

Numerische Methoden zur Simulation von Schallerzeugung und Ausbreitung in Strömungen um komplexe zwei- und dreidimensionale Geometrien

Von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde des Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Benjamin Daniel Basel
aus Mengen

Hauptberichter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus-Dieter Munz
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Schröder
Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 2006

Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart

2007

Vorwort und Danksagung

Diese Arbeit entstand während einer Kooperation des Instituts für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart mit dem Forschungszentrum der EADS Deutschland GmbH, Abteilung Mechatronik und Dynamik in Ottobrunn.

Mein Dank gilt besonders Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus-Dieter Munz, für die Ausgabe und die Betreuung dieser Arbeit. Durch seine hilfreichen Hinweise und zielführenden Diskussionen hat er zum Entstehen dieser Arbeit bedeutend beigetragen. Darüber hinaus bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Schröder für die Zweitbegutachtung dieser Arbeit.

Mein weiterer Dank geht an die Mitarbeiter des Instituts für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart Herrn Dr.-Ing. Michael Dumbser, Herrn Dr.-Ing. Roland Fortenbach und Herrn Dr.-Ing. Thomas Schwartzkopff.

Bei Herrn Dr. rer. nat. Michael Grünewald, Herrn Dr.-Ing. Johann Reichenberger und den Kollegen des Forschungszentrums der EADS Deutschland GmbH, Abteilung Mechatronik und Dynamik, möchte ich mich für die Unterstützung und die Bereitstellung der Rechen- und Versuchsanlagen während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter danken.

Beim Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt in Braunschweig, speziell bei den Mitarbeitern des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik, möchte ich mich für die Unterstützung bedanken. Für die hilfreichen Diskussionen mit Herrn Prof. Dr.-Ing. Jan Werner Delfs möchte ich ebenfalls meinen Dank aussprechen.

Bei meinen Eltern und Geschwistern bedanke ich mich für die Unterstützung in allen Lebenslagen. Sie haben mich auf meinem Weg stets bestärkt.

Stuttgart, im Juli 2006

Benjamin Daniel Basel

Kurzfassung

In der Aeroakustik breiten sich die elastischen Wellen vom Entstehungsort der Quelle zum Beobachter mit Schallgeschwindigkeit aus. Ziel ist es, den Ort der Quellenstehung und die Entstehungsmechanismen zu bestimmen und durch aktive und passive Maßnahmen die Quellstärke zu reduzieren und neue Technologien zur Minderung des Lärms zu entwickeln.

Zur Bestimmung des Schallfeldes kann die akustische Analogie angewendet werden. Mit Hilfe der akustischen Analogie ist es möglich, das Strömungsfeld und das Akustikfeld getrennt voneinander zu untersuchen. Im ersten Schritt wird das Strömungsfeld mit numerischen Methoden bestimmt. Anschließend werden die aeroakustischen Quellen mit Hilfe von numerischen Quellmodellen oder experimentellen Methoden bestimmt. Liegt das Strömungsfeld sowie das Quellfeld vor, so kann die Schallausbreitung mit Hilfe von numerischen Methoden simuliert werden.

Zur Modellierung der aeroakustischen Quellen benötigt man bei dem in der vorliegenden Arbeit verwendeten Modell inkompressible Strömungsdaten. Dieses Modell wird mit Hilfe der analytischen Lösung des korotierenden Wirbelpaares untersucht.

Das Beamforming Verfahren ist ein messtechnisches Verfahren zur Lokalisierung von Schallquellen. Das Beamforming Verfahren verwendet die gemessenen Mikrofondaten und liefert auf einer Fokusebene die gesuchten Schallquellen. Die Bestimmung von Schallquellen ist in Windkanälen jedoch nicht ohne weiteres möglich, da sich die Schallsignale durch ein inhomogenes Strömungsfeld bewegen. Mit Hilfe eines neuen Korrekturalgorithmus kann das Beamforming Verfahren bei der Lokalisierung von Schallquellen in Windkanälen eingesetzt werden. Bei dem Korrekturalgorithmus werden die Geometrie des Windkanals und die Position der Mikrophone berücksichtigt. Der Lösungsalgorithmus verwendet zur Lösung der Korrekturgleichungen ein iteratives Newton Verfahren. Die Validierung des Algorithmus erfolgt an einem angeströmten Lautsprecher. Das neu entwickelte Verfahren wird bei der Schallquellenlokalisierung am Tragflügel des Flugzeugs Airbus A320 eingesetzt.

Die Berechnung des Schallfelds, welches im Allgemeinen eine große Ausdehnung hat, benötigt genaue numerische Verfahren, da sonst die numerischen Fehler bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen zu ungenauen Ergebnissen führen. In dieser Arbeit werden Finite Differenzen und Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung hergeleitet und angewendet. Das Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung verwendet zur Rekonstruktion der Variablenwerte an den Zellkanten die in dieser Arbeit entwickelte Natural Neighbour Methode. Bei der Natural Neighbour Methode werden mit Hilfe des Taylor Polynoms partielle Ableitungen auf strukturierten wie auch unstrukturierten zwei- und dreidimensionalen

Gittern berechnet. Hierbei müssen überbestimmte Gleichungssysteme mit Hilfe der Cholesky Zerlegung gelöst werden. Mit dieser Vorgehensweise wird die Schallausbreitung um komplexe Geometrien hochgenau und oszillationsfrei berechnet.

Eine Verbesserung hinsichtlich Rechenzeit kann durch die Kopplung von Finite Differenzen und Finite Volumen Verfahren erreicht werden. Hierbei wird um die komplexe Geometrie die Finite Volumen Methode und wenige Zellen von der Oberfläche entfernt die integrale Finite Differenzen Methode verwendet. Durch eine einfache Kopplung der beiden Verfahren ist die Berechnung der Schallausbreitung um komplexe Geometrien möglich. Mit Hilfe dieser Vorgehensweise kann die Rechenzeit bei gleich bleibender Genauigkeit reduziert werden.

Mit Hilfe der vorgestellten Verfahren wurden in zahlreichen Windkanalmessungen am Tragflügel des Flugzeugs Airbus A320 Schallquellen lokalisiert und Lärminderungsmaßnahmen entwickelt.

Mit Hilfe der entwickelten Finite Volumen Verfahren kann die Berechnung des Schallfeldes mit höherer Genauigkeit durchgeführt werden. Dies ist bei der Entwicklung von neuen lärmarmen Tragflügelkonzepten zwingend notwendig.

Abstract

In Aeroacoustics, elastic waves propagate with the speed of sound from the point of development to the observer. The aim of aeroacoustics is to determine the point of development of the sound waves as well as its development mechanism. With this information it is possible to reduce the source strength with active and passive measures and to develop new technologies to reduce aerodynamically generated noise.

The determination of a sound field can be performed with the acoustic analogy. With this acoustic model the flow field and the acoustic field can be analysed individually. The first step is the simulation of the flow field. Next, the calculation of the source terms can be performed using either a numerical source model or experimentally with the microphone array measurement technique. In the last step, the simulation of sound propagation can be done with the existing flow and acoustic field.

The numerical method for the modelling of the sound sources requires an incompressible flow field. This model is investigated using the analytical solution of the co-rotated vortex pair.

Beamforming is a signal processing technique which makes it possible to determine the sound sources from experimental data. The method uses multiple microphone signals to determine the sound sources on the so called focus plane. The determination of sound sources in wind tunnels is complicated, because the sound signals propagate through an inhomogeneous flow field. With a new correction algorithm, it is possible to consider the flow influence to acoustics. The correction algorithm uses an iterative Newton method and considers the influence of the geometry of the wind tunnel and the position of the microphones. The validation of the algorithm is performed with a loudspeaker in a flow field. The modified Beamforming method is used for the localisation of sound sources of a model of the Airbus A320 in wind tunnels.

The calculation of the sound field, which generally has a great dimension, requires highly accurate numerical methods. Otherwise the numerical errors in the solution of the linearized Euler equations delivers inaccurate results. The increasing of either the accuracy or the order means an increase in the number of the calculation operations and computing time. In this work high order Finite Difference and Finite Volume methods are derived. The high order Finite Volume method uses the new Natural Neighbour method for calculating the variable values at the cell sides. The Natural Neighbour method uses the Taylor polynomial to calculate the partial derivatives on structured and unstructured two and three dimensional grids. It becomes necessary to solve an overdetermined equation system with

the Cholesky decomposition. With this procedure the sound propagation around complex geometries can be calculated with high accuracy and without oscillations.

The computation time in the calculation of sound propagation around complex geometries can be improved by combining the Finite Difference and Finite Volume methods. In this case, the Finite Volume method is used around the complex geometry and the integral Finite Difference method is used a few cells away from the surface. With this approach it is possible to reduce the computing time without a loss of accuracy

With these methods noise reduction measures on the wing of the Airbus A320 were developed and demonstrated in numerous wind tunnel measurements. Furthermore, with these methods it is possible to compute the sound field with a higher degree of accuracy for the development of new airfoil concepts.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und Danksagung	
Kurzfassung	ii
Abstract	iii
Tabellenverzeichnis	xii
Abbildungsverzeichnis	xii
Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen	xxii
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Forschung	2
1.2 Ziel der Arbeit	5
1.3 Gliederung der Arbeit	5
2 Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik	7
2.1 Navier-Stokes Gleichungen	7
2.2 Euler Gleichungen	8
2.3 Linearisierte Euler Gleichungen	9
3 Diskretisierungsmethoden in Raum und Zeit	11
3.1 Räumliche Diskretisierungsmethoden	12
3.1.1 Finite Differenzen Methode	13
3.1.2 Knotenzentrierte Natural Neighbour Methode	14

3.2	Zeitintegrationsverfahren	21
3.2.1	Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren	21
3.2.2	Zeitintegrationsverfahren der akustischen Wellengleichung	23
3.3	Nichtreflektierende Randbedingungen	23
3.3.1	Ghost Point Konzept mit Bayliss-Turkel Randbedingungen	24
3.3.2	Sponge Layer Randbedingungen	26
3.3.3	Randbedingungen nach Clayton	27
3.4	Dispersion Relation Preserving (DRP) Verfahren nach Tam und Webb	28
3.4.1	Künstliche selektive Dämpfung	30
4	Finite Volumen Verfahren	32
4.1	Finite Volumen Diskretisierung	37
4.2	Numerische Integration der Anfangsbedingungen und der Quelldaten	44
4.3	Flussberechnung	47
4.3.1	Dreidimensionales Finite Volumen Verfahren	51
4.3.2	Zweidimensionales Finite Volumen Verfahren	52
4.4	Finite Volumen Randbedingungen	54
4.4.1	Ausströmrandbedingungen	54
4.4.2	Körperrandbedingungen	55
5	Rekonstruktionsalgorithmus der FV Methode	56
5.1	Berechnung von partiellen Ableitung mittels integriertem Taylor Polynom	58
5.1.1	Integration über das Hexaeder	59
5.1.2	Integration über das Einheitstetraeder	60
5.1.3	Integration über das Rechteck	62
5.1.4	Integration über das Einheitsdreieck	63
5.2	Numerische Berechnung des Flussintegrals	64
6	Aeroakustische Quellen	71
6.1	Messtechnische Bestimmung von Schallquellen	71
6.1.1	Scherschichtkorrektur	75
6.2	Numerische Quellmodellierung	86
6.2.1	Schallgenerierung des korotierenden Wirbelpaars	88

7	Gekoppelte Verfahren	92
7.1	Kopplung von Natural Neighbour Methode und Finite Differenzen Methode	93
7.2	Kopplung von Finite Volumen Methode und Finite Differenzen Methode	94
7.3	Kopplung von Finite Volumen Methode und integraler Finite Differenzen (IFD) Methode	95
8	Ergebnisse	98
8.1	Schalllokalisierung in Windkanälen	99
8.1.1	Schalllokalisierung im Cepra19 Windkanal	100
8.1.2	Schalllokalisierung im AWB	104
8.2	Quellmodellierungsmethode EIF	106
8.3	Schallausbreitungsrechnungen mit der Natural Neighbour Methode	108
8.4	Nachweis der Ordnung	112
8.4.1	Ordnung des Finite Differenzen Verfahren	114
8.4.2	Ordnung des Finite Volumen Verfahrens	117
8.5	Integrale Finite Differenzen Methode	124
8.6	Gekoppelte Verfahren	125
8.7	Schallausbreitung um komplexe Geometrien	127
9	Zusammenfassung und Ausblick	131
	Literaturverzeichnis	133
A	Bildteil	138
B	Tabellen	188
B.1	Finite Differenzen Formeln für die 1. und 2. Ableitung Φ' und Φ'' im Punkt i	188
B.2	Numerische Integration über das Einheitstetraeder	189
B.3	Numerische Integration über das Einheitsdreieck	191

C Gleichungen	193
C.1 Zweidimensionale Integration des Taylor Polynoms	194
C.1.1 Integration auf einem Rechteck	194
C.1.2 Integration auf dem Einheitsdreieck	195
C.2 Dreidimensionale Integration des Taylor Polynoms	197
C.2.1 Integration über ein Hexaeder	197
C.2.2 Integration über das Einheits tetraeder	199
 Lebenslauf	 220

Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl der Koeffizienten beziehungsweise der Knoten bei der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode	16
3.2	Klassische und optimierte Finite Differenzen Formeln für die 1. Ableitung Φ' im Punkt i	29
4.1	Integrationskoeffizienten des Hexaeders	44
5.1	Integrationskoeffizienten des Vierecks	67
5.2	Koeffizienten der Integration vierter Ordnung auf dem Einheitsdreieck	68
8.1	Rechnereigenschaften	98
8.2	Messmatrix des RAIN Projekts	101
8.3	Exponent des Geschwindigkeitsgesetzes	103
8.4	Dargestellt ist die Ordnung k und der Fehler E bei der Finite Differenzen Methode und beim DRP Schema.	116
8.5	Ordnungsnachweis der zweidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem unstrukturierten Gitter. Die Rekonstruktion erfolgt bei den Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung mit Hilfe der Natural Neighbour Methode.	118
8.6	Ordnungsnachweis der zweidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem strukturierten Gitter.	120
8.7	Ordnungsnachweis der dreidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem unstrukturierten Gitter.	122
8.8	Ordnungsnachweis der dreidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem strukturierten Gitter.	123
8.9	Ordnungsnachweis des integralen Finite Differenzen Verfahrens	124
8.10	Ordnungsnachweis des gekoppelten Verfahrens aus integralen Finite Differenzen Verfahren und Finite Volumen Verfahren	126

B.1	Finite Differenzen Formeln für die 1. und 2. Ableitung Φ' und Φ'' im Punkt i	188
B.2	Koeffizienten für die Numerische Integration über das Einheitstetraeder . . .	189
B.3	Wichtungsfaktoren für die Numerische Integration über das Einheitstetraeder	190
B.4	Koeffizienten für die Numerische Integration über das Einheitsdreieck . . .	191
B.5	Wichtungsfaktoren für die Numerische Integration über das Einheitsdreieck	192

Abbildungsverzeichnis

1.1	Mehrskaligkeit in der Aeroakustik	2
1.2	Dargestellt ist der Frequenzbereich des menschlichen Gehörs, Hörschwelle und Schmerzgrenze des menschlichen Gehörs sind frequenzabhängig. Das menschliche Ohr hört Schall mit einer Frequenz von $f = 16Hz$ bis ungefähr $f = 20kHz$. Am empfindlichsten ist das menschliche Ohr im Frequenzbereich von $f = 2kHz$ bis $f = 5kHz$ [48].	4
3.1	Vergleich unterschiedlicher Gitter: (A) strukturiertes kartesisches Gitter, (B) unstrukturiertes Dreiecksgitter	12
3.2	Bestimmung der ersten Ableitung mit unterschiedlichen numerischen Verfahren auf einem eindimensionalen äquidistanten Gitter	14
3.3	Knotenzentrierte Nachbarschaftssuche, dargestellt sind der Zentralknoten sowie die nächsten Nachbarn des Zentralknotens.	15
3.4	Normalenvektor \mathbf{n} im Punkt k auf einem Zylinder	18
3.5	Überlagerung verschiedener Wellenarten an der äusseren Berandung	24
3.6	Beim Ghost Point Konzept werden im Innenfeld die linearisierten Euler Gleichungen und in den äusseren Ghost Points die Bayliss-Turkel Randbedingungen gelöst.	26
3.7	Räumlicher Verlauf der Absaugung beim Sponge Layer Prinzip	27
3.8	Modifizierte Wellenzahl	29
3.9	Vergleich der modifizierten Wellenzahl	30
4.1	Vergleich zellzentriertes- und knotenzentriertes Finite Volumen Verfahren	33
4.2	Aufbau des Programms HYDSOL	34
4.3	Randkante eines Elements	38
4.4	(A) Seitenflächen eines Tetraeder Elements, (B) Zylinderkoordinatensystem	40
4.5	Numerische Integration über ein Viereck	46

4.6	Riemann Problem	47
4.7	Charakterisitiken im x-t Diagramm	49
4.8	Spiegelung des Datensatzes am Körperperrand beziehungsweise am Ausströmrand	54
5.1	Richtungsvektoren der direkten Nachbarn zur Bestimmung der Richtungsableitungen für Vierecks- und Dreieckselemente	56
5.2	Ebene gegeben durch Richtungsvektoren und Variablendifferenzen	57
5.3	Seitenorientierte Nachbarschaftssuche	58
5.4	Transformation eines beliebigen Tetraeders in das Einheitstetraeder	61
5.5	Transformation eines beliebigen Dreiecks in das Einheitsdreieck	63
5.6	Berechnung der Werte in den Gauss Punkten eines Tetraeders	65
5.7	Berechnung der Werte in den Gauss Punkten eines Hexaeders	66
5.8	Berechnung der Variablenwerte in den Gauss Punkten $G1$ und $G2$ an der Zellseite eines Dreiecks	67
5.9	Berechnung der Variablenwerte in den Gauss Punkten $G1$ und $G2$ an der Zellseite eines Vierecks	68
5.10	Numerische Integration über das Einheitsdreieck	69
5.11	Transformation der Gauss Punkte vom Einheitsvierecks in ein beliebiges Viereck	70
6.1	Kreuz-Array mit 40 Mikrofonen	72
6.2	Zusammenhang Quellgebiet, Fokusebene und Mikrophon-Array	74
6.3	Schallausbreitung im strömenden Medium, CEPRA19 mit kreisförmigem Düsenaustritt	76
6.4	Darstellung der Winkel	77
6.5	Schallausbreitung im strömenden Medium, AWB mit rechteckigem Düsenaustritt	81
6.6	Korotierendes Wirbelpaar	88
7.1	Schallharte Zylinderoberfläche wird durch das Geschwindigkeitsmodell linear interpoliert, das heißt im Zylinder beträgt die Schallgeschwindigkeit $c = 5000m/s$ und ausserhalb des Zylinders $c = 344m/s$	92
7.2	Kopplung von Natural Neighbour Methode und Finite Differenzen Methode	93
7.3	Kopplung von Finite Volumen Methode und Finite Differenzen Methode. Im Innenfeld liegen durch die Finite Volumen Methode integrale Mittelwerte (INT) und Variablenwerte (VAR) vor. Im Aussenfeld liegen durch die Finite Differenzen Methode Variablenwerte vor.	94

7.4	Kopplung von Finite Volumen Methode und integraler Finite Differenzen Methode	96
8.1	Überflugmessung mit der Array Messtechnik	99
8.2	Schalllokalisierung mit einem Kreuzarray an einem 1:11 Modell des Flugzeugs Airbus A320 im akustischen Windkanal Cepra19	100
8.3	Aufteilung des Tragflügels zur Quantifizierung der aeroakustischen Quellen . .	102
8.4	Array Messung am Hohlraum bei $u = 60m/s$	104
8.5	Abmessungen des Hohlraums. Die Tiefe des Hohlraums entspricht der Höhe des rechteckigen Düsenaustritts	104
8.6	Quelllokalisierung am Hohlraum bei $f = 2kHz$, Anströmgeschwindigkeit $u = 60m/s$, klassisches Beamforming, Hohlraumposition bei $= 100cm, 40cm < y < 160cm$	105
8.7	Quellgenerierung mit dem EIF Verfahren:(A) zeigt den analytisch berechneten Druckverlauf nach $n = 50$ Zeitschritten, (B) den mit dem EIF Modell berechneten Druckverlauf nach $n = 50$ Zeitschritten, (C) FFT des analytisch berechneten Druckverlaufs in einem Aufpunkt, (D) FFT des mit dem EIF Modell berechneten Druckverlaufs in einem Aufpunkt	106
8.8	Vergleich der numerischen Lösung mit der analytischen Lösung in einem Aufpunkt	107
8.9	Lösung der Wellengleichung mit der Natural Neighbour Methode (A) Ausbreitung eines Gauss Pulses ($x_0 = 40m, y_0 = 0$) auf einem hybriden Gitter, (B) Schnitt bei $y = 0$	108
8.10	(A)Verteilung der nächsten Nachbarn, (B) vergrößerte Darstellung zeigt die unstrukturierte Anordnung der Elemente im Innenfeld und die strukturierte Anordnung der Elemente im Aussenbereich	109
8.11	(A) Hybridgitter um einen schallharten Zylinder (B) Anfangsbedingung	110
8.12	(A) Lösung der Wellengleichung: Ausbreitung eines Gauss Pulses um einen schallharten Zylinder, (B) Schnitt bei $y = 0$, (C) Lösung der linearisierten Euler Gleichung mit der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode, (D) Schnitt bei $y = 0$	111
8.13	Phasen- und Amplitudenfehler einer Welle	112
8.14	Beim Nachweis der Ordnung im zweidimensionalen Fall müssen die nächsten Nachbarn mit speziellen Annahmen gesucht werden, so dass die periodischen Randbedingungen erfüllt werden können.	113
8.15	Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Differenzen Methode, dargestellt ist Dichteverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einem strukturierten Gitter	115

8.16	Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung und dem räumlichen Finite Differenzen Verfahren zweiter Ordnung. (A) zeigt den Dichteverlauf nach einem Durchgang, (B) die Dichteverteilung bei $x = 0$ vergrößert dargestellt.	116
8.17	Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung und dem räumlichen Finite Differenzen Verfahren vierter Ordnung. (A) zeigt den Dichteverlauf nach einem Durchgang, (B) die Dichteverteilung bei $x = 0$ vergrößert dargestellt.	117
8.18	Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung. Die Rekonstruktion erfolgt mit Hilfe der Natural Neighbour Methode (A) Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem unstrukturierten Gitter mit $dx = dy = 1m$ an den Aussenkanten des Gitters; (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$; (C) Anfangsbedingung: Gauss Verteilung auf einem unstrukturierten Dreiecksgitter mit $dx = dy = 1m$ an den Außenkanten des Gitters; (D) Fehler über Gitterweite aufgetragen für das Dreiecksgitter	119
8.19	Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung (A) Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1$; (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$	120
8.20	Dargestellt ist der Fehler über der Gitterweite für das Vierecksgitter bei der Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung.	121
8.21	Dargestellt ist die Anfangsbedingung $p(t = 0)$ bei der Lösung der dreidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem Tetraedergitter.	122
8.22	Dargestellt ist der Fehler über der Gitterweite bei der Lösung der dreidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem Tetraedergitter.	123
8.23	Dargestellt ist die Anfangsbedingung $p(t = 0)$ bei der Lösung der dreidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem Hexaedergitter.	124
8.24	Lösung der Konvektionsgleichung mit einem gekoppelten Verfahren, im Innenbereich wird die Finite Volumen Methode und im Aussenbereich die Finite Differenzen Methode angewandt (A) Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1$; (B) vergrößerte Darstellung bei $y = 0$	125
8.25	Lösung der Konvektionsgleichung mit einem gekoppelten Verfahren, im Innenbereich wird die Finite Volumen Methode und im Aussenbereich die integrale Finite Differenzen Methode angewandt. Dargestellt ist die vergrößerte Abbildung des Gauss Pulses bei $y = 0$ nach einem Durchgang auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1m$	126
8.26	Schallausbreitungsrechnungen mit dem Finite Volumen Programm HYDSOL um einen schallharten Zylinder, Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode (B) Schnitt bei $y = x$, dargestellt über die x -Koordinate.	129

8.27 Schallausbreitungsrechnungen mit dem Programm HYDSOL auf einem hybriden Gitter: (A) Ausschnitt aus dem hybriden Gitter (B) Druckverteilung nach $n = 900$ Zeitschritten (C) Schnitt bei $y = 0$ 130

A.1 Array Messtechnik (A) Lautsprecher am Rumpf des Flugzeugs Airbus A320 (B) Schalllokalisierung bei einer Frequenz von $f = 4800 - 5200\text{Hz}$ mit der Beamforming Methode ohne Anströmung (C) Schalllokalisierung mit der klassischen Beamforming Methode bei einer Frequenz von $f = 4800 - 5200\text{Hz}$ und einer Anströmgeschwindigkeit von $u = 50\text{m/s}$ (D) Schalllokalisierung mit der modifizierten Beamforming Methode bei einer Frequenz von $f = 4800 - 5200\text{Hz}$ und einer Anströmgeschwindigkeit von $u = 50\text{m/s}$ 139

A.2 Array Messtechnik: Slat-Konfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 6000 - 6400\text{Hz}$ 140

A.3 Array Messtechnik: Flap-Konfiguration, $Anstellwinkel = 7^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 6000 - 6400\text{Hz}$ 141

A.4 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 1800 - 2200\text{Hz}$ 142

A.5 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 2800 - 3200\text{Hz}$ 143

A.6 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 3800 - 4200\text{Hz}$ 144

A.7 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 4800 - 5200\text{Hz}$ 145

A.8 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 5800 - 6200\text{Hz}$ 146

A.9 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 6000 - 6400\text{Hz}$ 147

A.10 Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 6400 - 6800\text{Hz}$ 148

A.11 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 1800 - 2200\text{Hz}$ 149

A.12 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 2800 - 3200\text{Hz}$ 150

A.13 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 3800 - 4200\text{Hz}$ 151

A.14 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60\text{m/s}$, $Frequenz = 4800 - 5200\text{Hz}$ 152

A.15 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 5^\circ$, $u = 60m/s$, $Frequenz = 5800 - 6200Hz$	153
A.16 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 5^\circ$, $u = 60m/s$, $Frequenz = 6000 - 6400Hz$	154
A.17 Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, $Anstellwinkel = 5^\circ$, $u = 60m/s$, $Frequenz = 6400 - 6800Hz$	155
A.18 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel bei der Landekonfiguration	156
A.19 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel innere und mittlere Sektion bei der Landekonfiguration	157
A.20 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Vorflügel bei der Landekonfiguration	158
A.21 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Hinterkantenklappe bei der Landekonfiguration	159
A.22 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Vorflügel/Hinterkantenklappe bei der Landekonfiguration	160
A.23 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)	161
A.24 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel innere und mittlere Sektion bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)	162
A.25 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Slat bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)	163
A.26 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flap bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)	164
A.27 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Slat/Flap bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)	165
A.28 Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Landekonfiguration/Clean Wing .	166
A.29 Quellmodellierung mit der EIF Methode (A) Analytisch berechneter Schalldruck nach $n = 150$ Zeitschritten, (B) mit EIF Methode berechneter Schalldruck nach $n = 150$ Zeitschritten, (C) analytisch berechneter Schalldruck nach $n = 250$ Zeitschritten, (D) mit EIF Methode berechneter Schalldruck nach $n = 250$ Zeitschritten, (E) Quadrupolquelle mit EIF Methode berechnet nach $n = 150$ Zeitschritten, (F) Quadrupolquelle mit EIF Methode berechnet nach $n = 250$ Zeitschritten	167
A.30 Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung und dem räumlichen Finite Differenzen Verfahren sechster Ordnung (A) mit der vergrößerten Darstellung (B) und dem räumlichen DRP Schema vierter Ordnung (C) mit der vergrößerten Darstellung (D)	168

A.31 Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung: Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem unstrukturierten Gitter (A) $dx = dy = 0.5m$ an den Aussenkanten des Gitters (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$ (C) $dx = dy = 0.25m$ an den Aussenkanten des Gitters (D) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$	169
A.32 Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung: Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem strukturierten Gitter (A) Gitterschrittweite $dx = dy = 0.5m$ (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$ (C) Gitterschrittweite $dx = dy = 0.25m$ (D) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$. .	170
A.33 Lösung der Konvektionsgleichung mit $\bar{u} = 1m/s$, $dt = 0.5s$ und $dx = 1 m$: (A) Gauss Pulse bei $t = 20 dt$ (B) Schnitt bei $y = 0$ und $t = 20 dt$ (C) Gauss Pulse bei $t = 40 dt$ (D) Schnitt bei $y = 0$ und $t = 40 dt$ (E) Gauss Pulse bei $t = 60 dt$ (F) Schnitt bei $y = 0$ und $t = 60 dt$	171
A.34 Schallaubreitungsrechnungen mit dem Finite Volumen Programm HYDSOL um einen schallharten Zylinder nach $n = 40$ Zeitschritten: (A) Dichteverteilung (B) Schnitt bei $y = x$ (C) Geschwindigkeitsverteilung u (D) Schnitt bei $y = x$ (E) Geschwindigkeitsverteilung v (F) Schnitt bei $y = x$. Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode.	172
A.35 Schallaubreitungsrechnungen mit dem Finite Volumen Programm HYDSOL um ein Profil der Airbus A310 nach $n=170$ Zeitschritten. Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode.	173
A.36 Schallaubreitungsrechnungen mit dem Programm HYDSOL um ein Profil der Airbus A310 nach $n = 170$ Zeitschritten: (A) Dichteverteilung, (B) Anzahl der nächsten Nachbarn (C) Geschwindigkeitsverteilung u (D) Geschwindigkeitsverteilung v (E) Druckverteilung vergrößert dargestellt (F) Gitter am Vorflügel vergrößert. Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode. . .	174
A.37 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ zum Zeitpunkt $t = 0$. . .	175
A.38 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 116$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 3.658E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.	176
A.39 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 232$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 7.316E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.	177
A.40 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 348$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 1.097E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.	178

A.41 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 464$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 1.463E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 179

A.42 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 580$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 1.829E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 180

A.43 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 696$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 2.194E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 181

A.44 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 813$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 2.563E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 182

A.45 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 150$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 3.662E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 183

A.46 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 300$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 7.325E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 184

A.47 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 450$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 1.098E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 185

A.48 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 600$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 1.465E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 186

A.49 Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 750$ Zeitschritten, $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 1.831E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode. 187

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Unterzeichen

$1, 2$	Zähler
e	Ersatz
i	Inkrement
ij	Flächen-Indizes
ijk	Raum-Indizes
inc	inkompressibel
k, l	Inkrement
m, n	Inkrement
t	Zeit-Ableitung
x	x-Ableitung
y	y-Ableitung
z	z-Ableitung
A	Fläche
L	Links
R	Rechts
V	Volumen
$\infty, 0$	Fernfeld

Obergrößen

*	Konjugiert komplexe Größe
*	Starregion
'	Störungsgröße
—	Gemittelte Größe
~	Fourier-Laplace Transformation
0	Anfangsbedingung $t=0s$
n	Grad der Ableitung

Abkürzungen

1D	Eindimensional
2D	Zweidimensional
3D	Dreidimensional
AKUSIM	Akustische Simulationsverfahren
AWB	Akustischer Windkanal Braunschweig
CAA	Computational Aeroacoustics
CFD	Computational Fluid Dynamics
DRP	Dispersion Relation Preserving
EIF	Expansion about Incompressible Flow
ENO	Essentially Non-Oscillatory
EADS	European Aeronautic Defence and Space Company
FD	Finite Differenzen
FREQUENZ	Forschung zur Reduktion und Ermittlung des Quelllärms mittels Experiment und Numerik bei Zivilverkehrsflugzeugen
FV	Finite Volumen
KV	Kontrollvolumen
LEE	Linearisierte Euler Gleichungen
RAIN	Reduction of Airframe and Installation Noise
SDM	Source Density Modelization
SVD	Singular Value Decomposition
WENO	Weighted Essentially Non-Oscillatory

Lateinische Buchstaben

<i>a</i>	Finite Differenzen Koeffizienten, Transformationskoeffizient
<i>A</i>	Flächeninhalt, Jacobi Matrix in x-Richtung
<i>b</i>	Transformationskoeffizient, Wirbelpfad
<i>B</i>	Jacobi Matrix in y-Richtung
<i>C</i>	Jacobi Matrix in z-Richtung
<i>c</i>	Schallgeschwindigkeit
<i>d</i>	Dämpfungskoeffizient, Durchmesser
<i>D</i>	Dämpfungsterm, Breite der Sponge-Layer
<i>dB</i>	Dezibel (Masseinheit für Schalldruck)
<i>e</i>	Innere Energie
<i>E</i>	Energie
<i>f</i>	Frequenz
F	Fluss in x-Richtung
<i>g</i>	Erdbeschleunigung
<i>G</i>	Transferfunktion
G	Fluss in y-Richtung
<i>h</i>	Gitterschrittweite
<i>H</i>	Hankel Funktion
H	Fluss in z-Richtung, Enthalpie
<i>i</i>	Komplexe Zahl
J	Jacobi Matrix
<i>k</i>	Koeffizient, Wellenzahl
K	Matrix der rechten Eigenvektoren
<i>L</i>	Länge
L	Linke Matrix, untere Dreiecksmatrix
<i>m</i>	Masse, Anzahl der Spalten
<i>Ma</i>	Mach Zahl
<i>N</i>	Anzahl der Gitterpunkte
<i>n</i>	Anzahl der Zeilen
n	Normalenvektor
<i>p</i>	Druck
<i>0</i>	Ordnung
<i>q, Q</i>	Quellterm
<i>r</i>	Radius
r	Richtungsvektor
<i>R</i>	Spezifische Gaskonstante, Restglied, Radius
R	Rechte Matrix
<i>S</i>	Entropie
<i>t</i>	Zeit
T	Lighthill Tensor
<i>T</i>	Temperatur
<i>u</i>	Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung
U	Variablenvektor
<i>v</i>	Strömungsgeschwindigkeit in y-Richtung

V	Volumen
w	Strömungsgeschwindigkeit in z-Richtung, charakteristische Variablen, Wichtungskoeffizient, komplexe Potentialfunktion
W	Charakteristische Variablen Vektor
x, y, z	Koordinatenrichtungen

Griechische Buchstaben

α	Linke Fluss-Koeffizienten, Brechungswinkel
β	Rechte Fluss-Koeffizienten
δ	Kronecker Delta
Γ	Zirkulation
γ	Spezifische Wärmekonstante, Gewichte Zeitintegration
λ	Eigenwerte, Wellenlänge
Λ	Eigenwert-Matrix
μ	Statische Viskosität
ρ	Dichte
σ	Halbwertsbreite des Gauss Pulses, Parabelfunktion
θ	Umlenkwinkel
Φ	Öffnungswinkel, Geschwindigkeitspotential
Ψ	Leistungsspektrum, Stromfunktion
ω	Kreisfrequenz
Ω	Strömungskorrigierte Phase

Kapitel 1

Einleitung

Die Aeroakustik befasst sich mit der Erzeugung, der Ausbreitung, der Reflexion und der Absorption von Schallwellen in ruhenden und insbesondere in strömenden Gasen, wie beispielsweise Luft.

In der Luftfahrtindustrie, insbesondere in der Forschung, ist die Aeroakustik in den letzten Jahren stetig gewachsen. Das zunehmende Passagieraufkommen und der daraus resultierende Anstieg von Start- und Landevorgängen setzt die Umgebung von Flughäfen einer erhöhten Lärmbelastung aus. Die Verminderung von Fluglärm, welcher hauptsächlich durch die Triebwerke, sowie durch die aeroakustischen Lärmquellen des Fahrwerks und der Hochauftriebssysteme entsteht, hat dadurch gesellschaftlich an Bedeutung gewonnen. Durch die neuen Lärmschutzverordnungen entstehen für die Luftfahrtindustrie neue Herausforderungen im Bereich der Aeroakustik [36, 37]. Alarmierende Signale von Fluggesellschaften und Flughafenbetreibern zeigen, dass für ein gesundes Wirtschaftswachstum der Lärmpegel stark verringert werden muss. Bei gleich bleibender Lärmbelastung werden weitere Flughäfen gezwungen sein, das Nachtflugverbot einzuführen. Für Flugzeughersteller wie Airbus würde dies ein Rückgang an Neuaufträgen bedeuten. Die gesamte Wirtschaft und vor allem die Luftfahrtindustrie würde dies zu spüren bekommen. Um dies zu verhindern, müssen neue Technologien bei der Entwicklung neuer Flugzeuge sowie bei der Umrüstung vorhandener Flugzeuge eingesetzt werden. Die Entwicklung dieser Technologien bedarf einer intensiven technisch physikalischen Betrachtung des Problems.

Durch die stetig wachsende Leistung der Rechanlagen können Probleme der Aeroakustik durch die Verwendung von numerischen Verfahren zunehmend besser gelöst werden. Diese numerischen Verfahren sind unter den Namen Computational Fluid Dynamics (CFD) und Computational Aeroacoustics (CAA) bekannt [3, 21, 27, 16]. Bei der Auslegung neuer Tragflügel können mit diesen Verfahren physikalische Effekte schon in der frühen Konstruktionsphase analysiert und optimiert werden. Die Hauptlärmquellen eines Flugzeugs sind beim Start das Triebwerk und bei der Landung die Hochauftriebshilfen sowie das Fahrwerk. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die Hochauftriebshilfen betrachtet. Hierzu wurden numerische Verfahren weiterentwickelt und mit Hilfe von Windkanalmessungen und analytischen Lösungen validiert.

1.1 Stand der Forschung

Im 16. Jahrhundert befassten sich Wissenschaftler wie Helmholtz mit der Akustik und erkannten, dass die Ausbreitung der Wellen in ruhendem Medium, der so genannten Wellengleichung der Akustik gehorchen. Die elastischen Wellen breiten sich vom Entstehungsort der Quelle zum Beobachter im Allgemeinen mit Schallgeschwindigkeit aus. Die Wellengleichung der Akustik kann mit Hilfe der Grundgleichungen der Strömungsmechanik hergeleitet werden und ist für bestimmte Fälle auch analytisch lösbar. Die Navier-Stokes Gleichungen sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik und beschreiben die Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie von Strömungen. Diese Gleichungen beschreiben damit die Physik der Schallgenerierung und Schallausbreitung in Strömungen. Die Strömungsakustik ist folglich eine Beschreibung instationärer Strömungsvorgänge [11].

Werden Schubspannungen sowie nichtlineare Effekte vernachlässigt, so können die linearisierten Euler Gleichungen zur Beschreibung der Schallausbreitung verwendet werden. Die linearisierten Euler Gleichungen sind vom hyperbolischen Typ. Durch die Vernachlässigung der Anströmung kann aus den linearisierten Euler Gleichungen die Wellengleichung der Akustik gewonnen werden.



Abbildung 1.1: Mehrskaligkeit in der Aeroakustik

In der Aeroakustik wird oft die akustische Analogie oder ein Störungsansatz angewandt [28, 49]. Bei der akustischen Analogie werden im ersten Schritt die akustischen Quellterme durch Lösen der Navier-Stokes Gleichungen berechnet. Mit Hilfe dieser Quellen kann man anschließend die Ausbreitung der akustischen Wellen durch Lösen der linearisierten Euler

Gleichungen berechnen. Die Bestimmung der aeroakustischen Quellen kann experimentell oder mit Quellmodellen numerisch durchgeführt werden.

Die akustischen Wellen müssen über große Distanzen transportiert werden. Die auftretenden Phänomene laufen zudem auf unterschiedlichen Skalen ab. Aufgrund der Mehrskaligkeit der Strömungsgrößen werden besondere Anforderungen an die Verfahren der numerischen Simulation gestellt. Aus Abbildung 1.1 ist ersichtlich, dass die Mehrskaligkeit auf mehreren Ebenen erfolgt. Die Größen wie Dichte, Druck und Energie der schallerzeugenden Strömung sind um ein vielfaches größer als die zugehörigen Größen der Wellenausbreitung. Hinzu kommt, dass die Strömung kurzwellig und die Ausbreitung der Schallwellen langwellig abläuft. Des Weiteren sind die konvektiven Vorgänge der schallerzeugenden Strömung langsamer als die Schallgeschwindigkeit mit der sich eine Schallwelle im Allgemeinen bewegt. Dies führt dazu, dass die numerischen Fehler, welche bei der numerischen Simulation der schallerzeugenden Strömung entstehen in der Größenordnung der Schallwellen liegen können. Durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ist es nötig, auf unterschiedlich aufgelösten Gittern zu rechnen. Die schallerzeugende Strömung und die Wellenausbreitung in der Strömung unterscheiden sich außerdem im Bereich der Grenzschicht, sowie in der Ausdehnung des Gitters. Die Navier-Stokes Gleichung müssen im Bereich der Grenzschicht auf einem verfeinerten Gitter aufgelöst werden, das Fernfeld ist hier sekundär. Bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen ist eine Verfeinerung des Gitters im Bereich der Grenzschicht nicht nötig. Die Ausdehnung des Gitters ist in diesem Fall um ein vielfaches größer als die der schallerzeugenden Strömung.

Zur Lösung der Navier-Stokes wie auch der linearisierten Euler Gleichungen werden vor allem die Finite Differenzen, sowie die Finite Volumen Methode verwendet [38]. Die Finite Differenzen Methoden sind auf strukturierten Gittern sehr gut einsetzbar. Die Berücksichtigung komplexer Geometrien ist nur durch spezielle Transformationen möglich.

Ein in der Aeroakustik weit verbreitetes Verfahren zur Lösung der akustischen Grundgleichungen ist das Dispersion Relation Preserving (DRP) Schema. Dieses Verfahren ist ein bezüglich Amplituden- und Phasenfehler optimiertes Finite Differenzen Verfahren. Die Koeffizienten des Finite Differenzen Moleküls werden bei dieser Methode nicht nur wie bei den klassischen Finite Differenzen Verfahren nur durch die Taylor Reihe, sondern zusätzlich durch spezielle Annahmen berechnet.

Die Finite Volumen Verfahren sind verglichen mit den Finite Differenzen Verfahren sehr aufwendig. Die Finite Volumen Verfahren haben jedoch den Vorteil, dass sie auf beliebig komplexen Gittern eingesetzt werden können. In den meisten kommerziellen CFD Programmen wie auch in dem am Institut für Aerodynamik und Gasdynamik entwickelten Programm HYDSOL (Hydrodynamic Solver) werden die Euler Gleichungen und die Navier-Stokes Gleichungen mit den Finite Volumen Verfahren gelöst [39]. Die ursprüngliche Version des Programms HYDSOL ist zeitlich und räumlich von zweiter Ordnung genau. Die Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung sind in der Aeroakustik nicht anwendbar, da die Amplituden- und Phasenfehler die Wellenausbreitung nicht real wiedergeben würden.

Wie bereits erwähnt, ist eine Bestimmung der aeroakustischen Quellen numerisch oder experimentell möglich. In ruhenden Medien kann die Quelllokalisierung mit Hilfe des klassischen Beamforming Verfahrens und des Source Density Modelization (SDM) Verfahrens

durchgeführt werden [10, 25, 26]. Das SDM Verfahren wurde am Corporate Research Centre der EADS entwickelt. Diese Verfahren verwenden hierzu experimentell bestimmte Mikrofon-signale. Das Beamforming Verfahren liefert mit Hilfe dieser Signale in der so genannten Fokusebene die Schalldrücke und somit die Energie eines Schallfeldes auf dieser Ebene. Mit dieser Methode ist es möglich, Quellen bis zu einer Frequenz von etwa $f = 10kHz$ zu lokalisieren.

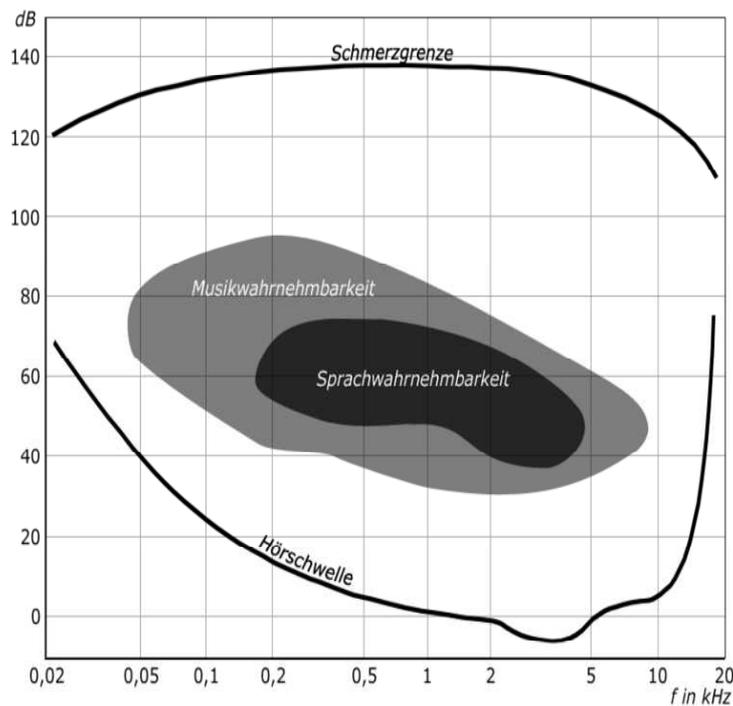


Abbildung 1.2: Dargestellt ist der Frequenzbereich des menschlichen Gehörs, Hörschwelle und Schmerzgrenze des menschlichen Gehörs sind frequenzabhängig. Das menschliche Ohr hört Schall mit einer Frequenz von $f = 16Hz$ bis ungefähr $f = 20kHz$. Am empfindlichsten ist das menschliche Ohr im Frequenzbereich von $f = 2kHz$ bis $f = 5kHz$ [48].

Nachteil des Beamforming Verfahrens sind die so genannten Nebenkeulen [14]. Diese verfälschen das Ergebnis und führen dazu, dass keine klare Aussage über die Quellverteilung auf der Fokusebene gemacht werden kann. Die Topologie der Quellverteilung ist beim klassischen Beamforming Verfahren von der Mikrofonposition abhängig. Die SDM Methode eliminiert die Nebenkeulen, so dass eine klare Aussage über die Quellstärke und Quellverteilung gemacht werden kann [10].

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, Verfahren zur Bestimmung von aerodynamisch erzeugtem Lärm zu entwickeln und diese bei der Entwicklung von neuen Hochauftriebshilfen einzusetzen. Dies erfolgt bei der hier angewendeten akustischen Analogie in zwei Schritten. Im ersten Schritt müssen Verfahren zur Bestimmung der aeroakustischen Quellen entwickelt werden. Liegen die Quellen vor, so muss mit einem hochgenauen numerischen Verfahren die Ausbreitung simuliert werden.

Die aeroakustischen Schallquellen können aus numerisch berechneten Strömungsdaten oder aus messtechnisch ermittelten Mikrofondaten bestimmt werden.

Die aus der Literatur bekannte Quellgenerierungsmethode EIF (Expansion about Incompressible Flow) nach Hardin und Pope verwendet hierzu numerisch berechnete Strömungsdaten. Diese Methode soll in dieser Arbeit anhand des korotierenden Wirbelpaares analysiert werden.

Bei Windkanalmessungen ist es mit Hilfe eines Mikrofon-Arrays möglich, aeroakustische Quellen experimentell zu bestimmen [22, 23]. Bei der Mikrofon-Array Technik werden die gemessenen Mikrofon-Signale mit Hilfe des Beamforming Verfahrens ausgewertet. Das klassische Beamforming Verfahren ist jedoch lediglich in der Lage, Quellen in einem ruhenden Medium zu lokalisieren. Bei Windkanalmessungen steht das Mikrofon-Array außerhalb der Strömung. Auf dem Weg von der akustischen Quelle zum Mikrofon bewegt sich die Welle dadurch zunächst durch strömendes und anschließend durch ruhendes Medium. Die Welle wird in diesem Fall an der unendlich dünn angenommen Scherschicht gebrochen. Dies führt zu Laufzeitverschiebungen und damit zu einer falschen Ortung der Schallquelle. Ziel ist es, mit Hilfe eines neuen Algorithmus diese Laufzeitverschiebungen zu korrigieren.

Die numerische Simulation der Schallausbreitung erfolgt durch Lösen der linearisierten Euler Gleichungen. Mit Hilfe eines numerischen Verfahrens hoher Ordnung sollen die linearisierten Euler Gleichungen auf unstrukturierten Gittern gelöst werden.

1.3 Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in acht Kapitel. Nach der Einleitung werden im zweiten Kapitel die Grundgleichungen der Strömungsmechanik und der Strömungsakustik vorgestellt.

In Kapitel drei werden räumliche und zeitliche Verfahren zur Lösung der linearisierten Euler Gleichungen vorgestellt. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit den Differenzen Verfahren und der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode. Die zeitliche Integration der linearisierten Euler Gleichungen wird mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren durchgeführt. Bei den vorliegenden Anfangs-Randwertproblemen müssen Körperandbedingungen erfüllt werden. Hierzu wurden in dieser Arbeit verschiedene Verfahren analysiert. Um ein unendlich großes Rechengebiet zu simulieren werden nicht reflektierende Randbedingungen verwendet.

Im vierten Kapitel werden die Finite Volumen Verfahren dargestellt. Es wird in diesem Kapitel auf die Berechnung des Flusses sowie auf die numerische Integration der Anfangsbedingungen eingegangen.

Bei Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung muss die Berechnung des Flussintegrals entlang einer Zellkante mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden. Hierzu werden Rekonstruktionsalgorithmen im fünften Kapitel hergeleitet.

Die Bestimmung der aeroakustischen Quellen kann experimentell oder numerisch durchgeführt werden. In Kapitel sechs wird die Beamforming Methode sowie die Source Density Modelization Methode vorgestellt. Die Verfahren werden bei der messtechnischen Bestimmung von aeroakustischen Schallquellen eingesetzt. Eine numerische Methode zur Bestimmung von aeroakustischen Quellen ist die EIF Methode nach Hardin und Pope. Diese numerisch berechneten Quellen werden am Beispiel des korotierenden Wirbelpaares mit der analytischen Lösung verglichen.

Im siebten Kapitel werden die in Kapitel drei und vier vorgestellten Finite Differenzen und Finite Volumen Verfahren miteinander gekoppelt und mit Hilfe von analytischen Lösungen validiert.

In Kapitel acht werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit dargestellt. Es wird in diesem Kapitel die Beamforming Methode und die EIF Methode untersucht. Der Ordnungsnachweis der hergeleiteten Finite Differenzen Verfahren und Finite Volumen Verfahren erfolgt mit Hilfe von analytischen Lösungen. Die entwickelten Finite Volumen Verfahren werden bei der Simulation der Schallausbreitung um Tragflügelprofile angewendet.

Kapitel 2

Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik

Im siebzehnten und achtzehnten Jahrhundert befassten sich Wissenschaftler wie Newton (1643-1729), Euler (1707-1783) und Bernoulli (1700-1782) mit der Mechanik strömender Fluide und erkannten erstmals wichtige physikalische Zusammenhänge. Das Zusammenwirken von Theorie und Experiment sowie eine konsequent mathematische Ausrichtung führten so zu den Bewegungsgleichungen für reibungsfreie Strömungen. Gegen Mitte des neunzehnten Jahrhunderts erweiterten Navier und Stokes diese Gleichungen auf reibungsbehaftete Strömungen. Diese Gleichungen werden Navier-Stokes-Gleichungen genannt und gelten für die unterschiedlichsten Anwendungsgebiete von Kontinuumsströmungen. Sie stellen ein Gleichungssystem aus gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen dar, für die es bis heute keine allgemeine, geschlossene, analytische Lösung gibt.

2.1 Navier-Stokes Gleichungen

Die aus der Strömungsmechanik bekannten konservativ formulierten Navier-Stokes Gleichungen setzen sich aus der Massenerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

der Impulserhaltungsgleichung

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho \mathbf{u}) \circ \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.2)$$

und der Energieerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(e + p)) = \nabla \cdot (\mathbf{T}\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.3)$$

mit dem Schubspannungstensor

$$\mathbf{T} = \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (2.4)$$

und dem Wärmeflussvektor

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T \quad (2.5)$$

zusammen und beschreiben Strömungen mit Schallentstehung und Schallausbreitung. Dabei ist ρ die Dichte des Mediums, \mathbf{u} steht für die Geschwindigkeiten in x , y und z -Richtung, p ist der Druck des Mediums, e ist die Gesamtenergie pro Volumeneinheit, μ die dynamische Viskosität und κ der Adiabatenkoeffizient. Die Massenerhaltungsgleichung (2.1) der Kontinuumsmechanik besagt, dass die Gesamtmasse in einem abgegrenzten Fluidvolumen konstant bleibt und damit Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. Die Impulserhaltungsgleichung (2.2) basiert auf dem zweiten Newtonschen Gesetz und sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers gleich der Summe aller auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte ist. Die Energieerhaltungsgleichung (2.3) lässt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik herleiten und sagt aus, dass die Gesamtenergie eines Systems durch Prozesse, die ausschließlich innerhalb des betrachteten Systems stattfinden, nicht verändert werden kann. Das heißt, es ist unmöglich, innerhalb eines abgeschlossenen Systems Energie zu erzeugen oder zu vernichten. Bei Vernachlässigung des Schubspannungsterms sowie des Wärmeflussvektors in der Impulsgleichung und der Leistung der Oberflächenkräfte sowie der Wärmezufuhr in der Energiegleichung erhält man die Eulerschen Bewegungsgleichungen für reibungsfreie Strömungen.

2.2 Euler Gleichungen

Die konservative Formulierung der nichtlinearen dreidimensionalen Euler-Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e+p) \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(e+p) \end{bmatrix}_{,y} + \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(e+p) \end{bmatrix}_{,z} = 0 \quad (2.6)$$

mit der Dichte ρ , den Geschwindigkeiten u , v und w in x , y und z -Richtung und der Energie

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \quad (2.7)$$

werden aus Massenerhaltung sowie Impuls -und Energieerhaltung abgeleitet. Mit der Annahme, dass die Entropie S des ideal angenommenen Gases konstant ist, kann der Druck p mit Hilfe der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=const}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.8)$$

berechnet werden. Im zweidimensionalen Fall erhält man

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}_{,y} = 0 \quad (2.9)$$

wobei die Energie mit

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.10)$$

definiert ist. Mit der bereits erwähnten Annahme, dass die Energie einer Schallwelle bei den hier betrachteten Geschwindigkeiten um mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Energie der schallerzeugenden Strömung, kann man nichtlineare Effekte vernachlässigen. Diese Annahme führt zu den so genannten linearisierten Euler Gleichungen (LEE). Die Herleitung der linearisierten Euler Gleichungen erfolgt im folgenden Abschnitt.

2.3 Linearisierte Euler Gleichungen

Die Linearisierung der Euler Gleichungen erfolgt im Dreidimensionalen mit dem Ansatz

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} + \rho' \\ \bar{u} + u' \\ \bar{v} + v' \\ \bar{w} + w' \\ \bar{p} + p' \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

und im Zweidimensionalen mit dem Ansatz

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} + \rho' \\ \bar{u} + u' \\ \bar{v} + v' \\ \bar{p} + p' \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Die Linearisierung ist erlaubt, wenn die Strömung in eine gleichförmige Hintergrundströmung mit überlagerter Störung aufgeteilt werden kann und die Störung um mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Hintergrundströmung. Die Größen $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} und \bar{p} beschreiben die zeitlich und räumlich gleichförmige Hintergrundströmung. Die Größen ρ' , u' , v' , w' und p' sind die darauf überlagerten kleinskaligen Störgrößen. Die linearisierten Euler Gleichung im Dreidimensionalen

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \bar{u}\rho' + \bar{\rho}u' \\ \bar{u}u' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{u}v' \\ \bar{u}w' \\ \bar{u}p' + \gamma\bar{p}u' \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \bar{v}\rho' + \bar{\rho}v' \\ \bar{v}u' \\ \bar{v}v' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{v}w' \\ \bar{v}p' + \gamma\bar{p}v' \end{bmatrix}_{,y} + \begin{bmatrix} \bar{w}\rho' + \bar{\rho}w' \\ \bar{w}u' \\ \bar{w}v' \\ \bar{w}w' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{w}p' + \gamma\bar{p}w' \end{bmatrix}_{,z} = 0 \quad (2.13)$$

und im Zweidimensionalen

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \bar{u}\rho' + \bar{\rho}u' \\ \bar{u}u' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{u}v' \\ \bar{u}p' + \gamma\bar{p}u' \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \bar{v}\rho' + \bar{\rho}v' \\ \bar{v}u' \\ \bar{v}v' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{v}p' + \gamma\bar{p}v' \end{bmatrix}_{,y} = 0 \quad (2.14)$$

beschreiben im vorliegenden Fall die sich zeitlich verändernden akustischen Größen ρ' , u' , v' , w' und p' . Die Schallgeschwindigkeit der Umgebung ist hier mit

$$c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}} \quad (2.15)$$

gegeben. Die linearisierten Euler Gleichungen können für ein ruhendes Medium durch eine Umformung in die akustische Wellengleichung überführt werden. Die Wellengleichung erhält man durch das Ableiten von u'_t nach der Ortskoordinate x , von v'_t nach der Ortskoordinate y , von w'_t nach der Ortskoordinate z und p'_t nach der Zeit t . Es ergibt sich nach einer Umformung dieser Gleichungen die dreidimensionale homogene Wellengleichung der Akustik

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.16)$$

Im Zweidimensionalen bedeutet dies

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Mit

$$p' = c_\infty^2 \rho' \quad (2.18)$$

kann man die Wellengleichung von der Druckformulierung in die Dichteformulierung überführen und damit die Änderung der akustischen Dichteschwankungen bestimmen.

Kapitel 3

Diskretisierungsmethoden in Raum und Zeit

Die im vorangehenden Kapitel beschriebenen linearisierten Euler Gleichungen stellen ein lineares gekoppeltes System von Differentialgleichungen dar, welches mit numerischen Methoden hochgenau gelöst werden kann [18]. Die akustische Wellengleichung, eine skalare partielle Differentialgleichung, ist ein Sonderfall der linearisierten Euler Gleichungen. Die Wellengleichung wie auch die linearisierten Euler Gleichungen beschreiben die instationären Wellenausbreitungsphänomene in einem Medium und berücksichtigen bei Vorgabe von Randbedingungen die Wellenausbreitung um komplexe Geometrien. Die analytische Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen ist in wenigen Fällen möglich. In diesen Fällen ist die betrachtete Geometrie sehr einfach. Bei einer komplexen Modellierung, wie sie in der Luftfahrt vorkommt, müssen approximative numerische Lösungen des vorliegenden Anfangs-Randwertproblems gesucht werden. Zur numerischen Lösung eines Anfangs-Randwertproblems müssen die partiellen Differentialgleichungen räumlich und zeitlich diskretisiert werden. Die zeitliche Diskretisierung der linearisierten Euler Gleichungen kann bei Verfahren hoher Ordnung mit dem expliziten Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung durchgeführt werden. Bei der Lösung der akustischen Wellengleichung wird ein explizites Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung eingesetzt [34, 31, 32]. Beide Verfahren sind bei Einhaltung der Stabilitätskriterien stabil und werden in der CAA erfolgreich eingesetzt.

Die räumliche Diskretisierung des Rechengebiets erfolgt in der vorliegenden Arbeit mit der Finite Differenzen, der Natural Neighbour sowie der Finite Volumen Methode. Im Folgenden werden diese Verfahren beschrieben und angewendet. Die Berücksichtigung der Körperrandbedingungen sowie der so genannten Ausströmrandbedingungen ist bei der Lösung von Anfangs-Randwertproblemen nötig und wird ebenfalls in den folgenden Abschnitten behandelt.

Zur Minimierung von Phasen- und Amplitudenfehler schlägt Tam in seinen Arbeiten das DRP Schema vor [55]. Das DRP Schema kann von den klassischen Differenzen Verfahren abgeleitet werden und wird in der CAA sehr oft angewendet. Die Optimierung der Koeffizienten in den numerischen Ableitungen erfolgt durch eine Fourier-Laplace Transformation. In der vorliegenden Arbeit wird das räumliche Diskretisierungsverfahren des DRP Schemas

eingesetzt und mit der Natural Neighbour sowie der Finite Volumen Methode gekoppelt. Die Zeitintegration erfolgt mit dem Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung.

3.1 Räumliche Diskretisierungsmethoden

Bei der Betrachtung von komplexen gekrümmten Geometrien, wie etwa die eines Tragflügels muss das Rechengebiet zerlegt werden. Die räumliche Zerlegung des Rechengebiets in eine finite Anzahl von Gitterzellen erfolgt in der vorliegenden Arbeit durch ein strukturiertes kartesisches Gitter (Abbildung 3.1A) oder durch ein unstrukturiertes Gitter (Abbildung 3.1B). Das strukturierte Gitter besteht im Zweidimensionalen aus Vierecken und im Dreidimensionalen aus Hexaedern. Die Anzahl der Nachbarn einer Zelle beziehungsweise eines Knotens ist bei strukturierten Gittern konstant. Das System kann im Zweidimensionalen im i, j -Raum und im Dreidimensionalen im i, j, k -Raum mit natürlichen Indizes ausgedrückt werden.

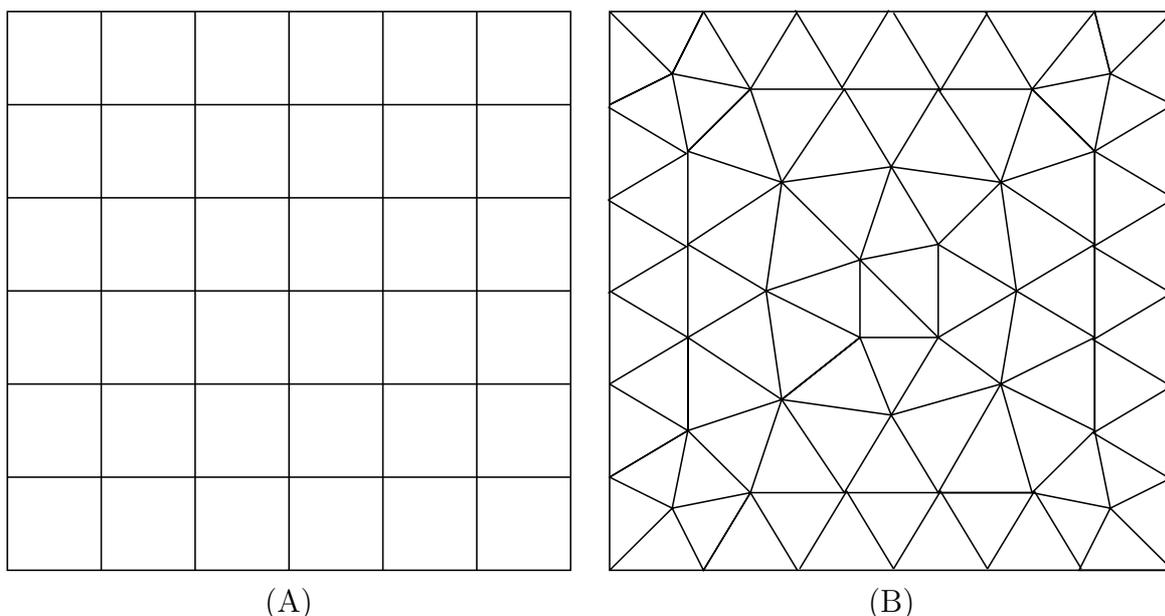


Abbildung 3.1: Vergleich unterschiedlicher Gitter: (A) strukturiertes kartesisches Gitter, (B) unstrukturiertes Dreiecksgitter

Bei einer komplexen Gitterstruktur ist die Anzahl der Nachbarn einer Zelle nicht konstant. Bei numerischen Strömungsberechnungen ist im Bereich der Grenzschicht eine Verfeinerung des Gitters zwingend notwendig. Bei akustischen Simulationen müssen die Kantenlängen der Elemente vergleichbare Abmessungen haben.

Bei der Finite Differenzen sowie der Natural Neighbour Methode ist es durch die Diskretisierung des Rechengebietes möglich, die kontinuierliche partielle Differentialgleichung in eine diskrete Differenzengleichung umzuformen und diese in den Knoten des Gitters zu erfüllen. Das bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten approximiert werden. Bei der hier verwendeten zellzentrierten Finite Volumen Methode hingegen werden

die linearisierten Euler Gleichungen über ein Volumen aufintegriert. Durch den Satz von Gauss werden diese Integralgleichungen anschließend derart umgeformt, so dass der Fluss über die Zelloberfläche aufintegriert die Änderung der integralen Mittelwerte in den Zellen ergibt.

Die räumliche und zeitliche Diskretisierung des Problems führt zu einem so genannten numerischen Diskretisierungsfehler. Der Diskretisierungsfehler ist die Differenz zwischen der analytischen exakten Lösung der Differentialgleichungen und der numerisch berechneten Lösung der diskreten Differenzgleichungen. Der Betrag des Fehlers ist abhängig von der Auflösung und der Topologie des Gitters sowie vom verwendeten Raum- und Zeitdiskretisierungsverfahren. Die Reduzierung dieses Fehlers kann beispielsweise durch die Erhöhung der Auflösung oder durch die Verwendung von Verfahren hoher Ordnung erzielt werden. Bei einer Erhöhung der Auflösung oder der Verwendung eines hochgenauen Verfahrens steigt im Allgemeinen die Rechenzeit, da die Anzahl der Operation ansteigt.

In der numerischen Aeroakustik sind Verfahren hoher Ordnung weit verbreitet, die betrachteten Funktionen sind bei Schallausbreitungsrechnungen im Allgemeinen stetig.

3.1.1 Finite Differenzen Methode

Die Finite Differenzen Methode ist ein Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Das Rechengebiet wird durch ein strukturiertes Gitter in eine finite Anzahl von Zellen zerlegt. An jedem Gitterpunkt wird die kontinuierliche Differentialgleichung durch die diskrete Differenzgleichung näherungsweise gelöst. Hierzu müssen die partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten approximiert werden. Die Taylorreihe

$$\Phi(x_i) = \Phi(x_0) + \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x_0} (x_i - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\Phi}{dx^2} \Big|_{x_0} (x_i - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n\Phi}{dx^n} (x_i - x_0)^n + R_n(x) \quad (3.1)$$

mit dem Restglied

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x_i} (x_i - t)^n \Phi^{(n+1)}(t) dt \quad (3.2)$$

ermöglicht es, auf einem eindimensionalen, äquidistanten Gitter eine stetige Funktion um den Aufpunkt x_0 darzustellen (Abbildung 3.2). Das Restglied beschreibt dabei die Ordnung und damit die Genauigkeit des Verfahrens. Wird die Taylorreihe für bestimmte benachbarte Punkte aufgestellt, so ergibt sich ein Gleichungssystem. Dieses kann mit einem Gleichungslöser gelöst werden und man erhält zur Berechnung der ersten Ableitung im Punkt x_0 beziehungsweise im diskreten Punkt i die Rechenvorschrift

$$\frac{d\Phi}{dx} \Big|_i \approx \frac{1}{q} \sum_{n=-3}^{n=3} a_n \Phi_{i+n} \quad (3.3)$$

Die Bestimmung der zweiten Ableitung erfolgt analog. In Tabelle B.1 sind die berechneten Koeffizienten a_n der Finite Differenzen Formeln dargestellt. Mit Hilfe dieser Tabelle ist es

möglich, die erste Ableitung Φ' und die zweite Ableitung Φ'' nach der Ortskoordinate x auf einem äquidistanten Gitter mit der Gitterschrittweite Δx numerisch zu bestimmen. Die Ordnung des verwendeten Differenzen Verfahren sowie der Nenner q können Tabelle B.1 entnommen werden.

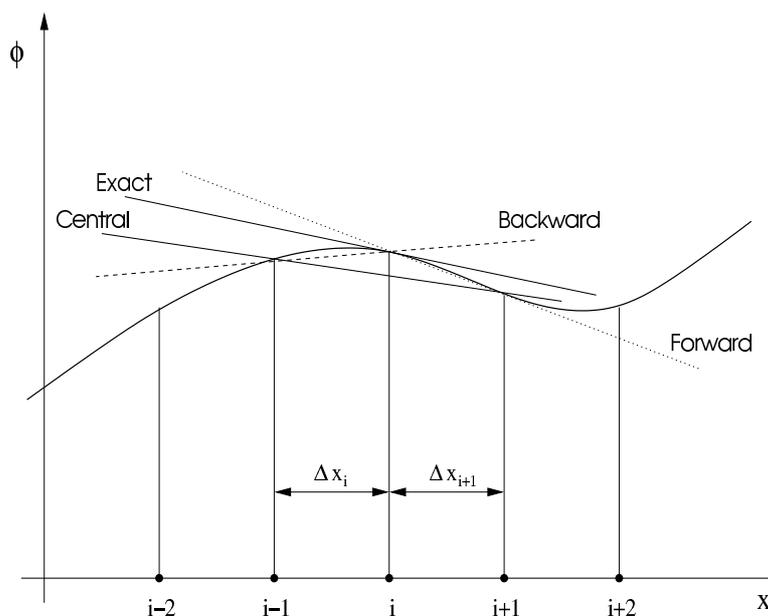


Abbildung 3.2: Bestimmung der ersten Ableitung mit unterschiedlichen numerischen Verfahren auf einem eindimensionalen äquidistanten Gitter

Für die erste Ableitung ergibt sich mit den Koeffizienten der Tabelle B.1 die zentrale Differenz vierter Ordnung

$$\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_i = \frac{-\Phi_{i+2} + 8\Phi_{i+1} - 8\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (3.4)$$

Mit dieser Vorgehensweise können zentrale wie auch einseitige Differenzen hoher Ordnung berechnet werden. Es ist aus Tabelle B.1 ersichtlich, dass die Ordnung und damit die Genauigkeit der Ableitungen von der Anzahl der verwendeten Knoten beziehungsweise Nachbarn abhängig ist. Eine Aussage über den Betrag des Fehlers lässt sich jedoch durch die Angabe der Ordnung nicht machen.

3.1.2 Knotenzentrierte Natural Neighbour Methode

Die Lösung der linearisierten Euler Gleichungen wie auch der akustischen Wellengleichung kann mit der Finite Differenzen Methode durchgeführt werden. Die Finite Differenzen Methode ist jedoch auf strukturierte Gitter begrenzt. Bei technischen Anwendungen sind die Geometrien meist sehr komplex. Das Rechengebiet um einen komplexen Körper kann mit Hilfe eines unstrukturierten Gitters zerlegt werden. Im Zweidimensionalen kann durch die

Verwendung eines Dreiecksgitters das Rechengebiet diskretisiert und die komplexe Geometrie realistisch approximiert werden. In den folgenden Abschnitten werden die linearisierten Euler Gleichungen sowie die Wellengleichung mit Hilfe der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode gelöst [7, 8, 9, 15, 17, 33, 35, 42, 43, 46]. Es wird zudem auf die Körper Randbedingungen eingegangen.

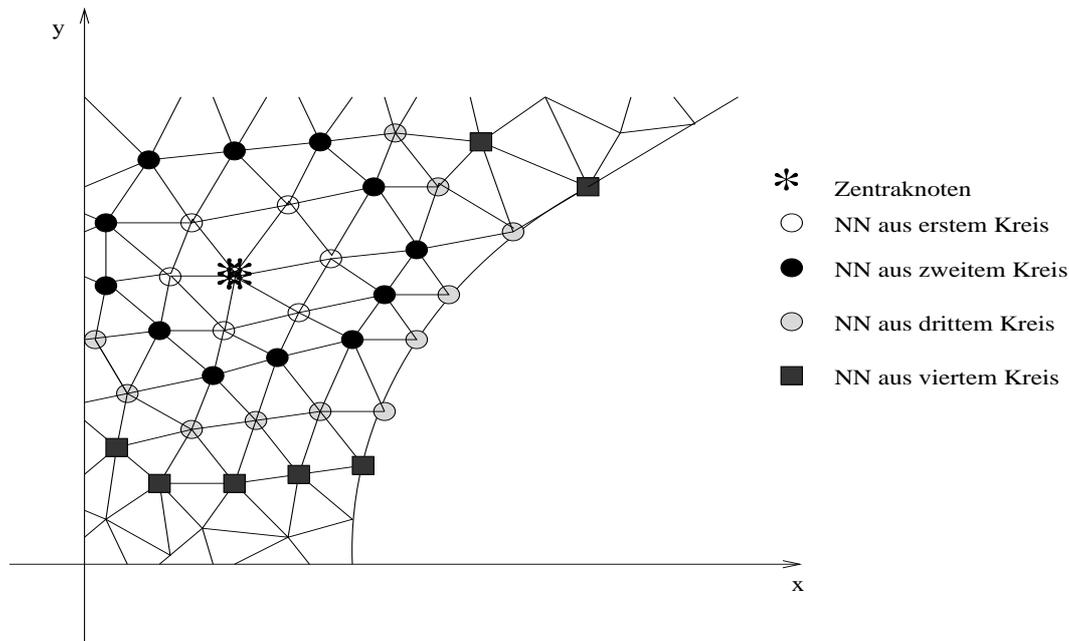


Abbildung 3.3: Knotenzentrierte Nachbarschaftssuche, dargestellt sind der Zentralknoten sowie die nächsten Nachbarn des Zentralknotens.

Bei der knotenorientierten Natural Neighbour Methode werden im ersten Schritt die nächsten Nachbarn eines Zentralknotens gesucht (Abbildung 3.3). Diese werden als Nachbarn des ersten Kreises bezeichnet. Stehen diese Nachbarn zur Verfügung, so kann man von diesen Nachbarn die Nachbarn suchen. Diese werden als Nachbarn aus dem zweiten Kreis bezeichnet. Diese Prozedur kann so lange durchgeführt werden, bis eine bestimmte geforderte Anzahl von Nachbarn vorliegt. Bei der Nachbarsuche muss die Verbindung zwischen den Knoten und den Elementen vorliegen. Dies geschieht durch die so genannte Connectivity-Liste. Diese Liste gibt an, in welchem Element ein Knoten enthalten ist. Die Connectivity-Liste wird im Allgemeinen von einem Gittergenerator wie etwa dem in dieser Arbeit verwendeten Gittergenerator PATRAN geliefert. Mit diesen Daten ist es möglich, die nächsten Nachbarn eines Zentralknotens zu suchen und die Anzahl sowie die Knotennummer der Nachbarn in einem Feld abzuspeichern. Anschliessend kann man mit Hilfe des Taylor Polynoms die räumlichen Ableitungen berechnen.

Berechnung von partiellen Ableitung mittels Taylor Polynom

Liegt das Feld mit der Anzahl der Nachbarn sowie der Knotennummer der Nachbarn vor, so kann man zur Berechnung von partiellen Ableitungen im Dreidimensionalen das Taylor Polynom

$$\begin{aligned}
p(x, y, z) = & a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(y - y_0) + a_4(z - z_0) + \\
& a_5(x - x_0)^2 + a_6(y - y_0)^2 + a_7(z - z_0)^2 + a_8(x - x_0)(y - y_0) + \\
& a_9(x - x_0)(z - z_0) + a_{10}(y - y_0)(z - z_0) + a_{11}(x - x_0)^3 + a_{12}(y - y_0)^3 + \\
& a_{13}(z - z_0)^3 + a_{14}(x - x_0)^2(y - y_0) + a_{15}(x - x_0)^2(z - z_0) + \\
& a_{16}(y - y_0)^2(x - x_0) + a_{17}(y - y_0)^2(z - z_0) + a_{18}(z - z_0)^2(x - x_0) + \\
& a_{19}(z - z_0)^2(y - y_0) + a_{20}(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) + a_{21}(x - x_0)^4 + \\
& a_{22}(y - y_0)^4 + a_{23}(z - z_0)^4 + a_{24}(x - x_0)^3(y - y_0) + a_{25}(x - x_0)^3(z - z_0) + \\
& a_{26}(y - y_0)^3(x - x_0) + a_{27}(y - y_0)^3(z - z_0) + a_{28}(z - z_0)^3(x - x_0) + \\
& a_{29}(z - z_0)^3(y - y_0) + a_{30}(x - x_0)^2(y - y_0)^2 + a_{31}(x - x_0)^2(z - z_0)^2 + \\
& a_{32}(y - y_0)^2(z - z_0)^2 + a_{33}(x - x_0)^2(y - y_0)(z - z_0) + \\
& a_{34}(y - y_0)^2(x - x_0)(z - z_0) + a_{35}(z - z_0)^2(x - x_0)(y - y_0) + O(5) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

und im Zweidimensionalen das Taylor Polynom

$$\begin{aligned}
p(x, y) = & a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(y - y_0) + \\
& a_4(x - x_0)^2 + a_5(x - x_0)(y - y_0) + a_6(y - y_0)^2 + \\
& a_7(x - x_0)^3 + a_8(x - x_0)^2(y - y_0) + a_9(y - y_0)^2(x - x_0) + a_{10}(y - y_0)^3 + \\
& a_{11}(x - x_0)^4 + a_{12}(x - x_0)^3(y - y_0) + a_{13}(x - x_0)^2(y - y_0)^2 + \\
& a_{14}(y - y_0)^3(x - x_0) + a_{15}(y - y_0)^4 + O(5) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

verwenden [40]. Hierbei sind x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Entwicklungspunkts. In folgender Tabelle sind die Anzahl der Koeffizienten sowie Verfahrens- und Fehlerordnung aufgelistet.

Knoten in 2D	Knoten in 3D	Verfahrensordnung	Fehlerordnung
3	4	1	2
6	10	2	3
10	20	3	4
15	35	4	5

Tabelle 3.1: Anzahl der Koeffizienten beziehungsweise der Knoten bei der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode

Es wird nun in einem beliebigen Zentralknoten sowie in den zugehörigen nächsten Nachbarn das Taylor Polynom um einen Entwicklungspunkt aufgestellt. Bei der vorliegenden

knotenorientierten Natural Neighbour Methode wird als Entwicklungspunkt der Zentralknoten verwendet. Man erhält für jeden Knoten ein Polynom und damit ein Gleichungssystem. Beim Verfahren vierter Ordnung besitzt das Gleichungssystem im Zweidimensionalen $n = 15$ Spalten und im Dreidimensionalen $n = 35$ Spalten. Die Anzahl der Zeilen ist von der Anzahl der nächsten Nachbarn abhängig. Die Anzahl der Zeilen m ist immer größer als die Anzahl der Spalten. Man erhält damit im Dreidimensionalen das überbestimmte $m \times n$ Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 & (\Delta x_1)^2 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta z_1)^2 \Delta x_1 \Delta y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta x_m & \Delta y_m & \Delta z_m & (\Delta x_m)^2 & (\Delta y_m)^2 & \dots & (\Delta z_m)^2 \Delta x_m \Delta y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ \vdots \\ a_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

und im Zweidimensionalen das überbestimmte $m \times n$ Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & (\Delta x_1)^2 & \Delta x_1 \Delta y_1 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_1)^4 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta x_m & \Delta y_m & (\Delta x_m)^2 & \Delta x_m \Delta y_m & (\Delta y_m)^2 & \dots & (\Delta y_m)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

mit

$$\Delta x_i = x_i - x_0, \quad \Delta y_i = y_i - y_0, \quad \Delta z_i = z_i - z_0, \quad i = 1 \dots m.$$

Bei der Natural Neighbour Methode müssen mindestens $m \geq 1.5n$ Nachbarn verwendet werden. Das überbestimmte Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.9)$$

kann anschliessend mit der iterativen Singular Value Decomposition Methode oder mit der direkten Cholesky Zerlegung gelöst werden. Ziel ist es, mit Hilfe der gegebenen Matrix \mathbf{A} und des Vektors \mathbf{b} den Vektor \mathbf{x} zu bestimmen. Damit erhält man im Dreidimensionalen den Variablenwert a_1 sowie die Gradienten a_2 bis a_{35} und im Zweidimensionalen den Variablenwert a_1 sowie die Gradienten a_2 bis a_{15} im Punkt x_0, y_0 .

Körperrandbedingungen

Zur Berücksichtigung von Geometrien müssen bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen und der Wellengleichung auf den Körperrändern die so genannten Körperrandbedingungen erfüllt werden. Besitzen die Elemente ungekrümmte Kanten, so müssen bei den zweidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen die Bedingungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \rho}{\partial x} n_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} n_y = 0, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u n_x + v n_y = 0, \quad (3.11)$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y = 0 \quad (3.12)$$

erfüllt werden. Bei der Lösung der Wellengleichung muss zur Berücksichtigung der Körperrandbedingung lediglich (3.10) beziehungsweise (3.12) erfüllt werden. Mit Hilfe des Taylor Polynoms ergibt sich bei der Lösung der Wellengleichung die Differentialgleichung für den Körperrand

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \\ &= a_1 n_x + a_2 n_y + a_3 2n_x(x - x_0) + a_4(n_y(x - x_0) + n_x(y - y_0)) + a_5 2n_y(y - y_0) + \\ &\quad a_6 3n_x(x - x_0)^2 + a_7(n_y(x - x_0)^2 + 2n_x(y - y_0)(x - x_0)) + \\ &\quad a_8(2n_y(y - y_0)(x - x_0) + n_x(y - y_0)^2) + a_9 3n_y(y - y_0)^2 + a_{10} 4n_x(x - x_0)^3 + \\ &\quad a_{11}(n_y(x - x_0)^3 + 3n_x(y - y_0)(x - x_0)^2) + \\ &\quad a_{12}(2n_y(x - x_0)^2(y - y_0) + 2n_x(y - y_0)^2(x - x_0)) + \\ &\quad a_{13}(3n_y(x - x_0)(y - y_0)^2 + n_x(y - y_0)^3) + a_{14} 4n_y(y - y_0)^3 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

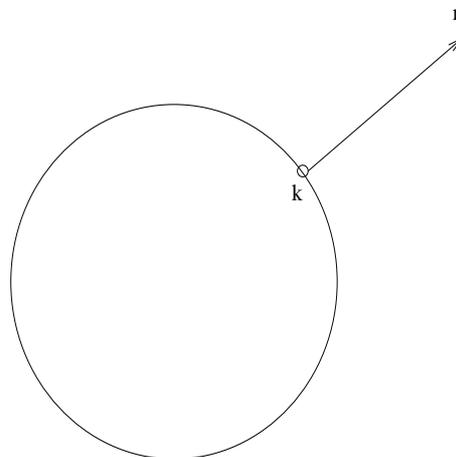


Abbildung 3.4: Normalenvektor \mathbf{n} im Punkt k auf einem Zylinder

Die Bestimmung des Normalenvektors $\mathbf{n} = (n_x \ n_y)$ ist bei der Betrachtung von komplexen Geometrien nicht ohne weiteres möglich. Als Beispiel seien hier die scharfe Hinterkante eines Tragflügels oder treppenförmige Strukturen genannt. Zur Überprüfung der hergeleiteten Körperkantenbedingung (3.13) wird in der vorliegenden Arbeit die Ausbreitung von akustischen Wellen um einen Zylinder berechnet. In diesem Fall ist der Normalenvektor \mathbf{n} im Knoten k eindeutig bestimmbar (Abbildung 3.4).

Die Körperkantenbedingungen beschreiben die Reflexionen auf dem Körperkanten und müssen bei der Lösung des überbestimmten Gleichungssystems berücksichtigt werden. In den Feldknoten wird das Taylor Polynom (3.6) und in den Randknoten (3.12) beziehungsweise (3.13) verwendet, um die gesuchten Koeffizienten a_1 bis a_{15} zu berechnen. Damit ergibt sich das folgende überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta y_1)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{x,k} & n_{y,k} & 2n_{x,k}\Delta x_k & (n_{y,k}\Delta x_k + n_{x,k}\Delta y_k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta x_m & \Delta y_m & (\Delta x_m)^2 & \dots & (\Delta y_m)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

mit

$$\Delta x_i = x_i - x_0, \quad \Delta y_i = y_i - y_0, \quad \Delta z_i = z_i - z_0, \quad i = 1 \dots m.$$

Die Lösung des Gleichungssystems kann mit der Singular Value Decomposition (SVD) Methode oder mit der Cholesky-Zerlegung durchgeführt werden.

Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen mit der SVD-Methode

Zur Lösung des überbestimmten Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wird bei der SVD Methode die $m \times n$ Matrix A in die linke $m \times n$ Matrix L , die $n \times n$ Diagonalmatrix S mit den so genannten singulären Werten und die rechte transponierte $n \times n$ Matrix R aufgespalten und es ergibt sich

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{S} \mathbf{R}^T. \quad (3.15)$$

Mit der Bedingung für orthogonale Matrizen

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.16)$$

erhält man die Inverse der A Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R} [\text{diag}(1/S_j)] \mathbf{L}^T \quad (3.17)$$

und kann damit die gesuchten Ableitungen mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.18)$$

bestimmen. Die Lösung des überbestimmten Gleichungssystems führt jedoch mit der SVD Methode zu Ungenauigkeiten und zu Instabilitäten. Ein weiterer Nachteil der SVD Methode ist, dass bei Verfeinerung des Gitters die so genannten Singulärwerte, welche in die Eigenwerte einer Matrix umgerechnet werden können, sehr klein werden. Die Genauigkeit der Lösung wird dadurch stark reduziert, es treten sogar bei Simulationen auf kartesischen Gittern Oszillation auf. Eine Alternative zur iterativen SVD-Methode ist die Cholesky-Methode.

Die Lösung eines überbestimmten Gleichungssystem mit der Cholesky Zerlegung erfordert Modifikationen am Gleichungssystem. Auf die Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen mit der Cholesky-Zerlegung

Die Cholesky-Zerlegung, nach Andre-Louis Cholesky (1875-1918), bezeichnet in der numerischen Mathematik die Zerlegung einer symmetrischen positiv definiten Matrix. Die Cholesky Zerlegung basiert darauf, dass jede symmetrisch positiv definite Matrix orthogonal diagonalisierbar ist. Die Cholesky Methode kann jedoch nur zur Lösung von bestimmten Gleichungssystemen eingesetzt werden. Zur Lösung des überbestimmten Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wird das überbestimmte System in ein bestimmtes transformiert. Hierzu muss das überbestimmte Gleichungssystem mit \mathbf{A}^T multipliziert werden und man erhält

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.19)$$

beziehungsweise mit $\mathbf{A}_e = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ und $\mathbf{b}_e = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ das bestimmte Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_e \mathbf{x} = \mathbf{b}_e . \quad (3.20)$$

Die Matrix \mathbf{A}_e ist durch diese Vorgehensweise, wie bei der Cholesky Zerlegung gefordert, symmetrisch und dadurch diagonalisierbar. Eine weitere Forderung der Cholesky Zerlegung ist, dass die A-Matrix positiv definit ist. Positiv definit heisst, dass die Eigenwerte der symmetrischen \mathbf{A}_e -Matrix positiv reell sein müssen und zugleich für die quadratische Form für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > \mathbf{0} . \quad (3.21)$$

Das bestimmte Gleichungssystem (3.20) kann dadurch, dass die \mathbf{A}_e Matrix symmetrisch positiv definit ist mit dem Cholesky Verfahren zerlegt werden. Es gilt mit diesen Annahmen

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{LL}^T \quad (3.22)$$

und damit

$$\mathbf{LL}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}_e . \quad (3.23)$$

Die Zerlegung erfolgt dadurch, dass die Spalte k von \mathbf{L} berechnet wird, indem man sukzessive sämtliche Zeilen von \mathbf{L} mit der Spalte k von \mathbf{L}^T multipliziert und einen Koeffizientenvergleich mit den Elementen der Matrix A durchführt. Dies führt zur Rechenvorschrift

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2} \quad (3.24)$$

und

$$L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} \right) \quad j = i + 1, i + 2, \dots, N \quad (3.25)$$

Die untere Dreiecksmatrix \mathbf{L} ist nach der Cholesky Zerlegung, in (3.22) und (3.23), gegeben, der Vektor \mathbf{b} und damit der Vektor \mathbf{b}_e ebenfalls. Nach der Zerlegung kann das System (3.23) mit Hilfe zweier gestaffelter Systeme gelöst werden. Im ersten Schritt wird mit

$$\mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3.26)$$

das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}_e \quad (3.27)$$

durch Vorwärtseinsetzen gelöst und man erhält den \mathbf{y} -Vektor. Mit dem berechneten \mathbf{y} -Vektor kann nun durch Rückwärtseinsetzen das lineare Gleichungssystem (3.26) gelöst werden und man erhält den gesuchten \mathbf{x} -Vektor. Durch Pivotisieren wird die Cholesky-Zerlegung zusätzlich stabilisiert. Man kann mit Hilfe des Cholesky Verfahrens zudem prüfen, ob eine gegebene symmetrische Matrix positiv definit ist, da andernfalls während der Ausführung des Algorithmus der Ausdruck unter der Wurzel in (3.24) negativ wird. Die Cholesky Zerlegung wird im Programm HYDSOL eingesetzt und liefert bei den betrachteten Fällen im Unterschall nichtoszillierende hochgenaue realistische Ergebnisse auf strukturierten wie auch unstrukturierten zwei- und dreidimensionalen Gittern.

3.2 Zeitintegrationsverfahren

3.2.1 Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren

Die Berechnung von numerischen Näherungslösungen für Anfangswertaufgaben partieller Differentialgleichungen wie den linearisierten Euler Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{U}(t)}{\partial t} = f(\mathbf{U}); \quad \mathbf{U}(t = 0) = \mathbf{U}_0 \quad (3.28)$$

kann mit dem aus der Literatur bekannten Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren durchgeführt werden. Ausgehend von dem Anfangswert \mathbf{U}_0 zum Zeitpunkt n können die Lösungen zum nachfolgenden Zeitpunkt $n + 1$ sukzessive berechnet werden. Das klassische Runge-Kutta Verfahren verwendet hierzu, wie die weitaus meisten numerischen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen, den Ansatz, Ableitungen (Differentialquotienten) durch (endliche) Differenzenquotienten zu ersetzen. Das Runge-Kutta Verfahren ist ein explizites vierstufiges Einschrittverfahren. Bei diesen vierstufigen Einschrittverfahren wird der Integrationszeitraum von n bis $n + 1$ in vier Zwischenschritte unterteilt. Die Runge-Kutta Verfahren können in beliebig hoher Genauigkeit konstruiert werden. Das Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung ist wegen der für die meisten technischen Anwendungen akzeptablen Genauigkeit und Rechenzeit weit verbreitet. Allgemein gilt für die Runge-Kutta Verfahren

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \sum_{r=1}^R c_r f^r \quad (3.29)$$

mit

$$f^r = f(t + \Delta t a_r, \mathbf{U}^n + \Delta t \sum_{s=1}^R b_{rs} f^s), \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (3.30)$$

Das aus der Literatur bekannte Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung benötigt folgende Zwischenschritte:

1. Explizit Euler-Halbschritt

$$\mathbf{U}'_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_n, \mathbf{U}_n) \quad (3.31)$$

2. Implizit Euler-Halbschritt

$$\mathbf{U}''_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}'_{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.32)$$

3. Leap-Frog Mittelpunktsregel

$$\mathbf{U}'_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \cdot f(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}''_{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.33)$$

4. Simpson Regel

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \cdot \frac{1}{6} (f(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}'_{n+\frac{1}{2}}) + 4f(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}''_{n+\frac{1}{2}}) + f(t_{n+1}, \mathbf{U}'_{n+1})). \quad (3.34)$$

Ein grosser Nachteil der vorliegenden Zwischenschrittverfahren ist der hohe Speicheraufwand, da die vorangegangenen Datenfelder abgespeichert werden müssen. Zur Reduzierung des Speicherbedarfs kann man das so genannte Low Storage Runge-Kutta Verfahren verwenden. Anstatt der üblichen drei Felder, der vorangegangenen Zeitschritte, werden bei diesem Verfahren die Daten in das gleiche Feld geschrieben. Damit erhält man die Vorschrift

$$\Phi^{r+1} = \Phi^n + \Delta t k_r \cdot f(t_r, \Phi_r), \quad r = 1, 2, \dots, 4 \quad (3.35)$$

mit den Koeffizienten

$$k_1 = 0.07, \quad k_2 = 0.19, \quad k_3 = 0.42, \quad k_4 = 1.0 \quad (3.36)$$

wobei die Definition $\mathbf{U}^5 = \mathbf{U}^{n+1}$ und $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^n$ zu beachten ist.

3.2.2 Zeitintegrationsverfahren der akustischen Wellengleichung

Die akustische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p'^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'^n}{\partial z^2} \right) + Q^n$$

mit den Anfangswerten $p(t = 0) = p_0$ ist eine partielle Differentialgleichung hyperbolischen Typs und kann durch das explizite Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung

$$p'^{m+1} = 2p'^m - p'^{m-1} + (\Delta t)^2 c^2 \left(\frac{\partial^2 p'^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'^m}{\partial z^2} \right) + (\Delta t)^2 Q^n + O(2) \quad (3.37)$$

numerisch gelöst werden. Mit Hilfe des Drucks p' zum Zeitpunkt $n - 1$ und des Drucks p' zum Zeitpunkt n kann mit dieser expliziten Formulierung der Druck zum Zeitpunkt $n + 1$ berechnet werden. Die Quelle Q und die räumlichen Ableitungen $\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 p'}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}$ müssen zum Zeitpunkt n vorliegen. Die Ableitungen können auf unstrukturierten Gittern mit der in dieser Arbeit entwickelten Natural Neighbour Methode und auf strukturierten Gittern mit der klassischen Differenzen Methode berechnet werden.

3.3 Nichtreflektierende Randbedingungen

In der numerischen Aeroakustik werden die linearisierten Euler Gleichungen sowie die akustische Wellengleichung auf einem diskreten finiten Gitter gelöst. Die nach aussen laufenden akustischen Wellen müssen an der äusseren Berandung des Rechengebiets absorbiert werden, so dass keine künstlichen Störungen in das Rechengebiet laufen und die Lösung der linearisierten Euler Gleichungen verfälschen. In den folgenden Abschnitten wird auf die folgenden Verfahren eingegangen:

- Ghost Point Konzept mit Bayliss-Turkel Randbedingungen
- Sponge Layer Prinzip
- Randbedingungen der Wellengleichung

Beim Verfahren nach Bayliss und Turkel werden im Innenfeld die linearisierten Euler Gleichungen und in den so genannten Ghost Points die Bayliss-Turkel Strahlungs- und Ausströmrandbedingungen gelöst [5]. Die Sponge Layer Methode verwendet eine Dämpfungsfunktion, um die Störungen in der so genannten Sponge Layer herunter zu dämpfen. Bei der Sponge Layer Methode müssen die linearisierten Euler Gleichungen durch einen Quellterm modifiziert werden [54]. Bei der Lösung der Wellengleichung werden die Randbedingungen nach Clayton eingesetzt [12].

3.3.1 Ghost Point Konzept mit Bayliss-Turkel Randbedingungen

Durch die Vorgabe eines finiten Rechengebiets benötigt man an der äusseren Berandung des Rechengebiets eine Zone, in welcher die nach aussen laufenden Wellen absorbiert werden. Die Knoten in dieser Zone werden Ghost Points genannt. In Abbildung 3.5 werden die unterschiedlichen Wellen, die am Rand auftreten können dargestellt [5]. Die asymptotischen Strahlungsrandbedingungen nach Bayliss und Turkel

$$\left(\frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

sind in der Lage, die nach aussen laufenden Wellen mittels Fernfeldlösung der Euler Gleichungen zu simulieren und die einfallenden Wellen zu absorbieren. Mit Hilfe der radialen Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.39)$$

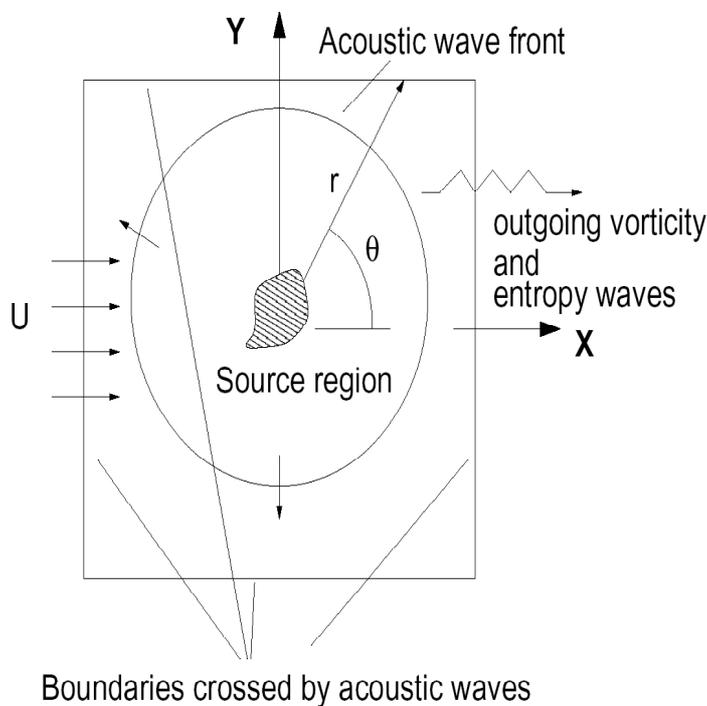


Abbildung 3.5: Überlagerung verschiedener Wellenarten an der äusseren Berandung

können die Strahlungsrandbedingungen (3.38) überführt werden in

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} = -V(\theta) \cos(\theta) \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,x} - V(\theta) \sin(\theta) \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,y} - \frac{V(\theta)}{2r} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Die Strahlungsrandbedingungen gelten nur an den Berandungen, an denen rein akustisch abgestrahlte Signale ankommen. Bei einer akustischen Abstrahlung mit überlagerten konvektiven Anteilen gelten die so genannten Ausströmrandbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= \frac{1}{c_\infty^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} \\ \frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{p'}{2r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die richtungsabhängige radiale Ausbreitungsgeschwindigkeit der akustischen Wellen

$$V(\theta) = \bar{u} \cos(\theta) + \sqrt{c_0^2 - \bar{u}^2 \sin^2(\theta)} \quad (3.42)$$

setzt sich zusammen aus der Konvektionsgeschwindigkeit \bar{u} und der Schallgeschwindigkeit des ruhenden Mediums c_∞ . Der Winkel θ bezeichnet den Winkel zwischen der x -Achse und der radialen Ausbreitungsrichtung. Nach einer Umformung von (3.41) erhält man für die Ausströmrandbedingungen

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} = \begin{bmatrix} (\bar{u} - V \cos(\theta)) \frac{p'}{c_\infty} - \bar{u} \rho' \\ \bar{u} u' - \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{u} v' \\ V \cos(\theta) p' \end{bmatrix}_{,x} - \begin{bmatrix} V \sin(\theta) \frac{p'}{c_\infty} \\ 0 \\ \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ V \sin(\theta) p' \end{bmatrix}_{,y} - \frac{V}{2r} \begin{bmatrix} \frac{p'}{c_\infty} \\ 0 \\ 0 \\ p' \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Es muss bei der Lösung der Strahlungsrandbedingungen (3.40) wie auch der Ausströmrandbedingungen (3.43) beachtet werden, dass der Abstand vom Quellzentrum zum äusseren Rand sinnvoll gewählt wird, da dies sonst zu den unerwünschten Reflexionen führt. Im Innenfeld werden die räumlichen Ableitungen der linearisierten Euler Gleichungen mit zentralen Finiten Differenzen gelöst. In der äusseren Randzone, mit den so genannten Ghost Points, müssen die vorgestellten absorbierenden Randbedingungen mit Hilfe von einseitigen Finiten Differenzen gelöst werden. Die Störgrößen in den Ghost Points müssen berechnet

werden, damit die Punkte des Innenfelds, welche über das Innenfeld herausragen mit Informationen versorgt werden können. Durch diese Vorgehensweise werden die beiden Zonen gekoppelt. Die Dicke der äusseren Zone ist von der gewählten räumlichen Ordnung des Verfahrens abhängig.

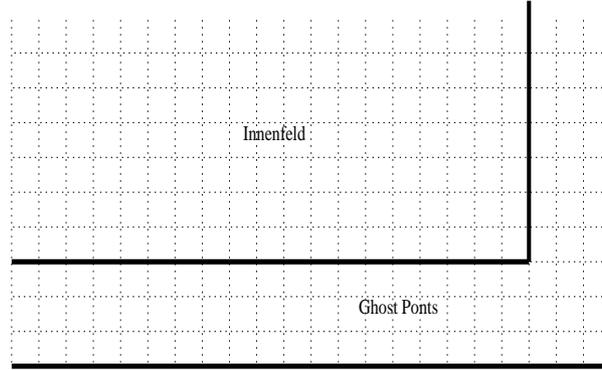


Abbildung 3.6: Beim Ghost Point Konzept werden im Innenfeld die linearisierten Euler Gleichungen und in den äusseren Ghost Points die Bayliss-Turkel Randbedingungen gelöst.

Zur Bestimmung der räumlichen Ableitungen wird eine zentrale Differenz mit sieben Stützstellen verwendet. Dadurch benötigt man drei Knotenreihen, in denen die vorgestellten absorbierenden Randbedingungen gelöst werden müssen. Die vorgestellten absorbierenden Randbedingungen sind bezüglich Rechenzeit sehr effektiv und zeigen sogar bei schräg einfallenden Wellen keinerlei sichtbare Reflexionen an der äusseren Berandung.

3.3.2 Sponge Layer Randbedingungen

Das Sponge Layer Prinzip ist ebenfalls in der Lage, bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen Reflexionen an der äusseren Berandung zu vermeiden [29]. Bei diesem Verfahren werden in einer äusseren Zone, welche breit genug gewählt werden muss, die Störgrößen abgesaugt, bevor sie den Rand erreichen. Dies erfolgt durch die Erweiterung der linearisierten Euler Gleichungen um einen Quellterm, so dass für die linearisierten Euler Gleichungen im Zweidimensionalen geschrieben werden kann

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \bar{u}\rho' + \bar{\rho}u' \\ \bar{u}u' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{u}v' \\ \bar{u}p' + \gamma\bar{p}u' \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \bar{v}\rho' + \bar{\rho}v' \\ \bar{v}u' \\ \bar{v}v' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{v}p' + \gamma\bar{p}v' \end{bmatrix}_{,y} = -\sigma \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Die Parabelfunktion

$$\sigma = \left(\frac{d}{D_{SP}}\right)^2 \quad (3.45)$$

beschreibt den räumlichen Verlauf der Absaugung. Im Innenfeld ist $\sigma = 0$, das heisst es wird nicht abgesaugt. An der äusseren Berandung wird mit $\sigma = 1$ vollständig abgesaugt.

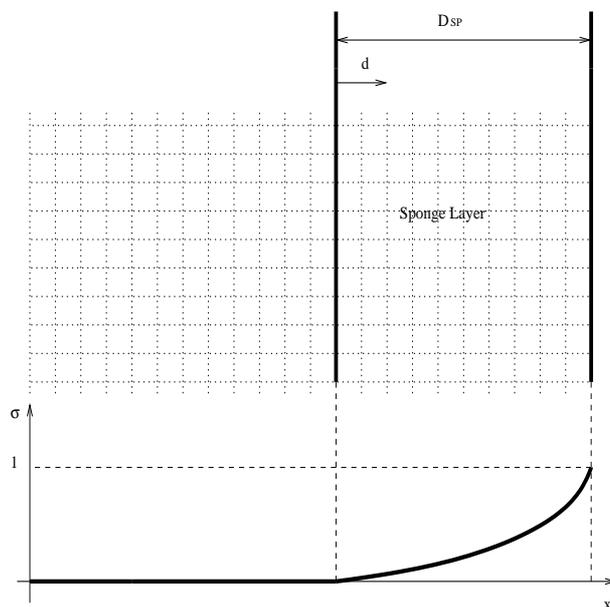


Abbildung 3.7: Räumlicher Verlauf der Absaugung beim Sponge Layer Prinzip

In Abbildung 3.7 ist die Funktion schematisch dargestellt. Die Breite des Sponge Layer sollte mit $D_{SP} \geq 10$ Reihen gewählt werden. Das Finite Volumen Programm HYDSOL verwendet eine Kombination aus Ghost Point und Sponge Layer Prinzip und liefert nahezu reflexionsfreie Ergebnisse.

3.3.3 Randbedingungen nach Clayton

Zur Vermeidung von Reflexionen kann man bei der Lösung der akustischen Wellengleichung die Randbedingungen nach Clayton verwenden. Die Wellen treffen immer unter verschiedenen Winkeln auf den Rand auf. Die Randbedingungen nach Clayton sind hier sehr effektiv und besitzen im gesamten Winkelbereich hervorragende Absorptionseigenschaften. Das heißt, dass sich an den Ausströmerrändern keinerlei Reflexionen mehr ergeben. Die akustische Wellengleichung wird an den Rändern modifiziert und es gilt am oberen Rand des Rechengebiets

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 p'}{\partial y \partial t}, \quad (3.46)$$

am unteren Rand des Rechengebiets

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 p'}{\partial y \partial t}, \quad (3.47)$$

am linken Rand des Rechengebiets

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} \quad (3.48)$$

und am rechten Rand des Rechengebiets

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} - c \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t}. \quad (3.49)$$

Die Berechnung der räumlichen wie auch der gemischten Ableitungen erfolgt mit Hilfe der klassischen Finite Differenzen Methode.

3.4 Dispersion Relation Preserving (DRP) Verfahren nach Tam und Webb

Die akustische Analogie sagt aus, dass es möglich ist, akustische Größen getrennt von der schallerzeugenden Strömung zu untersuchen. Akustische Größen sind verglichen mit den Größen des mittleren Strömungsfeldes betragsmäßig sehr klein. Dadurch können nichtlineare Effekte vernachlässigt werden. Die Ausbreitung der akustischen Information gehorcht damit den linearisierten Euler Gleichungen und muss durch die geringen Amplituden der akustischen Störgrößen mit einem hochgenauen numerischen Verfahren durchgeführt werden. Numerische Verfahren verhalten sich unterschiedlich bei verschiedenen Frequenzen. Amplituden- und Phasenfehler führen zu einer ungenauen Ausbreitung der Wellen [56]. Die Koeffizienten des klassischen Finite Differenzenmoleküls werden aus dem Taylor Abgleich hergeleitet und gewährleisten die bestmögliche Abbruchfehlerordnung. Bei zentralen Finite Differenzen Verfahren erhält man mit $(2N + 1)$ Stützstellen für die erste Ableitung der Funktion Φ im Punkt i

$$\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_i \approx \frac{1}{q} \sum_{n=-N}^{n=N} a_n \Phi_{i+n}. \quad (3.50)$$

Die Koeffizienten a_n sowie die Abbruchfehlerordnung können bei Anwendung des klassischen Finite Differenzen Verfahrens aus Tabelle B.1 entnommen werden. In der numerischen Aeroakustik ist jedoch ausser der Fehlerordnung auch die spektrale Auflösungsqualität und damit die genaue Berechnung einer Ableitung im gesamten spektralen Bereich sehr wichtig.

Die gewöhnlichen Finite Differenzen Verfahren sind für den langwelligen Bereich ausgelegt. Im kurzwelligen Bereich sind diese jedoch nicht in der Lage, die Dispersionsrelation noch zu gewährleisten (Abbildung 3.8).

In Abbildung 3.9 ist die Abbildungseigenschaft verschiedener zentraler Differenzen Verfahren für die erste Ableitung in Abhängigkeit von der Wellenzahl k dargestellt. Das DRP Verfahren optimiert das klassische Finite Differenzen Verfahren und verbessert im kurzwelligen Bereich die Dispersionseigenschaften des klassischen Finite Differenzen Verfahrens. Dies geschieht mit Hilfe der Fourier Transformation von (3.50) sowie mit Hilfe des Ableitungs- und Verschiebungssatzes. Mit der Fourier Transformation können die unterschiedlichen Differenzen Quotienten im Frequenzbereich dargestellt und verglichen werden. In Abbildung 3.9 sind die Vorteile des DRP Schemas gegenüber dem klassischen Finite Differenzen Verfahren dargestellt. Das DRP Verfahren vierter Ordnung ist im kurzwelligen Bereich sogar

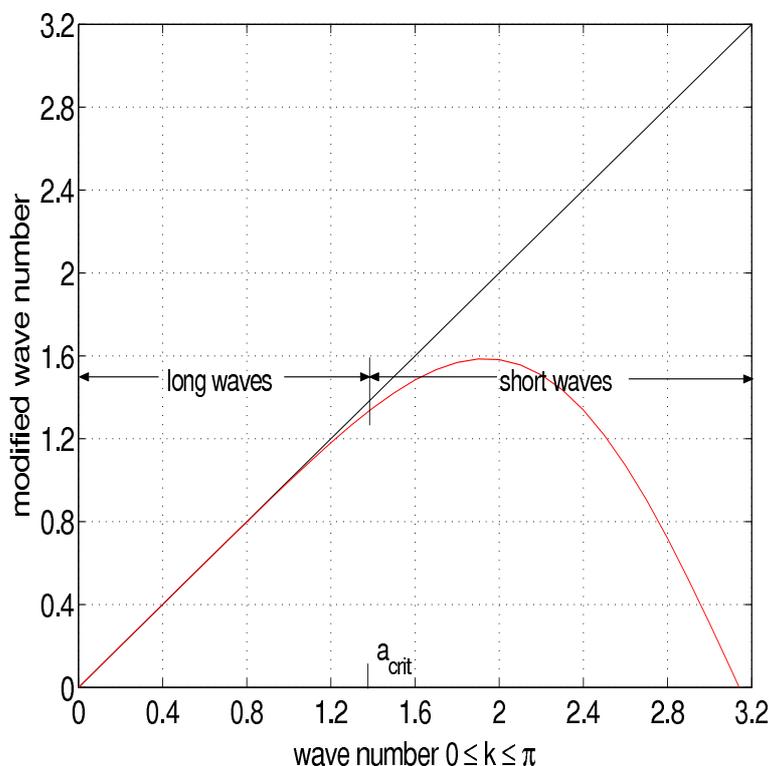


Abbildung 3.8: Modifizierte Wellenzahl

genauer als das klassische Finite Differenzen Verfahren sechster Ordnung. Eine detaillierte Herleitung des DRP Schemas kann den Arbeiten von Tam und Webb entnommen werden [55, 56, 57, 58]. Die optimierten Koeffizienten der Finite Differenzenmoleküle sind für den Optimierungsbereich $0 \leq k\Delta x \leq 1.1$ ausgelegt und sind mit

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0.0 \\
 a_1 &= 0.77088238051822552 \\
 a_2 &= -0.16670590441458046 \\
 a_3 &= 0.02084314277031176
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

gegeben.

Verfahren	Abl.	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	q	Ord.
FD	Φ'		1	-8	0	8	1		$12\Delta x$	O4
FD	Φ'	-1	9	-45	0	45	-9	1	$60\Delta x$	O6
DRP	Φ'	$-a_3$	$-a_2$	$-a_1$	a_0	a_1	a_2	a_3	Δx	O4

Tabelle 3.2: Klassische und optimierte Finite Differenzen Formeln für die 1. Ableitung Φ' im Punkt i

Die Koeffizienten des klassischen Finite Differenzen Verfahren sowie des optimierten DRP Schemas sind in Tabelle 3.2 aufgelistet.

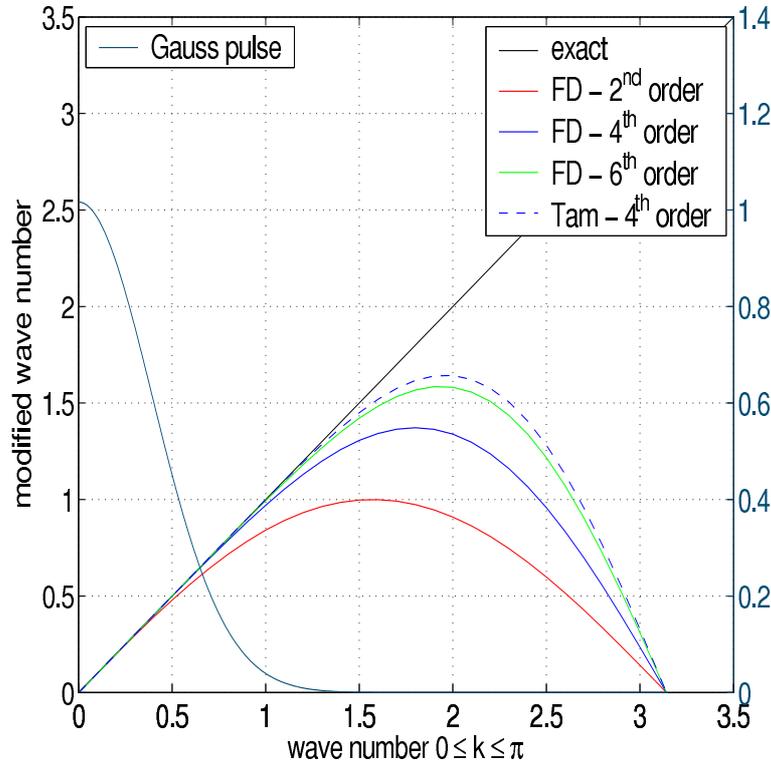


Abbildung 3.9: Vergleich der modifizierten Wellenzahl

3.4.1 Künstliche selektive Dämpfung

Das DRP Schema von Tam ist in der Lage, Wellen mit wenigen Punkten hochgenau zu approximieren. Das Wellenspektrum kann in einen langwelligen und einen kurzwelligen Bereich aufgespalten werden (Abbildung 3.8). Die langen Wellen entsprechen niedrigen Frequenzen und werden angemessen wiedergegeben. Im kurzwelligen Bereich sind die Abweichungen jedoch groß. Diese numerischen kurzen Wellen verfälschen die Lösung der in dieser Arbeit betrachteten linearisierten Euler Gleichungen. Zur Verbesserung der Lösung ist es notwendig, diese störenden Wellen zu dämpfen. Die Dämpfung darf nur die kurzen Wellen betreffen, der Einfluss auf die langen Wellen muss hierbei minimiert werden. Mit Hilfe des Dämpfungsterms D_l kann die geforderte Dämpfung in der diskretisierten Differentialgleichung

$$\frac{d\Phi_l}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j \Phi_{l+j} = D_l \quad (3.52)$$

realisiert werden. Mit der Annahme, dass der Dämpfungsterm proportional zu den Variablenwerten innerhalb des Einflussgebietes ist, kann geschrieben werden

$$D_l = -\frac{1}{Re} \sum_{j=-3}^3 d_j \Phi_{l+j} \quad (3.53)$$

Die künstliche Reynoldszahl $Re = \frac{c_0 \Delta x}{\nu}$ des Gitters mit der künstlichen Viskosität ν muss die Bedingung $Re^{-1} \leq 0.3$ erfüllen. Die verwendeten Koeffizienten

$$\begin{aligned}d_0 &= 0.2873928425 \\d_1 = d_{-1} &= -0.2261469518 \\d_2 = d_{-2} &= 0.1063035788 \\d_3 = d_{-3} &= -0.0238530482\end{aligned}\tag{3.54}$$

sind der Arbeit von Tam entnommen [55].

Kapitel 4

Finite Volumen Verfahren

In den sechziger und siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts begannen Wissenschaftler wie Godunov, Lax oder auch McCormack die Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik numerisch zu lösen und erzielten damit sehr schnell Erfolge. Die neu entstandene numerische Strömungsmechanik, oder auch Computational Fluid Dynamics (CFD) genannt, spielt mittlerweile eine wichtige Rolle in vielen technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungen. Eines in der CFD verwendeten Verfahren, das Finite Volumen Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur Lösung der Erhaltungsgleichungen. Erhaltungsgleichungen sind spezielle partielle Differentialgleichungen, denen ein Erhaltungssatz zugrunde liegt. Mit dem Satz von der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung erhält man ein gekoppeltes Gleichungssystem von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. In der vorliegenden Arbeit werden Finite Volumen Methoden zur Lösung der linearisierten Euler- und der Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik eingesetzt [59].

Das Prinzip der vorliegenden numerischen Verfahren beruht darauf, dass zunächst das Rechengebiet in eine endliche (finite) Zahl von Gitterzellen (Volumenelemente) zerlegt wird. In jeder dieser Zellen gilt der Erhaltungssatz. Die Veränderung einer Erhaltungsgröße wie Masse, Impuls oder Energie in einer Zelle erfolgt also nur durch Ab- oder Hinzufießen von Masse, Impuls oder Energie über den Rand der Zelle.

Berechnet man eine gute Approximation dieser Flüsse, so ergeben sich Gleichungen, welche die Veränderung der Größen in den Zellen mit der Zeit beschreiben. Ein besonderer Vorteil der Finite Volumen Verfahren ist die Flexibilität bei der Wahl der Gittergeometrie sowie das natürliche Zulassen von unstetigen Lösungen, wie sie in der Gasdynamik bei Stößen auftreten. Im Gegensatz zur Differenzen Methode wird bei der Finite Volumen Methode die integrale Form der Erhaltungsgleichungen verwendet. Auf die Vorgehensweise bei den Finite Volumen Verfahren wird in den folgenden Kapiteln noch weiter eingegangen.

Wie erwähnt, wird das Problemgebiet dabei in eine endliche Anzahl von Kontrollvolumina beliebiger Form unterteilt. An jedem Kontrollvolumen werden nach dem Erhaltungsprinzip eine Bilanz von Flüssen und Quellen aufgestellt. Die Diskretisierung dieser Flüsse und Quellen an bestimmten Stellen führt zu einem algebraischen Gleichungssystem.

Es gibt zwei Möglichkeiten das Kontrollvolumen festzulegen, die knotenzentrierte und die zellzentrierte Anordnung. Das am Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der

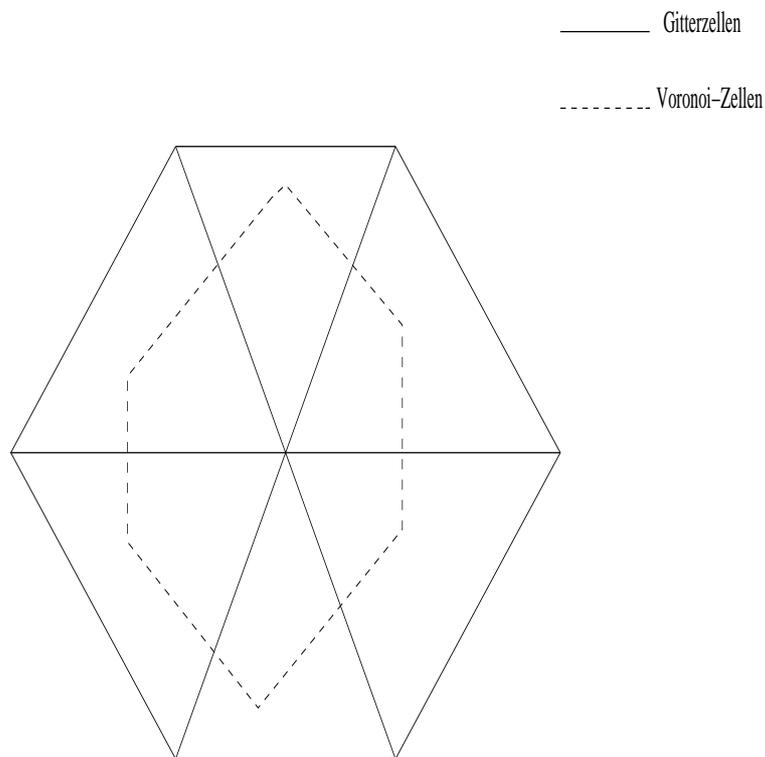


Abbildung 4.1: Vergleich zellzentriertes- und knotenzentriertes Finite Volumen Verfahren

Universität Stuttgart entwickelte und in dieser Arbeit weiterentwickelte Programm HYDSOL ist ein zellzentriertes Finite Volumen Verfahren. Bei dieser Variante werden die Flüsse über die Zellseiten der Gitterzellen aufsummiert. Bei der knotenzentrierten Variante der Finite Volumen Verfahren werden die Flüsse über die Zellseiten der Voronoi-Zellen berechnet. Auf diese Variante wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

Der Strömungscode HYDSOL basiert auf einer zellzentrierten Implementierung. Die Kontrollvolumen entsprechen somit den Gitterzellen. Der Aufbau des Programms HYDSOL ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

Der konvektive und diffusive Fluss über das Kontrollvolumen ist somit die Summe der Oberflächenintegrale über die jeweiligen Seiten. Die Approximation der Oberflächenintegrale erfolgt in zwei Schritten:

- Approximation der Variablenwerte an der Kante beziehungsweise an der Fläche eines Kontrollvolumens durch die Werte des Zellmittelpunkts.
- Approximation des Fluss-Integrals durch Werte auf der Kante beziehungsweise an einem Oberflächenelement eines Kontrollvolumens.

Zur Wahrung des Erhaltungsprinzips dürfen die Kontrollvolumen sich nicht gegenseitig überlappen. Die Approximation des Fluss-Integrals und des Variablenwertes auf der Seite des Kontrollvolumens müssen von gleicher Ordnung sein.

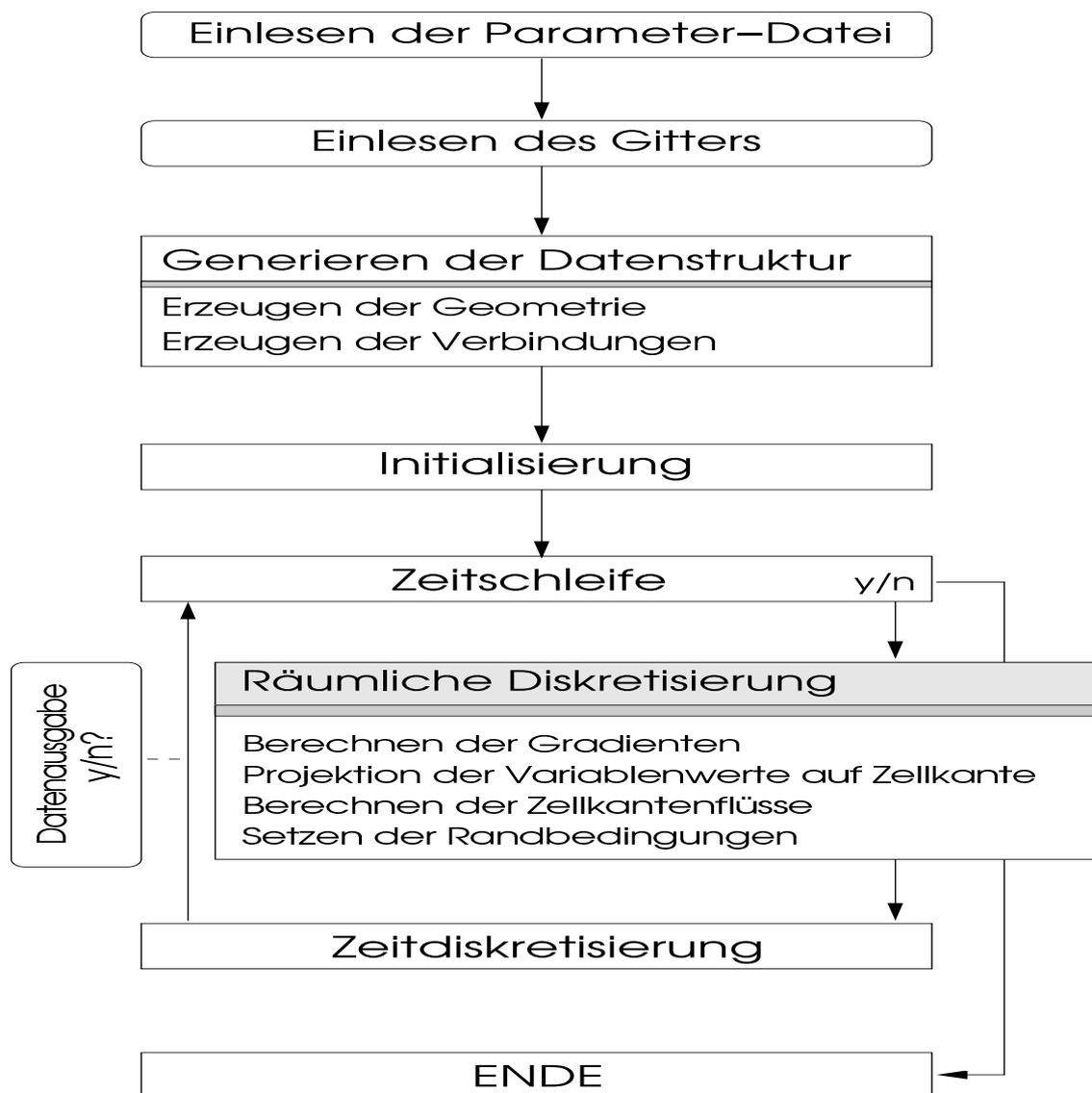


Abbildung 4.2: Aufbau des Programms HYDSOL

In der vorliegenden Arbeit wird die akustische Analogie angewendet [41]. Die Berechnung der Schallausbreitung erfolgt mit Hilfe der linearisierten Euler Gleichungen. Die Bestimmung der aeroakustischen Quellen kann mit messtechnischen Verfahren wie der Array Messtechnik oder numerisch mit Quellgenerierungsmethoden wie der EIF Methode durchgeführt werden [10, 24]. Die Finite Volumen Methoden sind in der Lage, komplexe Geometrien bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen zu berücksichtigen.

Bei der vorliegenden Finite Volumen Methode wird im Dreidimensionalen das Rechengebiet durch beliebige Hexaeder und Tetraeder und im Zweidimensionalen durch Rechtecke und Dreiecke diskretisiert.

Dreidimensionale Formulierung

Im Dreidimensionalen können die linearisierten Euler Gleichungen in der Flussformulierung

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z = \mathbf{Q} \quad (4.1)$$

mit dem Variablenvektor

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix},$$

den Flüssen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{u}\rho' + \bar{\rho}u' \\ \bar{u}u' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{u}v' \\ \bar{u}w' \\ \bar{u}p' + \gamma\bar{p}u' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{v}\rho' + \bar{\rho}v' \\ \bar{v}u' \\ \bar{v}v' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{v}w' \\ \bar{v}p' + \gamma\bar{p}v' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bar{w}\rho' + \bar{\rho}w' \\ \bar{w}u' \\ \bar{w}v' \\ \bar{w}w' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{w}p' + \gamma\bar{p}w' \end{bmatrix}$$

sowie dem Quellvektor

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{\rho'} \\ Q_{u'} \\ Q_{v'} \\ Q_{w'} \\ Q_{p'} \end{bmatrix}$$

und mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{\partial F(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = AU_x, \quad \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial G(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} = BU_y$$

und

$$\frac{\partial H(U)}{\partial z} = \frac{\partial H(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial z} = CU_z,$$

umgeformt werden in

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B}\mathbf{U}_y + \mathbf{C}\mathbf{U}_z = \mathbf{Q} \quad (4.2)$$

beziehungsweise ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{\rho}c^2 & 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}c^2 & 0 & \bar{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{,y} + \\
 \begin{bmatrix} \bar{w} & 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{w} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}c^2 & \bar{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{,z} = \begin{bmatrix} Q_{\rho'} \\ Q_{u'} \\ Q_{v'} \\ Q_{w'} \\ Q_{p'} \end{bmatrix}. \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

In (4.2) ist die Matrix A die Jacobi Matrix des Flusses F , die Matrix B die Jacobi Matrix des Flusses G und C die Jacobi Matrix des Flusses H . Die Matrizen A , B und C werden mit Hilfe der Geschwindigkeiten \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} sowie der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}}} \tag{4.4}$$

mit der Umgebungsdichte $\bar{\rho}$, dem Umgebungsdruck \bar{p} und dem Adiabatenkoeffizienten γ bestimmt.

Zweidimensionale Formulierung

Die Umformung der zweidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen in die Flussformulierung

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{Q} \tag{4.5}$$

mit dem Variablenvektor

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix},$$

den Flüssen

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \bar{u}\rho' + \bar{\rho}u' \\ \bar{u}u' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{u}v' \\ \bar{u}p' + \gamma\bar{p}u' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \bar{v}\rho' + \bar{\rho}v' \\ \bar{v}u' \\ \bar{v}v' + \frac{p'}{\bar{\rho}} \\ \bar{v}p' + \gamma\bar{p}v' \end{bmatrix}$$

und dem Quellterm

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_\rho \\ Q_u \\ Q_v \\ Q_p \end{bmatrix}$$

erfolgt ebenfalls mit der Kettenregel und man erhält die quasi-lineare Formulierung

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B}\mathbf{U}_y = \mathbf{Q} \quad (4.6)$$

beziehungsweise in Komponenten ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,t} + \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{\rho}c^2 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,x} + \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{\rho}c^2 & \bar{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{,y} = \begin{bmatrix} Q_{\rho'} \\ Q_{u'} \\ Q_{v'} \\ Q_{p'} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Im Folgenden wird die Finite Volumen Methode zur Lösung der linearisierten Euler Gleichungen auf strukturierten wie auch unstrukturierten Gittern angewandt.

4.1 Finite Volumen Diskretisierung

Bei den Finite Volumen Verfahren wird das Rechengebiet in finite Volumina unterteilt. Im vorliegenden Fall wird mit dem Gittergenerator PATRAN das zwei- beziehungsweise dreidimensionale Feld durch Rechtecke und Dreiecke sowie durch Hexaeder und Tetraeder diskretisiert. Der Gittergenerator liefert in allen Fällen die Koordinaten der Knoten sowie die Verbindung der Knoten mit den Zellen und eine Kennzahl für die jeweilige Randkante beziehungsweise Randfläche (Abbildung 4.4A). Mit diesen Daten kann das Programm HYDSOL die Fläche beziehungsweise das Volumen einer Zelle sowie alle benötigten Normalenvektoren berechnen. Die Normalenvektoren auf einer Zellkante beziehungsweise auf einer Zellfläche werden benötigt, um den Fluss über eine Zellkante beziehungsweise Zellfläche berechnen zu können. Bei den Finite Volumen Verfahren werden zuerst die linearisierten Euler

Gleichungen in Flussformulierung über die Zelle aufintegriert. Man erhält (ohne Quellterm) im Dreidimensionalen aus

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

die integrale Formulierung

$$\int_V (\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z) dV = \mathbf{0} . \quad (4.9)$$

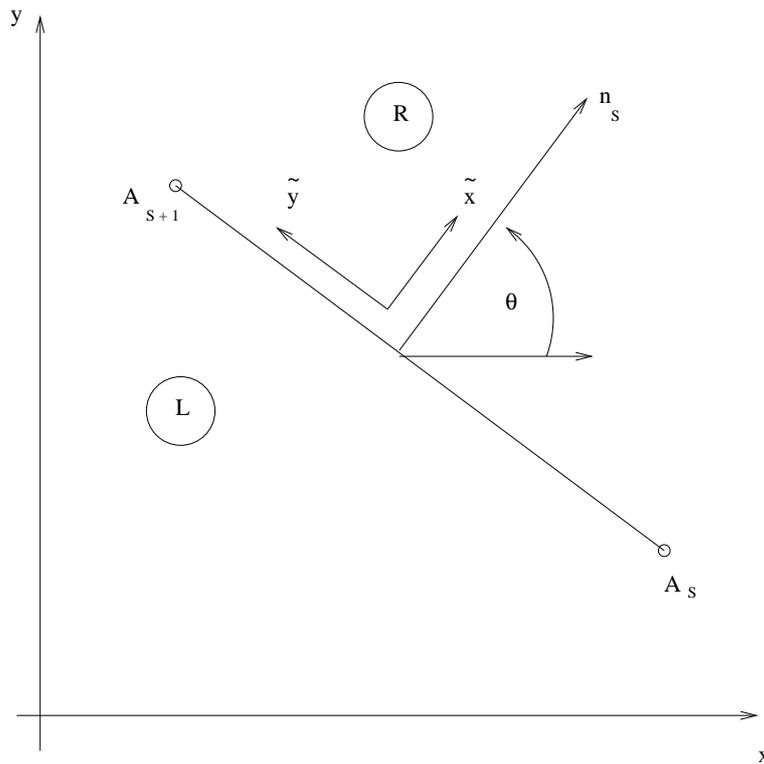


Abbildung 4.3: Randkante eines Elements

Mit dem Satz von Gauss kann das Volumenintegral über $\mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z$ in ein Oberflächenintegral umgeformt werden und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_A \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} dA = 0 . \quad (4.10)$$

V steht hier für das Volumen des Kontrollvolumens und A für die Oberfläche des Kontrollvolumens. Die Matrix der Flüsse ist hier mit

$$\underline{\mathbf{E}} = (\mathbf{F} \ \mathbf{G} \ \mathbf{H}) \quad (4.11)$$

definiert. Das Oberflächenintegral setzt sich zusammen aus den Integralen über alle N Kanten beziehungsweise Flächen einer Zelle

$$\int_A \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} dA = \sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}_S dA . \quad (4.12)$$

Mit (4.12) sowie dem Normalenvektor

$$\mathbf{n}_S = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_S \cos \phi_S \\ \sin \theta_S \sin \phi_S \\ \cos \theta_S \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

ergibt sich

$$\sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}_S dA = \sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} [\sin \theta_S \cos \phi_S \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_S \sin \phi_S \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \cos \theta_S \mathbf{H}(\mathbf{U})] dA . \quad (4.14)$$

Damit kann (4.10) umgeformt werden in

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} [\sin \theta_S \cos \phi_S \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_S \sin \phi_S \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \cos \theta_S \mathbf{H}(\mathbf{U})] dA = 0 . \quad (4.15)$$

Eine Normierung des integralen Wertes $\int_V U dV$ durch das Volumen und eine Umformung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_V U dV \right) = -\frac{1}{V} \sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} [\sin \theta_S \cos \phi_S \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_S \sin \phi_S \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \cos \theta_S \mathbf{H}(\mathbf{U})] dA . \quad (4.16)$$

Die Euler sowie die Navier-Stokes Gleichungen sind rotationsinvariant. Dadurch kann man diese in die Normalenrichtung transformieren (Abbildung 4.3). Dies geschieht im Dreidimensionalen mit Hilfe der Transformationsbeziehung

$$\sin \theta_S \cos \phi_S \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_S \sin \phi_S \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \cos \theta_S \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \underline{\mathbf{T}}_S^{-1} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{T}}_S \mathbf{U}) . \quad (4.17)$$

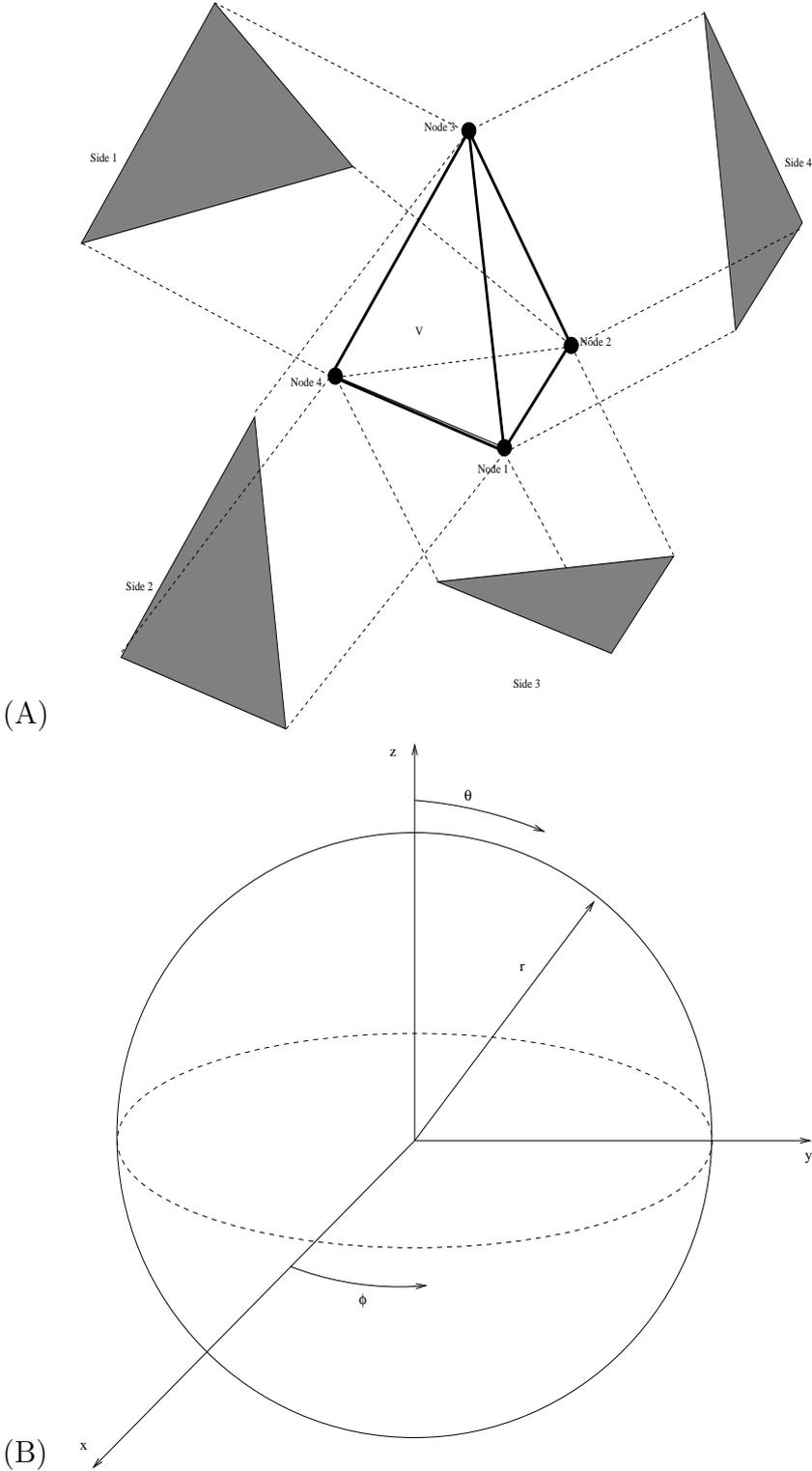


Abbildung 4.4: (A) Seitenflächen eines Tetraeder Elements, (B) Zylinderkoordinatensystem

Hierbei lässt sich die Rotationsmatrix

$$T_S(\theta_S, \phi_S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_S \cos \phi_S & \sin \theta_S \sin \phi_S & \cos \theta_S & 0 \\ 0 & \cos \theta_S \cos \phi_S & \cos \theta_S \sin \phi_S & -\sin \theta_S & 0 \\ 0 & -\sin \phi_S & \cos \phi_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

sowie die Inverse der Rotationsmatrix

$$T_S^{-1}(\theta_S, \phi_S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_S \cos \phi_S & \cos \theta_S \cos \phi_S & -\sin \phi_S & 0 \\ 0 & \sin \theta_S \sin \phi_S & \cos \theta_S \sin \phi_S & \cos \phi_S & 0 \\ 0 & \cos \theta_S & -\sin \theta_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

mit Hilfe des Normalenvektors \mathbf{n}_S in die Rotationsmatrix

$$T(n_1, n_2, n_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & \frac{n_1 n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} & \frac{n_2 n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} & -\sqrt{1-n_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{\sqrt{1-n_3^2}} & \frac{n_1}{\sqrt{1-n_3^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

beziehungsweise deren Inverse

$$T^{-1}(n_1, n_2, n_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & \frac{n_1 n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} & \frac{-n_2}{\sqrt{1-n_3^2}} & 0 \\ 0 & n_2 & \frac{n_2 n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} & \frac{n_1}{\sqrt{1-n_3^2}} & 0 \\ 0 & n_3 & -\sqrt{1-n_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

umformen. Im Zweidimensionalen ist die Vorgehensweise analog. Die Matrix der Flüsse ist im Zweidimensionalen mit

$$\underline{\mathbf{E}} = (\mathbf{F}(\mathbf{U}) \ \mathbf{G}(\mathbf{U})) \quad (4.22)$$

gegeben. Der Normalenvektor ist in diesem Fall wie folgt definiert

$$\mathbf{n}_S = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S \\ \sin \theta_S \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Mit diesen Bedingungen ergibt sich für den zweidimensionalen Fall

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_V U dV \right) = -\frac{1}{V} \sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} [\cos \theta_S \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_S \mathbf{G}(\mathbf{U})] dA = 0. \quad (4.24)$$

Die Drehung erfolgt mit

$$\cos \theta_S \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \sin \theta_S \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \underline{\mathbf{T}}_S^{-1} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{T}}_S \mathbf{U}). \quad (4.25)$$

Hierbei ergibt sich mit dem Normalenvektor \mathbf{n}_S die Transformationsmatrix

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_S & \sin \theta_S & 0 \\ 0 & -\sin \theta_S & \cos \theta_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

und die zugehörige Inverse

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_S & -\sin \theta_S & 0 \\ 0 & \sin \theta_S & \cos \theta_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_2 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Mit den obigen Gleichungen erhält man im Zwei- und Dreidimensionalen

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_V U dV \right) = -\frac{1}{V} \sum_{S=1}^N \int_{A_S}^{A_{S+1}} \underline{\mathbf{T}}_S^{-1} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{T}}_S \mathbf{U}) dA = 0 \quad (4.28)$$

und kann anschließend aus dem dreidimensionalen beziehungsweise dem zweidimensionalen Fall durch eine Drehung in Normalenrichtung, dem $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ -System, die Lösung des Problems auf den eindimensionalen Fall reduzieren. Mit $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}})$ bedeutet dies

$$\tilde{\mathbf{U}}_t + (\tilde{\mathbf{F}})_{\tilde{x}} = 0. \quad (4.29)$$

Mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{x}} \quad (4.30)$$

und der Jacobi Matrix der Flussfunktion

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}} \quad (4.31)$$

erhält man die quasi-lineare Formulierung

$$\tilde{\mathbf{U}}_t + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}) \tilde{\mathbf{U}}_{\tilde{x}} = 0. \quad (4.32)$$

Mit der numerischen Integration über die Kante im Zweidimensionalen beziehungsweise über das Oberflächenelement eines Volumens

$$\int_{A_S}^{A_{S+1}} \underline{\mathbf{T}}_S^{-1} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{T}}_S \mathbf{U}) dA \approx \Omega_S \sum_{i=1}^{i=imax} w_i (\underline{\mathbf{T}}_S^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_S)_i \quad (4.33)$$

erhält man die Finite Volumen Formulierung für die linearisierten Euler Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_V U dV \right) = -\frac{1}{V} \sum_{S=1}^N \Omega_S \sum_{i=1}^{i=imax} w_i (\underline{\mathbf{T}}_S^{-1} \tilde{\mathbf{F}})_i. \quad (4.34)$$

Die Größe Ω steht im Zweidimensionalen für die Kantenlänge und im Dreidimensionalen für die Zellfläche. w_i ist der Wichtungsfaktor, den man aus der Gausschen Quadratur erhält. Auf die Wichtungsfaktoren sowie die Berechnung des Flusses wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

4.2 Numerische Integration der Anfangsbedingungen und der Quelldaten

Bei der Finite Volumen Methode hoher Ordnung muss die numerische Integration der Anfangswerte sowie der Quelldaten mit hoher Ordnung durchgeführt werden. Die folgenden Integrationsverfahren basieren, wie in obigem Kapitel erläutert, auf den Gauss Quadraturen sowie Verfahren aus den Arbeiten von Stroud [53]. Beim dreidimensionalen Finite Volumen Verfahren kann auf einem Hexaeder- oder einem Tetraedergitter gerechnet werden. Im Fall des Hexaedergitter gilt für die numerische Integration

$$\frac{1}{8h^3} \int_{z=z_1}^{z=z_2} \int_{y=y_1}^{y=y_2} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{n=1}^N w_n(x_n, y_n, z_n) f(x_n, y_n, z_n) . \quad (4.35)$$

Die Koordinaten sowie die Wichtungsfaktoren beim Verfahren vierter Fehlerordnung sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

n	$x_n - \text{Koordinate}$	$y_n - \text{Koordinate}$	$z_n - \text{Koordinate}$	$w_n \text{ Wichtungsfaktor}$
1	$\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	1/8
2	$\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	1/8
3	$\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	1/8
4	$\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	1/8
5	$-\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	1/8
6	$-\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	1/8
7	$-\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	1/8
8	$-\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	1/8

Tabelle 4.1: Integrationskoeffizienten des Hexaeders

Die Integration auf dem Tetraedergitter erfordert bei der im Folgenden vorgestellten Vorgehensweise eine Transformation eines Tetraeders in das Einheitstetraeder. Ist die Transformation

$$x = a_0 + a_1 \tilde{x} + a_2 \tilde{y} + a_3 \tilde{z} \quad (4.36)$$

$$y = b_0 + b_1 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} + b_3 \tilde{z} \quad (4.37)$$

$$z = c_0 + c_1 \tilde{x} + c_2 \tilde{y} + c_3 \tilde{z} \quad (4.38)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= P1_x, & a_1 &= P2_x - P1_x, & a_2 &= P3_x - P1_x, & a_3 &= P4_x - P1_x \\ b_0 &= P1_y, & b_1 &= P2_y - P1_y, & b_2 &= P3_y - P1_y, & b_3 &= P4_y - P1_y \\ c_0 &= P1_z, & c_1 &= P2_z - P1_z, & c_2 &= P3_z - P1_z, & c_3 &= P4_z - P1_z \end{aligned} \quad (4.39)$$

durchgeführt, so kann das Integral

$$\int \int \int f(x, y) dx dy dz = |J| \sum_{n=1}^N w_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{z}_n) f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \quad (4.40)$$

mit der Jacobi Matrix

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

beziehungsweise der Determinanten der Jacobi Matrix

$$|J| = (a_1 b_2 c_3 + a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3) \quad (4.42)$$

numerisch gelöst werden. Die Koordinaten der Gauss Punkte sowie die Wichtungsfaktoren sind für die Integration der Ordnung $N = 35$ aus der Arbeit von Stroud [53] entnommen und im Anhang B.1 aufgelistet.

Die zweidimensionale Integration auf einem Vierecksgitter erfolgt durch

$$\frac{1}{4h^2} \int_{y=y_1}^{y=y_2} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x, y) dx dy = \sum_{n=1}^N w_n(x_n, y_n) f(x_n, y_n). \quad (4.43)$$

Die Koordinaten der Gauss Punkte können Tabelle 4.1 entnommen werden, im zweidimensionalen Fall beträgt der Wichtungsfaktor $w_n = 1/4$. In Abbildung 4.5 sind die Gauss Punkte sowie die Größe h dargestellt.

Die Integration auf einem Dreieck

$$\int \int f(x, y) dx dy = |J| \sum_{n=1}^N w_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \quad (4.44)$$

erfordert bei dieser Vorgehensweise ebenfalls eine Transformation eines Dreiecks in das Einheitsdreieck. Bei der Transformation gilt

$$x = a_0 + a_1 \tilde{x} + a_2 \tilde{y} \quad (4.45)$$

$$y = b_0 + b_1 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} \quad (4.46)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= P1_x, & a_1 &= P2_x - P1_x, & a_2 &= P3_x - P1_x \\ b_0 &= P1_y, & b_1 &= P2_y - P1_y, & b_2 &= P3_y - P1_y \end{aligned} \quad (4.47)$$

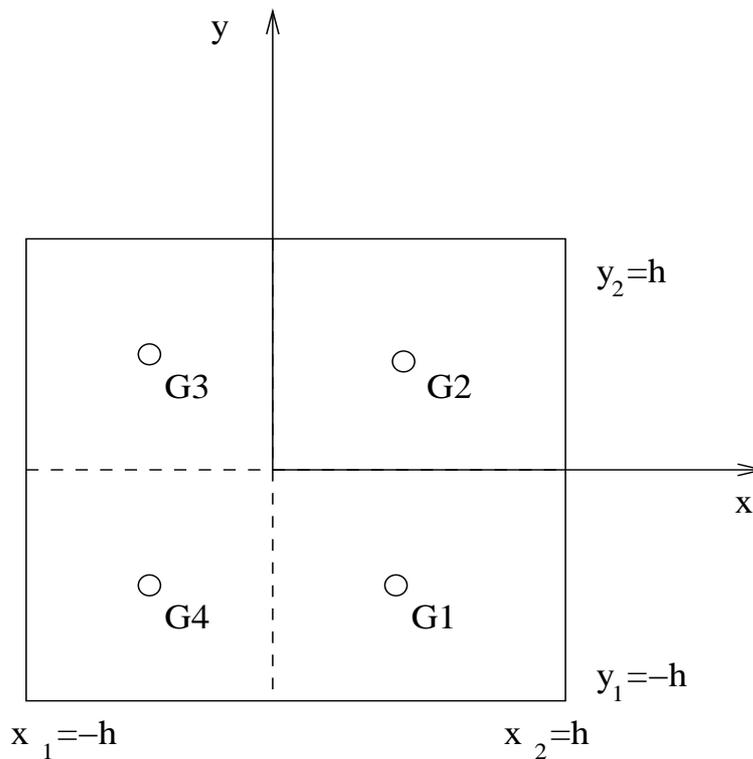


Abbildung 4.5: Numerische Integration über ein Viereck

Die Jacobi Matrix und die Determinanten der Jacobi Matrix sind mit

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

und

$$|J| = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (4.49)$$

definiert. Durch die hier beschriebenen Integrationsverfahren können Funktionen im Zwei- und Dreidimensionalen numerisch über Flächen und Volumen integriert werden. Dies ist bei den Anfangswerten sowie den Quelldaten nötig.

4.3 Flussberechnung

Im folgenden Abschnitt wird auf die Berechnung des Flusses bei Finite Volumen Verfahren eingegangen. Bei den Finite Volumen Verfahren wird das Rechengebiet in diskrete Volumina unterteilt. Die zeitliche Änderung der integralen Mittelwerte entspricht dem Integral des Flusses über die Zellkante. Zur Lösung des vorliegenden Anfangs-Randwertproblems muss der Fluss an den Zellkanten berechnet werden. Betrachtet man eine Zellkante im \tilde{x} - \tilde{y} System (Abbildung 4.3), so liegt links der Kante der linke Zustand und rechts der Kante der rechte Zustand vor. Dadurch erhält man an den Kanten stufenförmige, stückweise konstante Anfangswerte (Abbildung 4.6). Das vorliegende Anfangswertproblem wird Riemann Problem genannt. Das Lösen des Riemann Problem ist ein zentraler Bestandteil eines Finite Volumen Verfahrens. Bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen entsprechen die Zustände zwei unterschiedlichen räumlichen Verteilungen wie beispielsweise der Dichte, der Geschwindigkeit und des Drucks. Die Aufgabe des Riemann-Lösers ist, die Auflösung dieser Diskontinuität mit der Zeit zu berechnen. Die Lösung des Riemann Problems liefert eine Flussfunktion, diese wird im Folgenden hergeleitet.

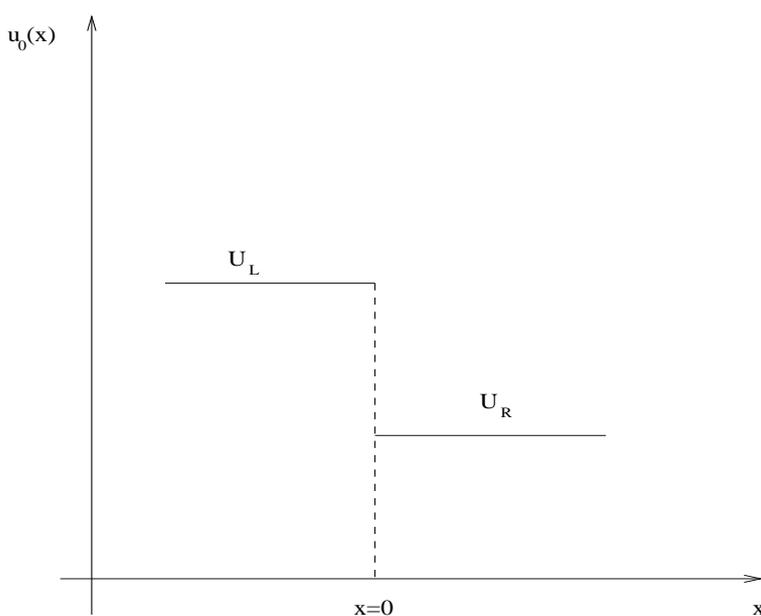


Abbildung 4.6: Riemann Problem

Der Großteil der Grundlagen wird in der Arbeit von Toro vorgestellt [59]. Die linearisierten eindimensionalen Euler Gleichungen $\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$ beziehungsweise in quasi-linearer Formulierung $\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0$ mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$U = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

lassen sich mit Hilfe des Riemann-Lösers exakt lösen. Hierbei ist U_L der linke und U_R der rechte Datensatz, wie in Abbildung (4.6) dargestellt ist. Die linearisierten Euler Gleichungen stellen ein lineares gekoppeltes hyperbolisches Differentialgleichungssystem dar. Die

Koeffizienten-Matrix A ist konstant. Die Hyperbolizität des Systems wird durch die Eigenschaften der A -Matrix definiert. Die Eigenwerte der Matrix sind reell und die A -Matrix ist diagonalisierbar. Die Matrix besitzt somit $m = 3$ reelle Eigenwerte λ_i und $m = 3$ linear unabhängige Eigenvektoren $K^{(i)}$. Die A -Matrix kann mit der Matrix der Eigenwerte $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und der Matrix K der rechten Eigenvektoren geschrieben werden als

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}^{-1} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} . \quad (4.51)$$

Mit der Existenz der Inversen Matrix K^{-1} lassen sich die Variablen in die so genannten charakteristischen Variablen durch

$$W = K^{-1}U, \quad U = KW \quad (4.52)$$

umformen. Mit den zugehörigen Ableitungen

$$U_t = KW_t, \quad U_x = KW_x \quad (4.53)$$

folgt die so genannte kanonische beziehungsweise charakteristische Form des Gleichungssystems

$$W_t + \Lambda W_x = 0 , \quad (4.54)$$

wobei die m partiellen Differentialgleichungen voneinander unabhängig und somit entkoppelt sind. Jede partielle Gleichung kann dadurch einzeln gelöst werden. Es liegen nun lineare Advektionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten vor. Die Eigenwerte λ_i sind dabei die charakteristischen Geschwindigkeiten der linearen Advektionsgleichungen mit m charakteristischen Kurven (Abbildung 4.7). Das Anfangswertproblem besitzt nun durch die Entkopplung die Lösung

$$w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) . \quad (4.55)$$

Durch die Rücktransformation ergibt sich mit (4.52) die allgemeine Lösung

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)} , \quad (4.56)$$

wobei $U(x, t)$ nur von den Anfangswerten an den m Punkten $u_i^{(0)}$ an den Stellen $x_i^{(0)} = x^* - \lambda_i t^*$ abhängig ist. Die Geraden $x_i = x_i^{(0)} + \lambda_i t$ mit $x'(t) = \lambda_i$ sind die so genannten charakteristischen Kurven.

Das Lösen des Riemann Problems erfolgt durch die lineare Kombination der Eigenvektoren und man erhält für die beiden Zustände

$$U_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j K^{(j)} \quad (4.57)$$

und

$$U_{i+1} = \sum_{j=1}^m \beta_j K^{(j)} \quad (4.58)$$

mit den konstanten Koeffizienten α_i, β_i mit $i = 1, \dots, m$. Damit folgt in einem beliebigen Punkt x zum Zeitpunkt t die allgemeingültige Lösung

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = \sum_{j=1}^I \beta_j K^{(j)} + \sum_{j=I+1}^m \alpha_j K^{(j)}. \quad (4.59)$$

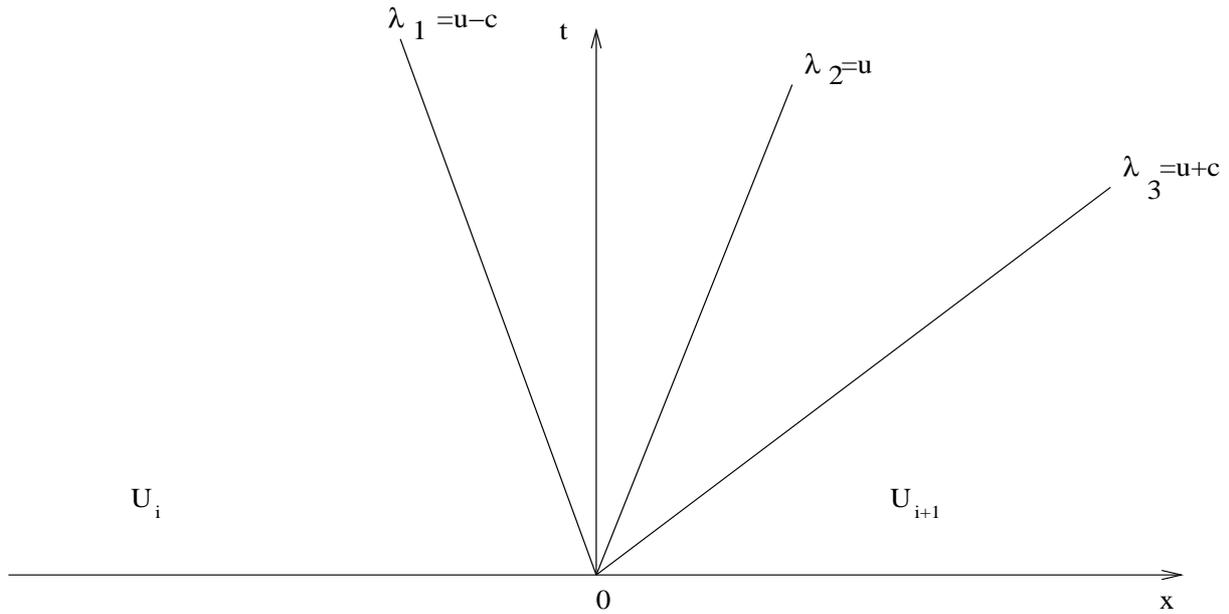


Abbildung 4.7: Charakteristiken im x-t Diagramm

Ausgehend von der linken oder rechten Seite ergibt sich in $x/t = 0$ die allgemeine Lösung

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = U_i + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)} \quad (4.60)$$

oder

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = U_{i+1} - \sum_{j=I+1}^m (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}. \quad (4.61)$$

Das bedeutet, dass der Sprung entlang der Welle j mit dem Eigenwert λ_j und dem Eigenvektor $K^{(j)}$ durch $(\beta_j - \alpha_j)K^{(j)}$ gegeben ist. Die Lösung des Riemann Problems kann damit bei $x/t = 0$ interpretiert werden als Wert aus linkem Zustand U_i plus der Summe aller Sprünge, welche der Bedingung $\lambda \leq 0$ gehorchen. Ausgehend vom rechten Zustand bedeutet dies, dass die Lösung des Riemann Problems sich aus dem rechten Zustand U_{i+1} minus der Summe aller Sprünge mit den Geschwindigkeiten $\lambda \geq 0$ ergibt. Die Kombination von (4.60) und (4.61) liefert

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{2}(U_{i+1} + U_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \text{sign}(\lambda_j) (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}. \quad (4.62)$$

Die Berechnung des Flusses wird aus der Bedingung $\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}$, der Bedingung $\mathbf{A}\mathbf{K}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{K}^{(j)}$ sowie (4.60) und (4.61) gewonnen und man erhält

$$F_{i+\frac{1}{2}}(0) = F_i + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j K^{(j)} \quad (4.63)$$

oder

$$F_{i+\frac{1}{2}}(0) = F_{i+1} - \sum_{j=I+1}^m (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j K^{(j)} . \quad (4.64)$$

Durch die Kombination von (4.63) und (4.64) ergibt sich für den Fluss

$$F_{i+\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) |\lambda_j| K^{(j)} . \quad (4.65)$$

Die Eigenwerte sowie deren Beträge sind mit

$$\begin{aligned} \lambda_j^+ &= \max(\lambda_j, 0) \\ \lambda_j^- &= \min(\lambda_j, 0) \end{aligned} \quad (4.66)$$

und

$$\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-, \quad |\lambda_i| = \lambda_i^+ - \lambda_i^- . \quad (4.67)$$

gegeben. Mit den Definitionen

$$A^- = K\Lambda^-K^{-1}, \quad A^+ = K\Lambda^+K^{-1} \quad (4.68)$$

und

$$A^- K^{(j)} = \lambda^- K^{(j)}, \quad A^+ K^{(j)} = \lambda^+ K^{(j)} \quad (4.69)$$

ergibt sich für den Fluss

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) |\lambda_j| K^{(j)} \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) (\lambda_j^+ - \lambda_j^-) K^{(j)} \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) [\lambda_j^+ K^{(j)} - \lambda_j^- K^{(j)}] \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) [A_j^+ K^{(j)} - A_j^- K^{(j)}] \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) [A^+ - A^-] K^{(j)} \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} |A| \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)} \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) (U_i - U_{i+1}) . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Durch die (4.57) und (4.58) erhält man die Flussformulierung

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}|A|(U_i - U_{i+1}). \quad (4.71)$$

Eine weitere Umformung liefert mit $\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}$ den Fluss

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}K|\Lambda|K^{-1}(U_i - U_{i+1}) \quad (4.72)$$

beziehungsweise

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A(U_i + U_{i+1}) - \frac{1}{2}K|\Lambda|K^{-1}(U_i - U_{i+1}). \quad (4.73)$$

Im Programm HYDSOL wird zur Lösung der linearisierten Euler Gleichungen der Fluss mit Hilfe von (4.73) berechnet.

4.3.1 Dreidimensionales Finite Volumen Verfahren

Zur Bestimmung des Flusses benötigt man bei der Finite Volumen Methode, wie im obigen Abschnitt hergeleitet, die A-Matrix sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren. Im Dreidimensionalen besitzt die Koeffizientenmatrix der linearisierten Euler Gleichungen

$$A = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{\rho}c^2 & 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = \bar{u}$, $\lambda_2 = \bar{u}$, $\lambda_3 = \bar{u}$, $\lambda_4 = \bar{u} - c$ und $\lambda_5 = \bar{u} + c$. Mit den Eigenwerten ergibt sich die Matrix der Eigenwerte

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} - c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u} + c \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Die daraus resultierenden Eigenvektoren werden in die K-Matrix

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\bar{\rho}c} & \frac{1}{\bar{\rho}c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

geschrieben. Mit der Inversen

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\rho}c}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\bar{\rho}c}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

liegen im Dreidimensionalen alle zur Flussberechnung benötigten Größen vor.

4.3.2 Zweidimensionales Finite Volumen Verfahren

Im Zweidimensionalen besitzt die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{\rho}c^2 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = \bar{u}$, $\lambda_2 = \bar{u}$, $\lambda_3 = \bar{u} + c$ und $\lambda_4 = \bar{u} - c$. Für die Matrix der Eigenwerte kann geschrieben werden

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} - c \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Die Matrix der Eigenvektoren

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\bar{\rho}}{2c} & \frac{\bar{\rho}}{2c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\rho}}{2c} & \frac{\bar{\rho}}{2c} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

sowie die Inverse

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{c^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}c} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}c} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

können nun zur Berechnung des Flusses in (4.73) verwendet werden.

4.4 Finite Volumen Randbedingungen

Zur Erfüllung der Ausström- und der Körperperrandbedingungen wird im Finite Volumen Programm HYDSOL das so genannte Ghost Point Konzept angewendet. Bei diesem Konzept werden die real existierenden Zellen an den Rändern virtuell gespiegelt. Damit erhält man, wie in Abbildung 4.8 gestrichelt dargestellt, Ghost Zellen. Die Datensätze der real existierenden Zellen werden dadurch achsensymmetrisch gespiegelt. Auf dem Körperperrand kann nun entweder die Ausström- oder die Körperperrandbedingung erfüllt werden.

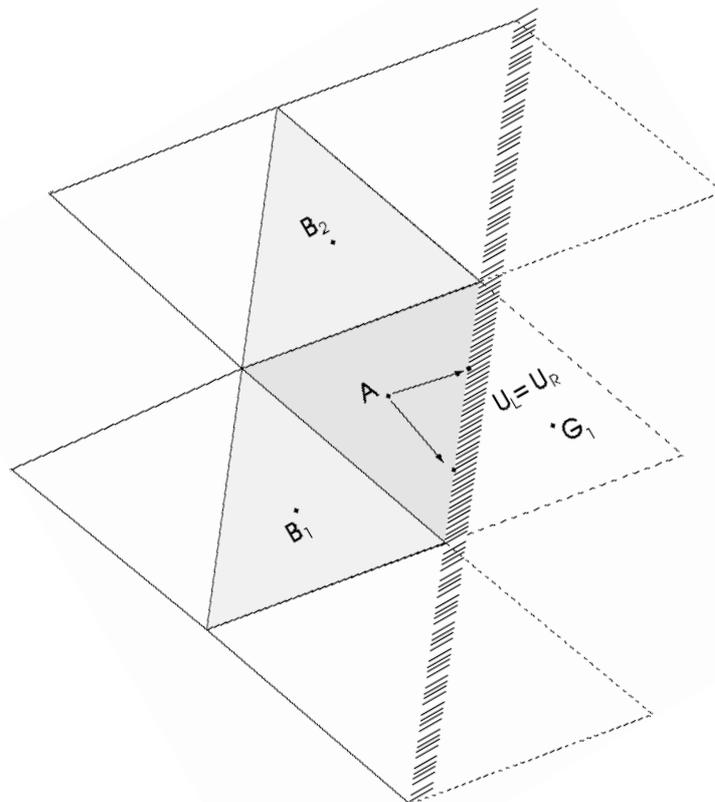


Abbildung 4.8: Spiegelung des Datensatzes am Körperperrand beziehungsweise am Ausströmrand

4.4.1 Ausströmrandbedingungen

Zur Erfüllung der Ausströmrandbedingung werden die Daten der real existierenden Zelle, hier mit linkem Zustand bezeichnet, gespiegelt, so dass dadurch der rechte Zustand gewonnen werden kann. Es muss durch die Spiegelung der Datensätze erreicht werden, dass die

Wellen am Ausströmrand ungestört und verlustfrei das Rechengebiet verlassen können. Im Dreidimensionalen bedeutet dies

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Links}} = \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Rechts}} \quad (4.82)$$

und im Zweidimensionalen

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Links}} = \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Rechts}} \quad (4.83)$$

Mit dieser Vorgehensweise kann an den zwei Gauss Punkten der linke und der rechte Zustand bestimmt und anschliessend der Fluss an der Kante des Ausströmrandes berechnet werden.

4.4.2 Körperrandbedingungen

Die Körperrandbedingung wird erfüllt, wenn für den Fluss senkrecht zur Wand gilt $F_n = 0$. Dies entspricht einer Impulsumkehr am Körperrand und führt zur Reflexion der ankommenden Welle. Diese Bedingung kann mit dem Ghost Point Konzept erreicht werden. Es wird wie bei den Ausströmrandbedingungen der linke Zustand gespiegelt und damit der rechte Zustand bestimmt. Für die Körperrandbedingungen gilt im Dreidimensionalen

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Links}} = \begin{bmatrix} \rho' \\ -u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Rechts}} \quad (4.84)$$

und im Zweidimensionalen

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Links}} = \begin{bmatrix} \rho' \\ -u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}_{\text{Rechts}} \quad (4.85)$$

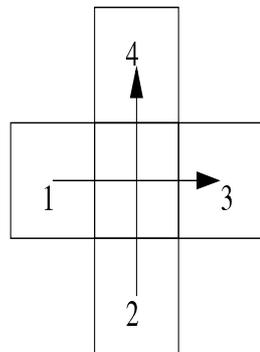
Es muss hier an den zwei Gauss Punkten der linke und der rechte Zustand bestimmt und anschliessend der Fluss an der Kante des Körperrandes berechnet werden.

Kapitel 5

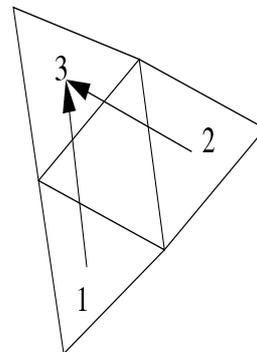
Rekonstruktionsalgorithmus der FV Methode

In diesem Kapitel werden der Rekonstruktionsalgorithmus zweiter Ordnung und der in dieser Arbeit entwickelte Rekonstruktionsalgorithmus hoher Ordnung vorgestellt.

In der ursprünglichen Version des Strömungscodes HYDSOL werden die Flüsse mit zweiter Ordnung genau berechnet. Dazu werden im ersten Schritt die geometrieabhängigen Richtungsableitungen \mathbf{r}_1 and \mathbf{r}_2 berechnet.



Viereckselemente



Dreieckselemente

Abbildung 5.1: Richtungsvektoren der direkten Nachbarn zur Bestimmung der Richtungsableitungen für Vierecks- und Dreieckselemente

Der Betrag des Vektorprodukts beider Vektoren bilden einen Vektor senkrecht zur Grundfläche, dessen Länge der Fläche des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms entspricht

$$A_E = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| . \quad (5.1)$$

Unter Einbeziehung der Variablendifferenzen als dritte Raumkoordinate und den Richtungsvektoren erhält man eine Ebene E im dreidimensionalen Raum (Abbildung 5.2).

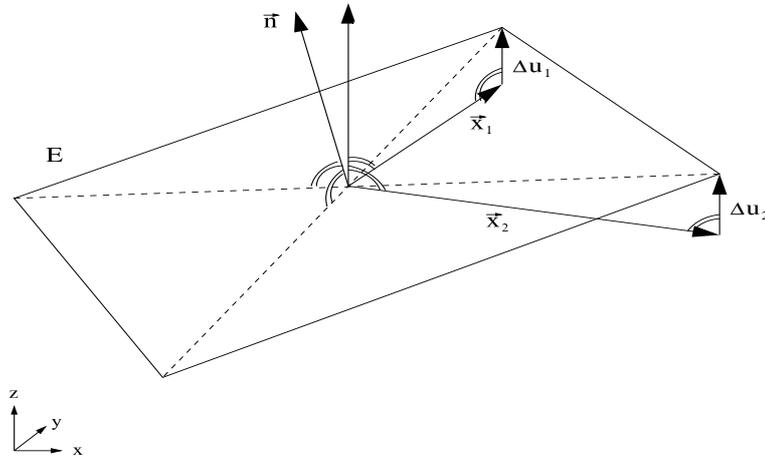


Abbildung 5.2: Ebene gegeben durch Richtungsvektoren und Variablendifferenzen

Der zur Fläche A_E normierte Normalenvektor \vec{n} der Ebene E berechnet sich somit zu

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \Delta u_2 - \Delta u_1 \Delta y_2 \\ \Delta x_2 \Delta u_1 - \Delta u_2 \Delta x_1 \\ \Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta y_1 \Delta x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Damit ergibt sich die Ebenengleichung in kartesischer Form

$$f(x, y, u) = n_1 x + n_2 y + n_3 u + d = 0. \quad (5.3)$$

Die Richtungsableitungen einer Funktion f an der Stelle x_i in Richtung \mathbf{h} ist mit

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}^T}{|\mathbf{h}|} \cdot \nabla f(x_i) \quad (5.4)$$

definiert. Mit $h_1 = (1, 0, 0)$, $h_2 = (0, 1, 0)$, $|h_1| = |h_2| = 1$ und (5.2) ergibt sich für die Richtungsableitungen in x - und y -Richtung

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x} = \frac{n_1}{A_E} = \frac{1}{A_E} (\Delta u_2 \Delta y_1 - \Delta u_1 \Delta y_2) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial y} = \frac{n_2}{A_E} = \frac{1}{A_E} (\Delta u_2 \Delta x_1 - \Delta u_1 \Delta x_2) \quad (5.6)$$

Mit dieser Vorgehensweise kann der Variablenwert an der Kante bestimmt werden. Mit Hilfe der vorliegenden Variablenwerte kann man anschliessend den Fluss berechnen.

Bei der zellzentrierten Finite Volumen Methode hoher Ordnung wird die Rekonstruktion in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt müssen die nächsten Nachbarn (Natural Neighbour) eines Zentralelements bestimmt werden. Anschliessend kann man die Variablenwerte an den Kanten mit Hilfe des Taylor Polynoms berechnen.

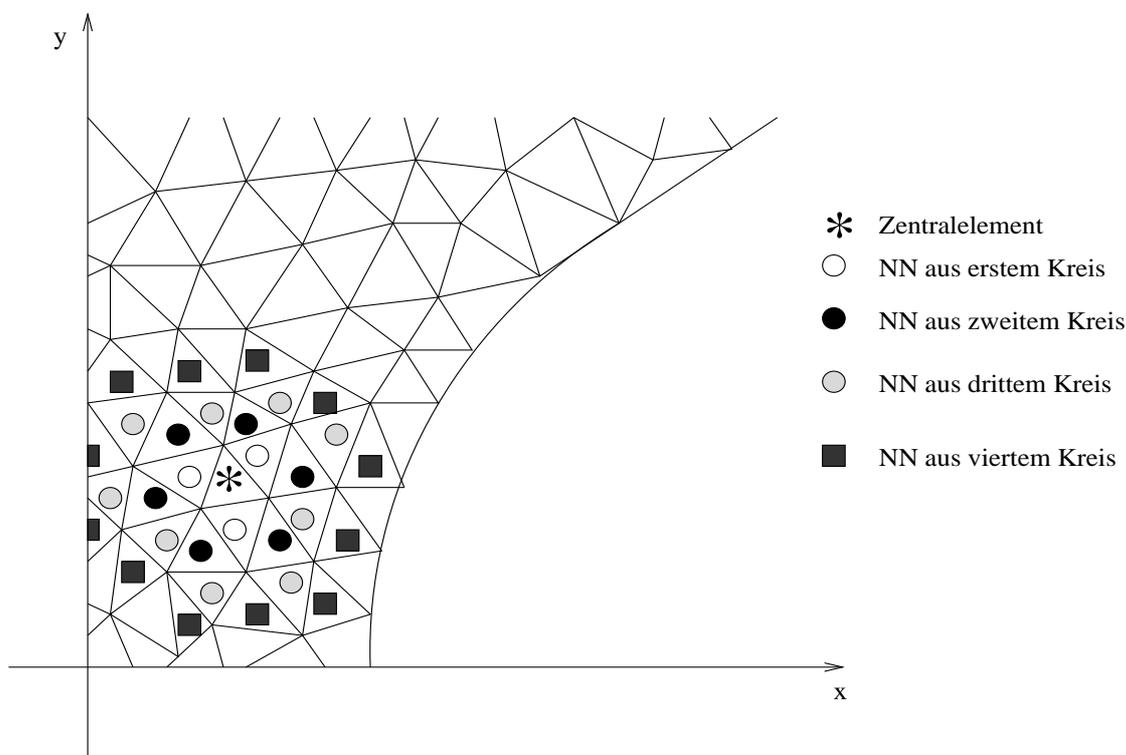


Abbildung 5.3: Seitenorientierte Nachbarschaftssuche

Hierzu muss für das Zentralelement und für die nächsten Nachbarn des Zentralelements das Taylor Polynom aufgestellt werden. Mit dieser Vorgehensweise erhält man ein Gleichungssystem. Durch Lösen dieses Systems erhält man in einem definierten Punkt die Koeffizienten des Taylor Polynoms und dadurch die partiellen Ableitungen. In diesem Abschnitt wird das Gleichungssystem aufgestellt und mit Hilfe der Singular Value Decomposition oder der Cholesky Zerlegung gelöst.

Bei der Natural Neighbour Methode werden zunächst die nächsten Nachbarn gesucht (Abbildung 5.3 und 3.3). Hierbei muss zwischen der seitenorientierten und der knotenorientierten Nachbarschaftssuche unterschieden werden. Bei der zellzentrierten Finite Volumen Methode benötigt man die seitenorientierte Nachbarschaftssuche. Bei der seitenorientierten Suche (Abbildung 5.3) werden die Nachbarelemente des ersten Kreises über die Seiten des Zentralelements gesucht. Ausgehend von diesen Nachbarn werden anschliessend die Nachbarn dieser Elemente über die Seiten gesucht. Diese Prozedur wird so lange durchgeführt, bis eine bestimmte Anzahl von nächsten Nachbarn gefunden ist.

5.1 Berechnung von partiellen Ableitung mittels integriertem Taylor Polynom

Bei der Finite Volumen Methode hoher Ordnung müssen die Polynome im Zweidimensionalen über die Fläche und im Dreidimensionalen über das Volumen aufintegriert und

mit der Fläche beziehungsweise dem Volumen normiert werden, da das Programm HYDSOL mit integralen Mittelwerten rechnet. Die zwei- und dreidimensionale Integration des Taylor Polynoms wird im folgenden Abschnitt erläutert.

Die Berechnung von partiellen Ableitungen erfolgt beim Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung mittels integriertem Taylor Polynom. Dies ist erforderlich, da bei der Formulierung hoher Ordnung mit den integralen Mittelwerten gerechnet wird. In den folgenden Abschnitten wird auf die Integration über das Hexaeder, das Tetraeder, das Rechteck sowie über das Dreieck detailliert eingegangen.

5.1.1 Integration über das Hexaeder

Die dreidimensionale Integration einer beliebigen Funktion p mit $p = p(x, y, z)$ über das Hexaeder mit anschließender Normierung mit dem Volumen

$$V = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \quad (5.7)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p(x, y, z) \, dx dy dz &= \frac{1}{V} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(y - y_0) + \\ &a_4(z - z_0) + a_5(x - x_0)^2 + a_6(y - y_0)^2 + \\ &a_7(z - z_0)^2 + a_8(x - x_0)(y - y_0) + a_9(x - x_0)(z - z_0) + \\ &a_{10}(y - y_0)(z - z_0) + a_{11}(x - x_0)^3 + \\ &a_{12}(y - y_0)^3 + a_{13}(z - z_0)^3 + a_{14}(x - x_0)^2(y - y_0) + \\ &a_{15}(x - x_0)^2(z - z_0) + a_{16}(y - y_0)^2(x - x_0) + \\ &a_{17}(y - y_0)^2(z - z_0) + a_{18}(z - z_0)^2(x - x_0) + \\ &a_{19}(z - z_0)^2(y - y_0) + a_{20}(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) + \\ &a_{21}(x - x_0)^4 + a_{22}(y - y_0)^4 + a_{23}(z - z_0)^4 + \\ &a_{24}(x - x_0)^3(y - y_0) + a_{25}(x - x_0)^3(z - z_0) + \\ &a_{26}(y - y_0)^3(x - x_0) + a_{27}(y - y_0)^3(z - z_0) + \\ &a_{28}(z - z_0)^3(x - x_0) + a_{29}(z - z_0)^3(y - y_0) + \\ &a_{30}(x - x_0)^2(y - y_0)^2 + a_{31}(x - x_0)^2(z - z_0)^2 + \\ &a_{32}(y - y_0)^2(z - z_0)^2 + a_{33}(x - x_0)^2(y - y_0)(z - z_0) + \\ &a_{34}(y - y_0)^2(x - x_0)(z - z_0) + \\ &a_{35}(z - z_0)^2(x - x_0)(y - y_0)] \, dx dy dz \\ &= \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{i=35} a_i da_i . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Beim Verfahren vierter Ordnung ergeben sich die Koeffizienten da_1 bis da_{35} . Diese können dem Anhang B entnommen werden. Es liegt nun für jedes Element eine Gleichung mit 35 Unbekannten vor. Verwendet man die nächsten Nachbarn so kann das überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{da_{1,1}}{V} & \frac{da_{1,2}}{V} & \frac{da_{1,3}}{V} & \frac{da_{1,4}}{V} & \frac{da_{1,5}}{V} & \frac{da_{1,6}}{V} & \cdots & \frac{da_{1,35}}{V} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{da_{m,1}}{V} & \frac{da_{m,2}}{V} & \frac{da_{m,3}}{V} & \frac{da_{m,4}}{V} & \frac{da_{m,5}}{V} & \frac{da_{m,6}}{V} & \cdots & \frac{da_{m,35}}{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V} \int_V p_1 dV \\ \vdots \\ \frac{1}{V} \int_V p_m dV \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

aufgestellt und mit der Singular Value Decomposition Methode oder der Cholesky Zerlegung gelöst werden.

5.1.2 Integration über das Einheitstetraeder

Bei der Integration des Taylor Polynoms über ein beliebiges Tetraeder muss bei der vorgestellten Vorgehensweise zunächst eine Transformation durchgeführt werden. Man transformiert ein beliebiges Tetraeder in das Einheitstetraeder und kann anschliessend das Taylor Polynom aufintegrieren [53].

Mit den x, y, z -Koordinaten der Knoten $P1, P2, P3$ und $P4$ kann das beliebige Tetraeder in das Einheitstetraeder, welches sich im $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ befindet transformiert werden.

Die Transformation

$$x = a_0 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{y} + a_3\tilde{z} \quad (5.10)$$

$$y = b_0 + b_1\tilde{x} + b_2\tilde{y} + b_3\tilde{z} \quad (5.11)$$

$$z = c_0 + c_1\tilde{x} + c_2\tilde{y} + c_3\tilde{z} \quad (5.12)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= P1_x, & a_1 &= P2_x - P1_x, & a_2 &= P3_x - P1_x, & a_3 &= P4_x - P1_x \\ b_0 &= P1_y, & b_1 &= P2_y - P1_y, & b_2 &= P3_y - P1_y, & b_3 &= P4_y - P1_y \\ c_0 &= P1_z, & c_1 &= P2_z - P1_z, & c_2 &= P3_z - P1_z, & c_3 &= P4_z - P1_z \end{aligned} \quad (5.13)$$

wird nun benötigt, um das Taylor Polynom (3.8) in das $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ System zu transformieren. Im $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ System kann das Integral über das Einheitstetraeder

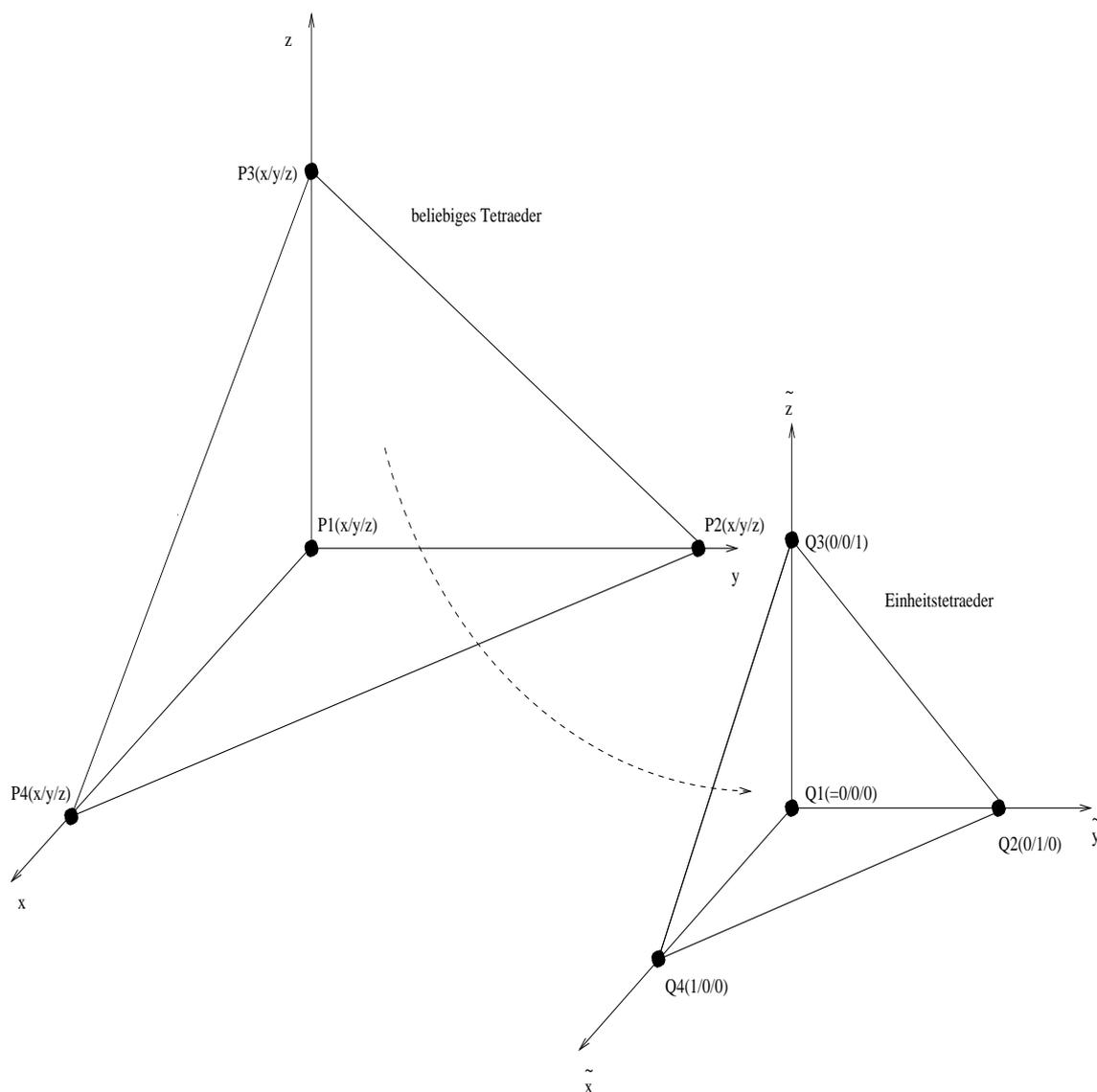


Abbildung 5.4: Transformation eines beliebigen Tetraeders in das Einheitstetraeder

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \int \int \int p(x, y, z) \, dx dy dz &= \frac{|J|}{V} \int_0^1 \int_0^{1-\tilde{z}} \int_0^{1-\tilde{y}-\tilde{z}} p(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{x}, d\tilde{y}, d\tilde{z} \\
 &= 6 \int_0^1 \int_0^{1-\tilde{z}} \int_0^{1-\tilde{y}-\tilde{z}} p(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{x}, d\tilde{y}, d\tilde{z} \\
 &= \sum_{i=1}^{i=35} a_i da_i \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

gelöst werden und man erhält die Koeffizienten da_1 bis da_{35} . Diese können dem Anhang B entnommen werden. Die Berechnung der gesuchten Größen a_1 bis a_{35} erfolgt hier durch Lösen des überbestimmten Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} da_{1,1} & da_{1,2} & da_{1,3} & da_{1,4} & da_{1,5} & da_{1,6} & \dots & da_{1,35} \\ \vdots & \vdots \\ da_{m,1} & da_{m,2} & da_{m,3} & da_{m,4} & da_{m,5} & da_{m,6} & \dots & da_{m,35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V} \int_V p_1 dV \\ \vdots \\ \frac{1}{V} \int_V p_m dV \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

mit der Singular Value Decomposition Methode oder der Cholesky Zerlegung.

5.1.3 Integration über das Rechteck

Die zweidimensionale Integration über das Rechteck mit anschliessender Normierung mit der Fläche

$$A = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (5.16)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p(x, y) dx dy &= \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(y - y_0) + a_4(x - x_0)^2 + \\ & a_5(x - x_0)(y - y_0) + a_6(y - y_0)^2 + a_7(x - x_0)^3 + \\ & a_8(x - x_0)^2(y - y_0) + a_9(y - y_0)^2(x - x_0) + a_{10}(y - y_0)^3 + \\ & a_{11}(x - x_0)^4 + a_{12}(x - x_0)^3(y - y_0) + a_{13}(x - x_0)^2(y - y_0)^2 + \\ & a_{14}(y - y_0)^3(x - x_0) + a_{15}(y - y_0)^4] dx dy \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{i=15} a_i da_i . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Im Zweidimensionalen ergeben sich die Koeffizienten da_1 bis da_{15} . Diese können dem Anhang B entnommen werden. Es liegt nun für jedes Element eine Gleichung mit den Unbekannten a_1 bis a_{15} vor. Verwendet man die nächsten Nachbarn, so kann das überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{da_{1,1}}{A} & \frac{da_{1,2}}{A} & \frac{da_{1,3}}{A} & \frac{da_{1,4}}{A} & \frac{da_{1,5}}{A} & \frac{da_{1,6}}{A} & \dots & \frac{da_{1,15}}{A} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{da_{m,1}}{A} & \frac{da_{m,2}}{A} & \frac{da_{m,3}}{A} & \frac{da_{m,4}}{A} & \frac{da_{m,5}}{A} & \frac{da_{m,6}}{A} & \dots & \frac{da_{m,15}}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \int_A p_1 dA \\ \vdots \\ \frac{1}{A} \int_A p_m dA \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

aufgestellt und ebenfalls mit den bekannten Methoden gelöst werden.

5.1.4 Integration über das Einheitsdreieck

Die Transformation

$$x = a_0 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{y} \tag{5.19}$$

$$y = b_0 + b_1\tilde{x} + b_2\tilde{y} \tag{5.20}$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= P1_x, & a_1 &= P2_x - P1_x, & a_2 &= P3_x - P1_x \\ b_0 &= P1_y, & b_1 &= P2_y - P1_y, & b_2 &= P3_y - P1_y \end{aligned} \tag{5.21}$$

wird nun benötigt, um das Taylor Polynom (3.7) in das \tilde{x}, \tilde{y} System zu transformieren.

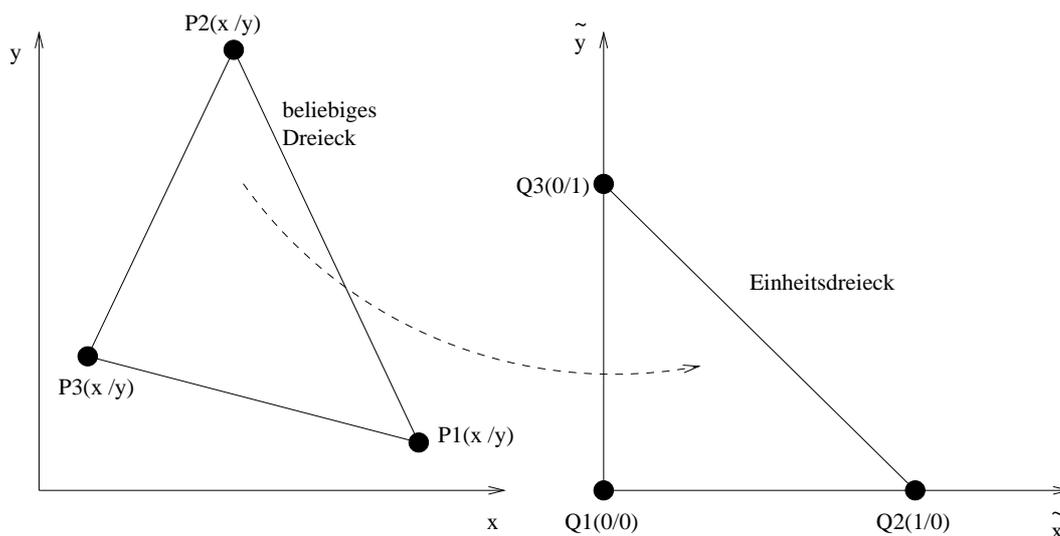


Abbildung 5.5: Transformation eines beliebigen Dreiecks in das Einheitsdreieck

Im \tilde{x}, \tilde{y} System kann das Integral über das Einheitsdreieck

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int \int p(x, y) \, dx dy &= \frac{|J|}{A} \int_0^1 \int_0^{1-\tilde{y}} p(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}, d\tilde{y} \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-\tilde{y}} p(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}, d\tilde{y} \\ &= \sum_{i=1}^{i=15} a_i da_i \end{aligned} \tag{5.22}$$

gelöst werden und man erhält die Koeffizienten da_1 bis da_{15} . Diese können dem Anhang B entnommen werden. Die Berechnung der gesuchten Größen a_1 bis a_{15} erfolgt hier ebenfalls

durch Lösen des überbestimmten Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} da_{1,1} & da_{1,2} & da_{1,3} & da_{1,4} & da_{1,5} & da_{1,6} & \dots & da_{1,15} \\ \vdots & \vdots \\ da_{m,1} & da_{m,2} & da_{m,3} & da_{m,4} & da_{m,5} & da_{m,6} & \dots & da_{m,15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \int_A p_1 dA \\ \vdots \\ \frac{1}{A} \int_A p_m dA \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

mit der SVD Methode oder der Cholesky Zerlegung [44].

5.2 Numerische Berechnung des Flussintegrals

Zur Berechnung der linken und rechten Zustände U_i und U_{i+1} auf den Zellseiten benötigt man den Variablenwert a_1 sowie die partiellen Ableitungen im Zellschwerpunkt a_2 bis a_{15} beziehungsweise a_2 bis a_{35} . Sind diese durch Lösen des überbestimmten Gleichungssystems bestimmt, so kann man mit Hilfe des zweidimensionalen Taylor Polynoms (3.5) beziehungsweise des dreidimensionalen Taylor Polynoms (3.6) den Variablenwert in einem so genannten Gauss Punkt berechnen. Es ist hier jedoch zu beachten, dass die Lösung des überbestimmten Gleichungssystems zu oszillieren beginnt und damit die Werte auf den Zellseiten nicht mehr verwendet werden dürfen. Die Oszillationen können vermieden werden, indem der Variablenwert a_1 ersetzt wird und mit Hilfe des integralen Mittelwerts $\frac{1}{V} \int_V U dV$ erneut berechnet wird. Der aus dem integralen Mittelwert berechnete Variablenwert a_1 wird durch die Runge-Kutta Zeitintegration stabilisiert. Mathematisch bedeutet dies

$$a_1 = \frac{1}{V} \int_V U dV - \sum_{i=2}^N a_i da_i \quad (5.24)$$

mit $N = 15$ im Zweidimensionalen und $N = 35$ im Dreidimensionalen. Dadurch ist das Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung nichtoszillierend. Mit dem stabilisierten Wert a_1 wird der Wert an der Zellseite berechnet. Mit diesem kann anschliessend der exakte Fluss bestimmt werden. Nach der Bestimmung des Flusses $F_{i+\frac{1}{2}}$ an den zwei Gauss Punkten im Zweidimensionalen und an den vier Gauss Punkten im Dreidimensionalen kann das Integral des Flusses numerisch approximiert werden. Abbildung 5.8 und 5.9 zeigen zwei Dreieckszellen beziehungsweise Viereckszellen sowie die zwei Gauss Punkte, in denen die Variablenwerte berechnet werden müssen. Im Dreidimensionalen muss über eine Zellfläche aufintegriert werden. Hierzu benötigt man vier Gauss Punkte. In Abbildung 5.10 und 5.11 ist dies dargestellt. Die Koordinaten sowie die Wichtungsfaktoren der Gauss Punkte leiten sich für den eindimensionalen Integrationsfall aus der so genannten Gausschen Quadratur her.

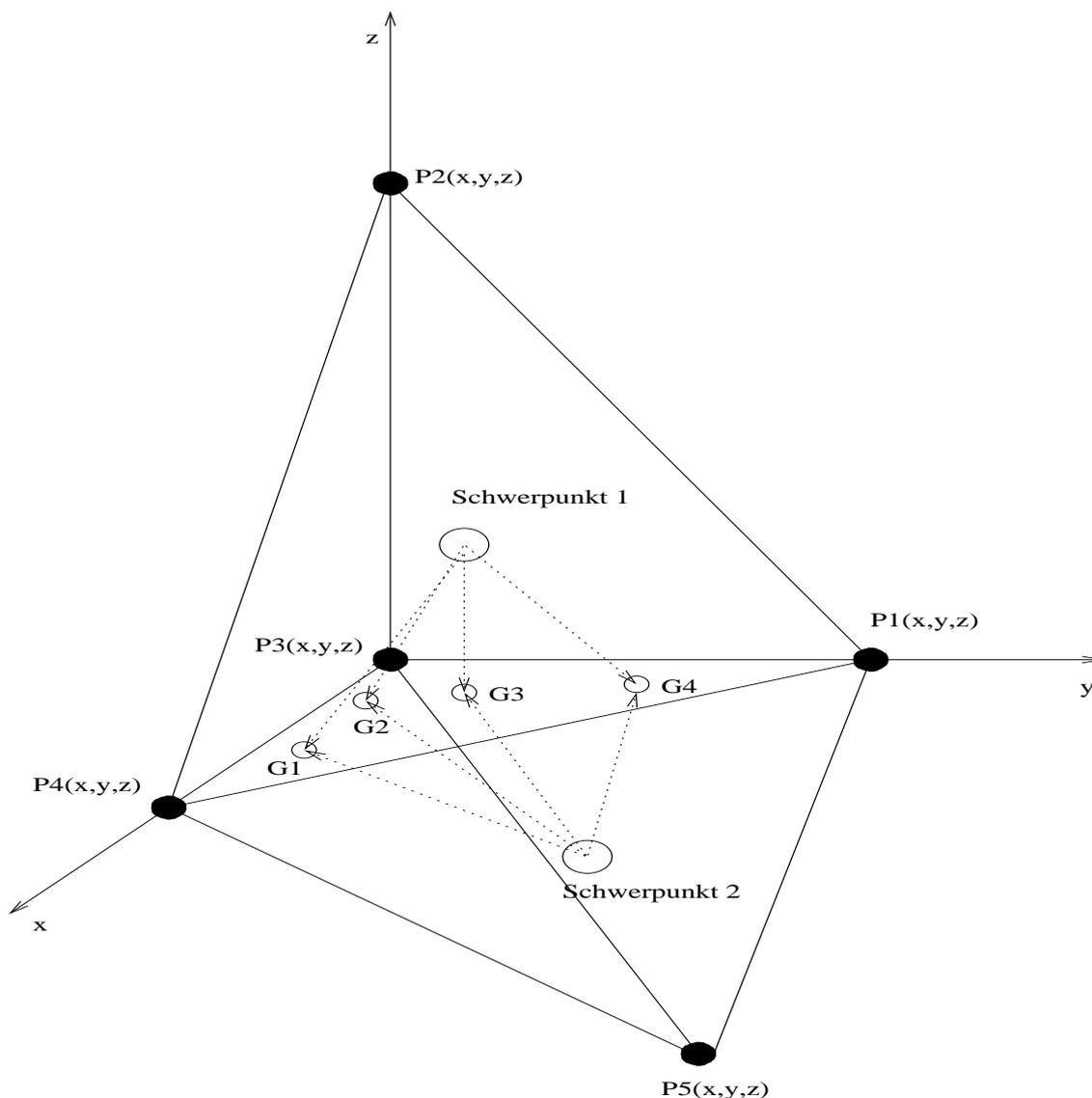


Abbildung 5.6: Berechnung der Werte in den Gauss Punkten eines Tetraeders

Die Gauss Quadratur, nach Carl Friedrich Gauss, ist ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Integralen. Der Integrand setzt sich zusammen aus der stetigen Funktion $F_{i+\frac{1}{2}}(x)$ und einer Gewichtsfunktion $w(x)$. Der Integrationsbereich geht von $-h$ bis $+h$. Die numerische Berechnung des Integrals wird demnach durch die Summe

$$\int_{-h}^{+h} F_{i+\frac{1}{2}} dx = \sum_{n=1}^N w_n(x_n) F_{i+\frac{1}{2}}(x_n) \quad (5.25)$$

approximiert. Durch Lösen eines Gleichungssystems erhält man die zwei Gauss Punkte $x_1 = -h/\sqrt{3}$ und $x_2 = h/\sqrt{3}$ sowie die zugehörigen Wichtungsfaktoren $w_1 = w_2 = 1/2$. In den Arbeiten von Stroud wird auf die Vorgehensweise detailliert eingegangen [53]. Die

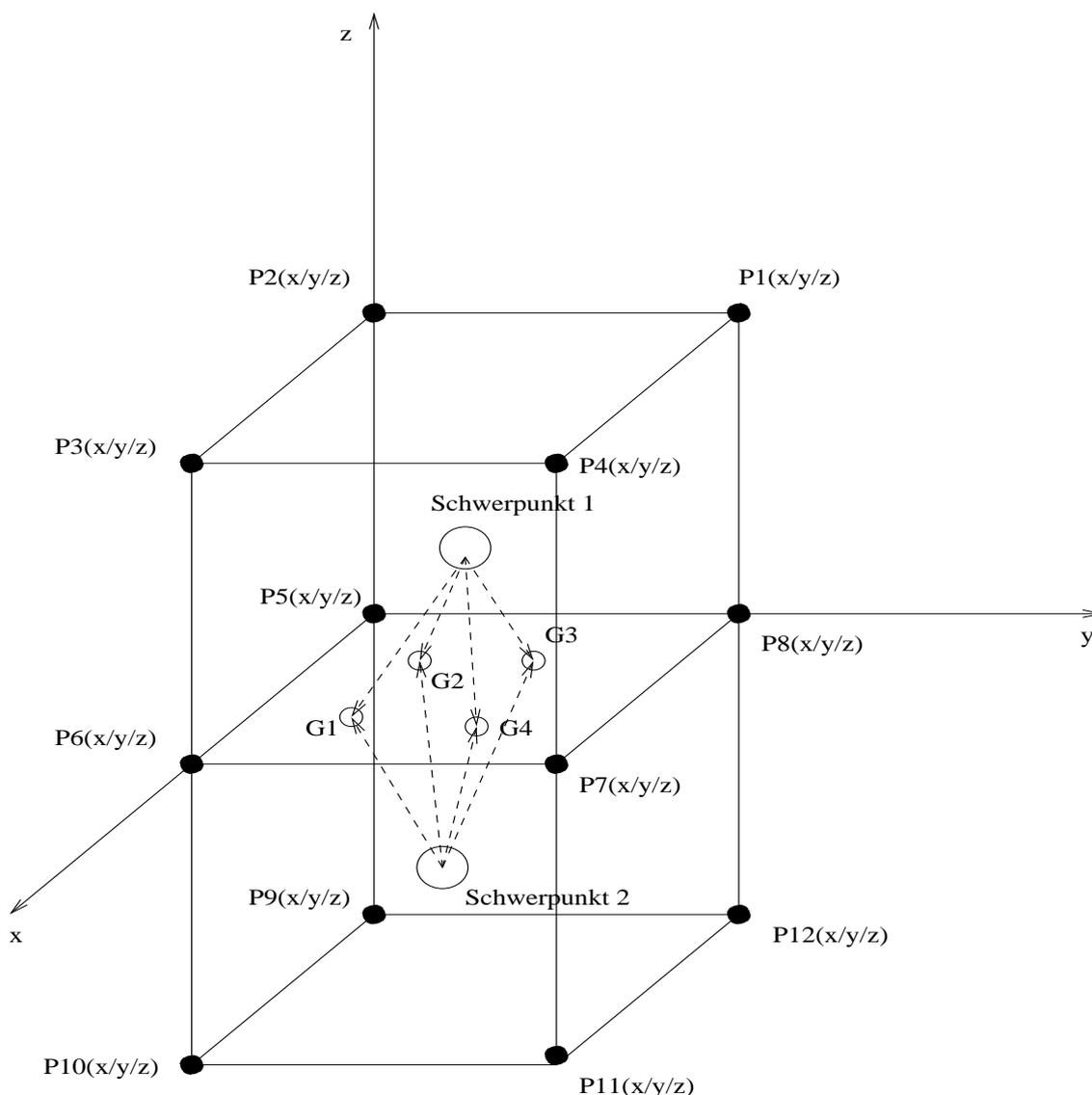


Abbildung 5.7: Berechnung der Werte in den Gauss Punkten eines Hexaeders

Koordinaten der Gauss Punkte einer beliebigen Zellseite können durch eine einfache Anpassung bestimmt werden.

Beim dreidimensionalen Finite Volumen Verfahren ist die Integration des Flusses über eine Zellseite mit einer Transformation verbunden. Im dreidimensionalen Fall ist die Zellseite eine Fläche. Die Integration über eine Fläche wird durch die Summe

$$\iint F_{i+\frac{1}{2}} dx dy = \sum_{n=1}^N w_n(x_n, y_n) F_{i+\frac{1}{2}}(x_n, y_n) \quad (5.26)$$

approximiert. In diesem Fall muss man zunächst die N Gauss Punkte eines Einheitsvierecks beziehungsweise Einheitsdreiecks auf eine beliebige Zellseite transformieren. Die Koordina-

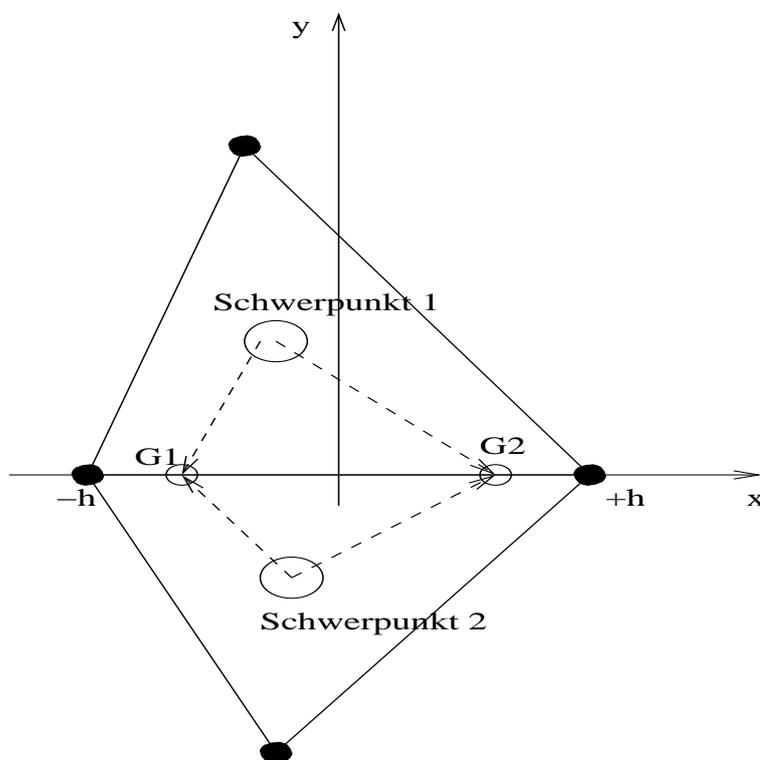


Abbildung 5.8: Berechnung der Variablenwerte in den Gauss Punkten $G1$ und $G2$ an der Zellseite eines Dreiecks

ten der Gauss Punkte eines Einheitsvierecks sind beim Verfahren vierter Fehlerordnung in Tabelle 5.1 aufgelistet.

n	$x_n - \text{Koordinate}$	$y_n - \text{Koordinate}$	$w_n \text{ Wichtungsfaktor}$
1	$\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	1/4
2	$\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	1/4
3	$-\sqrt{(1/3)}$	$\sqrt{(1/3)}$	1/4
4	$-\sqrt{(1/3)}$	$-\sqrt{(1/3)}$	1/4

Tabelle 5.1: Integrationskoeffizienten des Vierecks

Bei der Verwendung eines Tetraedergitters wird die Integration des Flusses über die Dreiecksfläche eines Tetraeders mit vierter Fehlerordnung durchgeführt. Beim Verfahren vierter Fehlerordnung werden vier Punkte benötigt, die Koordinaten und Wichtungsfaktoren sind in Tabelle 5.2 aufgelistet.

Die Integration erfolgt durch eine Transformation der Gauss Punkte vom Einheitsdreieck in ein beliebiges Dreieck. Die Transformation

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

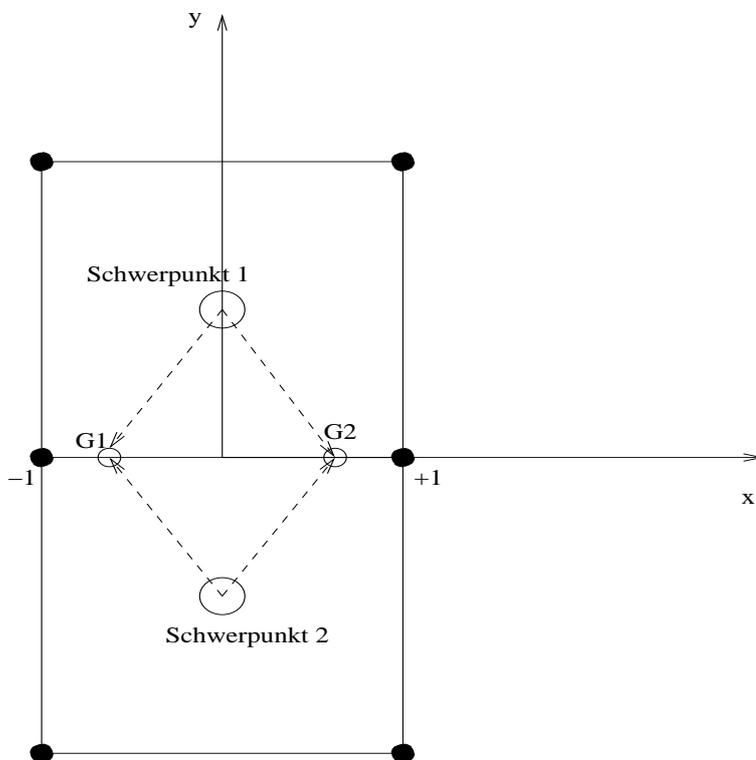


Abbildung 5.9: Berechnung der Variablenwerte in den Gauss Punkten $G1$ und $G2$ an der Zellseite eines Vierecks

n	$\tilde{x}_n - \text{Koordinate}$	$\tilde{y}_n - \text{Koordinate}$	Wichtungsfaktor
1	10/30	10/30	-27/48
2	18/30	6/30	25/48
3	6/30	18/30	25/48
4	6/30	6/30	25/48

Tabelle 5.2: Koeffizienten der Integration vierter Ordnung auf dem Einheitsdreieck

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_0 &= P1_x, & a_1 &= P2_x - P1_x, & a_2 &= P3_x - P1_x \\
 b_0 &= P1_y, & b_1 &= P2_y - P1_y, & b_2 &= P3_y - P1_y \\
 c_0 &= P1_z, & c_1 &= P2_z - P1_z, & c_2 &= P3_z - P1_z
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

benötigt hierzu die Knotenkoordinaten des beliebigen Dreiecks $P1, P2$ und $P3$ und liefert die geforderten dreidimensionalen Koordinaten der Gauss Punkte x_n, y_n und z_n . In Abbildung 5.10 ist die Integration mit vier Gauss Punkten dargestellt. Im Fall des Hexa- edergitters müssen die Knoten eines beliebigen Vierecks in das Einheitsviereck mit

$$\begin{aligned}
 (-1, 1) &\rightarrow (x_1, y_1, z_1) \\
 (1, 1) &\rightarrow (x_2, y_2, z_2) \\
 (1, -1) &\rightarrow (x_3, y_3, z_3) \\
 (-1, -1) &\rightarrow (x_4, y_4, z_4)
 \end{aligned}$$

transformiert werden. Die Koeffizienten in (5.27) müssen für diesen Fall durch Lösen von Gleichungssystemen bestimmt werden. Die Gleichungssysteme

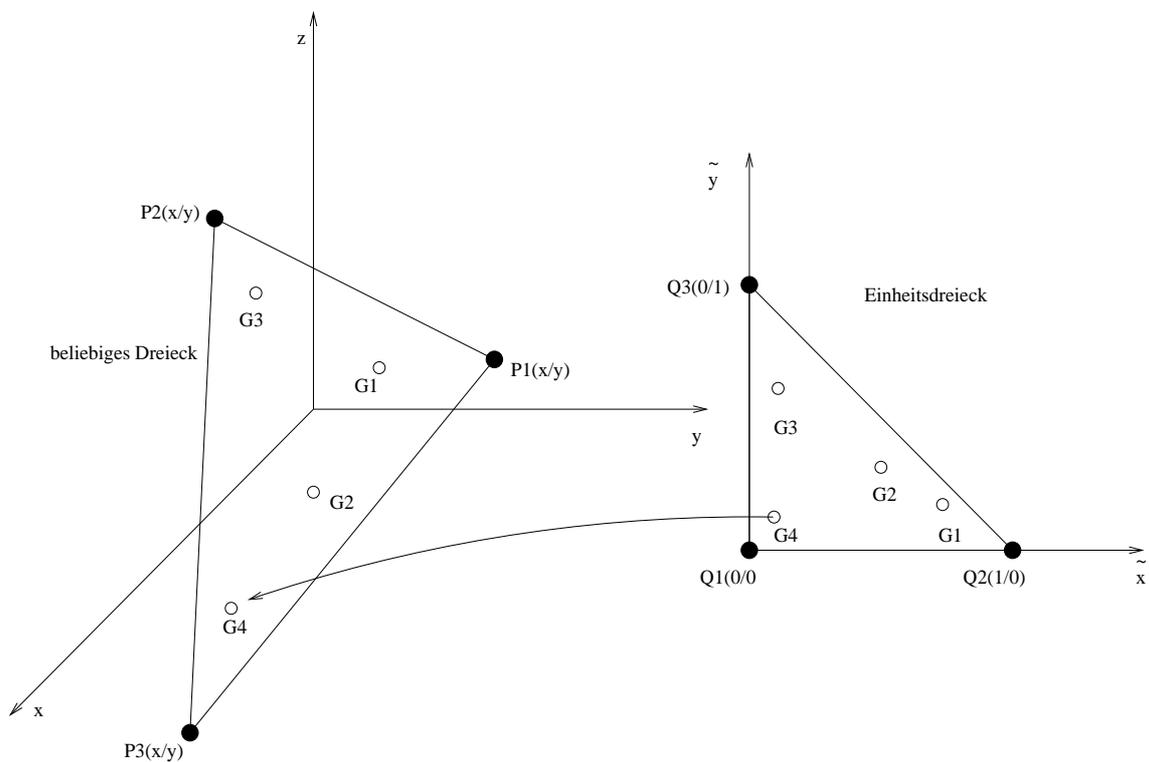


Abbildung 5.10: Numerische Integration über das Einheitsdreieck

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1(-1) + a_2(1) &= x_1 \\
 a_0 + a_1(1) + a_2(1) &= x_2 \\
 a_0 + a_1(1) + a_2(-1) &= x_3 \\
 a_0 + a_1(-1) + a_2(-1) &= x_4
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 b_0 + b_1(-1) + b_2(1) &= y_1 \\
 b_0 + b_1(1) + b_2(1) &= y_2 \\
 b_0 + b_1(1) + b_2(-1) &= y_3 \\
 b_0 + b_1(-1) + b_2(-1) &= y_4
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

und

$$\begin{aligned}
 c_0 + c_1(-1) + c_2(1) &= z_1 \\
 c_0 + c_1(1) + c_2(1) &= z_2 \\
 c_0 + c_1(1) + c_2(-1) &= z_3 \\
 c_0 + c_1(-1) + c_2(-1) &= z_4
 \end{aligned}
 \tag{5.31}$$

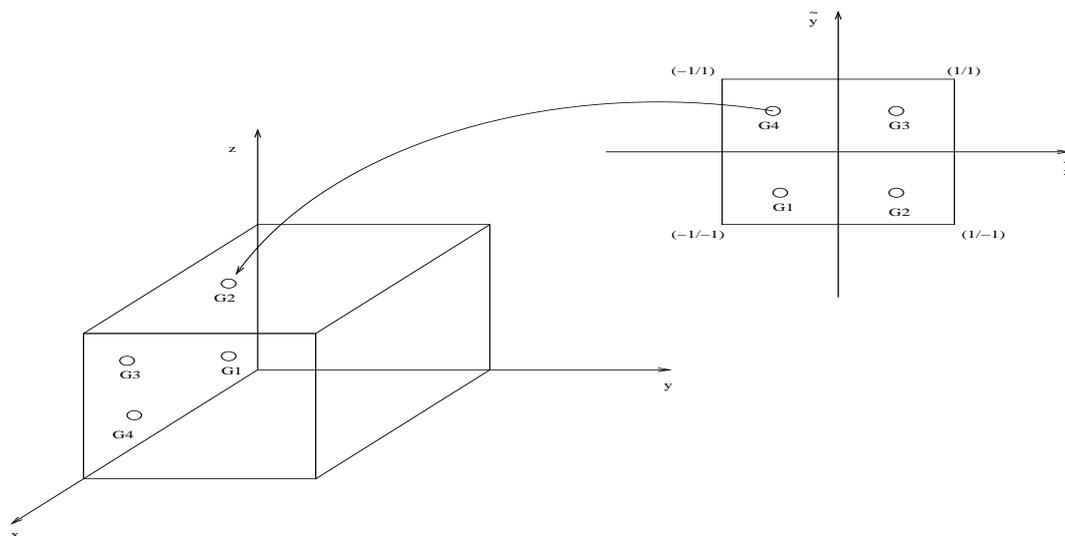


Abbildung 5.11: Transformation der Gauss Punkte vom Einheitsvierecks in ein beliebiges Viereck

liefern die geforderten Koeffizienten. Es ist zu beachten, dass die vierte Zeile der Gleichungssysteme lediglich zur Überprüfung notwendig ist und vernachlässigt werden kann. Durch Lösen dieser Gleichungssysteme kann man die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und b_0, b_1, b_2 sowie c_0, c_1, c_2 bestimmen und anschliessend mit (5.27) die Gauss Punkte einer Zellseite des Hexaeders im dreidimensionalen Raum bestimmen.

Kapitel 6

Aeroakustische Quellen

In der vorliegenden Arbeit werden aeroakustische Quellen mit Hilfe von messtechnischen und numerischen Methoden untersucht.

In Kapitel 6.1 wird auf die messtechnische Bestimmung von aeroakustischen Quellen detailliert eingegangen. Es wird in diesem Kapitel auf das klassische Beamforming Verfahren sowie auf die Lokalisierung von Schallquellen in Windkanälen eingegangen.

Eine weitere Möglichkeit, aeroakustische Quellen zu bestimmen, ist die numerische Modellierung der Quellen. Zur Modellierung der aeroakustischen Quellen wird in Kapitel 6.2 das Expansion about Incompressible Flow (EIF) Modell von Hardin und Pope angewendet [24]. Das EIF Modell nimmt an, dass das kompressible Strömungsfeld in ein inkompressibles Strömungsfeld und ein kompressibles Akustikfeld aufgespalten werden kann. Mit Hilfe dieses Modells können Schallquellen aus den inkompressiblen Strömungsgrößen gewonnen werden. Am Beispiel des korotierenden Wirbelpaares soll die Genauigkeit des EIF Modells überprüft werden. Für diesen Fall existiert eine analytische Lösung, so dass der Schalldruck in einem Aufpunkt verglichen werden kann.

6.1 Messtechnische Bestimmung von Schallquellen

Die Lokalisierung von Schallquellen erfolgt mit dem bekannten Beamforming Verfahren [10]. Mit Hilfe von Mikrophonsignalen ist es bei dieser Methode möglich, bewegte wie auch ruhende Schallquellen zu orten. Im einfachen Delay-and-Sum-Array werden über die geometrische Anordnung der Einzelmikrophone und der Signalquelle die Laufzeitunterschiede berechnet und kompensiert. Dadurch werden Signale aus einer bestimmten Einfallsrichtung gegenüber Hintergrundgeräuschen verstärkt und das Array besitzt dadurch eine Richtwirkung (Beamforming). Mit der Annahme von Punktquellen erhält man mit der Quellverteilung $q(x, t)$ in einem beliebigen Mikrophon (j) eines Mikrophon-Arrays das retardierte Drucksignal

$$p_j(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\mathbf{x}, t - \frac{r_j(\mathbf{x})}{c})}{r_j(\mathbf{x})} d^3\mathbf{x} . \quad (6.1)$$

Hierbei ist der Abstand zwischen dem Quellpunkt \mathbf{x} und der Mikrofonposition \mathbf{x}_j mit

$$r_j(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^2} \tag{6.2}$$

gegeben. Die Lokalisierung der Schallquellen erfolgt in der so genannten Fokusebene. In Abbildung 6.2 ist der Zusammenhang zwischen Quellgebiet, Fokusebene und dem Mikrophon-Array dargestellt. Abbildung 6.1 zeigt ein typisches Mikrophon-Array mit 40 kreuzförmig angeordneten Mikrofonen. Man kann mit dem Beamforming Verfahren diese Ebene abtasten und somit die Quellen in dieser Ebene untersuchen. Die Punkte auf dieser beliebigen Ebene sind durch die Koordinaten \mathbf{x}_0 festgelegt. Der Abstand zwischen einem Fokuspunkt und einem Mikrofon ist mit $r_j(\mathbf{x}_0) = \sqrt{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_j)^2}$ gegeben. Im Zeitbereich ergibt sich durch die lineare Überlagerung der Mikrophonsignale der Schalldruck auf der Fokusebene zu

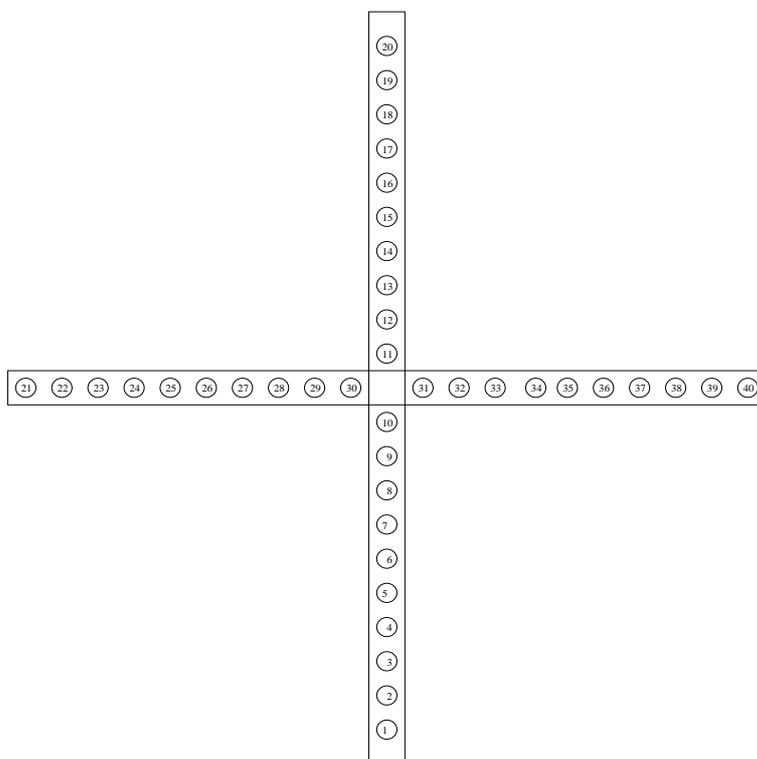


Abbildung 6.1: Kreuz-Array mit 40 Mikrofonen

$$a_{(k)}(\mathbf{x}_0, t) = \sum_{j=1}^N w_j^{(k)} p_j\left(t + \frac{r_j(\mathbf{x}_0)}{c}\right) . \tag{6.3}$$

Hierbei gilt für die Wichtungskoeffizienten $\sum_{j=1}^N w_j^{(k)} = 1$. Der Ausdruck $\frac{r_j(\mathbf{x}_0)}{c}$ in (6.3) ist ein Korrekturterm für das phasenrichtige Aufsummieren der Signale, c steht für die Schallgeschwindigkeit. Mit (6.3) sowie einer Fourier Transformation kann man die lokalisierten

Schallquellen im Frequenzbereich darstellen. Nachteil dieser Methode sind die so genannten Nebenkeulen. Die Hauptkeulen und das Auftreten der Nebenkeulen führen zu einer Ungenauigkeit bei der Lokalisierung und zu einer wechselseitigen Beeinflussung der Amplituden der verschiedenen Quellen. Dies führt dazu, dass nicht eindeutig erkannt werden kann, ob die hohen Energieamplituden auf der Fokusebene eine Schallquelle oder eine Nebenkeule darstellen.

Eine von Brühl [10] weiterentwickelte Methode, die SDM Methode eliminiert die Nebenkeulen durch Lösen eines überbestimmten Gleichungssystems und liefert eine klare Aussage über Quellverteilung und Quellstärke. Die Gleichungen der SDM Methode basieren auf den Gleichungen des Beamforming Verfahrens. Mit der Fourier Transformation der Quellverteilung $q(\mathbf{x}_0, t)$

$$Q(\mathbf{x}_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} q(\mathbf{x}_0, t) dt \quad (6.4)$$

und des Drucks auf der Fokusebene $a(\mathbf{x}_0, t)$

$$A(\mathbf{x}_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} a(\mathbf{x}_0, t) dt \quad (6.5)$$

sowie (6.1) und (6.3) erhält man

$$A_{(k)}(\mathbf{x}_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{(k)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \omega) Q(\mathbf{x}, \omega) d^3x . \quad (6.6)$$

Hierbei sind Quellpunkte und Fokuspunkte durch die Transferfunktion

$$G_{(k)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}; \omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{(k)}}{r_j(\mathbf{x})} e^{i\frac{\omega}{c}[r_j(\mathbf{x}_0) - r_j(\mathbf{x})]} \quad (6.7)$$

miteinander verknüpft. Mit diesen Annahmen erhält man für das Leistungsspektrum

$$A_{(k)}^*(\mathbf{x}_0, \omega) A_{(k')}(\mathbf{x}_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{(k)}^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}; \omega) G_{(k')}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \omega) \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) d^3x d^3x' . \quad (6.8)$$

In (6.8) wird das Leistungsspektrum der Quellverteilung

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = Q^*(\mathbf{x}, \omega) Q(\mathbf{x}', \omega) \quad (6.9)$$

durch multiplizieren der komplexen Quelle Q^* mit der Quelle Q gewonnen. Die mit einem Stern gekennzeichneten Größen sind in (6.8) konjugiert komplex.

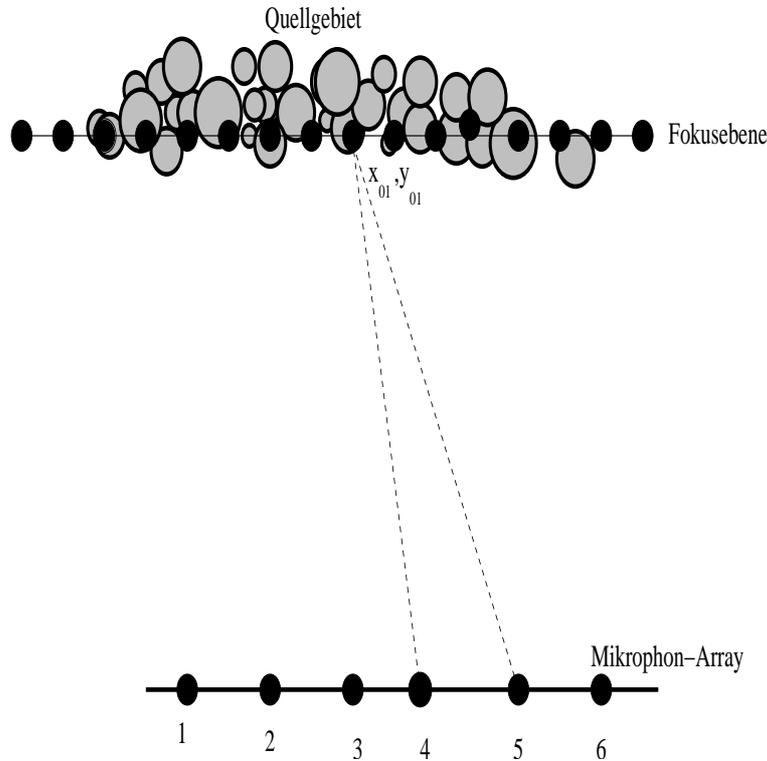


Abbildung 6.2: Zusammenhang Quellgebiet, Fokusebene und Mikrophon-Array

Mit der Annahme unkorrelierter Quellen erhält man mit

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \Psi^{RPA}(\mathbf{x}; \omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6.10)$$

die Grundgleichung des SDM Verfahrens

$$A_{(k)}^*(\mathbf{x}_0, \omega) A_{(k')}(\mathbf{x}_0, \omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} G_{(k)}^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}; \omega) G_{(k')}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0; \omega) \Psi^{RPA}(\mathbf{x}; \omega) d^3x . \quad (6.11)$$

Die Grundgleichung des SDM Verfahrens kann für diskrete Quellen und Fokuspunkte auch in der Form

$$A = H \Psi^{RPA} \quad (6.12)$$

dargestellt werden. Die Anzahl der Quellpunkte ist bei dieser Vorgehensweise kleiner als die Anzahl der Fokuspunkte. Damit stellt die Grundgleichung ein überbestimmtes Gleichungssystem dar. Die Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen kann mit der Singular Value Decomposition Methode (SVD) durchgeführt werden. Im vorliegenden Fall liefert die SVD Methode jedoch negative Quellstärken und wird nicht weiter untersucht. Der modifizierte Least Mean Square Algorithmus mit der Rechenvorschrift

$$\Psi^{RPA(n+1)} = \Psi^{RPA(n)} + 2\mu \underbrace{(A - H \cdot \Psi^{RPA(n)})}_{=\epsilon} \cdot H^T \quad (6.13)$$

liefert hingegen realistische Ergebnisse. Hierbei werden die negativen Energieamplituden der Quellen durch eine Abfrage auf den Wert Null gesetzt. Diese Vorgehensweise wird bei der Lokalisierung von ruhenden wie auch bewegten Schallquellen eingesetzt.

Bei Windkanaluntersuchungen ist das vorliegende Mikrophon-Array ausserhalb der Strömung positioniert. Die aeroakustischen Quellen des Windkanalmodells werden durch die Anströmung generiert und breiten sich wellenförmig aus. Hierbei breitet sich die Welle der unbewegten Quelle zunächst in der Strömung und nach der Brechung an der unendlich dünn angenommenen Scherschicht in einem ruhenden Medium aus [1, 2]. Durch den Geschwindigkeitssprung beziehungsweise der Brechung des Strahls kommt es zu Laufzeitverschiebungen der Mikrophonesignale. Diese Laufzeitverschiebungen müssen korrigiert werden. In folgendem Abschnitt wird ein Verfahren zur Berücksichtigung der Brechung des Strahls an der Scherschicht vorgestellt. Die Gleichungen des klassischen Beamforming Verfahrens bleiben dadurch erhalten. Es muss lediglich die Phase korrigiert werden. Die Brechung an der Scherschicht hat nahezu keinen Einfluß auf die Amplitude der Welle und wird vernachlässigt. In der vorliegenden Arbeit werden die Laufzeitverschiebungen an einem Windkanal mit kreisförmigen und an einem Windkanal mit rechteckigem Düsenaustritt hergeleitet und angewendet.

6.1.1 Scherschichtkorrektur

In diesem Abschnitt wird auf die Grundgleichungen sowie auf den Lösungsalgorithmus eingegangen. Zur mathematischen Erfassung der Brechung wird zwischen kreisförmigem und rechteckigem Düsenaustritt unterschieden. Die Berücksichtigung der Kanalgeometrie ist bei einer dreidimensionalen Betrachtung zwingend notwendig. Die Ausbreitung der Welle wird durch eine Hochfrequenznäherung approximiert.

Grundgleichungen bei kreisförmigem Düsenaustritt

Zur mathematischen Erfassung der Windkanalgeometrie wird die Kegelgleichung

$$-\left(\frac{x + L_2}{L_1 + L_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{R_1}\right)^2 = 0 \quad (6.14)$$

verwendet. Mit der geometrischen Beziehung

$$\tan(\varphi) = \frac{R_1}{L_1 + L_2} = \frac{R_2}{L_2} \quad (6.15)$$

erhält man die modifizierte Kegelgleichung

$$-\left(\frac{x(R_1 - R_2)}{L_1} + R_2\right)^2 + y^2 + z^2 = 0. \quad (6.16)$$

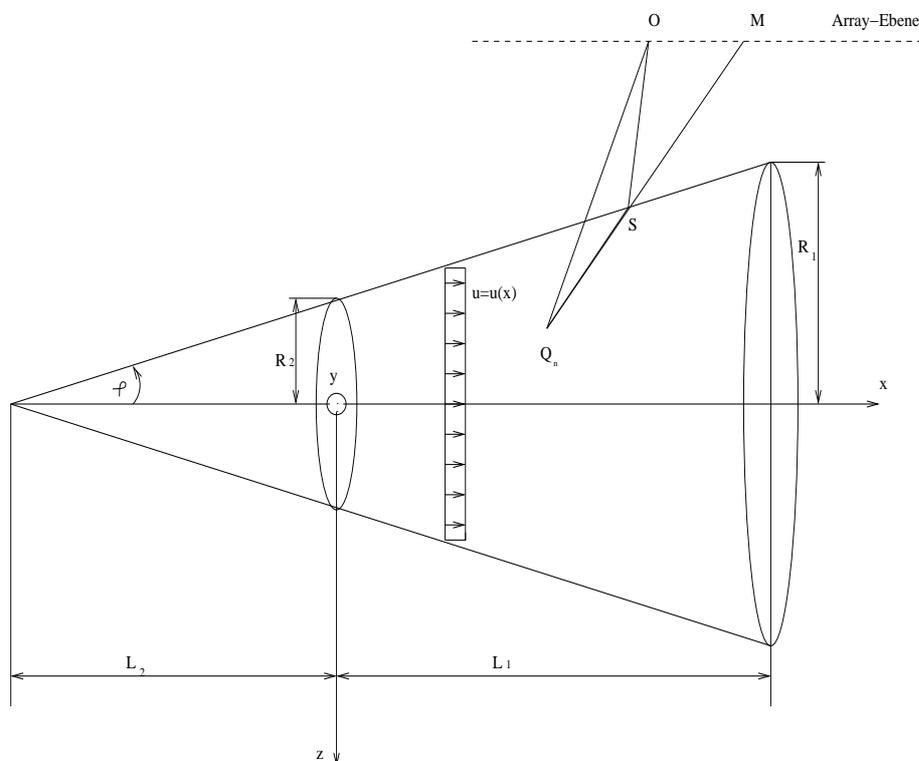


Abbildung 6.3: Schallausbreitung im strömenden Medium, CEPRA19 mit kreisförmigem Düsenaustritt

Die Größen x, y und z sind die Koordinaten des rechtwinkligen kartesischen Systems, R_1 und R_2 die Radien des kegelförmigen Kanals, L_1 und L_2 die Längen des Kegels. Der Winkel φ steht für den Öffnungswinkel des Kegels (Abbildung 6.3). Die Schallgeschwindigkeit wird im gesamten dreidimensionalen Raum als konstant angenommen. Q_N ist eine beliebige Quelle im Strömungskanal mit den Koordinaten x_N, y_N, z_N und wird mit der Geschwindigkeit $u = u(x)$ angeströmt.

Das Geschwindigkeitsprofil ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Ohne Strömung kommt das von der Quelle Q_N ausgesandte Signal im Punkt M , mit den Koordinaten x_M, y_M, z_M , der Array-Ebene an. Durch den Einfluß der Strömung wird der Strahl im Punkt S , mit den Koordinaten x_S, y_S, z_S , umgelenkt und kommt im Punkt O , mit den Koordinaten x_O, y_M, z_M , der Array-Ebene an. Zur Erfassung der Strahls muss die Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_M - x_N \\ y_M - y_N \\ z_M - z_N \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

mit den gegebenen Koordinaten x_N, y_N, z_N der Quelle Q_N und den Koordinaten x_M, y_M, z_M des Mikrofons M in (6.16) eingesetzt werden und man erhält die quadratische Gleichung

$$\left[\frac{x_N + \gamma(x_M - x_N)(R_1 - R_2)}{L_1} + R_2 \right]^2 + [y_N + \gamma(y_M - y_N)]^2 + [z_N + \gamma(z_M - z_N)]^2 = 0. \quad (6.18)$$

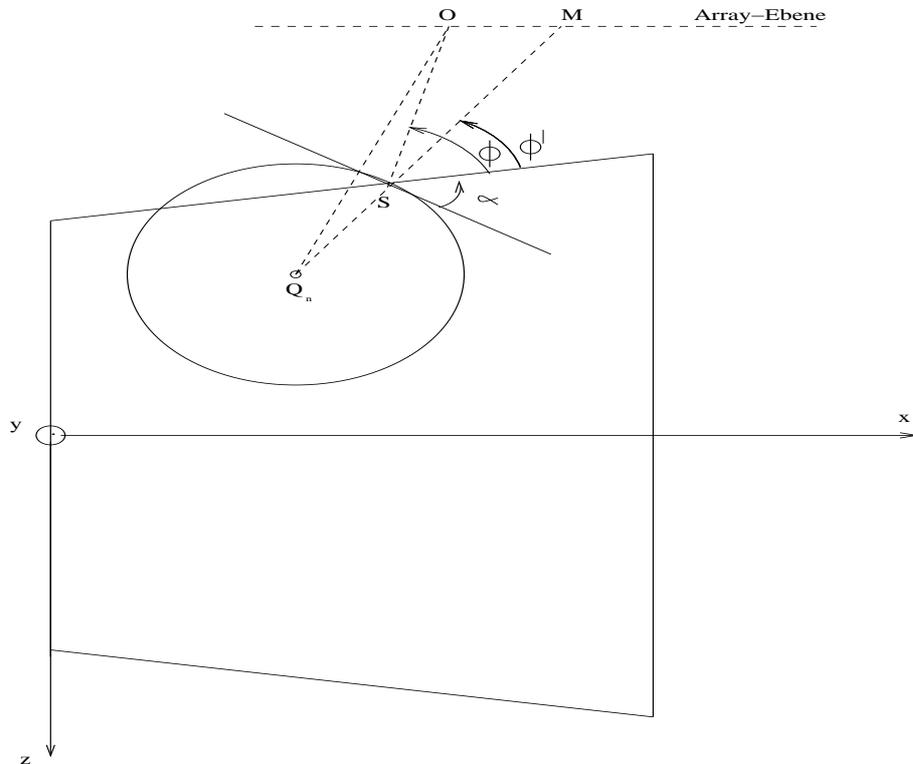


Abbildung 6.4: Darstellung der Winkel

Die Bestimmung der Unbekannten γ erfolgt durch Lösen von

$$\gamma = \frac{-B + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}. \quad (6.19)$$

Hierbei werden die Größen

$$A = -A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2, \quad (6.20)$$

$$B = -2A_X B_X + 2A_Y B_Y + 2A_Z B_Z \quad (6.21)$$

und

$$C = -B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2 \quad (6.22)$$

in (6.19) mit

$$A_X = \frac{(x_M - x_N)(R_1 - R_2)}{L_1}, \quad (6.23)$$

$$B_X = \frac{x_N}{L_1}(R_1 - R_2) + R_2, \quad (6.24)$$

$$A_Y = y_M - y_N, \quad (6.25)$$

$$B_Y = y_N, \quad (6.26)$$

$$A_Z = z_M - z_N \quad (6.27)$$

und

$$B_Z = z_N \quad (6.28)$$

bestimmt. Dadurch liegt die Konstante γ fest. Die Koordinaten des Schnittpunkts S können nun mit

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_N + \gamma(\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N) \quad (6.29)$$

berechnet werden. Die Ausbreitung des Schalls (Kugelwellen) ist mit

$$\left(x - x_N - \frac{v}{c}R\right)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2 = R^2 \quad (6.30)$$

definiert. Für den Radius der Kugelwelle ergibt sich nach einer Umformung von (6.30)

$$R = \frac{-Ma(x - x_N) \pm \sqrt{Ma^2(x - x_N)^2 + (1 - Ma^2)[(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2]}}{(1 - Ma^2)}. \quad (6.31)$$

Die hier verwendete Mach Zahl ist mit

$$Ma = \frac{u(x)}{c} \quad (6.32)$$

definiert. Die Geschwindigkeit $u(x)$ lässt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen bestimmen. Mit der Geschwindigkeit an der Düsenöffnung

$$u_0 = u(x = 0) \quad (6.33)$$

erhält man in einem beliebigen Punkt die Geschwindigkeit

$$u(x) = \frac{R_2^2 u_0}{(x \tan \varphi + R_2)^2}. \quad (6.34)$$

Der Öffnungswinkel des Kegels wird mit

$$\tan \varphi = \frac{R_1}{L_1 + L_2} \quad (6.35)$$

berechnet. Der Öffnungswinkel eines Windkanals ist aus Messungen näherungsweise bekannt. Mit diesen Annahmen kann im Schnittpunkt S eine Tangentialebene an die Kugelwelle gelegt und der Normalenvektor der Ebene in diesem Schnittpunkt mit

$$\begin{bmatrix} NKU_x \\ NKU_y \\ NKU_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

berechnet werden. Zur Bestimmung der Ableitungen von (6.31) muss (6.32) sowie (6.34) berücksichtigt werden. Mit dem Zähler des ersten Terms in (6.31)

$$U_1 = -(x - x_N)R_2^2 u_0 (x \tan(\varphi) + R_2)^2 c_S, \quad (6.37)$$

dem Nenner

$$V_1 = (x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2 - R_2^4 u_0^2, \quad (6.38)$$

der Ableitung des Zählers

$$U_1' = -R_2^2 u_0 c_S [(x \tan(\varphi) + R_2)^2 + 2(x - x_N)(x \tan(\varphi) + R_2) \tan(\varphi)] \quad (6.39)$$

sowie der Ableitung des Nenners

$$V_1' = 4c_S^2 (x \tan(\varphi) + R_2)^3 \tan(\varphi) \quad (6.40)$$

kann man die Ableitung

$$F_{1X} = \frac{U_1' V_1 - V_1' U_1}{V_1^2} \quad (6.41)$$

bestimmen. Mit dem Zähler des zweiten Terms

$$U_2 = \sqrt{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2 - \frac{R_2^4 u_0^2 ((y - y_N)^2 + (z - z_N)^2)}{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2}}, \quad (6.42)$$

dem Nenner

$$V_2 = 1 - \frac{R_2^4 u_0^2}{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2}, \quad (6.43)$$

der Ableitung des Zählers

$$U_2' = \frac{1}{2U_2} \left(2(x - x_N) + \frac{4R_2^4 u_0^2 \tan(\varphi)}{c_S^2 (x \tan(\varphi) + R_2)^5} ((y - y_N)^2 + (z - z_N)^2) \right) \quad (6.44)$$

sowie der Ableitung des Nenners

$$V_2' = \frac{4R_2^4 u_0^2 \tan(\varphi)}{c_S^2 (x \tan(\varphi) + R_2)^5} \quad (6.45)$$

lässt sich die Ableitung

$$F_{2X} = \frac{U_2' V_2 - V_2' U_2}{V_2^2} \quad (6.46)$$

bestimmen. Die Summe der Ableitungen F_{1X} und F_{2X} ergibt die gesuchte Ableitung von (6.31) nach dem Ort x

$$F_X = F_{1X} + F_{2X} . \quad (6.47)$$

Die Ableitung nach x sowie nach y

$$F_Y = \frac{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2}{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2 - R_2^4 u_0^2} \frac{(y - y_N)}{U_2} \left(1 - \frac{R_2^4 u_0^2}{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2}\right) \quad (6.48)$$

und nach z

$$F_Z = \frac{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2}{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2 - R_2^4 u_0^2} \frac{(z - z_N)}{U_2} \left(1 - \frac{R_2^4 u_0^2}{(x \tan(\varphi) + R_2)^4 c_S^2}\right) \quad (6.49)$$

muss normiert werden und man erhält durch die Normierung:

$$NKU_X = \frac{F_X}{\sqrt{(FX^2 + FY^2 + FZ^2)}} \quad (6.50)$$

$$NKU_Y = \frac{F_Y}{\sqrt{(FX^2 + FY^2 + FZ^2)}} \quad (6.51)$$

$$NKU_Z = \frac{F_Z}{\sqrt{(FX^2 + FY^2 + FZ^2)}} \quad (6.52)$$

Grundgleichungen bei rechteckigem Düsenaustritt

Die in obigem Abschnitt beschriebene Vorgehensweise für kreisförmige Düsenaustritte gilt auch für die rechteckige Düse. Es wird nun auf die Herleitung der Größen F_X , F_Y und F_Z bei rechteckigen Düsenaustritten eingegangen.

Zur Beschreibung des rechteckigen Düsenaustrittes, wie sie beispielsweise im Akustischen Windkanal in Braunschweig AWB (Abbildung 6.5) verwendet wird, muss die Ebenengleichung der Kanalwand

$$-\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)z = \cos(\varphi)\frac{a}{2} \quad (6.53)$$

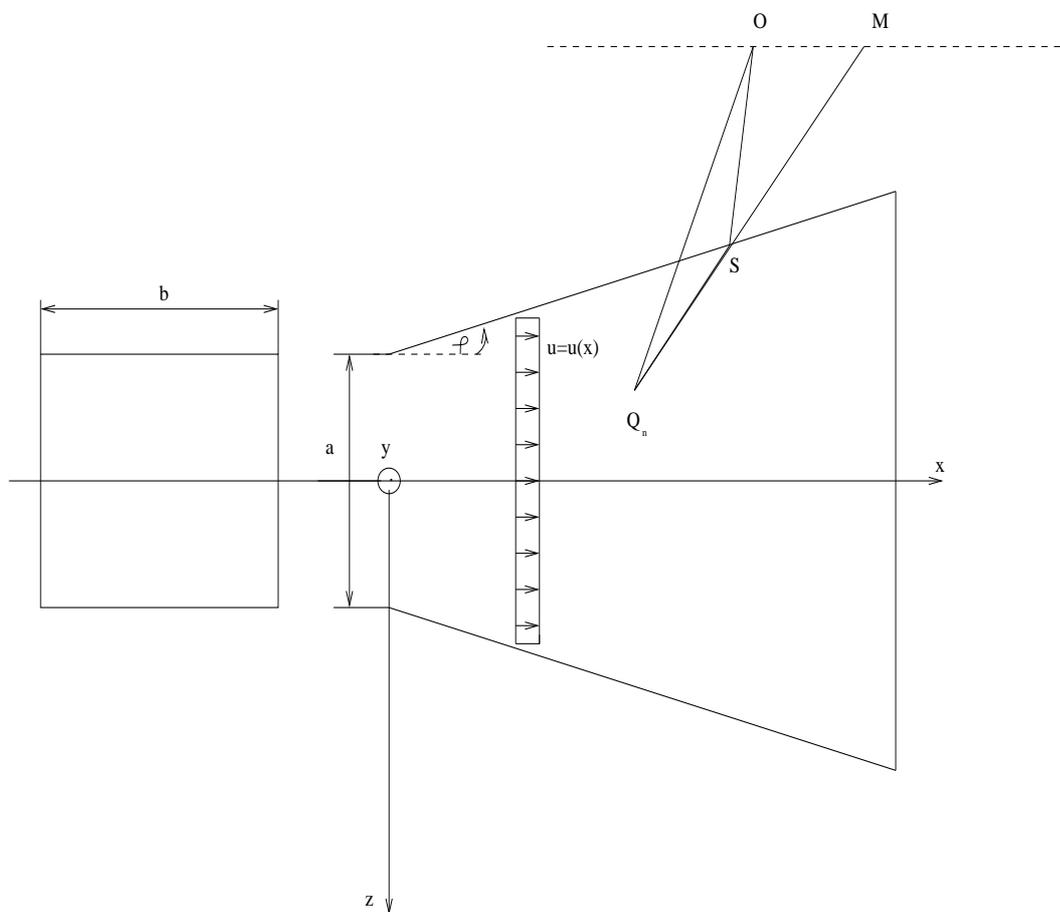


Abbildung 6.5: Schallausbreitung im strömenden Medium, AWB mit rechteckigem Düsenaustritt

mit der Strahlgleichung (6.17) gleichgesetzt werden. Dadurch erhält man

$$\gamma = \frac{(-\sin(\varphi)x_N + \cos(\varphi)zn - 0.5 \cos(\varphi)a)}{(\sin(\varphi)(x_M - x_N) - \cos(\varphi)(z_M - zn))} \quad (6.54)$$

und kann den Schnittpunkt des Strahls mit der Scherschicht bestimmen. Hierbei wird die Mach Zahl mit

$$Ma = \frac{abu_0}{(2 \tan(\varphi)x_S + a)(2 \tan(\varphi)x_S + b)c_S} \quad (6.55)$$

berechnet. Die Größen a und b kennzeichnen den Düsenaustritt. Zur Beschreibung des Vektors (6.36) muss (6.55) in (6.31) eingesetzt werden. Mit dem ersten Term des Nenners

$$U_1 = \frac{-abu_0(x_S - x_N)}{c_S(2.0 \tan(\varphi)x_S + a)(2 \tan(\varphi)x_S + b)} \quad (6.56)$$

des Zählers

$$V_1 = 1 - \frac{a^2 b^2 u_0^2}{c_s^2 (2 \tan(\varphi) x_S + a)^2 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^2} \quad (6.57)$$

der Ableitung des Zählers nach x

$$U'_1 = -abu_0 \frac{(2 \tan(\varphi) x_S + a)(2 \tan(\varphi) x_S + b) - (x_S - x_N) 2 \tan(\varphi) (4 \tan(\varphi) x_S + a + b)}{c_s (2 \tan(\varphi) x_S + a)^2 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^2} \quad (6.58)$$

und der Ableitung des Nenners nach x

$$V'_1 = \frac{4a^2 b^2 u_0^2 \tan(\varphi) ((2 \tan(\varphi) x_S + a)(2 \tan(\varphi) x_S + b)^2 + (2 \tan(\varphi) x_S + b)(2 \tan(\varphi) x_S + a)^2)}{c_s^2 (2 \tan(\varphi) x_S + a)^4 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^4} \quad (6.59)$$

erhält man die gesuchte Ableitung

$$F_{1X} = \frac{U'_1 V_1 - V'_1 U_1}{V_1^2}. \quad (6.60)$$

Der Nenner des zweiten Terms

$$U_2 = \sqrt{(x_S - x_N)^2 + (y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2 - \frac{a^2 b^2 u_0^2 ((y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2)}{c_s^2 (2 \tan(\varphi) x_S + a)^2 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^2}} \quad (6.61)$$

der Zähler

$$V_2 = V_1 \quad (6.62)$$

sowie die Ableitung des Zählers

$$U'_2 = \frac{1}{U_2} [(x_S - x_N) + 2a^2 b^2 u_0^2 ((y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2) \tan(\varphi) \frac{(2 \tan(\varphi) x_S + a)(2 \tan(\varphi) x_S + b)^2 + (2 \tan(\varphi) x_S + b)(2 \tan(\varphi) x_S + a)^2}{c_s^2 (2 \tan(\varphi) x_S + a)^4 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^4}] \quad (6.63)$$

und des Nenners

$$V'_2 = V'_1 \quad (6.64)$$

liefern die gesuchte Ableitung nach dem Ort x

$$F_{2X} = \frac{U_2'V_2 - V_2'U_2}{V_2^2}. \quad (6.65)$$

Mit der Summe der Ableitungen F_{1X} und F_{2X} erhält man

$$F_X = F_{1X} + F_{2X}, \quad (6.66)$$

die Ableitungen nach y und z sind

$$F_Y = \frac{(y_S - y_N)}{VU_2} \left(1 - \frac{a^2 b^2 u_0^2}{c_S^2 (2 \tan(\varphi) x_S + a)^2 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^2}\right) \quad (6.67)$$

und

$$F_Z = \frac{(z_S - z_N)}{VU_2} \left(1 - \frac{a^2 b^2 u_0^2}{c_S^2 (2 \tan(\varphi) x_S + a)^2 (2 \tan(\varphi) x_S + b)^2}\right). \quad (6.68)$$

Nach einer Normierung wie in (6.50), (6.51) und (6.52) kann der Normalenvektor (6.36) bei rechteckigen Düsenaustritten bestimmt werden.

Bestimmung der strömungskorrigierten Phase

Mit den hergeleiteten Normalenvektoren NKU_x , NKU_y und NKU_z für kreisförmige und rechteckige Düsenaustritte kann man die weiteren Gleichungen der Scherschichtkorrektur herleiten. Diese sind nicht von der Geometrie der Düse abhängig. Es muss nun im Schnittpunkt S der durch geometrische Überlegungen hergeleitete Vektor **NKE** bestimmt werden. Für diesen gilt

$$\begin{bmatrix} NKE_x \\ NKE_y \\ NKE_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tan(\varphi) \sqrt{(y_M - y_S)^2 + (z_M - z_S)^2} \\ y_M - y_S \\ z_M - z_S \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Mit der Beziehung

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{NKE} \cdot \mathbf{NKU}}{|\mathbf{NKE}| |\mathbf{NKU}|} \quad (6.70)$$

kann der Winkel α zwischen den Normalenvektoren **NKE** und dem Vektor **NKU** berechnet werden (Abbildung 6.4). Mit der Annahme, dass der Strahl nur in Strömungsrichtung x gebrochen wird und ausserhalb der Strömung das Medium ruht, erhält man mit der Brechungsbedingung

$$\frac{1}{\sin \alpha} + Ma(x) = \frac{1}{\cos \theta} \quad (6.71)$$

den Umlenkwinkel θ (Abbildung 6.4). Dabei wird angenommen, dass die Schallgeschwindigkeit des ruhenden Mediums der des bewegten Fluides entspricht. Zur Bestimmung des Auftreffpunktes O (mit x_O, y_M, z_M) muss anschließend der Winkel θ' bestimmt werden. Hierzu wird der Ersatzwinkel α_{er} mit $\alpha_{er} = \alpha(Ma = 0)$ berechnet. Mit der Annahme $Ma = 0$ kann der der Normalenvektor \mathbf{NKU}_{er} mit den Komponenten

$$\begin{bmatrix} NKU_{erx} \\ NKU_{ery} \\ NKU_{erz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_S - x_N}{\sqrt{(x_S - x_N)^2 + (y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2}} \\ \frac{y_S - y_N}{\sqrt{(x_S - x_N)^2 + (y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2}} \\ \frac{z_S - z_N}{\sqrt{(x_S - x_N)^2 + (y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2}} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

berechnet werden. Damit ist der Winkel α_{er} mit

$$\cos(\alpha_{er}) = \frac{\mathbf{NKE} \mathbf{NKU}_{er}}{|\mathbf{NKE}| |\mathbf{NKU}_{er}|} \quad (6.73)$$

bekannt. Mit α_{er} , der Brechungsbedingung (6.71) sowie der Bedingung $Ma(x) = 0$ erhält man den gesuchten Winkel

$$\theta' = \arccos(\sin(\alpha_{er})) \quad (6.74)$$

Im vorletzten Schritt wird mit den Vektoren

$$\mathbf{VEK}_1 = \begin{bmatrix} x_O - x_S \\ y_M - y_S \\ z_M - z_S \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

und

$$\mathbf{VEK}_2 = \begin{bmatrix} x_M - x_S \\ y_M - y_S \\ z_M - z_S \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

sowie

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{\mathbf{VEK}_1 \mathbf{VEK}_2}{|\mathbf{VEK}_1| |\mathbf{VEK}_2|} \quad (6.77)$$

die Bestimmungsgleichung für die gesuchte Koordinate x_M

$$x_O = x_S + \frac{(y_M - z_S)^2 + (z_M - z_S)^2)(x_M - x_S)}{(x_M - x_S)^2 \sin^2(\theta - \theta') + \cos^2(\theta - \theta')((y_M - z_S)^2 + (z_M - z_S)^2)} - \frac{\sin(\theta - \theta') \cos(\theta - \theta')((x_M - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2 + (z_M - z_S)^2) \sqrt{(y_M - y_S)^2 + (z_M - z_S)^2}}{(x_M - x_S)^2 \sin^2(\theta - \theta') + \cos^2(\theta - \theta')((y_M - z_S)^2 + (z_M - z_S)^2)} \quad (6.78)$$

hergeleitet. Auf die iterative Lösung dieser nichtlinearen Gleichung wird im folgenden Abschnitt "Lösungsalgorithmus" ausführlich eingegangen. Im letzten Schritt wird die korrigierte Phase berechnet. Hierzu werden die Strecken vom Quellort N zum Schnittpunkt S und vom Schnittpunkt S zum Auftreffpunkt O aufsummiert und durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit c dividiert. Mathematisch bedeutet dies

$$\Omega = \frac{1}{c} \left(R(\mathbf{x}_S) + \sqrt{(x_O - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2 + (z_M - z_S)^2} \right) . \quad (6.79)$$

Diese strömungskorrigierte Phase wird zur Korrektur des Drucks am Mikrofon O benötigt. Mit dem korrigierten Druck p_j kann anschließend der Array-Output mit Hilfe des klassischen Beamforming Verfahrens nach (6.3) berechnet werden.

Lösungsalgorithmus

Zur Lösung von (6.78) wird das iterative Newton Verfahren verwendet. Hierzu muss zunächst (6.78) in die Residuungleichung

$$res = -x_O + x_S + \frac{(y_M - z_S)^2 + (z_M - z_S)^2)(x_M - x_S)}{(x_M - x_S)^2 \sin^2(\theta - \theta') + \cos^2(\theta - \theta')((y_M - z_S)^2 + (z_M - z_S)^2)} - \frac{\sin(\theta - \theta') \cos(\theta - \theta')((x_M - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2 + (z_M - z_S)^2) \sqrt{(y_M - y_S)^2 + (z_M - z_S)^2}}{(x_M - x_S)^2 \sin^2(\theta - \theta') + \cos^2(\theta - \theta')((y_M - z_S)^2 + (z_M - z_S)^2)} \quad (6.80)$$

umgeformt werden. Die nichtlineare Residuungleichung (6.80) wird mit Hilfe des Newton Verfahrens iterativ nach dem gesuchten Wert x_M gelöst. Die Rechenvorschrift des Newton Verfahrens lautet

$$x_m^{(k+1)} = x_m^{(k)} - \frac{res(x_m)^{(k)}}{\frac{dres(x_m)}{dx_m}} . \quad (6.81)$$

Im vorliegenden Fall wird die Ableitung $dres/dx_m$ mit der zentralen Differenz zweiter Ordnung

$$\frac{dres}{dx_m} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{res(x_m + dx) - res(x_m - dx)}{2 dx} \quad (6.82)$$

approximiert. Man erhält damit die Rechenvorschrift

$$x_m^{(k+1)} = x_m^{(k)} - \frac{res(x_m)^{(k)}}{\frac{res^{(k)}(x_m + dx) - res^{(k)}(x_m - dx)}{2 dx}}, \quad (6.83)$$

wobei k für die Iterationslaufzahl steht. Als Startwert für die unbekannte Koordinate x_M wird x_O genommen. Bei einer vom Anwender angegebenen Genauigkeit kann die Iteration abgeschlossen werden. Es wurde festgestellt, dass schon bei $k = 5$ Iterationen ein Residuum von $res = 10^{-5}$ erreicht werden kann.

Im letzten Schritt wird mit den nun bekannten Koordinaten x_M, y_M, z_M und x_N, y_N, z_N der Schnittpunkt $S(x_S, y_S, z_S)$ mit (6.29) berechnet. Anschließend kann, wie bereits erwähnt, mit (6.79) die korrigierte Phase bestimmt und bei der Auswertung der Arraysignale berücksichtigt werden.

6.2 Numerische Quellmodellierung

Beim EIF Modell werden zunächst die inkompressiblen Strömungsgrößen u_{inc}, v_{inc} und p_{inc} mit Hilfe der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{inc} = 0 \quad (6.84)$$

$$\mathbf{u}_{inc,t} + (\mathbf{u}_{inc} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{inc} + \frac{1}{\rho_{inc}} \nabla p_{inc} = \frac{1}{\rho_{inc}} \nabla \mathbf{T}_{inc} \quad (6.85)$$

berechnet. Die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen beschreiben die Massen- und Impulserhaltung bei inkompressiblen Strömungen. Bei inkompressiblen Strömungen gilt $\rho_{inc} = \text{konstant}$. Die Grundgleichungen des EIF Modells werden aus den kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) hergeleitet. Hierbei ist im vorliegenden Fall die Entropie konstant. Beim EIF Modell wird mit Hilfe des Ansatzes

$$\rho = \rho_{inc} + \rho^{(1)} + \rho' \quad (6.86)$$

$$u = u_{inc} + u' \quad (6.87)$$

$$v = v_{inc} + v' \quad (6.88)$$

$$p = p_{inc} + p' \quad (6.89)$$

angenommen, dass die kompressible Strömung in eine inkompressible Strömung und in einen akustischen Anteil aufgeteilt werden kann. Zur Korrektur der inkompressiblen Dichte ρ_{inc} wird die hydrodynamische Dichte $\rho^{(1)}$ eingeführt. Die hydrodynamische Dichte

$$\rho^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{c_\infty} = \frac{1}{c_\infty} \left(p_{inc} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_{inc} dt \right) \quad (6.90)$$

lässt sich aus dem hydrodynamischen Druck $p^{(1)}$ berechnen. Der hydrodynamische Druck ist die Differenz zwischen dem inkompressiblen Druck p_{inc} und der zeitlichen Mittelung des inkompressiblen Drucks. Die Ansätze (6.86)-(6.89) werden in die Navier-Stokes Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) eingesetzt und man erhält bei Vernachlässigung der viskosen Terme die nichtlineare Formulierung

$$\rho'_t + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' = -\rho_t^{(1)} - \mathbf{u} \cdot \nabla \rho^{(1)} \quad (6.91)$$

$$\mathbf{u}'_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho} \nabla p' = -\frac{\rho^{(1)} + \rho'}{\rho} \mathbf{u}_{inc,t} - \left(\left(\frac{\rho^{(1)} + \rho'}{\rho} \mathbf{u}_{inc} + \mathbf{u}' \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_{inc} \quad (6.92)$$

Mit Hilfe der isentropen Beziehung

$$p = p_{inc} \left(\frac{\rho}{\rho_{inc}} \right)^\gamma \quad (6.93)$$

kann man den Druck bestimmen. Wie bereits beschrieben, können nichtlineare Effekte vernachlässigt werden, so dass (6.91) und (6.92) linearisiert werden können. Hierbei werden Terme höherer Ordnung vernachlässigt und man erhält die Grundgleichungen des EIF Modells

$$\rho'_t + \rho_{inc} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}_{inc} \cdot \nabla \rho' = -\rho_t^{(1)} - \mathbf{u}_{inc} \cdot \nabla \rho^{(1)} \quad (6.94)$$

$$\mathbf{u}'_t + (\mathbf{u}_{inc} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho_{inc}} \nabla p' = 0 \quad (6.95)$$

$$p'_t + \gamma p_{inc} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}_{inc} \cdot \nabla p' = -p_{inc,t} - \mathbf{u}_{inc} \cdot \nabla p_{inc} \quad (6.96)$$

Die linke Seite der Gleichungen entspricht den linearisierten Euler Gleichungen und beschreibt die Ausbreitung der Wellen. Die rechte Seite der Gleichungen beschreibt die aus der inkompressiblen Strömung berechneten Quellen. Mit Hilfe der Finite Differenzen, der Natural Neighbour oder der Finite Volumen Methode können diese Gleichungen gelöst werden und liefern die gesuchten akustischen Störgrößen ρ', u', v', p' .

6.2.1 Schallgenerierung des korotierenden Wirbelpaars

In diesem Abschnitt werden die im EIF Modell benötigten inkompressiblen Größen am Beispiel des gegenläufig rotierenden Wirbelpaares hergeleitet. Die analytische Lösung des Schalldrucks ist bei diesem Fall gegeben und kann zur Validierung des numerischen Ergebnisses herangezogen werden.

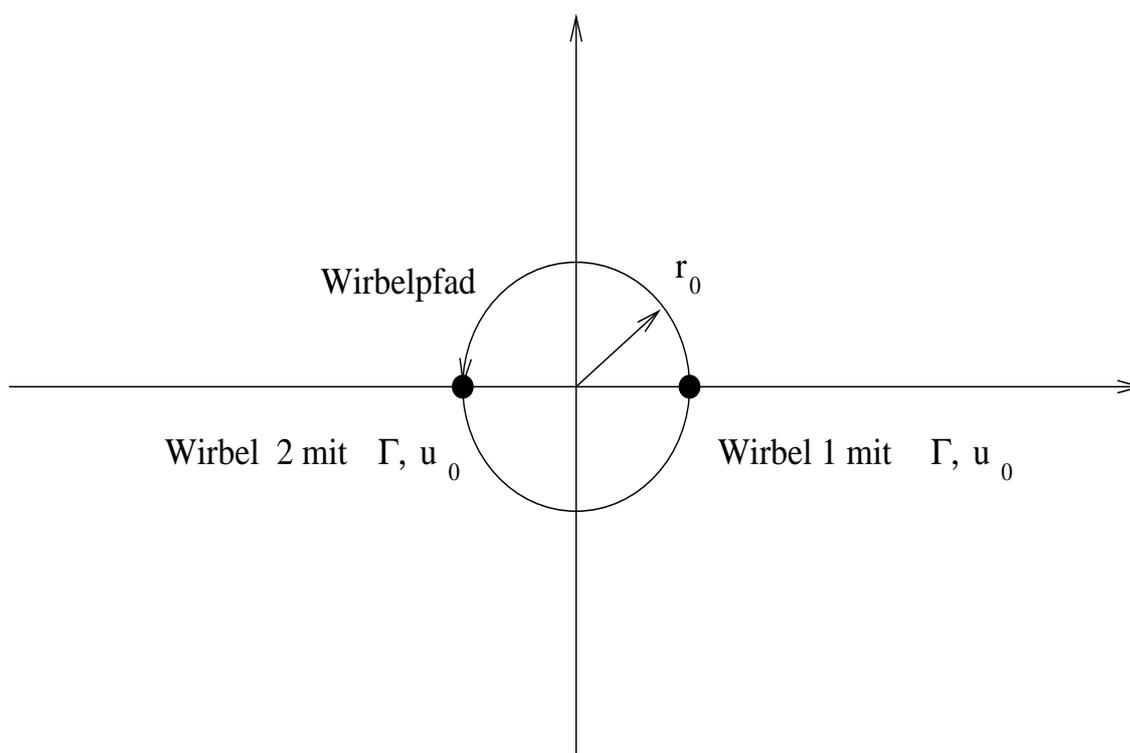


Abbildung 6.6: Korotierendes Wirbelpaar

Mit Hilfe der Potentialtheorie können die inkompressiblen Größen und damit die Quellen in (6.94)-(6.96) berechnet werden. Im vorliegenden Fall rotieren die beiden Wirbel mit einem Abstand von $d = 2r_0$ um den Nullpunkt

$$b_0 = x_0 + iy_0 . \quad (6.97)$$

Mit dem Wirbelpfad

$$b = r_0 e^{i\omega t} , \quad (6.98)$$

der Zirkulation Γ sowie der komplexen Variablen $z = x + iy$ erhält man die komplexe Potentialfunktion

$$w(z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - b - b_0) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + b - b_0) . \quad (6.99)$$

Die Potentialfunktion

$$w = \Phi + i\Psi \quad (6.100)$$

setzt sich aus dem Geschwindigkeitspotential Φ und der Stromfunktion Ψ zusammen. Mit den jeweiligen Ableitungen

$$\Phi_x = \Psi_y = u_{inc} \quad (6.101)$$

und

$$\Phi_y = -\Psi_x = v_{inc} \quad (6.102)$$

kann man das inkompressible Geschwindigkeitsfeld mit den Komponenten u_{inc} und v_{inc} und damit das zugehörige aerodynamische Druckfeld sowie deren zeitliche und räumliche Ableitungen berechnen. Diese benötigt man bei der Berechnung der akustischen Quellen. Mit der Ableitung der Potentialfunktion w nach z

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} = w_z &= \frac{1}{2}(w_x - iw_y) = \Phi_x + i(-\Phi_y) \\ &= u_{inc} - iv_{inc} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)} \end{aligned} \quad (6.103)$$

erhält man die Geschwindigkeit

$$u_{inc} = \Re\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)}\right) \quad (6.104)$$

in x -Richtung und die Geschwindigkeit

$$v_{inc} = -\Im\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)}\right) \quad (6.105)$$

in y -Richtung. Die räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeiten u_{inc} und v_{inc} nach x und y werden mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(w_z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}(w_x - iw_y)\right) = \Phi_{xx} + i(-\Phi_{yx}) \\ &= u_{inc_x} - iv_{inc_x} = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)^2} \end{aligned} \quad (6.106)$$

hergeleitet und man erhält

$$u_{inc_x} = -v_{inc_y} = \Re\left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)^2}\right) \quad (6.107)$$

und

$$v_{inc_x} = -u_{inc_y} = -\Im\left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)^2}\right). \quad (6.108)$$

Die zweiten räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeiten werden mit

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = u_{inc_{xx}} - iv_{inc_{xx}} = -\frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{(z - b - b_0)^2} + \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{(z + b - b_0)^2} \quad (6.109)$$

bestimmt und es ergibt sich

$$u_{inc_{xx}} = -v_{inc_{yx}} = \Re\left(-\frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{(z-b-b_0)^2} + \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{(z+b-b_0)^2}\right) \quad (6.110)$$

und

$$v_{inc_{xx}} = u_{inc_{yx}} = -\Im\left(-\frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{(z-b-b_0)^2} + \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{(z+b-b_0)^2}\right). \quad (6.111)$$

Die erste zeitliche Ableitung der Geschwindigkeiten folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} &= \frac{\partial}{\partial t}(w_z) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(\Phi_x - i\Phi_y)\right) = \Phi_{xt} + i(-\Phi_{yt}) \\ &= u_{inc_t} - iv_{inc_t} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(b\omega)}{(z-b-b_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-b\omega)}{(z+b-b_0)^2} \end{aligned} \quad (6.112)$$

und man kann schreiben

$$u_{inc_t} = \Re\left(\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(b\omega)}{(z-b-b_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-b\omega)}{(z+b-b_0)^2}\right) \quad (6.113)$$

und

$$v_{inc_t} = -\Im\left(\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(b\omega)}{(z-b-b_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-b\omega)}{(z+b-b_0)^2}\right). \quad (6.114)$$

Eine weitere Differentiation führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}(w_{zt}) = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{xt} + i(-\Phi_{yt})) = \Phi_{xtt} + i(-\Phi_{ytt}) \\ &= u_{inc_{tt}} - iv_{inc_{tt}} = \frac{\Gamma\omega}{2\pi} \frac{bi\omega(z+b-b_0)}{(z-b-b_0)^3} + \frac{\Gamma\omega}{2\pi} \frac{bi\omega(z-b-b_0)}{(z+b-b_0)^3} \end{aligned} \quad (6.115)$$

und damit zu der zweiten zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeiten

$$u_{inc_{tt}} = \Re\left(\frac{\Gamma\omega}{2\pi} \frac{bi\omega(z+b-b_0)}{(z-b-b_0)^3} + \frac{\Gamma\omega}{2\pi} \frac{bi\omega(z-b-b_0)}{(z+b-b_0)^3}\right) \quad (6.116)$$

und

$$v_{inc_{tt}} = -\Im\left(\frac{\Gamma\omega}{2\pi} \frac{bi\omega(z+b-b_0)}{(z-b-b_0)^3} + \frac{\Gamma\omega}{2\pi} \frac{bi\omega(z-b-b_0)}{(z+b-b_0)^3}\right). \quad (6.117)$$

Mit der Gleichung von Bernoulli kann nun der inkompressible Druck

$$p_{inc} = p_\infty + \rho_\infty \left(-\Phi_t - \frac{u_{inc}^2 + v_{inc}^2}{2}\right), \quad (6.118)$$

die Ableitung des Drucks nach der Zeit

$$p_{inc_t} = -\rho_\infty (\Phi_{tt} + u_{inc} u_{inc_t} + v_{inc} v_{inc_t}), \quad (6.119)$$

die zweite Ableitung nach der Zeit

$$p_{inc_{tt}} = -\rho_{\infty}(\Phi_{ttt} + u_{inc_t}^2 + u_{inc}u_{inc_{tt}} + v_{inc_t}^2 + v_{inc}v_{inc_{tt}}), \quad (6.120)$$

die Ableitung des Drucks nach x

$$p_{inc_x} = -\rho_{\infty}(u_{inc_t} + u_{inc}u_{inc_x} + v_{inc}v_{inc_x}), \quad (6.121)$$

die zweite Ableitung des Drucks nach x und t

$$p_{inc_{xt}} = -\rho_{\infty}(u_{inc_{tt}} + u_{inc_t}u_{inc_x} + u_{inc}u_{inc_{xt}} + v_{inc_t}v_{inc_x} + v_{inc}v_{inc_{xt}}), \quad (6.122)$$

die Ableitung des Drucks nach y

$$p_{inc_y} = -\rho_{\infty}(v_{inc_t} + u_{inc}u_{inc_y} + v_{inc}v_{inc_y}) \quad (6.123)$$

sowie die zweite Ableitung des Drucks nach y und t

$$p_{inc_{yt}} = -\rho_{\infty}(v_{inc_{tt}} + u_{inc_t}u_{inc_y} + u_{inc}u_{inc_{yt}} + v_{inc_t}v_{inc_y} + v_{inc}v_{inc_{yt}}) \quad (6.124)$$

berechnet werden. Die Größen ρ_{∞} und p_{∞} stehen für die Umgebungsdichte sowie den Umgebungsdruck. Die zeitlichen Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials sind

$$\Phi_t = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Re\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = -\frac{\omega\Gamma}{\pi}\Re\left(\frac{b^2}{z^2 - b^2}\right) \quad (6.125)$$

$$\Phi_{tt} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{2\omega^2\Gamma}{\pi}\Im\left(\frac{b^2 z^2}{(z^2 - b^2)^2}\right) \quad (6.126)$$

und

$$\Phi_{ttt} = \frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} = \Re(w_{ttt}). \quad (6.127)$$

Die analytische Lösung für den Schalldruck in einem Aufpunkt lautet

$$p'(r, \theta, t) = \Re\left(-i\frac{\rho_{\infty}\Gamma^4}{64\pi^3 r_0^4 c_{\infty}^2} H_2^{(2)}(kr)e^{i2(\omega t - \theta)}\right). \quad (6.128)$$

Hierbei gehen die Koordinaten des Aufpunktes mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ein. Die Hankel Funktion zweiter Ordnung und zweiter Art $H_2^{(2)}$ von (kr) mit der Wellenzahl $k = \frac{2\omega}{c_{\infty}}$ und der Schallgeschwindigkeit der Umgebung c_{∞} sind gegeben. Ausgehend von obigen Gleichungen kann man die im EIF Modell geforderten Größen wie beispielsweise $p_{inc_{tt}}$ berechnen und damit die Generierung der Schallquellen an einem korotierenden Wirbelpaar berechnen. Die analytische Lösung (6.128) wird dabei als Referenz verwendet.

Kapitel 7

Gekoppelte Verfahren

Die Berücksichtigung von akustisch reflektierenden Körpern kann im Zweidimensionalen beispielsweise mit Hilfe eines Dreiecksgitters durchgeführt werden. Auf kartesischen Gittern ist die Berücksichtigung von Randbedingungen auf gekrümmten Geometrien nur möglich, wenn der schallharte Körper durch eine treppenartige Gitterstruktur approximiert wird (Abbildung 7.1).

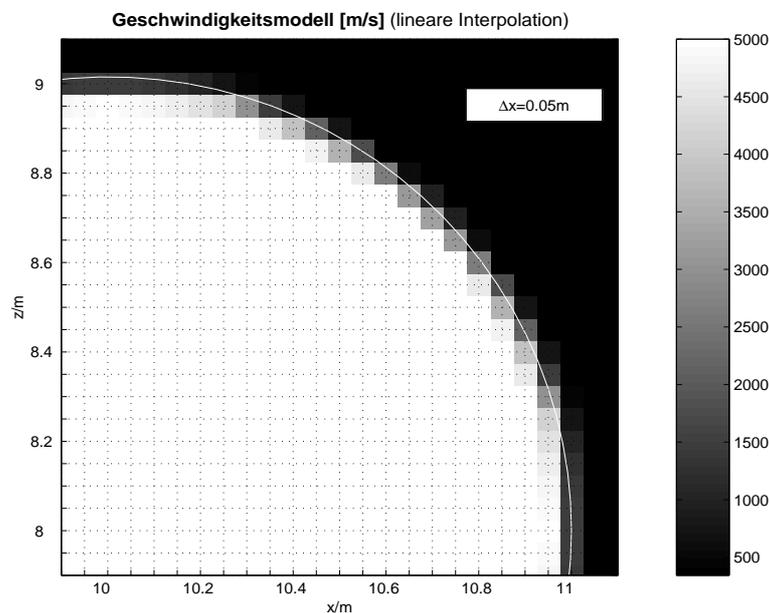


Abbildung 7.1: Schallharte Zylinderoberfläche wird durch das Geschwindigkeitsmodell linear interpoliert, das heißt im Zylinder beträgt die Schallgeschwindigkeit $c = 5000\text{m/s}$ und ausserhalb des Zylinders $c = 344\text{m/s}$.

Die Genauigkeit der Lösung ist in diesem Fall nicht akzeptabel. Die Finite Volumen Methode sowie die Natural Neighbour Methode sind in der Lage, auf unstrukturierten Gittern, welche den gekrümmten Körper verglichen mit kartesischen Gittern genauer approximieren, die Grundgleichungen der Aeroakustik mit hoher Genauigkeit zu lösen. Bei der Natural

Neighbour Methode sowie der Finite Volumen Methode ist die Rechenzeit verglichen mit der Rechenzeit des klassischen Finite Differenzen Methode höher, da die Rechenoperationen aufwendiger sind. Zur Reduzierung der Rechenzeit kann man die linearisierten Euler Gleichungen oder die Wellengleichung auf einem gekoppelten Gitter lösen. Bei den gekoppelten Verfahren besteht das Gitter um den Körper herum aus Dreiecken und wenige Zellen vom Körper entfernt aus einem kartesischen Gitter (Abbildung 7.2). Der Datenaustausch zwischen den beiden Verfahren erfolgt mit Hilfe der so genannten Transitionszone. Bei der Kopplung von Finite Volumen Methode und Finite Differenzen Methode benötigt man zwei Transitionszonen. Bei der Kopplung der Natural Neighbour Methode und der Finite Differenzen Methode benötigt man eine Transitionszone. In den folgenden Abschnitten werden die gekoppelten Verfahren beschrieben.

7.1 Kopplung von Natural Neighbour Methode und Finite Differenzen Methode

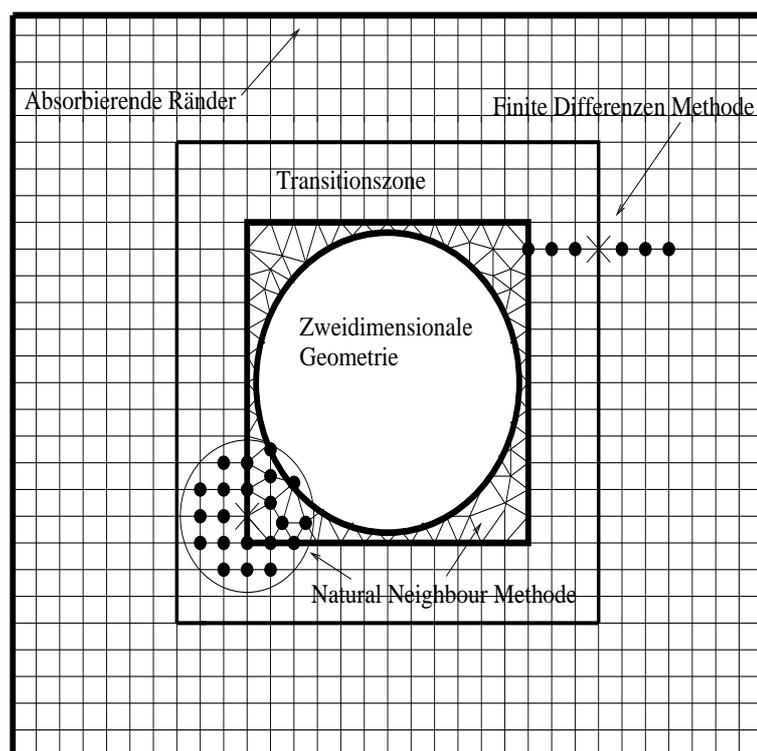


Abbildung 7.2: Kopplung von Natural Neighbour Methode und Finite Differenzen Methode

Bei der Kopplung von Natural Neighbour Methode und Finite Differenzen Methode werden die Ableitungen im unstrukturierten Bereich mit der Natural Neighbour Methode und im strukturierten Bereich mit der Finite Differenzen Methode berechnet. Die Finite Differenzen Methode benötigt bei zentralen Differenzen mit sieben Stützstellen bis zu drei Stützstellen, welche mit Daten aus der Transitionszone versorgt werden müssen. Die Ableitungen in der strukturierten Transitionszone sowie im unstrukturierten Bereich werden

mit der Natural Neighbour Methode berechnet. Die Transitionszone hat aus diesem Grund eine Breite von drei Zellen. In Abbildung 7.2 ist der Aufbau des Gitters dargestellt. Die vorgestellte Kopplung wird bei der Lösung der akustischen Wellengleichung sowie bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen angewendet.

7.2 Kopplung von Finite Volumen Methode und Finite Differenzen Methode

Die Kopplung von Finite Volumen Methode und Finite Differenzen Methode erfolgt mit Hilfe von zwei Transitionszonen. Dies ist erforderlich, da bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen 4.34 mit der Finite Volumen Methode integrale Mittelwerte sowie durch die Rekonstruktion mit der Natural Neighbour Methode Variablenwerte zur Verfügung stehen. Im Aussenfeld werden die linearisierten Euler Gleichungen 2.12 mit der Finite Differenzen Methode gelöst und liefern die Variablenwerte wie Dichte, Geschwindigkeiten und Druck. Die Kopplung der beiden Verfahren benötigt daher zwei Transitionszonen, die innere und die äussere wie in Abbildung 7.3 dargestellt.

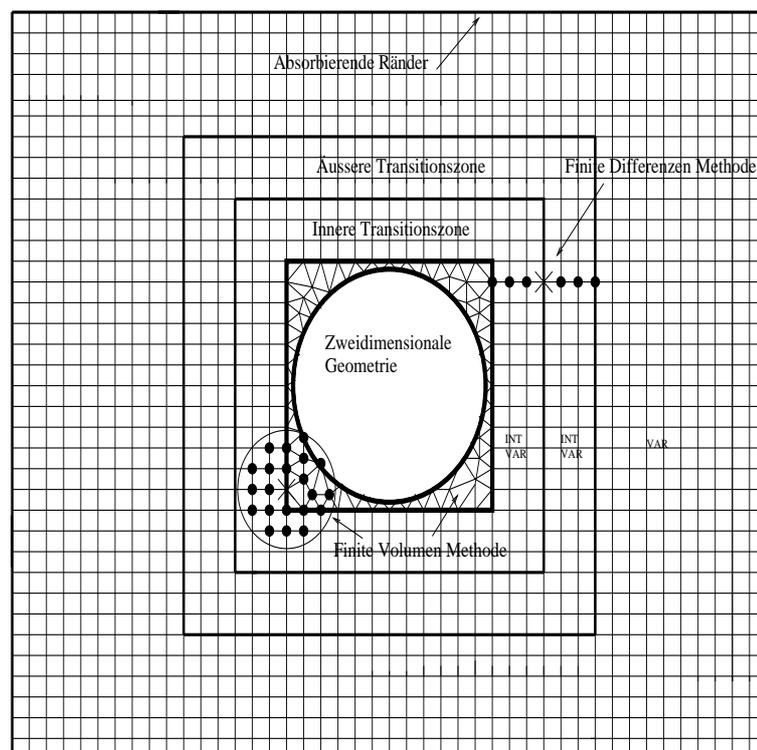


Abbildung 7.3: Kopplung von Finite Volumen Methode und Finite Differenzen Methode. Im Innenfeld liegen durch die Finite Volumen Methode integrale Mittelwerte (INT) und Variablenwerte (VAR) vor. Im Aussenfeld liegen durch die Finite Differenzen Methode Variablenwerte vor.

In der inneren Transitionszone werden die linearisierten Euler Gleichungen mit Hilfe der

Finite Volumen Methode auf einem strukturierten kartesischen Gitter gelöst. Damit stehen integrale Mittelwerte sowie Variablenwerte in dieser Zone zur Verfügung. Die innere Transitionszone hat beim Verfahren vierter Ordnung eine Breite von drei Zellen. Die äussere Transitionszone verwendet wie im Finite Differenzen Bereich ein strukturiertes kartesisches Gitter. Der Finite Differenzen Bereich liefert Variablenwerte. In der äusseren Transitionszone stehen ebenfalls Variablenwerte zur Verfügung. In dieser Zone müssen jedoch zusätzlich die integralen Mittelwerte berechnet werden, damit in der inneren Transitionszone die Finite Volumen Methode mit integralen Mittelwerten versorgt werden kann. Hierzu wird das Taylor Polynom (3.6) über die äussere Transitionszone gelegt. Die Lösung des Taylor Polynoms, wie in Kapitel 3 beschrieben, liefert die Koeffizienten a_1 bis a_{15} . Stehen diese zur Verfügung, so kann in diesem Bereich der integrale Mittelwert mit (5.17) berechnet werden. Hierzu benötigt man lediglich die Koordinaten der Integrationsgrenzen x_1, x_2, y_1, y_2 sowie die Koordinaten des Schwerpunkts einer Zelle x_0, y_0 . Die innere Transitionszone kann nun mit integralen Mittelwerten aus der äusseren Transitionszone versorgt werden. Die Finite Differenzen Methode kann bei Verwendung eines Finite Differenzenmoleküls mit sieben Stützstellen auf die Variablenwerte der inneren Transitionszone zugreifen. Mit dieser Vorgehensweise kann man die Finite Volumen Methode mit der Finite Differenzen Methode koppeln.

7.3 Kopplung von Finite Volumen Methode und integraler Finite Differenzen (IFD) Methode

Die integrale Finite Differenzen (IFD) Methode kann mit der Finite Volumen Methode direkt, also ohne eine Transitionszone gekoppelt werden, da in diesem Fall im gesamten Rechengebiet mit integralen Mittelwerten gerechnet wird. Dadurch können Unstetigkeiten, welche bei den vorherigen gekoppelten Verfahren an den Rändern hervortreten können, vermieden werden. Im Folgenden wird die integrale Finite Differenzen Methode anhand der Konvektionsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

auf einem kartesischen Gitter hergeleitet. Hierbei gilt $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$. Zur Lösung der Konvektionsgleichung wird diese zunächst aufintegriert und es ergibt sich

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dA + \bar{u} \int \frac{\partial \rho}{\partial x} dA = 0 \quad (7.2)$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dA + \bar{u} \int \frac{\partial \rho}{\partial x} dA = 0. \quad (7.3)$$

Wird (7.3) durch die Fläche A dividiert, so kann geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{A} \int \rho dA + \frac{\bar{u}}{A} \int \frac{\partial \rho}{\partial x} dA = 0 . \quad (7.4)$$

Die integrale Konvektionsgleichung (7.4) kann mit der integralen Finiten Differenzen Methode oder mit der Finite Volumen Methode gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Konvektionsgleichung auf einem kartesischen Gitter gelöst. Im inneren Bereich des Gitters wird die Finite Volumen Methode und im äusseren Bereich des Gitters die integrale Finiten Differenzen Methode verwendet (Abbildung 7.4). In Kapitel 4 wird die Finite Volumen Formulierung ausführlich behandelt. Die integralen Mittelwerte liegen im Schwerpunkt der Zellen vor.

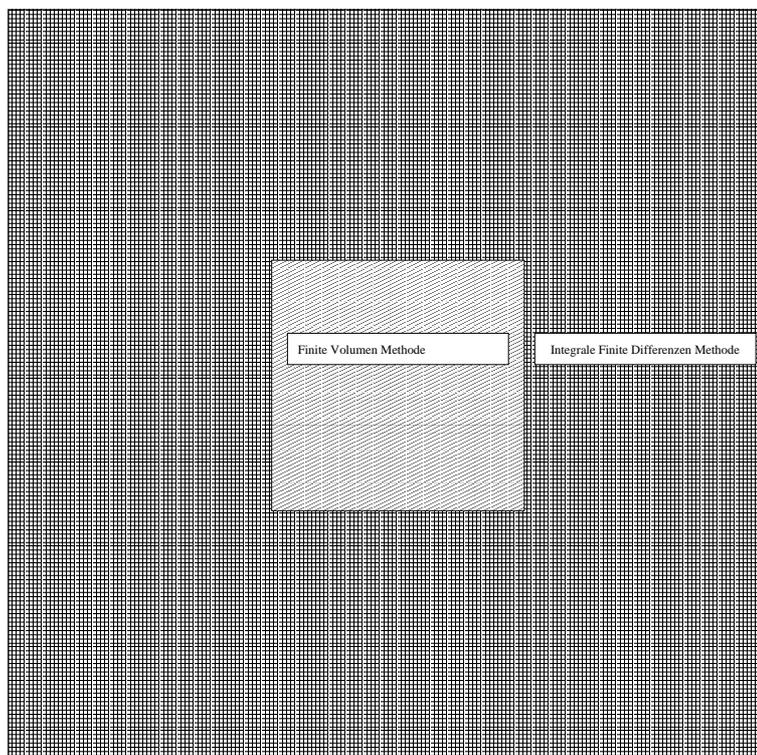


Abbildung 7.4: Kopplung von Finite Volumen Methode und integraler Finite Differenzen Methode

Bei der integralen Finite Differenzen Methode muss zur Lösung von (7.4) das Taylor Polynom (3.6) zunächst nach x abgeleitet werden, so dass sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} = & a_2 + a_4 2(x - x_0) + a_5(y - y_0) + a_7 3(x - x_0)^2 + a_8 2(x - x_0)(y - y_0) + \\ & a_9(y - y_0)^2 + a_{11} 4(x - x_0)^3 + a_{12} 3(x - x_0)^2(y - y_0) + \\ & a_{13} 2(x - x_0)(y - y_0)^2 + a_{14}(y - y_0)^3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

ergibt. Die Ableitung $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ muss anschliessend über die Fläche einer rechteckigen Zelle aufintegriert werden. Die Integration wird in x -Richtung von x_u bis x_o und in y -Richtung von y_u bis y_o durchgeführt, so dass für den Ausdruck $\int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy$ geschrieben werden kann

$$\begin{aligned}
\int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy = & a_2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\
& + a_4 2 \left(\frac{1}{2} x_2^2 - x_2 x_0 - \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_0 \right) (y_2 - y_1) + \\
& + a_5 2 \left(\frac{1}{2} y_2^2 - y_2 y_0 - \frac{1}{2} y_1^2 + y_1 y_0 \right) (x_2 - x_1) + \\
& a_7 [(x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3] (y_2 - y_1) + \\
& a_8 2 \left(\frac{1}{2} x_2^2 - x_2 x_0 - \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_0 \right) \left(\frac{1}{2} y_2^2 - y_2 y_0 - \frac{1}{2} y_1^2 + y_1 y_0 \right) + \\
& a_9 \frac{1}{3} [(y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3] (x_2 - x_1) + \\
& a_{11} [(x_2 - x_0)^4 - (x_1 - x_0)^4] (y_2 - y_1) + \\
& a_{12} [(x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3] \left(\frac{1}{2} y_2^2 - y_2 y_0 - \frac{1}{2} y_1^2 + y_1 y_0 \right) + \\
& a_{13} 2 \left(\frac{1}{2} x_2^2 - x_2 x_0 - \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_0 \right) (y_2 - y_1) \\
& a_{14} \frac{1}{4} [(y_2 - y_0)^4 - (y_1 - y_0)^4] (x_2 - x_1) .
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Die rechte Seite von (7.6) ist vollständig gegeben. Die Bestimmung der Koeffizienten a_2 bis a_{14} wird in Kapitel 4 ausführlich behandelt. Damit kann das Integral $\int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy$ bestimmt und bei der Lösung der integralen Konvektionsgleichung berücksichtigt werden. Bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen muss im zweidimensionalen Fall das Taylor Polynom nach x und nach y abgeleitet und anschliessend über das Volumen der Zelle aufintegriert werden. Mit der vorgestellten Vorgehensweise kann man die linearisierten Euler Gleichungen mit einfachen Mitteln lösen, eine Rekonstruktion wie bei den Finite Volumen Verfahren ist bei dieser Methode nicht nötig. Das integrale Finite Differenzen Verfahren benötigt im Vergleich zum Finite Volumen Verfahren weniger Rechenoperation und reduziert damit die Rechenzeit.

Kapitel 8

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit beschrieben. Die Rechnungen wurden auf folgendem Rechner durchgeführt:

<i>Hersteller</i>	Sun Microsystems
<i>Betriebssystem</i>	SunOS 5.9 (Solaris 9)
<i>Modell</i>	Sun Blade 1000 Modell2900
<i>Prozessor</i>	2 x 900 MHz UltraSPARC
<i>Kernspeicher</i>	4096 MB

Tabelle 8.1: Rechnereigenschaften

Ziel der folgenden Validierung ist es, mit Hilfe der vorgestellten Verfahren die Schallquellen numerisch mit der EIF Methode oder messtechnisch mit der Array Messtechnik zu bestimmen und anschliessend mit Hilfe der klassischen Finite Differenzen Methode, der Natural Neighbour Methode oder der Finite Volumen Methode die Schallausbreitung mit hoher Ordnung zu berechnen.

In Kapitel 8.1 wird auf die Lokalisierung von Schallquellen im Windkanälen eingegangen. Ziel ist es, die hergeleiteten Verfahren bei der Lokalisierung von Schallquellen wie etwa an einem Tragflügel der Airbus-Flotte oder an generischen Geometrien wie etwa an einer vorwärts geneigten Treppenstufe oder an einem Hohlraum anzuwenden und durch konstruktive Maßnahmen die Quellstärke zu reduzieren.

Kapitel 8.2 befasst sich mit der Quellgenerierungsmethode EIF. Die EIF Methode ist in der Lage, aus inkompressiblen Strömungsdaten aeroakustische Quellen zu generieren. Anhand des korotierenden Wirbelpaares wird die EIF Methode untersucht.

Kapitel 8.3 zeigt die Ergebnisse der Schallausbreitungsrechnungen mit der Finite Differenzen Methode, der Natural Neighbour Methode sowie der Finite Volumen Methode. In Kapitel 8.4 wird die Ordnung der vorgestellten Verfahren nachgewiesen. In Kapitel 8.5 werden die Ergebnisse der integralen Finiten Differenzen Methode analysiert. Die integrale

Finite Differenzen Methode kann durch eine einfache Vorgehensweise mit den Finite Volumen Verfahren gekoppelt werden. Durch die Kopplung ist eine Reduzierung der Rechenzeit möglich. In Kapitel 8.6 werden die gekoppelten Verfahren untersucht.

8.1 Schalllokalisierung in Windkanälen

In diesem Abschnitt wird die modifizierte Beamforming Methode sowie die SDM Methode validiert. Die aeroakustischen und aerodynamischen Messungen wurden im Windkanal Cepra 19 mit einem kreisförmigen Düsenaustritt sowie im Akustischen Windkanal Braunschweig (AWB) mit einem rechteckigen Düsenaustritt durchgeführt. Die numerischen Verfahren des Lokalisierungsverfahren sind im zweiten Kapitel beschrieben.

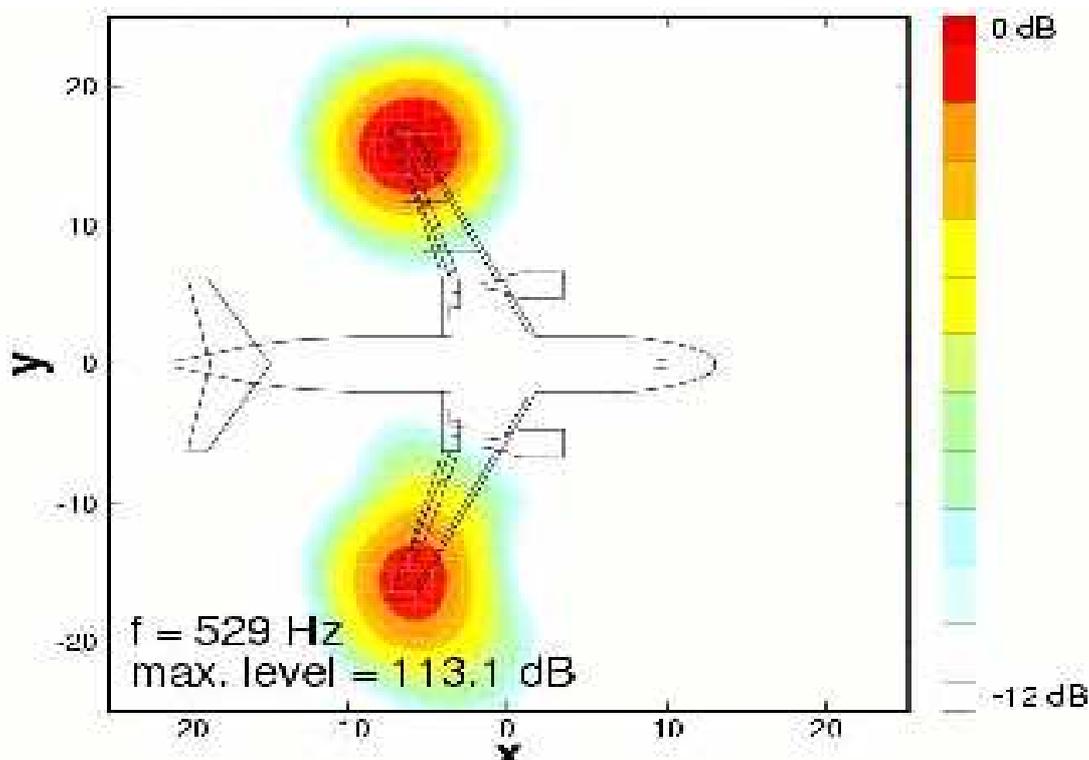


Abbildung 8.1: Überflugmessung mit der Array Messtechnik

Ziel der Arraymessungen ist es, eine klare Aussage zu den Quellorten und Quellstärken zu treffen und durch geeignete konstruktiven Maßnahmen die Quellstärken zu reduzieren. Im ersten Schritt wird mit Hilfe der Beamforming und der SDM Methode die Quellverteilung berechnet und analysiert. In einem weiteren Schritt kann man bestimmte Bereiche zusammenfassen und in Abhängigkeit von der Frequenz darstellen. Durch diese Vorgehensweise ist es möglich, Flugkörper aeroakustisch zu untersuchen. Im Projekt RAIN konnte man durch Modifikationen an der Hinterkante die Schallquellen im Bereich der Hinterkante eliminieren [45]. Ziel der Messungen war es ausserdem, Überflugmessungen zu analysieren und zu überprüfen. Abbildung 8.1 zeigt die Arrayauswertung einer Überflugmessung bei einer Frequenz von $f = 529\text{Hz}$.

Im Projekt AKUSIM wurden im AWB generische Geometrien akustisch und aerodynamisch untersucht [4]. In diesem Projekt wurden drei vorwärts geneigte Stufen sowie ein Hohlraum mit einem Kreuz-Array vermessen. Auf die Arrayauswertung des Hohlraums wird in den folgenden Abschnitten kurz eingegangen.

8.1.1 Schalllokalisierung im Cepra19 Windkanal

Im Rahmen des Projekts RAIN wurden aerodynamische und aeroakustische Messungen an einem Modell des Flugzeugs Airbus A320 durchgeführt (Abbildung 8.2). Ziel der Untersuchungen war es, im Windkanal Cepra 19 aeroakustische Quellen am Modell des Flugzeugs Airbus A320 zu lokalisieren und die Quellstärken zu minimieren. Zur Lokalisierung der Schallquellen wurde ein

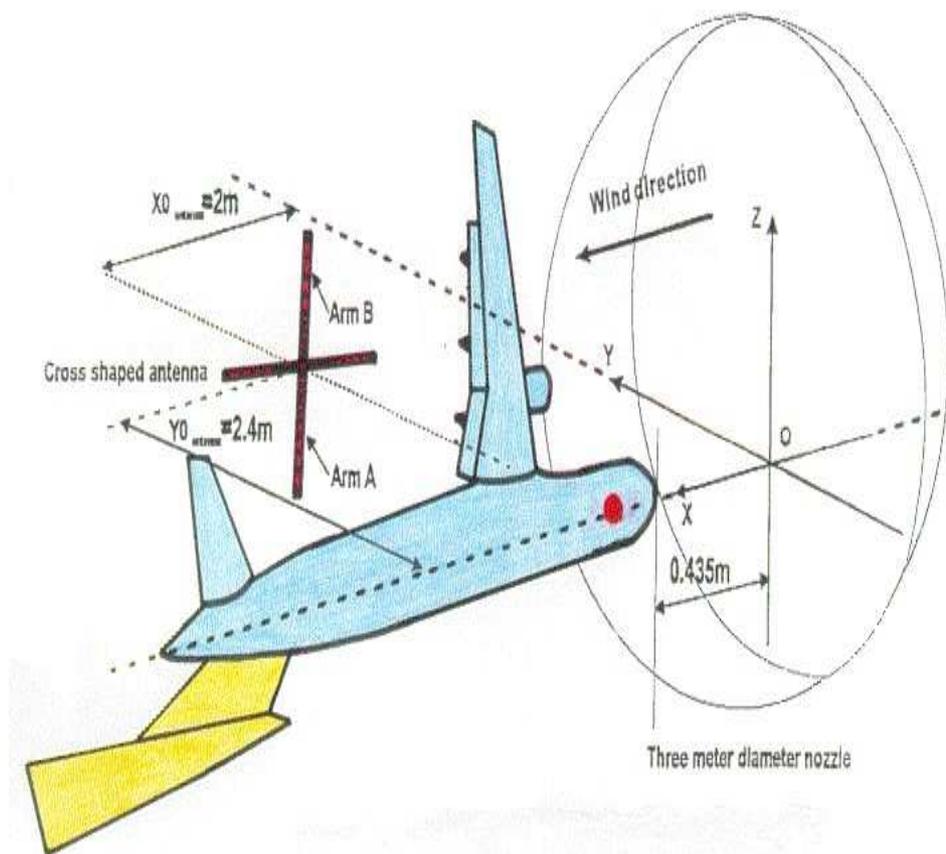


Abbildung 8.2: Schalllokalisierung mit einem Kreuzarray an einem 1:11 Modell des Flugzeugs Airbus A320 im akustischen Windkanal Cepra19

Kreuz-Array mit 40 Mikrofonen verwendet. Der Mikrofonabstand betrug $dx = 0.1m$. Zur Validierung des im Kapitel 6.1 hergeleiteten modifizierten Beamforming Algorithmus wurde ein Lautsprecher am Rumpf des Flugzeugs Airbus A320 angebracht und mit dem

Array lokalisiert. Abbildung A.1A zeigt den Rumpf des Modells mit dem Lautsprecher. Mit der klassischen Beamforming Methode erhält man bei der Lokalisierung des Lautsprechers ohne Anströmung eine realistische Darstellung der Quellen (Abbildung A.1B). Wird die Anströmgeschwindigkeit von $u = 50 \text{ m/s}$ bei der Lokalisierung des Lautsprechers nicht berücksichtigt, so wird der Lautsprecher um etwa $dx = 20 \text{ cm}$ stromab lokalisiert (Abbildung A.1C). Durch die Berücksichtigung der Anströmung und der daraus resultierenden Laufzeitverschiebung der Signale erhält man eine realistische Darstellung des Lautsprechers (Abbildung A.1D). Ein Vergleich der Abbildungen A.1C und A.1D zeigt, dass das Abdriften der Quelle mit der korrigierten Phase nicht stattfindet. Die Quelle kann am realen Ort, bei $x = 0.9 \text{ m}$ lokalisiert werden. Durch einen abschliessenden Vergleich von Abbildung A.1B und A.1D kann man erkennen, dass durch die Phasenkorrektur außer der Koordinate des Quellursprungs auch die Topologie der Quellverteilung realistisch wiedergegeben wird.

Es konnte gezeigt werden, dass bei der Lokalisierung eines Lautsprechers das hergeleitete Verfahren den Einfluss der Strömung berücksichtigt und nahezu exakte Ergebnisse liefert. Damit ist bewiesen, dass eine Arraymessung am Modell des Flugzeugs Airbus A320 möglich ist. Aus Tabelle 8.2 können die Parameter der Messung entnommen werden. Es wurden vier Konfigurationen untersucht. Hierbei wurde mit ausgefahrenem Vorflügel, ausgefahrener Hinterkantenklappe sowie in der Landekonfiguration mit ausgefahrenem Vorflügel und Hinterkantenklappe gemessen. Es konnten Quellen am Vorflügel sowie an der Hinterkantenklappe lokalisiert werden. Das Schalllokalisierungsverfahren liefert die im Anhang A dargestellten Quellverteilungen am Modell des Flugzeugs Airbus A320. Abbildung A.2 bis A.10 zeigt die Quellen am Originalflügel und Abbildung A.11 bis A.17 den aeroakustisch optimierten Flügel im Frequenzbereich von $f = 500 - 9000 \text{ Hz}$.

<i>Konfiguration</i>	<i>Slatwinkel</i> [°]	<i>Flapwinkel</i> [°]	<i>u</i> [m/s]	<i>α</i> [°]
<i>Clean Wing</i>	0	0	40, 50, 60	5, 7, 9
<i>Slat</i>	35	0	40, 50, 60	5, 7, 9
<i>Flap</i>	0	27	40, 50, 60	5, 7, 9
<i>Landing</i>	35	27	40, 50, 60	5, 7, 9

Tabelle 8.2: Messmatrix des RAIN Projekts

Die detaillierte Beschreibung der Quellorte und Quellstärken erfolgt durch eine Aufteilung des Tragflügels in sechs Bereiche (Abbildung 8.3). Hierbei handelt es sich um den inneren, den mittleren und den äusseren Bereich des Vorflügels und der Hinterkante. Die Quellen werden in diesen Bereichen aufintegriert und in Abhängigkeit von der Frequenz in den Abbildungen A.18 bis A.28 dargestellt.

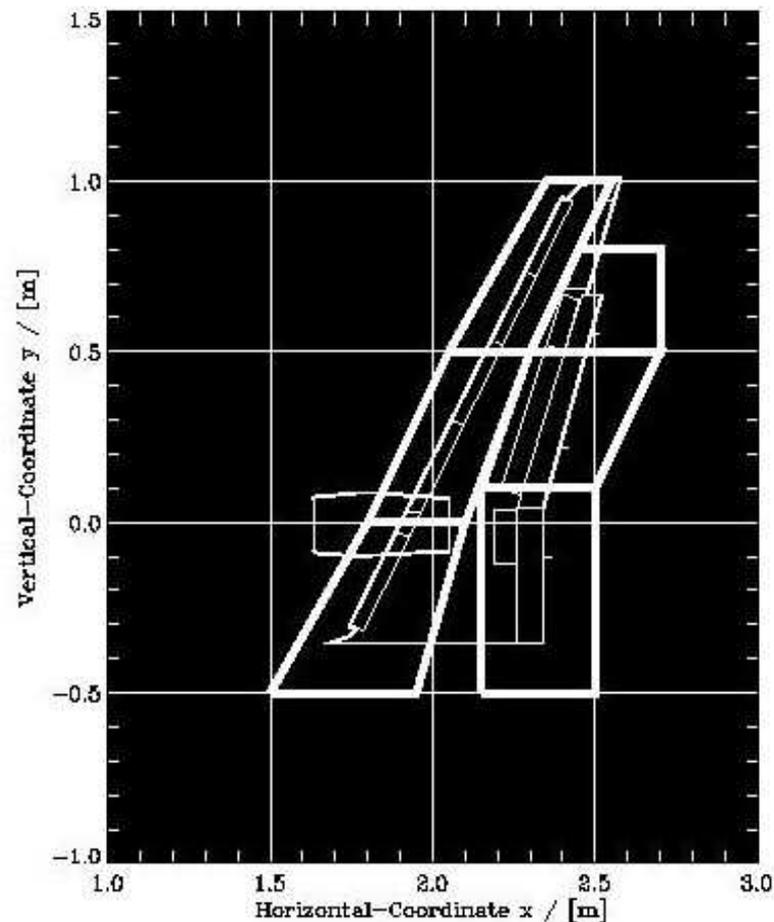


Abbildung 8.3: Aufteilung des Tragflügels zur Quantifizierung der aeroakustischen Quellen

Mit Hilfe dieser Vorgehensweise erhält man folgendes Ergebnis:

- Durch die Aufteilung des Tragflügels in sechs Bereiche ist es möglich, den Vorflügel, im englischen mit Slat bezeichnet, als Hauptlärmquelle ausfindig zu machen.
- Der mittlere sowie der innere Bereich des Vorflügels sind um bis zu 5 dB lauter als der äussere Bereich. Damit ist bewiesen, dass der durch die Hochauftriebshilfen erzeugte Lärm hauptsächlich durch den inneren und den mittleren Bereich des Slats verursacht wird.
- Die Hinterkantenklappe, im englischen Flap genannt, liefert lediglich bei einer Frequenz von etwa $f = 6 - 7\text{kHz}$ einen Beitrag.
- Der mittlere sowie der innere Bereich des Flaps sind um bis zu 10 dB lauter als der äussere Bereich.
- Der innere Bereich des Flügels ist um etwa 2-3 dB lauter als der mittlere oder der äussere Bereich.

- Mit ansteigendem Anstellwinkel steigt die Quellstärke im Bereich der Hinterkantenklappe, diese hat jedoch auf den Gesamtpegel einen geringen Einfluß.
- Mit steigender Geschwindigkeit steigt bei der Landekonfiguration die Quellstärke im Bereich des Slats und Flaps.
- Das Geschwindigkeitsgesetz (Energie \sim Anströmgeschwindigkeit $^\alpha$) der Aeroakustik konnte nachgewiesen werden. Die Exponenten sind für den jeweiligen Bereich in folgender Tabelle dargestellt.

<i>Bereich</i>	<i>Exponent α</i>
<i>InnerSlat</i>	6.06
<i>MiddleSlat</i>	6.04
<i>OuterSlat</i>	4.33
<i>InnerFlap</i>	6.23
<i>MiddleFlap</i>	6.10
<i>OuterFlap</i>	5.88
<i>Total :</i>	5.70

Tabelle 8.3: Exponent des Geschwindigkeitsgesetzes

- Die Größe des Exponenten α gibt die Art der Quellen an. Bei einem Exponenten zwischen fünf und sechs handelt es sich um Quadrupolquellen.
- Die Quelldichte der Seitenkante des Flaps ist lediglich um 2-3 dB lauter als der Flap.
- Vergleiche mit den Überflugmessungen am Airbus A340 zeigen vergleichbare Resultate.

8.1.2 Schalllokalisierung im AWB

Im Rahmen des Projekts AKUSIM wurden im AWB aeroakustische und aerodynamische Messungen an generischen Strukturen wie an einer vorwärts geneigten Treppenstufe sowie an einem Hohlraum durchgeführt. In folgendem Abschnitt wird die Array Messung am Hohlraum beschrieben. Zur Lokalisierung der Schallquellen wurde ein Kreuz-Array mit 32 Mikrofonen des Typs MK 202 eingesetzt. Abbildung 8.4 zeigt das Mikrofonarray, den Windkanal sowie die Platte mit dem eingefrästen Hohlraum.

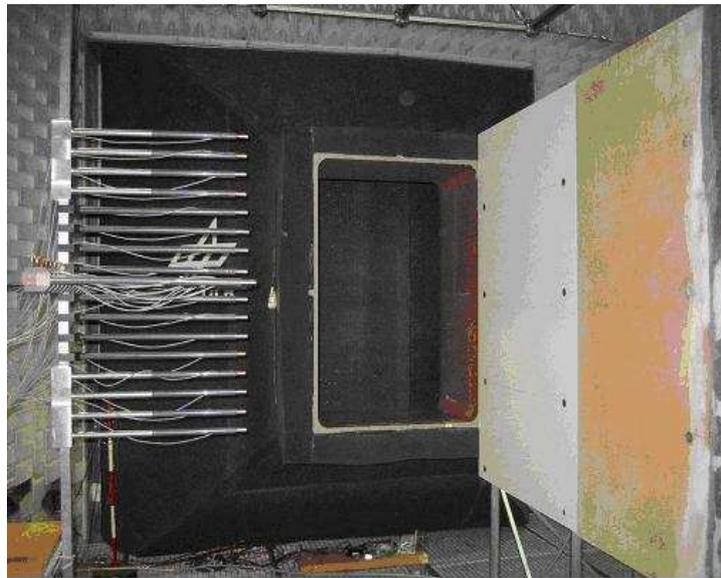


Abbildung 8.4: Array Messung am Hohlraum bei $u = 60\text{m/s}$

Der Abstand zwischen den Mikrofonen beträgt $dx = 0.1\text{ m}$.

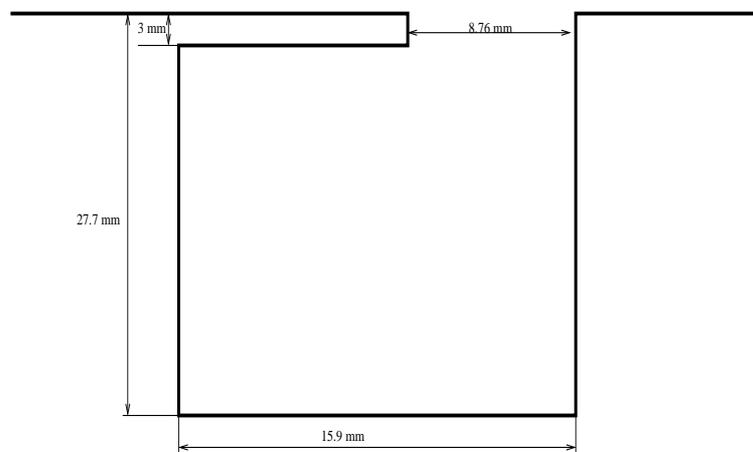


Abbildung 8.5: Abmessungen des Hohlraums. Die Tiefe des Hohlraums entspricht der Höhe des rechteckigen Düsenaustritts

Mit dem verwendeten Array kann man Quellen im Frequenzbereich von $f_u = 212 \text{ Hz}$ bis $f_o = 3400 \text{ Hz}$ lokalisieren. Zur Lokalisierung von ruhenden Schallquellen wird die Beamforming Methode verwendet. Die Anströmgeschwindigkeiten betragen $u = 30, 40, 50, 60 \text{ m/s}$. Der Mittelpunkt des Arrays stimmt in Strömungsrichtung mit der Lippe des Hohlraums überein, das Array steht außerhalb der Strömung und hat einen Abstand von $z = 1.2 \text{ m}$ von der Plattenoberfläche beziehungsweise der Lippe des Hohlraums. Die Düsenhöhe beträgt $b = 1.2 \text{ m}$ und die Breite $a = 0.8 \text{ m}$.

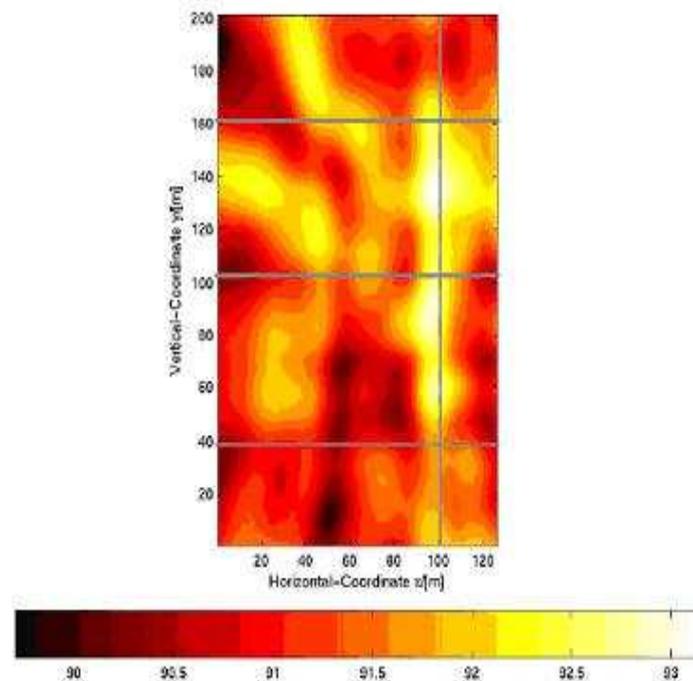


Abbildung 8.6: Quelllokalisierung am Hohlraum bei $f = 2k \text{ Hz}$, Anströmgeschwindigkeit $u = 60 \text{ m/s}$, klassisches Beamforming, Hohlraumposition bei $y = 100 \text{ cm}$, $40 \text{ cm} < x < 160 \text{ cm}$

Es konnten mit der Kombination von Beamforming und SDM Verfahren in den Projekten RAIN und AKUSIM aeroakustische Quellen in Windkanälen mit kreisförmigen und rechteckigen Düsenaustritten lokalisiert werden. Mit dem Array kann man die dominierenden aerodynamischen Lärmquellen bestimmen. Die defokussierenden Strömungseffekte sind sehr gut korrigiert worden, was sich an der kleinen Ausdehnung der Quellgebiete zeigt. Die damit erzielte Lokalisierung der Quellen erlaubt nicht nur die Bestimmung deren Stärke, sondern auch deren Beschreibung hinsichtlich des spektralen Gehalts, der Richtcharakteristik, der zeitlichen Veränderung, der Abhängigkeit von der Anströmgeschwindigkeit, Position des Arrays und anderer Parameter. In den Abschlussberichten der Projekte AKUSIM und RAIN werden die Auswertungen detaillierter beschrieben [4, 45].

8.2 Quellmodellierungsmethode EIF

Zur Untersuchung des EIF Modells wird die Wellengleichung (2.17) auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1.0$ numerisch gelöst. Das numerische Lösungsverfahren ist in Kapitel 6.2 beschrieben.

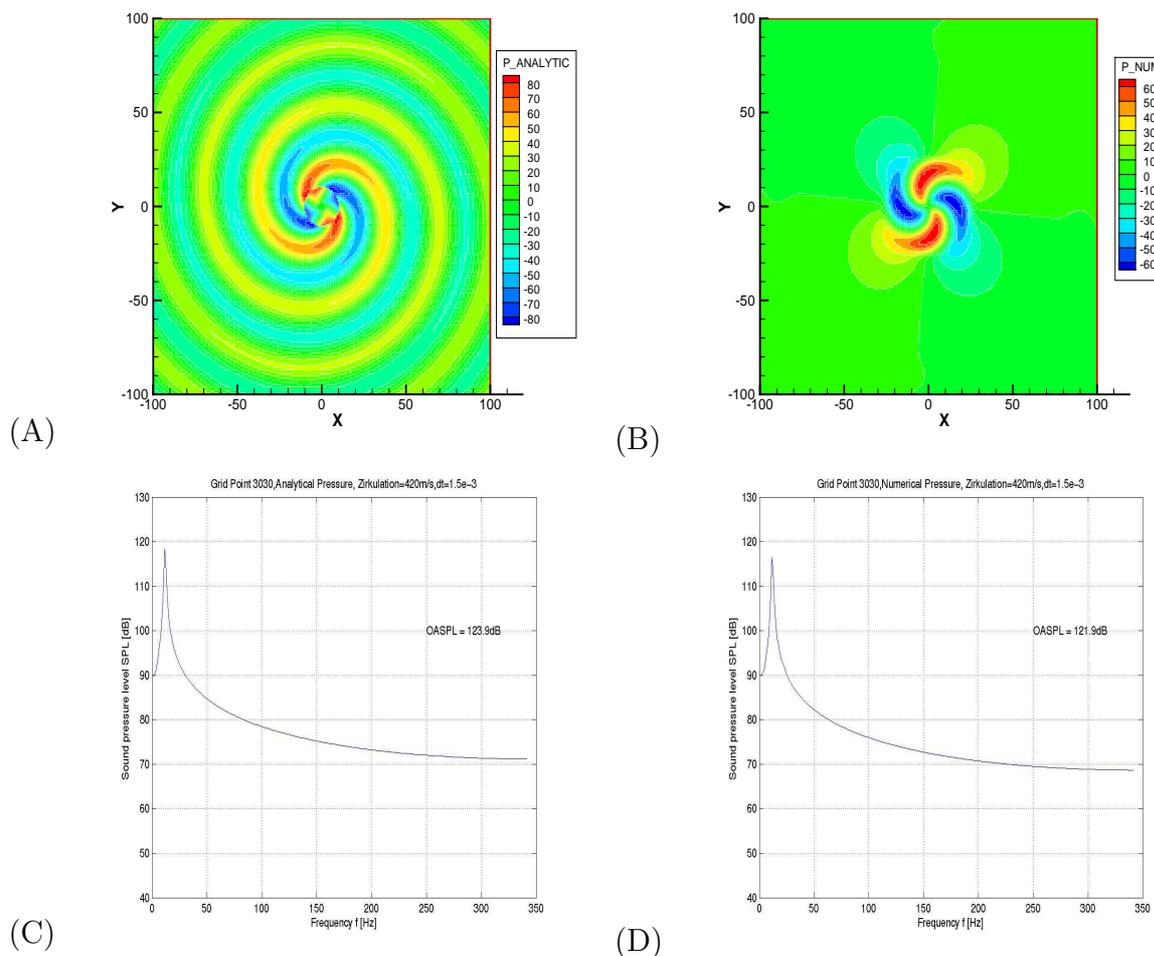


Abbildung 8.7: Quellgenerierung mit dem EIF Verfahren:(A) zeigt den analytisch berechneten Druckverlauf nach $n = 50$ Zeitschritten, (B) den mit dem EIF Modell berechneten Druckverlauf nach $n = 50$ Zeitschritten, (C) FFT des analytisch berechneten Druckverlaufs in einem Aufpunkt, (D) FFT des mit dem EIF Modell berechneten Druckverlaufs in einem Aufpunkt

In Abbildung 8.7A wird der analytisch berechnete Druck dargestellt, Abbildung 8.7B zeigt den mit dem EIF Modell berechneten Schalldruck. Die numerisch berechneten Drucksignale benötigen etwa $n = 250$ Zeitschritte um den Rand des Rechengebiets zu erreichen. Weitere Zwischenschritte sowie die durch die EIF Methode generierte Quadrupolquelle sind im Anhang A in Abbildung A.29 dargestellt.

In einem Vergleich konnte die Genauigkeit des vorliegenden Verfahrens gezeigt werden. Der analytisch berechnete Schalldruck beträgt in einem Aufpunkt $L_p = 123.9dB$ und der mit

EIF Modell berechnete Schalldruck $L_p = 121.9dB$, die Abweichungen von $\Delta L_p = 2dB$ ist für den Menschen nicht wahrnehmbar und kann akzeptiert werden (Abbildung 8.7C und D). Ein Vergleich der numerischen Lösung mit der exakten Lösung im Zeitbereich ist in Abbildung 8.8 dargestellt. Man erhält in einem

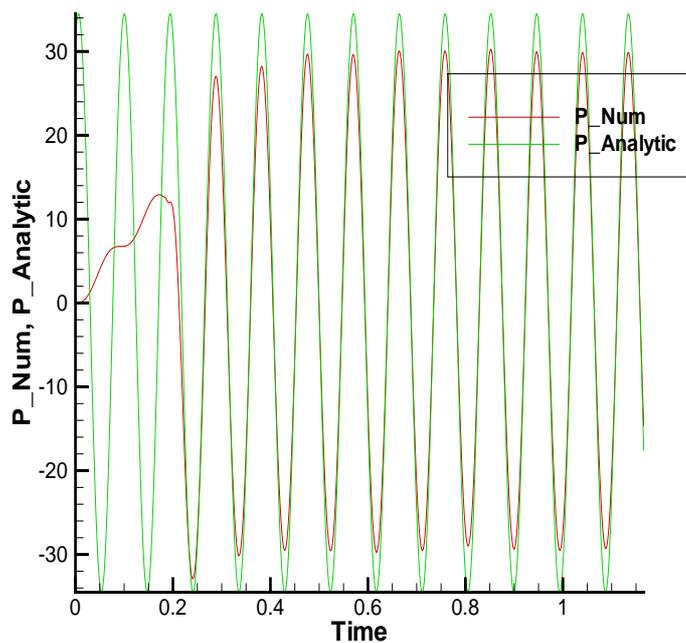


Abbildung 8.8: Vergleich der numerischen Lösung mit der analytischen Lösung in einem Aufpunkt

Aufpunkt eine akzeptable Abweichung von 10%. Damit ist gezeigt worden, dass die Quellgenerierungsmethode nach Hardin und Pope bei der Bestimmung von Schallquellen prinzipiell einsetzbar ist. Weitere Untersuchungen müssen klären, ob auch komplexe Fälle mit der EIF Methode untersucht werden können.

8.3 Schallausbreitungsrechnungen mit der Natural Neighbour Methode

Die Natural Neighbour Methode ist ein Verfahren zur Berechnung von partiellen Ableitungen stetiger Funktionen. Die Natural Neighbour Methode wird in dieser Arbeit zur Lösung der linearisierten Euler Gleichungen 2.13 wie auch der akustischen Wellengleichung 2.17 eingesetzt und untersucht. Die zeitliche Integration erfolgt bei der Wellengleichung mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren und bei den linearisierten Euler Gleichungen mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung. Die räumlichen Ableitungen werden mit der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode berechnet (Kapitel 3.1.2). In Kapitel 3.2.2 wird das Zeitintegrationsverfahren der Wellengleichung und in Kapitel 3.2.1 das Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung beschrieben. Bei den vorliegenden Verfahren muss auf einem Hybridgitter gerechnet werden, um einseitige Differenzen zu vermeiden. Im inneren Bereich besteht das Gitter aus unstrukturierten und im Außenbereich aus strukturiert angeordneten Elementen. In Abbildung 8.10 und 8.11 werden die verwendeten Gitter dargestellt. Der unstrukturierte innere Bereich muss mit dem kartesischen äusseren Bereich durch eine so genannte Transitionszone gekoppelt werden. Durch die Kopplung werden asymmetrische Differenzenmoleküle an der äusseren Berandung des unstrukturierten Bereichs vermieden, diese treten nur noch bei der Berücksichtigung von Körpern am Körpertrand auf.

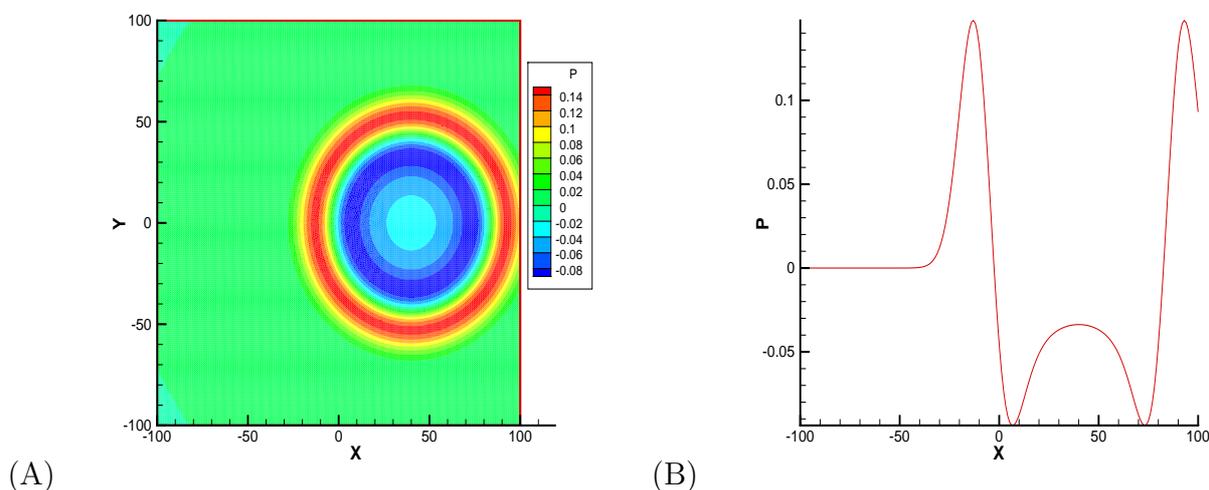


Abbildung 8.9: Lösung der Wellengleichung mit der Natural Neighbour Methode (A) Ausbreitung eines Gauss Pulses ($x_0 = 40m, y_0 = 0$) auf einem hybriden Gitter, (B) Schnitt bei $y = 0$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist bei der der Wellengleichung das Dichtefeld und bei den linearisierten Euler Gleichungen das Dichtefeld und das Druckfeld mit

$$\rho(x, y, t = 0) = \frac{1}{c^2} e^{-m^2 r^2} \quad (8.1)$$

und

$$p(x, y, t = 0) = e^{-m^2 r^2} \quad (8.2)$$

definiert. Hierbei ist m mit $m = \sqrt{\ln 2}/\sigma$ von der der Halbwertsbreite σ und der Abstand r mit $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$ vom Startpunkt mit den Koordinaten x_0, y_0 abhängig.

Im Innenbereich werden die räumlichen Ableitungen mit der Natural Neighbour Methode berechnet.

Bei der Lösung der Wellengleichung werden die räumlichen Ableitungen im Aussenbereich mit den klassischen Finiten Differenzen Verfahren berechnet. An der äusseren Berandung des Rechengebiets werden die Randbedingungen nach Clayton eingesetzt.

Bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen werden im Aussenbereich die räumlichen Ableitungen mit dem DRP Schema nach Tam berechnet. An der äusseren Berandung werden die Randbedingungen nach Bayliss und Turkel verwendet.

Es werden in diesem Abschnitt drei Fälle untersucht:

- Lösung der Wellengleichung bei der Ausbreitung von Schall im freien Feld
- Lösung der Wellengleichung bei der Ausbreitung von Schall um einen Zylinder
- Lösung der linearisierten Euler Gleichung bei der Ausbreitung von Schall im freien Feld

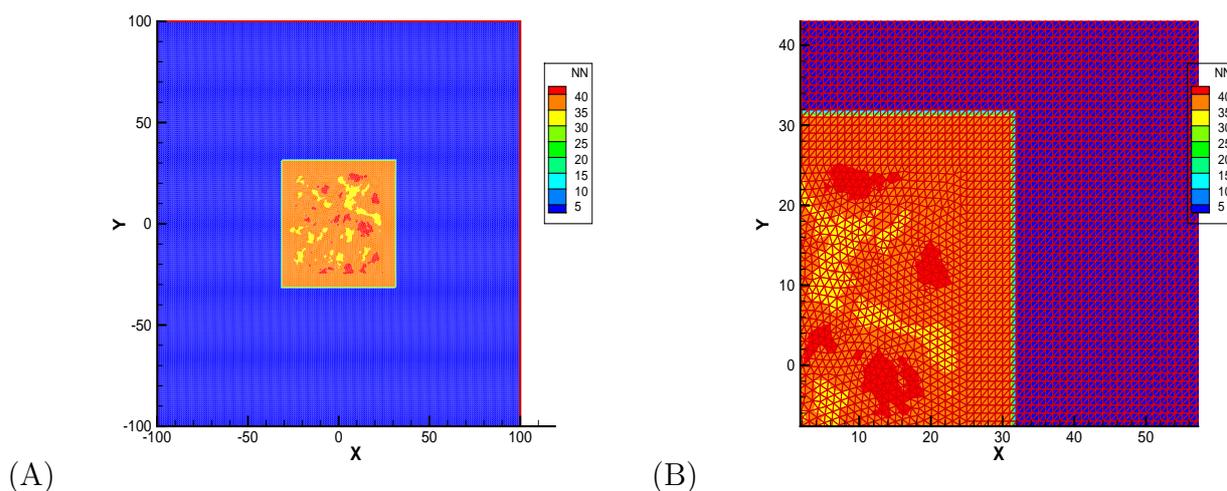


Abbildung 8.10: (A) Verteilung der nächsten Nachbarn, (B) vergrösserte Darstellung zeigt die unstrukturierte Anordnung der Elemente im Innenfeld und die strukturierte Anordnung der Elemente im Aussenbereich

Das verwendete Hybridgitter ist im inneren Bereich unstrukturiert aufgebaut, die Anzahl der nächsten Nachbarn ist dadurch im inneren Bereich nicht konstant, im äusseren Bereich

ist die Anzahl der Nachbarn auf dem kartesischen Gitter konstant. In Abbildung 8.10A und 8.10B wird die Verteilung der Nachbarn dargestellt.

Die Lösung der akustischen Wellengleichung ist auf dem gekoppelten Gitter stabil, Oszillationen treten auf dem Gitter ohne Körper nicht auf. Abbildung 8.9 zeigt den Gauss Puls sowie einen Schnitt bei $y = 0$. Die zweiten Ableitungen haben bei der Wellengleichung dämpfende Eigenschaften, so dass keinerlei Instabilitäten auftreten. Reflexionen treten an der äusseren Berandung wie erwartet nicht auf.

Im zweiten Fall wird bei der Lösung der Wellengleichung ein schallharter Zylinder mit Hilfe der Körperrandbedingungen (3.13) berücksichtigt (Abbildung 8.11).

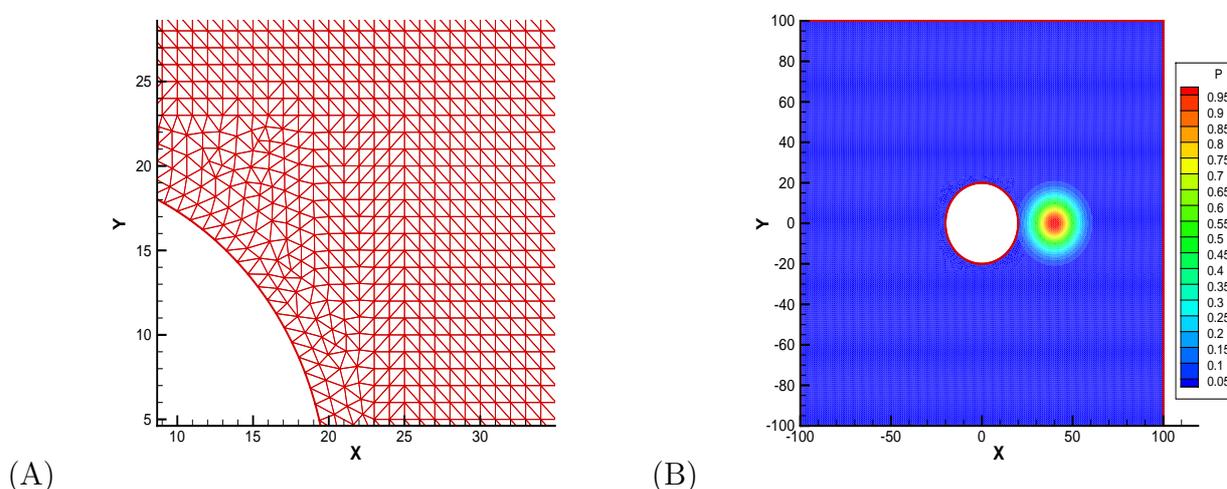


Abbildung 8.11: (A) Hybridgitter um einen schallharten Zylinder (B) Anfangsbedingung

An der Oberfläche des Zylinders treten Instabilitäten auf (Abbildung 8.12A und 8.12B). Es wurde versucht, diese durch einen zusätzlichen Dämpfungsterm auf der Rechthandseite der Wellengleichung zu minimieren. Dieser Term führt jedoch nicht zum Erfolg. Die Verteilung der nächsten Nachbarn ist auf der Körperoberfläche beziehungsweise in Körpernähe asymmetrisch. Hinzu kommt, dass bei dieser knotenzentrierten Methode die Variablenwerte in einem Knoten bestimmt werden, eine zusätzliche Glättung wird nicht durchgeführt. Bei den Finite Volumen Verfahren wird zusätzlich über eine Kante der Fluss aufintegriert und somit die Lösung geglättet, die Finite Volumen Verfahren liefern bei vergleichbaren Rechnungen stabile Lösungen.

Bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen treten auf dem hybriden Gitter Oszillationen auf, die ersten Ableitungen haben keine ausreichende Dämpfung (Abbildung 8.12C und 8.12D). Durch die Einführung eines zusätzlichen Dämpfungsterms konnten die Instabilitäten nicht reduziert werden.

Die Natural Neighbour Methode ist in dieser Formulierung bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen oder der akustischen Wellengleichung nicht anwendbar. Die Natural Neighbour Methode kann nur als Rekonstruktionsverfahren für die Finite Volumen Methode eingesetzt werden.

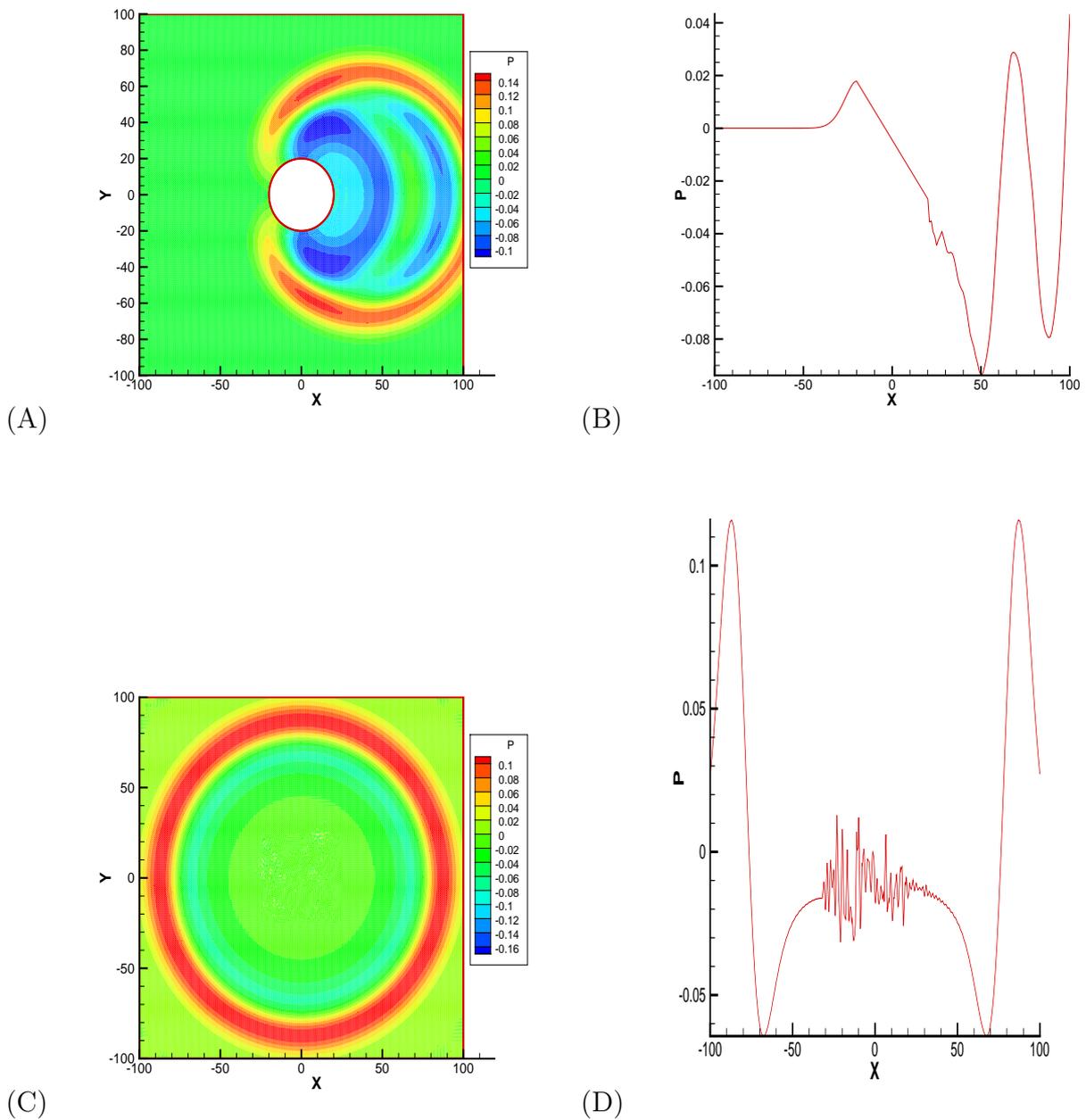


Abbildung 8.12: (A) Lösung der Wellengleichung: Ausbreitung eines Gauss Pulses um einen schallharten Zylinder, (B) Schnitt bei $y = 0$, (C) Lösung der linearisierten Euler Gleichung mit der knotenzentrierten Natural Neighbour Methode, (D) Schnitt bei $y = 0$

8.4 Nachweis der Ordnung

Eine numerische Lösung ist im Allgemeinen mit Fehlern behaftet. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass das numerische Verfahren stabile Lösungen liefert. Ein numerisches Verfahren gilt als stabil, wenn die zeitabhängigen Fehler über die Zeit nicht anwachsen, sondern gedämpft werden. In der Aeroakustik breiten sich Wellen über große Entfernungen aus. In diesem Fall ist ein geringer Amplituden- und Phasenfehler zwingend notwendig. In Abbildung 8.13 werden numerische und exakte Lösung einer sich ausbreitenden Welle verglichen. Die aus der Literatur bekannten ENO (Essentially Non-Oscillatory) und WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) Verfahren liefern stabile hochgenaue Ergebnisse auf strukturierten und unstrukturierten Gittern [50, 51, 52, 19, 20, 30, 47]. Die Rechenzeit ist bei diesen Verfahren jedoch nicht akzeptabel.

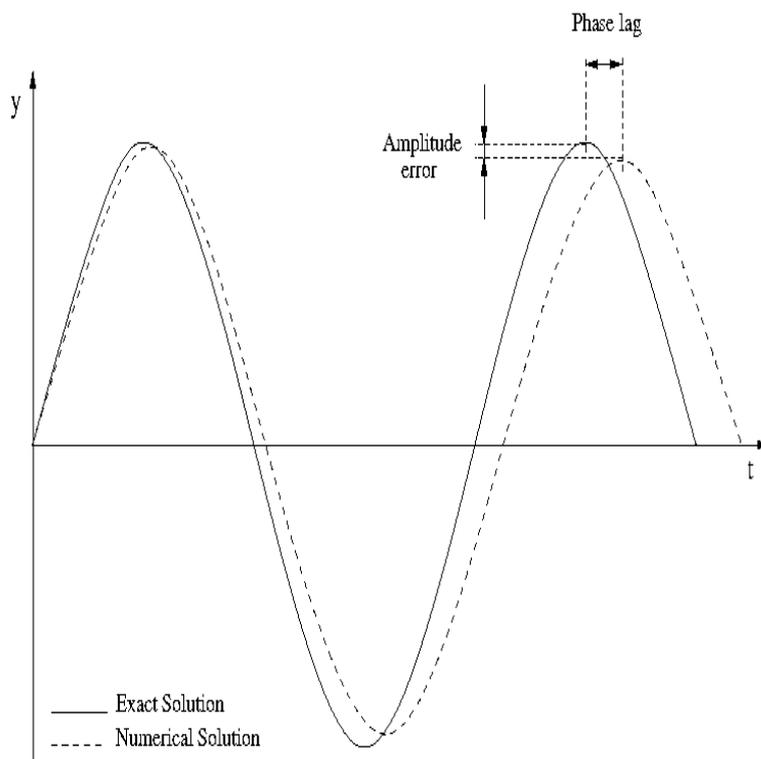


Abbildung 8.13: Phasen- und Amplitudenfehler einer Welle

In der vorliegenden Arbeit werden numerische Verfahren hoher Ordnung vorgestellt und untersucht. Bei den vorgestellten Verfahren werden Amplituden- und Phasenfehler durch die räumlich und zeitlich hochgenauen Integrationsverfahren minimiert, die Rechenzeit ist bei diesen Verfahren verglichen mit der Rechenzeit der ENO und WENO Verfahren gering. Der Phasenfehler wird durch die räumlichen Verfahren bestimmt. Die Fehler in der Amplitude ergeben sich durch die Zeitintegration. Die Ordnung eines Verfahrens beschreibt die Abhängigkeit des numerischen Fehlers von der Auflösung des Rechengebiets. Der numerische Fehler kann durch die Erhöhung der Auflösung oder durch die Verwendung von Verfahren hoher Ordnung reduziert werden. Die Ordnung eines numerischen Verfahrens

wird nachgewiesen, indem auf unterschiedlich aufgelösten Gittern gerechnet und die numerische Lösung mit der analytischen Lösung verglichen wird. Auf kartesischen Gittern kann mit den klassischen Finite Differenzen Methode oder dem DRP Schema die Ausbreitung einer Welle hochgenau simuliert werden. Auf unstrukturierten Gittern ist dies mit der Finite Volumen Methode sowie der Natural Neighbour Methoden möglich. Anhand der Konvektionsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (8.3)$$

wird die Ordnung der Verfahren im Zweidimensionalen untersucht. Die Konvektionsgleichung ist ein Sonderfall der linearisierten Euler Gleichungen. Hierzu wird im vorliegenden Fall das Dichtefeld zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Gauss Verteilung belegt. Die zeitlich und räumlich konstanten Geschwindigkeiten \bar{u} und \bar{v} sind $\bar{u} = 1m/s$ und $\bar{v} = 0$. Dadurch wird der Gauss Pulse mit der Geschwindigkeit \bar{u} horizontal durch das Rechengebiet bewegt. Durch die Verwendung von periodischen Randbedingungen kann der Gauss Pulse unendlich oft durch das Rechengebiet transportiert und untersucht werden.

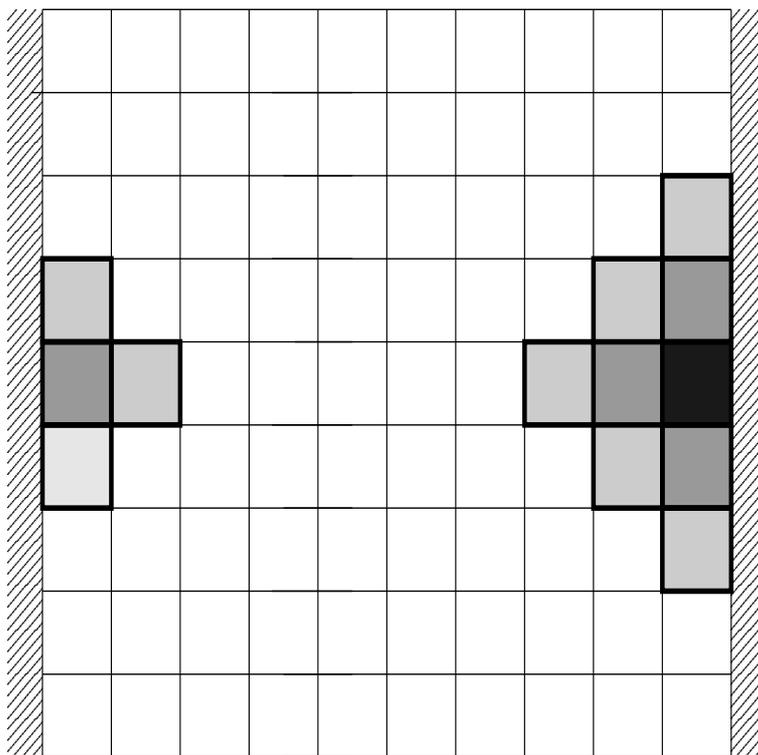


Abbildung 8.14: Beim Nachweis der Ordnung im zweidimensionalen Fall müssen die nächsten Nachbarn mit speziellen Annahmen gesucht werden, so dass die periodischen Randbedingungen erfüllt werden können.

Im dreidimensionalen Fall wird die Ausbreitung eines Gauss Pulses analysiert. Hierzu werden die Dichte und der Druck mit einer Anfangsbedingung belegt, so dass die vollständigen linearisierten Euler Gleichungen gelöst werden müssen. Für diesen Fall ist ebenfalls eine

analytische Lösung bekannt. Wird dies auf unterschiedlich aufgelösten Gittern durchgeführt, so kann die Ordnung nachgewiesen werden.

Bei den Finite Differenzen Verfahren ist die Programmierung der periodischen Randbedingung sehr einfach. Bei den Finite Volumen Verfahren müssen zur Erfüllung dieser Bedingung die nächsten Nachbarn einer Zelle von links nach rechts beziehungsweise von rechts nach links kopiert werden (Abbildung 8.14). Die periodischen Randbedingungen sind unabhängig von der Kreiszahl bei der Nachbarsuche. Die linksseitigen Nachbarn eines rechtsseitigen Randelements werden bei der Nachbarsuche direkt in die Nachbarliste mit aufgenommen. Zudem sind die an einer Randkante angrenzenden Elemente entsprechend gegenseitig zugeordnet. Somit gelten diese Randbedingungen für das Finite Differenzen und Finite Volumen Verfahren auf unstrukturiertem Gitter. Der Fluss der linken und rechten Randkanten ist identisch. Das System ist somit in sich geschlossen.

Im dreidimensionalen Fall werden die linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren auf einem strukturierten sowie auf einem unstrukturierten Gitter gelöst und mit der analytischen Lösung verglichen. In diesem Fall werden an den äusseren Rändern die ankommenden Wellen absorbiert.

8.4.1 Ordnung des Finite Differenzen Verfahren

Die Bestimmung der Ordnung erfolgt beim Finite Differenzen Verfahren und dem DRP Schema auf einem kartesischen Gitter.

Die Zeitintegration erfolgt aus Genauigkeits- und Stabilitätsgründen mit dem Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung. Die CFL-Zahl erfüllt mit $CFL = 0.8$ das Stabilitätskriterium. Am linken und rechten Rand werden periodische Randbedingungen vorgegeben, um ein unendlich großes Rechengebiet zu simulieren. Im vorliegenden Fall wird das Rechengebiet zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Gauss Verteilung

$$\rho(x, y, t = 0) = e^{-m^2 r^2} \quad (8.4)$$

belegt. Hierbei ist m mit $m = \sqrt{\ln 2}/\sigma$ von der der Halbwertsbreite σ und der Abstand r mit $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$ vom Startpunkt x_0, y_0 abhängig. Der Gauss Puls besitzt eine Halbwertsbreite von $\sigma = 3m$ und bewegt sich mit der Konvektionsgeschwindigkeit $\bar{u} = 1m/s$ in x -Richtung. Der Gauss Puls startet im Zentrum $x_0 = y_0 = 0$ des Rechengebiets und läuft nach rechts. Der rechte Rand wird demnach an den linken Rand angeschlossen. Die oberen und unteren Randwerte bleiben identisch, da beide mit dem Puls in x -Richtung mitwandern.

Während der Konvektion treten numerische Fehler auf. Der ursprüngliche Gauss Puls verformt sich dadurch. Bei Verfahren hoher Ordnung sind diese Verformungen sehr gering, Verfahren niedriger Ordnung liefern hingegen auf groben Gittern unrealistische Ergebnisse (Abbildung 8.16).

In den Abbildungen 8.16 und 8.17 wird die räumliche Ableitung in (8.3) mit dem zentralen Differenzen Verfahren zweiter und vierter Ordnung bestimmt. Durch die Erhöhung der

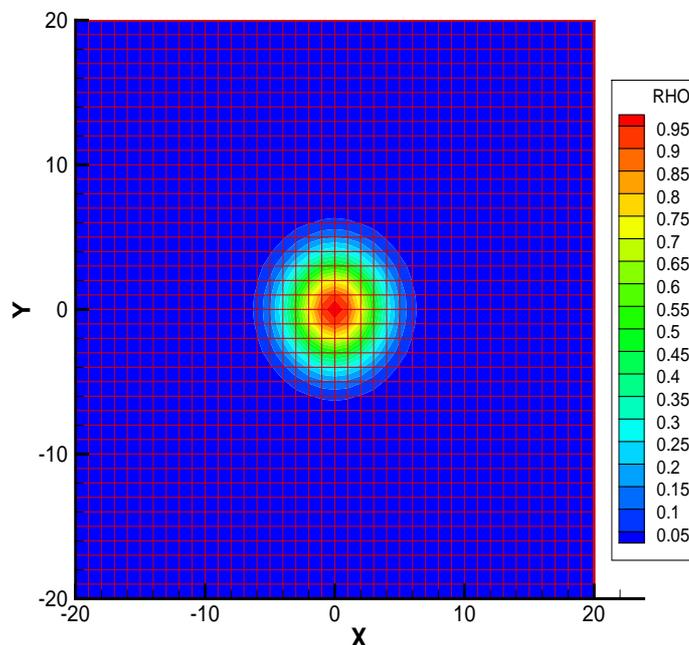


Abbildung 8.15: Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Differenzen Methode, dargestellt ist Dichteverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einem strukturierten Gitter

Ordnung werden Phasen- und Amplitudenfehler reduziert. In Anhang A, Abbildung A.30, wird die räumliche Ableitung mit dem Finite Differenzen Verfahren sechster Ordnung sowie mit dem DRP Schema vierter Ordnung berechnet. Man kann durch einen Vergleich mit der exakten Lösung den Amplituden- und Phasenfehler analysieren. In Abbildung 8.16 sind Amplituden- und Phasenfehler inakzeptabel, die Lösung der Konvektionsgleichung ist mit dem zentralen Finite Differenzen Verfahren zweiter Ordnung auf einem Gitter mit der Gitterschrittweite $dx = dy = 1.0$ in der Aeroakustik nicht anwendbar. In Abbildung (8.17) wird die räumliche Ableitung in (8.3) mit dem zentralen Finite Differenzen Schema vierter Ordnung berechnet. Der Fehler wird durch die Verwendung des Verfahrens vierter Ordnung reduziert, ist jedoch auf diesem Gitter ebenfalls inakzeptabel. In Abbildung A.30 (A) beziehungsweise (B) wird die räumliche Ableitung mit dem zentralen Differenzen Verfahren sechster Ordnung und in Abbildung A.30(C) beziehungsweise (D) mit dem DRP Schema vierter Ordnung berechnet. Die numerische Lösung kommt in beiden Fällen der exakten Lösung sehr nahe.

Tabelle 8.4 zeigt den Fehler sowie die Ordnung

$$k = \frac{E_h/E_{0.5h}}{\log(L_{2h}/L_{2h/2})} \quad (8.5)$$

der einzelnen Verfahren. Die L_2 -Norm ist mit

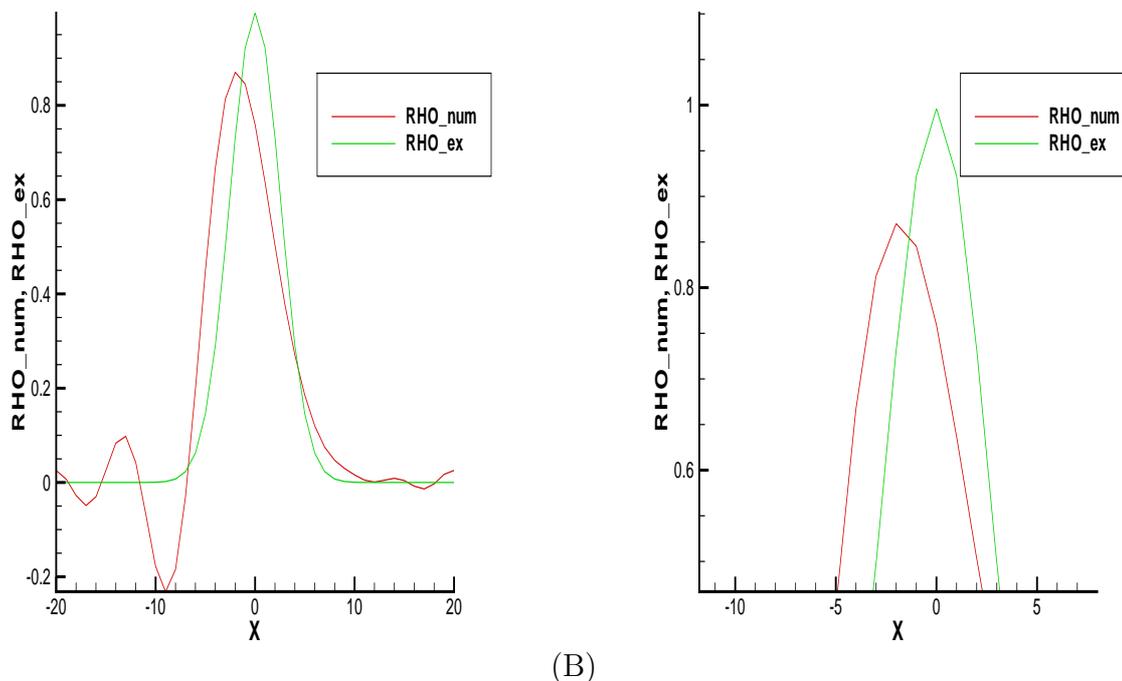


Abbildung 8.16: Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung und dem räumlichen Finite Differenzen Verfahren zweiter Ordnung. (A) zeigt den Dichteverlauf nach einem Durchgang, (B) die Dichteverteilung bei $x = 0$ vergrößert dargestellt.

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{L_i^2}{N}} \tag{8.6}$$

definiert und entspricht auf dem kartesischen Gitter der Gitterschrittweite h . Auf dem unstrukturierten Gitter geht die Kantenlänge L der i -ten Kante sowie die Anzahl der Kanten N in die Berechnung des L_2 Wertes ein. Der Fehler E entspricht dem Betrag der Differenz aus numerischer und exakter Lösung.

h	$E(\text{FD-2 RK4})$	k	$E(\text{FD-4 RK4})$	k	$E(\text{FD-6 RK4})$	k	$E(\text{DRP-4 RK4})$	k
1	1.4031E-2	-	1.8547E-3	-	4.2797E-4	-	1.7608E-4	-
0.5	3.7368E-3	1.9087	1.2215E-4	3.9244	1.6197E-5	4.7236	1.1896E-5	3.8876
0.25	9.5620E-4	1.9664	7.8960E-6	3.9513	8.1251E-7	4.3171	9.8378E-7	3.5959

Tabelle 8.4: Dargestellt ist die Ordnung k und der Fehler E bei der Finite Differenzen Methode und beim DRP Schema.

Der Amplituden- und Phasenfehler ist beim DRP Schema vierter Ordnung auf den Gittern

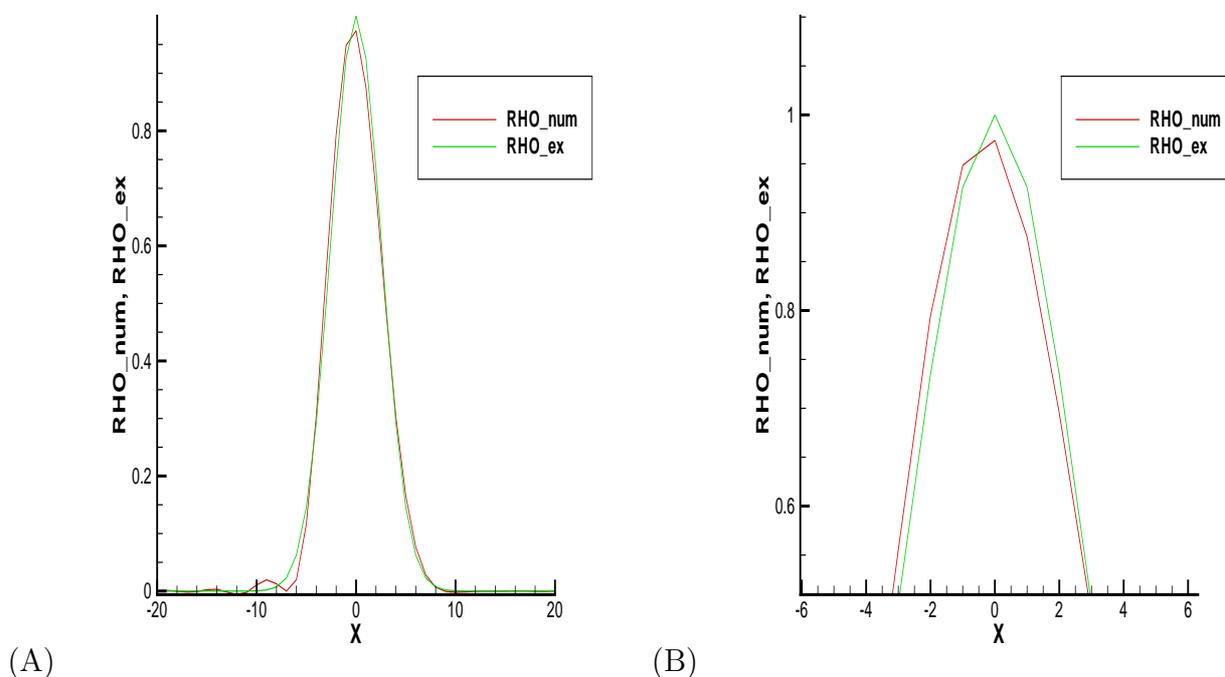


Abbildung 8.17: Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung und dem räumlichen Finite Differenzen Verfahren vierter Ordnung. (A) zeigt den Dichteverlauf nach einem Durchgang, (B) die Dichteverteilung bei $x = 0$ vergrößert dargestellt.

mit $dx = dy = 1.0$ und $dx = dy = 0.5$ geringer als beim Finite Differenzen Verfahren sechster Ordnung. Bei einer weiteren Verfeinerung ist das Verfahren sechster Ordnung genauer als das DRP Schema vierter Ordnung.

8.4.2 Ordnung des Finite Volumen Verfahrens

Die Ordnung des Finite Volumen Verfahrens hoher Ordnung wird wie in obigem Abschnitt nachgewiesen. Die zeitliche Integration erfolgt mit dem Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung. Die Rekonstruktionsalgorithmen des Finite Volumen Verfahrens hoher Ordnung basieren auf der Natural Neighbour Methode und werden in Kapitel 5 behandelt. Die Berechnung der Flusses wird nach der in Kapitel 4.3 beschriebenen Methode durchgeführt. Es wird zum Nachweis der Ordnung auf verschiedenen strukturierten und unstrukturierten Gittern die Konvektionsgleichung 8.3 gelöst und mit der exakten Lösung verglichen. Hierbei hat das größte Gitter an den Aussenkante eine Gitterschrittweite von $dx = dy = 1m$ und das feinste eine Gitterschrittweite von $dx = dy = 0.25m$.

Zweidimensionale Finite Volumen Verfahren auf unstrukturierten Gittern

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Rechengebiet mit der Gauss Verteilung nach (8.4) belegt (Abbildung 8.18C). Mit einem Schnitt bei $y = 0$ kann man die analytische Lösung mit der numerischen Lösung vergleichen. Die folgenden Abbildungen zeigen die Lösung der Konvektionsgleichung auf unterschiedlich aufgelösten Gittern. Man kann auf dem groben Gitter eine Abweichung von der exakten Lösung erkennen (Abbildung 8.18A und 8.18B).

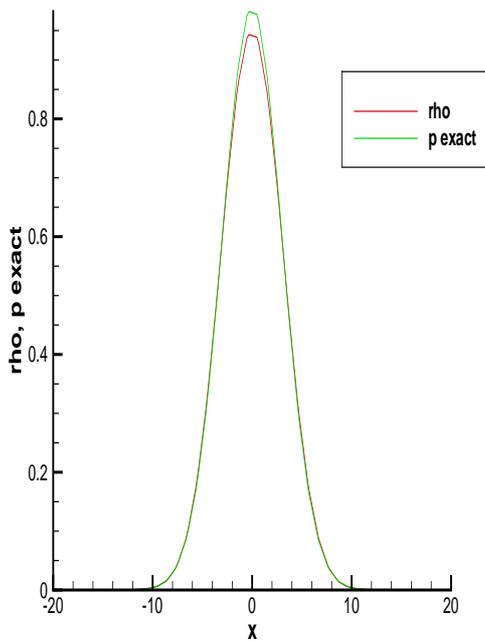
Die Schrittweite h , der Fehler E , die L_2 - Norm sowie die Verfahrensordnung sind in Tabelle 8.5 aufgelistet.

h	dt	Fehler E	L_2	Ordnung k
1	0.5	4.9653251745E-4	1.0259903142	-
1/2	0.25	1.8452406159E-5	0.5064156344	4.6635
1/4	0.125	5.5203967386E-7	0.2491624815	4.9479

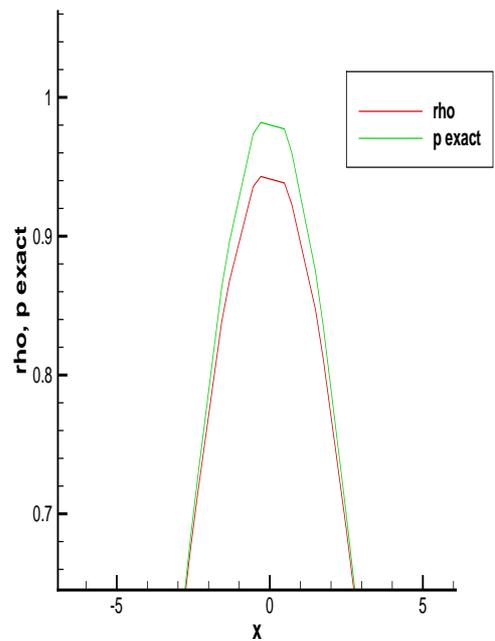
Tabelle 8.5: Ordnungsnachweis der zweidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem unstrukturierten Gitter. Die Rekonstruktion erfolgt bei den Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung mit Hilfe der Natural Neighbour Methode.

In Abbildung 8.18D ist der Fehler über der Gitterschrittweite aufgetragen. Die Steigung der Geraden entspricht der Ordnung des Verfahrens.

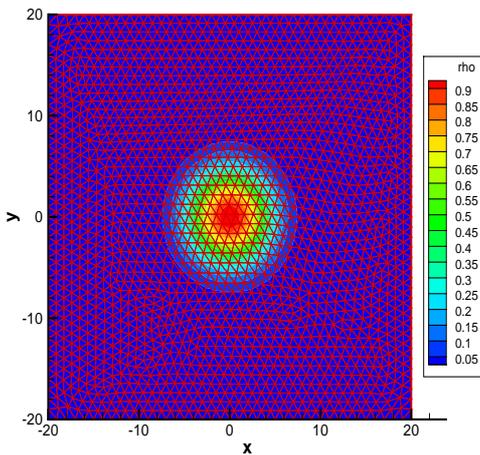
Die Ordnung konvergiert mit der Verfeinerung des Gitters, die Fehler werden durch die Gitterverfeinerung stark reduziert, so dass die numerische Lösung der exakten Lösung sehr nahe kommt (Abbildung 8.18A und A.31). Der Amplitudenfehler ist bei der vorgestellten Finite Volumen Formulierung realistisch, die Amplitude wird nach zweifacher Verfeinerung des Gitters realistisch wiedergegeben. Es konnte mit dem Finite Volumen Verfahren vierter Verfahrensordnung eine vorhergesagte Fehlerordnung von $k = 4.9479$ erreicht werden. Das Verfahren ist demnach wie gefordert von hoher Ordnung genau und nichtoszillierend.



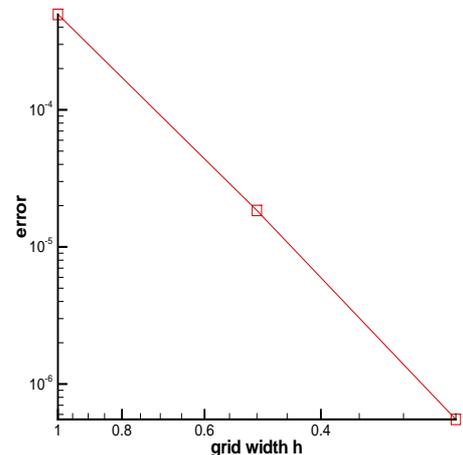
(A)



(B)



(C)



(D)

Abbildung 8.18: Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung. Die Rekonstruktion erfolgt mit Hilfe der Natural Neighbour Methode (A) Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem unstrukturierten Gitter mit $dx = dy = 1m$ an den Aussenkanten des Gitters; (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$; (C) Anfangsbedingung: Gauss Verteilung auf einem unstrukturierten Dreiecksgitter mit $dx = dy = 1m$ an den Außenkanten des Gitters; (D) Fehler über Gitterweite aufgetragen für das Dreiecksgitter

Zweidimensionale Finite Volumen Verfahren auf strukturierten Gittern

In folgendem Abschnitt wird der Ordnungsnachweis auf kartesischen Gittern durchgeführt. Tabelle 8.6 zeigt den Fehler sowie die zugehörige Ordnung des Finite Volumen Verfahrens.

h	Zeitschritt	Fehler E	Ordnung k
1	$dt = 0.5$	5.815557565402692E-4	-
1/2	$dt = 0.25$	2.117933970623307E-5	4.7791
1/4	$dt = 0.125$	6.984485134901373E-7	4.9223

Tabelle 8.6: Ordnungsnachweis der zweidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem strukturierten Gitter.

Die Ordnung konvergiert bei einer Verfeinerung des Gitters gegen einen erwarteten Wert. Abbildung 8.19 zeigt die Dichteverteilung bei $y = 0$ auf dem groben Gitter mit einer Gitterschrittweite von $dx = dy = 1m$. In diesem Fall sind Phasen- und Amplitudenfehler deutlich sichtbar.

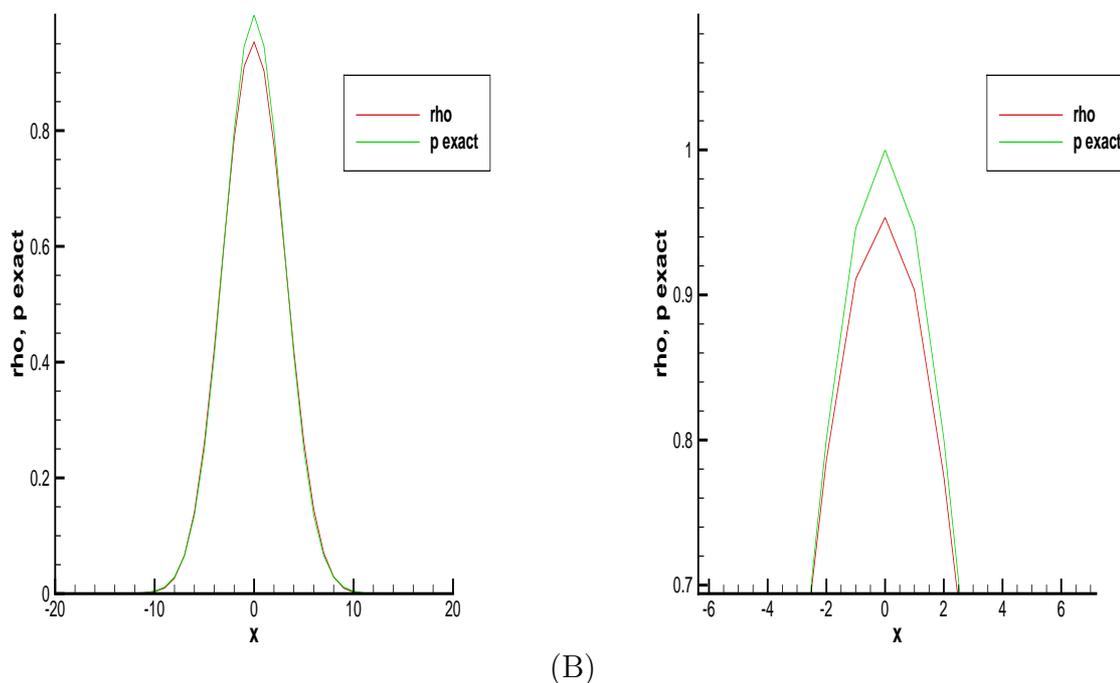


Abbildung 8.19: Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung (A) Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1$; (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$.

Bei einer Verfeinerung des Gitters werden die Fehler reduziert und die numerische Lösung nähert sich der exakten Lösung (Abbildung A.32). Diagramm 8.20 zeigt den Verlauf des Fehlers in Abhängigkeit von der Gitterschrittweite.

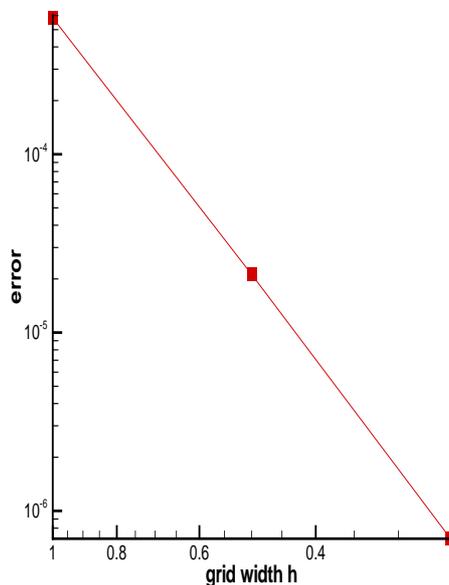


Abbildung 8.20: Dargestellt ist der Fehler über der Gitterweite für das Vierecksgitter bei der Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung.

Dreidimensionale Finite Volumen Verfahren auf unstrukturierten Gittern

Der Nachweis der Ordnung erfolgt im Dreidimensionalen auf Tetraeder- oder Hexaedergittern. Die Tetraedergitter können bei komplexen Geometrien eingesetzt werden, die Hexaeder bei ungekrümmten Geometrien. Im vorliegenden Fall werden die vollständigen linearisierten Euler Gleichungen auf einem Tetraedergitter untersucht (Abbildung 8.21). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Rechengebiet mit folgenden Anfangsbedingungen belegt

$$\rho(r, t) = \frac{1}{c^2} e^{-m^2 r^2} \quad (8.7)$$

$$p(r, t) = e^{-m^2 r^2} . \quad (8.8)$$

Hierbei ist m mit $m = \sqrt{\ln 2}/\sigma$ von der Halbwertsbreite σ und der Abstand r mit $r = \sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)}$ vom Nullpunkt des Pulses x_0, y_0 abhängig.

Die analytische Lösung liefert für den Druck für $r \neq 0$

$$p(r, t) = \frac{1}{2} \hat{p} \frac{r - c t}{r} e^{-m^2 (r - c t)^2} + \frac{1}{2} \hat{p} \frac{r + c t}{r} e^{-m^2 (r + c t)^2} \quad (8.9)$$

und für $r = 0$

$$p(r, t) = (1 - 2m^2 c^2 t^2) e^{-m^2 c^2 t^2} . \quad (8.10)$$

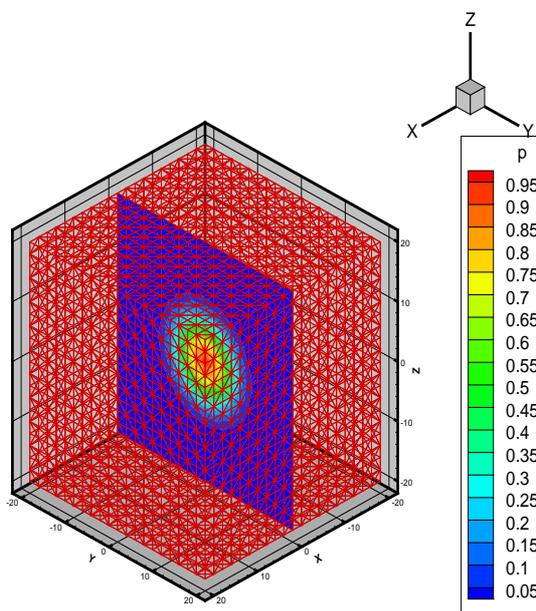


Abbildung 8.21: Dargestellt ist die Anfangsbedingung $p(t = 0)$ bei der Lösung der dreidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem Tetraedergitter.

Die Rechenzeit ist im dreidimensionalen Fall sehr hoch. Auf dem feinen Gitter muss man beim Verfahren vierter Ordnung für zwei Zeitschritte mit einer Rechenzeit von etwa einer Woche rechnen. Diese Rechenzeit ist für eine schnelle und effektive Untersuchung einer dreidimensionalen Geometrie zu lang. Das dreidimensionale Verfahren ist aus diesem Grund derzeit nicht anwendbar. Zum Nachweis der Ordnung wurden auf dem groben Gitter ein Zeitschritt und auf dem feinen Gitter zwei Zeitschritte gerechnet. Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich für das Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung folgende Fehlerordnung

h	$E(\text{FV-1 RK4})$	k	$E(\text{FV-2 RK4})$	k	$E(\text{FV-3 RK4})$	k	$E(\text{FV-4 RK4})$	k
2	$7.2239E-4$	-	$5.6227E-5$	-	$2.7936E-5$	-	$4.1374E-6$	-
1	$1.8377E-4$	1.9748	$6.3579E-6$	3.1446	$1.9795E-6$	3.8189	$2.0176E-7$	4.4194

Tabelle 8.7: Ordnungsnachweis der dreidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem unstrukturierten Gitter.

In Abbildung 8.22 wird der numerische Fehler über der Gitterschrittweite dargestellt, die Steigung der Geraden entspricht der erwarteten Fehlerordnung.

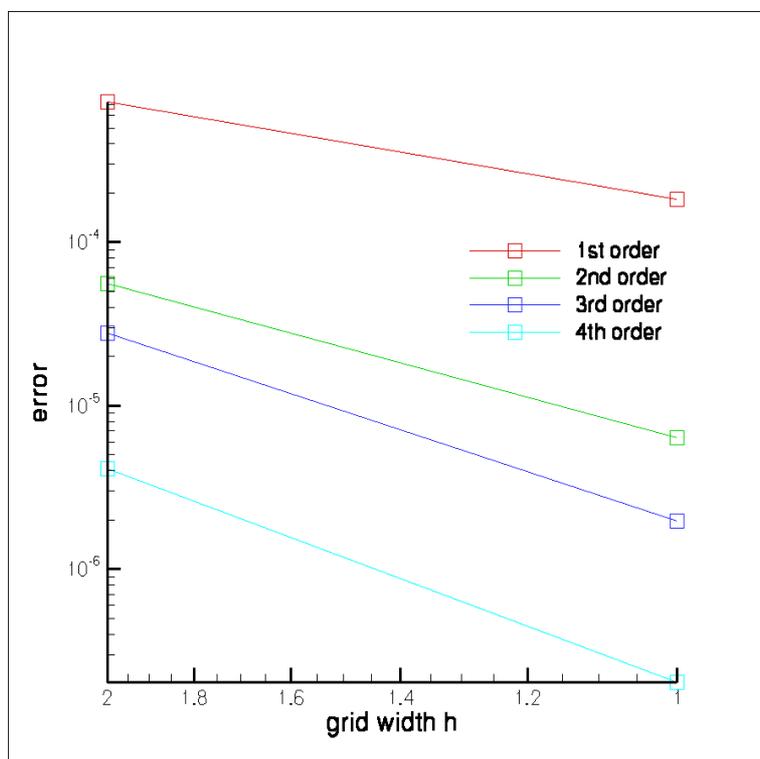


Abbildung 8.22: Dargestellt ist der Fehler über der Gitterweite bei der Lösung der dreidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem Tetraedergitter.

Dreidimensionale Finite Volumen Verfahren auf strukturierten Gittern

Der Nachweis der Ordnung erfolgt in diesem Abschnitt auf dem Hexaedergitter. Die Anfangsbedingung ist in Abbildung 8.23 dargestellt.

Für den Fehler sowie die Ordnung ergeben sich auf dem Hexaedergitter folgende Werte

h	$E(\text{FV-1 RK4})$	k	$E(\text{FV-2 RK4})$	k	$E(\text{FV-3 RK4})$	k	$E(\text{FV-4 RK4})$	k
2	$9.0130E-3$	-	$6.3806E-4$	-	$1.0486E-3$	-	$1.2665E-2$	-
1	$2.9870E-3$	1.5933	$1.6427E-4$	1.9576	$9.5203E-5$	3.4713	$7.9347E-4$	3.9959

Tabelle 8.8: Ordnungsnachweis der dreidimensionalen Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem strukturierten Gitter.

Hierbei ist zu beachten, dass die aufgelisteten Fehler zu unterschiedlichen Zeitebenen ausgewertet wurden. Die Ordnung ist beim Verfahren vierter Ordnung $k = 3.9959$. Die erwartete Ordnung von $k > 4.0$ wurde in diesem Fall nicht erreicht, da es an der äusseren Berandung zu einem Genauigkeitsverlust kommt.

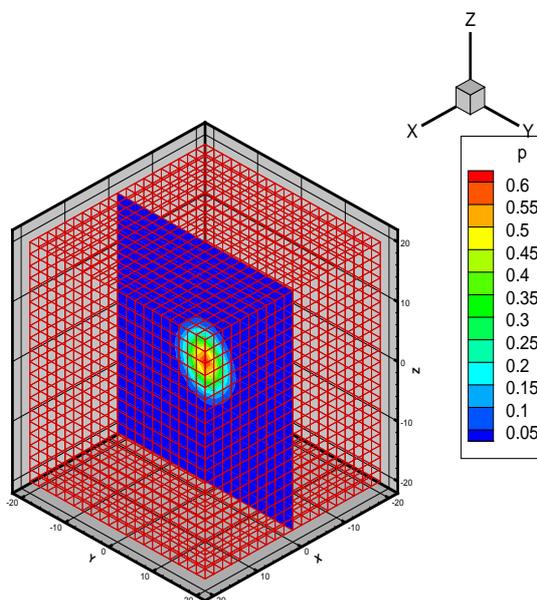


Abbildung 8.23: Dargestellt ist die Anfangsbedingung $p(t = 0)$ bei der Lösung der dreidimensionalen linearisierten Euler Gleichungen mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung auf einem Hexaedergitter.

8.5 Integrale Finite Differenzen Methode

Die integrale Finite Differenzen Methode wird anhand der Konvektionsgleichung 8.3 untersucht. Die integrale Finite Differenzen Methode basiert auf dem integrierten Taylor Polynom und liefert auf einem kartesischen Gitter das Integral der partiellen Ableitungen. Die Ordnung liegt beim Polynom vierter Ordnung niedriger als der erwartete Wert von $k > 4.0$, da bei dieser Methode zunächst abgeleitet und anschließend aufintegriert wird. Die Anzahl der Nachbarn wird durch diese Vorgehensweise reduziert, was zu einer Erhöhung des numerischen Fehlers und der Reduzierung der Ordnung führt (Tabelle 8.9).

h	Fehler E	Ordnung k
1	2.0472E-3	-
1/2	1.2888E-4	3.9895

Tabelle 8.9: Ordnungsnachweis des integralen Finite Differenzen Verfahrens

Die Ordnung des Verfahrens muss durch die Verwendung eines Polynoms fünften Grades erhöht werden. In diesem Fall steigt die Anzahl der Polynomkoeffizienten und der Nachbarn.

8.6 Gekoppelte Verfahren

Bei den gekoppelten Verfahren wird im inneren Bereich ($-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$) die Finite Volumen Methode und im Aussenbereich die Finite Differenzen beziehungsweise die integrale Finite Differenzen Methode angewandt. Ziel ist es, einen komplexen Körper mit unstrukturierten Zellen zu vernetzen und außerhalb der komplexen Geometrie strukturierte Viereckszellen zu verwenden. Dadurch kann die Anzahl der Rechenoperationen reduziert werden. In der vorliegenden Arbeit werden die gekoppelten Verfahren auf einem kartesischen Gitter untersucht. Die Vorgehensweise ist bei hybriden Gittern mit Dreiecken um die komplexe Geometrie und Vierecken im Aussenbereich identisch. Die Kopplung von Finite Differenzen und Finite Volumen Methode benötigt zwei Transitionszonen. Dadurch kommt es am Übergang zu unerwünschten Oszillationen, die Wellen werden in den Bereichen unterschiedlich aufgelöst. In Abbildung 8.24A ist ein Schnitt bei $y = 0$ dargestellt, wobei auf dem kartesischen Gitter die Gitterschrittweite $h = 1m$ beträgt. Auf diesem Gitter kommt es am Übergang zu Oszillationen (Abbildung 8.24B). Der numerische Fehler ist in diesem Fall mit $E = 7.6221E - 3$ etwa zwölf Mal höher als bei der Kopplung mit der integralen Finiten Differenzen Methode. Die Kopplung von Finite Differenzen und Finite Volumen Verfahren wird aus diesem Grund nicht näher betrachtet.

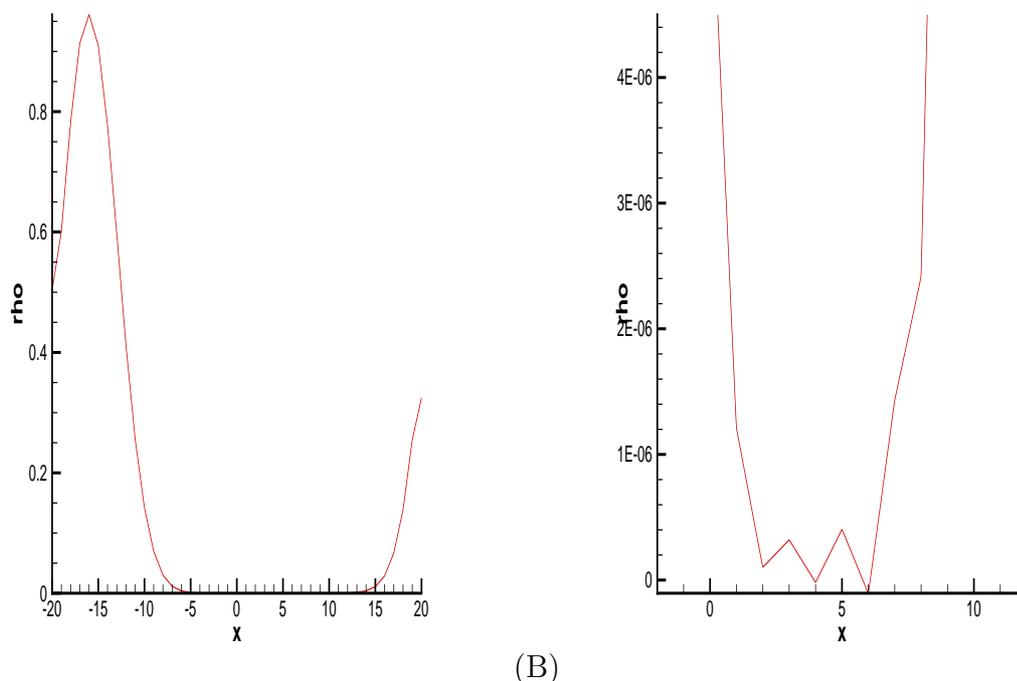


Abbildung 8.24: Lösung der Konvektionsgleichung mit einem gekoppelten Verfahren, im Innenbereich wird die Finite Volumen Methode und im Aussenbereich die Finite Differenzen Methode angewandt (A) Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1$; (B) vergrößerte Darstellung bei $y = 0$

Die integrale Finite Differenzen Methode basiert auf den integralen Werten und kann da-

durch mit dem Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung durch eine Transitionszone gekoppelt werden. Bei Verwendung von einer Transitionszone werden die Ableitungen mit einem Polynom berechnet, so dass dadurch Ungenauigkeiten reduziert werden. An der Übergangsstelle kommt es dadurch zu vernachlässigbaren Abweichungen zwischen den beiden Verfahren, Oszillationen konnten durch die integrale Finite Differenzen Methode reduziert werden. Die numerischen Fehler sowie die Ordnung des gekoppelten Verfahrens ist in folgender Tabelle aufgelistet

h	Fehler E	Ordnung k
1	6.3401E-4	-
1/2	2.4026E-5	4.7218

Tabelle 8.10: Ordnungsnachweis des gekoppelten Verfahrens aus integralen Finite Differenzen Verfahren und Finite Volumen Verfahren

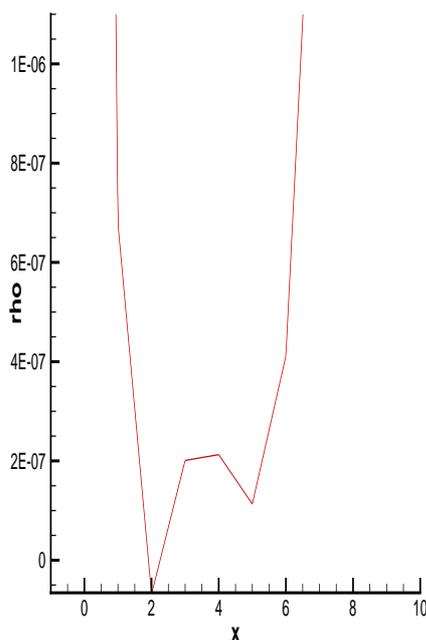


Abbildung 8.25: Lösung der Konvektionsgleichung mit einem gekoppelten Verfahren, im Innenbereich wird die Finite Volumen Methode und im Aussenbereich die integrale Finite Differenzen Methode angewandt. Dargestellt ist die vergrößerte Abbildung des Gauss Pulses bei $y = 0$ nach einem Durchgang auf einem kartesischen Gitter mit $dx = dy = 1m$

Die Kopplung von FD und FV führt an der Übergangsstelle zu Ungenauigkeiten und damit zu einer Reduzierung der Ordnung. Bei der Kopplung von IFD und FV hingegen ist eine Ordnung von $k=4.7218$ nachweisbar. In Kapitel 8.4.2 konnte für die Finite Volumen Methode auf demselben Gitter eine Ordnung von $k = 4.7791$ nachgewiesen werden. Die

Ordnung des gekoppelten Verfahrens wird durch die Kopplung leicht reduziert. Das aus integralen Finite Differenzen Verfahren und Finite Volumen Verfahren gekoppelte Verfahren liefert für die Lösung der Konvektionsgleichung stabile und hochgenaue Ergebnisse.

8.7 Schallausbreitung um komplexe Geometrien

In den obigen Kapiteln ist das Programm HYDSOL beschrieben und mit Hilfe von analytischen Ergebnissen untersucht worden. Die Rekonstruktion bei dem Finite Volumen Verfahren erfolgt mit der neu entwickelten Natural Neighbour Methode. In der vorliegenden Arbeit soll das Finite Volumen Verfahren bei komplexen Geometrien eingesetzt werden. Hierzu wird im folgenden Abschnitt die Schallausbreitung um ein Tragflügelprofil des Flugzeugs Airbus A310 mit ausgefahrenem Vorflügel und Hinterkantenklappe, an einem Profil des FREQUENZ Projekts sowie an einem schallharten Zylinder untersucht. In einem weiteren Fall wird die Schallausbreitung auf einem hybriden Gitter analysiert. Bei den genannten Fällen werden die linearisierten Euler Gleichungen auf einem unstrukturierten Dreiecksgitter beziehungsweise auf einem hybriden Gitter gelöst. Die Zeitintegration wird mit dem Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung durchgeführt. An der äusseren Berandung wird außer der Finite Volumen Randbedingung das Sponge Layer Verfahren angewendet. Durch die Kombination der beiden Verfahren werden reflektierende Wellen besser absorbiert. Durch die Quelllokalisierung im Windkanal ist bekannt, dass die Schallquellen im Bereich des Slats generiert werden. Aus diesem Grund wird im Bereich des Slats eine Monopolquelle angenommen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt daher für das Dichte- und Druckfeld

$$\rho(x, y, t = 0) = \frac{1}{c^2} e^{-m^2 r^2} \quad (8.11)$$

und

$$p(x, y, t = 0) = e^{-m^2 r^2} . \quad (8.12)$$

Hierbei ist m mit $m = \sqrt{\ln 2}/\sigma$ von der der Halbwertsbreite σ und der Abstand r mit $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$ vom Startpunkt x_0, y_0 abhängig. Die Auflösung des akustischen Gitters richtet sich nach der Halbwertsbreite des Gauss Pulses beziehungsweise nach dem Frequenzbereich der untersucht wird. Die Schallwellen müssen in dem gewünschten Frequenzbereich ausreichend aufgelöst werden. Die minimale Wellenlänge

$$\lambda_{min} = \frac{c_0}{f_{max}} \quad (8.13)$$

ergibt sich aus der Schallgeschwindigkeit c_0 und der maximalen Frequenz f_{max} der pulsierenden Quellterme. Die maximal geforderte Frequenz liegt in der Aeroakustik wegen der Hörschwelle bei $f_{max} < 10kHz$. In zahlreichen Untersuchungen konnte festgestellt werden,

dass eine Welle mit mindestens zehn Knoten pro Wellenlänge aufgelöst werden muss, damit Amplituden- und Phasenfehler akzeptabel sind. Die Gitterweite

$$\Delta x = \frac{\lambda_{min}}{10} \quad (8.14)$$

sollte bei der Berechnung der Schallausbreitung konstant sein, um die Wellen gleich aufzulösen. In der Strömungsmechanik ist im Bereich der Grenzschicht eine unterschiedliche Kantenlänge der Elemente möglich, in der Aeroakustik müssen die Kantenlängen nahezu konstant sein. Eine starke Änderung der Gitterweite kann sonst zur Deformation der Welle führen. Für eine Schallgeschwindigkeit von

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \bar{p}}{\bar{\rho}}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 101325 \text{ N/m}^2}{1.205 \text{ kg/m}^3}} = 343.1 \text{ m/s} \quad (8.15)$$

ist somit bei einer maximalen Frequenz $f_{max} = 10 \text{ kHz}$ die Gitterweite

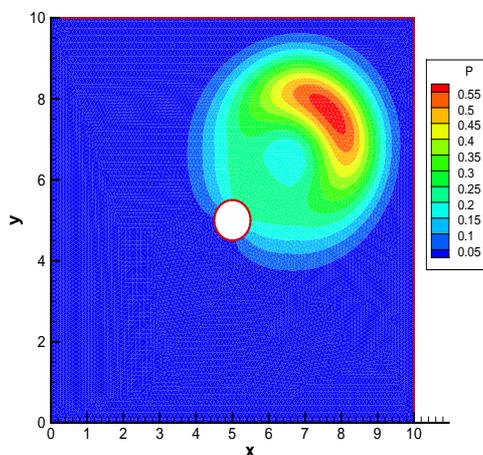
$$\Delta x = \frac{c_0}{f_{max} \cdot 10} = 0.003431 \text{ m} . \quad (8.16)$$

Durch die gewählten Parameter liefert das Finite Volumen Programm hochgenau stabile Ergebnisse bei den beiden Profilen sowie beim Zylinder. An der äusseren Berandung werden die Wellen absorbiert. Der Einfluß der Strömung ist beim Profil des FREQUENZ Projekts sehr gut zu erkennen. In Abbildung A.37 bis A.44 ist die Druckverteilung mit und ohne Strömung dargestellt. Mit Strömung wird die Welle stromab transportiert und ist nach einer Zeit von etwa $t = 1.8E - 3 \text{ s}$ am Rand angekommen (Abbildung A.49), ohne Strömung hat die Welle zu diesem Zeitpunkt noch etwa einen Abstand von $x = 0.3 \text{ m}$ vom Rand (Abbildung A.42). Die Zeitschrittweite ist durch die Hintergrundströmung von $\bar{u} = 100 \text{ m/s}$ kleiner als ohne Strömung. Beim Profil des Flugzeugs Airbus A310 treten wie erwartet ebenfalls keinerlei Instabilitäten auf. In Abbildung A.35 sowie in Abbildung A.36 ist das akustische Feld sowie das unstrukturierte Gitter dargestellt. Das neue entwickelte Rekonstruktionsverfahren für die Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung ist bei komplexen Geometrien anwendbar und liefert realistische Ergebnisse.

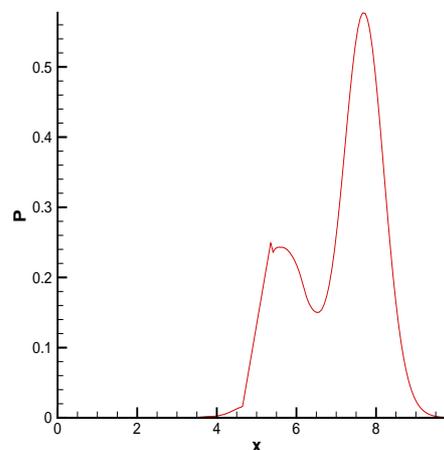
Bei der Natural Neighbour Methoden treten bei der Schallausbreitung um einen schallharten Zylinder Oszillationen auf. Beim Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung treten keine Instabilitäten auf. Die Druckverteilung um den schallharten Zylinder ist in Abbildung 8.26 dargestellt, die Dichte sowie die Geschwindigkeitsverteilung ist im Anhang A in Abbildung A.34 dargestellt.

Das Programm HYDSOL ist zudem in der Lage durch eine Erweiterung die linearisierten Euler Gleichungen auf hybriden Gittern zu lösen.

Abbildung 8.27A zeigt einen Ausschnitt des Gitters, der Aufbau entspricht dem Gitter in Abbildung 8.10. Durch die Kombination von strukturierten und unstrukturierten Gittern ist es möglich, die Vorteile der beiden Gitter auszunutzen. Das Gitter wird aus einem inneren, unstrukturierten und einem äusseren, strukturierten Teil aufgebaut. Dadurch können innen komplexe Geometrien eingebunden werden. Das innere unstrukturierte Gitter hat eine rechteckige Hülle und umschließt den Körper. Der gesamte Rechenaufwand wird durch



(C)

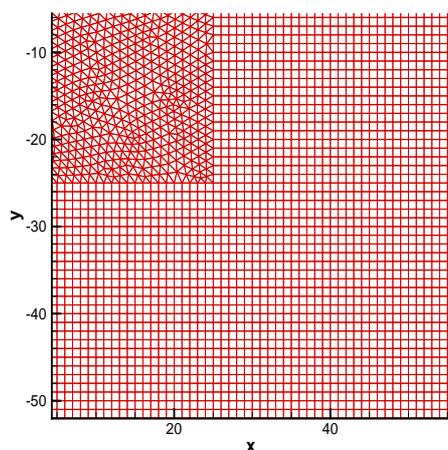


(D)

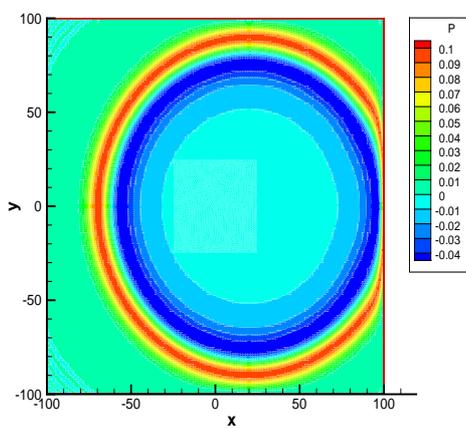
Abbildung 8.26: Schallaubreitungsrechnungen mit dem Finite Volumen Programm HYDSOL um einen schallharten Zylinder, Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode (B) Schnitt bei $y = x$, dargestellt über die x -Koordinate.

den äusseren strukturierten Gitteranteil reduziert, da man aus zwei Dreiecken ein Viereck generieren kann. Dadurch werden weniger Rechenoperationen benötigt. Eine Kopplung ist in diesem Fall nicht nötig. In dem folgenden Fall werden die linearisierten Euler Gleichungen auf einem hybriden Gitter gelöst, schallharte Körper werden in diesem Fall nicht berücksichtigt.

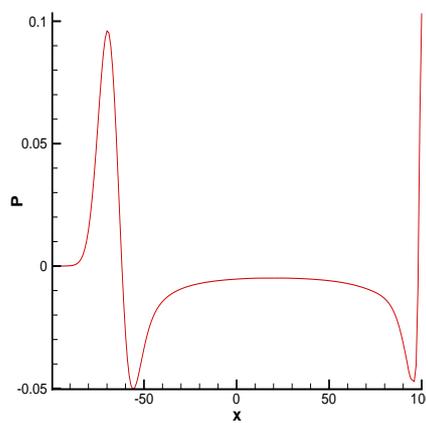
In Abbildung 8.27A und 8.27B ist der Schalldruck nach $n = 900$ Zeitschritten dargestellt, Oszillationen treten bei dieser Formulierung auf dem hybriden Gitter ebenfalls nicht auf. Die knotenzentrierte Natural Neighbour lieferte bei vergleichbaren Rechnungen instabile Ergebnisse. Die Natural Neighbour Methode ist demnach nur als Rekonstruktionsverfahren für das Finite Volumen Verfahren einsetzbar.



(A)



(B)



(C)

Abbildung 8.27: Schallaubreitungsrechnungen mit dem Programm HYDSOL auf einem hybriden Gitter: (A) Ausschnitt aus dem hybridem Gitter (B) Druckverteilung nach $n = 900$ Zeitschritten (C) Schnitt bei $y = 0$.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden numerische Verfahren zur Lokalisierung, Generierung und Ausbreitung von Schall untersucht und weiterentwickelt. Das Beamforming Verfahren ist durch die in dieser Arbeit vorgestellte Erweiterung erstmals in der Lage, aeroakustische Quellen in Windkanälen mit kreisförmigen wie auch rechteckigen Düsenaustritten zu lokalisieren. Es ist mit dieser Vorgehensweise eine realistische Darstellung der Quellen sowie eine Quantifizierung der Quellen im Frequenzbereich möglich. Durch die Windkanalmessungen in den Projekten RAIN und AKUSIM konnten die aeroakustischen Quellen nachgewiesen und untersucht werden. Im Projekt RAIN konnten zudem die aeroakustischen Quellen durch konstruktive Maßnahmen wie dem Anbringen von Bürsten oder durch die Verwendung von akustisch absorbierenden Werkstoffen nahezu eliminiert werden, ohne die aerodynamische Wirksamkeit der Klappensysteme zu beeinflussen. Die vorgestellten Schalllokalisierungsverfahren können wie gefordert bei der Entwicklung neuer lärmärmer Tragflügelkonzepte eingesetzt werden.

Die theoretische Untersuchung von aeroakustischen Quellen kann mit dem von Hardin und Pope entwickelten EIF Verfahren durchgeführt werden. Dieses ist in der Lage, mit Hilfe von inkompressiblen Strömungsdaten aeroakustische Quellen im Zeitbereich zu generieren. Es konnte im Falle des korotierenden Wirbelpaares eine mit der analytischen Lösung vergleichbare Druckverteilung numerisch berechnet werden. Das EIF Verfahren könnte beispielsweise bei der Untersuchung von aeroakustischen Quellen an Tragflügeln eingesetzt und mit den Ergebnissen der Array Messtechnik verglichen werden.

Zur Berechnung der Schallausbreitung wurden in der vorliegenden Arbeit das Finite Differenzen, das Finite Volumen sowie das integrale Finite Differenzen Verfahren eingesetzt und weiterentwickelt. Die Schallquellen können mit Hilfe der Array Messtechnik oder mit dem EIF Verfahren modelliert werden.

Die Lösung der akustischen Wellengleichung beschreibt die Schallausbreitung in ruhendem Medium. Es wurde in der vorliegenden Arbeit die Finite Differenzen wie auch die Natural Neighbour Methode zur Lösung der akustischen Wellengleichung eingesetzt. Die Schallausbreitung um komplexe Geometrien ist mit der Finite Differenzen Methode problematisch, da in diesem Fall der Körper durch Treppenstufen approximiert werden muss. Aus diesem

Grund ist die Verwendung von unstrukturierten Verfahren vorteilhaft. Auf unstrukturierten Gittern kann ein komplexer Körper durch Dreiecke oder Tetraeder realistisch approximiert und bei der Lösung der Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden.

Auf unstrukturierten Gittern ohne Körper ist die Natural Neighbour Methode stabil, da in diesem Fall lediglich die zweiten Ableitungen benötigt werden. Das System besitzt dadurch eine ausreichende Dämpfung. Bei der numerischen Berechnung des Schallfeldes um einen Zylinder ist die Natural Neighbour Methode instabil, es treten auf dem Zylinder Oszillationen auf, da in diesem Fall die ersten Ableitungen der Körperwandbedingungen verwendet werden müssen. Bei der Lösung der linearisierten Euler Gleichungen konnten mit der Natural Neighbour Methode keine befriedigenden Ergebnisse erzielt werden, da die Lösung anfängt zu oszillieren. In diesem Fall werden die ersten Ableitungen verwendet, die Dämpfung ist zu gering.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die linearisierten Euler Gleichungen in das Finite Volumen Programm HYDSOL implementiert. Das Programm wurde zudem auf den dreidimensionalen Fall erweitert, durch die Implementierung von neuen Rekonstruktionsalgorithmen ist das Programm in der Lage, die linearisierten Euler Gleichungen hochgenau und oszillationsfrei zu lösen.

Die Berechnung der räumlichen Ableitungen erfolgt bei der Finite Volumen Methode hoher Ordnung ebenfalls durch die Natural Neighbour Methode. Es konnte auf strukturierten wie auf unstrukturierten Gittern eine vorhergesagte Ordnung erreicht werden, Oszillationen treten hierbei nicht auf. Das Verfahren konnte wie gefordert erfolgreich am Tragflügelprofil des Flugzeugs Airbus A310 mit ausgefahrenem Vorflügel und Hinterkantenklappe sowie an einem Profil des FREQUENZ Projekts erfolgreich eingesetzt werden und liefert realistische Ergebnisse.

Nachteil der Finite Volumen Verfahren hoher Ordnung ist die hohe Rechenzeit. Diese ist bei zweidimensionalen Fällen noch akzeptabel, bei dreidimensionalen Fällen hingegen ist von der vorgestellten Rekonstruktion hoher Ordnung abzuraten. Lediglich die Verwendung von Rechenanlagen mit einer deutlich gesteigerten Prozessorleistung könnte die Anwendung der vorgestellten dreidimensionalen Finite Volumen Formulierung hoher Ordnung ermöglichen.

Die Kopplung von Natural Neighbour und Finite Differenzen Methode ist möglich. Bei der Kopplung von Natural Neighbour Methode und Finite Differenzen Methode beziehungsweise dem DRP Schema konnten wegen der Oszillationen im unstrukturierten Bereich keine akzeptablen Ergebnisse erzielt werden. Dies liegt jedoch nicht an der Kopplung, sondern ausschließlich an der knotenzentrierten Formulierung der Natural Neighbour Methode. Die Dämpfung ist in diesem Fall im unstrukturierten Bereich unzureichend. Zudem wird bei dieser Formulierung nicht wie bei den Finite Volumen Verfahren die Lösung geglättet.

In zukünftigen Arbeiten könnte versucht werden, die Natural Neighbour Methode und die integrale Finite Differenzen Methode auf unstrukturierten Gittern einzusetzen. Hierbei muss eine nichtoszillierende Formulierung gefunden werden.

Eine weitere Möglichkeit wäre die Kopplung von Finite Volumen Methode und integraler Finite Differenzen Methode auf unstrukturierten Gittern. In diesem Fall könnte die Berücksichtigung der Körperwandbedingungen mit den Finite Volumen Verfahren durchgeführt

werden. Im restlichen Feld werden die linearisierten Euler Gleichungen mit der integralen Finite Differenzen Methode gelöst. Vorteil wäre die geringe Rechenzeit des gekoppelten Verfahrens.

Literaturverzeichnis

- [1] R. K. Amiet, *Correction of Open Jet Wind Tunnel Measurements for Shear Layer Refraction*, AIAA 75-532.
- [2] R. K. Amiet, *Acoustic Radiation from an Airfoil in a Turbulent Stream*, Journal of Sound and Vibration (1975)41(4), pp. 407-420.
- [3] J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1995.
- [4] B. D. Basel, A. Kolb, M. Grünwald, *Abschlussbericht AKUSIM-Projekt*, EADS Corporate Research Centre München, März 2004.
- [5] A. Bayliss, E. Turkel, *Far Field Boundary Conditions for Compressible Flows*, Journal for Pure and Applied Math, 1980.
- [6] T. J. Barth, S. Linton, *An Unstructured Mesh Newton Solver for Compressible Fluid Flow and its Parallel Implementation*, AIAA 95-0221.
- [7] T. Belytschko, *Meshless Methods: An Overview and Recent Developments*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996), pp. 3-47.
- [8] J. Braun, M. Sambridge, *A Numerical Method for Solving Partial Differential Equations on Highly Irregular Evolving Grids*, Nature, Vol. 376, 1995.
- [9] J. Braun, M. Sambridge, *Dynamical Lagrangian Remeshing (DLR): A New Algorithm for Solving Large Strain Deformation Problems and its Application to Fault-Propagation Folding*, Earth and Planetary Letters 124 (1994) pp. 211-220.
- [10] S. Brühl, *Acoustic Noise Source Modelling Based on Microphone Array Measurements*, Journal of Sound and Vibration(2000)231(3), pp. 611-617.
- [11] D. Crighton, *Acoustics as a Branch of Fluid Mechanics*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 106, 1981, pp. 261-291.
- [12] R. Clayton, B. Enquist, *Absorbing Boundary Conditions*, http://sepwww.stanford.edu/oldreports/sep11/11_2.pdf.
- [13] G. S. Djambazov, C. Lai, *Staggered-Mesh Computation for Aerodynamic Sound* AIAA 98-2219, pp. 97-103.

- [14] R. Dougherty, R. Stoker, *Sidelobe Suppression for Phased Array Aeroacoustic Measurements*, AIAA-98-2242.
- [15] C. Duarte, J. T. Oden, *Hp Clouds-A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems* TICAM Report 95-05, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics. The University of Texas at Austin.
- [16] R. Ewert, *A Hybrid Computational Aeroacoustics Method to Simulate Airframe Noise* Dissertation, Aerodynamisches Institut, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dezember 2002.
- [17] J. Fürst, T. Sonar, *On meshless Collocation Approximations of Conservation Laws: Preliminary Investigations on Positive Schemes and Dissipation Models*, ZAMM 81, pp. 403-415, 2001.
- [18] A. Geiger, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Universität Stuttgart, 1993.
- [19] C. F. Ollivier-Gooch, *A High-Order Accurate Unstructured Mesh ENO Scheme Based on Data-Dependent Least-Squares Reconstruction*, University of British Columbia, 2003.
- [20] C. F. Ollivier-Gooch, *A High-Order Accurate Unstructured Finite-Volume Scheme for Advection-Diffusion Equation*, University of British Columbia, 2002.
- [21] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neuhoefler, *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, 1995.
- [22] G. Guidati, *Simulation and Measurement of Inflow-Turbulence Noise on Airfoils*, Institut für Aerodynamik und Gasdynamik, Universität Stuttgart, 1997.
- [23] G. Guidati, C. Brauer, S. Wagner, *The Reflection Canceller-Phased Array Measurements in a Reverberating Environment*, AIAA 2002-2462.
- [24] J. Hardin, D. S. Pope *An Acoustic/Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics*, Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 6, 1994, pp. 323-340.
- [25] J. A. Hayes, W. Horne, *Measurement of Reynolds Number Effect on Airframe Noise in the 12-Foot Pressure Wind Tunnel*, AIAA 99-1959.
- [26] W.C. Horne, J.Hayes, J.C. Ross, B.L.Stormes, *Measurements of Unsteady Pressure Fluctuations on the Surface of an Unswept, Multi-Element Airfoil*, AIAA-97-1645-CP.
- [27] K. A. Hoffmann, S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Engineering Education System, 1993.
- [28] R. Höld, A. Brenneis, A. Eberle, *Numerical Simulation of Aeroacoustic Sound Generated by Generic Bodies Placed on a Plate: Part I-Prediction of Aeroacoustic Sources*, AIAA-99-1896.

- [29] F. Q. Hu, *On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer*, Tech. rep., Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University, Norfolk, VA 23529, 1997.
- [30] G. S. Jiang, C. Shu, *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*, Tech. rep., Brown University, 1995.
- [31] M. Karrenbach, *Elastic Tensor Wave Fields*, Dissertation Department of Geophysics, Stanford University, Februar 1995.
- [32] M. Karrenbach, *Modelling Physical Systems*, Geophysikalisches Institut, Universität Karlsruhe, Dezember 1999.
- [33] M. Käser, H. Igel, M. Sambridge, J. Braun, *A Comparative Study of Explicit Differential Operators on Arbitrary Grids*, Journal of Computational Acoustics , Vol. 9, No. 3, pp. 1111-1125, 2001.
- [34] H. R. Kelly, R. W. Ward, *A Finite Difference Approach*, Geophysics, Vol. 41, No.1, pp. 2-27, 1976.
- [35] D. J. Kirshman, F. Liu, *Cartesian Grid Solution of the Euler Equations Using a Gridless Boundary Condition Treatment*, AIAA 3974-2003.
- [36] P. Költzsch, *Gebiete und offene Probleme der Aeroakustik*, Beiträge zur Strömungsmechanik, Technische Universität Dresden 2001.
- [37] P. Költzsch, *Über das verbindende von Strömungsmechanik und Strömungsakustik*, Technische Universität Dresden, 2001.
- [38] A. Meister, *Zur zeitgenauen numerischen Simulation reibungsbehafteter, kompressibler, turbulenter Strömungsfelder mit einer impliziten Finite Volumen Methode vom Box-Typ*, Dissertation Institut für Strömungsmechanik Göttingen, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrttechnik, Mai 1996.
- [39] C. D. Munz, M. Jaya, T. Schwartzkopff, R. Fortenbach, *HYDSOL: Modular Implementation of Navier-Stokes Equation Solver Using the FV-Method in Arbitrary Unstructured Meshes*, Universität Stuttgart, 2002,
- [40] P. Lancaster, K. Salkauskas, *Curve and Surface Fitting*, Academic Press, 1986.
- [41] J. Lighthill, *On Sound Generated Aerodynamically*, Proc. Roy. Soc. , London Vol. I/II, 1952/54, pp. 261-297.
- [42] T. J. Liszka, C. A. M. Duarte, W. W. Tworzydło, *Hp-Meshless Cloud Method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. pp. 63-288, 139-1996.
- [43] T. J. Liszka, J. Orkisz, *The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics*, Computers and Structures, Vol. 11, pp. 83-95, Pergamon Press 1980.

- [44] W. H. Press, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1988.
- [45] J. Reichenberger, M. Grünewald, *Abschlussbericht RAIN-Projekt*, EADS Corporate Research Centre München, 2001.
- [46] W. Schönauer, T. Adolph, *How WE solve PDEs*, Journal of Computational and Applied Mathematics 131, 2001, pp. 473-492.
- [47] C. Shu, *High Order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods*, Tech. rep., Brown University, 1997.
- [48] S. Silbernagel, *Taschenatlas der Physiologie*, Thieme Verlag, Stuttgart, 1991.
- [49] R. Siegert, V. Schwarz, J. Reichenberger, *Numerical Simulation of Aeroacoustic Sound Generated by Generic Bodies Placed on a Plate: Part II-Prediction of Radiated Sound Pressure*, AIAA-99-1895.
- [50] T. Sonar, *Mehrdimensionale ENO-Verfahren zur Konstruktion nichtoszillierender Methoden für hyperbolische Erhaltungsgleichungen*, Teubner Verlag, Stuttgart 1997.
- [51] T. Sonar, *On Families of Pointwise Optimal Finite Volume ENO Approximations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 35, No. 6, pp. 2340-2369, 1998.
- [52] T. Sonar, *On the Construction of Essentially Non-Oscillatory Finite Volume Approximations to Hyperbolic Conservation Laws on General Triangulations: Polynomial Recovery, Accuracy, and Stencil Selection*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 140, pp. 157-181, 1997.
- [53] A. H. Stroud, *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, 1971
- [54] C. K. Tam, Z. Dong, *Wall Boundary Conditions for High-Order Finite Difference Schemes in Computational Aeroacoustics*, Theoret. Comp. Fluid Dynamics (1994)6, pp. 303-322.
- [55] C. K. Tam, *Numerical Methods in Computational Aeroacoustics*, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1996-04.
- [56] C. K. Tam, J. Webb, *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*, Journal of Computational Physics 107, pp. 262-281(1993).
- [57] C. K. Tam, J. Webb, Z. Dong, *A Study of the Short Wave Components in Computational Acoustics*, Journal of Computational Acoustics Vol. 1, No. 1 (1993) pp. 1-30.
- [58] C. K. Tam, *Advances in Numerical Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics*, AIAA Journal, 1997, pp.1-16.
- [59] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 1997.

Anhang A

Bildteil

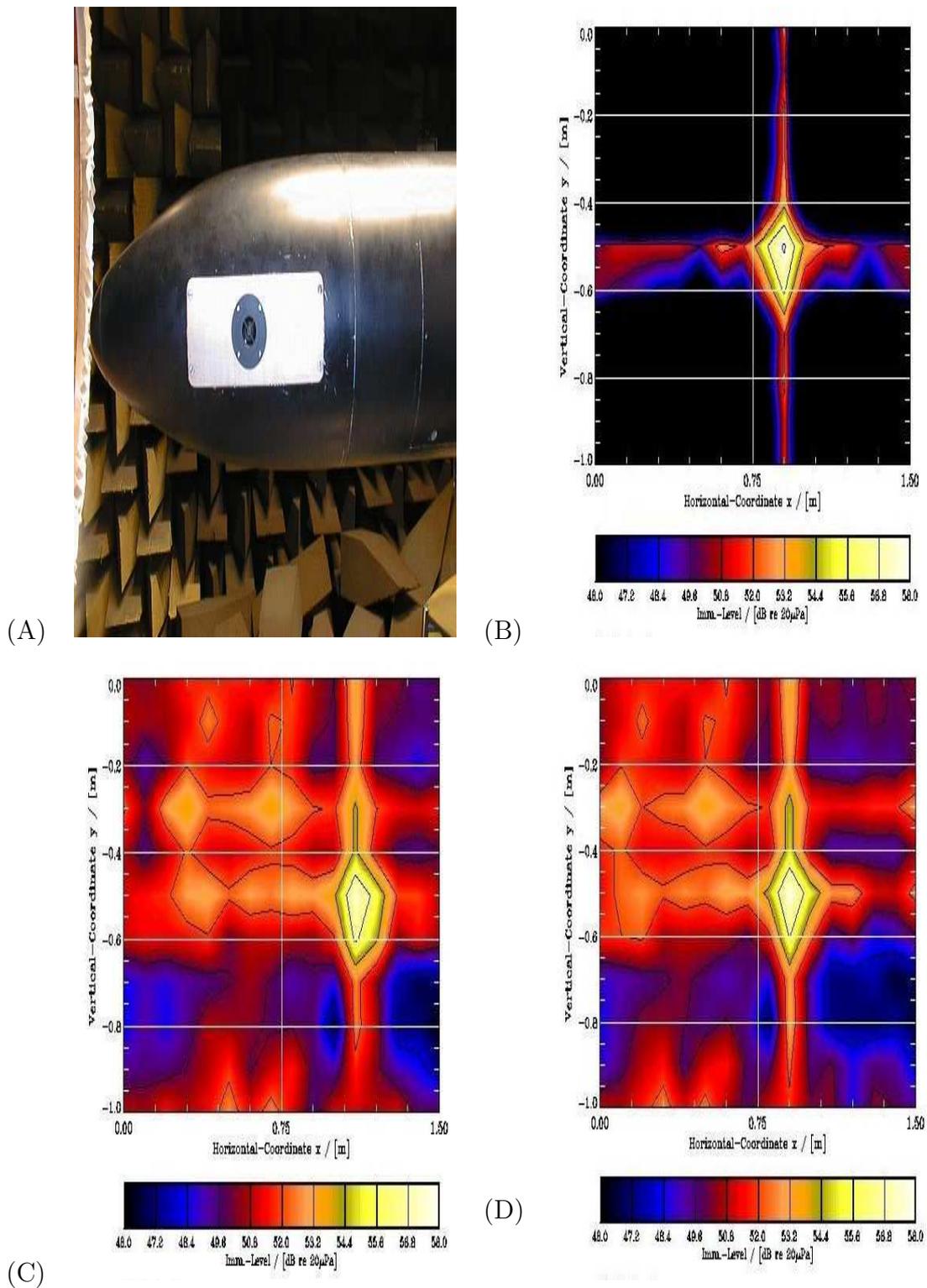


Abbildung A.1: Array Messtechnik (A) Lautsprecher am Rumpf des Flugzeugs Airbus A320 (B) Schalllokalisierung bei einer Frequenz von $f = 4800 - 5200 \text{ Hz}$ mit der Beamforming Methode ohne Anströmung (C) Schalllokalisierung mit der klassischen Beamforming Methode bei einer Frequenz von $f = 4800 - 5200 \text{ Hz}$ und einer Anströmgeschwindigkeit von $u = 50 \text{ m/s}$ (D) Schalllokalisierung mit der modifizierten Beamforming Methode bei einer Frequenz von $f = 4800 - 5200 \text{ Hz}$ und einer Anströmgeschwindigkeit von $u = 50 \text{ m/s}$

AIRBUS A320, Effect of Slats

Source-Model

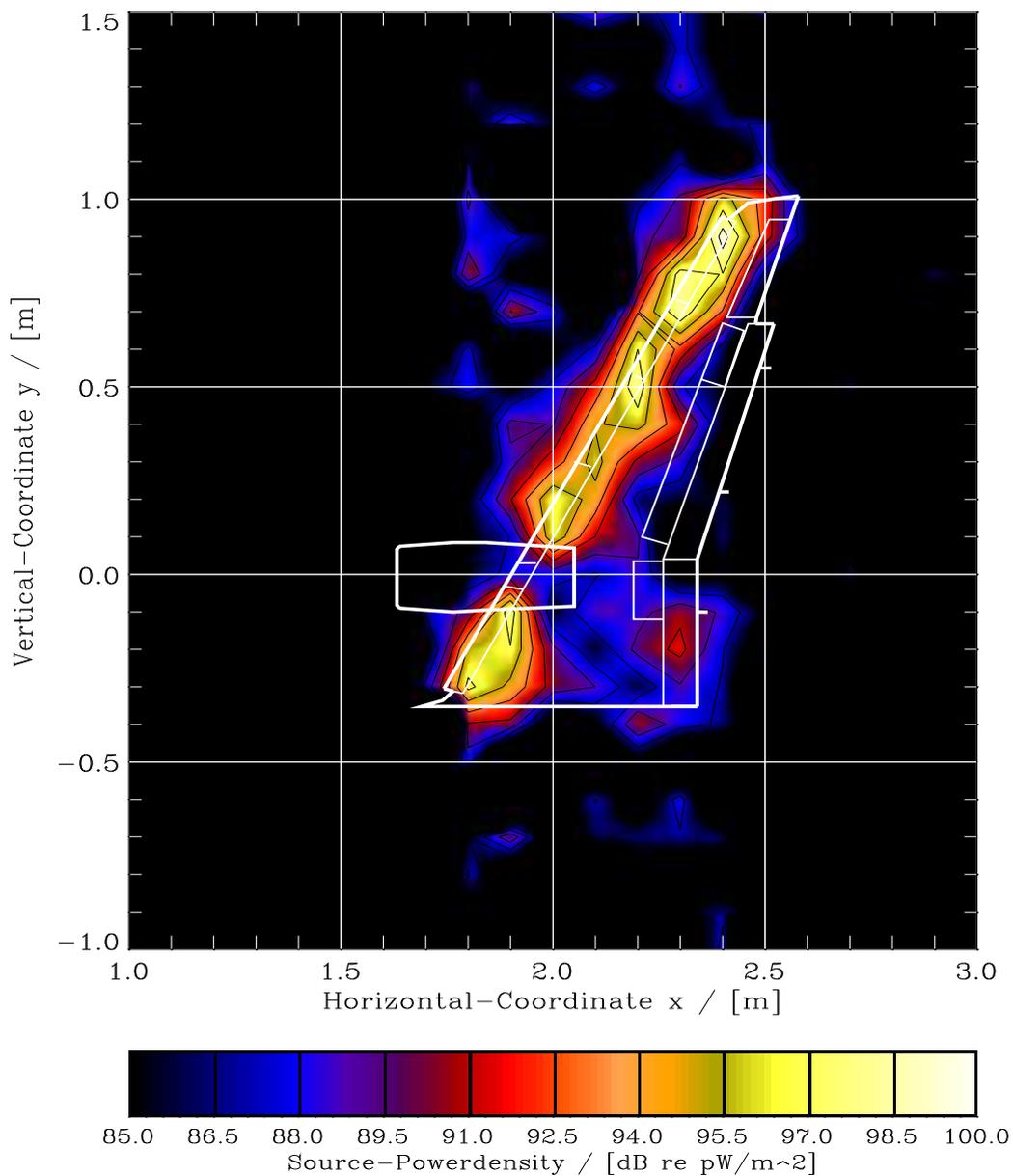
Measurement-File: std.V27-6064.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 5981-6396 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 27

Coordinate of Focusplane : $z = 0.10$ m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center T2 : $x/y/z = 2.0$ m/ 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.2: Array Messtechnik: Slat-Konfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60$ m/s, $Frequenz = 6000 - 6400$ Hz

AIRBUS A320, Effect of Flaps

Source-Model

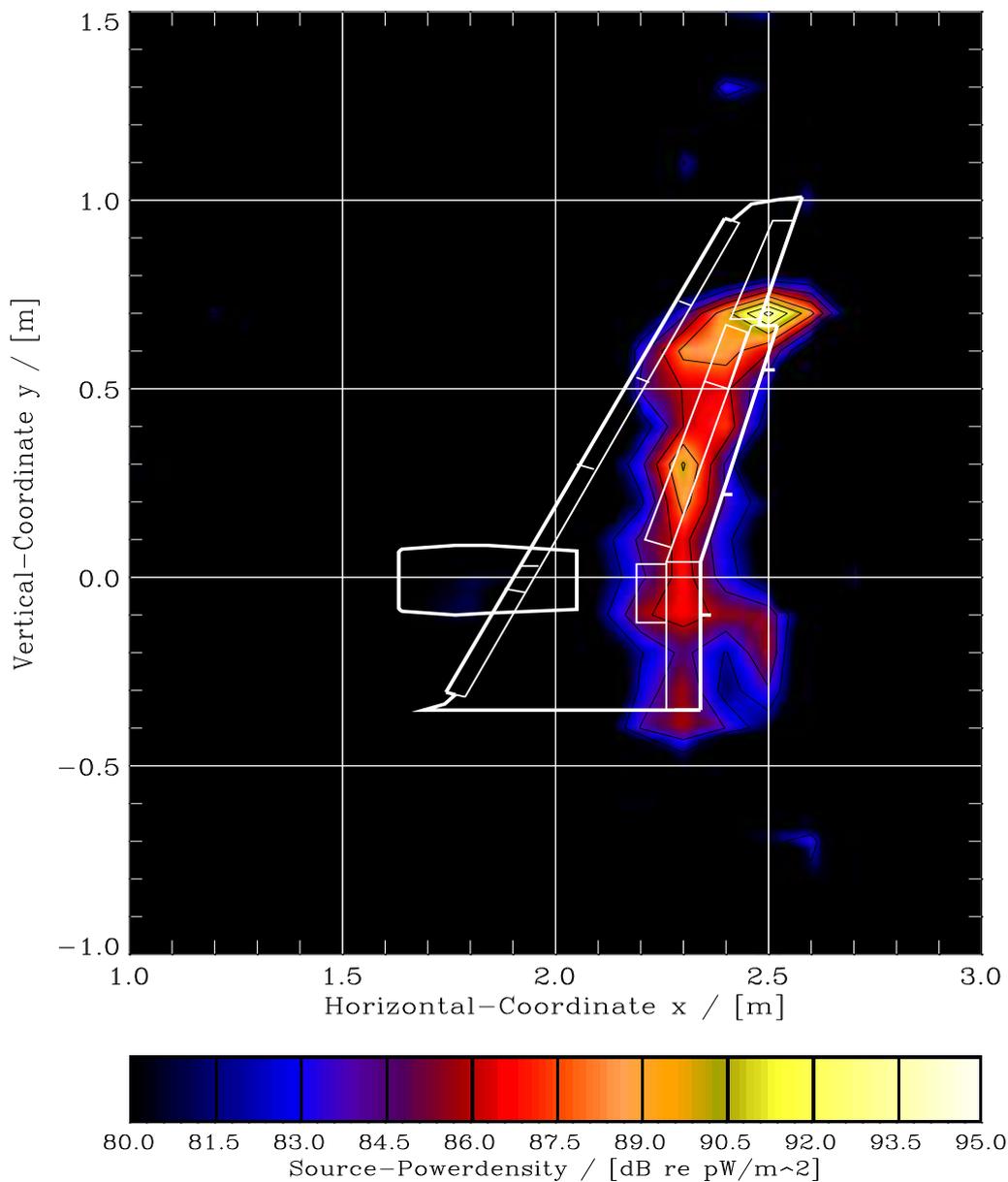
Measurement-File: std.V19-6064.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 5981-6396 Hz

Parameter: $\alpha = 7.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 19

Coordinate of Focusplane : z = 0.10 m

Angel of Attack : $\alpha = 7.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center T2 : x/y/z = 2.0 m/0.0 m /2.4 m

Abbildung A.3: Array Messtechnik: Flap-Konfiguration, $Anstellwinkel = 7^\circ$, $u = 60m/s$,
 $Frequenz = 6000 - 6400Hz$

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

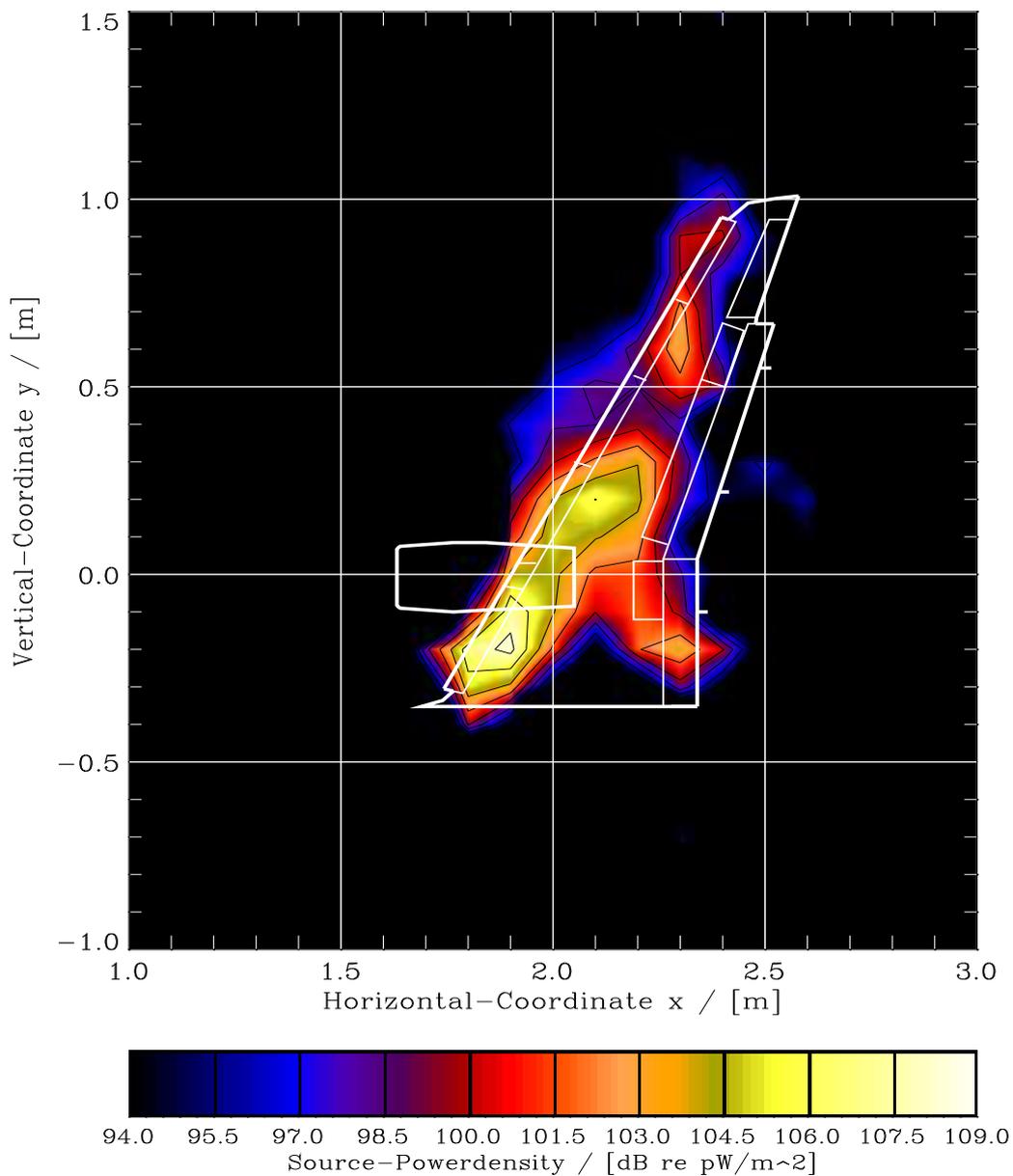
Measurement-File: std.V70-1822.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 1782-2197 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : z = 0.10 m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center T2 : x/y/z = 2.0 m/0.0 m /2.4 m

Abbildung A.4: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60m/s$,
 Frequenz = 1800 - 2200Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

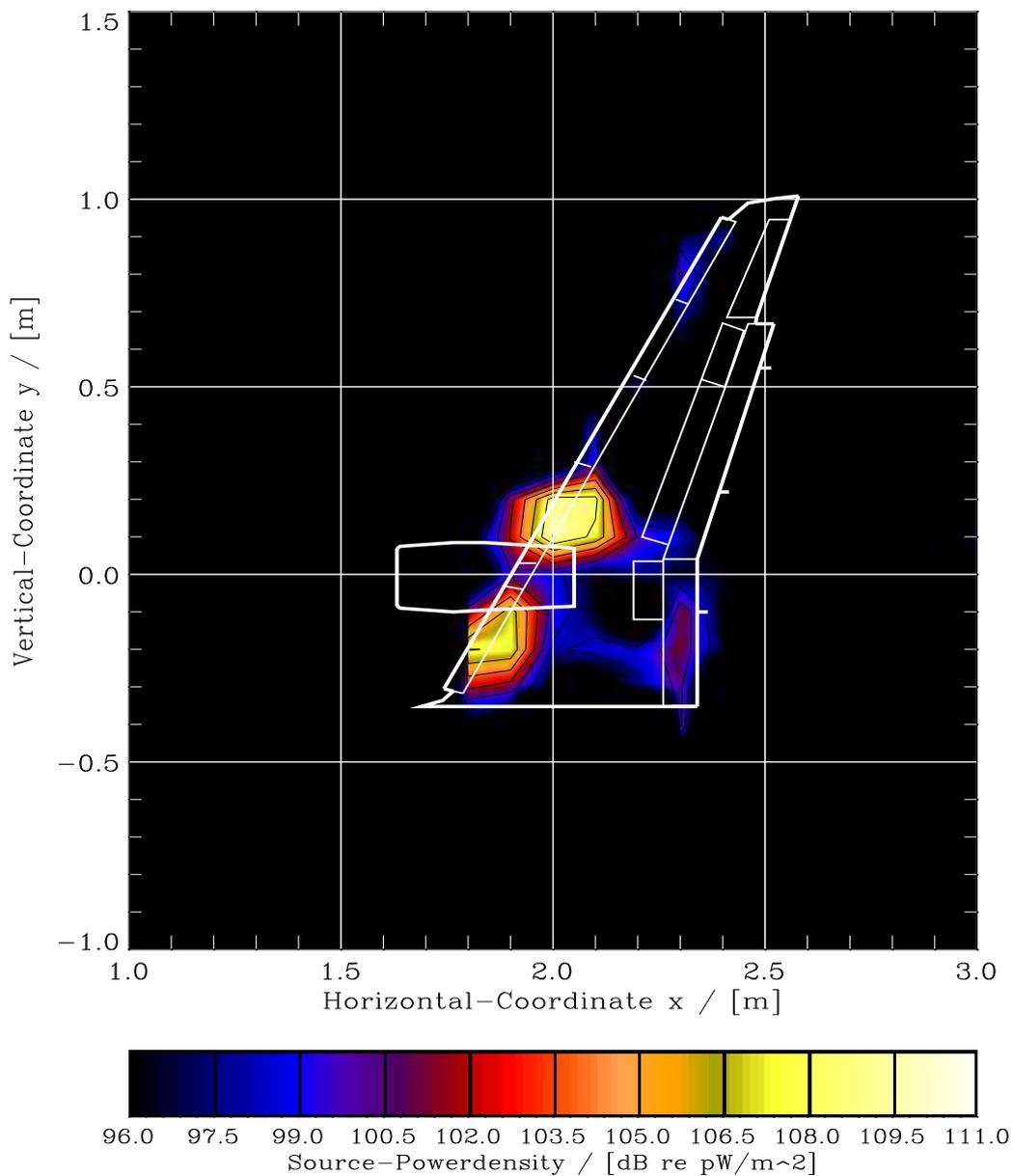
Measurement-File: std.V70-2832.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 2783-3198 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : z = 0.10 m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center T2 : x/y/z = 2.0 m/0.0 m /2.4 m

Abbildung A.5: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60m/s$,
 $Frequenz = 2800 - 3200Hz$

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

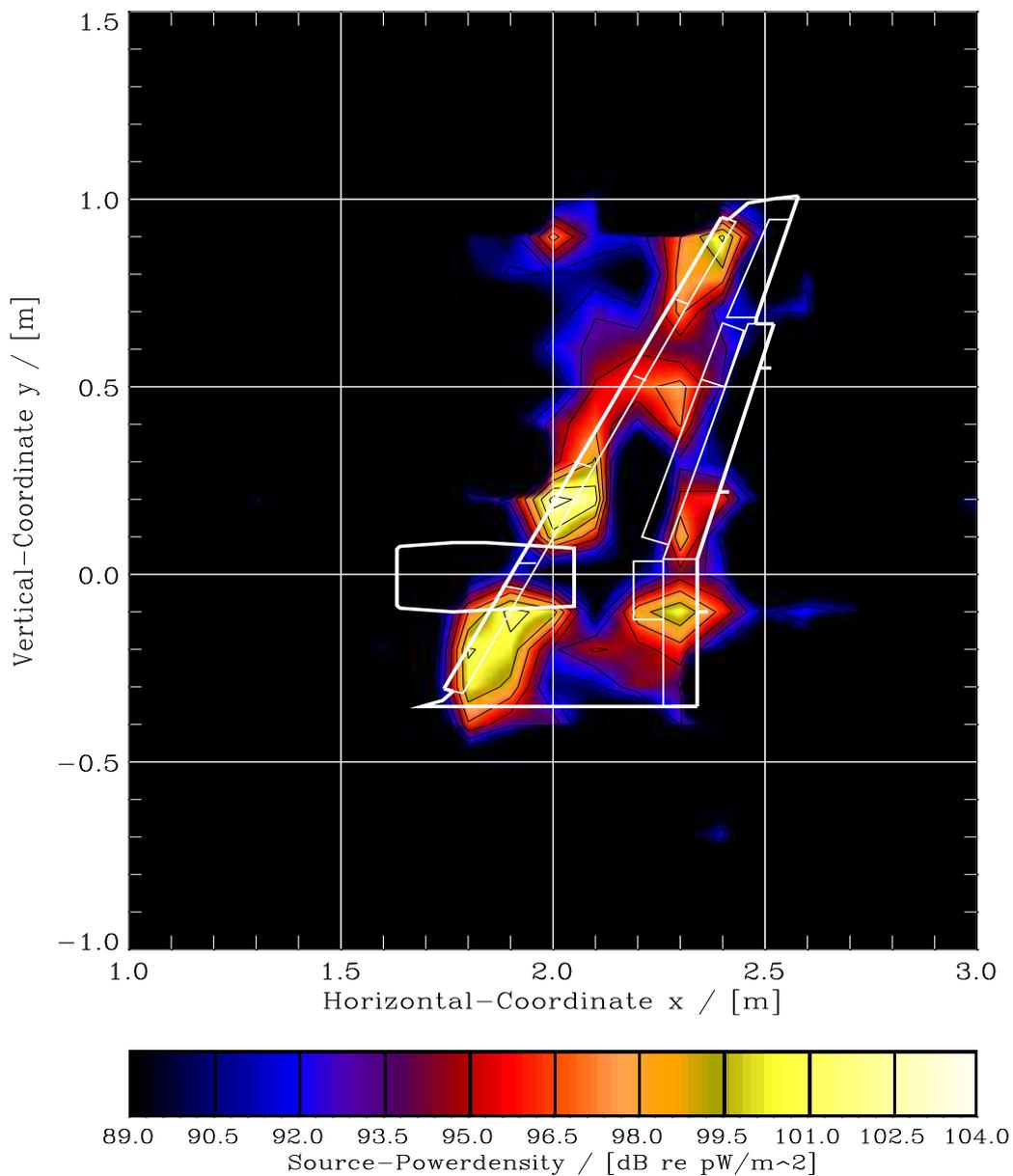
Measurement-File: std.V70-3842.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 3784-4199 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : z = 0.10 m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center T2 : x/y/z = 2.0 m/0.0 m /2.4 m

Abbildung A.6: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60m/s$, $Frequenz = 3800 - 4200Hz$

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

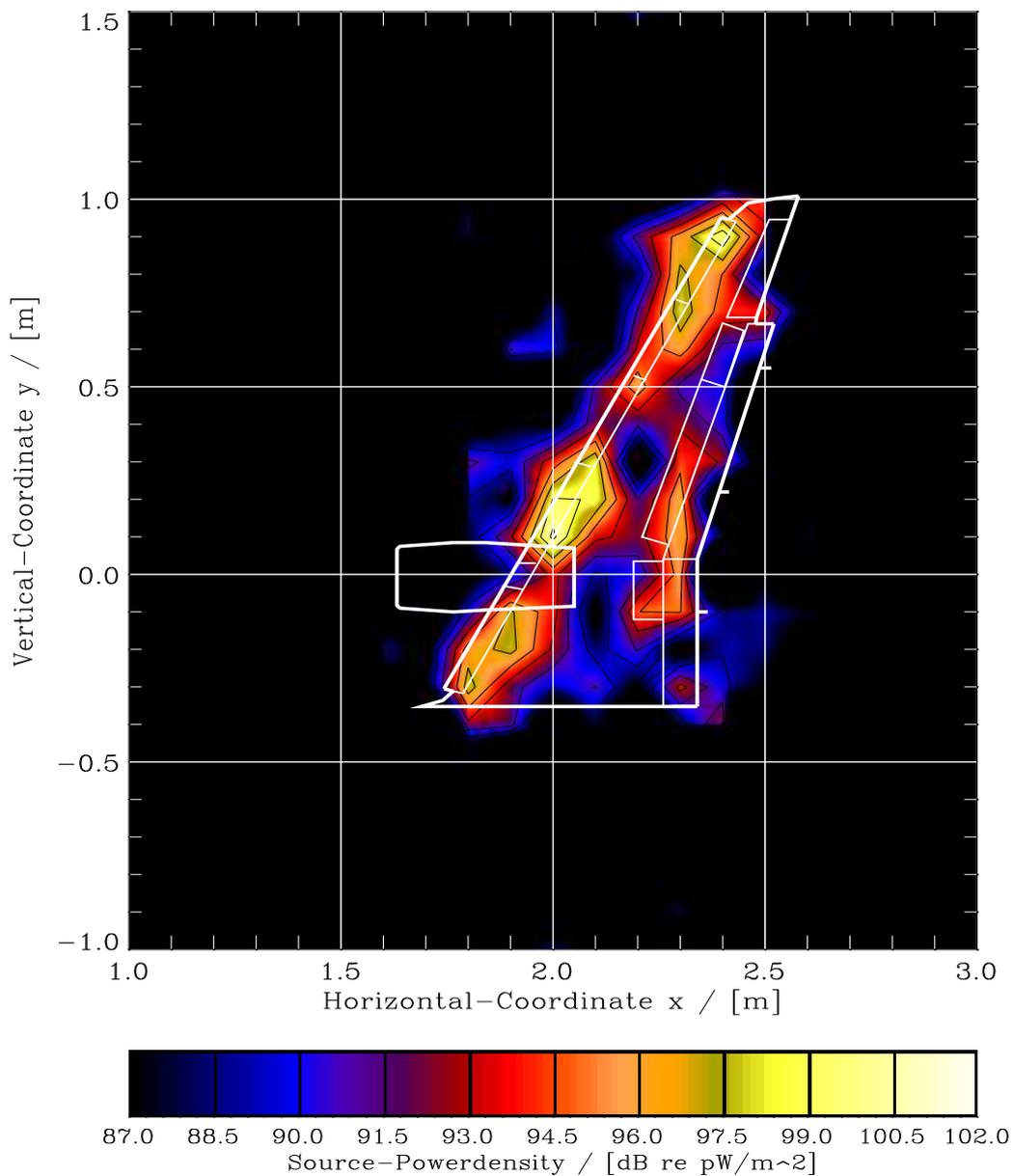
Measurement-File: std.V70-4852.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 4785-5175 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : $z = 0.10$ m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center T2 : $x/y/z = 2.0$ m/ 0.0 m/ 2.4 m

Abbildung A.7: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60$ m/s, $Frequenz = 4800 - 5200$ Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

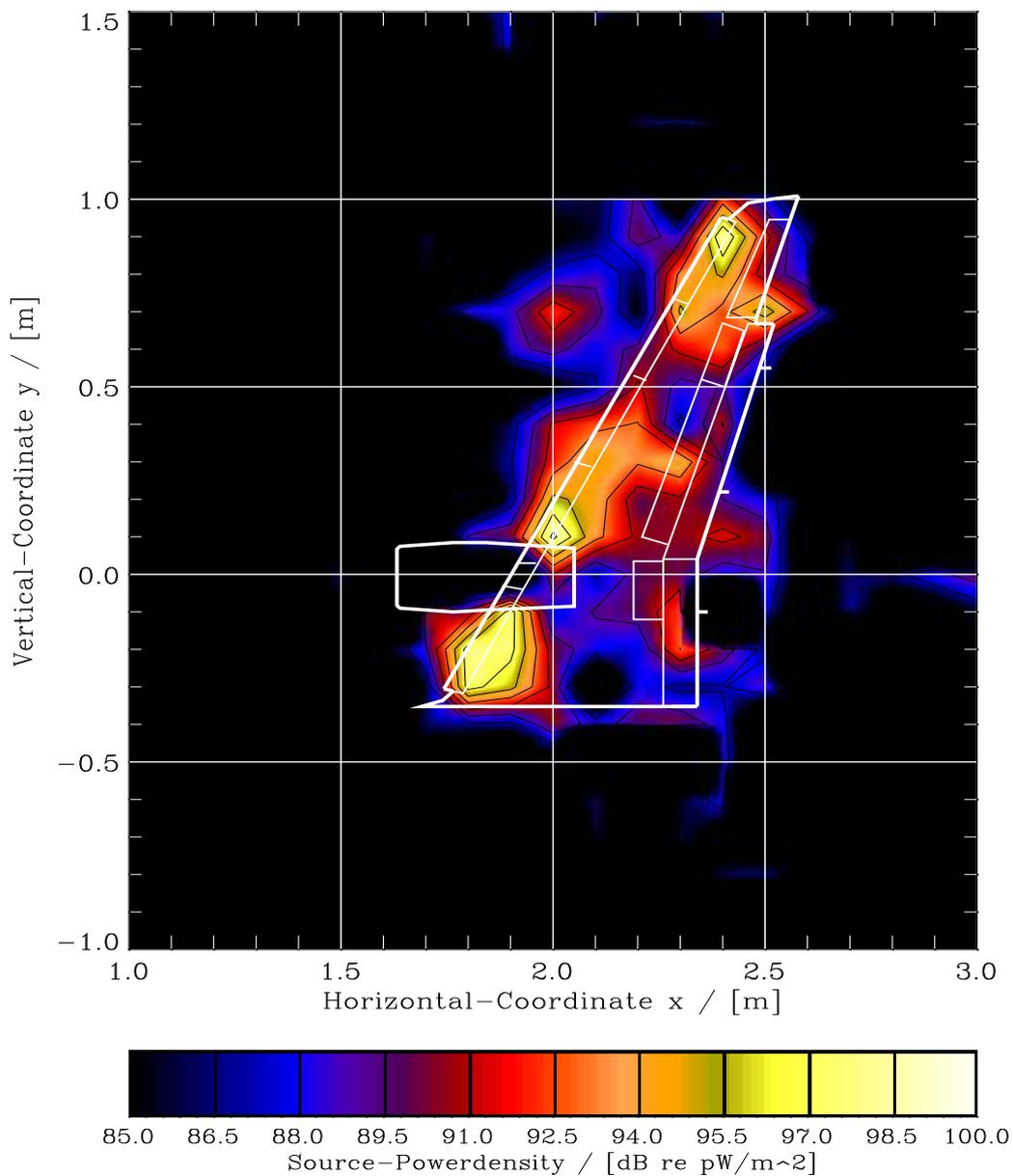
Measurement-File: std.V70-5862.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 5786-6176 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : z = 0.10 m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center T2 : x/y/z = 2.0 m/0.0 m /2.4 m

Abbildung A.8: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60m/s$, $Frequenz = 5800 - 6200Hz$

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

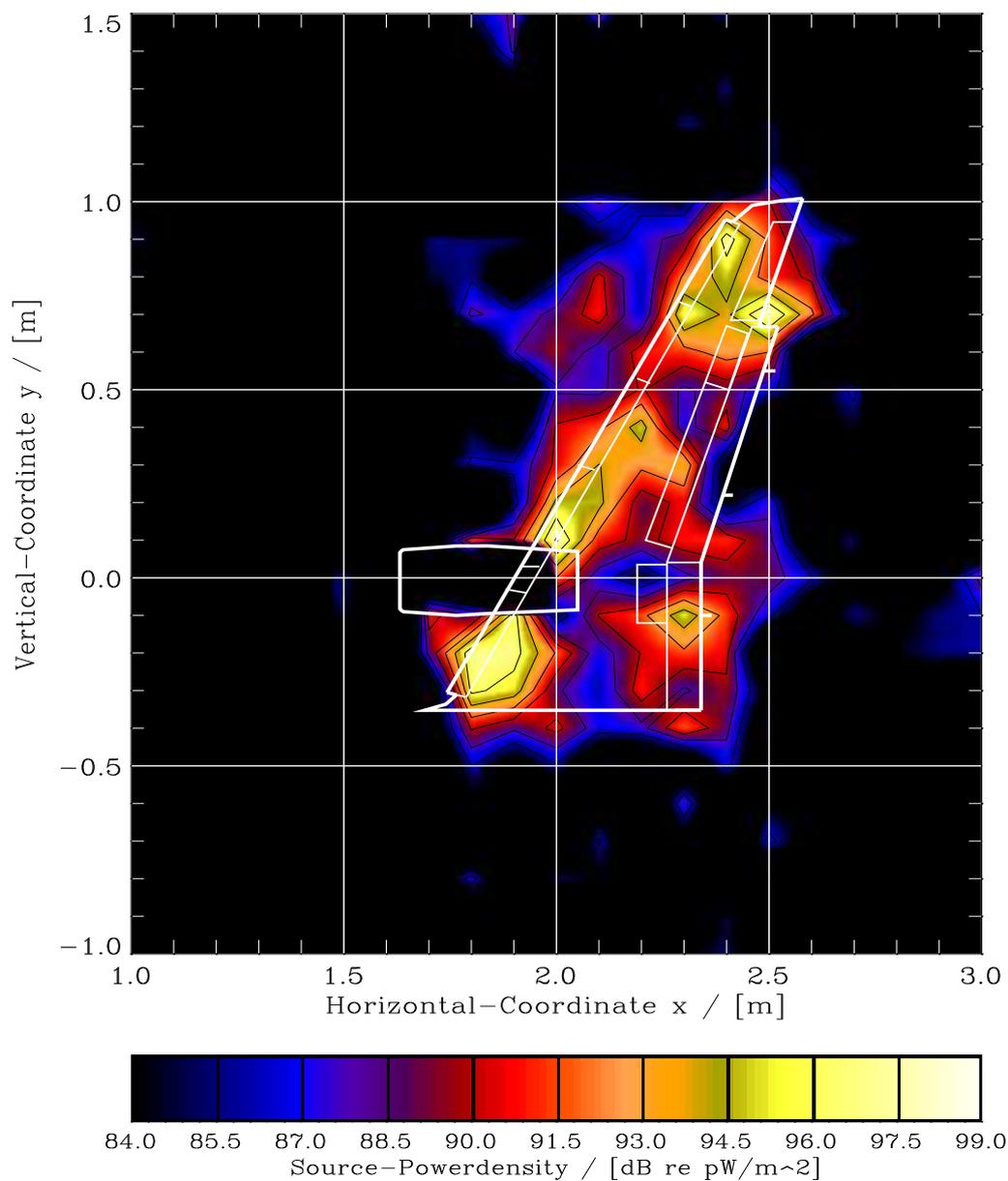
Measurement-File: std.V70-6064.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 5981-6396 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : $z = 0.10$ m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center T2 : $x/y/z = 2.0$ m/ 0.0 m/ 2.4 m

Abbildung A.9: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60$ m/s, $Frequenz = 6000 - 6400$ Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

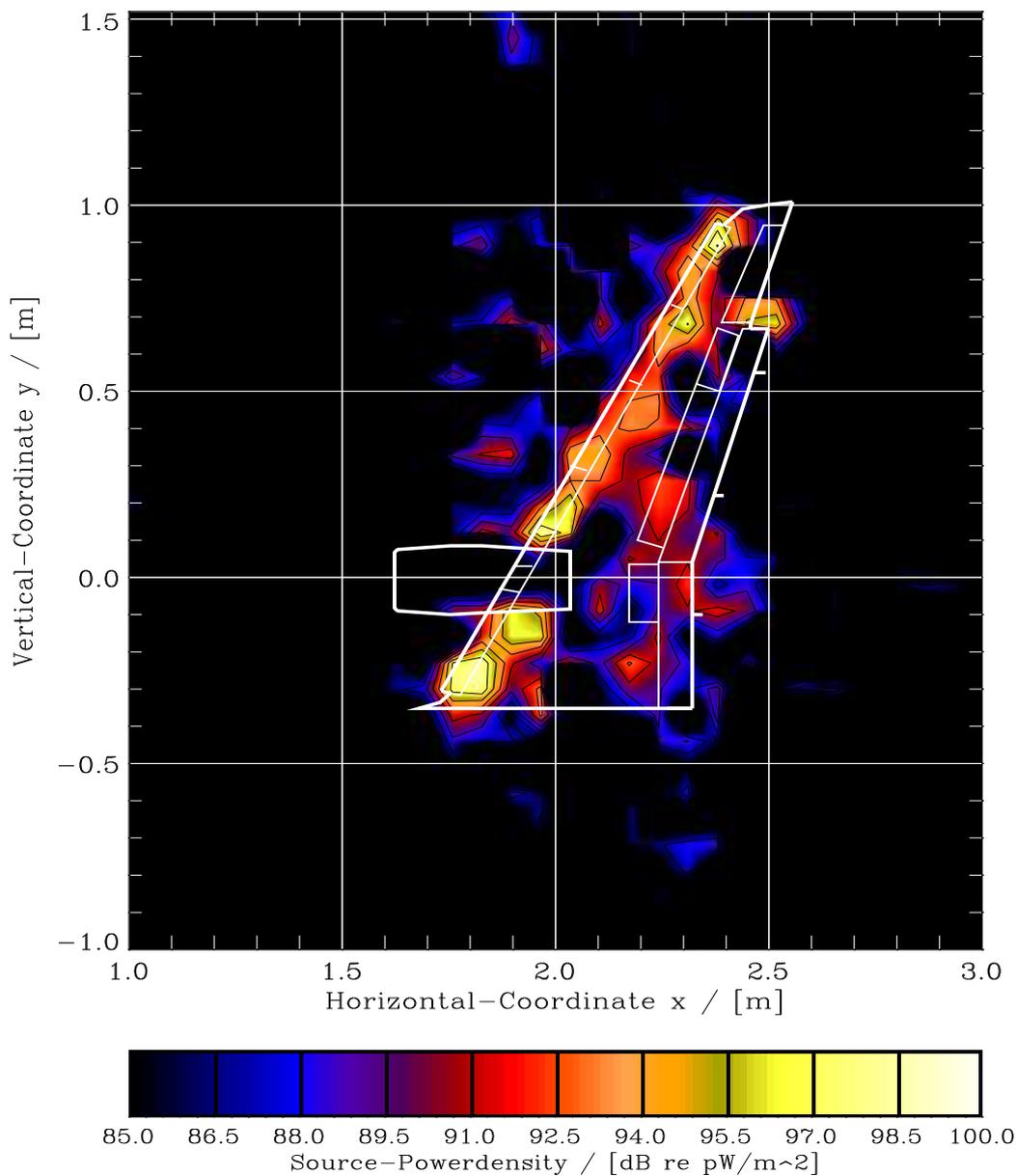
Measurement-File: std.V70-6468.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 6396-6787 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s; Array-Center=T2

DAIMLERCHRYSLER-AEROACOUSTICS



File-Number: 70

Coordinate of Focusplane : z = 0.10 m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center T2 : x/y/z = 2.0 m/0.0 m /2.4 m

Abbildung A.10: Array Messtechnik: Landekonfiguration, $Anstellwinkel = 9^\circ$, $u = 60m/s$,
 $Frequenz = 6400 - 6800Hz$

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

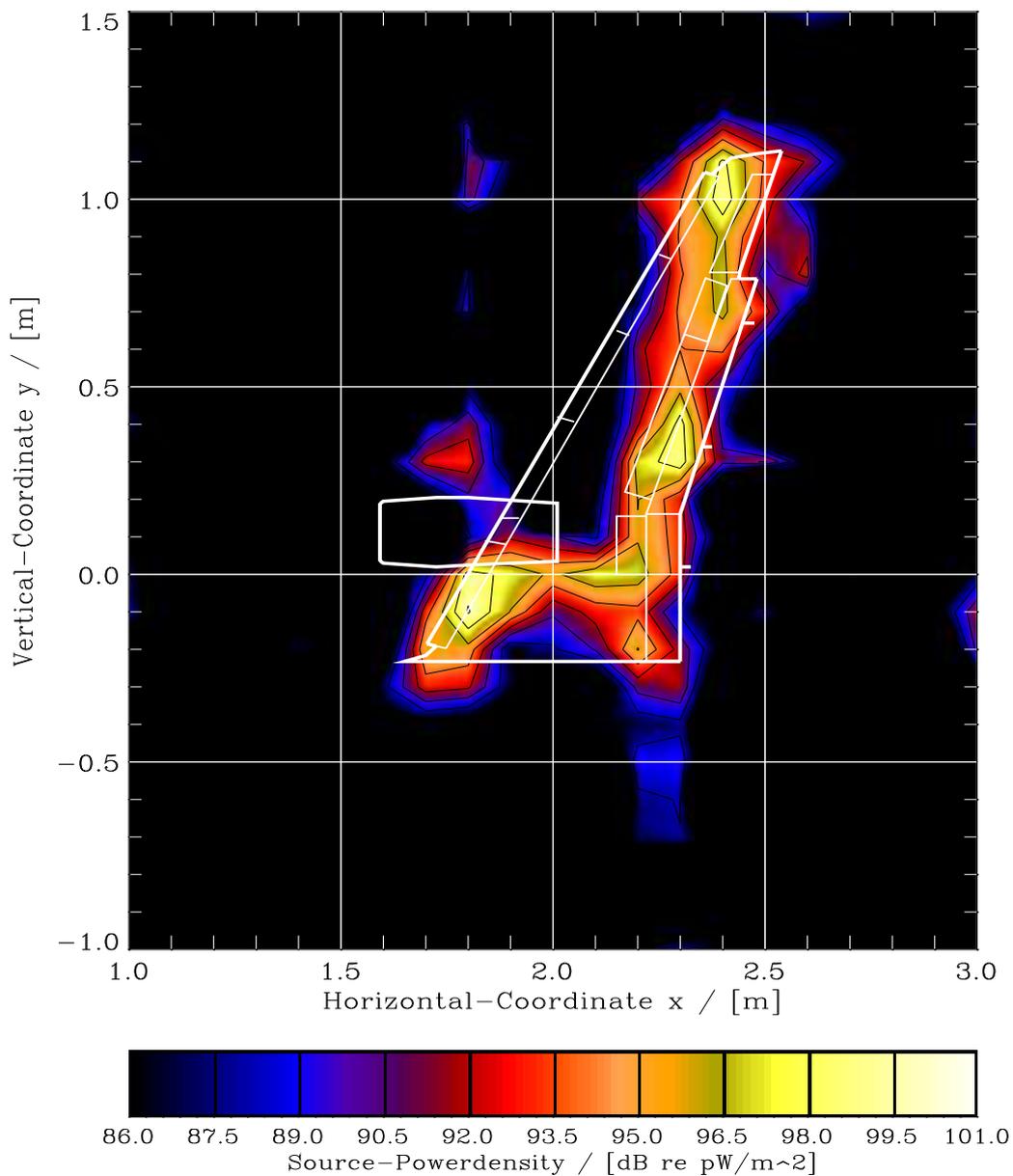
Measurement-File: std.V52-1822.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 1783-2191 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : $z = 0.20$ m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center: $x/y/z = 2.0$ m / 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.11: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 9° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 1800 - 2200 Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

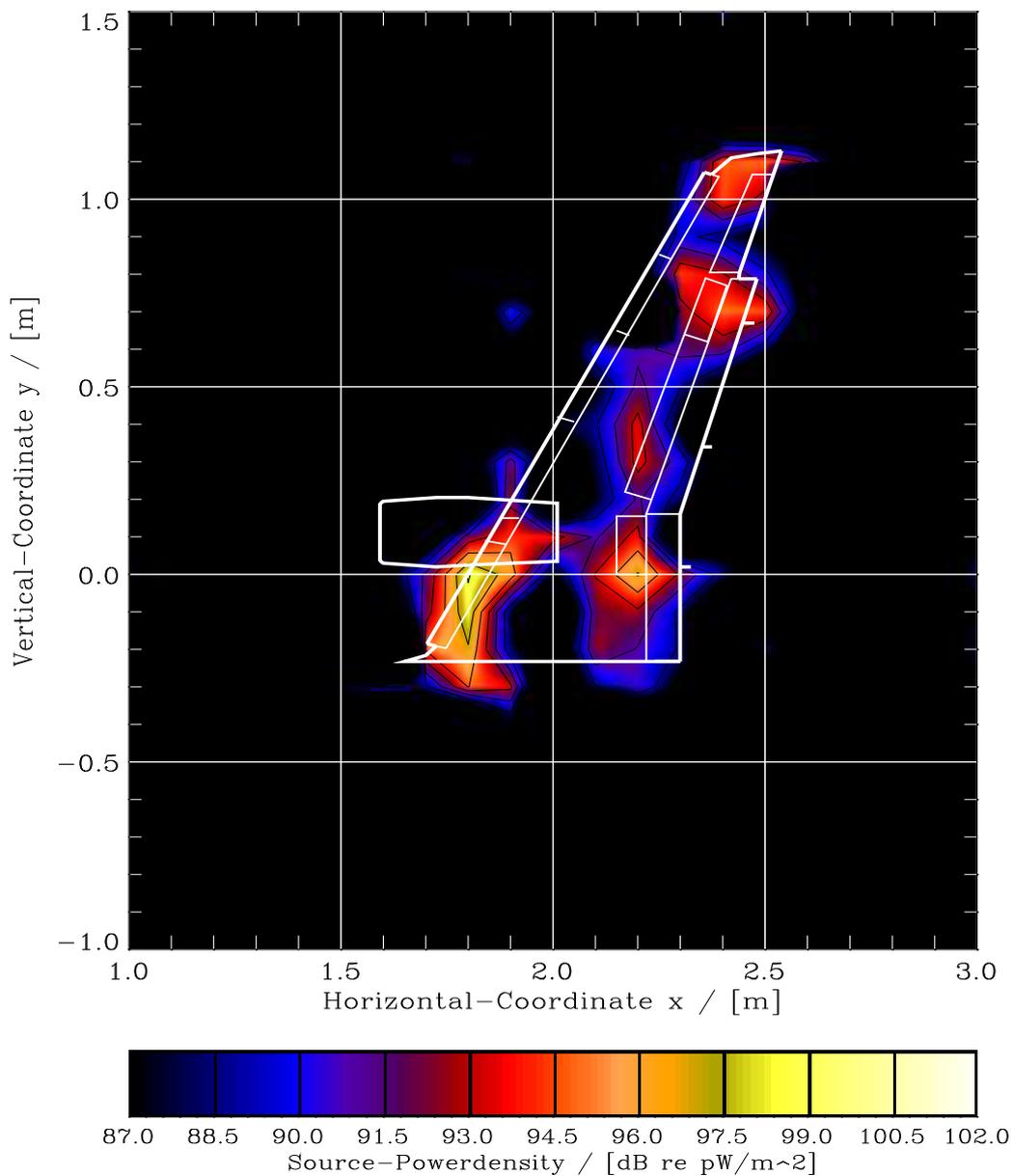
Measurement-File: std.V52-2832.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 2792-3179 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : $z = 0.20$ m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center: $x/y/z = 2.0$ m / 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.12: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 9° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 2800 - 3200 Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

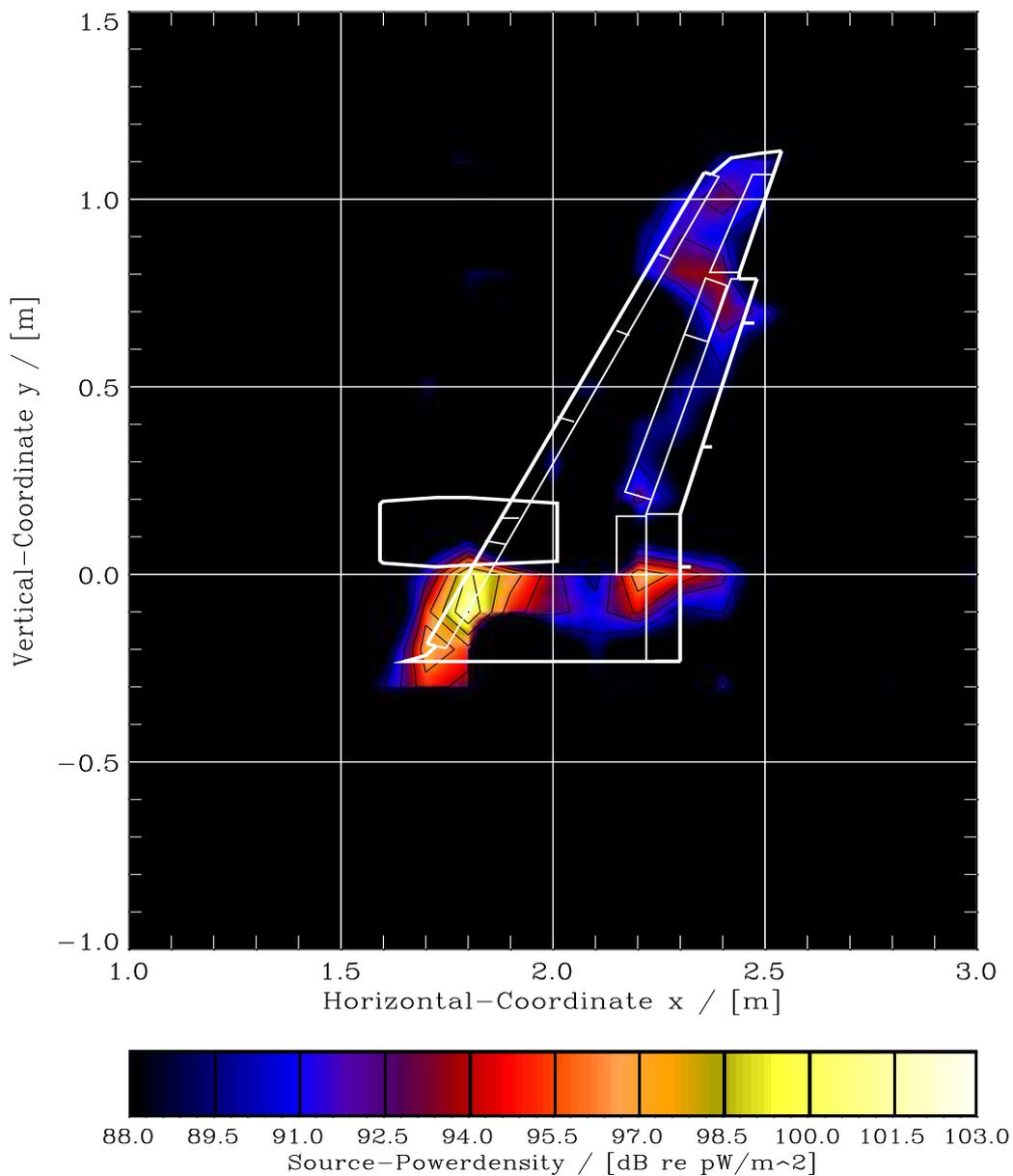
Measurement-File: std.V52-3842.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 3781-4189 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : z = 0.20 m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : u = 60 m/s

Coordinate of Array-Center: x/y/z = 2.0 m /0.0 m /2.4 m

Abbildung A.13: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 9° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 3800 - 4200 Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

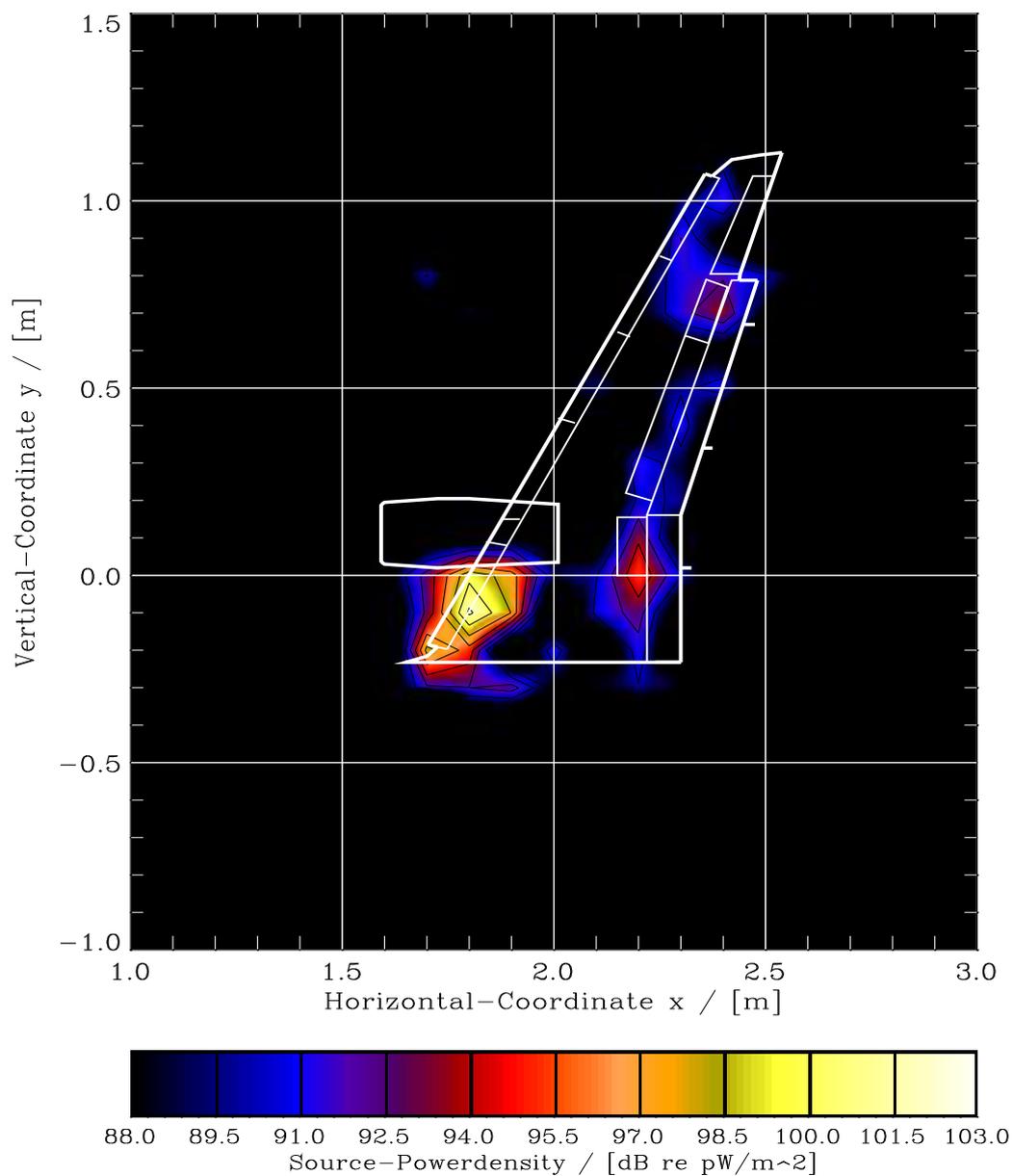
Measurement-File: std.V52-4852.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 4791-5199 Hz

Parameter: $\alpha = 9.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : $z = 0.20$ m

Angel of Attack : $\alpha = 9.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center: $x/y/z = 2.0$ m / 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.14: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 9° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 4800 - 5200 Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

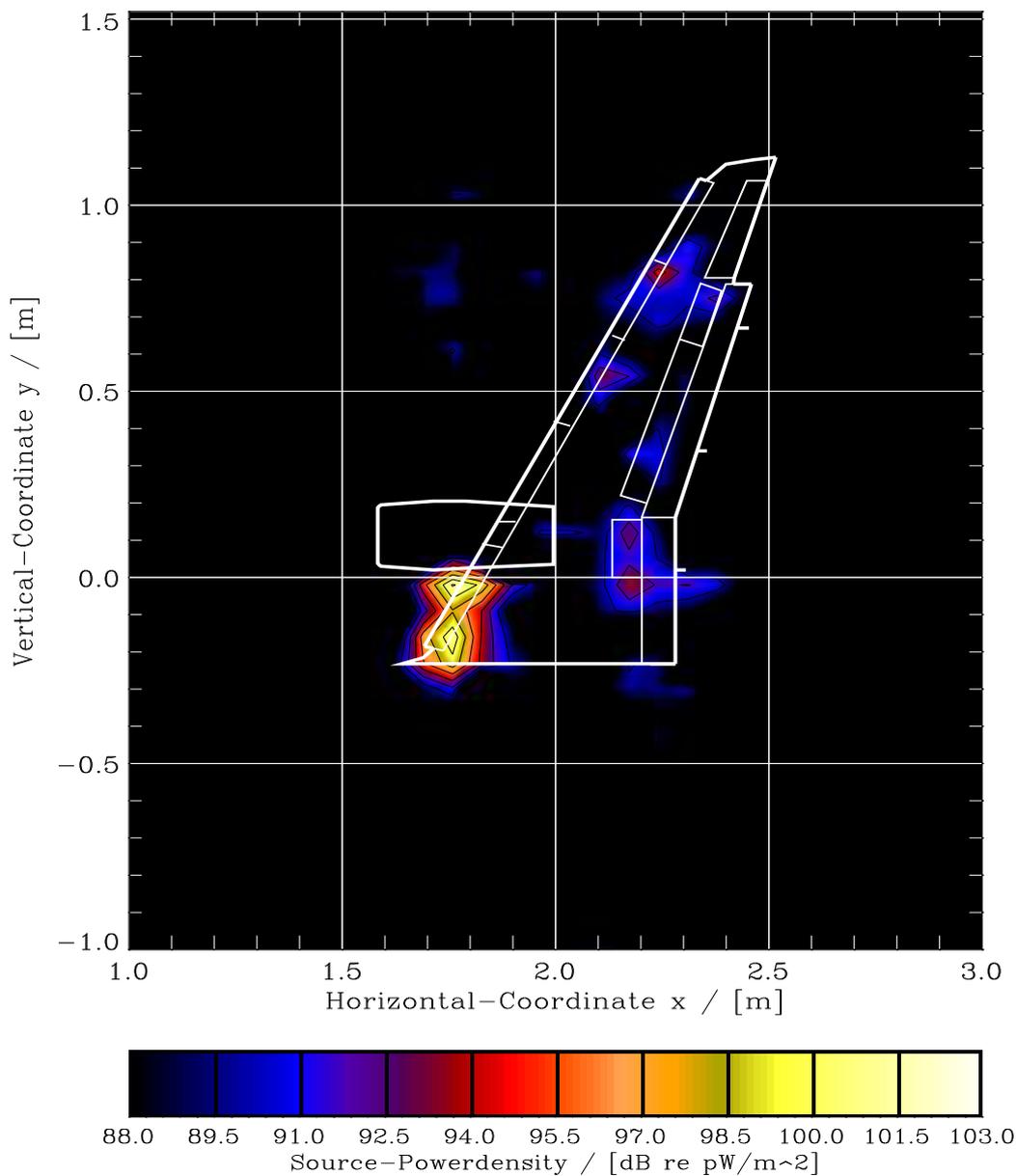
Measurement-File: std.V51-5862.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 5779-6187 Hz

Parameter: $\alpha = 5.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : $z = 0.20$ m
 Angel of Attack : $\alpha = 5.0^\circ$
 Velocity : $u = 60$ m/s
 Coordinate of Array-Center: $x/y/z = 2.0$ m / 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.15: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 5° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 5800 - 6200 Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

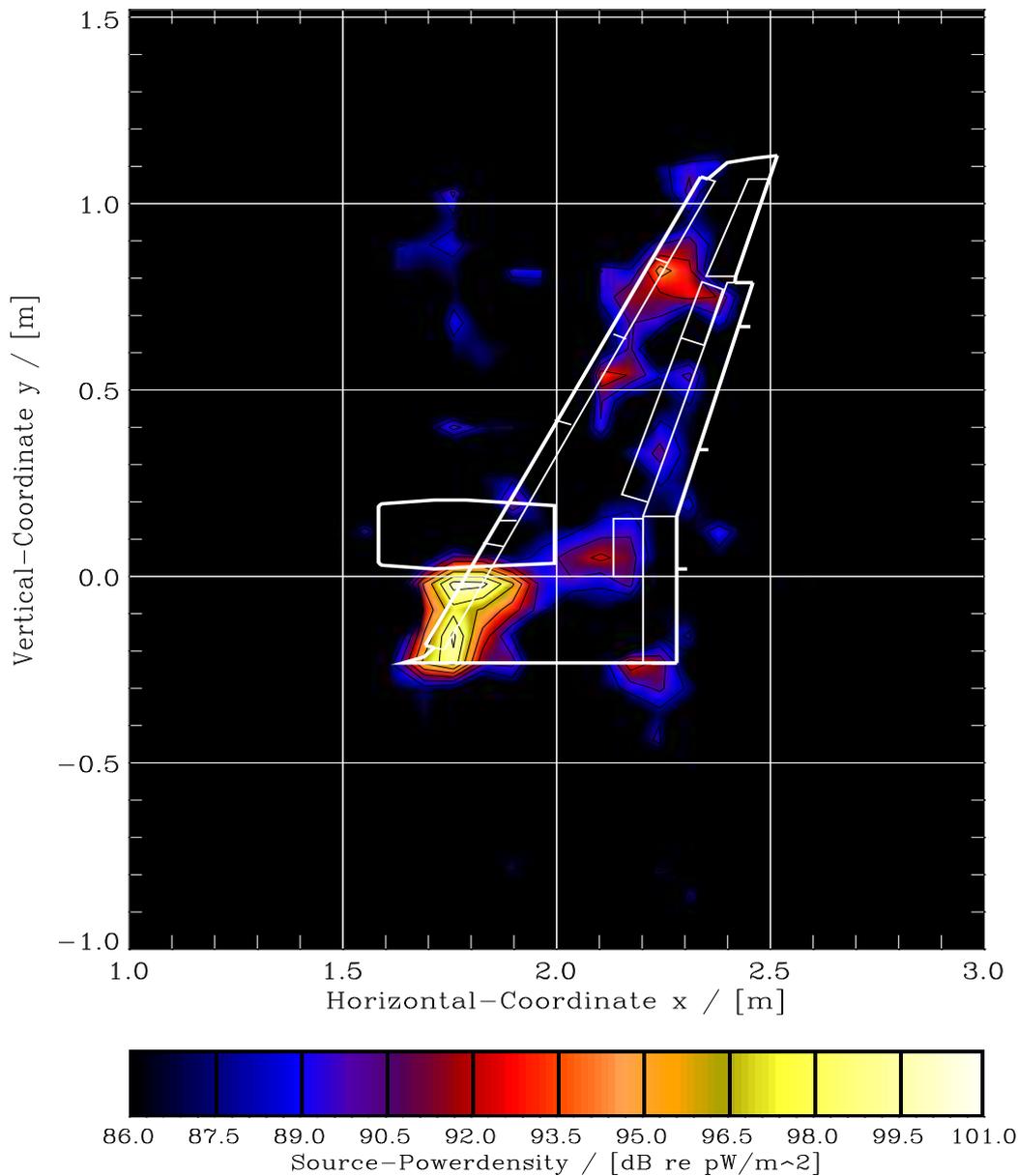
Measurement-File: std.V51-6064.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 5994-6380 Hz

Parameter: $\alpha = 5.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : $z = 0.20$ m

Angel of Attack : $\alpha = 5.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center: $x/y/z = 2.0$ m / 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.16: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 5° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 6000 - 6400 Hz

AIRBUS A320, Landing

Source-Model

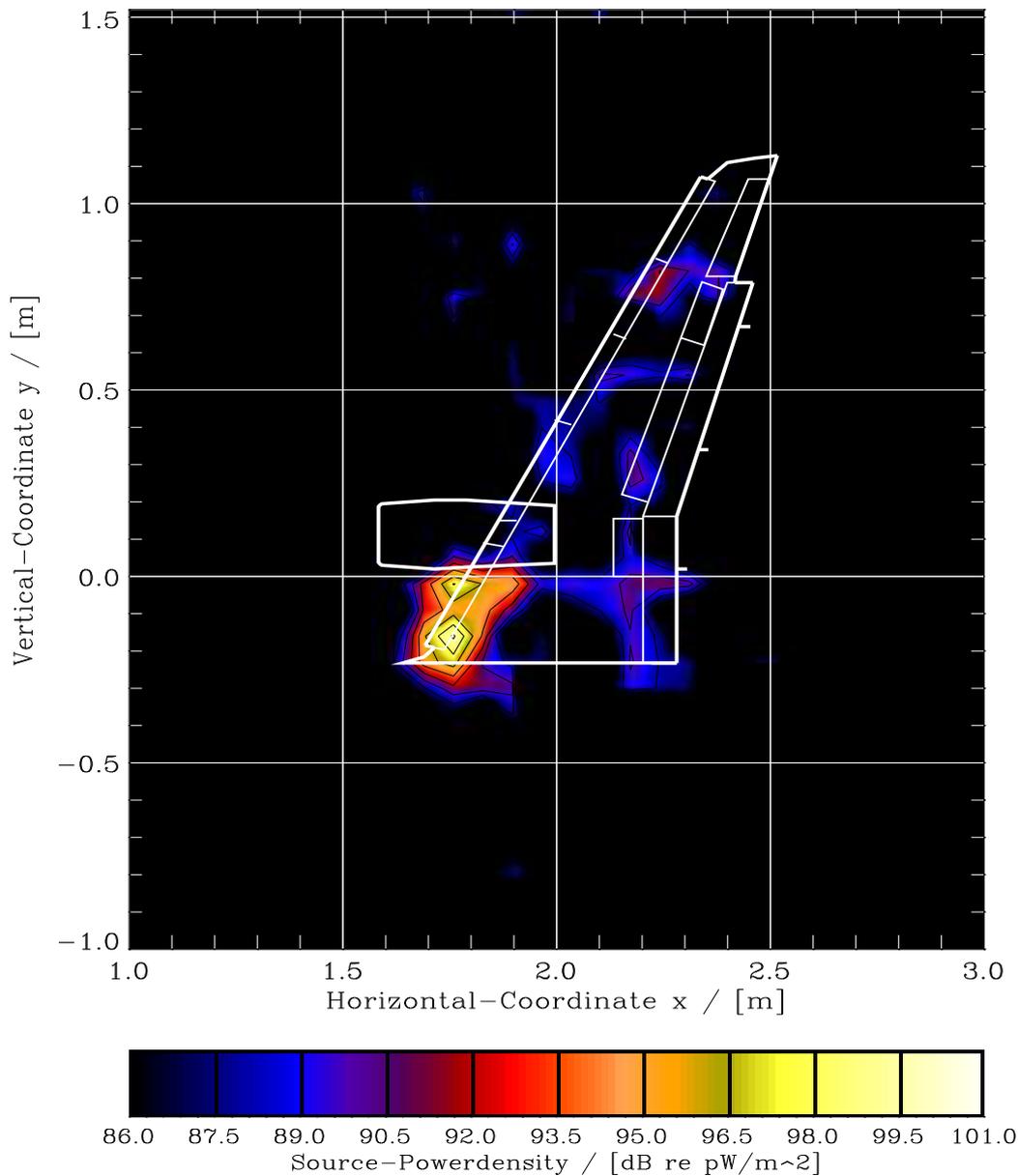
Measurement-File: std.V51-6468.dat

Array-Type: 40 Microphones-Additive

Frequency Range: 6380-6789 Hz

Parameter: $\alpha = 5.0^\circ$; $u = 60$ m/s

EADS R&T Deutschland



Coordinate of Focusplane : $z = 0.20$ m

Angel of Attack : $\alpha = 5.0^\circ$

Velocity : $u = 60$ m/s

Coordinate of Array-Center: $x/y/z = 2.0$ m / 0.0 m / 2.4 m

Abbildung A.17: Array Messtechnik: Landekonfiguration am modifizierten Tragflügel, Anstellwinkel = 5° , $u = 60$ m/s, Frequenz = 6400 - 6800 Hz

Vergleich Wing bei Landing Configuration

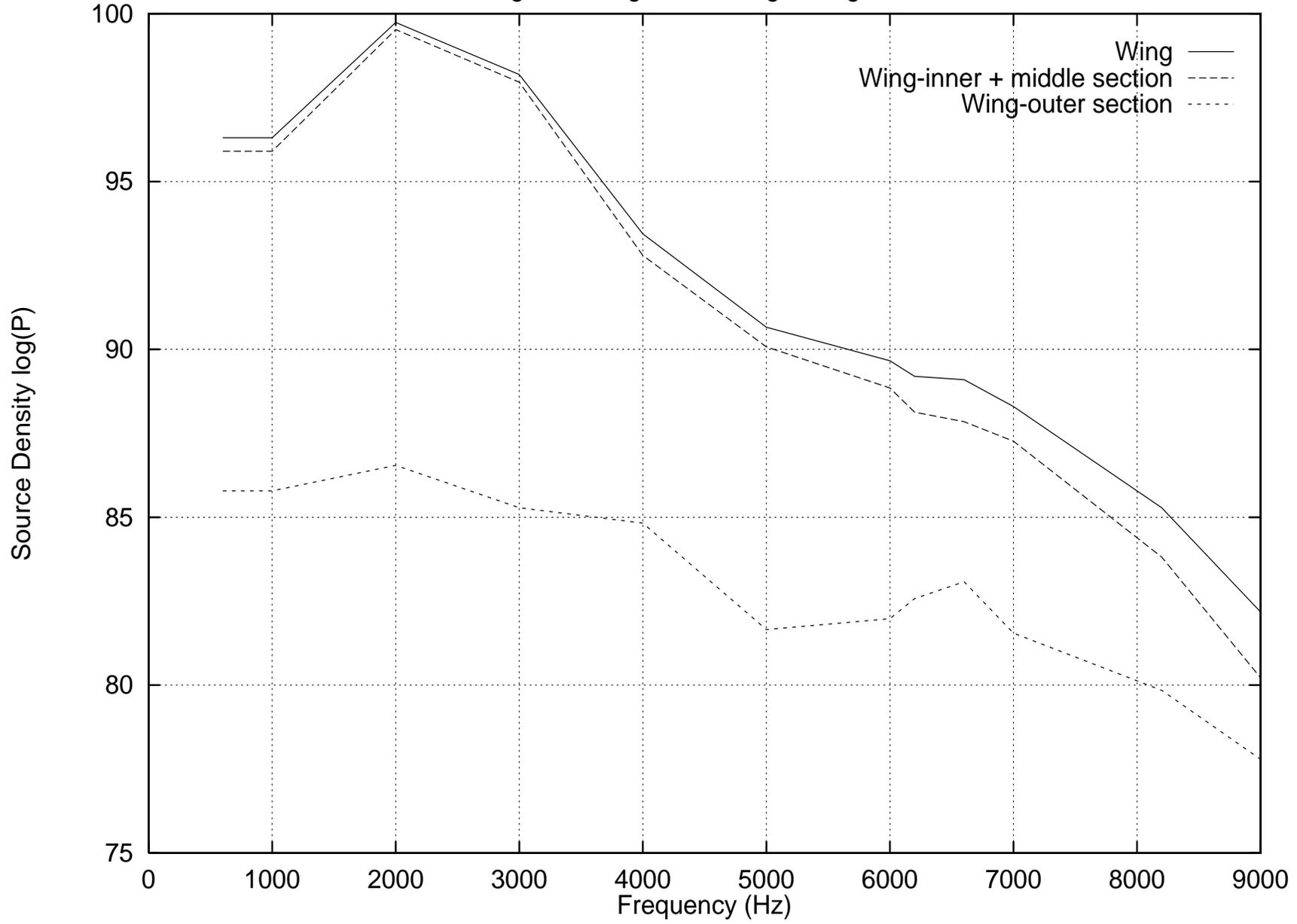


Abbildung A.18: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel bei der Landekonfiguration

Vergleich Wing (inner/middle section) bei Landing Configuration

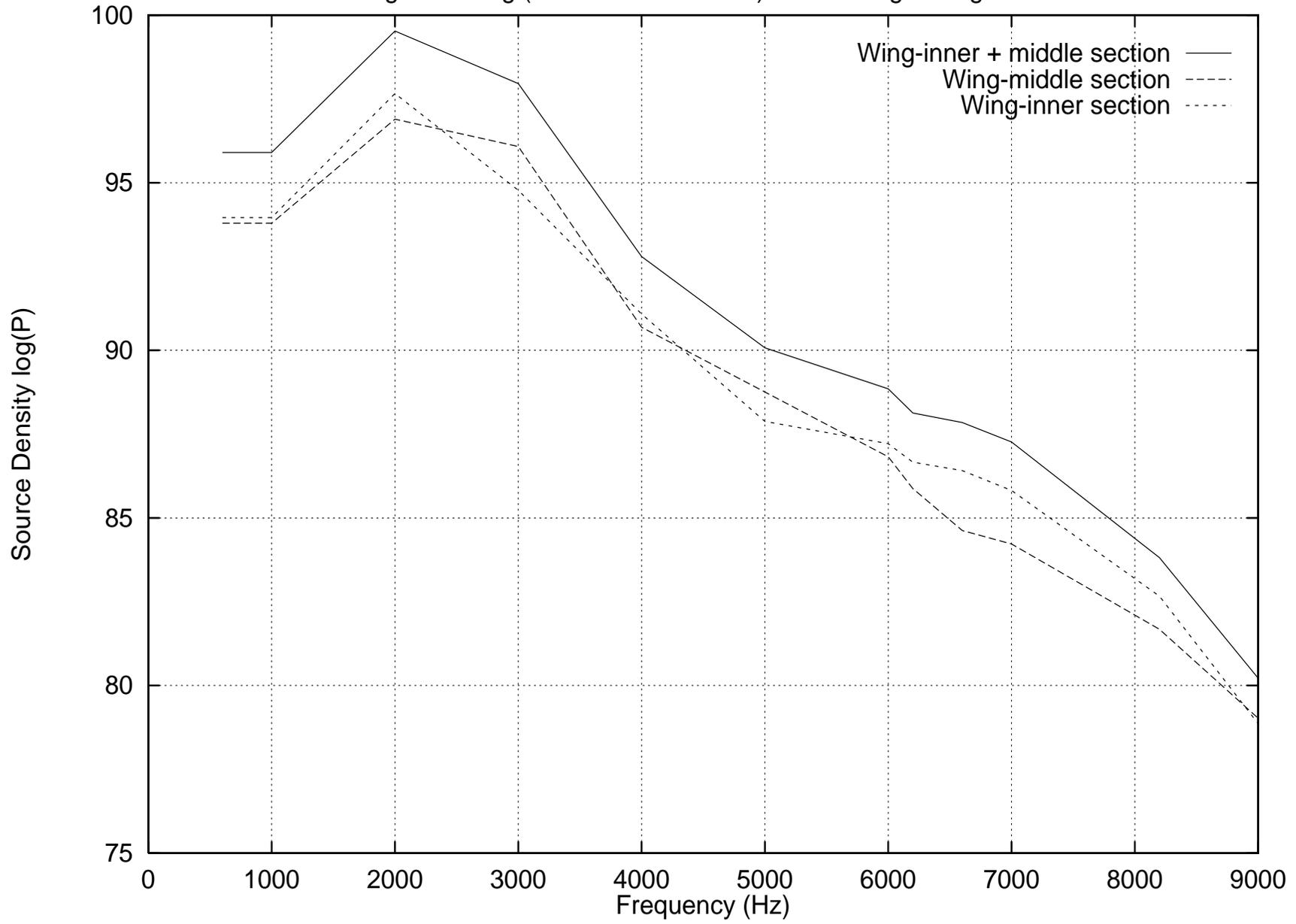


Abbildung A.19: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel innere und mittlere Sektion bei der Landekonfiguration

Vergleich Slat bei Landing Configuration

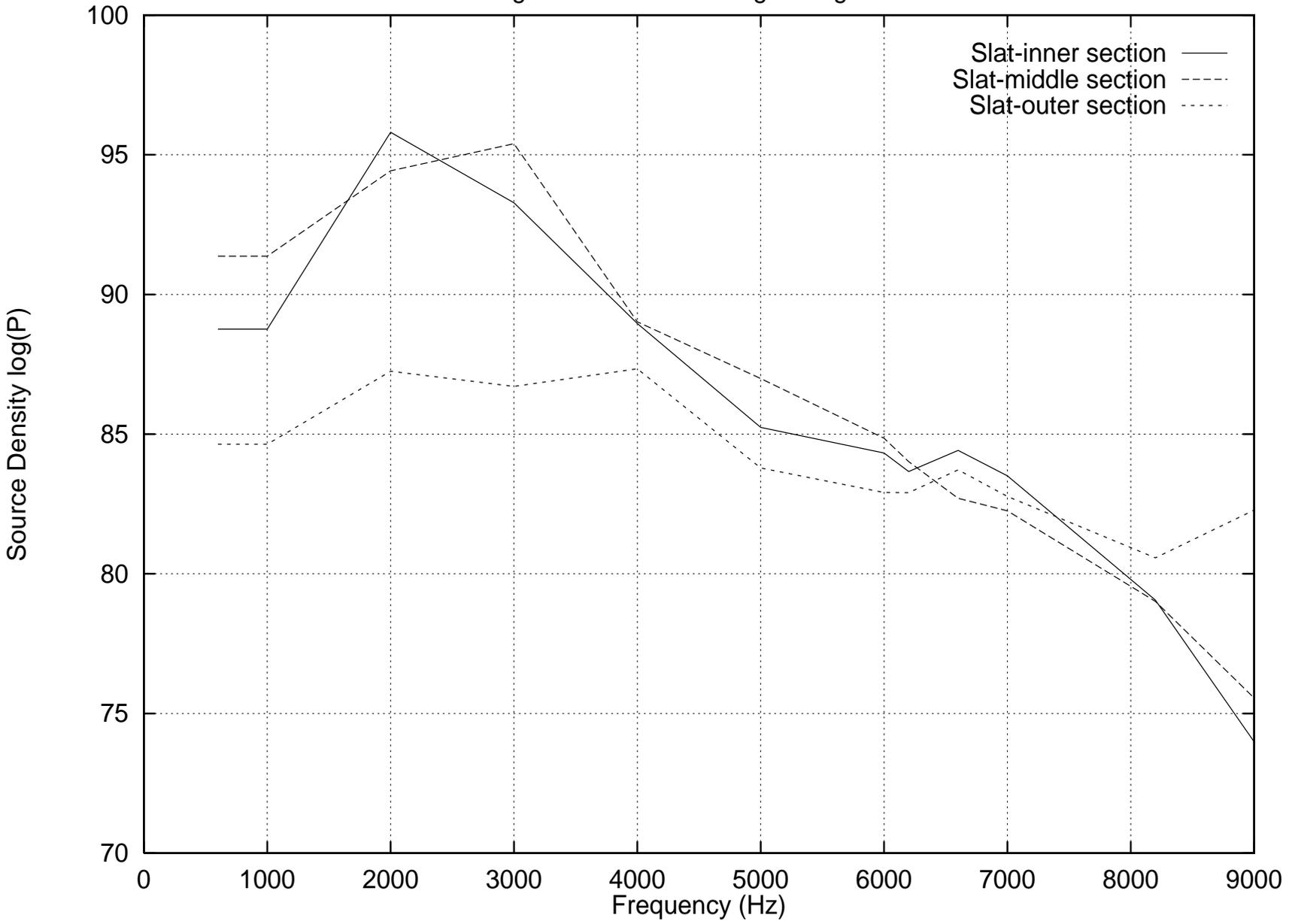


Abbildung A.20: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Vorflügel bei der Landekonfiguration

Vergleich Flap bei Landing Configuration

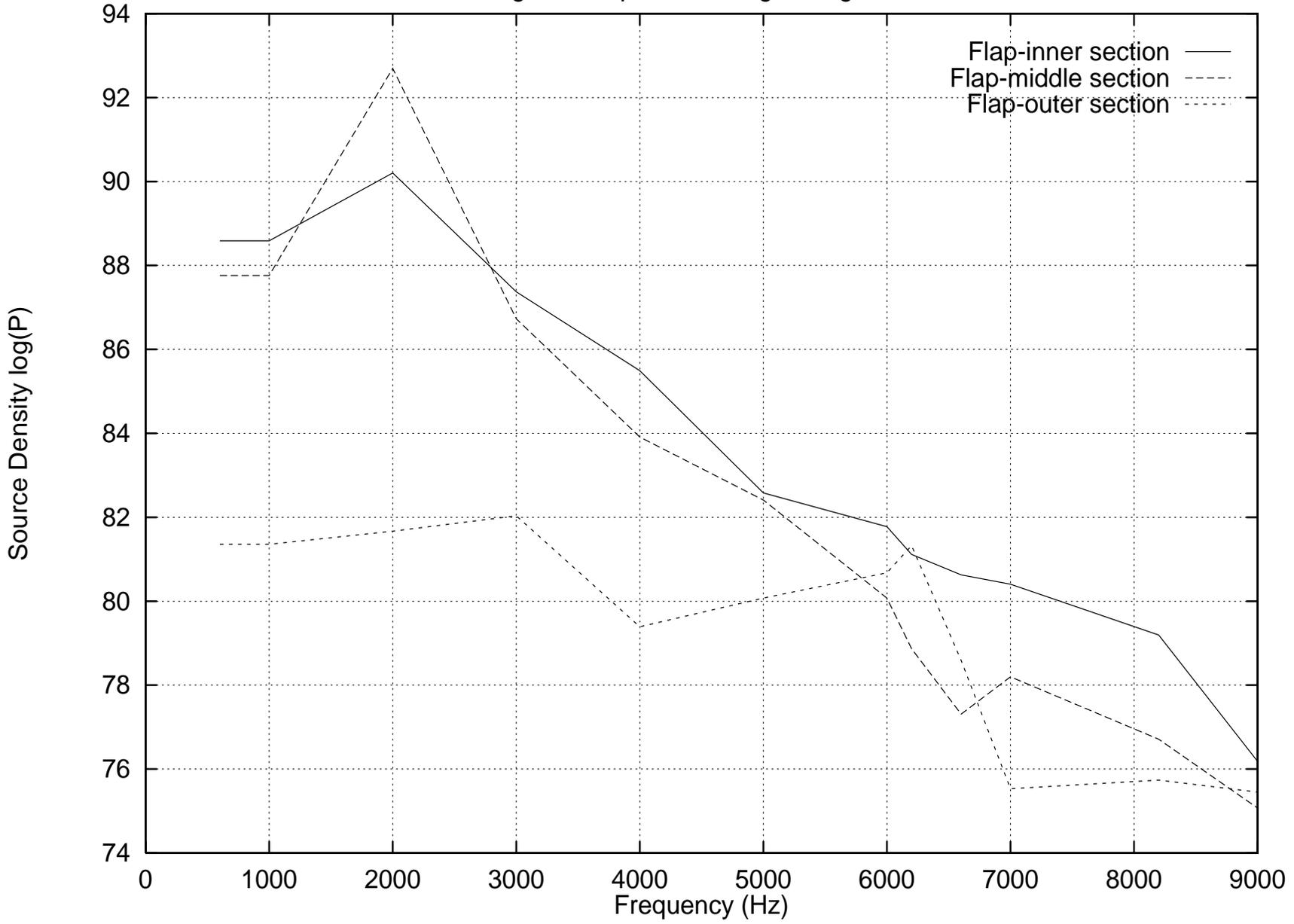


Abbildung A.21: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Hinterkantenklappe bei der Landekonfiguration

Vergleich Slat-Flap (inner + middle section) bei Landing Configuration

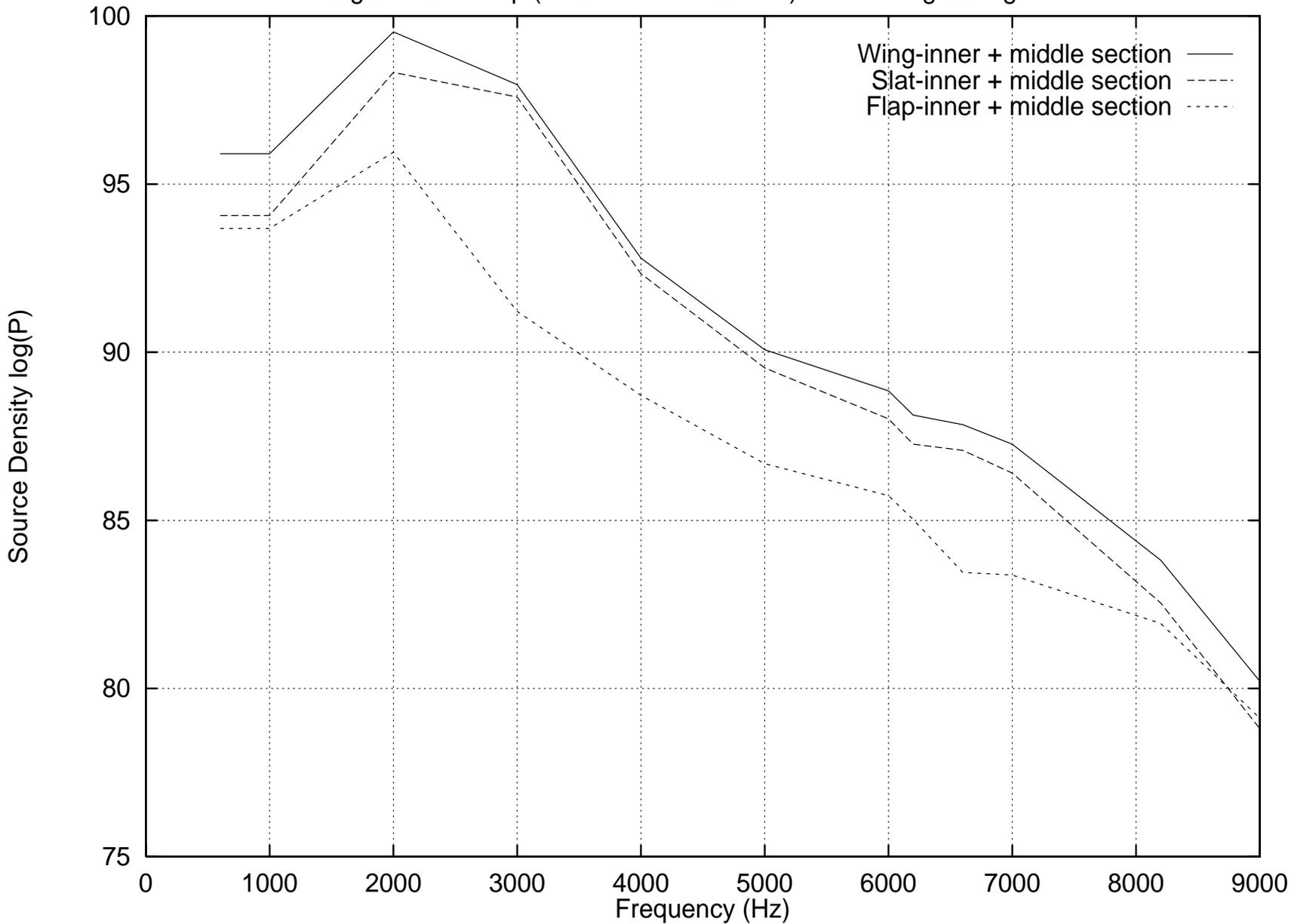


Abbildung A.22: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Vorflügel/Hinterkantenklappe bei der Landekonfiguration

Vergleich Wing bei Clean Wing

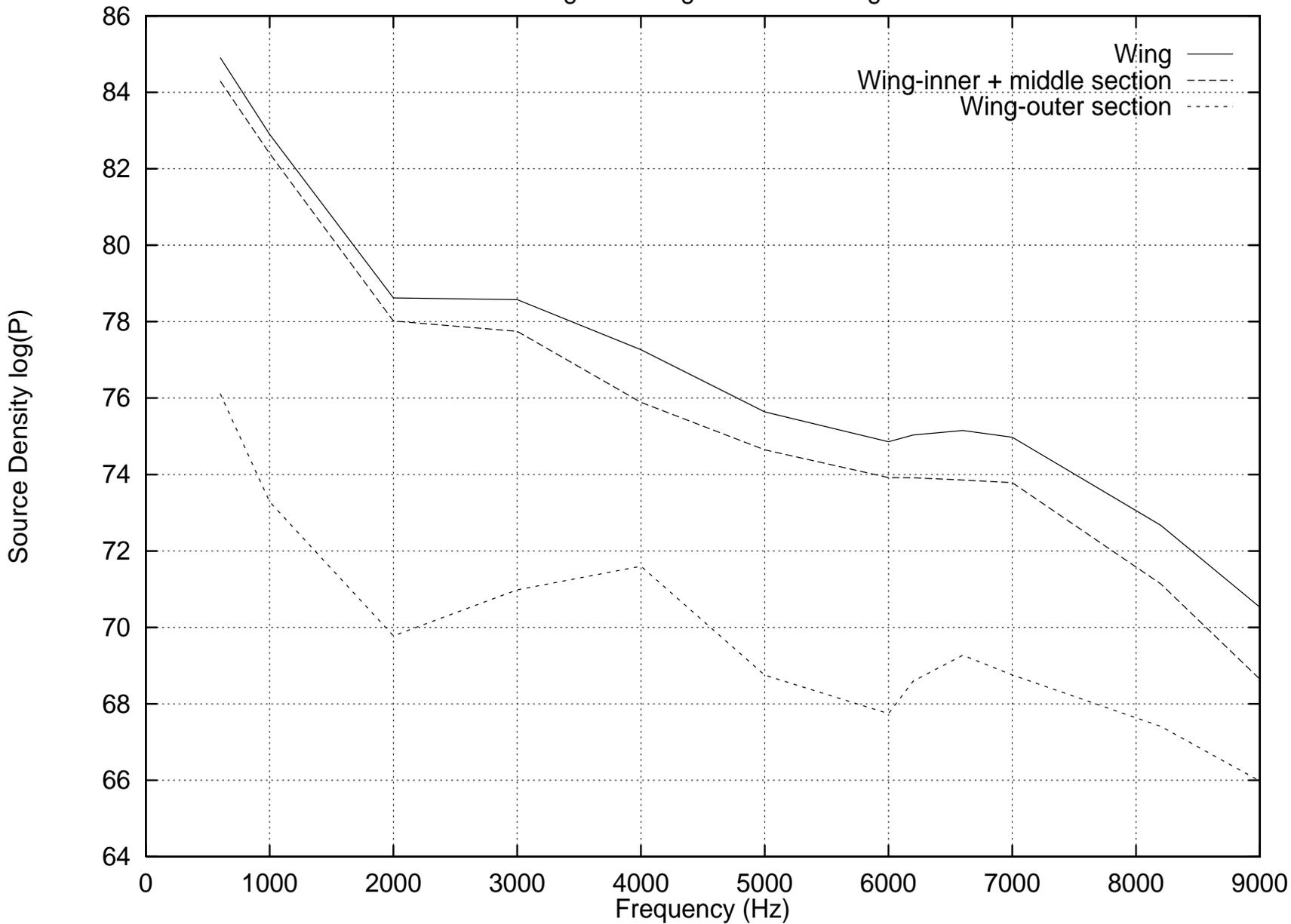


Abbildung A.23: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)

Vergleich Wing (inner/middle section) bei Clean Wing

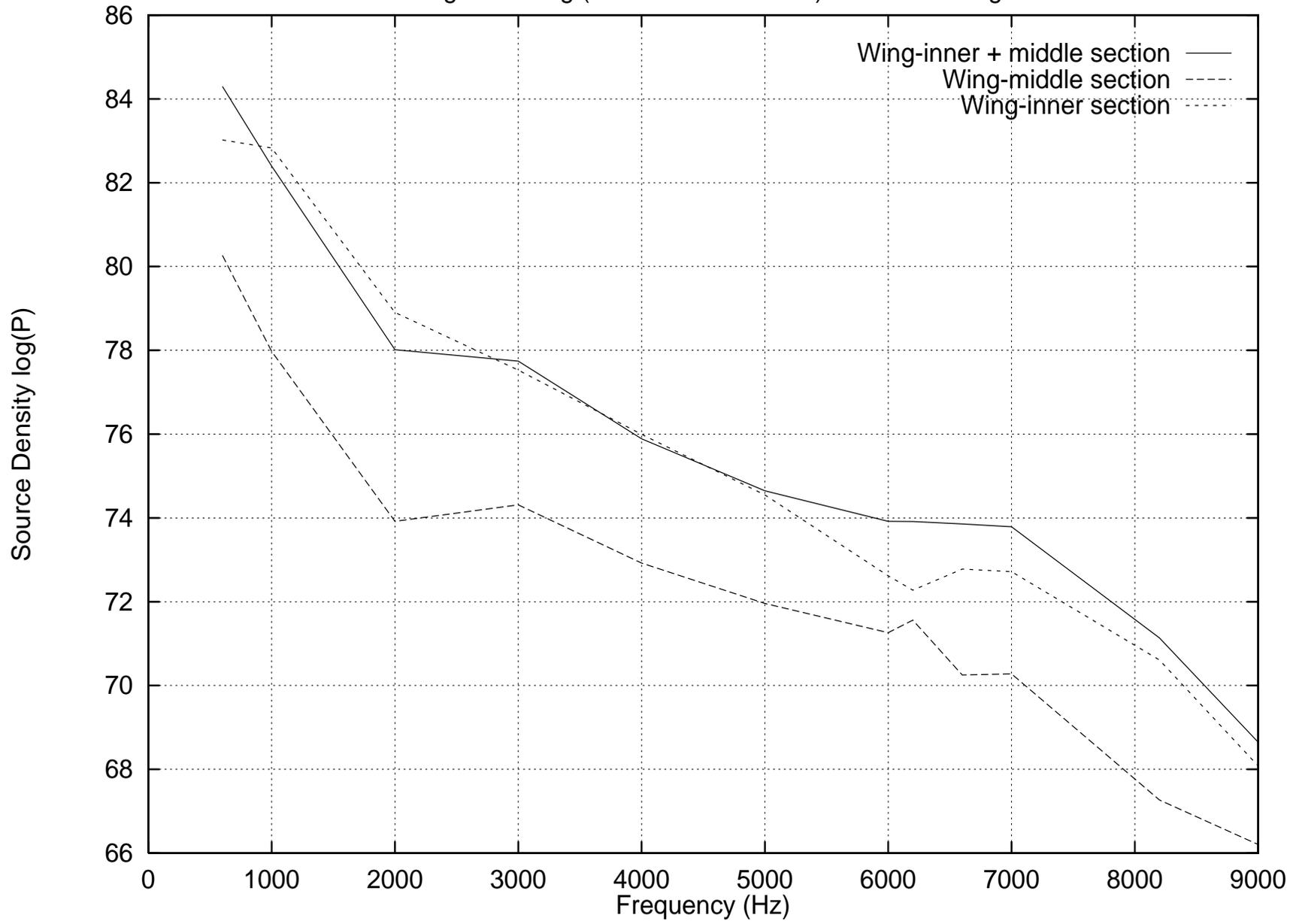


Abbildung A.24: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flügel innere und mittlere Sektion bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)

Vergleich Slat bei Clean Wing

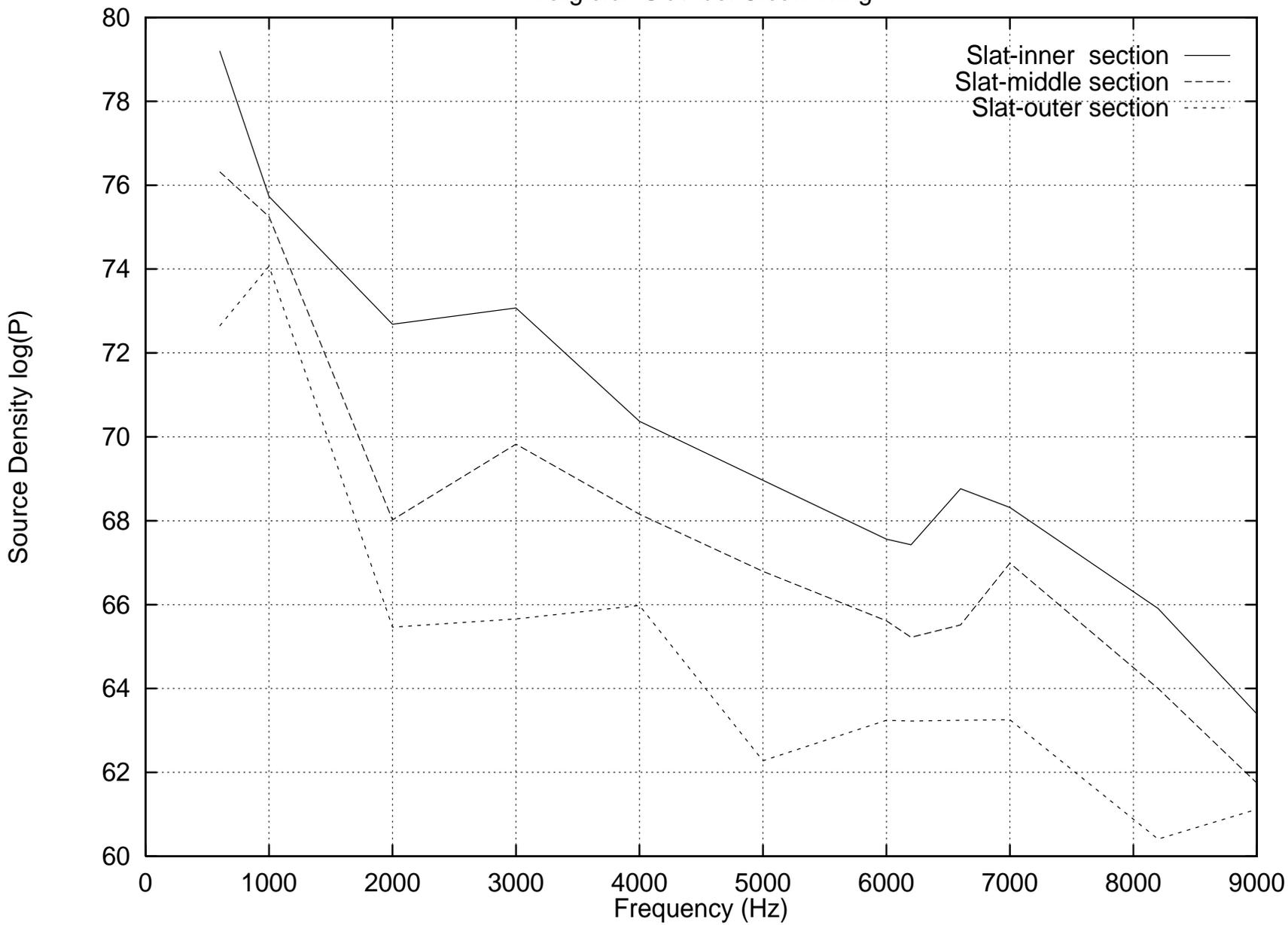


Abbildung A.25: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Slat bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)

Vergleich Flap bei Clean Wing

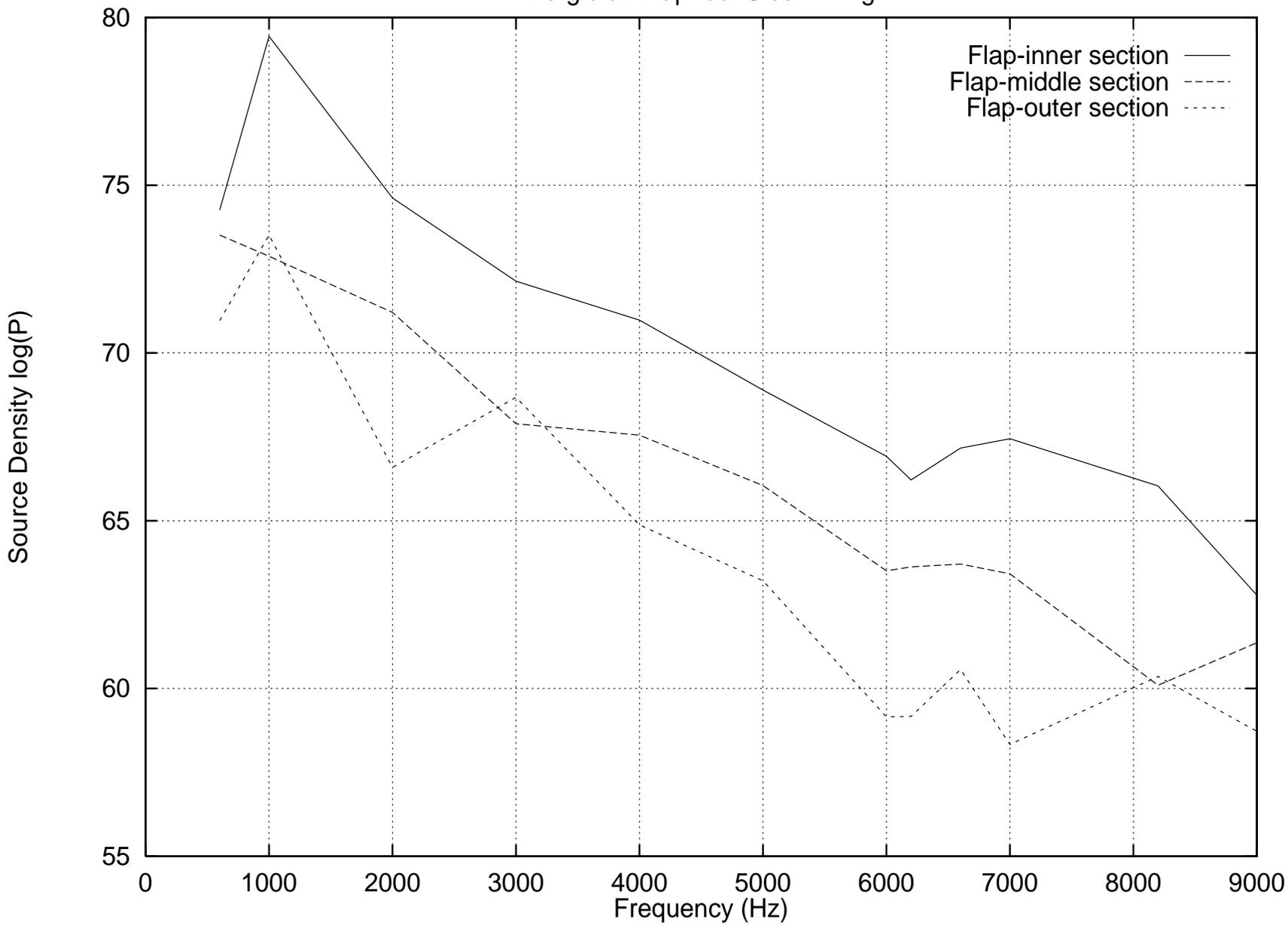


Abbildung A.26: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Flap bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)

Vergleich Slat-Flap (inner + middle section) bei Clean Wing

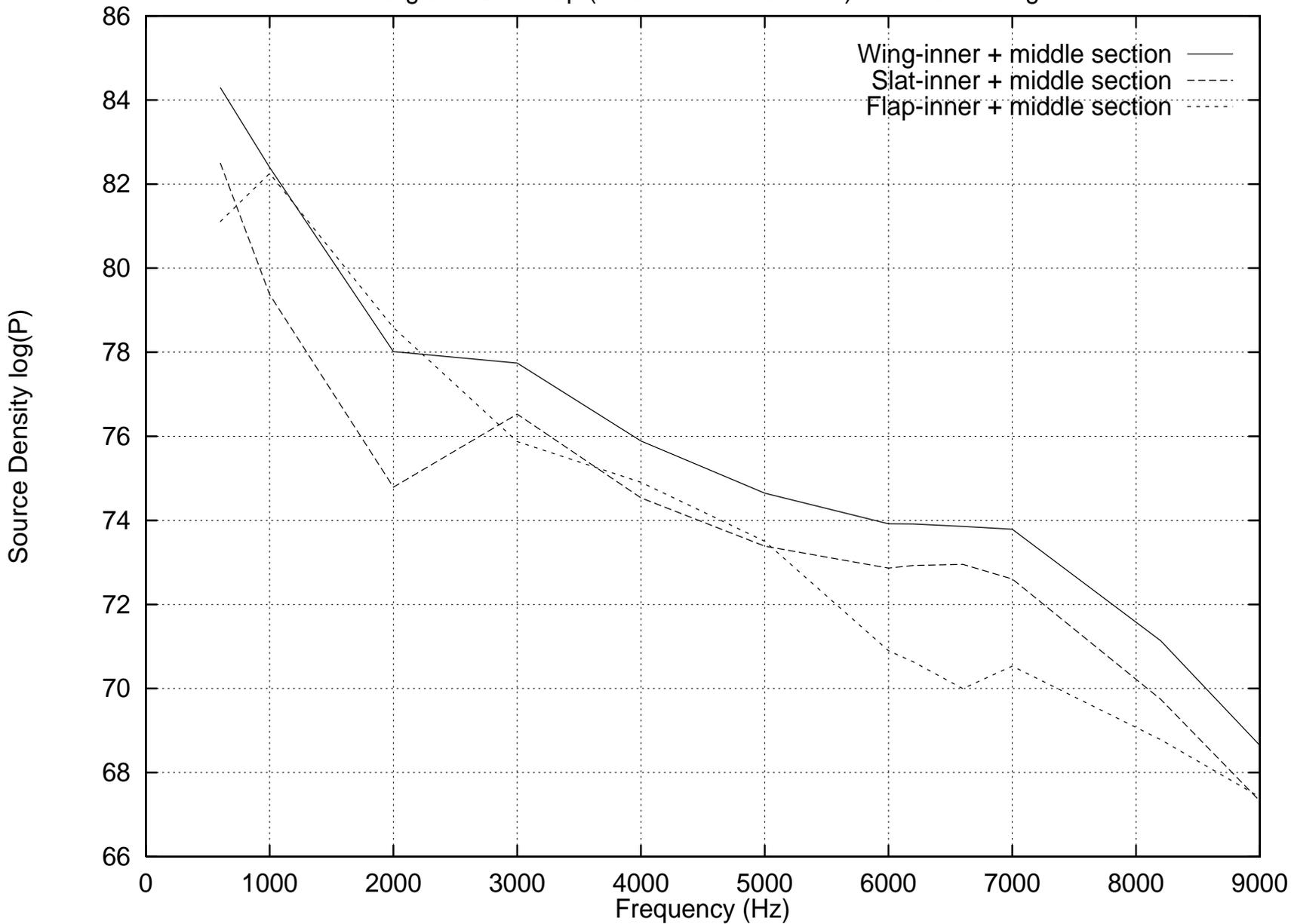


Abbildung A.27: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Slat/Flap bei eingefahrenen Klappen (Clean Wing)

Vergleich Landing Configuration/Clean Wing

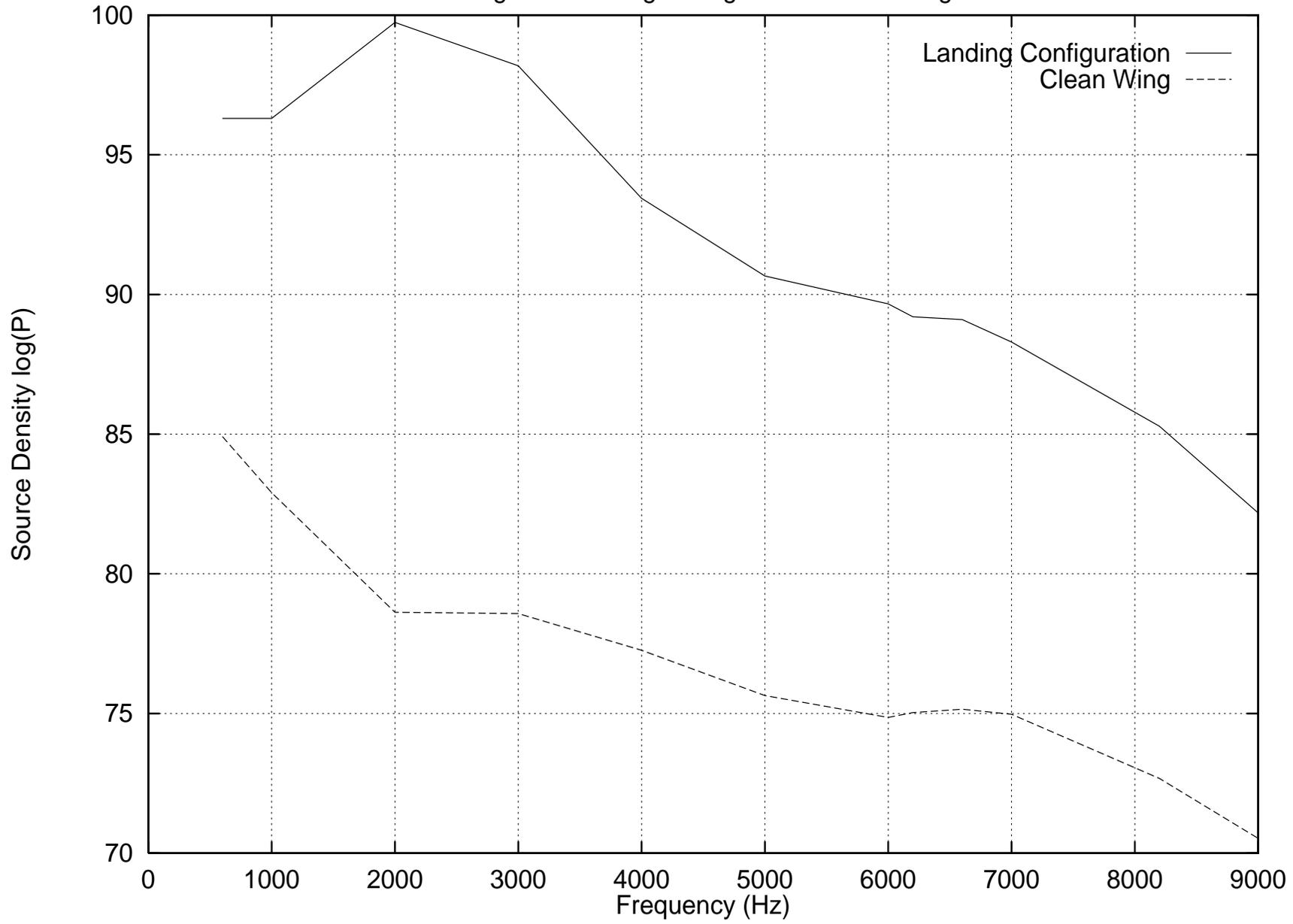


Abbildung A.28: Ergebnis der Quellquantifizierung: Vergleich Landekonfiguration/Clean Wing

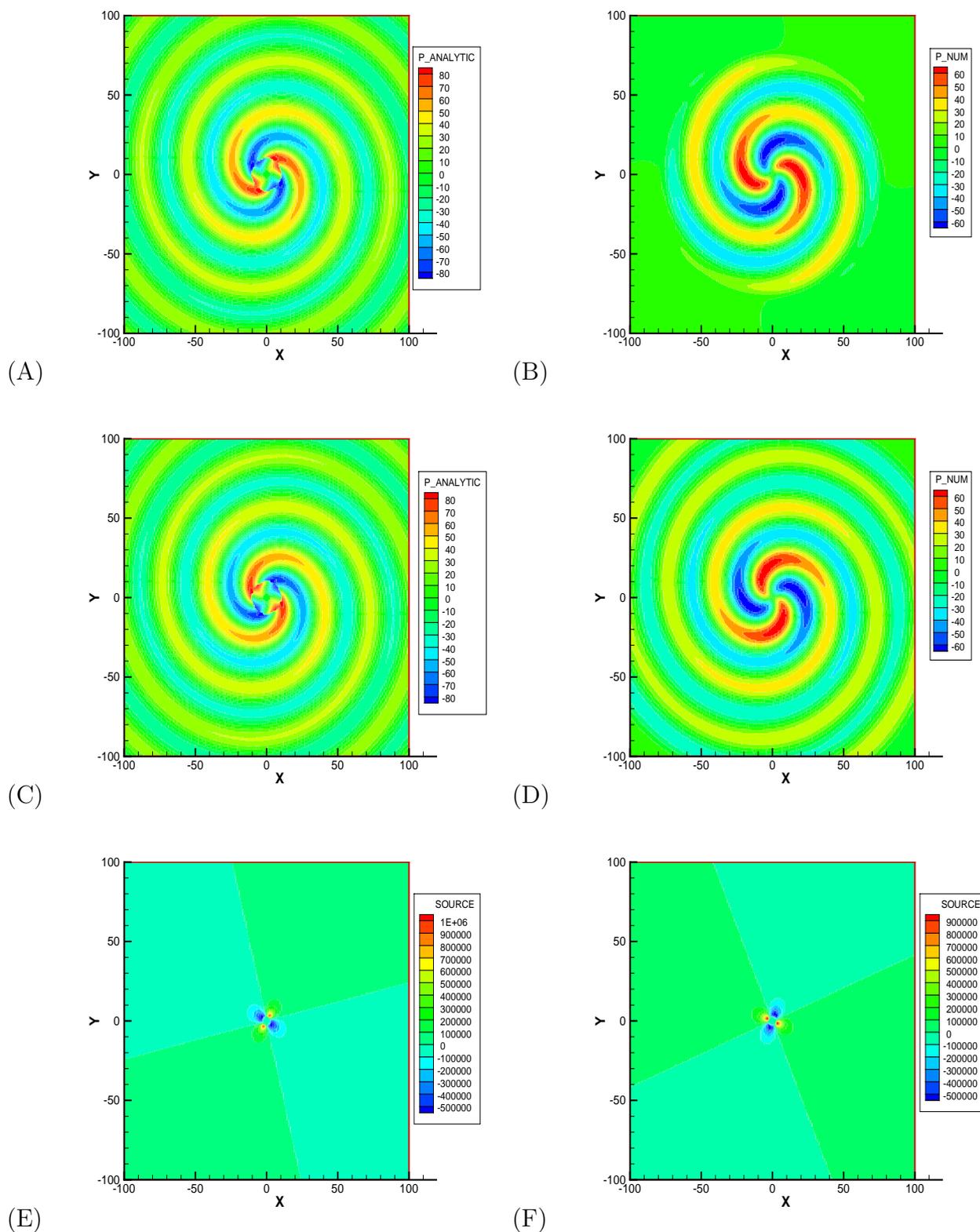
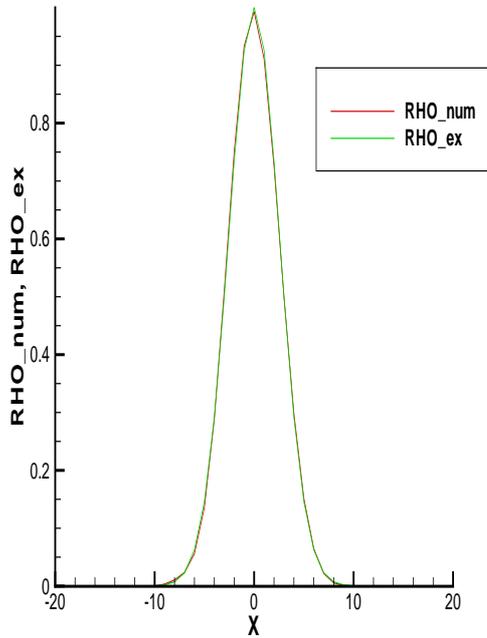
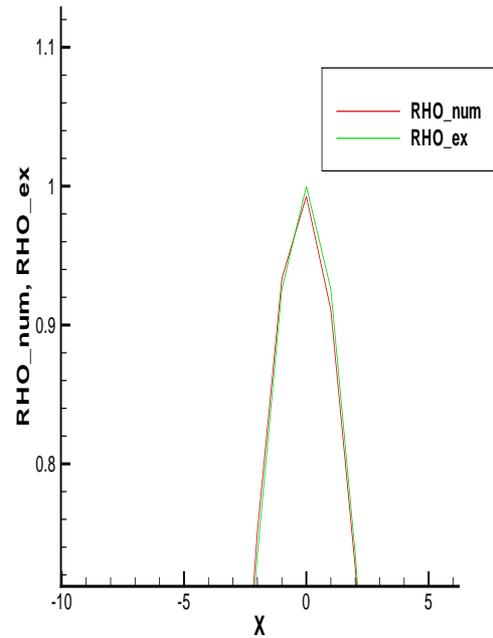


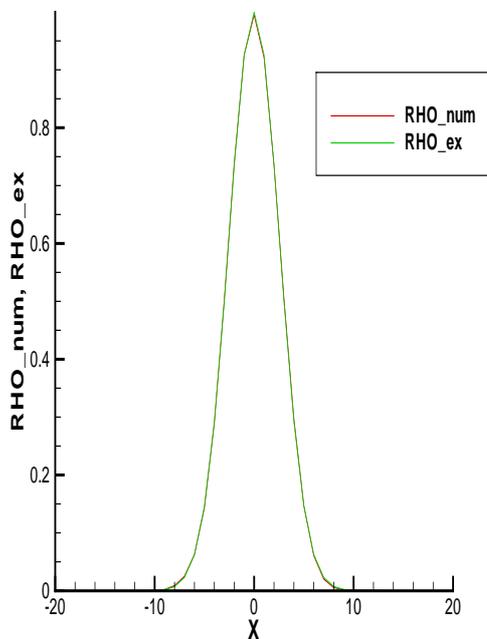
Abbildung A.29: Quellmodellierung mit der EIF Methode (A) Analytisch berechneter Schalldruck nach $n = 150$ Zeitschritten, (B) mit EIF Methode berechneter Schalldruck nach $n = 150$ Zeitschritten, (C) analytisch berechneter Schalldruck nach $n = 250$ Zeitschritten, (D) mit EIF Methode berechneter Schalldruck nach $n = 250$ Zeitschritten, (E) Quadrupolquelle mit EIF Methode berechnet nach $n = 150$ Zeitschritten, (F) Quadrupolquelle mit EIF Methode berechnet nach $n = 250$ Zeitschritten



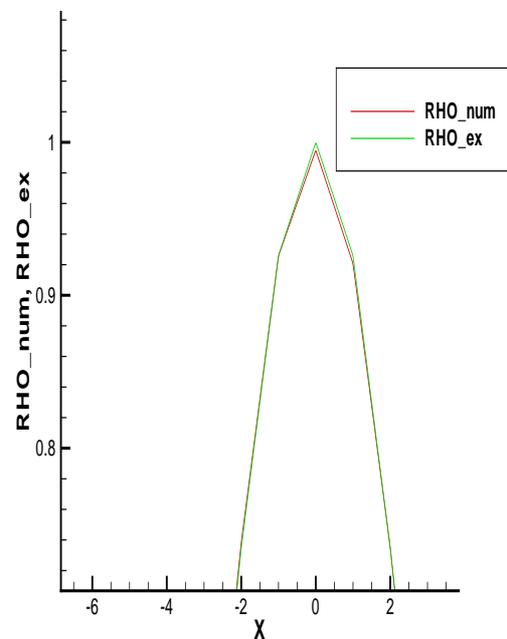
(A)



(B)

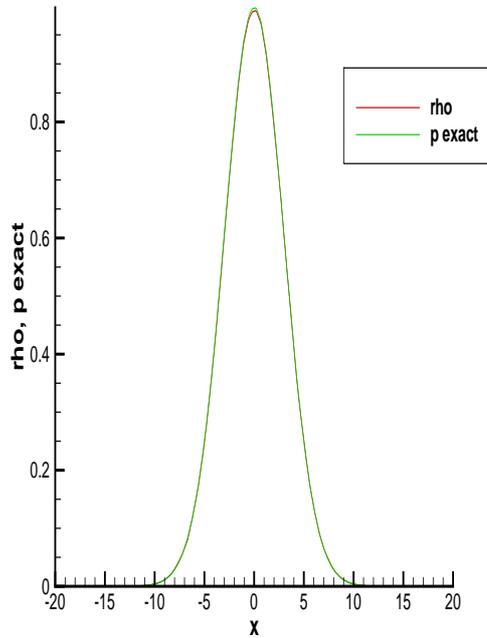


(C)

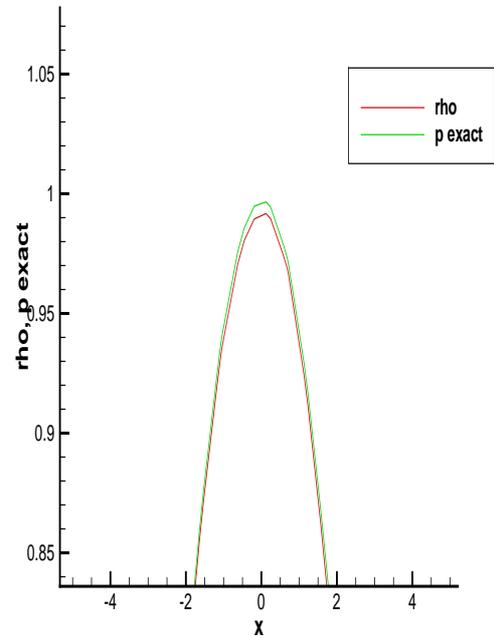


(D)

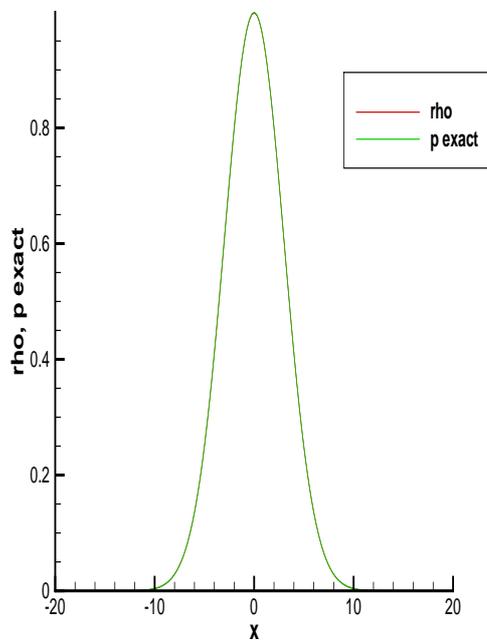
Abbildung A.30: Lösung der Konvektionsgleichung mit dem Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren vierter Ordnung und dem räumlichen Finite Differenzen Verfahren sechster Ordnung (A) mit der vergrößerten Darstellung (B) und dem räumlichen DRP Schema vierter Ordnung (C) mit der vergrößerten Darstellung (D)



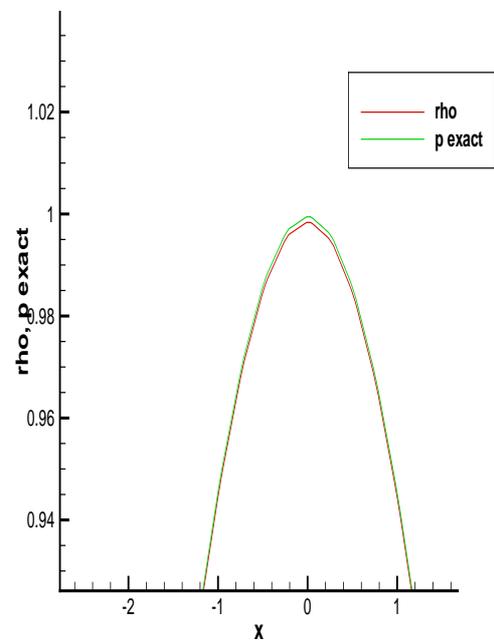
(A)



(B)

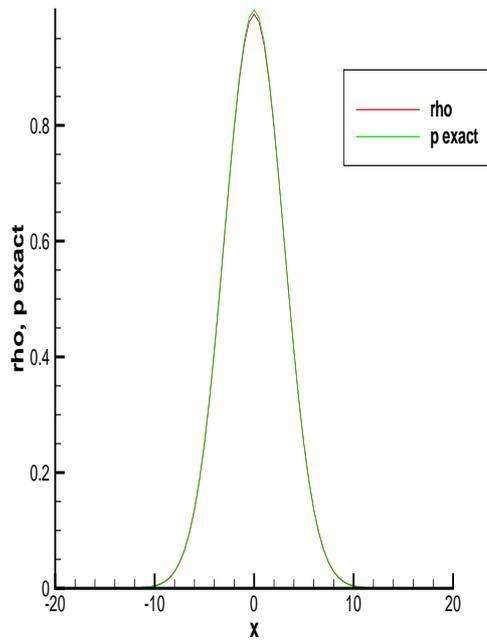


(C)

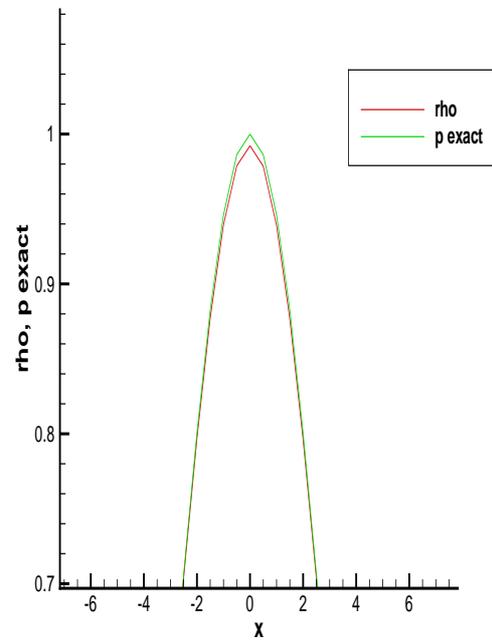


(D)

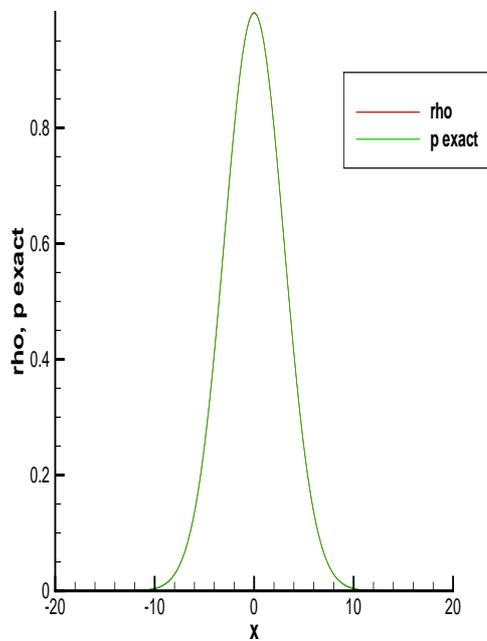
Abbildung A.31: Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung: Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem unstrukturierten Gitter (A) $dx = dy = 0.5m$ an den Aussenkanten des Gitters (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$ (C) $dx = dy = 0.25m$ an den Aussenkanten des Gitters (D) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$



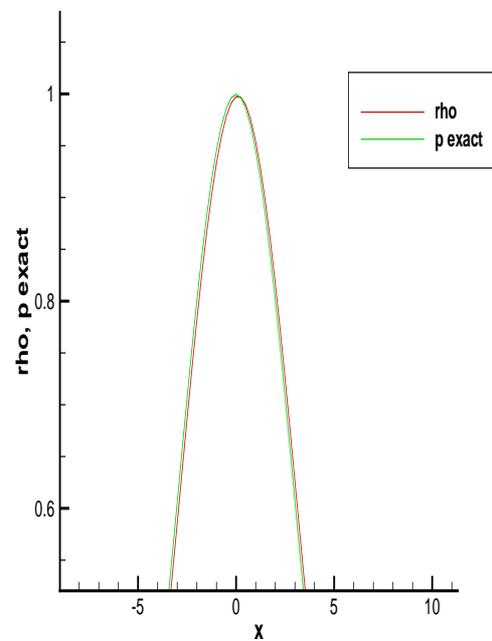
(A)



(B)

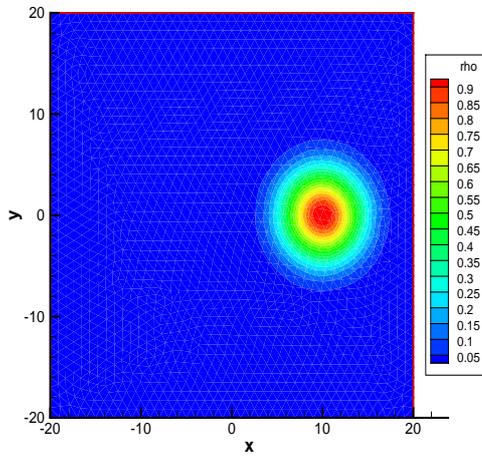


(C)

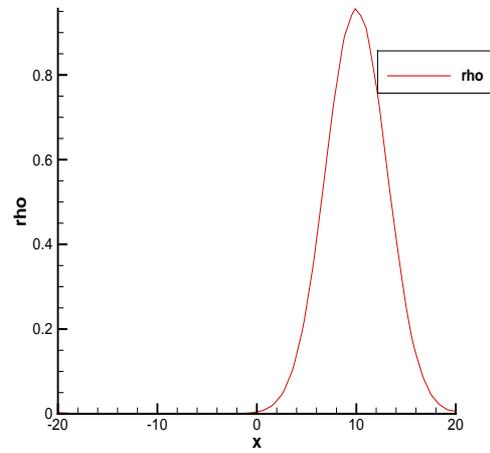


(D)

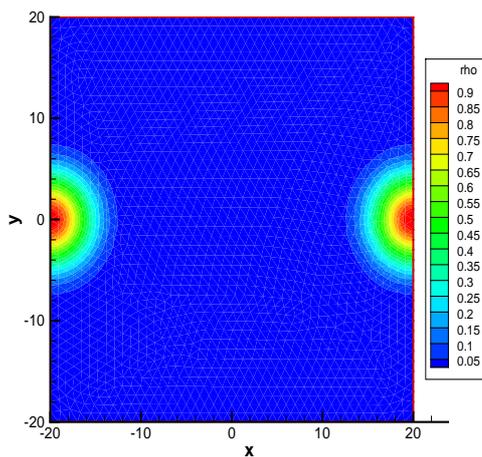
Abbildung A.32: Lösung der Konvektionsgleichung mit der Finite Volumen Methode hoher Ordnung: Gauss Puls nach einem Durchgang auf einem strukturierten Gitter (A) Gitterschrittweite $dx = dy = 0.5m$ (B) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$ (C) Gitterschrittweite $dx = dy = 0.25m$ (D) vergrößerte Darstellung bei $x = 0$



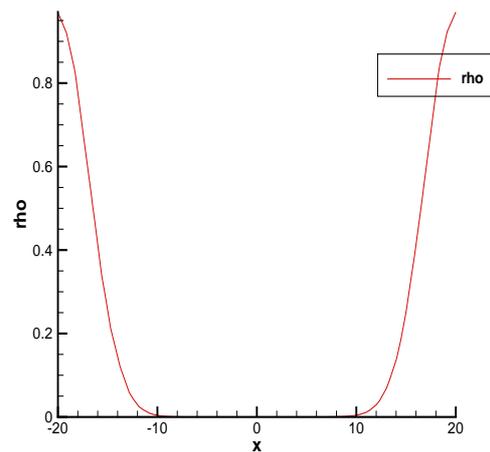
(A)



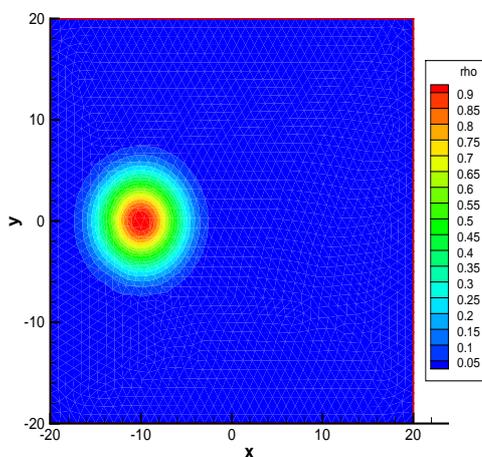
(B)



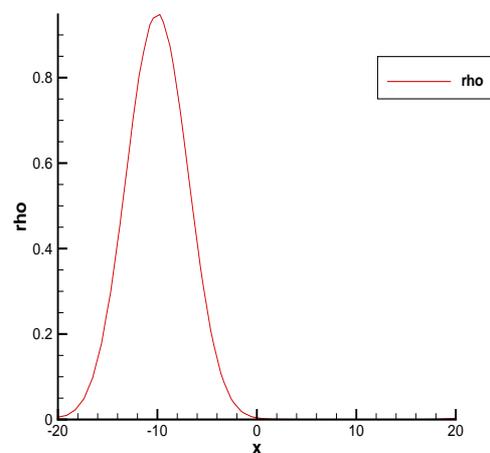
(C)



(D)

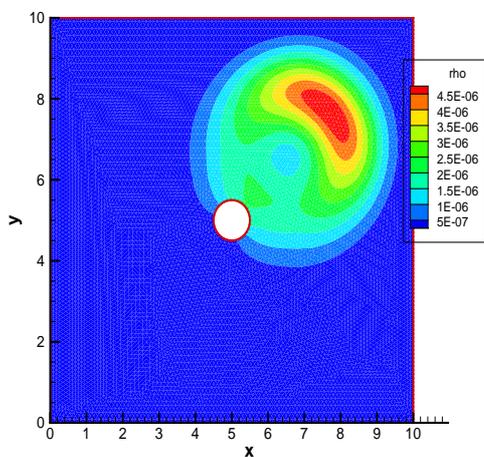


(E)

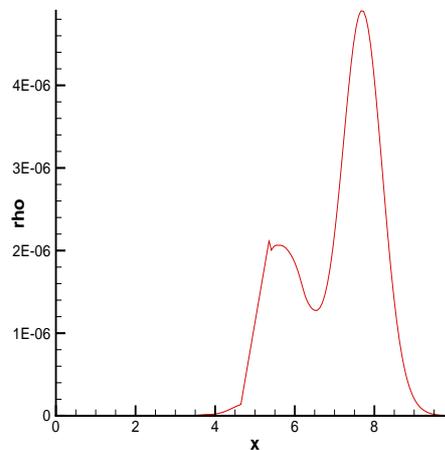


(F)

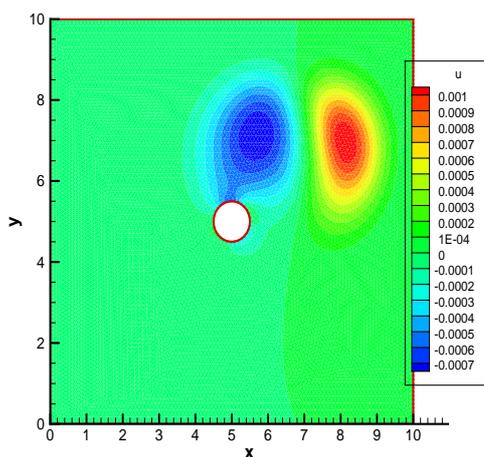
Abbildung A.33: Lösung der Konvektionsgleichung mit $\bar{u} = 1\text{ m/s}$, $dt = 0.5\text{ s}$ und $dx = 1\text{ m}$:
 (A) Gauss Pulse bei $t = 20\text{ dt}$ (B) Schnitt bei $y = 0$ und $t = 20\text{ dt}$ (C) Gauss Pulse bei $t = 40\text{ dt}$ (D) Schnitt bei $y = 0$ und $t = 40\text{ dt}$ (E) Gauss Pulse bei $t = 60\text{ dt}$ (F) Schnitt bei $y = 0$ und $t = 60\text{ dt}$



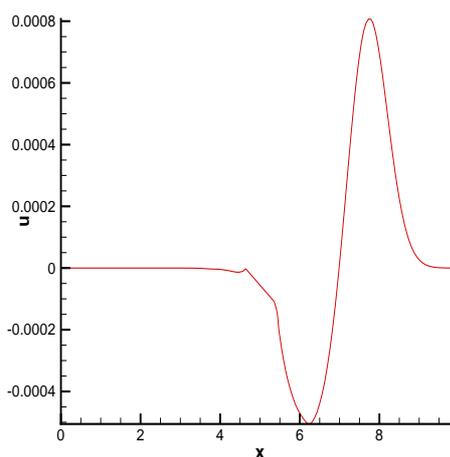
(A)



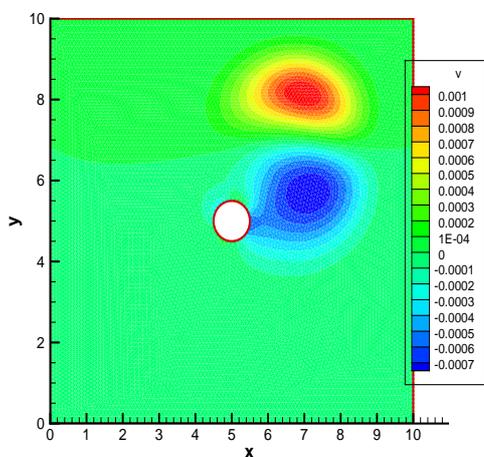
(B)



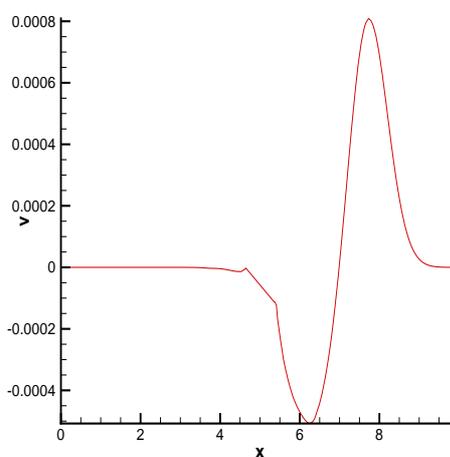
(C)



(D)



(E)



(F)

Abbildung A.34: Schallausbreitungsrechnungen mit dem Finite Volumen Programm HYDSOL um einen schallharten Zylinder nach $n = 40$ Zeitschritten: (A) Dichteverteilung (B) Schnitt bei $y = x$ (C) Geschwindigkeitsverteilung u (D) Schnitt bei $y = x$ (E) Geschwindigkeitsverteilung v (F) Schnitt bei $y = x$. Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode.

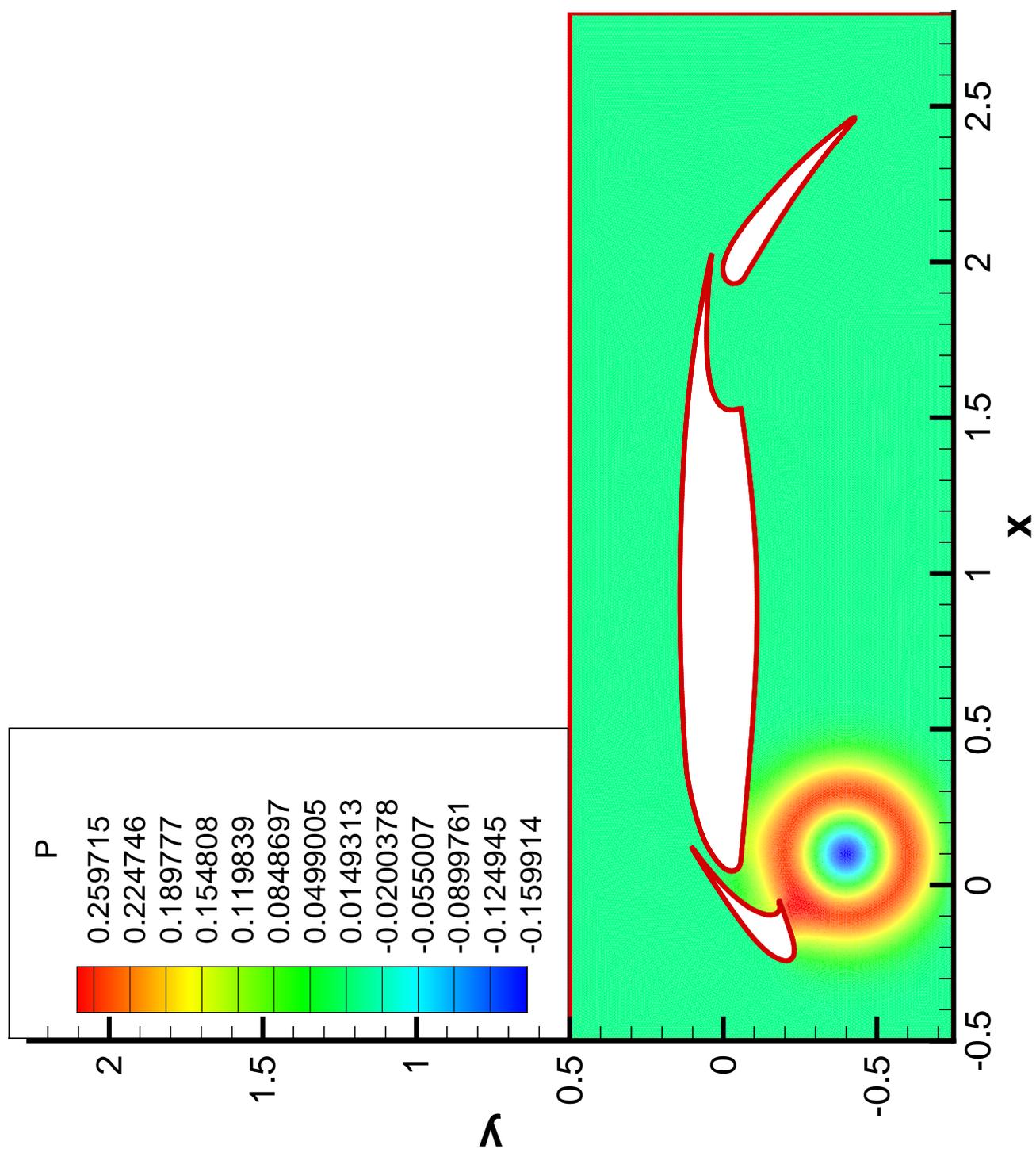


Abbildung A.35: Schallausbreitungsrechnungen mit dem Finite Volumen Programm HYDSOL um ein Profil der Airbus A310 nach n=170 Zeitschritten. Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode.

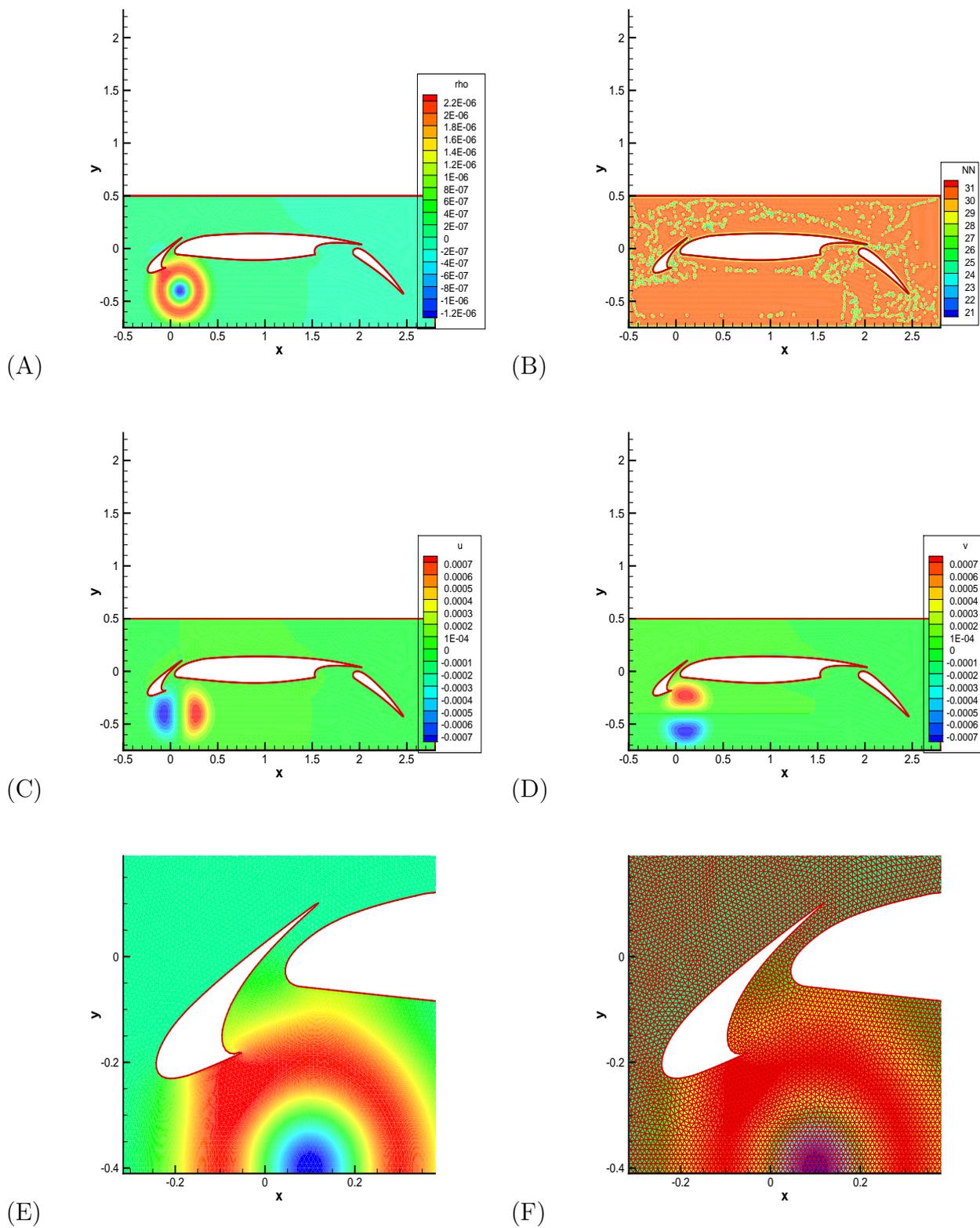


Abbildung A.36: Schallausbreitungsrechnungen mit dem Programm HYDSOL um ein Profil der Airbus A310 nach $n = 170$ Zeitschritten: (A) Dichteverteilung, (B) Anzahl der nächsten Nachbarn (C) Geschwindigkeitsverteilung u (D) Geschwindigkeitsverteilung v (E) Druckverteilung vergrößert dargestellt (F) Gitter am Vorflügel vergrößert. Die Rekonstruktion erfolgt mit der Natural Neighbour Methode.

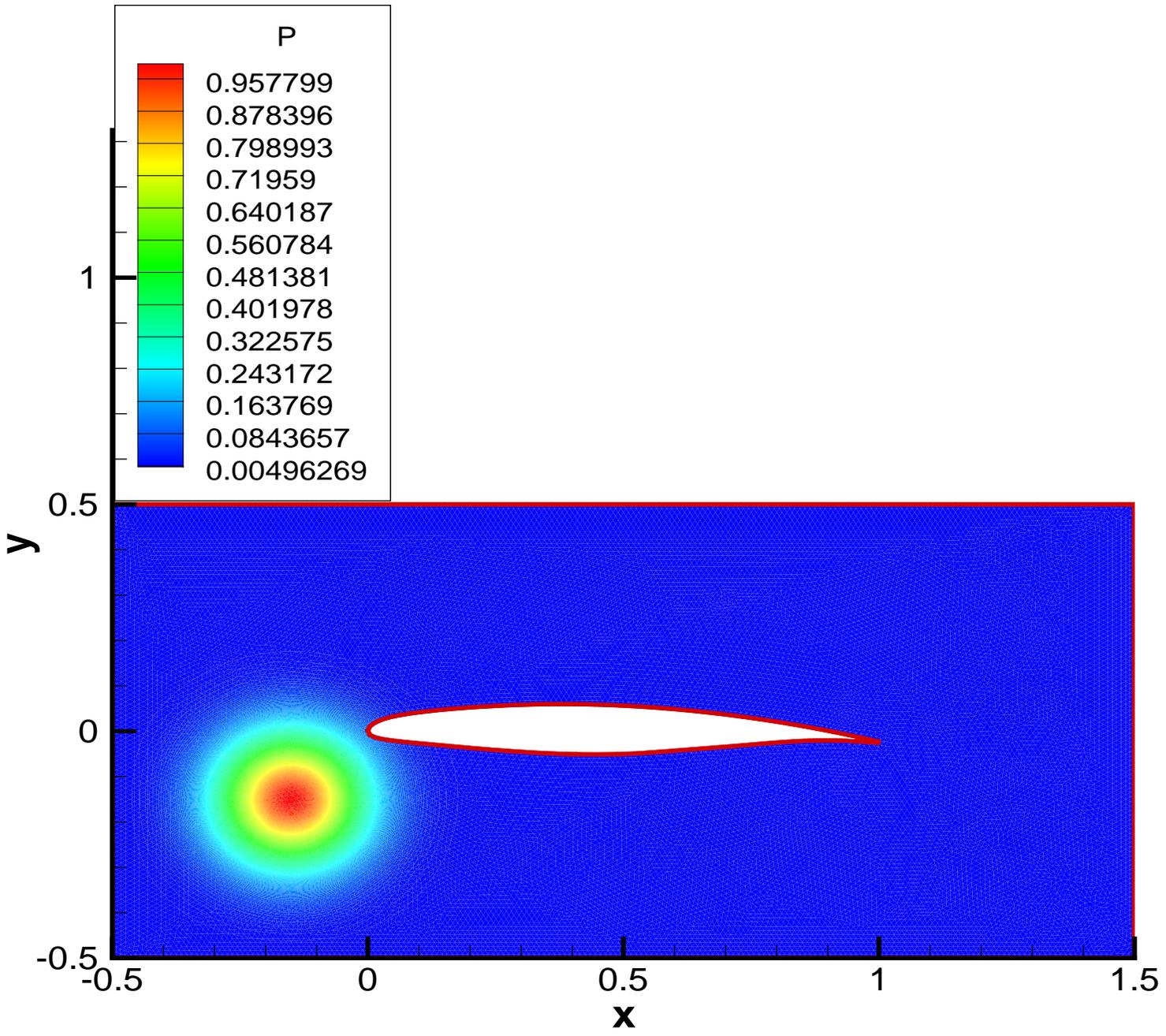


Abbildung A.37: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ zum Zeitpunkt $t = 0$

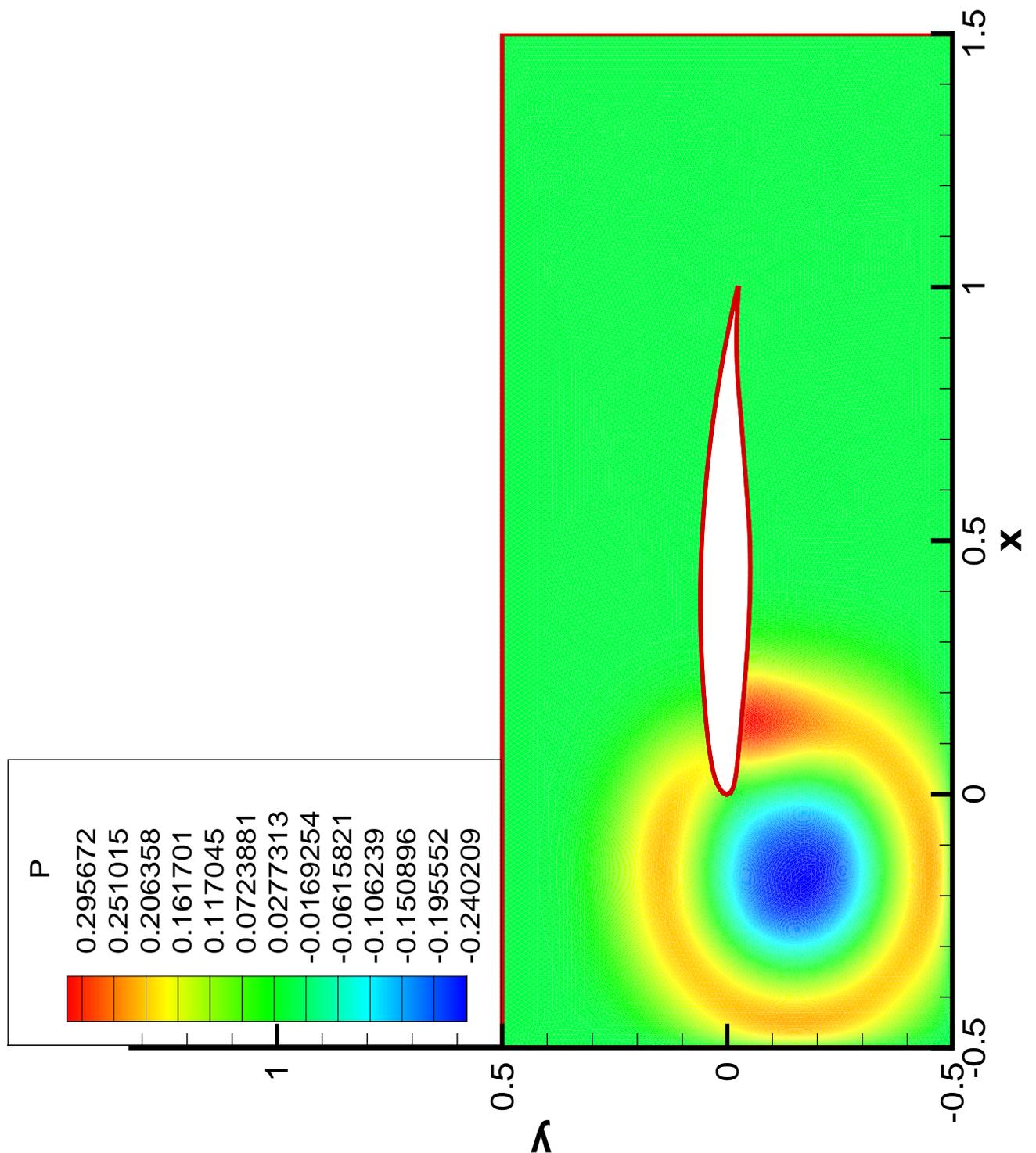


Abbildung A.38: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 116$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 3.658E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

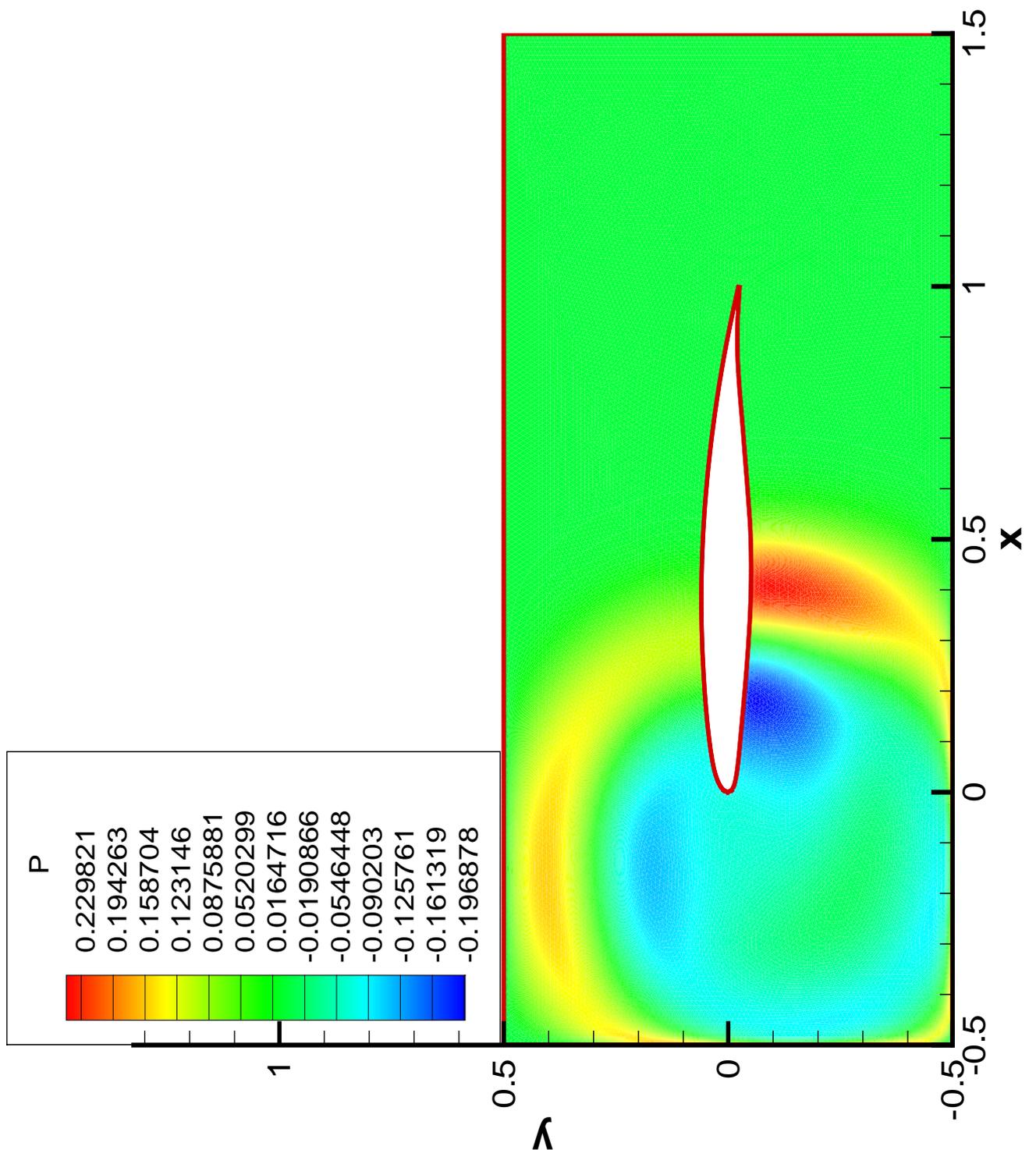


Abbildung A.39: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 232$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 7.316E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

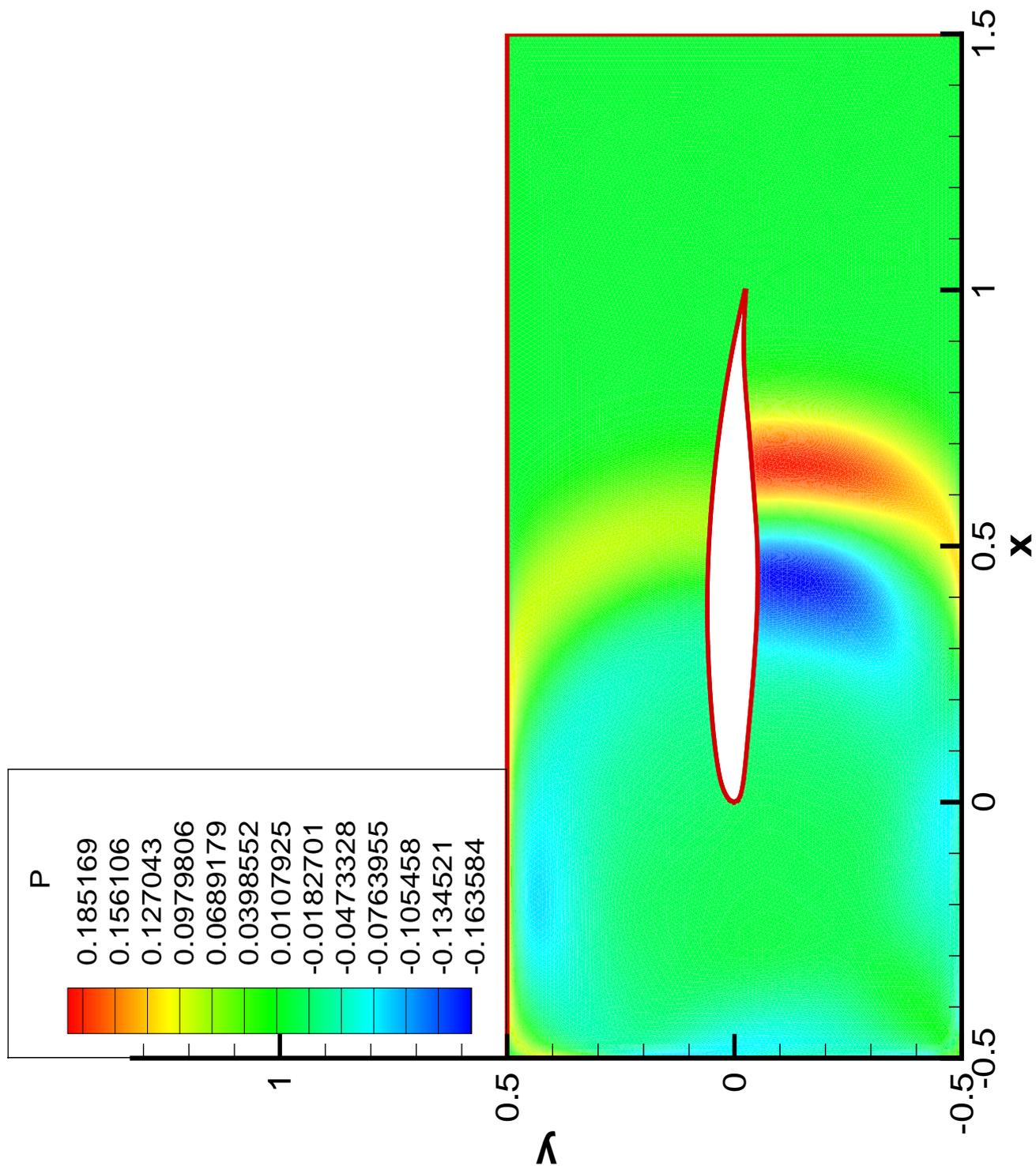


Abbildung A.40: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 348$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 1.097E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

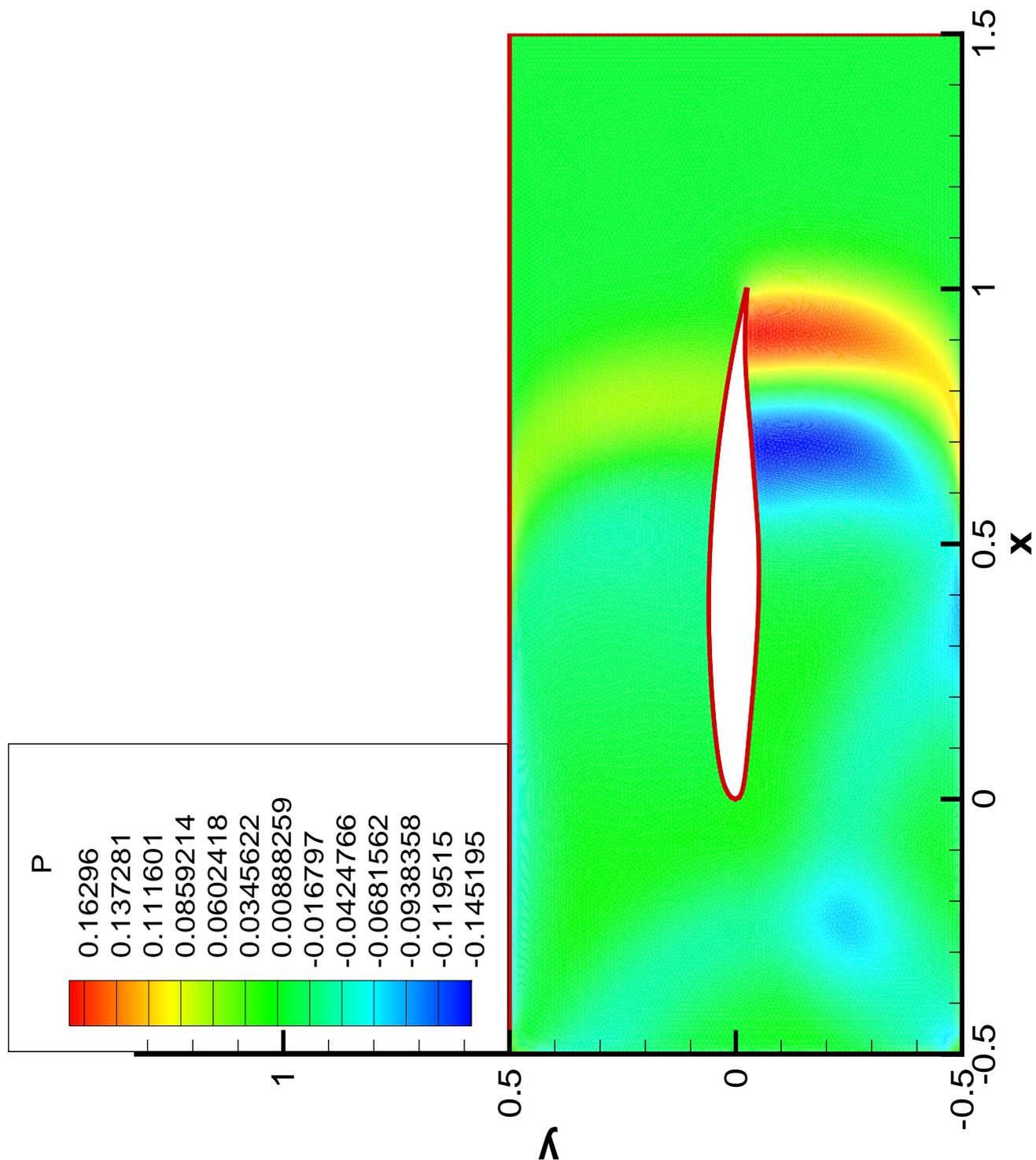


Abbildung A.41: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 464$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 1.463E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

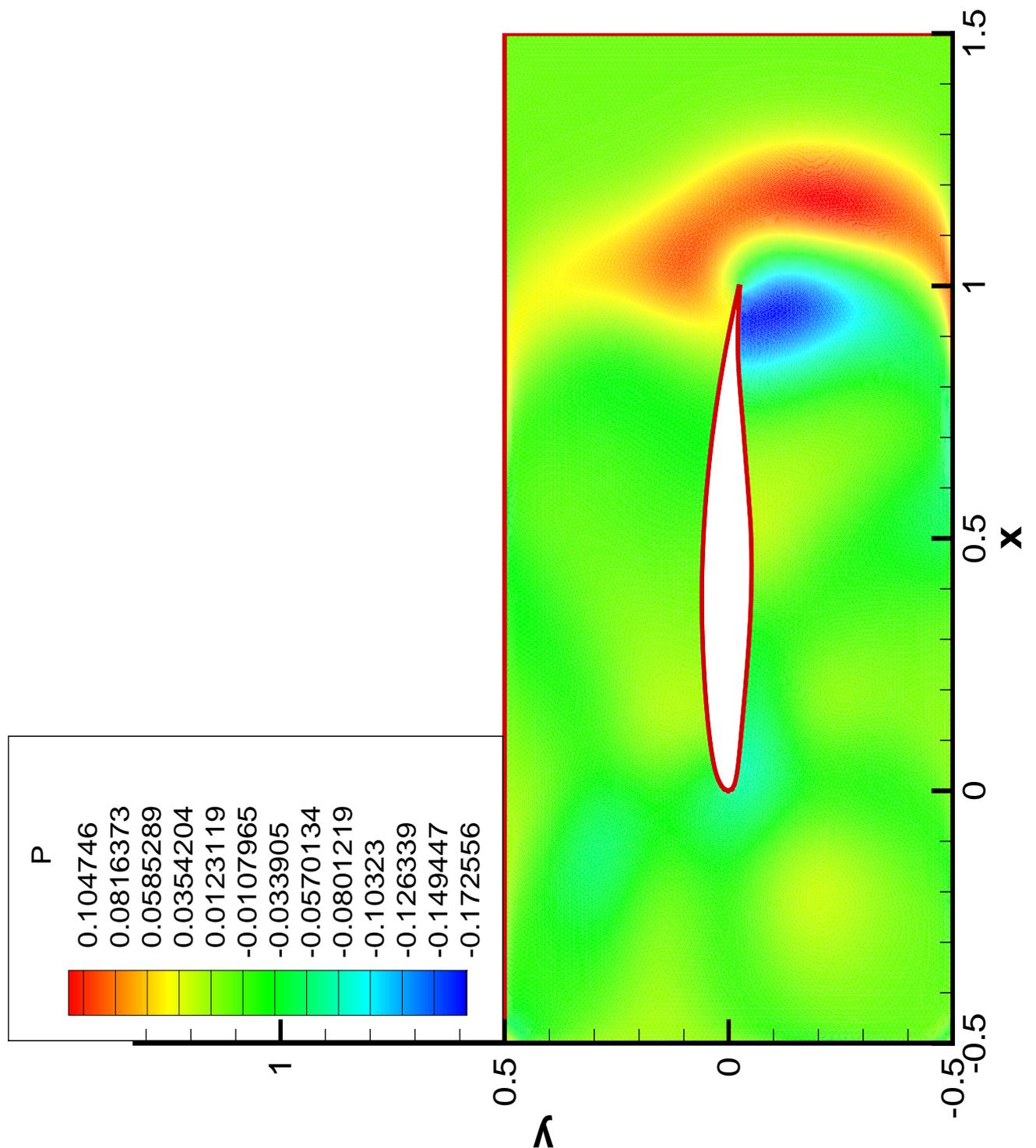


Abbildung A.42: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 580$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 1.829E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

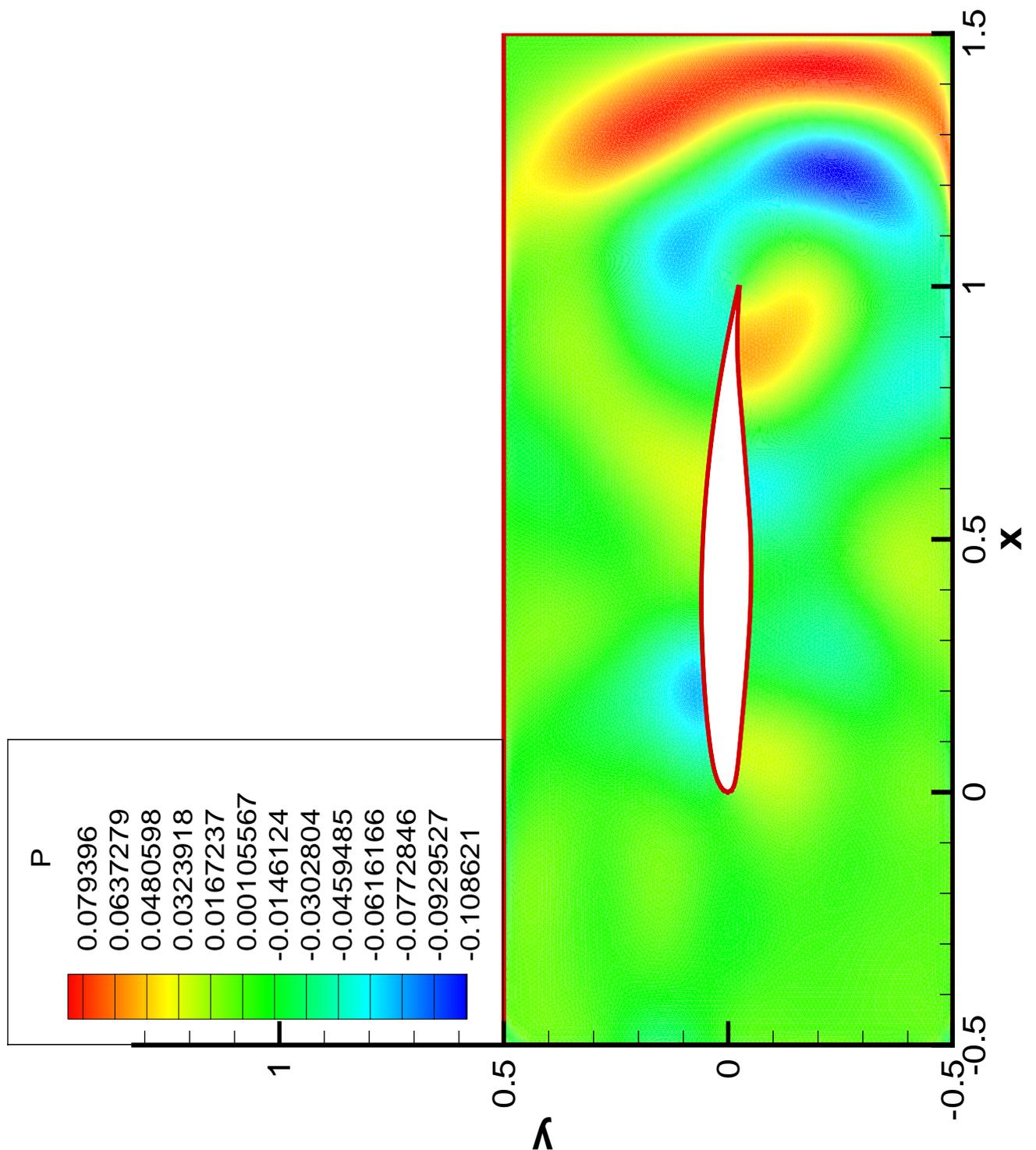


Abbildung A.43: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 696$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 2.194E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

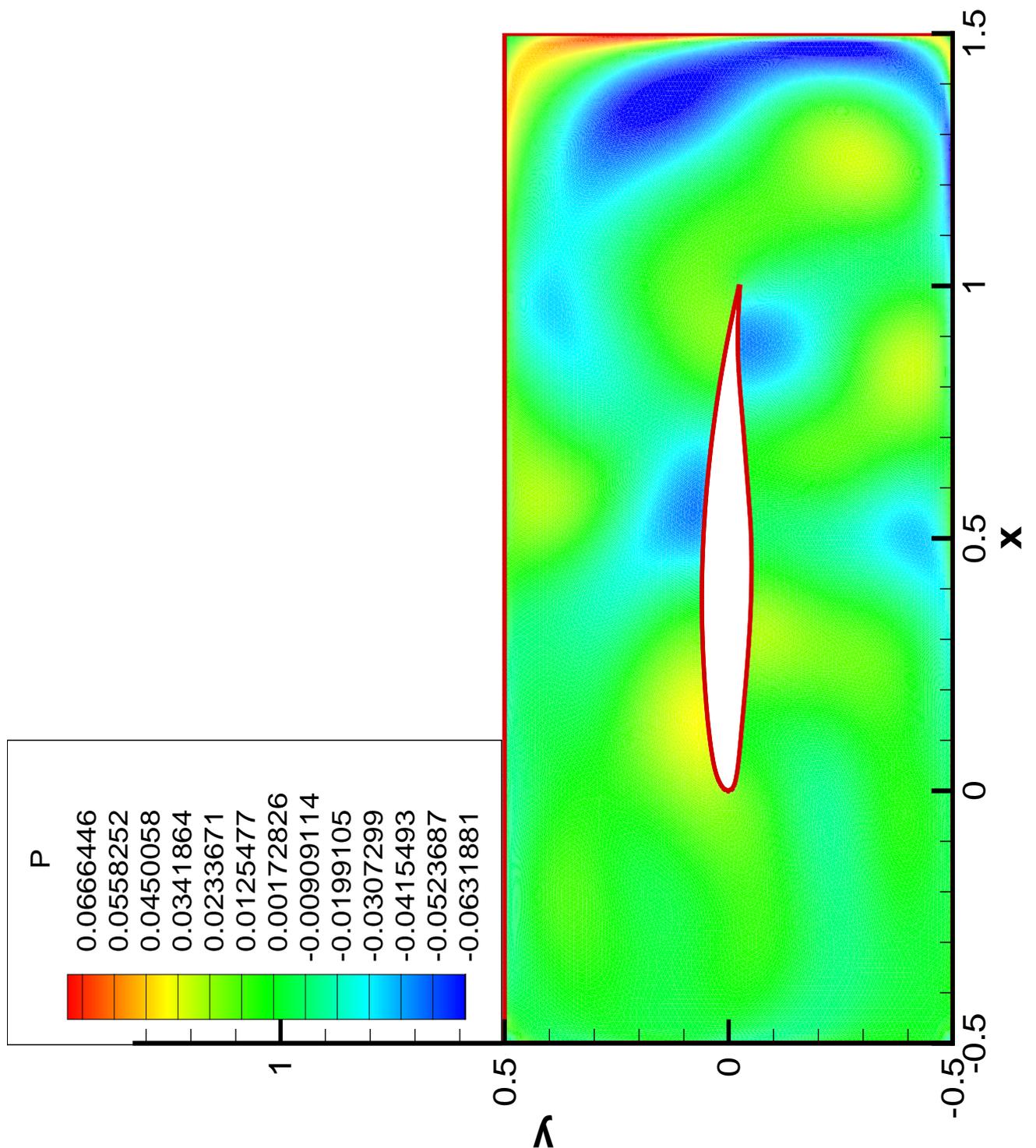


Abbildung A.44: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ ohne Anströmung bei $n = 813$ Zeitschritten; $\bar{u} = 0$; $\Delta t = 3.153E - 6s$; $t = 2.563E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

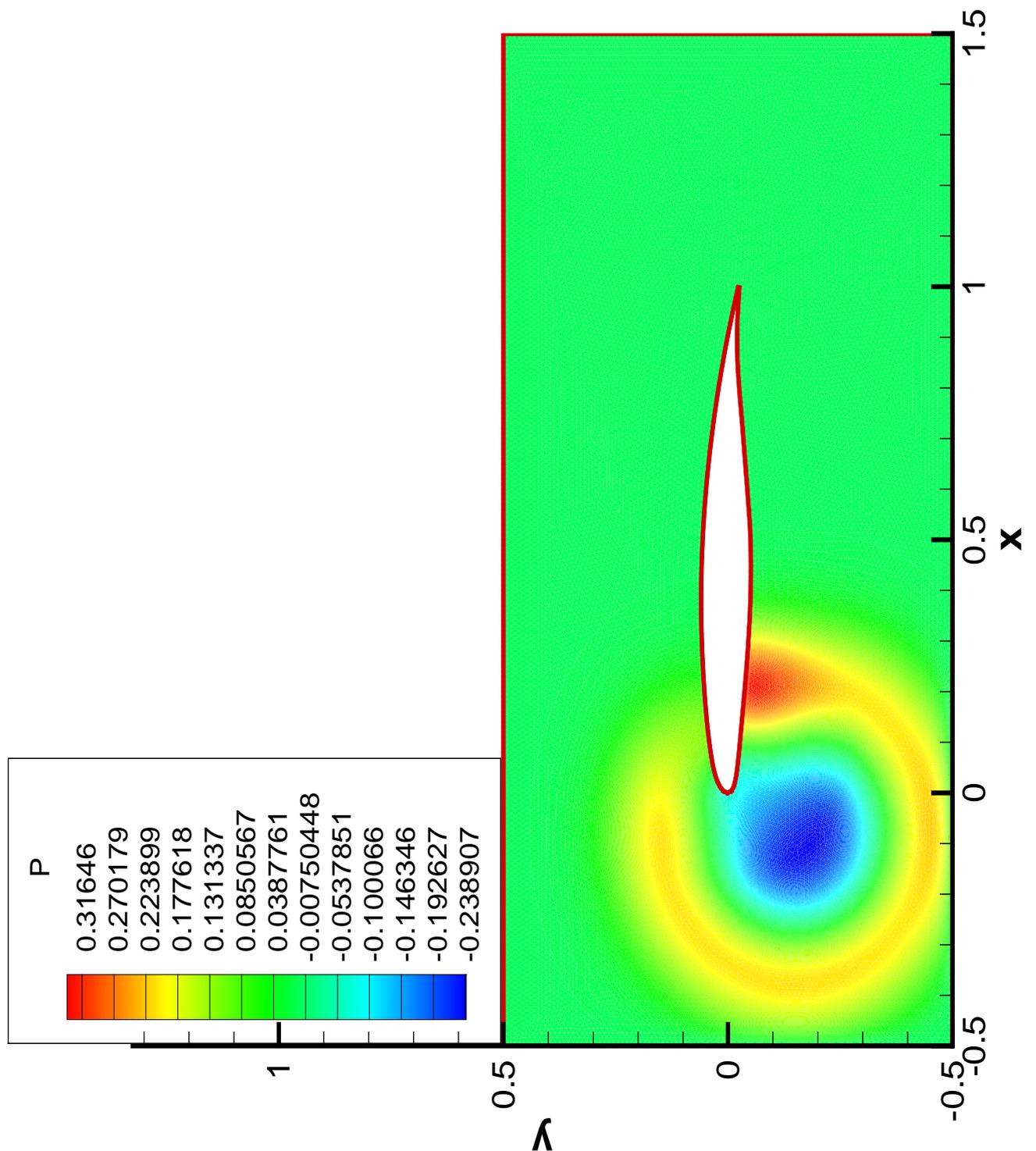


Abbildung A.45: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 150$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 3.662E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

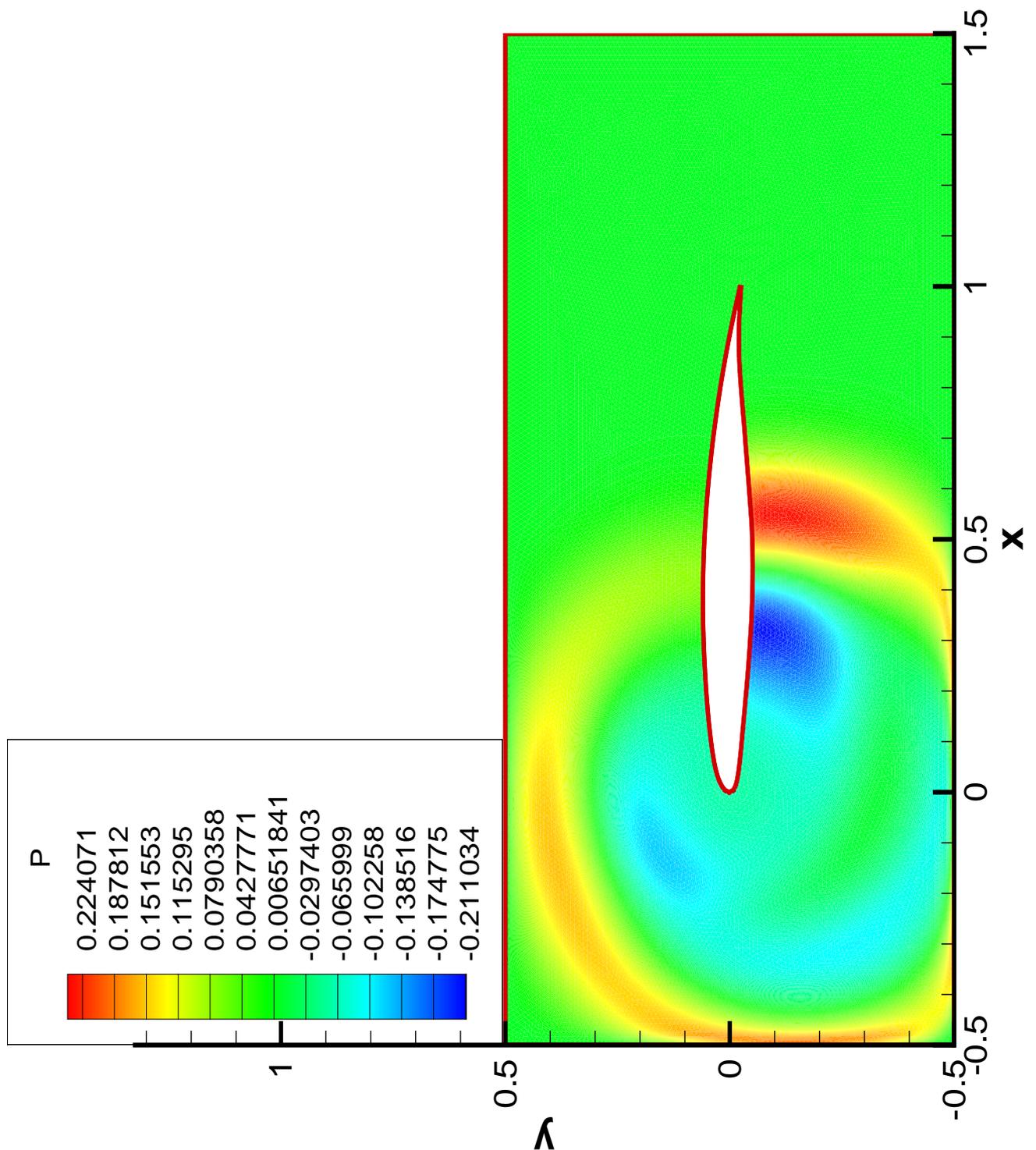


Abbildung A.46: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 300$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 7.325E - 4s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

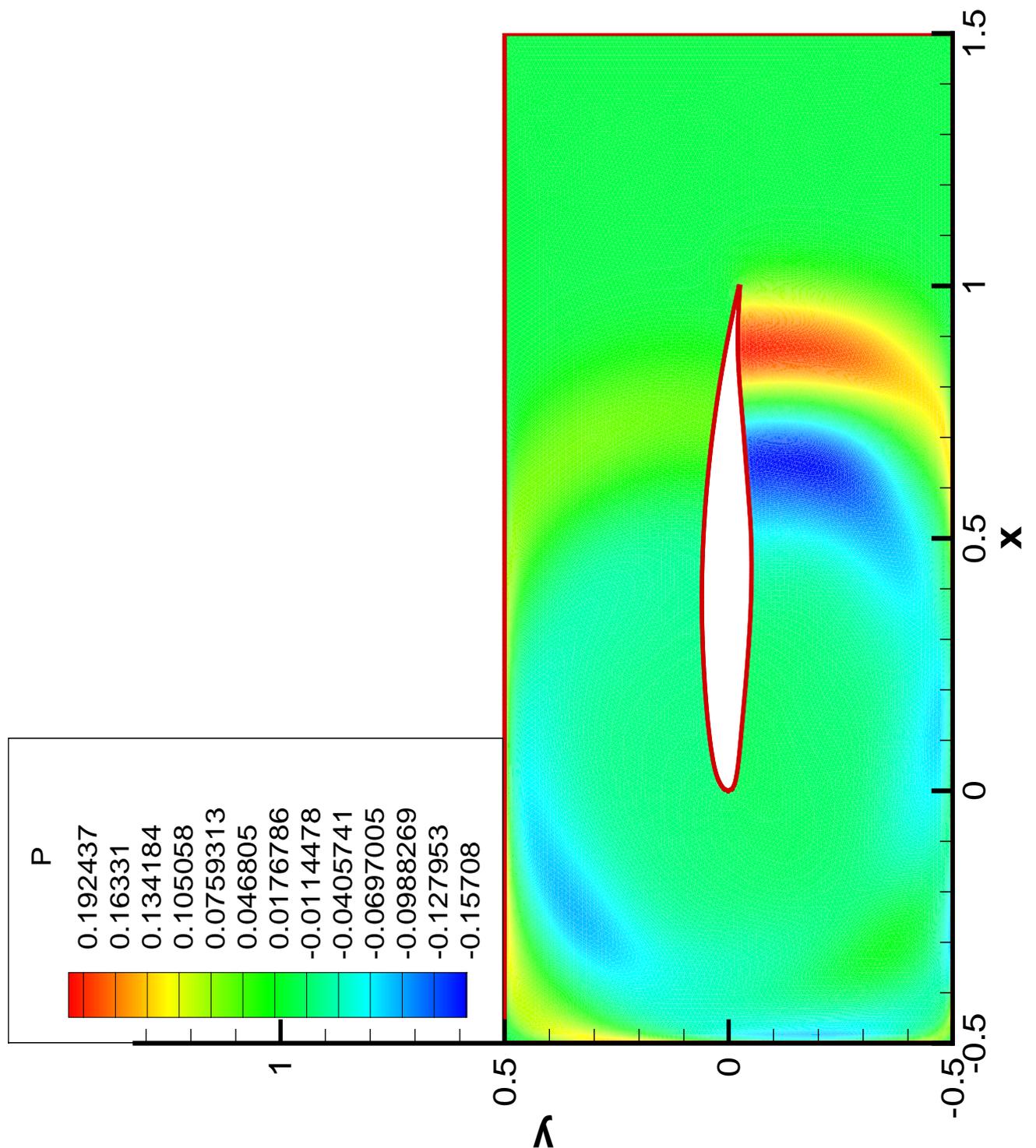


Abbildung A.47: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 450$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 1.098E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

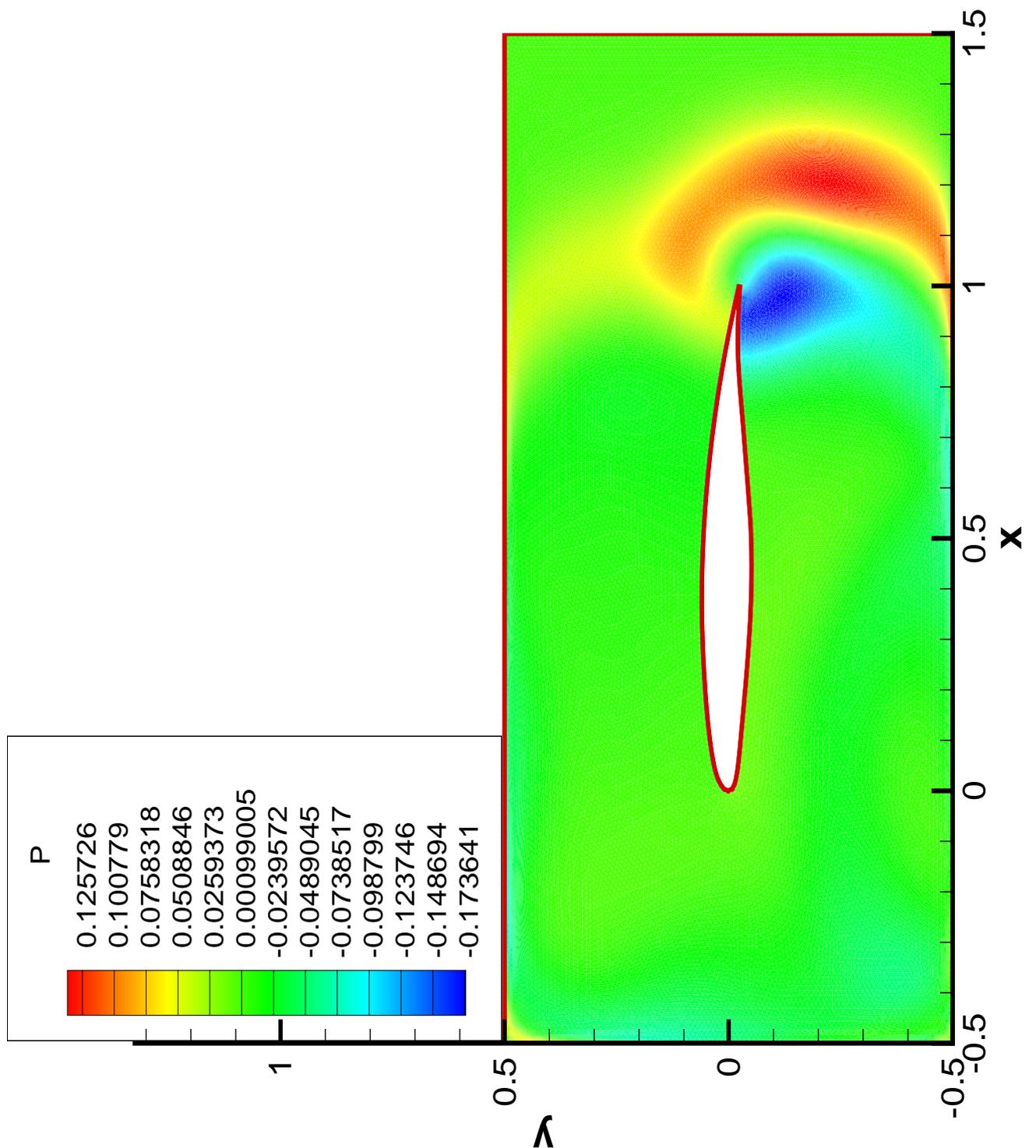


Abbildung A.48: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 600$ Zeitschritten; $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 1.465E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

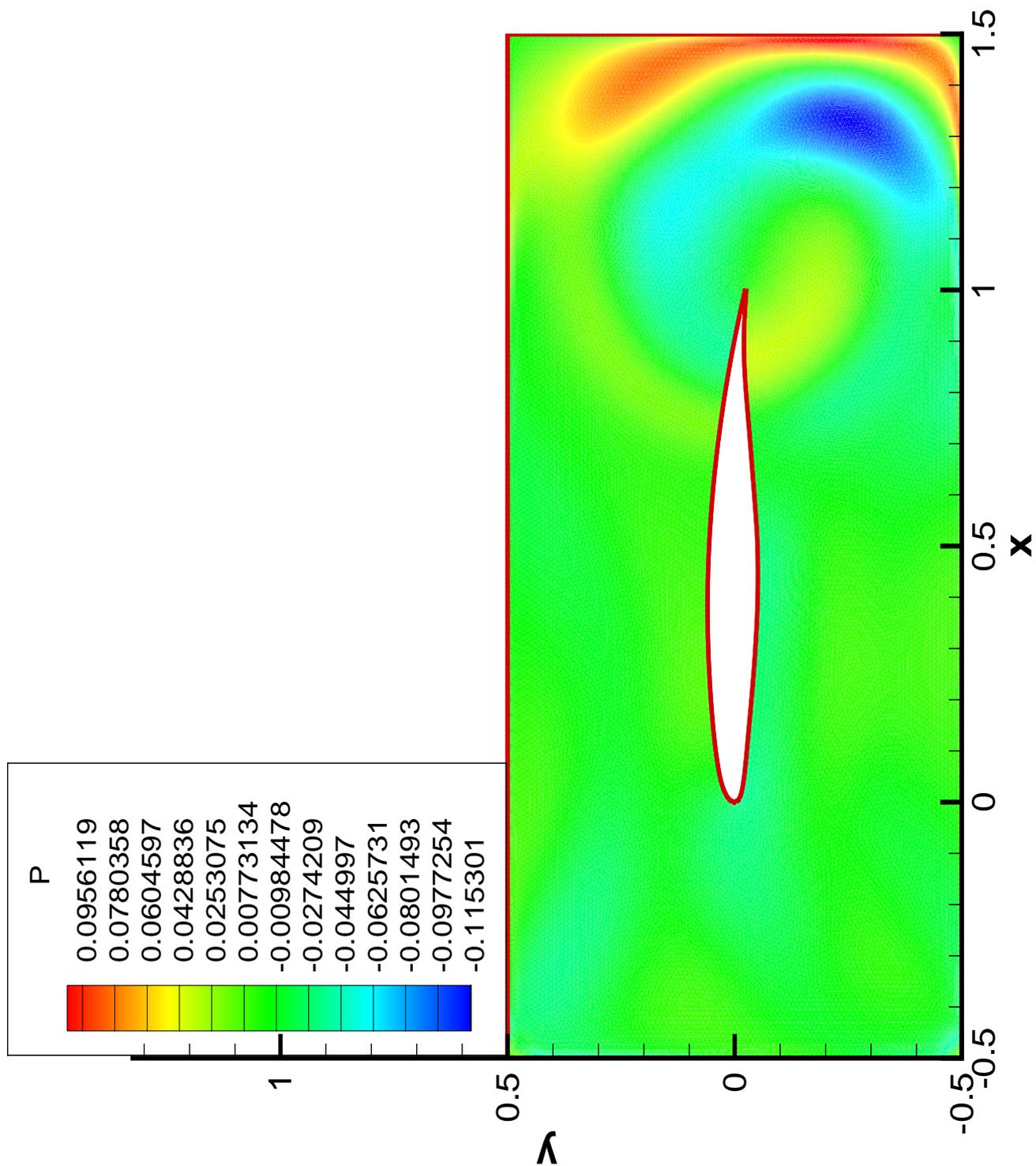


Abbildung A.49: Druckverteilung am Profil des Projekts FREQUENZ mit Anströmung bei $n = 750$ Zeitschritten, $\bar{u} = 100m/s$; $\Delta t = 2.441E - 6s$; $t = 1.831E - 3s$. Die Rekonstruktion erfolgt bei der verwendeten Finite Volumen Methode mit der Natural Neighbour Methode.

Anhang B

Tabellen

B.1 Finite Differenzen Formeln für die 1. und 2. Ableitung Φ' und Φ'' im Punkt i

<i>Abl.</i>	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	q	Ord.
Φ'			-1	0	1			$2\Delta x$	O2
Φ'		1	-8	0	8	1		$12\Delta x$	O4
Φ'	-1	9	-45	0	45	-9	1	$60\Delta x$	O6
Φ'			-1	1				Δx	O1
Φ'		1	-4	3				$2\Delta x$	O2
Φ'	-2	9	-18	11				$6\Delta x$	O3
Φ'		1	-6	3	2			$6\Delta x$	O3
Φ'	-1	6	-18	10	3			$12\Delta x$	O4
Φ''			1	2	1			$(\Delta x)^2$	O2
Φ''		-1	16	-30	16	-1		$12(\Delta x)^2$	O4
Φ''	2	-27	270	-490	270	-27	2	$180(\Delta x)^2$	O6
Φ''		1	-2	1				$(\Delta x)^2$	O1
Φ''	-1	4	-5	2				$(\Delta x)^2$	O2
Φ''	-1	4	6	-20	11			$12(\Delta x)^2$	O3

Tabelle B.1: Finite Differenzen Formeln für die 1. und 2. Ableitung Φ' und Φ'' im Punkt i

B.2 Numerische Integration über das Einheitstetraeder

Variable	Wert
a	0.25
b	0.5
c	0.75
d	1.0
e	-5.0 / 420
f	-12.0 / 420
g	16.0 / 420
h	128.0 / 420
zz	0.0

Tabelle B.2: Koeffizienten für die Numerische Integration über das Einheitstetraeder

i	x – Koordinate	y – Koordinate	z – Koordinate	Wichtungsfaktor
1	zz	zz	zz	e
2	d	zz	zz	e
3	zz	d	zz	e
4	zz	zz	d	e
5	a	zz	zz	g
6	zz	a	zz	g
7	zz	zz	a	g
8	c	zz	zz	g
9	c	a	zz	g
10	c	zz	a	g
11	zz	c	zz	g
12	a	c	zz	g
13	zz	c	a	g
14	zz	zz	c	g
15	a	zz	c	g
16	zz	a	c	g
17	b	zz	zz	f
18	zz	b	zz	f
19	zz	zz	b	f
20	b	b	zz	f
21	b	zz	b	f
22	zz	b	b	f
23	a	a	zz	g
24	b	a	zz	g
25	a	b	zz	g
26	a	zz	a	g
27	b	zz	a	g
28	zz	a	a	g
29	b	a	a	g
30	zz	b	a	g
31	a	b	a	g
32	a	zz	b	g
33	zz	a	b	g
34	a	a	b	g
35	a	a	a	h

Tabelle B.3: Wichtungsfaktoren für die Numerische Integration über das Einheitstetraeder

B.3 Numerische Integration über das Einheitsdreieck

Variable	Wert
ab_1	$\frac{1}{3}$
bb_1	0.950275662924105565450352089520
cb_1	0.024862168537947217274823955239
ab_2	0.772160036676532561750285570113
bb_2	0.113919981661733719124857214943
ab_3	0.009085399949835353883572964740
bb_3	0.495457300025082323058213517632
ab_4	0.062277290305886993497083640527
bb_4	0.468861354847056503251458179727
ab_5	0.022076289653624405142446876931
bb_5	0.851306504174348550389457672223
cb_5	$1 - ab_5 - bb_5$
ab_6	0.018620522802520968955913511549
bb_6	0.689441970728591295496647976487
cb_6	$1 - ab_6 - bb_6$
ab_7	0.096506481292159228736516560903
bb_7	0.635867859433872768286976979827
cb_7	$1 - ab_7 - bb_7$
db	0.171614914923835347556304795551
eb	0.414192542538082326221847602214
fb	0.539412243677190440263092985511
gb	0.230293878161404779868453507244
w_1	0.051739766065744133555179145422
w_2	0.008007799555564801597804123460
w_3	0.046868898981821644823226732071
w_4	0.046590940183976487960361770070
w_5	0.031016943313796381407646220131
w_6	0.010791612736631273623178240136
w_7	0.032195534242431618819414482205
w_8	0.015445834210701583817692900053
w_9	0.017822989923178661888748319485
w_x	0.037038683681384627918546472190

Tabelle B.4: Koeffizienten für die Numerische Integration über das Einheitsdreieck

i	$x - \text{Koordinate}$	$y - \text{Koordinate}$	Wichtungsfaktor
1	ab_1	ab_1	$0.5w_1$
2	bb_1	cb_1	$0.5w_2$
3	cb_1	bb_1	$0.5w_2$
4	cb_1	cb_1	$0.5w_2$
5	cb	eb	$0.5w_3$
6	eb	db	$0.5w_3$
7	eb	eb	$0.5w_3$
8	fb	gb	$0.5w_4$
9	gb	fb	$0.5w_4$
10	gb	gb	$0.5w_4$
11	ab_2	bb_2	$0.5w_5$
12	bb_2	ab_2	$0.5w_5$
13	bb_2	bb_2	$0.5w_5$
14	ab_3	bb_3	$0.5w_6$
15	bb_3	ab_3	$0.5w_6$
16	bb_3	bb_3	$0.5w_6$
17	ab_4	bb_4	$0.5w_7$
18	bb_4	ab_4	$0.5w_7$
19	bb_4	bb_4	$0.5w_7$
20	ab_5	bb_5	$0.5w_8$
21	ab_5	cb_5	$0.5w_8$
22	bb_5	ab_5	$0.5w_8$
23	bb_5	cb_5	$0.5w_8$
24	cb_5	ab_5	$0.5w_8$
25	cb_5	bb_5	$0.5w_8$
26	ab_6	bb_6	$0.5w_9$
27	ab_6	cb_6	$0.5w_9$
28	bb_6	ab_6	$0.5w_9$
29	bb_6	cb_6	$0.5w_9$
30	cb_6	ab_6	$0.5w_9$
31	cb_6	bb_6	$0.5w_9$
32	ab_7	bb_7	$0.5wx$
33	ab_7	cb_7	$0.5wx$
34	bb_7	ab_7	$0.5wx$
35	bb_7	cb_7	$0.5wx$
36	cb_7	ab_7	$0.5wx$
37	cb_7	bb_7	$0.5wx$

Tabelle B.5: Wichtungsfaktoren für die Numerische Integration über das Einheitsdreieck

Anhang C

Gleichungen

C.1 Zweidimensionale Integration des Taylor Polynoms

C.1.1 Integration auf einem Rechteck

$$da_1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$da_2 = \frac{1}{2}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)(y_2 - y_1)$$

$$da_3 = \frac{1}{2}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)(x_2 - x_1)$$

$$da_4 = \frac{1}{3}((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)(y_2 - y_1)/3$$

$$da_5 = \frac{1}{4}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)$$

$$da_6 = \frac{1}{3}((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)(x_2 - x_1)/3$$

$$da_7 = \frac{1}{4}((x_2 - x_0)^4 - (x_1 - x_0)^4)(y_2 - y_1)/4$$

$$da_8 = \frac{1}{6}((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)$$

$$da_9 = \frac{1}{6}((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)$$

$$da_{10} = \frac{1}{4}((y_2 - y_0)^4 - (y_1 - y_0)^4)(x_2 - x_1)$$

$$da_{11} = \frac{1}{5}((x_2 - x_0)^5 - (x_1 - x_0)^5)(y_2 - y_1)$$

$$da_{12} = \frac{1}{8}((x_2 - x_0)^4 - (x_1 - x_0)^4)((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)$$

$$da_{13} = \frac{1}{9}((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)$$

$$da_{14} = \frac{1}{8}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^4 - (y_1 - y_0)^4)$$

$$da_{15} = \frac{1}{5}((y_2 - y_0)^5 - (y_1 - y_0)^5)(x_2 - x_1)$$

C.1.2 Integration auf dem Einheitsdreieck

$$da_1 = 1.0$$

$$da_2 = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + 3m_3)$$

$$da_3 = \frac{1}{3}(m_4 + m_5 + 3m_6)$$

$$da_4 = \frac{1}{6}(m_1^2 + m_2^2 + 4m_2m_3 + 6m_3^2 + m_1(m_2 + 4m_3))$$

$$da_5 = \frac{1}{12}(4m_3(m_4 + m_5 + 3m_6)m_1(2m_4 + m_5 + 4m_6) + m_2(m_4 + 2m_5 + 4m_6))$$

$$da_6 = \frac{1}{6}(m_4^2 + m_5^2 + 4m_5m_6 + 6m_6^2 + m_4(m_5 + 4m_6))$$

$$da_7 = \frac{1}{10}(m_1^3 + m_1^2m_2 + m_1m_2^2 + m_2^3 + 5(m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2)m_3 + 10(m_1 + m_2)m_3^2 + 10m_3^3)$$

$$da_8 = \frac{1}{30}[10m_3^2(m_4 + m_5 + 3m_6) + 5m_2m_3(m_4 + 2m_5 + 4m_6) + m_1^2(3m_4 + m_5 + 5m_6) + m_2^2(m_4 + 3m_5 + 5m_6) + 5m_1m_3(2m_4 + m_5 + 4m_6) + m_1m_2(2m_4 + 2m_5 + 5m_6)]$$

$$da_9 = \frac{1}{30}[5m_3m(m_4^2 + m_4m_5 + m_5^2 + 4m_4m_6 + 4m_5m_6 + 6m_6^2) + m_2(m_4^2 + 2m_4m_5 + 3m_5^2 + 5m_4m_6 + 10m_5m_6 + 10m_6^2) + 3m_1m_4^2 + m_1m_5^2 + 5m_1m_5m_6 + 10m_1m_6^2 + 2m_1m_4(m_5 + 5m_6)]$$

$$da_{10} = \frac{1}{10}(m_4^3 + m_4^2m_5 + m_4m_5^2 + m_5^3 + 5(m_4^2 + m_4m_5 + m_5^2)m_6 + 10(m_4 + m_5)m_6^2 + 10m_6^3)$$

$$da_{11} = \frac{1}{15}(m_1^4 + m_1^3m_2 + m_1^2m_2^2 + m_1m_2^3 + m_2^4 + 6m_1^3m_3 + 6m_1^2m_2m_3 + 6m_1m_2^2m_3 + 6m_2^3m_3 + 15m_1^2m_3^2 + 15m_1m_2m_3^2 + 15m_2^2m_3^2 + 20m_1m_3^3 + 20m_2m_3^3 + 15m_3^4)$$

$$\begin{aligned}
 da_{12} = & \frac{1}{60}[20m_3^3(m_4 + m_5 + 3m_6) + 15m_2m_3^2(m_4 + 2m_5 + 4m_6) + \\
 & 6m_2^2m_3(m_4 + 3m_5 + 5m_6) + m_1^3(4m_4 + m_5 + 6m_6) + m_2^3(m_4 + 4m_5 + 6m_6) + \\
 & 6m_1^2m_3(3m_4 + m_5 + 5m_6) + m_1^2m_2(3m_4 + 2m_5 + 6m_6) + \\
 & 15m_1m_2^2(2m_4 + m_5 + 4m_6) + 6m_1m_2m_3(2m_4 + 2m_5 + 5m_6) + \\
 & m_1m_2^2(2m_4 + 3m_5 + 6m_6)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{13} = & \frac{1}{90}[15m_3^2(m_4^2 + m_4m_5 + m_5^2 + 4(m_4 + m_5)m_6 + 6m_6^2) + \\
 & 6m_2m_3(m_4^2 + 2m_4m_5 + 3m_5^2 + 5(m_4 + 2m_5)m_6 + 10m_6^2) + \\
 & m_2^2(m_4^2 + 3m_4m_5 + 6m_5^2 + 6(m_4 + 3m_5)m_6 + 15m_6^2) + \\
 & m_1^2(6m_4^2 + m_5^2 + 6m_5m_6 + 15m_6^2 + 3m_4(m_5 + 6m_6)) + \\
 & m_1(m_2(3m_4^2 + 4m_4m_5 + 3m_5^2 + 12(m_4 + m_5)m_6 + 15m_6^2) + \\
 & 6m_3(3m_4^2 + m_5^2 + 5m_5m_6 + 10m_6^2 + 2m_4(m_5 + 5m_6)))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{14} = & \frac{1}{180}(12m_1m_4^3 + 3m_2m_4^3 + 18m_3m_4^3 + 9m_1m_4^2m_5 + 6m_2m_4^2m_5 + 18m_3m_4^2m_5 + \\
 & 6m_1m_4m_5^2 + 9m_2m_4m_5^2 + 18m_3m_4m_5^2 + 3m_1m_5^3 + 12m_2m_5^3 + 18m_3m_5^3 + \\
 & 54m_1m_4^2m_6 + 18m_2m_4^2m_6 + 90m_3m_4^2m_6 + 36m_1m_4m_5m_6 + 36m_2m_4m_5m_6 + \\
 & 90m_3m_4m_5m_6 + 18m_1m_5^2m_6 + 54m_2m_5^2m_6 + 90m_3m_5^2m_6 + 90m_1m_4m_6^2 + \\
 & 45m_2m_4m_6^2 + 180m_3m_4m_6^2 + 45m_1m_5m_6^2 + 90m_2m_5m_6^2 + 180m_3m_5m_6^2 + \\
 & 60m_1m_6^3 + 60m_2m_6^3 + 180m_3m_6^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{15} = & \frac{1}{15}(m_4^4 + m_4^3m_5 + m_4^2m_5^2 + m_4m_5^3 + m_5^4 + 6m_4^3m_6 + 6m_4^2m_5m_6 + 6m_4m_5^2m_6 + \\
 & 6m_5^3m_6 + 15m_4^2m_6^2 + 15m_4m_5m_6^2 + 15m_5^2m_6^2 + 20m_4m_6^3 + 20m_5m_6^3 + 15m_6^4)
 \end{aligned}$$

C.2 Dreidimensionale Integration des Taylor Polynoms

C.2.1 Integration über ein Hexaeder

$$da_1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_2 = \frac{1}{2}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_3 = \frac{1}{2}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_4 = \frac{1}{2}((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$da_5 = \frac{1}{3}((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_6 = \frac{1}{3}((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_7 = \frac{1}{3}((z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$da_8 = \frac{1}{4}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)(z_2 - z_1)$$

$$da_9 = \frac{1}{4}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)(y_2 - y_1)$$

$$da_{10} = \frac{1}{4}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)(x_2 - x_1)$$

$$da_{11} = \frac{1}{4}((x_2 - x_0)^4 - (x_1 - x_0)^4)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_{12} = \frac{1}{4}((y_2 - y_0)^4 - (y_1 - y_0)^4)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_{13} = \frac{1}{4}((z_2 - z_0)^4 - (z_1 - z_0)^4)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$da_{14} = \frac{1}{6}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)(z_2 - z_1)$$

$$da_{15} = \frac{1}{6}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3)(y_2 - y_1)$$

$$da_{16} = \frac{1}{6}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)(z_2 - z_1)$$

$$da_{17} = \frac{1}{6}((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)(y_2 - y_1)$$

$$da_{18} = \frac{1}{8}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)$$

$$da_{19} = \frac{1}{6}((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)(x_2 - x_1)$$

$$da_{20} = \frac{1}{6}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3)(x_2 - x_1)$$

$$da_{21} = \frac{1}{5}((x_2 - x_0)^5 - (x_1 - x_0)^5)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_{22} = \frac{1}{5}((y_2 - y_0)^5 - (y_1 - y_0)^5)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)$$

$$da_{23} = \frac{1}{5}((z_2 - z_0)^5 - (z_1 - z_0)^5)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$da_{24} = \frac{1}{8}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^4 - (y_1 - y_0)^4)(z_2 - z_1)$$

$$da_{25} = \frac{1}{8}((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)((x_2 - x_0)^4 - (x_1 - x_0)^4)(y_2 - y_1)$$

$$da_{26} = \frac{1}{8}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((z_2 - z_0)^4 - (z_1 - z_0)^4)(y_2 - y_1)$$

$$da_{27} = \frac{1}{9}((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)(z_2 - z_1)$$

$$da_{28} = \frac{1}{9}((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)((z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3)(y_2 - y_1)$$

$$da_{29} = \frac{1}{9}((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)((z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3)(x_2 - x_1)$$

$$da_{30} = \frac{1}{8}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((x_2 - x_0)^4 - (x_1 - x_0)^4)(z_2 - z_1)$$

$$da_{31} = \frac{1}{12}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)((x_2 - x_0)^3 - (x_1 - x_0)^3)$$

$$da_{32} = \frac{1}{12}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)((y_2 - y_0)^3 - (y_1 - y_0)^3)$$

$$da_{33} = \frac{1}{12}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2)((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3)$$

$$da_{34} = \frac{1}{8}((y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2)((z_2 - z_0)^4 - (z_1 - z_0)^4)(x_2 - x_1)$$

$$da_{35} = \frac{1}{8}((z_2 - z_0)^2 - (z_1 - z_0)^2)((y_2 - y_0)^4 - (y_1 - y_0)^4)(x_2 - x_1)$$

C.2.2 Integration über das Einheits tetraeder

$$da_1 = 1.0$$

$$da_2 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2 + m_3 + 4m_4)$$

$$da_3 = \frac{1}{4}(m_5 + m_6 + m_7 + 4m_8)$$

$$da_4 = \frac{1}{4}(m_9 + m_{10} + m_{11} + 4m_{12})$$

$$da_5 = \frac{1}{10}(m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2 + m_1m_3 + m_2m_3 + m_3^2 + 5m_1m_4 + 5m_2m_4 + 5m_3m_4 + 10m_4^2)$$

$$da_6 = \frac{1}{10}(m_5^2 + m_5m_6 + m_6^2 + m_5m_7 + m_6m_7 + m_7^2 + 5m_5m_8 + 5m_6m_8 + 5m_7m_8 + 10m_8^2)$$

$$da_7 = \frac{1}{10}(m_{10}^2 + m_{10}m_{11} + m_{11}^2 + 5m_{10}m_{12} + 5m_{11}m_{12} + 10m_{12}^2 + m_{10}m_9 + m_{11}m_9 + 5m_{12}m_9 + m_9^2)$$

$$da_8 = \frac{1}{20}(2m_1m_5 + m_2m_5 + m_3m_5 + 5m_4m_5 + m_1m_6 + 2m_2m_6 + m_3m_6 + 5m_4m_6 + m_1m_7 + m_2m_7 + 2m_3m_7 + 5m_4m_7 + 5m_1m_8 + 5m_2m_8 + 5m_3m_8 + 20m_4m_8)$$

$$da_9 = \frac{1}{20}(m_1m_{10} + m_1m_{11} + 5m_1m_{12} + 2m_{10}m_2 + m_{11}m_2 + 5m_{12}m_2 + m_{10}m_3 + 2m_{11}m_3 + 5m_{12}m_3 + 5m_{10}m_4 + 5m_{11}m_4 + 20m_{12}m_4 + 2m_1m_9 + m_2m_9 + m_3m_9 + 5m_4m_9)$$

$$da_{10} = \frac{1}{20}(m_{10}m_5 + m_{11}m_5 + 5m_{12}m_5 + 2m_{10}m_6 + m_{11}m_6 + 5m_{12}m_6 + m_{10}m_7 + 2m_{11}m_7 + 5m_{12}m_7 + 5m_{10}m_8 + 5m_{11}m_8 + 20m_{12}m_8 + 2m_5m_9 + m_6m_9 + m_7m_9 + 5m_8m_9)$$

$$\begin{aligned}
da_{11} &= \frac{1}{20}(m_1^3 + m_1^2m_2 + m_1m_2^2 + m_2^3 + m_1^2m_3 + m_1m_2m_3 + m_2^2m_3 + m_1m_3^2 + m_2m_3^2 + \\
&\quad m_3^3 + 6m_1^2m_4 + 6m_1m_2m_4 + 6m_2^2m_4 + 6m_1m_3m_4 + 6m_2m_3m_4 + \\
&\quad 6m_3^2m_4 + 15m_1m_4^2 + 15m_2m_4^2 + 15m_3m_4^2 + 20m_4^3) \\
da_{12} &= \frac{1}{20}(m_5^3 + m_5^2m_6 + m_5m_6^2 + m_6^3 + m_5^2m_7 + m_5m_6m_7 + m_6^2m_7 + m_5m_7^2 + m_6m_7^2 + \\
&\quad m_7^3 + 6m_5^2m_8 + 6m_5m_6m_8 + 6m_6^2m_8 + 6m_5m_7m_8 + 6m_6m_7m_8 + 6m_7^2m_8 + \\
&\quad 15m_5m_8^2 + 15m_6m_8^2 + 15m_7m_8^2 + 20m_8^3) \\
da_{13} &= \frac{1}{20}(m_{10}^3 + m_{10}^2m_{11} + m_{10}m_{11}^2 + m_{11}^3 + 6m_{10}^2m_{12} + 6m_{10}m_{11}m_{12} + 6m_{11}^2m_{12} + \\
&\quad 15m_{10}m_{12}^2 + 15m_{11}m_{12}^2 + 20m_{12}^3 + m_{10}^2m_9 + m_{10}m_{11}m_9 + m_{11}^2m_9 + \\
&\quad 6m_{10}m_{12}m_9 + 6m_{11}m_{12}m_9 + 15m_{12}^2m_9 + m_{10}m_9^2 + m_{11}m_9^2 + 6m_{12}m_9^2 + m_9^3) \\
da_{14} &= \frac{1}{60}(3m_1^2m_5 + 2m_1m_2m_5 + m_2^2m_5 + 2m_1m_3m_5 + m_2m_3m_5 + m_3^2m_5 + \\
&\quad 12m_1m_4m_5 + 6m_2m_4m_5 + 6m_3m_4m_5 + 15m_4^2m_5 + m_1^2m_6 + 2m_1m_2m_6 + \\
&\quad 3m_2^2m_6 + m_1m_3m_6 + 2m_2m_3m_6 + m_3^2m_6 + 6m_1m_4m_6 + 12m_2m_4m_6 + \\
&\quad 6m_3m_4m_6 + 15m_4^2m_6 + m_1^2m_7 + m_1m_2m_7 + m_2^2m_7 + 2m_1m_3m_7 + 2m_2m_3m_7 + \\
&\quad 3m_3^2m_7 + 6m_1m_4m_7 + 6m_2m_4m_7 + 12m_3m_4m_7 + 15m_4^2m_7 + 6m_1^2m_8 + \\
&\quad 6m_1m_2m_8 + 6m_2^2m_8 + 6m_1m_3m_8 + 6m_2m_3m_8 + 6m_3^2m_8 + 30m_1m_4m_8 + \\
&\quad 30m_2m_4m_8 + 30m_3m_4m_8 + 60m_4^2m_8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{15} = & \frac{1}{60}(m_1^2 m_{10} + m_1^2 m_{11} + 6m_1^2 m_{12} + 2m_1 m_{10} m_2 + m_1 m_{11} m_2 + 6m_1 m_{12} m_2 + \\
 & 3m_{10} m_2^2 + m_{11} m_2^2 + 6m_{12} m_2^2 + m_1 m_{10} m_3 + 2m_1 m_{11} m_3 + 6m_1 m_{12} m_3 + \\
 & 2m_{10} m_2 m_3 + 2m_{11} m_2 m_3 + 6m_{12} m_2 m_3 + m_{10} m_3^2 + 3m_{11} m_3^2 + 6m_{12} m_3^2 + \\
 & 6m_1 m_{10} m_4 + 6m_1 m_{11} m_4 + 30m_1 m_{12} m_4 + 12m_{10} m_2 m_4 + 6m_{11} m_2 m_4 + \\
 & 30m_{12} m_2 m_4 + 6m_{10} m_3 m_4 + 12m_{11} m_3 m_4 + 30m_{12} m_3 m_4 + 15m_{10} m_4^2 + \\
 & 15m_{11} m_4^2 + 60m_{12} m_4^2 + 3m_1^2 m_9 + 2m_1 m_2 m_9 + m_2^2 m_9 + 2m_1 m_3 m_9 + \\
 & m_2 m_3 m_9 + m_3^2 m_9 + 12m_1 m_4 m_9 + 6m_2 m_4 m_9 + 6m_3 m_4 m_9 + 15m_4^2 m_9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{16} = & \frac{1}{60}(3m_1 m_5^2 + m_2 m_5^2 + m_3 m_5^2 + 6m_4 m_5^2 + 2m_1 m_5 m_6 + 2m_2 m_5 m_6 + m_3 m_5 m_6 + \\
 & 6m_4 m_5 m_6 + m_1 m_6^2 + 3m_2 m_6^2 + m_3 m_6^2 + 6m_4 m_6^2 + 2m_1 m_5 m_7 + m_2 m_5 m_7 + \\
 & 2m_3 m_5 m_7 + 6m_4 m_5 m_7 + m_1 m_6 m_7 + 2m_2 m_6 m_7 + 2m_3 m_6 m_7 + 6m_4 m_6 m_7 + \\
 & m_1 m_7^2 + m_2 m_7^2 + 3m_3 m_7^2 + 6m_4 m_7^2 + 12m_1 m_5 m_8 + 6m_2 m_5 m_8 + 6m_3 m_5 m_8 + \\
 & 30m_4 m_5 m_8 + 6m_1 m_6 m_8 + 12m_2 m_6 m_8 + 6m_3 m_6 m_8 + 30m_4 m_6 m_8 + \\
 & 6m_1 m_7 m_8 + 6m_2 m_7 m_8 + 12m_3 m_7 m_8 + 30m_4 m_7 m_8 + 15m_1 m_8^2 + 15m_2 m_8^2 + \\
 & 15m_3 m_8^2 + 60m_4 m_8^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{17} = & \frac{1}{60}(m_{10} m_5^2 + m_{11} m_5^2 + 6m_{12} m_5^2 + 2m_{10} m_5 m_6 + m_{11} m_5 m_6 + 6m_{12} m_5 m_6 + \\
 & 3m_{10} m_6^2 + m_{11} m_6^2 + 6m_{12} m_6^2 + m_{10} m_5 m_7 + 2m_{11} m_5 m_7 + 6m_{12} m_5 m_7 + \\
 & 2m_{10} m_6 m_7 + 2m_{11} m_6 m_7 + 6m_{12} m_6 m_7 + m_{10} m_7^2 + 3m_{11} m_7^2 + 6m_{12} m_7^2 + \\
 & 6m_{10} m_5 m_8 + 6m_{11} m_5 m_8 + 30m_{12} m_5 m_8 + 12m_{10} m_6 m_8 + 6m_{11} m_6 m_8 + \\
 & 30m_{12} m_6 m_8 + 6m_{10} m_7 m_8 + 12m_{11} m_7 m_8 + 30m_{12} m_7 m_8 + 15m_{10} m_8^2 + \\
 & 15m_{11} m_8^2 + 60m_{12} m_8^2 + 3m_5^2 m_9 + 2m_5 m_6 m_9 + m_6^2 m_9 + 2m_5 m_7 m_9 + \\
 & m_6 m_7 m_9 + m_7^2 m_9 + 12m_5 m_8 m_9 + 6m_6 m_8 m_9 + 6m_7 m_8 m_9 + 15m_8^2 m_9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{18} = & \frac{1}{60}(m_1 m_{10}^2 + m_1 m_{10} m_{11} + m_1 m_{11}^2 + 6m_1 m_{10} m_{12} + 6m_1 m_{11} m_{12} + 15m_1 m_{12}^2 + \\
& 3m_{10}^2 m_2 + 2m_{10} m_{11} m_2 + m_{11}^2 m_2 + 12m_{10} m_{12} m_2 + 6m_{11} m_{12} m_2 + 15m_{12}^2 m_2 + \\
& m_{10}^2 m_3 + 2m_{10} m_{11} m_3 + 3m_{11}^2 m_3 + 6m_{10} m_{12} m_3 + 12m_{11} m_{12} m_3 + 15m_{12}^2 m_3 + \\
& 6m_{10}^2 m_4 + 6m_{10} m_{11} m_4 + 6m_{11}^2 m_4 + 30m_{10} m_{12} m_4 + 30m_{11} m_{12} m_4 + 60m_{12}^2 m_4 + \\
& 2m_1 m_{10} m_9 + 2m_1 m_{11} m_9 + 12m_1 m_{12} m_9 + 2m_{10} m_2 m_9 + m_{11} m_2 m_9 + \\
& 6m_{12} m_2 m_9 + m_{10} m_3 m_9 + 2m_{11} m_3 m_9 + 6m_{12} m_3 m_9 + 6m_{10} m_4 m_9 + \\
& 6m_{11} m_4 m_9 + 30m_{12} m_4 m_9 + 3m_1 m_9^2 + m_2 m_9^2 + m_3 m_9^2 + 6m_4 m_9^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{19} = & \frac{1}{60}(m_{10}^2 m_5 + m_{10} m_{11} m_5 + m_{11}^2 m_5 + 6m_{10} m_{12} m_5 + 6m_{11} m_{12} m_5 + 15m_{12}^2 m_5 + \\
& 3m_{10}^2 m_6 + 2m_{10} m_{11} m_6 + m_{11}^2 m_6 + 12m_{10} m_{12} m_6 + 6m_{11} m_{12} m_6 + 15m_{12}^2 m_6 + \\
& m_{10}^2 m_7 + 2m_{10} m_{11} m_7 + 3m_{11}^2 m_7 + 6m_{10} m_{12} m_7 + 12m_{11} m_{12} m_7 + 15m_{12}^2 m_7 + \\
& 6m_{10}^2 m_8 + 6m_{10} m_{11} m_8 + 6m_{11}^2 m_8 + 30m_{10} m_{12} m_8 + 30m_{11} m_{12} m_8 + 60m_{12}^2 m_8 + \\
& 2m_{10} m_5 m_9 + 2m_{11} m_5 m_9 + 12m_{12} m_5 m_9 + 2m_{10} m_6 m_9 + m_{11} m_6 m_9 + \\
& 6m_{12} m_6 m_9 + m_{10} m_7 m_9 + 2m_{11} m_7 m_9 + 6m_{12} m_7 m_9 + 6m_{10} m_8 m_9 + 6m_{11} m_8 m_9 + \\
& 30m_{12} m_8 m_9 + 3m_5 m_9^2 + m_6 m_9^2 + m_7 m_9^2 + 6m_8 m_9^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{20} = & \frac{1}{120}(2m_1m_{10}m_5 + 2m_1m_{11}m_5 + 12m_1m_{12}m_5 + 2m_{10}m_2m_5 + m_{11}m_2m_5 + \\
& 6m_{12}m_2m_5 + m_{10}m_3m_5 + 2m_{11}m_3m_5 + 6m_{12}m_3m_5 + 6m_{10}m_4m_5 + 6m_{11}m_4m_5 + \\
& 30m_{12}m_4m_5 + 2m_1m_{10}m_6 + m_1m_{11}m_6 + 6m_1m_{12}m_6 + 6m_{10}m_2m_6 + 2m_{11}m_2m_6 + \\
& 12m_{12}m_2m_6 + 2m_{10}m_3m_6 + 2m_{11}m_3m_6 + 6m_{12}m_3m_6 + 12m_{10}m_4m_6 + \\
& 6m_{11}m_4m_6 + 30m_{12}m_4m_6 + m_1m_{10}m_7 + 2m_1m_{11}m_7 + 6m_1m_{12}m_7 + 2m_{10}m_2m_7 + \\
& 2m_{11}m_2m_7 + 6m_{12}m_2m_7 + 2m_{10}m_3m_7 + 6m_{11}m_3m_7 + 12m_{12}m_3m_7 + 6m_{10}m_4m_7 + \\
& 12m_{11}m_4m_7 + 30m_{12}m_4m_7 + 6m_1m_{10}m_8 + 6m_1m_{11}m_8 + 30m_1m_{12}m_8 + \\
& 12m_{10}m_2m_8 + 6m_{11}m_2m_8 + 30m_{12}m_2m_8 + 6m_{10}m_3m_8 + 12m_{11}m_3m_8 + \\
& 30m_{12}m_3m_8 + 30m_{10}m_4m_8 + 30m_{11}m_4m_8 + 120m_{12}m_4m_8 + 6m_1m_5m_9 + \\
& 2m_2m_5m_9 + 2m_3m_5m_9 + 12m_4m_5m_9 + 2m_1m_6m_9 + 2m_2m_6m_9 + m_3m_6m_9 + \\
& 6m_4m_6m_9 + 2m_1m_7m_9 + m_2m_7m_9 + 2m_3m_7m_9 + 6m_4m_7m_9 + 12m_1m_8m_9 + \\
& 6m_2m_8m_9 + 6m_3m_8m_9 + 30m_4m_8m_9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{21} = & \frac{1}{35}(m_1^4 + m_1^3m_2 + m_1^2m_2^2 + m_1m_2^3 + m_2^4 + m_1^3m_3 + m_1^2m_2m_3 + m_1m_2^2m_3 + \\
& m_2^3m_3 + m_1^2m_3^2 + m_1m_2m_3^2 + m_2^2m_3^2 + m_1m_3^3 + m_2m_3^3 + m_3^4 + 7m_1^3m_4 + \\
& 7m_1^2m_2m_4 + 7m_1m_2^2m_4 + 7m_2^3m_4 + 7m_1^2m_3m_4 + 7m_1m_2m_3m_4 + 7m_2^2m_3m_4 + \\
& 7m_1m_3^2m_4 + 7m_2m_3^2m_4 + 7m_3^3m_4 + 21m_1^2m_4^2 + 21m_1m_2m_4^2 + 21m_2^2m_4^2 + \\
& 21m_1m_3m_4^2 + 21m_2m_3m_4^2 + 21m_3^2m_4^2 + 35m_1m_4^3 + 35m_2m_4^3 + 35m_3m_4^3 + 35m_4^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{22} = & \frac{1}{35}(m_5^4 + m_5^3 m_6 + m_5^2 m_6^2 + m_5 m_6^3 + m_6^4 + m_5^3 m_7 + m_5^2 m_6 m_7 + m_5 m_6^2 m_7 + \\
& m_6^3 m_7 + m_5^2 m_7^2 + m_5 m_6 m_7^2 + m_6^2 m_7^2 + m_5 m_7^3 + m_6 m_7^3 + m_7^4 + 7m_5^3 m_8 + \\
& 7m_5^2 m_6 m_8 + 7m_5 m_6^2 m_8 + 7m_6^3 m_8 + 7m_5^2 m_7 m_8 + 7m_5 m_6 m_7 m_8 + 7m_6^2 m_7 m_8 + \\
& 7m_5 m_7^2 m_8 + 7m_6 m_7^2 m_8 + 7m_7^3 m_8 + 21m_5^2 m_8^2 + 21m_5 m_6 m_8^2 + 21m_6^2 m_8^2 + \\
& 21m_5 m_7 m_8^2 + 21m_6 m_7 m_8^2 + 21m_7^2 m_8^2 + 35m_5 m_8^3 + 35m_6 m_8^3 + 35m_7 m_8^3 + 35m_8^4) \\
da_{23} = & \frac{1}{35}(m_{10}^4 + m_{10}^3 m_{11} + m_{10}^2 m_{11}^2 + m_{10} m_{11}^3 + m_{11}^4 + 7m_{10}^3 m_{12} + 7m_{10}^2 m_{11} m_{12} + \\
& 7m_{10} m_{11}^2 m_{12} + 7m_{11}^3 m_{12} + 21m_{10}^2 m_{12}^2 + 21m_{10} m_{11} m_{12}^2 + 21m_{11}^2 m_{12}^2 + \\
& 35m_{10} m_{12}^3 + 35m_{11} m_{12}^3 + 35m_{12}^4 + m_{10}^3 m_9 + m_{10}^2 m_{11} m_9 + m_{10} m_{11}^2 m_9 + \\
& m_{11}^3 m_9 + 7m_{10}^2 m_{12} m_9 + 7m_{10} m_{11} m_{12} m_9 + 7m_{11}^2 m_{12} m_9 + 21m_{10} m_{12}^2 m_9 + \\
& 21m_{11} m_{12}^2 m_9 + 35m_{12}^3 m_9 + m_{10}^2 m_9^2 + m_{10} m_{11} m_9^2 + m_{11}^2 m_9^2 + 7m_{10} m_{12} m_9^2 + \\
& 7m_{11} m_{12} m_9^2 + 21m_{12}^2 m_9^2 + m_{10} m_9^3 + m_{11} m_9^3 + 7m_{12} m_9^3 + m_9^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{24} = & \frac{1}{140} (4m_1^3m_5 + 3m_1^2m_2m_5 + 2m_1m_2^2m_5 + m_2^3m_5 + 3m_1^2m_3m_5 + 2m_1m_2m_3m_5 + \\
& m_2^2m_3m_5 + 2m_1m_3^2m_5 + m_2m_3^2m_5 + m_3^3m_5 + 21m_1^2m_4m_5 + 14m_1m_2m_4m_5 + \\
& 7m_2^2m_4m_5 + 14m_1m_3m_4m_5 + 7m_2m_3m_4m_5 + 7m_3^2m_4m_5 + 42m_1m_4^2m_5 + \\
& 21m_2m_4^2m_5 + 21m_3m_4^2m_5 + 35m_4^3m_5 + m_1^3m_6 + 2m_1^2m_2m_6 + 3m_1m_2^2m_6 + \\
& 4m_2^3m_6 + m_1^2m_3m_6 + 2m_1m_2m_3m_6 + 3m_2^2m_3m_6 + m_1m_3^2m_6 + 2m_2m_3^2m_6 + \\
& m_3^3m_6 + 7m_1^2m_4m_6 + 14m_1m_2m_4m_6 + 21m_2^2m_4m_6 + 7m_1m_3m_4m_6 + \\
& 14m_2m_3m_4m_6 + 7m_3^2m_4m_6 + 21m_1m_4^2m_6 + 42m_2m_4^2m_6 + 21m_3m_4^2m_6 + \\
& 35m_4^3m_6 + m_1^3m_7 + m_1^2m_2m_7 + m_1m_2^2m_7 + m_2^3m_7 + 2m_1^2m_3m_7 + 2m_1m_2m_3m_7 + \\
& 2m_2^2m_3m_7 + 3m_1m_3^2m_7 + 3m_2m_3^2m_7 + 4m_3^3m_7 + 7m_1^2m_4m_7 + 7m_1m_2m_4m_7 + \\
& 7m_2^2m_4m_7 + 14m_1m_3m_4m_7 + 14m_2m_3m_4m_7 + 21m_3^2m_4m_7 + 21m_1m_4^2m_7 + \\
& 21m_2m_4^2m_7 + 42m_3m_4^2m_7 + 35m_4^3m_7 + 7m_1^3m_8 + 7m_1^2m_2m_8 + 7m_1m_2^2m_8 + \\
& 7m_2^3m_8 + 7m_1^2m_3m_8 + 7m_1m_2m_3m_8 + 7m_2^2m_3m_8 + 7m_1m_3^2m_8 + 7m_2m_3^2m_8 + \\
& 7m_3^3m_8 + 42m_1^2m_4m_8 + 42m_1m_2m_4m_8 + 42m_2^2m_4m_8 + 42m_1m_3m_4m_8 + \\
& 42m_2m_3m_4m_8 + 42m_3^2m_4m_8 + 105m_1m_4^2m_8 + 105m_2m_4^2m_8 + 105m_3m_4^2m_8 + \\
& 140m_4^3m_8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{25} = & \frac{1}{140}(m_1^3 m_{10} + m_1^3 m_{11} + 7m_1^3 m_{12} + 2m_1^2 m_{10} m_2 + m_1^2 m_{11} m_2 + 7m_1^2 m_{12} m_2 + \\
 & 3m_1 m_{10} m_2^2 + m_1 m_{11} m_2^2 + 7m_1 m_{12} m_2^2 + 4m_{10} m_2^3 + m_{11} m_2^3 + 7m_{12} m_2^3 + \\
 & m_1^2 m_{10} m_3 + 2m_1^2 m_{11} m_3 + 7m_1^2 m_{12} m_3 + 2m_1 m_{10} m_2 m_3 + 2m_1 m_{11} m_2 m_3 + \\
 & 7m_1 m_{12} m_2 m_3 + 3m_{10} m_2^2 m_3 + 2m_{11} m_2^2 m_3 + 7m_{12} m_2^2 m_3 + m_1 m_{10} m_3^2 + \\
 & 3m_1 m_{11} m_3^2 + 7m_1 m_{12} m_3^2 + 2m_{10} m_2 m_3^2 + 3m_{11} m_2 m_3^2 + 7m_{12} m_2 m_3^2 + m_{10} m_3^3 + \\
 & 4m_{11} m_3^3 + 7m_{12} m_3^3 + 7m_1^2 m_{10} m_4 + 7m_1^2 m_{11} m_4 + 42m_1^2 m_{12} m_4 + 14m_1 m_{10} m_2 m_4 + \\
 & 7m_1 m_{11} m_2 m_4 + 42m_1 m_{12} m_2 m_4 + 21m_{10} m_2^2 m_4 + 7m_{11} m_2^2 m_4 + 42m_{12} m_2^2 m_4 + \\
 & 7m_1 m_{10} m_3 m_4 + 14m_1 m_{11} m_3 m_4 + 42m_1 m_{12} m_3 m_4 + 14m_{10} m_2 m_3 m_4 + \\
 & 14m_{11} m_2 m_3 m_4 + 42m_{12} m_2 m_3 m_4 + 7m_{10} m_3^2 m_4 + 21m_{11} m_3^2 m_4 + 42m_{12} m_3^2 m_4 + \\
 & 21m_1 m_{10} m_4^2 + 21m_1 m_{11} m_4^2 + 105m_1 m_{12} m_4^2 + 42m_{10} m_2 m_4^2 + 21m_{11} m_2 m_4^2 + \\
 & 105m_{12} m_2 m_4^2 + 21m_{10} m_3 m_4^2 + 42m_{11} m_3 m_4^2 + 105m_{12} m_3 m_4^2 + 35m_{10} m_4^3 + \\
 & 35m_{11} m_4^3 + 140m_{12} m_4^3 + 4m_1^3 m_9 + 3m_1^2 m_2 m_9 + 2m_1 m_2^2 m_9 + m_2^3 m_9 + \\
 & 3m_1^2 m_3 m_9 + 2m_1 m_2 m_3 m_9 + m_2^2 m_3 m_9 + 2m_1 m_3^2 m_9 + m_2 m_3^2 m_9 + m_3^3 m_9 + \\
 & 21m_1^2 m_4 m_9 + 14m_1 m_2 m_4 m_9 + 7m_2^2 m_4 m_9 + 14m_1 m_3 m_4 m_9 + 7m_2 m_3 m_4 m_9 + \\
 & 7m_3^2 m_4 m_9 + 42m_1 m_4^2 m_9 + 21m_2 m_4^2 m_9 + 21m_3 m_4^2 m_9 + 35m_4^3 m_9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{26} = & \frac{1}{140}(4m_1m_5^3 + m_2m_5^3 + m_3m_5^3 + 7m_4m_5^3 + 3m_1m_5^2m_6 + 2m_2m_5^2m_6 + m_3m_5^2m_6 + \\
& 7m_4m_5^2m_6 + 2m_1m_5m_6^2 + 3m_2m_5m_6^2 + m_3m_5m_6^2 + 7m_4m_5m_6^2 + m_1m_6^3 + \\
& 4m_2m_6^3 + m_3m_6^3 + 7m_4m_6^3 + 3m_1m_5^2m_7 + m_2m_5^2m_7 + 2m_3m_5^2m_7 + 7m_4m_5^2m_7 + \\
& 2m_1m_5m_6m_7 + 2m_2m_5m_6m_7 + 2m_3m_5m_6m_7 + 7m_4m_5m_6m_7 + m_1m_6^2m_7 + \\
& 3m_2m_6^2m_7 + 2m_3m_6^2m_7 + 7m_4m_6^2m_7 + 2m_1m_5m_7^2 + m_2m_5m_7^2 + 3m_3m_5m_7^2 + \\
& 7m_4m_5m_7^2 + m_1m_6m_7^2 + 2m_2m_6m_7^2 + 3m_3m_6m_7^2 + 7m_4m_6m_7^2 + m_1m_7^3 + \\
& m_2m_7^3 + 4m_3m_7^3 + 7m_4m_7^3 + 21m_1m_5^2m_8 + 7m_2m_5^2m_8 + 7m_3m_5^2m_8 + \\
& 42m_4m_5^2m_8 + 14m_1m_5m_6m_8 + 14m_2m_5m_6m_8 + 7m_3m_5m_6m_8 + 42m_4m_5m_6m_8 + \\
& 7m_1m_6^2m_8 + 21m_2m_6^2m_8 + 7m_3m_6^2m_8 + 42m_4m_6^2m_8 + 14m_1m_5m_7m_8 + \\
& 7m_2m_5m_7m_8 + 14m_3m_5m_7m_8 + 42m_4m_5m_7m_8 + 7m_1m_6m_7m_8 + \\
& 14m_2m_6m_7m_8 + 14m_3m_6m_7m_8 + 42m_4m_6m_7m_8 + 7m_1m_7^2m_8 + 7m_2m_7^2m_8 + \\
& 21m_3m_7^2m_8 + 42m_4m_7^2m_8 + 42m_1m_5m_8^2 + 21m_2m_5m_8^2 + 21m_3m_5m_8^2 + \\
& 105m_4m_5m_8^2 + 21m_1m_6m_8^2 + 42m_2m_6m_8^2 + 21m_3m_6m_8^2 + 105m_4m_6m_8^2 + \\
& 21m_1m_7m_8^2 + 21m_2m_7m_8^2 + 42m_3m_7m_8^2 + 105m_4m_7m_8^2 + 35m_1m_8^3 + 35m_2m_8^3 + \\
& 35m_3m_8^3 + 140m_4m_8^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{27} = & \frac{1}{140}(m_{10}m_5^3 + m_{11}m_5^3 + 7m_{12}m_5^3 + 2m_{10}m_5^2m_6 + m_{11}m_5^2m_6 + 7m_{12}m_5^2m_6 + \\
& 3m_{10}m_5m_6^2 + m_{11}m_5m_6^2 + 7m_{12}m_5m_6^2 + 4m_{10}m_6^3 + m_{11}m_6^3 + 7m_{12}m_6^3 + \\
& m_{10}m_5^2m_7 + 2m_{11}m_5^2m_7 + 7m_{12}m_5^2m_7 + 2m_{10}m_5m_6m_7 + 2m_{11}m_5m_6m_7 + \\
& 7m_{12}m_5m_6m_7 + 3m_{10}m_6^2m_7 + 2m_{11}m_6^2m_7 + 7m_{12}m_6^2m_7 + m_{10}m_5m_7^2 + \\
& 3m_{11}m_5m_7^2 + 7m_{12}m_5m_7^2 + 2m_{10}m_6m_7^2 + 3m_{11}m_6m_7^2 + 7m_{12}m_6m_7^2 + m_{10}m_7^3 + \\
& 4m_{11}m_7^3 + 7m_{12}m_7^3 + 7m_{10}m_5^2m_8 + 7m_{11}m_5^2m_8 + 42m_{12}m_5^2m_8 + 14m_{10}m_5m_6m_8 + \\
& 7m_{11}m_5m_6m_8 + 42m_{12}m_5m_6m_8 + 21m_{10}m_6^2m_8 + 7m_{11}m_6^2m_8 + 42m_{12}m_6^2m_8 + \\
& 7m_{10}m_5m_7m_8 + 14m_{11}m_5m_7m_8 + 42m_{12}m_5m_7m_8 + 14m_{10}m_6m_7m_8 + \\
& 14m_{11}m_6m_7m_8 + 42m_{12}m_6m_7m_8 + 7m_{10}m_7^2m_8 + 21m_{11}m_7^2m_8 + 42m_{12}m_7^2m_8 + \\
& 21m_{10}m_5m_8^2 + 21m_{11}m_5m_8^2 + 105m_{12}m_5m_8^2 + 42m_{10}m_6m_8^2 + 21m_{11}m_6m_8^2 + \\
& 105m_{12}m_6m_8^2 + 21m_{10}m_7m_8^2 + 42m_{11}m_7m_8^2 + 105m_{12}m_7m_8^2 + 35m_{10}m_8^3 + \\
& 35m_{11}m_8^3 + 140m_{12}m_8^3 + 4m_5^3m_9 + 3m_5^2m_6m_9 + 2m_5m_6^2m_9 + m_6^3m_9 + 3m_5^2m_7m_9 + \\
& 2m_5m_6m_7m_9 + m_6^2m_7m_9 + 2m_5m_7^2m_9 + m_6m_7^2m_9 + m_7^3m_9 + 21m_5^2m_8m_9 + \\
& 14m_5m_6m_8m_9 + 7m_6^2m_8m_9 + 14m_5m_7m_8m_9 + 7m_6m_7m_8m_9 + 7m_7^2m_8m_9 + \\
& 42m_5m_8^2m_9 + 21m_6m_8^2m_9 + 21m_7m_8^2m_9 + 35m_8^3m_9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{28} = & \frac{1}{140}(m_1 m_{10}^3 + m_1 m_{10}^2 m_{11} + m_1 m_{10} m_{11}^2 + m_1 m_{11}^3 + 7m_1 m_{10}^2 m_{12} + \\
& 7m_1 m_{10} m_{11} m_{12} + 7m_1 m_{11}^2 m_{12} + 21m_1 m_{10} m_{12}^2 + 21m_1 m_{11} m_{12}^2 + 35m_1 m_{12}^3 + \\
& 4m_{10}^3 m_2 + 3m_{10}^2 m_{11} m_2 + 2m_{10} m_{11}^2 m_2 + m_{11}^3 m_2 + 21m_{10}^2 m_{12} m_2 + \\
& 14m_{10} m_{11} m_{12} m_2 + 7m_{11}^2 m_{12} m_2 + 42m_{10} m_{12}^2 m_2 + 21m_{11} m_{12}^2 m_2 + 35m_{12}^3 m_2 + \\
& m_{10}^3 m_3 + 2m_{10}^2 m_{11} m_3 + 3m_{10} m_{11}^2 m_3 + 4m_{11}^3 m_3 + 7m_{10}^2 m_{12} m_3 + \\
& 14m_{10} m_{11} m_{12} m_3 + 21m_{11}^2 m_{12} m_3 + 21m_{10} m_{12}^2 m_3 + 42m_{11} m_{12}^2 m_3 + 35m_{12}^3 m_3 + \\
& 7m_{10}^3 m_4 + 7m_{10}^2 m_{11} m_4 + 7m_{10} m_{11}^2 m_4 + 7m_{11}^3 m_4 + 42m_{10}^2 m_{12} m_4 + \\
& 42m_{10} m_{11} m_{12} m_4 + 42m_{11}^2 m_{12} m_4 + 105m_{10} m_{12}^2 m_4 + \\
& 105m_{11} m_{12}^2 m_4 + 140m_{12}^3 m_4 + 2m_1 m_{10}^2 m_9 + 2m_1 m_{10} m_{11} m_9 + 2m_1 m_{11}^2 m_9 + \\
& 14m_1 m_{10} m_{12} m_9 + 14m_1 m_{11} m_{12} m_9 + 42m_1 m_{12}^2 m_9 + 3m_{10}^2 m_2 m_9 + \\
& 2m_{10} m_{11} m_2 m_9 + m_{11}^2 m_2 m_9 + 14m_{10} m_{12} m_2 m_9 + 7m_{11} m_{12} m_2 m_9 + 21m_{12}^2 m_2 m_9 + \\
& m_{10}^2 m_3 m_9 + 2m_{10} m_{11} m_3 m_9 + 3m_{11}^2 m_3 m_9 + 7m_{10} m_{12} m_3 m_9 + 14m_{11} m_{12} m_3 m_9 + \\
& 21m_{12}^2 m_3 m_9 + 7m_{10}^2 m_4 m_9 + 7m_{10} m_{11} m_4 m_9 + 7m_{11}^2 m_4 m_9 + 42m_{10} m_{12} m_4 m_9 + \\
& 42m_{11} m_{12} m_4 m_9 + 105m_{12}^2 m_4 m_9 + 3m_1 m_{10} m_9^2 + 3m_1 m_{11} m_9^2 + 21m_1 m_{12} m_9^2 + \\
& 2m_{10} m_2 m_9^2 + m_{11} m_2 m_9^2 + 7m_{12} m_2 m_9^2 + m_{10} m_3 m_9^2 + 2m_{11} m_3 m_9^2 + 7m_{12} m_3 m_9^2 + \\
& 7m_{10} m_4 m_9^2 + 7m_{11} m_4 m_9^2 + 42m_{12} m_4 m_9^2 + 4m_1 m_9^3 + m_2 m_9^3 + m_3 m_9^3 + 7m_4 m_9^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{29} = & \frac{1}{140}(m_{10}^3 m_5 + m_{10}^2 m_{11} m_5 + m_{10} m_{11}^2 m_5 + m_{11}^3 m_5 + 7m_{10}^2 m_{12} m_5 + \\
 & 7m_{10} m_{11} m_{12} m_5 + 7m_{11}^2 m_{12} m_5 + 21m_{10} m_{12}^2 m_5 + 21m_{11} m_{12}^2 m_5 + 35m_{12}^3 m_5 + \\
 & 4m_{10}^3 m_6 + 3m_{10}^2 m_{11} m_6 + 2m_{10} m_{11}^2 m_6 + m_{11}^3 m_6 + 21m_{10}^2 m_{12} m_6 + \\
 & 14m_{10} m_{11} m_{12} m_6 + 7m_{11}^2 m_{12} m_6 + 42m_{10} m_{12}^2 m_6 + 21m_{11} m_{12}^2 m_6 + 35m_{12}^3 m_6 + \\
 & m_{10}^3 m_7 + 2m_{10}^2 m_{11} m_7 + 3m_{10} m_{11}^2 m_7 + 4m_{11}^3 m_7 + 7m_{10}^2 m_{12} m_7 + \\
 & 14m_{10} m_{11} m_{12} m_7 + 21m_{11}^2 m_{12} m_7 + 21m_{10} m_{12}^2 m_7 + 42m_{11} m_{12}^2 m_7 + 35m_{12}^3 m_7 + \\
 & 7m_{10}^3 m_8 + 7m_{10}^2 m_{11} m_8 + 7m_{10} m_{11}^2 m_8 + 7m_{11}^3 m_8 + 42m_{10}^2 m_{12} m_8 + \\
 & 42m_{10} m_{11} m_{12} m_8 + 42m_{11}^2 m_{12} m_8 + 105m_{10} m_{12}^2 m_8 + 105m_{11} m_{12}^2 m_8 + 140m_{12}^3 m_8 + \\
 & 2m_{10}^2 m_5 m_9 + 2m_{10} m_{11} m_5 m_9 + 2m_{11}^2 m_5 m_9 + 14m_{10} m_{12} m_5 m_9 + 14m_{11} m_{12} m_5 m_9 + \\
 & 42m_{12}^2 m_5 m_9 + 3m_{10}^2 m_6 m_9 + 2m_{10} m_{11} m_6 m_9 + m_{11}^2 m_6 m_9 + 14m_{10} m_{12} m_6 m_9 + \\
 & 7m_{11} m_{12} m_6 m_9 + 21m_{12}^2 m_6 m_9 + m_{10}^2 m_7 m_9 + 2m_{10} m_{11} m_7 m_9 + 3m_{11}^2 m_7 m_9 + \\
 & 7m_{10} m_{12} m_7 m_9 + 14m_{11} m_{12} m_7 m_9 + 21m_{12}^2 m_7 m_9 + 7m_{10}^2 m_8 m_9 + 7m_{10} m_{11} m_8 m_9 + \\
 & 7m_{11}^2 m_8 m_9 + 42m_{10} m_{12} m_8 m_9 + 42m_{11} m_{12} m_8 m_9 + 105m_{12}^2 m_8 m_9 + 3m_{10} m_5 m_9^2 + \\
 & 3m_{11} m_5 m_9^2 + 21m_{12} m_5 m_9^2 + 2m_{10} m_6 m_9^2 + m_{11} m_6 m_9^2 + 7m_{12} m_6 m_9^2 + m_{10} m_7 m_9^2 + \\
 & 2m_{11} m_7 m_9^2 + 7m_{12} m_7 m_9^2 + 7m_{10} m_8 m_9^2 + 7m_{11} m_8 m_9^2 + 42m_{12} m_8 m_9^2 + 4m_5 m_9^3 + \\
 & m_6 m_9^3 + m_7 m_9^3 + 7m_8 m_9^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{30} = & \frac{1}{210}(6m_1^2m_5^2 + 3m_1m_2m_5^2 + m_2^2m_5^2 + 3m_1m_3m_5^2 + m_2m_3m_5^2 + m_3^2m_5^2 + \\
& 21m_1m_4m_5^2 + 7m_2m_4m_5^2 + 7m_3m_4m_5^2 + 21m_4^2m_5^2 + 3m_1^2m_5m_6 + 4m_1m_2m_5m_6 + \\
& 3m_2^2m_5m_6 + 2m_1m_3m_5m_6 + 2m_2m_3m_5m_6 + m_3^2m_5m_6 + 14m_1m_4m_5m_6 + \\
& 14m_2m_4m_5m_6 + 7m_3m_4m_5m_6 + 21m_4^2m_5m_6 + m_1^2m_6^2 + 3m_1m_2m_6^2 + 6m_2^2m_6^2 + \\
& m_1m_3m_6^2 + 3m_2m_3m_6^2 + m_3^2m_6^2 + 7m_1m_4m_6^2 + 21m_2m_4m_6^2 + 7m_3m_4m_6^2 + \\
& 21m_4^2m_6^2 + 3m_1^2m_5m_7 + 2m_1m_2m_5m_7 + m_2^2m_5m_7 + 4m_1m_3m_5m_7 + \\
& 2m_2m_3m_5m_7 + 3m_3^2m_5m_7 + 14m_1m_4m_5m_7 + 7m_2m_4m_5m_7 + 14m_3m_4m_5m_7 + \\
& 21m_4^2m_5m_7 + m_1^2m_6m_7 + 2m_1m_2m_6m_7 + 3m_2^2m_6m_7 + 2m_1m_3m_6m_7 + \\
& 4m_2m_3m_6m_7 + 3m_3^2m_6m_7 + 7m_1m_4m_6m_7 + 14m_2m_4m_6m_7 + 14m_3m_4m_6m_7 + \\
& 21m_4^2m_6m_7 + m_1^2m_7^2 + m_1m_2m_7^2 + m_2^2m_7^2 + 3m_1m_3m_7^2 + 3m_2m_3m_7^2 + 6m_3^2m_7^2 + \\
& 7m_1m_4m_7^2 + 7m_2m_4m_7^2 + 21m_3m_4m_7^2 + 21m_4^2m_7^2 + 21m_1^2m_5m_8 + 14m_1m_2m_5m_8 + \\
& 7m_2^2m_5m_8 + 14m_1m_3m_5m_8 + 7m_2m_3m_5m_8 + 7m_3^2m_5m_8 + 84m_1m_4m_5m_8 + \\
& 42m_2m_4m_5m_8 + 42m_3m_4m_5m_8 + 105m_4^2m_5m_8 + 7m_1^2m_6m_8 + 14m_1m_2m_6m_8 + \\
& 21m_2^2m_6m_8 + 7m_1m_3m_6m_8 + 14m_2m_3m_6m_8 + 7m_3^2m_6m_8 + 42m_1m_4m_6m_8 + \\
& 84m_2m_4m_6m_8 + 42m_3m_4m_6m_8 + 105m_4^2m_6m_8 + 7m_1^2m_7m_8 + 7m_1m_2m_7m_8 + \\
& 7m_2^2m_7m_8 + 14m_1m_3m_7m_8 + 14m_2m_3m_7m_8 + 21m_3^2m_7m_8 + 42m_1m_4m_7m_8 + \\
& 42m_2m_4m_7m_8 + 84m_3m_4m_7m_8 + 105m_4^2m_7m_8 + 21m_1^2m_8^2 + 21m_1m_2m_8^2 + \\
& 21m_2^2m_8^2 + 21m_1m_3m_8^2 + 21m_2m_3m_8^2 + 21m_3^2m_8^2 + 105m_1m_4m_8^2 + 105m_2m_4m_8^2 + \\
& 105m_3m_4m_8^2 + 210m_4^2m_8^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{31} = & \frac{1}{210}(m_1^2 m_{10}^2 + m_1^2 m_{10} m_{11} + m_1^2 m_{11}^2 + 7m_1^2 m_{10} m_{12} + 7m_1^2 m_{11} m_{12} + 21m_1^2 m_{12}^2 + \\
 & 3m_1 m_{10}^2 m_2 + 2m_1 m_{10} m_{11} m_2 + m_1 m_{11}^2 m_2 + 14m_1 m_{10} m_{12} m_2 + 7m_1 m_{11} m_{12} m_2 + \\
 & 21m_1 m_{12}^2 m_2 + 6m_{10}^2 m_2^2 + 3m_{10} m_{11} m_2^2 + m_{11}^2 m_2^2 + 21m_{10} m_{12} m_2^2 + 7m_{11} m_{12} m_2^2 + \\
 & 21m_{12}^2 m_2^2 + m_1 m_{10}^2 m_3 + 2m_1 m_{10} m_{11} m_3 + 3m_1 m_{11}^2 m_3 + 7m_1 m_{10} m_{12} m_3 + \\
 & 14m_1 m_{11} m_{12} m_3 + 21m_1 m_{12}^2 m_3 + 3m_{10}^2 m_2 m_3 + 4m_{10} m_{11} m_2 m_3 + 3m_{11}^2 m_2 m_3 + \\
 & 14m_{10} m_{12} m_2 m_3 + 14m_{11} m_{12} m_2 m_3 + 21m_{12}^2 m_2 m_3 + m_{10}^2 m_3^2 + 3m_{10} m_{11} m_3^2 + \\
 & 6m_{11}^2 m_3^2 + 7m_{10} m_{12} m_3^2 + 21m_{11} m_{12} m_3^2 + 21m_{12}^2 m_3^2 + 7m_1 m_{10}^2 m_4 + \\
 & 7m_1 m_{10} m_{11} m_4 + 7m_1 m_{11}^2 m_4 + 42m_1 m_{10} m_{12} m_4 + 42m_1 m_{11} m_{12} m_4 + \\
 & 105m_1 m_{12}^2 m_4 + 21m_{10}^2 m_2 m_4 + 14m_{10} m_{11} m_2 m_4 + 7m_{11}^2 m_2 m_4 + 84m_{10} m_{12} m_2 m_4 + \\
 & 42m_{11} m_{12} m_2 m_4 + 105m_{12}^2 m_2 m_4 + 7m_{10}^2 m_3 m_4 + 14m_{10} m_{11} m_3 m_4 + 21m_{11}^2 m_3 m_4 + \\
 & 42m_{10} m_{12} m_3 m_4 + 84m_{11} m_{12} m_3 m_4 + 105m_{12}^2 m_3 m_4 + 21m_{10}^2 m_4^2 + 21m_{10} m_{11} m_4^2 + \\
 & 21m_{11}^2 m_4^2 + 105m_{10} m_{12} m_4^2 + 105m_{11} m_{12} m_4^2 + 210m_{12}^2 m_4^2 + 3m_1^2 m_{10} m_9 + \\
 & 3m_1^2 m_{11} m_9 + 21m_1^2 m_{12} m_9 + 4m_1 m_{10} m_2 m_9 + 2m_1 m_{11} m_2 m_9 + 14m_1 m_{12} m_2 m_9 + \\
 & 3m_{10} m_2^2 m_9 + m_{11} m_2^2 m_9 + 7m_{12} m_2^2 m_9 + 2m_1 m_{10} m_3 m_9 + 4m_1 m_{11} m_3 m_9 + \\
 & 14m_1 m_{12} m_3 m_9 + 2m_{10} m_2 m_3 m_9 + 2m_{11} m_2 m_3 m_9 + 7m_{12} m_2 m_3 m_9 + m_{10} m_3^2 m_9 + \\
 & 3m_{11} m_3^2 m_9 + 7m_{12} m_3^2 m_9 + 14m_1 m_{10} m_4 m_9 + 14m_1 m_{11} m_4 m_9 + 84m_1 m_{12} m_4 m_9 + \\
 & 14m_{10} m_2 m_4 m_9 + 7m_{11} m_2 m_4 m_9 + 42m_{12} m_2 m_4 m_9 + 7m_{10} m_3 m_4 m_9 + \\
 & 14m_{11} m_3 m_4 m_9 + 42m_{12} m_3 m_4 m_9 + 21m_{10} m_4^2 m_9 + 21m_{11} m_4^2 m_9 + 105m_{12} m_4^2 m_9 + \\
 & 6m_1^2 m_9^2 + 3m_1 m_2 m_9^2 + m_2^2 m_9^2 + 3m_1 m_3 m_9^2 + m_2 m_3 m_9^2 + m_3^2 m_9^2 + 21m_1 m_4 m_9^2 + \\
 & 7m_2 m_4 m_9^2 + 7m_3 m_4 m_9^2 + 21m_4^2 m_9^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{32} = & \frac{1}{210}(m_{10}^2 m_5^2 + m_{10} m_{11} m_5^2 + m_{11}^2 m_5^2 + 7m_{10} m_{12} m_5^2 + 7m_{11} m_{12} m_5^2 + 21m_{12}^2 m_5^2 + \\
 & 3m_{10}^2 m_5 m_6 + 2m_{10} m_{11} m_5 m_6 + m_{11}^2 m_5 m_6 + 14m_{10} m_{12} m_5 m_6 + 7m_{11} m_{12} m_5 m_6 + \\
 & 21m_{12}^2 m_5 m_6 + 6m_{10}^2 m_6^2 + 3m_{10} m_{11} m_6^2 + m_{11}^2 m_6^2 + 21m_{10} m_{12} m_6^2 + 7m_{11} m_{12} m_6^2 + \\
 & 21m_{12}^2 m_6^2 + m_{10}^2 m_5 m_7 + 2m_{10} m_{11} m_5 m_7 + 3m_{11}^2 m_5 m_7 + 7m_{10} m_{12} m_5 m_7 + \\
 & 14m_{11} m_{12} m_5 m_7 + 21m_{12}^2 m_5 m_7 + 3m_{10}^2 m_6 m_7 + 4m_{10} m_{11} m_6 m_7 + 3m_{11}^2 m_6 m_7 + \\
 & 14m_{10} m_{12} m_6 m_7 + 14m_{11} m_{12} m_6 m_7 + 21m_{12}^2 m_6 m_7 + m_{10}^2 m_7^2 + 3m_{10} m_{11} m_7^2 + \\
 & 6m_{11}^2 m_7^2 + 7m_{10} m_{12} m_7^2 + 21m_{11} m_{12} m_7^2 + 21m_{12}^2 m_7^2 + 7m_{10}^2 m_5 m_8 + \\
 & 7m_{10} m_{11} m_5 m_8 + 7m_{11}^2 m_5 m_8 + 42m_{10} m_{12} m_5 m_8 + 42m_{11} m_{12} m_5 m_8 + \\
 & 105m_{12}^2 m_5 m_8 + 21m_{10}^2 m_6 m_8 + 14m_{10} m_{11} m_6 m_8 + 7m_{11}^2 m_6 m_8 + 84m_{10} m_{12} m_6 m_8 + \\
 & 42m_{11} m_{12} m_6 m_8 + 105m_{12}^2 m_6 m_8 + 7m_{10}^2 m_7 m_8 + 14m_{10} m_{11} m_7 m_8 + 21m_{11}^2 m_7 m_8 + \\
 & 42m_{10} m_{12} m_7 m_8 + 84m_{11} m_{12} m_7 m_8 + 105m_{12}^2 m_7 m_8 + 21m_{10}^2 m_8^2 + 21m_{10} m_{11} m_8^2 + \\
 & 21m_{11}^2 m_8^2 + 105m_{10} m_{12} m_8^2 + 105m_{11} m_{12} m_8^2 + 210m_{12}^2 m_8^2 + 3m_{10} m_5^2 m_9 + \\
 & 3m_{11} m_5^2 m_9 + 21m_{12} m_5^2 m_9 + 4m_{10} m_5 m_6 m_9 + 2m_{11} m_5 m_6 m_9 + 14m_{12} m_5 m_6 m_9 + \\
 & 3m_{10} m_6^2 m_9 + m_{11} m_6^2 m_9 + 7m_{12} m_6^2 m_9 + 2m_{10} m_5 m_7 m_9 + 4m_{11} m_5 m_7 m_9 + \\
 & 14m_{12} m_5 m_7 m_9 + 2m_{10} m_6 m_7 m_9 + 2m_{11} m_6 m_7 m_9 + 7m_{12} m_6 m_7 m_9 + m_{10} m_7^2 m_9 + \\
 & 3m_{11} m_7^2 m_9 + 7m_{12} m_7^2 m_9 + 14m_{10} m_5 m_8 m_9 + 14m_{11} m_5 m_8 m_9 + 84m_{12} m_5 m_8 m_9 + \\
 & 14m_{10} m_6 m_8 m_9 + 7m_{11} m_6 m_8 m_9 + 42m_{12} m_6 m_8 m_9 + 7m_{10} m_7 m_8 m_9 + \\
 & 14m_{11} m_7 m_8 m_9 + 42m_{12} m_7 m_8 m_9 + 21m_{10} m_8^2 m_9 + 21m_{11} m_8^2 m_9 + 105m_{12} m_8^2 m_9 + \\
 & 6m_5^2 m_9^2 + 3m_5 m_6 m_9^2 + m_6^2 m_9^2 + 3m_5 m_7 m_9^2 + m_6 m_7 m_9^2 + m_7^2 m_9^2 + 21m_5 m_8 m_9^2 + \\
 & 7m_6 m_8 m_9^2 + 7m_7 m_8 m_9^2 + 21m_8^2 m_9^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{33} = & \frac{1}{420}(3m_1^2m_{10}m_5 + 3m_1^2m_{11}m_5 + 21m_1^2m_{12}m_5 + 4m_1m_{10}m_2m_5 + 2m_1m_{11}m_2m_5 + \\
& 14m_1m_{12}m_2m_5 + 3m_{10}m_2^2m_5 + m_{11}m_2^2m_5 + 7m_{12}m_2^2m_5 + 2m_1m_{10}m_3m_5 + \\
& 4m_1m_{11}m_3m_5 + 14m_1m_{12}m_3m_5 + 2m_{10}m_2m_3m_5 + 2m_{11}m_2m_3m_5 + \\
& 7m_{12}m_2m_3m_5 + m_{10}m_3^2m_5 + 3m_{11}m_3^2m_5 + 7m_{12}m_3^2m_5 + 14m_1m_{10}m_4m_5 + \\
& 14m_1m_{11}m_4m_5 + 84m_1m_{12}m_4m_5 + 14m_{10}m_2m_4m_5 + 7m_{11}m_2m_4m_5 + \\
& 42m_{12}m_2m_4m_5 + 7m_{10}m_3m_4m_5 + 14m_{11}m_3m_4m_5 + 42m_{12}m_3m_4m_5 + \\
& 21m_{10}m_4^2m_5 + 21m_{11}m_4^2m_5 + 105m_{12}m_4^2m_5 + 2m_1^2m_{10}m_6 + m_1^2m_{11}m_6 + \\
& 7m_1^2m_{12}m_6 + 6m_1m_{10}m_2m_6 + 2m_1m_{11}m_2m_6 + 14m_1m_{12}m_2m_6 + 12m_{10}m_2^2m_6 + \\
& 3m_{11}m_2^2m_6 + 21m_{12}m_2^2m_6 + 2m_1m_{10}m_3m_6 + 2m_1m_{11}m_3m_6 + 7m_1m_{12}m_3m_6 + \\
& 6m_{10}m_2m_3m_6 + 4m_{11}m_2m_3m_6 + 14m_{12}m_2m_3m_6 + 2m_{10}m_3^2m_6 + 3m_{11}m_3^2m_6 + \\
& 7m_{12}m_3^2m_6 + 14m_1m_{10}m_4m_6 + 7m_1m_{11}m_4m_6 + 42m_1m_{12}m_4m_6 + \\
& 42m_{10}m_2m_4m_6 + 14m_{11}m_2m_4m_6 + 84m_{12}m_2m_4m_6 + 14m_{10}m_3m_4m_6 + \\
& 14m_{11}m_3m_4m_6 + 42m_{12}m_3m_4m_6 + 42m_{10}m_4^2m_6 + 21m_{11}m_4^2m_6 + 105m_{12}m_4^2m_6 + \\
& m_1^2m_{10}m_7 + 2m_1^2m_{11}m_7 + 7m_1^2m_{12}m_7 + 2m_1m_{10}m_2m_7 + 2m_1m_{11}m_2m_7 + \\
& 7m_1m_{12}m_2m_7 + 3m_{10}m_2^2m_7 + 2m_{11}m_2^2m_7 + 7m_{12}m_2^2m_7 + 2m_1m_{10}m_3m_7 + \\
& 6m_1m_{11}m_3m_7 + 14m_1m_{12}m_3m_7 + 4m_{10}m_2m_3m_7 + 6m_{11}m_2m_3m_7 + \\
& 14m_{12}m_2m_3m_7 + 3m_{10}m_3^2m_7 + 12m_{11}m_3^2m_7 + 21m_{12}m_3^2m_7 + 7m_1m_{10}m_4m_7 + \\
& 14m_1m_{11}m_4m_7 + 42m_1m_{12}m_4m_7 + 14m_{10}m_2m_4m_7 + 14m_{11}m_2m_4m_7 + \\
& 42m_{12}m_2m_4m_7 + 14m_{10}m_3m_4m_7 + 42m_{11}m_3m_4m_7 + 84m_{12}m_3m_4m_7 + \\
& 21m_{10}m_4^2m_7 + 42m_{11}m_4^2m_7 + 105m_{12}m_4^2m_7 + 7m_1^2m_{10}m_8 + 7m_1^2m_{11}m_8 + \\
& 42m_1^2m_{12}m_8 + 14m_1m_{10}m_2m_8 + 7m_1m_{11}m_2m_8 + 42m_1m_{12}m_2m_8 + 21m_{10}m_2^2m_8 + \\
& 7m_{11}m_2^2m_8 + 42m_{12}m_2^2m_8 + 7m_1m_{10}m_3m_8 + 14m_1m_{11}m_3m_8 + 42m_1m_{12}m_3m_8 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 14m_{10}m_2m_3m_8 + 14m_{11}m_2m_3m_8 + 42m_{12}m_2m_3m_8 + 7m_{10}m_3^2m_8 + 21m_{11}m_3^2m_8 + \\
& 42m_{12}m_3^2m_8 + 42m_1m_{10}m_4m_8 + 42m_1m_{11}m_4m_8 + 210m_1m_{12}m_4m_8 + \\
& 84m_{10}m_2m_4m_8 + 42m_{11}m_2m_4m_8 + 210m_{12}m_2m_4m_8 + 42m_{10}m_3m_4m_8 + \\
& 84m_{11}m_3m_4m_8 + 210m_{12}m_3m_4m_8 + 105m_{10}m_4^2m_8 + 105m_{11}m_4^2m_8 + \\
& 420m_{12}m_4^2m_8 + 12m_1^2m_5m_9 + 6m_1m_2m_5m_9 + 2m_2^2m_5m_9 + 6m_1m_3m_5m_9 + \\
& 2m_2m_3m_5m_9 + 2m_3^2m_5m_9 + 42m_1m_4m_5m_9 + 14m_2m_4m_5m_9 + 14m_3m_4m_5m_9 + \\
& 42m_4^2m_5m_9 + 3m_1^2m_6m_9 + 4m_1m_2m_6m_9 + 3m_2^2m_6m_9 + 2m_1m_3m_6m_9 + \\
& 2m_2m_3m_6m_9 + m_3^2m_6m_9 + 14m_1m_4m_6m_9 + 14m_2m_4m_6m_9 + 7m_3m_4m_6m_9 + \\
& 21m_4^2m_6m_9 + 3m_1^2m_7m_9 + 2m_1m_2m_7m_9 + m_2^2m_7m_9 + 4m_1m_3m_7m_9 + \\
& 2m_2m_3m_7m_9 + 3m_3^2m_7m_9 + 14m_1m_4m_7m_9 + 7m_2m_4m_7m_9 + 14m_3m_4m_7m_9 + \\
& 21m_4^2m_7m_9 + 21m_1^2m_8m_9 + 14m_1m_2m_8m_9 + 7m_2^2m_8m_9 + 14m_1m_3m_8m_9 + \\
& 7m_2m_3m_8m_9 + 7m_3^2m_8m_9 + 84m_1m_4m_8m_9 + 42m_2m_4m_8m_9 + 42m_3m_4m_8m_9 + \\
& 105m_4^2m_8m_9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{34} = & \frac{1}{420}(3m_1m_{10}m_5^2 + 3m_1m_{11}m_5^2 + 21m_1m_{12}m_5^2 + 2m_{10}m_2m_5^2 + m_{11}m_2m_5^2 + \\
& 7m_{12}m_2m_5^2 + m_{10}m_3m_5^2 + 2m_{11}m_3m_5^2 + 7m_{12}m_3m_5^2 + 7m_{10}m_4m_5^2 + 7m_{11}m_4m_5^2 + \\
& 42m_{12}m_4m_5^2 + 4m_1m_{10}m_5m_6 + 2m_1m_{11}m_5m_6 + 14m_1m_{12}m_5m_6 + \\
& 6m_{10}m_2m_5m_6 + 2m_{11}m_2m_5m_6 + 14m_{12}m_2m_5m_6 + 2m_{10}m_3m_5m_6 + \\
& 2m_{11}m_3m_5m_6 + 7m_{12}m_3m_5m_6 + 14m_{10}m_4m_5m_6 + 7m_{11}m_4m_5m_6 + \\
& 42m_{12}m_4m_5m_6 + 3m_1m_{10}m_6^2 + m_1m_{11}m_6^2 + 7m_1m_{12}m_6^2 + 12m_{10}m_2m_6^2 + \\
& 3m_{11}m_2m_6^2 + 21m_{12}m_2m_6^2 + 3m_{10}m_3m_6^2 + 2m_{11}m_3m_6^2 + 7m_{12}m_3m_6^2 + \\
& 21m_{10}m_4m_6^2 + 7m_{11}m_4m_6^2 + 42m_{12}m_4m_6^2 + 2m_1m_{10}m_5m_7 + 4m_1m_{11}m_5m_7 + \\
& 14m_1m_{12}m_5m_7 + 2m_{10}m_2m_5m_7 + 2m_{11}m_2m_5m_7 + 7m_{12}m_2m_5m_7 + \\
& 2m_{10}m_3m_5m_7 + 6m_{11}m_3m_5m_7 + 14m_{12}m_3m_5m_7 + 7m_{10}m_4m_5m_7 + \\
& 14m_{11}m_4m_5m_7 + 42m_{12}m_4m_5m_7 + 2m_1m_{10}m_6m_7 + 2m_1m_{11}m_6m_7 + \\
& 7m_1m_{12}m_6m_7 + 6m_{10}m_2m_6m_7 + 4m_{11}m_2m_6m_7 + 14m_{12}m_2m_6m_7 + \\
& 4m_{10}m_3m_6m_7 + 6m_{11}m_3m_6m_7 + 14m_{12}m_3m_6m_7 + 14m_{10}m_4m_6m_7 + \\
& 14m_{11}m_4m_6m_7 + 42m_{12}m_4m_6m_7 + m_1m_{10}m_7^2 + 3m_1m_{11}m_7^2 + 7m_1m_{12}m_7^2 + \\
& 2m_{10}m_2m_7^2 + 3m_{11}m_2m_7^2 + 7m_{12}m_2m_7^2 + 3m_{10}m_3m_7^2 + 12m_{11}m_3m_7^2 + \\
& 21m_{12}m_3m_7^2 + 7m_{10}m_4m_7^2 + 21m_{11}m_4m_7^2 + 42m_{12}m_4m_7^2 + 14m_1m_{10}m_5m_8 + \\
& 14m_1m_{11}m_5m_8 + 84m_1m_{12}m_5m_8 + 14m_{10}m_2m_5m_8 + 7m_{11}m_2m_5m_8 + \\
& 42m_{12}m_2m_5m_8 + 7m_{10}m_3m_5m_8 + 14m_{11}m_3m_5m_8 + 42m_{12}m_3m_5m_8 + \\
& 42m_{10}m_4m_5m_8 + 42m_{11}m_4m_5m_8 + 210m_{12}m_4m_5m_8 + 14m_1m_{10}m_6m_8 + \\
& 7m_1m_{11}m_6m_8 + 42m_1m_{12}m_6m_8 + 42m_{10}m_2m_6m_8 + 14m_{11}m_2m_6m_8 + \\
& 84m_{12}m_2m_6m_8 + 14m_{10}m_3m_6m_8 + 14m_{11}m_3m_6m_8 + 42m_{12}m_3m_6m_8 + \\
& 84m_{10}m_4m_6m_8 + 42m_{11}m_4m_6m_8 + 210m_{12}m_4m_6m_8 + 7m_1m_{10}m_7m_8 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 14m_1m_{11}m_7m_8 + 42m_1m_{12}m_7m_8 + 14m_{10}m_2m_7m_8 + 14m_{11}m_2m_7m_8 + \\
& 42m_{12}m_2m_7m_8 + 14m_{10}m_3m_7m_8 + 42m_{11}m_3m_7m_8 + 84m_{12}m_3m_7m_8 + \\
& 42m_{10}m_4m_7m_8 + 84m_{11}m_4m_7m_8 + 210m_{12}m_4m_7m_8 + 21m_1m_{10}m_8^2 + \\
& 21m_1m_{11}m_8^2 + 105m_1m_{12}m_8^2 + 42m_{10}m_2m_8^2 + 21m_{11}m_2m_8^2 + 105m_{12}m_2m_8^2 + \\
& 21m_{10}m_3m_8^2 + 42m_{11}m_3m_8^2 + 105m_{12}m_3m_8^2 + 105m_{10}m_4m_8^2 + 105m_{11}m_4m_8^2 + \\
& 420m_{12}m_4m_8^2 + 12m_1m_5^2m_9 + 3m_2m_5^2m_9 + 3m_3m_5^2m_9 + 21m_4m_5^2m_9 + \\
& 6m_1m_5m_6m_9 + 4m_2m_5m_6m_9 + 2m_3m_5m_6m_9 + 14m_4m_5m_6m_9 + 2m_1m_6^2m_9 + \\
& 3m_2m_6^2m_9 + m_3m_6^2m_9 + 7m_4m_6^2m_9 + 6m_1m_5m_7m_9 + 2m_2m_5m_7m_9 + \\
& 4m_3m_5m_7m_9 + 14m_4m_5m_7m_9 + 2m_1m_6m_7m_9 + 2m_2m_6m_7m_9 + \\
& 2m_3m_6m_7m_9 + 7m_4m_6m_7m_9 + 2m_1m_7^2m_9 + m_2m_7^2m_9 + 3m_3m_7^2m_9 + \\
& 7m_4m_7^2m_9 + 42m_1m_5m_8m_9 + 14m_2m_5m_8m_9 + 14m_3m_5m_8m_9 + 84m_4m_5m_8m_9 + \\
& 14m_1m_6m_8m_9 + 14m_2m_6m_8m_9 + 7m_3m_6m_8m_9 + 42m_4m_6m_8m_9 + \\
& 14m_1m_7m_8m_9 + 7m_2m_7m_8m_9 + 14m_3m_7m_8m_9 + 42m_4m_7m_8m_9 + 42m_1m_8^2m_9 + \\
& 21m_2m_8^2m_9 + 21m_3m_8^2m_9 + 105m_4m_8^2m_9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
da_{35} = & \frac{1}{420}(2m_1m_{10}^2m_5 + 2m_1m_{10}m_{11}m_5 + 2m_1m_{11}^2m_5 + 14m_1m_{10}m_{12}m_5 + \\
& 14m_1m_{11}m_{12}m_5 + 42m_1m_{12}^2m_5 + 3m_{10}^2m_2m_5 + 2m_{10}m_{11}m_2m_5 + m_{11}^2m_2m_5 + \\
& 14m_{10}m_{12}m_2m_5 + 7m_{11}m_{12}m_2m_5 + 21m_{12}^2m_2m_5 + m_{10}^2m_3m_5 + 2m_{10}m_{11}m_3m_5 + \\
& 3m_{11}^2m_3m_5 + 7m_{10}m_{12}m_3m_5 + 14m_{11}m_{12}m_3m_5 + 21m_{12}^2m_3m_5 + 7m_{10}^2m_4m_5 + \\
& 7m_{10}m_{11}m_4m_5 + 7m_{11}^2m_4m_5 + 42m_{10}m_{12}m_4m_5 + 42m_{11}m_{12}m_4m_5 + \\
& 105m_{12}^2m_4m_5 + 3m_1m_{10}^2m_6 + 2m_1m_{10}m_{11}m_6 + m_1m_{11}^2m_6 + 14m_1m_{10}m_{12}m_6 + \\
& 7m_1m_{11}m_{12}m_6 + 21m_1m_{12}^2m_6 + 12m_{10}^2m_2m_6 + 6m_{10}m_{11}m_2m_6 + 2m_{11}^2m_2m_6 + \\
& 42m_{10}m_{12}m_2m_6 + 14m_{11}m_{12}m_2m_6 + 42m_{12}^2m_2m_6 + 3m_{10}^2m_3m_6 + \\
& 4m_{10}m_{11}m_3m_6 + 3m_{11}^2m_3m_6 + 14m_{10}m_{12}m_3m_6 + 14m_{11}m_{12}m_3m_6 + \\
& 21m_{12}^2m_3m_6 + 21m_{10}^2m_4m_6 + 14m_{10}m_{11}m_4m_6 + 7m_{11}^2m_4m_6 + 84m_{10}m_{12}m_4m_6 + \\
& 42m_{11}m_{12}m_4m_6 + 105m_{12}^2m_4m_6 + m_1m_{10}^2m_7 + 2m_1m_{10}m_{11}m_7 + 3m_1m_{11}^2m_7 + \\
& 7m_1m_{10}m_{12}m_7 + 14m_1m_{11}m_{12}m_7 + 21m_1m_{12}^2m_7 + 3m_{10}^2m_2m_7 + 4m_{10}m_{11}m_2m_7 + \\
& 3m_{11}^2m_2m_7 + 14m_{10}m_{12}m_2m_7 + 14m_{11}m_{12}m_2m_7 + 21m_{12}^2m_2m_7 + 2m_{10}^2m_3m_7 + \\
& 6m_{10}m_{11}m_3m_7 + 12m_{11}^2m_3m_7 + 14m_{10}m_{12}m_3m_7 + 42m_{11}m_{12}m_3m_7 + \\
& 42m_{12}^2m_3m_7 + 7m_{10}^2m_4m_7 + 14m_{10}m_{11}m_4m_7 + 21m_{11}^2m_4m_7 + 42m_{10}m_{12}m_4m_7 + \\
& 84m_{11}m_{12}m_4m_7 + 105m_{12}^2m_4m_7 + 7m_1m_{10}^2m_8 + 7m_1m_{10}m_{11}m_8 + 7m_1m_{11}^2m_8 + \\
& 42m_1m_{10}m_{12}m_8 + 42m_1m_{11}m_{12}m_8 + 105m_1m_{12}^2m_8 + 21m_{10}^2m_2m_8 + \\
& 14m_{10}m_{11}m_2m_8 + 7m_{11}^2m_2m_8 + 84m_{10}m_{12}m_2m_8 + 42m_{11}m_{12}m_2m_8 + \\
& 105m_{12}^2m_2m_8 + 7m_{10}^2m_3m_8 + 14m_{10}m_{11}m_3m_8 + 21m_{11}^2m_3m_8 + 42m_{10}m_{12}m_3m_8 + \\
& 84m_{11}m_{12}m_3m_8 + 105m_{12}^2m_3m_8 + 42m_{10}^2m_4m_8 + 42m_{10}m_{11}m_4m_8 + \\
& 42m_{11}^2m_4m_8 + 210m_{10}m_{12}m_4m_8 + 210m_{11}m_{12}m_4m_8 + 420m_{12}^2m_4m_8 + \\
& 6m_1m_{10}m_5m_9 + 6m_1m_{11}m_5m_9 + 42m_1m_{12}m_5m_9 + 4m_{10}m_2m_5m_9 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 da_{35} = & 2m_{11}m_2m_5m_9 + 14m_{12}m_2m_5m_9 + 2m_{10}m_3m_5m_9 + 4m_{11}m_3m_5m_9 + \\
 & 14m_{12}m_3m_5m_9 + 14m_{10}m_4m_5m_9 + 14m_{11}m_4m_5m_9 + 84m_{12}m_4m_5m_9 + \\
 & 4m_1m_{10}m_6m_9 + 2m_1m_{11}m_6m_9 + 14m_1m_{12}m_6m_9 + 6m_{10}m_2m_6m_9 + \\
 & 2m_{11}m_2m_6m_9 + 14m_{12}m_2m_6m_9 + 2m_{10}m_3m_6m_9 + 2m_{11}m_3m_6m_9 + \\
 & 7m_{12}m_3m_6m_9 + 14m_{10}m_4m_6m_9 + 7m_{11}m_4m_6m_9 + 42m_{12}m_4m_6m_9 + \\
 & 2m_1m_{10}m_7m_9 + 4m_1m_{11}m_7m_9 + 14m_1m_{12}m_7m_9 + 2m_{10}m_2m_7m_9 + \\
 & 2m_{11}m_2m_7m_9 + 7m_{12}m_2m_7m_9 + 2m_{10}m_3m_7m_9 + 6m_{11}m_3m_7m_9 + \\
 & 14m_{12}m_3m_7m_9 + 7m_{10}m_4m_7m_9 + 14m_{11}m_4m_7m_9 + 42m_{12}m_4m_7m_9 + \\
 & 14m_1m_{10}m_8m_9 + 14m_1m_{11}m_8m_9 + 84m_1m_{12}m_8m_9 + 14m_{10}m_2m_8m_9 + \\
 & 7m_{11}m_2m_8m_9 + 42m_{12}m_2m_8m_9 + 7m_{10}m_3m_8m_9 + 14m_{11}m_3m_8m_9 + \\
 & 42m_{12}m_3m_8m_9 + 42m_{10}m_4m_8m_9 + 42m_{11}m_4m_8m_9 + 210m_{12}m_4m_8m_9 + \\
 & 12m_1m_5m_9^2 + 3m_2m_5m_9^2 + 3m_3m_5m_9^2 + 21m_4m_5m_9^2 + 3m_1m_6m_9^2 + 2m_2m_6m_9^2 + \\
 & m_3m_6m_9^2 + 7m_4m_6m_9^2 + 3m_1m_7m_9^2 + m_2m_7m_9^2 + 2m_3m_7m_9^2 + 7m_4m_7m_9^2 + \\
 & 21m_1m_8m_9^2 + 7m_2m_8m_9^2 + 7m_3m_8m_9^2 + 42m_4m_8m_9^2)
 \end{aligned}$$

Lebenslauf

10.04.1971	Geboren in Mengen
1977 – 1981	Jörg-Syrlin-Grundschule, Ulm
1981 – 1987	Anna-Essinger-Realschule, Ulm
1987 – 1991	Technisches Gymnasium/Robert-Bosch-Schule, Ulm
10/1991 – 09/1998	Universität Stuttgart Studium der Luft und Raumfahrttechnik Vertiefungen: Thermodynamik und Strömungsmechanik Studienarbeit in Thermodynamik: Numerische Behandlung der Grenzflächenspannung Diplomarbeit in Strömungsmechanik: Programmierung und Validierung eines Algorithmus zur Lösung der v -Poissongleichung bei der numerischen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen
09/1998-10/1998	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt der Universität Stuttgart
01/1999-09/2005	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Corporate Research Centre der EADS Deutschland GmbH, München Abteilung: Mechatronik and Dynamik Dissertation: Numerische Methoden zur Simulation von Schallerzeugung und Ausbreitung in Strömungen um komplexe zwei- und dreidimensionale Geometrien
seit 10/2005	Entwicklungsingenieur bei Firma Rheinmetall Waffe Munition GmbH, Unterlüß Abteilung Artillerie/Mörsermunition und gelenkte Waffen