Institut für Formale Methoden der Informatik

Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Bachelorarbeit Nr. 64

Eine Algebraische Konstruktion für den Kleene-Stern regulärer Sprachen

Andreas Bühler

Studiengang: Informatik

Prüfer/in: Prof. Dr. Volker Diekert

Betreuer/in: Dr. Manfred Kufleitner

Begonnen am: 17. Mai 2013

Beendet am: 16. November 2013

CR-Nummer: F.4.3

Kurzfassung

In dieser Bachelorarbeit werden zwei Monoidkonstruktionen vorgestellt, die, auf Basis eines erkennenden Monoids einer Sprache, den Kleene-Stern dieser Sprache erkennen. Die erste Konstruktion basiert nur auf dem erkennenden Monoid der Sprache, während die zweite Konstruktion zusätzlich dazu auch auf der erkennenden Menge in dem Monoid basiert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Von allen Operation die in regulären Ausdrücken vorkommen, ist der Kleene-Stern am schwierigsten zu erfassen. Das liegt unter anderem daran, dass L^* mehr oder weniger komplex als L sein kann. Beispielsweise ist für $L = \{a^k \mid k \text{ ungerade}\}$ das dazugehörende $L^* = \{a\}^+$. Damit ist L^* einfacher zu erfassen als L selbst. Für viele andere Sprachen ist das Resultat des Kleene-Sterns dieser Sprache allerdings schwieriger nachzuvollziehen. Die Sternhöhe eines regulären Ausdrucks wurde von L.C. Eggan in [Egg63] als die größte Anzahl verschachtelter Kleene-Sterne in diesem Ausdruck definiert. Die Sternhöhe einer regulären Sprache entspricht dann dem Minimum der Sternhöhen aller regulären Ausdrücke für diese Sprache.
Für diese Sternhöhe ist die Unterscheidung zwischen Sprachen der Sternhöhe 0 und denen mit Sternhöhe größer 0 einfach: Sprachen mit Sternhöhe 0 sind endlich, und alle endlichen Sprachen haben Sternhöhe 0.
Eggan stellte in [Egg63] auch eine Möglichkeit vor, Sprachen anhand von einer Eigenschaft der sie erkennenden, nichtdeterministischen, endlichen Automaten ihrer jeweiligen Sternhöhe zuzuordnen. Diese Zuordnung lieferte den Beweis, dass es zu jeder Sternhöhe eine reguläre Sprache gibt, die nicht in den niedrigeren Sternhöhen enthalten ist. Die verallgemeinerte Sternhöhe ist analog zur Sternhöhe definiert, nur betrachtet sie verallgemeinerte reguläre Ausdrücke, welche zusätzlich zu Buchstaben, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern auch das Komplement in Σ^* als Operation erlauben. Bei der verallgemeinerten Sternhöhe ist bereits das Unterscheiden von Sprachen der Höhen 0 von dem Rest der regulären Sprachen schwieriger. Sprachen mit verallgemeinerter Sternhöhe 0 werden als sternfrei bezeichnet. M.P. Schützenberger zeigte in [Sch65], dass eine Sprache genau dann sternfrei ist, wenn ihr syntaktisches Monoid aperiodisch ist. Die Frage, ob es Sprachen mit verallgemeinerter Sternhöhe 2 gibt, ist bisher unbeantwortet. Da Monoide, die L erkennen, auch das Komplement von L erkennen, bieten sich diese als möglicher Gegenstand der Untersuchungen zur verallgemeinerten Sternhöhe an.
Als mögliche Forschungsrichtung für dieses Problem, aber auch um eine Untersuchung des Einflusses, den der Kleene-Stern auf reguläre Sprachen hat, zu ermöglichen, wurde deshalb im Rahmen dieser Bachelorarbeit eine algebraische Konstruktion für den Kleene-Stern regulärer Sprachen entworfen.
Die Konstruktion wurde in zwei Varianten aufgeteilt, die allgemeine und die spezielle Sternkonstruktion.
Die allgemeine Sternkonstruktion konstruiert auf Basis eines Monoids M ein neues Monoid $\bigstar(M)$, welches alle L^* erkennt, deren L von M erkannt wurde.
Die spezielle Sternkonstruktion ergibt für ein Monoid M und eine erkennende Menge $P \subseteq M$ mit $\bigstar(M, P)$ ein Monoid, das jene L^* erkennt, deren L von M so erkannt werden, dass P das Bild von L in M ist.

Die Beweise der Konstruktionen laufen bis auf kleine Unterschiede identisch ab, und basieren auf der Idee, sich alle möglichen Unterteilungen des Wortes in dem gegebenen Monoid M in dem Bild des Wortes in $\bigstar(M)$ zu merken. Wenn man dann zwei Teilworte aneinanderfügen möchte, kann man alle möglichen Unterteilungen des neuen Wortes aus den Unterteilungen der beiden Teilworte erschließen, ohne die Worte selbst zu betrachten.

2 Allgemeine Sternkonstruktion

In diesem Kapitel soll eine Monoidkonstruktion vorgestellt werden, die aus einem gegebenen Monoid M ein neues Monoid konstruiert, das für alle Sprachen L, die von M erkannt werden, L^* erkennt. Die Intention bei der Konstruktion ist, dass ein Wort w aus Σ^* auf eine Menge abgebildet wird, die das Bild von w in dem ursprünglichen Monoid M enthält. Zusätzlich dazu enthält die Menge die Tupel (m_1, N, m_2), wenn es eine Zerlegung von w in Teilworte $u_1..u_j$ so gibt, dass m_1 das Bild von u_1 in dem Monoid M ist, m_2 das Bild von u_j und die Bilder von den mittleren u_i sich in der Menge N befinden.

Definition 1. *Für ein gegebenes Monoid $(M, *)$ definieren wir die Operation*

$$\star : \{1\} \cup M \cup (M \times \mathcal{P}(M) \times M) \to \mathcal{P}(M \cup (M \times \mathcal{P}(M) \times M)) \cup \{1\}$$

durch

$$m_1 \star m_2 = \{m_1 * m_2, (m_1, \varnothing, m_2)\}$$

$$m_1 \star (m_2, N, m_3) = \{(m_1 * m_2, N, m_3), (m_1, \{m_2\} \cup N, m_3)\}$$

$$(m_1, N, m_2) \star m_3 = \{(m_1, N, m_2 * m_3), (m_1, \{m_2\} \cup N, m_3)\}$$

$$(m_1, N, m_2) \star (m_3, P, m_4) = \{(m_1, N \cup P \cup \{m_2 * m_3\}, m_4), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3\}, m_4)\}$$

Die 1 sei neutrales Element.
Zusätzlich dazu soll das Bild einer Menge von Elementen unter $\star$ der Vereinigung der Bilder der Elemente entsprechen.

Lemma 1. *Die Multiplikation $\star$ ist assoziativ.*

Beweis. (Mengenklammern teilweise zur besseren Lesbarkeit weggelassen)

1a $(m_1 \star m_2) \star m_3 =$
$\{m_1 * m_2, (m_1, \varnothing, m_2)\} \star m_3 =$
$\{m_1 * m_2 * m_3, (m_1 * m_2, \varnothing, m_3),$
$(m_1, \varnothing, m_2 * m_3), (m_1, \{m_2\}, m_3)\}$

1b $m_1 \star (m_2 \star m_3) =$
$m_1 \star \{m_2 * m_3, (m_2, \varnothing, m_3)\} =$
$\{m_1 * m_2 * m_3, (m_1, \varnothing, m_2 * m_3),$
$(m_1 * m_2, \varnothing, m_3), (m_1, \{m_2\}, m_3)\}$

2a $(m_1 \star m_2) \star (m_3, N, m_4) =$
$\{m_1 * m_2, (m_1, \varnothing, m_2)\} \star (m_3, N, m_4) =$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, N, m_4), (m_1 * m_2, \{m_3\} \cup N, m_4),$
$(m_1, N \cup \{m_2 * m_3\}, m_4), (m_1, N \cup \{m_2, m_3\}, m_4)\}$

2b $m_1 \star (m_2 \star (m_3, N, m_4)) =$
$m_1 \star \{(m_2 * m_3, N, m_4), (m_2, N \cup \{m_3\}, m_4)\} =$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, N, m_4), (m_1, N \cup \{m_2 * m_3\}, m_4),$
$(m_1 * m_2, N \cup \{m_3\}, m_4), (m_1, N \cup \{m_2, m_3\}, m_4)\}$

3a $(m_1 \star (m_2, N, m_3)) \star m_4 =$
$\{(m_1 * m_2, N, m_3), (m_1, N \cup \{m_2\}, m_3)\} \star m_4 =$
$\{(m_1 * m_2, N, m_3 * m_4), (m_1 * m_2, N \cup \{m_3\}, m_4),$
$(m_1, N \cup \{m_2\}, m_3 * m_4), (m_1, N \cup \{m_2, m_3\}, m_4)\}$

3b $m_1 \star ((m_2, N, m_3) \star m_4) =$
$m_1 \star \{(m_2, N, m_3 * m_4), (m_2, N \cup \{m_3\}, m_4)\} =$
$\{(m_1 * m_2, N, m_3 * m_4), (m_1, N \cup \{m_2\}, m_3 * m_4),$
$(m_1 * m_2, N \cup \{m_3\}, m_4), (m_1, N \cup \{m_2, m_3\}, m_4)\}$

4a $(m_1 \star (m_2, N, m_3)) \star (m_4, P, m_5) =$
$\{(m_1 * m_2, N, m_3), (m_1, N \cup \{m_2\}, m_3)\} \star (m_4, P, m_5) =$
$\{(m_1 * m_2, N \cup P \cup \{m_3 * m_4\}, m_5), (m_1 * m_2, N \cup P \cup \{m_3, m_4\}, m_5),$
$(m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3 * m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3, m_4\}, m_5)\}$

4b $m_1 \star ((m_2, N, m_3) \star (m_4, P, m_5)) =$
$m_1 \star \{(m_2, N \cup P \cup \{m_3 * m_4\}, m_5), (m_2, N \cup P \cup \{m_3, m_4\}, m_5)\} =$
$\{(m_1 * m_2, N \cup P \cup \{m_3 * m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3 * m_4\}, m_5),$
$(m_1 * m_2, N \cup P \cup \{m_3, m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3, m_4\}, m_5)\}$

5a $((m_1, N, m_2) \star m_3) \star (m_4, P, m_5) =$
$\{(m_1, N, m_2 * m_3), (m_1, N \cup \{m_2\}, m_3)\} \star (m_4, P, m_5) =$
$\{(m_1, N \cup P \cup \{m_2 * m_3 * m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2 * m_3, m_4\}, m_5),$
$(m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3 * m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3, m_4\}, m_5)\}$

5b $(m_1, N, m_2) \star (m_3 \star (m_4, P, m_5)) =$
$(m_1, N, m_2) \star \{(m_3 * m_4, P, m_5), (m_3, P \cup \{m_4\}, m_5)\} =$
$\{(m_1, N \cup P \cup \{m_2 * m_3 * m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3 * m_4\}, m_5),$
$(m_1, N \cup P \cup \{m_2 * m_3, m_4\}, m_5), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3, m_4\}, m_5)\}$

6a $((m_1, N, m_2) \star (m_3, P, m_4)) \star (m_5, Q, m_6) =$
$\{(m_1, N \cup P \cup \{m_2 * m_3\}, m_4), (m_1, N \cup P \cup \{m_2, m_3\}, m_4)\} \star (m_5, Q, m_6) =$
$\{(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2 * m_3, m_4 * m_5\}, m_6),$
$(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2 * m_3, m_4, m_5\}, m_6),$
$(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2, m_3, m_4 * m_5\}, m_6),$
$(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2, m_3, m_4, m_5\}, m_6)\}$

6b $(m_1, N, m_2) \star ((m_3, P, m_4) \star (m_5, Q, m_6)) =$
$(m_1, N, m_2) \star \{(m_3, P \cup Q \cup \{m_4 * m_5\}, m_6), (m_3, P \cup Q \cup \{m_4, m_5\}, m_6)\} =$
$\{(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2 * m_3, m_4 * m_5\}, m_6),$
$(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2, m_3, m_4 * m_5\}, m_6),$
$(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2 * m_3, m_4, m_5\}, m_6),$
$(m_1, N \cup P \cup Q \cup \{m_2, m_3, m_4, m_5\}, m_6)\}$

Die Beweise zu den Spiegelungen von 2 und 4 laufen aufgrund der Symmetrie von $\star$ ebenso ab. $\square$

Definition 2. *Für ein gegebenes Monoid M definieren wir $\bigstar(M)$ als den Abschluss von M $\cup\{1\}$ unter $\star$, wobei die Elemente von $\bigstar(M)$ jetzt noch auf die jeweils kleinste Menge C vergrößert werden, für die folgendes gilt:*

$$\forall Q \supseteq N: \ (m_1, N, m_2) \in C \Rightarrow (m_1, Q, m_2) \in C$$

Das Zusammenfassen der Mengen auf die nächstgrößere gültige funktioniert, da bei der Multiplikation die Menge nur um von der Menge unabhängige Elemente größer wird und die kleineren Mengen bereits alle relevanten Informationen für die Multiplikation und späteres vergrößern enthalten (nämlich die unterschiedlichen kleinsten Mengen für jedes Pre-und Suffix).
$\bigstar(M)$ ist endlich, da $\bigstar(M)$ Teilmenge von $\mathcal{P}(M \cup (M \times \mathcal{P}(M) \times M))$ ist.
Das Zusammenfassen dient dazu, die Konstruktion an die am Anfang des Kapitels genannte Intention anzupassen.

Satz 1. *Für jede Sprache L die durch ϕ von M erkannt wird, erkennt $\bigstar(M)$ durch ψ mit*

- $\psi(\varepsilon) = 1$
- $\forall a \in \Sigma : \psi(a) = \{\phi(a)\}$
- $\forall w \in \Sigma^+ : \psi(w) = \psi(a_1) \star ... \star \psi(a_n)$ *für* $w = a_1...a_n$ *und* $a_i \in \Sigma$

die Sprache L^*.

Lemma 2. *Für die so konstruierten ψ gilt:*

$$C \in \psi(L^+) \Rightarrow C \text{ enthält } m_1 \text{ oder } (m_2, N, m_3) \text{ mit } m_i \in \phi(L) \text{ und } N \subseteq \phi(L)$$

Beweis. Für jedes $C \in \psi(L^+)$ lässt sich ein $w \in L^+$ wählen, für das $\psi(w) = C$ gilt.
Da $w \in L^+$ ist, existiert eine Zerlegung $w = u_1...u_n$ mit $u_i \in L$.
Für solche Zerlegungen gilt $\phi(u_1) \star ... \star \phi(u_n) \subseteq \psi(w)$, denn aus der Definition von $\star$ und ψ folgt $\phi(u_i) \in \psi(u_i)$.

Aus der Definition von $\star$ ist außerdem leicht ersichtlich, dass auch

$$(\phi(u_1), \{\phi(u_2), .., \phi(u_{n-1})\}, \phi(u_n)) \in \psi(w)$$

bzw.

$$\phi(u_1) \in \psi(w) \text{ für } n = 1$$

gelten muss.

□

Lemma 3. *Enthält ein $C \in \bigstar(M)$ ein m_1 oder ein (m_2, N, m_3) mit $m_i \in \phi(L)$ und $N \subseteq \phi(L)$, so gilt:*

$$\psi^{-1}(C) \subseteq L^+$$

Beweis. Ist $\psi^{-1}(C)$ leer, bleibt nichts zu zeigen.
Sei also $w \in \psi^{-1}(C)$.
Enthält C jetzt $m \in \phi(L)$, so ist $w \in L$.
Enthält C (m_1, N, m_2) mit $m_i \in \phi(L)$ und $N \subseteq \phi(L)$, dann lassen sich die Buchstaben $a_1..a_n = w$ $(a_i \in \Sigma)$ von links an zu $u_i \in \Sigma^*$ so zusammenfassen, dass für die

$$u_i = a_{j+1}...a_k \; k \gneq j$$

folgende Bedingungen gelten:

$$(m_1, N, m_2) \in \phi(u_1) \star .. \star \phi(u_i) \star \psi(a_{k+1}..a_n)$$

$$(m_1, N, m_2) \notin \phi(u_1) \star .. \star \phi(u_{i-1}) \star \phi(a_1...a_{j+1}) \star \psi(a_{j+2}..a_n)$$

Eine Zerlegung des Wortes, welche die erste Bedingung erfüllt, existiert immer, da für $a \in \Sigma$ $\phi(a) = \psi(a)$ ist. Danach muss nur zusammengefasst werden um Bedingung 2 zu erfüllen. Ist nun $w = u_1..u_k$ diese zusammengefasste Zerlegung, dann gilt

$$(m_1, N, m_2) \in \phi(u_1) \star .. \star \phi(u_k)$$

Außerdem wissen wir aufgrund der Konstruktion, dass (m_1, N, m_2) nur aus Operationen entstehen kann, in denen die Multiplikation * nicht verwendet wird, da sonst die beiden Elemente, deren Bilder multipliziert werden, in der Zerlegung bereits zusammengefasst worden wären.
Aus den verbleibenden Operationen folgt

$$\phi(u_1) = m_1 \text{ und } \phi(u_k) = m_2 \text{ und } \phi(u_i) \in N \text{ für } 1 < i < k$$

Da $\{m_1, m_2\} \cup N$ Teilmenge von $\phi(L)$ ist, sind die $u_i \in L$ und damit $w \in L^+$. □

Kombinieren wir Lemma 2 und Lemma 3 mit dem Wissen, dass $\psi^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon$ ist, ist der Beweis von Satz 1 vollständig.

3 Spezielle Sternkonstruktion

In diesem Kapitel betrachten wir eine komprimierte Version der Monoidkonstruktion aus Kapitel 2, die aus einem gegebenen Monoid M ein neues Monoid konstruiert, das für alle Sprachen L, die von M mit P als Bild von L in M erkannt werden, L^* erkennt. Die Intention bei dieser Konstruktion ist, dass ein Wort w aus Σ^* auf eine Menge abgebildet wird, die das Bild von w in dem ursprünglichen Monoid M enthält. Zusätzlich dazu enthält die Menge die Tupel (m_1, m_2), wenn es eine Zerlegung von w in Teilworte $u_1..u_j$ so gibt, dass m_1 das Bild von u_1 in dem Monoid M ist, m_2 das Bild von u_j und die Bilder von den mittleren u_i sich in der erkennenden Menge P befinden.

Definition 3. *Für ein gegebenes Monoid $(M, *)$ und ein $P \subseteq M$ definieren wir die Operation*

$$\star : \{1\} \cup M \cup (M \times M) \to \{1\} \cup \mathcal{P}(M \cup (M \times M))$$

$$\begin{aligned}
&m_1 \star m_2 = \{m_1 * m_2, (m_1, m_2)\} \\
&m_1 \star (m_2, m_3) = \\
&\{(m_1, m_3), (m_1 * m_2, m_3)\} && \textit{falls } m_2 \in P \\
&\{(m_1 * m_2, m_3)\} && \textit{falls } m_2 \notin P \\
&(m_1, m_2) \star m_3 = \\
&\{(m_1, m_2 * m_3), (m_1, m_3)\} && \textit{falls } m_2 \in P \\
&\{(m_1, m_2 * m_3)\} && \textit{falls } m_2 \notin P \\
&(m_1, m_2) \star (m_3, m_4) = \\
&\{(m_1, m_4)\} && \textit{falls } m_2, m_3 \in P \textit{ oder } m_2 * m_3 \in P \\
&\{\} && \textit{sonst}
\end{aligned}$$

Die 1 sei neutrales Element.
Zusätzlich dazu soll das Bild einer Menge von Elementen unter $\star$ der Vereinigung der Bilder der Elemente entsprechen.

Lemma 4. *Die Multiplikation $\star$ ist assoziativ.*

Beweis. (Mengenklammern teilweise zur besseren Lesbarkeit weggelassen)

1a $(m_1 \star m_2) \star m_3 =$
$\{m_1 * m_2, (m_1, m_2)\} \star m_3 =$
$\{m_1 * m_2 * m_3, (m_1 * m_2, m_3), (m_1, m_2 * m_3), (m_1, m_3)\}$ falls $m_2 \in P$
$\{m_1 * m_2 * m_3, (m_1 * m_2, m_3), (m_1, m_2 * m_3)\}$ falls $m_2 \notin P$

1b $m_1 \star (m_2 \star m_3) =$
$m_1 \star \{m_2 * m_3, (m_2, m_3)\} =$
$\{m_1 * m_2 * m_3, (m_1, m_2 * m_3), (m_1 * m_2, m_3), (m_1, m_3)\}$ falls $m_2 \in P$
$\{m_1 * m_2 * m_3, (m_1, m_2 * m_3), (m_1 * m_2, m_3), (m_1, m_3)\}$ falls $m_2 \notin P$

2a $(m_1 \star m_2) \star (m_3, m_4) =$
$\{m_1 * m_2, (m_1, m_2)\} \star (m_3, m_4) =$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4), (m_1 * m_2, m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_3 \in P \wedge (m_2 * m_3 \in P \vee m_2, m_3 \in P)$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4), (m_1 * m_2, m_4)\}$ falls $m_3 \in P \wedge m_2 * m_3 \notin P \wedge m_2 \notin P$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4)\}$ falls $m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \notin P$

2b $m_1 \star (m_2 \star (m_3, m_4)) =$
$m_1 \star \{(m_2 * m_3, m_4), (m_2, m_4)\}$ falls $m_3 \in P$
$m_1 \star \{(m_2 * m_3, m_4)\}$ falls $m_3 \notin P$
$=$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4), (m_1, m_4), (m_1 * m_2, m_4)\}$ falls $m_3 \in P \wedge (m_2 * m_3 \in P \vee m_2, m_3 \in P)$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4), (m_1 * m_2, m_4)\}$ falls $m_3 \in P \wedge m_2 * m_3 \notin P \wedge m_2 \notin P$
$\{(m_1 * m_2 * m_3, m_4)\}$ falls $m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \notin P$

3a $(m_1 \star (m_2, m_3)) \star m_4 =$
$\{(m_1 * m_2, m_3), (m_1, m_3)\} \star m_4$ falls $m_2 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3)\} \star m_4$ falls $m_2 \notin P$
$=$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1 * m_2, m_4), (m_1, m_3 * m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2, m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1, m_3 * m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2 \in P \wedge m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1 * m_2, m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2 \notin P \wedge m_3 \in P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2, m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4)\}$ falls $m_2, m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \notin P$

3b $m_1 \star ((m_2, m_3) \star m_4) =$
$m_1 \star \{(m_2, m_3 * m_4), (m_2, m_4)\}$ falls $m_3 \in P$
$m_1 \star \{(m_2, m_3 * m_4)\}$ falls $m_3 \notin P$
$=$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1, m_3 * m_4), (m_1 * m_2, m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2, m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1, m_3 * m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2 \in P \wedge m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1 * m_2, m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2 \notin P \wedge m_3 \in P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4), (m_1, m_4)\}$ falls $m_2, m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3 * m_4)\}$ falls $m_2, m_3 \notin P \wedge m_2 * m_3 \notin P$

4a $(m_1 \star (m_2, m_3)) \star (m_4, m_5) =$
$\{(m_1 * m_2, m_3), (m_1, m_3)\} \star (m_4, m_5)$ falls $m_2 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_3)\} \star (m_4, m_5)$ falls $m_2 \notin P$
$=$
$\{(m_1 * m_2, m_5), (m_1, m_5)\}$ falls $(m_3 * m_4 \in P \vee m_3, m_4 \in P) \wedge m_2 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_5)\}$ falls $(m_3 * m_4 \in P \vee m_3, m_4 \in P) \wedge m_2 \notin P$
$\{\}$ falls $(m_3 * m_4 \notin P \wedge m_3, m_4 \notin P)$

4b $m_1 \star ((m_2, m_3) \star (m_4, m_5)) =$
$m_1 \star \{(m_2, m_5)\}$ falls $(m_3 * m_4 \in P \vee m_3, m_4 \in P)$
$m_1 \star \{\}$ falls $(m_3 * m_4 \notin P \wedge m_3, m_4 \notin P)$
$=$
$\{(m_1 * m_2, m_5), (m_1, m_5)\}$ falls $(m_3 * m_4 \in P \vee m_3, m_4 \in P) \wedge m_2 \in P$
$\{(m_1 * m_2, m_5)\}$ falls $(m_3 * m_4 \in P \vee m_3, m_4 \in P) \wedge m_2 \notin P$
$\{\}$ falls $(m_3 * m_4 \notin P \wedge m_3, m_4 \notin P)$

5a $((m_1, m_2) \star m_3) \star (m_4, m_5) =$
$\{(m_1, m_2 * m_3), (m_1, m_3)\} \star (m_4, m_5)$ falls $m_2 \in P$
$\{(m_1, m_2 * m_3)\} \star (m_4, m_5)$ falls $m_2 \notin P$
$=$
$\{(m_1, m_5)\}$ falls $(m_2, m_3, m_4 \in P) \vee (m_2 * m_3, m_4 \in P) \vee (m_2, m_3 * m_4 \in P) \vee (m_2 * m_3 * m_4 \in P)$
$\{\}$ sonst

5b $(m_1, m_2) \star (m_3 \star (m_4, m_5)) =$
$(m_1, m_2) \star \{(m_3 * m_4, m_5), (m_3, m_5)\}$ falls $m_4 \in P$
$(m_1, m_2) \star \{(m_3 * m_4, m_5)\}$ falls $m_4 \notin P$
$=$
$\{(m_1, m_5)\}$ falls $(m_2, m_3, m_4 \in P) \vee (m_2 * m_3, m_4 \in P) \vee (m_2, m_3 * m_4 \in P) \vee (m_2 * m_3 * m_4 \in P)$
$\{\}$ sonst

6a $((m_1, m_2) \star (m_3, m_4)) \star (m_5, m_6) =$
$\{(m_1, m_4)\} \star (m_5, m_6)$ falls $m_2, m_3 \in P \vee m_2 * m_3 \in P$
$\{\} \star (m_5, m_6)$ sonst
$=$
$\{(m_1, m_6)\}$ falls $(m_2, m_3 \in P \vee m_2 * m_3 \in P) \wedge (m_4, m_5 \in P \vee m_4 * m_5 \in P)$
$\{\}$ sonst

6b $(m_1, m_2) \star ((m_3, m_4) \star (m_5, m_6)) =$
$(m_1, m_2) \star \{(m_3, m_6)\}$ falls $m_4, m_5 \in P \vee m_4 * m_5 \in P$
$\{\}$ sonst
$=$
$\{(m_1, m_6)\}$ falls $(m_2, m_3 \in P \vee m_2 * m_3 \in P) \wedge (m_4, m_5 \in P \vee m_4 * m_5 \in P)$
$\{\}$ sonst

Die Beweise zu den Spiegelungen von 2 und 4 laufen aufgrund der Symmetrie von $\star$ ebenso ab. $\square$

Definition 4. *Für ein gegebenes Monoid (M, *) und eine erkennende Menge $P \subseteq M$ definieren wir $\bigstar(M,P)$ als den Abschluss von $M \cup \{1\}$ unter $\star_P$.*
$\bigstar(M,P)$ ist endlich, da $\bigstar(M,P) \subseteq \mathcal{P}(M \cup (M \times M))$

Satz 2. *Für jede Sprache L die durch ϕ von M erkannt wird, erkennt $\bigstar(M,P)$ durch ψ mit*
$\psi(\varepsilon) = 1$
$\forall a \in \Sigma : \psi(a) = \{\phi(a)\}$ und
$\forall w \in \Sigma^+ : \psi(w) = \psi(a_1) \star ... \star \psi(a_n)$ für $w = a_1...a_n$ und $a_i \in \Sigma$
die Sprache L^*.

Lemma 5. *Für die so konstruierten ψ gilt:*

$$C \in \psi(L^+) \Rightarrow C \text{ enthält } m_1 \text{ oder } (m_2, m_3) \text{ mit } m_i \in P = \phi(L)$$

Beweis. Für jedes $C \in \psi(L^+)$ lässt sich ein $w \in L^+$ wählen, für das $\psi(w) = C$ gilt.
Da $w \in L^+$ ist, existiert eine Zerlegung $w = u_1...u_n$ mit $u_i \in L$.
Für solche Zerlegungen gilt $\phi(u_1) \star ... \star \phi(u_n) \subseteq \psi(w)$, denn aus den Definitionen von $\star$ und ψ folgt $\phi(u_i) \in \psi(u_i)$.
Aus der Definition von $\star$ ist außerdem leicht ersichtlich, dass auch

$$(\phi(u_1), \phi(u_n)) \in \psi(w)$$

bzw.

$$\phi(u_1) \in \psi(w) \text{ für } n = 1$$

gelten muss.

□

Lemma 6. *Enthält ein $C \in \bigstar(M,P)$ ein m_1 oder ein (m_2, m_3) mit $m_i \in P$, so gilt:*

$$\psi^{-1}(C) \subseteq L^+$$

Beweis. Ist $\psi^{-1}(C)$ leer, bleibt nichts zu zeigen.
Sei also $w \in \psi^{-1}(C)$.
Enthält C jetzt $m \in \phi(L)$, so ist $w \in L$.
Enthält C (m_1, m_2) mit $m_i \in \phi(L)$, dann lassen sich die Buchstaben $a_1..a_n = w$ ($a_i \in \Sigma$) zu $u_i \in \Sigma^*$ so zusammenfassen, dass für die u_i folgende Bedingungen gelten:

$$w = u_1..u_k$$

$$(m_1, m_2) \in \phi(u_1) \star .. \star \phi(u_k)$$

$$(m_1, m_2) \notin \phi(u_1) \star .. \star \phi(u_{i-1}u_i) \star \psi(u_{i+1}) .. \star \psi(u_k)$$

Eine Zerlegung des Wortes, welche die erste Bedingung erfüllt, existiert mit $u_i = a_i$ immer, da für $a \in \Sigma$ $\phi(a) = \psi(a)$ ist. Danach muss nur zusammengefasst werden um Bedingung 2 zu erfüllen.
Ist nun $w = u_1..u_k$ diese zusammengefasste Zerlegung, dann gilt

$$(m_1, m_2) \in \phi(u_1) \star .. \star \phi(u_k)$$

Außerdem wissen wir aufgrund der Konstruktion der u_i, dass für die Entstehung des (m_1, m_2) in jedem Schritt das nächste $\phi(u_i)$ nicht durch * an $\phi(u_{i+1})$ multipliziert wird, da sonst die beiden Elemente, deren Bilder multipliziert werden, in der Zerlegung bereits zusammengefasst worden wären. Es muss also jedes $\phi(u_j)$ für $1 < j < k$ selbst in P sein.
Es gilt also:

$$\phi(u_1) = m_1 \text{ und } \phi(u_k) = m_2 \text{ und } \phi(u_i) \in P \text{ für } 1 < i < k$$

Da $\{m_1, m_2\}$ Teilmenge von P ist, sind alle $u_i \in L$ und damit $w \in L^+$. □

Kombinieren wir Lemma 5 und Lemma 6 mit dem Wissen, dass $\psi^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon$ ist, ist der Beweis von Satz 2 vollständig.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden zwei algebraische Konstruktionen für den Kleene-Stern regulärer Sprachen betrachtet.
Die erste der beiden ist dazu geeignet, aus einem Monoid M ein neues Monoid zu erzeugen, das alle L^* erkennt, deren L von M erkannt wurde. Da dieses Monoid eine deutlich größere und komplexere Struktur hat, als es für ein bestimmtes L^* nötig wäre, gibt es noch eine zweite Konstruktion.
Diese ist zusätzlich zu M noch von einer erkennenden Teilmenge von M abhängig. Durch das Einschränken auf das Erkennen der L^*, deren L zu dieser erkennenden Menge gehören, wird die Konstruktion deutlich kleiner und übersichtlicher.

Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit konnten leider keine weiterführenden Eigenschaften der Konstruktionen untersucht werden. Weitere Erkenntnisse zu dem Einfluss des Kleene-Sterns auf reguläre Sprachen könnten aber möglicherweise durch Untersuchung von Zusammenhängenden algebraischen Eigenschaften in M und $\bigstar(M)$ gewonnen werden. Untersuchungen der Größe von $\bigstar(M)$ in Abhängigkeit von Eigenschaften von M könnten außerdem Hinweise auf eine mögliche Klassifizierung der Sprachen geben, die durch den Kleene-Stern an Komplexität gewinnen, und ebenso auf eine mögliche Klassifizierung für die Sprachen, die an Komplexität verlieren. Der Maßstab für die Komplexität sollte vermutlich die Größe des zugehörigen syntaktischen Monoides sein.

Literaturverzeichnis

[Egg63] L. C. Eggan. Transition graphs and the star-height of regular events. *Michigan Mathematical Journal*, 10(4):385–397, 1963. (Zitiert auf Seite 7)

[Sch65] M. P. Schützenberger. On Finite Monoids Having Only Trivial Subgroups. *Inf. Comput.*, 8(2):190–194, 1965. (Zitiert auf Seite 7)

Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

Ort, Datum, Unterschrift