

Flugmechanik und Flugregelung von Luftschiffen

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Bernhard Gottfried Kämpf
aus Sigriswil

| | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| Hauptberichter: | Prof. Klaus Well, Ph.D. |
| Mitberichter: | Prof. Dr.-Ing. Siegfried Wagner |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 17. Oktober 2003 |

Institut für Flugmechanik und Flugregelung
der Universität Stuttgart
2004

Diese Abhandlung wurde 2004 im Herbert Utz Verlag (www.utzverlag.de) als Buch unter der ISBN 3-8316-0432-0 veröffentlicht.

Bernhard G. Kämpf

**Flugmechanik und Flugregelung
von Luftschiffen**

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine geschlossene algebraische Modellierung der Flugmechanik von Luftschiffen entwickelt und im Rahmen analytischer und numerischer Untersuchungen angewendet. Die Resultate geben eine allgemeine Einsicht in die flugmechanischen Eigenschaften von Luftschiffen und werden in den Entwurf einer Flugreglerstruktur umgesetzt.

Neben der Darstellung der Gewicht- und Schubkräfte werden die aerostatischen und thermodynamischen Zusammenhänge dargestellt. Der Schwerpunkt der Modellierung liegt jedoch bei der halbempirischen Beschreibung der aerodynamischen Kräfte: Die Rumpfumströmung wird über einen Potentialströmungs- und einen Querströmungsansatz, die Leitwerke mit Hilfe der Traglinientheorie und einem Querströmungsansatz modelliert. Das resultierende verteilte Aerodynamikmodell kann lokale Anströmungsbedingungen infolge stationärer und instationärer Windfelder berücksichtigen. Es wird detailliert mit der Lösung nach der Theorie schlanker Körper verglichen. In der Modelldiskussion wird auf besondere Eigenschaften der Luftschiffaerodynamik, wie beispielsweise die scheinbare Masse Effekte, eingegangen und die Wirkung des Windes erläutert.

Die flugmechanischen Untersuchungen behandeln sowohl Flugleistungsaspekte als auch Fragen der Manövrierbarkeit, Steuerbarkeit und Stabilität. Die wesentlichen Eigenschaften wie Steigleistung, Kurvenflugeigenschaften und Eigenbewegungsformen werden durch algebraische Beziehungen und einfache Diagramme dargestellt. Ihre Empfindlichkeit gegenüber Variationen der Modellparameter werden auch mit Hilfe numerischer Simulationen untersucht.

Abschließend wird gezeigt, welche Signlrückführungen die Luftschiffdynamik positiv beeinflussen und es wird eine einfache Reglerstruktur zur Regelung der Längs- und Seitenbewegung entwickelt.

Abstract

This thesis presents a closed algebraic model of the flight mechanics of an airship. The model is applied for analytical and numerical studies to give an insight into the flight mechanical properties of airships. Based on this knowledge, a flight control concept is developed.

The modeling part discusses the effects of weight and thrust as also of aerostatics and thermodynamics, but the emphasis is on the description of the aerodynamic model. The aerodynamics of the hull are modeled using potential flow and cross flow, whereas the empennage area is modeled by lifting line theory and cross flow. The resulting description is able to consider distributed flow conditions as they can be found in non-uniform steady as also unsteady windfields. Properties of airship aerodynamics are discussed with emphasis on the effect of apparent masses and wind.

Flight performance as well as dynamical aspects like controllability and stability are then analysed. If possible, the properties are expressed with algebraic relations or simple diagrams. But also numerical simulation are used, e.g. to study the sensitivity to parameter changes.

It is finally shown, how simple feedback structures influence the dynamics of the airship in a positive way. The schematics of a control system for the longitudinal and the lateral motion is presented.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Flugmechanik und Flugregelung der Universität Stuttgart. Angeregt durch das Projekt "Solarluftschiff" an der Universität Stuttgart, begann ich 1992 mich mit dem Thema "Flugmechanik von Luftschiffen" zu befassen.

Prof. Klaus H. Well, Ph.D., Direktor des Instituts für Flugmechanik und Flugregelung, motivierte mich immer wieder zur Auseinandersetzung mit diesem Thema. Dafür, für seine Geduld und für die Übernahme des Hauptberichts danke ich ihm herzlich. Weiter bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Siegfried Wagner, Direktor des Instituts für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart, für die Übernahme des Mitberichts.

Besonders möchte ich mich bei meinen ehemaligen Kollegen vom Institut für Flugmechanik und Flugregelung, vom Institut für Aero- und Gasdynamik und auch bei der Gruppe um das Solarluftschiff "Lotte", sowie bei meinen Kollegen von CargoLifter bedanken. Mit ihren Anregungen und durch ihre Diskussionsbereitschaft trugen sie maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Meiner Frau und meinen Kindern danke ich herzlichst für das Verständnis und die Geduld, mit der sie all die Entbehrungen während meiner Dissertationszeit auf sich nahmen. Mein Dank gilt auch unseren Familien und unseren Freunden in Stuttgart, sie schufen mit die Voraussetzung für die Erstellung dieser Arbeit.

Zeuthen, im Februar 2004,

Bernhard G. Kämpf

Inhalt

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | Einleitung..... | 1 |
| 1.1 | Einführung und Motivation..... | 1 |
| 1.2 | Ausgangssituation und Umfeld..... | 3 |
| 1.3 | Zielsetzung und Vorgehensweise..... | 5 |
| 2 | Mathematische Modellbeschreibung..... | 7 |
| 2.1 | Achsenkreuze und flugmechanische Größen..... | 7 |
| 2.1.1 | Bezeichnung gerichteter flugmechanischer Größen..... | 7 |
| 2.1.2 | Achsenkreuze, Fluglage und Geschwindigkeiten..... | 8 |
| 2.1.3 | Körperfeste Achsen..... | 11 |
| 2.1.4 | Luftschiffsteuerung..... | 11 |
| 2.2 | Bewegungsgleichungen..... | 12 |
| 2.2.1 | Impuls- und Drallsatz, Starrkörperbewegungsgleichungen..... | 13 |
| 2.2.2 | Bewegungsdifferentialgleichung der Fluglage und des Ortes..... | 16 |
| 2.2.3 | Berücksichtigung weiterer dynamischer Anteile..... | 17 |
| 2.2.4 | Zusammenfassende Beschreibung des Prozesses Luftschiff..... | 17 |
| 2.3 | Aerostatik, Masse und Gewicht..... | 19 |
| 2.3.1 | Atmosphärenmodell und Gasgesetze..... | 19 |
| 2.3.2 | Definition der Systemgrenzen..... | 21 |
| 2.3.3 | Aerostatischer Auftrieb..... | 22 |
| 2.3.4 | Massenmodell..... | 22 |
| 2.3.5 | Gewichtskraft..... | 22 |
| 2.3.6 | Statischer Nettoauftrieb..... | 23 |
| 2.4 | Schubkräfte..... | 24 |
| 2.4.1 | Allgemeine Formulierung..... | 24 |
| 2.4.2 | Stationäres Schubmodell..... | 25 |
| 2.4.3 | Dynamik der Antriebe..... | 26 |
| 3 | Modellbeschreibung Aerodynamik und Windwirkung..... | 27 |
| 3.1 | Einleitung..... | 27 |
| 3.1.1 | Aufbau und Ausrichtung des Aerodynamik-Modells..... | 27 |
| 3.1.2 | Aufbau des Kapitels..... | 30 |
| 3.2 | Verteilte potentialtheoretische Rumpfkräfte..... | 31 |
| 3.2.1 | Verteilte potentialtheoretische Rumpfkräfte bei Windstille..... | 31 |
| 3.2.2 | Verteilte potentialtheoretische Rumpfkräfte bei Flug durch Windfeld..... | 40 |
| 3.3 | Integrale potentialtheoretische Rumpfkräfte..... | 47 |
| 3.3.1 | Berechnung der Rumpfintegrale in homogener, windfreier Anströmung..... | 47 |
| 3.3.2 | Integrale potentialtheoretische Rumpfkräfte bei Flug durch Windfeld..... | 52 |
| 3.3.3 | Spezialfall: Integrale Kräfte auf geschlossenen Rotationsellipsoiden..... | 53 |
| 3.4 | Kräfte nach Potentialtheorie und nach Theorie Schlanker Körper im Vergleich..... | 54 |
| 3.4.1 | Verteilung und Aufintegration der Vertikalkräfte..... | 55 |
| 3.4.2 | Verteilung und Aufintegration des Nickmoments..... | 57 |
| 3.4.3 | Zusammenfassende Diskussion..... | 58 |
| 3.5 | Rumpfkräfte infolge viskoser Effekte..... | 59 |
| 3.5.1 | Kräfte infolge Längsströmung: Längswiderstand..... | 59 |
| 3.5.2 | Kräfte infolge Querströmung: Querströmungswiderstand..... | 60 |
| 3.6 | Aerodynamik der Leitwerke und des Heckbereichs..... | 63 |
| 3.6.1 | Leitwerkskräfte unter ebener Anströmung bei kleinen Anstellwinkeln..... | 64 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.6.2 | Aerodynamische Leitwerkskräfte unter räumlicher Anströmung | 66 |
| 3.6.3 | Berücksichtigung der Ruderauslenkung | 70 |
| 3.6.4 | Instationäre Leitwerkskräfte | 71 |
| 3.7 | Das Aerodynamische Gesamtmodell | 72 |
| 3.7.1 | Festlegung der Modellbereiche, Wahl der Integrationsgrenzen | 72 |
| 3.7.2 | Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen Rumpf und Heck | 73 |
| 3.7.3 | Das Gesamtmodell bei nicht homogener Anströmung | 73 |
| 3.7.4 | Gesamtmodell in integraler Form | 74 |
| 3.7.5 | Übergang zur Beiwerteschreibweise | 75 |
| 3.8 | Analyse des Gesamtmodells unter Wind | 79 |
| 3.8.1 | Mathematische Modellierung des Windes | 80 |
| 3.8.2 | Die Wirkung von Seitenwindscherungen unterschiedlicher Wellenlängen | 82 |
| 3.8.3 | Wirkung des beschleunigten Windes | 86 |
| 3.9 | Ansatzverfeinerungen und Schätzung der Modellparameter | 88 |
| 3.9.1 | Erhöhung der Genauigkeit des Rumpfmodells | 88 |
| 3.9.2 | Bestimmung von Modellparametern | 90 |
| 4 | Untersuchung des Flugverhaltens | 97 |
| 4.1 | Stationäre Flugzustände und Flugleistung | 97 |
| 4.1.1 | Stationärer symmetrischer Geradeausflug | 98 |
| 4.1.2 | Stationärer horizontaler Kurvenflug | 106 |
| 4.2 | Lineare Bewegungsgleichungen im symmetrischen Horizontalflug | 114 |
| 4.2.1 | Betriebspunkte, Linearisierung und Zustandsraumdarstellung | 114 |
| 4.2.2 | Entkopplung in Längs- und Seitenbewegung | 114 |
| 4.3 | Eigenverhalten und Stabilität im symmetrischen Horizontalflug | 115 |
| 4.3.1 | Typische Lage der Pole und Modalanalyse | 116 |
| 4.3.2 | Näherungsansätze für die Eigenbewegungen und analytische Polberechnungen | 118 |
| 4.3.3 | Eigenverhalten bei unterschiedlichen Fluggeschwindigkeiten | 122 |
| 4.3.4 | Eigenverhalten unter Variation der Konfiguration und der Modellparameter | 127 |
| 4.4 | Übertragungsverhalten und Frequenzantworten | 133 |
| 4.4.1 | Übertragungsfunktionen und stationäres Übertragungsverhalten | 133 |
| 4.4.2 | Frequenzantwort auf Anströmungsanregung (Wind) | 136 |
| 4.5 | Nichtlineares Flugverhalten des Luftschiffes | 138 |
| 4.5.1 | Reaktion des Luftschiffes auf Störungen des Anstell- und Schiebewinkels | 138 |
| 4.5.2 | Reaktion des Luftschiffes auf Steuereingänge | 141 |
| 5 | Flugregelung | 147 |
| 5.1 | Einleitung und Motivation | 147 |
| 5.2 | Regelungsaufgaben und Auslegungsziele | 148 |
| 5.2.1 | Interpretation der Pilotenkommandos | 149 |
| 5.2.2 | Stabilisierung und Dämpfung der Flugbewegung | 150 |
| 5.2.3 | Stabilisierung und Regelung der Fluglage und der Flugbahn | 150 |
| 5.3 | Entwurf nach klassischen Methoden | 150 |
| 5.3.1 | Einzelsignalarückführungen zur Verbesserung der Flugeigenschaften | 150 |
| 5.3.2 | Anwendungsbeispiel: Regelung der Längs- und Seitenbewegung von Lotte | 152 |
| 5.4 | Geregelter und ungeregelter Flug durch Windfeld | 155 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 159 |
| A | Modellparameter des Luftschiffes Lotte | 169 |
| A.1 | Geometrie- und Masseparameter | 169 |
| A.2 | Aerodynamikparameter | 170 |

| | | |
|-------|--|-----|
| B | Aerodynamische Rumpfkkräfte nach der Methode der virtuellen Massen und nach der Theorie Schlanker Körper..... | 172 |
| B.1 | Integrale Rumpfkkräfte und der Tensor der virtuellen Massen | 172 |
| B.2 | Rumpfkkräfte nach der Theorie Schlanker Körper unter ebener Anströmung..... | 175 |
| B.2.1 | Theorie Schlanker Körper..... | 176 |
| B.2.2 | Diskussion der Kräfte infolge stationären Fluges..... | 178 |
| B.2.3 | Approximation der Kraftverläufe für nicht schlanke Körper nach Munk | 178 |
| B.2.4 | Vergleich der Resultate nach der Theorie Schlanker Körper mit den exakten Resultaten für Rotationsellipsoide | 179 |
| B.3 | Rumpfkkräfte unter räumlicher Anströmung und Approximation für nicht schlanke Körper | 180 |
| B.3.1 | Impuls und Drall einer Kreisscheibe..... | 181 |
| B.3.2 | Resultierende Kräfte und Momentenverlauf..... | 182 |
| B.4 | Rumpfkkräfte unter Wind nach der Theorie Schlanker Körper | 183 |
| B.4.1 | Einleitung und Definitionen..... | 184 |
| B.4.2 | Berechnung der verteilten Rumpfkraft | 185 |
| B.4.3 | Darstellung und Diskussion der Kraftanteile | 188 |
| C | Lineare Kraft- und Bewegungsgleichungen | 191 |
| C.1 | Lineare Gleichungen und Zustandsraumdarstellung..... | 191 |
| C.1.1 | Die Matrizen M , $K_{,x}$, $F_{,x}$ und $F_{,u}$ in allgemeiner Form | 192 |
| C.1.2 | Die Matrizen M , $K_{,x}$, $F_{,x}$ und $F_{,u}$ im horizontalen Geradeausflug | 192 |
| C.1.3 | Kraftderivativa dieser Konfiguration | 194 |
| C.1.4 | Zusammenhang zwischen Kraftderivativa und aerodynamischen Beiwerten | 197 |
| C.2 | Lineare Bewegungsgleichungen, Systemmatrizen..... | 198 |
| C.2.1 | Invertieren der Massenmatrix | 198 |
| C.2.2 | Dynamikmatrix A der Translations- und Drehgeschwindigkeiten | 200 |
| C.2.3 | Die Eingangsmatrix B | 202 |
| C.2.4 | Lineare Differentialgleichungen der Lagewinkel und Flughöhe | 202 |

1 Einleitung

1.1 Einführung und Motivation

Der menschliche Traum vom Fliegen wurde erstmals mit Hilfe eines Ballons unter Anwendung des Prinzips "Leichter als Luft" von den Gebrüdern Montgolfière verwirklicht. Seither nehmen Luftschiffe einen einzigartigen Platz in der Geschichte der Luftfahrt ein. Immer wieder waren sie Vorreiter neuer Technologien, ihr Weg ist aber auch von etlichen Misserfolgen gesäumt: So gelang der erste Flug mit Rückkehr zum Anfangspunkt des Fluges mit einem Luftschiff, bereits vor 1900 hob das erste Ganzmetallluftschiff ab, und schon Anfang des letzten Jahrhunderts wurden fahrplanmäßig Luftschiffahrten über den Atlantik angeboten. 1936 jedoch geht die wasserstoffgefüllte Hindenburg in Lakehurst in Flammen auf. Diese Katastrophe beendete nicht nur die Ära der Passagierluftschiffahrt sondern ging auch als erstes weltweites Film-Medienereignis in die Geschichte ein. In den folgenden Jahren wurden Luftschiffe von der amerikanischen Navy im grossen Stil zur Begleitung und Absicherung von Flottenverbänden eingesetzt. Davon wird berichtet, dass kein Frachtschiff durch U-Boote versenkt werden konnte, wenn Luftschiffe den Konvoi überwachten.

In der Zeit danach verloren Luftschiffe jedoch auf technologischem wie auch wissenschaftlichem Gebiet den Anschluss an die Entwicklung von Flugzeug und Helikopter. Trotzdem ist das technische und kommerzielle Interesse in Luftschiffe in jüngster Zeit wieder stark gestiegen. Gründe dafür sind ihre Umweltfreundlichkeit, die Möglichkeit mit Sonnenenergie zu fliegen und weitere systemspezifische Eigenschaften, durch welche Luftschiffe ergänzende Märkte zu denen der Fluggeräte schwerer als Luft bedienen können. Mit neuen Luftschiffkonzepten und unter Einsatz neuer Technologien will man den zurzeit einzigen wirtschaftlichen Einsatzbereich als Werbeträger verlassen. Dazu werden im Folgenden einige aktuelle Projekte genannt.

Zeppelin in Friedrichshafen baut und fliegt das Luftschiff "Zeppelin NT", konzipiert für Touristen-, Überwachungs- und Messflüge. Die Hamilton Airship Company in Südafrika plant den Bau luxuriöser Passagierschiffe, dasselbe Ziel verfolgt die niederländische Rigid-Airships Company. Die Luftschiffe der englischen Firma Airship Technology sollen als Frühwarn- und Überwachungssysteme eingesetzt werden. Firmen in Deutschland, Japan, England und USA planen den Einsatz von Luftschiffen als hochfliegende Trägerplattformen für Telekommunikations- und Überwachungssysteme. Die deutsche CargoLifter AG konstruiert ein Transportluftschiff für den Transport schwerer und übergrosser Güter.

Das Projekt, welches den Autor zur Beschäftigung mit der Thematik motivierte, soll besonders hervorgehoben werden. Eine Gruppe von Studenten am Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen der Universität Stuttgart hatte sich 1992 zum Ziel gesetzt, ein unbemanntes Klein-Luftschiff als Träger für unterschiedlichste Messeinrichtungen zu konstruieren. Bereits im darauffolgenden Jahr hob "Lotte", das erste mit Sonnenenergie betriebene Luftschiff der Welt, zu ihrem Erstflug ab.

Um das Einsatzspektrum von "Lotte" zu erweitern und um die Missionen zu automatisieren, wurde in Zusammenarbeit mit dem Institut für Flugmechanik und Flugregelung der Einsatz eines Flugregelungssystems geplant. Die flugmechanischen Kenntnisse und verfügbaren Grundlagen für den Entwurf solcher Autoflug-Systeme fehlten oder waren inkonsi-

stent: Durch “Lotte” wurden mehr wissenschaftliche Fragen aufgeworfen als beantwortet werden konnten und es wurde insbesondere der schwache Stand der Forschung an luftschifftheoretischen Grundlagen festgestellt.

Dies betraf auch die Kenntnisse über das Flugverhalten in Wind. Die Windempfindlichkeit am und in Nähe des Bodens stellt für Luftschiffe nach wie vor ein zentrales Problem dar. Um die Manövrierfähigkeit zu erhöhen werden beim Zeppelin NT oder auch beim geplanten CargoLifter Manövriertriebwerke eingesetzt. Die Einschätzung der Windempfindlichkeit ist Voraussetzung zur Dimensionierung dieser Triebwerke, aber auch für den Entwurf ihrer Ansteuerung und Regelung.

Charakteristische Unterschiede zur Flugmechanik und Aerodynamik von Flächenflugzeugen

Durch das Zusammenspiel von Aerostatik und Aerodynamik unterscheidet sich die Flugmechanik von Luftschiffen und Flächenflugzeugen wesentlich. Die Aerostatik als wichtigster Auftriebslieferant überlässt der Aerodynamik vorwiegend die Aufgabe der Flugsteuerung und der Kompensation aerostatischen Ungleichgewichts.

Die Aerostatik entwickelt ihrerseits interessante Eigenschaften. Befindet sich das Auftriebsgas im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebungsluft, kompensiert der aerostatische Auftrieb unabhängig von der Flughöhe die Gewichtskraft. Das Luftschiff besitzt somit keine oder kaum potentielle Energie. Beim Übergang in den Steig- oder Sinkflug ändert sich die Fluggeschwindigkeit nicht und für die Überwindung der Höhe muss (in erster Näherung) keine Energie aufgewendet werden. Somit fällt eine Phygoide, ein Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie, für Luftschiffe aus. Während bei kleinen Luftschiffen wie Lotte instationäre Aerostatik-Effekte infolge des Verhältnisses von Luftschiffoberfläche zu Volumen vernachlässigt werden können, beeinflussen sie bei grossen Luftschiffen wie beispielsweise dem CargoLifter das Vertikalflugverhalten. Im Steig- und Sinkflug wird das thermische Gleichgewicht gestört, es findet ein oszillierender Austausch zwischen thermischer und kinetischer Energie statt: Es entwickelt sich eine “aerostatische Phygoide”.

Die Aerodynamik von Luftschiffen unterscheidet sich wesentlich von der Aerodynamik von Flächenflugzeugen. Das Umströmungsbild wird vom großvolumigen Rumpf des Luftschiffs dominiert. Es bildet sich eine dreidimensionale Umströmung mit dreidimensionaler Grenzschichtausbildung und entsprechenden Ablöseerscheinungen aus. Auch die Leitwerksflächen haben nicht genau dieselbe Funktion wie die von Flugzeugen. Es steht nicht ein gutes Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand im Vordergrund, sondern die stabilisierende Wirkung. Da die Rumpfaerodynamik ein destabilisierendes Moment erzeugt muss die Stabilisierung auch bei größeren Anstellwinkeln und im Falle von Strömungsabriss gewährleistet sein, das Luftschiff darf nicht “aus dem Ruder laufen”.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft der Aerodynamik beruht auf der systembedingten Tatsache, dass die Masse der verdrängten Luft der Größenordnung der Masse des Fluggeräts entspricht. Durch die Umströmung des Rumpfes sind daher Luftmassen in Bewegung, welche der Luftschiffmasse entsprechen. Beschleunigt sich das Luftschiff, so muss auch die Umströmung beschleunigt werden. Diese Impulsänderung erfordert eine zwischen Rumpfkörper und Fluid wirkende Kraft, welche auf den Körper beschleunigungshemmend wirkt. Diese Kraft wird deshalb als Effekt der “scheinbaren” oder “virtuellen” Masse (englisch: “apparent mass”, “virtual mass”) bezeichnet. Diese zusätzliche Trägheit weist jedoch nicht die Charakteristik der Starrkörperträgheit aufweist: Sie variiert mit der Beschleuni-

gungsrichtung und erzeugt somit Kopplungen zwischen den Bewegungszuständen, die nur durch Körpersymmetrien wieder aufgehoben werden können. Auch im Kurvenflug, bei welchem Richtung von Impuls und Drall der scheinbaren Massen geändert werden, resultieren Kräfte.

1.2 Ausgangssituation und Umfeld

Im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts wurden neben großartigen technischen Leistungen auch wegweisende theoretische Arbeiten durch den Luftschiffbau motiviert. Aus dieser Zeit sind deutsche, englische und amerikanische Studien zur Aerodynamik und Flugstabilität von Luftschiffen bekannt. Neben grundlegenden theoretischen Arbeiten [1],[2], wurden auch Windkanalmessungen [3] und Flugtests durchgeführt [4]. In Deutschland wurden mit den Zeppelin-Verzögerungstests durchgeführt, darüber berichtete Munk 1921 und diskutierte dabei den Einfluss der scheinbaren Massen [5]. Einen interessanten Rückblick und eine Zusammenstellung und Auswertung dieser Arbeiten findet man in [6], wo die Studien insbesondere auch vor dem Hintergrund des damaligen Stands des theoretischen Wissens und der verfügbaren Meßtechnik diskutiert werden.

Die im wesentlichen von Munk eingeführte "Theorie der Schlanken Körper", bei der das Strömungsbild um den Rumpf als eben angenommen wird, wurde um 1958 von Calligeros und McDavitt bei ihrer theoretischen Untersuchung zur Windempfindlichkeit von Luftschiffen wieder aufgegriffen [7]. Um viskose Strömungseffekte berücksichtigen zu können wurde der Ansatz um einen Querströmungswiderstand erweitert. Dieses Verfahren hatte sich zur Modellierung der Aerodynamik von Flugkörpern bewährt [8], [9]. Eine Weiterentwicklung dieser Ansätze findet man 1977 bei Putman et. al. in [11], wo die Ansätze mit Messungen an Luftschiffen (meist aus der Zwischenkriegszeit) verglichen werden. Zudem werden Ansätze zur Modellierung der Leitwerkskräfte, basierend auf Traglinientheorie und nichtlinearer Anteile zur Berücksichtigung von Ablösewirbeleffekten und Queranströmungswiderstand, beschrieben. Die Ansätze für Rumpf und Leitwerke werden aber nur getrennt behandelt. 1983 nehmen Jones und DeLaurier diese Ansätze auf und erstellen ein Gesamtmodell [12]. Durch die Einführung von Wechselwirkungsfaktoren zwischen Rumpf und Leitwerken und einer Anpassung der Querwiderstandsbeiwerte gelingt es ihnen ein gegenüber Windkanaldaten validiertes, halbempirisches Modell zu entwickeln. Bei der Erweiterung ihres Ansatzes zur Berücksichtigung von Drehbewegungen gehen Jones und DeLaurier fehlerhaft vor, erhalten in der Endsumme aber trotzdem das korrekte Resultat: Anstatt die instationären Terme nach Munk zu verwenden, leiten sie aus dessen stationärer Teillösung durch falsche zeitliche Differenzierung wieder instationäre Terme ab. Dieses Vorgehen führte zu einer Diskussion zwischen den Autoren und Etkin[13],[14], wurde jedoch selbst in späteren Papieren von Jones und DeLaurier wieder verteidigt [15],[16]. Nichtsdestotrotz liefern die Arbeiten eine Methode zur ersten Schätzung der dämpfenden Derivativa c_{m_q} und c_{m_r} . Der Modellansatz wurde in [17] für Luftschiffe mit invertierten Y-Leitwerken erweitert.

Mit diesen Arbeiten endet die Entwicklung analytischer Aerodynamikmodelle. Die potentialtheoretischen Rumpfkkräfte werden dabei immer noch nach der Theorie Schlanker Körper, korrigiert mit den von Munk eingeführten Faktoren, modelliert. Diese Methoden schätzen die Verteilung der aerodynamischen Kräfte über die Rumpflängsachse im Geradeausflug zwar gut ab, sie können aber beispielsweise die Druckverteilung im Bugbereich des

Luftschiffs nicht wiedergeben und liefern falsche Resultate im Kurvenflug. Daneben fehlt in der Literatur eine vollständige und durchgängige Abhandlung der verteilten aerodynamischen Kräfte und Momente beim Flug durch stationäre wie auch instationäre Windfelder. Die Formulierung der dabei auftretenden instationären aerodynamischen Kräfte und ihre Wechselwirkung mit den Bewegungsgleichungen muss sehr vorsichtig erfolgen. Bis heute findet man hier inkonsistente Formulierungen, bei denen Effekte teilweise doppelt oder gar nicht berücksichtigt sind. Für den geschlossenen Körper gibt hier Thomasson Lösungen an [40].

Die um 1990 publizierten Modelle von Gomes [24] basieren auf umfangreichen stationären und dynamischen Windkanalmessungen. Infolge der Größenordnung der instationären aerodynamischen Kräfte im Vergleich zu den auftretenden Trägheitskräften sind die Ergebnisse solcher Windkanalversuche leider nur von geringer Qualität.

Wie den analytischen und experimentellen Verfahren sind auch den numerischen Methoden enge Grenzen gesetzt. Die Rumpfaerodynamik ist bereits bei geringen Anstell- oder Schiebewinkeln durch Ablösewirbel entlang des Rumpfes und die Nachlaufströmung im Heckbereich dominiert. Diese Effekte können selbst mit modernen CFD-Verfahren nur schwer erfasst werden. Zusätzlich befinden sich die Leitwerke im Bereich der Ablöselinie und je nach Konfiguration des Schiffes auch die Antriebe. Dadurch wird die Komplexität des Strömungsbildes weiter erhöht. Erst in jüngster Zeit findet man Veröffentlichungen mit Resultaten numerischer Strömungssimulationen [29], [30]. Diese Forschungsarbeiten, motiviert durch Studien für den neuen Zeppelin NT und die Lotte-Projekte, untersuchen sorgfältig die reibungsbehaftete Umströmung von Luftschiffsrümpfen ohne Berücksichtigung der Leitwerke, die Simulationsresultate werden mit Windkanalmessungen validiert.

Während sich für U-Boote ein Satz von Bewegungsgleichungen etabliert hatte [18] war deren Formulierung unter den Luftschiff-Flugmechanikern noch 1977 uneinheitlich und fehlerhaft [19]. 1979 veröffentlichten DeLaurier und Schenk ihr Papier über die dynamische Stabilität von Luftschiffen. Darin stellten sie die linearen Bewegungsgleichungen getrennt für die Längs- und Seitenbewegung auf und bestimmen dann analytisch die Eigenformen der Bewegung [20]. In demselben Jahr wurden in [21] Resultate von nichtlinearen Flugsimulationen des Heavy Lift Airship präsentiert. Der Endbericht zu dieser Studie befasst sich dann ausgiebig mit der Formulierung der Bewegungsgleichungen [22]. Es folgen weitere Veröffentlichungen zum Thema Modellierung und Bewegungssimulation. Wie bereits angesprochen sind die Bewegungsgleichungen von Luftschiffen infolge der aerodynamischen scheinbare Masse Effekte direkt mit den aerodynamischen Kräften verkoppelt. Aus diesem Grund existieren nach wie vor unterschiedliche Formulierungen der Bewegungsgleichungen, je nach Ausrichtung und Aufbau des aerodynamischen Modells. Darstellungen welche an die Flugmechanik von Flächenflugzeugen angelehnt sind geben beispielsweise Jones in [15] oder Jex in [49] und auch der Autor in Zusammenarbeit mit Anderen in [61], [62] oder [63]. Etwas gewöhnungsbedürftigere Formulierungen, bei denen die kinematischen Starrkörperterme und die scheinbare Masse Anteile en bloc berücksichtigt sind, benutzen Masefield und Simpson in [48], Gomes in [24] und Thomasson in [40].

Das dynamische Eigenverhalten von Luftschiffen im symmetrischen Horizontalflug wird von DeLaurier und Schenk [20], Gomes [24] wie auch von Well und vom Autor [66], [67] diskutiert. DeLaurier stellt die Eigenformen durch Zeigerdiagramme dar und untersucht die Stabilität dreier Luftschiffe bei fester Fluggeschwindigkeit mit Hilfe von Wurzelortskurven, während Gomes den Einfluss der Fluggeschwindigkeit untersucht, dabei jedoch nur Geschwindigkeiten oberhalb der Ruderumkehr berücksichtigt. Ohnehin ermöglichen diese

auf festen Datentabellen beruhenden Modelle keinen tiefen Einblick in die Zusammenhänge zwischen Modellparameter und statischen wie dynamischen Eigenschaften der Luftschiffe zu geben.

Zum Thema Regelungsentwurf von Luftschiffen existieren wenig ernstzunehmende Veröffentlichungen. Einige jüngere Luftschiffkonstruktionen besitzen ein Fly by Wire oder Fly by Light System und ermöglichen dadurch die Implementierung von Flugreglern. Zu diesen Projekten gehören die Sentinel 1000 des britischen MOD, die entwickelte aber nicht fertiggestellte Sentinel 5000, der Zeppelin NT 07 oder auch das Luftschiff Joey der Firma Cargo-Lifter. Dem Autor sind jedoch keine Publikationen zu diesen Projekten und der dabei realisierten Flugregelsystemen bekannt. Es gibt einige akademische Konzeptstudien zur Regelung, so zum Beispiel von Well und vom Autor [66],[67] oder von Naghabushan [71]. Es fehlen eine grundsätzliche Analyse der Funktionalität eines Flugregelsystems für Luftschiffe sowie Kriterien zur Bewertung der Entwürfe.

1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung eines durchgängigen analytischen Modells der Flugmechanik von Luftschiffen und dessen Anwendung zur Untersuchung stationärer und dynamischer Flugeigenschaften sowie zum Entwurf eines einfachen Flugregelsystems.

Der Schwerpunkt der Modellentwicklung soll dabei auf einer analytischen Formulierung der längsverteilten aerodynamischen Kräfte liegen, welche die Wirkung sowohl stationärer wie auch instationärer Windfelder erfasst. Die scheinbare Masse Kräfte im beschleunigten und im Kurvenflug sollten ebenfalls über das Luftschiff verteilt berücksichtigt werden. Der verteilte Ansatz wird gefordert, um über die Schiffslängsachse inhomogene Windfelder berücksichtigen zu können. Die geschlossene analytische Modellbeschreibung soll die Untersuchung des Einfluss von Luftschiffgeometrie und Konfigurationsparametern auf Flugeigenschaften ermöglichen. Sind solche Untersuchungen nicht algebraisch durchführbar, sollen die Modelle effiziente numerische Untersuchungen ermöglichen.

Weiter untersucht die vorliegende Studie die Flugleistung von Luftschiffen und stellt deren Flugenveloppe in Funktion der Fluggeschwindigkeit und für unterschiedliche Konfigurationen (Variation der statischen Schwere des Luftschiffs) dar. Auch in Abhängigkeit der Fluggeschwindigkeit sollen die Stabilität und die Eigenbewegungsformen untersucht, und deren Empfindlichkeit auf Parameterschwankungen oder -unsicherheiten analysiert werden. Im Gegensatz zu bisherigen Arbeiten soll der gesamte Geschwindigkeitsbereich, insbesondere auch Geschwindigkeiten unterhalb der Ruderumkehr, berücksichtigt werden. Basierend auf den Erkenntnissen der Modellanalyse sollen schließlich Regelungskonzepte vorgeschlagen werden.

Aus der Zielsetzung ergibt sich die folgende Vorgehensweise und Gliederung der Arbeit:

Kapitel 2 und *3* widmen sich der mechanischen und aerodynamischen Modellbildung. Nachdem die Bewegungs- und Steuergrößen definiert sind werden die Bewegungsgleichungen des Luftschiffs bezüglich eines frei wählbaren körperfesten Referenzpunkts formuliert. Das Luftschiff wird dabei als starrer Körper modelliert. Unter Ausnutzung der im späteren Aerodynamikkapitel hergeleiteten Struktur der Aerodynamikterme können die

Bewegungsgleichungen nach den Beschleunigungen aufgelöst werden. Weiter werden in *Kapitel 2* nach der Definition der Systemgrenzen die wirkenden äußeren Kräfte der Aerostatik und des Gewichts, sowie die Schubkräfte beschrieben.

In *Kapitel 3* wird dann das Modell der aerodynamischen Kräfte bereitgestellt und diskutiert. Die Aerodynamik wird in Anlehnung an frühere Arbeiten in ein Rumpf- und ein Leitwerkssegment unterteilt. Im Rumpfmodell werden potentialtheoretische Strömungsanteile neu über die Abbildung der Lösung der Potentialströmung um Rotationsellipsoide berücksichtigt, viskose Kräfteanteile über Längs- und Querströmungswiderstandsmodelle. Die Leitwerke werden mit Hilfe der Traglinientheorie und ebenfalls eines Längs- und Querströmungswiderstandes beschrieben. Alle Modelle berücksichtigen lokale Anströmungsbedingungen resultierend aus der Bewegung in 6 Freiheitsgraden und den örtlichen Windkomponenten. Die Darstellung der längsverteilt, potentialtheoretischen Rumpfkraft stellt dabei einen zentralen Teil der Arbeit dar. Die Kräfte infolge stationärer Bewegung, infolge beschleunigter Flugbewegung aber auch infolge stetigem wie beschleunigtem Wind werden sowohl längsverteilt als auch in integraler Beiwerteschreibweise angegeben. Zur Vertiefung dieser Diskussion sind in *Anhang B* die Rumpfkraft über die Theorie schlanker Körper, ebenfalls in Abhängigkeit aller Bewegungsfreiheitsgrade und eines beliebigen in Ort und Zeit beschriebenen Windfeldes, hergeleitet.

Weiter werden Teilmodelle und das Gesamtmodell unter unterschiedlichen Anströmungsbedingungen ausgewertet. Die Kräfte werden in Beiwerteschreibweise formuliert, im Anhang sind die aerodynamischen Derivativa dann algebraisch dargestellt. Abschließend wird ein Abgleich des Modells mit Windkanaldaten des Luftschiffs Lotte durchgeführt.

Die Untersuchung des Flugverhaltens ist in *Kapitel 4* zusammengefasst. Als erstes werden die stationären Flugzustände Geradeausflug und Kurvenflug analytisch untersucht. Dies ermöglicht Aussagen über die Flugleistung in der Vertikalebene sowie im Kurvenflug. Zur Darstellung der Flugenveloppe von Luftschiffen wird ein Diagramm eingeführt. Die nachfolgenden Unterkapitel befassen sich mit der linearen Dynamik in der Umgebung des stationären Geradeausfluges. Die algebraische Herleitung der linearen Gleichungen und der Stabilitätsderivativa zeigt *Anhang C*. Im Bericht findet man ausführliche Diskussionen der Eigenbewegungsformen in Abhängigkeit von Fluggeschwindigkeit und variierenden Parametern. Diese Untersuchungen schließen Stabilitäts-, Mess- und Steuerbarkeitsaspekte mit ein. Abschließend wird das nichtlineare Flugverhalten vorgestellt.

Kapitel 5 nutzt die flugmechanischen Erkenntnisse aus der Systemanalyse für die Auslegung von Flugreglern. Nach einer Diskussion der Regelungsaufgaben und -ziele werden nach klassischen Entwurfsmethoden je ein Regler für die Längs- und Seitenbewegung entwickelt. Nichtlineare Simulationen des geregelten sowie des ungeregelten Fluges durch Windfelder unterschiedlicher Wellenlängen runden die Untersuchung ab.

Kapitel 6 enthält die abschließende Zusammenfassung. Die wesentlichen Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Arbeit werden noch einmal aufgeführt und beurteilt. Als Ausblick werden noch offene, kritische und interessante Probleme angesprochen.

2 Mathematische Modellbeschreibung

Dieses Kapitel beschreibt die flugmechanische Modellierung des Systems Luftschiff. Die Bewegung und somit das Verhalten des Luftschiffes wird durch die wirkenden Kräfte und Momente generiert, ihre mathematische Beschreibung stellt den größten Anteil der Modellbeschreibung dar. Nachdem diese Kräfte und Momente diskutiert worden sind, wird das Kapitel mit der Formulierung der Bewegungsgleichungen abgeschlossen.

Bei den gesamten Untersuchungen wird das Luftschiff als einzelner starrer Körper modelliert. Strukturschwingungen oder der Einfluss schwappender Ballonetluft oder schwappenden Traggases auf die Schiffsdynamik wird nicht berücksichtigt. Unter der Annahme, dass die Verschiebung des Schwerpunkts um Größenordnungen langsamer als die Luftschiffbewegung ist, werden die höhenabhängige Volumenänderung und langsames Fliesen der Ballonetluft über quasistationäre Verschiebung des Schwerpunkts modelliert, die Impulsänderung durch Schwerpunktverschiebung wird nicht berücksichtigt. Ebenso wird der Impulsverlust infolge Massenänderung (Ballonetluft, Treibstoff, Ballastabwurf) vernachlässigt.

Die Erde wird als ruhend und flach angenommen, die erdfesten Koordinaten gelten als inertielle Referenz.

2.1 Achsenkreuze und flugmechanische Größen

Die Flugbewegung wird durch die vektoriellen Größen Position, Orientierung im Raum, Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit beschrieben. In diesem Kapitel werden einige dieser Variablen diskutiert und ihre Beziehungen formuliert. Die Darstellung folgt weitestgehend der Norm DIN 9300 "Flugmechanik" [77], teilweise wird die amerikanische Schreibweise nach [78] verwendet. Eine ausführliche Diskussion flugmechanischer Bewegungsgrößen führt Brockhaus [43].

Die kinetischen Größen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit sowie die äußeren Kräfte und die Gewichtskraft werden vorwiegend in Komponenten des körperfesten Koordinatensystems angegeben. Fehlt eine Indizierung des Achsensystems der Vektorkomponenten, so versteht sich die Angabe in körperfesten Koordinaten.

2.1.1 Bezeichnung gerichteter flugmechanischer Größen

Gerichtete flugmechanischen Größen werden durch Vektoren beschrieben. Die hier verwendete Notation verzichtet dabei vollständig auf die Unterscheidung zwischen Vektorgröße und skalarem Betrag des Vektors, so bezeichnet z.B. eine Variable F sowohl einen Kraftvektor als auch den skalaren Betrag der entsprechenden Kraft. Die korrekte Interpretation ergibt sich jeweils aus dem Zusammenhang.

Wie in der Flugmechanik üblich, werden die Komponenten von Vektoren mit leicht merkbaren Buchstabenfolgen bezeichnet. Die Vektoren für Position, Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit werden mit

$$\begin{array}{ccc} \text{Position} & \text{Geschwindigkeit} & \text{Winkelgeschw.} \\ r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} & \Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{array}$$

beschrieben, Kraft- und Momentenvektoren in die Komponenten

$$\begin{array}{cc} \text{Kraft} & \text{Moment} \\ F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} & Q = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \end{array}$$

zerlegt. Orientierungen werden durch eine Folge von drei Eulerwinkel angegeben, die Orientierung des Luftschiffes im Raum zum Beispiel durch die Winkel ϕ , θ , ψ . Diese drei Winkel definieren **keine** Komponenten eines Vektors, sie werden aber trotzdem als Zahlentripel im Sinne eines Vektors zur Größe Φ zusammengefasst, man schreibt

$$\Phi = \{\phi, \theta, \psi\}.$$

Die meistbenutzten Indizes für die oben genannten Größen sind:

| für die Indizierung von Vektorgrößen | für die Indizierung des Bezugsachsenkreuzes |
|--------------------------------------|--|
| A aerodynamische Größen | <i>f</i> luftschiffeste (körperfeste) Achsen |
| K Bahngrößen | <i>a</i> aerodynamische Achsen |
| W Windgrößen | <i>k</i> flugbahnfeste Achsen |
| T Schubgrößen | <i>w</i> windfeste Achsen |
| B aerostatische Größen | <i>g</i> erdlotfeste (geodätische) Achsen |
| G Gewichtsgrößen | <i>t</i> schubfeste Achsen |

2.1.2 Achsenkreuze, Fluglage und Geschwindigkeiten

In diesem Bericht kommen hauptsächlich zwei rechtshändige Koordinatensysteme zur Anwendung: Das erdlotfeste geodätische System mit Indizierung *g* und das körperfeste (luftschiffeste) Koordinatensystem mit Indizierung *f*. Die Orientierung des körperfesten Systems gegenüber des geodätischen Systems wird durch eine Folge von 3 Eulerwinkel beschrieben. Die Transformationsfolge ist in Bild 2.1 dargestellt.

Die Transformationsmatrix zur Abbildung von erdlotfesten Komponenten in körperfeste Achsen mit der Drehfolge ψ , θ , ϕ lautet

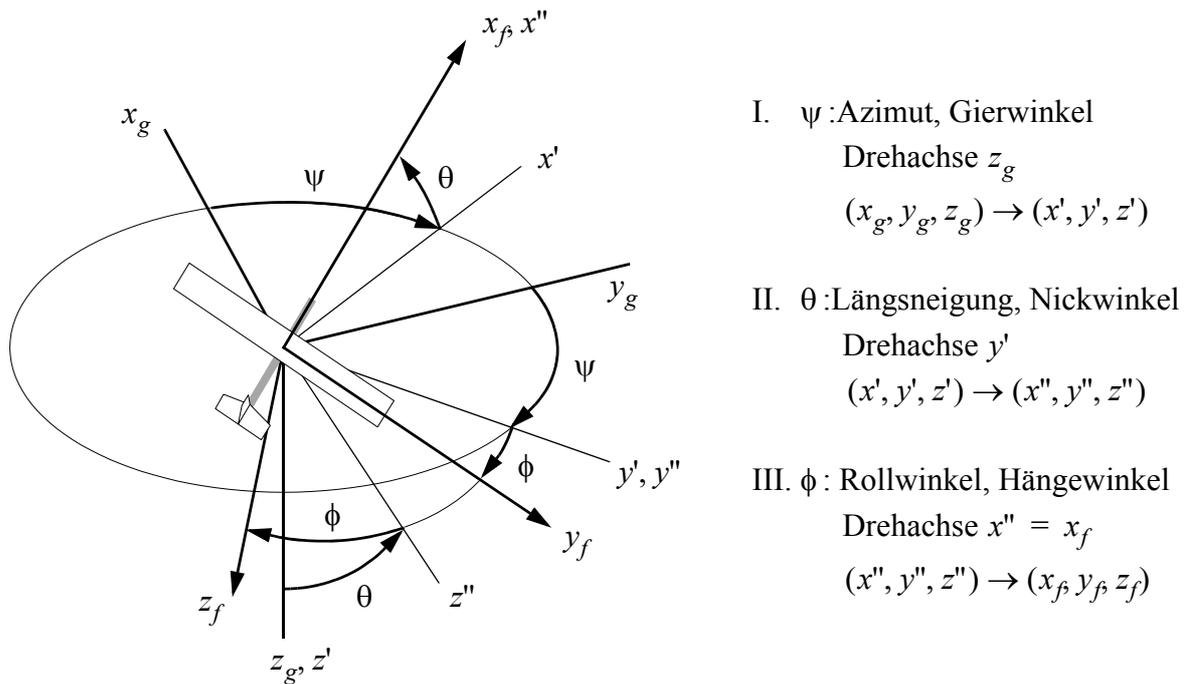


Bild 2.1: Erdlotfestes (geodätisches) und flugzeugfestes Achsensystem, Transformationen

$$T_{fg} = T_{\text{III}}(\phi)T_{\text{II}}(\theta)T_{\text{I}}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\text{weiter gilt } T_{fg} = T_{gf}^T = T_{gf}^{-1}. \quad (2.2)$$

Die Transformation eines Vektors aus geodätischer Darstellung in körperfeste Achskomponenten berechnet sich entsprechend über

$$\vec{v}_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} = T_{fg} \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = T_{fg} \vec{v}_g.$$

Bahngeschwindigkeit V_K

Der Bahngeschwindigkeitsvektor V_K stellt die Translationsgeschwindigkeit des Luftschiffs gegenüber der Erde dar. Er ist gegenüber der Erde durch den Bahnazimutwinkel χ (Drehachse z_g) und den Bahnneigungswinkel γ (Drehachse y_k) festgelegt und definiert das flugbahnfeste Achssystem (x_k, y_k, z_k) . Aus den körperfesten Komponenten berechnet sich die geodätische Bahngeschwindigkeit über die Transformationsbeziehung

$$V_{Kg} = T_{gf} V_{Kf} = T_{gf} \begin{bmatrix} u_{Kf} \\ v_{Kf} \\ w_{Kf} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Bild 2.2 zeigt neben der Darstellung der Transformation des Bahngeschwindigkeitsvektors aus erdloftfesten in bahnfeste Achsen die körperfeste Komponentendarstellung des Vektors.

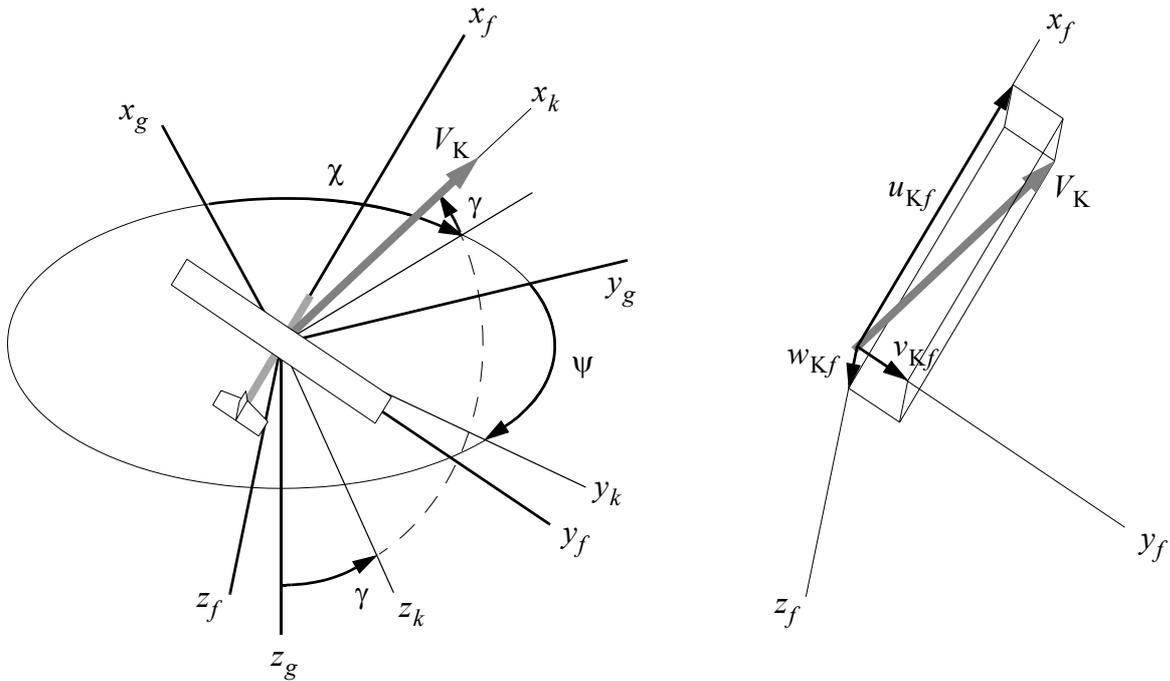


Bild 2.2: Festlegung des Bahngeschwindigkeitsvektors gegenüber erdfesten Achsen, Darstellung des Bahngeschwindigkeitsvektors in flugzeugfesten Komponenten

Fluggeschwindigkeit V_A

Die aerodynamische Anströmung oder Fluggeschwindigkeit V_A ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Luftschiff und umgebendem Fluid. Unter Windeinfluss berechnet sie sich als Differenz zwischen Bahngeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit nach folgender Vektorbeziehung

$$V_A = V_K - V_W. \quad (2.4)$$

Die Orientierung des Vektors V_A und die Darstellung seiner körperfesten Komponenten wird in Unterkapitel 3 "Modellbeschreibung Aerodynamik und Windwirkung" diskutiert, sein Zusammenhang mit der Windgeschwindigkeit V_W speziell in Abschnitt 3.2.2 auf Seite 40.

2.1.3 Körperfeste Achsen

Das körperfeste Koordinatensystem ist ein rechtshändiges Achsensystem, dessen x-Achse nach vorne, z-Achse nach unten und y-Achse entsprechend nach rechts zeigt. Als Ursprung des körperfesten Systems wird nicht der bei Luftschiffen stark wandernde Schwerpunkt, sondern der Bezugspunkt der scheinbaren Massen gewählt. Prinzipiell kann dieser Punkt beliebig festgelegt werden, eine sinnvolle Wahl stellt das Volumenzentrum CV des Rumpfes dar. Somit ist das körperfeste Achsensystem mit Ursprung im Referenzpunkt $CR=CV$ festgelegt.

Bild 2.3 zeigt das luftschiffeste Achsensystem und die Lage einiger Bezugspunkte. Ebenfalls dargestellt ist der Ortsvektor r_{CRCG} , seine Komponenten betragen

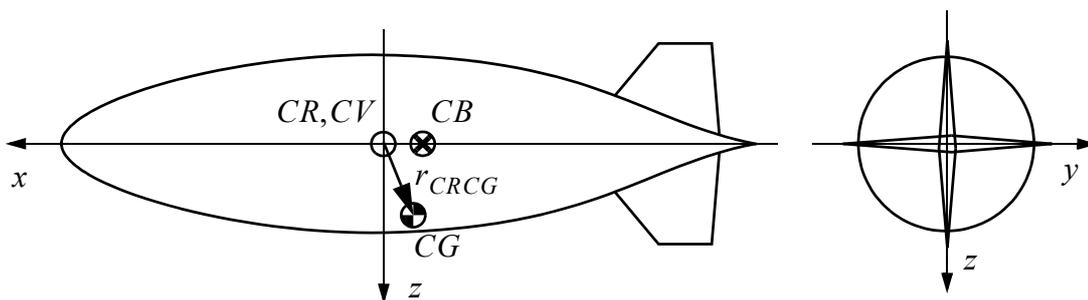


Bild 2.3: Körperfestes Achsenkreuz, wichtige Bezugspunkte

$$r_{CRCG} = \begin{bmatrix} x_{CG} \\ y_{CG} \\ z_{CG} \end{bmatrix}, \text{ entsprechend gilt } r_{CRCB} = \begin{bmatrix} x_{CB} \\ y_{CB} \\ z_{CB} \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Luftschiffsteuerung

Ein Luftschiff wird über aerodynamische Steuerflächen, Schubkräfte und über aktive Kraftsteuerung (Manövertriebwerke) manövriert.

Die Modellierung von Schubkräften und direkter Kraftsteuerung mittels eines Triebwerks erfolgt direkt durch Ansetzen einer äußeren Kraft mit entsprechender Richtung und Stärke. Bild 2.4 zeigt die mögliche Beschreibung einer einzelnen Steuerungskraft F^S , wirkend im körperfesten Punkt CF^S . Seine Richtung kann über die beiden eingezeichneten Lagewinkel beschrieben werden, die Winkel sind in Anlehnung an die analog definierten aerodynamischen Anstellwinkel und Schiebewinkel mit α und β bezeichnet.

Eine solche Einzelkraft erzeugt in körperfesten Komponenten die Kraft

$$F_f^S = T_{II}(\alpha_{FS})T_I(-\beta_{FS}) \begin{bmatrix} F^S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{FS} \cos \beta_{FS} F^S \\ \sin \beta_{FS} F^S \\ \sin \alpha_{FS} \cos \beta_{FS} F^S \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

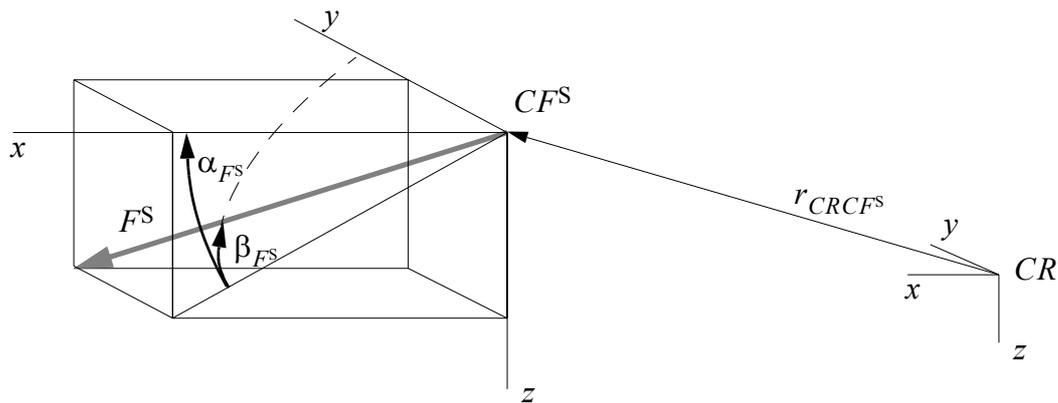


Bild 2.4: Aktive Kraftsteuerung: Einzelkraft F^S , Festlegung der Richtung bezüglich körperfesten Achsen

dabei wurden die Transformationsmatrizen nach Gleichung (2.1) angewendet. Weiterführende Information zu den Schubkräften findet man in Abschnitt 2.4.

Die aerodynamischen Stellflächen eines Luftschiffes sind typischerweise an den Flossen im Heck angebracht. Bei den in diesem Bericht behandelten Kreuzleitwerken bilden die Ruderflächen jeweils paarweise Höhen- und Seitenruder. Durch differentielles Ausschlagen z.B. der beiden Höhenruder kann die Wirkung eines Querruders imitiert werden (Bild 2.5). Wie in der Flugmechanik üblich, sind die Ausschlagrichtungen derart definiert, dass ein *positiver Ausschlag* ein *negatives Steuermoment* um die entsprechende Bewegungsachse verursacht.

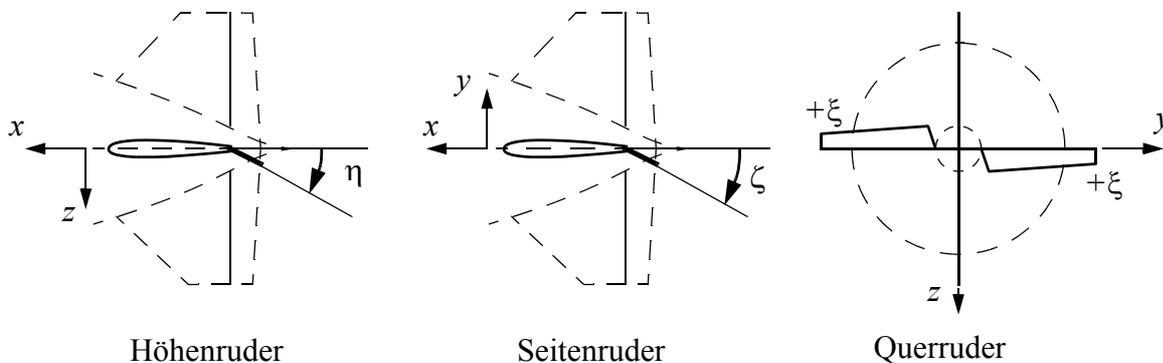


Bild 2.5: Definition der Ruderausschlagwinkel.

2.2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen werden unter den in der Einleitung zu Kapitel 2 beschriebenen Annahmen hergeleitet: Das Luftschiff wird als starrer Körper modelliert, die flache Erde wird als Inertialsystem betrachtet.

2.2.1 Impuls- und Drallsatz, Starrkörperbewegungsgleichungen

Die Bewegung eines starren Körpers wird durch die Summe der wirkenden äußeren Kräfte und Momente verursacht. In den folgenden Formulierungen wird die Gewichtskraft den äußeren Kräften zugeordnet, die Summe der Kräfte beträgt somit

$$\sum F = F^B + F^G + F^T + F^A \quad (2.6)$$

und die Summe der Momente

$$\sum Q = Q^B + Q^G + Q^T + Q^A. \quad (2.7)$$

Allgemeine Form

Der Impuls- und Drallsatz wird nicht wie in der Flugmechanik allgemein üblich bezüglich des Schwerpunkts aufgestellt, sondern im Bezugspunkt CR . Dieser Punkt ist ein bezüglich der Luftschiffgeometrie fester Punkt. Er wird so gewählt, dass die aerodynamischen Kräfte proportional der Starrkörperbeschleunigung nicht transformiert werden müssen. CR entspricht also dem Bezugspunkt der scheinbare Masse Kräfte.

Aus dem Impuls- und Drallsatz bezüglich des Schwerpunkts, formuliert in Abhängigkeit der Schwerpunktranslationsgeschwindigkeit $V_{K|CG}$

$$\begin{aligned} m(\dot{V}_{K|CG} + \Omega \times V_{K|CG}) &= \sum F|_{CG} \\ I_{CG} \dot{\Omega} + \Omega \times (I_{CG} \Omega) &= \sum Q|_{CG} \end{aligned}$$

folgen mit den Beziehungen

$$V_{K|CG} = V_K + \Omega \times r_{CRCG}, \quad \Omega|_{CR} = \Omega, \quad F|_{CG} = F \quad \text{und} \quad Q|_{CG} = Q + r_{CRCG} \times F$$

die Bewegungsdifferentialgleichungen bezüglich des Referenzpunktes CR

$$\begin{aligned} m(\dot{V}_K + \dot{\Omega} \times r_{CRCG} + \Omega \times (V_K + \Omega \times r_{CRCG})) &= \sum F(V_K, \Omega, \dot{V}_K, \dot{\Omega}, V_W(x, t)) \\ I \dot{\Omega} + \Omega \times (I \Omega) + m \cdot r_{CRCG} \times (\dot{V}_K + \Omega \times V_K) &= \sum Q(V_K, \Omega, \dot{V}_K, \dot{\Omega}, V_W(x, t)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dabei sind Kräfte, Momente und Translationsgeschwindigkeiten sowie die Trägheitsmatrix I bezüglich des Bezugspunktes CR formuliert. (2.8) stellen nun die üblichen flugmechanischen Bewegungsgleichungen dar, nur sind auch die äußeren Kräfte, es sind die instationären aerodynamischen Kräfte, in bedeutendem Masse von den Zustandsbeschleunigungen abhängig. Deshalb müssen die Gleichungen weiter behandelt werden.

Berücksichtigung der instationären Aerodynamikanteile und Auflösung

Nach 3.7 können die aerodynamischen Kräfte in der Form

$$\begin{aligned} F^A &= F^A(V_A, \Omega, \dot{V}_W) + F^A(\dot{V}_K, \dot{\Omega}) \\ Q^A &= Q^A(V_A, \Omega, \dot{V}_W) + Q^A(\dot{V}_K, \dot{\Omega}) \end{aligned}$$

dargestellt werden, d.h. sie können in Kräfte infolge Relativanströmung, Körperdrehung und Windbeschleunigung und infolge Bahnbeschleunigung separiert werden. Die instationären aerodynamischen Kräfte stehen zudem in linearer Beziehung zu den translatorischen und rotatorischen Starrkörperbeschleunigungen. Sie sind in Form scheinbarer Massen als

$$\begin{aligned} F^A(\dot{V}_K, \dot{\Omega}) &= -\rho F_{11} \dot{V}_K - \rho F_{12} \dot{\Omega} \\ Q^A(\dot{V}_K, \dot{\Omega}) &= -\rho F_{21} \dot{V}_K - \rho F_{22} \dot{\Omega} \end{aligned}$$

darstellbar. Es gelingt also auch die rechte Seite in (2.8) in linearer Abhängigkeit der Beschleunigungszustände zu formulieren und somit die Bewegungsgleichungen nach den Beschleunigungen aufzulösen und in expliziter Form darzustellen. Unter Zuhilfenahme der Schreibweise der Kreuzproduktmatrix $r^X = r_{CRCG}^X$, welche über die Beziehung $r_{CRCG} \times \Omega = r^X \cdot \Omega$ definiert ist, lautet diese Form

$$\begin{aligned} (m + \rho F_{11}) \dot{V}_K - (mr^X - \rho F_{12}) \dot{\Omega} &= -m \Omega \times (V_K + \Omega \times r_{CRCG}) \\ &\quad + F^S + F^B + F^G + F^T + F^A(V_A, \dot{V}_W, \Omega) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (I + \rho F_{22}) \dot{\Omega} + (mr^X + \rho F_{21}) \dot{V}_K &= -\Omega \times (I\Omega) - (m \cdot r_{CRCG} \times (\Omega \times V_K)) \\ &\quad + Q^S + Q^B + Q^G + Q^T + Q^A(V_A, \dot{V}_W, \Omega) . \end{aligned}$$

Die angegebenen äußeren Kräfte und Momente sind dabei in den folgenden Unterkapiteln (Aerostatik Masse und Gewicht in 2.3, Schubkräfte in 2.4 und Aerodynamik und Windwirkung in 3) beschrieben. Gleichung (2.9) kann auch als Block-Matrixgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m + \rho F_{11} & mr^X - \rho F_{12} \\ I + \rho F_{22} & mr^X + \rho F_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -m \Omega \times (V_K + \Omega \times r_{CRCG}) \\ -\Omega \times (I\Omega) - (m \cdot r_{CRCG} \times (\Omega \times V_K)) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} F^S + F^B + F^G + F^T + F^A(V_A, \dot{V}_W, \Omega) \\ Q^S + Q^B + Q^G + Q^T + Q^A(V_A, \dot{V}_W, \Omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dargestellt werden. Diese Gleichung kann nun nach \dot{V}_K und Ω aufgelöst werden und die Bewegungsdifferentialgleichungen können somit in expliziter Form angegeben werden..

Die instationären aerodynamischen Kräfte werden nach Kapitel 3.3 entsprechend den scheinbaren Massen eines Rotationsellipsoiden modelliert. Für diesen Körper lauten die Komponenten des scheinbare Masse Tensors F nach der Schreibweise von Seite 54

$$\begin{aligned}
 F_{11} = F_V = V \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} & \quad F_{12} = 0 \\
 F_{21} = 0 & \quad F_{22} = F_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}k' & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}k' \end{bmatrix} .
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die Bewegungsgleichungen nach (2.10) stimmen mit den Ansätzen von Simpson, Thomasson, Gomes, Nagabushan und anderen überein ([48], [40], [24], [21], [49]). Die linke Seite der Gleichung, sie beschreibt den Einfluss der Trägheit und der scheinbaren Massen, sowie die kinematischen Terme auf der rechten Seite sind dabei leicht zu überprüfen, dies gilt auch für die Gewichts- und Schubkräfte und den statischen Auftrieb. Die Formulierung der aerodynamischen Kräfte hingegen ist schwer zu vergleichen. Werden sie hier mit ähnlichen Ansätzen wie bei Jones und DeLaurier in [12] analytisch beschrieben, so modelliert Gomes diese Kräfte über Interpolationstabellen aus Windkanalmessungen. Thomasson liefert eine gute Diskussion zur Kombination von analytischen Anteilen und Windkanaltabellen, eine ähnliche Diskussion ist auch in [49] zu finden.

In diesem Zusammenhang wird noch einmal darauf hingewiesen, dass die Behandlung der Anteile der scheinbare Masse Kräfte bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen besonderer Vorsicht bedarf. Das Rumpfmoment $V_K \times (\rho F_V V_K)$ ist üblicherweise (z.B. bei der Benutzung von Beiwertetabellen aus Windkanalmessungen) bereits im Term $F^A(V_A)$ der aerodynamischen Kräfte enthalten, so wie nach der hier dargestellten Modellierungsmethode die kinematischen Terme der scheinbaren Massen ebenfalls im Term der äußeren aerodynamischen Kräfte enthalten sind. Diese Anteile dürfen auf keinen Fall doppelt berücksichtigt werden.

Den Einfluss stationären und instationären Windes berücksichtigen ebenfalls Jones und DeLaurier, allerdings nur unter der Theorie Schlanker Körper und im ebenen Anströmungsfall. Leider ist ihre Herleitung nicht ganz fehlerfrei (vgl. Diskussion im Anhang B.2.1 auf Seite 176).

Spezialfall: Reine Berücksichtigung perfekter Fluidkräfte eines Rotationsellipsoiden

In Kapitel 3 “Modellbeschreibung Aerodynamik und Windwirkung” wird zur Veranschaulichung der Resultate oft der Spezialfall des Rotationsellipsoids angeführt. Für diesen Körper können nach Gleichung (3.42) die potentialtheoretischen Kräfte in der einfachen Form

$$F^A = -\rho F_V \dot{V}_K - \rho \Omega \times (F_V V_A) + \rho F_V \dot{V}_W - \rho V^f \text{grad}(p_W)$$

$$Q^A = -\rho F_\Omega \dot{\Omega} - \rho \Omega \times (F_\Omega \Omega) - \rho V_A \times (F_V V_A)$$

dargestellt werden. Unter Vernachlässigung von Wind und nach der Schreibweise mit Fluidimpuls und -Drall wie sie in Anhang B.1 eingeführt wurden, lauten diese Beziehungen

$$F^A = -\rho F_V \dot{V}_K - \Omega \times (\rho F_V V_K) = -\dot{J} - \Omega \times J$$

$$Q^A_h = -\rho F_\Omega \dot{\Omega} - \Omega \times (\rho F_\Omega \Omega) - V_K \times (\rho F_V V_K) = -\dot{D} - \Omega \times D - \vec{V} \times J$$

Weiter gilt für diesen Körper unter der Annahme homogener Dichte

$$r_{CRCG} = r_{CVCG} = 0$$

und die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich zu

$$(m + \rho F_V) \dot{V}_K = -m \Omega \times (V_K) - \Omega \times (\rho F_V V_K) + F^{\text{Rest}} \quad (2.12)$$

$$(I + \rho F_\Omega) \dot{\Omega} = -\Omega \times (I \Omega) - \Omega \times (\rho F_\Omega \Omega) - V_K \times (\rho F_V V_K) + Q^{\text{Rest}}$$

In dieser Darstellung wird der Einfluss der scheinbaren Massen als *Beitrag* zur trägen Masse m beziehungsweise zum Trägheitsmoment I deutlich.

Wie bereits diskutiert wurde, hat der Tensor der scheinbaren Masse eines Rotationsellipsoiden blockdiagonale Gestalt (Gleichung (2.11)). Weiter erkennt man nach Gleichung (2.12), wie die Struktur der kinematischen Terme der Starrkörperbewegung entsprechend auch in den aerodynamischen Krafttermen erscheint. Diese Anteile werden zum Beispiel von Thomasson in [40] von den "restlichen" aerodynamischen Kräften separiert.

2.2.2 Bewegungsdifferentialgleichung der Fluglage und des Ortes

Für die Lagewinkel ϕ , θ und ψ existieren nach Brockhaus [43] die Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Die Differentialgleichung der Position entspricht der Bahngeschwindigkeit dargestellt in erdfesten Achs-Komponenten. Die entsprechende Gleichung lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = V_{Kg} = T_{gf}(\phi, \theta, \psi) V_{Kf} = T_{gf}(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Transformationsmatrix $T_{gf}(\phi, \theta, \psi)$ berechnet sich nach Gleichung (2.1) und (2.2).

2.2.3 Berücksichtigung weiterer dynamischer Anteile

Neben der eigentlichen Dynamik des Starrkörpers existieren noch weitere dynamische Prozesse, welche für flugmechanische Untersuchungen und Reglerentwurf berücksichtigt werden müssen. Die aus der Flugmechanik bekannten Anteile umfassen elastische und aeroelastische Anteile, die Dynamik von Antrieben und aerodynamischen Stellgliedern und natürlich auch die Dynamik von Messeinrichtungen. Für Luftschiffe existieren weitere Anteile infolge Schwappens oder Konvektion von Traggas und Ballonetluft.

Die vernachlässigten Effekte infolge Strukturschwingungen, Schwappen und Konvektion von Traggas oder Ballonetluft müssten direkt in den Bewegungsdifferentialgleichungen des starren Körpers berücksichtigt werden. Dagegen stellen die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Dynamik von Antrieben, Stellgliedern und Messeinrichtungen von den Bewegungsgleichungen des starren Körpers entkoppelte Gleichungen dar. Sie können getrennt von den Bewegungsdifferentialgleichungen entwickelt und beschrieben werden, und dann, wie in der Flugregelung üblich, seriell mit den Bewegungsdifferentialgleichungen gekoppelt werden. Dies ist in Bild 2.6 dargestellt.

Dynamische Modelle sind in der Literatur zu finden, so z.B. zur Beschreibung der Navigationssensorik in [46] oder bei Bryson in [47], zur Beschreibung der Antriebsdynamik in [43] oder ebenfalls bei Bryson. Die Dynamik von Stellgliedern kann in erster Näherung über eine Begrenzung der Stellgeschwindigkeit beschrieben werden.

2.2.4 Zusammenfassende Beschreibung des Prozesses Luftschiff

Steuergrößen, Systemeingänge

Wie in Abschnitt 2.1.4 auf Seite 11 erläutert, stellen die Auslenkungen der aerodynamischen Steuerflächen und die Schubhebelstellung respektive der kommandierte Schub die Steuersignale des Prozesses Luftschiff dar.

Das hier beschriebene Aerodynamikmodell berücksichtigt die Ausschläge der aerodynamischen Steuerflächen Seitenruder ζ , Höhenruder η und Querruder ξ (vgl. Bild 2.5). Das Schubmodell ermöglicht die Steuerung über Drosselgrad δ_T und (gegebenenfalls) eine Schubvektorsteuerung durch die Auslenkung des Schubvektors über die beiden Winkel α_T und β_T . Es kann dabei eine beliebige Anzahl von Schubvektoren und Manöverantrieben berücksichtigt werden.

Der Eingangsvektor des Systems Luftschiff stellt sich somit wie folgt zusammen

$$u = [\zeta, \eta, \xi, \delta_{T1}, \alpha_{T1}, \beta_{T1}, \delta_{T2}, \alpha_{T2}, \beta_{T2}, \dots]^T \quad (2.15)$$

oder mit Trennung in aerodynamische und schubgekoppelten Größen in der Form

$$u = [u_{\delta A}, u_{\delta T1}, u_{\delta T2}, \dots]^T \text{ mit } u_{\delta A} = [\zeta, \eta, \xi]^T \text{ und } u_{\delta Ti} = [\delta_{Ti}, \alpha_{Ti}, \beta_{Ti}]^T.$$

Zustandsvektor

Die Größen zur Beschreibung der Bewegung, Orientierung und Position des Starrkörpers werden zum Zustandsvektor x zusammengefasst. Der Zustandsvektor lautet in Blockschreibweise

$$x = [V_K, \Omega, \Phi, r]^T \text{ oder ausgeschrieben } x = [u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, x, y, z]^T.$$

Bewegungsdifferentialgleichungen

Gleichung (2.10), (2.13) und (2.14) beschreiben die Differentialgleichungen des Zustandsvektors x in der expliziten Form

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (2.16)$$

Grafisch wird der Prozess Luftschiff in Bild 2.6 dargestellt.

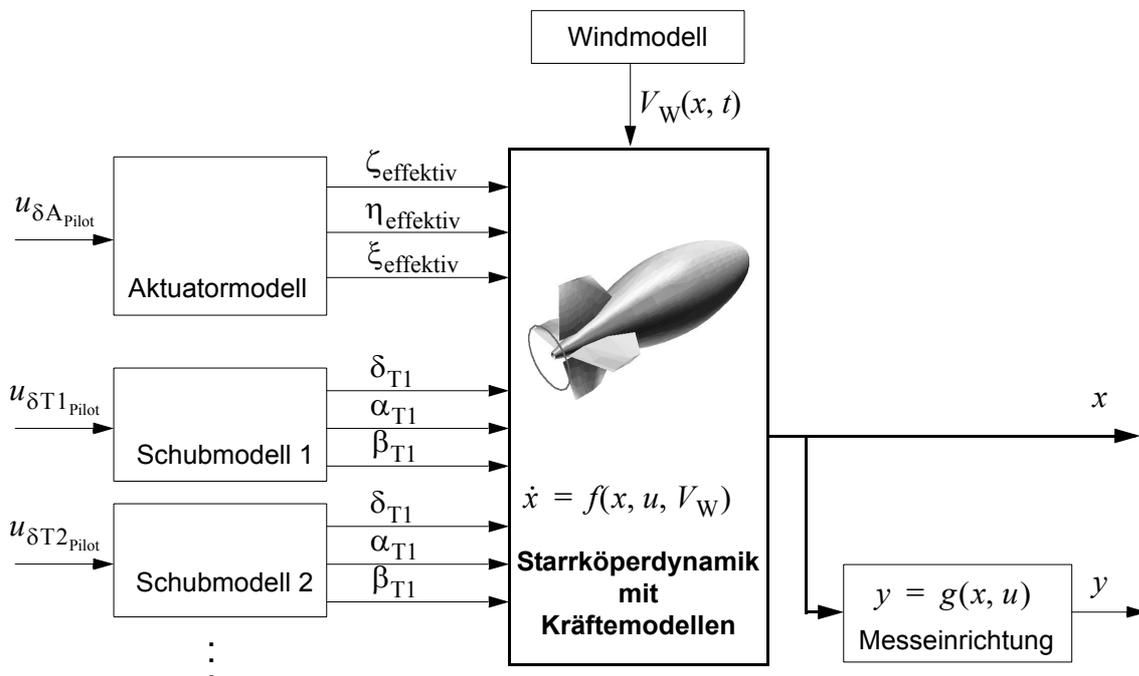


Bild 2.6: Der Prozess Luftschiff als Blockschaltbild, schematische Darstellung der Serieschaltung von Aktuator- und Schubdynamik.

2.3 Aerostatik, Masse und Gewicht

Luftschiffe werden oft als Luftfahrzeuge leichter als Luft beschrieben. Es stimmt zwar, dass Luftschiffe ihren Auftrieb vorwiegend mit Hilfe eines Traggases leichter als Luft erzeugen, genauer wäre aber die Bezeichnung "Fahrzeuge so leicht wie Luft", weil die Gesamtmasse eines Luftschiffs immer in der Größenordnung der verdrängten Luftmasse liegt.

Der aerostatische Auftrieb wird durch das Traggas erzeugt, er ist dabei direkt von dessen Volumen und Dichteunterschied zur umgebenden Luft abhängig. Das Traggasvolumen variiert nach den physikalischen Gasgesetzen mit Druck und Temperatur des Gases, entsprechenden verhält sich auch die Dichte der verdrängten Umgebungsluft.

Durch geschickte Festlegung von Systemgrenzen lassen sich diese Zusammenhänge einfach darstellen und mathematisch modellieren.

2.3.1 Atmosphärenmodell und Gasgesetze

Beziehungen im stationären thermodynamischen Gleichgewicht

Nach der Standardatmosphäre und dem Gesetz des idealen Gases

$$\rho RT = p$$

kann die Temperatur, der Druck und die Dichte der Umgebungsluft in Funktion der Höhe h aus Referenztemperatur- und -druck auf Meereshöhe (h_0) abgeleitet werden. Nach der Internationalen Standardatmosphäre (ISA) gelten bis zu einer Höhe von 10'000 m folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} T_{\text{Luft}}(h) &= T_{\text{Luft}}(h_0) - ah \\ p_{\text{Luft}}(h) &= p_{\text{Luft}}(h_0) \left(\frac{T_{\text{Luft}}(h)}{T_{\text{Luft}}(h_0)} \right)^{\frac{g}{aR_{\text{Luft}}}} \\ \rho_{\text{Luft}}(h) &= \frac{p_{\text{Luft}}(h)}{R_{\text{Luft}} T_{\text{Luft}}(h)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit $a = 0,0065 \text{ K/m}$, $R_{\text{Luft}} = 287 \text{ J/(kgK)}$ und den Standardatmosphärenwerten in Meereshöhe ($h_0 = 0$) von $T_{\text{Luft}}(0) = 288,15\text{K}$ und $p_{\text{Luft}}(0) = 101325\text{Pa}$.

Das Traggasvolumen berechnet sich nach dem Gesetz des idealen Gases als

$$V_{\text{Gas}}(h, T_{\text{Gas}}) = \frac{m_{\text{Gas}} R_{\text{Gas}} T_{\text{Gas}}}{p_{\text{Gas}}(h)} \quad (2.18)$$

Durch Festlegen einer konstanten Differenz zwischen Innen- und Aussendruck

$$\Delta p = p_{\text{Luft}}(h) - p_{\text{Gas}}(h) \quad (2.19)$$

ist der Gasdruck in Funktion der Höhe bekannt. Das Volumen des Traggases kann in Funktion der Atmosphärengleichungen (2.17) und der Traggasgleichung (2.18) berechnet werden, die spezifische Gaskonstante des Auftriebsgases Helium beträgt dabei $R_{\text{He}} = 2078 \text{ J}/(\text{kgK})$.

Traggasvolumen, Ballonets und Prallhöhe

Die unvermeidbare Änderung des Traggasvolumens wird bei modernen Luftschiffen durch das Befüllen von Ballonets mit Umgebungsluft kompensiert. Dadurch wird das Rumpfvolumen V in erster Näherung konstant gehalten, es gilt

$$V = V_{\text{Gas}} + V_{\text{Ballonet}} = \text{konstant}, \quad (2.20)$$

zusammen mit Gleichung (2.18) ist somit auch das Ballonetvolumen jederzeit bekannt.

Die Funktionalität von Ballonets ist in Bild 2.7 dargestellt. Das Rumpfvolumen V begrenzt die maximale Ausdehnung des Traggases und bestimmt somit bei gegebener Gas-temperatur die maximal zulässige Flughöhe, die sogenannte Prallhöhe.

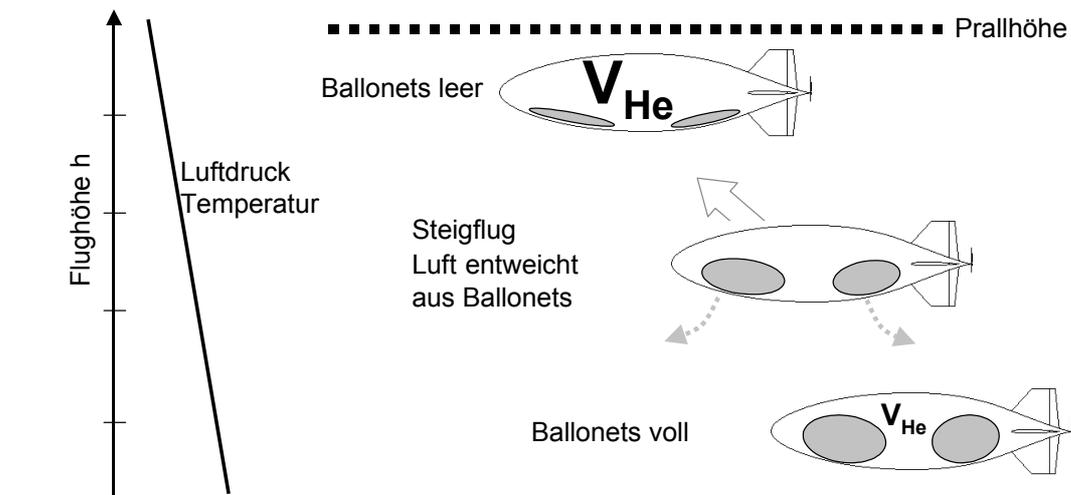


Bild 2.7: Zur Funktionalität der Ballonets ($V_{\text{He}} = V_{\text{Gas}}$)

Berücksichtigung thermodynamischer Vorgänge: Die adiabate Höhenänderung

Vernachlässigt man den thermischen Ausgleich zwischen Traggas und Umgebung, so handelt es sich bei der Zustandsänderung des Traggases im Steig- und Sinkflug um eine adiabate Zustandsänderung. Zwischen Ausgangszustand 0 und Endzustand 1 (Indizierung) eines adiabaten Prozesses gilt die Beziehung

$$T_0 V_0^{c_v} = T_1 V_1^{c_v} = \text{konstant},$$

mit der Gaskonstanten R und der Wärmekapazität (bei konstantem Volumen) c_V . Über das ideale Gasgesetz $T = pV/(mR)$ findet man mit $k = R/c_V + 1$ die Beziehung

$$p_0 V_0^k = p_1 V_1^k \quad \text{und daraus} \quad V(p) = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot V_0, \quad (2.21)$$

mit (2.19) ist somit das Traggasvolumen bestimmt.

Unter realen Bedingungen baut sich die im Steigen aufgebaute Unterkühlung (respektive im Sinken die Aufheizung) des Traggasen über Wärmeaustausch mit der Umgebung ab. Es wird sich somit im stationären Steigen eine stationäre Untertemperatur einstellen. Diese Temperatur gehorcht dem Verhältnis von Volumen (adiabater Effekt) zu Oberfläche (Temperaturaustausch), also der thermischen Zeitkonstante eines Wärmespeichers, und nimmt mit zunehmender Schiffgröße zu.

2.3.2 Definition der Systemgrenzen

Die Systemgrenzen zur Modellierung des Auftriebs sowie der Massen werden nach folgendem einfachen Grundsatz gezogen:

***Alles am Luftschiff und innerhalb des Luftschiffes
liefert einen Beitrag zur Masse und zum Gewicht.***

Die Grenzen des Systems Luftschiff werden somit um Strukturelemente, Anbauten wie Leitwerke, Gondel und Motoren, Hülle und andere Gas und Flüssigkeitsbehältnisse sowie Treibstoffe, Wasser, Ballonetluft und Traggas gezogen, wie es in Bild 2.8 dargestellt ist.

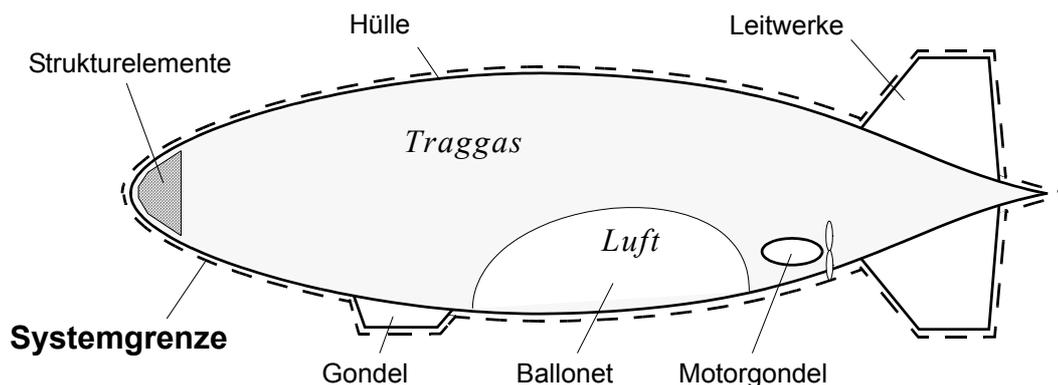


Bild 2.8: Festlegung der Systemgrenzen

Nach obenstehendem Grundsatz und den Systemgrenzen ist die Gesamtmasse m und das Verdrängungsvolumen V_B bestimmt. Das Massenmodell, die Gewichtskraft und die Auftriebskraft lassen sich direkt beschreiben.

2.3.3 Aerostatischer Auftrieb

Der aerostatische Auftrieb resultiert aus der aerostatischen Druckverteilung an den Grenzen des Systems Luftschiff. Wird der Druckgradient der Umgebungsluft über die Ausdehnung des Luftschiffs als konstant angenommen, beträgt die Auftriebskraft nach dem archimedischen Prinzip

$$F^B = \rho_{\text{Luft}} V_B g = B .$$

Sie ist vertikal nach oben gerichtet und erzeugt bezüglich körperfesten Achsen die Kraft und das Moment

$$F_f^B = T_{fg} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho_{\text{Luft}} V_B g \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$Q_f^B = r_{CRCB} \times F_f^B .$$

dabei kann das Verdrängungsvolumen üblicherweise als konstant angenommen werden, die Luftdichte gehorcht der atmosphärischen Dichtegleichung (2.17).

2.3.4 Massenmodell

Über die Definition der Systemgrenzen sind die materiellen Bestandteile des Luftschiffs definiert. Aus einer Zusammenstellung der Massen und Trägheiten und deren Position und Orientierung gegenüber der körperfesten Achsen, sowie des Füllstandes der Ballonets kann die Gesamtmasse m , der Ortsvektor r_{CRCG} des Schwerpunkts und das Trägheitsmoment I des Luftschiffs berechnet werden.

Wie bereits erwähnt, variieren Masse, Schwerpunktslage und Trägheitsmoment eines Luftschiffes in Funktion der Innentemperatur und des Innendruckes. Für das Luftschiff Lotte findet man eine ausführliche Beschreibung des Massenmodells in Abhängigkeit der Flughöhe in [74].

Eine Einteilung der Masse m in gasförmige und "restliche" Anteile lässt sich wie folgt darstellen:

$$m = m_{\text{Ballonet}} + m_{\text{Gas}} + m_{\text{Rest}} = \rho_{\text{Ballonet}} V_{\text{Ballonet}} + \rho_{\text{Gas}} V_{\text{Gas}} + m_{\text{Rest}} \quad (2.23)$$

2.3.5 Gewichtskraft

Die Beiträge des Gewichts $G = mg$ zu Kraft und Moment bezüglich CR betragen

$$F_f^G = T_{fg} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$Q_f^G = r_{CRCG} \times F_f^G .$$

2.3.6 Statischer Nettoauftrieb

Der statische Nettoauftrieb berechnet sich als Differenz aus aerostatischem Auftrieb und Gewichtskraft (vgl. auch Definition der statischen Schwere auf Seite 128). Er beträgt

$$F^{\text{NetA}} = B - G = \rho_{\text{Luft}} V_B g - (\rho_{\text{Ballonet}} V_{\text{Ballonet}} + \rho_{\text{Gas}} V_{\text{Gas}} + m_{\text{Rest}}) g . \quad (2.25)$$

Unter Einbezug von (2.20) und der Annahme $\rho_{\text{Luft}} = \rho_{\text{Ballonet}}$ folgt

$$\begin{aligned} F^{\text{NetA}} &= \rho_{\text{Luft}} V_B g - (\rho_{\text{Luft}} (V_B - V_{\text{Gas}}) + \rho_{\text{Gas}} V_{\text{Gas}} + m_{\text{Rest}}) g \\ &= \rho_{\text{Luft}} V_{\text{Gas}} g - \rho_{\text{Gas}} V_{\text{Gas}} g - m_{\text{Rest}} g \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Werte m_{Rest} und $m_{\text{Gas}} = \rho_{\text{Gas}} V_{\text{Gas}}$ können in erster Näherung als konstant angesehen werden. Der statische Nettoauftrieb folgt somit nur dem Produkt aus Dichte der verdrängten Luft und Traggasvolumen, Gleichung (2.26) vereinfacht sich weiter in

$$F^{\text{NetA}} = \rho_{\text{Luft}} V_{\text{Gas}} + \text{konstant} . \quad (2.27)$$

Variation der statischen Auftriebskraft bei adiabater Höhenänderung

Infolge adiabater Höhenvariation ändern sich Gewicht und Auftrieb. Die flugmechanisch wirkenden Kräfte gehorchen dabei der Änderung des statischen Nettoauftriebs und folgen nach (2.27) dem Produkt $\rho_{\text{Luft}} V_{\text{Gas}}$. Beide Terme sind bekannt: Die Luftdichte in Funktion der Flughöhe wird durch die Atmosphärgleichung beschrieben und die adiabate Volumenänderung des Traggases gehorcht Gleichung (2.21).

Im Folgenden wird nun die Auftriebsänderung infolge einer Höhenüberwindung Δh untersucht. Das Luftschiff fliege in Höhe h_1 und befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung. Aus diesem stationären Zustand beginnt die Variation der Höhe. Die Änderung des Nettoauftriebs wird dann durch die Differenz

$$\Delta F^{\text{NetA}}(h_1, \Delta h) = F^{\text{NetA}}(h_1 + \Delta h) - F^{\text{NetA}}(h_1)$$

beschrieben. Die resultierende Kraftänderung ist proportional $g \rho_0 V_{0\text{Gas}}$ und ist in Bild 2.9 unter ISA-Bedingungen bei einer Starthöhe von $h_1 = 0$ dargestellt. Der Verlauf ist annähernd linear in Δh und die Steigung lässt sich in einfacher analytischer Form darstellen:

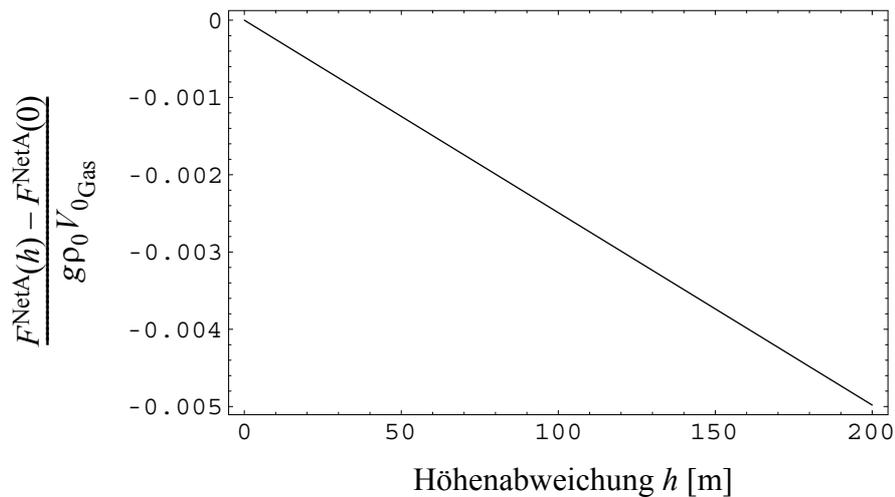


Bild 2.9: Änderung des statischen Auftriebes bei adiabater Höhenänderung unter ISA Bedingungen, (Starthöhe 0m, Normierung mit $V_{0\text{Gas}} \rho_0 g$, ISA bis 10'000m)

$$\frac{d}{d\Delta h} \Delta F^{\text{NetA}}(h_1, \Delta h) = g \rho_0 V_{0\text{Gas}} \frac{(g - gk + akR) \left(1 - \frac{ah_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}} T_0}{kR(T_0 - ah_1)^2} \quad \text{mit } k = \frac{R_{\text{He}}}{c_{V\text{He}}} + 1. \quad (2.28)$$

Die Kraftänderung unter den in Bild 2.9 herrschenden Bedingungen wird durch die lineare Beziehung

$$\Delta F^{\text{NetA}}(h_1, \Delta h) \approx -0,000297 V_{0\text{Gas}} \cdot \Delta h = -0,0000247 g \rho_0 V_{0\text{Gas}} \cdot \Delta h \quad (2.29)$$

angenähert. Der Gradient ändert sich dabei nur um wenige Prozent bei Änderung von h_1 oder bei Abweichungen von ISA Standardbedingungen. Folgende Faustformel kann somit aus (2.29) abgeleitet werden: Eine Höhenänderung von +100 m führt auf eine Auftriebsänderung in der Größenordnung von -0.25% der Verdrängung des Auftriebsgases.

2.4 Schubkräfte

2.4.1 Allgemeine Formulierung

Schubkräfte werden als in einem körperfesten Punkt CT angreifende Kraft beliebiger Orientierung und Stärke modelliert, wie dies bereits im Unterkapitel 2.1.4 "Luftschiffsteuerung" im Falle einer aktiven Kraftsteuerung beschrieben wurde. Entsprechend Bild 2.4 wird eine solche Kraft durch den Ortsvektor r_{CRCT} des Bezugspunktes CT , durch den Kraftvektor in Komponenten der Kraftachsen und durch die Orientierung des Kraftachsensystems gegenüber des körperfesten Systems beschrieben.

Der Kraftvektor im Kraftachsensystem betrage $F_t^T = [X_t^T, Y_t^T, Z_t^T]^T$, zudem liefert der Schub ein Moment $Q_t^T|_{CT} = [L_t^T, M_t^T, N_t^T]^T$ bezüglich CT . Der Beitrag an die Kraft und das Moment bezüglich CR in körperfesten Komponenten berechnet sich somit nach

$$F_f^T = T_{II}(\alpha_T) T_I(-\beta_T) F_t^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha_T \cos \beta_T & -\sin \beta_T \cos \alpha_T & -\sin \alpha_T \\ \sin \beta_T & \cos \beta_T & 0 \\ \sin \alpha_T \cos \beta_T & -\sin \alpha_T \sin \beta_T & \cos \alpha_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t^T \\ Y_t^T \\ Z_t^T \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$Q_f^T = T_{II}(\alpha_T) T_I(-\beta_T) Q_t^T|_{CT} + r_{CRCG} \times F_f^G \quad .$$

2.4.2 Stationäres Schubmodell

Der Betrag und die Richtung der Schubkraft ist eine Funktion des aktuellen Flugzustands (Machzahl, Anströmung des Propellers oder Strahltriebwerks), der Umweltbedingungen, des Drosselgrads und natürlich der Flugzeuggeometrie

$$F_t^T = F^T(\rho, V_A, \dots, \alpha_T, \beta_T, \delta_T). \quad (2.31)$$

Die Winkel α_T und β_T bezeichnen dabei allgemein die Nennschubrichtung eines Antriebs, und der Vektor F_t^T besitzt Vertikal- und Lateralkomponenten (z.B. im Falle einer Schräganströmung eines Propellers). In der Literatur existieren gute Modelle zur Beschreibung der Leistung und Kraftkomponenten von Triebwerken [44]. Für flugmechanische Untersuchungen geeignete einfache Modelle findet man z.B. bei Brockhaus [43], eine anschauliche Modellierung eines Propellerantriebs in [45].

Im einfachsten Fall lässt sich der Kraftbetrag eines Antriebes mit Hilfe des Referenzschubbetrages F_0^T schreiben als

$$F^T = F_0^T \cdot \delta_T.$$

Unter der weiteren, vereinfachenden Annahme, dass Schubmomente bezüglich CT sowie die außerraxialen Schubkomponenten vernachlässigbar sind, folgt mit

$$F_t^T = \begin{bmatrix} F_0^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_T \quad \text{und} \quad Q_t^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{der Schubbeitrag in körperfesten Achsen}$$

$$F_f^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha_T \cos \beta_T F_0^T \\ \sin \beta_T F_0^T \\ \sin \alpha_T \cos \beta_T F_0^T \end{bmatrix} \delta_T \quad (2.32)$$

$$Q_f^T = r_{CRCT} \times F_f^T .$$

Diese Gleichung beschreibt ein einfaches Schubmodell und die Wirkung der Schubkraft F^T bezüglich körperfesten Koordinatenachsen. Im einfachsten Fall stellt der Drosselgrad δ_T eine Steuergröße des Prozesses Luftschiff dar. Versteht man die beiden Größen α_T und β_T ebenfalls als Systemeingänge, so modelliert Gleichung (2.32) die Wirkung einer Schubvektorsteuerung.

2.4.3 Dynamik der Antriebe

Gleichung (2.32) beschreibt die stationäre Kraft eines Triebwerks bei konstantem Flugzustand und Drosselgrad. Natürlich besitzt ein Antrieb auch eine Dynamik, die Schubkraft reagiert im Allgemeinen zeitlich verzögert auf Drosselgradänderungen.

Die Dynamik eines Antriebes ist für flugdynamische Untersuchungen mit ausgeprägt dynamischer Drosselgradvariation wie es z.B. der dynamische Schwebeflug mit Hilfe von Manövertriebwerken darstellt, nicht vernachlässigbar. Anwendbare, einfache dynamische Übertragungsfunktionen für Turbinenantriebe findet man z.B. in [43].

3 Modellbeschreibung Aerodynamik und Windwirkung

3.1 Einleitung

3.1.1 Aufbau und Ausrichtung des Aerodynamik-Modells

Wie bereits im einleitenden Kapitel gefordert, wird für das aerodynamische Modell eine analytische Beschreibung angestrebt. In Anlehnung an die Methode von Putman ([11]) und Jones und DeLaurier ([12]) werden die Rumpfkkräfte über Potentialtheorie und Querströmungsansatz (Cross-Flow Theorie), die Leitwerkskräfte über Traglinientheorie und Querströmungsansatz modelliert. Die ersteren Methoden dienen der Berücksichtigung der Kräfte infolge reibungsfreier, anliegender Umströmung, während über den Querströmungsansatz Reibungseffekte berücksichtigt werden. Diese Gliederung in Teilmodelle und die jeweils angewandte Modellierungsmethode sind in Bild 3.1 dargestellt.

Die Teilmodelle des Heckbereichs sind direkt als Einzelkräfte formuliert. Die beiden Teilmodelle des Rumpfes basieren jedoch auf feiner aufgelösten Ansätzen: Für die Potentialanteile zeigt Bild 3.2 wie aus Oberflächendruck das entlang der Rumpflängsachse *verteilte Modell* und daraus durch Längsintegration das *integrale Modell* abgeleitet wird. Der Querströmungswiderstand ist direkt als *verteilttes Modell* formuliert.

Analytische Modellierung im Verbund mit Experimenten und Simulationen

Das beschriebene Aerodynamikmodell wurde ursprünglich zum Zweck flugmechanischer Analysen, Simulationen und für den Entwurf von Flugreglern entwickelt. Für solche Untersuchungen interessieren die resultierenden Gesamtkräfte und -momente bezüglich eines Referenzpunktes; eine Formulierung über tabellierte Beiwerte wäre ausreichend. Die Datensätze müssten neben stationären Beiwerten auch Informationen über dynamische (dämpfende und beschleunigungsproportionale) und instationäre Kraftanteile enthalten sowie die Wirkung von böigem instationärem Wind wiedergeben können. Solche Daten sind allenfalls mit erheblichem Aufwand an Windkanalexperimenten, Flugversuchen, CFD-Rechnungen oder anhand einer Kombination dieser Methoden erzeugbar. Dabei stellt bereits die Bestimmung dynamischer Koeffizienten wie $c_{z_{\dot{\alpha}}}$ und c_{m_q} ein erhebliches Problem dar: Im Windkanal drohen diese Anteile im Messrauschen unterzugehen, sie sind eine bis zwei Größenordnungen kleiner als die auftretenden stationären Kräfte. Ähnliches gilt für Versuche in modellierter Bodengrenzschicht oder Windturbulenz. Auch der Einsatz von Strömungssimulationen ist nur beschränkt möglich. Dynamische Simulationen, auch unter Wind, sind zwar technisch möglich, ihre Aussagekraft (Problematik der Validierung solcher Resultate) rechtfertigt jedoch den riesigen Aufwand heute noch nicht. Die dritte Möglichkeit, die Auswertung von Flugversuchen, ist ein sehr aufwendiges und kostspieliges Verfahren. Die Vermessung der Windwirkung ist kaum möglich, da die Versuche schwer reproduzierbar sind und die Windbedingungen im Umfeld des Luftschiffs mitgemessen werden müssten.

Vor diesem Hintergrund stellt das hier beschriebene analytische Modell eine Ergänzung zu den experimentellen und numerischen Methoden dar, es kann diese aber keinesfalls

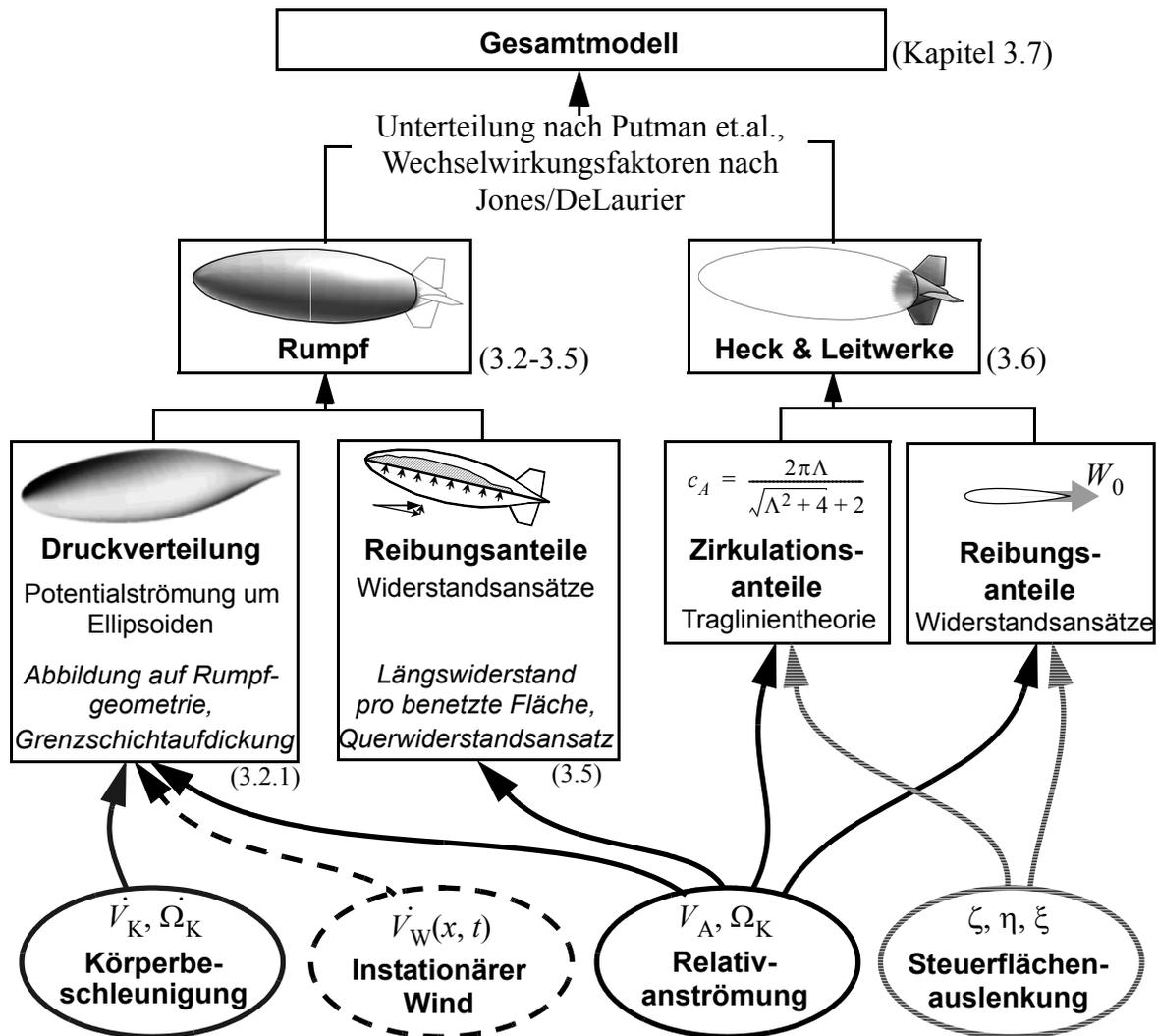


Bild 3.1: Topologie des Aerodynamik-Modells und Kapitelübersicht, Abhängigkeit von Anströmungszustand und Steuerflächenauslenkung

ersetzen. Es bietet jedoch infolge seiner modelltechnischen Durchgängigkeit (stationäre bis instationäre Anströmungszustände) die Möglichkeit, die zuvor beschriebenen Lücken zu schließen, den durch Mess- und Berechenbarkeit eingeschränkten Modellbereich durch "physikalische Extrapolation" zu erweitern. Das Modell wird beispielsweise an stationäre Windkanalmessungen angeglichen und gewinnt somit an Qualität bezüglich seiner dynamischen Modellaussagen. Man erkennt dadurch einerseits, dass das hier beschriebene Modell nur durch Informationen von aussen gute Qualität erreichen kann, andererseits aber auch, dass durch die gewonnenen physikalischen Beziehungen und Einblicke, Hinweise auf geschickte Experimente und Simulationen abgeleitet werden können.

Anwendungsmöglichkeiten des Modells

Das vorgestellte Aerodynamikmodell ist nicht als prediktives Modell geeignet, es benötigt die Vorgabe von Widerstands- und Auftriebsbeiwerten. Dabei reichen zur Initialisierung eine

Axialwiderstandsschätzung und ein Satz Auftriebs- und Nickmomentdaten (Windkanal) aus. Ein initialisiertes Modell eignet sich jedoch durchaus für Parameterstudien im Rahmen des konzeptionellen Luftschiffvorentwurfs.

Die längsverteilten Rumpfkraftmodelle sind in Abhängigkeit des lokalen Anströmungszustands $V_A(x)$ formuliert (siehe Bild 3.3). Da $V_A(x)$ nach Gleichung (3.14) über die lokale Windgeschwindigkeit $V_W(x)$ berechnet wird, ermöglicht dies die Erfassung entlang der Längsachse inhomogen verteilter Windfelder und die Berechnung der resultierenden aerodynamischen Kräfte. Dies ist für die Diskussion des Windeinflusses Voraussetzung, da in turbulenten Windbedingungen infolge der Schiffsgröße und der geringen Fluggeschwindigkeit nicht mehr von einer homogenen Anströmung über die gesamte Schiffslänge ausgegangen werden kann.

Für eine erste Abschätzung der verteilten Rumpfkräfte reichen die Analysen nach der Theorie Schlanker Körper aus. Die hier vorgestellten Ansätze vermögen die Verteilung der Kräfte um "stumpfe" Körper, wie beispielsweise um den Luftschiffnasenbereich, weit besser zu approximieren, da sie auf der Potentialumströmung des Rotationsellipsoiden basieren.

Das Modell liefert zum zugehörigen flugmechanischen Bewegungszustand jeweils konsistente Daten der Druckverteilung, der Kraftverteilungen und der integralen Kräfte. Aus diesem Grund bietet sich sein Einsatz zur Bestimmung globaler Strukturlasten und für aeroelastische Untersuchungen infolge Rumpfbiegeschwingungen an. Hier sind jedoch den erfassbaren Frequenzen (vgl. mit Diskussion auf Seite 33) Grenzen gesetzt.

Gültigkeitsbereich und Qualität des Modells und der Modellansätze

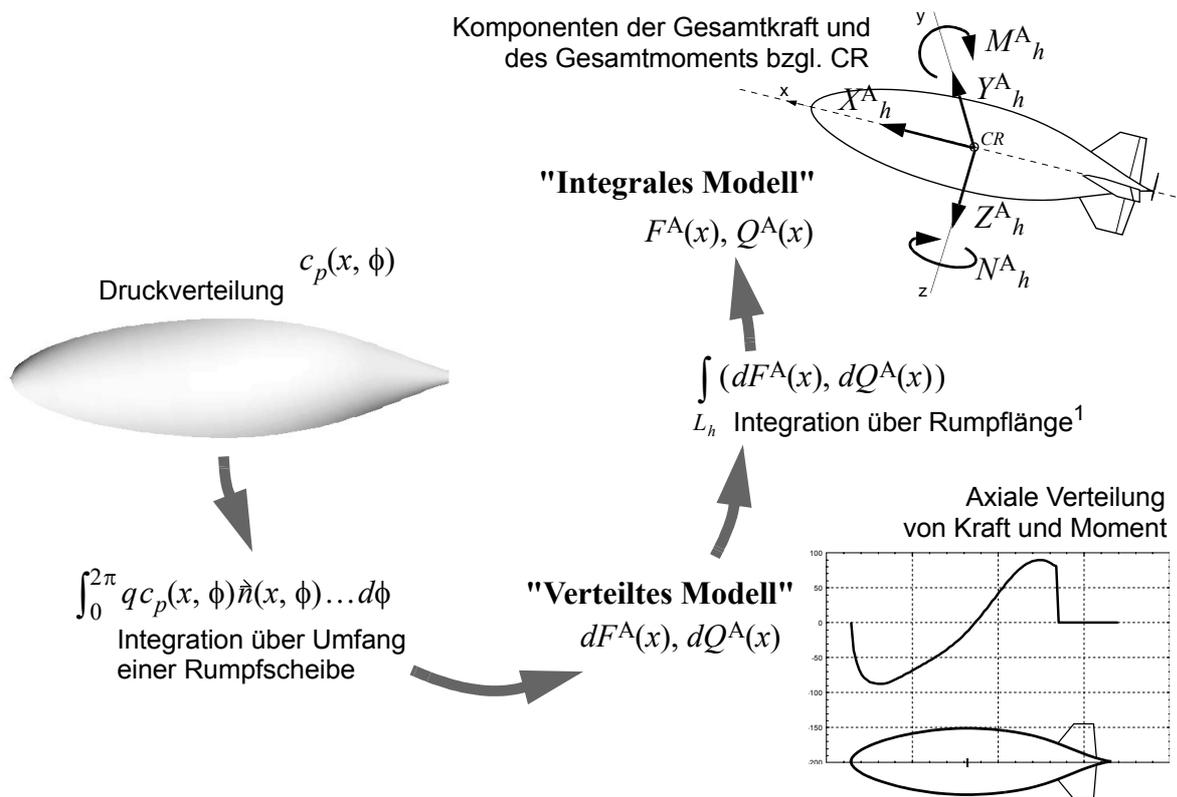
Das hier beschriebene Modell bildet die aerodynamischen Kräfte auf halb-empirische Weise ab, dabei beschränken sich die Untersuchungen der Rumpfkräfte auf rotationssymmetrische Rumpfkörper.

Die Druckverteilung über den Rumpf wird durch einen Potentialansatz beschrieben. Dieser lineare Ansatz bildet nur rotationsfreie Strömungen ab, der Einfluss rotationsbehafteter Strömungsregionen wie Grenzschicht oder Wirbel werden nicht berücksichtigt. Bei der Umströmung des Rumpfes treten bereits bei geringen Anstellwinkeln (analog eines schräg-angeströmten Zylinders) Ablösewirbel auf. Die Ablöselinie wandert dabei mit wachsendem Anstellwinkel vom Heck bis in den vorderen Rumpfbereich (vgl. [30]). Insbesondere im Bereich der Ablöselinie verursacht der Ablösewirbel Differenzen zur potentialtheoretischen Druckverteilung, auf der Leeseite (der freien Anströmung) der Ablöselinie treten Sogbereiche auf. Löst die Strömung nur im Heck ab, so wird dem Effekt durch den in Abschnitt 3.7.1 definierten Ansatzbereich der Potentiallösung Rechnung getragen. Bei größeren Winkeln (ab rund 8°), wenn die Ablöselinie in den Rumpfbereich vorwandert (vgl. Skizze "Rumpf" in Bild 3.1), wird die Druckverteilung ab dem Bereich der Ablösung falsch wiedergegeben.

Obwohl das vorgestellte Modell die resultierende Längsverteilung der Kräfte (Bild 3.2) und auch die integralen Gesamtkräfte in einem größeren Bereich gut abzubilden vermag, sollte die Wirkung dieser lokalen Fehler auf das Gesamtmodell mit Hilfe von numerischen Strömungssimulationen und Experimenten weiter untersucht werden. In Abschnitt 3.9.1 und 3.9.2 werden dazu einige Ansätze zur Verfeinerung des mathematischen Modells vorgestellt.

3.1.2 Aufbau des Kapitels

Den Hauptteil des Kapitels bildet die Untersuchung der potentialtheoretischen Rumpfkkräfte. Die Kraftverteilung entlang der Rumpflängsachse wird durch Integration des Druckes über den Umfang einer Kreisscheibe ermittelt (vgl. Bilder 3.2 und 3.3), dabei werden die Kräfte infolge stationärer Anströmung und Bewegungsbeschleunigung diskutiert. Nach der Behandlung der Kräfte bei Flug in ruhender Luft wird das Modell zur Berücksichtigung stationärer wie auch instationärer Windstörungen erweitert. Aus den verteilten Modellen werden dann die integralen Kräfte des Rumpfes durch Integration entlang der Längsachse gewonnen, für den Fall ohne Wind gelingt es, diese in geschlossener Form anzugeben.



¹ Die Integrale werden über unterschiedliche Integrationsgrenzen berechnet (vgl. 3.7). Es werden analytische Lösungen angegeben, numerische Integration ist auch möglich.

Bild 3.2: Aerodynamik des Rumpfes: Von der Druckverteilung zum **"Verteilten Modell"** zur **"Integralen Rumpfaerodynamik"**

Die viskosen Kräfte werden entsprechend der benetzten Oberfläche direkt längsverteilt formuliert. Im Gegensatz zu den potentialtheoretischen Kräften lässt sich dieser Ansatz jedoch nicht analytisch entlang der Rumpfachse integrieren. Die integralen Rumpfkkräfte lassen sich deshalb nicht in geschlossener Form herleiten, es existieren jedoch gute Näherungen für diese Kraftfunktionen.

Nach der Behandlung der Kräfte des Heckbereichs inklusive Leitwerke werden die unterschiedlichen Anteile zum aerodynamischen Gesamtmodell zusammengeführt.

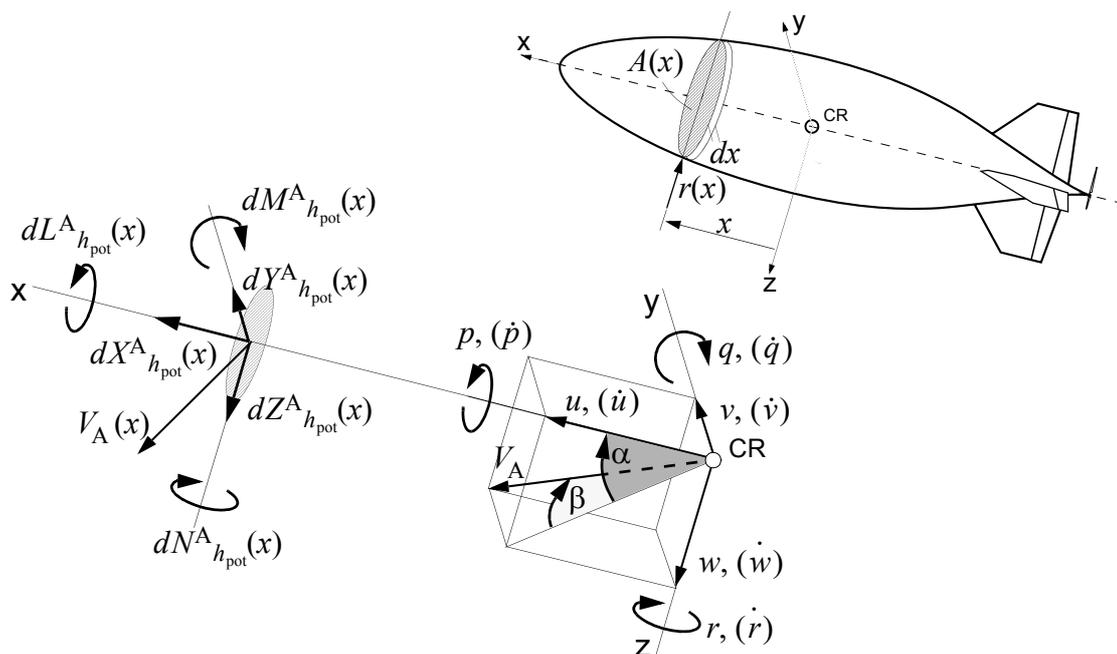


Bild 3.3: Aerodynamik des Rumpfes: Kraft und Moment auf Rumpfscheibe der Dicke dx , Bewegungs- respektive Anströmungszustand im Bezugspunkt CR.

3.2 Verteilte potentialtheoretische Rumpfkraft

3.2.1 Verteilte potentialtheoretische Rumpfkraft bei Windstille

In diesem Unterkapitel werden die potentialtheoretischen Rumpfkraft unter Anströmung infolge Flugbewegung diskutiert, es gilt nach Gleichung (2.4) $V_A = V_K$. Die Herleitung der vorgestellten Terme findet man in [25], [27] und [28]. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in diesem Unterkapitel die Indizierung der Vektorkomponenten weggelassen.

Während von Allen und Perkins in [8] oder Jones und DeLaurier in [12] die Potentialkräfte mit Hilfe der Theorie Schlanker Körper abgeschätzt werden, werden sie hier durch Einsetzen der Rumpfkonturfunktion in die exakte Lösung der Potentialströmung um Rotationsellipsoide angenähert. Aus der potentialtheoretischen Druckverteilung über der Körperoberfläche wird die resultierende Kraft auf eine Rumpfscheibe infinitesimaler Dicke dx berechnet (vgl. Bild 3.2 und 3.3). Dadurch kann die *Verteilung* der Kräfte und Momente entlang der Rumpflängsachse angegeben werden. Die analytische Lösung der Potentialströmung um Rotationsellipsoide wird in [25] beschrieben. Für nicht rotationssymmetrische Körper können die Potentiallösungen nicht rotationssymmetrischer Ellipsoide nach Lamb [26] herangezogen werden. In Ergänzung zu diesem Kapitel werden die resultierenden Kräfte und Momente auch mit Hilfe der Methode der virtuellen Massen und der Theorie Schlanker Körper hergeleitet und diskutiert. Die Ausführungen dazu sind in Anhang B ersichtlich, sie werden dem Leser als vorbereitende Lektüre empfohlen.

Die potentialtheoretischen Kräfte werden entsprechend ihrer verursachenden Bewegung in Kräfte infolge *Bewegungsbeschleunigung* und infolge *stationären Fluges* eingeteilt,

Einen ersten Eindruck des Unterschieds zwischen der Kraftverteilung nach Theorie Schlanker Körper und Potentialströmung gibt Bild 3.4, jeweils ausgewertet für ein Ellipsoid. Weitere Vergleiche findet man in der Diskussion der Kraftverteilungen in Unterkapitel 3.4 auf Seite 54 und folgenden.

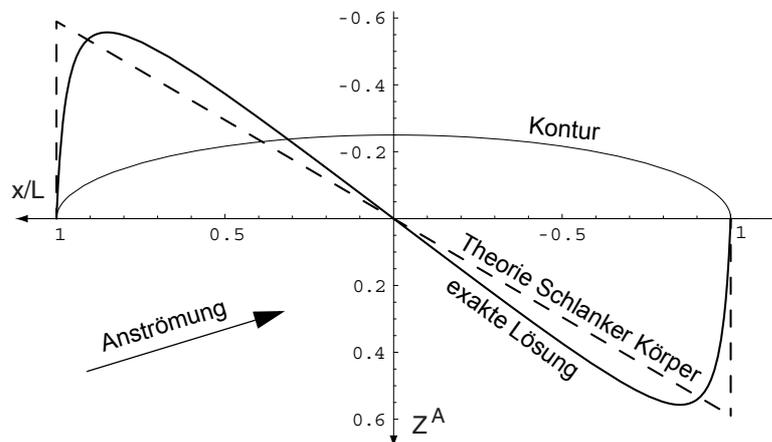


Bild 3.4: Verteilung der potentialtheoretischen Querkraft über Ellipsoiden; Vergleich zwischen Theorie Schlanker Körper und exakter Lösung

wobei die Zuteilung über die körperfesten Bewegungsgrößen vorgenommen wird: Kräfte infolge \dot{u} , \dot{v} , \dot{w} , \dot{p} , \dot{q} und \dot{r} werden den Beschleunigungskräften zugeordnet, Kräfte infolge der Bewegungsgrößen u , v , w , p , q , und r den Anteilen infolge Relativanströmung. Da die potentialtheoretischen Kräfte nicht im Fluid-Koordinatensystem (hier im Fall ohne Wind das Inertialsystem) sondern in körperfesten Achsen formuliert sind, werden durch die Relativdrehung der beiden Koordinatensysteme jedoch kinematische Kopplungen zwischen körperfesten Beschleunigungs- und Bewegungsgrößen erzeugt. Die oben angegebene Einteilung ist also nur aus "körperfestem Standpunkt" sinnvoll.

Diese Zusammenhänge lassen sich leicht über die Schreibweise der aerodynamischen Kräfte mit Hilfe des Tensors der virtuellen Massen erklären (siehe Diskussion der Kraft F^A auf Seite 175). Bei der Formulierung der (integralen) Kräfte über den Tensor der virtuellen Massen wird die zeitliche Bilanz der kinetischen Energie respektive des Impulses des umströmenden Fluids untersucht. Diese Impulsbetrachtung muss in Inertialkoordinaten erfolgen, bei Formulierung in körperfesten Achsen müssen die kinematischen Koppelsterme $\Omega \times J$ und $\Omega \times D$ nach Gleichung (B.6) mitberücksichtigt werden. In stationärem Kurvenflug entsprechen diese Anteile exakt der Kraft und dem Moment welche für die *Richtungsänderung* von Fluidimpuls und -drall aufgewendet werden müssen. Diese Kraft wirkt als Wechselwirkungskraft zwischen Körper und Fluid, sie manifestiert sich als Druckverteilung auf der Oberfläche des Körpers, bei korrekter Behandlung der Potentialströmung ist sie implizit in der Druckverteilung enthalten.

Eine gerade Translation mit überlagerter Rollbewegung ändert keine Strömungsimpulse, es resultiert keine Rumpfkraft. Diese Tatsache, welche sich direkt aus der Rotations-symmetrie des Körpers ergibt, oder nach den Methoden der virtuellen Masse aus der Tatsache, dass die virtuelle Masse in Seitenrichtung der in Vertikalrichtung entspricht, kann bei der Berechnung der Potentialströmung ausgenutzt werden: Bei der analytischen Behand-

lung der Potentialströmung im stationären Flug kann die Rollrate weggelassen werden, es muss jedoch danach die kinematische Kopplung infolge Rollen eingeführt werden, um die rollinduzierten Beschleunigungskomponenten in \dot{v} und \dot{w} zu kompensieren. Dieser Zusammenhang wird im Abschnitt “Potentialtheoretische Rumpfkkräfte infolge stationären Fluges” auf Seite 34 und folgenden behandelt.

Potentialtheoretische Rumpfkkräfte infolge Bewegungsbeschleunigung

Die beschleunigungsproportionalen aerodynamischen Kräfte des Rumpfes stellen bei Luftschiffen einen nicht zu vernachlässigenden Kräftebeitrag dar. Die integrale Form dieser Kräfte kann in einfacher Form über den Tensor der virtuellen Massen beschrieben werden (Anhang B.1, [25], [26]). Eine gute Näherung für die virtuellen Massen von Luftschiffrümpfen stellen die analytisch berechenbaren Munkfaktoren von Rotationsellipsoiden dar, wie von Lutz in [29] gezeigt wird. Er vergleicht dort die mittels eines 3D-Panelverfahrens gerechneten Massenterme eines Luftschiffrümpfes mit den exakten Werten für Rotationsellipsoide.

Zur Berechnung der beschleunigungsproportionalen Rumpfkkräfte muss die instationäre Potentialströmung analysiert werden. Die Berechnung ist mathematisch einfacher, wenn nicht der Körper, sondern die Umströmung beschleunigt wird. In diesem Fall kann die Randbedingung der festen Wand eingesetzt werden und direkt die Potentialfunktion auf der Körperoberfläche für die Berechnung benutzt werden. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass bei beschleunigter Fluidströmung ein Druckgradient im Fluid herrscht. Dieser Druckgradient erzeugt eine Kraft entgegen dem Gradienten von der Charakteristik einer *aerostatischen Verdrängungskraft*. Die Anteile der Kräfte können einfach unterteilt werden: Die *Verdrängungskräfte* resultieren aus dem Fluidbewegungsanteil des Potentials, die *Kräfte infolge Relativbeschleunigung* resultieren aus dem Anteil des Störpotentials. Die Kräfte infolge Beschleunigung des Körpers können somit über die Analyse des Störpotentials mit Hilfe der instationären Bernoulligleichung

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho \frac{d\Phi}{dt} = c = \text{konstant}$$

unter der Annahme inkompressibler Strömung und der Vernachlässigung von Fernkräften (Erdbeschleunigung) berechnet werden. Dieses Vorgehen ist zulässig, falls die lokale Machzahl im Strömungsfeld überall kleiner als 0.4 (inkompressible Strömung) beträgt und eine Schallwelle den betrachteten Bereich während der Dauer des instationären Vorgangs (z.B. Periode) mehrfach durchlaufen kann (geometrische Störungshomogenität). Für kleine Luftschiffe wie Lotte sind beide Bedingungen immer erfüllt, für sehr große Luftschiffe ($l > 100\text{m}$) können nach der zweiten Bedingung bei Vorgängen in Rumpflängsrichtung nur Effekte mit Periodenlängen von $T \gg 1$ korrekt abgebildet werden, was infolge der grossen Trägheit solcher Schiffe auch meistens gewährleistet ist. Vollständigkeitshalber wird hier die zeitliche Ableitung des Störpotentials auf der Oberfläche des Ellipsoiden angegeben:

$$\frac{d}{dt} \Phi'_{h_{\text{pot-acc}}}(x, y, z) = -k_1 x \dot{u} - k_2 y \dot{v} - k_2 z \dot{w} + K_3 x z \dot{q} - K_3 x y \dot{r} .$$

Für Rotationsellipsoide kann aus dem Potential die Kraftverteilung entlang des Rumpfes berechnet werden. Wird als Potential das oben angegebene Störpotential berücksichtigt und

für die Druckberechnung die instationäre Bernoulligleichung verwendet, so resultieren folgende Kraft- und Momentenverteilungen (vgl. [27]):

$$dF^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) = \begin{bmatrix} dX^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) \\ dY^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) \\ dZ^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} -k_1 \frac{dA(x)}{dx} x \dot{u} \\ k_2 A(x) \dot{v} + K_3 A(x) x \dot{r} \\ k_2 A(x) \dot{w} - K_3 A(x) x \dot{q} \end{bmatrix} dx, \quad (3.1)$$

$$dQ^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) = \begin{bmatrix} dL^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) \\ dM^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) \\ dN^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{2} \frac{dA(x)}{dx} r(x)^2 \dot{w} + \frac{K_3}{2} \frac{dA(x)}{dx} r(x)^2 x \dot{q} \\ \frac{k_2}{2} \frac{dA(x)}{dx} r(x)^2 \dot{v} + \frac{K_3}{2} \frac{dA(x)}{dx} r(x)^2 x \dot{r} \end{bmatrix} dx. \quad (3.2)$$

Dabei stellen die Kraftfunktionen den Kraftbeitrag einer infinitesimal dünnen Rumpfscheibe dar und die Momentenbeiträge ausschließlich das *lokale scheineneigene Moment* einer Scheibe bezüglich ihres Mittelpunktes dar. Bild 3.6 illustriert die Entstehung eines scheineneigenen Moments. Der Verlauf der wichtigsten Geometriefunktionen zur Beschreibung der verteilten beschleunigungsproportionalen Kräfte ist in Bild 3.5 dargestellt.

Interessant ist, dass die seitliche oder vertikale Beschleunigung (z.B. \dot{w}) keine Axialkraftkomponente verursacht. Die Druckverteilung infolge Beschleunigung ist proportional dem *Cosinus des Umlaufwinkels*, gemessen ab Richtung der Beschleunigung. Der Axialkraftanteil aus dem Überdruck auf der beschleunigungszugewandten Seite wird durch den Unterdruck auf der Gegenseite kompensiert. Dafür liefert diese Druckverteilung einen Beitrag an das Scheibenmoment. Dieses resultiert aus der Druckverteilung und der lokalen Kontursteigung (vgl. auch Bild 3.6). Übrigens: Die Form der radialen Druckverteilung ist identisch der Druckverteilung infolge eines scheinennormalen Druckgradienten.

Potentialtheoretische Rumpfkkräfte infolge stationären Fluges

In diesem Unterabschnitt werden die potentialtheoretischen Rumpfkkräfte infolge stationärer Flugbewegungen diskutiert. Diese Kräfte werden mit Hilfe der translatorischen Bewegungszustände u , v und w sowie der rotatorischen Größen p , q , und r beschrieben, sie beinhalten sowohl die Kräfte im Geradeausflug als auch im Kurvenflug.

Bei der Berechnung der Potentialumströmung des stehenden Körpers in stationär bewegtem Fluid nach [25] wird der ebene Fall untersucht, die Resultate unter stationärer räumlicher Anströmung, beschrieben durch die Geschwindigkeiten u , v , w und die Drehraten q und r , sind in [28] hergeleitet. Dabei zeigt sich, dass die resultierenden Kräfte in der Vertikalebene und Lateralebene entsprechend ihrer Bewegungsgrößen entkoppelt sind. Die Kräfte in der Vertikalebene sind nur eine Funktion der Größen u , w und q , die Kräfte in der Lateralebene Funktionen von u , v , und r .

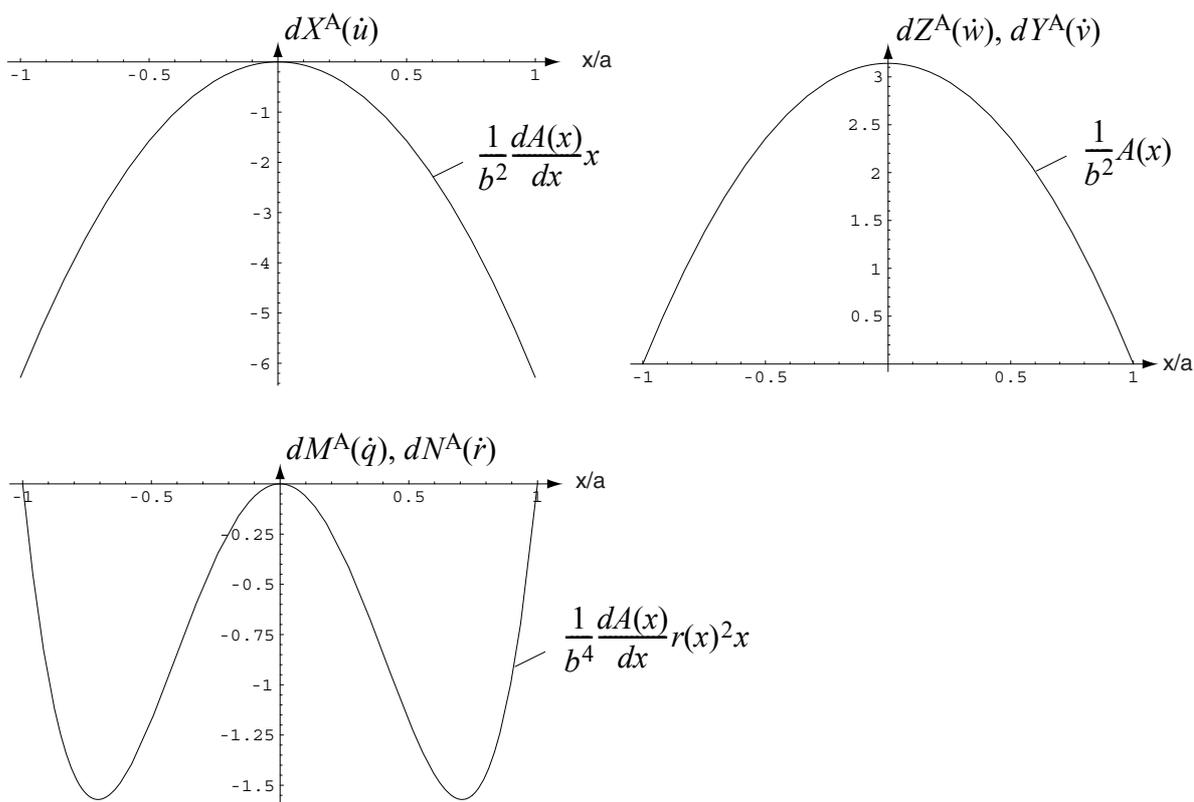


Bild 3.5: Verteilung beschleunigungsproportionaler Kräfte über ein Rotationsellipsoid mit Halbachsen a und b .

Anteil der Rollrate, Kompensation rollinduzierter Beschleunigungen

Der Einfluss der Rollrate p wird, wie in der Einleitung auf Seite 32 diskutiert, gesondert behandelt. Die Rollrate wurde in der Herleitung der Potentialkräfte über das Strömungspotential nicht berücksichtigt. Ihr Einfluss auf die körperfesten Beschleunigungskomponenten \dot{v} und \dot{w} infolge kinematischer Kopplung ist in den Gleichungen (3.6) bis (3.11) noch nicht enthalten.

Nach den Methoden der virtuellen Massen entspricht dieser Term den Komponenten infolge Rollen in den kinematischen Termen $-\Omega \times dJ$ und $-\Omega \times dD$. Man findet die Terme indem man aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) Impuls und Drall einer Ellipsoidscheibe ableitet (mit $dF = -\dot{d}J$ respektive $dF = -\dot{d}D$) und dann die Kreuzprodukte bildet. Alternativ kann man aus den Kreuzprodukten

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{\text{ind}} \\ \dot{v}_{\text{ind}} \\ \dot{w}_{\text{ind}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ pw \\ -pv \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_{\text{ind}} \\ \dot{q}_{\text{ind}} \\ \dot{r}_{\text{ind}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ pr \\ -pq \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

die rollinduzierten Beschleunigungsanteile berechnen und durch Einsetzen in die negierten Gleichungen (3.1) und (3.2) die Terme bestimmen. In beiden Fällen resultiert die rollinduzierte kinematische Koppelkraft zu

$$dF_{h_{\text{pot-ind}}}^A(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ dY_{h_{\text{pot-ind}}}^A(x) \\ dZ_{h_{\text{pot-ind}}}^A(x) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 A(x) p w - K_3 A(x) x p q \\ -k_2 A(x) p v - K_3 A(x) x p r \end{bmatrix} dx, \quad (3.4)$$

und das scheineneigene induzierte Moment zu

$$dQ_{h_{\text{pot-ind}}}^A(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ dM_{h_{\text{pot-ind}}}^A(x) \\ dN_{h_{\text{pot-ind}}}^A(x) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2 dA(x)}{2 dx} r(x)^2 p v + \frac{K_3 dA(x)}{2 dx} r(x)^2 x p r \\ \frac{k_2 dA(x)}{2 dx} r(x)^2 p w - \frac{K_3 dA(x)}{2 dx} r(x)^2 x p q \end{bmatrix} dx. \quad (3.5)$$

Anteile aus stationärer Translationsbewegung und Kurvenflug

Die Einzelkomponenten der Kraft- und Momentenverteilung infolge stationärer Bewegung werden mit

$$dF_{h_{\text{pot}}}^A(x) = \begin{bmatrix} dX_{h_{\text{pot}}}^A(x) \\ dY_{h_{\text{pot}}}^A(x) \\ dZ_{h_{\text{pot}}}^A(x) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad dQ_{h_{\text{pot}}}^A(x) = \begin{bmatrix} dL_{h_{\text{pot}}}^A(x) \\ dM_{h_{\text{pot}}}^A(x) \\ dN_{h_{\text{pot}}}^A(x) \end{bmatrix}$$

bezeichnet, die Momente geben wieder ausschließlich das *lokale scheineneigene Moment* einer Scheibe bezüglich ihres Mittelpunktes an. Bild 3.6 illustriert dessen Entstehung als Folge der Druckverteilung über der gekrümmten Rumpfkontur.

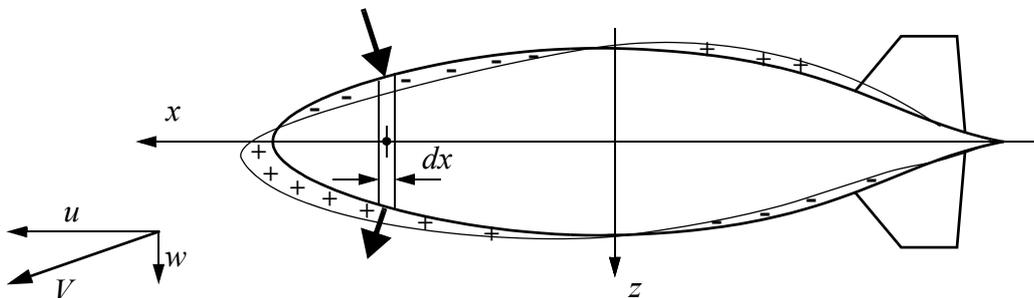


Bild 3.6: Schematische Darstellung der Druckverteilung entlang Kiel- und Scheitelsehne des Rumpfes, resultierendes Kräftepaar auf Rumpfscheibe der Dicke dx

Die in [25] mit Hilfe der Größen *Staudruck* q und *Anstellwinkel* α beschriebenen Kraftfunktionen in der Vertikalebene werden hier mit Hilfe der Beziehungen

$$q \cdot \sin \alpha = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot \frac{w}{V} = \frac{\rho}{2} w V$$

$$q \cdot \sin 2\alpha = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot 2 \frac{uw}{V^2} = \rho uw$$

$$q \cdot \cos \alpha = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot \frac{u}{V} = \frac{\rho}{2} u V$$

$$\text{und } q \cdot \cos^2 \alpha_T = \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \cdot \left(\frac{v^2 + w^2}{u^2 + v^2 + w^2} \right) = \frac{\rho}{2} (v^2 + w^2)$$

mit $V^2 = u^2 + w^2$, und den entsprechenden Gleichungen für $\sin^2 \alpha$ und $\cos^2 \alpha$ direkt in Funktion der Bewegungsgrößen u , v , w , q und r angeschrieben (vgl. [28]). Diese Form ist nicht nur einfacher lesbar, sondern eignet sich auch besser für Linearisierung und Implementierung der Gleichungen. Die Komponenten von $dF_{h_{\text{pot}}}^A(x)$ betragen

$$\begin{aligned}
dX^A_{h_{\text{pot}}}(x) = & \rho \cdot \left[(u^2 + v^2 + w^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& - u^2 \cdot \frac{1}{2} K_1^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \\
& + (v^2 + w^2) \cdot \frac{1}{4} \cdot K_2^2 \left(\cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} - 2 \frac{dA(x)}{dx} \right) \\
& + wq \cdot \left(-x \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} K_2 (K_3 - 1) r(x) \cos \theta(x) \sin \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} K_2 (K_3 + 1) \left(\cos^2 \theta(x) x \frac{dA(x)}{dx} - 2x \frac{dA(x)}{dx} \right) \right) \\
& + q^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} (K_3^2 - 1) x r(x) \sin \theta(x) \cos \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \quad + \frac{1}{4} r(x)^2 \sin^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \\
& \quad + \frac{1}{4} (2K_3 - K_3^2) r(x)^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \\
& \quad + \frac{1}{4} x^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \\
& \quad \left. + (2K_3 + K_3^2) \left(\frac{1}{4} x^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} - \frac{1}{2} x^2 \frac{dA(x)}{dx} \right) \right) \\
& - vr \cdot (\bullet) \\
& \left. + r^2 \cdot (\bullet) \right] \cdot dx, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

wobei der Term proportional vr identisch des Terms zu wq ist und entsprechend der Term zu r^2 identisch des Terms zu q^2 ,

$$\begin{aligned}
dY^A_{h_{\text{pot}}}(x) = & \rho \cdot \left[uv \cdot \frac{K_1 K_2}{2} \cdot \cos^2 \theta(x) \cdot \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \left. + ur \cdot \left(A(x) + K_1 (K_3 - 1) \cos^2 \theta(x) A(x) + \frac{1}{2} K_1 (K_3 + 1) \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} x \right) \right] \cdot dx \\
& + dY^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
dZ^A_{h_{\text{pot}}}(x) = & \rho \cdot \left[uw \cdot \frac{K_1 K_2}{2} \cdot \cos^2 \theta(x) \cdot \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \left. - uq \cdot \left(A(x) + K_1(K_3 - 1) \cos^2 \theta(x) A(x) + \frac{1}{2} K_1(K_3 + 1) \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} x \right) \right] \cdot dx \\
& + dZ^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Momentenverteilungsfunktionen (des schiebeneigenen Moments) gehorchen folgenden Beziehungen:

$$dL^A_{h_{\text{pot}}}(x) = 0 , \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
dM^A_{h_{\text{pot}}}(x) = & \rho \cdot \left[-uw \cdot \frac{K_1 K_2}{2} \cdot \sin \theta(x) \cos \theta(x) \cdot r(x) \cdot \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& + uq \cdot \left(+\frac{1}{2} \cdot r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} K_1(K_3 - 1) \cdot \cos^2 \theta(x) \cdot r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} K_1(K_3 + 1) \cdot \sin \theta(x) \cos \theta(x) \cdot xr(x) \frac{dA(x)}{dx} \right) \right] \cdot dx \\
& + dM^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

und

$$\begin{aligned}
dN^A_{h_{\text{pot}}}(x) = & \rho \cdot \left[uv \cdot \frac{K_1 K_2}{2} \cdot \sin \theta(x) \cos \theta(x) \cdot r(x) \cdot \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& + ur \cdot \left(+\frac{1}{2} \cdot r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} K_1(K_3 - 1) \cdot \cos^2 \theta(x) \cdot r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} K_1(K_3 + 1) \cdot \sin \theta(x) \cos \theta(x) \cdot xr(x) \frac{dA(x)}{dx} \right) \right] \cdot dx \\
& + dN^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Aus den Gleichungen (3.6) bis (3.11) ist direkt die Abhängigkeit der Kräfte und Momente von den Bewegungsgrößen erkennbar. Die Terme welche rein translatorische Geschwindigkeitskomponenten enthalten beschreiben die Kräfte infolge Geradeausflugs, die Mischterme aus Geschwindigkeitskomponenten und Drehraten die Kräfte im Kurvenflug.

Interessant bei den Kräften und Momenten infolge Kurvenflug ist die Kombination der Bewegungsgrößen: Während sich die Axialkraft proportional des Produkts aus Quergeschwindigkeit und Drehrate (wq und vr) und proportional des Quadrats der Drehraten (r^2 und q^2) verhält, sind die Querkkräfte sowie das Nick- und Giermoment proportional der Längsgeschwindigkeit und der entsprechenden Drehrate (Seitenbewegung $\sim ur$, Längsbewegung $\sim uq$). Diese ratenproportionalen Kräfte und Momente wachsen in erster Näherung also proportional zur *Fluggeschwindigkeit* (für kleine Anstell- und Schiebewinkel gilt näherungsweise $u \approx V$) und sie sind von Anstell- oder Schiebewinkel nicht beeinflusst.

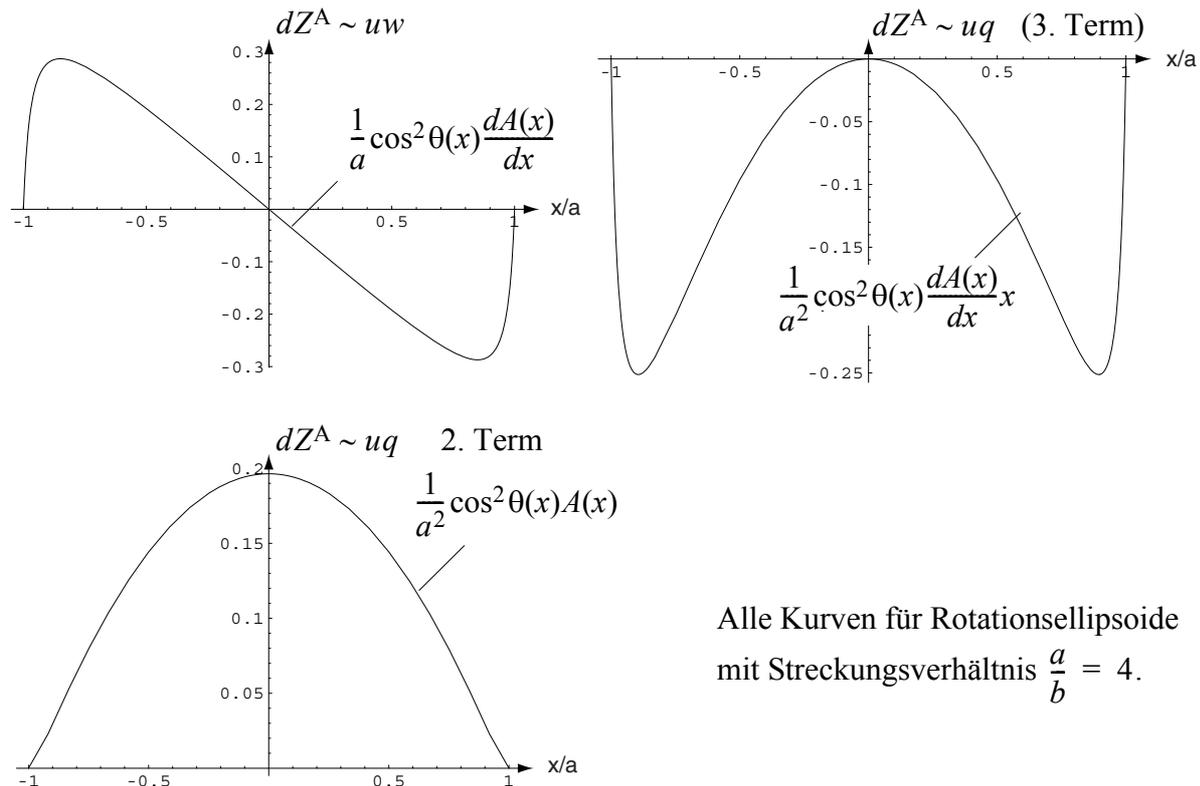


Bild 3.7: Verteilung Normalkraftanteile über Rotationsellipsoid.

3.2.2 Verteilte potentialtheoretische Rumpfkkräfte bei Flug durch Windfeld

In diesem Kapitel wird die Bestimmung der Rumpfkkräfte bei Flug durch inhomogene und instationäre Windfelder diskutiert. Mit Hilfe der analytischen Lösung für schlanke Körper wird im Anhang B.4 auf Seite 183 gezeigt, dass die Rumpfkkräfte in Anteile infolge nicht beschleunigter Relativanströmung und in virtuelle Massekräfte infolge beschleunigter Anströmung trennbar sind. Insbesondere lassen sich die virtuellen Massekräfte infolge Anströmungsbeschleunigung in Anteile aus Wind- und Anteile aus Bahnbeschleunigung entkoppeln. Dieses Resultat stimmt mit den Erkenntnissen von Thomasson überein [40]. Durch diese Entkoppelbarkeit gelingt es, die aerodynamischen Kräfte infolge Relativanströmung und Windbeschleunigung rein als *äußere Kräfte* zu berechnen, nur die virtuellen Massekräfte infolge Bahnbeschleunigung (Starrkörperbewegung) sind bei der Formulierung der Bewegungsdifferentialgleichungen mitzuberechnen.

Mathematische Beschreibung eines Windfeldes

Zur Berechnung der windabhängigen Kräfte auf Luftschiffe muss die Windströmung in Funktion von Ort und Zeit bekannt sein. Dazu wird die Vektorfunktion

$$V_{Ww}(r, t) = \begin{bmatrix} u_{Ww}(r, t) \\ v_{Ww}(r, t) \\ w_{Ww}(r, t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

definiert. Sie beschreibt für jeden Ort r zur Zeit t die 3 kartesischen Komponenten der Windgeschwindigkeit im Windachsensystem. Dieses System ist ein geodätisches Achsensystem, dessen x -Achse in Richtung der Hauptwindrichtung zeigt, es ist somit gegenüber dem geodätischen Bezugssystem um den Winkel ψ_W gedreht (vgl. Bild 3.8).

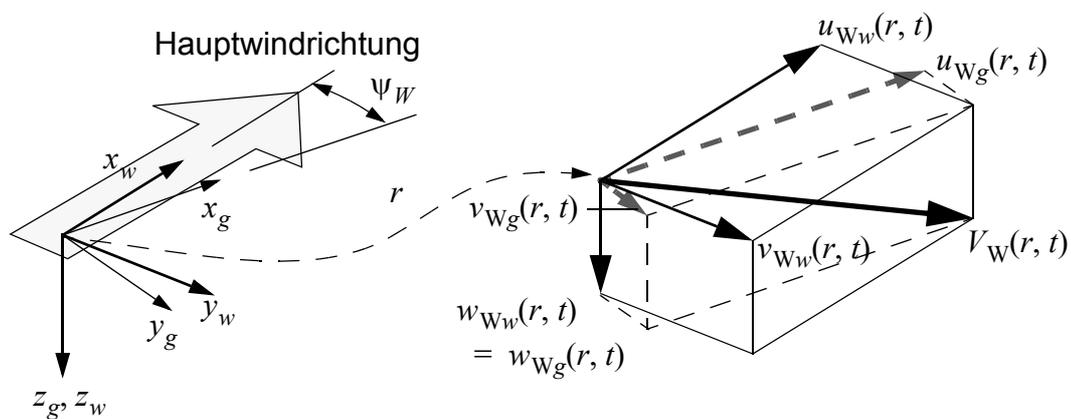


Bild 3.8: Windachsensystem und Komponenten des Windgeschwindigkeitsvektors in wind- und geodätischen Koordinatenachsen

Durch eine einfache Koordinatentransformation kann der Vektor in geodätischen Komponenten angegeben werden

$$V_{Wg}(r, t) = T_{gw}(\psi_W) V_{Ww}(r, t) = \begin{bmatrix} u_{Wg}(r, t) \\ v_{Wg}(r, t) \\ w_{Wg}(r, t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Flug-, Wind- und Flugbahngeschwindigkeit

Die aerodynamische Anströmungsgeschwindigkeit oder Fluggeschwindigkeit V_A ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Luftschiff und umgebendem Fluid. Sie berechnet sich als Differenz zwischen Bahngeschwindigkeit V_K und Windgeschwindigkeit V_W , es gilt die Vektorbeziehung

$$V_A = V_K - V_W. \quad (3.14)$$

Die lokale Anströmung des körperfesten Punktes r als Überlagerung der translatorischen und rotatorischen Bewegung und Wind berechnet sich (alle Angaben in körperfesten Komponenten) über die Beziehung

$$V_A(r) = V_K(r) - V_W(r) \text{ mit } V_K(r) = V_K + \Omega \times r, \quad (3.15)$$

interessiert man sich nur für die Anströmung entlang der körperfesten x-Achse, kann man schreiben

$$V_A(x) = \begin{bmatrix} u_A(x) \\ v_A(x) \\ w_A(x) \end{bmatrix} = V_K(x) - V_W(x) = \begin{bmatrix} u_K - u_W(x) \\ v_K + xr - v_W(x) \\ w_K - xq - w_W(x) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Im Falle von Windstille gilt $V_W \equiv 0$, die Fluggeschwindigkeit entspricht exakt der Bahngeschwindigkeit. Unter dieser Annahme wurden die aerodynamischen Kräfte in Kapitel 3.2.1 beschrieben.

Berechnung der verteilten potentialtheoretischen Rumpfkkräfte unter Wind

Basierend auf den Untersuchungen der Rumpfkkräfte nach der Theorie Schlanker Körper in Anhang B.4 können mit Hilfe der Ansätze in Kapitel 3.2.1 die potentialtheoretischen Rumpfkkräfte unter Wind entwickelt werden. Die Rumpfmomente berechnen sich nach der Theorie Schlanker Körper aus der Verteilung der Kräfte, gehorchen somit denselben mathematischen Beziehungen und werden auf identische Weise abgebildet.

Bei der Berechnung der verteilten Potentialkräfte wird der Einfluss der über die Rumpflänge variierenden Anströmung durch Berücksichtigung der lokalen Anströmung $V_A(x)$ modelliert. Dies ist eine empirische Art der Berücksichtigung, sie kann die realen potentialtheoretischen Verhältnisse nur *approximieren*. Eine mathematisch korrekte Herleitung müsste über das Potential, beschreibend das Windfeld und die Störströmung um den Körper, hergeleitet werden. Für Störungen mit mäßigen Änderungen entlang der Rumpflachse, d.h. mit schwachen Amplituden oder Wellenlängen in der Größenordnung der Schiffslänge und länger, sollten diese Ansätze aber gute Näherungen der wahren Kraftverteilungen liefern.

Die Kräfte und Momente werden entsprechend des letzten Unterkapitels "Verteilte potentialtheoretische Rumpfkkräfte bei Windstille" und entsprechend B.4 "Rumpfkkräfte unter Wind nach der Theorie Schlanker Körper" in Kräfte infolge *Starrkörperbeschleunigung*, Kräfte infolge *Körperdrehung und stationärer Anströmung* und in Kräfte infolge *Windbeschleunigung* eingeteilt.

Kräfte infolge Starrkörperbeschleunigung

Da die Kräfte infolge beschleunigter Körperbewegung von den Kräften infolge Windbeschleunigung entkoppelt werden können, bleibt dieser Kraftanteil identisch zum Fall ohne Wind. Die Kräfte und Momente werden durch die "alten" Gleichungen (3.1) und (3.2) vollständig beschrieben, nur ersetzen die translatorischen Beschleunigungskomponenten \dot{u}_K , \dot{v}_K und \dot{w}_K der Bahnbewegung die Größen \dot{u} , \dot{v} und \dot{w} :

$$dF^A_{h_{\text{pot-K-acc}}}(x) = -\rho \begin{bmatrix} -k_1 \frac{\partial}{\partial x} A(x) x \dot{u}_K \\ k_2 A(x) \dot{v}_K + K_3 A(x) x \dot{r} \\ k_2 A(x) \dot{w}_K - K_3 A(x) x \dot{q} \end{bmatrix} dx \quad \text{und} \quad (3.17)$$

$$dQ^A_{h_{\text{pot-K-acc}}}(x) = -\rho \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \dot{w}_K + \frac{K_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 x \dot{q} \\ \frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \dot{v}_K + \frac{K_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 x \dot{r} \end{bmatrix} dx \quad . \quad (3.18)$$

Diese Kräfte und Momente sind affin der Körperbeschleunigung \dot{V}_K und $\dot{\Omega}_K$.

Kräfte infolge stationärer Anströmung und Starrkörperdrehung

Diese Kräftegruppe wird über die Starrkörperdrehraten und die stationäre lokale Anströmung beschrieben. Sie werden über die Gleichungen (3.6) bis (3.11) abgebildet. Bei der Berechnung der Kräfte ohne Wind wurden die translatorischen Zustände im Bezugspunkt CR in die Kraftgleichungen eingesetzt. Hier muss jetzt die lokale *translatorische* Anströmung, gebildet aus den translatorischen Bewegungskomponenten und der lokalen Windgeschwindigkeit nach der Beziehung

$$V_{At}(x) = \begin{bmatrix} u_{At}(x) \\ v_{At}(x) \\ w_{At}(x) \end{bmatrix} = V_{K|CR} - V_W(x) = \begin{bmatrix} u_K - u_W(x) \\ v_K - v_W(x) \\ w_K - w_W(x) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

berücksichtigt werden ($V_{At}(x)$ unterscheidet sich von $V_A(x)$ nach Gleichung (3.16) durch das Fehlen der Drehratenterme). Grund dafür ist, dass bei der Herleitung dieser Kräfte die aerodynamischen Effekte infolge q und r bereits in den Ansätzen enthalten sind.

Wie bereits bei der windfreien Potentialströmung wird der Einfluss der Rollrate gesondert behandelt. Sie induziert unter Schräganströmung des Rumpfes Beschleunigungen

proportional der stationären Quer- und Vertikalanströmungsgeschwindigkeit. Durch die rollratenproportionale Kraftverteilung

$$dF^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 A(x) p w_{\text{At}}(x) - K_3 A(x) x p q \\ -k_2 A(x) p v_{\text{At}}(x) - K_3 A(x) x p r \end{bmatrix} dx, \quad (3.20)$$

und das schiebeneigene Moment

$$dQ^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 p v_{\text{At}}(x) + \frac{K_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 x p r \\ \frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 p w_{\text{At}}(x) - \frac{K_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 x p q \end{bmatrix} dx \quad (3.21)$$

werden diese nur in körperfesten Koordinatenachsen, nicht aber zwischen Rumpf und Fluid existierenden Beschleunigungseffekte kompensiert.

Die axial verteilten Kräfte und Momente infolge Relativanströmung, Nicken und Gieren berechnen sich in Funktion der Argumente

$$\begin{aligned} dF^A_{h_{\text{pot}}}(x) &= dF^A_{h_{\text{pot}}}(x, u_{\text{At}}(x), v_{\text{At}}(x), w_{\text{At}}(x), q, r) \text{ und} \\ dQ^A_{h_{\text{pot}}}(x) &= dQ^A_{h_{\text{pot}}}(x, u_{\text{At}}(x), v_{\text{At}}(x), w_{\text{At}}(x), q, r) \end{aligned} \quad (3.22)$$

nach den Gleichungen (3.6) bis (3.11), es müssen nur die Argumente u , v und w durch die entsprechenden Argumente $u_{\text{At}}(x)$, $v_{\text{At}}(x)$ und $w_{\text{At}}(x)$ ersetzt werden.

Kräfte infolge Windbeschleunigung und drehrateninduzierter Windbeschleunigung

Diese Kräfte beschreiben das Pendant der instationären aerodynamischen Kräfte durch Windbeschleunigung zu den scheinbare Masse Effekten infolge Körperbeschleunigung. Sie gehorchen denselben Verteilungsfunktionen wie die Kräfte infolge Bahnbeschleunigung nach Gleichung (3.17) und (3.18). Nur wird in diesem Falle nicht der Körper, sondern das umströmende Fluid selber beschleunigt, entsprechend wirkt diese Kraft *positiv in Richtung der Fluidbeschleunigung*.

Die lokalen Windbeschleunigungskomponenten werden aus den Komponenten der substantiellen Windableitung und des Eulerterms nach

$$\dot{V}_{\text{Wf}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{\text{Wf}}(x) \\ \dot{v}_{\text{Wf}}(x) \\ \dot{w}_{\text{Wf}}(x) \end{bmatrix} = T_{fg} \frac{g D V_{\text{Wg}}(x)}{Dt} - \Omega_f \times V_{\text{Wf}} \quad (3.23)$$

berechnet. Mit Hilfe dieser Größen können die Kraft- und Momentenverteilungen formuliert werden, sie lauten

$$dF^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) = \rho \begin{bmatrix} -k_1 \frac{\partial}{\partial x} A(x) x \dot{u}_{Wf}(x) \\ k_2 A(x) \dot{v}_{Wf}(x) \\ k_2 A(x) \dot{w}_{Wf}(x) \end{bmatrix} dx \text{ und} \quad (3.24)$$

$$dQ^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \dot{w}_{Wf}(x) \\ \frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \dot{v}_{Wf}(x) \end{bmatrix} dx . \quad (3.25)$$

Es werden nur translatorische Windbeschleunigungen berücksichtigt.

Aerostatische Kräfteanteile infolge Windbeschleunigung

Nach der Eulergleichung beschreibt die substantielle Windableitung in Inertialkoordinaten den im Windfeld herrschenden Druckgradienten (ohne vertikalen Druckgradienten, da die Schwerkraft die Windströmung nicht unmittelbar beeinflusst, und hier somit nicht berücksichtigt werden muss, vgl. Gleichung (B.34) in Anhang B). Ein solcher Druckgradient im Fluid bewirkt auf einen eingetauchten Körper immer eine aerostatische Kraft, welche, falls der Gradient horizontal gerichtet ist, in der Luftschiffliteratur auch mit horizontalem Auftrieb (horizontal buyoancy) umschrieben wird.

Diese Kraft, sie wird hier als "gesonderte" Kraft vorgestellt, berechnet sich geschlossen über die Auswertung der instationären Bernoulligleichung für das Gesamtpotential aus Störströmung und Fluidbeschleunigung. Untersucht man die Kräfte eines bewegten Fluids auf einen ruhenden Körper, so entwickelt sich die "horizontale Verdrängung" aus dem Term der Fluidbeschleunigung im Potential, während die Kräfte der Gleichungen (3.24) und (3.25) aus der instationären Betrachtung des Potentials der Störströmung resultieren (vgl. Abschnitt 3.8.3 auf Seite 86).

Die Berechnung der durch den Druckgradienten im beschleunigten Wind hervorgerufenen Kräfte wird elementar über die Aufintegration des Oberflächendruckes berechnet. Der lokale Druck an der Stelle r berechnet sich nach Bernoulli zu

$$p(r) = p_\infty + \frac{\rho}{2} (V_{W_\infty}^2 - V_W(r)^2) . \quad (3.26)$$

Der statische Luftdruck p_∞ erzeugt keine aerostatische Resultierende, zur Untersuchung der Wirkung der Windstörung reicht die Berücksichtigung der Druckstörung $\Delta p_W(r)$, also der Beitrag des zweiten Terms in Gleichung (3.26), aus.

Die Kräfte infolge Druckgradient in der Luft sollen in das Schema der axial-verteilten Rumpfkraften integriert werden. Dazu wird jeweils über den Umfang einer Rumpfscheibe die Druckkraft infolge $\Delta p_W(r)$ berechnet. Eine geschlossene Lösung kann unter der Annahme angegeben werden, dass sowohl die lokale Druckstörung als auch der lokale Druckgradient über einer Rumpfscheibe konstant sind. Diese Vereinfachung ist zulässig, falls die kleinste Wellenlänge der Druckstörung ein Mehrfaches des Rumpfdurchmessers beträgt. Die untere Grenze liegt etwa beim fünffachen des Rumpfdurchmessers, für diese Wellenlänge resultiert maximal (Druckgradient normal zur Rumpfachse) ein Fehler von 5%, und dies auch nur für die Rumpfscheibe maximalen Durchmessers.

Unter der oben beschriebenen Annahme werden die Kräfte und Momente infolge Druckgradient in der Luft durch

$$dF^A_{h_{\text{static-W}}}(x) = \begin{bmatrix} \Delta p_W(x) \frac{\partial}{\partial x} A(x) dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \int \text{grad}(p_W) A(x) dx \text{ und} \quad (3.27)$$

$$dQ^A_{h_{\text{static-W}}}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int \text{grad}(p_W(x)) r(x)^2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) dx \quad (3.28)$$

beschrieben. Die axiale Komponente der Kraft resultiert dabei aus der Druckkraft über der Oberfläche der Scheibe, die Seiten- und Vertikalkraft über das Archimedische Prinzip in Funktion des lokalen Druckgradienten $\int \text{grad}(p_W)$ (vgl. Gleichung (B.35)).

Das scheinbare Moment resultiert aus der radialen Druckverteilung infolge Druckgradient über der Scheibe. Ist der Druckgradient über den gesamten Körper gleich, so muss das integrale Körpermoment natürlich verschwinden, denn in homogenen Gradientenfeldern erfährt ein Körper nur aerostatischen Auftrieb, aber kein aerostatisches Moment.

Zusammenfassung der Kräfteanteile bei Flug durch Windfeld

Die Summe der Kräfte und Momente infolge des Strömungsdruckes und der windinduzierten Effekte bei Flug durch ein Windfeld betragen

$$\begin{aligned} dF^A_{h_{\text{pot}\Sigma}}(x) &= dF^A_{h_{\text{pot-K-acc}}}(x) + dF^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dF^A_{h_{\text{pot}}}(x) + dF^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dF^A_{h_{\text{static-W}}}(x) \\ dQ^A_{h_{\text{pot}\Sigma}}(x) &= dQ^A_{h_{\text{pot-K-acc}}}(x) + dQ^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dQ^A_{h_{\text{pot}}}(x) + dQ^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dQ^A_{h_{\text{static-W}}}(x) . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die einzelnen Terme berechnen sich dabei nach den Gleichungen (3.17) bis (3.28) und den angegebenen Vorschriften.

3.3 Integrale potentialtheoretische Rumpfkkräfte

Aus der Kraft- und Momentenverteilung entlang der Längsachse lassen sich, wie in Bild 3.2 gezeigt, die integralen Rumpfkkräfte infolge Potentialumströmung berechnen.

Aus den Gleichungen (3.1) bis (3.11) und den entsprechenden Gleichungen unter Wind erkennt man, dass die Kraftfunktionen jeweils aus bewegungs- (respektive anströmungs-) und rumpfgeometrieabhängigen Anteilen bestehen. Sie lassen sich in der Form

$$d\bullet^A_{h_{\text{pot}}}(x) = f(u, v, w, p, q, r, x) \cdot g(x, r(x)) \cdot dx \quad (3.30)$$

angeben (wobei auch die Zustandsbeschleunigungen zu den Argumenten von f gehören).

Herrschen über den gesamten Rumpf die gleichen Anströmungsbedingungen, so wird die "Anströmungsfunktion" f zur Konstanten über der Rumpflänge. Dies ist bei ruhendem oder homogen strömendem Fluid gegeben, näherungsweise auch bei inhomogen verteilten Windstörungen, wenn deren Wellenlängen ein Mehrfaches der Schiffslänge betragen und man von einer "quasi-homogenen" Anströmung ausgehen kann (vgl. "Seitenkraft und Giermoment bei Variation der Wellenlänge und der Phasenlage" auf Seite 82). In diesen Fällen ist die Kraftverteilung über x nur noch vom Geometrie-Term $g(x)$ abhängig. Die Berechnung der integralen Kräfte vereinfacht sich dann zu

$$\int d\bullet^A_{h_{\text{pot}}}(x) = \int (f(u, v, w, p, q, r) \cdot g(x)) dx = f(u, v, w, p, q, r) \cdot \int g(x, r(x)) dx. \quad (3.31)$$

Bei bekannter Konturfunktion lassen sich die Integrale $\int g(x, r(x)) dx$ als geschlossene *Rumpfindegrale* vorab berechnen, und die Kräfte können in Beiwerteschreibweise angegeben werden. Die resultierenden Rumpfindegrale sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Das Moment wird bezüglich des Referenzpunktes CR formuliert. Der Beitrag einer Rumpfscheibe zu diesem Moment berechnet sich als Summe aus dem schiebeneigenen Moment und dem Beitrag der Scheibenkraft über die Beziehung

$$dQ^A_{h|CR}(x) = dQ^A_h(x) + \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times dF^A_h(x). \quad (3.32)$$

Auch die integralen Momente lassen sich bei homogener Anströmung über Rumpfindegrale beschreiben.

3.3.1 Berechnung der Rumpfindegrale in homogener, windfreier Anströmung

In diesem Unterkapitel werden die Rumpfkkräfte und -momente in der Schreibweise der *Rumpfindegrale* angegeben. Die eingesetzten Integrale berechnen sich nach Tabelle 3.1. Ihre Indizierung enthält die Wirkungsachse und die zugehörigen Bewegungsgrößen.

| | |
|--|--|
| $I_{x_{\text{pot}}}^{\dot{u}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} k_1 x \frac{dA(x)}{dx} dx$ | |
| $I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} k_2 A(x) dx$ | $I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} K_3 x A(x) dx$ |
| $I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} k_2 \left(\frac{1}{2} r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} + \underline{A(x)x} \right) dx$ | $I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} K_3 \left(\frac{1}{2} x r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} + x^2 A(x) \right) dx$ |
| $\underline{I_{x_{\text{pot}}}^{uvw}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \frac{1}{2} \frac{dA(x)}{dx} dx$ | $\underline{I_{x_{\text{pot}}}^u} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \frac{1}{2} K_1^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} dx$ |
| $I_{x_{\text{pot}}}^{vw} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \frac{1}{4} K_2^2 \left(\cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} - 2 \frac{dA(x)}{dx} \right) dx$ | |
| $I_{x_{\text{pot}}}^{wq} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \left(-x \frac{dA(x)}{dx} + \frac{1}{2} K_2 (K_3 - 1) r(x) \cos \theta(x) \sin \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} K_2 (K_3 + 1) \left(x \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} - 2x \frac{dA(x)}{dx} \right) \right) dx$ | |
| $\underline{I_{x_{\text{pot}}}^q} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \left(-\frac{1}{2} (K_3^2 - 1) x r(x) \sin \theta(x) \cos \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} + \frac{1}{4} r(x)^2 \sin^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (2K_3 - K_3^2) r(x)^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} + \frac{1}{4} x^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right. \\ \left. + (2K_3 + K_3^2) \left(\frac{1}{4} x^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} - \frac{1}{2} x^2 \frac{dA(x)}{dx} \right) \right) dx$ | |
| $\underline{I_{z_{\text{pot}}}^{uw}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \frac{K_1 K_2}{2} \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} dx$ | |
| $I_{z_{\text{pot}}}^{uq} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \left(A(x) + K_1 (K_3 - 1) \cos^2 \theta(x) A(x) + \frac{1}{2} K_1 (K_3 + 1) x \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right) dx$ | |
| $I_{m_{\text{pot}}}^{uw} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \frac{K_1 K_2}{2} \left(r(x) \sin \theta(x) \cos \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} + x \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right) dx$ | |
| $\underline{I_{m_{\text{pot}}}^{uq}} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} \left(\frac{1}{2} r(x)^2 \frac{dA(x)}{dx} + x A(x) + \frac{1}{2} K_1 (K_3 - 1) \left(r(x)^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} + 2x \cos^2 \theta(x) A(x) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} K_1 (K_3 + 1) \left(x r(x) \sin \theta(x) \cos \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} + x^2 \cos^2 \theta(x) \frac{dA(x)}{dx} \right) \right) dx$ | |

Tabelle 3.1 Rumpfintegrale zur Berechnung der potentialtheoretischen Rumpfkraften, unterstrichene Integrale und Integranden verschwinden bei Integration über den geschlossenen Rotationsellipsoiden

Zur Berechnung der Integrale

Durch geeignete Wahl des Integrationsintervalls $[x_{l_h}, x_n]$ kann der Gültigkeitsbereich der potentialtheoretischen Druckverteilung festgelegt werden. Allen und Perkins [8] rechnen stumpfendige Körper und integrieren bis ans Heck, Hopkins [10] schlägt die Integration von Rumpfnase bis zur Stelle des kleinsten $dA(x)/dx$ (stärkste Querschnittsflächenabnahme) vor und approximiert dadurch die Ablösung der Potentialströmung. Da dieser Bereich meistens in Nähe der vorderen Leitwerkswurzel liegt, wählen Jones und DeLaurier ebendiesen Punkt als Integralgrenze. Die für das Gesamtmodell verwendeten Integralgrenzen sind in Abschnitt 3.7.1 auf Seite 72 definiert.

Spannt sich das Integrationsintervall $[x_{l_h}, x_n]$ über die gesamte Luftschifflänge, dienen die Rumpfindegrale der Beschreibung der Kräfte auf den *geschlossenen Rumpfkörper*. Für den geschlossenen Körper sollten die meisten potentialtheoretischen Beiträge verschwinden, beispielsweise erfährt ein geschlossenen Körper keine Kräfte bei reiner Translationsbewegung. Die Integrale und Integranden welche bei Integration über die gesamte Schifflänge verschwinden, sind in Tabelle 3.1 durch Unterstreichung gekennzeichnet.

Die entsprechenden Integrale resultieren nur für Rotationsellipsoide exakt zu Null, für andere Konturfunktionen nehmen die "Null-Anteile" abweichende, zumeist sehr geringe Endwerte ein. Bei der Berechnung unterschiedlicher Rumpfgeometrien hat sich aber gezeigt, dass bei der integralen Kraft in Rumpflängsrichtung nicht vernachlässigbare Fehler auftreten. Eine tiefere Diskussion des Effekts und ein Vorschlag zur Verbesserung der Ansätze ist im Abschnitt "Erhöhung der Genauigkeit durch Vergleich mit Referenz-Druckbeiwerten" auf Seite 88 beschrieben.

Umformung in Beiwerteschreibweise

Die Rumpfindegrale nach Tabelle 3.1 können in dimensionslose Beiwerte umgeformt werden. Als Normierungsfaktoren für stationäre Kräfte und Momente werden die Schiffslänge l_R und als Bezugsfläche der Volumenexponent $V^{2/3}$ eingesetzt (Tabelle 3.3). Für die Beiwerte zur Beschreibung der beschleunigungsproportionalen Kräfte eignen sich die Normierungsfaktoren Volumen V und Referenzlänge l_R (Tabelle 3.2). Der eingeführte Faktor 2 kompensiert den Term $1/2$ des Staudrucks.

| Bezugsgröße | Axialkraft | Vertikal-/Seitenkraft | Nick-/Giermoment |
|------------------------------------|--|--|--|
| Volumen V | $c_{x_{\text{pot}}}^{\dot{u}} = \frac{2I_{x_{\text{pot}}}^{\dot{u}}}{V}$ | $c_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}} = \frac{2I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}}}{V}$ | |
| statisches Moment $l_R \cdot V$ | | $c_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}} = \frac{2I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}}}{l_R \cdot V}$ | $c_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} = \frac{2I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}}}{l_R \cdot V}$ |
| Trägheitsmoment $l_R^2 \cdot V$ | | | $c_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} = \frac{2I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}}}{l_R^2 \cdot V}$ |

Tabelle 3.2 Beiwerte beschleunigungsproportionaler Potential-Rumpfkkräfte

| Bezugsgröße | Axialkraft | Vertikal-/Seitenkraft | Nick-/Giermoment |
|---|--|--|--|
| Fläche $V^{2/3}$ | $c_{x_{\text{pot}}}^{uvw} = \frac{2I^{uvw} x_{\text{pot}}}{V^{2/3}}$ $c_{x_{\text{pot}}}^u = \frac{2I^u x_{\text{pot}}}{V^{2/3}}$ $c_{x_{\text{pot}}}^{vw} = \frac{2I^{vw} x_{\text{pot}}}{V^{2/3}}$ | $c_{z_{\text{pot}}}^{uw} = \frac{2I^{uw} z_{\text{pot}}}{V^{2/3}}$ | |
| Flächenmoment 1.O. $l_R \cdot V^{2/3}$ | $c_{x_{\text{pot}}}^{wq} = \frac{2I^{wq} x_{\text{pot}}}{l_R \cdot V^{2/3}}$ | $c_{z_{\text{pot}}}^{uq} = \frac{2I^{uq} z_{\text{pot}}}{l_R \cdot V^{2/3}}$ | $c_{m_{\text{pot}}}^{uw} = \frac{2I_{m_{\text{pot}}}^{uw}}{l_R \cdot V^{2/3}}$ |
| Flächenmoment 2.O. $l_R^2 \cdot V^{2/3}$ | $c_{x_{\text{pot}}}^q = \frac{2I^q x_{\text{pot}}}{l_R^2 \cdot V^{2/3}}$ | | $c_{m_{\text{pot}}}^{uq} = \frac{2I_{m_{\text{pot}}}^{uq}}{l_R^2 \cdot V^{2/3}}$ |

Tabelle 3.3 Rumpfbeiwerte potentialtheoretischer Kräfte unter stationärer Anströmung

Integrale Rumpfkkräfte aus beschleunigtem Flug

Durch Längsintegration der Kräfte und Momente von Gleichung (3.1) und (3.2) werden die integralen Rumpfkkräfte berechnet. Die integralen Kräfte resultieren zu

$$F_{h_{\text{pot-acc}}}^A = \begin{bmatrix} X_{h_{\text{pot-acc}}}^A \\ Y_{h_{\text{pot-acc}}}^A \\ Z_{h_{\text{pot-acc}}}^A \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} -I_{x_{\text{pot}}}^{\dot{u}} \dot{u} \\ I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{w} + I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \dot{q} \\ I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{w} - I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \dot{q} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Das aus Momentenverteilung und Kraftverteilung nach Gleichung (3.32) resultierende integrale Moment bezüglich CR beträgt

$$Q_{h_{\text{pot-acc}}}^A = \begin{bmatrix} L_{h_{\text{pot}}}^A \\ M_{h_{\text{pot}}}^A \\ N_{h_{\text{pot}}}^A \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{w} + I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \dot{q} \\ I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{w} + I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \dot{q} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Spezialfall: Kräfte aus Beschleunigung auf den geschlossenen Rotationsellipsoiden

Die Berechnung der integralen Kräfte auf einen geschlossenen Rotationsellipsoiden lässt den Vergleich mit den bekannten Resultaten aus der Auswertung des Tensors der virtuellen Massen zu (vgl. Anhang). Im Folgenden werden die Resultate für ein Rotationsellipsoid mit langer Halbachse a und Radius b dargestellt. Dessen Volumen und Trägheitsmoment beträgt

$$V = \frac{4\pi}{3}ab^2 \text{ und } I_{yy} = I_{zz} = \frac{a^2 + b^2}{5}V.$$

Durch Integration über die gesamte Länge $L = 2a$ folgt die aerodynamische Gesamtkraft

$$F^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) = -\rho \begin{bmatrix} \int_L -k_1 \frac{dA(x)}{dx} x \dot{u} dx \\ \int_L (k_2 A(x) \dot{v} + K_3 A(x) x \dot{r}) dx \\ \int_L (k_2 A(x) \dot{w} - K_3 A(x) x \dot{q}) dx \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} k_1 V \dot{u} \\ k_2 V \dot{v} \\ k_2 V \dot{w} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

und die Integration der Momentenverteilung ergibt das aerodynamische Gesamtmoment

$$Q^A_{h_{\text{pot-acc}}}(x) = -\rho K_3 \frac{a^2 - b^2}{5} V \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = -\rho k' I_{yy} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

bezüglich CR , dabei wurde die Beziehung $K_3 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} k'$ berücksichtigt (vgl. [25]).

Die Kräfte nach Gleichung (3.35) und (3.36) stimmen mit den Ergebnissen in Gleichung (B.7) nach der Methode des Tensors der virtuellen Massen überein.

Integrale Rumpfkkräfte aus stationärer Relativanströmung und Anteil der Rollrate

Die integralen Rumpfkkräfte und -Momente, sie sind bezüglich des Referenzpunktes CR berechnet und hier in der Schreibweise der *Rumpfindegrale* angegeben, betragen für die Kräfteanteile infolge Relativanströmung und Rollen (entsprechend Gleichungen (3.4) bis (3.11))

$$\begin{aligned} X^A_{h_{\text{pot}}}(x) &= \rho [(u^2 + v^2 + w^2) I_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - u^2 I_{x_{\text{pot}}}^u + (v^2 + w^2) I_{x_{\text{pot}}}^{vw} + (wq - vr) I_{x_{\text{pot}}}^{wq} + (q^2 + r^2) I_{x_{\text{pot}}}^q] \\ Y^A_{h_{\text{pot}}}(x) &= \rho [uv \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{uw} + ur \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{uq} + pw \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}} - pq \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}}] \\ Z^A_{h_{\text{pot}}}(x) &= \rho [uw \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{uw} - uq \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{uq} - pv \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{w}} - pr \cdot I_{z_{\text{pot}}}^{\dot{q}}] \\ L^A_{h_{\text{pot}}|CR} &= 0 \\ M^A_{h_{\text{pot}}|CR} &= \rho [-uw \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uw} + uq \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uq} + pv \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} + pr \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}}] \\ N^A_{h_{\text{pot}}|CR} &= \rho [uv \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uw} + ur \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uq} + pw \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} - pq \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}}]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3.2 Integrale potentialtheoretische Rumpfkkräfte bei Flug durch Windfeld

Aus der in Kapitel 3.2.2 entwickelten Kraftverteilungen soll in diesem Teilkapitel die resultierende Rumpf-Integralkraft berechnet werden. Wie bereits in der Einleitung zu Kapitel 3.3 angesprochen, ist dies in geschlossener Form nur möglich, falls von einem quasi-homogenen Anströmungszustand über der Rumpflänge ausgegangen werden kann. Andernfalls muss die Kräfteverteilung berechnet und dann numerisch integriert werden.

Die hier angegebene geschlossene Form vermag somit eine über die Rumpflänge variierende Windverteilung nicht zu erfassen. Sie verwendet zur Berechnung der Kräfte den Anströmungszustand im Bezugspunkt CR . Diese Anströmung berechnet sich über die bekannte Beziehung

$$V_{A|CR} = V_{K|CR} - V_{W|CR} .$$

Die im Bezugspunkt wirkende inertielle Windbeschleunigung, beschrieben in körperfesten Komponenten und hier in der Notation $\vec{V}_{Wf} = [\dot{u}_{Wf}, \dot{v}_{Wf}, \dot{w}_{Wf}]^T$ verwendet, berechnet sich nach Gleichung (3.23). Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden der Index CR weggelassen. Die integrale Verdrängungskraft infolge Windbeschleunigung berechnet sich proportional der verdrängten Fluidmasse, für den reinen Rumpf proportional des Volumens V , für das "gesamte" Luftschiff entsprechend proportional des totalen statischen Auftriebs B (vgl. Abschnitt 2.3.3 auf Seite 22). Die integrale potentialtheoretische Rumpfkraft lautet somit

$$\begin{aligned}
 & \text{Starrkörperbeschleunigung} \\
 & \underbrace{\left[\begin{array}{c} -I_{x_{pot}}^{\dot{u}} \dot{u}_K \\ I_{z_{pot}}^{\dot{w}} \dot{w}_K + I_{z_{pot}}^{\dot{q}} \dot{q} \\ I_{z_{pot}}^{\dot{w}} \dot{w}_K - I_{z_{pot}}^{\dot{q}} \dot{q} \end{array} \right]}_{\text{Relativanströmung und Körperdrehung}} \\
 & F_{h_{pot}\Sigma}^A = -\rho \left[\begin{array}{c} -I_{x_{pot}}^{\dot{u}} \dot{u}_K \\ I_{z_{pot}}^{\dot{w}} \dot{w}_K + I_{z_{pot}}^{\dot{q}} \dot{q} \\ I_{z_{pot}}^{\dot{w}} \dot{w}_K - I_{z_{pot}}^{\dot{q}} \dot{q} \end{array} \right] \\
 & + \rho \left[\begin{array}{c} (u_A^2 + v_A^2 + w_A^2) I_{x_{pot}}^{uvw} - u_A^2 I_{x_{pot}}^{uu} + (v_A^2 + w_A^2) I_{x_{pot}}^{vw} + (w_A q - v_A r) I_{x_{pot}}^{wq} + (q^2 + r^2) I_{x_{pot}}^{qq} \\ u_A v_A \cdot I_{z_{pot}}^{uw} + u_A r \cdot I_{z_{pot}}^{uq} + p w_A \cdot I_{z_{pot-acc}}^{\dot{w}} - p q \cdot I_{z_{pot-acc}}^{\dot{q}} \\ u_A w_A \cdot I_{z_{pot}}^{uw} - u_A q \cdot I_{z_{pot}}^{uq} - p v_A \cdot I_{z_{pot-acc}}^{\dot{w}} - p r \cdot I_{z_{pot-acc}}^{\dot{q}} \end{array} \right] \\
 & \underbrace{\left[\begin{array}{c} -I_{x_{pot}}^{\dot{u}} \dot{u}_{Wf} \\ I_{z_{pot}}^{\dot{w}} \dot{w}_{Wf} \\ I_{z_{pot}}^{\dot{w}} \dot{w}_{Wf} \end{array} \right]}_{\text{Windbeschleunigung}} + \underbrace{\rho V \cdot T_{fg} \frac{{}^g D V_{Wg|CR}}{Dt}}_{\text{aerostatische Kraft Wind-''Verdrängungskraft''}} \\
 & \underbrace{\text{scheinbare Masse Effekt}} \quad \underbrace{\text{aerostatische Kraft Wind-''Verdrängungskraft''}}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Zur Berechnung des integralen Moments bezüglich CR muss entsprechend Gleichung (3.32) vorgegangen werden. Das aus Momentenverteilung und Kraftverteilung resultierende integrale Moment bezüglich CR beträgt

$$\begin{aligned}
 Q^A_{h_{\text{pot}}\Sigma} = & \underbrace{-\rho \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{w}_K + I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \dot{q} \\ I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{v}_K + I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{r}} \dot{r} \end{bmatrix}}_{\text{Starrkörperbeschleunigung}} \\
 & + \rho \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -u_A w_A \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uw} + u_A q \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uq} + p v_A \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} + p r \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \\ u_A v_A \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uv} + u_A r \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{ur} + p w_A \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} - p q \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \end{bmatrix}}_{\text{Relativanströmung und Körperdrehung}} \\
 & + \rho \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{w}_{Wf} \\ I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \dot{v}_{Wf} \end{bmatrix}}_{\text{Windbeschleunigung}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{aerostatische Kraft}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{scheinbare Masse Effekt}}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Man erkennt in Gleichung (3.38) und (3.39) wieder die Entkopplung in Anteile infolge Körperbeschleunigung und Relativanströmung sowie die durch Windbeschleunigung hervorgerufenen scheinbare Masse und Verdrängungseffekte. Wichtig ist dabei die Unterscheidung in inertielle Windbeschleunigung in körperfesten Achsen (berechnet nach Gleichung (B.33) oder (3.23) und dargestellt durch die Schreibweise V_{Wf}) und Druckgradient infolge inertialer Beschleunigung des Windes, berechnet nach Gleichung (B.35). Wie zu erwarten war, resultiert aus der aerostatischen Druckverteilung kein Moment.

3.3.3 Spezialfall: Integrale Kräfte auf geschlossenen Rotationsellipsoiden

Die Rumpfintegrale des geschlossenen Rotationsellipsoiden sind einfache analytische Ausdrücke. Wie in Kapitel 3.3 auf Seite 47 bereits beschrieben wurde, verschwinden zudem viele der Integrale bei Integration über die gesamte Rumpflänge. Diese Eigenschaft wird im folgenden ausgenutzt um die Kräfte auf den Rotationsellipsoiden in einer einfachen, analytischer Form zu beschreiben. In Tabelle 3.1 unterstrichene Integrale sind identisch Null. Es verbleiben somit folgende integralen Kräfte und Momente bezüglich CR :

$$F^A_{h_{\text{pot}}} = -\rho \begin{bmatrix} -I_{x_{\text{pot}}} \dot{u}_{\text{K}} \\ I_{z_{\text{pot}}} \dot{v}_{\text{K}} \\ I_{z_{\text{pot}}} \dot{w}_{\text{K}} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} I_{x_{\text{pot}}}^{wq} (w_{\text{A}} q - v_{\text{A}} r) \\ I_{z_{\text{pot}}}^{uq} u_{\text{A}} r + I_{z_{\text{pot}}}^{w} p w_{\text{A}} \\ -I_{z_{\text{pot}}}^{uq} u_{\text{A}} q - I_{z_{\text{pot}}}^{w} p v_{\text{A}} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} -I_{x_{\text{pot}}} \dot{u}_{\text{Wf}} \\ I_{z_{\text{pot}}} \dot{v}_{\text{Wf}} \\ I_{z_{\text{pot}}} \dot{w}_{\text{Wf}} \end{bmatrix} + \rho V T_{fg} \frac{g D V_{\text{Wg}} |_{CR}}{Dt} \quad (3.40)$$

$$\text{und } Q^A_{h_{\text{pot}}} = -\rho \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \dot{q} \\ I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{r}} \dot{r} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ -u_{\text{A}} w_{\text{A}} \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uw} + p r \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \\ u_{\text{A}} v_{\text{A}} \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{uw} - p q \cdot I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Weiter gelten für Rotationsellipsoide mit langer Halbachse a und kurzer Halbachse b

$$V = \frac{4\pi}{3} a b^2 \quad \text{und} \quad I_{yy} = I_{zz} = \frac{a^2 + b^2}{5} V, \quad \text{sowie}$$

$$-I_{x_{\text{pot}}} \dot{u} = -I_{z_{\text{pot}}} \dot{v} = k_1 V, \quad I_{z_{\text{pot}}}^{wq} = -I_{x_{\text{pot}}}^{wq} = k_2 V, \quad I_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} = k' I_{yy} \quad \text{und} \quad I_{m_{\text{pot}}}^{uw} = (k_1 - k_2) V$$

für Volumen, Trägheitsmoment und die verbliebenen Rumpfintegrale. Führt man weiter den scheinbare Masse Tensor F_V und den scheinbare Trägheiten Tensor F_{Ω}

$$\text{mit } F_V = V \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F_{\Omega} = I_{yy} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k' & 0 \\ 0 & 0 & k' \end{bmatrix} \quad \text{ein,}$$

so kann man in geschlossener Form schreiben

$$\begin{aligned} F^A_{h_{\text{pot}}} &= -\rho F_V \dot{V}_{\text{Kf}} - \rho \Omega \times (F_V V_{\text{Af}}) + \rho F_V \dot{V}_{\text{Wf}} - V^f \text{grad}(p_{\text{W}}) \\ Q^A_{h_{\text{pot}}} &= -\rho F_{\Omega} \dot{\Omega} - \rho \Omega \times (F_{\Omega} \Omega) - \rho V_{\text{Af}} \times (F_V V_{\text{Af}}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.4 Kräfte nach Potentialtheorie und nach Theorie Schlanker Körper im Vergleich

Um eine Vorstellung über die verteilten potentialtheoretischen Rumpfkkräfte zu erlangen, werden nun für zwei stationäre Flugzustände die Verteilung der Z-Kraft und des Nickmoments bezüglich CR berechnet. Als Referenzflugzustände werden der stationäre ebene Geradeausflug mit konstantem Anstellwinkel α ($w/u = \text{const.}$) und eine ebene Nickbewegung mit Drehrate q bei $\alpha = w = 0$ ausgewählt. Die Kräfte und Momente werden dabei in normierter Form

$$dc_z(x) = \frac{dZ^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} V^2 \sin \alpha \cos \alpha V^{2/3}} = \frac{dZ^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} u w V^{2/3}} \quad \text{Z-Kräfte im Geradeflug}$$

$$dc_z(x) = \frac{dZ^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} V^2 \frac{q l_R}{V} V^{2/3}} = \frac{dZ^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} V q l_R V^{2/3}} \quad \text{Z-Kräfte in Nickbewegung}$$

$$dcm_y(x) = \frac{dM^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} V^2 \sin \alpha \cos \alpha V^{2/3} l_R} = \frac{dM^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} u w V^{2/3} l_R} \quad \text{Nickmoment im Geradeflug}$$

$$dcm_y(x) = \frac{dM^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} V^2 \frac{q l_R}{V} V^{2/3} l_R} = \frac{dM^A_{h_{\text{pot}}}(x)}{\frac{\rho}{2} V q V^{2/3} l_R^2} \quad \text{Nickmoment in Nickbewegung}$$

dargestellt. Die Normierung der Beiwerte, mit $\sin \alpha \cos \alpha$ im Falle des Geradeausflugs und mit der dimensionslosen Nickrate $q^* = q(l_R/V)$ im Nickflug, führt auf " α "- respektive " q/V "-invariante, allgemeingültige Kurven.

Die Vertikalkraft und das Nickmoment werden nach unterschiedlichen Theorien berechnet und dargestellt: Es wird einmal der *Rotationsellipsoid* mit Streckungsverhältnis 4:1 untersucht, indem die Lösung nach der Potentialtheorie (Auswertung von (3.8) und (3.10) nach (3.32) mit Radiusfunktion des Ellipsoiden) mit der Approximation über die Theorie Schlanker Körper (Auswertung von (B.16) und (B.9) mit Radiusfunktion des Ellipsoiden) verglichen wird. Dieselbe Auswertung wird auch für den *Rumpf des Luftschiffes Lotte* (Streckungsverhältnis von 4:1) durchgeführt, dafür wird jeweils die Konturfunktion von Lotte in die Gleichungen eingesetzt.

Man bemerke: Die reine Lösung nach Theorie Schlanker Körper wird durch (B.14) beschrieben, Gleichung (B.16) enthält bereits die Korrekturterme nach Munk. Dies bedeutet, die Kräfte und Momente sind im Geradeausflug mit $k_2 - k_1 \approx 0,78$ skaliert, im Nickflug mit $k' = 0,61$. Diese Skalierung erzeugt übereinstimmende Gesamtmomente (vgl. B.2.3 auf Seite 178), aber z.B. die Steigung der Kraftverteilung im mittleren Rumpfbereich ist zu niedrig approximiert. Die reine Lösung nach der Theorie Schlanker Körper, sie ist in Bild 3.9 grau-gestrichelt dargestellt, approximiert den mittleren, zylindrischen und somit Schlank-Körper-ähnlichen Rumpfbereich richtig.

3.4.1 Verteilung und Aufintegration der Vertikalkräfte

Bild 3.9 stellt die Untersuchung am Ellipsoiden dar, Bild 3.10 die am Rumpf von Lotte. Die oberen zwei Diagramme stellen jeweils den Kraftverlauf für Geradeausflug, respektive Nickflug dar. Die unteren Diagramme zeigen die zugehörigen Aufintegrationen der Kräfte, als Integration ab Nase bis x (vgl. Achsbeschriftungen der Graphen), sie zeigen somit die "Entwicklung" der resultierenden Integralkraft ab Schiffsnase.

In Bild 3.9 erkennt man die Unfähigkeit der Theorie Schlanker Körper, die Kräfte in Bereichen starker Konturkrümmung wiederzugeben. An den Rumpfen wird sogar eine Kraft ungleich Null angegeben. Etwas bessere Übereinstimmung der Kräfte im Geradeaus-

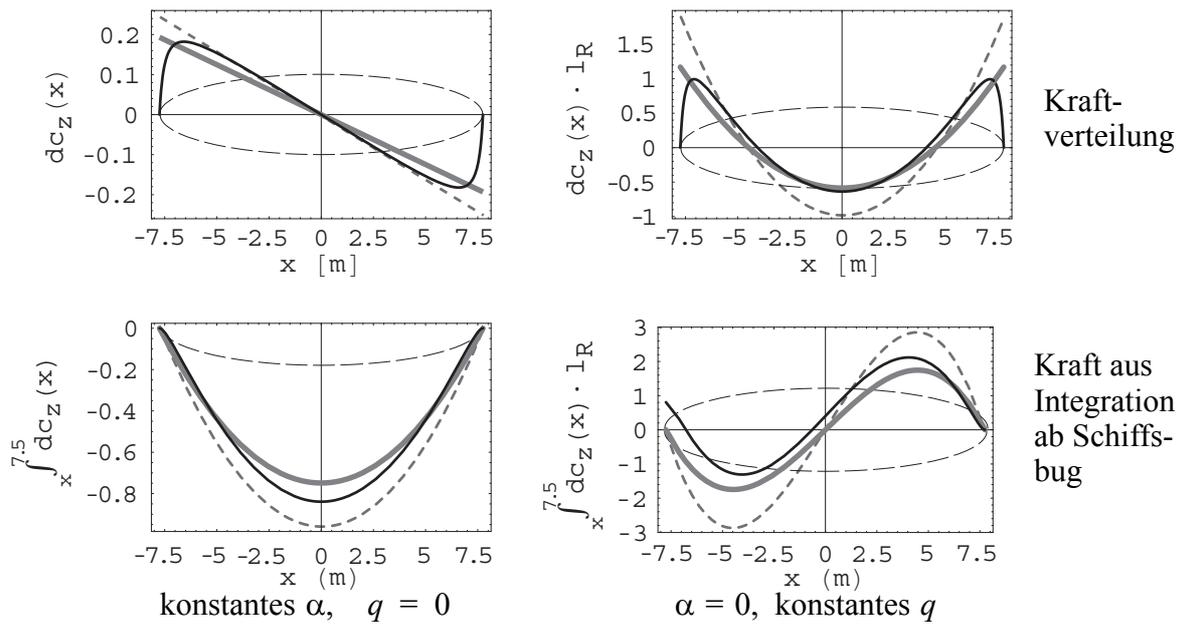


Bild 3.9: Vertikalkraftverteilung auf Ellipsoiden mit Streckung 4:1, nach Potentialströmung (schwarz) und nach Theorie Schlanker Körper mit (grau) und ohne (grau-gestrichelt) Munkkorrektur

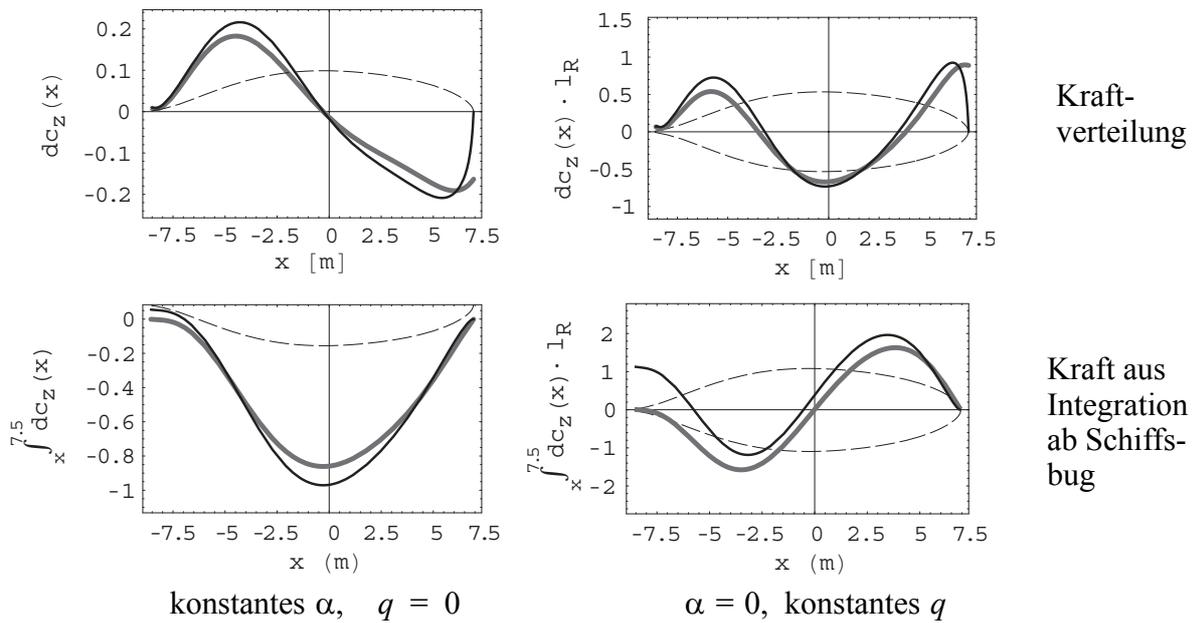


Bild 3.10: Vertikalkraftverteilung auf Rumpf mit Lotte-Kontur, nach Potentialströmung (schwarz) und nach der Theorie Schlanker Körper mit Munkkorrektur (grau)

flug findet man im mittleren Rumpfbereich. Im Kurvenflug gibt die Approximation nach Theorie Schlanker Körper den Verlauf nur qualitativ-ähnlich wieder. Dies zeigt auch das Kraftintegral im Kurvenflug: Nach der Potentialtheorie beträgt die Kraft $\rho V k_1 u q$ (vgl. (3.40) und (B.7)), die Slender Body Theorie, sie berücksichtigt keine Umströmung der

Rumpfbereiche infolge Nicken, sondern nur die induzierte Vertikalanströmung, errechnet keine Kraft.

Ähnliche Ergebnisse zeigt Bild 3.10 für die Auswertung der Kontur des Luftschiffs Lotte. Wieder liefert die Theorie Schlanker Körper eine Kraft bereits ab Rumpfspitze. Für die Kraftverteilung im Heckbereich resultiert durch beide Methoden ein ähnliches Resultat, da die Heckkontur von Lotte nur schwach gekrümmt ist. Hier vermag aber auch die Rechnung über die Potentialmethoden nur eine Schätzung wiederzugeben (vgl. auch “Erhöhung der Genauigkeit durch Vergleich mit Referenz-Druckbeiwerten” auf Seite 88). Sie liefert im Integral über die Gesamtlänge (im Rahmen der Potentialtheorie fälschlicherweise) eine geringe Kraft. Die Resultate im Kurvenflug zeigen wieder, dass die Kräfte im Bugbereich durch die Schlanke Körper Approximation falsch geschätzt werden, und dass schlussendlich die integrale Rumpfkraft fälschlicherweise zu Null geschätzt wird.

3.4.2 Verteilung und Aufintegration des Nickmoments

Die Diagramme für den Verlauf des Nickmoments bezüglich des Referenzpunktes CR im Koordinatenursprung zeigen Bild 3.11 und Bild 3.12, jeweils wieder ausgewertet über der Ellipsoid- und der Lotte-Kontur. Wie bereits in den vorangehenden Bildern wird oben der Momentenverlauf und unten der Verlauf des Momentenintegrals ab Nase dargestellt.

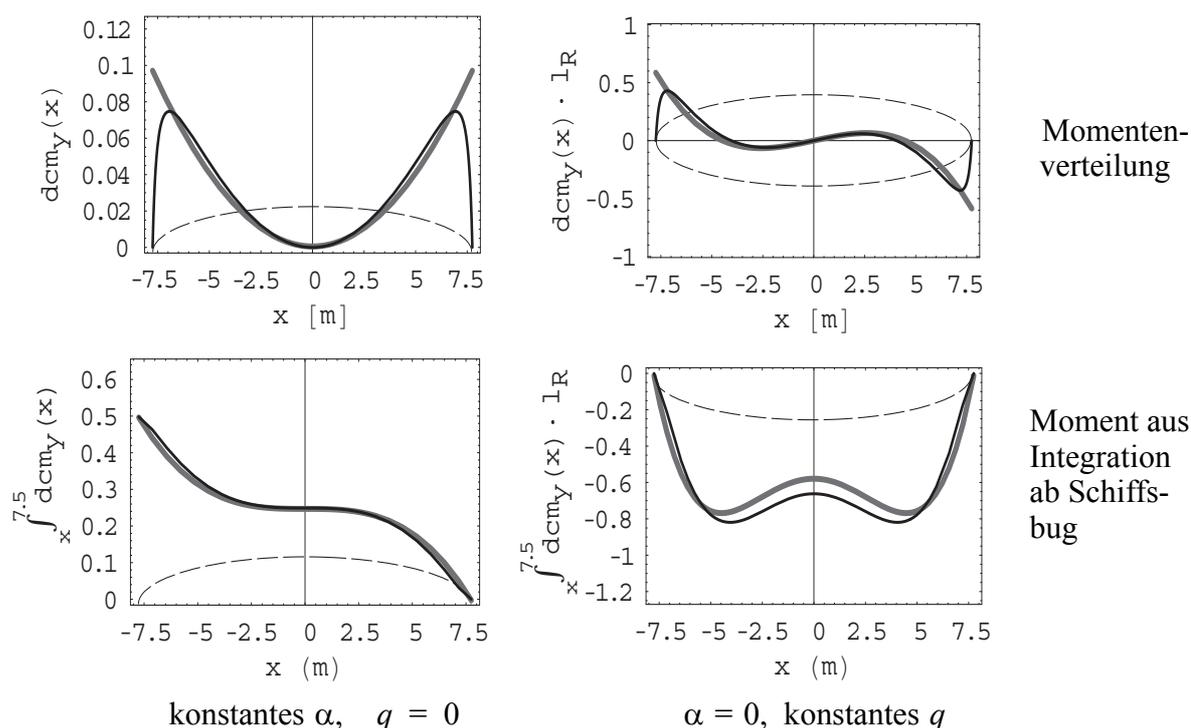


Bild 3.11: Nickmomentenverteilung auf Ellipsoiden mit Streckung 4:1; nach Potentialströmung (schwarz) und nach Theorie Schlanker Körper mit Munkkorrektur (grau)

Bild 3.11 zeigt für den Ellipsoiden im Geradeausflug die Fehler der Theorie Schlanker Körper im Bug- und Heckbereich: An Rumpfspitze und Heckende resultiert ein Moment. Dank Munks Korrekturfaktoren stimmen die integralen Werte am Rumpfbende im Geradeaus-

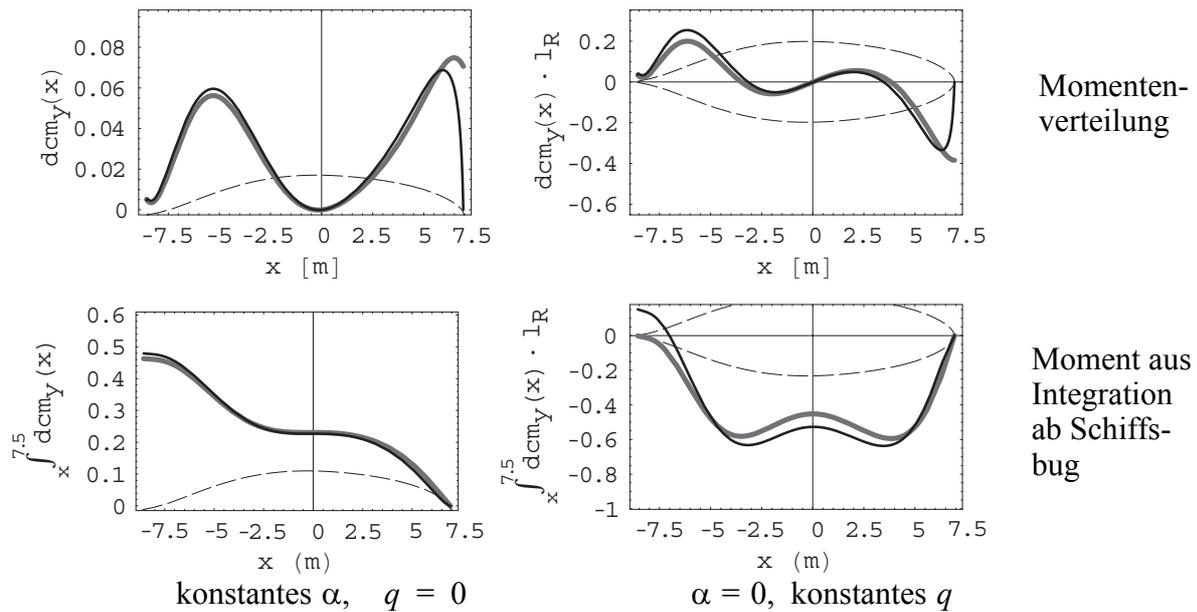


Bild 3.12: Nickmomentverteilung auf Rumpf mit Lotte-Kontur; nach Potentialströmung (schwarz) und nach Theorie Schlanker Körper mit Munkkorrektur (grau)

flug mit dem exakten Ellipsoidresultat überein. Dies ist keine Überraschung, wählte Munk die Faktoren doch derart, dass für das geschlossene Ellipsoid das richtige Momente entsteht (vgl. B.2.3 auf Seite 178). Der Verlauf des Moments im Kurvenflug wird über die Schlanke Körper Approximation etwas schlechter geschätzt, das Gesamtmoment resultiert aber für beide Methoden korrekt zu Null.

Die Auswertungen des Momentenverlaufs über der Lotte-Kontur zeigen wieder gute Übereinstimmungen im Geradeausflug, obwohl die bekannten Schwächen der Theorie Schlanker Körper im Bugbereich bei beiden Flugzuständen wieder zu Tage treten. Im reinen Kurvenflug resultiert bei der Potentialmethode ein Moment bei Integration über den gesamten Lotte-Rumpf. Dies folgt aus der Geometrie des spitz zulaufenden Hecks dieser Kontur.

3.4.3 Zusammenfassende Diskussion

Vergleicht man die Lösung über den Ellipsoiden mit denen über die Lotte-Kontur, erkennt man, dass die Abweichung zwischen Potential- und Schlanke Körper Lösung für beide Lösungen qualitativ identisch ist. Die Potentiallösung gibt dabei im Bugbereich immer die richtigere Lösung ab (beim Ellipsoid natürlich die korrekte!).

Bei Integration der Kräfte und Momente nach der Theorie Schlanker Körper ab Schiffsnase entstehen fehlerhafte Kraft- und Momentenverläufe. Einerseits greift Munk's Korrekturfaktor für das Moment im Geradeausflug erst für den geschlossenen Körper, andererseits wird die Kraft im Kurvenflug falsch wiedergegeben. Die Qualität des Verlaufs der Integralkräfte ab Nase ist aber von besonderer Bedeutung: Im vorderen Schiffsbereich wird die reale Strömung durch reibungsfreie Potentialströmungsansätze gut abgebildet, erst hinter der Rumpfmittle in Richtung Heck bildet sich in der realen, reibungsbehafteten Strömung die Grenzschicht stärker aus und es treten Ablösungen am Rumpf auf. Aus diesem Grund wird das Rumpfmodell im Gesamtkräfte-Modell nur bis zum Bereich vor den Leitwerken eingesetzt. Bis zu diesem Bereich liefern die hier hergeleiteten Approximationsverfahren über die

Potentiallösung des Ellipsoids, insbesondere mit den Korrekturen nach Kapitel 3.9.1, für eingeschränkte Anströmungswinkel sehr gute Schätzungen. Die Fehler bei der Berechnung der Kräfte im Heckbereich von Lotte (die Kontur verläuft dort "schlank-ähnlich" und konkav) fallen somit nicht ins Gewicht.

Die Verläufe der Kräfte in axialer Richtung wurden hier nicht diskutiert. Die Theorie Schlanker Körper kann die Axialkräfte nicht erfassen. Eine Möglichkeit dies im Rahmen der Theorie Schlanker Körper zu berücksichtigen zeigt Anhang B.3.

3.5 Rumpfkkräfte infolge viskoser Effekte

Neben den Kräften infolge des Strömungsdruckes, welche mit Hilfe der Potentialtheorie abgeschätzt werden, wirken auf den Körper Widerstandskräfte infolge Viskosität des Fluids. Ein Modell zur Berücksichtigung dieser Strömungseffekte wird im Folgenden beschrieben.

Die Kräfte werden dabei in Funktion der stationären Anströmung formuliert, es werden keine instationären Vorgänge berücksichtigt. Die angegebenen Anströmungsgeschwindigkeiten beschreiben jeweils die Komponenten in körperfesten Achsen.

3.5.1 Kräfte infolge Längsströmung: Längswiderstand

Der Widerstand in Axialströmungsrichtung resultiert neben den Kräften aus der Druckverteilung aus Oberflächenströmungswiderstand. Ausgehend vom Nullwiderstand des Körpers $c_{d_0, h}$ (Widerstand bei $\alpha = \beta = 0$) wird der Widerstand in Funktion der Längsströmungskomponente u formuliert.

Falls keine zuverlässigen Windkanaldaten existieren, muss zur Schätzung des Widerstandsbeiwertes auf empirische Formeln oder CFD-Rechnungen zurückgegriffen werden. Für flugmechanische Analysen ausreichende, einfache Methoden sind z.B. bei Hörner ([36]) oder Bohlmann ([35]) beschrieben. Komplexere Ansätze, wie sie unter Umständen für Leistungsrechnungen benötigt werden, sind von Putman in [11] diskutiert.

Die Längswiderstandskraft des Rumpfes berechnet sich in integraler Form zu

$$X_{h_0}^A = -\frac{\rho}{2} \cdot u_A |u_A| \cdot c_{d_0, h} \cdot V^{2/3}. \quad (3.43)$$

Falls eine Längsverteilung dieser Kraft benötigt wird, kann $X_{h_0}^A$ im Sinne einer Theorie der benetzten Oberfläche auf die Längsachse verteilt werden. Unter dieser Annahme resultiert folgende Kraftverteilung

$$X_{h_0}^A(x) = -\frac{\rho}{2} \cdot u_A(x) |u_A(x)| \cdot \hat{c}_{d_0, h} \cdot 2\pi r(x) \cdot d.$$

$$\text{mit dem Widerstandsbeiwert } \hat{c}_{d_0, h} = \hat{c}_{d_0, h} \frac{V^{2/3}}{\pi \int_h 2r(x) dx}.$$

3.5.2 Kräfte infolge Querströmung: Querströmungswiderstand

Allen und Perkins [8], Kelly [9] oder Hopkins [10] beschreiben in ihren Berichten die Berücksichtigung nichtlinearer Strömungseffekte entlang eines angestellten Rumpfes über viskose Kräfte-Ansätze. Die hier vorgestellten Ansätze basieren auf einer Theorie Schlanker Körper für Querströmungseffekte, sie setzen also eine ebene Strömung über die Rumpfquerschnitte voraus. Nach Bild 3.13 beträgt die Querströmungsgeschwindigkeit über einem Rumpfsegment $V \sin \alpha$, der schlanke Körper wird also als Zylinder unter einer Queranströmung mit $V_{quer} = V \sin \alpha$ begriffen. Auf einen derart angeströmten Zylinder wirkt ein Querwiderstand wie in Bild 3.13 beschrieben. Als erste Schätzung für den Querwiderstandsbeiwert $c_{d_c, h}$ kann der Reynolds- und Machzahl-korrigierte Querströmungswiderstandsbeiwert eines unendlichen Zylinders angenommen werden. Dieser Wert muss für die Berücksichtigung der Endlichkeit und nicht Schlankheit des Körper mit einem Korrekturfaktor η beaufschlagt werden, Werte für η in Funktion des Schlankheitsgrades des Körpers werden z.B. von Putman in [11] oder von Bohlmann in [35] angegeben.

Zur weiteren Erhöhung der Modellqualität kann der Querwiderstandsbeiwert in Funktion der Axialkoordinate x angesetzt werden. Dadurch könnte z.B. die Entwicklung der Querströmung über den Bugbereich, wie von Hopkins in [9] beschrieben, oder die Kraftwirkung von Ablösewirbeln berücksichtigt werden.

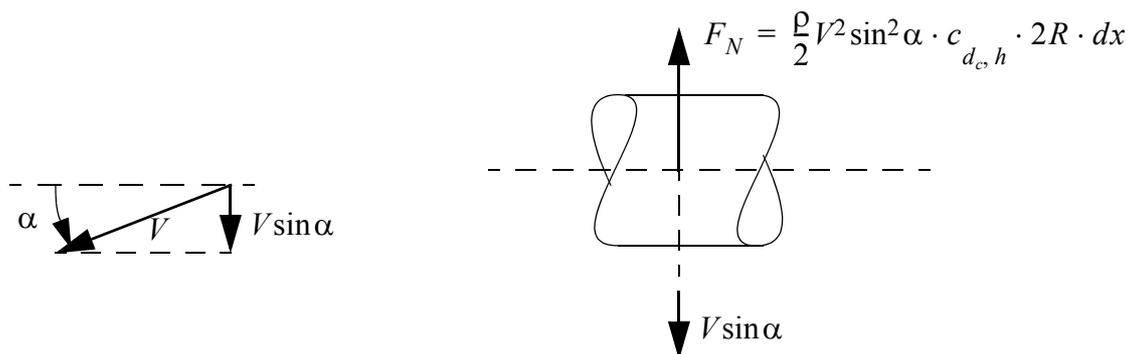


Bild 3.13: Prinzip des Querströmungswiderstandes: Querströmungskomponente und resultierende Widerstandskraft

Verteilte Rumpfkkräfte

Im Fall ebener Bewegung entspricht die Querströmungskomponente der Vertikal-Anströmungsgeschwindigkeit w_A , und der Querströmungswiderstand kann über die Beziehung

$$F_N = \frac{\rho}{2} w_A |w_A| \cdot c_{d_c, h} \cdot 2R \cdot dx$$

berechnet werden. Um die Wirkungsrichtung der Kraft in Funktion der Anströmung korrekt wiederzugeben, wurde dabei die Betragsfunktion eingeführt. Bei der Berechnung der verteilten Kräfte muss als Querströmungskomponente die lokale Anströmung als Überlagerung aus translatorischer Bewegung und Drehbewegung berücksichtigt werden.

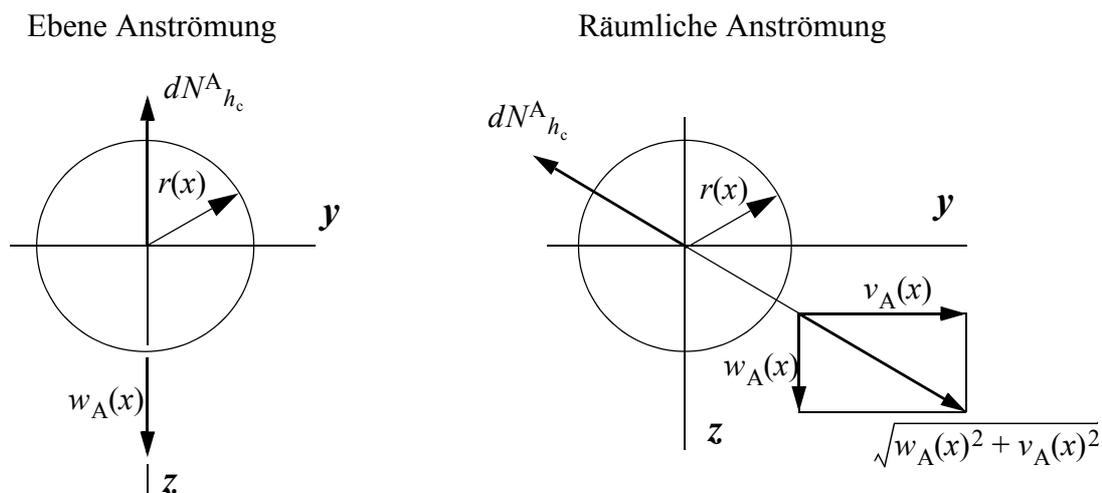


Bild 3.14: Viskose Querströmungskraft, Schematik zur räumlichen Anströmung

Unter räumlicher Anströmung mit lokaler Vertikalgeschwindigkeit $w_A(x)$ und Seitengeschwindigkeit $v_A(x)$ resultiert für eine Rumpfscheibe die Kraft $dN^A_{h_c}(x)$, wie in Bild 3.14 rechts dargestellt. Daraus berechnen sich die körperfesten Kraftkomponenten

$$dY^A_{h_c}(x) = -\rho v_A(x) \sqrt{v_A(x)^2 + w_A(x)^2} c_{d_c, h} r(x) dx \quad \text{und} \quad (3.44)$$

$$dZ^A_{h_c}(x) = -\rho w_A(x) \sqrt{v_A(x)^2 + w_A(x)^2} c_{d_c, h} r(x) dx. \quad (3.45)$$

Die viskose Querströmung erzeugt kein scheibeneigenes Moment bezüglich des Zentrums der Rumpfscheibe bei x , aber die verteilten Kräfte tragen zum Gesamtmoment um den Referenzpunkt CR über die Beziehung

$$dQ^A_{h_c|CR}(x) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times dF^A_{h_c}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \cdot dZ^A_{h_c}(x) \\ x \cdot dY^A_{h_c}(x) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

bei. Die Anströmungsgeschwindigkeiten an der Stelle x berechnen sich nach Gleichung (3.16).

Berechnung der integralen Rumpfkkräfte

Zur Berechnung der integralen Rumpfkkräfte müssen die verteilt wirkenden Kräfte über die Rumpflänge hochintegriert werden. Im Gegensatz zu den Kraftverteilungsfunktionen der potentialtheoretischen Kräfte sind hier die Funktionen jedoch nicht in anströmungsabhängige und geometrieabhängige Terme entkoppelbar! Grund dafür ist, dass die lokalen Anströmungsgeschwindigkeiten $v(x)$ und $w(x)$ eingesetzt werden und somit sowohl die Funktion

der Anströmung als auch der Geometrieterm (hier in Form der Radiusfunktion $r(x)$) von der Axialkoordinate x abhängen. Infolge dieser Tatsache und der Struktur der Gleichungen (3.44) und (3.45) kann keine geschlossene Lösung der Integralkräfte $Y^A_{h_c}$ und $Z^A_{h_c}$ angegeben werden. Man muss die Kräfte entweder durch numerische Berechnung der Integrale oder über vereinfachende Approximationen berechnen.

Um auch die viskosen Querströmungskräfte in einer analytischen Form integral angeben zu können, wird hier eine Approximationsmethode vorgestellt. Durch Linearisierung der Gleichungen (3.44) und (3.45) um den stationären Geradeausflug ($r = q = 0$) erhält man die Beziehungen

$$dY^A_{h_c}(x) = -\rho c_{d_c, h} r(x) \cdot v_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2} - \rho c_{d_c, h} r(x) \cdot x \frac{(2v_A^2 + w_A^2) \cdot r - v_A w_A \cdot q}{\sqrt{v_A^2 + w_A^2}},$$

$$dZ^A_{h_c}(x) = -\rho c_{d_c, h} r(x) \cdot w_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2} - \rho c_{d_c, h} r(x) \cdot x \frac{v_A w_A \cdot r - (v_A^2 + 2w_A^2) \cdot q}{\sqrt{v_A^2 + w_A^2}}.$$

Die linearisierten Integranden sind nun in Funktionen der Strömungszustände und der Geometrieterme entkoppelt. Für den Fall homogener Anströmung (s. auch Seite 47) lassen sich die integralen Kräfte und Momente in geschlossener Beiwerteschreibweise angeben:

$$Y^A_{h_c} = -\rho \cdot \left[v_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2} I_{1c} + \frac{(2v_A^2 + w_A^2) \cdot r - v_A w_A \cdot q}{\sqrt{v_A^2 + w_A^2}} I_{2c} \right],$$

$$Z^A_{h_c} = -\rho \cdot \left[w_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2} I_{1c} + \frac{v_A w_A \cdot r - (v_A^2 + 2w_A^2) \cdot q}{\sqrt{v_A^2 + w_A^2}} I_{2c} \right]$$
(3.47)

wobei die integrale Axialkraft Kraft $X^A_{h_c}$ bereits durch Gleichung (3.43) beschrieben ist. Weiter gilt

$$L^A_{h_c} = 0$$

$$M^A_{h_c} = \rho \cdot \left[w_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2} I_{2c} + \frac{v_A w_A \cdot r - (v_A^2 + 2w_A^2) \cdot q}{\sqrt{v_A^2 + w_A^2}} I_{3c} \right],$$

$$N^A_{h_c} = -\rho \cdot \left[v_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2} I_{2c} + \frac{(2v_A^2 + w_A^2) \cdot r - v_A w_A \cdot q}{\sqrt{v_A^2 + w_A^2}} I_{3c} \right]$$
(3.48)

wobei die zugehörigen Rumpfindegrale in Tabelle 3.4 definiert sind.

Als Qualitätsmaß des Approximationsfehlers kann das Verhältnis zwischen translatorischer Anströmungsgeschwindigkeit und drehrateninduzierter Quergeschwindigkeit gegeben durch die Relation

| | | |
|--|--|--|
| Unter der Annahme $c_{d_e, h} = \text{konstant}$ entlang des Rumpfes gilt: | | |
| $I_{1_c} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} r(x) dx$ | $I_{2_c} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} r(x) x dx$ | $I_{3_c} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} r(x) x^2 dx$ |
| $c_{1_c} = 2I_{1_c} / V^{2/3}$ | $c_{2_c} = 2I_{2_c} / (V^{2/3} l_R)$ | $c_{3_c} = 2I_{3_c} / (V^{2/3} l_R^2)$ |
| Falls $c_{d_e, h}(x) = f(x)$ entlang des Rumpfes muss gerechnet werden: | | |
| $\tilde{I}_{1_c} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} c_{d_e, h}(x) r(x) dx$ | $\tilde{I}_{2_c} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} c_{d_e, h}(x) r(x) x dx$ | $\tilde{I}_{3_c} = \int_{x_{l_h}}^{x_n} c_{d_e, h}(x) r(x) x^2 dx$ |
| $\tilde{c}_{1_c} = 2\tilde{I}_{1_c} / V^{2/3}$ | $\tilde{c}_{2_c} = 2\tilde{I}_{2_c} / (V^{2/3} l_R)$ | $\tilde{c}_{3_c} = 2\tilde{I}_{3_c} / (V^{2/3} l_R^2)$ |

Tabelle 3.4 Rumpfinintegrale zur Beschreibung der Rumpfqquerströmung

$$l_R \sqrt{\frac{q^2 + r^2}{v^2 + w^2}}$$

herangezogen werden. Die relativen Approximationsfehler sind gering, falls dieser Wert kleiner 1 ist. Liegt er jedoch über 1.5, muss ein relativer Fehler in der Größenordnung von 10% und mehr erwartet werden.

3.6 Aerodynamik der Leitwerke und des Heckbereichs

Es gibt eine Vielzahl von Veröffentlichungen über die aerodynamischen Kräfte auf Tragflügel, Leitwerke und Ruderflächen von Flächenflugzeugen (Schlichting und Truckenbrodt [33], Etkin [34]). Obwohl die modellierten Effekte in der Luftschiffaerodynamik auch anzutreffen sind, können die Modelle meistens nicht direkt übertragen werden: Die Streckung der Luftschiffleitwerke ist klein und die Pfeilung der Flügelvorderkante ist typischerweise groß. Zudem sind im Heckbereich Anstell- oder Schiebewinkel zu erwarten, welche den Gültigkeitsbereich der Modelle überschreiten. Eine Diskussion der Anwendbarkeit dieser Methoden oder deren Anpassung auf Luftschiffkonfigurationen findet man in [11] oder [35].

Setzt man die Leitwerkskraftfunktionen zur Beschreibung der Anteile aus *Zirkulationsauftrieb*, *Profilwiderstand*, *induziertem Widerstand* sowie *Querströmungswiderstand* an, erkennt man, dass für Rumpf (Kapitel 3.2.1 und 3.5) und Leitwerke (Gleichung (3.49) bis (3.52)) identische Abhängigkeiten von den Anströmungszuständen resultieren. Dieser Umstand wird für eine Modellvereinfachung ausgenutzt: Die Kraftanteile von Rumpf und Leitwerken werden im Heckbereich zu einer Gesamtkraft zusammengefasst. Dabei muss berücksichtigt werden, dass die eingesetzten Beiwerte "Mischbeiwerte" aus Rumpf und Leitwerksanteilen darstellen, oder entsprechende gegenseitige Beeinflussungen bereits in den Beiwerten enthalten sind. Im Folgenden werden also die Kräfte auf die gesamte Leitwerk-Rumpfanordnung in integraler Form beschrieben. Eine Aufteilung dieser Kräfte über die

Leitwerke und das Hecksegment oder eine entsprechende Verfeinerung der Abschätzung der Beiwerte kann über die Ansätze in der oben angegebenen Literatur erfolgen.

Diese Vereinfachung ist nur zulässig, falls die Leitwerke im hinteren Heckbereich montiert sind. Sind die Leitwerke weiter vorne montiert, sollten die einzelnen Flächen getrennt beschrieben werden und über Einflussfaktoren die gegenseitige Wirkung von Rumpf und Leitwerken berücksichtigt werden ([35]).

3.6.1 Leitwerkskräfte unter ebener Anströmung bei kleinen Anstellwinkeln

Die Kräfte auf das Leitwerk werden über den Anteil aus Zirkulationsauftrieb, induziertem Widerstand, Profilwiderstand und Querströmungswiderstand modelliert. Sie werden in Funktion der lokalen Anströmung berechnet. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hier bei den Anströmungsgrößen auf eine Indizierung verzichtet.

Die in der Vertikalebene wirkenden Kraftbeiträge, jeweils in körperfeste Achsrichtungen transformiert, betragen:

Zirkulationsbehafteter Auftrieb:

Mit $L_f = qc_{l,f}(\alpha)S_f = qc_{l_{\alpha_0},f}\sin\alpha S_f$ folgt

$$\begin{aligned} X_{f_{\alpha}}^A &= qc_{l_{\alpha_0},f}\sin\alpha S_f \cdot \sin\alpha = \frac{\rho}{2}c_{l_{\alpha_0},f}wS_f \\ Z_{f_{\alpha}}^A &= -qc_{l_{\alpha_0},f}\sin\alpha S_f \cdot \cos\alpha = -\frac{\rho}{2}c_{l_{\alpha_0},f}uS_f \end{aligned} \quad (3.49)$$

Induzierter Widerstand:

Mit $D_{\text{ind},f} = qc_{d_{\text{ind},f}}(\alpha)S_f$ und der quadratischen Beziehung zum Auftriebsbeiwert nach

$$c_{d_{\text{ind},f}}(\alpha) = \frac{c_{l_{\alpha_0},f}^2}{\pi\Lambda_f} = c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f}\sin^2\alpha, \text{ mit } c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f} = \frac{c_{l_{\alpha_0},f}^2}{\pi\Lambda_f} \text{ folgt}$$

$$\begin{aligned} X_{f_{d_{\text{ind}}}}^A &= -qc_{d_{\text{ind}\alpha_0},f}\sin^2\alpha S_f \cdot \cos\alpha = -\frac{\rho}{2}c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f}\frac{w^2u}{V}S_f \stackrel{\alpha \ll 1}{\approx} -\frac{\rho}{2}c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f}wS_f \\ Z_{f_{d_{\text{ind}}}}^A &= -qc_{d_{\text{ind}\alpha_0},f}\sin^2\alpha S_f \cdot \sin\alpha = -\frac{\rho}{2}c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f}\frac{w^3}{V}S_f \stackrel{\alpha \ll 1}{\approx} 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Profilwiderstand

$$\begin{aligned} X_{f_{w_0}}^A &= -qc_{d_0,f} \cos \alpha S_f \cdot \cos \alpha = -\frac{\rho}{2} c_{d_0,f} u u S_f \\ Z_{f_{w_0}}^A &= -qc_{d_0,f} \cos \alpha S_f \cdot \sin \alpha = -\frac{\rho}{2} c_{d_0,f} u w S_f \end{aligned} \quad (3.51)$$

Querströmungswiderstand (vgl. Bild 3.13)

$$\begin{aligned} X_{f_c}^A &= 0 \\ Z_{f_c}^A &= -qc_{d_c,f} |\sin \alpha| \sin \alpha S_f = -\frac{\rho}{2} c_{d_c,f} w |w| S_f \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mit Hilfe der Anteilsfaktoren $\eta_{f_c h}$ und $\eta_{f_c f}$ kann der Querströmungswiderstand des Heckbereichs in einen Rumpf- und Leitwerksanteil unterteilt werden

$$Z_{f_c}^A = -\frac{\rho}{2} c_{d_c,f} (\eta_{f_c f} + \eta_{f_c h}) w |w| S_f \quad \text{mit} \quad \eta_{f_c f} + \eta_{f_c h} = 1. \quad (3.53)$$

Die Anteilsfaktoren können in erster Näherung anteilig der Projektionsflächen des Rumpfes und der Leitwerke gewählt werden.

Die Zusammenfassung in zirkulationsbedingte (Index a : anliegend, attached) und wirbel- oder widerstandsbedingte (Index c : cross-flow) Anteile ergibt die Gesamtkraftkomponenten (die z -Komponente des induzierten Widerstands ist dabei vernachlässigt)

$$\begin{aligned} X_f^A &= X_{f_a}^A + X_{f_c}^A = \frac{\rho}{2} \left(c_{l_{\alpha_0},f} - c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \frac{u}{V} \right) w w S_f - \frac{\rho}{2} c_{d_0,f} u u S_f \\ Z_f^A &= Z_{f_a}^A + Z_{f_c}^A = -\frac{\rho}{2} \left(c_{l_{\alpha_0},f} u w + c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \frac{w^3}{V} \right) S_f - \frac{\rho}{2} (c_{d_c,f} w |w| + c_{d_0,f} u w) S_f \end{aligned} \quad (3.54)$$

Da keine leitwerkseigenen Momente modelliert werden, sollte als Kraftangriffspunkt ein momentenfreier Punkt gewählt werden. Für die Zirkulationskräfte bietet sich ein Punkt bei $x_{f_a} \approx t/4$ für die Querströmungskräfte ein Punkt bei $x_{f_c} \approx t/2$ an (s. Bild 3.15). Entsprechend ihrer Angriffspunkte erzeugen die Leitwerkskräfte somit das Moment

$$M_{f \setminus \text{CR}}^A = -(x_{f_a} \cdot Z_{f_a}^A + x_{f_c} \cdot Z_{f_c}^A) \quad (3.55)$$

bezüglich des Referenzpunktes CR des körperfesten Koordinatensystems.

Als Referenzfläche wird die Leitwerksfläche inklusive Rumpfüberdeckung nach Bild 3.15 angenommen. Diese Wahl ist insbesondere als Referenzfläche für die zirkulationsbedingten Kräfteanteile nur bedingt geeignet, da diese Kräfte vorwiegend durch die Leitwerke

erzeugt werden. Um dies zu berücksichtigen werden später (Kapitel 3.9.2) Abminderungsfaktoren für die zirkulationsbedingten Anteile bestimmt.

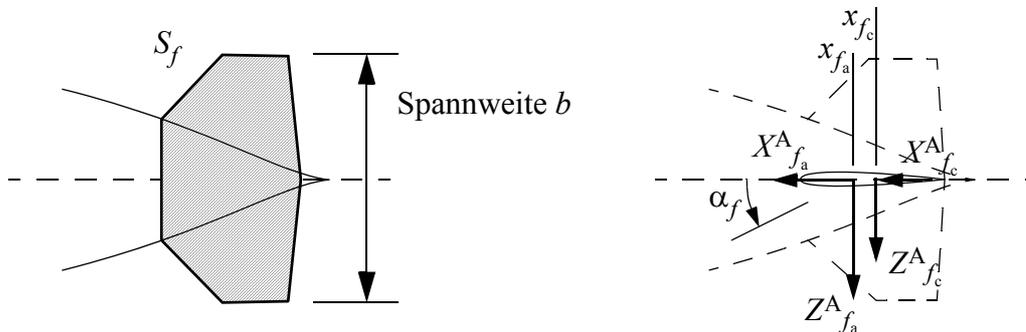


Bild 3.15: Bezugsfläche Leitwerke, Kräfte und Angriffspunkte

Gültigkeitsbereich der Ansätze

Die durch die Gleichungen (3.49) bis (3.55) angegebenen Kräfte und Momente vermögen die realen Kräfte für Anstellwinkel bis 20° zu approximieren. Bei größeren Anstellwinkeln beginnt die Strömung großflächig abzulösen, die zirkulationsbedingten Kräfte brechen zusammen. In diesem Falle müssen die Beiwerte $c_{l_{\alpha_0, f}}$ und $c_{d_{ind, f}}$ reduziert werden. Bei welchem Winkel diese Stalleffekte zum Tragen kommen ist von der Rumpf- und Leitwerksgeometrie abhängig. Mögliche Formfunktionen für die zirkulationsbedingten Beiwerte müssen aus Windkanalmessungen oder aus Profildaten der Leitwerke abgeleitet werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass infolge der Vorderkantenpfeilung und kleiner Streckung (Kantenwirbel) der Zusammenbruch des Auftriebs zu größeren Anstellwinkeln hin verschoben wird. Bild 3.16 zeigt schematischen den Verlauf des Auftriebswirkungsgrads η_{f_a} .

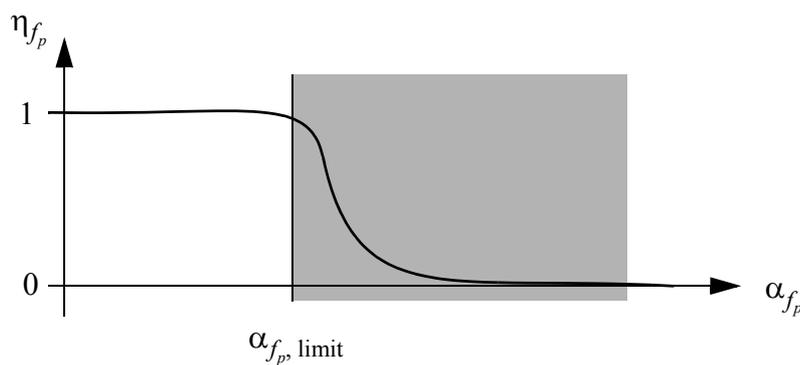


Bild 3.16: Zusammenbruch der zirkulationsbedingten Kräfte (schematisch)

3.6.2 Aerodynamische Leitwerkskräfte unter räumlicher Anströmung

In diesem Unterkapitel werden die Kräfte der horizontalen und vertikalen Leitwerksfläche und des Rumpfhecksegments unter räumlicher Anströmung beschrieben. Neben der Schräganströmung muss dabei auch die Anströmung infolge Rollbewegung berücksichtigt werden.

Zur Berechnung der Kräfte werden jeweils die lokalen Anströmungsbedingungen in den Bezugspunkten bei x_{f_a} und x_{f_c} , berechnet nach der Beziehung (3.16), berücksichtigt. Die lokalen Anstellwinkel und Staudrücke werden für die horizontalen und die vertikalen Leitwerksflächen wie folgt getrennt berechnet:

Für das horizontale Leitwerk

$$\alpha_{f_i} = \alpha(x_{f_i}) = \operatorname{atan} \frac{w_A(x_{f_i})}{u_A(x_{f_i})}, \quad q_{\alpha, f} = \frac{\rho}{2} (u_A(x_{f_i})^2 + w_A(x_{f_i})^2) \quad \text{für } i = a, c \quad (3.56)$$

und für das vertikale Leitwerk entsprechend

$$\tilde{\beta}_{f_i} = \tilde{\beta}(x_{f_i}) = \operatorname{atan} \frac{v_A(x_{f_i})}{u_A(x_{f_i})}, \quad q_{\tilde{\beta}, f} = \frac{\rho}{2} (u_A(x_{f_i})^2 + v_A(x_{f_i})^2) \quad \text{für } i = a, c. \quad (3.57)$$

Man beachte, dass der durch Gleichung (3.57) definierte Schiebewinkel nicht der allgemein üblichen Definition des Schiebewinkels in der Flugmechanik entspricht.

Die Berechnung des Rumpfteils infolge Querströmung und Ablöseeffekte muss entsprechend den Ansätzen in Abschnitt 3.5 "Rumpfkraft infolge viskoser Effekte" (vgl. auch Bild 3.14) über den räumlichen Rumpfanströmungswinkel berechnet werden und anteilig gemäß Gleichung (3.53) mit dem Faktor $\eta_{f,h}$ gewichtet werden. Somit wird der Anteil der Leitwerksflächen proportional $w|w|$ für das horizontale Leitwerkspaar und entsprechend $v|v|$ für die vertikalen Flächen gerechnet, der Querwiderstandsanteil des Rumpfsegments jedoch nach Gleichung (3.44) und (3.45) proportional $w\sqrt{v^2 + w^2}$ und $v\sqrt{v^2 + w^2}$. Die Komponenten v und w bezeichnen dabei die lokalen Anströmungsgeschwindigkeiten.

Die zirkulationsbedingten Kräfte und die Leitwerksanteile der Querströmungskräfte werden im Folgenden in Beiwerteschreibweise angegeben. Dies ermöglicht die direkte Berücksichtigung der Ruderauslenkung nach den Ansätzen von Seite 70.

Die Axialkraft rechnet sich entsprechend des ebenen Falles, dabei müssen die Anteile der Höhen- und Seitenleitwerke berücksichtigt werden. In der Summe folgt

$$\begin{aligned} X_f^A &= X_{f_a}^A + X_{f_c}^A \quad \text{mit} \\ X_{f_a}^A &= (q_{\alpha, f} (c_{l_{\alpha_0, f}} - c_{d_{\text{ind} \alpha_0, f}} \cos \alpha_{f_a}) \sin^2 \alpha_{f_a} + q_{\tilde{\beta}, f} (c_{l_{\alpha_0, f}} - c_{d_{\text{ind} \alpha_0, f}} \cos \tilde{\beta}_{f_a}) \sin^2 \tilde{\beta}_{f_a}) S_f \\ X_{f_c}^A &= -\frac{\rho}{2} c_{d_0, f} u_A(x_{f_c})^2 S_f \quad . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Lateralkraft auf das vertikale Leitwerk und die Vertikalkraft auf das horizontale Leitwerk und die Rumpfsegmente betragen

$$Y_f^A = Y_{f_a}^A + Y_{f_c}^A \quad \text{mit}$$

$$Y_{f_a}^A = -q_{\tilde{\beta}_{a,f}} \left(c_{l_{\alpha_0,f}} \frac{\sin 2\tilde{\beta}_{f_a}}{2} + c_{d_{\text{ind}\alpha_0,f}} \sin^3 \alpha_{f_a} \right) S_f \quad (3.59)$$

$$Y_{f_c}^A = -q_{\tilde{\beta}_{c,f}} \left(\eta_{f_c} c_{d_{c,f}} \sin \tilde{\beta}_{f_c} |\sin \tilde{\beta}_{f_c}| + c_{d_{0,f}} \frac{\sin 2\alpha_{f_c}}{2} \right) \cdot S_f - \frac{\rho}{2} v \sqrt{v^2 + w^2} c_{d_{c,f}} \cdot \eta_{f_c} h S_f$$

$$Z_f^A = Z_{f_a}^A + Z_{f_c}^A \quad \text{mit}$$

$$Z_{f_a}^A = -q_{\alpha_{a,f}} \left(c_{l_{\alpha_0,f}} \frac{\sin 2\alpha_{f_a}}{2} + c_{d_{\text{ind}\alpha_0,f}} \sin^3 \alpha_{f_a} \right) S_f \quad (3.60)$$

$$Z_{f_c}^A = -q_{\alpha_{c,f}} \left(\eta_{f_c} c_{d_{c,f}} \sin \alpha_{f_c} |\sin \alpha_{f_c}| + c_{d_{0,f}} \frac{\sin 2\alpha_{f_c}}{2} \right) S_f - \frac{\rho}{2} w \sqrt{v^2 + w^2} c_{d_{c,f}} \cdot \eta_{f_c} h S_f$$

Die entsprechenden Momente bezüglich des Referenzpunktes CR lauten

$$M_{f|CR}^A = -x_{f_a} \cdot Z_{f_a}^A - x_{f_c} \cdot Z_{f_c}^A \quad (3.61)$$

$$N_{f|CR}^A = x_{f_a} \cdot Y_{f_a}^A + x_{f_c} \cdot Y_{f_c}^A \quad .$$

Abschätzung des Roll-Rollmoments

Durch die Rollbewegung des Luftschiffes wird über die Spannweite der Leitwerke eine räumliche Anströmung induziert. Der Verlauf dieser induzierten Anströmung und des resultierenden Kräftepaars sind in Bild 3.17 schematisch dargestellt.

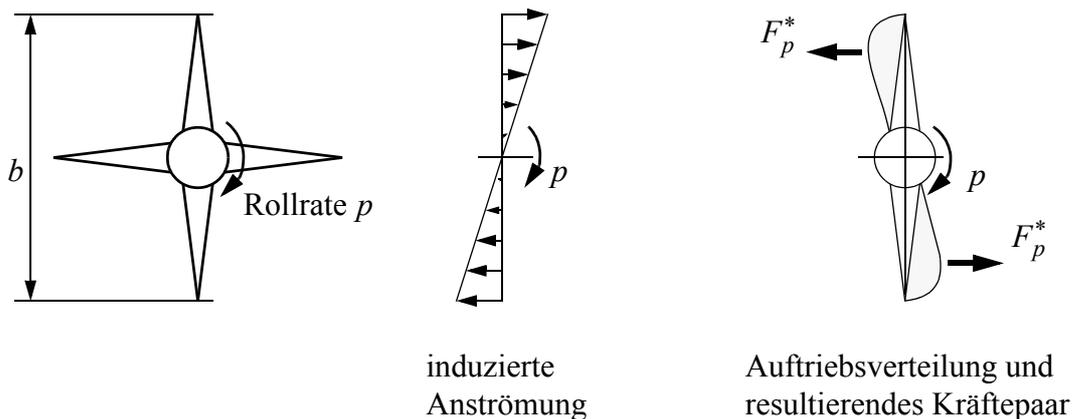


Bild 3.17: Schematik der Entstehung des Roll-Rollmoments

In der Literatur (Etkin [34]) wird das Roll-Rollmoment L_p^A in Funktion der dimensionslosen Rollrate $p^* = p \cdot b/2 \cdot 1/u$ und des Rollbeiwerts c_{L_p} als

$$L_{p,f}^A = \frac{\rho}{2} V^2 S_f b c_{L_p} p^*$$

dargestellt. Das Rollmoment soll hier jedoch unter Anwendung der eingeführten Leitwerkskraftansätze beschrieben werden. Dazu wird anstelle der dimensionslosen Rollrate der induzierte Anstellwinkel an den Flügelen

$$\alpha_{p,f} = \operatorname{atan} \frac{p \cdot b/2}{u} = \operatorname{atan} p^*$$

verwendet. Dieser Winkel wird als ‘‘Roll-Anstellwinkel’’ aufgefasst. Er bildet zusammen mit dem ‘‘Roll-Staudruck’’

$$q_{p,f} = \frac{\rho}{2} \left(u^2 + \left(p \frac{b}{2} \right)^2 \right)$$

die Argumente zur Berechnung der flächennormalen Kraft F_p^* . Durch die besondere Wahl dieses Bezugsdruckes wird bei geringen Fluggeschwindigkeiten der Effekt der Queranströmung durch Rollen berücksichtigt. Man findet somit F_p^* proportional

$$\begin{aligned} F_p^* &\sim q_{p,f} \frac{S_f}{2} \left((c_{l_{\alpha_0,f}} + c_{d_{0,f}}) \frac{\sin 2\alpha_{p,f}}{2} + c_{d_{\text{ind}\alpha_{0,f}}} \sin^3 \alpha_{p,f} + c_{d_{c,f}} \sin \alpha_{p,f} |\sin \alpha_{p,f}| \right) \\ &\sim \frac{\rho}{4} \left((c_{l_{\alpha_0,f}} + c_{d_{0,f}}) \cdot u p \frac{b}{2} + c_{d_{\text{ind}\alpha_{0,f}}} \frac{b^2 p^2}{4} \sin \alpha_{p,f} + c_{d_{c,f}} \cdot p |p| \frac{b^2}{4} \right) S_f \end{aligned}$$

Das aus den 4 Leitwerksflächen resultierende Rollmoment (Angriffspunkt bei $b/2$) berechnet sich proportional

$$L_{p,f}^A \sim 2 \cdot b \cdot F_p^*$$

Da sowohl α_p als auch q_p die Anströmung an den äußeren Leitwerksenden beschreiben und zudem die Rumpffläche keinen Beitrag zur Rolldämpfung liefert, muss ein reduzierender Proportionalitätsfaktor, der Rollwirkungsgrad η_{L_p} , eingeführt werden. Das Rollmoment berechnet sich somit zu

$$\begin{aligned} L_{p,f}^A &= L_{p,f_a}^A + L_{p,f_c}^A \quad \text{mit} \\ L_{p,f_a}^A &= -\eta_{L_p} q_{p,f} c_{l_{\alpha_0,f}} \frac{\sin 2\alpha_{p,f}}{2} b S_f, \\ L_{p,f_c}^A &= -\eta_{L_p} q_{p,f} \left(c_{d_{0,f}} \frac{\sin 2\alpha_{p,f}}{2} + c_{d_{c,f}} \sin \alpha_{p,f} |\sin \alpha_{p,f}| \right) b S_f \end{aligned} \quad (3.62)$$

dabei wird der Term des induzierten Widerstands infolge geringer Größenordnung vernachlässigt. Durch Vergleich mit Etkin's tabellierten c_{L_p} -Werten kann η_{L_p} abgeschätzt werden.

Berücksichtigung weiterer aerodynamischer Wirkungen bei unsymmetrischem Flug

Wird das Heck unsymmetrisch angeströmt, treten in Realität noch weitere aerodynamische Effekte auf. Bei kleinen Anströmungswinkeln sind sie hauptsächlich eine Folge des dihedraalen Effekts infolge der Pfeilung der Leitwerke (Etkin [34]), bei stärkeren Anstellungen die Folge der unsymmetrischen Umströmungsbedingungen (Grenzschichtdickenverteilung, Ablösungen, Wirbel) der jeweils luv- und leeseitigen Leitwerksfläche.

Von diesen Effekten wird nur der resultierende Beitrag an das Rollmoment berücksichtigt. Das Rollmoment wird über den Beiwert c_{L_β} für die horizontalen Leitwerksflächen und über den Beiwert c_{L_α} für die vertikalen Flächen modelliert. Der Momentenbeitrag im linearen Anstellwinkelbereich berechnet sich nach

$$L^A_{\alpha\beta,f} = \frac{\rho}{2} V(x_{f_a})^2 (c_{L_\alpha} \alpha_{f_a} + c_{L_\beta} \tilde{\beta}_{f_a} + c_{L_{\alpha\beta}} \alpha_{f_a} \tilde{\beta}_{f_a}) S_f. \quad (3.63)$$

3.6.3 Berücksichtigung der Ruderauslenkung

Die Ruderflächen eines Luftschiffs mit Kreuzleitwerk bilden jeweils paarweise Höhen- und Seitenruder, durch differentielles Auslenken z.B. der beiden Höhenruderflächen kann die Wirkung eines Querruders erzeugt werden. Die Ruderauslenkungswinkel und -richtungen sind in Abbildung 2.5 definiert.

Die Wirkung der Ruderauslenkung wird über die Beeinflussung des entsprechenden Anstellwinkels erfasst. Zwischen den Auslenkungswinkeln der Höhen-, Seiten- und Querruder und den entsprechenden Anströmungswinkeln gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \alpha(x_f) + \eta_\eta(\eta) \cdot \eta \\ \tilde{\beta}_f &= \tilde{\beta}(x_f) - \eta_\zeta(\zeta) \cdot \zeta, \\ \alpha_p &= \alpha_p + \eta_\xi(\xi) \cdot \xi \end{aligned} \quad (3.64)$$

mit $\alpha(x_f), \beta(x_f)$: lokaler Anstellwinkel der Leitwerksanströmung, nach Gleichungen (3.56) und (3.57)

und $\eta_i(i)$: Ruderwirkungsgrad in Funktion des Ausschlags.

Der Ruderwirkungsgrad kann aus Tabellen entnommen (Schlichting, Etkin) oder aus Windkanaldaten abgeleitet werden.

Bei hohen Anstell- und Schiebewinkeln entstehen asymmetrische Anströmungsbedingungen der Ruder, welche einen leichten Rollmomentenbeitrag liefern. Dieser Effekt kann für flugmechanische Stabilitäts- und Steuerbarkeitsuntersuchungen in erster Näherung vernachlässigt werden.

3.6.4 Instationäre Leitwerkskräfte

Wie bei der Beschleunigung der Rumpfumströmung erzeugt auch eine beschleunigte Umströmung der Leitwerke instationäre aerodynamische Kräfte. Die Kräfte infolge axialer Beschleunigung sind bei den Leitwerken vernachlässigbar. Bei Querbeschleunigung (infolge α oder \dot{w}) machen sich im Gegensatz zur Rumpfumströmung hier jedoch zwei Effekte bemerkbar: Einerseits ein scheinbare Masse Effekt infolge erzwungener Umströmungsbeschleunigung, andererseits aber auch ein zeitlich verzögertes Folgen der Zirkulations- und Rotationsanteile infolge der Fluidträgheit.

Effekte im Anstellwinkelbereich unterhalb Stall

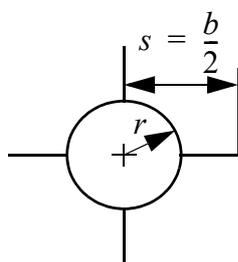
Der erste der beiden Effekte führt zu einer Erhöhung der Kräfte proportional \dot{w} (positives \dot{w} bewirkt Kraft in negative z -Richtung), während der zweite Effekt bewirkt, dass sich der zirkulationsbedingte Auftrieb nur zeitverzögert dem Wert des aktuellen α nähert (Küssner Funktion [52], [53]). Diese beiden Effekte können mathematisch wie folgt beschrieben werden:

$$Z^A(\dot{w}) = -m^* \dot{w} - q S c_l (\alpha - \dot{\alpha} \cdot \Delta t), \text{ für kleine } \alpha \text{ gilt } \dot{\alpha} \approx \dot{w}/u.$$

Dabei stellt m^* die scheinbare Masse des Heckbereichs dar, Δt die zeitliche Verzögerung der Zirkulations- und Wirbelbildung.

Eine positive Beschleunigung \dot{w} erwirkt eine Kraft entgegen der Beschleunigungsrichtung, also eine *Auftriebserhöhung*, während der Zirkulationsauftrieb gegenüber dem aktuellen Anstellwinkel α reduziert wird. Die beiden Effekte haben entgegengesetztes Vorzeichen, sie heben sich nach DeLaurier ([39]) für Leitwerke mit luftschifftypischer Streckung gegenseitig auf.

Mit Hilfe folgender Formel kann die scheinbare Masse m^* einer Rumpf-Leitwerkskonfiguration abgeschätzt werden: Für einen Rumpfquerschnitt mit Kreuzleitwerk beträgt die scheinbare Masse eines infinitesimal schmalen Schnittes nach [7]



$$dm^* = \pi r^2 \left(\frac{s^2}{r^2} + \frac{r^2}{s^2} - 1 \right) dx.$$

Bild 3.18: Scheinbare Masse eines Heckquerschnitts

Effekte im Anstellwinkelbereich oberhalb Stall

Befindet man sich bei größeren Anstellwinkeln im Post-Stall-Bereich, fällt der aufhebende Effekt der instationären Zirkulation weg, und die scheinbare Masse Effekte erzeugen

beschleunigungsproportionale Kräfte. Bei sehr hohen Anstellwinkeln (Querbewegung) addiert sich auch die mitbewegte Masse des Totwassers dazu (Ähnlichkeit der Fallschirm-Aerodynamik). Diese Effekte werden im Modell jedoch nicht berücksichtigt.

3.7 Das Aerodynamische Gesamtmodell

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die mathematischen Modelle zur Beschreibung der aerodynamischen Kräfte des Rumpfes und des Heckbereichs vorgestellt. Aus diesen Anteilen wird nun das aerodynamische Gesamtmodell erstellt.

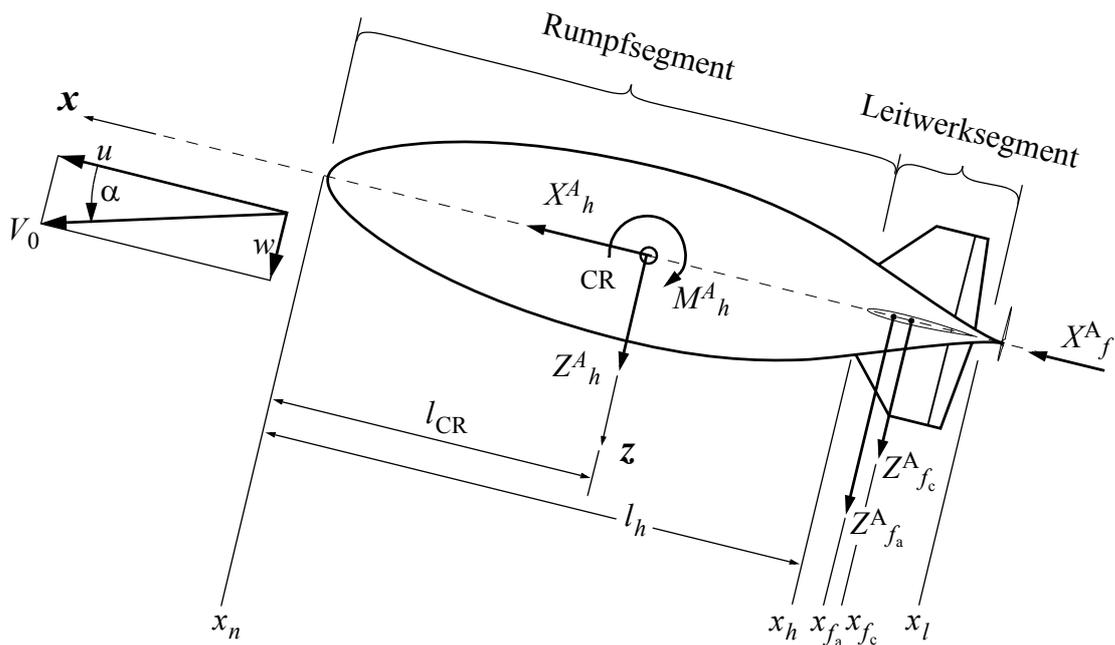


Bild 3.19: Aufteilung zwischen Rumpf- und Leitwerkskräften in der Vertikalebene, Geometrieangaben

3.7.1 Festlegung der Modellbereiche, Wahl der Integrationsgrenzen

Wie bereits in Bild 3.1 dargestellt wurde, ist das Aerodynamikmodell in ein Rumpfsegment und ein Hecksegment unterteilt. Im Rumpfsegment wirken ausschließlich Rumpfkräfte, während im Hecksegment eine Kombination aus Rumpfkräften und Leitwerkskräften angreift (s. Bild 3.19). Wie im Kapitel 3.6 "Aerodynamik der Leitwerke und des Heckbereichs" bereits angesprochen, bildet das Aerodynamikmodell des Hecks beide Anteile mit ab. Die Wahl dieses Modells ist zulässig, wenn die Leitwerke hinten am Heck montiert sind, wie es z.B. beim Luftschiff Lotte der Fall ist. Für Luftschiffe mit weiter vorne montierten Leitwerken ist diese Art des integralen Heckmodells nur bedingt sinnvoll (vgl. auch Diskussion auf Seite 64).

Die axialen Kräfte des Rumpfhecksegments, d.h. die axiale Kraft infolge der Druckverteilung über den Heckbereich des Rumpfes und die viskosen Kräfte infolge Axialströmung werden durch Integration der entsprechenden Rumpfkraftanteile bis ans Schiffsende berechnet. Somit ergeben sich zwei Integralbereiche für zwei Kräftegruppen. Sie sind in

Tabelle 3.5 zusammengefasst, geometrische Angaben dazu in Bild 3.19. Zur Berücksichtigung nichtlinearer Effekte könnten die Integralgrenzen auch variabel gehalten werden.

| Integralgrenzen | Gültig für die Kräfte | |
|---|--|---|
| x_h bis x_n (Leitwerk bis Nase) | Rumpfnormalkräfte infolge stationärer Anströmung | $dY^A_{h_{pot}}, dZ^A_{h_{pot}},$ und $dY^A_{h_c}, dZ^A_{h_c}$ $dM^A_{h_{pot}}, dN^A_{h_{pot}},$ und $dN^A_{h_c}, dN^A_{h_c}$ |
| x_l bis x_n (Rumpfbis bis Nase) | Rumpfaxialkräfte, alle Komponenten der scheinbare Masse- Kräfte und der aero- statischen Windkräfte. | $dX^A_{h_{pot}}, dX^A_{h_0}$ $dF^A_{h_{pot-K-acc}}, dF^A_{h_{pot-ind}}, dF^A_{h_{pot-W-acc}}$ und Momente $dF^A_{h_{static-W}}$ und $dQ^A_{h_{static-W}}$ |

Tabelle 3.5 Integralgrenzen der Rumpfkkräfte

3.7.2 Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen Rumpf und Heck

Um aerodynamische Wechselwirkungen zwischen den beiden Bereichen zu berücksichtigen, werden nach dem Vorschlag von Jones und DeLaurier gegenseitige Einflusskoeffizienten eingeführt. Der Koeffizient $\eta_k(x)$ dient der Berücksichtigung des Einflusses der Leitwerke auf die Rumpfkkräfte, der Koeffizient η_f der Berücksichtigung des Einflusses des Rumpfes auf die Leitwerke. Diese Koeffizienten dienen als freie Modellparameter beim Abgleich der Modellkräfte mit Windkanaldaten.

Die scheinbare Masse Kräfte (inklusive rollinduzierter Kräfte) und die aerostatischen Kräfte infolge Windbeschleunigung werden über das "reine" Rumpfmodell berechnet, jeglicher Einfluss der Leitwerkskräfte auf diese Kräfteanteile wird vernachlässigt.

3.7.3 Das Gesamtmodell bei nicht homogener Anströmung

Zur Berücksichtigung nicht homogener Anströmungszustände über der Rumpflänge werden die verteilten Kräfteansätze benötigt. Nur die scheinbare Masse Kräfte infolge Bahnbeschleunigung sind von diesen Effekten nicht betroffen und können deshalb direkt in integraler Form angegeben werden: Für den geschlossenen Körper resultieren (aus den Integralen nach Tabelle 3.1) die Werte

$$I_{x_{pot}}^{\dot{u}} = -k_1 V, I_{z_{pot}}^{\dot{w}} = k_2 V \text{ und } I_{m_{pot}}^{\dot{q}} = k' I_{yy}, \text{ sowie } I_{z_{pot}}^{\dot{q}} = I_{m_{pot}}^{\dot{w}} = 0 \quad (3.65)$$

mit Volumen V und Trägheitsmoment I_{yy} des verdrängten Fluidvolumens.

Mit den in Tabelle 3.5 festgelegten Integralgrenzen und den eben eingeführten Einflussfaktoren lauten die Komponenten der Gesamtkraft (der Einflussfaktor η_f fließe direkt in die Leitwerksbeiwerte ein)

$$\begin{aligned}
X^A &= -\rho k_1 V \dot{u}_K + \eta_f X^A_{f_a} + X^A_{f_c} \\
&\quad + \int_{x_l}^{x_n} (\eta_k(x) dX^A_{h_{\text{pot}}}(x) + dX^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dX^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dX^A_{h_{\text{static-W}}}(x) + dX^A_{h_0}(x))
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
Y^A &= -\rho k_2 V \dot{v}_K + \eta_f Y^A_{f_a} + Y^A_{f_c} \\
&\quad + \int_{x_h}^{x_n} (\eta_k(x) dY^A_{h_{\text{pot}}}(x) + dY^A_{h_c}(x)) + \int_{x_l}^{x_n} (dY^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dY^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dY^A_{h_{\text{static-W}}}(x))
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
Z^A &= -\rho k_2 V \dot{w}_K + \eta_f Z^A_{f_a} + Z^A_{f_c} \\
&\quad + \int_{x_h}^{x_n} (\eta_k(x) dZ^A_{h_{\text{pot}}}(x) + dZ^A_{h_c}(x)) + \int_{x_l}^{x_n} (dZ^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dZ^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dZ^A_{h_{\text{static-W}}}(x))
\end{aligned} \tag{3.68}$$

und die Komponenten des Moments

$$L^A = \eta_f L^A_{p,f_a} + L^A_{p,f_c} + \eta_f L^A_{\alpha\beta,f} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
M^A &= -\rho k' I_{yy} \dot{q} - x_{f_a} \cdot \eta_f Z^A_{f_a} - x_{f_c} \cdot Z^A_{f_c} \\
&\quad + \int_{x_h}^{x_n} (\eta_k(x) dM^A_{h_{\text{pot}}}(x) - x dZ^A_{h_c}(x)) + \int_{x_l}^{x_n} (dM^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dM^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dM^A_{h_{\text{static-W}}}(x))
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
N^A &= -\rho k' I_{yy} \dot{r} + x_{f_a} \cdot \eta_f Y^A_{f_a} + x_{f_c} \cdot Y^A_{f_c} \\
&\quad + \int_{x_h}^{x_n} (\eta_k(x) dN^A_{h_{\text{pot}}}(x) + x dY^A_{h_c}(x)) + \int_{x_l}^{x_n} (dN^A_{h_{\text{pot-ind}}}(x) + dN^A_{h_{\text{pot-W-acc}}}(x) + dN^A_{h_{\text{static-W}}}(x))
\end{aligned} \tag{3.71}$$

3.7.4 Gesamtmodell in integraler Form

Unter der Annahme homogener oder quasi-hogener Anströmung über das gesamte Luftschiff (vgl. Diskussion "Integrale potentialtheoretische Rumpfkraft bei Flug durch Windfeld" auf Seite 52) können die Integrale in den Kraftgleichungen (3.66) bis (3.71) vorab gelöst, und das Gesamtmodell in integrierter Form dargestellt werden.

Die Integrallösungen der potentialtheoretischen Anteile sind in Abschnitt 3.3 auf Seite 47 (Gleichungen (3.38) und (3.39)), die der viskosen Anteile in “Berechnung der integralen Rumpfkkräfte” auf Seite 61 (Gleichungen (3.47) und (3.48)) hergeleitet. Für die Berechnung der bestimmten Integrale gelten nun die Grenzen nach Tabelle 3.5. Zusätzlich muss der “Leitwerk auf Rumpf” Einflussfaktor $\eta_k(x)$ bei der Berechnung der Integrale $I_{z_{\text{pot}}}^{uw}$, $I_{z_{\text{pot}}}^{uq}$, $I_{m_{\text{pot}}}^{uw}$ und $I_{m_{\text{pot}}}^{uq}$ und der Integrale von $X_{h_{\text{pot}}}^A$ mitberücksichtigt werden, vgl. dazu auch Gleichungen (3.66) bis (3.71).

Die Gesamtkräfte und -momente berechnen sich als Summe der Rumpf- und Leitwerkskräfte zu

$$F^A = F^A_{h_{\text{pot}}\Sigma} + F^A_{h_c} + \begin{bmatrix} X_f^A \\ Y_f^A \\ Z_f^A \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

beziehungsweise zu

$$Q^A = Q^A_{h_{\text{pot}}\Sigma} + Q^A_{h_c} + \begin{bmatrix} L^A_{p,f} + L^A_{\alpha\beta,f} \\ M^A_{\int CR} \\ N^A_{\int CR} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Die integralen Rumpfkkräfte und -momente werden dabei durch die Gleichung (3.38) und (3.39) beschrieben, die integralen viskosen Rumpfanteile durch die Gleichungen (3.47) und (3.48). Den Beitrag der Leitwerke beschreiben die Gleichungen (3.58) bis (3.63).

3.7.5 Übergang zur Beiwerteschreibweise

Durch Normierung der vorab integrierten Kräfte mit Referenzlänge l_R und -fläche $V^{2/3}$ sowie Staudruck können die Kräfte in Beiwerteschreibweise formuliert werden. Während die Leitwerkskräfte direkt in Beiwerteschreibweise hergeleitet wurden, sind zu den Rumpfintegralen in den Tabellen 3.2, 3.3 und 3.4 bereits die entsprechenden Beiwerteformate angegeben und da $\eta_k(x) = \eta_k = \text{konstant}$ angenommen wird, können diese Beiwerte einfach mit η_k multipliziert werden.

Es werden nun die aerodynamischen Kräfte angegeben, wobei *nur die Kräfte infolge stationärer Bewegung und stationären Windes* (d.h. die Kräfte infolge Relativanströmung und Drehbewegung) berücksichtigt werden, da sich die beschleunigungsproportionalen Kräfte nicht zur Angabe über staudruckbezogene Beiwerte eignen. Die Leitwerksbeiwerte sind bereits in den Gleichungen (3.58) bis (3.63) beschrieben, die potentialtheoretischen Rumpfkkräfte und Momente werden durch die folgenden Gleichungen (3.74) und (3.75) beschrieben,

$$F^A_{h_{\text{pot}}\Sigma} = \frac{\rho}{2} V_A^2 \begin{bmatrix} \eta_k \left(c_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - c_{x_{\text{pot}}}^u \frac{u_A^2}{V_A^2} + c_{x_{\text{pot}}}^{vw} \frac{(v_A^2 + w_A^2)}{V_A^2} \right) V^{2/3} + c_{x_{\text{pot}}}^{wq} \frac{w_A q - v_A r}{V_A^2} V^{2/3} l_R + c_{x_{\text{pot}}}^q \frac{q^2 + r^2}{V_A^2} V^{2/3} l_R^2 \\ \eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{uw} \frac{u_A v_A}{V_A^2} V^{2/3} + \eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{uq} \frac{u_A r}{V_A^2} V^{2/3} l_R + c_{z_{\text{pot-acc}}}^{\dot{w}} \frac{p w_A}{V_A^2} V - c_{z_{\text{pot-acc}}}^{\dot{q}} \frac{p q}{V_A^2} V l_R \\ \eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{uw} \frac{u_A w_A}{V_A^2} V^{2/3} - \eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{qu} \frac{u_A q}{V_A^2} V^{2/3} l_R - c_{z_{\text{pot-acc}}}^{\dot{w}} \frac{p v_A}{V_A^2} V - c_{z_{\text{pot-acc}}}^{\dot{q}} \frac{p r}{V_A^2} V l_R \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$Q^A_{h_{\text{pot}}\Sigma} = \frac{\rho}{2} V_A^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -c_{m_{\text{pot}}}^{uw} \frac{u_A w_A}{V_A^2} V^{2/3} l_R + c_{m_{\text{pot}}}^{uq} \frac{u_A q}{V_A^2} V^{2/3} l_R^2 + c_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \frac{p v_A}{V_A^2} V l_R + c_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \frac{p r}{V_A^2} V l_R^2 \\ c_{m_{\text{pot}}}^{uw} \frac{u_A v_A}{V_A^2} V^{2/3} l_R + c_{m_{\text{pot}}}^{uq} \frac{u_A r}{V_A^2} V^{2/3} l_R^2 + c_{m_{\text{pot}}}^{\dot{w}} \frac{p w_A}{V_A^2} V l_R - c_{m_{\text{pot}}}^{\dot{q}} \frac{p q}{V_A^2} V l_R^2 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

die viskosen Rumpfkraft- und -momente lauten

$$F^A_{h_c} = -\frac{\rho}{2} V_A^2 \begin{bmatrix} c_{d_0, h} \frac{u_A |u_A|}{V_A^2} V^{2/3} \\ c_{d_c, h} c_{1_c} \frac{v_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2}}{V_A^2} V^{2/3} + c_{d_c, h} c_{2_c} \frac{(2v_A^2 + w_A^2) \cdot r - v_A w_A \cdot q}{V_A^2 \sqrt{v_A^2 + w_A^2}} V^{2/3} l_R \\ c_{d_c, h} c_{1_c} \frac{w_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2}}{V_A^2} V^{2/3} + c_{d_c, h} c_{2_c} \frac{v_A w_A \cdot r - (v_A^2 + 2w_A^2) \cdot q}{V_A^2 \sqrt{v_A^2 + w_A^2}} V^{2/3} l_R \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$Q^A_{h_c} = \frac{\rho}{2} V_A^2 \begin{bmatrix} 0 \\ c_{d_c, h} c_{2_c} \frac{w_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2}}{V_A^2} V^{2/3} l_R + c_{d_c, h} c_{3_c} \frac{v_A w_A \cdot r - (v_A^2 + 2w_A^2) \cdot q}{V_A^2 \sqrt{v_A^2 + w_A^2}} V^{2/3} l_R^2 \\ -c_{d_c, h} c_{2_c} \frac{v_A \sqrt{v_A^2 + w_A^2}}{V_A^2} V^{2/3} l_R - c_{d_c, h} c_{3_c} \frac{(2v_A^2 + w_A^2) \cdot r - v_A w_A \cdot q}{V_A^2 \sqrt{v_A^2 + w_A^2}} V^{2/3} l_R^2 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Kräfte unter symmetrischen Anströmungsbedingungen in der Vertikalebene

In den letzten Gleichungen sind die Anströmungszustände durch die Komponenten der Flugeschwindigkeit dargestellt. Die Beziehungen lassen sich auch in Funktion von Anströmungswinkeln wie α , β , α_T und weiteren darstellen. Einfache Beziehungen ergeben sich, wenn man die Kräfte unter symmetrischen Anströmungsbedingungen untersucht, wie hier für reine Anströmung in der Vertikalebene unter der Annahme $v_A = p = r = 0$.

In diesem Fall entstehen keine Kräfte in seitlicher Richtung sowie keine Roll- und Giermomente, es gilt $Y^A = L^A = N^A = 0$. Weiter gelten die Beziehungen

$$\text{Staudruck:} \quad \frac{\rho}{2} V_A^2 = \frac{\rho}{2} (u_A^2 + v_A^2)$$

$$\text{Leitwerks-Anströmwinkel:} \quad \alpha_{f_i} = \text{atan} \frac{w_A(x_{f_i})}{u_A} + \eta_\eta \eta = \text{atan} \frac{w_A - x_{f_i} q}{u_A} + \eta_\eta \eta$$

$$\text{Leitwerks-Staudruck:} \quad q_{\alpha_i, f} = \frac{\rho}{2} (u_A^2 + w_A(x_{f_i})^2) = \frac{\rho}{2} (u_A^2 + (w_A - x_{f_i} q)^2).$$

Mit den Beziehungen nach Seite 37 folgt somit

$$\begin{aligned} X^A = & \frac{\rho}{2} V_A^2 \eta_k (c_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - c_{x_{\text{pot}}}^u \cos^2 \alpha + c_{x_{\text{pot}}}^{vw} \sin^2 \alpha) V^{2/3} + c_{x_{\text{pot}}}^{wq} \sin \alpha \frac{q}{V_A} V^{2/3} l_R + c_{x_{\text{pot}}}^q \frac{q^2}{V_A^2} V^{2/3} l_R^2 \\ & - \frac{\rho}{2} V_A^2 c_{d_0, h} \cos \alpha |\cos \alpha| V^{2/3} \\ & + q_{\alpha_i, f} (\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} - \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \cos \alpha_{f_a}) \sin^2 \alpha_{f_a} S_f - \frac{\rho}{2} V_A^2 2 c_{d_0, f} \cos \alpha |\cos \alpha| S_f \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} Z^A = & \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(\eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{uw} \frac{\sin 2\alpha}{2} - \eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{qu} \cos \alpha \frac{q}{V_A} l_R \right) V^{2/3} \\ & - \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(c_{d_c, h} c_{1_c} \sin \alpha |\sin \alpha| V^{2/3} - c_{d_c, h} c_{2_c} 2 |\sin \alpha| \cdot \frac{q}{V_A} V^{2/3} l_R \right) \\ & - q_{\alpha_i, f} \left(\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} \frac{\sin 2\alpha_{f_a}}{2} + \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \sin^3 \alpha_{f_a} \right) S_f \\ & - q_{\alpha_i, f} \left(c_{d_c, f} \sin \alpha_{f_c} |\sin \alpha_{f_c}| + c_{d_0, f} \frac{\sin 2\alpha_{f_c}}{2} \right) S_f \end{aligned} \quad (3.79)$$

und für das Nickmoment

$$\begin{aligned}
M^A &= \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(-c_{m_{\text{pot}}}^{uw} \frac{\sin 2\alpha}{2} + c_{m_{\text{pot}}}^{uq} \cos \alpha \frac{q}{V_A} l_R \right) V^{2/3} l_R \\
&+ \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(c_{d_{c,h}c_{2c}} \sin \alpha |\sin \alpha| V^{2/3} l_R - c_{d_{c,h}c_{3c}} 2 |\sin \alpha| \frac{q}{V_A} V^{2/3} l_R^2 \right) \\
&+ q_{\alpha_a, f} \left(\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} \frac{\sin 2\alpha_{f_a}}{2} + \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}\alpha_0, f}} \sin^3 \alpha_{f_a} \right) x_{f_a} S_f \\
&+ q_{\alpha_c, f} \left(c_{d_{c, f}} \sin \alpha_{f_c} |\sin \alpha_{f_c}| + c_{d_{0, f}} \frac{\sin 2\alpha_{f_c}}{2} \right) x_{f_c} S_f
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Reduktion auf symmetrischen, stationären Geradeausflug

Im symmetrischen, stationären Geradeausflug wird zusätzlich die Nickrate q zu Null. Die Berechnung der Kräfte und Momente vereinfachen sich weiter, und es gilt

$$\text{Leitwerks-Anströmwinkel: } \alpha_f = \alpha_{f_a} = \alpha_{f_c} = \alpha + \eta_\eta \eta$$

$$\text{Leitwerks-Staudruck: } q_{\alpha_a, f} = q_{\alpha_c, f} = q = \frac{\rho}{2} (u_A^2 + w_A^2).$$

Die Axial-, Vertikalkraft und das Nickmoment betragen nun

$$\begin{aligned}
X^A &= \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(\eta_k (c_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - c_{x_{\text{pot}}}^u \cos^2 \alpha + c_{x_{\text{pot}}}^{vw} \sin^2 \alpha) - c_{d_{0, h}} \cos \alpha |\cos \alpha| \right) V^{2/3} \\
&+ \frac{\rho}{2} V_A^2 \left((\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} - \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}\alpha_0, f}} \cos \alpha_f) \sin^2 \alpha_f - 2 c_{d_{0, f}} \cos \alpha |\cos \alpha| \right) S_f
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
Z^A &= \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(\eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{uw} \frac{\sin 2\alpha}{2} - c_{d_{c, h}c_{1c}} \sin \alpha |\sin \alpha| \right) V^{2/3} \\
&- \frac{\rho}{2} V_A^2 \left((\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} + c_{d_{0, f}}) \frac{\sin 2\alpha_f}{2} + \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}\alpha_0, f}} \sin^3 \alpha_f + c_{d_{c, f}} \sin \alpha_f |\sin \alpha_f| \right) S_f
\end{aligned} \tag{3.82}$$

und

$$\begin{aligned}
M^A &= \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(-c_{m_{\text{pot}}}^{uw} \frac{\sin 2\alpha}{2} + c_{d_{c, h}c_{2c}} \sin \alpha |\sin \alpha| \right) V^{2/3} l_R \\
&+ \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} \frac{\sin 2\alpha_f}{2} + \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}\alpha_0, f}} \sin^3 \alpha_f \right) x_{f_a} S_f \\
&+ \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(c_{d_{c, f}} \sin \alpha_f |\sin \alpha_f| + c_{d_{0, f}} \frac{\sin 2\alpha_f}{2} \right) x_{f_c} S_f
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Daraus können die Axial-, Vertikalkraft- und Nickmomentenbeiwerte abgeleitet werden. Sie lauten

$$c_x(\alpha, \eta) = \frac{X^A}{qV^{2/3}} = \eta_k(c_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - c_{x_{\text{pot}}}^u \cos^2 \alpha + c_{x_{\text{pot}}}^{vw} \sin^2 \alpha) - c_{d_0, h} \cos \alpha |\cos \alpha| + ((\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} - \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \cos \alpha_f) \sin^2 \alpha_f - 2c_{d_0, f} \cos \alpha |\cos \alpha|) \frac{S_f}{V^{2/3}} \quad (3.84)$$

$$c_z(\alpha, \eta) = \frac{Z^A}{qV^{2/3}} = \eta_k c_{z_{\text{pot}}}^{uw} \frac{\sin 2\alpha}{2} - c_{d_c, h} c_{1_c} \sin \alpha |\sin \alpha| - \left((\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} + c_{d_0, f}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \sin^3 \alpha + c_{d_c, f} \sin \alpha |\sin \alpha| \right) \frac{S_f}{V^{2/3}} \quad (3.85)$$

$$c_m(\alpha, \eta) = \frac{M^A}{qV^{2/3} l_R} = -c_{m_{\text{pot}}}^{uw} \frac{\sin 2\alpha}{2} + c_{d_c, h} c_{2_c} \sin \alpha |\sin \alpha| + \left(\eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} \frac{\sin 2\alpha_f}{2} + \eta_f^2 c_{d_{\text{ind}} \alpha_0, f} \sin^3 \alpha_f \right) \frac{x_{f_a} S_f}{l_R V^{2/3}} + \left(c_{d_c, f} \sin \alpha_f |\sin \alpha_f| + c_{d_0, f} \frac{\sin 2\alpha_f}{2} \right) \frac{x_{f_c} S_f}{l_R V^{2/3}} \quad (3.86)$$

Man erkennt aus den Gleichungen dieses Kapitels, dass sich die dominierenden Kräfteanteile proportional $\sin 2\alpha$ und $\sin^2 \alpha$ entwickeln. Die Kräfte und Momente infolge Drehraten verhalten sich jeweils proportional Ω/V_A .

Übrige Beiwerte und Linearisierung der Beiwerte

Die Beiwerte der Seitenkraft und Roll- sowie Giermomente lassen sich entsprechend denen der Vertikalbewegung herleiten. Darauf wird hier verzichtet.

Dafür werden in Anhang C.1.4 auf Seite 197 alle Kraft- und Momentenkomponenten in Abhängigkeit linearisierter Beiwerte angegeben und entsprechend alle linearisierten Beiwerte aufgeführt. Durch die Linearisierung der Leitwerkskräfte, für die Vertikalkräfte werden sie beispielsweise in Funktion von $\alpha_f = f(\alpha, q, \eta)$ berechnet, erscheinen nun auch die Drehraten explizit in diesen Kräfteanteilen. Auch dort erkennt man wieder die Proportionalität der Kräfte und Momente zu Ω/V_A .

3.8 Analyse des Gesamtmodells unter Wind

Die aerodynamische Wirkung von Windstörungen unterschiedlicher Charakteristik wird in diesem Unterkapitel diskutiert. Am Beispiel eines bewegten Windfeldes wird die Wirkung unterschiedlicher Wellenlängen untersucht, am Beispiel einer Staupunktströmung die Wirkung einer beschleunigten Windströmung.

3.8.1 Mathematische Modellierung des Windes

Die vollständige Beschreibung der Luftbewegungen in der Atmosphäre in Funktion von Ort und Zeit stellt ein hochkompliziertes, ungelöstes Problem dar. Aus einer Vielzahl von Beobachtungen und Messungen wurden deshalb empirische Ingenieur-Modelle abgeleitet, welche singuläre Störungen in deterministischer Form oder Turbulenzen mit Hilfe stochastischer Methoden beschreiben. Eine Einführung in solche Windmodelle, ausgerichtet auf die Untersuchung von Flächenflugzeugen, findet man bei Brockhaus [43] oder in den Arbeiten von Schänzer [51]. Eine feinere Modellierung der Phänomene in der bodennahen Grenzschicht findet man in [54].

Die klassischen stochastischen Böenmodelle aus der Flugmechanik, welche die Leistungsdichtespektren nach Dryden oder v.Karman als Funktion der Fluggeschwindigkeit und Flughöhe benutzen, sind für Luftschiffuntersuchungen nicht direkt anwendbar: Der für Flugzeuge infolge $V_K \gg V_W$ zulässige "frozen field" Ansatz (das Windfeld ist gegenüber der Flugzeugbewegung "eingefroren") verliert wegen der geringen Fluggeschwindigkeit der Luftschiffe seine Gültigkeit. Die Bewegung des Windfeldes und des Luftschiffes darin müssen berücksichtigt werden, denn es interessiert die *Verteilung der Anströmung* über das Schiff, also die "räumliche Frequenz" respektive Wellenlänge. Die Wellenlängen können bei diesen Fluggeschwindigkeiten nicht mehr über die Taylorsche Hypothese aus den zeitlichen Frequenzen (ermittelt z.B. aus Messflügen) berechnet werden. Hier sind die in der Literatur zur Windenergie oder Gebäudeaerodynamik dokumentierten Modelle oft besser geeignet [55]. Hinweise zur Korrektur der Spektralverteilung gibt auch Schänzer [51].

Charakterisierung der Strömung: Scherschichtung und Strömungsbeschleunigung

In einem Strömungsfeld treten unterschiedlich charakterisierte Geschwindigkeitsschwankungen auf. Für Luftschiffe maßgebend ist die Unterscheidung in beschleunigungsfreie oder beschleunigte Strömungen. In beschleunigungsfreien Windfeldern stehen die Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zu den Strömungsrichtungen, wohingegen bei beschleunigten Strömungen die Geschwindigkeitsgradienten in Strömungsrichtung liegen und demzufolge in Strömungsrichtung ein Druckgradient existieren muss. Beschleunigungsfreie Windströmungen erfüllen die Eulergleichung des reibungsfreien Fluids bei Vernachlässigung des atmosphärischen Druckgradienten

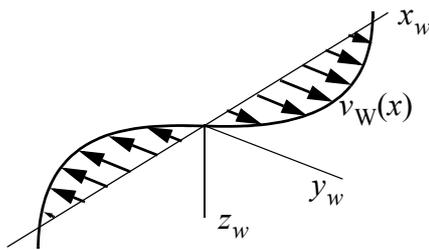
$$\frac{DV_W(r, t)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} V_W(r, t) + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial r} V_W(r, t) = \frac{-\text{grad}(p)}{\rho} \equiv 0, \quad (3.87)$$

und sind somit druckgradientenfrei.

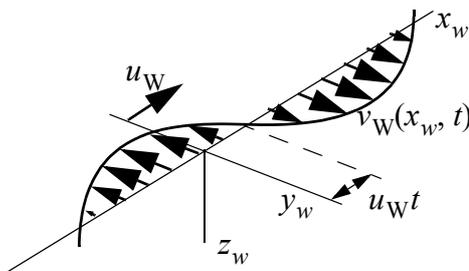
Ein typischer Vertreter der beschleunigungsfreien Felder ist das vertikale Geschwindigkeitsprofil in der laminaren Bodengrenzschicht. Ein typisches Beispiel für beschleunigte Strömungen ist die Modellierung eines "Down-Burst" als Staupunktströmung: Die Strömung wird in Richtung Staupunkt verzögert und seitlich beschleunigt.

Seitenwindscherung

Als Beispiel einer beschleunigungsfreien Scherschichtung wird eine Seitenwindscherung beschrieben. Die Komponenten einer stehenden Seitenwindscherung berechnen sich nach der Vektorfunktion (3.88). Wandert diese Scherung mit Geschwindigkeit u_W in Richtung x_w , so gehorcht sie Gleichung (3.89). Beide Strömungen erfüllen Beziehung (3.87), sind aber nicht rotationsfrei, d.h. sie können nicht als Potentialströmung beschrieben werden. Im Rahmen des ohnehin empirischen Modellansatzes ist dies jedoch vernachlässigbar (vgl. Diskussion auf Seite 42).



$$V_W(r, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{W0} + \overline{v_W} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_v} x_w\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$



$$V_W(r, t) = \begin{bmatrix} u_W \\ v_{W0} + \overline{v_W} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_v} (x_w - u_W t)\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Turbulenzmodelle

Für stochastische Untersuchungen eignet sich die Darstellung des Windfeldes in der Form

$$V_W(r, t) = \begin{bmatrix} u_W(r, t) \\ v_W(r, t) \\ w_W(r, t) \end{bmatrix} = V_{W0}(r, t) + \tilde{V}_W(r, t) \quad (3.90)$$

wobei $V_{W0}(r, t)$ den stationären (oder quasi-stationären) mittleren Wind und der zweite Term $\tilde{V}_W(r, t)$ den turbulenten, stochastischen Anteil darstellt. Die turbulenten Komponenten sind als Zufallsprozesse durch ihre Varianz σ^2 (σ =Standardabweichung) und durch ihr Leistungsdichtespektrum $S(\omega)$ (Frequenz- oder Wellenlängenverteilung) charakterisiert. Sowohl die Varianz als auch die Spektren der einzelnen Windkomponenten hängen von der Höhe über Grund, der mittleren Windstärke, der Stabilität der Atmosphäre und von der Rauigkeit der Erdoberfläche ab. Einfache Abschätzungen findet man in [51] oder in [56], komplexere Ansätze der bodennahen Koeffizienten sind in [55] beschrieben.

3.8.2 Die Wirkung von Seitenwindscherungen unterschiedlicher Wellenlängen

Das Luftschiff durchfliege im stationären Geradeausflug mit der Vorwärtsgeschwindigkeit u_K eine stehende Seitenwindscherung nach Gleichung (3.88), die Schiffslängsachse sei exakt parallel der x_w -Achse ausgerichtet. Ein solches "gefrorenes Windfeld" ist beschleunigungsfrei. Es wirken nur Kräfte infolge der Verteilung der Anströmung $V_A(x)$ entlang der Längsachse. Die Position des Schiffes gehorcht der Beziehung

$$x_{CR}(t) = x_0 + u_K t, \text{ weiter gilt } x_w = x_g = x_0 + u_K t + x_f \text{ und es resultiert}$$

$$V_{Aj}(x_f, t) = \begin{bmatrix} u_K \\ v_{W0} - \overline{v_W} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_v}(x_0 + u_K t + x_f)\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_K \\ v_{W0} - \overline{v_W} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_v} u_K t + 2\pi\left(\frac{x_0 + x_f}{\lambda_v} + \frac{1}{4}\right)\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

in der bekannten, flugmechanischen "1-Cos" Form. Der Schiebewinkel β erreicht dabei Werte zwischen

$$\beta_{\min} = \operatorname{atan}\left(\frac{v_{W0} - \overline{v_W}}{u_K}\right) < \beta < \operatorname{atan}\left(\frac{v_{W0} + \overline{v_W}}{u_K}\right) = \beta_{\max}, \quad (3.92)$$

und ein Körperfester Punkt auf dem Schiff erfährt die Störung mit der Frequenz $f = \frac{u_K}{\lambda_v}$.

Seitenkraft und Giermoment bei Variation der Wellenlänge und der Phasenlage

Für eine Anströmung resultierend aus 5 m/s Vorwärtsgeschwindigkeit und einer Seitenwindstörung nach Gleichung (3.91) mit $\overline{v_W} = -0,5$ m/s (entsprechend $\beta_{\max} \approx 11^\circ$) werden nun bei variierender Wellenlänge und Phasenlage die resultierenden Seitenkräfte und das Giermoment untersucht. Für einen mittleren Seitenwind $v_{W0} = -0,5$ m/s entsteht eine 1-Cos Störung mit $\beta_{\max} \approx 11^\circ$. Fehlt der mittlere Seitenwind, entsteht eine Cosinus-Störung mit einer Schiebewinkelamplitude von $5,7^\circ$.

Wie bereits im Abschnitt "Berechnung der verteilten potentialtheoretischen Rumpfkraft unter Wind" auf Seite 42 erwähnt, ist die Gültigkeit des Modells bei kurzen Wellenlängen fraglich. Die in den Bildern dargestellten Kurven sollten ab dem Bereich $\lambda/l_R=1$ nur als Trendhinweise interpretiert werden.

Gesamtkraft und Moment infolge 1-Cos Störungen

Bild 3.20 stellt die resultierende Seitenkraft Y und das Giermoment N als Funktion der Wellenlänge und Phasenlage einer 1-Cos Störung dar. Die Wellenlänge variiert über den Bereich

$\lambda = l_R/4$ bis $\lambda = 10l_R$, die Phasenlage wandert über die jeweilige Wellenlänge. Sowohl Kraft als auch Moment sind dabei mit dem Betrag der Kraft Y_{homogen} und des Moments N_{homogen} infolge homogener Anströmung mit $v = 1\text{ m/s}$ normiert, es wird also die Verstärkung dieses Referenzbetrages angezeigt. Zur leichteren Interpretation der Resultate dient Bild 3.21: Es zeigt die Projektion der 3D-Plots in Richtung Phasenachse. Die Mittelung der Kraft und des Moments über den gesamten Phasenbereich einer Wellenlänge führt auf die Kurve $\text{mean}(Y(\lambda/L))$ und $\text{mean}(N(\lambda/L))$. Wie in Bild 3.21 ersichtlich ist, resultiert über den gesamten Wellenlängenbereich ein konstanter Mittelwert.

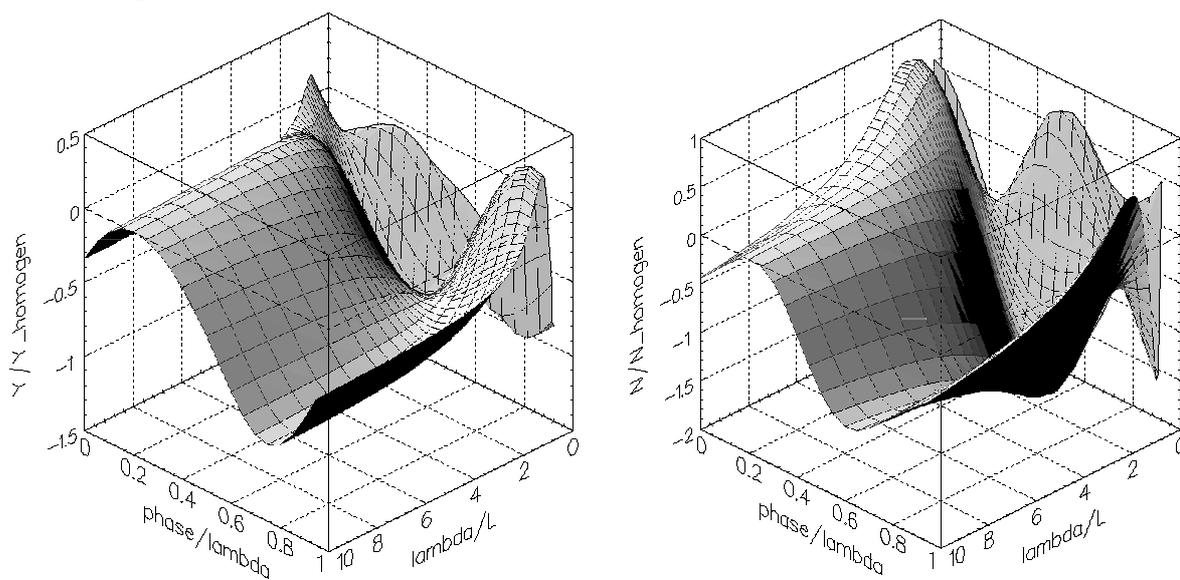


Bild 3.20: Seitenkraft Y und Giermoment N in Abhängigkeit von Wellenlänge und Phasenlage einer stehenden 1-Cos Seitenwindwelle. ($L=l_R$)

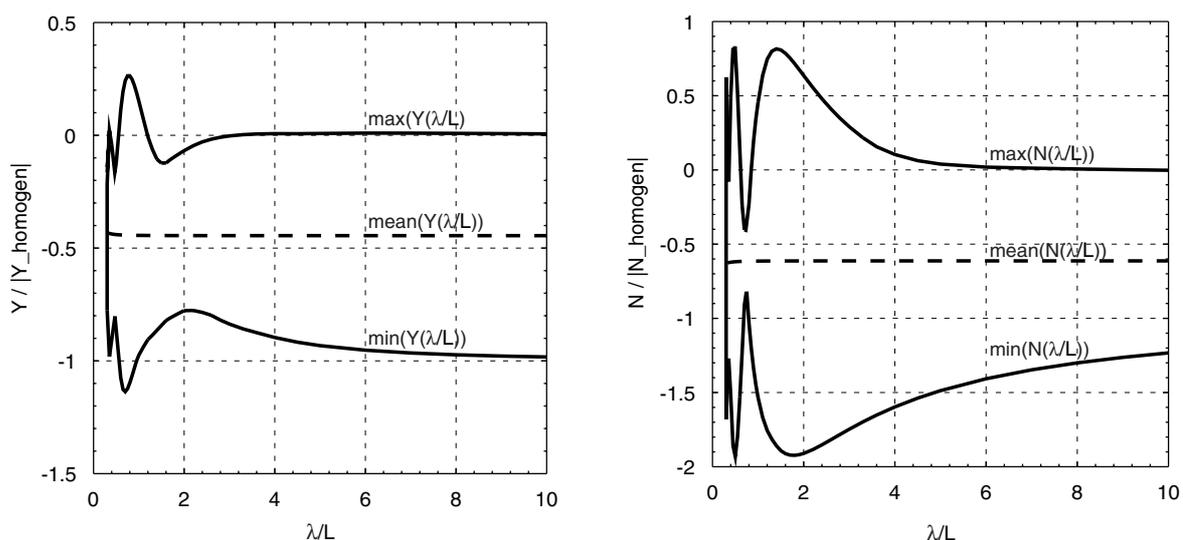


Bild 3.21: Umhüllende der Seitenkraft und des Giermoments über Phasenlagen bei Variation der Wellenlänge einer 1-Cos Seitenwindes. ($L=l_R$)

Für lange Wellenlängen laufen die Kräfte asymptotisch gegen die Lösung unter homogener Anströmung, sie variieren entsprechend des Schiebewinkels infolge einer 1-Cos Störung exakt zwischen 0 und -1 (respektive zwischen 0 und Y_{homogen}). Entsprechend verhält sich das Moment, man erkennt in Bild 3.21 wie die Linie $\min(N(\lambda/L))$ asymptotisch gegen den Wert -1 läuft. Werden die Wellenlängen kürzer, variieren sowohl maximale Kraft- als auch Momentenausschläge über ihren konstanten Mittelwert: Während die Kraftausschläge leicht abnehmen wachsen die Amplituden der Giermomentwerte jedoch an. Für $\lambda < 4l_R$ resultieren erstmals positive, d.h. stabilisierende Giermomente (vgl. dazu Bild 3.22 und Bild 3.23). Die größten Giermomente, sowohl stabilisierend als auch destabilisierend, resultieren dann bei Wellenlängen der 1.5- bis 2-fachen Schiffslänge. In diesem Bereich erreicht die Seitenkraft den geringsten Ausschlag (Minimumlinie). Bei Wellenlängen knapp unter der Schiffslänge treten jedoch Kräfte größer der Kraft unter homogener Anströmung auf. Unter spezieller Phasenlage mit Seitenwind hinter der Rumpfmittle (Bild 3.22 rechte Grafik) resultiert sogar eine Gesamtkraft in Richtung des Windes. Dagegen erreicht das Giermoment bei diesen Wellenlängen geringere Ausschläge.

Die Phasenabhängigkeit der Störung wird mit Hilfe von Bild 3.20 untersucht. Für lange Wellen resultiert bei der Lage mit $\beta = 0$ erwartungsgemäß synchron die Nullkraft und das Nullmoment. Der maximale Ausschlag der Kraft (Minima in den Graphen) liegt gegenüber dem des Moments jedoch bei einem leicht höheren Phasenwinkel (etwa $\lambda/8$). Das Schiff spürt also zeitlich vor der maximalen Seitenkraft das maximal destabilisierende Moment. Die Lagen nähern sich erst in Richtung kürzerer Wellen wieder an. Während die Lage der Nullkraft ähnlich bleibt, wandert die Lage der mit abnehmender Wellenlänge positive Werte annehmenden Maxima des Moments gegen geringere Phasen (um etwa $\lambda/5$). Erst ab $\lambda < 2l_R$ ändern sich die Phasenlagen markant: Nun eilt bei den Minima die Kraft dem Moment voraus, und bei den Maxima das Moment. Bei Wellenlängen um l_R eilt das Kraftmaxima (um etwa $\lambda/5$) als auch -minima (um etwa $\lambda/10$) dem Moment voraus. Diese Phasenverschiebungen wirken sich je nach Verhältnis von Störungsfrequenz zu Schiffsträgheit merkbar auf die Flugmechanik aus.

Darstellung der Kraftverteilung und der resultierenden Gesamtkraft bei Störungen unterschiedlicher Wellenlängen der Cos und 1-Cos Form

Die Bilder 3.22 und 3.23 stellen die verteilte Rumpfkraft, die Leitwerkskräfte und die resultierende Gesamtkraft unter den auf Seite 82 beschriebenen Anströmungszuständen dar.

Für den Vergleichsfall homogener Anströmung (Bild 3.22 links) zeigt die Rumpfkraft den typischen Verlauf mit dem Wechsel der Wirkungsrichtung an der Stelle wo die Rumpfkontur parallel der Längsachse verläuft. Die stabilisierende Heckkraft, dominiert durch die Wirkung der Leitwerke, zeigt in Richtung der Bugkraft. Es resultiert eine hohe Seitenkraft, welche, wie hier beim Luftschiff Lotte, etwas vor dem Volumenschwerpunkt angreift und somit schiebewinkelinstabil wirkt. Bei verteilter Anströmung ändern in Funktion von $\nu(x)$ die Rumpfkraftverteilung und die Leitwerkskräfte. Bild 3.22 rechts zeigt den bereits bei der Diskussion der Gesamtkraft angesprochenen Fall einer in Störungsrichtung zeigenden Seitenkraft. Sie resultiert aus der Rumpfkraft hinter der Schiffsmittle.

Weitere charakteristische Fälle zeigt Bild 3.23. Man erkennt oben links die stark gierwinkeldestabilisierende Seitenkraft im Falle betonter Buganströmung. Die Grafiken in der Mitte beider Zeilen zeigen dann ähnliche Kräfteverhältnisse bei unterschiedlicher Anströ-

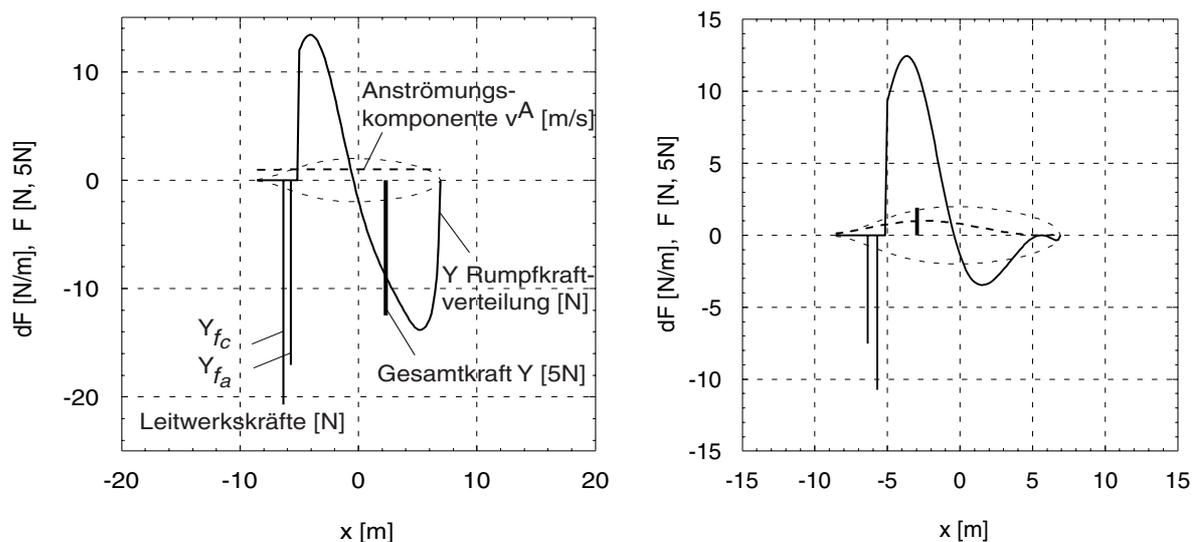


Bild 3.22: Wirkung verteilter Anströmung: Resultierende Rumpfkraftverteilung, Leitwerkskräfte und resultierende Gesamtkraft im Angriffspunkt (Gesamt-Neutralpunkt) unter homogener Anströmung und spezieller Anströmungsverteilung.

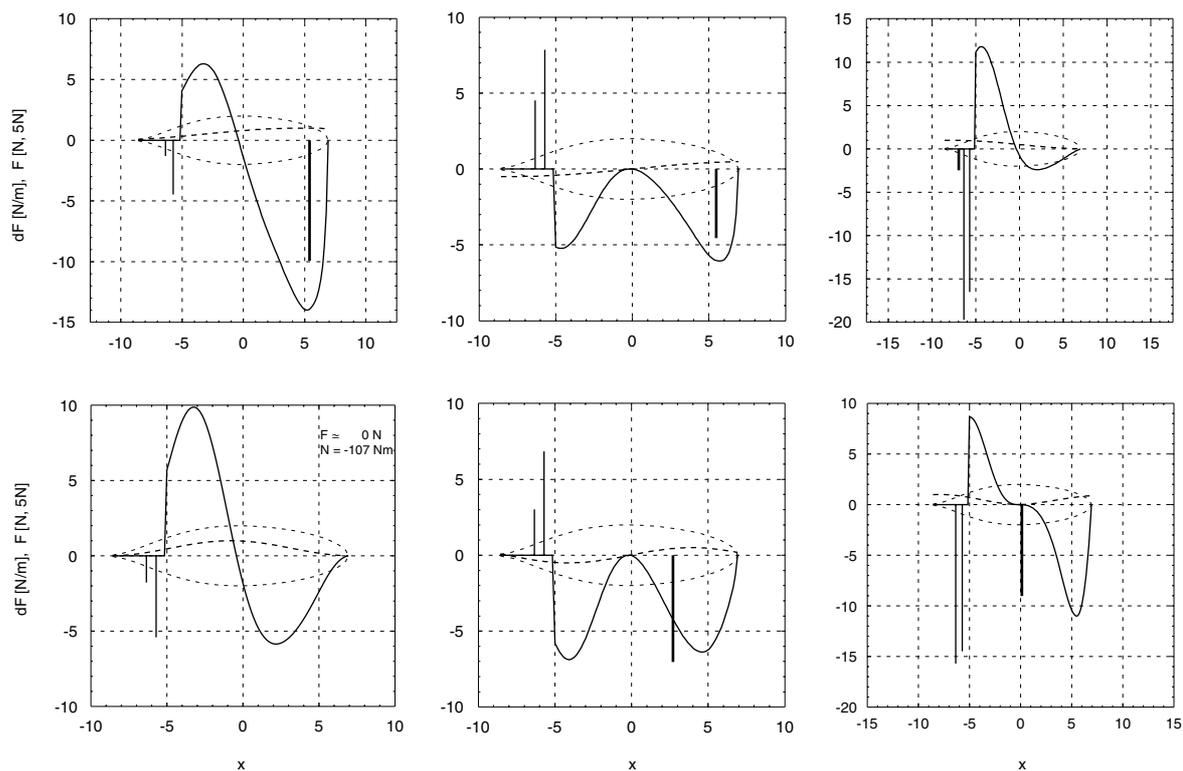


Bild 3.23: Wirkung verteilter Anströmungen unterschiedlicher Wellenlängen und -lagen (obere Zeile $\lambda > l_R$, untere Zeile $\lambda \approx l_R$).

mungsrichtung des Bugs und des Hecks (hier bilden Leitwerkskräfte und Rumpfkraft des Bugs das destabilisierende Moment), die Grafik oben rechts ein stabilisierendes Moment mit geringer Seitenkraft bei betonter Heckanströmung. Die Anströmung in der unteren Zeile links erzeugt nur ein Giermoment, die Anströmung rechts nur eine Seitenkraft.

3.8.3 Wirkung des beschleunigten Windes

Die Wirkung eines beschleunigten Windfeldes wird anhand der reinen Längsanströmung diskutiert. Die Ausmaße des Luftschiffs werden als klein im Vergleich zur Ausdehnung der Windstörung angenommen. Die Windstörung kann beispielsweise als ebene Staupunktströmung angenommen werden, wobei sich das Luftschiff geradlinig entlang der x-Achse zum Staupunkt hin- oder wegbewegt. Es fliegt dabei Schiebe- und Anstellwinkelfrei mit der Vorwärtsgeschwindigkeit u .

In diesem Fall berechnet sich die aerodynamische Kraft in axialer Richtung (als einzig verbliebene Komponente) nach Gleichung (3.66) aus scheinbare Masse Kräften infolge Starrkörper- sowie Windbeschleunigung, aus der aerostatischen Kraft infolge Winddruckgradient und aus der axialen Widerstandskraft. Unter Einsetzen der Rumpfkraft des geschlossenen Ellipsoids nach Gleichung (3.42) resultiert die aerodynamische Axialkraft in der einfachen Form

$$X^A = -\rho k_1 V \dot{u}_K + \rho k_1 V \dot{u}_{Wf} - V \int \text{grad}_x(p_W) - \frac{\rho}{2} u_A |u_A| c_{d_0} V^{2/3}. \quad (3.93)$$

Der Koeffizient c_{d_0} bezeichnet dabei den Schiffsgesamtwiderstandsbeiwert. Die Geschwindigkeitsänderung des Windes bezüglich des Luftschiffes berechnet sich als

$$\dot{u}_{Wf} = \frac{fDu_W}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} u_W + \frac{f\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} u_W + u_K \frac{\partial u_W}{\partial x},$$

der Druckgradient grad_x in Richtung x-Achse berechnet sich nach Gleichung (B.35) als

$$-\text{grad}_x(p_W) = \rho \frac{Du_W}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} u_W + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_W}{\partial x} \right) = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} u_W + u_W \frac{\partial u_W}{\partial x} \right).$$

Somit folgt für die aerodynamische Axialkraft

$$X^A = -\rho V k_1 \dot{u}_K + \rho V k_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} u_W + u_K \frac{\partial u_W}{\partial x} \right) + \rho V \left(\frac{\partial}{\partial t} u_W + u_W \frac{\partial u_W}{\partial x} \right) - \frac{\rho}{2} u_A |u_A| c_{d_0} V^{2/3} \quad (3.94)$$

und für stationäre Windfelder mit $\frac{\partial}{\partial t} u_W = 0$ folgt

$$X^A = -\rho V k_1 \dot{u}_K + \rho V k_1 u_K \frac{\partial u_W}{\partial x} + \rho V u_W \frac{\partial u_W}{\partial x} - \frac{\rho}{2} u_A |u_A| c_{d_0} V^{2/3}. \quad (3.95)$$

In Gleichung (3.94) sowie (3.95) erkennt man die Wirkung des beschleunigten Windes: Er wirkt mit Proportionalitätsfaktor 1 über den Druckgradienten und mit Munk-Faktor k_1 über den scheinbare Masse Effekt. Der Effekt der scheinbaren Masse ist also geringer als der Ver-

drängungseffekt, nur für den Kreisquerschnitt unter ebener Anströmung (unendlich langer, querangeströmter Zylinder) beträgt der Munkfaktor 1 (vgl. auch Diskussion auf Seite 33). Weiter erkennt man, dass die Windbeschleunigung entgegen der Körperbeschleunigung wirkt und natürlich, dass keine scheinbare Masse Kräfte resultieren, falls die Relativbeschleunigung Null ist.

Berücksichtigung der Bewegungsgleichung

Zur weiteren Analyse der Gleichung (3.95) wird die Bewegungsgleichung in einem Freiheitsgrad $m\dot{u}_K = X^A$ berücksichtigt. Umformung führt auf die Beziehung

$$(m + \rho V k_1) \dot{u}_K = \rho V \frac{\partial u_W}{\partial x} (u_W + u_K k_1) - \frac{\rho}{2} u_A |u_A| c_{d_0} V^{2/3}, \quad (3.96)$$

oder unter Annahme aerostatischen Gleichgewichts mit $m = \rho V$

$$\dot{u}_K = \frac{(u_W + u_K k_1) \partial u_W}{1 + k_1 \partial x} - \frac{1}{1 + k_1} \frac{1}{2} u_A |u_A| c_{d_0} V^{-1/3}. \quad (3.97)$$

Der potentialtheoretische Windbeschleunigungsanteil lautet

$$\frac{(u_W + u_K k_1) \partial u_W}{1 + k_1 \partial x}.$$

Gilt $u_K = u_W$, das Luftschiff fliegt mit Windgeschwindigkeit und somit $u_A = 0$, so beträgt der Windbeschleunigungsanteil $u_W \cdot \partial u_W / \partial x$, der Widerstandsanteil fällt identisch Null weg. Es folgt

$$\dot{u}_K = u_W \frac{\partial u_W}{\partial x} = \dot{u}_W = -\text{grad}_x(p_W) / \rho = \dot{u}_{K\rho_W}$$

Das Luftschiff beschleunigt wie der lokale Wind, es wird über den Druckgradienten als Ersatz für das verdrängte Luftvolumen mit dem Wind mitbeschleunigt.

Falls $u_K \neq u_W$ resultiert eine windinduzierte scheinbare Masse Kraft, da das Luftschiff in ändernde Strömungsgeschwindigkeiten "einfliegt". Der Windbeschleunigungsanteil ändert sich und außerdem bleibt der Widerstandsanteil erhalten. Für positive Geschwindigkeiten und $\partial u_W / \partial x > 0$ gilt:

Für den Fall $u_K > u_W$ vergrößert sich der Windbeschleunigungsanteil. Das Luftschiff, es fliegt bereits schneller als der Wind, wird durch den Windgradienten zusätzlich beschleunigt, dafür wirkt mit $u_A > 0$ der Widerstandsanteil negativ. Entsprechend resultiert für den Fall $u_K < u_W$ eine geringere Beschleunigung aus dem Windgradienten, dafür wirkt mit $u_A < 0$ der Rückenwind über den Widerstand zusätzlich schiebend.

3.9 Ansatzverfeinerungen und Schätzung der Modellparameter

3.9.1 Erhöhung der Genauigkeit des Rumpfmodells

Die Bestimmung der Druckkräfte über einen Rumpf mit Hilfe der Potentialtheorie stellt eine Näherung der realen Strömungsverhältnisse dar. Die Potentialtheorie basiert auf der Annahme eines perfekten, reibungsfreien und inkompressiblen Fluids, diese vereinfachende Annahme führt dazu, dass die Potentialströmung nur den Druck im freien Strom gut wiedergeben kann. Eine weitere Fehlerquelle der hier vorgestellten Methode stellt die Abbildung der exakten Potentialströmung um Rotationsellipsoide auf die zu untersuchende Rumpfgeometrie dar. Es werden nun zwei Methoden zur Reduzierung dieser Fehler vorgestellt.

Berücksichtigung der Grenzschichtdicke

Eine bekannte Möglichkeit zur Erhöhung der Modellgenauigkeit der Potentialrechnung stellt die Berücksichtigung der Grenzschicht dar ([41]). Dabei wird anstelle der geometrischen Rumpfkontur die um die Grenzschichtdicke δ^* (Verdrängungsdicke) erweiterte Kontur untersucht.

Eine Abschätzung der Grenzschichtdicken für Luftschiffkörper mit Hilfe numerischer Rechnungen zeigt Lutz in [32]. Einen empirischen Ansatz zur Abschätzung der Grenzschichtdicke um Rotations-symmetrische Körper gibt Millikan in [42] an.

Erhöhung der Genauigkeit durch Vergleich mit Referenz-Druckbeiwerten

Die Potentialströmung um Luftschiffkörper wird hier durch die Abbildung der Lösung der Potentialströmung um Rotationsellipsoide angenähert. Es wurde bereits bei der Diskussion der Rumpfintegrale und ihrer Werte für geschlossene Körper auf Seite 49 darauf hingewiesen, dass dadurch für die Axialströmung nicht zu vernachlässigende Fehler auftreten. Dies erkennt man u.A. daran, dass die Axialkraft bei reiner Längsanströmung für den geschlossenen Körper nicht identisch Null verschwindet (Integral $I_{x_{\text{pot}}}^u$). Die Überprüfung der integralen Querkraft unter Schräganströmung (Integral $I_{z_{\text{pot}}}^{uw}$), sowie der Momente im Kurvenflug (Integral $I_{m_{\text{pot}}}^{uq}$) zeigen, dass Anteile infolge Queranströmung und Drehbewegung durch die Ellipsoidlösung mit guter Qualität geschätzt werden. Durch den Vergleich mit Referenzdruckbeiwerten lässt sich die Qualität dieser Abbildung erhöhen. Liegen Druckwerte vor, welche den Einfluss der Grenzschicht bereits enthalten, kann durch das hier vorgestellte Verfahren auch der Grenzschichteinfluss mitkorrigiert werden.

Mathematischer Hintergrund

Für rotationsfreie Strömungen berechnet sich das Geschwindigkeitsfeld als Gradientenfeld des Potentials. Infolge der Linearität des Gradientenoperators lassen sich dabei Teillösungen superponieren oder die Beiträge unterschiedlicher Anströmungsrichtungen getrennt berechnen. So beeinflusst die Längsanströmungsgeschwindigkeit U_∞ nach der Berechnung in [25]

immer nur die Axialströmungskomponente auf der Oberfläche. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt, um die Geschwindigkeitsanteile der Längsumströmung zu korrigieren.

Unter reiner Längsanströmung mit der konstanten Geschwindigkeit U_∞ stellt sich auf der Oberfläche eines Rotationskörpers die ortsabhängige Meridianströmungsgeschwindigkeit $u_m(x)$ ein. Nach der Lösung für den Rotationsellipsoiden gilt

$$u_{m_E}(x) = -\cos\theta K_1 U_\infty, \quad (3.98)$$

dies wurde aus dem Axialströmungspotential $\Phi = -K_1 U_\infty x$ abgeleitet. Die reale Axialgeschwindigkeit unterscheidet sich nun von der theoretischen Schätzung nach (3.98) durch die Differenzgeschwindigkeit $\Delta u_m(x)$. Man kann folgende Beziehung ansetzen

$$u_m(x) = u_{m_E}(x) + \Delta u_m(x).$$

Die Geschwindigkeitskorrektur kann in eine multiplikative Form

$$u_m(x) = k_u(x) u_{m_E}(x) \text{ mit } k_u(x) = 1 + \frac{\Delta u_m(x)}{u_{m_E}(x)} \text{ oder } \Delta u_m(x) = u_{m_E}(x)(k_u(x) - 1)$$

umgewandelt werden. In dieser Form kann die Korrektur zurück aufs Potential übertragen werden. Über die korrigierte Meridiangeschwindigkeit

$$u_m(x) = -\cos\theta K_1 k_u(x) U_\infty \text{ folgt das korrigierte Potential } \Phi_{\text{kor}} = -K_1 k_u(x) U_\infty x. \quad (3.99)$$

Der Korrekturfaktor $k_u(x)$ wirkt als ortsabhängiger Wichtungsfaktor des Potentials. Ersetzt man konsequent den konstanten Modellparameter K_1 durch $K_1 k_u(x)$, so wird die Axialströmungsgeschwindigkeit in allen Termen korrigiert und der Fehler infolge Verwendung der Ellipsoidlösung abgemindert.

Bestimmung des Korrekturfaktors $k_u(x)$ aus Referenzdruckwerten bei $\alpha = \beta = 0$

Die Druckdifferenz zwischen Referenzwert c_p und Beiwert c_{p_E} der Ellipsoidtheorie betrage

$$\Delta c_p(x) = c_p(x) - c_{p_E}(x).$$

Mit Hilfe der korrigierten Ellipsoidlösung wird der reale Druckbeiwert abgeschätzt. Es gilt

$$c_p(x) = 1 - \frac{u_m(x)^2}{U_\infty^2} = 1 - \frac{k_u(x)^2 u_{m_E}(x)^2}{U_\infty^2},$$

und die Beiwertedifferenz lautet in Funktion von $k_u(x)$

$$\Delta c_p(x) = \frac{u_{m_E}(x)^2}{U_\infty^2} (1 - k_u(x)^2).$$

Durch Einsetzen der Geschwindigkeit nach Gleichung (3.98) folgt

$$\Delta c_p(x) = \cos^2 \theta K_1^2 (1 - k_u(x)^2) \text{ und schließlich } k_u(x)^2 = 1 - \Delta c_p(x) \frac{1}{\cos^2 \theta K_1^2}. \quad (3.100)$$

Anwendungsbeispiel: Druckverteilung über Rumpf des Luftschiffs Lotte

Am Beispiel der Rumpfumströmung des Luftschiffs ‘‘Lotte’’ wird die Qualität des Verfahrens demonstriert. Als Referenzdruckwerte liegen die Resultate einer numerischen Berechnung über ein gekoppeltes Panel-Grenzschichtverfahren zur Verfügung ([29], [30], [31]). Diese Berechnung enthält den Einfluss der Grenzschicht, es erübrigt sich somit eine zusätzliche Korrektur der Grenzschichtdicke.

Bild 3.24 zeigt die Verteilung des Oberflächen-Druckbeiwertes entlang des Rumpfes. Die Rohschätzung stellt dabei den Druckbeiwert dar, welcher durch Einsetzen der Rumpfkonturfunktion von Lotte in die Ellipsoidlösung nach [25] resultiert. Man erkennt die gute Übereinstimmung des Druckverlaufs im Nasenbereich, aber auch die Schwäche der Potentiallösung, den Druck ab dem mittleren Rumpfbereich gut wiederzugeben. Neben den Abbildungsfehlern spielt hier auch der Grenzschichteinfluss eine wichtige Rolle. Aus der Druckdifferenz im axialen Anströmungsfall wird nach Gleichung (3.100) der Potentialkorrekturfaktor $k_u(x)$ bestimmt.

Nach der Korrektur der Axial-Potentialkonstanten K_1 über den Faktor $k_u(x)$ wird der Druckverlauf entlang des Rumpfes wieder berechnet. Für den Axialanströmungsfall resultiert erwartungsgemäß exakt der Verlauf des Referenzdruckes. In Bild 3.25 wird deutlich, wie effektiv die Korrektur der Längsströmungskomponente auch für angestellte Körper wirkt, der errechnete Druckbeiwert entlang unterschiedlicher Meridianlinien weicht kaum von der Referenzlösung ab. Im Heck kann nur die Totwasserregion nicht abgebildet werden. Zum Vergleich sind in Bild 3.25 die entsprechenden Kurven nach der Roh-Lösung gestrichelt dargestellt. Diese Roh-Schätzungen vermögen den Druck nur im vorderen Rumpfdrittel zu schätzen.

3.9.2 Bestimmung von Modellparametern

In den vorangehenden Unterkapiteln wurden analytische Beschreibungsfunktionen für Rumpf- und Leitwerkskräfte angegeben. Neben den geometrieabhängigen Parametern wurden auch Modellparameter eingeführt, welche aus Daten und Tabellen in der Literatur, aus Windkanaldaten oder aus numerischen Strömungsrechnungen zu bestimmen sind.

Neben den Einflussfaktoren η_k und η_f , den Axial- und Querwiderstandsbeiwerten $c_{d_{0,h}}$ und $c_{d_{c,h}}$ des Rumpfes sind noch sämtlich Beiwerte der Heckbereiche festzulegen. Diese Parameter könnten über empirische Formeln oder Tabellen bestimmt werden. Im folgenden werden jedoch nur die Auftriebsbeiwerte des Heckbereichs empirisch festgelegt, die Einflussfaktoren und Querwiderstandsbeiwerte von Rumpf und Leitwerk werden durch einen Abgleich mit Windkanaldaten bestimmt (vgl. [12]).

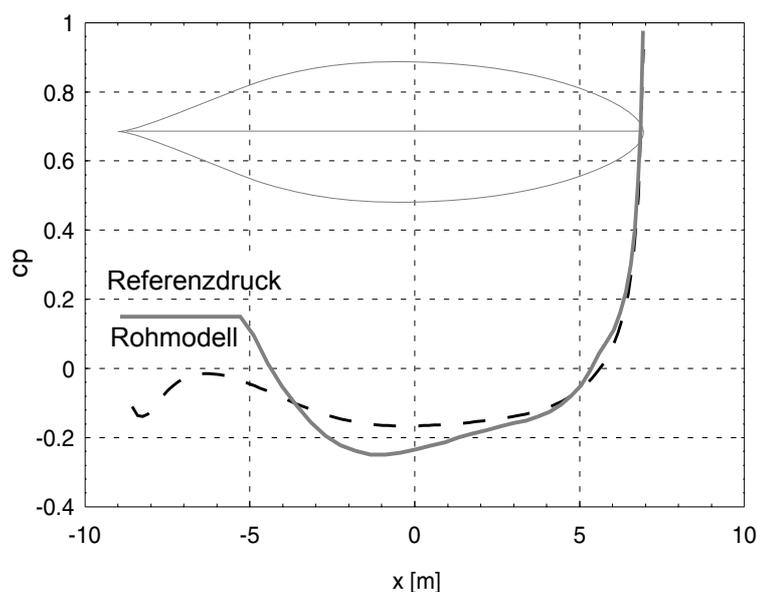


Bild 3.24: Druckbeiwert unter Axialanströmung, Referenzdruckverlauf und rohe Modellrechnung

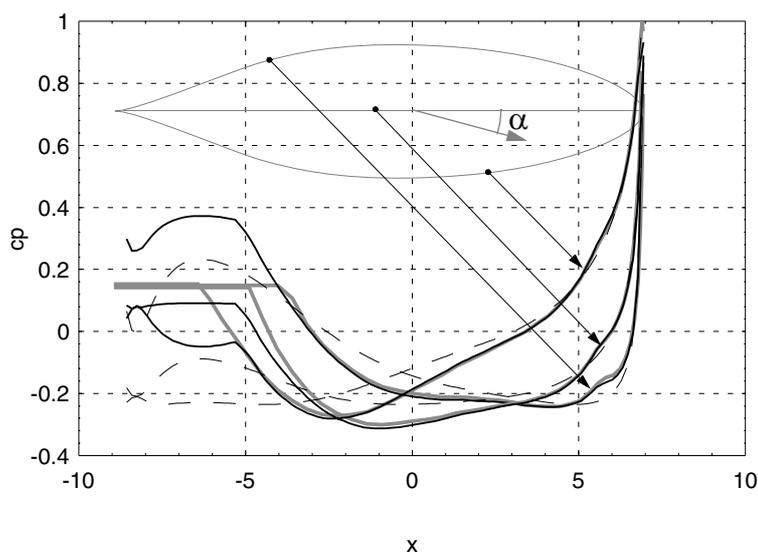


Bild 3.25: Druckverlauf bei $\alpha = 10^\circ$ und $\beta = 0^\circ$ entlang verschiedener Meridiane, Referenzlösungen (grau), unkorrigierte (rohe) Potentialrechnung (gestrichelt) und korrigierte Potentialrechnung (schwarz)

Abschätzung von Modellparametern

In der Literatur werden Methoden zur Abschätzung von Auftriebs- und Widerstandsbeiwerten beschrieben (z.B. [33]). Hier werden Abschätzungen des Auftriebesbeiwertes und des Profilwiderstands der Leitwerke angegeben. Man erinnere sich, dass der Druckwiderstand des Hecks infolge Ablösung im Heckbereich bereits in der Potentialströmung des Rumpfes mitberücksichtigt ist (Bild 3.25).

Auftriebsbeiwert und induzierter Widerstand Leitwerke

In erster Näherung kann der Auftriebsanstieg der Leitwerke und der Beiwert des induzierten Widerstandes wie folgt abgeschätzt werden:

$$c_{l_{\alpha_0},f} = \frac{2\pi\Lambda_f}{\sqrt{\Lambda_f^2 + 4} + 2} \quad \text{und} \quad c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f} = \frac{c_{l_{\alpha_0},f}^2}{\pi\Lambda_f} \quad \text{mit Streckungsverhältnis } \Lambda_f = b_f^2/S_f.$$

Versieht man diese beiden Parameter mit dem Leitwerks-Abminderungsfaktor η_f , resultiert

$$c_{l_{\alpha_0},f_{\text{Effektiv}}} = \eta_f c_{l_{\alpha_0},f} \quad \text{und} \quad c_{d_{\text{ind}\alpha_0},f_{\text{Effektiv}}} = \frac{(c_{l_{\alpha_0},f_{\text{Effektiv}}})^2}{\pi\Lambda_f} = \eta_f^2 \frac{c_{l_{\alpha_0},f}^2}{\pi\Lambda_f}.$$

Profilwiderstand Leitwerke

Für den Profilwiderstand $c_{d_0,f}$ existieren in der Literatur einfache Näherungsgleichungen, z.B. von Hoerner [36]:

$$c_{d_0,f} = 2c_F \left(1 + 2\frac{t}{c} + 60\left(\frac{t}{c}\right)^4 \right) \quad \text{mit } \frac{t}{c} : \text{Profildicke zu -tiefenverhältnis und}$$

$$c_F = \frac{0,455}{\log^{2,58} \text{Re}} : \text{Widerstandsbeiwert der turbulent umströmten ebenen Platte.}$$

Querströmungswiderstand Rumpf und Leitwerke

Dieser Beiwert wird aus den Windkanaldaten abgeschätzt. Zur Vorabschätzung des Querströmungswiderstandes des Hecks kann z.B. auf den Querwiderstand der ebenen Platte zurückgegriffen werden. Eine Vorabschätzung des Rumpfquerwiderstandes kann über den reynoldszahlabhängigen Widerstand des Zylinders mit Längenkorrektur, wie in [11] dargestellt, erfolgen.

Abgleich mit stationären Windkanalmessdaten

Der Abgleich des Aerodynamikmodells mit Windkanaldaten erfolgt in mehreren Schritten. Als erstes werden die Kräfte respektive Beiwerte unter ebener Anströmung durch Variation der Modellparameter η_k , η_f , $c_{d_c,h}$, $c_{d_0,h}$ und $c_{d_c,f}$ an den Verlauf der entsprechenden Windkanaldaten angeglichen. Sind auch Daten mit Auslenkung der Ruder vorhanden, können auch die Ruderwirkungsfaktoren bestimmt werden. Danach kann der Vergleich der Kräfte unter räumlicher Anströmung vorgenommen und die Koeffizienten $\eta_{f_{\beta}}$, $\eta_{f_c h}$, c_{L_α} , c_{L_β} , $c_{L_{\alpha\beta}}$ abgestimmt werden.

Ebene Anströmung: Bestimmung der Parameter η_k , η_f , $c_{d_0,h}$, $c_{d_0,h}$ und $c_{d_0,f}$

Nach den Beiwertgleichungen (3.84), (3.85) und (3.86) der Beiwerte $c_x(\alpha)$, $c_z(\alpha)$ und $c_m(\alpha)$ (vgl. Seite 77 ff) wird der Verlauf der Vertikalkraft und des Moments durch die beiden Formfunktionen $\sin 2\alpha$ (Potential- und Zirkulationsanteil) und $\sin \alpha |\sin \alpha|$ (Querströmungswiderstand) bestimmt. Die Einflussparameter η_k und η_f und die Widerstandsbeiwerte $c_{d_0,h}$ und $c_{d_0,f}$ bestimmen dabei das Verhältnis der Superposition dieser Formfunktionen. Durch geschickte Wahl dieser Parameter lassen sich die Windkanalmessungen approximieren.

Infolge des guten Rumpfmodells resultiert der Parameter η_k typischerweise zu 1. Der Leitwerksparameter η_f skaliert die zirkulationsbedingten Leitwerkskräfte (Auftriebsfläche $c_{l_{\alpha_0 f}} S_f$) in etwa verhältnisproportional der sichtbaren Leitwerksfläche zur Fläche S_f (vgl. auch [12]). Der Parameter $c_{d_0,f}$ dient der Modellierung nichtlinearer Effekte im Bereich kleiner Anstellwinkel. Er resultiert aus dem Windkanalabgleich typischerweise größer als der zu erwartende Querströmungswiderstand der ebenen Platte und führt deshalb bei Anströmungswinkel ab etwa 20° auf zu große Kräfte. Er muss gegebenenfalls ab diesem Winkelbereich abgemindert werden (vgl. Anhang A.2).

Bild 3.26 und Bild 3.27 zeigen die approximierenden Kräfte im Vergleich zu den Windkanalmessungen für das Luftschiff Lotte. Die zugehörigen Modellparameter sind in Anhang A tabelliert.

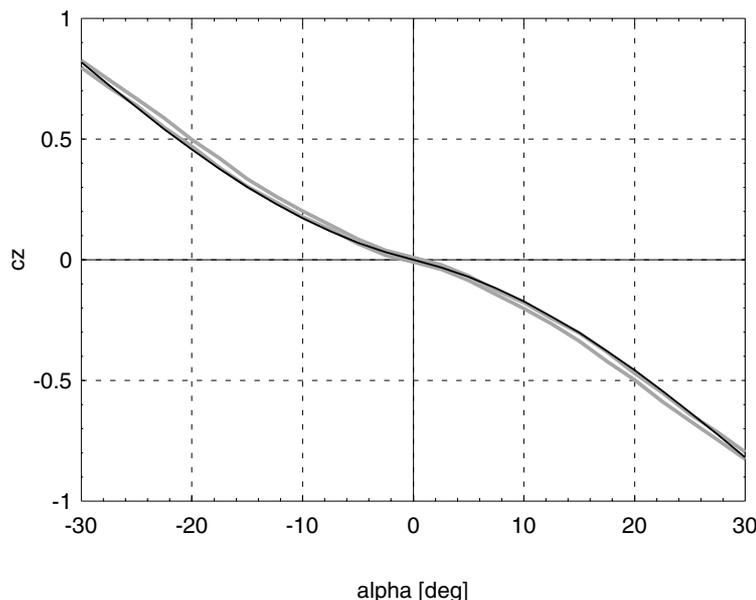


Bild 3.26: Normalkraftbeiwert $c_z(\alpha)$, Windkanalmessung (grau) und Modellrechnung

Man erkennt die sehr gute Übereinstimmung des Kraftverlaufs und die ebenfalls gute Übereinstimmung des Momentenbeiwertes bis etwa $\pm 20^\circ$ Anstellwinkel. Ab 20° erkennt man den Einfluss der Wichtung des Querströmungskoeffizienten $c_{d_0,f}$ (durchgezogene Linie). Mit anstellwinkelunabhängigen, konstanten Koeffizienten resultieren zu hohe Leitwerkskräfte und entsprechend zu hohe Momente für größere Anstellwinkel (gestrichelte Linie). Die Wichtungskurve für den Koeffizienten $c_{d_0,f}$ ist in Anhang A.2 ersichtlich.

Der Beiwerteverlauf des Axialkraftbeiwerts kann durch Variation des Rumpf- und des Heck-Axialwiderstandsbeiwerts $c_{d_0,h}$ und $c_{d_0,f}$ an Messdaten angepasst werden. Falls

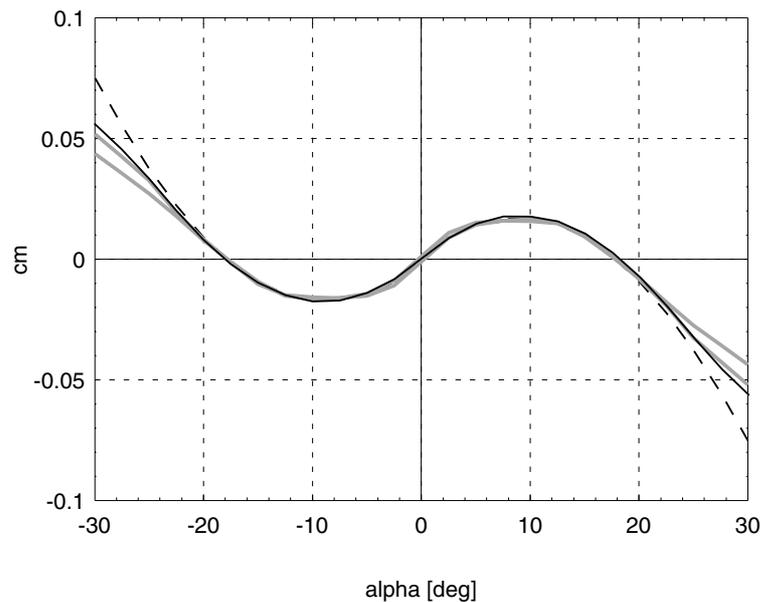


Bild 3.27: Nickmomentbeiwert $c_m(\alpha)$, Windkanalmessung (grau) und Modellrechnung mit $c_{d_{0,f}}$ korrigiert (schwarz) und unkorrigiert (gestrichelt)

große Abweichungen auftreten, müssen der Potentialströmungsbeiwert $c_{x_{\text{pot}}}^u$ und der Widerstand $c_{d_{0,f}}$ skaliert werden. Bild 3.28 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwerts im Vergleich zu den nicht reynoldskorrigierten Windkanalmessungen, daher die Abweichung um $\alpha = 0$. Die vorwärtsgerichteten Kräfte des Rumpfes und der Leitwerke (der aerodynamische Lift produziert eine Vortriebskraft, analog des Segels eines Segelschiffs) werden in diesem Modell bei höheren Anstellwinkeln überschätzt. Hauptursache ist die ungenügende Abbildung der wahren Druckverhältnisse im Heckbereich. Der Druckwiderstand wird nicht Anstellwinkelabhängig korrigiert, das Integral $I_{x_{\text{pot}}}^u$ ist konstant. Durch eine anstellwinkelabhängige Integralgrenze könnte dieser Effekt empirisch erfasst werden.

Räumliche Anströmung

Die Bilder 3.29 und 3.30 zeigen die Beiwerteverläufe unter räumlicher Schräganströmung. Wieder wird der Kraftverlauf über einen weiten Anstellwinkelbereich gut modelliert, während der Momentenbeiwert $c_m(\alpha, \beta)$ nur in einem kleinen Anstellwinkelbereich gute Werte liefert. Bei räumlichen Anströmungswinkeln (Nach [77]: α_{Total}) über 15° bis 20° treten Abweichungen auf. Hier ist wieder das Heck- und Leitwerksmodell die Hauptursache des Fehlers: Die Effekte infolge asymmetrischer Umströmung des Hecks und insbesondere die stark gestörte Umströmung des leeseitigen Leitwerks wird nicht berücksichtigt.

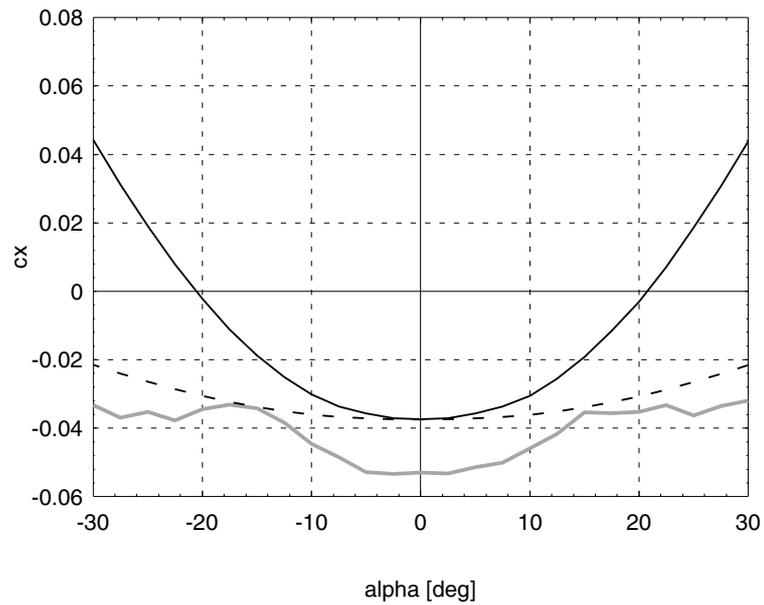


Bild 3.28: Axialkraftbeiwert $c_x(\alpha)$, Windkanalmessung (grau) und Modellrechnung (nach Reynoldszahlkorrektur); Zum Vergleich gestrichelt der Verlauf bei Vernachlässigung von Rumpfpotential- und Leitwerkszirkulationskräften.

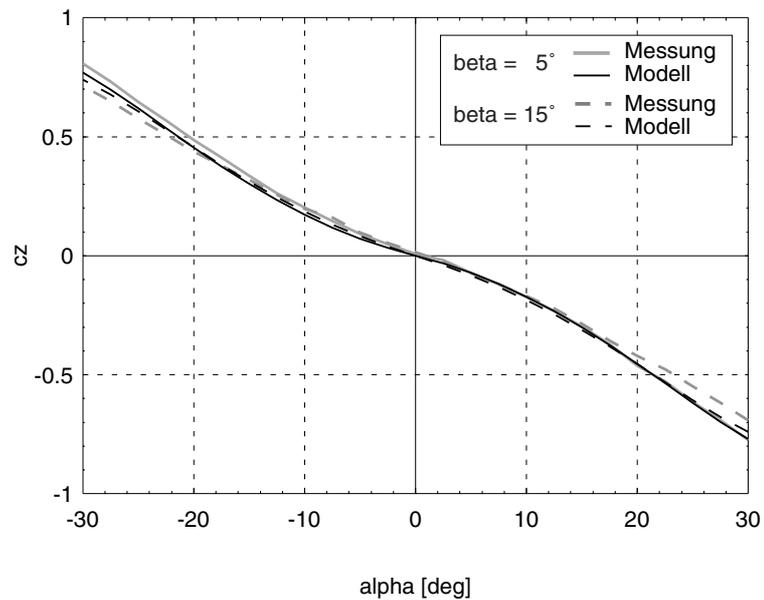


Bild 3.29: Normalkraftbeiwert unter räumlicher Anströmung, Vergleich Windkanalmessung mit Rechnung

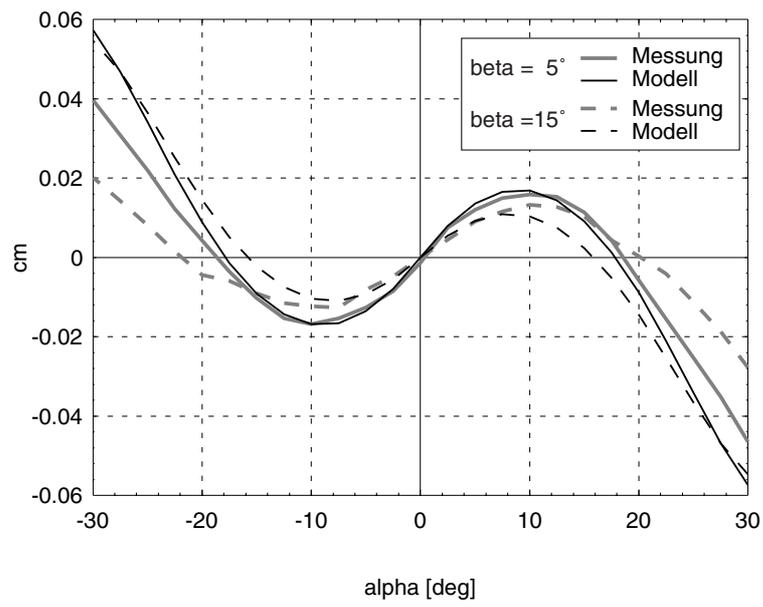


Bild 3.30: Nickmomentenbeiwert unter räumlicher Anströmung, Vergleich Windkanalmessung mit Rechnung

4 Untersuchung des Flugverhaltens

In diesem Kapitel wird das stationäre und dynamische Flugverhalten von Luftschiffen durch Analyse des im Modellbildungskapitel hergeleiteten mathematischen Modells diskutiert.

Die vollständigen nichtlinearen Bewegungsdifferentialgleichungen sind in geschlossener Form nicht lösbar, es verbleibt somit die Lösung durch numerische Integration. Die Untersuchung reduzierter Gleichungen, die Bestimmung stationärer Flugzustände und die Analyse des linearen dynamischen Verhaltens um solche Gleichgewichtszustände stellen weitere Möglichkeiten der algebraischen und numerischen Modellauswertung dar.

Im vorliegenden Kapitel werden zuerst die Gleichungen des Geradeaus- und des Kurvenflugs untersucht und anschließend über die Untersuchung der Eigendynamik des Luftschiffs unter variierenden Flugzuständen und Modellparametern die dynamische Stabilität von Luftschiffen diskutiert. In einem letzten Abschnitt wird eine Auswahl von Simulationsergebnissen präsentiert.

Die aerostatische Flugleistung (Prallhöhe) wird nicht diskutiert.

Vereinfachungen

Generell hat die Flugrichtung ψ und die Position des Luftschiffs keinen Einfluss auf die wirkenden Kräfte. Nur die Flughöhe erscheint in den Gleichungen der aerostatischen Kräfte (vgl. Abschnitt 2.3.6 auf Seite 23) und beeinflusst über die Luftdichte auch die aerodynamischen Kräfte. In den folgenden flugmechanischen Untersuchungen wird jeweils von konstanter Flughöhe oder nur geringer Höhenabweichung ausgegangen. Die aerostatischen Effekte, unter denen die adiabate Höhenänderung die stärkste Kräftevariation bewirkt, werden deshalb als quasistationär angenommen und vernachlässigt.

Für kleine bis mittelgroße Luftschiffe bei ihrer typischen Fluggeschwindigkeit ist diese Vernachlässigung absolut zulässig, denn es gilt in grober Näherung folgende Beziehung: Ein adiabater Aufstieg von 100m erzeugt etwa dieselbe Auftriebskraft wie die Änderung des Rumpfanstellwinkels um -1° . Für kleine Luftschiffe ist 100 m nicht mehr eine geringe Höhenabweichung (z.B. im Sinne der Eigendynamik). Für sehr große Luftschiffe beeinflusst die Adiabatik die Steig- und Sinkleistung jedoch erheblich, insbesondere auch, da große Luftschiffe nur noch geringere Anstellwinkel erreichen. Für solche Fälle sind die hier vorgestellten Untersuchungen nicht mehr genügend.

4.1 Stationäre Flugzustände und Flugleistung

Im Folgenden werden die stationären Flugzustände “symmetrischer Geradeausflug” und “horizontaler Kurvenflug” in störungsfreier, windloser Atmosphäre untersucht. Durch die Beschränkung der Bewegungsfreiheitsgrade kann der Satz der ursprünglich 12 Differentialgleichungen reduziert werden. Zudem nehmen in diesen Flugzuständen einige Zustandsvariablen den Wert Null an. Weiter gilt infolge $V_W = 0$ (Windfreiheit) $V_K = V_A = V$. Zur

Vereinfachung der Schreibweise wird deshalb die Indizierung der Geschwindigkeitskomponenten weggelassen.

Bedingung für einen stationären Flugzustand ist das Verschwinden von translatorischen und rotatorischen Beschleunigungen, es muss gelten

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Dadurch nimmt die linke Seite in Gleichung (2.10) den Wert Null an. Im Geradeausflug verschwinden zudem die kinematischen Kopplungen, es verbleiben die reinen Kraftgleichungen und die Untersuchung reduziert sich auf die Bestimmung eines statisches Kräfte- und Momentengleichgewichts.

4.1.1 Stationärer symmetrischer Geradeausflug

Der stationäre symmetrische Geradeausflug ist ein unbeschleunigter, schiebe- und rollwinkel freier Flug entlang einer Geraden in der Vertikalebene. Neben den Bedingungen (4.1) gelten zudem die Beziehungen

$$v = 0 \quad p = q = r = 0 \quad \phi = 0, \text{ und } \zeta = \xi = 0 \text{ sowie } Y^T = 0. \quad (4.2)$$

Infolge der Bedingungen (4.2) wirken keine Kräfte und Momente in Seitenrichtung respektive Gier- und Rollrichtung und es gilt

$$Y = L = N = 0.$$

Kräftegleichgewicht

Beschreibung der Kräfte in körperfesten Achsen

Es verbleiben die Kräfte und das Moment in der Vertikalebene. In unbeschleunigtem Flug sind die äußeren Kräfte im Gleichgewicht, mit (4.1) und (4.2) in (2.10) folgt

$$\begin{aligned} X = 0 &= X^A(u, w, \eta) + X^T + (B - G) \sin \theta \\ Z = 0 &= Z_h^A(u, w) + Z_f^A(u, w, \eta) + Z^T - (B - G) \cos \theta \\ M = 0 &= M_h^A(u, w) - x_f Z_f^A(u, w, \eta) + z_t X^T - x_t Z^T \\ &\quad + (x_{CB} B - x_{CG} G) \cos \theta + (z_{CB} B - z_{CG} G) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die aerodynamischen Kräfte sind durch die Gleichungen (3.81) bis (3.83) in Kapitel 3.7.5 beschrieben, die Angabe der Beiwerte als Funktion des Anstellwinkels und Höhenruderausschlags durch die Gleichungen (3.84) bis (3.86).

Für analytische Betrachtungen und für die Bestimmung des Trimm-Ruderausschlags ist die Darstellung in Beiwerteschreibweise geeignet. Die Beiwertefunktionen sind durch die Gleichungen (3.84) bis (3.86) gegeben oder können aus den Beziehungen in Abschnitt “Zusammenhang zwischen Kraftderivativa und aerodynamischen Beiwerten” auf Seite 197 abgeleitet werden. Einsetzen der aerodynamischen Kräfte nach der Beiwerteschreibweise in die Gleichgewichtsbedingungen (4.3) ergibt

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\rho}{2} V^2 c_x(\alpha) V^{2/3} + X^T + (B - G) \sin \theta \\
 0 &= \frac{\rho}{2} V^2 c_z(\alpha) V^{2/3} + Z^\eta(\eta) + Z^T - (B - G) \cos \theta \\
 0 &= \frac{\rho}{2} V^2 c_m(\alpha) V^{2/3} l_R - x_f Z^\eta(\eta) + z_t X^T - x_t Z^T + (x_{CB} B - x_{CG} G) \cos \theta + (z_{CB} B - z_{CG} G) \sin \theta
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Beiwerte $c_x(\alpha)$, $c_z(\alpha)$ und $c_m(\alpha)$ beschreiben dabei die Kräfte der Rumpf-Leitwerk-Konfiguration ohne Berücksichtigung des Ruderausschlags. Dessen Beitrag wird über die zusätzliche Kraft $Z^\eta(\eta)$ abgebildet. Sie wirkt an der Stelle x_f , ihr Beitrag zur Axialkraft X^A wird vernachlässigt. Diese Kraftaufteilung ist in Bild 4.1 verdeutlicht.

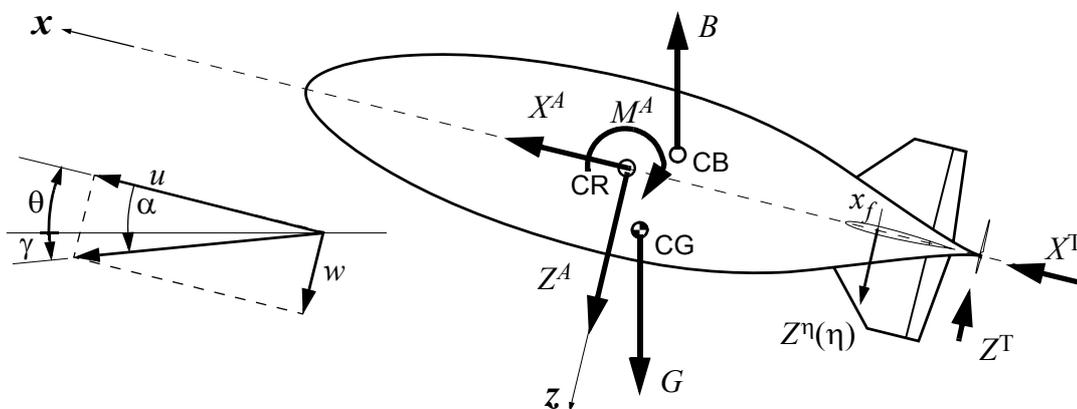


Bild 4.1: Kräfte in der Längsebene

Beschreibung der Kräfte in bahnfesten Achsen

Die Gleichungen (4.4) können aus körperfesten Achsen in Bahnkoordinaten transformiert werden. Im Fall ohne Wind entsprechen diese Achsen den aerodynamischen Achsen. Die aerodynamischen Kräfte transformieren sich in aerodynamischen Auftrieb c_a und Widerstand c_w . Das Kräftegleichgewicht lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned}
0 &= (B - G) \sin \gamma + X^T \cos \alpha - Z^T \sin \alpha - \frac{\rho}{2} V^2 c_w(\alpha) V^{2/3} \\
0 &= -(B - G) \cos \gamma - X^T \sin \alpha + Z^T \cos \alpha - \frac{\rho}{2} V^2 c_a(\alpha) V^{2/3} - L(\eta) \\
0 &= (x_{CB} B - x_{CG} G) \cos \theta + (z_{CB} B - z_{CG} G) \sin \theta + z_t X^T - x_t Z^T + \frac{\rho}{2} V^2 c_m(\alpha) V^{2/3} l_R + x_f L(\eta) .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Wieder lassen sich die Beiwertefunktionen und die Ruder-Kraftfunktion aus den Gleichungen in Abschnitt 3.7.4 ableiten.

Stationäre Flugeigenschaften in der Vertikalebene, Flugleistung und Flugbereich

Durch Auswertung der Gleichungen (4.4) und (4.5) lassen sich die stationären Flugeigenschaften bei Flug in der Vertikalebene untersuchen. Die freien Variablen sind die Flugeschwindigkeit V , die Winkel α und θ , die Schubkomponente X^T und Z^T sowie die Höhenruderauslenkung η , respektive die Ruderwirkungskraft Z^η . Der Anstell- und Nickwinkel stehen über die Beziehung $\theta = \alpha + \gamma$ mit dem Bahnwinkel γ in Verbindung.

Mit Hilfe der drei Kraft- und Momentenbeziehungen lässt sich durch Vorgabe zweier Variablen ein Trimpunkt bestimmen: Zu einer vorgegebenen Fluggeschwindigkeit V und Bahnwinkel γ kann z.B. der benötigte Schub, die Höhenruderstellung und der Gleichgewichtsanstellwinkel bestimmt werden.

Im Folgenden wird einerseits das Problem der Höhenruderumkehr angegangen, daneben werden die Gleichungen ausgewertet, um den erreichbaren Geschwindigkeits- und Bahnwinkelbereich zu bestimmen.

Höhenruderumkehr

Um das Luftschiff in einen Steigflug zu steuern, wird typischerweise durch Ziehen des Höhenruders ein positives Nickmoment erzeugt und dadurch der Schiffsrumpf entgegen des rückstellenden Moments aus statischer Auftriebs- und Gewichtskraft angestellt. Infolge des aerodynamischen Rumpfauftriebs kann somit eine gewisse aerostatische Schwere des Luftschiffs (statischer Auftrieb < Gewichtskraft) überwunden werden. In Bild 4.1 ist zu erkennen, wie ein positives Nickmoment durch eine nach unten gerichtete Höhenruderkraft erreicht wird, das Höhenruder wirkt in einer solchen Situation jedoch auftriebmindernd. Nun gibt es Konstellationen zwischen aerodynamischen und statischen Kräften, bei welchen sich diese abtreibende Ruderkraft und die durch Rumpfanstellung entstehende Auftriebskraft gegenseitig kompensieren. Der Flugbahnwinkel des Luftschiffs kann in dieser Situation durch Höhenruderausschlag nicht beeinflusst werden. Da das Verhältnis von aerodynamischen zu statischen Kräften mit der Fluggeschwindigkeit variiert, gibt es eine kritische Fluggeschwindigkeit V , bei welcher sich oben beschriebene Konstellation einstellt. Fliegt das Luftschiff langsamer, so wirkt das Höhenruder im Sinne einer direkten Kraftsteuerung: Ein Ausschlag der Ruders in positive Richtung bewirkt zwar ein leichtes Aufnicken des Luftschiffs, der Flugbahnwinkel wird jedoch reduziert, die Ruderwirkung ist im Gegensatz zum Flug mit hoher Geschwindigkeit invertiert. Man spricht deshalb von Höhenruderumkehr-

Geschwindigkeit. Oberhalb dieser Geschwindigkeit steuert sich ein Luftschiff wie ein Flugzeug, dieser Bereich kann als eigentliches Fliegen bezeichnet werden.

Über folgende Beziehungen kann diese Geschwindigkeit berechnet werden:

$$\begin{aligned} X(V, \alpha, \theta, \eta, X^T) &= 0 \\ Z(V, \alpha, \theta, \eta, X^T) &= 0 \\ M(V, \alpha, \theta, \eta, X^T) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\text{und } \frac{\partial}{\partial \eta} \gamma(V, \alpha, \theta, \eta, X^T) = 0 \quad (4.7)$$

Verwendet man in (4.6) die linearisierten Kraftgleichungen, kann die kritische Geschwindigkeit durch einen analytischen Ausdruck angegeben werden. Die Betrachtung wird besonders einfach, wenn um einen Betriebspunkt mit $\alpha_0 \ll 1$ linearisiert wird, dies ist für $B \approx G$ und $\gamma \approx 0$ gegeben. Mit diesen Vereinfachungen gilt:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho}{2} V^2 c_{x_0} V^{2/3} + X^T + (B - G)\theta = 0 \\ Z &= \frac{\rho}{2} V^2 c_{z_0} \alpha V^{2/3} + Z^\eta - (B - G) = 0 \quad \text{und} \\ M &= \frac{\rho}{2} V^2 c_{m_0} \alpha V^{2/3} l_R - x_f Z^\eta + z_t X^T + (z_{CB} B - z_{CG} G)\theta \\ &\quad \frac{\partial}{\partial Z^\eta} \gamma(V, \alpha, \theta, Z^\eta, X^T) = 0. \end{aligned}$$

Auflösen der Gleichungen führt auf die einfache Beziehung

$$V_{\eta \text{Invers}}^2 = \frac{z_{CG} G - z_{CB} B + (B - G) z_t}{\frac{\rho}{2} V^{2/3} (c_{z_0} x_f + c_{m_0} l_R)}. \quad (4.8)$$

Für ein neutral getrimmtes Luftschiff mit $B = G$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$V_{\eta \text{Invers}}^2 = \frac{(z_{CG} - z_{CB}) G}{\frac{\rho}{2} V^{2/3} (c_{z_0} x_f + c_{m_0} l_R)}.$$

Die kritische Fluggeschwindigkeit ist vorwiegend von der Tieflage des Schwerpunkts und von der Länge des Hebelarms x_f des Höhenruders abhängig. Ein tiefliegender Schwerpunkt erfordert ein starkes Nickmoment, dies muss durch eine große abtreibende Ruderkraft erreicht werden. Ein langer Hebelarm dagegen reduziert die erforderliche Ruderkraft zur Erzeugung eines aufnickenden Moments.

Wie oben bereits angesprochen, verliert das Höhenruder um die kritische Geschwindigkeit seine Wirkung zur Steuerung der Flugbahn. Der Flugbahnwinkel kann in diesem Geschwindigkeitsbereich dynamisch über den Axialschub oder statisch über eine Axialverschiebung des Schwerpunkts beeinflusst werden.

Flugleistung in Steig- und Horizontalflug

Zur Untersuchung der Flugleistung eignet sich die Betrachtung der Gleichungen in Flugbahnachsen nach (4.5). Im Folgenden wird nun die benötigte Ruderwirkungskraft $L(\eta)$ (Achtung: hier Orientierung einer *Auftriebskraft*) und die Gleichgewichtsbedingung für stationären Geradeausflug als Funktion des Schubes und des gewünschten Flugbahnwinkels hergeleitet. Zur Vereinfachung der Beziehungen wird angenommen, dass die Gleichungen bezüglich CB formuliert wurde, es gilt also $CB = CR$ und somit $x_{CB} = z_{CB} = 0$.

Aus der ersten Gleichung in (4.5) errechnet sich die bei gegebenem Schub erreichbare Fluggeschwindigkeit, respektive der Staudruck zu

$$q = \frac{\rho}{2} V^2 = \frac{(B - G) \sin \gamma + X^T \cos \alpha}{c_w(\alpha) V^{2/3}}. \quad (4.9)$$

Einsetzen des Staudrucks in die Momentengleichung ergibt die für stationären Flug notwendige Ruderwirkungs-Liftkraft

$$L(\eta) = -\frac{-x_{CG} G \cos \theta - z_{CG} G \sin \theta + z_f X^T + \frac{\rho}{2} V^2 c_m(\alpha) V^{2/3} l_R}{x_f}. \quad (4.10)$$

Die Normalkraftbeziehung wird verwendet um die zulässige Differenz zwischen Gewichtskraft und statischer Auftriebskraft zu bestimmen. Sie lautet nun

$$(B - G) = \frac{X^T (l_R c_m(\alpha) - x_f c_a(\alpha)) \cos \alpha - c_w(\alpha) (x_{CG} G \cos \theta + x_f X^T + z_{CG} G \sin \theta)}{x_f c_w(\alpha) \cos \gamma + (x_f c_a(\alpha) - l_R c_m(\alpha)) \sin \gamma}. \quad (4.11)$$

Im Falle des Horizontalflugs vereinfacht sich (4.11), die Beziehung vereinfacht sich zu

$$(B - G) = X^T \left(\sin \alpha + \cos \alpha \frac{c_a(\alpha)}{c_w(\alpha)} \right) + \frac{1}{x_f} \left(G (x_{CG} + z_{CG} \sin \theta) - \frac{\rho}{2} V^2 c_m(\alpha) V^{2/3} l_R \right), \quad (4.12)$$

dabei wurde, obwohl im Horizontalflug $\theta = \alpha$ gilt, zur Kennzeichnung des statischen Moments die Variable θ stehengelassen.

Man erkennt auf der rechten Seite als ersten Term die aus der klassischen Flugmechanik bekannte Widerstandspolare. Der zweite Term stellt den Verlust (oder Gewinn an Auftrieb) durch das aufnickende Moment infolge Rumpfanstellung dar, welches durch Ruderausschlag kompensiert werden muss. Man erkennt, wie sich dieser Beitrag durch

Schwerpunktsverschiebung, insbesondere durch Variation von x_{CG} , reduzieren lässt. Für die folgende axiale Schwerpunktlage

$$x_{CG} = \frac{1}{G} \frac{\rho}{2} V^2 c_m(\alpha) V^{2/3} l_R - z_{CG} \sin \theta = \frac{M^A(\alpha)}{G} - z_{CG} \sin \alpha \quad (4.13)$$

verschwindet dieser Beitrag. Geht man davon aus, dass das Luftschiff “schwer” fliegt, also $B - G < 0$, bewirkt eine Verschiebung von CG hinter den Wert aus (4.13), dass die Ruderwirkungskraft zusätzlich unterstützenden Auftrieb erzeugt.

Eine weitere Interpretation von Gleichung (4.12) ermöglicht Aussagen über das aerodynamische Auftriebspotential von Luftschiffen in Abhängigkeit der Schiffsgröße. Bezieht man den Ausdruck auf den statischen Auftrieb B , entsteht die Proportionalitätsbeziehung

$$\frac{B - G}{B} \sim X^T .$$

Der notwendige Schub wiederum ist über den Widerstand mit Volumen und Fluggeschwindigkeit gekoppelt:

$$X^T = \frac{\rho}{2} V^2 c_{w_0} V^{2/3} .$$

Man findet mit $B = \rho V g$ folgende Beziehung

$$\frac{B - G}{B} \sim \frac{\frac{\rho}{2} V^2 c_{w_0} V^{2/3}}{\rho V g} = \frac{V^2}{2g} c_{w_0} V^{-1/3} . \quad (4.14)$$

Die zulässige relative Gewichtsabweichung wird bei gegebener Entwurfsgeschwindigkeit V proportional der Schiffslänge ($V^{1/3}$ ist ein Längenmaß) gemindert. In anderen Worten: Die zu erwartende Gewichtsabweichung, z.B. infolge Temperaturschwankungen, variiert proportional des Schiffvolumens, der erzeugbare aerodynamische Auftrieb steigert sich jedoch nur mit $V^{2/3}$, je größer das Luftschiff, desto kleiner die relative aerodynamische Tragfähigkeit.

Numerische Untersuchung für 3 unterschiedliche Luftschiffe

Der stationär fliegbare Bereich wird im Folgenden numerisch untersucht. Dabei werden die vollen nichtlinearen Gleichungen gemäß Kapitel 2 und 3 benutzt.

Bild 4.2 dient der Erläuterung der charakteristischen Bereichsgrenzen. Die dicken, durchgezogenen Linien kennzeichnen flugmechanische Grenzen: Die Maximalgeschwindigkeit bei gegebenem Schub, den maximalen Steigwinkel bei negativem Vollruderausschlag und gegebener Geschwindigkeit (Linie maximalen Auftriebs), respektive den Winkel maximalen Sinkens bei positivem Vollruderausschlag (Linie maximalen Abtriebs). Der Punkt, in

dem sich diese Grenzen kreuzen, entspricht dem Ruderumkehrpunkt, der Bahnwinkel kann in diesem Punkt durch Höhenruderausschlag nicht beeinflusst werden.

Neben den flugmechanischen Grenzen sind betriebliche und konstruktive Grenzen eingezeichnet: Ein maximal-, bzw. minimal zulässiger Bahnwinkel (könnte auch durch konstruktiv zulässiges θ_{\max} begrenzt werden), dann die Staudruckgrenze als Grenze maximaler aerodynamischer Belastung und die Begrenzungen der zulässigen Steig- und Sinkraten (konstruktive Grenze durch Druckhaltesystem). Diese Grenze verläuft gemäß $\dot{h} = \sin\gamma V$ in Bild 4.2 als Hyperbel.

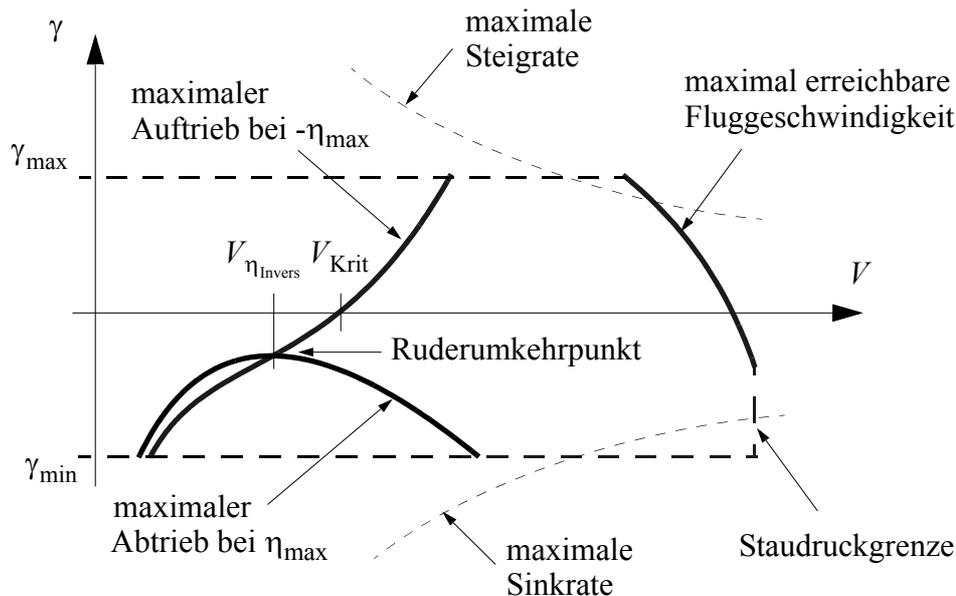


Bild 4.2: Charakteristischer Flugbereich, Bereichsgrenzen

Bild 4.2 zeigt schematisch den Flugbereich eines schweren Luftschiffs. Die maximal erreichbare Fluggeschwindigkeit nimmt mit steigendem Bahnwinkel ab. Man erkennt weiter, dass unterhalb der Fluggeschwindigkeit V_{krit} die Flughöhe nicht mehr gehalten werden kann, für $V \rightarrow 0$ sackt das Luftschiff ab. Die Geschwindigkeit V_{krit} kann aus den Beziehungen (4.5) abgeleitet werden.

Bild 4.3 zeigt die numerisch berechneten flugmechanischen Grenzen für 3 Luftschiffe unterschiedlicher Größenkategorien: Für das Kleinluftschiff Lotte, dann für ein Luftschiff mit rund $1'000 \text{ m}^3$ Volumen mit 1-2 Mann Besatzung, und ein großes Transportluftschiff mit rund $500'000 \text{ m}^3$ Volumen und tiefliegendem Schwerpunkt. Deutlich ist der Zusammenhang zwischen Schiffsgröße und Flugbereich zu erkennen, wie er mit Hilfe von Gleichung (4.14) auf Seite 103 diskutiert wurde. Bereits für ein 4% schweres Luftschiff ($(B - G)/B = -4\%$) ist der Betriebsbereich des Großluftschiffs stark eingeschränkt, während das Luftschiff Lotte über einen grossen Geschwindigkeitsbereich immer noch gute Steigleistung erreichen kann.

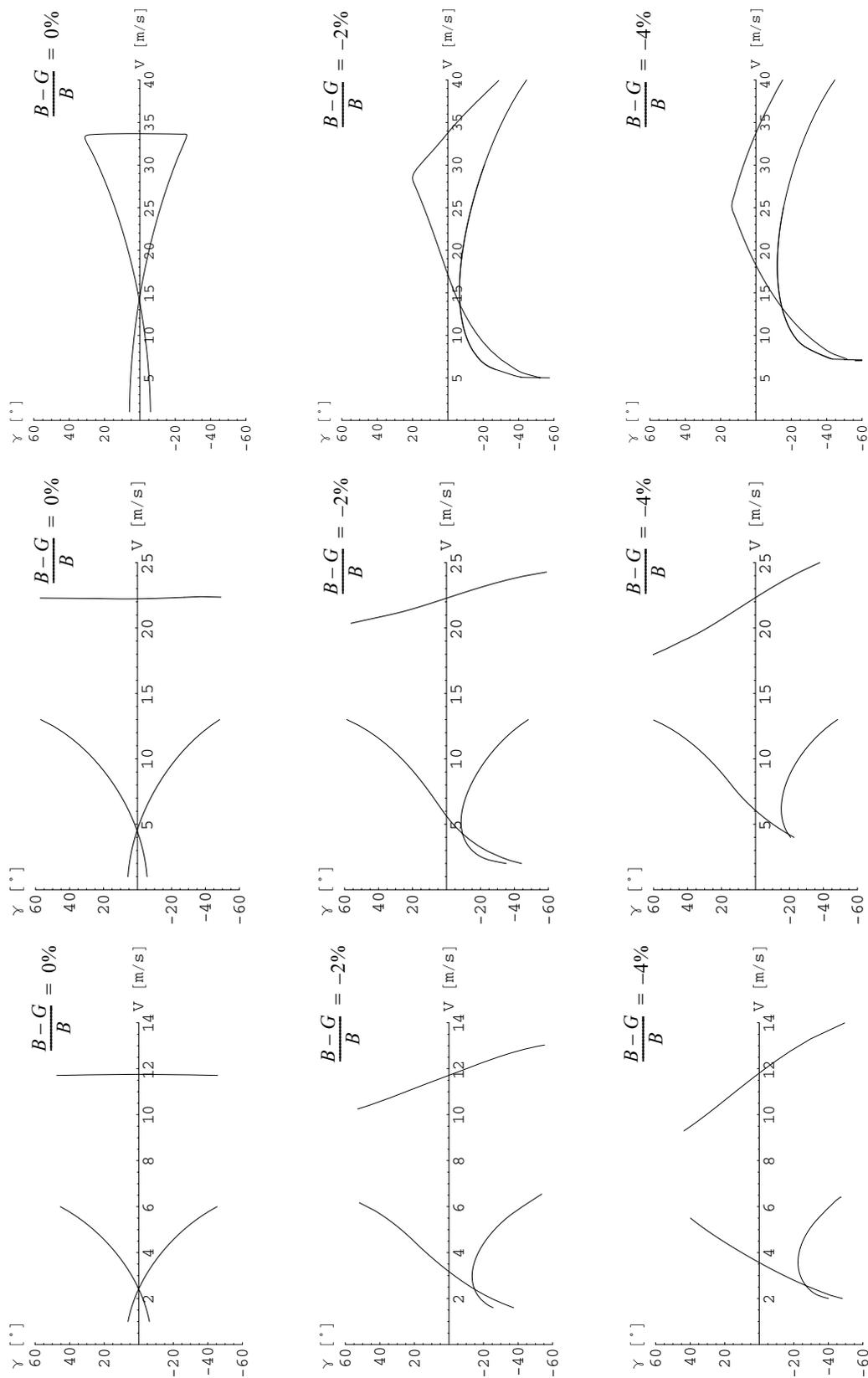


Bild 4.3: Flugbereich in der Vertikalebene, flugmechanische Grenzen

4.1.2 Stationärer horizontaler Kurvenflug

Neben dem stationären Geradeausflug stellt der horizontale Kurvenflug einen wichtigen Flugzustand dar. Im horizontalen Kurvenflug gelten neben den Bedingung (4.1) weiter die Bedingungen

$$\begin{aligned} \dot{z} = \gamma = 0, & \quad \text{konstante Flughöhe} \\ T_{gf}\Omega_f = \Omega_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \text{ und } \dot{\Psi} = \dot{\chi} & \quad \text{Winkelgeschwindigkeits-} \\ & \quad \text{vektor in Lotrichtung} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aus der ersten Bedingung für konstante Flughöhe in Gleichung (4.15) leitet sich die kinematische Zwangsbeziehung

$$w \cos \phi \cos \theta + v \cos \theta \sin \phi - u \sin \theta = 0$$

ab, aus der geforderten Ausrichtung des Drehvektors resultiert die Beziehung

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \dot{\Psi} \\ \cos \theta \sin \phi \dot{\Psi} \\ \cos \theta \cos \phi \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

zwischen Drehraten p , q , und r sowie Lagewinkeln und Azimut-Rate.

Kräftegleichgewicht

Infolge der Kopplung aller dynamischen Zustände ist eine analytische Untersuchung des Kurvenfluges in allgemeiner Form wenig aussichtsreich. Die Forderung nach koordiniertem Kurvenflug, welcher dadurch gekennzeichnet ist, dass das scheinbare Lot exakt in flugzeugfester z -Richtung zeigt, ist für Luftschiffe nur begrenzt sinnvoll: Luftschiffe fliegen Kurven nicht durch Neigung des Auftriebsvektors, sondern mit schiebendem und somit Seitenkraft erzeugendem Rumpf. Die wirkenden Kräfte sind in Bild 4.4 dargestellt.

Eine starke Vereinfachung ergibt sich unter der Annahme statischen Gleichgewichts ($B = G$) und dass der Schwerpunkt CG exakt unterhalb des Auftriebspunkts CB liegt, also $x_{CB} = x_{CG}$. In diesem Fall fliegt das Luftschiff nick- und anstellwinkelfrei, und unter Vernachlässigung der durch den existierenden Rollwinkel erzwungenen Kopplung von Höhen- und Seitenruder folgt aus obigen Annahmen $Z^A = w = 0$. Die Momente um die Rollachse sind im Gleichgewicht ($L = 0$), wie auch Schub und Widerstand ($X = 0$), es müssen also noch folgende Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden:

als zusätzliche Kraft im aerodynamischen Modell geführt. In Beiwerteschreibweise lauten die Kräfte und Momente in (um $\beta=0$) linearisierter Form

$$\begin{aligned} Y^A &= \frac{\rho}{2} V^2 \left(c_{y_\beta} \beta + c_{y_r} \frac{r l_R}{V} + c_{y_\zeta} \zeta \right) V^{2/3} = \frac{\rho}{2} (c_{y_\beta} uv + c_{y_r} l_R ru + c_{y_\zeta} u^2 \zeta) V^{2/3} \\ N^A &= \frac{\rho}{2} V^2 \left(c_{n_\beta} \beta + c_{n_r} \frac{r l_R}{V} + \frac{x_f}{l_R} c_{y_\zeta} \zeta \right) V^{2/3} l_R = \frac{\rho}{2} \left(c_{n_\beta} uv + c_{n_r} l_R ur + \frac{x_f}{l_R} c_{y_\zeta} u^2 \zeta \right) V^{2/3} l_R \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die scheinbare Masse Effekte infolge Kurvenflugs sind jeweils direkt in den Beiwerten enthalten. Für das Luftschiff Lotte betragen die oben eingeführten Beiwerte um $\beta=0$

$$\begin{aligned} c_{y_\beta} &= -0,61 & c_{y_r} &= 0,153 & c_{y_\zeta} &= 0,231 \\ c_{n_\beta} &= -0,22 & c_{n_r} &= -0,071 & & \end{aligned}$$

sie sind analytisch durch die Beziehungen im Anhang "Zusammenhang zwischen Kraftderivativa und aerodynamischen Beiwerten" auf Seite 197 beschrieben.

Neutralpunkt und Manöverpunkt bei festem Seitenruder, Betrachtung um $\beta=0$

In der Flugmechanik der Flächenflugzeuge wird die statische Stabilität und Steuerbarkeit in der Längsbewegung über den aerodynamischen Neutralpunkt und den Manöverpunkt diskutiert ([34]). Diese Methode kann zur Untersuchung der Seitenbewegung von Luftschiffen herangezogen werden.

Der Neutralpunkt der Seitenbewegung x_N liegt bei

$$x_N = \frac{c_{n_\beta}}{c_{y_\beta}} l_R. \quad (4.19)$$

Ist $x_N > x_{CG}$, d.h. liegt der Neutralpunkt vor dem Schwerpunkt, spricht man von statischer Instabilität, das aerodynamische Nickmoment wirkt nicht rückstellend. Bei Luftschiffen ist der Seitenkraftbeiwert immer negativ, es gilt $c_{y_\beta} < 0$, für statische Stabilität (falls $x_{CG} = 0$) müsste also der Momentenbeiwert $c_{n_\beta} > 0$ sein. Am Verlauf des Nickmomentenbeiwerts in Bild 3.27 erkennt man, wie das Moment bei kleinen Anstellwinkeln destabilisierend wirkt. Erst außerhalb des linearen Bereichs reduziert sich die Steigung des Momentenverlaufs, ab Winkeln von einigen Grad (ca. 9° beim Luftschiff Lotte) wird $c_n(\beta) > 0$, das Luftschiff wird statisch stabil. Der Neutralpunkt wandert demnach für größere Schiebewinkel hinter den Bezugspunkt.

Der Giermomentenbeiwert beträgt nach Gleichung (C.20)

$$c_{n_\beta} = \eta_k c_{m_{\text{pot}}}^{uw} - \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} \frac{x_f S_f}{V^{2/3} l_R}.$$

Durch Vergrößerung der Ruderfläche S_f wird der Beiwert kleiner, ab

$$S_{f_{\text{krit}}} = \frac{l_R V^{2/3} \eta_k c_{m_{\text{pot}}}^{uw}}{x_{f_a} \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}}}$$

nimmt er negative Werte an. Der Momentenverlauf und somit die Flugrichtung ist dann um $\beta = 0$ statisch stabil (beachte: $x_{f_a} < 0!$). Für Lotte müsste sich die Leitwerksgröße dazu etwa verdoppeln.

Die hier diskutierten Zusammenhänge sind natürlich auch ohne mathematische Analysen erklärbar: Ein schwebendes Gerät mit riesigen Flossen am Heck dreht sich in den Wind, es gehorcht der sogenannten Windfahnenstabilität.

Die hergeleitete Bedingung stellt aber keine notwendige Bedingung für richtungsstabilen Flug dar: Sobald ein Luftschiff leicht schiebt, erfährt es neben einem destabilisierenden Giermoment auch eine Seitenkraft. Diese Kraft wirkt nicht nur schiebewinkelreduzierend, sondern zwingt das Luftschiff in einen Kurvenflug, und somit macht sich die aerodynamische Gierdämpfung bemerkbar. Man erkennt, der oben erwähnte gierstabile Schiebewinkelbereich bei grossen Winkeln kann (in der Seitenbewegung) nie ein stationärer Zustand sein.

Eine realistische Aussage über die Stabilität und Steuerbarkeit in der Längsbewegung erhält man über die Betrachtung des Manöverpunkts. Der Manöverpunkt wird aus dem Kräftegleichgewicht nach Gleichung (4.16) bestimmt. Für festes Ruder ($\zeta = 0$) folgt aus der Seitenkraftbedingung der stationäre Schiebewinkel

$$\beta|_{\zeta=0} = \frac{2m - \rho V^{2/3} c_{y_r} l_R}{\rho V^{2/3} c_{y_\beta}} \cdot \frac{r}{V}$$

Der Manöverpunkt berechnet sich über die Beziehung

$$x_M = \frac{N(\beta, r, \zeta)}{Y(\beta, r, \zeta)}$$

Mit $\zeta = 0$ folgt durch Einsetzen des oben berechneten β und unter $Y = mrV$ der Wert

$$x_M|_{\zeta=0} = \frac{c_{n_\beta} l_R}{c_{y_\beta}} + \left(c_{n_r} - \frac{c_{n_\beta}}{c_{y_\beta}} c_{y_r} \right) \frac{\rho l_R^2 V^{2/3}}{2m} = x_N + \left(c_{n_r} - \frac{c_{n_\beta}}{c_{y_\beta}} c_{y_r} \right) \frac{\rho l_R^2 V^{2/3}}{2m}. \quad (4.20)$$

Da c_{n_r} , c_{n_β} und c_{y_β} negativ sind, während $c_{y_r} > 0$ ist, liegt der Manöverpunkt bei Rudernullausschlag hinter dem Neutralpunkt. Für Richtungsstabilität ist nun die Forderung ausreichend, dass der Manöverpunkt hinter dem Schwerpunkt liegt, die "Federsteifigkeit" in der gekoppelten Gier-/Lateralbewegung ist dann positiv, also rückstellend. Liegt x_M exakt über dem Schwerpunkt, so wäre das Luftschiff um $\beta=0$ in einem labilen Gleichgewicht, eine Kurve könnte praktisch ohne Ruderdruck eingeleitet werden.

Der Neutralpunkt des Luftschiffs Lotte liegt etwa bei $0,4l_R$, der Manöverpunkt etwa bei $0,19l_R$. Durch Vergrößerung der Leitwerke wird auch der Manöverpunkt nach hinten verschoben. Damit Lotte ohne Ruderausschlag bei jeder Fluggeschwindigkeit richtungsstabil fliegt, müssten die Leitwerke um etwa 50% vergrößert werden. Dies stellt eine erhebliche Reduktion gegenüber der Forderung aus der rein statischen Betrachtung über den Neutralpunkt dar.

Berücksichtigt man auch die Ruderauslenkung bei der Berechnung des Manöverpunktes, findet man

$$x_M = x_M|_{\zeta=0} + \left(\frac{x_f}{l_R} - \frac{c_{n\beta}}{c_{y\beta}} \right) c_{y\zeta} \frac{\rho V^{2/3} l_R}{2m} \cdot \zeta \frac{V}{r}. \quad (4.21)$$

Manöverpunkt der Längsbewegung?

Die Stabilität um die Nickachse könnte auf identische Weise untersucht werden. Da der Schwerpunkt typischerweise jedoch deutlich unterhalb CB liegt, wird die Momentenbetrachtung maßgebend durch das stabilisierend wirkende statische Rückstellmoment beeinflusst. Eine konservative Stabilitätsaussage im Horizontalflug wäre, dass $c_{m\theta} - c_{m\alpha} \leq 0$. Durch die Auftriebskraft und die nickdämpfenden Derivativa wird diese Forderung natürlich reduziert.

Flugeigenschaften im stationären Kurvenflug

Betrachtung im linearen Bereich um $\beta=0$

Um einen stationären Kurvenflug einzuhalten, muss die Summe der Seitenkräfte und das Giermoment identisch Null sein. Dies ist der Fall, wenn x_M nach Gleichung (4.21) Null wird. Diese Gleichung definiert somit die Bedingung für den getrimmten Ruderausschlag: Man erkennt, dass der Trimm-Ruderausschlag proportional zu r/V , also proportional $1/R$ eingestellt werden muss.

Den getrimmten Schiebewinkel und Ruderausschlagwinkel kann man auch direkt durch Lösen der Gleichung (4.17) bestimmen. Die beiden Trimmwinkel betragen

$$\beta = \frac{2 \frac{m}{\rho V^{2/3} l_R} \frac{x_f}{l_R} - c_{y_r} x_f + c_{n_r} l_R}{c_{y_\beta} \frac{x_f}{l_R} - c_{n\beta}} \cdot \frac{r}{V}, \quad \zeta = \frac{2 \frac{m}{\rho V^{2/3} l_R} c_{n_\beta} + c_{n_r} c_{y_\beta} - c_{n_\beta} c_{y_r}}{c_{y_\zeta} \left(c_{n_\beta} - c_{y_\beta} \frac{x_f}{l_R} \right)} \cdot \frac{r l_R}{V}, \quad (4.22)$$

dabei gilt $\frac{r}{V} = R^{-1}$ und somit

$$\beta \sim \frac{1}{R} \quad \text{und} \quad \zeta \sim \frac{1}{R}.$$

Eine weitere interessante Beziehung ergibt sich direkt aus dem Giermomentengleichgewicht:

$$R = \frac{V}{r} = \frac{c_{n_r}}{c_{y_\zeta} \frac{x_f}{l_R} \zeta + c_{n_\beta} \beta} l_R. \quad (4.23)$$

Man erkennt aus (4.22) und (4.23), dass der Ruderausschlagwinkel sowie der resultierende Schiebewinkel im Kurvenflug nur vom Kurvenradius abhängt, jedoch nicht von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Kurve geflogen wird. Diese Erkenntnisse stimmen nach Nagabushan mit den Erfahrungen aus Flugtests überein [59].

Verhalten außerhalb des linearen Bereichs ($\beta_0 \neq 0$)

Die aerodynamischen Beiwertefunktionen verhalten sich nur in einem beschränkten Bereich um $\beta=0$ linear. Insbesondere Seitenkraft- und Giermomentenbeiwert verhalten sich nichtlinear, die Seitenkraft nimmt progressiv zu, während das Giermoment mit zunehmendem Schiebewinkel flacher verläuft (vgl. $c_z(\alpha)$ und $c_m(\alpha)$ nach Bild 3.26 und Bild 3.27).

Algebraische Untersuchung

Bei Linearisierung um den Winkel $\beta_0 \neq 0$ müssen in Gleichung (4.18) zusätzlich die Koeffizienten c_{y_0} und c_{n_0} berücksichtigt werden. Die um den Schiebewinkel $\beta = \beta_0$ linearisierte Aerodynamik gehorcht somit den Gleichungen

$$\begin{aligned} Y^A &= \frac{\rho}{2} V^2 \left(c_{y_0} + c_{y_\beta} (\beta - \beta_0) + c_{y_r} \frac{r l_R}{V} + c_{y_\zeta} \zeta \right) V^{2/3} \\ N^A &= \frac{\rho}{2} V^2 \left(c_{n_0} + c_{n_\beta} (\beta - \beta_0) + c_{n_r} \frac{r l_R}{V} + \frac{x_f}{l_R} c_{y_\zeta} \zeta \right) V^{2/3} l_R \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Auflösung der Gleichung (4.17) unter Berücksichtigung der linearisierten Aerodynamik (4.24) nach Trimmschiebewinkel und Trimmruderausschlagwinkel führt auf

$$\beta - \beta_0 = \frac{2 \frac{m}{\rho} \frac{x_f}{V^{2/3} l_R} - c_{y_r} \frac{x_f}{V} + c_{n_r} l_R}{c_{y_\beta} \frac{x_f}{l_R} - c_{n_\beta}} \cdot \frac{r}{V} + \frac{c_{n_0} - c_{y_0} \frac{x_f}{l_R}}{c_{y_\beta} \frac{x_f}{l_R} - c_{n_\beta}} \quad (4.25)$$

$$\text{und } \zeta = \frac{2 \frac{m}{\rho} \frac{x_f}{V^{2/3} l_R} c_{n_\beta} + c_{n_r} c_{y_\beta} - c_{n_\beta} c_{y_r}}{c_{y_\zeta} \left(c_{n_\beta} - c_{y_\beta} \frac{x_f}{l_R} \right)} \cdot \frac{r l_R}{V} + \frac{c_{y_\beta} c_{n_0} - c_{y_0} c_{n_\beta}}{c_{y_\zeta} \left(c_{n_\beta} - c_{y_\beta} \frac{x_f}{l_R} \right)} \quad (4.26)$$

Wie bereits oben erwähnt müssen dabei die lokalen Koeffizienten um $\beta = \beta_0$ in Gleichung (4.25) eingesetzt werden. Außerdem muss man sich bewusst sein, dass Gleichung (4.25) die aerodynamischen Verhältnisse nur im Nahbereich des Bezugsschiebewinkels β_0 beschreiben kann. Infolge des Zusammenhangs zwischen Schiebewinkel und Kurvenradius ist ihre Gültigkeit somit auch bezüglich des Kurvenradius beschränkt.

Die ersten Terme in Gleichung (4.25) sind identisch zu den analytischen Ausdrücken β und ζ nach (4.22) und verhalten sich proportional $1/R$. Die zweiten Terme sind unabhängig von Fluggeschwindigkeit und Gierrate, sie hängen nur vom Bezugsschiebewinkel β_0 ab. Die Trimmwinkel gehorchen somit folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\beta &= c_1(\beta_0) \cdot \frac{1}{R} + c_2(\beta_0) \\ \zeta &= c_3(\beta_0) \cdot \frac{1}{R} + c_4(\beta_0)\end{aligned}\tag{4.27}$$

Wie geht nun die Größe des Luftschiffs in die Trimmbedingungen mit ein? Geht man davon aus, dass die aerodynamischen Beiwerte invariant gegenüber der Schiffsgröße sind, die Aerodynamik also über die Bezugsgrößen $V^{2/3}$ und l_R skalierbar ist, beeinflusst die Schiffsgröße den stationären Zustand nur über den Term

$$\frac{m}{\rho V^{2/3}} \approx \frac{\rho V}{\rho V^{2/3}} = V^{1/3} \sim l_R.$$

Wie zu erwarten war, macht sich wieder das Verhältnis *Masse/Referenzfläche* bemerkbar: Je größer das Schiff, desto kleiner die "aerodynamische Effektivität". Der für einen gegebenen Kurvenradius erforderliche Schiebe- und Ruderausschlagwinkel vergrößert sich mit zunehmender Schiffsgröße.

Numerische Untersuchung am Beispiel des Luftschiffs Lotte und Diskussion

Mittels numerischer Simulation und Trimmrechnungen unter Verwendung des nichtlinearen Modells wurde der horizontale Kurvenflug des Luftschiffs Lotte untersucht, die Resultate sind in Bild 4.5 dargestellt.

Im rechten Teil des Diagramms ist der Flugbereich dargestellt, in welchem die linearen Ansätze das Verhalten gut zu beschreiben vermögen. In diesem Bereich gilt allgemein

$$\text{mit } \beta_0 = 0: c_1(0) < 0, c_3(0) > 0 \text{ und } c_2(0) = c_4(0) = 0.$$

Die Kurven von ζ und β zeigen beide den hyperbolischen Verlauf gegenüber Radius R . In diesem Bereich dominiert das destabilisierende Rumpfmoment, der Manöverpunkt liegt vor dem Schwerpunkt, das Seitenruder muss gegen die Kurvenrichtung ausgeschlagen werden, um die Gierbewegung bremsen zu können. Etwa ab Schiebewinkel $\beta > 1^\circ$ macht sich die Nichtlinearität der Beiwerteverläufe bemerkbar, der Trimmruderwinkel weicht vom hyperbolischen Verlauf ab.

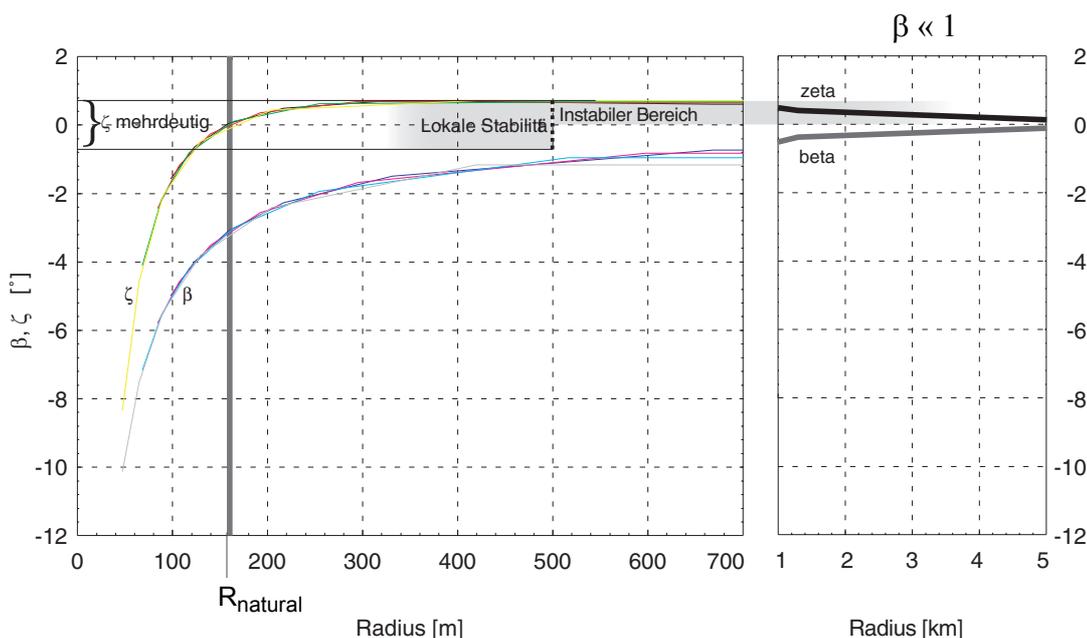


Bild 4.5: Schiebewinkel und Ruderausschlag im stationären Kurvenflug

Bei einem Schiebewinkel von etwa 3° fliegt Lotte ihren “natürlichen” stationären Kurvenflug ohne Ruderausschlag, der ruderfeste Manöverpunkt liegt bei x_{CG} . Dies ist der stabile Flugzustand in welchen Lotte bei festen Rudern übergehen würde, die Kurvenrichtung ist von der Vorgeschichte abhängig. Will das Luftschiff engere Kreise als mit dem natürlichen Radius R_{natural} fliegen, muss der Schiebewinkel durch Ruderausschlag aktiv vergrößert werden.

Ebenfalls dargestellt in Bild 4.5 ist der “mehrdeutige ζ -Bereich”. Liegt der Ruderausschlag in diesem Bereich, können sich drei stationäre Flugzustände einstellen:

- Eine Kurve entgegen des Ruderausschlags mit Radius $R > 500 \text{ m}$
- Eine Kurve entgegen des Ruderausschlags mit Radius $R_{\text{natural}} < R < 500 \text{ m}$
- Eine Kurve in Ruderausschlagrichtung mit Radius $R < R_{\text{natural}}$.

Der stationäre Flugzustand (a) stellt dabei ein labiles Gleichgewicht dar, er kann nicht stabil gehalten werden, sondern geht bei kleinster Störung in den Zustand (b) über. Auch Zustand (b) ist nur in einem gewissen Bereich stabil: Bei stärkerer Störung (z.B. durch Windböe) kann das Luftschiff ausbrechen und in eine Kurve in Gegenrichtung mit dem entsprechenden Radius $R < R_{\text{natural}}$ übergehen. Umgekehrt kann eine starke Störung das Luftschiff auch aus Zustand (c) in Zustand (b) bringen. Liegt der Ruderausschlag also in diesem begrenzten Bereich, ist zwar ein stabiler Kurvenflug zu erwarten, jedoch unter der Einschränkung, dass die Kurvenrichtung nicht eindeutig festgelegt ist. Nur für größere Ruderausschlagwinkel außerhalb des grau hinterlegten Bereichs erreicht das Luftschiff einen eindeutigen, global stabilen Flugzustand.

Infolge der Symmetrieeigenschaften des Luftschiffs gelten die diskutierten Beziehungen sowohl für Rechts- als auch Linkskurven.

4.2 Lineare Bewegungsgleichungen im symmetrischen Horizontalflug

4.2.1 Betriebspunkte, Linearisierung und Zustandsraumdarstellung

Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens in einem eingeschränkten Zustandsbereich oder bei geringen Abweichungen von einem Betriebspunkt kann das linearisierte Gleichungssystem verwendet werden. Der in Kapitel 4.1 vorgestellte stationäre Gleichgewichtszustand "symmetrischer Geradeausflug" wird als Betriebspunkt ausgewählt.

Die linearen Zustandsgleichungen ermöglichen einfache Untersuchungen von Systemeigenschaften wie Stabilität und dynamisches Eigenverhalten. Eine weitere Vereinfachung des Gleichungssystems ergibt sich aus den Symmetrieeigenschaften des Luftschiffs: Das lineare Gleichungssystem kann im Geradeausflug in zwei Teilsysteme, welche getrennt die Längsbewegung und die Seitenbewegung beschreiben, unterteilt (entkoppelt) werden.

Die Linearisierung der Bewegungsgleichungen erfolgt auf numerische oder analytische Weise, wie beispielsweise von Brockhaus beschrieben ([43]). Eine analytische Herleitung der linearen Zustandsgleichungen ist in Anhang C dargestellt. Dort wird durch Linearisierung der kinematischen Beziehungen und der Kraftgleichungen eine lineare Darstellung der Bewegungsgleichung erzielt. Dieses Gleichungssystem wird nach den Zustandsableitungen aufgelöst und so in eine lineare Zustandsvektordifferentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.28)$$

überführt. Der Zustandsvektor x und der Steuer- oder Eingangsvektor u stellen dabei im Sinne der Theorie kleiner Störungen Abweichungen vom Betriebspunkt x_0, u_0 dar. Die Systemmatrix A beschreibt die Eigendynamik und die Eingangs- oder Steuermatrix B die Steuerwirkung im Betriebspunkt. Die Matrizen ändern sich in Funktion der Luftschiffkonfiguration und des Flugzustandes.

4.2.2 Entkopplung in Längs- und Seitenbewegung

Im symmetrischen Geradeausflug können die Bewegungsdifferentialgleichungen in eine Längs- und eine Seitenbewegung unterteilt werden. Die Bedingungen für stationären und symmetrischen Horizontalflug wurden bereits in 4.1.1 diskutiert, es gelten die Beziehungen

$$V = [u_0, 0, w_0]^T, \Omega = [0, 0, 0]^T, \phi_0 = 0, \gamma_0 = 0 \text{ und } \zeta_0 = 0,$$

falls das Luftschiff statisch nahezu neutral getrimmt ist, gilt weiter (vgl. Anhang C.1.2 auf Seite 192)

$$\alpha_0 \ll 1 \text{ und somit auch } \theta_0 \ll 1.$$

Eine ausführliche Herleitung der Systemmatrizen aus den nichtlinearen Bewegungsgleichungen und eine Diskussion der Kraftderivativa und der Elemente der Systemmatrizen unter diesen Bedingungen findet sich in Anhang C. Die dortigen Untersuchungen zeigen, dass kleine

Abweichungen des Anstell- und Schiebewinkels vom Betriebszustand vorwiegend zu Luftkräften in der entsprechenden Körperebene führen: Eine Anstellwinkelstörung wirkt sich beispielsweise kaum auf das aerodynamische Giermoment aus. Infolge dieser aerodynamischen Charakteristik im linearen Bereich um den symmetrischen Geradeausflug und der symmetrischen Gestalt des Masse- und Trägheitstensors, beides Folgen der Symmetrieeigenschaften des Fahrzeugs, lässt sich das Gleichungssystem in eine Längs- und Seitenbewegung entkoppeln.

Die Zustandsgleichung der Längsbewegung wird durch die Zustände u , w , q , θ und z beschrieben. Die Gleichungen lauten

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u & X_w & X_q & X_\theta & 0 \\ Z_u & \mathbf{Z}_w & \mathbf{Z}_q & Z_\theta & 0 \\ M_u & \mathbf{M}_w & \mathbf{M}_q & \mathbf{M}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & X_{\delta_T}/m_x \\ Z_{,\eta}/m_z & 0 \\ M_{,\eta}/I_{yy} & M_{,\delta_T}/I_{yy} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \delta_T \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Die Seitenbewegung lebt in den Zuständen v , p , r und ϕ . Ihre Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_v & Y_p & \mathbf{Y}_r & Y_\phi \\ L_v & \mathbf{L}_p & L_r & \mathbf{L}_\phi \\ \mathbf{N}_v & N_p & \mathbf{N}_r & N_\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{,\zeta}/m_y & L_{,\xi}zm/m_y I_{xx} \\ 0 & L_{,\xi}/I_{xx} \\ N_{,\zeta}/I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Sowohl in (4.29) als auch in (4.30) sind dominante Terme fett gesetzt. Weiterführende Abschätzungen der Größenordnung der Terme und Derivativa finden sich auf Seite 200.

4.3 Eigenverhalten und Stabilität im symmetrischen Horizontalflug

Das charakteristische Eigenverhalten im symmetrischen Horizontalflug wurde bereits von DeLaurier und Schenk ([20]), Gomes ([24]) wie auch vom Autor ([66], [67]) diskutiert. DeLaurier untersucht die Eigenwerte dreier Luftschiffe jeweils bei einer festen Geschwindigkeit unter dem Einfluss einer stabilisierenden Rückführung (Wurzelortskurve), während Gomes den Einfluss der Fluggeschwindigkeit untersucht. Diese Diskussion wird hier erweitert, indem der Unterteilung des Flugbereichs durch die Ruderumkehrgeschwindigkeit (vgl. Seite 100) Rechnung getragen wird: Unterhalb dieser Geschwindigkeit "schwebt" das Luftschiff und seine Bewegung ist von den statischen Kräften bestimmt, oberhalb "fliegt" es, die aerodynamischen Kräfte dominieren. Außerdem werden die Auswirkungen ausgewählter Geometrie- und Konfigurationsänderungen auf die Eigendynamik untersucht.

4.3.1 Typische Lage der Pole und Modalanalyse

Eine für den gesamten Flugbereich und alle Konfigurationen typische Wurzelverteilung der Längs- und Seitenbewegung von Luftschiffen ist in Bild 4.6 dargestellt. Beide Teilbewegun-

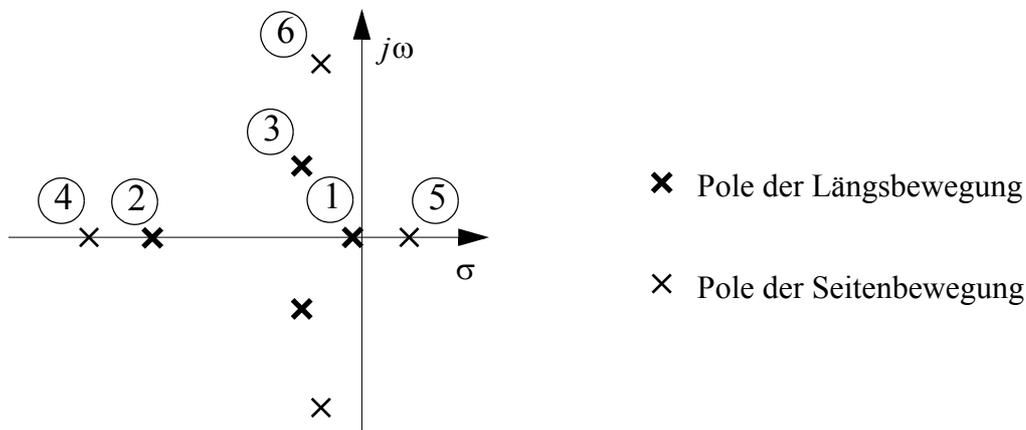


Bild 4.6: Typische Wurzelverteilung der Längs- und Seitenbewegung

gen sind je durch 2 reelle Pole und ein konjugiert komplexes Wurzelpaar bestimmt. Die drei Modi der Längsbewegung sind:

- ① Der Fluggeschwindigkeitsmodus, eine langsame, stabile, aperiodische Dynamik.
- ② Die Hebebewegung oder Nick-Einschwenkbewegung, eine im Vergleich zu ① schnelle, stabile und aperiodische Bewegung in w , q und Nickwinkel θ (In der Literatur auch Wetterfahnenmodus (Weather-vane) genannt. Dieser Modus ändert seine Charakteristik beim Durchqueren der Ruderumkehrgeschwindigkeit.
- ③ Die Nickschwingung oder Nick-Pendelschwingung, eine langsame, stabile bis instabile Drehschwingung (in Ausnahmefällen instabil aperiodisch).

Die Modi der Seitenbewegung sind:

- ④ Die Gier-Einschwenkbewegung, eine stabile aperiodische Bewegung. Dies ist der entsprechende Modus zu “② oberhalb der Höhenruderumkehrgeschwindigkeit”.
- ⑤ Die Schiebewinkeldivergenz, eine zumeist instabile aperiodische Schiebe-Gier-Bewegung.
- ⑥ Die Rollschwingung oder Roll-Pendelschwingung, eine schwach gedämpfte Drehschwingung um die Längsachse.

Modalanalyse

Das lineare dynamische System $\dot{x} = Ax + Bu$ wird durch die Transformation $x = T\xi$ mit der Rechtseigenvektormatrix T in modale Form überführt. Das Modalsystem in den Modalzuständen $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ und unter Verwendung der modalen Systemmatrix $\Lambda = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ und der modalen Steuermatrix $\tilde{B} = T^{-1}B$ lautet

$$\dot{\xi} = \Lambda \xi + B u.$$

Dabei stellen λ_i die Eigenwerte der Matrix A dar. Die Transformationsmatrix $T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ besteht aus den Rechtseigenvektoren v_i des Eigenwertproblems $A v_i = \lambda_i v_i$. Damit eine reale Modalmatrix Λ entsteht, wurde die reale Transformationsmatrix T verwendet (konjugiert komplexe Eigenvektorkopie werden durch ihren Realteilvektor und ihren Imaginärteilvektor repräsentiert). Die Eigenvektormatrix T zeigt den linearen Zusammenhang zwischen Eigenzuständen ξ und physikalischem Zustand x auf, er ist auch als Zeigerdiagramm auswertbar. Die Matrix B zeigt die Empfindlichkeit der Eigenzustände respektive Eigenmodi auf Steuereingangssignale. Für das Luftschiff Lotte werden nun die Matrizen des Modalsystems der Längs- und Seitenbewegung bei einer Fluggeschwindigkeit von 8m/s vorgestellt. Die Eigenzustände sind entsprechend ihrer Modi nach Bild 4.7 numeriert. (Hinweis: Bei der Auswertung des Modalsystems werden Zusammenhänge zwischen Zuständen und Steuerungen quantitativ verglichen, deshalb muss das dynamische System sorgfältig skaliert werden.)

Modalsystem der Längsbewegung (Lotte bei 8m/s, oberhalb Ruderumkehr)

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_{3,1} \\ \dot{\xi}_{3,2} \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,013 & 0,23 & 0 \\ 0 & -0,23 & -0,013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_{3,1} \\ \xi_{3,2} \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,019 & -0,075 \\ -0,044 & 0,018 \\ -0,23 & -0,024 \\ -0,045 & -0,006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,95 & -0,08 & 0,08 & -0,052 \\ 0,02 & 0,19 & 0,226 & -0,57 \\ -0,03 & 0,007 & 0,212 & 0,53 \\ 0,3 & 0,92 & -0,08 & -0,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_{3,1} \\ \xi_{3,2} \\ \xi_2 \end{bmatrix} = T \xi$$

Die Matrix Λ zeigt auf ihrer Diagonalen die Eigenwerte des Systems, das konj. komplexe Polpaar der Nickschwingung ist als Blockmatrix dargestellt, der Realteil der Pole ist auf der Diagonalen, der Imaginäranteil außerdiagonal zu finden.

Nach Matrix T macht sich der Geschwindigkeitsmodus ξ_1 am stärksten in u , aber auch in θ bemerkbar (Spalte 1). w wie auch q enthalten starke Anteile der Nick-Schwenkbewegung und der Nickschwingung, welche nach Λ beinahe ungedämpft ist. θ misst durch $\xi_{3,1}$ die Nickschwingung, es machen sich jedoch auch die Hebebewegung und der Geschwindigkeitsmodus bemerkbar.

In B erkennt man die Anregung des Geschwindigkeitsmodus durch δ_T , wie es zu erwarten war. Die Modi 2 und 3 sind stärker durch den Höhenruderausschlag η anregbar.

Modalsystem der Seitenbewegung (Lotte bei 8m/s, oberhalb Ruderumkehr)

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_5 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_{6,1} \\ \dot{\xi}_{6,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,59 & 1,53 \\ 0 & 0 & -1,53 & -0,59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_5 \\ \xi_4 \\ \xi_{6,1} \\ \xi_{6,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,3 & 0,017 \\ -0,12 & -0,013 \\ -0,31 & 0,45 \\ -0,19 & 1,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,64 & 0,01 & -0,027 \\ 0,076 & -0,17 & 0,12 & -0,84 \\ 0,6 & 0,73 & 0,016 & -0,02 \\ 0,38 & 0,17 & -0,51 & 0,12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_5 \\ \xi_4 \\ \xi_{6,1} \\ \xi_{6,2} \end{bmatrix} = T\xi$$

Die Matrix Λ in (4.32) enthält die Eigenwerte der Seitenbewegung mit dem instabilen fünften Modus. Nach der Matrix T ist dieser Modus vorwiegend in der Seitengeschwindigkeit v und der Gierrate r vertreten. Dasselbe gilt auch für die Gier-Schwenkbewegung. Die Rollschwingung hingegen manifestiert sich beinahe nur in der Rollrate p und im Rollwinkel ϕ . Die Eindeutigkeit dieser Zuordnungen weist auf die gute Entkoppelbarkeit der Seitenbewegung in eine Rollschwingungsnäherung und in eine Gier-Lateral-Bewegungsform hin.

Die modale Steuermatrix B zeigt, dass sowohl Modus 4 als auch 5 nur durch Seitenruderausschlag gesteuert werden. Die Rollschwingung hingegen wird stärker durch Querruderausschlag beeinflusst. Infolge des tiefliegenden Schwerpunkts kann die Rollschwingung jedoch auch durch das Seitenruder angeregt werden.

4.3.2 Näherungsansätze für die Eigenbewegungen und analytische Polberechnungen

Mit Hilfe der Erkenntnisse der Modalanalyse werden aus den Differentialgleichungen (4.29) und (4.30) der Längs- und Seitenbewegung zustandsreduzierte Teilsysteme zur Annäherung der Eigenbewegungen abgeleitet. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist dies nicht für alle Bewegungsformen möglich.

Längsbewegung

Vernachlässigt man in Gleichung (4.29) die Terme geringer Ordnung, kann die Längsbewegung in die Differentialgleichung der Fluggeschwindigkeitsabweichung (Modus 1)

$$\dot{u} = X_u u + X_{\delta_T} \delta_T = \frac{1}{m + \rho V k_1} (X_u u + X_{\delta_T} \delta_T), \quad (4.33)$$

und das Differentialgleichungssystem der Anstell- und Nickwinkeldynamik (Modi 2 und 3)

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_w & \mathbf{Z}_q & 0 \\ \mathbf{M}_w & \mathbf{M}_q & \mathbf{M}_\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{,\eta}/m_z & 0 \\ M_{,\eta}/I_{yy} & M_{,\delta_T}/I_{yy} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

entkoppelt werden. Falls $z_{CG} = 0$ liegt der Schwerpunkt exakt im Referenzpunkt, das rückstellende Nickmoment und somit der Term M_θ verschwinden. Die Dynamik nach Gleichung (4.34) reduziert sich zu einer Anstellwinkeldynamikgleichung der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_w & \mathbf{Z}_q \\ \mathbf{M}_w & \mathbf{M}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{,\eta}/m_z & 0 \\ M_{,\eta}/I_{yy} & M_{,\delta_T}/I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \delta_T \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Diese vereinfachte Dynamik mit zwei realen Polen ist auch eine Näherung der Nickdynamik bei sehr hohen Fluggeschwindigkeiten, denn die Bedingung $M_\theta \ll \{\mathbf{Z}_w, \mathbf{Z}_q, \mathbf{M}_w, \mathbf{M}_q\}$ ist für diese Geschwindigkeiten erfüllt. Gleichung (4.35) vermag jedoch nur die Pollage des stabilen Wetterhahnmodus anzunähern. Sie entspricht übrigens der Näherung der Anstellwinkelschwingung von Flugzeugen, für Luftschiffe ist jedoch i.A. die Federkonstante negativ und die Bewegung somit aperiodisch und instabil.

Analytische Polberechnung

Aus der Gleichung (4.33) bestimmt sich der Geschwindigkeitspol zu

$$s_1 = X_u, \quad (4.36)$$

nach Beziehung (C.10) gilt $X_u < 0$, der Modus ist somit immer stabil.

Auch die Pole des Systems (4.34) lassen sich analytisch berechnen, die resultierenden Ausdrücke sind aufgrund ihrer Komplexität jedoch nicht auswertbar, es existieren keine allgemein gültigen Näherungsansätze für die Pollagen.

Bei geringen Fluggeschwindigkeiten ($u \ll 1$) kann die Aerodynamik vernachlässigt werden. Die Nickschwingung wird zu einer reinen Pendelbewegung mit Gleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_q & \mathbf{M}_\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{,\delta_T}/I_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_T,$$

einer Eigenfrequenz von $\omega_0 = \sqrt{-M_\theta}$ und den Eigenwerten $s_{3,4} = M_q/2 \pm i\sqrt{-M_q^2/4 - M_\theta}$. Eine grobe Schätzung für die Eigenfrequenz bei $u \gg V_{\eta_{\text{inverse}}}$ kann aus Bild 4.7 abgelesen werden: Die Frequenz hat sich gegenüber des Falls $u \ll 1$ etwa halbiert und kann ungefähr auf $\omega_{0|u \gg V_{\eta_{\text{inverse}}}} \approx \omega_{0|u \ll 1}/2 = \sqrt{-M_\theta/4}$ geschätzt werden.

Um eine Stabilitätsaussage über das System zu gewinnen, werden die Stabilitätsbedingung nach Routh formuliert und ausgewertet: Das charakteristische Polynom zu (4.34) lautet

$$s^3 + (-M_q - Z_w)s^2 + (-M_\theta - M_w Z_q + M_q Z_w)s + M_\theta Z_w. \quad (4.37)$$

Nach Routh ergeben sich die folgenden Stabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} (a) \quad & M_\theta Z_w > 0 \\ (b) \quad & -M_q - Z_w > 0 \\ (c) \quad & (-M_q - Z_w)(-M_\theta - M_w Z_q + M_q Z_w) - M_\theta Z_w > 0' \\ (d) \quad & -M_\theta - M_w Z_q + M_q Z_w > 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei die Bedingungen (a) bis (c) notwendig und hinreichend sind und (d) nur notwendig. Da für die Stabilitätsderivativa die Beziehungen

$$Z_w < 0, Z_q > 0, M_w > 0, M_q < 0 \text{ und } M_\theta < 0$$

gelten, sind in (4.38) die Bedingungen (a) und (b) immer erfüllt. Bedingung (c) kann, da (b) erfüllt ist, auch in der Form

$$-M_w Z_q + M_q Z_w - M_\theta - \frac{M_\theta Z_w}{-M_q - Z_w} > 0 \quad (4.39)$$

dargestellt werden. Setzt man die Derivativa nach Tabelle C.2 unter Berücksichtigung des Proportionalitätsfaktors in Gleichung (4.39) ein, erkennt man wie sich die ersten beiden Terme proportional u_0^2 verhalten, während der Term M_θ wie auch der letzte Term sich mit der Fluggeschwindigkeit nicht ändern. Einsetzen der Beiwerte nach Anhang C.1.4 führt auf die Bedingung

$$\frac{\rho c_{m_\alpha} (\rho (c_{m_q} - c_{z_q}) l_R V^{2/3} - 2m) V^{2/3} l_R}{4 I_{yy} m_z} \cdot u_0^2 + \left(-\frac{c_{m_q} m_z (Bz_{CB} - Gz_{CG}) l_R^2}{I_{yy} (c_{m_\alpha} I_{yy} + c_{m_q} m_z l_R^2)} \right) > 0. \quad (4.40)$$

Die Beiwerte variieren in Funktion des Trimmanstellwinkels α_0 , der Koeffizient von u_0^2 ist für $\alpha_0 \ll 0$ (bei höheren Fluggeschwindigkeiten zutreffend) typischerweise kleiner 0, der zweite Term typischerweise positiv. Aus Gleichung (4.40) wird somit eine Stabilitätsbedingung der Form

$$u_0^2 < -c_2 / c_1$$

als Beschränkung für die Fluggeschwindigkeit abgeleitet. Ausgeschrieben lautet diese Schranke, bei deren Überschreitung Instabilität in der Längsbewegung auftritt,

$$u_0^2 < \frac{4c_{m_q} l_R m_z^2 (Bz_{BC} - Gz_{CG})}{\rho c_{m_\alpha} (\rho(c_{m_q} - c_{z_q}) l_R V^{2/3} - 2m) (I_{y^2} c_{m_\alpha} + c_{m_q} l_R^2 m_z) V^{2/3}}.$$

Seitenbewegung

Unter Vernachlässigung Terme niedriger Ordnung lässt sich die Seitendynamik nach Gleichung (4.30) in die Schiebe-Gierdynamik (unter Vernachlässigung der Querruderempfindlichkeit) beschreibend die Modi 4 und 5

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_r \\ N_v & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{,\zeta} / m_y \\ N_{,\zeta} / I_{zz} \end{bmatrix} \zeta, \quad (4.41)$$

und in die Rolldynamik (Modus 6)

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_p & L_\phi \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{,\xi} / I_{xx} \\ 0 \end{bmatrix} \xi \quad (4.42)$$

entkoppeln. Gleichung (4.41) stellt ein gute, (4.42) eine sehr gute Näherung der Bewegungsformen der Seitenbewegung dar.

Analytische Polberechnung und Stabilitätsaussagen

Im Gegensatz zu den Näherungsansätzen der Längsbewegung lassen sich die Pole der Seitenbewegung einfach analytisch berechnen. Die realen Pole 4 und 5 der Gier-Schiebebewegung liegen bei

$$s_{4,5} = \frac{N_r + Y_v}{2} \mp \frac{\sqrt{(N_r - Y_v)^2 + 4N_v Y_r}}{2}. \quad (4.43)$$

Das konjugiert komplexe Polpaar der Rollschwingung liegt bei

$$s_6 = \frac{L_p}{2} \pm i \sqrt{-L_p^2/4 - L_\phi} \quad (4.44)$$

die Rollschwingung klingt mit einer Zeitkonstanten von $\tau = -L_p/2$ ab und hat eine Eigenfrequenz von $\omega_0 = \sqrt{-L_\phi}$.

Die Systeme der Längsbewegung sind als Systeme 2. Ordnung durch das Polynom $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ charakterisiert. Sie sind stabil falls sowohl der Dämpfungsanteil a_1 als auch der Rückstellanteil a_0 positiv sind.

Die Stabilitätsbedingung für die Gier-Schiebebewegung lautet also

$$(1) \quad a_1 = -Y_v - N_r > 0$$

$$(2) \quad a_0 = -Y_r N_v + Y_v N_r > 0$$

Beide Pole des System (4.41) sind reell, daraus folgt $a_1^2 > 2a_0$. Einer der Pole ist desweiteren immer stabil. Da der Dämpfungsanteil a_1 für Luftschiffe als positiv bekannt ist, wird Bedingung (1) immer erfüllt. Es ist Bedingung (2) welche verletzt wird, Grenzstabilität wäre unter der Bedingung $Y_v N_r - Y_r N_v = 0$ erreicht. Diese Bedingung entspricht exakt der Bedingung, dass der Manöverpunkt vor dem Schwerpunkt liegen soll.

Die entkoppelte Rollbewegung nach Gleichung (4.42) ist immer stabil. Bei ihr ist sowohl die Rolldämpfung (primär durch Leitwerke) als auch die rückstellende Kraft (aufrichtendes Moment aus Schwerkraft und statischer Auftriebskraft) immer "positiv".

4.3.3 Eigenverhalten bei unterschiedlichen Fluggeschwindigkeiten

Über die aerodynamischen Kräfte beeinflusst die Fluggeschwindigkeit die Eigendynamik. Der Einfluss der Fluggeschwindigkeit auf die linearen Systemgleichungen lässt sich an den Proportionalitätsfaktoren in Anhang C.2.2 auf Seite 200 erkennen: Außer den Stabilitätsderivativa bezüglich der Lagewinkel θ und ϕ (z.B. M_θ) verhalten sich alle Derivativa proportional ρu_0 (teilweise ρw_0), die Derivativa bezüglich der Ruderausschläge proportional ρu_0^2 . Die im Folgenden dargestellten Resultate wurden allerdings numerisch gewonnen.

Längsbewegung

Bild 4.7 zeigt den Verlauf der Eigenwerte bei Variation der Fluggeschwindigkeit für zwei Luftschiffe. Die stabilen, aperiodischen Eigenbewegungen 1 und 2 werden mit zunehmender Fluggeschwindigkeit schneller. Das komplexe Polpaar der Nickschwingung wandert bei Fluggeschwindigkeiten unterhalb der auf Seite 100 diskutierten Ruderumkehr-Geschwindigkeit in stabile Richtung, bei höheren Fluggeschwindigkeiten in Richtung der instabilen Halbebene: Bei geringen Fluggeschwindigkeiten stellt die Bewegung eine durch Luftreibung schwach gedämpfte Pendelschwingung des Schwerpunktes gegenüber des statischen Auftriebspunktes dar. Mit zunehmender Fluggeschwindigkeit unterstützt die Rumpf- und Leitwerksumströmung die Nickdämpfung, das Polpaar wandert nach links. Gleichzeitig macht sich aber auch das instabile Nickmoment $c_m(\alpha)$ bemerkbar, für Geschwindigkeiten oberhalb $V_{\eta_{\text{Inverse}}}$ beeinflusst es die Bewegung zunehmend destabilisierend bis für hohe Fluggeschwindigkeiten Instabilität eintritt. Größere Luftschiffe mit tiefliegendem Schwerpunkt erreichen diese Geschwindigkeit normalerweise nicht.

Im Folgenden werden die vier Eigenbewegungsformen an Hand ihrer Zeigerdiagramme und Flugtrajektorien dargestellt.

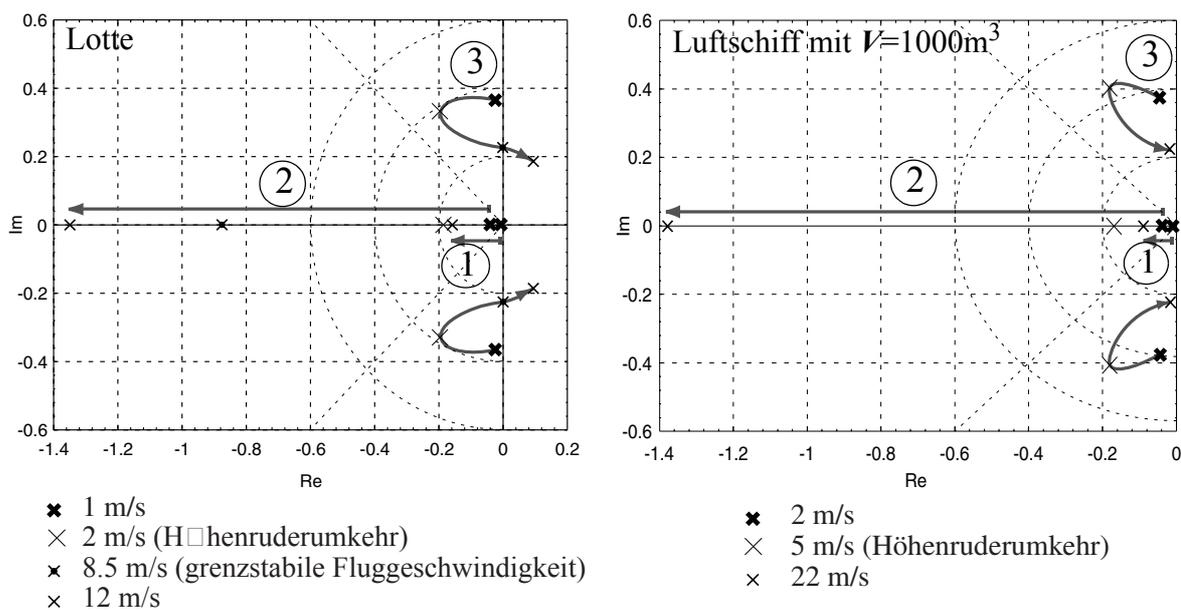


Bild 4.7: Eigenwerte der Längsbewegung bei Variation der Fluggeschwindigkeit.

Modus 1: Geschwindigkeitsmodus

Bild 4.8 stellt die Zeiger (Eigenvektorkomponenten) des Geschwindigkeitsmodus für langsame ($V < V_{\eta_{Invers}}$) und schnelle Fluggeschwindigkeiten ($V > V_{\eta_{Invers}}$) dar. Man erkennt den dominierenden Anteil der Komponente u . In Abhängigkeit der Lage des Schwerpunkts ist eine leichte Nickbewegung gekoppelt. Die Zeitantwort dieses transient abklingenden Modus ist trivial, auf eine Verlaufsdiarstellung wird deshalb verzichtet.

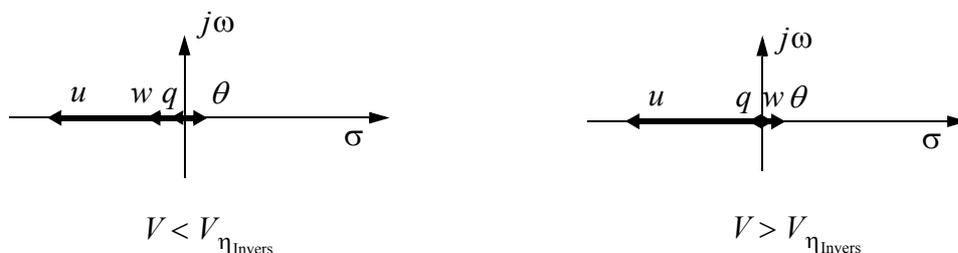


Bild 4.8: Zeigerdiagramm zum Geschwindigkeitsmodus (Luftschiff mit $V=1000m^3$)

Modus 2: Hebebewegung (resp. Nick-Schwenkbewegung)

Die Zeigerdiagramme der Hebebewegung in Bild 4.9 verdeutlichen die Schwebekarakteristik für $V < V_{\eta_{Invers}}$, und die stärkere Kopplung der Dynamik für $V > V_{\eta_{Invers}}$. Bei kleinen Vorwärtfluggeschwindigkeiten stellt der Modus eine exponentiell abklingende Abweichung der Vertikalgeschwindigkeit dar und ist somit die vertikale Analogie des Geschwindigkeitsmodus. Dies zeigt auch der zugehörige Flugpfad in Bild 4.10. Bei höheren Fluggeschwindigkeiten ist die Hebebewegung mit Nickanteilen gekoppelt und wird deshalb als Nick-Einschwenkbewegung bezeichnet. Die Vertikalgeschwindigkeit wird durch den Auftrieb

infolge Anstellung gebremst, während die Drehbewegung, sie reduziert den Anstellwinkel zusätzlich, durch die Nickdämpfung abgebremst wird. Diese stabile Bewegung ist analog der lateralen Hebebewegung. Bei hohen Fluggeschwindigkeiten kann im Zeigerdiagramm der Anteil von w oder von θ größer sein, je nach Schwerpunktslage und statischer Schwere.

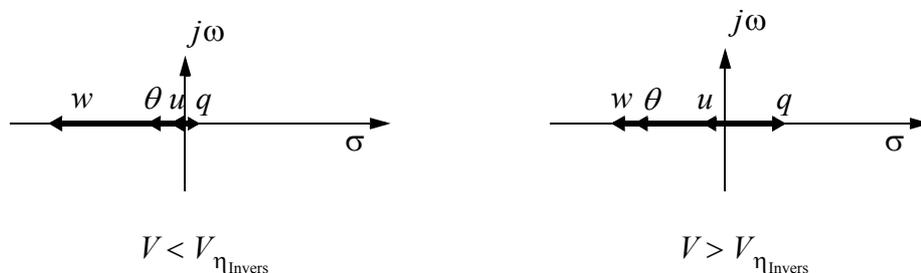


Bild 4.9: Zeigerdiagramm zur Longitudinal-Hebebewegung (Luftschiff mit $V=1000\text{m}^3$)

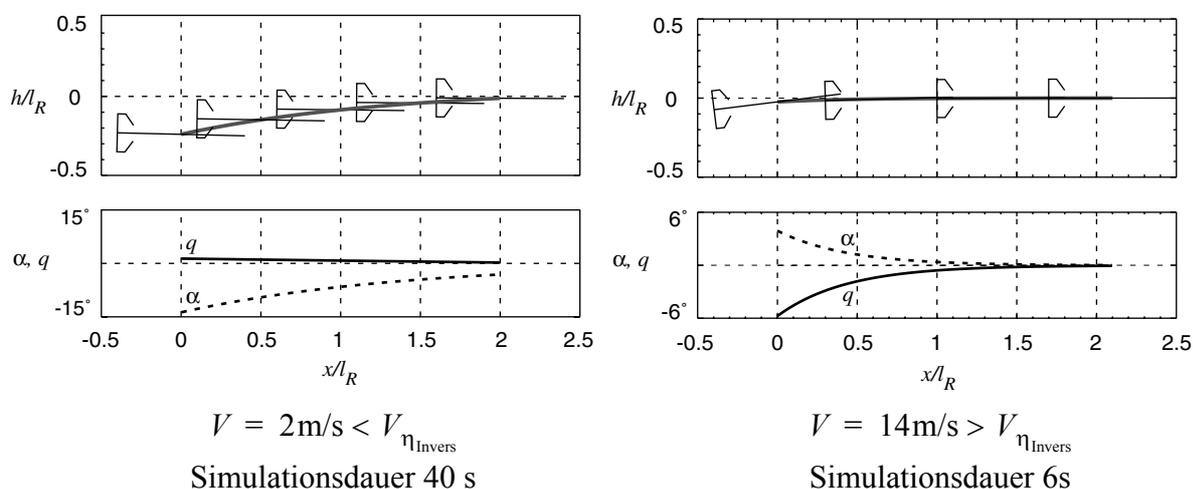


Bild 4.10: Eigenflugbewegung des Longitudinal-Hebemodus (Luftschiff mit $V=1000\text{m}^3$)

Modus 3: Nickschwingung

Die Nickschwingung zeigt die stärkste Variation mit der Fluggeschwindigkeit. Der Ursprung dieser Dynamik ist die Nickpendelung, ihre aerodynamische Dämpfung oder Anfachung ändert sich, wie bereits auf Seite 118 diskutiert, staudruckbedingt stark: Sie variiert von einer nahezu ungedämpften Pendelschwingung bei $V \ll V_{\eta_{\text{Invers}}}$, zu einer gut gedämpften Pendelung mit Nickflugbewegung für $V \approx V_{\eta_{\text{Invers}}}$ und schließlich für $V > V_{\eta_{\text{Invers}}}$ zu einer wieder schwächer gedämpften bis instabilen Nickflugbewegung. Die Kombination der Zustände und ihre Phasenlage zeigen die Zeigerdiagramme in Bild 4.11, die Flugbahnen sind in Bild 4.12 und 4.13 dargestellt. Obwohl die Flugbahn für hohe Fluggeschwindigkeiten der Phygoide von Flugzeugen gleicht, hat die Nickschwingung mit dieser Bewegung nichts gemein: Das Luftschiff hat bekannterweise kein Höhenpotential, die Schwingung entspricht einem Austausch von potentieller Pendelenergie und kinetischer Nickdrallenergie. Außerdem schwingt der Anstellwinkel ausgeprägt mit rund 90° Phasendrehung zum Bahnwinkel, die Phygoide fliegt sich demgegenüber mit konstantem Anstellwinkel. Übersteigt nun das aerodynamische Nickmoment die Pendelrückstellung und Pendeldämpfung, wird die Bewegung asymptotisch

instabil. Für sehr hohe Geschwindigkeiten schwindet der Einfluss des statischen Rückstellmoments und die Pole werden instabil real, die Nickschwingungsbewegung geht in eine Anstellwinkeldivergenz ähnlich der Schiebewinkeldivergenz über (vgl. [66]).

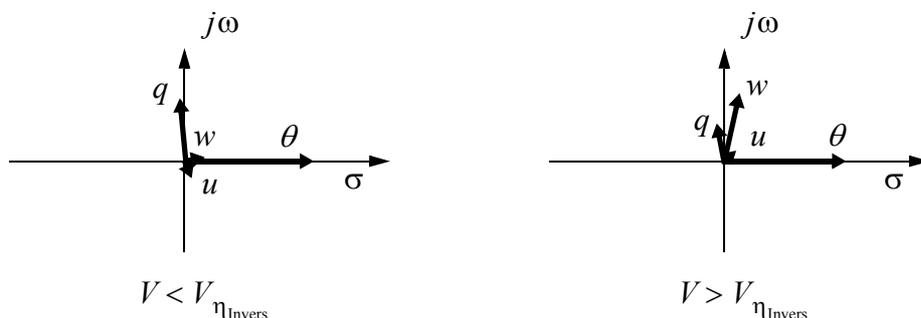


Bild 4.11: Zeigerdiagramm zur Nickschwingung (Luftschiff mit $V=1000\text{m}^3$)

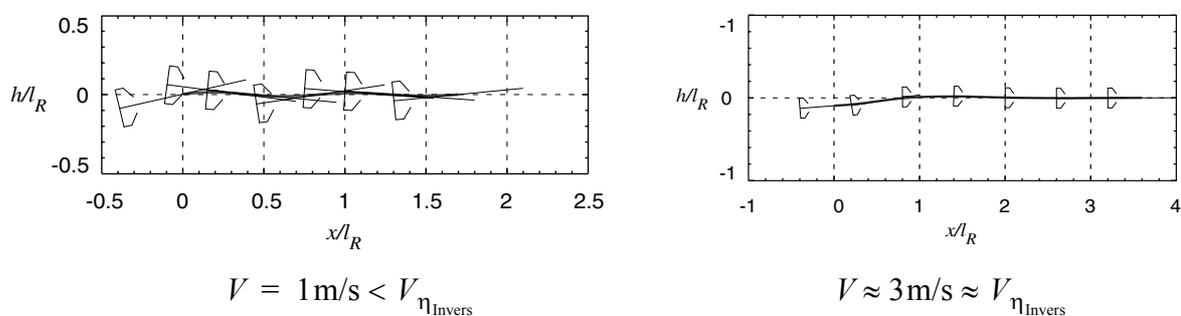


Bild 4.12: Eigenflugbewegung des Nickschwingungsmodus, geringe Fluggeschwindigkeiten (Luftschiff Lotte)

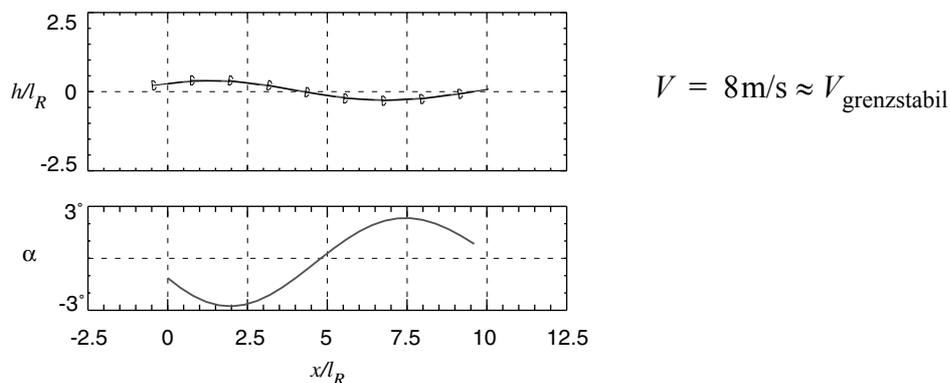


Bild 4.13: Eigenflugbewegung des Nickschwingungsmodus, Fluggeschwindigkeit nahe Grenzstabilität (Luftschiff Lotte).

Seitenbewegung

In der Seitenbewegung wirkt sich die Fluggeschwindigkeit zwar auf die Lage der Pole aus, sie führt jedoch nicht auf geänderte Charakteristiken der Eigenformen. In der gekoppelten Dynamik aus Schiebewinkel und Gierbewegung wirken nur aerodynamische Kräfte, die Derivativa wachsen mit zunehmender Fluggeschwindigkeit linear an (vgl. Tabelle C.2). Es

variiert somit nur die Lage der Pole respektive die Schnelligkeit, nicht aber die Form der Eigenmodi 4 und 5. In der Rollbewegung wirken statische und aerodynamische Kräfte gemischt. Da die statischen Kräfte alleine die Steifigkeit der Schwingung bestimmen (rückstellendes statisches Moment) und die Aerodynamik nur rollratenproportionale Dämpfung ausübt, steigt in erster Näherung nur die Dämpfung der Rolleigenbewegung mit zunehmender Fluggeschwindigkeit an. Die Eigenfrequenz ω_0 bleibt, wie auch aus Gleichung (4.44) ergeht, annähernd konstant. Das wandern der Eigenwerte zeigt Bild 4.14.

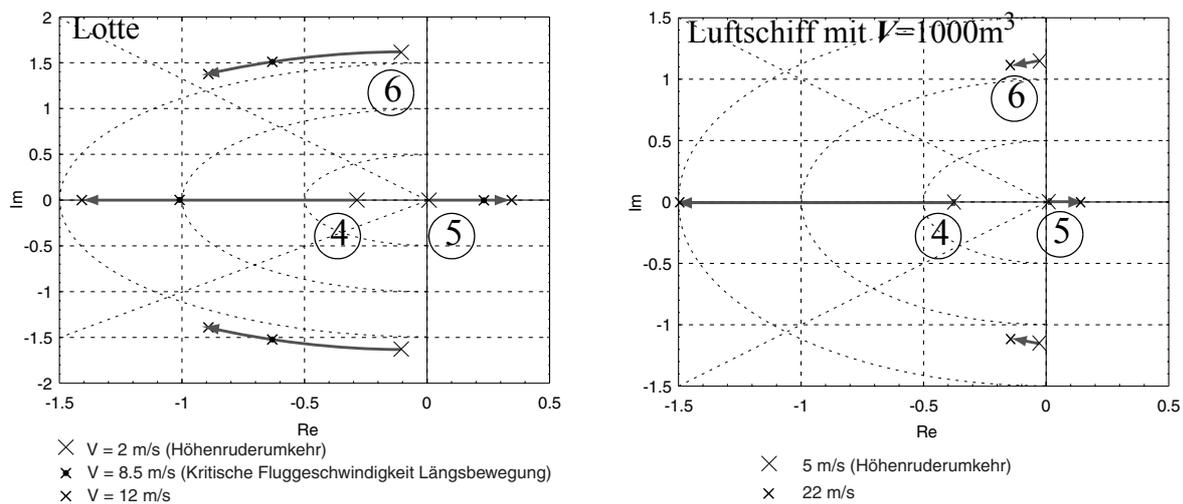


Bild 4.14: Eigenwerte der Seitenbewegung bei Variation der Fluggeschwindigkeit.

Modus 4: Lateral-Einschwenkbewegung

Sowohl am Zeigerdiagramm wie auch an der Flugtrajektorie in Bild 4.15 erkennt man das Eindrehen des Luftschiffes mit positivem Schiebewinkel und positiver Drehrate in den Geradeausflug. Die Eigenform entspricht der Nick-Einschwenkbewegung für $V > V_{\eta_{\text{Invers}}}$. Infolge L_r ist ein geringer Anteil der Rollrate und des Rollwinkels eingekoppelt.

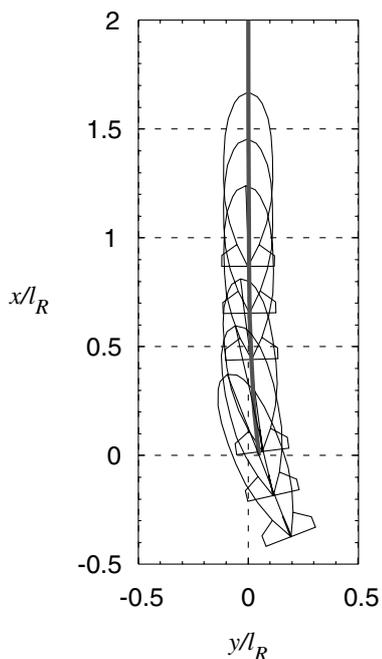
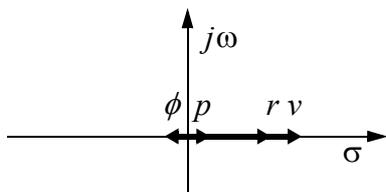
Modus 5: Schiebewinkeldivergenz

Die instabile Schiebewinkeldivergenz, Folge des instabilen aerodynamischen Giermoments $c_n(\beta)$, zeigt in Bild 4.15 nach einer negativen Schiebewinkelstörung das instabile Wegdrehen des Schiffes. Durch die auftretende Zentrifugalkraft dieser Kurvenbewegung rollt das Luftschiff leicht auf. Da die Bewegung im Linearen asymptotisch instabil ist, steigen alle Zustände exponentiell an.

Modus 6: Rollschwingung

Bild 4.16 zeigt Flugbahn und Zeigerdiagramm der Rollschwingung. Rollrate und Rollwinkel sind annähernd 90° phasenverschoben, während die Anteile der Zustände v und r vernachlässigbar gering sind

Gier-Einschwenkbewegung



Schiebewinkeldivergenz

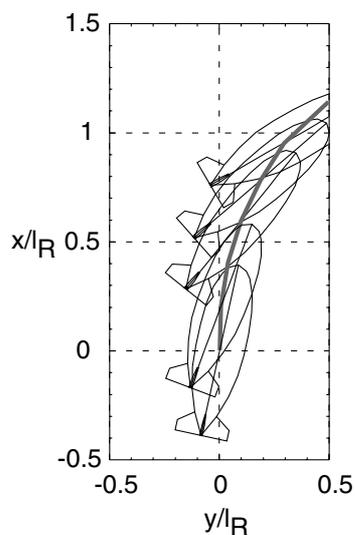
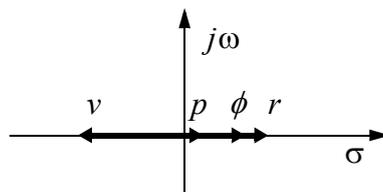


Bild 4.15: Eigenflugbewegung 4 und 5 und Zeigerdiagramme (Luftschiff mit $V=1000\text{m}^2$)

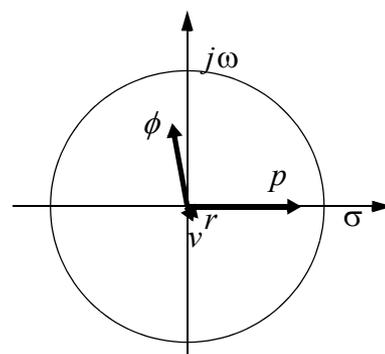
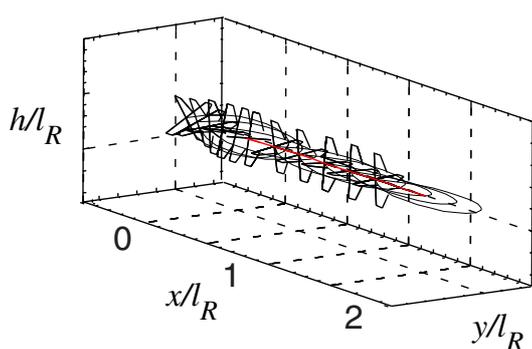


Bild 4.16: Flugtrajektorie und Zeigerdiagramm der Roll-Eigenbewegung (Luftschiff mit $V=1000\text{m}^3$)

4.3.4 Eigenverhalten unter Variation der Konfiguration und der Modellparameter

Die Dynamik des Luftschiffes wird neben der Fluggeschwindigkeit auch von Konfiguration und Modellparametern beeinflusst. Der Einfluss von Konfigurationsänderungen wird am Beispiel der statischen Schwere, der Lage des Luftschiffschwerpunkts und am Beispiel der

Flughöhe diskutiert. Die ersten beiden Variationen führen auf veränderte Trimmzustände, die letztere geht mit einer Massenänderung und Verschiebung des Schwerpunkts einher. Zur Studie der Sensitivität der Eigenwerte auf Modellparametervariationen werden der Momentenbeiwert $c_{m_{pot}}^{uw}$ des Rumpfes, die drehdämpfenden Rumpfbeiwerte $c_{m_{pot}}^{uq}$ und der Auftriebsbeiwert $c_{l_{\alpha_0, f}}$ der Leitwerke variiert.

Variation der Schwere

Das Verhältnis von aerostatischem Auftrieb B zu Gewichtskraft G bildet den Auftriebsfaktor

$$b_{\text{statisch}} = B/G.$$

Er beschreibt die statische Schwere des Luftschiffs. Für $b_{\text{statisch}} = 1$ ist das Schiff mit $B = G$ im statischen Gleichgewicht, Auftriebsfaktoren größer 1 beschreiben ein leichtes Schiff, Faktoren kleiner 1 ein schweres. Bild 4.17 zeigt die Verschiebung der Eigenwerte des Luftschiffs Lotte bei Variation der statischen Schwere von 90% bis 100%.

Die statische Schwere wirkt sich über die Änderung des Trimmanstellwinkels α_0 auf die aerodynamischen Derivativa und über die Änderung der trägen Massen auf die Dynamik aus. Für die untersuchten Konfigurationen variiert der Trimmanstellwinkel von -7.7° bei 90% Schwere über 0° bei $\approx 100\%$ bis auf 6.5° bei 110% Schwere (die Asymmetrie ergibt sich aus der Anordnung des Schwerpunktes hinter dem Verdrängungspunkt). Für Anstellwinkel der gegebenen Größenordnung ändert sich die Steigung der Nickmomentenkurve $c_m(\alpha)$ (Bild 3.27) deutlich: Der linearisierte Beiwert c_{m_α} ist gegenüber dem Wert bei $\alpha = 0$ etwa halbiert.

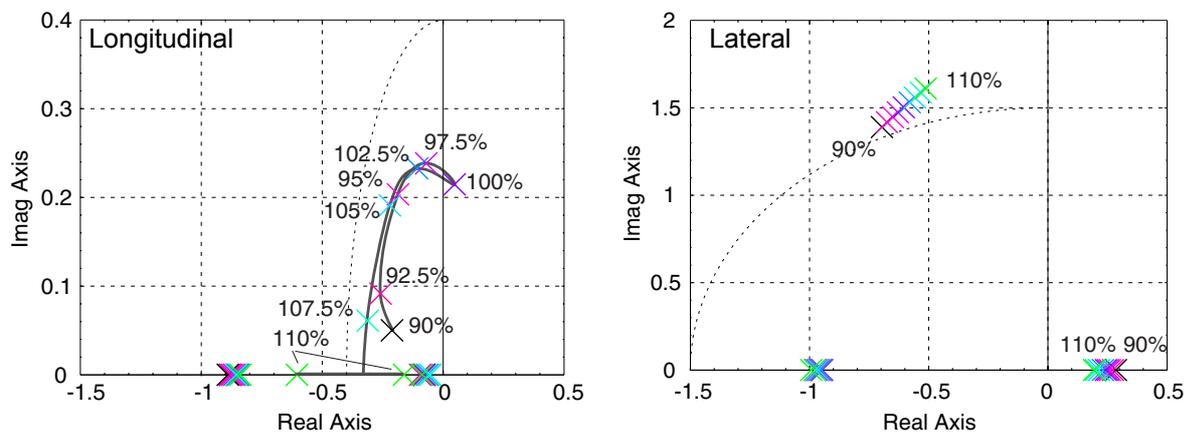


Bild 4.17: Eigenwerte bei Variation B/G bei $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

Am stärksten macht sich diese Variation denn auch im Nickschwingungsmodus bemerkbar. Das neutral getrimmte Luftschiff mit $\alpha_0 \approx 0^\circ$ verhält sich instabil, erst das ein bis zwei Prozent schwere oder leichte Luftschiff ist stabil. Dies folgt aus der angesprochenen Verringerung des Nickmomentenbeiwerts. Bild 4.18 zeigt für unterschiedliche statische Konfigurationen die Wanderung der Eigenwerte bei Variation der Geschwindigkeit. Das neutral konfigurierte Luftschiff ist deutlich weniger stabil, bei Fluggeschwindigkeiten über 6m/s verhält es sich instabil. Das 5% leichte Luftschiff erreicht erst bei 12m/s Grenzstabilität, das

5% schwere Luftschiff bleibt asymptotisch stabil. Die Scharen der übrigen Eigenwerte durch statische Variation zeigen kaum Veränderung.

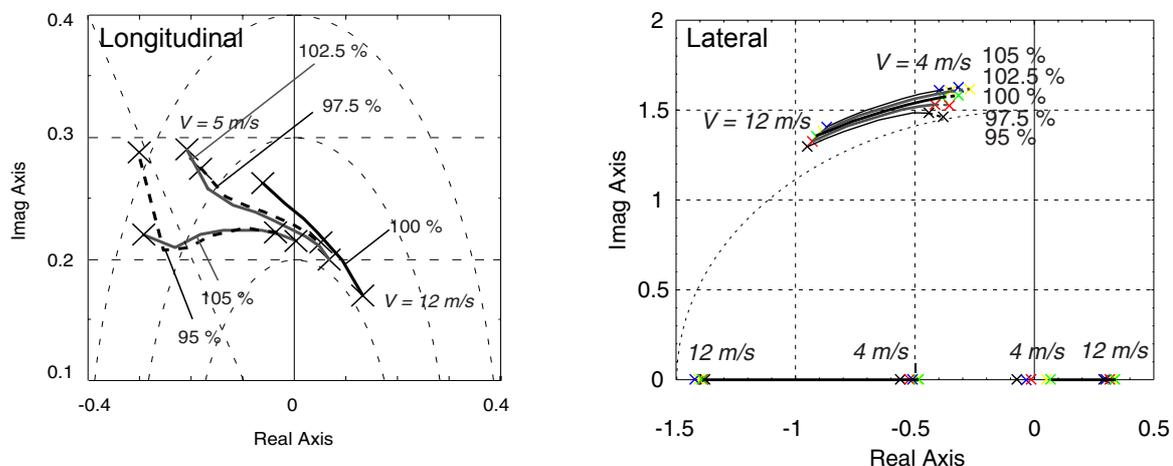


Bild 4.18: Eigenwerte bei Variation B/G und der Geschwindigkeit von 5 bis 12 m/s (Lotte)

Verschiebung des Schwerpunktes

Die Verschiebung des Schwerpunktes (z.B. als Folge der Trimmung mit Ballonets) wirkt sich wie die Variation der Schwere auf die Massenträgheit und auf den Trimpunkt aus. Im Folgenden wird der Einfluss einer Vertikal- und einer Längsverschiebung dargestellt.

Vertikale Verschiebung

Die Verschiebung des Schwerpunktes in vertikaler Richtung wirkt sich auf die Frequenz der Nick- und Rollschwingung aus: Der vertikale Abstand zwischen Schwerpunkt und Verdrängungszentrum (Volumenzentrum) bestimmt die Größe des statischen Rückstellmoments und somit die Eigenfrequenz dieser Schwingungen. Dies ist in Bild 4.19 zu erkennen, wobei die vertikale Ablage des Schwerpunktes vom Volumenzentrum in Prozent der Schiffslänge angegeben ist. Um Vergleiche mit anderen Variationen zu ermöglichen wurde eine statisch neutrale Konfiguration bei einer Fluggeschwindigkeit von $u=8\text{m/s}$ analysiert.

Das Luftschiff mit koinzidentem Schwer- und Verdrängungspunkt hat kein statisches Rückstellmoment, deshalb besitzt sowohl die Nick- als auch die Rollschwingung in diesem Fall einen Pol bei 0. Der zweite Pol der Nickschwingung liegt erwartungsgemäß auf der instabilen Realachse, während der zweite Pol der Rollschwingung stabil bei L_p liegt. Für tiefer wandernde Schwerpunkte werden beide Bewegungen mit zunehmender Eigenfrequenz schwingfähig. Die Nickschwingung dieser Konfiguration wird bei einer Schwerpunktslage von 6% stabil, erst ab dieser Lage ist das statische Rückstellmoment groß genug für die Stabilisierung der Längsbewegung.

Vor- und Rückwärtsverschiebung

Die Auswirkung der Ablage des Schwerpunkts in Schiffslängsrichtung stellt Bild 4.20 für das Luftschiff Lotte in gewichtsneutraler Konfiguration bei 8 m/s Fluggeschwindigkeit dar. Die

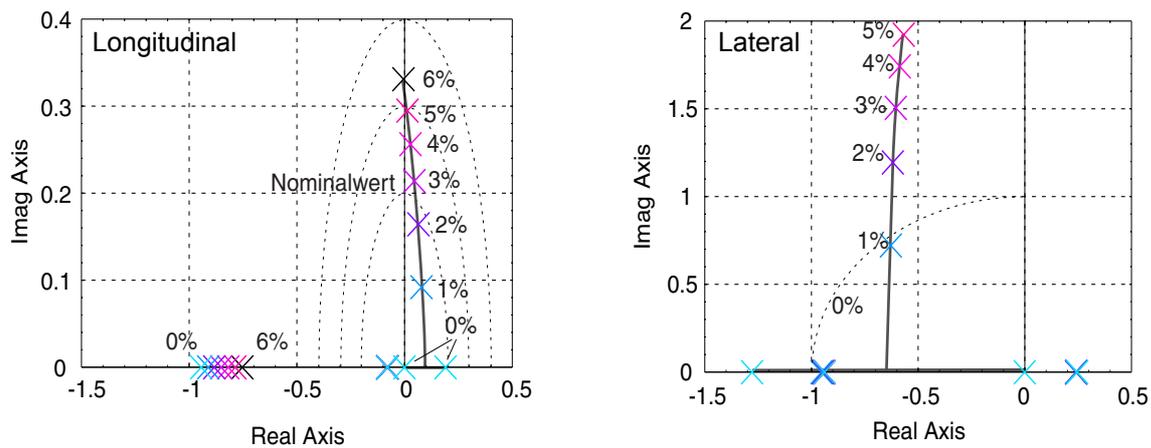


Bild 4.19: Eigenwerte bei Variation z_{CG} bei $B = G$ und $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

nomielle Lage des Schwerpunkts liegt bei -1.5% , d.h. um 1.5% der Schiffslänge hinter dem Koordinatenbezugspunkt. Bei Verschiebung der Lage wird das Luftschiff heck- oder buglastig getrimmt. Das entstehende Nickmoment muss über das aerodynamische Rumpfmoment kompensiert werden: Für die untersuchten Variationen ändert α_0 von 8° für $x_{CG}=3\%$ über 0° für $x_{CB}=x_{CG}=-1\%$ bis -7.6° für das hecklastige Schiff mit $x_{CG}=-5\%$. Das instabilste Verhalten mit der niedrigsten Eigenfrequenz resultiert für $x_{CB}=x_{CG}$. In diesem Fall nimmt mit $\alpha_0=0^\circ$ das aerodynamische Nickmomentderivativum $M_{,w}$ den größten Wert an und wirkt somit maximal destabilisierend, während infolge $\alpha_0=\theta_0=0^\circ$ der Schwerpunkt tief liegt und entsprechend die Schwingungsfrequenz verlangsamt. Mit der Verschiebung des Schwerpunkts und der Änderung des Trimmanstellwinkels verringert sich die destabilisierende Wirkung des Rumpfes, die Nickschwingung wird stabil. Der nach vorne wandernde Schwerpunkt verringert zudem den Abstand zum Manöverpunkt (vgl. Diskussionen auf Seite 108) und trägt somit zusätzlich zur dynamischen Stabilität der Bewegung bei.

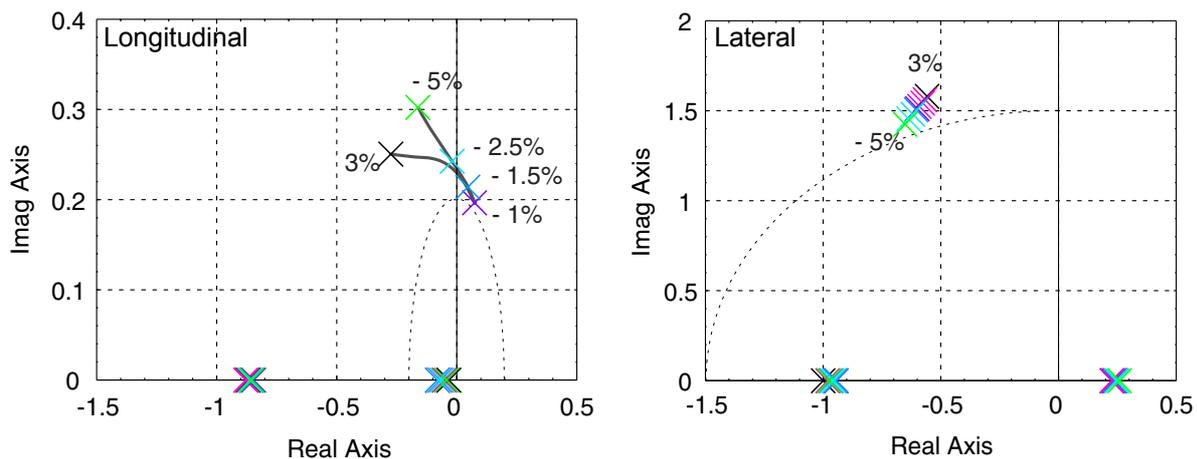


Bild 4.20: Eigenwerte bei Variation x_{CG} bei $B = G$ und $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

Variation der Flughöhe

Bild 4.21 zeigt den Einfluss der Flughöhe auf die Eigendynamik des neutral konfigurierten Luftschiffs Lotte bei $u=8\text{m/s}$. Mit der Flughöhe variiert der Luftdruck und somit die Dichte der umgebenden Luft sowie des Heliums und damit der Füllgrad der Ballonets (vgl. Bild 2.7). Mit zunehmender Höhe verkleinert die geringer werdende Luftdichte die aerodynamischen Kräfte und Momente, die einhergehenden Änderungen der Heliumausbreitung und des Ballonnetvolumens wirken sich auf die Trägheit des Luftschiffs aus: Die Schwingungsfrequenz der Nick- und der Rollschwingung nehmen mit der Höhe zu.

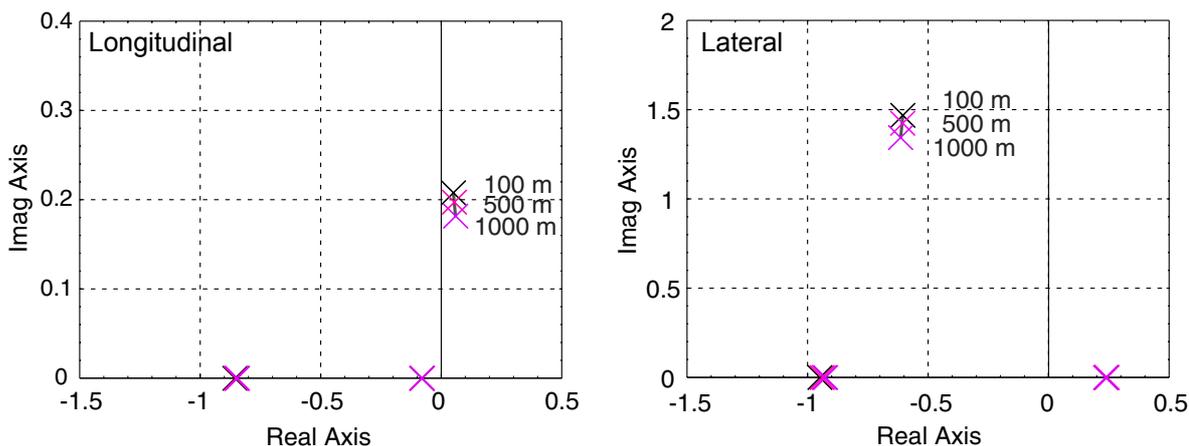


Bild 4.21: Eigenwerte bei Variation der Flughöhe für $B = G$ und $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

Variation aerodynamischer Parameter

Um die physikalische Wirkung der aerodynamischen Parameter und die Empfindlichkeit der Dynamik gegenüber Modellparameterabweichungen zu studieren, werden im Folgenden der aerodynamische Momentenbeiwert $c_{m_{\text{pot}}}^{uw}$ des Rumpfes (beeinflusst Gier- und Nickmoment), das nick-, bzw. gierendämpfende Rumpfmoment $c_{m_{\text{pot}}}^{uq}$ und der Auftriebsbeiwert $c_{l_{a_0, f}}$ der Leitwerke variiert.

Variation Momentenbeiwert Rumpf

Die Variation des Momentenbeiwertes $c_{m_{\text{pot}}}^{uw}$ des Rumpfes beeinflusst die Steigung des Beiwerteverlaufs $c_m(\alpha)$ und $c_n(\beta)$. Entsprechend beeinflusst werden die Bewegungen mit Beteiligung von Anstell- und Schiebewinkel: In der Längsbewegung der Hebemodus und die Nickschwingung, in der Seitenbewegung die Schiebedivergenz und der Gier-Schwenkmodus. Die nichtschwingenden Eigenformen werden mit steigendem Beiwert schneller, ihre Pole entfernen sich vom Ursprung. Die Nickschwingung erfährt die ändernde Destabilisierung durch das Rumpfmoment, wie an der variierenden Dämpfung erkennbar ist (Bild 4.22).

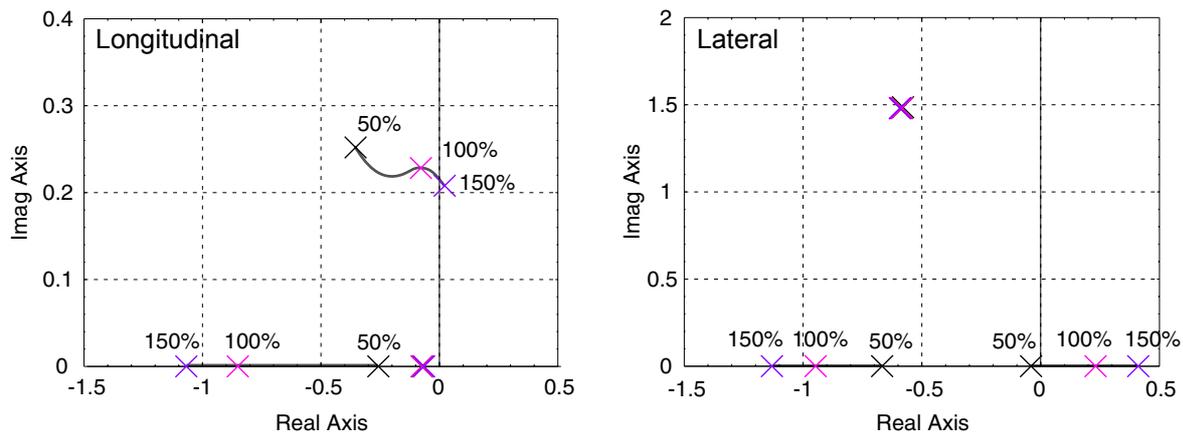


Bild 4.22: Eigenwerte bei Variation $c_{m_{pot}}^{uw}$ für $B = G$ und $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

Variation drehdämpfender Beiwerte des Rumpfs

Der drehdämpfende Beiwert $c_{m_{pot}}^{uq}$ bestimmt die drehratenproportionale Dämpfung des Rumpfes. Die Erhöhung der Drehdämpfung beschleunigt die Bewegungsformen mit realen Polen, wirkt jedoch etwas schwächer als die Erhöhung des Momentenbeiwertes nach Bild 4.22. Gut erkennbar ist die direkte Beeinflussung der Dämpfung der Nickschwingung, sie verringert sich mit kleinerer Drehdämpfung (Bild 4.23).

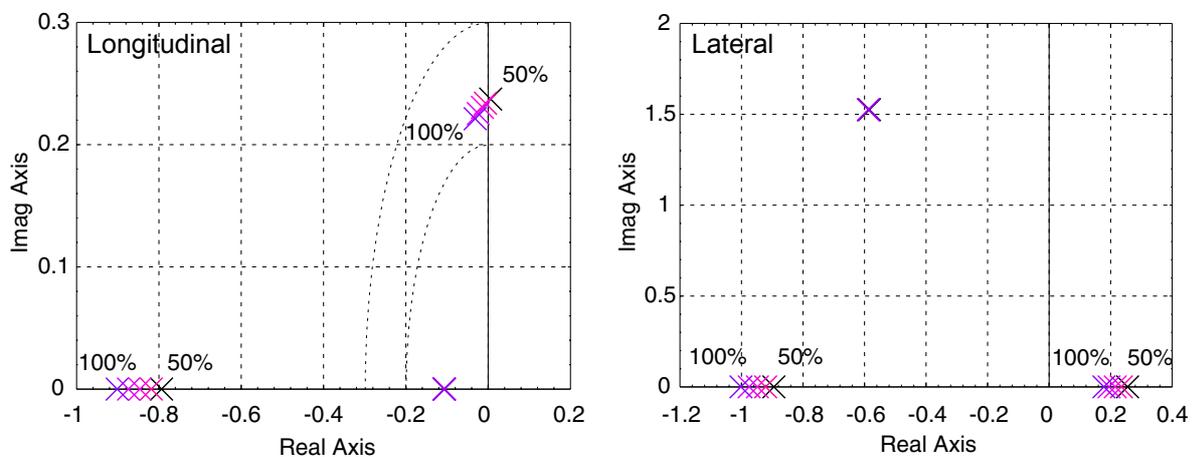


Bild 4.23: Eigenwerte bei Variation $c_{m_{pot}}^{uq}$ für $B = G$ und $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

Variation Auftriebsbeiwert der Leitwerke

Die Leitwerkswirkung wird durch Variation des Auftriebsbeiwertes $c_{l_{\alpha_0, f}}$ untersucht. Der Auftrieb der Leitwerke wirkt stabilisierend auf das aerodynamische Nick- und Giermoment, dämpft Roll-, Gier- und Nickbewegungen und trägt zur Seiten- und Vertikalkraft bei. In der Längsbewegung macht sich sein momentenstabilisierender und nickdämpfender Einfluss stabilisierend in der Nickschwingung bemerkbar. In der Seitenbewegung steigt die Dämpfung der Rollschwingung linear mit dem Leitwerksauftrieb an, da $L_p \sim c_{l_{\alpha_0, f}}$. Die Schiebewinkel-

divergenz ändert mit der geringer werdenden Schiebewinkelinstabilität und der Erhöhung der Gierdämpfung (vgl. Diskussion des Einflusses der Leitwerksgröße auf Seite 108 ff).

Bemerkenswert ist die gegenseitige Kompensation der momenten-, kräfte- und dämpfungserhöhenden Wirkung in der Schwenkbewegung, die Pollage wird nicht beeinflusst. Die Wirkung auf die Schiebewinkeldivergenz ist jedoch erheblich (vgl. mit Gleichung (4.43)). Erklärbar ist der Unterschied mit der Zusammensetzung der Eigenbewegungsformen: Die Zeigerdiagramme der beiden Bewegungsformen zeigen änderndes Vorzeichen der Schiebewinkelanteile (in Gestalt von ν) in Bild 4.15.

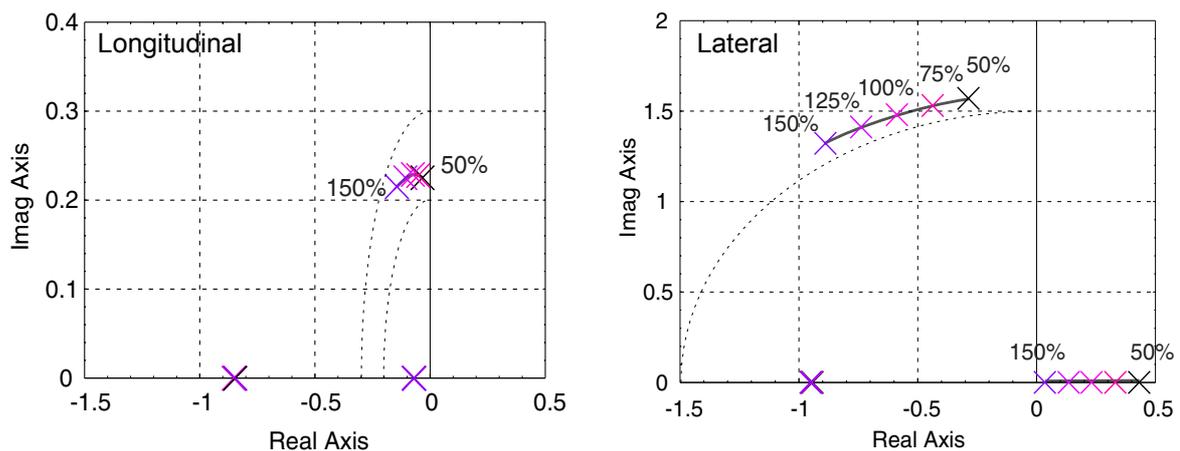


Bild 4.24: Eigenwerte bei Variation $c_{l_{a_0, f}}$ für $B = G$ und $u=8\text{m/s}$ (Lotte)

4.4 Übertragungsverhalten und Frequenzantworten

4.4.1 Übertragungsfunktionen und stationäres Übertragungsverhalten

Im Rahmen der Modalanalyse wurde die Wirkung der Steuereingänge auf Eigenmodi und Bewegungsgrößen allgemein diskutiert. Durch die Darstellung der wichtigsten Übertragungsfunktionen erhalten diese Zusammenhänge weitere Deutlichkeit. Hinweise zur Herleitung von Übertragungsfunktionen und zu deren Interpretation liefert [57],[58] oder [43].

Die Übertragungsfunktionen der Längsbewegung

Die Modalanalyse zeigt, dass die Geschwindigkeit primär über den Schubeingang, die Nickschwingung und Nick-Schwenkbewegung primär über das Höhenruder angesteuert werden. Die aus den linearen Bewegungsgleichungen des Luftschiffes Lotte in Nominal-Konfiguration bei einer Fluggeschwindigkeit von 8 m/s berechneten Übertragungsfunktionen lauten für die Übertragung von Schub auf Vorwärtsgeschwindigkeit

$$u(s) = G(s)\delta_T(s) = \frac{X_{\delta_T}}{s - X_u}\delta_T(s) = \frac{0,0068}{s + 0,1}\delta_T(s) \quad G(0) = 0,00068, \quad (4.45)$$

für die Übertragung zwischen Höhenruder und den Zuständen der Schwenk- und Pendelbewegung lauten sie

$$\begin{aligned}
 w(s) &= -0,98 \frac{(s+1,6)(s^2+0,21s+0,01)}{(s+0,1)(s+0,85)(s^2+0,025s+0,053)} \eta(s) & G(0) &= -0,35 \\
 q(s) &= -0,36 \frac{s(s+0,55)}{(s+0,85)(s^2+0,025s+0,053)} \eta(s) & G(0) &= 0 \\
 \theta(s) &= \frac{1}{s} q(s) & G(0) &= -4,4
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

und zwischen Höhenruder und Vertikalbewegung

$$z(s) = -0,98 \frac{(s+0,74)(s-1,95)}{s(s+0,85)(s^2+0,025s+0,053)} \eta(s) \text{ mit } G(0) = -\infty j. \tag{4.47}$$

In den Gleichungen (4.45) und (4.46) sind zusätzlich die stationären Übertragungsfaktoren $G(0)$ dargestellt. Als Folge der bereits diskutierten Verkoppelung der Längszustände sind in den Übertragungsfunktionen (4.46) Nullstellen und Pole der Hebebewegung und Nickschwingung nicht gegenseitig kürzbar.

Die Frequenzantworten der Übertragungsfunktionen sind als Amplituden- und Phasengänge in Bild 4.25 und 4.26 dargestellt, wobei immer die Übertragungsfunktionen voller Ordnung und nicht die Vereinfachungen ausgewertet wurden. Dies erkennt man z.B. daran, dass (4.45) das Geschwindigkeitsverhalten als Tiefpass 1. Ordnung definiert, sich in der Frequenzantwort der "exakten" Übertragungsfunktion jedoch die Nullstellen und Pole der Nickschwingung bei einer Frequenz von ca. 0.035 Hz leicht bemerkbar machen.

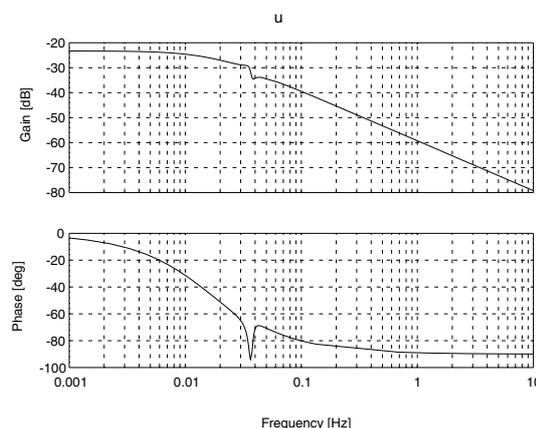


Bild 4.25: Bodediagramm der Übertragungsfunktion $u(s)/\delta_T(s)$

Charakteristisch für die Anstellwinkel- und Nickbewegung ist die stationäre Antwort auf einen konstanten positiven Ruderausschlag: Das Luftschiff geht asymptotisch in einen Sinkflug mit konstant negativem Anstellwinkel und einer Drehrate von Null über. Dies erkennt man an den Werten $G(0)$ oder an den Bodediagrammen. Im Frequenzbereich um 0.035 Hz befindet sich die Nick-Schwingung in Resonanz. Bei einer Fluggeschwindigkeit

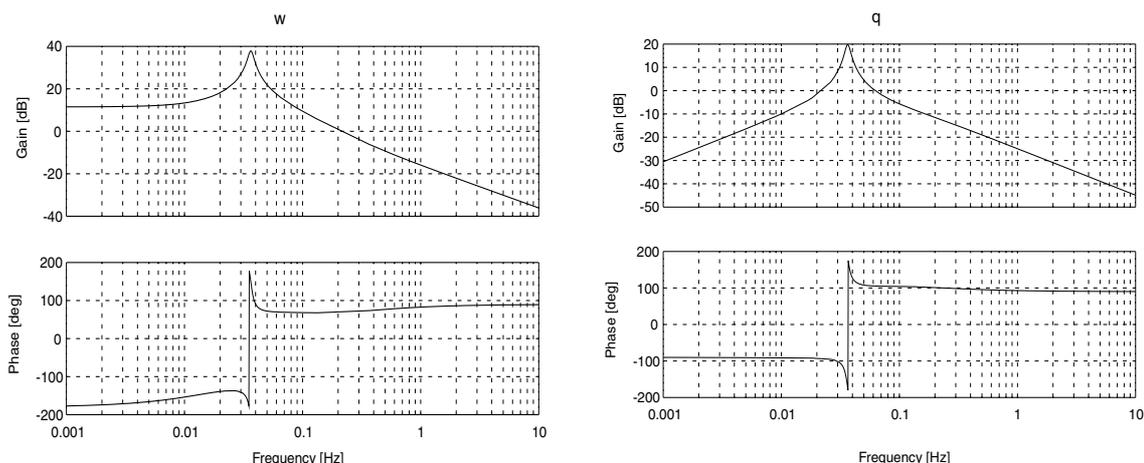


Bild 4.26: Bodediagramm der Übertragungsfunktion $w(s)/\eta(s)$ und $q(s)/\eta(s)$

von 8m/s ist diese Bewegung kaum gedämpft (vgl. Bild 4.7), entsprechend resultiert eine starke Amplitudenüberhöhung.

Bemerkenswert ist die positive Nullstelle in (4.47). Sie verdeutlicht die Nichtminimalphasigkeit dieser Übertragungsfunktion. Physikalisch manifestiert sich das in der Eigenschaft, dass sich das Luftschiff z.B. nach einem positiven Höhenruderausschlag als Folge der auftriebenden Leitwerkskraft vorerst aufwärts bewegt, und erst nachdem sich die Schiffsnase abgesenkt hat, in einen Sinkflug übergeht. Dies ist eine Folge der Hecksteuerung, sie verursacht auch die Eigenschaft der Ruderumkehrung.

Die Übertragungsfunktionen der Seitenbewegung

Die Übertragungsfunktionen der Seitenbewegung, beschreibend die Gier-Einschwenkdynamik und Schiebewinkeldivergenz, lauten

$$\begin{aligned} v(s) &= -0,78 \frac{(s + 1,6)}{(s - 0,22)(s + 0,95)} \zeta(s) & G(0) &= 6 \\ r(s) &= 0,27 \frac{(s + 0,56)}{(s - 0,22)(s + 0,95)} \zeta(s) & G(0) &= -0,72 \end{aligned} \quad (4.48)$$

und die Übertragungsfunktionen zur Beschreibung der Rolldynamik lauten

$$\begin{aligned} p(s) &= -1,5 \frac{s}{s^2 + 1,2s + 2,7} \xi(s) & G(0) &= 0 \\ \phi(s) &= \frac{1}{s} p(s) & G(0) &= -0,56 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Da in der Längsbewegung die Zustände in Anlehnung an die Modi entkoppelt werden können, resultieren Übertragungsfunktionen 2. Ordnung. Die Bodediagramme der Frequenzantworten (der ungekürzten Übertragungsfunktionen) zeigen die Bilder 4.27 und 4.28.

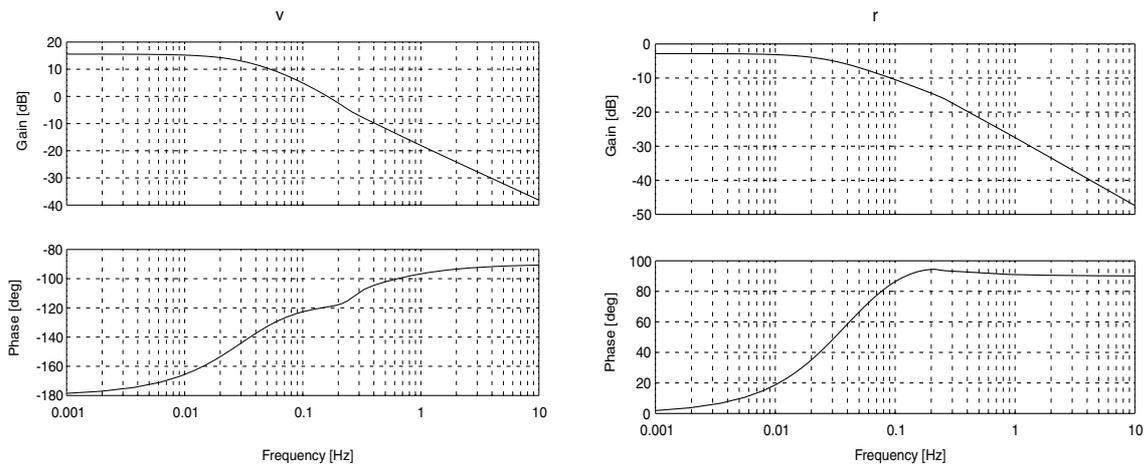


Bild 4.27: Bodediagramm der Übertragungsfunktionen $v(s)/\zeta(s)$ und $r(s)/\zeta(s)$

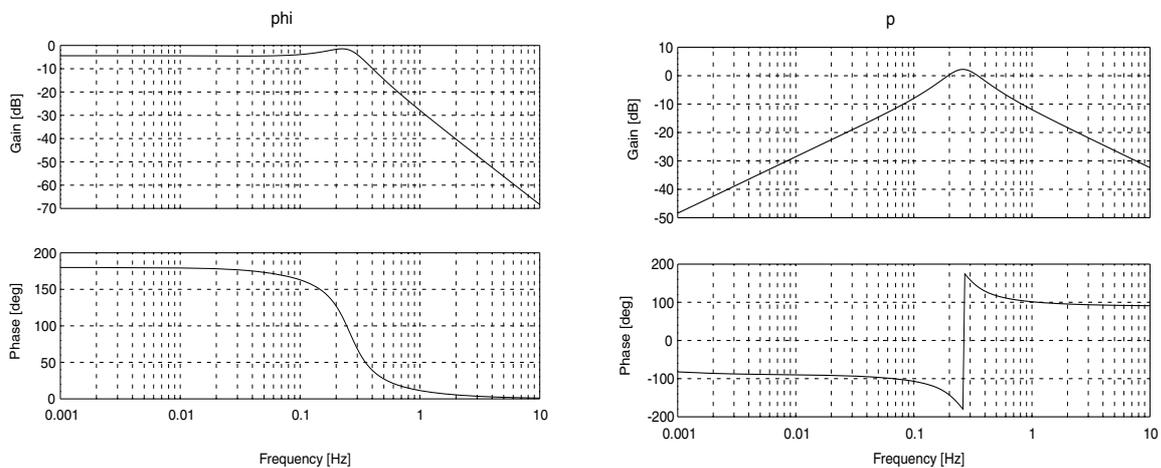


Bild 4.28: Bodediagramm der Übertragungsfunktionen $\phi(s)/\xi(s)$ und $p(s)/\xi(s)$

4.4.2 Frequenzantwort auf Anströmungsanregung (Wind)

Im Folgenden werden die Frequenzantworten auf Anregung durch vertikale und seitliche Windstörungen vom beschleunigungsfreien Typ (vgl. Kapitel 3.8.1 “Mathematische Modellierung des Windes”) dargestellt. Aus den Bewegungsgleichungen (4.29) und (4.30) wurden die Komponenten der Eingangsmatrix B zur Berücksichtigung des Windes mit Hilfe der Beziehung $V_A = V_K - V_W$ gewonnen. Für die Längsbewegung lautet die Bewegungsgleichung, man gewinnt sie durch Ersetzen von w mit $w - w_W$, beispielsweise

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta & 0 \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta & 0 \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & X_{\delta_T}/m_x \\ Z_{\delta_T}/m_z & 0 \\ M_{\delta_T}/I_{yy} & M_{\delta_T}/I_{yy} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \delta_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_w \\ Z_w \\ M_w \\ 0 \end{bmatrix} w_W .$$

Die derart modellierte Windempfindlichkeit berücksichtigt keine verteilte Anströmung und liefert nach den Betrachtungen in Kapitel 3.8.2 nur gute Ergebnisse für Wind-Wellenlängen von $\lambda > 5l_R$. Daraus kann eine Aussage über den mit diesem Modell erfassbaren Frequenzbereich abgeleitet werden: Das Luftschiff bewegt sich mit der Fluggeschwindigkeit u_K durch eine Vertikal- oder Seitenwindscherung nach (3.89) mit Wanderungsgeschwindigkeit u_W . Es erfährt die Störung mit der Frequenz $f_{\text{Wind}} = (u_K - u_W)/\lambda$, und die Bedingung für den Frequenzbereich lautet

$$f_{\text{Wind}} < \frac{u_K - u_W}{5l_R}.$$

Für das Luftschiff Lotte mit 16m Länge bei einer Anströmungsgeschwindigkeit von 8m/s sind die Frequenzantworten $w(s)/w_W(s)$ und $q(s)/w_W(s)$ der Längsbewegung in Bild 4.29 und die Frequenzantworten $v(s)/v_W(s)$, $r(s)/v_W(s)$ der Seitenbewegung in Bild 4.30 nach dieser Bedingung für Frequenzen bis maximal 0.1 Hz auswertbar. In der Längsbewegung

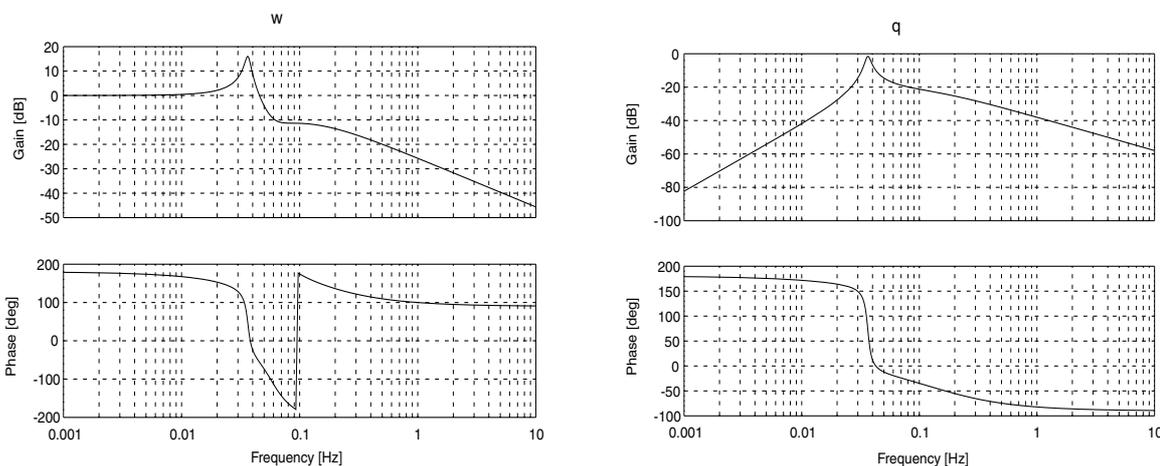


Bild 4.29: Bodediagramm der Übertragungsfunktionen $w(s)/w_{\text{Wind}}(s)$ und $q(s)/w_{\text{Wind}}(s)$

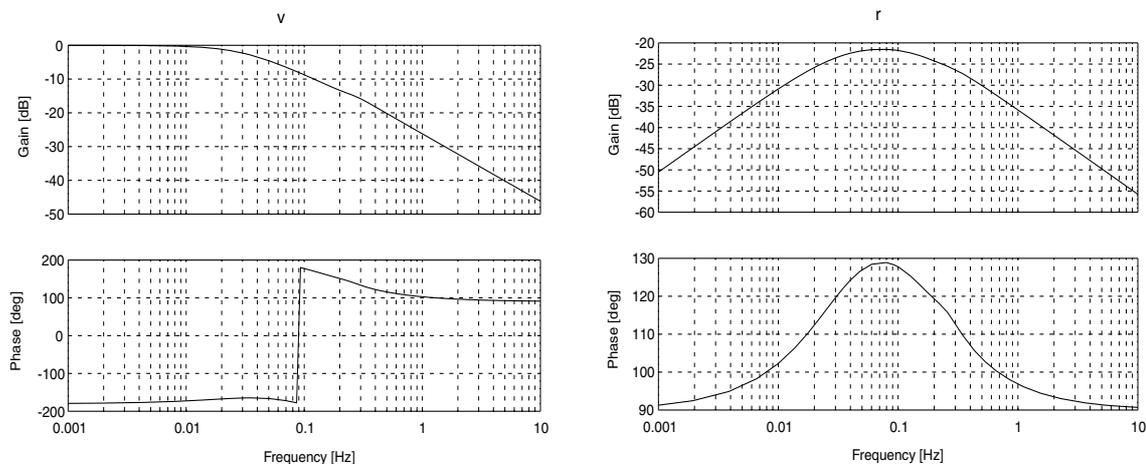


Bild 4.30: Bodediagramm der Übertragungsfunktionen $v(s)/v_{\text{Wind}}(s)$ und $r(s)/v_{\text{Wind}}(s)$

wird der Bereich der Resonanzfrequenz der Nickschwingung somit abgedeckt. In der Seitenbewegung ist zu berücksichtigen, dass sich das Luftschiff schiefbewinkelinstabil verhält: Störungen des Schiefwinkels führen infolge der Schiefbewinkeldivergenz zum Ausbruch des Luftschiffs aus dem Geradeausflug in einen Kurvenflug, das Luftschiff schwingt nicht harmonisch in Antwort auf die sinusoidale Störung. Die Frequenzantworten in Bild 4.30 haben somit eher akademischen Wert, sie entsprechen den Antworten eines im Wind "festgehaltenen" Luftschiffs (vgl. mit den Resultaten von Gomes aus turbulenten Windkanalversuchen [60]).

4.5 Nichtlineares Flugverhalten des Luftschiffes

Das dynamische Flugverhalten wird nun als Resultat nichtlinearer Simulationen dargestellt. Neben Anfangsstörungen im Anstell- und Schiefwinkel wird die Reaktion auf Auslenkungen des Höhen- und Seitenruders dargestellt. Alle Simulationen zeigen das Luftschiff Lotte in einer statisch schweren, hecklastigen Konfiguration, die Gewichtskraft ist um rund 2% größer als der aerostatische Auftrieb. Infolge dieser Konfiguration fliegt das Luftschiff mit leicht positivem Anstellwinkel zur Kompensation der Gewichtskraft und leicht positiv ausgelenktem Höhenruder. Das Höhenruder liefert einen Beitrag zum Auftrieb und kompensiert dadurch das aufnickende Rumpfmoment. Die Modellparameter sind im Anhang dargestellt.

Weitere Simulationsuntersuchungen des Flugverhaltens von Luftschiffen, auch unter dem Einfluss von Wind, findet man z.B. in [24], [63], [64] oder [65].

4.5.1 Reaktion des Luftschiffs auf Störungen des Anstell- und Schiefwinkels

Störung des Anstellwinkels bei Fluggeschwindigkeiten von 4 und 10 m/s

Durch einen vom Trimmzustand abweichenden Anstellwinkel wird der stationäre Geradeausflug gestört. Diese Störung regt die vertikale Bewegungsachse an: Das Luftschiff führt eine Nickbewegung aus und geht in einen Steig- oder Sinkflug über. Diese Dynamik wird durch die aerodynamische Vertikalkraft und das Nickmoment, ihre anstellwinkelabhängige Wirkung ist durch die Beiwertekurven in Bild 3.26 und Bild 3.27 dargestellt, und durch das rückstellende Nickmoment aus aerostatischem Auftrieb und Schwerkraft dominiert. Das Verhältnis zwischen diesen Kräfteanteilen variiert in Abhängigkeit der Fluggeschwindigkeit, da die aerodynamischen Kräfte über den Staudruck skaliert werden. Deshalb wird das Verhalten bei einer Fluggeschwindigkeit von 4 m/s und 10 m/s, d.h. im stabilen und im instabilen Geschwindigkeitsbereich der Nick-Pendelschwingung (vgl. Bild 4.7) untersucht.

Störung in α von 2° bei Fluggeschwindigkeit von 4 m/s: Stabiles Nickverhalten

Die dynamische Antwort des Luftschiffs in den Zuständen, Kräften und Momenten zeigt Bild 4.31. Zu Beginn der Simulation erzeugt der positive Anstellwinkel einen aerodynamischen Auftrieb und ein aufnickendes Moment. Es ist bei dieser Fluggeschwindigkeit jedoch geringer als das rückstellende statische Nickmoment. Als Folge dieser Kräfte beginnt das

Luftschiff leicht zu steigen, während sich die Störung im Nick- respektive Anstellwinkel infolge des statischen Rückstellmoments abbaut. Nach einem leichten Unterschwingen der Nick-Pendelung stabilisiert sich das Luftschiff wieder im Trimmzustand, einem stationären Horizontalflug mit einem Anstellwinkel von 4° . Dieser Anstellwinkel ist erforderlich, da das Luftschiff statisch schwer fliegt und dies aerodynamisch kompensiert werden muss.

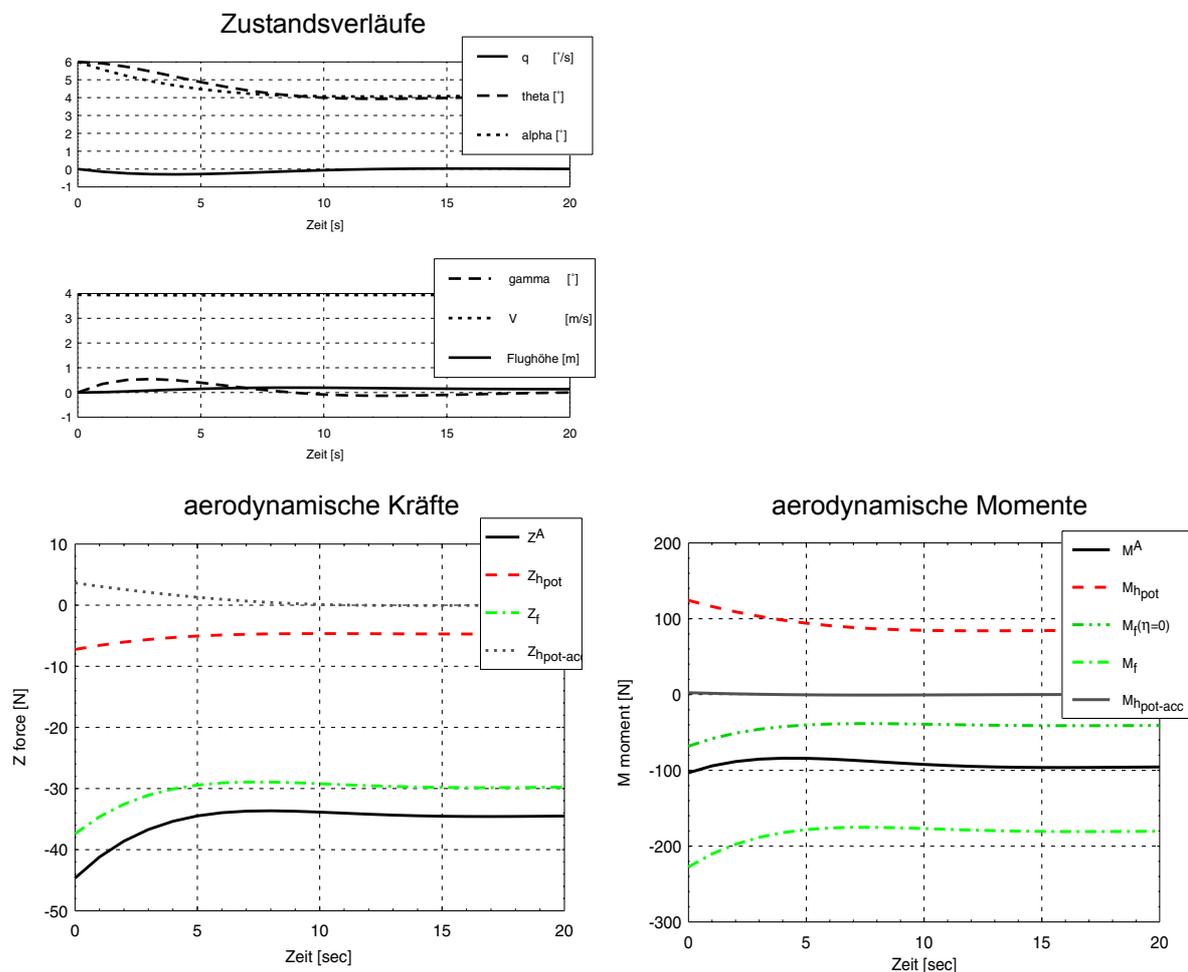


Bild 4.31: Anstellwinkelstörung um 2° bei Fluggeschwindigkeit 4 m/s

Der Verlauf der aerodynamischen Kräfte und Momente dokumentiert dieses Verhalten. Man erkennt den erhöhten Auftrieb zu Beginn der Simulation, die Momente variieren nur schwach. Der stationäre Momentenanteil M_f des Leitwerks (als Vergleichswert ist die Heckkraft bei nicht ausgelenkten Ruderflächen $M_f(\eta=0)$ eingetragen) dient dazu, das aerodynamische Rumpfmoment und die Hecklastigkeit des Schiffes im Horizontalflug zu kompensieren.

Störung in α von 2° bei Fluggeschwindigkeit von 10 m/s: Instabiles Nickverhalten

Bild 4.32 zeigt die Antwort des Luftschiffes Lotte auf eine Störung des horizontalen Geradeausflugs bei 10 m/s Fluggeschwindigkeit. Im Vergleich zum Fall mit 4 m/s Flugwind steigt der Staudruck und damit die aerodynamischen Kräfte und Momente um den Faktor

6.25: Das aerodynamische Moment vermag das stabilisierende statische Moment zu übersteuern, der Horizontalflug ist instabil. Eine Störung aus der labilen Gleichgewichtslage führt das Luftschiff in einen Grenzyklus.

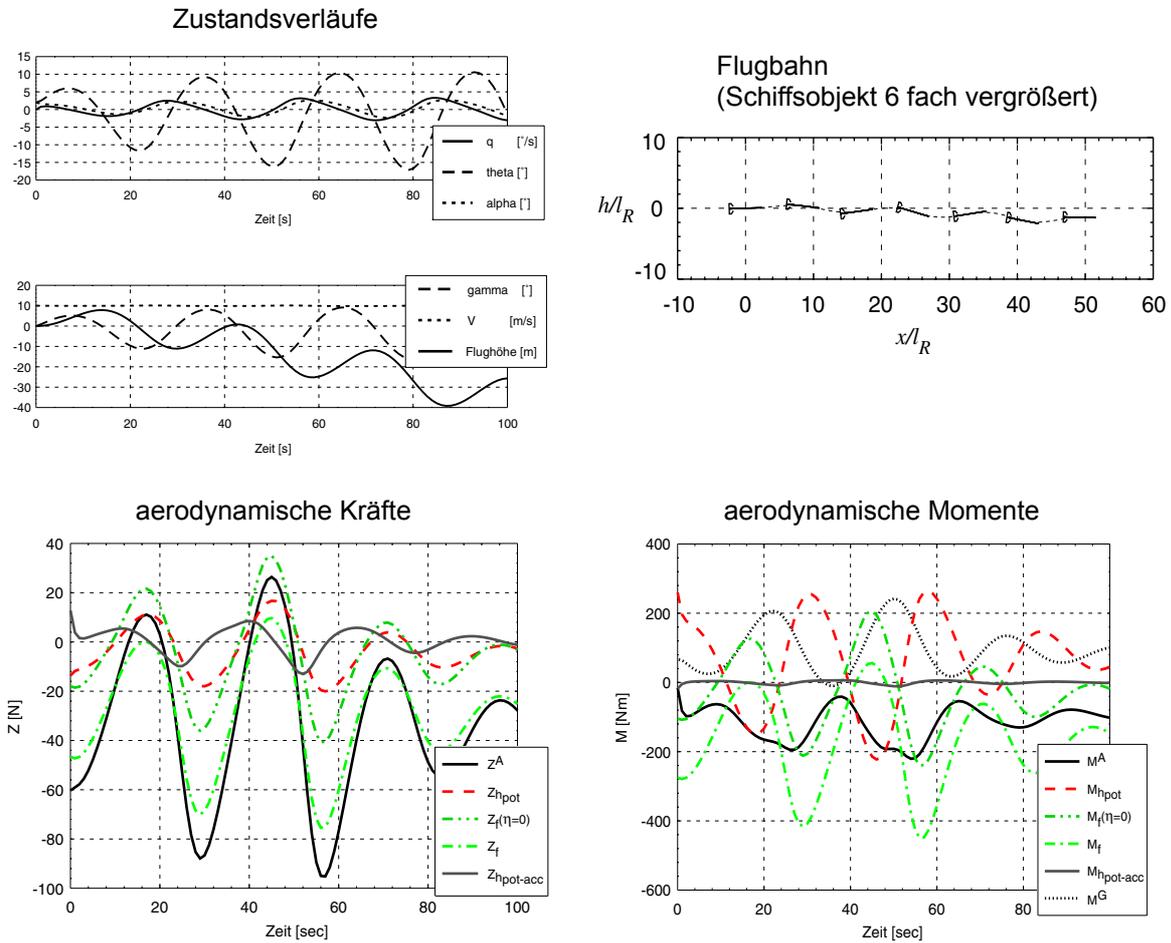


Bild 4.32: Anstellwinkelstörung um 2° bei Flugeschwindigkeit 10m/s

Zu Beginn der Störung erfährt das Luftschiff durch den positiven Anstellwinkel eine starke Liftkraft, es wird nach oben beschleunigt und beginnt zu steigen. In der ersten Sekunde wirkt auch das aerodynamische Moment beschleunigend auf die Nickrate, das Schiff nickt auf. Infolge der Vertikalbeschleunigung verkleinert sich der Anstellwinkel trotz der Aufnickbewegung. Somit reduziert sich auch das aufnickende aerodynamische Moment, während gleichzeitig das Leitwerk drehratenmindernd wirkt. Man erkennt dies am Momentenbeitrag M_f des Leitwerks, welcher in Funktion des lokalen, durch die Drehrate mitbeeinflussten Anstellwinkels berechnet wird (vgl. Paragraph 3.6.2 auf Seite 66). Die Summe aus statischem und aerodynamischem Moment bewirkt etwa ab Sekunde 8, dass sich die Schiffsnase wieder in negative Richtung zu drehen beginnt. Als Folge stellt sich kurz darauf ein negativer Anstellwinkel ein. Das Schiff beschleunigt nach unten und beginnt zu sinken. Bevor nach rund 22 Sekunden ein lokales Nickwinkelminimum von -12° erreicht wird, verringern sich die Drehrate und der Anstellwinkel infolge dynamischer Effekte analog zur bereits beschriebenen Aufnickbewegung. Deshalb übertrifft das statische Moment auch hier

das aerodynamische Nickmoment. Die Schiffsnase beginnt sich wieder nach oben zu drehen, der nächste Zyklus beginnt.

Bei der Betrachtung von Bild 4.32 sei daran erinnert, dass infolge der Luftschiffkonfiguration (statisch schwer und hecklastig) das Höhenruder in einer um rund 3.5° ausgelenkten Trimmlage fixiert ist. Dies verursacht, dass das aerodynamische Nickmoment immer negative Werte annimmt, während das statische Moment M^G infolge der Hecklastigkeit zumeist positiv wirkt. In der Summe ist dies verantwortlich für den Höhenverlust über einen Zyklus. Eine andere Luftschiffkonfiguration verschiebt zwar die Lage der Kurven M_f und M^G , führt jedoch auf einen analog gearteten Grenzyklus, u.U. mit Tendenz zum Aufstieg.

Störung des Schiebewinkels

Bild 4.33 zeigt die Antwort auf eine Störung des Schiebewinkels um 1° bei einer Flugeschwindigkeit von 10 m/s. Wie bereits mit Hilfe von Bild 4.5 diskutiert wurde, geht das Luftschiff nach einer Störung des Schiebewinkels in einen stationären Kurvenflug über.

Nach einer kurzen transienten Phase nehmen Zustände, Kräfte und Momente konstante Werte an. Rumpf und Leitwerk tragen beide zur kurveneinwärts gerichteten aerodynamischen Seitenkraft bei. Das destabilisierende Rumpfmoment wird annähernd von der stabilisierenden aerodynamischen Rumpfdämpfung und der Leitwerkwirkung kompensiert. Da der Schwerpunkt jedoch hinter dem Bezugspunkt liegt, muss ein geringes aerodynamisches Giermoment verbleiben (vgl. Diskussion auf Seite 107).

4.5.2 Reaktion des Luftschiffes auf Steuereingänge

Reaktion auf Auslenkung des Höhenruders, Variation des Ausschlagwinkels

Das Luftschiff reagiert auf einen negativen Höhenruderausschlag mit einer aufnickenden Bewegung. Die Antwort variiert dabei in Abhängigkeit der Flugeschwindigkeit und des Ausschlagwinkels. Das langsam fliegende Luftschiff mit $u=4\text{m/s}$ (in Bild 4.34 links) zeigt nur schwache Reaktion. Maximales Steigen wird für einen Ruderausschlag von etwa -15° erreicht, der Ausschlag von -20° führt auf einen hohen Anstellwinkel mit entsprechend hohem Luftwiderstand. Das Luftschiff fliegt langsamer, verliert als schwer fliegendes Schiff an Auftrieb und erreicht nur noch geringere Steigwinkel. Auf das schneller fliegende Luftschiff mit $u=10\text{m/s}$ (in Bild 4.34 rechts) wirken die aerodynamischen Kräfte dominierend, es kann in einen annähernd beliebig steilen Steigflug übergehen. Infolge der Schwere nimmt dabei nur die Flugeschwindigkeit leicht ab (man erkennt dies an den in Zeitabständen von 12.5 Sekunden eingezeichneten Luftschiffkonturen). An den Simulationen mit -5° und -10° Höhenruderausschlag erkennt man deutlich, wie durch den Ausschlag die Nick-Pendelbewegung angeregt wird: Nach einer hohen Anfangssteigung reduzieren sich Nick- und Flugbahnwinkel wieder leicht.

Die Antwort in der Längsebene auf eine Ruderauslenkung von -20° bei $u=10\text{m/s}$ ist in Bild 4.35 detailliert dargestellt. Bereits zu Beginn der Simulation ist das Höhenruder ausgeschlagen und bewirkt eine starke Abtriebskraft (positive Z-Komponente), infolge derer das Luftschiff leicht absinkt. Das durch den Ruderausschlag gleichzeitig entstehende hohe positive Nickmoment sorgt jedoch auch dafür, dass das Luftschiff aufnickt und der Anstellwinkel

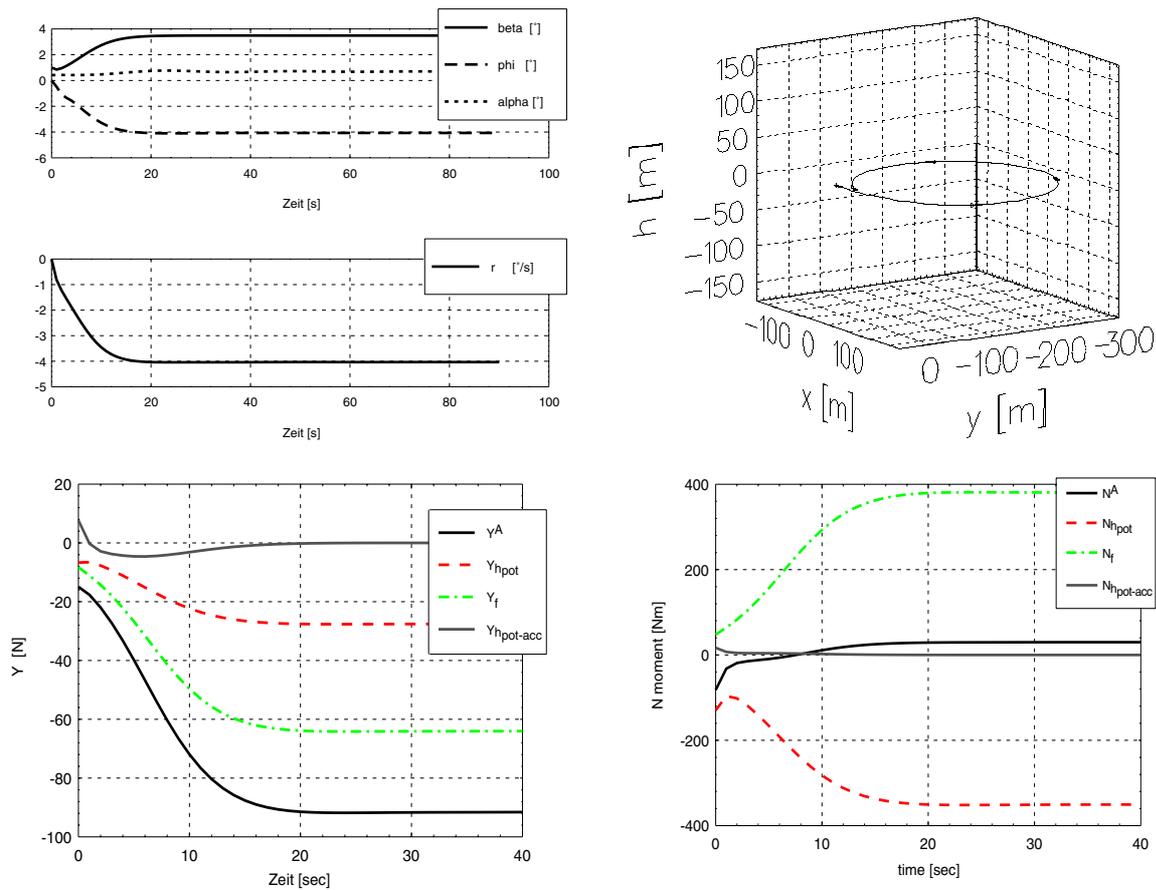


Bild 4.33: Anfangsstörung im Schiebewinkel β von 1° bei $u=10$ m/s

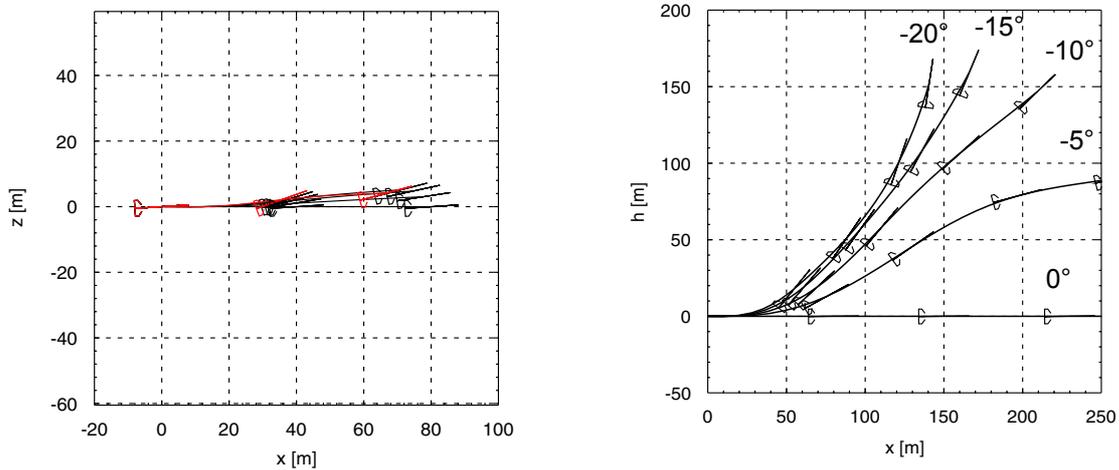


Bild 4.34: $u=4$ m/s, η $0^\circ, -5^\circ \dots -20^\circ$

$u=10$ m/s, η $0^\circ, -5^\circ \dots -20^\circ$

vergrößert wird. Bereits nach etwas mehr als einer Sekunde wirkt die aerodynamische Kraft bei einem Anstellwinkel von rund 5° auftriebserzeugend nach oben. Der Anstellwinkel wird durch die Ruderauslenkung und das Rumpfmoment weiter erhöht und wächst dynamisch auf einen Maximalwert von 14° . Für diese hohen Winkel wirkt die Ruderauslenkung nicht mehr, zusammen mit der Nick-Dämpfung und dem rückstellenden statischen Moment bewirkt dies

eine Stabilisierung der Drehbewegung. Sie verläuft jedoch infolge der Anteile der nur leicht gedämpften Pendel-Schwingung weiterhin transient.

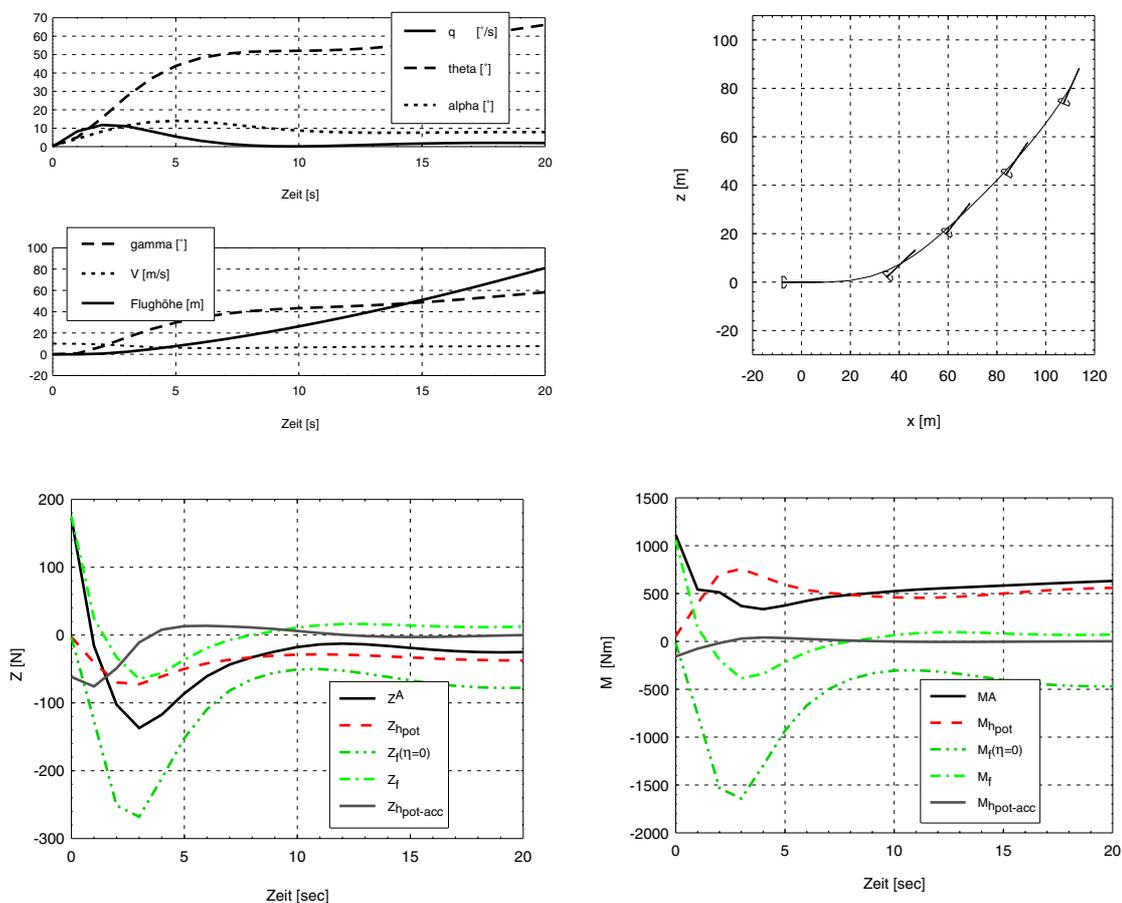


Bild 4.35: Ruderantwort $\eta = -20^\circ$, $u=10\text{m/s}$

Reaktion auf Auslenkung des Seitenruders, Variation des Ausschlagwinkels

Bild 4.36 zeigt den auf positive Auslenkung des Seitenruders resultierenden Kurvenflug. Der Vergleich der Antworten bei einer Fluggeschwindigkeit von 4m/s mit denen bei 10m/s zeigt wieder, dass der Kurvenradius auf einen Seitenruderausschlag beinahe invariant gegenüber der Fluggeschwindigkeit ist. Diese Eigenschaft und der Zusammenhang zwischen Ruderwinkel, Schiebewinkel und Kurvenradius wurden bereits im Abschnitt "Flugeigenschaften im stationären Kurvenflug" auf Seite 110 erläutert.

Wie bei der Untersuchung der Höhenruderantwort wird auch hier ein Fall detailliert diskutiert. Bild 4.37 zeigt das Antwortverhalten des Luftschiffs auf eine Rudereingabe von 10° bei einer Fluggeschwindigkeit von 10m/s . Das positiv ausgeschlagene Ruder erzeugt ab der ersten Sekunde eine positive Seitenkraft und ein negatives Giermoment. Dies bewirkt einen positiven Schiebewinkel und das Eindrehen in eine Linkskurve. Infolge des Schiebewinkels unterstützt der Rumpf sowohl die kurveneinwärtsgerichtete Seitenkraft als auch das drehbeschleunigende Giermoment. Nach rund 2 Sekunden ist bereits eine Gierrate von $-8^\circ/\text{s}$ erreicht und der Schiebewinkel am Heck wurde proportional der Drehrate verringert. Deshalb erzeugt die Leitwerkskraft nun ein gierminderndes positives Moment, welches die Gier-

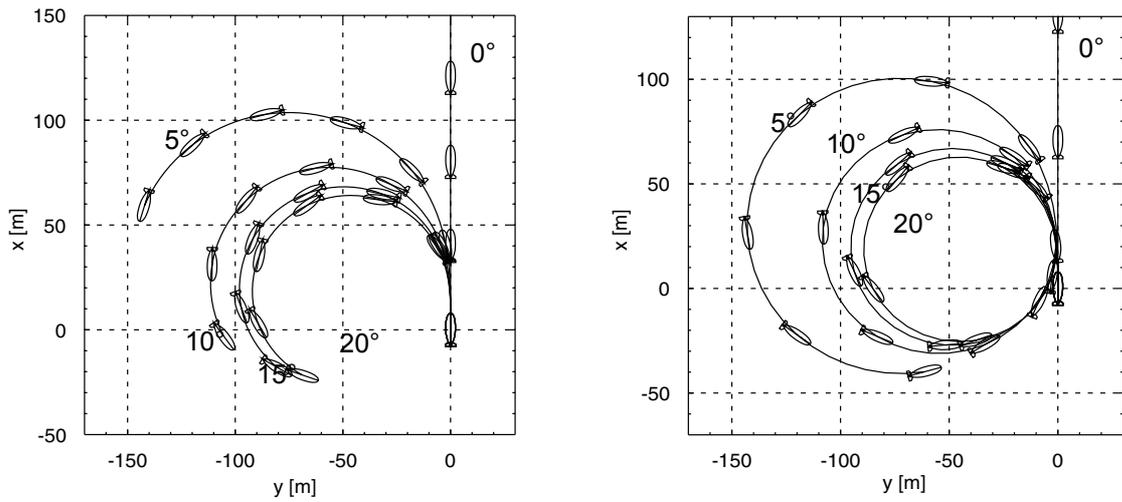


Bild 4.36: Sprung im Seitenruder von 0°, 5°, 10°, 15° und 20° jeweils bei 4 m/s (links) und 10 m/s (rechts) Fluggeschwindigkeit.

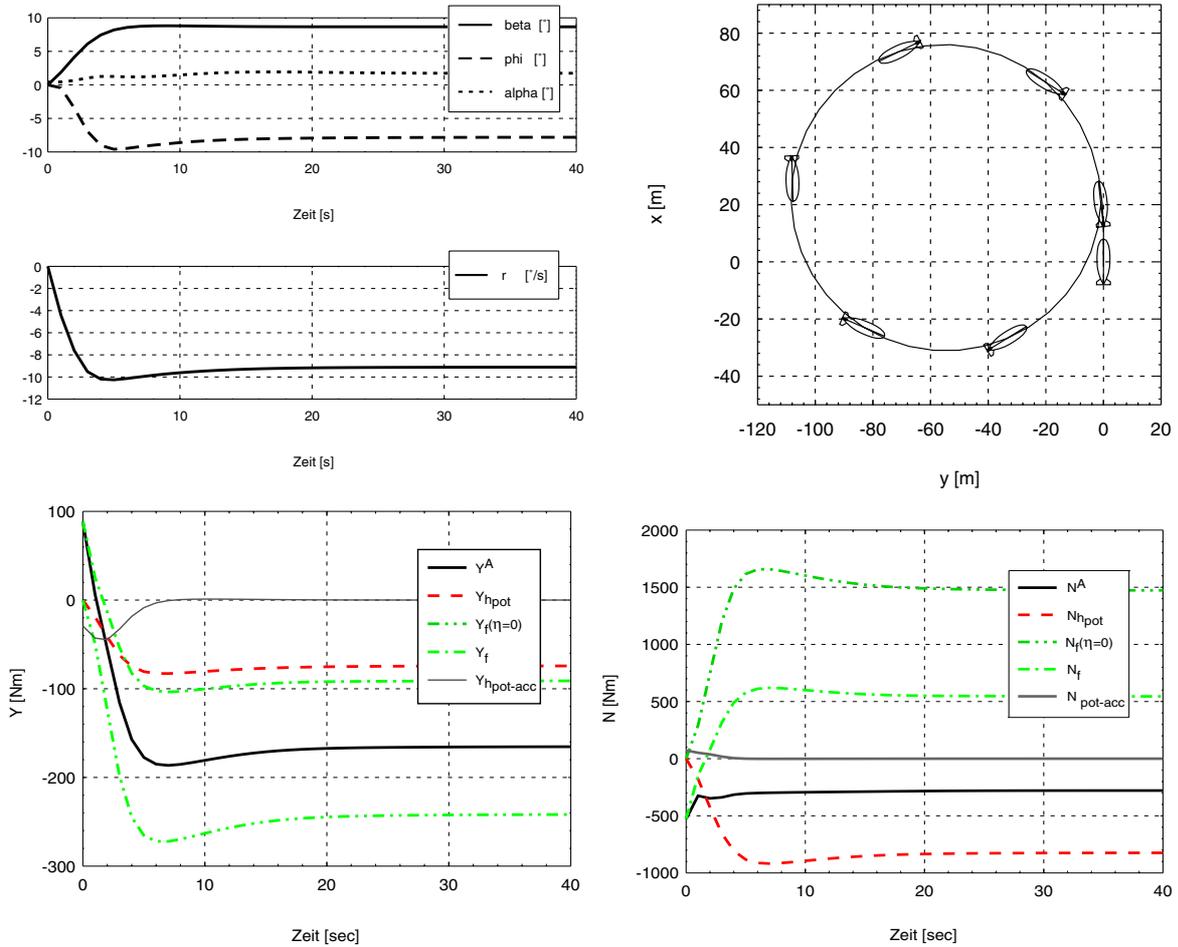


Bild 4.37: Gierdynamik bei $u=10$ m/s und $\zeta = 10^\circ$

rate auf einen stationären Wert von etwa $-9^\circ/\text{s}$ einbremst. Als Vergleichswert ist in Bild 4.37 die Leitwerkskraft und das Giermoment für einen Ruderausschlag von 0° miteingezeichnet. Der Ruderausschlag verringert erwartungsgemäß das rückstellende Giermoment des Hecks im Kurvenflug und bewirkt dadurch einen engeren Radius, als er bei festen Ruderflächen resultieren würde. Dies ist konsistent zu den Ausführungen in 4.1.2.

5 Flugregelung

In den vorangehenden Kapiteln wurde die Modellbildung vorgestellt und das stationäre und dynamische Verhalten von Luftschiffen untersucht. Dabei hat sich gezeigt, dass der Geradeausflug von Luftschiffen richtungsinstabil ist und dass bei höheren Fluggeschwindigkeiten zusätzlich Nickinstabilität eintreten kann. In diesem Kapitel wird nun auf Möglichkeiten eingegangen, das dynamische Verhalten durch Regelung positiv zu beeinflussen.

5.1 Einleitung und Motivation

Eine erste Aufgabe der Flugregelung ist die Verbesserung des Flugverhaltens durch Stabilisierung und Dämpfungserhöhung der Eigenbewegung (vgl. Bild 5.1, innerster Regelkreis). Zur weiteren Entlastung des Piloten dienen Regler zur Stabilisierung der Flugbahn gegenüber z.B. Windstörungen. Diese Autopiloten übernehmen Aufgaben bis hin zur Automatisierung einzelner Flugphasen oder ganzer Luftschiffsmissionen (äußere Kreise in Bild 5.1). Die in diesem Kapitel vorgestellten Regler stellen Basisregelsysteme zur Verbesserung der Flugeigenschaften und zur Stabilisierung der Flugbahn dar. Dabei werden bewusst einfache Reglerstrukturen eingesetzt, um die Wirkung der Rückführungen transparent zu halten. Diese klassischen Kaskadenregler (Einzelsignalarückführung) konstanter Einstellung vermögen die gewünschten Flugeigenschaften des Luftschiffs nicht über den gesamten Flug- und Konfigurationsbereich zu gewährleisten. Sie funktionieren nur um einen begrenzten Einsatzbereich um den Auslegungspunkt. Für den breiteren Einsatz wäre eine Anpassung der Reglereinstellung (Gain-Scheduling oder adaptive Regelung), nichtlineare Ansätze oder die Anwendung robuster Auslegungsmethoden notwendig.

Weiterführende Anwendungen klassischer Reglerstrukturen auf die Luftschiffregelung findet man in [69] oder [70]. Robuste Regelungsansätze zur Gewährleistung guter Stabilität und Reglerleistung über einen weiten Flugbereich wurden vom Autor in [66] erfolgreich umgesetzt. Ein System zur automatischen Bahnregelung, die Bahn wird dabei durch anzufliegende Punkte und die Einflugrichtung im Raum definiert, wurde von F. Böesflug in Zusammenarbeit mit dem Autor in [68] entwickelt. Gute Einführungen in die Regelung von Flugzeugen findet man bei Brockhaus [43] oder Bryson [47], Einführungen in die allgemeinen Methoden der Regelungstechnik in [57] und [58], in die Methoden der robusten Regelung beispielsweise in [75] und [76].

Neben den oben erwähnten Anwendungen existieren weitere Einsatzmöglichkeiten für Regelsysteme. Mit Hilfe von Flugreglern lassen sich auch unerwünschte Kopplungen von Bewegungen und Steuerkommandos, wie sie z.B. durch eine tiefliegende Schublinie hervorgerufen werden, kompensieren oder zum Nutzen der Sicherheit und Steuerbarkeit beeinflussen. Existieren für das Luftschiff Betriebsgrenzen (zulässige Betriebsbereiche von Systemen, Grenzen struktureller Belastungen), können Regelsysteme sowohl zur Einhaltung solcher Bereiche wie auch zur aktiven Reduzierung der Belastung eingesetzt werden. Solche Anwendungen werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter vertieft.

Struktur von Flugregelungssystemen

Bild 5.1 zeigt die verschiedenen Ebenen eines Flugregelungssystems. Durch verschiedene Rückführungsschleifen, angefangen bei den stabilisierenden und dämpfungserhöhenden Rückführungen (stability augmentation system SAS) im innersten Kreis, dient der nächste Kreis der Regelung der Lage, dann der Regelung der Flugbahn bis schließlich über den Einbezug von Navigationdaten der Bahnführungsregelung entsteht. In all diesen Ebenen muss der Pilot im Notfall eingreifen können. Im innersten Kreis kommandiert er direkt die Steueranschläge. In den äußeren Kreisen steuert er das Flugzeug, entweder indem er mittels seiner primären Bedienelemente die Aktuatoren durch den Regler indirekt ansteuert, oder indem er über Bordrechnersysteme Sollwerte vorgibt. Der Weg über Sollwertvorgabe wird typischerweise für Flugbahnregler und Führungssysteme eingesetzt, das Steuern durch den Regler für manuell pilotierte Flugphasen. Wie nun die Signale des Piloten für den manuell kommandierten Betrieb umzusetzen sind, wird im folgenden Kapitel diskutiert.

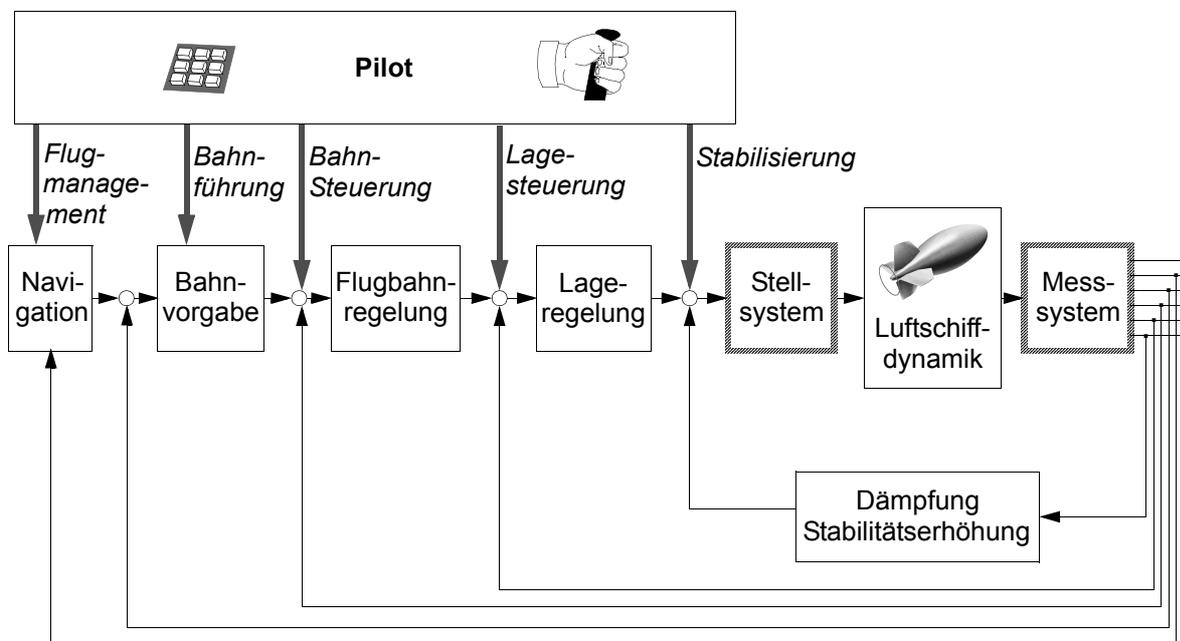


Bild 5.1: Aufbau von Flugregelungssystemen (nach Brockhaus [43])

5.2 Regelungsaufgaben und Auslegungsziele

Voraussetzung für den Entwurf eines Regelsystems ist eine genaue Definition der Aufgabe und des Auslegungsziels. Zur Prüfung der erreichten Leistung müssen Beurteilungskriterien für die Flug- und Steuereigenschaften angewendet werden. Daneben gilt es, Richtlinien und Standards zu berücksichtigen. So schreiben beispielsweise die Zulassungsverordnung für Luftschiffe bis zur Commuter Klasse in ihrem Paragraph 171 vor:

§ 171 Stability: *“The airship must be sufficiently stable in both pitch and yaw axes in steady unaccelerated flight during ascent, descent, and level flight when trimmed at appropriate operating speeds and with consistent use of auxiliary thrust and lift controls to ensure that the pilot will not be unduly fatigued and distracted from his normal duties.”* [79].

Neben diesen unscharfen Forderungen existieren wenig Informationen für die Auslegung von Luftschiffreglern, insbesondere gibt es keine dokumentierten Kriterien für Flug- und Steuerbarkeitseigenschaften. Es verbleibt nur die Möglichkeit, auf bekannte Ansätze für Flächenflugzeuge, Helikopter oder von Schiffen und U-Booten zurückzugreifen. Dabei lassen sich Kriterien für anzustrebende Zeitkonstanten und Eigenfrequenzen relativ leicht adaptieren. Demgegenüber sind Steuerbarkeitskriterien von der Art des C*-Kriteriums nicht direkt übertragbar, da Luftschiffe eine gänzlich unterschiedliche Flugdynamik und Steuerungscharakteristik besitzen.

Bei der Auslegung eines Regelsystems muss immer auch der erforderliche Steueraufwand mitberücksichtigt werden. Von einem Luftschiff, welches sich natürlicherweise langsam verhält, sollten keine zu schnellen Antwortverhalten gefordert werden. Willkürlich plazierte Eigenwerte führen hier schnell zu nicht realisierbaren Systemen. Um ein Gefühl für die dynamischen Zusammenhänge und Größenordnungen zu entwickeln, empfiehlt es sich daher, Entwürfe von Rückführungen mit der LQ-Regulator Methode durchzuführen.

5.2.1 Interpretation der Pilotenkommandos

Mit den primären Bedienelementen kommandiert der Pilot direkt die Steuerausschläge oder durch das Regelsystem die Bewegung des Schiffes (vgl. Bild 5.1). Im direkten Steuergesetz steuert der Pilot über seinen Knüppel Höhen- wie Seitenruder und gegebenenfalls Querruder, über einen Schubhebel die Motordrosselung.

Die Interpretation der Piloteneingaben durch den Flugregler, respektive die über den Flugregler gesteuerte Antwort auf Piloteneingaben, sollte den dem Piloten bekannten natürlichen Antworten entsprechen. Auf Höhenruderausschlag reagiert das Luftschiff mit dem Aufbau einer Drehrate, bis es einen stationären Nickwinkel und somit auch Bahnwinkel erreicht. Seitenruderausschlag erzeugt eine Gierrate, das Luftschiff geht in stationären Kurvenflug unter entsprechendem Schiebewinkel und Kurvenradius über (vgl. Abschnitt 4.4).

In der Längsbewegung eignet sich für Luftschiffe im unteren Geschwindigkeitsbereich die Regelung des Nickwinkels oder der Nickrate proportional der Steuereingabe. Die Regelung des Flugbahnwinkels ist in diesem Geschwindigkeitsbereich nicht zu empfehlen, da das Luftschiff infolge statischen Ungleichgewichts einen sehr eingeschränkte Flugbereich haben kann (vgl. 4.1.2). Fliegt das Luftschiff jedoch mit einem bestimmten Nickwinkel und steigt oder sinkt, kann der Pilot das Flugverhalten bei Erhöhung oder Reduktion der Flugeschwindigkeit gut vorraussagen. Zusätzlich ist darauf zu achten, dass im Bereich der Ruderumkehrgeschwindigkeit das Vorzeichen des Übertragungsverhaltens zwischen Höhenruder und Flugbahnwinkel wechselt. Für höhere Flugeschwindigkeiten ist direkt die Steuerung des Bahnwinkels γ oder dessen Änderungsrate möglich.

In der Regelung der Längsbewegung macht sich wieder ein Unterschied zu Flugzeugen bemerkbar. Für Flugzeuge ist die Regelung der Flughöhe und Flugeschwindigkeit unmittelbar gekoppelt. Da bei Luftschiffen die potentielle Energie nur eine untergeordnete Rolle spielt, ein Luftschiff also mit gleicher Schubhebelstellung Steigen und Sinken kann

ohne die Geschwindigkeit dabei stark zu ändern, kann die Geschwindigkeitsregelung entkoppelt von der Höhenregelung erfolgen.

In der Seitenbewegung empfiehlt sich die Interpretation der Piloteneingabe in der Gierachse als Gierraten-, respektive Flugbahnazimuthratenkommando. Das Rollkommando sollte als Ablage vom natürlichen Rollwinkel interpretiert werden.

5.2.2 Stabilisierung und Dämpfung der Flugbewegung

Die Notwendigkeit von stabilisierenden Regelsystemen leitet sich aus den Resultaten der Untersuchung der Eigenbewegungen ab. In der Längsachse benötigt das Luftschiff bei höheren Fluggeschwindigkeiten eine Dämpfung oder Stabilisierung der Nickbewegung, respektive eine Stabilisierung des Anstellwinkels. In der Seitenbewegung ist über den gesamten Flugbereich eine Stabilisierung des Schiebewinkels oder entsprechend der Gierrate notwendig. Auch die Rollbewegung benötigt u.U. zusätzliche Dämpfung.

5.2.3 Stabilisierung und Regelung der Fluglage und der Flugbahn

Die Regelung und Stabilisierung der Fluglage und Flugbahn dient der weiteren Entlastung des Piloten. Sie sorgt dafür, dass die Fluglage oder Flugbahn stationär eingehalten und gegenüber äußeren Störungen wie Wind oder thermischen Einflüssen stabilisiert wird.

Wie bereits bei der Interpretation der Pilotenkommandos diskutiert, empfiehlt sich in der Längsbewegung eine Regelung des Nickwinkels bei tiefen und mittleren Fluggeschwindigkeiten und die Regelung des Bahnwinkels bei höheren Fluggeschwindigkeiten. Die aus der Flugregelung bekannten Systeme wie Höhen- und Fahrtregelung bauen sich als äussere Regelkreise um die Lageregelssysteme auf.

Eine erste Ausbaustufe der Regelung der Seitenbewegung stellt die Gierratenregelung respektive die Regelung des Flugbahnazimuths dar. Weitere Stufen sind die Regelung des Flugwegs über Grund. In der Rollachse fliegt ein rotationssymmetrisches Luftschiff natürlicherweise koordiniert bezüglich des Schwerpunkts. Für anders konfigurierte Luftschiffe kann ein Autopilot zur Koordinierung des Beschleunigungszustandes in einem gewünschten Punkt eingesetzt werden.

5.3 Entwurf nach klassischen Methoden

In diesem Unterkapitel werden wirkungsvolle Einzelsignalrückführungen vorgestellt und nach den Methoden der klassischen Flugregelung zu einer Kaskadenregelung für die Längs- und Seitenbewegung kombiniert.

5.3.1 Einzelsignalrückführungen zur Verbesserung der Flugeigenschaften

Wie in 5.2.2 beschrieben, muss die Anstellwinkel- und Nickdynamik, die Schiebewinkel- und Gierdynamik sowie die Rolldynamik gedämpft oder stabilisiert werden. Da die Messung von aerodynamischen Anströmungswinkeln problematisch ist, werden die Stabilisierungen

über Rückführung der entsprechenden Drehraten erreicht. Trotzdem sind im Folgenden alle wirkungsvollen Rückführungen erläutert.

Wirkung von Einzelsignalrückführungen

Längsbewegung

Bild 5.2 zeigt die Wirkung von einzelnen Zustandsrückführungen auf die Lage der Pole des Luftschiffs Lotte bei einer Fluggeschwindigkeit von 8m/s.

Die negative Rückführung der Vorwärtsfluggeschwindigkeit u auf den Schubhebel δ_T führt auf eine Verschiebung des realen Geschwindigkeitspols nach links, die Geschwindigkeitsdynamik wird schneller.

Die Rückführung der Vertikalgeschwindigkeit w auf das Höhenruder η (entspricht mathematisch und systemdynamisch der Rückführung des Anstellwinkels α) unterstützt die stabilisierende Wirkung des Höhenleitwerks. Dadurch wird die Federsteifigkeit gegenüber α erhöht. Entsprechend wandern die Pole der Nick-Pendelbewegung in Richtung höherer Frequenzen, während die Dämpfung nur leicht zunimmt. Diese Rückführung bewirkt gleichzeitig, dass der Pol der aperiodischen Nickbewegung nach rechts wandert, diese Dynamik wird langsamer.

Die Rückführung der Nickrate auf das Höhenruder erhöht dessen Wirkung drehratenproportional. Sie wirkt somit dämpfend auf die Nickrate. In Folge wandern die Pole der Nickpendelung mit annähernd konstanter Eigenfrequenz in Richtung höherer Dämpfung. Die aperiodische Nickbewegung wird durch die Rückführung schneller, der Pol wandert nach links. Die Rückführung des Nickwinkel θ , sie unterstützt die rückstellende Wirkung des statischen Moments, führt erwartungsgemäß auf eine Erhöhung der Eigenfrequenz der Pendelschwingung bei gleichbleibender Dämpfung.

Seitenbewegung

Bild 5.3 zeigt die Wirkung von einzelnen Zustandsrückführungen auf die Lage der Pole des Luftschiffs Lotte bei einer Fluggeschwindigkeit von 8m/s.

Die Rückführung der seitlichen Fluggeschwindigkeit v auf das Seitenruder ζ , dies entspricht einer Rückführung des Schiebewinkels β , erzeugt ein Gegenmoment zum destabilisierenden Rumpfmoment und erfüllt somit die Aufgabe einer Schiebewinkelunterdrückung. Entsprechend erkennt man die stabilisierende Wirkung auf die Schiebewinkeldivergenz. Der stabile aperiodische Pol wandert vorerst nach rechts. Nachdem er sich mit dem stabilen Gierbewegungspol auf der realen Achse trifft, wird die Dynamik weiter stabilisiert. Die Pole der Rolldynamik bleiben unbeeinflusst.

Die Gierratenrückführung auf das Seitenruder erhöht generell die Dämpfung der gierbewegungsbehafteten Eigenmodi. Sowohl der stabile als auch der instabile aperiodische Pol werden nach links verschoben. Infolge einer Nullstelle bei ca. -0.5 kann die Schiebewinkeldynamik durch Gierratenrückführung nur begrenzt schneller gemacht werden.

Die Rückführung der Rollrate und des Rollwinkels auf den Querruderausschlag ξ erzeugt die erwarteten Wirkungen. Die Rollratenrückführung trägt direkt zur Rolldämpfung bei, die Pole wandern mit konstanter Eigenfrequenz. Die Rückführung des Rollwinkels trägt

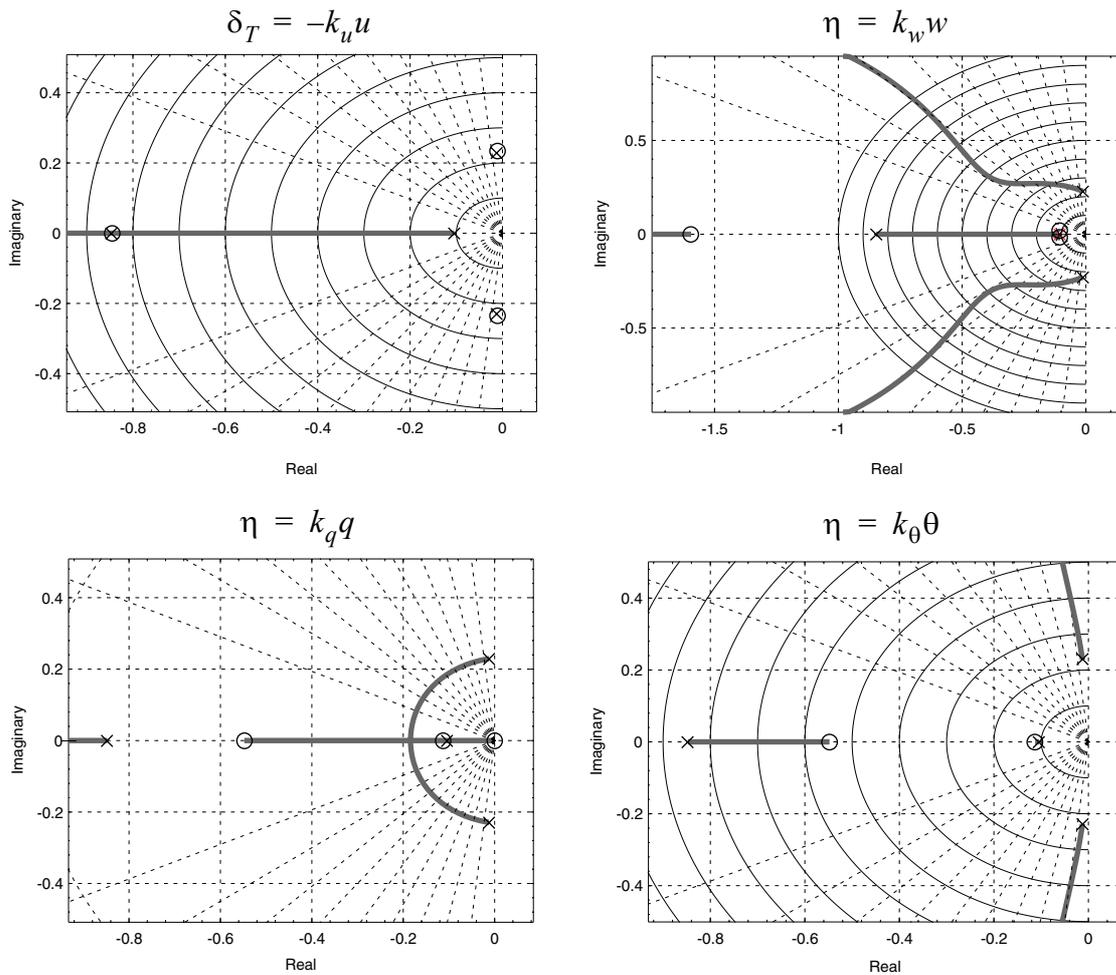


Bild 5.2: Längsbewegung: Wurzelortskurven von Rückführungen, Lotte bei $u=8\text{m/s}$

zum statischen Rückstellmoment bei. Durch diese Rückführung kann die Frequenz erhöht und somit das Antwortverhalten beschleunigt, oder durch negative Rückführung verlangsamt werden.

5.3.2 Anwendungsbeispiel: Regelung der Längs- und Seitenbewegung von Lotte

Basierend auf den Betrachtungen der Regelungsaufgaben und der Analysen unterschiedlicher Einzelsignalarückführungen werden nun Lage- und Flugbahnregelsysteme für die Längs- und die Seitenbewegung vorgestellt. Bei der Auswahl der Rückführungsgrößen wurde auch die Verfügbarkeit der Messsignale berücksichtigt. Es wurde bewusst auf die systemdynamisch zwar effektive, messtechnisch aber nicht einfach realisierbare Rückführung der Anströmungswinkel α und β verzichtet.

Stabilisierung und Bahnwinkelvorgaberegung der Längsbewegung

Das Regelsystem nach Bild 5.4 besteht aus einem nickstabilisierenden System mit Nickratenrückführung zur Dämpfungserhöhung und Nickwinkelrückführung zur Beschleunigung

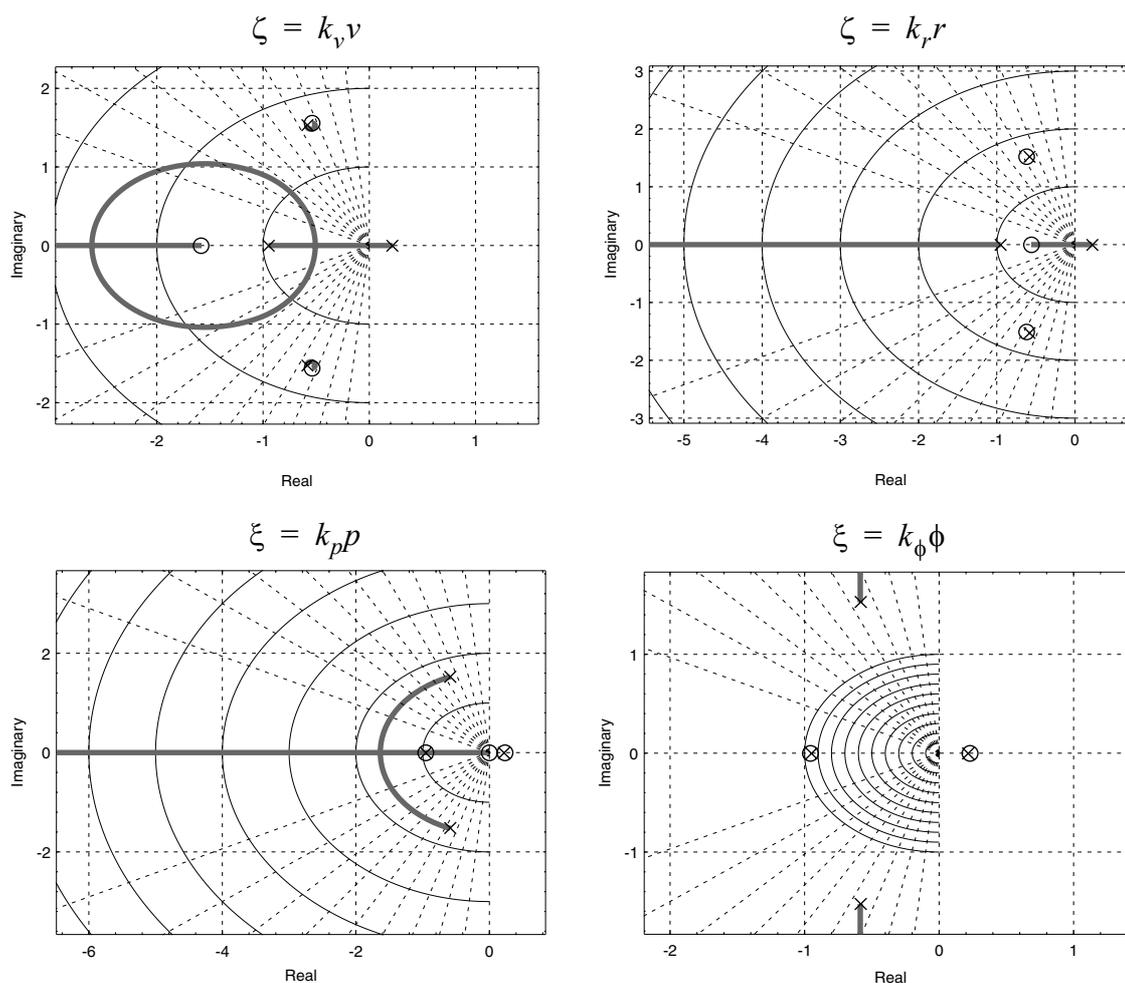


Bild 5.3: Seitenbewegung: Wurzelortskurven von Rückführungen, Lotte bei $u=8\text{m/s}$

des Antwortverhaltens und aus einem Bahnneigungswinkelregler. Zur Vermeidung eines stationären Nachlauffehlers wird für die Bahnwinkelregelung ein PI-Regelglied verwendet. Sämtliche Verstärkungsfaktoren wurden für die Luftschiffdynamik bei $u=8\text{m/s}$ ausgelegt. Diese Fluggeschwindigkeit liegt nahe der grenzstabilen Fluggeschwindigkeit der Nickpendelbewegung. Die nickstabilisierenden Rückführungsverstärkungen von q und θ werden mit Hilfe der Wurzelortsscharen in Bild 5.5 festgelegt: Die stabilisierte Nickschwingung erreicht somit eine Dämpfungszahl von $\zeta \approx \sqrt{2}/2$. Durch sequentielles Schließen der Regelkreise wandern die Pole wie folgt:

$$\begin{array}{l} \text{Offenes System} \quad K_q = 3 \quad K_\theta = 1 \quad K_{P_\gamma} = 0,4 \\ \text{bei } u=8\text{m/s} \quad K_{I_\gamma} = 0,15 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,01 + 0,23j \\ -0,01 - 0,23j \\ -0,85 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0,07 \\ -0,14 \\ -0,31 \\ -1,5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0,11 \\ -0,32 + 0,3j \\ -0,32 - 0,3j \\ -1,3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0,11 + 0,01j \\ -0,11 - 0,01j \\ -0,27 + 0,34j \\ -0,27 - 0,34j \\ -1,24 \end{bmatrix}$$

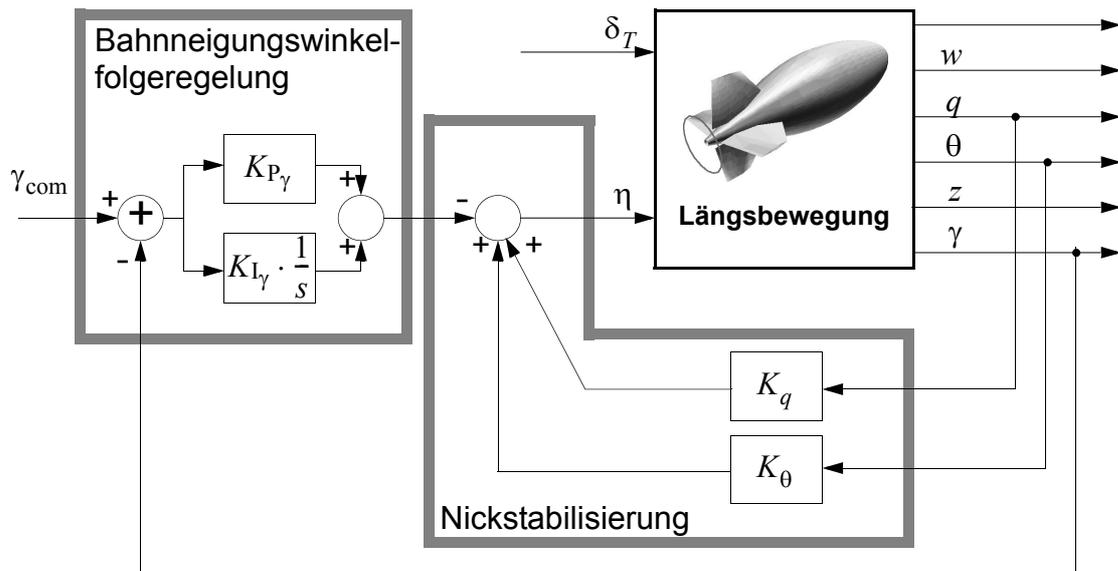


Bild 5.4: Einfache Reglerstruktur zur Stabilisierung und Regelung der Längsbewegung

Bild 5.5 zeigt links das Antwortverhalten des Luftschiffs Lotte auf einen Sprungeingang in γ_{com} von 15° . Die Pole bei -0.11 bestimmen die Schnelligkeit der Antwort, es resultiert eine Zeitkonstante von ca. 8 Sekunden. Die Antwort des geregelten Luftschiffes bei einer Fluggeschwindigkeit von 10 m/s unterscheidet sich nur marginal von der Antwort bei 8 m/s . Die Simulation bei einer tieferen Fluggeschwindigkeit von 5 m/s zeigt deutliche Unterschiede. Das Höhenruder wird um mehrere Grad stärker ausgelenkt, es ist ein stationärer Ausschlag von etwa -5° erforderlich. Um bei dieser Fluggeschwindigkeit die statische Schwere zu kompensieren, wird ein Anstellwinkel von über 7° benötigt, Lotte fliegt mit einem Nickwinkel von über 22° . Der gewünschte Bahnwinkel von 15° wird gerade noch erreicht (vgl. Bild 4.3).

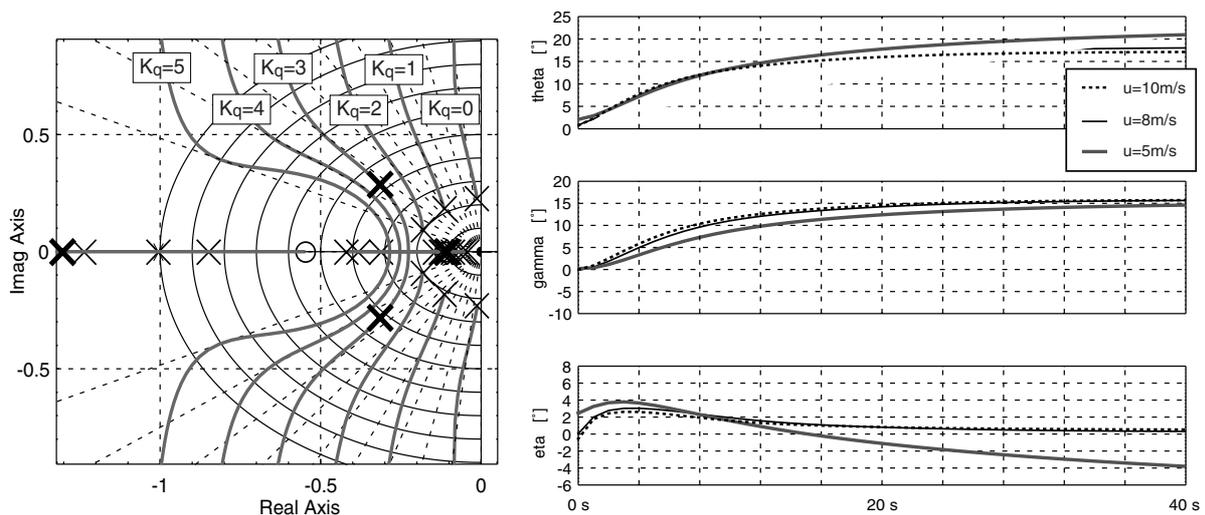


Bild 5.5: Wurzelortskurven bei Variation von K_θ für unterschiedliche K_q , (fett gesetzte Pole: Lage nach Schließen des Stabilisierungskreises)
Sprungantworten auf 15° Nickwinkelvorgabe bei unterschiedlichen Fluggeschwindigkeiten (nichtlineare Simulation)

Stabilisierung und Gierratenregelung der Seitenbewegung

Die Struktur des Reglers der Seitenbewegung nach Bild 5.6 wurde wie die Struktur des Längsreglers unter Berücksichtigung der Regelungsaufgaben und wirkungsvollen Signalarückführungen erstellt. Der Regler besteht aus einer Gierstabilisierung mittels Gierratenrückführung über einen Hochpassfilter und einem Gierratenfolgeregler mit I-Anteil. Anstelle des Gierwinkels könnte auch die Gierrate r selber zurückgeführt werden, die Summationsstelle müsste dazu vor den Integrator gestellt werden. Der Hochpassfilter dient dazu, die Gierdämpfung im stationären Kurvenflug zu unterdrücken.

Die Verstärkungsfaktoren wurden wiederum bei $u=8\text{m/s}$ bestimmt. Mittels des Gierdämpfers wurde der Pol der Schiebewinkeldivergenz auf -0.3 verschoben. Die Einführung eines I-Reglers für die Gierratenregelung fügt dem offenen Kreis einen Pol im Ursprung zu, nach dem Schließen des Kreises und der Wahl von K_ψ liegen die Pole wie unten angegeben. Die Rollschwingungspole werden erwartungsgemäß von den Ansteuerungen des Seitenruders kaum beeinflusst. Erst die Rückführung der Rollrate mit Verstärkungsfaktor $K_p = 0,68$ verschiebt die Pole bei gleichbleibender Eigenfrequenz auf eine Dämpfungszahl von $\zeta = \sqrt{2}/2$. Durch sequentielles Schließen der Regelkreise wandern die Pole wie folgt:

| Gierbewegung | | | Rollschwingung | |
|--|-----------|-----------------|---|--------------|
| Offenes System bei $u=8\text{m/s}$ | $K_r = 5$ | $K_\psi = 0,35$ | Offenes System bei $u=8\text{m/s}$ | $K_p = 0,68$ |
| $\begin{bmatrix} 0,22 \\ -0,95 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0,3 \\ -1,7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0,16 \\ -0,2 \\ -1,7 \end{bmatrix}$ | | | $\begin{bmatrix} -0,6 + 1,5j \\ -0,6 - 1,5j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1,1 + 1,2j \\ -1,1 - 1,2j \end{bmatrix}$ | |

Bild 5.7 zeigt links das Antwortverhalten des Luftschiffs Lotte auf einen Sprungeingang in r_{com} von $3^\circ/\text{s}$. Man erkennt deutlich, wie das Folgeverhalten bei Änderung der Flugeschwindigkeit kaum variiert. Natürlich fliegt das Luftschiff bei unterschiedlichen Flugeschwindigkeiten verschiedene Kurvenradien (Kurvenradius $R = V/r$), und entsprechend variieren die stationären Schiebewinkel und erforderlichen Seitenruderausschläge (vgl. "Flugeigenschaften im stationären Kurvenflug" auf Seite 110). Das Antwortverhalten ändert sich jedoch kaum.

5.4 Geregelter und unregelter Flug durch Windfeld

In Kapitel 4 wurde das Flugverhalten des Luftschiffs Lotte in windstiller Atmosphäre simuliert. Hier wird nun der Flug durch ein 1-Cos Scherwindfeld mit Hilfe nichtlinearer Simulationen untersucht. Ausgehend vom geregelten stationären Horizontalflug mit einer Geschwindigkeit von 8m/s fliegt das Luftschiff Lotte aus ruhiger Atmosphäre in eine stehende Seiten- oder Vertikalwindstörung mit Wellenlänge λ von jeweils zweifacher und vierfacher Schiffslänge ein. Die in Kapitel 5.3.2 vorgestellten Regelsysteme stabilisieren dabei jeweils die Flugbahn. Als Vergleich zu den geregelten Flugbahnen sind sowohl in Bild 5.8 für die Vertikalböe wie auch in Bild 5.9 für die Seitenwindscherung jeweils die unregelten

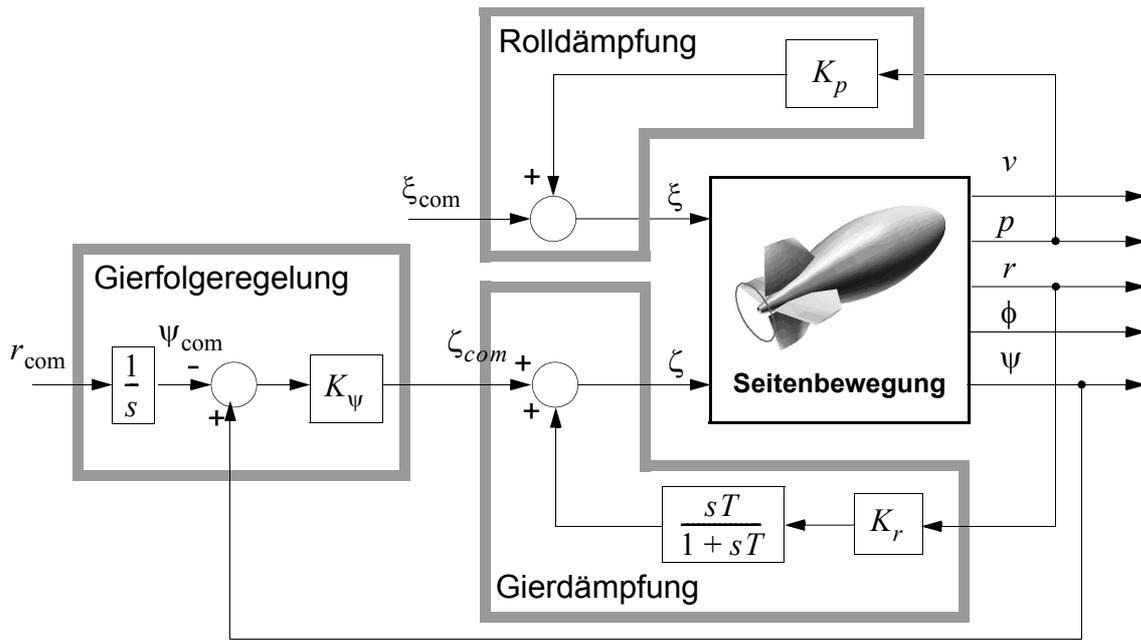


Bild 5.6: Einfache Reglerstruktur zur Stabilisierung und Regelung der Seitenbewegung

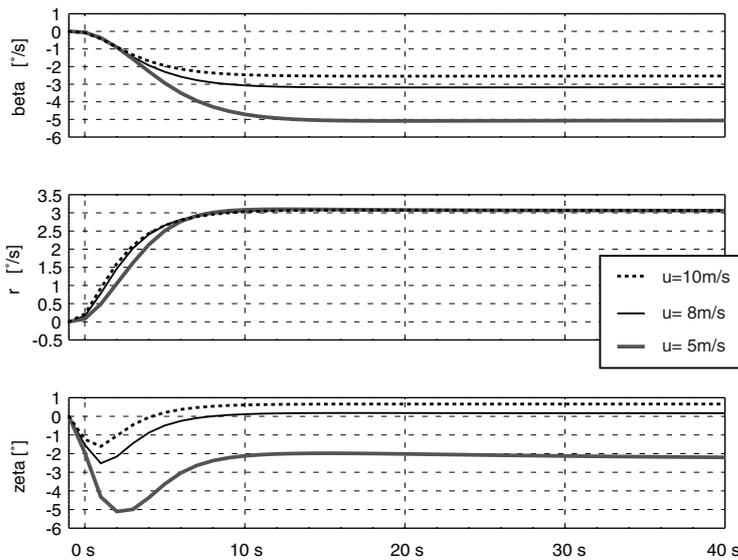


Bild 5.7: Sprungantworten auf 3°/s Gierratenvorgabe bei unterschiedlichen Fluggeschwindigkeiten (nichtlineare Simulation)

Antworten des Luftschiffs dargestellt. Die dargestellten Luftschiffkonturen stellen im Abstand von 3 Sekunden Momentaufnahmen des Flugzustands dar.

Flug durch Vertikalböe mit Wellenlänge von doppelter und vierfacher Schiffslänge

Bild 5.8 zeigt die Flugbahn des Luftschiffs bei Flug durch 1-Cos Vertikalwindscherungen von doppelter und vierfacher Schiffslänge mit maximaler Abwindgeschwindigkeit von 2m/s.

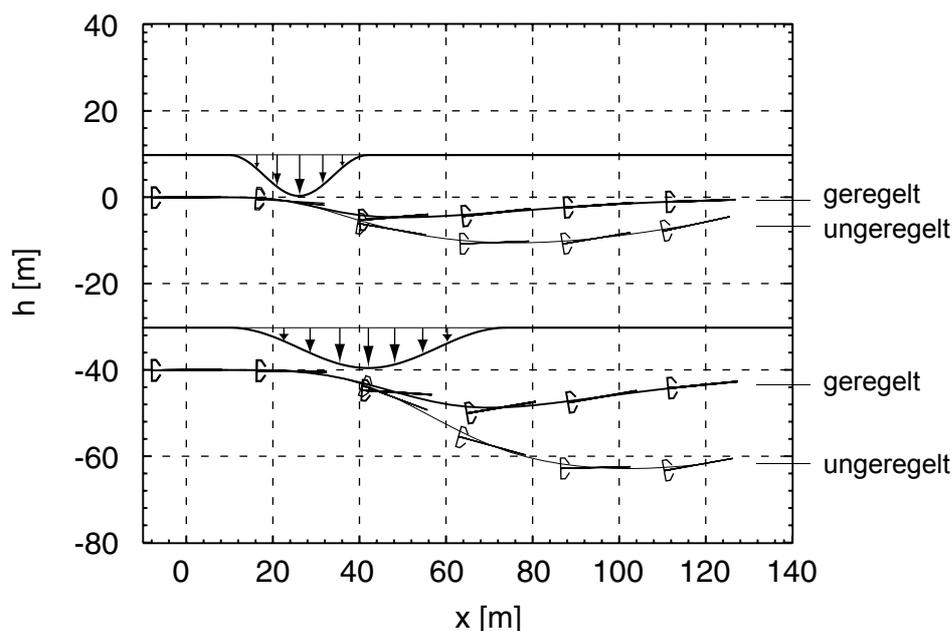


Bild 5.8: Flug durch 2m/s 1-Cos Vertikalwindscherungen unterschiedlicher Wellenlängen

Beim Einflug in die Störung befindet sich der Bug des Luftschiffs im Abwind der Böe unter negativem Anstellwinkel. Diese Anströmung, sie entspricht der in Bild 3.23 oben links, erzeugt im Luftschiffbug eine abtreibende Kraft. In deren Folge nickt das Luftschiff nach unten und geht in einen Sinkflug über. Dadurch baut sich ein negativer Nickwinkel auf, und der negative Anstellwinkel wird weiter vergrößert. In den Simulationen mit Regelung macht sich nun die Nickdämpfung und die Nickwinkel-Rückführung bemerkbar. Das Höhenruder wird ausgelenkt und ein aufnickendes Gegenmoment erzeugt. Gegenüber der unregulierten Luftschiffbewegung resultieren geringere Nickwinkel, wie an der zweiten und dritten Momentaufnahme zu erkennen ist.

Wenn das Heck des Luftschiffs den Bereich des stärksten Abwindes durchfliegt, erzeugen die mit hohem negativem Anstellwinkel angeströmten Leitwerke eine abtreibende Kraft, welche das Luftschiff gegenüber der Flugbahn aufnickt. Das Luftschiff verlässt die Störung deshalb immer mit positivem Anstellwinkel. Im geregelten Fall fliegt das Heck des Luftschiffs mit gezogenem Höhenruder durch die Abwindstörung, die aufnickende Wirkung wird verstärkt. Beide Störungen verlässt das geregelte Luftschiff nicht nur mit positivem Anstellwinkel, sondern sogar mit positivem Nick- und Bahnwinkel.

Während das unregulierte Luftschiff nach der Störung in den Grenzyklus der Längsbewegung übergeht, er ist in Abschnitt 4.5.1 auf Seite 138 diskutiert, steuert der Regler das Luftschiff wieder an den Horizontalflug heran. Da das geregelte Luftschiff die Störung im Steigflug verlässt, erreicht das Luftschiff asymptotisch beinahe wieder dieselbe Flughöhe wie vor der Störung, obwohl keine Höhenregelung aktiv ist.

Die unterschiedlichen Antworten auf Störungen der Wellenlänge $\lambda = 2L$ und $\lambda = 4L$ resultieren vorwiegend aus der Verweildauer des Luftschiffs im Störungsbereich. Das Luftschiff Lotte durchfliegt bei einer Fluggeschwindigkeit von 8m/s die kürzere Störung in 6 Sekunden, die längere Störung in 10 Sekunden (Dauer definiert durch Einflug der Nase in Störung bis Verlassen der Störung durch Heck). Die kurzweilige Böe vermag die Flugbahnsprechend nur geringer zu stören.

Flug durch Lateralböe mit Wellenlänge von doppelter und vierfacher Schiffslänge

Bild 5.9 zeigt die Flugbahn des Luftschiffs bei Flug durch 1-Cos Seitenwindscherungen mit maximaler Windgeschwindigkeit von 2m/s. Durch das Einfliegen der Schiffsnase in die Seitenwindstörung baut sich im Bugbereich ein positiver Schiebewinkel auf. Dieser Schiebewinkel erzeugt das bekannte destabilisierende Rumpfmoment (vgl. Diskussionen in 3.8.2), in dessen Folge das Luftschiff nach links wegdreht. Sobald das Seitenleitwerk den Bereich maximalen Seitenwindes erreicht hat, wird ein rückdrehendes Giermoment erzeugt. In allen Fällen verlässt das Luftschiff die Störung mit negativem Schiebewinkel.

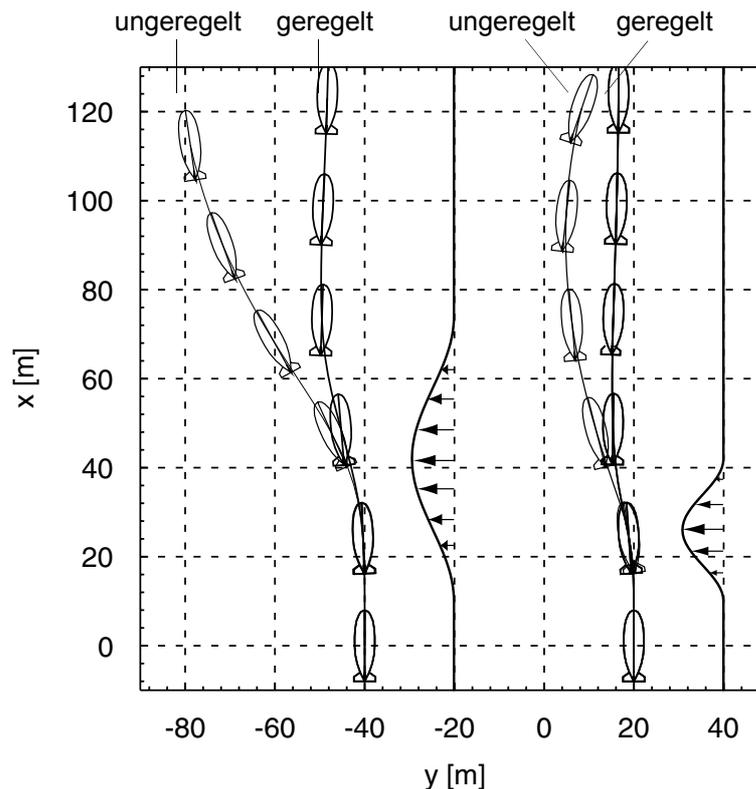


Bild 5.9: Flug durch 2m/s 1-Cos Seitenwindscherungen unterschiedlicher Wellenlängen

Wie im Fall der Vertikalböe, steuert der Gierdämpfer und der Gierwinkelregler bereits in der Anfangsphase der Störung entgegen. Der Seitenwind trifft ein Heck mit ausgeletem Seitenruder, der rückstellende Effekt wird vergrößert. Das geregelte Luftschiff verlässt die Störung mit negativem Schiebewinkel und mit einem Gierwinkel um 0° . Dies ist gegenüber den Simulationen mit Vertikalstörung eine gemäßigte Antwort, dort verließ das geregelte Luftschiff die Abwindstörung im Steigflug. Dies wird einerseits durch die Hecklastigkeit des Luftschiffs bewirkt, andererseits sind die Verstärkungsfaktoren der Raten- und Winkelrückführungen der Längs- und Seitenregelung unterschiedlich.

Nach der Störung regelt der Gierwinkelregler den Gierwinkel exakt auf Null, in ruhiger Atmosphäre stellt sich ein Geradeausflug ein. Das unregelte Luftschiff verlässt die Störung ebenfalls mit negativem Schiebewinkel. Infolgedessen geht es in eine Rechtskurve mit natürlichem Kurvenradius über (vgl. Abschnitt 4.1.2 und 4.5.1). Wieder durchfliegt das Luftschiff die Störung mit kürzerer Wellenlänge schneller und erfährt somit nur geringere Zustands- und Flugbahnabweichungen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Hauptbestandteile der vorliegenden Arbeit stellen die Entwicklung eines geschlossenen, konsistenten Aerodynamik- und Bewegungsgleichungsmodells, sowie dessen flugmechanische Auswertung dar. Das aerodynamische Modell berücksichtigt die stationäre und die beschleunigte Flugbewegung des Luftschiffs in allen sechs Freiheitsgraden sowie stationäre und instationäre Windfelder. Da es die Möglichkeit bietet, entlang der Schiffslängsachse lokale Anströmungsbedingungen zu berücksichtigen, vermag es auch inhomogene Windfelder zu erfassen. Die flugmechanische Analyse befasst sich algebraisch mit den Bedingungen für stationäre und stabile Flugzustände und mit der erreichbaren Flugleistung. Ausführlich wird das Eigenverhalten des Luftschiffs über der gesamten Flugenveloppe diskutiert.

Das vorgestellte Aerodynamikmodell stellt eine neue Kombination bekannter Ansätze, wie beispielsweise der Potentialtheorie, des Querströmungsansatzes und der Traglinientheorie, dar. Erstmals steht somit eine längsverteilte Aerodynamik in geschlossener analytischer Form zur Verfügung welche nichthomogene Windfelder, beschleunigter oder unbeschleunigter Art, und jeglich geartete Bewegungsformen des Luftschiffs korrekt berücksichtigt. Insbesondere die Modellierung der Rumpfpotentialströmung über die Abbildung der Ellipsoidlösung stellt einen neuen Entwicklungsschritt dar. Gegenüber der in dieser Modellklasse bisher angesetzten Theorie Schlanker Körper vermag der neue Ansatz Kräfte im vorderen Bugbereich und generell Kräfte im Kurvenflug besser wiederzugeben. Zudem ist jederzeit die Druckverteilung über den rotationssymmetrischen Rumpf bekannt. Er wird über eine analytische Funktion des Ortes, der Bewegung und der lokalen Windbedingung berechnet. Dies ermöglicht den Einsatz des Modells zur Berechnung lokaler Böen- und Manöverlasten. Als ergänzender Beitrag zur Modellierung wird die vollständige Behandlung der Theorie Schlanker Körper auf einen Körper in freier Bewegung und unter Windeinfluss gewertet. Diese Ausführungen sind im Anhang dieser Arbeit zu finden.

Es sollen auch Einschränkungen des Modells und dessen Geltungsbereichs erwähnt werden: Eine gute Modellqualität kann nur erreicht werden, wenn Windkanaldaten oder andere Aerodynamik-Referenzdaten zur Verfügung stehen. Basierend auf Daten stationärer Messungen vermag das Modell jedoch sämtliche Kräfteanteile, beispielsweise durch Kurvenflug, zu bestimmen. Das Modell ist auf rotationssymmetrische Rümpfe beschränkt, Anbauten wie Gondel oder Kiel müssen über diskrete Einzelkräfte oder Kraftverteilungen modelliert werden. Im Vergleich mit Windkanaldaten und numerischen Strömungssimulationen konnte gezeigt werden, dass das Modell lokale Effekte für Anströmungswinkel bis gegen 10° gut wiedergibt. Durch die Modellierung der Rumpfumströmung als Potentialströmung, werden u.a. Ablösewirbel nicht berücksichtigt (vgl. Diskussion auf Seite 29). Solche Wirbel beeinflussen die Rumpfaerodynamik bei Anstellwinkel ab rund 8° , insbesondere im Bereich der Ablöselinien. Obwohl das vorgestellte Modell die Gesamtkräfte und -momente bis Winkel von 15° gut abbildet und auch für größere Winkel an Referenzwerte angepasst werden kann, sollte die Wirkung der Wirbel und der Einfluss auf das Gesamtmodell mit Hilfe von numerischen Strömungssimulationen und Experimenten weiter untersucht werden.

Im Rahmen der Auswertung des Aerodynamikmodells wird detailliert die Wirkung von Wind und Schiffbewegung diskutiert. Dabei wird gezeigt, wie die instationären Kräfte in Anteile infolge Körperbeschleunigung und Windbeschleunigung entkoppelt werden können,

und wie Scherwinde und beschleunigungsbehaftete Windfelder unterschiedliche Kräfte bewirken. Letztere führen zusätzliche auf Verdrängungskräfte.

Bei der flugmechanischen Untersuchung werden sowohl stationäre wie auch dynamische Eigenschaften angesprochen. Im Rahmen der stationären Untersuchungen werden algebraische Bedingungen für Gleichgewichtszustände im Geradeaus- und im Kurvenflug hergeleitet. Mit Hilfe eines neuartigen Diagramms kann die charakteristische Flugleistung von Luftschiffen in der Vertikalebene dargestellt werden: Es zeigt über der Fluggeschwindigkeit die erreichbaren Bahnwinkel des Luftschiffs oder deren zulässige Schwere. Für den Kurvenflug wird ein Diagramm angegeben, in welchem labile und stabile Lagen abgelesen werden können.

Der Analyse des Eigenverhaltens im Geradeausflug wird ein beachtlicher Teil dieser Arbeit gewidmet. Mit Hilfe von Zeiger- und Eigenwertdiagrammen sowie dreidimensional dargestellter Simulationssequenzen werden die Eigenbewegungen visualisiert. Neues Wissen schafft dabei die Diskussion des Flugverhaltens bei Variation der Geschwindigkeit unter die Ruderumkehrgeschwindigkeit. Zur Vervollständigung wird auf ähnliche Weise der Einfluss von Konfigurations- und Parameteränderungen wie z.B. Verschiebung des Schwerpunkts oder Änderung der Wirkung der Leitwerke untersucht.

Abschließend werden die Erfahrungen aus der flugmechanischen Analyse genutzt, um ein einfaches Flugregelsystem zu entwerfen. Die Formulierung der Regelungsaufgaben und -ziele vor dem Hintergrund der flugmechanischen Charakteristika, stellt einen ersten wichtigen Schritt in Richtung Umsetzung von automatischen Flugreglern für Luftschiffe dar.

Das bereitgestellte Modell, es wurde unter Anwendung der Programmiersprache Ada und C in der Simulationsumgebung MATRIXx/Xmath implementiert, stellt ein gutes Werkzeug für flugmechanische Untersuchungen von Luftschiffen dar. Es kann für Untersuchungen der Stabilität und Steuerbarkeit, insbesondere aber für Studien der Empfindlichkeit gegenüber Windstörungen eingesetzt werden. Die geschlossene analytische Formulierung der Modellkomponenten ermöglicht dabei eine elegante Implementierung mit effizienter Modellauswertung und eine einfache Variation von Modellparametern.

Die hergeleiteten algebraischen Ausdrücke für aerodynamische Beiwerte, Derivativa, Pollagen und Teildynamiken ermöglichen dem Leser schnelle Aussagen über Effizienz und Stabilität "seines" Luftschiffs. Die durchgeführten numerischen Untersuchungen zur Flugleistung, der aerodynamischen Kraftverteilung und der Eigenwertbestimmung und numerische Simulationen geben dem Leser Anhaltspunkte für das bessere Verständnis der Flugmechanik von Luftschiffen.

Diese Arbeit zeigt auch einige offene Fragen und ungelöste Probleme der flugmechanischen Modellbildung und Analyse und der Flugregelung von Luftschiffen auf. Eine Auswahl wird im Folgenden angesprochen.

Die vorgestellten Modelle, insbesondere die Modellierung des Windeinfluss und die Wirkung der Rumpfablösung, müssen im Rahmen weiterer Experimente, vorzugsweise unter Einbezug von Flugversuchen, validiert werden. Dazu bedarf es der Entwicklung moderner Identifizierungstechniken für Luftschiffe oder der Adaption von Verfahren welche bei Flugzeugen eingesetzt werden.

Weiter wird in dieser Arbeit das Luftschiff als starrer Körper beschrieben. Zukünftige Arbeiten müssen sich mit der Frage der Aeroelastizität und Aeroservoelastizität, deren Auswirkung auf die Stabilität und Steuerbarkeit und mit den dadurch hervorgerufenen strukturel-

len Belastungen beschäftigen. Auch der Einfluss der Ballonets und des Traggases auf die Dynamik von Luftschiffen muss untersucht werden. Es muss geklärt werden, unter welchen Voraussetzungen innere Gase als starre Körper angenommen werden dürfen, und wie sich Konvektion, Schwappen oder Wellenbildung auswirken. Auch das aerodynamische Modell kann weiter verbessert werden. Es genügt zwar flugmechanischen Untersuchungen, für die Berechnung lokaler Lasten sollte jedoch die Modellierung der Leitwerke und des Heckbereichs weiter entwickelt werden.

Im Bereich Flugmechanik und Flugregelung können weiterführende Modellanalysen, beispielsweise mit Hilfe strukturierter Singulärwerte, genauere Aufschlüsse über die Modelleigenschaften geben. Wichtig ist hier aber insbesondere das Schaffen von Wissen über Flug- und Steuerbarkeitskriterien für Luftschiffe. Solche Kriterien, auch unter Berücksichtigung der Aeroelastizität, wären eine große Unterstützung für den Entwurf von Regelsystemen und für den flugmechanischen Entwurf von Luftschiffen überhaupt.

Abschließend soll noch ein interessantes Problem der Luftschiffahrt erwähnt werden: Eine hohe Zahl von Parametern beeinflussen die stationäre Längsbewegung von Luftschiffen. Es ist dies der Füllstand der Ballonets, die Temperatur und der Druck der unterschiedlichen Gase, die Schubkonfiguration, Menge und Verteilung des Treibstoffs und des Ballastwassers, Nick, Anstell- und Flugbahnwinkel und die Stellung der aerodynamischen Steuerflächen des Luftschiffes. Einige dieser Parameter sind nicht oder nur schwer messbar. Infolgedessen ist das statische Gleichgewicht während des Fluges nur ungefähr bekannt, was insbesondere für große Luftschiffe ein Problem darstellt. Um den Piloten jederzeit über den Systemzustand zu informieren und einen optimalen Reiseflug zu ermöglichen, sollte ein Beobachter für die statische Schwere des Luftschiffs entwickelt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Munk, M.M., "The Aerodynamic Forces on Airship Hulls", NACA TR 184, 1924.
- [2] Jones, R., "Acceleration Derivatives in the Case of a Body Moving in an Ideal Fluid", ARC R&M 748, April 1921.
- [3] Zahm, A.F., Smith, R.H., Loudon, F.A., "Air Forces, Moments and Damping on Model of Fleet Airship Shenandoa", NACA TR 215, 1925.
- [4] DeFrance, S.J., "Fight Tests on U.S.S. Los Angeles, Part I - Full Scale Pressure Distribution Investigation", NACA TR 324, 1929.
- [5] Munk, M.M., "The Drag of Zeppelin Airships", NACA TR 117, 1921.
- [6] Curtiss, H.C., Hazen, D.C., Putman, W.F., "LTA Aerodynamic Data Revisited", AIAA Paper 75-951, AIAA Lighter Than Air Technology Conference, Colorado, 1975.
- [7] Calligeros, J.M., McDavitt, P.W., "Response and Loads on Airships due to Discrete and Random Gusts", Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 72-1, February 1958.
- [8] Allen, H.J., Perkins, E.W., "A Study of Viscosity on Flow over Slender Inclined Bodies of Revolution," NACA Report 1048, 1951.
- [9] Kelly, H.R., "The Estimation of Normal-Force, Drag, and Pitching-Moment Coefficients for Blunt-Based Bodies of Revolution at Large Angles of Attack", Journal of Aeronautical Science, Vol. 21, No. 8, August 1954.
- [10] Hopkins, E.J., "A Semi-Empirical Method for Calculating the Pitching Moment of Bodies of Revolution at Low Mach Numbers", NACA RM A51C14, 1951.
- [11] Putman, W.F., Maughmer, M., Curtiss, H.C., Traybar, J.J., "Aerodynamics and Hovering Control of LTA Vehicles", Department of Aerospace and Mechanical Sciences, Princeton University, Princeton, N.J., AMS-TR-1339, May 1977.
- [12] Jones, S.P., and DeLaurier, J.D., "Aerodynamic Estimation Techniques for Aerostats and Airships," Journal of Aircraft, Vol. 20, No. 2, pp. 120-126, 1983.
- [13] Etkin, B., and D'Eleuterio, G., "Comment on 'Aerodynamic Estimation Techniques for Aerostats and Airships'," Journal of Aircraft, Vol.22, No.11, pp. 1023, November 1985.
- [14] Jones, S.P., and DeLaurier, J.D., "Reply by Authors to B.Etkin and G. D'Eleuterio", Journal of Aircraft, Vol. 22, No. 11, pp. 1023-1024, November 1985.
- [15] Jones, S.P., "Nonlinear Dynamic Simulation of a moored Aerostat", AIAA Paper 87-2505. AIAA Lighter-Than-Air Technology Conference, Monterey, CA, 1987.
- [16] Badesha, S., and Jones, S.P., "Aerodynamics of the TCOM 71M Aerostat," AIAA Paper 93-4036-CP, 1993.

- [17] Jones, S.P., "Aerodynamics of a New Aerostat Design with Inverted-Y Fins," AIAA Paper 85-0867, 1985.
- [18] Gertler, M., Hagen, G.R., "Standard Equations of Motion for Submarine Simulation", NSRDC-Report SR 009 01 01, Task 0102, June 1967.
- [19] Pretty, J.R., Hookway, R.O., "A Comparison of Different Forms of Dirigible Equations of Motion", AIAA Paper 77-1179, 1977.
- [20] DeLaurier, J., and Schenck, D., "Airship Dynamic Stability," AIAA Paper 79-1591, 1979.
- [21] Naghabushan B.L., Tomlinson, N.P., "Flight Dynamics Simulation of a Heavy Lift Airship", AIAA Paper 79-1593R, 1979.
- [22] Ringland, R.F., Tischler, M.B., Jex, H.R., Emmen, R.D., Ashkenas, I.L., "Flight Dynamics Analysis and Simulation of Heavy Lift Airships," NASA Contractor Report 166471, December, 1982.
- [23] Jex, H.R., Hogue, J.R., Gelhausen, P., "Control Response Measurements of the SKY-SHIP-500 Airship," AIAA Paper 85-0881, 1985.
- [24] Gomes, S.B.V., "An Investigation of the Flight Dynamics of Airships with Application to the YEZ-2A", PhD Thesis, Cranfield Institute of Technology, College of Aeronautics, Cranfield, 1990.
- [25] Kämpf, B., "Potentialströmung um Rotationsellipsoide", IFR TR-98-001, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Juni 1998.
- [26] Lamb, Sir Horace, "Hydrodynamics," sixth Edition, Dover Publications, New York, 1932.
- [27] Kämpf, B., "Kräfte auf Rotationsellipsoide in instationärer Potentialströmung, beschrieben in Abhängigkeit flugmechanischer Bewegungskomponenten", IFR TR-98-002, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Mai 1998.
- [28] Kämpf, B., "Kräfte auf Rotationsellipsoide in stationärer Potentialströmung, beschrieben in Abhängigkeit flugmechanischer Bewegungskomponenten", IFR TR-00-001, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Juli 2000.
- [29] Lutz, Th., Schmidt, E., Wagner, S., "Berechnung der Umströmung von Luftschiffkörpern", 2. DGLR Luftschiffkolloquium, Lübbenau Spreewald, Mai 1994.
- [30] Lutz, Th., Funk, P., Jakobi, A., Wagner S., "Aerodynamic Investigations on Inclined Airship Bodies", Proceedings of the International Airship Convention, Bedford, June 26-28, 1998.
- [31] Lutz, Th, Persönliche Gespräche und Austausch von Berechnungsergebnissen, IAG, Universität Stuttgart, Herbst 1998.
- [32] Lutz, Th, "Grenzschichtberechnungen für den Rumpf des CargoLifter", IAG, Universität Stuttgart, 1998.
- [33] Schlichting, H., Truckenbrodt, E., "Aerodynamik des Flugzeuges", Band 2, Springer Verlag, Berlin, 1960.

- [34] Etkin, B., "Dynamics of Flight, Stability and Control", Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [35] Bohlmann, H.J., "Berechnung hydrodynamischer Koeffizienten von Ubooten zur Vorhersage des Bewegungsverhaltens", Institut für Schiffbau, Universität Hamburg, Hamburg, Januar 1990.
- [36] Hoerner, S.F., "Fluid-Dynamic Drag", Published by Author, New Jersey, 1965.
- [37] Todd, F.H., "Resistance and Propulsion, Principles of Naval Architecture", chapter VII, John P. Comstock Edition, New York, 1967.
- [38] Mises v., Richard, "Theory of Flight", Dover Publications, New York, 1959.
- [39] DeLaurier, J.D., "Refinements and Experimental Comparison of a Stability Analysis for Aerodynamically-shaped Tethered Ballons", AIAA paper 75-943, July 1975.
- [40] Thomasson, P.G., "Motion of a rigid body in an unsteady non-uniform heavy fluid, an extension", Report No. 9610, College of Aeronautics, Cranfield University, Cranfield, June 1996.
- [41] Hafer, X., "Untersuchung zur Aerodynamik der Flügel-Rumpf-Anordnungen", Jahrbuch 1957 der WGL, 1957.
- [42] Millikan, C., Tras. ASME Nr. 2, 1932.
- [43] Brockhaus, R., "Flugregelung", Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [44] Arendts, F.-J., "Flugzeugentwurf", Skript zur Vorlesung, Institut für Flugzeugbau, Universität Stuttgart, 1995.
- [45] Schröder, M., "Improving Performance of a Tailless Aircraft by Direct Control", Diplomarbeit, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, 1996.
- [46] Köhler, T. "Sicherheits- und Genauigkeitsprobleme multifunktionaler Trägheitssysteme für Flugregelung und Navigation", Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1992.
- [47] Bryson, A.E. Jr., "Control of Spacecraft and Aircraft", Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [48] Masefield, P., Simpson, A., "The First Overseas Voyage and the Final Flight of H.M. Airship R. 101", Proceedings of the International Airship Convention and Exhibition 1996, Bedford, England, 1996.
- [49] Jex, H.R., Magdaleno, R.E., Johnson, W. A., "LTASIM: A Desktop Nonlinear Airship Simulation", AIAA-Paper 91-1275-CP, 1991.
- [50] Kämpf, B.G., "Motion of a Rigid Body in an ...", Brief (Email) an Mr. Thomasson, Januar 1999.
- [51] Schänzer, G., "Böenmodelle für Anwendung in der Flugmechanik", Zeitschrift für Flugwiss. und Weltraumforschung, Heft 3, 1997.
- [52] Schänzer, G., "Abschätzung von stochastischen Böenlasten unter Berücksichtigung instationärer Luftkräfte", Zeitschrift für Flugwiss. und Weltraumforschung, Heft 3, 1985.

- [53] Küssner, H.G., "Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung der Partialbewegung der Flüssigkeit", Luftfahrtforschung Bd. 17 Lfg 11/12, S. 355-361, 1940.
- [54] Swolinsky, M., "Beiträge zur Modellierung von Scherwind für Gefährdungsuntersuchungen", Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1986.
- [55] ESDU, "Characteristic of atmospheric turbulence near the ground. Part II: single point data for strong winds (neutral atmosphere).", ESDU Data Item No. 85020, ESDU International, London, 1993.
- [56] "Atmospheric Turbulence and its Relation to Aircraft", Proceedings of a Symposium held at the Royal Aircraft Establishment, Farnborough on 16th November 1961, Ministry of Aviation, London, 1963.
- [57] Geering, H.P., "Meß- und Regelungstechnik," Springer-Verlag Berlin, 2. Auflage, 1990.
- [58] Föllinger, O., "Regelungstechnik", Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 6. Auflage, 1990.
- [59] Nagabhushan, B.L. and Pasha, R.K., "Analysis of Airship Lateral Maneuverability", AIAA Paper 91-1274-CP, 1991.
- [60] Gomes, S.B.V., and Speirits, D.J., "Airship Response to Turbulence: Results from a Flight Dynamics Simulation Combined with a Wind Tunnel Investigation", AIAA Paper 91-1276-CP, 1991.
- [61] Schwer, A.G., "Flugmechanische Simulation von Flugkörpern grosser Trägheit und Entwicklung eines Lageregelungssystems", Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, November 1992.
- [62] Kämpf, B.G., Schwer, A.G., "Attitude Control of a Solar Airship," Proc. of the International Airship Conference, Institut für Static und Dynamic der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, Germany, June, 1993.
- [63] Wimmer, D., "Flugmechanische Modellierung und Simulation eines Schwerlastluftschiffes in verschiedenen Windfeldern", Diplomarbeit, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Januar 1997.
- [64] Wimmer, D., Kämpf, B., "Flugverhalten des CargoLifters CL160, Ungeregelter, gefesselter Flug in stationärem Wind", IFR TR97-CL01, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Mai 1997.
- [65] Kämpf, B., "Simulation des CargoLifters CL160, Ungeregelter, gefesselter Flug in diskreten Windstörungen", IFR TR97-CL02, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Juli 1997.
- [66] Kämpf, B.G., Well, K.H., "Attitude Control System for a Remotely-Controlled Airship", Proc. of the 11th AIAA Lighter-Than-Air Systems Technology Conference, Clearwater, FL, May 15-18, 1995.
- [67] Kämpf, B.G., Well, K.H., "Dynamics and Control of a Small Airship," Proc. of the 2. International Airship Conference Stuttgart, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, Friedrichshafen, June 1996.

- [68] Böespflug, F., "Lenkung und Regelung eines Luftschiffes entlang einer Folge räumlicher Bahnsegmente", Diplomarbeit, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Januar 1997.
- [69] Gladen, H., "Flugregelung eines Luftschiffs mit Hilfe von RealSim", Studienarbeit, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, 1997
- [70] Kämpf, B., "Regelung des CargoLifters CL160, Erste Untersuchungen zur Positionregelung im Schwebeflug", IFR TR97-CL04, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Dezember 1997.
- [71] Tan, S.B., Nagabhushan, B.L., "Robust Heading-Hold Autopilot for an Advanced Airship", Paper AIAA-97-1488, Proc. of the 12th AIAA Lighter-Than-Air Systems Technology Conference, 1997.
- [72] Lindgren, A.G., and Bessacini, A.F., "Dynamics and Control of Submerged Vehicles," ISA Transactions, Vol.6, No.4,1967, pp.335-345.
- [73] Kröplin, B., and Schäfer, I., "Experience by design of the solar powered airships Lotte 1 - 3," Proc. of the 11th AIAA Lighter-Than-Air Systems Technology Conference, May 1995.
- [74] Kindler, J., T., "Lineare Identifizierung der Längsbewegung eines Luftschiffs", Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Oktober 1998.
- [75] Hanel, M., Kämpf, B., "Robuste Regelung", Skript zur Vorlesung, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, 1998.
- [76] Maciejowski, J.M., "Multivariable Feedback Design", Addison-Wesley, 1989.
- [77] DIN 9300, "Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik", Oktober 1990.
- [78] American National Standards Institute, "Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems", American National Standard, ANSI/AIAA R-004-1992, Feb. 1992.
- [79] LBA, "LFLS", Achte Durchführungsverordnung zur Bauordnung für Luftfahrtgerät: AIRWORTHINESS REQUIREMENTS FOR NORMAL AND COMMUTER CATEGORY AIRSHIPS, (8.DV LuftBauO-LFLS), Luftfahrt Bundesamt, Deutschland. 1998.

A Modellparameter des Luftschiffs Lotte

Die meisten numerischen Untersuchungen wurden mit dem Modelldatensatz des Luftschiffs Lotte durchgeführt. In diesem Anhang sind die notwendigen Modellparameter von Lotte aufgelistet.

A.1 Geometrie- und Masseparameter

| | |
|--------------------------|-----------------------|
| Referenzlänge l_R | 16.0 m |
| Volumen | |
| Hülle V | 107.42 m ³ |
| Verdrängungskörper V_B | 110.30 m ³ |

Rumpfkonturfunktion

$$r(\xi) = l_R \sqrt{a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 + a_7 \xi^7}$$

mit $a_1 = 0.047$, $a_2 = 0.16152$, $a_3 = -1.35462$, $a_4 = 4.3478$,
 $a_5 = -7.4324$, $a_6 = 6.16165$, $a_7 = -1.931146$,
 und $\xi = (x_n - x)/l_R$

Referenzzentrum CR liegt auf Symmetrieachse des Rotationskörpers

$$\text{Distanz } CR \text{ zu Schiffnase } \hat{=} x_n = 6.93 \text{ m}$$

Ortsvektoren:

$$r_{CRCG} = \begin{bmatrix} -0,24m \\ 0m \\ 0,455m \end{bmatrix}, r_{CRCB} = \begin{bmatrix} -0,18m \\ 0m \\ 0m \end{bmatrix}, r_{CRCT} = \begin{bmatrix} -8,57m \\ 0m \\ 0m \end{bmatrix}$$

Masse m und Trägheitstensor I_{CG} (ISA, Flughöhe 200 m)

$$m = 136.8 \text{ kg}$$

$$I_{CG} = \begin{bmatrix} 213,96 & 1,58 & -88 \\ 1,58 & 3310 & -0,032 \\ -88 & -0,032 & 3211 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2$$

A.2 Aerodynamikparameter

| | |
|---|---|
| Munkfaktoren | $k_1 = 0,08, k_2 = k_3 = 0,86, k' = 0,62, K_3 = 0,69$ und $K_1 = k_1 + 1, K_2 = k_2 + 1$ |
| Trägheitsmoment des Verdrängungskörpers | $I_{yy}/\rho_{\text{Luft}} = I_{zz}/\rho_{\text{Luft}} = 1046,7m^5$ |
| Integrationsgrenzen Rumpf | $x_n = 6,93m, x_h = -5,07m, x_l = -8,57m$ |
| Rumpfwiderstandsbeiwerte | $c_{d_0, h} = 0,028, c_{d_e, h} = 0,27$ |
| Wechselwirkungsfaktoren Rumpf und Leitwerke | $\eta_k = 0,98, \eta_f = 0,29$ |
| Referenzfläche Leitwerke | $S_f = 9,267m^2$ (Sichtbare Fläche Einzel-Lw.: $2,85m^2$) |
| Kraftangriffspunkte Leitwerk | $x_{f_a} = -5,71m, x_{f_c} = -6,35m$ |
| Beiwerte Leitwerke | $c_{l_{a_0, f}} = 2,68, c_{d_{0, f}} = 0,02, c_{d_{e, f}} = 4,4$ |
| Querströmungswiderstandsfaktoren Leitwerke und Heck | $\eta_{f_e, f} = 0,6, \eta_{f_e, h} = 0,4$ |
| Spannweite Leitwerke | $b = 4,4m$ |
| Rolldämpfungswirkungsgrad | $\eta_{L_p} = 0,4$ |

Die Wirkungsgrade der aerodynamischen Steuerflächen $\eta_\zeta(\zeta), \eta_\eta(\eta)$ und $\eta_\xi(\xi)$ sind in Abhängigkeit des jeweiligen Ruderausschlags modelliert. Dieser Wirkungsgrad kann aus Tabellen (Schlichting, Etkin) entnommen werden. Er wird hier durch die Funktion

$$\eta_\eta(\eta) = 0,7 \left(\ln \left(\left(\frac{100000}{100000 + 10^{30}\eta} \right) / 50 \right) + 1 \right)$$

approximiert, deren Graph in Bild A.1 links dargestellt ist. Bild A.1 zeigt rechts den unter Ruderausschlag resultierenden Normalkraftbeiwerteverlauf $c_{z, f} = Z^A_f / ((\rho/2)V^2 S_f)$ des Leitwerks (mit Z^A_f nach Gleichung (3.54)).

Zur Erhöhung der Modellqualität bei höheren Anstellwinkel (Approximation von Ablösungseffekten) werden für den Beiwert $c_{l_{a_0, f}}$, er modelliert den zirkulationsbehafteten Auftrieb der Leitwerke, Wichtungsfunktion entsprechend des Graphen in Bild A.2 eingesetzt (vgl. Bild 3.16). Zur Reduktion des für größere Anstellwinkel überhöhten Querwiderstandsbeiwerts wird $c_{d_{e, f}}$ mit der Wichtungsfunktion nach Bild A.3 multipliziert.

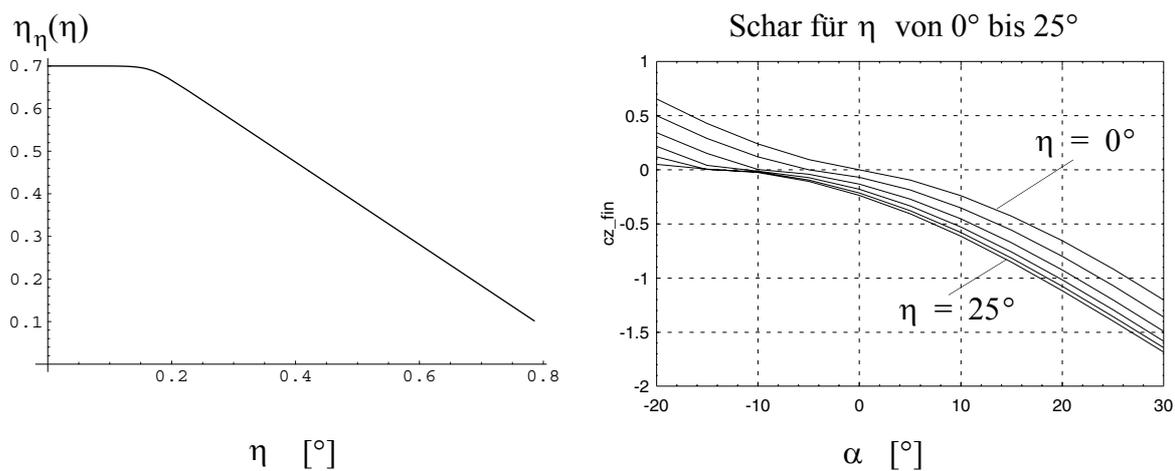
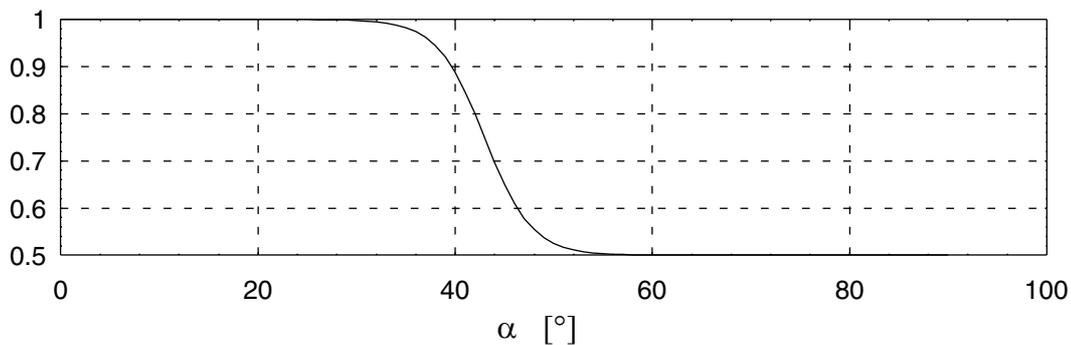
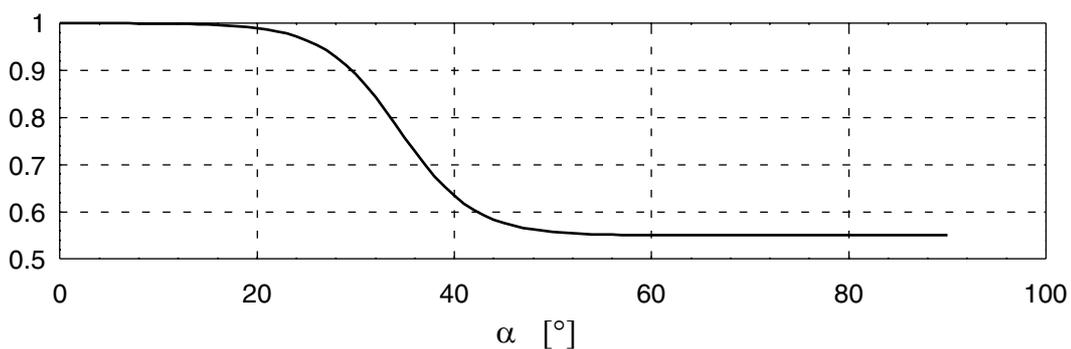


Bild A.1: Ruderwirkungsgrad

Beiwert der Leitwerksnormalkraft

Bild A.2: Wichtungsfunktion für $c_{l_{a_0,f}}$ zur Abbildung von StalleffektenBild A.3: Wichtungsfunktion für $c_{d_{c,f}}$ zur Korrektur des Querwiderstands bei grossen α .

B Aerodynamische Rumpfkkräfte nach der Methode der virtuellen Massen und nach der Theorie Schlanker Körper

Durch die Betrachtung der Änderung des Impulses oder der kinetischen Energie eines Fluids um einen bewegten Körper können die potentialtheoretischen Wechselwirkungskräfte zwischen Fluid und Körper einfach beschrieben werden. In diesem Anhang werden diese Methoden zusammenfassend vorgestellt und diskutiert.

B.1 Integrale Rumpfkkräfte und der Tensor der virtuellen Massen

Kinetische Energie des Fluids

Interessiert man sich für die integralen Kräfte zwischen Fluid und Körper, reicht die Betrachtung der Gesamtenergie oder des Gesamtimpulses des Fluids zur Bestimmung der Kräfte zwischen Fluid und Körper aus. Falls das Fluid im Unendlichen in Ruhe und zirkulationsfrei ist, lässt sich die Energie mit Hilfe des Tensors der virtuellen Massen einfach angeben. Nach Lamb ([26]) beträgt die kinetische Energie T des umgebenden Fluids bei Bewegung eines Körpers mit den Translationsgeschwindigkeiten u, v, w und den Drehraten p, q, r in Tensor-schreibweise

$$2T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A & C & B' & F & F' & F'' \\ C' & B & A' & G & G' & G'' \\ B'' & A'' & C'' & H & H' & H'' \\ F'' & G'' & H'' & P & R' & Q' \\ F' & G' & H' & R' & Q & P' \\ F'' & G'' & H'' & Q' & P' & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Dabei sind die Bewegungsgrößen in körperfesten Koordinatenachsen angegeben. Die Bewegungsgrößen erscheinen in (B.1) in quadratischer Form, die Elemente des Tensors haben somit den Charakter einer Masse. Die 21 unterschiedlichen Elemente hängen von der Druckverteilung auf der Oberfläche des Körpers ab und sind somit indirekt eine Funktion von dessen Geometrie. Lamb zeigt die analytische Berechnung der Massentensoren aus den Strömungspotentialen, eine numerische Methode zur Berechnung der Terme wird in [29] angegeben.

Weist der Körper Symmetrien auf, vereinfacht sich der Tensor in (B.1) stark, die unterschiedlichen Fälle werden von Lamb ausführlich diskutiert. Hier wird nur der besonders einfache Fall des rotationssymmetrischen Ellipsoiden vorgestellt: Infolge der drei zueinander

normalen Symmetrieachsen verschwinden alle außerdiagonalen Elemente des Tensors der virtuellen Massen, infolge der Rotationssymmetrie gilt zudem $P = 0$, $B = C$ und $Q = R$. Somit lautet die kinetische Energie des rotationssymmetrischen Ellipsoiden

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Q(q^2 + r^2). \quad (\text{B.2})$$

Die virtuellen Massenterme A , B und Q können mit Hilfe der Munkfaktoren k_1 , k_2 und k' einfach angegeben werden:

$$\begin{aligned} A &= \rho V k_1 \\ B &= \rho V k_2, \\ Q &= \rho I_{yy} k' \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

mit Volumen $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ und Trägheitsmoment $I_{yy} = V \cdot \frac{a^2 + b^2}{5}$,

a stellt die halbe Länge der Hauptachsen in Längs-, b die halbe Länge derer in Querrichtung dar. Die Munkfaktoren sind nur vom Streckungsverhältnis a/b des Ellipsoiden abhängig. Die analytischen Funktionen zur Berechnung der Munkfaktoren sind in Lamb oder in [25] angegeben, ihr Verlauf ist in Bild B.1 ersichtlich.

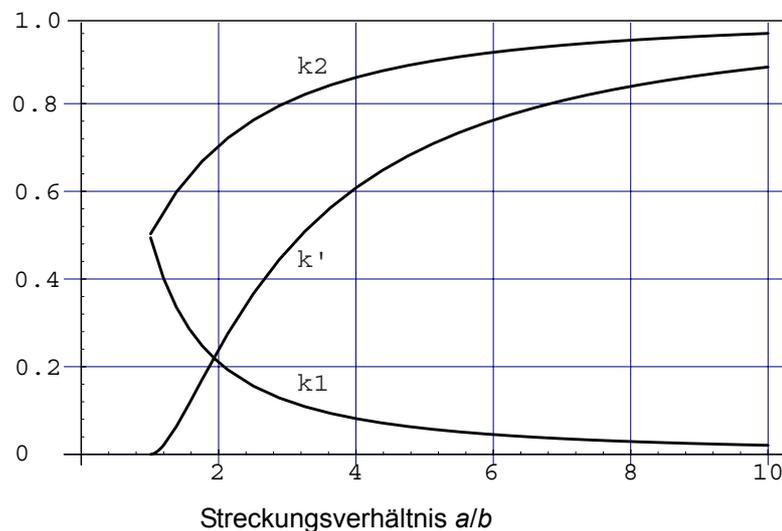


Bild B.1: Munkfaktoren für Rotationsellipsoide

Impuls und Drall

Die Kräfte lassen sich entweder direkt aus der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie berechnen (vgl. [25], [26]) oder man führt eine Impulsbetrachtung durch.

Nach Gleichung (B.2) tragen alle Bewegungszustände entkoppelt zur kinetischen Energie bei. Dadurch sind die verallgemeinerten Impulse in Richtung der Impulskordinaten u , v , w , q und r ebenfalls entkoppelt, man kann die Fluidimpulse direkt angeben: Der Impuls J und der Drall D des Fluids (!) betragen

$$J = \rho V \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$D = \rho I_{yy} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k' & 0 \\ 0 & 0 & k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Wichtig ist dabei die Darstellung der *Massenmatrix* als Tensor: Infolge der betragslichen Unterschiede der virtuellen Massen der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen liegt der Gesamtimpuls des Fluids **nicht** parallel der Bewegungsrichtung! Die Komponente normal zur Bewegungsrichtung erzeugt bei Schrägverschiebung des Körpers ein Impulsmoment, bei linearer Schrägbewegung ein Moment [33].

Resultierende integrale Rumpfkkräfte und -momente

Die Fluidkräfte und -momente auf den Körper berechnen sich aus der zeitlichen Änderung des Fluidimpulses. Die Kräfte wirken auf den Körper wie eine Trägheitskraft, nämlich entgegen der Impulsänderung. Sie berechnen sich aus Impuls und Drall wie folgt:

$$\begin{aligned} F^A &= -\dot{J} - \Omega \times J \\ Q^A &= -\dot{D} - \Omega \times D - \vec{V} \times J \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

dabei müssen einerseits die Eulerterme wegen Ableitung in nicht-inertialen Achsen, andererseits das oben erwähnte Impulsmoment $\vec{r} \times J$, welches bei zeitlicher Ableitung auf das Munkmoment $\vec{V} \times J$ führt, berücksichtigt werden. Die Kräfte nach Gleichung (B.6) beschreiben die gesamte aerodynamische Kraft zwischen Körper und Fluid infolge stationärer und instationärer Körperbewegung. Ausgeschrieben lauten die Beziehungen

$$F^A = -\rho V \begin{bmatrix} k_1 \dot{u} + k_2(wq - vr) \\ k_2 \dot{v} + k_1 ru - k_2 pw \\ k_2 \dot{w} + k_2 vp - k_1 uq \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

$$Q^A = -\rho I_{yy} k' \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} - pr \\ \dot{r} + pq \end{bmatrix} - \rho V \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 - k_2)uw \\ (k_2 - k_1)uv \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von Gleichung (B.7) erkennt man die Wirkung der virtuellen Massen als gerichtete Trägheit, und nicht als skalare, richtungslose Massenträgheit. Dazu folgendes Gedankenexperiment: Der Körper fliege unbeschleunigt entlang einer geraden Bahn mit konstanter Bahngeschwindigkeit V_K und konstanter Nickrate q . Zu jedem Zeitpunkt gilt zwischen den körperfesten Komponenten der Geschwindigkeit die kinematischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -wq \\ \dot{w} &= uq \end{aligned}$$

Setzt man diese Beziehungen in die aerodynamische Kraftgleichung ein, so verbleibt die Kraft

$$F^A = -\rho V \begin{bmatrix} (k_2 - k_1)wq \\ 0 \\ (k_2 - k_1)uq \end{bmatrix}.$$

Der Körper fliegt zwar unbeschleunigt, er erfährt jedoch über die virtuellen Massen eine aerodynamische Kraft. Nur falls die virtuellen Massen in alle Achsrichtungen gleich sind, wie es z.B. für die Kugel der Fall ist, verschwindet die Kraft. Setzt man die kinematischen Beziehungen in den Impulssatz des starren Körpers ein, heben sich Eulerterme und Beschleunigungsterme gegenseitig auf, der Starrkörperimpuls des Körpers ändert sich nicht. Dieses Ergebnis ist korrekt, der Körper selber fliegt ja eine unbeschleunigte Bahn.

B.2 Rumpfkkräfte nach der Theorie Schlanker Körper unter ebener Anströmung

In diesem Abschnitt werden die potentialtheoretischen Rumpfkkräfte nach der Theorie Schlanker Körper hergeleitet und mit der exakten Lösung der Potentialumströmung um einen Rotationsellipsoiden verglichen. Zur Darstellung der Methode wird der Fall der ebenen Anströmung diskutiert.

B.2.1 Theorie Schlanker Körper

Nach der Methode der virtuellen Massenterme werden die aerodynamischen Kräfte im idealen Fluid über Impuls- und Drallbetrachtungen bestimmt [26]. Für schlanke Körper kann die Umströmung in jedem Körperquerschnitt als eben angenommen werden, deshalb resultieren einfache analytische Ausdrücke zur Beschreibung der aerodynamischen Kräfte. Diese Beziehungen wurden von Munk bereits 1924 hergeleitet [1]. Sie sollen hier nach heute üblicher Notation angegeben werden.

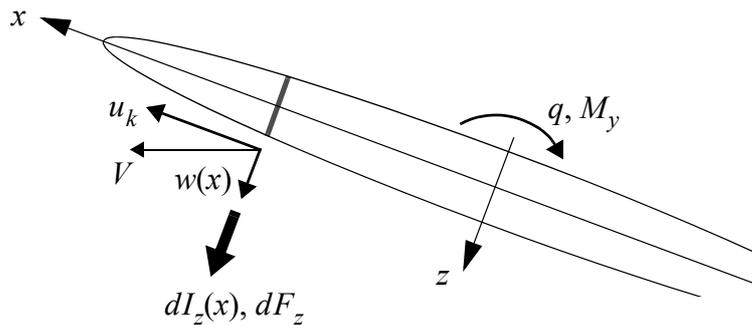


Bild B.2: Lokale Anströmung des schlanken Körpers, Impuls der ebenen Umströmung

Bild B.2 zeigt die Anströmung des Rumpfquerschnitts an der Stelle x mit axialer Geschwindigkeit u_k und lokaler Queranströmungsgeschwindigkeit $w(x)$ (Die Variable w stellt immer die Vertikalkomponente der Fluggeschwindigkeit des starren Körpers dar, die Funktion $w(x)$ deren ortsabhängige Verteilung entlang des Rumpfes). Der Impuls $dJ_z(x)$ des Fluids infolge Rumpfumströmung zeigt in Strömungsrichtung. Er kann durch die *virtuelle Masse* $F(x)$ des Querschnitts angegeben werden. Für schlanke, zylindrische Körper entspricht die virtuelle Masse der Masse des verdrängten Querschnittsvolumens, der Impuls beträgt somit

$$dJ_z(x) = \rho F(x)w(x) = \rho A(x)w(x) \cdot dx. \quad (\text{B.8})$$

Die Beschreibung des Strömungsfeldes in körperfesten Koordinaten entspricht einer Betrachtungsweise der Strömung nach Euler: Zur Berechnung der zeitlichen Impulsänderung muss die substantielle Ableitung D/Dt benutzt werden. Die Kraftverteilung und der Momentenbeitrag einer Rumpfscheibe bezüglich des Koordinatenursprungs bei $x=0$ berechnen sich nach

$$\begin{aligned} dF_z(x) &= \frac{D}{Dt}(-dJ_z(x)) \\ dM_y(x) &= -x \cdot dF_z(x) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Für den Fall des schlanken Körpers unter ebener Anströmung vereinfacht sich die substantielle Ableitung zu

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{ mit } \frac{dx}{dt} = -u. \quad (\text{B.10})$$

Desweiteren beträgt die lokale Querstromungsgeschwindigkeit $w(x)$ nach Bild B.2

$$w(x) = w - qx, \quad (\text{B.11})$$

mit den Starrkörper-Fluggeschwindigkeiten u und w und Nickgeschwindigkeit q .

Unter dieser Anströmung resultiert für den schlanken Körper die Kraftverteilung

$$\begin{aligned} dF_z(x) &= -\rho A(x) \frac{\partial}{\partial t} (w - qx) \cdot dx - u \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-\rho A(x)(w - qx)) \cdot dx \\ &= \rho \left[-\dot{w} \cdot A(x) + \dot{q} \cdot x A(x) + uw \cdot \frac{\partial}{\partial x} A(x) - uq \cdot \left(A(x) + x \frac{\partial}{\partial x} A(x) \right) \right] \cdot dx \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Dabei berechnet sich die zeitliche Ableitung des Terms qx nach der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} qx = \dot{q}x + q\dot{x} = \dot{q}x, \text{ mit } \dot{x} = 0!$$

Wie Etkin in [13] richtig bemerkt, bezeichnet x in obenstehender Gleichung eine Koordinate des starren Körpers und darf nicht mit x der konvektiven Ableitung $dx/dt = -u$ in Gleichung (B.10) verwechselt werden, wie es in [12] und [7] fälschlicherweise gemacht wird. Jones und DeLaurier erhalten zwar in der Summe die richtige Kraftverteilung und errechnen in [14] für den geschlossenen Körper die korrekten Resultate, aber nur infolge einer fehlerhaften Herleitung der Kurvenflugkrafte welche auf das Fehlen des konvektiven Terms $\rho uq \cdot A(x)$ in Gleichung (B.12) führt.

Kraft und Moment auf den geschlossenen Rumpfkörper

Durch Integration der Kräfte- und Momentenbeitrage über die gesamte Rumpflänge L werden die integrale Kraft und das Moment auf den geschlossenen Körper berechnet. Bei instationärer ebener Bewegung resultieren für Querkraft und Nickmoment

$$\begin{aligned} F_z &= -\rho \mathbf{V} \dot{w} \\ M_y &= -\rho \mathbf{I}_{yy} \dot{q} + \rho u w \mathbf{V} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

mit \mathbf{I}_{yy} als geometrisches Nick-Trägheitsmoment des Körpers.

B.2.2 Diskussion der Kräfte infolge stationären Fluges

In stationären Flugzuständen gilt $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ und somit $\dot{w} = \dot{q} = 0$. Aus (B.12) resultiert die Kraft

$$\begin{aligned} dF_z(x) &= \rho u w \cdot \frac{\partial}{\partial x} A(x) \cdot dx - \rho u q \cdot \left(A(x) + x \frac{\partial}{\partial x} A(x) \right) \cdot dx \\ &= \frac{\rho}{2} V^2 \cdot \left[\sin 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} A(x) - \frac{2q}{V} \cos \alpha \left(A(x) + x \frac{\partial}{\partial x} A(x) \right) \right] \cdot dx . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Der erste Term stellt die Kraft infolge stationären Geradeausflugs dar. Infolge des in Längsströmungsrichtung variierenden Querschnitts ändert sich der Querströmungsimpuls und bewirkt dadurch eine aerodynamische Querkraft. Der resultierende Kraftverlauf ist der bekannte Kraftverlauf nach der Theorie Schlanker Körper, wie er auch von Jones und DeLaurier angesetzt wird [14].

Der Anteil infolge Kurvenfluges ist proportional uq . Er gliedert sich je in einen Term proportional der Querschnittsfläche und der Querschnittsänderung. Der erste Term entspricht betraglich der Zentripetalkraft, er wird wieder über die erzwungene Änderung des Fluidimpulses erklärt: Im Bugbereich bewegt sich der Rumpf kurveneinwärts, im Heckbereich -auswärts. Entsprechend verläuft der Querströmungsimpuls des Fluids, es baut sich über die Rumpflänge ein Impulsgradient auf. Durch die Vorwärtsbewegung mit u führt dieser Gradient auf die lokale Querkraft. Der zweite Term kann phänomenologisch wie der Anteil infolge stationären Geradeausflugs interpretiert werden. Nur ist die Kraft nicht proportional w sondern proportional der lokal induzierten Quergeschwindigkeit xq .

Die Kräfte auf den geschlossenen Körper bei ebener Bewegung ergeben sich durch Integration der Querkräfte über die Rumpflänge L . Die integrale Querkraft und das Rumpfmoment betragen nach der Theorie Schlanker Körper

$$\begin{aligned} F_z &= 0 \\ M_y &= \rho u w V \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Der Körper erfährt also keine Kraft, aber es wirkt das durch die Kraftverteilung erzeugte, destabilisierende Munkmoment.

B.2.3 Approximation der Kraftverläufe für nicht schlanke Körper nach Munk

Vergleicht man die resultierende Gesamtkraft nach der Theorie Schlanker Körper (Gleichung (B.13)) mit den entsprechenden Komponenten der exakten Lösung für die Potentialströmung um rotationssymmetrische Ellipsoiden nach Gleichung (B.7) erkennt man fehlende Terme und unterschiedliche Koeffizienten. Nur falls $k_1 = 0$ und $k_2 = k' = 1$ entsprechen sich die Gleichungen exakt. Diese Bedingung ist jedoch nur für den schlanken Körper sehr hoher Streckung erfüllt (siehe Bild B.1).

Munk korrigiert nun die Koeffizienten in Gleichung (B.12) derart, dass die Lösung des geschlossenen Körpers mit der exakten Lösung bis auf den fehlenden Term $\rho V k_1 u q$ übereinstimmt [1],[33]. Das Fehlen dieses Terms ist eine direkte Folge der Annahme ebener Strömungsverhältnisse und kann nur im Falle der dreidimensionalen Approximation (wie sie im nächsten Kapitel vorgestellt wird) rekonstruiert werden. Munk gibt folgenden Verlauf zur Abschätzung der Kraftverteilung auf nicht schlanke Körper an:

$$dF_z(x) = \left[-\rho k_2 \dot{w} \cdot A(x) + \rho k' \dot{q} \cdot x A(x) + \right. \\ \left. \rho(k_2 - k_1) u w \cdot \frac{\partial}{\partial x} A(x) - \rho k' u q \cdot \left(A(x) + x \frac{\partial}{\partial x} A(x) \right) \right] \cdot dx \quad . \quad (\text{B.16})$$

Man bemerke dabei nochmals, dass die exakte Lösung nach Gleichung (B.7) die Lösung für den rotationssymmetrischen Ellipsoiden wiedergibt. Munks Ansatz nähert somit über die Theorie Schlanker Körper diese spezielle Lösung an.

Die Ansätze für den Querkraftverlauf im stationären Geradeausflug, wie sie von Allen/Perkins in [8] und insbesondere auch von Jones und DeLaurier in [12] benutzt werden, entsprechen genau dem Term $\rho(k_2 - k_1) u w \frac{\partial}{\partial x} A(x)$ nach Munk's Approximationsvorschlag der Theorie Schlanker Körper.

B.2.4 Vergleich der Resultate nach der Theorie Schlanker Körper mit den exakten Resultaten für Rotationsellipsoide

Die exakte Lösung der Potentialströmung um einen Rotationsellipsoiden sowie der resultierende Verlauf der Querkraft, Normalkraft und des Momentenbeitrages wurde vom Autor in [25] beschrieben und in Kapitel 3.2.1 in Funktion der Bewegungszustände formuliert. Diese Lösung soll hier mit der Lösung nach der Theorie Schlanker Körper verglichen werden.

Nach der exakten Theorie gehorcht der Querkraftverlauf bei stationärer ebener Anströmung der Gleichung

$$dF_z(x) = \rho u w \frac{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}{2} \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial x} A(x) dx \\ - \rho u q \left(A(x) + (k_1 + 1)(K_3 - 1) \cos^2 \theta A(x) + \frac{(k_1 + 1)(K_3 + 1)}{2} \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial x} A(x) x \right) dx \quad .$$

Für sehr schlanke Ellipsoide nehmen die Munkfaktoren die Werte

$$k_1 = 0 \quad \text{und} \quad k_2 = K_3 = 1$$

an. Unter Vernachlässigung des gekrümmten Bug- und Heckbereichs gilt für sehr schlanke Ellipsoide die Beziehung

$$\cos \theta = 1 \quad .$$

Mit diesen Vereinfachungen nimmt die Querkraft exakt den Verlauf

$$dF_z(x) = \rho u w \frac{\partial}{\partial x} A(x) dx$$

$$- \rho u q \left(A(x) + \frac{\partial}{\partial x} A(x) x \right) dx$$

der Lösung nach der Methode Schlanker Körper an. Dasselbe kann für den Momentenverlauf gezeigt werden. Zur Illustration dient Bild B.3. Man erkennt den Fehler der Approximation nach der Methode Schlanker Körper in der unmittelbaren Umgebung von Bug und Heck. Das untersuchte Rotationsellipsoid hatte ein Streckungsverhältnis von 20.

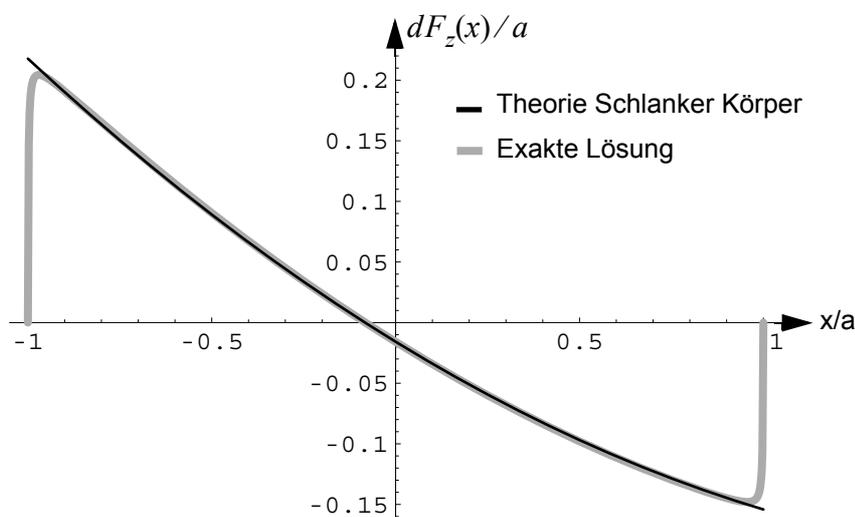


Bild B.3: Querkraftverlauf über Längsachse eines gestreckten Ellipsoiden ($a/b = 20$, Anströmung mit $w/u = 0.1$ und $aq/u = 1^\circ$ (a : Lange Halbachse, $b = c$: kurze Halbachsen)

B.3 Rumpfkraften unter räumlicher Anströmung und Approximation für nicht schlanke Körper

Die in Anhang B.2 vorgestellte Methode zur Bestimmung der Kräfteverteilung entlang eines umströmten Körpers wird hier auf einen Körper unter dreidimensionaler Anströmung angewendet. Dies wird dadurch erreicht, dass die Impuls- und Drallkomponenten der Strömung um einen Querschnitt in allen drei Achsrichtungen angegeben wird. Zusätzlich werden bereits in diesen Ansätzen die Korrekturen der reinen Schlanken Körper Theorie nach Abschnitt B.2.3 "Approximation der Kraftverläufe für nicht schlanke Körper nach Munk" berücksichtigt.

Dadurch gelingt es, alle Komponenten der aerodynamische Kraft auf einen rotationssymmetrischen Körper anzugeben. Die einzelnen Terme sind dabei nur eine Approximation der

exakten dreidimensionalen Potentialströmung, aber die Struktur der Terme wird korrekt wiedergegeben (vergleiche dazu auch Abschnitt B.2.4 “Vergleich der Resultate nach der Theorie Schlanker Körper mit den exakten Resultaten für Rotationsellipsoide” auf Seite 179).

B.3.1 Impuls und Drall einer Kreisscheibe

Die lokale Anströmung $\vec{V}(x)$ des Querschnitts an der Stelle x beträgt

$$\vec{V}(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v + rx \\ w - qx \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Zur Berechnung der Kräfte muss die Verteilung des Impulses über die Längsachse angegeben werden. Der Impuls in körperfeste Quer- und Vertikalrichtung wird dabei nach B.2.4 angesetzt. Der Querschnittsimpuls in axialer Richtung, er existiert nach der Theorie Schlanker Körper per Definition nicht, wird aus der Verteilung der scheinbaren Masse des Ellipsoiden bei Längsbeschleunigung abgeleitet. Diese Verteilung wurde über die Lösung der instationären Bernoulligleichung über das Ellipsoid bestimmt ([25], [27]), vergleiche dazu auch mit Gleichung (3.1) auf Seite 34. Der Anteil einer Rumpfscheibe am Impuls des Fluids ist

$$dJ(x) = \rho \begin{bmatrix} -k_1 \frac{\partial}{\partial x} A(x) x u \\ k_2 A(x) v + k' A(x) x r \\ k_2 A(x) w - k' A(x) x q \end{bmatrix} dx. \quad (\text{B.18})$$

Die Verteilung des Dralls einer Rumpfscheibe bezüglich ihres Mittelpunkts kann auch aus der Ellipsoidlösung abgeleitet werden, sie beträgt

$$dD_{\text{Scheibe}}(x) = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 w + k' x q \\ k_2 v + k' x r \end{bmatrix} dx \quad (\text{B.19})$$

Man erkennt, dass es nicht mehr möglich ist, diesen Impuls über einen scheinbare Massen Tensor F in Form $\rho F(x) V(x)$ anzugeben. Dies ist (vergleiche B.2.3) eine Folge der Impulskorrektur zur Abschätzung nicht schlanker Körper (Einführung der Koeffizienten k_2 und k').

B.3.2 Resultierende Kräfte und Momentenverlauf

Die Berechnung des Kräfteverlaufs erfolgt über die substantielle Ableitung des Impulses

$$dF^A(x) = \frac{D(-dJ(x))}{Dt}, \quad (\text{B.20})$$

der Beitrag einer Rumpfscheibe zum aerodynamischen Moment bezüglich des Ursprungs des körperfesten Achsensystems bei $x = 0$ berechnet sich nach

$$dQ^A(x) = \frac{D(-dD_{\text{Scheibe}}(x))}{Dt} + \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times dF^A(x). \quad (\text{B.21})$$

Auch hier sind sowohl Impuls als auch Drall nur von der Koordinate x abhängige Funktionen, die konvektive Ableitung vereinfacht sich wieder zu (vgl. Abschnitt B.2.1)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x}.$$

Bei der Bildung der zeitlichen Ableitung in körperfesten Koordinaten muss der kinematische Eulerterm $\Omega \times dJ$ und $\Omega \times dQ$ infolge Achsendrehung berücksichtigt werden. Dieser Term war bei der Untersuchung des ebenen Falles in Kapitel B.2 identisch Null und tritt deshalb hier erstmals in Erscheinung. Für die Kraftverteilung ergibt sich somit (mit der vereinfachten Schreibweise $A = A(x)$)

$$dF^A(x) = -\rho \begin{bmatrix} -k_1 \frac{\partial A}{\partial x} x \dot{u} \\ k_2 A \dot{v} + k' A x \dot{r} \\ k_2 A \dot{w} - k' A x \dot{q} \end{bmatrix} dx - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times dJ(x) + \rho \begin{bmatrix} -k_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} x u^2 - k_1 \frac{\partial A}{\partial x} u^2 \\ k_2 \frac{\partial A}{\partial x} u v + k' \frac{\partial A}{\partial x} x u r + k' A u r \\ k_2 \frac{\partial A}{\partial x} u w - k' \frac{\partial A}{\partial x} x u q - k' A u q \end{bmatrix} dx, \quad (\text{B.22})$$

und das Eigenmoment einer Scheibe (erster Term aus Gleichung (B.21)) beträgt

$$dQ^A_{\text{Scheibe}}(x) = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \dot{w} + k' x \dot{q} \\ k_2 \dot{v} + k' x \dot{r} \end{bmatrix} dx - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times dD_{\text{Scheibe}}(x) + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} A(x) r(x)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ k' u q \\ k' u r \end{bmatrix} dx. \quad (\text{B.23})$$

Gleichungen (B.22) und (B.23) approximieren die gesamten aerodynamischen Kräfte auf einen rotationssymmetrischen Körper infolge Bewegung in 6 Freiheitsgraden. Dabei wird das Fluid als ideal, homogen und ruhend angenommen, Zirkulationseffekte sind nicht berücksichtigt.

Die Approximationen liefern gute Übereinstimmungen mit den exakten Berechnungen. In Bereichen schwacher Konturkrümmung wird sogar der Verlauf der Axialkraft $dF_x(x)$ qualitativ korrekt approximiert. In Bereichen starker Konturkrümmung (typischerweise vorderer Bugbereich) vermögen die auf einer eindimensionalen Theorie beruhenden Gleichungen die exakten Kräfte erwartungsgemäß nicht wiederzugeben.

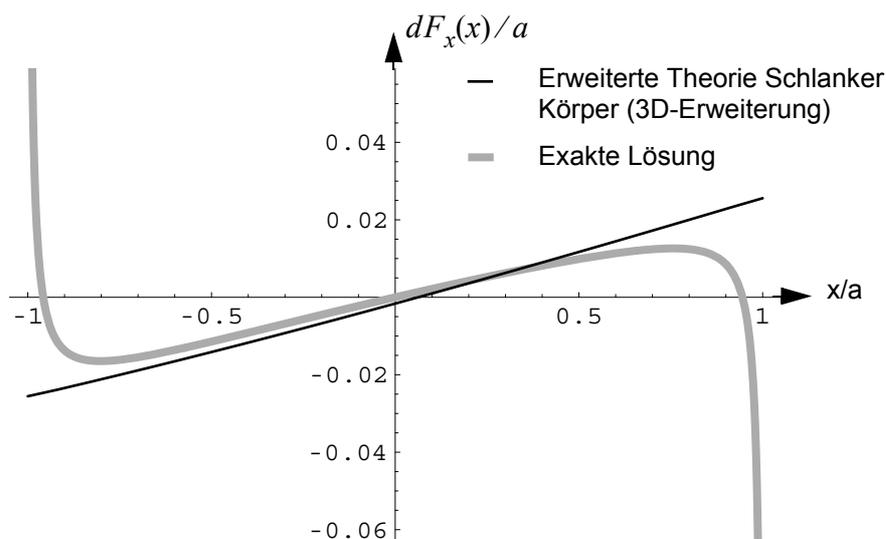


Bild B.4: Verlauf der Axialkraft über einen gestreckten Ellipsoiden ($a/b = 20$), Anströmung mit $w/u = 0.1$ und $aq/u = 1^\circ$ (a : Lange Halbachse, $b = c$: kurze Halbachsen)

B.4 Rumpfkkräfte unter Wind nach der Theorie Schlanker Körper

In diesem Anhang werden die aerodynamischen Rumpfkkräfte nach der Theorie Schlanker Körper unter Windeinfluss diskutiert. Die Anströmung auf den Körper ist nun nicht mehr rein von dessen Bewegungszustand abhängig, sondern wird durch die Windgeschwindigkeit beeinflusst. Zusätzlich wird auch instationärer Wind berücksichtigt, er führt auf zusätzliche scheinbare Masse Effekte.

Es kann gezeigt werden, dass die Aerodynamik in Kräfte infolge *stationärer Relativanströmung*, infolge *Körperbeschleunigung* und in Kräfte infolge *instationärer Windstörungen* eingeteilt und dass die Kräfte auch getrennt berechnet werden können. Die hergeleiteten Beziehungen dienen desweiteren dem besseren Verständnis der potentialtheoretischen Strömungseigenschaften eines bewegten Körpers in nicht ruhendem Fluid.

B.4.1 Einleitung und Definitionen

In Anhang B.2 (und B.3) wurden die Rumpfkkräfte nach der Theorie Schlanker Körper ohne Windeinfluss hergeleitet. Durch Berücksichtigung der Windgeschwindigkeit in der Anströmung kann die Windwirkung untersucht werden. Ein (rotationsfreies) Windfeld ist durch die Funktion $V_W(x, t)$ örtlich und zeitlich beschrieben. Die Flugwindgeschwindigkeit (aerodynamische Anströmungsgeschwindigkeit) beträgt nun

$$V_A(x) = V_K(x) - V_W(x) \text{ (vgl. Gleichung (3.14)).}$$

Die Impulsfunktion der Kreisscheibe bei x in Abhängigkeit von V_A lautet (vgl. (B.8)) nun

$$dJ(x) = \rho \cdot F(x) \cdot V_A(x) = \rho \cdot F(x) \cdot \begin{bmatrix} u_A(x) \\ v_A(x) \\ w_A(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Die virtuellen Massen der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen werden dabei zu dem Tensor F zusammengefasst.

Ist die Windströmung beschleunigt, so herrscht in der Luft ein Druckgradient welcher eine *aerostatische Verdrängungskraft* bewirkt. Man könnte nun versucht sein, diese Kraft ebenfalls über eine Betrachtung des Impulses $\rho A(x) V_W(x)$ zu ermitteln. Diese Kraft ist aber in ihrer Art eine *aerostatische* Kraft, sie resultiert aus der Verteilung des statischen Druckes im Fluid über der Körperoberfläche. Impulsbetrachtungen können jedoch nur Kräfte infolge Änderung der Umströmungsschnelligkeit liefern. Die aerostatische Verdrängungskraft infolge Windbeschleunigung wird hier deshalb getrennt betrachtet: Die folgenden Untersuchungen beschränken sich auf die Effekte infolge Umströmung und Änderung der Umströmung des Körpers.

Um aus dem Fluidimpuls nach Gleichung (B.24) die auf den Körper wirkende Kraft $dFA(x)$ berechnen zu können, muss die substantielle Ableitung des Impulses gebildet werden. Im Gegensatz zu den Rechnungen in Anhang B.2 ist die Anströmung unter Wind eine im Raum definierte Vektorfunktion, sie ist nicht mehr nur in Abhängigkeit der x -Koordinate des Luftschiffs beschreibbar. Dies muss bei der Berechnung des konvektiven Terms der substantiellen Ableitung berücksichtigt werden. Die substantielle Ableitung eines Vektorfeldes im Achsensystem n , in welchem auch seine Komponenten ausgedrückt werden, wird formell über die Rechenvorschrift

$$\frac{{}^n D \dot{v}_n}{Dt} = \frac{{}^n \partial}{\partial t} (\dot{v}_n) + (V_{Rn}^T \text{{}^n grad}(\dot{v}_n))^T = \frac{{}^n \partial}{\partial t} (\dot{v}_n) + \text{{}^n grad}(\dot{v}_n)^T V_{Rn},$$

$$\text{mit } {}^n \text{grad}(\dot{v}_n) = \begin{bmatrix} {}^n \frac{\partial}{\partial x} \\ {}^n \frac{\partial}{\partial y} \\ {}^n \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \dot{v}_n^T \text{ oder in Operator-Notation } {}^n \text{grad}(\dot{v}_n) = {}^n \nabla \dot{v}_n^T$$

berechnet. Der Vektor V_{Rn} stellt dabei die Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und Bezugskoordinatensystem n dar. Der hochgestellte Index n bezeichnet das Achsensystem, in welchem abgeleitet oder die Gradientenmatrix gebildet wurde. Der tiefgestellte Index das Achsensystem in welchem die Komponenten dargestellt sind. In diesem Abschnitt werden das luftschiffeste Achsensystem mit Index f sowie das geodätisch erdfeste Achsensystem als Inertialsystem mit Index g verwendet. Zwecks besserer Identifizierung werden hier Vektoren in luftschiffesten Achsen explizit indiziert.

B.4.2 Berechnung der verteilten Rumpfkraft

Wie in Anhang B.3 werden auch hier die Gleichungen im luftschiffesten Koordinatensystem formuliert. Diese Tatsache muss bei der Bildung der zeitlichen Ableitungen, bei der Berechnung des konvektiven Terms wie auch bei der Angabe der Relativgeschwindigkeit, sie beträgt in diesem Fall $V_{Rn} = -V_A$ (vgl. (B.10)), berücksichtigt werden.

Die Verteilung der aerodynamischen Kraft berechnet sich somit nach

$$dF^A_f(x) = \frac{{}^g D(-dJ_f(x))}{Dt} = \frac{{}^g \partial(-dJ_f(x))}{\partial t} - {}^f \text{grad}(-dJ_f(x))^T V_{Af}. \quad (\text{B.25})$$

Durch Einsetzen des Impulses nach Gleichung (B.24) in obenstehende Kraftgleichung folgt für den zeitlich abgeleiteten Term unter Berücksichtigung des Eulerterms (Achtung: Impulsgleichung muss im Inertialsystem abgeleitet werden)

$$\begin{aligned} \frac{{}^g \partial(-dJ_f(x))}{\partial t} &= -\rho \frac{{}^f \partial}{\partial t} (F(x) V_{Af}(x)) - \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x)) \\ &= -\rho F(x) \frac{{}^f \partial}{\partial t} V_{Af}(x) - \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x)). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Der konvektive Term vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} -{}^f \text{grad}(-dJ_f(x))^T V_{Af} &= \rho \cdot {}^f \text{grad}(F(x) \cdot V_{Af}(x))^T V_{Af} \\ &= \rho u_{Af} \frac{{}^f \partial F(x)}{\partial x} V_{Af}(x) + \rho F(x) {}^f \text{grad}(V_{Af}(x))^T V_{Af}(x), \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

dabei wurde berücksichtigt, dass der Tensor F eines Rotationsellipsoids nur diagonal besetzt ist. Für die Gesamtkraft als Summe der beiden Anteile aus (B.26) und (B.27) folgt unter Verwendung der Beziehung $V_A = V_K - V_W$ und nach Umformung

$$\begin{aligned} dF^A_f(x) &= -\rho F(x) \left(\frac{f\partial}{\partial t}(V_{Kf}(x)) - {}^f\text{grad}(V_{Kf}(x))^T V_{Af}(x) \right) - \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Kf}(x)) \\ &+ \rho F(x) \left(\frac{f\partial}{\partial t}(V_{Wf}(x)) - {}^f\text{grad}(V_{Wf}(x))^T V_{Af}(x) \right) + \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Wf}(x)) \quad (\text{B.28}) \\ &+ \rho u_{Af} \frac{f\partial F(x)}{\partial x} V_{Af}(x) , \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} dF^A_f(x) &= -\rho F(x) \frac{fD V_{Kf}(x)}{Dt} + \rho F(x) \frac{fD V_{Wf}(x)}{Dt} \\ &- \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x)) + \rho u_{Af} \frac{f\partial F(x)}{\partial x} V_{Af}(x) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

mit

$$\frac{fD V_{Kf}(x)}{Dt} = \frac{f\partial}{\partial t}(V_{Kf}(x)) - {}^f\text{grad}(V_{Kf}(x))^T V_{Af}(x) \quad \text{und} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{fD V_{Wf}(x)}{Dt} = \frac{f\partial}{\partial t}(V_{Wf}(x)) - {}^f\text{grad}(V_{Wf}(x))^T V_{Af}(x) . \quad (\text{B.31})$$

Nach Gleichung (B.29) sind die Kräfte infolge Relativanströmung (2. Zeile) von den Kräften durch Wind- und Bahnbeschleunigung (1. Zeile) entkoppelt, wie auch die Beiträge infolge Windbeschleunigung von denen infolge Bahnbeschleunigung entkoppelt sind.

Vereinfachung der substantiellen Ableitung (B.30)

Die substantielle Ableitung des Bahngeschwindigkeitsvektors $V_{Kf}(x)$ in körperfesten Komponenten lässt sich durch Einsetzen der Vektorfunktion $V_{Kf}(x)$

$$V_{Kf}(x) = \begin{bmatrix} u_{Kf} \\ v_{Kf} + x \cdot r_f \\ w_{Kf} - x \cdot q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v + x \cdot r \\ w - x \cdot q \end{bmatrix}$$

(vgl. dazu Gleichung (3.15) und (B.17)) stark vereinfachen. Sie resultiert zu

$$\frac{{}^f D V_{Kf}(x)}{Dt} = \frac{{}^f \partial}{\partial t}(V_{Kf}(x)) - u_{Af} \cdot \frac{{}^f \partial}{\partial x}(V_{Kf}(x)) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} + x\dot{r} \\ \dot{w} - x\dot{q} \end{bmatrix} - u_A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

Vereinfachung der substantiellen Ableitung (B.31)

Die substantielle Beschleunigung des Windes in körperfesten Koordinaten kann aus der geodätischen Ableitung berechnet werden. Dabei muss nicht nur die Drehung der Achsensysteme berücksichtigt werden, sondern auch der Konvektionsterm infolge Bewegung mit Geschwindigkeit V_K durch das erdfest definierte Windfeld $V_{Wg}(r, t)$.

$$\frac{{}^f D V_{Wf}(x)}{Dt} = \frac{{}^f \partial}{\partial t}(V_{Wf}(x)) - {}^f \text{grad}(V_{Wf}(x))^T V_{Af}(x).$$

$$\frac{{}^f D V_{Wf}(x)}{Dt} = \frac{{}^f \partial}{\partial t}(V_{Wf}(x)) - {}^f \text{grad}(V_{Wf}(x))^T V_{Af}(x).$$

Der erste Term aus (B.31), er beschreibt die zeitliche Änderung des Windes in körperfesten Koordinaten beim Flug durch ein Windfeld, lautet ausgeschrieben

$$\frac{{}^f \partial}{\partial t}(V_{Wf}(x)) = T_{fg} \left(\frac{{}^g \partial}{\partial t}(V_{Wg}(x)) + {}^g \text{grad}(V_{Wg}(x))^T V_{Kg}(x) \right) - \Omega_f \times V_{Wf}.$$

Setzt man diese in die alte Gleichung ein und benutzt die Transformationsformel

$${}^f \text{grad}(V_{Wf}(x))^T V_{Wf}(x) = T_{fg} {}^g \text{grad}(V_{Wg}(x))^T V_{Wg}(x)$$

so lässt sich (B.31) umformen und man findet die Beziehung

$$\frac{{}^f D V_{Wf}(x)}{Dt} = T_{fg} \frac{{}^g D V_{Wg}(x)}{Dt} - \Omega_f \times V_{Wf} \quad (\text{B.33})$$

zwischen der substantiellen Windableitung in körperfesten Achsen und der Ableitung in geodätischen Koordinaten. Die Bestimmung der substantiellen Windableitung in geodätischen Koordinaten ist wiederum elementar, sie gehorcht

$$\frac{{}^g D V_{Wg}(x)}{Dt} = \frac{{}^g \partial}{\partial t}(V_{Wg}(x)) + {}^g \text{grad}(V_{Wg}(x))^T V_{Wg}(x).$$

Weiter gilt nach der Gleichung von Euler für reibungsfreie Fluide bei Vernachlässigung der Feldstärke (der vertikale Druckgradient beeinflusst die Windströmung nicht)

$$\rho \frac{{}^g D V_{Wg}(x)}{Dt} = -{}^g \text{grad}(p_W), \quad (\text{B.34})$$

$$\text{oder entsprechend in körperfesten Komponenten } \rho T_{fg} \frac{{}^g D V_{Wg}(x)}{Dt} = -{}^f \text{grad}(p_W). \quad (\text{B.35})$$

Die substantielle Ableitung des Windes, und entsprechend die daraus resultierende aerodynamische Kraft, ist somit proportional des *Druckgradienten* (ohne Vertikalgradient) in der Luft. Ist die Windströmung beschleunigungsfrei und somit druckgradientenfrei, beträgt dieser Term exakt Null. Existiert ein Druckgradient oder entsprechend eine inertielle Windbeschleunigung, wirkt diese einerseits beschleunigend auf die Umströmung und übt somit einen scheinbare Masse Effekt aus, andererseits erzeugt der Druckgradient eine aerostatische Kraft auf den Körper. Der erste Kraftanteil ist proportional der scheinbaren Masse, der zweite proportional der verdrängten Fluidmasse, diese ist bei Luftschiffen typischerweise von gleicher Größenordnung wie die träge Masse. Der zweite Anteil wird in der Literatur des öfteren unterschlagen. Beide Anteile werden in diesem Kapitel noch ausführlich diskutiert.

Zusammenfassung

Setzt man die Vereinfachungen nach Gleichung (B.32) und (B.33) in (B.29) ein folgt

$$\begin{aligned} dF^A_f(x) = & -\rho F(x) \left(\frac{{}^f \partial}{\partial t} (V_{Kf}(x)) - u_{Af} \cdot \frac{{}^f \partial}{\partial x} (V_{Kf}(x)) \right) + \rho u_{Af} \frac{{}^f \partial F(x)}{\partial x} V_{Af}(x) \\ & - \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x)) \\ & + \rho F(x) T_{fg} \frac{{}^g D V_{Wg}(x)}{Dt} - \rho F(x) (\Omega_f \times V_{Wf}) . \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

B.4.3 Darstellung und Diskussion der Kraftanteile

Die Terme aus Gleichung (B.36) werden nun analysiert und physikalisch interpretiert. Die Kräfte werden dazu entsprechend ihrer verursachenden Bewegung oder Strömung in drei Gruppen eingeteilt: Kräfte infolge *Bahnbeschleunigung* (Starrkörperbeschleunigung), Kräfte infolge *stationärer Anströmung* und Kräfte infolge *Windbeschleunigung*.

Zur Analyse und Veranschaulichung werden die Kräfte skalar ausgeschrieben. Der Tensor der virtuellen Massen eines Querschnitts und der dadurch resultierende Fluidimpuls eines Querschnitts werden dazu wie folgt (vgl. B.2.1) angesetzt:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(x) & 0 \\ 0 & 0 & A(x) \end{bmatrix}, \text{ und somit } dJ(x) = \rho F(x) V_A(x) dx = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ A(x) v_A(x) \\ A(x) w_A(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.37})$$

Die in diesem Ansatz fehlende Impulskomponente in axialer Richtung stellt keine Beschränkung der Gültigkeit der folgenden Analysen dar. Um die hier beschriebenen Kräfte mit den entsprechenden Kräften im windfreien Fall zu vergleichen, wird auf Gleichung (B.12) und (B.21) verwiesen.

Kräfte infolge Bahnbeschleunigung (Starrkörperbeschleunigung)

$$\text{Term} \quad -\rho F(x) \frac{f \partial}{\partial t} (V_{Kf}(x)), \text{ entsprechend } -\rho \begin{bmatrix} 0 \\ A(x)(\dot{v}_K + x\dot{r}) \\ A(x)(\dot{w}_K - x\dot{q}) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.38})$$

Dieser Term beschreibt die Kraft infolge beschleunigter Bahnbewegung. Er ist einzig und allein von der *Körperbeschleunigung* abhängig und entspricht exakt den beschleunigungsproportionalen Kräften bei Bewegung ohne Wind. Massgebender Modellparameter ist die virtuelle Masse.

Kräfte infolge stationärer Anströmung und Starrkörperdrehung

$$\begin{aligned} \text{Term} \quad & \rho F(x) u_{Af} \frac{f \partial}{\partial x} (V_{Kf}(x)) + \rho u_{Af} \frac{f \partial F(x)}{\partial x} V_{Af}(x) - \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x)), \text{ entsprechend} \\ & \rho u_A(x) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ A(x)r \\ -A(x)q \end{bmatrix} + \rho u_A(x) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} A(x) \cdot v_A(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} A(x) \cdot w_A(x) \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} A(x)(qw_A(x) - rv_A(x)) \\ -A(x)pw_A(x) \\ A(x)pv_A(x) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Diese Terme beschreiben die Kraft infolge unbeschleunigter Bewegung und stationärer Anströmung, eine vertiefte Diskussion der physikalischen Entstehung dieser einzelnen Terme findet man in Abschnitt B.2.2, "Diskussion der Kräfte infolge stationären Fluges" auf Seite 178.

Der erste Term beschreibt die Kräfte infolge Impulsänderung durch Kurvenflug. Diese Kräfte hängen von den Starrkörperdrehraten und der stationären Anströmung ab. Der zweite Term beschreibt die verteilten Kräfte infolge Strömung mit $V_A(x)$ entlang eines sich ändernden Querschnitts. Die Kräfte sind also eine Folge des lokalen Flugwindes $V_A(x)$ nach Gleichung (3.16). Der dritte Term dient der Berücksichtigung der kinematischen Koppeltermine, er existiert, weil die Starrkörperbeschleunigung nicht in Inertialkoordinaten formuliert ist. Diese Kräfte werden auch in Kapitel 3.2.1 diskutiert.

Kräfte infolge Windbeschleunigung und drehrateninduzierter Windbeschleunigung

$$\text{Term } \rho F(x) \left(T_{fg} \frac{{}^g D V_{Wg}(x)}{Dt} - \Omega_f \times V_{Wf} \right) \quad (\text{B.40})$$

Aus den Diskussionen um Gleichung (B.34) folgt, dass der linke Term proportional der lokalen inertialen Windbeschleunigung ist. Die durch den Term beschriebene Kraft ist das Gegenstück zur Kraft infolge Starrkörperbeschleunigung, er ist eine Folge der zeitlichen Änderung des Fluidimpulses, oder mit anderen Worten eine Folge der scheinbare Masse Effekte infolge Windbeschleunigung. Nur wird in diesem Falle nicht der Körper, sondern das umströmende Fluid selber beschleunigt, entsprechend wirkt diese Kraft *positiv in Richtung der Fluidbeschleunigung*.

Der zweite Term dient der Berücksichtigung drehrateninduzierter Windbeschleunigungen in körperfesten Achsen. Er dient somit wie der Term $-\rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x))$ auch der korrekten Berücksichtigung inertialer Beschleunigungen in drehenden Koordinatenachsen.

Analyse drehrateninduzierter Terme (kinematische Koppelterme)

Es lohnt sich, die beiden Drehraten-Terme $-\rho \Omega_f \times (F(x) V_{Af}(x))$ aus (B.39) und $-\rho F(x) (\Omega_f \times V_{Wf})$ aus (B.40) gemeinsam zu analysieren.

Beide Terme sind Elemente der Gleichung (B.36). Schreibt man den ersten Term in der Form

$$-\rho \Omega_f \times (F(x) V_{Kf}(x)) + \rho \Omega_f \times (F(x) V_{Wf}(x))$$

aus, erkennt man, dass in (B.36) zwei ähnliche Terme in Differenz stehen:

$$\rho \Omega_f \times (F(x) V_{Wf}(x)) - \rho F(x) (\Omega_f \times V_{Wf}) . \quad (\text{B.41})$$

Durch Ausmultiplikation und unter Verwendung eines Tensors mit scheinbarer Masse in axialer Richtung der Form

$$F = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* \end{bmatrix} \text{ liest sich (B.41) als } \rho \left(- \begin{bmatrix} m_1^* (qw - rv) \\ m_2^* (ru - pw) \\ m_3^* (pv - qu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_3^* qw - m_2^* rv \\ m_1^* ru - m_3^* pw \\ m_2^* pv - m_1^* qu \end{bmatrix} \right),$$

der Tensor F entspricht dabei F_V , wie er in Kapitel 2.2 und 3.3.3 verwendet wird.

Außer für eine Kugel, bei welcher der Tensor der virtuellen Massen F durch eine Einheitsmatrix dargestellt wird und somit $m_1^* = m_2^* = m_3^*$ gilt, ist diese Summe immer ungleich Null: Die Drehung eines Körpers in einem Windfeld führt auf eine resultierende Kraft. Dies bringt wieder deutlich die Tensor-Eigenschaft der scheinbaren Masse zur Geltung.

C Lineare Kraft- und Bewegungsgleichungen

In den ersten Abschnitten dieses Anhangs werden die linearen Differentialgleichungen der Translations- und der Drehbewegung von Luftschiffen diskutiert. Nachdem die Systemmatrizen analytisch hergeleitet wurden, werden die Gleichungen durch die linearen Differentialgleichungen der Lage und Position ergänzt.

C.1 Lineare Gleichungen und Zustandsraumdarstellung

Die Bewegungsdifferentialgleichungen nach Gleichung (2.10) sind mit Hilfe der Massenmatrix M , den kinematischen Beziehungen $K(x)$ und den äußeren Kräften $F(x, u)$ in der Form

$$M\dot{x} = K(x) + F(x, u) \quad (\text{C.1})$$

darstellbar. Obwohl diese Gleichung direkt in die explizite Form $\dot{x} = M^{-1}(K(x) + F(x, u))$ umgewandelt und dann linearisiert werden könnte, eignet sich für eine analytische Herleitung der Weg über die "Linearisierung der Einzelterme", also über eine linearisierte Darstellung der Gleichung (C.1) in der Form

$$\begin{aligned} M\dot{x} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} K(x) \cdot x \right|_{x_0} + \left. \frac{\partial}{\partial x} F(x, u) \cdot x \right|_{x_0, u_0} + \left. \frac{\partial}{\partial u} F(x, u) \cdot u \right|_{x_0, u_0} \\ &= K_{,x} \cdot x + F_{,x} \cdot x + F_{,u} \cdot u \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Die Matrix $K_{,x}$ enthält die linearisierten kinematischen Kopplungen, die Matrizen $F_{,x}$ und $F_{,u}$ die Kraftderivative bezüglich Zustandsvektor x respektive Steuereingang u . Da die Linearisierung in einem Gleichgewichtspunkt durchgeführt wurde, beträgt die Summe der Terme $K(x_0) + F(x_0, u_0) = 0$, es verbleiben in (C.2) nur noch die Anteile der Abweichung vom Trimpunkt, zur Vereinfachung der Schreibweise wird jedoch auf eine gesonderte Notation verzichtet. Durch Linksmultiplikation mit der Massenmatrix M resultiert schlussendlich die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

mit den Systemmatrizen

$$A = M^{-1}(K_{,x} + F_{,x}) \text{ und } B = M^{-1}F_{,u} \quad (\text{C.3})$$

C.1.1 Die Matrizen M , $K_{,x}$, $F_{,x}$ und $F_{,u}$ in allgemeiner Form

Im Folgenden werden die Differentialgleichungen der Geschwindigkeit und Drehrate behandelt. Der Vektor \dot{x} entspricht somit $\dot{x} = [\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w} \ \dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}]^T$, als Zustandsvektor wird wahlweise nur der kinematische Zustand $x = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$ oder dessen Erweiterung um die Lagewinkel $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ verwendet.

Die Massenmatrix M , enthaltend Starrkörperträgheiten und scheinbare Masse Terme, kann direkt aus der Bewegungsdifferentialgleichung (2.10) abgelesen werden, sie beträgt

$$M = \begin{bmatrix} m + \rho F_{11} & m[r \times] - \rho F_{12} \\ m[r \times] + \rho F_{21} & I + \rho F_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Die Kinematik Matrix $K_{,x}$ muss über Linearisierung der Beziehungen

$$K(x) = \begin{bmatrix} -\Omega \times (V_K + \Omega \times r_{CRCG}) \\ -\Omega \times (I\Omega) - (m \cdot r_{CRCG} \times (\Omega \times V_K)) \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

bestimmt werden. Die Matrizen $F_{,x}$ und $F_{,u}$ mit den Kraftderivativa als Komponenten lauten in allgemeiner Form

$$F_{,x} = \begin{bmatrix} X_{,u} & X_{,v} & \dots & X_{,\phi} & X_{,\theta} \\ Y_{,u} & & \dots & & Y_{,\theta} \\ Z_{,u} & & \dots & & Z_{,\theta} \\ L_{,u} & & \dots & & L_{,\theta} \\ M_{,u} & & \dots & & M_{,\theta} \\ N_{,u} & N_{,v} & \dots & N_{,\phi} & N_{,\theta} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F_{,u} = \begin{bmatrix} X_{,\zeta} & X_{,\eta} & X_{,\xi} & X_{,\delta_T} & \dots \\ Y_{,\zeta} & Y_{,\eta} & Y_{,\xi} & Y_{,\delta_T} & \dots \\ Z_{,\zeta} & Z_{,\eta} & Z_{,\xi} & Z_{,\delta_T} & \dots \\ L_{,\zeta} & L_{,\eta} & L_{,\xi} & L_{,\delta_T} & \dots \\ M_{,\zeta} & M_{,\eta} & M_{,\xi} & M_{,\delta_T} & \dots \\ N_{,\zeta} & N_{,\eta} & N_{,\xi} & N_{,\delta_T} & \dots \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Unter Verwendung der Derivativa schreibt sich die Abweichung der Axialkraft X von ihrem Gleichgewichtswert $X(x_0, u_0)$ in linearisierter Form somit beispielsweise als

$$X = X_{,u}u + X_{,v}v + X_{,w}w + X_{,p}p + X_{,q}q + X_{,r}r + X_{,\phi}\phi + X_{,\theta}\theta + \\ X_{,\zeta}\zeta + X_{,\eta}\eta + X_{,\xi}\xi + X_{,\delta_T}\delta_T$$

C.1.2 Die Matrizen M , $K_{,x}$, $F_{,x}$ und $F_{,u}$ im horizontalen Geradeausflug

Die Linearisierung der Bewegungsgleichungen nach Gleichung (2.10) an einem beliebigen stationären Betriebspunkt führt auf komplizierte, analytisch kaum auswertbare Beziehungen. Nur durch die Wahl eines geeigneten Betriebspunktes und einer geeigneten Konfiguration können die Gleichungen stark vereinfacht werden, ohne dass ihre charakteristischen Eigen-

schaften verloren gehen. Wie in Kapitel 4.2 “Lineare Bewegungsgleichungen im symmetrischen Horizontalflug” wird der horizontale Geradeausflug (vergleiche auch Abschnitt 4.1.1) als Betriebspunkt gewählt, es gilt

$$V = [u_0, 0, w_0]^T, \Omega = [0, 0, 0]^T, \text{ dann } \theta_0 \ll 1, \phi_0 = 0 \text{ sowie } \zeta_0 = 0.$$

Weiter wird angenommen dass das Luftschiff annähernd neutral getrimmt ist, der aerostatische Auftriebsmittelpunkt im Referenzpunkt und der Schwerpunkt senkrecht unterhalb dieses Punktes liegt, es gilt somit

$$m \approx \rho_{\text{Luft}} V_B, CR = CB, x_{CG} = y_{CG} = 0$$

In dieser Konfiguration wird das Luftschiff annähernd anstellwinkel- und höhenruderfrei geflogen. Die Herleitung der Gleichungen erfolgt somit unter den weiteren Vereinfachungen

$$\alpha_0 \ll 1 \text{ und somit } \alpha_0 = \frac{w_0}{u_0} = \frac{w_0}{V_0}, \alpha_0^2 \approx 0 \text{ und } \zeta_0 = 0.$$

Massenmatrix M

Durch Einsetzen der Beziehungen (2.11) in Gleichung (C.4), resultiert die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} m + \rho V k_1 & 0 & 0 & 0 & mz_{CG} & 0 \\ 0 & m + \rho V k_2 & 0 & -mz_{CG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m + \rho V k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -mz_{CG} & 0 & I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ mz_{CG} & 0 & 0 & 0 & I_{yy} + \rho I_{yy} k' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xz} & 0 & I_{zz} + \rho I_{zz} k' \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Dynamik Matrix K_x

Für den ausgewählten Betriebszustand führt die Linearisierung der Gleichung (C.5) auf

$$K_x = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mw_0 & 0 & mu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mz_{CG} w_0 & 0 & -mz_{CG} u_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mz_{CG} w_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Kräftematrizen F_x und F_u

Im ausgewählten Betriebspunkt sind viele Kraftderivative exakt Null, die Kraftderivativa-Matrizen nehmen die Gestalt

$$F_x = \begin{bmatrix} X_{,u} & 0 & X_{,w} & 0 & X_{,q} & 0 & 0 & X_{,\theta} & 0 \\ 0 & Y_{,v} & 0 & 0 & 0 & Y_{,r} & Y_{,\phi} & 0 & 0 \\ Z_{,u} & 0 & Z_{,w} & 0 & Z_{,q} & 0 & 0 & Z_{,\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{,p} & 0 & 0 & L_{,\phi} & 0 & 0 \\ M_{,u} & 0 & M_{,w} & 0 & M_{,q} & 0 & 0 & M_{,\theta} & 0 \\ 0 & N_{,v} & 0 & 0 & 0 & N_{,r} & N_{,\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F_u = \begin{bmatrix} 0 & X_{,\eta} & 0 & X_{,\delta_T} & \dots \\ Y_{,\zeta} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Z_{,\eta} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & L_{,\xi} & 0 & \dots \\ 0 & M_{,\eta} & 0 & M_{,\delta_T} & \dots \\ N_{,\zeta} & 0 & 0 & N_{,\delta_T} & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

an.

C.1.3 Kraftderivative dieser Konfiguration

Die einzelnen Kraft- und Momentenderivative betragen

$$\begin{aligned} X_{,u} &= \rho u_0 (-c_{d_0, h} V^{2/3} - c_{d_0, f} S_f - 2\eta_k I_{x_{\text{pot}}}^u + 2\eta_k I_{x_{\text{pot}}}^{uvw}) \\ X_{,w} &= \rho w_0 (2\eta_k I_{x_{\text{pot}}}^{uvw} + 2\eta_k I_{x_{\text{pot}}}^{vw} + \eta_f (c_{l_{\alpha_0, f}} - \eta_f c_{d_{\text{ind}, f}}) S_f) \\ X_{,q} &= \rho w_0 (\eta_k I_{x_{\text{pot}}}^q + \eta_f (c_{l_{\alpha_0, f}} - \eta_f c_{d_{\text{ind}, f}}) S_f x_{f_a}) \\ X_{,\theta} &= (B - G) \cos \theta_0 \\ X_{,\eta} &= \rho u_0 w_0 \eta_f (c_{l_{\alpha_0, f}} - \eta_f c_{d_{\text{ind}, f}}) S_f \eta_\eta \\ X_{,\delta_T} &= X_{\delta_T}(x_0) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} Y_{,v} &= Z_{,w} = \rho u_0 \left(\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uw} - \frac{1}{2} \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f \right) \\ Y_{,p} &= \rho k_2 V w_0 \\ Y_{,r} &= \rho u_0 \left(\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uq} - \frac{1}{2} \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f x_{f_a} \right) \\ Y_{,\phi} &= (G - B) \cos \theta_0 \approx 0 \\ Y_{,\zeta} &= -\rho \frac{1}{2} u_0^2 \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f \eta_\zeta \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}
Z_{,u} &= \rho w_0 \left(\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uw} - \frac{1}{2} \eta_f c_{l_{\alpha_0}, f} S_f \right) \\
Z_{,w} &= Y_{,v} = \rho u_0 \left(\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uw} - \frac{1}{2} \eta_f c_{l_{\alpha_0}, f} S_f \right) \\
Z_{,q} &= \rho u_0 \left(-\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uq} + \frac{1}{2} \eta_f c_{l_{\alpha_0}, f} S_f x_{f_a} \right) \\
Z_{,\theta} &= (B - G) \sin \theta_0 \approx 0 \\
Z_{,\eta} &= -\rho \frac{1}{2} u_0^2 \eta_f c_{l_{\alpha_0}, f} S_f \eta_\eta
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
L_{,p} &= -\frac{1}{2} \rho u_0 \eta_f c_{l_{\alpha_0}, f} S_f \eta_{L_p} b_f^2 \\
L_{,\phi} &= (B z_{CB} - G z_{CG}) \cos \theta_0 \\
L_{,\xi} &= -\rho \frac{1}{2} u_0^2 \eta_f c_{l_{\alpha_0}, f} S_f \eta_{L_p} b_f \eta_\xi
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
M_{,u} &= \rho w_0 \left(-\eta_k I_{m_{\text{pot}}}^{uw} + \frac{1}{2} c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a}^2 \right) \\
M_{,w} &= -N_{,v} = \rho u_0 \left(-\eta_k I_{m_{\text{pot}}}^{uw} + \frac{1}{2} c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a}^2 \right) \\
M_{,q} &= N_{,r} = \rho u_0 \left(\eta_k I_{m_{\text{pot}}}^{uq} - \frac{1}{2} c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a}^2 \right) \\
M_{,\theta} &= (B z_{CB} - G z_{CG}) \cos(\theta_0) + (G x_{CG} - B x_{CB}) \sin \theta_0 \\
M_{,\eta} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a} \eta_\eta \\
M_{,\delta_T} &= X_{\delta_T}(x_0) z_{CT}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
N_{,v} &= -M_{,w} = \rho u_0 \left(\eta_k I_{m_{\text{pot}}}^{uw} - \frac{1}{2} c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a}^2 \right) \\
N_{,r} &= M_{,q} = \rho u_0 \left(\eta_k I_{m_{\text{pot}}}^{uq} - \frac{1}{2} c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a}^2 \right) \\
N_{,\phi} &= (G x_{CG} - B x_{CB}) \cos \theta_0 \approx 0 \\
N_{,\xi} &= -\frac{1}{2} \rho u_0^2 c_{l_{\alpha_0}, f} \eta_f S_f x_{f_a} \eta_\xi \\
N_{,\delta_T} &= -X_{\delta_T}(x_0) y_{CT} \approx 0
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Leicht zu erkennen sind die Anteile der Aerodynamik, Schwerkraft und Aerostatik und Schub. Bei den aerodynamischen Kräften, es verbleiben ja infolge der Linearisierung um $\alpha_0 \ll 1$ nur die Anteile der Rumpfpotential- und Leitwerksprofilströmung da quadratische Terme in α verschwinden, erkennt man die Anteile des Rumpfes (Integrale) und die Kraftanteile der Leitwerke (affin S_f).

Größenordnung der Derivativa

Für den gewählten Betriebspunkt gilt $\alpha_0 \ll 1$ und somit $u_0 \gg w_0$. Diese Tatsache beeinflusst die aerodynamischen Anteile der Derivativa: Terme proportional u_0 nehmen größere Werte an als die Derivativa proportional w_0 , letztere verschwinden sogar für einen Trimmanstellwinkel von exakt Null. Desweiteren hängt die Größenordnung der aerodynamischen Terme von der jeweiligen Referenzfläche respektive vom Wert des Rumpfindegrals ab. Zur Abschätzung der Größenordnung der Rumpfindegrale dient folgende Tabelle (vgl. auch Tabelle 3.1):

| ~ Volumen | ~ Trägheitsmoment | geringe Größenordnung |
|---|--|--|
| $\{I_{x_{pot}}^{\dot{u}}, I_{z_{pot}}^{uq}\} \approx -k_1 V$ $\{I_{z_{pot}}^{\dot{w}}, -I_{x_{pot}}^{wq}\} \approx k_2 V$ $I_{m_{pot}}^{uw} \approx (k_1 - k_2) V$ $I_{x_{pot}}^q$ $I_{m_{pot}}^{uq}$ | $I_{m_{pot}}^{\dot{q}} \approx k I_{yy}$ | $I_{x_{pot}}^{uvw}, I_{x_{pot}}^u, I_{x_{pot}}^{vw}$ $I_{z_{pot}}^{uw}$ |

Tabelle C.1 Größenordnung der Rumpfderivativa

Neben aerodynamischen Anteilen treten auch Beiträge infolge Schwerkraft und aerostatischen Auftriebs auf. Die Terme dieser Kräfte sind proportional der Differenz $(B - G)$, und verschwinden somit für neutral getrimmte Luftschiffe. Die Derivativa der Momente gehören jeweils einer Momentendifferenz. Die entsprechenden Derivativa verschwinden bei neutral getrimmtem Luftschiff und gleicher Hebelarmlänge (z.B. L_ϕ falls $z_{CB} = z_{CG}$).

Es verbleiben nach dieser Größenordnungsbetrachtung folgende dominierende Derivativa:

| Kraftrichtung | Dominierende Derivativa |
|-------------------|---|
| Axialkraft X | $X_{,u} \approx \rho u_0 (-c_{d_0, h} V^{2/3} - c_{d_0, f} S_f)$ $X_{, \delta_T}$ |
| Lateralkraft Y | $Y_{,v}, Y_{,r}$ $Y_{, \zeta}$ |
| Vertikalkraft Z | $Z_{,w}, Z_{,q}$ $Z_{, \eta}$ |
| Rollmoment L | $L_{,p}, L_{, \phi}$ $L_{, \xi}$ |
| Nickmoment M | $M_{,w}, M_{,q}, M_{, \theta}$ $M_{, \eta}$ |
| Giermoment N | $N_{,v}, N_{,r}$ $N_{, \zeta}$ |

C.1.4 Zusammenhang zwischen Kraftderivativa und aerodynamischen Beiwerten

Die Kraftderivativa beschreiben die Kräfte in linearisierter Form. Die linearen aerodynamischen Beiwerte lassen sich somit direkt aus einem Vergleich mit der Beiwerteschreibweise ableiten. Für die aerodynamische Axialkraft in linearisierter Form (es werden dazu nur dominierende Terme berücksichtigt) gilt beispielsweise

$$X^A \approx \frac{\rho}{2} u_0^2 (-c_{d_0, h} V^{2/3} - c_{d_0, f} S_f + 2\eta_k (I_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - I_{x_{\text{pot}}}^u)) = -\frac{\rho}{2} u_0^2 c_{d_0} V^{2/3}, \quad (\text{C.16})$$

$$\text{es folgt } c_{d_0} = c_{d_0, h} + c_{d_0, f} \frac{S_f}{V^{2/3}} - 2\eta_k \frac{I_{x_{\text{pot}}}^{uvw} - I_{x_{\text{pot}}}^u}{V^{2/3}}. \quad (\text{C.17})$$

Andere wichtige Beiwerte stehen zu den Derivativa in den Beziehungen

$$\begin{aligned} Y_{,v} &= Y_{,v} u_0 \beta = \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{y_\beta} V^{2/3} \beta & M_{,w} &= \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{m_\alpha} V^{2/3} l_R \alpha \\ Y_{,r} &= \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{y_r} V^{2/3} \frac{r l_R}{u_0} & M_{,q} &= \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{m_q} V^{2/3} l_R \frac{q l_R}{u_0} \\ Z_{,w} &= Z_{,w} u_0 \alpha = \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{z_\alpha} V^{2/3} \alpha & N_{,v} &= \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{n_\beta} V^{2/3} l_R \beta \\ Z_{,q} &= \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{z_q} V^{2/3} \frac{q l_R}{u_0} & N_{,r} &= \frac{\rho}{2} u_0^2 c_{n_r} V^{2/3} l_R \frac{r l_R}{u_0} \end{aligned} \quad \text{sowie} \quad (\text{C.18})$$

Die Kraftbeiwerte betragen somit

$$\begin{aligned} c_{y_\beta} &= \frac{2Y_{,v}}{\rho u_0 V^{2/3}} = \frac{2\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uw} - \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f}{V^{2/3}} \\ c_{y_r} &= \frac{2Y_{,r}}{\rho u_0 V^{2/3} l_R} = \frac{2\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{qu} - \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f x_{f_a}}{V^{2/3} l_R} \\ c_{z_\alpha} &= \frac{2Z_{,w}}{\rho u_0 V^{2/3}} = \frac{2\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{uw} - \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f}{V^{2/3}} = c_{y_\beta} \\ c_{z_q} &= \frac{2Z_{,q}}{\rho u_0 V^{2/3} l_R} = \frac{-2\eta_k I_{z_{\text{pot}}}^{qu} + \eta_f c_{l_{\alpha_0, f}} S_f x_{f_a}}{V^{2/3} l_R} = -c_{y_r} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

und die Momentenbeiwerte

$$\begin{aligned}
c_{m_\alpha} &= \frac{2M_{,w}}{\rho u_0 V^{2/3} l_R} = \frac{-2\eta_k I_{\dot{m}_{\text{pot}}}^{uw} + \eta_f S_f c_{l_{\alpha_0}, f} x_{f_a}}{V^{2/3} l_R} \\
c_{m_q} &= \frac{2M_{,q}}{\rho u_0 V^{2/3} l_R^2} = \frac{2\eta_k I_{\dot{m}_{\text{pot}}}^{qu} - \eta_f S_f c_{l_{\alpha_0}, f} x_{f_a}^2}{V^{2/3} l_R^2} \\
c_{n_\beta} &= \frac{2N_{,v}}{\rho u_0 V^{2/3} l_R} = \frac{2\eta_k I_{\dot{m}_{\text{pot}}}^{uw} - \eta_f S_f c_{l_{\alpha_0}, f} x_{f_a}}{V^{2/3} l_R} = -c_{m_\alpha} \\
c_{n_r} &= \frac{2N_{,r}}{\rho u_0 V^{2/3} l_R^2} = \frac{2\eta_k I_{\dot{m}_{\text{pot}}}^{qu} - \eta_f S_f c_{l_{\alpha_0}, f} x_{f_a}^2}{V^{2/3} l_R^2} = c_{m_q}
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Analog werden die Beiwerte zur Berücksichtigung der Ruderauslenkungen hergeleitet. Durch die Gleichungen (C.17), (C.19) und (C.20) sind die in Kapitel 4.1.1 und 4.1.2 verwendeten Kräfte- und Momentenbeiwerte zur Beschreibung der Kräfte um $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ beschrieben.

C.2 Lineare Bewegungsgleichungen, Systemmatrizen

C.2.1 Invertieren der Massenmatrix

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Elemente der Massenmatrix M durch folgende Ausdrücke ersetzt:

$$\mathbf{m}_x = m + \rho V k_1, \quad \mathbf{m}_y = m + \rho V k_2, \quad \mathbf{m}_z = m + \rho V k_2$$

$$z = z_{CG} \text{ und}$$

$$\mathbf{I}_{xx} = I_{xx}, \quad \mathbf{I}_{yy} = I_{yy} + \rho \mathbf{I}_{yy} k', \quad \text{und} \quad \mathbf{I}_{zz} = I_{zz} + \rho \mathbf{I}_{zz} k'.$$

Die Massenmatrix und ihre Inverse lassen sich somit (vgl. Gleichung (C.7)) als

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_x & 0 & 0 & 0 & zm & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_y & 0 & -zm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -zm & 0 & \mathbf{I}_{xx} & 0 & I_{xz} \\ zm & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xz} & 0 & \mathbf{I}_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & 0 & 0 & 0 & \tilde{m}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{22} & 0 & \tilde{m}_{24} & 0 & \tilde{m}_{26} \\ 0 & 0 & \tilde{m}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{24} & 0 & \tilde{m}_{44} & 0 & \tilde{m}_{46} \\ \tilde{m}_{15} & 0 & 0 & 0 & \tilde{m}_{55} & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{26} & 0 & \tilde{m}_{46} & 0 & \tilde{m}_{66} \end{bmatrix} \tag{C.21}$$

schreiben. Wie die Massenmatrix M ist auch deren Inverse M^{-1} eine symmetrische Matrix mit identischer Besetzung. Ihre Elemente betragen

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{11} &= \mathbf{I}_{yy}/D_1 & \tilde{m}_{15} &= -zm/D_1 \\
\tilde{m}_{22} &= (\mathbf{I}_{xz}^2 - \mathbf{I}_{xx}\mathbf{I}_{zz})/D_2 & \tilde{m}_{24} &= -zm\mathbf{I}_{zz}/D_2 & \tilde{m}_{26} &= zm\mathbf{I}_{xz}/D_2 \\
\tilde{m}_{33} &= \frac{1}{\mathbf{m}_z} & & & & \\
\tilde{m}_{44} &= -\mathbf{m}_y\mathbf{I}_{zz}/D_2 & \tilde{m}_{46} &= \mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xz}/D_2 \\
\tilde{m}_{55} &= \mathbf{m}_x/D_1 \\
\tilde{m}_{66} &= (-\mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xx} + (zm)^2)/D_2
\end{aligned}
, \quad (\text{C.22})$$

wobei $D_1 = \mathbf{m}_x\mathbf{I}_{yy} - (zm)^2$ und $D_2 = \mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xz}^2 + \mathbf{I}_{zz}(-\mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xx} + (zm)^2)$.

Größenordnung der Masseterme

Nimmt man den Rotationsellipsoiden als Referenzkörper, können die Größenordnungen der Masseterme abgeschätzt werden. Bei neutraler Trimmung beträgt die Masse eines Rotationsellipsoiden $m = \rho V$ mit $V = (4\pi/3)ab^2$, die Trägheitsmomente des homogenen Körpers betragen $I_{xx} = V2b^2/5$, $I_{xz} = 0$ und $I_{yy} = I_{zz} = V(a^2 + b^2)/5$. Die Masseterme betragen dann $\mathbf{m}_x = (1 + k_1)\rho V$ und $\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_z = (1 + k_2)\rho V$ und die Trägheitsterme in erster Näherung $\mathbf{I}_{xx} = I_{xx}$ und $\mathbf{I}_{yy} = \mathbf{I}_{zz} = (1 + k')\rho I_{yy}$. Für ein Luftschiff mit Verhältnis Länge zu Durchmesser von 4:1 betragen die Munkfaktoren etwa $k_1 = 0,1$, $k_2 = 0,8$ und $k' = 0,6$ und der Schwerpunkt liege bei ungefähr $z = 1/4 \cdot$ Durchmesser. Weiter gilt für Luftschiffe solcher Streckung $I_{xz} \approx I_{yy}/50$ und die Trägheitsparameter schätzen sich etwa zu $I_{xx} \approx I_{yy}/8$, $\mathbf{I}_{xx} = (I_{yy}/8)$ und $I_{yy} = I_{zz} \approx Va^2/5$ und es gilt weiter $\mathbf{m}_x\mathbf{I}_{yy} \gg (zm)^2$ sowie $\mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xz}^2 \ll \mathbf{I}_{zz}(-\mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xx} + (zm)^2)$ und $\mathbf{I}_{xz}^2 \ll \mathbf{I}_{xx}\mathbf{I}_{zz}$. Unter Berücksichtigung dieser Näherungen und mit $D_1 \approx \mathbf{m}_x\mathbf{I}_{yy}$ und $D_2 \approx \mathbf{I}_{zz}(-\mathbf{m}_y\mathbf{I}_{xx} + (zm)^2)$ vereinfachen sich die Terme in Gleichung (C.22) zu

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{11} &\approx \frac{1}{m_x} & \tilde{m}_{15} &\approx -\frac{zm}{m_x I_{yy}} \\
\tilde{m}_{22} &\approx \frac{I_{xx}}{m_y I_{xx} - (zm)^2} & \tilde{m}_{24} &\approx \frac{zm}{m_y I_{xx} - (zm)^2} & \tilde{m}_{26} &\approx \frac{zm I_{xz}}{I_{zz}(-m_y I_{xx} + (zm)^2)} \\
\tilde{m}_{33} &= \frac{1}{m_z} & & & & \\
\tilde{m}_{44} &\approx \frac{m_y}{I_{xx} m_y - (zm)^2} & \tilde{m}_{46} &\approx \frac{I_{xz} m_y}{I_{zz}(-m_y I_{xx} + (zm)^2)} \\
\tilde{m}_{55} &\approx 1/I_{yy} \\
\tilde{m}_{66} &\approx 1/I_{zz}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

C.2.2 Dynamikmatrix A der Translations- und Drehgeschwindigkeiten

Die Dynamikmatrix A berechnet sich nach Gleichung (C.3) über die Beziehung $A = M^{-1}(K_x + F_x)$. Die resultierende Matrix hat folgende Besetzung:

$$A = \begin{bmatrix}
\mathbf{X}_u & 0 & X_w & 0 & X_q & 0 & 0 & X_\theta & 0 \\
0 & \mathbf{Y}_v & 0 & Y_p & 0 & \mathbf{Y}_r & Y_\phi & 0 & 0 \\
Z_u & 0 & \mathbf{Z}_w & 0 & \mathbf{Z}_q & 0 & 0 & \mathbf{Z}_\theta & 0 \\
0 & L_v & 0 & L_p & 0 & L_r & L_\phi & 0 & 0 \\
M_u & 0 & \mathbf{M}_w & 0 & \mathbf{M}_q & 0 & 0 & \mathbf{M}_\theta & 0 \\
0 & N_v & 0 & N_p & 0 & N_r & N_\phi & 0 & 0
\end{bmatrix}. \tag{C.24}$$

Dabei dominieren die durch fetten Druck hervorgehobenen Derivativa, für die Bewegungsgleichung in u ist dies zum Beispiel das Derivatium \mathbf{X}_u , während die restlichen Derivativa um Größenordnungen kleiner sind. Die Elemente der Matrix sind in analytischer Form und als Näherung unter der Voraussetzung $w_0 \ll u_0$ in der Tabelle C.2 dargestellt. Zusätzlich ist ein Proportionalitätsfaktor angegeben: Alle aerodynamisch dominierten Terme und die Kinematik-Terme verhalten sich proportional der Vorwärtsgeschwindigkeit u_0 respektive proportional der Fluggeschwindigkeit (da $w_0 \ll u_0$). Die Derivativa infolge statischen Auftriebs und Gewicht sind eine Funktion der Differenz $B-G$ und des Hebelarms $z_{CB} - z_{CG}$, für kleine Nickwinkel hängen sie jedoch nicht vom Betriebszustand ab.

| | Analytisch | Näherungsansatz (durch (C.23) und infolge $w_0 \ll u_0$) | Proportionalitätsfaktor |
|------------|---|--|-------------------------|
| X_u | $X_{,u}\tilde{m}_{11} + M_{,u}\tilde{m}_{15}$ | $X_{,u}/\mathbf{m}_x$ | ρu_0 |
| X_w | $X_{,w}\tilde{m}_{11} + M_{,w}\tilde{m}_{15}$ | $M_{,w}\tilde{m}_{15}$ | ρu_0 |
| X_q | $\tilde{m}_{11}(X_{,q} - mw_0) + \tilde{m}_{15}(M_{,q} - mzw_0)$ | $M_{,q}/I_{yy}$ | ρu_0 |
| X_θ | $X_{,\theta}\tilde{m}_{11} + M_{,\theta}\tilde{m}_{15}$ | $-M_{,\theta}zm/(\mathbf{m}_x I_{yy})$ | - |
| Y_v | $Y_{,v}\tilde{m}_{22} + N_{,v}\tilde{m}_{26}$ | $Y_{,v}\tilde{m}_{22}$ | ρu_0 |
| Y_p | $mw_0\tilde{m}_{22} + \tilde{m}_{24}(L_{,p} - mzw_0)$ | $L_{,p}\tilde{m}_{24}$ | ρu_0 |
| Y_r | $\tilde{m}_{22}(Y_{,r} - mu_0) + mzu_0\tilde{m}_{24} + N_{,r}\tilde{m}_{26}$ | $\tilde{m}_{22}(Y_{,r} - mu_0) + mzu_0\tilde{m}_{24}$ | ρu_0 |
| Y_ϕ | $Y_{,\phi}\tilde{m}_{22} + L_{,\phi}\tilde{m}_{24} + N_{,\phi}\tilde{m}_{26}$ | $L_{,\phi}\tilde{m}_{24}$ | - |
| Z_u | $Z_{,u}\tilde{m}_{33}$ | $Z_{,u}/\mathbf{m}_z$ | ρw_0 |
| Z_w | $Z_{,w}\tilde{m}_{33}$ | $Z_{,w}/\mathbf{m}_z$ | ρu_0 |
| Z_q | $(Z_{,q} + mu_0)\tilde{m}_{33}$ | $(Z_{,q} + mu_0)/\mathbf{m}_z$ | ρu_0 |
| Z_θ | $Z_{,\theta}\tilde{m}_{33}$ | ≈ 0 | - |
| L_v | $Y_{,v}\tilde{m}_{24} + N_{,v}\tilde{m}_{46}$ | keine | ρu_0 |
| L_p | $mw_0\tilde{m}_{24} + \tilde{m}_{44}(L_{,p} - mzw_0)$ | $\tilde{m}_{44}L_{,p}$ | ρu_0 |
| L_r | $\tilde{m}_{24}(Y_{,r} - mu_0) + mzu_0\tilde{m}_{44} + N_{,r}\tilde{m}_{46}$ | $\tilde{m}_{24}(Y_{,r} - mu_0) + mzu_0\tilde{m}_{44}$ | ρu_0 |
| L_ϕ | $Y_{,\phi}\tilde{m}_{24} + L_{,\phi}\tilde{m}_{44} + N_{,\phi}\tilde{m}_{46}$ | $L_{,\phi}/I_{xx}$ | - |
| M_u | $X_{,u}\tilde{m}_{15} + M_{,u}\tilde{m}_{55}$ | $-X_{,u}zm/(\mathbf{m}_x I_{yy})$ | ρu_0 |
| M_w | $X_{,w}\tilde{m}_{15} + M_{,w}\tilde{m}_{55}$ | $M_{,w}/I_{yy}$ | ρu_0 |
| M_q | $\tilde{m}_{15}(X_{,q} - mw_0) + \tilde{m}_{55}(M_{,q} - mzw_0)$ | $M_{,q}/I_{yy}$ | ρu_0 |
| M_θ | $X_{,\theta}\tilde{m}_{15} + M_{,\theta}\tilde{m}_{55}$ | $M_{,\theta}/I_{yy}$ | - |
| N_v | $Y_{,v}\tilde{m}_{26} + N_{,v}\tilde{m}_{66}$ | $N_{,v}/I_{zz}$ | ρu_0 |
| N_p | $mw_0\tilde{m}_{26} + \tilde{m}_{46}(L_{,p} - mzw_0)$ | $\tilde{m}_{46}L_{,p}$ | ρu_0 |
| N_r | $\tilde{m}_{26}(Y_{,r} - mu_0) + mzu_0\tilde{m}_{46} + N_{,r}\tilde{m}_{66}$ | keine | ρu_0 |
| N_ϕ | $Y_{,\phi}\tilde{m}_{26} + L_{,\phi}\tilde{m}_{46} + N_{,\phi}\tilde{m}_{66}$ | $L_{,\phi}\tilde{m}_{46}$ | - |

Tabelle C.2 Die Elemente der Systemmatrix A

C.2.3 Die Eingangsmatrix B

Die Eingangsmatrix B berechnet sich nach Gleichung (C.3) über die Beziehung $B = M^{-1}F_u$. Die resultierende Matrix beträgt

$$B = \begin{bmatrix} 0 & X_{,\eta}\tilde{m}_{11} + M_{,\eta}\tilde{m}_{15} & 0 & X_{,\delta_T}\tilde{m}_{11} + M_{,\delta_T}\tilde{m}_{15} \\ Y_{,\zeta}\tilde{m}_{22} + N_{,\zeta}\tilde{m}_{26} & 0 & L_{,\xi}\tilde{m}_{24} & N_{,\delta_T}\tilde{m}_{26} \\ 0 & Z_{,\eta}\tilde{m}_{33} & 0 & 0 \\ Y_{,\zeta}\tilde{m}_{24} + N_{,\zeta}\tilde{m}_{46} & 0 & L_{,\xi}\tilde{m}_{44} & N_{,\delta_T}\tilde{m}_{46} \\ 0 & X_{,\eta}\tilde{m}_{15} + M_{,\eta}\tilde{m}_{55} & 0 & X_{,\delta_T}\tilde{m}_{15} + M_{,\delta_T}\tilde{m}_{55} \\ Y_{,\zeta}\tilde{m}_{26} + N_{,\zeta}\tilde{m}_{66} & 0 & L_{,\xi}\tilde{m}_{46} & N_{,\delta_T}\tilde{m}_{66} \end{bmatrix}. \quad (C.25)$$

Unter Berücksichtigung der Größenordnung der Kraftderivative und der Massenterme kann diese Matrix auf die dominierenden Terme reduziert werden und lautet dann

$$B \approx \begin{bmatrix} 0 & \approx 0 & 0 & X_{,\delta_T}/m_x \\ Y_{,\zeta}/m_y & 0 & L_{,\xi}zm/m_y I_{xx} & \approx 0 \\ 0 & Z_{,\eta}/m_z & 0 & 0 \\ \approx 0 & 0 & L_{,\xi}/I_{xx} & \approx 0 \\ 0 & M_{,\eta}/I_{yy} & 0 & M_{,\delta_T}/I_{yy} \\ N_{,\zeta}/I_{zz} & 0 & \approx 0 & \approx 0 \end{bmatrix}. \quad (C.26)$$

Für die aerodynamischen Kraft- und Momentenderivative der Steuerflächenauslenkungen gelten nach Gleichung (C.10) bis (C.15) die Proportionalitätsbeziehungen

$$Y_{,\zeta}, Z_{,\eta}, L_{,\xi}, M_{,\eta}, N_{,\zeta} \sim \rho u_0^2.$$

Die Schubderivative verlaufen entsprechend der Charakteristik des Schubmodells. In erster Näherung gilt beispielsweise für Propellerantriebe $X_{,\delta_T}, M_{,\delta_T} \sim 1/(u_0 h_0)$, mit Flughöhe h_0 .

C.2.4 Lineare Differentialgleichungen der Lagewinkel und Flughöhe

Die linearen Differentialgleichungen der Lagewinkel ϕ und θ sowie der Flughöhe z gehorchen folgenden Beziehungen

$$\dot{\phi} = p, \dot{\theta} = q \text{ und } \dot{z} = w - u_0\theta. \quad (C.27)$$

Lebenslauf

Name: Bernhard Gottfried Kämpf
 Eltern: Roland Kämpf und Elisabeth Kämpf (geb. Hediger)
 Geburtsdatum: 27. Januar 1967
 Geburtsort: Sigriswil, Schweiz
 Staatsangehörigkeit: Schweiz
 Familienstand: verheiratet, 3 Kinder

Schulbildung

1974 - 1979 Grundschole Rupperswil
 1979 - 1983 Bezirksschule Aarau
 1983 - 1986 Realabteilung Gymnasium Aarau
 Abschluss: Maturität
 1987 schweizerischer Wehrdienst

Studium

1987 - 1992 Maschinenbau
 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich
 Schwerpunkte: Mechanik und Regelungstechnik
 Abschluss: Diplom-Ingenieur ETH

Berufsweg

1992 - 1999 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Flugmechanik
 und Flugregelung der Universität Stuttgart
 seit 1998 CargoLifter Development GmbH, Krausnick,
 Leitung Berechnungsabteilung,
 Abteilungsleiter Flight Sciences (Flugphysik)

