

Divergenzkorrekturen und asymptotische Untersuchungen bei der numerischen Simulation idealer magnetohydrodynamischer Strömungen

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie der Universität Stuttgart zur
Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Dipl.-Math. Friedemann Kemm
geb. in Bruchsal

Hauptberichter: Prof. Dr. Claus-Dieter Munz
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Rupert Klein

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Dezember 2005

Institut für Aerodynamik und Gasdynamik
Universität Stuttgart
2006

Zusammenfassung

Viele Plasmaströmungen sowohl in der Astro- und Geophysik als auch in technischen Anwendungen lassen sich durch die magnetohydrodynamischen Gleichungen (MHD) beschreiben. Darunter fallen der Dynamoeffekt in der Sonne, die Sonnenoberfläche, der Sonnenwind, der Dynamoeffekt in der Erde, das Plasma im Fusionsreaktor, magnetohydrodynamisches Rühren und viele andere. Dies ist freilich ein weites Spektrum und umfasst dementsprechend auch ein großes Spektrum an Strömungsregimen. Während die terrestrischen Anwendungen alle inkompressibel sind, trifft man in der Astrophysik hauptsächlich kompressible Strömungen an. Kann man in der Astrophysik die Reibung und den elektrischen Widerstand meist vernachlässigen (ideale MHD), so ist in den terrestrischen Anwendungen gerade das Gegenteil der Fall. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf den kompressiblen idealen Fall, d. h. ohne den Einfluss von Reibung und elektrischem Widerstand.

Es werden Lösungsansätze für zwei wesentliche Problembereiche bei der Simulation kompressibler idealer magnetohydrodynamischer Strömungen entwickelt:

- Schwach kompressible Strömungen,
- Auftreten magnetischer Monopole in der numerischen Lösung.

Für den erstgenannten Problembereich wird ein Ansatz aus der schwach kompressiblen Gasdynamik [21] für die MHD adaptiert. Es werden Methoden der asymptotischen Analyse verwendet, um den Übergang von der Kompressibilität zur Inkompressibilität zu untersuchen. Aufgrund der Ergebnisse der Analyse wurden Vorschläge für numerische Verfahren entwickelt. Diese beruhen auf einer Aufspaltung des Differentialgleichungssystems in einen langsamen Teil, der immer hyperbolisch bleibt, und einen schnellen, der beim Grenzübergang elliptisch entartet. In dieser Arbeit wird nachgewiesen, daß sich im Fall kleiner Machzahlen die Konstruktion eines Verfahrens aus der schwach kompressiblen Gasdynamik, was das schnelle Teilsystem anbelangt, für die MHD direkt übernehmen läßt. Damit ist ein Tor für die effiziente Simulation einer großen Bandbreite astrophysikalischer Phänomene aufgestoßen. Das Verfahren wurde bereits in der Praxis aufgenommen [31] und an ersten komplexen Problemen validiert. Ein Teil der Ergebnisse wird auch in dieser Arbeit besprochen. Nun wird eine MHD-Strömung aber auch dann schwach kompressibel, wenn die Alfvenzahl klein wird. Die Rolle, die bei kleinen Machzahlen dem Druck zufiel wird nun vom Quadrat des Magnetfelds übernommen. Damit hat man es nicht mehr mit einer skalaren Größe, sondern mit einem Vektorfeld zu tun. Die von Klein für die Gasdynamik vorgeschlagene Analysis läßt sich hier nicht mehr umsetzen. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß

auch für den Fall kleiner Alfvenzahlen sowohl für den eindimensionalen Fall als auch für zweidimensionale Spezialfälle mithilfe der Mehrskalenanalyse der Übergang zur Inkompressibilität untersucht werden kann. Hieraus wird jeweils die Konstruktion eines numerischen Verfahrens abgeleitet. Dieses kann auch als Vorlage für Verfahren dienen, welche allgemeine dreidimensionale Strömungen kleiner Alfvenzahl approximieren, aber der gewählten Analysis nicht zugänglich sind. Damit ist ein Weg gefunden, Phänomene zu simulieren, für die es bislang keine numerischen Ansätze gab.

Für das Problem magnetischer Monopole werden in der vorliegenden Arbeit Methoden konstruiert, welche die Divergenzbedingung an das Magnetfeld zu einem inhärenten Teil des Evolutionsoperators machen. Hierfür wird der GLM-Ansatz für das elektrische Feld bei den Maxwellgleichungen [29] auf die MHD übertragen und um eine neue, die gemischte GLM-Korrektur, erweitert. Es gelingt, ein allgemeines Modell aufzustellen, das neben der GLM-Korrektur auch die Powell-Korrektur [32] als Spezialfall enthält. Überdies lassen sich verbesserte Versionen der Powell-Korrektur angeben. Der Ansatz wird anhand eines reduzierten Testsystems entwickelt und ist so allgemein, daß er wiederum auf die Maxwellgleichungen angewandt werden kann. Für die zu wählenden Parameter werden auf analytischem Wege Schätzungen hergeleitet, welche die Wirksamkeit der jeweiligen Divergenzkorrekturmethode optimieren. Die theoretischen Vorhersagen werden mittels numerischer Tests sowohl für das Testsystem als auch für die volle MHD verifiziert. Die gewonnenen neuen Korrekturverfahren gliedern sich in GLM-Methoden und Transportmethoden.

Bei GLM-Methoden werden die Divergenzfehler je nach Ausprägung ausgelöscht (elliptisch), gedämpft (parabolisch), wegtransportiert (hyperbolisch) oder wegtransportiert und gedämpft (gemischt). Betrachtet man die Helmholtz-Zerlegung des Magnetfelds in eine Rotation (divergenzfreier Anteil) und einen Gradienten (rotationsfreier Anteil), so wirken die GLM-Methoden konstruktionsbedingt nur auf den rotationsfreien Anteil und lassen den divergenzfreien Anteil unberührt. Bei den Transportmethoden werden die Divergenzfehler entweder mit der Strömungsgeschwindigkeit (Powell) oder einem künstlichen Geschwindigkeitsfeld aus dem Rechengebiet transportiert. Diese Methoden sind in ihrer Wirkung im Allgemeinen schwächer als die hyperbolische oder gemischte GLM-Korrektur. Allerdings bieten sie den Vorteil, ohne zusätzliche Gleichung auszukommen. Hier ist im Gegensatz zu den GLM-Methoden durch die Konstruktion nicht garantiert, daß der divergenzfreie Anteil des Magnetfelds unberührt bleibt.

Besonders die hier neu entwickelte gemischte GLM-Korrektur hat bereits breiten Eingang in die numerische Astrophysik, insbesondere Simulationen in der Sonnenphysik gefunden. Gerade bei komplexen Simulationen mit Gitteradaption liefert sie stark verbesserte Resultate bei bedeutend geringerem Rechenaufwand.

Abstract

In astrophysics and geophysics, but also for technical applications, many plasma flows, such as the dynamo of the sun and the earth, the surface of the sun, the solar wind, magnetohydrodynamical stirring, the plasma in the nuclear fusion reactor and so on, can be described by the equations of Magneto-Hydro-Dynamics (MHD). The different physical phenomena result in a large number of flow regimes. For terrestrial applications these are always incompressible. For astrophysical applications, however, flow regimes are mostly compressible. While in astrophysics viscosity and electrical resistance are negligible (ideal MHD), they play a dominant role in terrestrial applications. The focus of this thesis is on ideal compressible MHD.

We give new solutions to two major problems encountered in the simulation of compressible ideal MHD flows.

- Weakly compressible flows
- Magnetic monopoles occurring in the numerical solution

For the first problem, the simulation of weakly compressible flows, we adapt an approach from gas dynamics [21] in order to solve the MHD equations. Asymptotic analysis is applied to investigate the transition from compressible to incompressible flows. Using the results of this analysis, a numerical scheme based on an operator splitting is constructed. The system of differential equations is split into a part representing slow wave speeds and another part representing fast wave speeds. The first one stays hyperbolic also in the incompressible limit. The second one shows elliptic degeneracy in the limit. Results of this thesis show that in the case of small Mach number it is possible to adapt the construction of a numeric scheme from gas dynamics directly. This opens up the way to efficient simulations of a broad range of astrophysical phenomena. The scheme has been already implemented [31] and validated in practice for various complex problems. These results are partially discussed in this thesis.

Also for low Alfvén number the flow becomes weakly compressible. The role played by the pressure in the low Mach number case is now played by the square of the magnetic field. In contrast to the pressure this is no scalar variable but a vector field. Therefore it is not possible to apply the same analysis as we did for gas dynamics. Here we show that for one dimensional situations and also for certain two dimensional cases it is still possible to employ multiscale asymptotics in order to investigate the transition from compressible to incompressible flows. This gives rise for the construction of a numerical scheme based on an operator splitting. The splitting shows up some similarities with the splitting for low Mach numbers and can also be applied to the full

three dimensional case. In this way we find an approach to the numerical treatment of phenomena which couldn't be simulated reasonably up to now.

For the Problem of magnetic monopoles emerging in numerical simulations we construct methods to make the divergence condition an inherent part of the evolution operator. Therefore we transfer the GLM approach originally developed for the Maxwell equations [29] to the case of MHD. We extend it to a general model, that contains GLM and Powell correction [32] as well. This is used to develop enhanced versions, both of the GLM and the Powell correction. The new approach is developed by using a simplified system. It is a general approach and can therefore be also applied to the Maxwell equations.

The effect of the GLM method on the divergence error is effacement (elliptic correction), damping (parabolic correction), transport (hyperbolic correction) or transport together with damping (mixed type correction). The Helmholtz-decomposition decomposes a vector field into a divergence free part and a rotation free part. By construction GLM methods only affect the rotation free part of the magnetic field. The divergence free part is unaltered. Transport methods convect the error away either with the flow velocity (Powell correction) or some artificial velocity field. The effect of these methods is weaker than the effect of the hyperbolic or mixed type GLM correction. The advantage of the methods is that we do not need an additional equation in the MHD system. In contrast to the GLM methods transport methods affect not only the rotation free part of the magnetic field but also the divergence free part.

The mixed type GLM method, developed in this thesis, has already found a broad reception in numerical astrophysics, especially in solar physics. Used in complex simulations including grid adaption it provides much enhanced quality of results together with much lower computational cost.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
1.1	Schwach kompressible MHD-Strömungen	10
1.2	Divergenzkorrekturen	11
1.3	Zielstellung	13
1.4	Aufbau der Arbeit	14
2	Die MHD-Gleichungen	17
2.1	Die Gleichungen in primitiven Variablen	17
2.1.1	Zweidimensionale Spezialfälle	18
2.1.2	Eindimensionale Gleichungen	19
2.2	Die Gleichungen in Erhaltungsform	21
2.3	Das Eigensystem	22
3	Schwach kompressible MHD-Strömungen	25
3.1	Problemstellung	25
3.2	Das analytische Handwerkszeug: Asymptotische Entwicklungen	27
3.2.1	Die Begrifflichkeiten	27
3.2.2	Der Spezialfall	28
3.3	Der Ausgangspunkt: die entdimensionalisierten Gleichungen	30
3.4	Entwicklung für kleine Machzahlen	31
3.4.1	Die Analysis	31
3.4.2	Die hyperbolisch- elliptische Aufspaltung	35
3.4.3	Das numerische Verfahren	37
3.5	Entwicklung für kleine Alfvenzahlen	39
3.5.1	Die Analysis	39
3.5.2	Die hyperbolisch-elliptische Aufspaltung	49
3.5.3	Das numerische Verfahren	53
3.5.4	Eine mögliche Vereinfachung bei skalarem Magnetfeld	59
3.6	Numerische Ergebnisse	61
3.6.1	Inkompressible aufsteigende Blase bei Alfvenzahl Fünf	61
4	Divergenzkorrekturen	65
4.1	Problemstellung	65
4.2	Entstehung der Divergenzfehler	67
4.3	Ein einfaches Testbeispiel	69

4.3.1	Die Fehlermodellierung im einfachen Testbeispiel	69
4.3.2	Analytische Untersuchungen	76
4.3.3	Numerische Untersuchungen	84
4.3.4	Analytische Überlegungen zur Wahl der Parameter	92
4.4	Korrekturen in den Maxwell- und MHD-Gleichungen	102
4.4.1	Die Maxwell-Gleichungen	102
4.4.2	Die MHD-Gleichungen	105
5	Zusammenfassung und Ausblick	117
A	Ableitungen ebener Wellen	119

1 Einleitung

Beim Stichwort *Strömungsmechanik* ist man geneigt, zunächst nur an die Hydrodynamik und Gasdynamik zu denken. Strömungen also, die sich rein mechanisch und thermodynamisch erfassen lassen. Zu unterscheiden hat man hier nur, ob die Strömung inkompressibel (Hydrodynamik) oder kompressibel (Gasdynamik) ist, bzw., ob man die Reibung vernachlässigen kann oder nicht. Tatsächlich lassen sich damit auch viele technische Anwendungen, etwa Umströmung von Flugkörpern, Strömungen in Wärmekraftmaschinen etc., ausreichend beschreiben. Jedoch gibt es einige Klassen von Anwendungen, für die dieses nicht mehr genügt. Es handelt sich um Strömungen von Fluiden, die elektrisch leitfähig sind und daher auch mit elektromagnetischen Feldern wechselwirken. Für diesen Teil der Strömungsdynamik hat sich der Begriff der *Plasmaströmungen* eingebürgert. Läßt sich die Strömung als Kontinuum beschreiben, ist die sogenannte *Magnetohydrodynamik* ein Standardmodell, entsprechend den Navier-Stokes-Gleichungen in der Hydro- bzw. Gasdynamik. Die magnetohydrodynamischen Gleichungen finden ihre Anwendung insbesondere

- in der **Astrophysik**: Die wichtigsten Anwendungen sind hierbei
 - Strömungen auf der Sonnenoberfläche oder im Sonneninneren. Es lassen sich damit Flußröhren, coronare Massenausstöße, der Dynamoeffekt und einige weitere Phänomene simulieren und studieren.
 - Der Sonnenwind, der auch einige Auswirkungen auf die Erde hat.
 - Strahlströmung, räumlich begrenzte Strömungen extrem hoher Geschwindigkeit (Jets).
- in der **Meteorologie**: Dabei geht es vor allem darum, den Einfluß des Sonnenwindes auf die Vorgänge in der Ionosphäre und Atmosphäre zu untersuchen.
- in der **Geophysik**. Der Dynamo im Erdinneren und das Magnetfeld der Erde erklären sich durch magnetohydrodynamische Vorgänge.
- beim **magnetohydrodynamischen Rühren** von Metallschmelzen: Kühlt eine Metallschmelze ab, so härtet sie von außen her aus. Um gute Materialeigenschaften des Gußteils zu erreichen, ist es nützlich, die Schmelze während des Aushärtens zu rühren. Auf mechanischem Wege ist dies naturgemäß nicht möglich. Hier nutzt man die elektrische Leitfähigkeit der Schmelze aus, um mit magnetohydrodynamischen Effekten ein Rühren im Inneren zu erreichen.
- beim **Fusionsreaktor**: Um eine Kernfusion zu erreichen bedarf es insbesondere extrem hoher Temperaturen. Bei diesen gehen die chemischen Bindungen innerhalb des Gases verloren, Elektronen werden frei, das Fluid wird leitfähig. Eine

weitere Auswirkung der hohen Temperaturen ist die, daß sich das Plasma in keinem mechanischen Behältnis mehr festhalten läßt. Dieses würde durch die Hitze sofort zerstört. Man schließt das Plasma mittels des magnetohydrodynamischen Drucks innerhalb eines Vakuums in einer sogenannten Plasmaflasche ein.

Eine Beschreibung dieser und weiterer Anwendungen der Magnetohydrodynamik findet man z. B. in [4].

Neben der Unterscheidung in kompressibel / inkompressibel und reibungsbehaftet / reibungsfrei kommt nun die Unterscheidung resistiv / nichtresistiv hinzu, je nachdem man den elektrischen Widerstand berücksichtigen muß oder vernachlässigen kann. Beim magnetohydrodynamischen Rühren und der Laminarisierung von Strömungen spielt der elektrische Widerstand eine große Rolle und kann nicht vernachlässigt werden. Bei vielen astrophysikalischen Anwendungen dagegen ist er so gering, daß man nichtresistiv rechnen kann. Dort spielt meist auch die Reibung keine wesentliche Rolle. Situationen, in denen man sowohl den elektrischen Widerstand als auch die Reibung vernachlässigen kann, nennt man *ideale Magnetohydrodynamik* oder kurz *ideale MHD*. Auf diese wird sich die vorliegende Arbeit beschränken. Während das Plasma im Fusionsreaktor wie bei den meisten terrestrischen Anwendungen auch als inkompressibel betrachtet werden kann, ist es in den oben genannten astrophysikalischen Anwendungen kompressibel (Jets, Sonnenwind, Sonnenoberfläche) bzw. schwach kompressibel (Sonnendynamo), das heißt in der Nähe des kompressibel- inkompressiblen Grenzübergangs.

Inhalt dieser Arbeit sind zwei Aspekte bei der Konstruktion numerischer Verfahren:

- Numerische Methoden für schwach kompressible MHD.
- Ein Problem der voll kompressiblen MHD: Das Auftreten unphysikalischer magnetischer Ladungen in der numerischen Simulation sowie deren Korrektur.

1.1 Schwach kompressible MHD-Strömungen

Eine Strömung heißt inkompressibel, wenn sie die Volumenerhaltung erfüllt. Das bedeutet, daß ihr Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei ist. Damit wird eine anfängliche Dichteverteilung nur noch passiv transportiert. Die Volumenerhaltung ist für Strömungen räumlich und zeitlich konstanter Dichte trivialerweise erfüllt. Dies sieht man an der quasilinearen Form der Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -(\nabla \cdot \mathbf{v})\rho .$$

Dabei bezeichnet ρ die Dichte des Fluids und \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld. Schwach kompressibel nennt man eine Strömung, wenn sich ihr physikalischer Zustand in einem Bereich bewegt, der die Volumenerhaltung zwar nicht erfüllt, aber auch keine der typischen kompressiblen Phänomene wie etwa Stoßwellen kennt. Schwache Kompressibilität ist dadurch gekennzeichnet, daß die Strömungsgeschwindigkeit im Vergleich

zu anderen charakteristischen Geschwindigkeiten sehr klein wird. Das Differentialgleichungssystem wird steif. In der reinen Strömungsmechanik läßt sich dies daran erkennen, daß die Machzahl M , der Quotient aus Strömungs- und Schallgeschwindigkeit, sehr klein wird. Die Schallgeschwindigkeit ist bestimmt aus der Dichte, einer Gaskonstanten und dem Gasdruck. Da in der Magnetohydrodynamik die Wellengeschwindigkeiten naturgemäß auch vom Magnetfeld abhängen, kommt hier eine weitere Kennzahl ins Spiel, die Alfvenzahl Av , das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Alfvingeschwindigkeit. Die Alfvingeschwindigkeit wiederum ist bestimmt aus Dichte, Gaskonstante und magnetischem Druck. Den Grenzübergang zur Inkompressibilität erhält man, indem man eine der beiden Kennzahlen, Machzahl bzw. Alfvenzahl gegen Null streben läßt.

Beruhten bisherige Zugänge zur Numerik schwach kompressibler Gasströmungen zumeist auf Präkonditionierungen im Zusammenhang mit kompressiblen Verfahren und waren oft auf stationäre Strömungen beschränkt [36, 37], so gelang es unlängst Klein, Munz und anderen [21, 28], numerische Verfahren auf der Basis asymptotischer Analyse zu finden, die ohne Präkonditionierungen auskommen und auf natürlicher Weise die Behandlung instationärer Strömungen erlauben. Für die schwach kompressible Magnetohydrodynamik waren bisher noch keine Verfahren bekannt. In Kapitel 3 dieser Arbeit wird der Ansatz aus [28] auf die MHD übertragen. Dabei wird unterschieden zwischen dem Fall, in dem die Machzahl klein wird, und dem Fall, in dem die Alfvenzahl klein wird. Für ersteren wird vorgeführt, daß im resultierenden numerischen Verfahren die Verfahrensteile, die zeitimplizit sind und die meiste Rechenzeit benötigen, direkt aus dem gasdynamischen Verfahren übernommen werden können. Im Fall kleiner Alfvenzahl läßt sich die Konstruktion nur für einige Spezialfälle durchführen. Schon für die allgemeine 1d-Situation wächst auch der Aufwand im numerischen Verfahren beträchtlich. Am Ende von Kapitel 3 findet sich ein Abschnitt 3.6 über erste numerische Tests für schwach kompressible MHD-Strömungen kleiner Machzahl.

1.2 Divergenzkorrekturen

In der MHD hat man neben den Evolutionsgleichungen für Dichte, Impuls, Magnetfeld und Energie noch eine zusätzliche elliptische Bedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

Diese bedeutet nichts anderes als, daß es keine magnetischen Monopole, keine magnetischen Ladungen gibt. Normalerweise würde es reichen, diese im Anfangszustand des Magnetfelds sicherzustellen, ist doch die Evolution des Magnetfelds divergenzfrei. Leider ist dies nur für die exakte Evolution garantiert. Für die numerische Evolution des Magnetfelds läßt sich dies nur mit großem Aufwand oder starken Einschränkungen an die Diskretisierung erfüllen. Das Auftreten magnetischer Ladungen in der numerischen Simulation ist ein typisches Problem kompressibler Strömungen. In Abbildung 1.1 ist eine numerische Lösung dargestellt, bei der am Anfang auf der horizontalen und vertikalen Symmetrieachse eine Unstetigkeit war. Dargestellt ist die Divergenz des Ma-



Abbildung 1.1: Entstehung von Divergenzfehlern in kompressiblen MHD-Rechnungen

gnetfelds. Man sieht deutlich, daß überall dort, wo Wellen durchgewandert sind, Divergenzfehler entstanden sind. Eine Erklärung für die Entstehung von Divergenzfehlern wird in Abschnitt 4.2 gegeben.

Nun ist klar, daß nichtphysikalische magnetische Ladungen auch unphysikalische Effekte in der Simulation hervorrufen [7, 6, 2]. Dies stellt ein fundamentales Problem bei der numerischen Simulation dar. Die in der Vergangenheit meist verwendeten Vorgehensweisen waren neben speziellen Diskretisierungen, die eine divergenzfreie Evolution des Magnetfelds garantieren, Projektionsmethoden und die sogenannte Powell-Korrektur [32]. Bei ersteren wird das Magnetfeld jeweils nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten mittels einer Hodge-Projektion auf ein divergenzfreies Feld projiziert. Zugrunde liegt die Helmholtz-Zerlegung, die es erlaubt, ein beliebiges Vektorfeld als Summe einer Rotation und eines Gradienten zu schreiben. Das Ganze führt auf die Lösung einer elliptischen Differentialgleichung. Bei der Powell-Korrektur wird versucht, die Fehler mit der Strömung aus dem Rechengebiet zu transportieren. Dabei ist die Projektion sehr rechenzeitintensiv, die Powell-Korrektur in ihrer Korrekturwirkung recht schwach. Nachdem bei den Maxwellgleichungen ähnliche Probleme für die Ladungserhaltung und damit die Divergenz des elektrischen Feldes auftreten, bietet es sich an, die dort verwendeten Methoden mit in Betracht zu ziehen. In [29] stellen Munz, Schneider, Sonnendrücker und Voß einen neuen Ansatz für die Maxwellgleichungen vor. Dieser wird in Kapitel 4 verallgemeinert und auf die MHD-Gleichungen übertragen. Der Ansatz ist nun so allgemein, daß er auch die Powell-Korrektur umfaßt und ihr Verhalten erklären kann. Überdies lassen sich innerhalb dieses Ansatzes

Konzepte finden, welche die Korrektur aus [29] in ihrer Wirkung nochmals verbessern.

Der neue erweiterte Ansatz basiert auf einer Erweiterung der Gleichungen um künstliche additive Terme. Der Einfachheit halber wird hierfür ein stark reduziertes Testmodell verwendet, das aber alle Eigenschaften der MHD-Gleichungen, die im Bezug zum Divergenzproblem stehen, widerspiegelt. Diese Terme werden nun so modelliert, daß zum einen höchstens eine neue Zustandsvariable dazukommt, und zum anderen die Divergenz des Magnetfelds in der Zeit gegen Null strebt. Wählt man einen algebraischen Ansatz, so ergibt sich eine Verallgemeinerung der Powell-Korrektur. Modelliert man die neuen Terme differentiell, so ergibt sich die in [29] vorgestellte GLM-Korrektur. Dabei wird jeweils deutlich, wo sich Erweiterungs- und Verbesserungsmöglichkeiten finden. Es werden analytische Untersuchungen zum Verhalten der Divergenzfehler bei den jeweiligen Methoden angestellt. Im Abschnitt über numerische Tests 4.3.3 werden die analytischen Vorhersagen experimentell bestätigt. In Abschnitt 4.3.4 werden analytische Betrachtungen zur Wahl der freien Parameter angestellt. Danach wird die Vorgehensweise auf die Maxwell- und MHD-Gleichungen übertragen. Am Ende des Kapitels stehen die numerischen Ergebnisse.

1.3 Zielstellung

In dieser Arbeit werden, zwei der wesentlichen Probleme bei der Simulation kompressibler MHD-Strömungen zu behandeln:

- Schwach kompressible Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, daß charakteristische Geschwindigkeiten stark unterschiedlicher Größenordnung auftreten. Das Problem wird steif. Wählt man eine explizite Diskretisierung in der Zeit, so hat man es einerseits mit sehr starken Einschränkungen an den Zeitschritt zu tun, was die Rechenkosten hochtreibt, andererseits aber auch mit stark unterschiedlichem Dämpfungsverhalten für die Phänomene, die den weit auseinanderliegenden charakteristischen Geschwindigkeiten zuzuordnen sind. Bei einer impliziten Diskretisierung in der Zeit ist der Rechenaufwand grundsätzlich hoch. Das Problem des unterschiedlichen Dämpfungsverhaltens kann möglicherweise etwas abgeschwächt werden. Es werden im allgemeinen schnelle und langsame charakteristische Geschwindigkeiten in Bezug auf das Dämpfungsverhalten die Rollen tauschen. Doch aus der Welt schaffen läßt sich das Problem nicht.
- Die Divergenz des Magnetfelds sollte immer Null sein. Sonst enthält die Simulation magnetische Ladungen. Dies wäre aber eine unphysikalische Situation, die auch unphysikalische Kräfte auf das Fluid ausübt. Die Ergebnisse werden wertlos. Jedoch neigen insbesondere kompressible Strömungen bei Standarddiskretisierungen stark dazu, solche Fehler in der Simulation zu provozieren. Ansätze für Verfahren, welche die Entstehung magnetischer Ladungen verhindern, stellen eine starke Einschränkung an die Diskretisierung dar. Man muß oft auf andere wünschenswerte Verahreigenschaften verzichten. Außerdem erfordern sie alle zusätzlichen Rechenaufwand. Die gängige Methode, das Magnetfeld alle paar

Zeitschritte in den Raum der divergenzfreien Felder zu projizieren ist sehr aufwendig, die in [32] angebotene kostengünstige Powell-Korrektur in den allermeisten Fällen zu schwach.

Um dem ersten Problem zu begegnen wird der in [28, 21] für die schwach kompressible Gasdynamik entwickelte und erfolgreich zur Verwendung gebrachte Ansatz auf die MHD übertragen. Dabei galt es zunächst zu untersuchen, inwieweit sich die zugrunde liegende Analysis auf den Fall kleiner Mach- bzw. Alfvenzahlen bei der MHD übersetzen läßt. Auch sollte untersucht werden, inwiefern es möglich ist, Verfahrensteile aus dem für die schwach kompressible Gasdynamik entwickelten MPV-Code (**M**ultiple **P**ressure **V**ariables) für die MHD direkt zu übernehmen.

Um dem zweiten Problem begegnen zu können, war das Ziel, die in [27, 29] vorgestellte und erfolgreich zur Anwendung gebrachte GLM-Korrektur (**G**eneralized **L**agrange **M**ultiplier) für die elektrische Ladungserhaltung und damit die Divergenz des elektrischen Felds bei den Maxwellgleichungen auf die MHD zu übertragen. Dabei wird es bei den MHD-Gleichungen um Divergenzkorrekturen für das magnetische Feld gehen. Es soll nach Möglichkeiten gesucht werden, den GLM-Ansatz zu verallgemeinern und daraus ein effizientes Korrekturverfahren zu entwickeln.

1.4 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile:

- Eine Einführung in die idealen kompressiblen MHD-Gleichungen mit ihrer Struktur und ihrem Eigensystem.
- Die Untersuchung der schwach kompressiblen MHD sowohl für kleine Mach- als auch für kleine Alfvenzahlen mit Vorschlägen für numerische Verfahren sowie ersten numerischen Ergebnissen.
- Ein Kapitel über Divergenzkorrekturen für ein vereinfachtes System, die Maxwell- und die MHD-Gleichungen.

Gleichungen:

Die Gleichungen werden in primitiven und Erhaltungsvariablen eingeführt. Es werden ein- und zweidimensionale Spezialfälle vorgestellt sowie die Eigenwerte und mögliche Entartungsfälle angegeben.

Schwach kompressible Strömungen:

Im Kapitel über die schwach kompressible MHD wird als erstes das analytische Handwerkszeug bereitgestellt. Es werden asymptotische Ein- und Mehrskalenentwicklungen mit ihren wesentlichen Eigenschaften eingeführt. Die in dieser Arbeit benutzte Zweiskalenentwicklung wird behandelt sowie die Voraussetzungen an die Entwicklungsfunktionen, die man machen muss, um die folgenden Betrachtungen und Konstruktionen erfolgreich durchführen zu können. Auch erste allgemeine Schlußfolgerungen, die im Weiteren Verwendung finden, werden hergeleitet.

Danach wird in einem kurzen Abschnitt die auf die verwendete Entdimensionalisierung der Gleichungen eingegangen. Dort tauchen zum ersten Mal die globale Mach- und Alfvenzah auf. Es wird gezeigt, in welchem Zusammenhang sie zur Steifigkeit des Problems stehen und weshalb sie sich als Parameter für eine asymptotische Analyse anbieten.

Daran schließt sich die Betrachtung für kleine Machzahlen an. Hierbei wird zunächst die Analysis durchgeführt. Aufgrund dieser wird der Grenzfall für verschwindende Machzahl betrachtet und eine Interpretation der vorkommenden Druckterme gegeben. Der Grenzfall motiviert wiederum die Aufspaltung des Gleichungssystem in einen Anteil, der auch in der Grenze hyperbolisch bleibt, und einen, der dort elliptisch entartet. Anschließend wird ein Ansatz zur Konstruktion eines numerischen Verfahrens gegeben, der sich auf die zuvor gewonnenen Informationen stützt und es ermöglicht, den elliptisch entarteten Anteil implizit zu behandeln, während der Teil, der auch in der Grenze der verschwindenden Machzahl hyperbolisch bleibt, zeitexplizit approximiert wird.

Die Behandlung des Falles kleiner Alfvenzahlen läuft analog dazu. Allerdings müssen zusätzlich einige Spezialfälle unterschieden werden, weil ein allgemeines Vorgehen für den vollen dreidimensionalen Fall nicht möglich ist.

Am Ende des Kapitels folgt noch ein kleiner Abschnitt, in dem erste numerische Tests für schwach kompressible magnetohydrodynamische Strömungen kleiner Machzahl vorgestellt werden.

Divergenzkorrektur:

Im Kapitel über die Divergenzkorrekturen wird nach einer allgemeinen Darstellung des Grundproblems ein reduziertes System eingeführt. Dieses hat gerade die Eigenschaften, die bei den Maxwell- und MHD-Gleichungen für das Divergenzproblem verantwortlich sind. An diesem Modellproblem wird der allgemeine Korrekturansatz entwickelt. Zunächst werden die vorgeschlagenen Korrekturverfahren analytisch untersucht und bewertet. Die Resultate dieser Analysis werden dann numerisch validiert. Anschließend wird noch einmal auf die analytischen Resultate zurückgegriffen, um Kriterien für die Wahl der freien Parameter zu erhalten.

Zum Schluß wird das Vorgehen auf die Maxwell- und MHD-Gleichungen übertragen, und es werden numerische Ergebnisse für die MHD vorgestellt.

2 Die MHD-Gleichungen

Im Gegensatz zur Gasdynamik, in der elektromagnetische Vorgänge keine Rolle spielen, beschreibt die Plasmaphysik Fluide, die aufgrund ihrer hohen elektrischen Leitfähigkeit mit elektromagnetischen Feldern wechselwirken. Ist das Plasma so dicht, daß es als Kontinuum aufgefaßt werden kann, so spricht man von Magnetohydrodynamik (MHD). Man kann die zugehörigen Gleichungen herleiten, indem man in die Gleichungen der Gasdynamik den Einfluß der neu hinzugekommenen Kräfte einführt. Da dies im Zusammenhang mit den Divergenzkorrekturen in Abschnitt 4.4.2 durchgeführt wird, unterbleibt es an dieser Stelle. Die damit beschreibbaren physikalischen Phänomene sind mannigfaltig [4]. Dementsprechend ist die Natur der Gleichungen recht unterschiedlich je nachdem, ob man nun resistive oder nichtresistive, d. h. mit oder ohne elektrischem Widerstand, reibungsbehaftete oder reibungsfreie, kompressible oder inkompressible Situationen beschreibt.

Diese Arbeit wird sich auf die reibungsfreie nichtresistive – hierfür hat sich der Begriff *ideal* eingebürgert – Magnetohydrodynamik beschränken. Die Überlegungen zur Divergenzkorrektur in Kapitel 4 lassen sich freilich auch auf andere Situationen übertragen.

2.1 Die Gleichungen in primitiven Variablen

Man unterscheidet prinzipiell drei verschiedene Systeme von Variablen

- Primitive Variablen,
- Konservative Variablen,
- Charakteristische Variablen.

Dabei sagt der Name aus, woher diese kommen. Primitiv sind Größen, welche man gemeinhin mißt. Konservative Variablen sind die Erhaltungsgrößen, also solche, für die es einen physikalischen Erhaltungssatz gibt. Charakteristische Variablen gibt es nur bei hyperbolischen Problemen. Sie sind in der Mathematik der Gleichungen begründet und enthalten die Information, die mit den jeweiligen Wellen transportiert wird. Sie können bei nichtlinearen Gleichungen wie den Folgenden immer nur durch eine lokale Linearisierung gewonnen werden. im Weiteren dieser Arbeit werde sie keine große Rolle spielen. Daher wird auf sie im Folgenden nicht mehr weiter eingegangen.

Die primitiven Größen, um die ideale MHD zu beschreiben, sind:

- die Massendichte ρ ,

- die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$,
- das Magnetfeld, beschrieben durch die magnetische Induktion $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^T$ und
- der Druck p .

Damit lauten die idealen kompressiblen MHD-Gleichungen¹

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}_t - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.3)$$

$$p_t + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \approx 0. \quad (2.6)$$

Es handelt sich also um zwei vektorielle und zwei skalare Evolutionsgleichungen sowie zwei elliptische Nebenbedingungen. Gleichung (2.6), die wir mit dem „ungefähr“-Zeichen „ \approx “ geschrieben haben, ist eine Bedingung für die Quasineutralität. Sie stellt sicher, daß keine Raumladungsverteilung existiert, welche die Strömung beeinflussen kann. Dies ist eine der wesentlichen Modellannahmen, die in den Gleichungen stecken. Ist sie verletzt, so lassen sich mit der MHD keine physikalisch sinnvollen Aussagen mehr treffen. Hinweise zum Umgang mit der Quasineutralität im numerischen Verfahren werden in Kapitel 4 gegeben. Bis dahin wird sie erst einmal außer Acht gelassen.

Aus der Gleichung für das Magnetfeld (2.3) läßt sich leicht ablesen, daß dessen Evolution als Rotation divergenzfrei ist. Das heißt, daß es analytisch ausreicht, Bedingung (2.5) für den zeitlichen Anfangswert vorauszusetzen. Daß dies numerisch nicht so einfach ist, ist der Grund für Kapitel 4.

Der Natur nach leben die MHD-Gleichungen im dreidimensionalen Raum. Nun gibt es allerdings physikalische Situationen, in denen sich dies nicht nur reduzieren läßt, sondern sich auch eine Vereinfachung der Gleichungen ergibt.

2.1.1 Zweidimensionale Spezialfälle

Zweidimensional bedeutet, daß sich die Größen nur in zwei von drei Raumrichtungen ändern können. In kartesischen Koordinaten mit der Raumvariablen $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ bedeutet dies etwa, daß alle partiellen Ableitungen nach der dritten Raumkomponente z verschwinden. Unter zusätzlichen Annahmen vereinfacht sich das mathematische Modell weiter. Es gibt die folgenden Spezialfälle:

¹Der Leser mag an dieser Stelle die eine oder andere Konstante in den Gleichungen vermissen. Sie wurden der Übersichtlichkeit halber schlicht „wegnormiert“.

Skalares Magnetfeld

In diesem Spezialfall hat man ein Geschwindigkeitsfeld, das in der Abhängigkeitsebene liegt, sowie ein dazu orthogonales Magnetfeld. Dieses ist quasi skalar, da es nur noch eine nichtverschwindende Komponente besitzt, die dritte. Damit lautet Evolutionsgleichung des Magnetfelds

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B}_t - \nabla \times \begin{pmatrix} vB_3 \\ -uB_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{B}_t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (uB_3)_x + (vB_3)_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Es ändert sich nur die dritte Komponente in der Zeit, d.h. die oben beschriebene Situation bleibt erhalten. Die Evolutionsgleichung für die Geschwindigkeit lautet

$$\mathbf{v}_t + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{v}_t + \begin{pmatrix} B_{3y} \\ -B_{3x} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_t + \begin{pmatrix} -B_3 B_{3x} \\ -B_3 B_{3y} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Es werden also nur die ersten beiden Komponenten verändert. Man hat tatsächlich eine echt zweidimensionale Situation mit einem skalaren Magnetfeld.

Vektorielltes Magnetfeld

In diesem Fall liegen sowohl Geschwindigkeits- als auch Magnetfeld in der Abhängigkeitsebene. Damit gilt dann

$$-\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -(uB_2 - vB_1)_y \\ (uB_2 - vB_1)_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Die dritte Komponente des Magnetfelds bleibt also Null. Der Beitrag des Magnetfelds zur Evolution der Geschwindigkeit lautet

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_2(B_{1y} - B_{2x}) \\ B_1(B_{2x} - B_{1y}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Wegen der verschwindenden z -Ableitungen geben auch die anderen Summanden keinen Beitrag in der dritten Komponente. Damit ist auch diese Situation selbsterhaltend.

2.1.2 Eindimensionale Gleichungen

Hängen die Variablen nur von einer Raumrichtung ab, so läßt sich gleich eine Vereinfachung durchführen. Verschwinden die Ableitungen in y - und z -Richtung, so lautet die Evolutionsgleichung für die erste Komponente des Magnetfelds

$$B_{1t} = 0. \quad (2.11)$$

Die Divergenzbedingung für das Magnetfeld wird zu

$$B_{1x} = 0 . \quad (2.12)$$

Damit ist B_1 aber bereits eine Konstante und taucht in den Gleichungen nur noch als Parameter auf:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 , \quad (2.13)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{2\rho}(B_\perp^2)_x + \frac{p_x}{\rho} = 0 \quad (2.14)$$

$$v_t + uv_x - \frac{B_1}{\rho}B_{2x} = 0 , \quad (2.15)$$

$$w_t + uw_x - \frac{B_1}{\rho}B_{3x} = 0 , \quad (2.16)$$

$$B_{2t} + B_2u_x - B_1v_x + uB_{2x} = 0 , \quad (2.17)$$

$$B_{3t} + B_3u_x - B_1w_x + uB_{3x} = 0 , \quad (2.18)$$

$$p_t + \gamma pu_x + up_x = 0 . \quad (2.19)$$

Dabei bezeichnet B_\perp den Anteil des Magnetfelds, der senkrecht auf der Abhängigkeitsrichtung steht, also nur in der zweiten und dritten Komponente nichtverschwindende Einträge besitzt. Verschwindet nun für einen Zeitpunkt t das Feld in der Orthogonalenrichtung, so haben zu diesem Zeitpunkt das Magnetfeld und die orthogonalen Geschwindigkeiten keinen Einfluß auf die Größen ρ , u und p . Also bleiben gerade die eindimensionalen Eulergleichungen übrig:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 , \quad (2.20)$$

$$u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0 , \quad (2.21)$$

$$p_t + \gamma pu_x + up_x = 0 . \quad (2.22)$$

Nach der Lösung dieser lassen sich dann (2.15) und (2.16) ausrechnen. Sie degenerieren in diesem Fall zu

$$v_t + uv_x = 0 ,$$

$$w_t + uw_x = 0 .$$

Dieser Fall hat keine echte Entsprechung im Zweidimensionalen, obwohl er eigentlich den des vektoriiellen Feldes nachbildet. Verantwortlich dafür ist die degenerierte Divergenzbedingung.

Wird B_1 null, ohne daß das orthogonale Feld verschwindet, so gibt es keine Wechselwirkung des Feldes mit den orthogonalen Geschwindigkeiten. Also lassen sich auch hier wieder (2.15) und (2.16) vom übrigen System abkoppeln. Auch die Gleichungen für die beiden orthogonalen Magnetfeldrichtungen werden identisch, so daß man das

Magnetfeld als in einer Koordinatenrichtung gelegen denken kann und das geschlossene System erhält:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (2.23)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{2\rho}(B^2)_x + \frac{p_x}{\rho} = 0, \quad (2.24)$$

$$B_t + Bu_x + uB_x = 0, \quad (2.25)$$

$$p_t + \gamma pu_x + up_x = 0. \quad (2.26)$$

Man kann auch in diesem Fall wieder die Gleichungen (2.15) und (2.16) „nachträglich“ lösen. Diese Situation entspricht der des skalaren Feldes im Zweidimensionalen.

Bemerkung:

Hat man ein isentropes Gas, so sind Druck und Dichte über die Zustandsgleichung

$$p = a\rho^\gamma$$

gekoppelt. Damit kann das System um eine der Evolutionsgleichungen gekürzt werden.

2.2 Die Gleichungen in Erhaltungform

Drückt man die Gleichungen in konservativen Variablen aus, so lassen sie sich als Erhaltungsgleichungen schreiben:

$$\rho_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0, \quad (2.27)$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2)I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T] = 0, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{B}_t + \nabla \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T - \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T] = 0, \quad (2.29)$$

$$e_t + \nabla \cdot [(e + p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.31)$$

Die Terme, die unter dem Divergenzoperator stehen, sind die Flüsse für die Erhaltungsgrößen. Man sieht, daß man hier eine Variable zuviel hat. Es ist eine dazu gekommen, die Energiedichte e . Man braucht also eine zusätzliche Bedingung. Diese Aufgabe wird von der Zustandsgleichung erfüllt, die meistens algebraisch ist und den Druck mit der inneren Energie des Fluids koppelt. Für das ideale Gas – dieses soll in der vorliegenden Arbeit der Standardfall sein – lautet sie

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad (2.32)$$

wobei e die Dichte der inneren Energie bezeichnet. Damit gilt für die Gesamtenergiedichte

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{v}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2. \quad (2.33)$$

In einer Raumdimension ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\
 (\rho u)_t + (\rho u^2 + p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 - B_1^2)_x &= 0, \\
 (\rho v)_t + (\rho uv - B_1 B_2)_x &= 0, \\
 (\rho w)_t + (\rho uw - B_1 B_3)_x &= 0, \\
 B_{2t} + (B_2 u - v B_1)_x &= 0, \\
 B_{3t} + (B_3 u - w B_1)_x &= 0, \\
 e_t + ((e + p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2)u - (u B_1 + v B_2 + w B_3)B_1)_x &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dabei wurde wieder die entartete Divergenzbedingung

$$B_{1x} = 0$$

eingesetzt.

2.3 Das Eigensystem

Nun stellt sich bei einem hyperbolischen System immer auch die Frage nach den Eigenwerten, repräsentieren diese doch die auftretenden Wellengeschwindigkeiten. Dazu betrachtet man die eindimensionalen Gleichungen und schreibt sie in der Form

$$\mathbf{q}_t + A(\mathbf{q})\mathbf{q}_x = 0.$$

Dabei heißt \mathbf{q} der Zustandsvektor. In primitiven Variablen lautet er

$$\mathbf{q} = (\rho, u, v, w, B_2, B_3, p)^T,$$

in konservativen

$$\mathbf{q} = (\rho, (\rho u), (\rho v), (\rho w), B_2, B_3, e)^T.$$

Faßt man in (2.34) die Flüsse der einzelnen Erhaltungsgrößen zu einem Flußvektor $f(\mathbf{q})$ zusammen, so bekommt man im Fall der konservativen Variablen $A(\mathbf{q})$ gerade als die Jacobi-Matrix von f . Verwendet man primitive Variablen, so bildet man $A(\mathbf{q})$, indem man die Koeffizienten der x -Ableitungen der Zustandsvariablen in den einzelnen Gleichungen entsprechend sammelt.

Wählt man für $i \in \{1, 2, 3\}$ die folgenden Abkürzungen

$$b_i = \sqrt{\frac{B_i^2}{\rho}} \quad b^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{\rho} \quad a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \tag{2.35}$$

wobei a die akustische Schallgeschwindigkeit ist, so findet man der Größe nach geordnet die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = u - c_f, \quad \lambda_2 = u - c_A, \quad \lambda_3 = u - c_s, \quad \lambda_4 = u, \\
 \lambda_5 = u + c_s, \quad \lambda_6 = u + c_A, \quad \lambda_7 = u + c_f
 \end{aligned}$$

mit

$$c_A = |b_1|, \quad (2.36)$$

$$c_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_1^2} \right)}, \quad (2.37)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_1^2} \right)}. \quad (2.38)$$

Man bezeichnet die zugehörigen Wellen als Alfvénwellen ($u \pm c_A$), sowie schnelle ($u \pm c_f$) bzw. langsame ($u \pm c_s$) magneto-akustische Wellen. Die Größe c_A heißt die (eindimensionale) Alfvengeschwindigkeit.

Nun sieht man schon die Entartungsfälle, die auftreten können. Zum einen, wenn es kein Feld in der ersten Raumrichtung gibt, d.h. $b_1 = 0$. Dann fallen die Eigenwerte λ_2 bis λ_6 zusammen. Genauer gilt:

$$c_A = c_s = 0, \quad c_f = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b_\perp^2} \quad (2.39)$$

mit

$$b_\perp^2 = b_2^2 + b_3^2,$$

dem Quadrat der Magnetfeldkomponente orthogonal zur Stromrichtung. Zum anderen der Fall, daß eben diese Orthogonalkomponente des Feldes verschwindet. Dann ist nämlich je nachdem, ob b_1 betragsmäßig kleiner oder größer ist als die Schallgeschwindigkeit

$$c_s = c_A \quad c_f = a$$

oder

$$c_f = c_A \quad c_s = a$$

und, wenn b_1 betragsmäßig mit der Schallgeschwindigkeit a übereinstimmt, sogar

$$c_f = c_A = c_s = a.$$

Man nennt dies einen dreifachen Entartungspunkt, weil hier alle drei Wellengeschwindigkeiten zusammenfallen. Für ein System von Eigenvektoren, das auch in diesen kritischen Punkten des Zustandsraums nicht singulär wird, siehe z.B. [33].

Die Entartungen entsprechen gerade den in Abschnitt 2.1.1 und 2.1.2 behandelten Sonderfällen.

3 Schwach kompressible MHD-Strömungen

3.1 Problemstellung

Schwach kompressible Strömungen im weiteren Sinne sind solche, bei denen zwar die üblichen kompressiblen Erscheinungen wie etwa Stöße nicht auftreten, die sich aber dennoch nicht durch inkompressible Gleichungen beschreiben lassen, weil Druck und Dichte von der Strömung selbst verändert werden. Bei den Eulergleichungen der Gasdynamik betrifft das die subsonischen Strömungen, d. h. solche, bei denen im gesamten Strömungsfeld kein Überschall auftritt. Es sind dies also Strömungen, in denen die lokale Machzahl M , der Betrag des Quotienten aus Strömungs- und Schallgeschwindigkeit, immer deutlich unterhalb Eins bleibt. Dabei zieht man üblicherweise Machzahlen zwischen Null und 0.2 in Betracht. Aufschlußreich ist hierbei die Dar-

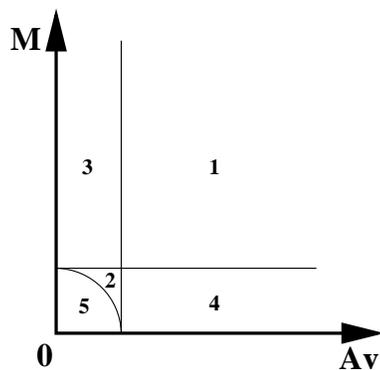


Abbildung 3.1: Taniuti-Diagramm: Bereiche 1 und 2 kompressibel, Bereiche 3,4 und 5 schwach kompressibel

stellung im sogenannten *Taniuti-Diagramm* [30], das in Abbildung 3.1 dargestellt ist. An einer Achse ist die (lokale) Machzahl M angetragen, an der anderen die (lokale) Alfvenzahl Av . Diese ist analog zur Machzahl gebildet als Quotient aus Alfven- und Strömungsgeschwindigkeit. Die Alfvingeschwindigkeit ist in drei Raumdimensionen

$$c_A = \sqrt{\frac{\mathbf{B}^2}{\rho}} .$$

Man unterscheidet fünf Bereiche in der (Av, M) -Ebene:

1. $Av \geq 1$, $M \geq 1$: Ein voll kompressibler Bereich, entsprechend dem supersonischen in der Gasdynamik.
2. $Av < 1$, $M < 1$, aber $Av^2 + M^2 \geq 1$: Ein weiterer kompressibler Bereich mit Phänomenen, wie man sie von der Gasdynamik nicht kennt, etwa stromablaufenden Stoßwellen.
3. $Av < 1$, $M \geq 1$: Ein (im weiteren Sinne) schwach kompressibler Bereich, ähnlich dem der Gasdynamik.
4. $Av \geq 1$, $M < 1$: Der (im weiteren Sinne) schwach kompressible Bereich, wie man ihn aus der Gasdynamik kennt.
5. $Av^2 + M^2 < 1$: Ein (im weiteren Sinne) schwach kompressibler Bereich ohne gasdynamische Entsprechung.

Typisch für die schwach kompressiblen Bereiche ist, daß sie alle den Grenzfall $Av \rightarrow 0$ oder $M \rightarrow 0$ beinhalten. Beides aber bedeutet, daß die Strömungsgeschwindigkeit verschwindend klein wird im Vergleich zu anderen Wellengeschwindigkeiten. Das Problem wird steif.

Möchte man die Konvektion in einem expliziten Verfahren gut auflösen, so braucht man erheblich größere Zeitschrittweiten als sie die Stabilitätsbedingung zuläßt. Diese muß sich ja nach den schnellsten Wellengeschwindigkeiten richten. Ein explizites Verfahren ist also zum Scheitern verurteilt. Eine Möglichkeit diesem Problem zu begegnen ist, innerhalb des numerischen Verfahrens Präkonditionierungen vorzunehmen. Dies wurde für die Gasdynamik verschiedentlich schon durchgeführt, vorzugsweise für stationäre Probleme [36, 37]. Für die MHD ist bislang keine solche Arbeit bekannt. Ein anderer Ansatz wurde zuerst von Klein [21] für die Gasdynamik vorgeschlagen. Während die Präkonditionierungsmethoden von den bereits diskretisierten Gleichungen ausgehen, wird hier bei den kontinuierlichen Gleichungen angesetzt. Es werden analytische Hilfsmittel verwendet, um zu einer besseren Diskretisierung zu gelangen. Hier nun soll die Verfahrenskonstruktion aus [28] auf die MHD übertragen werden. Ziel ist es, die besonders schnellen und die langsamen Wellen getrennt zu behandeln, die schnellen implizit, die langsamen explizit. Man spricht in einem solchen Fall auch von einem halb- oder semiimpliziten Verfahren. Das ganze System wird aufgespaltet in einen Teil, der die Konvektion repräsentiert, und einen der die schnellen Wellen enthält. Der erstere läßt sich problemlos explizit behandeln. Für den zweiten wird ein implizites Verfahren hergeleitet.

In 3.2 Abschnitt wird zunächst das analytische Handwerkszeug bereitgestellt. Zuerst werden asymptotische Entwicklungen ganz allgemein mit ihren wesentlichen Eigenschaften vorgestellt.

3.2 Das analytische Handwerkszeug: Asymptotische Entwicklungen

3.2.1 Die Begrifflichkeiten

Zunächst ist es sinnvoll, einige Begriffe einzuführen:

Asymptotische Folge

Eine Folge $(\varphi_n(\varepsilon))$ von Funktionen heißt asymptotische Folge, wenn für jede natürliche Zahl n

$$\frac{\varphi_{n+1}(\varepsilon)}{\varphi_n(\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (3.1)$$

gilt. Unter Verwendung der *Landau-Symbole* läßt sich (3.1) auch als

$$\varphi_{n+1}(\varepsilon) = o(\varphi_n(\varepsilon))$$

schreiben. Ein einfaches Beispiel wäre z. B. die Folge

$$\varphi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n+k}$$

mit einer reellen Zahl k . Setzt man dies in (3.1) ein, so ergibt sich

$$\frac{\varepsilon^{n+k+1}}{\varepsilon^{n+k}} = \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Damit entspricht die gewählte Folge ganz offensichtlich der Definition.

Asymptotische (Einskalen-)- N -Term Entwicklung

Hat man zusätzlich zu einer asymptotischen Folge eine reelle Funktion q sowie eine Folge $(q^{(n)})$ von Funktionen über dem selben Definitionsbereich G , hängt q zusätzlich von einem Parameter ε ab, so heißt

$$\sum_{n=1}^N \varphi_n(\varepsilon) q^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

eine asymptotische N -term Entwicklung von q , falls

$$q(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{n=1}^N \varphi_n(\varepsilon) q^{(n)}(\mathbf{x}) = o(\varphi_N(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.3)$$

Die Entwicklung (3.2) heißt *gleichmäßig gültig*, wenn der Grenzübergang in (3.3) gleichmäßig in G ist.

Die Theorie dieser Einkalenentwicklungen geht bereits auf Stieltjes und Poincaré zurück (siehe z. B. [22]) und hat eine große Verbreitung in Theorie und Anwendung gefunden [22, 15, 3, 20]. Hier nur einige der wichtigsten Eigenschaften:

- Schneidet man in (3.2) nach einem $k < N$ ab, so hat man immer noch eine k -term Entwicklung von q .

- Bei gewählter asymptotischer Folge und festgelegtem Definitionsbereich G sind die Funktionen $q^{(n)}$ eindeutig bestimmt.

Insbesondere die zweite Eigenschaft ist sehr angenehm. Setzt man nämlich einen asymptotischen Ansatz in eine Differentialgleichung ein, so läßt sich ein Koeffizientenvergleich bezüglich der $\varphi_n(\varepsilon)$ durchführen. Auf diese Weise erhält man dann – oft einfacher zu lösende – Differentialgleichungen für die $q^{(n)}$.

Ein Problem ist, daß bei physikalischen Problemen, die sich auf mehreren Raum- oder Zeitskalen abspielen, meist keine Einskalenentwicklung existiert [20]. In diesem Fall muß man etwas Allgemeineres finden und die obige Definition erweitern.

Der Schlüssel liegt darin, daß man den Funktionen $q^{(n)}$ mehr Freiheitsgrade gibt. Man wählt eine Transformation g , die auf G definiert ist und zusätzlich vom Parameter ε abhängt. Von den $q^{(n)}$ verlangt man, daß sie auf dem Bild von g definiert sind. Damit kann man nun eine Verallgemeinerung der asymptotischen Einskalenentwicklungen definieren:

Asymptotische N -Term Mehrskalentwicklung

Hat man eine asymptotische Folge und eine Funktion q auf G wie bei der Einskalenentwicklung, sind weiter g und $(q^{(n)})$ wie im vorigen Absatz beschrieben, so nennt man

$$\sum_{n=1}^N \varphi_n(\varepsilon) q^{(n)}(g(\mathbf{x}; \varepsilon)) \quad (3.4)$$

eine asymptotische N -Term Mehrskalentwicklung von q , falls

$$q(\mathbf{x}; \varepsilon) - \sum_{n=1}^N \varphi_n(\varepsilon) q^{(n)}(g(\mathbf{x}; \varepsilon)) = o(\varphi_N(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.5)$$

Die Entwicklung (3.4) heißt *gleichmäßig gültig*, wenn der Grenzübergang in (3.5) gleichmäßig in G ist.

Sinnvoll ist dieses gemeinhin nur, wenn das Bild von G unter g tatsächlich in einem höherdimensionalen Raum liegt. Nur dann hat man wirklich mehr Freiheitsgrade. Diese bringen aber ein neues Problem für die Theorie: Es hängen nun auch die Koeffizienten der $\varphi_n(\varepsilon)$ vom Parameter ε ab. Die oben angegebenen wichtigen Eigenschaften der Einskalenentwicklungen sind nur noch in Spezialfällen gegeben.

3.2.2 Der Spezialfall

Es scheint an dieser Stelle angezeigt, bereits auf den Spezialfall zuzugehen, der bei der Anwendung die tragende Rolle spielen wird. Es werden Entwicklungen der Form

$$\sum_{n=0}^N \varepsilon^n q^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) \quad (3.6)$$

betrachtet. Dabei ist also

$$q^{(n)} = q^{(n)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

und

$$g(\mathbf{x}; \varepsilon) = (\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) .$$

Rechenregeln für Ableitungen

Setzt man einen Ansatz der Form (3.6) in eine Differentialgleichung ein, so muß man sorgfältig sein, wenn man die Ableitungen ausrechnet. Unter Verwendung der Kettenregel ergeben sich folgende Formeln:

$$(q^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}))_{x_i} = q_{x_i}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) + \varepsilon q_{\xi_i}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) , \quad (3.7)$$

$$\nabla q^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} q^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) + \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{\xi}} q^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) , \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) + \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) + \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) . \quad (3.10)$$

Bei den Gleichungen (3.9) und (3.10) wird angenommen, daß eine Entwicklung entsprechend (3.6) für alle Komponenten von \mathbf{q} gilt.

Die Voraussetzungen

Um die Durchführbarkeit der Mehrskalanalyse zu garantieren, werden im Weiteren, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, folgende Eigenschaften der betroffenen Funktionen vorausgesetzt:

1. Die Funktion q ist auf $G = \mathbb{R}^d$ definiert. Dabei bezeichnet d die Raumdimension des Problems.
2. Es ist q auf G beschränkt.
3. Die Funktionen $q^{(n)}$ dürfen in \mathbf{x} nur sublinear wachsen. D. h.

$$\frac{q^{(n)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty) \quad (3.11)$$

oder mit Landau-Symbolen

$$q^{(n)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = o(\|\mathbf{x}\|) \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty)$$

unabhängig von $\boldsymbol{\xi}$ und n .

4. Die Entwicklung (3.6) ist gleichmäßig gültig auf G für $N \in \{0, 1, 2\}$.

Es ist zu erwähnen, daß die dritte Generalvoraussetzung sich auch aus physikalisch durchaus sinnvollen Voraussetzungen an die Variablen folgern läßt [26]. Da es in der vorliegenden Arbeit aber um die Konstruktion eines numerischen Verfahrens gehen soll, unterbleibt dies.

Die vierte Voraussetzung könnte erweitert werden, indem man für N alle nichtnegativen ganzen Zahlen zuläßt. Allerdings ist dies für das Folgende nicht notwendig und stellt eine unnötige Einschränkung dar.

Die Zeitvariable

Die MHD-Gleichungen beschreiben Phänomene, die von Raum *und* Zeit abhängen. Man muß also die Zeit t als weitere unabhängige Variable einführen, sowohl für die physikalischen Größen selber als auch für die Entwicklungsfunktionen. Für das weitere macht man eine zusätzliche Annahme:

Voraussetzung 5

Die Funktionen $q, q^{(n)}$ sind auch in der Zeit beschränkt. Überdies sind sie stetig differenzierbar (in allen unabhängigen Variablen).

Der Mittelungsoperator

Sei (V_i) eine Folge endlicher Gebiete in G mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_i = G. \quad (3.12)$$

Ist der Grenzwert für $i \rightarrow \infty$ von

$$\frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) d\mathbf{x} \quad (3.13)$$

unabhängig von der Wahl der Folge (V_i) , so schreibt man

$$\bar{w}(\boldsymbol{\xi}, t) := \lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t). \quad (3.14)$$

Mit Generalvoraussetzung 5 gilt dann

$$\bar{w}_t(\boldsymbol{\xi}, t) = (\bar{w})_t(\boldsymbol{\xi}, t) \quad (3.15)$$

und

$$\overline{\nabla_{\boldsymbol{\xi}} w}(\boldsymbol{\xi}, t) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \bar{w}(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (3.16)$$

Diese Beziehungen werden verschiedentlich Anwendung finden.

3.3 Der Ausgangspunkt: die entdimensionalisierten Gleichungen

Der Ausgangspunkt für die gewählte Asymptotik ist eine Entdimensionalisierung der Gleichungen, wie man sie etwa in [10] auf Seite 160 findet. Dabei wählt man für die Schallgeschwindigkeit und die Alfvengeschwindigkeit eine eigene, von der Referenz der Strömungsgeschwindigkeit unabhängige Referenz. Man führt Referenzgrößen ρ_0, l_0, v_0, p_0 und B_0 für Dichte, Länge, Geschwindigkeit, Druck und Magnetfeld ein und bildet daraus die Referenzen für Zeit und Energie sowie

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad \text{und} \quad c_{A,0} = \sqrt{\frac{B_0^2}{\rho_0}}$$

für die Schallgeschwindigkeit und die Alfvengeschwindigkeit. Hiermit definiert man die globale Machzahl M und die globale Alfvenzah Av :

$$M := \frac{v_0}{a_0}, \quad Av := \frac{v_0}{c_{A,0}}.$$

Dies führt für die Gleichungen der idealen eindimensionalen MHD in primitiven Variablen auf das folgende entdimensionalisierte System von Evolutionsgleichungen¹:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{M^2 \rho} \nabla p - \frac{1}{Av^2 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B}_t - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (3.19)$$

$$p_t + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.20)$$

Die Eigenwerte lauten nun

$$\begin{aligned} \lambda_1 = u - c_f, \quad \lambda_2 = u - c_A, \quad \lambda_3 = u - c_s, \quad \lambda_4 = u, \\ \lambda_5 = u + c_s, \quad \lambda_6 = u + c_A, \quad \lambda_7 = u + c_f \end{aligned}$$

mit

$$c_A = \frac{|b_1|}{Av}, \quad (3.21)$$

$$c_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{Av^2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{Av^2} \right)^2 - 4 \frac{a^2}{M^2} \frac{b_1^2}{Av^2}} \right)}, \quad (3.22)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{Av^2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{Av^2} \right)^2 - 4 \frac{a^2}{M^2} \frac{b_1^2}{Av^2}} \right)} \quad (3.23)$$

und den Abkürzungen aus (2.35). Die Lösungen der Gleichungen und die Eigenwerte hängen also zusätzlich von der globalen Machzahl und der globalen Alfvenzah ab. Diese bieten sich also als Parameter für eine Mehrskalenanalyse an. In den nächsten Abschnitten wird nun zuerst für beide Fälle, $M \rightarrow 0$, $Av = O(1)$ und $Av \rightarrow 0$, $M = O(1)$ die asymptotische Analyse vorgestellt. Anschließend werden jeweils Vorschläge zur Konstruktion numerischer Verfahren gegeben.

3.4 Entwicklung für kleine Machzahlen

3.4.1 Die Analysis

Im Falle kleiner Machzahlen ist es eine natürliche Wahl, $\varepsilon = M$ als Entwicklungsparameter zu verwenden. Man macht dann einen Ansatz der Form

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, M\mathbf{x}, t) + M\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, M\mathbf{x}, t) + M^2\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{x}, M\mathbf{x}, t) + o(M^2).$$

¹Die beiden elliptischen Bedingungen (2.5) und (2.6) werden im Weiteren der Mehrskalenanalyse beiseite gelassen.

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (\rho, u, v, w, B_2, B_3, p)^T, \\ \mathbf{q}^{(n)} &= (\rho^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, B_3^{(n)}, p^{(n)})^T, \quad n \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Gleichungen (3.17) – (3.20) ein, so erhält man ein System von Evolutionsgleichungen für die $\rho^{(n)}, \dots, p^{(n)}$. Verlangt man, daß diese auch dann für alle M gelten, wenn man ξ unabhängig von M und x zuläßt, so erlaubt die Sublinearität (3.11) einen Koeffizientenvergleich bezüglich M in den Gleichungen. Die Alfvenzahlszahl wird der Übersichtlichkeit halber auf Eins gesetzt.

Lediglich in der Geschwindigkeitsgleichung kommen Terme mit M^{-1} und M^{-2} vor. Es ist die einzige Gleichung, in der Mach- und Alfvenzahlszahl explizit auftauchen. Aus dem Koeffizientenvergleich ergeben sich die Gleichungen

$$\nabla_{\mathbf{x}} p^{(1)} + \nabla_{\xi} p^{(0)} = 0 \quad (3.24)$$

sowie

$$\nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)} = 0. \quad (3.25)$$

Die letzte Gleichung bedeutet insbesondere, daß der Druck führender Ordnung nicht von der kurzen Raumskala \mathbf{x} abhängt. Wählt man eine Folge (V_i) endlicher konvexer Teilmengen von G , die gegen G konvergiert, und integriert Gleichung (3.24) über diese, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla_{\mathbf{x}} p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla_{\xi} p^{(0)}(\xi, t) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{|V_i|} \oint_{\partial V_i} p^{(1)} \, ds_{\mathbf{x}} + \nabla_{\xi} p^{(0)} \\ &\rightarrow \nabla_{\xi} p^{(0)} \quad (i \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Hierbei spielt wieder die Sublinearität die Hauptrolle. Sie sorgt dafür, daß das Oberflächenintegral langsamer wächst als das Volumen des Integrationsgebiets. Also muß $\nabla_{\xi} p^{(0)}$ identisch verschwinden. Dies bedeutet aber, daß $p^{(0)}$ von keiner der beiden Raumskalen abhängt. Setzt man dies wiederum in (3.24) ein, so ergibt sich, daß auch $p^{(1)}$ nicht von der kurzen Raumskala \mathbf{x} abhängen kann. Man hat also insgesamt

$$p^{(0)} = p^{(0)}(t), \quad (3.26)$$

$$p^{(1)} = p^{(1)}(\xi, t). \quad (3.27)$$

Wenden wir uns nun der Druckgleichung zu. Aus den Koeffizienten von M^0 ergibt sich

$$p_t^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0. \quad (3.28)$$

Integriert man dies über ein endliches Gebiet V bezüglich \mathbf{x} , so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|V|} \int_V p_t^{(0)} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{|V|} \int_V \gamma p^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= p_t^{(0)} + \gamma p^{(0)} \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{n} \, ds_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Der Index \mathbf{x} an ds bedeutet, daß es sich um eine Integration auf der \mathbf{x} -Skala handelt. Damit kann sich auch eine zeitliche Änderung von $p^{(0)}$ nur noch durch eine Kompression vom Rand her ergeben. Außerdem sieht man, daß nach (3.28) die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes führender Ordnung nur noch in der Zeit variieren kann. Variiert es nicht, so gilt mit (3.29) die Volumenerhaltung ebenfalls in der führenden Ordnung, $\mathbf{v}^{(0)}$ ist divergenzfrei. Für $M \rightarrow 0$ wird die Strömung inkompressibel.

Bildet man die Dichtegleichung führender Ordnung und setzt dort (3.28) ein, so lautet sie

$$\rho_t^{(0)} + \nabla_{\mathbf{x}} \rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} = \rho^{(0)} \frac{p_t^{(0)}}{\gamma p^{(0)}}, \quad (3.30)$$

hat also die Gestalt einer Konvektionsgleichung mit Quellterm. Dieser ist im Wesentlichen bestimmt durch die logarithmische Zeitableitung des führenden Druckterms und beschreibt die äußere Kompression. Es handelt sich um eine adiabate Kompression entlang Teilchenbahnen.

Ist die Strömung isentrop, so ist mit $p^{(0)}$ auch $\rho^{(0)}$ räumlich konstant und ergibt sich entsprechend (3.29) direkt aus den Randwerten der Geschwindigkeit.

Insgesamt läßt sich sagen, daß der Druckterm führender Ordnung einen räumlich konstanten thermodynamische Hintergrundsdruck darstellt, der nur durch äußere Kompression zeitlich veränderlich ist.

Um das Verhalten des Druckterms $p^{(1)}$ zu verstehen, muß man weitere Gleichungen hinzuziehen. Zunächst die Terme der Druckgleichung für M^1 :

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0. \quad (3.31)$$

Wählt man nun wieder eine Folge (V_i) von Integrationsgebieten wie oben, und führt eine analoge Rechnung durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} p_t^{(1)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \gamma p^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \gamma p^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(1)} d\mathbf{x} \\ &= p_t^{(1)} + \gamma p^{(1)} \frac{1}{|V_i|} \oint_{\partial V_i} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}} + \frac{1}{|V_i|} \gamma p^{(0)} \int_{V_i} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} \\ &\quad + \gamma p^{(1)} \oint_{\partial V_i} \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Läßt man i gegen unendlich gehen, so konvergieren die beiden Oberflächenintegrale gegen Null, das Volumenintegral gegen die Mittelung. Mit Beziehung (3.16) gilt dann

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \overline{\mathbf{v}^{(0)}} = 0. \quad (3.32)$$

Die Dichtegleichung zu M^0 lautet:

$$\rho_t^{(0)} + \rho^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \rho^{(0)} = 0, \quad (3.33)$$

die entsprechende Geschwindigkeitsgleichung

$$\mathbf{v}_t^{(0)} + (\mathbf{v}^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}}) \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{\rho^{(0)}} (\nabla_{\mathbf{x}} \times B^{(0)}) \times B^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_{\mathbf{x}} p^{(2)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_{\xi} p^{(1)} = 0. \quad (3.34)$$

Multipliziert man (3.33) mit $\mathbf{v}^{(0)}$, (3.34) mit $\rho^{(0)}$ und addiert beide Gleichungen zusammen, so erhält man die Beziehung

$$(\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)^2}) - (\nabla_{\mathbf{x}} \times B^{(0)}) \times B^{(0)} + \nabla_{\mathbf{x}} p^{(2)} + \nabla_{\xi} p^{(1)} = 0. \quad (3.35)$$

Führt man auch hier wieder die Integration durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)^2}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{1}{2} B^{(0)^2} \mathbf{I} - B^{(0)} B^{(0)T} \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla_{\mathbf{x}} p^{(2)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla_{\xi} p^{(1)} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t d\mathbf{x} + \frac{1}{|V_i|} \oint_{\partial V_i} (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)^2}) ds_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{1}{|V_i|} \oint_{\partial V_i} \left(\frac{1}{2} B^{(0)^2} \mathbf{I} - B^{(0)} B^{(0)T} \right) ds_{\mathbf{x}} + \frac{1}{|V_i|} \oint_{\partial V_i} p^{(2)} ds_{\mathbf{x}} + \nabla_{\xi} p^{(1)}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert für $i \rightarrow \infty$ verschwinden aufgrund der Sublinearität wieder die Oberflächenintegrale. Man erhält dann

$$\overline{(\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t} + \nabla_{\xi} p^{(1)} = 0. \quad (3.36)$$

Betrachtet man (3.32) und (3.36) zusammen, so entsprechen sie den Gleichungen der linearisierten Akustik. Das einzige, was stört, ist, daß der Dichteterm $\rho^{(0)}$ unter dem Mittelungsoperator steht. Nun sieht man an der Gestalt des Gebiets 2 im Taniuti-Diagramm 3.1, daß für $M \rightarrow 0$ der Bereich, in dem Stöße auftreten können, ebenfalls gegen Null geht. Nehmen wir an, daß die Grundströmung isentrop ist. Neben $p^{(0)}$ ist dann der führende Term der Dichte $\rho^{(0)}$ ebenso räumlich konstant. Ohne Kompression vom Rand ist $\rho^{(0)}$ konstant in Raum und Zeit und kann aus der Zeitableitung des Produkts herausgezogen werden. Man kann Gleichung (3.36) in diesem Fall also umschreiben in

$$\overline{\mathbf{v}^{(0)}_t} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_{\xi} p^{(1)} = 0. \quad (3.37)$$

Damit werden (3.32) und (3.37) zum System der linearisierten Akustik mit der Schallgeschwindigkeit als Wellengeschwindigkeit. Der Druckterm $p^{(1)}$ repräsentiert also die langwellige Akustik. In diesem Fall gibt es keine Quellterme. Ist $p^{(1)}$ in den Anfangsdaten eine Konstante und es tritt keine langwellige Akustik erster Ordnung auf, sofern sie nicht über Randwerte erzeugt wird.

3.4.2 Die hyperbolisch- elliptische Aufspaltung

In den Ergebnissen des letzten Abschnitts traten bei allen Variablen außer beim Druck nur Terme führender Ordnung auf. Wir werden im Folgenden den oberen Index „(0)“ einfach weglassen.

Entsprechend den Resultaten der asymptotischen Analyse werden die Gleichungen führender Ordnung im Grenzfall für $M \rightarrow 0$ zu

$$\rho_t + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} p^{(2)} - \frac{1}{Av^2 \rho} (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla_{\xi} p^{(1)}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{B}_t - \nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (3.40)$$

$$p_t^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.41)$$

Dies ist eine Erweiterung der inkompressiblen MHD-Gleichungen, die eine zeitliche Variation von Dichte und Druck erlaubt. Hier sieht man deutlich, welche Funktionen die einzelnen Druckterme erfüllen:

$p^{(0)}$: Dieser Term trägt die thermodynamischen Eigenschaften. Er erfüllt die Zustandsgleichung für $M = 0$.

$p^{(1)}$: Dieser Anteil repräsentiert die langwellige Akustik erster Ordnung. Schaut man sich den entsprechenden Term in Gleichung (3.39) genauer an, so stellt man folgendes fest: Zieht man in Betracht, daß der eigentliche Ansatz für die lange Skala $\xi = M\mathbf{x}$ ist, so bedeutet das Auftauchen einer Ableitung nach ξ nichts anderes als, daß der Term im Grenzwert $M \rightarrow 0$ vollständig entkoppelt. In einem unbeschränkten Rechengebiet fällt der Term weg. In einem beschränkten Gebiet kann er durch die Randwerte langwellige akustische Effekte in der Strömung erzeugen.

$p^{(2)}$: Er steht dort, wo auch in der Standardform der inkompressiblen Gleichungen der Druck steht, erfüllt also die gleiche Funktion. Er wird daher gerne als *inkompressibler* bzw. *hydrodynamischer Druck* bezeichnet [21].

Was die Gleichungen (3.38) – (3.41) von den kompressiblen unterscheidet ist neben den degenerierten Gleichungen (3.38) und (3.41) der abgekoppelte Druckterm $p^{(2)}$ in der Geschwindigkeitsgleichung. Es bietet sich also an, zur Konstruktion eines numerischen Verfahrens zuerst ein Operator-Splitting durchzuführen, das diese in einem eigenen kleinen System abspaltet. Damit hat man alles, was die Inkompressibilität und damit die schnellen Wellenausbreitungen vom Rest getrennt. Das bietet für die Numerik die Möglichkeit, ein halbimplizites Verfahren zu verwenden, das nur diesen abgekoppelten Teil implizit behandeln muß, den Rest aber explizit in der Zeit behandeln kann. Um sich nicht auf inkompressible Strömungen einzuschränken, werden beim Splitting für das numerische Verfahren nicht die inkompressiblen Gleichungen verwendet oder das System (3.38) – (3.41) sondern die vollen kompressiblen Gleichungen.

Ab dieser Stelle wird wieder angenommen, daß sich die räumlichen Differentialoperatoren alle auf die originale Skala \mathbf{x} beziehen. Der akustische Druck wird dabei zunächst außer Acht gelassen.

Was nach der Abspaltung der Terme mit der schnellen Wellenausbreitung noch übrig bleibt, lautet

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{Av^2 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{B}_t - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (3.44)$$

$$p_t + \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0. \quad (3.45)$$

Dieses System ist hyperbolisch. Betrachtet man seine eindimensionale Form in der ersten Raumrichtung, so ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = u - \frac{1}{Av} \sqrt{\frac{B^2}{\rho}}, \quad \lambda_2 = u - \frac{1}{Av} c_A, \quad (3.46)$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = u, \quad (3.47)$$

$$\lambda_6 = u + \frac{1}{Av} c_A, \quad \lambda_7 = u + \frac{1}{Av} \sqrt{\frac{B^2}{\rho}}. \quad (3.48)$$

Diese hängen nicht von der globalen Machzahl ab. Damit erhält das System seinen hyperbolischen Charakter für alle Machzahlen. Befindet man sich im Taniuti-Diagramm 3.1 im Bereich 4, d. h. die Alfvenzahl ist groß, so sind $\lambda_1 - \lambda_7$ alle in der Größenordnung der Strömungsgeschwindigkeit.

Das kleine abgespaltene System lautet:

$$\rho_t + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}_t + \frac{1}{M^2 \rho} \nabla p = 0, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{B}_t = 0, \quad (3.51)$$

$$p_t + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.52)$$

Für $M > 0$ ist auch dieses System hyperbolisch. Betrachtet man jedoch wie oben die Eigenwerte, so lauten sie

$$\lambda_1 = -\frac{a}{M}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \quad \lambda_7 = \frac{a}{M} \quad (3.53)$$

mit der akustischen Schallgeschwindigkeit a . Bis auf die verschwindenden Eigenwerte in der Mitte hängen diese direkt von M ab. Für $M \rightarrow 0$ gehen sie gegen $\pm\infty$, das System entartet elliptisch. Gleichungen (3.49) und (3.52) gehen für eine isentrope Strömung ohne Kompression vom Rand gegen die Divergenzbedingung für inkompressible Strömungsfelder, der Term mit dem Druckgradienten in (3.50) gegen den

\mathbf{x} -Gradienten von $p^{(2)}$. Dieser übernimmt die Rolle des Lagrange-Multiplikators, der die Einhaltung der Divergenzbedingung an \mathbf{v} ermöglicht.

Dieses Teilsystem muß im numerischen Verfahren für kleine Machzahlen auf alle Fälle implizit behandelt werden, sorgt es doch bei kleinen Machzahlen für die hohen Wellengeschwindigkeiten, die den Zeitschritt bei einem expliziten Verfahren stark einschränken.

3.4.3 Das numerische Verfahren

Ein numerisches Verfahren, das die Ergebnisse der Mehrskalanalyse berücksichtigt, sollte insbesondere die folgenden Eigenschaften haben:

- Die Anteile, die auch beim Übergang zur Inkompressibilität hyperbolisch bleiben (Gleichungen (3.42) – (3.45)) sollten getrennt behandelt werden können, auch wenn die globale Machzahl gegen Null geht. Damit wird insbesondere die Verwendung zeitexpliziter Verfahren für diese Anteile ermöglicht.
- Die Anteile, welche die Inkompressibilität bei verschwindender Machzahl repräsentieren (Gleichungen (3.49) – (3.52)), sollten implizit behandelt werden. Dabei ist darauf zu achten, daß das resultierende Verfahren auch im Falle der elliptischen Entartung sinnvolle Ergebnisse liefert.
- Es sollte die Möglichkeit bestehen, den Einfluß der langwelligen Akustik (Gleichungen (3.37) und (3.32)) einzubringen.

Hier soll lediglich der Fall eines Verfahrens erster Ordnung in der Zeit erläutert werden. Die Prinzipien sind hier besonders klar zu sehen. Eine Erweiterung für höhere Konsistenzordnungen wäre Gegenstand einer eigenen Arbeit. Für den Fall schwach kompressibler Gasströmungen wurde dies in [28, 34] und [31] bereits unternommen.

Die Grundidee besteht darin, die Systeme (3.42) – (3.45) und (3.49) – (3.52) durch ein Operator-Splitting getrennt zu behandeln. Dabei wird das echt hyperbolische System explizit, das elliptisch entartende implizit behandelt. Man verwendet dafür Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzen in der Zeit. Die Raumdiskretisierung ist geeignet zu wählen, worauf aber in dieser Arbeit nicht eingegangen werden soll.

Die numerische Behandlung des Systems (3.42) – (3.45) mit den langsamen Wellen kann zeitexplizit geschehen. Dabei ist die Zeitschrittweitenbedingung durch die Eigenwerte

$$\lambda_{1/7} = u \mp \frac{1}{Av} \sqrt{\frac{B^2}{\rho}}$$

gegeben. Solange die globale Alfvenzahl nicht zu klein wird, ist dies keine wesentliche Einschränkung. Für die Raumdiskretisierung können Upwinddifferenzen verwendet werden [31].

Im System für die schnellen Wellen (3.49) – (3.52) ist die Magnetfeldgleichung trivial, sie läßt das Magnetfeld einfach unverändert. Setzt man in das verbleibende System

Rückwärtsdifferenzen mit dem Zeitschritt δt ein, so lautet es

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \rho^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \frac{1}{M^2} \frac{1}{\rho^{n+1}} \nabla p^{n+1} = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} + \gamma p^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.56)$$

Da diese Form identisch ist mit dem Analogon für schwach kompressible Gasströmungen, läßt sich das Vorgehen direkt übertragen. Das implizite System wird iterativ gelöst, wobei der zentrale Baustein die Lösung einer elliptischen Druckkorrekturgleichung ist. Ein Iterationsschritt läuft folgendermaßen ab:

1. Wähle geeignete Druck- und Dichteschätzungen p^* und ρ^* . Sinnvoll ist hier das Ergebnis der letzten Iteration. Als Anfangsschätzung kann auch das Resultat des letzten Zeitschritts für das langsame System dienen.
2. Aus der Gleichung für die erste Geschwindigkeitskomponente (3.55) ergibt sich

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n - \frac{\Delta t}{M^2 \rho^*} \nabla p^*. \quad (3.57)$$

3. Erfüllen die gefundenen Werte ρ^* , p^* , \mathbf{v}^* die Gleichungen (3.54)-(3.56) noch nicht mit zufriedenstellender Genauigkeit, dann müssen Korrekturen eingeführt werden:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* + \delta \mathbf{v}, \quad p^{n+1} = p^* + \delta p. \quad (3.58)$$

Dabei bezeichnet der obere Index $n + 1$ die gesuchte Lösung und $\delta \mathbf{v}$ bzw. δp die Korrektur der Geschwindigkeit bzw. des Drucks. Die Dichte wird zunächst einmal festgehalten. Der Zusammenhang zwischen Druck- und Geschwindigkeitskorrektur ergibt sich aus (3.55) zu

$$\delta \mathbf{v} = -\frac{\Delta t}{M^2 \rho^*} \nabla \delta p. \quad (3.59)$$

Dies wird in die diskretisierte Druckgleichung

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} + \gamma p^* \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (3.60)$$

eingesetzt. Dabei wurde in Gleichung (3.56) der Evolutionsterm dadurch „linearisiert“, daß p^{n+1} durch p^* ersetzt wurde. Nun kann man das Ganze zur folgenden elliptischen Druckkorrekturgleichung umformen:

$$\delta p - \frac{\Delta t^2}{M^2} \gamma p^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \right) = p^n - p^* - \Delta t \gamma p^* (\nabla \cdot \mathbf{v}^*). \quad (3.61)$$

Diese ist linear. Damit ist sie einer numerischen Lösung leicht zugänglich. Durch Raumdiskretisierung erhält man ein lineares Gleichungssystem, das sich mit den bekannten Verfahren lösen läßt.

4. Damit können der korrigierte Druck und die korrigierte Geschwindigkeit berechnet werden. Den verbesserten Wert der Dichte erhält man aus der Kontinuitätsgleichung.

Da in der Druckkorrekturgleichung zunächst die Dichte ρ^* und in (3.60) auch noch der Druck p^* festgehalten wurden, muß man diese Schritte iterativ wiederholen, bis man eine ausreichende Genauigkeit bekommt.

Wird die Machzahl sehr klein, so sollte die Druckaufspaltung

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)} \dots$$

in das Verfahren eingebaut werden, da der Druck p räumlich konstant wird und die rechte Seite der Druckkorrekturgleichung gegen Null konvergiert. Nachdem in dieser Arbeit auf die akustischen Effekte nicht näher eingegangen werden soll, wird der Term $Mp^{(1)}$, der diese repräsentiert, vernachlässigt. Eine Druckkorrekturgleichung, die für verschwindende Machzahl gerade auf die eines inkompressiblen Druckkorrekturverfahrens führt, ergibt sich durch die Druckaufspaltung und die Formulierung der Korrektur für den Druckterm $p^{(2)}$. Führt man die Druckaufspaltung durch, so ergibt sich:

$$M^2\delta p^{(2)} - \Delta t^2 \gamma p^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p^{(2)} \right) = p^n - p^* - \Delta t \gamma p^* (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) . \quad (3.62)$$

Der neue Wert des Drucks ergibt sich dann aus

$$p^{n+1} = p^* + M^2\delta p^{(2)} . \quad (3.63)$$

Man sieht insgesamt, daß sich das Vorgehen aus der Gasdynamik bis auf die Behandlung des Teilsystems mit den langsamen Wellen direkt überträgt. Damit ist es auch einfach, ein entsprechendes Computerprogramm für die schwach kompressible Gasdynamik auf die MHD mit kleinen Machzahlen zu erweitern.

3.5 Entwicklung für kleine Alfvenzahlen

3.5.1 Die Analysis

Nun zu dem Fall, daß die Alfvenzahl klein wird und die globale Machzahl beliebig aber fest ist, jedoch so, daß keine Stöße auftreten können. Das heißt wir betrachten die Bereiche 3 und 5 des Taniuti-Diagramms 3.1. Im Falle kleiner Alfvenzahlen ist es eine natürliche Wahl, $\varepsilon = Av$ als Entwicklungsparameter zu verwenden. Der Ansatz lautet dann

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, Av\mathbf{x}, t) + Av\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, Av\mathbf{x}, t) + Av^2\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{x}, Av\mathbf{x}, t) + o(Av^2) . \quad (3.64)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (\rho, u, v, w, B_2, B_3, p)^T , \\ \mathbf{q}^{(n)} &= (\rho^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, B_3^{(n)}, p^{(n)})^T , \quad n \in \{0, 1, 2\} . \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Gleichungen (3.17) – (3.20) ein, so erhält man ein System von Evolutionsgleichungen für die $\rho^{(n)}, \dots, p^{(n)}$. Verlangt man, daß diese auch dann für alle Av gelten, wenn man ξ unabhängig von Av und \mathbf{x} zuläßt, so erlaubt die Sublinearität (3.11) einen Koeffizientenvergleich bezüglich Av in den Gleichungen.

Bei den kleinen Machzahlen erhielt man zunächst Informationen über die verschiedenen Terme des mechanisch-thermodynamischen Drucks. Hier nun würde man Ergebnisse für den magnetischen Druck erwarten. Da stellt sich aber das erste Problem. Der magnetische Druck taucht nicht als selbständige Variable in den Gleichungen auf, sondern ergibt sich aus dem Magnetfeld als $\frac{\mathbf{B}^2}{2}$. Bekommt man also Ergebnisse für den magnetischen Druck, so reichen diese nicht aus, um ein sinnvolles numerisches Verfahren zu konstruieren. Man braucht Ergebnisse für das Magnetfeld selbst. Diese lassen sich jedoch nur in Spezialfällen gewinnen. Betrachtet man nämlich die Koeffizienten von Av^{-2} in der Geschwindigkeitsgleichung, so ist

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}^{(0)}) \times \mathbf{B}^{(0)} = 0 \quad (3.65)$$

bzw. in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} B_3^{(0)} B_1^{(0)} z + B_2^{(0)} B_1^{(0)} y - B_3^{(0)} B_3^{(0)} x - B_2^{(0)} B_2^{(0)} x \\ B_1^{(0)} B_2^{(0)} x + B_3^{(0)} B_2^{(0)} z - B_1^{(0)} B_1^{(0)} y - B_3^{(0)} B_3^{(0)} y \\ B_2^{(0)} B_3^{(0)} y + B_1^{(0)} B_3^{(0)} x - B_2^{(0)} B_2^{(0)} z - B_1^{(0)} B_1^{(0)} z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.66)$$

Daraus lassen sich im allgemeinen dreidimensionalen Fall weder Eigenschaften des Magnetfelds noch des magnetischen Drucks direkt ablesen. Wir beschränken uns daher auf eine bzw. zwei Raumdimensionen.

Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, daß man im allgemeinen dreidimensionalen Fall auch eine Druckkorrektur analog zu 3.4.3 formulieren kann. Es steht aber keine Aufspaltung des Magnetfelds zur Verfügung, die sich dort einsetzen läßt. Beziehung (3.65) bedeutet gerade, daß das Magnetfeld führender Ordnung parallel zu seiner Rotation bezüglich \mathbf{x} ist. Bei den angeführten zweidimensionalen Spezialfällen 2.1.1 wird ausgenutzt, daß dann zusätzlich zur Parallelität noch die Orthogonalität gilt. Die Frage, ob sich die Parallelität auch im 3d-Fall ausnutzen läßt, könnte Gegenstand weiterführender Untersuchungen sein.

Eindimensionale Fälle

Nachdem im Eindimensionalen alle y - und z Ableitungen sowie wegen der Divergenzbedingung auch die x -Ableitung von $B_1^{(0)}$ verschwinden, vereinfacht sich Gleichung (3.66) zu

$$\begin{pmatrix} -B_3^{(0)} B_3^{(0)} x - B_2^{(0)} B_2^{(0)} x \\ B_1^{(0)} B_2^{(0)} x \\ B_1^{(0)} B_3^{(0)} x \end{pmatrix} = 0. \quad (3.67)$$

Der einfachste Fall ist der, wenn das orthogonale Magnetfeld, also B_2 und B_3 verschwindet. Dann verschwindet auch der Einfluß des Magnetfelds auf die Strömung. Die

Gleichungen degenerieren zu den eindimensionalen Eulergleichungen (2.20) – (2.22), und die Alfvenzahl fällt ganz heraus. Da in diesem Fall eine Entwicklung nach der Alfvenzahl nicht sinnvoll ist, wird im Weiteren vorausgesetzt, daß das orthogonale Magnetfeld nicht identisch verschwindet. Dann ist aber immer noch zu unterscheiden, ob B_1 verschwindet oder nicht.

Der Spezialfall Verschwindet B_1 , so kann sich wie bei der Herleitung des entsprechenden Systems (2.23) – (2.26) gesehen das Magnetfeld nicht mehr drehen. Man kann also ohne Einschränkung annehmen, daß etwa B_3 und damit auch $B_3^{(0)}$ sowie die anderen zugehörigen Entwicklungsfunktionen verschwinden. Aus der ersten Zeile von (3.67) folgt dann also

$$B_x^{(0)} := B_{2x}^{(0)} = 0 . \quad (3.68)$$

System (2.23) – (2.26) lautet in entdimensionalisierter Form

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 , \quad (3.69)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{Av^2} \frac{1}{2\rho} (B^2)_x + \frac{p_x}{\rho} = 0 , \quad (3.70)$$

$$B_t + Bu_x + uB_x = 0 , \quad (3.71)$$

$$p_t + \gamma pu_x + up_x = 0 \quad (3.72)$$

Man setzt dann eine Entwicklung entsprechend (3.64) ein. Gleichung (3.68) ergibt sich nun direkt aus den Koeffizienten von Av^{-2} in der Geschwindigkeitsgleichung (3.70).

Sammelt man dort Koeffizienten von Av^{-1} und setzt (3.68) ein, so ergibt sich

$$B^{(0)}B_x^{(1)} + B^{(0)}B_\xi^{(0)} = 0 . \quad (3.73)$$

Integriert man Gleichung (3.73) in der ersten Variablen über ein Intervall $I = [a, b]$, so führt das analog zur Analyse für kleine Machzahlen auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)}B_x^{(1)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)}B_\xi^{(0)} dx \\ &= B^{(0)} \frac{1}{|I|} \int_I B_x^{(1)} dx + B^{(0)}B_\xi^{(0)} \end{aligned}$$

und damit

$$B^{(0)}B_\xi^{(0)} = 0 \quad \text{für } |I| \rightarrow \infty . \quad (3.74)$$

Also ist das Magnetfeld nullter Ordnung räumlich konstant. Setzt man dies in (3.73) ein, so findet man, daß auch $B_x^{(1)}$ verschwindet. Das heißt, es gilt

$$B^{(0)} = B^{(0)}(t) , \quad B^{(1)} = B^{(1)}(\xi, t) . \quad (3.75)$$

Bleibt man bei der Geschwindigkeitsgleichung, sucht nun die Koeffizienten von Av^0 und multipliziert das Ganze mit $\rho^{(0)}$, so führt dies unter Berücksichtigung von (3.75) auf die Beziehung

$$\rho^{(0)}u_t^{(0)} + \rho^{(0)}u^{(0)}u_x^{(0)} + p_x^{(0)} + B^{(0)}B_x^{(2)} + B^{(0)}B_\xi^{(1)} = 0 .$$

Analog ergibt sich aus der Dichtegleichung (3.69) nach Multiplikation mit $u^{(0)}$

$$\rho_t^{(0)} u^{(0)} + \rho^{(0)} u^{(0)} u_x^{(0)} + \rho_x^{(0)} u^{(0)} u^{(0)} = 0 .$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$(\rho^{(0)} u^{(0)})_t + (\rho^{(0)} u^{(0)} u^{(0)})_x + p_x^{(0)} + B^{(0)} B_x^{(2)} + B^{(0)} B_\xi^{(1)} = 0 . \quad (3.76)$$

Durch Integration von (3.76) bezüglich der ersten Variablen über dem Intervall I bekommt man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)})_t dx + \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)} u^{(0)})_x + p_x^{(0)} + B^{(0)} B_x^{(2)} dx \\ &\quad + \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)} B_\xi^{(1)} dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)}) dx + \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)} u^{(0)})_x + p_x^{(0)} + B^{(0)} B_x^{(2)} dx + B^{(0)} B_\xi^{(1)} . \end{aligned}$$

Also ist

$$\overline{(\rho^{(0)} u^{(0)})_t} + B^{(0)} B_\xi^{(1)} = 0 . \quad (3.77)$$

Dabei bezeichnet der Oberstrich wieder die Mittelung der betreffenden Größe. Im Gegensatz zum Fall verschwindender Machzahl läßt sich hier $\rho^{(0)}$ nicht aus der Zeitableitung und damit erst recht nicht aus der Mittelung lösen. Dies ging dort nur, weil die Isentropie den Druck algebraisch mit der Dichte koppelt. Der magnetische Druck kennt eine solche Koppelung natürlich nicht. Damit impliziert ein konstanter magnetischer Druck nullter Ordnung auch keine konstante Dichte nullter Ordnung.

Aus den Koeffizienten von Av^0 in der Magnetfeldgleichung (3.71) ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.75)

$$B_t^{(0)} + B^{(0)} u_x^{(0)} = 0 . \quad (3.78)$$

Damit ist auch $u_x^{(0)}$ nur noch eine Funktion der Zeit. Integration wie oben liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I B_t^{(0)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)} u_x^{(0)} dx \\ &= B_t^{(0)} + \frac{1}{|I|} B^{(0)} [u^{(0)}]_a^b , \end{aligned} \quad (3.79)$$

was bedeutet, daß sich — in Analogie zu (3.29) — $B^{(0)}$ nur noch durch Kompression von außen ändern kann.

Sammeln der Koeffizienten von Av in der Magnetfeldgleichung führt auf

$$B_t^{(1)} + B^{(0)} u_\xi^{(0)} + B^{(0)} u_x^{(1)} + B^{(1)} u_x^{(0)} = 0 .$$

Integriert man auch hier, so findet man unter Berücksichtigung von (3.75):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I B_t^{(1)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)} u_\xi^{(0)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)} u_x^{(1)} + B^{(1)} u_x^{(0)} dx \\ &= B_t^{(1)} + B^{(0)} \frac{1}{|I|} \int_I u_\xi^{(0)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B^{(0)} u_x^{(1)} + B^{(1)} u_x^{(0)} dx . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$B_t^{(1)} + B^{(0)} \overline{u^{(0)}_\xi} = 0 . \quad (3.80)$$

Man bekommt also mit (3.77) und (3.80) ein Analogon zu den Gleichungen der linearisierten Akustik:

$$\begin{aligned} \overline{(\rho^{(0)} u^{(0)})_t} + B^{(0)} B_\xi^{(1)} &= 0 , \\ B_t^{(1)} + B^{(0)} \overline{u^{(0)}_\xi} &= 0 . \end{aligned}$$

Da bei den bisherigen Ergebnissen alle Variablen außer dem Magnetfeld nur noch in führender Ordnung auftreten, wird bei diesen im Weiteren der Index (0) weggelassen. Insgesamt gilt damit für $Av \rightarrow 0$ in der Grenze unter der Annahme, daß das Feld in Strömungsrichtung verschwindet, im isentropen Fall

$$p_t + up_x + \gamma pu_x = 0 , \quad (3.81)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{M^2} \frac{p_x}{\rho} + \frac{1}{\rho} (B^{(0)} B_x^{(2)} + B^{(0)} B_\xi^{(1)}) = 0 , \quad (3.82)$$

$$B_t + Bu_x + uB_x = 0 \quad (3.83)$$

und im Fall des idealen Gases

$$\rho_t + \rho u_x + \rho_x u = 0 , \quad (3.84)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{M^2} \frac{p_x}{\rho} + \frac{1}{\rho} (B^{(0)} B_x^{(2)} + B^{(0)} B_\xi^{(1)}) = 0 , \quad (3.85)$$

$$B_t + Bu_x + uB_x = 0 , \quad (3.86)$$

$$p_t + up_x + \gamma pu_x = 0 . \quad (3.87)$$

Es zeigt sich, daß für $Av = 0$ die ersten drei Magnetfeldterme aus der Entwicklung

$$B = B^{(0)} + AvB^{(1)} + Av^2B^{(2)} + O(Av^3) \quad (3.88)$$

in die Gleichungen eingehen und alle einen Einfluß auf die führende Ordnung der anderen physikalischen Größen haben. Dabei gilt für $Av \rightarrow 0$:

$$B^{(0)} = B^{(0)}(t), \quad B^{(1)} = B^{(1)}(\xi, t) \quad \text{und} \quad B^{(2)} = B^{(2)}(x, \xi, t) . \quad (3.89)$$

Die zeitliche Entwicklung von $B^{(0)}$ ergibt sich aus

$$B_t^{(0)} + \frac{1}{|I|} B^{(0)} [u]_a^b = 0 . \quad (3.90)$$

Für kleine Alfvenzahlen liefert die asymptotische Betrachtung durch Mittelung der Störungsgleichungen Evolutionsgleichungen für die langwelligen magnetischen Erscheinungen:

$$\overline{(\rho u)_t} + B^{(0)} B_\xi^{(1)} = 0, \quad (3.91)$$

$$B_t^{(1)} + B^{(0)} \bar{u}_\xi = 0. \quad (3.92)$$

Der allgemeine 1d-Fall Im Falle $B_1 \neq 0$ lassen sich in (3.67) die zweite und dritte Zeile durch B_1 dividieren. Damit verschwinden die x -Ableitungen von $B_2^{(0)}$ und $B_3^{(0)}$. Auch hier dient es der Übersicht, wenn man direkt die entdimensionalisierte Form der eindimensionalen Gleichungen verwendet:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (3.93)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{M^2} \frac{p_x}{\rho} + \frac{1}{2Av^2\rho} (B^2)_x = 0, \quad (3.94)$$

$$v_t + uv_x - \frac{B_1}{Av^2\rho} B_{2x} = 0, \quad (3.95)$$

$$w_t + uw_x - \frac{B_1}{Av^2\rho} B_{3x} = 0, \quad (3.96)$$

$$B_{2t} + B_2 u_x - B_1 v_x + u B_{2x} = 0, \quad (3.97)$$

$$B_{3t} + B_3 u_x - B_1 w_x + u B_{3x} = 0, \quad (3.98)$$

$$p_t + \gamma p u_x + u p_x = 0 \quad (3.99)$$

Sammelt man hier in der Geschwindigkeitsgleichung für die zweite bzw. dritte Raumrichtung die Koeffizienten von Av^{-2} bzw. Av^{-1} , so findet man analog zum vorigen Fall

$$B_2^{(0)} = B_2^{(0)}(t) \quad B_2^{(1)} = B_2^{(1)}(\xi, t), \quad (3.100)$$

$$B_3^{(0)} = B_3^{(0)}(t) \quad B_3^{(1)} = B_3^{(1)}(\xi, t). \quad (3.101)$$

Sammelt man nun in einer dieser beiden Geschwindigkeitsgleichungen, etwa in (3.95), die Koeffizienten von Av^0 und multipliziert mit $\rho^{(0)}$, so führt dies unter Berücksichtigung von (3.100) auf

$$\rho^{(0)} v_t^{(0)} + \rho^{(0)} u^{(0)} v_x^{(0)} - B_1 B_{2,x}^{(2)} - B_1 B_{2,\xi}^{(1)} = 0.$$

Analog ergibt sich aus der Dichtegleichung (3.93), nach Multiplikation mit $v^{(0)}$

$$\rho_t^{(0)} v^{(0)} + \rho^{(0)} u_x^{(0)} v^{(0)} + \rho_x^{(0)} u^{(0)} v^{(0)} = 0.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$(\rho^{(0)} v^{(0)})_t + (\rho^{(0)} u^{(0)} v^{(0)})_x - B_1 B_{2,x}^{(2)} - B_1 B_{2,\xi}^{(1)} = 0. \quad (3.102)$$

Die übliche Integration führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} v^{(0)})_t dx + \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)} v^{(0)})_x - B_1 B_{2,x}^{(2)} dx - \frac{1}{|I|} \int_I B_1 B_{2,\xi}^{(1)} dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{|I|} \int_I \rho^{(0)} v^{(0)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)} v^{(0)})_x - B_1 B_{2,x}^{(2)} dx - B_1 B_{2,\xi}^{(1)} \end{aligned}$$

Daher ist

$$\overline{(\rho^{(0)} v^{(0)})_t} - B_1 B_{2,\xi}^{(1)} = 0 \quad \text{für } |I| \rightarrow \infty . \quad (3.103)$$

Gleiches gilt für (3.96), wenn man w statt v und B_3 statt B_2 schreibt. Auch für die Geschwindigkeitsgleichung in Strömungsrichtung kann man dies tun. Analog zu (3.102) erhält man²

$$(\rho^{(0)} u^{(0)})_t + (\rho^{(0)} u^{(0)} u^{(0)})_x + p_x^{(0)} + B_2^{(0)} B_{2,x}^{(2)} + B_3^{(0)} B_{3,x}^{(2)} + B_2^{(0)} B_{2,\xi}^{(1)} + B_3^{(0)} B_{3,\xi}^{(1)} = 0 . \quad (3.104)$$

Integriert man nun auch (3.104) entsprechend, so kommt man auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)})_t dx + \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)} u^{(0)})_x + p_x^{(0)} + B_2^{(0)} B_{2,x}^{(2)} + B_3^{(0)} B_{3,x}^{(2)} dx \\ &\quad + \frac{1}{|I|} \int_I B_2^{(0)} B_{2,\xi}^{(1)} + B_3^{(0)} B_{3,\xi}^{(1)} dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{|I|} \int_I \rho^{(0)} u^{(0)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I (\rho^{(0)} u^{(0)} u^{(0)})_x + p_x^{(0)} + B_2^{(0)} B_{2,x}^{(2)} + B_3^{(0)} B_{3,x}^{(2)} dx \\ &\quad + (B_2^{(0)} B_{2,\xi}^{(1)} + B_3^{(0)} B_{3,\xi}^{(1)}) . \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \overline{(\rho^{(0)} u^{(0)})_t} + (B_2^{(0)} B_{2,\xi}^{(1)} + B_3^{(0)} B_{3,\xi}^{(1)}) &= 0 , \\ \overline{(\rho^{(0)} v^{(0)})_t} - B_1 B_{2,\xi}^{(1)} &= 0 , \\ \overline{(\rho^{(0)} w^{(0)})_t} - B_1 B_{3,\xi}^{(1)} &= 0 . \end{aligned} \quad (3.105)$$

Auch hier läßt sich $\rho^{(0)}$ nicht aus Mittelung und Zeitableitung lösen.

Die Koeffizienten von Av^0 in den Magnetfeldgleichungen ergeben

$$B_{2,t}^{(0)} + B_2^{(0)} u_x^{(0)} - B_1 v_x^{(0)} = 0 , \quad (3.106)$$

$$B_{3,t}^{(0)} + B_3^{(0)} u_x^{(0)} - B_1 w_x^{(0)} = 0 . \quad (3.107)$$

²Die Dichtegleichung wurde hier natürlich mit $u^{(0)}$ multipliziert.

Integriert man Gleichung (3.106) in derselben Weise, wie dies bei den anderen Gleichungen durchgeführt wurde, so führt dies auf

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I B_{2,t}^{(0)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B_2^{(0)} u_x^{(0)} dx - \frac{1}{|I|} \int_I B_1 v_x^{(0)} dx \\
 &= B_{2,t}^{(0)} + B_2^{(0)} \frac{1}{|I|} \int_I u_x^{(0)} dx - B_1 \frac{1}{|I|} \int_I v_x^{(0)} dx \\
 &= B_{2,t}^{(0)} + B_2^{(0)} \frac{1}{|I|} [u^{(0)}]_a^b - B_1 \frac{1}{|I|} [v^{(0)}]_a^b .
 \end{aligned}$$

Geht man für (3.107) analog vor, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
 B_{2,t}^{(0)} + B_2^{(0)} \frac{1}{|I|} [u^{(0)}]_a^b - B_1 \frac{1}{|I|} [v^{(0)}]_a^b &= 0 , \\
 B_{3,t}^{(0)} + B_3^{(0)} \frac{1}{|I|} [u^{(0)}]_a^b - B_1 \frac{1}{|I|} [w^{(0)}]_a^b &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Damit kann sich das Magnetfeld nur noch durch Kompression und Scherung von den Rändern her verändern.

Sucht man nun in den Magnetfeldgleichungen nach den Koeffizienten von Av , so findet man z.B. für das Feld in y -Richtung

$$B_{2,t}^{(1)} + B_2^{(1)} u_x^{(0)} + B_2^{(0)} u_x^{(1)} + B_2^{(0)} u_\xi^{(0)} - B_1 v_\xi^{(0)} = 0 . \tag{3.109}$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{|I|} \int_I B_{2,t}^{(1)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B_2^{(1)} u_x^{(0)} + B_2^{(0)} u_x^{(1)} dx + \frac{1}{|I|} \int_I B_2^{(0)} u_\xi^{(0)} dx - \frac{1}{|I|} \int_I B_1 v_\xi^{(0)} dx \\
 &= B_{2,t}^{(1)} + \frac{1}{|I|} \int_I B_2^{(1)} u_x^{(0)} + B_2^{(0)} u_x^{(1)} dx + B_2^{(0)} \frac{1}{|I|} \int_I u_\xi^{(0)} dx - B_1 \frac{1}{|I|} \int_I v_\xi^{(0)} dx .
 \end{aligned}$$

Damit erhält man analog zu (3.80)

$$\begin{aligned}
 B_{2,t}^{(1)} + B_2^{(0)} \overline{u^{(0)}}_\xi - B_1 \overline{v_\xi^{(0)}} &= 0 , \\
 B_{3,t}^{(1)} + B_3^{(0)} \overline{u^{(0)}}_\xi - B_1 \overline{v_\xi^{(0)}} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Ein zweidimensionaler Spezialfall

In zwei Dimensionen läßt sich die Tatsache ausnutzen, daß das Magnetfeld senkrecht auf seiner Rotation steht 2.1.1. Es soll hier allerdings nur einer der beiden Fälle ausgeführt werden. Nimmt man den Fall des skalaren Magnetfelds, bei dem nur das Magnetfeld in der dritten Raumrichtung bleibt, die Ableitungen und die Geschwindigkeitskomponente in dieser Richtung aber verschwinden, so erhält (3.66) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} -B_3^{(0)} B_3^{(0)} x \\ -B_3^{(0)} B_3^{(0)} y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 . \tag{3.111}$$

Damit ist aber das Magnetfeld bereits unabhängig von \mathbf{x} . Die Gleichungen lauten in entdimensionalisierter Form

$$\rho_t + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{Av^2 \rho} \nabla B^2 + \frac{1}{M^2 \rho} \nabla p = 0, \quad (3.113)$$

$$B_t + B \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla B = 0, \quad (3.114)$$

$$p_t + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla p = 0. \quad (3.115)$$

Hier setzt man wieder eine Entwicklung entsprechend (3.64) ein. Bei den Integrationen und Mittelungen verwendet man anstelle der Volumina V_i konvexe Teilflächen A_i der (x, y) -Ebene, die genügend glatt berandet sind und mit wachsendem i gegen die ganze Ebene konvergieren. Dann ergibt sich analog zum eindimensionalen Spezialfall

$$B^{(0)} = B^{(0)}(t), \quad B^{(1)} = B^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (3.116)$$

Sammelt man nun in der Magnetfeldgleichung die Koeffizienten von Av^0 und berücksichtigt (3.116), so lautet findet man

$$B_t^{(0)} + B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0; . \quad (3.117)$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B_t^{(0)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} \\ &= B_t^{(0)} + B^{(0)} \frac{1}{|A_i|} \oint_{\partial A_i} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Eine zeitliche Änderung des Magnetfelds und damit auch des magnetischen Drucks ist also nur noch durch eine äußere Kompression vom Rand her möglich. Löst man die obige Beziehung nach der Divergenz der Geschwindigkeit auf und setzt sie in die Kontinuitätsgleichung zur Ordnung 0 ein, so ergibt sich analog zu (3.30)

$$\rho_t^{(0)} + \nabla_{\mathbf{x}} \rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} = \rho^{(0)} \frac{B_t^{(0)}}{B^{(0)}},$$

also wieder ein Konvektionsgleichung mit Quellterm. Diesmal stammt er aber aus dem magnetischen Druck. Dennoch läßt er sich genau wie dort als Kompression entlang Teilchenbahnen interpretieren.

Betrachtet man nun in der Magnetfeldgleichung die Terme zu Av^1 , so bekommt man

$$B_t^{(1)} + B^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + B^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{v}^{(0)} + B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0.$$

Die Integration ergibt hier

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B_t^{(1)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} \\
 &\quad + \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(1)} d\mathbf{x} \\
 &= B_t^{(1)} + \frac{1}{|A_i|} B^{(1)} \oint_{\partial A_i} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}} \\
 &\quad + \frac{1}{|A_i|} B^{(0)} \int_{A_i} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} B^{(0)} \oint_{\partial A_i} \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}}
 \end{aligned}$$

Da die Funktionen nur sublinear wachsen können mit \mathbf{x} (3.11), verschwinden im Grenzwert für $i \rightarrow \infty$ die Randintegrale. Es ergibt sich

$$B_t^{(1)} + B^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \overline{\mathbf{v}^{(0)}} = 0. \quad (3.118)$$

Die Dichtegleichung zu Av^0 lautet:

$$\rho_t^{(0)} + \rho^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \rho^{(0)} = 0, \quad (3.119)$$

die entsprechende Geschwindigkeitsgleichung unter Berücksichtigung von (3.116)

$$\mathbf{v}_t^{(0)} + (\mathbf{v}^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} B^{(2)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} B^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} B^{(1)} = 0. \quad (3.120)$$

Multipliziert man (3.119) mit $\mathbf{v}^{(0)}$, (3.120) mit $\rho^{(0)}$ und addiert die beiden Gleichungen, dann ergibt sich

$$(\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)^2}) + \nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)} + B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} B^{(2)} + B^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} B^{(1)} = 0. \quad (3.121)$$

Integration dieser Gleichung über eine Fläche A_i führt auf

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)^2}) d\mathbf{x} \\
 &\quad + \frac{1}{|A_i|} B^{(0)} \int_{A_i} \nabla_{\mathbf{x}} B^{(2)} d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} B^{(0)} \int_{A_i} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} B^{(1)} d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t d\mathbf{x} + \frac{1}{|A_i|} \oint_{\partial A_i} \rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)^2} ds_{\mathbf{x}} \\
 &\quad + \frac{1}{|A_i|} \oint_{\partial A_i} p^{(0)} ds_{\mathbf{x}} + \frac{1}{|A_i|} B^{(0)} \oint_{\partial A_i} B^{(2)} ds_{\mathbf{x}} + \frac{1}{|A_i|} B^{(0)} \int_{A_i} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} B^{(1)} d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Im Grenzwert für $i \rightarrow \infty$ verschwinden die Randintegrale aufgrund der Sublinearität. Übrig bleibt

$$\overline{(\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})_t} + B^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \overline{B^{(1)}} = 0. \quad (3.122)$$

3.5.2 Die hyperbolisch-elliptische Aufspaltung

Auch hier werden wieder die gleichen Fälle wie im vorigen Abschnitt unterschieden:

Eindimensionale Fälle

Der Spezialfall Weil bei den Ergebnissen der Analysis außer beim Magnetfeld nur noch Terme führender Ordnung übrigblieben, werden bei den übrigen Variablen im Folgenden die oberen Indizes einfach weggelassen. Zunächst der Grenzwert der Gleichungen für $Av \rightarrow \infty$:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (3.123)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{M^2} \frac{p_x}{\rho} + \frac{1}{\rho} B^{(0)} B_x^{(2)} = B^{(0)} B_\xi^{(1)}, \quad (3.124)$$

$$B_t^{(0)} + B^{(0)} u_x = 0, \quad (3.125)$$

$$p_t + \gamma p u_x + u p_x = 0 \quad (3.126)$$

zusammen mit

$$\overline{(\rho u)}_t + B^{(0)} B_\xi^{(1)} = 0, \quad (3.127)$$

$$B_t^{(1)} + B^{(0)} \bar{u}_\xi = 0. \quad (3.128)$$

Ähnlich wie beim Fall verschwindender Machzahl für den Druck, entkoppelt auch hier der Magnetfeldterm in der Geschwindigkeitsgleichung von der Evolution des Felds. Eine Interpretation der einzelnen Terme analog zu den Drucktermen in Abschnitt 3.4.2 könnte etwa so lauten:

$B^{(0)}$: Ein konstantes Hintergrundfeld, das sich zeitlich nur noch durch Kompression von außen ändern kann. Eine thermodynamische Bedeutung kann es naturgemäß nicht geben.

$B^{(1)}$: Dieser Anteil repräsentiert langwellige magnetosonische Effekte, eine Analogie zur Akustik. Er entkoppelt analog zum akustischen Druck in der Grenze $Av \rightarrow 0$ vollständig.

$B^{(2)}$: Dieser Term steht für die Inkompressibilität analog zum inkompressiblen Druck. Wird das Magnetfeld konstant, so sorgt er dafür, daß die Geschwindigkeit die Divergenzbedingung erfüllen kann.

Im Gegensatz zum Fall der verschwindenden Machzahl 3.4.2 sind es hier nur zwei Gleichungen, die sich im Grenzwert verändern: Die Magnetfeldgleichung (3.125) und die Gleichung für die Geschwindigkeit (3.124) mit dem inkompressiblen Magnetfeldterm $B^{(2)}$. Damit ergibt sich die hyperbolisch-elliptische Aufspaltung in das langsame

System

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (3.129)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{M^2} \frac{p_x}{\rho} = 0, \quad (3.130)$$

$$B_t + uB_x = 0, \quad (3.131)$$

$$p_t + \gamma p u_x + u p_x = 0 \quad (3.132)$$

und das schnelle, elliptisch entartende

$$u_t + \frac{1}{Av^2} \frac{1}{2\rho} (B^2)_x = 0, \quad (3.133)$$

$$B_t + Bu_x = 0. \quad (3.134)$$

Die Eigenwerte von System (3.129) – (3.132) lauten

$$\lambda_{1/4} = u \mp \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad \lambda_{2/3} = u.$$

Dabei hat der Eigenwert u einen zweidimensionalen Eigenraum, das System ist hyperbolisch, wobei vorausgesetzt wurde, daß die globale Machzahl M fest gewählt und nicht zu klein ist. Die Eigenwerte für das schnelle System lauten

$$\lambda_{1/2} = \mp \frac{1}{Av} \sqrt{\frac{B^2}{\rho}},$$

gehen also gegen unendlich, wenn die Alfvenzahl gegen Null geht. Es gibt also tatsächlich eine Entartung. Dieses Teilsystem sollte im numerischen Verfahren auf alle Fälle implizit behandelt werden, sorgt es doch bei kleinen Alfvenzahlen für die hohen Wellengeschwindigkeiten, die den Zeitschritt stark einschränken.

Der allgemeine Fall Alles in Allem ergibt sich in der Grenze für $Av \rightarrow 0$ die folgende Situation:

$$\rho_t + \rho u_x + \rho_x u = 0, \quad (3.135)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{M^2} \frac{1}{\rho} p_x + \frac{1}{\rho} (B_2^{(0)} B_{2,x}^{(2)} + B_3^{(0)} B_{3,x}^{(2)}) = -\frac{1}{\rho} (B_2^{(0)} B_{2,\xi}^{(1)} - B_3^{(0)} B_{3,\xi}^{(1)}), \quad (3.136)$$

$$v_t + uv_x - \frac{1}{\rho} B_1 B_{2,x}^{(2)} = \frac{1}{\rho} B_1 B_{2,\xi}^{(1)}, \quad (3.137)$$

$$w_t + uw_x - \frac{1}{\rho} B_1 B_{3,x}^{(2)} = \frac{1}{\rho} B_1 B_{3,\xi}^{(1)}, \quad (3.138)$$

$$B_{2,t}^{(0)} + B_2^{(0)} u_x - B_1 v_x = 0, \quad (3.139)$$

$$B_{3,t}^{(0)} + B_3^{(0)} u_x - B_1 w_x = 0, \quad (3.140)$$

$$p_t + \gamma p u_x + p_x u = 0 \quad (3.141)$$

zusammen mit

$$\overline{(\rho^{(0)}u^{(0)})}_t + (B_2^{(0)}B_{2,\xi}^{(1)} + B_3^{(0)}B_{3,\xi}^{(1)}) = 0, \quad (3.142)$$

$$\overline{(\rho^{(0)}v^{(0)})}_t - B_1B_{2,\xi}^{(1)} = 0, \quad (3.143)$$

$$\overline{(\rho^{(0)}w^{(0)})}_t - B_1B_{3,\xi}^{(1)} = 0, \quad (3.144)$$

$$B_{2,t}^{(1)} + B_2^{(0)}\overline{u^{(0)}}_\xi - B_1\overline{v_\xi^{(0)}} = 0, \quad (3.145)$$

$$B_{3,t}^{(1)} + B_3^{(0)}\overline{u^{(0)}}_\xi - B_1\overline{v_\xi^{(0)}} = 0. \quad (3.146)$$

Die Interpretation der einzelnen Magnetfeldterme ist völlig analog zum Spezialfall. Man erhält nun die folgende Aufspaltung. Das System für die langsamen Wellen lautet:

$$\rho_t + \rho_x u + \rho u_x = 0, \quad (3.147)$$

$$u_t + uu_x + \frac{p_x}{M^2\rho} = 0, \quad (3.148)$$

$$v_t + uv_x = 0, \quad (3.149)$$

$$w_t + uw_x = 0, \quad (3.150)$$

$$B_{2t} + uB_{2x} = 0, \quad (3.151)$$

$$B_{3t} + uB_{3x} = 0, \quad (3.152)$$

$$p_t + \gamma p u_x + p_x u = 0. \quad (3.153)$$

Die zugehörige Matrix hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = u - \frac{a}{M} \quad (3.154)$$

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_6 = u \quad (3.155)$$

$$\lambda_7 = u + \frac{a}{M} \quad (3.156)$$

$$(3.157)$$

Damit hat man neben der Konvektion mit der Geschwindigkeit u noch die Geschwindigkeiten $u \pm \frac{a}{M}$, die unter der Voraussetzung $M = O(1)$ nicht anwachsen. Auch dieses System ist trotz des fünffachen Eigenwerts u noch hyperbolisch.

Die anfangs dieses Abschnitts erwähnten Terme für die schnellen Geschwindigkeiten faßt man in das folgende System:

$$u_t + \frac{1}{2Av^2\rho}(B^2)_x = 0 \quad (3.158)$$

$$v_t - \frac{1}{Av^2\rho}B_1B_{2x} = 0 \quad (3.159)$$

$$w_t - \frac{1}{Av^2\rho}B_1B_{3x} = 0 \quad (3.160)$$

$$B_{2t} + B_2u_x - B_1v_x = 0 \quad (3.161)$$

$$B_{3t} + B_3u_x - B_1w_x = 0 \quad (3.162)$$

Hier erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\frac{1}{Av} \sqrt{\frac{B^2}{\rho}}, \quad \lambda_2 = -\frac{C_A}{Av}, \quad (3.163)$$

$$\lambda_3 = 0, \quad (3.164)$$

$$\lambda_4 = \frac{C_A}{Av}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{Av} \sqrt{\frac{B^2}{\rho}}, \quad (3.165)$$

Betrachten wir den Grenzwert für $Av \rightarrow 0$, so ergibt sich folgende Situation: Das Magnetfeld wird konstant bezüglich der Raumvariablen, wie für verschwindende Machzahl der Druck. Anders aber als für jene ergibt sich aus den Magnetfeldgleichungen (3.161) und (3.162) zusammen mit

$$B_{1t} + B_1 u_x - B_1 u_x = 0 \quad (3.166)$$

keine Bedingung für die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes sondern

$$\vec{B}_t + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \vec{B} - (\nabla \mathbf{v}) \vec{B} = 0. \quad (3.167)$$

Die Terme $\frac{(B^2)_x}{Av^2}$, $\frac{B_1 B_{2,x}}{Av^2}$ sowie $\frac{B_1 B_{3,x}}{Av^2}$ konvergieren gegen $(B^2)_x^{(2)}$, $B_1 B_{2,x}^{(2)}$ bzw. $B_1 B_{2,x}^{(2)}$, welche die Rolle von Lagrange-Multiplikatoren übernehmen, um (3.167) zu erfüllen.

Der zweidimensionale Spezialfall

Der zweidimensionale Spezialfall ist seiner Physik nach mit dem skalaren Magnetfeld näher am eindimensionalen Spezialfall 3.5.2 als an der allgemeinen 1d-Situation. Die dort getroffenen Feststellungen übertragen sich sinngemäß. Daher werden hier im Wesentlichen nur die Ergebnisse angegeben. Die Grenzgleichungen lauten

$$\rho_t + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.168)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} B^{(2)} + \frac{1}{M^2 \rho} \nabla_{\mathbf{x}} p = -\frac{1}{\rho} B^{(0)} \nabla_{\xi} B^{(1)}, \quad (3.169)$$

$$B_t^{(0)} + B^{(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.170)$$

$$p_t + \gamma p \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} p = 0 \quad (3.171)$$

für die Strömung, sowie

$$\overline{(\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})}_t + B^{(0)} \nabla_{\xi} \overline{B^{(1)}} = 0, \quad (3.172)$$

$$B_t^{(1)} + B^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \overline{\mathbf{v}^{(0)}} = 0 \quad (3.173)$$

für die magnetosonischen Effekt. Damit lautet die Aufspaltung in das voll hyperbolische und das in der Grenze entartende System

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.174)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{M^2 \rho} \nabla p = 0, \quad (3.175)$$

$$B_t + \mathbf{v} \nabla B = 0, \quad (3.176)$$

$$p_t + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla p = 0 \quad (3.177)$$

für das langsame bzw.

$$\mathbf{v}_t + \frac{1}{Av^2 \rho} B \nabla B = 0, \quad (3.178)$$

$$B_t + B \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.179)$$

Die Eigenwerte sind offenbar dieselben wie beim eindimensionalen Spezialfall. Beim langsamen System erhöht sich lediglich die Vielfachheit der Strömungsgeschwindigkeit als Eigenwert um Eins, beim schnellen System kommt Null als dritter Eigenwert dazu.

3.5.3 Das numerische Verfahren

In Analogie zum Verfahren für kleine Machzahlen (Abschnitt 3.4.3) sollte ein Verfahren, das die Ergebnisse der Mehrskalanalyse für kleine Alfvenzahlen berücksichtigt, die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Die Anteile, die auch beim Übergang $M \rightarrow 0$ hyperbolisch bleiben (Gleichungen (3.42) – (3.45)) sollten getrennt behandelt werden können, auch wenn die globale Alfvenzahl gegen Null geht.
- Die Anteile, welche verschwindender Alfvenzahl den hyperbolisch-elliptischen Übergang repräsentieren, sollten implizit behandelt werden. Dabei ist darauf zu achten, daß das resultierende Verfahren auch im Falle der elliptischen Entartung funktioniert.
- Es sollte die Möglichkeit bestehen, den Einfluß der langwelligen Akustik (Gleichungen (3.37) und (3.32)) einzubringen.

Auch hier soll wieder nur der Fall eines Verfahrens erster Ordnung behandelt werden. Ebenfalls wird wieder eine Operator Splitting mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit für das schnelle und Rückwärtsdifferenzen in der Zeit für das langsame System angewandt, und auch diesmal wird darauf verzichtet, die Behandlung des langsamen Systems anzugeben. Nun wäre es freilich möglich, die drei behandelten Fälle – eindimensionaler und zweidimensionaler Spezialfall sowie allgemeiner 1d-Fall – gemeinsam darzustellen. Der Ablauf ist der gleiche lediglich die Formeln sehen unterschiedlich aus. Jedoch scheint es der Übersicht wegen angezeigt, sie auch hier wieder getrennt abzuhandeln.

Eindimensionale Fälle

Der Spezialfall Das System mit den schnellen Wellen lautet mit Rückwärtsdifferenzen in der Zeit

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{Av^2\rho^{n+1}} B^{n+1} B_x^{n+1} = 0, \quad (3.180)$$

$$\frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} + B^{n+1} u_x^{n+1} = 0. \quad (3.181)$$

Dieses wird nun iterativ gelöst. Ein Iterationsschritt setzt sich folgendermaßen zusammen:

1. Wähle geeignete Schätzer B^* und ρ^* für das Magnetfeld und die Dichte. Sinnvoll ist hier das Ergebnis der letzten Iteration. Als Anfangsschätzung kann auch das Resultat des letzten Zeitschritts für das langsame System dienen.
2. Bestimme hieraus mit Gleichung (3.180) einen Schätzer u^* für die Geschwindigkeit:

$$u^* = u^n - \frac{\Delta t}{Av^2\rho^*} B^* B_x^*. \quad (3.182)$$

3. Sind die Gleichungen (3.180) und (3.181) noch nicht mit genügender Genauigkeit erfüllt, so führt man Korrekturen ein:

$$u^{n+1} = u^* + \delta u, \quad B^{n+1} = B^* + \delta B. \quad (3.183)$$

Dabei bezeichnet der obere Index $n+1$ die gesuchte Lösung und das kleine Delta vor der Größe die Korrektur derselben. Setzt man dies in Gleichung (3.180) ein, so ergibt sich mit (3.182) für die Korrekturen der Zusammenhang

$$\delta u = -\frac{\Delta t}{Av^2\rho^*} (B^* \delta B_x + \delta B B_x^* + \delta B \delta B_x). \quad (3.184)$$

Nun ersetzt man im Evolutionsterm der diskretisierten Magnetfeldgleichung (3.181) B^{n+1} durch B^* :

$$\frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} + B^* u_x^{n+1} = 0. \quad (3.185)$$

und setzt die Beziehungen (3.183) und (3.184) ein. Daraus erhält man eine elliptische Gleichung für die Korrektur δB des Magnetfelds

$$\delta B - \frac{\Delta t}{Av^2} B^* \left(\frac{1}{\rho^*} (B^* \delta B_x + \delta B B_x^* + \delta B \delta B_x) \right)_x = B^n - B^* - \Delta t B^* u_x^*. \quad (3.186)$$

Diese ist linear. Damit ist sie einer numerischen Lösung besonders leicht zugänglich. Durch Raumdiskretisierung erhält man ein lineares Gleichungssystem, das sich mit den bekannten Verfahren lösen läßt.

4. Damit können nun das korrigierte Magnetfeld und die korrigierte Geschwindigkeit berechnet werden. Im Gegensatz zum Fall kleiner Machzahlen wird hier die Dichte nicht korrigiert. Da die Korrekturgleichung (3.186) durch das Einführen von B^* in die diskretisierte Magnetfeldgleichung (3.185) linearisiert wurde, muß iteriert werden. Man wiederholt die angegebenen Schritte so lange, bis man eine ausreichende Genauigkeit bekommt.

Wird die Alfvenzahl sehr klein, so sollte die Aufspaltung

$$B = B^{(0)} + AvB^{(1)} + Av^2B^{(2)}$$

in das Verfahren eingebaut werden. Da hier auf die Behandlung der magnetosonischen Effekte nicht eingegangen werden soll, wird der Term $AvB^{(1)}$, der diese repräsentiert, vernachlässigt. Verwendet man nun diese Aufspaltung des Magnetfelds und formuliert die Korrektur für $B^{(2)}$, so wird die elliptische Gleichung (3.186) zu

$$Av^2\delta B^{(2)} - \Delta t B^* \left(\frac{1}{\rho^*} (B^* \delta B_x^{(2)} + \delta B^{(2)} B_x^* + \delta B^{(2)} \delta B_x^{(2)}) \right)_x = B^n - B^* - \Delta t B^* u_x^* . \quad (3.187)$$

Der neue Wert des Magnetfelds ergibt sich dann zu

$$B^{n+1} = B^* + Av^2\delta B^{(2)} . \quad (3.188)$$

Der allgemeine 1d-Fall Das implizit zu lösende System F_{Av} mit den schnellen Wellen lautet jetzt:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} (B_2^{n+1} B_{2,x}^{n+1} + B_3^{n+1} B_{3,x}^{n+1}) = 0 , \quad (3.189)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} - \frac{1}{Av^2\rho} B_1 B_{2,x}^{n+1} = 0 , \quad (3.190)$$

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} - \frac{1}{Av^2\rho} B_1 B_{3,x}^{n+1} = 0 , \quad (3.191)$$

$$\frac{B_2^{n+1} - B_2^n}{\Delta t} + B_2^{n+1} u_x^{n+1} - B_1 v_x^{n+1} = 0 , \quad (3.192)$$

$$\frac{B_3^{n+1} - B_3^n}{\Delta t} + B_3^{n+1} u_x^{n+1} - B_1 w_x^{n+1} = 0 . \quad (3.193)$$

Das iterative Vorgehen lautet nun:

1. Wähle geeignete Schätzer für B_2^* , B_3^* und ρ^* für die beiden veränderlichen Magnetfeldkomponenten und die Dichte. Sinnvoll ist hier das Ergebnis der letzten Iteration. Als Anfangsschätzung kann auch das Resultat des letzten Zeitschritts für das langsame System dienen.

2. Bestimme hieraus mit Hilfe der Geschwindigkeitsgleichungen (3.189) – (3.191) Schätzer u^* , v^* und w^* für die Geschwindigkeiten. Diese ergeben sich zu

$$u^* = u^n - \frac{\Delta t}{Av^2\rho^*}(B_2^*B_{2,x}^* + B_3^*B_{3,x}^*), \quad (3.194)$$

$$v^* = v^n + \frac{\Delta t}{Av^2\rho^*}B_1B_{2,x}^*, \quad (3.195)$$

$$w^* = w^n + \frac{\Delta t}{Av^2\rho^*}B_1B_{3,x}^*. \quad (3.196)$$

3. Sind durch diese Werte die Gleichungen (3.189) - (3.193) noch nicht mit genügender Genauigkeit erfüllt, so führt man Korrekturen ein:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^* + \delta u, \\ v^{n+1} &= v^* + \delta v, \\ w^{n+1} &= w^* + \delta w, \\ B_2^{n+1} &= B_2^* + \delta B_2, \\ B_3^{n+1} &= B_3^* + \delta B_3. \end{aligned} \quad (3.197)$$

Dabei bezeichnet der obere Index $n + 1$ die gesuchte Lösung und das kleine Delta vor der Größe die Korrektur derselben. Setzt man diesen Ansatz in die Gleichungen (3.189) – (3.191) ein, so ergibt sich mit (3.194) – (3.196) für die Korrekturen der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \delta u &= -\frac{\Delta t}{Av^2\rho^*}(B_2^*\delta B_{2,x} + \delta B_2B_{2,x}^* + \delta B_2\delta B_{2,x} \\ &\quad + B_3^*\delta B_{3,x} + \delta B_3B_{3,x}^* + \delta B_3\delta B_{3,x}), \end{aligned} \quad (3.198)$$

$$\delta v = \frac{\Delta t}{Av^2\rho^*}B_1\delta B_{2,x}, \quad (3.199)$$

$$\delta w = \frac{\Delta t}{Av^2\rho^*}B_1\delta B_{3,x}. \quad (3.200)$$

Nun ersetzt man in den Magnetfeldgleichungen (3.192) und (3.193) B_2^{n+1} und B_3^{n+1} durch B_2^* und B_3^* :

$$\frac{B_2^{n+1} - B_2^n}{\Delta t} + B_2^*u_x^{n+1} - B_1v_x^{n+1} = 0, \quad (3.201)$$

$$\frac{B_3^{n+1} - B_3^n}{\Delta t} + B_3^*u_x^{n+1} - B_1w_x^{n+1} = 0 \quad (3.202)$$

und setzt dort die Beziehungen (3.197) – (3.200) ein. Durch Umformung erhält man das folgende elliptische Gleichungssystem:

$$\delta B_2 - \frac{\Delta t^2}{Av^2} \left(\frac{B_2^*(B_2^* + \delta B_2) + B_1^2}{\rho^*} \delta B_{2,x} \right)_x \quad (3.203)$$

$$- \frac{\Delta t^2}{Av^2} \left(\frac{B_2^*(B_3^* + \delta B_3)}{\rho} \delta B_{3,x} \right)_x \quad (3.204)$$

$$- \frac{\Delta t^2}{Av^2} B_2^* (\delta B_2 B_{2,x}^* + \delta B_3 B_{3,x}^*) \quad (3.205)$$

$$= B_2^n - B_2^* - \Delta t (B_2^* u_x^* - B_1 v_x^*) , \quad (3.206)$$

$$\delta B_3 - \frac{\Delta t^2}{Av^2} \left(\frac{B_3^*(B_3^* + \delta B_3) + B_1^2}{\rho^*} \delta B_{3,x} \right)_x \quad (3.207)$$

$$- \frac{\Delta t^2}{Av^2} \left(\frac{B_3^*(B_2^* + \delta B_2)}{\rho} \delta B_{2,x} \right)_x \quad (3.208)$$

$$- \frac{\Delta t^2}{Av^2} B_3^* (\delta B_3 B_{3,x}^* + \delta B_2 B_{2,x}^*) \quad (3.209)$$

$$= B_3^n - B_3^* - \Delta t (B_3^* u_x^* - B_1 v_x^*) . \quad (3.210)$$

Dieses ist linear und daher wie schon im Spezialfall einer numerischen Lösung besonders leicht zugänglich.

4. Damit können nun die korrigierten Werte für das Magnetfeld und die Geschwindigkeiten berechnet werden. Da die Korrekturgleichungen (3.206) und (3.210) durch das Einführen von B_2^* und B_3^* in die diskretisierten Magnetfeldgleichungen linearisiert wurden, muß iteriert werden. Man wiederholt die angegebenen Schritte so lange, bis man eine ausreichende Genauigkeit erreicht hat.

Wird die Alfvenzahl sehr klein, so sollte die Aufspaltung des Magnetfelds

$$B_i = B_i^{(0)} + Av B_i^{(1)} + Av^2 B_i^{(2)} + \dots \quad (i = 2, 3) \quad (3.211)$$

in das Verfahren eingebaut werden. Da hier auf die Behandlung der magnetosonischen Terme nicht eingegangen werden soll, werden die Terme $Av B_i^{(1)}$, welche diese repräsentieren, vernachlässigt. Verwendet man die Aufspaltung und repräsentiert die Korrektur für $B_2^{(2)}$ und $B_3^{(2)}$, so werden die beiden elliptischen Gleichungen zu

$$Av^2 \delta B_2^{(2)} - \Delta t^2 \left(\frac{B_2^* B_2^* + B_1^2}{\rho^*} \delta B_{2,x}^{(2)} \right)_x - \Delta t^2 \left(\frac{B_2^* B_3^*}{\rho} \delta B_{3,x}^{(2)} \right)_x \quad (3.212)$$

$$- \Delta t^2 B_2^* (\delta B_2^{(2)} B_{2,x}^* + \delta B_3^{(2)} B_{3,x}^*) \quad (3.213)$$

$$= B_2^n - B_2^* - \Delta t (B_2^* u_x^* - B_1 v_x^*) , \quad (3.214)$$

$$Av^2 \delta B_3^{(2)} - \Delta t^2 \left(\frac{B_3^* B_3^* + B_1^2}{\rho^*} \delta B_{3,x}^{(2)} \right)_x - \Delta t^2 \left(\frac{B_3^* B_2^*}{\rho} \delta B_{2,x}^{(2)} \right)_x \quad (3.215)$$

$$- \Delta t^2 B_3^* (\delta B_3^{(2)} B_{3,x}^* + \delta B_2^{(2)} B_{2,x}^*) \quad (3.216)$$

$$= B_3^n - B_3^* - \Delta t (B_3^* u_x^* - B_1 v_x^*) . \quad (3.217)$$

Die neuen Werte für das Magnetfeld ergeben sich dann aus

$$B_2^{n+1} = B_2^* + Av^2 \delta B_2^{(2)} , \quad (3.218)$$

$$B_3^{n+1} = B_3^* + Av^2 \delta B_3^{(2)} . \quad (3.219)$$

Der zweidimensionale Spezialfall

Das System mit den schnellen Wellen lautet hier

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \frac{1}{Av^2 \rho^{n+1}} B^{n+1} \nabla B^{n+1} = 0 , \quad (3.220)$$

$$\frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} + B^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 . \quad (3.221)$$

Dieses wird nun iterativ gelöst. Ein Iterationsschritt setzt sich folgendermaßen zusammen:

1. Wähle geeignete Schätzer B^* und ρ^* für das Magnetfeld und die Dichte. Sinnvoll ist hier das Ergebnis der letzten Iteration. Als Anfangsschätzung kann auch das Resultat des letzten Zeitschritts für das langsame System dienen.
2. Bestimme hieraus mit Gleichung (3.220) einen Schätzer \mathbf{v}^* für die Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n - \frac{\Delta t}{Av^2 \rho^*} B^* \nabla B^* . \quad (3.222)$$

3. Sind die Gleichungen (3.220) und (3.221) noch nicht mit genügender Genauigkeit erfüllt, so führt man Korrekturen ein:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* + \delta \mathbf{v} , \quad B^{n+1} = B^* + \delta B . \quad (3.223)$$

Dabei bezeichnet der obere Index $n+1$ die gesuchte Lösung und das kleine Delta vor der Größe die Korrektur derselben. Setzt man dies in Gleichung (3.220) ein, so ergibt sich für die Korrekturen der Zusammenhang

$$\delta \mathbf{v} = -\frac{\Delta t}{Av^2 \rho^*} (B^* \nabla \delta B + \delta B \nabla B^* + \delta B \nabla \delta B) + \mathbf{v}^n - \mathbf{v}^* . \quad (3.224)$$

Nun ersetzt man im Evolutionsterm der diskretisierten Magnetfeldgleichung (3.221) B^{n+1} durch B^* :

$$\frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} + B^* \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 . \quad (3.225)$$

und setzt die Beziehungen (3.223) und (3.224) ein. Daraus erhält man mit (3.222) eine elliptische Gleichung für die Korrektur δB des Magnetfelds

$$\delta B - \frac{\Delta t}{Av^2} B^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} (B^* \nabla \delta B + \delta B \nabla B^* + \delta B \nabla \delta B) \right) = B^n - B^* - \Delta t B^* \nabla \cdot \mathbf{v}^n . \quad (3.226)$$

Diese ist linear. Damit ist sie einer numerischen Lösung besonders leicht zugänglich. Durch Raumdiskretisierung erhält man ein lineares Gleichungssystem, das sich mit den bekannten Verfahren lösen läßt.

4. Damit können nun das korrigierte Magnetfeld und die korrigierte Geschwindigkeit berechnet werden. Im Gegensatz zum Fall kleiner Machzahlen wird hier die Dichte nicht korrigiert. Da die Korrekturgleichung (3.226) durch das Einführen von B^* in die diskretisierte Magnetfeldgleichung (3.225) linearisiert wurde, muß iteriert werden. Man wiederholt die angegebenen Schritte so lange, bis man eine ausreichende Genauigkeit bekommt.

Wird die Alfvenzahl sehr klein, so sollte die Aufspaltung

$$B = B^{(0)} + AvB^{(1)} + Av^2B^{(2)}$$

In das Verfahren eingebaut werden. Da hier auf die Behandlung der magnetosonischen Effekte nicht eingegangen werden soll, wird der Term $AvB^{(1)}$, der diese repräsentiert vernachlässigt. Verwendet man nun die Aufspaltung des Magnetfelds und formuliert die Korrektur für $B^{(2)}$, so wird die elliptische Gleichung (3.226) zu

$$Av^2\delta B^{(2)} - \Delta t B^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} (B^* \nabla \delta B^{(2)} + \delta B^{(2)} \nabla B^* + \delta B^{(2)} \nabla \delta B^{(2)}) \right) = B^n - B^* - \Delta t B^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* . \quad (3.227)$$

Der neue Wert des Magnetfelds ergibt sich dann zu

$$B^{n+1} = B^* + Av^2\delta B^{(2)} . \quad (3.228)$$

Die beiden Spezialfälle – 1d und 2d – weisen eine sehr große Ähnlichkeit auf. Dies liegt darin begründet, daß beide ein skalares Magnetfeld haben. Wie man dieses weiter ausnutzen kann, soll im folgenden Abschnitt ausgeführt werden.

3.5.4 Eine mögliche Vereinfachung bei skalarem Magnetfeld

Auffallend ist, daß bei den Spezialfällen mit dem skalaren Magnetfeld dieses außerhalb der Magnetfeldgleichung nur noch in der Gestalt des magnetischen Drucks $\frac{1}{2}B^2$ erscheint. Könnte man also die Magnetfeldgleichung durch eine Evolutionsgleichung für den magnetischen Druck ersetzen, so bekäme man ähnlich einfache Gleichungen im numerischen Verfahren wie bei den kleinen Machzahlen. Die Einschränkung in der Aussagekraft der Ergebnisse ist nur geringfügig. Das Magnetfeld ist ohnehin skalar. Es kann also nur die Information über das Vorzeichen verloren gehen. Um dies praktisch umzusetzen, führt man zunächst eine eigene Variable für den magnetischen Druck ein, etwa

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}B^2 . \quad (3.229)$$

Multipliziert man nun die Gleichungen (3.71) für den eindimensionalen bzw. (3.114) für den zweidimensionalen Spezialfall mit $\frac{1}{2}B$, so erhalten sie die Gestalt

$$\mathcal{B}_t + 2\mathcal{B}u_x + u\mathcal{B}_x = 0 \quad (3.230)$$

bzw.

$$\mathcal{B}_t + 2\mathcal{B}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\mathcal{B} = 0 . \quad (3.231)$$

Bis auf den Faktor 2 vor dem Term mit der Divergenz der Geschwindigkeit hat sich also nichts an der grundlegenden Gestalt der Gleichungen verändert. Allerdings können sie mit diesem Faktor nicht mehr in Erhaltungsform überführt werden. Bei einem Verfahren für schwach kompressible Strömungen wie dem oben angegebenen ist dies allerdings keine wesentliche Einschränkung.

Die Ergebnisse der asymptotischen Analyse übertragen sich sinngemäß. Es wird

$$\mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B}^{(0)}(t) , \quad \mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, t) . \quad (3.232)$$

Die Gleichungen für die langwelligen magnetosonischen Wellen lauten

$$\mathcal{B}_t^{(1)} + 2\mathcal{B}^{(0)}\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} , \quad (3.233)$$

$$\frac{\overline{\rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)}}_t + \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\overline{\mathcal{B}^{(1)}}}{\rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)}}_t + \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\overline{\mathcal{B}^{(1)}} . \quad (3.234)$$

Bei der hyperbolisch-elliptischen Aufspaltung muß im langsamen System lediglich B durch \mathcal{B} ersetzt werden, das schnelle System lautet

$$\mathbf{v}_t + \frac{1}{Av^2\rho}\nabla\mathcal{B} = 0 , \quad (3.235)$$

$$\mathcal{B}_t + 2\mathcal{B}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (3.236)$$

Die diskretisierte Version für das numerische Verfahren (3.220) – (3.221) wird dementsprechend zu

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \frac{1}{Av^2\rho^{n+1}}\nabla\mathcal{B}^{n+1} = 0 , \quad (3.237)$$

$$\frac{\mathcal{B}^{n+1} - \mathcal{B}^n}{\Delta t} + 2\mathcal{B}^{n+1}\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 . \quad (3.238)$$

Die Beziehung zwischen den Korrekturen vereinfacht sich zu

$$\delta\mathbf{v} = \frac{1}{Av^2\rho^*}\nabla\delta\mathcal{B} , \quad (3.239)$$

und die elliptische Gleichung zu

$$\delta\mathcal{B} - \frac{2\Delta t}{Av^2}\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*}\nabla\delta\mathcal{B}\right) = \mathcal{B}^n - \mathcal{B}^* - 2\Delta t\mathcal{B}^*\nabla \cdot \mathbf{v}^* . \quad (3.240)$$

Setzt man die Aufspaltung

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(0)} + Av\mathcal{B}^{(1)} + Av^2\mathcal{B}^{(2)}$$

ein und formuliert die Korrektur für $\mathcal{B}^{(2)}$, so wird aus (3.240)

$$Av^2\delta\mathcal{B}^{(2)} - 2\Delta t\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*}\nabla\delta\mathcal{B}^{(2)}\right) = \mathcal{B}^n - \mathcal{B}^* - 2\Delta t\mathcal{B}^*\nabla \cdot \mathbf{v}^* . \quad (3.241)$$

Damit ergibt sich eine erhebliche Vereinfachung. Insbesondere die zu diskretisierenden Ableitungen auf der linken Seite der Gleichungen (3.240) und (3.241) sind wesentlich zugänglicher. Der Preis dafür besteht, wie schon erwähnt, lediglich im Verlust des Vorzeichens für das Magnetfeld.

3.6 Numerische Ergebnisse

Für kleine Machzahlen wurden von meinem Kollegen Jea-Ho Park einige Testfälle gerechnet. Er hat im Rahmen seiner Dissertation [31] ein auf der hier vorgestellten Asymptotik basierendes Programm für schwach kompressible Gasströmungen entwickelt. Da sich die Numerik, wie in Abschnitt 3.4.3 gesehen, nur in der Behandlung der langsamen Wellen unterscheidet, war dieses Programm ein guter Ausgangspunkt. Es mußten dort die zusätzlichen, das Magnetfeld betreffenden Terme eingebaut werden. Im folgenden wird eines der gerechneten Beispiele vorgestellt und diskutiert.

3.6.1 Inkompressible aufsteigende Blase bei Alfvenzahl Fünf

Eine Blase, deren Dichte ein Zehntel der Dichte des umgebenden Fluids beträgt, wird simuliert. Dabei werden Reibung und Gravitation mitberücksichtigt, die Oberflächenspannung wird vernachlässigt. Die Reynoldszahl liegt bei 1000. Die globale Machzahl wird auf Null, die globale Alfvenzahl auf Fünf gesetzt. Die Randbedingungen wurden in beiden Richtungen periodisch gewählt. In Abbildung 3.2, sowie 3.3 und 3.4 wird der Vergleich dreier Fälle gezeigt:

Links: Kein Magnetfeld in den Anfangsdaten; rein hydrodynamischer Fall.

Mitte: Konstantes Magnetfeld als Anfangswert. Das Feld liegt in horizontaler Richtung.

Rechts: Konstantes Magnetfeld als Anfangswert. Das Feld liegt in vertikaler Richtung. Die Stärke ist dieselbe wie beim vorgenannten Fall.

In Abbildung 3.2 ist die Zeitentwicklung durch Übereinanderplotten von Konturlinien für verschiedene Zeitpunkte dargestellt. In Abbildung 3.3 sieht man Konturlinien zusammen mit dem Geschwindigkeitsfeld für einen ausgewählten Zeitpunkt. Abbildung 3.4 zeigt das Geschwindigkeits- und das Magnetfeld zum selben Zeitpunkt. Dabei sind auch Feldlinien eingezeichnet. Für den rein hydrodynamischen Fall kann es naturgemäß keine Darstellung der magnetischen Feldlinien geben.

Das jeweils linke Bild zeigt, wie sich eine aufsteigende Blase ohne Einfluß des Magnetfelds entwickelt. Es entsteht eine pilzförmige Struktur. Die Auftriebsgeschwindigkeit ist an der Symmetrieachse am größten. Das der Blase ausweichende Fluid bildet an den Flanken Wirbel, die dort dafür sorgen, daß die Flanke langsamer ansteigt und die Pilzstruktur horizontal und insbesondere vertikal gestreckt wird. Nun ist ja bekannt, daß bei der MHD die magnetischen Feldlinien am Fluid „festgefroren“ sind [12]. Das bedeutet auch, daß sie eine Kraft erzeugen, die ihrer Verformung entgegenwirkt. Dies läßt sich im jeweils mittleren Bild besonders deutlich erkennen. Die Feldlinien liegen orthogonal zur Grundströmung. Die Verformung ist an der Symmetrieachse am größten. Daher wird das Fluid dort stark abgebremst. Die Aufstiegs geschwindigkeit der Flanken ist gegenüber dem rein hydrodynamischen Fall fast unverändert, während das Magnetfeld dafür sorgt, daß sie an der Symmetrieachse wesentlich geringer ist.

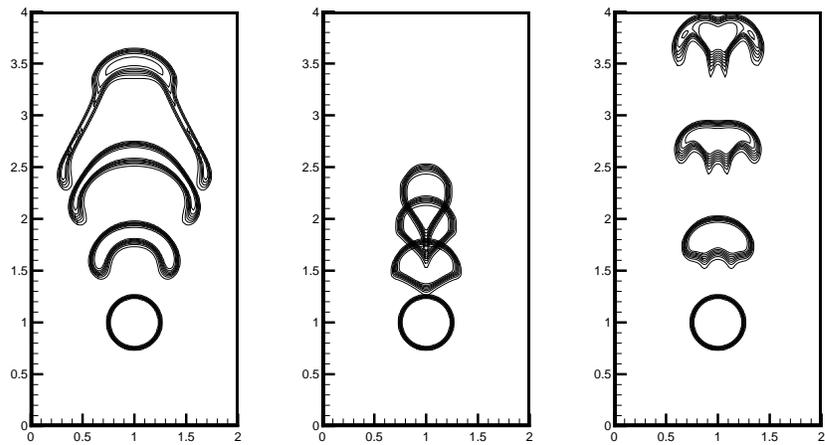


Abbildung 3.2: Dichtekonturlinien zu den Zeitpunkten 0.0, 0.5, 1.0 und 1.5

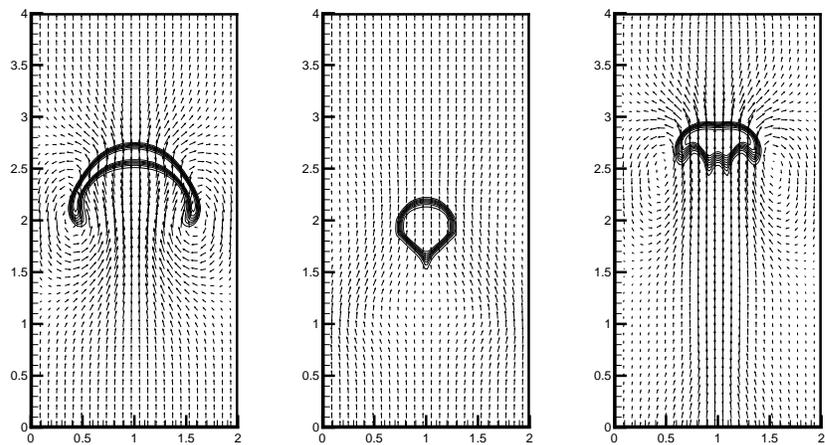


Abbildung 3.3: Dichtekonturlinien und Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt 1.0

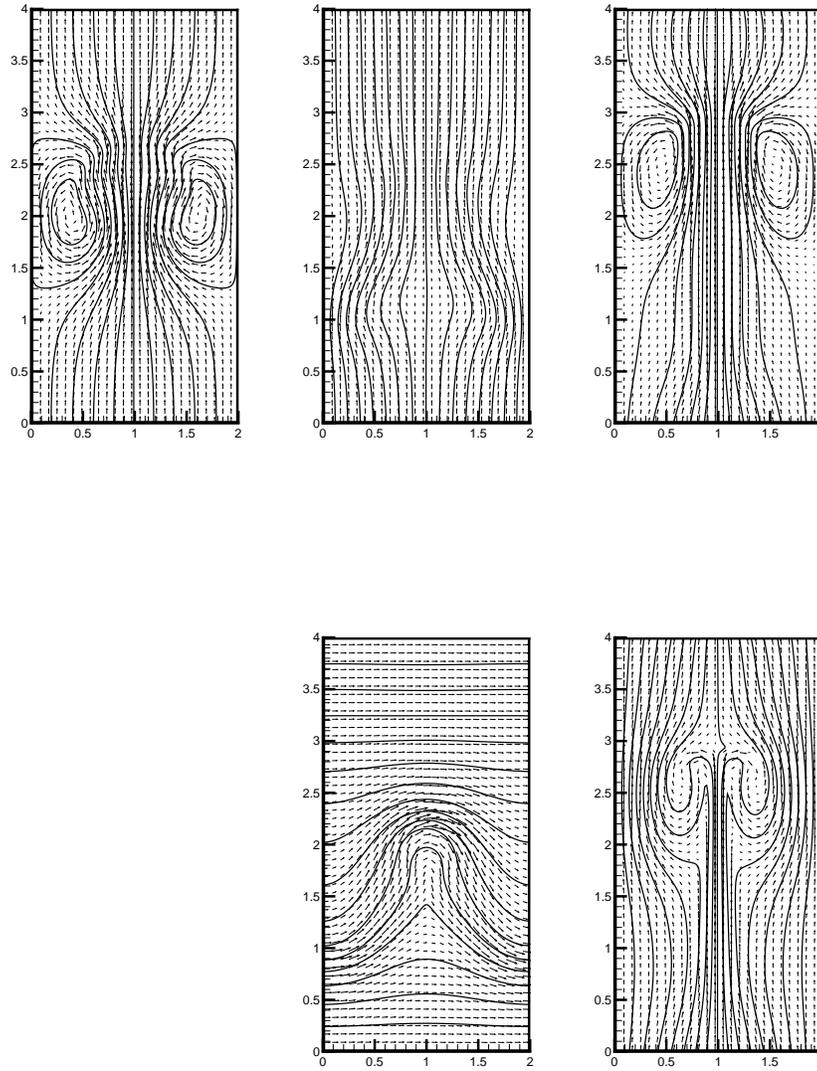


Abbildung 3.4: Oben: Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt 1.0; Unten: Magnetfeld zum Zeitpunkt 1.0

Die Pilzstruktur kann sich damit nicht ausbilden. Die Blase wird vertikal auseinandergezogen, wobei sich an der Symmetrieachse eine Art Schwanz ausbildet. In der Horizontalen kann sich die Blase anfangs noch leicht verbreitern, um dann aber immer mehr zusammengezogen zu werden. Liegt das Magnetfeld und damit die Feldlinien parallel zur Grundströmung (jeweils rechtes Bild), so geschieht die größte Verformung der Feldlinien dort, wo die Wirbel sind, nämlich an den Flanken. Damit werden die Wirbel ziemlich abgeschwächt. Als Resultat ist die Auftriebsgeschwindigkeit an der Symmetrieachse gegenüber der reinen Hydrodynamik fast unverändert, während die Flanken mit der gleichen Geschwindigkeit aufsteigen. Die Blase zieht sich in der Horizontalen und Vertikalen auseinander. Allerdings weniger stark als ohne Magnetfeld. Maximale und minimale Auftriebsgeschwindigkeit liegen weder in der Symmetrieebene noch an der Flanke. Damit wird die Struktur komplexer.

Insgesamt läßt sich feststellen, daß die Simulation alle Effekte widerspiegelt, die man aus der Physik erwarten würde. Damit hat man ein Verfahren gewonnen, das schwach kompressible magnetohydrodynamische Strömungen kleiner Machzahl zufriedenstellend approximiert.

Für den Fall kleiner Alfvenzahlen gibt es noch keine Programmentwicklung. Zum einen ist diese wesentlich aufwendiger als für kleine Machzahlen, hat man doch keine Möglichkeit, wie dort auf bestehende Programmteile für das System mit der schnellen Wellenausbreitung zurückzugreifen. Zum anderen gibt es auch weniger bekannte Anwendungsfälle. Dabei macht sich auch die Einschränkung bemerkbar, daß die asymptotische Analyse nur für die angegebenen Sonderfälle gültig ist.

4 Divergenzkorrekturen

4.1 Problemstellung

Die MHD-Gleichungen bestehen, wie bereits in Kapitel 2 gesehen, nicht nur aus Evolutionsgleichungen. Betrachtet man sie etwa in der konservativen Form (vgl. Abschnitt 2.2), so findet man den Evolutionsoperator

$$\begin{aligned}
 \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
 (\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) &= 0, \\
 \mathbf{B}_t + \nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T - \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T) &= 0, \\
 e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

sowie die elliptische Nebenbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.
 \tag{4.2}$$

Dabei stehen wie in den vorigen Abschnitten \mathbf{B} für die magnetische Induktion, v für die Strömungsgeschwindigkeit, ρ für die Dichte und e für die Energie des Plasmas. Bedingung (4.2) steht für die Nichtexistenz magnetischer Monopole. Wird sie von den Anfangs- und Randbedingungen erfüllt, so erhält der Evolutionsoperator (4.1) diese Eigenschaft für alle Zeiten. Dies rührt daher, daß die zeitliche Änderung des Magnetfeldes eine Rotation – die Rotation des elektrischen Feldes (4.76) (vgl. auch die Herleitung in Abschnitt 4.4.2) – und damit divergenzfrei ist. Daher beschränkt man sich bei numerischen Simulationen häufig auf die Diskretisierung der Evolutionsgleichungen (4.1).

Nun läßt sich in einem numerischen Verfahren im Allgemeinen nicht garantieren, daß die diskrete Divergenz der diskreten Rotation auch wirklich identisch verschwindet. Daher können Fehler in der Divergenzbedingung auftreten und, wie sich in praktischen Rechnungen zeigt, auch anwachsen. Geschieht dieses, so kann die Lösung die Physik nicht mehr vernünftig repräsentieren: Magnetische Feldlinien haben eine falsche Topologie, was zu einem unphysikalischen Transport von Plasma orthogonal zu den Feldlinien führt. Diese Dinge werden ausführlich von Brackbill und Barnes [7], Brackbill [6] sowie Balsara und Spicer [2] diskutiert.

Es wurden Verfahren entwickelt, bei denen die diskrete Divergenz der diskreten Evolution des Magnetfeldes Null ist. Eine Klasse solcher Verfahren sind die auf versetzten Gittern, bei denen die verschiedenen Komponenten des Magnetfeldes an verschiedenen

Punkten approximiert werden. Diese wurden zuerst für die Maxwell-Gleichungen formuliert [39, 19, 24] und später auf die MHD-Gleichungen übertragen [8, 14, 13]. Den aktuellen Stand der Entwicklung markieren die Arbeiten von Torillhon und Fey [16, 35].

Nun sind diese Verfahren auf eine bestimmte Diskretisierung angewiesen. Insbesondere lassen sie sich nicht in der üblichen Finite-Volumen Formulierung implementieren. Am nächsten hieran kommt noch das Verfahren von Torillhon und Fey, bei dem zusätzliche Flüsse über die Ecken der Kontrollvolumina berücksichtigt werden.

Ein Methode, wie man das Magnetfeld divergenzfrei halten kann, ist die, nach jedem Zeitschritt das Magnetfeld in den Raum der divergenzfreien Vektorfelder zu projizieren. Dies ist allerdings sehr rechenaufwendig. In den letzten Jahren fand ein anderer Ansatz, bekannt als Powell-Korrektur [32], Verbreitung. Dieser erfordert weder eine spezielle Diskretisierung, noch muss für Teile des Problems auf implizite Ansätze zurückgegriffen werden. Er entsteht dadurch, daß man neue Terme in den Evolutionsoperator (4.1) einführt, die bei verschwindender Divergenz ebenfalls verschwinden und den hyperbolischen Charakter erhalten. Allerdings muß man dabei auf die Erhaltungform verzichten.

Für die Korrektur der Ladungserhaltung bei den Maxwellgleichungen, die ebenfalls eng mit einer Divergenzkorrektur verbunden ist, wurde in [29] ein Ansatz angegeben, mit dem man verschiedene Korrekturmethode, darunter eine rein hyperbolische, angeben kann. Dieser Ansatz ist bereits so allgemein, daß man Projektions- und Penaltymethoden [5, 25] als Spezialfälle dieses im Folgenden „Generalized Lagrange Multiplier“ (GLM) genannten Ansatzes ansehen kann.

In diesem Kapitel soll ein Zugang vorgestellt werden, der in der Lage ist, sowohl die Powell- als auch die GLM-Korrektur als Spezialfälle eines Ansatzes zu fassen und damit auch zu vergleichen. Dieser Zugang ermöglicht es auch, neue Korrekturverfahren zu finden.

In Abschnitt 4.3 wird dieser Zugang anhand eines vereinfachten Testbeispiels motiviert und entwickelt. Es werden konkrete Korrekturverfahren daraus hergeleitet. Wir werden diese in 4.3.2 analytisch untersuchen und damit qualitative Aussagen, z.T. sogar quantitative Aussagen über die Korrekturverfahren erhalten. In Abschnitt 4.3.3 finden sich dann numerische Vergleiche der Methoden in der Anwendung auf das einfache Modellbeispiel. Ein weiterer Abschnitt widmet sich der Wahl der in den Korrekturverfahren einzusetzenden Parameter.

In Abschnitt 4.4 werden die Methoden aus Abschnitt 4.3 auf die Maxwell- und MHD-Gleichungen angewandt. Auch hier gibt es wieder analytische Betrachtungen, die sich stark auf die aus Abschnitt 4.3 stützen. Es wird gezeigt, wie sich die Powell-Korrektur als Spezialfall einer der eingeführten Korrekturmethode interpretieren läßt und daraus Rückschlüsse auf ihr Verhalten gezogen. Auch eine Möglichkeit der Verknüpfung der Powell-Korrektur mit dem neu eingeführten GLM-Ansatz wird angegeben. Zum Schluß findet sich noch ein kurzer Abschnitt über numerische Ergebnisse unserer neuen Korrekturen für die MHD mit einem Verweis auf ausführlichere Darstellungen derselben.

4.2 Entstehung der Divergenzfehler

Die Mechanismen, die zu einem verstärkten Auftreten von Divergenzfehlern bei der Simulation von Plasmen mittels MHD führen, sind nicht vollständig bekannt. Sie sind auch noch wenig untersucht worden. Dennoch scheint es sinnvoll, an dieser Stelle ein paar Überlegungen zur Entstehung von Divergenzfehlern zu geben.

Das Problem: Schwache Lösungen Es ist bekannt, daß das Problem hauptsächlich bei kompressiblen Strömungen auftritt und dort wiederum fast ausschließlich an den Stellen, die durch Unstetigkeiten im physikalischen Zustand gekennzeichnet sind. In Abbildung 4.1 ist das Ergebnis einer Simulation gezeigt, die von Unstetigkeiten entlang der horizontalen und vertikalen Symmetrieachse als Anfangszustand ausging. In den vier Quadranten des Rechengebiets war der Zustand jeweils als konstant vorgegeben. Es ist deutlich zu sehen, daß in Bereichen, die von den durch die Unstetigkeiten verursachten Wellen überstrichen wurden, Divergenzfehler entstanden sind. Mathematisch ist der Anfangszustand im schwachen Sinne divergenzfrei. Das bedeutet, daß außer in den Unstetigkeiten – dort sind ohnehin keine Ableitungen definiert – überall die übliche Divergenzbedingung erfüllt ist. Da kompressible Strömungen gerade durch das Auftreten von Unstetigkeiten gekennzeichnet sind, kann man auch nicht mehr verlangen. Es ist also ein physikalisch zulässiger Zustand.

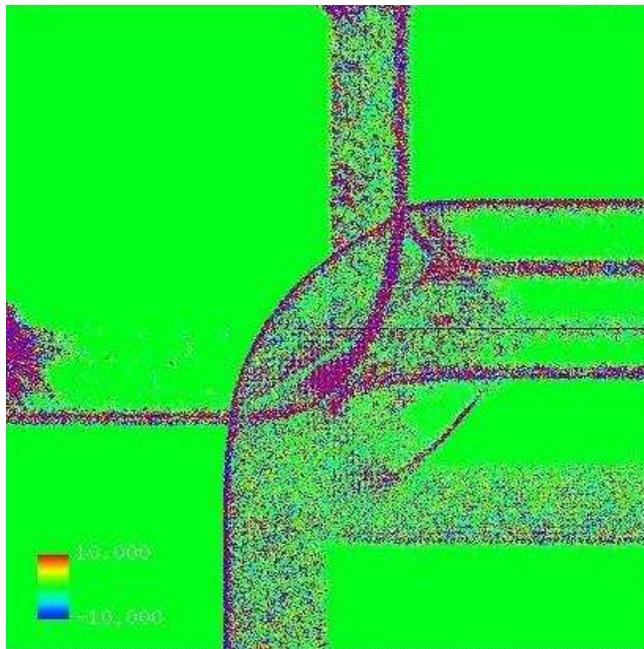


Abbildung 4.1: Entstehung von Divergenzfehlern in kompressiblen MHD-Rechnungen

Weshalb man das Problem mit Finiten Volumen nicht beherrschen kann Eine natürliche Diskretisierung von Erhaltungsgleichungen ist die Methode der Finiten Volumen. Dabei wird die integrale Form der Gleichungen diskretisiert. Das Rechengebiet wird in kleine Teilvolumina aufgeteilt. Dort ist nur das Integral der Erhaltungsgröße bzw. ihr integraler Mittelwert bekannt. Die Entwicklung in der Zeit wird dadurch approximiert, daß man näherungsweise Flüsse über die Kanten ausrechnet und damit den integralen Mittelwert aufdatiert. Nun hat man bei einer solchen Diskretisierung naturgemäß keine Information über irgendwelche Ableitungen der Zustandsgröße. Eine beliebte Vorgehensweise ist die, den Zustand in einer solchen Zelle als konstant zu betrachten. Damit ist der Zustand der numerisch genäherten Lösung stückweise konstant. Das bedeutet aber wiederum, daß alle Ableitungen im schwachen Sinne verschwinden. Die Divergenzbedingung ist also in trivialer Weise erfüllt. Diese Überlegungen zeigen deutlich, daß es im Kontext von Finite-Volumen-Verfahren unmöglich ist, irgendwelche Aussagen über Ableitungen oder gar die Divergenz eines Feldes zu treffen. Für diese Verfahren ist es also notwendig, die Divergenzbedingung in den Evolutionsoperator einzubringen.

Das Problem in Finiten Differenzen Auch in den Verfahren, die versuchen, die Evolution des Magnetfelds divergenzfrei zu halten (Constraint Transport), kommen meist Finite Volumen zum Einsatz [35, 16, 1, 23, 2]. Jedoch wird das Verfahren jeweils an der Stelle, an der die Divergenzfreiheit der Evolution des Magnetfelds ins Spiel kommt, als Finite-Differenzen-Verfahren interpretiert. Das kann etwa in der Weise geschehen, daß der Zellmittelwert als Punktwert im Zellschwerpunkt betrachtet wird. Das Verfahren läßt sich dann als Differenzenschema mit diesen Punktwerten schreiben. Ein Finite-Differenzen-Verfahren sieht überall Ableitungen. Es ignoriert einfach die Unstetigkeiten. Daher erklärt es sich auch, daß in Abbildung 4.1 in den Unstetigkeiten eine besonders starke Divergenz des Magnetfelds angezeigt wird. Die Divergenz wird ja schließlich durch finite Differenzen gemessen¹. Nun wird in [16, 35] für die zweidimensionale Situation ein Verfahren auf kartesischen Gittern konstruiert, das formal zweiter Ordnung ist. Dazu werden alle Differenzensterne betrachtet, welche nicht mehr als den betrachteten Punkt selber und die acht Nachbarn benötigen und die Divergenz von zweiter Ordnung approximieren. Damit hat man alle für ein Verfahren zweiter Ordnung sinnvollen diskreten Divergenzoperatoren. Verschwindet keiner von diesen auf der Evolution des Magnetfelds, so kann man davon ausgehen, daß die Divergenzfreiheit der Evolution von mindestens erster Ordnung verletzt ist. Normalerweise wird man für die zweite Ordnung versuchen, bei der Diskretisierung für das Aufdatieren in einem Punkt nicht mehr als den Punkt selber sowie den linken, rechten, oberen und unteren Nachbarpunkt zu verwenden. In [16] wird aber gezeigt, daß der einzige diskrete Divergenzoperator zweiter Ordnung, der mit diesen Punkten auskommt, der Zentrale ist. Es wird also in jeder Raumrichtung die zentrale Differenz gebildet. Für

¹In [11] werden Vorschläge gemacht, wie man die Divergenz im Kontext finiter Volumen messen kann. Diese führen aber z. B. im Fall eines kartesischen Gitters wieder auf die Formel der zentralen Differenzen.

diesen wird aber nachgewiesen, daß jedes Verfahren mit einer Evolution, auf der er verschwindet, unbedingt instabil ist. Damit ist klar, daß jedes stabile Verfahren bezüglich dieser Differenzen keine divergenzfreie Evolution des Magnetfelds haben kann. Hat man aber nur die horizontalen und vertikalen Nachbarnpunkte für die Diskretisierung verwendet, so kann bezüglich der anderen Divergenzoperatoren erst recht keine Divergenzfreiheit gelten. Die Evolution des Magnetfelds hat also einen Divergenzfehler von mindestens erster Ordnung. Auf einen bestimmten Zeitpunkt bezogen hat man also einen Divergenzfehler erster Ordnung zu erwarten. Es ist zu erwarten, daß dies bei einem Verfahren, das bei der Konstruktion keine besondere Rücksicht auf die Divergenzfreiheit nimmt, immer so ist.

4.3 Ein einfaches Testbeispiel

4.3.1 Die Fehlermodellierung im einfachen Testbeispiel

Um die Eigenschaften der Divergenzkorrektur zu studieren, wird ein einfaches Testbeispiel betrachtet. Es sollte die charakteristischen Merkmale des divergenzfreien Magnetfeldes widerspiegeln: Eine divergenzfreie Evolution und die Divergenzfreiheit der Größe selbst. Das einfachste (mehrdimensionale) System, das dies erfüllt, ist

$$\mathbf{B}_t = 0, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

Hier sieht man gleich das grundlegende Problem: Erfüllen die Anfangsdaten Gleichung (4.4) nicht, so ist das Anfangswertproblem unlösbar. Nun ist für jeden Zeitschritt eines numerischen Verfahrens ein Anfangswertproblem zu lösen. Als Anfangswerte nimmt man dabei das Ergebnis des letzten Zeitschritts. Nun ist offensichtlich, daß man das System (4.3), (4.4) leicht so diskretisieren kann, daß man bei divergenzfreien Anfangsdaten in jedem Zeitschritt ein divergenzfreies \mathbf{B} -Feld erhält. Betrachtet man allerdings die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes in der MHD, so ist dies nur unter großem Aufwand bzw. großen Einschränkungen möglich.

Man kann nun versuchen, eine Art „kleinste Quadrate Lösung“ für das überbestimmte System (4.3), (4.4) zu finden, also ein Feld \mathbf{B} für das die Fehler in (4.3) und (4.4) klein bleiben. Bei einem Finite-Elemente-Verfahren würde es sich z. B. anbieten, divergenzfreie Ansatzfunktionen für \mathbf{B} zu verwenden und die Lösung des i. a. überbestimmten und damit unlösbaren resultierenden linearen Gleichungssystems durch eine kleinste Quadrate Approximation zu ersetzen. Ein analoges Vorgehen ist allerdings bei Differenzen- oder Finite-Volumen-Verfahren nicht möglich. Der Ausweg, der hier besprochen werden soll, besteht darin, die Fehler in den Gleichungen explizit als Term dazuschreiben und das mathematische Modell so zu erweitern, daß sie nicht anwachsen können bzw. für große Zeiten gegen Null streben.

Wir betrachten also das „Ersatzsystem“

$$\mathbf{B}_t + \text{err}_1 = 0, \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} + \text{err}_2 = 0. \quad (4.6)$$

Dieses ist die einfachste Möglichkeit. In jeder Gleichung taucht nur ein additiver Fehlerterm auf. Dieser hat dann formal die Gestalt eines Defektes oder Residuums. Allerdings ist es besser, diese Begriffe zu meiden und die Fehler entsprechend ihrer Natur als „Evolutionsfehler“ (err_1) bzw. „Divergenzfehler“ (err_2) zu bezeichnen. Dies ist dem Verständnis des Problems und dem Modellierungsprozeß dienlicher.

Bildet man die Divergenz der ersten Gleichung (4.5) und die Zeitableitung der zweiten (4.6), so findet man die Fehlergleichung

$$\text{err}_{2t} - \nabla \cdot \text{err}_1 = 0 . \quad (4.7)$$

Die Modellierung der Fehlerterme sollte nun so geschehen, daß (4.7) in eine möglichst einfache bekannte Gleichung übergeht, die sich auch analytisch leicht untersuchen läßt. Man möchte sicherstellen, daß die Fehlerterme abnehmen und nicht anwachsen. Außerdem sollten beide Terme auf eine einzige neue skalare Variable zurückgeführt werden können, damit man nicht von einem überbestimmten auf ein unterbestimmtes System kommt.

Analytische Interpretation der Fehlermodellierung

Das Problem sowohl des Evolutionsoperators der MHD (4.1) als auch des vereinfachten Evolutionsoperators (4.3) ist ähnlich. Ist zu einem Zeitpunkt t_0 die Divergenzbedingung (4.2) bzw. (4.4) erfüllt, so bleibt die exakte Lösung der Evolutionsgleichung für alle weiteren Zeiten in der von der Divergenzbedingung definierten Untermannigfaltigkeit des Lösungsraums. Sieht der Evolutionsoperator aber zu einem Zeitpunkt t_1 eine Divergenz von \mathbf{B} ungleich Null, so bleibt sie auf diesem Wert stehen, falls nur die Evolutionsgleichung gelöst wird. Die durch die Divergenzbedingung definierte Untermannigfaltigkeit stellt also keinen Attraktor für die Lösung des Evolutionsoperators dar. Ersetzt man nun den kontinuierlichen Evolutionsoperator wie in der Simulation durch einen diskreten, so wird für diesen die Untermannigfaltigkeit der diskreten Lösungen mit verschwindender diskreter Divergenz von \mathbf{B} im Allgemeinen auch kein Attraktor sein. Das heißt insbesondere, daß der Evolutionsoperator alleine für die numerische Simulation mit ihren Diskretisierungs- und Rundungsfehlern keine ausreichende Grundlage darstellt. Man müßte eigentlich den vollen Operator inklusive Divergenzbedingung diskretisieren. Nun führt dies aber auf ein überbestimmtes System, das in den seltensten Fällen eine Lösung besitzt. Diesem kann man auf zwei Ebenen begegnen:

- Auf der diskreten Ebene: Man bestimmt eine Art „kleinster Quadrate Approximation“ des überbestimmten diskreten Systems.
- Auf der kontinuierlichen Ebene: Man ersetzt den vollen kontinuierlichen Operator (inkl. Divergenzbedingung) durch einen anderen, der nicht überbestimmt ist, bei exakten Anfangs- und Randbedingungen die selben Lösungen liefert wie der ursprüngliche, und für dessen Lösungen die durch die Divergenzbedingung definierte Untermannigfaltigkeit des Lösungsraums einen Attraktor darstellt.

Was hier vorgestellt werden soll, ist die zweite Möglichkeit. Man erwartet dann, daß sich insbesondere die letztgenannte Eigenschaft auch bei der Diskretisierung erhält. Auch besteht berechtigte Hoffnung, daß sich auf diese Weise Verfahren gewinnen lassen, die weniger Rechenaufwand erfordern, als dies bei der ersten Möglichkeit der Fall wäre.

Um einen solchen neuen Operator zu konstruieren, führt man neue Terme in die Gleichungen ein, im einfachsten Fall wie oben je einen in die Evolution von \mathbf{B} und die Divergenzbedingung von \mathbf{B} und modelliert diese geeignet. Im Idealfall erhält man dann einen neuen MHD-Operator, der sich vollständig als Evolutionsoperator schreiben läßt, weder über- noch unterbestimmt ist und die oben angegebenen Eigenschaften hat. Daß solche durchaus existieren, soll im Folgenden gezeigt werden.

Skalarer Transport

Mit konstanter Geschwindigkeit: Die einfachste Möglichkeit wäre es, (4.7) in eine lineare Transportgleichung zu überführen. Dazu wählt man sich eine räumlich (und zeitlich) konstante Geschwindigkeit \tilde{u} und schreibt:

$$\text{err}_2 = \psi, \quad \text{err}_1 = -\tilde{u}\psi.$$

Die Fehlergleichung lautet dann

$$\psi_t - \tilde{u}\nabla\psi = 0, \quad (4.8)$$

eine lineare Transportgleichung. D. h. beide Fehler werden mit der Geschwindigkeit \tilde{u} aus dem Rechengebiet transportiert. Hierbei gibt es allerdings zwei Probleme:

1. Die Fehler werden mit ihrer vollen Amplitude transportiert, können also überall dort, wo sie durchtransportiert werden, Fehler verursachen.
2. Werden die Divergenzfehler hauptsächlich am Rand des Rechengebiets erzeugt, z. B. durch inkonsistente Randbedingungen oder eine schwierige Koppelung mit einem anderen Modell, und zeigt $-\tilde{u}$ von dort ins Innere des Rechengebiets, so werden die Fehler durch das ganze Gebiet transportiert.

Allerdings läßt sich die numerische Simulation sehr leicht durchführen. Man muß ψ nicht explizit in der Rechnung mitführen. Multipliziert man nämlich die Divergenzgleichung mit \tilde{u} und setzt in die Entwicklung von \mathbf{B} ein, so ergibt sich

$$\mathbf{B}_t + \tilde{u}\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.9)$$

Ein weiterer Vorzug ist der, daß man keinerlei Rücksicht auf die Randbedingungen nehmen muß, um den Abtransport der Fehler zu garantieren. Bei anderen Korrekturverfahren wie etwa den GLM-Korrekturen im nächsten Abschnitt muß man spezielle Randbedingungen konstruieren, die für den Fehlertransport transparent sind, ohne die physikalischen zu verletzen.

Mit variabler Geschwindigkeit: Will man die Nachteile dieser Korrektur umgehen, so kann man statt einer konstanten eine räumlich variable Geschwindigkeit wählen. Man hat also

$$\text{err}_2 = \psi, \quad \text{err}_1 = -\tilde{v}\psi$$

mit

$$\nabla \tilde{v} \neq 0.$$

Die Geschwindigkeit \tilde{v} könnte man nun so wählen, daß $-\tilde{v}$ in jedem Punkt zum jeweils nächsten Randpunkt zeigt und im Betrag mit der Nähe zum Rand zunimmt. Damit hätte man vermieden, daß Fehler durch's ganze Gebiet transportiert werden, und daß Fehler sich akkumulieren. Wählt man für \tilde{v} die physikalische Geschwindigkeit \mathbf{v} des Plasmas (im Falle der vollen MHD), so erhält man die sogenannte Powell Korrektur² mit

$$\mathbf{B}_t + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Man transportiert die Fehler also mit der Strömung. Die Fehlergleichung ist allerdings nicht mehr ganz so einfach, da die Geschwindigkeit nun räumlich variiert:

$$\psi_t + \nabla \cdot (\tilde{v}\psi) = 0. \quad (4.10)$$

Dies ist eine Erhaltungsgleichung in der Form einer Kontinuitätsgleichung. Um diese besser interpretieren zu können, löst man die Divergenz nach der Produktregel auf:

$$\psi_t + \tilde{v} \nabla \psi = -(\nabla \cdot \tilde{v})\psi. \quad (4.11)$$

Hat man also ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld \tilde{v} gewählt, so verschwindet die rechte Seite und man erhält eine zu (4.8) analoge Transportgleichung. D. h. der Divergenzfehler³ wird wegtransportiert. Ist die Divergenz von \tilde{v} an einer Stelle positiv, so liegt dort eine Senke für ψ (und damit err_2) vor, ist sie negativ, so hat man eine Quelle. Durch diese werden vorhandene Fehler verteilt bzw. akkumuliert. Es ist also günstig, ein Geschwindigkeitsfeld mit nichtnegativer Divergenz zu wählen. Beispielsweise kann man für ein konvexes Gebiet ansetzen

$$\tilde{v} = v_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Dabei ist \mathbf{x}_0 ein innerer Punkt des Gebiets ist, etwa der Schwerpunkt, und v_0 liefert eine obere Schranke für den Betrag der Geschwindigkeit. Dann ist

$$\nabla \cdot \tilde{v} \equiv n v_0,$$

wobei n die Dimension des Rechengebiets bezeichnet. Allerdings zeigt sich hier schon eine der Einschränkungen des Transportansatzes: Wählt man das Geschwindigkeitsfeld \tilde{v} so, daß es am Rand immer nach außen zeigt, und seine Divergenz überall positiv ist, so wird es im Allgemeinen eine Nullstelle im Rechengebiet haben. Ein Beispiel, bei

²Diese wird in Abschnitt 4.4.2 noch ausführlicher diskutiert.

³Die Größe ψ ist hier gerade der Divergenzfehler.

dem man an dieser Nullstelle, durch geschickte Wahl der Geschwindigkeit die Quelle verstärkt, findet sich in Abschnitt 4.3.3. Für den Fehler in der Entwicklungsgleichung erhält man durch Multiplikation von (4.10) mit \tilde{v} :

$$\text{err}_{1t} - \tilde{v} \nabla \text{err}_1 = 0 .$$

Dieser wird also wie im linearen Fall mit der Geschwindigkeit $-\tilde{v}$ aus dem Rechengebiet transportiert.

Verallgemeinerte-Lagrange-Multiplikatoren Modellierungen (GLM)

Hyperbolische Korrektur: Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Fehlergleichung (4.7) in eine Wellengleichung zu überführen. Eine solche Korrektur erreicht man mit

$$\text{err}_2 = \frac{1}{c^2} \psi_t , \quad \text{err}_1 = \nabla \psi .$$

Die Fehlergleichung lautet dann

$$\psi_{tt} - c^2 \Delta \psi = 0 . \quad (4.12)$$

Leitet man diese nach der Zeit ab, so findet man

$$\text{err}_{2tt} - c^2 \Delta \text{err}_2 = 0 . \quad (4.13)$$

Das heißt, der Fehler in der Divergenzgleichung genügt ebenfalls einer einfachen linearen Wellengleichung und wird mit der Geschwindigkeit c nach allen Richtungen transportiert. Bei geeigneter Wahl der Randwerte kann man somit sicherstellen, daß nach einer gewissen Zeit der Fehler vollständig abtransportiert ist. Ein Problem liegt darin, daß das Integral des Fehlers über dem Rechengebiet erhalten bleibt. Es wäre also günstig, könnte man eine Quelle bzw. Senke einführen, die den Fehler zusätzlich aus dem Rechengebiet absorbiert. Betrachtet man den Gradienten der Fehlergleichung (4.12), so ergibt sich

$$\text{err}_{1tt} - c^2 \nabla (\nabla \cdot \text{err}_1) = 0 . \quad (4.14)$$

D. h. ein divergenzfreier Fehler err_1 wird, sofern man den Anfangswert für seine zeitliche Änderung auf Null gesetzt hat, nicht verändert, bleibt also unkorrigiert. In der Praxis ist diese Einschränkung allerdings unwesentlich, ist doch der einzige Indikator für das Vorliegen eines Fehlers die Divergenz von \mathbf{B} . Ansonsten stellt (4.14) eine lineare Wellengleichung für err_1 dar und transportiert also den divergenzbehafteten Teil dieses Fehlers mit der Geschwindigkeit c nach außen.

Parabolische Korrektur: Man kann anstelle einer Wellengleichung auch eine Wärmeleitungsgleichung für die Fehlergleichung erreichen, indem man wählt

$$\text{err}_2 = \frac{1}{\kappa} \psi , \quad \text{err}_1 = \nabla \psi$$

mit einem (positiven) Wärmeleitungskoeffizienten κ . Damit erhält man

$$\psi_t - \kappa \Delta \psi = 0 . \quad (4.15)$$

Die Gleichungen für err_2 und err_1 lauten dann

$$\text{err}_{2t} - \kappa \Delta \text{err}_2 = 0 , \quad (4.16)$$

$$\text{err}_{1t} - \kappa \nabla (\nabla \cdot \text{err}_1) = 0 . \quad (4.17)$$

Das Integral über die Fehler wird also nicht erhalten. Ansonsten bleibt wieder wie oben der divergenzfreie Teil von err_1 unberührt. Das Problem liegt dann in der Diskretisierung. Eine implizite zeitliche Diskretisierung ist sehr aufwendig und daher nicht praktikabel. Bei einer expliziten Diskretisierung einer solchen parabolischen Gleichung steht man allerdings vor dem Problem, daß die Obergrenze für den Zeitschritt proportional zum Quadrat der Raumschrittweite ist. D. h. man muß, um eine hohe Auflösung zu erreichen, sehr viele Zeitschritte berechnen, verliert also den Vorteil der expliziten Berechnung.

Elliptische Korrektur: Durch die Wahl von

$$\text{err}_2 = 0 , \quad \text{err}_1 = \nabla \psi$$

läßt sich die Fehlergleichung (4.7) in eine Laplace-Gleichung überführen:

$$\Delta \psi = 0 . \quad (4.18)$$

D. h. für den Fehler in der zeitlichen Entwicklung von \mathbf{B} gilt

$$\nabla \cdot \text{err}_1 = 0 . \quad (4.19)$$

Man läßt also von vornherein nur divergenzfreie Fehler zu. Dieses muß man in der numerischen Umsetzung wiederum durch das Lösen einer Poisson-Gleichung realisieren, hat also wie beim impliziten Verfahren für die parabolische Korrektur ein großes lineares Gleichungssystem zu lösen. Dieses ist sehr aufwendig.

Allgemeine GLM-Formulierung: Offenbar hat der Fehlerterm $\text{err}_1 = \nabla \psi$ in der elliptischen Korrektur nur noch die Funktion eines Lagrange-Multiplikators, der den Fehler divergenzfrei hält. Daher bezeichnet man Divergenzkorrekturen, die err_1 in dieser Weise modellieren, als verallgemeinerte Lagrange Multiplikatoren oder auch „Generalized Lagrangian Multiplier“ (GLM) Ansätze. Für den Divergenzfehler err_2 beschränkt man sich dabei auf Modellierungen der Form

$$\text{err}_2 = g(\psi, \psi_t) . \quad (4.20)$$

Damit wird die Fehlergleichung zu

$$g(\psi, \psi_t)_t - \Delta \psi = 0 . \quad (4.21)$$

Für die hyperbolische Korrektur ist also

$$g(\psi, \psi_t) = \frac{1}{c^2} \psi_t, \quad (4.22)$$

für die parabolische

$$g(\psi, \psi_t) = \frac{1}{\kappa} \psi \quad (4.23)$$

und für die elliptische

$$g(\psi, \psi_t) = 0. \quad (4.24)$$

Nun kann man natürlich noch weitere Möglichkeiten für g betrachten:

Die gemischte Korrektur: Bei der hyperbolischen Korrektur hatte man das Problem, daß eine Quelle bzw. Senke fehlt, die Fehleranteile lokal aus dem Rechengebiet entfernt. Bei der parabolischen Korrektur blieb der Wunsch nach einem Term, der den Charakter der Gleichung ändert und einen größeren Zeitschritt für die explizite Diskretisierung erlaubt. Beides läßt sich lösen, wenn man in der GLM-Modellierung einfach die Ausdrücke für g aus der hyperbolischen und der parabolischen Formulierung addiert. Man setzt also

$$g(\psi, \psi_t) = \frac{1}{c^2} \psi_t + \frac{1}{\kappa} \psi, \quad (4.25)$$

hat damit die Fehlermodellierung

$$\text{err}_2 = \frac{1}{c^2} \psi_t + \frac{1}{\kappa} \psi, \quad \text{err}_1 = \nabla \psi$$

und dementsprechend die Fehlergleichung

$$\psi_{tt} - c^2 \Delta \psi = -\frac{c^2}{\kappa} \psi_t. \quad (4.26)$$

Für die explizite Diskretisierung des resultierenden Gleichungssystems

$$\mathbf{B}_t + \nabla \psi = 0, \quad (4.27)$$

$$\psi_t + c^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c^2}{\kappa} \psi \quad (4.28)$$

hat man jetzt nur noch die Stabilitätsbedingung des hyperbolischen Systems und die natürliche Forderung, daß der Wärmeleitungskoeffizient κ positiv ist. Die Gleichungen für den ersten Fehlerterm lautet

$$\text{err}_{1tt} - c^2 \nabla (\nabla \cdot \text{err}_1) = -\frac{c^2}{\kappa} \text{err}_{1t}, \quad (4.29)$$

Dies ist eine Wellengleichung, die wiederum wie bei den anderen GLM-Ansätzen den divergenzfreien Anteil des Fehlers err_1 – entsprechende Anfangsdaten für seine zeitliche Ableitung vorausgesetzt – unberührt läßt. Um die Gleichung für den Divergenzfehler

zu erhalten, multipliziert man die Fehlergleichung (4.26) einmal mit $\frac{1}{\kappa}$ und einmal mit $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\kappa} \text{err}_{2t} - \Delta \left(\frac{c^2}{\kappa} \psi \right) &= 0, \\ \text{err}_{2tt} - \Delta(\psi_t) &= 0. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so findet man

$$\text{err}_{2tt} - c^2 \Delta \text{err}_2 = -\frac{c^2}{\kappa} \text{err}_{2t}. \quad (4.30)$$

Die Gleichung für den Divergenzfehler ist identisch mit der Fehlergleichung. Der Fehler wird mit der Geschwindigkeit c nach allen Richtungen transportiert und durch die Quelle auf der rechten Seite in der Amplitude gedämpft.

4.3.2 Analytische Untersuchungen

Skalarer Transport

Die allgemeine Charakteristikenlösung Zur Erinnerung sei noch einmal die Fehlergleichung angegeben:

$$\psi_t + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\psi) = 0$$

und ihre quasilineare Umformung

$$\psi_t + \tilde{\mathbf{v}} \nabla \psi = -(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})\psi. \quad (4.31)$$

Setzt man hier für die Raumvariable

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(\psi(\mathbf{x}(t), t)) = \psi_t + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}(t), t).$$

Demnach genügt die Lösung entlang der Charakteristiken mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t)$$

der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(\psi(\mathbf{x}(t), t)) = -(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t)) \cdot \psi(\mathbf{x}(t), t).$$

Setzt man nun

$$z(t) := \psi(\mathbf{x}(t), t),$$

so hat man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t))z(t) \quad (4.32)$$

zu lösen. Die Lösungen dieser Gleichung haben die Gestalt

$$z(t) = Ke^{a(t)}$$

mit einer Konstanten K und

$$a(t) = - \int_0^t \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(s), s) ds .$$

Entlang der aus einem Punkt \mathbf{x}_0 mit $\psi(\mathbf{x}_0, 0) = \psi_0$ auslaufenden Charakteristik gilt also

$$\psi(\mathbf{x}(t), t) = \psi_0 e^{a(t)} . \quad (4.33)$$

Man sieht direkt, daß für eine Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ mit positiver Divergenz ψ der Fehler entlang der Charakteristiken abnimmt, während er für negative Divergenz zunimmt; bei linearem Transport bleibt er gleich.

Beispiele Hier einige Beispiele für geeignete Geschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{v}}$:

Sternförmige Gebiete: Ist das Rechengebiet sternförmig bezüglich eines Punktes \mathbf{x}^* , d. h. jeder Punkt des Gebiets läßt sich mit \mathbf{x}^* durch eine gerade Linie verbinden, die das Gebiet nicht verläßt, so kann man sehr leicht ein Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\mathbf{v}}$ finden, das den Forderungen aus 4.3.1 genügt. Um die Notation übersichtlich zu erhalten, sei etwa

$$\mathbf{x}^* = 0 .$$

Man wählt dann einfach

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = V_0 \mathbf{x} .$$

Dabei ist V_0 eine Matrix mit positiver Spur, welche die gewünschten Schrittweitenbedingungen für das angestrebte Verfahren und die Verzerrung des Gebiets einbringt. Die Divergenz von $\tilde{\mathbf{v}}$ läßt sich dann einfach bestimmen:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \text{spur}(V_0) .$$

Dann gilt für die aus \mathbf{x}_0 auslaufende Charakteristik

$$\mathbf{x}(t) = (e^{t \cdot V_0}) \mathbf{x}_0 .$$

und für die Lösung entlang derselben

$$\psi(\mathbf{x}(t), t) = \psi_0 e^{a(t)}$$

mit

$$a(t) = - \text{spur} V_0 t .$$

Dies ist im allgemeinen Fall nicht ganz einfach explizit anzugeben. Daher beschränken wir uns im Folgenden mit V_0 auf Vielfache der Einheitsmatrix. D. h. wir wählen

$$V_0 = v_0 I_n .$$

Dabei bezeichnet n die Dimension des Problems. Dann haben die Charakteristiken die Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{v_0 t} ,$$

und die Lösung entlang dieser ist

$$\psi(\mathbf{x}(t), t) = \psi_0 e^{-v_0 n t} .$$

Im Eindimensionalen läßt sich damit die Lösung in vielen Fällen explizit angeben. Ist nämlich

$$x(t) = x_0 e^{v_0 t} ,$$

so ist

$$\psi(x(t), t) = \psi(x_0, 0) e^{-v_0 t} = \psi_0(x \cdot e^{-v_0 t}) e^{-v_0 t} .$$

Zur Veranschaulichung seien hier einige Versionen von Anfangsbedingungen durchgespielt:

$$\begin{array}{ll} \psi_0(x) = x & \Rightarrow \psi(x, t) = x \cdot e^{-2v_0 t} . \\ \psi_0(x) = |x| & \Rightarrow \psi(x, t) = |x| \cdot e^{-2v_0 t} . \\ \psi_0(x) = \sqrt{|x|} & \Rightarrow \psi(x, t) = \sqrt{|x|} \cdot e^{-\frac{3}{2}v_0 t} . \\ \psi_0(x) = ax + b & \Rightarrow \psi(x, t) = ax \cdot e^{-2v_0 t} + b \cdot e^{-v_0 t} . \\ \psi_0(x) = \sum_{j=0}^N \alpha_j x^j & \Rightarrow \psi(x, t) = \sum_{j=0}^N \alpha_j x^j e^{-(j+1)v_0 t} . \\ \psi_0(x) = \log|x| & \Rightarrow \psi(x, t) = (\log|x| - v_0 t) e^{-v_0 t} \\ \psi_0(x) = \frac{1}{x} & \Rightarrow \psi(x, t) = \frac{1}{x} . \\ \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \Rightarrow \psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{v_0}{2}t} . \end{array}$$

Man sieht also, daß die meisten Anfangsverteilungen exponentiell gedämpft werden. Ein Pol im Nullpunkt bleibt dort stehen. Da für den Fehler in der Evolution von \mathbf{B} gilt

$$\text{err}_2 = -\tilde{\mathbf{v}}\psi ,$$

ist dieser also auch im Fall eines einfachen Pols im Nullpunkt beschränkt. Es gilt

$$|\text{err}_2| \leq v_0 .$$

Für das letzte Beispiel eines Pols der Ordnung $\frac{1}{2}$ gilt sogar

$$\text{err}_2(x, t) = v_0 \sqrt{|x|} e^{\frac{v_0}{2}t} .$$

Der Fehler geht tatsächlich mit der Zeit gegen Null. Das heißt, daß man mit dieser Wahl der Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ schon recht weit kommt.

Ein zweifach zusammenhängendes Gebiet: Für nicht sternförmige Gebiete ist die Wahl einer geeigneten Geschwindigkeit, die auf dem Rand immer nach außen zeigt und eine positive Divergenz hat, nicht mehr ganz so einfach. Trotzdem soll hier ein Beispiel gegeben werden für das n -dimensionale Analogon eines Kreisrings.

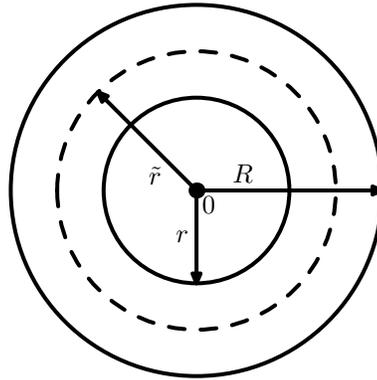


Abbildung 4.2: Kreisring, mittlerer Radius \tilde{r} eingezeichnet

Sei das Rechengebiet G gegeben durch

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : r < \|\mathbf{x}\|_2 < R\}$$

mit den Radien $0 < r < R$. Für $n = 2$ ist dies gerade ein Kreisring. Solche Gebiete werden z. B. bei der Simulation der Umströmung von Himmelskörpern verwendet. Um ein geeignetes stetiges Geschwindigkeitsfeld zu erhalten, wählt man sich einen Radius \tilde{r} zwischen r und R , auf dem das Geschwindigkeitsfeld verschwinden soll. Für Punkte, die nun von dieser „Nullinie“ gesehen außen liegen setzt man

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) := v_0 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} (\|\mathbf{x}\|_2 - \tilde{r}) = v_0 \mathbf{x} - v_0 \mathbf{x} \frac{\tilde{r}}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

Für verschwindendes \tilde{r} wäre dies gerade die oben für das Sternförmige Gebiet angegebene einfache Wahl. Nun gilt

$$\nabla \cdot (v_0 \mathbf{x}) = v_0 n$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_0 \tilde{r} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)_j &= v_0 \tilde{r} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \frac{1}{2} \frac{2x_j^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \\ &= v_0 \tilde{r} \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2 - x_j^2}{\|\mathbf{x}\|_2^3} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(v_0 \tilde{r} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right) &= v_0 \tilde{r} \frac{n \|\mathbf{x}\|_2^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2}{\|\mathbf{x}\|_2^3} \\ &= v_0 \tilde{r} \frac{n-1}{\|\mathbf{x}\|_2}. \end{aligned}$$

Daher ist dann für $\|\mathbf{x}\|_2 \geq \tilde{r}$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = v_0 \left(n - \frac{\tilde{r}(n-1)}{\|\mathbf{x}\|_2} \right) \geq v_0 ,$$

was positiv ist und somit den oben gemachten Voraussetzungen entspricht.

Etwas komplizierter ist es, eine geeignete Geschwindigkeit für Punkte mit $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \tilde{r}$ zu finden. Hier muß man auch Rücksicht auf die Dimension des Problems nehmen. Man nimmt eine natürliche Zahl $k \geq n-1$ und wählt

$$\tilde{\mathbf{v}} := v_0 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \left(\frac{1}{\tilde{r}^k} - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^k} \right) . \quad (4.34)$$

Nun ist für eine beliebige natürliche Zahl $N \geq 2$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^N} \right)_j = \frac{\|\mathbf{x}\|_2^N - N\|\mathbf{x}\|_2^{N-2} x_j^2}{\|\mathbf{x}\|_2^{2N}}$$

und damit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^N} \right) &= \frac{n\|\mathbf{x}\|_2^N - N\|\mathbf{x}\|_2^N}{\|\mathbf{x}\|_2^{2N}} \\ &= \frac{n-N}{\|\mathbf{x}\|_2^N} . \end{aligned}$$

Das heißt aber für die Divergenz von $\tilde{\mathbf{v}}$ aus (4.34)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} &= v_0 \left(\frac{n-1}{\tilde{r}^k} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} - (n-k-1) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{k+1}} \right) \\ &= \frac{v_0}{\|\mathbf{x}\|_2^{k+1}} \left((n-1) \frac{\|\mathbf{x}\|_2^k}{\tilde{r}^k} + k + (1-n) \right) \\ &\geq \frac{v_0(n-1)}{\tilde{r}^k \|\mathbf{x}\|_2} \\ &> 0 , \end{aligned}$$

da ja

$$k + (1-n) \geq 0 .$$

Damit hat man also die wie gewünscht positive Divergenz von $\tilde{\mathbf{v}}$. Außerdem zeigt die Geschwindigkeit, wie man leicht sieht, auf dem Rand überall nach außen, so daß ein effektiver Abtransport der Fehler gewährleistet ist. Damit die Divergenz in den Punkten mit $\|\mathbf{x}\|_2 = \tilde{r}$ stetig ist, muß man noch die Geschwindigkeit außen mit $\frac{k}{\tilde{r}^{k+1}}$ multiplizieren.

Ebene Wellen Da man in einem numerischen Verfahren nicht alle Wellenlängen der berechneten Größen auflösen kann, ist es interessant zu sehen, wie sich die Korrekturen auf Fehler verschiedener Wellenlängen und Frequenzen auswirken. Dazu bietet es sich an, ebene Wellenlösungen der Form

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{\alpha t + i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (\alpha, \omega \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n)$$

zu betrachten. Setzt man eine solche in Gleichung (4.31) ein, so findet man nach Division durch ψ

$$\alpha - i\omega + i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}} = -(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}).$$

Es muß also gelten

$$\begin{aligned} \omega &= \mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}}, \\ \alpha &= -(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}). \end{aligned}$$

D. h. Frequenz und Wellenlänge hängen über die Geschwindigkeit \tilde{v} direkt zusammen, und die Dämpfung hängt nur von der Divergenz eben dieser Geschwindigkeit ab. Dies ist genau das, was man nach den Betrachtungen des vorigen Abschnitts erwartet hat. Die Lösung lautet dann

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})t} \cdot e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}t)}. \quad (4.35)$$

GLM-Methoden

Konvergenzaussagen In [18] behandelt Sonja Gutmann den zweidimensionalen Fall und leitet mittels Variationsmethoden und eines asymptotischen Ansatzes einige interessante Aussagen über den Grenzwert der Lösung für lange Zeiten bei GLM-Ansätzen her. Hierfür betrachtet sie das korrigierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t + \nabla \psi &= 0, \\ g(\psi, \psi_t) + \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

auf einem Gebiet Ω wobei $g(\psi, \psi_t)$ die parabolische, die hyperbolische oder die gemischte Korrektur repräsentiert. Die Anfangswerte für ψ werden, wie man das auch bei der numerischen Umsetzung tut, auf Null gesetzt, die Anfangswerte \mathbf{B}_0 als in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ gelegen vorausgesetzt. Für die parabolische Korrektur wählt man homogene Dirichletrandwerte, für die hyperbolische und die gemischte Korrektur verlangt man auf dem Rand

$$\psi - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Dabei bezeichnet \mathbf{n} die nach außen gerichtete Normale auf dem Rand. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert \mathbf{B} bei allen drei Korrekturen für große Zeiten gegen den divergenzfreien Anteil von \mathbf{B}_0 . Da bei der GLM-Korrektur der divergenzfreie Anteil des Fehlers in der Evolution von \mathbf{B} ohnehin nicht angetastet wird, ist das in der Tat das Beste, was man hier erwarten kann.

Ebene Wellen Auch hier kann man sich wieder Lösungen in der Form ebener Wellen anschauen. Zunächst wollen wir dies für die Entwicklung des Divergenzfehlers err_2 tun. Nun ist dies im parabolischen Fall eine Wärmeleitungsgleichung und im hyperbolischen eine Wellengleichung. Sie lautet also im parabolischen Fall

$$\text{err}_{2t} - \kappa \Delta \text{err}_2 = 0 . \quad (4.37)$$

Setzt man hier für err_2 eine ebene Welle

$$\text{err}_2(\mathbf{x}, t) = e^{\alpha t + i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} , \quad (\alpha, \omega \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n) \quad (4.38)$$

ein, so führt dies auf die Lösung der algebraischen Gleichung

$$\alpha - i\omega + \kappa \mathbf{k}^2 = 0 .$$

Nach Trennung von Real- und Imaginärteil findet man für die Dämpfung

$$\alpha = -\kappa \mathbf{k}^2$$

und für die Frequenz

$$\omega = 0 .$$

Damit hat err_2 die Gestalt

$$\text{err}_2 = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot e^{-\kappa \mathbf{k}^2 t} .$$

Die Welle bleibt also stehen und wird dabei gedämpft.

Im hyperbolischen Fall lautet die Gleichung für err_2

$$\text{err}_{2tt} - c^2 \Delta \text{err}_2 = 0 .$$

Setzt man auch hier eine ebene Welle (4.38) ein, so führt dies auf

$$\alpha^2 - 2i\omega\alpha - \omega^2 + c^2 \mathbf{k}^2 = 0$$

und nach der Trennung von Real- und Imaginärteil auf

$$\omega\alpha = 0 , \quad (4.39)$$

$$\alpha^2 - \omega^2 + c^2 \mathbf{k}^2 = 0 . \quad (4.40)$$

Nach Gleichung (4.39) verschwindet entweder die Frequenz ω oder die Dämpfung α . Im zweiten Fall ergibt sich für die Frequenz aus (4.42)

$$\omega = \pm c \sqrt{\mathbf{k}^2}$$

und damit

$$\text{err}_2 = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} \mp c\|\mathbf{k}\|_2 t)} . \quad (4.41)$$

Für verschwindendes ω wird α imaginär und übernimmt die Rolle der Frequenz. In jedem Falle hat die Lösung die Gestalt (4.41). Das heißt, es findet keine Dämpfung statt und die Frequenz ist bestimmt durch die Geschwindigkeit mal der Wellenlänge.

Nun bleibt noch die gemischte Korrektur zu betrachten. Dort gilt für err_2

$$\text{err}_{2tt} - c^2 \Delta \text{err}_2 = -\lambda \text{err}_{2t}$$

mit

$$\lambda = \frac{c^2}{\kappa} .$$

Setzt man hier für err_2 eine eben Welle (4.38) ein, so führt dies auf

$$(\alpha - i\omega)^2 + c^2 \mathbf{k}^2 = -\lambda(\alpha - i\omega)$$

und nach Trennung von Real- und Imaginärteil auf

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \omega^2 + c^2 \mathbf{k}^2 &= -\lambda \alpha , \\ 2\alpha \omega &= -\lambda \alpha . \end{aligned}$$

Schließt man aus der zweiten Gleichung

$$\alpha = -\frac{\lambda}{2}$$

und setzt dies in die erste ein, so erhält man für ω die quadratische Gleichung

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2 - \frac{\lambda^2}{4} . \quad (4.42)$$

Ist die rechte Seite dieser Gleichung positiv, d. h.

$$c^2 \mathbf{k}^2 \geq -\frac{\lambda^2}{4}$$

bzw.

$$\mathbf{k}^2 \geq \frac{c^2}{4\kappa^2} , \quad (4.43)$$

so ist

$$\omega = \pm \sqrt{c^2 \mathbf{k}^2 - \frac{\lambda^2}{4}} .$$

D. h. die Frequenz fällt mit fallendem κ und ist geringer als bei der hyperbolischen Korrektur. Bei Gleichheit in (4.43) verschwindet sie ganz. Für eine positive rechte Seite in (4.42) gilt also

$$\text{err}_2 = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} \mp \sqrt{c^2 \mathbf{k}^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t)} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2} t} .$$

Ist nun die rechte Seite von (4.42) negativ, d. h.

$$\mathbf{k}^2 \leq \frac{c^2}{4\kappa^2} ,$$

so wird ω imaginär und damit zu einem weiteren Dämpfungsterm. Es ist dann

$$\omega = \pm i \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2 \mathbf{k}^2}$$

und damit

$$\text{err}_2 = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} t \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2 \mathbf{k}^2} t} . \quad (4.44)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Wurzel in der Dämpfung immer kleiner als $\frac{\lambda}{2}$ bleibt, weshalb auch für alle Lösungen immer eine Dämpfung und keine Anfachung stattfindet. Nun bedeutet (4.44) aber gerade, daß ebene Wellen mit kleiner Wellenzahl, d. h. großer Wellenlänge sich nicht als Wellen ausbreiten, sondern einer Wärmeleitungsgleichung mit dem Wärmeleitungskoeffizienten

$$\tilde{\kappa} = \frac{c}{\mathbf{k}^2} \left(\frac{c}{\kappa} \pm \sqrt{\frac{c^4}{4\kappa^4} - \mathbf{k}^2} \right)$$

gehörchen.

Insgesamt läßt sich feststellen, daß langwellige Anteile bei der gemischten Korrektur ein parabolisches Verhalten zeigen, während die kurzwelligen zwar gedämpft werden aber dennoch ein hyperbolisches Verhalten zeigen.

4.3.3 Numerische Untersuchungen

Wir wollen uns hier zunächst auf den eindimensionalen Fall beschränken. Die wesentlichen Eigenschaften der verschiedenen Korrekturansätze sind bereits hier sichtbar.

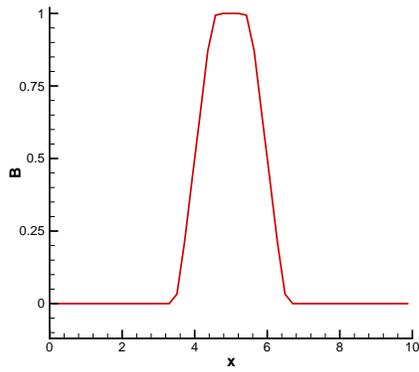
Als Beispiel wurde das Intervall $[0, 10]$ gewählt. Der Zeitschritt wurde auf eins gesetzt und die Geschwindigkeiten c für die GLM-Korrektur sowie die Maximalgeschwindigkeit für die Transportkorrektur auf 0, 2. Die Raumschrittweite wurde dann entsprechend der Stabilitätsbedingung des jeweiligen numerischen Verfahrens gewählt. Insgesamt wurden jeweils 40 Zeitschritte gerechnet.

Getestet wurde mit zwei verschiedenen Anfangsverteilungen, die in Abbildung 4.3 dargestellt sind. Die erste 4.3(a) simuliert einen rein lokal auftretenden Fehler. Hierfür wurden bei der Simulation mit der GLM-Korrektur homogene von Neumann Randbedingungen angenommen. Die zweite, ein Cosinus 4.3(b), wird mit periodischen Randbedingungen gerechnet und simuliert eine Verteilung von Fehlern über das ganze Rechengebiet.

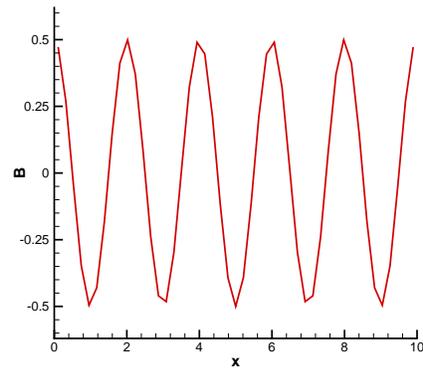
Als Kriterien zur Beurteilung werden Supremumsnorm (\mathcal{L}_∞ -norm) und die Betragssummennorm (\mathcal{L}_1 -norm) herangezogen. Die eine zeigt die Qualität der lokalen Fehlerminimierung, die andere mißt den globalen Fehler.

Transportmethode

Die Wahl der künstlichen Geschwindigkeit Hier hängt die Qualität sehr wesentlich von der Wahl der künstlichen Geschwindigkeit \tilde{v} ab. Hier wurden drei verschiedene Möglichkeiten getestet. Diese sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Die erste (4.4(a)) ist

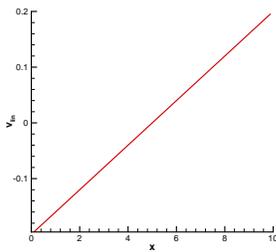


(a) Einfacher Peak

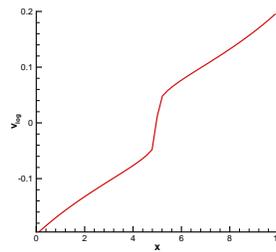


(b) Cosinusverteilung

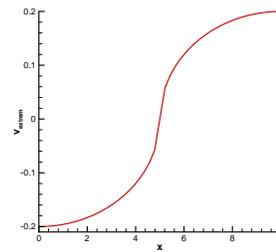
Abbildung 4.3: Die Anfangsverteilungen



(a) linear



(b) logarithmisch



(c) extrem

Abbildung 4.4: Mögliche Geschwindigkeitsverteilungen für die Transportmethode

die einfache Wahl, wie sie schon in den vorigen Abschnitten erwähnt wurde. Im vorliegenden Fall lautet sie

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{25}(x - 5) .$$

Weil \tilde{v} hier eine lineare Funktion der Raumvariable ist, wird diese im Folgenden als die *lineare* Geschwindigkeit bezeichnet. Nun ist es ja günstig, dort, wo die Geschwindigkeit Null ist, ihre Divergenz zu erhöhen. Eine Wahl, bei der diese dort sogar unendlich wird, ist in 4.4(b) zu sehen. Die Funktionsgleichung für \tilde{v} lautet dann

$$\tilde{v}(x) = \frac{\text{sign}(x - 5)}{5 \log \frac{5e}{x - 5}} .$$

Aufgrund der Verwendung des Logarithmus bei ihrer Definition soll diese Wahl der Geschwindigkeit *logarithmisch* heißen. Andererseits ist dort, wo die Geschwindigkeit groß ist, die Notwendigkeit einer großen Divergenz gering. Daher testen wir auch eine *extreme* Wahl der Geschwindigkeit \tilde{v} (4.4(c)), bei der die Divergenz in der Mitte, wo die Geschwindigkeit Null ist, unendlich wird, während sie am Rand, wo die Geschwindigkeit am größten ist, verschwindet. Der Graph von \tilde{v} besteht aus zwei Ellipsenvierteln. In Formeln ist dies

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5}\sqrt{25 - x^2} & \text{für } 0 \leq x \leq 5 , \\ \frac{1}{5}\sqrt{25 - (x - 10)^2} & \text{für } 5 \leq x \leq 10 . \end{cases}$$

Die Diskretisierung Um die Transportmethode zu testen, wird man natürlich nicht das volle korrigierte System diskretisieren sondern, wie in Abschnitt 4.3.1 vorgeschlagen nur die resultierende Gleichung (4.9). Diese lautet in einer Dimension

$$B_t + \tilde{v}B_x = 0 .$$

Nun wird man üblicherweise die Divergenz in zentralen Differenzen messen. Dieses wird auch bei der Auswertung derselben getan. Für das numerische Verfahren muß man jedoch auf einen anderen diskreten Divergenzoperator zurückgreifen, weil dieses sonst instabil wird. Daher wurde die obige Gleichung mit Upwinddifferenzen diskretisiert. Damit erhält man eine CFL-Zahl von 1. Die Lokalisierung der Variablen ist zellzentriert. Da es bei den gewählten künstlichen Geschwindigkeiten \tilde{v} keine einlaufende Charakteristik auf dem Rand gibt, muß auf die Randwerte keine Rücksicht genommen werden. Allein bei der Auswertung der Divergenz mit zentralen Differenzen muß man eine Annahme für den Wert von B in den Zellen direkt neben dem Rechengebiet machen. Hier wurden generell homogene von Neumann Bedingungen gewählt.

Die Ergebnisse Um zu sehen, wie die verschiedenen Geschwindigkeiten auf die Verteilung von B wirken, lohnt es sich, einen Blick auf den Zustand nach 20 Zeitschritten zu werfen. Dieses ist in Abbildung 4.5 für die Anfangsverteilung mit dem Cosinus zu sehen.

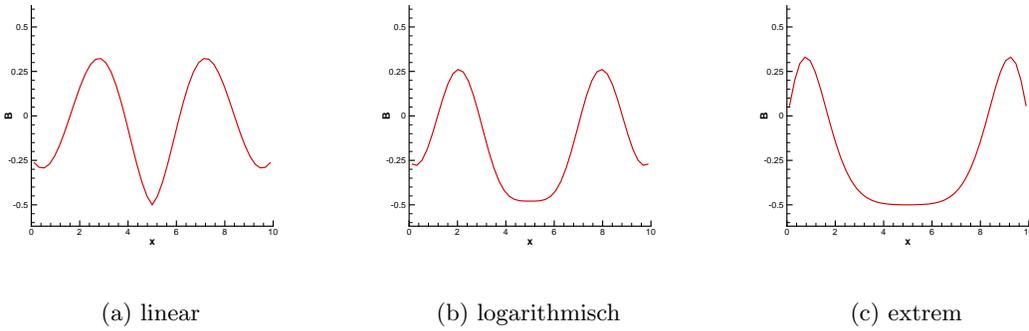


Abbildung 4.5: Zwischenzustand nach 20 Zeitschritten

Bei der linearen Geschwindigkeit (4.5(a)) sieht man recht gut, daß der Graph der Funktion $B(x)$ wie eine Feder nach beiden Seiten auseinandergezogen wird. Bei den anderen beiden Varianten ergibt sich ein ähnliches Bild. Allerdings scheint dort die Feder für $\nabla \cdot \tilde{v} = \infty$ unendlich weich und für $\nabla \cdot \tilde{v} = 0$ unendlich hart zu sein.

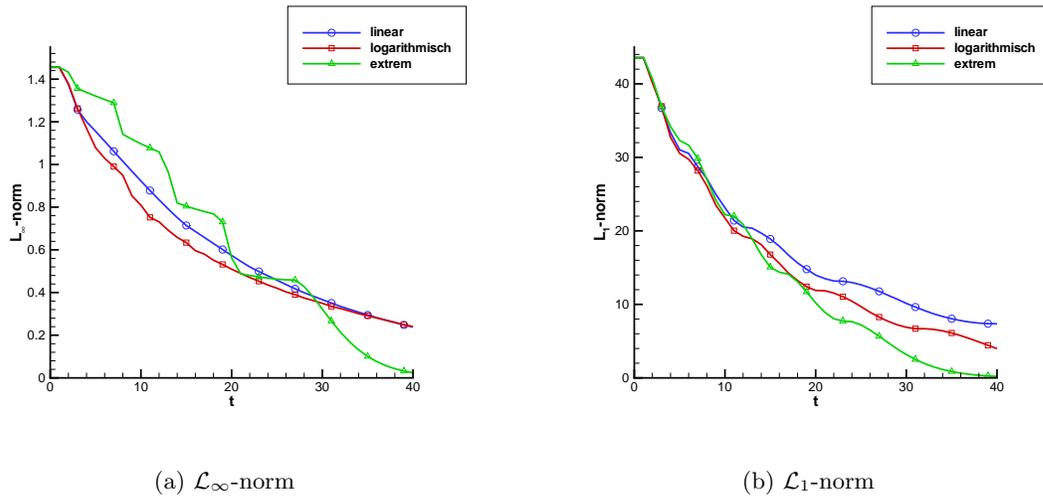


Abbildung 4.6: Die Fehlernormen für die Cosinus-Anfangsverteilung

Die Fehlernormen für die verschiedenen Transportgeschwindigkeiten liegen in diesem Falle recht nahe beieinander (s. Abb. 4.6), wobei die *extreme* Korrektur für große Zeiten bessere Werte liefert, da mit ihr schon früh alle Fehler aus dem Gebiet abfließen. Dies sieht man auch recht deutlich, wenn man den Test mit dem einzelnen Peak als Anfangsverteilung durchführt (s. Abb. 4.7). Insbesondere bei der \mathcal{L}_1 -norm kann man dort sehr schön sehen, wie die extreme Korrektur als erste beginnt, Fehler aus dem Rechengebiet zu transportieren. An der \mathcal{L}_∞ -norm kann man dann auch beobachten,

daß sie als erste den Fehler komplett abtransportiert hat. Dieses ist mit der linearen Geschwindigkeit und ihrer beschränkten Divergenz gar nicht möglich.

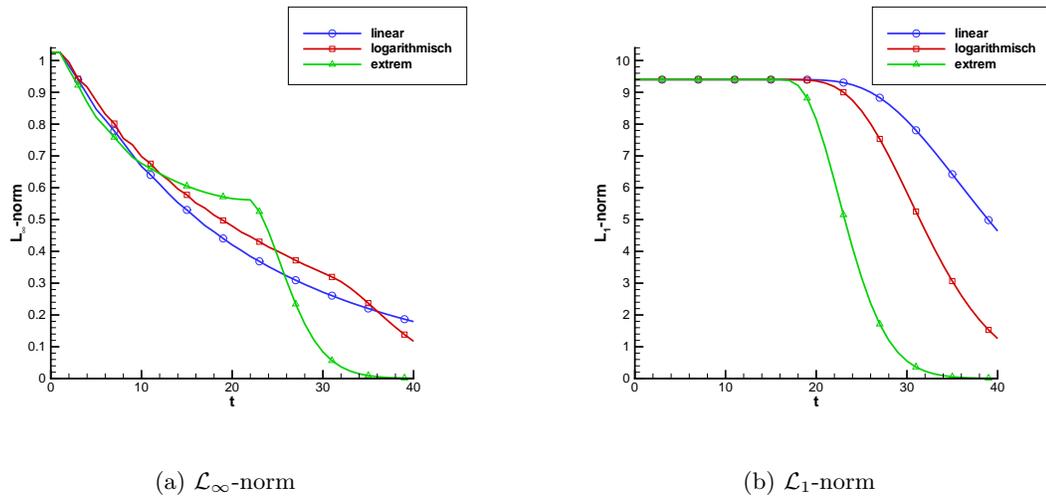


Abbildung 4.7: Die Fehlernormen für den Peak als Anfangsverteilung

GLM-Methode

Da, wie schon in Abschnitt 4.3.1 erwähnt, die elliptische und die parabolische Korrektur einen zu großen Rechenaufwand erfordern, wollen wir uns hier auf die hyperbolische und die gemischte Korrektur beschränken. Ein Vergleich der Ergebnisse aller Korrekturen findet sich in [18], wo auch deutlich wird, daß die Qualität der elliptischen Korrektur sehr wesentlich von der des verwendeten LGS-Lösers abhängt und insbesondere im Zweidimensionalen schlechter sein kann als die der gemischten Korrektur.

Die Diskretisierung Zur Diskretisierung spaltet man das System (4.27), (4.28) auf in ein homogenes hyperbolisches

$$\begin{aligned} B_t + \nabla \psi &= 0, \\ \psi_t + c^2 \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

und die Behandlung der Quelle durch

$$\psi_t = -\frac{c^2}{\kappa} \psi.$$

Im Eindimensionalen lauten diese

$$\begin{aligned} B_t + \psi_x &= 0, \\ \psi_t + c^2 B_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

und

$$\psi_t = -\frac{c^2}{\kappa}\psi. \quad (4.46)$$

Zur Diskretisierung von (4.45) verwendet man das CIR-Verfahren, das für lineare Systeme dem Godunov-Verfahren erster Ordnung äquivalent ist. Gleichung (4.46) stellt für jeden Raumpunkt eine gewöhnliche Differentialgleichung dar. Diese läßt sich exakt lösen. Das gesamte Verfahren setzt sich also für jeden Zeitschritt aus zwei Einzelschritten zusammen: Im ersten wird System (4.45) aufdatiert. Anschließend gewinnt man den neuen Wert für ψ durch

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} \cdot e^{-\frac{c^2}{\kappa}\Delta t}. \quad (4.47)$$

D. h. ψ wird in jedem Punkt mit dem selben Faktor, einer Zahl echt zwischen 0 und 1 multipliziert. Setzt man diesen Faktor künstlich auf 1, was einem unendlichen κ entspricht, so erhält man gerade wieder die hyperbolische Korrektur. Für die Tests wurde nicht κ sondern direkt der resultierende Faktor gewählt.

Die Ergebnisse Es wurden hier drei verschiedene Werte für den oben erwähnten Faktor ausprobiert, nämlich 1, was genau der hyperbolischen Korrektur entspricht, 0,8 und 0,5. In Abbildung 4.8 kann man den Einfluß der Dämpfung recht gut sehen.

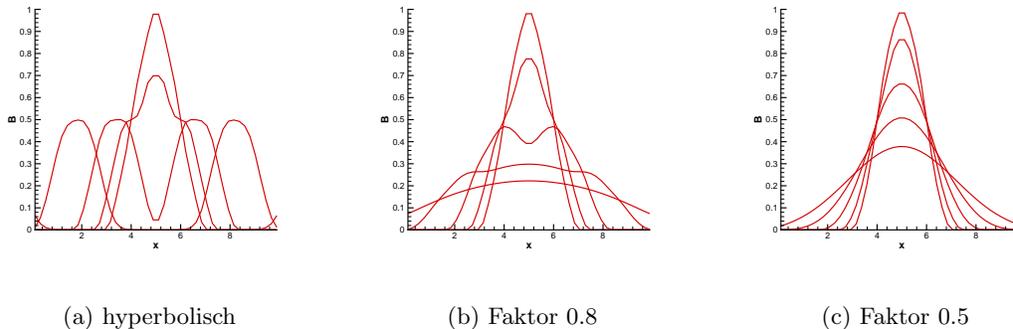


Abbildung 4.8: Zwischenzustände nach 2, 4, 8, 16 und 32 Zeitschritten

In 4.8(c) werden schon fast alle aufgelösten Wellenlängen nicht mehr transportiert sondern nur noch gedämpft. Das Bild gleicht schon beinahe dem einer Wärmeleitung. Für die schwächere Dämpfung (4.8(b)) zeigt sich dies besonders für größere Zeiten. Daher ist auch klar, daß der Fehler mit der gemischten Korrektur im Allgemeinen nicht vollständig abtransportiert wird, hat eine numerische Lösung doch in der Regel auch langwellige Anteile (vgl. Abschnitt 4.3.2). Betrachtet man die Abbildungen 4.9 und 4.10, so fällt zunächst auf, daß bei der hyperbolischen Korrektur der Abtransport des Fehlers über den Rand (Abb. 4.10) erfolgt, wobei die numerische Viskosität (Abb. 4.9) zusätzlich die Amplitude dämpft. Bei den gemischten Korrekturen

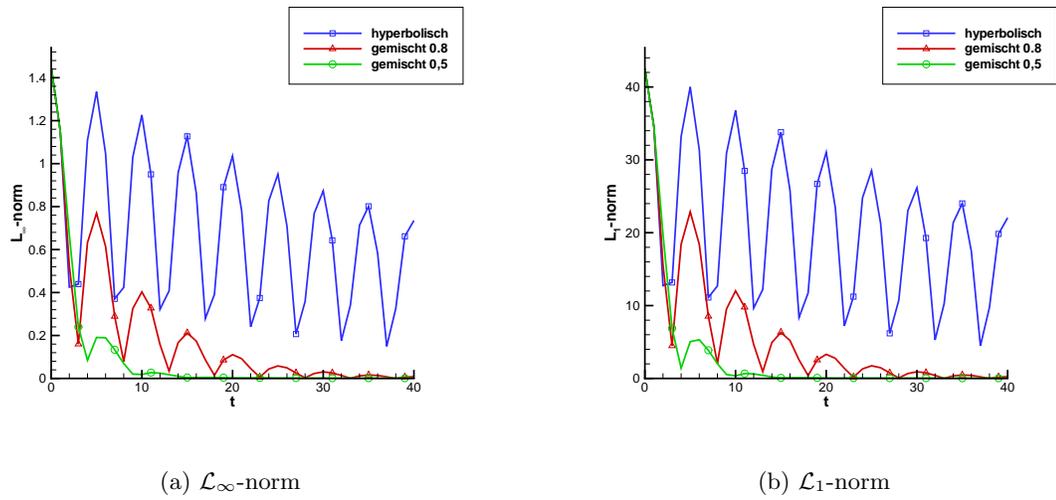


Abbildung 4.9: Die Fehlernormen für die Cosinus-Anfangsverteilung

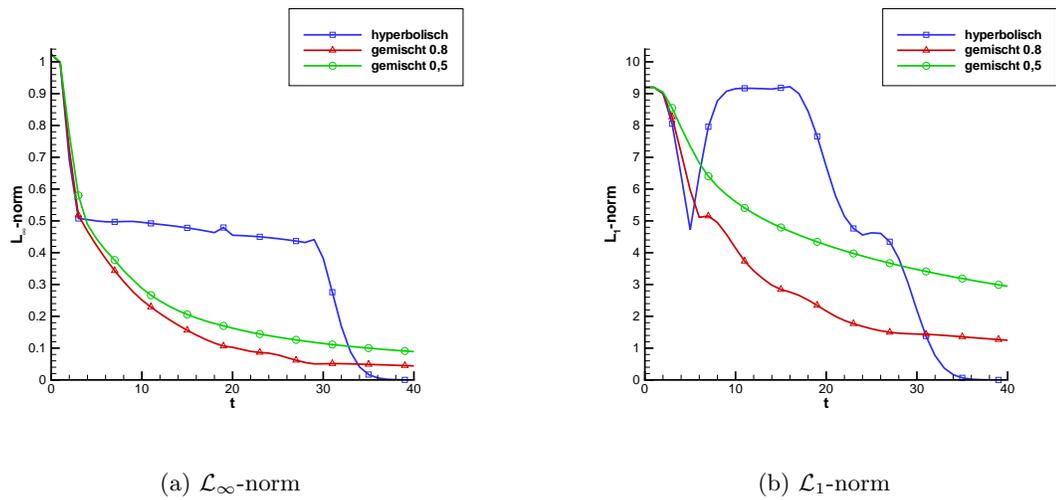


Abbildung 4.10: Die Fehlernormen für den Peak als Anfangsverteilung

liefert in einem Fall die stärkere, im anderen Fall die schwächere Quelle die bessere Korrektur.

Vergleich der beiden Methoden

Um die Qualität der beiden Korrekturen – Transport- bzw. GLM-Korrektur – zu vergleichen, werden in den Abbildungen 4.11 und 4.12 für die Beispiele mit der Cosinusverteilung und dem Peak die Fehlernormen der beiden Methoden einander gegenübergestellt. Da die lineare Geschwindigkeit in der Transportkorrektur und die hyperbolische Korrektur ohnehin schlechtere Werte liefern, werden diese in den Schaubildern nicht berücksichtigt.

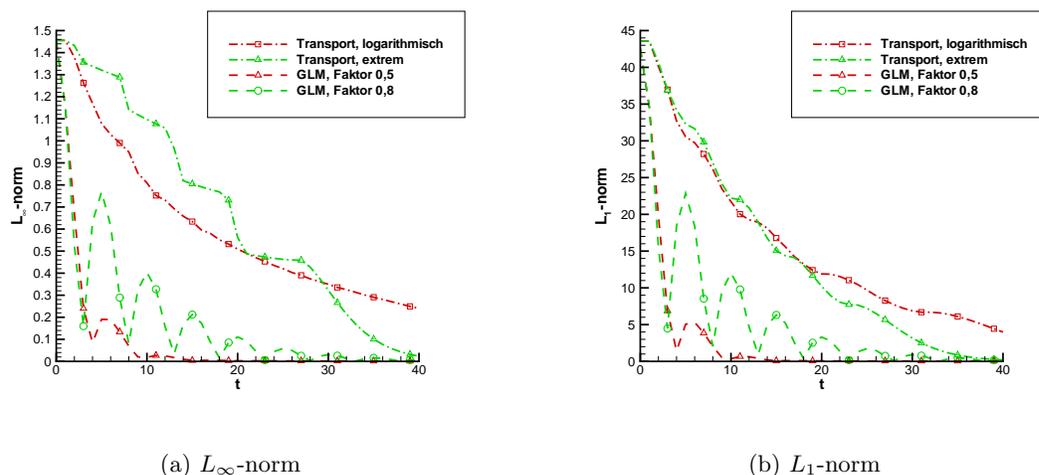


Abbildung 4.11: Vergleich für die Cosinus-Anfangsverteilung

Nun wurden diese Vergleiche sämtlich auf äquidistanten Gittern vorgenommen. Auf nichtäquidistanten Gittern, läßt sich der Transport sicherlich dadurch verbessern, daß man die Bereiche geringer Transportgeschwindigkeit dahin verlegt, wo die Gitterweiten am kleinsten sind, und dann nach außen die Geschwindigkeit entsprechend der dortigen lokalen CFL-Bedingungen größer wählen kann, als dies mit der globalen CFL-Bedingung der Fall wäre. Dabei muß man nur auf die Bedingungen an die Divergenz von $\tilde{\mathbf{v}}$ und die Richtung von $\tilde{\mathbf{v}}$ auf dem Rand achten, um nicht die Dämpfung (4.35) oder den Abtransport des Divergenzfehlers zu verschlechtern.

Auch bei der GLM-Korrektur ist es grundsätzlich möglich, mit räumlich (und zeitlich) variabler Wellengeschwindigkeit zu arbeiten. Allerdings wurden hierzu noch keine konkreten Untersuchungen durchgeführt.

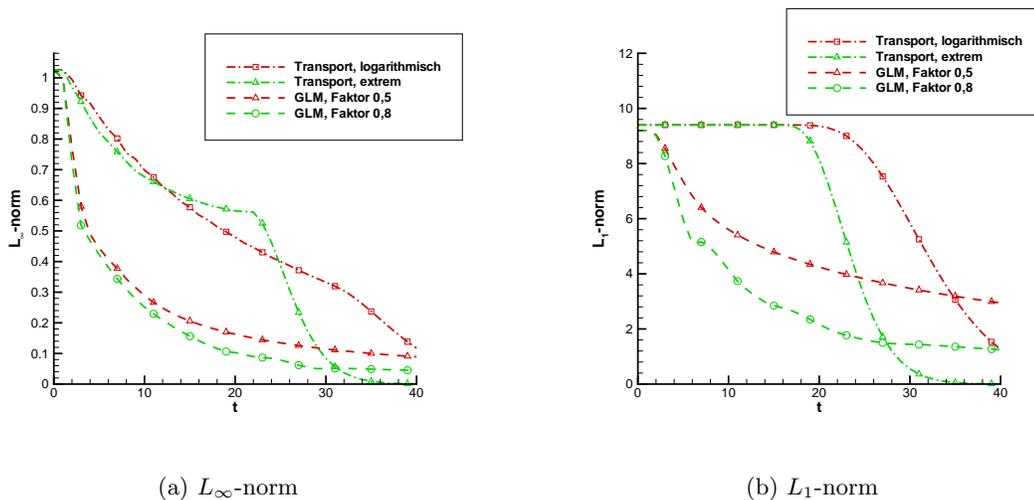


Abbildung 4.12: Vergleich für den Peak als Anfangsverteilung

4.3.4 Analytische Überlegungen zur Wahl der Parameter

Nachdem im vorigen Abschnitt numerisch nach günstigen Parametern für die Korrekturverfahren gesucht wurde, möchte man die Ergebnisse natürlich analytisch rechtfertigen. Dabei besteht auch die Hoffnung, diese auf den mehrdimensionalen Fall ausdehnen zu können. Dabei stellt sich natürlich die Frage, was denn optimiert werden soll. Im letzten Abschnitt wurden sowohl die L_1 - als auch die L_∞ -Norm des Divergenzfehlers verglichen. Erstere beschreibt das globale, zweitere das lokale Verhalten des Fehlers. Beide in einem Optimierungsschritt simultan zu minimieren scheint schlecht möglich. Man müßte etwas dazwischen finden. Da bieten sich die L_q -Normen mit $q \geq 1$ an. Diese sind definiert als

$$\|f\|_q = \left(\int_{\Omega} |f|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dabei bezeichnet Ω das Rechengebiet. Umso größer q ist, desto stärker werden lokale Maxima betont. Nun muß man sich nur noch überlegen, welchen Betrag man verwenden will. Bei der Betrachtung ebener Wellen in Abschnitt 4.3.2 haben wir echt komplexe Lösungen zugelassen. Hier zeigt sich ein Unterschied. Wählt man den Betrag des Realteils, so hat man trigonometrische Funktionen unter dem Integral stehen. Dieses ist weniger angenehm. Wählt man den komplexen Betrag, so ist er gerade die Amplitude der Lösung. Für eine ebene Welle der Form

$$f(\mathbf{x}, t) = e^{\alpha t + i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$$

ist also nur das Integral

$$J(\alpha) = \int_{\Omega} e^{\alpha t q} d\mathbf{x}$$

zu minimieren. Interessant ist, daß q nurmehr die Zeit „komprimiert“ und dementsprechend weggelassen werden kann.

Transportmethode

Bei der Transportmethode lautet die ebene Wellenlösung

$$\text{err}_2(x, t) = e^{-(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})t} \cdot e^{i\mathbf{k}(x - \tilde{\mathbf{v}}t)},$$

das zu minimierende Integral dementsprechend

$$J(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} e^{-(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})t} d\mathbf{x}. \quad (4.48)$$

Der zu wählende Parameter ist die das künstliche Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\mathbf{v}}$. Damit wird das Minimieren von J in (4.48) zu einem klassischen Variationsproblem. Die gängigsten Methoden zur Lösung eines solchen findet man etwa in [9].

Die Euler-Lagrange Gleichung für das eindimensionale Problem Ist $F = F(x, p, q)$ zweimal stetig differenzierbar, und sucht man auf einem Intervall $[a, b]$ eine ebenfalls zweimal stetig differenzierbare Funktion y , die in a und b vorgeschriebene Werte annimmt und das Integral

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4.49)$$

minimiert, so muß diese die folgende Differentialgleichung erfüllen

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) \right) - \frac{\partial F}{\partial p}(x, y(x), y'(x)) = 0. \quad (4.50)$$

Gleichung (4.50) heißt die zum Variationsproblem gehörige *Euler-Lagrange Gleichung*.

Wendet man dies auf das Integral J aus (4.48) an und beschränkt sich auf die eindimensionale Situation, so findet man zunächst, daß der Integrand nicht vom zweiten Argument, $\tilde{v}(x)$ abhängt. Die Ableitung nach dem dritten Argument ist

$$-e^{-\tilde{v}_x(x)t}.$$

Damit lautet die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx} (-e^{-\tilde{v}_x(x)t}) = -e^{-\tilde{v}_x(x)t} \cdot (-\tilde{v}_{xx}(x)t) = t\tilde{v}_{xx}e^{-\tilde{v}_x(x)t} = 0. \quad (4.51)$$

Damit diese für ein $t > 0$ erfüllt sein kann, muß insbesondere gelten

$$\tilde{v}_{xx} = 0. \quad (4.52)$$

Dies bedeutet aber, daß die Raumableitung von \tilde{v} konstant und \tilde{v} damit linear sein muß. Eine recht unbefriedigende Aussage, hat sich doch gerade diese Wahl in Abschnitt 4.3.3 als die schwächste erwiesen. Andererseits konnte man die beiden dort

vorgestellten Alternativen nicht als Ergebnis erwarten. Bei beiden geht die Ableitung im Nulldurchgang der Funktion gegen Unendlich. Damit sind auch beide nicht zweimal stetig differenzierbar. Die Methode kann aber nur solche Lösungen anbieten. Hier zeigt sich zum einen die Grenze des analytischen Ansatzes. Zum anderen kann man aber auch schon eine Einschränkung der Transportmethode deutlich erkennen: Die Wahl der Geschwindigkeit hängt von der Größe des Gebiets ab. Umso größer das Gebiet, desto kleiner muß die Steigung von \tilde{v} gewählt werden, desto schwächer auch die lokale Dämpfung.

Die Euler-Lagrange Gleichung im Zweidimensionalen Beim zweidimensionalen Festrandproblem wird ein Integral der Form

$$\int_{\Omega} F(x, y, g(x, y), h(x, y), g_x(x, y), g_y(x, y), h_x(x, y), h_y(x, y)) \, d\mathbf{x} \quad (4.53)$$

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sind die selben wie im Eindimensionalen. Allerdings haben die Funktionen mehr Argumente. So ist auch

$$F = F(x, y, p_1, p_2, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{2,1}, q_{2,2}) .$$

Überdies hat man ein System von Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{1,1}}(\dots) \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{1,2}}(\dots) \right) - \frac{\partial F}{\partial p_1}(\dots) &= 0 , \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{2,1}}(\dots) \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{2,2}}(\dots) \right) - \frac{\partial F}{\partial p_2}(\dots) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.54)$$

Da Das Integral (4.48) nur von zweien der Ableitungsterme abhängt, vereinfachen sich die Euler-Lagrange Gleichungen zu

$$\begin{aligned} t^2 e^{-(\tilde{u}_x + \tilde{v}_x)} (\tilde{u}_{xx} + \tilde{v}_{yx}) &= 0 , \\ t^2 e^{-(\tilde{u}_x + \tilde{v}_x)} (\tilde{u}_{xy} + \tilde{v}_{yy}) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Damit muß aber gelten

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx} + \tilde{v}_{yx} &= 0 , \\ \tilde{u}_{xy} + \tilde{v}_{yy} &= 0 . \end{aligned} \quad (4.56)$$

Das bedeutet, daß die Divergenz der künstlichen Geschwindigkeit konstant sein muß.

Betrachtet man nun das Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ und möchte, daß auf dem Rand die Geschwindigkeitskomponente von $\tilde{\mathbf{v}}$ gerade Eins wird, so erfordert dies

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{x} . \quad (4.57)$$

Das bedeutet aber, daß nur wieder lineare Geschwindigkeiten möglich wären. Auf einem Rechteck würde der maximale Betrag der Geschwindigkeit nur in den Ecken

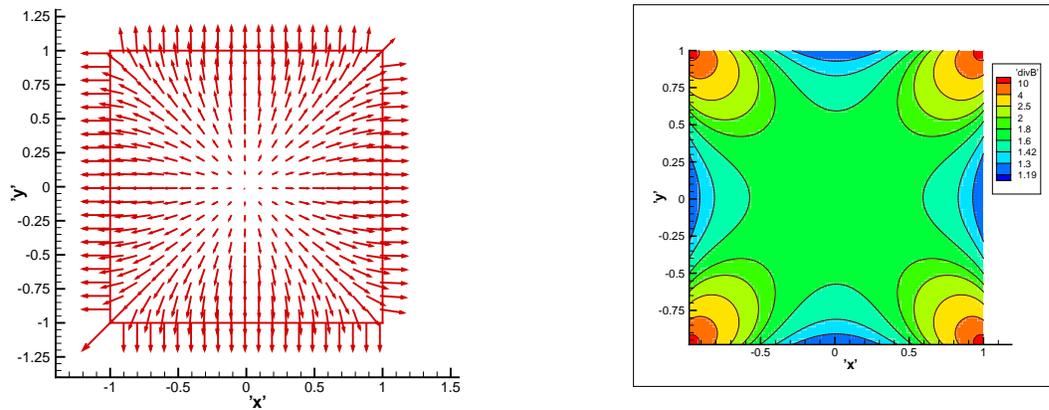


Abbildung 4.13: Harmonische Geschwindigkeitsverteilung und zugehörige Divergenzverteilung

erreicht. Dort ist er gerade $\sqrt{2}$, weshalb man bei einer Normierung das Geschwindigkeitsfeld nochmals durch diesen Wert teilen müsste. Das Resultat wäre eine konstante Divergenz von $\sqrt{2}$ statt der erhofften 2. In Abbildung 4.13 ist ein Geschwindigkeitsfeld zu sehen, das auf dem Rand gerade die Normale ist, und dessen Komponenten harmonisch sind, d. h. den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u} &= 0, \\ \Delta \tilde{v} &= 0\end{aligned}\tag{4.58}$$

genügen. Das Bild der Divergenzverteilung zeigt deutlich, daß diese bis auf kleine Bereiche in Randnähe überall größer als $\sqrt{2}$ ist. Überdies ist sie durch 1.19 nach unten beschränkt. Alles in allem ist also für diese Wahl der Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ der Wert des Integrals J aus (4.48) kleiner als bei der, die man durch das Lösen der Euler-Lagrange Gleichungen erhalten kann. Die Ursache liegt in der Einschränkung der Wahl der Randwerte für System (4.56). Für die gewünschten, wie sie bei der harmonischen Geschwindigkeit realisiert wurden, ist das System schlicht nicht lösbar.

Ein Fall, in dem man die Euler-Lagrange Gleichungen auch mit den idealen Randwerten lösen kann, ist der eines rotationssymmetrischen Gebiets. Auf dem Einheitskreis \mathbb{D} etwa liefert die Wahl $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{x}$ die äußere Normale als Randwert und eine Divergenz von 2, das Beste, was man nach dem Gaußschen Integralsatz für eine konstante Divergenz erwarten kann, gilt doch für ein normiertes Geschwindigkeitsfeld

$$\int_{\mathbb{D}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial \mathbb{D}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} \, ds \leq 2\pi$$

und mit konstanter Divergenz

$$\pi \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \leq 2\pi.$$

Nun ist es für ein rotationssymmetrisches Gebiet sicherlich sinnvoll, auch das künstliche Geschwindigkeitsfeld rotationssymmetrisch zu wählen. Damit läßt sich das Problem wieder auf ein eindimensionales zurückführen. Für einen Kreisring um den Ursprung mit äußerem Radius r_2 und innerem Radius r_1 läßt sich das Integral (4.48) umformen zu

$$\begin{aligned} J(\tilde{\mathbf{v}}) &= \int_{\Omega} e^{-(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})t} d\mathbf{x} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} 2r e^{-(\tilde{v}'(r) + \frac{\tilde{v}(r)}{r})t} dr, \end{aligned} \quad (4.59)$$

wobei \tilde{v} die radiale Komponente von $\tilde{\mathbf{v}}$ bezeichnet. Damit lautet die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung

$$2rt^2 \left(\tilde{v}''(r) + \frac{\tilde{v}'}{r} - \frac{\tilde{v}}{r^2} \right) = 0.$$

Es genügt also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$r^2 \tilde{v}''(r) + r \tilde{v}'(r) - \tilde{v}(r) = 0 \quad (4.60)$$

zu lösen. Die Lösung lautet in der allgemeinen Form

$$\tilde{v}(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r, \quad (4.61)$$

wobei die Konstanten c_1 und c_2 noch durch die Randwerte bestimmt werden müssen. Wählt man diese so, daß die radiale Geschwindigkeit am inneren Rand -1 , am äußeren Rand $+1$ beträgt, so ergibt sich

$$\tilde{v}(r) = \frac{r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{r} + \left(\frac{r_2^2}{r_1^3 - r_1 r_2^2} - \frac{r_2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{1}{r_1} \right) r \quad (4.62)$$

und daraus für die Divergenz

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 2 \left(\frac{r_2^2}{r_1^3 - r_1 r_2^2} - \frac{r_2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (4.63)$$

Ist etwa $r_1 = 1/2$ und $r_2 = 1$ so ist

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 6.$$

Dies ist ein höchst befriedigender Wert. Allerdings ist die Größe der Divergenz noch stärker von der Größe des Gebiets abhängig als bei einem Kreis oder Rechteck. Hat man nämlich $r_1 = 1$ und $r_2 = 2$, d. h. das Gebiet einfach um einen Faktor 2 gestreckt, so ist

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 2.$$

Man verliert also einen Faktor 3 statt eines Faktors 2, wie man aus der Skalierung hätte vermuten können.

Fazit Insgesamt läßt sich also festhalten, daß die Transportkorrektur insbesondere bei kleinen zweifach zusammenhängenden Gebieten wie etwa Kreisringen eine gute Dämpfung der Divergenzfehler bringt. Abschnitt 4.3.3 zeigt, daß eine gute Dämpfung noch kein optimales Ergebnis liefert. Die lineare Geschwindigkeitsverteilung ist der schlechteste der drei getesteten Kandidaten. Die anderen beiden besitzen vor allen Dingen einen schnelleren Transport. Dies motiviert das folgende Vorgehen für die Geschwindigkeitswahl bei der Transportkorrektur:

1. Wähle dämpfungsoptimierte Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$, auf Maximalbetrag Eins normiert.
2. Wähle konkave anwachsende Funktion g , die das Intervall $[0, 1]$ auf sich selbst abbildet, etwa

$$g(r) = \sqrt{1 - (r - 1)^2}.$$

3. Wende g auf den Betrag von $\tilde{\mathbf{v}}$ an, d. h. setze

$$\tilde{\mathbf{v}} = g(|\tilde{\mathbf{v}}|) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|}. \quad (4.64)$$

4. Multipliziere $\tilde{\mathbf{v}}$ für jeden Zeitschritt mit einer Konstanten, die sicherstellt, daß die CFL-Bedingung erfüllt wird.

GLM-Korrektur

Bei der GLM-Korrektur lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t + \nabla \psi &= 0, \\ \psi_t + c^2 \nabla \cdot \mathbf{B} &= -\lambda \psi. \end{aligned}$$

Es sind also zwei Parameter zu wählen, nämlich c und λ . Dies ist zunächst eine Erschwernis gegenüber der Transportmethode. Jedoch handelt es sich hier nicht um ein Geschwindigkeitsfeld sondern um positive reelle Zahlen, was wiederum eine starke Vereinfachung bedeutet. Insbesondere kann man sich hier das Aufstellen und Lösen von Euler-Lagrange Gleichungen ersparen. Auch hier lohnt es sich, wieder von der ebenen Wellenlösung auszugehen.

$$\text{err}_2 = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cdot e^{i(\mathbf{k}x \mp \sqrt{c^2 \mathbf{k}^2 - \frac{\lambda^2}{4}}t)} & \text{falls } \lambda \leq 2c|\mathbf{k}| \\ e^{-\frac{\lambda}{2}t \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2 \mathbf{k}^2}t} \cdot e^{i\mathbf{k}x} & \text{falls } \lambda \geq 2c|\mathbf{k}| \end{cases}. \quad (4.65)$$

Der Parameter c bestimmt also die Wellengeschwindigkeit, falls für die betreffende Wellenzahl \mathbf{k} überhaupt ein Transport stattfindet. Im anderen Fall geht er mit in die Dämpfung ein. Das heißt, man sollte ihn innerhalb des von der CFL-Bedingung vorgegebenen Rahmens möglichst groß wählen. Zum einen ist dann für eine bestimmte Wellenzahl die Wahrscheinlichkeit eines Transports höher, zum anderen ist dieser

Transport dann schneller und somit effektiver. Bleibt noch der Parameter λ . Für diesen betrachtet man wieder den Betrag des Fehlers, die Amplitude:

$$|\text{err}_2| = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}t} & \text{falls } \lambda \leq 2c|\mathbf{k}| \\ e^{-\frac{\lambda}{2}t \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t} & \text{falls } \lambda \geq 2c|\mathbf{k}| \end{cases}. \quad (4.66)$$

Aus der ersten Zeile in (4.66) schließt man, daß das optimale λ mindestens so groß sein muß wie $2c|\mathbf{k}^2|$. Bleibt noch die Frage, was die zweite Zeile, der reine Dämpfungsfall, impliziert.

Die L_∞ -Norm In der zweiten Zeile von Gleichung (4.66) stört das Zeichen „ \pm “, zeigt es doch eine weitere Verzweigung an. Da man sich bei der L_∞ -Norm nur für den größeren Wert interessiert, genügt es hier, den Ast mit „ $+$ “ zu betrachten. Da es sich bei λ um einen reellen Parameter handelt, kann der Ausdruck nach diesem abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(e^{-\frac{\lambda}{2}t + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t} \right) &= -\frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}t + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t} \\ &= \frac{t}{2} \left(-1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{\lambda}{2}t + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t} \\ &= \frac{t}{2} \left(\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2} \right) e^{-\frac{\lambda}{2}t + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Nun sind in (4.67) alle Faktoren positiv. Damit wächst der Ausdruck streng monoton in λ . Das Minimum wird also im linken Rand des Gültigkeitsbereichs angenommen, d. h. in

$$\lambda = 2c|\mathbf{k}|.$$

Insgesamt ist dies also die optimale Wahl, um den Divergenzfehler für eine gegebene Wellenzahl \mathbf{k} und eine gegebene Wellengeschwindigkeit c zu minimieren.

Nun wird man in der numerischen Simulation das Optimum in den wenigsten Fällen exakt treffen. Es ist also noch zu überlegen, ob es gefährlicher ist, den Parameter zu unterschätzen oder zu überschätzen. Dazu muß man sich die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Ableitung des Fehlers nach λ für $\lambda \rightarrow 2c|\mathbf{k}^2|$ ansehen. Die Ableitung auf der linken Seite ist

$$-\frac{t}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}t}.$$

Setzt man hier $\lambda = 2c|\mathbf{k}|$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t}. \quad (4.68)$$

Auf der rechten Seite lautet der Grenzwert

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}c|\mathbf{k}^2|e^{-c|\mathbf{k}|t} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 2c|\mathbf{k}^2|} \frac{e^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t}}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}} &= \frac{1}{2}c|\mathbf{k}|te^{-c|\mathbf{k}|t} \cdot \lim_{\sqrt{\dots} \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{\dots}t}}{\sqrt{\dots}} \\
&= \frac{1}{2}c|\mathbf{k}|te^{-c|\mathbf{k}|t} \cdot \lim_{\sqrt{\dots} \rightarrow 0} \frac{te^{\sqrt{\dots}t}}{1} \\
&= \frac{1}{2}c|\mathbf{k}|t^2e^{-c|\mathbf{k}|t}. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Das ist gerade das $c|\mathbf{k}|t$ -fache des Grenzwerts auf der anderen Seite. Geht man davon aus, daß c groß gewählt wurde, so ist dies für kleine Zeiten kleiner als der Grenzwert auf der linken Seite. Möchte man das Maximum des Fehlers schnell kleiner bekommen, so ist es also sicherer, λ zu überschätzen.

Die L_1 -Norm Das Zeichen „ \pm “, in der zweiten Zeile von Gleichung (4.66) läßt sich hier nicht so leicht erledigen wie im vorigen Abschnitt. Es geht ja hier nicht um ein Maximum sondern um eine Mittelung über das gesamte Gebiet. Deshalb wird an dieser Stelle einfach mit dem arithmetischen Mittel der beiden Werte weitergearbeitet. Man hat dann

$$|\text{err}_2| = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}t} & \text{falls } \lambda \leq 2c|\mathbf{k}| \\ e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cosh(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t) & \text{falls } \lambda \geq 2c|\mathbf{k}| \end{cases}. \tag{4.70}$$

Leitet man auch hier wieder die zweite Zeile nach λ ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} (e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cosh(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t)) \\
= -\frac{t}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cosh(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t) + e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sinh(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}t) \cdot \frac{\lambda t}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - c^2\mathbf{k}^2}}. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck nicht besonders zugänglich ist, wird gleich zum Grenzwert für $\lambda \rightarrow 2c|\mathbf{k}|$ übergegangen:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 2c|\mathbf{k}|} \dots &= -\frac{t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t} + \frac{c|\mathbf{k}|t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t} \lim_{\sqrt{\dots} \rightarrow 0} \frac{\sinh(\sqrt{\dots}t)}{\sqrt{\dots}} \\
&= -\frac{t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t} + \frac{c|\mathbf{k}|t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t} \lim_{\sqrt{\dots} \rightarrow 0} \frac{\cosh(\sqrt{\dots}t)}{1} \\
&= -\frac{t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t} + \frac{c|\mathbf{k}|t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t} \\
&= \frac{t}{2}e^{-c|\mathbf{k}|t}(c|\mathbf{k}|t - 1). \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Entscheidend ist also der Term $c|\mathbf{k}|t - 1$ in (4.72). Dieser ist nur für sehr kurze Zeiten negativ. Nun ist man bei der L_1 -Norm im Gegensatz zur L_∞ -Norm eher am Verhalten

für große Zeiten interessiert, möchte man doch auf Dauer die Divergenzfehler aus dem Gebiet heraus haben. Damit ist das Optimum genau wie im Fall der lokalen Fehler bei

$$\lambda = 2c|\mathbf{k}| .$$

Interessant ist, daß auch hier wieder das Überschätzen von λ weniger Schaden anrichtet als das Unterschätzen.

Die Abhängigkeit von der Wellenzahl und eine Interpretation der numerischen Ergebnisse Nach diesem allem steht noch eine Frage ungeklärt im Raum: Die Parameterwahl ist abhängig von einer vorgegebenen Wellenzahl. Nun gibt es ja in einer numerischen Lösung Fehler verschiedener Wellenlängen und damit verschiedener Wellenzahlen. Wie geht man damit um? Insbesondere hat man sich zu überlegen, welche Wellenzahl man für die Wahl von λ benutzt, und welche Konsequenzen dies für die Fehler anderer Wellenzahlen hat.

Bei der Anwendung in echten Simulationen, etwa der MHD-Gleichungen, treten die Divergenzfehler hauptsächlich an Unstetigkeiten der physikalischen Größen auf. Daher ist damit zu rechnen, daß die Divergenzfehler bei ihrem Entstehen die kleinste aufgelöste Wellenlänge und damit die höchste aufgelöste Wellenzahl \bar{k} haben. Man muß also diese aufgrund der Eigenschaften des benutzten Rechengitters ermitteln. Daraus erhält man

$$\lambda = 2c\bar{k} \geq 2c|\mathbf{k}| \tag{4.73}$$

für alle vorkommenden Wellenzahlen \mathbf{k} . Man hat λ also für eine Wellenzahl korrekt, für die anderen hat man es überschätzt. Dies ist aber wie in den vorangegangenen Abschnitten gesehen ein geringeres Problem, als wenn man es für eine Wellenzahl unterschätzt hätte.

Vergleicht man nun diese Überlegungen mit den numerischen Experimenten in Abschnitt 4.3.3, so ist man zunächst geneigt, den Fall der Anfangsverteilung mit dem Cosinus als Beispiel zur Verifikation heranzuziehen. Der Zeitschritt war (für alle Beispiele) Eins, die Wellengeschwindigkeit $c = 0.2$. Damit bedeutet die Multiplikation von ψ mit 0.5 ein λ von ungefähr 0.7, die Multiplikation mit 0.8 ein λ von etwa 0.22. Die fünf Cosinusperioden über das ganze Rechengebiet ergeben eine Wellenzahl von $k = 1/2$. Damit wäre der ideale Wert

$$\lambda = 2ck = 2 \cdot 0.2 \cdot \frac{1}{2} = 0.2 .$$

Man hätte also mit dem Faktor 0.8 λ leicht, mit dem Faktor 0.5 etwas stärker überschätzt. Man würde nun erwarten, daß ersterer die besseren Werte liefert. Abbildung 4.9 zeigt jedoch gerade das Gegenteil. Es erhebt sich die Frage, weshalb das numerische Experiment die Theorie nicht widerspiegelt. Sieht die Numerik etwa die falschen Wellenzahlen? Nachdem in der Rechnung die fünf Cosinusperioden mit 47 Gitterzellen aufgelöst sind, ist dieses nicht auszuschließen. Sicher gehen könnte man etwa, wenn man eine einzige Schwingung über das ganze Gebiet betrachtet und mit periodischen Randbedingungen rechnet. Diese hätte die fünffache Wellenlänge, das

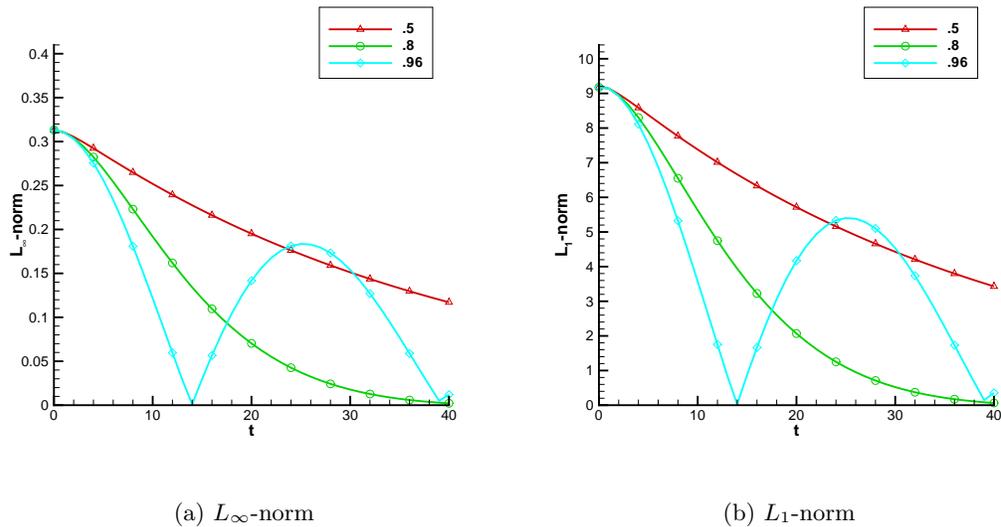


Abbildung 4.14: Die Fehlernormen für die einzelne Cosinusschwingung

ideale λ wäre also 0.04 , was einem Faktor von ca. 0.96 entspricht. In Abbildung 4.14 sind die Ergebnisse für den lokalen und den globalen Fehler dargestellt. Für kürzere Zeiten ist 0.96 in der Tat der ideale Faktor. Für längere Zeiten scheint 0.8 besser zu sein, d. h. das etwas überschätzte λ . Überschätzt man es noch stärker, was dem Faktor 0.5 entspräche, so werden die Werte deutlich schlechter.

Beim Peak als Anfangswert hat man es mit einer Welle zu tun, die sich nicht als ebene Welle einer einzigen Wellenzahl schreiben läßt. Man könnte allerdings vermuten, daß beim Fehler die Wellenlänge dominiert, die der Breite des Peaks entspricht. Dies führt auf eine dominierende Wellenzahl von $k = 1/4$ und damit auf

$$\lambda = 2ck = 2 \cdot 0.2 \cdot \frac{1}{4} = 0.1. \quad (4.74)$$

Hier wird die Theorie durch die Numerik bestätigt. Abbildung 4.10 zeigt für den Faktor 0.8 , d. h. für $\lambda = 0.22$ die eindeutig besseren Werte. Es bleibt noch zu untersuchen, ob sich mit dem in Gleichung (4.74) berechneten λ eine weitere Verbesserung erreichen läßt. Der daraus resultierende Faktor ist ungefähr 0.9 . Der Vergleich ist in Abbildung 4.15 zu sehen. Für sehr kurze und für relativ lange Zeiten sind die Werte tatsächlich besser, für mittlere Zeiten sind sie schlechter.

Fazit: Man kann daraus den heuristischen Schluß ziehen, daß man in der numerischen Praxis den scheinbaren Wert für die maßgebliche Wellenzahl und damit den Parameter λ um einen Faktor 2 überschätzen kann. Es wird sich eher eine Verbesserung als eine Verschlechterung einstellen.

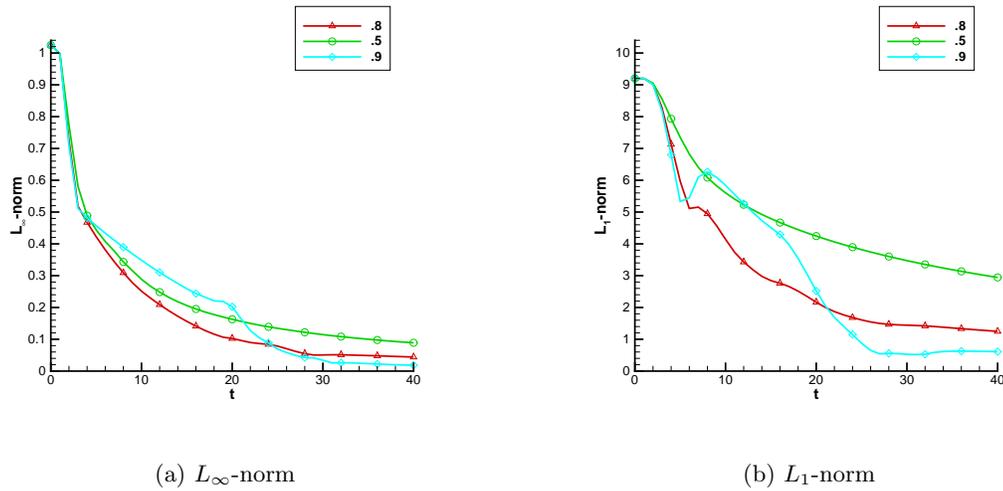


Abbildung 4.15: Die Fehlernormen für den Peak als Anfangsverteilung

4.4 Korrekturen in den Maxwell- und MHD-Gleichungen

4.4.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Ausbreitung elektro-magnetischer Wellen wird mit den Maxwell-Gleichungen beschrieben:

$$\mathbf{E}_t - c^2(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{j}{\epsilon_0}, \quad (4.75)$$

$$\mathbf{B}_t + (\nabla \times \mathbf{E}) = 0, \quad (4.76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (4.77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.78)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{E} das elektrische Feld, \mathbf{B} die magnetische Induktion, j die Stromdichte, q die Ladungsdichte, ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante, und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Letztere ist über die Beziehung

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (4.79)$$

mit der Dielektrizitätskonstanten und der magnetischen Feldkonstanten μ_0 verknüpft. Die Ladungs- und Stromdichte müssen die Ladungserhaltung erfüllen, damit diese Gleichungen erfüllt werden können:

$$q_t + \nabla \cdot j = 0. \quad (4.80)$$

Somit gibt es neben den numerischen Fehlern in der Simulation noch eine weitere Fehlerquelle im Eingehen schlechter Werte für die von außen gegebenen Größen q und

j . Nun ist es günstig, sich auch hier erweiterte Gleichungen zu definieren, indem man zwei Fehlerpaare einführt, eines für die Evolution und die Divergenz des elektrischen und eines für die Evolution und Divergenz des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t - c^2(\nabla \times \mathbf{B}) + \text{fehl}_1 &= -\frac{j}{\varepsilon_0}, \\ \mathbf{B}_t + (\nabla \times \mathbf{E}) + \text{err}_1 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} + \text{fehl}_2 &= \frac{q}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} + \text{err}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Als Fehlergleichung für err_1 und err_2 erhält man wie in Abschnitt 4.3

$$\text{err}_{2t} - \nabla \cdot \text{err}_1 = 0.$$

Diese Gleichung wurde dort schon ausführlich behandelt, weshalb sie hier nicht mehr weiter untersucht werden soll.

Als Fehlergleichung für das elektrische Feld findet man

$$\text{fehl}_{2t} - \nabla \cdot \text{fehl}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_t + \nabla \cdot j). \quad (4.81)$$

Setzt man hier eine GLM Fehlermodellierung mit einer neuen Variablen φ ein, so ergibt sich

$$g(\varphi, \varphi_t) - \Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_t + \nabla \cdot j). \quad (4.82)$$

In [29] wird für die elliptische, die parabolische und die hyperbolische Modellierung gezeigt, daß bei fehlerfreien Anfangsbedingungen die Normen der Fehler unterhalb eines konstanten Vielfachen der Norm des Fehlers in der Ladungserhaltung bleiben:

$$\sup_t \|\text{err}_1\| \leq C_1 \sup_t \|q_t + \nabla \cdot j\|, \quad (4.83)$$

$$\sup_t \|\text{err}_2\| \leq C_2 \sup_t \|q_t + \nabla \cdot j\| \quad (4.84)$$

mit einer für den jeweiligen Fall geeigneten Norm $\|\cdot\|$. Dabei muß man allerdings gewisse Voraussetzungen an die Randwerte von φ machen.

Bei der Modellierung mit skalarem Transport lautet die Fehlergleichung

$$\varphi_t + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\varphi) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_t + \nabla \cdot j). \quad (4.85)$$

Man hat also eine Kontinuitätsgleichung mit Quelle für den Divergenzfehler. Das heißt, daß neben den in 4.3.1 beschriebenen Effekten noch zusätzlich eine Fehlerquelle besteht, die nicht von den Zustandsgrößen abhängt.

Analytische Untersuchungen

Skalarer Transport Da die Fehlergleichung für \mathbf{B} sich wie oben erwähnt nicht von der aus den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 unterscheidet, muß auf diese nicht nochmals eingegangen werden. Die Untersuchung beschränkt sich also auf Gleichung (4.85).

Sie unterscheidet sich von der Fehlergleichung für das einfache Testbeispiel nur durch den Term auf der rechten Seite. Verschwindet dieser, so gelten wieder alle Betrachtungen aus 4.3.2. Daher hat man die selben Charakteristiken wie dort. Es gilt also wieder

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t) .$$

Entlang dieser Charakteristiken gilt nun

$$\frac{d}{dt}(\varphi(\mathbf{x}(t), t)) = -(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t)) \cdot \varphi(\mathbf{x}(t), t) + f(\mathbf{x}(t), t)$$

mit

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_t(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) .$$

Setzt man hier nun

$$z(t) = \varphi(\mathbf{x}(t), t) ,$$

so hat man für z die Gleichung

$$\dot{z}(t) = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t)z(t) + f(\mathbf{x}(t), t)$$

zu lösen. Dies ist die inhomogene Form von Gleichung (4.32). Nun gewinnt man die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten aus der Lösung der homogenen. Es ist also

$$z(t) = K(t)e^{a(t)}$$

mit

$$a(t) = -\int_0^t \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(s), s) ds .$$

Das bedeutet aber

$$\dot{z}(t) = \dot{K}(t)e^{a(t)} + K(t)(-\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t))e^{a(t)} ,$$

weshalb für K gelten muß

$$\dot{K}(t) = f(\mathbf{x}(t), t)e^{-a(t)}$$

und damit

$$K(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}(s), s)e^{-a(s)} ds .$$

Also ist entlang der aus \mathbf{x}_0 mit $\varphi(\mathbf{x}_0, 0) = \varphi_0$ auslaufenden Charakteristik

$$\varphi(\mathbf{x}(t), t) = \left(\varphi_0 + \int_0^t f(\mathbf{x}(s), s)e^{-a(s)} ds \right) e^{a(t)} .$$

Numerische Ergebnisse

Da sich in [27] bereits ein ausführlicher Vergleich der numerischen Ergebnisse für die elliptische, parabolische und hyperbolische GLM-Korrektur der Divergenz des elektrischen Feldes findet, wollen wir hier nicht mehr näher darauf eingehen. Ergebnisse für die gemischte GLM-Korrektur und die Transportkorrektur liegen für die Maxwellgleichungen noch nicht vor und werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

4.4.2 Die MHD-Gleichungen

Im Folgenden wird die Methode auf die MHD-Gleichungen übertragen. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten

- Man kann in der Herleitung der MHD-Gleichungen aus Euler- und Maxwell-Gleichungen für die Maxwell-Gleichungen das erweiterte System aus dem vorigen Abschnitt 4.4.1 verwenden.
- Man kann die MHD-Gleichungen in gewohnter Weise herleiten, ohne dabei die Divergenzbedingungen einzusetzen, und in die daraus entstehenden Gleichungen Korrekturen einführen.
- Man kann die MHD-Gleichungen in ihrer üblichen Form aufschreiben und dort entsprechend Korrekturen einsetzen.

Die Herleitung aus den korrigierten Maxwell-Gleichungen

Die korrigierten Maxwell-Gleichungen aus Abschnitt 4.4.1 lauten, wenn man dem Fehlerterm in der Evolution des elektrischen Feldes den Faktor c^2 voranstellt,

$$\mathbf{E}_t - c^2(\nabla \times \mathbf{B}) + c^2 \text{fehl}_1 = -\frac{j}{\varepsilon_0}, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{B}_t + (\nabla \times \mathbf{E}) + \text{err}_1 = 0, \quad (4.87)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \text{fehl}_2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (4.88)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} + \text{err}_2 = 0. \quad (4.89)$$

Nun macht man verschiedene Modellannahmen, welche die ideale MHD beschreiben, und führt diese in die Gleichungen ein. Zunächst nimmt man an, die zeitlichen Schwankungen des elektrischen Feldes seien vernachlässigbar gegen die Lichtgeschwindigkeit. Setzt man diese Annahme in (4.86) ein und dividiert durch c^2 , so ergibt sich

$$-\nabla \times \mathbf{B} + \text{fehl}_1 = -j\mu_0.$$

Der Einfachheit halber soll im Folgenden μ_0 auf Eins normiert werden. Dann hat man

$$-\nabla \times \mathbf{B} + \text{fehl}_1 = -j$$

und damit für den Momentanstrom

$$j = \nabla \times \mathbf{B} - \text{fehl}_1 . \quad (4.90)$$

Die Geschwindigkeitsgleichung lautet, wenn man die Lorentzkraft mit einbezieht,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = j \times \mathbf{B} - \nabla p .$$

Setzt man den Momentanstrom nach (4.90) ein, so wird daraus

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \text{fehl}_1 \times \mathbf{B} - \nabla p . \quad (4.91)$$

Die Lorentztransformierte von \mathbf{E} lautet im nichtrelativistischen Fall

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} .$$

Zusammen mit dem Ohmschen Gesetz

$$j = \sigma \mathbf{E}'$$

und der Annahme, daß in der idealen MHD die Leitfähigkeit σ unendlich ist, bedeutet dies, daß man das elektrische Feld mithilfe von Magnetfeld und Strömungsgeschwindigkeit beschreiben kann:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (4.92)$$

Verwendet man dies und die Annahme der Quasineutralität des Plasmas ($q = 0$), so kann man die Divergenzgleichung (4.88) des elektrischen Feldes in der folgenden Weise schreiben:

$$\text{fehl}_2 - \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 . \quad (4.93)$$

Also ist der Divergenzfehler des elektrischen Feldes mit der Entwicklung der Geschwindigkeit gekoppelt.

Mit (4.92) kann man auch die Entwicklung des magnetischen Feldes (4.87) umformulieren:

$$\mathbf{B}_t - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \text{err}_1 = 0 . \quad (4.94)$$

Die Divergenzgleichung (4.89) für das Magnetfeld läßt man gerade so stehen.

Nun braucht man nur noch die Energiebilanz. Dabei bleibt die Bilanz der inneren Energie wie bei der normalen Herleitung. Für die Bilanz der kinetischen Energie kommt zum einen der Fehlerterm aus der Geschwindigkeitsgleichung (4.91) dazu, und zum anderen darf man $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ nicht einsetzen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right)_t &= \frac{1}{2}\rho_t\mathbf{v}^2 + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}_t \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot [\nabla(\rho\mathbf{v}^2) - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nabla p + \text{fehl}_1 \times \mathbf{B}] . \end{aligned}$$

Bei der Bilanz der magnetischen Energie muß der Fehlerterm aus der Entwicklungsgleichung (4.94) des Magnetfelds mitberücksichtigt werden. Sie lautet dann

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^2)_t &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_t \\ &= \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \text{err}_1] . \end{aligned}$$

Somit lautet die Energiegleichung (in Erhaltungsform)

$$e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(v \cdot \mathbf{B}) \right] = -\mathbf{v} \cdot (\text{fehl}_1 \times \mathbf{B}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \text{err}_1 .$$

Das vollständige korrigierte System für die MHD-Gleichungen in Erhaltungsform ist daher

$$\rho_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0 , \quad (4.95)$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T] = \text{fehl}_1 \times \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} , \quad (4.96)$$

$$\mathbf{B}_t + \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T] = -\text{err}_1 , \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(v \cdot \mathbf{B}) \right] &= -\mathbf{v} \cdot [\text{fehl}_1 \times \mathbf{B}] \\ &\quad - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \text{err}_1 , \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\text{fehl}_2 - \nabla \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0 , \quad (4.99)$$

$$\text{err}_2 + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (4.100)$$

Wie man an der Herleitung sieht, bleibt die Fehlergleichung für das Magnetfeld, d. h. für err_1 und err_2 dieselbe wie bei den Maxwell-Gleichungen. Nun war diese wiederum dieselbe wie beim einfachen Testbeispiel in Abschnitt 4.3. Daher läßt sich alles, was dort an Theorie steht, direkt auf diese korrigierten MHD-Gleichungen übertragen.

Die Fehlergleichung für $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ist etwas komplizierter und hängt von einigen Strömungsgrößen ab.

Die Korrektur der MHD-Gleichungen mit nichtverschwindender Divergenz

Führt man die Herleitung der MHD-Gleichungen wie im vorigen Abschnitt durch, indem man anstelle der korrigierten Maxwell-Gleichungen die physikalischen Gleichungen (4.75) – (4.78), ohne jedoch die Divergenzgleichung (4.78) in die anderen Gleichungen einzusetzen, so lautet das System

$$\rho_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0 , \quad (4.101)$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T] = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} , \quad (4.102)$$

$$\mathbf{B}_t + \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T] = 0 , \quad (4.103)$$

$$e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(v \cdot \mathbf{B}) \right] = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B}) , \quad (4.104)$$

$$-\nabla \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0 , \quad (4.105)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (4.106)$$

Hier kann man nun wieder Divergenzkorrekturen einführen. Für das magnetische Feld ist offensichtlich, was zu tun ist: Man führt Fehlerterme in (4.103) und (4.106) ein, wie man dies schon für die Maxwell-Gleichungen getan hat. Nun taucht das elektrische Feld nicht explizit auf sondern nur als Ausdruck $-(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Man hat also insbesondere keine Entwicklungsgleichung für das elektrische Feld. Das magnetische Feld hat man schon korrigiert. Nun bleibt nur noch die Geschwindigkeit \mathbf{v} zu korrigieren. Hierzu führt man Fehlerterme in die Impulsgleichung (4.102) und die Divergenzgleichung (4.105) ein. Das resultierende System lautet dann

$$\begin{aligned}
\rho_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] &= 0, \\
(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T] &= -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \text{fehl}_1, \\
\mathbf{B}_t + \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T] &= -\text{err}_1, \\
e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] &= -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B}), \\
\text{fehl}_2 - \nabla \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] &= 0, \\
\text{err}_2 + \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Leitet man die Energiegleichung statt aus den unkorrigierten Impuls- und Magnetfeldgleichungen aus den korrigierten her, so lautet sie

$$e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = -\mathbf{v} \cdot \text{fehl}_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \text{err}_1.$$

Wie schon im Abschnitt 4.4.2 ist die Fehlergleichung für das Magnetfeld die selbe wie in Abschnitt 4.3 und hängt die Fehlergleichung für das elektrische Feld von den Strömungsgrößen ab.

Bei den in diesem und dem letzten Abschnitt hergeleiteten korrigierten Systemen stehen in der Erhaltungsform noch recht viele Terme auf der rechten Seite. Bei einer GLM-Fehlermodellierung läßt sich zwar der Fehler err_1 als Gradient eines Skalars und damit als Divergenz schreiben, d. h. er kann auch auf die linke Seite genommen werden, ebenso der Fehler fehl_1 bei der Formulierung dieses Abschnitts, aber es stehen mit den Divergenztermen noch Raumableitungen einer Zustandsgröße auf der rechten Seite. Dieses ist für ein Finite-Volumen Verfahren ungünstig. Außerdem wünscht man sich die Erhaltung von Masse, Impuls, Magnetfeld und Energie, was damit ebenfalls nicht gewährleistet ist. Daher wollen wir uns im wesentlichen mit der dritten der am Anfang von 4.4.2 aufgezählten Möglichkeiten befassen, die wir im nächsten Abschnitt darstellen.

Die Korrektur in der Standardform der MHD-Gleichungen

Üblicherweise wird bei der Herleitung der MHD-Gleichungen gleich die Divergenzbedingung für das magnetische Feld eingesetzt. Dies ist auch die Form, die üblicherweise für numerische Simulationen benutzt wird. Sie spiegelt alle physikalischen Eigenschaften

ten des dichten Plasmas wider. Führt man in diese die Fehlerterme ein, so findet man

$$\rho_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0, \quad (4.108)$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T] = -\text{fehl}_1, \quad (4.109)$$

$$\mathbf{B}_t + \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T] = -\text{err}_1, \quad (4.110)$$

$$e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = 0, \quad (4.111)$$

$$\text{fehl}_2 - \nabla \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0, \quad (4.112)$$

$$\text{err}_2 + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.113)$$

Nun stehen auf der rechten Seite nur noch Fehlerterme und keine Zustandsgrößen. Somit ist diese Variante sowohl numerisch als auch physikalisch zu bevorzugen:

- Bei einer hyperbolischen oder gemischten GLM-Fehlermodellierung läßt sich das ganze System mit einem Finite-Volumen-Verfahren lösen.
- Masse, Impuls, Magnetfeld und Energie bleiben erhalten.
- Es widerspricht der physikalischen Vorstellung nicht, da man im Gegensatz zu den ersten beiden Möglichkeiten keine magnetischen Monopole in Betracht zieht.

Die Fehlergleichung für das magnetische Feld lautet wie schon in Abschnitt 4.3.1

$$\text{err}_{2t} - \nabla \cdot \text{err}_1 = 0. \quad (4.114)$$

Damit gilt alles, was in Abschnitt 4.3 über das Fehlerverhalten geschrieben wurde, auch hier.

Nun gilt es noch, die Fehlergleichung für das elektrische Feld zu berechnen.

Die Einordnung der Powell-Korrektur

Wenn man von der Powellkorrektur spricht, so meint man damit den Ansatz, bei dem man die üblichen Gleichungen der MHD ersetzt durch

$$\rho_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T + (p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T] = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}_t + \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T] = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v},$$

$$e_t + \nabla \cdot \left[(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = -(\nabla \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}).$$

Dieses System wurde zuerst von Godunov [17] als symmetrisierbare Form der MHD-Gleichungen für theoretische Betrachtungen vorgeschlagen. Für verschwindende Divergenz des Magnetfeldes ergeben sich gerade die Evolutionsgleichungen der idealen MHD. Die Divergenzbedingung für das elektrische Feld wird nicht mit einbezogen. Für

die numerische Simulation wurde es zuerst von Brackbill und Barnes [7] vorgeschlagen. Dort wird es zurückgeführt auf eine Form der Maxwell-Gleichungen im bewegten Medium, die sich ergibt, wenn man bei der Herleitung zwischendurch vergißt, daß das Magnetfeld seiner Definition nach eigentlich divergenzfrei ist. Es wird dort als erste Möglichkeit vorgestellt, die Divergenzbedingung für das magnetische Feld bei der Simulation mitzubersichtigen. Den Namen „Powellkorrektur“ schließlich erhielt der Ansatz nach der Veröffentlichung [32]. Dort wird obiges System als Galilei-invariante Form der MHD-Gleichungen hergeleitet. Dabei stellen die Autoren fest, daß sich damit auch in vielen Fällen ein Anwachsen der Divergenz des Magnetfeldes verhindern läßt.

In den Kontext der Fehlermodellierung läßt sich die Powellkorrektur sehr leicht einbetten: Man setzt in (4.107) die Terme Fehl_1 und Fehl_2 für die Korrektur des elektrischen Feldes auf Null, vernachlässigt die Divergenzbedingung für dieses und setzt für das magnetische Feld eine Transportkorrektur mit

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \quad (4.115)$$

ein. Hier kann man dann auch schon die Grenzen des Ansatzes erkennen. Gleichung (4.115) zeigt deutlich, daß die gewünschten Eigenschaften der Transportgeschwindigkeit für die Fehler, nämlich nichtnegative Divergenz und die Unabhängigkeit von den Randbedingungen, im Allgemeinen nicht gegeben sind. Außerdem ist die Strömungsgeschwindigkeit des Plasmas meist sehr viel kleiner als die schnellste Wellengeschwindigkeit. Daher ist der Fehlertransport zum Rand wesentlich langsamer als bei einer geschickten Wahl von \tilde{v} . Wie sich dies in der Praxis auswirkt, ist im Abschnitt über die numerischen Ergebnisse 4.4.2 dargestellt.

Nun war die Divergenzkorrektur nicht der einzige Grund, weshalb der Korrekturterm in [32] eingeführt wird. Ein weiterer Grund ist der, daß die MHD-Gleichungen in ihrer gewohnten Form nicht Galilei-invariant sind. Galilei-Invarianz ist aber als nichtrelativistisches Analogon der Lorentz-Invarianz eine durchaus wünschenswerte Eigenschaft für ein physikalisches Modell. Damit haben dann alle Signalgeschwindigkeiten die Gestalt

$$\lambda_i = u \pm c_i, \quad c_i \in \{0, c_f, c_s, c_A\}.$$

Möchte man dieses Prinzip auf die hyperbolische bzw. gemischte GLM-Korrektur übertragen, so macht man folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} \text{err}_2 &= \frac{1}{c^2} \psi_t + \frac{\lambda}{c^2} \psi + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi, \\ \text{err}_1 &= \nabla \psi - \text{err}_2 \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Damit wird die Fehlergleichung zu

$$\psi_{tt} + \lambda \psi_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi_t + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \psi - c^2 \Delta \psi + \nabla \cdot ((\psi_t + \lambda \psi + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi) \mathbf{v}) = 0. \quad (4.117)$$

Möchte man hier analytische Betrachtungen analog zu denen in Abschnitt 4.3 mit einem Ebenen-Wellenansatz anstellen, so muß man wieder die Formeln aus Anhang A verwenden. Schreibt man ψ für einen gegebenen Wellenzahlvektor \mathbf{k} als

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{\alpha t + i(\mathbf{kx} - \omega t)}, \quad (4.118)$$

so führt dies auf die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \omega^2 + (\lambda + (\nabla \cdot \mathbf{v}))\alpha + 2\mathbf{kv}\omega + c^2\mathbf{k}^2 + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{k}^2\mathbf{v}^2 &= 0, \\ 2\alpha\omega + 2\mathbf{kv}\alpha - (\lambda + (\nabla \cdot \mathbf{v}))\omega + \mathbf{v}_t\mathbf{k} + \lambda\mathbf{kv} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{kv} + \mathbf{v}\nabla(\mathbf{kv}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Das ergibt aber Gleichungen vierten Grades, die sich zwar mit Hilfe von Computeralgebrasystemen auflösen lassen. Jedoch würden die Lösungen mehrere Druckseiten füllen. Daher soll an dieser Stelle auf eine weitere Behandlung verzichtet werden. Es ist lediglich anzumerken, daß \mathbf{v} im Allgemeinen sehr klein sein wird. Damit ist auch der Einfluß auf die Wahl des geeigneten Werts für λ sehr gering. Es sollte also für praktische Zwecke ausreichen, die Kriterien aus Abschnitt 4.3.4 anzuwenden.

Numerische Ergebnisse

Für die numerische Umsetzung wurde neben der Powell-Korrektur bislang nur die hyperbolische bzw. gemischte GLM-Korrektur getestet jeweils mit der Korrektur für das Magnetfeld. Ergebnisse für die Korrektur des elektrischen Feldes liegen nicht vor. Die Diskretisierung für die Powell-Korrektur ist in [38] beschrieben. Für die GLM-Korrektur wurde das System in zwei Teilsysteme aufgespaltet. Dabei ist das eine das übliche Evolutionssystem der MHD, das andere das System, wie es sich beim einfachen Testbeispiel ergibt 4.3.1. Dieses lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t + \nabla\psi &= 0, \\ \psi_t + c^2\nabla \cdot \mathbf{B} &= -\frac{c^2}{\kappa}\psi \end{aligned}$$

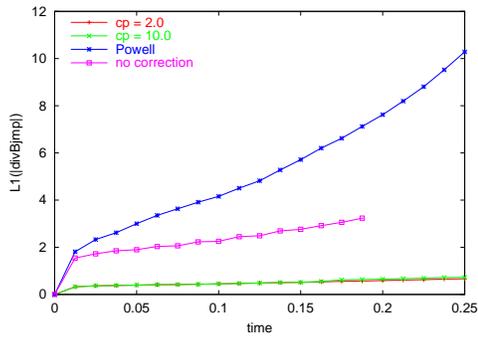
Betrachtet man dieses für die erste Raumrichtung, so geht es über in

$$\begin{aligned} B_{1t} + \psi_x &= 0, \\ \psi_t + c^2B_1 &= -\frac{c^2}{\kappa}\psi. \end{aligned}$$

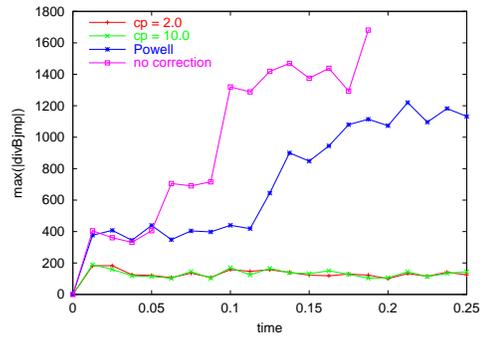
Mittelt man nun B_1 in geeigneter Weise für ein Riemannproblem, etwa indem man den mittleren Zustand des Riemannproblems für dieses kleine System nimmt, so kann man das verbleibende MHD-Riemannproblem mit einem Standardriemanniöser für die MHD approximieren. Auf diese Weise kann man durch die Lösung des vereinfachten Problems als Prädiktorschritt ein bestehendes Computerprogramm sehr einfach mit einer Divergenzkorrektur versehen. Der zusätzliche Rechenaufwand ist dann sehr gering.

Diese Korrektur wurde in Kooperation mit Prof. Kröner in Freiburg in das in [38] vorgestellte Computerprogramm implementiert und für verschiedene Fälle getestet. Zwei davon sollen hier kurz beschrieben werden, da man hier typische Eigenschaften der Korrekturen deutlich sehen kann. Zum einen handelt es sich um ein zweidimensionales Riemannproblem, zum anderen um eine Kelvin-Helmholtz Instabilität.

Für die Simulation des 2-d Riemannproblems sind in Abbildung 4.16 die zeitlichen Verläufe der sowohl der \mathcal{L}_1 -Norm als auch der Maximumsnorm des Divergenzfehlers



(a) Die \mathcal{L}_1 -Norm



(b) Die Maximumnorm

Abbildung 4.16: Fehlernormen beim 2-d Riemannproblem für die verschiedenen Korrekturverfahren



Abbildung 4.17: Divergenzverteilung beim 2-d Riemannproblem ohne Korrektur, mit Powellkorrektur bzw. mit gemischter GLM-Korrektur

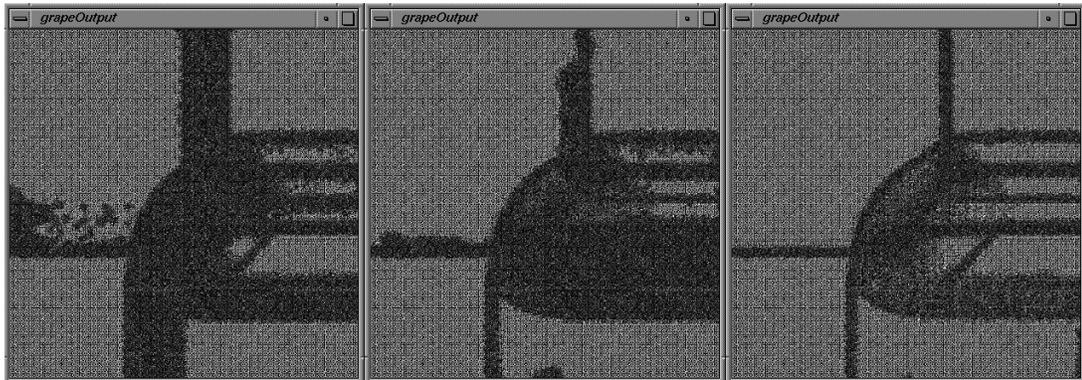


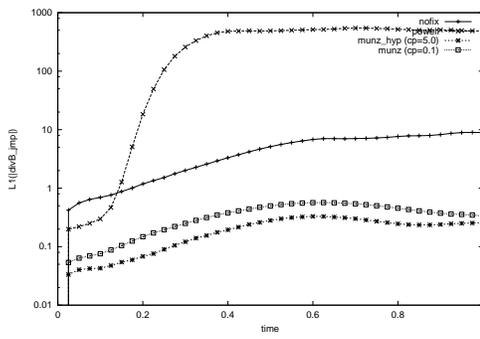
Abbildung 4.18: Das zu Abbildung 4.17 gehörige verfeinerte Rechengitter



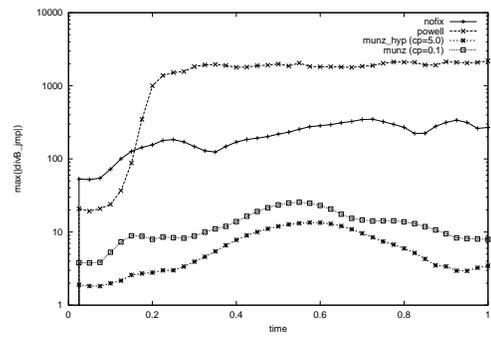
Abbildung 4.19: Ausschnittsvergrößerung der Dichte bei der Powellkorrektur

ohne Korrektur, mit der Powellkorrektur und mit der gemischten GLM-Korrektur mit verschiedenen Werten für κ aufgetragen. Auffallend ist dabei insbesondere, daß das Verfahren ohne die Korrektur nach einer gewissen Zeit und einem stark angewachsenen lokalen Fehler instabil wird und abstürzt. Das heißt insbesondere, daß es von großer Bedeutung ist, eine Korrektur vorzunehmen. Ansonsten ist zu sehen, daß die Powellkorrektur zwar den lokalen Fehler begrenzt, nicht jedoch den globalen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß hier der Fehler, wie in Abbildung 4.17 zu erkennen im Rechengebiet verteilt wird. Die Auswirkungen des Divergenzfehlers auf die Lösung schließlich läßt sich an Bild 4.18 und 4.19 ablesen. In ersterem ist das adaptiv verfeinerte Gitter zu einem Zeitpunkt kurz vor Absturz der unkorrigierten Rechnung zu sehen. Man sieht deutlich, daß der Indikator auch an solchen Stellen starke Gradienten in Dichte und Magnetfeld findet, an denen die Lösung eigentlich konstant sein sollte. In diesem Fall führt der Mehraufwand für die GLM-Korrektur zu einer Ersparnis an Rechenzeit. Abbildung 4.19 zeigt einen Ausschnitt der Dichteverteilung zu einem späteren Zeitpunkt mit der Powellkorrektur. Man sieht hier das Rauschen der Lösung an den Stellen, an denen Divergenzfehler unzureichend abtransportiert wurden.

Bei der Simulation der Kelvin-Helmholtz Instabilität zeigt sich für die verschiedenen Verfahren das in Abbildung 4.20 dargestellte Bild. Die Powellkorrektur hat sowohl

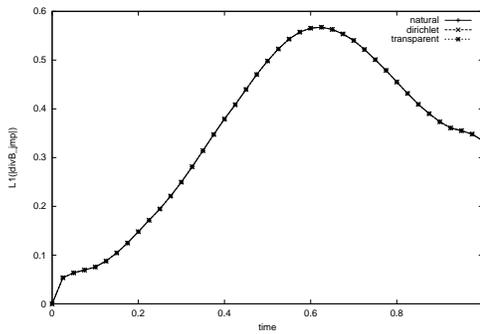


(a) Die \mathcal{L}_1 -Norm

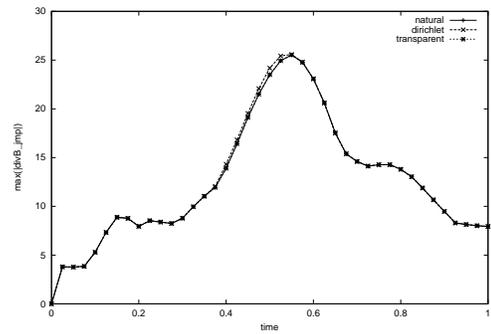


(b) Die Maximumsnorm

Abbildung 4.20: Fehlernormen bei der Kelvin-Helmholtz Instabilität mit den verschiedenen Korrekturverfahren



(a) Die \mathcal{L}_1 -Norm



(b) Die Maximumsnorm

Abbildung 4.21: Fehlernormen bei der Kelvin-Helmholtz Instabilität mit der GLM-Korrektur für verschiedene Randwertsetzungen

global als auch lokal die größten Fehler. Dies illustriert sehr schön die Tatsache, daß die Powellkorrektur abhängig von den Randbedingungen ist und die physikalische Geschwindigkeit auch eine negative Divergenz haben kann. Bei der Kelvin-Helmholtz Instabilität hat man in einer Raumrichtung periodische Randbedingungen. Daher kann in dieser Richtung schon kein Fehler über den Rand abgeführt werden. Dies ist für eine Transportkorrektur schlecht, da diese den Fehler insgesamt erhält. Die stellenweise negative Divergenz der physikalischen Geschwindigkeit führt zusätzlich dazu, daß an diesen Stellen Divergenzfehler akkumuliert werden, was den lokalen Fehler antreibt.

Für Abbildung 4.21 wurde die Kelvin-Helmholtz Instabilität mit der gemischten GLM-Korrektur gerechnet, wobei im Prädiktorsystem für das Magnetfeld verschiedene Randbedingungen getestet wurden. Dabei zeigt es sich, daß selbst Dirichletbedingungen, die nur wenig Transport über den Rand erlauben das Ergebnis nicht verschlechtern. Man ist also bei der gemischten GLM-Korrektur weitestgehend unabhängig von den Randbedingungen.

Eine ausführlichere Darstellung der Ergebnisse für die GLM-Korrektur ist in [11] veröffentlicht worden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Lösungsansätze für zwei wesentliche Problembereiche bei der Simulation kompressibler idealer magnetohydrodynamischer Strömungen entwickelt:

- Schwach kompressible Strömungen,
- Auftreten magnetischer Monopole in der numerischen Lösung.

Für den erstgenannten Problembereich wurde ein Ansatz aus der schwach kompressiblen Gasdynamik [21] für die MHD adaptiert. Es wurden Methoden der asymptotischen Analyse verwendet, um den Übergang von der Kompressibilität zur Inkompressibilität zu untersuchen. Aufgrund der Ergebnisse der Analyse wurden Vorschläge für numerische Verfahren entwickelt. Diese beruhen auf einer Aufspaltung des Differentialgleichungssystems in einen langsamen Teil, der immer hyperbolisch bleibt, und einen schnellen, der beim Grenzübergang elliptisch entartet. Dabei zeigte es sich, daß sich im Fall kleiner Machzahlen die Konstruktion eines Verfahrens aus der schwach kompressiblen Gasdynamik, was das schnelle Teilsystem anbelangt, direkt übernehmen ließ. Für diesen Fall wurden auch erste numerische Ergebnisse vorgestellt. Für kleine Alfvenzahlen ist die Situation etwas schwieriger. Hier konnte kein Ansatz für die vollen mehrdimensionalen Gleichungen gegeben werden. Im Eindimensionalen sowie in einem zweidimensionalen Spezialfall ließ sich ein zum Fall kleiner Machzahlen analoges Vorgehen herleiten.

Die nächsten Schritte, die in dieser Richtung zu gehen sind, wären die Erweiterung der Ansätze für die nichtideale MHD, d. h. mit Reibung und elektrischem Widerstand sowie evtl. Temperatureinflüssen, sowie für den Fall kleiner Alfvenzahlen die Umsetzung in einen Programmcode. Allerdings sind für kleine Alfvenzahlen die physikalischen Anwendungen nicht klar.

Für das Problem magnetischer Monopole konnten Methoden angegeben werden, welche die Divergenzbedingung an das Magnetfeld zu einem inhärenten Teil des Evolutionsoperators machen. Dabei wurde der GLM-Ansatz für das elektrische Feld bei den Maxwellgleichungen [29] auf die MHD übertragen und erweitert. Es gelang, ein allgemeines Modell aufzustellen, das neben der GLM-Korrektur auch die Powell-Korrektur [32] als Spezialfall enthält. Der Ansatz wurde anhand eines reduzierten Testsystems entwickelt und ist so allgemein, daß er wiederum auf die Maxwellgleichungen angewandt werden kann. Für die zu wählenden Parameter konnten auf analytischem Wege Schätzungen angegeben werden, welche die Wirksamkeit der jeweiligen Divergenzkorrekturmethode optimieren. Die theoretischen Vorhersagen konnten mittels numerischer Tests sowohl für das Testsystem als auch für die volle MHD verifiziert werden. Die gewonnenen neuen Korrekturverfahren gliedern sich in GLM-Methoden und Transportmethoden.

Bei GLM-Methoden werden die Divergenzfehler je nach Ausprägung ausgelöscht (elliptisch), gedämpft (parabolisch), wegtransportiert (hyperbolisch) oder wegtransportiert und gedämpft (gemischt). Betrachtet man die Helmholtz-Zerlegung des Magnetfelds in eine Rotation (divergenzfreier Anteil) und einen Gradienten (rotationsfreier Anteil), so wirken die GLM-Methoden konstruktionsbedingt nur auf den rotationsfreien Anteil und lassen den divergenzfreien Anteil unberührt. Bei den Transportmethoden werden die Divergenzfehler entweder mit der Strömungsgeschwindigkeit (Powell) oder einem künstlichen Geschwindigkeitsfeld aus dem Rechengebiet transportiert. Diese Methoden sind in ihrer Wirkung im Allgemeinen schwächer als die hyperbolische oder gemischte GLM-Korrektur. Allerdings bieten sie den Vorteil, ohne zusätzliche Gleichung auszukommen. Hier ist im Gegensatz zu den GLM-Methoden durch die Konstruktion nicht garantiert, daß der divergenzfreie Anteil des Magnetfelds unberührt bleibt.

Bei der Wahl der Parameter für die gemischte GLM-Korrektur kann nur für eine Wellenzahl optimiert werden. In Abschnitt 4.3.4 wurde von einer heuristischen Schätzung der relevanten Wellenzahl für ein eindimensionales äquidistantes Gitter ausgegangen. Ausgehend von einem Rechengitter und möglichst wenig benötigten Informationen über die Lösung sollte hier eine gute Schätzung für die beim Divergenzproblem relevante Wellenzahl gesucht werden.

A Ableitungen ebener Wellen

Hat man eine Differentialgleichung für eine (skalare) Funktion ψ und macht für diese einen Ansatz der Form

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{\alpha t + i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (\text{A.1})$$

so spricht man von einer *ebenen Wellen Lösung* für die Differentialgleichung. Der Lösungsweg besteht darin, geeignete Werte für α , \mathbf{k} und ω zu finden. Dabei nutzt man die Tatsache aus, daß aufgrund der Exponentialfunktion sich die Ableitungen als Vielfache von ψ schreiben lassen. Damit genügt es bei linearen Differentialgleichungen, eine komplexe algebraische Gleichung aufzulösen. Da in Kapitel 4 reichlich Gebrauch von dieser Methode gemacht wird, hier die wichtigsten Ableitungen ebener Wellen:

Raumableitungen:

$$\psi_{x_j} = ik_j \psi \quad (\text{A.2})$$

$$\psi_{x_j x_j} = -k_j^2 \psi \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \sum_j \psi_{x_j x_j} \\ &= -\sum_j k_j^2 \psi \\ &= -\mathbf{k}^2 \psi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \psi = i\psi \mathbf{k} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = i(\mathbf{v}\mathbf{k})\psi \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi) &= \sum_j (v_j \psi)_{x_j} \\
 &= \sum_j (v_{j x_j} \psi + v_j \psi_{x_j}) \\
 &= \sum_j (v_{j x_j} \psi + i k_j v_j \psi) \\
 &= \psi \sum_j (v_{j x_j} + i k_j v_j) \\
 &= \psi (\nabla \cdot \mathbf{v} + \sum_j i k_j v_j) \\
 &= \psi (\nabla \cdot \mathbf{v} + i(\mathbf{k}\mathbf{v}))
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot ((\mathbf{v} \cdot (\nabla \psi)) \mathbf{v}) &= \sum_j (v_j (\mathbf{v} \cdot (\nabla \psi)))_{x_j} \\
 &= \sum_j v_{j x_j} (\mathbf{v} \cdot (\nabla \psi)) + v_j (\mathbf{v} \cdot (\nabla \psi))_{x_j} \\
 &= (\mathbf{v} \cdot (\nabla \psi)) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + i \sum_j v_j ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \psi)_{x_j} \\
 &= i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \psi (\nabla \cdot \mathbf{v}) + i \sum_j v_j \psi_{x_j} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) + i \sum_j v_j \psi \left(\sum_l k_l v_l \right)_{x_j} \\
 &= i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \psi (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \sum_j v_j k_j \psi + i \sum_j v_j \psi \sum_l k_l v_l x_j \\
 &= (i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 + i \sum_j v_j (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{x_j})) \psi \\
 &= (i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 + i(\mathbf{v} \cdot (\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})))) \psi
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Zeitableitungen:

$$\psi_t = (\alpha - i\omega)\psi \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{tt} &= (\alpha - i\omega)^2 \psi \\
 &= (\alpha^2 - 2i\omega\alpha - \omega^2) \psi
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Gemischte Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 \nabla(\psi_t) &= (\alpha - i\omega) \nabla \psi \\
 &= (\alpha - i\omega) \mathbf{k} \psi
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\psi_t \mathbf{v}) &= (\alpha - i\omega) \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) \\
&= (\alpha - i\omega) (\nabla \cdot \mathbf{v} + i \sum_j k_j v_j) \psi \\
&= (\alpha - i\omega) (\nabla \cdot \mathbf{v} + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})) \psi \\
&= (\alpha(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})) + i(\alpha(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - \omega(\nabla \cdot \mathbf{v})) \psi
\end{aligned}
\tag{A.12}$$

Literaturverzeichnis

- [1] D. S. BALSARA, “Divergence-Free Adaptive Mesh Refinement for Magnetohydrodynamics,” *Journal of Computational Physics*, **174**, S. 614–648, 2001
- [2] D. S. BALSARA und D. S. SPICER, “A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations,” *Journal of Computational Physics*, **149**, S. 270–292, 1999
- [3] C. M. BENDER und S. A. ORSZAG, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, 1978
- [4] J. BIRZVALKS, *Streifzug durch die Magnetohydrodynamik*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1986
- [5] J. BORIS, “Relativistic Plasma Simulations – Optimization of a Hybrid Code,” in *Proceedings of the 4th Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, S. 3–67, Washington DC, 1970
- [6] J. U. BRACKBILL, “Fluid Modeling of Magnetized Plasmas,” *Space Sci. Rev.*, **42**, S. 153, 1985
- [7] J. U. BRACKBILL und D. C. BARNES, “The Effect of Nonzero $\nabla \cdot B$ on the Numerical Solution of the Magnetohydrodynamic Equations,” *Journal of Computational Physics*, **35**, S. 426–430, 1980
- [8] S. H. BRECHT, J. G. LYON, J. A. FEDDER und K. HAIN, “A simulation study of east–west IMF effects on the magnetosphere,” *Geophys. Res. Lett.*, **8**(4), S. 397–400, 1981
- [9] U. BRECHTKEN-MANDERSCHIED, *Einführung in die Variationsrechnung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1983
- [10] F. CAP, *Einführung in die Plasmaphysik*, Bd. 1, Akademie-Verlag, Berlin, 1970
- [11] A. DEDNER, F. KEMM, D. KRÖNER, C.-D. MUNZ, T. SCHNITZER und M. WESSENBERG, “Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations,” *Journal of Computational Physics*, **175**(2), S. 645–673, January 2002
- [12] R. O. DENDY, *Plasma Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 1990

- [13] C. DEVORE, “Flux-corrected transport techniques for multidimensional compressible magnetohydrodynamics,” *Journal of Computational Physics*, **92**(1), S. 142–160, 1991
- [14] C. R. EVANS und J. F. HAWLEY, “Simulation of General Relativistic Magnetohydrodynamic Flows: A Constrained Transport Method,” *Astrophys. Journal*, **332**, S. 659, 1988
- [15] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998
- [16] M. FEY und M. TORRILHON, “Multidimensional Upwind Methods for Advection Equations with Constraints,” to appear in *SIAM Journal on Numerical Analysis*
- [17] S. K. GODUNOV, “Symmetric form of the equations of magnetohydrodynamics,” *Numerical Methods for Mechanics of Continuum Medium*, **1**, S. 26–34, 1972
- [18] S. GUTMANN, *Divergenzkorrektur bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen*, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 2000
- [19] R. HOLLAND, “Finite-Difference Solution of Maxwell’s Equations in Generalized Nonorthogonal Coordinates,” *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **30**, S. 4589, 1983
- [20] J. KEVORKIAN und J. D. COLE, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer, New York, 1996
- [21] R. KLEIN, “Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics,” *Journal of Computational Physics*, **121**, S. 213–237, 1995
- [22] K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, Heidelberg, 4. Aufl., 1947
- [23] P. LONDRILLO und L. D. ZANNA, “High Order upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics,” *The Astrophysical Journal*, **530**, S. 508–524, 2000
- [24] N. K. MADSEN und R. W. ZIOLKOWSKI, “A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell’s equations,” *Electromagnetics*, **10**, S. 147, 1990
- [25] B. MARDER, “A Method Incorporating Gauß’ Law into electromagnetic PIC codes,” *Journal of Computational Physics*, **68**, S. 48–55, 1987
- [26] A. MEISTER, “Asymptotic Single and Multiple Scale Expansions in the Low Mach Number Limit,” *SIAM Journal for Applied Mathematics*, **60**(1), S. 256–271, 1999
- [27] C.-D. MUNZ, P. OMNES, R. SCHNEIDER, E. SONNENDRÜCKER und U. VOSS, “Divergence Correction Techniques for Maxwell Solvers Based on a Hyperbolic Model,” *J. Comput. Physics*, **161**, S. 484–511, 1999

- [28] C.-D. MUNZ, S. ROLLER, R. KLEIN und K. J. GERATZ, “The Extension of Incompressible Flow Solvers to the Weakly Compressible Regime,” *Computers and Fluids*, **32**(2), S. 173–196, September 2002
- [29] C.-D. MUNZ, R. SCHNEIDER, E. SONNENDRÜCKER und U. VOSS, “Maxwell’s equations when the charge conservation is not satisfied,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, **328**(S’erie I), S. 431–436, 1999
- [30] M. NATTER, Polardiagramme für schräge magnetogasdynamische Verdichtungsstöße bei einem zur Anströmung parallelen Magnetfeld mit Anwendungsbeispielen, Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1972
- [31] J.-H. PARK, Ein konservatives MPV-Verfahren zur Simulation der Strömungen in allen Machzahlbereichen, Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2003
- [32] K. G. POWELL, P. L. ROE, R. . S. MYONG, T. GOMBOSI und D. DE ZEEUW, “An upwind scheme for magnetohydrodynamics,” in *Workshop Methodes numeriques pour la M.H.D.*, Luminy, France, 1995
- [33] P. L. ROE und D. S. BALSARA, “Notes on the Eigensystem of Magnetohydrodynamics,” *SIAM J. Appl. Math.*, **56**(1), S. 57–67, February 1996
- [34] S. ROLLER, Ein numerisches Verfahren zur Simulation schwach kompressibler Strömungen, Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2004
- [35] M. TORRILHON, “Locally Divergence-preserving Upwind Schemes for Magnetohydrodynamic Equations,” to appear in *SIAM Journal on Scientific Computing*
- [36] E. TURKEL, “Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations,” *Journal of Computational Physics*, **72**, S. 277 – 298, 1987
- [37] E. TURKEL, R. RADESPIEL und N. KROLL, “Assessment of Preconditioning Methods for Multidimensional Aerodynamics,” *Computers & Fluids*, **26**(6), S. 613–634, 1997
- [38] M. WESENBERG, “Finite–Volumen–Verfahren für die Gleichungen der Magnetohydrodynamik in ein und zwei Raumdimensionen,” Diplomarbeit, Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
- [39] K. S. YEE, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **14**, S. 302, 1996

Lebenslauf von Friedemann Kemm

Zur Person geboren am 26.08.1967 in Bruchsal

Berufstätigkeit

seit 02/2004 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für *Numerische Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen* der BTU Cottbus, Prof. Georg Bader

10/97–12/03 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG) der Universität Stuttgart, Abteilung *Numerische Strömungsmechanik*, Prof. Claus-Dieter Munz

Studium

10/91–08/97 Diplom Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Karlsruhe

10/89–09/91 Vordiplom Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Karlsruhe

Wehrdienst

01/88–03/89 Grundwehrdienst bei der Bundeswehr

Schulbildung

08/78–05/87 Schönborn Gymnasium in Bruchsal

09/74–07/78 Adolf-Kußmaul Grundschule in Graben-Neudorf

Cottbus, 17. Mai 2006