

Ein konservatives MPV-Verfahren zur Simulation der Strömungen in allen Machzahlbereichen

Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Ingenieurwissenschaften

Vorgelegt von
Jea-Ho Park
geboren in Mokpo, Korea

Institut für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart
2003

Ein konservatives MPV-Verfahren zur Simulation der Strömungen in allen Machzahlbereichen

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Jea-Ho Park

geboren in Mokpo, Korea

Hauptberichter: Prof. Dr. Claus-Dieter Munz

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Bernhard Weigand

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Oktober 2003

Institut für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart
2003

Zum 70. Geburtstag
meines Vaters

Kurzfassung

Zur Simulation sowohl inkompressibler als auch kompressibler Strömungen wird ein neues numerisches Verfahren eingeführt. Dabei wird zunächst die konservative Form der Navier-Stokes-Gleichungen aufgestellt, da sie das numerische Erhaltungsprinzip für Strömungen höherer Machzahl gewährleistet. Auf den Druck wird noch der sogenannte MPV-Ansatz angewandt. Dies ist eine Art Druckzerlegungsmethode. Damit kann die beim inkompressiblen Grenzfall auftretende Singularität beseitigt werden. Eigentlich beruht sie auf der sich sehr schnell ausbreitenden Druckstörung bei Strömungen niedriger Machzahl. Für die Zeitintegration der Grundgleichungen wird deshalb ein semi-implizites Verfahren verwendet. Durch die implizite Behandlung der Schallterme wird die Stabilitätsbedingung unseres Verfahrens unabhängig von der Machzahl. Damit kann man auch höhere Ordnung in der Zeit für Strömungen in allen Machzahlbereichen erreichen. Zum Lösen der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung untersucht man das iterative SIMPLE-Typ Verfahren und auch das nicht-iterative Druck-Korrektur Verfahren. In Hinsicht auf die Reduktion der Rechenzeit ist die Entwicklung eines solchen nicht-iterativen Verfahrens sehr wichtig. Im kartesischen Koordinatensystem wird ein versetztes Gitter verwendet. Auf allgemeinen Koordinaten wird zusätzlich die zellzentrierte Variablenanordnung ausführlich untersucht. Dazu werden einige typische Testbeispiele verschiedener Machzahl in der Strömungsmechanik berechnet und mit in der Literatur bekannten Musterergebnissen verglichen.

Abstract

A new numerical method has been developed to simulate incompressible as well as compressible flows. We use the conservative form of the Navier-Stokes equations, because only this form can guarantee the numerical conservation principle for flows with higher Mach number. For the pressure the so-called MPV ansatz is adopted. This is a sort of pressure splitting method. Using it we can eliminate the singularity for the incompressible limit case. It originates primarily from the fast running pressure waves in low mach number flows. Hence we use a so-called semi-implicit method for the time integration. With the implicit treatment of the acoustic terms the stability condition of our method becomes independent of the Mach number. It also allows higher order in time for all Mach number flows. To solve the pressure-velocity coupling we investigate the iterative SIMPLE-type method and also the non-iterative pressure correction method. The development of such a non-iterative method is very important with regard to the reduction of computing time. In cartesian coordinates a staggered grid is used. On the generalized coordinate system we additionally investigate cell-centered variables. Some typical test cases with various Mach numbers in fluid mechanics are calculated and compared with known results in the literature.

Summary

A conservative MPV method for the simulation of all Mach number flows

We present a new numerical method for the simulation of incompressible as well as compressible unsteady flows. The governing equations we solve are the dimensionless compressible Navier-Stokes equations. These compressible equations converge to their incompressible counterpart, when the Mach number tends to zero. In this case the pressure waves become infinitely fast with respect to the fluid velocity and a sudden pressure equalization takes place. Hence, local gradients in the velocity field can not generate large pressure gradients. Subsequently no large density gradients can occur. This incompressible limit is mathematically a rather subtle one, because the equations change their type. The inviscid pure hyperbolic compressible equations become hyperbolic-elliptic due to the infinite propagation rates of the pressure waves. This causes mathematically a singularity in the pressure term of the momentum equations.

Using an asymptotic analysis the incompressible limit of a compressible flow has been considered by Klainerman and Majda [KM81] [KM82] for the isentropic case. Later Klein [Kle95] extended the formal asymptotic considerations to the non-isentropic case. Additionally, Klein considered an asymptotic expansion with multiple scales to take into account long wavelength acoustics at low Mach numbers. Recently, Munz et al. [MRKG02] proposed the MPV scheme (Multiple Pressure Variables) for the low Mach number regime. This MPV scheme mimics the low Mach number limit behavior in such a way that the numerical scheme survives this limit and coincides for $M = 0$ with a standard incompressible pressure correction method. For the pressure they adopt the so-called MPV ansatz. This is a sort of pressure splitting method. Using this ansatz the above mentioned singularity in the pressure term can be eliminated.

The MPV scheme in [MRKG02] has been formulated in primitive variables with application to the low Mach number regime. For the time-integration they used the Strang-splitting [Str68] method, that is only of first order in time for the incompressible limit case. Hence we use the multiple pressure variable idea to obtain a conservative method that works for all Mach numbers and introduce also the higher order time integration method.

The outlines of the dissertation is as follows. At first we introduce three different forms, i. e. a primitive-, conservative- and also semi-conservative form, of the gover-

ning equations with application of the MPV ansatz and discuss their properties in the incompressible limit case. For the simple 1-D. case they are implemented using staggered variables. Careful examination for some test examples with various Mach numbers shows that for the low Mach number flows the solutions obtained by all the three forms of the basic equations converge to the correct solutions and their solutions show comparably the same qualities. But for flows with higher Mach number we can get acceptable results only with the conservative form.

The basic equations are integrated semi-implicitly in time. Only the terms which are related to the speed of sound are discretized implicitly. As a result our method is unconditionally stable with respect to the CFL-condition for the speed of sound, which is too restrictive in the low Mach number regime for fully explicit methods, since the acoustic speed in this regime is much faster than the time scale of the flow. Such an approach for subsonic flows was first introduced by Casulli and Greenspan [CG84].

Our interest also lies in the high-order semi-implicit time integration methods. Some one-step- and multistep methods with high-order in time have been developed by several authors and are well known in literature. We check their convergence behaviour in 1-D. test cases using the typical RK2CN- and SBDF second order method. For low Mach number flows with multiscale waves we observe strong convergence reduction without the complete resolution of the acoustic effects.

An implicit treatment of the viscous diffusion terms in the compressible Navier-Stokes equations causes additional difficulty to solve the so-called pressure correction equation. In this case one needs the inverse of the Laplace operator, which is practically impossible to realize. Hence, we try two different methods, an iterative SIMPLE-type and another non-iterative pressure correction method. The SIMPLE method was first introduced by Patankar and Spalding [PS72] for incompressible flows. The compressible pressure correction method also can be understood as a direct extension of the traditional projection method (or ‘fractional step method’) of Chorin [Cho68]. The development of such a non-iterative method is very important with regard to the reduction of computing time.

In cartesian coordinates for the 2-D. and 3-D. cases we implement a finite difference method with staggered variables. The explicit convective terms are discretized with various high-order upwind-methods. By contrast for the diffusion and acoustic terms we use the second order central difference. The consequent implicit system of equations is solved by using CG-type methods with preconditioning. To accelerate the

solution process a multigrid method is employed in a fully vectorized form.

For the validation of our new numerical scheme several test cases with various Mach numbers are selected from fluid mechanics. We compare 2-D. Riemann problems as an example for flows with high Mach number. Our method shows the correct solutions in spite of the strong discontinuities at the initial state. For the incompressible limit case we consider flows with variable density distribution. The rising bubble, a falling water drop and the Rayleigh-Taylor instability show the correct evolution of basic physical phenomena. For the low Mach number case we calculate the interaction of the long wavelength acoustic waves with the small scale flow structures and a natural convection in a quadratic cavity, which is induced by the temperature difference between both side walls. We get a good agreement with the well known results in literature. Our methods are extended to the ideal MHD equations, too. As an example the rising bubble and a free shear layer under the various magnetic influences are considered.

Additionally we consider a new scheme with cell-centered variables for 2-D. case on the generalized coordinate system. It is well known that one can essentially save the storage space with this method. As usual in CFD we also adopt the so-called momentum interpolation method of Rhie and Chow [RC83], to suppress the oscillations in the pressure field. This method is a direct extension of the incompressible method of Peric [Per85] by using the MPV ansatz. The careful validation with several test cases, from the incompressible cavity flow, natural convection problems in the weakly compressible regime to strong compressible flows through a channel with a bump, shows the flexibility and efficiency of our method.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart und wurde von DFG finanziell gefördert.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. C. D. Munz für die Betreuung und Unterstützung sowie für unzählige Diskussionen, die wir während der Entstehung dieser Arbeit geführt haben. Herrn Prof. Dr. B. Weigand danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Allen meinen Arbeitskollegen und Mitarbeitern des Instituts für Aero- und Gasdynamik, die mich bei der Durchführung dieser Arbeit unterstützt haben, möchte ich in dieser Stelle danken. Für viele hilfreiche Gespräche und freundliche Zusammenarbeit möchte ich mich aber auch bei den Herren Dipl.-Tech. Mat. M. Ratzel und Frau Dipl.-Tech. Mat. S. Roller bedanken. Mein besonderer Dank gilt Dipl.-Math. F. Kemm, Dipl.-Tech. Mat. R. Fortenbach und Dipl.-Ing. T. Schwartzkopff für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit.

Dank gilt auch meiner Familie für die Geduld und Unterstützung.

Stuttgart, im Oktober 2003

Jea-Ho Park

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Inhaltsverzeichnis	ii
Nomenklatur	v
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Forschung	1
1.2 Ziel der Arbeit	4
1.3 Inhaltsübersicht	5
2 Grundgleichungen	6
2.1 Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	6
2.2 Dimensionslose Gleichungen	9
2.3 Dimensionslose Kennzahlen	10
2.4 Der MPV-Ansatz	14
2.5 Konvektive Strömungen im schwachkompressiblen Regime	19
3 Euler-Gleichungen in verschiedenen Formulierungen	22
3.1 Euler-Gleichungen	22
3.2 Geschichte der semi-impliziten Methoden	23
3.3 Primitive MPV-Verfahren	25
3.4 Konservative MPV-Verfahren	28
3.5 Semi-konservative MPV-verfahren	30
3.6 Raumdiskretisierung	31
3.7 Testfälle	33
3.7.1 Stoßrohr-Problem von Sod	33
3.7.2 Problem von Lax	38
3.7.3 Problem von Woodward-Collela	38
3.7.4 Instationäre Kontaktunstetigkeit	41
3.7.5 Kollidierende akustische Wellen	43

3.7.6	Dichteschichtung	44
3.8	Beseitigung der Nichtlinearität in der Druck-Korrektur-Gleichung . .	45
4	Zeitintegration	48
4.1	Das semi-implizite Zeitintegrationsverfahren	48
4.2	Semi-implizite Verfahren höherer Ordnung	50
4.2.1	RK2CN-Verfahren	51
4.2.2	UCS2-Verfahren	52
4.2.3	RK3CN-Verfahren	53
4.2.4	ASIRK-Verfahren	53
4.2.5	ABCN-Verfahren	54
4.2.6	SBDF-Verfahren	54
4.3	Einige Testfälle der Konvergenz	55
4.3.1	Kollidierende akustische Wellen	56
4.3.2	Dichteschichtung	56
4.4	Anwendung auf den Navier-Stokes-Gleichungen	59
4.4.1	Semi-implizites MPV-Verfahren ohne Splitting	60
4.4.2	Semi-implizites MPV-SIMPLE-Verfahren	63
4.4.3	Semi-implizites MPV-Druck-Korrektur-Verfahren	67
4.4.4	Anwendung auf den natürlichen Konvektionen	79
5	Raumdiskretisierung	81
5.1	Raumdiskretisierung der Konvektionsterme	82
5.1.1	Das Upwind Verfahren erster Ordnung	83
5.1.2	Das MUSCL Verfahren	83
5.1.3	Das ‘Upwind-biased’ Verfahren	84
5.1.4	Das ENO Verfahren	84
5.1.5	Das WENO Verfahren	87
5.1.6	Das kompakte Differenzen Verfahren	88
5.2	Raumdiskretisierung der Diffusions- und Schallterme	88
5.3	Raumdiskretisierung höherer Ordnung	89
5.4	Gleichungssystemlöser	90
5.4.1	CG-Typ Verfahren	91
5.4.2	Mehrgitterverfahren	93
5.5	Randbedingungen	96
6	Numerische Validierung	97
6.1	Ergebnisse für die Euler-Gleichungen	97
6.1.1	Zweidimensionale Riemannprobleme	97
6.1.2	Wirbelentstehung durch langwellige Akustik	100

6.1.3	Inkompressibler fallender Tropfen	102
6.2	Ergebnisse für die Navier-Stokes-Gleichungen	105
6.2.1	Inkompressible aufsteigende Blase	105
6.2.2	Inkompressible Rayleigh-Taylor-Instabilität	107
6.2.3	Schwachkompressible natürliche Konvektion	109
6.3	MPV-Verfahren für die MHD-Gleichungen	111
6.3.1	Inkompressible aufsteigende Blase bei Alfvenzahl Fünf	114
6.3.2	Inkompressible freie Scherschicht bei Alfvenzahl Fünf	117
7	Finite-Volumen Verfahren auf allgemeinen Koordinaten	122
7.1	Integrale Grundgleichungen	122
7.2	Räumliche Diskretisierung	123
7.3	Druck-Geschwindigkeits-Kopplung	128
7.4	Testfälle	134
7.4.1	Inkompressible Nischenströmung	134
7.4.2	Schwachkompressible natürliche Konvektion	137
7.4.3	Thermoakustische Wellen	145
7.4.4	Strömungen durch einen Kanal mit kreisförmiger Verengung	149
8	Schlußbetrachtung	155
8.1	Zusammenfassung	155
8.2	Ausblick	156
A	Koeffizienten bei verschiedenen Zeitintegrationsverfahren	158
B	Einige Differenzenformel	161
C	Unvollständige LU-Zerlegung	162
D	MHD-Grundgleichungen	165
E	Das allgemeine Koordinatensystem	171
	Literatur	179

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

B	Magnetfeldvektor
c	Schallgeschwindigkeit
c_A	Alfvengeschwindigkeit
c_v, c_p	spezifische Wärmekapazität
D	Deformationsgeschwindigkeitstensor
e	Gesamtenergie
e^i, e^k, e^p, e^m	Innere, kinetische, potentielle und magnetische Energie
E	Elektrische Feldstärke
f	Äußere Kräfte
g	Erdbeschleunigung
\mathcal{I}	Einheitstensor
J	Elektrische Stromdichte
\mathcal{M}	Magnetische Spannungstensor
$p, p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}$	Druck
q	Wärmefluß
R	Gaskonstante
t	Zeit
T	Temperatur
u	Geschwindigkeitsvektor
x, y, z	Koordinaten

Kennzahlen

A	Alfvenzahl
Bo	Boussinesqzahl
Fr	Froudezahl
Gr	Grashofzahl
M	Machzahl
Nu	Nusseltzahl
Pe	Pecletzahl
Pr	Prandtlzahl
Ra	Rayleighzahl
Re	Reynoldszahl
Re_m	Magnetische Reynoldszahl

Griechische Buchstaben

α	Wärmeübergangskoeffizient
β	Volumenausdehnungskoeffizient
γ	Adiabatenexponent
ε	Innere Energie
ε_m	Dielektrizitätskonstante
η	Dynamische Viskosität
η_m	Magnetische Diffusivität (Resistivität)
κ	Thermische Leitfähigkeit
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ_m	Magnetische Permeabilität
ν	kinematische Viskosität
ρ	Dichte
σ	Elektrische Leitfähigkeit
\mathcal{T}	Hydrodynamische Spannungstensor
Φ	viskose Dissipation

Symbole

n	Normalenvektor
A	Systemmatrix
F	Fehlermatrix
J	Jakobi-Matrix
J	Jakobische Determinante
L	Untere Dreieckmatrix
U	Obere Dreieckmatrix
β_i^j	Kofaktor zu J_i^j in der Jakobischen Determinanten J
ϕ	Skalare Funktion
Δ	Differenz
Ω	Rechengebiet
∇	Nabla-Operator
$\partial/\partial x$	Partielle Ortsableitung
$\partial/\partial t$	Partielle Zeitableitung
$\oint_{\partial\Omega} \dots dA$	Oberflächenintegral
$\int_{\Omega} \dots dV$	Volumenintegral

1 Einleitung

1.1 Stand der Forschung

Allgemein einsetzbare numerische Simulationsverfahren sollten sowohl für kompressible als auch für inkompressible Strömungen anwendbar sein. Die traditionelle Vorgehensweise bei der Simulation dieser verschiedenen Strömungsarten unterscheidet sich jedoch sehr stark. Dies beruht auf den verschiedenen physikalischen Eigenschaften und den mathematischen Beschreibungen der Strömungsphänomene in beiden Bereichen. Bei kompressiblen Strömungen breiten sich die Störungen mit endlicher Geschwindigkeit aus, so daß sie durch ein hyperbolisch-parabolisches System aus partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Dagegen werden inkompressible Strömungen durch ein elliptisch-parabolisches System beschrieben, in dem die Signalgeschwindigkeiten unendlich groß sind.

Kompressible Verfahren

Bei kompressiblen Strömungen kommen im allgemeinen Verfahren zum Einsatz, die die Dichte als primäre Variable verwenden. Der Druck läßt sich dann aus der thermischen Zustandgleichung für Gase bestimmen. Die Bilanzgleichungen werden meistens mit expliziten Verfahren (z. B. Runge-Kutta-Verfahren) zeitlich integriert. Voraussetzung für diese Vorgehensweise ist aber, daß eine Druck-Dichte-Kopplung auch tatsächlich vorhanden ist. Bei schwachkompressiblen Strömungen ist diese Vorgehensweise sehr ineffizient aufgrund der schwachen Druck-Dichte-Kopplung und der expliziten Lösungstechnik. Bei derartigen Strömungen hängt der Druck nur geringfügig von der Dichte ab. Die Verwendung dieser Verfahren ist daher mit großen Konvergenzproblemen verbunden. Mit abnehmender Machzahl tritt gleichzeitig eine starke Druck-Geschwindigkeits-Kopplung auf. Die für schwachkompressible Strömungen dominante Druck-Geschwindigkeits-Abhängigkeit kann bei den kompressiblen dichtebasierten Verfahren nicht implizit berücksichtigt werden, da der Druck verfahrensbedingt nicht als Lösungsvariable zur Verfügung steht. Bei der Verwendung eines expliziten Verfahrens für die Berechnung kompressibler Strömungen ist es aus Stabilitätsgründen

erforderlich, daß der numerische Zeitschritt immer kleiner ist als der Quotient von Gitterweite und maximaler Ausbreitungsgeschwindigkeit, in diesem Fall der Schallgeschwindigkeit. Diese Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Bedingung erzwingt nun bei einem mit kleiner Machzahl propagierenden Schall einen sehr kleinen Zeitschritt, der den Bedarf an Rechenzeit stark erhöht.

Inkompressible SIMPLE-Verfahren

Für inkompressible Strömungen sind deshalb Verfahren entwickelt worden, die den Druck als Basisvariable direkt verwenden. Davon sind SIMPLE- und Projektionsverfahren die bekanntesten. Zur Bestimmung des Druckfeldes wird die Massenbilanz oder die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit verwendet. Gegenüber den auf die Dichte bezogene Verfahren besteht der Vorteil, daß diese Formulierungen sowohl für inkompressible als auch für kompressible Strömungen anwendbar sind. Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, daß zuerst in einem *Prädiktorschritt* ein vorläufiges Geschwindigkeitsfeld bestimmt wird, welches dann in einem *Korrektorschritt* so korrigiert wird, daß die Divergenzbedingung eingehalten wird. Man unterscheidet oft Verfahren für stationäre und instationäre Problem. Für stationäre Strömungen verwendet man meistens ein vollständig implizites Verfahren für die Zeitintegration. Dagegen ist ein semi-implizites Verfahren vorteilhafter für instationäre Probleme. Bei Ersteren wird eine nur näherungsweise erfüllte Divergenzbedingung für jeden Iterationsschritt (oder Zeitschritt) gelöst. Damit erhält man zwar eine unphysikalische Zwischenlösung, aber einen stationären Endzustand, der die Divergenzbedingung mit ausreichender Genauigkeit erfüllt. Dazu gehören künstliche Kompressibilitätsverfahren (engl. ‘artificial compressibility method’) von Chorin [Cho67] und SIMPLE-Typ Verfahren von Patankar und Spalding [PS72]. Beim SIMPLE-Verfahren wird eine implizite Druck-Korrektur-Gleichung durch Kombination von Massen- und Impulsbilanz gewonnen. Um eine Druck-Geschwindigkeits-Entkopplung und die damit verbundenen Oszillationen in der Lösung zu vermeiden [Pat80], erforderte der Einsatz der Druck-Korrektur-Verfahren ursprünglich eine Gitteranordnung mit versetzter Variablenspeicherung von Geschwindigkeiten und Druck. Diese Anforderung schränkt die Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens vor allem auf komplexe dreidimensionale Geometrien stark ein. Daher entwickelten Rie und Chow [RC83] das Druck-Korrektur-Verfahren so weiter, daß es auch bei nichtversetzter Variablenspeicherung eingesetzt werden kann. Druck-Korrektur-Verfahren zur Lösung der inkompressiblen Strömung sind heutzutage ausgereift und so weit entwickelt, daß sie stabil auf körperangepaßten Gittern mit einheitlicher Variablenanordnung arbeiten. Dieses Verfahren wurde auch auf kompressible Strömungen erfolgreich erweitert [KP89]. Dabei wird die ursprünglich elliptische Druck-Korrektur-Gleichung um einen hyperbolischen Einflußterm infolge der Dichteänderung erweitert. Für nichtstationäre Strömungsvorgänge ist der

numerische Aufwand im allgemein zu groß, da die korrekte Divergenzbedingung in jedem Zeitschritt erst nach vielen Iterationsschritten erreicht wird.

Inkompressible Projektionsverfahren

Verfahren für instationäre inkompressible Navier-Stokes- bzw. Euler-Gleichungen basieren auf dem Projektionsverfahren nach Chorin [Cho68] [Cho69] [Tem69]. Hier wird im Gegensatz zu den oben aufgeführten Verfahren in jedem Zeitschritt die exakte Divergenzbedingung eingehalten. Es basiert auf einem Schema mit Zeitaufspaltung¹. Damit entkoppeln die Geschwindigkeiten und der Druck voneinander. Beim ersten Schritt werden die provisorischen Geschwindigkeiten nur mit den Impulsgleichungen ohne Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingungen gewonnen. In einem zweiten Schritt werden sie abschließend auf den Raum der divergenzfreien Vektorfelder respektive den Raum der Vektorfelder mit vorgegebener Divergenz projiziert. Dem Projektionsschritt liegt hierbei eine elliptische Poisson-Gleichung für den Druck zugrunde, dem in diesem Verfahren die Rolle eines Lagrange-Multiplikators zukommt. Diese Rechengänge sind viel effizienter als die direkte Lösung des gekoppelten Systems von Druck und Geschwindigkeiten. Jedoch kann man die durch die Zeitaufspaltung entstandenen Fehler nicht so leicht beseitigen. Solche Fehler führen oft zu falschen numerischen Grenzschichten in den Lösungen [WL95] [Wetrt]. Dies ist die Hauptschwierigkeit bei der Aufstellung und Implementation eines Projektion-Typ Verfahrens. Das ursprüngliche Projektionsverfahren von Chorin [Cho68] besitzt auch nur eine zeitliche Genauigkeit erster Ordnung. In den 80-Jahren wurden dann einige Methoden zweiter Ordnung in der Zeit vorgestellt [vK86] [KM85] [BCG89]. Das Projektionsverfahren spielte eine sehr dominante Rolle bei der Simulation der inkompressiblen Strömungen mit primitiven Variablen, besonders bei der direkten numerischen Simulation der viskosen inkompressiblen Strömung mit mäßiger Reynoldszahl [RM91].

Ein auf den Druck bezogenes semi-implizites Verfahren wurde für subsonische kompressible Strömungen von Casulli und Greenspan [CG84] eingeführt. Dieses Verfahren läßt sich als eine Erweiterung des Projektionsverfahrens auf das kompressible Regime interpretieren. Sie verwandten dabei die primitive Form der Navier-Stokes-Gleichungen und implementierten sie räumlich auf einem versetzten Gitter. Dabei wurden lediglich die mit dem Schall assoziierten Termen implizit diskretisiert. Demzufolge sind diese Algorithmen numerisch unbedingt stabil im Bezug auf die CFL-Stabilitätsbedingung mit der Schallgeschwindigkeit. Nachträglich haben Patnaik et al. [PGB087] ähnliche Algorithmen, aber basierend auf der konservativen Formulierung

¹Man bezeichnet dieses Schema oft als *'splitting scheme'* oder *'fractional step method'*

der Euler-Gleichungen, vorgestellt. Dabei wurden zweistufige Prädiktor-Korrektor Algorithmen auf nichtversetzten Variablen verwendet. Dieses Verfahren lieferte bessere Ergebnisse für Strömungen mit höherer Machzahl.

1.2 Ziel der Arbeit

Mit Hilfe einer asymptotischen Mehrskalanalyse untersuchte Klein und Munz [Kle95] [MK95] die Lösung der kompressiblen Euler-Gleichungen für kleine Machzahlen. Daraus entwickelte Munz et al. [MRKG02] ein numerisches Verfahren mit mehreren Druckvariablen (MPV-Verfahren²). Von Roller [Rol03] wurde der Mpv2d-Code für den schwachkompressiblen und den inkompressiblen Bereich geschrieben. Ähnlich wie bei Casulli und Greenspan [CG84] wurde die primitive Form der Navier-Stokes-Gleichungen räumlich auf einem versetzten Gitter implementiert. Der zeitliche Ablauf basiert dabei auf dem Strang-Splitting [Str68], so daß die beiden, expliziten und impliziten, Teilsysteme in zwei aufeinander folgenden Zeitschritten in alternierender Reihenfolge gelöst werden. Für den inkompressiblen Grenzfall $M \rightarrow 0$ geht es in ein Projektionsverfahren über. Ratzel [Rat03] hat diese Algorithmen erfolgreich auf ein strukturiertes, körperangepaßtes Gitter erweitert. Er hat dabei die Geschwindigkeitsgleichungen in der kontravarianten Geschwindigkeitsformulierung implementiert. Die Implementierung des MPV-Verfahrens in dieser Art besitzt einige Schwachstellen. Zunächst sollte es für Strömungen höherer Machzahl nicht mehr eingesetzt werden, da das numerische Erhaltungsprinzip mit der primitiven Formulierung im allgemeinen nicht gewährleistet werden kann. Zweitens erreicht es für inkompressible Strömungen nur erste Ordnung in der Zeit, weil es für diesen Fall in ein Projektionsverfahren nach Chorin übergeht. Drittens verwendet es iterative Lösungsvorgänge zur Gewährleistung der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung in jedem Zeitschritt. Dies fordert zu viel Rechenaufwand insbesondere für instationäre Strömungen, weil die Gleichungen in diesem Fall in jedem Zeitschritt möglichst exakt gelöst werden müssen. Viertens benötigt es wegen der versetzten Variablenanordnungen auf einem strukturierten, konturangepaßten Gitter die Abspeicherung der geometrischen Daten des Kontrollvolumens jeder versetzten Variablen. Insbesondere für den dreidimensionalen Fall wird der Aufwand der Speicherung sehr groß.

Um diese Nachteile zu überwinden, stellen wir in der vorliegenden Arbeit zunächst konservative Formulierungen der Navier-Stokes-Gleichungen auf. Wir integrieren die diskretisierten Gleichungen mit einem semi-impliziten Verfahren ohne irgendeine Aufspaltung. Dabei erweitern wir die im inkompressiblen Fall wohlbekannten SIMPLE- und Projektionsverfahren auf kompressible Strömungen. Damit können die Algorithmen zeitlich zweite Ordnung in allen Machzahlbereichen erreichen. Insbesondere ist

²MPV bedeutet ‘*Multiple pressure variables*’.

die Entwicklung des nichtiterativen kompressiblen Projektionsverfahrens oder Druck-Korrektur-Verfahrens sehr wichtig in Hinsicht auf die Reduktion der Rechenzeit. Für komplexe Geometrien untersuchen wir die nichtversetzte Variablenanordnung. Um die dabei auftretenden Druck-Oszillationen zu vermeiden, werden die oben kurz erwähnten Impuls-Interpolationen von Rie und Chow [RC83] eingesetzt. Damit erhalten wir ein effizientes numerisches Verfahren zur Berechnung sowohl kompressibler als auch inkompressibler Strömungen mit komplexen Geometrien.

1.3 Inhaltsübersicht

Im zweiten Kapitel werden die strömungsphysikalischen Grundgleichungen und ihre dimensionslosen Kennzahlen diskutiert. Ein MPV-Ansatz für den Druck wird dabei eingeführt, damit die kompressiblen Grundgleichungen beim Fall mit verschwindender Machzahl glatt in die inkompressiblen Gleichungen übergehen können.

Im dritten Kapitel werden die verschiedenen Formulierungen der Grundgleichungen für den eindimensionalen Fall implementiert und weiter für mehrere Testbeispiele mit verschiedenen Machzahlen validiert. Daraus wird gezeigt, daß für Strömungen mit höherer Machzahl physikalisch sinnvolle Ergebnisse nur mit der konservativen Formulierung gewonnen werden können.

Das vierte Kapitel beschreibt die in der Literatur bekannten verschiedenen semi-impliziten Zeitintegrationsverfahren. Von besonderem Interesse sind dabei Zeitintegrationen ohne Aufspaltung. Bei der Zeitintegration höherer Ordnung unterscheidet man noch zwischen Einzschritt- und Mehrschrittverfahren. Als praktische Anwendung auf die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen entwickeln wir weiter MPV-SIMPLE- und MPV-Projektionsverfahren.

Im fünften Kapitel werden die räumlichen Diskretisierungen eingeführt. Dabei werden verschiedene Upwind-Verfahren für die konvektiven Terme diskutiert und der Gleichungssystemlöser sowie die Randbedingungen kurz erläutert.

Im sechsten Kapitel ist die Anwendung auf interessante Strömungsfälle mit unterschiedlicher Machzahl gewidmet. Jeder dieser Fälle dient der Validierung unserer Algorithmen. Unser Verfahren wird auch auf die idealen MHD-Gleichungen angewandt. Das siebte Kapitel befaßt sich mit Finte-Volumen Verfahren auf den allgemeinen Koordinaten. Dabei führen wir die integralen Grundgleichungen, die nichtversetzte Variablenanordnung und die Impuls-Interpolationen von Rie und Chow [RC83] ein. Numerische Ergebnisse für einige typische Testfälle in der Strömungsmechanik werden ausführlich diskutiert und mit in der Literatur bekannten Musterergebnissen verglichen.

Abschließend wird die vorliegende Arbeit nochmals zusammengefaßt. Ein Ausblick und Vorschläge für weiterführende Studien werden gegeben.

2 Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet und mit geeigneten Referenzgrößen entdimensionalisiert. Danach werden einige wichtige dimensionslose Kennzahlen ausführlich diskutiert. Anschließend wird der sogenannte MPV-Ansatz eingeführt und seine physikalische Bedeutung kurz erklärt. Als Grenzfall mit verschwindender Machzahl betrachten wir noch inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Deren Zusammenhang mit anderen klassischen Approximationen der freien konvektiven Strömungen wird ausführlich diskutiert.

2.1 Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

In der kompressiblen Strömungsmechanik werden die Bewegungsvorgänge in Fluiden (Flüssigkeiten oder Gase) behandelt. Die Vorgänge werden meist in Eulerkoordinaten beschrieben. Bei dieser Art der Beschreibung werden die Strömungszustände an einem festen Ort betrachtet. Das Verhalten eines kompressiblen Mediums wird durch die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie [Ari62] bestimmt.

Die *kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen* in der konservativen Formulierung, die sich aus den integralen Erhaltungssätzen direkt ergeben, lauten:

Erhaltung der Masse:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

Erhaltung des Impulses:

$$\frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}] + \nabla p = \nabla \cdot \mathcal{T}_e + f, \quad (2.2)$$

Erhaltung der Energie:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(e + p)] = \nabla \cdot (\mathcal{T}_e \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2.3)$$

wobei ϱ die Dichte, p den Druck, \mathbf{u} den Geschwindigkeitsvektor, e die Gesamtenergie pro Einheitsvolumen, \mathcal{T}_e den viskosen Spannungstensor, f die äußeren Kräfte, \mathbf{q} den Wärmefluß, ∇ den Gradienten, $\nabla \cdot$ den Divergenzoperator und \circ das dyadische Produkt bezeichnet.

Die Gesamtenergie e setzt sich aus der inneren Energie ε , der kinetischen Energie e^k und dem Energiepotential $\varrho\phi(=e^p)$ der äußeren Kräfte ($f = -\varrho\nabla\phi$) zusammen:

$$e = \varrho\varepsilon + \frac{1}{2}\varrho\mathbf{u}^2 + \varrho\phi = e^i + e^k + e^p. \quad (2.4)$$

Als Beispiel einer äußeren Kraft gilt $\phi = gz$ für die Erdbeschleunigung $\mathbf{g}(= -g \cdot \mathbf{e}_z)$. Mit Hilfe der konstitutiven Gleichung, die die mechanischen Eigenschaften des Fluids angibt, wird der viskose Spannungstensor \mathcal{T}_e für das Newton'sche Fluid wie folgt angegeben:

$$\mathcal{T}_e = 2\eta\mathcal{D} + \eta_2(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I}. \quad (2.5)$$

Hierin bedeuten die Koeffizienten η und $\eta_2 = -\frac{2}{3}\eta$ (aus der Stokes'schen Hypothese) die Scherviskosität (oder dynamische Viskosität) und die Volumenviskosität. \mathcal{I} ist der Einheitstensor und \mathcal{D} ist der Deformationsgeschwindigkeitstensor, der vom Gradienten des Geschwindigkeitsvektors linear abhängig ist:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]. \quad (2.6)$$

Durch das *Fouriersche Wärmeleitungsgesetz* ist der Wärmeflußvektor \mathbf{q} mit der Temperatur T verbunden über

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T, \quad (2.7)$$

dabei ist λ die Wärmeleitfähigkeit.

Diese Erhaltungsgleichungen bilden ein System von fünf nichtlinearen, gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die sechs Unbekannten Dichte (ϱ), Druck (p), 3 Geschwindigkeitskomponenten und die innere Energie ε (oder Temperatur T). Um das Gleichungssystem zu schließen, benötigt man noch eine zusätzliche Bedingung, welche die thermodynamischen Eigenschaften des strömenden Mediums beschreibt. Unter der Annahme eines Gleichgewichtszustandes geschieht dies durch die Zustandsgleichung, die den Zusammenhang von Dichte, Druck und innerer Energie angibt über

$$p = p(\varrho, \varepsilon). \quad (2.8)$$

In dieser Arbeit behandeln wir nur ideale Gase, für die sich die folgende kalorisch ideale Gasgleichung gültig annehmen läßt¹:

$$p = (\gamma - 1)\varrho\varepsilon, \quad (2.9)$$

¹Bei einem *thermisch idealen Gas* sind die spezifische Wärmekapazitäten c_p und c_v noch abhängig von der Temperatur. Dann gelten $d\varepsilon = c_v(T)dT$ und $dh = c_p(T)dT$, wobei h die Enthalpie ($h = \varepsilon + \frac{p}{\varrho}$) bezeichnet. Wenn die spezifischen Wärmekapazitäten überall konstant im Raum sind, heißt es *kalorisch ideales Gas* (oder polytrop Gas). In diesem Fall gelten $\varepsilon = c_v T$ und $h = c_p T$.

mit dem Adiabatenexponent γ , d.h. dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten². Mit den obigen Beziehungen läßt sich die Energiegleichung in primitiven Variablen formulieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + e^k + e^p \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + e^k + e^p \right) \mathbf{u} \right] \\ = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\mathcal{T}_e \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Durch einige Umformulierungen kommt man zur sogenannten primitiven Form der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen³:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I} \right] - \frac{\nabla \phi}{\varrho}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = (\gamma - 1) \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + (\gamma - 1) \Phi. \quad (2.12)$$

Die Dissipationsfunktion Φ ist definiert als der durch viskose Dissipation irreversibel in Wärme umgewandelte Energieanteil:

$$\Phi = \mathcal{T}_e : \nabla \mathbf{u}. \quad (2.13)$$

Diese kann man auf folgende Weise umschreiben:

$$\Phi = \eta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 \right]. \quad (2.14)$$

Es ist zu beachten, daß die Einstein'sche Summationskonvention anzuwenden ist. Das heißt, über paarweise auftretende Indizes ist von 1 bis 3 zu summieren. In den stark nichtisothermischen Strömungsfeldern können die viskosen und thermischen Materialkoeffizienten von der Temperatur abhängig sein. Dann wird häufig folgende Sutherland'sche Interpolationsfomel eingesetzt:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{T_0 + S_1}{T + S_1}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\eta}{\eta_0}. \quad (2.15)$$

wobei η_0 , λ_0 und T_0 die jeweiligen Referenzgrößen bezeichnet. Unter der bestimmten Referenztemperatur ist S_1 als konstanter Wert angenommen⁴.

²Z. B. gilt für die kalorisch ideale Luft $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$.

³Unter der Voraussetzung von thermisch idealem Gas kann die Energieerhaltung (2.3) auch in folgende Temperaturgleichungen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d\varepsilon}{dt} = \varrho c_v(T) [T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T] &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi, \\ \varrho \frac{dh}{dt} = \varrho c_p(T) [T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T] &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{dp}{dt} + \Phi. \end{aligned}$$

⁴Für Luft mit $T_0 = 273^\circ K$ gilt $S_1 = 110.5^\circ K$.

2.2 Dimensionslose Gleichungen

Aus zweierlei Gründen bietet es sich an, von den dimensionsbehafteten Gleichungen auf dimensionslose Gleichungen überzugehen. Spezifische Stoffeigenschaften, die als Koeffizienten in den Differentialgleichungen auftauchen, werden durch dimensionslose Kennzahlen ersetzt. Das Gleichungssystem gilt somit nicht mehr nur für ein bestimmtes Fluid, sondern für eine Klasse physikalisch ähnlicher Probleme. Zudem ergeben sich numerische Vorteile, denn durch die Entdimensionalisierung erhalten die einzelnen Terme die Größenordnung Eins. Dadurch werden Rundungsfehler minimiert und die Qualität der Ergebnisse verbessert.

Zur Entdimensionalisierung werden folgende charakteristische Bezugsgrößen (ϱ_0 , p_0 , ...) verwendet:

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_0}, \quad x' = \frac{x}{x_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\eta_0}. \quad (2.16)$$

Dabei wird der Druck im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise nicht durch den hydrodynamischen Druck $\varrho_0 \mathbf{u}_0^2$, sondern durch eine eigene Referenzgröße p_0 dimensionslos gemacht. Auf den Grund dafür wird später näher eingegangen. Die Referenzzeit t_0 ist keine auf die Schallwelle bezogene charakteristische Zeitskala, sondern eine auf die Strömung bezogene Zeitskala, $t_0 = x_0/\mathbf{u}_0$. T_0 ist eine beliebige Bezugstemperatur, z. B. die maximale Temperatur im gesamten Strömungsfeld⁵.

Setzt man diese Ansätze jeweils in die konservativen- (2.1), (2.2), (2.3) bzw. primitiven Gleichungen (2.10), (2.11), (2.12) und die thermische Zustandsgleichung ein, so ergeben sich folgende Gleichungssysteme⁶:

Konservative Formulierung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho'}{\partial t'} + \nabla \cdot (\varrho' \mathbf{u}') &= 0, \\ \frac{\partial (\varrho' \mathbf{u}')}{\partial t'} + \nabla \cdot [(\varrho' \mathbf{u}') \circ \mathbf{u}'] + \frac{1}{M^2} \nabla p' &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta' \mathcal{D}' - \frac{2}{3} \eta' (\nabla \cdot \mathbf{u}') \mathcal{I} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

⁵Als die Bezugsgröße für die Temperatur verwendet man öfter die maximale Temperaturdifferenz im ganzen Strömungsfeld, d.h. $T' = \frac{T-T_0}{\Delta T_0}$. Damit bleibt die dimensionslose Temperatur immer unterhalb der Größenordnung Eins. Mit dieser Bezugsgröße für die Temperatur lautet die Zustandsgleichung $p = \varrho \left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0} T \right)$, und für den Wärmeflußterm in der Druckgleichung gilt $\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\Delta T_0}{T_0} \right) \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$.

⁶Die Energiegleichung läßt sich auch in folgende Temperaturgleichungen umschreiben:

$$\begin{aligned} \varrho [T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T] &= \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + (\gamma - 1) p \nabla \cdot \mathbf{u} + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \Phi, \\ \varrho [T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T] &= \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{M^2}{\text{Re}} \Phi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$-\frac{\varrho'}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} \left[p' + (\gamma - 1)M^2 \frac{\varrho' \mathbf{u}'^2}{2} + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \varrho' z' \right] \\ + \nabla \cdot \left\{ \left[\gamma p' + (\gamma - 1)M^2 \frac{\varrho' \mathbf{u}'^2}{2} + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \varrho' z' \right] \mathbf{u}' \right\} = \\ \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda' \nabla T') + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathcal{T}'_e \mathbf{u}'). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Primitive Formulierung:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \varrho' + \varrho' \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \frac{1}{\varrho' M^2} \nabla p' = \frac{1}{\varrho' \text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta' \mathcal{D}' - \frac{2}{3} \eta' (\nabla \cdot \mathbf{u}') \mathcal{I} \right] - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) p' + \gamma p' \nabla \cdot \mathbf{u}' = \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda' \nabla T') + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \Phi'. \quad (2.23)$$

Zustandsgleichung:

$$p' = \varrho' T'. \quad (2.24)$$

Bei der Zustandsgleichung muß man noch beachten, daß die folgenden Beziehungen zwischen den Referenzgrößen erfüllt werden müssen:

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = RT_0 = (c_p - c_v)T_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p T_0.$$

2.3 Dimensionslose Kennzahlen

In den obigen dimensionslosen Gleichungen können wir einige wichtige Strömungskennzahlen, die Machzahl M , die Reynoldszahl Re , die Prandtlzahl Pr und die Froudezahl Fr , feststellen⁷. Nun erläutern wir kurz die physikalische Bedeutung der einzelnen Kennzahlen. Ausführliche Erklärungen werden beispielsweise in [Zie91] gegeben.

Machzahl

Die Machzahl M charakterisiert den Kompressibilitätseffekt in einem Strömungsfeld. Man definiert sie als das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} zu Schallgeschwindigkeit \mathbf{c} :

$$M = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{c}|}.$$

⁷Das Produkt $\text{Pr} \cdot \text{Re}$, das in der Druckgleichung (2.44) als Nenner des Wärmeleitungsgliedes auftritt, wird oft als Pecletzahl Pe bezeichnet.

Dabei ist die Schallgeschwindigkeit, die physikalisch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der kleinen Druckstörung beschreibt, definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2 &= \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s \\ &= \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}} \quad \text{für das perfekte Gas.} \end{aligned}$$

Mit den charakteristischen Werten für Druck p_0 und Dichte ϱ_0 definiert man die globale Machzahl als

$$M = \frac{|\mathbf{u}_0|}{|\mathbf{c}_0|} = \frac{|\mathbf{u}_0|}{\sqrt{p_0/\varrho_0}}. \quad (2.25)$$

Sie ist nicht mit der lokalen Machzahl M_{loc} der Strömung zu verwechseln. Wenn im folgenden von 'der Machzahl' gesprochen wird, so ist immer die globale Machzahl (2.25) gemeint.

Wenn wir den Druck durch den hydrodynamischen Druck $\varrho_0 \mathbf{u}_0^2$ dimensionslos gemacht hätten, wären die beiden Referenzgrößen für die Strömungs- und Schallgeschwindigkeit gleich, und die globale Machzahl würde in den dimensionslosen Gleichungen nicht mehr auftreten. Bei einer Strömung mit mäßiger Machzahl wäre dies kein Problem, aber im schwachkompressiblen Regime unakzeptabel, denn die beiden charakteristischen Geschwindigkeiten sind für den Fall verschwindender Machzahl ($M \rightarrow 0$) zu unterschiedlich ($\mathbf{c}_0 \rightarrow \infty$). Deswegen haben wir die unabhängige Referenzgröße für den Druck angenommen. Durch diese Wahl erscheint die globale Machzahl M in den dimensionslosen Geschwindigkeits- bzw. Impulsgleichungen und die Strömungsvorgänge werden im schwachkompressiblen Regime physikalisch richtig beschrieben. Als Ergänzung geben wir einige weitere nützliche Beziehungen zwischen den dimensionslosen Größen:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}_0} &= \sqrt{\frac{\gamma p'}{\varrho'}}, \\ M_{loc} &= \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{c}|} &= M'_{loc} \cdot M, \\ e' &= \frac{e}{\varrho_0 \mathbf{c}_0^2} &= \varrho' \varepsilon' + M^2 \cdot \frac{1}{2} \varrho' \mathbf{u}'^2 + \frac{M^2}{Fr^2} \cdot \varrho' z' \\ & &= \frac{1}{\gamma-1} p' + M^2 \cdot e^{k'} + \frac{M^2}{Fr^2} \cdot e^{p'}, \\ p' &= (\gamma-1) \varrho' \varepsilon' &= (\gamma-1) e^{i'}. \end{aligned}$$

Reynoldszahl

Die Reynoldszahl Re beschreibt das Verhältnis der Normalenspannungen durch die Trägheit ($\varrho \mathbf{u}^2$, Impulsfluß durch Konvektion) zu den Spannungen durch die viskose Reibung ($\eta \mathbf{u}/x$, Impulsfluß aufgrund der Zähigkeit):

$$Re = \frac{\varrho \mathbf{u} x}{\eta}.$$

Unter Verwendung von charakteristischen Bezugsgrößen definiert man die folgende globale Reynoldszahl als

$$\text{Re} = \frac{\varrho_0 \mathbf{u}_0 x_0}{\eta_0} = \frac{\mathbf{u}_0 x_0}{\nu_0}, \quad (2.26)$$

wobei ν_0 die kinematische Viskosität bezeichnet. Physikalisch entspricht diese Zahl noch dem Verhältnis zwischen der charakteristischen Zeit τ_d ($\tau_d = x_0^2/\nu_0$) für den diffusiven Impulstransport über die Distanz x_0 und der charakteristischen Zeit τ_c ($\tau_c = x_0/\mathbf{u}_0$) für den konvektiven Impulstransport über dieselbe Distanz .

Prandtlzahl

Die Prandtlzahl Pr ist eine reine stoffspezifische Kennzahl, die den Quotienten aus viskoser Diffusivität ν (kinematischer Viskosität) und thermischer Diffusivität κ (Temperaturleitfähigkeit oder thermische Leitfähigkeit) kennzeichnet

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}.$$

Sie stellt somit das Verhältnis zweier molekularer Transportvorgänge dar. Mit den charakteristischen Referenzgrößen definiert man die globale Prandtlzahl als

$$\text{Pr} = \frac{\nu_0}{\kappa_0} = \frac{\eta_0 c_p}{\lambda_0}. \quad (2.27)$$

Sie ist auch als ein Verhältnis von Zeitskalen zu verstehen:

$$\text{Pr} = \frac{\nu_0}{\kappa_0} = \frac{\nu_0}{x_0^2} \frac{x_0^2}{\kappa_0} = \frac{\text{thermische Zeitskala}}{\text{viskose Zeitskala}} = \frac{\text{thermische Diffusionszeit}}{\text{viskose Diffusionszeit}}. \quad (2.28)$$

Die thermische Diffusionszeit ist eine Relaxationszeit der Temperaturstörungen. Dagegen bedeutet die viskose Diffusionszeit eine Relaxationszeit der Störungen des Geschwindigkeitsfeldes. Wenn Pr größer als 1 ist, ist die thermische Zeitskala größer als die viskose Zeitskala, d.h. die Temperaturstörungen breiten sich langsamer als die Störungen des Geschwindigkeitsfeldes aus. In diesem Fall wird die thermische Grenzschichtdicke kleiner als die viskose Grenzschichtdicke. So charakterisiert die Prandtlzahl auch das Verhältnis der Dicken von viskoser zu thermischer Grenzschicht:

$$\text{Pr} = \frac{\nu_0}{\kappa_0} = \frac{\nu_0}{\mathbf{u}_0 x_0} \frac{\mathbf{u}_0 x_0}{\kappa_0} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}}. \quad (2.29)$$

Dabei stellt die thermische Pecletzahl Pe das gleiche physikalische Verhältnis für die Wärmeübertragung wie die Reynoldszahl für den Impulstransport dar. Die Strömungsgrenzschichtdicke δ_s einer längs angeströmten Platte ist proportional zu $\text{Re}^{-\frac{1}{2}}$, wobei die Reynoldszahl mit der Lauflänge l gebildet wird [Sch85]. Für die Temperaturgrenzschichtdicke gilt dagegen $\delta_T \sim \text{Pe}^{-\frac{1}{2}}$ [Zie91]. Dadurch kann man für die Abschätzung der Strömungsgrenzschichtdicke folgende Beziehung benutzen:

$$\delta_s \sim \delta_T \cdot \sqrt{\text{Pr}}. \quad (2.30)$$

Wenn bei der Simulation keine Modellierungen an den Wänden verwendet werden, ist darauf zu achten, daß die dünnere Grenzschicht je nach Prandtlzahl ausreichend fein aufgelöst wird.

Froudezahl

Die Froudezahl Fr stellt das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit von Schwerwellen dar:

$$Fr = \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{gx_0}}. \quad (2.31)$$

In den Gleichungen tritt die Froudezahl immer quadratisch auf:

$$Fr^2 = \frac{\mathbf{u}_0^2}{gx_0}. \quad (2.32)$$

Außerdem beschreibt sie noch das Verhältnis zwischen der Trägheitskraft und der Schwerkraft.

Nusseltzahl

Bei technischen Aufgabenstellungen mit Wärmeübergang liegt das Interesse zumeist an der ab- oder zugeführten Wärmemenge durch die Strömung. Mit dem Wärmeübergangskoeffizienten (oder der Wärmeübergangszahl) α , der lokal und auch global definiert werden kann, wird sie quantitativ beschrieben. Durch das sogenannte *Newtonschen Abkühlungsgesetz* ist der Wärmeübergangskoeffizient an der Wand definiert als

$$q_w = \alpha \cdot \Delta T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w. \quad (2.33)$$

Darin ist ΔT eine geeignete Temperaturdifferenz, z. B. mit $\Delta T = T_w - T_\delta$ als die Differenz zwischen der Temperatur an der Wand und am Außenrand der Grenzschicht. Die rechte Seite der Gleichung drückt aus, daß der Wärmeübergang an der Wand ausschließlich durch Wärmeleitung erfolgt. Durch die Entdimensionalisierung mit $T' = \frac{T-T_0}{\Delta T_0}$ und $x' = \frac{x}{x_0}$, erhalten wir folgende Definition der Nusseltzahl, d.h. einen lokalen dimensionslosen Wärmeübergangskoeffizienten:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha x_0}{\lambda_0} = \frac{q_w x_0}{\lambda \Delta T_0} = - \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'} \right)_w. \quad (2.34)$$

Für konstanten Stoffwerten bedeutet die Nusseltzahl nichts anderes als der dimensionslose, negative Temperaturgradient an der Wand. Wenn der Wärmeübergang durch

die konvektiven Strömungen immer stärker wird, nimmt die Nusseltzahl auch zu. Die Nusseltzahl charakterisiert also noch die Stärke der konvektiven Bewegung:

$$\text{Nu} = \frac{\dot{q}_{\text{gesamt}}}{\dot{q}_{\text{Leitung}}} = 1 + \frac{\dot{q}_{\text{Konvektion}}}{\dot{q}_{\text{Leitung}}}. \quad (2.35)$$

Ohne Konvektion ist die Nusseltzahl 1, weil im ruhenden Fluid das dimensionslose Temperaturprofil linear ist. Je größer die Nusseltzahl wird, desto größer wird die Steigung des Temperaturprofils an der Wand. Dadurch kann man sich leicht vorstellen, wie sich die Temperaturgrenzschicht im Bereich größerer Nusseltzahlen entwickelt.

2.4 Der MPV-Ansatz

Schwach kompressible Strömungen sind im wesentlichen inkompressible Strömungen mit schwachen Kompressibilitätseffekten. In diesem Bereich wird die Schallgeschwindigkeit c viel größer als die Strömungsgeschwindigkeit u . Da sich die Druckwellen mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, kommt es zu einem raschen Druckausgleich im gesamten Strömungsgebiet, und der Gesamtdruck wird nahezu konstant. Daher können Dichteänderungen durch Druckstörungen (d. h. innere Kompression) nicht mehr auftreten, und die Strömung wird inkompressibel. Dadurch verliert der Druck seine physikalische Bedeutung als eine thermodynamische Variable und kann als Lagrangescher Multiplikator aufgefaßt werden. Bei inkompressiblen Strömungen dient der Druck oder eher der Gradient des Drucks nur als ein Balancierungsfaktor gegen die treibende Kraft.

Mathematisch gesehen, entstammt die Hauptschwierigkeit bei der Berechnung schwachkompressibler Strömungen dem Auftreten der Singularität in dem Druckterm in der Geschwindigkeits- bzw. Impulsgleichung bei verschwindender Machzahl ($M \rightarrow 0$). Theoretische Behandlungen zu diesem singulären Regime liefert die asymptotische Mehrskalanalyse der Euler-Gleichungen für kleine Machzahl [Kle95] [MK95]. Sie zeigt, daß sich die verschiedenen Effekte auf getrennten räumlichen Skalen abspielen. Deshalb wurde folgender MPV-Ansatz ('Multiple Pressure Variables') eingeführt:

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)} + O(M^3). \quad (2.36)$$

Nach der obigen asymptotischen Analyse mit einer Zeitskala und zwei Raumskalen muß der Druck führender Ordnung $p^{(0)}$ der Zustandsgleichung genügen und beschreibt daher den globalen Hintergrundeffekt. Dieser ist räumlich konstant in beiden Raumskalen, kann aber zeitlich variieren. Der Druck erster Ordnung $p^{(1)}$ verhält sich wie die Amplitude einer akustischen Welle auf der großen Raumskala. Der Druck zweiter Ordnung $p^{(2)}$ variiert räumlich auf der kleinsten und auch auf der langen Skala. Dies garantiert die Einhaltung der Divergenzbedingung im inkompressiblen Fall. Nach

diesen asymptotischen Betrachtungen haben die Autoren $p^{(0)}$ als thermodynamischen Grunddruck, $p^{(1)}$ als akustischen Druck und $p^{(2)}$ als inkompressiblen, kinematischen Druck bezeichnet. Im folgenden betrachten wir nur den Druck führender und zweiter Ordnung⁸. Wir definieren den Druck führender Ordnung als mittleren Druck über dem gesamten Rechengebiet Ω , der sicher räumlich konstant ist:

$$p^{(0)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p \, dV. \quad (2.37)$$

Nun folgt die Definition des Drucks zweiter Ordnung $p^{(2)}$ aus der Konsistenz

$$p^{(2)} = \frac{1}{M^2} (p - p^{(0)}). \quad (2.38)$$

Wird der vereinfachte MPV-Ansatz, d. h. $p(\mathbf{r}, t) = p^{(0)}(t) + M^2 p^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, in die dimensionslosen Gleichungen eingesetzt, dann ergeben sich folgende Gleichungen. Dabei lassen wir den hochgestellten Apostroph in den dimensionslosen Gleichungen weg.

Konservative Formulierung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}] + \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I} \right] - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(0)}}{dt} + M^2 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma p \mathbf{u}) &= \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathcal{T}_e \mathbf{u}) \\ &- (\gamma - 1) M^2 \left[\frac{\partial e^k}{\partial t} + \nabla \cdot (e^k \mathbf{u}) \right] - (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \left[\frac{\partial e^p}{\partial t} + \nabla \cdot (e^p \mathbf{u}) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Primitive Formulierung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\varrho \text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I} \right] - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(0)}}{dt} + M^2 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} &= \\ &\frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \Phi. \end{aligned} \quad (2.44)$$

⁸Ohne Berücksichtigung des akustischen Druckes $p^{(1)}$ bleibt dessen langwelliger Anteil noch in $p^{(2)}$. Wenn die Amplitude von $p^{(2)}$ in der Größenordnung $O(1)$ liegt, steht er in Zusammenhang mit den aeroakustischen Wellen. Liegt dagegen seine Amplitude in der viel höheren Größenordnung $O(\frac{1}{M})$, dann hat er eher mit thermoakustischen Wellen zu tun.

Zustandsgleichung:

$$p = \varrho T. \quad (2.45)$$

Wie früher definiert, bezeichnet $e^k (= \frac{1}{2}\varrho\mathbf{u}^2)$ die dimensionslose kinetische Energie und $e^p (= \varrho z)$ das dimensionslose Energiepotential. Das sind die Grundgleichungen, die wir im nächsten Kapitel weiter numerisch behandeln wollen. Wir untersuchen noch kurz die Eigenschaften einiger Spezialfälle der Grundgleichungen.

Im Fall verschwindender Machzahl bleiben die Kontinuitäts- und Geschwindigkeits- bzw. Impulsgleichungen unverändert, aber die Druckgleichung und Zustandsgleichung reduzieren sich zu folgenden einfachen Gleichungen:

$$\frac{dp^{(0)}}{dt} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (2.46)$$

$$p^{(0)} = \varrho T. \quad (2.47)$$

Andererseits verwenden wir die Definitionsgleichung (2.37) für den Druck $p^{(0)}$. Dann läßt sich die zeitliche Änderung des Drucks führender Ordnung $\frac{dp^{(0)}}{dt}$ unmittelbar aus der räumlichen Mittelung der Druckgleichung selbst über dem gesamten Rechengebiet herleiten⁹:

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(0)}(t)}{dt} &= \frac{1}{|\Omega|} \left[-\gamma p^{(0)} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \oint_{\partial\Omega} (\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}) dA \right] \\ &= \frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \left\{ - \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \oint_{\partial\Omega} \left[\lambda \nabla \left(\frac{1}{\varrho} \right) \cdot \mathbf{n} \right] dA \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dabei steht \mathbf{n} für den Normalenvektor auf dem Rand $\partial\Omega$. Physikalisch beschreibt dies die globale Druckänderung infolge der Kompression und der Wärmeübegtragung durch die Strömungsränder. Es ist noch zu beachten, daß die Randbedingungen an den Strömungsrändern zu jedem Zeitpunkt diese globale Integralgleichung erfüllen müssen. Diese globale Evolutionsgleichung des Drucks (2.48) beschreibt die zeitliche Änderung des reinen thermodynamischen Gleichgewichtszustandes. Also breiten sich kleine Störungen an den Rändern durch Kompressionen oder Wärmeübergänge sofort mit der unendlichen Schallgeschwindigkeit in das gesamte Strömungsfeld aus, und das thermodynamische Gleichgewicht wird wieder hergestellt. Demzufolge gilt folgende Divergenzbedingung für den inkompressiblen Grenzfall:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot \left[\lambda \nabla \left(\frac{1}{\varrho} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA - \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \oint_{\partial\Omega} \left[\lambda \nabla \left(\frac{1}{\varrho} \right) \cdot \mathbf{n} \right] dA \right\}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Der zweite Term bleibt immer räumlich konstant. Wiederum muß die Divergenz der Geschwindigkeiten stets die gleiche räumliche Verteilung wie die Divergenz des Wärmeflusses haben. Im allgemeinen existiert noch die lokal entstehende Divergenz der

⁹Hierbei werden die Volumenintegrale mittels Satz von Gauß in Oberflächenintegrale umgeformt.

Geschwindigkeiten $\nabla \cdot \mathbf{u}$ im inkompressiblen Strömungsfeld. Daraus ist ersichtlich, daß die klassische, divergenzfreie Bedingung der Geschwindigkeiten ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) für die inkompressiblen Strömungen nur unter bestimmten Bedingungen gilt. Die auf der rechten Seite stehende Terme müssen sich gegenseitig ausgleichen. Erstens muß der lokale Wärmefluß divergenzfrei sein und zweitens muß die Differenz zwischen der globalen Kompression und der Wärmeübertragung durch die Strömungsränder verschwinden. In diesem Sinne läßt sich die obige Beziehung als *verallgemeinerte Divergenzbedingung* der inkompressiblen Strömungen interpretieren. Die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeiten der inkompressiblen Strömungen erhalten wir klar aus der Druckgleichung unter bestimmten Bedingungen. Oft bezeichnet man diese Divergenzfreiheitsbedingung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ irrtümlicherweise als Kontinuitätsgleichung im Fall von inkompressiblen Strömungen. Aber dies gilt nicht im allgemeinen Fall. Auch wenn es unter bestimmten Bedingungen gilt, so konvergiert die Kontinuitätsgleichung gegen eine reine Transportgleichung für die Dichte. Wir stellen nun alle Gleichungen für den Fall verschwindender Machzahl zusammen:

Konservative Formulierung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}] + \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I} \right] - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z. \quad (2.51)$$

Primitive Formulierung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\varrho \text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I} \right] - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z. \quad (2.53)$$

Divergenzbedingung:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = & \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot \left[\lambda \nabla \left(\frac{1}{\varrho} \right) \right] + \\ & \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA - \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \oint_{\partial\Omega} \left[\lambda \nabla \left(\frac{1}{\varrho} \right) \cdot \mathbf{n} \right] dA \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Zustandsgleichung:

$$p^{(0)} = \varrho T. \quad (2.55)$$

Das Limit $M = 0$ beschreibt also eine inkompressible Strömung mit variabler Dichte unter dem Einfluß der Kompression und der Wärmeübertragung durch die Strömungsränder. Große Dichteänderungen in der Strömung können aufgrund einer nichthomogenen Temperatur- bzw. Entropieverteilung auftreten. In den obigen Gleichungen ist der Druck zweiter Ordnung $p^{(2)}$ nicht mehr über eine Zustandsgleichung an die Erhaltungsgleichungen gekoppelt. Damit können die Strömungsvorgänge alleine aus den

Kontinuitäts- und Impulsgleichungen berechnet werden. Jedoch muß gleichzeitig die Divergenzbedingung eingehalten werden, die keine zeitliche Ableitung ($\frac{dp^{(2)}}{dt}$) mehr enthält. Mathematisch führt dies zum elliptischen Charakter in den Gleichungen, die physikalisch den thermodynamischen Gleichgewichtszustand widerspiegeln. In Strömungen mit verschwindender Machzahl entkoppelt sich der inkompressible Druck $p^{(2)}$ völlig vom Gesamtdruck p . Er hat dann keinerlei thermodynamische Bedeutung mehr und spielt mathematisch nur eine Rolle als Lagrangescher Multiplikator. Mit diesem Gleichungssystem hat Fedorchenko [Fed97] eine lokale charakteristische Analyse durchgeführt. Als Ergebnis zeigt er, daß das Gleichungssystem gemischte Eigenschaften besitzt, also teilweise hyperbolisch (drei Paare der Charakteristiken $\frac{dx}{dt} = \mathbf{u}$ entsprechen der Konvektion durch die Strömung) und teilweise elliptisch (sofortige globale Verbindung zwischen dem Druck- und Geschwindigkeitsfeld). Insbesondere enthält dies Gleichungssystem nur die Evolution der Wirbelstärke- und Entropiestörungen. Die akustischen Wellen sind aber vollständig beseitigt. Im Gleichungssystem gibt es keine explizite Verbindung zwischen den lokalen Änderungen des Drucks p und der Dichte ϱ . Daraus ergibt sich eine unendlich schnelle Schallgeschwindigkeit. Außerdem hat er einige exakte instationäre Lösungen dieses Gleichungssystems gegeben.

Für die inkompressiblen Strömungen ($M = 0$) mit verschwindender Divergenz der Geschwindigkeiten gelten folgende einfache primitive Gleichungen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varrho = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\varrho \text{Re}} \nabla \cdot (2\eta \mathcal{D}) - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.58)$$

Im Fall verschwindender Machzahl mit konstanter Dichte, $\varrho = \varrho_0$, verliert noch die Dichtetransportgleichung ihre Bedeutung. Aus der Zustandsgleichung folgt, daß das Strömungsfeld immer isothermisch bleibt. Dies bezeichnet man üblicherweise als *inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.60)$$

Wenn der Reibungsterm noch vernachlässigt werden kann, dann resultieren die sogenannten *inkompressiblen Eulergleichungen* mit konstanter Dichte:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad (2.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.62)$$

2.5 Konvektive Strömungen im schwachkompressiblen Regime

Abschließend führen wir einige Vergleiche mit traditionellen Approximationen für die freien konvektiven Strömungen im schwachkompressiblen Bereich durch. Strömungsvorgänge, die auf schwerkraftbedingte Auf- und Abtriebskräfte zurückzuführen sind, werden als *natürliche Konvektion* (oder *freie Konvektion*) bezeichnet. Häufig wird natürliche Konvektion durch Temperaturunterschiede hervorgerufen, die bei einem Fluid mit temperaturabhängiger Dichte im Schwerfeld besagte Auf- und Abtriebskräfte bewirken. Sonstige Wärmekonvektion unter dem vernachlässigbaren kleinen Einfluß von Schwerkraft nennt man *erzwungene Konvektion*, z. B. Strömungen in einem Wärmeaustauscher. Das Wort ‘*erzwungene*’ bezieht sich auf die Anströmung. Bei der inkompressiblen ($\varrho = \text{konst.}$) erzwungenen Konvektion löst man meistens die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.59), (2.60) und noch folgende passive Temperaturgleichung ohne Dissipation¹⁰:

$$T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T). \quad (2.63)$$

Dadurch entkoppeln sich die Impulsgleichungen von der Energiegleichung vollständig. Man berücksichtigt dann keinerlei Rückwirkung der Temperaturverteilung auf die Geschwindigkeitsfelder.

Bei der natürlichen Konvektion kann die Kopplung mit der Ergänzung des Auftriebsterms in die Impulsgleichungen zwar wieder hergestellt werden. Die vollständigen instationären kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sind aber sehr schwierig numerisch effizient zu behandeln. Wie im früheren Abschnitt erwähnt, läuft der Schall in diesem Regime viel schneller als die Strömung. Übliche explizite Verfahren leiden unter der starken Beschränkung der Zeitschrittweite. Für das implizite Verfahren wird die Systemmatrix immer steifer mit fallenden Machzahlen. Dadurch erhöht sich die Konditionszahl und die Konvergenzrate wird drastisch reduziert [CM85].

Man hat daher verschiedene Approximationen verwendet. Die älteste bekannte ist die sogenannte *Boussinesq-Approximation*, in der die Temperaturabhängigkeit der Dichte nur über eine lineare Beziehung berücksichtigt wird:

$$\varrho(T) = \varrho_0 + \frac{d\varrho}{dT}(T - T_0) = \varrho_0[1 - \beta_0(T - T_0)]. \quad (2.64)$$

Dabei ist β ($= \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dT}$) der Volumenausdehnungskoeffizient. Wir treffen hier noch die Annahme, daß $\beta_0 = \beta$ konstant ist. Unter der Annahme sehr kleiner Dichteänderungen

¹⁰Beim thermischen Diffusionsterm steht kein Faktor γ . Dies entspricht den isobaren Strömungen (vgl. Gl. (2.17)).

$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = -\beta(T - T_0) = -\beta\Delta T_0(T' - T'_0) \ll 1$ erhält man das folgende vereinfachte entdimensionalisierte Gleichungssystem:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \nabla^2 \mathbf{u} + (T - T_{ref}) \cdot \mathbf{e}_z, \quad (2.66)$$

$$T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T). \quad (2.67)$$

Hier tauchen noch zwei wichtige Kennzahlen, Grashofzahl Gr und Rayleighzahl Ra auf¹¹. Bei der Entdimensionalisierung wird die Bezugsgröße für die Geschwindigkeiten $\mathbf{u}_0 = \sqrt{\beta g \Delta T_0 x_0}$, für den Druck $\varrho_0 \mathbf{u}_0^2$ (hydrodynamischen Druck) und für die Temperatur $\frac{T - T_0}{\Delta T_0}$ verwendet¹². Die Rayleighzahl ist definiert als

$$\text{Ra} = \frac{\beta g \Delta T_0 x_0^3}{\kappa_0 \nu_0}. \quad (2.69)$$

Dies kennzeichnet ein Verhältnis zwischen Auftriebskraft und Reibungswiderstand unter einem Wärmediffusionsvorgang. Anhand eines Leistungsvergleichs kann man die Rayleighzahl auch als Verhältnis zwischen Leistung der Auftriebskraft und Leistung der Reibungskraft interpretieren. Die Grashofzahl ist definiert als der Quotient aus Rayleigh- und Prandtlzahl:

$$\text{Gr} = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} = \frac{\beta g \Delta T_0 x_0^3}{\nu_0^2}. \quad (2.70)$$

Man kann sie als ein Produkt von beiden Kraftverhältnissen Auftrieb zu Reibung und Trägheit zu Reibung verstehen. Man kann weiter $\sqrt{\text{Gr}}$ als Reynoldszahl und $\sqrt{\text{Bo}} = \sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}$ als Pecletzahl in der natürlichen Konvektion interpretieren.

Durch die Boussinesq-Approximation besteht nun eine Kopplung zwischen der Impulsgleichung und der Energiegleichung, so daß in diesem Modell eine Strömung allein durch einen Temperaturgradienten angetrieben werden kann. Die Dichte ist aber konstant außer in den Termen der Auftriebskräfte. Dies sind jedoch recht starke Vereinfachungen, die auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden müssen. In der Arbeit [GG76] werden genaue Kriterien abgeleitet. Im Prinzip ist diese Approximation sehr einschränkend, einsetzbar lediglich für Strömungen, die durch sehr kleine Temperaturdifferenzen angetrieben sind. Die Auswirkung der Kompressibilität wird immer

¹¹Das Produkt $\text{Pr} \cdot \text{Ra}$ bezeichnet man auch als Boussinesqzahl:

$$\text{Bo} = \text{Pr} \cdot \text{Ra} = \frac{\beta g \Delta T_0 x_0^3}{\kappa_0^3}. \quad (2.68)$$

¹²Hierbei muß man beachten, daß es nur um den hydrostatischen Anteil ($-\varrho g z$) abgezogenen Druck handelt.

wichtiger im schwachkompressiblen Regime, wenn der Temperaturunterschied und somit auch der dadurch entstandene Dichteunterschied größer wird. Inzwischen wurde die sogenannte *'low-Mach number approximation'* entwickelt, und viele Autoren [CP86] [Hor92] [FLP92] [FG93] [MTN97] haben ihre Möglichkeit und Gültigkeit überprüft. Diese Approximation liefert die selben Gleichungen für den Fall verschwindender Machzahl wie bei unserem Ansatz. Dabei wurde keine Dichtegleichung sondern eine Temperaturgleichung gelöst, und die Dichte wurde aus der Zustandsgleichung berechnet. Das zu lösende Gleichungssystem lautet:

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}] + \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I} \right] - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.71)$$

$$\varrho [T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T] = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp^{(0)}}{dt}, \quad (2.72)$$

$$\varrho = \frac{p_0}{T}, \quad (2.73)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{p^{(0)} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{dp^{(0)}}{dt}, \quad (2.74)$$

$$\frac{dp^{(0)}}{dt} = \frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \left[\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA - \frac{1}{p^{(0)} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Re}} \oint_{\partial\Omega} (\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}) dA \right]. \quad (2.75)$$

Dies ist offenbar eine Lockerung der strengen Boussinesq-Approximation. Die Dichtevariation wurde erlaubt und als eine Funktion der Temperatur, unabhängig vom Druck (d. h. isobarer Zustand) ausgedrückt. Im kompressiblen Bereich ($M \neq 0$) enthält diese Annahme jedoch einen Fehler der Größenordnung $O(M^2)$ beim Druck in der Zustandsgleichung. Aus dem obigen Gleichungssystem können die herkömmlichen Boussinesq-Gleichungen unter der Annahme $\Delta T \ll 1$ wieder zurückerhalten werden.

Im nächsten Kapitel wollen wir keine neue Approximation herleiten, sondern die exakten kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit dem MPV-Ansatz numerisch behandeln. Damit müssen die Strömungen in allen Machzahlbereichen, d. h. auch inkompressiblen Strömungen, im Prinzip gelöst werden. Dazu müssen wir zunächst die oben kurz erwähnten numerischen Schwierigkeiten beseitigen, die im schwachkompressiblen Regime häufig auftreten.

3 Euler-Gleichungen in verschiedenen Formulierungen

Im vorherigen Kapitel haben wir die Grundgleichungen mit dem MPV-Ansatz in den verschiedenen Formulierungen hergeleitet. Nun nehmen wir die einfachsten, eindimensionalen Euler-Gleichungen als Beispiel, um unsere numerische Methode zu erläutern. Dann diskutieren wir die Rechenergebnisse sowie Vor- und Nachteile. Bei der Simulation verwenden wir das semi-implizite Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung für die zeitliche Integration und das Druck-Korrektur-Verfahren für die Kopplung zwischen Geschwindigkeiten und Druck.

3.1 Euler-Gleichungen

Kompressible, reibungs- und wärmeleitungsfreie Strömungen ohne Einwirkung äußerer Kräfte lassen sich durch folgende Euler-Gleichungen beschreiben. Zunächst nehmen wir die konservative Formulierung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}] + \frac{1}{M^2} \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} [p + (\gamma - 1)M^2 e^k] + \nabla \cdot \{[\gamma p + (\gamma - 1)M^2 e^k] \mathbf{u}\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Signalausbreitungsgeschwindigkeiten in diesem System lauten:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\pm} = \mathbf{u} \pm \frac{\mathbf{c}}{M}, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{u}. \quad (3.2)$$

Im Fall von $M \rightarrow 1$ beschreiben diese Gleichungen genau die kompressiblen Strömungen mit beschränkter Schallgeschwindigkeit. Die Gleichungen haben dann hyperbolischen Charakter. Wie im vorherigen Kapitel erwähnt, wird im Fall verschwindender Machzahl der Druckterm singulär. Damit verändert sich auch der Charakter der Gleichungen zu hyperbolisch-elliptisch. Die Gleichungen beschreiben dann die inkompressiblen Strömungen. Es sei darauf hingewiesen, daß bei uns Inkompressibilität keine

einfache isochore Strömung ($\varrho = konst$) bedeutet, sondern eher eine kompressible Strömung mit unendlicher Schallgeschwindigkeit. Daher müssen die numerischen Algorithmen auch in der Lage sein, die inkompressiblen Strömungen mit variabler Dichte richtig zu simulieren. In aktuellen Simulationen verwendet man häufig primitive- und auch gemischte Formulierungen. Bei der gemischten Formulierung wird nur die Energiegleichung in der primitiven Form geschrieben. Diese gemischte Formulierung bezeichnen wir im weiteren als *semikonservative Formulierung*.

Primitive Formulierung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho M^2} \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Semi-konservative Formulierung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}] + \frac{1}{M^2} \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + (\gamma - 1) p \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Bei der primitiven Druckgleichung sind sicherlich verschiedene Formulierungen möglich. Die oben angegebenen Form ist eine davon, die eher eine Gleichung für die nichtkonservative innere Energie $\varrho \varepsilon$ darstellt.

3.2 Geschichte der semi-impliziten Methoden

Vom historischen Standpunkt der numerischen Fluidodynamik her, gehören unsere speziellen Algorithmen für die instationären kompressiblen- und inkompressiblen Strömungen zu den sogenannten *Druckverfahren*, die von Casulli und Greenspan [CG84] für die subsonischen Strömungen erstmals eingeführt wurden. Bei dieser Methode wurde die primitive Form der Navier-Stokes-Gleichungen verwendet und sie wurde räumlich auf einem versetzten Gitter implementiert. Lediglich die mit dem Schall assoziierten Terme wurden implizit diskretisiert. Demzufolge sind diese Algorithmen numerisch stabil auch ohne die Courantsche Stabilitätsbedingung mit der Schallgeschwindigkeit, die besonders für die Strömungen mit niedriger Machzahl zu einschränkend wirkt. Wie im vorangegangenen Kapitel ausführlich diskutiert, breitet sich der Schall in diesem Regime viel schneller aus als die Strömung.

Später wurden ähnliche Algorithmen, basierend auf der konservativen Formulierung der Euler-Gleichungen von Patnaik et al. [PGBO87] entwickelt. Dabei haben die Autoren ihre zweistufigen Prädiktor-Korrektor Algorithmen auf die nichtversetzten Variablen angewandt. Die erste Stufe wurde, um die Stoßwellen genau zu approximieren, mit einer die Positivität erhaltenden monotonen FCT Methode explizit implementiert. Als implizite Korrektor in der zweiten Stufe wurde die sogenannte Druck-Korrektur-Gleichung gelöst, die sich aus der Kopplung zwischen den impliziten Termen in der Impuls- und Energiegleichung ergibt. Sicherlich lieferte diese Methode viel bessere Ergebnisse für Strömungen mit höherer Machzahl. Jedoch können die beiden Methoden für die Strömungen verschwindender Machzahl, d. h. den inkompressiblen Fall, leider nicht eingesetzt werden, weil die Singularität beim Druckterm in den Geschwindigkeits- bzw. Impulsgleichungen den gesamten Algorithmus stört. Es wurde keine Druckaufspaltung vorgenommen, so daß die Druckvariable gleichzeitig thermodynamische Effekte führender Ordnung sowie kleinskalige Druckfluktuationen zweiter Ordnung auflösen muß. Für den Bereich verschwindender Machzahl entkoppeln diese Effekte vollständig, und können daher nicht mit einer einzigen Druckvariablen approximiert werden.

Kürzlich wurde ein numerisches Verfahren für die oben eingeführte semikonservative Formulierung von Bijl et al. [BW98] angegeben. Dabei wurde die Druck-Korrektur-Gleichung aus der Kontinuitätsgleichung hergeleitet. Um die Singularität zu vermeiden, haben die Autoren einen geeigneten dimensionslosen Druck definiert und die Zustandgleichung mit diesem Druck in Beziehung gesetzt. Zunächst wurde die Enthalpie aus der Energiegleichung berechnet und der Impuls mit dem alten Druck abgeschätzt. Dann wurde die Druck-Korrektur-Gleichung gelöst und der Druck und der Impuls neu berechnet. Zuletzt wurde die Dichte aus der Zustandgleichung berechnet und damit neue Geschwindigkeiten ermittelt. Diese Algorithmen wurden auf den versetzten Variablen implementiert und zeigten angemessene Ergebnisse außer bei Kontaktunstetigkeiten im Bereich höherer Machzahl [Bij99]. Die selbe Gruppe stellte kürzlich noch andere semikonservative Algorithmen [WvdHV00] [Wes01] vor, in denen die Druck-Korrektur-Gleichung aus der Druckgleichung hergeleitet wurde. Dieser Vorgang ist völlig gleich zu dem vorher erwähnten, klassischen Druckverfahren von Casulli und Greenspan und Patnaik et al.

In unserer Gruppe wurde ebenfalls ein spezieller Algorithmus für instationäre Strömungen kleiner Machzahl entwickelt. Er basiert grundsätzlich auf dem Algorithmus von Casulli und Greenspan mit einigen Modifikationen. Zusätzlich wird die Druckaufspaltung mit dem MPV-Ansatz durchgeführt. Dadurch können unsere Algorithmen die in dem Druckterm auftretende Singularität im Fall verschwindender Machzahl umgehen und den Rundungsfehler im Fall kleiner Machzahl beseitigen. Bei einigen Testbeispielen [RM99] [RM00] der inkompressiblen- und auch schwachkompressiblen

Strömungen konnten gute Ergebnisse erzielt werden. Bei Strömungen höherer Machzahl, d. h. im Transschall- und Überschall-Bereich, können diese Algorithmen jedoch nicht mehr eingesetzt werden, da die in diesem stark kompressiblen Regime häufig auftretende Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten mit den primitiven Variablen kaum richtig gelöst werden können [LeV92]. Daher untersuchen wir zunächst unsere Algorithmen ausführlich mit den oben hergeleiteten, verschiedenen Formulierungen.

3.3 Primitive MPV-Verfahren

Casulli und Greenspan [CG84] haben die charakteristischen Gleichungen der primitiven Euler-Gleichungen (3.3) detailliert analysiert. Dabei sind die Autoren zu der Erkenntnis gekommen, daß die Schallgeschwindigkeit nur mit den Koeffizienten des Druckgradiententerms in der Geschwindigkeitsgleichung und des Divergenzterms in der Druckgleichung in engem Zusammenhang steht. Sie haben daher nur diese Ableitungen zeitlich implizit behandelt. Somit werden die numerischen Algorithmen unbedingt stabil im Bezug auf die Courant-Bedingung für die Schallgeschwindigkeit. Analog zur diesen Algorithmen diskretisieren wir nur die konvektiven Terme explizit und alle anderen Terme implizit. Für den eindimensionalen Fall läßt sich das obige System in einer Matrixform beschreiben:

$$\begin{pmatrix} \varrho \\ u \\ p \end{pmatrix}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \\ u \\ p \end{pmatrix}_x}_{\text{explicit}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M^2 \varrho} \\ 0 & \gamma p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \\ u \\ p \end{pmatrix}_x}_{\text{implicit}} = 0. \quad (3.5)$$

Die Eigenwerten der Jacobimatrix des expliziten Teils sind entartet $\lambda_{1,2,3} = u$, und die des impliziten Teils sind $\lambda_{1,2,3} = 0, \pm \frac{c}{M}$. Somit repräsentiert der explizite Teil den rein konvektiven Transport der Fluideigenschaften mit der Strömungsgeschwindigkeit und der implizite Teil alle Schalleffekte. Wir behandeln das obige System zeitlich simultan ohne irgendeine Aufspaltung. Erst danach wenden wir für die Zeitdiskretisierung das einfachste semi-implizite Euler-Integrationsverfahren an. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^{n+1} - \varrho^n}{\Delta t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla \varrho]^n &= -[\varrho \nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1}, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n &= -\frac{1}{M^2} \left[\frac{\nabla p}{\varrho} \right]^{n+1}, \\ \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla p]^n &= -[\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei ist es leicht zu beweisen, daß die Dichte und der Druck zum neuen Zeitpunkt $n + 1$ folgende Kompatibilitätsbedingungen erfüllen müssen:

$$-[\Delta t \nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1} = \frac{1}{\varrho^{n+1}} \{ \varrho^{n+1} - \varrho^n + \Delta t [\mathbf{u} \cdot \nabla \varrho]^n \}$$

$$= \frac{1}{\gamma p^{n+1}} \{p^{n+1} - p^n + \Delta t[\mathbf{u} \cdot \nabla p]^n\}. \quad (3.7)$$

Unter Verwendung des im vorherigen Kapitel vorgestellten MPV-Ansatzes ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho^{n+1} + \Delta t[\varrho \nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1} &= \mathcal{S}_\varrho, \\ \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \left[\frac{\nabla p^{(2)}}{\varrho} \right]^{n+1} &= \mathcal{S}_\mathbf{u}, \\ M^2 p^{(2)n+1} + \Delta t[\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1} &= \mathcal{S}_p - dp^{(0)n}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei bezeichnen \mathcal{S}_ϱ , $\mathcal{S}_\mathbf{u}$ und \mathcal{S}_p folgende Quellterme:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\varrho = \varrho^n - \Delta t[\mathbf{u} \cdot \nabla \varrho]^n, \\ \mathcal{S}_\mathbf{u} = \mathbf{u}^n - \Delta t[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n, \\ \mathcal{S}_p = M^2 \{p^{(2)n} - \Delta t[\mathbf{u} \cdot \nabla p^{(2)}]^n\}. \end{cases}$$

Die zeitliche Änderung des thermodynamischen Druckes $dp^{(0)n}$ wird in der aktuellen Simulation explizit approximiert:

$$dp^{(0)n} = p^{(0)n+1} - p^{(0)n} = -\frac{\Delta t \cdot \gamma p^{(0)n}}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) \, dV. \quad (3.9)$$

Diese Beziehung gilt exakt nur für den inkompressiblen Grenzfall. Für den kompressiblen Fall bleiben sicherlich noch einige Fehler der Größenordnung $O(M^2)$ in $dp^{(0)n}$ zurück, aber diese Fehler werden von $p^{(2)}$ im Lösungsvorgang der gesamten Druckgleichung aufgefangen. Am Ende jedes Zeitschritts erreichen wir immer den korrekten Gesamtdruck ($p = p^{(0)} + M^2 p^{(2)}$), d. h. $dp^{(0)}$ spielt nur die Rolle eines Prädiktors. Daher muß man beachten, daß der räumliche Mittelwert des resultierenden $p^{(2)n+1}$ nicht mehr automatisch verschwindet und diese Abweichungen am Ende jedes Zeitschritts korrigiert werden müssen.

Aus der Kopplung der impliziten Terme der Geschwindigkeits- und Druckgleichung wird die sogenannte Druck-Korrektur-Gleichung hergeleitet. Dies ist leider eine nicht-lineare Gleichung, die nur iterativ mit Linearisierung gelöst werden kann. Mit den abgeschätzten Werten ϱ^* , \mathbf{u}^* , p^* und $p^{(2)*}$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}, \\ p^{(2)n+1} &= p^{(2)*} + \delta p^{(2)}, \\ p^{n+1} &= p^{(0)n+1} + M^2 p^{(2)n+1} \\ &= p^{(0)n} + dp^{(0)n} + M^2 p^{(2)*} + M^2 \delta p^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die neue Dichte ϱ^{n+1} kann mit der Kompatibilitätsbedingung (3.7) berechnet werden. Setzt man die obigen Beziehungen in die Geschwindigkeitsgleichungen (3.8) ein, dann

ergibt sich folgende Korrekturbeziehung zwischen der Geschwindigkeits- und Druck-Korrektur:

$$\delta \mathbf{u} = -\Delta t \cdot \frac{\nabla \delta p^{(2)}}{\varrho^*}. \quad (3.11)$$

Schließlich erreichen wir mit den Ansätzen (3.10) und der Korrekturbeziehung (3.11) folgende Druck-Korrektur-Gleichung:

$$M^2 \delta p^{(2)} - \Delta t^2 \gamma p^* \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \delta p^{(2)}}{\varrho^*} \right) = \mathfrak{S}_p - M^2 p^{(2)*} - \Delta t \gamma p^* \nabla \cdot \mathbf{u}^* - dp^{(0)n}. \quad (3.12)$$

Für den Fall verschwindender Machzahl reduziert sich obige Gleichung auf die herkömmliche Poissongleichung der Druck-Korrektur $\delta p^{(2)}$. In der aktuellen Simulation muß der Gesamtdruck p in zwei Anteile, d. h. thermodynamischen Druck $p^{(0)}$ und inkompressiblen Druck $p^{(2)}$, zerlegt werden. Dies geschieht jedoch nur einmal im Startzustand. In jedem nachfolgenden Zeitschritt schätzen wir erst die zeitliche Änderung des thermodynamischen Druckes $dp^{(0)n}$ ab und lösen die Druck-Korrektur-Gleichung iterativ. Solch ein Lösungsvorgang mit dem MPV-Ansatz ist kompliziert, aber er ist sehr wichtig besonders für die Simulation von Strömungen bei kleiner Machzahl. Falls sich der thermodynamische Druck zeitlich viel stärker als der inkompressible Druck verändert, z. B. Strömungen unter starken Kompressionen oder Wärmeübergänge, wird ansonsten das Druckfeld durch Rundungsfehler leicht zerstört. Wie im vorangegangenen Kapitel ausführlich erläutert, entkoppelt sich der inkompressible Druck $p^{(2)}$ völlig vom Gesamtdruck. Die zeitlichen Änderungen des Gesamtdrucks können nur durch die thermodynamischen Vorgänge, z. B. äußere Kompression, hervorgerufen werden. Somit spielt der inkompressible Druck nur eine Rolle als Divergenzbedingung. In diesem Fall ist die Druck-Korrektur-Gleichung linear, und man braucht dann keine Iteration mehr.

Ergänzend fassen wir nun kurz die gesamten Lösungsalgorithmen basierend auf den primitiven Formulierungen zusammen.

1. Am Anfang muß der Gesamtdruck nach dem MPV-Ansatz in zwei Anteile zerlegt werden.
2. Im jeden Zeitschritt werden erst die konvektiven Terme explizit berechnet, die weiter als Quellterme behandelt werden.
3. Schätze die zeitlichen Änderungen des thermodynamischen Druckes $dp^{(0)n}$ ab.
4. Schätze die Dichte ϱ^* und Druck $p^{(2)*}$, p^* ab.
5. Löse die Impulsgleichungen $\rightarrow \mathbf{u}^*$.
6. Löse die Druck-Korrektur-Gleichung (3.12) $\rightarrow \delta p^{(2)}$.

7. Korrektur des Druckfeldes $p^{(2)n+1} = p^{(2)*} + \delta p^{(2)}$, $p^{n+1} = p^{(0)n} + dp^{(0)n} + M^2 p^{(2)n+1}$ und des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}$.

8. Bestimme die neue Dichte ϱ^{n+1} aus der Kompatibilitätsgleichung (3.7)

9. Falls Konvergenz noch nicht erreicht wurde:

- Schätze neues Druck- und Dichtefeld ab:

$$p^{(2)*} \leftarrow p^{(2)n+1}, \quad p^* \leftarrow p^{(0)n+1}, \quad \varrho^* \leftarrow \varrho^{n+1}.$$

- Wiederhole die Schritte 5 bis 8.

Falls Konvergenz erreicht wird:

- Ziehe die mittlere zeitliche Änderung des inkompressiblen Druckes vom inkompressiblen Druck selber ab $p^{(2)n+1} = p^{(2)n+1} - \overline{p^{(2)n+1}}$ und addiere diesen Anteil zum thermodynamischen Druck $p^{(0)n+1} = p^{(0)n+1} + \overline{p^{(2)n+1}}$.

10. Weiter mit dem nächsten Zeitschritt.

3.4 Konservative MPV-Verfahren

Analog zur vorherigen primitiven Formulierungen trennen wir die Flußterme der ent-dimensionalisierten konservativen Navier-Stokes-Gleichungen (3.1). Dabei wird die Divergenzform der Grundgleichungen nicht zerstört und das Finite-Volumen-Prinzip kann daher auch in der numerischen Implementationen weiter angewandt werden:

$$\left(\begin{array}{c} \varrho \\ \varrho \mathbf{u} \\ p + (\gamma - 1)M^2 e^k \end{array} \right)_t + \underbrace{\left(\begin{array}{c} \varrho \mathbf{u} \\ \varrho \mathbf{u} \circ \mathbf{u} \\ (\gamma - 1)M^2 e^k \mathbf{u} \end{array} \right)_x}_{\text{explicit}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{M^2} p \\ \gamma p \mathbf{u} \end{array} \right)_x}_{\text{implicit}} = 0. \quad (3.13)$$

Die Eigenwerten der expliziten bzw. konvektiven Anteile sind $\lambda_{1,2,3} = 0, \mathbf{u}, \mathbf{u}$, und die der impliziten Anteile $\lambda_{1,2,3} = 0, \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4 \frac{c^2}{M^2}}}{2}$. Auf den ersten Blick sind die physikalischen Hintergründe derartiger Zerlegungen nicht so klar wie in der primitiven Formulierungen. Es ist aber wohlbekannt, daß die eindimensionalen Euler-Gleichungen die Eigenwerten $\lambda_{1,2,3} = \mathbf{u} + \frac{c}{M}, \mathbf{u}, \mathbf{u} - \frac{c}{M}$ und den zum Eigenwert u gehörigen Eigenvektor $(1, bfu, \frac{u^2}{2})$ besitzen. Weiterhin ist es aus der Analyse der linearisierten Euler-Gleichungen auch bekannt, daß die nur aus Dichtefluktuationen bestehenden Entropiewellen und auch die nur aus Geschwindigkeitsfluktuationen bestehenden Wirbelwellen (engl. ‘vorticity wave’) mit der mittleren Fluidgeschwindigkeit wie eingefrorenen Partikeln stromabwärts laufen. Dagegen enthalten die akustischen Wellen die Störungen von allen physikalischen Zustandsvariablen. Dabei sind die Druckstörungen

entscheidend für die Schallausbreitung. Daher werden die allen Druck enthaltenen Terme implizit diskretisiert. Unter Verwendung der gleichen konservativen Formulierung der Euler-Gleichungen, haben Patnaik et al. [PGB087] nur die Druckgradienten in der Impulsgleichungen und die Geschwindigkeit in der Energiegleichung implizit diskretisiert. Dies ist genau identisch mit dem Fall von Casulli und Greenspan [CG84]. Für die Zeitintegrationen haben Sie sogenannte ‘explicit predictor-barely implicit correction’ Algorithmen verwendet. Wir versuchen dagegen erst, möglichst gleich wie im Fall mit der primitiven Formulierung, die strenge simultane Zeitintegration ohne irgendeine Spaltung weiter einzusetzen. Mit der einfachsten, additiven semi-impliziten Euler-Integration ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^{n+1} - \varrho^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u})]^n &= 0, \\ \frac{(\varrho \mathbf{u})^{n+1} - (\varrho \mathbf{u})^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \circ \mathbf{u})]^n &= -\frac{1}{M^2} \nabla p^{n+1}, \\ \frac{[p + (\gamma - 1)M^2 e^k]^{n+1} - [p + (\gamma - 1)M^2 e^k]^n}{\Delta t} \\ &+ (\gamma - 1)M^2 [\nabla \cdot (e^k \mathbf{u})]^n = -[\nabla \cdot (\gamma p \mathbf{u})]^{n+1}. \end{aligned}$$

Formulieren wir die obigen Gleichungen mit unserem MPV-Ansatz um, dann gelten

$$\begin{aligned} \varrho^{n+1} &= \mathcal{S}_\varrho, \\ (\varrho \mathbf{u})^{n+1} + \Delta t \nabla p^{(2)n+1} &= \mathcal{S}_\mathbf{u}, \\ M^2 p^{(2)n+1} + \Delta t \nabla \cdot [\gamma p \mathbf{u}]^{n+1} &= -dp^{(0)n} - (\gamma - 1)M^2 e^{k^{n+1}} + \mathcal{S}_p \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit den folgenden Quelltermen

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\varrho = \varrho^n - \Delta t \nabla \cdot [\varrho \mathbf{u}]^n, \\ \mathcal{S}_\mathbf{u} = (\varrho \mathbf{u})^n - \Delta t \nabla \cdot [\varrho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}]^n, \\ \mathcal{S}_p = M^2 p^{(2)n} + (\gamma - 1)M^2 \{e^{k^n} - \Delta t \nabla \cdot [e^k \mathbf{u}]^n\}. \end{cases}$$

Für die zeitliche Änderung des thermodynamischen Druckes $dp^{(0)n}$ wird die gleiche Formel wie Gleichung (3.9) verwendet. Erst wird die Dichte zum neuen Zeitpunkt vollexplizit aus der Kontinuitätsgleichung berechnet. Danach wird die Druck-Korrekturgleichung aus der Kopplung der impliziten Terme in der Impuls- und Druckgleichung hergeleitet. Dies ist ebenfalls eine nichtlineare Gleichung, die noch iterativ gelöst werden muß. Dabei muß man zusätzlich beachten, daß die kinetische Energie zum neuen Zeitpunkt als bekannt angenommen wird, d. h. der Wert im alten Iterationsschritt verwendet wird. Mit den abgeschätzten Werten p^* , $p^{(2)*}$ und \mathbf{u}^* definieren wir Beziehungen wie im Fall der primitiven Form (3.10). Die Geschwindigkeits-Korrektur hat

dann mit der Druck-Korrektur folgenden Beziehungen:

$$\delta \mathbf{u} = -\Delta t \cdot \frac{\nabla \delta p^{(2)}}{\varrho^{n+1}}. \quad (3.15)$$

Schließlich ergibt sich die Druck-Korrektur-Gleichung für die konservative Formulierung:

$$M^2 \delta p^{(2)} - \Delta t^2 \gamma \nabla \cdot \left(p^* \frac{\nabla \delta p^{(2)}}{\varrho^{n+1}} \right) = \mathcal{S}_p^* - M^2 p^{(2)*} - \Delta t \gamma \nabla \cdot (p^* \mathbf{u}^*) - dp^{(0)n} \quad (3.16)$$

mit

$$\mathcal{S}_p^* = \mathcal{S}_p - (\gamma - 1) M^2 \left(\frac{1}{2} \varrho^{n+1} \mathbf{u}^{*2} \right). \quad (3.17)$$

Der Lösungsvorgang ist nahezu identisch mit dem für den Fall der primitiven Formulierung. Der Unterschied liegt nur darin, daß die Dichte erst vollständig explizit berechnet wird. Wie oben erklärt, wird die kinetische Energie zum neuen Zeitpunkt in der Druck-Korrektur-Gleichung auch explizit behandelt.

3.5 Semi-konservative MPV-verfahren

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, wurde folgende gemischte Formulierung kürzlich in [Wes01], [WvdHV00] vorgestellt:

$$\left(\begin{array}{c} \varrho \\ \varrho \mathbf{u} \\ p \end{array} \right)_t + \underbrace{\nabla \cdot \left(\begin{array}{c} \varrho \mathbf{u} \\ \varrho \mathbf{u} \mathbf{u} \\ 0 \end{array} \right)}_{\text{explicit}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{M^2} p \\ p \mathbf{u} \end{array} \right)}_{\text{implicit}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (\gamma - 1) p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{array} \right)}_{\text{implicit}} = 0. \quad (3.18)$$

Dabei wird die Druckgleichung (3.4) vollständig implizit diskretisiert. Analog zum Fall der konservativen Formulierung läßt sich folgende Druck-Korrektur-Gleichung herleiten:

$$M^2 \delta p^{(2)} - \Delta t^2 \nabla \cdot \left(\frac{p^*}{\varrho^{n+1}} \nabla \delta p^{(2)} \right) - \Delta t^2 (\gamma - 1) p^* \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \delta p^{(2)}}{\varrho^{n+1}} \right) = \mathcal{S}_p - M^2 p^{(2)*} - \Delta t \nabla \cdot (p^* \mathbf{u}^*) - \Delta t (\gamma - 1) p^* \nabla \cdot \mathbf{u}^* - dp^{(0)n} \quad (3.19)$$

mit

$$\mathcal{S}_p = M^2 p^{(2)n}. \quad (3.20)$$

Der Lösungsalgorithmus ist identisch mit dem für den Fall der konservativen Formulierung.

3.6 Raumdiskretisierung

Bisher haben wir nur die Zeitniveaus diskutiert, die durch obere Indizes gekennzeichnet sind. Nun wenden wir uns kurz der Raumdiskretisierung zu. Dabei verwenden wir die sogenannten versetzten Gitter, die Harlow und Welch [HW65] als Erste zur Berechnung der inkompressiblen Strömung eingeführt haben. Bei diesem Schema sind die skalaren Variablen im Mittelpunkt jeder Zelle und die Geschwindigkeitskomponenten in den Mittelpunkten der horizontalen respektive vertikalen Zellkanten lokalisiert. Dies ist sehr attraktiv für die Berechnung der inkompressiblen Strömung, weil keine zusätzlichen, künstlichen Maßnahmen zur Vermeidung der unphysikalischen Druckoszillationen [Pat80] benötigt werden. Außerdem sind die physikalischen Bedingungen an den Strömungsrändern ausreichend. Für die Raumapproximation benötigt man einige upwind- und zentrale Differenzen und Interpolationsformeln für die jeweiligen Formulierungen. Der grundlegende Unterschied zwischen der konservativen und der nichtkonservativen Form liegt in der Behandlung des Druckflusstems in der Druckgleichung. Im Gegensatz zur primitiven Form kann man bei der konservativen Form Upwind-Differenzen für den impliziten Druckflußterm verwenden. Damit wird die konservative Form robuster gegenüber starken Druckgradienten.

Primitive Form:

- Upwind-Differenzen: Alle expliziten, konvektiven Terme.
- Zentrale Differenzen: Alle impliziten, akustischen Terme.
- Interpolation: Geschwindigkeiten im Zellmittelpunkt in der Kontinuitäts- und Druckgleichung sowie Dichte in den Zellrändern in der Impulsgleichung.

Konservative Form:

- Upwind-Differenzen: Alle expliziten Flußterme und auch impliziter Druckflußterm.
- Zentrale Differenzen: Nur implizite Druckgradienten in der Impulsgleichung.
- Interpolation: Kinetische Energie im Zellmittelpunkt in der Druckgleichung und Dichte in den Zellrändern in der Impulsgleichungen.

Semi-konservative Form:

- Upwind-Differenzen: Alle expliziten Flußterme und auch impliziter Druckflußterm.

- Zentrale Differenzen: Implizite Druckgradienten in der Impulsgleichung und implizite, nichtkonservative Divergenzterme der Geschwindigkeiten in der Druckgleichung.
- Interpolation: Nur die Dichte in den Zellrändern in der Impulsgleichung.

Für alle Fälle verwenden wir die normalen zentralen Differenzen zweiter Ordnung. Für die Upwind-Differenzen werden dagegen unterschiedliche Formen für die verschiedenen Formulierungen angewandt. Als Beispiel erläutern wir die Implementierung der Dichteflüsse in der i -ten Zelle. Die Diskretisierung lautet zunächst für die primitiven Formulierungen:

$$[\mathbf{u} \cdot \varrho_x]_i \longrightarrow \mathbf{u}_i \left[(\varrho)_{i+\frac{1}{2}} - (\varrho)_{i-\frac{1}{2}} \right] / \Delta x \quad (3.21)$$

mit

$$\mathbf{u}_i \varrho_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_i \cdot \begin{cases} \varrho_{i,+} & \text{for } \mathbf{u}_i > 0, \\ \frac{1}{2} (\varrho_{i,+} + \varrho_{i+1,-}) & \text{for } \mathbf{u}_i = 0, \\ \varrho_{i+1,-} & \text{for } \mathbf{u}_i < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Für die links (+) oder rechts (-) Interpolation der Dichte an den Zellrändern gibt es verschiedene Möglichkeiten. Durch einfaches Einsetzen von ϱ_i für $\varrho_{i,+}$ und von ϱ_{i+1} für $\varrho_{i+1,-}$ erhält man räumlich lediglich erste Ordnung. Mit der stückweisen linearen Interpolation, die aus dem MUSCL¹-schema von B. van Leer[vL79] stammt,

$$\varrho_{i,+} = \varrho_i + \frac{\Delta x}{2} S_{\varrho_i}, \quad (3.23)$$

kann räumlich die zweite Ordnung erreicht werden. Dabei repräsentiert S_{ϱ_i} die Steigung der Dichte in der i -ten Zelle.

Für die konsevative Formulierung gilt dagegen

$$\left[(\varrho \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} - (\varrho \mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} \right] / \Delta x \quad (3.24)$$

mit

$$(\varrho \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} \varrho_{i,+} & \text{for } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \frac{1}{2} (\varrho_{i,+} + \varrho_{i+1,-}) & \text{for } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = 0, \\ \varrho_{i+1,-} & \text{for } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} < 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Für die Interpolation wird die normale, zentrale Interpolationsformel, die räumlich zweiter Ordnung ist, angewandt. Folgende Formeln gelten für den äquidistanten Fall:

$$\begin{aligned} \varrho_{i+\frac{1}{2}} &= 0.5(\varrho_i + \varrho_{i+1}), \\ \mathbf{u}_i &= 0.5(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

¹engl. ‘Monotonic Upwind Scheme for Consevation Laws’

3.7 Testfälle

Für Strömungen höherer Machzahl untersuchen wir unsere Algorithmen mit einigen Riemannproblemen, bei denen die exakten Lösungen bekannt sind. Bei den Riemannproblemen entstehen Stoßwellen, Kontaktunstetigkeiten und Expansionswellen. Um solche komplizierte Strukturen der Strömung aufzulösen, müssen die numerischen Algorithmen zur echten, schwachen Lösung (engl. ‘genuine weak solution’) konvergieren. Dies bedeutet wiederum, daß die Entropiebedingung erfüllt werden muß. D.h. die Entropie des Fluidpartikels in der Strömung darf nicht abnehmen. Dies schließt die Entstehung des unphysikalischen Expansionsstoßes aus. Außerdem müssen die Sprungbedingungen durch den Stoß erfüllt werden, sonst nimmt die Stoßgeschwindigkeit einen falschen Wert an und ist von der Diskretisierung abhängig. Zur Validierung der Algorithmen für Strömungen niedriger Machzahl diskutieren wir ein Problem der kollidierenden akustischen Wellen und Dichteschichten. Weiter betrachten wir den einfachen Transport der Dichte als Beispiel für Strömungen verschwindender Machzahl. In der aktuellen Simulation verwenden wir die Bedingung der Zeitschrittweite im Bezug auf die Geschwindigkeit $|\mathbf{u}| + c$ mit der festgelegten Courantzahl $\sigma = 0.4$. Dies entspricht der normalen Courant-Bedingung wenn die globale Machzahl M genau den Wert 1.0 erreicht. Dabei benutzen wir RK2CN-Verfahren² für die Zeitintegration und ein MUSCL-Schema mit der Minmod-Funktion für die Upwind-Diskretisierung. Weniger dissipative Steigungsberechnungen erwiesen sich als problematisch, um die durch den starken Gradienten auftretenden Oszillationen zu unterdrücken.

3.7.1 Stoßrohr-Problem von Sod

Wenn die Anfangszustände in Ruhe ($u = 0$) bleiben, heißt das Riemannproblem Stoßrohr-Problem. Die Anfangszustände für das Problem von Sod [Sod78] sind auf folgende Weise angegeben:

$$M = 1; \quad (\rho_l, u_l, p_l) = (1, 0, 1); \quad (\rho_r, u_r, p_r) = (0.125, 0, 0.1). \quad (3.26)$$

In der aktuellen Simulation verwenden wir 100 äquidistante Zellen, $\Delta x = 0.01$. Die maximale Geschwindigkeit in der Strömungen beträgt $|u|_{max} \approx 0.927$ und die maximale Wellengeschwindigkeit $(|u| + c)_{max} = 2.2$. Somit bleibt die Strömung im subsonischen Bereich.

In den Abbildungen 3.1 und 3.2 werden die Lösungen der Dichte, Geschwindigkeit, Druck und lokale Machzahl zum Zeitpunkt $t = 0.2$ unter Verwendung verschiedener Formulierungen dargestellt und mit der exakten Lösung verglichen. Die mit der primitiven Formulierung gewonnenen Ergebnisse sind keineswegs akzeptabel. Die Stoßgeschwindigkeit ist völlig verfälscht und die Sprünge der Geschwindigkeit und des Drucks

²Die genaue Definition dieses Verfahrens ist im nächsten Kapitel angegeben

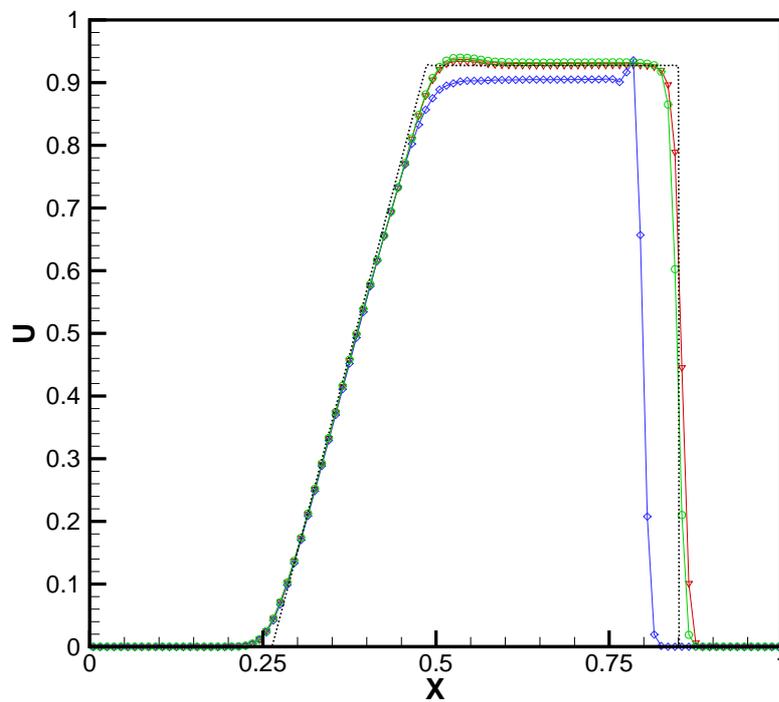
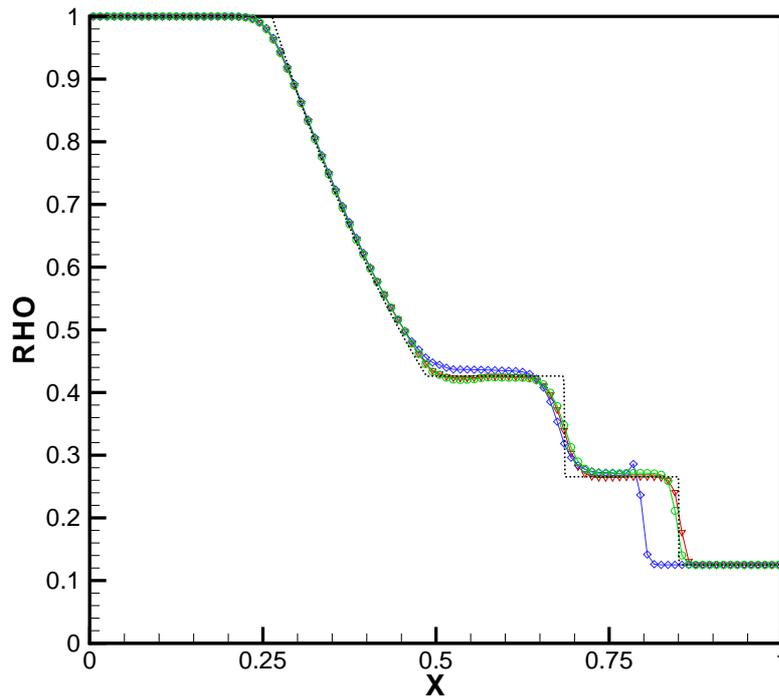


Abbildung 3.1: Stoßrohr-Problem von Sod mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.2$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

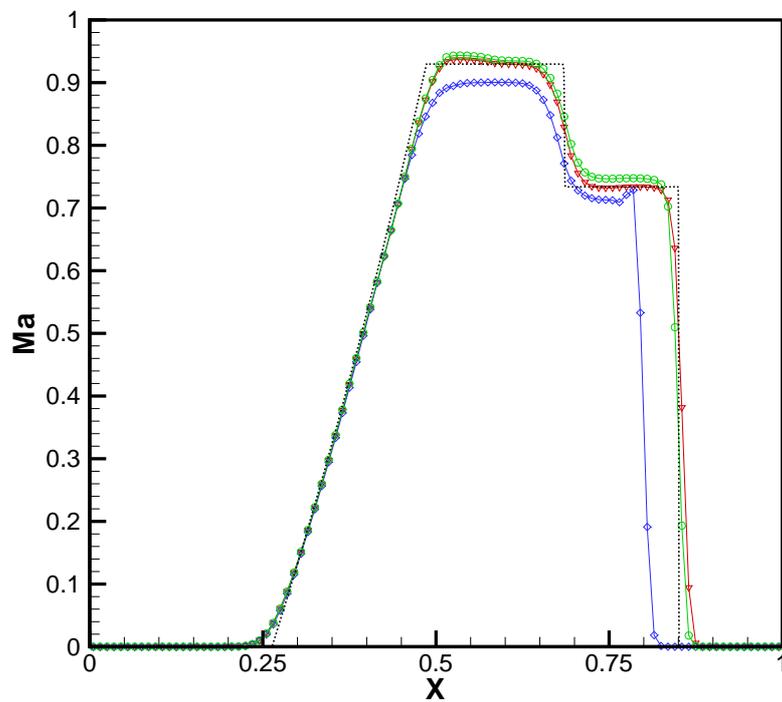
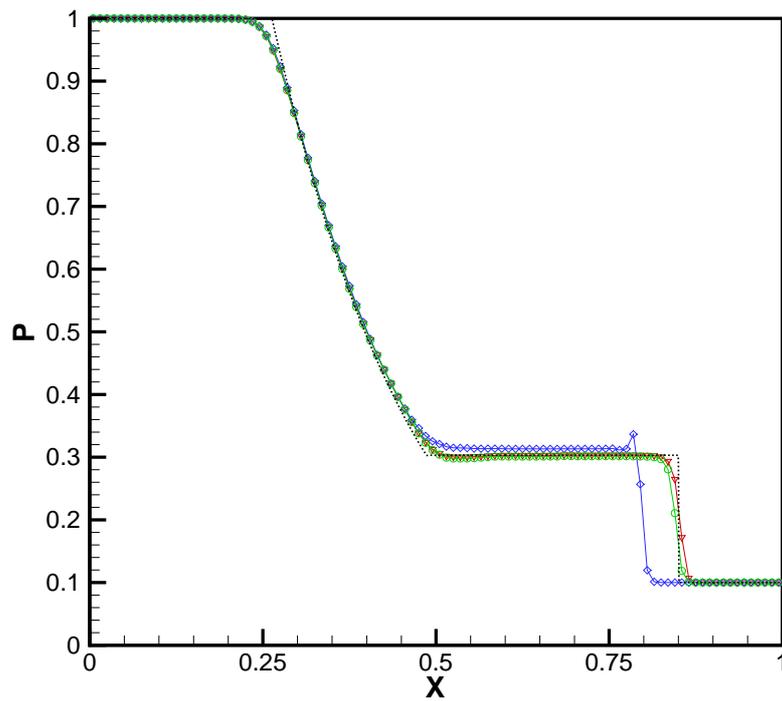


Abbildung 3.2: Stoßrohr-Problem von Sod mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.2$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

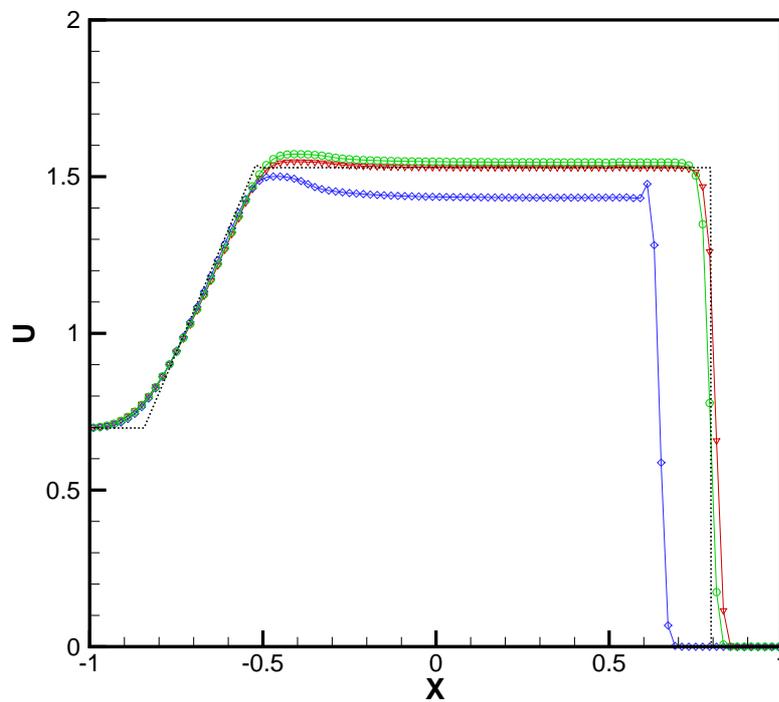
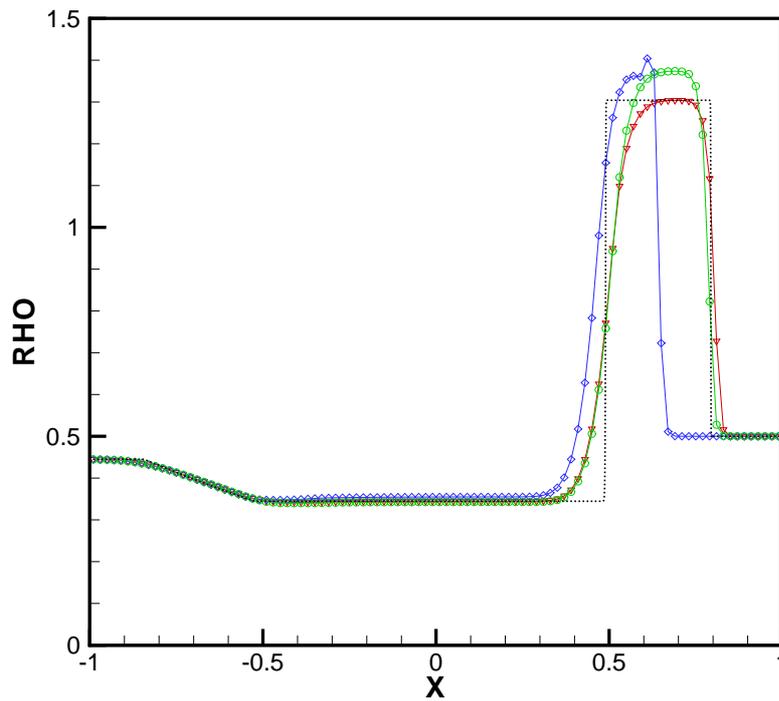


Abbildung 3.3: Problem von Lax mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.32$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

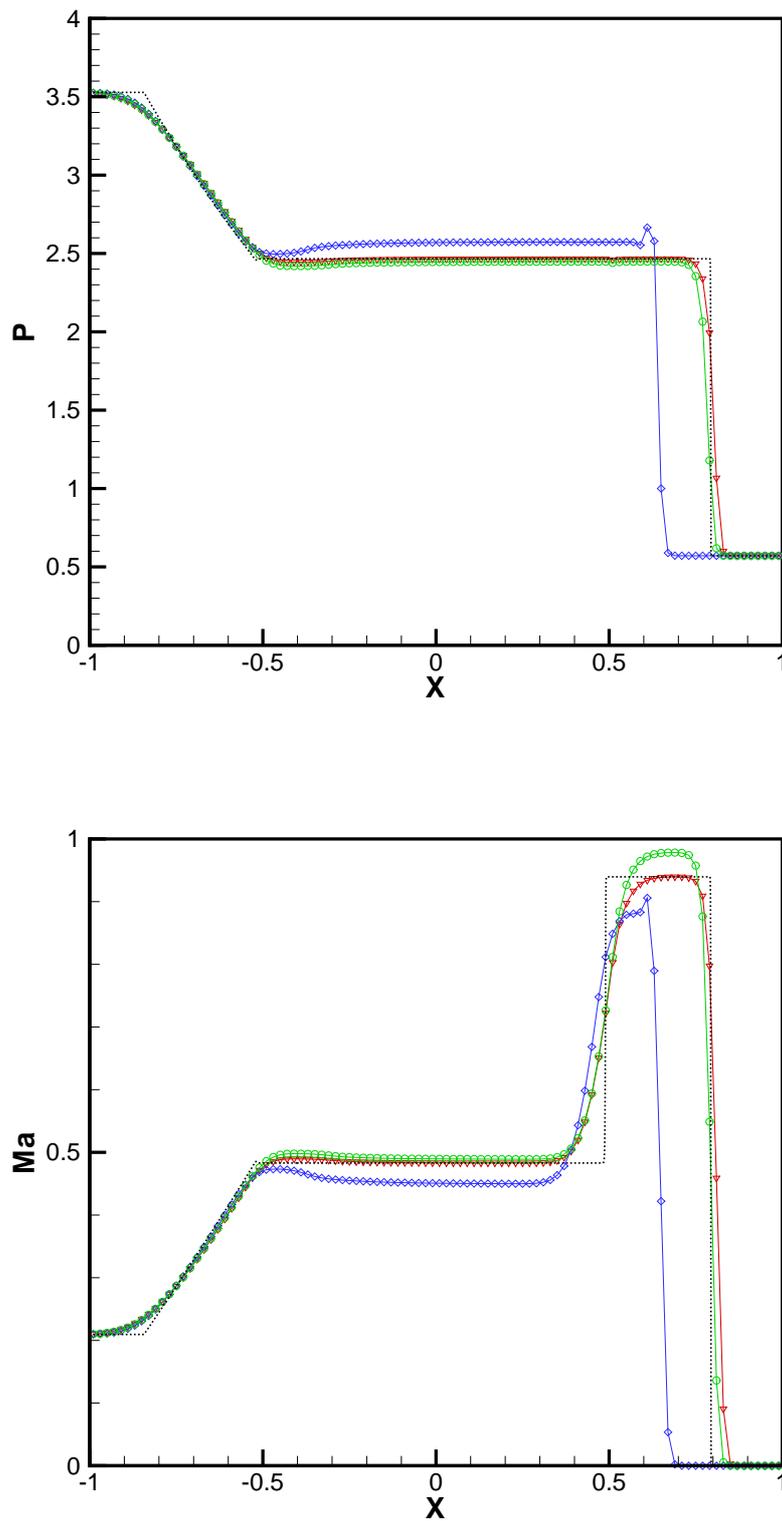


Abbildung 3.4: Problem von Lax mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.32$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

durch den Stoß sind ebenfalls nicht richtig. Im semikonservativen Fall existieren zwar Abweichungen von der exakten Lösung, sie sind aber klein und die Ergebnisse sind noch akzeptabel. Die Ergebnisse mit der konservativen Formulierungen zeigen überall das richtige Verhalten.

3.7.2 Problem von Lax

Die Anfangszustände des Problem von Lax [Lax54] lauten

$$M = 1; \quad (\varrho_l, u_l, p_l) = (0.445, 0.698, 3.528); \quad (\varrho_r, u_r, p_r) = (0.5, 0, 0.571). \quad (3.27)$$

Wie im vorherigen Testfall verwenden wir 100 äquidistante Gitterzellen, $\Delta x = 0.02$. In diesem Testfall sind die Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten stärker als die im Stoßrohr-Problem von Sod. Die maximale Geschwindigkeit in der Strömung beträgt $|u|_{max} \approx 1.529$ und die maximale Wellengeschwindigkeit $(|u| + c)_{max} = 4.7$. Somit bleibt die Strömung noch im subsonischen Bereich.

In den Abbildungen 3.3 und 3.4 werden die Lösungen zum Zeitpunkt $t = 0.32$ dargestellt. Wie im Sod-Problem sind die mit der primitiven Formulierung gewonnenen Ergebnisse nicht akzeptabel. Die Ergebnisse der semikonservativen Formulierungen zeigen immer größere Abweichungen von der exakten Lösung, besonders sind sie im Verlauf der Dichte auffällig. Im konservativen Fall bekommen wir noch gute Ergebnisse.

3.7.3 Problem von Woodward-Collela

Dieser Testfall ist die linke Hälfte des Explosionswellen-Problems (engl. ‘blast wave problem’) von Woodward-Collela [WC84]. Dies gehört zu den schwierigsten Testfällen. Wie bei den vorherigen beiden Testfälle besteht die Lösung aus einer links laufenden Expansionswelle und einer rechts laufenden Kontaktunstetigkeit und Stoßwelle. Die zugehörigen Anfangbedingungen sind durch

$$M = 1; \quad (\varrho_l, u_l, p_l) = (1, 0, 1000); \quad (\varrho_r, u_r, p_r) = (1, 0, 0.01) \quad (3.28)$$

gegeben. Das Strömungsgebiet wurde äquidistant in 200 Zellen unterteilt, $\Delta x = 0.01$. Die maximale Strömungsgeschwindigkeit beträgt $|u|_{max} \approx 19.6$. In einigen Bereichen ist die Strömung nun im Überschall, wobei die maximale Machzahl bis zu $M \approx 1.89$ erreicht.

Abbildungen 3.5 und 3.6 zeigen die Lösungen zum Zeitpunkt $t = 0.024$. In diesem Testfall mit einem solch starken Drucksprung, liefert auch die semikonservative Formulierung nichtakzeptable Ergebnisse. Daraus können wir schließen, daß für die Simulation der Strömung bei höheren Machzahlen die Änderung der kinetischen Energie eine wichtige Rolle spielt und niemals vernachlässigt werden darf. Sogar die konservative Formulierung zeigt starke Dämpfung im Bereich der Sprünge. Sicherlich braucht man noch mehr Gitterzellen um eine ausreichende Auflösung zu erhalten.

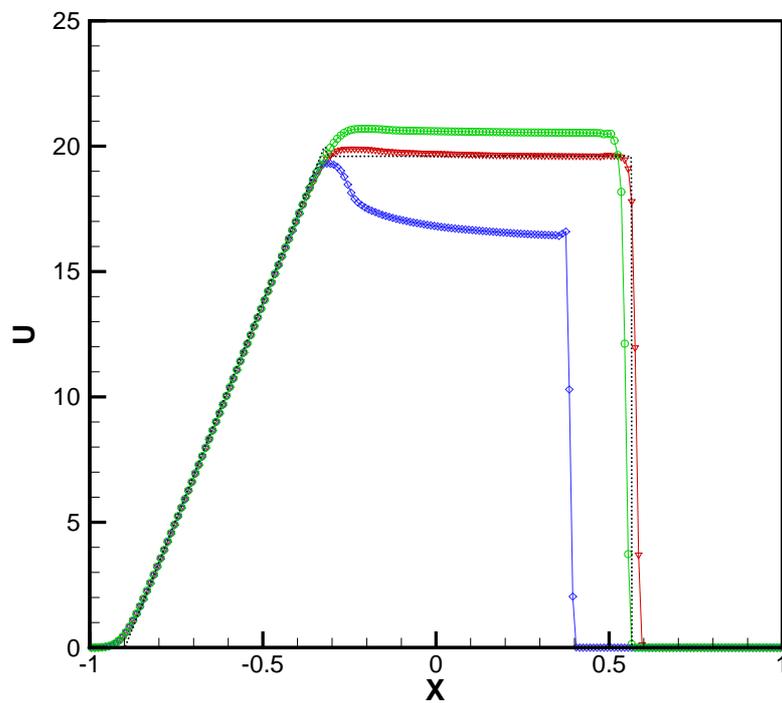
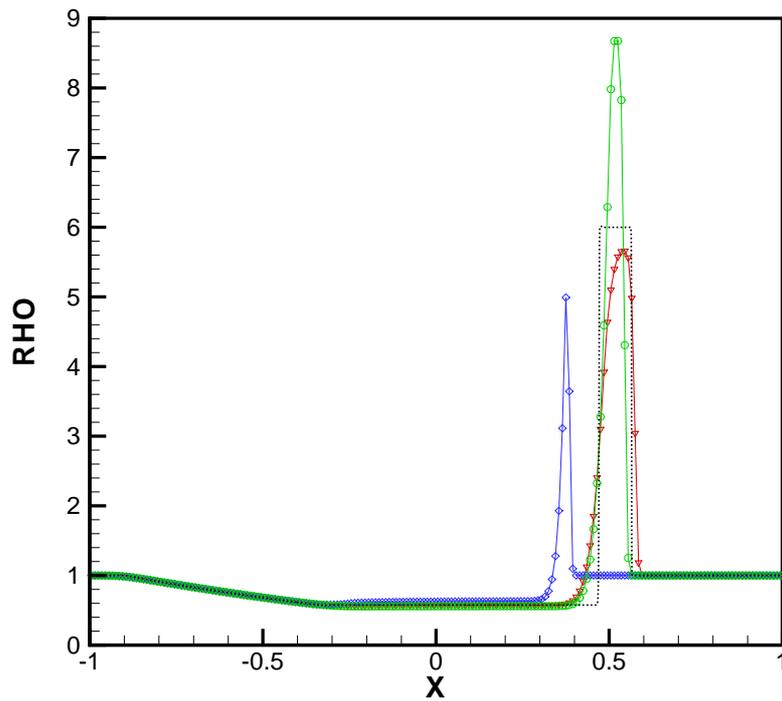


Abbildung 3.5: Problem von Woodward-Colella mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.024$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

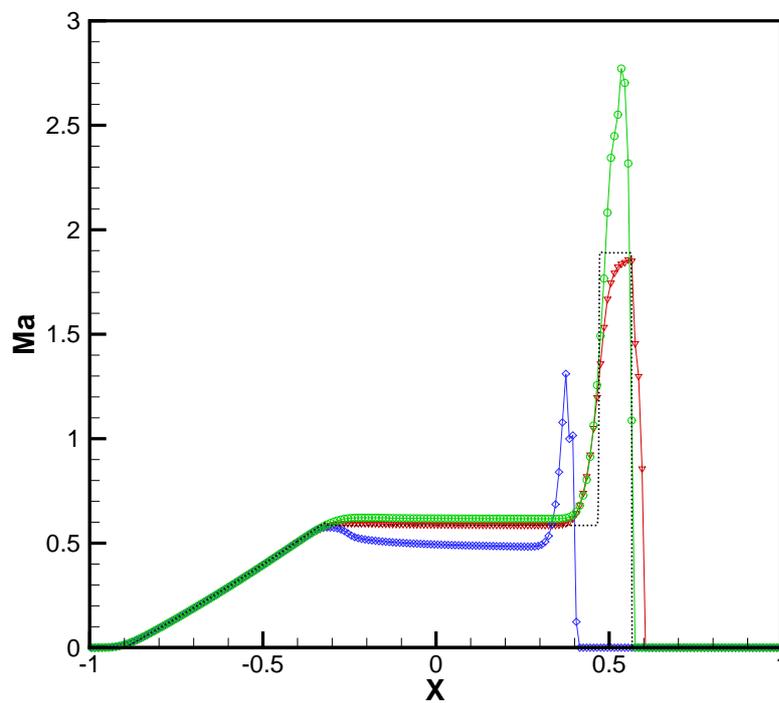
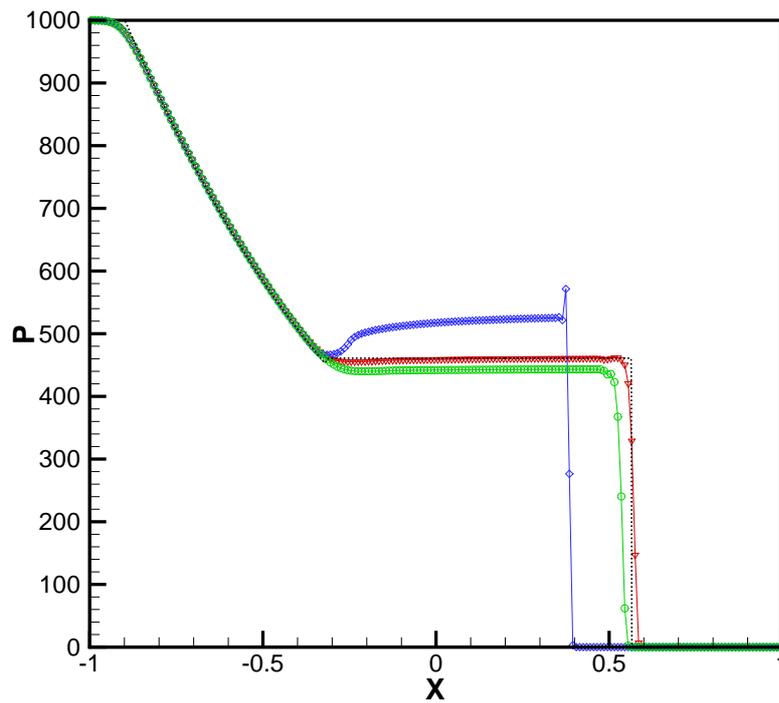


Abbildung 3.6: Problem von Woodward-Colella mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.024$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

3.7.4 Instationäre Kontaktunstetigkeit

Der Anfangszustand für die instationäre Kontaktunstetigkeit lautet:

$$(\varrho_l, \mathbf{u}_l, p_l) = (1, 0.6, 1); \quad (\varrho_r, \mathbf{u}_r, p_r) = (0.7, 0.6, 1). \quad (3.29)$$

Die Kontaktunstetigkeit breitet sich mit der Geschwindigkeit $u = 1$ nach rechts aus. Bei der Kontaktunstetigkeit erfährt nur die Dichte einen Sprung. Dagegen bleiben der Druck und die Geschwindigkeit konstant. Daraus resultiert ein reiner Dichtetransport. Die Lösungen werden daher unabhängig von der Machzahl. Wir verwenden 400 äquidistante Gitterzellen, $\Delta x = 0.01$.

Abb. 3.7 zeigt die Ergebnisse zum Zeitpunkt $t = 1$ für den kompressiblen Fall mit $M = 1$. Wie das obere Bild zeigt, ergeben sich für die drei verschiedenen Formulierungen Lösungen mit fast gleicher Qualität. In der unteren, detaillierten Ansicht tauchen jedoch noch Oszillationen in den Ergebnissen mit der konservativen und der semikonservativen Formulierung auf. Sie sind in diesem Testfall jedoch sehr klein, kleiner als 0.1 Prozent. Dennoch können diese störenden Oszillationen mit steigender Machzahl größer werden. In dem Druck-Korrektur-Verfahren mit versetztem Gitter wurden die Oszillationen ebenfalls beobachtet [Bij99]. Bei der inkompressiblen Strömung ($M = 0$) treten sie nicht auf, weil durch die Bedingung der Divergenzfreiheit die Geschwindigkeit überall konstant bleiben muß. Im kompressiblen Fall können dagegen die numerischen Fehler noch lokale Kompressionen und Expansionen auslösen, wodurch sich solche Oszillationen weiter entwickeln. Wenn sie einmal entstanden sind, können sie leider nicht so leicht wieder beseitigt werden. Im Fall mit Kontaktunstetigkeit reduziert sich die Impulsgleichung zur Kontinuitätsgleichung, da über die Kontaktunstetigkeit der Druck und die Geschwindigkeit unverändert konstant bleiben. Bei der konservativen- und semikonservativen Formulierung lösen wir erst explizit die Dichte im Zellmittelpunkt mit der Kontinuitätsgleichung und den Impuls im Zellrand mit der Impulsgleichung. Daraus werden die provisorischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}^* für das iterativen Verfahren wie folgt abgeschätzt:

$$\mathbf{u}^* = \frac{(\varrho \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^c}{0.5(\varrho_i^c + \varrho_{i+1}^c)}.$$

Dabei bezeichnet das Symbol c die konvektierten Zustände von den Werten des vorherigen Zeitpunkts. An der Kontaktunstetigkeit müssen diese Geschwindigkeiten überall konstant bleiben, wie zum alten Zeitpunkt. Leider kann das MUSCL-Schema diese Bedingung durch die Kontaktunstetigkeit nicht mehr erfüllen. Daher entstehen Oszillationen genau an der Kontaktunstetigkeit, die mit der Strömungsgeschwindigkeit weiter laufen. In der detaillierten Abbildung können wir auch die mit der Schallgeschwindigkeit links- und rechts laufenden Störwellen beobachten. Im allgemeinen müssen das Interpolations- und das finite Differenzschema vertauschbar sein, um solche

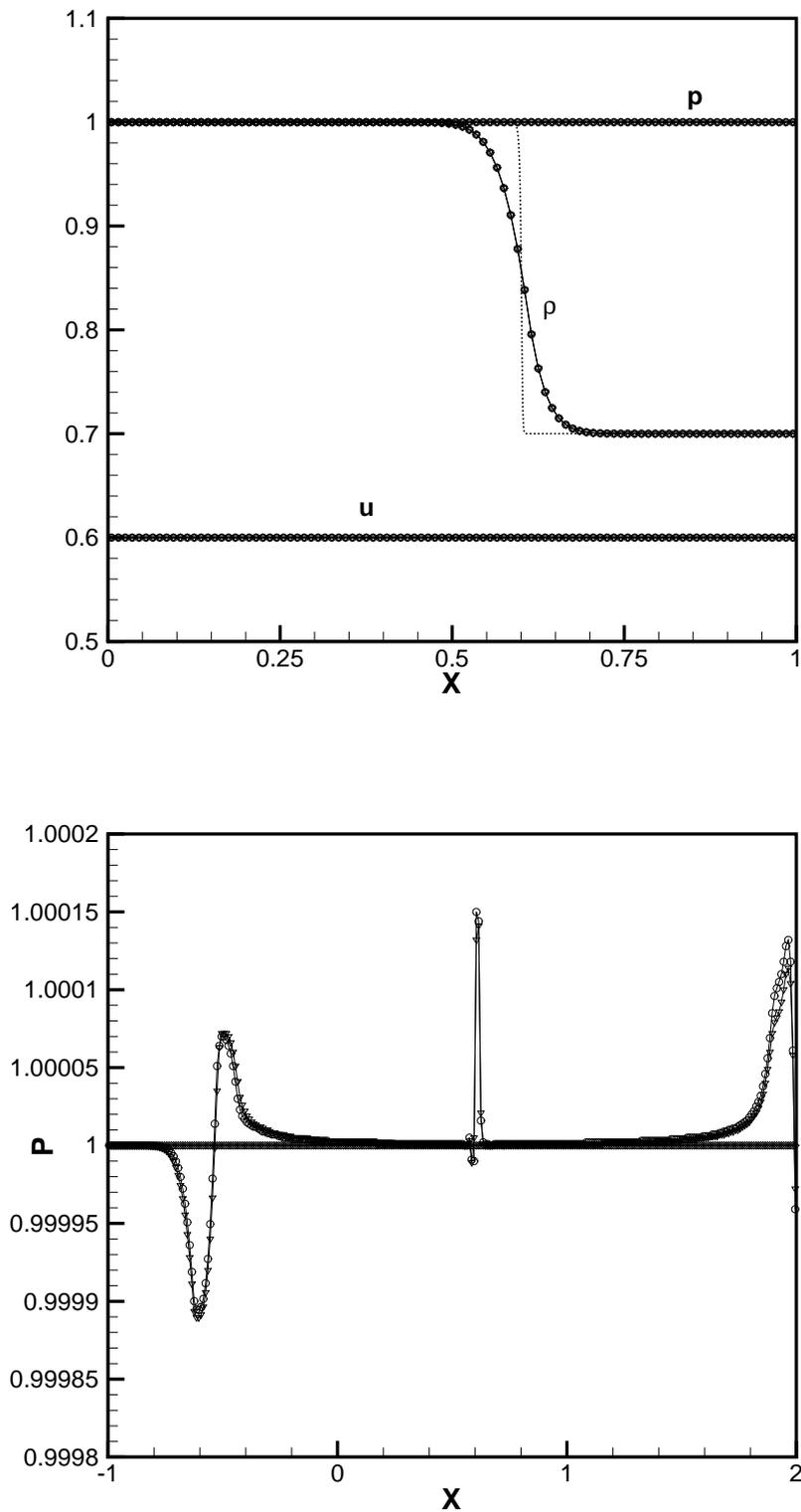


Abbildung 3.7: Kontaktunstetigkeit mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t = 1$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung, Gestrichelte Linie: Exakte Lösung.

numerischen Fehler zu vermeiden. Bei der Simulation mit dem einfachen Upwind-Verfahren beobachten wir zwar starke Dämpfung durch die Kontaktunstetigkeit aber keine Oszillationen mehr (hier nicht gezeigt).

3.7.5 Kollidierende akustische Wellen

Zwei zusammenstoßende akustische Wellen [Kle95] im schwach kompressiblen Bereich ($M = \frac{1}{11}$) sind als Anfangsdaten gegeben:

$$\begin{aligned}\varrho(x, 0) &= \bar{\varrho}_0 + M\tilde{\varrho}_0^{(1)} \cdot \frac{1}{2}(1.0 - \cos(2\pi x/L)), \\ p(x, 0) &= \bar{p}_0 + M\tilde{p}_0^{(1)} \cdot \frac{1}{2}(1.0 - \cos(2\pi x/L)), \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \text{sign}(x) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \frac{1}{2}(1.0 - \cos(2\pi x/L))\end{aligned}\quad (3.30)$$

mit $-L \leq x \leq L = \frac{2}{M}$,

$$\bar{\varrho}_0 = 0.955, \quad \bar{p}_0 = 1.0$$

und

$$\tilde{\varrho}_0^{(1)} = 2.0, \quad \tilde{p}_0^{(1)} = 2\gamma, \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = 2\sqrt{\gamma}.$$

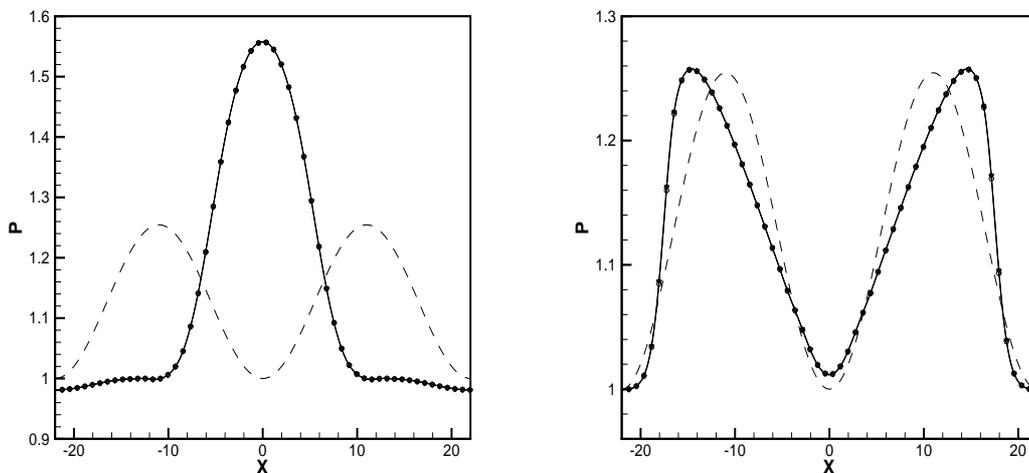


Abbildung 3.8: Druckverteilung der kollidierenden akustischen Wellen mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=0.815$ (links), $t=1.63$ (rechts), \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung, gestrichelte Linie: Anfangsverteilung.

Diese Daten beschreiben zwei akustische Wellen, eine nach rechts laufende Welle in $-L \leq x \leq 0$ und eine nach links laufende Welle in $0 \leq x \leq L$. Wir verwenden periodische Randbedingungen und 440 äquidistante Gitterzellen, $\Delta x = 0.1$. Hier kann eine weniger dissipative Steigungsberechnung eingeführt werden, da keine Unstetigkeit

in diesem Testfall auftritt. Nach der Formulierung der Limiter-Funktion nach Sweby [Swe84] kann für den Steigungsparameter κ im MUSCL-Schema 1.4 gewählt werden. Abb. 3.8 zeigt die Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 0.815$ und $t = 1.63$. Außerdem sind die Anfangsverteilungen auch dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0.815$ kollidieren die beiden Druckwellen gerade miteinander und ihre Überlagerung produziert den maximalen Druck. In der rechten Abbildung trennen sich die beiden Druckwellen wieder voneinander ab. Aufgrund der schwachen akustischen Wechselwirkung verzerren sich die Verteilungen beträchtlich. Die schwache Stoßentstehung an der Wellenfront kann man schon beobachten. Die Lösungen der verschiedenen Formulierungen sind fast identisch in allen Bereichen.

3.7.6 Dichteschichtung

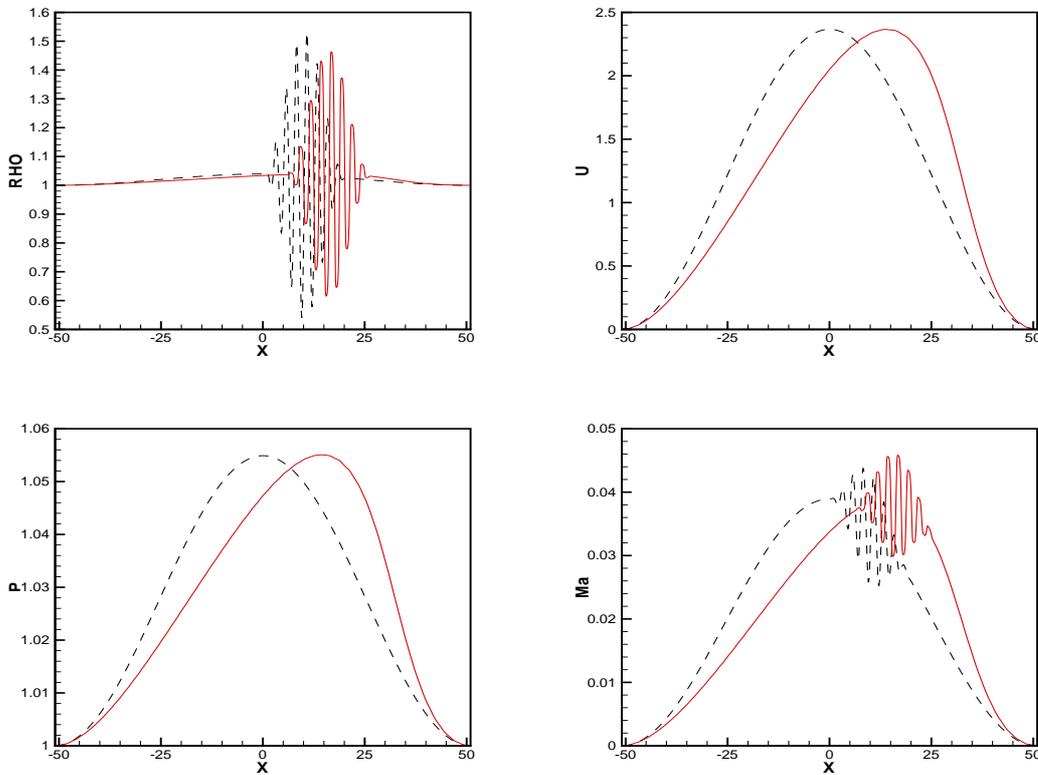


Abbildung 3.9: Dichteschichtung unter den laufenden akustischen Wellen mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=5.071$, mit der konservativen Formulierung, gestrichelte Linie: Anfangsverteilung.

Die Anfangsdaten für diesen Testfall [Kle95] sind:

$$\begin{aligned}
 \varrho(x, 0) &= \bar{\varrho}_0 + \Phi(x) \tilde{\varrho}_0^{(0)} \sin(40\pi x/L) + M \tilde{\varrho}_0^{(1)} \cdot 0.5 \cdot (1.0 + \cos(\pi x/L)), \\
 p(x, 0) &= \bar{p}_0 + M \tilde{p}_0^{(1)} \cdot 0.5 \cdot (1.0 + \cos(\pi x/L)), \\
 \mathbf{u}(x, 0) &= \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot 0.5 \cdot (1.0 + \cos(\pi x/L))
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

für die Machzahl $M = 1/51$, $-L \leq x \leq L = 1/M$,

$$\bar{\varrho}_0 = 1.0, \quad \bar{p}_0 = 1.0$$

und

$$\tilde{\varrho}_0^{(1)} = 0.5, \quad \tilde{p}_0^{(1)} = 2\gamma, \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = 2\sqrt{\gamma}.$$

Die Funktion $\Phi(x)$ ist definiert durch

$$\Phi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & -1/L \leq x \leq 0 \\ 0.5 \cdot (1.0 - \cos(5\pi x/L)) & 0 \leq x \leq 2L/5 \\ 0 & x > 2L/5 \end{array} \right\}.$$

Die durch $\tilde{\varrho}^{(0)}$ angegebenen Dichtefluktuationen mit großen Amplituden und kleinen Wellenlängen sind räumlich beschränkt. Für diesen Testfall werden ebenfalls periodische Randbedingungen verwendet. Obige Anfangsdaten beschreiben die Dichteschichten mit großen Amplituden und kleinen Wellenlängen, die durch die nach rechts laufenden periodischen, akustischen Wellen mit langen Wellenlängen angetrieben werden. Der Hauptaspekt dieses Testfalls liegt in der Advektion der Dichteverteilung wegen der sich immer wiederholenden nichtlinearen Wechselwirkung mit den akustischen Wellen. Wir verwenden 1020 äquidistante Gitterzellen, $\Delta x = 0.1$ und den Steigungsparameter $\kappa = 1.4$.

Abb. 3.9 zeigt die mit der konservativen Formulierung gewonnenen Lösungen zum Zeitpunkt $t = 5.071$ und auch die Anfangsverteilungen. Bis zu diesem Zeitpunkt durchlaufen die akustischen Wellen die Dichteschichten 2.5-mal. Die Wellenfront des Drucks und der Geschwindigkeit wurde durch die Nichtlinearität der akustischen Wellen schon beträchtlich aufgesteilt, während die Dichteschichten fast erhaltungeblieben sind. Andere Formulierungen ergeben die gleiche Qualität der Lösungen. Jedoch liefern die konservative- und semikonservative Formulierung nicht ganz so glatte Lösungen wie der primitive Fall. (siehe Abb. 3.10)

3.8 Beseitigung der Nichtlinearität in der Druck-Korrektur-Gleichung

Wie schon im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, haben Casulli und Greenspan nur den Druckgradient in der Geschwindigkeitsgleichung und den Divergenzterm der Geschwindigkeit in der Druckgleichung implizit implementiert. Dies genügt, um das numerische Verfahren unbedingt stabil im Bezug auf die Courantsche Bedingung mit der Schallgeschwindigkeit zu halten. Sie haben daher den Druckterm in der Druckgleichung explizit implementiert. Dadurch wird die Druck-Korrektur-Gleichung rein

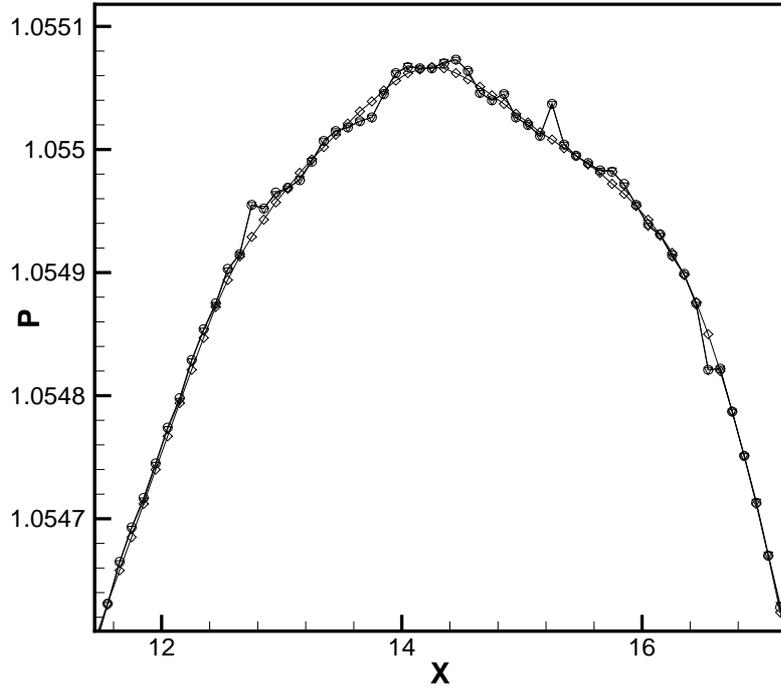


Abbildung 3.10: Dichteschichtung unter den laufenden akustischen Wellen mit MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren zum Zeitpunkt $t=5.071$, \diamond : Primitive-, ∇ : Konservative-, \circ : Semi-Konservative Formulierung

linear und man benötigt keine Iteration. Dies ist sehr wichtig in Hinsicht auf die Reduktion der Rechenzeit. Außerdem sind ihre Lösungsqualitäten vergleichbar mit dem iterativen Prozess und ihre zeitliche Konvergenzordnung geht ebenfalls nicht verloren. Es sind folgende Modifikationen möglich.

Primitive Formulierung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\varrho^{n+1} - \varrho^n}{\Delta t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla \varrho]^n &= -\varrho^n [\nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1}, \\
 \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n &= -\frac{\nabla p^{(2)n+1}}{\varrho^n}, \\
 \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla p]^n &= -\gamma p^n [\nabla \cdot \mathbf{u}]^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Konservative Formulierung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\varrho^{n+1} - \varrho^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot \varrho \mathbf{u}]^n &= 0, \\
 \frac{(\varrho \mathbf{u})^{n+1} - (\varrho \mathbf{u})^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \mathbf{u})]^n &= -\frac{1}{M^2} \nabla p^{(2)n+1},
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$M^2 \frac{p^{(2)n+1} - p^{(2)n}}{\Delta t} = - [\nabla \cdot (\gamma p^n \mathbf{u}^{n+1})] - \frac{p^{(0)n+1} - p^{(0)n}}{\Delta t} - (\gamma - 1) M^2 \left\{ \frac{e^{k^{n+1}} - e^{k^n}}{\Delta t} + [\nabla \cdot (e^k \mathbf{u})]^n \right\}.$$

In der konservativen Formulierung muß die kinetische Energie zum neuen Zeitpunkt auch explizit behandelt werden, um die Iterationen zu vermeiden. Dies läßt sich dadurch bewerkstelligen, daß erst die Dichte und der Impuls mit dem Druck zum alten Zeitpunkt explizit ermittelt werden, und dann daraus die kinetische Energie explizit berechnet wird. Dies ist möglich, weil der Einfluß der kinetischen Energie bei der Strömung mit niedriger Machzahl sowieso sehr klein ($\sim M^2$) ist, während im Bereich höherer Machzahlen schon die explizite Behandlung dieses Terms erlaubt ist.

4 Zeitintegration

Anhand der eindimensionalen Euler-Gleichungen haben wir im vorangegangenen Kapitel unsere numerischen Algorithmen erläutert. Die Zeitintegrationsverfahren werden in diesem Kapitel ausführlich diskutiert. Insbesondere führen wir einige semi-implizite Verfahren höherer Ordnung ein. Ihre Konvergenzverhalten werden mit einigen Testbeispielen untersucht. Bei der Anwendung dieser Zeitintegrationsverfahren auf die Navier-Stokes-Gleichungen haben wir jedoch Schwierigkeiten wegen der impliziten Reibungsterme. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, erweitern wir das in der Numerik für die inkompressiblen Strömungen häufig eingesetzten SIMPLE- und Projektionsverfahren auf den kompressiblen Fall.

4.1 Das semi-implizite Zeitintegrationsverfahren

Bei der numerischen Zeitintegration kann man zwischen *expliziten* und *impliziten* Verfahren unterscheiden. Erstere berechnen die Werte einer neuen Zeitebene aus den bekannten Werten der zurückliegenden Zeitebenen, während bei impliziten Verfahren auch benachbarte Werte der gleichen Zeitebene in die Berechnung mit eingehen.

Bei den impliziten Verfahren muß daher für jeden Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden, was einen höheren numerischen Aufwand darstellt. Implizite Verfahren sind daher auch schwieriger zu programmieren. Als Nachteil der expliziten Verfahren lassen sich jedoch deutlich strengere Stabilitätskriterien angeben, was unter Umständen zu sehr kleinen Zeitschrittweiten führen kann. In einigen Fällen kann der zusätzliche numerische Aufwand des impliziten Verfahrens durch eine wesentlich größere Zeitschrittweite überkompensiert werden.

Für die explizite Zeitintegration eines linearen hyperbolischen Systems sollte die Zeitschrittweiten unter folgenden Beschränkungen bleiben, um die Stabilität zu gewährleisten [LeV92]:

$$C = \max_p \left| \frac{\lambda_p \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1. \quad (4.1)$$

Hierin bedeutet λ_p die zum System gehörenden Eigenwerte, die die physikalischen Signalausbreitungsgeschwindigkeiten darstellen. Dies bezeichnet man als *CFL-Bedingung* (nach Courant, Friedrichs und Lewy) und C als *Courantzahl* oder *CFL-Zahl*. Für Strömungen mit schneller Wellenausbreitungen müssen daher immer kleinere Zeitschrittweiten gewählt werden. Dies Argument trifft genau für den Bereich kleiner Machzahl $M \ll 1$ bei den Euler-Gleichungen zu. Je kleiner die Machzahl ist, desto größer wird der Unterschied zwischen den Eigenwerten. Man definiert daher die *Steifigkeit* eines Systems mit dem Verhältnis zwischen dem maximalen und minimalen Eigenwert:

$$S = \frac{\max |\lambda_p|}{\min |\lambda_p|}. \quad (4.2)$$

Wenn sie größer wird, dann spielen mehrere Zeitskalen in diesem System zusammen. In diesem Fall heißt das System *steif* (engl. ‘stiff’)¹. In der Numerik werden dann oft lediglich die steifen Terme implizit behandelt, z. B. die Schallterme in den Eulergleichungen², um die gravierende Beschränkung der Zeitschrittweiten zu vermeiden. Solch ein Verfahren, in dem einige Terme explizit und andere gleichzeitig implizit behandelt werden, nennt man *semi-implizites* (engl. ‘semi-implicit’) oder *halbimplizites* Verfahren.

Man diskretisiert zuerst nur die Ortsableitungen in der Gleichungen. Damit ergeben sich folgende semidiskrete gewöhnliche Evolutionsgleichungen³:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{f}^{(ex)}(\Phi) + \mathbf{g}^{(im)}(\Phi). \quad (4.3)$$

Dabei ist Φ der Vektor der Zustandsvariablen. \mathbf{f} und \mathbf{g} sind Vektoren, die sich aus der Raumdiskretisierungen für die nichtsteifen (\mathbf{f}) und steifen (\mathbf{g}) Terme ergeben.

Zur Stabilitätsuntersuchung des Zeitintegrationsverfahrens bei steifen Differentialgleichungen wurde das einfache lineare Modellproblem eingeführt:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lambda_f \Phi + \lambda_g \Phi. \quad (4.4)$$

Die Anwendung eines Zeitintegrationsverfahrens führt zu einer Rekursionsgleichung

$$\gamma = \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = R(h\lambda_f, h\lambda_g). \quad (4.5)$$

¹Wie oben erwähnt, müssen die Zeitschrittweiten in erster Linie die Stabilitätsbedingungen Δt_{stab} erfüllen und noch die lokale Abbruchfehler Δt_{acc} akzeptabel klein halten. Man verliert andernfalls die Rechengenauigkeit. Bei der steifen Systeme gilt normalerweise $\Delta t_{stab} \ll \Delta t_{acc}$.

²Bei der Strömungen mit der dünnen Grenzschichten können die Diffusionsterme steif werden, weil sehr feine Gitter in diesen Schichten verwendet werden soll, um die genügende Auflösung zu gewährleisten. Die chemischen oder thermischen Nichtgleichgewichtsvorgänge enthalten meistens Zeitskalen mehrerer Größenordnungen, somit können die Quellterme auch steif werden.

³Diese Methode wird oft als Linienmethode (engl. ‘method of lines’, kurz MOL) bezeichnet. Die schrittweise Zeitintegration erfolgt also unter einer festen Raumdiskretisierung.

Hierin bedeutet h die Zeitschrittweite Δt . Die rationale Funktion R heißt *Stabilitätsfunktion* und charakterisiert das Verfahren im Bezug auf seine Stabilitäteeigenschaften. Das Gebiet der $A(\alpha)$ -*Stabilität* eines semi-impliziten Verfahrens [Zho96] ist definiert als die Menge

$$\{h\lambda_f \in \mathbb{C} : |\gamma(h\lambda_f, h\lambda_g)| \leq 1 \forall h\lambda_g \in W\}.$$

Dabei ist $W \subseteq \mathbb{C}$ der Keil mit dem Winkelbereich $[\pi - \alpha, \pi + \alpha]$. Ein semi-implizites Verfahren heißt *A-stabil* für $h\lambda_g$, wenn $\alpha = \pi/2$. Um das richtige asymptotische Verhalten der steifen Termen zu erhalten, braucht man noch sogenannte *stark A-Stabilität* (bzw. *L-Stabilität*):

$$\lim_{h|\lambda_g| \rightarrow \infty} |\gamma(h\lambda_f, h\lambda_g)| = 0. \quad (4.6)$$

Nur diese Stabilitätseigenschaft für die impliziten Terme kann gewährleisten, daß die numerische Lösungen mit dem semi-impliziten Verfahren trotz größerer Zeitschrittweite zur richtigen Lösungen konvergieren.

4.2 Semi-implizite Verfahren höherer Ordnung

Splitting-Verfahren

Für die Berechnung der semidiskreten steifen Systeme verwendet man oft das sogenannte Operator-Splitting-Verfahren⁴. In diesem werden die steife Terme und nicht-steife Terme in zwei unabhängige Schritte zerlegt und hintereinander behandelt:

$$\begin{aligned} \text{Sys I:} \quad \Phi_t &= \mathbf{f}(\Phi), \\ \text{Sys II:} \quad \Phi_t &= \mathbf{g}(\Phi). \end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist sehr einfach zu implementieren. Ein Nachteil dieser Methode ist, daß es zeitlich höchstens die zweite Ordnung erreichen kann, falls das sogenannte *Strang-Splitting*⁵ Verfahren [Str68] angewandt wird. Außerdem sind die instationären Randbedingungen im Zwischenschritt physikalisch unklar. Wir untersuchen daher noch weitere semi-impliziten Zeitintegrationsverfahren ohne Aufspaltung.

⁴Erfolgt das Splitting nach den verschiedenen physikalischen Vorgänge, verwendet man den Term Operator-Splitting. Ansonsten heißt es einfach Splitting Verfahren (engl. ‘time-splitting’ oder ‘fractional-step’)

⁵Zwei Teilsysteme werden dabei in zwei aufeinanderfolgenden Zeitschritten in alternierender Reihenfolge gelöst.

Euler-Verfahren

Die einfachste semi-implizite Zeitintegration für die Gleichung (4.3) heißt semi-implizites Euler-Verfahren, in dem die expliziten Terme als Quellterme behandelt werden:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + h \cdot [\mathbf{f}(\Phi^n) + \mathbf{g}(\Phi^{n+1})]. \quad (4.7)$$

Dieses Schema hat folgende Stabilitätsfunktion

$$\gamma = \frac{1 + h\lambda_f}{1 - h\lambda_g}. \quad (4.8)$$

Das Euler-Verfahren ist also L-Stabil und geeignet für die steifen Systeme. Es ist leider in der Zeit nur von erster Ordnung genau. Die praktischen Anwendungen dieses Verfahrens sind daher sehr begrenzt. Für die Euler-Gleichungen haben wir schon im vorangegangenen Kapitel 3 dieses Verfahren eingesetzt.

Zeitintegrationen höherer Ordnung

Bei der üblichen Zeitintegration höherer Ordnung für die gewöhnlichen differentiellen Gleichungen unterscheidet man zwischen *Einschritt-* und *Mehrschrittverfahren* [SW95]. Zum Einschrittverfahren mit mehreren Stufen gehören die Runge-Kutta-Typ Verfahren (explizit oder implizit), bei denen für die Berechnung des neuen Zeitpunktes $n + 1$ nur auf die Werte des direkt vorangegangenen Zeitpunktes Φ^n zurückgegriffen wird. Dagegen werden bei Mehrschrittverfahren die Werte von mehreren vorangegangenen Zeitpunkten $\Phi^n, \Phi^{n-1}, \dots$, verwendet. Dazu gehören z. B. das explizite Adams-Bashford, das implizite Adams-Moulton und das BDF-Verfahren (engl. ‘backward differentiation formulas’). Im Folgenden werden einige typische semi-implizite Verfahren dieser Kategorie zusammengestellt und diskutiert.

4.2.1 RK2CN-Verfahren

Der Name RK2CN stammt aus dem Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung (d. h. Mittelpunktsregel) für die expliziten Terme und dem Crank-Nicolson-Verfahren (d. h. Trapezregel) für die impliziten Terme. Dieses einfachste RKCNCN-Verfahren besteht aus zwei Stufen. Zunächst ermittelt man die Werte nach der halben Zeitschrittweiten mit dem Euler-Verfahren. Sie werden dann für die Berechnung der expliziten Flußterme in der zweiten Stufe weiter verwendet. Für die Berechnung der impliziten Terme in der zweiten Stufe wird das sogenannte Θ -Schema eingesetzt. Bekanntlich entspricht

das Crank-Nicolson-Verfahren dem Fall mit $\Theta_g = 0.5$. Damit kann der gesamte Algorithmus zeitlich die zweite Ordnung erreichen:

$$\begin{aligned}\Phi^{n+\frac{1}{2}} &= \Phi^n + \frac{h}{2} \cdot [\mathbf{f}(\Phi^n) + \mathbf{g}(\Phi^{n+\frac{1}{2}})], \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + h \cdot [\mathbf{f}(\Phi^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{g}\{(1 - \Theta_g)\Phi^n + \Theta_g\Phi^{n+1}\}].\end{aligned}\quad (4.9)$$

Die zum RK2CN-Verfahren gehörende Stabilitätsfunktion lautet:

$$\gamma = \frac{1}{1 - h\lambda_g\Theta_g} \left[1 + h\lambda_f \frac{1 + h\lambda_f/2}{1 - h\lambda_g/2} + h\lambda_g(1 - \Theta_g) \right]. \quad (4.10)$$

Dieses Schema ist, außer für den Fall mit $\Theta_g = 1$, leider nicht L-stabil sondern nur A-stabil. Man muß daher sehr vorsichtig sein, wenn ein steifes System mit diesem Verfahren gelöst wird.

4.2.2 UCS2-Verfahren

Kürzlich hat Liota et al. [LRR00] folgendes dreistufige Schema vorgestellt⁶. Die Zustandsvektoren zum Zeitpunkt $n + \frac{1}{3}$ und $n + \frac{1}{2}$ werden zuerst mit dem Euler-Verfahren ermittelt. Diese Werte werden in der letzten Stufe weiter verwendet:

$$\begin{aligned}\Phi^{n+\frac{1}{3}} &= \Phi^n + \frac{h}{3} \cdot [\mathbf{f}(\Phi^n) + \mathbf{g}(\Phi^{n+\frac{1}{3}})], \\ \Phi^{n+\frac{1}{2}} &= \Phi^n + \frac{h}{2} \cdot [\mathbf{f}(\Phi^n) + \mathbf{g}(\Phi^{n+\frac{1}{2}})], \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + h \cdot [\mathbf{f}(\Phi^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{g}(\frac{3}{4}\Phi^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\Phi^{n+1})].\end{aligned}\quad (4.11)$$

Die Stabilitätsfunktion für dieses Schema lautet

$$\gamma = \frac{1}{1 - h\lambda_g/4} \left[1 + h\lambda_f \frac{1 + h\lambda_f/2}{1 - h\lambda_g/2} + \frac{3}{4}h\lambda_g \frac{1 + h\lambda_f/3}{1 - h\lambda_g/3} \right]. \quad (4.12)$$

Dieses Verfahren ist aufwendiger als das RK2CN-Verfahren, aber es ist L-stabil. Daher ist es geeignet für stark steife Systeme. Man erhält damit auch zeitlich die zweite Ordnung. Für den zeitlich beliebigen Stützpunkt β läßt sich obiges Schema wie folgt leicht modifizieren:

$$\begin{aligned}\Phi^{n+\beta} &= \Phi^n + \beta h \cdot [\mathbf{f}(\Phi^n) + \mathbf{g}(\Phi^{n+\beta})], \\ \Phi^{n+\frac{1}{2}} &= \Phi^n + \frac{h}{2} \cdot [\mathbf{f}(\Phi^n) + \mathbf{g}(\Phi^{n+\frac{1}{2}})], \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + h \cdot [\mathbf{f}(\Phi^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{g}(\frac{1/2}{1-\beta}\Phi^{n+\beta} + \frac{1/2-\beta}{1-\beta}\Phi^{n+1})].\end{aligned}\quad (4.13)$$

⁶UCS2 bedeutet ‘Uniformly implicit Central Scheme of order 2’.

4.2.3 RK3CN-Verfahren

Rai und Moin [RM91] haben folgendes dreistufige Runge-Kutta-Crank-Nicolson-Verfahren bei der Simulation der inkompressiblen turbulenten Kanalströmungen verwendet. Es lautet:

$$\Phi^k = \Phi^{k-1} + h \cdot [\gamma^k \mathbf{f}(\Phi^{k-1}) + \zeta^k \mathbf{f}(\Phi^{k-2}) + \alpha^k \mathbf{g}(\Phi^{k-1}) + \beta^k \mathbf{g}(\Phi^k)] \quad (4.14)$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha^k = \beta^k = \left(\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{6}\right), \quad \gamma^k = \left(\frac{8}{15}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}\right), \quad \zeta^k = \left(0, -\frac{17}{60}, -\frac{5}{12}\right), \quad (4.15)$$

wobei $k(= 1, 2, 3)$ die Stufenzahl bezeichnet. Bei der ersten Stufe $k = 1$ wird Φ^{k-2} nicht berücksichtigt. Φ^0 und Φ^3 sind die Zustandsvariablen zum Zeitpunkt n und $n + 1$. Mit diesem Schema erhält man zeitlich dritte Ordnung für die expliziten- und zweite Ordnung für die impliziten Terme, also insgesamt nur zweite Ordnung.

4.2.4 ASIRK-Verfahren

Das sogenannte ASIRK-Verfahren (engl. ‘additive semi-implicit Runge-Kutta Method’) wurde von Zhong[Zho96] vorgestellt. Die allgemeinen r -stufigen ASIRK-Verfahren sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \sum_{j=1}^r w_j \mathbf{k}_j, \\ \frac{\mathbf{k}_i}{h} &= \mathbf{f} \left(\Phi^n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \mathbf{k}_j \right) + \mathbf{g} \left(\Phi^n + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \mathbf{k}_j + a_i \mathbf{k}_i \right), \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dabei sind h Zeitschrittenweiten und \mathbf{k} die Steigungswerte der physikalischen Variablen Φ . Aus den Bedingungen für die L-Stabilität und die Genauigkeit bestimmter Ordnung lassen sich die Koeffizienten w_j , a_i , b_{ij} und c_{ij} bestimmen. Bei der Simulation liefert die direkte Berechnung der Steigungswerte genauere Ergebnisse. Man muß dafür jedoch zusätzliche Variablen reservieren und geeignete Randbedingungen vorschreiben. Man kann daher einfach versuchen, mit den physikalischen Größen die Rechnung durchzuführen. Dafür definieren wir zuerst einige provisorische Variablen:

$$\begin{aligned} \Phi_{f_i} &= \Phi^n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \mathbf{k}_j, \\ \Phi_{g_i} &= \Phi^n + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \mathbf{k}_j, \\ \Phi_{tg_i} &= \Phi_{g_i} + a_i \mathbf{k}_i. \end{aligned}$$

Man kann dann in jeder Stufe des Runge-Kutta-Verfahrens folgende einfache Formel anwenden:

$$\Phi_{tg} = \Phi_g + ah \cdot [\mathbf{f}(\Phi_f) + \mathbf{g}(\Phi_{tg})]. \quad (4.17)$$

4.2.5 ABCN-Verfahren

Dies gehört zu der Klasse der Mehrschrittverfahren. Verwendet man für die expliziten Terme das Adams-Bashford-Verfahren zweiter Ordnung und für die impliziten Terme das Crank-Nicholson-Verfahren, so ergibt sich folgende Formel mit einer globalen Genauigkeit zweiter Ordnung:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + h \cdot [\mathbf{f}(\frac{3}{2}\Phi^n - \frac{1}{2}\Phi^{n-1}) + \mathbf{g}(\frac{1}{2}\Phi^{n+1} + \frac{1}{2}\Phi^n)]. \quad (4.18)$$

Bei der praktischen Implementierung wird jedoch die Formel für den Fall mit variabler Zeitschrittweiten verwendet:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + h \cdot [(1 + \frac{q}{2})\mathbf{f}(\Phi^n) - \frac{q}{2}\mathbf{f}(\Phi^{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(\Phi^n)] + \frac{h}{2}\mathbf{g}(\Phi^{n+1}), \quad (4.19)$$

$$q = \frac{t^{n+1} - t^n}{t^n - t^{n-1}}. \quad (4.20)$$

Dabei bedeutet q das Verhältnis der Zeitschrittweiten. Dieses Schema wurde auch für die Simulation der inkompressiblen Strömungen von Kim und Moin [KM85] eingesetzt. Einige Varianten dieses Verfahrens wurden von Ascher et al. [ARW95] untersucht.

4.2.6 SBDF-Verfahren

Ein populäres implizites Mehrschrittverfahren für die Lösung von steifen Systemen ist das BDF-Verfahren zweiter Ordnung. Unter der Voraussetzung der konstanten Zeitschrittweite gilt folgende Formel:

$$3\Phi^{n+1} - 4\Phi^n + \Phi^{n-1} = 2\Delta t [\mathbf{f}(\Phi^{n+1}) + \mathbf{g}(\Phi^{n+1})].$$

SBDF-Verfahren (engl. ‘semi-implicit BDF’, ‘extrapolated BDF’ oder ‘AB-BDF’) läßt sich aus dem obigen zweischrittigen BDF-Verfahren herleiten. Für die nichtsteifen Terme verwendet man eine explizite Extrapolation

$$\mathbf{f}(\Phi^{n+1}) = (1 + q)\mathbf{f}(\Phi^n) - q\mathbf{f}(\Phi^{n-1}).$$

Dabei bedeutet q das oben angegebene Verhältnis der Zeitschrittweiten. Somit ergibt sich folgende Formel mit veränderlichen Zeitschrittweiten:

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1} = & \frac{1}{1 + 2q} [(1 + q)^2\Phi^n - q^2\Phi^{n-1}] + \\ & \frac{(1 + q)\Delta t}{1 + 2q} [(1 + q)\mathbf{f}(\Phi^n) - q\mathbf{f}(\Phi^{n-1}) + \mathbf{g}(\Phi^{n+1})]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Stabilitätskriterien dieses Verfahrens wurde von Frank et al. [FHV97] ausführlich analysiert. Mit konstanter Zeitschrittweite erhält man zeitlich dritte Ordnung mit folgender SBDF-Formel:

$$11\Phi^{n+1} - 18\Phi^n + 9\Phi^{n-1} - 2\Phi^{n-2} = 6h \cdot [\mathbf{f}(3\Phi^n - 3\Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}) + \mathbf{g}(\Phi^{n+1})]. \quad (4.22)$$

Bemerkungen

Wenn man nicht so häufig Zeitschrittweiten ändern muß, sind die Mehrschrittverfahren effizienter. Dagegen sind die Runge-Kutta-Typ Verfahren besser geeignet, wenn die drastischen Änderungen der Zeitschrittweiten häufig benötigt werden.

4.3 Einige Testfälle der Konvergenz

Wir haben im vorherigen Abschnitt einige typische semi-implizite Zeitintegrationsformel angegeben. Davon konzentrieren wir uns im weiteren nur auf das RK2CN- und das SBDF-Verfahren zweiter Ordnung. Zuerst werden ihre Konvergenzverhalten mit den im vorangegangenen Kapitel angegebenen Testbeispielen untersucht.

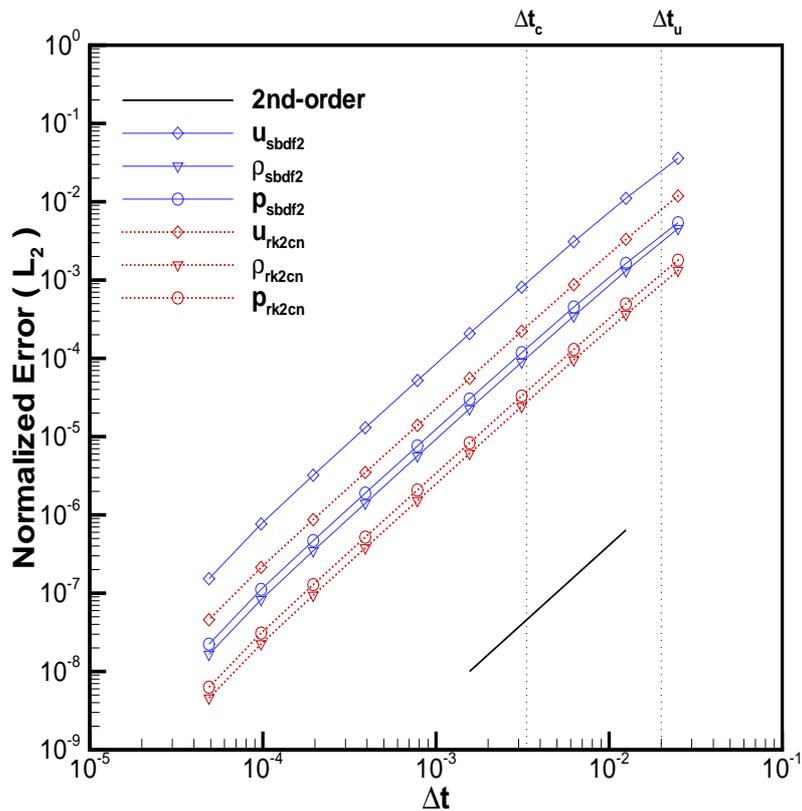


Abbildung 4.1: Konvergenzuntersuchung der kollidierenden akustischen Wellen mit MUSCL-Schema zum Zeitpunkt $t=1.63$, \diamond : Geschwindigkeit, ∇ : Dichte, \circ : Druck, durchgezogene Linie: SBDF2, gestrichelte Linie: RK2CN.

4.3.1 Kollidierende akustische Wellen

Im Abschnitt 3.7.5 haben wir zwei zusammenstoßende akustische Wellen im schwachen kompressiblen Bereich ($M = \frac{1}{11}$) simuliert. Die zeitlichen Konvergenzverhältnisse werden mit verschiedenen Zeitschrittweiten unter der festen Gitterschrittweite durchgeführt. Dabei wird die Zeitschrittweite Δt immer mit Faktor 2 verkleinert ($\Delta t = \frac{\Delta x}{2^n}, n = 2..12$). Für dieses Beispiel kennen wir leider keine exakte Lösung. Die Lösungen mit der kleinsten Zeitschrittweite werden daher als Referenzlösungen angenommen. Bezogen auf sie, wird der sogenannte *normierte Fehler* [DD92] für jede Zeitschrittweite berechnet. Für die L_2 -Norm gilt:

$$\text{Normierte Fehler} = \frac{\sqrt{\sum |\Phi - \Phi_{ref}|^2}}{\sqrt{\sum |\Phi_{ref}|^2}}. \quad (4.23)$$

Dieser Fehler muß mit abnehmender Zeitschrittweite immer kleiner werden, um die Konvergenz zu erreichen. Abb. 4.1 zeigt die Ergebnisse des SBDF2- und RK2CN-Verfahrens mit dem logarithmischen Maßstab. Dabei bezeichnet Δt_u die maximal erlaubte Zeitschrittweite durch die CFL-Bedingung mit der Strömungsgeschwindigkeit und Δt_c die mit der Schallgeschwindigkeit. Beide Verfahren erreichen zeitlich zweite Ordnung auf dem ganzen Zeitbereich für alle Variablen. Dabei sind die Fehler von SBDF2-Verfahren im allgemeinen größer als sie von RK2CN-Verfahren.

4.3.2 Dichteschichtung

Das in dem Abschnitt 3.7.6 diskutierten Beispiel der Dichteschicht wird auch mit der gleichen Vorgehensweise untersucht. Die Ergebnisse der Konvergenz sind in der Abb. 4.2 gezeigt. In diesem Beispiel herrscht eine kleinere globale Machzahl ($M = \frac{1}{51}$). Die auf die Schallgeschwindigkeit bezogene Zeitschrittweitenbeschränkung Δt_c ist daher auch viel kleiner als sie beim vorherigen Beispiel.

Die Konvergenzordnung reduziert sich dabei erstaunlich sehr stark im Bereich zwischen beiden Zeitschrittweitenbeschränkungen (Δt_c und Δt_u). Ohne die kurzwelligen Dichtestörungen, d. h. nur mit der transportierenden langwelligen akustischen Wellen, können beide Verfahren wie im vorherigen Testbeispiel überall zweite Ordnung erreichen. Beim einfachen, semi-impliziten Euler-Verfahren tritt auch gar keine Konvergenzreduktion auf. Um dieses ungewöhnliche Phänomen zu verstehen, muß man noch die Fehler jeder einzelnen Variablen näher untersuchen. Als ‘die Fehler’ zu einem bestimmten Zeitpunkt meinen wir die Differenz zwischen die Referenzlösungen mit kleinsten Zeitschrittweiten $\Delta t = \frac{\Delta x}{2^{12}}$ und die Lösungen mit den verschiedenen jeweiligen Zeitschrittweiten Δt . Diese Fehler bestehen aus den langwelligen und kurzwelligen Anteile. Die Amplitude der am Anfang vorgegebenen kurzwelligen Dichtestörungen

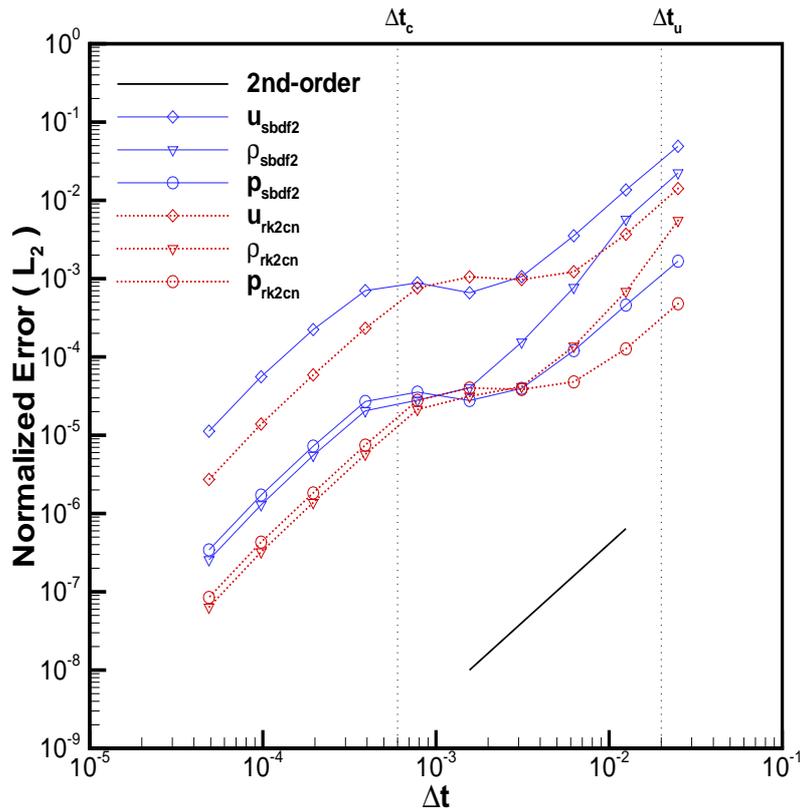


Abbildung 4.2: Konvergenzuntersuchung mit dem Beispiel der Dichteschichtung mit MUSCL-Schema zum Zeitpunkt $t=5.071$, \diamond : Geschwindigkeit, ∇ : Dichte, \circ : Druck, durchgezogene Linie: SBDF2, gestrichelte Linie: RK2CN.

sind viel größer als sie der langwelligen akustischen Wellen. Daher sind die kurzwelligen Fehler bei der Dichte dominierender. Bei dem Druck und der Geschwindigkeit ist die Situation dagegen komplizierter. Am Anfang haben wir keine kurzwellige Störungen für den Druck und die Geschwindigkeit separat vorgegeben. Kurzwellige Störungen bei den Druck- und der Geschwindigkeitsverteilungen entstehen erst dann durch die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen der transportierenden langwelligen akustischen Wellen und der kurzwelligen Dichtestörungen. Ihre Amplitude wächst jedoch nicht beliebig mit der Zeit sondern bleibt unterhalb einer bestimmten Grenze, weil die Wechselwirkungen sehr schwach sind.

Abb. 4.3 zeigt den mit verschiedenen Zeitschrittweiten gewonnenen Druckverteilungen. Beim Euler-Verfahren dominieren eindeutig die langwelligen Dämpfungsfehler. Die kurzwelligen Fehleranteile werden nur bei der Simulation mit sehr kleinen Zeitschrittweiten bemerkbar. Sie sind jedoch vernachlässigbar klein gegenüber den lang-

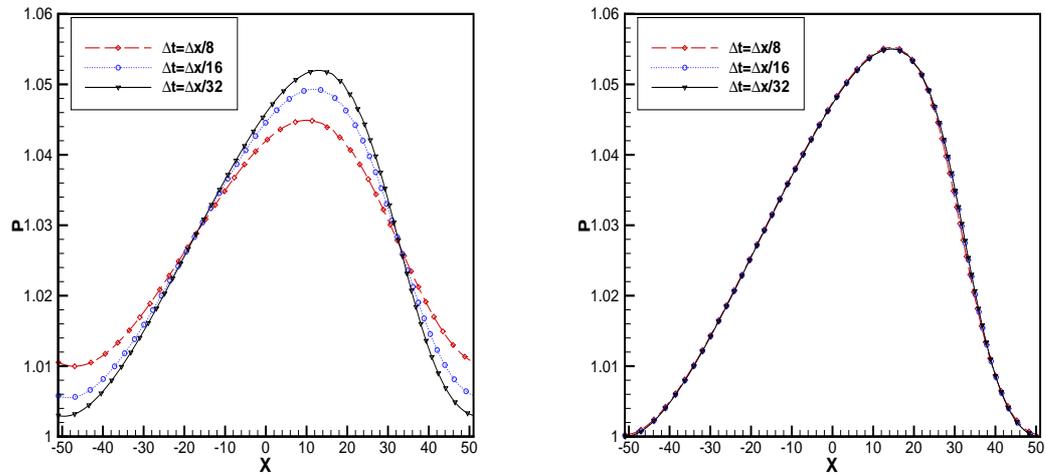


Abbildung 4.3: Druckverteilungen mit verschiedenen Zeitschrittweiten zum Zeitpunkt $t = 5.071$. links: Euler-Verfahren, rechts: SBDF2-Verfahren

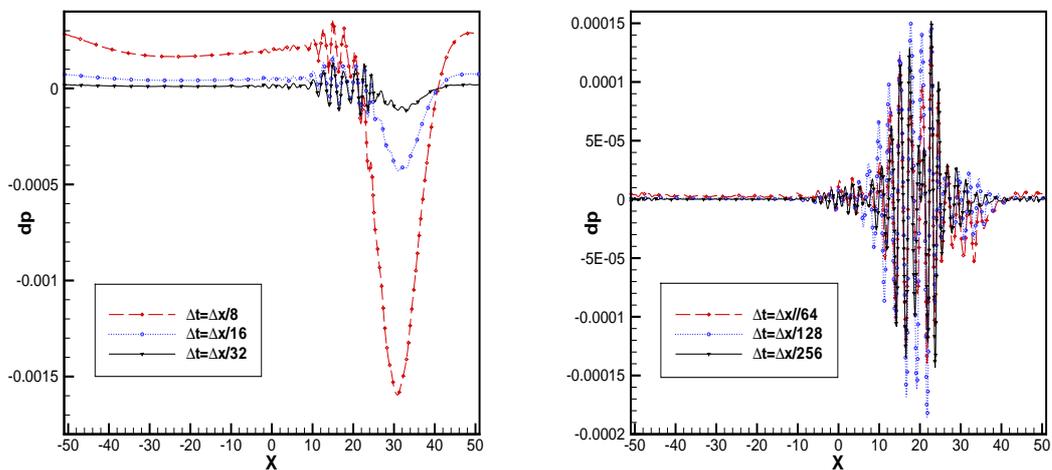


Abbildung 4.4: Druckdifferenz $dp = p - p_{ref}$ zum Zeitpunkt $t=5.071$ beim SBDF2-Verfahren. Dabei bedeutet p_{ref} die durch die Simulationen mit der $\Delta t = \frac{\Delta x}{2^{12}}$ gewonnenen Druckverteilungen.

welligen Dämpfungsfehlern. Dadurch entsteht keine Konvergenzreduktion beim Verfahren erster Ordnung.

In Abb. 4.3 merken wir kaum Unterschied zwischen den Ergebnissen mit verschiedenen Zeitschrittweiten beim SBDF2-Verfahren. Beim Verfahren zweiter Ordnung treten im allgemeinen kaum Dämpfungsfehler sondern vor allem Phasenfehler auf. In Abb. 4.4 werden die Druckfehler des SBDF2-Verfahrens dargestellt. Bei der Simulation mit größeren Zeitschrittweiten dominieren noch die langwelligen Fehleranteile, die sehr schnell mit abnehmenden Zeitschrittweiten verschwinden. Jedoch bleiben die kurzwelligen Anteile fast unverändert erhalten. Erst nach der vollständigen Schallauflösung, d. h. mit einer Zeitschrittweite kleiner als die auf die Schallgeschwindigkeit bezogene Zeitschrittweitenbeschränkung Δt_c , verkleinern sich dieser Fehleranteile auch. Die unvollständig aufgelöste kurzwelligen Anteile verhalten sich nicht linear mit der Zeitschrittweiten. Aus diesem physikalischen Mechanismus entsteht das sogenannte *Plateau der Konvergenzordnung* bei dem Zeitschrittweitenbereich zwischen Δt_u und Δt_c . Wenn die mehrskalige Wellen beim schwachkompressiblen Bereich mitspielen, können solche Phänomene immer auftreten.

4.4 Anwendung auf den Navier-Stokes-Gleichungen

Nun wenden wir die im vorherigen Abschnitt eingeführten Zeitintegrationsverfahren auf den Navier-Stokes-Gleichungen an. Der Einfachheit halber, betrachten wir sie ohne irgendeinen Quellterm in der Druck-Gleichung. Im Gegensatz zum Fall der Euler-Gleichungen, treten Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung der viskosen Diffusionstermen auf. Zur Bewältigung dieser Schwierigkeiten wurden verschiedene Methoden in der Numerik entworfen. Schließlich kann diese Methoden als eine Erweiterung des semi-impliziten ‘fractional step’ verfahrens für die inkompressiblen Strömungen interpretiert werden.

Semi-implizites MPV-Operator-Splitting-Verfahren

In einer früheren Arbeit [Par97] [Rol03] [Rat03] haben wir dieses Verfahren für die primitiven Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt. Sie bestehen aus mehreren Subsystemen, d. h. explizitem konvektivem System Sys_c , implizitem diffusivem System Sys_d und implizitem Schallsystem Sys_s .

$$\begin{aligned}
 Sys_c : \quad & \begin{cases} \varrho_t &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\varrho, \\ \mathbf{u}_t &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \\ p_t &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)p. \end{cases} \\
 Sys_d : \quad & \begin{cases} \varrho_t &= 0, \\ \mathbf{u}_t &= \frac{1}{\varrho Re} \nabla \cdot (2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \mathbf{u}), \\ p_t &= 0. \end{cases} \\
 Sys_s : \quad & \begin{cases} \varrho_t &= -\varrho \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_t &= -\frac{\nabla p^{(2)}}{\varrho}, \\ p_t &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Wie im Abschnitt 4.2 kurz erläutert, werden diese Subsysteme in zwei aufeinander folgenden Zeitschritten in alternierender Reihenfolge gelöst. Wir werden hier dieses Verfahren nicht weiter verfolgen. Ausführliche kann es noch in der Literatur [Rol99] gefunden werden.

Beim vollständigen inkompressiblen Fall ($M = 0$) ist das Schallsystem Sys_s mit der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes identisch. Das traditionelle Strang-Splitting-Verfahren verliert dann seine Bedeutung. In diesem Fall muß man lediglich das einfache Splitting-Verfahren anwenden. Es reduziert sich dann zum Projektionsschritt beim herkömmlichen *Projektionsverfahren* von Chorin [Cho68]. Damit kann man für die inkompressiblen Strömungen leider zeitlich nur erste Ordnung erhalten.

4.4.1 Semi-implizites MPV-Verfahren ohne Splitting

Diskretisierte Gleichungen

Nun konzentrieren wir uns nochmal auf konservativen Navier-Stokes-Gleichungen mit konstanten Materialkoeffizienten ohne Berücksichtigungen von äußeren Kräften, Wärmediffusion und Dissipation:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}\} + \nabla p^{(2)} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (2\mathcal{D} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}), \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + M^2 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma p \mathbf{u}) + (\gamma - 1)M^2 \left\{ \frac{\partial (e^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (e^k \mathbf{u}) \right\} = 0. \tag{4.26}$$

Im Vergleich mit der Euler-Gleichung liegt der einzige Unterschied in den viskosen Termen. Dies verursacht aber große Veränderungen bei den Strömungsphänomenen. In den Strömungen mit größerer Reynoldszahl treten dünne Grenzschichten an der Wand auf. Um diese Schichten genügend aufzulösen, braucht man lokal sehr feine

Gitter. Die viskosen Terme dürfen dann nicht mehr explizit behandelt werden, weil die notwendigen Zeitschrittweiten zu klein sind⁷.

Setzt man die im letzten Abschnitt eingeführten semi-impliziten Zeitintegrationsformeln auf obige Navier-Stokes-Gleichungen ein, dann ergeben sich folgende allgemein geltende Formel:

$$\begin{aligned}
 \varrho^{n+1} &= \mathcal{S}_\varrho, \\
 (\varrho \mathbf{u})^{n+1} + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \cdot \nabla p^{(2)n+1} &= \mathbf{Z}_d \cdot \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \mathcal{S}_\mathbf{u}, \\
 M^2 p^{(2)n+1} + \mathbf{Z}_p \cdot \gamma \nabla \cdot \{p^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}\} &= -dp^{(0)} - (\gamma - 1)M^2 (e^k)^{n+1} + \mathcal{S}_p.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Hierin bedeuten \mathcal{S}_ϱ , $\mathcal{S}_\mathbf{u}$ und \mathcal{S}_p die expliziten Quellterme und $\mathbf{Z}_{p^{(2)}}$, \mathbf{Z}_d und \mathbf{Z}_p die jeweiligen konstanten Koeffizienten. Es ist darauf zu achten, daß die viskosen Terme in zwei Teile zerlegt sind. Nur die Laplace-Terme werden implizit behandelt. Dies liefert ein Gleichungssystem für die Geschwindigkeit in Form eines Fünf-Punkte-Sterns. Die kinetische Energie zum neuen Zeitpunkt kann iterativ oder explizit berechnet werden. Für das Euler-Verfahren gilt folgende Formel:

Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_\varrho &= \varrho^n - \Delta t [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u})]^n, \\
 \mathbf{Z}_{p^{(2)}} &= \Delta t, \\
 \mathbf{Z}_d &= \frac{\Delta t}{Re}, \\
 \mathcal{S}_\mathbf{u} &= (\varrho \mathbf{u})^n - \Delta t [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \mathbf{u}]^n + \Delta t [\text{Diff-u-explizit}]^n, \\
 \mathbf{Z}_p &= \Delta t, \\
 \mathcal{S}_p &= M^2 p^{(2)n} + (\gamma - 1)M^2 \mathcal{S}_{ke}, \\
 \mathcal{S}_{ke} &= [(e^k)^n - \Delta t \{ \nabla \cdot (e^k \mathbf{u}) \}^n], \\
 dp^{(0)} &= p^{(0)n+1} - p^{(0)n}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die geeigneten Formel für die anderen Zeitintegrationsverfahren sind im Anhang A angegeben.

Das obige Gleichungssystem ist ein gekoppeltes System zwischen dem Druck und den Geschwindigkeiten zum neuen Zeitpunkt. Bei der direkten simultanen Lösung dieses Systems ist der Speicherbedarf und der Rechenaufwand sehr groß [Van86]. Mit Hilfe der entkoppelten Methode löst man zunächst die Impulsgleichung mit dem abgeschätzten Druckfeld, und die Druck-Korrektur-Gleichung wird aus der Kopplung

⁷Nach der numerischen Stabilitätstheorie ist die typische Zeitschrittweitenbedingung der parabolischen Diffusionsgleichung proportional quadratisch zum Kehrwert der Raumschrittweiten Δx

mit der Druckgleichung hergeleitet. Der Druck und die Geschwindigkeiten zum neuen Zeitpunkt werden mit dieser Druck-Korrektur ermittelt. Solche entkoppelten Methoden sind sicherlich einfach und günstig zu rechnen, aber sie leiden manchmal unter dem Aufspaltungsfehler. Wir beschäftigen uns im weiteren ausführlich mit den entkoppelten Methoden.

Schwierigkeiten mit dem einfachen Druck-Korrektur-Verfahren

Analog zur Behandlung der Euler-Gleichungen im Kapitel 3, verwenden wir noch die Ansätze für die Schätzungen $p^{(2)*}$, p^* , \mathbf{u}^* und ihre Korrekturen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}, \\ p^{(2)n+1} &= p^{(2)*} + \delta p^{(2)}, \\ p^{n+1} &= p^{(0)n+1} + M^2 p^{(2)n+1} \\ &= p^{(0)n} + dp^{(0)n} + M^2 p^{(2)*} + M^2 \delta p^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dabei dient die zeitliche Änderung des Drucks nullter Ordnung als Prädiktor

$$dp^{(0)n} = -\Delta t \cdot \gamma p^{(0)n} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) \, dV. \quad (4.30)$$

Die Geschwindigkeits-Korrektur hat nun folgende Beziehung mit der Druck-Korrektur:

$$\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{u} = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \cdot \nabla \delta p^{(2)}, \quad \mathbf{A} = \varrho^{n+1} - \mathbf{Z}_d \nabla^2. \quad (4.31)$$

Setzt man dies in die Druckgleichung ein, dann läßt sich die Druck-Korrektur-Gleichung wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} M^2 \delta p^{(2)} - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \gamma \nabla \cdot [p^* \cdot \mathbf{A}^{-1} \nabla \delta p^{(2)}] = \\ \mathcal{S}_p^* - M^2 p^{(2)*} - \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^* \mathbf{u}^*) - dp^{(0)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

mit

$$\mathcal{S}_p^* = \mathcal{S}_p - (\gamma - 1) M^2 \left(\frac{1}{2} \varrho^{n+1} \mathbf{u}^{*2} \right). \quad (4.33)$$

Diese Gleichung enthält zusätzlich die Invertierung des Laplace-Operators, die in der Praxis nicht möglich ist. Bei den herkömmlichen, inkompressiblen, numerischen Verfahren finden meistens SIMPLE- oder Projektionsverfahren ihre Anwendung, um diese Schwierigkeit zu überwinden. Nun verallgemeinern wir beide Verfahren mit der Verwendung unseres MPV-Ansatzes für die Simulation der kompressiblen Strömungen.

4.4.2 Semi-implizites MPV-SIMPLE-Verfahren

4.4.2.1 Algorithmen

Dies ist ein iteratives Verfahren, das eigentlich für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen von Patankar und Spalding [PS72] entwickelt wurde. Bei der Druck-Korrektur-Gleichung werden nur die diagonalen Terme des Laplace-Operators $\mathbf{A} = \text{Diag}(\varrho^{n+1} - \mathbf{Z}_d \nabla^2)$ weiter verwendet, um die Schwierigkeit bei der vollständigen Invertierung zu vermeiden⁸:

$$\begin{aligned} M^2 \delta p^{(2)} - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \gamma \nabla \cdot \left\{ p^* \cdot [\text{Diag}(\varrho^{n+1} - \mathbf{Z}_d \nabla^2)]^{-1} \nabla \delta p^{(2)} \right\} = \\ \mathcal{S}_p^* - M^2 p^{(2)*} - \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^* \mathbf{u}^*) - dp^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dadurch braucht man noch die iterativen Lösungsvorgänge, die als SIMPLE (engl. ‘Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations’) bezeichnet wurde. Dabei wird in folgenden Schritten vorgegangen:

1. Schätze zunächst die thermodynamischen Druckänderung $dp^{(0)}$ ab.
2. Schätze ein Druckfeld ab: $\rightarrow p^{(2)*}, \quad p^* = p^{(0)n} + M^2 p^{(2)*}$.
3. Löse die Impulsgleichungen mit $p^{(2)*}$: $\rightarrow \mathbf{u}^*$.
4. Bestimme \mathcal{S}_p^* mit \mathbf{u}^* .
5. Löse die lineare Druck-Korrektur-Gleichung (4.34) mit p^*, \mathbf{u}^* : $\rightarrow \delta p^{(2)}$.
6. Korrektur des Druckfeldes: \rightarrow
 $p^{(2)n+1} = p^{(2)*} + \delta p^{(2)}, \quad p^{n+1} = p^{(0)n} + dp^{(0)} + M^2 p^{(2)n+1}$.
7. Falls Konvergenz noch nicht erreicht wurde:
 - Neue Schätzung des Druckfeldes: $\rightarrow p^{(2)*} = p^{(2)n+1}, \quad p^* = p^{n+1}$.
 - Wiederholung der Schritte 3 bis 6.

Falls Konvergenz erreicht wird:

- verlasse die iterative Schleife
- bestimme das Geschwindigkeitsfeld $\rightarrow \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}$.

⁸Wenn der Laplace-Operator bei der Approximation vollständig ignoriert wird $\mathbf{A} = \varrho^{n+1}$, bezeichnen wir dies einfach als *semi-implizites iteratives MPV-Verfahren*.

Die mit dem oben erläuterten Schema gewonnenen Lösungen sind exakt bis zum Abbruchkriterium beim Iterationsvorgang. Die Vernachlässigung der nichtdiagonalen Terme verursacht leider manchmal, daß die errechneten $\delta p^{(2)}$ -Werte zu groß sind. Zur Gewährleistung eines konvergierenden Verfahrens ist daher eine sogenannte Unterrelaxation meist zwingend notwendig:

$$p^{(2)} = p^{(2)*} + \alpha \cdot \delta p^{(2)}, \quad (4.35)$$

wobei der Relaxationsfaktor $\alpha < 1$ ist. Auf gleiche Weise können alle SIMPLE-Typ-Algorithmen, z. B. SIMPLER, SIMPLEC usw. in unseren MPV-Verfahren eingesetzt werden.

4.4.2.2 Vergleich mit dem traditionellen SIMPLE-Verfahren

In Anlehnung an eine Arbeit von Jang et al [JJA86] wollen wir nun die konventionellen SIMPLE-Algorithmen kurz erläutern und unseren Algorithmen gegenüberstellen. Das ursprüngliche SIMPLE-Verfahren ist ein vollständig implizites Verfahren, das eigentlich für die inkompressiblen Strömungen entwickelt wurde. Für die zweidimensionalen inkompressiblen Strömungen gelten die folgenden dimensionsbehafteten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial (\varrho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \phi) &= -\nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \phi) + (S_c + S_p \phi), \end{aligned} \quad (4.36)$$

wobei ϕ die Geschwindigkeiten u oder v und $S_c + S_p \phi$ die linearisierten Quellterme bezeichnen. Durch die Integration dieser Gleichungen auf dem versetzten Kontrollvolumen ergeben sich folgende diskretisierte Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$(\varrho_p - \varrho_p^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + \varrho_e u_e A_e - \varrho_w u_w A_w + \varrho_n v_n A_n - \varrho_s v_s A_s = 0. \quad (4.37)$$

Impulsgleichungen:

$$\begin{aligned} a_e u_e &= \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e, \\ a_n v_n &= \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dabei wird die Summierung in der rechten Seite über die vier benachbarten Zellen durchgeführt, und die hochgestellte Indizes ⁰ bedeuten die zur vorangegangenen Zeitebene festgestellten Werte. Die Koeffizienten a_e , a_n und a_{nb} sind abhängig von der Auswahl der geeigneten Interpolation nach jeder Richtung. Für Details der Koeffizienten wird auf die ursprünglichen Arbeiten von Patankar und Spalding [PS72] [Pat80] verwiesen. Mit den Korrekturansätzen

$$u' = u - u^*, \quad v' = v - v^*, \quad p' = p - p^* \quad (4.39)$$

lassen sich folgende vollständig implizite Korrektur-Gleichungen für die Geschwindigkeiten herleiten:

$$\begin{aligned} a_e u'_e &= \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_E) A_e, \\ a_n v'_n &= \sum a_{nb} v'_{nb} + (p'_P - p'_N) A_n. \end{aligned} \quad (4.40)$$

In den SIMPLE-Algorithmen werden noch die Einflüsse von den benachbarten Zellen, d. h. $\sum a_{nb} u'_{nb}$ und $\sum a_{nb} v'_{nb}$ Terme, vernachlässigt⁹ und dann ergeben sich

$$\begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e (p'_P - p'_E), \quad d_e = \frac{A_e}{a_e}, \\ v_n &= v_n^* + d_n (p'_P - p'_N), \quad d_n = \frac{A_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Setzt man diese Gleichungen in die diskretisierte Kontinuitätsgleichung ein, so resultiert eine Druck-Korrektur-Gleichung:

$$\begin{aligned} a_P p'_P &= a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b, \\ a_E &= \rho_e A_e d_e, \\ a_W &= \rho_w A_w d_w, \\ a_N &= \rho_n A_n d_n, \\ a_S &= \rho_s A_s d_s, \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S, \\ b &= -(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} - (\rho_e u_e^* A_e - \rho_w u_w^* A_w + \rho_n v_n^* A_n - \rho_s v_s^* A_s). \end{aligned} \quad (4.42)$$

SIMPLE-Algorithmen basieren auf den folgenden Rechenschritten.

1. Schätze zunächst den Druck p^* ab.
2. Löse die Impulsgleichungen mit p^* : $(\rightarrow u^*, v^*)$.
3. Löse die lineare Druck-Korrektur-Gleichung mit u^* und v^* : $(\rightarrow p')$.
4. Korrigiere das Druckfeld mit dem Parameter α_p für die Unterrelaxation: $(\rightarrow p = p^* + \alpha_p p')$.
5. Korrigiere das Geschwindigkeitenfeld: $(\rightarrow u = u^* + u', \quad v = v^* + v')$.
6. Falls Konvergenz noch nicht erreicht wurde:
 - Neue Schätzung des Druckfeldes $(\rightarrow p^* = p)$.
 - Wiederhole die Schritte 2 bis 5.

⁹Genau von diesem Grund rührt die Bezeichnung 'SIMPLE-Verfahren' her.

Falls Konvergenz erreicht wird, verlasse die iterative Schleife.

Nach der erfolgreichen Anwendung der SIMPLE-Algorithmen auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen wurden zahlreiche Variante versucht, um eine bessere Konvergenzeigenschaft zu erzielen. Dazu gehören SIMLER- (engl. ‘SIMPLE revised’) [Pat80] [Pat85], SIMPLEC- (engl. ‘SIMPLE consistent’) [vDR84] und PISO-Verfahren (engl. ‘pressure-implicit with splitting of operators’) [IGW86]. Aufgrund der starken Druck-Geschwindigkeits-Kopplung wurde das SIMPLE-Verfahren zunächst nur für versetzte Variablenanordnung realisiert, da sonst eine Entkopplung des Systems der Differentialgleichungen auftreten kann. Dies führt zu unphysikalischen Oszillationen des Druckfeldes. Die versetzte Variablenanordnung ist aber bei der Verwendung von krummlinigen Koordinaten sehr aufwendig. In den folgenden Jahren erfolgten daher Weiterentwicklungen des SIMPLE-Verfahrens auf dem nichtversetzten Rechengitter. Dabei wurde für die Berechnung des Massenflusses an der Kontrollvolumenoberfläche eine spezielle Interpolationsmethode (engl. ‘momentum interpolation’) von Rhie und Chow [RC83] eingesetzt, um die unphysikalischen Oszillationen zu verhindern. Die Erweiterung des SIMPLE-Verfahrens auf kompressible Strömungen beruht auf der Arbeit von Karki und Patankar [KP89]. Sie haben dabei noch die Dichte-Korrektur ϱ' eingeführt. Zusammen mit der geschätzten Dichte ϱ^* ergibt sich die korrekte Dichte

$$\varrho = \varrho^* + \varrho', \quad (4.44)$$

so erhält man für den Massenfluß an der östlichen Kontrollvolumenoberfläche

$$\begin{aligned} (\varrho \mathbf{u} A)_e &= [(\varrho^* + \varrho')(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}')]_e \\ &= (\varrho^* \mathbf{u}^* A)_e + (\varrho^* \mathbf{u}' A)_e + (\varrho' \mathbf{u}^* A)_e + (\varrho' \mathbf{u}' A)_e. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Vernachlässigt man noch den letzten Summanden als Term von 2. Ordnung, so ergibt sich nach Einsetzen der Geschwindigkeits-Korrektur \mathbf{u}'_e und der Zustandsgleichung $p = \varrho R T \rightarrow \varrho' = K \cdot p'$:

$$(\varrho \mathbf{u} A)_e = (\varrho^* \mathbf{u}^* A)_e + \varrho_e^* A_e d_e (p'_P - p'_E) + K A_e \mathbf{u}_e^* p'_e. \quad (4.46)$$

Im letzten Term p'_e wird durch p'_P und p'_E ausgedrückt, wobei man eine Upwind-Formulierung verwendet:

$$p'_e = \begin{cases} p'_P & \text{für } \mathbf{u}_e > 0, \\ p'_E & \text{für } \mathbf{u}_e < 0. \end{cases}$$

Dieser konvektive Anteil der Druck-Korrektur entspricht dem hyperbolischen Charakter der kompressiblen Strömungen.

Beim obigen herkömmlichen SIMPLE-Verfahren wurde die Druck-Korrektur-Gleichung aus der Kopplung zwischen Geschwindigkeits- und Kontinuitätsgleichung

hergeleitet, und die Energiegleichung wurde anschließend getrennt berechnet¹⁰. Bei unserem semi-impliziten MPV-SIMPLE-Verfahren wurde dagegen die Kopplung zwischen Geschwindigkeits- und Druckgleichung zur Herleitung der Druck-Korrekturgleichung verwendet. Wir brauchen daher nicht zusätzlich die Temperatur- oder Enthalpiegleichung zu lösen, sondern sie werden direkt aus der thermischen Zustandsgleichung bestimmt. Das herkömmliche SIMPLE-Verfahren basiert auf einem vollständig impliziten Verfahren und unterliegt daher überhaupt keiner Beschränkung für die Zeitschrittweite. Es ist damit ein schnelles Rechenverfahren für die stationären Strömungen. Im Gegensatz zum traditionellen SIMPLE-Algorithmus hat das abgeleitete semi-implizite MPV-SIMPLE-Verfahren noch die Zeitschrittweitenbeschränkung, d. h. CFL-Bedingung mit Bezug auf die Strömungsgeschwindigkeit. Zusätzlich braucht es in jedem Zeitschritt noch äußere Iterationen. Diese Iterationen sind mit großen Rechenaufwand verbunden. Für die stationären Strömungen ist die Entwicklung eines vollständig impliziten MPV-SIMPLE-Verfahrens anzuraten.

Bemerkung:

Beim SIMPLEC-Algorithmus werden die Einflüsse von der benachbarten Zellen nicht einfach wie beim SIMPLE-Verfahren vernachlässigt, sondern durch eine Gewichtung approximiert, und er zeigt die bessere Konvergenzverhältnisse gegenüber dem einfachen SIMPLE-Verfahren [vDR84]. Mit der Beziehungen $\sum a_{nb}u'_{nb} = u'_e \sum a_{nb}$ und $\sum a_{nb}v'_{nb} = v'_n \sum a_{nb}$ in der Gleichung (4.40) ergeben nun folgende Korrekturgleichungen:

$$\begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e(p'_P - p'_E), & d_e &= \frac{A_e}{a_e - \sum a_{nb}}, \\ v_n &= v_n^* + d_n(p'_P - p'_N), & d_n &= \frac{A_n}{a_n - \sum a_{nb}}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Wenn wir diesen algorithmus auf unsere semi-implizite Korrektur-Gleichung (4.31) anwenden, dann bleibt nur $\mathbf{A} = \varrho^{n+1}$, weil die Laplace-Terme wegen ihrer Symmetrie gegenseitig vollständig kompensiert werden. Mit SIMPLEC-Algorithmus erzielen wir schließlich nur noch einfaches iteratives Verfahren. Daraus erwarten wir nur schwache Konvergenzbeschleunigung mit unseren semi-impliziten SIMPLE-Typ Algorithmen im Vergleich zur vollständig impliziten herkömmlichen SIMPLE-Algorithmen.

4.4.3 Semi-implizites MPV-Druck-Korrektur-Verfahren

4.4.3.1 Das traditionelle Projektionsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die in der Literatur bekannten Projektionsmethoden zusammenfassen und ihre Eigenschaft detailliert diskutieren. Im Gegensatz

¹⁰man nennt ein solches Verfahren ‘sequential (segregated) algorithm’

zum herkömmlichen vollständig impliziten SIMPLE-Verfahren basiert das Projektionsverfahren auf den semi-impliziten Zeitintegrationen. Ende der 60er Jahre wurde das Projektionsverfahren von Chorin [Cho68] [Cho69] und Temam [Tem69] unabhängig voneinander entwickelt. Es basiert auf der Existenz einer orthogonalen Zerlegung¹¹ des Geschwindigkeitsvektorfeldes \mathbf{u} in einen divergenzfreien Anteil \mathbf{u}_d und einen rotationsfreien Gradienten einer skalaren Größe ψ . Das nennt man Hodge-Helmholtz-Dekomposition:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d + \nabla\psi. \quad (4.48)$$

Im Projektionsverfahren wird im ersten Schritt (Prädiktorschritt) das Geschwindigkeitsfeld unter Vernachlässigung der Divergenzfreiheit berechnet und anschließend auf den Raum der divergenzfreien Vektorfelder projiziert (Projektionsschritt oder Korrektorschritt). Damit vermeidet dies Verfahren die aufwendigen iterativen Lösungsvorgänge in jedem Zeitschritten wie sie beim herkömmlichen SIMPLE-Verfahren. Es wurde daher sehr häufig insbesondere für die Simulationen der instationären Strömungen eingesetzt.

Chorin [Cho68] [Cho69] hat eigentlich die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in seinem Projektionsschema behandelt:

$$\mathbf{u}_t + \nabla p^{(2)} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\mathbf{u}, \quad (4.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.50)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b. \quad (4.51)$$

Dabei hat er erkannt, daß die linke Seite der Gleichung (4.49) als eine Hodge-Dekomposition [CM79] interpretiert werden kann. Das folgende äquivalente Projektionsschema läßt sich daher formulieren:

$$\mathbf{u}_t = P \left[-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\mathbf{u} \right]. \quad (4.52)$$

Dabei ist P ein Operator, der ein beliebiges Vektorfeld in den Raum der divergenzfreien Vektorfelder mit geeigneten Randbedingungen projiziert¹². Bei praktischen Rechnungen wurden zunächst die Impulsleichungen (4.49) approximiert, um die provisorischen Geschwindigkeiten zu bestimmen. Man löst dann die elliptische Gleichung der Druck-Korrektur, welche die Erfüllung der Divergenzbedingung (4.50) gewährleistet. Schließlich wird der Druck berechnet. Mit diesem Projektionsschema erhält man leider zeitlich nur eine Genauigkeit erster Ordnung. In den 80-er Jahre wurden dann einige

¹¹Dabei gilt die Beziehung $(\mathbf{u}_d \cdot \nabla)\psi = 0$.

¹²Eine der wichtigsten Eigenschaften von Projektionen ist die Idempotenz $P^2 = P$. Diese bedeutet, daß sich das Ergebnis bei der wiederholten Anwendungen des Projektionsoperators nicht verändert.

Projektionsmethoden zweiter Ordnung in Zeit vorgeschlagen. Die Methoden von Van Kan [vK86], Kim und Moin [KM85] und Bell, Collela und Glaz [BCG89] wurden von folgenden semi-impliziten Formulierungen zweiter Ordnung in Zeit motiviert:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla p^{(2)n+\frac{1}{2}} = -[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \quad (4.53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (4.54)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1}. \quad (4.55)$$

Dabei repräsentiert $[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}}$ die Approximation für die konvektiven Terme zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$, die in der Regel explizit berechnet wird. Die Lösungsvorgänge können anhand der Arbeit von Brown et al. [BCM01] auf folgende Weise zusammengestellt werden.

Schritt 1: Berechne zunächst die provisorischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}^* :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla q = -[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n), \quad (4.56)$$

$$B(\mathbf{u}^*) = 0. \quad (4.57)$$

Dabei repräsentiert q eine geeignete Approximation für den Druck $p^{(2)n+\frac{1}{2}}$ und $B(\mathbf{u}^*)$ die Randbedingungen für \mathbf{u}^* , die als ein Teil des Lösungsverfahrens spezifiziert werden müssen.

Schritt 2: Führe die Projektion durch:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_d^{n+1} + \Delta t \nabla \psi^{n+1}, \quad (4.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (4.59)$$

mit den geeigneten Randbedingungen. Beide Randbedingungen $B(\mathbf{u}^*) = 0$ und $\mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1}$ müssen dabei weiter erfüllt sein.

Schritt 3: Bestimme den Druck:

$$p^{(2)n+\frac{1}{2}} = q + f(\psi^{n+1}). \quad (4.60)$$

Dabei bezeichnet die Funktion f die Abhängigkeit des Drucks $p^{(2)n+\frac{1}{2}}$ von ψ^{n+1} . Wenn die Rechnungen zu einem Zeitpunkt vollständig beendet sind, werden die provisorischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}^* abgelegt und nicht wieder in demselben oder dem nächsten Zeitschritt aufgerufen¹³.

¹³Obiges Lösungsschema bezeichnet man als 'incremental-pressure projection methods', weil im Projektionsschritt nicht der Druck selber, sondern der Gradient der Druck-Korrektur $\nabla\psi$ verwendet wird.

Dabei bleiben noch drei Auswahlmöglichkeiten, die bei der Auslegung solcher Methoden unbedingt festgeschrieben werden müssen, d. h. die Approximation für den Druck q , die Randbedingungen $B(\mathbf{u}^*)$ und die Funktion $f(\psi^{n+1})$ bei der Bestimmung des Drucks. Eine geeignete Auswahl ist sehr wichtig, um mit der Methode überall die Genauigkeit zweiter Ordnung in Zeit zu erreichen. Bei den oben erwähnten verschiedenen Projektionsmethoden wurde tatsächlich die Konvergenz zweiter Ordnung für die Geschwindigkeiten beobachtet. Der Druck zeigt aber typisch nur zeitlich erste Ordnung [SL99]. Kürzlich haben Brown et al [BCM01] gezeigt, daß die Ursache für diese Unstimmigkeit an der Wechselwirkung zwischen der globalen Bestimmungsformel für den Druck $f(\psi^{n+1})$ und den Randbedingungen für die provisorischen Geschwindigkeiten $B(\mathbf{u}^*)$ liegt. Unter Berücksichtigung der Konsistenz der gesamten Algorithmen haben sie folgende Bestimmungsformel für den Druck hergeleitet:

$$p^{(2)n+\frac{1}{2}} = q + \psi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2 \psi^{n+1}. \quad (4.61)$$

Damit haben sie numerisch und analytisch gezeigt, daß die oben eingeführten, verschiedenen Projektionsmethoden unter den bestimmten Randbedingungen die Genauigkeit zweiter Ordnung in Zeit erhalten können.

Exakte Druck-Korrektur-Verfahren

Nun betrachten wir die exakte Formulierung des Druck-Korrektur-Verfahrens für die Navier-Stokes-Gleichungen konstanter Dichte. Dadurch versuchen wir die Eigenschaft des herkömmlichen Projektionsverfahrens klar zu verstehen. Für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen erhalten wir folgende, allgemein diskretisierte Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla p^{(2)n+1} &= \mathbf{Z}_d \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \mathcal{S}_{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Wie üblich berechnen wir zunächst die provisorischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}^* mit dem geschätzten Druck q und der Randbedingung $B(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} - \mathbf{u}_b^{n+1} = 0$. Damit brauchen wir nun am Rand keine Geschwindigkeits-Korrektur mehr:

$$\mathbf{u}^* + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla q = \mathbf{Z}_d \nabla^2 \mathbf{u}^* + \mathcal{S}_{\mathbf{u}}. \quad (4.63)$$

Durch den Vergleich mit den ursprünglichen Gleichungen (4.62) lassen sich noch folgende Korrektur-Gleichungen formulieren:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \psi - \mathbf{Z}_d \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}), \quad \delta \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \psi &= p^{(2)n+1} - q - \frac{\mathbf{Z}_d}{\mathbf{Z}_{p^{(2)}}} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Dabei wird noch die Vektoridentität für den Laplace-Operator¹⁴ eingesetzt. Der Exakte Korrektorschritt läuft dann wie folgt ab:

- Löse die Druck-Korrektur ψ :
 $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) = -\nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \cdot \nabla \psi$
mit den Randbedingungen $\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$.
Die Lösung dieses Neumann-Problems existiert und ist eindeutig bis auf die Addition einer Konstanten zu ψ .
- Löse die Geschwindigkeits-Korrektur $\delta \mathbf{u}$:
 $\delta \mathbf{u} + \mathbf{Z}_d \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}) = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \psi, \quad \delta \mathbf{u} \Big|_{\partial \Omega} = 0$.
- Bestimme den neuen Druck:
 $p^{(2)n+1} = q + \psi + \frac{\mathbf{Z}_d}{\mathbf{Z}_{p^{(2)}}} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}$.
- Bestimme die Geschwindigkeiten zum neuen Zeitpunkt:
 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}$.

Der einzige Unterschied zum traditionellen Projektionsschritt liegt in der zweiten Stufe. Der herkömmliche Lösungsansatz $\delta \mathbf{u} = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \psi$ ist sicherlich nicht die einzige Lösung sondern eher eine partikuläre Lösung¹⁵. Nach der Theorie der Differentialgleichungen bestehen unsere Lösungen aus einem partikulären und einem homogenen Anteil, d. h. $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_H + \delta \mathbf{u}_P$, $\delta \mathbf{u}_P = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \psi$. Homogene Lösungen erfüllen also die homogene Gleichung¹⁶:

$$\delta \mathbf{u}_H + \mathbf{Z}_d \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}_H) = 0. \quad (4.64)$$

Homogene Lösungen müssen dann noch divergenzfrei ($\nabla \cdot \delta \mathbf{u}_H = 0$) sein. Homogene Gleichungen lassen sich weiterhin auf folgende modifizierte Helmholtz-Gleichungen mit negativem, konstantem Koeffizient umschreiben¹⁷:

$$\delta \mathbf{u}_H - \mathbf{Z}_d \nabla^2 \delta \mathbf{u}_H = 0, \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_H = 0. \quad (4.65)$$

¹⁴ $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$.

¹⁵Das herkömmliche Projektionsverfahren hat also verborgen angenommen, daß die Rotationsanteile der Geschwindigkeitsvektoren im Prädiktorschritt vollständig berechnet werden. Im Korrektorschritt bleiben sie unverändert erhalten.

¹⁶Diese Aufspaltung beruht auf dem Superpositionsprinzip der linearen Gleichungen. Wenn wir beide Gleichungen zusammensetzen, läßt sich die Richtigkeit dieses Prinzips leicht beweisen:

$$\delta \mathbf{u}_H + \delta \mathbf{u}_P + \mathbf{Z}_d \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}_H) = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \psi.$$

¹⁷In der Literatur [Ari62] bezeichnet man ein divergenzfreies ($\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$) Beltrami-Vektorfeld ($\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{a} = 0$) als Trkalian-Vektorfeld ($\nabla \times \mathbf{a} = k\mathbf{a}$, $k = konst$). Diese Trkalian-Vektorfelder erfüllen zwar die Helmholtz-Gleichungen ($\nabla^2 \mathbf{a} + k^2 \mathbf{a} = 0$) aber mit dem positiven konstanten Koeffizient. Dagegen gilt $\nabla \times \mathbf{a} = ik\mathbf{a}$ für den negativen Koeffizient. Dieses Vektorfeld kann nun als *komplexes Trkalian-Vektorfeld* interpretiert werden.

Diese Gleichungen besitzen allgemeine Lösungen mit exponentiellen oder hyperbolischen Funktionen. In einem begrenzten Gebiet können solche allgemeinen Lösungen keine homogene Dirichlet-Randbedingung ($\delta\mathbf{u}_H|_{\partial\Omega} = 0$) erfüllen. Physikalisch existiert dieser Fall nicht mehr. Dann bleiben lediglich triviale Lösungen ($\delta\mathbf{u}_H = 0$) übrig. Nicht-homogene Randbedingungen sind also entscheidend für die Existenz von bestimmten Lösungen der homogenen Helmholtz-Gleichungen mit negativem Eigenwert. Dazu lassen sich noch folgende Randbedingungen für die homogenen Lösungen $\delta\mathbf{u}_H$ formulieren:

$$\begin{cases} \delta\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{n} = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \delta\mathbf{u}_P \cdot \mathbf{n} = 0 + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \\ \delta\mathbf{u}_H \cdot \boldsymbol{\tau} = \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \delta\mathbf{u}_P \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\partial\psi}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (4.66)$$

Bei der Poisson-Gleichung ($\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla^2 \psi = \nabla \cdot \mathbf{u}^*$) für die Druck-Korrektur im ersten Korrektorschritt haben wir gar keine Randbedingungen für die tangentialen Richtungen gebraucht. Sie sind also nicht festgeschrieben. Daher kann man nicht gewährleisten, daß die tangentialen Ableitungen der daraus resultierenden Lösungen ψ am Rand verschwinden.

Nun können wir die homogenen Gleichungen (4.65) und ihre Randbedingungen (4.66) physikalisch klar verstehen. Der normale Anteil von $\delta\mathbf{u}_H$ an den Rändern sind Null. Die durch $\delta\mathbf{u}_H$ erzeugten Strömungen bleiben daher immer nur innerhalb der Ränder. Dies bedeutet, daß ihre gesamte Strömungsmenge innerhalb des Rechengebietes erhaltenbleibt. Die tangentialen Geschwindigkeiten ($\delta\mathbf{u}_H \cdot \boldsymbol{\tau}$) an den Rändern sind als Dirichlet-Bedingungen vorgegeben und müssen im Inneren des Rechengebietes nach den Helmholtz-Gleichungen (4.65) immer exponentiell verkleinert werden. Dadurch werden noch die normalen Geschwindigkeiten im Inneren des Rechengebietes nach der Kontinuitätsbedingung initialisiert. Bei der herkömmlichen Projektion fehlt gerade dieser homogene Lösungsanteil. Dadurch können die tangentialen Geschwindigkeiten an den Rändern verfälscht werden. Bei längeren Rechenzeitschritten führt dies auf die in der Literatur wohlbekannten, fehlerhaften, numerischen Grenzschichten (engl. ‘numerical boundary layers’)[WL95] [Wetrt]. Wegen der Divergenzfreiheit der homogenen Lösungen, haben sie keinen Einfluß auf den Druckverteilungen¹⁸.

Weitere Entwicklung des Projektionsverfahrens

Bell und Marcus [BM92] haben das BCG-Verfahren [BCG89], das ursprünglich für die inkompressiblen Strömungen mit konstanter Dichte entwickelt wurde, auf die in-

¹⁸Bei der Bestimmung des Drucks im ursprünglichen Projektionsverfahren von Chorin wurden die Divergenzterme der Geschwindigkeits-Korrektur ($\nabla \cdot \delta\mathbf{u}$) noch vernachlässigt. In diesem Fall wird der Druck auch verfälscht.

kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit variabler Dichte erweitert:

$$\begin{aligned} \varrho_t &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\varrho, \\ \mathbf{u}_t + \frac{\nabla p^{(2)}}{\varrho} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\varrho \text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{F}{\varrho}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (4.67)$$

wobei F die äußeren Kräfte bezeichnet. Bei dem Projektionsschritt wurde folgende Zerlegung verwendet:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_d^{n+1} + \Delta t \frac{\nabla \psi^{n+1}}{\varrho^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (4.68)$$

Dies ist eine orthogonale Zerlegung mit Bezug auf ein mit der Dichte gewichtetes, inneres Produkt¹⁹. Das BCG-Verfahren wurde später noch auf das viereckige Gitter [BSS94] und das bewegte viereckige Gitter [TC01] erweitert.

Im Prinzip können die Projektionsalgorithmen mit den beliebigen Methoden für die Raumdiskretisierung kombiniert werden. Auf einem unstrukturierten, dreieckigen Gitter haben Guermond und Quartapelle [GQ97a] [GQ97b] für die inkompressiblen Strömungen mit konstanter und auch variabler Dichte die Projektionsalgorithmen unter der Finite-Elemente Methode vorgestellt. Kobayashi et al. [KPP99] haben ein konservatives Finite-Volumen Projektionsverfahren auf einem hybriden, unstrukturierten Gitter implementiert, und die versetzte Variablenanordnung wurde dabei verwendet. Zang et al. [ZSK94] haben das ABCN-Schema auf einem nichtversetzten, viereckigen Gitter implementiert. Mit der Spektral-Elemente Methode haben Timmermanns et al. [TMV96] die sogenannte *approximierte Projektionsmethode* (engl. 'approximate projection method') untersucht. Hugues et al. [HR98] haben ihr Projektionsschema mit dem Pseudospektral-Verfahren kombiniert.

Bemerkungen:

Das herkömmliche Projektionsverfahren für die inkompressiblen Strömungen vernachlässigt vollständig die Rotationsanteile der Geschwindigkeits-Korrektur im Projektionsschritt, und berücksichtigt keine homogenen Lösungsanteile. Diese Lösungsanteile existieren noch, wenn die tangentialen Ableitungen der Druck-Korrektur an den Rändern nicht verschwinden. Dadurch können sich Verfälschungen des Geschwindigkeitsfelds in der Nähe der Rechenrändern ergeben. Jedoch erlebt der Druck keinen Einfluß davon, weil die homogenen Anteile der Geschwindigkeits-Korrekturen noch divergenzfrei sind. Wenn man die Größe dieses Aufspaltungfehlers (engl. 'time splitting error')

¹⁹Dies bedeutet die Beziehung:

$$\iiint \left(\mathbf{u}_d^{n+1} \cdot \frac{\nabla \psi^{n+1}}{\varrho^{n+\frac{1}{2}}} \right) \varrho^{n+\frac{1}{2}} dV = 0.$$

kleiner als die Größe des zeitlichen Diskretisierungsfehlers einhalten kann, dann kann das herkömmliche Projektionsverfahren doch noch angewandt werden. Dazu gelten folgende Bemerkungen.

1. Wie oben ausführlich erklärt, ist das herkömmliche Projektionsverfahren nicht unabhängig vom abgeschätzten Druck q wegen des fehlenden homogenen Lösungsanteils. Dieser Aufspaltungsfehler hat sein Maximum $\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ am Rand des Rechengebietes. Dabei hat $\mathbf{Z}_{p^{(2)}}$ die Größenordnung $O(\Delta t)$. Um die gewünschte Rechengenauigkeit in der gesamten Algorithmen zu erreichen, muß die geeignete Druck-Korrektur ψ gewählt werden. Wenn wir z. B. einfach Null als q wählen, hat der Druck-Korrektur ψ den Wert mit der Größenordnung $O(1)$. Damit können die Geschwindigkeiten auf keinem Fall zeitlich überall zweite Ordnung erreichen.
2. Um die durch die künstlichen, tangentialen Randbedingungen bedingten Fehler zu verkleinern, haben Kim und Moin [KM85] eine Änderung bei den Randbedingungen der provisorischen Geschwindigkeiten $B(\mathbf{u}^*)$ in der tangentialen Richtungen durchgeführt. Entlang der Ränder muß eigentlich folgendes gelten:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}|_{\partial \Omega} = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*)|_{\partial \Omega} = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{\partial \Omega}. \quad (4.69)$$

Da die Druck-Korrektur ψ bei der Berechnungen der provisorischen Geschwindigkeiten noch nicht bekannt ist, haben sie die in der vorangegangenen Zeitebene n berechneten Werte verwendet:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}^*|_{\partial \Omega} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\partial \psi^n}{\partial \tau})|_{\partial \Omega}. \quad (4.70)$$

Mit diesen Randbedingungen konnten sie die durch die Vernachlässigung der homogenen Lösungsanteile entstehenden Fehler zwar nicht vollständig beseitigen, aber um eine Zeitordnung $O(\Delta t)$ verkleinern. In diesem Fall erreicht der Aufspaltungsfehler sein Maximum $\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\partial(\psi^{n+1} - \psi^n)}{\partial \tau}$. In der Arbeit [AS02] [AS99] von Armfield und Street wurden verschiedene Projektionsalgorithmen und Randbedingungen für die inkompressiblen Strömungen ausführlich untersucht.

4.4.3.2 Kompressible MPV-Druck-Korrektur-Verfahren

Wir wollen nun obige Prädiktor-Korrektor-Typ-Verfahren für den kompressiblen Fall verallgemeinern. Um die Iterationen zu vermeiden, müssen wir dann den Druck und die kinetische Energie zum neuen Zeitpunkt in der Druckgleichung explizit behandeln, wie im früheren Kapitel 3.8 ausführlich diskutiert:

$$\begin{aligned} \varrho^{n+1} &= \mathcal{S}_\varrho, \\ (\overline{\varrho \mathbf{u}})^{n+1} + \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla p^{(2)n+1} &= \mathbf{Z}_d \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \mathcal{S}_\mathbf{u}, \\ \mathbf{M}^2 p^{(2)n+1} + \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^{n+1}) &= -dp^{(0)} + \mathcal{S}_p. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Der Quellterm bei der Druckgleichung \mathcal{S}_p enthält nun alle explizit behandelten Terme inklusive kinetischer Energie zum neuen Zeitpunkt. Mit dem abgeschätzten Druck q und der Randbedingung $B(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} - \mathbf{u}_b^{n+1} = 0$ werden zunächst die provisorischen Geschwindigkeiten berechnet:

$$\varrho^{n+1}\mathbf{u}^* + \mathbf{Z}_{p^{(2)}}\nabla q = \mathbf{Z}_d\nabla^2\mathbf{u}^* + \mathcal{S}_u. \quad (4.72)$$

Durch den Vergleich mit der ursprünglichen Impulsgleichung (4.27) ergibt sich folgende Beziehung:

$$\varrho^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) + \mathbf{Z}_{p^{(2)}}\nabla(p^{(2)n+1} - q) = \mathbf{Z}_d\nabla^2(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*). \quad (4.73)$$

Unter Verwendung des im vorherigen Abschnitt definierten Korrekturansatzes (4.29) und mit der Vektoridentität läßt sich obige Korrektur-Gleichung wie folgt umschreiben:

$$\varrho^{n+1}\delta\mathbf{u} + \mathbf{Z}_{p^{(2)}}\nabla(p^{(2)n+1} - q) = \mathbf{Z}_d\nabla(\nabla \cdot \delta\mathbf{u}) - \mathbf{Z}_d\nabla \times (\nabla \times \delta\mathbf{u}). \quad (4.74)$$

Damit gilt noch folgendes:

$$\varrho^{n+1}\delta\mathbf{u} = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}}\nabla\psi - \mathbf{Z}_d\nabla \times (\nabla \times \delta\mathbf{u}), \quad \delta\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.75)$$

mit

$$\psi = p^{(2)n+1} - q - \frac{\mathbf{Z}_d}{\mathbf{Z}_{p^{(2)}}}\nabla \cdot \delta\mathbf{u}. \quad (4.76)$$

Die exakte Projektion ist jedoch sehr schwierig wegen des Rotationsfeldes der Geschwindigkeits-Korrekturen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \mathbf{Z}_{p^{(2)}}(\varrho^{n+1} + \mathbf{Z}_d\nabla \times \nabla \times)^{-1}\nabla\psi, \\ p^{(2)n+1} &= q + \psi - \mathbf{Z}_d\nabla \cdot [(\varrho^{n+1} + \mathbf{Z}_d\nabla \times \nabla \times)^{-1}\nabla\psi]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Wie beim inkompressiblen Fall vernachlässigen wir zunächst die Rotationsanteile der Geschwindigkeits-Korrekturen. Dann gilt $\varrho^{n+1}\nabla\Phi = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}}\nabla\psi$ und wir erhalten folgende Korrektur-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \mathbf{Z}_{p^{(2)}}\frac{\nabla\psi}{\varrho^{n+1}}, \\ p^{(2)n+1} &= q + \psi - \mathbf{Z}_d\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\psi}{\varrho^{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Wie beim Verfahren von Bell und Marcus [BM92] werden die provisorischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}^* werden entlang den Gradienten eines Skalarpotentials ψ (oder Druck-Korrektur) unter Gewichtung der Dichte projiziert. Die gesuchten Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{u}^{n+1} zum neuen Zeitpunkt, die zusätzlich nicht die Divergenzbedingung sondern die Druckgleichung erfüllen müssen, stehen im allgemeinen nicht orthogonal auf den Gradienten des Skalarpotentials im Gegensatz zum inkompressiblen

Fall. Es handelt sich also um eine schiefe Projektion. Nun setzen wir diese Korrekturgleichungen in die Druckgleichung (4.71) ein. Dann ergibt sich die Gleichung des Skalarpotentials ψ in der Form:

$$\begin{aligned} M^2 \left[\psi - \mathbf{Z}_d \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}} \right) \right] - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \gamma \nabla \cdot \left(\frac{p^e}{\varrho^{n+1}} \nabla \psi \right) = \\ - dp^{(0)} + \mathcal{S}_p - M^2 q - \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^*), \end{aligned} \quad (4.79)$$

mit $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial \Omega} = 0$. Im Vergleich mit der Druck-Korrektur-Gleichung für die Eulergleichungen (3.16) tritt noch zusätzliche Term aus der Wechselwirkung zwischen der Druck-Korrektur und der Viskosität auf. Die Lösungsalgorithmen sind völlig gleich wie beim im letzten Abschnitt ausführlich diskutierten MPV-SIMPLE-Verfahren. Dabei braucht man aber keine äußere Iteration mehr. Dies bringt große Vorteile für die Berechnungen der längeren Zeitschritten der instationären Strömungen. Wir möchten noch einmal betonen, daß keine Rotationsanteile der Geschwindigkeits-Korrekturen bei der Auslegung unseres kompressiblen Projektionsverfahrens berücksichtigt wurden. Wenn diese Rotationsanteile nicht verschwinden, ergibt sich dann ein Konsistenzfehler im Projektionsschritt. In diesem Fall ist unser Lösungsansatz nicht mehr partikulär. Man muß noch beachten, daß dieses Argument noch für den inkompressiblen Fall variabler Dichte gilt. Das Verfahren von Bell und Marcus [BM92] enthält den ähnlichen Konsistenzfehler. Die Rotationsfreiheit unseres Lösungsansatzes ($\nabla \times \nabla \times \frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}} = 0$) kann nur für den folgenden Fälle erfüllt werden.

1. $\nabla \varrho^{n+1} = 0$. Dies entspricht dem inkompressiblen Fall konstanter Dichte.
2. $\nabla \psi = 0$. Dies bedeutet nur eine triviale Lösung.
3. $\nabla \left(\frac{1}{\varrho^{n+1}} \right) \times \nabla \psi = 0$. In diesem Fall müssen die Gradientenvektoren von ψ und ϱ^{n+1} an jedem räumlichen Punkt parallel sein. Dies bedeutet, daß die Flächen konstantes Skalarpotentials ($\psi = konst$) mit den Isochoren (Flächen konstanter Dichte) übereinstimmen. Die Geschwindigkeits-Korrekturen stehen überall senkrecht auf diesen Flächen. Solche Situation nennt man üblich in der Strömungsmechanik *barotrop* und andernfalls *baroklin*.
4. $\nabla \times \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\varrho^{n+1}} \right) \times \nabla \psi \right\} = 0$. Nun verschwindet der barokline Vektor nicht mehr, sondern er ist nur rotationsfrei. Dann muß noch eine skalare Größe ϕ existieren, die folgende Beziehung erfüllt:

$$\nabla \phi = \nabla \left(\frac{1}{\varrho^{n+1}} \right) \times \nabla \psi. \quad (4.80)$$

Beim zweidimensionalen Fall wird diese Bedingung identisch mit der dritten Bedingung.

Unsere Lösungsansatz $\delta \mathbf{u} = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}}$ kann partikulär sein, nur wenn ein rotationsfreier barokliner Vektor existiert. Im Allgemeinen gibt es aber keine Garantie für die Existenz dieser Lösungen.

Exakte kompressible Druck-Korrektur-Verfahren

Außer obigen Konsistenzfehler haben wir auch noch die tangentialen Randbedingungen bei unserem kompressiblen Projektionsverfahren wie beim inkompressiblen Fall vollständig ignoriert. Unter der Annahme von Existenz der exakten partikulären Lösungen formulieren wir nun noch den exakten Korrektorschritt, obwohl in Wirklichkeit die numerische Implementation solcher Algorithmen kaum möglich ist.

- Löse die Druck-Korrektur ψ :

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \cdot \frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}},$$

$$\text{mit den Randbedingungen } \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

Für den kompressiblen Fall sind die Geschwindigkeiten \mathbf{u}^{n+1} im allgemeinen nicht divergenzfrei. Die nötige Divergenzbedingung für die Geschwindigkeiten zum neuen Zeitpunkt kann man noch in der Druckgleichung finden, d. h.

$$\nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^{n+1}) = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \cdot \left(\frac{p^e}{\varrho^{n+1}} \nabla \psi \right) + \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^*).$$

- Löse die Geschwindigkeits-Korrektur $\delta \mathbf{u}$:

$$\varrho^{n+1} \delta \mathbf{u} + \mathbf{Z}_d \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}) = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \nabla \psi, \quad \delta \mathbf{u} \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

Im diesen Rechenschritt muß man außer dem partikulären Lösungsanteil ($\delta \mathbf{u}_p = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}}$) noch die folgenden homogenen Lösungen berücksichtigen:

$$\varrho^{n+1} \delta \mathbf{u}_H + \mathbf{Z}_d \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}_H) = 0,$$

$$\nabla \cdot (\varrho^{n+1} \delta \mathbf{u}_H) = 0,$$

$$\delta \mathbf{u}_H \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

$$\delta \mathbf{u}_H \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\mathbf{Z}_{p^{(2)}}}{\varrho^{n+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_{\partial \Omega}.$$

- Bestimme den neuen Druck:

$$p^{(2)n+1} = q + \psi + \frac{\mathbf{Z}_d}{\mathbf{Z}_{p^{(2)}}} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}.$$

- Bestimme die Geschwindigkeiten zum neuen Zeitpunkt:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}.$$

Im Gegensatz zum inkompressiblen Fall lassen sich die im zweiten Rechenschritt auftauchenden homogenen Gleichungen nicht in die modifizierten Helmholtz-Gleichungen umschreiben. Dennoch sind die physikalischen Eigenschaften der homogenen Lösungen nichts viel anders als sie beim inkompressiblen Fall. Durch die nicht verschwindenden tangentialen Randbedingungen werden solche homogenen Geschwindigkeits-Korrekturen an den Rechenrändern hervorgerufen. Unsere *kompressiblen Projektions-*

oder *Druck-Korrektur-Algorithmen* sind insgesamt eine Erweiterung des im vorangehenden Abschnitt vorgestellten inkompressiblen Projektionsverfahrens für die kompressiblen Strömungen, obwohl wir noch die zusätzliche Konsistenzfehler hinnehmen müssen.

Bemerkungen:

Wir möchten kein exaktes Projektionsverfahren implementieren, sondern den beim kompressiblen Projektionsverfahren auftretenden Aufspaltungsfehler möglichst klein halten. Zur Reduzierung der fehlenden homogenen Geschwindigkeits-Korrekturen kann man die gleiche Methode von Kim und Moin [KM85] wie beim inkompressiblen Fall verwenden. Mit der ähnlichen Vorgehensweise kann man auch die Rotationsfehler der Geschwindigkeits-Korrektur verkleinern. Bei der Korrektur-Beziehungen berücksichtigt man nun ihr Rotationsfeld im vorangegangenen Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \mathbf{Z}_p^{(2)} \frac{\nabla \psi^{n+1}}{\varrho^{n+1}} - \mathbf{Z}_d \frac{\nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}^n)}{\varrho^{n+1}}, \\ p^{(2)n+1} &= q + \psi + \frac{\mathbf{Z}_d}{\mathbf{Z}_p^{(2)}} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Damit reduziert sich der Konsistenzfehler zu $\mathbf{Z}_d \nabla \times [\nabla \times (\delta \mathbf{u}^n - \delta \mathbf{u}^{n+1})]$. Bei der dementsprechenden Druck-Korrektur-Gleichung muß man diese Änderung berücksichtigen:

$$\begin{aligned} M^2 \left[\psi - \mathbf{Z}_d \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}} \right) \right] - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \gamma \nabla \cdot \left(\frac{p^e}{\varrho^{n+1}} \nabla \Psi \right) &= -dp^{(0)} + \mathcal{S}_p - M^2 q \\ - \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^*) + M^2 \frac{\mathbf{Z}_d^2}{\mathbf{Z}_p^{(2)}} \frac{\nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{u}^n)}{\varrho^{n+1}} + \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_d \gamma \nabla \cdot \left[\frac{p^e}{\varrho^{n+1}} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^n) \right]. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Hier treten noch die zusätzliche Wechselwirkungsterme auf. Ihre numerische Implementierungen sind nun keineswegs einfach. Diese Formulierung wird nicht numerisch untersucht, weil wir glauben, daß die Aufspaltungsfehler mit folgenden einfachen Überlegungen bis zur gewünschten Ordnung klein eingehalten werden können. Verwenden wir den Druck zum alten Zeitpunkt ($p^{(2)n}$) als die Abschätzung q für den Druck zum neuen Zeitpunkt im Prädiktorschritt, dann erreicht die provisorische Geschwindigkeit \mathbf{u}^* und auch die Rotationsfehler $\delta \mathbf{u}$ erste Ordnung in Zeit. Dadurch ergeben sich Algorithmen überall erster Ordnung in Zeit. Analog dazu kann man mit der besseren Abschätzung q zeitlich höhere Ordnung erreichen. Beim RK2CN-Verfahren verwendet man den im ersten Stufe errechneten Druck $p^{(2)n+\frac{1}{2}}$ als Druckabschätzung q . Beim SBDF2-Verfahren wird der von den alten Drücken explizit extrapolierten Druck $p^{(2)n+1}$ als die Abschätzung q eingesetzt.

4.4.4 Anwendung auf den natürlichen Konvektionen

Bei den Gleichungen für die natürlichen Konvektionen (2.18)-(2.20) treten noch zusätzliche Terme auf, d. h. Gravitationsterme in den Impulsgleichungen und Wärmeflüsse in der Druckgleichung. Die Schwerkraft in den Impulsgleichungen wird meist explizit behandelt und geht in die Quellterme $\mathcal{S}_{\mathbf{u}}$ auf der rechten Seite mit ein. Die Wärmeflüsse $\frac{\gamma}{\text{PrRe}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$ in der Druckgleichung kann man beim MPV-SIMPLE-Verfahren noch implizit behandeln. Dazu braucht man kaum Modifikationen in den Algorithmen. Bei den iterativen Lösungsvorgängen ermittelt man zunächst die Temperatur aus der Zustandsgleichung und berechnet dann die daraus resultierende Wärmediffusion. Damit kann die Druck-Korrektur-Gleichung gelöst werden.

Beim MPV-Projektionsverfahren diskretisieren wir die Wärmeflüsse explizit. Sonst können wir die aufwendigen Iterationsvorgänge nicht vermeiden, und die Druck-Korrektur-Gleichung wird zu kompliziert. Dann läßt sich die Druck-Korrektur-Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} M^2 \left[\psi - \mathbf{Z}_d \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}} \right) \right] - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \gamma \nabla \cdot \left(\frac{p^e}{\varrho^{n+1}} \nabla \psi \right) = \\ \mathbf{Z}_T \nabla \cdot (\nabla T^e) - dp^{(0)} + \mathcal{S}_p - M^2 q - \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^*). \end{aligned} \quad (4.82)$$

In diesem Fall muß man noch die durch die Wärmediffusion bedingten Zeitschrittweitenbeschränkungen berücksichtigen. Ähnlich wie die zeitliche Beschränkungen bei der expliziten Behandlungen der viskosen Diffusionstermen sind sie proportional zum Quadrat des Kehrwerts der Raumschrittweiten Δx . Wie früher im Kapitel 2 diskutiert, kann eine sehr dünne thermische Grenzschicht bei den Strömungen mit großer Prandtlzahl auftreten. Für solchen extremen Fällen wird unser MPV-Projektionsverfahren nicht mehr effizienter.

Analog dazu kann man unter Umständen die viskosen Diffusionen explizit und die Wärmediffusionen implizit diskretisieren. Wenn sich die Temperatur zum neuen Zeitpunkt durch die Zustandsgleichung umschreiben läßt, dann folgt die Druck-Korrektur-Gleichung:

$$\begin{aligned} M^2 \left[\psi - \mathbf{Z}_T \nabla \cdot \left(\nabla \frac{\psi}{\varrho^{n+1}} \right) \right] - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \gamma \nabla \cdot \left(\frac{p^e}{\varrho^{n+1}} \nabla \psi \right) = \\ \mathbf{Z}_T \nabla \cdot \left(\nabla \frac{p^{(0)n} + dp^{(0)} + M^2 q}{\varrho^{n+1}} \right) - dp^{(0)} + \mathcal{S}_p - M^2 q - \mathbf{Z}_p \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^*), \end{aligned} \quad (4.83)$$

mit den Korrektur-Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{\nabla \psi}{\varrho^{n+1}}, \\ p^{(2)n+1} &= q + \psi. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Nun treten noch die Terme aus der Wechselwirkung zwischen der Druck-Korrektur und der Wärmediffusion auf. Diese Formulierung haben wir leider noch nicht genau untersucht.

Bemerkungen:

Wenn die Materialkoeffiziente, z. B. die Viskosität oder die Wärmediffusivität, nicht konstant sind, wird die Modifizierung der obigen Projektionsalgorithmen zu kompliziert. Man soll dann solche Terme eher explizit behandeln oder iterative Lösungsalgorithmen wie SIMPLE-Verfahren einsetzen.

5 Raumdiskretisierung

Im letzten Kapitel 4 haben wir uns mit der Zeitdiskretisierung beschäftigt. Dabei war das semi-implizite Verfahren von entscheidender Bedeutung, im dem nur die Schallterme implizit behandelt wurden. Damit ist unser Verfahren unbedingt stabil bezüglich der Schallgeschwindigkeit. Nun beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit der Diskretisierung im Raum für die verschiedenen Terme. Bei der Raumdiskretisierung unterscheidet man zwischen upwind- und zentrale Differenzen. Für die nicht-linearen, konvektiven Terme werden explizite upwind Diskretisierungen verwendet. Damit werden die Charakteristiken des hyperbolischen Teils des partiellen Differentialgleichungssystems berücksichtigt. Durch eine zentrale Differenzenapproximation wird dagegen dem elliptischen Charakter der zweiten Ableitungen der dynamischen und auch thermischen Reibungsterme Rechnung getragen.

Um überall ein Verfahren mit höherer Ordnung im Raum zu erzielen, muß man Differenzenapproximationen verwenden, die einen viel breiteren Stützstellen besetzen. Das Lösen der daraus resultierenden impliziten Gleichungssysteme ist sehr viel aufwendiger. Wir geben nur einen Überblick über Verfahren, die aus der Literatur bekannt sind. Danach betrachten wir kurz den Gleichungssystemlöser und das Mehrgitterverfahren. Schließlich behandeln wir die physikalischen Randbedingungen.

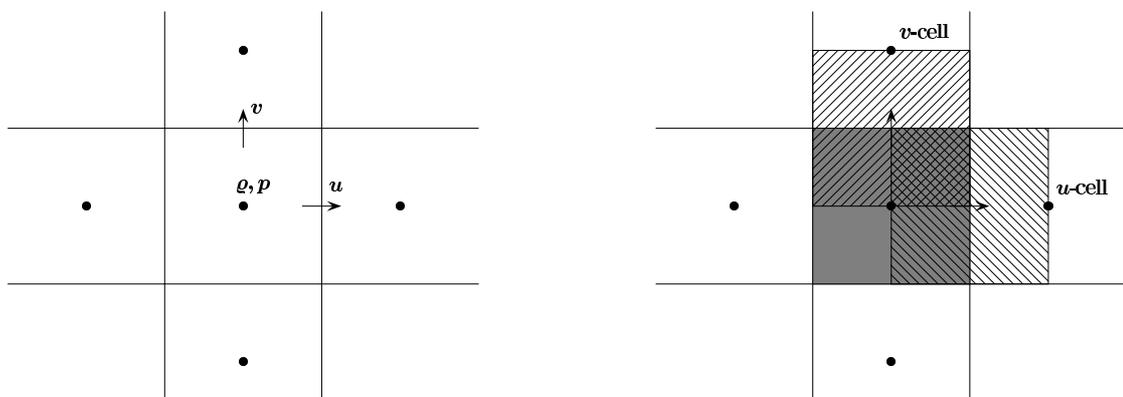


Abbildung 5.1: Versetzte Variablenanordnung

Versetzte Variablenanordnung

Im Fall der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen wird die versetzte (engl. ‘staggered’) oder nichtversetzte (engl. ‘colocated’) Variablenanordnung verwendet. Bei der versetzten Anordnung sind der Druck und die Dichte im Zellmittelpunkt definiert, während die Geschwindigkeiten um eine halbe Gitterschrittweite in Richtung ihrer Koordinaten versetzt sind (vgl. Abb. 5.1). Jedes Verfahren hat Vor- und Nachteile. Für ausführliche Erläuterungen dazu wird auf das Buch von Ferziger und Peric [FP96] verwiesen. Wir verwenden in diesem Kapitel ausschließlich die versetzte Variablenanordnung auf einem kartesischen Gitter. Die nichtversetzte Anordnung wird später im Kapitel 7 unter Berücksichtigung der allgemeinen Koordinaten diskutiert.

5.1 Raumdiskretisierung der Konvektionsterme

Die zentralen Differenzen für die Konvektionsterme berücksichtigen die Flußrichtung der Strömung nicht. Dadurch neigt das Verfahren an starken Gradienten zu Oszillationen, denn, obwohl das Verhalten der Strömung stromabwärts keinen physikalischen Einfluß auf die Konvektion hat, wird bei zentralen Differenzen immer ein Punkt stromabwärts verwendet. Um dies zu vermeiden, wird üblicherweise das Upwind-Verfahren eingesetzt, in dem je nach lokaler Strömungsrichtung eine einseitige Differenz nach links oder rechts gewählt wird. Als Beispiel nehmen wir eine eindimensionale Transportgleichung:

$$\phi_t + f_x = \phi_t + (\phi \mathbf{u})_x = 0. \quad (5.1)$$

Daraus wird bei einem konservativen Schema

$$\phi_t + \frac{\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \phi_t + \frac{(\hat{\phi} \hat{\mathbf{u}})_{i+\frac{1}{2}} - (\hat{\phi} \hat{\mathbf{u}})_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0. \quad (5.2)$$

Dabei wird der numerische Fluß \hat{f} am Zellrand berechnet. Bei der versetzten Variablenanordnung sind die Geschwindigkeiten an den Zellrändern schon gegeben. Für das Upwind-Verfahren ergibt sich daraus folgende allgemeine Formel je nach der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} am Zellrand:

$$(\hat{\phi} \hat{\mathbf{u}})_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} \phi_{i+\frac{1}{2}}^+ & \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^- & \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} < 0, \\ \frac{1}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \phi_{i+\frac{1}{2}}^-) & \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Dabei werden die Werte an den Zellgrenzen ($i + \frac{1}{2}$ oder $i - \frac{1}{2}$) linksseitig (‘+’) oder rechtsseitig (‘-’) approximiert. Obige Formel kann im Fortran-Code einfach wie folgt umgesetzt werden:

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left[(\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \phi_{i+\frac{1}{2}}^-) + \text{DSIGN}(1.0, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}) \cdot (\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ - \phi_{i+\frac{1}{2}}^-) \right]. \quad (5.4)$$

5.1.1 Das Upwind Verfahren erster Ordnung

Setzt man für die Werte an den Zellrändern die Werte genau in der Zellmitte ein, so erreicht das Verfahren räumlich nur erste Ordnung. Dieses Verfahren entspricht einer stückweise konstanten Interpolation:

$$\begin{cases} \phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = \phi_i & \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^- = \phi_{i+1} & \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} < 0, \\ \frac{1}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \phi_{i+\frac{1}{2}}^-) = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_{i+1}) & \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

5.1.2 Das MUSCL Verfahren

Wie im Kapitel 3 kurz erläutert, verwendet dieses Verfahren eine stückweise lineare Interpolation. Man erhält damit räumlich zweite Ordnung:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = \phi_i + \frac{\Delta x}{2} S_{\phi_i}, \quad \phi_{i-\frac{1}{2}}^- = \phi_i - \frac{\Delta x}{2} S_{\phi_i}. \quad (5.6)$$

Dabei repräsentiert S_{ϕ_i} die Steigung in der i -ten Zelle. Diese Steigung muß noch einige Monotonieeigenschaften erfüllen, um Oszillationen an starken Gradienten zu vermeiden. Bei der Simulation verwenden wir eine Klasse von Steigungen, die von Sweby [Swe84] vorgestellt wurde:

$$S_k(a, b) = \text{sign}(a) \cdot \max\{|\text{minmod}(k \cdot a, b)|, |\text{minmod}(a, k \cdot b)|\}. \quad (5.7)$$

Dabei ist die Minmod-Funktion wie folgt definiert:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{für } |a| \leq |b|, ab > 0, \\ b & \text{für } |a| > |b|, ab > 0, \\ 0 & \text{für } ab < 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Mit dem Parameter k wird ein kontinuierlicher Übergang zwischen der Minmod- und der Superbee-Funktion gewährleistet. Der Parameter k muß im Bereich $1 \leq k \leq 2$ liegen. Für den Fall $k = 1$ reduziert sich die Steigung zur Minmod-Funktion und für den Fall $k = 2$ zur komprimierenden Superbee-Funktion.

Es werden der linke (a) und rechte (b) Differenzenquotient berechnet und als Steigung der betragskleinere Wert genommen, falls kein lokales Extremum vorliegt. In diesem Fall wird die Steigung auf Null gesetzt. Dadurch werden lokale Extrema immer weggedämpft, und es ergeben sich keine unerwünschten Oszillationen in den Lösungen. Ausführlichere Erläuterungen über die Eigenschaften verschiedener Steigungsformeln kann man in der Arbeit von Sweby [Swe84] nachschlagen. Das Verfahren kann durch eine stückweise polynomiale Interpolation erweitert werden. In der Literatur [CW84] ist noch das PPM (*'piecewise parabolic method'*)-Verfahren bekannt.

Bemerkung:

Um höhere Ordnung als 2 im Raum zu erzielen, braucht man im allgemeinen eine genauere Interpolation von $\hat{\phi}$ am Zellrand. Für das Verfahren mit versetzter Variablenanordnung reicht dies allerdings nicht aus. In diesem Fall muß man bei der Diskretisierung der Divergenzform f_x noch ein Verfahren höherer Ordnung im Raum verwenden. Dies benötigt leider mehr Stützstellen (engl. ‘stencil’). Als *Stencil* bezeichnet man die Menge der Stützstellen eines Diskretisierungsverfahrens. Zum Beispiel lautet ein konservatives Schema vierter Ordnung im Raum, das vier Stützstellen besitzt:

$$\phi_t + \frac{-(\hat{\phi}\hat{\mathbf{u}})_{i+\frac{3}{2}} + 27(\hat{\phi}\hat{\mathbf{u}})_{i+\frac{1}{2}} - 27(\hat{\phi}\hat{\mathbf{u}})_{i-\frac{1}{2}} + (\hat{\phi}\hat{\mathbf{u}})_{i-\frac{3}{2}}}{24\Delta x} = 0. \quad (5.9)$$

5.1.3 Das ‘Upwind-biased’ Verfahren

Beim reinen Upwind-Verfahren verwendet man nur die Stützstelle stromaufwärts. Dagegen verwendet das sogenannte ‘Upwind-biased’ Verfahren noch einige Stützstellen stromabwärts, aber immer mehr Stützstellen stromaufwärts als stromabwärts. Das ‘Upwind-biased’ Verfahren braucht dadurch weniger Stützstellen als das vollständige Upwind-Verfahren, um die gleiche Genauigkeit zu erzielen¹. Für eine inkompressible DNS (‘Direct numerical simulation’) auf einem äquidistanten Gitter haben Rai und Moin [RM91] folgende ‘Upwind-biased’ Differenzen mit einer Genauigkeit fünfter Ordnung angewandt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = (-6\phi_{i+2} + 60\phi_{i+1} + 40\phi_i \\ \quad - 120\phi_{i-1} + 30\phi_{i-2} - 4\phi_{i-3})/120 \quad \text{für } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^- = (4\phi_{i+3} - 30\phi_{i+2} + 120\phi_{i+1} \\ \quad - 40\phi_i - 60\phi_{i-1} - 6\phi_{i-2})/120 \quad \text{für } \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} < 0. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Wissink [Wis95] hat die charakteristischen Eigenschaften verschiedener Upwind- und auch ‘Upwind-biased’ Diskretisierungen bis zur siebten Ordnung im Raum ausführlich untersucht.

5.1.4 Das ENO Verfahren

In klassischen Verfahren, wie z. B. zentralen Differenzenverfahren, verwendet man eine feste Stützstellenanordnung für die räumliche Diskretisierung ohne irgendeine Auswahlmöglichkeit. Das ENO-Verfahren (engl. ‘essentially non-oscillatory’) [Shu97] erzielt dagegen eine höhere Genauigkeit an der Diskontinuität mit einer geringeren

¹Mit der vollständigen Upwind-Diskretisierung braucht man $2n + 1$ Knotenpunkte, um die n -te Ordnung im Raum zu erzielen, weil die vor- und rückwärtigen Differenzen berücksichtigt werden müssen.

Erzeugung von Oszillationen durch das Konzept der beweglichen Stützstellenauswahl (engl. 'moving stencil'). Die grundlegende Idee liegt darin, daß die Stützstellen von großen Gradienten möglichst ferngehalten werden.

Die Werte $\hat{\phi}$ an den Zellrändern werden durch ein stückweise auf den Zellmittelpunkten definiertes Polynom vom Grad $r - 1$ rekonstruiert. Dieses wird mittels Newton-Interpolation von Polynomen vom Grad r über die Stammfunktionswerte ermittelt, die dann abgeleitet werden.

Für eine Approximation von $\hat{\phi}$ wird eine Funktion $h(x)$ so definiert, daß ihr Mittelwert in $[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}]$ den Anfangsdaten ϕ entspricht:

$$\phi(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi. \quad (5.11)$$

Dann gilt noch:

$$\phi(x)_x = \frac{\hat{\phi}(x + \frac{\Delta x}{2}) - \hat{\phi}(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{h(x + \frac{\Delta x}{2}) - h(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}. \quad (5.12)$$

Schießlich ist unsere Aufgabe, die $h(x_i + \frac{\Delta x_i}{2})$ so zu bestimmen, daß die $\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}}$ in hoher Ordnung approximiert werden. Die Funktion h wird über eine Rekonstruktion via Stammfunktion H gewonnen. Als Stammfunktion wird H folgendermaßen eingeführt:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(\xi) d\xi. \quad (5.13)$$

Somit gilt:

$$H(x_{i+\frac{1}{2}}) = \int_{-\infty}^{x_{i+\frac{1}{2}}} h(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} h(\xi) d\xi = \Delta x \sum_{j=-\infty}^i \phi_j. \quad (5.14)$$

Mit den gegebenen Zellmittelwerten ϕ_j werden die Stammfunktionswerte $H(x)$ an den Zellrändern exakt berechnet. Diese Werte kann man nun mittels Newton-Interpolation interpolieren, die auf dividierten Differenzen beruht.

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ läßt sich in den Stützstellen x_i , $i \in \{k, \dots, n\}$ durch das Polynom $p_{k, \dots, n}(x)$ folgendermaßen interpolieren:

$$p_{k, \dots, n}(x) = D_k + D_{k+1}(x - x_k) + D_{k+2}(x - x_k)(x - x_{k+1}) + \dots + D_n \prod_{i=k}^{n-1} (x - x_i) \quad (5.15)$$

mit den dividierten Differenzen D_n

$$D_n = f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_i], \quad (5.16)$$

die folgendermaßen rekursiv definiert sind:

$$f[x_k] := f(x_k), \quad (5.17)$$

$$f[x_k, \dots, x_n] := (f[x_{k+1}, \dots, x_n] - f[x_k, \dots, x_{n-1}]) / (x_n - x_k).$$

Sei nun $Q(x, H)$ eine Interpolation von h am Punkt $x_{i+\frac{1}{2}}$ vom Grad r , so daß

$$Q(x_{i+\frac{1}{2}}, H) = H(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (5.18)$$

erfüllt ist. Außerdem sei

$$\frac{d}{dx}Q(x, H) = \frac{d}{dx}H(x) + O(\Delta x^r). \quad (5.19)$$

Das Newtonsche Interpolationspolynom vom Grad $r + 1$ ist gegeben durch

$$Q(x, H) = \sum_{m=0}^r H[x_{i(j)-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i(j)+m-\frac{1}{2}}] \prod_{n=i(j)}^{i(j)-1+m} (x - x_{n-\frac{1}{2}}). \quad (5.20)$$

Dabei brauchen die Stammfunktionswerte H nicht explizit berechnet zu werden, da der Zusammenhang

$$H[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] = \frac{H(x_{i+\frac{1}{2}}) - H(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \phi_i \quad (5.21)$$

zwischen den dividierten Differenzen von H und den Zellmitteln ϕ besteht. Da die Ableitung der Interpolationspolynome gesucht ist, ist es sinnvoll, bei einer Implementierung gleich die Ableitung des Newtonschen Interpolationspolynoms

$$\frac{d}{dx}Q(x, H) = \sum_{m=1}^{r-1} H[x_{i(j)-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i(j)+m-\frac{1}{2}}] \sum_{l=0}^{m-1} \prod_{n=i(j), n \neq l}^{i(j)-1+m} (x - x_{n-\frac{1}{2}}). \quad (5.22)$$

zu berechnen. Dabei bezeichnet $i(j)$ den Index an der linken Intervallgrenze für die Zelle j . Diese Interpolation wird mit $r+1$ benachbarten, nicht äquidistanten Stützstellen konstruiert. Durch die Wahl der $i(j)$ ergeben sich somit $r+1$ Wahlmöglichkeiten für den Stencil. Bei den ENO-Verfahren werden die Stützstellen so ausgewählt, daß die dividierten Differenzen möglichst kleine Werte aufweisen, somit die Ableitungen klein sind. Das Schema lautet:

1. Setze $i_1(j) = j$. Damit ist die Gerade durch $H(x_{i_1(j)-\frac{1}{2}})$ und $H(x_{i_1(j)+\frac{1}{2}})$ das eindeutig bestimmte Polynom, das diese zwei Punkte interpoliert.
2. Um $i_{k+1}(j)$ zu wählen, für $k = 1, \dots, r-1$, betrachte die dividierten Differenzes Stellsatzes indiziert durch $i_k(j)$, um je eine Stützstelle nach links und nach rechts erweitert. Erweitere den Stützstellensatz in die Richtung, in der die dividierten Differenzen betragsmäßig kleiner sind.
3. Ist $k = r-1$, dann setze $i(j) = i_k(j)$.

Das ENO-Verfahren vermeidet somit eine Approximation über starke Gradienten hinweg, indem die Richtung, in welche neue Stützpunkte dynamisch zum Stencil hinzugefügt werden, entsprechend gewählt wird. Gerade die automatische Auswahl der Stützstellen ist aber programmtechnisch mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden.

5.1.5 Das WENO Verfahren

Im Gegensatz zum klassischen ENO-Verfahren werden beim sogenannten gewichteten (engl. 'weighted') ENO-Verfahren [JS96] [Shu97] alle Stencil gemittelt, die aufgrund der Anzahl der Punkte an Stützstellen möglich sind. Die Gewichtungsfaktoren dieser Mittelung werden so bestimmt, daß an Diskontinuitäten nur die Stencil in die Gewichtung eingehen, die in glatten Gebieten liegen, während in vollständig glatten Gebieten alle Stencil so kombiniert werden, daß die Differenzenformel höchstmögliche Ordnung besitzt.

Der Stencil $S_r(i)$ der Länge k enthält folgende Stützstellen:

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\}, \quad r = 0, \dots, k-1. \quad (5.23)$$

Erst berechnet man die Rekonstruktionen $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ für alle möglichen Stützstellen. Für die neue Approximation am Zellrand verwendet das WENO-Verfahren eine konvexe Kombination:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r \phi_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}. \quad (5.24)$$

Entscheidend für den Erfolg des WENO-Verfahrens ist die Auswahl der Gewichtsfunktion ω_r . Für die Stabilität und Konsistenz müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\omega_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1. \quad (5.25)$$

Für die Gewichtsfunktion gelten noch [Shu97]:

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s}, \quad \alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, \quad r = 0, \dots, k-1, \quad (5.26)$$

wobei ϵ eine kleine Konstante (üblicherweise $\epsilon = 10^{-6}$) bezeichnet, die die Division durch Null verhindert. Die positiven Konstanten d_r sind die optimalen Gewichte, mit denen in glatten Gebieten höchstmögliche Ordnung der Interpolation im Raum erzielt wird:

$$\begin{cases} d_0 = 1 & \text{for } k = 1, \\ d_0 = 2/3, d_1 = 1/3 & \text{for } k = 2, \\ d_0 = 0.3, d_1 = 0.6, d_2 = 0.1 & \text{for } k = 3. \end{cases} \quad (5.27)$$

Die β_r sind ein sogenanntes Maß für die Glätte (engl. 'smooth indicator') des Stencils $S_r(i)$. Für $k = 2$ gelten folgende Formeln [JS96]:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (\phi_{i+1} - \phi_i)^2, \\ \beta_1 &= (\phi_i - \phi_{i-1})^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Für $k=3$ gelten

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{13}{12}(\phi_i - 2\phi_{i+1} + \phi_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\phi_i - 4\phi_{i+1} + \phi_{i+2})^2, \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\phi_{i-1} - \phi_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(\phi_{i-2} - 2\phi_{i-1} + \phi_i)^2 + \frac{1}{4}(\phi_{i-2} - 4\phi_{i-1} + 3\phi_i)^2.\end{aligned}\quad (5.29)$$

5.1.6 Das kompakte Differenzen Verfahren

Eine andere Klasse von hochauflösenden Verfahren bilden die kompakten oder auch Pade-Verfahren, welche die Differenzen der Variablen global, implizit entlang von Linien berechnen. Lele [Lel92] erweiterte diese Verfahren in Anlehnung an Spektralverfahren mit dem Ziel, ein möglichst breites Spektrum von Skalen aufzulösen. Insbesondere zeigt das kompakte Verfahren bessere Auflösung für kurze Längenskalen, d. h. die hochfrequenten Wellenanteile. Um die Unstetigkeit ohne Oszillationen richtig aufzulösen, kombinierten Adams und Shariff [AS96] ein kompaktes Verfahren mit einem ENO-Verfahren. Deng und Maekawa [DM97] untersuchten die sogenannte kompakte adaptive Interpolation. Für die Interpolation der Variablen an den Zellrändern ($\phi_{i+\frac{1}{2}}^+$, $\phi_{i+\frac{1}{2}}^-$) wird die links- und rechtsseitige kompakte Interpolationsformel verwendet. Deng und Maekawa haben folgende tridiagonale kompakte Interpolation fünfter Ordnung verwendet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\phi_{i-\frac{1}{2}}^- + \phi_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{10}\phi_{i+\frac{3}{2}}^- &= \frac{1}{10}\phi_{i-1} + \phi_i + \frac{1}{2}\phi_{i+1} - \frac{12}{5!}h^5 + O(h^6), \\ \frac{1}{10}\phi_{i-\frac{1}{2}}^+ + \phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{2}\phi_{i+\frac{3}{2}}^+ &= \frac{1}{2}\phi_i + \phi_{i+1} + \frac{1}{10}\phi_{i+2} + \frac{12}{5!}h^5 + O(h^6).\end{aligned}\quad (5.30)$$

5.2 Raumdiskretisierung der Diffusions- und Schalterme

Diffusionsterme

Wir haben nur den Laplace-Anteil der Reibungsterme implizit behandelt, wie in Kapitel 4 kurz erwähnt:

$$\frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{3\text{Re}}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^n).\quad (5.31)$$

Die Diskretisierung dieser Terme und auch der Wärmediffusionsterme erfolgt mit zentralen Schemata. Unter dem Einsatz der zentralen Differenzen zweiter Ordnung in Raum lautet z. B. die u -Impulsgleichung auf dem äquidistanten Gitter:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\text{Re}}\left[(u_{i+\frac{3}{2},j}^{n+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1})/\Delta x^2 + (u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n+1})/\Delta y^2\right] + \\ \frac{1}{3\text{Re}}\left[(u_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n)/\Delta x^2 + (v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n)/\Delta x\Delta y\right].\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ein implizites Gleichungssystem in Form eines Fünf-Punkte-Sterns im zweidimensionalen Fall. Dagegen ergibt sich eine Systemmatrix mit sieben, besetzten Diagonalen im dreidimensionalen Fall. Bei der Diskretisierung vierter Ordnung erhält man eine Matrix mit dreizehn, bzw. im dreidimensionalen Fall mit neunzehn Diagonalen. Die Differenzenformel vierter Ordnung ist im Anhang B angegeben.

Schallterme

Der Druckterm $\nabla p^{(2)}$ in der Impulsgleichung wird zentral, der Divergenzterm $\nabla \cdot \rho \mathbf{u}$ dagegen mit einem Upwind-Verfahren diskretisiert. Bei der Druck-Korrektur-Gleichung tritt noch folgender Laplace-Term auf:

$$\nabla \cdot \left(\frac{p^e}{\rho^{n+1}} \nabla \Psi \right). \quad (5.32)$$

Mit Anwendung der zentralen Differenzen zweiter Ordnung lautet er:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^e}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} \frac{(\Psi_{i+1} - \Psi_i)}{\Delta x_{ui}} - \frac{p_{i-\frac{1}{2}}^e}{\rho_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}} \frac{(\Psi_i - \Psi_{i-1})}{\Delta x_{ui-1}} \right] + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\frac{p_{j+\frac{1}{2}}^e}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} \frac{(\Psi_{j+1} - \Psi_j)}{\Delta y_{vj}} - \frac{p_{j-\frac{1}{2}}^e}{\rho_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}} \frac{(\Psi_j - \Psi_{j-1})}{\Delta y_{vj-1}} \right],$$

wobei $\Delta x_{ui} = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$ und $\Delta y_{vj} = 0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})$ den Abstand zwischen zwei benachbarten Zellzentren in x - und y -Richtung bezeichnen. An den Zellrändern wird die Dichte durch zentrale Interpolation und der Druck dagegen durch Upwind-Interpolation gewonnen. Damit ergibt sich ein weiteres schwachbesetztes Gleichungssystem mit gleicher Bandbreite wie bei den oben erläuterten Diffusionstermen.

5.3 Raumdiskretisierung höherer Ordnung

Einige Verfahren höherer Ordnung im Raum für inkompressible Strömungen sind in der Literatur bereits bekannt. Wir geben einen kurzen Überblick über diese Methoden. Wie oben erklärt, verwendet man für jeden einzelnen Term eine Differenzenapproximation höherer Ordnung, die einen viel breiteren Stützstellen besitzt. Damit wird der Diskretisierungsfehler bei jedem Differentialoperator bis zur gewünschten Ordnung reduziert. Die daraus resultierenden impliziten Gleichungssysteme sind jedoch viel aufwendiger.

Rai und Moin [RM91] haben für die konvektiven Terme die nichtkonservative Form verwendet und mit dem ‘Upwind-biased’ Verfahren 5-ter Ordnung approximiert. Der Diskretisierungsfehler führender Ordnung dieses Verfahrens ist dissipativ. Damit verlieren die hochfrequenten Anteile der aufgelösten Skalen mit der Zeit ihre Energie. Es führt somit zu keiner numerischen Instabilität. Für die Diffusionsterme haben sie zentrale Differenz 6-ter Ordnung verwendet und für den Divergenz- und Gradienten-Operator zentrale Differenz 4-ter Ordnung. Tafti [Taf96] hat die konservative Form

der konvektiven Terme sowie verschiedene Kombinationen unterschiedlicher Genauigkeit für den Divergenz- und Laplace-Operator untersucht. Morinishi et al. [MLVM98] haben ein Finite-Differenzen Schema 4-ter Ordnung auf dem äquidistanten versetzten Gitter entwickelt, das die Erhaltungseigenschaft für die Masse, den Impuls und die Energie gewährleistet. Sie haben dabei auch gezeigt, daß Finite-Differenzen Schemata auf dem nichtversetzten Gitter die Erhaltung der kinetischen Energie nicht gewährleisten können. Vasilyev [Vas00] hat die Arbeit von Morinishi et al. auf dem nichtäquidistanten Gitter erweitert. Nicoud [Nic00] hat das Schema von Morinishi et al. für die ‘low-Mach number’ Gleichungen implementiert.

Um die höhere Ordnung im Raum zu erzielen, wurde ein anderer Versuch von Verstappen und Veldman [VV97] [VV98] durchgeführt. Die Genauigkeit 4-ter Ordnung im Raum wird mit der Richardson-Extrapolation des Verfahrens von Harlow und Welch [HW65] erzielt, das die Symmetrieeigenschaft bei der Diskretisierung sehr gut erhält und damit die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie gleichzeitig gewährleistet. Die konvektive Terme müssen insbesondere schiefssymmetrisch (engl. ‘skewsymmetric’) diskretisiert werden, um die kinetische Energie nach der Zeit richtig zu erhalten. Sie haben zuerst das Verfahren zweiter Ordnung nach Harlow und Welch durchgeführt, dann dasselbe auf dem in x - und y -Richtung jeweils dreimal größeren Kontrollvolumen wiederholt. Für das äquidistante Gitter ist der führende Diskretisierungsfehler auf dem größeren Volumen genau neunmal so groß wie auf dem ursprünglichen Volumen. Zieht man ein Achtel der auf dem ursprünglichen Volumen gewonnenen Ergebnisse von neun Achtel der Ergebnisse auf dem größeren Volumen ab, verschwinden die Terme zweiter Ordnung in den Diskretisierungsfehlern. Damit erhält man insgesamt ein Verfahren vierter Ordnung im Raum. Dieses Verfahren ist sehr effizient in der Rechenzeit. Mit diesem Verfahren muß man zweimal ein Gleichungssystem mit fünf Diagonalen lösen, d. h. einmal auf dem ursprünglichen und noch einmal auf dem größeren Kontrollvolumen. Dies ist jedoch günstiger als das einmalige Lösen des Gleichungssystems mit viel größer Bandbreite, z. B. dreizehn Diagonalen im zweidimensionalen Fall.

5.4 Gleichungssystemlöser

Nun werden die Lösungsstrategien des Gleichungssystems kurz zusammengestellt. Ausführliche Erläuterungen findet man im Buch von Saad [Saa00] oder Meister [Mei99]. Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Raumdiskretisierungen führen zu dünn besetzten linearen Gleichungssystemen der Form:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{5.33}$$

Dabei ist die Anzahl der linearen Gleichungen dieses Systems gleich der Anzahl der Gitterzellen. Damit ist die Effizienz der Gleichungssystemlöser entscheidend für die Gesamteffizienz des Verfahrens. Die Matrix \mathbf{A} ist im allgemeinen schwach besetzt und hat Bandstruktur. Nur die von Null verschiedenen Einträge in der Matrix bilden Bänder, die parallel zu der Diagonalen der Matrix stehen. Ferner ist die Matrix \mathbf{A} symmetrisch sowohl für die Diffusionsgleichung als auch für die Druckgleichung beim äquidistanten Fall. Dagegen wird \mathbf{A} unsymmetrisch beim nichtäquidistanten Fall.

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme stehen direkte und iterative Methoden zur Verfügung. Aus mehreren Gründen werden die direkten Methoden in der numerischen Strömungsmechanik kaum eingesetzt. Wegen der großen Anzahl der zur Lösung nötigen Operationen können sich Genauigkeitsprobleme durch Rundungsfehler ergeben. Ein weiterer Grund ist der sehr hohe Speicherplatzbedarf und das starke Ansteigen der notwendigen Rechenoperationen mit wachsender Anzahl von Gleichungen. Daher werden nahezu ausschließlich iterative Verfahren zur Lösung des obigen Gleichungssystems eingesetzt.

Ein generelles, iteratives Schema kann wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{x}^{\nu+1} = \mathbf{x}^{\nu} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^{\nu} - \mathbf{b}) = \mathbf{M}\mathbf{x}^{\nu} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad (5.34)$$

wobei ν den Iterationsschritt und \mathbf{B} eine nichtsinguläre Matrix bezeichnet. Die Matrix \mathbf{B} sollte möglichst folgende Eigenschaft besitzen: Die Matrix \mathbf{B} sollte eine gute Approximation von \mathbf{A} sein, dadurch kann eine schnelle Konvergenz erzielt werden, und die Inverse \mathbf{B}^{-1} sollte leicht berechenbar sein. Die Konvergenzrate des Verfahrens wird durch den betragsmäßig größten Eigenwert, d. h. durch den Spektralradius, der Iterationsmatrix \mathbf{M} bestimmt. Zu diesem Algorithmus gehören die klassischen Splitting-Verfahren, z. B. Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren. Eine weitere Klasse von iterativen Lösungsverfahren sind die unvollständigen LU-Zerlegungen (engl. '*ILU = incomplete lower-upper decomposition*'), d. h. Zerlegungen in eine untere und obere Dreiecksmatrix. Die Zerlegung erfolgt nicht exakt, sondern nur die Besetzungsstruktur bleibt erhalten. Diese Verfahren sind sehr effizient, weil die Gleichung (5.33) durch Vorwärtseinsetzen und Rückwärtssubstitution aufgelöst werden kann, ohne daß \mathbf{B}^{-1} berechnet werden muß. Einige Varianten des ILU-Verfahrens werden im Anhang C vorgestellt und ihre Vektorisierung kurz diskutiert.

5.4.1 CG-Typ Verfahren

Eine weitere Klasse von Gleichungslösern sind die sogenannten konjugierten Gradienten-Verfahren (engl. '*Conjugate Gradients*'). Sie wurden zunächst für symmetrisch positiv definite Matrizen entwickelt. In jüngerer Zeit wurden auf diesem Gebiet Weiterentwicklungen für allgemeine Matrizen durchgeführt. Für unsymmetrische

Matrizen kann man etwa CGS- (*Conjugated Gradient Square*) oder das BICGSTAB-Verfahren (*BiConjugated Gradient Stabilized*) einsetzen.

Die Konvergenz von CG-Verfahren kann durch die Wahl einer geeigneten Vorkonditionierung (oder Präkonditionierung) des Gleichungssystems deutlich verbessert werden. Dabei spielt die sogenannte Konditionszahl eine wichtige Rolle. Ist die Matrix normal, d. h. $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$, so gilt

$$\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}, \quad (5.35)$$

falls λ_n den betragsgrößten und λ_1 den betragskleinsten Eigenwert der Matrix \mathbf{A} bezeichnet. Für eine genauere Definition der Konditionszahl und ihr Verhältnis zur Konvergenzeigenschaft der CG-Typ Verfahren wird auf das Buch von Meister [Mei99] verwiesen. Im allgemeinen gilt, daß das Gleichungssystem mit kleinerer Konditionszahl schneller konvergiert. Liegt ein Gleichungssystem vor, bei dem die Matrix eine sehr große Konditionszahl besitzt, dann transformiert man das ursprüngliche Gleichungssystem in ein äquivalentes System mit Hilfe einer invertierbaren Matrix \mathbf{P}

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b}. \quad (5.36)$$

Der CG-Algorithmus wird dann auf dieses vorkonditionierte Problem angewandt. Die Matrix \mathbf{P} sollte aus Rechenzeitsgründen einfach berechenbar sein und aus Effektivitätsgründen eine möglichst gute Approximation der Inversen der Matrix \mathbf{A} darstellen, so daß $\text{cond}(\mathbf{P}\mathbf{A}) \ll \text{cond}(\mathbf{A})$ gilt. Als Vorkonditionierung werden die bereits oben beschriebenen iterativen Verfahren häufig eingesetzt. Als Beispiel geben wir den Algorithmus des einfachsten CG-Verfahrens in Tab. 5.1 [FP96].

1. gegeben: \mathbf{x}^0 ;
2. $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0$; $\mathbf{p}^0 = 0$; $s^0 = 10^{30}$;
3. **for** $k = 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz **do**

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{z}^k &= \mathbf{r}^{k-1}; \\ s^k &= \mathbf{r}^{k-1} \cdot \mathbf{z}^k; \\ \beta^k &= s^k / s^{k-1}; \\ \mathbf{p}^k &= \mathbf{z}^k + \beta^k \mathbf{p}^{k-1}; \\ \alpha^k &= s^k / (\mathbf{p}^k \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}^k); \\ \mathbf{x}^k &= \mathbf{x}^{k-1} + \alpha^k \mathbf{p}^k; \\ \mathbf{r}^k &= \mathbf{r}^{k-1} - \alpha^k \mathbf{A}\mathbf{p}^k; \end{aligned}$$

4. **enddo**

Tabelle 5.1: Pseudocode des CG-Verfahrens

Dabei bezeichnet \mathbf{r}^k das Residuum, \mathbf{p}^k die Suchrichtung, \mathbf{z}^k den provisorischen Vektor in der k -ten Iteration. Die Wahl des Vorkonditionierungsoperators $\mathbf{M}(= \mathbf{P}^{-1})$ legt die Strategie der Vorkonditionierung fest. Wird für \mathbf{M} die Einheitsmatrix gewählt, so ergibt sich das Standard-CG-Verfahren. Eine umfangreiche Diskussion von iterativen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme und die dazugehörigen Vorkonditionierungsstrategien ist in [Saa00] finden. Ratzel [Rat03] hat die Effizienz verschiedener Vorkonditionierer und ihre Vektorisierungsmöglichkeit ausführlich untersucht.

5.4.2 Mehrgitterverfahren

Der Zeitbedarf aller konventionellen Methoden zur Lösung von elliptischen Gleichungssystemen wächst mit zunehmender Gittergröße überproportional. Ein CG-Verfahren erfordert einen Aufwand $O(n^{1.5})$, wobei n die Anzahl der Unbekannten ist. Insbesondere für größere Gitterzellenzahlen, z. B. im dreidimensionalen Fall, bedeutet dies einen unangemessenen Aufwand. Die Ursache hierfür liegt darin, daß die meisten Lösungsverfahren besonders effizient nur die Fehlerkomponenten glätten, deren Fourierkomponente in der Größenordnung der Maschenweite des Gitters liegt. Dadurch werden die kurzwelligen, hochfrequenten Anteile des Fehlers (oder Defektes) schnell korrigiert. Der Fehler weist nach der Defekt-Korrektur nur noch langwellige, niederfrequente Anteile auf. Es wirkt bei graphischer Darstellung *glatter*. In diesem Kontext wird die Berechnung der Defekt-Korrektur auf einem Gitter als *Glättung* bezeichnet.

Die Grundidee des Mehrgitterverfahren besteht darin, durch einen Iterationsprozeß auf einer Hierarchie von sukzessive vergrößerten Gittern auch die langwelligen Fehleranteile effizient zu eliminieren. Mit solchen Mehrgitterverfahren kann der Rechenaufwand bis auf $O(n)$ reduziert werden.

Der Mehrgitter-Algorithmus besteht aus folgenden Restriktions- und Prolongations-Schritten (vgl. Tab. 5.2): Zuerst wird das Gleichungssystem auf dem feinsten Gitter vorgeglättet, und sein Residuum ermittelt. Dieses Feingitterresiduum $\delta\mathbf{b}_l$ auf dem l -ten Gitter wird mittels eines linearen Restriktionsoperator \mathbf{R}_l auf das nächst gröbere Gitter $l - 1$ übertragen. Dort wird das Residuum weiter als rechte Seite des linearen Grobgitterproblems verwendet. Die Defekt-Korrektur $\delta\mathbf{x}_{l-1}$ auf dem Grobgitter wird mit Null initialisiert und dann mit nur wenigen Iterationen eines vorher beschriebenen Glättungsverfahrens berechnet. Anschließend werden die letzten beiden Schritte wiederholt, bis das größte Gitter erreicht wird. Vom größten Gitter aus wird nun die Defekt-Korrektur auf das nächst feinere Gitter prolongiert und dort zur bestehenden Defekt-Korrektur addiert. Diese verbesserte Lösung wird dann nochmals nachgeglättet.

```

Subroutine MG( $\mathbf{x}_l, \mathbf{b}_l, l$ )
  if ( $l == 0$ ) then  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_0$ ;           exakte Lösung
  else
    {
       $\mathbf{x}_l = \mathbf{S}_{pre}(\mathbf{x}_l, \mathbf{b}_l)$ ;           Vorglättung
       $\delta\mathbf{b}_l = \mathbf{b}_l - \mathbf{A}_l\mathbf{x}_l$ ;    $\delta\mathbf{b}_{l-1} = \mathbf{R}_l(\delta\mathbf{b}_l)$ ;   Restriktion  $\mathbf{R}$ 
       $\delta\mathbf{x}_{l-1} = 0$ ;
    }

    for ( $i = 0; i < \gamma; i ++$ )
      call MG( $\delta\mathbf{x}_{l-1}, \delta\mathbf{b}_{l-1}, l - 1$ );   Lösung in der groben Gitter

    {
       $\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_l + \mathbf{P}_l(\delta\mathbf{x}_l)$ ;           Prolongation  $\mathbf{P}$ 
       $\mathbf{x}_l = \mathbf{S}_{post}(\mathbf{x}_l, \mathbf{b}_l)$ ;       Nachglättung
    }

  endif
End Subroutine MG

```

Tabelle 5.2: Pseudocode des Mehrgitterverfahrens

Restriktion:

Eine Grobgitterzelle besteht aus acht kleinen Feingitterzellen im dreidimensionalen Fall, bzw. vier im zweidimensionalen Fall. Vom feinen Gitter auf das nächst größere überträgt die Restriktion den Defekt des Gleichungssystems, der die langwelligen Fehlermoden beinhaltet. Die Restriktion wird durch eine lineare Mittelwertbildung definiert. Als Gewichtungsfaktor verwendet man das Volumen der einzelnen Feingitterzellen:

$$\begin{aligned}
 V_g(i, j, k) \cdot g(i, j, k) &= V_f(2i - 1, 2j - 1, 2k - 1) \cdot f(2i - 1, 2j - 1, 2k - 1) \\
 &+ V_f(2i, 2j - 1, 2k - 1) \cdot f(2i, 2j - 1, 2k - 1) \\
 &+ V_f(2i - 1, 2j, 2k - 1) \cdot f(2i - 1, 2j, 2k - 1) \\
 &+ \dots, \\
 V_g &= \Sigma V_f.
 \end{aligned}$$

Dabei steht der Index g für den Wert auf dem Grobgitter, f für den Wert auf dem Feingitter. Mit V_g werden die Volumina des Grobgitters und mit V_f die Volumina des Feingitters bezeichnet. Für den äquidistanten Fall läßt sich obige Formel zur folgenden einfachen Form in Stencil-Notation reduzieren:

$$[R]_{3d} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_{2d} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Prolongation:

Die Prolongation bildet die auf dem groben Gittern berechnete Defekt-Korrektur auf das nächst feinere Gitter ab. Ein Grobquader, dessen acht Ecken den Mittelpunkten der acht umliegenden Grobgitterzellen entsprechen, enthält immer acht Mittelpunkte der Feingitterzellen im dreidimensionalen Fall. Der Wert in der Feingitterzelle wird aus den Werten auf den Ecken des Grobquaders ermittelt. Eine geometrische bilineare Interpolation wird dabei verwendet:

$$\begin{aligned}
 f(i_{pkts}, j_{pkts}, k_{pkts}) &= [V_{esb} \cdot g(i, j + 1, k + 1) + V_{wsb} \cdot g(i + 1, j + 1, k + 1) \\
 &\quad + V_{enb} \cdot g(i, j, k + 1) + V_{wnb} \cdot g(i + 1, j, k + 1) \\
 &\quad + V_{est} \cdot g(i, j + 1, k) + V_{wst} \cdot g(i + 1, j + 1, k) \\
 &\quad + V_{ent} \cdot g(i, j, k) + V_{wnt} \cdot g(i + 1, j, k)] / V_g, \\
 i_{pkts} &= 2i \quad \text{oder} \quad 2i + 1, \\
 j_{pkts} &= 2j \quad \text{oder} \quad 2j + 1, \\
 k_{pkts} &= 2k \quad \text{oder} \quad 2k + 1.
 \end{aligned}$$

Dabei bedeutet V_g das Volumen des Grobquaders und V_{esb}, \dots sein Teilvolumen. Das Teilvolumen, z. B. V_{esb} ist das Volumen des Teilquaders, dessen Diagonale zwischen den Mittelpunkten der Feingitterzelle und der östlichen, südlichen und unteren Ecke des Grobquaders liegt. Für den äquidistanten Fall gelten folgende Stencil-Formeln:

$$[P]_{3d} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 & 3 \\ 9 & 27 & 27 & 9 \\ 9 & 27 & 27 & 9 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \tag{5.38}$$

$$[P]_{2d} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

Bemerkungen:

- Beim Mehrgitterverfahren muß man die Systemmatrix \mathbf{A} auf jedem Grobgitter berechnen, das meistens von den geometrischen Größen abhängig ist. Dadurch kann der Mehrgitterlöser, anders als CG-Typ oder andere Gleichungssystemlöser, nicht allgemein wie eine ‘Blackbox’ für beliebige Gleichungssysteme verwendet werden.
- Beim Projektionsverfahren muß die Druck-Korrektur-Gleichung sehr genau gelöst werden. Damit kann die Druckgleichung (oder Divergenzbedingung) gut

erfüllt werden. Man muß daher das Abbruchkriterium sehr klein, normalerweise kleiner als den Diskretisierungsfehler, wählen. Beim iterativen Verfahren wie SIMPLE-Algorithmus braucht man noch zusätzliche äußere Iterationen. In jeder äußeren Iteration muß die Druckgleichung nur in dem Maße erfüllt sein, in dem auch die Geschwindigkeiten eine vorläufige Lösung der Impulsgleichungen darstellen. Damit stellt das iterative Verfahren geringere Anforderungen an den linearen Gleichungssystemlöser. Als Abbruchkriterium genügt eine Reduzierung des Anfangsresiduums um eine Größenordnung. Beim iterativen Verfahren wird daher der Mehrgitter-Algorithmus oft für die äußere Iteration eingesetzt.

5.5 Randbedingungen

Zur Lösung für ein bestimmtes Problem sind auch Anfangs- und Randbedingungen nötig. Randbedingungen werden mit Hilfe von Dummy-Zellen vorgegeben, in denen die Gleichungen nicht gelöst werden, auf deren Werte jedoch bei der Berechnungen der inneren Zellen zugegriffen wird. Dabei werden die Randzellen so vorbelegt, daß der Mittelwert auf dem Rand, gebildet aus den Werten der Zellen innerhalb und außerhalb des Rechengebietes, die Randbedingungen erfüllt. Im Prinzip sind drei Arten von Randvorgaben möglich. Im Falle von periodischen Randbedingungen sollen dieselben Werte an gegenüberliegenden Rändern vorliegen. Bei Dirichlet-Randbedingungen wird ein fester Wert auf dem Rand vorgeschrieben, und bei Neumann-Randbedingungen wird die Normalenableitung über den Rand vorgegeben.

	WALL	INFLOW	OUTFLOW	REFLEC
$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$	inh. Dir.	hom. Dir.	hom. Neu.	hom. Neu.
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$	hom. Dir.	inh. Dir.	hom. Neu.	hom. Dir.
ρ	hom. Neu.	inh. Dir.	hom. Neu.	hom. Neu.
p	hom. Neu.	hom. Neu.	inh. Dir.	hom. Neu.

Tabelle 5.3: Physikalisch sinnvolle Randvorgaben für $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, ρ und p

In Tabelle 5.3 sind einige typische physikalische Randbedingungen angegeben. Mit den ‘WALL’-Bedingungen werden die reibungsbehafteten Wände realisiert. ‘REFLEC’-Bedingungen kann man für symmetrische Grenzen oder reflektierende Wände benutzen. ‘INFLOW’-Bedingungen gelten für den Einlaßrand und ‘OUTFLOW’-Bedingungen für den Auslaß. Für die Druck-Korrekturen sind bei den ‘OUTFLOW’-Bedingungen homogene Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben. Ansonsten werden überall homogene Neumann-Randbedingungen vorgeschrieben.

6 Numerische Validierung

In diesem Abschnitt werden die im vorherigen Kapitel eingeführten Algorithmen auf einige numerische Beispiele mit verschiedener globaler Mach-Zahl angewandt. Für die Euler-Gleichungen lösen wir zunächst zweidimensionale Riemannprobleme mit globaler Machzahl $M = 1$. Damit untersuchen wir die Auflösungseneigenschaft unserer Algorithmen an starken Unstetigkeiten. Im schwachkompressiblen Regime ($M = 0.05$) betrachten wir die Wirbelentstehung durch die Wechselwirkung zwischen langwelligen akustischen Druckstörungen und kleinskaligen Strukturen von Strömungen. Anschließend lösen wir einen fallenden inkompressiblen Tropfen mit einem großen Dichtunterschied von $1000 : 1$. Für die Navier-Stokes-Gleichungen betrachten wir eine inkompressible aufsteigende Blase und eine Rayleigh-Taylor-Instabilität. Beide Strömungen werden durch die Schwerkraft wegen der unterschiedlichen Dichte induziert. Als Beispiel schwachkompressibler Strömungen behandeln wir die natürliche Konvektion in einer Box. Wir diskutieren noch die numerische Implementierung von MHD-Strömungen und einige Beispiele dazu.

6.1 Ergebnisse für die Euler-Gleichungen

6.1.1 Zweidimensionale Riemannprobleme

Im Kapitel 3 haben wir einige eindimensionale Riemannprobleme ausführlich untersucht. Dabei wurde die Möglichkeiten und Grenzen unserer Rechenalgorithmen für Strömungen höherer Machzahl diskutiert. Zweidimensionale Riemannprobleme sind dem eindimensionalen Fall sehr ähnlich. Die konstanten Anfangsdaten sind in jedem Quadranten angegeben. Dadurch darf nur eine elementare Welle, d. h. ein eindimensionaler Stoß (S), eine eindimensionale Verdünnungswelle (R) oder eine eindimensionale Kontaktunstetigkeit (J) an jeder Grenzfläche auftreten. Für ein kompressibles Gas lauten die Anfangswerten:

$$M = 1; \quad (p, \varrho, u, v)(x, y) = (p_i, \varrho_i, u_i, v_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (6.1)$$

wobei i den i -ten Quadranten bezeichnet. Dabei gibt es 19 verschiedene mögliche Konfigurationen für polytropisches Gas [LL98]. Davon wollen wir nun einige Fälle

nachrechnen und die Güte unserer Lösungen überprüfen. Bei der Simulation wurde das Projektionsverfahren auf 400 äquidistanten Gitterzellen, d. h. $\Delta x = 0.0025$, angewandt. Die Zeitschrittweiten werden mit dem Bezug auf die Schallgeschwindigkeit bestimmt. Analog zum eindimensionalen Fall verwenden wir RK2CN-Verfahren für die Zeitintegration und ein MUSCL-Schema mit Superbee-Funktion für die Upwind-Diskretisierung. Dabei ist der Steigungsparameter κ als 1.0 angenommen. Als Randbedingungen werden homogenen Neumann-Bedingungen für alle Variablen gewählt. Die Bilder in Abb. 6.1 zeigen die Konturlinien der Dichte.

Konfiguration 6: $J_{21}^-, J_{32}^+, J_{34}^-, J_{41}^+$: Die Anfangswerte sind

$$\begin{aligned} p_1 = 1 & \quad \varrho_1 = 1 & \quad u_1 = 0.75 & \quad v_1 = -0.5 \\ p_2 = 1 & \quad \varrho_2 = 2 & \quad u_2 = 0.75 & \quad v_2 = 0.5 \\ p_3 = 1 & \quad \varrho_3 = 1 & \quad u_3 = -0.75 & \quad v_3 = 0.5 \\ p_4 = 1 & \quad \varrho_4 = 3 & \quad u_4 = -0.75 & \quad v_4 = -0.5 \end{aligned}$$

Konfiguration 7: $\overrightarrow{R}_{21}, J_{32}^-, J_{34}^-, \overrightarrow{R}_{41}$: Die Anfangswerte sind

$$\begin{aligned} p_1 = 1 & \quad \varrho_1 = 1 & \quad u_1 = 0.1 & \quad v_1 = 0.1 \\ p_2 = 0.4 & \quad \varrho_2 = 0.5197 & \quad u_2 = -0.6259 & \quad v_2 = 0.1 \\ p_3 = 0.4 & \quad \varrho_3 = 0.8 & \quad u_3 = 0.1 & \quad v_3 = 0.1 \\ p_4 = 0.4 & \quad \varrho_4 = 0.5197 & \quad u_4 = 0.1 & \quad v_4 = -0.6259 \end{aligned}$$

Konfiguration 8: $\overleftarrow{R}_{21}, J_{32}^-, J_{34}^-, \overleftarrow{R}_{41}$: Die Anfangswerte sind

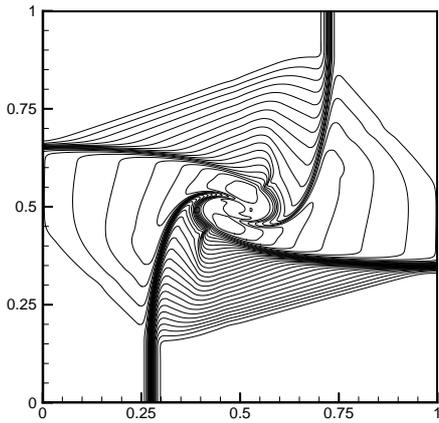
$$\begin{aligned} p_1 = 0.4 & \quad \varrho_1 = 0.5197 & \quad u_1 = 0.1 & \quad v_1 = 0.1 \\ p_2 = 1 & \quad \varrho_2 = 1 & \quad u_2 = -0.6259 & \quad v_2 = 0.1 \\ p_3 = 1 & \quad \varrho_3 = 0.8 & \quad u_3 = 0.1 & \quad v_3 = 0.1 \\ p_4 = 1 & \quad \varrho_4 = 1 & \quad u_4 = 0.1 & \quad v_4 = -0.6259 \end{aligned}$$

Konfiguration 12: $\overrightarrow{S}_{21}, J_{32}^-, J_{34}^-, \overrightarrow{S}_{41}$: Die Anfangswerte sind

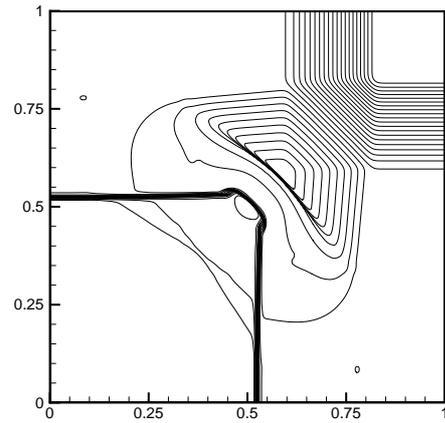
$$\begin{aligned} p_1 = 0.4 & \quad \varrho_1 = 0.5313 & \quad u_1 = 0 & \quad v_1 = 0 \\ p_2 = 1 & \quad \varrho_2 = 1 & \quad u_2 = 0.7276 & \quad v_2 = 0 \\ p_3 = 1 & \quad \varrho_3 = 0.8 & \quad u_3 = 0 & \quad v_3 = 0 \\ p_4 = 1 & \quad \varrho_4 = 1 & \quad u_4 = 0 & \quad v_4 = 0.7276 \end{aligned}$$

Konfiguration 15: $\overrightarrow{S}_{21}, J_{32}^-, J_{34}^-, \overleftarrow{S}_{41}$: Die Anfangswerte sind

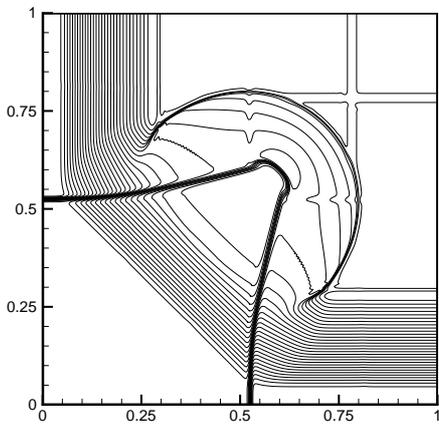
$$\begin{aligned} p_1 = 1 & \quad \varrho_1 = 1 & \quad u_1 = 0.1 & \quad v_1 = -0.3 \\ p_2 = 0.4 & \quad \varrho_2 = 0.5197 & \quad u_2 = -0.6259 & \quad v_2 = -0.3 \\ p_3 = 0.4 & \quad \varrho_3 = 0.8 & \quad u_3 = 0.1 & \quad v_3 = -0.3 \\ p_4 = 0.4 & \quad \varrho_4 = 0.5313 & \quad u_4 = 0.1 & \quad v_4 = -0.4276 \end{aligned}$$



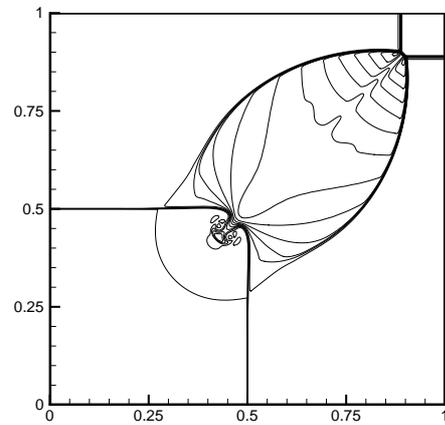
(a) Konfiguration 6 zum Zeitpunkt $t = 0.3$.



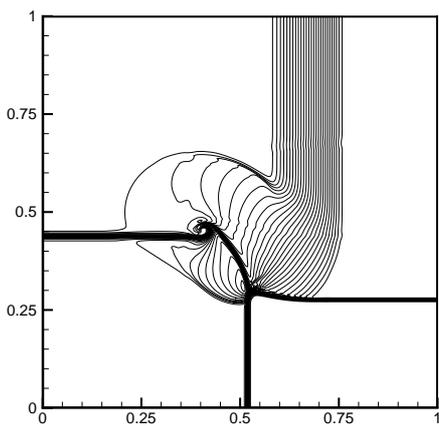
(b) Konfiguration 7 zum Zeitpunkt $t = 0.25$.



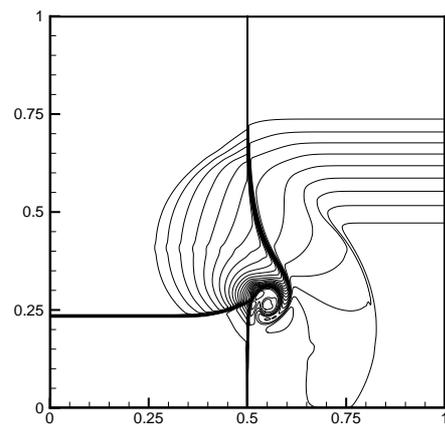
(c) Konfiguration 8 zum Zeitpunkt $t = 0.25$.



(d) Konfiguration 12 zum Zeitpunkt $t = 0.25$.



(e) Konfiguration 15 zum Zeitpunkt $t = 0.2$.



(f) Konfiguration 17 zum Zeitpunkt $t = 0.3$.

Abbildung 6.1: Zweidimensionales Riemannproblem mit Projektionsverfahren, MUSCL-Schema und RK2CN-Verfahren bei $M=1$.

Konfiguration 17: J_{21}^- , \overleftarrow{S}_{32} , J_{34}^- , \overrightarrow{R}_{41} : Die Anfangswerte sind

$$\begin{aligned} p_1 = 1 & \quad \varrho_1 = 1 & \quad u_1 = 0 & \quad v_1 = -0.4 \\ p_2 = 1 & \quad \varrho_2 = 2 & \quad u_2 = 0 & \quad v_2 = -0.3 \\ p_3 = 0.4 & \quad \varrho_3 = 1.0625 & \quad u_3 = 0 & \quad v_3 = 0.2145 \\ p_4 = 0.4 & \quad \varrho_4 = 0.5197 & \quad u_4 = 0 & \quad v_4 = -1.1259 \end{aligned}$$

Ähnlich zum eindimensionalen Fall in Kapitel 3 beobachten wir Oszillationen über den Kontaktunstetigkeiten oder bei der starken Expansionen wie in Abb. 6.1(c). Wie schon erklärt, liegt der Grund dafür an der versetzten Variablenanordnung. Ansonsten sind unsere Lösungen vergleichbar mit den Ergebnissen anderer Autoren [KT02] [LL98].

6.1.2 Wirbelentstehung durch langwellige Akustik

Dieser Testfall zeigt die Wirbelentstehung durch die Wechselwirkung zwischen langwelligeren akustischen Druckstörungen und kleinskaligen Strukturen von Strömungen bei niedrigerer Machzahl. Folgende Anfangsdaten sind gegeben [Ger97]:

$$\begin{aligned} \varrho(x, y, 0) &= \bar{\varrho}_0 + M\tilde{\varrho}_0^{(1)} \cdot 0.5 \cdot (1.0 + \cos(\pi x/L)) + \Phi(y), \\ p(x, y, 0) &= \bar{p}_0 + M\tilde{p}_0^{(1)} \cdot 0.5 \cdot (1.0 + \cos(\pi x/L)), \\ u(x, y, 0) &= \tilde{u}_0 \cdot 0.5 \cdot (1.0 + \cos(\pi x/L)), \\ v(x, y, 0) &= 0.0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

für die Machzahl $M = 0.05$ im Gebiet $-L \leq x \leq L = 1/M$, $0 \leq y \leq L_y = 2L/5$ mit den Konstanten

$$\bar{\varrho}_0 = 1.0, \quad \bar{p}_0 = 1.0$$

und

$$\tilde{\varrho}_0^{(1)} = 0.4, \quad \tilde{p}_0^{(1)} = 2\gamma, \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = 2\sqrt{\gamma}.$$

Die Funktion $\Phi(y)$ ist definiert als

$$\Phi(y) = \begin{cases} 2\tilde{\varrho}_0^{(1)} \frac{y}{L_y} & 0 \leq y \leq L_y/2, \\ 2\tilde{\varrho}_0^{(1)} \left(\frac{y}{L_y} - 1 \right) & L_y/2 \leq y \leq L_y. \end{cases}$$

Sie beschreibt eine in y -Richtung sägezahnartig geschichtete Dichteverteilung, mit einem Sprung von $\varrho = 1.4$ nach $\varrho = 0.6$. Obige Daten beschreiben also den periodischen Wellenzug eines nach rechts in x -richtung über die sägezahnartige Dichteverteilung laufenden langwelligeren akustischen Druckpulses mit der Amplitude γM . Mit 400×80 Gitterzellen und doppelt periodischen Randbedingungen wurde die numerische Simulation durchgeführt. Dabei benutzen wir das SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration und ein MUSCL-Schema für die Upwind-Diskretisierung mit Steigungsparameter $\kappa = 1.4$.

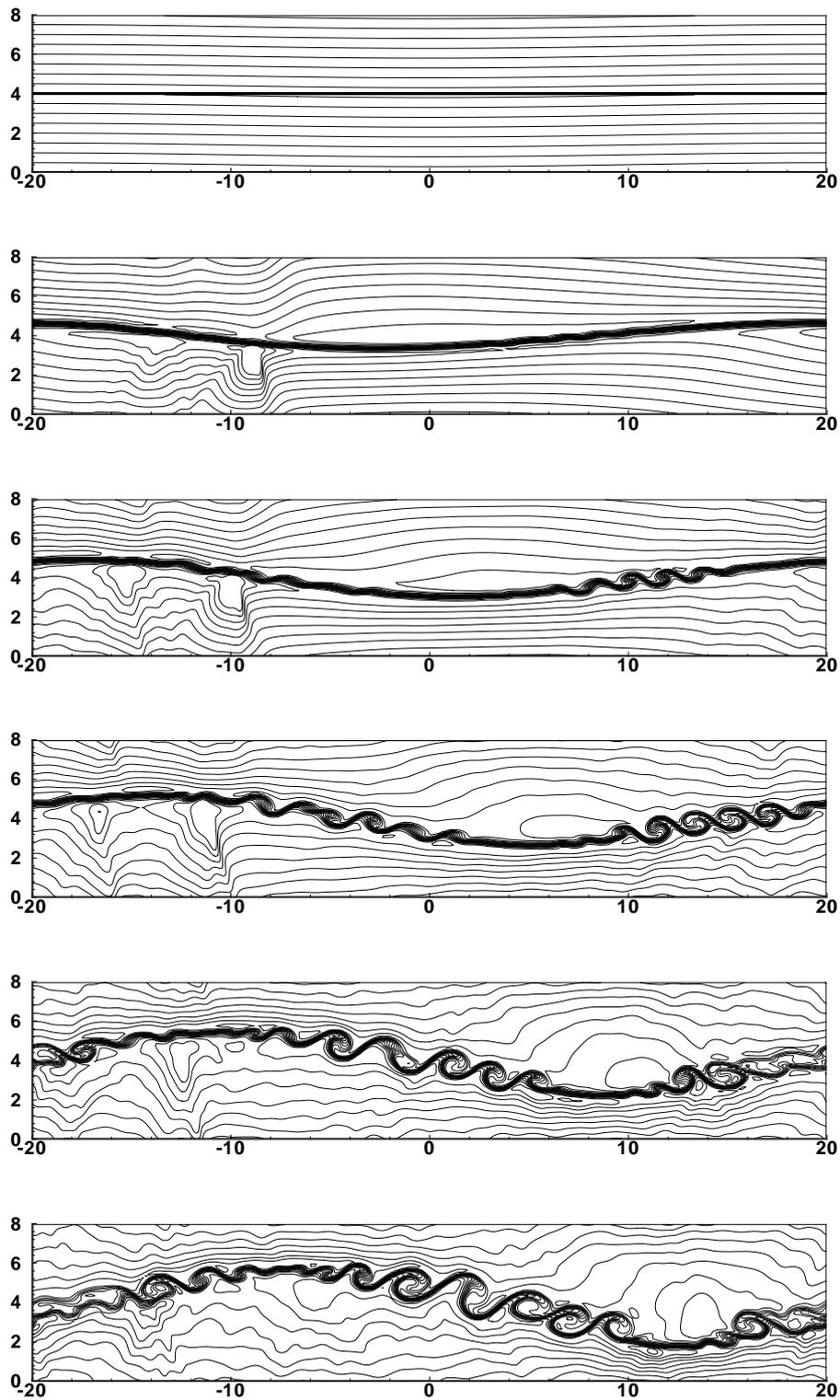


Abbildung 6.2: Wirbelentstehung durch langwellige akustische Druckwellen mit dem MUSCL-Schema und dem SBDF2-Verfahren zu den Zeitpunkten $t=0, 7, 10, 13, 16, 19$ bei $M = 0.05$. Konturlinien: Dichte = $0.65, 0.7, \dots, 1.45$.

Die zu Beginn horizontale Trennschicht ist wirbelfrei. Die benachbarten Fluide unterschiedlicher Dichte in der Nähe der Trennschicht wurden mit verschiedenen Geschwindigkeiten von den akustischen Druckstörungen beschleunigt. Entlang der Trennschicht bildet sich dann eine Rotationsbewegung. Dies führt zur Kelvin-Helmholtz-Instabilität, wobei langwellige sinusförmige Scherschichten erzeugt werden, und die akustischen Wellen setzen sie weiter in Bewegung. Die sinusförmigen Scherschichten werden nun ihreseits instabil an den Flanken wegen der größeren Dichteänderung. Dadurch entstehen kleine Wirbelstrukturen und wachsen sehr schnell. Dies ist also ein Beispiel, wie langwellige akustische Druckstörungen Energie auf das kleinskalige Strömungsfeld übertragen und dabei Wirbel erzeugen. Abb. 6.2 stellt die Dichteverteilung zu verschiedenen Zeiten dar.

6.1.3 Inkompressibler fallender Tropfen

Hier wird ein fallender Tropfen der Dichte $\varrho_T = 1000$ in einer Umgebung der Dichte $\varrho_L = 1$ betrachtet. Wir vernachlässigen den Reibungseinfluß und die Oberflächenkraft. Hier werden also die Euler-Gleichungen unter dem Einfluß der Schwerkraft ($Fr = 1$) berechnet. Bei der Simulation verwenden wir ein MUSCL-Schema mit Steigungsparameter $\kappa = 1.4$ und das SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration. Für die Zeitschrittweite wird die Courant-Bedingung mit Bezug auf die Geschwindigkeit $|\mathbf{u}| + c$ verwendet.

Zweidimensionaler Fall:

Das Rechengebiet hat die Größe 1×2 Einheiten und wird mit 128×256 Gitterpunkten aufgelöst. Die Trennschicht Luft/Wasser liegt in der Höhe 1. Der Tropfen mit Radius $R_T = 0.2$ befindet sich zu Beginn der Simulation an der Stelle $(x_0 = 0.5, y_0 = 1.75)$ des Gebietes. Dann lauten die Anfangsdaten [SBGK99]:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1000.0 & \text{für } 1.0 \leq y \leq 2.0 \quad \text{und} \quad 0.0 \leq r \leq 0.2, \\ 1.0 & \text{für } 0.0 \leq y \leq 1.0 \quad \text{oder} \quad 0.2 \geq r, \end{cases}$$

$$p(x, y) = 1.0, \quad \mathbf{u}(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 1.75)^2}.$$

Bei der Simulation wird die Trennschicht zwischen Wassertropfen und Luft mit einer tanh-Funktion verschmiert:

$$\varrho(r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \tanh [\varrho_0 (r - R_T)] \quad (6.3)$$

mit dem Dichteverhältnis $\beta = \frac{\varrho_L}{\varrho_T}$ und dem Parameter $\varrho_0 = 300$. Damit lassen sich die unregelmäßigen Dichteschwankungen an der Trennschicht vermeiden, die bei der

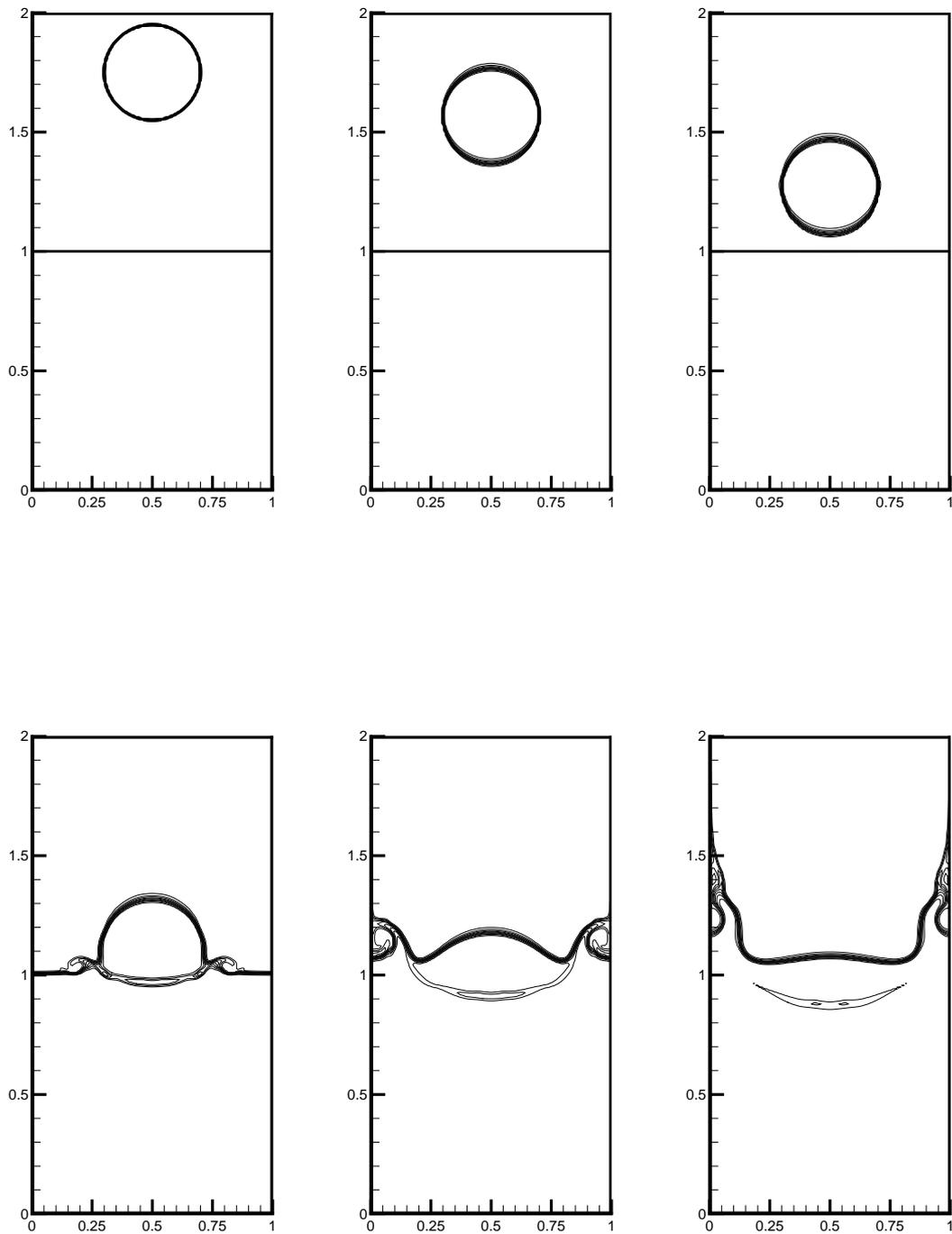


Abbildung 6.3: Ein fallender Wassertropfen durch Luft auf eine Wasserfläche mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren zu den Zeitpunkten $t=0, 0.6, 0.975, 1.125, 1.275, 1.475$ bei $M = 0$. Konturlinien: Dichte = 100, 200, \dots , 900.

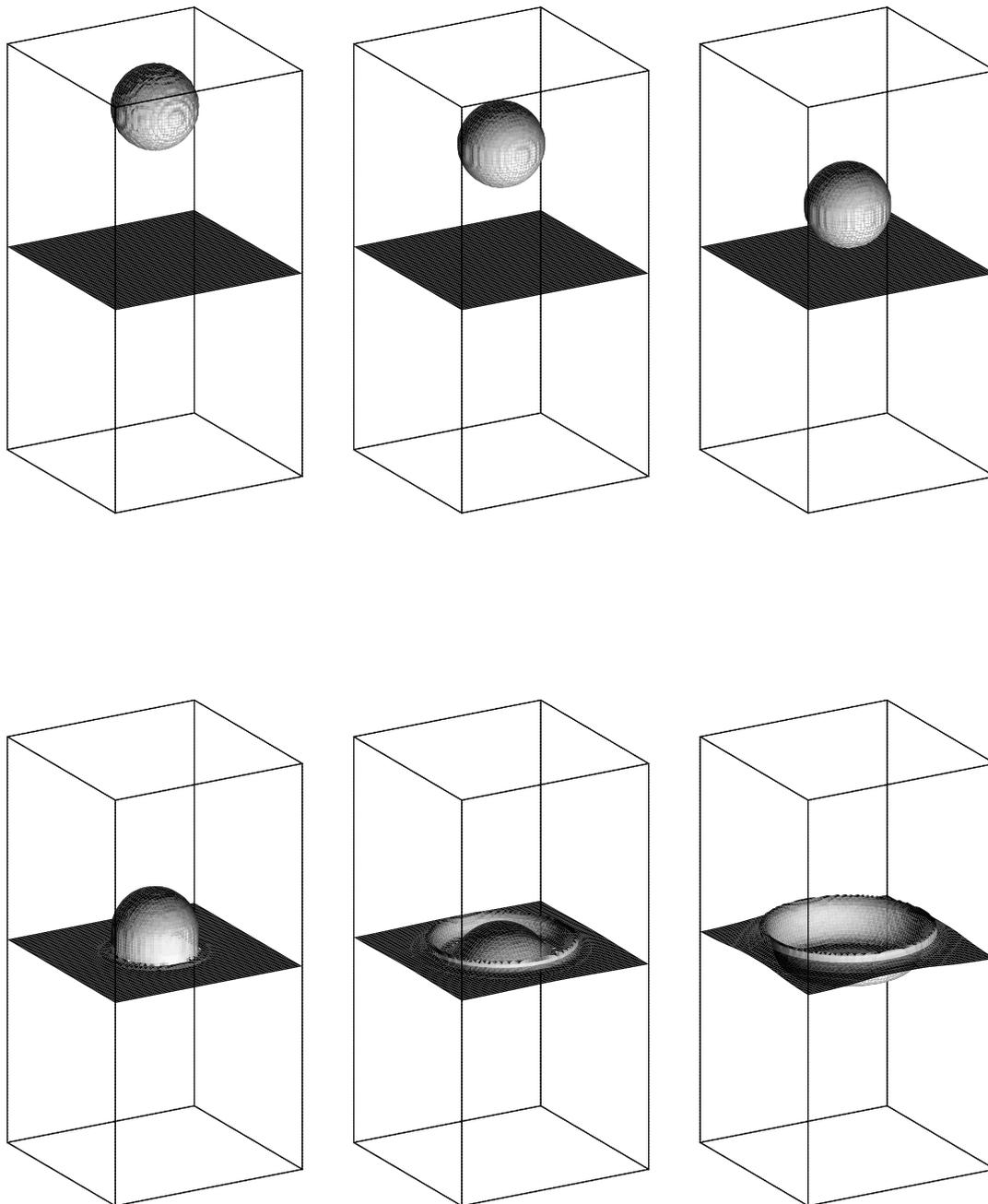


Abbildung 6.4: Ein fallender Wassertropfen durch Luft auf eine Wasserfläche mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren zu den Zeitpunkten $t=0, 0.6, 0.975, 1.125, 1.275, 1.475$ bei $M = 0$: Isofläche $\varrho = 500$.

Berechnung oft zur Oszillation der Dichte führen. Es muß beachtet werden, daß die Koeffizienten in den Matrizen der linearen Gleichungssysteme Sprünge von drei Größenordnungen aufweisen. Als Randbedingungen werden oben und unten reflektierende Wände gewählt sowie periodische Ränder in horizontaler Richtung.

Abb. 6.3 zeigt die Dichteverteilung zu verschiedenen Zeiten. Während des Falls verformt sich der Tropfen kaum, weil der schwere Tropfen bei dem Impulsaustausch mit der Luft nur geringfügig beschleunigt werden kann. Dies ist anders als die Auftriebsbewegung der leichten Luft in einem schweren Fluid, die wir als nächstes Beispiel näher betrachten werden. In diesem Fall verformt sich die Kontur des hinteren Teils der bewegenden Luft sehr stark konkav. Die Dichte verschmiert sich jedoch stärker am oberen und unteren Rand als an den seitlichen Rändern. Beim Auftreffen des Tropfens auf die Trennfläche entstehen Wasserwellen in der Trennschicht. Dadurch können kleine Luftblasen (engl. ‘trapped air bubbles’) [PAB⁺97] unter der Wasseroberfläche eingeschlossen werden. Dieser Vorgang hängt von der Größe und Geschwindigkeit des auftreffenden Tropfens ab. Diese eingeschlossenen Luftblase werden vermutet als eine wichtig Quelle für das Geräusch des Regens unter Wasser.

Dreidimensionaler Fall:

Dies ist eine einfach Erweiterung des vorherigen zweidimensionalen Falls auf drei Raumdimensionen. Das Rechengitter besteht aus $64 \times 64 \times 128$ Zellen. Die Anfangsdaten und Randbedingungen sind wie beim zweidimensionalen Fall. Am Anfang steht der Tropfen nun an der Stelle $(x_0 = 0.5, y_0 = 0.5, z_0 = 1.75)$ und der Radius lautet:

$$r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + (z - 1.75)^2}.$$

Abb. 6.4 zeigt die zeitliche Entwicklung der Isofläche $\varrho = 500$ der Dichte. Die Höhe der Wasserwellen zu einem späten Zeitpunkt im dreidimensional Fall ist jedoch geringer als die im zweidimensionalen Fall.

6.2 Ergebnisse für die Navier-Stokes-Gleichungen

6.2.1 Inkompressible aufsteigende Blase

Eine Blase der Dichte $\varrho_b = 0.1$ wird in einem Fluid der Dichte $\varrho_f = 1.0$ betrachtet. Die Blase hat einen Radius von $r_b = 0.25$ und befindet sich zu Beginn der Rechnung an der Stelle $(x_0 = 1, y_0 = 0.5)$ des Gebietes der Größe 2×2 Einheiten. Dieses wird durch ein äquidistantes Gitter der Größe 128×128 Zellen aufgelöst. Das Dichteverhältnis

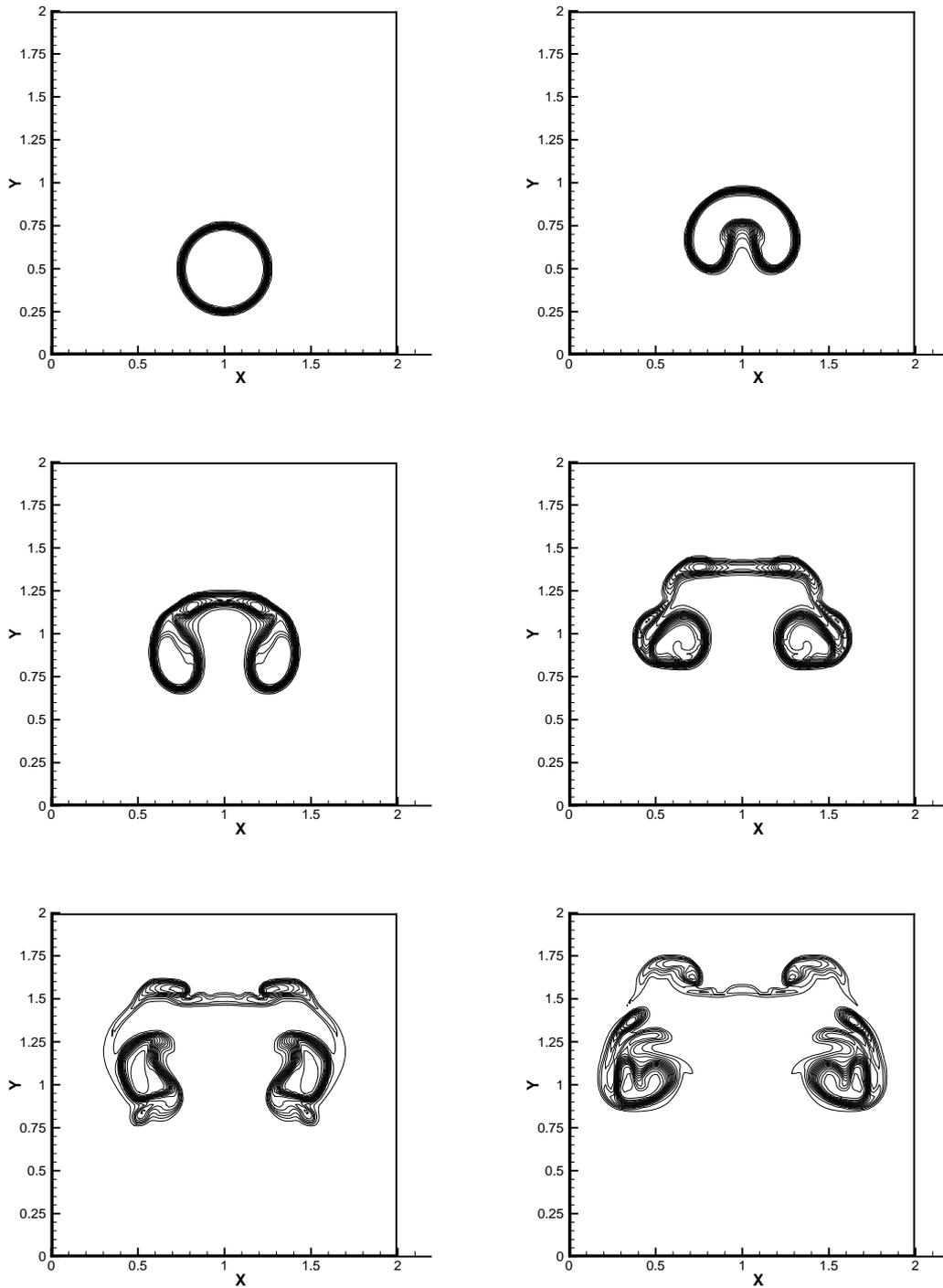


Abbildung 6.5: Eine aufsteigende Blase mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren zu den Zeiten $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ bei $M = 0$ und $Re = 1000$. Konturlinien: Dichte= 0.15, 0.2, ..., 0.95.

beträgt $\beta = \varrho_f/\varrho_b = 10$, und die anfängliche Dichteverteilung [Rid94] [Ger97] der Blase ist gegeben durch

$$\varrho(r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \tanh[\varrho_0(r - r_b)], \quad \varrho_0 = 60. \quad (6.4)$$

Analog zum fallenden Tropfen wird der Rand der Blase durch die tanh-Funktion über einige Gitterzellen verschmiert. Wir betrachten eine inkompressible, reibungsbehaftete Strömung mit $Re = 1000$. Für die folgende numerische Simulation wurde das SBDF2-Verfahren und MUSCL-Schema mit dem Steigungsparameter $\kappa = 1.4$ verwendet. Als Randbedingungen werden feste, reibungsbehaftete Wände oben und unten sowie periodische Ränder in horizontaler Richtung gewählt. Wir verwenden die Zeitschrittweitenbedingung mit Bezug auf die Geschwindigkeit $|\mathbf{u}| + c$ wie beim fallenden Wassertropfen.

Abb. 6.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der typischen pilzkopfformigen Struktur der Blase. Der untere Rand der Blase wird schneller beschleunigt als der obere Rand. Während des weiteren Anstiegs wird das Zentrum der Blase gestreckt, und die Blase zerfällt eventuell in zwei Teile. Die Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit denen von anderen Autoren [Rid94].

6.2.2 Inkompressible Rayleigh-Taylor-Instabilität

Wenn ein Fluid mit schwerer Dichte ϱ_h über einem leichteren Fluid der Dichte ϱ_l liegt, und der Vektor der Gravitationskraft nach unten weist, wird die horizontale Trennschicht zwischen beiden Fluiden instabil. Kleine Störungen in der Trennschicht wachsen exponentiell an. Diese durch die unterschiedlichen Dichten bedingte Instabilität heißt *Rayleigh-Taylor-Instabilität*. Das schwere Fluid drückt nach unten und bildet dabei längliche Ausbuchtung, die in das leichtere Fluid hineinwachsen und pilzförmige Strukturen ausbilden. Gleichzeitig bewegen sich Gebiete des leichten Fluids in das schwere hinein. Die weitere Entwicklung der Instabilität kann von vielen Faktoren, z.B. Oberflächenspannung, Kompressibilität und Viskosität abhängig sein.

Am Anfang wird die Trennschicht zwischen dem oberen schweren Fluid und dem unteren leichten Fluid durch eine sinusförmige Auslenkung der Amplitude $\delta = 0.01 \cdot d$ gestört. Die Auslenkung der Trennschicht ist gegeben durch

$$y_t(x) = y_{mid} - \delta \cdot d \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{d}x\right)\right], \quad y_{mid} = 2, \quad d = 1. \quad (6.5)$$

In der Trennschicht zwischen den Fluiden mit dem Dichteverhältnis $\beta = \varrho_h/\varrho_l$ wird die Dichte durch den Parameter ϱ_0 einer tanh-Funktion verschmiert. Für die Dichteverteilung [Ger97] [Rid94] gilt dann

$$\varrho(x, y) = \frac{1}{2} (1 + \beta) - \frac{1}{2} (1 - \beta) \tanh[\varrho_0(y - y_t(x))]. \quad (6.6)$$

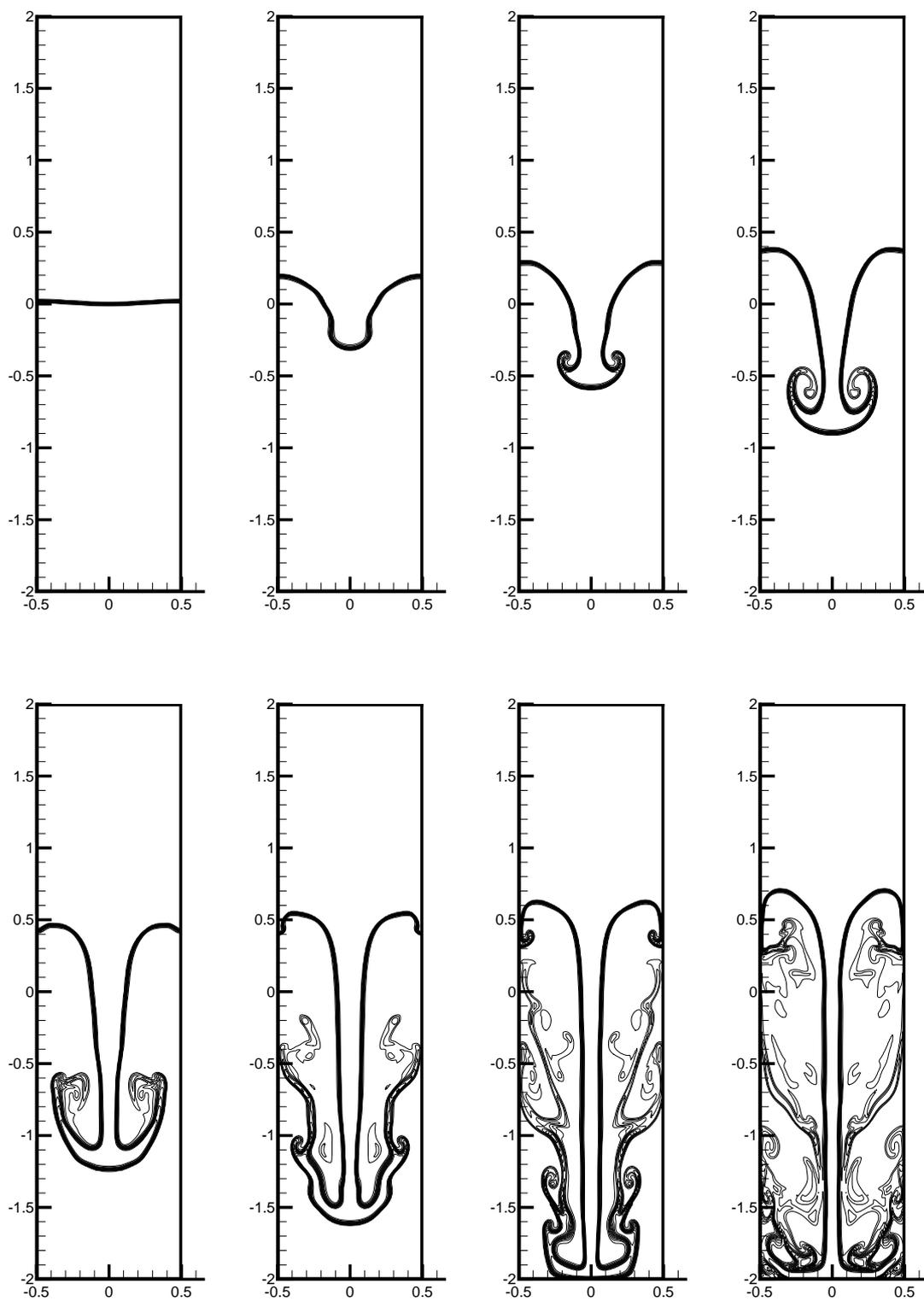


Abbildung 6.6: Rayleigh-Taylor-Instabilität mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren zu den Zeiten $t=0, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$ bei $M = 0$ und $Re = 1000$. Konturlinien: Dichte = $1.5, 2, \dots, 6.5$.

Bei der Simulation wird ein Dichteverhältnis von $\beta = 7$ und $\rho_0 = 100$ verwendet¹. Das Rechengebiet der Größe 1×4 Einheiten wird mit 100×400 Gitterpunkten diskretisiert. Die Fluide befinden sich zu Beginn der Simulation in Ruhe. Als Ränder werden feste, reibungsbehaftete Wände oben und unten sowie periodische Ränder in horizontaler Richtung vorgegeben. Diese Simulation wird auch mit dem SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration und dem MUSCL-Schema mit dem Steigungsparameter $\kappa = 1.4$ durchgeführt. Für die Zeitschrittweite verwenden wir die Courant-Bedingung mit Bezug auf die Geschwindigkeit $|\mathbf{u}| + c$ wie bei der aufsteigenden Blase.

Abb. 6.6 zeigt die zeitliche Entwicklung der Instabilität der inkompressiblen Strömung mit $Re = 1000$. Die Anfangsstörung wächst an, und ein gegensinnig rotierendes Wirbelpaar entwickelt sich. Dadurch bildet sich eine pilzartige Struktur aus, die sich weiter aufrollt. Die periodischen Ränder wirken wie reflektierende Wände. Dort bildet sich mit fortschreitendem Wachstum der Störung noch eine zweite pilzartige Struktur aus. Die Trennschicht des wachsenden Pilzkopfes wird wegen der Kelvin-Helmholtz Instabilität weiter instabil. Dadurch ergeben sich immer feinere Wirbelstrukturen.

6.2.3 Schwachkompressible natürliche Konvektion

Dieses Beispiel geht um die Konvektionsströmung in einer quadratischen Box, die durch den Temperaturunterschied zwischen der heißen linken und der kalten rechten Wand hervorgerufen wird. Die genaue Konfiguration und die Stoffdaten werden im Kapitel 7.4.2 ausführlich diskutiert. Zum Vergleich wird der Fall mit dem Temperaturunterschied $\epsilon = 0.6$ unter konstanter Viskosität überprüft. Wir verwenden das SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration und das MUSCL-Schema für die konvektiven Terme auf äquidistanten 129×129 Gitterzellen. Tab. 6.1 zeigt verschiedene Ergebnisse.

Die Daten in der ersten Spalte sind unsere Ergebnisse. Mit verschwindender Machzahl ($M = 0$) gewinnen wir die Daten in der Spalte mit Bezeichnung ‘LMA’ (engl. ‘low-Mach number approximation’). In diesem Fall verwendet man lediglich die vereinfachte Zustandgleichung $\rho T = konst.$, wie im Kapitel 2 erläutert. Die Ergebnisse in der dritten Spalte ergeben sich aus dem Reencode für das allgemeine Koordinatensystem. In diesem Code werden alle Variablen in der KV-Mitte abgespeichert und die Diffusionsterme vollständig explizit behandelt. Damit beschäftigen wir uns ausführlich später im Kapitel 7. Die Daten in der letzten Spalte sind die Referenzlösungen von Heuveline [Heu00].

¹Das Dichteverhältnis $\frac{\rho_h}{\rho_l}$ wird oft in Form der folgenden *Atwoodzahl* ausgedrückt.

$$\mathbf{A} = \frac{\rho_h - \rho_l}{\rho_h + \rho_l}. \quad (6.7)$$

Bei unsere Simulation gilt dann $\mathbf{A} = 0.75$.

	Kart. Koord.	LMA	All. Kood.	Heuveline
ϵ	0.6	0.6	0.6	0.6
M	2.14126×10^{-3}	0.0	2.14126×10^{-3}	
$Nu_{h,max}$	19.98300	19.98290	19.96608	
$Nu_{h,min}$	1.07119	1.07119	1.07153	
\overline{Nu}_h	8.92022	8.92023	8.91875	8.8598
$Nu_{h,0.5}$	7.83244	7.83247	7.83141	
$Nu_{c,max}$	17.05062	17.05064	17.03168	
$Nu_{c,min}$	0.80740	0.80740	0.80846	
\overline{Nu}_c	8.93401	8.93401	8.93253	
$Nu_{c,0.5}$	8.80539	8.80539	8.80570	
\bar{e}	1.5450×10^{-3}	1.54535×10^{-3}	1.54637×10^{-3}	
\bar{p}	0.85445	0.85445	0.854416	0.85638

Tabelle 6.1: Ergebnisse der natürlichen Konvektion in einer Box ($\beta = 90^\circ$) mit konstanter Viskosität, $Ra = 10^6$ und $Pr = 0.71$.

Eine implizite Behandlung der Reibungstermen zeigt kaum Änderungen in der Lösung. Es ist noch bemerkenswert, daß die ‘low-Mach number approximation’ sehr gute Übereinstimmung mit der vollständigen Navier-Stokes Lösungen liefert. Nach Mlauh et al. [MTN97] hält diese Tendenz bis zum schwach Turbulenzbereich ($Ra = 10^8$) an.

6.3 MPV-Verfahren für die MHD-Gleichungen

Die Gleichungen der idealen Magnetohydrodynamik² lauten in konservativer Formulierung:

$$\begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho \mathbf{u} \\ e \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}_t + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \varrho \mathbf{u} \\ \varrho \mathbf{u} \circ \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{u} - \mathbf{B} \circ \mathbf{B} \\ (e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.8)$$

mit dem Magnetfeldvektor \mathbf{B} und $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Die Gesamtenergie e enthält zusätzlich zur inneren und kinetischen Energie noch einen magnetischen Anteil:

$$e = \varrho \epsilon + e^k + e^m, \quad e^m = \frac{1}{2} \mathbf{B}^2. \quad (6.9)$$

Bei der Entdimensionalisierung definiert man zusätzlich eine weitere eigene Referenzgröße

$$\mathbf{c}_{A0} = \sqrt{\frac{\mathbf{B}_0^2}{\varrho_0}} \quad (6.10)$$

für die Alfvengeschwindigkeit. Diese beschreibt physikalisch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der kleinen Störungen des Magnetfeldes- und der Geschwindigkeitskomponenten, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Störwellen stehen. Somit erhält man als zusätzliche Kennzahl die globale Alfvenzahl A . Sie ist definiert als das Verhältnis der Referenz der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u}_0 zur Referenz der Alfvengeschwindigkeit \mathbf{c}_{A0} :

$$A = \frac{\mathbf{u}_0}{\mathbf{c}_{A0}}. \quad (6.11)$$

Für ideale MHD-Strömungen gilt nun das folgende entdimensionalisierte Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho \mathbf{u} \\ e \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}_t + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \varrho \mathbf{u} \\ \varrho \mathbf{u} \circ \mathbf{u} + (\frac{1}{M^2} p + \frac{1}{A^2} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{u} - \frac{1}{A^2} \mathbf{B} \circ \mathbf{B} \\ (\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + M^2 e^k + \frac{M^2}{A^2} \mathbf{B}^2) \mathbf{u} - \frac{M^2}{A^2} \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.12)$$

Hierbei haben wir 8 Gleichungen für 9 Unbekannte. Zur Schließung braucht man noch eine Zustandgleichung wie bei der reinen kompressiblen Hydrodynamik. Dazu muß der Magnetfeldvektor noch zu jedem Zeitpunkt die Bedingung der Divergenzfreiheit erfüllen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.13)$$

²Zur Vereinfachung der Ausdrücke wurde das Magnetfeld mit einem Faktor $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$ skaliert. Die Grundgleichungen für die Magneto-thermo-fluiddynamik werden in der Anhang D kurz zusammengefaßt.

Dies bedeutet physikalisch, daß keine Quelle für das Magnetfeld existiert. Für die dimensionslose Gesamtenergie gilt nun folgende Beziehung:

$$e = e^i + M^2 e^k + \frac{M^2}{A^2} e^m = \frac{p}{\gamma - 1} + M^2 \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \frac{M^2}{A^2} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2. \quad (6.14)$$

Somit läßt sich die Enenergiegleichung in eine Druckgleichung umschreiben:

$$\begin{aligned} p_t + \nabla \cdot (\gamma p \mathbf{u}) = & -(\gamma - 1) M^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (e^k) + \nabla \cdot (e^k \mathbf{u}) \right\} \\ & - (\gamma - 1) \left(\frac{M^2}{A^2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (e^m) + \nabla \cdot [\mathbf{B}^2 \mathbf{u} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Von besonderem Interesse ist in dieser Arbeit ein numerisches Verfahren, das für Strömungen mit beliebiger Machzahl eingesetzt werden kann. Der Fall kleiner Alfvenzahl [KM98] wird hierbei nicht explizit berücksichtigt.

Für den eindimensionalen Fall des obigen Gleichungssystems (6.12) existieren die sieben verschiedenen Eigenwerte [LeV97]

$$\begin{aligned} \lambda_1 = u - c_f, \quad \lambda_2 = u - c_A, \quad \lambda_3 = u - c_s, \quad \lambda_4 = u, \\ \lambda_5 = u + c_s, \quad \lambda_6 = u + c_A, \quad \lambda_7 = u + c_f \end{aligned} \quad (6.16)$$

mit

$$\begin{aligned} c_A &= \frac{1}{A} \sqrt{\frac{b_x^2}{\rho}}, \\ c_f &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(c^2 + b^2 + \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2 b_x^2} \right)}, \\ c_s &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(c^2 + b^2 - \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2 b_x^2} \right)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Dabei bedeutet $c = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ die lokale Schallgeschwindigkeit und $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$ mit $b_i = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{B_i^2}{\rho}}$ die Abkürzung für die Beschreibung der Alfvingeschwindigkeit. Die Wellen breiten sich mit den Geschwindigkeiten c_A , c_s , c_f relativ zur Strömungsgeschwindigkeit u aus. Die vierte Welle breitet sich genau mit der Geschwindigkeit der Strömung aus, und entspricht der Kontaktunstetigkeit in den Euler-Gleichungen. Diese Welle transportiert nun beliebige Störungen in der Dichte, während die anderen Variablen konstant bleiben. Wegen der magnetischen Spannung wehrt sich ein Magnetfeld gegen die transversale Bewegung, und dadurch entsteht eine transversale Welle. Dabei verändern sich nur die transversalen Komponenten der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes. Die zweite und sechste Welle sind genau diese Alfvenwellen, die sich mit der Alfvingeschwindigkeit c_A relativ zur Strömungsgeschwindigkeit u

ausbreiten. Andere Wellen laufen mit den Geschwindigkeiten c_s und c_f relativ zur Strömung ($c_s \leq c_A \leq c_f$). man nennt Sie die schnellen magnetoakustischen Wellen (erste und siebte Welle) und die langsamen magnetoakustischen Wellen (dritte und fünfte Welle). Dies ist eine Mischung aus akustischen und magnetischen Wellen und entspricht dem Stoß oder der Expansionswelle im allgemeinen Riemann-Problem. Als Rückstellkraft wirken dabei sowohl der Druckgradient als auch die magnetische Spannung zusammen. Wenn die beiden Kräfte fast in Phase auftreten, entstehen die schnellen magnetoakustischen Wellen. Bei der langsamen magnetoakustischen Welle laufen sie fast in Gegenphase.

Im Bereich kleiner Machzahl breitet sich die Druckstörung sehr schnell aus. Im inkompressiblen Grenzfall verschwinden alle akustischen Wellen ($c_s \rightarrow 0$, $c_f \rightarrow \infty$). Nun bleiben nur noch drei Eigenwerte übrig:

$$\lambda_{1,7} \rightarrow \pm\infty, \quad \lambda_2 = u - c_A, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = u, \quad \lambda_6 = u + c_A. \quad (6.18)$$

Analog zum rein hydrodynamischen Fall behandeln wir die obigen MHD-Gleichungen auch semi-implizit. Alle Schallterme, die den Druck enthalten, werden implizit diskretisiert, und sonstige Terme inklusive des Magnetvektors werden explizit behandelt. Für die Bestimmung der Zeitschrittweiten muß man noch die Alfvengeschwindigkeit berücksichtigen:

$$\Delta t \leq C \cdot \min_i \left[\frac{\Delta x}{|\mathbf{u}| + c_A} \right]. \quad (6.19)$$

Bei der räumlichen Diskretisierung definieren wir den Magnetvektor im versetzten Punkt wie die Geschwindigkeiten. Für die zeitliche Entwicklung des Magnetvektors des idealen Fluids, d. h. ohne elektrischen Widerstand, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= -\nabla \cdot (\mathbf{u} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{u}) \\ &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \times (-E_z). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dabei bezeichnet $E_z = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ die elektrische Feldstärke in z-Richtung, die in den Eckpunkten der Kontrollvolumina definiert ist. Dadurch kann die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes ohne zusätzliche Maßnahmen gewährleistet werden³. Bei der Numerik verwenden wir ausschließlich das Upwind-Verfahren für die obigen Induktionsgleichungen und auch für den Term der Lorenzkraft in der Impulsgleichung. Upwindrichtungen in der Lorenzkraft beziehen dabei sich auf den Magnetfeldvektor.

³In der Literatur bezeichnet man dieses Verfahren als CT-Verfahren (engl. ‘constrained transport’) [EH88]

6.3.1 Inkompressible aufsteigende Blase bei Alfvenzahl Fünf

Die Ausgangslage ist ähnlich wie bei der vorher betrachteten aufsteigenden Blase im rein hydrodynamischen Fall. Die inkompressible Blase liegt nun unter zwei verschiedenen, horizontalen und vertikalen, magnetischen Einflüssen mit $A = 5.0$. Als Randbedingungen verwenden wir dabei periodische Ränder in beiden Richtungen. An den horizontalen Rändern wird die Strömung reflektiert. Dagegen fließt sie am oberen Rand heraus und am unteren Rand wieder hinein.

Die oberen Bilder in Abb. 6.7 zeigen die zeitliche Entwicklung der Blase mit Dichtekonturlinien. Dazu sind die Geschwindigkeitsfelder zum Zeitpunkt $t = 1$ in den unteren Bildern gezeigt. In Abb. 6.8 werden noch die Stromlinien, die Magnetfelder und die Magnetfeldlinien zusammen dargestellt.

Der Einfluß des Magnetfeldes ist sehr gravierend. Die Ergebnisse des normalen hydrodynamischen Falls sind im linken Bild gezeigt. Durch das gegensinnig rotierende Wirbelpaar an der linken und rechten Flanke der Blase verstärkt sich die pilzkopfförmige Struktur ungehindert immer weiter. Wegen dieses Wirbelpaares tritt die maximale Auftriebsgeschwindigkeit hinter der Blase in der Symmetrieachse auf. In der idealen MHD-Strömung sind die magnetischen Feldlinien mit der Strömung eingefroren. Dies bedeutet, daß das Magnetfeld \mathbf{B} mit den Fluidteilchen transportiert wird. Es ist eine physikalische Konsequenz der magnetischen Induktionsgleichung. Beim gekrümmten Magnetfeld ($\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \neq 0$) entsteht magnetische Spannung ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$), die dazu tendiert, die Krümmung zu vermindern.

Unter dem horizontalen Magnetfeld beobachtet man keine Wirbel, und die Blase steigt sehr langsam auf. Sie verformt sich dabei längsförmig, und ein spitzer Schwanzteil entwickelt sich. Dafür ist die starke Abnahme der Auftriebsgeschwindigkeit hinter der Blase verantwortlich. Um die Blase entstehen im Uhrzeigersinn rotierende magnetische Feldlinien. Die magnetische Spannung tendiert dazu ihre Krümmung zu vermindern. Dadurch wird die vertikale Geschwindigkeitskomponente am stärksten unterdrückt ($\mathbf{J} \times \mathbf{B} \cong -|\nabla \times \mathbf{B}| \mathbf{e}_z \times |\mathbf{B}| \mathbf{e}_r$).

Dagegen steigt die Blase unter dem vertikalen Magnetfeld schneller als im rein hydrodynamischen Fall auf. In diesem Fall wird die Bewegung quer zum Magnetfeld auch stark abgeschwächt. Daher bleibt die zeitliche Entwicklung der Flanken der Blasen sehr beschränkt. Die Bewegung längs des Magnetfeldes erfährt keinen Widerstand. Von unten fließt der Magnetfeldvektor nun um die Flanke der Blase herum. Damit entwickelt sich ein gegensinnig rotierendes magnetisches Wirbelpaar symmetrisch zur Achse. Das Magnetfeld um die Flanke ist nun nach unten gekrümmt, und die magnetische Spannung erzeugt eine positive vertikale Geschwindigkeitskomponente. Die Krümmung des Magnetfeldes ist jedoch am größten um den unteren Teil der beiden Flanken der Blase. Genau dort entsteht eine stärkere vertikale Geschwindigkeit als

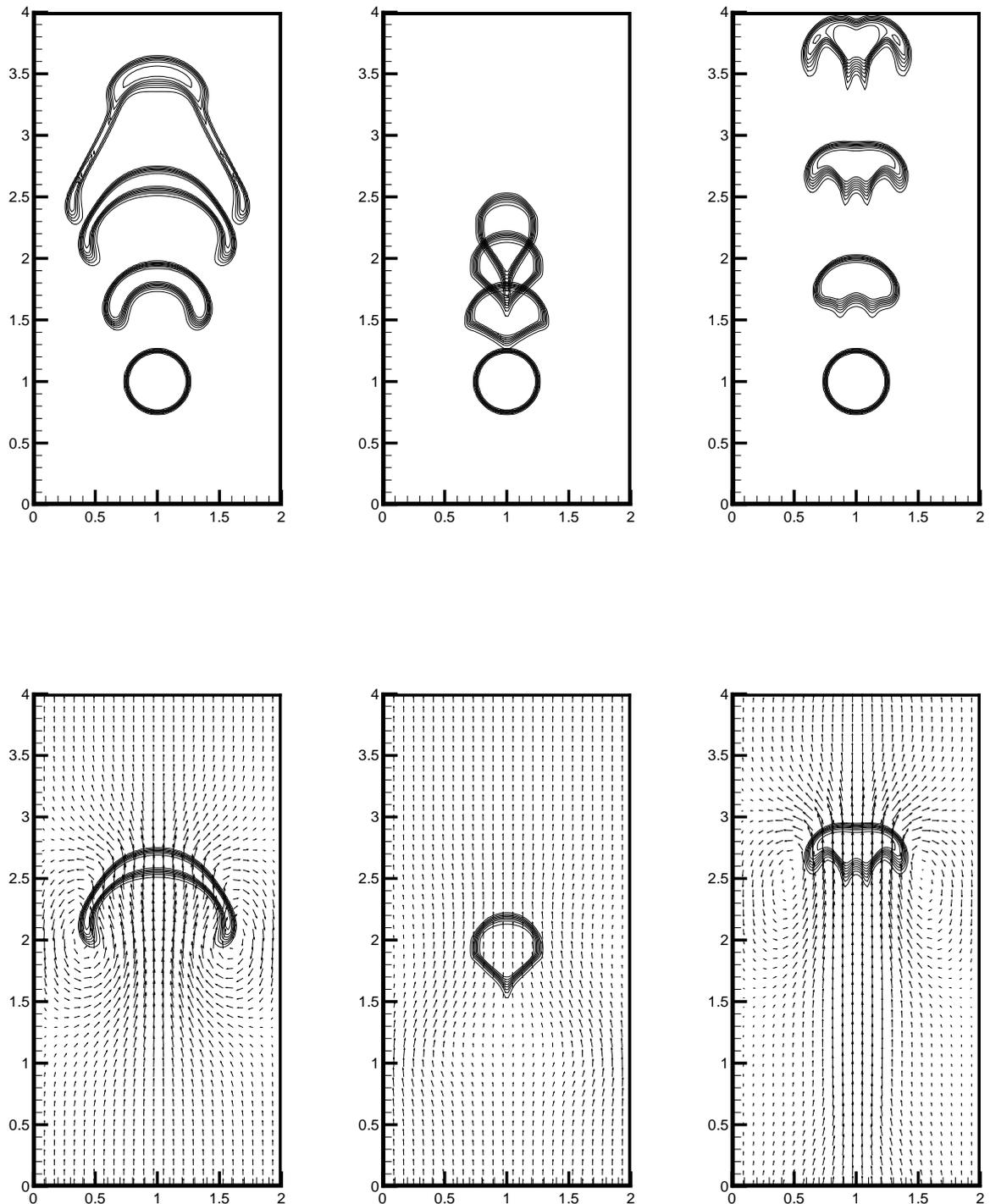


Abbildung 6.7: Eine aufsteigende Blase mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren bei $M = 0$, $A = 5.0$ und $Re = 1000$. Oben: Dichtekonturlinien (0.1, 0.2, ..., 0.9) zu den Zeiten $t=0, 0.5, 1.0, 1.5$ (Links: reine HD, Mitte: $\mathbf{B}_u = 1, \mathbf{B}_v = 0$, Rechts: $\mathbf{B}_u = 0, \mathbf{B}_v = 1$). Unten: Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

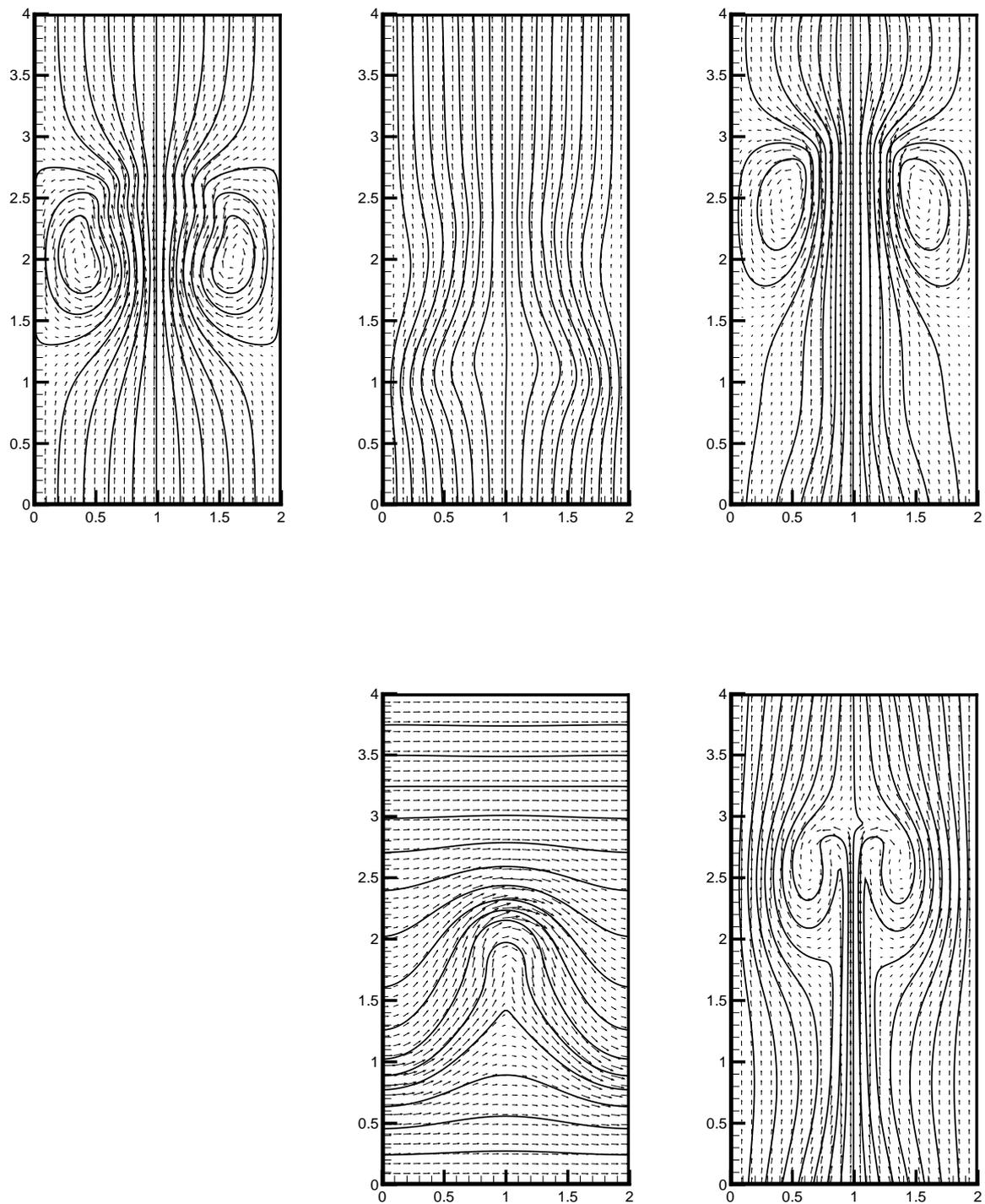


Abbildung 6.8: Eine aufsteigende Blase mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren zum Zeitpunkt $t = 1.0$ bei $M = 0$, $A = 5.0$ und $Re = 1000$. Oben: Momentane Geschwindigkeitsfeld und Stromlinien. Unten: Momentane Magnetfeld und Magnetfeldlinien.

in der Symmetrieachse. Wir können daher den kleinen Schwanzanteil der Blase um die Symmetrieachse beobachten. Abb. 6.8 zeigt, daß die Magnetfeldlinien genau die Verformung der Blase widerspiegeln. Daraus kann die einfrierende Eigenschaft des Magnetfeldes mit dem Fluidteilchen nochmals festgestellt werden.

6.3.2 Inkompressible freie Scherschicht bei Alfvenzahl Fünf

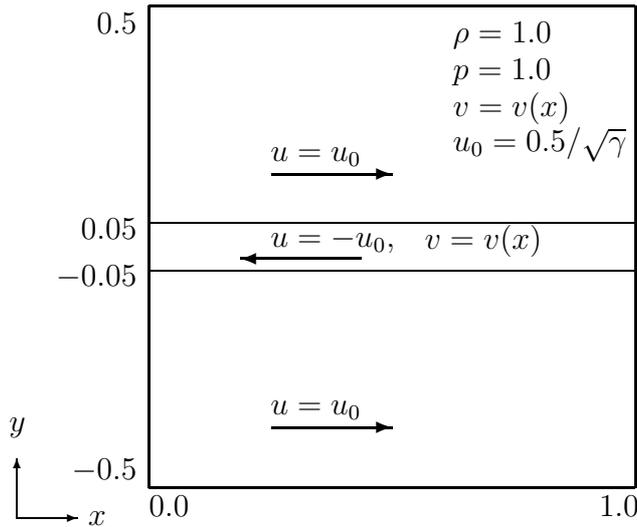


Abbildung 6.9: Geometrie der Kelvin-Helmholtz Instabilität

Nun betrachten wir eine freie Scherschicht, die immer dort auftreten kann, wo zwei Fluidströme mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aufeinandertreffen. Ohne magnetischen Kraft wird die Instabilität durch das Überwiegen der Trägheitskräfte gegenüber den Reibungskräften verursacht. Bei diesem Vorgang spricht man von einer *Helmholtz-Instabilität*.

Die Anfangskonfiguration ist in Abb. 6.9 dargestellt. Dichte und Druck haben einen festen Wert 1.0 im gesamten Rechengebiet. Eine Strömung nach rechts ist unterbrochen durch ein schmales Gebiet einer Strömung nach links. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist sinusförmig gestört:

$$v = v(x) = 0.01 * \sin(4\pi x). \quad (6.21)$$

Wir betrachten inkompressible Strömungen für die Reynoldszahl $Re = 1500$. Dieses Testbeispiel für den rein hydrodynamischen Fall wurde in meiner Diplomarbeit [Par97] ausführlich diskutiert. Nun untersuchen wir den Einfluß des Magnetfeldes. Es kann zur Strömung parallel oder antiparallel stehen. Der Fall mit dem gleichförmigen Magnetfeld $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$ mit $B_0 = 1.0$ im gesamten Gebiet wird als paralleler

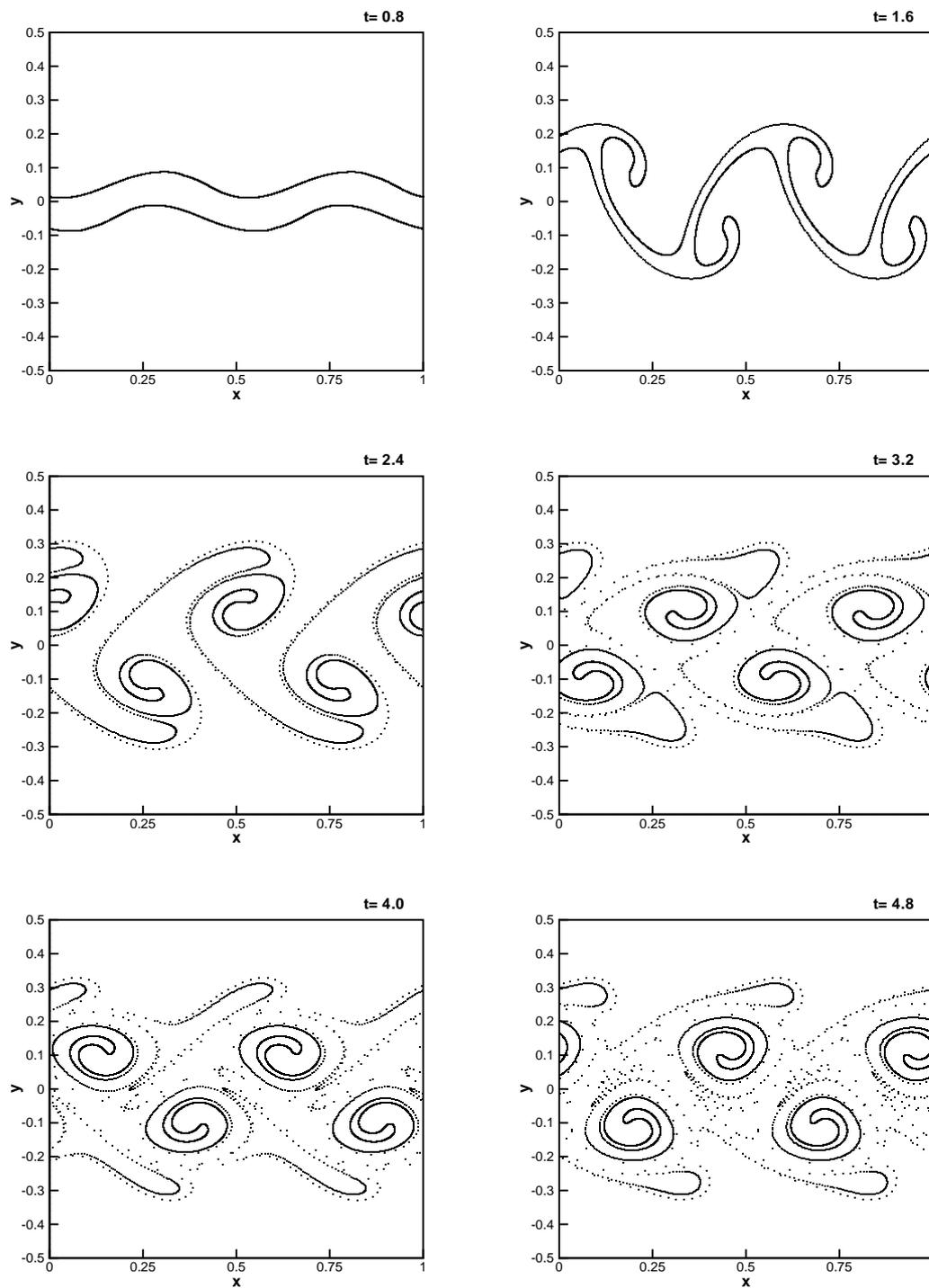


Abbildung 6.10: Zeitliche Entwicklung der Grenzflächen bei der Kelvin-Helmholtz Instabilität ohne den Einfluß des Magnetfeldes mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren bei $M = 0$ und $Re = 1500$.

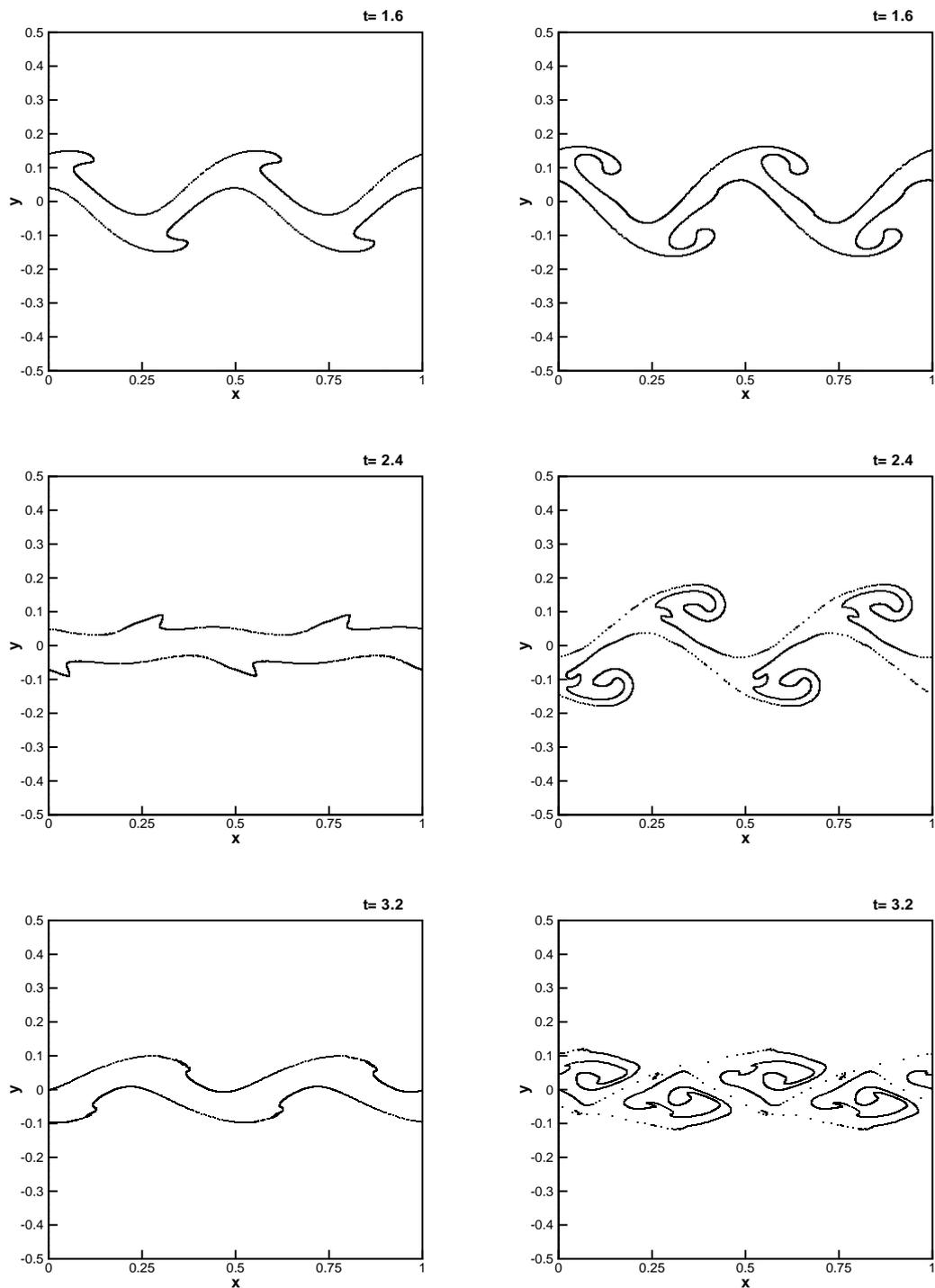


Abbildung 6.11: Zeitliche Entwicklung der Grenzflächen bei der Kelvin-Helmholtz Instabilität mit MUSCL-Schema und SBDF2-Verfahren bei $M = 0$ und $Re = 1500$. Links: unter dem parallelen Magnetfeld. Rechts: unter dem antiparallelen Magnetfeld.

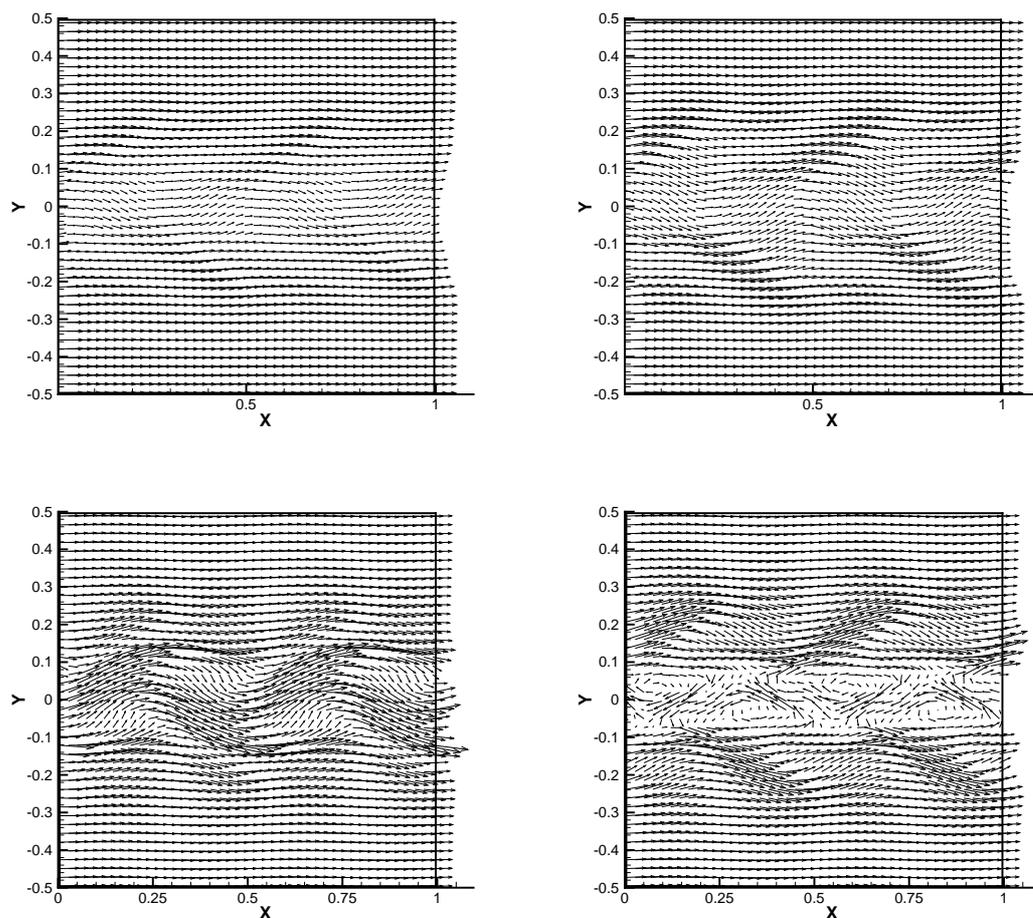


Abbildung 6.12: Oben: Geschwindigkeitsfeld unter dem parallelen und antiparallelen Magnetfeld zum Zeitpunkt $t = 3.2$. Unten: Magnetfeld unter dem parallelen und antiparallelen Magnetfeld.

Fall bezeichnet. Wenn das Magnetfeld dagegen am Anfang mit der horizontalen Geschwindigkeit u gleichsinnig steht, also $\mathbf{B} = -B_0\mathbf{e}_x$ im schmalen Bereich, heißt er antiparalleler Fall. Wir verwenden wiederum periodische Randbedingungen in allen Rändern.

Abb. 6.10 und 6.11 zeigen die zeitliche Entwicklung der Grenzflächen. Beim normalen hydrodynamischen Fall wird die Energie von der Hauptströmung kleinen sinusförmigen Grundstörungen zugeführt; diese werden mit der Zeit ungehindert angefacht. Die Störungen werden dagegen beim parallelen Fall am Anfang schwach angefacht, aber mit der Zeit wieder vollständig gedämpft. Ein paralleles Magnetfeld wirkt stabilisierend gegen die Störungen. Im antiparallelen Fall wachsen die Störungen an. Sie werden jedoch mit der Zeit wieder in einem schmalen Bereich zurückgedrängt. Die Strömung in diesem Bereich, im Gegensatz zum parallelen Fall, rollt sich weiter auf. Die Dicke der Vermischungszone ist etwa doppelt so groß wie die antiparallele Zone

am Anfang.

Abb. 6.12 zeigt das Geschwindigkeits- und Magnetfeld zum Zeitpunkt $t = 3.2$. Die beiden Geschwindigkeitsfelder sehen eher ähnlich aus. Das Magnetfeld im antiparallelen Fall zeigt dagegen die Wirbelstruktur sehr deutlich.

7 Finite-Volumen Verfahren auf allgemeinen Koordinaten

Bisher haben wir die konservativen Grundgleichungen auf einem versetzten kartesischen Gitter implementiert. Dabei wird noch ein Finite-Differenzen Verfahren verwendet. Die versetzte Variablenspeicherung schränkt aber die Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens vor allem auf komplexen Geometrien stark ein. In diesem Kapitel betrachten wir ein weiteres numerisches Lösungsverfahren mit nichtversetzter (engl. ‘cell-centered’) Variablenanordnung auf irregulären Geometrien. Dabei beschränken wir uns auf ein viereckiges Gitter im zweidimensionalen Fall. Außerdem behandeln wir den gesamten Diffusionsterm explizit, und das nichtiterative Druck-Korrektur-Verfahren (siehe Kapitel 4.) wird als Zeitintegration eingesetzt. Um ein oszillierendes Druckfeld zu vermeiden, verwenden wir dabei die sogenannte Momentum-Interpolationen nach dem Prinzip von Rhie und Chow [RC83].

7.1 Integrale Grundgleichungen

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden im wesentlichen Finite-Volumen-Verfahren betrachtet. Ausgangspunkt einer Finite-Volumen (FV) Methode ist die integrale Form der Grundgleichungen, die durch Integration der Differentialgleichungen über das Lösungsgebiet gewonnen werden kann. Die Volumenintegrale, deren Integranden aus dem Divergenzoperator bestehen, können mittels des Satzes von Gauß in Oberflächenintegrale umgeformt werden. Dabei spricht man von einer konservativen Form der Gleichungen, wenn sich die Flüsse über alle inneren Ränder bei einer Summation über alle Kontrollvolumina gegenseitig aufheben und nur die Flüsse durch die physikalischen Ränder des Lösungsgebietes einen Beitrag liefern. Voraussetzung für die Darstellung in der konservativen Form ist, daß alle Terme unter einem Divergenzoperator vorkommen und daher der Satz von Gauß verwendet werden kann. Diese Eigenschaft garantiert die Erhaltung der physikalisch erhaltenen Größe auf beliebig groben Gittern. Bei der numerischen Implementation verwenden wir die folgenden integralen Grundgleichungen.

Kontinuitätsgleichung:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} (\varrho u^i) dA^i = 0, \quad (7.1)$$

Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial(\varrho u^l)}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} (\varrho u^l u^i) dA^i &= - \int_{\Omega} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x^l} dV + \frac{1}{\text{Re}} \oint_{\partial\Omega} (\eta \frac{\partial u^l}{\partial x^i}) dA^i \\ &+ \frac{1}{3\text{Re}} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^l} (\eta \frac{\partial u^i}{\partial x^i}) dV - \int_{\Omega} \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_3 dV, \end{aligned}$$

Druckgleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M^2 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} (\gamma p u^i) dA^i &= - \int_{\Omega} \frac{dp^{(0)}}{dt} dV \\ &- (\gamma - 1) M^2 \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial e^k}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} (e^k u^i) dA^i \right\} \\ &- (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial e^p}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} (e^p u^i) dA^i \right\} \\ &+ \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \oint_{\partial\Omega} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}) dA^i \\ &+ (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \oint_{\partial\Omega} (\mathcal{T}_e \mathbf{u})^i dA^i. \end{aligned}$$

V bezeichnet hierbei das geschlossene Lösungsgebiet, A ist dessen Rand. Die differenziellen Formen dieser Gleichungen im allgemeinen Koordinatensystem sind im Anhang E gegeben.

7.2 Räumliche Diskretisierung

Für ein FV-Verfahren ist das Integrationsgebiet V jeweils ein Kontrollvolumen (KV) und die Flüsse durch die KV-Oberfläche werden diskretisiert. Als Beispiel zeigen wir die Diskretisierung einer allgemeinen Evolutionsgleichung:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\varrho \phi) dV + \oint_{\partial\Omega} (\varrho \phi \mathbf{u}) d\mathbf{A} - \oint_{\partial\Omega} (\eta \nabla \phi) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} S dV. \quad (7.2)$$

Die hierfür möglichen Formen beschränken sich in dieser Arbeit nur auf körperangepasste, strukturierte Vierecke im zweidimensionalen Fall, um die zusätzliche Komplexität im Gleichungssystemlöser zu vermeiden. Die Rechenpunkte werden in der Mitte jedes Kontrollvolumens angeordnet. Die Gleichungen werden dann über ein Kontrollvolumen V bzw. die KV-Oberflächen A integriert. Abb. 7.1 zeigt ein Kontrollvolumen.

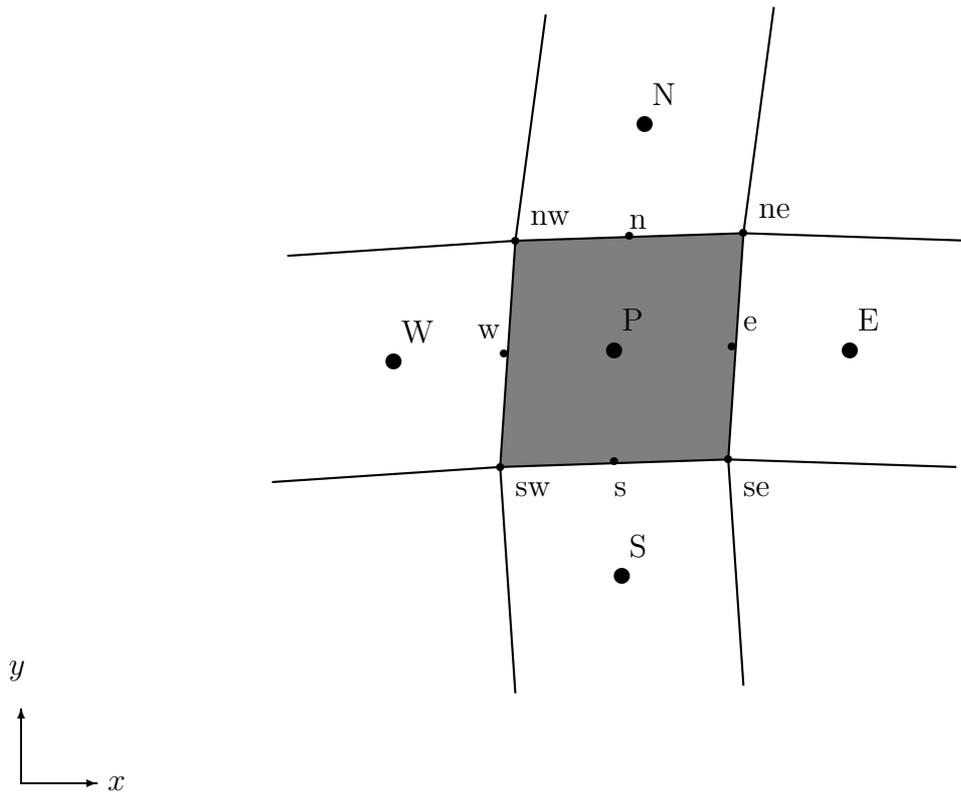


Abbildung 7.1: Charakteristisches Kontrollvolumen um den Knotenpunkt P

Der konvektive Fluß

Zur Berechnung der Flächenintegrale wird ausschließlich die Mittelpunktsregel benutzt, bei der sich der Wert des Integrals als Skalarprodukt des normalen Flächenvektors mit dem Flußvektor am Mittelpunkt dieser Fläche berechnet, was eine Approximation zweite Ordnung liefert:

$$F^c = \oint_{\partial\Omega} (\rho\phi\mathbf{u})d\mathbf{A} = [\phi\rho u^i \cdot n^i \Delta A]_w^e + [\phi\rho u^i \cdot n^i \Delta A]_s^n, \quad (7.3)$$

wobei n^i die Komponenten des normierten Flächennormalenvektors einer KV-Oberfläche und ΔA die Größe dieser Fläche bezeichnen. Hierbei ergeben sich die geometrischen Terme $\Delta A_e \mathbf{n}_e$ bzw. $\Delta A_n \mathbf{n}_n$ zu:

$$\Delta A_e \cdot \mathbf{n}_e = \begin{pmatrix} \Delta A \cdot n_x \\ \Delta A \cdot n_y \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} y_{ne} - y_{se} \\ -x_{ne} + x_{se} \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

$$\Delta A_n \cdot \mathbf{n}_n = \begin{pmatrix} \Delta A \cdot n_x \\ \Delta A \cdot n_y \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} -y_{ne} + y_{nw} \\ x_{ne} - x_{nw} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Für $\phi = 1$ stellt der obige konvektive Fluß F^c den Massenfluß \dot{m} durch die KV-Oberflächen dar.

$$F^c = \dot{m}_e \phi_e - \dot{m}_w \phi_w + \dot{m}_n \phi_n - \dot{m}_s \phi_s \quad (7.6)$$

$$= \varrho_e \tilde{u}_e \phi_e - \varrho_w \tilde{u}_w \phi_w + \varrho_n \tilde{v}_n \phi_n - \varrho_s \tilde{v}_s \phi_s. \quad (7.7)$$

Wir verwenden dabei noch die Definition der kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten an den KV-Oberflächen, die senkrecht zu diesen Flächen stehen. Sie lauten für den Volumenfluß durch die KV-Oberflächen:

$$\tilde{u}_e = u_e(y_{ne} - y_{se}) - v_e(x_{ne} - x_{se}), \quad (7.8)$$

$$\tilde{v}_n = -u_n(y_{ne} - y_{nw}) + v_n(x_{ne} - x_{nw}). \quad (7.9)$$

Zur Berechnung einer beliebigen Größe ϕ in der Mitte der KV-Oberflächen können verschiedene Upwind-Interpolationen verwendet werden. Wie im früheren Kapitel 4 erwähnt, werden alle konvektiven Terme bei der Zeitintegration explizit behandelt.

Der diffusive Fluß

Die diffusiven Flüsse werden ebenfalls mit der Mittelpunktsregel approximiert:

$$\oint_{\partial\Omega} (\eta \nabla \phi) d\mathbf{A} = \oint_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial \phi}{\partial x^i} d\mathbf{A} = \left[\eta \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n^i \Delta A \right]_w^e + \left[\eta \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n^i \Delta A \right]_s^n. \quad (7.10)$$

Der Gradient kann einfach in einem lokalen Gitterkoordinatensystem berechnet werden, aber der Flächennormalenvektor ist in kartesischen Komponenten gegeben. Wir brauchen also noch die Komponenten des Gradientenvektors in kartesischen Koordinaten. Das macht die Transformation des Gradientenvektors zwischen dem kartesischen und dem lokalen Koordinatensystem notwendig.

Als Beispiel zeigen wir die Diskretisierung der diffusiven Flüsse am östlichen Rand:

$$\begin{aligned} \left[\eta \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n^i \Delta A \right]_e &= \eta_e \Delta A_e \left[\frac{\partial \xi^k}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n_x + \frac{\partial \xi^k}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n_y \right]_e \\ &= \eta_e \Delta A_e \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} n_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} n_y \right]_e + \eta_e \Delta A_e \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} n_y \right]_e. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Der erste Term repräsentiert den Fluß in ξ -Richtung, d. h. senkrecht zur KV-Oberfläche, während der zweite Term den Fluß in η -Richtung wiedergibt:

$$\begin{aligned} \eta_e \Delta A_e \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} n_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} n_y \right]_e &= \eta_e (\phi_E - \phi_P) [\xi_x \Delta A n_x + \xi_y \Delta A n_y]_e \\ &= \eta_e (\phi_E - \phi_P) [\xi_x y_\eta + \xi_y x_\eta]_e \\ &= \eta_e (\phi_E - \phi_P) \left[\frac{1}{J} (y_\eta^2 + x_\eta^2) \right]_e \\ &= \eta_e (\phi_E - \phi_P) \frac{1}{\Delta V_e} [(y_{ne} - y_{se})^2 + (x_{ne} - x_{se})^2]_e. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Hierbei bedeutet J die Jakobi-Determinante der Transformation $x^i = x^i(\xi^i)$. Die Transformationsregeln werden im Anhang E ausführlich diskutiert.

Der zweite Term wird ähnlich implementiert. Diesen Term bezeichnet man als Kreuzdiffusion, da eine gemischte Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$ bei der Approximation des Diffusionsterms mit Finiten-Differenzen an dieser Stelle auftaucht:

$$\begin{aligned} \eta_e \Delta A_e \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} n_y \right]_e &= \eta_e (\phi_{ne} - \phi_{se}) \left[\left(-\frac{1}{J} \right) (y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta) \right]_e \\ &= \eta_e (\phi_{ne} - \phi_{se}) \left(-\frac{1}{\Delta V_e} \right) [(y_E - y_P)(y_{ne} - y_{se}) + (x_E - x_P)(x_{ne} - x_{se})]_e. \end{aligned} \quad (7.13)$$

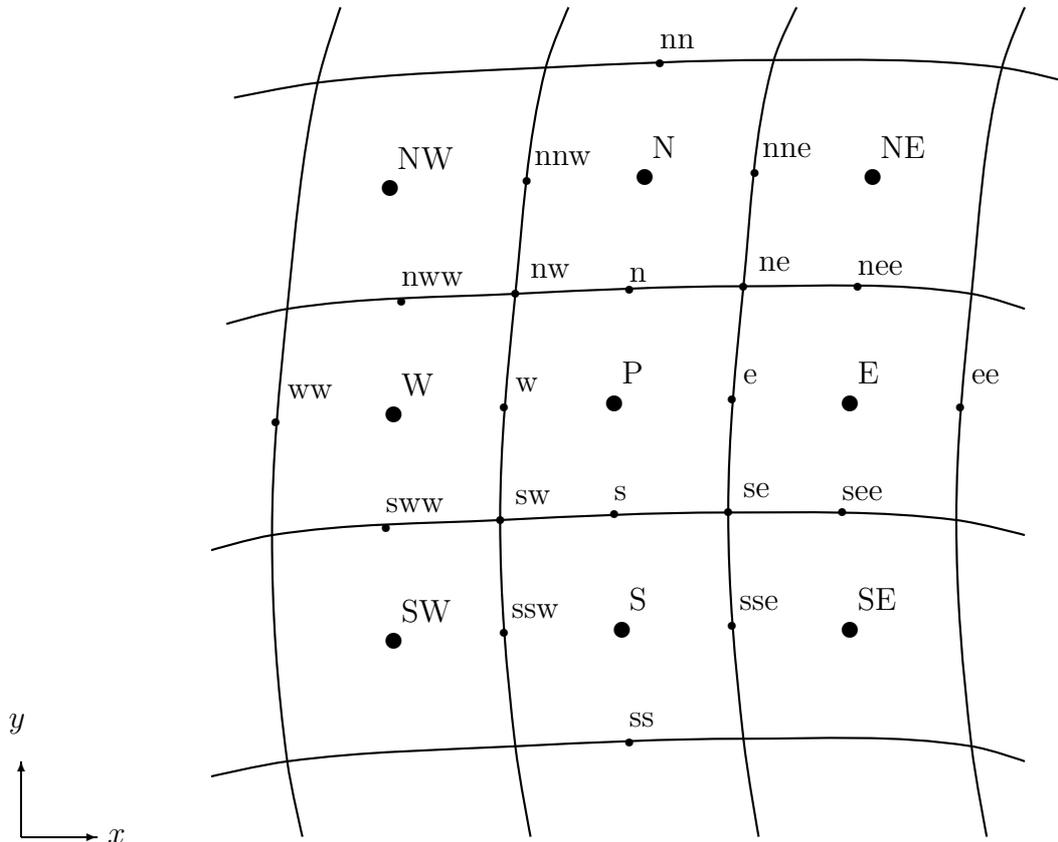


Abbildung 7.2: Geometrische Bezeichnungen in zwei Dimensionen

Ist das Gitter überall orthogonal, d. h. stehen die ξ - und η -Linien senkrecht aufeinander, so verschwinden die Kreuzdiffusionsanteile. In dieser Arbeit behandeln wir die gesamten Diffusionsterme explizit. Bei der impliziten Behandlung werden die Diffusionsterme meistens in einen impliziten und einen expliziten Anteil aufgeteilt und das resultierende Gleichungssystem iterativ gelöst. Für die Kreuzdiffusionsterme verwendet man die explizit interpolierten Werte der letzten Iteration. Dadurch ergibt sich ein Gleichungssystem in Form eines Fünf-Punkte-Sterns. Man darf nun mit vertretbarem Aufwand nur auf die Variablenwerte an den KV-Zentren zugreifen, z. B. ϕ_E , ϕ_P , die schon als Unbekannte zur Verfügung stehen. Jedoch verlangsamt sich die Konvergenz im Vergleich zu einer komplett impliziten Methode. Bei der vollständig impliziten Behandlung der Diffusionsterme muß man jedoch auf die Werte an den KV-Ecken,

z. B. ϕ_{ne} , ϕ_{se} , zugreifen. Dafür werden die Interpolationsfaktoren eingeführt:

$$f^\xi = \frac{l_{\overline{Pe}}}{l_{\overline{Pe}} + l_{eE}}, \quad f^\eta = \frac{l_{\overline{Pn}}}{l_{\overline{Pn}} + l_{nN}}. \quad (7.14)$$

Die an den KV-Ecken lokalisierten Größen, z. B. $\phi_{ne} - \phi_{se}$ können folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \phi_{ne} - \phi_{se} &= (\phi_n - \phi_s)(1 - f_P^\xi) + (\phi_{nee} - \phi_{see})f_P^\xi, \\ \phi_n - \phi_s &= \{\phi_P(1 - f_P^\eta) + \phi_N f_P^\eta\} - \{\phi_S(1 - f_S^\eta) + \phi_P f_S^\eta\}, \\ \phi_{nee} - \phi_{see} &= \{\phi_E(1 - f_E^\eta) + \phi_{NE} f_E^\eta\} - \{\phi_{SE}(1 - f_{SE}^\eta) + \phi_E f_{SE}^\eta\}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Dadurch ergibt sich jedoch ein aufwendigeres Gleichungssystem, das mit neun Diagonalen besetzt ist.

Der Quellterm und der instationäre Term

Bei der Integration des instationären Terms und des Quellterms muß eine Integration über das Kontrollvolumen vor der Diskretisierung durchgeführt werden. Die Größe eines Kontrollvolumens für den ebenen zweidimensionalen Fall berechnet sich nach

$$\begin{aligned} \Delta V_P &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_P \\ &= \frac{1}{2} |(x_{ne} - x_{sw})(y_{nw} - y_{se}) - (x_{nw} - x_{se})(y_{ne} - y_{sw})|. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Dabei muß die Definition der Metrikterme nicht wie bei der Behandlung der konvektiven und diffusiven Flüsse an den KV-Grenzen, sondern am KV-Zentrum erfolgen.

Wir können nun alle diskretisierten Terme zusammenstellen, und die im Kapitel 4 eingeführten zeitlichen Integrationsverfahren können ohne weitere Beschränkungen eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varrho\phi)}{\partial t} \Delta V \Big|_P + \dot{m}_e \phi_e - \dot{m}_w \phi_w + \dot{m}_n \phi_n - \dot{m}_s \phi_s \\ - \eta_e \Delta A_e \left[\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n_i \right]_e + \eta_w \Delta A_w \left[\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n_i \right]_w \\ - \eta_n \Delta A_n \left[\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n_i \right]_n + \eta_s \Delta A_s \left[\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} n_i \right]_s = S_P \Delta V_P. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der Gradiententerm

Bei den kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen treten noch zusätzliche Gradiententerme auf:

$$\frac{1}{3\text{Re}} \int_\Omega \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) dV, \quad \int_\Omega \nabla p dV. \quad (7.18)$$

Wir behandeln den Gradiententerm nicht wie eine konservative Kraft auf den KV-Oberflächen, sondern wie eine nichtkonservative Körperkraft (d. h. Quellterm) auf dem KV-Zentrum. Die Ableitungen müssen zuerst in das kartesischen Koordinatensystem transformiert werden:

$$\int_{\Omega} (\nabla \phi) dV = (\nabla \phi)_P \Delta V_P = \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \right)_P \Delta V_P \quad (7.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_{\xi} \xi_x + \phi_{\eta} \eta_x \\ \phi_{\xi} \xi_y + \phi_{\eta} \eta_y \end{pmatrix}_P \Delta V_P$$

$$= \begin{Bmatrix} (\phi_e - \phi_w)(y_n - y_s) - (\phi_n - \phi_s)(y_e - y_w) \\ -(\phi_e - \phi_w)(x_n - x_s) + (\phi_n - \phi_s)(x_e - x_w) \end{Bmatrix}_P. \quad (7.20)$$

Die im zweiten viskosen Terme auftauchenden Divergenz kann mit den oben definierten, kontravarianten Geschwindigkeiten bestimmt werden:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = (\nabla \cdot \mathbf{u})_P \Delta V_P = \oint_{\partial \Omega} \mathbf{u} dA = \tilde{u}_e - \tilde{u}_w + \tilde{v}_n - \tilde{v}_s. \quad (7.21)$$

7.3 Druck-Geschwindigkeits-Kopplung

Bei Verwendung nichtversetzter Gitter werden alle Variablen in der KV-Mitte abgespeichert. Erfolgt die Diskretisierung der in den Navier-Stokes Gleichungen vorkommenden Druckgradienten mittels linearer Interpolation, so kann dies zu einem hin- und herspringenden Druckfeld (engl. ‘checkboard pressure field’) führen [Pat80]. Nachfolgend wird ein spezielles Interpolationsverfahren von Rhie und Chow [RC83] beschrieben, welches diese Sprünge im Druckfeld vermeidet.

Beim Prädiktorschritt berechnet man erst die Geschwindigkeiten in den KV-Zentren mit dem abgeschätzten Druckfeld:

$$u_P^* = U_P + \left\{ q_1^1 (\Delta p^{(2)*})_1 + q_1^2 (\Delta p^{(2)*})_2 \right\}_P, \quad (7.22)$$

$$v_P^* = V_P + \left\{ q_2^1 (\Delta p^{(2)*})_1 + q_2^2 (\Delta p^{(2)*})_2 \right\}_P.$$

Die Pseudogeschwindigkeiten U_P und V_P ergeben sich aus den expliziten Diskretisierungen der Konvektions- und Diffusionsterme, und $\Delta p^{(2)}$ bedeutet die diskretisierte Druckdifferenz. Für die Koeffizienten gilt dabei folgende Beziehung (vgl. AnhangE):

$$q_{iP}^j = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \frac{1}{\rho_P \Delta V_P} b_{iP}^j. \quad (7.23)$$

Die Geschwindigkeit, z. B. an der östlichen KV-Oberfläche, wird nicht mittels linearer Interpolation sondern mit Hilfe der Impuls-Interpolation wie folgt bestimmt:

$$u_e^* = \overline{U_e^*} + \left\{ q_1^1 (\Delta p^{(2)*})_1 \right\}_e + \overline{[q_1^2 (\Delta p^{(2)*})_2]_e}. \quad (7.24)$$

Dabei bedeutet $\overline{[\cdot]}_e$ eine lineare Interpolation zwischen den Werten in den KV-Zentren E und P . Mit Ausnahme des Druckgradienten $(\Delta p^{(2)*})_1$, der zur KV-Oberfläche quer steht, wird die gesamte diskretisierte Impulsgleichung linear gemittelt. Beim Druckgradiententerm $\{..\}_e$ werden nur Koeffizienten linear interpoliert. Nun ergibt sich

$$u_e^* = \overline{[u_P^*, u_E^*]} - \overline{[q_1^1(\Delta p^{(2)*})_1]_P, [q_1^1(\Delta p^{(2)*})_1]_E]} + \overline{[q_1^1]_e}(p^{(2)*}_E - p^{(2)*}_P) \quad (7.25)$$

mit

$$\overline{[q_1^1]_e} = -\mathbf{Z}_{p^{(2)}} \left[\frac{1}{\varrho_P \Delta V_P}, \frac{1}{\varrho_E \Delta V_E} \right] b_{1e}^1. \quad (7.26)$$

Damit wird die resultierende Druck-Korrektur-Gleichung kompakt, und die Druckoszillationen in den Lösungen können beseitigt werden. Im Gegensatz zur gestaffelten Variablenanordnung enthält das obige Interpolationsverfahren noch zusätzliche Glättungsterme, die proportional zur vierten Ableitung des Drucks sind. Bei glattem Druckverlauf gehen sie gegen Null, aber bei oszillierenden Druckwerten treten große Korrekturen auf. Details kann man in Ferziger und Peric [FP96] finden.

Beim Korrektorschritt korrigieren wir die abgeschätzten Geschwindigkeiten und den Druck so, daß die Druckgleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* + \mathbf{u}', \\ p &= p^* + p'. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Aus den Geschwindigkeitsgleichungen ergeben sich dann folgende Korrektur-Beziehungen:

$$\begin{aligned} u'_P &= \left\{ q_1^1(\Delta p^{(2)'})_1 + q_1^2(\Delta p^{(2)'})_2 \right\}_P, \\ v'_P &= \left\{ q_2^1(\Delta p^{(2)'})_1 + q_2^2(\Delta p^{(2)'})_2 \right\}_P. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Mit der obigen Impuls-Interpolation können noch die Korrektur-Beziehungen an den KV-Oberflächen hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} u'_e &= \overline{[q_1^1]_e} \left\{ (\Delta p^{(2)'})_1 \right\}_e + \overline{[q_1^2(\Delta p^{(2)'})_2]_e} \\ &= \overline{[q_1^1]_e} (p^{(2)'}_E - p^{(2)'}_P) \\ &\quad + q_{1P}^2 (p^{(2)'}_n - p^{(2)'}_s) (1 - f_P^\xi) + q_{1E}^2 (p^{(2)'}_{nee} - p^{(2)'}_{see}) f_P^\xi \\ &= \overline{[q_1^1]_e} (p^{(2)'}_E - p^{(2)'}_P) \\ &\quad + q_{1P}^2 \left\{ p^{(2)'}_P (1 - f_P^\eta) + p^{(2)'}_N f_P^\eta - p^{(2)'}_S (1 - f_S^\eta) - p^{(2)'}_P f_S^\eta \right\} (1 - f_P^\xi) \\ &\quad + q_{1E}^2 \left\{ p^{(2)'}_E (1 - f_E^\eta) + p^{(2)'}_{NE} f_E^\eta - p^{(2)'}_{SE} (1 - f_{SE}^\eta) - p^{(2)'}_E f_{SE}^\eta \right\} f_P^\xi, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$v'_e = \overline{[q_2^1]_e} \left\{ (\Delta p^{(2)'})_1 \right\}_e + \overline{[q_2^2(\Delta p^{(2)'})_2]_e}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{[q_2^1]}_e (p^{(2)'}_E - p^{(2)'}_P) \\
 &\quad + q_{2P}^2 (p^{(2)'}_n - p^{(2)'}_s) (1 - f_P^\xi) + q_{2E}^2 (p^{(2)'}_{nee} - p^{(2)'}_{see}) f_P^\xi \\
 &= \overline{[q_2^1]}_e (p^{(2)'}_E - p^{(2)'}_P) \\
 &\quad + q_{2P}^2 \left\{ p^{(2)'}_P (1 - f_P^\eta) + p^{(2)'}_N f_P^\eta - p^{(2)'}_S (1 - f_S^\eta) - p^{(2)'}_P f_S^\eta \right\} (1 - f_P^\xi) \\
 &\quad + q_{2E}^2 \left\{ p^{(2)'}_E (1 - f_E^\eta) + p^{(2)'}_{NE} f_E^\eta - p^{(2)'}_{SE} (1 - f_{SE}^\eta) - p^{(2)'}_E f_{SE}^\eta \right\} f_P^\xi. \quad (7.30)
 \end{aligned}$$

Für die Druck-Korrekturen an den KV-Oberflächen $p^{(2)'}_n, p^{(2)'}_s, \dots$ haben wir nochmals die lineare Interpolation der Druck-Korrekturen an den KV-Zentren verwendet. Nun läßt sich die Druck-Korrektur-Gleichung aus der Druckgleichung herleiten:

$$\begin{aligned}
 &M^2 p^{(2)'} \Delta V_P + \mathbf{Z}_p \gamma (p_e \mathbf{u}'_e \cdot \Delta \mathbf{A}_e - p_w \mathbf{u}'_w \cdot \Delta \mathbf{A}_w + p_n \mathbf{u}'_n \cdot \Delta \mathbf{A}_n - p_s \mathbf{u}'_s \cdot \Delta \mathbf{A}_s) \\
 &= M^2 p^{(2)'} \Delta V_P + \mathbf{Z}_p \gamma (p_e \tilde{u}'_e - p_w \tilde{u}'_w + p_n \tilde{v}'_n - p_s \tilde{v}'_s) \\
 &= -dp^{(0)} \Delta V_P + S_p \Delta V_P. \quad (7.31)
 \end{aligned}$$

Der Quellterm S_p enthält dabei alle abgeschätzten, expliziten Terme. Nach der Umformulierung setzen wir obige Korrektur-Beziehungen in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned}
 M^2 p^{(2)'} + \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_e (u' b_1^1 + v' b_2^1)_e - p_w (u' b_1^1 + v' b_2^1)_w \right. \\
 \left. + p_n (u' b_1^2 + v' b_2^2)_n - p_s (u' b_1^2 + v' b_2^2)_s \right\} = -dp^{(0)} + S_p. \quad (7.32)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung, die nur die Druck-Korrektur $p^{(2)}'$ als Unbekannte enthält:

$$a_{PP} p^{(2)'}_P + \sum_{nb} a_{nb} p^{(2)'}_{nb} = -dp^{(0)} + S_p, \quad (7.33)$$

wobei die Indizes nb die acht Nachbarn des Kontrollvolumens P bezeichnen, nämlich E, W, N, S, NE, NW, SE und SW . In Matrixschreibweise führt das zu einem Gleichungssystem in Form eines Neun-Punkte-Sterns¹. Es ist nun nicht mehr symmetrisch. Bei der Lösung dieser Matrix mit der ILU-Typ-Vorkonditionierung ist die Vektorisierung leider unmöglich. Wegen der nichtverschwindenden Koeffizienten in den Eckpunkten, z. B. $a_{SE}, a_{NW} \dots$, sind die Rekursionsformeln bei der Ummummierung entlang der Hyperebenen nicht mehr voneinander unabhängig.

¹Für den drei dimensionalen Fall ergibt sich eine Matrix mit 19-Diagonale [Per85]

Im Folgenden werden die Koeffizienten a_{nb} und a_P im Detail aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 a_E &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_e(\overline{[q_1^1]}_e b_{1e}^1 + \overline{[q_2^1]}_e b_{2e}^1) \right. \\
 &\quad + p_e(q_{1E}^2 b_{1e}^1 + q_{2E}^2 b_{2e}^1) f_P^\xi (1 - f_E^\eta - f_{SE}^\eta) \\
 &\quad + p_n(q_{1P}^1 b_{1n}^2 + q_{2P}^1 b_{2n}^2) f_P^\xi (1 - f_P^\eta) \\
 &\quad \left. - p_s(q_{1P}^1 b_{1s}^2 + q_{2P}^1 b_{2s}^2) f_P^\xi f_S^\eta \right\}, \\
 a_W &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_w(\overline{[q_1^1]}_w b_{1w}^1 + \overline{[q_2^1]}_w b_{2w}^1) \right. \\
 &\quad - p_w(q_{1W}^2 b_{1w}^1 + q_{2W}^2 b_{2w}^1) (1 - f_W^\xi) (1 - f_W^\eta - f_{SW}^\eta) \\
 &\quad - p_n(q_{1P}^1 b_{1n}^2 + q_{2P}^1 b_{2n}^2) (1 - f_W^\xi) (1 - f_P^\eta) \\
 &\quad \left. + p_s(q_{1P}^1 b_{1s}^2 + q_{2P}^1 b_{2s}^2) (1 - f_W^\xi) f_S^\eta \right\}, \\
 a_N &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_n(\overline{[q_1^2]}_n b_{1n}^2 + \overline{[q_2^2]}_n b_{2n}^2) \right. \\
 &\quad + p_n(q_{1N}^1 b_{1n}^2 + q_{2N}^1 b_{2n}^1) (1 - f_N^\xi - f_{NW}^\xi) f_P^\eta \\
 &\quad + p_e(q_{1P}^2 b_{1e}^1 + q_{2P}^2 b_{2e}^1) (1 - f_P^\xi) f_P^\eta \\
 &\quad \left. - p_w(q_{1P}^2 b_{1w}^1 + q_{2P}^2 b_{2w}^1) f_W^\xi f_P^\eta \right\}, \\
 a_S &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_s(\overline{[q_1^2]}_s b_{1s}^2 + \overline{[q_2^2]}_s b_{2s}^2) \right. \\
 &\quad - p_s(q_{1S}^1 b_{1s}^2 + q_{2S}^1 b_{2s}^1) (1 - f_S^\xi - f_{SW}^\xi) (1 - f_S^\eta) \\
 &\quad - p_e(q_{1P}^2 b_{1e}^1 + q_{2P}^2 b_{2e}^1) (1 - f_P^\xi) (1 - f_S^\eta) \\
 &\quad \left. + p_w(q_{1P}^2 b_{1w}^1 + q_{2P}^2 b_{2w}^1) f_W^\xi (1 - f_S^\eta) \right\}, \tag{7.34} \\
 a_{NE} &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_e(q_{1E}^2 b_{1e}^1 + q_{2E}^2 b_{2e}^1) f_P^\xi f_E^\eta \right. \\
 &\quad \left. + p_n(q_{1N}^1 b_{1n}^2 + q_{2N}^1 b_{2n}^1) f_N^\xi f_P^\eta \right\}, \\
 a_{SE} &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ -p_e(q_{1E}^2 b_{1e}^1 + q_{2E}^2 b_{2e}^1) f_P^\xi (1 - f_{SE}^\eta) \right. \\
 &\quad \left. - p_s(q_{1S}^1 b_{1s}^2 + q_{2S}^1 b_{2s}^1) f_N^\xi (1 - f_S^\eta) \right\}, \\
 a_{NW} &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ -p_n(q_{1N}^1 b_{1n}^2 + q_{2N}^1 b_{2n}^1) (1 - f_{NW}^\xi) f_P^\eta \right. \\
 &\quad \left. - p_w(q_{1W}^2 b_{1w}^1 + q_{2W}^2 b_{2w}^1) (1 - f_W^\xi) f_W^\eta \right\}, \\
 a_{SW} &= \frac{\mathbf{Z}_p}{\Delta V_P} \gamma \left\{ p_s(q_{1S}^1 b_{1s}^2 + q_{2S}^1 b_{2s}^1) (1 - f_{SW}^\xi) (1 - f_S^\eta) \right. \\
 &\quad \left. + p_w(q_{1W}^2 b_{1w}^1 + q_{2W}^2 b_{2w}^1) (1 - f_W^\xi) (1 - f_{SW}^\eta) \right\}, \\
 a_P &= M^2 - \sum_{nb} a_{nb}.
 \end{aligned}$$

Für ein orthogonales Gitter mit beliebiger Gitterorientierung bleiben nur $[\dots]$ -Terme übrig. Dadurch ergibt sich eine symmetrische Matrix mit nur fünf Diagonalen. Für den nichtorthogonalen Fall kann man auch mit dem iterativen Lösungsvorgang der vereinfachten Matrix mit fünf Diagonalen (engl. ‘simplified pressure-correction equation’) richtige Lösungen erzielen. Dabei werden die nichtorthogonalen Effekte nach

der Bestimmung der Druck-Korrekturen immer wieder neu berücksichtigt. Im inkompressiblen Fall, d. h. unter einem räumlich konstanten Druck, reduzieren sich obige Koeffizienten genau zu den von Peric [Per85] angegebenen Formeln. Für den inkompressiblen Fall hat er verschiedene SIP-Löser [Per87] und Lösungsstrategien [Per90] getestet. Dabei hat er festgestellt, daß für den stark nichtorthogonalen Fall die Matrix mit neun Diagonalen (engl. ‘full pressure-correction equation’) gelöst werden muß. Ansonsten wird das Konvergenzproblem zu kritisch. Bei der Berechnung der nachfolgenden Testbeispiele verwenden wir CGSTAB-Verfahren mit MILU-Vorkonditionierung.

Höhere Ordnung im Raum

Für die zukünftige Arbeit fassen wir kurz die Diskretisierung höherer Ordnung im Raum. Für die Simulation der inkompressiblen Strömungen haben Lilek und Peric [LP95] die Diskretisierung vierter Ordnung im Raum auf dem kartesischen Gitter vorgestellt. Sie haben dabei das Finite-Volumen Verfahren verwendet, das die nicht-versetzte Variablenanordnung und SIMPLE-Typ Druck-Geschwindigkeits-Kopplung benutzt. Die Oberflächenintegrale, die konvektive und diffusive Flußterme, wurden durch die Simpson’sche Regel und polynomiale Interpolationen approximiert. Sie verwenden gleiche Beziehung zwischen Druck- und Geschwindigkeitskorrekturen wie bei der Diskretisierung zweiter Ordnung, um die kompliziertere Struktur der vollständigen Druck-Korrektur-Gleichung zu vereinfachen. Die Druck-Korrektur-Gleichung ist dann nicht mehr exakt. Alle Korrekturen nähern sich jedoch gegen Null, solange das gesamte Lösungsverfahren konvergiert. Diese Vereinfachung beeinflußt nur das Konvergenzverhalten der äußeren Iterationen.

Twerda [Twe00] und auch Wissink [Wis01] haben die Diskretisierung vierter Ordnung im Raum mit Richardson’scher Extrapolation durchgeführt. Dieses Verfahren wurde erst von Verstappen und Veldaman [VV98] auf dem versetzten Gitter eingeführt. Darüber haben wir uns schon im Kapitel 5 diskutiert.

Gesamter Lösungsvorgang

Zum Abschluß stellen wir nun die einzelnen Lösungsschritte zusammen. Der gesamte Algorithmus ist identisch mit dem im früheren Kapitel 4 erwähnten Projektionsverfahren. Wir brauchen nur noch zusätzliche Rechnungen für die Impuls-Interpolationen:

1. Schätze das Druckfeld ab:
→ $p^{(2)*}, p^*$.
2. Löse die Impulsgleichungen mit $p^{(2)*}$:
→ \mathbf{u}_c^* (Geschwindigkeiten in der KV-Mitte).

3. Berechne die Geschwindigkeiten \mathbf{u}_r^* an den KV-Oberflächen durch die Impuls-Interpolationen.
4. Bestimme \mathcal{S}_p^* mit \mathbf{u}_r^* .
5. Löse obige lineare Druck-Korrektur-Gleichung:
→ $p^{(2)'}$.
6. Korrektur des Druckfeldes:
→ $p^{(2)^{n+1}} = p^{(2)*} + p^{(2)'}$, $p^{n+1} = p^{(0)^n} + dp^{(0)} + M^2 p^{(2)^{n+1}}$.
7. Korrektur der Geschwindigkeiten:
→ \mathbf{u}_c^{n+1} , \mathbf{u}_r^{n+1} .

7.4 Testfälle

In diesem Abschnitt wenden wir unsere Algorithmen auf verschiedene numerische Beispiele an. Die Ergebnisse werden detailliert untersucht. Zunächst werden die numerischen Ergebnisse einer inkompressiblen Nischenströmung im Abschnitt 7.4.1 gezeigt, deren Seitenwände jedoch nicht orthogonal zur unteren und oberen Wand stehen. Die Strömung wird dabei durch die bewegte, obere Wand hervorgerufen. Im Abschnitt 7.4.2 wird unser Verfahren auf schwachkompressible natürliche Konvektionsströmungen angewandt. Die Geometrie ist dieselbe wie bei der Nischenströmung. Die Strömung wird jedoch durch den Temperaturunterschied zwischen den beiden Seitenwänden induziert. Wir betrachten dann die Ausbreitung der thermoakustischen Wellen im Abschnitt 7.4.3. Die Strömungsmechanismen sind identisch mit der natürlichen Konvektionen. Wir müssen jedoch sehr kleine Zeitschrittweiten verwenden, um die schnell laufenden Wellenphänomene vollständig aufzulösen. Solche schnellen Schallvorgänge werden meistens mit expliziter Zeitintegration gelöst. Wir überprüfen dabei, ob unser semi-implizites Verfahren auch mit kleinen Zeitschrittweiten akzeptable Ergebnisse liefern kann. Wir untersuchen schließlich im Abschnitt 7.4.4 die Strömung durch einen Kanal mit einer Verengung in Form eines Kreisbogens. Wir lösen die Euler-Gleichungen, die bei Strömungen mit höherer Machzahl Unstetigkeiten in der Lösung erlauben.

7.4.1 Inkompressible Nischenströmung

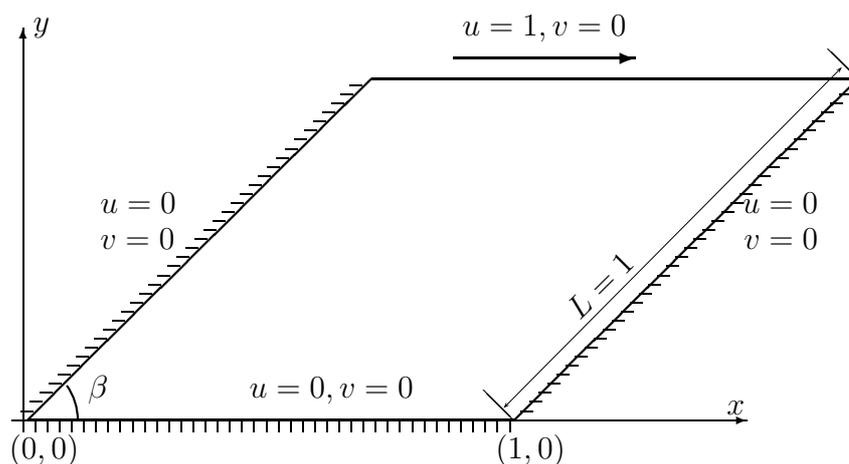


Abbildung 7.3: Geometrie und Randbedingungen für die Nischenströmung

Die Nischenströmung (engl. ‘Lid-driven cavity flow’) wird oft als Beispiel für die Berechnung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen auf orthogonalen Gittern verwendet. Der nichtorthogonale Fall wurde von Demirdzic et al. [DLP92] ausführlich

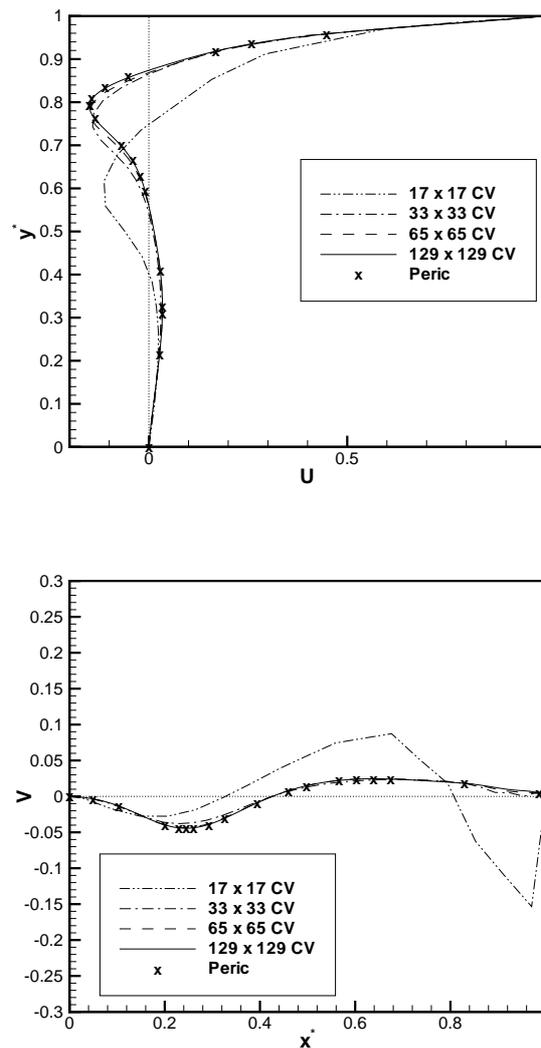


Abbildung 7.4: u - bzw. v -Geschwindigkeitsverteilung entlang der mittleren Ebene

untersucht. In Abb. 7.3 werden die geometrische Konfiguration dargestellt. Die Seitenlänge aller Wände ist $L = 1$, und das Anfangsströmungsfeld bleibt in Ruhe. Die obere Wand bewegt sich dann plötzlich horizontal mit der Geschwindigkeit $u = 1$, und das Strömungsfeld entwickelt sich bis zum stationären Zustand. Demirdzic et al. [DLP92] haben Rechnungen für zwei verschiedene Neigungswinkel ($\beta = 45^\circ$ und $\beta = 30^\circ$) und Reynoldszahlen ($Re = 100$ und $Re = 1000$) durchgeführt und ihre Ergebnisse ausführlich dokumentiert. Davon berechnen wir den Fall mit dem Neigungswinkel $\beta = 45^\circ$ der Seitenwand und der Reynoldszahl $Re = 1000$. Die Rechnungen werden auf verschiedenen gleichmäßigen Gittern durchgeführt. Wir verwenden das MUSCL-Schema für die konvektiven Terme und das SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration. Man interessiert sich lediglich für den stationären Zustand. Im Folgenden zeigen wir die Ergebnisse zum Zeitpunkt $t = 100$.

Zur Überprüfung der erhaltenen Ergebnisse sind die Horizontal- und Vertikalkomponenten der Geschwindigkeiten entlang der Mittellinie durch das Zentrum der Nische in Abb. 7.4 dargestellt. Die Koordinaten y^* für u und x^* für v sind dabei ein normierter Abstand entlang der Mittellinie und keine aktuelle x - oder y -Koordinate. Zum Vergleich sind die Ergebnisse mit verschiedenen Gittergrößen sowie die von Demirdzic et al. [DLP92] eingezeichnet. Ihre genauesten Ergebnisse gewinnen sie mit fast gleichmäßigen 320×320 Gitterzellen. Ab 65×65 Knoten sind die Lösungen unabhängig vom Gitter. Die v -Verteilungen mit den größten 17×17 Gitterzellen sind jedoch qualitativ völlig anders als die feinsten Lösungen. Abb. 7.5 zeigt ihre Stromlinien. Der Hauptwirbel, der sich direkt an der oberen Wand befindet, rotiert im Uhrzeigersinn. Er füllt lediglich ein Drittel der Nische aus. Der zweite Wirbel rotiert gegenuhreigersinnig in der Mitte der Nische. Er ist nun der räumlich größte Wirbel, dessen Stärke jedoch nur fünfmal kleiner als der Hauptwirbel ist, vgl. Tabelle 7.1.

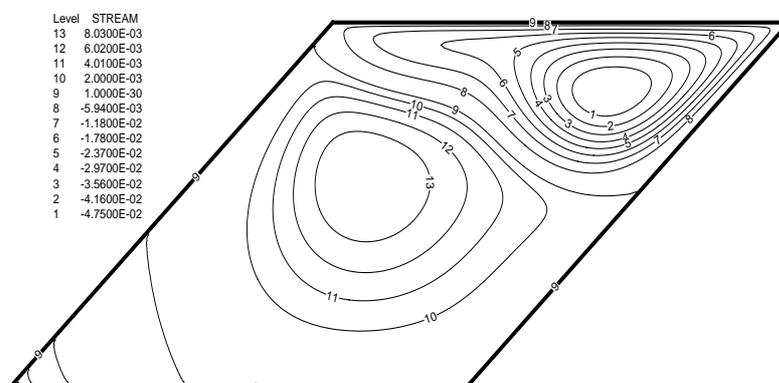


Abbildung 7.5: Stromlinien der Nischenströmungen bei $Re = 1000$.

	ψ_{min}	x_{min}	y_{min}
Demirdzic	-5.3507×10^{-2}	1.3130×10^{-0}	5.7404×10^{-1}
129×129 KV	-5.3384×10^{-2}	1.3120×10^{-0}	5.7555×10^{-1}
	ψ_{max}	x_{max}	y_{max}
Demirdzic	1.0039×10^{-2}	7.7663×10^{-1}	3.9851×10^{-1}
129×129 KV	1.0002×10^{-2}	7.7999×10^{-1}	4.0015×10^{-1}

Tabelle 7.1: Stromfunktion der Nischenströmung

In Tabelle 7.1 sind die Stromfunktionen angegeben. Sie deuten physikalisch auf den Massenfluß im Innern des Wirbels hin. Dabei werden die Stromfunktionen für die zwei stärksten Wirbel als ψ_{min} (Hauptwirbel) und ψ_{max} (zweiter Wirbel) bezeichnet.

Unsere Ergebnisse stimmen mit den Musterlösungen von Demirdzic et al. sehr gut überein. Die Abweichungen liegen unterhalb 1 Prozent.

7.4.2 Schwachkompressible natürliche Konvektion

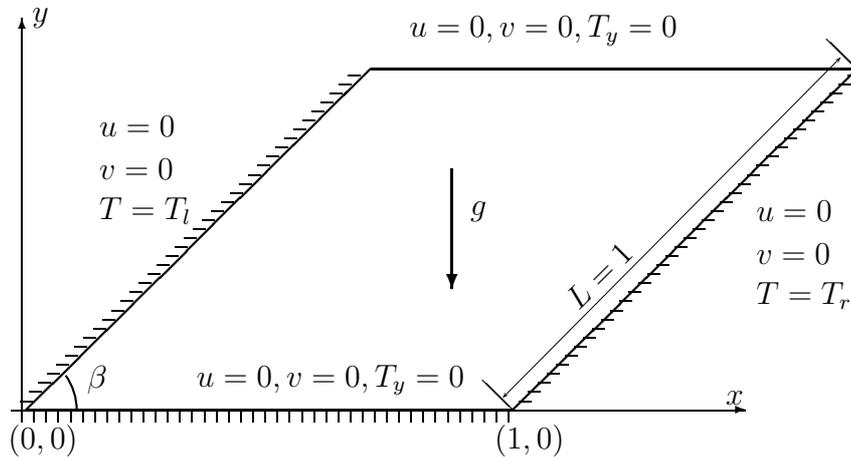


Abbildung 7.6: Geometrie und Randbedingungen für die natürliche Konvektion

Die geometrische Konfiguration in diesem Beispiel ist identisch mit der im letzten Abschnitt behandelten Nischenströmung. Im Gegensatz zur Nischenströmung wird diese Konvektionströmung (engl. ‘Buoyancy-driven cavity flow’) jedoch durch den Temperaturunterschied zwischen der heißen linken Wand und der kalten rechten Wand im Zusammenspiel mit der Erdbeschleunigung induziert. Die Konvektionströmung in einer quadratischen Box, der Fall mit $\beta = 90^\circ$, ist ein Benchmarkproblem für numerische Verfahren zur Simulation von schwachkompressiblen Strömungen [PQ00]. Aufgrund der Wärmeleitung in der Druckgleichung ist die Divergenz der Geschwindigkeiten nun von null verschieden. Außerdem ist die Boussinesq-Approximation nicht mehr zulässig wegen des hohen Temperatur- bzw Dichteunterschieds.

Am Anfang bleibt das Fluid in Ruhe mit der mittleren Temperatur. Die obere und untere Wand sind jeweils adiabatisch. Aufgrund der aus den Dichteunterschieden resultierenden Auftriebskräfte stellt sich eine im Uhrzeigersinn rotierende Strömung ein.

Zuerst definieren wir einige grundlegende Kenngrößen, die wir schon im Kapitel 2 ausführlich diskutiert haben, bei der natürlichen Konvektion in Anlehnung des obigen Benchmarkproblems für numerische Verfahren im Regime niedriger Machzahl. Bei der natürlichen Konvektion verwendet man oft eine auftriebsbedingte Geschwindigkeit als Referenzgeschwindigkeit:

$$\mathbf{u}_0^2 = gx_0 \frac{T_h - T_c}{T_0}. \quad (7.35)$$

Dann gilt folgende Beziehung für die Froudezahl:

$$\text{Fr}^2 = \frac{\mathbf{u}^2}{gx_0} = \frac{T_h - T_c}{T_0}. \quad (7.36)$$

Die charakteristische Kennzahl für die natürliche Konvektion ist die im Kapitel 2 diskutierte Rayleighzahl Ra. Sie ist für kompressible Strömungen wie folgt angegeben:

$$\text{Ra} = \frac{gx_0^3}{\nu_0 k_0} \frac{T_h - T_c}{T_0}. \quad (7.37)$$

Die Rayleighzahl kann nun auch durch die Prandtl- und Reynoldszahl ausgedrückt werden:

$$\text{Ra} = \text{Pr} \frac{gx_0^3}{\nu_0^2} \frac{T_h - T_c}{T_0} = \text{Pr} \cdot \text{Gr} = \text{Pr} \frac{x_0^2 \mathbf{u}_0^2}{\nu_0^2} = \text{Pr} \cdot \text{Re}^2. \quad (7.38)$$

Für die Machzahl gilt:

$$\text{M} = \frac{\mathbf{u}_0^2}{p_0/\varrho_0} = \text{Re}^2 \text{Fr}^4 g^2 \frac{\mu_0^2}{p_0^2 R T_0}. \quad (7.39)$$

Für den Fall mit variabler Viskosität wird die im Kapitel 2 angegebene Sutherland'sche Formel (2.15) eingesetzt. Weitere erforderliche Stoffwerte werden aus dem Benchmarkproblem entnommen:

$$\begin{aligned} p_0 &= 101325 \text{ Pa}, & T_0 &= 600 \text{ K}, & \varrho_0 &= \frac{p_0}{RT_0}, \\ R &= 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}, & \text{Pr} &= 0.71, & \gamma &= 1.4, \\ T_h &= T_0(1 + \epsilon), & T_c &= T_0(1 - \epsilon), & \mu_0 &= 1.68 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{sec}}. \end{aligned}$$

Der Parameter ϵ ist ein Maß für die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Seitenwänden. Als Benchmarkprobleme werden folgende vier Fälle untersucht. Wir können dabei nochmals feststellen, wie klein die globale Machzahl trotz des großen Temperaturunterschiedes bleibt.

ϵ	T_l	T_r	Ra	Pr	Re	Fr	M
0.01	606K	594K	10^6	0.71	1186.78	0.14142	5.46944×10^{-4}
0.2	720K	480K	10^6	0.71	1186.78	0.63245	1.48463×10^{-3}
0.4	840K	360K	10^6	0.71	1186.78	0.89443	1.87052×10^{-3}
0.6	960K	240K	10^6	0.71	1186.78	1.09544	2.14126×10^{-3}

Bei den Simulationen verwenden wir das MUSCL-Schema für die konvektiven Terme und das BDF-Verfahren für die Zeitintegration auf dem gleichmäßigen 129×129 Gitter. Neben den Strömungsmechanismen interessiert man sich auch für die durch die beiden Seitenwände zu- oder abgeführte Wärmemenge. Sie wird durch die mittlere Nusseltzahl gekennzeichnet (vgl. 2.3). In einem stationären Zustand muß die Summe

der beiden mittleren Nusseltzahlen an der heißen und kalten Wand gegen null konvergieren. Dafür wird eine Relativdifferenz zwischen beiden Nusseltzahlen definiert. Diese zeigt die Abweichung der Strömung von ihrem stationären Zustand:

$$\bar{\epsilon} = \left| 1 - \frac{\overline{\text{Nu}}_c}{\overline{\text{Nu}}_h} \right|. \quad (7.40)$$

Unsere Berechnungen werden nur bis zum Zeitpunkt $t = 100$ durchgeführt. Wir hoffen, daß die Strömung bis dahin ihren stationären Zustand erreicht.

Außerdem ist die Abnahme des mittleren Drucks von Bedeutung. Die gesamte Masse in der Box muß zu jedem Zeitpunkt erhalten bleiben:

$$M_{tot} = \int_{\Omega} \rho dV = \int_{\Omega} \frac{p}{T} dV = M_0, \quad (7.41)$$

wobei M_0 die Anfangsmasse bezeichnet. Bei der Strömung mit kleiner Machzahl bleibt der Druckgradient sehr klein gegenüber dem Temperaturgradienten. Für den stationären Zustand gilt dann

$$p^{(0)}(t) \simeq \frac{M_0}{\int_{\Omega} \frac{1}{T(t)} dV}. \quad (7.42)$$

		ϵ	0.01	0.2	0.4	0.6
	Heuveline	$\overline{\text{Nu}}_h$	8.8252	8.8297	8.8428	8.8598
	129 × 129	$\overline{\text{Nu}}_h$	8.87853	8.88140	8.89581	8.91875
	Heuveline	\bar{p}	0.9999640442	0.985473	0.94000	0.85638
	129 × 129	\bar{p}	0.999964	0.985352	0.939411	0.854416
Sutherland	Heuveline	$\overline{\text{Nu}}_h$	8.8251	8.8114	8.7689	8.6866
	129 × 129	$\overline{\text{Nu}}_h$	8.87850	8.86535	8.83191	8.77509
	Heuveline	\bar{p}	0.99998024	0.99205081	0.9676258	0.9244
	129 × 129	\bar{p}	0.999980	0.991838	0.966509	0.921395

Tabelle 7.2: Vergleich mit den Ergebnissen von Heuveline [Heu00] für die natürliche Konvektion in einer Box ($\beta = 90^\circ$) mit $\text{Ra} = 10^6$.

Zuerst betrachten wir die Ergebnisse der natürlichen Konvektion in einer Box mit $\beta = 90^\circ$. Für diese Benchmarkprobleme [PQ00] [Heu00] [Heuar] [BB02] stehen ausreichende Referenzlösungen zur Verfügung. In der Tabelle 7.2 sind die Ergebnisse der mittleren Nusseltzahl an der heißen Wand und die des mittleren Drucks angegeben. Für alle Testfälle stimmen die beiden Ergebnisse für den mittleren Druck sehr gut überein. Die mittlere Nusseltzahl zeigt überall eine Abweichung. Sie beträgt etwa 0.05. Diese Abweichungen kommen aus der Grobheit unseres Gitters, vgl. [BB02]. Ausführliche Daten sind in der Tabelle 7.3 aufgelistet. Im allgemeinen nimmt die Nusseltzahl

ϵ	0.01	0.2	0.4	0.6
$Nu_{h,max}$	17.97102	18.43485	19.07572	19.96608
$Nu_{h,min}$	0.96768	1.00101	1.03530	1.07153
\overline{Nu}_h	8.87853	8.88140	8.89581	8.91875
$Nu_{h,0.5}$	8.37561	8.23061	8.05494	7.83141
$Nu_{c,max}$	17.92817	17.57085	17.27020	17.03168
$Nu_{c,min}$	0.96396	0.92554	0.87683	0.80846
\overline{Nu}_c	8.87869	8.88605	8.90563	8.93253
$Nu_{c,0.5}$	8.39004	8.52412	8.66620	8.80570
$\bar{\epsilon}$	1.87856×10^{-5}	5.23625×10^{-4}	1.04024×10^{-3}	1.54637×10^{-3}
\bar{p}	0.999964	0.985352	0.939411	0.854416

ϵ	0.01	0.2	0.4	0.6
$Nu_{h,max}$	17.98233	18.66460	19.55671	20.74877
$Nu_{h,min}$	0.96845	1.01136	1.04577	1.06993
\overline{Nu}_h	8.87850	8.86535	8.83191	8.77509
$Nu_{h,0.5}$	8.37331	8.15947	7.86553	7.48685
$Nu_{c,max}$	17.91684	17.34470	16.82070	16.11132
$Nu_{c,min}$	0.96313	0.90273	0.81174	0.65955
\overline{Nu}_c	8.87863	8.86939	8.84079	8.79074
$Nu_{c,0.5}$	8.39220	8.54167	8.64329	8.69390
$\bar{\epsilon}$	1.48312×10^{-5}	4.55769×10^{-4}	1.00401×10^{-3}	1.78311×10^{-3}
\bar{p}	0.999980	0.991838	0.966509	0.921395

Tabelle 7.3: Ergebnisse der natürlichen Konvektion in einer Box ($\beta = 90^\circ$) mit konstanter (oben) und variabler (unten) Viskosität, $Ra = 10^6$.

an der heißen Wand mit steigendem Temperaturunterschied zu, an der kalten Wand fällt sie dagegen stetig ab. Diese Tendenz gilt unabhängig von der Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Mittlere Nusseltzahlen ändern sich nun nur sehr geringfügig mit der Temperaturdifferenz. Die Entwicklungstendenz verhält sich jedoch anders je nach der Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Bei konstanter Viskosität nimmt die mittlere Nusseltzahl mit steigender Temperaturdifferenz stetig zu. Dagegen verläuft sie für den Fall mit variabler Viskosität genau umgekehrt.

Der mittlere Druck fällt mit steigendem Temperaturunterschied generell ab. Die Abnahme des mittleren Drucks ist sehr drastisch, insbesondere für den Fall mit größerer Temperaturdifferenz ($\epsilon = 0.6$) und konstanter Viskosität. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität beeinflusst jedoch stark den Druckabfall. Der Druckabfall wird deutlich geringer mit variabler Viskosität. Je größer der Temperaturunterschied zwi-

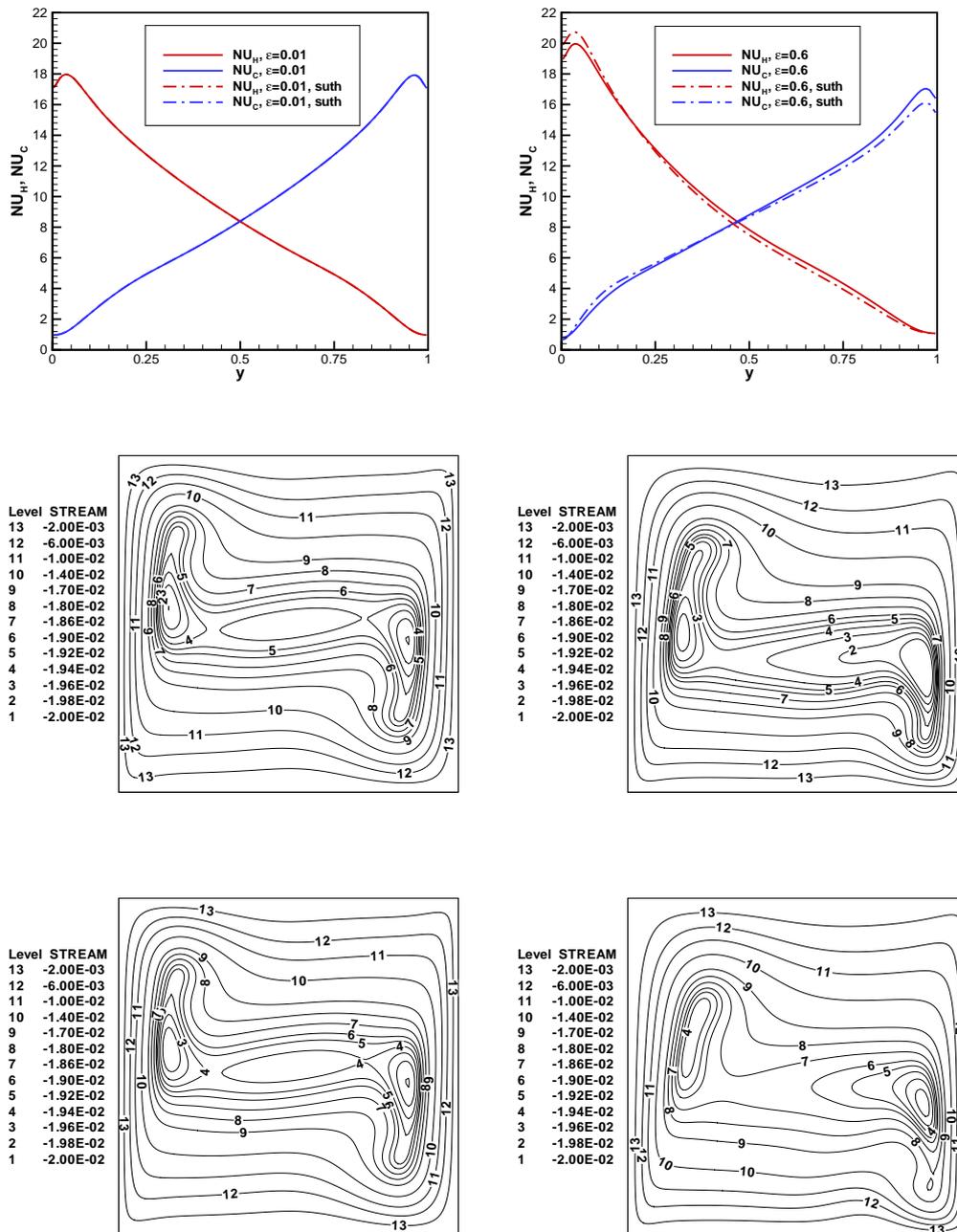


Abbildung 7.7: Nusseltzahl und Stromlinien für die Box mit $\beta = 90^\circ$. Mitte links: $\epsilon = 0.01$ mit konstanter Viskosität, Mitte rechts: $\epsilon = 0.6$ mit konstanter Viskosität, unten links: $\epsilon = 0.01$ mit variabler Viskosität, unten rechts: $\epsilon = 0.6$ mit variabler Viskosität

schen den beiden vertikalen Wänden wird, desto größer wird $\bar{\epsilon}$, d. h. die Abweichungen vom stationären Zustand. Der Fall mit der größeren Temperaturdifferenz braucht noch mehr Zeit bis zum stationären Zustand.

ϵ	0.01	0.2	0.4	0.6
$Nu_{h,max}$	12.84664	13.12905	13.51066	14.02844
$Nu_{h,min}$	1.58249	1.60632	1.63073	1.65609
\overline{Nu}_h	8.17917	8.18764	8.21473	8.26074
$Nu_{h,0.5}$	8.51363	8.44033	8.35097	8.23093
$Nu_{c,max}$	12.82027	12.59646	12.40603	12.24313
$Nu_{c,min}$	1.57971	1.55194	1.51528	1.46069
\overline{Nu}_c	8.17919	8.18792	8.21527	8.26160
$Nu_{c,0.5}$	8.52100	8.58909	8.66049	8.72927
$\bar{\epsilon}$	2.66413×10^{-6}	3.32288×10^{-5}	6.63431×10^{-5}	1.03463×10^{-4}
\bar{p}	0.999967	0.98649	0.944065	0.865559

ϵ	0.01	0.2	0.4	0.6
$Nu_{h,max}$	12.85629	13.31854	13.88267	14.57606
$Nu_{h,min}$	1.58244	1.60187	1.61397	1.61758
\overline{Nu}_h	8.17912	8.17360	8.15813	8.13285
$Nu_{h,0.5}$	8.51141	8.36652	8.14100	7.82687
$Nu_{c,max}$	12.81056	12.39817	12.00000	11.62920
$Nu_{c,min}$	1.57973	1.54815	1.49515	1.39276
\overline{Nu}_c	8.17915	8.17406	8.15930	8.13580
$Nu_{c,0.5}$	8.52310	8.60244	8.62805	8.59676
$\bar{\epsilon}$	3.67784×10^{-6}	5.68682×10^{-5}	1.43516×10^{-4}	3.59773×10^{-4}
\bar{p}	0.999985	0.993910	0.975155	0.942150

Tabelle 7.4: Ergebnisse der natürlichen Konvektion in einer schiefen Box ($\beta = 45^\circ$) mit konstanter (oben) und variabler (unten) Viskosität mit $Ra = 10^6$.

In Abb. 7.7 ist der Verlauf der Nusseltzahl an den Wänden für den Fall mit $\epsilon = 0.01$ und $\epsilon = 0.6$ dargestellt. Im Falle der kleinsten Temperaturdifferenz $\epsilon = 0.01$ ist die Nusseltzahl an der linken heißen und rechten kalten Wand vollständig symmetrisch. Die variable Viskosität hat dabei kaum Einfluß. Die Stromlinien verlaufen auch nahezu punktsymmetrisch zum Mittelpunkt. Zwei Wirbel, einer links oben an der heißen Wand und einer weiter links unten an der kalten Wand, rotieren gemeinsam im Uhrzeigersinn. Für den Fall mit dem größeren Temperaturunterschied $\epsilon = 0.6$ geht die symmetrische Eigenschaft weitgehend verloren. Der untere Wirbel wird immer breiter. Die maximale Nusseltzahl wird größer an der heißen Wand und kleiner an der kalten

Wand. Insgesamt verändert sich die mittlere Nusseltzahl dadurch nur sehr geringfügig. Mit steigender Temperaturdifferenz ergibt sich ein drastischer Druckabfall und

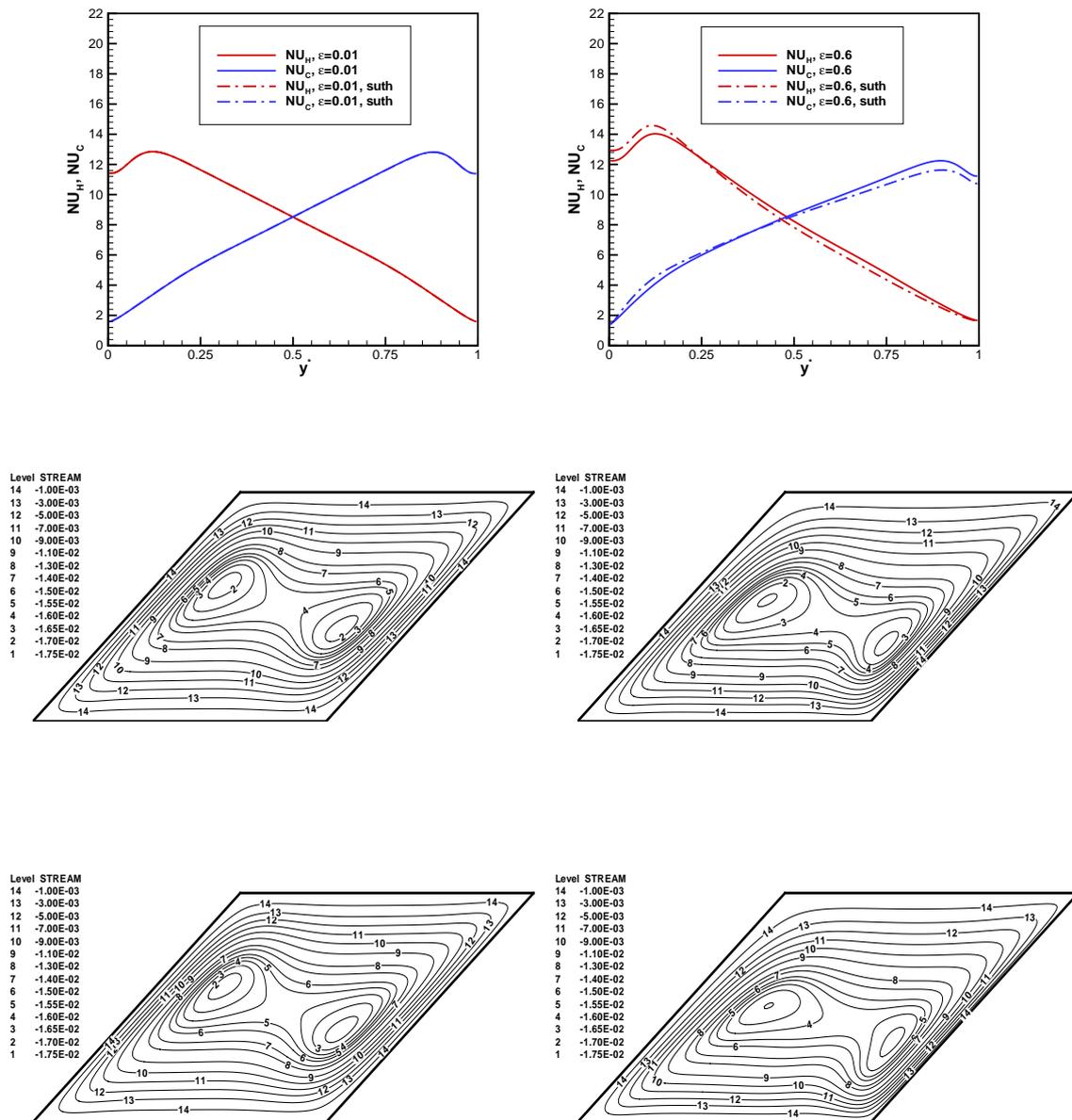


Abbildung 7.8: Nusseltzahl und Stromlinien für die Box mit $\beta = 45^\circ$. Mitte links: $\epsilon = 0.01$ mit konstanter Viskosität, Mitte rechts: $\epsilon = 0.6$ mit konstanter Viskosität, unten links: $\epsilon = 0.01$ mit variabler Viskosität, unten rechts: $\epsilon = 0.6$ mit variabler Viskosität

starke Dichteveränderungen. An der unteren Wand werden die schwereren Fluidteilchen stark beschleunigt und dringen immer näher an die linke heiße Wand. Dagegen haben die leichteren Fluidteilchen an der oberen Wand offenbar nicht genügend Kraft, um die Grenzschicht an der kalten Wand zu durchdringen. Diese Tendenz verstärkt sich

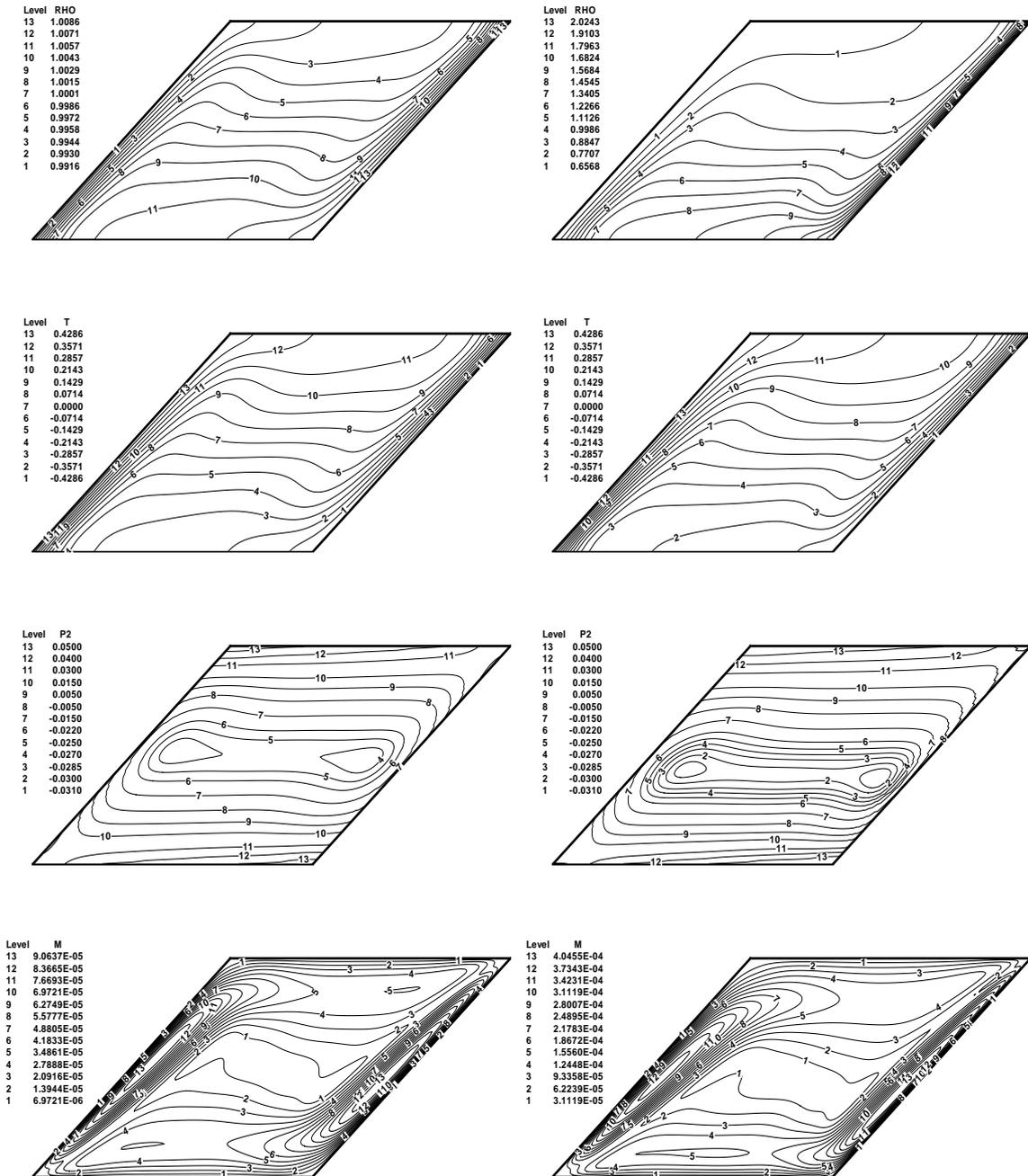


Abbildung 7.9: Verteilungen von Dichte, Temperatur, Druck und Machzahl für die schiefe Box mit $\beta = 45^\circ$ unter konstanter Viskosität. links: $\epsilon = 0.01$, rechts: $\epsilon = 0.6$

mit variabler Viskosität.

Die Ergebnisse der konvektiven Strömung in einer schiefen Box ($\beta = 45^\circ$) zeigen die gleiche Tendenz wie im Fall der senkrechten Box. Referenzlösungen für diesen Testfall sind in der Literatur noch nicht bekannt. Demirdzic et al. [DLP92] haben ein Benchmarkproblem für die natürliche Konvektion mit der gleichen Konfiguration wie in diesem Kapitel beschrieben. Sie haben dabei jedoch die Boussinesq-Annahme verwendet. Ausführliche Ergebnisse sind in Tabelle 7.4 angegeben. Die Nusseltzahl weist lediglich in diesem Fall generell niedrigere Werte auf. Die Reduktion der mittleren Nusseltzahl bleibt gering. Die maximale Nusseltzahl hat dagegen überall sehr stark abgenommen. Die Strömungen in der unteren linken und oberen rechten Ecke können jeweils an die gegenüber stehende heiße und kalte Wand nicht genug durchdringen. Die mittlere Druckabnahme wird geringer und die Abweichung vom stationären Zustand wird auch kleiner, d. h. kleinere $\bar{\epsilon}$ -Werte.

In Abb. 7.8 sind die Nusseltzahlen an den beiden Wänden und die Stromlinien dargestellt. Im Gegensatz zur senkrechten Box vergrößert sich nun der linke Wirbel mit steigender Temperaturdifferenz. Für den Fall mit dem kleinsten ($\epsilon = 0.01$) und größten ($\epsilon = 0.6$) Temperaturunterschied sind die Verteilungen von Dichte, Temperatur, Druck und Machzahl in Abb. 7.9 dargestellt. Unter der größeren Temperaturdifferenz wird die Dichteänderung sehr stark, obwohl die Konturlinien ähnlich aussehen. Die Verteilung des inkompressiblen Drucks $p^{(2)}$ zeigt zwei Niederdruckgebiete um zwei im Uhrzeigersinn rotierende Wirbel. Ohne Druckaufspaltung kann man so kleine Druckvariationen in der schwachkompressiblen Strömung kaum darstellen. Die gesamte Druckvariation $M^2 \cdot p^{(2)}$ ist in diesem Fall schon 10^7 bis 10^8 mal kleiner als der mittlere Druck². Die lokalen Machzahlen zeigen die maximalen Werte entlang der beiden Seitenwände. Ebenfalls wird die Strömung dort stark beschleunigt. In der Legende kann man sehen, wie klein die lokale Machzahl ist.

7.4.3 Thermoakustische Wellen

Werden schwachkompressible Fluide einem starken, lokalen Wärmefluß an der Wand ausgesetzt, expandieren die Fluidteilchen in der Nähe der Wand sehr rasch. Dadurch steigt der Druck lokal sehr stark und breitet sich schnell mit der Schallgeschwindigkeit aus. Solche Druckwellen bezeichnet man als *thermoakustische Druckwellen*. Die Zunahme des Wärmetransportes durch diese Welle ist normalerweise vernachlässigbar gering. Aber unter Umständen, z. B. bei chemischen Reaktionen, Verbrennungsvorgängen oder kryogener Technik, müssen diese Einflüsse doch berücksichtigt werden. Unter gewissen Modellannahmen wurden diese Phänomene schon analytisch [HB95]

²Der hydrostatische Druckanteil $p_s^{(2)}$ wird in der Anfangsphase schon abgezogen. Dabei gilt $\nabla p_s^{(2)} = -\frac{\rho_0}{F_r^2} \mathbf{e}_z$. Der in Abb. 7.9 dargestellte Druck ist also ein rein hydrodynamischer Druck.

[HB97] und numerisch [OSC90] [FOF00] umfangreich untersucht. Starke thermoakustische Wellen können nur dann induziert werden, wenn die Temperaturänderung an der Wand sehr rasch erfolgt. Daher benötigt man höhere Auflösungen in Raum und auch in Zeit, um die Entstehung und Ausbreitung der thermoakustischen Wellen genau zu bestimmen.

Hierbei untersuchen wir ein Testbeispiel von Farouk et al. [FOF00]. Die geometrische Konfiguration ist wie bei der vorher ausführlich diskutierten natürlichen Konvektion. Anfänglich bleibt nun der gasförmige Stickstoff in Ruhe in einem Quadrat, dessen Höhe und Breite $L = 1mm$ beträgt. Die Wärme wird dann impulsiv an der linken Wand zugeführt und an der anderen rechten Wand abgeführt. Dazu sind noch folgende weiteren Stoffdaten vorgegeben:

$$\begin{aligned} p_0 &= 101325 \text{ Pa}, & T_0 &= 300 \text{ K}, & \varrho_0 &= \frac{p_0}{RT_0}, \\ R &= 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}, & \text{Pr} &= 0.75, & \gamma &= 1.4, \\ T_h &= T_0(1 + \epsilon), & T_c &= T_0(1 - \epsilon), & \mu_0 &= \frac{\varrho_0 \sqrt{\gamma RT_0}}{\gamma} \frac{L}{9750} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{sec}}. \end{aligned}$$

Für den Temperaturunterschied zwischen den beiden Seitenwänden ist der Parameter $\epsilon = 0.33$ festgeschrieben. Als charakteristische Länge wählen wir die Breite des Quadrats $x_0 = L = 1mm$. Daraus lassen sich alle anderen charakteristischen Größen herleiten:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 2.9933 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{sec}}, \\ t_0 &= 1.2428 \times 10^{-2} \text{ sec}, \\ u_0 &= \sqrt{gx_0 \cdot 2\epsilon} = 8.0465 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \\ \text{M} &= \frac{u_0}{\sqrt{\gamma RT_0}} = 2.7422 \cdot 10^{-4}, \\ \text{Re} &= \frac{\varrho_0 u_0 x_0}{\mu_0} = 3.1635. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Bei diesem Testbeispiel ist die Reynoldszahl sehr klein wegen der Festlegung der kleinen Bezugslängen. Für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität und Temperaturleitfähigkeit verwenden wir keine Sutherland'sche Formel sondern die folgenden algebraischen Beziehungen [HB97]:

$$\mu = 1.489\sqrt{1 + T'} - 0.489, \tag{7.44}$$

$$\kappa = 1.660\sqrt{1 + T'} - 0.660, \quad T' = \frac{T - T_0}{T_0}. \tag{7.45}$$

Bei der Simulation verwenden wir das MUSCL-Schema für die Konvektionsterme und das SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration. Wir haben dabei die Zeitschrittweite so festgelegt, daß sie mit der auf die Schallgeschwindigkeit bezogenen CFL-Bedingung unter der Referenztemperatur T_0 der Courantzahl 0.25 entspricht. In Abb. 7.10 werden die Druckverteilungen zum normierten Zeitpunkt $\tau = 0.25$ mit verschiedenen räumlichen Auflösungen dargestellt. Die normierte Zeit $\tau = \frac{t}{t_L}$ ist so festgelegt, daß die thermoakustischen Wellen innerhalb t_L mit der Schallgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$

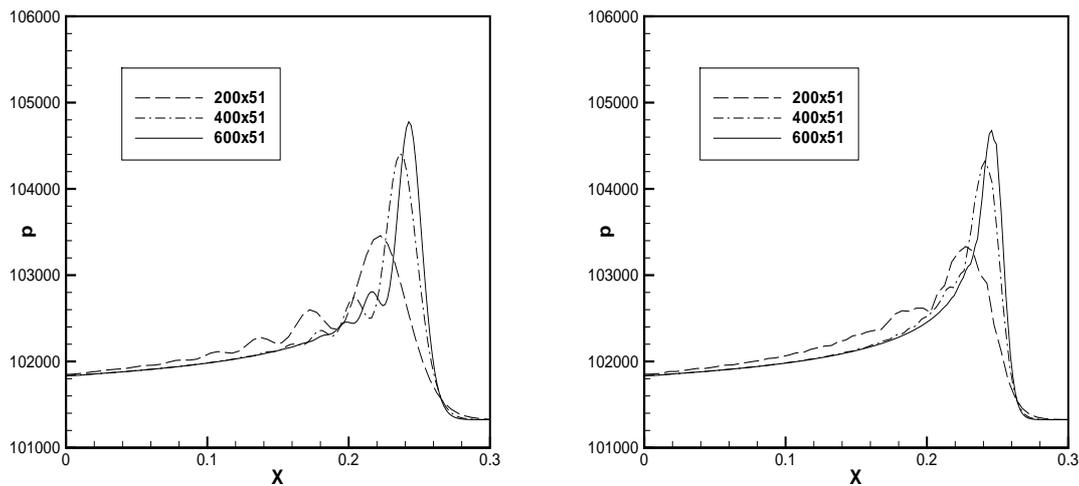


Abbildung 7.10: Druckverteilungen zum Zeitpunkt $\tau = 0.25$, Bestimmung des Druckgradienten in Prädiktorschritt mit zentraler Interpolation (links) und MUSCL-Interpolation (rechts).

die Quadratsbreite L durchlaufen. Die thermoakustische Welle hat typischerweise eine steile Wellenfront, die durch die impulsive Wärmezunahme (oder Wärmeabnahme) an der Wand entsteht, und ihre Amplitude hängt stark von der Auflösung ab. Dahinter folgt ein relativ langer Nachlauf (engl. ‘wavetail’) der Wellenfront. Unsere Algorithmen neigen jedoch zu starken Oszillationen am Wellenende.

Eine komplexe Welle (oder Funktion) kann nach der Fourieranalyse aus mehreren einfachen Cosinus- oder Sinusförmige Wellen mit verschiedener Wellenzahl approximiert werden. Jede einfache Welle läuft dann normalerweise mit eigener Phasengeschwindigkeit. Je steiler die Funktion wird, desto größer werden die Wellenanteile mit höherer Wellenzahl. Wenn diese Anteile in der Numerik räumlich nicht vollständig aufgelöst werden, dann wird ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit verfälscht. Dies führt zu einem Phasenfehler (oder Dispersionsfehler). Dadurch verliert die Funktion ihr korrektes Verhalten in der Zeit.

Der starke Temperaturgradient im Anfangsstadium unseres Beispiels, der als Quellterm bei der Druck-Korrektur-Gleichung fungiert, enthält genau die Wellenanteile mit höherer Wellenzahl. Mit einem genügend feinen Gitter müssen diese Anteile vollständig aufgelöst werden. Sonst laufen sie in diesem Fall langsamer als die Schallgeschwindigkeit c_0 , und dadurch entstehen die starken Oszillationen am Wellenende wie im linken Bild in Abb. 7.10. Um die Oszillationen zu unterdrücken, verwendet man meistens räumliche Differenzenformeln höherer Ordnung mit besserer Dispersionseigenschaft [FOF00]. Dies läßt sich jedoch mit impliziter Zeitintegration nicht leicht realisieren. Eine andere Möglichkeit ist, mit zusätzlicher Dämpfung solche Oszillationen zu beseitigen. Das rechte Bild in Abb. 7.10 zeigt die Ergebnisse mit zusätzlicher

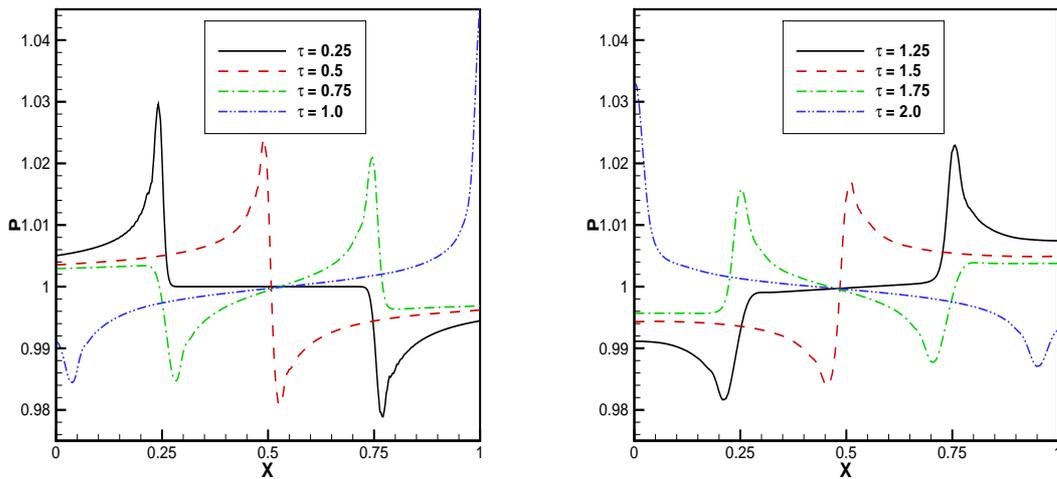


Abbildung 7.11: Druckverteilungen mit dem 400×51 Gitter zum Zeitpunkt $\tau = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$.

Dämpfung im Druckterm. Im Prädiktorschritt berechnen wir den Impuls mit dem abgeschätzten Druck. Bei der Bestimmung des Druckgradienten $\nabla p^{(2)*}$ verwenden wir für den Druck an den KV-Oberflächen keine einfache lineare Interpolation, sondern eine MUSCL-Interpolation. An der KV-Oberfläche berechnen wir zunächst jeweils den linkseitigen und rechtsseitigen Druck, und mitteln anschließend:

$$p^{(2)*}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) = 0.5 \cdot \left[p^{(2)+}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + p^{(2)-}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) \right]. \quad (7.46)$$

Die Dämpfung wird damit erhöht, gezielt für Wellenanteile mit höherer Wellenzahl. Als Resultat werden die Oszillationen im wesentlichen eliminiert, aber die Amplitude der Druckwellen reduziert sich ein wenig. Abb. 7.11 zeigt die Druckverteilungen zu verschiedenen Zeitpunkten. Die an der heißen und kalten Wand entstandenen Druckwellen laufen quer zueinander und reflektieren an den gegenüberliegenden Wänden. So oszillieren die beiden Wellen weiter hin und her. Wegen der dynamischen und auch thermischen Viskosität verkleinert sich die Amplitude der thermoakustischen Wellen mit der Zeit, und ihre Breite vergrößert sich. Die beiden Druckwellen laufen jedoch ein wenig unsymmetrisch. Der Grund dafür liegt darin, daß die thermophysikalischen Eigenschaften des Gases von der Temperatur abhängig sind. Die heiße Welle läuft schneller, die kalte dagegen langsamer. Bei den Druckverteilungen zum normierten Zeitpunkt $\tau = 1$ kann man dies deutlich sehen. Die heiße Welle wird schon an der kalten Wand reflektiert, aber zum gleichen Zeitpunkt erreicht die kalte Welle noch nicht die heiße Wand.

Das linke Bild der Abb. 7.12 zeigt den Druckverlauf an der linken, heißen Wand. Am Anfang steigt der Druck sehr drastisch an und fällt dann fast exponentiell ab, bis die

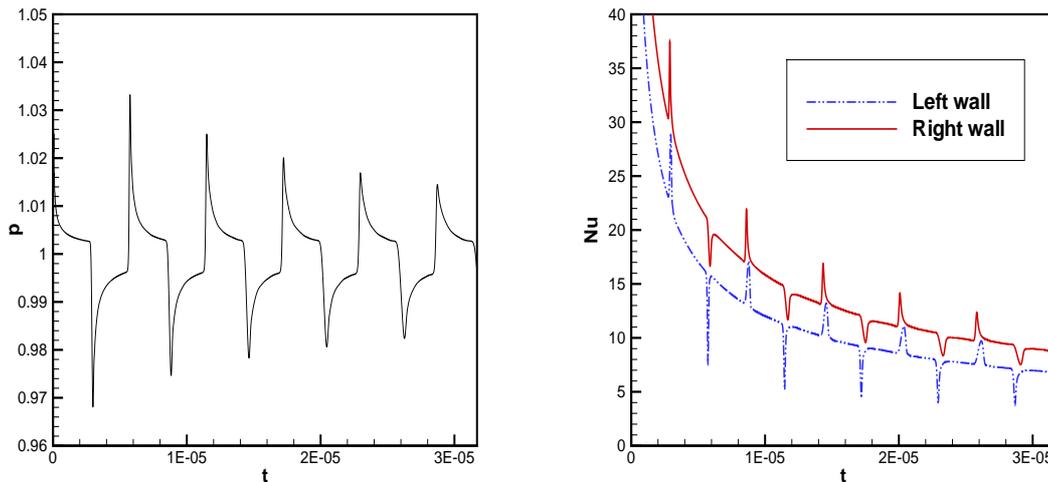


Abbildung 7.12: Links: Druckverteilungen in der Mitte der linken Wand mit dem 400×51 Gitter. Rechts: Nusseltzahl in der Mitte der linken und rechten Wand.

kalte Welle ankommt. Im rechten Bild der Abb. 7.12 wird der Verlauf der Nusseltzahl an der linken und rechten Wand dargestellt. Wegen der impulsiven Aufheizung und Abkühlung sind die Nusseltzahlen an den beiden Wänden am Anfang sehr hoch. Trifft die oszillierende, thermoakustische Welle an die gegenüberliegende Wand, zeigt die Nusseltzahl ihre charakteristischen Spitzen. Der Wärmeübergang wird dadurch erhöht oder erniedrigt. Mit der Zeit werden diese Spitzen langsam gedämpft, und ihre Breite vergrößert sich.

7.4.4 Strömungen durch einen Kanal mit kreisförmiger Verengung

In diesem Abschnitt zeigen wir die Strömung durch einen Kanal mit einer Verengung in Form eines Kreisbogens (engl. ‘circular arc bump’) an der unteren Wand, die von vielen Autoren [DIL90] [DLP92] [ECS84] [KP89] numerisch untersucht wurde. Für die Testbeispiele werden die Euler-Gleichungen gelöst. Strömungen mit drei verschiedenen Machzahlen am Einlaß werden dabei betrachtet. Sie entsprechen jeweils dem Unterschall- ($M_{in} = 0.5$), Transschall- ($M_{in} = 0.675$) und Überschallregime ($M_{in} = 1.65$). Bei der Simulation verwenden wir zwei verschiedene Dicken der Verengung: 10% für die Unterschall- und Transschallströmung, dagegen 4% für die Überschallströmung. Die Größe des Kanals beträgt 3 in x- und 1 in y-Richtung. Er wird in x- und y-Richtung mit der 146×98 Gitterzellen gleichmäßig diskretisiert. Hierbei verwenden wir das MUSCL-Schema mit dem Minmod-Limiter für die konvektiven Terme und das SBDF2-Verfahren für die Zeitintegration.

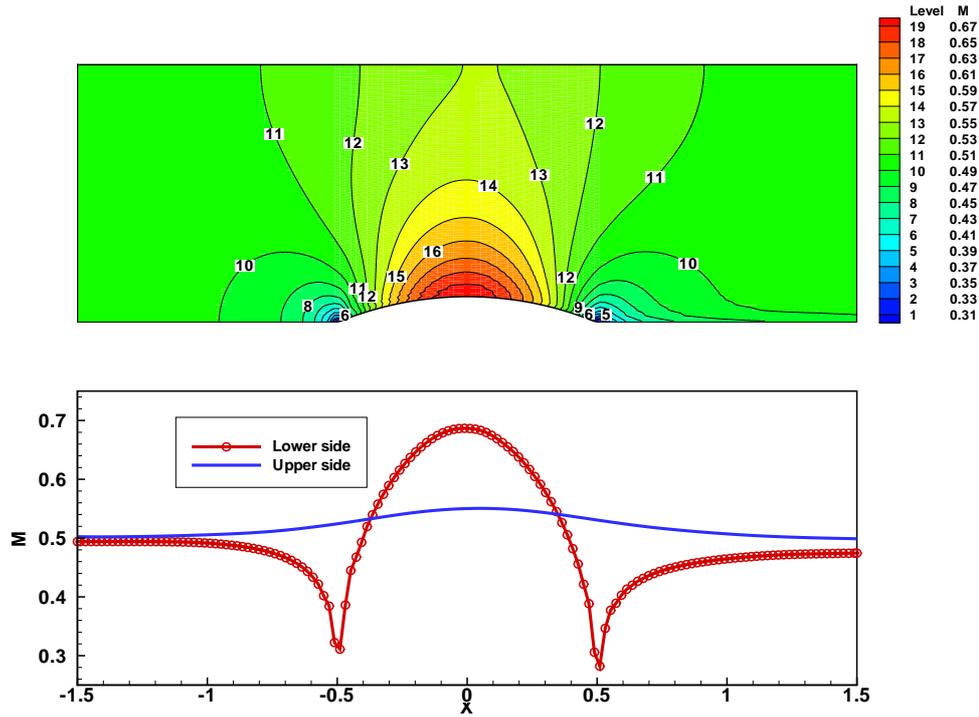


Abbildung 7.13: Subsonische Lösung für $M_{in} = 0.5$. Oben: Isoliniendarstellung für die Machzahl ($\Delta M = 0.02$). Unten: Verlauf der Machzahl an der unteren (o) und oberen Wand (-).

In Abb. 7.13 werden die Mach-Verteilungen für das subsonische Beispiel ($M_{in} = 0.5$) dargestellt. Am Einlaß werden alle Variablen, außer dem Druck, fest vorgeschrieben. Der Druck wird von innen extrapoliert. Am Auslaß wird dagegen der Druck fest vorgegeben, und sonstige Variablen werden extrapoliert. An der Wand verwenden wir tangentielle Bedingungen an die Geschwindigkeiten. Die Dichte und der Druck werden extrapoliert. Für die Anfangsverteilung der Variablen verwenden wir folgende Beziehungen zwischen den Ruhegrößen:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{2}.$$

Dabei kennzeichnet der obere Index $\tilde{}$ die dimensionsbehaftete Größe und der untere Index $_0$ die Ruhegröße. Bei der Entdimensionalisierung verwenden wir die Ruhegröße als Bezugsgröße. Damit gilt:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + M^2 \frac{\mathbf{u}^2}{2}. \quad (7.47)$$

Wir wählen noch die globale Machzahl M als 1 ($\mathbf{u}_0 = c_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$). Mit der Beziehung

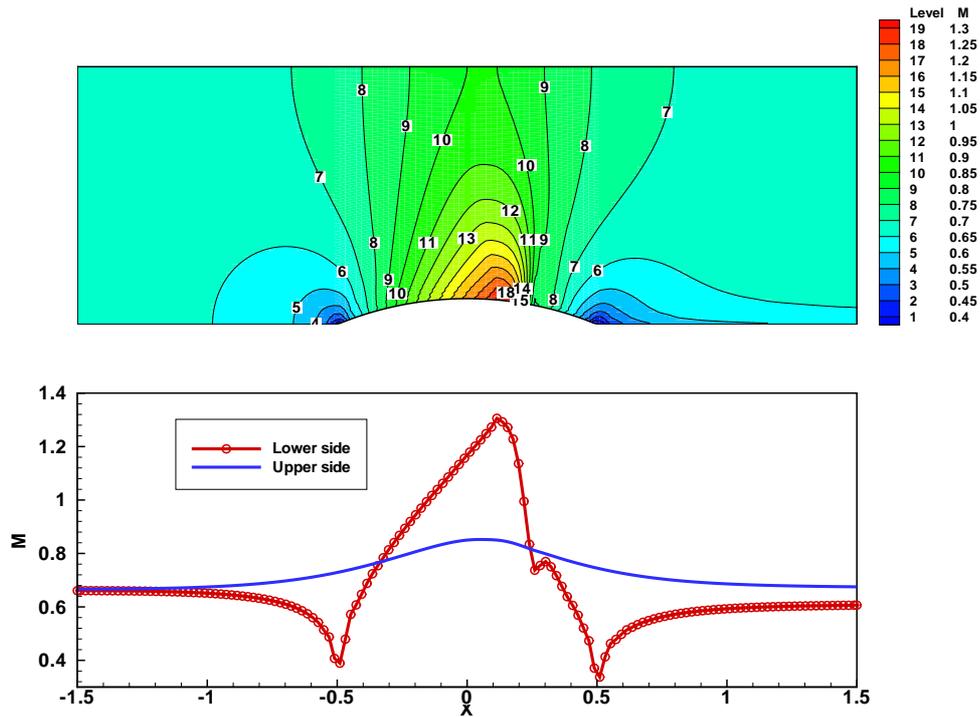


Abbildung 7.14: Transsonische Lösung für $M_{in} = 0.675$. Oben: Isolinen der Machzahl ($\Delta M = 0.05$). Unten: Verlauf der Machzahl an der unteren (o) und oberen Wand. (-).

$\mathbf{u}^2 = M_{loc}^2 \gamma \frac{p}{\varrho}$ ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit am Einlaß und im Strömungsfeld

$$u_{in}^2 = \frac{\gamma M_{in}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{in}^2}, \quad u(x) = u_{in} \frac{\Delta y_{in}}{\Delta y(x)}, \quad v(x, y) = 0.$$

Unter Verwendung der isentropen Beziehung $p = \varrho^\gamma$ berechnen wir die Druck- und Dichteverteilungen am Anfang.

$$p = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\varrho = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

In der Mitte des Kanals sind die Verteilungen symmetrisch. Hinter der Verengung an der unteren Wand wird jedoch die Verletzung der Symmetrieeigenschaft bemerkbar. Solche Phänomene findet man häufig auch bei anderen Autoren (vgl. [ECS84]). Die Autoren weisen darauf hin, daß Wirbel in der Nähe der vorderen und hinteren Kante der Verengung entstehen, wo sich die Steigung der Stromlinien unstetig ändert. Die Randbedingungen an der Wand haben auch einen starken Einfluß auf die Lösungsqualität [DG94].

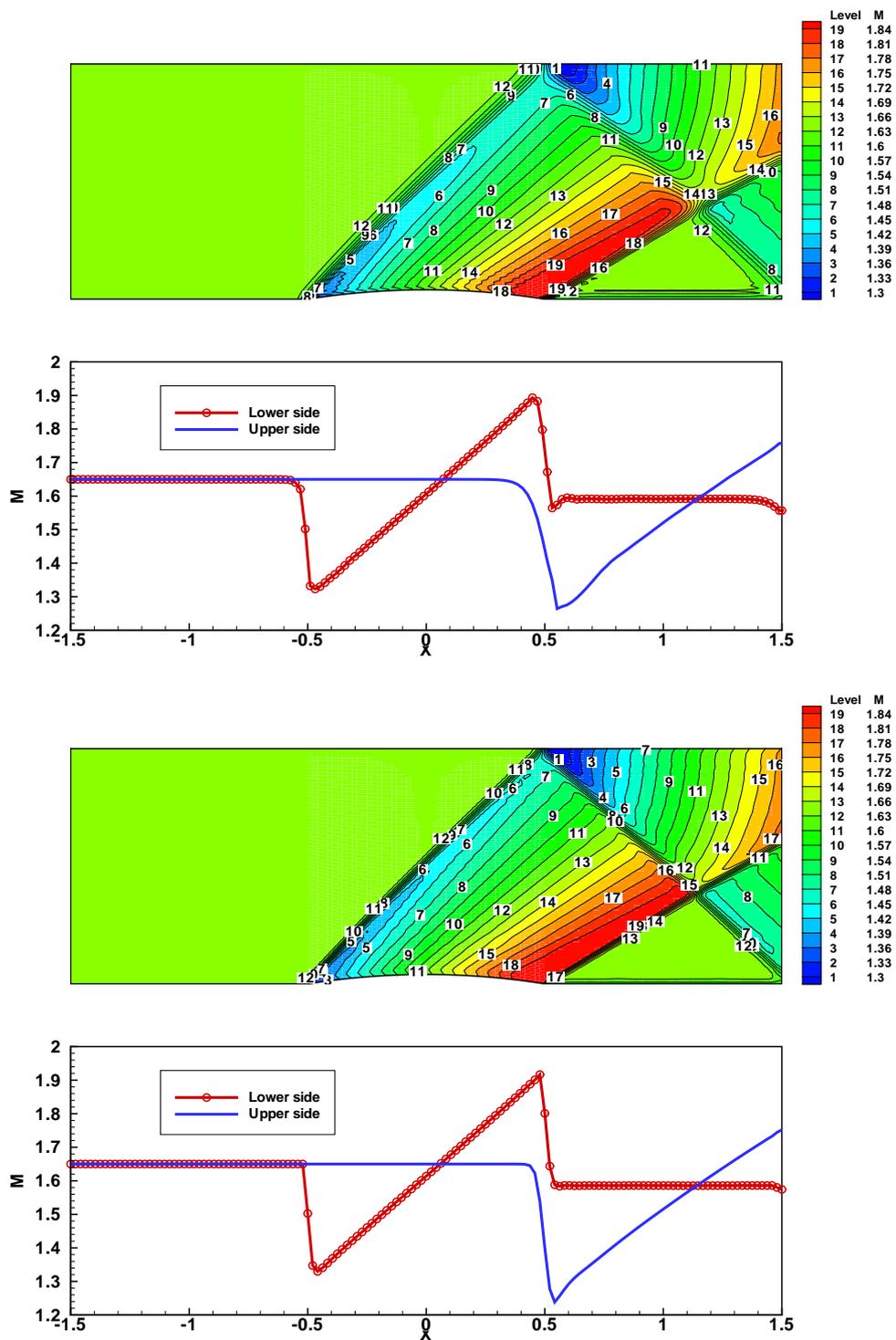


Abbildung 7.15: Mach-Verteilung ($\Delta M = 0.03$) der Überschallströmung für $M_{in} = 1.65$, Oben: Ergebnisse unserer Rechnungen, Unten: Ergebnisse mit HYDSOL.

Abb. 7.14 zeigt die Mach-Verteilung für die transsonische Strömung mit $M_{in} = 0.675$. Dabei verwendet man die gleichen Randbedingungen und berechnet die Anfangsverteilung der Variablen auf gleiche Weise wie beim subsonischen Fall. Die Strömung beschleunigt über die Verengung und erreicht dann den Überschall, der mit einem scharfen Stoß auf dem hinteren Teil der Verengung abgeschlossen wird. Der Stoß liegt bei etwa 70% der Kanallänge. Seine Stärke erreicht $M_{max} = 1.305$.

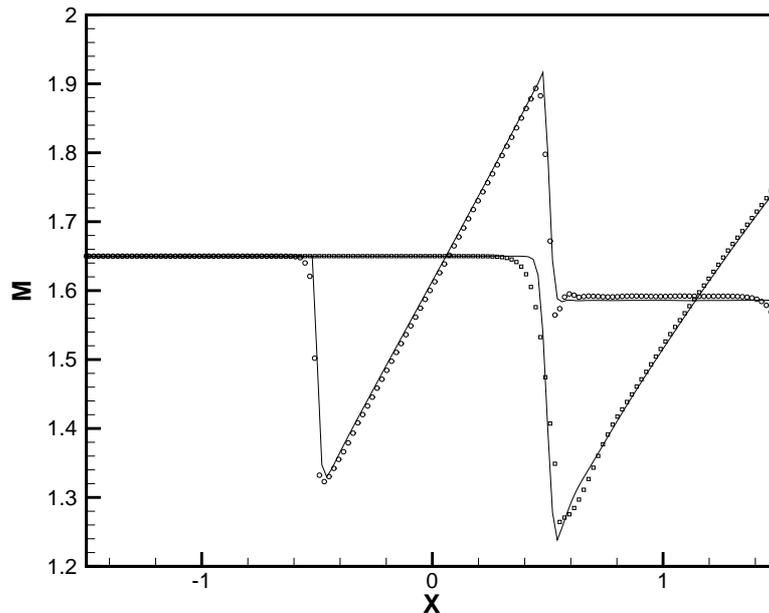


Abbildung 7.16: Verlauf der Machzahl an der oberen und unteren Wand für $M_{in} = 1.65$. Kreis und Quadrat: Ergebnisse unserer Rechnung, Durchgezogene Linie: Ergebnisse mit HYDSOL.

In Abb. 7.15 werden die Ergebnisse der Überschallströmung ($M_{in} = 1.65$) dargestellt. Zwei schiefe Stöße entstehen an der vorderen und hinteren Kante der Verengung. Der vordere Stoß wird an der oberen Wand reflektiert und schneidet anschließend den von der hinteren Kante hochlaufenden Stoß. Die Strömung behält ihren Überschallcharakter im gesamten Kanal. Daher werden alle Variablen am Einlaß fest vorgeschrieben und am Auslaß extrapoliert. Am Einlaß wird der Druck $p = 1$, die Dichte $\rho = 1$ und die Geschwindigkeit $u = 1.65/\sqrt{\gamma}$, $v = 0$ fest vorgegeben. Im Strömungsfeld wird am Anfang ein ruhiger Zustand mit dem niedrigen Druck $p = 0.01$ und der Dichte $\rho = 0.01$ angenommen. Der starke Stoß entsteht dann am Einlaß. Mit der Zeit läuft er sehr schnell nach hinten bis zum stationären Zustand.

Neben unseren Ergebnissen sind die Ergebnisse des Rechenprogramms HYDSOL in Abb. 7.15 dargestellt. Es ist ein expliziter, konservativer, zell-zentrierter Finite-

Volumen-Code, der auf Godunov-Verfahren basiert. Dabei verwendet man den exakten Riemannlöser für den numerischen Fluß und ein explizites Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung für die Zeitintegration. Es ist ebenfalls von zweiter Ordnung im Raum.

Zum Vergleich werden beide Ergebnisse in Abb. 7.16 nochmals zusammengestellt. Die Stoßlagen werden von beiden Verfahren identisch bestimmt. Aber die Stoßstärke des reflektierten Stoßes an der oberen Wand und des Stoßes an der hinteren Kante wird bei uns mehr gedämpft. Unsere Ergebnisse zeigen auch weniger Schärfe bei allen Stößen. Der Grund liegt daran, daß eine dämpfungsreiche Minmod-Funktion als Steigungsparameter ($\kappa = 1$) verwendet wird. Wenn wir dafür einen höheren Wert wählen, wird der Stoß zwar schärfer aufgelöst, doch werden die Oszillationen nach dem Stoß auch stärker. Nach dem Stoß an der hinteren Kante der Verengung entstehen kleine Oszillationen. Hinter diesen Oszillationen zeigt unsere Machzahl noch kleine Abweichungen im Vergleich mit den Ergebnissen von HYDSOL.

8 Schlußbetrachtung

In der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem instationäre Strömungen in allen Machzahlbereichen simuliert werden können. Die Ausgangsbasis ist das Rechenprogramm Mpv2d, das auf einer Weiterentwicklung des MPV-Ansatzes von Klein [Kle95] und Munz [MK95] auf die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen basiert. Dieser Code kann für schwachkompressible sowie inkompressible Strömungen eingesetzt werden. Die vorliegende Arbeit dient zur weiteren Entwicklung der Algorithmen für die Simulation von Strömungen in allen Machzahlbereichen.

8.1 Zusammenfassung

Zunächst wurden die primitive, konservative und gemischte Formulierung der grundlegenden Gleichungen aufgestellt und für den einfachsten eindimensionalen Fall auf einem versetzten Gitter implementiert. Unter der sorgfältigen Validierung für mehrere Testbeispiele mit verschiedenen Machzahlen wird es gezeigt, daß nur die konservative Formulierung für Strömungen mit höherer Machzahl physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefern kann. Die Grundgleichungen werden dabei zeitlich semi-implizit integriert. Von besonderem Interesse sind Zeitintegrationen höherer Ordnung ohne irgendeine Aufspaltung. Wenn Strömungen im schwachkompressiblen Bereich mehrere Längenskalen enthalten und zeitlich nicht vollständig aufgelöst werden, zeigt ihr Konvergenzverhalten jedoch keinen einfachen Verlauf. Eine implizite Behandlung der viskosen Reibungsterme der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen verursacht zusätzliche Schwierigkeit beim Lösen der Druck-Korrektur-Gleichung. Sie enthält nun die Invertierung des Laplace-Operators, die in der Praxis nicht realisierbar ist. Dafür haben wir zwei verschiedene Verfahren, ein iteratives SIMPLE-Typ und ein anderes nichtiteratives Druck-Korrektur-Verfahren, verwendet. Das kompressible Druck-Korrektur-Verfahren kann als unmittelbare Erweiterung des inkompressiblen Projektionsverfahrens (oder ‘fractional step method’) verstanden werden. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden für den zweidimensionalen, bzw. dreidimensionalen Fall mit einem Finite-Differenzen

Verfahren auf einem versetzten kartesischen Gitter implementiert. Die expliziten, konvektiven Terme werden mit verschiedenen Upwind-Verfahren höherer Ordnung diskretisiert. Dagegen werden zentrale Differenzen zweiter Ordnung für die Diffusions- und Schallterme verwendet. Die daraus resultierenden impliziten Gleichungssysteme werden unter Anwendung eines CG-Typ Verfahrens mit Vorkonditionierung gelöst. Zur Beschleunigung des Lösungsvorgangs für größere Gitterzellenzahlen, z. B. im dreidimensionalen Fall, wird ein Mehrgitterverfahren in vollständig vektorisierter Form implementiert. Die Eignung der entwickelten Algorithmen zur Simulation von Strömungen aus dem gesamten Machzahlbereich wurde anhand ausgewählter Testbeispiele untersucht. Der Fall verschwindender Machzahl berücksichtigt inkompressible Strömungen mit variabler Dichteverteilung. Eine Rayleigh-Taylor-Instabilität, eine aufsteigende Blase sowie ein fallender Wassertropfen in Luft zeigen die richtige Entwicklung der grundlegenden physikalischen Phänomene. Für den schwachkompressiblen Fall wird die Wechselwirkung der Strömung auf der akustischen Skala mit der kleinskaligen Strömung sowie eine durch den Temperaturunterschied induzierte natürliche Konvektion in einem Quadrat untersucht. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Literatur. Das Verfahren wurde auch für die idealen MHD-Gleichungen erweitert. Als Beispiele der inkompressiblen MHD-Strömungen wurden eine aufsteigende Blase und eine freie Scherschicht unter dem magnetischen Einfluß untersucht.

Es wurde ein Lösungsverfahren mit nichtversetzter Variablenanordnung in irregulären Geometrien auf einem Vierecksgitter im zweidimensionalen Fall betrachtet. Um ein oszillierendes Druckfeld zu vermeiden, wurden sogenannte Impulsinterpolationen nach dem Prinzip von Rhie und Chow [RC83] verwendet. Dieses Verfahren ist eine unmittelbare Erweiterung des inkompressiblen Verfahrens von Peric [Per85] unter Verwendung des MPV-Ansatzes. Durch die sorgfältige Validierung verschiedener Testbeispiele, von inkompressiblen Nischenströmungen und natürlichen Konvektion im schwachkompressiblen Regime bis zur starkkompressiblen Strömung durch einen Kanal mit kreisförmiger Verengung, konnten wir die Flexibilität unseres Verfahrens und auch dessen Grenzen aufzeigen.

8.2 Ausblick

Aus den Ergebnissen dieser Arbeit ergeben sich einige Ansatzpunkte für weiterführende Entwicklungen effizienter Algorithmen für Strömungen in allen Machzahlbereichen. Unsere beiden Algorithmen auf der versetzten und auch der nichtversetzten Variablenanordnungen neigen zu Oszillationen an Stellen mit starken Gradienten. Der Grund liegt hauptsächlich in den zentralen Differenzen für die Schallterme. Diese müssen im Überschall noch upwind diskretisiert werden. Eine Entwicklung von Upwind-

Druck-Korrektur-Verfahren ist daher sehr wünschenswert. Außerdem bringen unsere Algorithmen in diesem Bereich keine Vorteile im Bezug auf die Zeitschrittweiten des expliziten Verfahrens. Eine hybride Zeitintegration, explizite Upwind-Verfahren im starkkompressiblen Bereich und semi-implizite Verfahren im schwachkompressiblen Bereich, kann effizienter werden. Kürzlich hat Rossow [Ros03] eine solche hybride Methode vorgestellt.

Die weitere zukünftigen Erweiterungen könnten die folgenden Punkte umfassen:

- Höhere Ordnung in Raum: Auf Grund des Rechenaufwands erscheint die Implementierung des Richard'schen Extrapolationsverfahren von Verstappen und Veldaman [VV98] auf dem versetzten und auch nichtversetzten Gitter als sinnvoll.
- Schneller Gleichungssystemlöser: Bei allgemeinen Koordinaten mit nichtversetzter Variablenanordnungen ergibt sich ein Gleichungssystem mit neun Diagonalen als Druck-Korrektur-Gleichung. Bei der ILU-Vorkonditionierung tritt eine Schwierigkeit mit der Vektorisierung auf, wegen deren rekursiver Eigenschaft. Ein vollständig vektorisiertes Mehrgitterverfahren ist notwendig, um die Rechenzeit zu reduzieren.
- Bei allgemeinen Koordinaten haben wir die Reibungsterme bisher nur explizit behandelt. In gewissen Fällen, z. B. bei der Auflösung einer Grenzschicht, ist es notwendig, diese implizit zu diskretisieren.

A Koeffizienten bei verschiedenen Zeitintegrationsverfahren

RK2CN-Verfahren:

Nur die Koeffizienten in zweiten Stufen sind angegeben:

$$\begin{aligned}
 p^e &= p^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \mathcal{S}_\varrho &= \varrho^n - \Delta t [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u})]^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \mathbf{Z}_{p^{(2)}} &= \frac{\Delta t}{2}, \\
 \mathbf{Z}_d &= \frac{\Delta t}{2Re}, \\
 \mathcal{S}_u &= (\varrho \mathbf{u})^n - \Delta t [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t [\text{Diff-u-explizit}]^{n+\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} \nabla p^{(2)n} + \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n, \\
 \mathbf{Z}_p &= \Theta_g \Delta t, \\
 \mathcal{S}_p &= M^2 p^{(2)n} - (\gamma - 1) M^2 \delta k_e - (1.0 - \Theta_g) \Delta t \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^n), \\
 \delta k_e &= e^{k^{n+1}} - \left[e^{k^n} - \Delta t \{ \nabla \cdot e^k \mathbf{u} \}^{n+\frac{1}{2}} \right], \\
 dp^{(0)} &= p^{(0)n+1} - p^{(0)n}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Beim Divergenzterm in der Druckgleichung wird das im Kapitel 4 erwähnte Θ -Schema eingesetzt. Für den inkompressiblen Fall ($M = 0$) muß dieser Term vollständig implizit behandelt werden, d. h. $\Theta_g = 0$. Damit gilt $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. In diesem Fall muß man noch beachten, daß die divergenzbehafteten Anfangsdaten zu Oszillationen führen können.

UCS2-Verfahren:

Nur die Koeffizienten in dritten Stufen sind angegeben:

$$\begin{aligned}
 p^e &= p^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \mathcal{S}_\varrho &= \varrho^n - \Delta t [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u})]^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \mathbf{Z}_{p^{(2)}} &= \frac{\Delta t}{4}, \\
 \mathbf{Z}_d &= \frac{\Delta t}{4Re},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathbf{u}} &= (\varrho \mathbf{u})^n - \Delta t [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t [\text{Diff-u-explizit}]^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{3\Delta t}{4} \nabla p^{(2)n+\frac{1}{3}} + \frac{3\Delta t}{4Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}, \\
\mathbf{Z}_p &= \frac{\Delta t}{4}, \\
\mathcal{S}_p &= M^2 p^{(2)n} - (\gamma - 1) M^2 \delta k_e - \frac{3\Delta t}{4} \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}), \\
\delta k_e &= e^{k^{n+1}} - \left[e^{k^n} - \Delta t \{ \nabla \cdot e^k \mathbf{u} \}^{n+\frac{1}{2}} \right], \\
dp^{(0)} &= p^{(0)n+1} - p^{(0)n}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

ABCN-Verfahren:

Wir definieren noch folgende zusätzliche Hilfsvariablen:

$$\alpha = 1 + \frac{q}{2}, \quad \beta = \frac{q}{2}. \tag{A.3}$$

Dabei bedeutet q das vorher definierte Verhältniss von Zeitschrittweiten.

$$\begin{aligned}
p^e &= \alpha p^n - \beta p^{n-1}, \\
\mathcal{S}_\varrho &= \varrho^n - \Delta t \{ \alpha [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u})]^n - \beta [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u})]^{n-1} \}, \\
\mathbf{Z}_{p^{(2)}} &= \frac{\Delta t}{2}, \\
\mathbf{Z}_d &= \frac{\Delta t}{2Re}, \\
\mathcal{S}_{\mathbf{u}} &= (\varrho \mathbf{u})^n - \Delta t \{ \alpha [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \mathbf{u}]^n - \beta [\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \mathbf{u}]^{n-1} \} \\
&\quad + \Delta t \{ \alpha [\text{Diff-u-explizit}]^n - \beta [\text{Diff-u-explizit}]^{n-1} \}, \\
\mathbf{Z}_p &= \Theta_g \Delta t, \\
\mathcal{S}_p &= M^2 p^{(2)n} - (\gamma - 1) M^2 \delta k_e - (1.0 - \Theta_g) \Delta t \gamma \nabla \cdot (p^e \mathbf{u}^n), \\
\delta k_e &= e^{k^{n+1}} \\
&\quad - \left[e^{k^n} - \Delta t \left\{ \alpha (\nabla \cdot e^k \mathbf{u})^n - \beta (\nabla \cdot e^k \mathbf{u})^{n-1} \right\} \right], \\
dp^{(0)} &= p^{(0)n+1} - p^{(0)n}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Hier wird noch das Θ -Schema für den Divergenzterm in der Druckgleichung analog zum RK2CN-Verfahren verwendet.

SBDF-Verfahren:

q ist das vorher definierte Verhältniss von Zeitschrittweiten. Wir definieren noch die zusätzlichen Hilfsvariablen:

$$\alpha = \frac{(1+q)^2}{1+2q}, \quad \beta = \frac{q^2}{1+2q}, \quad \gamma = \frac{(1+q)q}{1+2q}. \tag{A.5}$$

$$p^e = (1+q)p^n - qp^{n-1},$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_\varrho &= [\alpha\varrho^n - \beta\varrho^{n-1}] - \Delta t \{ \alpha[\nabla \cdot (\varrho\mathbf{u})]^n - \gamma[\nabla \cdot (\varrho\mathbf{u})]^{n-1} \}, \\
 \mathbf{Z}_{p^{(2)}} &= \frac{1+q}{1+2q} \Delta t, \\
 \mathbf{Z}_d &= \frac{1+q}{1+2q} \frac{\Delta t}{Re}, \\
 \mathcal{S}_\mathbf{u} &= [\alpha(\varrho\mathbf{u})^n - \beta(\varrho\mathbf{u})^{n-1}] - \Delta t \{ \alpha[\nabla \cdot (\varrho\mathbf{u})\mathbf{u}]^n - \gamma[\nabla \cdot (\varrho\mathbf{u})\mathbf{u}]^{n-1} \} \\
 &\quad + \Delta t \{ \alpha[\text{Diff-u-explizit}]^n - \gamma[\text{Diff-u-explizit}]^{n-1} \}, \\
 \mathbf{Z}_p &= \frac{1+q}{1+2q} \Delta t, \\
 \mathcal{S}_p &= M^2[\alpha p^{(2)n} - \beta p^{(2)n-1}] - (\gamma - 1)M^2 \delta k_e, \\
 \delta k_e &= e^{k^{n+1}} \\
 &\quad - \left[\alpha e^{k^n} - \beta e^{k^{n-1}} - \Delta t \left\{ \alpha (\nabla \cdot e^k \mathbf{u})^n - \gamma (\nabla \cdot e^k \mathbf{u})^{n-1} \right\} \right], \quad (\text{A.6}) \\
 dp^{(0)} &= p^{(0)n+1} - [\alpha p^{(0)n} - \beta p^{(0)n-1}].
 \end{aligned}$$

B Einige Differenzenformel

Einige Differenzenformel auf dem äquidistanten Gitter sind angegeben.

Interpolation I:

$$I^2 : \phi_i = (\phi_{i+\frac{1}{2}} + \phi_{i-\frac{1}{2}})/2,$$

$$I^4 : \phi_i = (-\phi_{i+\frac{3}{2}} + 9\phi_{i+\frac{1}{2}} + 9\phi_{i-\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{3}{2}})/16,$$

$$I^6 : \phi_i = (3\phi_{i+\frac{5}{2}} - 25\phi_{i+\frac{3}{2}} + 150\phi_{i+\frac{1}{2}} + 150\phi_{i-\frac{1}{2}} - 25\phi_{i-\frac{3}{2}} + 3\phi_{i-\frac{5}{2}})/256.$$

Gradient-Operator G:

$$G^2 : (\phi_x)_{i+\frac{1}{2}} = (\phi_{i+1} + \phi_i)/\Delta x,$$

$$G^4 : (\phi_x)_{i+\frac{1}{2}} = (-\phi_{i+2} + 27\phi_{i+1} - 27\phi_i + \phi_{i-1})/24\Delta x.$$

Divergenz-Operator D:

$$D^2 : (\nabla \cdot \mathbf{u})_{i,j} = (u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j})/\Delta x + (v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}})/\Delta y,$$

$$D^4 : (\nabla \cdot \mathbf{u})_{i,j} = (-u_{i+\frac{3}{2},j} + 27u_{i+\frac{1}{2},j} - 27u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{3}{2},j})/\Delta x + (-v_{i,j+\frac{3}{2}} + 27v_{i,j+\frac{1}{2}} - 27v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{3}{2}})/\Delta y.$$

Laplace-Operator L = D · G:

$$L^{2,2} : (\Delta\phi)_{i,j} = (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j})/\Delta x^2 + (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1})/\Delta y^2,$$

$$L^{4,4} : (\Delta\phi)_{i,j} = (\phi_{i+3,j} - 54\phi_{i+2,j} + 783\phi_{i+1,j} - 1460\phi_{i,j} + 783\phi_{i-1,j} - 54\phi_{i-2,j} + \phi_{i-3,j})/576\Delta x^2 + (\phi_{i,j+3} - 54\phi_{i,j+2} + 783\phi_{i,j+1} - 1460\phi_{i,j} + 783\phi_{i,j-1} - 54\phi_{i,j-2} + \phi_{i,j-3})/576\Delta y^2.$$

‘Upwind-biased’:

$$B^1 : (\phi_x)_{i+\frac{1}{2}} = (\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}})/\Delta x,$$

$$B^3 : (\phi_x)_{i+\frac{1}{2}} = (2\phi_{i+\frac{3}{2}} + 3\phi_{i+\frac{1}{2}} - 6\phi_{i-\frac{1}{2}} + \phi_{i-\frac{3}{2}})/6\Delta x,$$

$$B^5 : (\phi_x)_{i+\frac{1}{2}} = (-3\phi_{i+\frac{5}{2}} + 30\phi_{i+\frac{3}{2}} + 20\phi_{i+\frac{1}{2}} - 60\phi_{i-\frac{1}{2}} + 15\phi_{i-\frac{3}{2}} - 2\phi_{i-\frac{5}{2}})/60\Delta x.$$

C Unvollständige LU-Zerlegung

Das hier vorgestellte Verfahren beruht auf einer unvollständigen Zerlegung der Matrix \mathbf{A} in eine untere und obere Dreiecksmatrix \mathbf{L} bzw. \mathbf{U} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A} + \mathbf{F}. \quad (\text{C.1})$$

Aus der Multiplikation der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{U} ergibt sich die Matrix \mathbf{M} , bei der mehr Diagonalen besitzt sind als bei \mathbf{A} . Diese zusätzliche Diagonalen sind in der Fehlermatrix \mathbf{F} enthalten. Die verschiedenen Modifikationen der unvollständigen Zerlegung unterscheiden sich in der Berechnung der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{U} . Im folgenden sind die rekursiven Formeln des typischen ILU-Verfahrens angegeben.

Standard-ILU-Verfahren:

Beim Standard-ILU-Verfahren werden die Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{U} so gewählt, daß nur auf denjenigen Diagonalen von Null verschiedene Elemente stehen, auf denen auch die Matrix \mathbf{A} Einträge ungleich Null aufweist.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_b(i, j, k) &= \mathbf{A}_b(i, j, k), \\ \mathbf{L}_s(i, j, k) &= \mathbf{A}_s(i, j, k), \\ \mathbf{L}_w(i, j, k) &= \mathbf{A}_w(i, j, k), \\ \mathbf{L}_p(i, j, k) &= \mathbf{A}_p(i, j, k) - (\mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i-1, j, k) \\ &\quad + \mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i, j-1, k) \\ &\quad + \mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i, j, k-1)), \\ \mathbf{U}_e(i, j, k) &= \mathbf{A}_e(i, j, k) / \mathbf{L}_p(i, j, k), \\ \mathbf{U}_n(i, j, k) &= \mathbf{A}_n(i, j, k) / \mathbf{L}_p(i, j, k), \\ \mathbf{U}_t(i, j, k) &= \mathbf{A}_t(i, j, k) / \mathbf{L}_p(i, j, k). \end{aligned}$$

MILU-Verfahren (engl. 'modified ILU'):

Beim MILU-Verfahren berücksichtigt man noch die zusätzlich auftretenden Elemente

der Fehlermatrix \mathbf{F} mit geeigneter Gewichtung auf den Diagonalen von \mathbf{A} .

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_p(i, j, k) = & \mathbf{A}_p(i, j, k) - (\mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i-1, j, k) \\
& + \mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i, j-1, k) \\
& + \mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i, j, k-1)) \\
& - \alpha * (\mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i, j-1, k) \\
& + \mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i, j-1, k) \\
& + \mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i-1, j, k) \\
& + \mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i-1, j, k) \\
& + \mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i, j, k-1) \\
& + \mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i, j, k-1)).
\end{aligned}$$

SIP-Verfahren (eng. ‘strongly implicit procedure’):

Diese Variante des ILU-Verfahrens wurde von Stone [Sto68] vorgeschlagen. Die Grundidee Stone’s besteht darin, im Rahmen der ILU-Zerlegung die Fehlermatrix \mathbf{F} mittels einer Taylorentwicklung zu approximieren. Für die genaue Herleitung wird auf das Buch von Ferziger und Peric [FP96] verwiesen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_b(i, j, k) &= \mathbf{A}_b(i, j, k) / [1 + \alpha(\mathbf{U}_n(i, j, k-1) + \mathbf{U}_e(i, j, k-1))], \\
\mathbf{L}_s(i, j, k) &= \mathbf{A}_s(i, j, k) / [1 + \alpha(\mathbf{U}_n(i-1, j, k) + \mathbf{U}_t(i-1, j, k))], \\
\mathbf{L}_w(i, j, k) &= \mathbf{A}_w(i, j, k) / [1 + \alpha(\mathbf{U}_e(i, j-1, k) + \mathbf{U}_t(i, j-1, k))], \\
\mathbf{H}_1 &= \alpha(\mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i, j, k-1) + \mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i-1, j, k)), \\
\mathbf{H}_2 &= \alpha(\mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i, j, k-1) + \mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i, j-1, k)), \\
\mathbf{H}_3 &= \alpha(\mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i-1, j, k) + \mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i, j-1, k)), \\
\mathbf{L}_p(i, j, k) &= \mathbf{A}_p(i, j, k) + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 \\
&\quad - (\mathbf{L}_w(i, j, k) * \mathbf{U}_e(i-1, j, k) \\
&\quad + \mathbf{L}_s(i, j, k) * \mathbf{U}_n(i, j-1, k) \\
&\quad + \mathbf{L}_b(i, j, k) * \mathbf{U}_t(i, j, k-1)), \\
\mathbf{U}_e(i, j, k) &= (\mathbf{A}_e(i, j, k) - \mathbf{H}_1) / \mathbf{L}_p(i, j, k), \\
\mathbf{U}_n(i, j, k) &= (\mathbf{A}_n(i, j, k) - \mathbf{H}_2) / \mathbf{L}_p(i, j, k), \\
\mathbf{U}_t(i, j, k) &= (\mathbf{A}_t(i, j, k) - \mathbf{H}_3) / \mathbf{L}_p(i, j, k).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Elemente der zerlegten Matrix sowie zum Vorwärtseinsetzen werden jeweils die Matrixelemente des westlichen, des südlichen und des unteren Nachbarpunktes benötigt, beim Rückwärtseinsetzen entsprechend die des östlichen, des nördlichen und des oberen Nachbarn. Durch die rekursive Datenabhängigkeit wird die Vektorisierung erschwert. Nach der Arbeit von Yoon und Kwak [YK91] können diese Datenabhängigkeiten durch Umordnung teilweise entkoppelt werden. Entlang der Linien in südöstlicher Richtung beim zweidimensionalen Fall oder in den Hyperebenen, auf denen die Summe aus den Indizes $i + j + k$ konstant ist, beim dreidimensionalen Fall sind die Berechnungen voneinander entkoppelt. Als Beispiel ist der Pseudocode für die dreidimensionale Berechnung in Tabelle C.1 angegeben. Die ILU-Zerlegung

Tabelle C.1: Pseudocode für die Vektorisierung des ILU-Typ Verfahrens

```
do  $n\_diag = 3, nx + ny + nz$ 
  do  $k = \max(1, n\_diag - (nx + ny)), \min(nz, n\_diag - 2)$ 
    do  $j = \max(1, n\_diag - k - nx), \min(ny, n\_diag - k - 1)$ 
       $i = n\_diag - k - j$ 
       $ILU_{\text{koeff.}}(i, j, k) = \dots$ 
      ...
    enddo
  enddo
enddo
```

und das Vorwärtseinsetzen starten beim inneren Punkt mit der kleinsten Indexsumme $i + j + k = n_diag_{min} = 3$ und enden beim inneren Punkt mit der größten Indexsumme $n_diag_{max} = nx + ny + nz$. Bei der Rückwärtssubstitution ist die umgekehrte Reihenfolge einzuhalten.

D MHD-Grundgleichungen

Die Magneto hydrodynamik (MHD) stellt eine Verbindung der klassischen Gebiete der Hydrodynamik und Elektrodynamik her. Zur Beschreibung der Physik werden daher die Grundgleichungen beider Bereiche benötigt. Für die Elektrodynamik sind es die *Maxwell-Gleichungen* und für die Hydrodynamik die wohlbekannteren Navier-Stokes-Gleichungen.

Maxwellsche Gleichungen

Die klassischen Maxwellschen Gleichungen bestehen aus den folgenden vier Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu_m} \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (\text{D.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{D.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{D.3})$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho_e, \quad (\text{D.4})$$

wobei \mathbf{B} die magnetische Induktion, \mathbf{E} die elektrische Feldstärke, \mathbf{J} die elektrische Stromdichte, ϱ_e die elektrische Ladung, μ_m die magnetische Permeabilität und ε die Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Nun wollen wir nicht auf die genauere physikalische Bedeutung einzelner Gleichung eingehen. Dies kann man in den klassischen Büchern finden. Die Maxwell-Gleichungen sind zwei vektorielle und zwei skalare Gleichungen für drei vektorielle Größen (\mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{J}) und eine skalare Größe (ϱ_e). Offensichtlich hat man somit mehr Unbekannte ($3 \times 3 + 1 = 10$) als Gleichungen ($2 \times 3 + 2 = 8$), da jede vektorielle Gleichungen drei skalaren Gleichungen und jede vektorielle Unbekannte drei skalaren Unbekannten entspricht. Weiterhin folgt die Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ unmittelbar aus der zweiten Maxwell-Gleichung. Etwas genauer gesagt, spielt die Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ nur die Rolle einer Anfangsbedingung im System der Maxwell-Gleichungen, so wird die Diskrepanz noch größer: Wir haben 7 Gleichungen für 10

Unbekannte. Wir brauchen 3 weitere Gleichungen, um das Gleichungssystem zu schließen. Diese Gleichungen gewinnt man aus der Tatsache, daß elektrische Ströme in Leitern von elektrischen Feldern verursacht werden. Dies ist das sogenannte *Ohmsches Gesetz*:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{D.5})$$

Der Koeffizient σ wird als *spezifische elektrische Leitfähigkeit* bezeichnet. Nun können 10 Unbekannte unter geeigneten Anfangs- und Randbedingungen eindeutig bestimmt werden.

Die Maxwell-Gleichungen gelten für jeden Beobachter, unabhängig von seiner Bewegung, wenn alle Feldvariablen fest in seinem Referenzsystem gemessen werden. Im allgemeinen beobachten wir jedoch die MHD-Strömungen in einem ruhenden System. Dadurch brauchen wir die Transformation der MHD-Gleichungen zwischen dem mit den MHD-Strömungen mitbewegenden System und einem festgelegten Ruhesystem. Diese Lorentz-Transformationen können unter Berücksichtigung des Prinzips der speziellen Relativität hergeleitet werden. Wenn man die Strömungsgeschwindigkeit viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit annehmen darf, dann werden die Transformationsregeln weiter vereinfacht werden. Zuerst darf der Verschiebungsstrom ($\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$) vernachlässigt werden. Damit folgt aus der ersten Maxwell-Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (\text{D.6})$$

Für das Ohmsche Gesetz gilt

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \simeq \mathbf{J}. \quad (\text{D.7})$$

Dabei bedeutet \mathbf{E}' das in dem mitbewegenden System gemessene elektrische Feld und \mathbf{E} im Ruhesystem. Nach der Ansicht des Beobachters im Ruhesystem müssen die elektrisch leitenden MHD-Strömungen unter dem Einfluß des Magnetfeldes noch ein zusätzliches elektrisches Feld durch die Bewegung selbst erzeugen. Die Variablen \mathbf{B} und \mathbf{J} zeigen nur vernachlässigbare kleine Änderungen bei der Transformation. Für die MHD-Strömungen löst man demnach meistens das folgende vereinfachte Gleichungssystem:

$$\text{Maxwell-Gleichungen:} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\mu_m} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Ohmsche Gesetz:} \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Die letzte Maxwell-Gleichung $\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e$ wird nicht gebraucht, weil die elektrische Ladungsdichte normalerweise unbekannt ist. Unter Berücksichtigung des Ohmschen

Gesetzes folgt dann die Evolutionsgleichung für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \\
&= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_m} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \\
&= \nabla \cdot (\mathbf{u} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{u}) + \eta_m \nabla^2 \mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Dabei bedeutet $\eta_m = \frac{1}{\sigma \mu_m}$ die *Resistivität* (oder *magnetische Diffusivität*) des MHD-Fluids. Bei der idealen MHD darf man weiterhin unendliche elektrische Leitfähigkeit ($\sigma \rightarrow \infty$) des Fluids annehmen. Dann verschwindet die Diffusion des Magnetfeldes und gilt der Kelvinsche Satz:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{D.10}$$

Der Fluß des Magnetfeldes bleibt erhalten, und die Magnetfeldlinien bewegen sich mit der Fluidteilchen zusammen. Dies ist die wohlbekannte Eigenschaft des *Einfrrierens der Feldlinien* in der idealen MHD-Strömungen. In diesem Fall gilt noch $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ und der elektrische Strom kann allein durch die Rotation des Magnetfeldes $\frac{1}{\mu_m} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$, ohne Berücksichtigung des Ohmschen Gesetzes, bestimmt werden.

Navier-Stokes-Gleichungen für die MHD-Strömungen

Unter dem Einfluß des Magnetfeldes erfährt die Strömung noch die Lorentzkraft als Volumenkraft:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \left(\frac{1}{\mu_m} \nabla \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \\
&= \frac{1}{\mu_m} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \circ \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{I} \right) \\
&= \nabla \cdot \mathcal{M}.
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Außerdem muß man bei der Energiegleichung den magnetischen Energieanteil berücksichtigen. Für die kompressiblen MHD gelten dann folgende konservative Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\rho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_m} \mathbf{B} \circ \mathbf{B} \right] + \nabla \cdot \left(p + \frac{1}{\mu_m} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) &= \nabla \cdot \mathcal{T}_e - \rho \nabla \phi, \\
\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{\mu_m} \frac{\mathbf{B}^2}{2}) \mathbf{u} \right] &= \nabla \cdot \left(\mathcal{M}_e \mathbf{u} + \mathcal{T}_e \mathbf{u} - \mathbf{q} - \frac{1}{\sigma \mu_m} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right).
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Dabei bezeichnen \mathcal{T} und \mathcal{M} den hydrodynamischen bzw. magnetischen Spannungstensor:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= -p \mathbf{I} + \mathcal{T}_e &= -p \mathbf{I} + 2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}, \\
\mathcal{M} &= -\frac{1}{\mu_m} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{I} + \mathcal{M}_e &= -\frac{1}{\mu_m} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_m} \mathbf{B} \circ \mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Die isotrope Kraft $\frac{1}{\mu_m} \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ fungiert ähnlich wie der Druckterm und wird daher als *magnetischer Druck* bezeichnet. Die gesamte Energiedichte bestehen aus der inneren, kinetischen, magnetischen und potentiellen Energie:

$$e = e^i + e^k + e^m + e^p = \varrho \varepsilon + \frac{1}{2} \varrho \mathbf{u}^2 + \frac{1}{\mu_m} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \varrho g z. \quad (\text{D.14})$$

Die Evolutionsgleichungen der einzelnen Energieanteile lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \varepsilon \mathbf{u}) &= (\mathcal{T} : \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2, \\ \frac{\partial e^m}{\partial t} + \nabla \cdot (e^m \mathbf{u}) &= (\mathcal{M} : \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 - \frac{1}{\sigma \mu_m} \nabla \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\partial e^k}{\partial t} + \nabla \cdot (e^k \mathbf{u}) &= [\nabla \cdot (\mathcal{T} + \mathcal{M})] \cdot \mathbf{u} - \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \\ \frac{\partial \varrho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \phi \mathbf{u}) &= \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \phi. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Dabei bedeutet $(:)$ die skalare Multiplikation zweier Tensoren (engl. ‘double dot product’). Außer viskosen Dissipationen entsteht noch die Joulesche Wärme $\frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2$ für den nichtidealen MHD-Fall. Dies stellt die irreversible Umwandlung von magnetischer Energie in interne Energie des Fluids in Form von Wärme dar. Bei der Druckform der Energiegleichung darf man diesen Term nicht vergessen:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = (\gamma - 1) \left[(\mathcal{T}_e : \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 \right]. \quad (\text{D.16})$$

Dimensionslose MHD-Gleichungen mit MPV-Ansatz

Unsere MHD-Gleichungen bestehen aus den vorher eingeführten Maxwell- und kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Nun skalieren wir das Magnetfeld mit $\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}$ ¹. Die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes und des elektrischen Stroms spielt nur die Rolle einer Anfangsbedingung. Das elektrische Feld \mathbf{E} und der Strom \mathbf{J} können weiterhin auf die Beziehungen mit dem Magnetfeld umgeschrieben werden, und Sie tauchen dann in den Gleichungen nicht explizit auf. Wir brauchen nun eine Referenzgröße \mathbf{B}_0 für das Magnetfeld. Für die anderen Variablen verwendet man genau die gleichen Referenzgrößen wie bei der Hydrodynamik. Nun gelten folgende kompressible dimensionslose MHD-Gleichungen.

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{D.17})$$

Impulsgleichung:

¹Hierbei werden die elektrischen und magnetischen materiellen Koeffizienten als konstant angenommen

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u} - \frac{1}{A^2} \mathbf{B} \circ \mathbf{B} \right] + \nabla \left(\frac{1}{M^2} p + \frac{1}{A^2} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I} \right] - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.18})$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ p + (\gamma - 1) \left[M^2 \frac{\varrho \mathbf{u}^2}{2} + \frac{M^2 \mathbf{B}^2}{A^2} \frac{1}{2} + \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \varrho z \right] \right\} \\ + \nabla \cdot \left\{ \gamma p \mathbf{u} + (\gamma - 1) \left[M^2 \frac{\varrho \mathbf{u}^2}{2} + \frac{M^2}{A^2} \mathbf{B}^2 + \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \varrho z \right] \mathbf{u} \right\} = \\ \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \\ + (\gamma - 1) \left\{ \frac{M^2}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_e \mathbf{u}) + \frac{M^2}{A^2} \nabla \cdot (\mathcal{M}_e \mathbf{u}) - \frac{M^2}{\text{Re}_m A^2} \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \right\}, \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

Evolutionsgleichung des Magnetfeldes:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Re}_m} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (\text{D.20})$$

Für die dimensionslosen Energiedichte gelten nun

$$e = e^i + M^2 e^k + \frac{M^2}{A^2} e^m + \frac{M^2}{\text{Fr}^2} e^p = \frac{p}{\gamma - 1} + M^2 \frac{1}{2} \varrho \mathbf{u}^2 + \frac{M^2}{A^2} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \varrho z. \quad (\text{D.21})$$

Außer der Alfvenzahl A tritt noch die *magnetische Reynoldszahl* $\text{Re}_m = \frac{\mathbf{u}_0 z_0}{\eta_m}$ auf. Sie beschreibt das Verhältnis der Konvektion zur magnetischen Diffusion. Strömungen mit der unendlichen magnetischen Reynoldszahl ($\text{Re} \rightarrow \infty$, $\eta_m \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$) heißen ideale MHD-Strömungen. Bei der unendlichen Alfvenzahl reduziert sich das gesamte Gleichungssystem auf die normalen hydrodynamischen kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Das obige Gleichungssystem besteht aus acht Gleichungen für neun Unbekannte (ϱ , p , T , 3 Geschwindigkeitskomponenten, drei Magnetfeldskomponenten). Dafür haben wir noch eine Zustandgleichung. Damit kann das gesamte Gleichungssystem unter geeigneten Anfangs- und Randbedingungen eindeutig gelöst werden.

Um die Singularität des Druckterms bei der verschwindenden Machzahl zu vermeiden, verwenden wir wiederum unseren MPV-Ansatz für den Druck.

Impulsgleichung:

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\varrho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u} - \frac{1}{A^2} \mathbf{B} \circ \mathbf{B} \right] + \nabla \left(p^{(2)} + \frac{1}{A^2} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left[2\eta \mathcal{D} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I} \right] - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.22})$$

Druckgleichung:

$$\begin{aligned}
 M^2 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma p \mathbf{u}) &= -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \\
 -(\gamma - 1) M^2 \left[\frac{\partial e^k}{\partial t} + \nabla \cdot (e^k \mathbf{u}) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_e \mathbf{u}) \right] &- (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Fr}^2} \left[\frac{\partial e^p}{\partial t} + \nabla \cdot (e^p \mathbf{u}) \right] \\
 -(\gamma - 1) \frac{M^2}{A^2} \left\{ \frac{\partial e^m}{\partial t} + \nabla \cdot (2e^m \mathbf{u}) - \nabla \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})] - \frac{1}{\text{Re}_m} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \right\}. &
 \end{aligned} \tag{D.23}$$

Bei der numerischen Implementierung verwenden wir ein semi-implizites Verfahren, ähnlich wie beim reinen hydrodynamischen Fall. Wir behandeln nur den Schallterm, d. h. den hydrodynamischen Druckterm $p^{(2)}$ in der Impulsgleichung und den Konvektionsterm des Drucks in der Druckgleichung, implizit. Dadurch können wir durch den unendlich schnell laufenden Schall bedingte strenge Zeitschrittweitenbeschränkung vermeiden.

E Das allgemeine Koordinatensystem

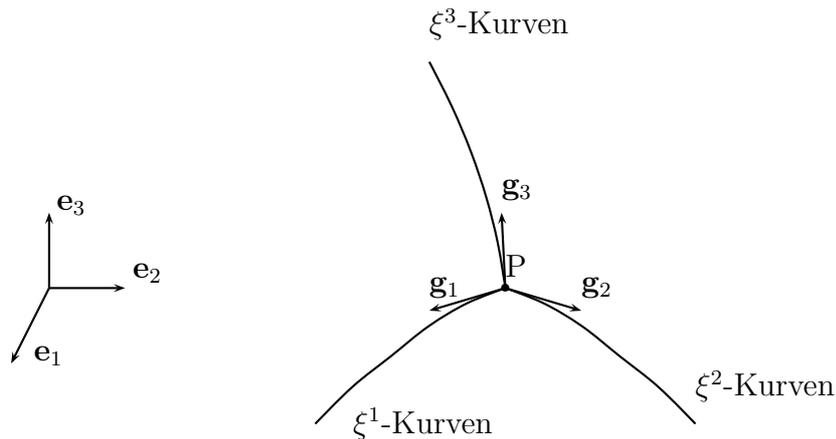


Abbildung E.1: Krummlinige Koordinaten

Wir betrachten einige Transformationseigenschaften zwischen einem allgemeinen, strukturierten Koordinatensystem $\xi^i = (\xi, \eta, \zeta)$ und dem bezogenen, kartesischen Koordinatensystem $x^i = (x, y, z)$. \mathbf{e}_i mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnen die orthonormierte Basis im kartesischen Koordinatensystem. \mathbf{g}_i entspricht dem kovarianten Basisvektor im allgemeinen Koordinatensystem (Siehe Abb. E.1). Im dreidimensionalen Raum habe der Ortsvektor \mathbf{R} des Punktes P zunächst die rechtwinkligen Koordinaten x^i :

$$\mathbf{R} = x^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{E.1})$$

Das vollständige Differential des Vektors \mathbf{R} lautet dann

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^i} dx^i. \quad (\text{E.2})$$

Weil die Basis \mathbf{e}_i ortsunabhängig ist, gilt andererseits

$$d\mathbf{R} = dx^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{E.3})$$

Man kann also für die Basis \mathbf{e}_i schreiben:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^i}$$

$$= \mathbf{e}_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \mathbf{e}_j \delta_i^j. \quad (\text{E.4})$$

Analog zum kartesischen Koordinatensystem soll der Ortsvektor \mathbf{R} des Punktes P die krummlinige Koordinaten $\xi^i = (\xi, \eta, \zeta)$ haben. Sein vollständiges Differential ist demnach

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^i} d\xi^i. \quad (\text{E.5})$$

Wir verwenden jetzt als kovariante Basis

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^i} \\ &= \mathbf{e}_j \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} = \mathbf{e}_j J_i^j = \mathbf{e}_1 \frac{\partial x}{\partial \xi^i} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial y}{\partial \xi^i} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial z}{\partial \xi^i}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Dabei ist J_i^j diejenige Komponente der Jakobi-Matrix, die im nächsten Abschnitt definiert wird. Im Gegensatz zur ortsunabhängigen Basis \mathbf{e}_i bei kartesischen Koordinaten ändert sich die Basis \mathbf{g}_i bei allgemeinen Koordinaten von Punkt zu Punkt. In jedem Punkt tangiert der Basisvektor \mathbf{g}_i seine Koordinatenlinie ξ^i . Nach den obigen Beziehungen gilt folgender Zusammenhang zwischen der lokalen, krummlinigen Basis \mathbf{g}_i und der globalen, kartesischen Basis \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_j. \quad (\text{E.7})$$

Entsprechend ergibt sich

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \mathbf{g}_i. \quad (\text{E.8})$$

Der Abstand d zweier Punkte A und B wird durch die Länge des Vektors \mathbf{AB} dargestellt:

$$d = |\mathbf{AB}|. \quad (\text{E.9})$$

Der Vektor \mathbf{AB} habe nun in der Basis \mathbf{g}_i die Koordinaten ξ^i :

$$\mathbf{AB} = \xi^i \mathbf{g}_i. \quad (\text{E.10})$$

Das Skalarprodukt $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ ist ein Skalar, den wir mit g_{ij} bezeichnen:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}. \quad (\text{E.11})$$

Daraus ergibt sich

$$d = \sqrt{|\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{AB}|} = \sqrt{\xi^i \xi^j \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j} = \sqrt{\xi^i \xi^j g_{ij}}. \quad (\text{E.12})$$

Die Länge des Vektors \mathbf{AB} hängt also nicht nur von seinen Koordinaten ab, sondern auch von den Koeffizienten g_{ij} . Weil man die Länge messen kann, heißen die g_{ij}

kovariante *Maßkoeffizienten* oder *Metrikoeffizienten*. Manchmal interessiert man sich noch für die physikalische Komponente des Vektors \mathbf{AB} in Richtung \mathbf{g}_i :

$$\mathbf{AB}^{*i} = \xi^i \sqrt{g_{(ii)}}. \quad (\text{E.13})$$

Die Klammer um die Indizes in der Wurzel soll ausdrücken, daß über i nicht summiert werden darf. Außerdem definiert man die zweite Basis \mathbf{g}^j mit folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j. \quad (\text{E.14})$$

Die zweite kontravariante Basis \mathbf{g}^j steht also orthogonal zur Koordinatenfläche einer Konstanten ξ^j . Dann gilt noch

$$\mathbf{g}^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j. \quad (\text{E.15})$$

Mit obigen Beziehungen kann die zweite kontravariante Basis \mathbf{g}^i durch die kovariante Basis \mathbf{g}_i ausgedrückt werden:

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (\text{E.16})$$

Die kontravarianten Metrikoeffizienten g^{ij} entsprechen also der Inversen der Matrix g_{ij} .

Transformationsregeln

Bei der Koordinatentransformation $x^i = x^i(\xi^i)$ lautet das totale Differential der Koordinaten dx^i im kartesischen Koordinatensystem:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j. \quad (\text{E.17})$$

Dazu definiert man die Jakobi-Matrix \mathbf{J} ($J_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$) für diese Transformation und ihre Determinante $J = \det(\mathbf{J})$:

$$J = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right) = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix}. \quad (\text{E.18})$$

Im zweidimensionalen Fall hat die Jakobideterminante J folgende, einfache Form:

$$J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta. \quad (\text{E.19})$$

Ein differentielles Volumenelement ist ein Volumen mit den differentiellen Linienelementen $d\mathbf{R} = dx^i \mathbf{e}_i = d\xi^i \mathbf{g}_i$. Es wird durch das Spatprodukt (engl. ‘*triple scalar product*’) beschrieben:

$$dV = dx^1 dx^2 dx^3 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$$

$$\begin{aligned}
 &= d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 (\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \\
 &= d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^2} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^3} \right) \\
 &= d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \cdot \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^3} \\
 &= d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \cdot J.
 \end{aligned} \tag{E.20}$$

Die Jakobische Determinante J stellt die Volumenverhältnisse zwischen beiden Koordinatensystemen dar. Bei der Herleitung wird die Definition der kovarianten Basis \mathbf{g}_i und ihres Spatprodukts verwendet¹. Für die Umkehrtransformation gilt dann

$$d\xi^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} d\xi^k = \delta_k^j d\xi^k. \tag{E.24}$$

In Matrixschreibweise ist also die Umkehrtransformationsmatrix $\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}$ die inverse Matrix von \mathbf{J} . Daraus erhält man

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{J} \beta_i^j. \tag{E.25}$$

Die Faktoren β_i^j sind die Kofaktoren zu J_j^i in der Jakobischen Determinante J , d.h. $\beta_i^j = \text{adj}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)$:

$$\begin{aligned}
 \beta_1^1 &= (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), & \beta_1^2 &= -(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi), & \beta_1^3 &= (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \\
 \beta_2^1 &= -(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta), & \beta_2^2 &= (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi), & \beta_2^3 &= -(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi), \\
 \beta_3^1 &= (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), & \beta_3^2 &= -(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi), & \beta_3^3 &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi).
 \end{aligned} \tag{E.26}$$

Außerdem gilt für die zeitliche Ableitung

$$\frac{d\xi^j}{dt} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{J} \beta_i^j u^i. \tag{E.27}$$

Dies ist genau die kontravariante Geschwindigkeitskomponente im allgemeinen Koordinatensystem. Sie steht senkrecht zur Oberfläche $\xi^j = \text{konst}$. In der Strömungsmechanik definiert man aber üblicherweise kontravariante Geschwindigkeiten als

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= u\beta_1^1 + v\beta_2^1 + w\beta_3^1, \\
 \tilde{v} &= u\beta_1^2 + v\beta_2^2 + w\beta_3^2, \\
 \tilde{w} &= u\beta_1^3 + v\beta_2^3 + w\beta_3^3.
 \end{aligned} \tag{E.28}$$

¹In der Literatur definiert man g oft als Determinante des kovarianten Metriktensors:

$$g = \det(g_{ij}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]^2 \tag{E.21}$$

oder

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = \sqrt{g} = J. \tag{E.22}$$

Dann gilt noch die folgende Beziehung (siehe [Ari62]):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d(\ln J)}{dt}. \tag{E.23}$$

Sie sind nichts anderes als ein Volumenfluß durch die Fläche $\xi^j = \text{konst.}$ Daraus können wir auch erkennen, daß der Flächenvektor auf der Oberflächen $\xi^j = \text{konst.}$ und sein Normalenvektor in kartesischen Koordinaten wie folgt dargestellt werden können:

$$\begin{aligned}(\Delta \mathbf{A})^j &= \mathbf{e}^i \beta_i^j = \mathbf{e}^1 \beta_1^j + \mathbf{e}^2 \beta_2^j + \mathbf{e}^3 \beta_3^j, \\(\Delta A)^j &= \sqrt{\beta_1^{j2} + \beta_2^{j2} + \beta_3^{j2}}, \\(\mathbf{n})^j &= \frac{(\Delta \mathbf{A})^j}{(\Delta A)^j} = \frac{\mathbf{e}^i \beta_i^j}{\sqrt{\beta_1^{j2} + \beta_2^{j2} + \beta_3^{j2}}}.\end{aligned}\tag{E.29}$$

Es ist nun möglich, die Ableitungen einer beliebigen Größe ϕ nach kartesischen Koordinaten in Ableitungen nach krummlinigen Koordinaten zu überführen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x^i} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = \frac{1}{J} \beta_i^j \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\phi \beta_i^j), & \phi_x &= \frac{1}{J} (\phi_\xi \beta_1^1 + \phi_\eta \beta_1^2 + \phi_\zeta \beta_1^3), \\ & & \phi_y &= \frac{1}{J} (\phi_\xi \beta_2^1 + \phi_\eta \beta_2^2 + \phi_\zeta \beta_2^3), \\ & & \phi_z &= \frac{1}{J} (\phi_\xi \beta_3^1 + \phi_\eta \beta_3^2 + \phi_\zeta \beta_3^3).\end{aligned}\tag{E.30}$$

Analog dazu können wir beliebige Differentialoperatoren im allgemeinen Koordinatensystem beschreiben.

Gradient einer skalaren Größe:

$$\nabla \phi = \mathbf{e}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \mathbf{e}^i \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\phi \beta_i^j) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\mathbf{e}^i \phi \beta_i^j),\tag{E.31}$$

Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (u^i \beta_i^j) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\tilde{u}^j),\tag{E.32}$$

Laplace-Operator einer skalaren Größe:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \phi &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \beta_i^k \right) \beta_i^j \right\} \\ &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{1}{J} \Lambda^{jk} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \right), \quad \Lambda^{jk} = \beta_i^j \beta_i^k,\end{aligned}\tag{E.33}$$

Rotation eines Vektors:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \varepsilon^{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \beta_1^j & \beta_2^j & \beta_3^j \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{E.34}$$

Unter Verwendungen der obigen Transformationsregeln können die konservativen Navier-Stokes-Gleichungen auch für ein allgemeines Koordinatensystem umgeschrieben werden. Im Folgenden sind die Grundgleichungen zum Vergleichszweck in verschiedenen Formen zusammengestellt.

Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}\varrho_t + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\ \varrho_t + \frac{\partial}{\partial x^i} (\varrho u^i) &= 0, \\ \varrho_t + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\varrho \tilde{u}^j) &= 0.\end{aligned}\tag{E.35}$$

Impulsgleichung:

$$\begin{aligned}(\varrho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot \{(\varrho \mathbf{u}) \mathbf{u}\} &= -\nabla p^{(2)} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3\text{Re}} \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_3, \\ (\varrho u^l)_t + \frac{\partial}{\partial x^i} (\varrho u^l u^i) &= -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x^l} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\eta \frac{\partial u^l}{\partial x^i}) + \frac{1}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\eta \frac{\partial u^i}{\partial x^i}) - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_3, \\ (\varrho u^l)_t + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\varrho u^l \tilde{u}^j) &= -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (p^{(2)} \beta_l^j) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\frac{\eta}{J} \Lambda^{jk} \frac{\partial u^l}{\partial \xi^k}) \\ &\quad + \frac{1}{3\text{Re}} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \{(\frac{\eta}{J} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial \xi^k}) \beta_l^j\} - \frac{\varrho}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{E.36}$$

Druckgleichung:

$$\begin{aligned}\text{M}^2 p^{(2)}_t + \nabla \cdot (\gamma p \mathbf{u}) &= -\frac{dp^{(0)}}{dt} - (\gamma - 1) \text{M}^2 \{e^k_t + \nabla \cdot (e^k \mathbf{u})\} \\ &\quad - (\gamma - 1) \frac{\text{M}^2}{\text{Fr}^2} \{e^p_t + \nabla \cdot (e^p \mathbf{u})\} + \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \\ &\quad + (\gamma - 1) \frac{\text{M}^2}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathcal{T}_e \mathbf{u}), \\ \text{M}^2 p^{(2)}_t + \frac{\partial}{\partial x^i} (\gamma p u^i) &= -\frac{dp^{(0)}}{dt} - (\gamma - 1) \text{M}^2 \left\{ e^k_t + \frac{\partial}{\partial x^i} (e^k u^i) \right\} \\ &\quad - (\gamma - 1) \frac{\text{M}^2}{\text{Fr}^2} \left\{ e^p_t + \frac{\partial}{\partial x^i} (e^p u^i) \right\} + \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}) \\ &\quad + (\gamma - 1) \frac{\text{M}^2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathcal{T}_{e_k}^i u^k), \\ \text{M}^2 p^{(2)}_t + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\gamma p \tilde{u}^j) &= -\frac{dp^{(0)}}{dt} - (\gamma - 1) \text{M}^2 \left\{ e^k_t + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (e^k \tilde{u}^j) \right\} \\ &\quad - (\gamma - 1) \frac{\text{M}^2}{\text{Fr}^2} \left\{ e^p_t + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (e^p \tilde{u}^j) \right\} + \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\lambda \Lambda^{jk} \frac{\partial T}{\partial \xi^k}) \\ &\quad + (\gamma - 1) \frac{\text{M}^2}{\text{Re}} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\mathcal{T}_{e_k}^i u^k \beta_i^j).\end{aligned}$$

Bei der numerischen Implementation mit der Finite-Volumen Methode verwenden wir nicht direkt diese differentiellen Gleichungen, sondern die integrale Form, wie im Kapitel 7 erläutert.

Numerische Implementierung der geometrischen Größen

Jeder Differentialquotient muß durch den entsprechenden Differenzenquotienten genähert werden. Nach Einführung des Differenzenoperators Δ^j in j -Richtung bezüglich des ξ^j -Systems lassen sich die Metrikterme unmittelbar aus den Gitterdaten näherungsweise berechnen. Die Metrikterme im zweidimensionalen Fall können dann am östlichen KV-Rand über

$$\begin{aligned} x_{\xi_e} &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_e = \frac{x_E - x_P}{\Delta \xi_e}, & x_{\eta_e} &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_e = \frac{x_{ne} - x_{se}}{\Delta \eta_e}, \\ y_{\xi_e} &= \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_e = \frac{y_E - y_P}{\Delta \xi_e}, & y_{\eta_e} &= \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_e = \frac{y_{ne} - y_{se}}{\Delta \eta_e} \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

berechnet werden. Die Kofaktoren können auch in Differenzenquotienten überführt werden.

$$\begin{aligned} \beta_{1e}^1 &= (J\xi_x)_e = (y_\eta)_e = \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_e = \frac{y_{ne} - y_{se}}{\Delta \eta_e} = \frac{b_{1e}^1}{\Delta \eta_e}, \\ \beta_{2e}^1 &= (J\xi_y)_e = (-x_\eta)_e = \left(-\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_e = -\frac{x_{ne} - x_{se}}{\Delta \eta_e} = \frac{b_{2e}^1}{\Delta \eta_e}, \\ \beta_{1e}^2 &= (J\eta_x)_e = (-y_\xi)_e = \left(-\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_e = -\frac{y_E - y_P}{\Delta \xi_e} = \frac{b_{1e}^2}{\Delta \xi_e}, \\ \beta_{2e}^2 &= (J\eta_y)_e = (x_\xi)_e = \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_e = \frac{x_E - x_P}{\Delta \xi_e} = \frac{b_{2e}^2}{\Delta \xi_e}. \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

Hierbei repräsentieren $\Delta \xi$ und $\Delta \eta$ jeweils die Gitterlänge entlang der Koordinaten ξ bzw. η . Der frei wählbare Skalierungsfaktor $\Delta \xi$ und $\Delta \eta$ des natürlichen Koordinatensystems wird üblicherweise so gewählt, daß die Längen über ein Kontrollvolumen gerade 1 ergeben. Dann lassen sich einige wichtige geometrische Größen folgendermaßen ausdrücken.

Der Flächenvektor:

$$(\Delta \mathbf{A})^j = \mathbf{e}^i b_i^j = \mathbf{e}^1 b_1^j + \mathbf{e}^2 b_2^j. \quad (\text{E.39})$$

Die kontravariante Geschwindigkeit an der östlichen KV-Oberfläche:

$$\tilde{u}_e = (\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{A})_e = u_e b_{1e}^1 + v_e b_{2e}^1 = u_e (y_{ne} - y_{se}) - v_e (x_{ne} - x_{se}). \quad (\text{E.40})$$

Das physikalische Kontrollvolumen im ebenen Fall:

$$\begin{aligned} \Delta V_P &= J_P \\ &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_P \\ &= \frac{1}{2} |(x_{ne} - x_{sw})(y_{nw} - y_{se}) - (x_{nw} - x_{se})(y_{ne} - y_{sw})|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_e &= \frac{1}{2}(\Delta V_P + \Delta V_E), \\ \Delta V_n &= \frac{1}{2}(\Delta V_P + \Delta V_N).\end{aligned}\tag{E.41}$$

Literaturverzeichnis

- [Ari62] ARIS, R.: *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall, 1962.
- [ARW95] ASCHER, U. M., S. J. RUUTH und B. R. WETTON: *Implicit-explicit methods for time-dependent partial dependent equations*. SIAM J. Numer. Anal., 32:797–823, 1995.
- [AS96] ADAMS, N. A. und K. SHARIFF: *A high-resolution hybrid compact-Eno scheme for shock-turbulence interaction problems*. J. Comp. Phys., 127:27–51, 1996.
- [AS99] ARMFELD, S. und R. STREET: *The fraction-step method for the Navier-Stokes Equations on staggered grids: the accuracy of three variations*. J. Comp. Physics, 153:660–665, 1999.
- [AS02] ARMFELD, S. und R. STREET: *An analysis and comparison of the time accuracy of fractional-step methods for the Navier-Stokes equations on staggered grids*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 38:255–282, 2002.
- [BB02] BECKER, R. und M. BRAACK: *Solution of a stationary benchmarkproblem for natural convection with high temperature difference*. Int. J. of Thermal Sciences, 41:428–439, 2002.
- [BCG89] BELL, J. B., P. COLLELA und H. M. GLAZ: *A Second-order projection Method for the incompressible Navier-Stokes equations*. J. Comp. Phys., 85:257–283, 1989.
- [BCM01] BROWN, D. B., R. CORTEZ und M. L. MINION: *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*. J. Comp. Phys., 168:464–499, 2001.
- [Bij99] BIJL, H.: *Computation of flow at all speed with a staggered scheme*. Doktorarbeit, Delft University of Technology, 1999.
- [BM92] BELL, J. B. und D. L. MARCUS: *A Second-order projection method for variable density flows*. J. Comp. Phys., 101:334–348, 1992.

- [BSS94] BELL, J. B., J. M. SOLOMON und W. G. SZYMCZAK: *Projection method for viscous incompressible flow on quadrilateral grids*. AIAA J., 32:1961–1969, 1994.
- [BW98] BIJL, H. und P. WESSELING: *A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates*. J. Comp. Phys., 141:153–173, 1998.
- [CG84] CASULLI, V. und D. GREENSPAN: *Pressure method for the numerical solution of transient, compressible fluid flows*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 4:1001–1012, 1984.
- [Cho67] CHORIN, A. J.: *A numerical Method for solving incompressible viscous flow*. J. Comp. Phys., 2:12–26, 1967.
- [Cho68] CHORIN, A. J.: *Numerical solution of the Navier-Stokes Equation*. Math. Comp., 22:745–762, 1968.
- [Cho69] CHORIN, A. J.: *On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations*. Math. Comp., 23:341–353, 1969.
- [CM79] CHORIN, A. J. und J. E. MARSDEN: *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-verlag, 1979.
- [CM85] CHOI, D. und C. L. MERKLE: *Application of time-iterative schemes to incompressible flow*. AIAA J., 23:1518–1524, 1985.
- [CP86] CHENOWETH, D. R. und S. POULUCCI: *Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences*. J. Fluid Mech., 169:173–210, 1986.
- [CW84] COLLELA, P. und P. WOODWARD: *The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations*. J. Comp. Phys., 54:115–173, 1984.
- [DD92] DUKOWICZ, J. K. und A. S. DVINSKY: *Approximate factorization as a high order splitting for the implicit incompressible flow equations*. J. Comp. Phys., 102:336–347, 1992.
- [DG94] DADONE, A. und B. GROSSMAN: *Surface boundary conditions for the numerical solution of the Euler equations*. AIAA J., 32:285–293, 1994.
- [DIL90] DEMIRDZIC, I., R. I. ISSA und Z. LILEK: *Solution method for viscous flows at all speeds in complex domains*. Note on Num. Fluid Mechanics, 29:89–98, 1990.
- [DLP92] DEMIRDZIC, I., Z. LILEK und M. PERIC: *Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: Bench-mark solutions*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 15, 1992.

- [DM97] DENG, X. und H. MAEKAWA: *Compact high-order accurate nonlinear schemes*. J. Comp. Phys., 130:77–91, 1997.
- [ECS84] EIDELMAN, S., P. COLLELA und R. P. SHREEVE: *Application of the Godunov method and its second-order extension to cascade flow modelling*. AIAA J., 22:1609–1615, 1984.
- [EH88] EVANS, C. R. und J. F. HAWLEY: *Simulation of magnetohydrodynamic flows: a constrained transport method*. Astrophys. J., 332:659–677, 1988.
- [Fed97] FEDORCHENKO, A. T.: *A model of unsteady subsonic flow with acoustic excluded*. J. Fluid Mech., 334:135–155, 1997.
- [FG93] FRÖLICH, J. und S. GAUTHIER: *Numerical investigations from compressible to isobaric Rayleigh-Bénard convection in two dimensions*. Eur. J. Mech. B/Fluids, 12:141–159, 1993.
- [FHV97] FRANK, J., W. HUNSDORFER und J. G. VERWER: *On the stability of implicit-explicit linear multistep methods*. Appl. Num. Math., 25:193–205, 1997.
- [FLP92] FRÖLICH, J., P. LAURE und R. PEYRET: *Large departures from Boussinesq approximation in the Rayleigh-Bénard problem*. Phys. Fluids A, 7:1355–1372, 1992.
- [FOF00] FAROUK, B., E.S. ORAN und T. FUSEGI: *Numerical study of thermoacoustic waves in an enclosure*. Phy. Fluids, 12:1052–1061, 2000.
- [FP96] FERZIGER, J.H. und M. PERIC: *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 1996.
- [Ger97] GERATZ, K. J.: *Erweiterung eines Godunov-Typ-Verfahrens für zwei-dimensionale kompressible Strömungen auf die Fälle kleiner und verschwindender Machzahl*. Doktorarbeit, RWTH Aachen, 1997.
- [GG76] GRAY, D. D. und A. GIORGINI: *The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases*. Int J. Heat & Mass Transfer, 19:545–551, 1976.
- [GQ97a] GUERMOND, J. L. und L. QUARTAPELLE: *Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM*. J. Comp. Phys., 132:12–33, 1997.
- [GQ97b] GUERMOND, J. L. und L. QUARTAPELLE: *A projection FEM for variable density incompressible flows*. J. Comp. Phys., 132:12–33, 1997.
- [HB95] HUANG, Y. und H. H. BAU: *Thermoacoustic waves in a semi-infinite medium*. Int. J. Heat & Mass Transfer, 38:1329–1345, 1995.

- [HB97] HUANG, Y. und H. H. BAU: *Thermoacoustic waves in a confined medium*. Int. J. Heat & Mass Transf., 40:407–419, 1997.
- [Heu00] HEUVELINE, V.: **HiFlow** a general finite element toolbox for hp-methods. <http://www.hiflow.de>, 2000.
- [Heuar] HEUVELINE, V.: *On higher-order mixed FEM for low Mach number flows: Application to a natural convection benchmark problem*. Int. J. Num. Meth. Fluids, to appear.
- [Hor92] HORIBATA, Y.: *Numerical simulation of a low-Mach-number flow with a large temperature variation*. Computers & Fluids, 21:185–200, 1992.
- [HR98] HUGUES, S. und A. RANDRIAMAMPINANINA: *An improved projection scheme applied to pseudospectral methods for the incompressible Navier-Stokes equations*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 28:501–521, 1998.
- [HW65] HARLOW, A. T. und J. E. WELCH: *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface*. Phy. of Fluids, 8:2182–2189, 1965.
- [IGW86] ISSA, R. I., A. D. GOSMAN und A. P. WATKINS: *The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme*. J. Comp. Phys., 62:66–82, 1986.
- [JJA86] JANG, D. S., R. JETLI und S. ACHARYA: *Comparision of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems*. Num. Heat Transfer, 10:209–228, 1986.
- [JS96] JIANG, G. S. und C. W. SHU: *Efficient implementation of weighted ENO schemes*. J. Comp. Phys., 126:202–228, 1996.
- [Kle95] KLEIN, R.: *Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I: One-dimensional flow*. J. Comp. Phys., 121:213–237, 1995.
- [KM81] KLAINERMAN, S. und A. MAJDA: *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*. Comm. Pure Appl. Math., 34:481–524, 1981.
- [KM82] KLAINERMAN, S. und A. MAJDA: *Compressible and incompressible fluids*. Comm. Pure Appl. Math., 35:629–653, 1982.
- [KM85] KIM, J. und P. MOIN: *Application of a fractional-step to incompressible Navier-Stokes equations*. J. Comp. Phys., 59:308–323, 1985.

- [KM98] KEMM, F. und C. D. MUNZ: *Asymptotische Untersuchungen für die Magneto-hydrodynamischen Gleichungen und Folgerungen für die Konstruktion numerischer Methoden*. DFG-Bericht, Inst. f. Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, 1998.
- [KP89] KARKI, K. C. und S. V. PATANKAR: *Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations*. AIAA J., 27:1167–1174, 1989.
- [KPP99] KOBAYASHI, M. H., J. M. C. PEREIRA und J. C. F. PEREIRA: *A conservative finite-volume second-order-accurate projection method on hybrid unstructured grids*. J. Comp. Phys., 150:40–75, 1999.
- [KT02] KURGANOV, A. und E. TADMOR: *Solution of two dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers*. Num. Meth. for P. D. E., 18:584–604, 2002.
- [Lax54] LAX, P. D.: *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equation and their numerical approximation*. Comm. Pure Appl. Math., 7:150–193, 1954.
- [Lel92] LELE, S. K.: *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*. J. Comp. Phys., 103:16–42, 1992.
- [LeV92] LEVEQUE, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag, 2 Auflage, 1992.
- [LeV97] LEVEQUE, R. J.: *Nonlinear conservation laws and finite volume methods for astrophysical fluid flow*. in Computational methods for astrophysical fluid flow, springer verlag, 2 Auflage, 1997.
- [LL98] LAX, P. D. und X. D. LIU: *Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes*. SIAM J. Sci. Comp., 19:319–340, 1998.
- [LP95] LILEK, Z. und M. PERIC: *A fourth-order finite volume method with colocated variable arrangement*. Computers & Fluids, 24:239–252, 1995.
- [LRR00] LIOTTA, S. F., V. R. ROMANO und G. RUSSO: *Central schemes for balance laws of relaxation type*. SIAM J. Num. Anal., 38:1337–1356, 2000.
- [Mei99] MEISTER, A.: *Numerik lineare Gleichungssysteme*. Vieweg, 1999.
- [MK95] MUNZ, C. D. und R. KLEIN: *The Extension of inkompressible flow solvers to the weakly compressible regime*. Technischer Bericht, KfK- Internal Bericht, INR-1927, 1995.
- [MLVM98] MORINISHI, Y., T. S. LUND, O. V. VASILYEV und P. MOIN: *Fully conservative high order finite difference scheme for incompressible flow*. J. Comp. Phys., 143:90–124, 1998.

- [MRKG02] MUNZ, C. D., S. ROLLER, R. KLEIN und K. J. GERATZ: *The extension of incompressible flow solvers to the weakly compressible regime*. *Comp. & Fluids*, 32:173–196, 2002.
- [MTN97] MLAOUAH, H., T. TSUJI und Y. NAGANO: *A study of non-Boussineq effect on transition of thermally induced flow in a square cavity*. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 18:100–106, 1997.
- [Nic00] NICOUD, F.: *Conservative high-order finite-difference schemes for low-Mach number flows*. *J. Comp. Phys.*, 158:71–97, 2000.
- [OSC90] OZOE, H., N. SATO und S. W. CHURCHILL: *Numerical analysis of two and three dimensional thermoacoustic convection generated by a transient step in the temperature of one wall*. *Num. Heat Transfer, A* 18:1–15, 1990.
- [PAB⁺97] PUCKETT, E. G., A. S. ALMGREN, J. B. BELL, D. L. MARCUS und W. J. RIDER: *A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows*. *J. Comp. Phys.*, 130:269–282, 1997.
- [Par97] PARK, J. H.: *SIMPLE-Typ Verfahren für schwachkompressible Navier-Stokessche Gleichungen in zwei Raumdimensionen*. Diplomarbeit, TH Karlsruhe, 1997.
- [Pat80] PATANKAR, S. V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing, 1980.
- [Pat85] PATANKAR, S. V.: *A calculation procedure for two dimensional elliptic situations*. *Num. heat transfer*, 14:409–425, 1985.
- [Per85] PERIC, M.: *A finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts*. Doktorarbeit, Imperial College, 1985.
- [Per87] PERIC, M.: *Efficient semi-implicit solving algorithm for nine-diagonal coefficient matrix*. *Num. Heat Transfer*, 11:251–279, 1987.
- [Per90] PERIC, M.: *Analysis of pressure-velocity coupling on nonorthogonal grids*. *Num. Heat transfer, Part B*, 17:63–82, 1990.
- [PGBO87] PATNAIK, G., R. H. GUIRGUIS, J. P. BORIS und E. S. ORAN: *A barely implicit correction for flux-corrected transport*. *J. Comp. Phys.*, 71:1–20, 1987.
- [PQ00] PAILLERE, H. und P. LE QUERE: *A benchmark problem for low Mach number solvers*. In: *12th CFD Seminar, CEA Saclay*, Januar 2000.
- [PS72] PATANKAR, S. und S. SPALDING: *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flow*. *Int. J. Heat & Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.

- [Rat03] RATZEL, M.: *Die Simulation von schwach kompressiblen Strömungen auf körperangepassten, strukturierten Gittern*. Doktorarbeit, Uni. Stuttgart, 2003.
- [RC83] RHIE, C. M. und W. L. CHOW: *A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation*. AIAA J., 21:1525–1532, 1983.
- [Rid94] RIDER, W. J.: *Approximate projection methods for incompressible flow: implementation, variants and robustness*. Technischer Bericht LA-UR-2000, Los Alamos National Laboratory, 1994.
- [RM91] RAI, M. M. und P. MOIN: *Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes*. J. Comp. Phys., 91:15–53, 1991.
- [RM99] ROLLER, S. und C. D. MUNZ: *The multiple pressure variables method for low Mach number flows*. AIAA 99-0174, 1999.
- [RM00] ROLLER, S. und C. D. MUNZ: *A low Mach number scheme based on multi-scale asymptotics*. Comput. Visual Sci., 2000.
- [Rol99] ROLLER, S.: *User's guide for the MPV2D-code*, 1999.
- [Rol03] ROLLER, S.: *Ein numerisches Verfahren zur Simulation schwach kompressibler Strömungen*. Doktorarbeit, Uni. Stuttgart, 2003.
- [Ros03] ROSSOW, C. C.: *A blended pressure/density based method for the computation of incompressible and compressible flows*. J. Comp. Phys., 185:375–398, 2003.
- [Saa00] SAAD, Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*. <http://www-users.cs.umn.edu/saad/>, 2 Auflage, 2000.
- [SBGK99] SCHNEIDER, T., N. BOTTA, K.J. GERATZ und R. KLEIN: *Extension of finite volume compressible flow solvers to multi-dimensional, variable density zero Mach number flows*. J. Comp. Phys., 155:248–286, 1999.
- [Sch85] SCHLICHTING, H.: *Boundary layer theory*. McGRAW-HILL, 7 Auflage, 1985.
- [Shu97] SHU, C. W.: *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*. Technischer Bericht 65, ICASE, 1997.
- [SL99] STRIKWERDA, J. C. und Y. S. LEE: *The accuracy of the fractional step method*. SIAM J. Numer. Anal., 37:37–47, 1999.
- [Sod78] SOD, G. A.: *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear conservation laws*. J. Comp. Phys., 27:1–31, 1978.
- [Sto68] STONE, H. L.: *Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations*. SIAM J. Numer. Anal., 5:530–558, 1968.

- [Str68] STRANG, G.: *On the construction and comparison of difference schemes*. SIAM J. Numer. Anal., 5:506–517, 1968.
- [SW95] STREHMEL, K. und R. WEINER: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, 1995.
- [Swe84] SWEBY, P. K.: *High resolution schemes using flux limiter for hyperbolic conservation laws*. SIAM J. Num. Anal., 21:217–235, 1984.
- [Taf96] TAFTI, D.: *Comparison of some upwind-biased high-order formulations with a second-order central-difference scheme for time integration of the incompressible Navier-Stokes equations*. Computers & Fluids, 7:647–665, 1996.
- [TC01] TREBOTICH, D. P. und P. COLELLA: *A projection method for incompressible viscous flow on moving quadrilateral grids*. J. Comp. Phys., 166:191–217, 2001.
- [Tem69] TEMAM, R.: *Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la methode des pas fractionnaires*. Arch. Ration. Mech. Anal., 32:135–153, 1969.
- [TMV96] TIMMERMANS, L. J. P., P.D. MINEV und F. N. VAN DE VOSSE: *An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 22:673–688, 1996.
- [Twe00] TWERDA, A.: *Advanced computational methods for complex flow simulation*. Doktorarbeit, Delft university of Technology, 2000.
- [Van86] VANKA, S. P.: *Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables*. J. Comp. Phys., 65:138–158, 1986.
- [Vas00] VASILYEV, O. V.: *High order finite difference schemes on non-uniform meshes with good conservation properties*. J. Comp. Phys., 157:746–761, 2000.
- [vDR84] DOORMAAL, J. P. VAN und G. D. RAITHBY: *Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluids flows*. Num. Heat transfer, 7:147–163, 1984.
- [vK86] KAN, J. VAN: *A Second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7:871–891, 1986.
- [vL79] LEER, B. VAN: *Toward the ultimate conservative difference scheme V: A second-order sequel to Godunov's method*. J. Comp. Phys., 32:101–136, 1979.
- [VV97] VERSTAPPEN, R. W. C. P. und A. E. P. VELDMAN: *Direct numerical simulation of turbulence at low costs*. J. Eng. Math., 32:143–159, 1997.
- [VV98] VERSTAPPEN, R. W. C. P. und A. E. P. VELDMAN: *Spectro-consistent discretization of Navier-Stokes: A Challenge to RANS and LES*. J. Eng. Math., 34:163–179, 1998.

- [WC84] WOODWARD, P. und P. COLLELA: *The numerical solution of two-dimensional fluid flow with strong shock*. J. Comp. Phys., 54:174–201, 1984.
- [Wes01] WESSELING, P.: *Principles of computational fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1 Auflage, 2001.
- [Wetrt] WETTON, B. R.: *Error analysis of pressure increment schemes*. SIAM J. Num. Anal., 2000, akzeptiert.
- [Wis95] WISSINK, J. G.: *Direct numerical simulation of turbulence*. Doktorarbeit, University of Groningen, 1995.
- [Wis01] WISSINK, J. G.: *A fourth-order correction method on collocated, curvilinear grids*. ECCOMAS, 2001.
- [WL95] WEINAN, E. und J. G. LIU: *Projection method I: Covergence and numerical boundary layers*. SIAM J. Num. Anal., 32:1017–1057, 1995.
- [WvdHV00] WESSELING, P., D. R. VAN DER HEUL und C. VUIK: *Unified methods for computing compressible and incompressible flows*. In: ECCOMAS, 2000.
- [YK91] YOON, S. und D. KWAK: *Three-dimensional incompressible Navier-Stokes solver using lower-upper Symmetric-Gauss-Seidel algorithm*. AIAA J., 29:874–875, 1991.
- [Zho96] ZHONG, X.: *Additive semi-implicit Runge-Kutta methods for computing high-speed nonequilibrium reactive flows*. J. Comp. Phys., 128:19–31, 1996.
- [Zie91] ZIEREP, J.: *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*. Verlag G. Braun Karlsruhe, 1991.
- [ZSK94] ZANG, Y., R. L. STREET und J. R. KOSEFF: *A non-staggered grid, fractional step method for time dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates*. J. Comp. Phys., 114:18–33, 1994.

Lebenslauf

Jea-Ho, Park

Persönliche Daten:

Geburtsdatum: 09. 03. 1961

Geburtsort: Mokpo

Staatangehörigkeit: Südkorea

Familienstand: verheiratet, ein Kind

Schulbildung:

03/1967–02/1979 Grundschule und Gymnasium in Mokpo, Südkorea

Wehrdienst:

10/1981–02/1984 Grundwehrdienst

Studium:

03/1979–02/1986 Energietechnik an der Seoul National-Universität in Seoul, Südkorea

10/1987–06/1997 Studium des Maschinenbaus an der Universität Karlsruhe,
Diplomarbeit: *Simple-Typ Verfahren für Schwachkompressible Navier-Stokesche Gleichungen in zwei Raum Dimensionen*

1997 Diplom-Ingenieur

Berufliche Tätigkeit:

seit 07/1997 Institut für Aero- und Gasdynamik an der Universität Stuttgart; wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Numerische Methoden der Strömungsdynamik.

Stuttgart, Oktober 2003

Jea-Ho Park