

Ein Finite–Volumen–Verfahren zur Lösung magnetoplasmadynamischer Erhaltungsgleichungen

Von der Fakultät Luft– und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor–Ingenieurs (Dr.–Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Jörg Heiermann
geb. in Düsseldorf

Hauptberichterin: Prof. Dr.–Ing. habil. Monika Auweter–Kurtz
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus–Dieter Munz
Prof. Dr.–Ing. habil. Dr. h.c. Wolfgang Wendland
Tag der mündlichen Prüfung: 22. Oktober 2002

Institut für Raumfahrtsysteme
Universität Stuttgart
2002

In memoriam 51-L.

Kurzfassung

Zur Lösung der Erhaltungsgleichungen für Argonplasmaströmungen in magnetoplasmadynamischen Eigenfeldbeschleunigern, die in der Raumfahrt aufgrund ihres hohen spezifischen Impulses und ihrer hohen Schubdichte als Antriebe für interplanetare Raumflugmissionen eingesetzt werden können, wurde in dieser Arbeit ein Finite-Volumen-Verfahren entwickelt.

Für verschiedene Düsengeometrien durchgeführte Berechnungen zeigen, daß die Diffusion aufgrund des Elektronendrucks den Lichtbogen aus düsenförmigen Eigenfeldbeschleunigern her austreibt und den Lichtbogenansatz auf der Anode maßgeblich bestimmt. In Übereinstimmung mit dem Experiment kann gezeigt werden, daß eine primäre Ursache für Plasmainstabilitäten bei hohen Strömen die durch den Pinch-Effekt hervorgerufene Dichte- und Ladungsträgerverarmung vor der Anode ist.

Die berechneten Schübe stimmen mit experimentellen Werten gut überein, sodaß das neuentwickelte Verfahren zum Entwurf und zur Optimierung neuer Triebwerke benutzt werden kann.

Abstract

A finite volume method has been developed in this work for solving the conservation equations of argon plasma flows in magnetoplasma dynamic self-field accelerators. These accelerators can be used for interplanetary spaceflight missions because of their high specific impulse and high thrust density, .

Calculations for different nozzle geometries show that the diffusion caused by the electron pressure drives the arc out of nozzle-type self-field accelerators and influences the arc attachment on the anode significantly. In agreement with the experiment it has been found that a primary reason for plasma instabilities at high current settings is the depletion of density and charge carriers in front of the anode because of the pinch effect.

The calculated thrust data agree well with experimental values, so that the newly developed method can be used for the design and optimization of new thrusters.

A summary in English is included at the end of this thesis.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des DFG–Schwerpunktprogramms *Analysis und Numerik von Erhaltungsgleichungen* im Institut für Raumfahrtsysteme (IRS) der Universität Stuttgart.

Bei Prof. Dr.–Ing. habil. Monika Auweter–Kurtz bedanke ich mich herzlich für die Übernahme des Hauptberichts. Ihr stetes Interesse und ihre tatkräftige Unterstützung unterstreichen ihre hervorragende Betreuung, bei der sie mir sehr große Freiheit gewährte. Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus–Dieter Munz und Prof. Dr.–Ing. habil. Dr. h.c. Wolfgang Wendland danke ich für das große Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts.

Für die Aufnahme als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut danke ich Prof. Dr. rer. nat. Ernst Messerschmid.

Prof. Dr. Edgar Choueiri und Prof. Dr. Stephen Jardin (Princeton University, New Jersey, USA), Prof. Dr. Gheorghe Moroşanu (A.I. Cuza Universität, Iaşi, Rumänien), Prof. Dr. rer. nat. habil. Thomas Sonar (Universität Braunschweig), Prof. Dr. rer. nat. habil. Gerald Warnecke (Universität Magdeburg), P.D. Dr. rer. nat. habil. Andreas Meister (Universität Lübeck), P.D. Dr.–Ing. habil. Christian Sleziona (IHI Charging Systems International GmbH, Heidelberg), Dr.–Ing. Christian Boie (FEV Motorentechnik GmbH, Aachen), Dr.–Ing. Albrecht Eberle (European Aeronautic Defence and Space Company, München), Dr. rer. nat. Uwe Iben (Robert Bosch GmbH, Stuttgart), Dr. Petr Nikrityuk (TU Dresden) und M. Sc. Kameshwaran Sankaran (Princeton University, New Jersey, USA) danke ich für die freundschaftliche und gewissenhafte Unterstützung und Zusammenarbeit beim Verstehen mathematischer und physikalischer Zusammenhänge und bei der Entwicklung der numerischen Verfahren.

Zu großem Dank bin ich Hans Kaeppler verpflichtet. Seine wertvollen Erfahrungen und konstruktiven Hinweise haben diese Arbeit wesentlich geprägt.

Besonderer Dank gilt Dr. rer. nat. Cristian Coclici (Universität Kaiserslautern) für die aufmerksame und sorgfältige Begleitung der Programmierarbeit und seine zahlreichen mathematischen Anregungen.

Dr.–Ing. Stefan Laure, Dipl.–Ing. Torsten Laux, Dipl.–Ing. Michael Winter und Edgar Schreiber danke ich für die experimentelle Unterstützung. Für die angenehme und kreative Atmosphäre bedanke ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen am IRS.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Förderung.

Jörg Heiermann

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	3
Abstract	3
Vorwort	4
Inhaltsverzeichnis	6
Abbildungsverzeichnis	7
Nomenklatur	10
1 Einleitung	16
2 Erhaltungsgleichungen	21
2.1 Grundannahmen für die Modellierung	21
2.2 Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie der Schwerteilchen .	22
2.3 Erhaltungsgleichung für die Turbulenz	26
2.4 Erhaltungsgleichung für die Elektronenenergie	27
2.5 Erhaltungsgleichung für das Magnetfeld	29
2.6 Ionisationsreaktionsraten	30
2.7 Transportkoeffizienten	35
2.8 Randbedingungen	42
3 Numerische Verfahren	47
3.1 Grundlagen der räumlichen Diskretisierung	47
3.2 Flux Vector Splitting	49
3.3 WENO-Rekonstruktion 2. Ordnung	52
3.4 Diskretisierung reibungsbehafteter Flüsse	53
3.5 Gradientenberechnung mit Least-Squares-Ansatz	54
3.6 FV-Diskretisierung der Schwerteilchenerhaltungsgleichungen	55
3.7 FV-Diskretisierung der Turbulenzerhaltungsgleichung	58
3.8 FV-Diskretisierung der Elektronenenergieerhaltungsgleichung	59
3.9 FV-Diskretisierung der Magnetfelderhaltungsgleichung	60
3.10 FV-Diskretisierung der Randbedingungen	61
3.11 Diskretisierung der Zeitintegration	64
3.12 Fehlerabschätzung und Gitteradaptation	67

4	Ergebnisse	73
4.1	Plasmabeschleuniger RD3	73
4.2	Düsenförmiges Triebwerk DT2	85
4.3	Triebwerk mit Heißer Anode HAT	100
5	Zusammenfassung und Ausblick	114
	Literaturverzeichnis	116
	Summary	125
	Lebenslauf	129

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung eines MPD–Eigenfeldtriebwerks	17
1.2	MPD–Triebwerk DT2	19
1.3	MPD–Triebwerk HAT	19
1.4	Plasmabeschleuniger RD3	20
2.1	Reaktionsraten $k_{f,i}$ der Elektronenstoßionisation	33
2.2	Reaktionsraten $k_{b,i}$ der Dreierstoßrekombination	33
2.3	Schwerteilchendichten und Elektronendichte im thermischen und Ionisationsreaktions–Gleichgewicht ($p = 10000 Pa$)	34
2.4	Wärmeleitfähigkeit der Elektronen	38
2.5	Elektrische Leitfähigkeit	38
2.6	Viskosität der Schwerteilchen	39
2.7	Wärmeleitfähigkeit der Schwerteilchen	39
2.8	Reaktive Wärmeleitfähigkeit der Elektronen	41
2.9	Diffusionskoeffizienten der Schwerteilchen ($p = 10000 Pa$)	41
2.10	Wärmeübergang durch elastischen Energietransfer zwischen Elektronen und Schwerteilchen	42
3.1	Duale Zellen als Kontrollvolumina	48
3.2	Duale Zellen am Rand	49
4.1	Gesamtansicht des adaptierten Primärgitters für den Plasmabeschleuniger RD3 (12163 Gitterpunkte, 1500 A, 2.4 g/s)	73
4.2	Teilansicht des adaptierten Primärgitters für den Plasmabeschleuniger RD3 (12163 Gitterpunkte, 1500 A, 2.4 g/s)	74
4.3	RD3: Stromverteilung Ψ , 500 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)	76
4.4	RD3: Stromverteilung Ψ , 1000 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)	76
4.5	RD3: Stromverteilung Ψ , 1500 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)	77
4.6	RD3: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)	77
4.7	RD3: Stromverteilung Ψ , 1000 A, 2.4 g/s, ohne den Term $\frac{1}{en_e} \nabla p_e$ im Ohm’schen Gesetz (100 A zwischen 2 Isolinien)	78
4.8	RD3: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 2.4 g/s, ohne den Term $\frac{1}{en_e} \nabla p_e$ im Ohm’schen Gesetz (100 A zwischen 2 Isolinien)	78
4.9	RD3: Elektronentemperatur T_e , 2000 A, 2.4 g/s	79
4.10	RD3: Schwerteilchentemperatur T_h , 2000 A, 2.4 g/s	79
4.11	RD3: Ionisationsgrad α , 2000 A, 2.4 g/s	80

4.12	RD3: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 2000 A, 2.4 g/s	80
4.13	RD3: Mit Keramikabdeckung, Modifikation 1	82
4.14	RD3: Mit Keramikabdeckung, Modifikationen 2 (links) und 3 (rechts) . . .	82
4.15	Strom-/Spannungsmeßkurven RD3	82
4.16	RD3: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 2.4 g/s, Modifikation 1 mit Keramikabdeckung (100 A zwischen 2 Isolinien)	83
4.17	Teilansicht des adaptierten Primärgitters für das MPD-Eigenfeldtriebwerk DT2 (29518 Gitterpunkte, 4000 A, 0.8 g/s)	85
4.18	DT2: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	88
4.19	DT2: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	88
4.20	DT2: Stromverteilung Ψ , 4000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	89
4.21	DT2: Stromverteilung Ψ , 5000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	89
4.22	DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 2000 A, 0.8 g/s	90
4.23	DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 3000 A, 0.8 g/s	90
4.24	DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 4000 A, 0.8 g/s	91
4.25	DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 5000 A, 0.8 g/s	91
4.26	DT2: Schwerteilchentemperatur T_h , 4000 A, 0.8 g/s	92
4.27	DT2: Schwerteilchentemperatur T_h , 5000 A, 0.8 g/s	92
4.28	DT2: Elektronentemperatur T_e , 4000 A, 0.8 g/s	93
4.29	DT2: Elektronentemperatur T_e , 5000 A, 0.8 g/s	93
4.30	DT2: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.3 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	95
4.31	DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 3000 A, 0.3 g/s	95
4.32	DT2: Schwerteilchentemperatur T_h , 3000 A, 0.3 g/s	96
4.33	DT2: Elektronentemperatur T_e , 3000 A, 0.3 g/s	96
4.34	DT2: Axiale Geschwindigkeit v_z im Düsenendquerschnitt	97
4.35	DT2: Machzahl $Ma = \vec{v} /c$ im Düsenendquerschnitt	97
4.36	DT2: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 4000 A, 0.8 g/s	98
4.37	Teilansicht des adaptierten Primärgitters für das MPD-Eigenfeldtriebwerk HAT (28034 Gitterpunkte, 2000 A, 0.8 g/s)	100
4.38	HAT im Betrieb, 2000 A, 0.8 g/s	101
4.39	HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 2000 A, 0.8 g/s	101
4.40	HAT: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	103
4.41	HAT: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	103
4.42	HAT: Stromverteilung Ψ , 4000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	104
4.43	HAT: Stromverteilung Ψ , 5000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	104
4.44	HAT: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 4000 A, 0.8 g/s	105
4.45	HAT: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 5000 A, 0.8 g/s	105
4.46	HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 4000 A, 0.8 g/s	106
4.47	HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 5000 A, 0.8 g/s	106
4.48	HAT: Elektronentemperatur T_e , 4000 A, 0.8 g/s	107
4.49	HAT: Elektronentemperatur T_e , 5000 A, 0.8 g/s	107
4.50	HAT: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.3 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien) . . .	109
4.51	HAT: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 3000 A, 0.3 g/s	109
4.52	HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 3000 A, 0.3 g/s	110
4.53	HAT: Elektronentemperatur T_e , 3000 A, 0.3 g/s	110

4.54	HAT: Axiale Geschwindigkeit v_z im Düsenendquerschnitt	111
4.55	HAT: Machzahl $Ma = \vec{v} /c$ im Düsenendquerschnitt	111
4.56	HAT: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 2000 A, 0.8 g/s	112
4.57	HAT: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 3000 A, 0.8 g/s	112
4.58	HAT: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 4000 A, 0.8 g/s	113

Nomenklatur

A_i	[–]	Normierte Bindungsenergie
A_ε	[–]	Schließungskoeffizient
A_μ	[–]	Schließungskoeffizient
$Ar^{(i)+}$	[–]	i -fach ionisiertes Argon
\vec{a}	[–]	Vektor
a_i	[–]	Koeffizient
\vec{B}	[T]	Magnetische Flußdichte
B	[T]	Azimutale magnetische Flußdichte
b_i	[–]	Koeffizient
C, C_1, C_2	[–]	Konstanten
C_0^∞	[–]	Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger
CFL_B	[–]	Steuerzahl
CFL_e	[–]	Steuerzahl
CFL_h	[–]	Steuerzahl
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	[–]	Konstanten zur Gittergrößenberechnung
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	[–]	Schließungskoeffizienten
C_μ	[–]	Schließungskoeffizient
c	[$m s^{-1}$]	Magnetoakustische Geschwindigkeit
\bar{c}	[$m s^{-1}$]	Mittlere thermische Geschwindigkeit
c_i	[–]	Koeffizient
c_p	[$J kg^{-1} K^{-1}$]	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
\mathcal{D}_{ij}	[$m^2 s^{-1}$]	Binärer Diffusionskoeffizient
D	[m^2]	Determinante
D'_{im}	[$m^2 s^{-1}$]	Diffusionskoeffizient der Schwerteilchenspezies i
D_{im}	[$m^2 s^{-1}$]	Effektiver Diffusionskoeffizient der Schwerteilchenspezies i
\vec{E}	[$V m^{-1}$]	Elektrische Feldstärke
E	[–]	Zellrand einer dualen Zelle
e^-	[–]	Elektron
\mathbf{e}_h	[–]	Fehler der numerischen gegenüber der exakten Lösung
e_h	[$J m^{-3}$]	Schwerteilchenenergie pro Volumeneinheit
e_e	[$J m^{-3}$]	Elektronenenergie pro Volumeneinheit
F	[N]	Schub
\mathbf{F}	[–]	Vektorfunktion
F_{invisc}^B	[$T m s^{-1}$]	Reibungsfreier Fluß der magnetischen Flußdichte
F_{WENO}^B	[$T m s^{-1}$]	F_{invisc}^B mit auf der Zellwand WENO-rekonstruierten Variablen

$F_{invisc}^{div\vec{v}}$	$[m\ s^{-1}]$	Reibungsfreier Fluß
$F_{WENO}^{div\vec{v}}$	$[m\ s^{-1}]$	$F_{invisc}^{div\vec{v}}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$F_{invisc}^{e_e}$	$[J\ m^{-2}\ s^{-1}]$	Reibungsfreier Fluß der Elektronenenergie
$F_{WENO}^{e_e}$	$[J\ m^{-2}\ s^{-1}]$	$F_{invisc}^{e_e}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$F_{invisc}^{e_h}$	$[J\ m^{-2}\ s^{-1}]$	Reibungsfreier Fluß der Schwerteilchenenergie
$F_{WENO}^{e_h}$	$[J\ m^{-2}\ s^{-1}]$	$F_{invisc}^{e_h}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$F_{j\times B}$	$[N]$	Magnetischer Schub
$F_{invisc}^{n_i}$	$[m^{-2}\ s^{-1}]$	Reibungsfreier Teilchendichtefluß der Spezies i
$F_{WENO}^{n_i}$	$[m^{-2}\ s^{-1}]$	$F_{invisc}^{n_i}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$F_{invisc}^{\rho R}$	$[kg\ s^{-2}]$	Reibungsfreier Turbulenzfluß
$F_{WENO}^{\rho R}$	$[kg\ s^{-2}]$	$F_{invisc}^{\rho R}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$F_{invisc}^{\rho v_r}$	$[kg\ m^{-1}\ s^{-2}]$	Reibungsfreier radialer Impulsfluß
$F_{WENO}^{\rho v_r}$	$[kg\ m^{-1}\ s^{-2}]$	$F_{invisc}^{\rho v_r}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$F_{invisc}^{\rho v_z}$	$[kg\ m^{-1}\ s^{-2}]$	Reibungsfreier axialer Impulsfluß
$F_{WENO}^{\rho v_z}$	$[kg\ m^{-1}\ s^{-2}]$	$F_{invisc}^{\rho v_z}$ mit auf der Zellwand WENO–rekonstruierten Variablen
$\vec{f}_{h,invisc}$	$[W\ m^{-2}]$	Reibungsfreier Fluß der Schwerteilchenenergiegleichung
$\vec{f}_{h,visc}$	$[W\ m^{-2}]$	Reibungsbehafteter Fluß der Schwerteilchenenergiegleichung
$\vec{f}_{r,invisc}$	$[N\ m^{-2}]$	Reibungsfreier Fluß der radialen Impulsgleichung
$\vec{f}_{r,visc}$	$[N\ m^{-2}]$	Reibungsbehafteter Fluß der radialen Impulsgleichung
$\vec{f}_{z,invisc}$	$[N\ m^{-2}]$	Reibungsfreier Fluß der axialen Impulsgleichung
$\vec{f}_{z,visc}$	$[N\ m^{-2}]$	Reibungsbehafteter Fluß der axialen Impulsgleichung
f_μ	$[-]$	Nahwand–Funktion
f_2	$[-]$	Nahwand–Funktion
g	$[m]$	Lokale Gitterkantenlänge
H_0^1	$[-]$	Sobolev–Raum
H^{-1}	$[-]$	Zu H_0^1 dualer Sobolev–Raum
h	$[-]$	Dimensionslose Gittergröße
h_{1l}, h_{2l}	$[m\ s^{-1}]$	Splitting–Koeffizienten links von einer Zellwand
h_{1r}, h_{2r}	$[m\ s^{-1}]$	Splitting–Koeffizienten rechts von einer Zellwand
I	$[A]$	Elektrische Stromstärke
\vec{j}	$[A\ m^{-2}]$	Elektrische Stromdichte
$\vec{j}_{D,e}$	$[m^{-2}\ s^{-1}]$	Diffusionsstrom der Elektronen
$\vec{j}_{D,i}$	$[m^{-2}\ s^{-1}]$	Massenkonservativer Diffusionsstrom der Schwerteilchenspezies i
$\vec{j}'_{D,i}$	$[m^{-2}\ s^{-1}]$	Diffusionsstrom der Schwerteilchenspezies i
K	$[m^{-3}]$	Gleichgewichtskonstante
K_{λ_e}	$[-]$	Korrekturfunktion für λ_e
K_{μ_h}	$[-]$	Korrekturfunktion für μ_h
K_σ	$[-]$	Korrekturfunktion für σ
k	$[m^2\ s^{-2}]$	Turbulente kinetische Energie
$k_{b,i}$	$[m^6\ s^{-1}]$	Rekombinationsreaktionsraten der Schwerteilchenspezies i
$k_{f,i}$	$[m^3\ s^{-1}]$	Ionisationsreaktionsraten der Schwerteilchenspezies i

L	$[-]$	Lipschitz-Konstante
l	$[-]$	Strömungszustand links von einer Zellwand
l	$[m]$	Länge eines Randsegmentes
l_{λ_e}	$[-]$	Koeffizient
l_{μ_h}	$[-]$	Koeffizient
l_{σ}	$[-]$	Koeffizient
Ma	$[-]$	Machzahl
\dot{m}	$[kg\ s^{-1}]$	Massenstrom
n_e	$[m^{-3}]$	Elektronendichte
n_h	$[m^{-3}]$	Gesamtschwerteilchendichte
n_i	$[m^{-3}]$	Dichte der Schwerteilchenspezies i
\vec{n}_{ik}	$[-]$	Normaleneinheitsvektor der Zellwandfläche ΔA_{ik}
$\vec{n}_{i,1}, \vec{n}_{i,2}$	$[-]$	Normaleneinheitsvektoren einer dualen Zelle i am Rand
n_r	$[-]$	Radiale Komponente des Normaleneinheitsvektors
n_z	$[-]$	Axiale Komponente des Normaleneinheitsvektors
\mathcal{P}	$[m^2\ s^{-3}]$	Turbulenter Produktionsterm
P_i	$[eV]$	Bindungsenergie
Pr	$[-]$	Prandtl-Zahl
Pr_T	$[-]$	Turbulente Prandtl-Zahl
p	$[Pa]$	Druck
p_e	$[Pa]$	Elektronendruck
p_h	$[Pa]$	Schwerteilchendruck
Q_{ei}	$[m^2]$	Stoßquerschnitt Elektron – Schwerteilchenspezies i
Q_{ij}	$[m^2]$	Stoßquerschnitt Schwerteilchenspezies $i - j$
Q_{ee}	$[m^2]$	Stoßquerschnitt Elektron – Elektron
q	$[m\ s^{-1}]$	Geschwindigkeit
q_h	$[W\ m^{-3}]$	Quellterm der Schwerteilchenenergiegleichung
q_i	$[-]$	Koeffizient
q_n	$[m\ s^{-1}]$	Normalengeschwindigkeit
q_r	$[N\ m^{-3}]$	Quellterm der radialen Impulsgleichung
R	$[m^2\ s^{-1}]$	Turbulente Erhaltungsgröße
RHS^B	$[T\ s^{-1}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für B
RHS^{e_e}	$[J\ m^{-3}\ s^{-1}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für e_e
RHS^{e_h}	$[J\ m^{-3}\ s^{-1}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für e_h
RHS^{n_i}	$[m^{-3}\ s^{-1}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für n_i
$RHS^{\rho R}$	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für ρR
$RHS^{\rho v_r}$	$[kg\ m^{-2}\ s^{-2}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für ρv_r
$RHS^{\rho v_z}$	$[kg\ m^{-2}\ s^{-2}]$	Rechthandseite der Erhaltungsgleichung für ρv_z
Re_T	$[-]$	Turbulente Reynoldszahl
RND_B	$[-]$	Zufallszahl
RND_e	$[-]$	Zufallszahl
RND_h	$[-]$	Zufallszahl
r	$[-]$	Strömungszustand rechts von einer Zellwand
r	$[m]$	Radiale Koordinate
r_1, r_2	$[kg\ m^{-2}\ s^{-1}]$	Splitting-Koeffizienten

r_h	$[-]$	Residuum
$r_{m,\Delta-Torus}$	$[m]$	Radialer Massenschwerpunkt eines Torus mit Dreiecksquerschnitt
\mathbf{S}	$[-]$	Quellterm
S_h^0	$[-]$	Funktionsraum stückweise konstanter Funktionen
S_h^1	$[-]$	Funktionsraum stückweise linearer Funktionen
s	$[m s^{-1}]$	Referenzgeschwindigkeit
T_e	$[K]$	Elektronentemperatur
T_h	$[K]$	Schwerteilchentemperatur
\mathcal{T}_j	$[-]$	Duales Dreieck j
\mathcal{T}_{ijk}	$[-]$	Duales Dreieck mit den Massenschwerpunktsecken i , j und k
U	$[V]$	Spannung
U_{C+P+A}	$[V]$	Lichtbogenspannung
U_P	$[V]$	Lichtbogenspannung ohne Elektrodenfallspannungen
\mathbf{u}	$[-]$	Exakte Lösung des Systems von Erhaltungsgleichungen
u	$[-]$	Funktion
\mathbf{u}_h	$[-]$	Diskrete Lösung des Systems von Erhaltungsgleichungen
u_i	$[-]$	Zustandssumme der Schwerteilchenspezies i
\vec{v}	$[m s^{-1}]$	Schwerpunktsgeschwindigkeit des Plasmas
v	$[-]$	Funktion
\vec{v}_e	$[m s^{-1}]$	Geschwindigkeit der Elektronen
v_r	$[m s^{-1}]$	Radiale Geschwindigkeitskomponente der Schwerteilchen
v_z	$[m s^{-1}]$	Axiale Geschwindigkeitskomponente der Schwerteilchen
\vec{x}	$[m]$	Koordinate auf einem Randsegment
$\vec{x}_{i,1}, \vec{x}_{i,2}$	$[m]$	Integrationspunkte einer dualen Zelle i am Rand
\vec{x}_{ik}	$[m]$	Integrationspunkt auf der Zellwandfläche ΔA_{ik}
$\vec{x}_{m,i}$	$[m]$	Massenschwerpunkt einer dualen Zelle i
Z_i	$[-]$	Ladungszahl der Schwerteilchenspezies i
z	$[m]$	Axiale Koordinate
z_{eff}	$[-]$	Effektive Ladungszahl
$z_{m,\Delta-Torus}$	$[m]$	Axialer Massenschwerpunkt eines Torus mit Dreiecksquerschnitt

α	$[-]$	Ionisationsgrad
α	$[-]$	Parameter zur Dissipationskontrolle
α_{ei}	$[W m^3 K^{-1}]$	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Elektronen und Schwerteilchenspezies i
β	$[m^3 C^{-1}]$	Hallparameter
γ	$[-]$	Adiabatexponent ($\gamma = 5/3$)
ΔA_E	$[m^2]$	Zellwandfläche einer dualen Zelle
ΔA_i	$[m^2]$	Querschnittsfläche einer dualen Zelle i
ΔA_{ik}	$[m^2]$	Zellwandfläche zwischen den benachbarten dualen Zellen i und k
$\Delta A_{i,1}, \Delta A_{i,2}$	$[m^2]$	Flächenanteile einer dualen Zelle i am Rand
$\Delta A_{\Delta-Torus}$	$[m^2]$	Querschnittsfläche eines Torus mit Dreiecksquerschnitt
$\Delta t_B, \Delta t_{B,RND}$	$[s]$	Zeitschritt

$\Delta t_e, \Delta t_{e,RND}$	[s]	Zeitschritt
$\Delta t_h, \Delta t_{h,RND}$	[s]	Zeitschritt
ΔV_i	[m ³]	Volumen einer dualen Zelle i
$\Delta V_{\Delta-Torus}$	[m ³]	Volumen eines Torus mit Dreiecksquerschnitt
ε	[–]	Kleine Zahl
ε	[m ² s ⁻³]	Turbulente Dissipation
η	[–]	Dimensionslose Koordinate auf einem Randsegment
κ	[–]	Schließungskoeffizient
λ_e	[W m ⁻¹ K ⁻¹]	Wärmeleitfähigkeit der Elektronen
λ_h	[W m ⁻¹ K ⁻¹]	Wärmeleitfähigkeit der Schwerteilchen
λ_{reac}	[W m ⁻¹ K ⁻¹]	Reaktionswärmeleitfähigkeit der Elektronen
λ_T	[W m ⁻¹ K ⁻¹]	Turbulente Wärmeleitfähigkeit der Schwerteilchen
$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	[m s ⁻¹]	Eigenwerte
μ_h	[kg m ⁻¹ s ⁻¹]	Dynamische Viskosität der Schwerteilchen
μ_T	[kg m ⁻¹ s ⁻¹]	Turbulente Viskosität der Schwerteilchen
ν_ω^h	[–]	Fehlerindikator
ν_ω	[s ⁻¹]	Gewichteter Fehlerindikator
ν_{ee}	[s ⁻¹]	Stoßfrequenz Elektron – Elektron
ν_{ei}	[s ⁻¹]	Stoßfrequenz Elektron – Schwerteilchenspezies i
ν_h	[m ² s ⁻¹]	Kinematische Viskosität der Schwerteilchen
ν_{ie}	[s ⁻¹]	Stoßfrequenz Schwerteilchenspezies i – Elektron
ν_{ij}	[s ⁻¹]	Stoßfrequenz Schwerteilchenspezies i – j
ν_T	[m ² s ⁻¹]	Turbulente kinematische Viskosität der Schwerteilchen
ν_ω^h	[–]	Dimensionsloser Fehlerindikator
ξ	[–]	Koeffizient
ξ_i	[–]	Massenanteil der Schwerteilchenspezies i
ρ	[kg m ⁻³]	Massendichte
ρ_{el}	[C m ⁻³]	Ladungsdichte
σ	[Ω ⁻¹ m ⁻¹]	Elektrische Leitfähigkeit
σ_ε	[–]	Schließungskoeffizient
τ_{rr}	[N m ⁻²]	Viskose radiale Normalspannung
τ_{zr}	[N m ⁻²]	Viskose Schubspannung
τ_{zz}	[N m ⁻²]	Viskose axiale Normalspannung
$\tau_{\varphi\varphi}$	[N m ⁻²]	Viskose azimutale Normalspannung
$\chi_{i \rightarrow i+1}$	[J]	Energie zur Ionisation der Schwerteilchenspezies i
Ψ	[–]	Funktion
Ψ	[Tm]	Stromfunktion
Ψ_i	[–]	Molenbruch der Schwerteilchenspezies i
Ω	[–]	Rechengebiet
ω	[–]	Duale Zelle
ω_i	[–]	Gewicht für einen Gradienten auf einem dualen Dreieck i
ω_i	[m ⁻³ s ⁻¹]	Reaktionsquellterm der Schwerteilchenspezies i

Konstanten

c	$= 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
e	$= 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ As}$	Elektrische Elementarladung
h	$= 6,62620 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	Planck'sches Wirkungsquantum
k	$= 1,38062 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	Boltzmann-Konstante
m_e	$= 9,10956 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	Elektronenmasse
m_h	$= 6,63349 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$	Schwertelchenmasse Argonatom/ $-$ ion
ε_0	$= 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$	Elektrische Feldkonstante
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$	Magnetische Feldkonstante

Kapitel 1

Einleitung

Der bemannte interplanetare Raumflug ist nach den Apollo-Mondlandungen, der Inbetriebnahme des teilweise wiederverwendbaren, erdnahen Raumtransportsystems Space Shuttle, der Kommerzialisierung der Nutzung von Erdbeobachtungs-, Navigations- und Telekommunikationssatelliten und dem Aufbau der internationalen Raumstation der nächste Meilenstein der Raumfahrt.

Zentrale Bedeutung kommt der Wahl des Antriebssystems zu, um interplanetare Missionen in vernünftig kurzer Zeit durchführen zu können. Elektrische Raketenantriebe [1, 2] sind hierfür aufgrund ihrer im Vergleich mit chemischen Antrieben deutlich höheren spezifischen Impulse besonders geeignet [3].

Allen elektrischen Antrieben gemeinsam ist, daß dem Treibstoff elektrische Energie zugeführt wird. Die unterschiedlichen Bauweisen und physikalischen Mechanismen der Treibstoffbeschleunigung führen zu einer Unterscheidung von elektrostatischen, widerstandsbeheizten und Lichtbogentriebwerken.

In den elektrostatischen (Ionen-) Triebwerken werden Ionen durch elektrische Felder auf Austrittsgeschwindigkeiten bis 30 km/s beschleunigt, der Schub liegt bei einigen Milli-Newton [4]. Anwendung finden diese Triebwerke in der Bahnregelung und bei interplanetaren Missionen, die einen hohen, langandauernden Antriebsbedarf haben, aber keine hohen Beschleunigungswerte verlangen und nicht zeitkritisch sind.

Durch Wärmeaustausch an der Oberfläche elektrischer Widerstände wird in widerstandsbeheizten Triebwerken der Treibstoff erhitzt. Bei einem Schub von einigen Newton sind die Austrittsgeschwindigkeiten meist deutlich geringer als das erreichbare Maximum von 8 km/s. Einsatzgebiet ist die Lageregelung von Satelliten [5].

In Lichtbogentriebwerken wird der Treibstoff durch einen elektrischen Lichtbogen aufgeheizt und ionisiert. Die thermischen Lichtbogentriebwerke (TLT) entspannen bei Eingangsleistungen bis zu 100 kW den Treibstoff durch eine Düse bis auf Geschwindigkeiten von 20 km/s, wobei Schübe von einigen Newton erreicht werden können [6, 7]. TLT werden seit einigen Jahren zur Bahnregelung von Satelliten eingesetzt [8].

Bei den magnetoplasmadynamischen (MPD) Triebwerken wird der Treibstoff zusätzlich durch magnetische Kräfte beschleunigt, sodaß bei Austrittsgeschwindigkeiten von über 20 km/s Schübe bis zu 100 Newton erreicht werden. Unterschieden werden MPD-Fremdfeldtriebwerke, bei denen das Magnetfeld durch einen externen Magneten erzeugt wird [9], und MPD-Eigenfeldtriebwerke, die durch einen hohen Lichtbogenstrom das Magnetfeld selber induzieren.

Da sie bei Eingangsleistungen von 10 kW funktionieren und solche Leistungen von auf kommerziellen Satelliten installierten Solargeneratoren heutzutage erbracht werden, ist für die nächsten Jahre eine Entwicklung von TLT und MPD-Fremdfeldtriebwerken als Transferantriebe zum geostationären Erdorbit abzusehen.

MPD-Eigenfeldtriebwerke haben je nach Auslegung eine Eingangsleistung von ca. 100 kW bis zu 1 MW, die durch große Solargeneratoren oder durch nukleare Energiequellen zur Verfügung gestellt werden müssen. Da nukleare Energiequellen aufgrund ihrer kompakten Bauweise und der weiten Entfernung von der Sonne ohnehin die einzig sinnvollen Energiequellen für bemannte interplanetare Missionen ins äußere Sonnensystem sind, stellen MPD-Eigenfeldtriebwerke neben nuklearthermischen Triebwerken wegen ihrer hohen Strahlgeschwindigkeit und ihrer hohen Schubdichte ein vorteilhaftes Antriebskonzept dar.

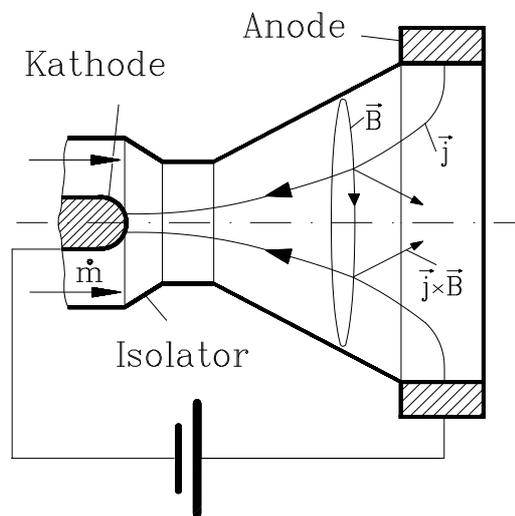


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines MPD-Eigenfeldtriebwerks

Die Funktionsweise eines MPD-Eigenfeldtriebwerks wird in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Durch die elektrische Entladung zwischen Anode und Kathode wird der mit dem Massendurchsatz \dot{m} strömende Treibstoff in einem Lichtbogen aufgeheizt und ionisiert, sodaß ein Plasma entsteht. Durch die elektrische Stromdichte \vec{j} wird ein azimutales Magnetfeld \vec{B} induziert, und das Plasma wird durch die Lorentzkraft $\vec{j} \times \vec{B}$ beschleunigt. Während in zylindrischen Triebwerken hauptsächlich hierdurch der Schub erzeugt wird, kann in düsenförmigen Triebwerken zusätzlich durch die Expansion des heißen Plasmas in einer Lavaldüse ein weiterer thermischer Schubanteil, der in derselben Größenordnung wie der magnetische liegt, gewonnen werden.

Seit den achtziger Jahren werden am IRS MPD-Antriebe sowohl experimentell [10, 11] als auch theoretisch [12, 13] und numerisch [14, 15, 16] untersucht. Betrachtet werden dabei ingenieurtechnische Aspekte des Triebwerksentwurfs [17, 18] und grundlegende plasmaphysikalische Prozesse [19, 20, 21], um höhere Wirkungsgrade zu erzielen und leistungsbegrenzende Instabilitäten zu vermeiden. Ursachen von durch Spannungssoszillationen und steigende Anodenverluste [22] gekennzeichneten Triebwerksinstabilitäten

sind die Ladungsträgerverarmung an der Anode [23], Mikroturbulenz [24, 25] und raumladungs-, drift- und gradientengetriebene Plasmainstabilitäten [20, 26, 27].

Gebaut wurden am IRS neben anderen die düsenförmigen MPD-Triebwerke DT2 und HAT, deren Aufbau in den Abbildungen 1.2 und 1.3 zu erkennen ist. Die unkomplizierte Bauweise beinhaltet als wichtigste Komponenten die Kathode aus thoriertem Wolfram auf der Symmetrieachse, die Anode als letztes Segment der Düse und die zwischen den Elektroden angebrachten, isolierten und wassergekühlten Neutralsegmente. Die Anode des DT2 besteht aus wassergekühltem Kupfer. Da ein MPD-Triebwerk im Einsatz weitestgehend strahlungsgekühlt sein wird, wurde die Anode des HAT als strahlungsgekühlte Wolframanode realisiert, um den Einfluß von Anodenmaterial und -temperatur auf die Leistungsdaten des Triebwerks und seine Einsatzgrenzen zu untersuchen.

In der Geometrie dem DT2 sehr ähnlich ist der Plasmabeschleuniger RD3 (Abb. 1.4). Er wird im Bereich der Plasmatechnologie am IRS vor allem zur Entwicklung und Qualifikation von Hitzeschutzmaterialien verwendet.

Um physikalische Grundlagenforschung an MPD-Strömungen im Detail betreiben und um eine technische Optimierung von MPD-Eigenfeldtriebwerken durchführen zu können, ist wie bei der Entwicklung von chemischen Raketentriebwerken [28] vor dem Hintergrund der hohen Kosten von Experimenten der Einsatz numerischer Verfahren zur Strömungssimulation notwendig.

Seit drei Jahrzehnten wird weltweit [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35] an der Entwicklung von Rechenverfahren gearbeitet, wobei mit dem Fortschritt der Rechnertechnologie und der numerischen Algorithmen Umfang und Komplexität der zu diskretisierenden Erhaltungsgleichungen stets anstiegen. Am IRS werden numerische Verfahren seit Beginn der achtziger Jahre kontinuierlich weiterentwickelt. Auf der Basis strukturierter Gitter wurde ein Programmsystem entwickelt, mit dem Strömungen sowohl in elektrischen Triebwerken als auch in Plasmawindkanälen berechnet werden können [14, 15, 36, 37]. Während die physikalische Modellbildung zur Berechnung von Strömungen in Plasmabeschleunigern und -generatoren vorangetrieben werden konnte, war die Flexibilität bezüglich der Variation der Düsengeometrie und der Lösungsadaption aufgrund der Verwendung strukturierter Gitter gering. Zudem wurde durch die Verwendung künstlicher numerischer Viskosität nur eine Lösungsgenauigkeit von 1. Ordnung im Raume erzielt. Daher wurde ein numerisches Verfahren 2. Ordnung auf der Basis unstrukturierter, adaptiver Gitter entwickelt [11, 16], um Argonplasmaströmungen in MPD-Eigenfeldtriebwerken zu berechnen. Dabei wurden gemischte explizite Finite Volumen (FV) Verfahren und Finite Elemente Methoden (FEM) mit Successive Overrelaxation (SOR) zur Lösung der instationär und stationär angesetzten MPD-Erhaltungsgleichungen unter der Voraussetzung von thermischem Nichtgleichgewicht, reaktivem Gleichgewicht und laminarer Strömung eingesetzt. Darauf aufbauend werden in der vorliegenden Arbeit die physikalische Modellbildung erweitert und das numerische Verfahren grundlegend erneuert.

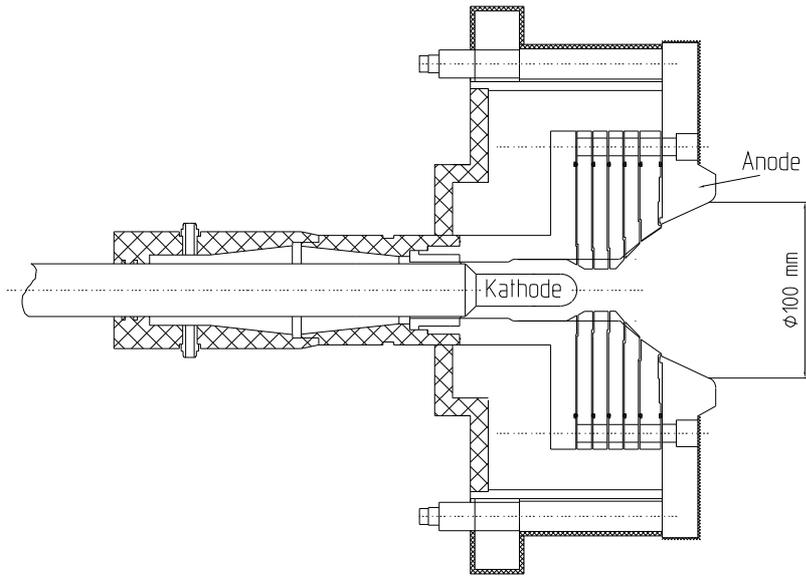


Abbildung 1.2: MPD–Triebwerk DT2

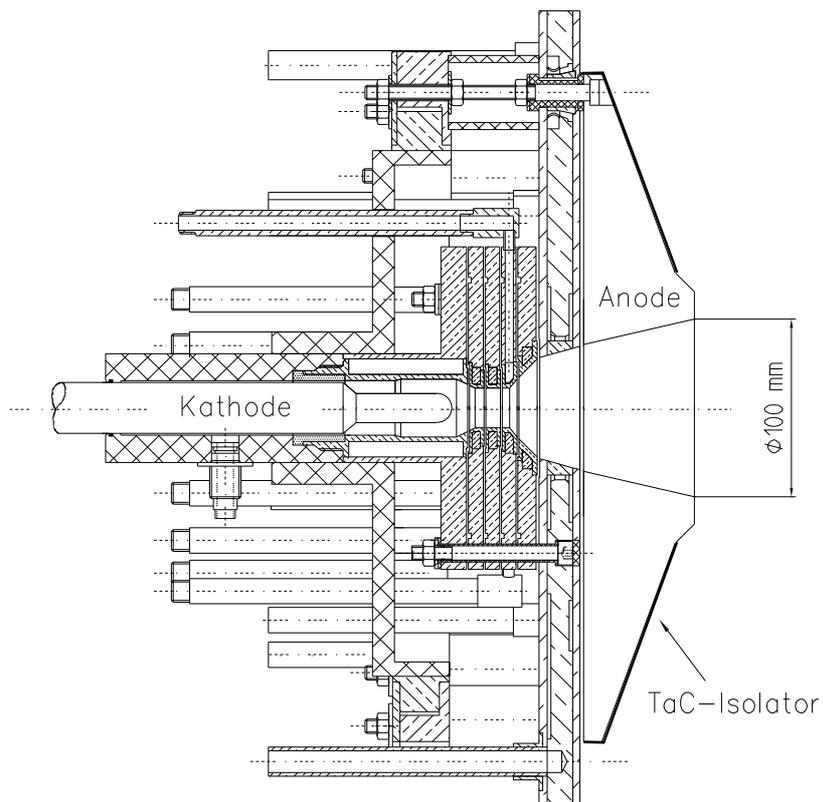


Abbildung 1.3: MPD–Triebwerk HAT

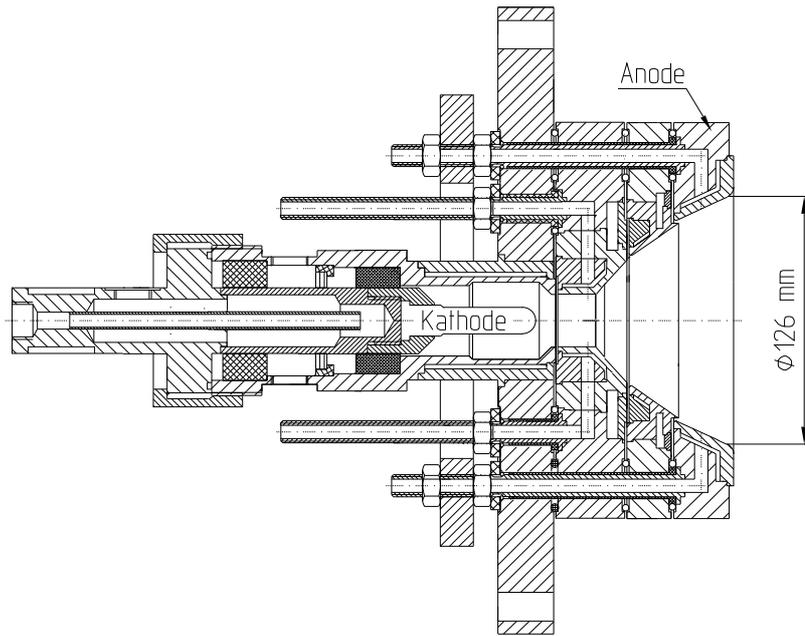


Abbildung 1.4: Plasmabeschleuniger RD3

Die instationären hyperbolisch–parabolischen Erhaltungsgleichungen mit Quelltermen, die die Argonplasmaströmung in MPD–Eigenfeldtriebwerken beschreiben, werden unter der Annahme thermischen und reaktiven Nichtgleichgewichts für die Teilchendichten, den Impuls und die Energie der Schwerteilchen, die Elektronenenergie, die Turbulenz und das eigeninduzierte Magnetfeld in Kapitel 2 aufgestellt.

Durch die konsequente Formulierung der Erhaltungsgleichungen mit Hilfe von konservativen Flüssen wird auf einfache Weise ein numerisches FV–Verfahren entwickelt, das in Kapitel 3 im Detail erläutert wird. Entscheidend für die Schnelligkeit und Robustheit des Verfahrens sind ein neues Flux Vector Splitting–Verfahren als approximativer Riemann–Löser, die räumliche Weighted Essentially Non–Oscillatory (WENO–) Rekonstruktion 2. Ordnung, ein lokales, randomisiertes Zeitschrittverfahren und ein zuverlässiger Gitterverfeinerungsindikator.

Bei der Implementierung des Verfahrens wurde die objektorientierte Programmiersprache C++ [38] verwendet, die die Handhabung von Daten auf unstrukturierten Gittern stark erleichtert. Waren bislang [15, 16] sehr teure Workstations oder Großrechner zur Lösung der MPD–Erhaltungsgleichungen notwendig, so können jetzt die Berechnungen auf deutlich preiswerteren, leistungsfähigen PC’s mit dem Betriebssystem Linux durchgeführt werden, wobei eine graphische X11–Schnittstelle [16, 39, 40] der Kontrolle der numerischen Prozeduren und der Darstellung von Isolinienplots während eines Rechenlaufes dient.

Numerische Ergebnisse für den Plasmabeschleuniger RD3 und die Triebwerke DT2 und HAT sind in Kapitel 4 im Vergleich mit experimentellen Daten dargestellt.

Kapitel 2

Erhaltungsgleichungen

2.1 Grundannahmen für die Modellierung

Aufgrund des axialsymmetrischen Aufbaus der MPD-Eigenfeldbeschleuniger DT2, HAT und RD3 (Abb. 1.2–1.4) wird stets eine rotationssymmetrische Strömung vorausgesetzt, sodaß die Erhaltungsgleichungen in zweidimensionaler Form unter Verwendung von Zylinderkoordinaten angeschrieben werden können. Als Treibstoff wird das im IRS für MPD-Triebwerke verwendete Edelgas Argon betrachtet.

Unter der Voraussetzung von Kontinuumsströmung und Quasineutralität des Plasmas [41, 42] lassen sich Zweifluid-Erhaltungsgleichungen im thermischen und reaktiven Nichtgleichgewicht formulieren, wobei die Elektrodenfallgebiete nicht explizit betrachtet werden. Unterschieden wird zwischen Schwerteilchenspezies (neutrales, einfach und mehrfach ionisiertes Argon) und Elektronen. Das Schwerteilchen- und das Elektronengas werden als ideale Gase betrachtet. Thermisches Nichtgleichgewicht zwischen Elektronen und Schwerteilchen wird angenommen, weil zum einen in Bereichen expandierender Überschallströmungen die Dichten und damit auch die Stoßfrequenzen und der Energieaustausch der Teilchen untereinander relativ klein werden können, und weil sich zum anderen die Schwerteilchen an Wänden abkühlen, während sich die Elektronen hier adiabatisch verhalten. Reaktives Nichtgleichgewicht wird wegen der hohen Strömungsgeschwindigkeiten vorausgesetzt.

Aufgrund ihrer geringen Masse und der damit einhergehenden hohen Mobilität kann davon ausgegangen werden, daß im wesentlichen die Elektronen den elektrischen Strom im Plasma tragen. Daher wird das Elektronengas aufgeheizt, und ein Teil der elektrisch eingekoppelten Energie wird durch Stöße an die Schwerteilchen abgegeben.

Um die Entstehung von Turbulenz im Triebwerksinneren und im Freistrahlfeld erfassen zu können, wird ein Eingleichungsmodell angesetzt.

Die Lichtbogenentladung wird durch die Maxwell-Gleichungen der klassischen Elektrodynamik und das Ohm'sche Gesetz für Plasmen beschrieben.

2.2 Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie der Schwerteilchen

Es wird im folgenden stets eine möglichst konservative Formulierung mit Hilfe von Flüssen angestrebt, da dies erfahrungsgemäß die numerische Stabilität eines Finite-Volumen-Verfahrens erhöht und die Erhaltung physikalischer Größen auch bei der numerischen Berechnung auf elegante Weise gewährleistet.

Es sei erwähnt, daß die betrachteten Gleichungen im mathematisch strengen Sinne Bilanzgleichungen sind. Es wird jedoch hier stets der Begriff der Erhaltungsgleichungen verwendet, um zum einen auf die physikalischen Erhaltungsprinzipien zu verweisen, und um zum anderen die Erhaltungseigenschaft der Flüsse im Rahmen der Finite-Volumen-Diskretisierung zu betonen.

Bei der Formulierung der Erhaltungsgleichungen gelte für den Divergenzoperator bei Anwendung auf einen Vektor \vec{a} in Zylinderkoordinaten [43] die Schreibweise:

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} a_z \\ a_r \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_z}{\partial z} . \quad (2.1)$$

Massenerhaltung

Die Erhaltungsgleichungen für die Massen der Schwerteilchenspezies ($i = 0$: neutrales Argonatom, $i > 0$: i -fach geladenes Argonion) lassen sich als Erhaltungsgleichungen für die Teilchendichten n_i schreiben, da sich aus den Massenerhaltungsgleichungen die jeweilige Masse m_h herauskürzen läßt:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(n_i \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{j}_{D,i} + \omega_i \quad ; i = 0 \dots 6 . \quad (2.2)$$

Die Terme der rechten Seite beschreiben die zeitliche Änderung der Teilchendichte n_i durch Konvektion mit der mittleren Schwerpunktschwindigkeit \vec{v} des Plasmas, durch Massendiffusion ($\vec{j}_{D,i}$) und durch Reaktionen (ω_i).

Mit der Schwerteilchengesamtdichte

$$n_h = \sum_{i=0}^6 n_i , \quad (2.3)$$

dem Massenanteil [44]

$$\xi_i = \frac{n_i}{n_h} , \quad (2.4)$$

dem Molenbruch [44]

$$\Psi_i = \frac{n_i}{n_h + n_e} , \quad (2.5)$$

dem Ansatz für den Diffusionsstrom [45, 46, 47]

$$\vec{j}_{D,i} = -n_h D_{im} \nabla \Psi_i \quad (2.6)$$

und der Forderung nach Massenkonservativität ergibt sich der Diffusionsstrom zu [48]

$$\vec{j}_{D,i} = \vec{j}'_{D,i} - \xi_i \sum_{k=0}^6 \vec{j}'_{D,k} . \quad (2.7)$$

Aufgrund des Terms $\xi_i \sum_{k=0}^6 \vec{j}'_{D,k}$ in Gleichung (2.7) wird

$$\sum_{i=0}^6 \vec{j}_{D,i} = 0 , \quad (2.8)$$

sodaß die Massenerhaltung des Ansatzes für die Diffusion gewährleistet ist.

Der Quellterm der Reaktionen ω_i beschreibt die Produktion von Ionen und Elektronen durch Elektronenstoßionisation [49, 50] und die Neutralisation von Ionen durch Dreierstoßrekombination [15]:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -n_0 n_e k_{f,1} + n_1 n_e^2 k_{b,1} , \\ \omega_i &= -n_i n_e k_{f,i+1} + n_{i+1} n_e^2 k_{b,i+1} - n_i n_e^2 k_{b,i} + n_{i-1} n_e k_{f,i} \quad ; i = 1 \dots 5 , \\ \omega_6 &= -n_6 n_e^2 k_{b,6} + n_5 n_e k_{f,6} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

$k_{f,i}$ und $k_{b,i}$ sind die Reaktionsraten der Elektronenstoßionisation und der Dreierstoßrekombination.

Summiert man Gleichung (2.2) über alle Spezies auf, so erhält man die Gesamtmassenerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \vec{v}) \quad (2.10)$$

mit

$$\rho = m_h \sum_{i=0}^6 n_i , \quad (2.11)$$

da die Elektronenmasse vernachlässigbar klein ist.

Impulserhaltung

Die Impulserhaltungsgleichung in axialer Richtung lautet

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -div \vec{f}_{z,invisc} - div \vec{f}_{z,visc} , \quad (2.12)$$

wobei der reibungsfreie Fluß

$$\vec{f}_{z,invisc} = \begin{bmatrix} p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v_z^2 \\ \rho v_z v_r \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

die Beschleunigung durch Schwerteilchendruck, Elektronendruck, Magnetfelddruck und dynamischen Druck beinhaltet. Der reibungsbehaftete Fluß

$$\vec{f}_{z,visc} = \begin{bmatrix} -\tau_{zz} \\ -\tau_{zr} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

beschreibt die Beschleunigung durch viskose Kräfte.

Die Impulserhaltungsgleichung in radialer Richtung lautet

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} = -\text{div} \vec{f}_{r,invisc} - \text{div} \vec{f}_{r,visc} + q_r, \quad (2.15)$$

wobei der reibungsfreie Fluß durch

$$\vec{f}_{r,invisc} = \begin{bmatrix} \rho v_z v_r \\ p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v_r^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

und der reibungsbehaftete Fluß durch

$$\vec{f}_{r,visc} = \begin{bmatrix} -\tau_{zr} \\ -\tau_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

gegeben sind. Der Quellterm

$$q_r = \frac{p_h + p_e - \tau_{\varphi\varphi} - \frac{B^2}{2\mu_0}}{r} \quad (2.18)$$

entsteht durch die Verwendung der Zylinderkoordinaten [51, 52].

Die viskosen Spannungen sind [53]

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \frac{2}{3} (\mu_h + \mu_T) \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right), \\ \tau_{zr} &= (\mu_h + \mu_T) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \tau_{rr} &= \frac{2}{3} (\mu_h + \mu_T) \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad \text{und} \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{2}{3} (\mu_h + \mu_T) \left(2 \frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Energieerhaltung

Die Energieerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial e_h}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{f}_{h,invisc} - \operatorname{div} \vec{f}_{h,visc} + q_h \quad (2.20)$$

beinhaltet den reibungsfreien Fluß

$$\vec{f}_{h,invisc} = \left(e_h + p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \begin{bmatrix} v_z \\ v_r \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

den reibungsbehafteten Fluß

$$\vec{f}_{h,visc} = \begin{bmatrix} -\tau_{zz}v_z - \tau_{zr}v_r - (\lambda_h + \lambda_T)\frac{\partial T_h}{\partial z} \\ -\tau_{zr}v_z - \tau_{rr}v_r - (\lambda_h + \lambda_T)\frac{\partial T_h}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

und den Quellterm

$$q_h = \left(p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \operatorname{div} \vec{v} - \frac{B^2}{\mu_0 r} v_r + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_e - T_h). \quad (2.23)$$

Die Schwerteilchenenergie e_h setzt sich unter der Annahme des Idealgasgesetzes

$$p_h = n_h k T_h \quad (2.24)$$

zusammen aus der translatorischen Energie und der kinetischen Energie:

$$e_h = \frac{3}{2} n_h k T_h + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2. \quad (2.25)$$

Neben den viskosen Flüssen umfaßt der Fluß $\vec{f}_{h,visc}$ auch die Schwerteilchenwärmeleitung. Der Enthalpiestrom durch Diffusion

$$\sum_{i=0}^6 \left(\frac{5}{2} k T_h + \frac{1}{2} m_h |\vec{v}|^2 \right) \vec{j}_{D,i}$$

ist wegen Gleichung (2.8) gleich Null und steht daher nicht in Gleichung (2.20).

Der erste Ausdruck im Quellterm q_h kommt dadurch zustande, daß sowohl der Elektronendruck p_e als auch der Magnetfelddruck $B^2/(2\mu_0)$ im reibungsfreien Fluß $\vec{f}_{h,invisc}$ stehen. Der zweite Ausdruck entsteht durch die Verwendung der Zylinderkoordinaten, und der dritte beschreibt den Energietransfer durch elastische Stöße zwischen Elektronen und Schwerteilchen.

Allen reibungsfreien Flüssen $\vec{f}_{z,invisc}$, $\vec{f}_{r,invisc}$ und $\vec{f}_{h,invisc}$ ist gemeinsam, daß sie den Schwerteilchendruck p_h , den Elektronendruck p_e und den Magnetfelddruck $B^2/(2\mu_0)$ beinhalten. Während die Formulierungen der Schwerteilchenerhaltungsgleichungen in [14, 15, 16] weitere Quellterme durch Viskosität und Lorentz-Kräfte enthalten, wird in den obigen Gleichungen (2.12), (2.15) und (2.20) ein Maximum an Konservativität erreicht, das durch die Verwendung von Flüssen auch in der Finite-Volumen-Diskretisierung bestehen bleibt.

2.3 Erhaltungsgleichung für die Turbulenz

Turbulenz ist grundsätzlich ein Strömungsphänomen von sehr großer Komplexität. Um die wesentlichen Eigenschaften turbulenter Strömungen in technischen Anwendungen mit möglichst geringem Aufwand berechnen zu können, sind zahlreiche Turbulenzmodelle entwickelt worden [54]. Man unterscheidet algebraische Modelle, Ein- und Zweigleichungsmodelle sowie Schließungsmodelle zweiter Ordnung.

Wie in [15] wird hier das Eingleichungsmodell nach Goldberg und Ramakrishnan [55] gewählt. Als Weiterentwicklung des Modells von Baldwin und Barth [56] benötigt es keine Berechnung von Wandabständen und ist damit wohlgeeignet für die Benutzung auf unstrukturierten Gittern. Bei der Berechnung turbulenter Wandgrenzschichten und freier Scherschichten hat es sich auf dem Gebiet der Flugzeugaerodynamik durch genaue Ergebnisse bewährt. Der Rechenaufwand ist gering, und das Konvergenzverhalten ist gutmütig. Die Erhaltungsgleichung für die turbulente Erhaltungsgröße ρR lautet [55]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho R)}{\partial t} = & - \operatorname{div}(\rho R \vec{v}) + \operatorname{div} \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla R \right] + \rho(C_{\varepsilon 2} f_2 - C_{\varepsilon 1}) \sqrt{R} \mathcal{P} \\ & - \nabla \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \cdot \nabla R - \frac{\rho}{\sigma_\varepsilon} \nabla \nu_T \cdot \nabla R . \end{aligned} \quad (2.26)$$

R ist definiert als der Quotient des Quadrats der turbulenten kinetischen Energie k und der Dissipation ε :

$$R = \frac{k^2}{\varepsilon} . \quad (2.27)$$

Durch die kinematische Viskosität ν_h ist R mit der sogenannten turbulenten Reynoldszahl R_T verknüpft durch:

$$R = \nu_h R_T . \quad (2.28)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.26) stellt den konvektiven Transport der Turbulenz dar, der zweite hat dissipativen Charakter, und der dritte beschreibt die Produktion von Turbulenz aufgrund von Geschwindigkeitsgradienten. Die letzten beiden Terme entstehen durch Vernachlässigung dissipativer Terme [56] bei der Herleitung der Erhaltungsgleichung aus dem k - ε -Turbulenzmodell [57].

Der Produktionsterm der Turbulenz lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \nu_T \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \right\} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Schließungskoeffizienten sind

$$C_{\varepsilon 1} = 1.2, \quad C_{\varepsilon 2} = 2.0, \quad \frac{1}{\sigma_\varepsilon} = \frac{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \sqrt{C_\mu}}{\kappa^2}, \quad C_\mu = 0.09 \quad \text{und} \quad \kappa = 0.41 . \quad (2.30)$$

Die Nahwand-Funktion f_2 ist gegeben durch

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-R_T^2) . \quad (2.31)$$

Mit

$$A_\mu = 4.5 \cdot 10^{-6} \quad , \quad A_\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4}}{2 \kappa} \quad (2.32)$$

und der weiteren Nahwand-Funktion

$$f_\mu = \frac{1 - \exp(-A_\mu R_T^2)}{1 - \exp(-A_\varepsilon R_T^2)} \quad (2.33)$$

berechnen sich die turbulente kinematische Viskosität ν_T zu

$$\nu_T = C_\mu f_\mu \nu_h R_T \quad (2.34)$$

und die turbulente Viskosität μ_T zu

$$\mu_T = \rho \nu_T \quad (2.35)$$

Viskosität und Wärmeleitung sind durch die Prandtl-Zahl [58]

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda_h} \quad (2.36)$$

miteinander verknüpft, wobei für die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck unter Annahme eines idealen (Schwerteilchen-) Gases

$$c_p = \frac{5}{2} \frac{k}{m_h} \quad (2.37)$$

gilt.

Die turbulente Prandtl-Zahl wird analog definiert als [59]

$$Pr_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T} \quad , \quad (2.38)$$

sodaß sich unter der Annahme

$$Pr_T = Pr = \frac{2}{3} \quad (2.39)$$

die turbulente Wärmeleitfähigkeit zu

$$\lambda_T = \frac{15}{4} \frac{k \mu_T}{m_h} \quad (2.40)$$

ergibt.

2.4 Erhaltungsgleichung für die Elektronenenergie

Bei Betrachtung des mit der Geschwindigkeit \vec{v}_e strömenden Elektronenfluids lautet die Erhaltungsgleichung für die Elektronenenergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_e}{\partial t} = & - \operatorname{div}(e_e \vec{v}_e) - p_e \operatorname{div} \vec{v}_e \\ & - \operatorname{div}\left(\frac{3}{2} k T_e \vec{j}_{D,e}\right) + \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) \\ & + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_h - T_e) + \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} - \sum_{i=0}^5 \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1} \quad . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dabei sind der Elektronendruck p_e und die Elektronenenergie pro Volumeneinheit e_e definiert durch

$$p_e = n_e k T_e \quad (2.42)$$

und

$$e_e = \frac{3}{2} n_e k T_e . \quad (2.43)$$

Aufgrund der Annahme der Quasineutralität des Plasmas ist bei bekannten Schwerteilchendichten n_i und mit den Ladungszahlen Z_i die Elektronendichte n_e gegeben durch:

$$n_e = \sum_{i=1}^6 Z_i n_i . \quad (2.44)$$

Damit wird der Ionisationsgrad hier definiert als:

$$\alpha = \frac{n_e}{n_h} . \quad (2.45)$$

Die Terme der rechten Seite von Gleichung (2.41) stellen den konvektiven Transport mit der Elektronengeschwindigkeit \vec{v}_e , die Verformungsarbeit des Elektronendruckes am Elektronenfluidenelement, den Transport durch den Diffusionsstrom $\vec{j}_{D,e}$, die Elektronenwärmeleitung, den Energietransfer durch elastische Stöße zwischen Elektronen und Schwerteilchen, die Ohm'sche Heizung durch den Lichtbogen und die Energiebilanz durch Ionisationsreaktionen dar.

Unter Vernachlässigung der Trägheit der Elektronen ist die elektrische Stromdichte

$$\vec{j} = en_e(\vec{v} - \vec{v}_e) . \quad (2.46)$$

Damit lassen sich die ersten beiden Terme der rechten Seite von Gleichung (2.41) umformen:

$$-div(e_e \vec{v}_e) - p_e div \vec{v}_e = -div(e_e \vec{v}) - p_e div \vec{v} + \frac{5k}{2e} \vec{j} \cdot \nabla T_e - \frac{1}{en_e} \vec{j} \cdot \nabla p_e . \quad (2.47)$$

$div(e_e \vec{v})$ läßt sich als der konvektive Transport von Elektronenenergie mit der mittleren Schwerpunktschwindigkeit \vec{v} des Plasmas auffassen.

Der Diffusionsstrom $\vec{j}_{D,e}$ ergibt sich aus der Forderung, daß die Quasineutralität des Plasmas auch bei Diffusion der Schwerteilchen und Elektronen erhalten bleiben muß [47]:

$$\vec{j}_{D,e} = \sum_{i=1}^6 Z_i \vec{j}_{D,i} . \quad (2.48)$$

Mit den Gleichungen (2.47) und (2.48) ergibt sich Gleichung (2.41) zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_e}{\partial t} = & -div(e_e \vec{v}) - p_e div \vec{v} + \frac{5k}{2e} \vec{j} \cdot \nabla T_e - \frac{1}{en_e} \vec{j} \cdot \nabla p_e \\ & - div \left(\frac{3}{2} k T_e \sum_{i=1}^6 Z_i \vec{j}_{D,i} \right) + div(\lambda_e \nabla T_e) \\ & + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_h - T_e) + \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} - \sum_{i=0}^5 \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.5 Erhaltungsgleichung für das Magnetfeld

Zur Herleitung der Erhaltungsgleichung für das Magnetfeld werden die Maxwell-Gleichungen [60] für die elektrische Entladung benötigt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.50)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.51)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.52)$$

und

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}. \quad (2.53)$$

Da hier der stationäre Zustand und keine hochfrequenten Fluktuationen betrachtet werden, wird die Galilei-invariante Form mit Vernachlässigung des Verschiebungsstromes in Gleichung (2.50) verwendet. Gleichung (2.52) ist wegen Axialsymmetrie automatisch erfüllt. Mit Gleichung (2.53) kann im allgemeinen die Ladungsdichte ρ_{el} berechnet werden [61]. Wegen der Voraussetzung Quasineutralität der betrachteten Plasmen ist ρ_{el} gleich Null.

Das Ohm'sche Gesetz für Plasmen ist durch

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B} + \beta \vec{j} \times \vec{B} - \beta \nabla p_e \quad (2.54)$$

gegeben [41]. Dabei ist

$$\beta = \frac{1}{en_e} \quad (2.55)$$

der sogenannte Hall-Parameter. Mit den Gleichungen (2.50), (2.51) und (2.54) läßt sich die Erhaltungsgleichung für das Magnetfeld in Zylinderkoordinaten

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

mit der azimuthalen Magnetfeldkomponente B aufstellen:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{div}(B \vec{v}) + \frac{B v_r}{r} - \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{\mu_0 \sigma} + \frac{\beta}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} - \beta \nabla p_e \right)_{\varphi}. \quad (2.57)$$

Der erste Term der rechten Seite von Gleichung (2.57) stellt den konvektiven Magnetfeldtransport dar, der zweite ist auf die Verwendung der Zylinderkoordinaten zurückzuführen. Der dritte Term beschreibt die zeitliche Änderung des Magnetfelds durch den im Plasma der elektrischen Leitfähigkeit σ fließenden elektrischen Strom, durch den Hall-Strom und durch den Diffusionsstrom aufgrund des Elektronendrucks [62].

In Gleichung (2.57) wird das Magnetfeld B schließlich durch die Stromfunktion

$$\Psi = r B \quad (2.58)$$

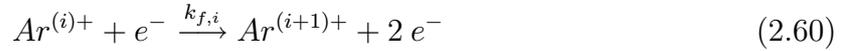
substituiert, sodaß man als zu lösende Erhaltungsgleichung für das Magnetfeld

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(\frac{\Psi}{r} \vec{v} \right) + \frac{\Psi v_r}{r^2} - \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\mu_0} \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} - \beta \nabla p_e \right) \quad (2.59)$$

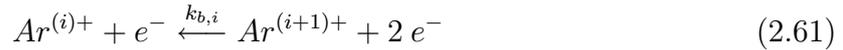
erhält. Die Konturlinien der Stromfunktion stellen die Bahnlinien der Elektronen dar. Zwei Konturlinien repräsentieren daher eine Stromröhre, in der ein konstanter elektrischer Strom fließt.

2.6 Ionisationsreaktionsraten

Die Berücksichtigung reaktiven Nichtgleichgewichts aufgrund der hohen Strömungsgeschwindigkeiten in MPD-Eigenfeldbeschleunigern führt zu den Reaktionsquelltermen ω_i in Gleichung (2.9). Sie beinhalten die Reaktionsraten $k_{f,i}$ und $k_{b,i}$, die die Elektronenstoßionisation



und die Dreierstoßrekombination



beschreiben. Befinden sich die Reaktionen (2.60) und (2.61) im Gleichgewicht, wird die Zusammensetzung des Plasmas durch die Saha-Gleichung beschrieben [63]:

$$K_{i+1} = \frac{n_{i+1} n_e}{n_i} = 2 \frac{u_{i+1}}{u_i} \frac{(2\pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} \exp \left(-\frac{\chi_{i \rightarrow i+1}}{k T_e} \right) \quad ; i = 0 \dots 5 \quad (2.62)$$

Es geht nur die Elektronentemperatur ein, weil ausschließlich Elektronenstöße die Reaktionen verursachen.

Die Zustandssummen u_i , die die statistischen Gewichte und Energien der Quantenzustände eines i -fach ionisierten Teilchens [64, 65] beinhalten, werden hier mit Hilfe der Daten aus [66] als Polynome höherer Ordnung in Abhängigkeit von der Elektronentemperatur T_e berechnet:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1,07865 + 4,75631 \cdot 10^{-7} T_e - 1,45631 \cdot 10^{-8} T_e^2 + 3,40397 \cdot 10^{-12} T_e^3 \\ &\quad - 2,97548 \cdot 10^{-16} T_e^4 + 1,06285 \cdot 10^{-20} T_e^5 - 1,11482 \cdot 10^{-25} T_e^6, \\ u_1 &= 2,88341 + 9,25385 \cdot 10^{-4} T_e - 1,28224 \cdot 10^{-7} T_e^2 + 9,16319 \cdot 10^{-12} T_e^3 \\ &\quad - 3,41285 \cdot 10^{-16} T_e^4 + 6,02164 \cdot 10^{-21} T_e^5 - 3,49781 \cdot 10^{-26} T_e^6, \\ u_2 &= 6,70819 + 3,00894 \cdot 10^{-4} T_e - 1,02001 \cdot 10^{-8} T_e^2 + 4,35988 \cdot 10^{-13} T_e^3 \\ &\quad - 1,28273 \cdot 10^{-17} T_e^4 + 1,52194 \cdot 10^{-22} T_e^5, \\ u_3 &= 4,03178 - 1,12061 \cdot 10^{-5} T_e - 8,39091 \cdot 10^{-9} T_e^2 + 2,81023 \cdot 10^{-12} T_e^3 \\ &\quad - 1,88269 \cdot 10^{-16} T_e^4 + 6,13787 \cdot 10^{-21} T_e^5 - 1,09148 \cdot 10^{-25} T_e^6 \\ &\quad + 1,01718 \cdot 10^{-30} T_e^7 - 3,89471 \cdot 10^{-36} T_e^8, \\ u_4 &= 0,57666 + 2,07505 \cdot 10^{-3} T_e - 2,75525 \cdot 10^{-7} T_e^2 + 2,21005 \cdot 10^{-11} T_e^3 \\ &\quad - 1,04813 \cdot 10^{-15} T_e^4 + 2,97457 \cdot 10^{-20} T_e^5 - 4,95712 \cdot 10^{-25} T_e^6 \\ &\quad + 4,46982 \cdot 10^{-30} T_e^7 - 1,68184 \cdot 10^{-35} T_e^8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_5 &= 1,30123 + 9,68066 \cdot 10^{-4} T_e - 1,13640 \cdot 10^{-7} T_e^2 + 7,92359 \cdot 10^{-12} T_e^3 \\
&\quad - 3,38499 \cdot 10^{-16} T_e^4 + 8,92458 \cdot 10^{-21} T_e^5 - 1,40979 \cdot 10^{-25} T_e^6 \\
&\quad + 1,22077 \cdot 10^{-30} T_e^7 - 4,44992 \cdot 10^{-36} T_e^8, \\
u_6 &= 1,00153 - 1,30713 \cdot 10^{-6} T_e + 2,99507 \cdot 10^{-10} T_e^2 - 2,69232 \cdot 10^{-14} T_e^3 \\
&\quad + 1,01870 \cdot 10^{-18} T_e^4 - 1,41048 \cdot 10^{-23} T_e^5 + 6,90912 \cdot 10^{-29} T_e^6.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Unter der Annahme, daß die Elektronentemperatur durch eine Maxwell-Verteilung beschrieben wird, ergibt sich nach [49, 50] für die Reaktionsrate $k_{f,i}$ der Elektronenstoßionisation

$$k_{f,i} = 6,7 \cdot 10^{-13} \left(\frac{e}{kT_e} \right)^{3/2} \sum_{i=1}^3 a_i q_i \left[\frac{1}{A_i} \int_{A_i}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \frac{b_i e^{c_i}}{A_i + c_i} \int_{A_i + c_i}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right], \tag{2.64}$$

wobei

$$A_i = \frac{P_i}{kT_e} \tag{2.65}$$

ist. P_i stellt die Bindungsenergien der Elektronen der i -ten Unterschalen dar.

Für die Anzahl q_i der Elektronen der i -ten Unterschale und die experimentell, theoretisch oder durch Abschätzung ermittelten Konstanten a_i , b_i und c_i gelten folgende Zahlenwerte:

Produkt der Ionisation	Elektronenkonfiguration	q_1	q_2	q_3	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
Ar^{1+}	$3s^23p^6$	6	2	6	4,0	4,0	3,0	0,62	0,4	0,9	0,4	0,6	0,2
Ar^{2+}	$3s^23p^5$	5	2	6	4,2	4,4	3,7	0,3	0,2	0,8	0,6	0,6	0,4
Ar^{3+}	$3s^23p^4$	4	2	6	4,5	4,5	4,2	0,2	0	0,6	0,6	0	0,5
Ar^{4+}	$3s^23p^3$	3	2	6	4,5	4,5	4,5	0	0	0,3	0	0	0,6
Ar^{5+}	$3s^23p^2$	2	2	6	4,5	4,5	4,5	0	0	0,3	0	0	0,6
Ar^{6+}	$3s^23p^1$	1	2	6	4,5	4,5	4,5	0	0	0,3	0	0	0,6

Die Werte von a_i , b_i und c_i für $i = 4$ wurden dabei für $i = 5$ und $i = 6$ übernommen [15].

Für die Bindungsenergien P_i der Elektronen der i -ten Unterschalen werden Werte nach [67] verwendet:

Produkt der Ionisation	P_1 [eV]	P_2 [eV]	P_3 [eV]
Ar^{1+}	15,76	29,24	248,6
Ar^{2+}	27,60	41,70	267,0
Ar^{3+}	40,90	55,50	287,0
Ar^{4+}	59,70	70,40	308,0
Ar^{5+}	75,20	87,60	330,0
Ar^{6+}	91,20	105,2	351,0

Die Bindungsenergie P_1 für ein Ionisationsprodukt $Ar^{(i+1)+}$ entspricht der Ionisierungsenergie $\chi_{i \rightarrow i+1}$ in den Gleichungen (2.49) und (2.62).

Das in Gleichung (2.64) enthaltene Exponentialintegral läßt sich ohne aufwendige numerische Quadratur mit Hilfe der trigonometrischen Interpolationsformel [68, 69]

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{e^{-\xi}}{\xi} \left(0,9999965 - 0,998971 \frac{1}{\xi} + 1,9487646 \frac{1}{\xi^2} - 4,9482092 \frac{1}{\xi^3} \right. \\ \left. + 11,7850792 \frac{1}{\xi^4} - 20,452384 \frac{1}{\xi^5} + 21,1491469 \frac{1}{\xi^6} \right. \\ \left. - 9,524041 \frac{1}{\xi^7} \pm 0,35 \cdot 10^{-5} \right) \quad ; \xi > 2 \quad (2.66)$$

approximieren. Nimmt man eine maximale Temperatur von $T_e = 50000 \text{ K}$ an, so hat ξ für $P_1 = 15,76 \text{ eV}$ einen Minimalwert von 3,66, sodaß die Bedingung $\xi > 2$ stets gewährleistet ist.

Die Reaktionsraten $k_{f,i}$ sind in Abbildung 2.1 in Abhängigkeit von der Elektronentemperatur T_e dargestellt. Die Genauigkeit der Gleichung (2.64) zugrundeliegenden Wechselwirkungsquerschnitte wird in [49] mit 15 Prozent für die Ionisierung neutralen Argons aus dem Grundzustand heraus angegeben. Da die Mehrfachionisation durch ein stoßendes Elektron, die Absenkung des Ionisationspotentials durch Coulomb-Wechselwirkung [66] und die Ionisation aus angeregten Zuständen heraus bei der Herleitung von Gleichung (2.64) vernachlässigt wurden, sind die resultierenden Reaktionsraten $k_{f,i}$ wahrscheinlich zu niedrig [50].

Die in Abbildung 2.2 dargestellten Reaktionsraten $k_{b,i}$ der Dreierstoßrekombination werden mit dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts [70] aus der Reaktionsrate $k_{f,i}$ und der Gleichgewichtskonstanten K_i bestimmt:

$$k_{b,i} = \frac{k_{f,i}}{K_i}. \quad (2.67)$$

Befinden sich Elektronenstoßionisation und Dreierstoßrekombination im Gleichgewicht, das heißt, es verschwinden pro Zeiteinheit durch Reaktionen genauso viele Teilchen einer Spezies wie produziert werden, so wird die Zusammensetzung durch die Gleichgewichtskonstante K_i in Gleichung (2.62) bestimmt. Für den Fall des reaktiven Gleichgewichtes und der Isothermie von Elektronen und Schwerteilchen ist die Argonplasmazusammensetzung exemplarisch in Abbildung 2.3 für einen Druck von 10000 Pa , der größenordnungsmäßig in düsenförmigen Eigenfeldbeschleunigern vor der Kathodenspitze auftritt, wiedergegeben.

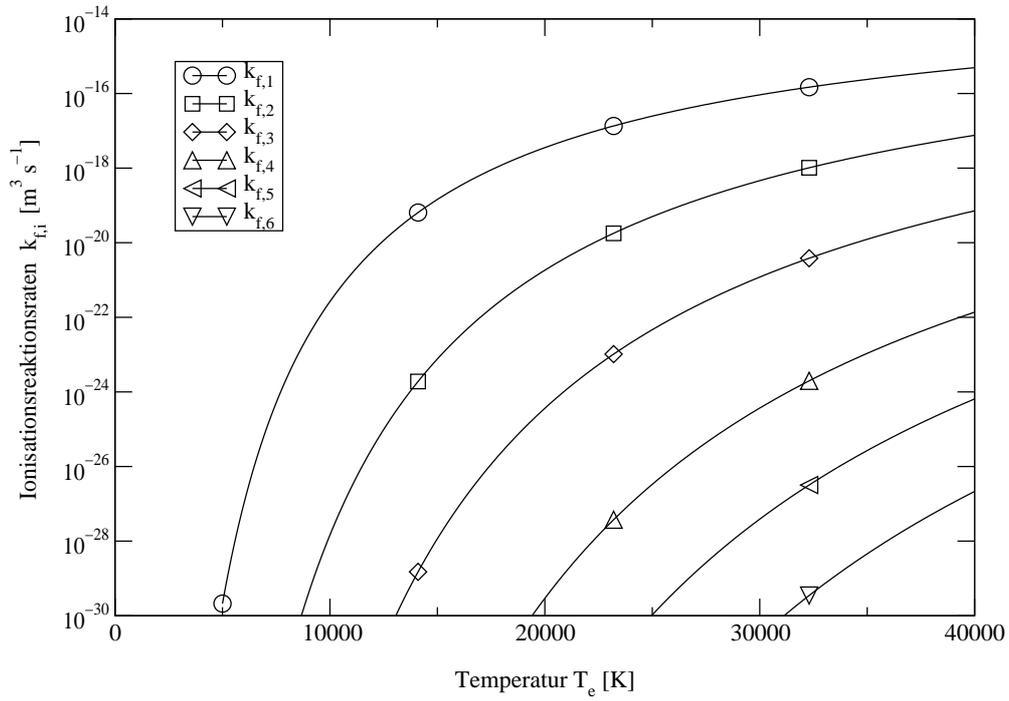


Abbildung 2.1: Reaktionsraten $k_{f,i}$ der Elektronenstoßionisation

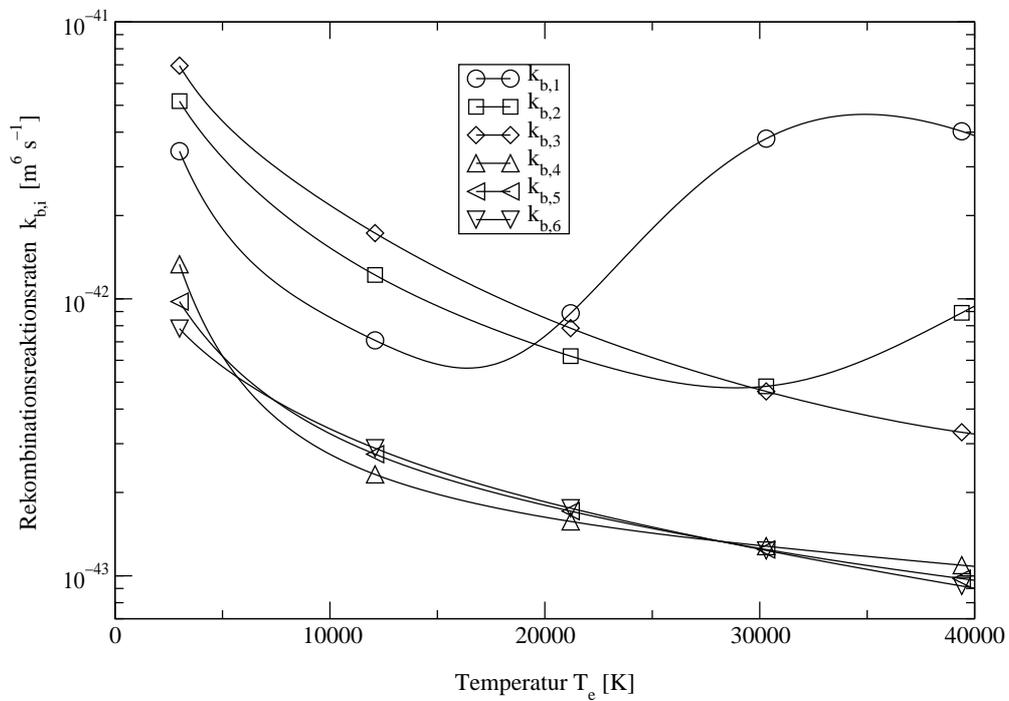


Abbildung 2.2: Reaktionsraten $k_{b,i}$ der Dreierstoßrekombination

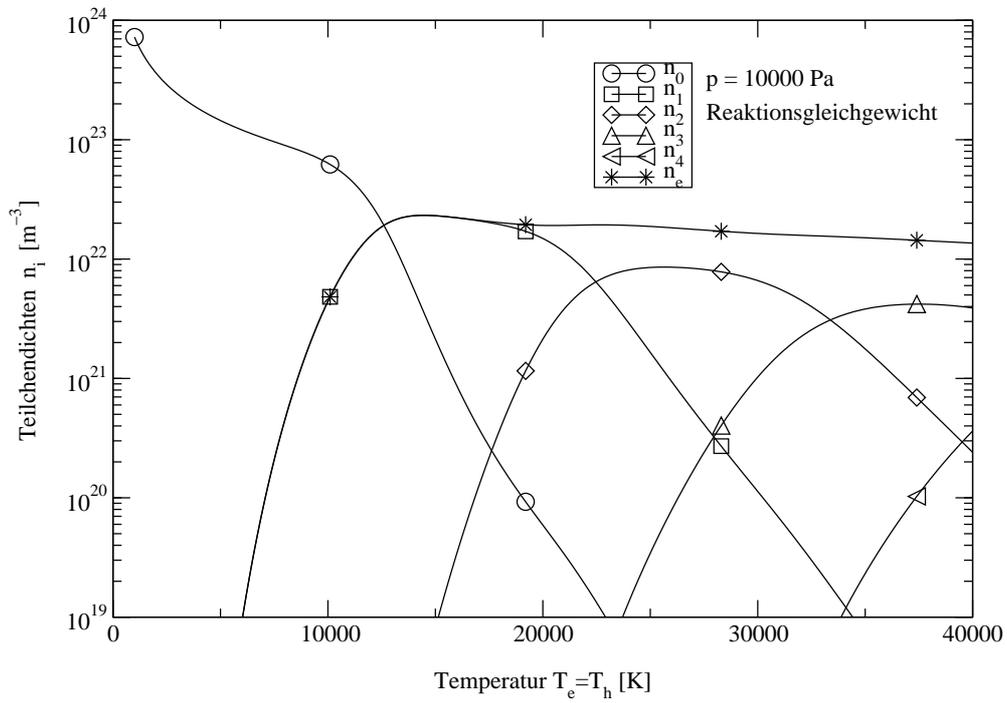


Abbildung 2.3: Schwerteilchendichten und Elektronendichte im thermischen und Ionisationsreaktions-Gleichgewicht ($p = 10000 \text{ Pa}$)

2.7 Transportkoeffizienten

In den Erhaltungsgleichungen sind die Wärmeleitfähigkeit der Elektronen λ_e , die elektrische Leitfähigkeit σ , die Diffusionskoeffizienten D_{im} , die Wärmeleitfähigkeit λ_h sowie die Viskosität μ_h der Schwerteilchen und der Wärmeübergangskoeffizient α_{ei} enthalten. Diese Transportkoeffizienten beschreiben den makroskopischen Transport von Masse, Impuls und Energie aufgrund von Stoßprozessen auf mikroskopischer Ebene.

Die Herleitung dieser Größen geschieht im Prinzip nach der kinetischen Theorie als Lösung von Stoßintegralen aus der Boltzmann-Gleichung. In der einschlägigen Literatur findet man zum Teil formal abweichende Formeln für diese Transportkoeffizienten, je nachdem, welche Annahmen bei der Herleitung gemacht wurden. Die in dieser Arbeit verwendeten Ausdrücke basieren zwar im wesentlichen auf der in [13, 71] angegebenen Vierflüssigkeitstheorie, jedoch werden die Ausdrücke für die Transportkoeffizienten aus [15, 72] entnommen, da mit diesen im IRS reichliche Erfahrungen bei der numerischen Simulation von Plasmaströmungen vorliegen.

Basierend auf dem Modell der elektrostatischen Mikrofelder [73, 74] werden die Wechselwirkungsquerschnitte für Stöße zwischen geladenen Teilchen unter Berücksichtigung der Debye'schen Abschirmlänge [41] mit der Gvosdover'schen Formel [15, 75, 76] berechnet:

$$Q_{ei} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{Z_i e^2}{4\pi\epsilon_0 k T_e} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{144\pi^2 (\epsilon_0 k T_e)^3}{n_e e^6 z_{eff}^2 (z_{eff} + 1)} \right), \quad (2.68)$$

$$Q_{ij} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{Z_i Z_j e^2}{4\pi\epsilon_0 k T_h} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{144\pi^2 (\epsilon_0 k T_e)^3}{n_e e^6 z_{eff}^2 (z_{eff} + 1)} \right), \quad (2.69)$$

$$Q_{ee} = Q_{e1}. \quad (2.70)$$

Für die effektive Ladungszahl z_{eff} des Elektronengases wird

$$z_{eff} = \frac{n_e}{n_h} \quad (2.71)$$

angenommen.

Die Wechselwirkungsquerschnitte für Stöße mit ungeladenen Teilchen werden mit Hilfe der in [77] gegebenen Daten durch folgende Formeln berechnet:

$$Q_{e0} = (3,6 \cdot 10^{-4} T_e - 0,1) \cdot 10^{-20} m^2, \quad (2.72)$$

$$Q_{i0} = \frac{4,7 \cdot 10^{-18}}{T_h^{0,1805}} m^2, \quad (2.73)$$

$$Q_{00} = \frac{1,7 \cdot 10^{-18}}{T_h^{0,25}} m^2. \quad (2.74)$$

Mit

$$m_e \ll m_h \quad (2.75)$$

ergeben sich die Stoßfrequenzen nach [12, 16, 78] zu

$$\nu_{ee} = \sqrt{2} n_e Q_{ee} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}, \quad (2.76)$$

$$\nu_{ei} = n_i Q_{ei} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}, \quad (2.77)$$

$$\nu_{ie} = n_e Q_{ei} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_h}} 2\sqrt{\frac{m_e}{m_h}}, \quad (2.78)$$

$$\nu_{ij} = \sqrt{2} n_j Q_{ij} \sqrt{\frac{8kT_h}{\pi m_h}}. \quad (2.79)$$

Berücksichtigt man, daß die Magnetfeldabhängigkeit der Transportkoeffizienten aufgrund der relativ kleinen magnetischen Feldstärke in MPD–Eigenfeldbeschleunigern vernachlässigbar ist, erhält man für die Transportkoeffizienten λ_e , σ und μ_h nach [79, 80, 72]:

$$\lambda_e = K_{\lambda_e} \frac{15}{4} \frac{n_e k^2 T_e}{m_e (\nu_{ee} + \sum_{i=0}^6 \nu_{ei})}, \quad (2.80)$$

$$\sigma = K_{\sigma} \frac{3}{4} \frac{n_e e^2}{m_e \sum_{i=0}^6 \nu_{ei}}, \quad (2.81)$$

$$\mu_h = K_{\mu_h} \frac{3kT_h}{2} \sum_{i=0}^6 \frac{n_i}{\nu_{ie} + \sum_{j=0}^6 \nu_{ij}}. \quad (2.82)$$

Mit der Prandtlzahl aus Gleichung (2.39) ist

$$\lambda_h = \frac{15}{4} \frac{k\mu_h}{m_h}. \quad (2.83)$$

Die Faktoren K_{λ_e} , K_{σ} und K_{μ_h} ermöglichen eine weitestgehend temperatur- und druckunabhängige Korrektur [81, 82] zur Anpassung an die Daten aus [77]. Mit den Definitionen

$$l_{\sigma} = l_{\lambda_e} = \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^6 n_i Q_{ei}}{n_0 Q_{e0}} \quad (2.84)$$

und

$$l_{\mu_h} = \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^6 n_i Q_{i0}}{n_0 Q_{00}} \quad (2.85)$$

lassen sich folgende Korrekturfunktionen aufstellen:

$$K_{\lambda_e} = 0,94 + 1,71 \exp\left(-\frac{(l_{\lambda_e} - 1,77)^2}{1,35}\right) + 0,5 \tanh[2(l_{\lambda_e} - 2,93)] , \quad (2.86)$$

$$K_{\sigma} = 2,07 + 3,15 \exp\left(-\frac{(l_{\sigma} - 1,45)^2}{0,85}\right) - 2,07 \exp\left(-\frac{(l_{\sigma} - 1,45)^2}{1,15}\right) , \quad (2.87)$$

$$K_{\mu_h} = 0,91 + 0,24 \exp\left(-\frac{(l_{\mu_h} - 1,04)^2}{2,3}\right) + 0,09 \tanh(l_{\mu_h} - 2,9) . \quad (2.88)$$

Für den speziellen Fall des thermischen und reaktiven Gleichgewichts ist die Abhängigkeit der Transportkoeffizienten λ_e , σ , μ_h und λ_h von der Temperatur in den Abbildungen 2.4 bis 2.7 für verschiedene Drücke ersichtlich. Die Korrekturfunktionen K_{λ_e} , K_{σ} und K_{μ_h} führen zu einer sehr guten Anpassung an die Daten aus [77].

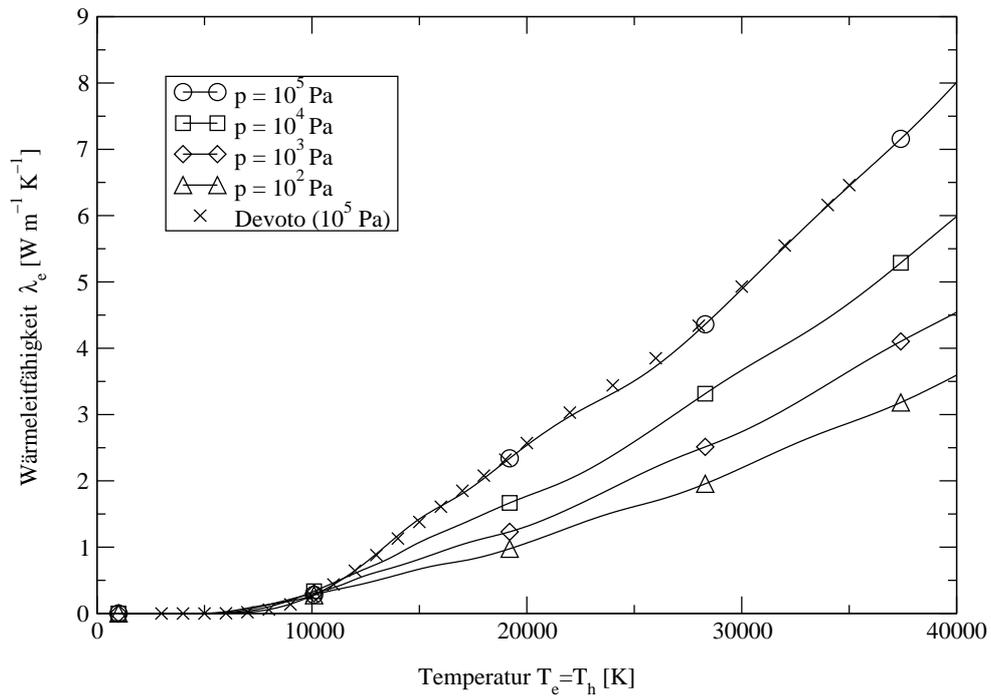


Abbildung 2.4: Wärmeleitfähigkeit der Elektronen

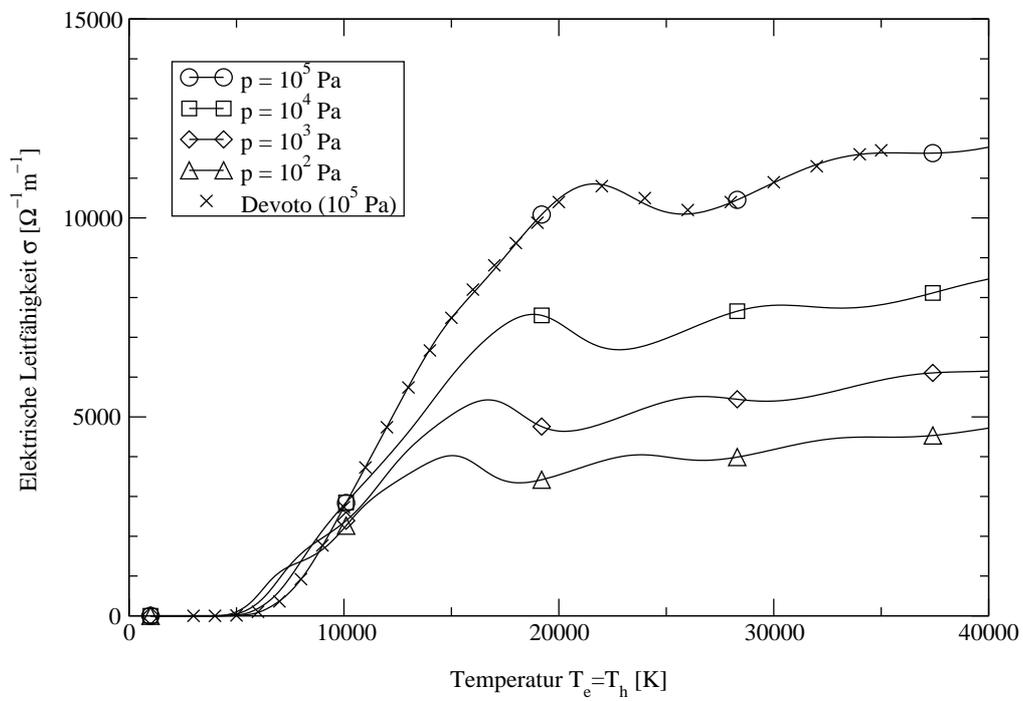


Abbildung 2.5: Elektrische Leitfähigkeit

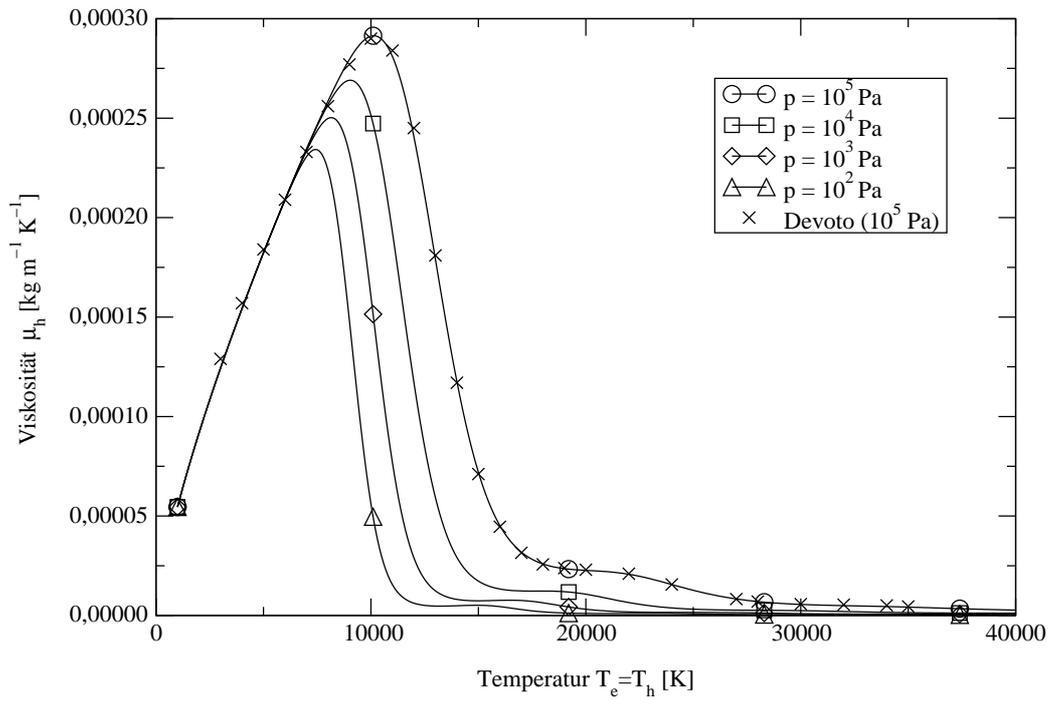


Abbildung 2.6: Viskosität der Schwerteilchen

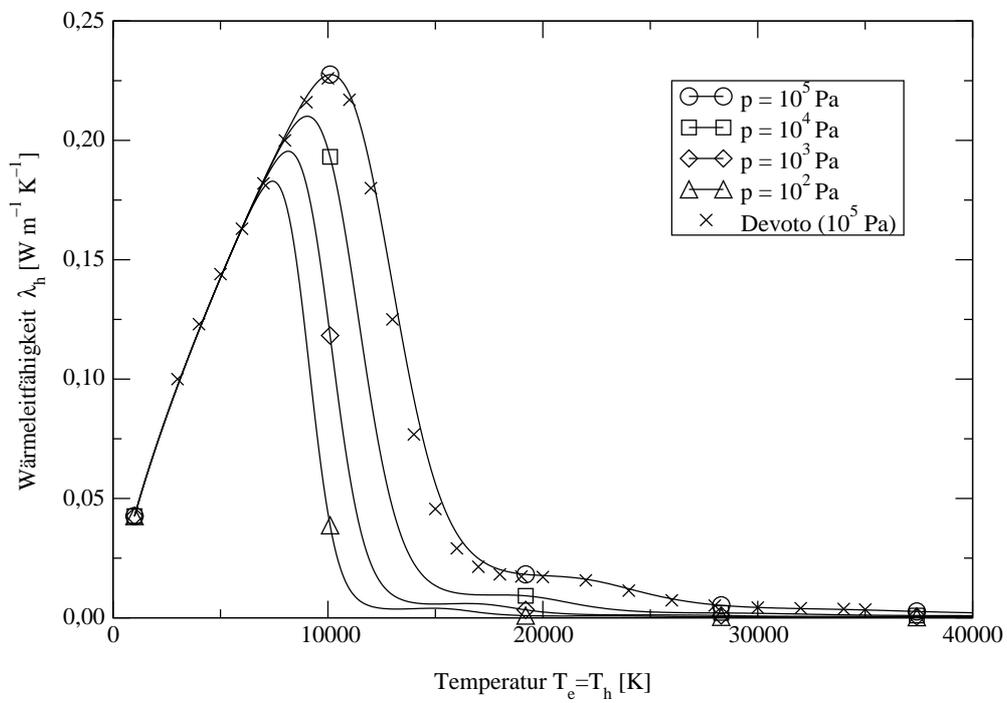


Abbildung 2.7: Wärmeleitfähigkeit der Schwerteilchen

Zur Berechnung der Diffusionskoeffizienten D_{im} wird zunächst die reaktive Wärmeleitfähigkeit der Elektronen λ_{reac} betrachtet. Diese lautet nach [77, 83]:

$$\lambda_{reac} = \frac{p_h + p_e}{k^2 T_e^3} \sum_{i=0}^5 \frac{\Psi_{i+1} \Psi_i \mathcal{D}_{i+1,i} \chi_{i \rightarrow i+1}}{(\Psi_{i+1} + \Psi_i)^2}, \quad (2.89)$$

wobei

$$\mathcal{D}_{i,j} = 2,0 \cdot \frac{3}{16} \sqrt{\frac{2\pi k^3}{m_h}} \frac{\sqrt{T_h^3}}{(p_h + p_e) Q_{ij}} \quad (2.90)$$

der binäre Diffusionskoeffizient ist [46, 47]. Der Vorfaktor 2,0 in Gleichung (2.90) wurde so gewählt, daß die sich aus Gleichung (2.89) ergebende reaktive Wärmeleitfähigkeit in der Umgebung des Maximums mit den Daten aus [77] gut übereinstimmt, wie in Abbildung 2.8 zu sehen ist.

Mit dem Diffusionskoeffizienten

$$D'_{im} = \frac{(1 - \xi_i)(n_h + n_e)}{n_h \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^6 \frac{\Psi_j}{\mathcal{D}_{i,j}}} \quad (2.91)$$

erhält man unter der Annahme, daß der effektive ambipolare Diffusionskoeffizient mindestens doppelt so groß ist wie der effektive Ionendiffusionskoeffizient [84]:

$$D_{im} = \begin{cases} D'_{im} & ; i = 0 \\ 2 D'_{im} & ; i = 1 \dots 6 \end{cases} . \quad (2.92)$$

Die Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten D_{im} von der Temperatur bei thermischem und reaktivem Gleichgewicht ist in Abbildung 2.9 für einen Druck von 10000 Pa dargestellt.

Der elastische Energietransfer zwischen Elektronen und Schwerteilchen, der bei unterschiedlichen Temperaturen T_e und T_h diese Temperaturen einander annähert, wird durch den Wärmeübergangskoeffizienten α_{ei} bestimmt. Dieser lautet nach [76, 85, 86]:

$$\alpha_{ei} = 3 \nu_{ei} \frac{m_e}{m_h} \frac{k}{n_i} . \quad (2.93)$$

Für den Fall des thermischen und reaktiven Gleichgewichts ist der Verlauf des in den Gleichungen (2.23) und (2.49) enthaltenen Terms

$$\sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} = 3 \frac{m_e}{m_h} k n_e \sum_{i=0}^6 \nu_{ei} \quad (2.94)$$

über der Temperatur in Abbildung 2.10 zu ersehen.

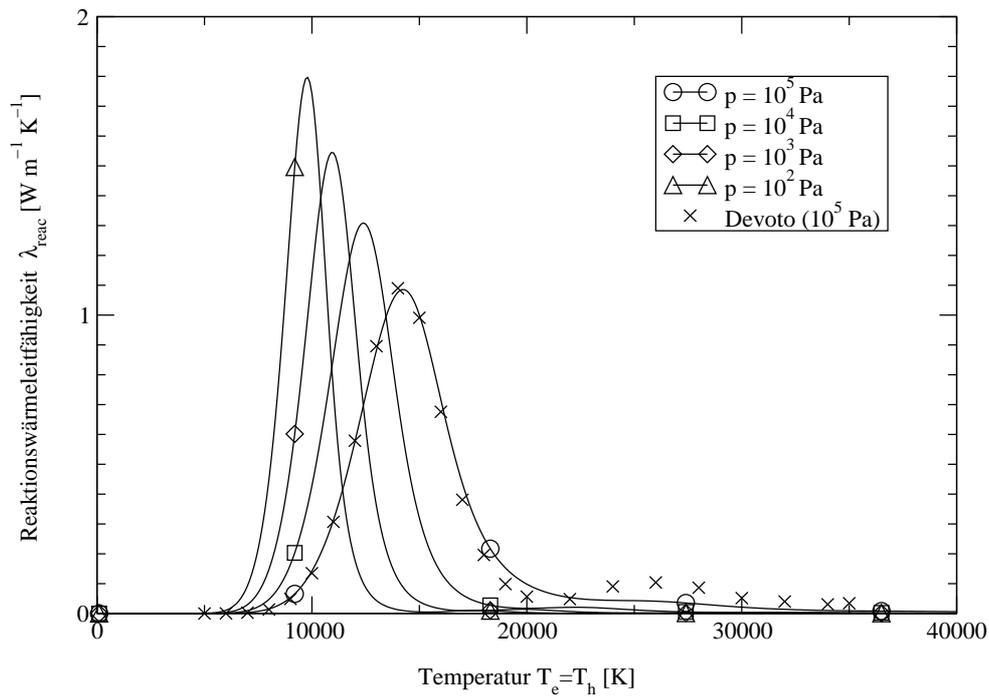


Abbildung 2.8: Reaktive Wärmeleitfähigkeit der Elektronen

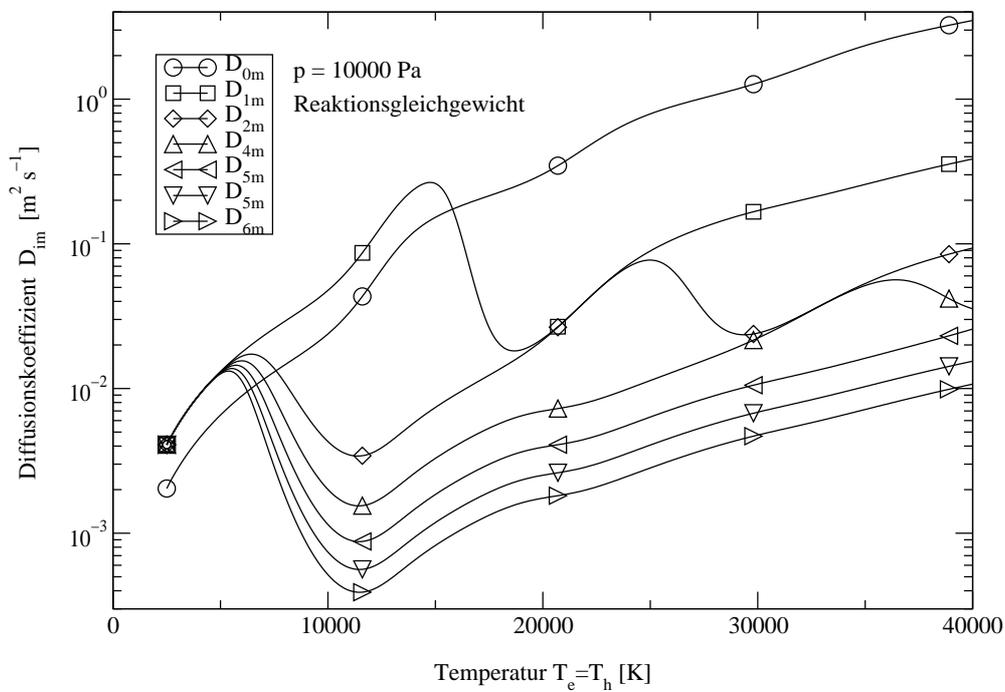


Abbildung 2.9: Diffusionskoeffizienten der Schwerteilchen ($p = 10000 \text{ Pa}$)

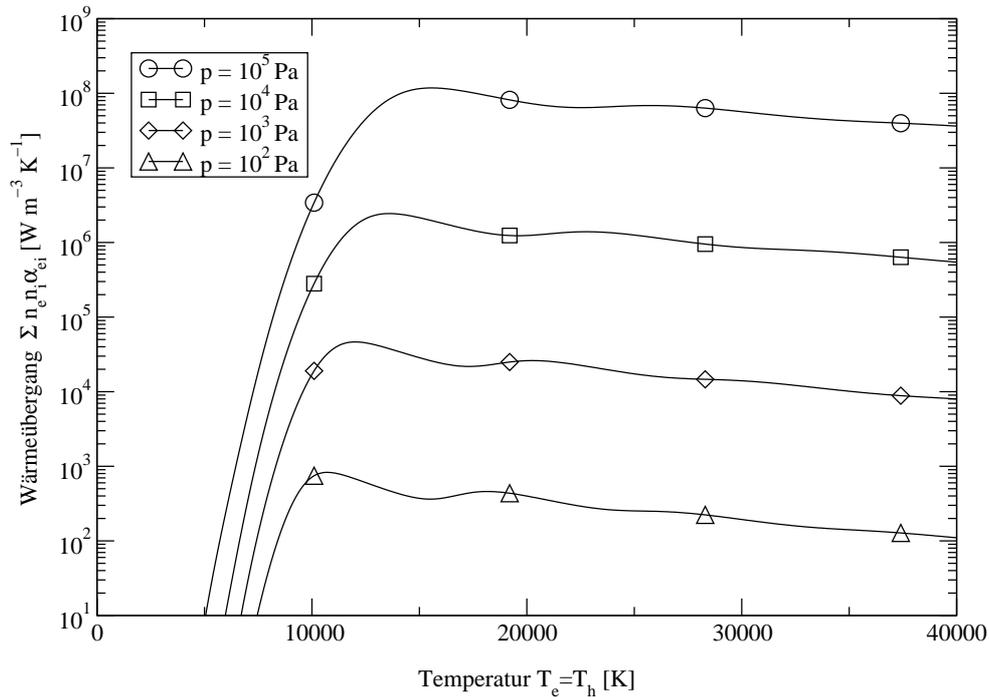


Abbildung 2.10: Wärmeübergang durch elastischen Energietransfer zwischen Elektronen und Schwerteilchen

2.8 Randbedingungen

Zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen (2.2), (2.12), (2.15), (2.20), (2.26), (2.49) und (2.59) werden Randbedingungen auf dem Einströmrand, den Festkörperändern, der Symmetrieachse und dem Ausströmrand benötigt.

Es werden die zwei folgenden Vereinfachungen getroffen:

1. Eine detaillierte Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Plasma und Festkörperoberflächen wird ausgeschlossen. Die Wandtemperaturen werden als konstant vorgegeben, und für das elektrische Feld wird angenommen, daß auf Elektrodenoberflächen der Vektor des elektrischen Feldes stets senkrecht steht. Mit den in [87, 88] benutzten Datenstrukturen besteht in Zukunft die Möglichkeit, auch die Elektrodenfestkörper und deren Wechselwirkung mit der Plasmaströmung mittels geeigneter Modelle [23, 89, 90] zu diskretisieren.

2. Die Wechselwirkung des Triebwerksfreistrahles mit der beim Experiment im Labortank auftretenden Strömung wird nicht berücksichtigt. Für den Fall des reaktiven Gleichgewichtes wurde dies bereits in [87, 88] durch eine auf [91] basierende, heterogene Gebietszerlegungsmethode teilweise erfaßt. Genauer zu klären sind aber gegenwärtig noch die gleichzeitige Kontinuität von numerischen Flüssen und charakteristischen Variablen über Kopplungsränder hinweg, bevor eine solche Methode auf Strömungen im reaktiven Nichtgleichgewicht übertragen werden kann.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Basis dar, auf der in Zukunft systematische Untersuchungen und Modellentwicklungen für die genannten Wechselwirkungen aufbauen können.

Im folgenden werden die Randbedingungen für die einzelnen Erhaltungsgleichungen auf den verschiedenen Rändern beschrieben. Dabei handelt es sich bis auf den Wegfall des Kathodenmodells im wesentlichen um die in [16] gegebenen Randbedingungen.

Massen-, Impuls- und Energieerhaltung der Schwerteilchen

Einströmrand

Vom Experiment ist nur der Massenstrom \dot{m} bekannt. Der Einströmdruck p_h wird daher bei Vorgabe einer Einströmtemperatur von 500 K und eines parabelförmigen Geschwindigkeitsprofils iterativ solange variiert, bis sich der Massenstrom neutralen Argons auf den Sollwert \dot{m} zeitlich konstant einstellt. Dadurch ergeben sich auch automatisch die reibungsfreien Impuls- und Energieflüsse, während die reibungsbehafteten zu Null gesetzt werden.

Festkörperwände

Der Massenfluß ist hier ebenso wie die Geschwindigkeit gleich Null. Die Schwerteilchentemperatur T_h paßt sich der Wandtemperatur an. Für wassergekühlte Isolator- und Anodenwände wird diese auf 500 K gesetzt. Für den Fall der glühenden Anode des HAT wird deren Oberflächentemperatur in Anlehnung an experimentelle Daten aus [11] zu 1500 K angenommen, die Temperatur der mit Tantalkarbid isolierten Anodenoberfläche wird auf 1000 K gesetzt. Die Temperaturverteilung einer Kathode wird durch einen linearen Temperaturanstieg von 500 K an der Kathodenwurzel auf 3000 K an der Kathodenspitze approximiert.

Symmetrieachse

Massen-, Impuls- und Energieflüsse sind gleich Null. Gleiches gilt für die radialen Ableitungen der Dichte ρ , der Teilchendichten n_i , der axialen Geschwindigkeitskomponente v_z , des Schwerteilchendruckes p_h und des Elektronendruckes p_e .

Ausströmrand

Unterschieden werden muß, ob über den Ausströmrand Masse ausströmt oder aufgrund des Tankdrucks Masse einströmt. Für den Fall des Ausströmens sind bei der Berechnung der reibungsfreien Flüsse Unter- und Überschallausströmen zu unterscheiden. Für die Unterschallausströmung wird eine adiabate Expansion auf einen Gegendruck von 1 Pa angenommen, der einem Tankdruck unter optimalen Versuchsbedingungen entspricht. Beim Einströmen mit Unterschall, was die mögliche Rückströmung im Versuchstank grob approximieren soll, wird eine Temperatur von 500 K bei einer radial einwärts gerichteten Geschwindigkeit von -300 m/s festgelegt. Die reibungsbehafteten Flüsse werden zu Null gesetzt.

Turbulenzhaltung

Einströmrand

Mit der Festlegung $R_T = 1$ beträgt das Verhältnis von turbulenter zu atomarer Viskosität ungefähr $2 \cdot 10^{-6}$, sodaß davon ausgegangen werden kann, daß Turbulenz im Triebwerk nicht durch das Einströmen einer zu großen Turbulenzhaltungsgröße hervorgerufen wird.

Festkörperperränder

Da eine Wand laminarisierend wirkt, ist $R_T = 0$ [55].

Symmetrieachse

Der Fluß ist gleich Null, ebenso die radiale Ableitung der Erhaltungsgröße ρR .

Ausströmrand

Wie bei den Schwerteilchenerhaltungsgleichungen muß zwischen Ausströmen mit Über- oder Unterschall und Einströmen mit Unterschall unterschieden werden. Für den Einströmfall wird wie am Einströmrand $R_T = 1$ festgelegt. Der dissipative Fluß ist gleich Null.

Energieerhaltung der Elektronen

Einströmrand

Da die Einströmung eines kalten Gases betrachtet wird, sind der reibungsfreie und der reibungsbehaftete Fluß gleich Null.

Festkörperperränder

Die Festkörperwände können nach [86] als adiabat betrachtet werden. Der Fluß wird zu Null gesetzt.

Symmetrieachse

Neben dem Fluß ist auch die radiale Ableitung der inneren Energie e_e gleich Null.

Ausströmrand

Während der Fluß durch Wärmeleitung gleich Null gesetzt wird, muß beim konvektiven Ausströmen zwischen Über- und Unterschallausströmung unterschieden werden. Der Fluß durch Einströmen ist gleich Null, da die Einströmung eines kalten Gases angesetzt wird.

Erhaltung des Magnetfeldes

Einströmrand

Da man davon ausgehen kann, daß der dem Triebwerk zugeführte elektrische Strom I vollständig durch die Kathodenwurzel fließt, ist die Stromfunktion durch das Ampère'sche Gesetz $\Psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$ gegeben.

Festkörperländer

Für stromaufwärts der Anode gelegene Isolatorwände gilt wiederum das Ampère'sche Gesetz $\Psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$. Auf stromabwärts der Anode gelegenen Wänden ist $\Psi = 0 Tm$. Anode und Kathode werden als Äquipotentialflächen modelliert, sodaß das elektrische Feld senkrecht zur Elektrodenoberfläche steht.

Symmetrieachse

Hier ist das Stromfunktion gleich Null.

Ausströmrand

Da sich der Ausströmrand genügend weit vom Triebwerk und damit von der Lichtbogenentladung entfernt befindet, wird hier ebenfalls $\Psi = 0 Tm$ gesetzt.

Mit diesen Randbedingungen und den in den Kapiteln 2.2 bis 2.7 im Detail angegebenen konstitutiven Gleichungen ist das System von dreizehn Erhaltungsgleichungen

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -div(n_i \vec{v}) - div \vec{j}_{D,i} + \omega_i \quad ; i = 0 \dots 6 , \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -div \vec{f}_{z,invisc} - div \vec{f}_{z,visc} , \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} = -div \vec{f}_{r,invisc} - div \vec{f}_{r,visc} , \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial e_h}{\partial t} = -div \vec{f}_{h,invisc} - div \vec{f}_{h,visc} + q_h , \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho R)}{\partial t} = & -div(\rho R \vec{v}) + div \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla R \right] + \rho(C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1}) \sqrt{R \mathcal{P}} \\ & - \nabla \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \right] \cdot \nabla R - \frac{\rho}{\sigma_\epsilon} \nabla \nu_T \cdot \nabla R , \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_e}{\partial t} = & -\operatorname{div}(e_e \vec{v}) - p_e \operatorname{div} \vec{v} + \frac{5k}{2e} \vec{j} \cdot \nabla T_e - \frac{1}{en_e} \vec{j} \cdot \nabla p_e \\
& - \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} k T_e \sum_{i=1}^6 Z_i \vec{j}_{D,i} \right) + \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) \\
& + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_h - T_e) + \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} - \sum_{i=0}^5 \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1} ,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(\frac{\Psi}{r} \vec{v} \right) + \frac{\Psi v_r}{r^2} - \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\mu_0} \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} - \beta \nabla p_e \right) , \tag{2.59}$$

die vom gemischt hyperbolisch–parabolischen Typ sind und zudem Quellterme enthalten, geschlossen.

Kapitel 3

Numerische Verfahren

3.1 Grundlagen der räumlichen Diskretisierung

Zur numerischen Approximation stationärer Lösungen der Erhaltungsgleichungen (2.2), (2.12), (2.15), (2.20), (2.26), (2.49) und (2.59) müssen sowohl der räumliche als auch der zeitliche Anteil diskretisiert werden. Gesucht wird eine stationäre Lösung der Erhaltungsgleichungen, die durch Lösung des instationären Modells mittels Zeitstabilisierung approximiert werden soll.

Bei der räumlichen Diskretisierung komplexer Geometrien wie der der Eigenfeldbeschleuniger sind unstrukturierte Gitter deutlich schneller und einfacher zu erzeugen oder zu modifizieren als strukturierte Gitter. Durch geeignete Adaption der im allgemeinen groben Startgitter kann zudem die zur Lösungsapproximation benötigte Rechenzeit stark reduziert werden.

Daher wird hier das Rechengebiet durch eine Triangulierung mit Hilfe eines Advancing Front Algorithmus aus [16] diskretisiert. Die geometrischen Schwerpunkte der hierbei erzeugten primären Dreiecke lassen sich so verbinden, daß wabenähnliche, duale Zellen entstehen (Abb. 3.1). Diese repräsentieren im betrachteten axialsymmetrischen Fall torusförmige Volumina mit dem Volumen ΔV_i und der Querschnittsfläche ΔA_i . Mit Hilfe des durch

$$z_{m,\Delta-Torus} = \frac{1}{4} \left(z_1 + z_2 + z_3 + \frac{z_1 r_1 + z_2 r_2 + z_3 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \right) \quad (3.1)$$

und

$$r_{m,\Delta-Torus} = \frac{1}{2} \frac{r_1(r_1 + r_2) + r_2(r_2 + r_3) + r_3(r_3 + r_1)}{r_1 + r_2 + r_3} \quad (3.2)$$

gegebenen Massenschwerpunktes eines Torus mit Dreiecksquerschnitt (Eckpunkte 1,2,3) läßt sich der Massenschwerpunkt $\vec{x}_{m,i}$ einer dualen Zelle berechnen. Das Volumen eines Torus mit Dreiecksquerschnitt ist durch

$$\Delta V_{\Delta-Torus} = \frac{\pi}{3} \left| \begin{array}{l} r_1^2(z_2 - z_3) + r_2^2(z_3 - z_1) + r_3^2(z_1 - z_2) \\ + z_1 r_1(r_3 - r_2) + z_2 r_2(r_1 - r_3) + z_3 r_3(r_2 - r_1) \end{array} \right| \quad (3.3)$$

und seine Querschnittsfläche durch

$$\Delta A_{\Delta-Torus} = \frac{1}{2} |z_1 r_3 + z_2 r_1 + z_3 r_2 - z_3 r_1 - z_1 r_2 - z_2 r_3| \quad (3.4)$$

gegeben, woraus das Volumen ΔV_i und die Querschnittsfläche ΔA_i einer dualen Zelle i ermitteln werden können.

Die Fläche ΔA_{ik} einer Zellwand, zu der zwei benachbarte Zellen gehören, ergibt sich aus

$$\Delta A_{ik} = \pi (r_1 + r_2) \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2}, \quad (3.5)$$

wobei die Eckpunkte 1 und 2 die geometrischen Schwerpunkte der zugehörigen primären Dreiecke sind. Zugeordnet sind der Zellwandfläche ΔA_{ik} ihr Normaleneinheitsvektor \vec{n}_{ik} , die sich durch Verbindung der Massenschwerpunkte der dualen Zellen ergebenden dualen Dreiecke \mathcal{T}_{ijk} und \mathcal{T}_{ikl} und die physikalischen Zustände links (l) und rechts (r) der Wand am zur Flußintegration benötigten Wandmittelpunkt \vec{x}_{ik} .

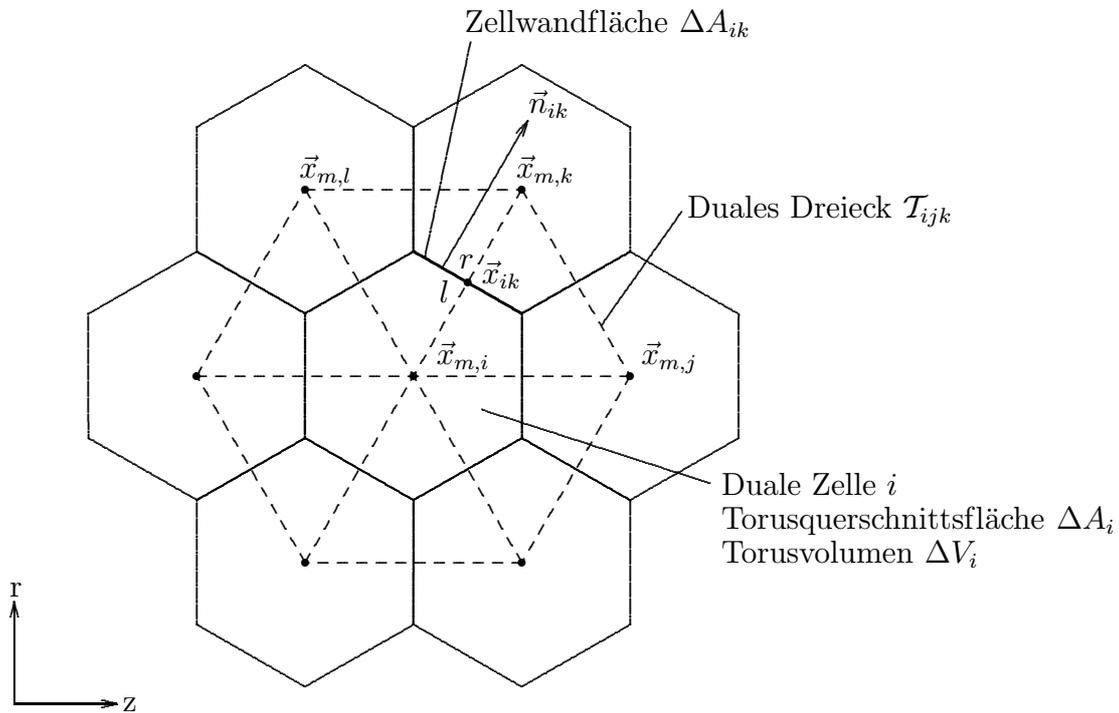


Abbildung 3.1: Duale Zellen als Kontrollvolumina

Duale Zellen an Rändern (Abb. 3.2) haben die Randflächenanteile $\Delta A_{i,1}$ und $\Delta A_{i,2}$, die sich aus der Rotation der halben Kantenlängen der zugehörigen primären Dreiecksrandkanten ergeben. Die Integrationsrandpunkte $\vec{x}_{i,1}$ und $\vec{x}_{i,2}$ befinden sich in den Viertelpunkten der Randkanten der primären Dreiecke. Da diese aufeinanderfolgenden Randkanten im allgemeinen nicht parallel sind, haben die Flächen $\Delta A_{i,1}$ und $\Delta A_{i,2}$ unterschiedliche, aus dem Rechengebiet herauszeigende Normaleneinheitsvektoren $\vec{n}_{i,1}$ und $\vec{n}_{i,2}$.

Den Massenschwerpunkten $\vec{x}_{m,i}$ der dualen Zellen werden schließlich die Zellmittelwerte der physikalischen Größen zugeordnet.

Da für die hier betrachteten eigenmagnetischen, axialsymmetrischen Strömungen das magnetische Feld senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit steht, ist die „Schallgeschwindigkeit“ hier durch die magnetoakustische (oder auch schnelle Alfvén-) Welle [62, 98] gegeben.

Die magnetoakustische Geschwindigkeit ist definiert als

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p_h + p_e)}{\rho} + \frac{B^2}{\mu_0 \rho}} . \quad (3.6)$$

Eberle definiert nun eine neue, künstliche Referenzgeschwindigkeit

$$s = \sqrt{\alpha c^2 + q^2 \left(1 - 2\alpha + \alpha \frac{q^2}{c^2}\right)} , \quad (3.7)$$

mit

$$q^2 = \min(c^2, q_n^2) . \quad (3.8)$$

Der Parameter α ist zunächst frei und dient der Kontrolle der Dissipation des Verfahrens. Die Geschwindigkeit normal zu einer Zellwand zweier benachbarter Volumina ist

$$q_n = v_z n_z + v_r n_r . \quad (3.9)$$

Die Eigenwerte der Schwerteilchengleichungen werden definiert als

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= q_n , \\ \lambda_1 &= \lambda_0 + s , \\ \lambda_2 &= \lambda_0 - s . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mit den Zuständen links (l) und rechts (r) einer Zellwand (siehe Abb. 3.1) macht man für das (Massenfluß)–Splitting folgenden Ansatz:

$$h_{1l} = \frac{1}{4}(\lambda_{1l} + |\lambda_{1l}|) , \quad (3.11)$$

$$h_{1r} = \frac{1}{4}(\lambda_{1r} - |\lambda_{1r}|) , \quad (3.12)$$

$$h_{2l} = \frac{1}{4}(\lambda_{2l} + |\lambda_{2l}|) , \quad (3.13)$$

$$h_{2r} = \frac{1}{4}(\lambda_{2r} - |\lambda_{2r}|) . \quad (3.14)$$

Damit ergibt sich der Teilchendichtefluß der Spezies i zu

$$F_{invisc}^{n_i} = n_{il}(h_{1l} + h_{2l}) + n_{ir}(h_{1r} + h_{2r}) . \quad (3.15)$$

Mit

$$r_1 = \rho h_1 \quad \text{und} \quad r_2 = \rho h_2 \quad (3.16)$$

sind der axiale und radiale Impulsfluß gegeben durch

$$F_{invisc}^{\rho v_z} = \left[\left(v_z + \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_z}{\rho s} \right) r_1 + \left(v_z - \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_z}{\rho s} \right) r_2 \right]_l + \left[\left(v_z + \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_z}{\rho s} \right) r_1 + \left(v_z - \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_z}{\rho s} \right) r_2 \right]_r \quad (3.17)$$

und

$$F_{invisc}^{\rho v_r} = \left[\left(v_r + \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_r}{\rho s} \right) r_1 + \left(v_r - \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_r}{\rho s} \right) r_2 \right]_l + \left[\left(v_r + \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_r}{\rho s} \right) r_1 + \left(v_r - \frac{\left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) n_r}{\rho s} \right) r_2 \right]_r . \quad (3.18)$$

Der Schwerteilchenenergiefluß ist

$$F_{invisc}^{e_h} = \left[\left(\frac{p_h}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} (v_z^2 + v_r^2) + p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \frac{r_1 + r_2}{\rho} \right]_l + \left[\left(\frac{p_h}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} (v_z^2 + v_r^2) + p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \frac{r_1 + r_2}{\rho} \right]_r . \quad (3.19)$$

Der Parameter α wird so gewählt, daß im Falle verschwindender (makroskopischer) Normalengeschwindigkeit q_n der Massenfluß dem Effusionsfluß $\frac{n_h \bar{c}}{4}$ der Teilchen entspricht,

wobei $\bar{c} = \sqrt{\frac{8kT_h}{\pi m_h}}$ ist.

Dieser Ansatz führt auf

$$\alpha = \frac{2}{\gamma \pi} . \quad (3.20)$$

Für die Turbulenz, die Elektronenenergie und das Magnetfeld lauten die in Anlehnung an Gleichung (3.15) konstruierten Upwind-Flußfunktionen:

$$F_{invisc}^{\rho R} = (\rho R)_l (h_{1l} + h_{2l}) + (\rho R)_r (h_{1r} + h_{2r}) , \quad (3.21)$$

$$F_{invisc}^{e_e} = e_{el} (h_{1l} + h_{2l}) + e_{er} (h_{1r} + h_{2r}) \quad (3.22)$$

und

$$F_{invisc}^B = B_l(h_{1l} + h_{2l}) + B_r(h_{1r} + h_{2r}) . \quad (3.23)$$

Auch für die Diskretisierung des $div \vec{v}$ -Terms, der in den Schwerteilchen- und Elektronenenergiegleichungen (2.20) und (2.49) steht, wird diese Upwind-Formulierung benutzt, da die zentrale Diskretisierung von $div \vec{v}$ zu numerischen Oszillationen führt:

$$F_{invisc}^{div\vec{v}} = h_{1l} + h_{1r} + h_{2l} + h_{2r} . \quad (3.24)$$

Dieses Flux Vector Splitting-Verfahren bietet viele Vorteile. Im Gegensatz zu dem approximativen Riemann-Löser nach Osher läßt sich der magnetische Druckterm auf einfachem Wege in die Flüsse einbauen. Ebenso einfach sind die numerischen Flüsse für die Turbulenz, die Elektronenenergie, das Magnetfeld und den $div \vec{v}$ -Term konstruierbar.

Das Verfahren ist bei sehr starken Stößen, die während der Iteration zum stationären Zustand aufgrund großer Quellterme auftreten, sehr robust. Die Dissipation ist dabei gering. Der Algorithmus ist sehr kurz und benötigt sehr wenige Rechenoperationen, um eine gute Approximation der Lösung des Riemannproblems zu liefern.

3.3 WENO-Rekonstruktion 2. Ordnung

Damit die Diskretisierung im Raume von 2. Ordnung ist, müssen die Variablen, die zur Berechnung der reibungsfreien Flüsse benötigt werden, linear rekonstruiert werden. Bekannt sind die Zellmittelwerte der Variablen

$$\rho, n_i, v_z, v_r, p_h, p_e, B, e_e \text{ und } \rho R$$

in den Massenschwerpunkten $\vec{x}_{m,i}$, gesucht sind ihre Werte an den Punkten \vec{x}_{ik} (Abb. 3.1), $\vec{x}_{i,1}$ und $\vec{x}_{i,2}$ (Abb. 3.2). Zur Berechnung der Gradienten auf einer dualen Zelle i unterscheidet man TVD- (Total Variation Dimishing) und ENO- (Essentially Non-Oscillatory) Verfahren. Ein TVD-Verfahren [99, 100] berechnet eine Limiter-Funktion, mit der die zum Beispiel durch einen Least-Squares-Ansatz berechneten Gradienten multipliziert werden, um unphysikalische Oszillationen zu vermeiden. In einem ENO-Verfahren [101, 102] werden mehrere Gradienten berechnet, von denen einer durch ein bestimmtes Kriterium ausgewählt wird. In [103] wurde ein gewichtetes ENO-Verfahren (Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO) für unstrukturierte Gitter zur Lösung der Euler-Gleichungen entwickelt, das hier für die Rekonstruktion zum Einsatz kommt. Am Beispiel der Dichte ρ wird der Algorithmus im folgenden erklärt.

Einer dualen Zelle i lassen sich stets J umgebende duale Dreiecke zuordnen. Auf jedem dieser Dreiecke \mathcal{T}_j mit den Eckpunkten 1, 2 und 3 kann der Gradient $(\nabla\rho)_{\mathcal{T}_j}$ mit der Determinanten

$$D = z_{m,1}(r_{m,2} - r_{m,3}) + z_{m,2}(r_{m,3} - r_{m,1}) + z_{m,3}(r_{m,1} - r_{m,2}) \quad (3.25)$$

aus der Cramer'schen Regel berechnet werden:

$$(\nabla\rho)_{\mathcal{T}_j} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (r_{m,2} - r_{m,3})\rho_1 + (r_{m,3} - r_{m,1})\rho_2 + (r_{m,1} - r_{m,2})\rho_3 \\ (z_{m,3} - z_{m,2})\rho_1 + (z_{m,1} - z_{m,3})\rho_2 + (z_{m,2} - z_{m,1})\rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{z,j} \\ \rho_{r,j} \end{bmatrix} . \quad (3.26)$$

Die erste Komponente stellt die axiale, die zweite die radiale Ableitung dar. Als Gewicht für den Gradienten $(\nabla\rho)_{\mathcal{T}_j}$ wird

$$\omega_j = \frac{(\varepsilon + \rho_{z,j}^2 + \rho_{r,j}^2)^{-2}}{\sum_{k=1}^J (\varepsilon + \rho_{z,k}^2 + \rho_{r,k}^2)^{-2}} \quad (3.27)$$

gewählt. Als Oszillationsindikator wird die 4. Potenz des Betrages eines Gradienten verwendet, sodaß die Beiträge der größten Gradienten gedämpft werden. ε ist eine kleine Zahl (10^{-20}), um eine Division durch Null zu verhindern.

Ferner ist

$$\sum_{j=1}^J \omega_j = 1, \quad (3.28)$$

sodaß die Erhaltung der Linearität gewährleistet ist.

Der WENO-Gradient für eine duale Zelle i lautet nun

$$(\nabla\rho)_i^{WENO} = \sum_{j=1}^J \omega_j (\nabla\rho)_{\mathcal{T}_j}. \quad (3.29)$$

Die nichtlinearen Gewichte ω_j sind unkompliziert und schnell berechenbar. Sie sorgen bei geringer Dissipation stets für oszillationsfreie Lösungen in der Umgebung von Unstetigkeiten und für sehr glatte Lösungen in allen anderen Bereichen.

3.4 Diskretisierung reibungsbehafteter Flüsse

Zur Berechnung der reibungsbehafteten Flüsse wird ein zentrales Verfahren verwendet, das im folgenden am Beispiel der Elektronenwärmeleitung $\lambda_e \nabla T_e$ dargestellt wird.

Einer durch ihren Normaleneinheitsvektor \vec{n}_{ik} , ihre Fläche ΔA_{ik} und ihre Eckpunkte definierten Zellwand (Abb. 3.1) sind im Inneren des Rechengebiets immer zwei duale Dreiecke \mathcal{T}_{ijk} und \mathcal{T}_{ikl} zugehörig. Mit der Determinanten D aus Gleichung (3.25) und den mit Hilfe von Gleichung (3.26) zu berechnenden Gradienten $(\nabla T_e)_{\mathcal{T}_{ijk}}$ und $(\nabla T_e)_{\mathcal{T}_{ikl}}$ ist der Fluß im Zellwandmittelpunkt \vec{x}_{ik}

$$F_{visc}^{e_e} = \frac{1}{2} \left[\overline{\lambda_{e,ijk}} (\nabla T_e)_{\mathcal{T}_{ijk}} + \overline{\lambda_{e,ikl}} (\nabla T_e)_{\mathcal{T}_{ikl}} \right] \vec{n}_{ik}, \quad (3.30)$$

wobei die $\overline{\lambda_{e,ijk}}$ und $\overline{\lambda_{e,ikl}}$ die arithmetischen Mittelwerte der Koeffizienten in den Eckpunkten der dualen Dreiecke darstellen:

$$\overline{\lambda_{e,ijk}} = \frac{1}{3} \sum_{m=i,j,k} \lambda_{e,m}, \quad \overline{\lambda_{e,ikl}} = \frac{1}{3} \sum_{m=i,k,l} \lambda_{e,m}. \quad (3.31)$$

Bei am Rand liegenden Dreiecken sind die Indizes ijk und ikl identisch. Für konstante Koeffizienten λ_e ist die Flußberechnung (3.30) linear erhaltend. Der Aufwand für die Flußberechnung (3.30) ist sehr gering.

3.5 Gradientenberechnung mit Least-Squares-Ansatz

Für Ableitungen, die nicht in Divergenz- oder Rotationsform geschrieben werden können, wird hier ein Least-Squares-Ansatz gewählt, der im folgenden am Beispiel des Terms ∇R aus Gleichung (2.26) erklärt wird.

Für den Least-Squares-Gradienten

$$(\nabla R)_i^{LS} = \begin{bmatrix} R_z \\ R_r \end{bmatrix}_i \quad (3.32)$$

einer dualen Zelle i , die von J dualen Nachbarzellen umgeben ist, wird gefordert, daß die Gesamtheit der Abweichungen der Interpolanten an die J Nachbarstützstellen in einem gewissen quadratischen Sinne klein sei:

$$\sum_{j=1}^J [R_i + (\nabla R)_i^{LS} (\vec{x}_{m,j} - \vec{x}_{m,i}) - R_j]^2 \stackrel{!}{=} \min . \quad (3.33)$$

Daher werden

$$\frac{\partial}{\partial R_z} \left(\sum_{j=1}^J [R_i + (\nabla R)_i^{LS} (\vec{x}_{m,j} - \vec{x}_{m,i}) - R_j]^2 \right) = 0 \quad (3.34)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial R_r} \left(\sum_{j=1}^J [R_i + (\nabla R)_i^{LS} (\vec{x}_{m,j} - \vec{x}_{m,i}) - R_j]^2 \right) = 0 \quad (3.35)$$

nach R_z und R_r aufgelöst.

Es folgt schließlich mit

$$\Delta z_{ij} = z_{m,j} - z_{m,i} \quad \text{und} \quad \Delta r_{ij} = r_{m,j} - r_{m,i} \quad (3.36)$$

$$(\nabla R)_i^{LS} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{j=1}^J (R_j - R_i) \Delta z_{ij} \cdot \sum_{j=1}^J \Delta r_{ij}^2 - \sum_{j=1}^J (R_j - R_i) \Delta r_{ij} \cdot \sum_{j=1}^J \Delta z_{ij} \Delta r_{ij}}{\sum_{j=1}^J \Delta z_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^J \Delta r_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^J \Delta z_{ij} \Delta r_{ij} \right)^2} \\ \frac{\sum_{j=1}^J (R_j - R_i) \Delta r_{ij} \cdot \sum_{j=1}^J \Delta z_{ij}^2 - \sum_{j=1}^J (R_j - R_i) \Delta z_{ij} \cdot \sum_{j=1}^J \Delta z_{ij} \Delta r_{ij}}{\sum_{j=1}^J \Delta z_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^J \Delta r_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^J \Delta z_{ij} \Delta r_{ij} \right)^2} \end{bmatrix} . \quad (3.37)$$

Durch diesen kompakten, linear erhaltenden Algorithmus können Ableitungen auf recht einfache Weise ermittelt werden.

3.6 FV–Diskretisierung der Schwerteilchenerhaltungsgleichungen

Bei allen FV–Diskretisierungen wird im folgenden stets vom Gauß’schen Satz Gebrauch gemacht, der das Volumenintegral der Divergenz eines Vektors in den Fluß des Vektors durch die Volumenoberfläche umwandelt:

$$\int_{\Delta V_\omega} \operatorname{div} \vec{a} d\Delta V_\omega = \int_{\Delta A_{\omega k}} \vec{a} \cdot d\Delta \vec{A}_{\omega k} . \quad (3.38)$$

Massenerhaltung

Bei der Diskretisierung der Rechthandseite der Massenerhaltungsgleichung (2.2)

$$\begin{aligned} RHS^{n_i} = & \frac{1}{\Delta V_\omega} \left(- \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{n_i}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[(\vec{j}_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} + (\vec{j}_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \right] \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \right) \\ & + \omega_i \end{aligned} \quad (3.39)$$

für eine duale Zelle ω , die von K Nachbarzellen umgeben ist, bedeutet $F_{WENO}^{n_i}(\vec{x}_{\omega k})$ den Upwind–Fluß durch eine Zelloberfläche $\Delta A_{\omega k}$ am Integrationspunkt $\vec{x}_{\omega k}$, wobei die links– und rechtsseitigen Werte an der Zellwand durch die WENO–Rekonstruktion berechnet werden. Da in das Flux Vector Splitting der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_{\omega k}$ bereits eingegangen ist, ist er hier im Upwind–Fluß nicht mehr enthalten, wohl aber bei der zentralen Diskretisierung der Diffusionsströme.

Diese ergeben sich auf jedem dualen Dreieck mit

$$(\vec{j}_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} = -\overline{n_{h,\omega jk}} \overline{D_{im,\omega jk}} (\nabla \Psi_i)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \quad (3.40)$$

zu

$$(\vec{j}_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} = (\vec{j}'_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - \overline{\xi_{i,\omega jk}} \sum_{m=0}^6 (\vec{j}'_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} , \quad (3.41)$$

sodaß auch im diskretisierten Falle die Konservativität gewährleistet bleibt.

Impulserhaltung

Die räumliche Diskretisierung der axialen Impulserhaltungsgleichung (2.12) lautet:

$$\begin{aligned}
 RHS^{\rho v_z} = \frac{1}{\Delta V_\omega} & \left(- \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{\rho v_z}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(\tau_{zz})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - (\tau_{zz})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \\ -(\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - (\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \end{bmatrix} \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \right). \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Bei der Diskretisierung der radialen Impulserhaltungsgleichung (2.15)

$$\begin{aligned}
 RHS^{\rho v_r} = \frac{1}{\Delta V_\omega} & \left(- \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{\rho v_r}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - (\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \\ -(\tau_{rr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - (\tau_{rr})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \end{bmatrix} \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \right) \\
 & + \frac{2\pi \Delta A_\omega}{\Delta V_\omega} \left(p_h + p_e - \frac{\sum_{m=1}^M (\tau_{\varphi\varphi})_{\mathcal{T}_m} \Delta V_{\mathcal{T}_m, Torus}}{\sum_{m=1}^M \Delta V_{\mathcal{T}_m, Torus}} - \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

ist die Behandlung des Quellterms zu beachten. Der $\frac{1}{r}$ -Term wird durch $\frac{2\pi \Delta A_\omega}{\Delta V_\omega}$ approximiert [52]. Der Term $\tau_{\varphi\varphi}$ wird als volumengewichtetes Mittel der Werte auf allen umliegenden M dualen Dreiecken berechnet. Der Grund dafür ist, daß bei der Implementation auf allen dualen Dreiecken alle viskosen Spannungen in einem einzigen Schritt ausgerechnet werden können:

$$\begin{aligned}
 (\tau_{zz})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} &= \frac{2}{3} (\overline{\mu_{h,\omega jk}} + \overline{\mu_{T,\omega jk}}) \left(2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - \frac{v_r}{r_{\omega jk}} - \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \right), \\
 (\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} &= (\overline{\mu_{h,\omega jk}} + \overline{\mu_{T,\omega jk}}) \left(\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \right), \\
 (\tau_{rr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} &= \frac{2}{3} (\overline{\mu_{h,\omega jk}} + \overline{\mu_{T,\omega jk}}) \left(2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - \frac{v_r}{r_{\omega jk}} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \right) \text{ und} \\
 (\tau_{\varphi\varphi})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} &= \frac{2}{3} (\overline{\mu_{h,\omega jk}} + \overline{\mu_{T,\omega jk}}) \left(2 \frac{v_r}{r_{\omega jk}} - \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \right). \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Energieerhaltung

Analog erfolgt auch die Diskretisierung der Energieerhaltungsgleichung (2.20):

$$\begin{aligned}
RHS^{eh} = & \\
& \frac{1}{\Delta V_\omega} \left(- \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{eh}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \right. \\
& - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & -(\tau_{zz})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \overline{v_{z,\omega jk}} - (\tau_{zz})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \overline{v_{z,\omega kl}} - (\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \overline{v_{r,\omega jk}} - (\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \overline{v_{r,\omega kl}} \\ & -(\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \overline{v_{z,\omega jk}} - (\tau_{zr})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \overline{v_{z,\omega kl}} - (\tau_{rr})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} \overline{v_{r,\omega jk}} - (\tau_{rr})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \overline{v_{r,\omega kl}} \end{aligned} \right] \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \\
& - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[-(\overline{\lambda_{h,\omega jk}} + \overline{\lambda_{T,\omega jk}}) (\nabla T_h)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} - (\overline{\lambda_{h,\omega kl}} + \overline{\lambda_{T,\omega kl}}) (\nabla T_h)_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \right] \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \left. \right) \\
& + \left(p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \frac{1}{\Delta V_\omega} \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{div\vec{v}}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \\
& - \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\Delta V_\omega}{2\pi \Delta A_\omega} v_r + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_e - T_h) .
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Anzumerken ist, daß der mitunter große Quellterm für den elastischen Energietransfer zwischen Schwerteilchen und Elektronen keinerlei Sonderbehandlung bedarf.

3.7 FV–Diskretisierung der Turbulenzerhaltungsgleichung

Neben den Upwind– und den zentralen Diskretisierungen der Flüsse wird der Least–Squares–Ansatz bei der Diskretisierung der Rechthandseite der Turbulenzerhaltungsgleichung (2.26) benutzt:

$$\begin{aligned}
RHS^{\rho R} = & \\
& \frac{1}{\Delta V_\omega} \left(- \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{\rho R}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \right. \\
& + \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[\overline{\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right)_{\omega j k}} (\nabla R)_{\mathcal{T}_{\omega j k}} + \overline{\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right)_{\omega k l}} (\nabla R)_{\mathcal{T}_{\omega k l}} \right] \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \Big) \quad (3.46) \\
& + \rho (C_{\varepsilon 2} f_2 - C_{\varepsilon 1}) \sqrt{R \mathcal{P}} - \left(\nabla \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \right)_\omega^{LS} \cdot (\nabla R)_\omega^{LS} \\
& - \frac{\rho}{\sigma_\varepsilon} (\nabla \nu_T)_\omega^{LS} \cdot (\nabla R)_\omega^{LS} ,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = \nu_T \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_\omega^{LS \ 2} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_\omega^{LS \ 2} + \left(\frac{v_r}{r_{m,\omega}} \right)_\omega^{LS \ 2} \right] \right. \\
\left. + \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_\omega^{LS} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_\omega^{LS} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_\omega^{LS} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_\omega^{LS} + \frac{v_r}{r_{m,\omega}} \right]^2 \right\} . \quad (3.47)
\end{aligned}$$

3.8 FV–Diskretisierung der Elektronenenergieerhaltungsgleichung

Entscheidend bei der räumlichen Diskretisierung der Elektronenenergieerhaltungsgleichung (2.49)

$$\begin{aligned}
RHS^{e_e} = & \\
& - \frac{1}{\Delta V_\omega} \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{e_e}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} - p_e \frac{1}{\Delta V_\omega} \sum_{k=1}^K F_{WENO}^{div\vec{v}}(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} \\
& + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \vec{j}_\omega^{LS} \cdot (\nabla T_e)_\omega^{LS} - \frac{1}{en_e} \vec{j}_\omega^{LS} \cdot (\nabla p_e)_\omega^{LS} \\
& - \frac{1}{\Delta V_\omega} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \overline{k T_{e,\omega jk}} \sum_{i=1}^6 Z_i(\vec{j}_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega jk}} + \frac{3}{2} \overline{k T_{e,\omega kl}} \sum_{i=1}^6 Z_i(\vec{j}_{D,i})_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \right] \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \quad (3.48) \\
& + \frac{1}{\Delta V_\omega} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[\overline{\lambda_{e,\omega jk}} (\nabla T_e)_{\mathcal{T}_{\omega jk}} + \overline{\lambda_{e,\omega kl}} (\nabla T_e)_{\mathcal{T}_{\omega kl}} \right] \Delta A_{\omega k} \vec{n}_{\omega k} \\
& + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_h - T_e) + \frac{|\vec{j}_\omega^{LS}|^2}{\left(\frac{1}{K+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k=\omega}}^K \sigma_k^2 \right)^{1/2}} - \sum_{i=0}^5 \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1}
\end{aligned}$$

ist die Diskretisierung des Quellterms $\frac{|\vec{j}|^2}{\sigma}$. Wichtig sind dabei die Mittelung der elektrischen Leitfähigkeit σ mit Hilfe der Werte der Nachbarzellen, die Verwendung des Least–Squares–Ansatzes bei der Berechnung der Ableitungen und die Mittelung des $\frac{1}{r}$ –Termes:

$$\vec{j}_\omega^{LS} = \begin{bmatrix} \dot{j}_z \\ \dot{j}_r \end{bmatrix}_\omega^{LS} = \frac{1}{\mu_0 \left(\frac{1}{K+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k=\omega}}^K r_{m,k}^3 \right)^{1/3}} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_\omega^{LS} \\ - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_\omega^{LS} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Durch diese Maßnahmen ist die räumliche Verteilung der diskreten Quellterme sowohl in der Umgebung der Symmetrieachse als auch bei lokal kleiner elektrischer Leitfähigkeit stets ausreichend glatt.

3.9 FV–Diskretisierung der Magnetfelderhaltungsgleichung

Neben dem Satz von Gauß wird zur Diskretisierung der Erhaltungsgleichung für das Magnetfeld (2.59) der Satz von Stokes

$$\int_{\Delta A_\omega} \text{rot} \vec{E} \cdot d\Delta \vec{A}_\omega = \oint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{\partial\omega} \quad (3.50)$$

benötigt. Der konvektive Anteil der Rechthandseite von Gleichung (2.59) wird mit Hilfe des Gauß'schen Satzes diskretisiert. Der restliche Teil wird zunächst abgespalten und mit dem Stokes'schen Satz berechnet. Beide Teile werden schließlich wieder addiert, sodaß die diskretisierte Gleichung folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned} RHS^B = & \\ & - \frac{1}{\Delta V_\omega} \sum_{k=1}^K F_{WENO}^B(\vec{x}_{\omega k}) \Delta A_{\omega k} + \frac{\frac{\Psi}{r_{m,\omega}} v_r}{\left(\frac{1}{K+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k=\omega}}^K r_{m,k}^3 \right)^{1/3}} \\ & - \frac{1}{\Delta A_\omega} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[\frac{(\text{rot} \vec{B})_{\mathcal{T}_{\omega j k}}}{\mu_0 \overline{\sigma_{\omega j k}}} + \frac{(\text{rot} \vec{B})_{\mathcal{T}_{\omega k l}}}{\mu_0 \overline{\sigma_{\omega k l}}} + \frac{\overline{\beta_{\omega j k}}}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B})_{\mathcal{T}_{\omega j k}} \times \overline{\vec{B}_{\omega j k}} \right. \\ & \left. + \frac{\overline{\beta_{\omega k l}}}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B})_{\mathcal{T}_{\omega k l}} \times \overline{\vec{B}_{\omega k l}} - \overline{\beta_{\omega j k}} (\nabla p_e)_{\mathcal{T}_{\omega j k}} - \overline{\beta_{\omega k l}} (\nabla p_e)_{\mathcal{T}_{\omega k l}} \right] \left[\overline{\vec{x}_{\omega k l}} - \overline{\vec{x}_{\omega j k}} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Im Quellterm wird wiederum ein gemittelter Radius zur Erhaltung der Symmetrie im diskreten Falle benutzt. Die Wegstrecken $\left[\overline{\vec{x}_{\omega k l}} - \overline{\vec{x}_{\omega j k}} \right]$ stellen die Umrandung der Torusquerschnittsfläche ΔA_ω einer dualen Zelle dar, wobei die auf den primären Dreiecken berechneten Mittelwerte $\overline{\vec{x}_{\omega k l}}$ und $\overline{\vec{x}_{\omega j k}}$ Eckpunkte einer dualen Zelle ω sind.

Die Berechnung des Stromes auf allen dualen Dreiecken erfolgt mit:

$$(\text{rot} \vec{B})_{\mathcal{T}_{\omega j k}} = \mu_0 \begin{bmatrix} j_z \\ j_r \end{bmatrix}_{\mathcal{T}_{\omega j k}} = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{r_{m,\omega j k}}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{\mathcal{T}_{\omega j k}} \\ - \frac{1}{\overline{r_{m,\omega j k}}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{\mathcal{T}_{\omega j k}} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

3.10 FV–Diskretisierung der Randbedingungen

Massen–, Impuls– und Energieerhaltung der Schwerteilchen

Einströmrand

Zur Erhaltung eines vorgegebenen Massenstroms \dot{m} am Einströmrand dient ein numerischer Massenflußregler, der den Massenstrom über ein geradliniges Randsegment kontrolliert. Das Randsegment ist definiert durch seine Länge l , einen Randpunkt \vec{x}_0 und den aus dem Rechengebiet herausgerichteten Normaleneinheitsvektor \vec{n} . Mit Einführung der dimensionslosen Koordinate

$$\eta = \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{l} \quad , \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.53)$$

auf dem Randsegment, der Neutralteilchendichte

$$n_{0,ein} = \frac{p_{h,ein}}{kT_{h,ein}} \quad (3.54)$$

des einströmenden Kaltgases und der Vorgabe eines parabelförmigen Geschwindigkeitsprofils mit dem Ansatz

$$|\vec{v}_{ein}| = 4 v_{max,ein} (\eta - \eta^2) \quad (3.55)$$

ergibt sich die Maximalgeschwindigkeit $v_{max,ein}$ zu

$$v_{max,ein} = \frac{\dot{m}}{4 m_h n_{0,ein} \sum_{i=1}^N (\eta_{i,1} - \eta_{i,1}^2) \Delta A_{i,1} + (\eta_{i,2} - \eta_{i,2}^2) \Delta A_{i,2}} \quad (3.56)$$

Dabei stellen die Koordinaten $\vec{x}_{i,1}$ und $\vec{x}_{i,2}$ die Integrationspunkte auf dem Rand der dualen Zellen am Einströmrand dar, siehe Abbildung (3.2). Die Einströmgeschwindigkeiten an den Punkten $\vec{x}_{i,1}$ und $\vec{x}_{i,2}$ sind

$$\begin{aligned} \vec{v}_{i,1,ein} &= -4 v_{max,ein} (\eta_{i,1} - \eta_{i,1}^2) \vec{n} \quad \text{und} \\ \vec{v}_{i,2,ein} &= -4 v_{max,ein} (\eta_{i,2} - \eta_{i,2}^2) \vec{n} . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Einströmdaten (rechter Zustand r) und die auf den Rand rekonstruierten Zellmittelwerte (linker Zustand l) gehen in das Flux Vector Splitting ein, sodaß sich Massen–, Impuls– und Energiefluß der Schwerteilchen ergeben. Während der Iteration zum stationären Zustand wird der Massenstrom

$$\dot{m} = -m_h \sum_{i=1}^N F_{WENO}^{n_0}(\vec{x}_{i,1}) \Delta A_{i,1} + F_{WENO}^{n_0}(\vec{x}_{i,2}) \Delta A_{i,2} \quad (3.58)$$

ständig geprüft und durch Erhöhen oder Absenken des Druckes $p_{h,ein}$ konstant gehalten.

Festköperränder

Die Zellmittelwerte der Geschwindigkeit der Randzellen werden auf Null gesetzt, die der Temperatur auf Wandtemperatur:

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{und} \quad T_h = T_{Wand} . \quad (3.59)$$

Insbesondere bei der Verwendung grober Startgitter können sich dadurch an den Festkörperwänden bereits die Gradienten von Geschwindigkeit und Temperatur ausbilden.

Symmetrieachse

Da die Flüsse hier gleich Null sind, müssen nur noch die für die Rekonstruktion benötigten Gradienten zu Null gesetzt werden:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^{WENO} = \left(\frac{\partial n_i}{\partial r} \right)^{WENO} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^{WENO} = \left(\frac{\partial p_h}{\partial r} \right)^{WENO} = \left(\frac{\partial p_e}{\partial r} \right)^{WENO} = 0 \quad (3.60)$$

Zudem wird die radiale Ableitung der radialen Geschwindigkeitskomponente einer Zelle ω an der Symmetrieachse als

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^{WENO} = \frac{v_r}{r_{m,\omega}} \quad (3.61)$$

berechnet.

Ausströmrand

In den Randpunkten $\vec{x}_{i,1}$ und $\vec{x}_{i,2}$ wird getrennt mit Hilfe der rekonstruierten Werte untersucht, ob Aus- oder Einströmen vorliegt. Im Falle des Ausströmens mit Überschall sind die Flüsse durch die rekonstruierten Werte (linker Zustand l) festgelegt. Für Unterschallausströmung wird der rechte Zustand r durch

$$\vec{v}_r = \vec{v}_l \quad (3.62)$$

und die adiabate Expansion

$$\frac{\rho_r}{\rho_l} = \left(\frac{p_{h,Tank}}{p_l} \right)^{1/\gamma} \quad (3.63)$$

vorausgesetzt. Die Teilchendichten n_i und der Elektronendruck p_e werden skaliert:

$$n_{ir} = n_{il} \frac{\rho_r}{\rho_l} \quad \text{und} \quad p_{er} = p_{el} \frac{\rho_r}{\rho_l} . \quad (3.64)$$

Im Falle der Unterschalleinströmung ist der rechte (Anström-) Zustand r durch den Tankdruck $p_{h,Tank}$, die Temperatur $T_{h,Tank}$ und die Geschwindigkeit \vec{v}_{Tank} gegeben, sodaß wie am Einströmrand die Flüsse durch Lösen des Riemannproblems berechnet werden können.

Turbulenzhaltung

Einströmrand

Die turbulente Einströmgröße $(\rho R)_{ein}$ beträgt mit $R_T = 1$

$$(\rho R)_{ein} = m_h n_{0,ein} \nu R_T , \quad (3.65)$$

wobei ν der Zellmittelwert der kinematischen Viskosität der zugehörigen Randzelle ist.

Festköperränder

Die Zellmittelwerte der Randzellen werden mit dem Wert Null belegt.

Symmetrieachse

Hier gilt

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^{WENO} = 0 . \quad (3.66)$$

Ausströmrand

Bei Überschallausströmung ist der Fluß durch den rekonstruierten Wert gegeben, bei Unterschallausströmung wird mit der Dichte skaliert:

$$(\rho R)_r = (\rho R)_l \frac{\rho_r}{\rho_l} . \quad (3.67)$$

Bei Einströmung gilt das für den Einströmrand Gesagte.

Energieerhaltung der Elektronen

Einströmrand

Der Fluß ist gleich Null.

Festköperränder

Auch hier ist der Fluß gleich Null.

Symmetrieachse

Für die radiale Ableitung der Elektronenenergie gilt:

$$\left(\frac{\partial e_e}{\partial r} \right)^{WENO} = 0 . \quad (3.68)$$

Ausströmrund

Wie für die Schwerteilchen- und Turbulenzflüsse müssen Über- und Unterschallausströmen unterschieden werden. Im Unterschallfall wird wiederum skaliert:

$$e_{er} = e_{el} \frac{\rho_r}{\rho_l}. \quad (3.69)$$

Bei Einströmung wird der Fluß gleich Null gesetzt.

Erhaltung des Magnetfeldes

Einströmrund

Die Zellmittelwerte der Stromfunktion werden mit

$$\Psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \quad (3.70)$$

belegt.

Festkörperränder

Für die Zellmittelwerte stromauf der Anode gilt wiederum

$$\Psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}, \quad (3.71)$$

stromab der Anode

$$\Psi = 0. \quad (3.72)$$

Da das elektrische Feld als senkrecht auf den Anoden- und Kathodenoberflächen stehend angenommen wird, verschwindet hier der Anteil des Linienintegrals (3.50) auf der Wand.

Symmetrieachse

Die Zellmittelwerte der Randzellen werden gleich Null gesetzt.

Ausströmrund

Hier werden ebenso die Zellmittelwerte mit dem Wert Null belegt.

3.11 Diskretisierung der Zeitintegration

Zur expliziten Zeitintegration der Erhaltungsgleichungen wird die Methode der randomisierten lokalen Zeitschritte eingeführt, um möglichst schnell zu einer stationären Lösung zu gelangen.

Zunächst wurde eine Sensitivitätsanalyse im numerischen Experiment durchgeführt, um festzustellen, welche Terme beim Festlegen der diskreten Zeitschrittweite maßgeblich sind. Dazu wurden die Erhaltungsgleichungen für die Schwerteilchen, die Elektronen und das Magnetfeld getrennt untersucht.

Das Ergebnis ist, daß die Schwerteilchen- und Turbulenzerhaltungsgleichungen von der größten Ausbreitungsgeschwindigkeit des reibungsfreien Anteils [104] und der Wärmeleitung [105] dominiert werden, die Elektronenenergiegleichung von der Elektronenwärmeleitung und das Magnetfeld von der magnetischen Diffusion [106]:

$$\Delta t_h = CFL_h \cdot \min \left\{ \frac{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |\vec{x}_{m,k} - \vec{x}_{m,\omega}|}{|\vec{v}| + c}, \frac{\frac{3k}{K+1} \sum_{k=1}^K n_{h,k} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |\vec{x}_{m,k} - \vec{x}_{m,\omega}| \right)^2}{\frac{4}{K+1} \sum_{k=1}^K (\lambda_{h,k} + \lambda_{T,k})} \right\}, \quad (3.73)$$

$$\Delta t_e = CFL_e \cdot \frac{\frac{3k}{K+1} \sum_{k=1}^K n_{e,k} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |\vec{x}_{m,k} - \vec{x}_{m,\omega}| \right)^2}{\frac{4}{K+1} \sum_{k=1}^K \lambda_{e,k}}, \quad (3.74)$$

$$\Delta t_B = CFL_B \cdot \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \sigma_k \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |\vec{x}_{m,k} - \vec{x}_{m,\omega}| \right)^2. \quad (3.75)$$

Die CFL-Zahlen dienen als Sicherheitsfaktoren gegenüber nicht berücksichtigten Effekten wie beispielsweise Änderungen der Wellengeschwindigkeiten durch Nichtlinearitäten und Quellterme. Durch die Zeitintegration der verschiedenen Gleichungen mit den verschiedenen diskreten Zeitschritten können die unterschiedlichen Zeitskalen der zugehörigen physikalischen Mechanismen berücksichtigt werden, sodaß die Integration stabil bleibt. Vor dem Zeitschritt werden alle lokalen Zeitschritte (3.73), (3.74) und (3.75) mit Zufallszahlen RND [107] zwischen 0 und 1 multipliziert:

$$\Delta t_{h,RND} = \Delta t_h \cdot RND_h, \quad (3.76)$$

$$\Delta t_{e,RND} = \Delta t_e \cdot RND_e, \quad (3.77)$$

$$\Delta t_{B,RND} = \Delta t_B \cdot RND_B. \quad (3.78)$$

Mit den so festgelegten Zeitschritten werden die einzelnen Gleichungen integriert, wobei zusätzlich auch noch die Residuen benachbarter Zellen gemittelt werden (K : Anzahl der Nachbarzellen einer dualen Zelle ω):

$$n_i^{n+1} - n_i^n = \Delta t_{h,RND} \left[\left(1 - \frac{1}{K} \right) RHS_\omega^{n_i} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^{n_i}}{K} \right]; i = 0 \dots 6, \quad (3.79)$$

$$\rho v_z^{n+1} - \rho v_z^n = \Delta t_{h,RND} \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right) RHS_\omega^{\rho v_z} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^{\rho v_z}}{K} \right], \quad (3.80)$$

$$\rho v_r^{n+1} - \rho v_r^n = \Delta t_{h,RND} \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right) RHS_\omega^{\rho v_r} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^{\rho v_r}}{K} \right], \quad (3.81)$$

$$e_h^{n+1} - e_h^n = \Delta t_{h,RND} \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right) RHS_\omega^{e_h} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^{e_h}}{K} \right], \quad (3.82)$$

$$\rho R^{n+1} - \rho R^n = \Delta t_{h,RND} \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right) RHS_\omega^{\rho R} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^{\rho R}}{K} \right]. \quad (3.83)$$

Für die Elektronenenergie hat es sich als robust erwiesen, den Zeitschritt für die Elektronentemperatur durchzuführen:

$$T_e^{n+1} - T_e^n = \Delta t_{e,RND} \frac{2}{\frac{3k}{K} \sum_{\substack{k=1 \\ k=\omega}}^K n_{e,k}} \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right) RHS_\omega^{e_e} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^{e_e}}{K} \right]. \quad (3.84)$$

Aus dem gleichen Grund findet die Zeitintegration des Magnetfeldes für die Stromfunktion Ψ statt:

$$\Psi^{n+1} - \Psi^n = \Delta t_{B,RND} \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right) RHS_\omega^B r_{m,\omega} + \frac{1}{K} \frac{\sum_{k=1}^K RHS_k^B r_{m,k}}{K} \right]. \quad (3.85)$$

Die Verwendung eines Zeitschrittverfahrens erster Ordnung hat ihre Ursache in der erwünschten Robustheit. Verfahren höherer Ordnung wie etwa Runge–Kutta–Verfahren

haben bei einfachen Rechthandseiten im allgemeinen konvergenzbeschleunigende Eigenschaften. Bei großen Quelltermen und Nichtlinearitäten, wie sie bei den MPD-Erhaltungsgleichungen auftreten, neigen sie jedoch verstärkt zu numerischen Instabilitäten, sodaß sie hier nicht verwendet werden.

Als eine sinnvolle zukünftige Weiterentwicklung der Zeitintegration erscheint die Implementation eines semi-impliziten Verfahrens, um sowohl die Einfachheit der expliziten als auch die Konvergenzbeschleunigung der impliziten Verfahren [108, 109] kombinieren zu können.

Es muß betont werden, daß hier keine Subzeitschritte eingeführt werden, um die kurzen Zeitskalen der Elektronenenergie in mehreren Subzeitschritten zu integrieren, bis die Zeitskala der größten Zeitskalen der Schwerteilchenkonvektion erreicht ist. Da nur der stationäre Zustand von Interesse ist, kann auf eine aufwendige Integration, die nur der Zeitgenauigkeit dienen könnte, verzichtet werden. Aus dem gleichen Grunde dürfen die Zeitschritte auch zufällig gewählt werden.

Der große Vorteil der randomisierten lokalen Zeitschritte besteht darin, daß sie um nahezu eine Größenordnung höhere CFL-Zahlen zulassen und die Zeitintegration gegenüber großen Quelltermen in der Elektronenenergiegleichung sehr robust machen.

Bislang konnte noch keine schlüssige Erklärung für diese Robustheit gefunden werden; es ist anzunehmen, daß durch die Zufallszahlen eine nichtlineare, dämpfende Dissipation auftritt, die im stationären Zustand wieder verschwindet.

3.12 Fehlerabschätzung und Gitteradaption

Mit der a posteriori-Adaption von Gittern werden zwei eng miteinander verwobene Ziele verfolgt: Zum einen kann die Lösung eines Differentialgleichungssystems auf einem anfangs geeignet groben Gitter approximiert werden, sodaß in relativ kurzer Zeit eine Grobgitterlösung vorliegt, die als Startlösung auf einem verfeinerten Gitter dient. Zum anderen erhofft man sich, durch Gitterverfeinerung eine qualitativ verbesserte Lösung in dem Sinne zu erhalten, daß die durch die Diskretisierung entstehende Abweichung der numerischen von der tatsächlichen Lösung verkleinert wird.

Im CFD-Bereich (Computational Fluid Dynamics) steht die Entwicklung geeigneter Kriterien zur Gitterverfeinerung unter mathematischem Gesichtspunkt heutzutage noch an den Anfängen [110]. In der Praxis werden zumeist Gradientenindikatoren als Verfeinerungskriterium benutzt [111, 112, 113]. Der Grund hierfür ist, daß davon ausgegangen werden kann, daß in Bereichen starker Gradienten die Auflösung erhöht werden muß, um die stattfindenden physikalischen Prozesse erfassen zu können. Während dies anschaulich plausibel ist, muß dennoch festgehalten werden, daß der Betrag eines Gradienten im allgemeinen nichts über den Fehler aussagt.

Basierend auf den Analysen in [114] und [115] wurde in [52] und [100] das Finite-Elemente-Residuum der Eulergleichungen unter Vernachlässigung viskoser Anteile und Quellterme zur Gitterverfeinerung und -vergrößerung benutzt. In [116] wird eine Fehlerschätzung auf der Basis von Wavelet-Zerlegungen für Grenzschichten, wie sie in

der Halbleitertechnik auftreten, verwendet.

Ein asymptotisch exakter Fehlerschätzer für Finite-Volumen-Verfahren auf unstrukturierten Gittern wird in [117] untersucht, der Ausgangspunkt der folgenden Fehlerabschätzung ist.

Da das System der MPD-Erhaltungsgleichungen sehr komplex ist, existiert bis heute keine vollständige Analysis des Problems. Für eine gegebene diskrete Lösung \mathbf{u}_h , die die exakte Lösung \mathbf{u} approximiert, kann der Fehler $\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ für das gesamte System in einer geeigneten Norm nicht explizit angegeben werden. Um die Komplexität des Problems zu reduzieren, wird die Analyse für die Erhaltungsgleichungen (2.10), (2.12), (2.15) und (2.20) der Schwerteilchen durchgeführt.

Für gewisse Problemklassen kann gegenwärtig ein Teil des Fehlers, nämlich der sogenannte lokale Fehler, der mit dem Residuum zusammenhängt, kontrolliert werden. Vereinfachend kann man sagen, daß das Residuum, wenn man den Differentialoperator auf die numerische Lösung und auf die Differentialgleichung anwendet, die Differenz zwischen diesen beiden Ergebnissen mißt und damit eine Kontrolle des lokalen Fehlers erlaubt [118]. Die Analyse des lokalen Fehlers für Konvektions-Diffusions-Probleme, die den MPD-Strömungen in gewisser Hinsicht verwandt sind, ist genauer in [116] beschrieben.

Im folgenden soll die Entwicklung eines in der Praxis erfolgreich einsetzbaren Fehlerindikator beschrieben werden. Es wird kein Anspruch auf absolute mathematische Exaktheit erhoben, siehe dazu [117, 119]. Das Rechengebiet wird mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet, wobei Ω ein offenes und einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Die Berandung ist $\partial\Omega$, die durch stückweise lineare Funktionen approximiert wird. Das so entstandene Gebiet sei Ω_h mit $\Omega_h \subset \Omega$. Es sei im folgenden jede lokale Verfeinerung von Ω_h auch Teilmenge von Ω . Betrachtet wird eine quasiuniforme Triangulierung, die die Winkelbedingung erfüllt, das heißt, alle Winkel einer dualen Zelle ω sind uniform nach oben für jedes Gitter beschränkt. Der Durchmesser einer dualen Zelle ω wird mit h bezeichnet.

Zur Entwicklung des Fehlerindikator werden die Erhaltungsgleichungen in der abgekürzten konservativen Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (3.86)$$

geschrieben. Hierbei enthält die Vektorfunktion \mathbf{F} , für die die Lipschitz-Stetigkeit angenommen wird, keine Terme mit Ableitungen der Temperatur und der Geschwindigkeit. Eine Möglichkeit, um Funktionen \mathbf{F} zu betrachten, die keine Ableitungen beinhalten, besteht darin, diese Terme auf die rechte Seite der Originalgleichungen als Quellterme zu schreiben.

Einer stationären numerischen Lösung \mathbf{u}_h des Systems (3.86) wird das Residuum

$$r_h(\mathbf{u}_h) := \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \quad (3.87)$$

zugeordnet. Betrachtet wird die stationäre Lösung des Systems (3.86), d.h. $\partial\mathbf{u}/\partial t \rightarrow 0$, da die Zeitabhängigkeit nur der Zeitstabilisierung einer stationären Lösung dient. Die numerische Lösung \mathbf{u}_h von (3.86) sei ein Element von S_h^0 . Der Funktionenraum S_h^0 besteht aus stückweise konstanten Funktionen auf Ω_h .

Betrachtet wird nun die schwache Formulierung der stationären partiellen Differentialgleichung (3.86)

$$-\int_{\Omega_h} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \Psi dx = \int_{\Omega_h} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \Psi dx \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega_h) . \quad (3.88)$$

Die übliche Dualnorm

$$\|u\|_{-1,\omega} = \sup_{v \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_{\omega} |uv| dx}{\|\nabla v\|_0} \quad (3.89)$$

wird für jede offene Untermenge $\omega \subset \Omega$ als eine Norm auf dem zu $H_0^1(\omega)$ dualen Sobolev-Raum $H^{-1}(\omega)$ definiert [120].

Man nimmt nun an, daß die magnetoplasmodynamischen Erhaltungsgleichungen die Voraussetzungen des folgenden Lemmas erfüllen:

Lemma 1 (Residuum als Maß für den Fehler) *Es wird angenommen, daß \mathbf{F} eine Lipschitz-stetige Vektorfunktion mit der Lipschitz-Konstanten L ist. Für genügend kleine Gittergröße h erhält man*

$$\|r_h(\mathbf{u}_h)\|_{-1,\omega} \leq L \|\mathbf{e}_h\|_{0,\omega} . \quad (3.90)$$

Beweis: Für jede Funktion $\Psi \in C_0^\infty(\omega)$ gilt

$$\langle r_h(\mathbf{u}_h), \Psi \rangle_\omega = \int_{\omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \Psi dx + \int_{\omega} \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla \Psi dx = - \int_{\omega} (\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)) \cdot \nabla \Psi dx . \quad (3.91)$$

Nimmt man an, daß \mathbf{F} eine Lipschitz-stetige Funktion ist, erhält man

$$| \langle r_h(\mathbf{u}_h), \Psi \rangle_\omega | \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \|\nabla \Psi\|_0 . \quad (3.92)$$

Mit der Definition der dualen Norm (3.89) ist der Beweis erbracht. ■

Die duale Norm des Residuums ist hier die natürliche Größe der L_2 -Fehleranalyse, wie präzise Abschätzungen im linearen Fall zeigen [118]. Sie ist numerisch nicht geeignet berechenbar und muß daher durch asymptotisch äquivalente Finite-Differenzen-Formeln approximiert werden [117].

Es sei E ein Zellrand einer dualen Zelle ω . Mit $[\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \vec{n}]_E$ wird der Sprung des Normalenflusses zwischen zwei Nachbarzellen mit dem gemeinsamen Zellrand E bezeichnet. Die Sprünge über einen Zellrand einer dualen Zelle werden definiert als

$$\nu_\omega^h := \max_{E \subset \partial\omega} |[\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \vec{n}]_E| \cdot h_E , \quad (3.93)$$

wobei h_E die Länge eines Zellrandes darstellt. Wegen der Winkelbedingung [117] gilt $h \simeq h_E$. Das folgende Ergebnis gilt für den speziellen Fall $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, der in [117] betrachtet wird.

Lemma 2 (Approximationseigenschaft) *Es existieren zwei reelle positive Konstanten C_1 und C_2 , sodaß für hinreichend kleine Gittergröße h die Abschätzung gilt:*

$$C_1 \nu_\omega^h \leq \|r_h(\mathbf{u}_h)\|_{-1,\omega} \leq C_2 \nu_\omega^h. \quad (3.94)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 hängen nur vom Gebiet Ω und den Eigenschaften der Flußfunktion ab. Sie sind von theoretischer Natur und werden in der numerischen Berechnung des Fehlerindikators nicht benötigt.

Da die duale Norm des Residuums eine Fehlerabschätzung darstellt, hat der Fehlerindikator ν_ω^h automatisch auch diese Eigenschaften.

Nun sollen Quellterme, die von Null verschieden sind, betrachtet werden. Der Indikator wird neu definiert als

$$\nu_\omega^h := \max_{E \subset \partial\omega} |[\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \vec{n}]_E| \cdot h_E + \left| \int_\omega \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) dx \right|. \quad (3.95)$$

Lemma 3 (Approximationseigenschaft) *Sei $\tilde{\omega}$ die Gesamtheit aller dualen Zellen, die eine gemeinsame Kante mit ω besitzen. Sei \mathbf{S} eine beliebige Vektorfunktion in $L_2(\Omega)$. Für genügend kleine Gittergröße existiert eine reelle positive Konstante C_2 , sodaß*

$$\|r_h(\mathbf{u}_h)\|_{-1,\tilde{\omega}} \leq C_2 \nu_\omega^h. \quad (3.96)$$

Beweis: Es sei $\Psi \in C_0^\infty(\tilde{\omega})$ beliebig. Mit der Cauchy–Schwarz’schen Ungleichung, partieller Integration, der Normäquivalenz von $\|\cdot\|_{1,\tilde{\omega}}$ und $|\cdot|_{1,\tilde{\omega}}$ für Funktionen in $H_0^1(\tilde{\omega})$ [120] und der Tatsache, daß die zur Flußberechnung benötigte Zellwandfläche $\Delta A_E \simeq h$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} |\langle r_h(\mathbf{u}_h), \Psi \rangle_\omega| &\leq \left| \int_{\tilde{\omega}} \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) \Psi + \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla \Psi dx \right| \\ &\leq h |\mathbf{S}(\mathbf{u}_h)| \|\Psi\|_{0,\tilde{\omega}} + \left| \sum_{E \subset \partial\omega} \int_{\Delta A_E} [\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \vec{n}]_E \cdot \Psi dS \right| \\ &\leq C \left(h^2 |\mathbf{S}(\mathbf{u}_h)| + \sum_{E \subset \partial\omega} |[\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \vec{n}]_E| h_E \right) \|\nabla \Psi\|_{0,\tilde{\omega}}. \end{aligned}$$

Wiederum ist mit der Definition des Residuums der Beweis erbracht. ■

Der Indikator (3.95) kann das Residuum überschätzen. Die Definition (3.95) läßt keine Abschätzung des Residuums von unten zu. Nun werden die Erhaltungsgleichungen für die Schwerteilchen betrachtet. Die Strategie zur Abschätzung des Residuums kann wie oben dargestellt angewandt werden. Um die ersten Ableitungen durch die viskosen Flüsse zu approximieren, befinde sich die diskrete Lösung \mathbf{u}_h nun in S_h^1 , wobei S_h^1 den Raum stückweise linearer Funktionen bezeichnet. Der Indikator wird analog definiert als

$$\nu_\omega^h(\mathbf{u}_h) := \max_{E \subset \partial E} |[\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \vec{n}]_E| \cdot \Delta A_E + \left| \int_\omega (\mathbf{S}(\mathbf{u}_h) + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)) dx \right|. \quad (3.97)$$

Wegen der Betrachtung eines axialsymmetrischen Problems in Zylinderkoordinaten wird die Länge h_E durch die Zellwandfläche ΔA_E (Normalenvektor \vec{n}) einer dualen Zelle ω ersetzt. Da die Erhaltungsgleichungen nicht dimensionslos sind, wird der Indikator in vier gewichtete Indikatoren aufgespalten.

Der neue lokale und gewichtete Indikator ν_ω für eine duale Zelle ω mit dem Volumen ΔV_ω wird nun berechnet als

$$\nu_\omega^{(1)} = \frac{\max_{E \subset \partial\omega} \{ |\rho \vec{v} \cdot \vec{n}|_E \Delta A_E \}}{\rho \Delta V_\omega}, \quad (3.98)$$

$$\nu_\omega^{(2)} = \frac{\max_{E \subset \partial\omega} \left\{ \left| \left[\left(\vec{f}_{z,invisc} + \vec{f}_{z,visc} \right) \cdot \vec{n} \right]_E \Delta A_E \right\}}{\sqrt{(\rho v_z)^2 + (\rho v_r)^2} \Delta V_\omega}, \quad (3.99)$$

$$\nu_\omega^{(3)} = \frac{\max_{E \subset \partial\omega} \left\{ \left| \left[\left(\vec{f}_{r,invisc} + \vec{f}_{r,visc} \right) \cdot \vec{n} \right]_E \Delta A_E \right\} + \left| \int_\omega q_r dV \right|}{\sqrt{(\rho v_z)^2 + (\rho v_r)^2} \Delta V_\omega}, \quad (3.100)$$

$$\nu_\omega^{(4)} = \frac{\max_{E \subset \partial\omega} \left\{ \left| \left[\left(\vec{f}_{h,invisc} + \vec{f}_{h,visc} \right) \cdot \vec{n} \right]_E \Delta A_E \right\} + \left| \int_\omega q_h dV \right|}{e_h \Delta V_\omega}, \quad (3.101)$$

$$\nu_\omega := \frac{1}{4} (\nu_\omega^{(1)} + \nu_\omega^{(2)} + \nu_\omega^{(3)} + \nu_\omega^{(4)}). \quad (3.102)$$

Die Wahl der konservativen Variablen als Gewichte stellte sich in zahlreichen numerischen Experimenten als sehr vorteilhaft heraus.

Die neue lokale Gittergröße g_1 wird definiert als

$$g_1 = \sqrt{\frac{C_{\varepsilon 1}}{\nu_\omega}}. \quad (3.103)$$

Kombiniert wird dieser mathematisch fundierte Indikator mit einem Gradientenindikator in der Form

$$g_2 = \sqrt{\frac{C_{\varepsilon 2}}{\left\{ \frac{|\nabla T_h|}{T_h} + \frac{|\nabla v_z|}{|v_z|} + \frac{|\nabla v_r|}{|v_r|} + \frac{|\nabla \rho|}{\bar{\rho}} \right\}}}, \quad (3.104)$$

sodaß die für den Advancing Front Algorithmus benötigte lokale Gitterkantenlänge schließlich als das arithmetische Mittel

$$g = \frac{1}{2} (g_1 + g_2) \quad (3.105)$$

berechnet wird.

Die Berechnung der Ableitungen in den Indikatoren erfolgt mit dem Least-Squares-Ansatz. Die Volumenintegrale werden mit der Mittelpunktsregel ausgewertet, und die Sprünge der Flüsse werden mit Hilfe der Werte in den Zellschwerpunkten ermittelt. Die Mittelwerte im Gradientenindikator sind die arithmetischen Mittel der Werte einer dualen Zelle und der umgebenden Nachbarzellen.

Durch unabhängige Wahl der Konstanten C_{ε_1} und C_{ε_2} können die sich aus beiden Indikatoren ergebenden Verfeinerungen getrennt untersucht und kombiniert werden. Im numerischen Experiment stellt sich dabei heraus, daß der mathematisch fundierte Indikator insbesondere eine deutlich höhere Grenzschichtauflösung fordert als der Gradientenindikator, während beide Indikatoren zu in etwa gleichen Verfeinerungen von Stößen führen.

Die vom ersten Indikator geforderte höhere Grenzschichtauflösung ist unter physikalischem Blickwinkel durchaus sinnvoll, da die hier ablaufenden Prozesse von zentraler Bedeutung für den Energiehaushalt und (wegen der Wandreibung) für die Schubkraft eines Triebwerks sind.

Die Verwendung des Gradientenindikators hat den Vorteil, daß die resultierenden Gitterkantlängen g sich relativ gleichmäßig von Ort zu Ort ändern. Um allzu große Änderungen von g auszuschließen, werden die auf dem Berechnungsgitter vorliegenden Werte von g ferner dahingehend überprüft, daß sie sich nicht um mehr als den Faktor 1,3 von Zellschwerpunkt zu Zellschwerpunkt unterscheiden.

Die mit dem Advancing Front Algorithmus erzeugten Triangulierungen werden durch das Verschieben von Knotenpunkten in die Schwerpunkte der dualen Zellen und durch das Umklappen von Kanten zur Vermeidung zu kleiner Winkel optimiert. Die vorhandene numerische Lösung wird schließlich durch Interpolation der primitiven Variablen vom alten auf das neue Gitter übertragen.

Die Entwicklung mathematisch fundierter Fehlerschätzer und -indikatoren für komplexe Systeme von hyperbolisch-parabolischen Erhaltungsgleichungen ist gewiß nicht abgeschlossen. Der hier gewählte, in der Anwendung sehr erfolgreiche Ansatz soll Ansporn und Aufforderung insbesondere an die Mathematik sein, weiter intensiv die Eigenschaften von partiellen Differentialgleichungssystemen zu erforschen, um physikalisch wie mathematisch in der Praxis eine sinnvolle und effiziente Gitteradaption zu erzielen.

Kapitel 4

Ergebnisse

4.1 Plasmabeschleuniger RD3

Für den Plasmabeschleuniger RD3 wurden Rechnungen für einen Argonmassenstrom von 2.4 g/s bei Stromstärken von 500 A , 1000 A , 1500 A und 2000 A durchgeführt, um den Lichtbogenansatz an der wassergekühlten Anode genauer zu untersuchen.

In Abbildung 4.1 ist eine typische Triangulierung des Rechengebietes ersichtlich. Im Inneren der Beschleunigerdüse und in einem zur Rechenzeitverkürzung begrenzten Gebiet hinter dem Anodenendquerschnitt wird das Gitter während eines Rechenlaufes für einen durch Massenstrom und Stromstärke bestimmten Betriebspunkt sukzessive verfeinert. An das Verfeinerungsgebiet schließt sich ein Gebiet mit relativ grober Diskretisierung an, dessen Ausströmrand soweit stromab liegt, daß bei einem aus dem Triebwerk herausgetragenen Lichtbogen die Randbedingung $\Psi = 0$ zulässig ist.

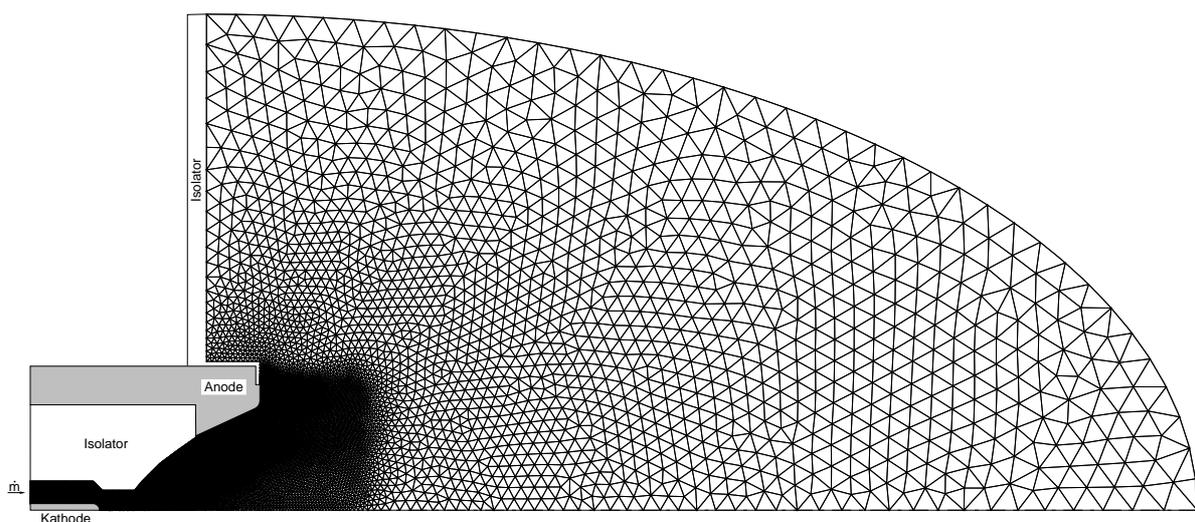


Abbildung 4.1: Gesamtansicht des adaptierten Primärgitters für den Plasmabeschleuniger RD3 (12163 Gitterpunkte, 1500 A , 2.4 g/s)

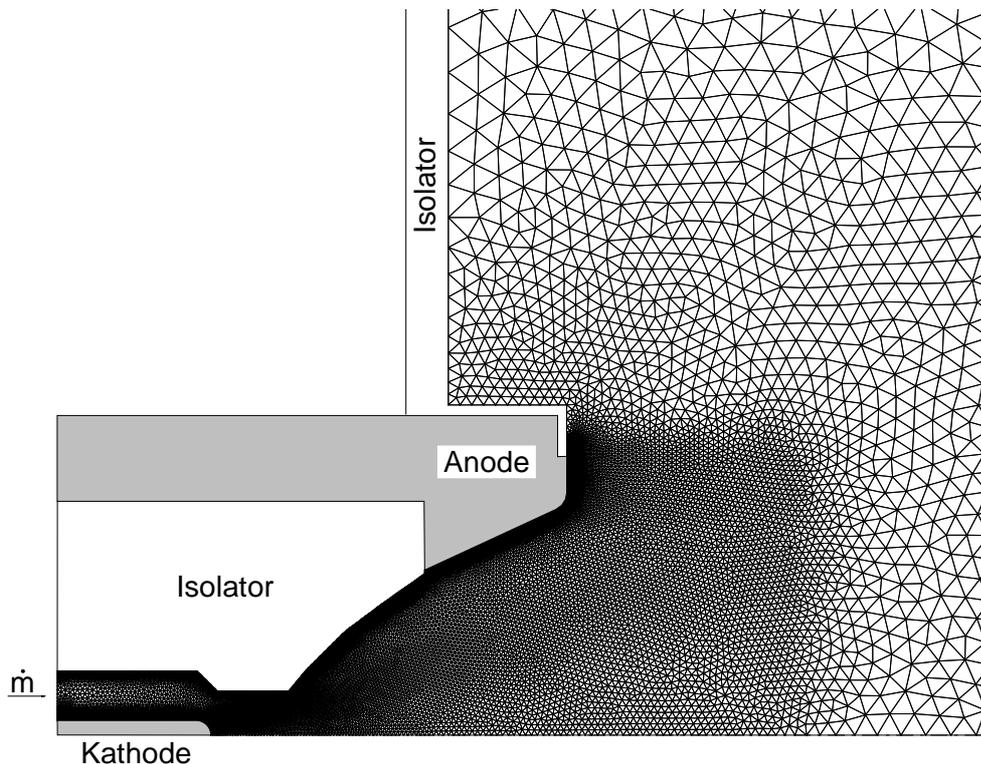


Abbildung 4.2: Teilansicht des adaptierten Primärgitters für den Plasmabeschleuniger RD3 (12163 Gitterpunkte, 1500 A, 2.4 g/s)

Die Teilansicht des Gitters in Abbildung 4.2 zeigt, daß das Gitter durch den Verfeinerungsindikator (3.105) sowohl an allen Festkörperwänden zur verbesserten Grenzschichtauflösung als auch im Düsenhalsbereich, in dem die Quellterme sehr groß sind und außerdem der Schalldurchgang stattfindet, zuverlässig verfeinert wird. Oberhalb und stromab des Düsenendquerschnitts wird das Gitter grob gelassen, um Rechenzeit zu sparen.

Der Ansatz des Lichtbogens an der Kathodenspitze ändert sich mit zunehmender Stromstärke (Abb. 4.3 – 4.6) kaum, an der Anode hingegen drastisch.

Bei 500 A verteilt sich der Strom nahezu gleichmäßig auf der Anodenoberfläche. Bei 1000 A fließt ein kleiner Teil des Stromes (100 A) knapp hinter dem Isolator ab, während der Großteil des Lichtbogens auf der hinteren Anodenaußenfläche ansetzt. Ein ähnliches Bild ergibt sich für 1500 A. Bei 2000 A fließen 400 A knapp hinter dem Isolator ab, 300 A über den mittleren Teil der der Symmetrieachse zugewandten Anodenoberfläche, und der restliche Strom über die hintere Anodenaußenfläche.

Zur Klärung der Ursache für diese nicht gleichmäßige Verteilung des Lichtbogenansatzes auf der Anode wurden die verschiedenen Terme in Gleichung (2.59) näher untersucht. Dabei wurden auch Berechnungen für dieselben vier Stromstärken ohne den Term für die Diffusion aufgrund des Elektronendrucks $\frac{1}{en_e} \nabla p_e$ in Gleichung (2.59) durchgeführt

(Abb. 4.7 und 4.8). Während bei 500 A kein wesentlicher Unterschied mit und ohne diesen Term festzustellen ist, zeigt der Vergleich der Stromverteilungen für höhere Stöme von 1000 A (Abb. 4.4 und 4.7) und 2000 A (Abb. 4.6 und 4.8) deutlich, daß dieser Term im Überschallteil der Düse gegenüber den anderen Termen eine dominante Rolle spielt. Er treibt den Großteil des Lichtbogens aus der Düse heraus, sodaß er auf der hinteren Anodenaußenfläche ansetzen muß.

In [16] ist der Term $\frac{1}{en_e}\nabla p_e$ in der Entladungsgleichung nicht enthalten, da er als Quellterm in der in [16] gewählten FE-Diskretisierung zu numerischen Schwierigkeiten führt. Die hier erarbeitete Flußformulierung und die FV-Diskretisierung erlauben auf elegantem Wege eine einfache und numerisch stabile Mitberechnung dieses offensichtlich physikalisch sehr wichtigen Termes.

In der Verteilung der Elektronentemperatur, die für 2000 A exemplarisch in Abbildung 4.9 gezeigt ist, ist im Bereich der hinteren Anodenaußenfläche zusätzlich ein starkes Abkühlen durch die starke Expansion des Plasmas in Oberflächennähe zu erkennen, wodurch auch die elektrische Leitfähigkeit abnimmt.

Die Elektronentemperatur erreicht ein Maximum von 38527 K vor der Kathodenspitze und fällt auf der Symmetrieachse durch die Expansion des Plasmas relativ schnell auf 6400 K ab. Im Bereich des Lichtbogens im Überschallteil haben die stromtragenden Elektronen Temperaturen ungefähr zwischen 10000 K und 20000 K.

Im Vergleich mit der Schwerteilchentemperatur in Abbildung 4.10 ist die Nicht-Isothermie von Schwerteilchen und Elektronen deutlich zu erkennen. Die Schwerteilchentemperatur hat ein Maximum von 36143 K vor der Kathodenspitze und fällt schnell auf Werte zwischen 2500 K und 6500 K im Anodenendquerschnitt ab. Der Ionisationsgrad (Abb. 4.11) friert im Überschallteil der Düse nahezu ein. Gemäß seiner Definition in (2.45) nimmt er wegen Mehrfachionisation mit einem Maximum von 1,3 vor der Kathodenspitze einen Wert größer als Eins an. Auffällig ist der in weiten Teilen des Überschallteils, insbesondere auch vor der Anode, sehr geringe Ionisationsgrad von ungefähr 0,07.

Zu bemerken ist bei der Dichteverteilung (Abb. 4.12) das Verdünnungsgebiet oberhalb der Anode. Hier sind die Erhaltungsgleichungen streng genommen nicht mehr zulässig, da die mittleren freien Weglängen größer als die Zelldurchmesser werden. Zur quantitativ genauen Berechnung müßte eher eine kinetische Modellierung verwendet werden. Für ein Gebiet niedriger Dichte sind also quantitative Aussagen nicht sinnvoll, wohl aber die qualitative phänomenologische Aussage, daß eine starke Verdünnung auftritt.

Für die numerische Berechnung ist vorteilhaft, daß insbesondere der Riemannlöser auch bei solch geringen Dichten einwandfrei funktioniert, ohne die Bedingung der Positivität von Druck und Dichte zu verletzen.

Das den Beschleuniger verlassende, in großen Bereichen nur gering ionisierte Plasma hat also für die betrachteten Betriebsparameter eine im Vergleich zum Düsenhalsbereich niedrige Temperatur. Im Rahmen der Verwendung des RD3 zum Metallspritzen in der Materialentwicklung erscheint eine Metallzuführung hinter der Düse daher nicht geeignet.

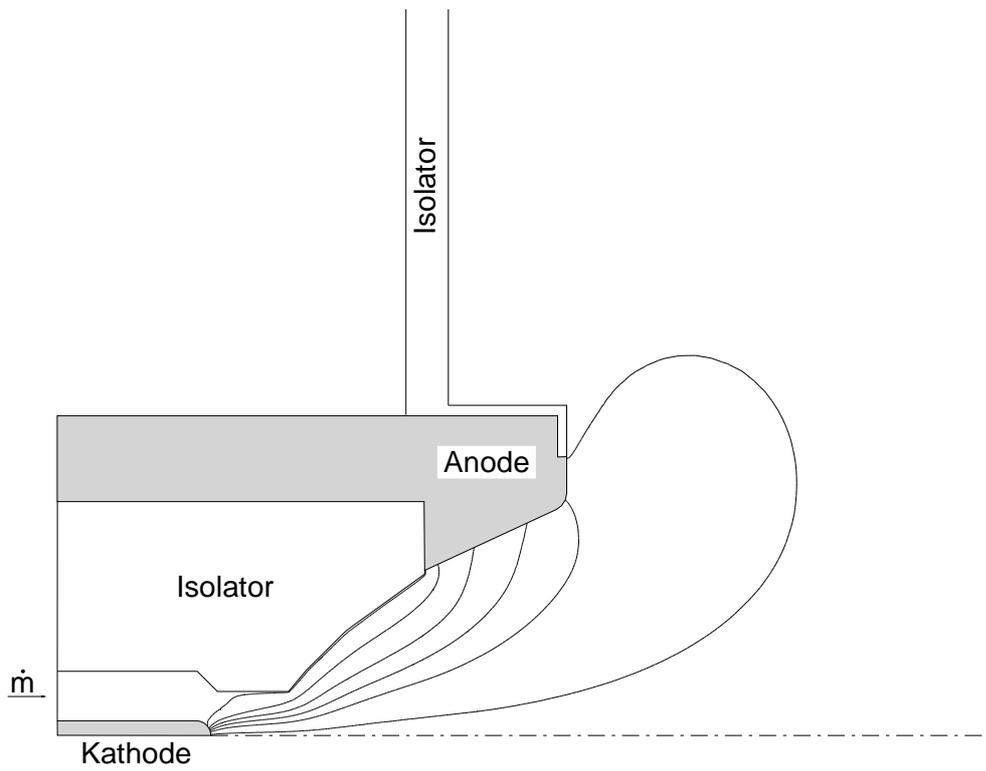


Abbildung 4.3: RD3: Stromverteilung Ψ , 500 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)

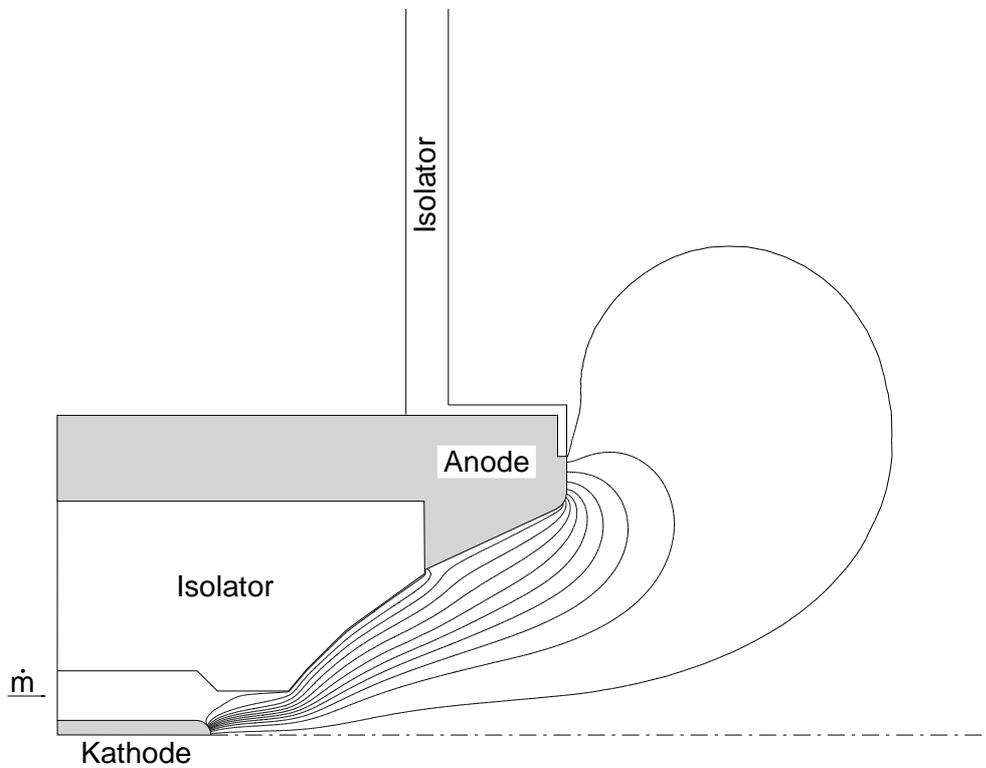


Abbildung 4.4: RD3: Stromverteilung Ψ , 1000 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)

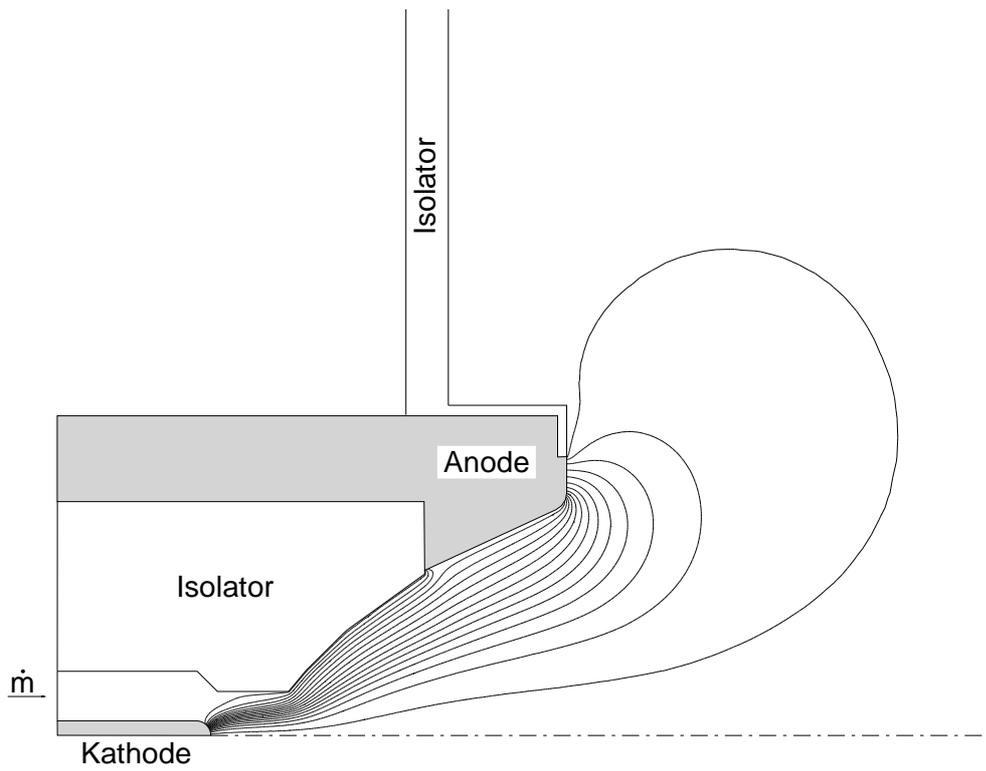


Abbildung 4.5: RD3: Stromverteilung Ψ , 1500 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)

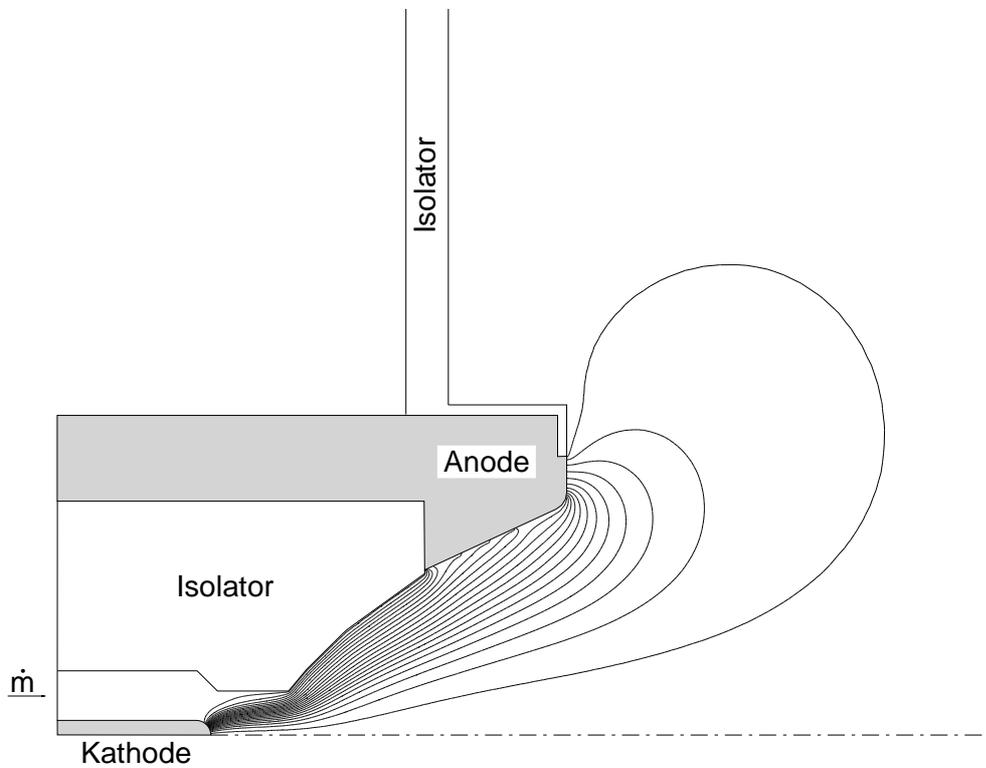


Abbildung 4.6: RD3: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 2.4 g/s (100 A zwischen 2 Isolinien)

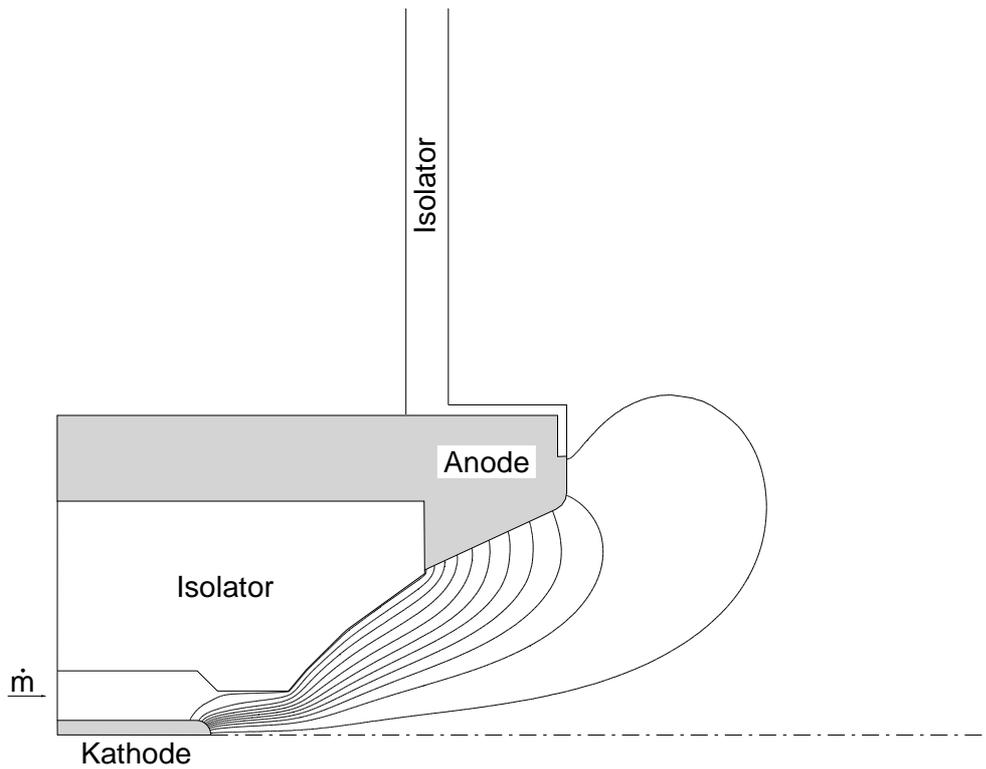


Abbildung 4.7: RD3: Stromverteilung Ψ , 1000 A, 2.4 g/s, ohne den Term $\frac{1}{en_e} \nabla p_e$ im Ohm'schen Gesetz (100 A zwischen 2 Isolinien)

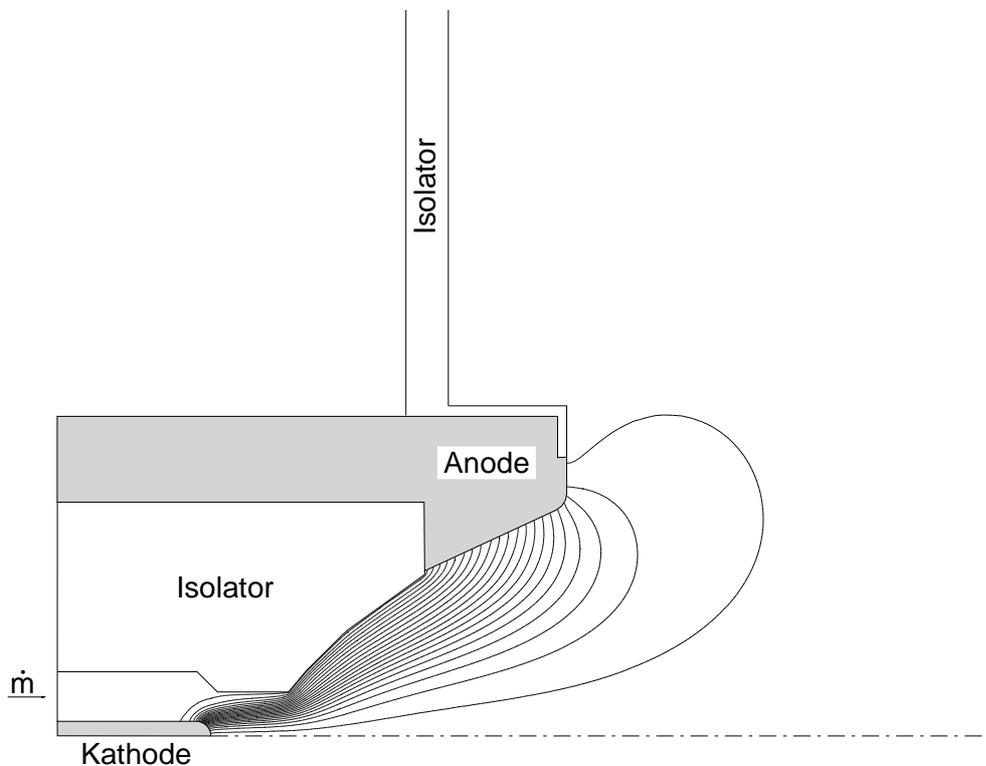


Abbildung 4.8: RD3: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 2.4 g/s, ohne den Term $\frac{1}{en_e} \nabla p_e$ im Ohm'schen Gesetz (100 A zwischen 2 Isolinien)

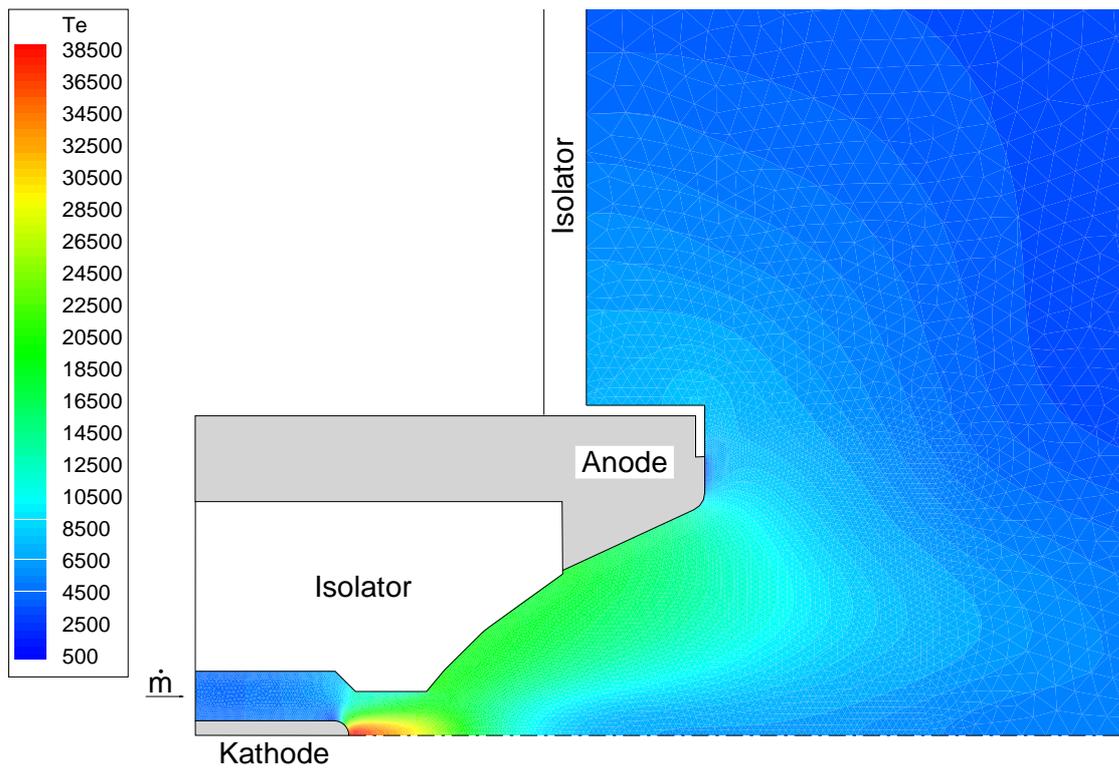


Abbildung 4.9: RD3: Elektronentemperatur T_e , 2000 A, 2.4 g/s

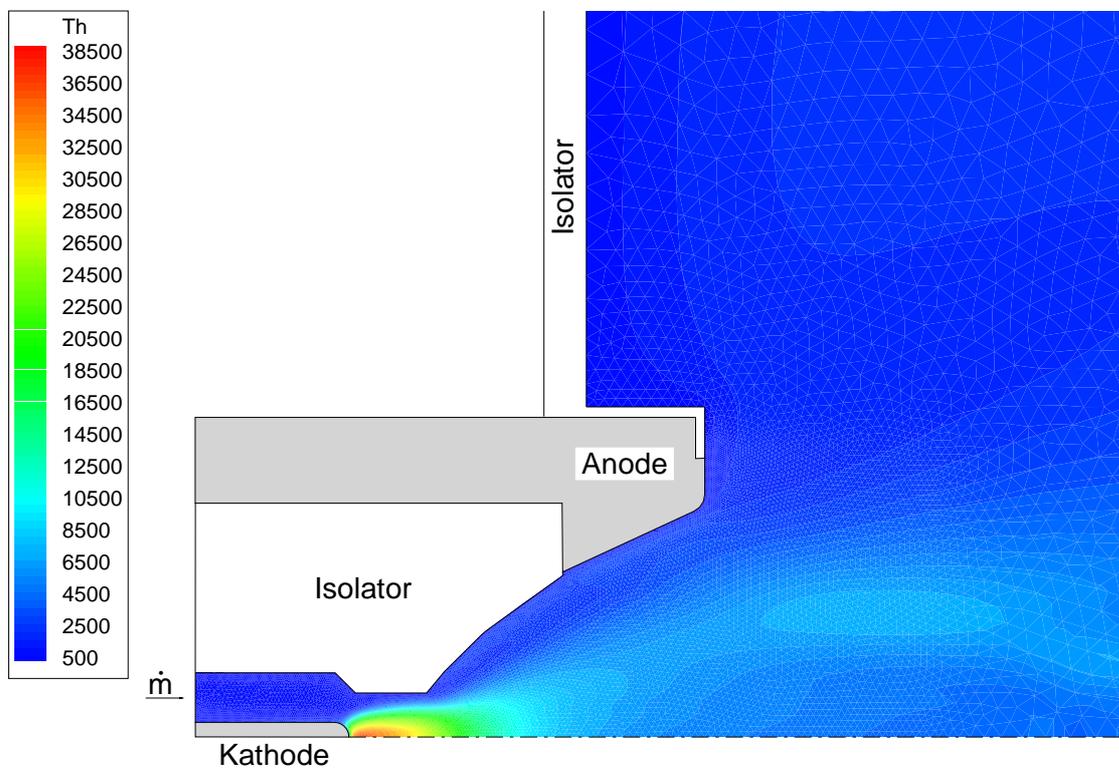


Abbildung 4.10: RD3: Schwerteilchentemperatur T_h , 2000 A, 2.4 g/s

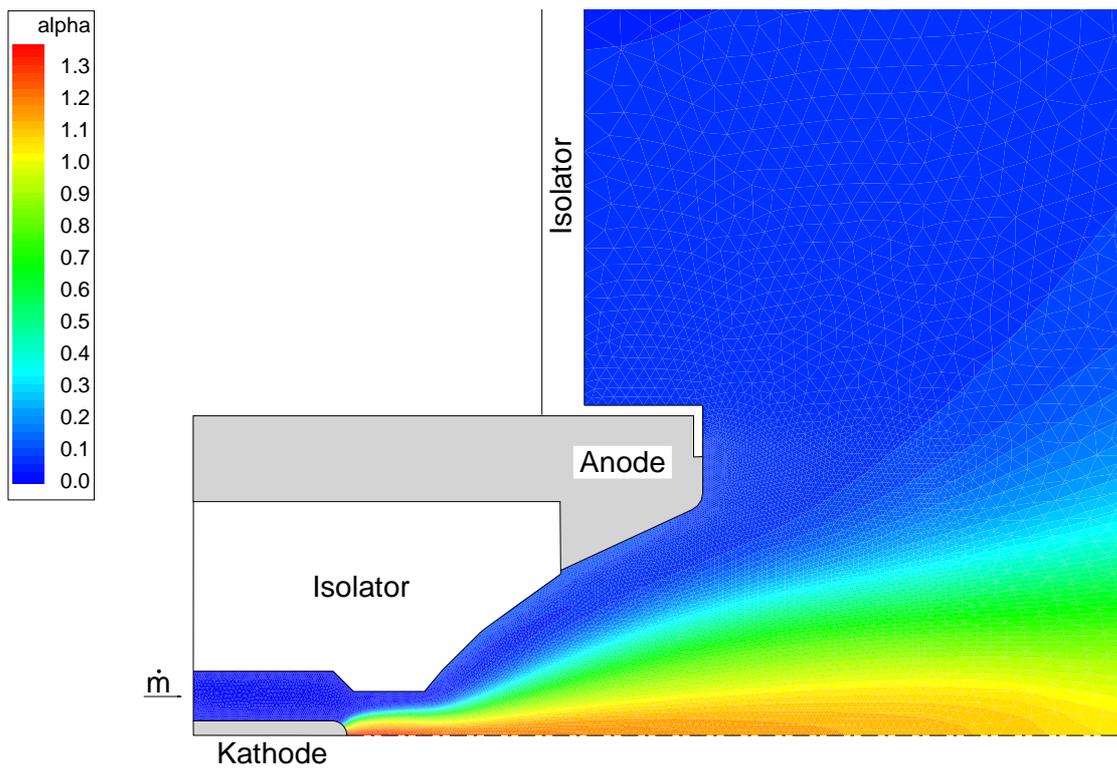


Abbildung 4.11: RD3: Ionisationsgrad α , 2000 A, 2.4 g/s

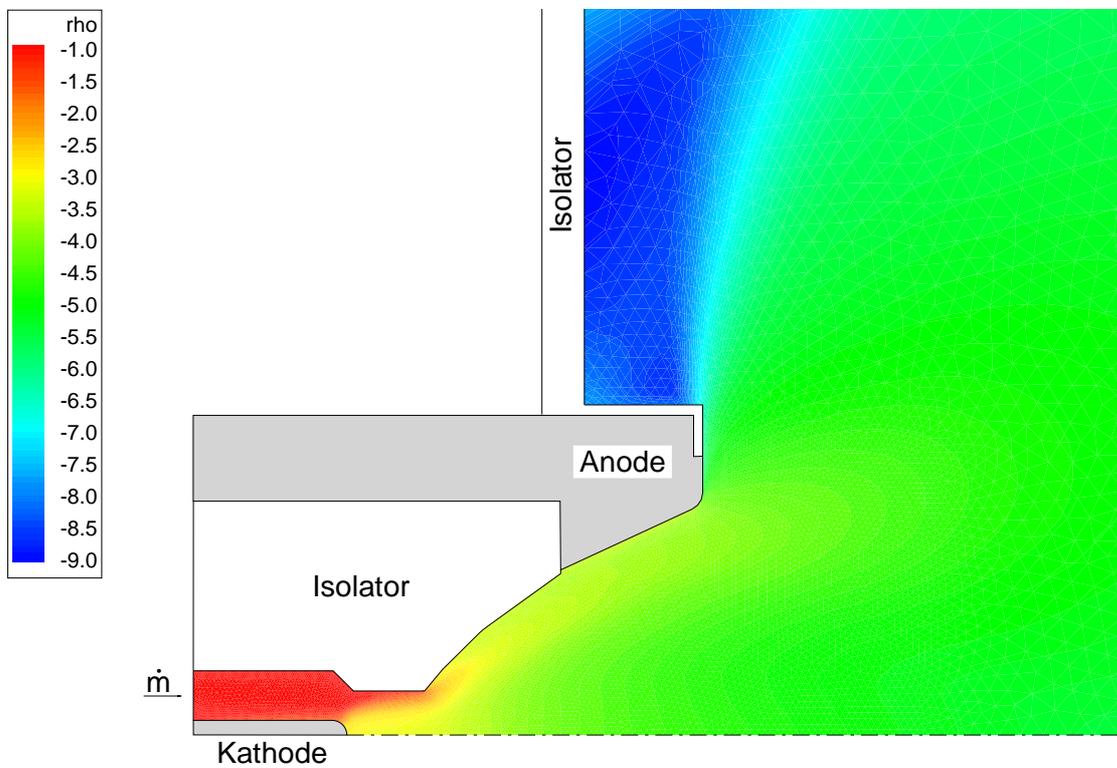


Abbildung 4.12: RD3: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 2000 A, 2.4 g/s

Um den numerisch vorausgesagten Lichtbogenansatz an der Anode experimentell zu verifizieren, wurde für das RD3 zunächst in der ursprünglichen Konfiguration eine Strom-/Spannungs-Kennlinie aufgenommen. Anschließend wurden nacheinander verschiedene Bereiche der Anodenoberfläche mit Keramik abgedeckt (Abb. 4.13 und 4.14). Dabei wurde von der ersten Modifikation erwartet, daß sie im mittleren Strombereich keinen nennenswerten Einfluß auf den Stromansatz haben sollte, da hier die Keramikschicht in einem Oberflächenbereich liegt, der nach der numerischen Simulation für 1000 A und 1500 A praktisch keinen Stromansatz aufweist (Abb. 4.4 und 4.5). Die zweite und dritte Modifikation sollten zeigen, daß der Anodenanfang bzw. die Anodenaußenfläche im Gegensatz dazu zur Stromleitung genutzt werden.

Die aufgenommenen Strom-/Spannungs-Kennlinien (Abb. 4.15) bestätigen im wesentlichen die Voraussage der numerischen Simulation. Die erste Modifikation zeigt bei 1000 A und 1500 A tatsächlich keinen Einfluß gegenüber der nichtbeschichteten Anode. Dies trifft auch für Ströme kleiner als 1000 A zu, was sich auf die geringe Stromdichte im abgedeckten Bereich (Abb. 4.3) zurückführen läßt. Bei 1900 A tritt eine um 6 Volt höhere Spannung auf, da der Stromansatz (Abb. 4.6) durch die Abdeckung sichtlich herausgetrieben wird. Durch die numerische Simulation wird dies bestätigt, bei 2000 A wird auch der Teil des Lichtbogens, der ohne Abdeckung (Abb. 4.6) über den mittleren Teil der der Symmetrieachse zugewandten Anodenoberfläche abfließt, durch die Abdeckung hinausgetrieben (Abb. 4.16).

Da bei der zweiten Modifikation die Spannung um ca. 8 Volt steigt, muß im Betrieb ohne Keramik ein Teil des Stromes am Anfang der Anode ansetzen. Umgekehrt muß auch ein Teil des Stromes im Betrieb ohne Keramik auf der Anodenaußenfläche ansetzen, da für die dritte Modifikation die Spannung um ca. 5 Volt sinkt, was auf einen kürzeren Lichtbogen schließen läßt. Es sei noch bemerkt, daß für die zweite und dritte Modifikation nur jeweils eine Stromstärke für kurze Zeit (ca. 1 Minute) eingestellt wurde, um durch diese doch recht extrem erscheinenden Versuche das RD3 nicht zu gefährden. Das Absinken der Spannung bei der zweiten Modifikation in Abbildung 4.15 ist auf das partielle Durchbrennen der Keramikabdeckung im vorderen Anodenbereich zurückzuführen.

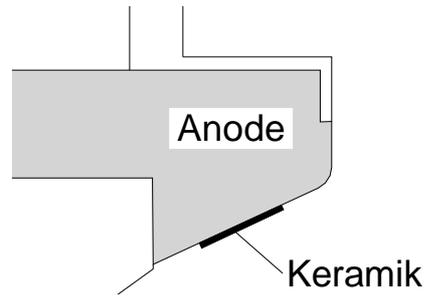
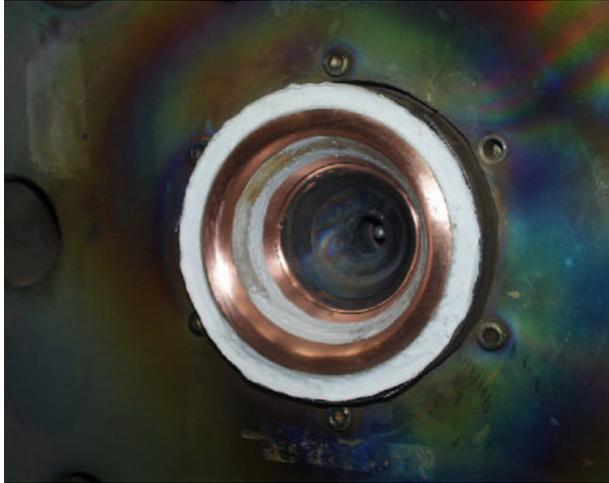


Abbildung 4.13: RD3: Mit Keramikabdeckung, Modifikation 1

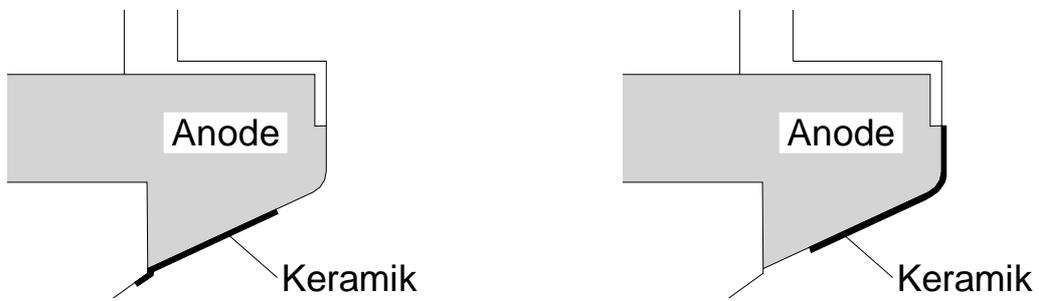


Abbildung 4.14: RD3: Mit Keramikabdeckung, Modifikationen 2 (links) und 3 (rechts)

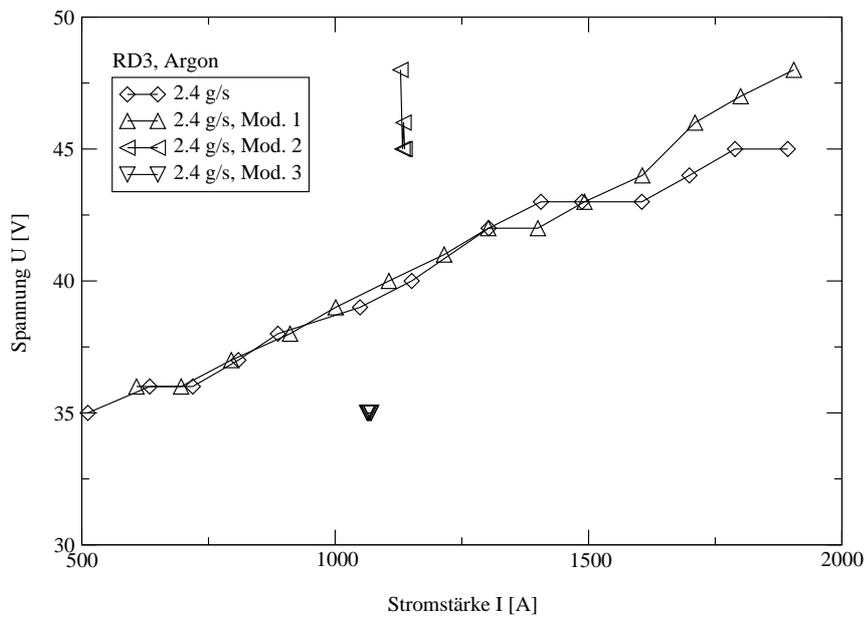


Abbildung 4.15: Strom-/Spannungsmeßkurven RD3

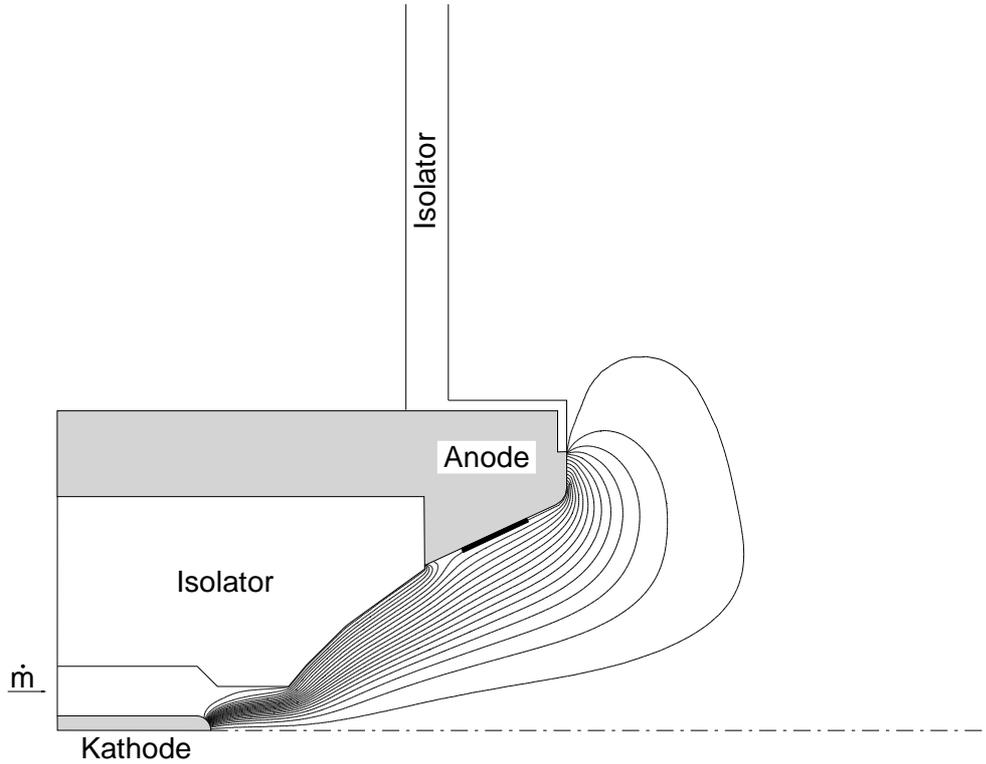


Abbildung 4.16: RD3: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 2.4 g/s, Modifikation 1 mit Keramikabdeckung (100 A zwischen 2 Isolinien)

Der Schub F wird im Anodenendquerschnitt als

$$F = \sum_{\Delta A} \left(p_h + p_e + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v_z^2 \right) \Delta A \quad (4.1)$$

berechnet. Der dynamische Anteil ρv_z^2 trägt bei düsenförmigen Konfigurationen wie der des RD3 über 80 Prozent des Schubes bei. Auch ergeben die numerischen Berechnungen, daß der Schubanteil der Lorentzkräfte, der durch das Herausstragen der Stromlinien aus der Düse entsteht, ebenso vernachlässigbar klein ist wie der des Tankgedruckes.

Im Schub F ist der magnetische Schub $F_{j \times B}$ enthalten, der durch die Lorentzkräfte entsteht:

$$F_{j \times B} = \sum_{\Delta V} \left(\vec{j}^{LS} \times \vec{B} \right)_z \Delta V . \quad (4.2)$$

Die Druckerhöhung durch die radiale Lorentzkraftkomponente ist in (4.2) vernachlässigt.

Die Spannung des Lichtbogens ohne die Elektrodenfallspannungen ergibt sich aus

$$U_P = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{j}^{LS} \cdot \vec{E}^{LS} \Delta V}{I} . \quad (4.3)$$

$I[A]$	$\dot{m}[g/s]$	$p_{ein}[kPa]$ num.	$U_P[V]$ num.	$U_{C+P+A}[V]$ exp.	$F_{j \times B}[N]$ num.	$F[N]$ num.
500	2,4	7,0	20,0	35,0	0,1	3,7
1000	2,4	9,9	26,7	39,2	0,3	5,8
1500	2,4	12,3	31,4	43,3	0,7	7,7
2000	2,4	14,4	34,2	-	1,2	9,4

Tabelle 4.1: Kenndaten RD3 (num.: numerisch, exp.: experimentell)

Die integralen Charakteristika des RD3 sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt. Obwohl das RD3 bei den Experimenten nicht auf einer Schubmeßwaage montiert und keine Druckmeßbohrung auf Höhe der Kathodenwurzel vorhanden war, sind der Vollständigkeit halber auch die numerischen Ergebnisse für den Einströmdruck p_{ein} , den magnetischen Schubanteil $F_{j \times B}$ und den Schub F angegeben.

Aufgrund der relativ kleinen Ströme fällt der magnetische Schubanteil nur gering aus, weshalb das RD3 für die betrachteten Betriebszustände auch nicht als MPD–Triebwerk angesehen werden kann. Da bei den numerischen Berechnungen keine detaillierten Elektrodenmodelle verwendet werden, kann nur die über den Lichtbogen im Plasma abfallende Spannung U_P angegeben werden. Diese ist stets kleiner als die Gesamtspannung U_{C+P+A} , die auch noch die Kathoden– und Anodenfallspannungen beinhaltet. Die Einbeziehung der Elektroden in die Berechnungen stellt daher eine wichtige zukünftige Aufgabe dar.

Erstmalig ist hier in der numerischen Simulation die entscheidende Bedeutung der Diffusion aufgrund des Elektronendrucks für den Lichtbogenansatz an der Anode düsenförmiger MPD–Eigenfeldbeschleuniger erfaßt und im Experiment bestätigt worden.

4.2 Düsenförmiges Triebwerk DT2

Bei einem gegebenen Massenstrom sind düsenförmige MPD–Eigenfeldtriebwerke durch eine kritische Stromstärke begrenzt, oberhalb derer Instabilitäten auftreten, die unter anderem eine drastische Lebensdauerverkürzung der Triebwerke zur Folge haben oder gar zu ihrer Zerstörung führen. Um einen Beitrag zur Aufklärung der Ursachen für solche Instabilitäten zu leisten, werden hier für Argonmassenströme von 0.8 g/s sowie 0.3 g/s und Stromstärken zwischen 2000 A und 5000 A die Plasmaströmungen im MPD–Eigenfeldtriebwerk DT2 untersucht.

Das in Abbildung 4.17 dargestellte adaptierte Primärgitter zeigt, daß der Verfeinerungsindikator (3.105) im Düseninneren zuverlässig zu einer verfeinerten Grenzschichtauflösung an allen Festkörperwänden führt. Auch im Düsenhalsbereich findet eine Gitterverfeinerung statt, die wegen der hier auftretenden großen Quellterme der Ohm’schen Heizung, des elastischen Energietransfers zwischen Elektronen und Schwerteilchen sowie der Ionisationsreaktionen erforderlich ist. Oberhalb des Düsenaustritts wird das Gitter wie beim RD3 zur Rechenzeiterparnis grob gelassen. Die rechte und obere Berandung des Rechengebietes entspricht geometrisch derjenigen in Abbildung 4.1.

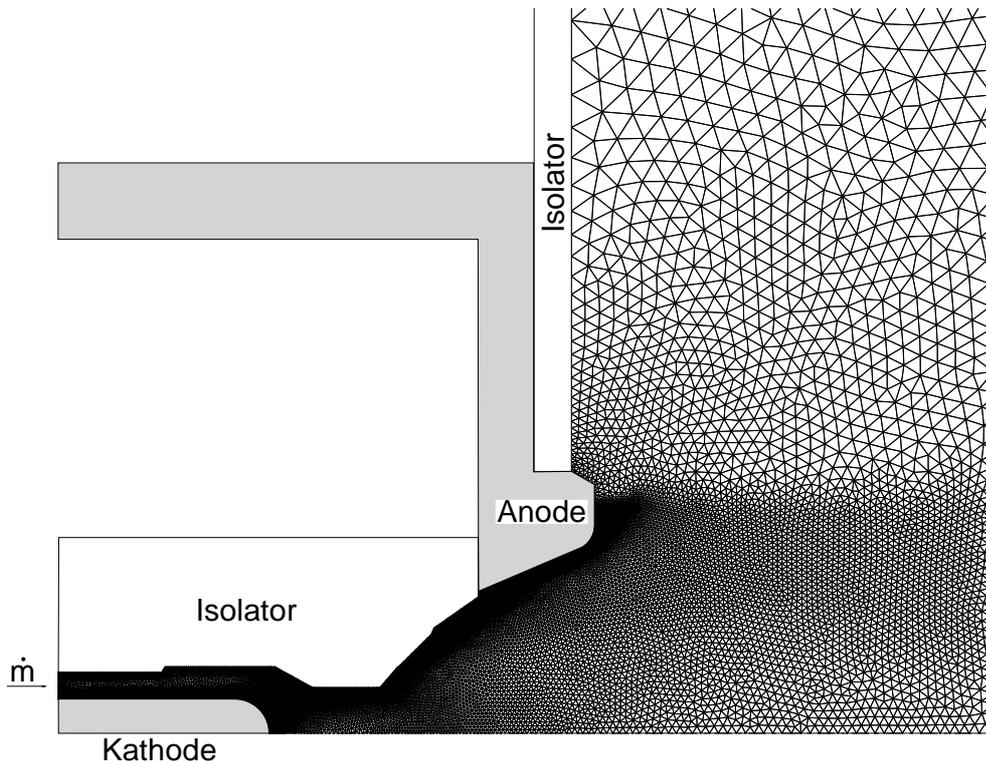


Abbildung 4.17: Teilansicht des adaptierten Primärgitters für das MPD–Eigenfeldtriebwerk DT2 (29518 Gitterpunkte, 4000 A , 0.8 g/s)

Bei einem Massenstrom von 0.8 g/s und einem Strom von 2000 A (Abb. 4.18) setzt der Lichtbogen größtenteils vorne an der Anode an. Verursacht wird dies durch den radialen Versatz der Struktur zwischen Isolator und Anode, der zu einer lokalen Eckenexpansionsströmung führt, sodaß die Diffusion aufgrund des Elektronendrucks den Lichtbogen hier zum Ansetzen bringt. Bei 3000 A (Abb. 4.19) nimmt der Stromanteil zu, der durch Diffusion aufgrund des Elektronendrucks zum Ansatz an der Anodenaußenfläche getrieben wird, und der Lichtbogenansatz vorne an der Anode wandert etwas stromabwärts. Bei 4000 A (Abb. 4.20) setzt der Strom im hinteren Anodenbereich an, gleichzeitig beginnt sich der Lichtbogen stromab des Düsenhalses aufgrund des magnetischen Druckes zusammenzuziehen. Hier handelt es sich mit Sicherheit nicht um einen dynamischen Pinch-Effekt, sondern eher um eine Art eigenmagnetische Kontraktion, wie sie in [75] beschrieben wird. Im folgenden wird aber der Begriff Pinch-Effekt weiter verwendet. Sehr deutlich ist dieser Effekt schließlich bei 5000 A (Abb. 4.21).

Für die Dichte vor der Anode hat dies drastische Auswirkungen. Während sie für 2000 A (Abb. 4.22) und 3000 A (Abb. 4.23) zwischen 10^{-5} kg/m^3 und 10^{-4} kg/m^3 beträgt, nimmt sie bei 4000 A (Abb. 4.24) und 5000 A (Abb. 4.25) um vier Größenordnungen ab, sodaß es zu einer starken Ladungsträgerverarmung vor der Anode kommt. Im Experiment [11, 121] hat sich gezeigt, daß sich ein Strom von 5000 A bei einem Massenstrom von 0.8 g/s nicht erreichen läßt, da vorher die aus der Kathodenfallspannung, der Spannung des Lichtbogens im quasineutralen Plasmabereich und der Anodenfallspannung zusammengesetzte Bogenspannung stark ansteigt und Plasmaoszillationen ab 4650 A auftreten.

Die Korrelation der numerischen Simulation mit den experimentellen Daten im Strombereich der Instabilitäten zeigt damit, daß, wie theoretisch schon lange vorhergesagt, eine primäre Ursache für das Auftreten von Plasmainstabilitäten in düsenförmigen MPD-Eigenfeldbeschleunigern die durch den Pinch-Effekt hervorgerufene Dichte- und damit Ladungsträgerverarmung vor der Anode ist.

Im Bereich der Instabilitäten konnten in vorangegangenen Arbeiten [15, 16] keine Berechnungen durchgeführt werden, weil der magnetische Druck als Lorentzkraft-Quellterm berechnet wurde, was zu numerischen Schwierigkeiten führte. Hier ist nun der magnetische Druck in der Upwind-Flußberechnung enthalten, sodaß die numerische Lösung insbesondere der Impulserhaltungsgleichungen problemlos ist.

Während eine qualitative Aussage über den Beginn von Plasmainstabilitäten durch das Erfassen des starken Dichteabfalls vor der Anode jetzt zumindest grob möglich ist, steht eine exakte quantitative Voraussage noch aus. Hierzu müssen in den nächsten Schritten der Weiterentwicklung des Berechnungsverfahrens Elektrodenmodelle für die Anode und die Kathode implementiert werden. Im Bereich nahe der Anode ist dabei strenggenommen die Verwendung eines Flüssigkeitsmodells aufgrund der starken Verdünnung nicht mehr zulässig, vielmehr wird hier die Kopplung eines kinetischen Modells mit dem Flüssigkeitsmodell anzustreben sein. Hierzu und natürlich auch zur Instabilitätsanalyse kann das Berechnungsverfahren bereits Datensätze liefern. Zudem ist eine Vorauswahl von Düsengeometrien möglich, um den Dichteabfall vor der Anode in Richtung höherer Ströme zu verschieben.

Bemerkenswert ist, daß die Schwerteilchentemperatur (Abb. 4.26 und 4.27) vor der Anode im Bereich des verdünnten Plasmas stark ansteigt. Liegen die Maximaltemperaturen im Düsenhalsbereich für 4000 A bei 37971 K und für 5000 A bei 39839 K, so steigt sie für 5000 A auf bis zu 53687 K im Bereich vor der Anode. Die kinetische Energie des Plasmas wird hier durch viskose Abbremsung in thermische Energie umgewandelt. Während der Zahlenwert selber aufgrund der Verdünnung des Plasmas eher als numerisches Artefakt zu bewerten ist, so ist diese Tendenz zur Aufheizung doch als möglicher Hinweis auf einen kritischen Betriebszustand anzusehen. Weitere Klärung könnte neben einer kinetischen Modellierung auch die experimentelle Messung der Schwerteilchentemperaturen liefern.

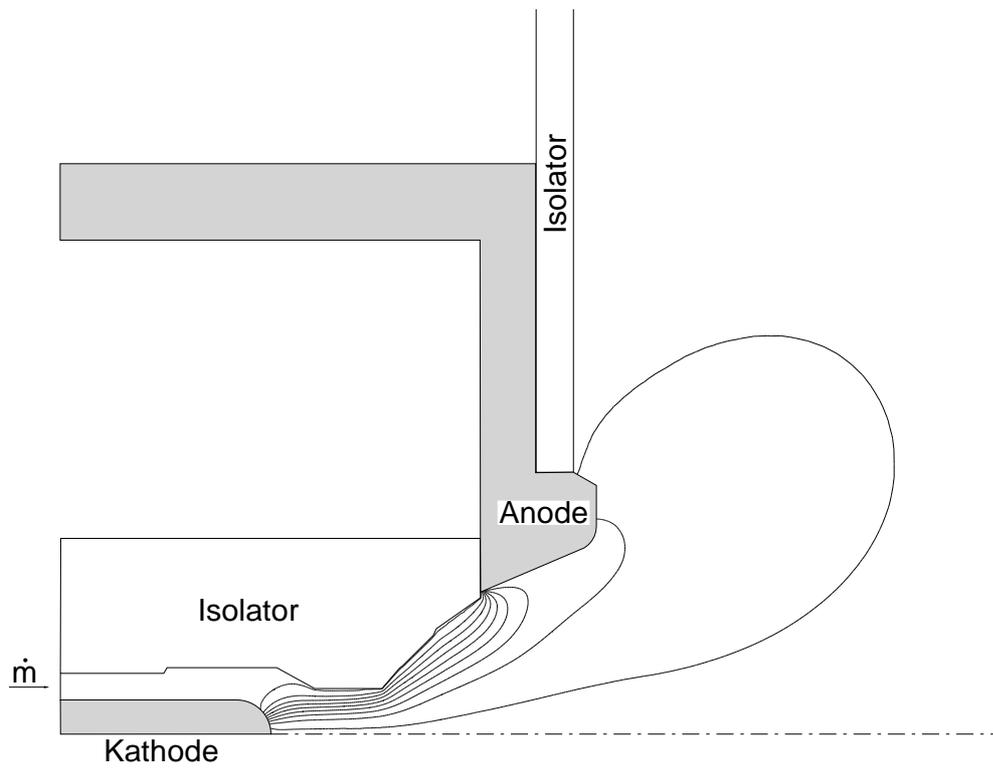


Abbildung 4.18: DT2: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isollinien)

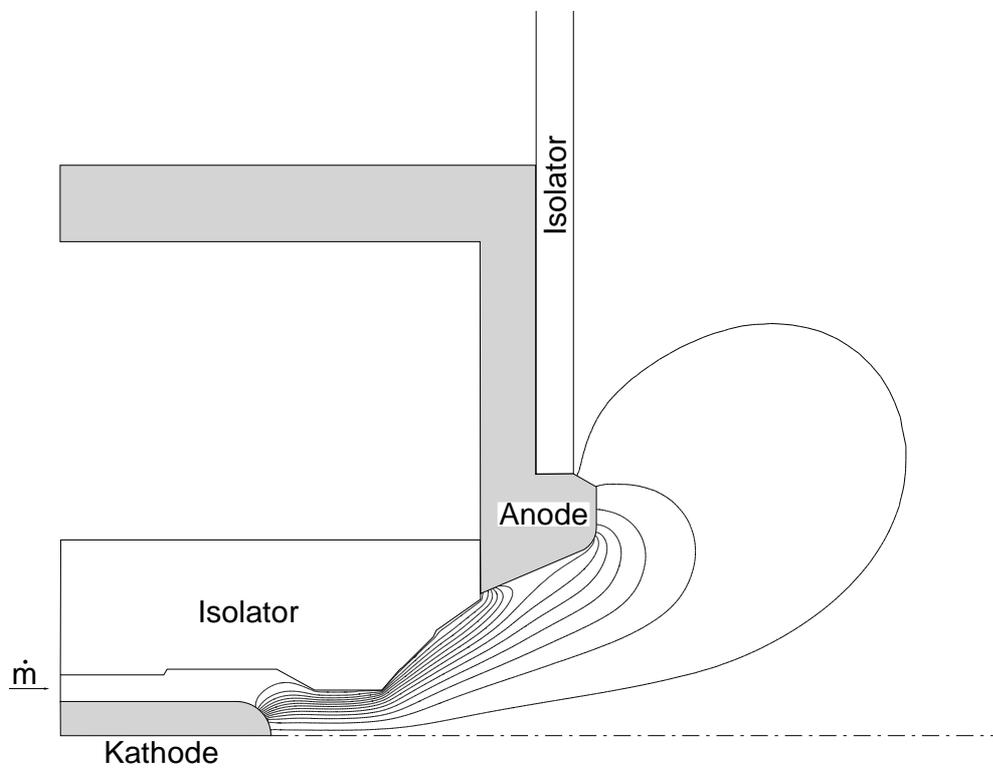


Abbildung 4.19: DT2: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isollinien)

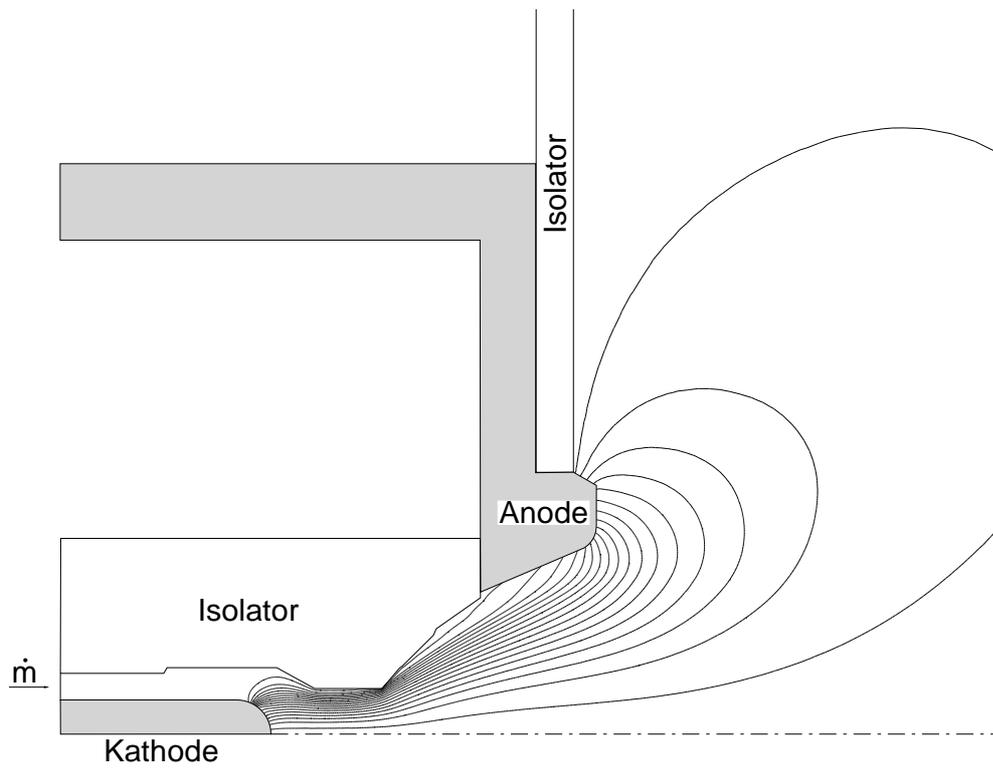


Abbildung 4.20: DT2: Stromverteilung Ψ , 4000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isollinien)

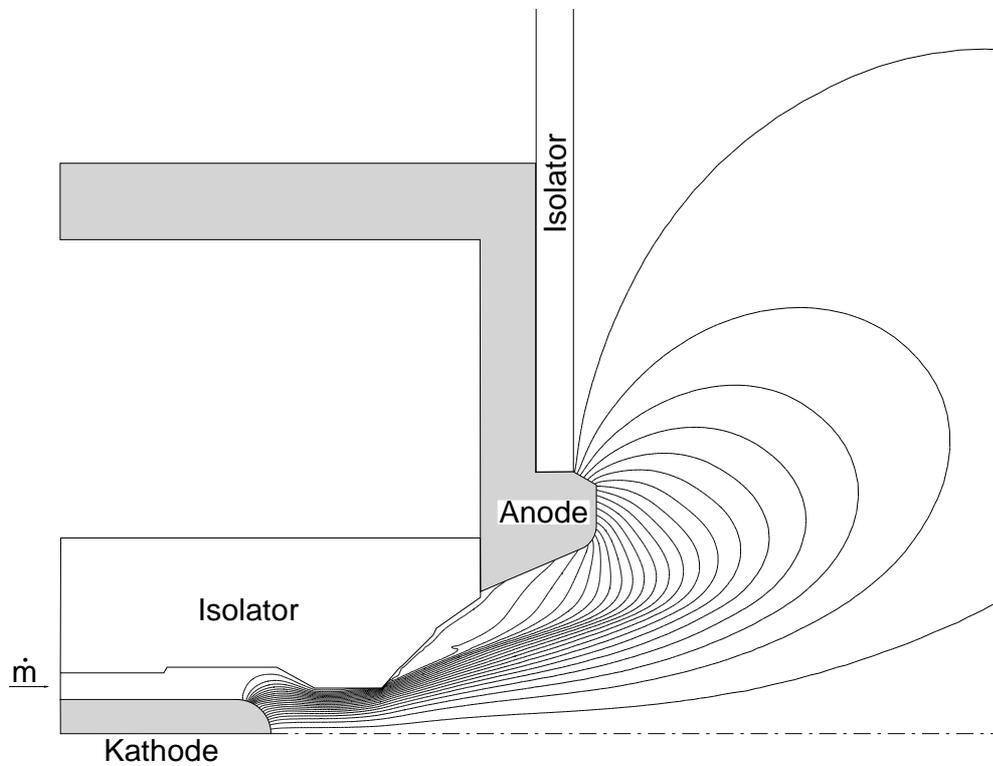


Abbildung 4.21: DT2: Stromverteilung Ψ , 5000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isollinien)

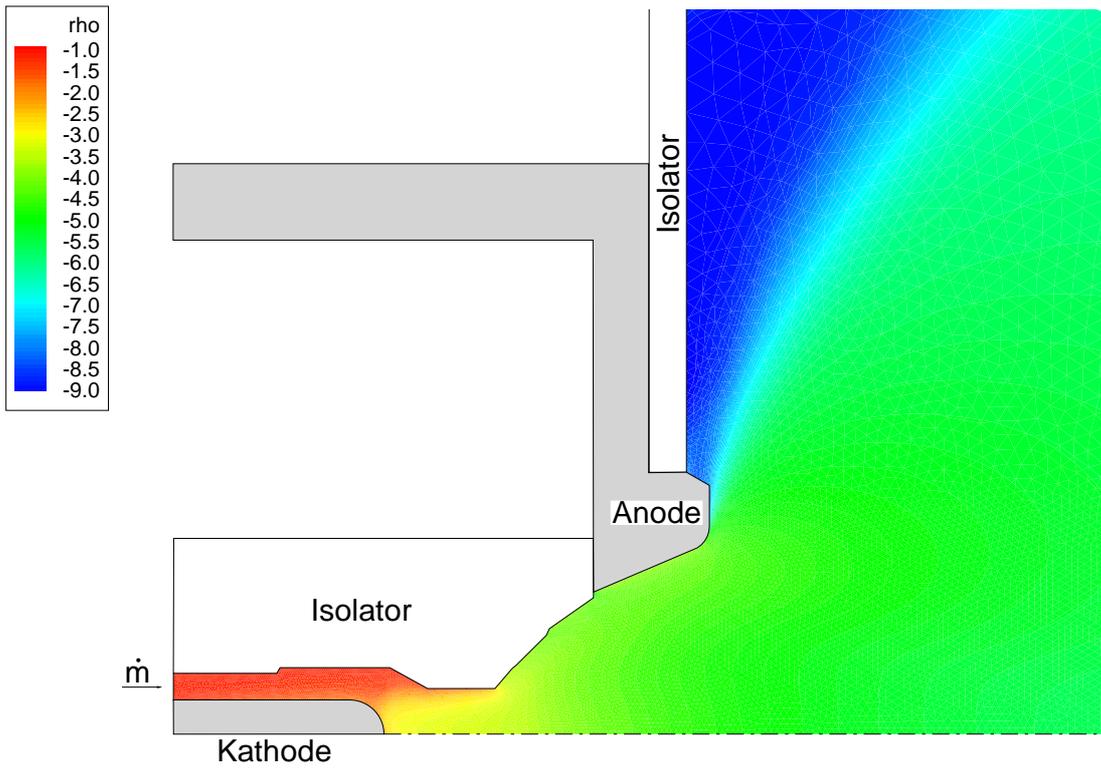


Abbildung 4.22: DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 2000 A, 0.8 g/s

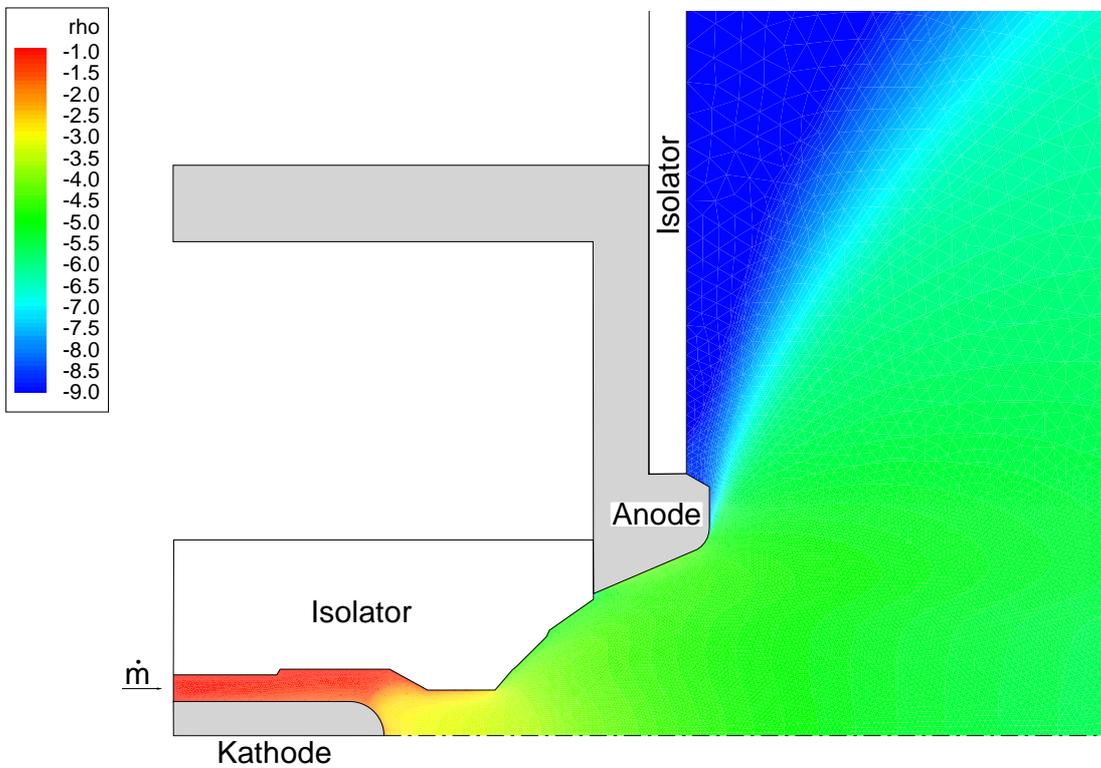


Abbildung 4.23: DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 3000 A, 0.8 g/s

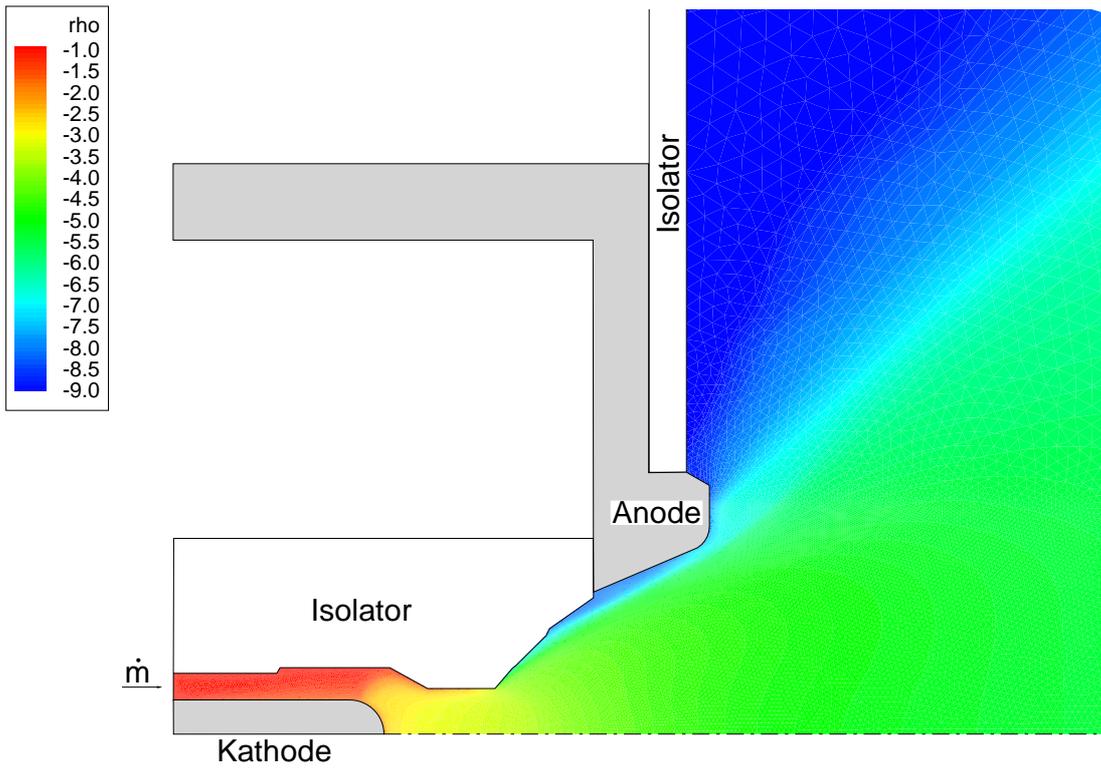


Abbildung 4.24: DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 4000 A, 0.8 g/s

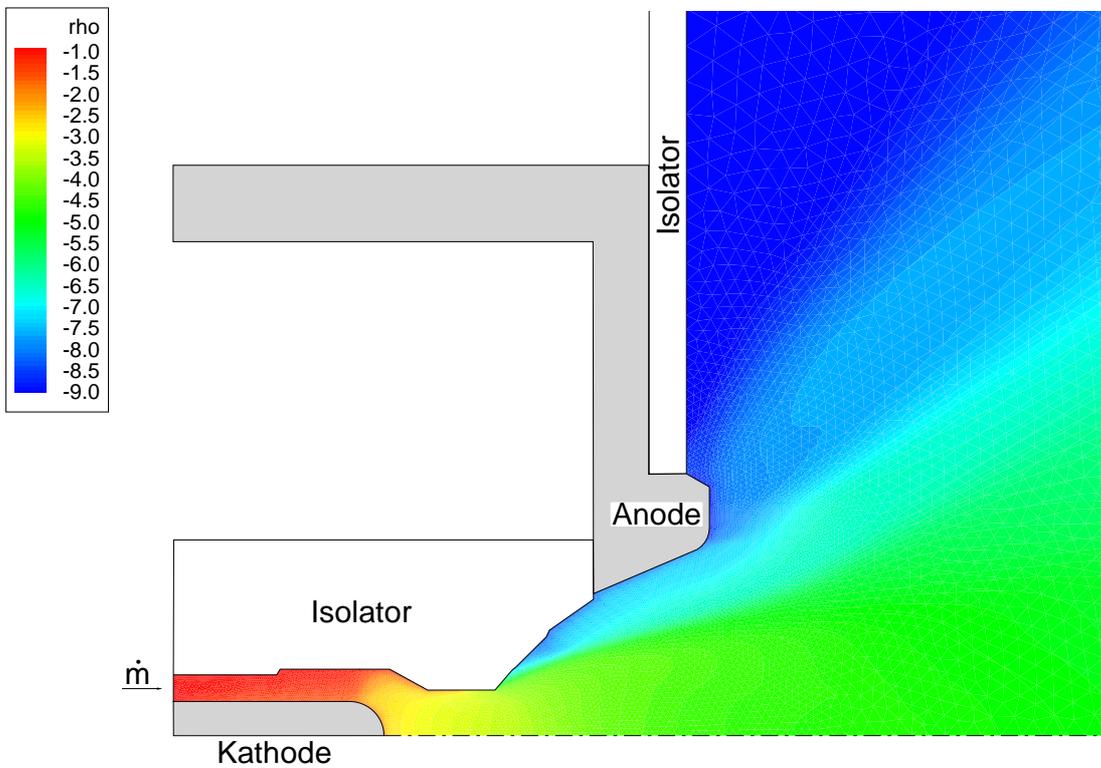


Abbildung 4.25: DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 5000 A, 0.8 g/s

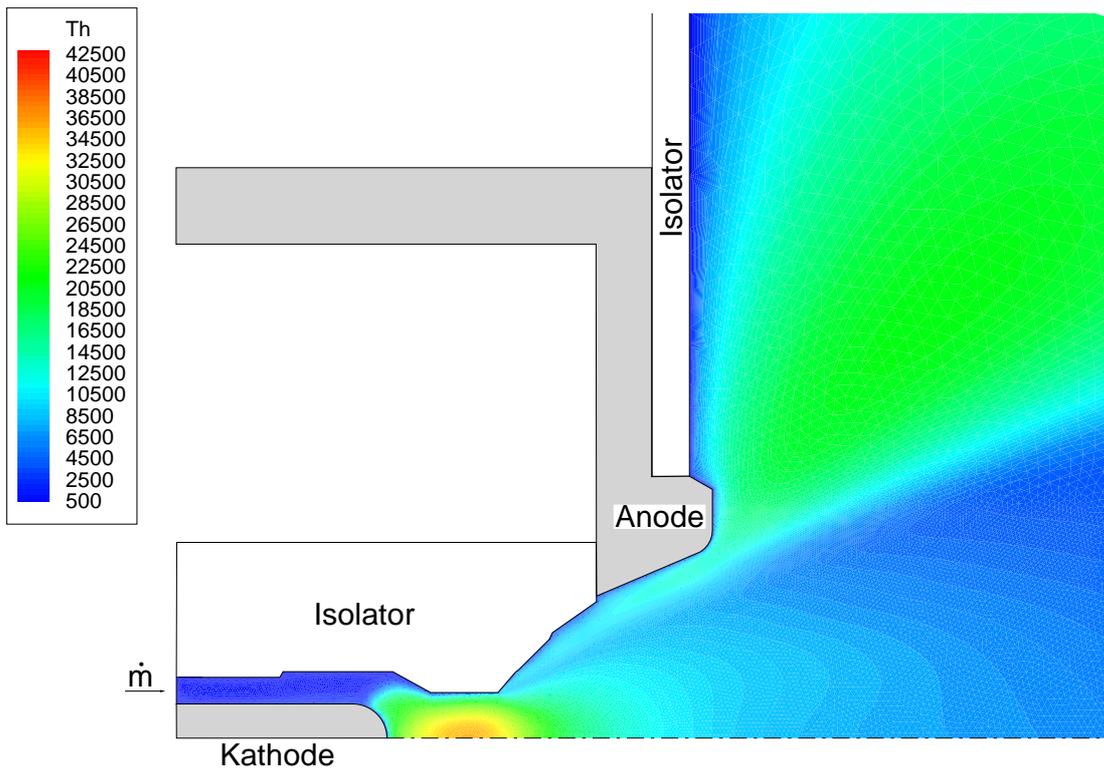


Abbildung 4.26: DT2: Schwerteilchentemperatur T_h , 4000 A, 0.8 g/s

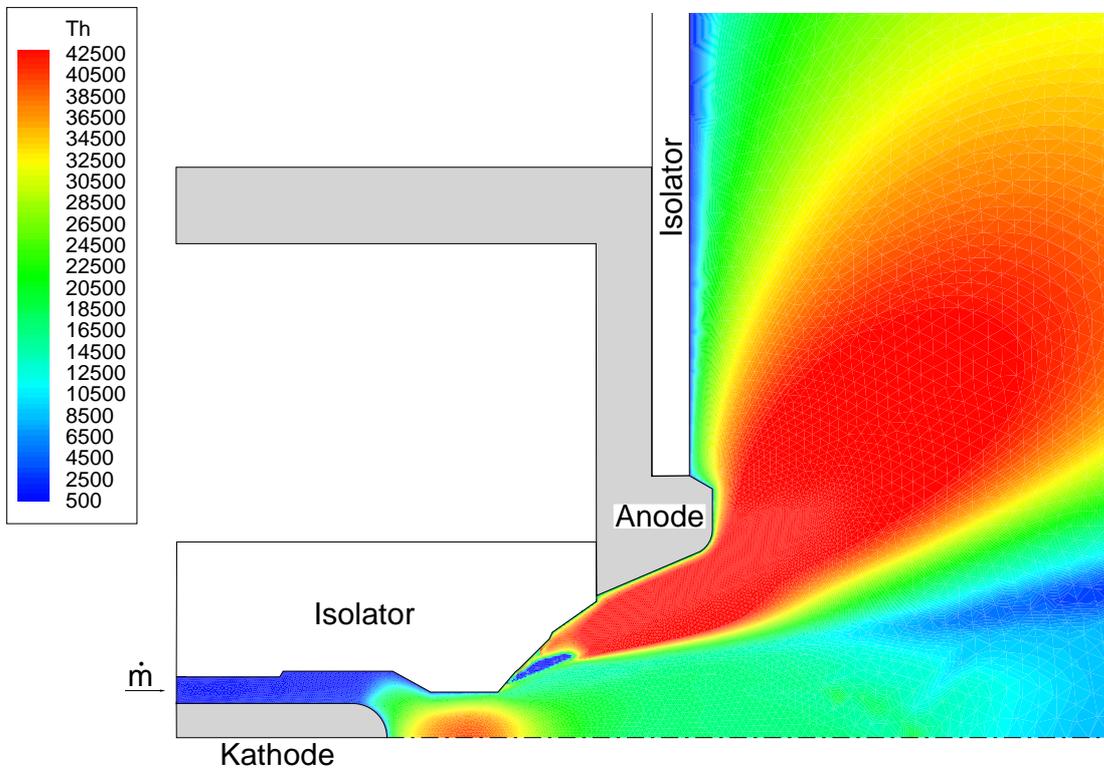


Abbildung 4.27: DT2: Schwerteilchentemperatur T_h , 5000 A, 0.8 g/s

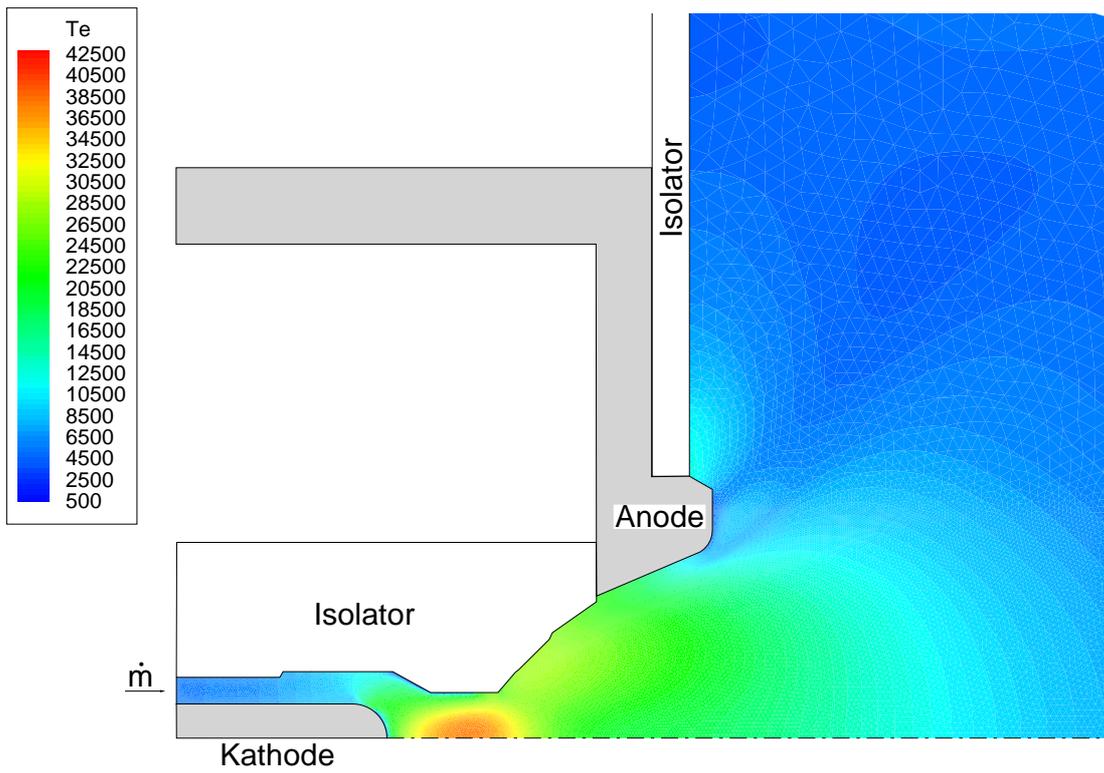


Abbildung 4.28: DT2: Elektronentemperatur T_e , 4000 A, 0.8 g/s

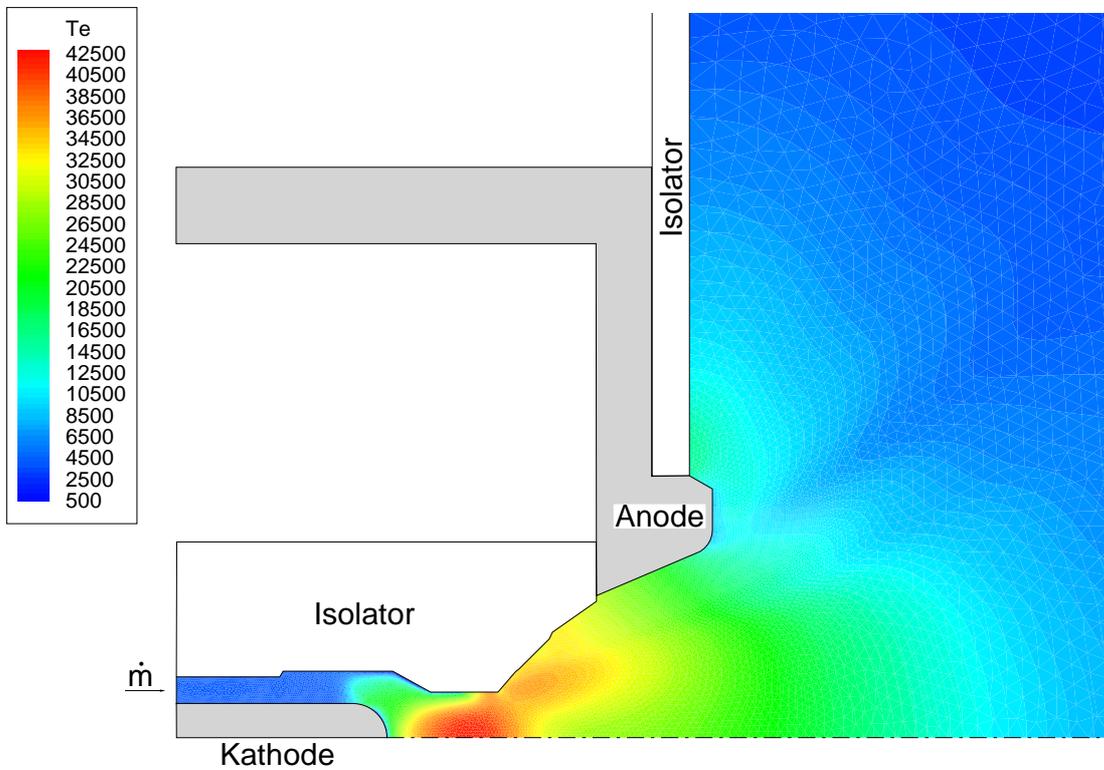


Abbildung 4.29: DT2: Elektronentemperatur T_e , 5000 A, 0.8 g/s

Die für den Massenstrom von 0.8 g/s festgestellten Prozesse existieren auch für einen Massenstrom von 0.3 g/s . Die für diesen Massenstrom durchgeführten Rechnungen starten auch mit einem Strom von 2000 A . Bei 3000 A läßt sich noch eine stationäre Lösung finden, bei 3500 A divergiert das Berechnungsverfahren, wobei ein Abreißen des Lichtbogens von der Anode auftritt. Die in der numerischen Simulation ermittelte obere Schranke des Betriebsbereichs liegt also bei 3000 A .

Der Lichtbogen zieht sich bei 3000 A durch den Pinch-Effekt zusammen (Abb. 4.30), sodaß es zu einer ausgeprägten Dichteverringerng (Abb. 4.31) und einer durch die Viskosität bedingten Aufheizung der Schwerteilchen (Abb. 4.32) vor der Anode kommt, während die Elektronen im hinteren Anodenbereich abkühlen (Abb. 4.33). In der Tat stellt die Stromstärke von 3000 A eine obere Schranke des Betriebsbereichs dar, da im Experiment ab 2450 A die Bogenspannung stark ansteigt und Plasmaoszillationen auftreten [11].

Die nahezu parabelförmigen Profile der axialen Geschwindigkeit im Düsenendquerschnitt in Abbildung 4.34 zeigen neben der Zunahme des Maximums mit steigendem Strom auf bis zu $11,1\text{ km/s}$ auf der Symmetrieachse, daß sich der geschwindigkeitsverringernde Einfluß der Viskosität nicht nur auf Randbereiche, sondern über den gesamten Querschnitt auswirkt. Die Maxima für 5000 A von $11,4\text{ km/s}$ liegen im Bereich der starken Verdünnung, wo das Flüssigkeitsmodell nicht mehr streng gültig ist, und ihr Wert ist daher vermutlich zu hoch. Die Maxima ändern sich mit der Abnahme des Massenstroms kaum, die Profile aber werden zum Düsenrand hin etwas breiter, was bedeutet, das mit abnehmendem Massenstrom der Einfluß der Viskosität zurückgeht.

Die Profile der Machzahl in Abbildung 4.35 zeigen, daß nahezu im gesamten Düsenendquerschnitt Überschallströmung vorherrscht. Die Maxima der Machzahl auf der Symmetrieachse nehmen bei Stromerhöhung im Gegensatz zur Geschwindigkeit ab. Ebenso werden sie bei gleicher Stromstärke kleiner durch eine Verringerung des Massenstroms. Der Grund dafür ist, daß die thermische Energie des Plasmas stärker ansteigt als die kinetische Energie.

Die numerisch berechnete Elektronentemperatur wird in Abbildung 4.36 mit den emissionspektroskopisch in verschiedenen Wellenlängenbereichen ermittelten Anregungstemperaturen [11] verglichen. Im Experiment wurden Emissionsspektren in drei Wellenlängenbereichen aufgenommen, wobei die beiden hochaufgelösten Bereiche UV1 und UV2 im ultravioletten Wellenlängenbereich bei mittleren Wellenlängen von 334 nm und 312 nm und der dritte Bereich im sichtbaren Wellenlängenbereich bei einer mittleren Wellenlänge von 735 nm lagen. Die Auswahl der Linien, die Entabelung der Spektren und die Temperaturermittlung mit Hilfe des Boltzmann-Plots ist in [11] genau beschrieben.

Infolge der hohen Elektronenstoßfrequenz mit den Atomen und Ionen liegt ein Temperaturgleichgewicht zwischen der Anregungstemperatur und der Temperatur der freien Elektronen vor. Abbildung 4.36 zeigt eine gute Übereinstimmung bis zu einem Radius von 40 mm . Eine genauere Quantifizierung ist nicht möglich, da der Meßfehler unbekannt ist. Als Richtmaß mag hierfür die Streuung der Meßwerte angesehen werden.

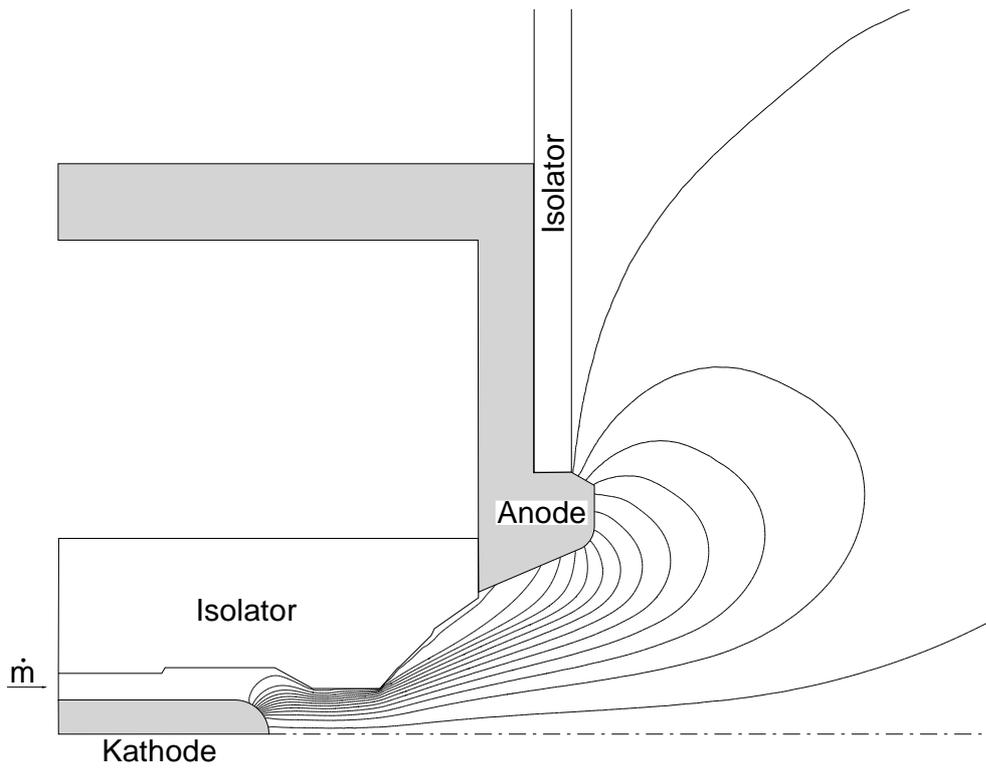


Abbildung 4.30: DT2: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.3 g/s (250 A zwischen 2 Isollinien)

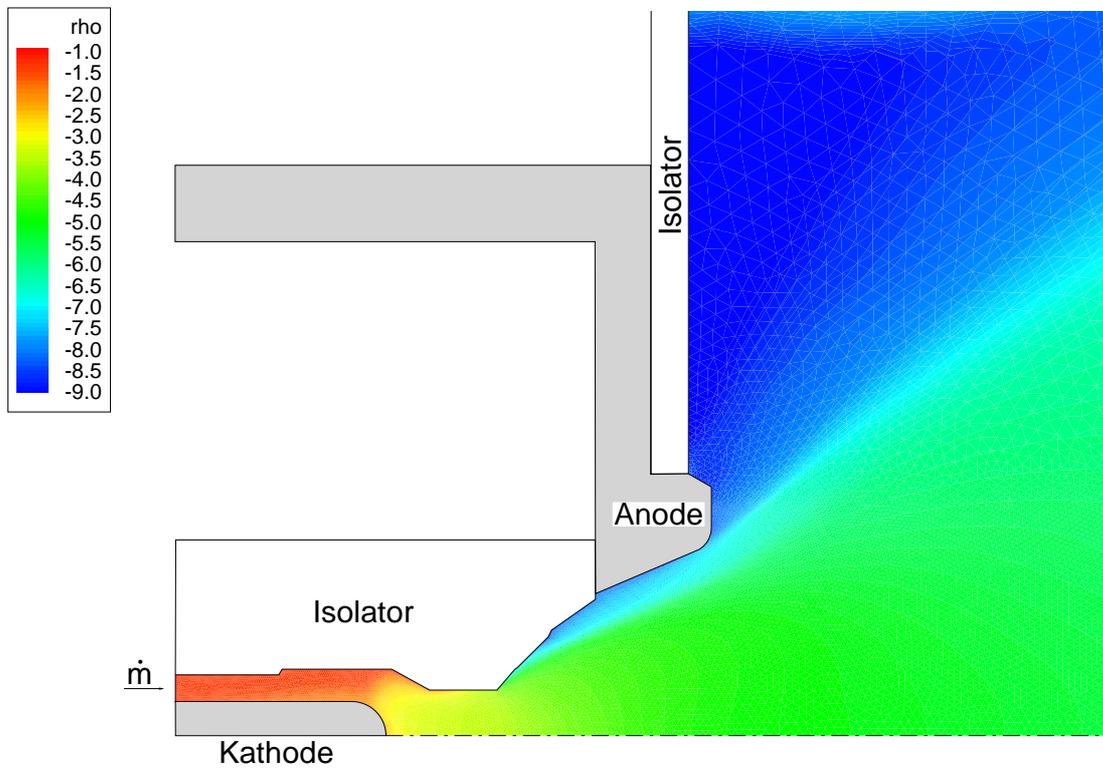


Abbildung 4.31: DT2: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 3000 A, 0.3 g/s

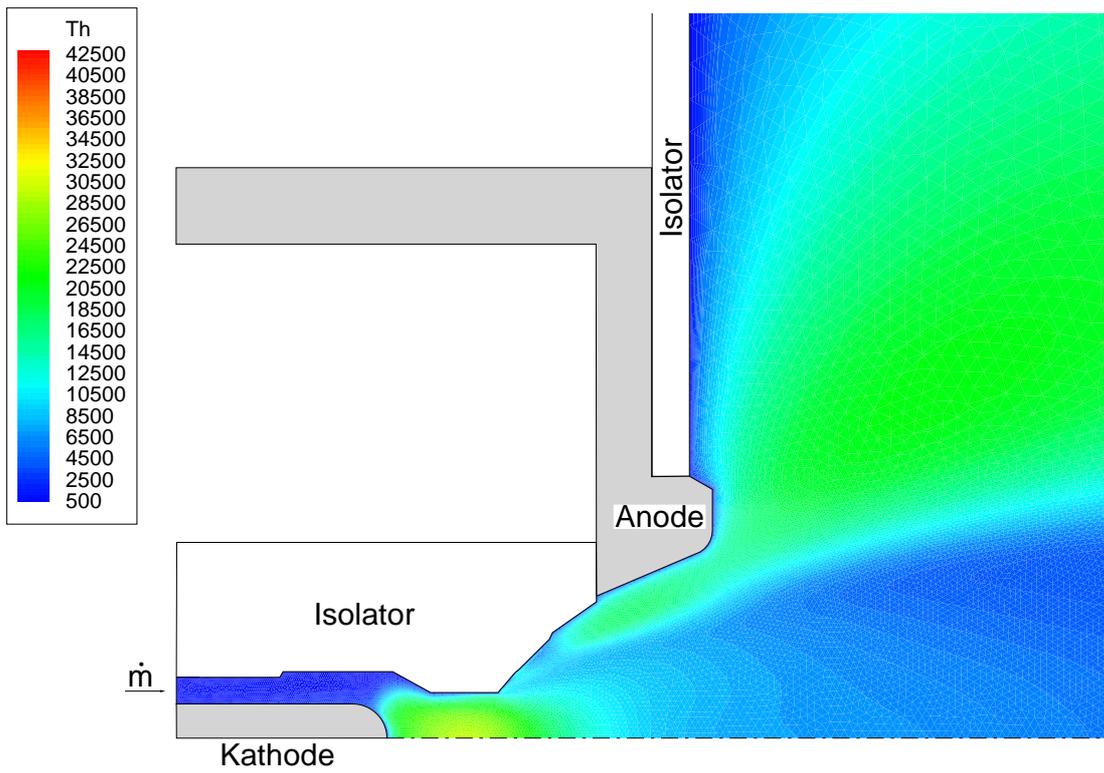


Abbildung 4.32: DT2: Schwerteilchentemperatur T_h , 3000 A, 0.3 g/s

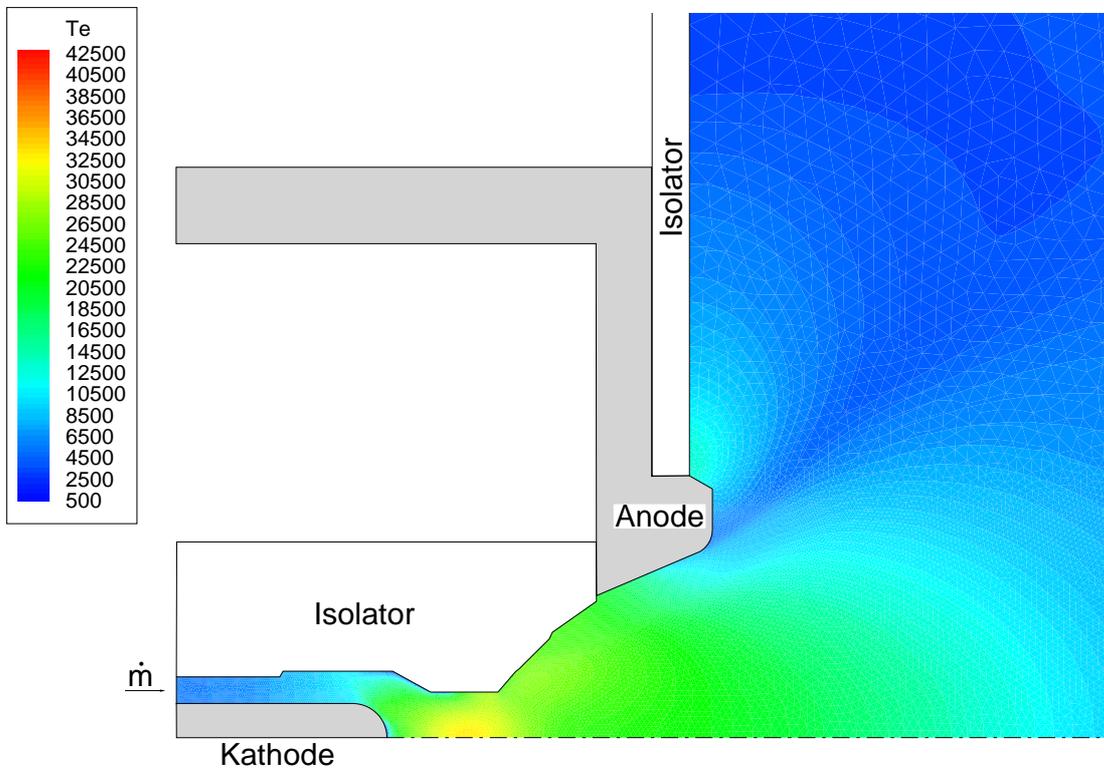


Abbildung 4.33: DT2: Elektronentemperatur T_e , 3000 A, 0.3 g/s

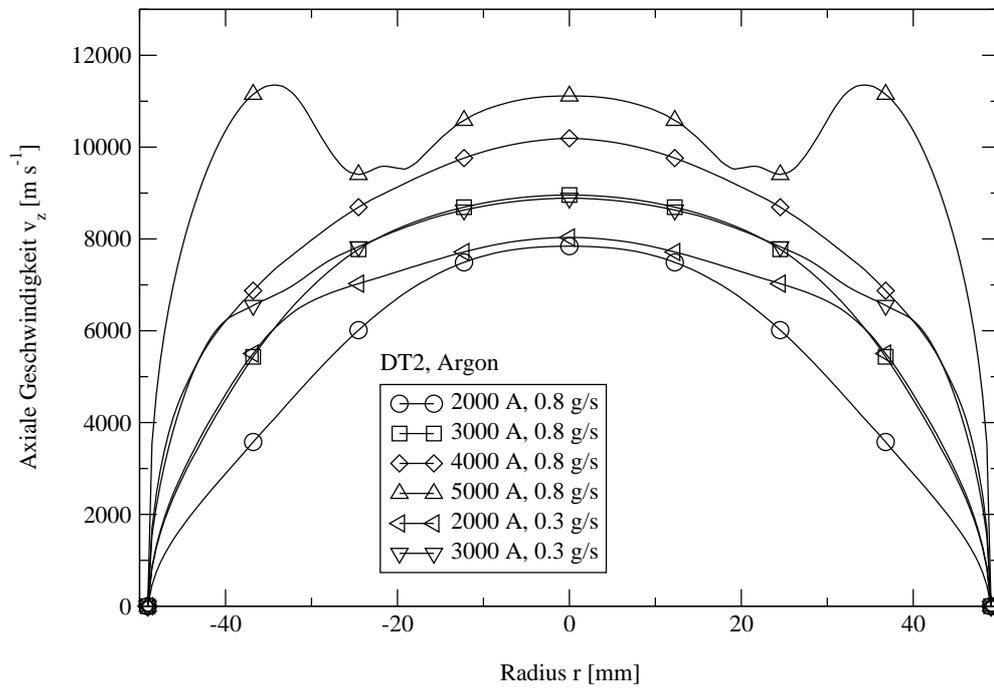


Abbildung 4.34: DT2: Axiale Geschwindigkeit v_z im Düsenendquerschnitt

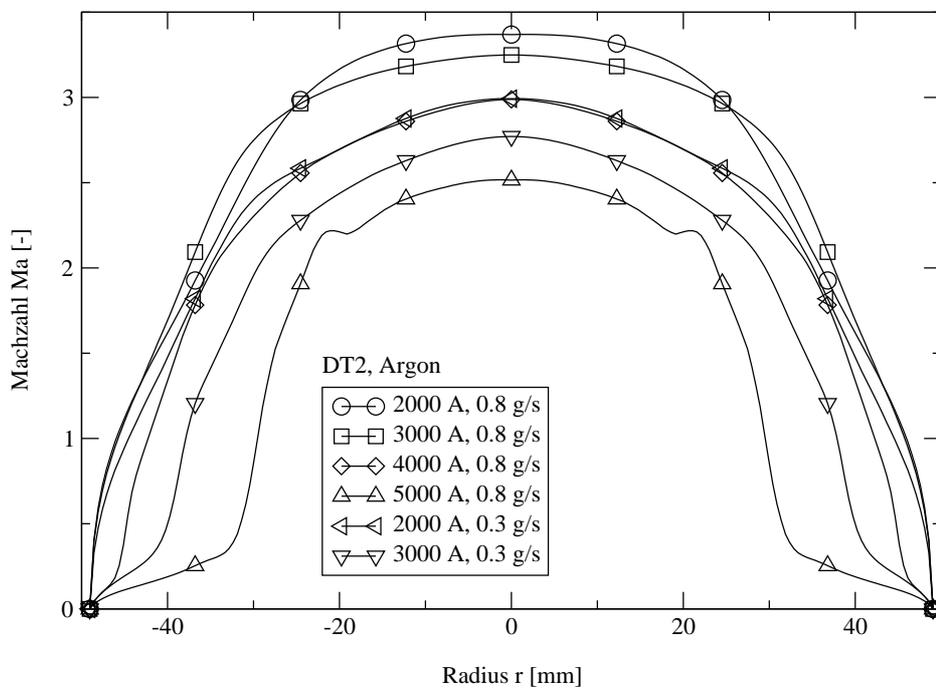


Abbildung 4.35: DT2: Machzahl $Ma = |\vec{v}|/c$ im Düsenendquerschnitt

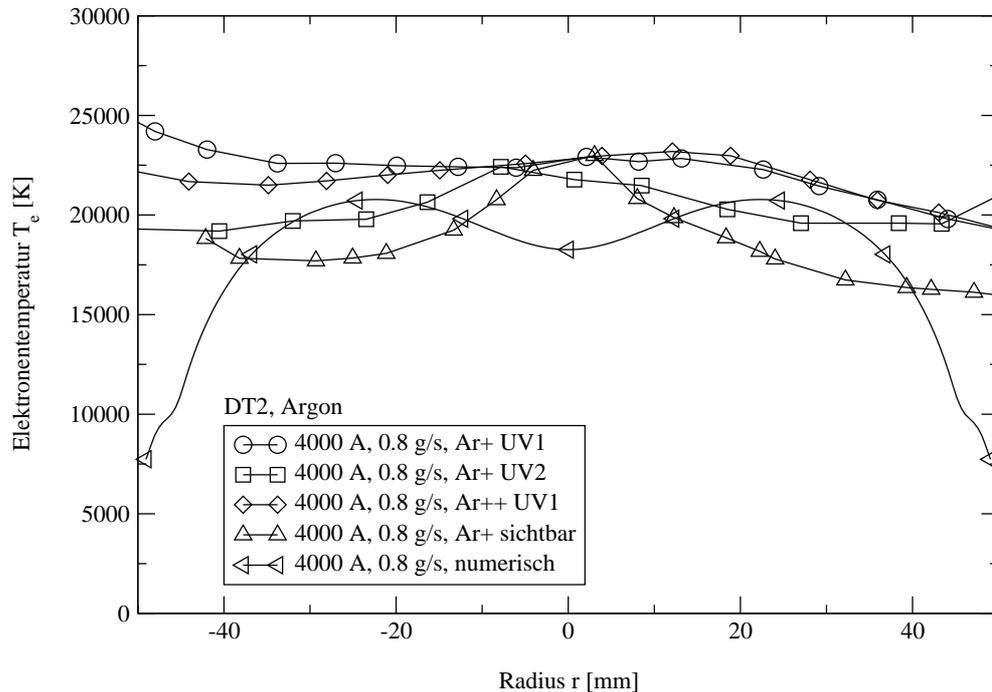


Abbildung 4.36: DT2: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 4000 A, 0.8 g/s

Die integralen Triebwerkscharakteristika sind in Tabelle 4.2 zusammengefaßt. Der Einströmdruck p_{ein} , der 10 mm stromab des Einströmrandes an einer radialen statischen Druckmeßbohrung aufgenommen wurde, und der Schub F stimmen beim Vergleich der numerisch berechneten und experimentell bestimmten Daten gut überein. Der Meßfehler für den Schub, der mit Hilfe einer Parallelogramm-Pendelschubmeßwaage ermittelt wurde, ist nicht genau bekannt, er liegt bei einigen Prozent des Meßwertes. Der magnetische Schubanteil $F_{j \times B}$ nimmt mit steigendem Strom bis auf 61 Prozent zu, sodaß die Notwendigkeit der Optimierung auch des thermischen Schubanteiles bei düsenförmigen MPD-Eigenfeldbeschleunigern offensichtlich ist.

Wie beim RD3 ist auch hier die über das Plasma abfallende Spannung U_P kleiner als die die Elektrodenfallspannungen einschließende, gemessene Gesamtspannung U_{C+P+A} . Da sich die Strömung im Bereich der Kathode aufgrund der noch niedrigen Geschwindigkeiten nahe am reaktiven Gleichgewicht befindet, kann man näherungsweise die in [11] und [16] für das DT2 angegebenen Kathodenfallspannungen hier in die Betrachtung miteinbeziehen. Sie betragen für den Fall des reaktiven Gleichgewichts je nach Typ des Elektrodenmodells und Arbeitspunkt größenordnungsmäßig zwischen 3 und 7 Volt, sodaß die Anodenfallspannungen hier ebenfalls bei einigen Volt liegen. Dies erscheint zu hoch, da experimentelle Messungen [11] bislang außerhalb des Instabilitätsbereiches nur auf sehr kleine Anodenfallspannungen schließen lassen. Weiteren Aufschluß hierüber wird eine zukünftige detaillierte Mitberechnung der Elektrodengebiete bieten können.

$I[A]$	$\dot{m}[g/s]$	$p_{ein}[kPa]$ num.	$p_{ein}[kPa]$ exp.	$U_P[V]$ num.	$U_{C+P+A}[V]$ exp.	$F_{j \times B}[N]$ num.	$F[N]$ num.	$F[N]$ exp.
2000	0,8	7,6	7,7	28,1	36,2	0,8	4,3	4,6
2500	0,8	8,2	8,6	30,6	40,4	1,3	4,8	5,2
3000	0,8	9,2	9,4	33,5	45,6	1,8	5,8	6,2
3500	0,8	9,3	9,9	37,3	50,4	2,6	6,5	7,1
4000	0,8	10,3	10,5	43,8	55,9	3,1	7,1	8,3
4500	0,8	11,1	10,9	49,3	62,0	4,0	7,7	9,1
5000	0,8	12,7	-	53,9	-	5,0	8,2	-
2000	0,3	3,7	-	23,5	35,9	0,9	2,2	2,2
2500	0,3	4,1	-	28,7	-	1,3	2,6	-
3000	0,3	5,2	-	34,6	-	1,8	3,5	-

Tabelle 4.2: Kenndaten DT2 (num.: numerisch, exp.: experimentell [10, 11])

Das in dieser Arbeit entwickelte numerische Verfahren zeigt gegenüber früheren Arbeiten [15, 16] einen deutlichen Fortschritt bei der Robustheit als auch bei der Konvergenzbeschleunigung. Durch die Einbeziehung des magnetischen Druckes in die reibungsfreien Flüsse, das Flux Vector Splitting-Verfahren nach Eberle und die Finite-Volumen-Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen für die Elektronenenergie und das Magnetfeld wird insbesondere in transsonischen und in Überschallbereichen mit Stößen und beim Zusammenziehen des Lichtbogens durch den Pinch-Effekt bei hohen Strömen die numerische Stabilität bei der Strömungsberechnung stark erhöht.

Durch die eingesetzte WENO-Rekonstruktion wird gegenüber TVD-Verfahren nicht nur in glatten Lösungsbereichen eine viel bessere Glattheit erzielt, auch ist die Robustheit bei Stößen höher.

Das gemischte FV/FEM-Verfahren aus [16] benötigt bei Ausschluß der Elektrodenberechnung für die Lösung von 6 partiellen Differentialgleichungen bei rund 6000 Gitterpunkten auf einem 500 MHz Pentium-3 PC 6 Tage, um das Dichteresiduum um 4 Größenordnungen abzusenken. Das hier entwickelte FV-Verfahren braucht auf demselben Rechner zur Lösung von 13 partiellen Differentialgleichungen bei rund 28000 Gitterpunkten 5 Tage und ist damit um rund eine Größenordnung leistungsfähiger.

4.3 Triebwerk mit Heißer Anode HAT

Das HAT, das eine strahlungsgekühlte Anode besitzt, wurde experimentell im gleichen Betriebsbereich untersucht wie das DT2, das geometrisch ähnlich ist, aber eine wassergekühlte Anode hat. Beim Betrieb des HAT (Abb. 4.38) wurden bislang keine Plasmainstabilitäten beobachtet [11]. Daher wird das HAT ebenso wie das DT2 in Kapitel 4.2 für die Massenströme von 0.8 g/s und 0.3 g/s bei Stromstärken zwischen 2000 A und 5000 A im Hinblick auf den Pinch-Effekt und die Dichte- und Ladungsträgerverarmung vor der Anode untersucht.

Ausgehend von einem groben Startgitter mit 4667 Gitterpunkten führt auch für das HAT der Verfeinerungsindikator (3.105) zu einer physikalisch sinnvollen Gitterverfeinerung der Grenzschichten und im Düsenhalsbereich. Außerdem wird der im Experiment (Abb. 4.38) sichtbare schräge Stoß aufgelöst, was in der Verteilung der Schwerteilchentemperatur (Abb. 4.39) gut zu sehen ist. Der berechnete Stoß berührt die Symmetrieachse knapp hinter dem Anodenendquerschnitt. Damit gibt die numerische Simulation im Gegensatz zu früheren Rechnungen [16], in denen der Stoß die Symmetrieachse ca. 30 mm stromab des Anodenendquerschnitts berührte, erstmals die Stoßlage gut wieder, die auch im Experiment beobachtet wird. Die Ursache hierfür ist, daß die Strömung jetzt im Ionisationsreaktions-Nichtgleichgewicht berechnet wird, sodaß Elektronenstoßionisation und Dreierstoßrekombination insbesondere im Überschallbereich stromab des Düsenhalses nicht mehr im Reaktionsgleichgewicht stehen.

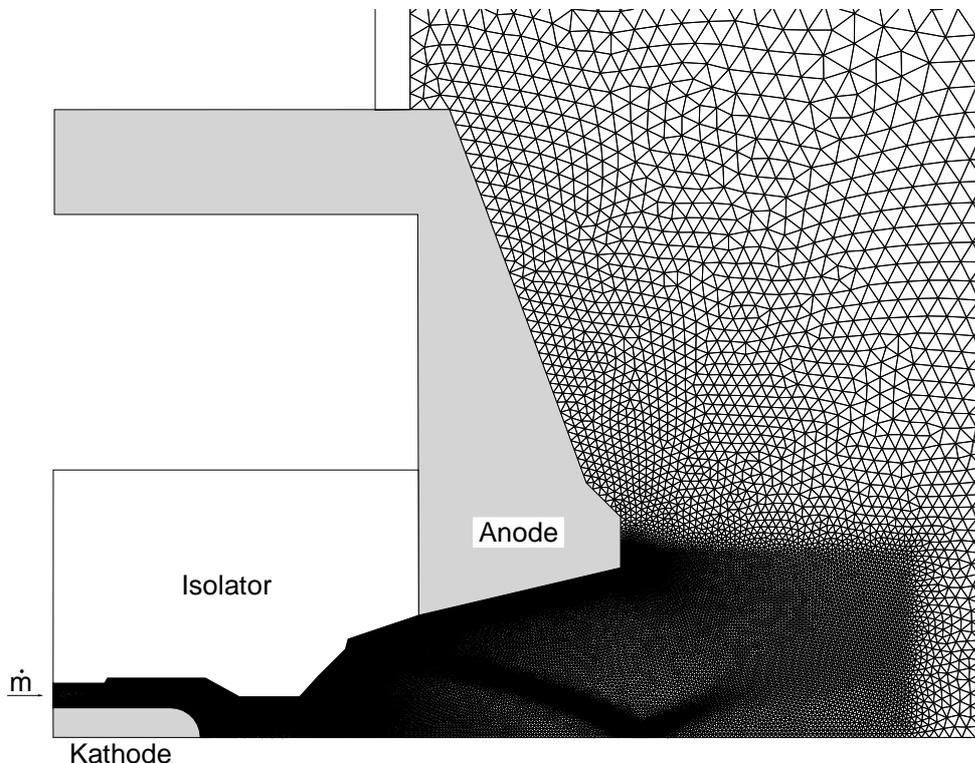


Abbildung 4.37: Teilansicht des adaptierten Primärgitters für das MPD-Eigenfeldtriebwerk HAT (28034 Gitterpunkte, 2000 A , 0.8 g/s)

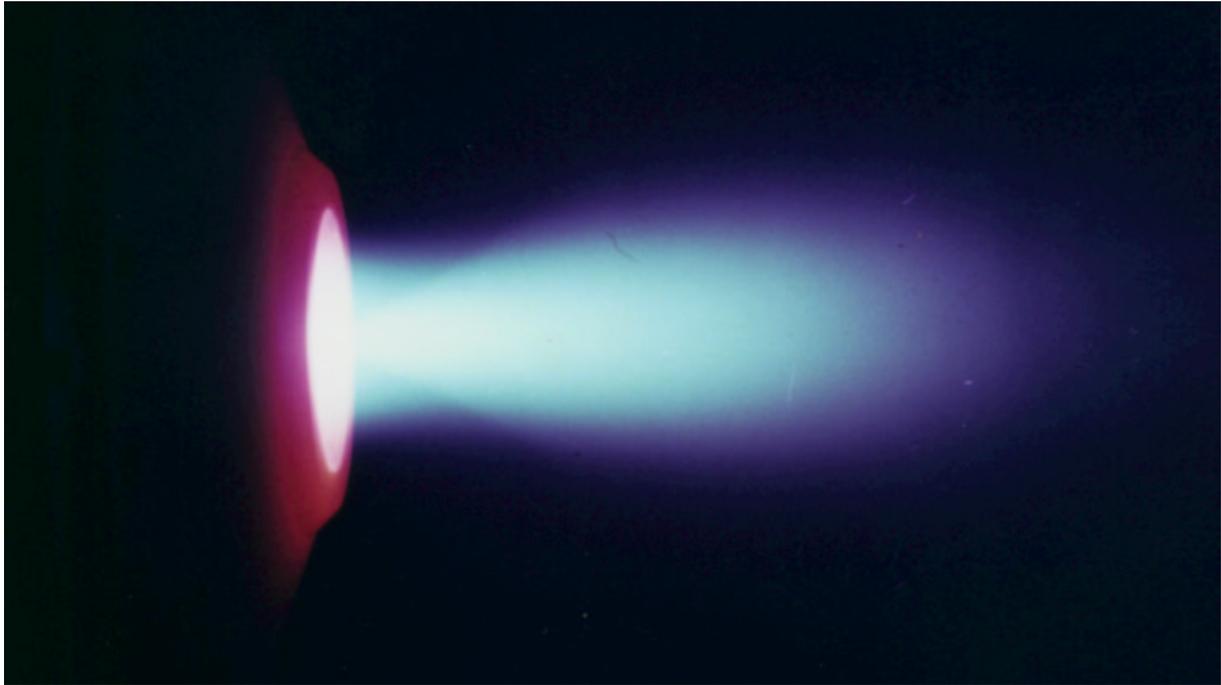


Abbildung 4.38: HAT im Betrieb, 2000 A, 0.8 g/s

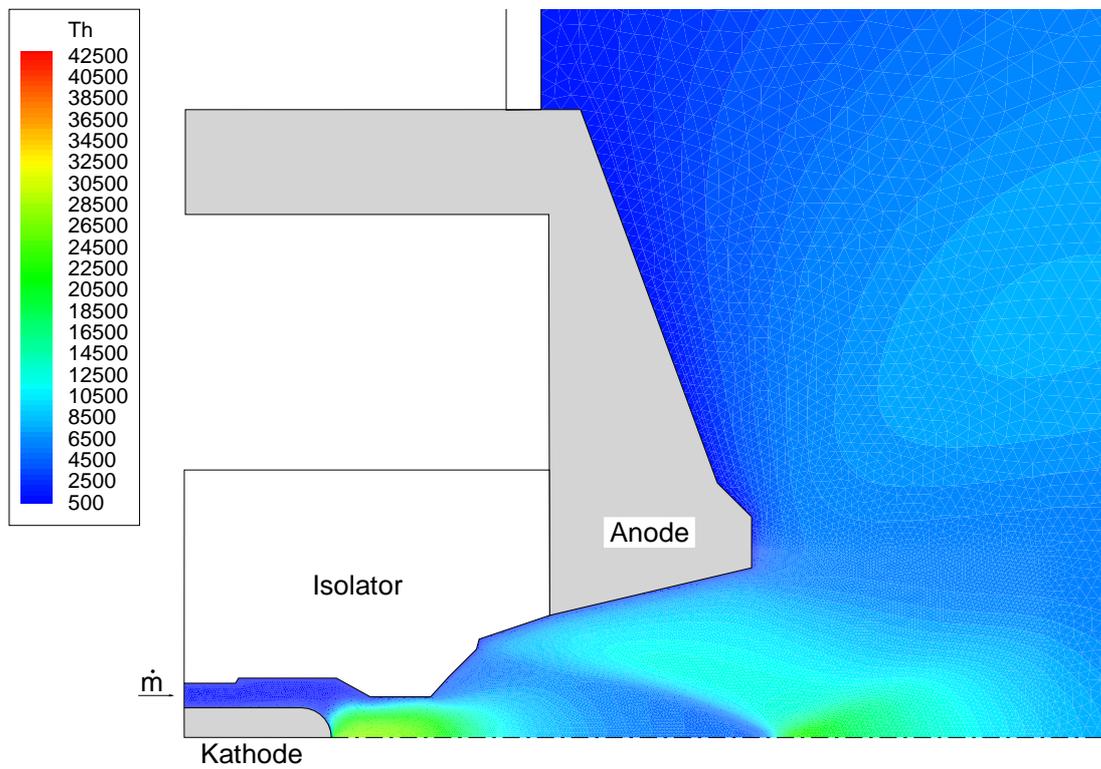


Abbildung 4.39: HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 2000 A, 0.8 g/s

Der Lichtbogenansatz befindet sich bei einem Massenstrom von 0.8 g/s und einem Strom von 2000 A (Abb. 4.40) aufgrund der Diffusion aufgrund des Elektronendrucks größtenteils auf der hinteren Anodenaußenfläche. Der Ansatz wandert bei 3000 A (Abb. 4.41) teilweise zum Anodenanfang hin, und bei 4000 A (Abb. 4.42) befindet er sich wieder hauptsächlich auf der hinteren Anodenaußenfläche. Bei 5000 A (Abb. 4.43) ist schließlich das Einschnüren des Lichtbogens stromab des Düsenhalses zu erkennen. Der Ansatz auf der Anode findet nun sowohl auf der hinteren Anodenaußenfläche als auch auf dem hinteren Teil der der Symmetrieachse zugewandten Anodeninnenfläche statt.

Im Vergleich mit dem DT2 ist bei 4000 A (Abb. 4.44) noch keine Dichte- und damit Ladungsträgerverarmung auf der Anodeninnenfläche zu erkennen. Bei 5000 A (Abb. 4.45) beginnt dieser Effekt nur leicht am Anodenanfang. Die Ursache dieser günstigeren strömungsmechanischen Verhältnisse liegt in dem im Gegensatz zum DT2 etwas kleineren Expansionswinkel der Düse des HAT. Um den Einfluß der Anodentemperatur auf die Strömungsverhältnisse abzuschätzen, wurde die Wandtemperatur der eigentlich heißen Anode im numerischen Experiment auf 500 K gesetzt. Es zeigte sich dabei kein Unterschied des Lichtbogenansatzes und der Dichteverteilung.

Die Verwendung einer heißen Anode zielt neben einer Verringerung der Anodenverluste darauf ab, die Anodenfallspannung zu reduzieren und damit das Auftreten von Instabilitäten zu höheren Strömen hin zu verzögern. Da die numerischen Berechnungen hier zeigen, daß der geringe geometrische Unterschied der Düsen von DT2 und HAT zu stark unterschiedlichen Dichteverteilungen vor den Anoden führt, erscheint der detaillierte Vergleich von DT2 und HAT bezüglich des Einflusses der wasser- bzw. strahlungsgekühlten Anoden nur wenig geeignet. Vielmehr sollte in einem zukünftigen Experiment eine wassergekühlte Düse, die mit der strahlungsgekühlten des HAT geometrisch identisch ist, untersucht werden. Das numerische Verfahren ist hierzu um geeignete Anodenmodelle zu erweitern.

Die Maximaltemperatur der Schwerteilchen im Düsenhals steigt von 38802 K bei 4000 A (Abb. 4.46) auf 40019 K bei 5000 A (Abb. 4.47). In beiden Fällen ist ein Aufheizen vor der Anodeninnenfläche festzustellen. Stromab des Düsenendquerschnitts zeigen sich in der Rechnung bei 4000 A (Abb. 4.46) zudem kleine Oszillationen durch das instationäre Zusammenspiel von Stößen und Reaktionen, die auch bei starker Gitterverfeinerung und Verkleinerung der CFL-Zahlen erhalten bleiben. Turbulenz entsteht allerdings wie auch beim RD3 und DT2 nicht, die Strömung ist stets laminar. Die maximale Elektronentemperatur beträgt bei 4000 A (Abb. 4.48) im Düsenhals 40697 K , sie steigt bei 5000 A (Abb. 4.49) auf 41827 K . Durch Ohm'sche Heizung nimmt sie im divergenten Düsenteil lokal auf 36032 K zu.

Bei einem Massenstrom von 0.8 g/s läßt sich also in der numerischen Simulation kein Hinweis auf das Einsetzen von Plasmainstabilitäten durch den Pinch-Effekt und eine dadurch verursachte Dichte- und Ladungsträgerverarmung feststellen. Die Experimente [11] bestätigen dies.

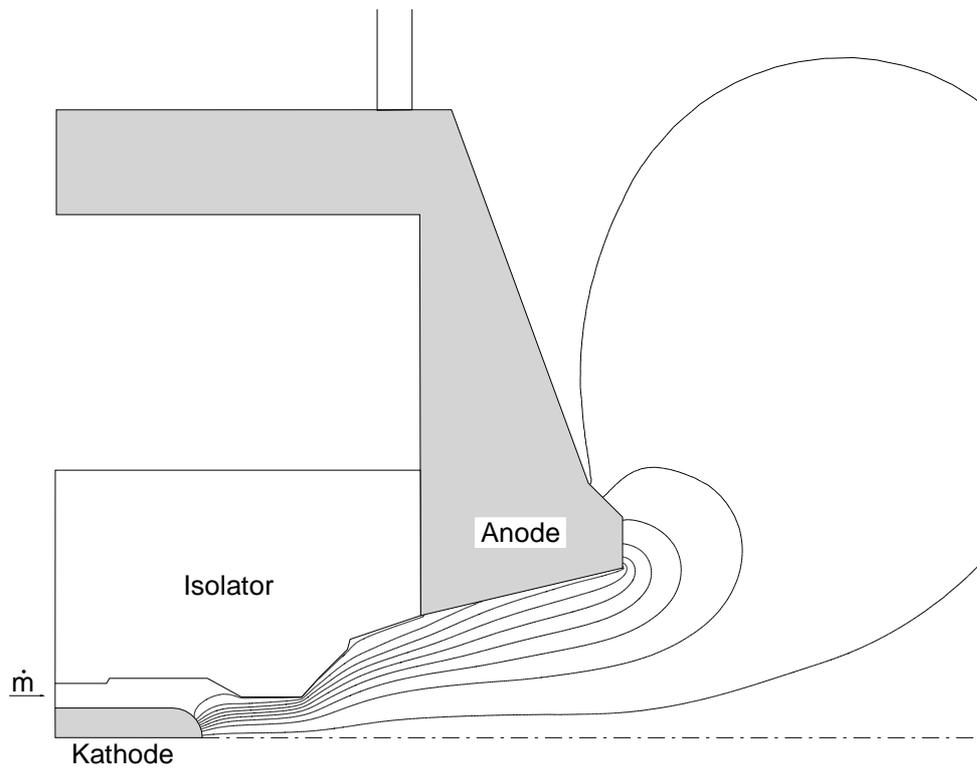


Abbildung 4.40: HAT: Stromverteilung Ψ , 2000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien)

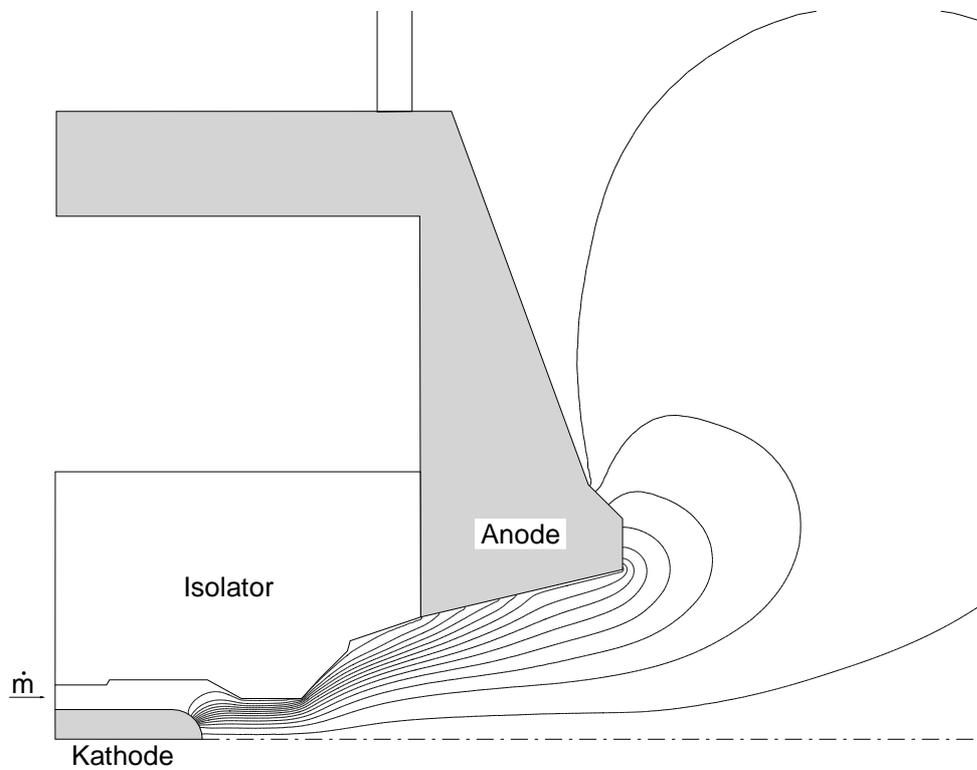


Abbildung 4.41: HAT: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien)

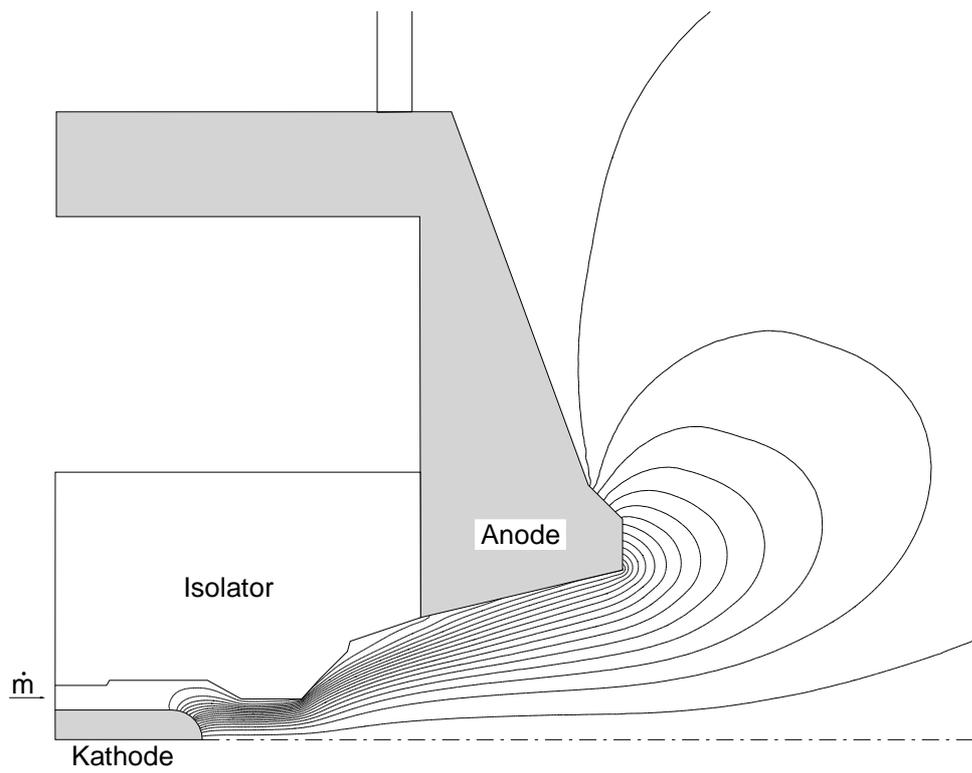


Abbildung 4.42: HAT: Stromverteilung Ψ , 4000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien)

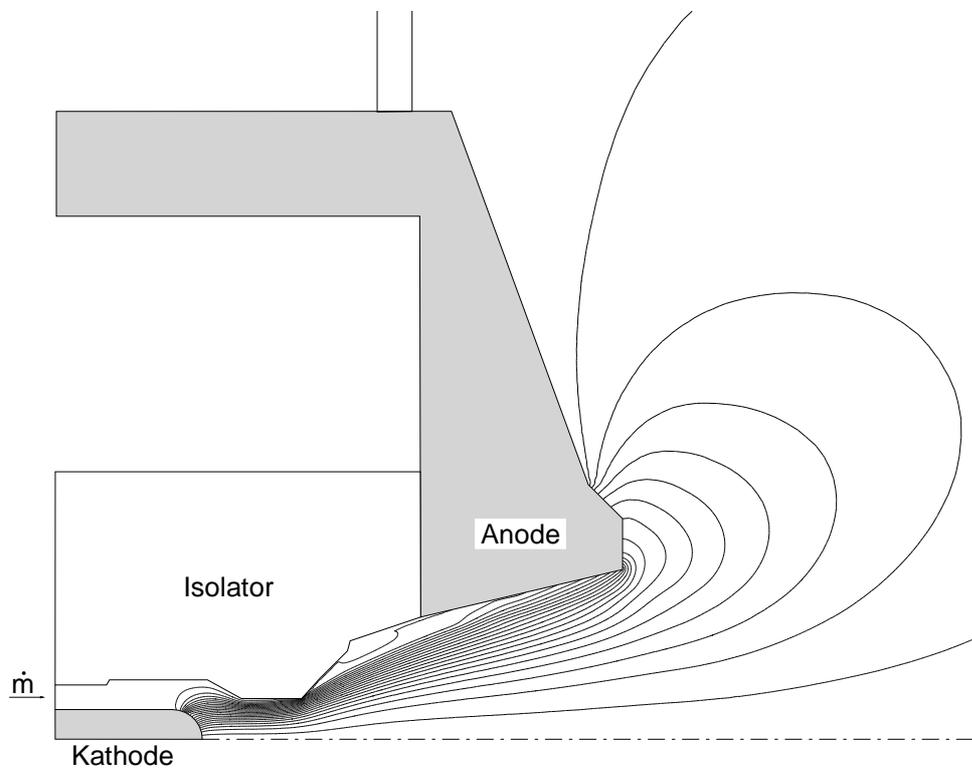


Abbildung 4.43: HAT: Stromverteilung Ψ , 5000 A, 0.8 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien)

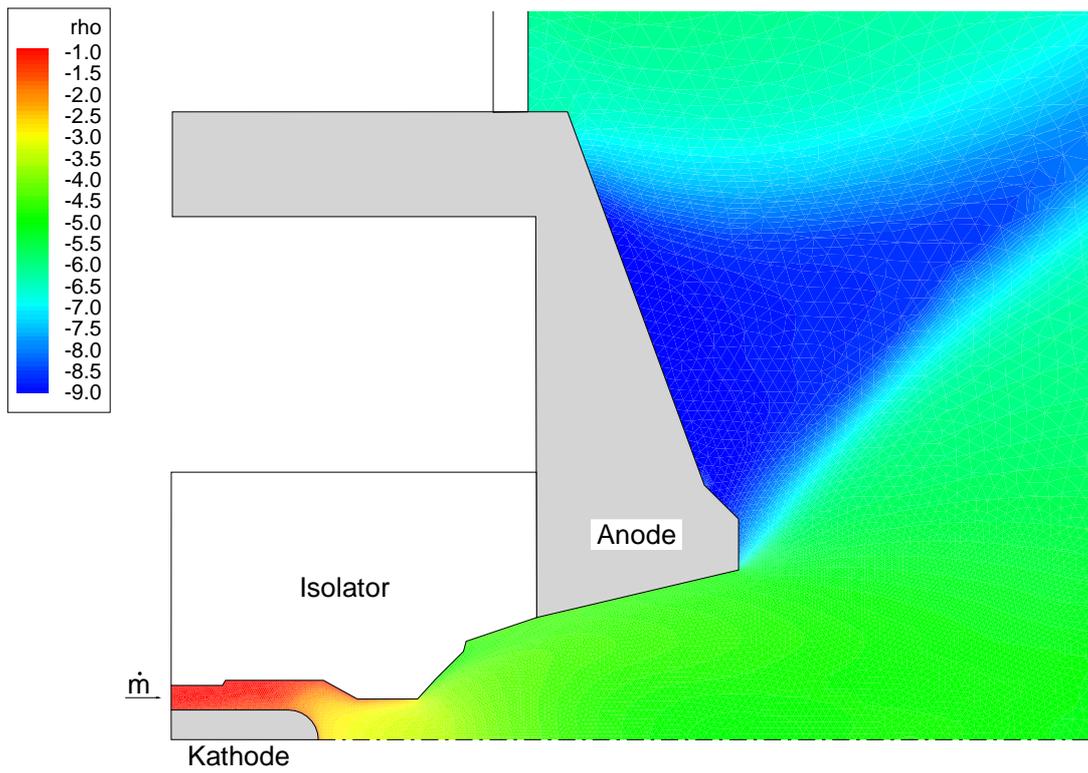


Abbildung 4.44: HAT: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 4000 A, 0.8 g/s

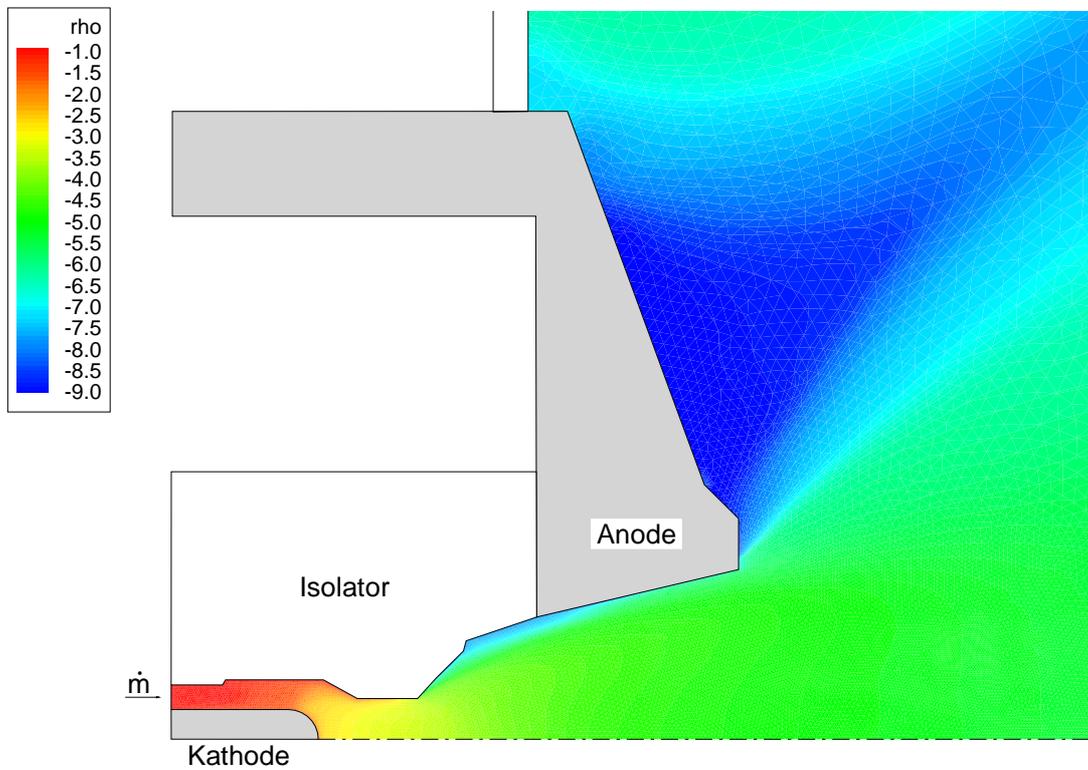


Abbildung 4.45: HAT: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 5000 A, 0.8 g/s

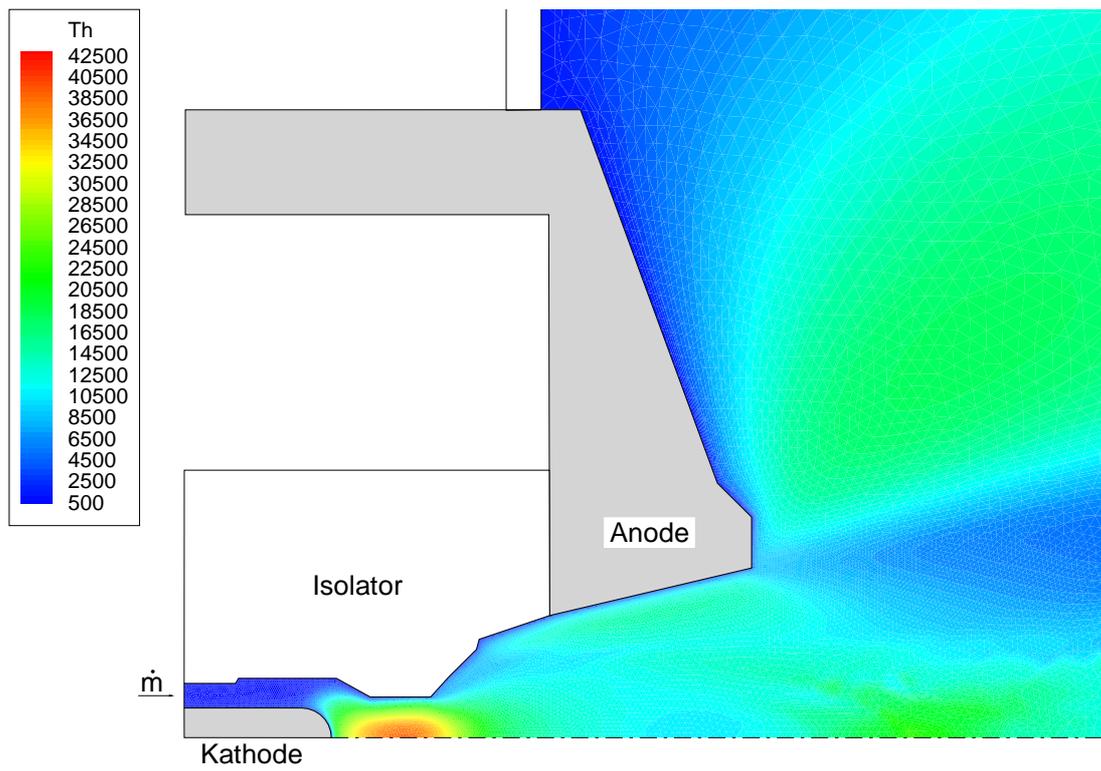


Abbildung 4.46: HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 4000 A, 0.8 g/s

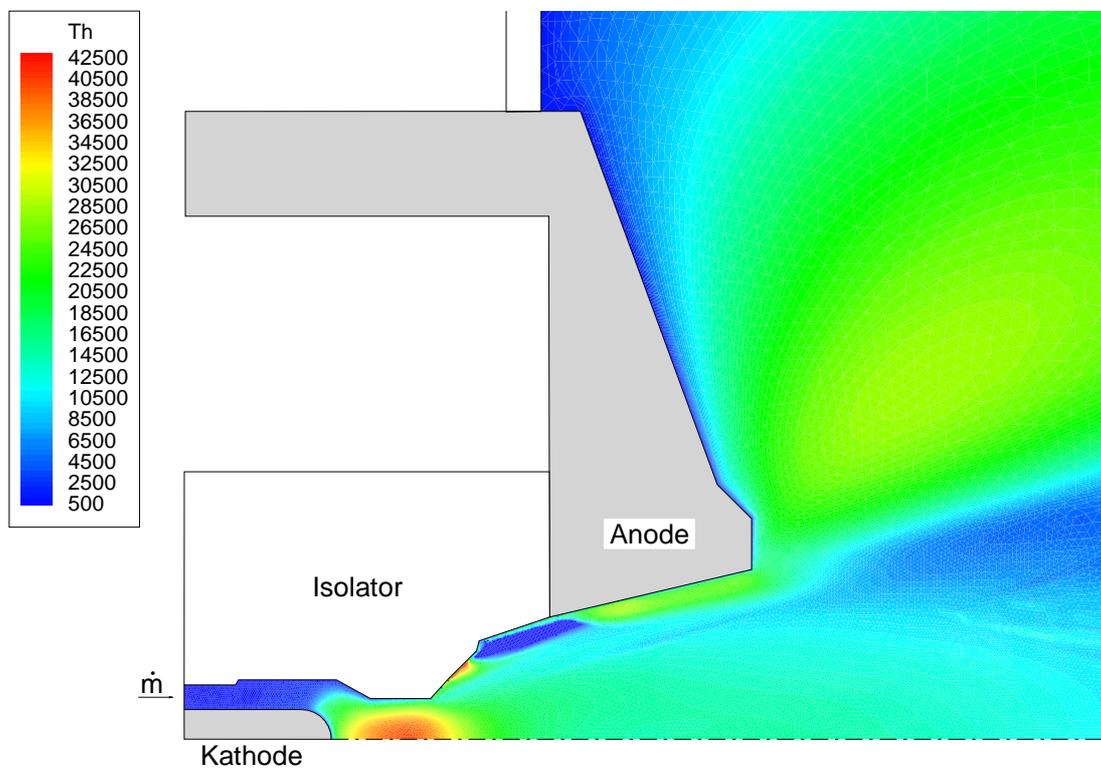


Abbildung 4.47: HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 5000 A, 0.8 g/s

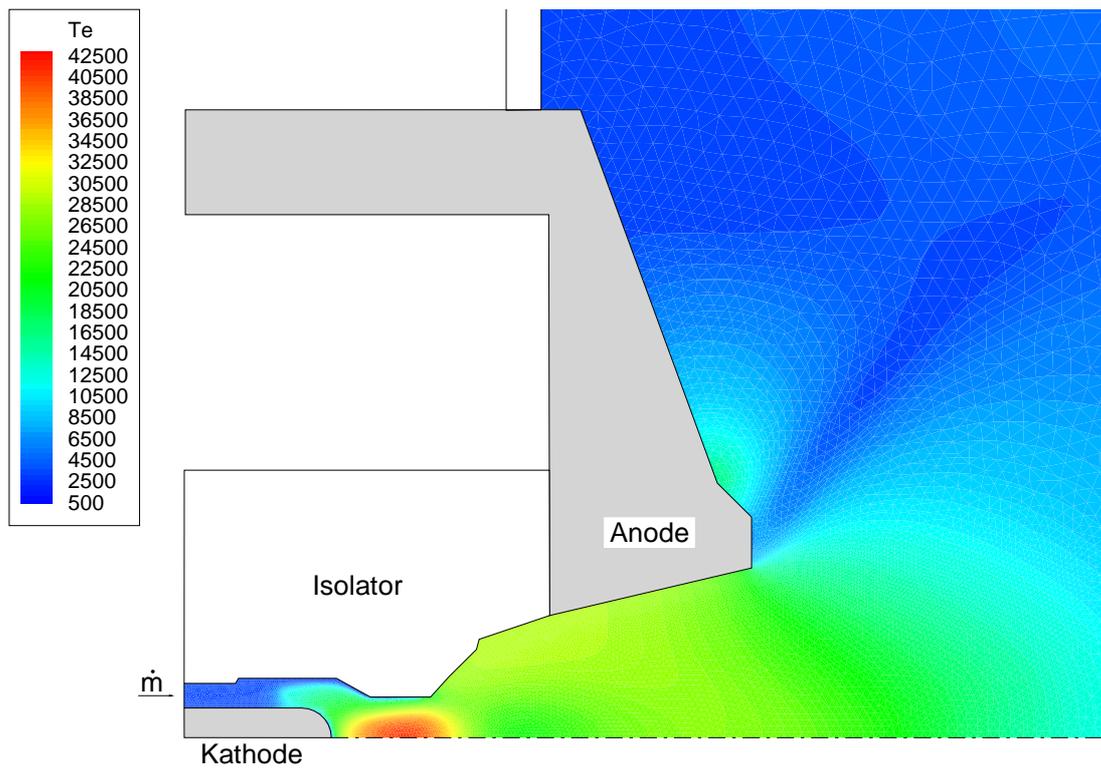


Abbildung 4.48: HAT: Elektronentemperatur T_e , 4000 A, 0.8 g/s

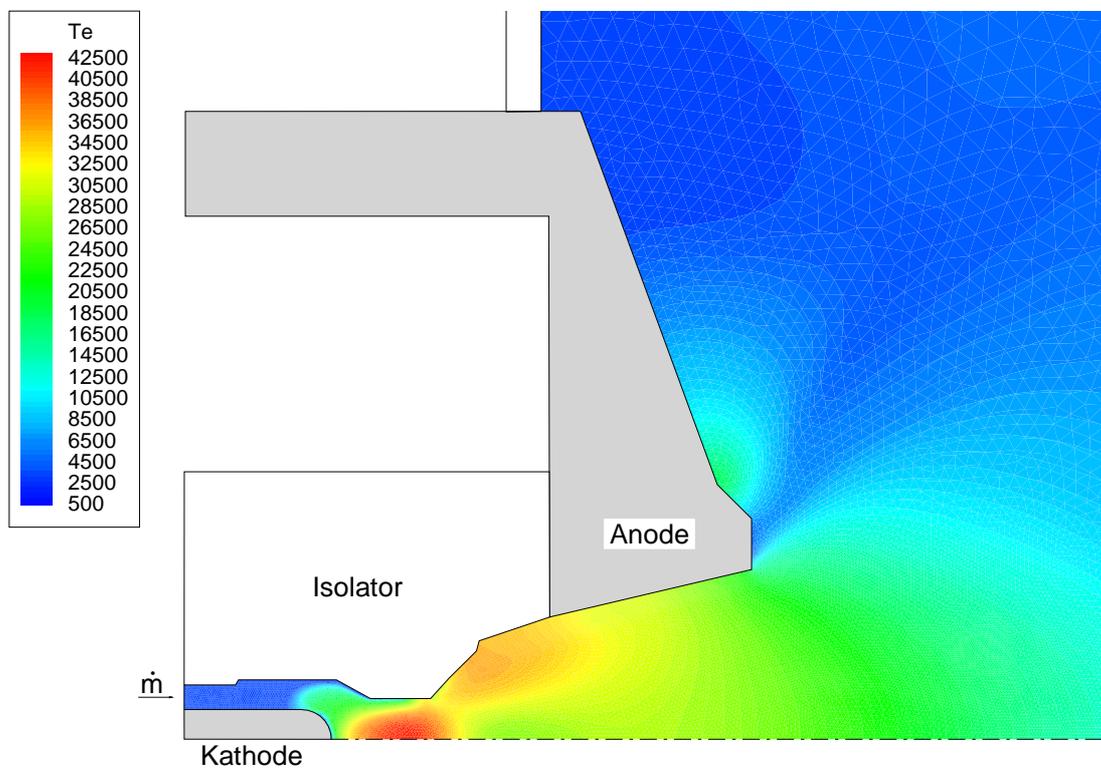


Abbildung 4.49: HAT: Elektronentemperatur T_e , 5000 A, 0.8 g/s

Bei einem Massenstrom von 0.3 g/s sind für 3000 A das Einschnüren des Lichtbogens (Abb. 4.50), die starke Dichteabnahme (Abb. 4.51) und das Aufheizen der Schwerteilchen (Abb. 4.52) vor der Anodeninnenfläche zu erkennen. Die Elektronentemperatur (Abb. 4.53) hat ihr Maximum von 37062 K in der Nähe der Düsenhalswand. Im Experiment konnte noch nicht überprüft werden, ob sich Plasmainstabilitäten zeigen, da der maximale Strom im Experiment bislang nur 2500 A betrug.

Im Geschwindigkeitsprofil (Abb. 4.54) für 2000 A und 0.8 g/s wird neben dem Einfluß der Viskosität auch die Herabsenkung der Austrittsgeschwindigkeit durch den schrägen Stoß um etwa 1 km/s deutlich. Die maximale Geschwindigkeit beträgt $12,2 \text{ km/s}$ für 5000 A . Während die Geschwindigkeit mit der Steigerung des Stromes und der Abnahme des Massenstromes generell zunimmt, ist dies bei der Machzahl (Abb. 4.55) nicht der Fall. Wie beim DT2 ist auch der divergente Düsenteil des HAT nicht im Hinblick auf eine optimale thermische Expansion ausgelegt.

Der Vergleich der numerisch berechneten Elektronentemperatur im Düsenendquerschnitt mit spektroskopisch gewonnenen Daten (Abb. 4.56–4.58) zeigt eine recht breite Streuung. Auffällig ist bei allen drei Stromstärken die niedrige, gemessene Anregungstemperatur für neutrales Argon. Die Krümmung der gemessenen Kurven für zweifach ionisiertes Argon bei 3000 A und 4000 A ist entgegengesetzt. Bei den gemessenen Kurven für einfach ionisiertes Argon ist ein Abfallen der Anregungstemperatur mit steigender Stromstärke festzustellen, während die numerisch berechnete Elektronentemperatur ansteigt. Eine klare Tendenz der experimentellen Werte ist nicht erkennbar. Am nächsten sind die numerisch berechneten Kurven den experimentellen Werten für einfach ionisiertes Argon.

Die in Tabelle 4.3 zusammengefaßten Kenndaten zeigen eine Streuung der experimentell gemessenen Schubwerte, die durch eine hohe thermische Belastung aufgrund der mit steigendem Strom zunehmenden thermischen Last auf die Triebwerksaufhängung zustandekommt. Dennoch stimmen die numerischen und experimentellen Werte gut überein. Der magnetische Schubanteil beträgt wie beim DT2 maximal 61 Prozent.

Im Experiment ist der Einströmdruck noch zu messen und die Schubmeßtechnik weiter zu verbessern. Die berechneten Spannungen sind aufgrund der nicht berechneten Fallspannungen kleiner als die gemessenen Werte, wobei die Abweichung mit steigender Stromstärke größer wird. Es ist daher die Aufgabe der zukünftigen numerischen Entwicklungsarbeiten, durch Einbindung geeigneter Elektrodenmodelle auch die Kathoden- und Anodenfallspannungen zu berechnen.

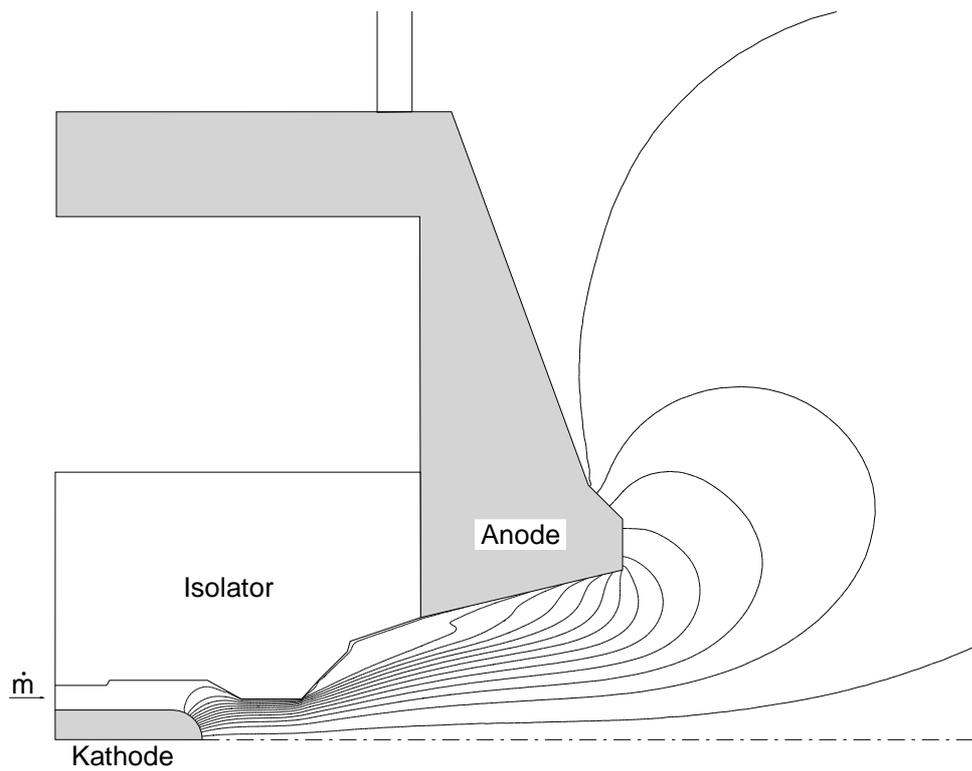


Abbildung 4.50: HAT: Stromverteilung Ψ , 3000 A, 0.3 g/s (250 A zwischen 2 Isolinien)

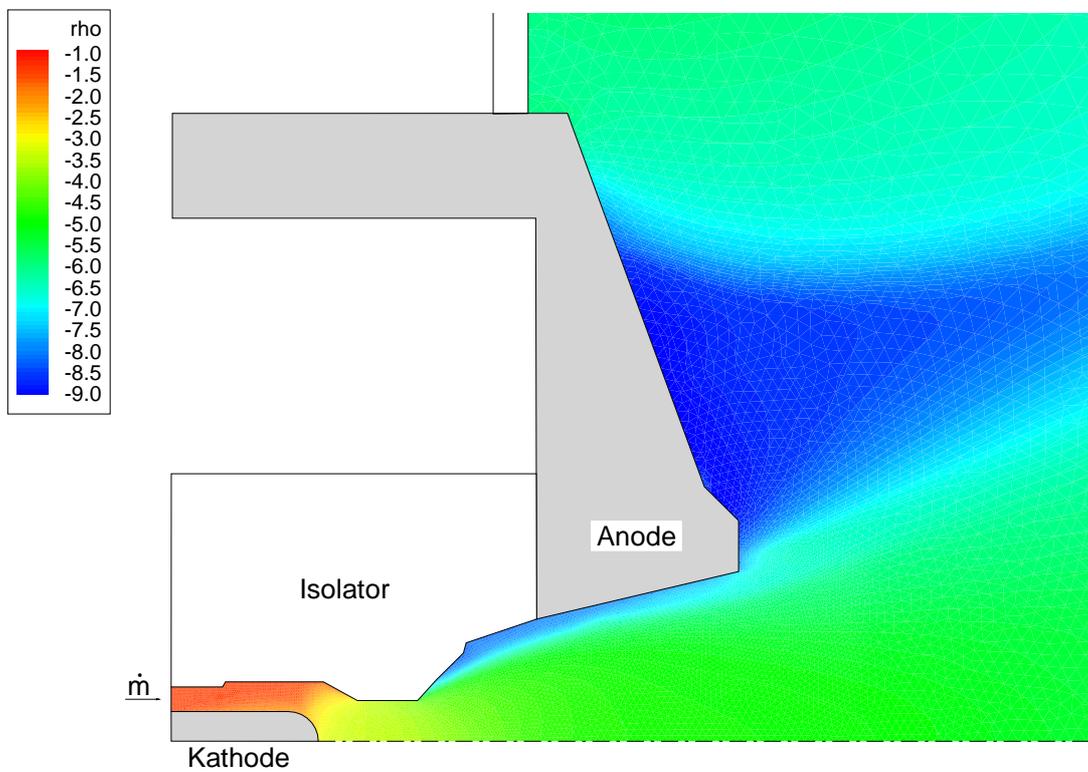


Abbildung 4.51: HAT: Dichte $\log_{10}(\rho)$, 3000 A, 0.3 g/s

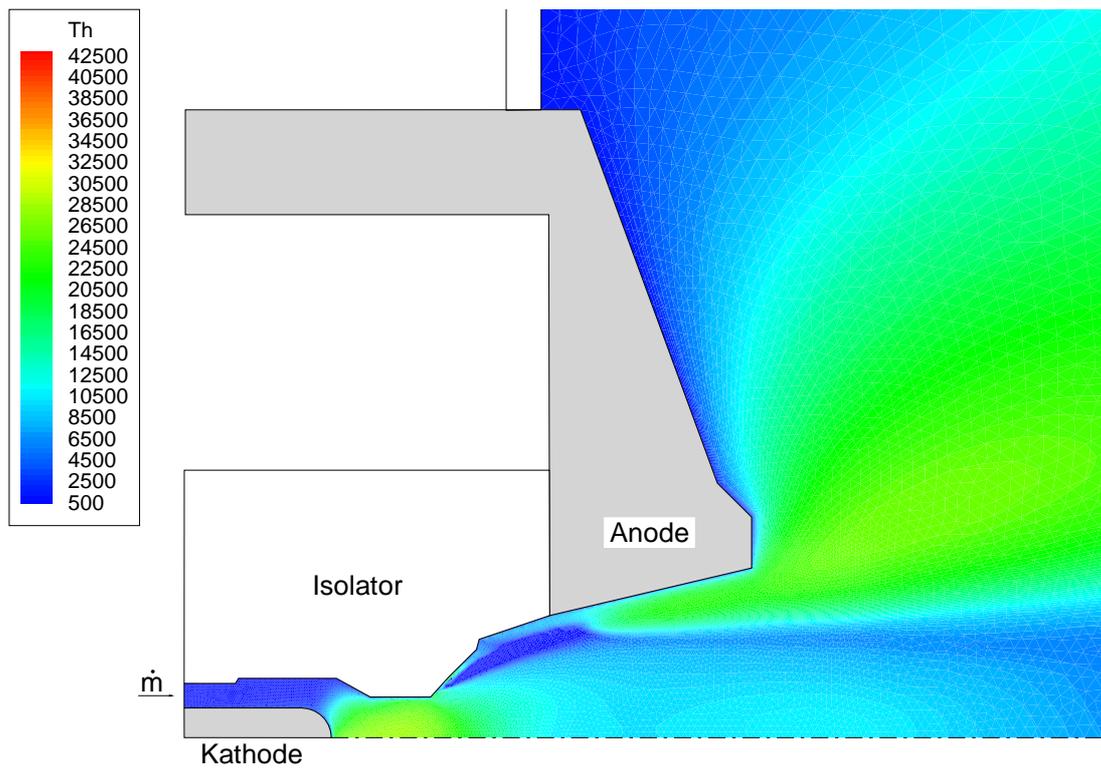


Abbildung 4.52: HAT: Schwerteilchentemperatur T_h , 3000 A, 0.3 g/s

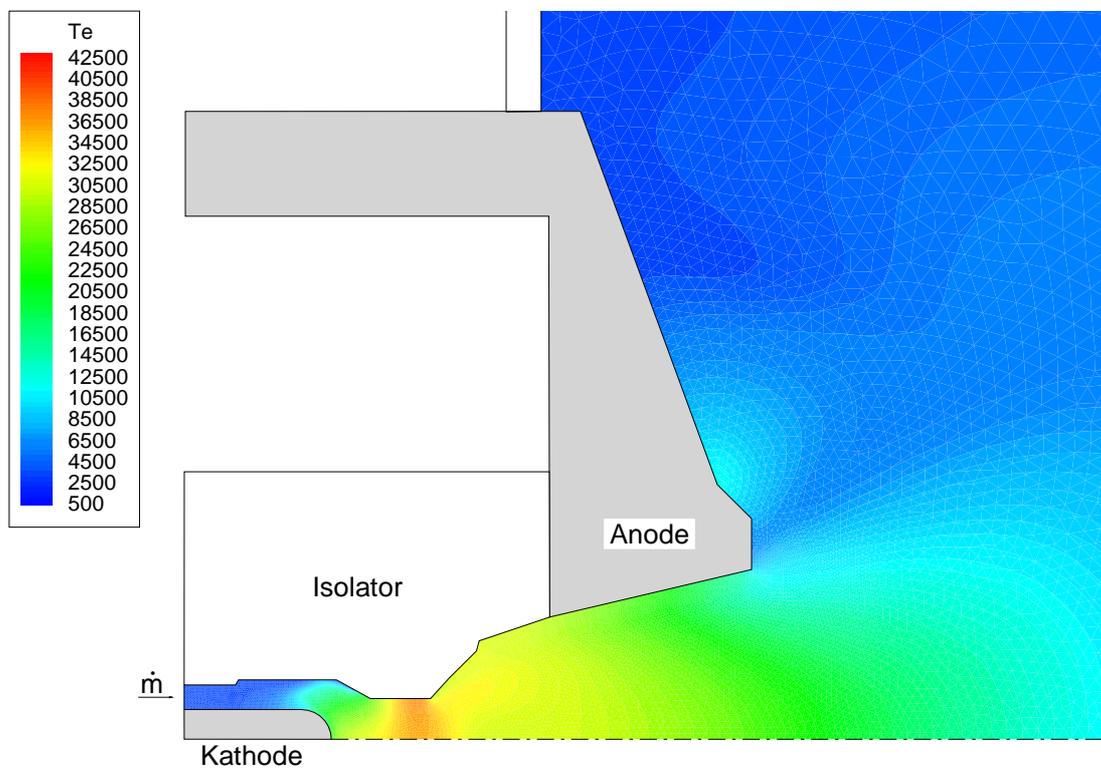


Abbildung 4.53: HAT: Elektronentemperatur T_e , 3000 A, 0.3 g/s

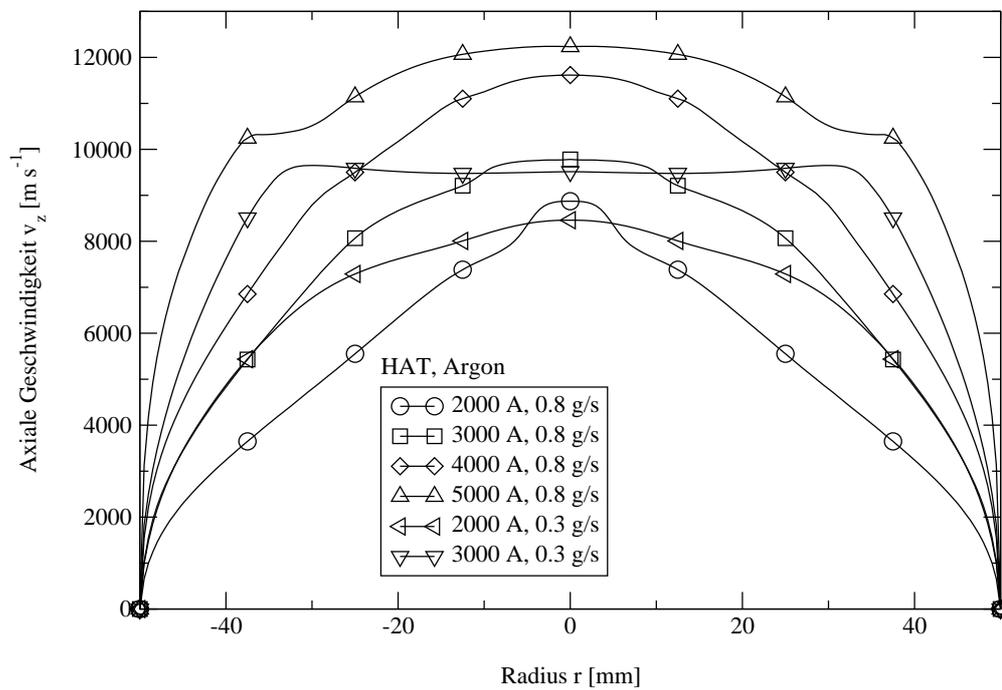


Abbildung 4.54: HAT: Axiale Geschwindigkeit v_z im Düsenendquerschnitt

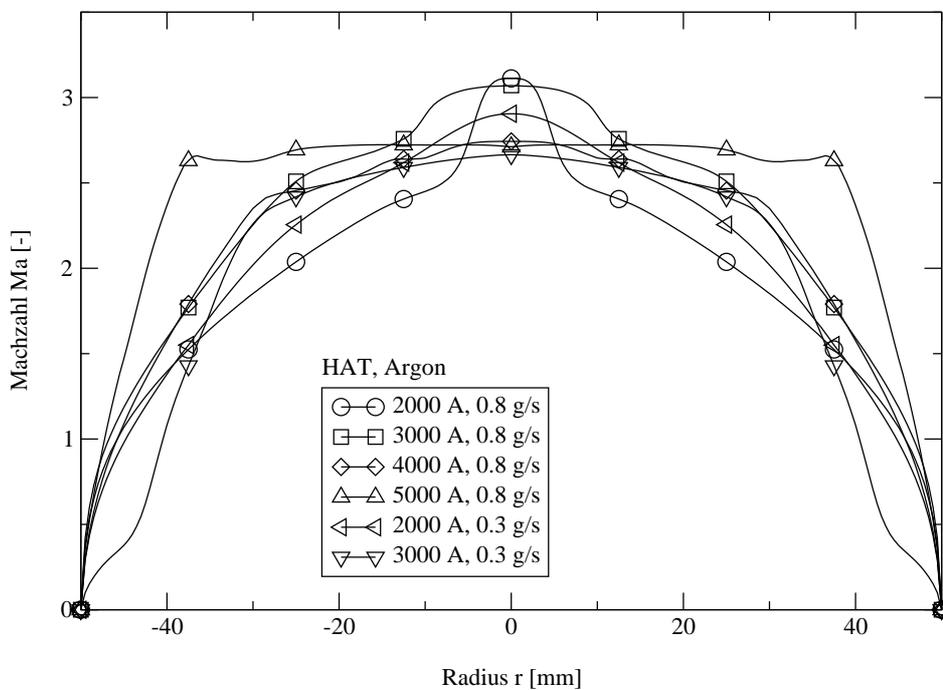


Abbildung 4.55: HAT: Machzahl $Ma = |\vec{v}|/c$ im Düsenendquerschnitt

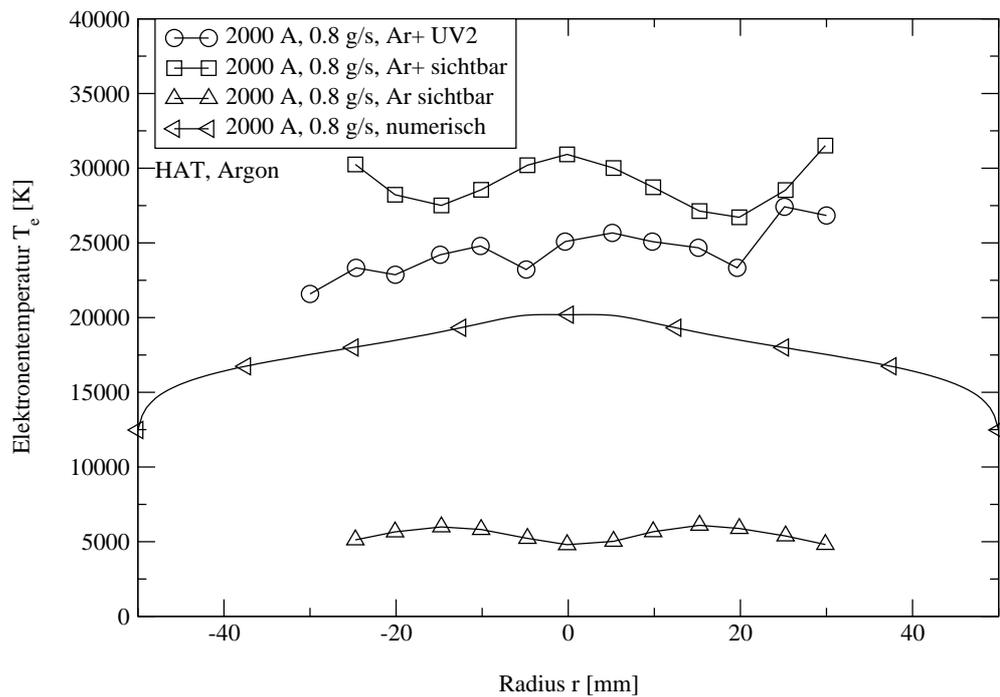


Abbildung 4.56: HAT: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 2000 A, 0.8 g/s

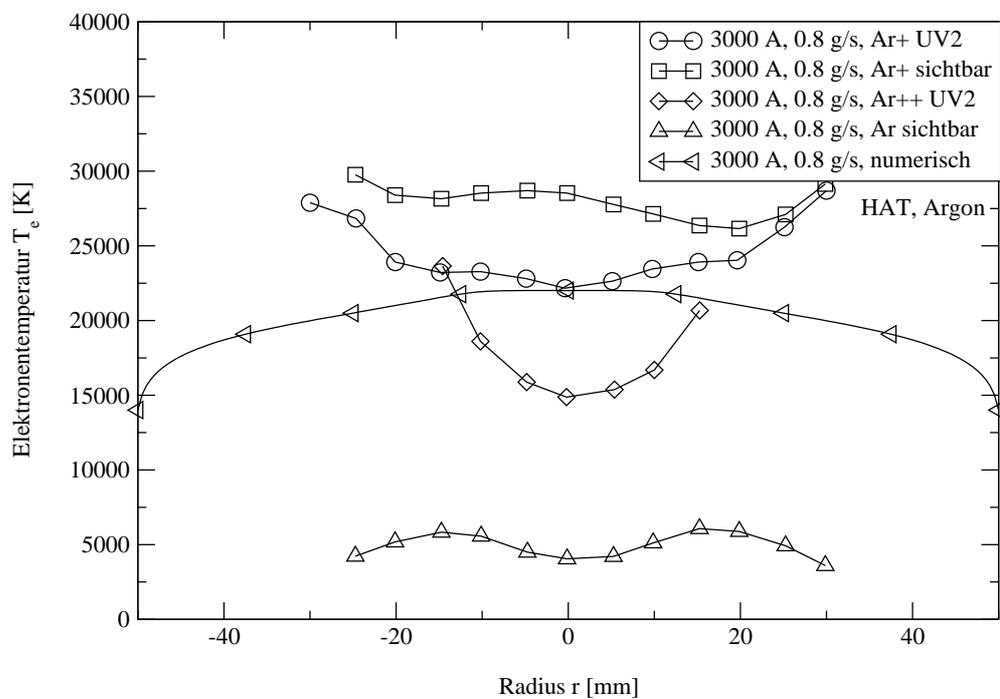


Abbildung 4.57: HAT: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 3000 A, 0.8 g/s

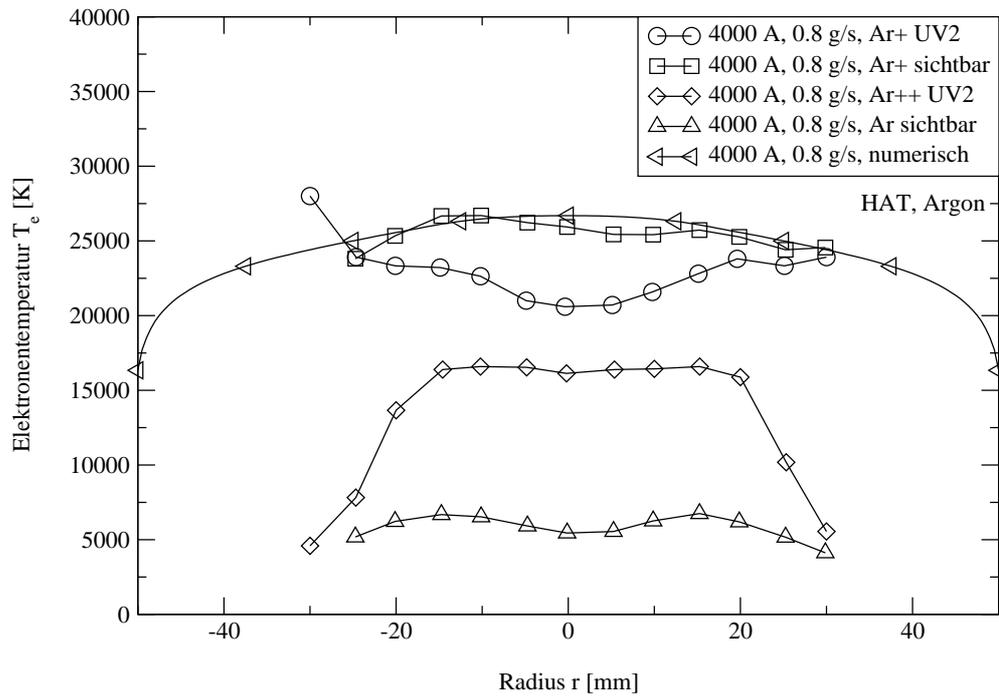


Abbildung 4.58: HAT: Elektronentemperatur T_e im Düsenendquerschnitt im Vergleich mit experimentellen Daten, 4000 A, 0.8 g/s

$I[A]$	$\dot{m}[g/s]$	$p_{ein}[kPa]$ num.	$U_P[V]$ num.	$U_{C+P+A}[V]$ exp.	$F_{j \times B}[N]$ num.	$F[N]$ num.	$F[N]$ exp.
2000	0,8	7,3	29,3	39,2	1,0	4,3	3,7 - 4,7
2500	0,8	8,1	32,7	43,1	1,5	5,2	5,3
3000	0,8	9,1	35,2	47,9	1,9	5,9	5,7 - 7,0
3500	0,8	9,8	38,3	52,4	2,5	6,8	7,4
4000	0,8	11,3	44,8	58,3	3,3	8,5	7,8 - 9,4
4500	0,8	11,6	48,1	62,8	4,1	9,2	10,0
5000	0,8	12,8	52,2	69,1	4,9	10,1	11,1
2000	0,3	3,5	24,9	35,3	0,9	2,2	-
2500	0,3	3,7	28,5	38,6	1,4	2,7	-
3000	0,3	3,9	32,9	-	1,9	3,1	-

Tabelle 4.3: Kenndaten HAT (num.: numerisch, exp.: experimentell [11])

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Finite–Volumen–Verfahren zur Lösung der Erhaltungsgleichungen für Argonplasmaströmungen in magnetoplasmadynamischen Eigenfeldbeschleunigern entwickelt, die aufgrund ihres hohen spezifischen Impulses und ihrer hohen Schubdichte als Antrieb für interplanetare Raumflugmissionen geeignet erscheinen.

Die gemischt hyperbolisch–parabolischen Erhaltungsgleichungen mit Quelltermen für die Teilchendichten, den Impuls und die Energie der Schwerteilchen, die Elektronenenergie, die Turbulenz und das eigeninduzierte Magnetfeld sind unter der Annahme thermischen und reaktiven Nichtgleichgewichts so formuliert, daß durch die Verwendung von Flüssen auch in der Finite–Volumen–Diskretisierung ein Maximum an Konservativität erreicht wird.

Die Lösung der Erhaltungsgleichungen erfolgt für den zweidimensionalen, rotations-symmetrischen Fall auf unstrukturierten, adaptiven Gittern. Zur Berechnung der reibungsfreien Flüsse wird ein robustes Flux Vector Splitting–Verfahren nach Eberle modifiziert und erweitert. Durch das Einbeziehen des magnetischen Druckes in die reibungsfreien Flüsse und die Finite–Volumen–Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen für die Elektronenenergie und das Magnetfeld wird die numerische Stabilität des Rechenverfahrens insbesondere in transsonischen und Überschallbereichen mit Stößen und beim Zusammenziehen des Lichtbogens durch den Pinch–Effekt stark erhöht.

Die zur approximativen Lösung des Riemann–Problems auf den Zellrändern benötigten Variablen werden mit Hilfe eines Weighted Essentially Non–Oscillatory (WENO–) Verfahrens linear rekonstruiert. Das WENO–Verfahren erzielt in glatten Lösungsbereichen eine sehr gute Glattheit und ist bei Stößen robust.

Um möglichst schnell einen stationären Strömungszustand berechnen zu können, werden randomisierte, lokale Zeitschritte erster Ordnung verwendet. Das Rechenverfahren ist durch die einheitliche Finite–Volumen–Diskretisierung aller Erhaltungsgleichungen deutlich schneller und stabiler als das bisher eingesetzte, gemischte FV/FEM–Verfahren.

Die Gitteradaption erfolgt mit Hilfe der Kombination eines aus der mathematischen Analysis der Schwerteilchenerhaltungsgleichungen gewonnen Fehlerindikators und eines Gradientenindikators. Grenzschichten, Stöße und Bereiche großer Quellterme werden damit physikalisch sinnvoll verfeinert, sodaß Rechenzeit eingespart wird.

Experimentell bestätigte Berechnungen für den Plasmabeschleuniger RD3 zeigen, daß die Diffusion aufgrund des Elektronendrucks den Lichtbogen aus düsenförmigen MPD-Eigenfeldbeschleunigern herausschleibt und den Lichtbogenansatz auf der Anode maßgeblich bestimmt.

Erstmals wird nun auch in der numerischen Simulation mit dem neuen Finite-Volumen-Verfahren gezeigt, daß es bei hohen Strömen durch den Pinch-Effekt zu einer starken Dichteverarmung vor der Anode kommt. Die Korrelation der numerischen Simulation mit den experimentellen Daten im Strombereich der Instabilitäten weist ganz klar darauf hin, daß eine primäre Ursache für das Auftreten von Plasmainstabilitäten in düsenförmigen MPD-Eigenfeldbeschleunigern die durch den Pinch-Effekt hervorgerufene Dichte- und damit Ladungsträgerverarmung vor der Anode ist, was theoretisch schon lange vorhergesagt wurde.

Die Berechnung der Schübe des düsenförmigen Triebwerks DT2 und des Triebwerks mit Heiße Anode HAT liefert im Vergleich mit dem Experiment gute Resultate. Auch zeigen die Berechnungen, daß durch den etwas kleineren Expansionswinkel der Düse des HAT die Ladungsträgerverarmung vor der Anode hinausgezögert wird. Dies ist wahrscheinlich der Grund dafür, daß beim HAT im Experiment bislang keine Plasmainstabilitäten bei hohen Strömen zu beobachten sind.

Das Verfahren kann damit bereits als Werkzeug zum Entwurf und zur Entwicklung neuer MPD-Triebwerke genutzt werden. Es ermöglicht insbesondere eine Optimierung der Düsengeometrie bezüglich des Schubes und eine Vorauswahl von Düsengeometrien, um den Dichteabfall vor der Anode in Richtung höherer Ströme zu verschieben. Darüberhinaus können die mit dem Verfahren berechneten Datensätze zur Instabilitätsanalyse verwendet werden.

Die nächsten Schritte bei der Weiterentwicklung des modular aufgebauten Programmsystems stellen die detaillierte Mitberechnung der Wechselwirkung zwischen Plasmaströmung und Düsenfestkörper insbesondere im Elektrodenbereich sowie die Untersuchung des Einflusses der Restgaszirkulation im Versuchstank dar.

Literaturverzeichnis

- [1] R.G. JAHN, *Physics of Electric Propulsion*, McGraw–Hill Series in Missile and Space Technology, 1968.
- [2] M. AUWETER–KURTZ, *Lichtbogenantriebe für Weltraumaufgaben*, B.G. Teubner Stuttgart, 1992.
- [3] G.L. BENNETT, M.A. WATKINS, D.C. BYERS, J.W. BARNETT, *Enhancing Space Transportation: The NASA Program to Develop Electric Propulsion*, IEPC–91–004, 21st AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference, Orlando, Florida, 1990.
- [4] I. BASSNER, M. SILVI, L. VAN HOLZ, C. BARTOLI, *Ion Propulsion: A Key Enabler on ESA's DRTM Programme*, 23rd Electric Propulsion Conference, Seattle, WA, 1993.
- [5] R.T. FECONDA, J.I. WERMAN, *Satellite Reaction Control Subsystem with Augmented Catalytic Thrusters*, AIAA–84–1235, 20th AIAA/SAE/ASME Joint Propulsion Conference, Cincinnati, Ohio, 1984.
- [6] M. AUWETER–KURTZ, B. GLOCKER, T. GÖLZ, H.L. KURTZ, E.W. MESSERSCHMID, M. RIEHLE, D.M. ZUBE, *Arcjet thruster development*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 12, No. 6, 1996.
- [7] M. AUWETER–KURTZ, T. GÖLZ, H. HABIGER, F. HAMMER, H.L. KURTZ, M. RIEHLE, *High–Power Hydrogen Arcjet Thrusters*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, No. 5, 1998.
- [8] A.G. SCHWER, *Bestimmung der Einsatzbedingungen und Verwendungsvorteile elektro–thermischer Raketenantriebe für die Transfermission von Satelliten*, Dissertation, Institut für Raumfahrtssysteme, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1997.
- [9] G. KRÜLLE, *Zur Dynamik des axialsymmetrischen magnetoplasmadynamischen Beschleunigers (MPD–Triebwerk) mit überlagertem Magnetfeld*, DLR Forschungsbericht 74–56, Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, 1974.
- [10] T. WEGMANN, *Experimentelle Untersuchung kontinuierlich betriebener magnetoplasmadynamischer Eigenfeldtriebwerke*, Dissertation, Institut für Raumfahrtssysteme, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1994.

- [11] M. AUWETER-KURTZ, C. BOIE, H. HABIGER, H.J. KAEPPELER, H.L. KURTZ, P.C. SLEZIONA, T. WEGMANN UND M.W. WINTER, *Numerische Simulation von MPD-Triebwerken und Vergleich mit durchzuführenden experimentellen Untersuchungen*, Endbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Au85/5-2, Institut für Raumfahrtsysteme, Universität Stuttgart, 1998.
- [12] H.P. WAGNER, *Theoretische Untersuchung drift- und gradientengetriebener Instabilitäten in MPD-Triebwerksströmungen*, Dissertation, Institut für Raumfahrtsysteme, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1994.
- [13] H.J. KAEPPELER, *Basic equations and elements of the dispersion relation for a four-fluid formalism of magneto-plasmadynamics with non-equilibrium ionization*, IEPC-91-059, Proceedings of the 22nd International Electric Propulsion Conference, Viareggio, Italy, 1991.
- [14] P.C. SLEZIONA, *Numerische Analyse der Strömungsvorgänge in magnetoplasma-dynamischen Raumfahrtantrieben*, Dissertation, Institut für Raumfahrtsysteme, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1992.
- [15] P.C. SLEZIONA, *Hochenthalpieströmungen für Raumfahrtanwendungen*, Habilitationsschrift, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1998.
- [16] C. BOIE, *Numerische Simulation magnetoplasma-dynamischer Eigenfeldtriebwerke mit hochauflösenden adaptiven Verfahren*, Dissertation, Institut für Raumfahrtsysteme, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1999.
- [17] R.D. BÜHLER, *Plasma thruster development: magnetoplasma-dynamic propulsion, status and basic problems*, AFRPL TR-86-013, Air Force Rocket Propulsion Laboratory, Edwards AFB, California, 1986.
- [18] M. AUWETER-KURTZ, *Plasma Thruster Development Program at the IRS*, Acta Astronautica, Vol. 32, No. 5, pp. 377-391, Pergamon, 1994.
- [19] M. AUWETER-KURTZ, *Zur Dynamik der mit Kaltgas angeströmten Lichtbogensäule*, Dissertation, Institut für Raumfahrtantriebe, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1985.
- [20] H.O. SCHRADE, *Basic Processes of Plasma Propulsion*, Interim Scientific Report, Air Force Office of Scientific Research Grant 82-0298, Institut für Raumfahrtsysteme, Universität Stuttgart, 1982.
- [21] H.O. SCHRADE, *Basic Processes of Plasma Propulsion*, Interim Scientific Report, Air Force Office of Scientific Research Grant 86-0337, Institut für Raumfahrtsysteme, Universität Stuttgart, 1987.
- [22] W.D. MERKE, M. AUWETER-KURTZ, H. HABIGER, H.L. KURTZ, H.O. SCHRADE, *Nozzle Type MPD Thruster Experimental Investigations*, IEPC-88-028, Proceedings of the 20th International Electric Propulsion Conference, Garmisch-Partenkirchen, Deutschland, 1988.

- [23] H. HÜGEL, *Zur Funktionsweise der Anode im Eigenfeldbeschleuniger*, Habilitation, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, DFVLR Forschungsbericht 80–20, 1980.
- [24] E.Y. CHOEIRI, *Electron–Ion Streaming Instabilities of an Electromagnetically Accelerated Plasma*, Ph.D. thesis, Princeton University, New Jersey, USA, 1991.
- [25] E.Y. CHOEIRI, *Anomalous resistivity and heating in current–driven plasma thrusters*, Physics of Plasmas, Vol. 6, No. 5, pp. 2290–2306, 1999.
- [26] H.P. WAGNER, H.J. KAEPPELER, M. AUWETER–KURTZ, *Instabilities in MPD thruster flows: 1. Space charge instabilities in unbounded and inhomogeneous plasmas*, J. Phys. D: Appl. Phys. 31, pp. 519–528, 1998.
- [27] H.P. WAGNER, H.J. KAEPPELER, M. AUWETER–KURTZ, *Instabilities in MPD thruster flows: 2. Investigation of drift and gradient driven instabilities using multi–fluid plasma models*, J. Phys. D: Appl. Phys. 31, pp. 529–541, 1998.
- [28] G. HAGEMANN, *Überschallströmungen reagierender Gase in komplexen Düsenkonfigurationen von Hochleistungs–Raketentriebwerken*, Dissertation, Institut für Raumfahrtssysteme, Fakultät Luft– und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1996.
- [29] H. HÜGEL, *Zur Strömung kompressibler Plasmen im Eigenfeld von Lichtbogenentladungen*, Dissertation, Institut für Plasmadynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luft– und Raumfahrt, DFVLR Forschungsbericht 70–13, 1970.
- [30] H. MINAKUCHI, K. KURIKI, *Magnetoplasmadynamic Analysis of Plasma Acceleration*, AIAA–84–06, Proceedings of the 17th International Electric Propulsion Conference, Tokyo, Japan, 1984.
- [31] E.H. NIEWOOD, M. MARTINEZ–SANCHEZ, *A Two Dimensional Model of an MPD Thruster*, AIAA 91–2344, 27th AIAA/SAE/ASME Joint Propulsion Conference, Sacramento, CA, 1991.
- [32] P.J. TURCHI, P.G. MIKELLIDES, K.W. HOHMAN, R.J. LEIWEKE, I.G. MIKELLIDES, C.S. SCHMAHL, N.F. RODERICK, R.E. PETERKIN JR., *Progress in modeling plasma thrusters and related plasma flows*, IEPC–95–159, Proceedings of the 24th International Electric Propulsion Conference, Moscow, Russia, 1995.
- [33] K. FUJITA, *Performance Computation of a Low–Power Hydrogen Arcjet*, AIAA–96–3183, 32nd Joint Propulsion Conference, Lake Buena Vista, FL, 1996.
- [34] K. SANKARAN, E.Y. CHOEIRI, S.C. JARDIN, *Application of a New Numerical Solver to the Simulation of MPD Flows*, AIAA–2000–3537, 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Huntsville, Alabama, 2000.
- [35] K. SANKARAN, *Simulation of MPD Flows Using a Flux–Limited Numerical Method for the MHD Equations*, M.Sc. thesis 3074–T, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University, USA, 2001.

- [36] P.C. SLEZIONA, M. AUWETER–KURTZ, J. HEIERMANN, *Numerische Simulation von Plasmatriebwerken für die Raumfahrt*, DGLR-JT98-193, DGLR Jahrbuch, ISSN 0070–4083, S.897–906, 1998.
- [37] S. LENZNER, M. AUWETER–KURTZ, J. HEIERMANN, P.C. SLEZIONA, *Energy Partitions in Inductively Heated Plasma Sources for Reentry Simulations*, AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 14, No. 3, pp. 388–395 (presented as paper AIAA 98–2947, 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Albuquerque, NM, June 15–18, 1998), 2000.
- [38] B. STROUSTRUP, *Die C++ Programmiersprache*, Addison–Wesley, 1998.
- [39] A. NYE, *Xlib Programming Manual*, O’Reilly & Associates, Inc., 1990.
- [40] A. NYE, *Xlib Reference Manual*, O’Reilly & Associates, Inc., 1992.
- [41] F. CAP, *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*, Springer Verlag, 1994.
- [42] U. SCHUMACHER, *Fusionsforschung*, Hanser Verlag, 1993.
- [43] J.D. HUBA, *NRL Plasma Formulary (2000 revised)*, Beam Physics Branch, Plasma Physics Division, Naval Research Laboratory, 2000.
- [44] A. FROHN, *Einführung in die Technische Thermodynamik*, AULA–Verlag Wiesbaden, 1989.
- [45] J.O. HIRSCHFELDER, C.F. CURTISS, R.B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, 1967.
- [46] J.M. YOS, *Transport Properties of Nitrogen, Hydrogen, Oxygen, and Air to 30000 K*, Technical Memorandum RAD–TM–63–7, Aeronautical Systems Division, Air Force Systems Command, 1963.
- [47] M. FERTIG, A. DOHR, H.–H. FRÜHAUF, *Transport Coefficients for High Temperature Nonequilibrium Air Flows*, AIAA 98–2937, 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Albuquerque, NM, 1998.
- [48] A. SUTTON, P.A. GNOFFO, *Multi–Component Diffusion with Application to Computational Aerothermodynamics*, AIAA 98–2575, 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Albuquerque, NM, 1998.
- [49] W. LOTZ, *An Empirical Formula for the Electron–Impact Ionization Cross–Section*, Zeitschrift für Physik 206, S. 205–211, 1967.
- [50] W. LOTZ, *Electron–Impact Ionization Cross–Sections and Ionization Rate Coefficients for Atoms and Ions from Hydrogen to Calcium*, Zeitschrift für Physik 216, S. 241–247, 1968.
- [51] R. TROSTEL, *Vektor– und Tensoranalysis*, Vieweg, 1997.

- [52] M. OEVERMANN, *Ein Finite-Volumen-Verfahren auf unstrukturierten Dreiecksgittern zur Berechnung turbulenter Diffusionsflammen in kompressiblen Strömungsfeldern*, Dissertation, RWTH Aachen, 1997.
- [53] H. SCHLICHTING, K. GERSTEN, *Grenzschicht-Theorie*, Springer Verlag, 1997.
- [54] D.C. WILCOX, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, 1993.
- [55] U.C. GOLDBERG, S.V. RAMAKRISHNAN, *A Pointwise Version of Baldwin-Barth Turbulence Model*, Computational Fluid Dynamics, Vol. 1, pp. 321–338, 1993.
- [56] B.S. BALDWIN, T.J. BARTH, *A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows*, NASA Technical Memorandum 102847, 1990.
- [57] V.C. PATEL, W. RODI, G. SCHEURER, *Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review*, AIAA Journal, Vol. 23, No. 9, pp. 1308–1319, 1985.
- [58] A. FROHN, *Einführung in die Kinetische Gastheorie*, AULA-Verlag Wiesbaden, 1988.
- [59] J.D. ANDERSON, *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill, 1989.
- [60] W. GREINER, *Theoretische Physik Bd. 3, Klassische Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, 1991.
- [61] L. BERGMANN, C. SCHAEFER, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 5: Vielteilchensysteme*, de Gruyter Verlag, 1992.
- [62] W.H. KEGEL, *Plasmaphysik*, Springer Verlag, 1998.
- [63] A. UNSÖLD, *Physik der Sternatmosphären*, Springer Verlag, 1968.
- [64] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, 1958.
- [65] C.E. MOORE, *Atomic Energy Levels, Volume 1*, NSRDS-NBS 35, National Bureau of Standards, 1947.
- [66] H.-W. DRAWIN, P. FELENBROK, *Data for Plasmas in Local Thermodynamic Equilibrium*, Gauthiers-Villars, 1965.
- [67] W. LOTZ, *Subshell Binding Energies of Atoms and Ions from Hydrogen to Zinc*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 58, No. 7, 1968.
- [68] C. LANZOS, *Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions*, Journal of Mathematics and Physics, Vol. XVII, pp. 123–199, 1938.
- [69] E. JAHNKE, F. EMDE, F. LÖSCH, *Tafeln höherer Funktionen*, B.G. Teubner Stuttgart, 1966.

- [70] M. MITCHNER, C.H. KRUGER, *Partially Ionized Gases*, Wiley, 1973.
- [71] H.J. KAEPPELER, *Die Grundgleichungen für eine vierkomponentige Magnetoplasma-Strömung mit Nichtgleichgewichtszionisation*, Bericht IPF-91-1, Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart, 1991.
- [72] H.O. SCHRADE, P.C. SLEZIONA, *Basic Processes of Plasma Propulsion*, Interim Scientific Report, Air Force Office of Scientific Research Grant 86-0337, Institut für Raumfahrtssysteme, Universität Stuttgart, 1990.
- [73] H.J. KAEPPELER, *Equilibrium and Non-Equilibrium Thermodynamics of Plasma Flow*, Goodyear Aircraft Corporation Report GER 10930, 1963.
- [74] G. BAUMANN, *Zur quantenmechanischen Statistik von Gasen und reagierenden Gasgemischen*, Dissertation, Institut für Physik der Strahlantriebe, Universität Stuttgart, 1956.
- [75] W. FINKELNBURG, H. MAECKER, *Elektrische Bögen und thermisches Plasma*, Handbuch der Physik Bd. XXII, Gasentladungen II, Springer Verlag, 1956.
- [76] H.O. SCHRADE, W. BEZ, K.H. HÖCKER, H.J. KAEPPELER, *Zur Theorie der Ohm'schen Heizung vollionisierter Plasmen*, Zeitschrift für Naturforschung, Bd. 15a, Heft 2, 1960.
- [77] R.S. DEVOTO, *Transport coefficients of ionized argon*, The Physics of Fluids, Vol. 16, No. 5, pp. 616-623, 1973.
- [78] M. KNOLL, F. OLLENDORF, R. ROMPE, *Gasentladungstabellen*, Springer Verlag, 1935.
- [79] H.J. KAEPPELER, G. BAUMANN, *Irreversible Stochastic Thermodynamics and the Transport Phenomena in a Reacting Plasma*, Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut für Strahlantriebe, Nr. 8, 1956.
- [80] H.O. SCHRADE, P.C. SLEZIONA, T. WEGMANN, H.L. KURTZ, *Basic Processes of Plasma Propulsion*, Interim Scientific Report, Air Force Office of Scientific Research Grant 91-0118, Institut für Raumfahrtssysteme, Universität Stuttgart, 1992.
- [81] I.P. NAZARENKO, I.G. PANEVIN, *Simple method for calculating transport properties of electrons in argon plasma*, High Temperature Journal, Vol. 27, No. 3 (translation from Russian journal 'Teplofhisika vysokih temperatur'), 1989.
- [82] P.A. NIKRITYUK, *Mathematical Modelling of the Gas Heating in the Hydrogen Arcjet*, Ph.D. thesis, Moscow State Aviation Institute, 1999.
- [83] R.S. DEVOTO, *Transport coefficients of high pressure argon in a magnetic field*, Aerospace Research Laboratories, Air Force Systems Command, ARL 71-0075, 1971.
- [84] J.-H. LEE, *Basic Governing Equations for the Flight Regimes of Aeroassisted Orbital Transfer Vehicles*, in: Progress in Aeronautics and Astronautics, Vol. 96, pp. 3-53, AIAA, 1985.

- [85] T.F. MORSE, *Energy and Momentum Exchange between Nonequipartition Gases*, Physics of Fluids, Vol. 6, pp. 1420–1427, 1963.
- [86] C. PARK, *Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics*, Wiley, 1990.
- [87] C.A. COCLICI, M. AUWETER-KURTZ, J. HEIERMANN, W.L. WENDLAND, *A heterogeneous domain decomposition for initial–boundary value problems with conservation laws and electromagnetic fields*, in: T. Chan, T. Kako, H. Kawarada and O. Pironneau: Proceedings of the 12th International Conference on Domain Decomposition Methods, Chiba, Japan, Oct. 25–29, 1999.
- [88] C.A. COCLICI, M. AUWETER-KURTZ, J. HEIERMANN, W.L. WENDLAND, *Heterogeneous domain decomposition methods for problems with conservation laws and electromagnetic fields*, Proceedings of the Eighth International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, Magdeburg, 2000.
- [89] K.D. GOODFELLOW, *A Theoretical and Experimental Investigation of Cathode Processes in Electric Thrusters*, Ph.D. thesis, Faculty of the Graduate School, University of Southern California, 1996.
- [90] G. ECKER, *Electrode Components of the Arc Discharge*, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. 33, 1963.
- [91] C.A. COCLICI, *Domain decomposition methods and far–field boundary conditions for two–dimensional compressible flows around airfoils*, Dissertation, Mathematisches Institut A, Fakultät für Mathematik, Universität Stuttgart, 1998.
- [92] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Wiley, 1995.
- [93] J. HEIERMANN, M. AUWETER-KURTZ, A. EBERLE, U. IBEN, P.C. SLEZIONA, *Robuste hochauflösende Methoden zur Simulation magnetoplasmadynamischer Raketentriebwerke*, DGLR-JT99-034, DGLR Jahrbuch, ISSN 0070–4083, S.923–929, 1999.
- [94] J. HEIERMANN, M. AUWETER-KURTZ, H.J. KAEPPELER, A. EBERLE, U. IBEN, P.C. SLEZIONA, *Recent Improvements of Numerical Methods for the Simulation of MPD Thruster Flow on Adaptive Meshes*, IEPC–99–169, pp. 964–969, 26th International Electric Propulsion Conference, Kitakyushu, Japan, 1999.
- [95] A. EBERLE, *A Nonlinear Flux Vector Split Defect Correction Scheme for Fast Solutions of the Euler and Navier Stokes Equations*, Proceedings of the 8th International Conference on Hyperbolic Problems, Magdeburg, Germany, 2000.
- [96] S. OSHER, F. SOLOMON, *Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Mathematics of Computation, Vol. 38, No. 158, 1982.
- [97] P.W. HEMKER, S.P. SPEKREIJSE, *Multiple Grid and Osher’s Scheme for the Efficient Solution of the Steady Euler Equations*, Numerical Mathematics 2, pp. 475–493, 1986.

- [98] R. LÜST, *Stationäre magneto-hydrodynamische Stoßwellen beliebiger Stärke*, Zeitschrift Naturforschung 10a, S. 125–135, 1955.
- [99] T.J. BARTH, D.C. JESPERSON, *The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes*, AIAA 89–0366, 1989.
- [100] V. HANNEMANN, *Numerische Simulation von Stoß-Stoß-Wechselwirkungen unter Berücksichtigung von chemischen und thermischen Nichtgleichgewichtseffekten*, DLR-Forschungsbericht 97-07, DLR, Institut für Strömungsmechanik, Göttingen, 1997.
- [101] R. AGBRALL, *On Essentially Non-Oscillatory Schemes on Unstructured Meshes: Analysis and Implementation*, Journal of Computational Physics 114, pp. 45–58, 1994.
- [102] T. SONAR, *Mehrdimensionale ENO-Verfahren*, B.G. Teubner Stuttgart, 1997.
- [103] O. FRIEDRICH, *Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for the Interpolation of Mean Values on Unstructured Grids*, Journal of Computational Physics 144, pp. 194–212, 1998.
- [104] R. COURANT, K.O. FRIEDRICHS, H. LEWY, *Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Mathematische Annalen 100, S. 32–74, 1928.
- [105] S.V. PATANKAR, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Taylor & Francis, 1980.
- [106] J.D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1962.
- [107] W.H. PRESS, SAUL A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, B.P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1997.
- [108] A. MEISTER, *Zur zeitgenauen numerischen Simulation reibungsbehafteter, kompressibler, turbulenter Strömungsfelder mit einer impliziten Finite-Volumen-Methode vom Box-Typ*, Dissertation, Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, 1996.
- [109] A. MEISTER, *Numerik linearer Gleichungssysteme*, Vieweg, 1999.
- [110] G. WARNECKE, *Adaptation and Reliability of Numerical Methods for Stiff and Non-stiff Problems in CFD*, Computational Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, 2000.
- [111] D. KROENER, *Numerical Schemes for Conservation Laws*, Wiley Teubner, 1997.
- [112] J. FISCHER, *Selbstadaptive, lokale Netzverfeinerung für die numerischer Simulation kompressibler, reibungsbehafteter Strömungen*, Dissertation, Institut für Aerodynamik und Gasdynamik, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik, Universität Stuttgart, 1993.
- [113] S.A. SEMUSHIN, *Adaptive Mesh Refinement approach for simulation of gas dynamics and magneto-hydrodynamic problems*, in: A. Sydow: 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, Wissenschaft und Technik Verlag, 1997.

- [114] T. SONAR, *Strong and Weak Norm Error Indicators Based on the Finite Element Residual for Compressible Flow Computation*, Impact of Computing in Science and Engineering 5, pp. 111–127, 1993.
- [115] T. SONAR, E. SÜLI, *A Dual Graph Norm Refinement Error Indicator for the DLR- τ -Code*, DLR Forschungsbericht 94–24, 1994.
- [116] U. IBEN, *Eine adaptive Strategie zur numerischen Lösung von Konvektions-Diffusions-Gleichungen auf der Basis von Waveletdekompositionen*, Dissertation, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Technische Universität Dresden, 1998.
- [117] T. SONAR, G. WARNECKE, *On Finite Difference Error Indication for Adaptive Approximations of Conservation Laws (revised 2nd printing)*, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe A, Preprint 122, Hamburg, 1997.
- [118] P. HOUSTON, J.A. MACKENZIE, E. SÜLI, G. WARNECKE, *A posteriori error analysis for numerical approximations of Friedrichs systems*, Numerische Mathematik, Vol. 82, pp.433–470, 1999.
- [119] U. IBEN, G. WARNECKE, J. HEIERMANN, M. AUWETER-KURTZ, *Adaptive Numerics for the Simulation of Magneto-Plasmadynamic Rocket Thrusters*, in: P. Neittaanmäki, T. Tiihonen and P. Tarvainen: Proceedings of The Third European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Jyväskylä, Finland, pp. 121–130, World Scientific, Singapore, ISBN 981–02–4387–1, 2000.
- [120] R. ADAM, *Sobolev space*, Academic Press, 1975.
- [121] W. MERKE, *MPD-Triebwerksentwicklung am IRS*, Interner Bericht 89-IB-08, Institut für Raumfahrtssysteme, Universität Stuttgart, 1989.

Summary

A finite volume method for the solution of magnetoplasmadynamic conservation equations

Manned interplanetary spaceflight is the next milestone after the Apollo missions on the moon, the introduction of the partly reusable space transportation system Space Shuttle, the commercialization of Earth-observing, navigation and telecommunications satellites and the building of the International Space Station.

The choice of the propulsion system is most crucial to achieving reasonably short flight durations for interplanetary missions. Electric propulsion systems [1, 2] are particularly suitable because they produce considerably higher specific impulses than chemical propulsion systems [3].

In magnetoplasmadynamic (MPD) self-field thrusters the fuel is heated and ionized by an electric arc. The plasma is accelerated by thermal expansion and magnetic forces caused by the self-induced magnetic field so that exhaust velocities above 20 km/s and thrust levels of 100 Newton can be achieved.

Depending on the thruster design, the input power for MPD self-field engines is between 100 kW and 1 MW, which must be delivered by big solar generators or nuclear energy sources. Because nuclear reactors have a compact design and because of the great distance from the sun, nuclear power is the only reasonable energy source for interplanetary flights to the outer solar system so that MPD self-field engines – besides nuclear thermal rockets – represent an advantageous propulsion concept due to their high exhaust velocity and high thrust density.

Since the 1980s MPD thrusters have been investigated experimentally [10, 11], theoretically [12, 13] and numerically [14, 15, 16] at IRS. Technology aspects for the thruster design [17, 18] and basic plasmaphysical processes [19, 20, 21] have been considered in order to achieve higher efficiencies and to avoid power-limiting instabilities. Reasons for thruster instabilities, which are characterized by voltage oscillations and increasing anode losses [22], are the depletion of charge carriers at the anode [23], micro turbulence [24, 25] and space charge, drift and gradient driven plasma instabilities [20, 26, 27].

Taking into account the high cost of experiments, the application of numerical methods is necessary for detailed basic investigations of MPD flows and for thruster optimization.

The configurations of the IRS-built nozzle-type self-field MPD accelerators DT2, HAT and RD3, which are investigated in this work, are axisymmetric so that the flow is rotationally symmetric. Hence, the conservation equations can be written in a two-dimensional form using cylindrical coordinates.

Argon is the propellant considered because this noble gas is used at IRS. Assuming continuum flow and quasi neutrality of the plasma [41, 42], conservation equations for a two-fluid flow in thermal and reaction non-equilibrium are formulated without explicitly treating the electrode sheaths.

Heavy particle species (neutral, singly and multiply ionized argon) and electrons are considered. The heavy particle gas and the electron gas are treated as ideal gases. Thermal non-equilibrium between electrons and heavy particles is assumed because the densities and thereby the collision frequencies and the energy exchange between the particles can become relatively low for expanding supersonic flows, and because heavy particles are cooled on solid walls while the electrons behave adiabatically. Reaction non-equilibrium is assumed because of the high flow speeds. Because of their low mass and their high mobility the electrons are assumed to be carrying the electric current in the plasma. Hence, the electron gas is being ohmically heated, and part of the energy is transferred to the heavy particles by collisions.

In order to be able to simulate turbulence in the interior of the thruster and in the free plasma jet, a single-equation model is employed.

The arc discharge is described by the Maxwell equations of classical electrodynamics and by Ohm's law for plasmas.

Including boundary conditions and constitutive equations, one obtains a closed system of thirteen conservation equations for the species densities n_i , the axial momentum ρv_z , the radial momentum ρv_r , the heavy particle energy e_h , the turbulence ρR , the electron energy e_e , and the stream function Ψ of the self-induced magnetic field:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\text{div} (n_i \vec{v}) - \text{div} \vec{j}_{D,i} + \omega_i \quad ; i = 0 \dots 6 , \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -\text{div} \vec{f}_{z,invisc} - \text{div} \vec{f}_{z,visc} , \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} = -\text{div} \vec{f}_{r,invisc} - \text{div} \vec{f}_{r,visc} , \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial e_h}{\partial t} = -\text{div} \vec{f}_{h,invisc} - \text{div} \vec{f}_{h,visc} + q_h , \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho R)}{\partial t} = & -\text{div}(\rho R \vec{v}) + \text{div} \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla R \right] + \rho(C_{\varepsilon 2} f_2 - C_{\varepsilon 1}) \sqrt{R \mathcal{P}} \\ & - \nabla \left[\rho \left(\nu_h + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \cdot \nabla R - \frac{\rho}{\sigma_\varepsilon} \nabla \nu_T \cdot \nabla R , \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_e}{\partial t} = & -\operatorname{div}(e_e \vec{v}) - p_e \operatorname{div} \vec{v} + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \vec{j} \cdot \nabla T_e - \frac{1}{en_e} \vec{j} \cdot \nabla p_e \\
& - \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} k T_e \sum_{i=1}^6 Z_i \vec{j}_{D,i} \right) + \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) \\
& + \sum_{i=0}^6 n_e n_i \alpha_{ei} (T_h - T_e) + \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} - \sum_{i=0}^5 \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1} ,
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(\frac{\Psi}{r} \vec{v} \right) + \frac{\Psi v_r}{r^2} - \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\mu_0} \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi/r \\ 0 \end{bmatrix} - \beta \nabla p_e \right) . \tag{5.59}$$

The system is hyperbolic–parabolic and includes source terms. The equations are formulated in such a way that by using fluxes a maximum of conservativity is achieved in the finite volume discretization.

The solving of the conservation equations is performed on unstructured, adaptive meshes with dual cells. Unstructured meshes can be produced and modified significantly easier and faster for the complex geometries of self–field accelerators than structured meshes. By appropriate adaption, the computational time for approximating a solution can be reduced considerably.

For the calculation of the inviscid fluxes the robust flux vector splitting scheme of Eberle is modified and extended [93, 94, 95]. By including the magnetic pressure in the inviscid fluxes the numerical stability is significantly increased while the numerical dissipation is low. The upwind algorithm is very robust with respect to strong shocks, and it is simple and requires only a few calculations to obtain a good approximation of the solution of the Riemann problem.

The variables which are needed at the cell faces for the approximate solution of the Riemann problem are linearly reconstructed by a Weighted Essentially Non–Oscillatory (WENO) scheme [103] so that the discretization achieves a second–order accuracy in space. The WENO scheme produces very smooth results for regions with smooth solutions and is robust with respect to shocks.

The discretization of the viscous fluxes is done by a central scheme using average fluxes of neighbouring triangles, and for all other derivatives which cannot be written in divergence or curl form a least–squares discretization is chosen.

All conservation equations are discretized using the theorems of Gauß and Stokes, and the time integration is done with an explicit, randomized, local time stepping scheme so that a steady–state solution is achieved quickly.

For adapting the meshes, a combination of an analytically obtained error indicator [117, 119] and a gradient indicator is used. Boundary layers, shocks and regions with strong source terms are refined reasonably from a physical point of view so that the computational time can be reduced.

Experimentally confirmed calculations for the plasma accelerator RD3 show that the term $\frac{1}{en_e}\nabla p_e$, which describes the diffusion caused by the electron pressure in Ohm's law for plasmas, drives the electric arc out of nozzle-type MPD self-field accelerators and strongly influences the arc attachment on the anode.

The new finite volume method has shown for the first time by numerical simulations of the MPD thruster DT2 that a strong depletion of density in front of the anode is caused by the pinch effect at high current settings. The correlation of the numerical simulations with experimental data at instability-producing current settings clearly points to the fact that a primary reason for plasma instabilities in nozzle-type self-field MPD thrusters is the depletion of density and charge carriers in front of the anode caused by the pinch effect, which has been predicted theoretically for a long time.

The prediction of thrust for the MPD thrusters DT2 and HAT agrees well with experimental data. Also, the simulations show that the depletion of charge carriers in front of the anode is delayed for HAT because its nozzle expansion angle is slightly less than that of DT2. This is probably the reason why no plasma instabilities can be observed for HAT at high current settings during experiments.

The numerical method can therefore already be used for the design and development of new MPD thrusters. It particularly makes an optimization of the nozzle with respect to thrust possible, and it helps to preselect a nozzle geometry so that the depletion of density in front of the anode can be shifted to higher current settings. In addition, the numerical data can be used for instability analysis.

The next steps for the ongoing development of the modular program system will be the detailed calculation of the interaction between the plasma flow and the electrodes and the investigation of the influence of recirculating rest gas in the test chamber.

Lebenslauf

Jörg Heiermann, geboren am 18.6.1972 in Düsseldorf

- 1978–1982 Grundschule in Solingen
- 1982–1991 Gymnasium Vogelsang in Solingen
- 1991 Abitur
- 1991–1992 Zivildienst beim DRK in Göppingen
- 1992–1997 Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität Stuttgart
- 1994–1995 Praktikumssemester
DLR, Institut für Strömungsmechanik und Antriebstechnik, Köln
Allgaier-Werke GmbH & Co. KG, Utingen
- 1996–1997 Studienarbeit
*Vergleichende Untersuchungen an verschiedenen Oberflächenheißfilm-
sensoren im Hinblick auf ihre Einsatzmöglichkeit als Transitionsdetektor in
Überschallgrenzschichten*
am Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart
- 1997 Diplomarbeit
*Erstellung eines elektrodynamischen Programmoduls zur Modellierung der
Plasmaströmung in einem HF-Generator mit Hilfe der Methode der Finiten
Differenzen auf einem strukturiert krummlinigen Netz*
am Institut für Raumfahrtsysteme der Universität Stuttgart, ausgezeichnet
mit dem Zeppelin-Preis der Zeppelin Technologie GmbH von der Deutschen
Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt Lilienthal-Oberth e.V. (DGLR)
- 1997 Diplom-Ingenieur der Luft- und Raumfahrttechnik
- seit 1997 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Raumfahrtsysteme
der Universität Stuttgart im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms
Analysis und Numerik von Erhaltungsgleichungen