhd_{a_{j'}}))$:

<table>
<tr><td>$w =$</td><td>$\cdots$</td><td>w_j</td><td>a_j</td><td>w_{j+1}</td><td>$\cdots$</td><td>w_i</td><td>a_i</td><td>w_{i+1}</td><td>$\cdots$</td><td>$w_{j'}$</td><td>$a_{j'}$</td><td>$w_{j'+1}$</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td>$w' =$</td><td>$\cdots$</td><td>w'_l</td><td>a'_l</td><td colspan="7">w'_{l+1}</td><td>a'_{l+1}</td><td>w'_{l+2}</td><td>$\cdots$</td></tr>
</table>

Also ist $\psi(\lhd_{a_j} a_j) = \psi(\lhd_{a'_l} a'_l) = \psi(\lhd_{a'_{l+1}}) = \psi(\lhd_{a_{j'}})$ und $\psi(\rhd_{a_j}) = \psi(\rhd_{a'_l}) = \psi(a'_{l+1} \rhd_{a'_{l+1}}) = \psi(a_{j'} \rhd_{a_{j'}})$. Wegen $\psi = \psi_k$ und $j < i < j'$ folgt $\psi(\lhd_{a_i} a_i) = \psi(\lhd_{a_i})$ und $\psi(a_i \rhd_{a_i}) = \psi(\rhd_{a_i})$, ein Widerspruch zur Konstruktion der Faktorisierung. Also ist $(\psi(\lhd_{a_i}), a_i, \psi(\rhd_{a_i})) \in \mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$. Damit folgt direkt $r = s$, sowie $\psi(\lhd_{a_i}) = \psi(\lhd_{a'_i})$, $a_i = a'_i$, $\psi(\rhd_{a_i}) = \psi(\rhd_{a'_i})$ für alle $0 \leq i \leq r-1$ und weiter $\psi(\lhd_{w_i}) = \psi(\lhd_{a_{i-1}} a_{i-1}) = \psi(\lhd_{a'_{i-1}} a'_{i-1}) = \psi(\lhd_{w'_i})$ für alle $1 \leq i \leq r$. Die letzte Äquivalenz kann auf den Fall $i = 0$ erweitert werden, da $\psi(\lhd_{w_0}) = \psi(\varepsilon) = \psi(\lhd_{w'_0})$. Mit analoger Schlussweise folgt $\psi(\rhd_{w_i}) = \psi(\rhd_{w'_i})$ für alle $0 \leq i \leq r$.

Weiter ist $\phi(\lhd_{w_i} w_i \rhd_{w_i}) \leq \phi(\lhd_{w'_i} w'_i \rhd_{w'_i})$, da $h_{(P,S)}(w) \leq h_{(P,S)}(w')$ für $P = \psi(\lhd_{w_i}) = \psi(\lhd_{w'_i})$ und $S = \psi(\rhd_{w_i}) = \psi(\rhd_{w'_i})$. Hiermit und mit $a_i = a'_i$ erhält man durch iteratives Ersetzen aller w_i durch w'_i die Ungleichung $\phi(w) \leq \phi(w')$. ☐

Theorem 5.4.2. $\mathbf{V}_n = [\![\, U_n \leq V_n \,]\!] \cap \mathbf{DA}$.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der Inklusion $\mathbf{V}_n \subseteq [\![\, U_n \leq V_n \,]\!] \cap \mathbf{DA}$. Sei $M \in \mathbf{V}_n$. Durch Kombination von Theorem 5.2.1 und Theorem 3.0.6 erhalten wir direkt $M \in \mathbf{DA}$.

Zu zeigen bleibt: $M \in [\![\, U_n \leq V_n \,]\!]$. Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr, da $\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}^+ = [\![\, x \leq 1 \,]\!] = [\![\, U_1 \leq V_1 \,]\!]$. Sei $n > 1$ und $\phi\colon (A^*, \leq) \to M \in \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{n-1} ** \mathbf{J}$ ein surjektiver Homomorphismus geordneter Monoide. Seien $K \in \mathbf{V}_{n-1}$ und $N \in \mathbf{J}$ geordnete Monoide und

[2] Die Existenz solcher j, j' folgt unmittelbar daraus, dass $\mathsf{alph}(\tau_\psi(w))$ und $\mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$ jeweils genau ein Element der Form $(1, a, n_2)$ (bzw. $(n_1, a, 1)$) enthalten. Angenommen, es existiert kein j (bzw. j') mit der angegebenen Eigenschaft. Dann ist $\psi(\lhd_{a_i}) = 1$ (bzw. $\psi(\rhd_{a_i}) = 1$), also $(\psi(\lhd_{a_i}), a_i, \psi(\rhd_{a_i})) \in \mathsf{alph}(\tau_\psi(w'))$, ein Widerspruch.

$h\colon (A_N^*, \leq) \to K$, $\psi\colon (A^*, \leq) \to N$ Homomorphismen geordneter Monoide, sodass für alle $w, w' \in A^*$ mit $\psi(w) \leq \psi(w')$ und $h(\tau_\psi(w)) \leq h(\tau_\psi(w'))$ gilt: $\phi(w) \leq \phi(w')$.

Wir konstruieren nun Wörter W_n, W'_n, sodass $M \in \llbracket U_n \leq V_n \rrbracket$ genau dann, wenn $\phi(W_n) \leq \phi(W'_n)$ für alle $w, w_i, w'_i \in A^*$ $(1 \leq i < n)$:

$$W_n = (W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|}W_{n-1}(w'_{n-1}W_{n-1})^{|M|\cdot|N|}$$

$$W'_n = (W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|}W'_{n-1}(w'_{n-1}W_{n-1})^{|M|\cdot|N|}$$

für $n > 1$, $W_1 = w$, $W'_1 = \varepsilon$.

Zu zeigen ist, dass für alle $w, w_i, w'_i \in A^*$ $(1 \leq i < n)$ gilt: $\psi(W_n) \leq \psi(W'_n)$ und $h(\tau_\psi(W_n)) \leq h(\tau_\psi(W'_n))$. Dies liefert direkt den Beweis der Inklusion.

Wir verwenden hierzu die für $\mathbf{J}$ charakteristische Gleichung $(xyz)^\omega = (xyz)^\omega y = y(xyz)^\omega$. Da $\psi((W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|})$ konstruktionsbedingt idempotent ist und alle Buchstaben aus W_{n-1} enthält, ist $\psi(W_n) = \psi((W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|}(w'_{n-1}W_{n-1})^{|M|\cdot|N|})$. Mit demselben Argument kann man zeigen, dass $\psi(W'_n) = \psi((W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|}(w'_{n-1}W_{n-1})^{|M|\cdot|N|})$ und folglich $\psi(W_n) \leq \psi(W'_n)$.

Sei im Folgenden $\sigma_1 \cdots \sigma_r = \tau_\psi(W_n)$ und $\sigma'_1 \cdots \sigma'_s = \tau_\psi(W'_n)$ mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_s \in A_N$. Setze zudem $d = |W_{n-1}w_{n-1}|\cdot|M|\cdot|N|$, $d' = |w'_{n-1}W_{n-1}|\cdot|M|\cdot|N|$. Die wiederholte Anwendung von obigem Argument zeigt, dass $\sigma_i = \sigma'_i$ und $\sigma_{r-i+1} = \sigma'_{s-i+1}$ für alle $1 \leq i \leq d$. Für $d < i \leq s - d'$ ist $\sigma_i = (\psi((W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|}), b_i, \psi((W_{n-1}w_{n-1})^{|M|\cdot|N|}))$ mit $b_i \in A$. Eine analoge Eigenschaft gilt für alle σ'_j mit $d < j \leq r - d'$. Da $K \in \mathbf{V}_{n-1}$, folgt per Induktionsvoraussetzung, dass $K \in \llbracket U_{n-1} \leq V_{n-1} \rrbracket$. Es ist also $h(\sigma_{d+1} \cdots \sigma_{s-d'}) \leq h(\sigma_{d+1} \cdots \sigma_{r-d'})$. Mit $\sigma_i = \sigma'_i$ für alle $1 \leq i \leq d$ und $\sigma_{r-i+1} = \sigma'_{s-i+1}$ für alle $1 \leq i \leq d'$ ergibt sich dann direkt $h(\sigma_1 \cdots \sigma_r) \leq h(\sigma'_1 \cdots \sigma'_s)$, also $h(\tau_\psi(W_n)) \leq h(\tau_\psi(W'_n))$.

Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, $M \in \llbracket U_n \leq V_n \rrbracket \cap \mathbf{DA}$. Für den Fall $n = 1$ ist $\llbracket U_1 \leq V_1 \rrbracket \cap \mathbf{DA} = \llbracket x \leq 1 \rrbracket \cap \mathbf{DA} = \mathbf{J}^+ \cap \mathbf{DA} = \mathbf{J}^+ = \mathbf{V}_1$. Für den Fall $n > 1$ zeigen wir, dass für ausreichend großes k jedes Basismonoid $M_{(P,S)}$ von (ψ_k, ϕ) die Gleichung $u_{n-1} \leq v_{n-1}$ erfüllt, wobei $\phi\colon (A^*, =) \to M$ ein surjektiver Homomorphismus geordneter Monoide ist. Da jedes Basismonoid M teilt, folgt aus der Induktionsannahme und Theorem 5.4.1 dann $M \in \mathbf{V}_{n-1} ** \mathbf{J} = \mathbf{V}_n$.

Sei also $M_{(P,S)}$ ein beliebiges Basismonoid und $z, y \in A^*$ mit $\psi_k(z) = P, \psi_k(y) = S$. Wir verwenden dieselbe Konstruktion wie im Beweis der umgekehrten Inklusion und zeigen, dass $\phi(zW_{n-1}y) \leq \phi(zW'_{n-1}y)$.

Wir verwenden folgendes Lemma aus [KS12] mit minimalen Modifikationen:

Lemma 5.4.3. *Falls $k > \frac{1}{2}|M|\cdot(|A|^2+|A|)$, dann hat z einen Suffix z' mit einer Faktorisierung $z' = z_1 z_2 \cdots z_{|M|}$, wobei*

$$\mathsf{alph}(W'_{n-1}) \subseteq \mathsf{alph}(W_{n-1}) \subseteq \mathsf{alph}(z_1) = \mathsf{alph}(z_2) = \cdots = \mathsf{alph}(z_{|M|})$$

und y einen Präfix y' mit einer Faktorisierung $y' = y_1 y_2 \cdots y_{|M|}$, wobei

$$\mathsf{alph}(W'_{n-1}) \subseteq \mathsf{alph}(W_{n-1}) \subseteq \mathsf{alph}(y_1) = \mathsf{alph}(y_2) = \cdots = \mathsf{alph}(y_{|M|}).$$

Seien im Folgenden $z = z''z' = z''z_1 \cdots z_{|M|}$ und $y = y'y'' = y_1 \cdots y_{|M|}y''$ Faktorisierungen mit den oben genannten Eigenschaften. Mit dem Standard-Pumping-Argument folgt, dass Indizes $i \leq j$ existieren, sodass $\phi(z_1 \cdots z_{i-1})\phi(z_i \cdots z_j)^\omega = \phi(z_1 \cdots z_{i-1})$. Wir setzen

$$\begin{aligned} m_l &= \phi(z_1 \cdots z_{i-1}), \\ e &= \phi(z_i \cdots z_j)^\omega, \\ m_r &= \phi(z_{j+1} \cdots z_{|M|}) \end{aligned}$$

und benutzen die für **DA** charakteristische Gleichung $e \cdot M_e \cdot e = e$ [TW98]. Da in e mindestens ein $\phi(z_k)$ auftritt und jedes z_k dieselbe Menge an Buchstaben enthält, folgt direkt für alle $1 \leq k \leq |M| : \phi(z_k) \in M_e$. Zudem enthält jedes z_k alle Buchstaben aus jedem W_{n-1}, also ist $\phi(W_{n-1}) \in M_e$ und weiter

$$(m_r \cdot (\phi(W_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^{\omega-1}\phi(W_{n-1})) \in M_e.$$

Mit $e \cdot M_e \cdot e = e$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \phi(z') &= m_l \cdot e \cdot m_r \\ &= m_l \cdot e \cdot (m_r \cdot (\phi(W_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^{\omega-1}\phi(W_{n-1})) \cdot e \cdot m_r \\ &= m_l \cdot e \cdot m_r \cdot (\phi(W_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^\omega \\ &= \phi(z') \cdot (\phi(W_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^\omega \end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\phi(y') = (m_l \cdot e \cdot \phi(W_{n-1}))^\omega \cdot \phi(y')$, $\phi(z) = \phi(z') \cdot (\phi(W'_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^\omega$, sowie $\phi(y') = (m_l \cdot e \cdot \phi(W'_{n-1}))^\omega \cdot \phi(y')$. Da $M \in [\![\, U_n \leq V_n \,]\!]$, ist

$$\begin{aligned} \phi(zW_{n-1}y) &= \phi(z)(\phi(W_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^\omega \phi(W_{n-1})(m_l \cdot e \cdot \phi(W_{n-1}))^\omega \phi(y) \\ &\leq \phi(z)(\phi(W_{n-1}) \cdot e \cdot m_r)^\omega \phi(W'_{n-1})(m_l \cdot e \cdot \phi(W_{n-1}))^\omega \phi(y) \\ &= \phi(zW'_{n-1}y). \end{aligned}$$

$\square$

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben Logik erster Stufe auf geordnete Alphabete verallgemeinert und mit Theorem 3.0.5 einen engen Zusammenhang zwischen Logik erster Stufe über geordneten und ungeordneten Alphabeten festgehalten. Als algebraisches Werkzeug für die Untersuchung Logik erster Stufe über geordneten Alphabeten haben wir in Kapitel 4 zweiseitige semidirekte Produkte und Blockprodukte von geordneten Monoiden eingeführt. Darauf basierend wurden verschiedene Charakterisierungen der Level der positiven Alternierungshierarchie untersucht.

Die Beweise und Charakterisierungen aus Kapitel 5 lassen sich mit wenig Aufwand auf $\Pi_\mathrm{n}^{2,+}$ und $\mathrm{FO}_\mathrm{n}^{2,+}$ (bzw. Π_n^2 und FO_n^2 über ungeordneten Alphabeten) übertragen. Eine gewissenhafte Überprüfung der Theoreme zeigt, dass es für iterierte Blockprodukte mit der geordneten Pseudovarietät $\mathbf{J}$ und für die Gleichungen ausreicht, den Rekursionsanfang anders zu definieren. Eine geordnete Sprache L ist genau dann $\{\, \mathrm{FO}_\mathrm{n}^{2,+}, \Sigma_\mathrm{n}^{2,+}, \Pi_\mathrm{n}^{2,+} \,\}$-definierbar (bzw. $\{\, \mathrm{FO}_\mathrm{n}^2, \Sigma_\mathrm{n}^2, \Pi_\mathrm{n}^2 \,\}$-definierbar über ungeordneten Alphabeten), wenn $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}_n = \llbracket\, U_n \leq V_n \,\rrbracket \cap \mathbf{DA}$ mit

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n \ast\ast \mathbf{J},$$

$$U_{n+1} = (U_n x_n)^\omega U_n (y_n U_n)^\omega,$$
$$V_{n+1} = (U_n x_n)^\omega V_n (y_n U_n)^\omega.$$

Die entsprechenden Definitionen für $\mathbf{V}_1, U_1$ und V_1 sind Tabelle 6.1 zu entnehmen. Die daraus resultierende Definition für $\mathrm{FO}_\mathrm{n}^{2,+}$ (bzw. FO_n^2) hat große Ähnlichkeit mit der Charakterisierung für den ungeordneten Fall aus einer Veröffentlichung von Krebs und Straubing [KS12], welche Grundlage für die Beweise aus Abschnitt 5.4 war. Hierzu sei angemerkt, dass aus Symmetriegründen gilt $\llbracket\, (xy)^\omega \leq (yx)^\omega \,\rrbracket = \llbracket\, (xy)^\omega = (yx)^\omega \,\rrbracket$.

Kufleitner und Weil verwendeten in [KW12] sogenannte *Ranker* und Mal'cev-Produkte mit den Pseudovarietäten $\mathbf{K} = \llbracket\, x^\omega y = x^\omega \,\rrbracket$ und $\mathbf{D} = \llbracket\, y x^\omega = x^\omega \,\rrbracket$ für eine andere Charakterisierung von FO_n^2. In [KL13] wurden ebenfalls *Ranker* verwendet, um die positive Alternierungshierarchie zu charakterisieren. Es wäre interessant zu sehen, ob sich auch Mal'cev-Produkte für eine solche Verfeinerung eignen.

$(A, \leq)$	$(A, =)$	Startpunkt von $\mathbf{V}_n$	Startpunkt von $U_n \leq V_n$
$\mathrm{FO}_\mathrm{n}^{2,+}$	$\mathrm{FO}_\mathrm{n}^{2,+}, \mathrm{FO}_\mathrm{n}^2$	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}$	$U_1 = (xy)^\omega, V_1 = (yx)^\omega$
$\Sigma_\mathrm{n}^{2,+}$	$\Sigma_\mathrm{n}^{2,+}, \Sigma_\mathrm{n}^2$	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}^+$	$U_1 = x, V_1 = 1$
$\Pi_\mathrm{n}^{2,+}$	$\Pi_\mathrm{n}^{2,+}, \Pi_\mathrm{n}^2$	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}^-$	$U_1 = 1, V_1 = x$

Tabelle 6.1: Rekursionsanfang für $\mathbf{V}_n$ und $U_n \leq V_n$ für Fragmente von FO^2

Literaturverzeichnis

[Kam68] J. Kamp. *Tense Logic and the Theory of Linear Order*. Dissertation, University of California, 1968. (Zitiert auf Seite 7)

[KL13] M. Kufleitner, A. Lauser. Nesting Negations in FO^2 over Finite Words. Technischer Bericht 2013/07, University of Stuttgart, Institute of Formal Methods in Computer Science, Theoretical Computer Science, 2013. (Zitiert auf den Seiten 7 und 35)

[KS12] A. Krebs, H. Straubing. An effective characterization of the alternation hierarchy in two-variable logic. In *FSTTCS*, S. 86–98. 2012. (Zitiert auf den Seiten 7, 33 und 35)

[KW12] M. Kufleitner, P. Weil. The FO^2 alternation hierarchy is decidable. In *Computer Science Logic*, S. 426–439. 2012. (Zitiert auf den Seiten 7 und 35)

[MP71] R. McNaughton, S. A. Papert. *Counter-Free Automata (M.I.T. research monograph no. 65)*. The MIT Press, 1971. (Zitiert auf Seite 7)

[Pin86] J.-E. Pin. *Varieties of formal languages*. North Oxford, London, 1986. (Traduction de Variétés de langages formels). (Zitiert auf den Seiten 9 und 14)

[Pin95] J.-E. Pin. A variety theorem without complementation. *Russian Mathematics (Izvestija vuzov.Matematika)*, 39:80–90, 1995. (Zitiert auf den Seiten 10, 12, 24 und 29)

[PW96] J.-E. Pin, P. Weil. A Reiterman theorem for pseudovarieties of finite first-order structures. *Algebra Universalis*, 35:577–595, 1996. (Zitiert auf Seite 13)

[PW02] J.-E. Pin, P. Weil. The wreath product principle for ordered semigroups. *Communications in Algebra*, 30:5677–5713, 2002. (Zitiert auf Seite 25)

[ST88] H. Straubing, D. Thérien. Partially ordered finite monoids and a theorem of I. Simon. *Journal of Algebra*, 119:393–399, 1988. (Zitiert auf den Seiten 14 und 29)

[Str11] H. Straubing. Algebraic Characterization of the Alternation Hierarchy in $FO^2[<]$ on Finite Words. In *Computer Science Logic*, Band 12, S. 525–537. 2011. (Zitiert auf Seite 7)

[TT02] P. Tesson, D. Thérien. Diamonds Are Forever: The Variety DA. In *Semigroups, Algorithms, Automata and Languages, Coimbra (Portugal) 2001*, S. 475–500. World Scientific, 2002. (Zitiert auf Seite 14)

[TW98] D. Thérien, T. Wilke. Over Words, Two Variables Are as Powerful as One Quantifier Alternation. In *STOC*, S. 234–240. ACM, 1998. (Zitiert auf den Seiten 7, 14, 17, 18 und 34)

[WI09] P. Weis, N. Immerman. Structure Theorem and Strict Alternation Hierarchy for FO^2 on Words. *Logical Methods in Computer Science*, 5(3), 2009. (Zitiert auf Seite 7)

Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

Ort, Datum, Unterschrift