

Finite-Volumen Verfahren hoher Ordnung und heterogene Gebietszerlegung für die numerische Aeroakustik

Von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Thomas Schwartzkopff
aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-rer. nat. habil. Claus-Dieter Munz
Mitberichter: Prof. Dr. E.-F. Toro
Tag der mündlichen Prüfung: 18. April 2005

Institut für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart

2005

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart im Sonderforschungsbereich SFB404 *Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik*. Dieser Sonderforschungsbereich wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG finanziert, bei der ich mich bedanke.

Besonders möchte ich mich bei Prof. Dr.-rer. nat. Claus-Dieter Munz bedanken, der mich immer unterstützte und mir die Möglichkeit gab, in seiner Gruppe sehr kreativ zu arbeiten. Er vermittelte mich auch zur Studienarbeit an Prof. Dr. E.-F. Toro. Viele der hier gezeigten Ergebnisse beruhen auf den Ideen, die ich während dieser Zeit in Manchester sammeln konnte. Für diese fruchtbare Zeit, die Zusammenarbeit während der letzten Jahre und die Annahme der Aufgabe des Mitberichters bin ich Prof. Dr. E.-F. Toro sehr dankbar.

Meinen Kollegen Roland Fortenbach und Michael Dumbser möchte ich ebenfalls für die vielen Stunden der Diskussion danken, bei denen neue Ideen entwickelt, viele auch wieder verworfen und einige zum Erfolg gebracht werden konnten.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Frau Katharina und meinen Töchtern Johanna und Antonia für die vielen Wochenenden entschuldigen, die ich wegen der Fertigstellung der Arbeit nicht mit ihnen verbringen konnte.

Stuttgart, im August 2005

Thomas Schwartzkopff

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen	ix
Abkürzungen	xi
Kurzfassung	xiii
Abstract	xv
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Forschung	3
1.1.1 Verfahren hoher Ordnung	4
1.1.2 Numerische Aeroakustik	6
1.2 Ziel der Arbeit	8
1.3 Gliederung der Arbeit	9
1.4 Gleichungen	10
2 Grundlagen der ADER Verfahren	13
2.1 Entstehungsgeschichte	13
2.2 Konstruktion des Verfahrens für lineare Systeme	14
2.2.1 Finite-Volumen Diskretisierung	15
2.2.2 ADER Idee	16
2.3 Konstruktion des Verfahrens für nichtlineare Systeme	18
2.3.1 State Expansion ADER	19
2.3.2 Flux Expansion ADER	20
2.4 Das verallgemeinerte lokale Riemann Problem	20
3 ADER Verfahren beliebig hoher Ordnung	23
3.1 Rekonstruktion an der Zellgrenze	23
3.1.1 Lagrange Interpolation im 1-D	24
3.1.2 Entdimensionalisierte Form der Koeffizienten	27
3.1.3 Lagrange Interpolation im 2-D	27
3.1.4 Rekonstruktion mit ENO	28
3.1.5 Grundlegende Probleme der ENO/WENO Verfahren	30
3.2 Die Lax-Wendroff Prozedur	32
3.2.1 Für lineare Systeme	32
3.2.2 Für nichtlineare Systeme	33

3.3	<i>fast</i> ADER für lineare Systeme	37
3.3.1	Riemann Problem der geraden Verfahren	38
3.3.2	Riemann Problem der ungeraden Verfahren	39
3.3.3	<i>fast</i> ADER Verfahren	41
3.3.4	Konsistenz und Konvergenz	43
3.3.5	Stabilität	46
3.3.6	Rechenzeit	49
3.3.7	Wellentransporteigenschaften	50
3.3.8	Verhalten bei starken Gradienten	55
3.3.9	Bemerkungen	58
3.4	ADER für Nichtlineare Systeme	59
3.4.1	Rekonstruktion	59
3.4.2	Eigenschaften der linearen Verfahren gerader Ordnung	60
3.4.3	Flux Expansion ADER versus State Expansion ADER	60
3.4.4	Konvergenz	61
3.4.5	Stabilität	64
4	Heterogene Gebietszerlegung für die Aeroakustik	70
4.1	Grundlegende Probleme	70
4.2	Kopplungsalgorithmen	72
4.2.1	Numerische Verfahren	72
4.2.2	Gitter	73
4.2.3	Zeitschritt	76
4.2.4	Gleichungen	77
4.3	KOP2D: Verbindung aller Bausteine	80
4.4	Validierung	81
4.4.1	Partitionierung	82
4.4.2	Wechselnde Gitter	82
4.4.3	Wechselnde Gitter mit wechselnden Zeitschritten . . .	84
4.4.4	Wechselnde Gleichungen	86
4.4.5	Verhalten bei hochfrequenten Störungen	90
5	Numerische Beispiele	94
5.1	Rotierendes Wirbelpaar	94
5.2	Vorderkantenlärm in wirbelbehafteter Anströmung	99

A	Konvergenztabelle	107
A.1	Lineare Gleichungen, Konvektion eines Gausspulses	107
A.2	Nichtlineare Gleichungen, Transport eines Wirbels	111
B	Koeffiziententabelle für <i>fastADER</i>	117
	Lebenslauf	119

Formelzeichen

$\underline{A}, \underline{B}$	Jacobi Matrizen in x-, y-Richtung
c	Schallgeschwindigkeit
$C_{rj}^{(n)}$	Gewicht des j -ten Punktes zur Rekonstruktion der n -ten Ableitung, bei der r Zellen von links verwendet werden
$C_j^{(n)}$	Gewicht des j -ten Punktes zur Rekonstruktion der n -ten Ableitung, bei der für die gerade Ordnung ein zentraler Rekonstruktionsstern und für die ungeraden Verfahren ein leichter upwind Rekonstruktionsstern verwendet wird
e	innere Energie
E	Energie
\underline{E}	Einheitsmatrix
$\underline{F}, \underline{G}$	Flussvektor in x-, y-Richtung
I_{ij}	Zelle i, j
k	reduzierte Frequenz
$K_{\underline{A}}^n$	n -te Spalte der Rechtseigenvektor Matrix von \underline{A}
$L^{(a,b,k)}$	verallgemeinerte Leibnizregel
$L^{(a,b,k)*}$	modifizierte verallgemeinerte Leibnizregel
L_{∞}	größter auftretender Fehler $L_{\infty} = \text{MAX}_i u^{\text{exakt}} - u_i $
L_1	Fehler in der L_1 Norm, in dieser Arbeit immer bezogen auf die Einheitsfläche $L_1 = \sum_i u^{\text{exakt}} - u_i I_i / \sum_i I_i$
Ma	Mach-Zahl
n	Anzahl der Iterationen
n^E, n^{LE}	Reflexionsindex des Euler bzw. linearisierten Euler Gebietes
N_G	Anzahl der Gitterpunkte
N_{GP}	Anzahl der Gausspunkte
\mathcal{O}	Ordnung des Verfahrens
Onn	Kennzeichnung für ein Verfahren der Ordnung nn
HV	Hilfsvariablen
p	Druck
r	Radius oder Reflexionsstärke
t	Zeit
T	Temperatur oder Periodendauer
u, v, w	Geschwindigkeit in x-, y-, z-Richtung

\underline{U}	Vektor der Zustandsgrößen
\overline{U}	Integraler Mittelwert von \underline{U}
\underline{U}^\pm	Vektor der Zustandsgrößen ausgewertet am Zellrand: + von der rechten Seite, – von der linken Seite
V	Volumen
\underline{W}	beliebige Ableitung von \underline{U}
\underline{X}	Vektor der Raumkoordinaten
γ	Adiabaten Exponent
Γ	gemeinsamer Rand zwischen zwei Gebieten: $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$
ρ	Dichte
λ	Wellenlänge oder Eigenwert
σ	Halbwertsbreite
ω	Kreisfrequenz
Ω	Gebiet
$\partial\Omega$	Oberfläche (Rand) von Ω
$\Delta x, \Delta y$	Gitterschrittweite in x-, y-Richtung
Δt	Zeitschrittweite
\mathcal{L}	Lagrange Interpolation
$ \cdot _t, \cdot _x, \cdot _y$	Ableitung nach der Zeit, der x-, der y- Koordinate
$ \cdot ^n$	Wert zum Zeitpunkt t^n
$ \cdot ^{RP}$	Lösung des Riemann Problems für $ \cdot ^+$ und $ \cdot ^-$
$\underline{ \cdot }$	Matrix
$\underline{ \cdot }$	Vektor
$\langle \underline{ \cdot }, \underline{ \cdot } \rangle$	Skalar Produkt der beiden Vektoren

Der Subskript $|\cdot|_0$ einer physikalischen Größe bezeichnet den Zustand der freien Anströmung. Die gestrichene Größe $|\cdot|'$ kennzeichnet die Störung um $|\cdot|_0$, so dass gilt $|\cdot| = |\cdot|_0 + |\cdot|'$.

Kursiv gestellte Ausdrücke kennzeichnen *Eigennamen* bestimmter Verfahren, die nicht übersetzt wurden, um eine Orientierung an anderen Werken zu gewährleisten.

Abkürzungen

ADER-FX	ADER Flux-Expansion
ADER-SX	ADER State-Expansion
CAA	Computational Aeroacoustics
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant Friedrichs van Lerr Zahl
CPU	Central Processor Unit
DG	Discontinuous Galerkin
DRP	Dispersion Relation Preserving
ENO	Essentially Non Oscillatory
FD	Finite-Differenzen
FV	Finite-Volumen
GRP	Generalized Riemann Problem
MGRP	Modified Gerneralized Riemann Problem
PPW	Punkte Pro Wellenlänge
RK	Runge-Kutta
TVD	Total Variation Diminishing
WENO	Weighted Essentially Non Oscillatory

Kurzfassung

In der Akustik werden im Allgemeinen große Gebiete untersucht, bei denen in einzelnen Bereichen sehr unterschiedliche physikalische Phänomene relevant sind. Die Strömungsvorgänge laufen auf kleinen räumlichen Skalen ab, die akustischen dagegen auf großen räumlichen Skalen. Daher werden bei den klassischen Methoden, wie akustische Analogie und Störansatz, das Strömungsfeld und das Akustikfeld getrennt voneinander berechnet und über Quellterme miteinander verbunden. Dabei sind die Quellterme keinesfalls eindeutig bestimmt, und die Rückwirkung der Akustik auf die Strömung wird nicht berücksichtigt. In dieser Arbeit wird ein Ansatz vorgestellt, der dieses Problem umgeht. Dazu werden verschiedene Teilgebiete verwendet, in denen die Gleichungen, die Gitter- und die Zeitschrittweiten, der Gittertyp und die numerischen Verfahren frei gewählt und an die lokal relevanten Phänomene angepasst werden können. Dies wird als heterogene Gebietszerlegung bezeichnet. Damit wird es ermöglicht, eine direkte Simulation von Problemen der numerischen Aeroakustik durchzuführen. Dies bedeutet, dass in allen Gebieten die Strömungsphänomene und die Akustik berechnet werden. Es wird gezeigt, wie die Kopplung an den Gebietsgrenzen vorgenommen werden muss, um eine Methode zu erhalten, welche im Gesamten zeitgenau und hoher Ordnung ist. Die größte Rechenzeiterparnis wird dadurch erreicht, dass es mit der hier vorgestellten Methode nicht nur möglich ist, unterschiedlich grobe Gitter zu verwenden, sondern ebenfalls den Zeitschritt in den einzelnen Gebieten zu variieren. Diese Kopplung hoher Ordnung wird anhand einer Konvergenzuntersuchung nachgewiesen, bei der eine Konvergenz mit 9. Ordnung in Raum und Zeit erzielt wird. Als praktische Beispiele werden daraufhin das rotierende Wirbelpaar und die Akustik, erzeugt von einem in einer wirbelbehafteten Anströmung liegenden Profil (Vorderkantenlärm), berechnet und mit Lösungen aus der Literatur verglichen.

In der numerischen Aeroakustik, wie sie hier vorgestellt wird, ist es essentiell, überall Verfahren hoher Ordnung zu verwenden, um so möglichst wenig numerische Viskosität und Dispersion einzuführen. Die noch relativ neuen ADER Verfahren aus der Klasse der Finiten-Volumen Verfahren haben hervorragende Wellentransporteigenschaften und lassen sich darüber hinaus mit beliebiger Genauigkeit implementieren, so dass die uniforme Ordnung in Raum und Zeit der einzige freie Parameter ist. Die Verfahren setzen sich im Wesentlichen aus den folgenden drei Elementen zusammen: 1. Rekonstruktion hoher Ordnung der Zustände an den Zellgrenzen aus den Zellmittelwerten, 2. Lösen von

verallgemeinerten Riemannproblemen, auch für die Ableitungen und 3. der Verwendung der Lax-Wendroff Prozedur, um Zeitableitungen durch Raumableitungen zu ersetzen. Es werden alle Bausteine vorgestellt, die notwendig sind, um diese Verfahren mit beliebiger Ordnung für lineare und nichtlineare hyperbolische partielle Differentialgleichungssysteme zu implementieren. Dazu gehört auch die algorithmische Umsetzung der Lax-Wendroff Prozedur für die nichtlinearen Euler Gleichungen. Daran anschließend werden Stabilität, Konvergenz und Wellentransporteigenschaften der Verfahren für lineare und nichtlineare hyperbolische partielle Differentialgleichungen in zwei Raumdimensionen untersucht. Bemerkenswert ist dabei, dass die Stabilität der Verfahren mit zunehmender Genauigkeit ebenfalls zunimmt. Um Oszillationen an Stößen oder starken Gradienten zu vermeiden, wird die *Essentially Non Oscillatory* Idee eingeführt und die Probleme dieser Methode ausführlich diskutiert. Weiter wird für die ADER Verfahren für lineare Systeme gezeigt, wie diese erheblich beschleunigt werden können, so dass am Ende die ADER Verfahren 12. Ordnung ebenso schnell sind, wie ein Finite-Differenzen Verfahren 6. Ordnung mit Runge-Kutta Zeitintegration 4. Ordnung. Bei der Herleitung der ADER Verfahren für die nichtlinearen Gleichungen gelangt man zu zwei verschiedenen Verfahren, den ADER flux expansion Verfahren und den ADER state expansion Verfahren. Anhand eines Beispiels werden die beiden Varianten miteinander bezüglich Genauigkeit und Rechenzeit verglichen.

Abstract

In the field of aeroacoustics large domains are investigated. These domains can be divided into several regions where different physical effects are relevant. Aeroacoustics is a multi-scale problem: the flow field effects are on a very small scale and the acoustical effects on a very large spatial scale. In the classical methods, such as acoustical analogy or perturbation method, the acoustical field and flow field are linked by source terms but calculated separately. These source terms are not unique and there is no backward coupling from the acoustical field to the flow field. In this work a new approach is presented that circumvents these problems. The large domain is split into a set of sub-domains where different equations, grid types, numerical methods, grid- and time-spacings can be used. So the settings of each sub-domain can be adapted to the local relevant features. This method is called heterogeneous domain decomposition. It enables a direct simulation of aeroacoustical problems. This means that in all domains the flow field plus the acoustical field is calculated. It is demonstrated how these domains must be linked at the interfaces to obtain a method that has an overall high order convergence rate and is time accurate. The largest gain in computational efficiency is obtained not only by using different grid sizes but also by using different timesteps in each sub-domain. To verify the high order coupling a convergence rate study for an overall accuracy of 9 in space and time is presented. As numerical examples the acoustical field of a co-rotating vortex pair and the sound emitted by the profile gust response problem are calculated and compared to solutions from the literature.

For the computational aeroacoustics as proposed here, it is essential to use high order methods everywhere because these methods have low numerical dispersion and dissipation. The relatively new ADER schemes (Finite-Volume class) have excellent wave transportation properties and can be implemented in a way that the uniform order of accuracy in space and time is the only parameter and is arbitrary. These schemes are essentially set up by the following three elements: high order reconstruction of local values at the cell interface from the given cell averages, solution of a generalized Riemann problem for the state and its derivatives and a Lax-Wendroff procedure which replaces time derivatives by spatial derivatives. All necessary elements to set up the method at arbitrary order of accuracy for a linear or nonlinear system of hyperbolic partial differential equations are given. This includes an algorithm for the Lax-Wendroff procedure for the nonlinear system of the Euler equations.

For the methods a detailed study concerning stability, numerical convergence and wave transportation properties in two space dimensions is given. It is noteworthy that the stability increases, if the order of accuracy is increased. To suppress spurious oscillations around shocks or large gradients the well known *Essentially Non Oscillatory* idea is introduced and the problems of this method are discussed extensively. Furthermore a method to dramatically decrease the computational effort for linear systems is described. This leads at the end to a method where the 12th order ADER scheme is as fast as a 6th order finite-difference scheme with 4th order Runge-Kutta time integration. The derivation of the ADER method for nonlinear systems leads to two possible versions: the flux-expansion method and the state-expansion method. Both variants are compared with respect to accuracy and CPU time using a numerical example.

1 Einleitung

Strömungsmechanische Vorgänge spielen in unserer Umwelt eine große Rolle. Die Liste der Anwendungen reicht von den klassischen Umströmungsproblemen, wie sie bei Automobilen, Hochgeschwindigkeitszügen, Flugzeugen, Hubschraubern, Schiffen, Raketen und sogar im Leistungssport bei Skispringern, Schwimmern und Radfahrern auftreten, über die Durchströmungsprobleme bei Klimaanlage, Motoren, Turbinen, Lüftern, Blutgefäßen und Organen bis hin zur Meteorologie, Kosmologie und Akustik. Ein echter Beginn der wissenschaftlichen Untersuchungen läßt sich nicht ausmachen. Schon den alten Griechen und Römern waren einige Grundprinzipien bekannt. Die Geschichte der modernen Strömungsmechanik begann dann mit den Veröffentlichungen der *Principia* von Isaac Newton im Jahre 1687, deren 2. Band sich ganz der Strömungsmechanik widmete. Newton erkannte, dass die strömungsmechanischen Phänomene wesentlich komplizierter sind als die Dynamik der starren Körper. Zu dieser Zeit begann eine erste Forschungswelle vor dem technischen Hintergrund der Verbesserung von Schiffskörpern, die zur damals modernen Kriegsführung auf See benötigt wurden. Wichtige Arbeiten hierzu entstanden von L.R. d'Alembert (1777) und Leonhard Euler (1781), nachdem die Euler Gleichungen benannt sind, sowie von zahlreichen Mitgliedern der Familie Bernoulli, nach denen die wohl bekannteste Gleichung der Strömungsmechanik, die Bernoulli Gleichung, benannt ist.

Den größten Schub erhielt die Strömungsmechanik jedoch Ende des 19./Anfang des 20. Jahrhunderts, nachdem 1891 Otto Lilienthal der erste bemannte Gleitflug und 12 Jahre später den Gebrüder Wright der erste motorisierte Flug gelungen war. In dieser Zeit begannen die ersten Windkanalexperimente, die neben theoretischen Überlegungen das zweite Standbein der Strömungsmechanik sind. Einer der größten Theoretiker dieser Zeit ist Ludwig Prandtl (1874-1953), der das theoretische Verständnis stark vergrößerte.

Die grundlegenden Gleichungen der Strömungsmechanik, Navier-Stokes- und Euler-Gleichungen, die sich aus den Erhaltungsprinzipien für Masse, Energie und Impuls ergeben, waren schon relativ früh bekannt. Da es sich dabei aber um ein System von partiellen Differentialgleichungen handelt, konnten nur für einfache Spezialfälle analytische Lösungen gefunden werden. Schon früh wurde versucht, analytisch nicht lösbare Gleichungen approximativ zu lösen. Mit der nach ihm benannten *Euler vorwärts/rückwärts* Methode zur Lösung

von Anfangswertproblemen gehörte L. Euler wiederum zu den Ersten. Für die Klasse der gewöhnlichen Differentialgleichungen standen Mitte des 20. Jahrhunderts schon gute Verfahren zur Verfügung. Da die Lösung von partiellen Differentialgleichungen jedoch bedeutend komplizierter ist, konnten hier größere Fortschritte erst erzielt werden, als auch Computer mit ausreichender Leistungsfähigkeit zur Verfügung standen. Einer der Ersten, der die numerische Lösung von Differentialgleichungen zur Wettervorhersage verwendete, war L.F. Richardson 1922, der zur damaligen Zeit anstatt auf einem Computer zu arbeiten, auf menschliche „Rechner“ zurückgreifen musste. Leider war das von ihm verwendete Verfahren, wie sich später herausstellte, bedingungslos instabil. In den letzten Jahrzehnten konnte sich dank der immer größer werdenden Rechnerleistung die numerische Simulation neben den analytischen und den experimentellen Methoden zu einem dritten Standbein der Strömungsmechanik entwickeln. Die Vorteile liegen auf der Hand: In den numerischen Rechnungen können Details studiert werden, die in praktischen Messungen nicht oder nur sehr aufwändig zugänglich sind. Eine Variation der zu untersuchenden Objekte ist wesentlich einfacher und kostengünstiger zu realisieren. Zudem können in der numerischen Simulation einzelne physikalische Effekte einfach abgeschaltet werden, um so Wechselwirkungen zu unterbinden und Klarheit über andere Phänomene zu erhalten. Auf der anderen Seite ist es auch heute noch nicht möglich, eine Simulation durchzuführen, bei der alle Effekte von der größten bis zur kleinsten Skala mitbetrachtet werden. Vereinfachungen der mathematischen Modelle und Approximationsfehler können nur durch theoretische und experimentelle Ergebnisse beurteilt werden.

In dieser Arbeit werden numerische Methoden zur Behandlung von hyperbolischen Differentialgleichungen untersucht. Zu dieser Art von Gleichungen gehören z.B. die Euler Gleichungen, welche die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie beschreiben. Nachdem in den letzten Jahrzehnten die grundlegende Entwicklung von robusten Verfahren im Vordergrund stand, wurde in den letzten Jahren immer mehr Wert auf die Entwicklung genauerer Verfahren, d.h. Verfahren höherer Ordnung gelegt. Hohe Ordnung ist vor allem dann relevant, wenn lange Zeiten simuliert werden sollen und/oder wenn man aus Speicherplatzgründen ein grobes Gitter verwenden muss. Beides trifft für den Fall der numerischen Aeroakustik zu, die neben der CFD (Computational Fluid Dynamics) in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen hat. Erst jetzt ist man in der Lage, die gegenüber der CFD Simulation noch restriktiveren Genauigkeitsanforderungen für aeroakustische Simulationen zu erfüllen. Dies

liegt daran, dass die akustischen Fluktuationen wesentlich kleiner als die rein hydrodynamischen sind. Außerdem liegen sie in einer Größenordnung, in der bei Verfahren niedriger Ordnung bereits Fehler auftreten, so dass die Akustik vom numerischen Fehler nicht mehr unterschieden werden kann. Dennoch ist es auch heute nicht möglich, eine direkte Simulation, bei der alle Skalen und Effekte aufgelöst werden, durchzuführen.

Somit ist klar, dass in der numerischen Modellierung bestimmte Vereinfachungen eingebracht werden müssen. In der numerischen Aeroakustik interessiert man sich im Allgemeinen für sehr weit ausgedehnte Gebiete. Das Medium in diesen Gebieten ist dabei überall gleich und normalerweise Luft. Ebenfalls überall gültig sind die Navier-Stokes Gleichungen. Dieses große Gebiet kann man allerdings in verschiedene Zonen einteilen, in denen unterschiedliche physikalische Effekte vorherrschen. In Gebieten mit großen strömungsmechanischen Änderungen, bei denen Reibungseffekte wichtig sind (z.B. in der Nähe von Körpern oder in Scherschichten), muss man die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen auf einem sehr feinen Gitter und mit sehr kleinen Zeitschritten lösen. Die Region mit großen Reibungseffekten ist normalerweise räumlich sehr klein. Daher kann man dann sehr schnell auf die nichtlinearen Euler Gleichungen wechseln. Auch hier muss man noch kleine Raum- und Zeitskalen betrachten, die aber schon etwas größer als im Kerngebiet sind. Kann man schließlich noch die nichtlinearen Effekte vernachlässigen, so ist man in einem Gebiet, das sehr gut durch die linearisierten Euler Gleichungen beschrieben wird. In diesem Gebiet treten vor allem akustische Phänomene auf, so dass die Raum- und Zeitschrittweiten wesentlich größer gewählt werden können. In dem in dieser Arbeit vorgestellten Ansatz der *Heterogenen Gebietszerlegung* macht man sich diese unterschiedlichen Regime zu Nutze und zerlegt das Gebiet in Teilbereiche, um in jedem einzelnen Bereich nur soviel zu berechnen, wie auch notwendig ist.

1.1 Stand der Forschung

Da sich die vorliegende Arbeit im Wesentlichen mit zwei Themen beschäftigt, wird auch der Stand der Forschung in diese beiden Gebiete aufgeteilt. Zunächst wird ein Überblick über Verfahren hoher Ordnung gegeben und dann der Stand der Forschung für die numerische Aeroakustik erläutert.

1.1.1 Verfahren hoher Ordnung

Für die Behandlung von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen haben sich die Finite-Volumen Verfahren als eine Standardmethode etabliert. Sie haben gegenüber den Finiten-Differenzen Verfahren den Vorteil, dass hier nur die schwache, d.h. integrale Form der Gleichungen approximiert wird. In hyperbolischen Gleichungen können Diskontinuitäten (Stöße) auftreten, bei denen die Ableitungen, wie sie in den Finiten-Differenzen Verfahren verwendet werden, nicht definiert sind. Der integrale Wert dagegen ist auch über den Stoß hinweg wohldefiniert. Desweiteren sind sie automatisch erhaltend, d.h. Masse, Impuls und Energie werden im Verlauf der Rechnung nicht erzeugt oder vernichtet. Diese Konservativität des Verfahrens ist insbesondere deswegen wichtig, da nach dem Hou–Le-Floch Theorem [83] jedes nicht-konservative Verfahren bei Stößen gegen eine falsche Lösung konvergieren kann. Gleichzeitig konvergiert jedes konservative Verfahren im Falle der Konvergenz nach dem Lax-Wendroff Theorem [44] gegen die schwache Lösung der Erhaltungsgleichung.

Das erste Finite-Volumen Verfahren, das auf der Lösung von lokalen Riemann Problemen beruhte, wurde von Godunov [33] vorgeschlagen. Dazu werden die Zustände in jeder Zelle als konstant angenommen, und es wird an jedem Zellrand ein Riemann Problem gelöst. Hierbei macht man sich die Selbstähnlichkeit der Riemann Probleme bei reibungsfreier Rechnung zu Nutze. Die Lösung dieses Riemann Problems ist dabei der schwierigste Teil, da nur für sehr wenige Gleichungen exakte Löser zur Verfügung stehen. Infolgedessen entstanden in den folgenden Jahren eine große Anzahl von approximativen Riemannlösern wie z.B. Roe [60], HLL [37] und viele mehr. Eine sehr detaillierte Übersicht wurde von Toro in [83] zusammengestellt.

Die Entwicklung von Verfahren 2. Ordnung begann mit den Arbeiten von van Leer [9] (MUSCL Verfahren). Dieses Verfahren beruht auf einer stückweise linearen Rekonstruktion in der Zelle. Die weitere Entwicklung dieser Methode in Richtung höherer Ordnung führte dann zunächst über die ENO Verfahren [36] zu den WENO Verfahren [11, 13, 41], bei denen die Daten mit Polynomen hoher Ordnung aus den integralen Mittelwerten rekonstruiert werden. Für die Zeitintegration werden TVD Runge-Kutta Verfahren verwendet. Das Problem bei Runge-Kutta Zeitintegrationsmethoden ist, dass eine Ordnung höher als 4 nur sehr teuer erreicht werden kann, da dann die Anzahl der Stufen überproportional zur Ordnung steigen. Diese Grenze wird in der Literatur auch als *Butcher-barrier* bezeichnet [8].

Die Klasse der Differenzen-Verfahren ist im Allgemeinen deswegen so beliebt, da sie sich sehr leicht implementieren lässt. Im Bereich der Aeroakustik hat sich hier das von Tam entwickelte DRP (Dispersion Relation Preserving) Verfahren [74] als ein Standardverfahren etabliert. Die Anwendung der Verfahren ist allerdings auf strukturierte Gitter beschränkt, da die Berechnung der Differenzen auf einem unstrukturierten Gitter nicht bzw. nur sehr schwer möglich ist. Ein weiteres Problem tritt, wie bereits oben erwähnt, auf, falls die Lösung Stöße oder andere Diskontinuitäten enthält, da die zu berechnenden Ableitungen über einen Stoß hinweg unendlich groß sind. Das upwind Verfahren 1. Ordnung, auch CIR Verfahren genannt, liefert hier eine stabile Lösung. Andere Verfahren wie z.B. das Lax-Friedrichs führen eine künstliche Viskosität ein, die stabilisierend wirkt. Differenzenverfahren höherer Ordnung können nur mit dieser Methode stabilisiert werden. Auch gelang in den letzten Jahren durch adaptive Verfahren, wie z.B. ENO/WENO, die Anwendung auf Probleme mit Stößen [57].

Ein anderes Verfahren hoher Ordnung, das MESA Verfahren, wurde von Goodrich und Dyson [25, 26] entwickelt. Es beruht auf der Verwendung von Hermiten Polynomen und gehört somit zu den Kompakten-Finite-Differenzen Verfahren, wobei für die Zeitintegration ein Lax-Wendroff Zeitintegrationsverfahren verwendet wird. Die Lax-Wendroff Zeitintegrationsverfahren [45] (siehe auch [38, 39]) besitzen insofern Ähnlichkeit mit den ADER Typ Verfahren, als dass hier ebenfalls eine Taylorreihe in der Zeit aufgestellt wird und dann Zeitableitungen mittels der Lax-Wendroff Prozedur durch Raumableitungen ersetzt werden. In den beiden Artikeln [25, 26] wurde hierfür eine effiziente Idee vorgestellt, die auch in den hier vorgestellten Verfahren implementiert und weiter verbessert wurde. Die Kompakten-Verfahren besitzen gegenüber den Finite-Differenzen und Finiten-Volumen Verfahren den Vorteil, dass sie sehr kleine Punktesterne benutzen, im Falle des MESA Verfahrens in zwei Raumdimensionen nur 4 Punkte auf einem versetzten Gitter. Die Kompaktheit der Rekonstruktion geht jedoch zu Lasten des Speicheraufwandes, da bei den Kompakten-Verfahren nicht nur die Zustände sondern auch deren Ableitungen abgespeichert werden. Desweiteren hat man auch hier das Problem, dass man keine Lösungen mit starken Gradienten oder Stößen fehlerfrei, d.h. ohne Oszillationen, approximieren kann.

Das ADER Verfahren ist eine neue Methode zur numerischen Lösung hyperbolischer, partieller Differentialgleichungen. Die ersten Ansätze gehen zurück auf das GRP Verfahren von Ben-Artzi und Falcovitz [4] bzw. das MGRP Verfahren [84]. Der Durchbruch gelang Toro und Millington um 1998 [86, 87],

als sie es schafften, das Verfahren so zu erweitern, dass sich, zumindest theoretisch, jede beliebige Genauigkeitsordnung erreichen lässt. In den folgenden Jahren entstanden dann viele weiterführende Arbeiten von Toro und Titarev zu den ADER Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme und für inhomogene Systeme (Systeme mit Quellterm) [78, 79, 85, 88, 89], außerdem von Käser zur Anwendung der ADER Verfahren für skalare, nichtlineare Gleichungen auf unstrukturierten Gittern [42, 43] und von Schwartzkopff und Munz zur Anwendung der ADER Verfahren auf lineare partielle Differentialgleichungssysteme, insbesondere zur Anwendung auf die Aeroakustik [66–68].

Eine Methode, die ebenfalls noch relativ neu ist, sind die Discontinuous-Galerkin Verfahren [12, 14–17, 24, 56, 59]. Sie stellen den Übergang zwischen den Finite-Elementen und den Finiten-Volumen her. So ist das DG Verfahren 1. Ordnung identisch mit dem Finiten-Volumen Verfahren 1. Ordnung. Da hier aber wie bei den Finite-Elementen Ansatzfunktionen verwendet werden, muss nicht über mehrere Zellen hinweg rekonstruiert werden. Im Gegensatz zu den Finite-Elementen sind jedoch unstetige Lösungen erlaubt, da an den Zellrändern zur Flussberechnung ein Riemann Problem ausgewertet wird. Der CPU Aufwand bei den DG Verfahren ist zwar relativ groß, es lässt sich aber insbesondere auf unstrukturierten Gittern leichter die hohe Ordnung verwirklichen.

Weitere Verfahren hoher Ordnung sind die spektralen Verfahren [6] und die Taylor-Galerkin Finite-Elemente Verfahren, die in dieser Arbeit jedoch nicht näher betrachtet werden.

1.1.2 Numerische Aeroakustik

Das Hauptproblem in der Aeroakustik ist, dass man hier akustische Wellen über relativ große Distanzen transportieren will. Zusätzlich hat man bei niedrigen Machzahlen noch das Problem, dass hier sehr unterschiedliche Skalen auftreten. So haben die strömungsmechanischen Phänomene relativ kleine räumliche Strukturen mit großen Energiefluktuationen, wohingegen die Akustik im Allgemeinen langwellig ist und nur kleine Fluktuationen hat. Dies führt zu dem Problem, die Entstehung und den Transport von Akustik richtig zu berechnen.

Die klassischen Verfahren beruhen hauptsächlich auf einer analytischen Lösung der Wellengleichung, die im Fernfeld gültig ist. Dazu wird versucht, basierend auf Strömungsdaten, akustische Quellterme auszurechnen, die dann in einer getrennten Akustikrechnung verwendet werden. Dies bezeichnet man als

Akustische Analogie. Einer der Ersten, der sich mit der Aeroakustik beschäftigte, war Sir James Lighthill. Seine beiden Werke [46, 47] aus den Jahren 1952 und 1954 gehören zu den Standardwerken. Später gelang es Ffowcs-Williams und Hawkins [30] die Theorie von Lighthill auf bewegte Oberflächen zu erweitern. Auch Lilley's Arbeiten [48] und die von Powell [55], Howe [40] und Möhring [54] müssen hier genannt werden. Moderne Störansätze wurden von Ewert et. al. [27] mit dem APE (*Acoustic Perturbation Equations*) mit Quelltermfilterung, von Hardin und Pope [35] mit der EIF (*Expansion around Incompressible Flow*) Methode und von Fortenbach et. al. [51] mit der *Multi-Scale Analysis* entwickelt. Das Problem bei der akustischen Analogie und den Störansätzen ist, dass das Strömungs- und Akustikfeld voneinander getrennt werden und keine Rückkopplung der Akustik auf die Strömung stattfindet. Desweiteren sind die akustischen Quellterme nicht eindeutig, und es existieren verschiedene Formulierungen. Eine kritische Darstellung der Analogien ist in [75] und [29] zu finden. Die Kirchhoff Methode ist ebenfalls ein viel verwendetes Verfahren [28]. Damit ist es möglich, Lärmabstrahlung zu berechnen, wobei sowohl alle Entstehungsregionen als auch die wirbelbehafteten Regionen innerhalb der Integrationsfläche liegen müssen. Die Theorie von Ffowcs-Williams und Hawkins kann ebenfalls als eine Kirchhoff-Methode interpretiert werden.

Die direkte Simulation von Aeroakustik ist ein sehr modernes Forschungsfeld, da es große Anforderungen an die Computer und Algorithmen stellt. Bei ihr werden sowohl die Strömungsmechanik als auch die Akustik gleichzeitig gelöst. Dazu muss der Strömungslöser in der Lage sein, beide Phänomene überall darzustellen und aufzulösen. Sobald etwas „verloren“ gegangen ist, kann es nicht wiederhergestellt werden, im Gegensatz zur Analogie, bei der ja aus den Strömungsdaten Quellterme berechnet werden. Diese hohen Anforderungen, sind in der Regel nur bei Verwendung von Verfahren hoher Ordnung erfüllt. Hier kommen meist Finite-Differenzen Verfahren auf blockstrukturierten, körperangepassten Gittern zum Einsatz (siehe z.B. Golubev et. al. [34]). Das Problem bei einer direkten Simulation ist jedoch, dass es sehr große Bereiche gibt, in denen unnötig viel oder unnötig kompliziert berechnet wird. Verfeinert man z.B. das Gitter im Bereich eines Körpers, so wird anschließend im ganzen Gebiet mit einem kleinen, zu dem verfeinerten Bereich gehörenden Zeitschritt gerechnet, so dass lokale CFL Zahlen von 10^{-3} oder noch weniger auftreten. Daher wird hier die Idee der heterogenen Gebietszerlegung verwendet, bei der Gebiete mit verschiedenen Eigenschaften miteinander gekoppelt werden. Für die Berechnung einer stationären, rei-

bungsbehafteten Profilmströmung wurden die Navier-Stokes mit den Potentialgleichungen von Cocchi [18, 20, 21] gekoppelt. Im Bereich der Magneto-Plasma Antriebe wurden von Heiermann et. al. [1, 19] die um die Differentialgleichungen zur Beschreibung des Elektromagnetischen Feldes erweiterten Navier-Stokes Gleichungen mit den Euler Gleichungen gekoppelt. Im Bereich der Aeroakustik führte Freund et. al. [31] eine Kopplung der linearisierten Euler Gleichungen mit den nichtlinearen Euler Gleichungen durch, um so den Strahlärm zu simulieren, wobei hier keine spezielle Behandlung des Randes stattfand. Lombard et. al. untersuchten genau diesen Übergang in [49], indem sie den Sprung des Flusses auf dem Rand minimierten und dessen Ableitungen möglichst glatt fortschrieben. In der Arbeit von Bamberger et. al. [3] wird eine Methode, basierend auf einer Variationsformulierung, präsentiert, bei dem die Wellengleichung in zwei Gebieten mit Gittersprung gelöst wird. Ein großer Bereich der Literatur beschäftigt sich mit der Kopplung von Gebieten, in denen implizite Verfahren verwendet werden. Dies ist wesentlich schwieriger, selbst bei der Berechnung stationärer Strömungen [58].

Die hier genannten Ansätze beschränkten sich alle darauf, Gebiete mit verschiedenen Gleichungen bzw. verschiedenen Gittern miteinander zu verbinden. In der hier vorliegenden Arbeit geht man noch darüber hinaus: In den Gebieten dürfen verschiedene Gleichungen, Gitter, Zeitschritte und numerische Verfahren verwendet werden, um dem Ziel einer Effizienzsteigerung näherzukommen.

1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist die Entwicklung einer Methode, mit der es möglich ist, komplexe Probleme der numerischen Aeroakustik direkt, ohne eine akustische Analogie zu simulieren. Da eine direkte Simulation jedoch zu aufwändig ist, wird die Verwendung einer heterogenen Gebietszerlegung vorgeschlagen, die es erlaubt, in einzelnen Bereichen sowohl die Gitter als auch die numerischen Verfahren, Zeitschritte und Gleichungen zu wechseln. Da die Amplituden der akustischen Störungen im Vergleich zu den hydrodynamischen Schwankungen sehr klein sind, ist es wichtig, in allen Gebieten effiziente Verfahren hoher Ordnung zu benutzen. Dazu wird die Idee der ADER Verfahren von Toro et. al. [85,87] aufgegriffen und erweitert. Es werden alle Bausteine dargestellt, die notwendig sind, um damit Verfahren beliebiger Ordnung in Raum und Zeit zu entwickeln. Desweiteren wird insbesondere für die Verfahren für die linearisierten Gleichungen gezeigt, wie diese Methode sehr effizient implementiert

werden kann.

Sowohl das Gesamtprogramm als auch die ADER Verfahren werden detailliert analysiert, und es wird gezeigt, dass das Gesamtkonzept zeitgenau mit beliebig hoher Ordnung¹ arbeiten kann.

1.3 Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in vier Teile. In Kapitel 2 werden die ADER Verfahren eingeführt. Dabei werden die wesentlichen Ideen beschrieben, die für die Konstruktion des Verfahren benötigt werden. In Kapitel 3 ist beschrieben, welche Schritte notwendig sind, um die einzelnen Bausteine des ADER Verfahrens auch mit beliebiger Ordnung in einen numerischen Algorithmus umsetzen zu können. Desweiteren werden Methoden vorgestellt, die es unter bestimmten Voraussetzungen erlauben, diese Verfahren erheblich zu beschleunigen. Insbesondere sind dies die *fast*ADER Verfahren, die sich auf lineare, hyperbolische Systeme anwenden lassen und somit z.B. für die numerische Aeroakustik hervorragend geeignet sind. In diesem Kapitel werden ausführlich die Eigenschaften der Verfahren bis zur 24. Ordnung wie Konvergenz, Konsistenz, Stabilität, Wellentransporteigenschaften und CPU Zeit untersucht.

In Kapitel 4 wird ein Ansatz beschrieben, der es mit Hilfe einer heterogenen Gebietszerlegung ermöglicht, sehr komplexe Probleme der numerischen Aeroakustik effizient zu lösen. Hier kommen dann auch die in Kapitel 3 auf strukturierten kartesischen Gittern entwickelten Verfahren zum Einsatz, indem sie mit Runge-Kutta Discontinuous-Galerkin oder ADER Discontinuous-Galerkin Verfahren auf unstrukturierten Gittern kombiniert werden, um so auch komplexe Körper im Gitter abbilden zu können. Eine weitere Vereinfachung ist dadurch möglich, dass nur in einem Kerngebiet die nichtlinearen Gleichungen gelöst werden und dann in dem daran anschließenden Gebiet nur noch die linearisierten Gleichungen verwendet werden. Es werden hier Methoden beschrieben, die es erlauben, sowohl die Gitterschrittweite als auch den Zeitschritt wechseln zu lassen. Zur Validierung der Kopplungsalgorithmen werden Konvergenzanalysen durchgeführt, welche die hohe Ordnung des gekoppelten, heterogenen Verfahrens bestätigen.

Im Kapitel 5 schließlich wird die Leistungsfähigkeit der gekoppelten Rechnung an zwei praktischen Beispielen demonstriert. Zunächst wird das *Co-rotating vortex pair*, ein in der numerischen Akustik beliebtes Beispiel, direkt simuliert. Das zweite Beispiel ist dem vierten Workshop zu Benchmark Problemen der

¹Im wesentlichen nur abhängig von der Computergenauigkeit.

numerischen Aeroakustik entnommen. Dabei trifft eine wirbelbehaftete Anströmung auf ein Profil und erzeugt Lärm, der hier simuliert und mit der Literatur verglichen wird.

1.4 Gleichungen

Kapitel 2 und 3 haben ganz allgemein die Konstruktion von Verfahren für hyperbolische, partielle Differentialgleichungen zum Inhalt. Für die Validierungen in Kapitel 3 und die Anwendungen in Kapitel 4 und 5 werden dann die Euler Gleichungen und deren linearisierte Form, die linearisierten Euler Gleichungen, verwendet.

Die Euler Gleichungen in Erhaltungsform sind

$$\underline{U}_t + \underline{F}(\underline{U})_x + \underline{G}(\underline{U})_y = 0 \quad (1.1)$$

mit

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Dabei ist ρ die Dichte und p der Druck des Mediums, u und v die Geschwindigkeit in x - bzw. y -Richtung und E die Energie. Dieses Gleichungssystem benötigt zusätzlich noch eine Beziehung zwischen der Energie E und dem Druck p . In dieser Arbeit wird immer das ideale Gasgesetz

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \quad (1.3)$$

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) \quad (1.4)$$

verwendet.

Für die linearisierten Euler Gleichungen wird eine Darstellung in primitiven Variablen gewählt:

$$\underline{U}'_t + \underline{A}_0 \underline{U}'_x + \underline{B}_0 \underline{U}'_y = 0 \quad (1.5)$$

mit

$$\underline{U}' = \underline{U} - \underline{U}_0 = \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\underline{\underline{A}}_0 = \begin{bmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \gamma p_0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}_0 = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & \gamma p_0 & v_0 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Hier ist \underline{U}' die Störung um den Hintergrundzustand \underline{U}_0 .

2 Grundlagen der ADER Verfahren

2.1 Entstehungsgeschichte

Als Finite-Volumen Verfahren gehören die ADER Verfahren zu der Klasse der Godunov-Typ [33] Verfahren, d.h. zur Flussberechnung werden an den Rändern Riemann Probleme gelöst. Eines der ersten Verfahren, welches nicht von konstanten, sondern von einem linearen Verlauf des Zustandes ausging, war das MUSCL Verfahren von van Leer [9]. Am Zellrand wurde dabei aber nur ein konventionelles Riemann Problem gelöst, d.h. konstante Daten angenommen. Das GRP Verfahren von Ben-Artzi und Falcovitz [4] ging einen Schritt weiter, indem das Riemann Problem für einen linearen Verlauf gelöst wurde. Das GRP (**G**eneralized **R**iemann **P**roblem) Verfahren, berechnet den Fluss zu dem Zeitpunkt $t = t^n + \Delta t/2$ als $\underline{F} = \underline{F}(\underline{U}^{GRP}(\Delta t/2))$. Um den Zustand $\underline{U}^{GRP}(\Delta t/2)$ zu erhalten, wird eine Taylorreihe in der Zeit angesetzt, die jedoch nach dem 2. Glied abgebrochen wird. Somit wird die Entwicklung der 1. Zeitableitung im Riemann Problem berücksichtigt. Dieses Verfahren ist 2. Ordnung genau. Die Lösung des verallgemeinerten Riemann Problems ist sehr aufwändig und für die meisten hyperbolischen Systeme nicht bekannt. Genau hier setzte die erste, entscheidende Idee von Toro [84] an. Das verallgemeinerte Riemann Problem wurde in zwei Teile aufgespalten: Zunächst wird ein konventionelles Riemann Problem mit zwei konstanten Zuständen links und rechts gelöst und anschließend ein Riemann Problem für die Ableitung, wobei hier die um die Lösung des konventionellen Riemann Problems linearisierten Gleichungen verwendet werden. Dieses Verfahren wurde als MGRP Verfahren bezeichnet. Damit war eine der Schlüsselideen der ADER Verfahren geboren.

Als Nächstes wurde dann von Caceres [10] versucht, auf eine ähnliche Weise ein Verfahren 3. Ordnung zu konstruieren, indem er in der Taylorreihe noch ein Glied mehr berücksichtigte ($\underline{U}(\Delta t/2) = \underline{U} + \Delta t/2 \underline{U}_t + \Delta t^2/8 \underline{U}_{tt}$). Kombiniert mit einer MUSCL Rekonstruktion hatte dieses Verfahren leider eine sehr eingeschränkte Stabilität von $CFL < \approx 0.86$. Desweiteren war dieses Verfahren auch nur 2. Ordnung genau in der Zeit, da für die Zeitintegration nur die Mittelpunktsregel verwendet wurde.

Das ADER Verfahren von Toro und Millington [86,87] brachte dann schließlich den Durchbruch. Im Nachhinein erscheint die Idee, welche schließlich zum Erfolg führte, als so einfach, dass man sich wundert, wieso dies zuvor noch nicht

probiert worden ist: Die in Raum und Zeit integrierten Differentialgleichungen benötigen einen in der Zeit integrierten Fluss. Dafür wird eine Taylorreihe in der Zeit aufgestellt, Zeitableitungen durch Raumableitungen ersetzt und das Ganze integriert. Als Raumableitungen werden die Lösungen der linearisierten Riemann Probleme verwendet und für den Zustand selber die Lösung des nichtlinearen, konventionellen Riemann Problems eingesetzt. Dabei reduziert sich das ADER Verfahren 1. Ordnung auf ein Godunov Verfahren und das Verfahren 2. Ordnung auf das bereits erwähnte MGRP Verfahren.

Die Verfahren wurden dann in den letzten Jahren schnell weiterentwickelt. Ausgehend von den Arbeiten von Toro und Millington [85–87], welche die Verfahren in einer Raumdimension für lineare und nichtlineare skalare Gleichungen entwickelten, wurden sie in [62] auf eindimensionale lineare Systeme angewandt. In den Arbeiten von Toro und Titarev [78] gelang es, die Verfahren in einer Raumdimension auf nichtlineare hyperbolische Systeme anzuwenden. Die Einbindung von Quelltermen in nichtlineare Systeme in einer Raumdimension wird in [88] vorgestellt. Die Anwendung auf 2-dimensionale lineare Systeme mit einer ENO Rekonstruktion ist in [66–68] beschrieben. Die Arbeiten [79, 89] schließlich beschreiben die Anwendung der Verfahren auf 2-/3-dimensionale nichtlineare Systeme. Die bisher genannten Anwendungen auf mehrere Raumdimensionen basierten immer auf strukturierten kartesischen Gittern. In der Arbeit von Schneider [52] für lineare Gleichungssysteme, und vor allem in den Arbeiten von Käser [42, 43] für nichtlineare skalare Gleichungen, wurden die ADER Verfahren auf unstrukturierten Dreiecksgittern implementiert. Für Probleme, bei denen linear rekonstruiert werden kann, d.h. bei denen keine ENO/WENO Rekonstruktion benötigt wird, lassen sich die Verfahren deutlich beschleunigen. Dies ist u.a. in [63, 64] beschrieben.

2.2 Konstruktion des Verfahrens für lineare Systeme

Bei der Erweiterung des Verfahrens auf zwei Dimensionen werden die Ideen und Erkenntnisse, die man in einer Dimension gewonnen hat, konsequent fortgeführt. Die Konstruktion für lineare und nichtlineare Systeme ist zwar im Wesentlichen gleich, jedoch im nichtlinearen Fall etwas komplizierter. Daher werden zunächst nur die linearen behandelt und dann darauf aufbauend erst die nichtlinearen Systeme eingeführt, wobei hier nur noch auf die Unterschiede eingegangen wird.

Die Gleichungen werden in diesem Kapitel auf strukturierten kartesischen Gittern diskretisiert.

2.2.1 Finite-Volumen Diskretisierung

Ein allgemeines lineares hyperbolisches System von partiellen Differentialgleichungen ist:

$$\underline{U}'_t + \underline{A}\underline{U}'_x + \underline{B}\underline{U}'_y = 0 \quad (2.1)$$

$$\underline{U}' = \underline{U}'(x, y, t) \quad (2.2)$$

$$\underline{U}'(\underline{X}, 0) = \underline{U}'^0(\underline{X}) \quad (2.3)$$

$$\underline{A} = \underline{A}(\underline{U}_0) = \text{const.} \quad (2.4)$$

$$\underline{B} = \underline{B}(\underline{U}_0) = \text{const.} \quad (2.5)$$

Zur Lösung wird eine Finite-Volumen Diskretisierung für strukturiert kartesische Gitter angewandt. Dazu wird die Gleichung (2.1) sowohl im Raum über die Zelle $I_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}] = \Delta x \times \Delta y$ als auch in der Zeit über $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ integriert:

$$\int_t \int_V \underline{U}'_t dV dt + \int_t \int_V \underline{A}\underline{U}'_x dV dt + \int_t \int_V \underline{B}\underline{U}'_y dV dt = 0. \quad (2.6)$$

Führt man den über das Volumen V gemittelten Wert

$$\bar{\underline{U}}_{ij}(t) = \frac{1}{V_{ij}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \underline{U}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (2.7)$$

mit V_{ij} für die Fläche der Zelle I_{ij} ein, so erhält man

$$\bar{\underline{U}}_{ij}^{n+1} = \bar{\underline{U}}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{V_{ij}} \left[\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{\underline{F}}_{i-\frac{1}{2},j} + \hat{\underline{G}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{\underline{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.8)$$

Die hier auftretenden Flüsse sind:

$$\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{A} \underline{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, \eta, \tau) d\tau d\eta. \quad (2.9)$$

Das Integral im Raum wird mittels einer Gaussintegration berechnet:

$$\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \Delta y \sum_{\lambda=1}^{N_{GP}} \omega_\lambda \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{A} \underline{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, \eta_\lambda, \tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Die Anzahl der verwendeten Gausspunkte N_{GP} hängt von der gewünschten Genauigkeitsordnung \mathcal{O} des Verfahrens ab [73]. Sie ist der ganzzahlige Anteil der Division $N_{GP} = (\mathcal{O} + 1)/2$.

Für den nun verbleibenden integralen Mittelwert in der Zeit an den einzelnen Gausspunkten wird das ADER Verfahren verwendet.

2.2.2 ADER Idee

Zu lösen ist das Integral in der Zeit zwischen den Zeitpunkten t^n und t^{n+1} . Die Lösung \underline{U} wird dazu in eine Taylorreihe in der Zeit um \underline{U}^n entwickelt:

$$\underline{U}(\underline{X}, t^n + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \frac{\partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n)}{\partial t^k}. \quad (2.11)$$

Hier treten nun die unbekanntenen Ableitungen von $\underline{U}(\underline{X}, t^n)$ in der Zeit auf. Eine Möglichkeit, diese Ableitungen zu berechnen, ist es, mehrere alte Zeitpunkte zu speichern und die Ableitungen dann mittels Extrapolation zu approximieren. Der Nachteil dieser Methode ist zum einen, dass man große Speicherkapazitäten zur Verfügung stellen muss und zum anderen, dass diese Zeitpunkte bei dem Beginn der Rechnung noch nicht bekannt sind und man das Verfahren somit nicht mit der gewünschten Ordnung starten kann.

Daher wird hier ein anderer Ansatz gewählt. Die Lax–Wendroff oder Cauchy–Kovalevski [45] Prozedur stellt einen direkten Zusammenhang von Zeit– zu Raumbewegungen her, indem die ursprüngliche Differentialgleichung (2.1) entsprechend differenziert wird. Für die erste Zeitableitung ist dies direkt ersichtlich, für die zweite wird es im Folgenden beispielhaft durchgeführt:

$$\begin{aligned} \underline{U}'_t &= -\underline{A}\underline{U}'_x - \underline{B}\underline{U}'_y & (2.12) \\ \underline{U}'_{tt} &= -\underline{A}\underline{U}'_{xt} - \underline{B}\underline{U}'_{yt} \\ \underline{U}'_{tx} &= -\underline{A}\underline{U}'_{xx} - \underline{B}\underline{U}'_{yx} \\ \underline{U}'_{ty} &= -\underline{A}\underline{U}'_{xy} - \underline{B}\underline{U}'_{yy} \\ \underline{U}'_{tt} &= \underline{A}\underline{A}\underline{U}'_{xx} + \underline{A}\underline{B}\underline{U}'_{yx} + \underline{B}\underline{A}\underline{U}'_{xy} + \underline{B}\underline{B}\underline{U}'_{yy}. & (2.13) \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass im Allgemeinen die Matrizenprodukte von \underline{A} und \underline{B} nicht kommutieren, die Ableitungen \underline{U}'_{yx} und \underline{U}'_{xy} dagegen identisch sind. Eine effektive Umsetzung der Lax–Wendroff Prozedur wird später in Kapitel 3.2 beschrieben.

Für die k –te Ableitung von \underline{U}' kann man abkürzend schreiben [66–68]:

$$\frac{\partial^k \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t^k} = (-1)^k \left(\underline{A} \frac{1}{\partial x} + \underline{B} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t). \quad (2.14)$$

Wobei hier die Differentialoperatoren immer auf $\underline{U}(\underline{X}, t)$ wirken. Der integrale Mittelwert in der Zeit aus Gleichung (2.10) lässt sich somit unter Verwendung

von (2.11) und (2.14) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{\underline{A}} \underline{U}(\underline{X}, \tau) d\tau &= \\ \underline{\underline{A}} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} (-1)^k \left(\underline{\underline{A}} \frac{1}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n) d\tau. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Das Integral ist jetzt leicht zu lösen, da τ nur noch im Zähler als τ^k auftritt und alle anderen Größen unabhängig von t sind und nur vom Zeitpunkt t^n abhängen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{\underline{A}} \underline{U}(\underline{X}, \tau) d\tau &= \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tau^k d\tau \right] \frac{(-1)^k}{k!} \left(\underline{\underline{A}} \frac{1}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n) & \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \left(\underline{\underline{A}} \frac{1}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n) & \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\mathcal{O}-1} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \left(\underline{\underline{A}} \frac{1}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^{\mathcal{O}}) \\ &\approx \sum_{k=0}^{\mathcal{O}-1} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \left(\underline{\underline{A}} \frac{1}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Hier werden nun noch die räumlichen Ableitungen von $\underline{U}(\underline{X}, t^n)$ benötigt.

Die in (2.16) auftretende Summe hat als oberen Index ∞ , es ist bis zu diesem Moment also der exakte Mittelwert. Um eine Methode zu erhalten, die sich für eine numerische Umsetzung eignet, muss diese Summe nach einer bestimmten Anzahl an Gliedern abgebrochen werden. Die Summe (2.17) ist von der Ordnung \mathcal{O} genau, wenn der obere Summationsindex durch $\mathcal{O} - 1$ ersetzt wird.

Der in Gleichung (2.10) benötigte numerische Fluss ist somit

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+\frac{1}{2},j} &= \\ \frac{\Delta y}{2} \sum_{\lambda=1}^{N_{GP}} \omega_{\lambda} \underline{\underline{A}} \sum_{k=0}^{\mathcal{O}-1} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \left(\underline{\underline{A}} \frac{1}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, \eta_{\lambda}, t^n). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Als Letztes müssen noch die Werte an den Rändern aus den Zellmittelwerten rekonstruiert werden. Tatsächlich ist dies der aufwändigste Schritt bei Verfahren hoher Ordnung und wird allgemein in Abschnitt 3.1 „Rekonstruktion an der Zellgrenze“ für kartesische Gitter beschrieben.

2.3 Konstruktion des Verfahrens für nichtlineare Systeme

Die Konstruktion des Verfahrens für nichtlineare Systeme verläuft von der Idee her analog zu dem für die oben beschriebenen linearen. Der Hauptunterschied ist jedoch, dass nun die Jacobi Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ von \underline{U} und somit von den beiden Raumrichtungen x, y abhängen. Die Lax–Wendroff Prozedur wird somit viel aufwändiger, da nun auch die Ableitungen der Jacobi-Matrizen berücksichtigt werden müssen.

Ein System hyperbolischer partieller Differentialgleichungen in Erhaltungform ist:

$$\underline{U}_t + \underline{F}(\underline{U})_x + \underline{G}(\underline{U})_y = 0 \quad (2.19)$$

$$\underline{U}_t + \underline{\underline{A}}(\underline{U}) \underline{U}_x + \underline{\underline{B}}(\underline{U}) \underline{U}_y = 0 \quad (2.20)$$

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{X}, t) \quad (2.21)$$

$$\underline{U}(\underline{X}, 0) = \underline{U}^0(\underline{X}) \quad (2.22)$$

$$\underline{\underline{A}}(\underline{U}) = \frac{\partial \underline{F}(\underline{U})}{\partial \underline{U}} \quad (2.23)$$

$$\underline{\underline{B}}(\underline{U}) = \frac{\partial \underline{G}(\underline{U})}{\partial \underline{U}}. \quad (2.24)$$

Die Form in (2.20) wird als quasilineare Form bezeichnet. Für ein Finite-Volumen Verfahren analog zu (2.8) wird auch hier in Zeit und Raum integriert, wobei der numerische Fluss nun folgende Form hat:

$$\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F} \left(\underline{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, \eta, \tau) \right) d\tau d\eta. \quad (2.25)$$

Für das räumliche Integral wird wieder, wie im linearen Fall, eine Gaussintegration verwendet. Der Fluss konnte im linearen Fall in $\underline{F}(\underline{U}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}$ zerlegt werden und die konstante Jacobi Matrix $\underline{\underline{A}}$ konnte vor das Zeitintegral gezogen werden. Bei den nichtlinearen Gleichungen geht dies nicht mehr, da hier die Jacobi Matrix von der Lösung abhängt $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\underline{U})$. Für das zeitliche Integral hat man nun zwei Möglichkeiten zur Auswahl, die zu zwei Varianten

ten des ADER Verfahrens führen: das *state expansion* Verfahren und das *flux expansion* Verfahren. Beide Möglichkeiten werden im Folgenden gezeigt.

2.3.1 State Expansion ADER

Bei dieser Variante wird das zeitliche Integral mittels einer Gaussintegration, also nicht mehr exakt, gelöst:

$$\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \Delta y \sum_{\lambda=1}^{N_{G\lambda}} \omega_{\lambda} \sum_{\xi=1}^{N_{G\xi}} \omega_{\xi} \underline{F} \left(\underline{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, \eta_{\lambda}, \tau_{\xi}) \right). \quad (2.26)$$

Für den Fluss muss der Zustand \underline{U} zu dem entsprechend unbekanntem Zeitpunkt τ_{ξ} eingesetzt werden. Hier wird wieder die Taylorreihe (2.11) in der Zeit für den Zustand (*state expansion*) angesetzt:

$$\underline{U}(\underline{X}, t^n + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \frac{\partial^k \underline{U}(\underline{X}, t^n)}{\partial t^k}.$$

Die hier auftretenden Zeitableitungen werden mittels der Lax–Wendroff Prozedur durch Raumableitungen ersetzt. Analog zum Abschnitt über die linearen Gleichungen soll nun auch hier die Lax–Wendroff Prozedur bis zu den zweiten Zeitableitungen beschrieben werden:

$$\underline{U}_t = -\underline{F}(\underline{U})_x - \underline{G}(\underline{U})_y \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{tt} &= -\underline{\underline{A}}(\underline{U}) \underline{U}_{xt} - \underline{\underline{B}}(\underline{U}) \underline{U}_{yt} \\ &\quad - \underline{\underline{A}}(\underline{U})_t \underline{U}_x - \underline{\underline{B}}(\underline{U})_t \underline{U}_y \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{tx} &= -\underline{\underline{A}}(\underline{U}) \underline{U}_{xx} - \underline{\underline{B}}(\underline{U}) \underline{U}_{yx} \\ &\quad - \underline{\underline{A}}(\underline{U})_x \underline{U}_x - \underline{\underline{B}}(\underline{U})_x \underline{U}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ty} &= -\underline{\underline{A}}(\underline{U}) \underline{U}_{xy} - \underline{\underline{B}}(\underline{U}) \underline{U}_{yy} \\ &\quad - \underline{\underline{A}}(\underline{U})_y \underline{U}_x - \underline{\underline{B}}(\underline{U})_y \underline{U}_y. \end{aligned}$$

Man erkennt nun sofort, dass sich hier nicht mehr eine allgemeingültige Formel für eine beliebige Zeitableitung analog zu (2.14) angeben lässt, da die Ableitungen der Jacobi Matrizen zunächst nicht bekannt sind. Galten die Beziehungen in Kapitel 2.2 für beliebige Jacobi Matrizen, so muss hier für jedes System die Lax–Wendroff Prozedur von Hand oder besser von einem Computer Algebra System durchgeführt werden [79, 81, 89]. Für viele nichtlinearen Gleichungen lassen sich jedoch effektive Algorithmen entwickeln. Diese sind

in Kapitel 3.2 beschrieben. Lässt sich dieser Algorithmus nicht anwenden, so werden die Ausdrücke, die bei einer expliziten Darstellung entstehen, sehr schnell sehr groß.

2.3.2 Flux Expansion ADER

Bei dieser Variante wird für den Fluss selber eine Taylorreihe in der Zeit angesetzt (*flux expansion*):

$$\underline{F}(\underline{U}, t^n + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \frac{\partial^k \underline{F}(\underline{U}, t^n)}{\partial t^k}.$$

Eingesetzt in (2.25) und mit einer Gaussintegration im Raum erhält man

$$\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \Delta y \sum_{\lambda=1}^{N_{G\lambda}} \omega_{\lambda} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \frac{\partial^k \underline{F}(\underline{U}, t^n)}{\partial t^k} d\tau d\eta. \quad (2.29)$$

Hier kann jetzt, wie auch schon im linearen Fall, das Integral über die Zeit analytisch ausgewertet werden und man erhält

$$\hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \Delta y \sum_{\lambda=1}^{N_{G\lambda}} \omega_{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{(k+1)!} \frac{\partial^k \underline{F}(\underline{U}, t^n)}{\partial t^k} d\eta. \quad (2.30)$$

Was jetzt noch fehlt, ist die Lax-Wendroff Prozedur für den Fluss. Diese ist etwas komplizierter als für den Zustand wie in (2.27)-(2.28) beschrieben. Mit der in Kapitel 3.2 beschriebenen Prozedur ist es jedoch auch möglich, beim Fluss Zeit- durch Raumableitungen zu ersetzen, so dass diese Methode mit exakter Integration ebenfalls attraktiv wird.

2.4 Das verallgemeinerte lokale Riemann Problem

Aus der Rekonstruktion ergibt es sich, dass am Zellrand die Werte aus zwei unterschiedlichen Polynomen verwendet werden können. Unter der Annahme, dass die Zustände links und rechts konstant sind, handelt es sich dabei um ein konventionelles Riemann Problem, für das entweder ein exakter Riemannlöser oder ein approximativer Riemannlöser wie Lax-Friedrichs, Roe, HLL, usw. [83] verwendet werden kann.

Die Lösung eines Riemann Problems, bei dem der Zustand links und rechts mit einem Polynom beschrieben wird, ist nicht trivial. Die Idee von Toro war

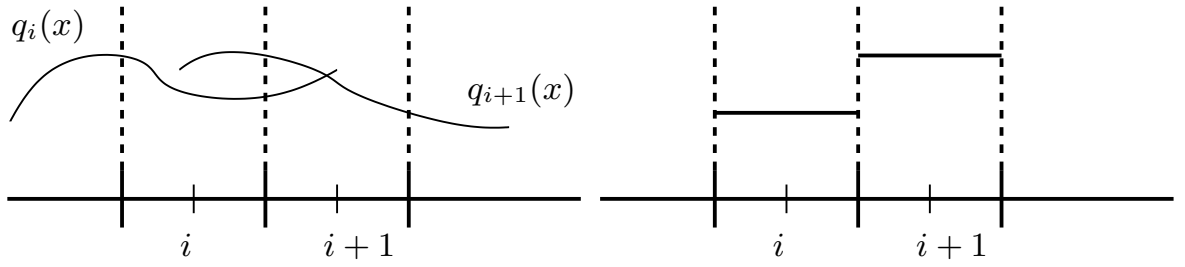


Bild 2.1: Das verallgemeinerte und das konventionelle Riemann Problem

es, zunächst als Vereinfachung des GRP Verfahrens [84] und später generell [87], das verallgemeinerte Riemann Problem in ein konventionelles, nicht-lineares Riemann Problem für die rekonstruierten Zustände und zusätzlich $m - 1$ linearisierte Riemann Probleme für die Ableitungen aufzuspalten. Dabei wurden die Gleichungen um die Lösung des konventionellen Riemann Problems linearisiert. Dies lässt sich wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_t + \underline{f}(\underline{U})_x + \underline{g}(\underline{U})_y = 0 \\ \underline{U}(x, 0) = \begin{cases} P_i(x), & x < 0 \\ P_{i+1}(x), & x > 0 \end{cases} \end{array} \right\} (RP)_m \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_t + \underline{f}(\underline{U})_x + \underline{g}(\underline{U})_y = 0 \\ \underline{U}(x, 0) = \begin{cases} \underline{U}_i, & x < 0 \\ \underline{U}_{i+1}, & x > 0 \end{cases} \end{array} \right\} (RP)_0 \quad (2.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_t^k + \underline{A}(\underline{U}_0)\underline{U}_x^k + \underline{B}(\underline{U}_0)\underline{U}_y^k = 0 \\ \underline{U}^k(x, 0) = \begin{cases} \underline{U}_i^k, & x < 0 \\ \underline{U}_{i+1}^k, & x > 0 \end{cases} \end{array} \right\} (RP)_{k \in \{1, \dots, m\}} \quad (2.33)$$

mit

$$\underline{U}^k = \frac{\partial^k \underline{U}}{\partial t^k}. \quad (2.34)$$

Für die linearisierten Gleichungen gilt

$$(RP)_0 = (RP)_{k=0}, \quad (2.35)$$

d.h. hier ist die Lösung für den Zustand selber ebenfalls die Lösung des linearen Problems. Die Lösungen der linearisierten Riemann Probleme erhält

man z.B. mit den Gleichungen (3.53)-(3.54). Für das konventionelle, nichtlineare Riemann Problem kann man entweder einen exakten iterativen Löser oder einen approximativen Riemannlöser verwenden, der den Zustand selber berechnen kann. Wichtig ist, dass hier keine Riemannlöser, wie z.B. HLL, verwendet werden können, die den Fluss direkt berechnen. Eine sehr detaillierte Beschreibung von approximativen Riemannlösern ist in [83] zu finden.

In den hier vorgestellten ADER Verfahren wird der Zustand in der Regel immer in einer Taylorreihe in der Zeit

$$\underline{U}(t^n + \tau) = \underline{U}^{RP(0)}(t^n + 0) + \sum_{m=1}^{\mathcal{O}-1} \frac{\tau^m}{m!} \underline{U}^{RP(m)}(t^n + 0) \quad (2.36)$$

entwickelt. Man sieht, dass die Lösung des verallgemeinerten Riemann Problems nur zu einem infinitesimal kurzen Zeitpunkt nach t^n benötigt wird. Zu diesem Zeitpunkt kann davon ausgegangen werden, dass die Lösung im Wesentlichen durch die Lösung des konventionellen Riemann Problems bestimmt ist und der Verlauf des Polynoms nur einen geringen Einfluss hat. Somit läßt sich die Verwendung der Lösung der linearisierten Riemann Probleme rechtfertigen.

3 ADER Verfahren beliebig hoher Ordnung

Die ADER Verfahren bauen sich im Wesentlichen aus 5 Schritten auf:

1. Rekonstruktion
2. Lösen der Riemann Probleme
3. Lax-Wendroff Prozedur
4. Zeitintegration
5. Raumintegration

In den folgenden Abschnitten werden Wege aufgezeigt, die es ermöglichen, die Verfahren mit beliebiger Genauigkeit zu implementieren. Um auch noch bei den Verfahren sehr hoher Ordnung erträgliche Rechenzeiten zu erzielen, ist es unter bestimmten Voraussetzungen möglich, die Verfahren erheblich zu beschleunigen (z.B. für 20 – te Ordnung bei linearen Gleichungssystemen um den Faktor ≈ 2000), indem jeder einzelne dieser Punkte optimiert wird bzw. soviel wie möglich bei der Initialisierung berechnet und in den Koeffizienten gespeichert wird.

3.1 Rekonstruktion an der Zellgrenze

Nachdem in Kapitel 2 die Zeitintegration mit Hilfe der ADER Verfahren beschrieben wurde, wird in diesem Kapitel darauf eingegangen, wie man die benötigten Ableitungen von $\underline{U}(\underline{X}, t^n)$ mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann.

Dafür seien nochmals die wichtigsten Eigenschaften von Finiten-Volumen Verfahren zusammengefasst:

1. Der Wert $\overline{U}_{i,j}^n$ in der Zelle $I_{i,j}$ ist nicht der Wert von $\underline{U}(x_i, y_j, t^n)$ im Zellzentrum, sondern der integrale räumliche Mittelwert von $\underline{U}(\underline{X}, t^n)$ zum Zeitpunkt t^n .
2. Für die Zeitintegration werden Flüsse zwischen den Zellen benötigt. Wird hierfür ein ADER Verfahren verwendet, so wird der Zustand an den Gausspunkten $\underline{U}(x_{i\pm\frac{1}{2}}, \eta_\lambda, t^n)$ bzw. $\underline{U}(\xi_\lambda, y_{j\pm\frac{1}{2}}, t^n)$ sowie dessen Ableitungen benötigt.

Der in 2. benötigte Zustand muss aus den bekannten integralen Mittelwerten berechnet werden. Dies wird als „Rekonstruktion“ bezeichnet, deren effektive Berechnung eine der schwierigsten Aufgaben bei der Berechnung von Flüssen hoher Ordnung ist.

Für die ADER Verfahren auf kartesischen Gittern wird im Folgenden eine konservative Lagrange Interpolation benutzt. Im ersten Abschnitt wird diese Interpolationsmethode für eine Raumdimension hergeleitet. Die Interpolation in zwei und drei Raumdimensionen ist dann einfach ein Produkt aus den eindimensionalen Rekonstruktionen, weswegen diese Abschnitte dann sehr knapp gehalten werden.

Eine Eigenschaft der Finiten-Volumen Verfahren ist, dass an den Zellgrenzen lokale Riemann Probleme gelöst werden müssen, die dadurch entstehen, dass man die Zustände mit einer upwind und einer downwind Rekonstruktion an den Zellrändern berechnet hat. Von diesen beiden ist jedoch nur die upwind Rekonstruktion die numerisch stabile und physikalisch sinnvolle. Der Riemannlöser berechnet den Zustand auf dem Zellrand so, dass in jeder charakteristischen Variablen eine upwind Rekonstruktion verwendet wird. Dies wurde bereits in Abschnitt 2.4 beschrieben.

Sollen nichtlineare Gleichungen gelöst werden, so sollte das Gesamtverfahren die *Total Variation Diminishing* (TVD) Eigenschaft erfüllen. Diese Eigenschaft besagt, dass Variationen mit der Zeit nicht anwachsen dürfen, d.h. dass z.B. keine Oszillationen bei Diskontinuitäten oder starken Gradienten auftreten dürfen. Gleichzeitig existiert das Theorem von Godunov [72], nachdem kein lineares Verfahren mit Ordnung größer als eins diese Eigenschaft erfüllt. Um diese Bedingung trotzdem zu erfüllen, müssen daher nichtlineare Verfahren verwendet werden. Hier gibt es zwei verbreitete Ansätze. So kann man einen Limiter verwenden, der die Flussfunktionen so limitiert, dass diese Eigenschaft erfüllt wird. Das Problem hierbei ist allerdings, dass für beliebig hohe Ordnungen keine allgemeinen Limiter-Funktionen bekannt sind. Ein zweiter Ansatz ist die ENO bzw. WENO Methode [2, 13, 36, 41, 71], die formal die Eigenschaft zwar nicht erfüllt, aber deren Ergebnisse weitgehend oszillationsfrei sind. Diese Methode ist für die hier beschriebene Rekonstruktionsmethode gut geeignet und wird im Abschnitt 3.1.4 beschrieben.

3.1.1 Lagrange Interpolation im 1-D

Die Berechnung aller Ableitungen in zwei oder drei Raumdimensionen basiert auf Produkten von eindimensionalen Rekonstruktionen. In diesem Abschnitt

wird die verallgemeinerte Lagrange Interpolation hergeleitet, mit der sich auch die gewünschten Ableitungen berechnen lassen.

In jeder Zelle ist der Mittelwert \bar{v} der Funktion $v(x)$ gespeichert:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i - \frac{1}{2}}^{x_i + \frac{1}{2}} v(\xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Das Polynom $p_i(x)$ vom Grad $k-1$ ist eine Approximation der Funktion $v(x)$ von k^{ter} Ordnung. Es existiert genau ein Polynom, dessen Zellmittelwerte in jeder Zelle, die in dem Polynom verwendet wird, mit dessen Mittelwert übereinstimmt:

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_j - \frac{1}{2}}^{x_j + \frac{1}{2}} p_i(\xi) d\xi = \bar{v}_j, j = i - r, \dots, i + s, k - 1 = r + s. \quad (3.2)$$

$P(x)$ sei eine neue Funktion mit der Eigenschaft:

$$p(x) \equiv P'(x). \quad (3.3)$$

Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_j - \frac{1}{2}}^{x_j + \frac{1}{2}} p_i(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x_j} \left(P(x_{j+\frac{1}{2}}) - P(x_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \bar{v}_j \quad , j = i - r, \dots, i + s, k - 1 = r + s \end{aligned} \quad (3.4)$$

gilt. Die Lagrange Interpolations $P(x)$ von V mit der Ordnung k an der Position x auf einem nicht äquidistanten Gitter verwendet r Zellen von links². In einer Dimension erhält man:

$$P(x) = \sum_{m=0}^k \left\{ V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.5)$$

Die Funktion $V(x)$ ist die Funktion, die interpoliert wird. Für $V(x)$ gelten die folgenden Beziehungen:

$$V(x) \equiv \int_{-\infty}^x v(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

$$V(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_j - \frac{1}{2}}^{x_j + \frac{1}{2}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^i \bar{v}_j \Delta x_j. \quad (3.7)$$

²Bei den linearen Verfahren wird r so gewählt, dass ein leichter upwinding (ungerade Ordnung) bzw. ein zentraler (gerade Ordnung) Punktestern verwendet wird.

Die Ableitung

$$\frac{\partial \left(P(x) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}}) \right)}{x} = p(x) \quad (3.8)$$

wird berechnet und man erhält die Interpolation für die k^{te} Ordnung von v an der Stelle x auf einem nicht äquidistanten Gitter in einer Raumdimension wie folgt:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{l=0}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right) \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} C_{rj}^{(0)} \bar{v}_{i-r+j} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{mit } C_{rj}^{(0)} = \sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{l=0}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \Delta x_{i-r+j}. \quad (3.10)$$

Genauere Einzelheiten werden z.B. in [71] beschrieben. Die $k - te$ Ableitung $\frac{\partial^k V(x)}{\partial x^k}$ ist dann:

$$\frac{\partial^k p(x)}{\partial x^k} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial^k C_{rj}^{(0)}(x)}{\partial x^k} \bar{v}_{i-r+j} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} C_{rj}^{(k)}(x) \bar{v}_{i-r+j}, \quad (3.11)$$

wobei der Index (n) zwischen den unterschiedlichen Konstanten für die verschiedenen Ableitungen unterscheidet. Die Formel für die Interpolation der Ableitung $\frac{\partial^k V}{\partial x^k}$ mit der Genauigkeit k auf einem nicht äquidistanten Gitter kann direkt von (3.9) und (3.10) abgeleitet werden und ist mit Gleichung (3.9) unter Verwendung der Koeffizienten

$$C_{rj}^{(n)} = \sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{s=1}^k \sum_{u=1}^{B_{k-1}^{(n)}} \frac{\prod_{u=1}^{n(k-u)} (k-u)}{B_{k-1}^{(n)}} \frac{\prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{t=0}^n (x - x_{i-r+Q_{b \in \Phi_n, t-\frac{1}{2}}})}}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \quad (3.12)$$

gegeben. Der Ausdruck $B_{k-1}^{(n)}$ gibt die Anzahl der Kombinationen von n Elementen aus einer Gruppe von $k-1$ Elementen. Diese Funktion ist durch den Binomial Koeffizient gegeben:

$$B_{k-1}^{(n)} = \binom{k-1}{n}. \quad (3.13)$$

$Q_{b \in \Phi_n, t}$ ist das t -te Element der Kombination b , wobei

$$\phi = \{0..k\}, \phi[i] \neq m, l \quad (3.14)$$

$$\Phi_n = \{b : b \text{ ist eine Kombination von } n \text{ Elementen aus } \phi\} . \quad (3.15)$$

3.1.2 Entdimensionalisierte Form der Koeffizienten

Wie man anhand der Formel (3.12) erkennt, ist die Berechnung dieser Koeffizienten sehr aufwändig, da als obere Grenze in einer Summe die Anzahl an Kombinationen $B_{k-1}^{(n)}$ auftritt, die sehr groß werden kann. Ab den Polynomen 12ter Ordnung wächst die dafür benötigte CPU Zeit stark an. Für die Berechnung der Koeffizienten für die 24te Ordnung braucht man ca. 15 Tage auf einem Linux-Cluster von 15PC's mit AMD2000+ Prozessoren.

Wird aus den Koeffizienten für ein äquidistantes Gitter jedoch der Term Δx^n ausgeklammert, so werden sie dimensionslos und müssen nur einmal berechnet werden:

$$C'_{rj}{}^{(n)} = \Delta x^n C_{rj}{}^{(n)}. \quad (3.16)$$

Diese modifizierten Koeffizienten $C'_{rj}{}^{(n)}$ können abgespeichert werden und man muss die Koeffizienten $C_{rj}{}^{(n)}$ dann entsprechend dem Gitter skalieren:

$$C_{rj}{}^{(n)} = \frac{1}{\Delta x^n} C'_{rj}{}^{(n)}. \quad (3.17)$$

3.1.3 Lagrange Interpolation im 2-D

Wie zuvor schon erwähnt, ist der zweidimensionale Rekonstruktions Operator ein Produkt eindimensionaler Rekonstruktionen. Die Koeffizienten sind:

$$C_{r_x r_y i j}^{(n_x, n_y)}(x, y) = \frac{\partial^{n_x \cdot n_y} (C_{r_x i}^{(0)}(x) \cdot C_{r_y j}^{(0)}(y))}{\partial x^{n_x} \partial y^{n_y}} = C_{r_x i}^{(n_x)}(x) \cdot C_{r_y j}^{(n_y)}(y). \quad (3.18)$$

Hier sind die Koeffizienten $C_{r_x i}^{(n_x)}(x)$ und $C_{r_y j}^{(n_y)}(y)$ nach Gleichung (3.12) zu berechnen. Stehen die eindimensionalen Koeffizienten zur Verfügung, können daraus sofort die zwei- bzw. dreidimensionalen berechnet werden. Hat man so die Koeffizienten für die Rekonstruktion in x-Richtung erzeugt, lassen sich die Koeffizienten für die y-Richtung $C_{ij}^{Y(n_y, n_x)}$ wie folgt generieren:

$$C_{ij}^{Y(n_y, n_x)} = C_{ji}^{X(n_x, n_y)} \frac{\Delta x^{n_x} \Delta y^{n_y}}{\Delta x^{n_y} \Delta y^{n_x}}. \quad (3.19)$$

3.1.4 Rekonstruktion mit ENO

Die *Essentially Non Oscillatory* (ENO) bzw. *Weighted Essentially Non Oscillatory* (WENO) Verfahren wurden 1987 von Harten, Engquist, Osher und Chakravarthy eingeführt [36]. Aufbauend auf dieser Arbeit entstanden viele weitere Publikationen, von denen hier die von Shu [2, 13, 41, 71] genannt sei. Die Idee der ENO Verfahren ist es, in jedem Rekonstruktionsschritt den zu verwendenden Punktstern neu zu bestimmen. Dazu wird die Glattheit jedes in Frage kommenden Sterns gemessen und nur der glatteste verwendet. Die WENO Verfahren stellen eine Weiterentwicklung der ENO Verfahren dar. Es wird hier eine konvexe Linearkombination der getesteten Sterns verwendet, wobei die Gewichte in jedem Schritt in Abhängigkeit der Glätte der einzelnen Punktsterne neu bestimmt werden. Da die Rekonstruktion in jedem Schritt angepasst wird, werden diese Verfahren als „nichtlineare Verfahren“ bezeichnet.

Für die ADER Verfahren ist auch hier eine effiziente Implementierung not-

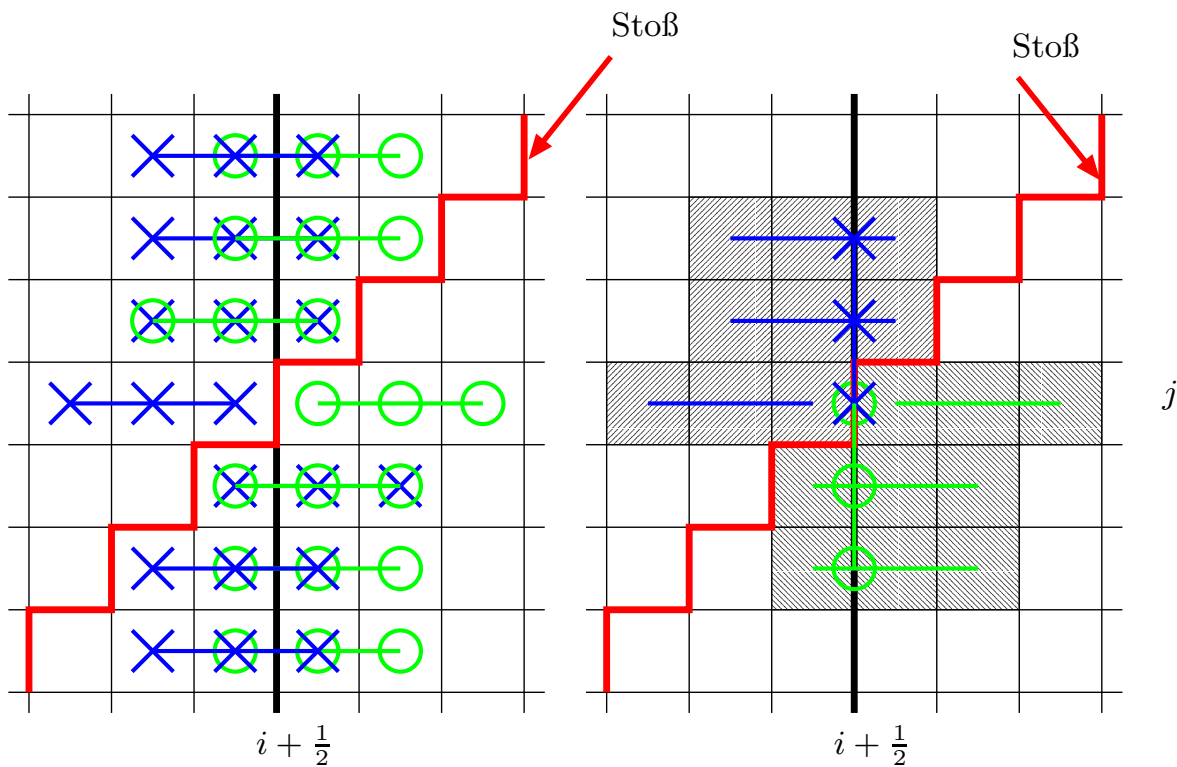


Bild 3.1: ENO Rekonstruktion für zwei Dimensionen. Links Rekonstruktion in x-Richtung, rechts Rekonstruktion in y-Richtung.

wendig. Dabei wird ausgenutzt, dass die mehrdimensionale Rekonstruktion ein Produkt aus eindimensionalen Rekonstruktionen ist. So muss nicht ein 2- bzw. 3-dimensionales ENO Verfahren implementiert werden, sondern lediglich ein 1-dimensionales, welches dann mehrfach aufgerufen wird. Dies wird als *dimension-by-dimension* [70, 71] Verfahren bezeichnet.

Die Auswahl des glattesten Sterns erfolgt über die Auswertung der ungeteilten Differenzen³. Diese sind wie folgt definiert:

$$V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \rangle = V[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] = \bar{v}_i \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} \rangle &\equiv V[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}}] \quad (3.21) \\ &- V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Dabei ist \bar{v}_i der in den Volumen gespeicherte integrale Mittelwert. Nun lässt sich der Auswahlalgorithmus angeben:

Algorithmus 3.1 *Auswahl des Sterns der Ordnung $\mathcal{O} - 1$ mit ENO*

1. Berechne die ungeteilten Differenzen (3.20) und (3.21) für die Ebenen 1 bis \mathcal{O} .
2. Der Stern $S_1(i)$ für die Zelle I_i ist zunächst der Ein-Punkte Stern $\{I_i\}$.
3. Für $l = 2, \dots, \mathcal{O}$ gilt unter der Annahme, dass der Stern $S_{l-1}(i) = \{I_{j+1}, \dots, I_{j+l-1}\}$ bekannt ist, die folgende Vorschrift:

- Falls

$$|V[x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l-\frac{1}{2}}]| < |V[x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l+\frac{1}{2}}]| \quad (3.22)$$

füge die Zelle I_j zu dem Stern $S_{l-1}(i)$ hinzu. Man erhält

$$S_l(i) = \{I_j, \dots, I_{j+l-1}\}. \quad (3.23)$$

- Anderenfalls füge die Zelle I_{j+l} zu dem Stern $S_{l-1}(i)$ hinzu. Man erhält

$$S_l(i) = \{I_j + 1, \dots, I_{j+l}\}. \quad (3.24)$$

Für eine Rekonstruktion \mathcal{O} -ter Ordnung sieht der Algorithmus für die 1. Dimension (x-Richtung) wie folgt aus:

³Für den Fall eines nicht-äquidistanten Gitters müssen die geteilten Differenzen verwendet werden.

Algorithmus 3.2 *Rekonstruktion mit ENO/WENO :*

1. *Finde den glattesten eindimensionalen Stern in x -Richtung, basierend auf den integralen Mittelwerten.*
2. *Berechne alle x -Ableitungen $\partial^i / \partial^i x$, $i \in [0, \dots, \mathcal{O} - 1]$.*
3. *Finde den glattesten eindimensionalen Stern in y -Richtung, basierend auf den rekonstruierten, integralen Mittelwerten.*
4. *Berechne alle gemischten Ableitungen $\partial^{i,j} / (\partial^i x \partial^j y)$, $i \in [0, \dots, \mathcal{O} - 1]$, $j \in [0, \dots, \mathcal{O} - 1 - i]$ an den Gausspunkten der Raumintegration.*
5. *Finde den glattesten eindimensionalen Stern in z -Richtung, basierend auf den rekonstruierten, integralen Mittelwerten für jeden Gausspunkt.*
6. *Berechne alle gemischten x, y, z -Ableitungen $\partial^{i,j,k} / (\partial^i x \partial^j y \partial^k z)$, $i \in [0, \dots, \mathcal{O} - 1]$, $j \in [0, \dots, \mathcal{O} - 1 - i]$, $k \in [0, \dots, \mathcal{O} - 1 - i - j]$ an den Gausspunkten der Raumintegration.*

3.1.5 Grundlegende Probleme der ENO/WENO Verfahren

Die hier beschriebenen Verfahren weisen einige grundlegende Probleme auf. Diese werden im Folgenden beschrieben.

1. **Oszillation des Sterns bei kleinen Störungen:** Um bei kleinen Störungen zu verhindern, dass in jedem Rekonstruktionsschritt ein anderer Stern gewählt wird, kann ein Schwellenwert eingeführt werden. Dieser Schwellenwert gibt an, um wieviel eine Störung des Vorzugsstern (leichtes upwinding) größer sein muss, damit ein anderer Stern gewählt wird. Dieser Wert wurde auf 2.0 gesetzt.
2. **Generierung von Oszillationen bei eng beieinanderliegenden Stößen:** Liegen zwei Diskontinuitäten dicht beisammen, so wird in jedem Stern über einen Sprung hinweg rekonstruiert. Dies führt dann zwangsläufig zu Oszillationen, wie in Bild 3.2 zu erkennen ist. Hier konnte über den Schlitz hinweg kein glatter Stern gefunden werden, weswegen eine Lösung rekonstruiert wurde, die unterhalb des zulässigen Bereichs liegt. Die einzige Möglichkeit, wie dieses Problem umgangen werden kann, ist es, lokal die Ordnung der Rekonstruktion oder die Gitterschrittweite zu verringern. Dies ist für die WENO Verfahren und eine Reduktion der Ordnung in [36, 82] beschrieben. In der hier verwendeten Implementierung ist diese Möglichkeit nicht vorgesehen.

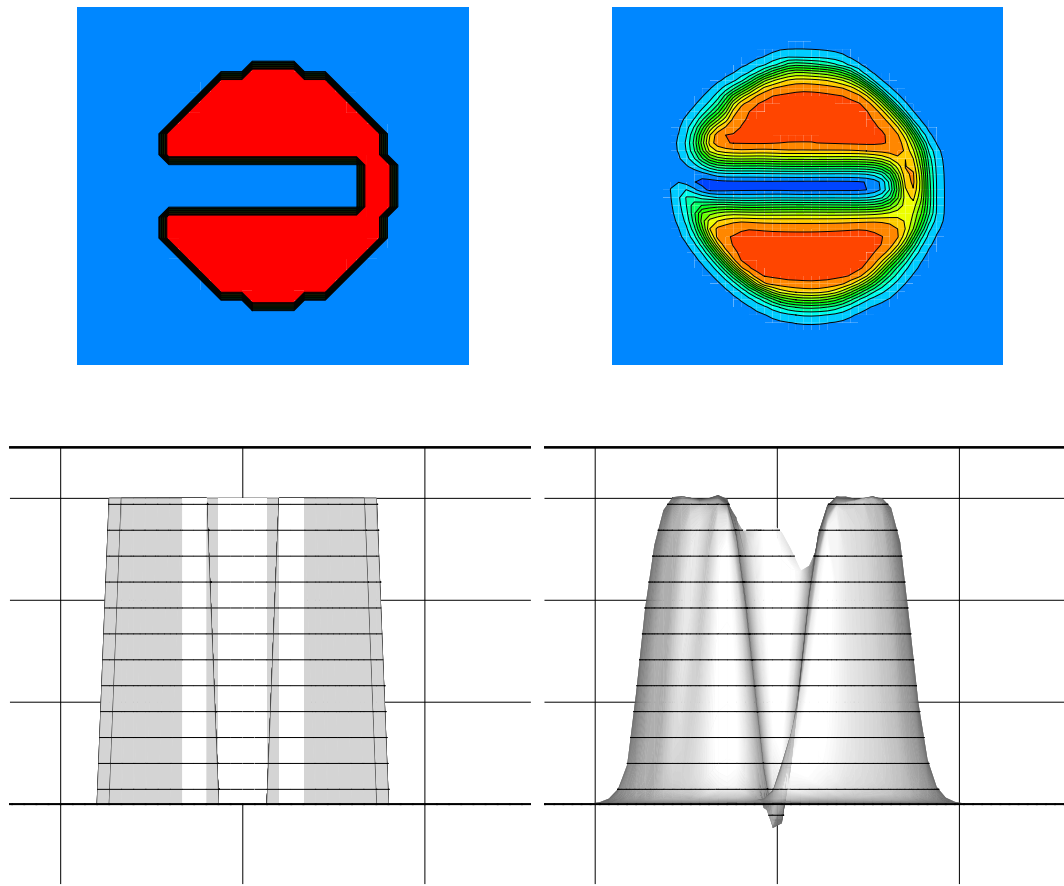


Bild 3.2: Transport eines geschlitzten Zylinders. Links exakte Lösung, rechts ADER ENO $\mathcal{O}5$.

3. Rekonstruktion in charakteristischen Variablen. Durch die Rekonstruktion in charakteristischen Variablen können bestimmte Instabilitäten verhindert werden [13]. Diese Instabilitäten können z.B. auftreten, wenn zwei Stöße zusammenlaufen. Hier kann letztendlich das gleiche Problem auftreten wie im zuvor genannten Punkt. Rekonstruiert man nun in charakteristischen Variablen, so können nie zwei Stöße auf unterschiedlichen Charakteristiken gegeneinander laufen, wie es z.B. bei Stößen sein kann, die in der Energiegleichung gegeneinander laufen. Die charakteristische Transformation ist jedoch sehr aufwändig und muss für jede Zelle und für jede Richtung neu durchgeführt werden. Da diese Verfahren hier vor allem für akustische, d.h. glatte Probleme angewandt werden sollen,

wurde diese Rekonstruktionsmethode jedoch nicht implementiert.

3.2 Die Lax-Wendroff Prozedur

Mittels der Lax-Wendroff Prozedur [45] können Zeit- in Raumableitungen umgerechnet werden. Diese Prozedur wird sowohl für Lax-Wendroff Typ Zeitintegrationsverfahren verwendet [38, 45], als auch für die hier vorgestellten ADER Typ Verfahren. Da sie in jedem Gaussintegrationspunkt aufgerufen wird, ist es notwendig, hier eine effiziente Umsetzung zu finden, um die in Kapitel 2.2.2 und 2.3 beschriebenen Probleme zu umgehen.

3.2.1 Für lineare Systeme

Für die linearen Systeme muss eine Form gefunden werden, wie sich die Gleichung (2.14)

$$\frac{\partial^k \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t^k} = (-1)^k \left(\underline{A} \frac{1}{\partial x} + \underline{B} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}(\underline{X}, t)$$

effektiv berechnen lässt. Hierzu wird folgende Beziehung genutzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1, i, j} \underline{U}}{\partial^{n+1} t \partial^i x \partial^j y} &= -\underline{A} \cdot \frac{\partial^{n, i+1, j} \underline{U}}{\partial^n t \partial^{i+1} x \partial^j y} - \underline{B} \cdot \frac{\partial^{n, i, j+1} \underline{U}}{\partial^n t \partial^i x \partial^{j+1} y} \quad (3.25) \\ n &\in [0, \dots, \mathcal{O} - 2] \\ i &\in [0, \dots, \mathcal{O} - 2 - n] \\ j &\in [0, \dots, \mathcal{O} - 2 - n - i]. \end{aligned}$$

Um also die Zeitableitung $\partial^{n+1}/\partial t^{n+1}$ für eine beliebige Ableitung zu berechnen, braucht man die Zeitableitungen der Stufe n , $\partial^n/\partial t^n$ jeweils mit einer räumlichen Ableitungsordnung höher. Dabei sind die Ableitungen für $n = 0$ aus der Rekonstruktion selber bekannt. Der Ablauf der Berechnung lässt sich für die 4. Ordnung in einer Dimension wie folgt darstellen:

n	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4
0	0	x	xx	xxx	xxxx
	↓↙	↓↙	↓↙	↓↙	↙
1	0t	xt	xxt	xxxxt	
	↓↙	↓↙	↓↙	↙	
2	0tt	xtt	xxtt		
	↓↙	↓↙	↙		
3	0ttt	xttt			
	↓↙	↙			
4	0tttt				

Diese Vorschrift lässt sich nun sehr effizient implementieren:

```

w(:,0,::) = SpaceDer(:,::)
TimeDer(:,0) = SpaceDer(:,0,0)
DO i = 0, (Ord-2)
  DO j = 0, (Ord-2-i)
    DO k = 0, (Ord-2-i-j)
      vecTempX(:) = W(:,i,j+1,k)
      vecTempY(:) = W(:,i,j, k+1)
      W(:,i+1,j,k) = - MATMUL(A,vecTempX)
                    - MATMUL(B,vecTempY)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
TimeDer(:,:) = W(:,::,0,0)

```

Hier sind A und B die Jacobi Matrizen. Mit Hilfe dieser FORTRAN Routine lässt sich die Lax-Wendroff Prozedur für beliebige lineare Systeme in drei Raumdimensionen verwirklichen.

3.2.2 Für nichtlineare Systeme

Für die nichtlinearen Euler Gleichungen wurde in einer Studienarbeit [23], basierend auf einer Arbeit von Dyson et. al. [25], ein Algorithmus entwickelt, der es auch hier ermöglicht, die Prozedur geschlossen darzustellen. Die Methode basiert letztendlich auf einer verallgemeinerten Leibniz Regel und der Generierung von Hilfsgrößen, um Divisionen zu vermeiden.

Die Prozedur wird für die nichtlinearen Euler Gleichungen (1.1)

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}_y = 0$$

in zwei Raumdimensionen hergeleitet. Die konservativen Größen sind

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Das Ziel ist es, Zeitableitungen $\partial^k \underline{U} / \partial t^k$ durch Ausdrücke zu ersetzen, in denen nur noch Raumableitungen $\partial^{a+b} \underline{U} / \partial x^a \partial y^b$ auftreten. Dazu werden die Ableitungen in der Reihenfolge

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{a+b+k} \underline{U}}{\partial^k t \partial^a x \partial^b y} & \quad k \in [1, \dots, \mathcal{O} - 1] \\ & \quad a \in [0, \dots, \mathcal{O} - 2 - k] \\ & \quad b \in [0, \dots, \mathcal{O} - 2 - k - a] \end{aligned} \quad (3.27)$$

berechnet. In der Gleichung (1.1) treten jedoch Produkte und Quotienten der Zustandsgrößen auf. Für Produkte ist die verallgemeinerte Leibniz Regel anwendbar [7, 25]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{a+b+k} f(x, y, t) \cdot g(x, y, t)}{\partial x^a y^b t^k} \\ & = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \sum_{c=0}^k \left[\binom{a}{i} \binom{b}{j} \binom{k}{c} \frac{\partial^{(a-i)+(b-j)+(k-c)} f}{\partial x^{a-i} y^{b-j} t^{k-c}} \cdot \frac{\partial^{i+j+c} g}{\partial x^i y^j t^c} \right] \\ & = L^{(a,b,k)}(f, g). \end{aligned} \quad (3.28) \quad (3.29)$$

Probleme bereiten jetzt noch die Quotienten wie z.B. $\rho u^2 = u_2^2 / u_1$, die sich nicht mittels dieser Regel berechnen lassen. Der Trick ist nun, dass man Hilfs-

größen einführt. Diese sind

$$\underline{HV} = \begin{bmatrix} HV_1 \\ HV_2 \\ HV_3 \\ HV_4 \\ HV_5 \\ HV_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ (\rho u)u \\ (\rho v)v \\ (\rho u)v \\ p \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Neben den Hilfsgrößen HV_1 und HV_2 , die man braucht, um die Quotienten zu berechnen, wurden weitere eingeführt, um alle Größen, die in Gleichung (1.1) zweimal vorkommen, als Hilfsgröße zu speichern und so eine effiziente Auswertung zu gewährleisten. Man verwendet die Beziehungen

$$u = \frac{u_1 HV_1}{u_1} \quad (3.31)$$

$$v = \frac{u_1 HV_2}{u_1} \quad (3.32)$$

$$(\rho u)u = u_2 HV_1 \quad (3.33)$$

$$(\rho v)v = u_3 HV_2 \quad (3.34)$$

$$(\rho u)v = u_2 HV_2 \quad (3.35)$$

$$p = (\gamma - 1) \left(u_4 - \frac{1}{2}(HV_3 + HV_4) \right). \quad (3.36)$$

Die Berechnungen (3.33)-(3.36) sind dabei klar, hier kann wieder direkt die Regel (3.28) verwendet werden. Für die Berechnung von (3.31)-(3.32) muss man noch eine weitere Umformung verwenden. Dazu wird exemplarisch die Berechnung von $\partial^3(\rho u)/\partial x y t$ mittels der verallgemeinerten Leibnizregel (3.28) betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \rho u}{\partial x y t} &= \rho_{xyt}u + \rho_{xy}u_t + \rho_{xt}u_y + \rho_x u_{yt} \\ &\quad + \rho_{yt}u_x + \rho_y u_{xt} + \rho_t u_{xy} + \rho u_{xyt} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 HV_1}{\partial x y t} &= u_{xyt} \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^3 \rho u}{\partial x y t} - \rho_{xyt}u - \rho_{xy}u_t - \rho_{xt}u_y \right. \\ &\quad \left. - \rho_x u_{yt} - \rho_{yt}u_x - \rho_y u_{xt} - \rho_t u_{xy} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Man erkennt, dass man zur Berechnung der ersten beiden Hilfsgrößen auf bekannte Variablen zurückgreifen kann und wiederum mit Hilfe der Leibnizregel die zuvor beschriebenen Ableitungen gewinnen kann, indem man die letzte Summation $i = a, j = b, c = k$ nicht durchführt. Dies wird als modifizierte Leibnizregel $L^{(a,b,k)*}$ eingeführt:

$$L^{(a,b,k)*} = - \left(f \cdot \frac{\partial^{a+b+k} g}{\partial x^a y^b t^k} \right) \quad (3.39)$$

$$+ \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \sum_{c=0}^k \left[\binom{a}{i} \binom{b}{j} \binom{k}{c} \frac{\partial^{(a-i)+(b-j)+(k-c)} f}{\partial x^{a-i} y^{b-j} t^{k-c}} \cdot \frac{\partial^{i+j+c} g}{\partial x^i y^j t^c} \right].$$

Dabei ist zu beachten, dass der erste Term nur eingeführt wurde, um in der Leibnizsumme den Term $i = a, j = b, c = k$ aufzuheben. Damit kann nun die Hilfsvariable HV_1 in (3.38) berechnet werden:

$$\frac{\partial^3 HV_1}{\partial x y t} = \frac{1}{u_1} \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x y t} - L^{(1,1,1)*}(u_1, HV_1) \right), \quad (3.40)$$

wobei in $L^{(1,1,1)*}(u_1, HV_1)$ nur bereits bekannte Ableitungen von HV_1 verwendet werden. Jetzt sind alle Bausteine vorhanden und man kann mittels der Gleichung (1.1), ausgedrückt in \underline{U} und \underline{HV}

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_t = - \begin{bmatrix} u_2 \\ HV_3 + HV_6 \\ HV_5 \\ HV_1 u_4 + HV_1 HV_6 \end{bmatrix}_x - \begin{bmatrix} u_3 \\ HV_5 \\ HV_4 + HV_6 \\ HV_2 u_4 + HV_2 HV_6 \end{bmatrix}_y \quad (3.41)$$

alle in (3.27) benötigten Größen ausrechnen. Damit hat man jetzt die Möglichkeit, bekannte Raumableitungen in Zeitableitungen umzurechnen. Im Vergleich zu dem Verfahren von Dyson [25] wurden noch einige Optimierungen eingeführt bzw. unnötige Schritte vermieden, so dass das hier vorgestellte Verfahren erheblich effizienter ist.

Desweiteren erkennt man, dass man sehr leicht auch alle Zeitableitungen für

den Fluss erhalten kann:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ HV_3 + HV_6 \\ HV_5 \\ HV_1 u_4 + HV_1 HV_6 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^k \underline{F}}{\partial t^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^k u_2}{\partial t^k} \\ \frac{\partial^k HV_3}{\partial t^k} + \frac{\partial^k HV_6}{\partial t^k} \\ \frac{\partial^k HV_5}{\partial t^k} \\ \frac{\partial^k HV_1 (u_4 + HV_6)}{\partial t^k} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

wobei die letzte Komponente über die normale Leibnizregel bestimmt werden kann, da hier die Zeitableitungen aller Hilfsgrößen bekannt sind. Für den Fluss \underline{G} in y-Richtung gilt ganz analog:

$$\frac{\partial^k \underline{G}}{\partial t^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^k u_3}{\partial t^k} \\ \frac{\partial^k HV_5}{\partial t^k} \\ \frac{\partial^k HV_4}{\partial t^k} + \frac{\partial^k HV_6}{\partial t^k} \\ \frac{\partial^k HV_2 (u_4 + HV_6)}{\partial t^k} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Dies kann z.B. für die *flux-expansion* Version des ADER Verfahrens [80] verwendet werden.

Prinzipiell kann diese Prozedur für jedes System angewandt werden. Es müssen dann aber die für jedes System individuellen Hilfsgrößen bestimmt und berechnet werden.

3.3 *fast*ADER für lineare Systeme

Zunächst werden die Verfahren für lineare Gleichungssysteme untersucht. Wird bei der Rekonstruktion kein ENO/WENO Algorithmus verwendet, so ist das numerische Verfahren linear. Das Riemann Problem am Zellrand unterscheidet sich dann wesentlich für die Verfahren gerader und ungerader Ordnung. Darauf wird in den ersten beiden Abschnitten eingegangen. Anschließend wird dann mit der Lösung der Riemann Probleme das ADER Verfahren stetig weiter vereinfacht.

Es sollen folgende Voraussetzungen gelten:

Bedingung 3.1 *Voraussetzungen für die fastADER Verfahren sind*

- I. Lineare Systeme mit konstanten Jacobi Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$, die unabhängig von x und y sind.
- II. Konstante Gitterschrittweiten in x - und y -Richtung. Die Schrittweiten in den Richtungen dürfen sich aber unterscheiden.
- III. Konstanter Zeitschritt ⁴.
- IV. Lineare Rekonstruktion im Raum, d.h. es darf kein ENO/WENO Algorithmus verwendet werden.

3.3.1 Riemann Problem der geraden Verfahren

Das Riemann Problem, wie es in Abschnitt 2.4 beschrieben wird, vereinfacht sich für die Verfahren gerader Ordnung deutlich. Für die Rekonstruktion auf dem Zellrand wird hier eine zentrale Rekonstruktion verwendet, so dass gilt $\underline{W}^R = \underline{W}^L \equiv \underline{W}^{Rec}$. Das Riemann Problem⁵ ist dann:

$$\underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^{RP} = RP \left(\underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^R, \underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^L \right) \quad (3.45)$$

$$= RP \left(\underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^{Rec}, \underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^{Rec} \right) \quad (3.46)$$

$$= \underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^{Rec} \quad (3.47)$$

$$= \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2+1}^{i+\mathcal{O}/2} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} C_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \quad (3.48)$$

$$= \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2+1}^{i+\mathcal{O}/2} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} \left(\underline{\underline{E}} \cdot C_{ii,jj}^{k,m} \right) \underline{U}_{i+ii,j+jj} \quad (3.49)$$

$$= \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2+1}^{i+\mathcal{O}/2} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} \underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj}. \quad (3.50)$$

Hier ist $\underline{\underline{E}}$ die Einheitsmatrix. Die Matrix $\underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{k,m}$ ist nur auf der Hauptdiagonalen besetzt. Sie wird hier eingeführt, um die Lösung des Riemann Problems für die geraden und ungeraden Verfahren in der gleichen Form darstellen zu können.

⁴Diese Bedingung kann jedoch leicht aufgegeben werden, indem die Koeffizienten zum Teil zu jedem Zeitschritt neu berechnet werden, was nicht sehr aufwändig ist.

⁵Da bei den linearen Systemen nicht zwischen dem Riemann Problem für den Zustand selbst und dessen Ableitungen unterschieden werden muss, wird hier $\underline{W} = \partial \underline{U}^{k+m} / (\partial^k x \partial^m y)$ verwendet.

3.3.2 Riemann Problem der ungeraden Verfahren

Für die ungeraden Verfahren ist die Lösung nicht ganz so einfach. Die Rekonstruktion am Zellrand hat hier einen leichten upwind Charakter, so dass $\underline{W}^R \neq \underline{W}^L$ gilt. Da die Lösung des Riemann Problems jedoch nur von den konstanten Jacobi Matrizen abhängt, lässt sich die Lösung des Riemann Problems direkt angeben. $K_{\underline{A}}^n$ seien die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{\underline{A}}^n$ der Jacobi Matrix \underline{A} . Jeder Zustand \underline{W}' lässt sich wie folgt darstellen:

$$\underline{W}'(x, t) = \sum_{n=1}^{nVar} \langle \alpha_{\underline{A}}^n, \underline{U}' \rangle K_{\underline{A}}^n. \quad (3.51)$$

Dabei ist $\alpha_{\underline{A}}^n$ die Transponierte der n -ten Zeile der invertierten Matrix aus den Eigenvektoren $K_{\underline{A}}^{-1}$. Für die linearisierten Euler Gleichungen in drei Raumdimensionen (1.5) sind die Eigenwerte, Eigenvektoren und $\alpha_{\underline{A}}^n$ für die x -Richtung in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Zur Lösung des Riemann Problems

	1	2	3	4	5
$\lambda_{\underline{A}}^n$	$u_0 - c_0$	u_0	u_0	u_0	$u_0 + c_0$
$K_{\underline{A}}^n$	$\begin{bmatrix} -\rho_0/c_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_0 * c_0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \rho_0/c_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_0 * c_0 \end{bmatrix}$
$\alpha_{\underline{A}}^n$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2\rho_0 c_0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{c_0^2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\rho_0 c_0} \end{bmatrix}$

Tabelle 3.1: Eigenwerte, Eigenvektoren und $\alpha_{\underline{A}}^n$ für die linearisierten Euler Gleichungen

wird in (3.51) für \underline{W}' der von links (rechts) rekonstruierte Wert gewählt, je

nachdem ob der Eigenwert größer (kleiner) Null ist:

$$\underline{W}^{RP} = \sum_{n=N+1}^{nVar} \langle \alpha_{\underline{A}}^n, \underline{W}^L \rangle \underline{K}_{\underline{A}}^n + \sum_{n=1}^N \langle \alpha_{\underline{A}}^n, \underline{W}^R \rangle \underline{K}_{\underline{A}}^n \quad (3.52)$$

$$= \sum_{n=N+1}^{nVar} \underline{R}^n \underline{W}^L + \sum_{n=1}^N \underline{R}^n \underline{W}^R \quad (3.53)$$

$$\underline{R}_{j,k}^n = \alpha_k^n \cdot K_j^n. \quad (3.54)$$

N ist der größte Index für den gilt: $\lambda_{\underline{A}}^n < 0$. Für die beiden Ableitungen der Zustände \underline{W}^L und \underline{W}^R kann man nun die diskrete Rekonstruktion einsetzen und schließlich die diskrete Lösung des Riemann Problems erzeugen:

$$\underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^L = \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2}^{i+\mathcal{O}/2} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} C_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \quad (3.55)$$

$$\underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^R = \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2+1}^{i+\mathcal{O}/2+1} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} C_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \quad (3.56)$$

$$(3.57)$$

$$\begin{aligned} \underline{W}_{i+\frac{1}{2},j}^{RP} &= \sum_{n=N+1}^{nVar} \underline{R}^n \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2}^{i+\mathcal{O}/2} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} C_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \\ &+ \sum_{n=1}^N \underline{R}^n \sum_{ii=i-\mathcal{O}/2+1}^{i+\mathcal{O}/2+1} \sum_{jj=j-\mathcal{O}/2}^{j+\mathcal{O}/2} C_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$= \sum_{ii=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2+1} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \underline{C}_{ii,jj}^{k,m} \underline{U}_{i+ii,j+jj}. \quad (3.59)$$

Da die Lösung des Riemann Problems nur von den Eigenwerten abhängt und diese wiederum nur von den konstanten Jacobi Matrizen, verändert sich diese Lösung nicht im Verlauf der Rechnung.

3.3.3 fastADER Verfahren

Aus Bedingung I. der Voraussetzungen folgt direkt, dass diese Lösung in den Flussfunktionen (2.18) verwendet werden kann:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\Delta y}{2} \sum_{\lambda=1}^{N_{GP}} \omega_{\lambda} \underline{A} \\ &\times \sum_{k=0}^{\mathcal{O}-1} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \left(\underline{A} \frac{1}{\partial x} + \underline{B} \frac{1}{\partial y} \right)^k \partial^k \underline{U}^{RP}(x_{i+\frac{1}{2}}, \eta_{\lambda}, t^n). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Unter Verwendung von Bedingung IV. müssen nun zwei Fälle unterschieden werden: gerade und ungerade Verfahren. Die diskrete Lösung des Riemann Problems an der Stelle $x_{i+\frac{1}{2}}$ lässt sich für beide Verfahrensklassen schreiben als (siehe (3.50),(3.59)):

$$\left(\frac{\partial^k \underline{U}}{\partial x^m y^{k-m}} \right)^{RP} = \sum_{ii=-\mathcal{O}/2+1}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \underline{C}_{ii,jj}^{(RP) m,k-m}(\eta_{\lambda}) \underline{U}_{i+ii,j+jj}. \quad (3.61)$$

Der hier auftretende Tensor 2. Stufe $\underline{C}_{ii,jj}^{(RP) m,k-m}$ hat die Dimension $n \times n$, wobei n die Dimension des Zustandvektors ist. Der diskrete Fluss ergibt sich aus (3.60)

$$\begin{aligned} \hat{\underline{F}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\Delta y}{2} \sum_{\lambda=1}^{N_{GP}} \omega_{\lambda} \underline{A} \sum_{k=0}^{\mathcal{O}-1} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \\ &\times \left[\sum_{m=k}^0 \underline{M}(\underline{A}, \underline{B}, k, m) \left(\sum_{ii=-\mathcal{O}/2+1}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \underline{C}_{ii,jj}^{(RP) m,k-m} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{M}(\underline{A}, \underline{B}, k, m) \\ &= \sum_{I_{m,k}} \prod_{r=1}^k (\underline{A}^{p_r} \cdot \underline{B}^{q_r}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

und

$$I_{m,k} := \left\{ \left((p_r, q_r) \right)_{r=1}^k : p_r, q_r \in \{0, 1\}, p_r + q_r = 1, \sum_{r=1}^k p_r = m, \sum_{r=1}^k q_r = k - m \right\}. \quad (3.64)$$

Als Nächstes werden konstante Gitterschrittweiten in x- und y-Richtung angenommen (Bedingung II.). Die Koeffizienten $\underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{(RP) m,k-m}$ sind damit konstant für jede Zelle, und die Klammern von (3.62) können neu geordnet werden. Der Fluss ist nun:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{ii=-\mathcal{O}/2+1}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \left[\frac{\Delta y}{2} \sum_{\lambda=1}^{N_{GP}} \omega_{\lambda} \underline{\underline{A}} \sum_{k=0}^{\mathcal{O}-1} \frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{m=k}^0 \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, k, m) \underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{(RP) m,k-m} \right) \right] \underline{U}_{i+ii,j+jj} \quad (3.65) \end{aligned}$$

$$= \sum_{ii=-\mathcal{O}/2+1}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \underline{\underline{C}}_{ii,jj}^* \underline{U}_{i+ii,j+jj}. \quad (3.66)$$

Die neue Konstante $\underline{\underline{C}}_{ii,jj}^*$ ist wieder eine $n \times n$ Matrix. Diese neue Konstante beinhaltet alle Informationen über die Jacobi Matrizen, die Eigenwerte und Eigenvektoren (bei Verfahren ungerader Ordnung), die Gaussintegration im Raum, die Gitterschrittweite und den Zeitschritt.

In einem letzten Schritt wird der Fluss (3.66) in das Finite-Volumen Verfahren (2.8) eingesetzt, und die Koeffizienten werden noch einmal zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij}^{n+1} &= \bar{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{V_{ij}} \left[\hat{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{F}_{i-\frac{1}{2},j} + \hat{G}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{G}_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \bar{U}_{ij}^n - \left[\sum_{ii=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{**} \underline{U}_{i+ii,j+jj} \right]. \quad (3.67) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten Matrix $\underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{**}$ ist eine Kombination aus $\underline{\underline{C}}^{X*}$ und $\underline{\underline{C}}^{Y*}$ multipliziert mit $\frac{\Delta t}{V_{ij}}$. Für konstante Jacobi Matrizen (Bedingung I.) ist $\underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{**}$ konstant und kann für jede Zelle verwendet werden. Ein Beispiel für die Assemblierung von $\underline{\underline{C}}^{**}$ bei einem Verfahren 4. Ordnung ist in Tabelle B.1 im Anhang B gegeben. Beachtenswert ist nun, dass das Verfahren nach (3.67) die Struktur eines Einschrittverfahrens in der Zeit hat. Da für das Zeitupdate lediglich Matrix-Vektor Multiplikationen durchzuführen sind, ist es sehr effizient implementierbar.

Das Vorgehen für die Implementierung des *fast*ADER Verfahrens wird nun noch einmal zusammengefasst:

Algorithmus 3.3 *Der Algorithmus für das fastADER Verfahren ist:*

- I. Berechne die standard Koeffizienten C_{ij} des ADER Verfahrens nach (3.18).
- II. Berechne die modifizierten Koeffizienten $\underline{\underline{C}}_{ii,jj}^{**}$ als eine Funktion der Jacobi Matrizen $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, Δt , der Gitterschrittweite Δx und Δy , den Gausspunkten η_λ und $-$ gewichten ω_λ , sowie bei den ungeraden Verfahren den Eigenwerten und Eigenvektoren der Jacobi Matrizen.
- III. Berechne Gleichung (3.67) für jeden Zeitschritt. Dies ist die Summe über einen zweidimensionalen Punktestern von einer Matrix-Vektor Multiplikation.

Das resultierende Verfahren ist \mathcal{O} -ter Ordnung genau in Raum und Zeit.

Spezielle Parameter für das Verfahren 2. Ordnung Für das Verfahren 2. Ordnung müssen aus Stabilitätsgründen (siehe Abschnitt 3.3.5) zwei Gausspunkte im Raum anstatt nur einem verwendet werden.

3.3.4 Konsistenz und Konvergenz

Die Konsistenzuntersuchung und der Nachweis der Ordnung werden zunächst theoretisch durchgeführt. Anschließend werden diese Ergebnisse noch durch numerische Konvergenzuntersuchungen untermauert.

Eine sehr einfache Methode, um die Konsistenz und Konvergenz für Einschrittverfahren der Form

$$\bar{u}_{ij}^{n+1} = \sum_{ii=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} c_{ii,jj} u_{i+ii,j+jj} \quad (3.68)$$

zu untersuchen, wurde zunächst von Roe [61] im eindimensionalen Fall und dann von Billett und Toro [5,83] im mehrdimensionalen Fall bewiesen.

Satz 3.1 *Das zweidimensionale Verfahren 3.68, welches die Differentialgleichung $u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$ löst, ist \mathcal{O} -ter Ordnung genau, wenn und nur wenn die Koeffizienten $c_{ii,jj}$ folgende Bedingung*

$$\sum_{ii=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} \sum_{jj=-\mathcal{O}/2}^{\mathcal{O}/2} II^q \cdot JJ^r \cdot c_{ii,jj} u_{i+ii,j+jj} = (-CFL_x)^q \cdot (-CFL_y)^r \quad (3.69)$$

für alle Paare (q, r) erfüllen, so dass gilt $q \geq 0$, $r \geq 0$ und $q + r \leq m$. Hierbei bezeichnen CFL_x und CFL_y die Courant Zahlen in x - und y -Richtung.

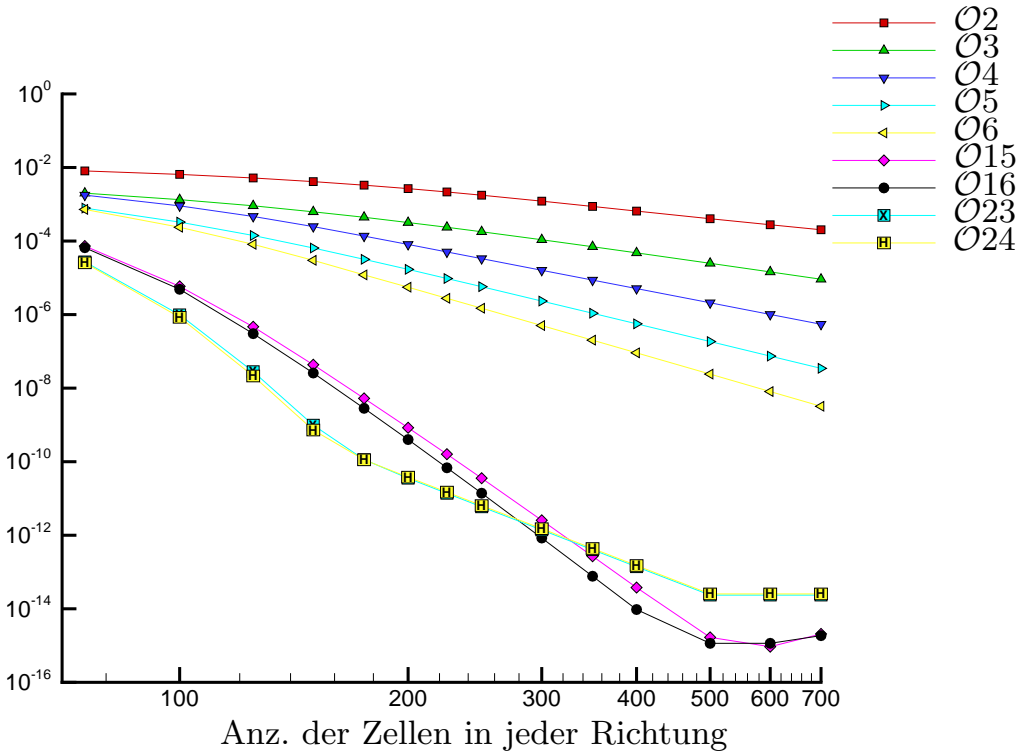


Bild 3.3: Log-log Darstellung der Konvergenzraten des ADER $\mathcal{O}2$ - $\mathcal{O}6, \mathcal{O}15, \mathcal{O}16, \mathcal{O}23, \mathcal{O}24$ Verfahrens

Für die skalare Advektionsgleichung hat das *fastADER* Verfahren genau die in (3.68) geforderte Form. Für $r = q = 0$ kann somit eine Überprüfung der Konsistenz und für $r + q \neq 0$ eine Prüfung der Konvergenzordnung durchgeführt werden. Für die Verfahren bis zur 12ten Ordnung wird diese Bedingung mit einem Fehler $< 10^{-6}$ erfüllt. Für die Verfahren höherer Ordnung steht man hier vor numerischen Problemen, da die Potenzen II^q und JJ^r sehr große, numerisch nicht mehr genau abbildbare Werte annehmen. So ist für ein Verfahren 14. Ordnung $II \in [-7, \dots, 7]$ und $q \in [0, \dots, 14]$ und somit II^q im ungünstigsten Fall $7^{14} = 678223072849$. Daher kann die Konvergenz bei diesen Verfahren nur noch numerisch untersucht werden.

Für die numerische Untersuchung wird die lineare Advektionsgleichung

$$u_t + c_1 u_x + c_2 u_y = 0 \quad (3.70)$$

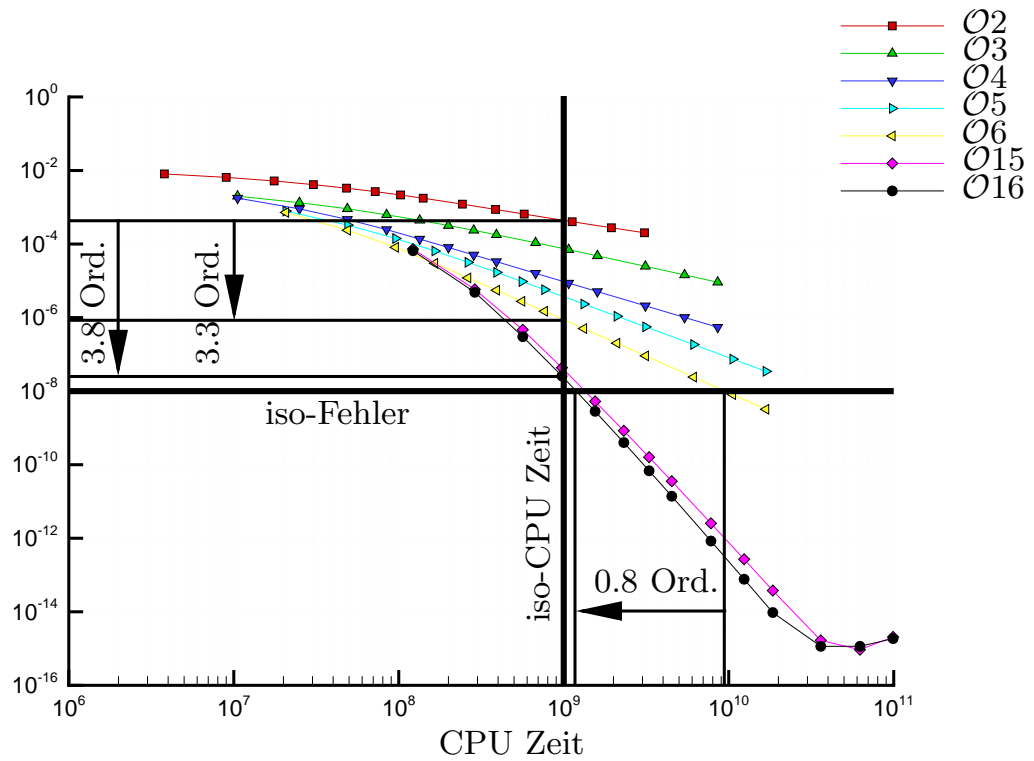


Bild 3.4: Log-log Darstellung der Konvergenzraten des ADER $\mathcal{O}2$ - $\mathcal{O}6$, $\mathcal{O}15$, $\mathcal{O}16$ Verfahrens, aufgetragen über die CPU Zeit

verwendet. Ein zweidimensionaler Gausspuls

$$\begin{aligned}
 u &= u_{max} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} & (3.71) \\
 r^2 &= x^2 + y^2 \\
 \sigma &= 2.0 \\
 u_{max} &= 1.0
 \end{aligned}$$

wird diagonal ($c_1 = c_2$) durch das Rechengebiet transportiert. In den Abbildungen Bild 3.3 und Bild 3.4 ist die numerisch ermittelte Konvergenzrate für die Verfahren $\mathcal{O}2$ - $\mathcal{O}6$ sowie $\mathcal{O}15$, $\mathcal{O}16$ und $\mathcal{O}23$, $\mathcal{O}24$ aufgetragen. Die numerischen Werte sind in den Tabellen A.1-A.4 im Anhang A gegeben. Sehr deutlich ist der Übergang in den asymptotischen Bereich erkennbar, in dem die Konvergenzverläufe gerade sind. Für die Verfahren 15ter und 16ter Ordnung erkennt man, dass für feine Gitter keine weitere Fehlerreduktion mehr erreicht wird. Hier ist bereits die Computergenauigkeit bei DOUBLE PRECISION

Variablen mit 10^{-15} erreicht. Die Verfahren noch höherer Ordnung weisen geringere Konvergenzraten auf. Dies liegt darin begründet, dass hier bereits bei der Bestimmung der Koeffizienten des Verfahrens die Rechnergenauigkeit erreicht wird. Da bei diesen Verfahren über mehrere Punkte summiert wird, summiert sich auch dieser Fehler entsprechend.

In der zweiten Abbildung wurde als Abszisse die CPU Zeit anstatt des Gitters verwendet. Bei gleichem Gitter brauchen dann natürlich die Verfahren hoher Ordnung länger. Ist jedoch eine Fehlerschranke vorgegeben ($\approx 10^{-8}$), so erkennt man, dass die CPU-Zeit Reduktion bei Verwendung eines Verfahrens 16 – ter Ordnung im Vergleich zu einem Verfahren 6 – ter Ordnung ca. 0.8 Größenordnungen beträgt. Mit einem Verfahren 2 – ter Ordnung ließe sich dieser Fehler gar nicht mehr in vertretbarer Zeit erreichen. Vergleicht man die Fehler, die man mit den unterschiedlichen Verfahren bei einer vorgegebenen Zeit erreichen kann, so ist ersichtlich, dass man bei Verwendung der 6 – ten Ordnung einen um 3.3 Größenordnungen kleineren Fehler erhält, als bei einem Verfahren 2 – ter Ordnung. Bei einem Verfahren 16 – ter Ordnung ist der Fehler sogar um 3.8 Größenordnungen kleiner.

Allerdings ist ebenfalls erkennbar, dass die Verfahren niedriger Ordnung durchaus ihre Berechtigung haben: Für eine sehr geringe Genauigkeitsanforderung (großer Fehler) sind diese Verfahren vorzuziehen. Es kann daher keine allgemeingültige Empfehlung gegeben werden, da man letztendlich für jedes Verfahren eine Fehlerschranke findet, ab dem die nächst höhere Ordnung schneller ist.

3.3.5 Stabilität

Zur Stabilitätsuntersuchung der zweidimensionalen Verfahren wird die von-Neumann Stabilität betrachtet, die besagt, dass keine Welle in dem numerischen Verfahren angefacht werden darf, d.h. die Amplitude einer Welle muss von einem zum anderen Zeitschritt konstant bleiben oder gedämpft werden. Für Verfahren niedriger Ordnung findet man oft noch eine analytische Darstellung des Stabilitätsbereichs (z.B. Hirsch [38]). Für die hier vorliegenden Verfahren ist dies nicht mehr möglich, so dass die von-Neumann Stabilität numerisch untersucht wird.

Dazu wird der Verstärkungsfaktor G für jede Welle $\phi_x, \phi_y \in [-\pi, \dots, \pi]$ be-

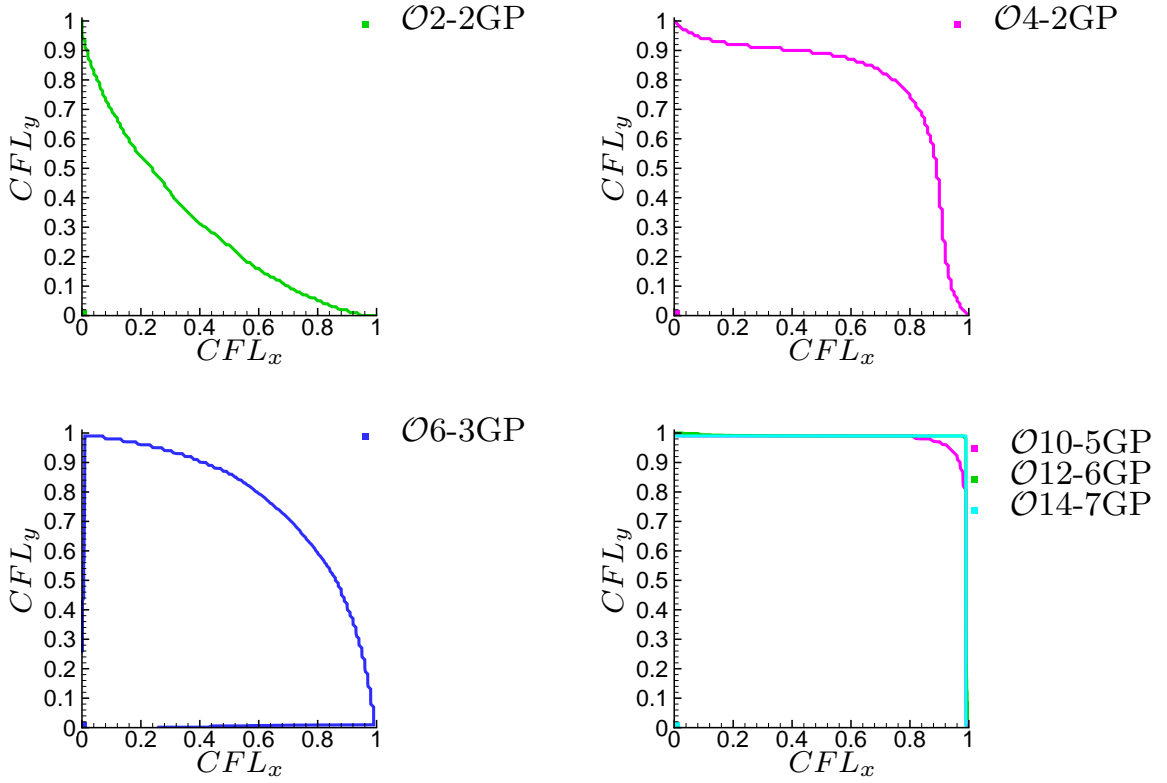


Bild 3.5: Von-Neumann Stabilitäts Diagramm für Verfahren gerader Ordnung

rechnet:

$$\begin{aligned}
 G_{\phi_x, \phi_y} = & \left| \sum_{jj} \sum_{ii} C_{ii,jj}^{**}(CFL_x, CFL_y) \right. & (3.72) \\
 & \times ABS(\cos(II \cdot \phi_x) \cdot \cos(JJ \cdot \phi_y) - \sin(II \cdot \phi_x) \cdot \sin(JJ \cdot \phi_y), \\
 & \left. \cos(II \cdot \phi_x) \cdot \sin(JJ \cdot \phi_y) + \sin(II \cdot \phi_x) \cdot \cos(JJ \cdot \phi_y) \right|.
 \end{aligned}$$

Die Funktion ABS ist dabei der Betrag der Imaginären Zahl. Die Koeffizienten $C_{ii,jj}^{**}(CFL_x, CFL_y)$ werden intern als $C_{ii,jj}^{**}(u_0, v_0, \Delta t)$ dargestellt, wobei

$$\begin{aligned}
 u_0 &= CFL_x \Delta x / \Delta t \quad \text{und} \quad v_0 = CFL_y \Delta y / \Delta t, & (3.73) \\
 \Delta x &= \Delta y = \Delta t = 1.0
 \end{aligned}$$

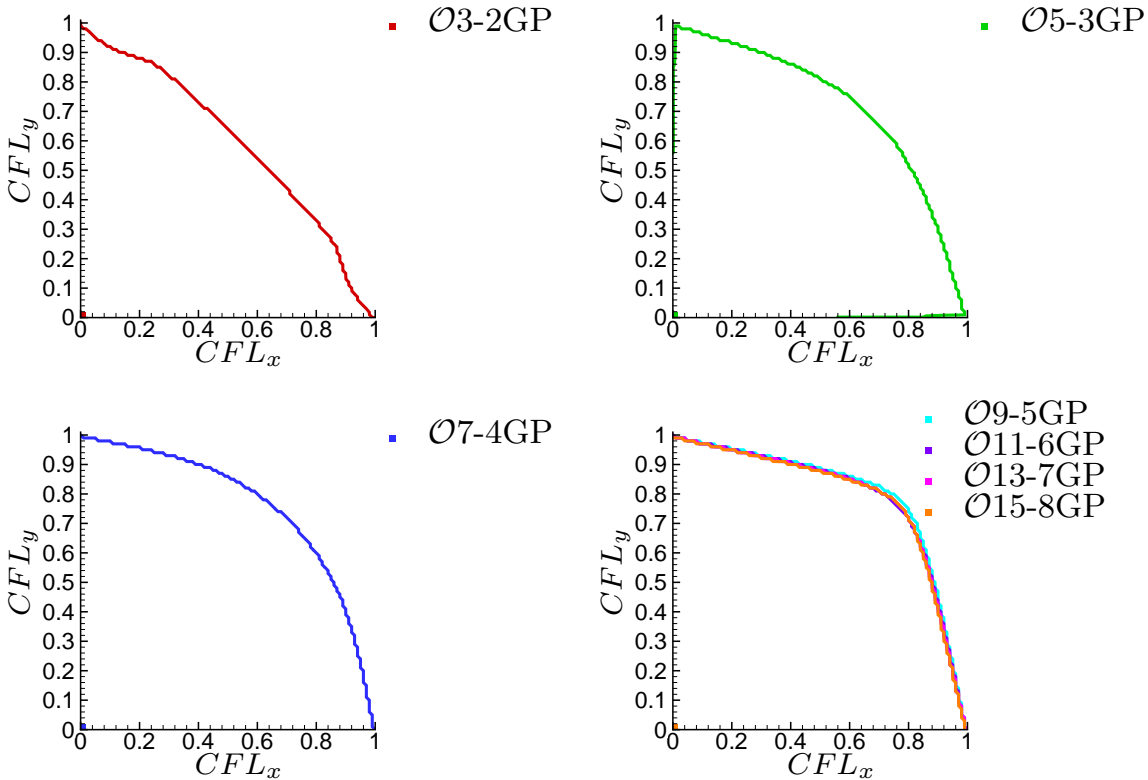


Bild 3.6: Von-Neumann Stabilitäts Diagramm für Verfahren ungerader Ordnung mit $\mathcal{O}_y = \mathcal{O} + 2$

gesetzt wurde.

In Bild 3.5 sind die Stabilitätsbereiche $G \leq 1.0$ für die geraden und in Bild 3.6 für die ungeraden Verfahren dargestellt. Bemerkenswert ist, dass offensichtlich zwei unterschiedliche Grenzkurven $G = 1.0$ erreicht werden: Für die geraden Verfahren ein Quadrat mit $CFL_x = CFL_y = 1$ und für die ungeraden Verfahren ein Kreis mit einem Radius größer als $CFL = 0.9$, jedoch in einigen Bereichen kleiner als $CFL = 1.0$. Dabei hat man bei den ungeraden Verfahren für die Ordnung in tangentialer Richtung zwei Wahlmöglichkeiten, um eine zentrale Rekonstruktion zu erzeugen, die im Gesamtverfahren gleich viel Punkte benötigen. Es kann sowohl die gleiche Ordnung wie in normaler Richtung verwendet werden, als auch zwei Ordnungen höher. In den Stabilitätsuntersuchungen zeigte sich, dass die höhere Ordnung in tangentialer Richtung vorteilhaft ist.

Da in praktischen Rechnungen die größere Stabilität auf den Diagonalen bei

Verfahrensordnung (gerade) :	2	4	6	8...
<i>CFL</i> :	0.5	0.9	0.95	0.98
Verfahrensordnung (ungerade):	3	5...		
<i>CFL</i> :	0.8	0.95		

Tabelle 3.2: Stabilitätslimits für die ADER Verfahren in praktischen Berechnungen

den geraden Verfahren nicht genutzt werden kann, ergeben sich die in Tab. 3.2 zusammengefassten Stabilitätslimits.

3.3.6 Rechenzeit

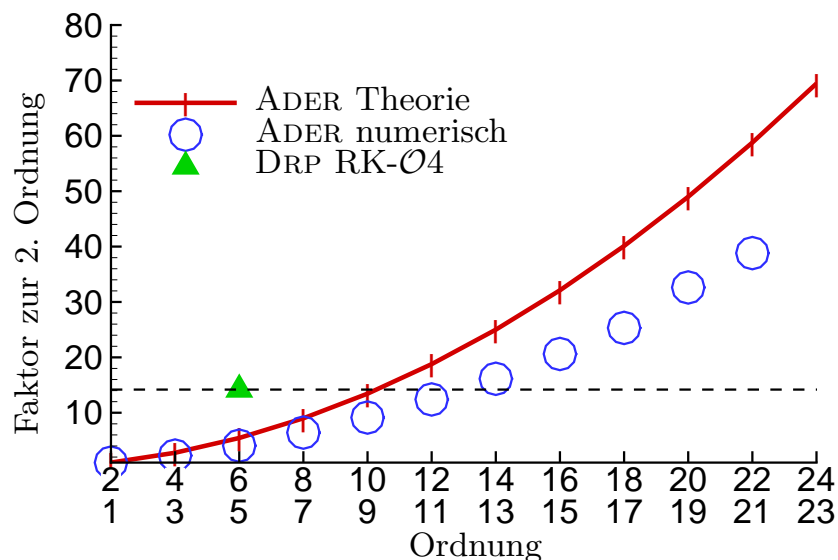


Bild 3.7: Relativer CPU Aufwand, abhängig von der Ordnung des Verfahrens. Normalisiert mit dem FASTAder Verfahren 2. Ordnung.

Der Rechenaufwand für das Verfahren kann leicht abgeschätzt werden. Die Anzahl der Punkte, welche für die Rekonstruktion verwendet werden, wächst quadratisch mit der Ordnung des Verfahrens ($(\mathcal{O} + 1) \times (\mathcal{O} + 1)$ Punkte für gerade und $(\mathcal{O} + 2) \times (\mathcal{O} + 2)$ Punkte für ungerade Verfahren). Da das Ver-

fahren für die Zeitintegration immer nur einen Schritt braucht, wächst die CPU-Zeit ebenfalls quadratisch mit der Ordnung des Verfahrens. Dies ist in Bild 3.7 dargestellt. Als Vergleich wurde die numerische Lösung⁶ mit eingetragen. Die theoretischen Werte liegen etwas höher als die numerischen, was daran liegt, dass der Rechenkern (Matrix-Vektor Multiplikation) sehr effizient implementiert wurde und bei höheren Ordnungen sehr gut im Prozessor-Cache gearbeitet werden kann. Außerdem wurde der feste Bestandteil, der notwendig ist, um die Rechnung zu starten, nicht herausgerechnet. Ein Vergleich mit dem DRP Verfahren von Tam [74] wurde ebenfalls eingetragen. Dieses Verfahren ist formal 4. Ordnung im Raum, basiert jedoch auf einem Finite-Differenzen Verfahren 6. Ordnung. Für die Zeitintegration wurde ein standard Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung verwendet.

3.3.7 Wellentransporteigenschaften

Da die hier entwickelten Verfahren vor allem für aeroakustische Simulationen eingesetzt werden sollen, sind die Wellentransporteigenschaften von großem Interesse. Anhand einer stehenden Druckwelle werden die Amplitude- und Phasenfehler der Verfahren in Abhängigkeit der Auflösung (**P**unkten **P**ro **W**ellenlänge, PPW) untersucht. Diese monofrequente Welle eignet sich besonders, um diese Analysen durchzuführen. Sie wird durch die Anfangsbedingung

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} (x, t = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{max} \sin\left(\frac{\omega}{c_0} \left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$p_{max} = 2 \cdot 10^{-4} \quad (3.75)$$

in den linearisierten Euler Gleichungen und periodischen Randbedingungen beschrieben. Die homogenen Hintergrundwerte sind $\rho_0 = 1$, $u_0 = 0$, $p_0 = 1$. Damit ergibt sich $c_0 = \sqrt{\gamma}$. Für die exakte Lösung gilt nun:

$$p(x, t) = p_{max} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c_0} \left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right). \quad (3.76)$$

⁶Auf einem Intel Pentium-III System mit 1GHz, FSB 133MHz.

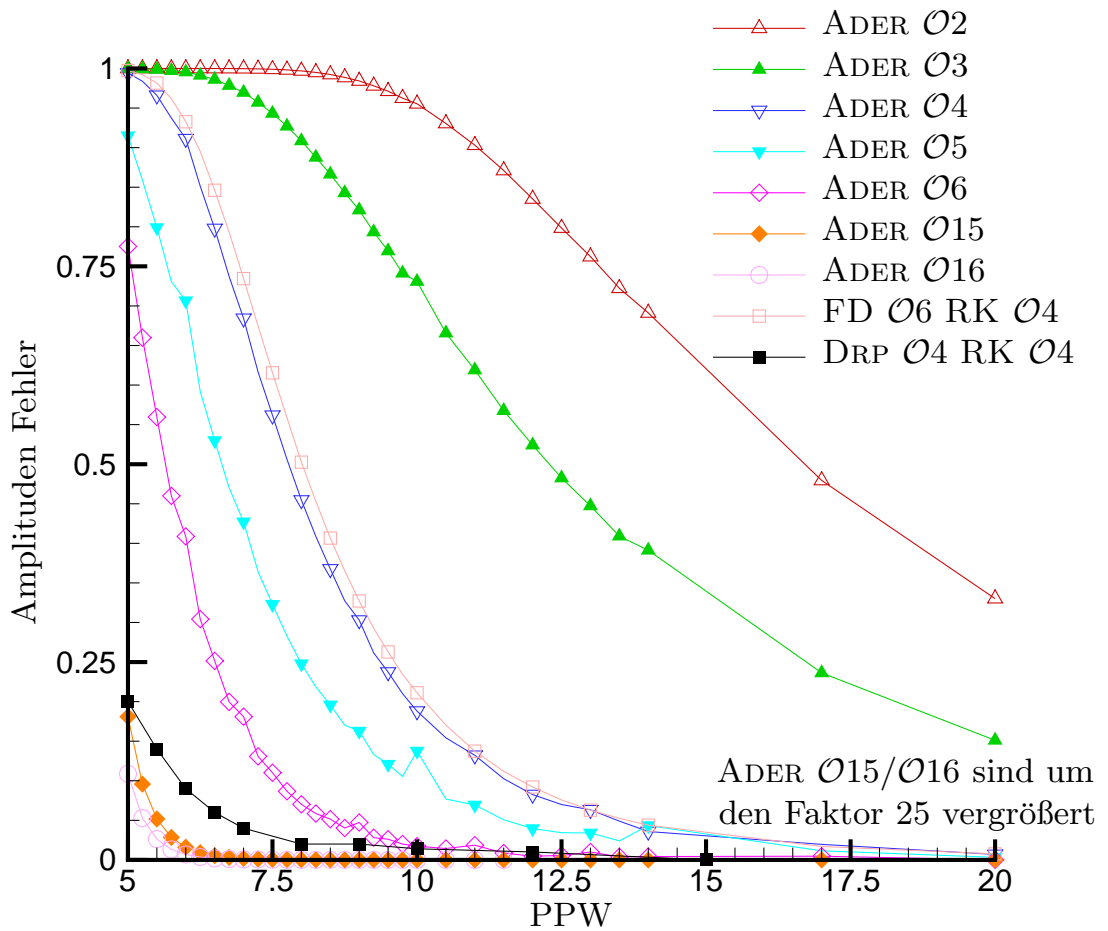


Bild 3.8: Amplitudenfehler Diagramme für ADER, DRP und standard Finite-Differenzen Verfahren

Für die hier gezeigten Diagramme wurden 100 Perioden gerechnet:

$$T_{end} = 100 \cdot T \quad (3.77)$$

$$T = \frac{\lambda}{c_0} \quad (3.78)$$

$$\lambda = PPW \cdot \Delta x \quad (3.79)$$

$$\Delta x \equiv 1. \quad (3.80)$$

Daraus ergibt sich, dass bei unterschiedlichen Auflösungen unterschiedlich viele Zeitschritte gerechnet werden. Da $T_{end} \sim PPW$, kann davon ausgegan-

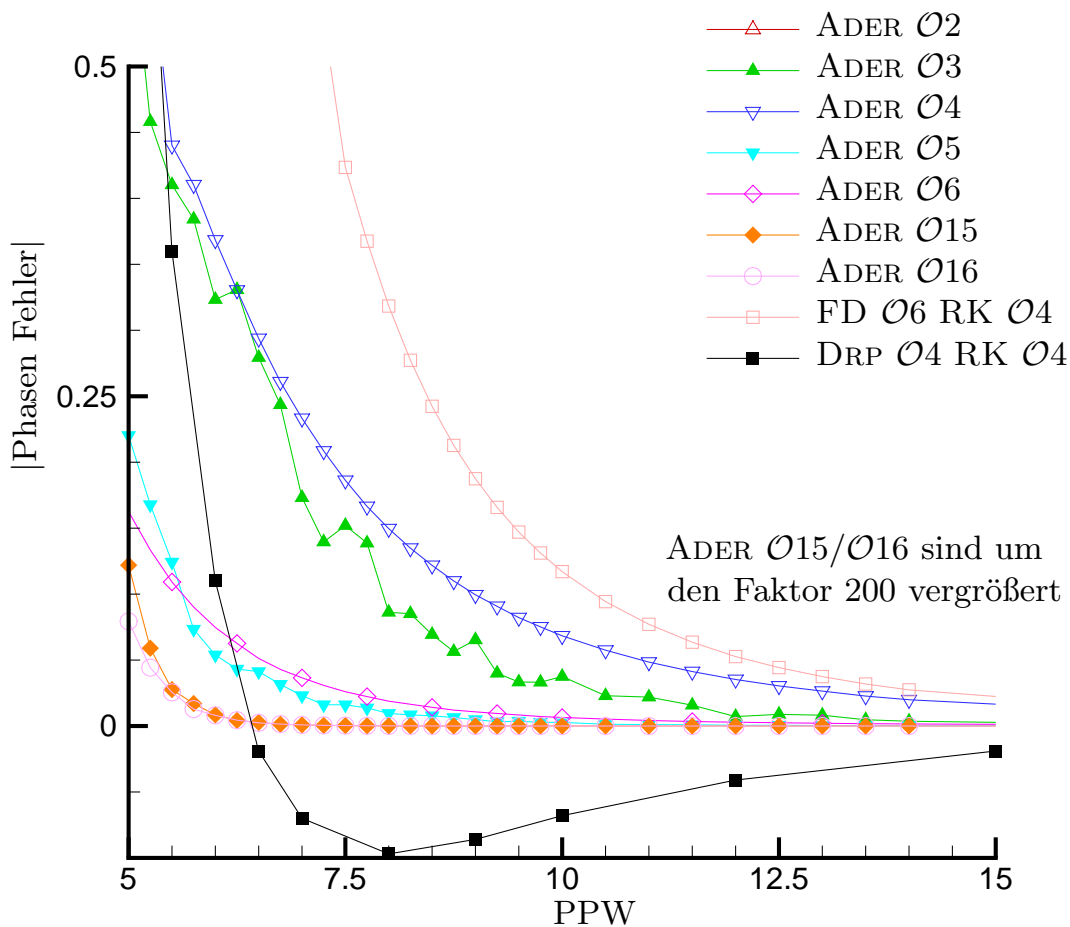


Bild 3.9: Phasenfehler Diagramme für ADER, DRP und standard Finite-Differenzen Verfahren

gen werden, dass die Fehler bei gleicher Anzahl an Zeitschritten für schlecht aufgelöste Wellen (kleines PPW) im Vergleich zu hoch aufgelösten Wellen noch weiter ansteigen. Nach diesen 100 Perioden wird sowohl die maximale Amplitude als auch ein Phasenfehler bestimmt. Der hier dargestellte Phasenfehler gibt die Anzahl der Perioden an, um den die numerische Lösung der analytischen hinterher hinkt. D.h. Wellen, die zu langsam sind, haben einen positiven Phasenfehler und Wellen, die zu schnell sind, haben einen negativen Fehler. Dieser Fehler ist ± 1 , wenn in der numerischen Lösung 99 bzw. 101 Perioden erzeugt wurden.

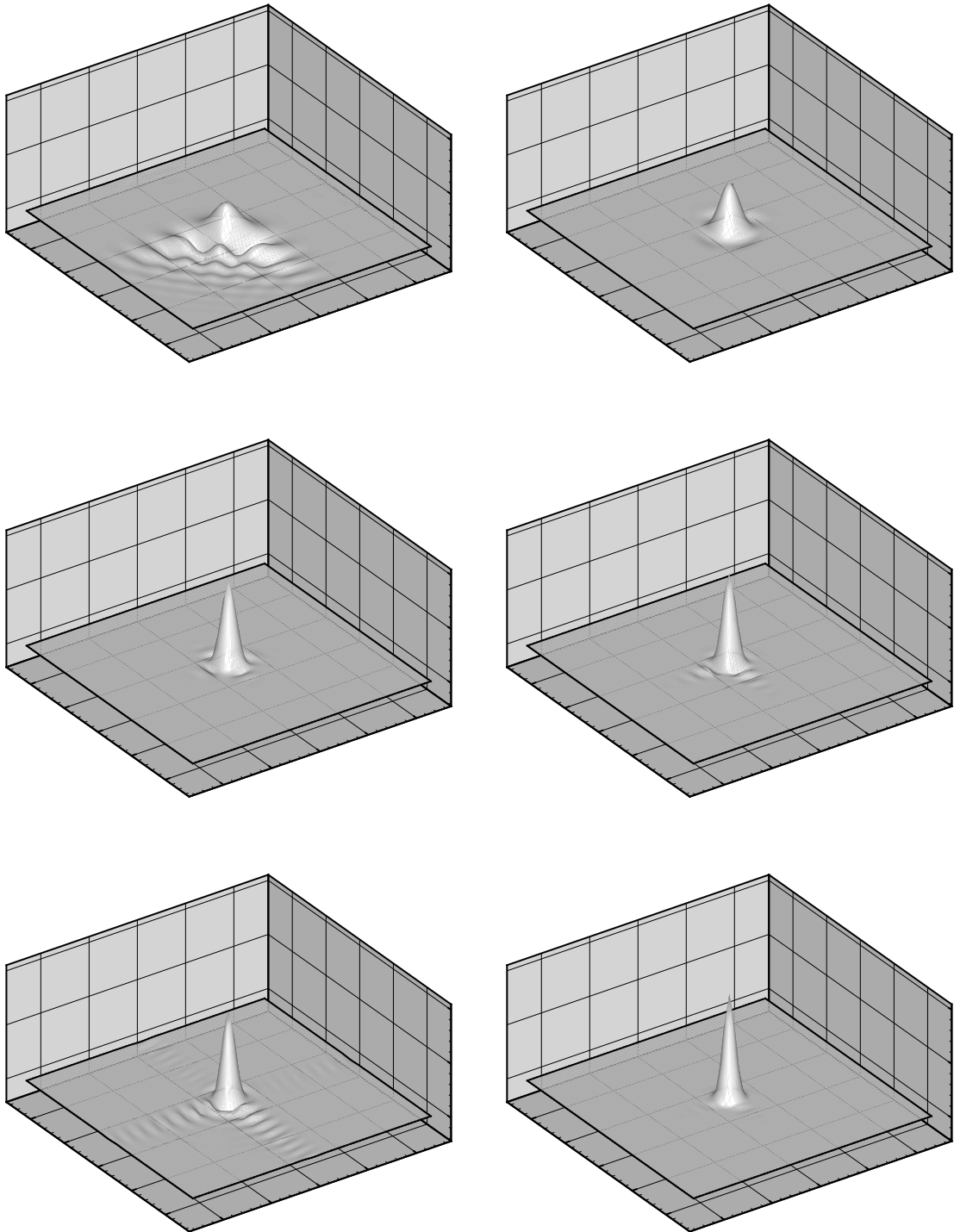


Bild 3.10: Gausspuls mit dem ADER $\mathcal{O}2$, $\mathcal{O}3$, $\mathcal{O}5$, $\mathcal{O}6$, DRP und ADER $\mathcal{O}12$ Verfahren nach einer Periode ($t^{end} = 100$)

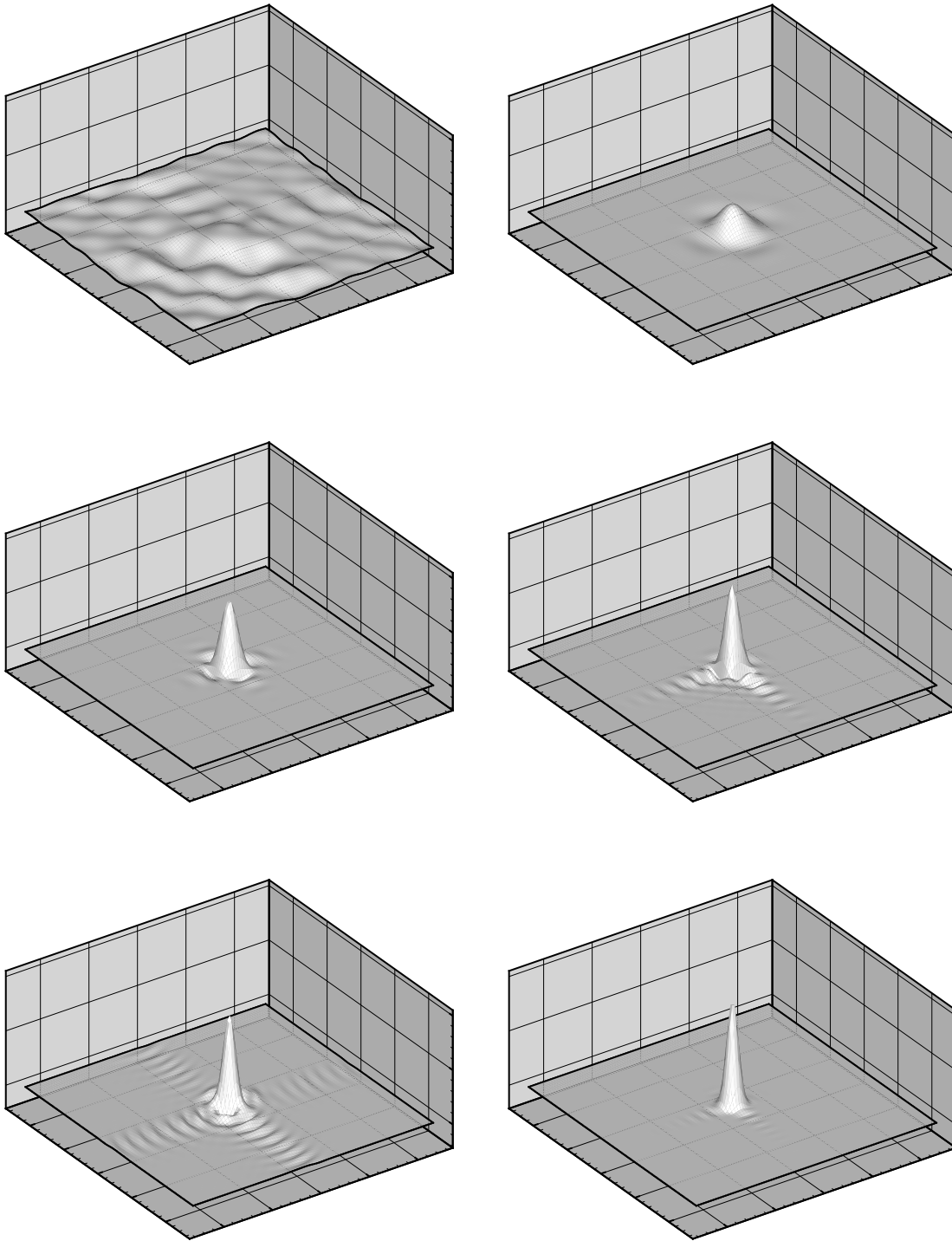


Bild 3.11: Gausspuls mit dem ADER $\mathcal{O}2$, $\mathcal{O}3$, $\mathcal{O}5$, $\mathcal{O}6$, DRP und ADER $\mathcal{O}12$ Verfahren nach 10 Perioden ($t^{end} = 1000$)

In den Bildern 3.8 und 3.9 ist der Amplituden- bzw. Phasenfehler für die ADER Verfahren der Ordnung $\mathcal{O}2 - \mathcal{O}6$, $\mathcal{O}15$ und $\mathcal{O}16$, sowie als Referenz für das Finite-Differenzen Verfahren 6. Ordnung und DRP optimierten Finite-Differenzen Verfahren 4. Ordnung mit einem standard Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung dargestellt. Ein Vergleich des ADER $\mathcal{O}6$ Verfahrens mit dem DRP Verfahren zeigt, dass das ADER Verfahren bei den Amplitudenfehlern geringfügig schlechter abschneidet (Fehlerschranke 10%: ADER $\mathcal{O}6$ min. 7.8PPW, DRP min. 5.9PPW), bei dem Vergleich der Phasenfehler jedoch deutlich besser ist. Bemerkenswert ist außerdem, dass für alle Ordnungen bei einem einsetzenden Phasenfehler bereits ein Amplitudenfehler vorhanden ist. Dieser wirkt in diesem Fall als Dämpfung und unterdrückt automatisch Wellen mit falschen Geschwindigkeiten. Diese Eigenschaft muss bei den DRP Verfahren durch künstliche Dämpfung zusätzlich hinzugefügt werden.

In Bild 3.10 und Bild 3.11 ist dargestellt, was diese Fehler in der Praxis bedeuten. Gerechnet wurde die lineare Advektionsgleichung (3.70) mit $u_0 = v_0 = 1.0$ und einem Gausspuls (3.71) als Anfangsbedingung sowie mit periodischen Rändern. Dargestellt ist die Lösung nach einer Periode ($t = 100$) und nach 10 Perioden ($t = 1000$). Deutlich zu erkennen ist, wie die Qualität der Lösung mit steigender Ordnung zunimmt. Dies wird umso deutlicher, je länger gerechnet wird. Das Verfahren 2. Ordnung hat nach 10 Perioden nicht einmal mehr näherungsweise eine Lösung produziert, die mit der exakten Lösung vergleichbar ist, wohingegen die 3. Ordnung hier bereits deutlich besser abschneidet. Zudem fällt bei einem Vergleich mit dem DRP Verfahren auf, dass dort ein sehr langer Bereich mit nachlaufenden Wellen erzeugt wurde. Dies wird, wie bereits oben beschrieben, bei den ADER Verfahren automatisch verhindert. Vergleicht man nun, was man bei gleicher Rechenzeit mit dem DRP und ADER Verfahren 12. Ordnung (siehe Bild 3.7) erreicht, so ist sofort die Überlegenheit der ADER Verfahren deutlich. Stellt man den Ergebnissen des ADER Verfahrens 6. Ordnung das DRP Verfahren gegenüber, so ist der Fehler in etwa gleich, jedoch ist bei den ADER Verfahren die Rechenzeit deutlich kürzer. Außerdem ist zu beachten, dass bei den DRP Runge-Kutta Verfahren die Zwischenzeitpunkte abgespeichert werden müssen, was bei den *fast*ADER Verfahren entfällt.

3.3.8 Verhalten bei starken Gradienten

Das hier beschriebene Verfahren ist linear in dem Sinne, dass bei starken Gradienten keinerlei Limiter oder ENO/WENO Algorithmen verwendet werden,

sondern immer der gleiche zentrale Punkttestern, was zwangsläufig zu Oszillationen führen muss. In diesem Abschnitt wird nun untersucht, wie sich die Verfahren bei starken Gradienten verhalten. Als Testbeispiel wurde hier der geschlitzte Zylinder gewählt. Er hat eine kreisförmige und zwei gerade, eng beieinanderliegende Diskontinuitäten. Dieser Zylinder wird nun diagonal mit $u_0 = v_0 = 1.0$ durch das Rechengebiet transportiert, und es werden die Fehler nach einer Periode betrachtet. Das Gitter hat 100×100 Punkte und eine Zellgröße von $\Delta x = \Delta y = 1.0$. Alle Ränder sind periodische Ränder. Um den Endzeitpunkt $t^{end} = 100.0$ zu erreichen, brauchten alle Verfahren $n = 205$ ($n = 253$ für ENO Rechnungen) Zeitschritte.

In Abbildung Bild 3.12 ist sowohl der L_∞ Fehler, der ein Maß für den größten

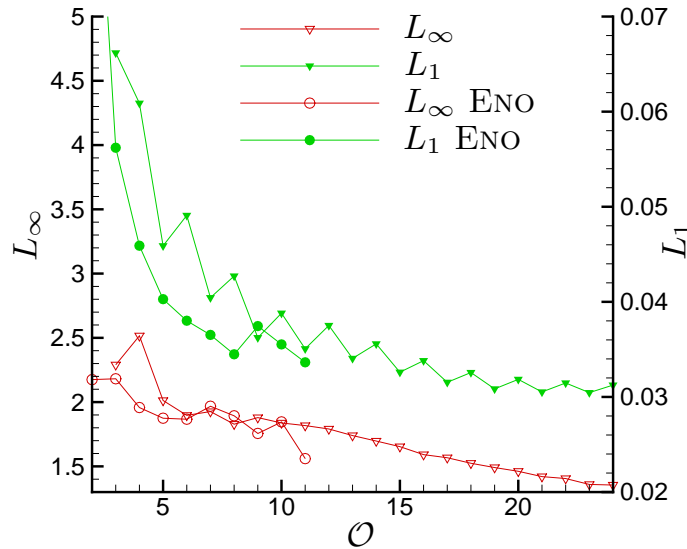


Bild 3.12: L_1 und L_∞ Fehler bei der Approximation des geschlitzten Zylinders nach einem Umlauf über die Verfahrensordnung

auf tretenden Fehler ist, als auch der L_1 Fehler, der ein Maß für die auftretenden Oszillationen ist, über die Verfahrensordnung aufgetragen. Betrachtet man zunächst den L_∞ Fehler, so erkennt man sehr deutlich, dass mit zunehmender Verfahrensordnung der maximale Fehler kontinuierlich zurückgeht. Ausnahmen bilden hier nur die Verfahren 6. und 8. Ordnung. Bei dem L_1 Fehler fällt sofort ein anderes Verhalten auf. Die Verfahren ungerader und gerader Ordnung bilden zwei Kurvenscharen. Dabei sind die Verfahren mit

ungerader Ordnung immer etwas besser als die direkt darauf folgende gerade Ordnung. In Bild 3.13 ist ein Verfahren 5. und 6. Ordnung nebeneinander

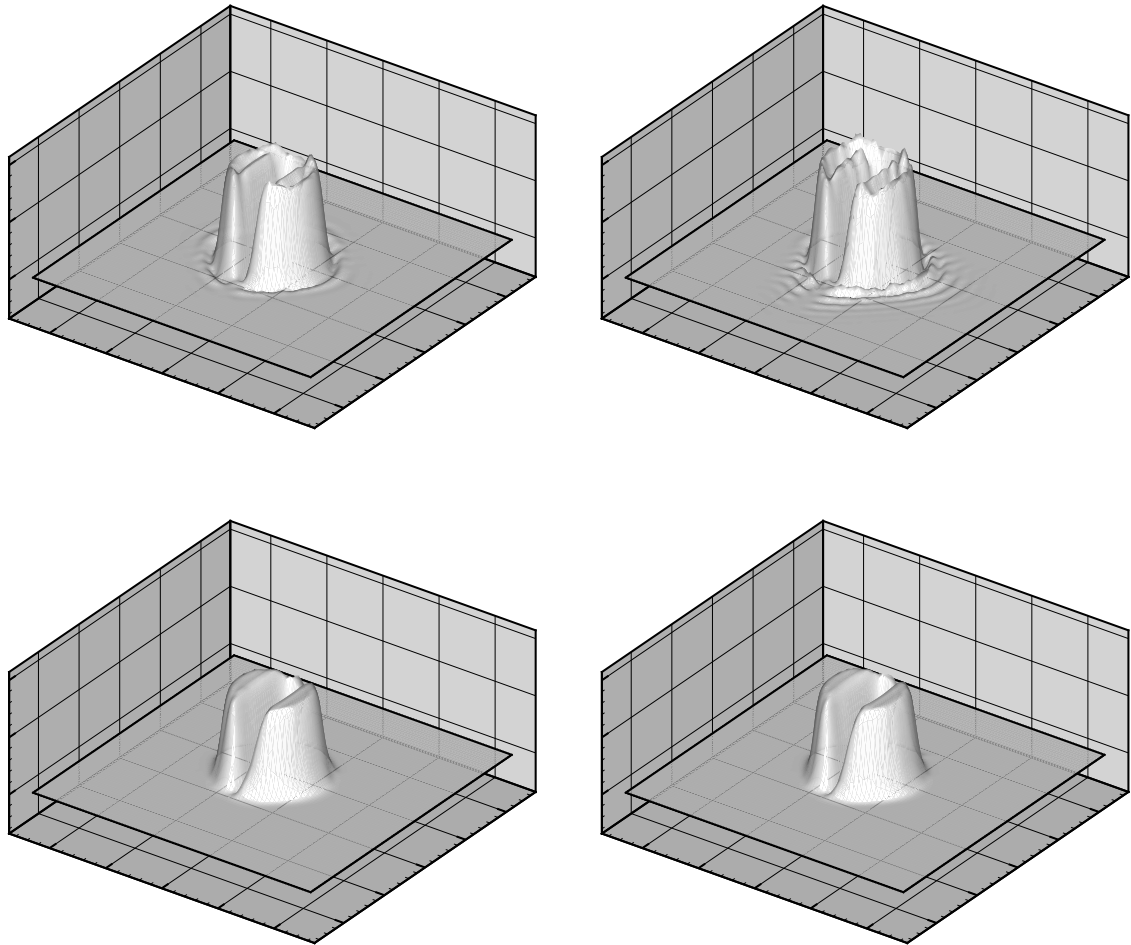


Bild 3.13: Vergleich der Lösung für das Verfahren 5. (links) und 6. (rechts) Ordnung. Oben standard bzw. *fastADER*, unten ADER mit ENO Rekonstruktion.

dargestellt. Auch hier erkennt man sehr deutlich, dass bei dem standard Verfahren 5. Ordnung insgesamt wenig Oszillationen auftreten. Dies ist im Wesentlichen auf den im Verfahren vorhandenen Riemannlöser zurückzuführen, der bei den Verfahren gerader Ordnung nicht vorhanden ist. Mittels dieses Lösert wird an Diskontinuitäten zusätzliche Viskosität eingeführt. Anhand der hier dargestellten Ergebnisse ist erkennbar, dass man für Probleme

me, bei denen starke Gradienten auftreten, ein Verfahren ungerader Ordnung wählen sollte. Desweiteren zeigt es sich, dass bei Problemen dieser Art eine Erhöhung der Verfahrensordnung ebenfalls von Vorteil ist.

Eine andere Möglichkeit wäre es, hier eine ENO Rekonstruktion anzuwenden. Die entsprechenden Normen sind für die Verfahren mit eingeschalteter ENO Rekonstruktion ebenfalls in das Diagramm eingetragen. Man erkennt anhand der in Bild 3.12 dargestellten Fehlernormen, dass sich die Fehler gut reduzieren lassen, und die Ergebnisse insgesamt wesentlich besser aussehen (siehe Bild 3.13). Wie in Kapitel 3.1.5 beschrieben, treten hier jedoch Probleme auf, sobald es Konfigurationen von Unstetigkeiten gibt, zwischen denen kein glattes Rekonstruktionspolynom gefunden werden kann. Dies tritt z.B. in dem Schlitz des Zylinders auf. Wichtig ist es außerdem, die Rechenzeiten zu ver-

Ordnung	<i>fast</i> ADER	ADER	ADER ENO
2	1	5.81	8.98
3	2.23	14.72	17.24
4	2.24	21.43	29.03
5	3.97	83.78	88.64
6	3.98	86.62	142.49
7	6.12	262.13	211.51
8	6.16	256.83	295.35

Tabelle 3.3: Vergleich der CPU Zeiten der ADER Verfahren für die linearisierten Gleichungen: *fast*ADER, standard ADER und ADER ENO, normiert auf die Rechenzeiten von standard ADER $\mathcal{O}2$.

gleichen: Hier sind die ADER ENO Verfahren natürlich sehr viel langsamer als die *fast*ADER Verfahren. Ein direkter Vergleich für verschiedene Verfahrensordnungen ist in Tabelle 3.3 gegeben.

3.3.9 Bemerkungen

Das *fast*ADER Verfahren 2. Ordnung mit 2 Gaussintegrationspunkten im Raum ist identisch mit dem klassischen Einschnitt Lax–Wendroff Verfahren, wie es von Hirsch [39] in Gleichung (17.2.48) beschrieben wird. Interessant

ist, dass das Lax-Wendroff Verfahren ein reines Finites-Differenzen Verfahren ist, mit einer zentralen Rekonstruktion.

3.4 ADER für Nichtlineare Systeme

Nachdem nun für die Verfahren für lineare Systeme eine sehr effiziente Implementierung gefunden wurde und alle wesentlichen Eigenschaften untersucht wurden, stehen jetzt die Verfahren für nichtlineare Systeme im Mittelpunkt. Einige der Eigenschaften, wie z.B. Wellentransporteigenschaften, lassen sich dabei direkt übertragen, wobei hier die ADER Verfahren noch besser abschneiden, da im nichtlinearen Fall Aufsteilungsphänomene auftreten können, was letztendlich eine Verschiebung zu höheren Frequenzen und damit geringeren PPW's bedeutet. Desweiteren werden hier auch Möglichkeiten aufgezeigt, wie sich die Verfahren beschleunigen lassen, wobei das Potenzial leider nicht so groß ist, wie bei den *fast*ADER Verfahren.

3.4.1 Rekonstruktion

Die Rekonstruktion sollte unbedingt, wie schon in Kapitel 3.1.4 beschrieben, aus 1-dimensionalen Rekonstruktionen aufgebaut werden. Für eine Rekonstruktion an den Gausspunkten $\underline{U}_{i+\frac{1}{2},j\pm GP_{pos}}^{\pm}$ bedeutet dies:

Algorithmus 3.4 *Rekonstruktionsalgorithmus:*

- *Rekonstruktion in x-Richtung: Rekonstruiere 1-dimensional aus den Mittelwerten die $\overline{U}_{i+\frac{1}{2},j+jj}^{\pm(k)}$, $jj \in [-O/2 : O/2]$ für den Zustand und alle Ableitungen (k) in x-Richtung:*

$$\overline{U}_{i+\frac{1}{2},j+jj}^{\pm(k)} = \sum_{ii} C_{ii}^{\pm(k)} \overline{U}_{i+ii,j+jj}. \quad (3.81)$$

- *Rekonstruktion in y-Richtung: Rekonstruiere 1-dimensional aus den zuvor berechneten Werten die $\underline{U}_{i+\frac{1}{2},j\pm GP_{pos}}^{\pm(k,l)}$ für den Zustand und alle gemischten Ableitungen:*

$$\underline{U}_{i+\frac{1}{2},j\pm GP_{pos}}^{\pm(k,l)} = \sum_{jj} C_{jj}^{(l)} \overline{U}_{i+\frac{1}{2},j+jj}^{\pm(k)}. \quad (3.82)$$

Wird eine ENO/WENO Prozedur verwendet, so muss diese ebenfalls nur auf den 1-dimensionalen Stern angewandt werden.

\mathcal{O}	ADER-SX		ADER-FX	
	L_∞	L_1	L_∞	L_1
2	1.04161E-01	5.05148E-03	3.42966E-01*	7.22929E-02*
3	1.57849E-02	1.01958E-03	1.91100E-02*	1.21851E-03*
4	4.71258E-03	2.58205E-04	5.02441E-03	2.60538E-04
5	2.10094E-03	1.06778E-04	1.98917E-03	1.06093E-04
6	6.48747E-04	3.34515E-05	6.43696E-04	3.33932E-05
7	4.80091E-04	2.21402E-05	4.80204E-04	2.21403E-05
8	2.13332E-04	8.09738E-06	2.13412E-04	8.09816E-06
9	3.12202E-04	7.21034E-06	3.12193E-04	7.21031E-06
10	7.43320E-05	2.58818E-06	7.43309E-05	2.58817E-06

Tabelle 3.4: Vergleich der Fehlernormen für die ADER-SX und ADER-FX Varianten für die Ordnungen $\mathcal{O}2 - \mathcal{O}10$. Fett markiert ist der jeweils kleinere Fehler. Die mit * markierten Rechnungen waren nur mit einer reduzierten CFL Zahl stabil.

3.4.2 Eigenschaften der linearen Verfahren gerader Ordnung

Wie auch schon bei den Verfahren für die linearisierten Gleichungen hat man auch für die nichtlinearen Gleichungen bei gerader Verfahrensordnung ohne ENO/WENO Rekonstruktion einen zentralen Punktstern. Somit sind die Rekonstruktionen $\underline{U}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \underline{U}_{i+\frac{1}{2}}^- = \underline{U}_{i+\frac{1}{2}}$, und die Lösung des verallgemeinerten Riemann Problems entfällt. Man erhält also ein **zentrales** Verfahren. Diese Verfahren sind für die Lösung glatter Probleme geeignet. Da der größte Teil der Rechenzeit mit der Rekonstruktion verbracht wird, erhält man somit einen deutlichen Geschwindigkeitsvorteil.

3.4.3 Flux Expansion ADER versus State Expansion ADER

In diesem Abschnitt werden die beiden möglichen Varianten des ADER Verfahrens miteinander verglichen (siehe Kapitel 2.3). Bei dem *flux expansion* ADER (ADER-FX) Verfahren wurde das Zeitintegral analytisch gelöst, wohingegen man bei den *state expansion* ADER (ADER-SX) Verfahren hierfür eine Gaussintegration braucht, d.h. man muss zu den Gaussintegrationspunkten

die Taylorreihe auswerten, den Fluss berechnen und dann über alle Gausspunkte summieren. Dagegen müssen bei den ADER-FX Verfahren in der Lax-Wendroff Prozedur zwei zusätzliche Hilfsgrößen berechnet werden (siehe Kapitel 3.2.2). Dafür werden 2 ineinander verschachtelte Schleifen benötigt, um die Leibnizregel auszuwerten. Dies ist aufwändiger als die Auswertung der Gaussintegration. In Tabelle 3.4 sind die Fehler der beiden Varianten für verschiedene Ordnungen aufgetragen. Gerechnet wurde der in Kapitel 3.4.4 beschriebene Wirbel. Man erkennt, dass die beiden Varianten fast die gleichen Fehler erzeugen, und es lässt sich keine Aussage treffen, welches Verfahren genauer ist. Für die Ordnungen $\mathcal{O}2$ und $\mathcal{O}3$ konnte mit der ADER-FX Variante eine stabile Lösung nur mit einer gegenüber der ADER-SX reduzierten CFL Zahl erzeugt werden.

In allen weiteren hier präsentierten Rechnungen wird, soweit nicht anders angegeben, das ADER-SX Verfahren verwendet, da dieses bei gleicher Genauigkeit etwas schneller ist und die Stabilität bei niedriger Ordnung besser zu sein scheint.

3.4.4 Konvergenz

Für die numerische Untersuchung der Konvergenzordnung für die zweidimensionalen Euler Gleichungen wird ein glatter Wirbel, wie in [2] beschrieben, verwendet. Der Wirbel wird mit der Geschwindigkeit $u = v = 1.0$ konvektiert. Das Rechengebiet ist $[-5 : 5] \times [-5 : 5]$. Es werden überall periodische Ränder vorgeschrieben, so dass der Wirbel nach der Zeit $t^{end} = 10$ wieder an der Startposition angelangt ist. Der numerische Fehler ergibt sich nun aus $\underline{U}^{t=10} - \underline{U}^{t=0}$. Die Anfangsbedingungen lauten:

$$u = 1 - \frac{\epsilon}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1-r^2)} y \quad (3.83)$$

$$v = 1 + \frac{\epsilon}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1-r^2)} x \quad (3.84)$$

$$T = 1 - \frac{(\gamma - 1)\epsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{(1-r^2)} \quad (3.85)$$

$$\rho = (1 + T)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.86)$$

$$p = (1 + T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.87)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3.88)$$

$$\epsilon = 5. \quad (3.89)$$

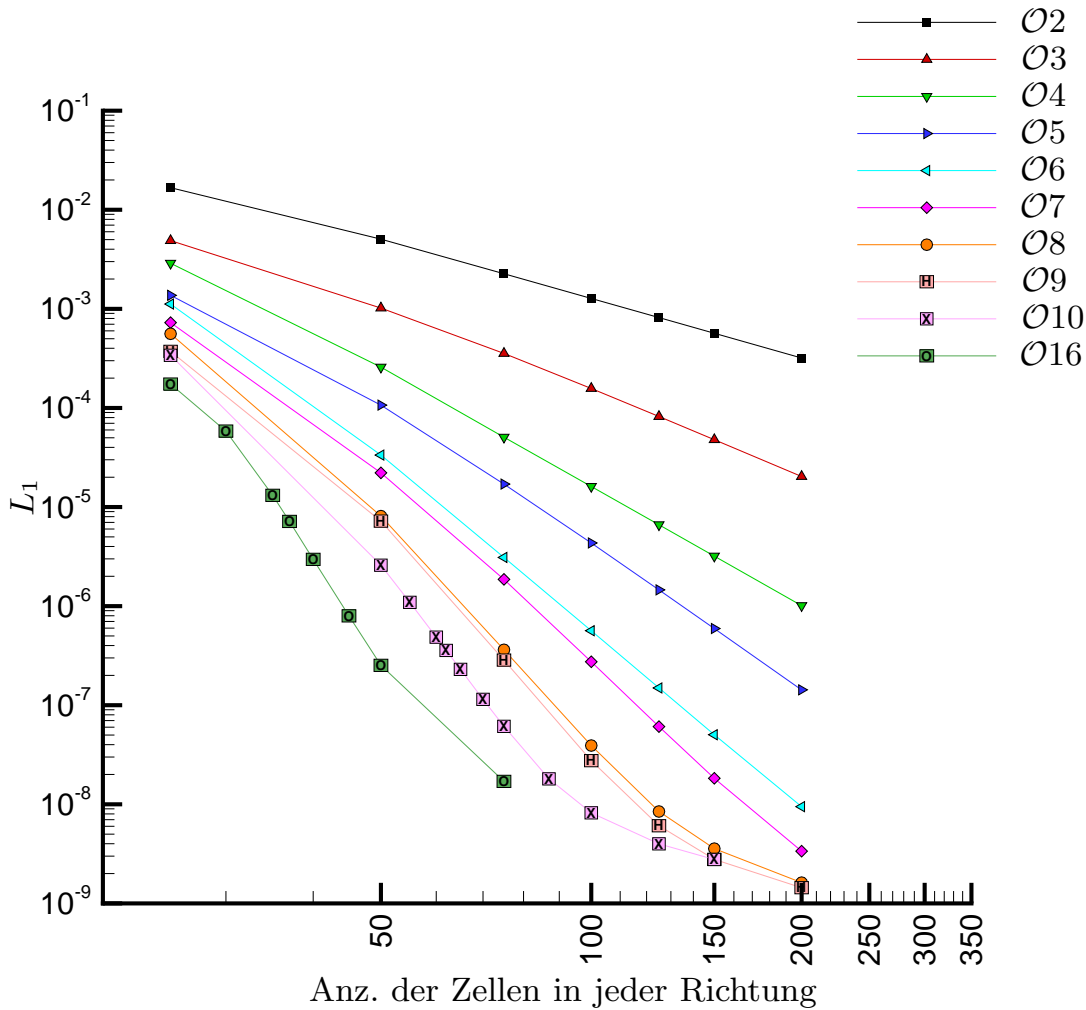


Bild 3.14: Log-log Darstellung der Konvergenzraten der ADER $\mathcal{O}2$ - $\mathcal{O}10, \mathcal{O}16$ Verfahren

Hier ist ϵ die Wirbelstärke und T die Temperatur.

Wichtig ist bei diesem Beispiel, dass die Anfangsbedingungen korrekt im Finiten-Volumen Sinn gesetzt werden. Da bei den Finiten-Volumen Verfahren die integralen Mittelwerte der Zellen abgespeichert werden, bedeutet dies, dass die obige Anfangsbedingung an N_{GP} Gausspunkten ausgewertet und integriert werden muss. Die Anzahl der Gausspunkte ist dabei durch die Verfahrensordnung festgelegt [73]. Macht man dies nicht, so erhält man letztendlich nur eine Konvergenz von 2, was genau der Ordnung der Integration mit nur einem Gausspunkt entspricht.

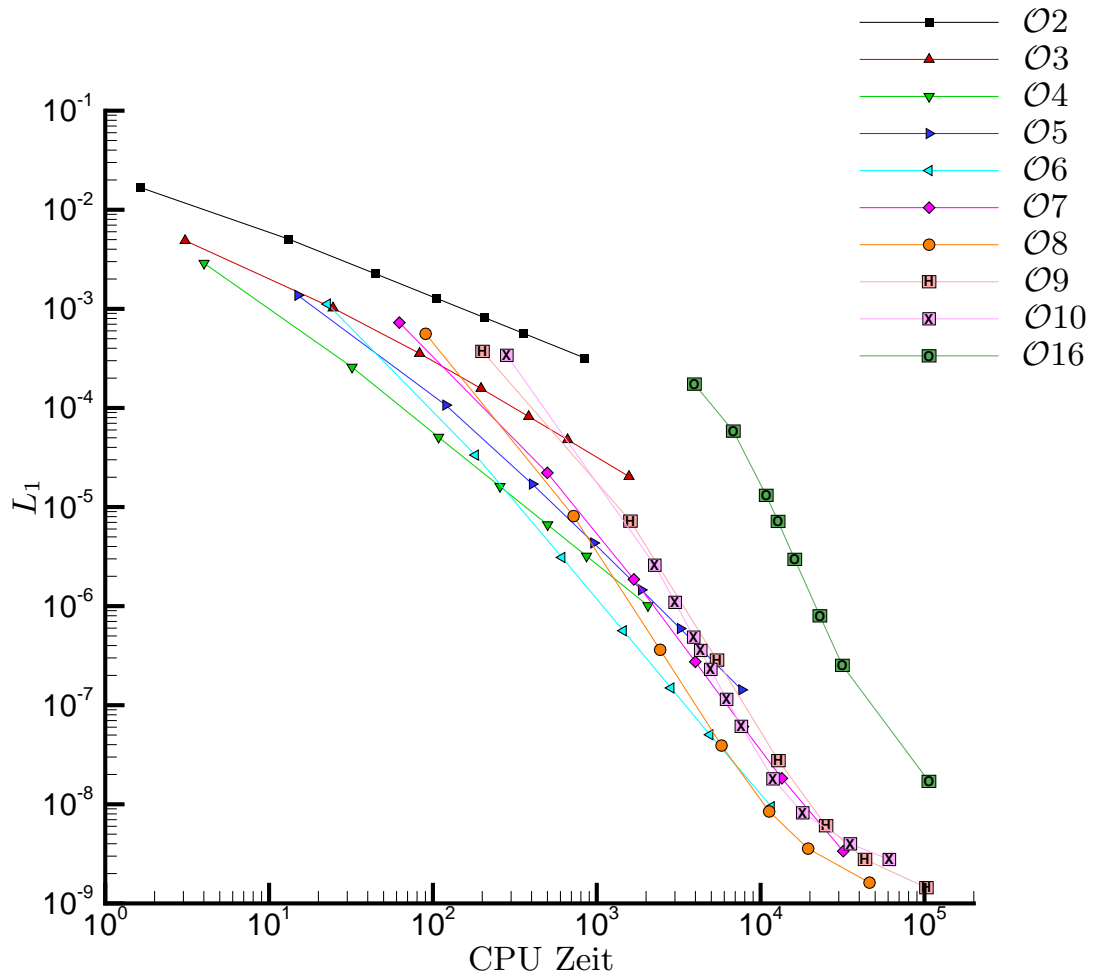


Bild 3.15: Log-log Darstellung der Konvergenzraten der ADER $\mathcal{O}2$ - $\mathcal{O}10, \mathcal{O}16$ Verfahren, aufgetragen über die CPU Zeit

Die Ergebnisse für die verschiedenen Verfahrensordnungen sind in Diagramm 3.14 dargestellt. Die dazugehörigen Werte sind im Anhang A.2, Tabellen A.5-A.9 zu finden. Betrachtet wurde hier der Fehler in der Dichte. Man erkennt sehr deutlich, dass die Ordnung des Verfahrens bis zur 7. Ordnung sehr gut in den Daten reproduziert wird. Auch die 8.-10. Ordnung wird noch gut erreicht, wobei man hier schon bei den feinen Gittern eine Abnahme der Konvergenzrate beobachten kann. Für die 16. Ordnung schließlich erreicht man als maximale Rate lediglich 14.4. Es war mit keinem Verfahren möglich, einen Fehler geringer als 1.0×10^{-9} zu produzieren. Daraus kann geschlossen

werden, dass dies auf der gegebenen Rechnerarchitektur bereits der Rechengenauigkeit bei diesem Beispiel entspricht. Dies ist auch in Bild 3.14 zu erkennen: Hier schwenken alle Kurven auf eine Gerade bei diesem Fehler ein. In Bild 3.15 sind, wie auch schon bei den *fast*ADER Verfahren, die Fehler über die CPU-Zeit aufgetragen. Da bei den Verfahren für die nichtlinearen Gleichungen die Anzahl der zu rekonstruierenden Ableitungen sehr stark mit der Ordnung anwächst, ergibt sich jedoch ein etwas anderes Bild. Die Fehlergrenze, ab dem sich ein Verfahren hoher Ordnung auszahlt, ist deutlich restriktiver. Die Verfahren 4. (Fehler $< 1 \times 10^{-2}$) und 6. (Fehler $< 2 \times 10^{-5}$) Ordnung sind über einen weiten Bereich hin die effizientesten. Lediglich bei sehr genauen Rechnungen (Fehler $< 3 \times 10^{-8}$) lohnt sich noch das Verfahren 8. Ordnung. Dass stets die Verfahren gerader Ordnung am effizientesten sind, liegt an den im Abschnitt 3.4.2 besprochenen Eigenschaften. Desweiteren ist zu beachten, dass die hier verwendeten Ergebnisse auf einer Rekonstruktion nach *dimension-by-dimension* Prinzip, wie in Kapitel 3.4.1 beschrieben, beruhen. Wenn eine andere Rekonstruktionsmethode verwendet wird, sieht dieses Diagramm anders aus.

3.4.5 Stabilität

Für die Verfahren für nichtlineare Gleichungen wurde keine von-Neumann Stabilitäts Analyse durchgeführt. Stattdessen wird die Stabilität experimentell, d.h. anhand eines numerischen Beispiels untersucht. Bei dem verwendeten Testfall, der ein Modell für die Wechselwirkung eines Stoßes mit turbulenten Strukturen ist, läuft ein Dichtesprung in eine sinusförmige Dichteverteilung. Bei diesem Testfall müssen sowohl der Sprung als auch die Welleneigenschaften aufgelöst werden, was ihn zu einem sehr interessanten Beispiel macht. Zum einen benötigt man zur richtigen Abbildung der Wellen ein Verfahren hoher Ordnung, zum anderen aber an dem Stoß ein Verfahren welches äußerst robust sein muss. Der ursprüngliche Test wurde in [2,41] vorgeschlagen. Hier wird eine in [90] vorgestellte Variation verwendet, bei der die Machzahl des nach rechts laufenden Stoßes nur $Ma = 1.1$ beträgt. Die Anfangsbedingungen auf einem Rechengebiet $[-5 : 5]$ sind mit

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.515695, & 0.523346, & 1.80500), & x < -4.5 \\ (1 + 0.1 \sin(20\pi x), & 0.0, & 1.0), & x > -4.5 \end{cases} \quad (3.90)$$

gegeben. Das Rechengebiet wurde mit $NI = 1000$ Zellen diskretisiert. Verglichen werden die Lösungen zum Zeitpunkt $t = 5$, wobei als Referenzlösung

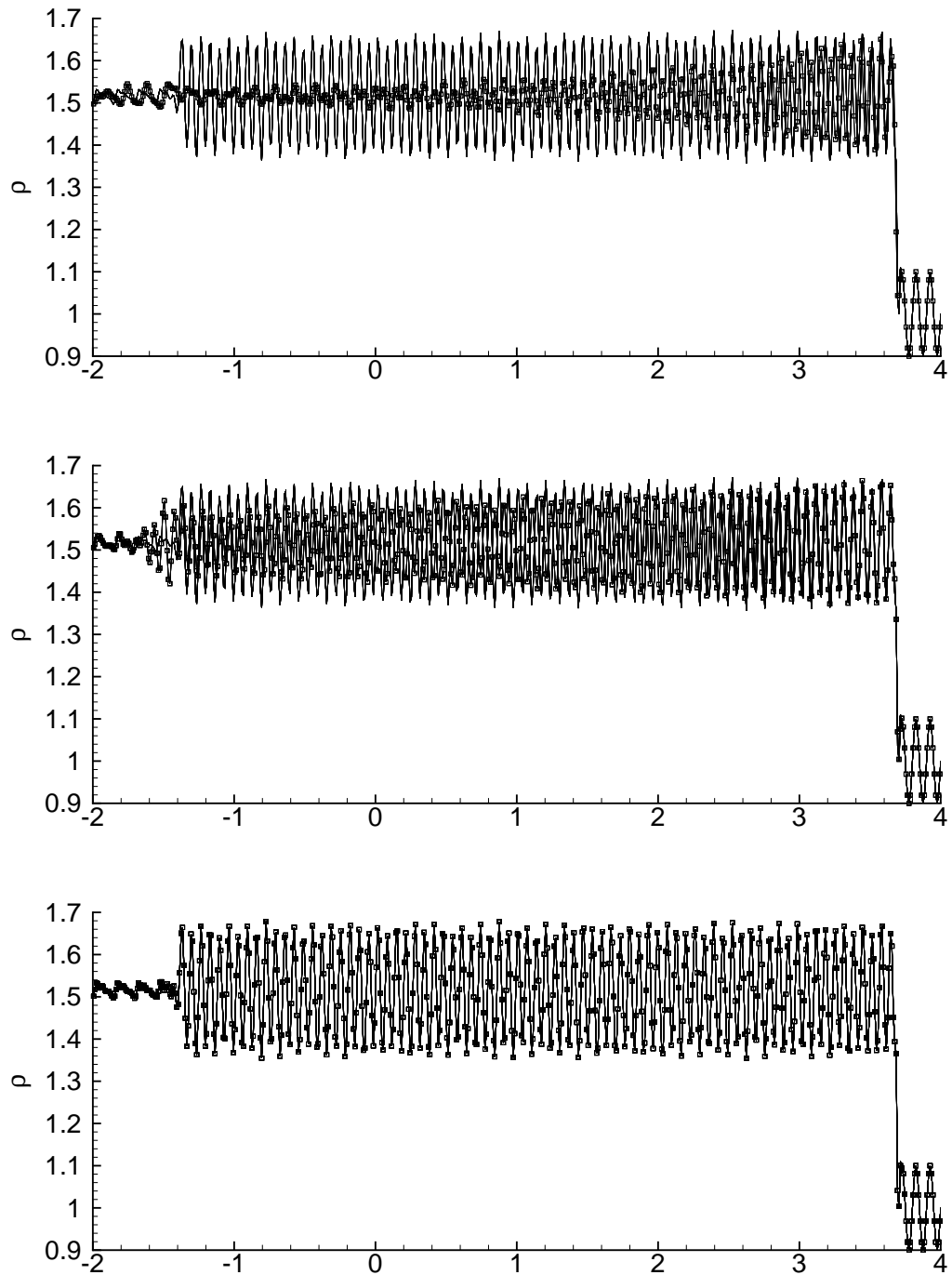


Bild 3.16: Vergleich der linearen Verfahren gerader Ordnung. ADER $\mathcal{O}2$, ADER $\mathcal{O}4$ und ADER $\mathcal{O}10$.

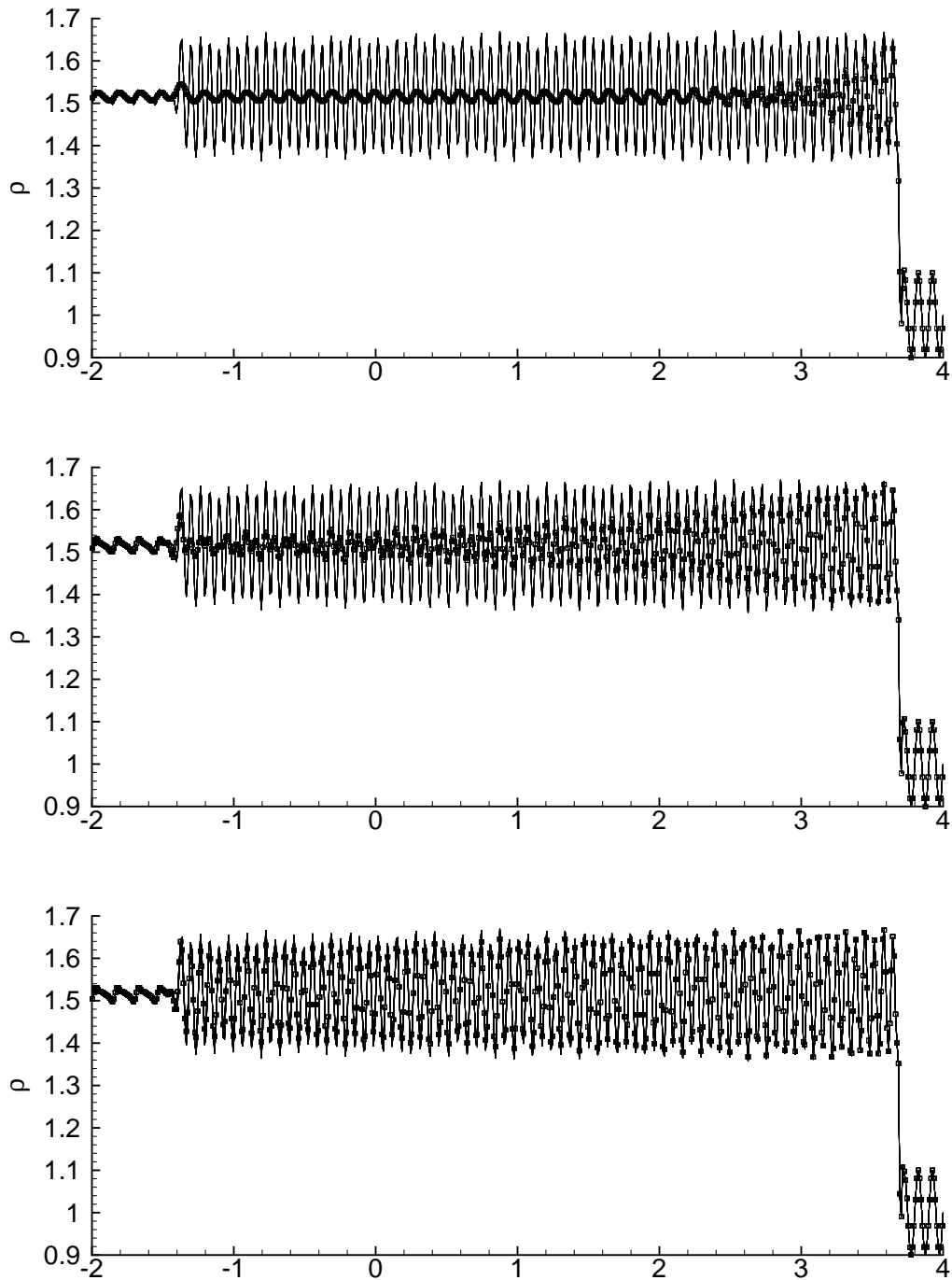


Bild 3.17: Vergleich der linearen Verfahren ungerader Ordnung.
ADER $\mathcal{O}3$, ADER $\mathcal{O}5$ und ADER $\mathcal{O}7$.

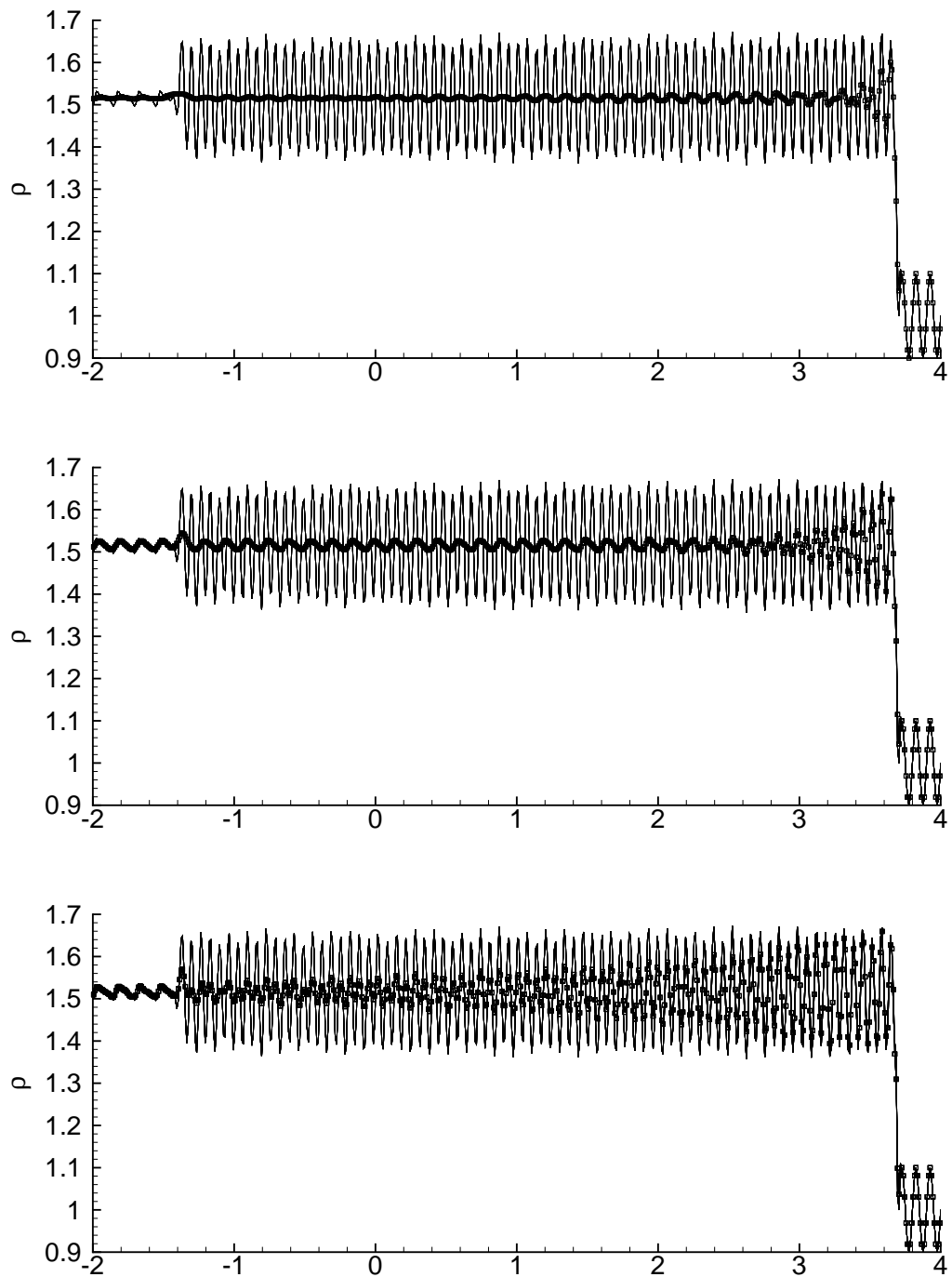


Bild 3.18: Vergleich der Verfahren mit ENO Rekonstruktion. ADER $\mathcal{O}2$ ENO, ADER $\mathcal{O}3$ ENO und ADER $\mathcal{O}5$ ENO.

die Lösung des linearen ADER Verfahrens 9. Ordnung verwendet wird. In Bild 3.16 ist das Ergebnis für die linearen ADER Verfahren gerader Ordnung für die Ordnungen $\mathcal{O}2$, $\mathcal{O}4$ und $\mathcal{O}10$ dargestellt. Die Lösungen der Ordnungen $\mathcal{O}6$ und $\mathcal{O}8$ entsprechen schon der Lösung der 10. Ordnung und werden daher nicht dargestellt. Man erkennt, dass die Wellen ab dem Verfahren 4. Ordnung bereits gut berechnet werden, wobei hier noch ein wenig Dämpfung auftritt. Der Stoß selber ist bei allen Ordnungen sehr gut aufgelöst. Interessant ist nun ein Vergleich mit den Ergebnissen für die ungeraden Ordnungen, die in Bild 3.17 dargestellt sind. Hier tritt wesentlich mehr Dämpfung auf, als bei den zentralen (geraden) Verfahren mit einer Ordnung niedriger. Erst die Lösung des ADER Verfahrens 7. Ordnung stimmt gut mit der Referenzlösung überein. Man erkennt damit wieder, dass die Verfahren gerader Ordnung für Probleme mit glatten, wellenartigen Strukturen wesentlich besser geeignet sind als die Verfahren ungerader Ordnung. In Bild 3.18 sind schließlich noch die Lösungen mit einer ENO Rekonstruktion eingetragen. Diese Verfahren sind wesentlich instabiler als die linearen Verfahren. So konnte für Ordnungen größer als 5. selbst bei sehr kleinen CFL Zahlen keine stabile Lösung mehr erzeugt werden. Der Unterschied zwischen dem ADER $\mathcal{O}3$ und dem ADER $\mathcal{O}3$ ENO bzw. dem ADER $\mathcal{O}5$ und dem ADER $\mathcal{O}5$ ENO Verfahren fällt sehr gering aus. Für das ADER $\mathcal{O}2$ ENO Verfahren dagegen erhält man erwartungsgemäß einen größeren Fehler, da nun kein zentrales Verfahren mehr vorliegt, sondern mit unterschiedlichen Rekonstruktionen echte Riemann Probleme am Zellrand erzeugt werden und der Riemannlöser somit aktiv wird.

Als nächstes wird der originale Testfall verwendet [2, 41]. Die Anfangsbedingung auf einem Rechengebiet $[-5 : 5]$ ist nun:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857, & 2.6294, 10.333), & x < -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), & 0.0, 1.0), & x > -4 \end{cases}, \quad (3.91)$$

wobei nun die Stoßmachzahl $Ma = 3.0$ beträgt. Gerechnet wurde bis $t = 1.8$ mit dem **zentralen** ADER $\mathcal{O}4$ Verfahren bei $CFL = 0.9$ und dem ADER $\mathcal{O}4$ ENO Verfahren bei $CFL = 0.8$. Die Ergebnisse sind in Bild 3.19 dargestellt. Die Lösung mit ENO Rekonstruktion ist sehr viel glatter. Bei dem linearen Verfahren treten an den Diskontinuitäten, d.h. am Stoß und auch an den aufgeteilten Wellen, Oszillationen auf. Die Lösung ist jedoch sehr gut, wenn man beachtet, dass in diesem Verfahren keinerlei Riemann Probleme gelöst werden.

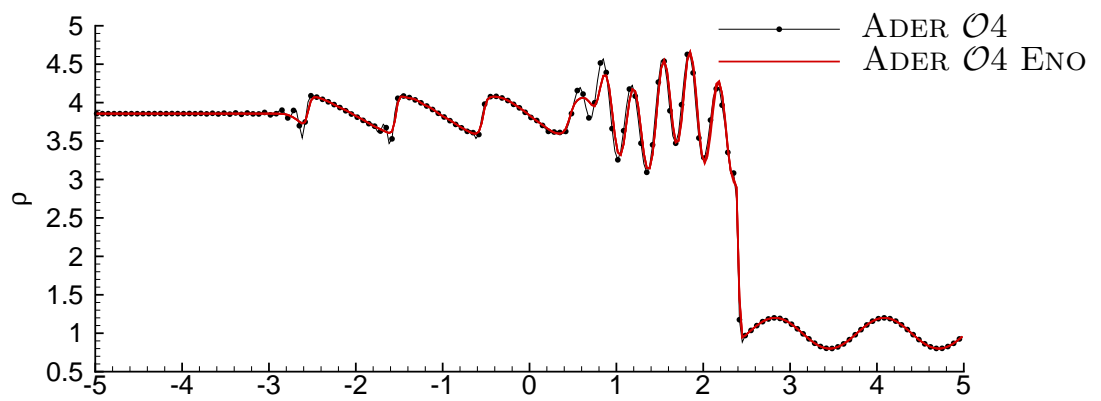


Bild 3.19: Vergleich der Lösung von dem ADER $\mathcal{O}4$ und dem ADER $\mathcal{O}4$ ENO Verfahren

4 Heterogene Gebietszerlegung für die Aeroakustik

In diesem Kapitel wird die heterogene Gebietszerlegung für die numerische Aeroakustik eingeführt. Diese Methode soll es ermöglichen, sehr komplexe Probleme numerisch zu simulieren. Erste Versuche in dieser Richtung wurden von Freund, Lele und Moin [31] 1993 unternommen. Hier wurden zwei Gebiete mit unterschiedlichen Gleichungen aneinander gekoppelt, in denen die nichtlinearen und die linearisierten Euler Gleichungen gelöst wurden, um so den Fernfeldschall eines Strahls zu berechnen. Der hier vorgestellte Ansatz geht jedoch weiter und erlaubt es, dass über den Rand hinweg auch die Zeitschritte, sowie Gitter und numerische Verfahren wechseln dürfen. Die Verknüpfung der Gebiete erfolgt dabei vollautomatisch.

4.1 Grundlegende Probleme

In der numerische Aeroakustik (CAA) geht es darum, den Schall zu berechnen, der durch reine Strömungsphänomene, bzw. durch die Wechselwirkung zwischen Strömung und Festkörpern entsteht. Die verbreitetste Methode, um Probleme dieser Art zu lösen, ist es, eine akustische Analogie wie in Kapitel 1.1.2 beschrieben anzuwenden. Hier soll nun eine andere Strategie, die direkte Simulation, versucht werden. Damit können die Unsicherheiten, die in den Analogien stecken, umgangen werden.

Zunächst werden die grundlegenden Probleme einer direkten Simulation von akustischen Problemen beschrieben. Diese lassen sich im Wesentlichen in drei Gruppen einteilen:

- I. Startpunkt ist das physikalische Problem, ohne Approximationen. Prinzipiell wird das gesamte Problem durch die nichtlinearen kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen beschrieben. Es ist jedoch nicht notwendig, alle Effekte in jedem Teil des Gebietes zu berücksichtigen. Es existieren drei verschiedene Gebiete: 1. In dem Gebiet um einen Körper oder eine Scherschicht sollten sowohl alle nichtlinearen als auch alle viskosen Effekte berücksichtigt werden. 2. Etwas weiter entfernt kann man dann die viskosen Effekte vernachlässigen und die einfacheren, nichtlinearen Euler Gleichungen verwenden. 3. Noch weiter entfernt spielen nichtlineare Effekte keine Rolle mehr und die linearisierten Euler Gleichungen sind ein gutes mathematisches Modell. Dies ist dann ein Gebiet in dem

nur noch kleine Störungen wie z.B. die akustische Wellenausbreitung auftreten.

- II. Als Nächstes wird das Mehrskalenproblem in der Aeroakustik betrachtet. Die akustische Wellenlänge ist sehr viel größer als die charakteristischen Wellenlängen der Strömungsphänomene, wie z.B. Wirbel. Betrachtet man dagegen die Energieskalen, so findet man wesentlich größere Fluktuationen in den Strömungsphänomenen als in den akustischen Schallwellen. Desweiteren haben die Wirbel als charakteristische Transportgeschwindigkeit die Strömungsgeschwindigkeit, wohingegen die akustischen Wellen mit Schallgeschwindigkeit laufen. Diese Skalenunterschiede werden umso größer, je kleiner die zum Problem gehörige Machzahl ist.
- III. Zuletzt wird noch die Numerik betrachtet. In der Umgebung von komplexen Körpern gibt es zwei Möglichkeiten, wie diese aufgelöst werden können: Dies ist zum Ersten ein blockstrukturiertes, körperangepasstes Vorgehen. Der Nachteil hier ist, dass in der Regel viele Gitterblöcke erzeugt werden müssen, die an den Übergängen zusammenpassen müssen. Dies ist insbesondere bei dreidimensionalen Rechnung sehr kompliziert. Somit ist der Grad der Komplexität letztendlich beschränkt. Die zweite Möglichkeit ist die Verwendung von unstrukturierten Gittern. Damit lassen sich beliebig komplexe Körper vernetzen. Der Nachteil hier ist jedoch, dass die Rekonstruktion hoher Ordnung sehr schwierig wird. Die Probleme der Rekonstruktion können mit Hilfe der Discontinuous Galerkin Verfahren umgangen werden. Hier wird der Ansatz der unstrukturierten Gitter verfolgt, da diese die größere Flexibilität bieten. In den Bereichen, in denen kein Körper existiert, besteht dagegen keine Notwendigkeit, unstrukturierte Gitter zu verwenden. Hier sollen aus den folgenden Gründen strukturierte kartesische Gitter verwendet werden: Die Algorithmen benötigen weniger Speicher, können sehr viel effizienter implementiert werden und auch die hohe Ordnung ist leichter zu verwirklichen.

Die Idee der heterogenen Gebietszerlegung ist es, das Rechengebiet in einzelne Teilgebiete zu zerlegen. Die verwendeten Gleichungen werden an die relevanten, lokalen Phänomene angepasst. Die Gitter und, wegen der CFL Bedingung, auch die Zeitschritte werden so groß wie möglich gewählt und die numerischen Verfahren flexibel angepasst.

4.2 Kopplungsalgorithmen

In dem hier dargestellten Ansatz soll es möglich sein, dass

- I. das numerische Verfahren
- II. das Gitter und der Gittertyp
- III. der Zeitschritt
- IV. die Gleichung

in jedem Teilgebiet an die lokalen Gegebenheiten angepasst werden können. In den folgenden Abschnitten wird jeder einzelne dieser Aspekte getrennt voneinander untersucht.

Die Kopplung selber wurde in dem neu entwickelten Programm KOP2D verwirklicht, in das die bereits vorhandenen, Programme HYDSOL (unstrukturierte Gitter) und EULER3D (strukturierte Gitter) integriert wurden. Die Algorithmen des Kopplungsprogrammes werden dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels beschrieben.

4.2.1 Numerische Verfahren

Die bisher dargestellten Verfahren wurden für strukturiert kartesische Gitter hergeleitet. Der Nachteil der strukturierten Gitter ist, dass damit komplexe Körper nur schwer diskretisiert werden können. Die Diskretisierung mit unstrukturierten Gittern bietet sich daher für diese Probleme an. Allerdings ist der Rekonstruktionsschritt hoher Ordnung auf unstrukturierten Gittern sehr aufwändig. Die Discontinuous-Galerkin Verfahren können diesen Nachteil beheben, da diese Verfahren sehr lokal sind. Für die Zeitintegration müssen nur die direkten Nachbarn, bzw. der Fluss zwischen diesen bekannt sein. Eine Gegenüberstellung der Vor- und Nachteile von Finiten-Volumen und Discontinuous-Galerkin Verfahren ist in Tabelle 4.1 gegeben.

Das Ziel der heterogenen Gebietszerlegung ist, die Vorteile der beiden Verfahren zu kombinieren. Dazu werden nur in direkter Nähe der komplexen Körper unstrukturierte Gitter mit Discontinuous Galerkin Verfahren verwendet, und es wird so schnell wie möglich auf strukturierte kartesische Gitter mit Finiten-Volumen Diskretisierung umgeschaltet. Hier kommt der Vorteil der DG Verfahren zum Tragen, dass die Konvergenzraten auf verzerrten Gittern hoch bleiben und somit ein sehr schneller Übergang möglich ist.

FV-Verfahren	DG-Verfahren
+ leicht zu implementieren	- schwierig zu implementieren
+ hohe Ordnung auf regulären, strukturierten Gittern	- langsam
+ schnelle Algorithmen für strukturierte Gitter	+ effizient parallelisierbar
- hohe Ordnung auf unstrukturierten Gittern ist schwierig	+ hohe Ordnung auf unstrukturierten Gittern ist leicht
- unstrukturierte Gitter müssen regulär sein	+ hohe Konvergenzraten auf irregulären Gittern

Tabelle 4.1: Vergleich von Finite-Volumen und Discontinuous-Galerkin Verfahren

4.2.2 Gitter

Zwei unterschiedliche Gebiete Ω_1 und Ω_2 werden über den gemeinsamen Rand $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Gamma$ miteinander gekoppelt. Die Kopplung erfolgt ausschließlich über die Daten, die in den Ghost-Zellen für jedes Gebiet vorgegeben werden, und nicht über die Flüsse. Die Gebiete dürfen sich dabei auch überlappen. Die Ghost-Zellen werden dann für die Zeitintegration der regulären Zellen im Inneren verwendet. Die Anzahl der Ghost-Zellen hängt stark vom verwendeten Verfahren und von der Ordnung ab. So brauchen die DG Verfahren lediglich eine Reihe von Ghost-Zellen, wohingegen die FV Verfahren $\mathcal{O}/2 + 1$ Ghost-Zellenreihen benötigen.

Bei der Berechnung der Ghost-Zellen können zwei Fälle auftreten:

- I. **Mittelung:** Die Projektion der Ghost-Zelle auf das Kopplungsgebiet ist größer als eine Zelle (linke Abbildung in Bild 4.1). In diesem Fall wird ein integraler Mittelwert aus allen Zellen, die ganz oder teilweise innerhalb der Ghost-Zelle liegen, gebildet. Das Gewicht dieser Mittelung ist das Verhältnis von der Schnittfläche der Projektion der Ghostzelle auf die Zellen des Kopplungsgebietes zu der Gesamtfläche der Ghost-Zelle. Im Detail bedeutet dies: Für eine konservative Mittelung von Daten von einem feinem Gitter Ω_f auf ein grobes Gitter Ω_g werden alle Zellen $T_i \in \Omega_f$ berücksichtigt, welche die Ghostzelle G ganz oder teilweise überdecken. Bei einer teilweisen Überdeckung werden die Schnittpo-

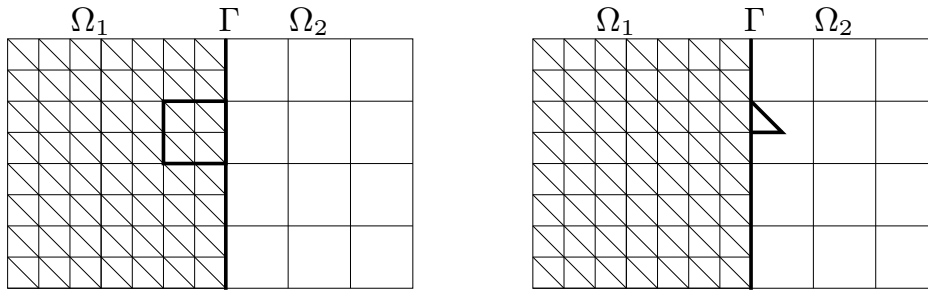


Bild 4.1: Kopplung verschiedener Gitter: Mittelung und Interpolation

lygone $S_i = T_i \cap G$ der beiden Zellen berechnet. Wie man anhand

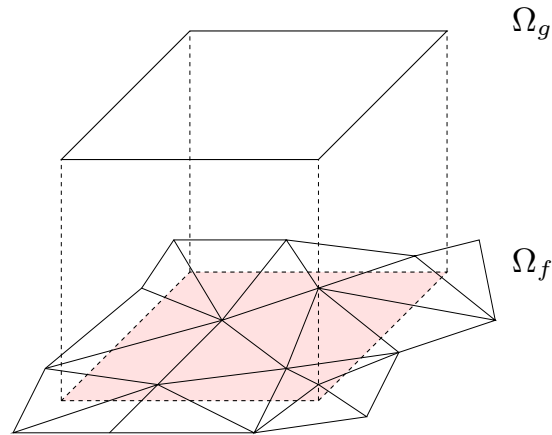


Bild 4.2: Volumengewichtete Mittelung

des Bildes 4.2 erkennt, können dabei sehr komplizierte und sehr kleine Schnittpolygone entstehen. Für die Gewichtung der Daten wird dann das Volumen V_{S_i} der Zelle bzw. des Schnittpolygons berechnet und auf das Volumen der Ghostzelle V_G bezogen:

$$\bar{U}_G^{\Omega_g} = \frac{1}{V_G} \sum_i V_{S_i} \bar{U}_i^{\Omega_f}. \quad (4.1)$$

Der Algorithmus zur Bestimmung der Polygone und deren Fläche ist der Folgende:

Algorithmus 4.1 *Algorithmus zur Bestimmung der Verschneidungs-*

fläche zweier beliebiger Elemente E_1 und E_2 und deren Volumenbestimmung:

- (a) Bestimme alle Punkte von E_1 die in E_2 liegen und trage diese in die Liste L ein.
- (b) Bestimme alle Punkte von E_2 die in E_1 liegen und trage diese in L ein.
- (c) Berechne alle Schnittpunkte der Kanten von E_1 mit den Kanten von E_2 .
- (d) Berechne $x_m = 1/n \sum_{i=1}^n x_n$ und $y_m = 1/n \sum_{i=1}^n y_n$ mit $n =$ Anzahl Elemente in L und x_n, y_n aus der Liste L .
- (e) Sortiere alle Elemente aus L , sodass die Elemente gegen den Uhrzeigersinn von $\{x_m, y_m\}$ aus gesehen liegen.
- (f) Bestimme die Fläche der Dreiecke, die von den Knoten $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \dots, \{1, n-1, n\}$ aus L aufgespannt werden und addiere diese.

II. **Interpolation:** Die Projektion der Ghostzelle liegt innerhalb einer Zelle des Partnergebietes, bzw. ist kleiner als die Partnerzelle (rechte Abbildung von Bild 4.1). In diesem Fall wird eine konservative Interpolation vom Grobgitter auf die Ghostzelle benutzt.

Um eine echt konservative Interpolation von dem groben Gitter Ω_g auf das feine Gitter Ω_f zu erhalten, wird in der Ghostzelle G an den durch die gewünschte Ordnung \mathcal{O} vorgegebenen Gaussintegrationspunkten $\underline{X}_i, i = \{1, \dots, N_{GP}\}$ interpoliert. Dazu wird die in Kapitel 3.1 be-

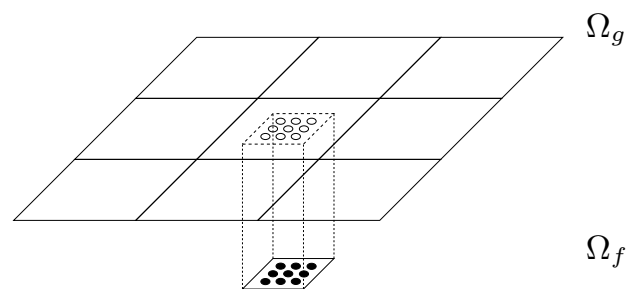


Bild 4.3: Interpolation an den Gaussintegrationspunkten

schriebene, 2-dimensionale Lagrange Interpolation $\mathcal{L}^{\Omega_g}(\underline{X})$ verwendet,

die eine Interpolation der Funktionswerte \underline{U} und deren Ableitungen aus gegebenen, integralen Mittelwerten $\overline{\underline{U}}^{\Omega_g}$ (die in den Zellen gespeicherten Werte) liefert. Anschließend wird über die Gaussintegrationspunkte mit den entsprechenden Gewichten ω_i summiert, um so einen integralen Mittelwert zu erhalten:

$$\overline{\underline{U}}_G^{\Omega_f} = \sum_{i=1}^{N_{GP}} \omega_i \underline{U}_{GP_i} \quad (4.2)$$

$$\underline{U}_{GP_i} = \mathcal{L}^{\Omega_g}(\underline{X}_i). \quad (4.3)$$

4.2.3 Zeitschritt

Um dem Ziel der Effizienzsteigerung näher zu kommen, soll es erlaubt werden, in jedem der Teilgebiete Ω_i unterschiedliche Zeitschritte zu verwenden. Dieser soll in jedem Teilgebiet möglichst nahe am Stabilitätslimit liegen. Die einzige Forderung, die an den Zeitschritt der Teilgebiete gestellt wird, ist:

Bedingung 4.1 *Sei Ω_2 das Gebiet, in dem der Zeitschritt Δt_2 gemacht werden darf, und Ω_1 das Gebiet mit dem Zeitschritt $\Delta t_1 \leq \Delta t_2$. Dann darf in Ω_2 nur ein einziger Zeitschritt durchgeführt werden, um wieder zu einem gemeinsamen Zeitniveau zu kommen. In dem Gebiet werden dabei $\Delta t_2/\Delta t_1$ Zeitschritte durchgeführt, welche im Folgenden Subcycles genannt werden.*

Das Vorgehen solch einer Integration ist in Bild 4.4 dargestellt. Zunächst werden bei einem gemeinsamen Zeitpunkt t^n die Daten durch Interpolation und Mittelung wie in Kapitel 4.2.2 ausgetauscht. Anschließend erfolgen zwei reguläre Zeitintegrationen im Gebiet Ω_1 mitsamt den Ghostzellen. Um zum gemeinsamen Zeitniveau t^{n+1} zu gelangen, wird sowohl Ω_1 als auch Ω_2 ein weiteres Mal in der Zeit integriert, woraufhin wieder durch Mittelung und Interpolation die Daten ausgetauscht werden. Das Problematische an dieser Prozedur ist sicherlich die Zeitintegration der Ghostzellen, da die letzten verlässlichen Daten nur zum Zeitpunkt t^n vorliegen.

Diese Ghostzellen gehören normalerweise zu einem feineren Gitter, weswegen sie durch Interpolation bestimmt wurden. Mittels dieser Interpolation erhält man ebenfalls eine Aussage über alle Ableitungen bis zum Grad der Ordnung der Interpolation.

Die Schlüsselidee hier ist es nun, für die Zeitintegration der Ghostzellen ein herkömmliches Lax-Wendroff Zeitintegrationsverfahren [38,45] zu verwenden.

Dazu wird eine Taylorreihe in der Zeit aufgestellt:

$$\underline{U}(\underline{X}_0, t^n + \tau) = \underline{U}(\underline{X}_0, t^n) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} \frac{\partial \underline{U}^i(\underline{X}_0, t^n)}{\partial t^i}. \quad (4.4)$$

Wie zuvor schon beim ADER Verfahren werden nun die unbekanntes Zeitableitungen durch Raumableitungen mittels der in Kapitel 3.2 beschriebenen Lax-Wendroff Prozedur ersetzt. Diese Taylorreihe wird zu den neuen, gewünschten Zwischenzeitpunkten ausgewertet.

Der große Vorteil dieser Methode ist, dass für das Zeit-Update selber keinerlei weiteren Informationen über das Gitter, d.h. Gitterschrittweiten, benötigt werden. Da die Ableitungen aber auf dem groben Gitter bestimmt werden, ist der Stabilitätsbereich des Verfahrens entsprechend dem des groben Gitters. Die CFL Zahl bezogen auf die feine Ghost-Zelle kann somit größer als 1 sein, und alle Abschätzungen der Gitterzellen liegen im stabilen Bereich des Verfahrens.

Dabei ist zu beachten, dass in der Regel die Zeitintegration in jedem Gausspunkt durchgeführt wird und dann über die in der Zeit integrierten Werte im Raum integriert wird. Für den Fall dass in Ω_f die linearisierten Gleichungen gelöst werden, kann die Integration im Raum schon bei der Generierung der Interpolationskoeffizienten durchgeführt werden, so dass nur der integrale Mittelwert direkt in der Zeit integriert werden muss.

4.2.4 Gleichungen

Die richtige Kopplung der Gleichungen ist einer der schwierigsten Punkte in dem Gesamtkonzept. Die Kopplung der Navier-Stokes Gleichungen mit den Potentialgleichungen für stationäre Probleme wurde von Coclici [18, 21] untersucht und für magnetoplasmische Antriebe von Coclici, Heiermann, et. al. [1, 20]. Die Kopplung zweier allgemeiner hyperbolischer Systeme wurde von Godlewski und Raviart [32] diskutiert.

Hier wird die Kopplung der nichtlinearen Euler Gleichungen mit den linearisierten Euler Gleichungen beschrieben [53, 65]. Wird eine konservative Kopplung, wie in den oben zitierten Werken, benutzt, d.h. es wird vorgeschrieben, dass die Flüsse über den Rand gleich sind, so kann man die zu erwartenden Fehler leicht abschätzen. Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten wechseln über diesen Rand hinweg von den nichtlinearen $u + \sqrt{\gamma p / \rho}$ zu den linearisierten $u_0 + \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$. Damit kann man annehmen, dass hier zwei unterschiedliche Materialien mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten vor-

liegen. Der Rand $\partial\Omega$ stellt dann eine Materialgrenze dar, und die Reflexions- und Brechungseigenschaften können leicht mittels der Physik der Wellen abgeschätzt werden [77]:

$$n^{LE} = \frac{1}{u_0 + c_0} \quad (4.5)$$

$$n^E = \frac{1}{u + c} \quad (4.6)$$

$$r = \left(\frac{n^{LE} - n^E}{n^{LE} + n^E} \right)^2 \approx \left(\frac{u' + \mathcal{O}(c')}{2\mathcal{O}(u_0) + 2\mathcal{O}(c_0)} \right)^2 \quad (4.7)$$

$$\alpha^{LE} = \arcsin \left(\frac{n^E}{n^{LE}} \sin(\alpha^E) \right). \quad (4.8)$$

Hier sind n^{LE} und n^E die Brechungsindizes der beiden Gebiete, r der Reflexionsindex und α^{LE} der Winkel, unter dem eine ebene Welle, die unter dem Winkel α^E auf die Grenze einfällt, weiterläuft. Außerdem erkennt man, dass sogar eine Totalreflexion möglich ist, falls das Produkt $n^E/n^{LE} \cdot \sin(\alpha^E)$ größer als 1 wird:

$$\sin(\alpha^E) = \frac{n^{LE}}{n^E} \approx \frac{u_0 + \mathcal{O}(c_0)}{u_0 + c_0} + \frac{u' + \mathcal{O}(c')}{u_0 + c_0}. \quad (4.9)$$

So erhält man z.B. für eine Störung \underline{U}' von 10% des Hintergrundwertes \underline{U}_0 einen Winkel für die Totalreflexion von $\alpha^E \approx 64^\circ$. Dass dies nur eine Abschätzung sein kann, liegt daran, dass nur die maximale Amplitude den Wert von 10% hat und die Abschätzung nur für diesen Wert gilt. Es ist jedoch klar ersichtlich, dass eine konservative Behandlung des Randes die künstlich eingeführte Grenze als eine Materialgrenze behandeln wird und somit Reflexionen erzeugt werden, die in Größenordnung $\mathcal{O}(\underline{U}'^2)$ liegen.

Es konnte in einer Dimension gezeigt werden [53, 65], dass es möglich ist, die Reflexionen zu reduzieren, wenn unstetige aber modifizierte Flüsse verwendet werden. Eine rigorose Analysis in 1-d und 2-d steht hier noch aus. In den hier gezeigten Beispielen werden unstetige Flussfunktionen auf dem Rand verwendet. Allerdings wurden die Flüsse nicht modifiziert, so dass dies die standard nichtlinearen Euler- und linearisierten Eulerflüsse sind.

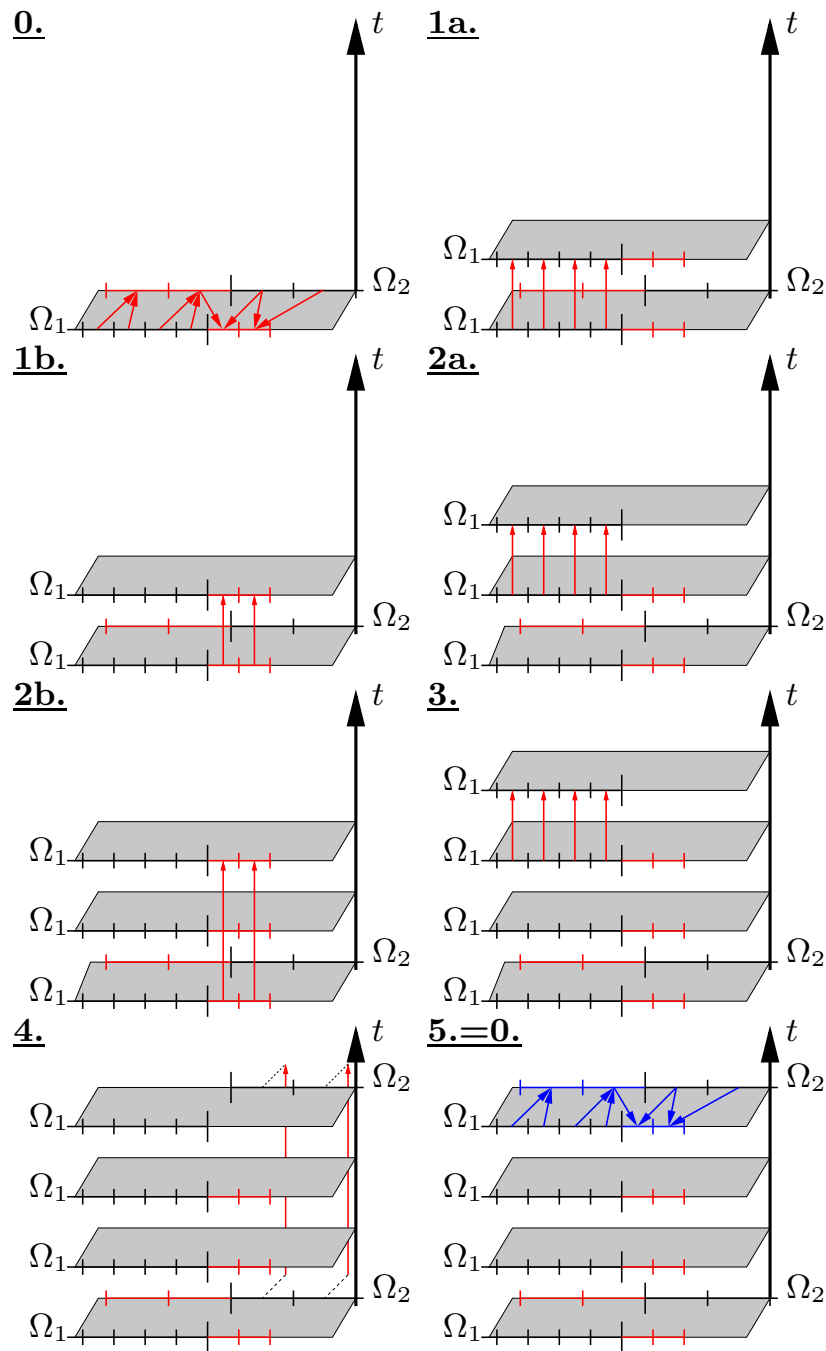


Bild 4.4: 0. Datenaustausch bei $t = t^n$, 1a. Zeitintegration in Ω_1 , 1b. Zeitintegration der Ghostzellen für Ω_1 , basierend auf den Daten von $t = t^n$, 2a. Zeitintegration in Ω_1 , 2b. Zeitintegration der Ghostzellen für Ω_1 , basierend auf den Daten von $t = t^n$, 3. Zeitintegration in Ω_1 , 4. Zeitintegration in Ω_2 , 5./0. Datenaustausch bei $t = t^{n+1}$

4.3 KOP2D: Verbindung aller Bausteine

In das neu entwickelte Simulationswerkzeug KOP2D wurden die zuvor dargestellten Funktionalitäten implementiert. Es besteht im Wesentlichen aus den Programmen EULER3D und HYDSOL für die Behandlung von unstrukturierten bzw. strukturierten Gittern. Diese Programme existieren nur noch als SUBROUTINEN innerhalb der KOP2D Umgebung. Diese Verknüpfung ist

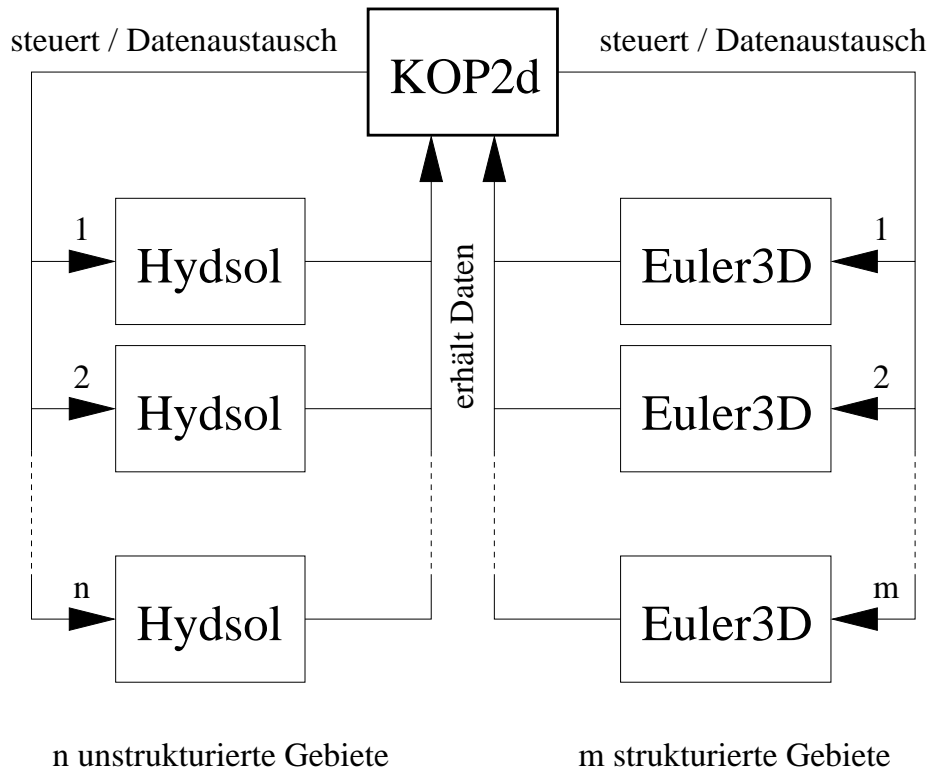


Bild 4.5: Prinzipskizze zur Einbindung der existierenden Programme HYDSOL und EULER3D in den KOP2D

nur durch eine gemeinsame Datenstruktur möglich, die von allen Programmen gemeinsam verwendet wird. Im KOP2D werden die Gebiete in einem Initialisierungsteil automatisch miteinander verknüpft, und es wird die Zeitintegration (Subcycling) gesteuert sowie der Datenaustausch vollzogen.

Die Initialisierung läuft wie folgt ab:

Algorithmus 4.2 *Initialisierung* KOP2D

- I. Lese die Parameterdatei für KOP2D .

- II. *Starte alle strukturierten und unstrukturierten Gebiete mit den jeweiligen Parameter Dateien.*
- III. *Erzeuge die Information zur Verknüpfung der Gebiete:*
 - (a) *Finde zu jeder Koppelzelle das Gebiet (die Gebiete), aus dem es die Informationen erhalten soll.*
 - (b) *Entscheide, ob die Information durch Mittelung oder Interpolation erzeugt werden muss.*
 - (c) *Erzeuge die zur Mittelung bzw. Interpolation benötigte Information wie in Kapitel 4.2.2 beschrieben.*
 - (d) *Überprüfung der erzeugten Daten.*

Die hier erzeugte Information ist die Basis für die Kopplung. Jetzt kann mit der Zeitschleife begonnen werden. Der Algorithmus ist hier der folgende:

Algorithmus 4.3 *Zeitschleife KOP2D*

- I. *Falls ein allen Gebieten gemeinsamer Zeitschritt vorliegt: Generiere die Subcycling-Information neu und ordne jedes Gebiet einem Subcycle zu.*
- II. *Führe den Datenaustausch zwischen den Gebieten durch, die ein gemeinsames Zeitniveau erreicht haben.*
- III. *Erzeuge die Information, welche Subcycles gerechnet werden sollen.*
- IV. *Integriere die Gebiete mittels den in HYDSOL bzw. EULER3D implementierten Zeitintegrationsmethoden.*
- V. *Analysiere die Zeitintegration in den Gebieten.*

4.4 Validierung

In diesem Abschnitt werden Validierungsrechnungen des Programmpaketes KOP2D präsentiert. Durch die Vielzahl der Möglichkeiten ist es nicht durchführbar, alle Kombinationen untereinander zu untersuchen bzw. zu validieren. Um den Einfluss der numerischen Verfahren in den Gebieten selber weitgehend auszuschließen, wurden, soweit nicht anders angegeben, immer Verfahren 9. Ordnung verwendet. Um die Rechenzeiten bei den Untersuchungen in einem akzeptablen Rahmen zu halten, wurden, ebenfalls soweit nicht anders angegeben, immer die linearisierten Euler Gleichungen (1.5) gelöst.

Die Validierung ist wie folgt aufgebaut: In einem ersten Schritt wird lediglich ein Gebiet in immer kleinere Teilgebiete zerlegt, ohne Zellgrößen, Zeitschritte, Verfahren oder Gleichungen wechseln zu lassen. Hiermit sollen prinzipielle Kopplungsstrukturen untersucht werden. In einem zweiten Schritt wird dann die Gitterschrittweite verändert, wobei in allen Gebieten weiterhin der gleiche Zeitschritt verwendet wird. Dieser wird dann schließlich in einem dritten Schritt auch noch in den einzelnen Gebieten variiert. In der vierten Stufe wird dann der Einfluss von wechselnden Gleichungen untersucht. Abschließend wird das Verhalten von hochfrequenten Störungen bei einem Gitterübergang untersucht, bei dem sie auf dem feinen Gitter abgebildet werden können, auf dem groben jedoch nicht.

Als Analysewerkzeug für die Validierung werden Konvergenzanalysen durchgeführt, mittels denen die hohe Ordnung des Gesamtprogramms gezeigt wird. Die Behandlung des Randes erfolgt, soweit wie möglich, immer mit der Ordnung des Verfahrens, hier also 9. Ordnung. Idealerweise erhält man für das gekoppelte Verfahren dann eine Gesamtkonvergenz von ebenfalls 9. Ordnung.

4.4.1 Partitionierung

Zunächst werden die grundlegenden Kopplungsalgorithmen untersucht. Dazu wird ein Gebiet in 24 Teilgebiete zerlegt, ohne an den Gittern, Gleichungen oder Verfahren etwas zu ändern. Die Zerlegung der Gebiete geht so weit, dass sogar nur einzellige Gebiete vorkommen können. Wie man in Bild 4.6 sieht, unterscheidet sich die Lösung der beiden Rechnungen nicht. Sieht man von der Startup Zeit ab, die notwendig ist, um alle Verknüpfungen zu erstellen, sind die Rechenzeiten für die zerlegte Lösung etwas höher als für die nichtzerlegte. Dabei ist die auf den Austausch der Daten entfallende Zeit vernachlässigbar, und nur die öfter aufgerufene Routine für die Randbedingungen erfordert den Mehraufwand.

4.4.2 Wechselnde Gitter

Als Nächstes wird der Einfluss von wechselnden Gittern untersucht. Dazu wird das Gebiete Ω in zwei Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zerlegt. In Tabelle 4.2 sind die Abmessungen der Gebiete zusammengefasst. Untersucht wird wieder der Transport eines Gausspulses (3.71) in der Dichte. Dabei wird für das Gitter in Ω_2 ein gröberes Gitter als in Ω_1 gewählt ($\Delta x_{\Omega_1} < \Delta x_{\Omega_2}$). Anschließend werden beide Gitter gleichmäßig verfeinert, und es werden die Konvergenzraten betrachtet. Der Zeitschritt wird zunächst in beiden Gebieten gleich gewählt.

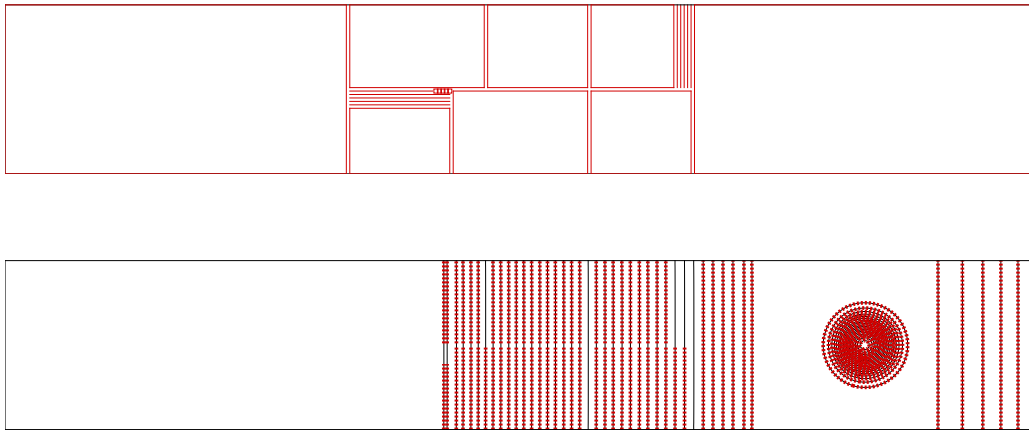


Bild 4.6: Vergleich einer Lösung auf einem Gitter mit der Lösung auf einem in 24 Teilgebiete partitionierten Gitter. Oben Darstellung der Gebiete, unten Darstellung von Konturlinien.

$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	Ω_1	Ω_2
2	$[-100 : 50] \times [-25 : 25]$	$[50 : 200] \times [-25 : 25]$
4	$[-100 : 40] \times [-26 : 26]$	$[40 : 200] \times [-26 : 26]$
1/4	$[-100 : 60] \times [-26 : 26]$	$[60 : 200] \times [-26 : 26]$

Tabelle 4.2: Größe der Gebiete Ω_1 und Ω_2 in den Validierungsrechnungen

Zum Zeitpunkt $t^{end} = 200$ werden die Fehler im Gebiet Ω_2 ausgewertet. Die verwendeten Gitter und Fehler sind in der Tabelle 4.3 dargestellt. In einer ersten Stufe wurde ein Verhältnis der Gitterzellen von $\Delta x_2/\Delta x_1 = 2$ und in einer weiteren von $\Delta x_2/\Delta x_1 = 4$ gewählt. In beiden Fällen findet man eine Konvergenz von ≈ 9 in den L_1 und L_∞ Normen.

Vergleicht man die Ergebnisse der 1. Stufe bei $\Delta x_2/\Delta x_1 = 2$ mit den Ergebnissen der 3. Stufe bei $\Delta x_2/\Delta x_1 = 4$ (in beiden Rechnungen $\Delta x = 1.0$ in Ω_2), so sieht man, dass der Fehler fast identisch ist. Für die Rechnung mit $\Delta x_2/\Delta x_1 = 4$ ist er etwas größer, da hier in Ω_1 ein gröberes Gitter verwendet und somit auch ein etwas größerer Fehler gemacht wurde.

#	$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	Ω_2	L_∞ Fehler	L_1 Fehler	L_∞ Ord.	L_1 Ord.
0	1	150 × 50	1.16214E-05	2.31044E-07	–	–
0	2	75 × 25	1.54830E-03	3.75875E-05	–	–
1	2	150 × 50	5.86923E-06	1.16249E-07	8.0	8.3
2	2	225 × 75	1.68148E-07	3.24773E-09	8.8	8.8
3	2	300 × 100	1.30131E-08	2.50301E-10	8.9	8.9
4	2	375 × 125	1.77425E-09	3.40176E-11	8.9	8.9
0	4	40 × 13	5.92721E-02	1.89171E-03	–	–
1	4	80 × 26	1.79533E-03	3.97720E-05	5.0	5.6
2	4	120 × 39	7.76018E-05	1.45648E-06	7.7	8.2
3	4	160 × 52	6.91768E-06	1.23536E-07	8.4	8.6
4	4	200 × 65	9.69635E-07	1.72850E-08	8.8	8.8
0	1/4	140 × 52	6.81937E-02	2.63185E-03	–	–
1	1/4	280 × 104	1.98810E-03	4.75577E-05	5.1	5.8
2	1/4	420 × 156	8.31517E-05	1.70073E-06	7.8	8.2
3	1/4	560 × 208	7.07599E-06	1.41348E-07	8.6	8.6
4	1/4	700 × 260	9.97163E-07	2.01322E-08	8.8	8.7

Tabelle 4.3: Fehlernormen in Ω_2 für den Fall des wechselnden Gitters mit konstanten Zeitschritten $\Delta t_2/\Delta t_1 = 1$

Vergleicht man für das Gitter der 1. Stufe bei $\Delta x_2/\Delta x_1 = 2$ die Lösung mit einer Referenzrechnung, bei der nur auf einem Gitter mit $\Delta x_2/\Delta x_1 = 1$ bei dem kleinen Zeitschritt gerechnet wurde, so erkennt man deutlich, dass in der gekoppelten Rechnung ein kleinerer Fehler erzeugt wird, da der Gausspuls hier im ersten Teil der Rechnung auf einem feineren Gitter transportiert wurde und der dort entstandene Fehler geringer ist.

4.4.3 Wechselnde Gitter mit wechselnden Zeitschritten

Nachdem die Interpolation und Mittelung zwischen zwei verschiedenen Gittern bei gleichen Zeitschritten $\Delta t_1 = \Delta t_2$ validiert ist, wird nun die nächste Stufe der Kopplung untersucht. Für die Zeitschritte wird das gleiche Verhältnis wie für die Gitterschrittweiten gewählt. Damit erhält man im ersten Fall $\Delta x_2/\Delta x_1 = \Delta t_2/\Delta t_1 = 2$ und im zweiten Fall $\Delta x_2/\Delta x_1 = \Delta t_2/\Delta t_1 = 4$.

Zunächst werden die Ghostzellen des feineren Gebietes in den Zwischenzeit-

#	$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	Ω_2	L_∞ Fehler	L_1 Fehler	L_∞ Ord.	L_1 Ord.
0	2	75×25	2.95388E-03	5.43423E-05	–	–
1	2	150×50	9.71074E-04	2.67910E-05	1.6	1.0
2	2	225×75	6.47382E-04	1.78773E-05	1.0	1.0
3	2	300×100	4.85993E-04	1.34097E-05	1.0	1.0
4	2	375×125	3.89048E-04	1.07284E-05	1.0	1.0
0	4	40×13	1.14763E-01	8.69865E-03	–	–
1	4	80×26	1.10042E-03	1.09415E-04	6.7	6.3
2	4	120×39	7.37393E-04	7.33741E-05	1.0	1.0
3	4	160×52	5.52716E-04	5.51462E-05	1.0	1.0
4	4	200×65	4.42873E-04	4.42760E-05	1.0	1.0
0	1/4	140×52	1.32830E-01	1.00956E-02	–	–
1	1/4	280×104	2.17131E-02	2.44640E-03	2.6	2.0
2	1/4	420×156	1.44238E-02	1.62613E-03	1.0	1.0
3	1/4	560×208	1.08050E-02	1.21809E-03	1.0	1.0
4	1/4	700×260	8.63941E-03	9.73842E-04	1.0	1.0

Tabelle 4.4: Fehlernormen in Ω_2 für den Fall des wechselnden Gitters mit wechselnden Zeitschritten $\Delta t_2/\Delta t_1 = \Delta x_2/\Delta x_1$. Ghostzellen werden nicht in der Zeit integriert.

schritten nicht integriert. D.h. sie behalten den Wert des letzten Kopplungsschrittes. Die so erzielten Fehler und Konvergenzen sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Wie man sieht, erhält man jetzt nur noch eine Konvergenzrate von $\mathcal{O}1$, obwohl in beiden Gebieten Verfahren 9. Ordnung benutzt wurden. Als Nächstes wird die Lax-Wendroff Zeitintegration, wie in Kapitel 4.2.3 beschrieben, eingeschaltet. Die Fehler und Konvergenznormen für diesen Fall sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst. Wie man sieht, erhält man nun wieder die volle Konvergenz. Als Nächstes kann man nun die Fehler mit Lax-Wendroff Zeitintegration mit den Fehlern aus Tabelle 4.3 vergleichen, wo in beiden Gebieten der gleiche Zeitschritt gemacht wurde. Man erkennt, dass man in allen Fällen bei den wechselnden Zeitschritten immer kleinere Fehler erhält. Ausnahme ist hier nur die 0. Stufe bei $\Delta x_2/\Delta x_1 = 4$ und bei $\Delta x_2/\Delta x_1 = 1/4$.

#	$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	Ω_2	L_∞ Fehler	L_1 Fehler	L_∞ Ord.	L_1 Ord.
0	2	75 × 25	1.15987E-03	3.01899E-05	–	–
1	2	150 × 50	4.56111E-06	9.04538E-08	8.0	8.4
2	2	225 × 75	1.32447E-07	2.58487E-09	8.7	8.8
3	2	300 × 100	1.03001E-08	1.99641E-10	8.9	8.9
4	2	375 × 125	1.40747E-09	2.70982E-11	8.9	8.9
0	4	40 × 13	3.17168E-01	7.92262E-03	–	–
1	4	80 × 26	1.23498E-03	2.97428E-05	8.0	8.1
2	4	120 × 39	6.06183E-05	1.08607E-06	7.4	8.2
3	4	160 × 52	5.00610E-06	8.95367E-08	8.7	8.7
4	4	200 × 65	7.36905E-07	1.27843E-08	8.6	8.7
0	1/4	140 × 52	4.18823E-01	8.69404E-03	–	–
1	1/4	280 × 104	1.54786E-03	3.56406E-05	8.1	7.9
2	1/4	420 × 156	6.24332E-05	1.27408E-06	7.9	8.2
3	1/4	560 × 208	5.30053E-06	1.05903E-07	8.6	8.6
4	1/4	700 × 260	7.47070E-07	1.51503E-08	8.8	8.7

Tabelle 4.5: Fehlernormen in Ω_2 für den Fall des wechselnden Gitters mit wechselnden Zeitschritten $\Delta t_2/\Delta t_1 = \Delta x_2/\Delta x_1$. Ghostzellen mittels Lax-Wendroff in der Zeit integriert.

Hier liegt ein extrem grobes Gitter vor, und der Gausspuls ist sehr schlecht aufgelöst.

Damit ist gezeigt, dass mit wechselnden Zeitschritten und der Lax-Wendroff Integration in den Ghostzellen eine zeitgenaue Simulation sehr hoher Ordnung möglich ist. Dies ist einer der wichtigsten Punkte, mit der sich die gesamte CPU Zeit deutlich verringern lässt, ohne dass man an Genauigkeit einbüßt.

4.4.4 Wechselnde Gleichungen

Hier wird untersucht, wie sich die Fehler beim Übergang von den nichtlinearen Euler Gleichungen zu den linearisierten Euler Gleichungen verhalten. In Kapitel 4.2.4 wurde bereits eine Fehlerabschätzung für den Fall gegeben, dass zwischen den beiden Gebieten ein konstanter Fluss vorgeschrieben wird. Hier wird daher ein anderer Weg eingeschlagen: Statt konstanter Flüsse werden

über die Ghostzellenkopplung konstante Zustände vorgeschrieben, was ja der tatsächlichen Physik entspricht.

Um den Fehler zu untersuchen, wird ein Druckpuls als Anfangsbedingung

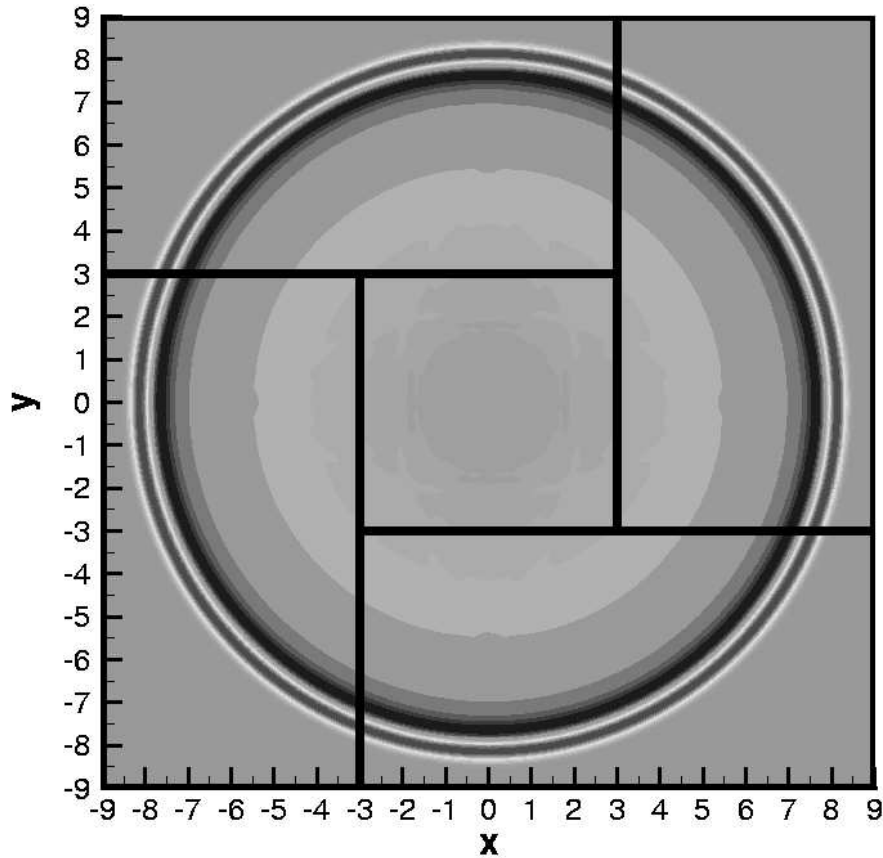


Bild 4.7: Aufteilung des Rechengebiets in 5 Teilgebiete und Konturplot des Druckes zum Zeitpunkt $t = 8$

vorgeschrieben, der sich dann konzentrisch ausbreitet. Der Druckpuls (3.71) hat dabei eine Halbwertsbreite von $\sigma = 0.2$ und eine Amplitude von $\hat{p} = p_{max} - p_0 = 1.0$ mit $p_0 = 0.714285714$ und der Schallgeschwindigkeit $c_0 = 1.0$. Die Druckwellen laufen dann in ein Gebiet, in dem nur noch die linearisierten Euler Gleichungen gelöst werden. Das nichtlineare Kerngebiet hat die Abmessungen $[-3 : 3] \times [-3 : 3]$, das gesamte Gebiet $[-9 : 9] \times [-9 : 9]$ (siehe Bild 4.7).

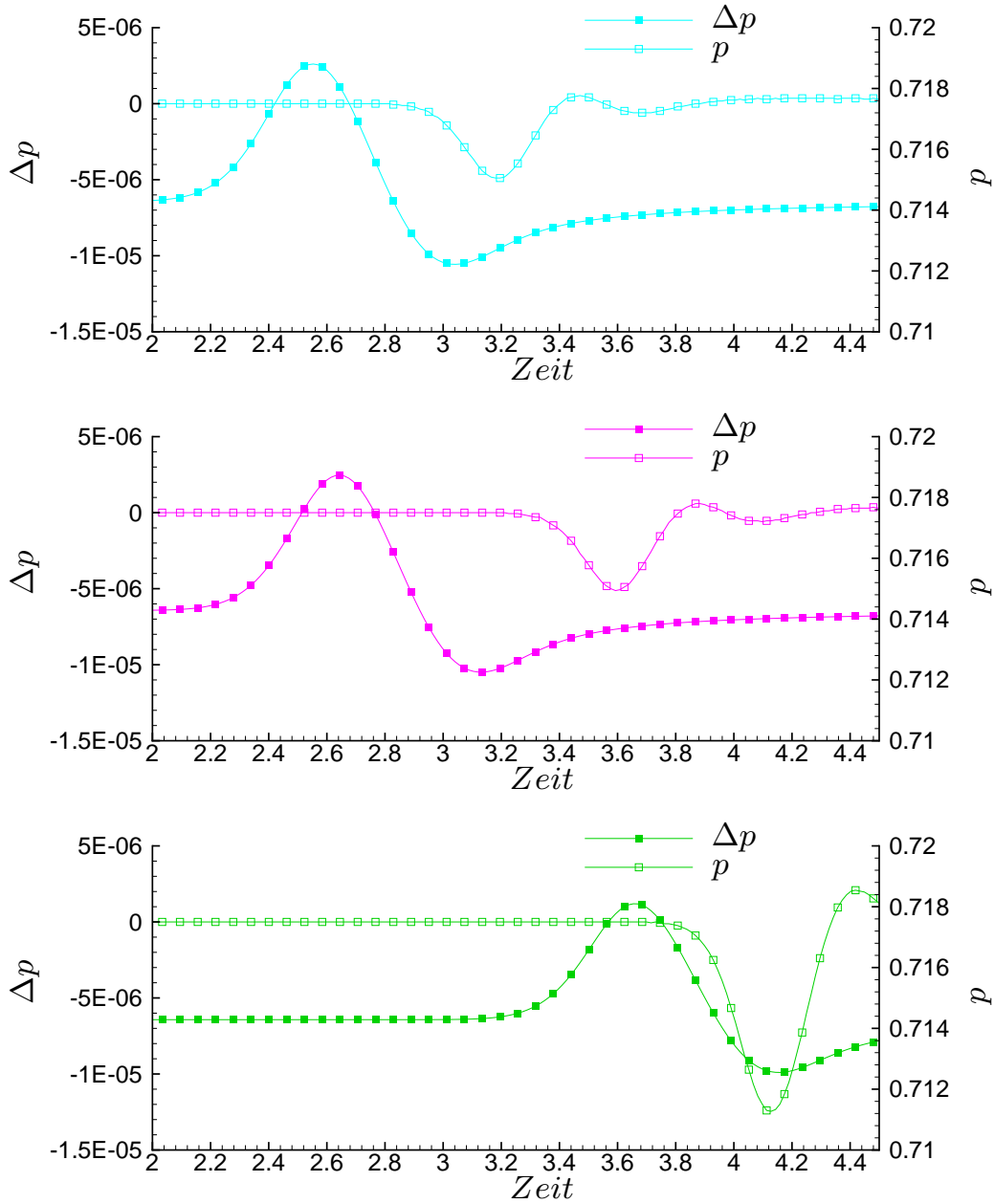


Bild 4.8: Druckverlauf und Reflexion an drei Punkten: $P_1 = (2.7|0.0)$, $P_2 = (2.5|1.25)$ und $P_3 = (2.7|2.7)$. Dargestellt ist die Differenz zu einer rein nichtlinearen Rechnung.

In allen Gebieten wurden die ADER Verfahren 4. Ordnung verwendet. Verglichen wird nun der zeitliche Druckverlauf in den Raumpunkten $P_1 = (2.7|0.0)$,

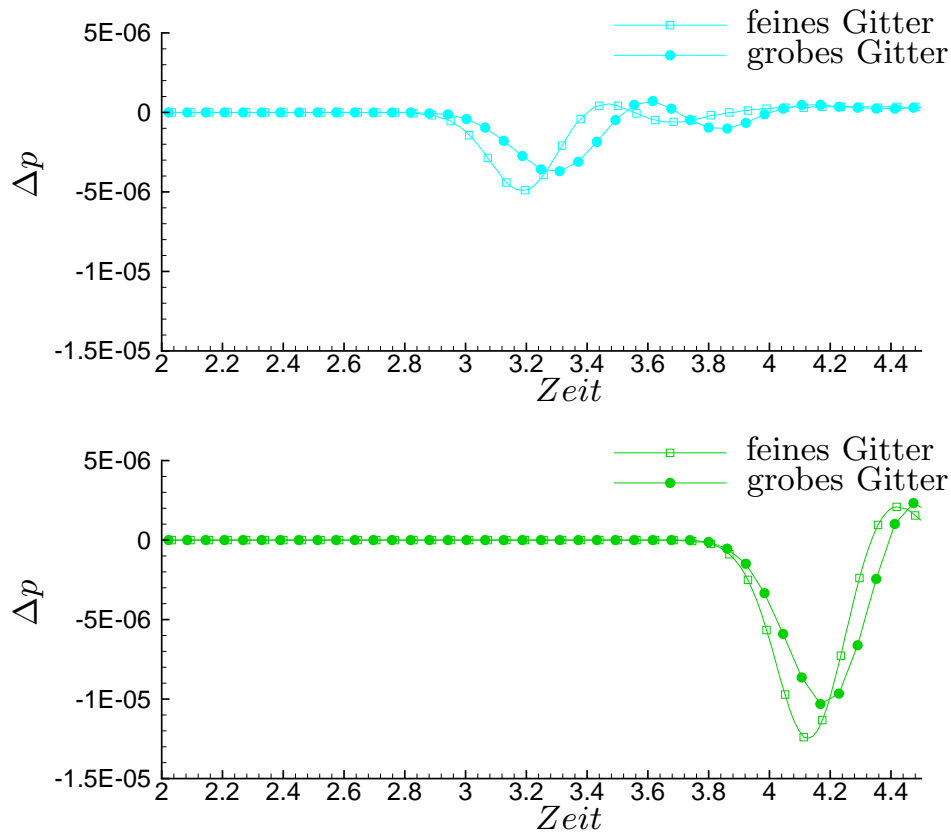


Bild 4.9: Vergleich der Reflexionen auf einem groben und einem feinen Gitter für die Punkte $P_1 = (2.7|0.0)$ und $P_3 = (2.7|2.7)$

$P_2 = (2.5|1.25)$ und $P_3 = (2.7|2.7)$ auf zwei verschiedenen diskretisierten Gebieten. Für das grobe Gitter wurde eine Gitterschrittweite von $\Delta x = 0.1$ und für das feine Gitter eine Schrittweite von $\Delta x = 0.025$ gewählt, was insgesamt einem Gitter von 180×180 bzw. 720×720 Punkten entspricht. In allen Gebieten wurde immer die gleiche Gitterschrittweite verwendet. In Bild 4.8 ist der zeitliche Verlauf des Druckes an den ausgewählten Punkten dargestellt. Zusätzlich ist in den Diagrammen noch die Differenz zu einer Vergleichsrechnung eingetragen, bei der in allen Gebieten die nichtlinearen Euler Gleichungen gelöst wurden. Da alle Gitter konstant sind und auch für die Rechnung in den linearisierten und den nichtlinearen Gebieten das gleiche ADER Verfahren 4. Ordnung verwendet wurde, ist dies tatsächlich der Fehler, der durch den Wechsel der Gleichungen hervorgerufen wurde. Aus dem zeitlichen Ver-satz ist zu erkennen, dass es sich dabei um Reflexionen am Rand handelt. Zu

beachten ist, dass die Parameter so gewählt wurden, dass der Druckpuls in der Zeit $\Delta t = 1$ auch gerade eine Strecke von $\Delta x = 1$ zurücklegt. Der erste beobachtete Punkt liegt auf der x-Achse, der dritte Punkt auf der Hauptachsendiagonalen und der zweite Punkt dazwischen. Man erkennt, dass die Reflexionen in Punkt P_1 und P_2 ungefähr die gleiche Größenordnung haben, die Reflexion auf der Diagonalen jedoch deutlich stärker ausfällt. Dies liegt daran, dass hier die Reflexionen von dem linken und dem oberen Rand gleichzeitig eintreffen und sich somit in der Amplitude verdoppeln. Berücksichtigt man dies, so ist auch die Amplitude dieser Reflexion mit den beiden anderen vergleichbar. In Bild 4.9 ist für die Punkte P_1 und P_3 ein Vergleich der Reflexionen auf den beiden Gittern aufgetragen. Man erkennt deutlich, dass die Amplitude der Reflexion im Wesentlichen gitterunabhängig ist. Die dennoch vorhandenen Unterschiede sind darauf zurückzuführen, dass der Gausspuls auf dem groben Gitter nur sehr schlecht aufgelöst ist.

Die ankommende Druckamplitude im Punkt P_1 ist $\Delta p \approx 4.4 \times 10^{-3}$. Würde man hier die Fehlerschätzung aus Kapitel 4.2.4 verwenden, so wäre ein Fehler von $\Delta p_{err}^{estimated} \approx 1.94 \times 10^{-5}$ zu erwarten. Der tatsächliche Fehler beträgt jedoch nur $\Delta p_{err} \approx 5 \times 10^{-6}$, ist also um den Faktor 4 kleiner. Daraus lässt sich schließen, dass der hier gewählte Ansatz der Kopplung über die Zustände anstatt über die Flüsse keine schlechteren Ergebnisse, ja sogar etwas bessere Ergebnisse liefert. Hier ist aber noch deutliches Verbesserungspotential gegeben, was auch Inhalt aktueller Forschungsbemühungen ist.

4.4.5 Verhalten bei hochfrequenten Störungen

Ein interessantes Problem kann für den Fall der wechselnden Gitter auftreten: Eine Welle mit der Wellenlänge λ wird mit $P = \lambda/\Delta x$ Punkten abgebildet. In dem Gebiet Ω_1 ist Δx_1 so gewählt, dass $P_1 > 3$ ist und in Ω_2 ist Δx_2 so gewählt, dass $P_2 < 3$. Die Welle kann also auf dem gröberen Gitter nicht mehr dargestellt werden. Untersucht wird nun, was bei dem Übergang von Ω_1 auf Ω_2 passiert. Als Anfangsbedingung wurde eine Störung im Druck gemäß dem Problem 1, Category 1 der CAA Benchmark Probleme [76]

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (2 + \cos(\alpha x)) e^{-(\ln 2) \left(\frac{x}{10}\right)^2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

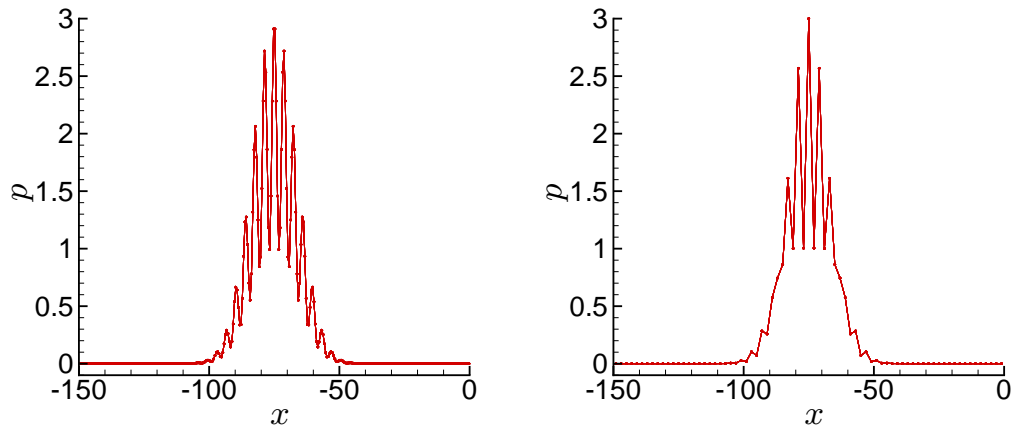


Bild 4.10: Anfangsbedingung der hochfrequenten Störungen. Links auf feinem Gitter, rechts auf grobem Gitter.

mit

$$\begin{bmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\alpha = 1.7 \quad (4.12)$$

gewählt. Die konstanten Hintergrundgrößen sind \underline{U}_0 . Die Druckstörung spaltet sich dann in einen nach rechts und einen nach links laufenden Teil auf. Das Gebiet $\Omega = [-300 : 200]$ wurde in zwei Teilgebiete $\Omega_1 = [-300 : 0]$ und $\Omega_2 = [0 : 200]$ aufgeteilt. Das Zentrum der Anfangsbedingung liegt bei $x = -75$, also in Ω_1 . Die Gittergrößen sind $\Delta x_1 = 0.5$ und $\Delta x_2 = 2.0$. Das Verhältnis der Zeitschritte ist ebenfalls $\Delta t_2/\Delta t_1 = 4$. Als Verfahren wurde das ADER Verfahren 6. Ordnung verwendet. In Bild 4.10 ist zunächst einmal die Anfangsbedingung auf dem feinen Gitter und zum Vergleich auch auf dem groben Gitter dargestellt. Man erkennt sofort, dass das grobe Gitter die hohen Frequenzen nicht wiedergeben kann. In Bild 4.11 ist dann ein Zeitpunkt dargestellt, bei dem die nach rechts laufende Druckwelle gerade den Rand $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ passiert. Wie man sieht, kann das Gitter in Ω_2 die Welle nicht auflösen. Es treten jedoch keinerlei Reflexionen auf, sondern die Welle verlässt das Gebiet, ohne mit dem Rand wechselzuwirken. Dies ist auch deutlich zu

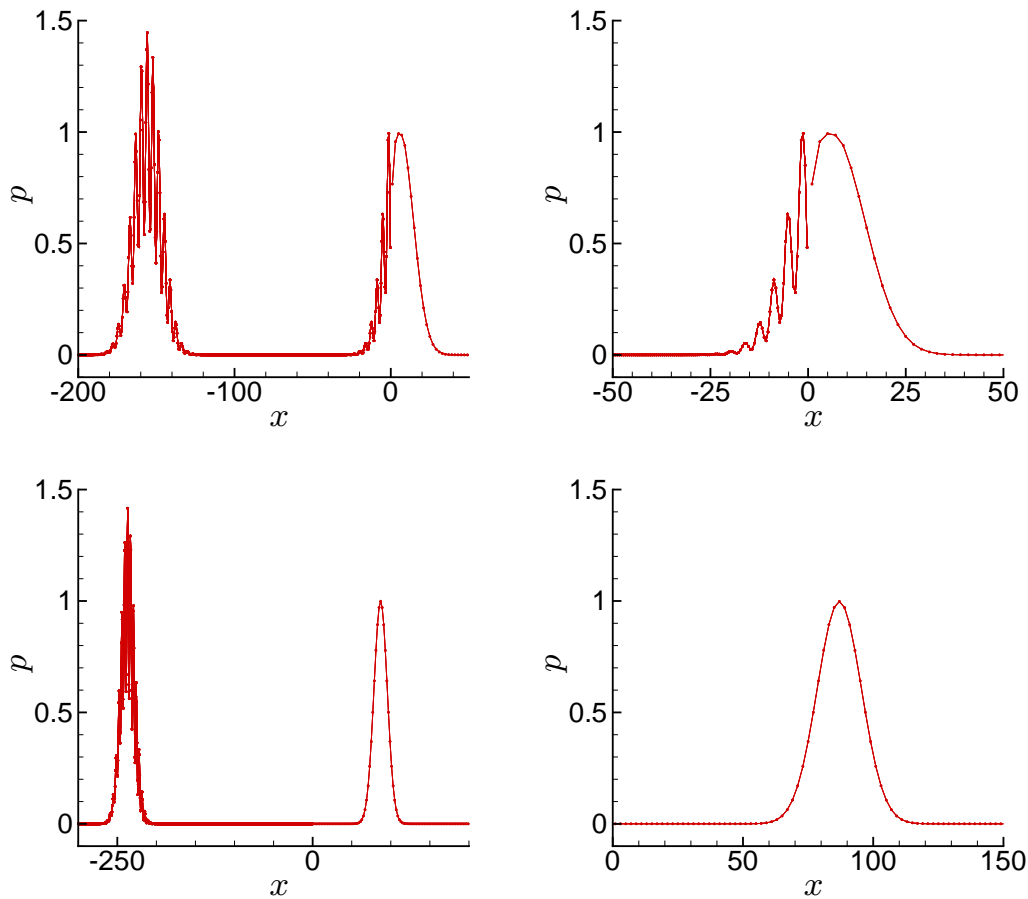


Bild 4.11: Verhalten bei hochfrequenten Störungen. Oben Zustand nach $n = 150$ und unten nach $n = 300$. Rechts jeweils ein vergrößerter Ausschnitt.

dem späteren Zeitpunkt zu erkennen.

In Bild 4.12 ist noch einmal gezeigt, dass nur Verfahren hoher Ordnung in der Lage sind, die hohen Frequenzen abzubilden. Das Verfahren 2. Ordnung hat die hochfrequenten Anteile fast vollständig weggedämpft, wohingegen der langwellige Gausspuls sehr gut erhalten wurde. Hier müsste ein wesentlich feineres Gitter verwendet werden, um eine ähnliche Qualität der Lösung wie beim Verfahren 6. Ordnung zu erzielen.

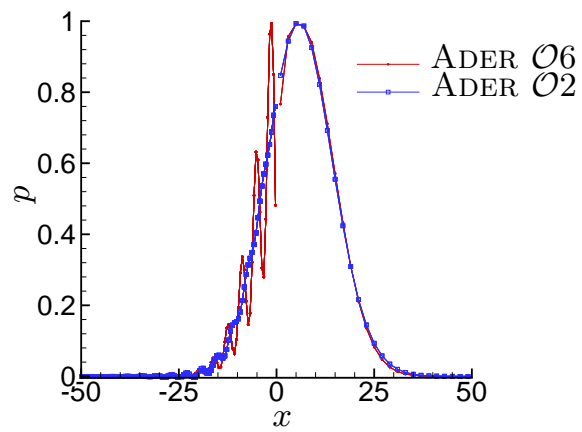


Bild 4.12: Einfluss der Verfahrensordnung

5 Numerische Beispiele

5.1 Rotierendes Wirbelpaar

Als Beispiel für eine gekoppelte Rechnung, bei der sowohl die ADER als auch die *fastADER* Verfahren zum Einsatz kommen, wird das sogenannte „Co-rotating Vortex Pair“ [50] berechnet. In einem ruhenden Hintergrund werden zwei homentropen Wirbel der Form

$$u(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left(1 - e^{-\alpha(r/r_c)^2}\right) \quad (5.1)$$

$$p(r) = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left(1 - \frac{Ma_{Rot}^2 (\gamma - 1) \Gamma^2}{4\pi^2 c_0^2 r^2} \times \left[\frac{1}{2} - e^{-\frac{\alpha r^2}{r_c^2}} + \frac{1}{2} e^{-2\frac{\alpha r^2}{r_c^2}} - \frac{\alpha r^2}{r_c^2} E_1\left(2\frac{\alpha r^2}{r_c^2}\right) + \frac{\alpha r^2}{r_c^2} E_1\left(\frac{\alpha r^2}{r_c^2}\right) \right] \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5.2)$$

mit

γ	=	1.4	Adiabatexponent
ρ_0	=	1	Hintergrunddichte
c_0	=	$\sqrt{\gamma}$	Hintergrundschallgeschwindigkeit
Ma_{Rot}	=	$0.08\sqrt{\gamma}$	Rotations-Mach-Zahl
r_c	=	0.3	Core-Radius
α	=	1.256431	Parameter, so dass max. Geschwindigkeit bei r_c
Γ	=	$\frac{4\pi}{1 - e^{-4\alpha/r_c^2}}$	Zirkulation in Entfernung r_c

auf einem Kreis mit dem Radius $r_0 = 1$ platziert. Die Parameter sind so gewählt, dass die induzierte Geschwindigkeit der Wirbel im Abstand $2r_0$ gerade 1 ist, so dass sich die beiden Wirbel mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ um den gemeinsamen Drehmittelpunkt bei $(0, 0)$ drehen. Die maximale Wirbelstärke beträgt $\frac{\Gamma}{(2\pi)}$ und die maximale Geschwindigkeit am Core-Rand ist $u_c = \frac{\Gamma}{2\pi r_c} (1 - e^{-\alpha})$. Die Dichte wird gemäß der Isentropiebedingung zu $\rho = p^{1/\gamma}$ gesetzt.

Untersucht wird der Einfluss verschieden feiner Gitter und der Einfluss der Verfahrensordnung auf das Ergebnis. Die Daten der Bereiche sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Bei einer Teilung in 3 Bereiche wurden in den inneren beiden Bereichen die nichtlinearen Euler Gleichungen gerechnet und im äußeren die linearisierten, im Fall 5 wurde direkt an das innere Gebiet ein li-

	Gebiet 1: $[-5 : 5]$	Gebiet 2: $[-15 : 15]$	Gebiet 3: $[-120 : 120]$	CPU
#	$\mathcal{O} \Delta x$	$\mathcal{O} \Delta x \quad \frac{\Delta t_{\Omega_2}}{\Delta t_{\Omega_1}}$	$\mathcal{O} \Delta x \quad \frac{\Delta t_{\Omega_3}}{\Delta t_{\Omega_1}}$	
1	4 0.05	4 0.3125 5	6 1.25 20	1.00
2	4 0.1	4 0.625 5	6 2.5 20	0.14
3	6 0.1	6 0.625 9	6 2.5 36	0.57
4	6 0.1	6 0.625 9	6 5.0 72	0.57
5	6 0.1		6 2.5 40	0.49

Tabelle 5.1: Parameter der Rechnungen zum rotierenden Wirbelpaar. Die Angaben zu den Zeitschritten beziehen sich auf den Beginn der Rechnung. Während der Berechnung erfolgt eine dynamische Anpassung, so dass die Zeitschrittverhältnisse variieren können.

nearer Bereich angekoppelt. Verglichen wird der Druck über die Zeit an einem ausgewählten Punkt $P = (50|0)$. Als Vergleich wird eine analytische Lösung mit eingezeichnet, die mittels einer *Matched Asymptotic Analysis* gewonnen wurde [22, 50].

In dem Bild 5.2 ist zunächst die Lösung auf einem feinen Gitter mit einem Verfahren 4. Ordnung dargestellt. Diese Lösung kann nun mit den Lösungen auf einem doppelt so groben Gitter verglichen werden. Auf diesem gröberen Gitter wurden die nichtlinearen Gleichungen zunächst mit einem Verfahren 4. Ordnung und dann noch einmal mit einem Verfahren 6. Ordnung gerechnet. Wie man sieht, ähneln sich die beiden Rechnungen 4. Ordnung sehr. Auf dem gröberen Gitter hat man eine etwas stärkere Dämpfung, wobei der Phasenfehler fast gleich bleibt. Das Verfahren 6. Ordnung kann die Amplituden wesentlich besser reproduzieren und auch der Phasenfehler ist deutlich geringer (am Ende $\approx -1/4$ Phase gegenüber einer $\approx +3/4$ Phase bei der 4. Ordnung). Die nächste Abbildung Bild 5.3 vergleicht nun die Ergebnisse für die Rechnungen 6. Ordnung. In einem ersten Schritt wurde nur das Gitter im linearisierten Bereich um den Faktor 2 vergrößert. In der Rechnung No. 5 wurde dann schließlich das linearisierte Gebiet direkt an das innerste, nichtlineare Gebiet angekoppelt, wobei man hier einen Gittersprung von $\Delta x_{grob} / \Delta x_{fein} = 25$ (!) vorfindet, was dazu führt, dass in einer Grobgitterzelle 625 Feingitterzellen liegen. Der Zeitschritt in dem gröberen Gebiet ist

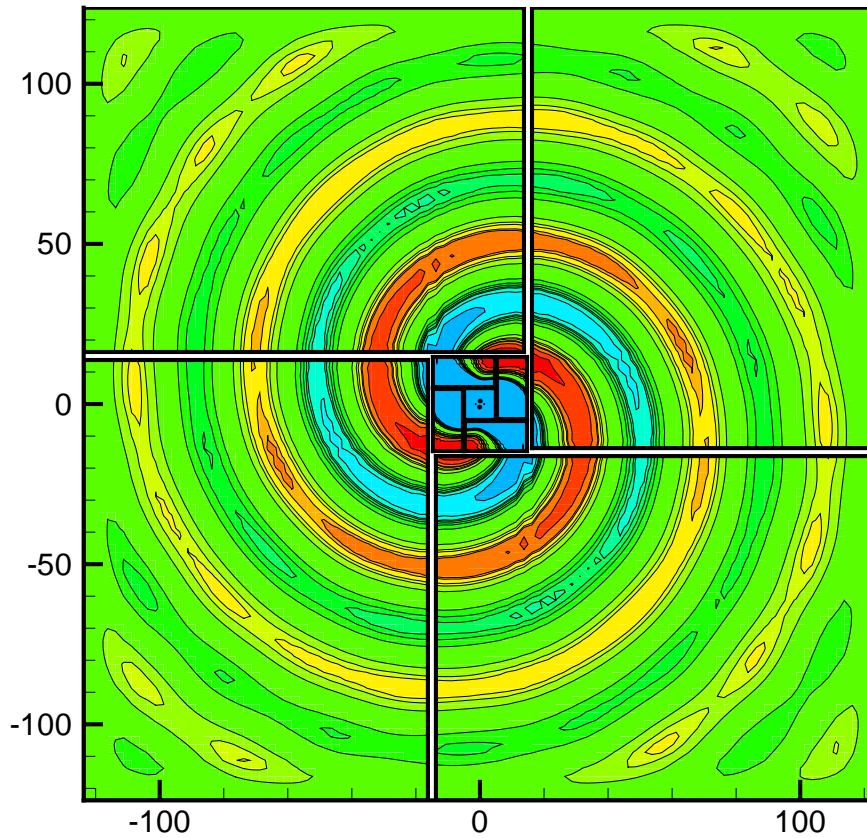


Bild 5.1: Lösung zur Zeit $t = 600$, Fall 3

dabei sogar um den Faktor $\Delta t_{\Omega_2}/\Delta t_{\Omega_1} = 35 \dots 40$ größer⁷. Die ersten beiden Lösungen sind im Wesentlichen identisch, was auch zu erwarten war, da hier die akustische Welle immer noch mit ≈ 7 PPW (Punkten pro Wellenlänge) aufgelöst wird. Das eigentlich Erstaunliche ist jedoch das Ergebnis der letzten Rechnung bei dem die Phasenlage mit 1 Phase Phasenverschiebung doch noch sehr gut ist und lediglich eine etwas stärkere Dämpfung der Amplitude stattfindet, was insgesamt für diesen sehr extremen Fall ein gutes Ergebnis ist.

⁷Die Schwankungen kommen durch die automatische Adaption der Subcycleinformation zustande.

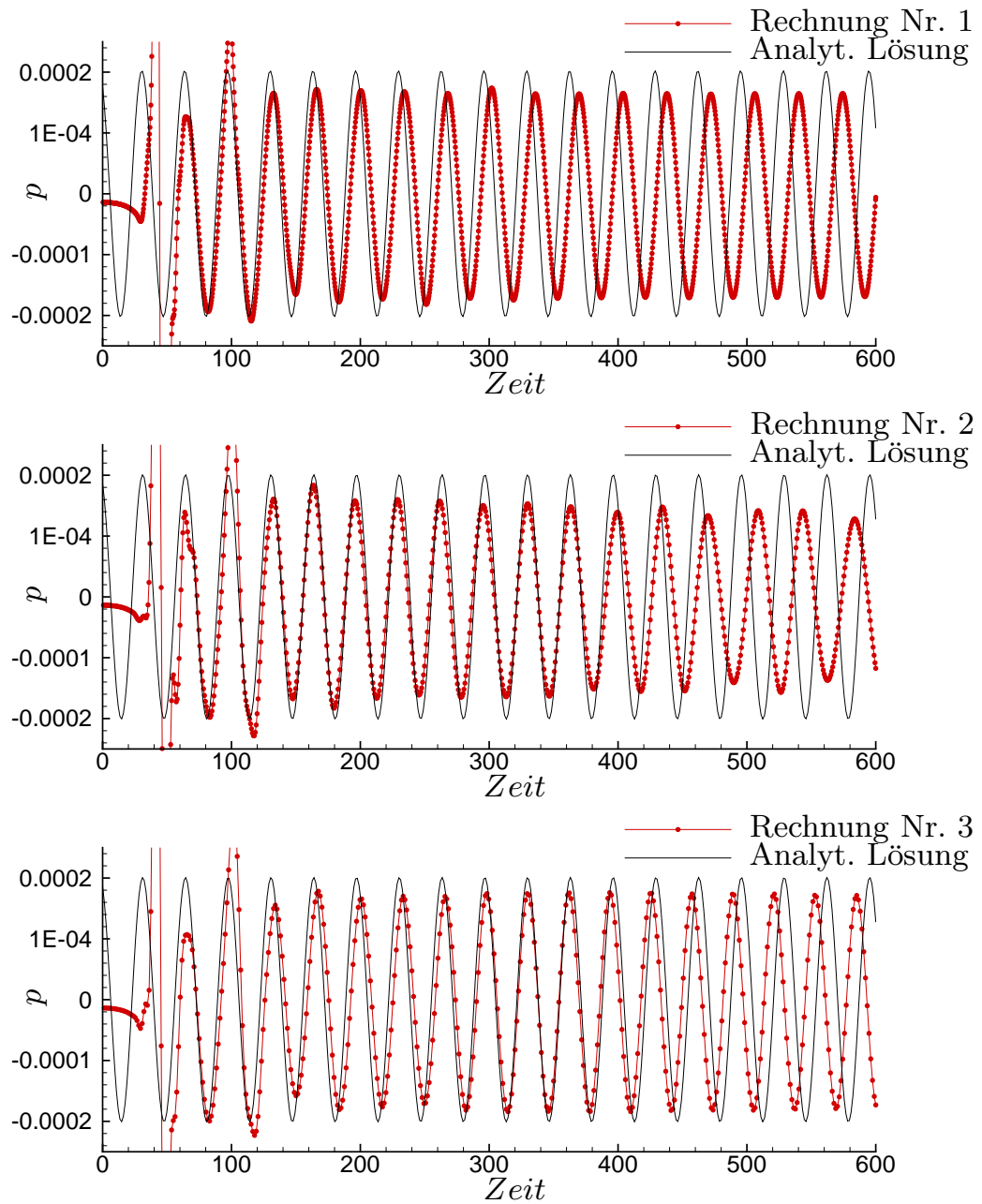


Bild 5.2: Vergleich Rechnung und analytische Lösung im Punkt $P = (50|0)$ für die Rechnungen 1,2,3

Die Lösungen der 3. und 4. Rechnung sind bezogen auf Amplituden und Phasenfehler die besten. Im Vergleich zu der Rechnung 4. Ordnung auf dem gleichen Gitter sind sie um den Faktor ≈ 4 teurer aber immer noch um fast

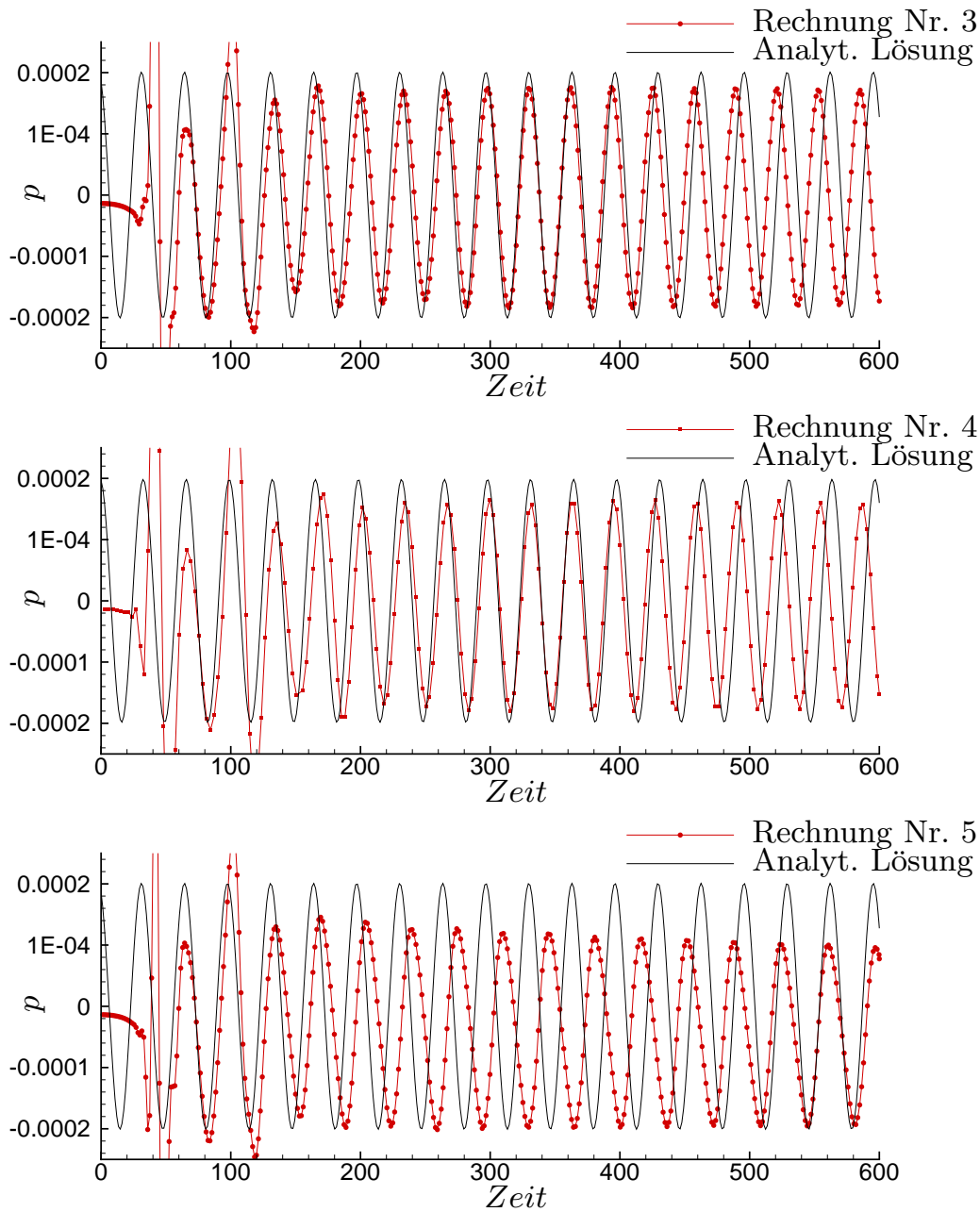


Bild 5.3: Vergleich Rechnung und analytische Lösung im Punkt $P = (50|0)$ für die Rechnungen 3,4,5

40% billiger als die Rechnung 4. Ordnung auf einem feineren Gitter (siehe letzte Spalte in Tabelle 5.1). Dies ist eine praktische Bestätigung der Ergebnisse aus Bild 3.4 und Bild 3.15, nach denen sich die Verfahren hoher Ordnung

bei geringer Fehlertoleranz im Bezug auf die CPU Zeit lohnen.

Vergleicht man die CPU Zeiten von Rechnung 1 und Rechnung 2, so sieht man dass die zweite Rechnung nur noch 14% CPU Zeit benötigt. Da hier das Gitter überall doppelt so grob gewählt wurde, hat man insgesamt nur noch 1/4 der Gitterzellen. Da der Zeitschritt $\Delta t \sim \Delta x$ ist, kann man insgesamt eine Verringerung der CPU Zeit auf $1/8 = 12.5\%$ erwarten. Die geringfügig längere Rechenzeit ist darauf zurückzuführen, dass die Anzahl der Koppelzellen N_{couple} nicht proportional Δx^2 sondern nur proportional Δx ist, und somit die CPU Zeit für die Kopplung nur um 1/4 reduziert wird. Dadurch erkennt man aber auch, dass die Kopplung im Gesamtverfahren den bedeutend geringeren Anteil der CPU Zeit in Anspruch nimmt.

5.2 Vorderkantenlärm in wirbelbehafteter Anströmung

Dieses Beispiel wurde als Benchmark Problem in der Kategorie 3, Problem 1 auf dem *4th Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems* gestellt. Es soll eine nicht stetige Aerodynamik und aeroakustische Antwort eines einzelnen Profils auf eine 2-dimensionale, periodische, wirbelbehaftete Anströmung richtig wiedergegeben werden. Untersucht werden zwei Profile: 1. ein symmetrisches Joukowski Profil ohne Wölbung und 12% Dicke ohne Anstellung und 2. ein Joukowski Profil mit ebenfalls 12% Dicke, einer Wölbung von 0.02 und einer Anstellung von 2° . Die Geometrie wird gemäß den Gleichungen

$$\zeta_1 = r_0 e^{i\theta} + \zeta_{0'} \quad (5.3)$$

$$\zeta_{0'} = -\epsilon_1 + i\epsilon_2 \quad (5.4)$$

$$x + i \cdot y = \left(\zeta_1 + \frac{d^2}{\zeta_1} \right) e^{-i \cdot \alpha} \quad (5.5)$$

generiert. Die genauen Parameter für die beiden Fälle sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Die Anströmung ist wie folgt definiert:

Parameter	Fall 1	Fall 2
r_0	0.54632753	0.54676443
ϵ_1	0.05062004	0.05062004
ϵ_2	0	0.02185310
d^2	0.24572591	0.24572591
α	0	0.034906585
θ	$[0, 2\pi]$	$[-\beta, 2\pi - \beta]$
β	–	0.039978687

Tabelle 5.2: Parameter für das Joukowski Profil Fall 1 und 2

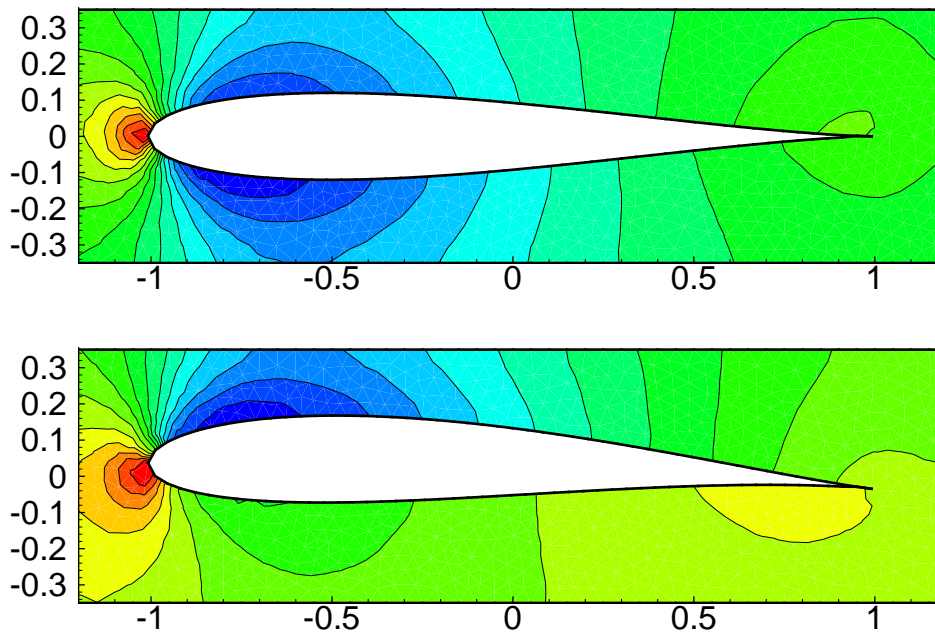


Bild 5.4: Joukowski Profil für den 1. Fall (oben) und den 2. Fall (unten)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\infty \\ 0 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cos(k(x+y) - kt) \quad (5.6)$$

$$\epsilon = 0.02 \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$k = \{0.1, 2.0\}. \quad (5.9)$$

Hier ist $\epsilon \cdot \underline{a}$ die Amplitude der Böe, die hier isotrop angesetzt wird ($|a_1| =$

Gebiet	Dim.	Gleichung	Verfahren	Δx	$\frac{\Delta t_{\Omega_i}}{\Delta t_{\Omega_1}}$
Ω_1	$[-1.2 : 1.2] \times [-0.35 : 0.35]$	nichtlinear	DG-O3	unstrukt.	1
Ω_2	$[-4 : 5] \times [-4.5 : 4.5]$	nichtlinear	O4	0.05	13
Ω_3	$[-21 : 21.5] \times [-21 : 21]$	linear	O11	0.15	39
Ω_{3b}	$[-21 : 62] \times [-42 : 42]$	linear	O11	0.15	78
$\Omega_{4 \text{ inflow}}$	$[-29.5 : -21] \times [-51 : 51]$	Sponge	O11	0.15	78
Ω_4	$[-21 : 113] \times [-51 : 51]$	Sponge	O11	0.3	156

Tabelle 5.3: Diskretisierungsparameter für die Profilrechnungen

$|a_2|$). Über den Parameter k , die reduzierte Frequenz, wird die Periode der Anströmung gesteuert. Je niedriger k gewählt wird, um so größer wird die Periode bzw. Wellenlänge der Störung und somit auch der Akustik. Mit $k = 2$ hat man bereits eine relativ kurze Wellenlänge, die bei vielen Programmen schon zu Problemen führt [34]. Diese hohen Frequenzen sind jedoch typisch für Rotor-Stator Interaktionen.

Das Rechengebiet wurde in 16 Teilgebiete aufgeteilt. Direkt um das Profil wird ein Gebiet Ω_1 $[-1.2 : 1.2] \times [-0.35 : 0.35]$ mit unstrukturierten Dreiecksgittern benutzt. Hier werden die nichtlinearen Euler Gleichungen mit ADER Discontinuous-Galerkin Verfahren 3. Ordnung gelöst, und es werden superparametrische Elemente [24] auf dem Profil verwendet. Direkt daran anschließend werden in einem Bereich Ω_2 von $[-4 : 5] \times [-4.5 : 4.5]$ ebenfalls die nichtlinearen Euler Gleichungen mit dem Finiten-Volumen ADER Verfahren 4. Ordnung gelöst. Dieser Bereich ist in insgesamt 4 Teilgebiete zerlegt. Daran angeschlossen werden 7 weitere strukturierte Gebiete im Bereich Ω_3 $[-20.5 : 62] \times [-42 : 42]$, in denen die linearisierten Euler Gleichungen mittels des *fast*ADER Verfahrens 11. Ordnung gelöst werden. Abgeschlossen wird der berechnete Bereich von 4 Sponge-Layer Gebieten Ω_4 $[-29.5 : 113] \times [-51 : 51]$, die dafür sorgen, dass keine Reflexionen an den Rändern auftreten. Eine Darstellung der Parameter ist in Tabelle 5.3 gegeben.

Für den Fall der niederfrequenten Störung ($k = 0.1$) werden die Ergebnisse mit denen aus einer linearen Theorie gewonnenen verglichen [69]. Die Ergebnisse für den Fall 1 sind in Bild 5.5 dargestellt. Wie man sieht, liegen die Lösungen nahezu perfekt aufeinander. Da die Theorie von Scott für die

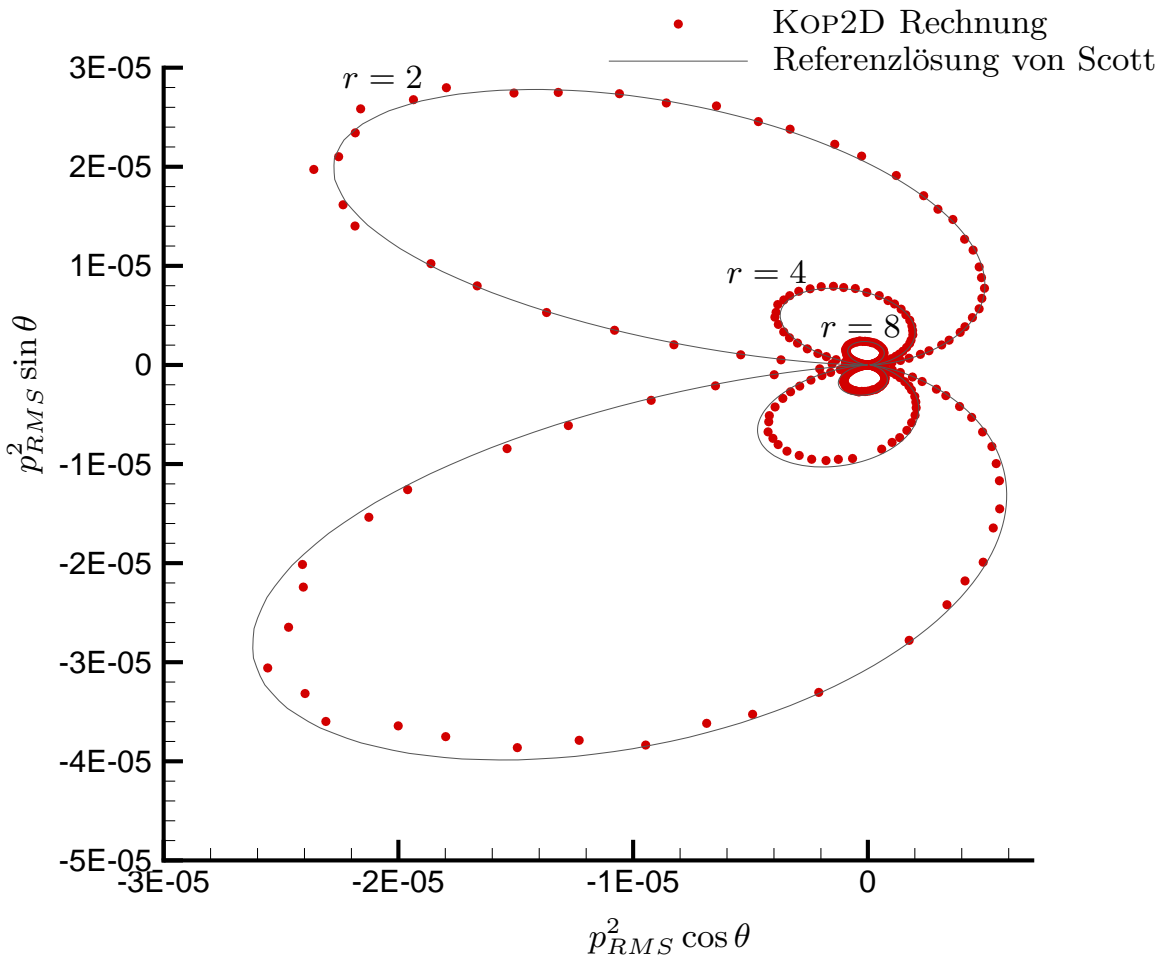


Bild 5.5: Richtcharakteristik für den Fall 1 mit $k = 0.1$. Ebenfalls dargestellt ist eine Vergleichslösung von Scott et. al. [69].

höheren Frequenzen nicht mehr anwendbar ist, werden die Ergebnisse für das gewölbte Profil (Fall 2) mit Rechnungen von Golubev et.al. [34] verglichen. Dies ist in Bild 5.7 dargestellt. Man erkennt hier ebenfalls eine gute Übereinstimmung, wobei die vorhergesagten Amplituden etwas zu klein sind. Für den 1. Fall mit $k = 2$ liegen leider keine Vergleichsdaten vor. Die entsprechende Richtcharakteristik ist in Bild 5.6 aufgezeigt. In Bild 5.8 ist die Lösung für den 2. Fall mit $k = 2.0$ dargestellt, wobei die Sponge-Layer Gebiete ausgeblendet wurden. Die akustischen Wellen sind sehr deutlich zu erkennen. In der Arbeit von Golubev et.al. [34] werden auch Rechenzeiten angegeben.

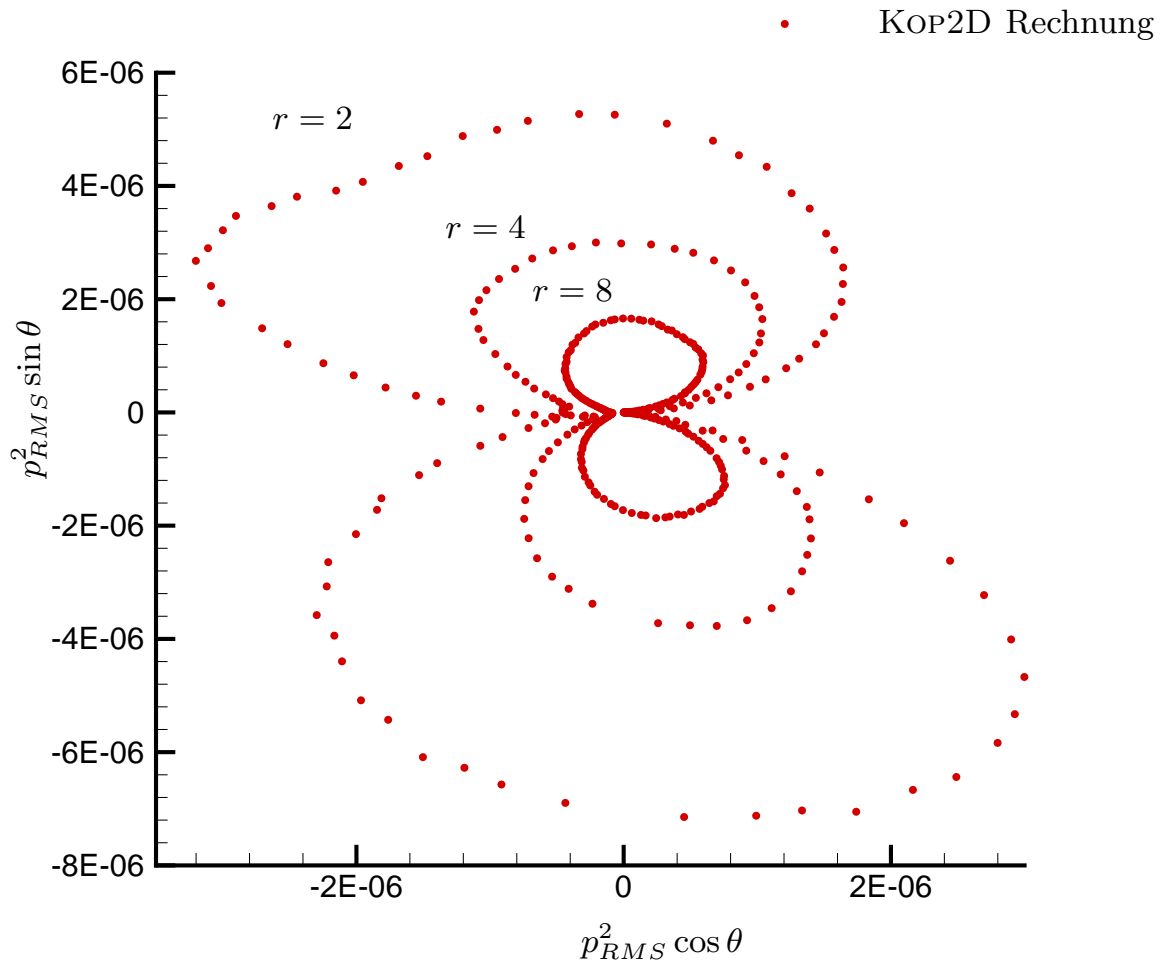


Bild 5.6: Richtcharakteristik für den Fall 1 mit $k = 2.0$

Das von ihm verwendete Gebiet besteht aus zwei Ellipsen, die innerhalb des Rechtecks $[-10 : 10] \times [-15 : 15]$ liegen. Als Rechenzeit wird $47h$ auf einem Cluster von $16 \times 2.4GHz$ Linux Rechnern angegeben. Zum Vergleich wird die Rechenzeit pro Zeiteinheit und Flächeneinheit herangezogen. Für die von Golubev verwendete Fläche wird ein Rechteck angesetzt, was einer Überschätzung von ca. 30% entspricht.

$$t_{faktor} = \frac{CPU_{time} \times Anz.Prozessoren}{Fläche \times t_{end} \times Freq.} \quad (5.10)$$

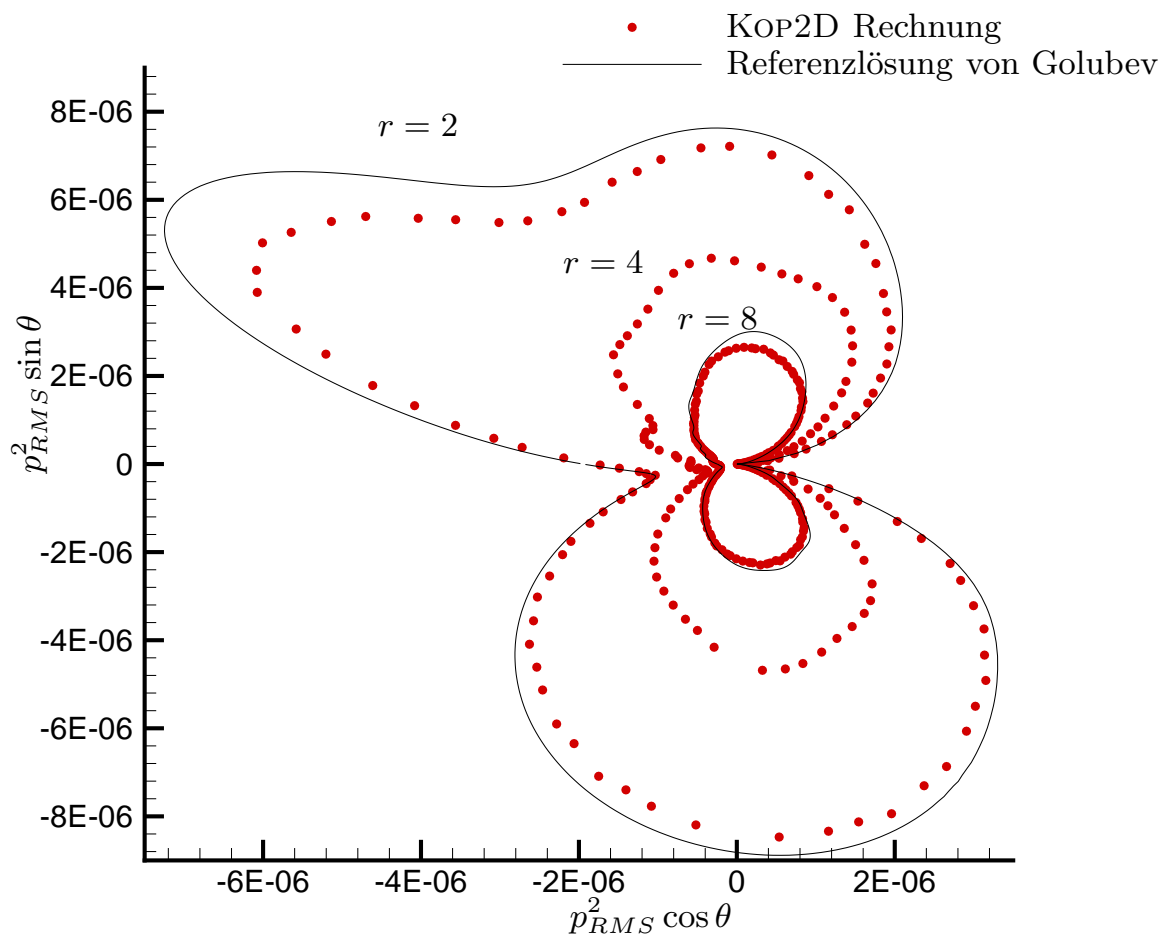


Bild 5.7: Richtcharakteristik für den Fall 2 mit $k = 2.0$. Ebenfalls dargestellt ist eine Vergleichslösung von Golubev et. al. [34].

	Golubev	KOP2D
CPU_{time}	47h	115h
$Anz. Prozessoren$	16	1
$Freq.$	2.4	3.2
$Fläche$	<600	14535
t_{end}	400	200
t_{faktor}	$1.3E - 03$	$1.2E - 05$

Wie man sieht, beträgt die Zeitersparnis mit dem hier gewählten Ansatz

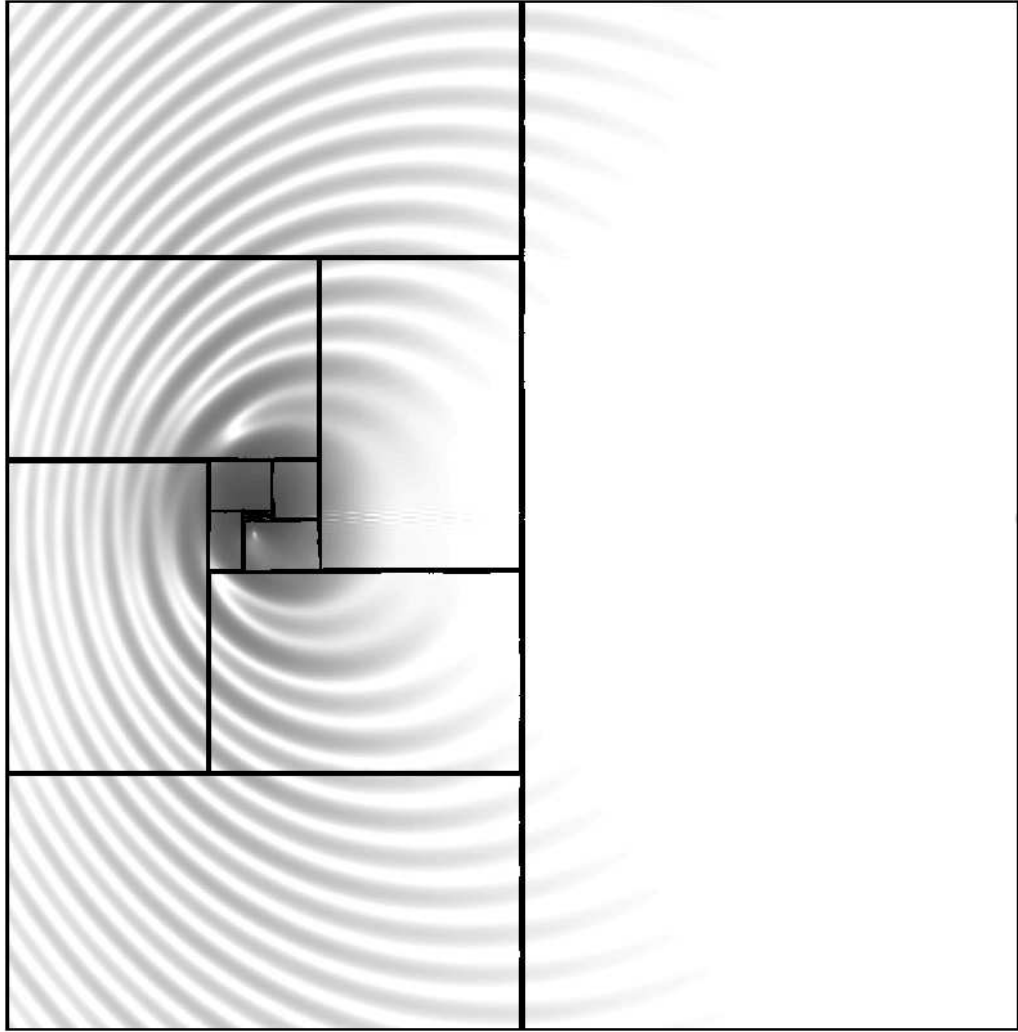


Bild 5.8: Konturdarstellung des Drucks für das Profil Fall 2 mit $k = 2.0$

> 108, d.h. also mehr als 2 Größenordnungen!

A Konvergenztabellen

A.1 Lineare Gleichungen, Konvektion eines Gausspulses

N_G	ADER $\mathcal{O}2$			ADER $\mathcal{O}3$			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
75×75	8.20861E-01	-	8.06241E-03	-	5.74654E-01	2.00478E-03	-
100×100	7.25056E-01	0.4	6.49501E-03	0.8	3.98063E-01	1.33527E-03	1.4
125×125	6.63756E-01	0.4	5.18986E-03	1.0	3.37183E-01	9.09633E-04	1.7
150×150	6.09218E-01	0.5	4.13067E-03	1.3	2.43357E-01	6.23312E-04	2.1
175×175	5.37958E-01	0.8	3.30563E-03	1.4	1.96549E-01	4.43239E-04	2.2
200×200	4.79431E-01	0.9	2.66634E-03	1.6	1.46708E-01	3.18543E-04	2.5
225×225	4.35047E-01	0.8	2.15978E-03	1.8	1.18091E-01	2.36809E-04	2.5
250×250	3.89292E-01	1.1	1.76404E-03	1.9	9.09957E-02	1.78767E-04	2.7
300×300	3.08095E-01	1.3	1.21577E-03	2.0	5.87466E-02	1.08505E-04	2.7
350×350	2.52318E-01	1.3	8.72824E-04	2.1	3.95033E-02	7.01281E-05	2.8
400×400	2.06039E-01	1.5	6.52548E-04	2.2	2.75758E-02	4.77176E-05	2.9
500×500	1.42516E-01	1.7	4.04468E-04	2.1	1.47695E-02	2.48252E-05	2.9
600×600	1.02513E-01	1.8	2.77364E-04	2.1	8.73582E-03	1.44753E-05	3.0
700×700	7.72022E-02	1.8	2.02698E-04	2.0	5.56641E-03	9.15172E-06	3.0

Tabelle A.1: Numerische Konvergenzraten der ADER $\mathcal{O}2/\mathcal{O}3$ Verfahren

N_G	ADDER \mathcal{O}_4				ADDER \mathcal{O}_5			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
75 × 75	3.72449E-01	–	1.77316E-03	–	2.45345E-01	–	7.87676E-04	–
100 × 100	2.36426E-01	1.6	9.05164E-04	2.3	1.06979E-01	2.9	3.27207E-04	3.1
125 × 125	1.36960E-01	2.4	4.66537E-04	3.0	6.16731E-02	2.5	1.41758E-04	3.7
150 × 150	8.57745E-02	2.6	2.47178E-04	3.5	2.94834E-02	4.0	6.46792E-05	4.3
175 × 175	5.59129E-02	2.8	1.36447E-04	3.9	1.66444E-02	3.7	3.18103E-05	4.6
200 × 200	3.61400E-02	3.3	8.07881E-05	3.9	8.99099E-03	4.6	1.69972E-05	4.7
225 × 225	2.34689E-02	3.7	5.04996E-05	4.0	5.41928E-03	4.3	9.57542E-06	4.9
250 × 250	1.57950E-02	3.8	3.32331E-05	4.0	3.23708E-03	4.9	5.74563E-06	4.8
300 × 300	8.10816E-03	3.7	1.60201E-05	4.0	1.34663E-03	4.8	2.33212E-06	4.9
350 × 350	4.38354E-03	4.0	8.67387E-06	4.0	6.37208E-04	4.9	1.08849E-06	4.9
400 × 400	2.62681E-03	3.8	5.09750E-06	4.0	3.30911E-04	4.9	5.61265E-07	5.0
500 × 500	1.08182E-03	4.0	2.09499E-06	4.0	1.09933E-04	4.9	1.85110E-07	5.0
600 × 600	5.21389E-04	4.0	1.00961E-06	4.0	4.42943E-05	5.0	7.43664E-08	5.0
700 × 700	2.81544E-04	4.0	5.45807E-07	4.0	2.05912E-05	5.0	3.45091E-08	5.0

Tabelle A.2: Numerische Konvergenzraten der ADDER $\mathcal{O}_4/\mathcal{O}_5$ Verfahren

N_G	ADER $\mathcal{O}6$			DRP-RK		
	L_∞	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
75×75	1.69150E-01	7.24048E-04	–	1.94271E-01	1.72330E-03	–
100×100	7.40704E-02	2.37120E-04	3.9	7.51962E-02	4.41115E-04	4.7
125×125	2.87557E-02	8.14385E-05	4.8	2.88812E-02	1.40186E-04	5.1
150×150	1.19117E-02	2.98742E-05	5.5	1.71840E-02	6.18737E-05	4.5
175×175	5.71214E-03	1.20060E-05	5.9	1.11726E-02	3.55194E-05	3.6
200×200	2.77699E-03	5.56011E-06	5.8	7.54794E-03	2.24565E-05	3.4
225×225	1.38659E-03	2.76728E-06	5.9	5.08493E-03	1.48558E-05	3.5
250×250	7.42244E-04	1.48983E-06	5.9	3.47610E-03	1.01591E-05	3.6
300×300	2.61651E-04	5.03787E-07	5.9	1.78818E-03	5.19907E-06	3.7
350×350	1.03146E-04	2.01701E-07	5.9	1.01040E-03	2.90858E-06	3.8
400×400	4.72766E-05	9.11621E-08	5.9	6.01138E-04	1.74566E-06	3.8
500×500	1.24518E-05	2.40856E-08	6.0	2.54632E-04	7.35189E-07	3.9
600×600	4.16319E-06	8.07261E-09	6.0	1.24099E-04	3.60098E-07	3.9
700×700	1.65277E-06	3.21236E-09	6.0	6.72670E-05	1.96113E-07	3.9

Tabelle A.3: Numerische Konvergenzraten des ADER $\mathcal{O}6$ und des DRP-RK Verfahrens

N_G	ADDER $\mathcal{O}15$				ADDER $\mathcal{O}16$			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
75 × 75	1.97202E-02	–	7.31108E-05	–	1.61349E-02	–	6.58760E-05	–
100 × 100	1.61827E-03	8.7	5.85823E-06	8.8	1.48536E-03	8.3	4.87504E-06	9.1
125 × 125	2.16656E-04	9.0	4.66663E-07	11.3	1.14677E-04	11.5	3.03334E-07	12.4
150 × 150	2.06930E-05	12.9	4.32633E-08	13.0	1.36468E-05	11.7	2.57730E-08	13.5
175 × 175	3.11082E-06	12.3	5.26761E-09	13.7	1.50203E-06	14.3	2.82493E-09	14.3
200 × 200	4.66691E-07	14.2	8.37322E-10	13.8	2.07234E-07	14.8	3.99890E-10	14.6
225 × 225	9.68098E-08	13.4	1.60041E-10	14.0	3.92277E-08	14.1	6.83031E-11	15.0
250 × 250	2.07457E-08	14.6	3.55351E-11	14.3	7.83094E-09	15.3	1.38960E-11	15.1
300 × 300	1.52288E-09	14.3	2.54584E-12	14.5	4.88339E-10	15.2	8.40766E-13	15.4
350 × 350	1.63504E-10	14.5	2.68686E-13	14.6	4.37205E-11	15.7	7.68366E-14	15.5
400 × 400	2.36419E-11	14.5	3.77725E-14	14.7	5.36227E-12	15.7	9.54108E-15	15.6
500 × 500	9.16489E-13	14.6	1.67081E-15	14.0	4.99101E-13	10.6	1.15018E-15	9.5
600 × 600	3.86469E-13	4.7	9.31732E-16	3.2	4.65850E-13	0.4	1.15235E-15	0.0
700 × 700	8.78631E-13	-5.3	2.06774E-15	-5.2	6.64246E-13	-2.3	1.86079E-15	-3.1

Tabelle A.4: Numerische Konvergenzraten der ADDER $\mathcal{O}15/\mathcal{O}16$ Verfahren

A.2 Nichtlineare Gleichungen, Transport eines Wirbels

N_G	ADER $\mathcal{O}2$			ADER $\mathcal{O}3$			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
25×25	2.83083E-01	–	1.67041E-02	8.73937E-02	–	4.88898E-03	–
50×50	1.04161E-01	1.4	5.05148E-03	1.57849E-02	2.5	1.01958E-03	2.3
75×75	4.55693E-02	2.0	2.26095E-03	5.40306E-03	2.6	3.55291E-04	2.6
100×100	2.47573E-02	2.1	1.27317E-03	2.40348E-03	2.8	1.57304E-04	2.8
125×125	1.59548E-02	2.0	8.16040E-04	1.26864E-03	2.9	8.20178E-05	2.9
150×150	1.10913E-02	2.0	5.66968E-04	7.47529E-04	2.9	4.78673E-05	3.0
200×200	6.10788E-03	2.1	3.18966E-04	3.19856E-04	3.0	2.03433E-05	3.0

Tabelle A.5: Numerische Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}2/\mathcal{O}3$ Verfahren

N_G	ADDER \mathcal{O}_4				ADDER \mathcal{O}_5			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
25 × 25	5.121111E-02	–	2.88742E-03	–	3.97383E-02	–	1.36997E-03	–
50 × 50	4.71258E-03	3.4	2.58205E-04	3.5	2.10094E-03	4.2	1.06778E-04	3.7
75 × 75	9.08828E-04	4.1	5.07120E-05	4.0	2.81336E-04	5.0	1.70487E-05	4.5
100 × 100	2.91917E-04	3.9	1.61393E-05	4.0	7.51356E-05	4.6	4.33852E-06	4.8
125 × 125	1.19444E-04	4.0	6.63045E-06	4.0	2.57430E-05	4.8	1.45887E-06	4.9
150 × 150	5.73087E-05	4.0	3.19885E-06	4.0	1.05503E-05	4.9	5.94442E-07	4.9
200 × 200	1.79841E-05	4.0	1.01242E-06	4.0	2.54170E-06	4.9	1.42947E-07	5.0

Tabelle A.6: Numerische Konvergenzraten der nichtlinearen ADDER $\mathcal{O}_4/\mathcal{O}_5$ Verfahren

N_G	ADER $\mathcal{O}6$				ADER $\mathcal{O}7$			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
25×25	2.20750E-02	–	1.11826E-03	–	3.12697E-02	–	7.26490E-04	–
50×50	6.48747E-04	5.1	3.34515E-05	5.1	4.80091E-04	6.0	2.21402E-05	5.0
75×75	6.52529E-05	5.7	3.09967E-06	5.9	7.16678E-05	4.7	1.86151E-06	6.1
100×100	1.19209E-05	5.9	5.64778E-07	5.9	9.41553E-06	7.1	2.74596E-07	6.7
125×125	3.15619E-06	6.0	1.49383E-07	6.0	2.05675E-06	6.8	6.08468E-08	6.8
150×150	1.06283E-06	6.0	5.03573E-08	6.0	5.73052E-07	7.0	1.82920E-08	6.6
200×200	1.86480E-07	6.0	9.46588E-09	5.8	7.77200E-08	6.9	3.36605E-09	5.9

Tabelle A.7: Numerische Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}6/\mathcal{O}7$ Verfahren

N_G	ADDER O8				ADDER O9			
	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
25 × 25	9.10622E-03	–	5.60124E-04	–	1.53421E-02	–	3.72328E-04	–
50 × 50	2.13332E-04	5.4	8.09738E-06	6.1	3.12202E-04	5.6	7.21034E-06	5.7
75 × 75	8.36362E-06	8.0	3.62494E-07	7.7	1.09056E-05	8.3	2.85385E-07	8.0
100 × 100	8.92642E-07	7.8	3.91684E-08	7.7	7.08412E-07	9.5	2.75611E-08	8.1
125 × 125	1.54632E-07	7.9	8.46115E-09	6.9	1.00304E-07	8.8	6.07481E-09	6.8
150 × 150	3.63163E-08	7.9	3.57076E-09	4.7	2.53810E-08	7.5	2.78042E-09	4.3
200 × 200	1.79843E-08	2.4	1.61963E-09	2.7	1.78396E-08	1.2	1.44013E-09	2.3

Tabelle A.8: Numerische Konvergenzraten der nichtlinearen ADDER O8/O9 Verfahren

		ADER $\mathcal{O}10$				ADER $\mathcal{O}16$				
N_G		L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}	N_G	L_∞	\mathcal{O}_{L_∞}	L_1	\mathcal{O}_{L_1}
25×25		4.28409E-03	-	3.40017E-04	-	25×25	3.90566E-03	-	1.74235E-04	-
50×50		7.43320E-05	5.8	2.58818E-06	7.0	30×30	1.26715E-03	6.2	5.84347E-05	6.0
55×55		2.52762E-05	11.3	1.09196E-06	9.1	35×35	4.95446E-04	6.1	1.31280E-05	9.7
60×60		1.13242E-05	9.2	4.86511E-07	9.3	40×40	7.21586E-05	14.4	2.96322E-06	11.1
65×65		5.44274E-06	9.2	2.30028E-07	9.4	45×45	1.47021E-05	13.5	7.97374E-07	11.1
70×70		2.69842E-06	9.5	1.14555E-07	9.4	50×50	5.61467E-06	9.1	2.52661E-07	10.9
75×75		1.43235E-06	9.2	6.12300E-08	9.1	75×75	1.36658E-07	9.2	1.70303E-08	6.7
100×100		9.22289E-08	9.5	8.19977E-09	7.0					
125×125		3.35125E-08	4.5	3.98955E-09	3.2					
150×150		2.95921E-08	0.7	2.77343E-09	2.0					

Tabelle A.9: Numerische Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}10/\mathcal{O}16$ Verfahren

B Koeffiziententabellen für *fast*ADER

	-2	-1	0	1	2
2	$-C_{-1,+2}^{X^*}$ $+C_{-2,+2}^{Y^*}$	$+C_{-1,+2}^{X^*}$ $+C_{-1,+2}^{Y^*}$	$+C_{+0,+2}^{X^*}$ $+C_{+0,+2}^{Y^*}$	$+C_{+1,+2}^{X^*}$ $+C_{+1,+2}^{Y^*}$	$+C_{+2,+2}^{X^*}$ $+C_{+2,+2}^{Y^*}$
1	$-C_{-1,+1}^{X^*}$ $+C_{-2,+1}^{Y^*}$	$+C_{-1,+1}^{X^*}$ $+C_{-1,+1}^{Y^*}$	$+C_{+0,+1}^{X^*}$ $+C_{+0,+1}^{Y^*}$	$+C_{+1,+1}^{X^*}$ $+C_{+1,+1}^{Y^*}$	$+C_{+2,+1}^{X^*}$ $+C_{+2,+1}^{Y^*}$
0	$-C_{-1,+0}^{X^*}$ $+C_{-2,+0}^{Y^*}$	$+C_{-1,+0}^{X^*}$ $+C_{-1,+0}^{Y^*}$	$+C_{+0,+0}^{X^*}$ $+C_{+0,+0}^{Y^*}$	$+C_{+1,+0}^{X^*}$ $+C_{+1,+0}^{Y^*}$	$+C_{+2,+0}^{X^*}$ $+C_{+2,+0}^{Y^*}$
-1	$-C_{-1,-1}^{X^*}$ $+C_{-2,-1}^{Y^*}$	$+C_{-1,-1}^{X^*}$ $+C_{-1,-1}^{Y^*}$	$+C_{+0,-1}^{X^*}$ $+C_{+0,-1}^{Y^*}$	$+C_{+1,-1}^{X^*}$ $+C_{+1,-1}^{Y^*}$	$+C_{+2,-1}^{X^*}$ $+C_{+2,-1}^{Y^*}$
-2	$-C_{-1,-2}^{X^*}$ $+C_{-2,-2}^{Y^*}$	$+C_{-1,-2}^{X^*}$ $+C_{-1,-2}^{Y^*}$	$+C_{+0,-2}^{X^*}$ $+C_{+0,-2}^{Y^*}$	$+C_{+1,-2}^{X^*}$ $+C_{+1,-2}^{Y^*}$	$+C_{+2,-2}^{X^*}$ $+C_{+2,-2}^{Y^*}$

Tabelle B.1: Berechnung von $\underline{\underline{C}}^{**} \cdot \left(\frac{\Delta t}{|I_{ij}|} \right)^{-1}$ für ein Verfahren 4. Ordnung

Lebenslauf

- 13.01.1975 Geboren in Stuttgart-Hedelfingen
verheiratet, 2 Kinder
- 1981-1985 Grundschule
- 1985-1994 Württemberg-Gymnasium, Stuttgart-Untertürkheim
- 06.1994 Allgemeine Hochschulreife
- 10.1994-05.2000 Universität Stuttgart
Studium der Luft- und Raumfahrttechnik
Vertiefungen: Thermodynamik und Strömungsmechanik
Studienarbeit: *The ADER approach for linear and non-linear advection diffusion problems*
Diplomarbeit: *Wärmeübertragung im laminar oder turbulent durchströmten ebenen Kanal bei kleinen Prandtlzahlen*
- 06.2000-08.2004 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart
Dissertation: *Finite-Volumen Verfahren hoher Ordnung und heterogene Gebietszerlegung für die numerische Aeroakustik*
- seit 08.2004 bei der Robert Bosch GmbH Gasoline Systems, Entwicklung Methoden und Prozesse

Literatur

- [1] M. Auwarter-Kurz, C.-A. Coclici, J. Heiermann, and W.L. Wendland. Heterogenous domain decomposition methods for compressible magnetoplasma flows. In G. Warnecke H. Freistühler, editors, *Hyperbolic Problems I: Theory, Numerics, Applications*, volume ISNM 140, pages 89–98. Birkhäuser-Verlag Basel, 2001.
- [2] D.S. Balsera and C.W. Shu. Monotonicity perserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. *J. Comput. Phys.*, 160:405–452, 2000.
- [3] A. Bamberger, R. Glowinski, and Quang Huy Tran. A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(2):603–639, 1997.
- [4] M. Ben-Artzi and J. Falcovitz. A second-order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics. *J. Comput. Phys.*, 55:1–32, 1984.
- [5] S.J. Billett and E.F. Toro. On the accuracy and stability of explicit schemes for multidimensional linear homogeneous advection equations. *J. Comp. Phys.*, 131:247–250, 1997.
- [6] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, Inc., 2nd edition, 2001. available online:http://www-personal.engin.umich.edu/~jpboyd/BOOK_Spectral2000.html.
- [7] I. Bronstein and A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1997.
- [8] J.C. Butcher. *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*. Wiley, 1987.
- [9] B.van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second order sequel to Godunov’s method. *J. Comp. Phys.*, 32:101–136, 1979.
- [10] M. Caceres. *Development of a third-order accurate scheme of a MUSCL type for the time-dependent one-dimensional Euler equations*. PhD thesis, Department of Aerospace Science, Cranfield University, 1993.
- [11] J. Casper and H.L. Atkins. A finite-volume high-order ENO scheme for two-dimensional hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, 106:62–76, 1993.

- [12] B. Cockburn, S. Hou, and C.-W. Shu. The Runge-Kutta local projection Discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case. *Mathematics of Computation*, 54:545–581, 1990.
- [13] B. Cockburn, C. Johnson, C.-W. Shu, and E. Tadmor. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In A. Quarteroni, editor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, volume 1697 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 325–432. Springer, 1998.
- [14] B. Cockburn, S.-Y. Lin, and C.-W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection Discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 84:90–113, 1989.
- [15] B. Cockburn and C.-W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection Discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: General framework. *Mathematics of Computation*, 52:411–435, 1989.
- [16] B. Cockburn and C.-W. Shu. The Runge-Kutta local projection P1-Discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 25:337–361, 1991.
- [17] B. Cockburn and C.-W. Shu. The Runge-Kutta local projection Discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws v: multi-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 141:199–224, 1998.
- [18] C.-A. Coclici. *Domain decomposition methods and far-field boundary conditions for two-dimensional compressible flows around airfoils*. PhD thesis, Universität Stuttgart, November 1998.
- [19] C.-A. Coclici, J. Heiermann, G. Moroşanu, and W.L. Wendland. Multi-model formulation for compressible viscous plasma flows in MPD-accelerators. In *Proceedings of ECCOMAS CFD Conference 2001*, September 2001.
- [20] C.-A. Coclici, J. Heiermann, G. Moroşanu, and W.L. Wendland. Asymptotic analysis of a two-dimensional coupled problem for compressible viscous flows. *J. Discrete Cont. Dynamical Systems*, 9, 2003.

- [21] C.-A. Coclici and W.L. Wendland. Analysis of heterogeneous domain decomposition for compressible viscous flows. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 2000.
- [22] K.S. Dahl. Aeroacoustic computation of low mach number flow. Technical report, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, December 1996.
- [23] M. Dennecke. Lax-Wendroff Prozedur beliebiger Ordnung für lineare und nichtlineare hyperbolische Systeme. Studienarbeit, 2004. Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart.
- [24] M. Dumbser and C.-D. Munz. Arbitrary high order Discontinuous Galerkin schemes. In S. Cordier, T. Goudon, M. Gutnic, and E. Sonnendrucker, editors, *Numerical Methods for Hyperbolic and Kinetic Problems*, IRMA Series in Mathematics and Theoretical Physics. de Gruyter, 2004. Going to appear.
- [25] R.W. Dyson. Technique for very high order nonlinear simulation and validation. Technical Report TM-2001-210985, NASA, 2001.
- [26] R.W. Dyson and J.W. Goodrich. An automated approach to very high order aeroacoustic computations in complex geometries. In *Proc. of 6th Aeroacoustics conference*, number 2000-2006 in AIAA, 2000.
- [27] R. Ewert. *A hybrid Computational Aeroacoustics Method to Simulate Airframe Noise*. Strömungstechnik. Shaker Verlag, 2002.
- [28] F. Farassat and M.K. Myers. Extension of Kirchoff formula to radiation from moving surfaces. *Journal of Sound Vibration*, 123:451–460, 1988.
- [29] A.T. Fedorchenko. On some fundamental flaws in present aeroacoustic theory. *Journal of Sound and Vibration*, 232(4):719–782, 2000.
- [30] J.E. Ffowcs Williams and D.L. Hawkins. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 264:321–342, 1969.
- [31] J.B. Freund, S.K. Lele, and P. Moin. Matching of near/far-field equation sets for direct computation of aerodynamic sound. In *15th AIAA Aeroacoustics Conference*, October 1993.

- [32] E. Godlewski and P.-A. Raviart. Coupling nonlinear hyperbolic systems: mathematical and numerical analysis. In R. Herbin and D. Kröner, editors, *Finite Volumes for Complex Applications III*, pages 211–218. Hermes Penton Science, 2002.
- [33] S.K. Godunov. Finite difference methods for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, 47:271–306, 1959.
- [34] V.V. Golubev, R.R. Makbadi, and J.R. Scott. Numerical inviscid analysis of nonlinear airfoil response to impinging high-intensity high-frequency gust. In *Proceedings of 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2004. AIAA 2004-3002.
- [35] J.C. Hardin and D.S. Pope. An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics. *Theoretical and computational fluid dynamics*, 6:323–340, 1994.
- [36] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *J. Comput. Phys.*, 71:231–303, 1987.
- [37] A. Harten, P.D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35–61, 1983.
- [38] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows Vol I: Fundamentals of Numerical Discretisation*. Wiley, 1988.
- [39] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows Vol II: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flow*. Wiley, 1988.
- [40] M.S. Howe. Contributions to the theory of aerodynamic sound with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.*, 71(4):625–673, 1975.
- [41] G.-S. Jiang and C.-W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comp. Phys.*, pages 202–228, 1996.
- [42] M.A. Käser. *Adaptive Methods for the Numerical Simulation of Transport Processes*. PhD thesis, Technische Universität München, Fakultät für Mathematik, 2003.

- [43] M.A. Käser and A. Iske. ADER schemes for the solution of conservation laws on adaptive triangulations. In *Mathematical Methods and Modeling in Hydrocarbon Exploration and Production*, Mathematics in Industry. Springer-Verlag, 2004. Going to appear.
- [44] P.D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13:217–237, 1960.
- [45] P.D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13:217–237, 1960.
- [46] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically - 1. General theory. *Proc. Roy. Soc. London*, 211(A1107):564–587, 1952.
- [47] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically - 2. Turbulence as a source of sound. *Proc. Roy. Soc. London*, 222(A1148):1–32, 1954.
- [48] G.M. Lilley. The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol. IV-Theory. Technical Report AFAPL-TR-72-53, Air Force Aero Propulsion Laboratory, 1972.
- [49] B. Lombard and J. Piraux. Interface method and finite volumes: Two-dimensional acoustic example. In R. Herbin and D. Kröner, editors, *Finite Volumes for Complex Applications III*, pages 599–606. Hermes Penton Science, 2002.
- [50] B.E. Mitchell, S.K. Lele, and P. Moin. Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair. *J. Fluid Mech.*, 285:181–202, 1995.
- [51] C.-D. Munz and R. Fortenbach. A contribution to the flow decomposition debate. In *Proc. of SWING workshop*, Stuttgart, 2002.
- [52] C.-D. Munz and R. Schneider. An arbitrary high order accurate finite-volume scheme for the maxwell equations in two dimensions on unstructured meshes. Technical report, Forschungszentrum Karlsruhe - Technik und Umwelt, Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik, Postfach 3640, 76021 Karlsruhe, Germany, 2000.
- [53] C.-D. Munz and T. Schwartzkopff. Direct simulation of sound generation and sound propagation using heterogeneous domain decomposition. In *Proceedings of WCCM*, July 2002.

- [54] W. Möhring. On vortex sound at low mach number. *J. Fluid Mech.*, 85(4):685–691, 1978.
- [55] A. Powell. Theory of vortex sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 16:177–195, 1964.
- [56] J. Qiu, M. Dumbser, and C.-W. Shu. The Discontinuous Galerkin method with Lax-Wendroff type time discretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, submitted to.
- [57] J. Qiu and C.-W. Shu. Finite difference WENO schemes with Lax-Wendroff type time discretization. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(6):2185–2198, 2003.
- [58] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition methods for partial differential equations*. Numerical Mathematics and scientific computation. Oxford Science Publications, 1999.
- [59] W.H. Reed and T.R. Hill. Triangular mesh methods for neutron transport equation. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [60] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters, vectors, and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43:357–372, 1981.
- [61] P.L. Roe. Numerical algorithms for the linear wave equation. Technical report, Royal Aircraft Establishment, Bedford, UK, 1981.
- [62] T. Schwartzkopff. The ADER approach for linear and non-linear advection diffusion problems. Studienarbeit, 1999. Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart.
- [63] T. Schwartzkopff, M. Dumbser, and C.-D. Munz. Fast high order ADER schemes for linear hyperbolic equations. *J. Comp. Phys.*, 197:532–539, 2004.
- [64] T. Schwartzkopff, M. Dumbser, and C.-D. Munz. Fast high order finite volume schemes for linear wave propagation. *Numerische Mathematik*, 2004. submitted to.
- [65] T. Schwartzkopff and C.-D. Munz. Direct simulation of aeroacoustics. In W.L. Wendland and M. Efendiev, editors, *Analysis and Simulation of Multifield Problems*, volume 12 of *Lecture Notes in applied and computational Mechanics*, pages 337–342. Springer, 2003.

- [66] T. Schwartzkopff, C.-D. Munz, and E.F. Toro. ADER: A high order approach for linear hyperbolic systems in 2d. *Journal of Scientific Computing*, 17(1-4):231–240, 2002.
- [67] T. Schwartzkopff, C.-D. Munz, E.F. Toro, and R.C. Millington. ADER-2d: A very high-order approach for linear hyperbolic systems. In *Proceedings of ECCOMAS CFD Conference 2001*, September 2001.
- [68] T. Schwartzkopff, C.-D. Munz, E.F. Toro, and R.C. Millington. The ADER approach in 2d. In T. Sonar, editor, *Discrete Modelling and Discrete Algorithms on Continuum Mechanics*, pages 207–216, Berlin, 2001. Logos Verlag.
- [69] J.R. Scott. Single airfoil gust response problem. In *Proceedings of 4th Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, 2004. Going to appear.
- [70] J. Shi, C. Hu, and C.-W. Shu. A technique of treating negative weights in WENO schemes. *J. Comp. Phys.*, 175:108–127, 2002.
- [71] C.-W. Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic Conservation Laws. *NASA/CR-97-206253 ICASE Report No.97-65*, November 1997.
- [72] S.K.Godunov. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sbornik*, 47:357–393, 1959.
- [73] A.H. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [74] C.K.W. Tam. Numerical methods in computational aeroacoustics. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture Series 1996-04, Applied Aero-Acoustics: Prediction methods, 1996.
- [75] C.K.W. Tam. On the failure of the acoustic analogy theory to identify the correct noise source. In *Proc. of the 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, number 2001-2117 in AIAA, 2001.
- [76] C.K.W. Tam. Aliasing. In *Proceedings of 4th Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, 2004. Going to appear.
- [77] P.A. Tipler. *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, 1994.

- [78] V.A. Titarev and E.F. Toro. ADER: Arbitrary high order Godunov approach. *Journal of Scientific Computing*, 17(1-4):609–618, December 2002.
- [79] V.A. Titarev and E.F. Toro. ADER schemes for three-dimensional nonlinear hyperbolic systems. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series*, 2003.
- [80] V.A. Titarev and E.F. Toro. ADER schemes for three-dimensional nonlinear hyperbolic systems. *submitted to J. Comp. Phys.*, 2003.
- [81] V.A. Titarev and E.F. Toro. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series*, 2003.
- [82] V.A. Titarev and E.F. Toro. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws. *submitted to J. Comp. Phys.*, 2003.
- [83] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, first edition, 1997.
- [84] E.F. Toro. Primitive, conservative and adaptive schemes for hyperbolic conservation laws. In E.F. Toro and J.F. Clarke, editors, *Numerical Methods for Wave Propagation*, pages 323–385. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [85] E.F. Toro and R.C. Millington. ADER: High-order non-oscillatory advection schemes. In *Proceedings of the 8th International Conference on Nonlinear Hyperbolic Problems*, February 2000. Preprint.
- [86] E.F. Toro, R.C. Millington, and L.A.M. Nejad. Primitive upwind methods for hyperbolic partial differential equations. In C.H. Bruneau, editor, *Sixteenth International Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, pages 421–426. Springer Verlag, 1998.
- [87] E.F. Toro, R.C. Millington, and L.A.M. Nejad. Towards very high order Godunov schemes. In E.F. Toro, editor, *Godunov Methods. Theory and Applications*, pages 907–940. Kluwer/Plenum Academic Publishers, 2001.

- [88] E.F. Toro and V. A. Titarev. Solution of the generalized Riemann problem for advection-reaction equations. *Proc. Roy. Soc. London*, pages 271–281, 2002.
- [89] E.F. Toro and V.A. Titarev. ADER schemes for scalar hyperbolic conservation laws in three space dimensions. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series*, 2003.
- [90] E.F. Toro and V.A. Titarev. TVD fluxes for the high-order ADER schemes. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series*, 2003. Univ. of Cambridge, UK, submitted to *J. Sci. Comput.*

Abbildungsverzeichnis

2.1	Das verallgemeinerte und das konventionelle Riemann Problem	21
3.1	ENO Rekonstruktion für zwei Dimensionen	28
3.2	Transport eines geschlitzten Zylinders mit ADER ENO $\mathcal{O}5$. .	31
3.3	Konvergenzraten des <i>fast</i> ADER Verfahrens	44
3.4	Konvergenzraten des <i>fast</i> ADER Verfahrens über CPU Zeit . .	45
3.5	Stabilitäts Diagramm für Verfahren gerader Ordnung	47
3.6	Stabilitäts Diagramm für Verfahren ungerader Ordnung . . .	48
3.7	Relativer CPU Aufwand über die Ordnung der Verfahren . .	49
3.8	Amplitudenfehler Diagramme	51
3.9	Phasenfehler Diagramme	52
3.10	Advektion eines Gausspuls nach $t^{end} = 100$	53
3.11	Advektion eines Gausspuls nach $t^{end} = 1000$	54
3.12	L_1 und L_∞ Fehler des geschlitzten Zylinders	56
3.13	Geschlitzter Zylinder mit <i>fast</i> ADER und mit ENO gerechnet . .	57
3.14	Konvergenzraten der ADER Verfahren	62
3.15	Konvergenzraten der ADER Verfahren über die CPU Zeit . .	63
3.16	Wechselwirkung Stoß-Turbulenz, $Ma = 1.1$, $\mathcal{O}2$, $\mathcal{O}4$, $\mathcal{O}10$. . .	65
3.17	Wechselwirkung Stoß-Turbulenz, $Ma = 1.1$, $\mathcal{O}3$, $\mathcal{O}5$, $\mathcal{O}7$. . .	66
3.18	Wechselwirkung Stoß-Turbulenz, $Ma = 1.1$, ENO $\mathcal{O}2$, $\mathcal{O}3$, $\mathcal{O}5$	67
3.19	Wechselwirkung Stoß-Turbulenz, $Ma = 3.0$	69
4.1	Kopplung verschiedener Gitter: Mittelung und Interpolation .	74
4.2	Volumengewichtete Mittelung	74
4.3	Interpolation an den Gaussintegrationspunkten	75
4.4	Prinzip der Kopplung mit unterschiedlichen Zeitschritten . .	79
4.5	Einbindung von HYDSOL und EULER3D in KOP2D	80
4.6	Vergleich der Lösung auf einem partitionierten Gitter	83
4.7	5 Teilgebiete zur Untersuchung der wechselnden Gleichungen	87
4.8	Druckverlauf und Reflexion an drei Punkten	88
4.9	Reflexionen auf einem groben und einem feinen Gitter	89
4.10	Anfangsbedingung der hochfrequenten Störungen	91
4.11	Lösung der hochfrequenten Störungen bei $n = 150$ und $n = 300$	92
4.12	Einfluss der Verfahrensordnung bei der hochfrequenten Störung	93
5.1	Lösung des rotierenden Wirbelpaars nach $t = 600$	96
5.2	Druckverlauf beim rotierenden Wirbelpaar für Rechnungen 1,2,3	97
5.3	Druckverlauf beim rotierenden Wirbelpaar für Rechnungen 3,4,5	98
5.4	Verwendete Joukowski Profile	100

5.5	Richtcharakteristik für den Fall 1 mit $k = 0.1$	102
5.6	Richtcharakteristik für den Fall 1 mit $k = 2.0$	103
5.7	Richtcharakteristik für den Fall 2 mit $k = 2.0$	104
5.8	Konturdarstellung des Drucks für das Profil Fall 2 mit $k = 2$	105

Tabellenverzeichnis

3.1	Charakteristische Zerlegung der linearisierten Euler Gleichungen	39
3.2	Praktische Stabilitätslimits für die ADER Verfahren	49
3.3	CPU Zeiten der <i>fast</i> ADER, ADER und ADER ENO Verfahren .	58
3.4	Fehlernormen ADER State Expansion und Flux Expansion . .	60
4.1	Finite-Volumen versus Discontinuous-Galerkin Verfahren . . .	73
4.2	Größe der Gebiete in den Validierungsrechnungen	83
4.3	Fehlernormen bei wechselndem Gitter. Zeitschritt konstant. .	84
4.4	Fehlernormen bei wechselndem Gitter. Ghostzellen konstant.	85
4.5	Fehlernormen bei wechselndem Gitter. Ghostzellen integriert.	86
5.1	Parameter der Rechnungen zum rotierenden Wirbelpaar . . .	95
5.2	Parameter für das Joukowski Profil Fall 1 und 2	100
5.3	Diskretisierungsparameter für die Profilrechnungen	101
A.1	Konvergenzraten der ADER $\mathcal{O}2/\mathcal{O}3$ Verfahren	107
A.2	Konvergenzraten der ADER $\mathcal{O}4/\mathcal{O}5$ Verfahren	108
A.3	Konvergenzraten des ADER $\mathcal{O}6$ und des DRP-RK Verfahren .	109
A.4	Konvergenzraten der ADER $\mathcal{O}15/\mathcal{O}16$ Verfahren	110
A.5	Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}2/\mathcal{O}3$ Verfahren .	111
A.6	Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}4/\mathcal{O}5$ Verfahren .	112
A.7	Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}6/\mathcal{O}7$ Verfahren .	113
A.8	Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}8/\mathcal{O}9$ Verfahren .	114
A.9	Konvergenzraten der nichtlinearen ADER $\mathcal{O}10/\mathcal{O}16$ Verfahren	115
B.1	Berechnung der <i>fast</i> ADER Koeffizienten 4. Ordnung	117