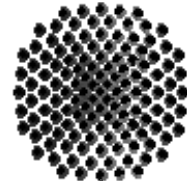




Universität Stuttgart

Geodätisches Institut



GRACE - Eismassenbilanz



Studienarbeit im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Otto Lerke

Stuttgart, Oktober 2007

Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

M. Sc. Balaji Devaraju
Universität Stuttgart

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Otto Lerke, dass ich die eingereichte Studienarbeit mit dem Thema

GRACE – Eismassenbilanz

selbstständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Ort, Datum: _____

Unterschrift: _____
(Otto Lerke)

Zusammenfassung

GRACE – Eismassenbilanz

Ziel dieser Studienarbeit ist die Erstellung von Eismassenbilanzen für das Gebiet Grönland aus Daten der GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) Mission. GRACE ist eine Schwerefeldmission die monatliche Lösungen der Kugelflächenfunktionskoeffizienten bis zum Grad 130 liefert, mit denen sowohl das statische Schwerefeld der Erde, wie auch dessen zeitliche Variation modelliert werden können. Die Beschreibung des Schwerepotentials in Kugelflächenfunktionen entspricht einer spektralen Zerlegung des Potentials in einzelne Frequenzanteile, die durch die Koeffizienten ΔC_{lm} und ΔS_{lm} repräsentiert werden. Aus den zeitlichen Änderungen der Koeffizienten lassen sich im spektralen Raum die zeitlichen Änderungen des Geoids berechnen. Aus den Änderungen des Geoids lassen sich ohne komplizierte Umformungen die zeitlichen Änderungen der Oberflächendichte generieren, die, multipliziert mit der Fläche, die Änderungen der Masse ergeben. Allerdings müssen dazu die Koeffizienten aufgrund der Verformung der Erdkruste korrigiert werden. Diese Verformung wird durch die Änderungen der Oberflächendichte und daraus resultierenden Verlagerungen der Massen verursacht. Die Auflastkorrekturen basieren auf dem mechanischen Erdmodell PREM (Preliminary Reference Earth Model) und werden als so genannte Love Zahlen eingeführt. Die Qualität der Koeffizienten nimmt jedoch mit zunehmendem Entwicklungsgrad ab, so dass bei hohem Entwicklungsgrad die Fehler größer sind als das Signal selbst. Aus diesem Grund wird versucht die stark verrauschten Anteile des Signals mittels eines räumlichen Filter vom Typ Gauss zu unterdrücken. Die zur Verfügung gestellten Daten des Geoforschungszentrums Potsdam sind Monatslösungen der Koeffizienten für den Zeitraum Februar 2003 bis November 2006 und umfassen insgesamt 44 Epochen. Mit Hilfe von erstellten und zur Verfügung gestellten Matlab Programmen wurde die Änderung der Oberflächenmassen im Gebiet Grönland untersucht. Die Untersuchungen, die sich sowohl auf das räumliche wie auch auf das zeitliche Verhalten konzentrieren, ermöglichen die Erstellung von Eismassenbilanzen.

Schlüsselwörter:

- Eismassenbilanz
- Geoid
- Oberflächendichte
- Love Zahlen
- Räumlicher Filter vom Typ Gauss

Abstract

GRACE – Ice Mass Balance

The objective of this paper is to provide ice mass balances over Greenland using GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) satellite mission data. GRACE provides monthly solutions for coefficients of the spherical harmonic function up to degree 130. By using the coefficients it is possible to calculate the static gravity field, as well as its temporal variation. The description of the gravity potential in spherical harmonics is a spectral analysis of the potential, represented by the coefficients or frequencies ΔC_{lm} und ΔS_{lm} . The temporal variation of the coefficients provides a solution for temporal variation of the geoid. The variation of the geoid is directly associated with the variation of the surface density, which multiplied by area, generates mass variations. However, the coefficients have to be corrected by the effect of deformation of the earth's crust. The deformations are caused by change of the surface density and the consequential mass movements. The load corrections are based on the mechanical earth model PREM (Preliminary Reference Earth Model) and will be introduced as Love numbers. The quality of the coefficients becomes poor for higher degrees of development, so the errors for high degrees are larger than the signal itself. In order to suppress these errors the data will be smoothed by spatial Gaussian filter. The data of the Geoforschungszentrum Potsdam are monthly solutions for coefficients in the period from February 2003 until November 2006 and contains 44 epochs. The variation of surface mass will be examined by using self made and provided Matlab programs. This research that includes spatial as well as temporal behaviour allows generating ice mass balances.

Key words:

- ice mass balance
- geoid
- surface density
- Love numbers
- spatial Gaussian filter

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
2 GRACE Missionsbeschreibung	3
2.1 Allgemeines zur GRACE–Mission	3
2.2 Funktionsprinzip	4
2.3 Instrumentierung	4
2.4 Orbitparameter	6
3 Schwerefeld der Erde und Masseschätzungen	7
3.1 Legendre Polynome und Kugelflächenfunktionen	7
3.1.1 Legendre Polynome	7
3.1.2 Kugelflächenfunktionen	8
3.2 Schwerefeld	9
3.3 Geoid	12
3.4 Zusammenhang zwischen der Änderungen des Geoids und der Änderung der Oberflächenmassenverteilung	13
4 Filterung und Glättung des Schwerefeldes	17
4.1 Filterung des Schwerefeldes	17
4.2 Räumliches Mitteln unter Verwendung des Gauss Filters	18
4.3 Tiefpass Filter	21
4.4 Pellinen Filter	21
5 Eismassenbilanzierung	23
6 Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse	36
Programmverzeichnis	38
Literaturverzeichnis	40

Abbildungsverzeichnis

- 1.1: Globale Temperaturentwicklung [<http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur> (2007)]
- 2.1: Komponenten der Instrumentierung der GRACE Satelliten [Astrium GmbH (2007)]
- 3.1: Kugelflächenfunktionen [L. Zenner (2006)]
- 3.2: Geoidmodell
- 3.3: Schwerefeldmodell
- 4.1: Geoidmodell, Anwendung des Gaussfilters $R= 500$ km
- 4.2: Spektrale Gewichtskoeffizienten des Gaussfilters $R = 500$ km
- 4.3: Geoidmodell, Anwendung des Gaussfilters $R= 750$ km
- 4.4: Spektrale Gewichtskoeffizienten des Gaussfilters $R = 750$ km
- 4.5: Geoidmodell, Anwendung des Gaussfilters $R= 1000$ km
- 4.6: Spektrale Gewichtskoeffizienten des Gaussfilters $R = 1000$ km
- 4.7: Geoidmodell, Anwendung des Tiefpassfilters $N = 30$
- 4.8: Spektrale Gewichtskoeffizienten des Tiefpassfilters $N = 30$
- 4.9: Geoidmodell, Anwendung des Pellinenfilters $R = 750$ km
- 4.10: Spektrale Gewichtskoeffizienten des Pellinenfilters $R = 750$ km
- 5.1: Quadratisches Mittel der Standardabweichungen: RMS, Beispielmonat Juni 2004, und Gaussfilter mit verschiedenen Parametern
- 5.2: Grönlandmaske

- 5.3: gefilterte Massedifferenzen ausgewählter Monate, Darstellung mit Grönlandmaske
- 5.4: gefilterte Massedifferenzen ausgewählter Monate, Darstellung ohne Grönlandmaske
- 5.5: Darstellung $\frac{dM}{dt}$ für verschiedene Filterparameter, mit Grönlandmaske
- 5.6: Darstellung $\frac{dM}{dt}$ für verschiedene Filterparameter, ohne Grönlandmaske
- 5.7: Zeitliches Verhalten der Massedifferenzen, Darstellung für verschiedene Filterparameter
- 5.8: Zeitlicher Vergleich der unterschiedlichen Lösungen der Massedifferenzen
- 5.9: Trends
- 5.10: Jahresbetrachtung der Massedifferenzen für Gaussfilter Parameter $R = 500$ km
- 5.11: Vergleich der Jahre
- 5.12: Zeitlicher Vergleich der Massedifferenzen, mit/ ohne Grönlandmaske

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Love-Zahlen [Wahr, Molenaar, Bryan 1998]

Tabelle 2: Zusammenstellung der berechneten Masseabnahmen (mit Grönlandmaske)

Tabelle 3: Zusammenstellung der berechneten Massezunahmen (ohne Grönlandmaske)

1 Einleitung

Seit der Veröffentlichung des aktuellen UN-Klimaberichts im Februar 2007, an dem 2500 Forscher aus verschiedenen Nationen beteiligt waren, geht man von einer messbaren globalen Temperaturerhöhung aus [[http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur \(02.2007\)a](http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur (02.2007)a)].

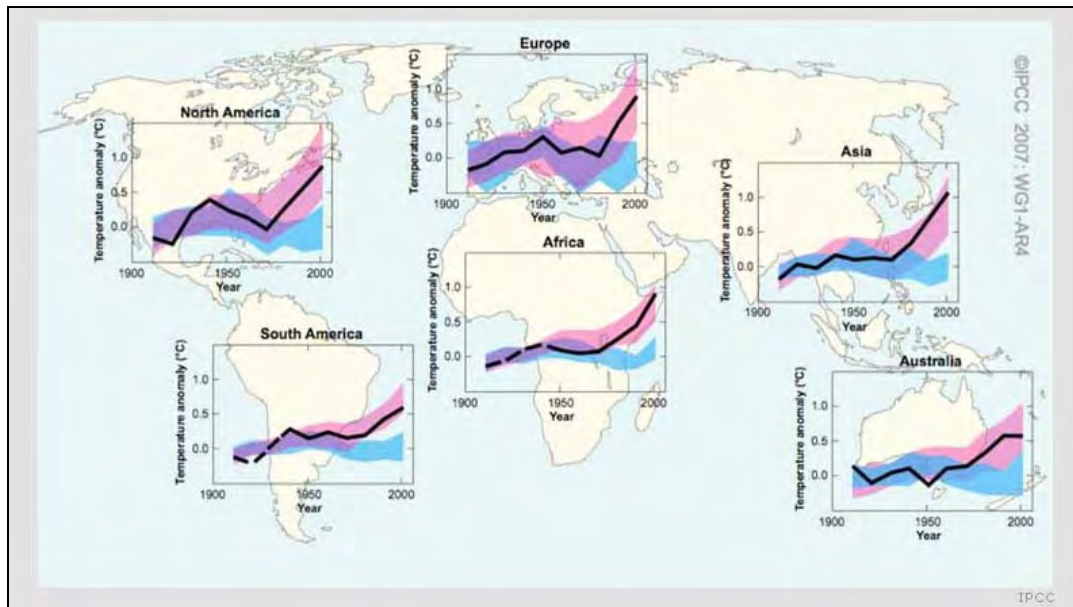


Abb. 1.1: Globale Temperaturentwicklung, Quelle: [http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur \(02.2007\)](http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur (02.2007))

Die Folgen einer solchen Temperaturerhöhung sind bis zum heutigen Zeitpunkt nur schwer abzuschätzen. Jedoch kann man heute schon ein immer schnelleres Voranschreiten der Abschmelzung der Eismassen an den Polen, sowie den Rückgang der kontinentalen Eisgebiete feststellen. Dieses Abschmelzen würde laut UN bis zum Ende des Jahrhunderts einen Anstieg des Meeresspiegels von 28 bis 59 cm verursachen und damit viele bewohnte Küstenregionen bedrohen.

Der Rückgang der Eismassen wird heute auf verschiedene Arten gemessen und überwacht. Die Methoden erlauben Masseschätzung des Eises in verschiedenen Regionen und Erstellungen von Eismassenbilanzen. Die Bilanzen basieren sowohl auf Daten aus Wetterstationen und direkten Eisdickemessungen, als auch auf simulierten Datensätzen, sowie auf satellitengestützten Datensätzen wie z.B. aus der Altimetrie, oder Schwerebeobachtungen.

Diese Studienarbeit behandelt die Erstellung von Eismassebilanzen aus Schwerefeldmessungen der GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment)-Mission. Das globale Schwerefeld spielt eine wichtige Rolle in verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen wie z.B.: Geophysik, Ozeanographie, Klimatologie und der Glaziologie. Die

Bestimmung der zeitlichen Variation des globalen Schwerefeldes ermöglicht es geodynamische Prozesse im Erdinneren sowie auf der Erdoberfläche zu erfassen und zu verstehen [Zenner 2006a: 2].

Durch die Schwerefeldmissionen CHAMP und GRACE gelang es, die Genauigkeit der räumlichen und zeitlichen Auflösung des globalen Schwerefeldes, zu verbessern. GRACE ermöglicht sowohl die Berechnung des statischen Gravitationsfeldes sowie dessen zeitliche Variation mit einer räumlichen Auflösung von wenigen hundert Kilometer und einer zeitlichen Auflösung von einem Tag [Zenner 2006b: 2].

Die Ursachen für Schwerefeldvariationen liegen in den Masseverlagerungen auf der Erde. Diese finden sowohl in der Erdkruste und dem Erdinneren, als auch in der Atmosphäre, den Ozeanen und den großen Eisgebieten statt. Des Weiteren haben Schwankungen des Grundwasserspiegels und der Bodenfeuchte wie auch Schneebedeckungen Einfluss auf das Schwerefeld der Erde. Die Ursachen haben alle ein unterschiedliches zeitliches und räumliches Verhalten und unterliegen saisonalen, kurz- und langperiodischen Schwankungen [Zenner 2006c: 2].

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich in folgende Abschnitte:

- Kapitel 2 liefert eine Beschreibung der GRACE- Mission unter dem Gesichtspunkt der Missionsziele, den wichtigsten technischen Komponenten, sowie die Beschreibung der Orbits.
- Im Kapitel 3 werden die mathematischen Grundlagen zur Berechnung des Gravitationsfeldes aufgeführt, sowie der Zusammenhang zwischen Geoid und Oberflächenmassenverteilung hergeleitet.
- Kapitel 4 beschäftigt sich mit Filtertechniken, die zur Glättung des Schwerefeldes verwendet werden und erläutert die Notwendigkeit des Filterns.
- Abschließend wird in Kapitel 5 der Versuch unternommen Eismassen im Gebiet Grönland zu schätzen und die Daten mit verschiedenen Filtern zu glätten.
- Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse kritisch diskutiert und analysiert

2 GRACE Missionsbeschreibung

2.1 Allgemeines zur GRACE-Mission

Die GRACE-Mission wurde am 17. März 2002 vom russischen Weltraumbahnhof Pletsek gestartet. Die Mission ist ein Gemeinschaftsprojekt der Amerikanischen Weltraumagentur (NASA), dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), dem Center for Space Research (UTCSR) an der Universität von Texas in Austin, sowie dem Geoforschungszentrum Potsdam (GFZ) und den Jet Propulsion Laboratories (JPL).

Neben der Atmosphärenforschung ist das wichtigste Ziel der auf fünf Jahre ausgelegten Mission die verbesserte Bestimmung des Erdschwerefeldes. Dabei sollen mit einer räumlichen Auflösung von ca. 150 km globale Schwerefeldmodelle bis zum Entwicklungsgrad 130 abgeleitet werden. Die Mission liefert etwa alle 30 Tage Schwerefelder mit dieser Auflösung. Über die Dauer der Mission sollen verschiedene wissenschaftliche Disziplinen wie Geologie, Hydrologie, Ozeanographie oder Glaziologie von GRACE profitieren [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/index_GRACE.html].

Das Projekt ist in 5 große Systeme untergliedert in denen sich die beteiligten Instanzen die Verantwortung teilen.

Im Folgenden werden die einzelnen Verantwortungsgebiete nach Systemen eingeteilt:

1. Satellite System (SAT)
 - Bau der beiden Satelliten
 - Installation des Lagekontrollsystems
 - Installation des Mikrowellen Entfernungsmessinstruments
 - Installation des Systems für Umweltversuche
2. Science Instrument System (SIS)
 - Alle Elemente des Entfernungsmessinstruments
 - GPS-Empfänger
 - Beschleunigungsmesser
 - Sternenkamera
 - Laserreflektoren
3. Science Data System (SDS)
 - Prozessierungsaufgaben
 - Harmonisierung der Produkte
 - Kalibrierung der Produkte

4. Launch Vehicle System (LVS)
 - ROCKOT Trägerrakete
 - Multisatellit-Trägersystem
 - Vorbereitung und Kontrolle des Starts
5. Mission Operation System (MOS)
 - Trackingstationen
 - Überwachung und Steuerung des Satelliten
 - Belieferung des SDS mit Daten für weitere Produktgenerierung

Das GRACE Raumsegment besteht aus zwei baugleichen Raumfahrzeugen, die auf identischen Orbits im Abstand von ca. 220 km hintereinander herfliegen. Jedes hat ein Gewicht von 485 kg.

2.2 Funktionsprinzip

Physikalisch gesehen hängt die Gravitationskraft eines Körpers von dessen Masse ab. Massebewegungen auf der Erde finden jedoch, wie bereits erwähnt, in verschiedenen Formen permanent statt. Diese ungleichmäßige Masseverteilung verursacht ein zeitlich abhängiges, inhomogenes Gravitationsfeld. Somit werden Regionen mit stärkerer Gravitationskraft den ersten Satelliten so beeinflussen dass sich dieser vom zweiten leicht entfernt. Diese Änderung wird mit einem präzisen Mikrowellen-Entfernungsmessinstrument erfasst. Die Genauigkeit des Instruments beträgt $1 \text{ } [\mu\text{m}/\text{s}]$ [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/index_GRACE.html]. Die Entfernungsänderungen und die Rate der Änderungen werden über Algorithmen in zeitliche Änderungen der Koeffizienten der Kugelflächenfunktion des Geoids ΔC_{nm} und ΔS_{nm} überführt. Diese Größen werden im Kapitel 3 ausführlich behandelt.

2.3 Instrumentierung

Jeder Satellit trägt einen GPS- Empfänger für die Positionierung, einen hochpräzisen Beschleunigungsmesser zur Messung nicht gravitativer Kräfte wie z. B. Luftwiderstand oder Solardruck, sowie zwei Sternensensoren um die Orientierung des Satelliten festzustellen.

Das hochgenaue Satellit-Satellit K-Band Entfernungsmessinstrument ist der Kern der Instrumentierung bezüglich der Missionsziele. Darüber hinaus hat das Geoforschungszentrum Potsdam an jedem Satelliten je zwei Reflektoren angebracht, um Lasermessungen von der Bodenstation durchführen zu können. Diese dienen einer von GPS

unabhängigen Orbitbestimmung und der direkten Entfernungsmessung zwischen den Laser-Bodenstationen und den Satelliten.

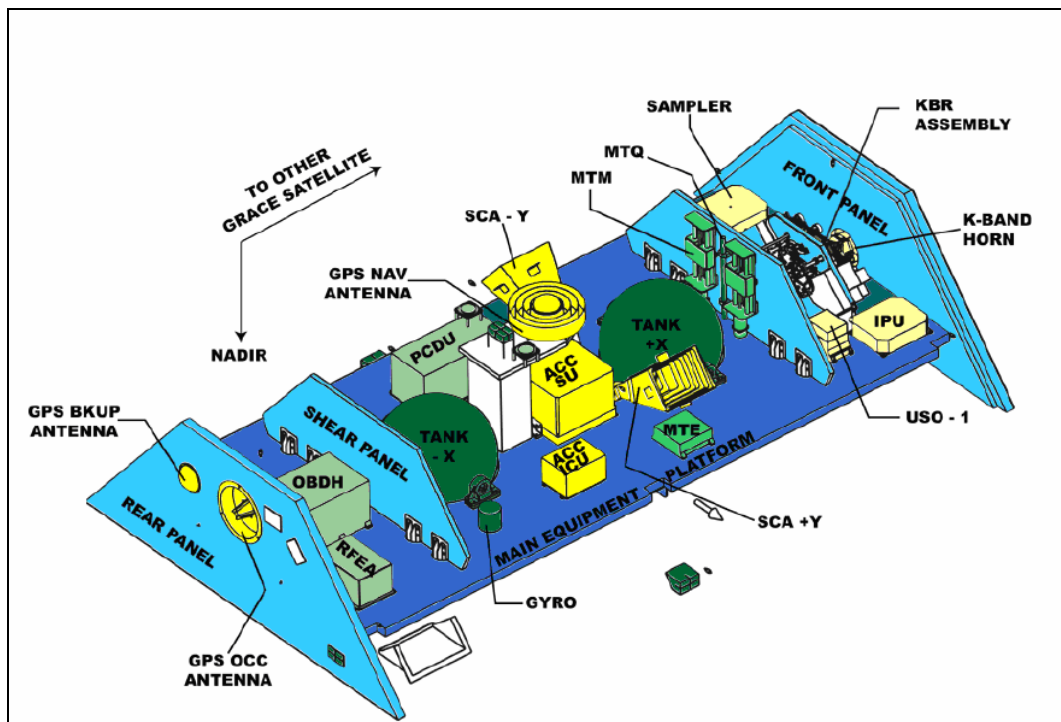


Abb. 2.1: Instrumentierung des GRACE Satelliten

Quelle: Astrium GmbH

- GPS-Empfänger

Der Empfänger ist das wichtigste Gerät zur Bestimmung der Position des Satelliten. Aus Laufzeitmessungen zwischen den GPS-Satelliten in 20000 km Höhe und den GRACE-Satelliten in etwa 500 km Höhe lassen sich Position und Geschwindigkeit der beiden GRACE Satelliten bestimmen. Das Verfahren trägt den Namen High-Low Satellite-to-Satellite Tracking. Die Genauigkeit liegt bei wenigen Zentimetern. Zusätzlich lassen sich aus GPS-Messungen Atmosphärenprofile bestimmen.

- Beschleunigungsmesser

Das Instrument registriert Störbeschleunigungen, die kontinuierlich auf den Satelliten einwirken. Die Messungen dienen zur Separation nichtgravitativer Beschleunigungen vom Gesamtsignal. Dadurch lassen sich die Schwerefeldparameter C_{nm} , S_{nm} bestimmen.

- K-Band Entfernungsmessgerät

Das Instrument ermöglicht präzise Entfernungsmessungen zwischen den Satelliten im μm Bereich. Dabei ist die Entfernungsänderung zwischen den beiden Satelliten ein Maß für die

unterschiedlichen Gravitationsbeschleunigungen die auf die beiden Satelliten wirken, welche durch Masseanomalien unterhalb der Flugbahn verursacht werden.

- Laser-Retroreflektoren

Die Reflektoren werden dazu benutzt Entfernungsmessungen von den Bodenstationen zu den beiden Satelliten durchzuführen. Durch dieses Verfahren namens Satellite-Laser-Ranging (SLR) lassen sich unabhängig von den GPS-Messungen die Orbits überprüfen.

- Sternkameras

Jeder Satellit trägt zwei Sternkameras mit sich, mit Hilfe derer die inertielle Lage der Beschleunigungssensoren festgelegt wird. Damit lässt sich die Orientierung der Satelliten im Raum festlegen und somit auch die Ausrichtung der Achsen der Beschleunigungsmesser.

2.4 Orbitparameter

Die Satelliten bewegen sich in einer Höhe von ca. 500 km auf einer niedrigen Erdumlaufbahn (Low Earth Orbit, LEO). Die Umlaufzeit beträgt 95 Minuten auf einer annähernd polaren Bahn.

Die Parameter sind im Folgenden zusammengestellt:

Große Halbachse:	$a = 6835855.717 \text{ m}$
Exzentrizität:	$e = 0.003398$
Inklination:	$i = 89.050^\circ$
Knoten:	$\Omega = 105.320^\circ$
Argument des Perigäums:	$\omega = 142.605^\circ$
Mittlere Anomalie:	$M = 157.018^\circ$
Umlaufzeit:	$T = 95 \text{ Minuten}$

3 Schwerefeld der Erde und Masseschätzungen

3.1 Legendre Polynome und Kugelflächenfunktionen

Bevor die Modellierung des globalen Gravitationsfeldes vollzogen werden kann, werden zunächst ein wichtiges mathematisches Instrument und dessen Eigenschaften vorgestellt; die so genannten Kugelflächenfunktionen.

3.1.1 Legendre Polynome

Nach Sneeuw [Sneeuw 2006a: 80] bilden die Legendre Polynome ein orthogonales System von Basisfunktionen. Dies bedeutet, dass jede beliebige Funktion $f(t)$ im Intervall $[-1 \leq t \leq 1]$ durch eine Reihe von Legendre Funktionen dargestellt werden kann.

$$\text{Analyse: } c_n = \int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt \quad (3.1)$$

$$\text{Orthogonalität: } \int_{-1}^1 P_n(t)P_l(t)dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl} \quad (3.2)$$

$$\text{Synthese: } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} c_n P_n(t) \quad (3.3)$$

Die Legendre Funktionen lassen sich durch die Formel von Rodriguez:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (3.4)$$

oder durch die Rekursionsformel berechnen:

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n + nP_{n-1}(t) = 0. \quad (3.5)$$

Nach der Multiplikation der m-ten Ableitung des Polynoms mit der Gewichtsfunktion $(1-t^2)^{\frac{m}{2}}$ erhält man die assoziierten Legendre Polynome vom Grad n und Ordnung m:

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (3.6)$$

Diese werden dann zur Normierung [Sneeuw 2006b: 88] mit dem Faktor

$$H_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2n+1} & \text{für } m = 0 \\ \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & \text{für } m \neq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

multipliziert.

Die Formel zur Berechnung des vollständig normierten, assoziierten Legendre Polynoms vom Grad n und Ordnung m lautet dann:

$$\bar{P}_{nm} = H_{nm} P_{nm} \quad (3.8)$$

3.1.2 Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen \hat{Y}_{nm} entstehen aus der Kombination zweier Systeme von Basisfunktionen [Sneeuw 2006c: 99] und sind definiert zu:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{nm}^C \\ \hat{Y}_{nm}^S \end{cases} = \bar{P}_{nm}(\cos \varphi) \begin{cases} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{cases} \quad (3.9)$$

Mit diesen Funktionen lässt sich jede beliebige zweidimensionale Funktion $f(\varphi, \lambda)$ darstellen. Ebenfalls gelten für Kugelflächenfunktionen die Fundamentalbeziehungen:

$$\text{Analyse: } \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} f(\varphi, \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \varphi) \begin{cases} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{cases} \sin \varphi d\lambda d\varphi \quad (3.10)$$

und

Synthese: $f(\varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \bar{P}_{nm}(\cos \varphi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda))$ (3.11)

Somit kann eine beliebige Funktion auf der Kugeloberfläche in ihre spektralen Koeffizienten C_{nm} und S_{nm} zerlegt werden.

Es wird zwischen drei verschiedene Arten von Kugelfunktionskoeffizienten unterschieden:

- zonale Koeffizienten: n beliebig, $m = 0$
- tesseral Koeffizienten: n beliebig, m beliebig
- sektorielle Koeffizienten: $n = |m|$

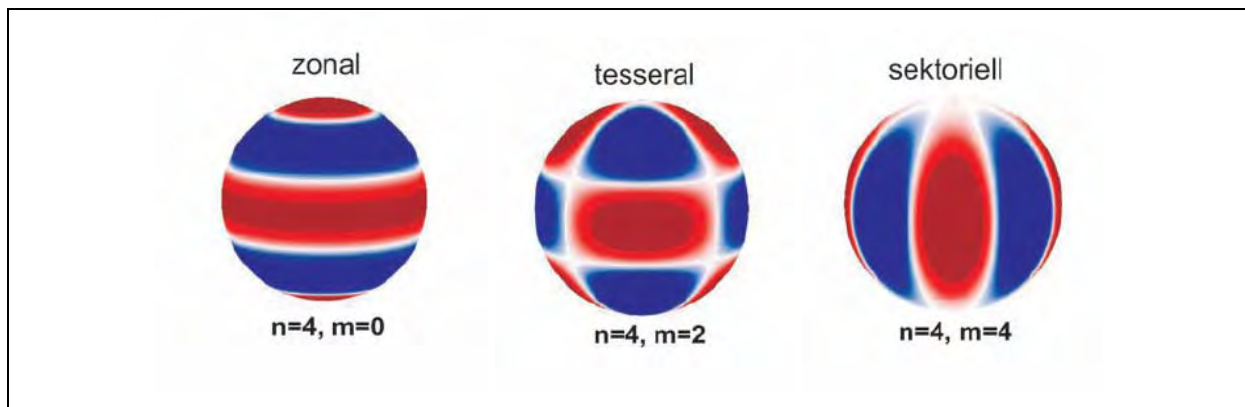


Abb. 3.1: Kugelflächenfunktionen, Quelle: Zenner, 2006: S.97

3.2 Schwerefeld

Das Schwerepotential W an einem beliebigen Punkt P der Erde setzt sich einmal aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential Z zusammen [Zenner 2006d: 6].

$$W(x_P, y_P, z_P) = V(x_P, y_P, z_P) + Z(x_P, y_P, z_P) = G \iiint_{\text{Erde}} \frac{\rho_Q}{l_{PQ}} dV + \frac{1}{2} \omega^2 (x_P^2 + y_P^2) \quad (3.12)$$

mit

x_P, y_P, z_P	geozentrische kartesische Koordinaten des Punktes P in Meter
G	Gravitationskonstante
ρ_Q	Dichte am Quellpunkt
l_{PQ}	Abstand des Punktes P vom Quellpunkt Q
dV	Volumenelement

ω Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation

Der Term

$$G \iiint_{\text{Erde}} \frac{\rho_Q}{I_{PQ}} dV \quad (3.13)$$

stellt dabei einen Teil des Newtonsche Gravitationsgesetz dar.

Die Berechnung des Zentrifugalpotentials bereitet keine Probleme, da die Winkelgeschwindigkeit der Erde sehr genau aus geodätischen Raumverfahren bekannt ist und das Global Positioning System (GPS) die Koordinaten für den Punkt P liefert. Auch ist anzumerken, dass die Zentrifugalbeschleunigung, also der Gradient des Zentrifugalpotentials nur einen kleinen Prozentsatz der Gravitationsbeschleunigung darstellt. Die Problematik liegt in der Berechnung des Gravitationspotentials V , da die Dichteverteilung innerhalb der Erde erstens nicht homogen und zweitens nicht hinreichend genau bekannt ist.

Somit lässt sich das Newtonsche Gravitationsgesetz nicht für die Schwerefeldberechnung verwenden.

Ein Ansatz für die Lösung des Problems ist die geodätische Randwertaufgabe [Sneeuw 2006d: 71]. Ein solches Randwertproblem kann für den Außenraum der Erde mit der Laplace Differentialgleichung beschrieben werden.

$$\Delta V(x, y, z) = 0 \quad (3.14)$$

oder in sphärischen Koordinaten

$$\Delta V(r, \varphi, \lambda) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (3.15)$$

Die Differentialgleichung kann nur gelöst werden wenn erstens die Randbedingungen und zweitens die Geometrie der Fläche bekannt sind. Die Randbedingungen sind mit

$$\operatorname{div} [\text{Vektorfeld}] = \begin{cases} -4\pi G\rho & \text{innerhalb der Erdschale} \\ 0 & \text{außerhalb der Erdschale} \end{cases}$$

bekannt. Die Geometrie ist unbekannt, da das Schwerfeld keine mathematische Fläche ist. Es wird also eine Funktion gesucht, die die Laplace Differentialgleichung löst. Diese Eigenschaften besitzen die im Kapitel 3.1 vorgestellten Kugelflächenfunktionen.

Somit lässt sich das Gravitationspotential für den Außenraum wie folgt in Kugelflächenfunktionen entwickeln [Sneeuw 2006e: 79]:

$$V(r_P, \varphi_P, \lambda_P) = \frac{GM}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi_P) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda_P) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda_P)) \quad (3.16)$$

mit

$r_P, \varphi_P, \lambda_P$ geozentrische sphärische Koordinaten des Punktes P

R Erdradius

GM Gravitationskonstante * Erdmasse

\bar{P}_{nm} normierte zugeordnete Legendre Polynome; Grad n , Ordnung m

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ normierte Kugelflächenfunktionskoeffizienten; Grad n , Ordnung m

Die Entwicklung des Potentials in Kugelflächenfunktionen entspricht einer spektralen Zerlegung des Gravitationsfeldes [Zenner 2006e: 7]. Dabei stellen die Koeffizienten $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ die einzelnen Wellenlängen des Gesamtpotentials dar. Auch die Information über die Dichteverteilung im Erdinneren ist in den Koeffizienten enthalten.

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{M} \iiint_{\text{Erde}} \left(\frac{r_Q}{R} \right)^n \rho_Q \bar{P}_{nm}(\cos \varphi_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} dV \quad (3.17)$$

mit

M Erdmasse

Somit lässt sich das Gravitationspotential bei bekannten Koeffizienten $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ nach der Formel (3.16) berechnen. Diese Koeffizienten werden vom SDS der GRACE-Mission zur Verfügung gestellt.

3.3 Geoid

Das Geoid stellt im Gegensatz zur geometrischen Beschreibung durch das Ellipsoid eine rein physikalische Definition der Erdfigur dar. Auf Grund der inhomogenen Masseverteilung auf der Erde ist das Geoid eine sehr unregelmäßige Fläche und für mathematische Berechnungen deshalb nicht geeignet. Um die mathematischen Ansprüche erfüllen zu können wird deshalb ein bestangepasstes Ellipsoid dem Geoid zugewiesen. Diese Fläche lässt sich in geschlossenen Formeln darstellen und wird als Rechenfläche verwendet. Dem so genannten Niveauellipsoid wird das Normalschwerepotential U zugeordnet. Die Aufgabe besteht also darin, die Potentialdifferenz zwischen der physikalischen Fläche, dem Geoid und der mathematischen Fläche, dem Niveauellipsoid, zu bestimmen [Sneeuw 2006f: 103]. Dieser Unterschied wird in der Literatur als das Störpotential δw bezeichnet.

$$\delta w = W - U \quad (3.18)$$

mit

W Schwerepotential aus physikalischen Messungen

U Normalschwerepotential, rein mathematisch

δw kann analog zur Gleichung (3.16) nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden.

$$\delta w(r_P, \varphi_P, \lambda_P) = \frac{GM}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi_P) (\Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda_P) + \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda_P)) \quad (3.19)$$

mit $\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{c}_{nm}$ und $\Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} - \bar{s}_{nm}$, wobei \bar{c}_{nm} und \bar{s}_{nm} die Koeffizienten des ellipsoidischen Normalschwerefeldes sind.

Aus diesem Störpotential lassen sich nun mit der Formel von Bruns die Geoidhöhen N berechnen.

$$\text{Formel von Bruns: } N(P) = \frac{\delta w(P)}{\gamma_P} \quad (3.20)$$

mit

γ_P Normalschwere im Punkt P

Die Geoidhöhen für einen Punkt P lassen sich dann mit den Gleichungen (3.16) und (3.20) wie folgt darstellen:

$$\Delta N(P) = -\frac{GM}{r_P \gamma_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi_P) (\Delta C_{nm} \cos(m\lambda_P) + \Delta S_{nm} \sin(m\lambda_P)) \quad (3.21)$$

Das Geoid kann auch alternativ mit der Integralformel von Stokes berechnet werden. Dies würde einer Berechnung im Ortsraum entsprechen. Im Rahmen dieser Studienarbeit sind die Berechnungen auf den spektralen Bereich begrenzt.

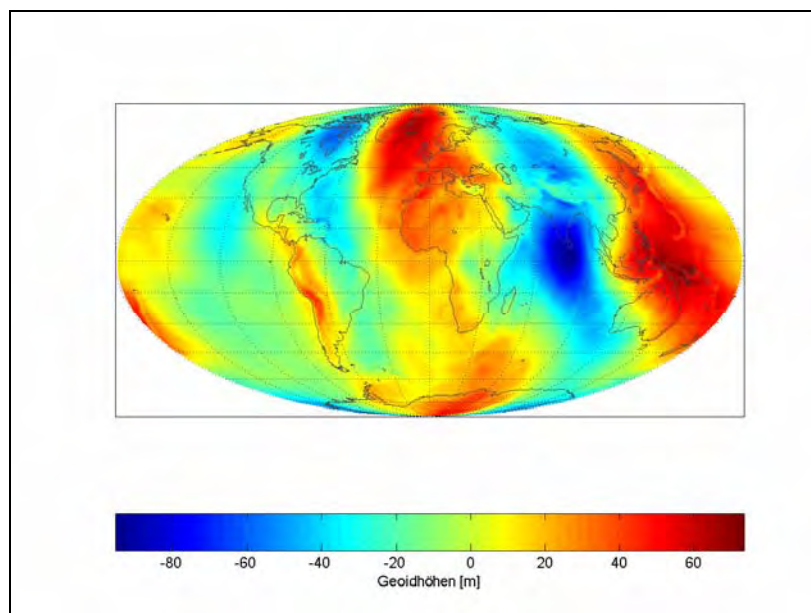


Abb. 3.2: Globales GRACE-Geoidmodell, Entwicklungsgrad N=120

3.4 Zusammenhang zwischen der Änderungen des Geoids und der Änderung der Oberflächenmassenverteilung

Neben dem Geoid gibt es noch eine weitere Größe von besonderem Interesse. Speziell für Masseschätzungen ist die Änderung der Oberflächendichte von Bedeutung. Diese lässt sich nach Wahr, Molenaar und Bryan [Wahr, Molenaar, Bryan 1998a: 207]) mit den Kugelflächenfunktionen wie folgt ausdrücken:

$$\Delta \sigma(\varphi, \lambda) = R \rho_{Water} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi) (\Delta \hat{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \hat{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (3.22)$$

mit

$$\rho_{Water} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{Dichte des Wassers}$$

Dabei ist das Spektrum dieser Funktion durch die Analysegleichung

$$\begin{cases} \Delta \hat{C}_{nm} \\ \Delta \hat{S}_{nm} \end{cases} = \frac{1}{4\pi\rho_{ave}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin(\lambda) d\lambda \times \Delta\sigma(\varphi, \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) \begin{cases} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{cases} \quad (3.23)$$

gegeben.

In der Literatur ist der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $\Delta \hat{C}_{nm}$, $\Delta \hat{S}_{nm}$ und ΔC_{nm} , ΔS_{nm} durch die folgende Beziehung beschrieben:

$$\begin{cases} \Delta \hat{C}_{nm} \\ \Delta \hat{S}_{nm} \end{cases} = \frac{\rho_{ave}(2n+1)}{3\rho_{Water}(1+k_n)} \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} \quad (3.24)$$

Mit (3.24) lässt sich nun entweder a) die Änderung der Oberflächendichteverteilung aus der Änderung der Koeffizienten des Geoids oder aber b) die Änderung der Geoidhöhen aus der Änderung der Oberflächendichteverteilung bestimmen.

a)

$$\Delta\sigma(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R\rho_{ave}(2n+1)}{3(1+k_n)} \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) (\Delta C_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (3.25)$$

b)

$$\Delta N(\varphi, \lambda) = R\rho_{Water} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{3(1+k_n)}{\rho_{ave}(2n+1)} \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) (\Delta \hat{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \hat{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (3.27)$$

Dabei sind die Konstanten k_n die so genannten Load-Love Zahlen vom Grad n . Diese werden im Abschnitt Love Zahlen näher beschrieben.

Für anschließende Masseberechnungen an der Erdoberfläche gilt dann folgender Zusammenhang:

$$\Delta M = \Delta\sigma * A \quad (3.26)$$

mit

ΔM Masseänderung

A Fläche

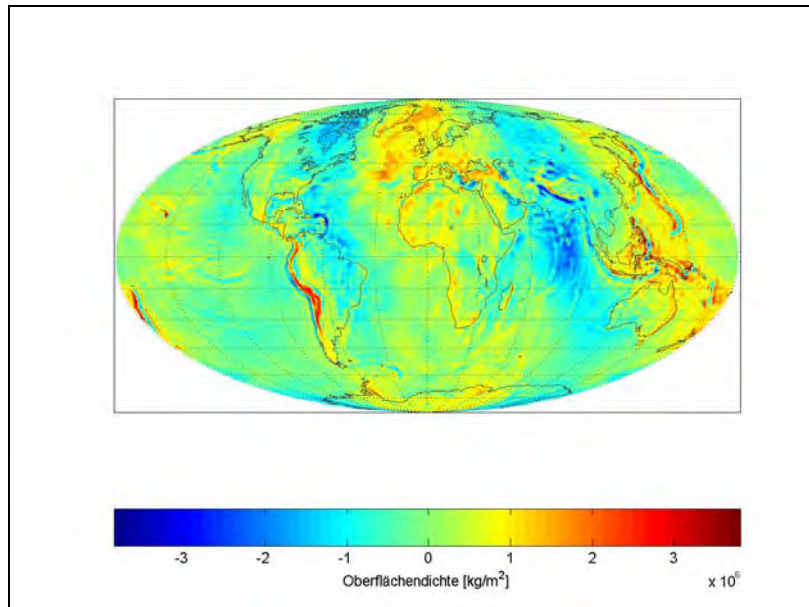


Abb. 3.3: Globales GRACE-Dichtemodell, Entwicklungsgrad N=120

Love Zahlen

Die Gleichung (3.23) beschreibt den direkten Einfluss der Oberflächendichteverteilung $\Delta\sigma$ auf das Gravitationspotential V . Diese Änderung hat jedoch auch einen indirekten Effekt auf die feste Erdkruste, die durch die Auflast der Massen deformiert wird [Wahr, Molenaar, Bryan 1998b: 208]. Dieser Effekt, der durch die Dichteänderung entsteht, muss mit einem weiteren Zuschlag k_n auf das Potential berücksichtigt werden.

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} k_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (3.27)$$

Die Berechnung dieser Zahlen basiert auf dem mechanischen Erdmodell PREM (Preliminary Reference Earth Model). Das Modell ist sphärisch, nicht rotierend und elastisch. Die Tabelle 3.1 stellt einige Love Zahlen bis zum Grad 200 dar. Alle weiteren Love Zahlen erhält man aus der Interpolation der Tabelle.

n	k_n	n	k_n
0	0.000	12	-0.064
1	0.027	15	-0.058
2	-0.303	20	-0.051
3	-0.194	30	-0.040
4	-0.132	40	-0.033
5	-0.104	50	-0.027
6	-0.089	70	-0.020
7	-0.081	100	-0.014
8	-0.076	150	-0.010
9	-0.072	200	-0.007
10	-0.069		

Tabelle 1: Love Zahlen, Wahr, Molenaar, Bryan 1998 für PREM-Modell

4 Filterung und Glättung des Schwerefeldes

4.1 Filterung des Schwerefeldes

Ziel dieses Kapitels ist es die Notwendigkeit des Filterns zu beschreiben und die Frage zu klären, in welchem Raum die Filterung stattfindet.

Da das Gravitationspotential mit zunehmendem Abstand von der Erde abnimmt, haben Satelliten in großer Höhe Probleme das Schwerefeld korrekt zu messen, da vor allem bei kleineren Wellenlängen sich das Signal-Rausch Verhältnis sehr ungünstig auswirkt [Zenner 2006f: 15)]. Das bedeutet, dass ab einem bestimmten Grad n die Fehler in den Koeffizienten größer sind als das Signal selbst. Es muss demnach eine Auswahl derjenigen Koeffizienten stattfinden, die den kurzen, „schlechten“ Wellenlängen zugeordnet sind, um diese anschließend in der Gesamtberechnung entsprechend ihrer Güte zu unterdrücken. Mit anderen Worten, die Filterkoeffizienten entscheiden darüber mit welchem Gewicht jede einzelne Wellenlänge des Potentials in die Gesamtrechnung eingeht. Die zweite Frage beschäftigt sich damit wo gefiltert wird. Wie in Kapitel 3.3. bereits erwähnt wurde, kann das Geoid auch mit dem Stokesintegral im Ortsraum dargestellt werden. Somit können Filterungen sowohl im Ortsraum, als auch im Spektralraum durchgeführt werden. Nach der Theorie der Signalverarbeitung entspricht die Filterung im Ortsraum einer Faltung der Funktion mit der Filterfunktion und eine Filterung im spektralen Bereich einer Multiplikation. Da alle Berechnungen in dieser Studienarbeit im spektralen Raum durchgeführt werden, beschränkt sich auch die ausführliche Behandlung der Filter auf diesen. Die Formel (4.1) stellt die Filterung des Geoids im spektralen Bereich dar.

$$\Delta \bar{N}(P) = -\frac{GM}{r_P \gamma_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n W_n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi_P) (\Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda_P) + \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda_P)) \quad (4.1)$$

mit

$$W_n = \int_{\alpha} W(\alpha) P_n(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad \text{Gewichtsfunktion}$$

α Sphärische Distanz zweier Punkte an der Erdoberfläche

In der Literatur sind viele verschiedene Filter zu finden, je nach Problemstellung oder Zielsetzung werden ihre Eigenschaften vorteilhaft genutzt. Im Folgenden werden einige Glättungsfiler vorgestellt.

4.2 Räumliches Mitteln unter Verwendung des Gauss Filters

Für Masseschätzungen in einem bestimmten Gebiet ist es nützlich räumliche Filter anzuwenden. Im Ortsraum lässt sich dies wie folgt darstellen:

$$\Delta\bar{\sigma} = \int \Delta\sigma(\varphi', \lambda') W(\varphi, \lambda, \varphi', \lambda') \sin\varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (4.3)$$

mit

$\varphi, \lambda, \varphi', \lambda'$ sphärische Koordinaten zweier Punkte

$W(\varphi, \lambda, \varphi', \lambda')$ Gewichtsfunktion

Im Spektralraum hat die Filterung folgende Darstellung:

$$\Delta\bar{\sigma}(P) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R\rho_{ave}(2n+1)}{3(1+k_n)} W_n \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) (\Delta C_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (4.4)$$

W_n hat dabei das Aussehen des Gauss Filters und wird im Ortsbereich wie folgt definiert:

$$W_n = \int_{\alpha} W(\alpha) P_n(\cos\alpha) \sin\alpha d\alpha \quad (4.5)$$

$$W(\alpha) = \frac{b}{2\pi} \frac{e^{-b(1-\cos\alpha)}}{1-e^{-2b}} \quad (4.6)$$

$$b = \frac{\ln(2)}{(1-\cos(r/a))} \quad (4.7)$$

Die Größe r ist dabei die Entfernung auf der Erde, bei der W die halbe Größe angenommen hat, und wird als Glättungsradius bezeichnet.

Die Gewichtsfunktion W_n lässt sich im Spektralbereich rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \frac{1}{2\pi} \\
 W_1 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 + e^{-2b}}{1 - e^{-2b}} - \frac{1}{b} \right) \\
 W_{n+1} &= -\frac{2n+1}{b} W_n + W_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Im Folgenden wurden verschiedene Glättungsradien auf das GRACE-Geoid angewendet:

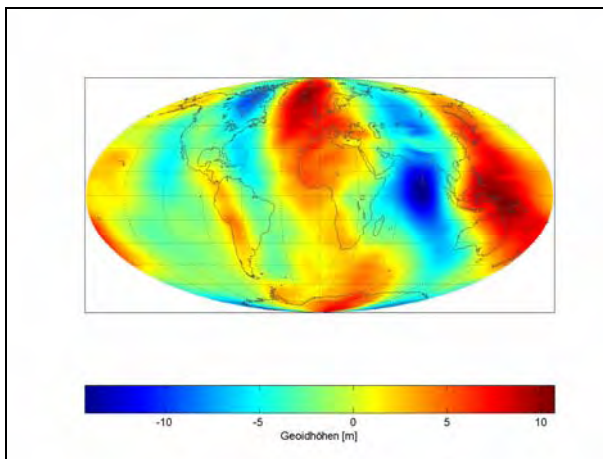


Abb. 4.1: gefiltert mit Gauss, $R = 500$ km

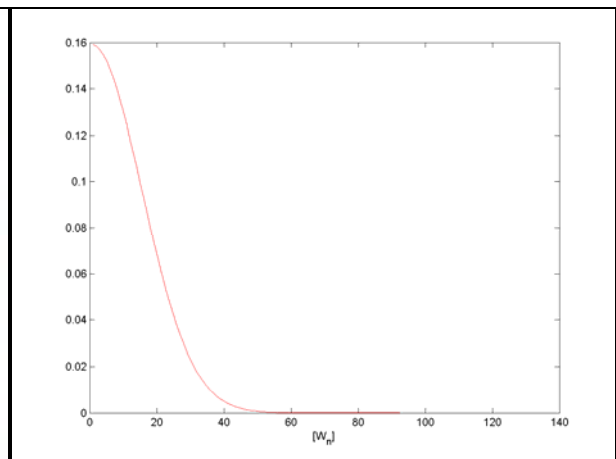


Abb. 4.2: Gewichtskoeffizienten $R = 500$ km

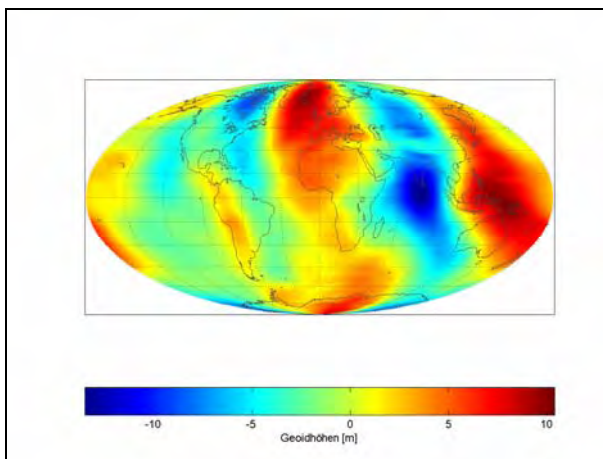


Abb. 4.3: gefiltert mit Gauss, $R = 750$ km

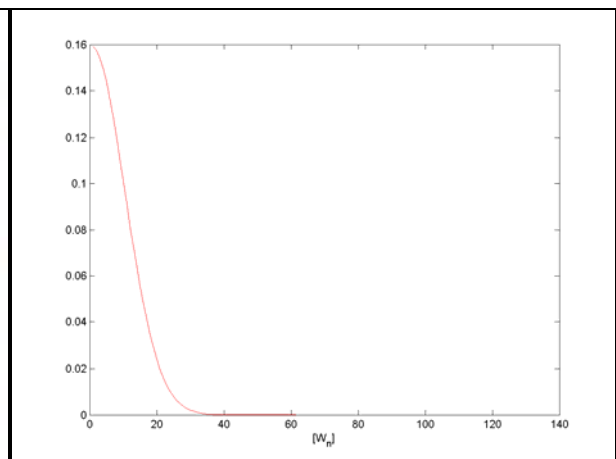


Abb. 4.4: Gewichtskoeffizienten $R = 750$ km

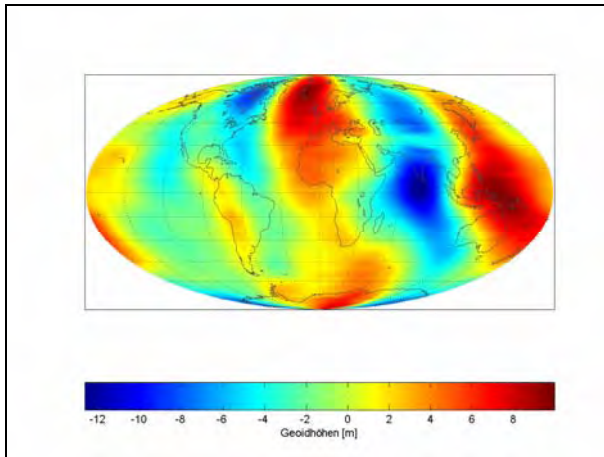


Abb. 4.5: gefiltert mit Gauss, $R = 1000$ km

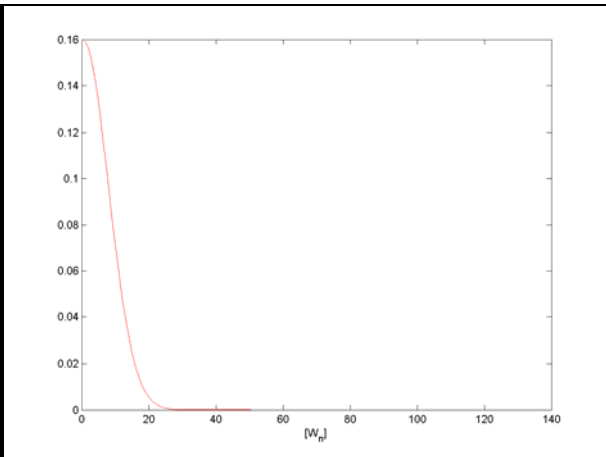


Abb. 4.6: Gewichtskoeffizienten $R = 1000$ km

4.3 Tiefpass Filter

Der Tiefpassfilter definiert einen spektralen Durchlassbereich. Alle durchgelassenen Frequenzen werden einheitlich mit Eins und alle abgeschnittenen Frequenzen mit Null gewichtet. Die spektralen Filterkoeffizienten, die darüber entscheiden mit welchem Gewicht die einzelnen Koeffizienten in die Berechnung eingehen, können dann wie folgt definiert werden:

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n < N_{\max} \\ 0 & \text{für } n > N_{\max} \end{cases} \quad (4.9)$$

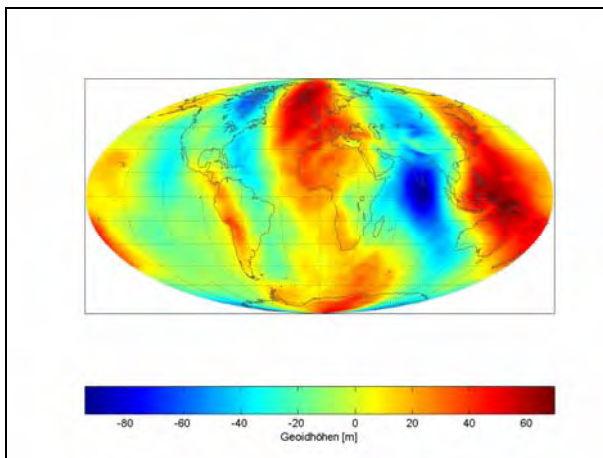


Abb. 4.7: gefiltert mit Tiefpass N = 30

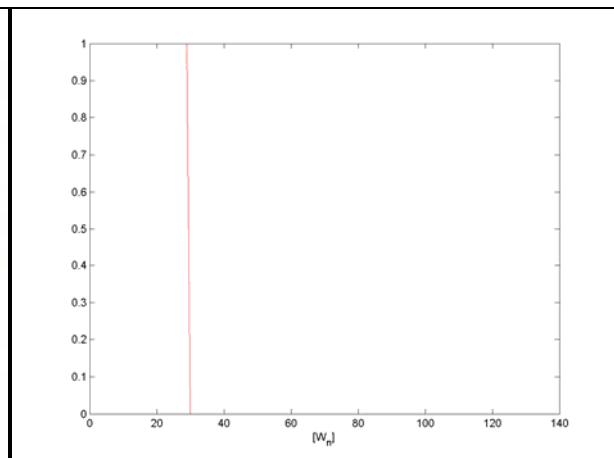


Abb. 4.8: Gewichtskoeffizienten N = 30

4.4 Pellinen Filter

Der Pellinen Filter gewichtet im Gegensatz zum Gauss Filter die Wellenlängen höheren Grades stärker. Außerdem werden alle Wellenlängen innerhalb der sphärischen Kappe gleich gewichtet. Im Ortsbereich sehen die Koeffizienten wie folgt aus:

$$W(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max} \\ 0 & \text{für } \alpha_{\max} \leq \alpha \leq \pi \end{cases} \quad (4.10)$$

mit

α_{\max} Radius der sphärischen Kappe

Im Spektralraum lassen sich die Filterkoeffizienten ebenfalls rekursiv berechnen:

$$W_0 = 1$$

$$W_1 = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha_{\max}) \quad (4.11)$$

$$W_n = \frac{2n-1}{n+1} \cos \alpha_{\max} W_{n-1} - \frac{n-2}{n+1} W_{n-2}$$

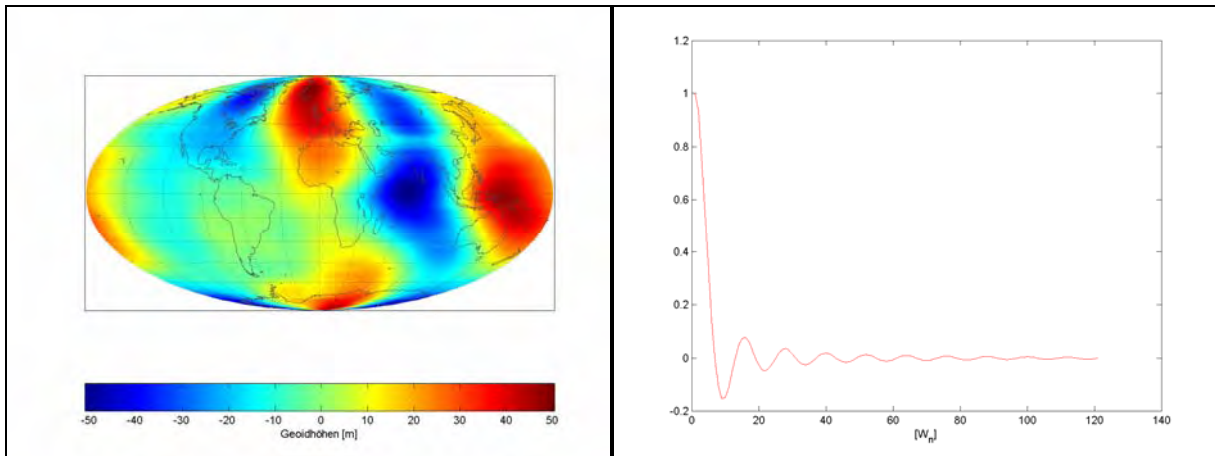


Abb. 4.9: gefiltert mit Pellinen R = 750 km

Abb. 4.10: Gewichtskoeffizienten R = 750 km

Beim Pellinen Filter ist zu beachten, dass dieser die eigentlich unerwünschten kurzen Wellenlängen teilweise noch durchlässt. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Studienarbeit auf den Einsatz dieses Filters verzichtet.

Je nach Wahl der Filter und deren verschiedener Parameter ergeben sich zum Teil sehr große Divergenzen zwischen den Ergebnissen. Der Einfluss ist besonders in regionalen Betrachtungsgebieten sehr stark sichtbar. Aufgrund der scharfen Abtrennung der hohen Frequenzen wird im Weiteren auch die Filterung mittels Tiefpass nicht weiter verfolgt. Zum Einsatz kommt ausschließlich der Gauss Filter, wobei verschiedene Filterparameter getestet werden.

5 Eismassenbilanzierung

Wie in der Einleitung bereits angedeutet, resultiert der Anstieg des globalen Meeresspiegels vor allem aus dem Schmelzen der kontinentalen Eismassen. Das Grönländische Eisschild ist eine solche kontinentale Eismasse und wird in dieser Studienarbeit als Untersuchungsgebiet für die Eismassenbilanzierung herangezogen. Das Eisschild Grönlands ist das zweitgrößte der Erde und beträgt 10 % der globalen Eismassen [Chen, Wilson, Tapley 2006: 1].

Die verwendeten Daten sind 44 monatliche Lösungen der C_{lm} S_{lm} Koeffizienten des Geoforschungszentrums Potsdam. Die Epochen umfassen folgende Monate:

2003: Februar, März, April, Mai, Juli, August, September, Oktober, November, Dezember;

2004: Februar, März, April, Mai, Juni, Juli, August, September, Oktober, November, Dezember;

2005: Januar, Februar, März, April, Mai, Juni, Juli, August, September, Oktober, November, Dezember;

2006: Januar, Februar, März, April, Mai, Juni, Juli, August, September, Oktober, November;

Aus den monatlichen Koeffizienten werden monatliche Schwere- und Dichtelösungen berechnet. Die Koeffizienten stehen bis zum Grad und Ordnung 120 zur Verfügung.

Für die Schätzung der Massen sowie die Ableitung eines Trends wurde folgende Strategie verfolgt: zunächst wurde über die 44 Epochen der Mittelwert (MEAN) der Koeffizienten gebildet. Anschließend wurden für jede Epoche das MEAN abgezogen und die Differenzen ΔC_{lm} ΔS_{lm} berechnet. Diese Differenzen wurden dann in die Formel (3.25) eingesetzt und für ein Koordinatengitter berechnet. Aus den sich daraus ergebenden Dichtedifferenzen $\Delta \sigma_i$ an jedem Gitterpunkt lässt sich die Änderung der Masse ΔM nach (3.26) berechnen. Anschließend wurden die Massen über alle Gitterpunkte aufsummiert.

Die Koeffizienten wurden vor der Prozessierung mit dem Gauss Filter geglättet.

Zusammenfassung aller vorgenommenen Operationen:

1. Bildung der Differenzen ΔC_{lm} ΔS_{lm} :

$$\bar{C}_{lm} = \frac{1}{n} \sum_i C_{lm}, \quad \bar{S}_{lm} = \frac{1}{n} \sum_i S_{lm}, \quad \text{mit } i = 1 \dots 44 \quad (5.1)$$
$$\Delta C_{lm}^i = C_{lm}^i - \bar{C}_{lm}, \quad \Delta S_{lm}^i = S_{lm}^i - \bar{S}_{lm}, \quad \text{Differenzen zu MEAN für jede Epoche}$$

2. Berechnung der Differenzenfelder nach (3.25) bis zum Entwicklungsgrad $N=120$:

Ergebnis: $\Delta\sigma_i(\lambda, \varphi)$ mit $i = 1 \dots 44$

3. Berechnung der Masse nach (3.26)

$$\Delta M_i(\lambda, \varphi) = \Delta\sigma_i(\lambda, \varphi) * A_i$$

Mit $A_i = a * b$ Fläche eines Gitterpunktes

$a = 111.319$ km Abstand der Breitenkreise

$b = \cos(\theta) * \frac{\pi r}{180}$ Abstand der Meridiane

θ Co-Breite

$r = 6378136.701$ m

4. Summation der einzelnen Massedifferenzen über das gewählte Koordinatengitter:

$$\Delta M^{\text{Gebiet}} = \sum_i \Delta M_i \quad (5.2)$$

Wahl der verwendeten Filterparameter:

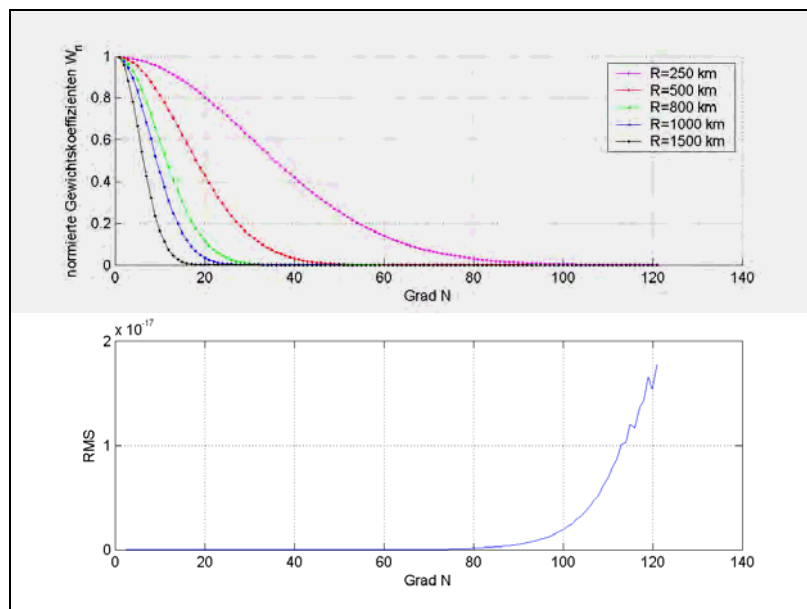


Abb. 5.1: oben: Gewichtungverhalten des Gauss Filters; unten: RMS des Beispielmonats Juni 2004

Die Abbildung zeigt für den Beispielmonat Juni 2004, dass die Quadratischen Mittel der Standardabweichungen (Root Mean Square, RMS) ab Grad 80 deutlich zunehmen. Deshalb

ist die Filterung mit dem Radius $R = 250$ km kritisch, da der Sperrbereich bei diesem Grad noch nicht vollständig erreicht ist. Es würden also immer noch Anteile verrauschter Wellenlängen mit in die Berechnung einfließen, die nicht erwünscht sind.

Im Weiteren werden nur die Gauss Filterparameter $R = 500$ km, 800 km, 1000 km und 1500 km verwendet.

Für die Berechnung des zeitlichen Verhaltens wurde eine so genannte „Grönland Maske“ eingeführt, um den Einfluss der Signale außerhalb des grönländischen Festlandes auszuschließen.

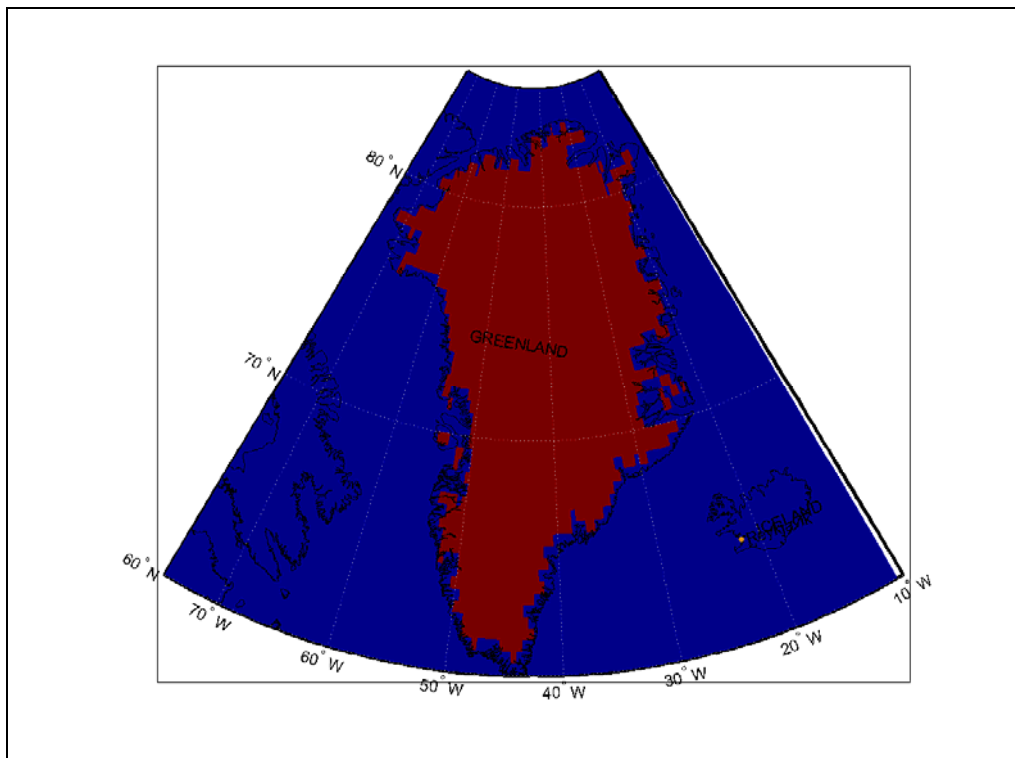
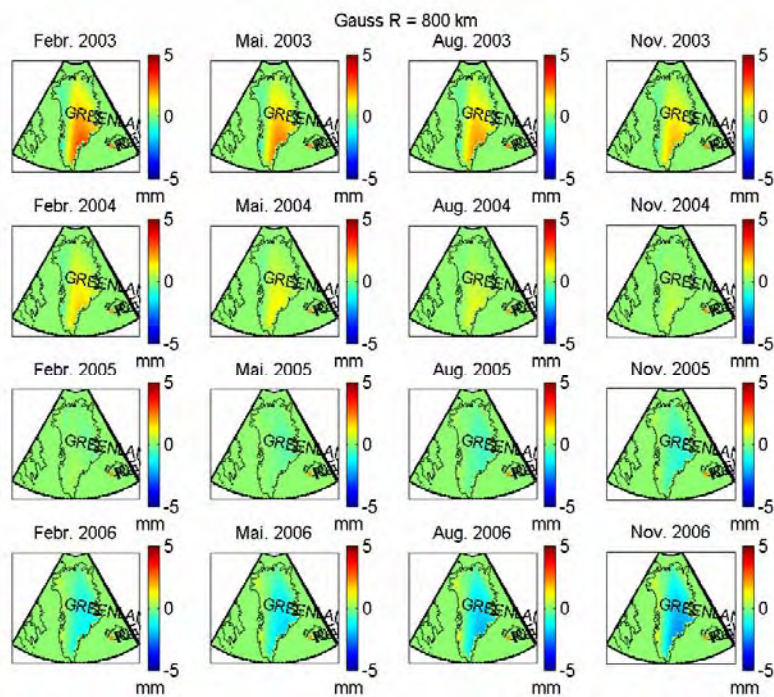
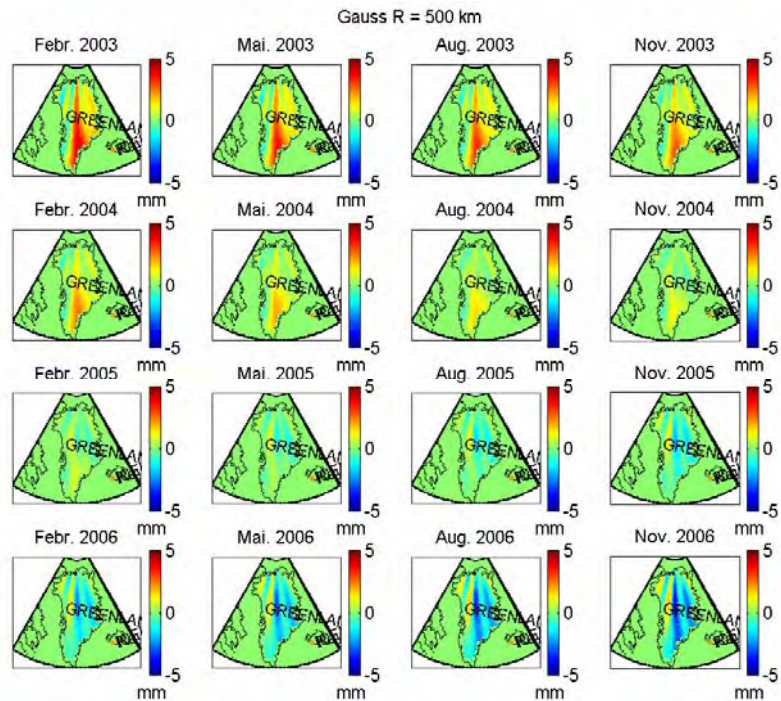


Abb. 5.2: Grönlandmaske

Räumliche Darstellung der Massedifferenzen:

a) Die folgende Abbildung stellt gefilterte Differenzen ausgewählter Monate zum Mittel dar.



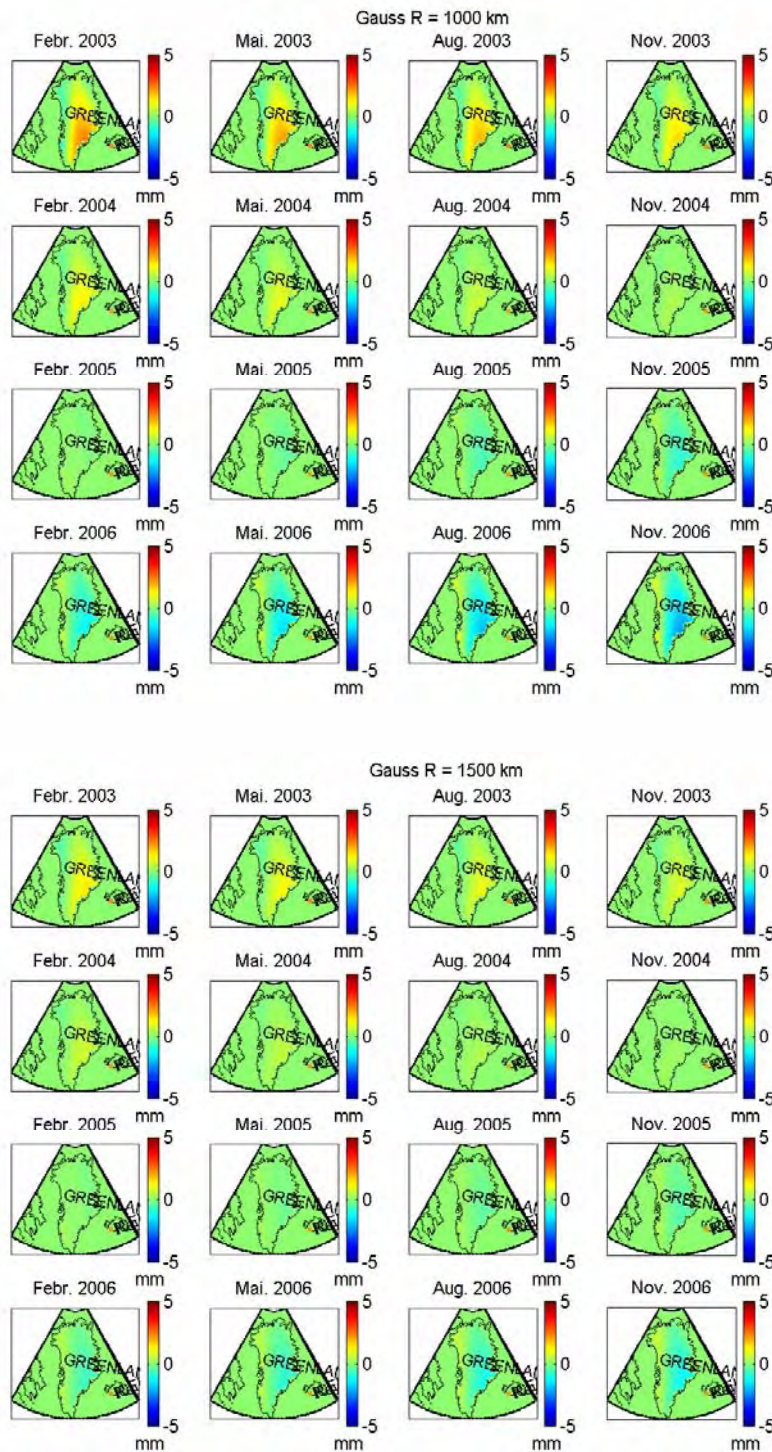
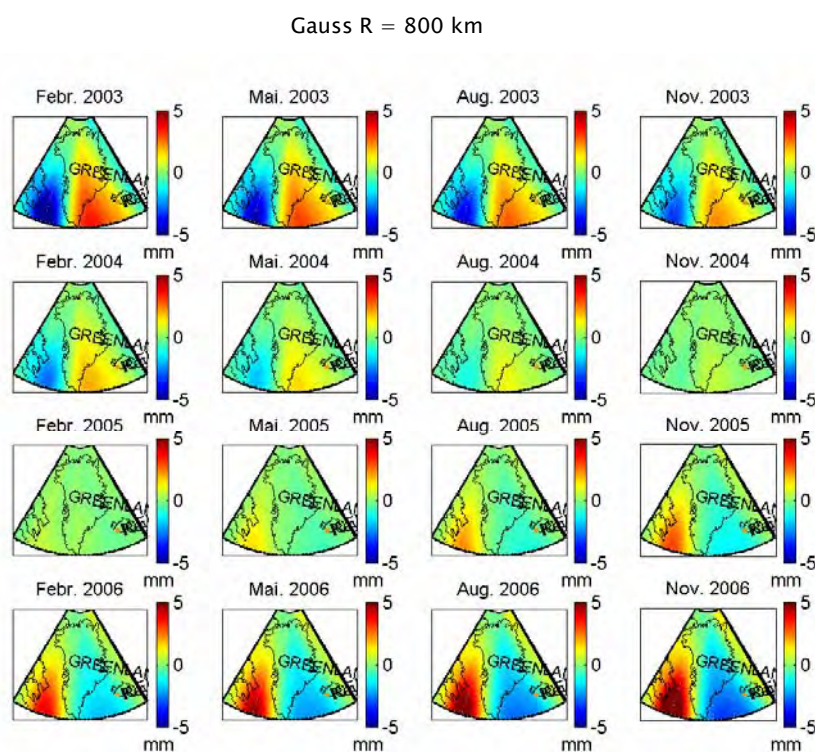
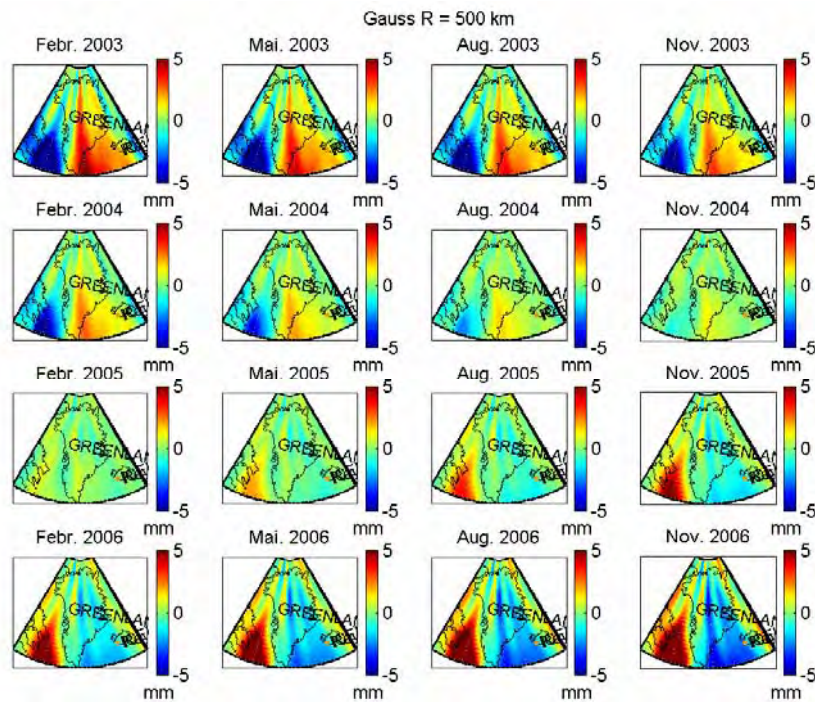


Abb. 5.3: Darstellung der gefilterten Massedifferenzen zum Mittel in äquivalenter Wasserschichtdicke mit Grönlandmaske

Bei der Abbildung fällt auf, dass über den Zeitraum der zur Verfügung stehenden Daten die Differenzen negativ ausfallen. Zum Beispiel hat der Monat Februar 2003 im Vergleich zum Mittel eine positive Massedifferenz, wohingegen derselbe Monat des Jahres 2006, vor allem im Südosten eine Negativdifferenz aufweist. Man kann daraus für den

Beobachtungszeitraum eine abnehmende Tendenz der Gesamtmassebilanz über Grönland ableiten. Bei der Anwendung des Parameter $R = 1500$ km ist das Signal nur noch schwach abgebildet.

b) Differenzen ausgewählter Monate zum Mittel, für das Gesamtgebiet (ohne Grönland Maske)



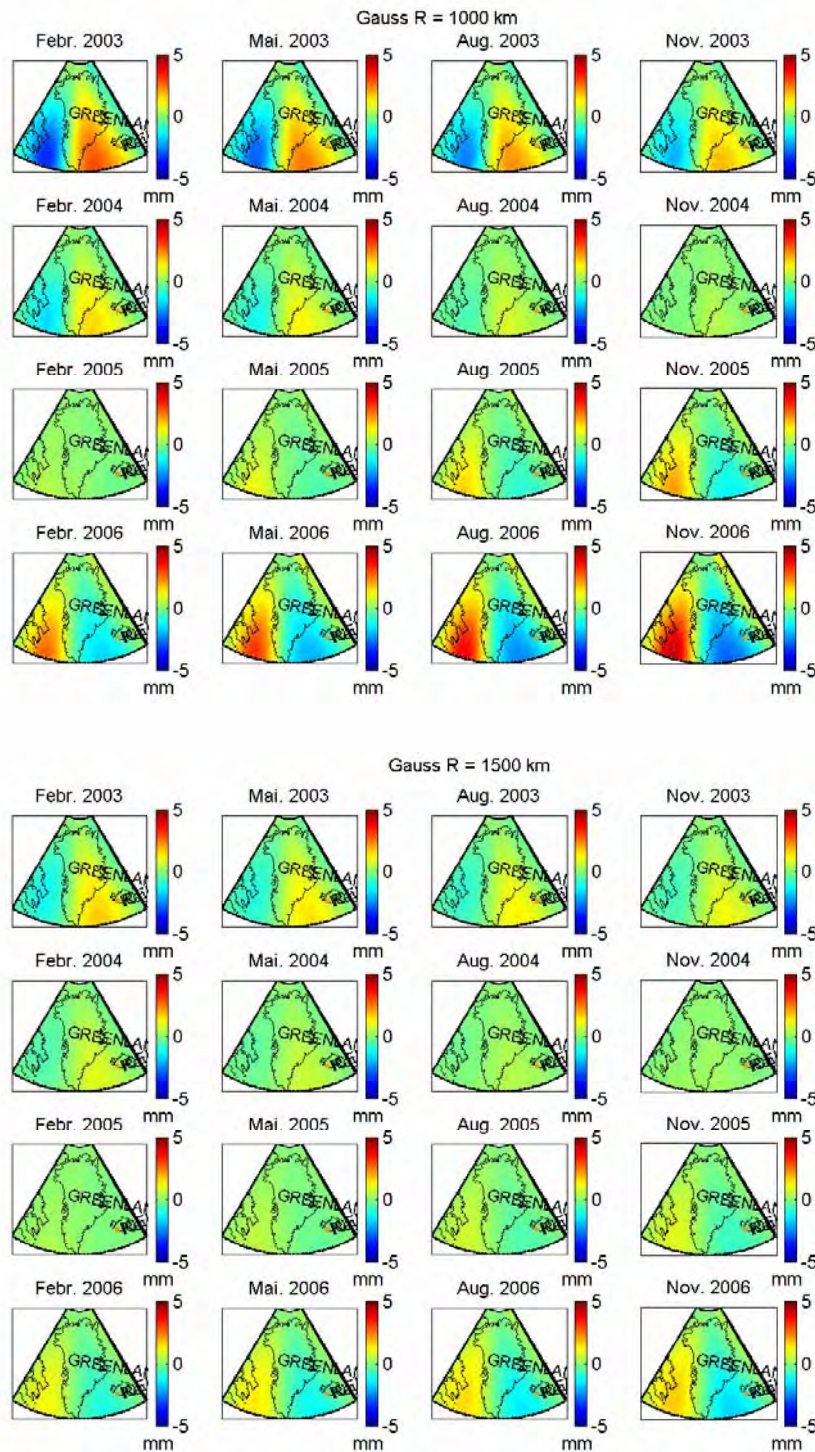


Abb. 5.4: Darstellung der gefilterten Massedifferenzen zum Mittel als äquivalente Wasserschichtdicke ohne Grönlandmaske

Bei der Darstellung für das Gesamtgebiet erkennt man vor allem bei kleinen Filterradien in den letzten Monaten des Beobachtungszeitraumes eine starke positive Signaldifferenz über Kanada. Diese Eigenschaft wird in der späteren zeitlichen Darstellung noch deutlicher, vor allem bei der Massebilanzierung des Gesamtgebietes.

c) Um eine Vorstellung davon zu bekommen, mit welcher Geschwindigkeit die Masse abnimmt ist hier die zeitliche Ableitung der Masse $\frac{dM}{dt}(\lambda, \varphi) = \dot{M}(\lambda, \varphi)$ für das Gesamtgebiet in äquivalenter Wasserschichtdicke dargestellt.

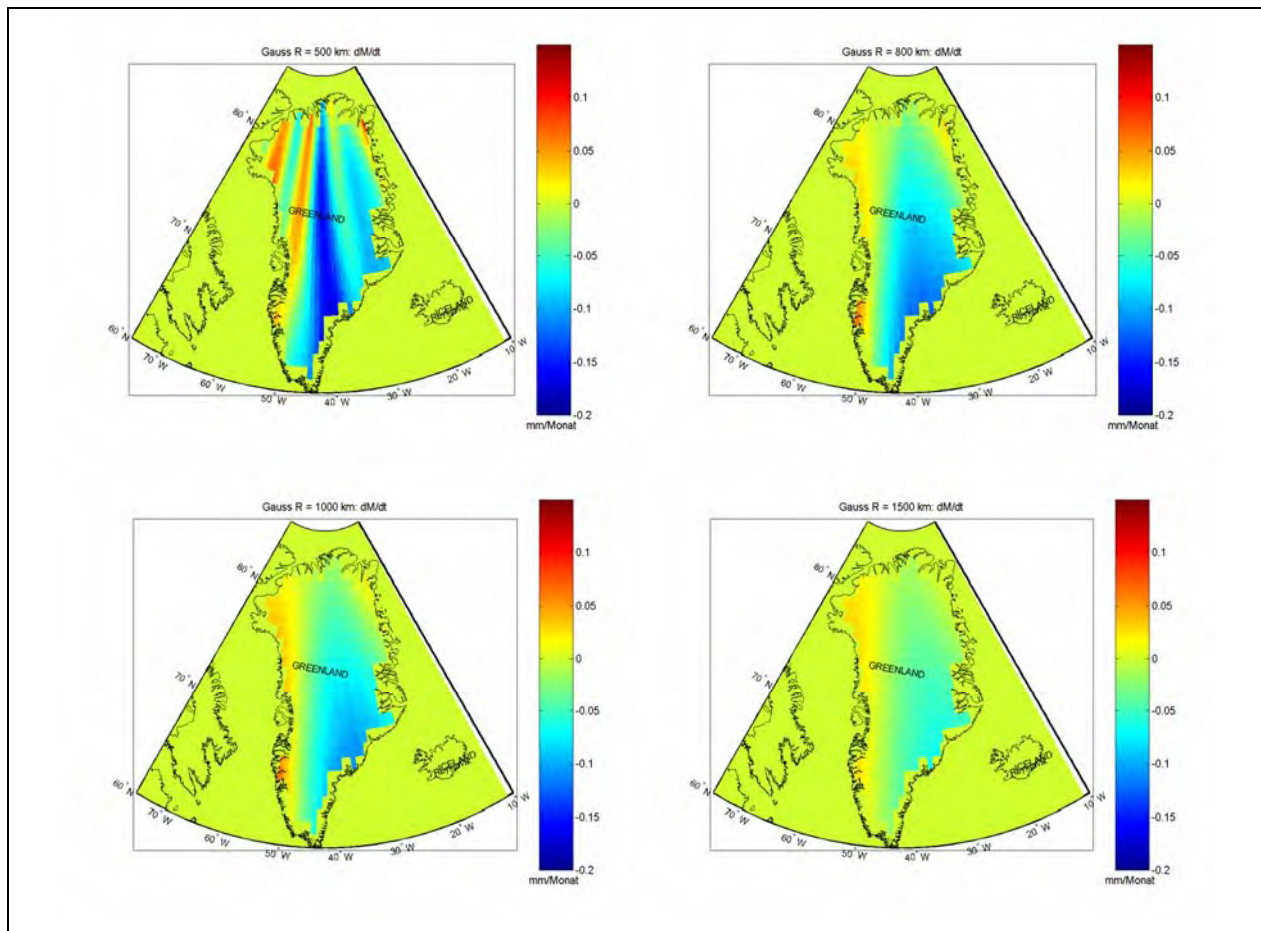


Abb. 5.5: $\dot{M}(\lambda, \varphi)$ mit Grönlandmaske, gefiltert mit Parametern $R = 500, 800, 1000, 1500$ km

Auffallend sind die Nord-Süd Streifen bei der Filterung mit dem Parameter $R = 500$ km. Diese sind eventuell auf den immer noch zu geringen Filterradius zurückzuführen, der stark verrauschte Koeffizienten zum Teil noch durchlässt.

Am schnellsten nimmt die Eismasse in südöstlichen Gebieten ab und erreicht ihr Maximum je nach Wahl der Filterparameter zwischen 0.05 und 0.2 mm/Monat. Im Westen und Nordwesten ist sogar eine positive Bilanz zu erkennen, was aus der Vernachlässigung der Postglazialen Landhebung resultieren könnte oder wie im äußersten Westen aus dem stark positiven Signal über Kanada.

d) Hier ist ebenfalls die zeitliche Ableitung der Masse $\dot{M}(\lambda, \varphi)$ für das Gesamtgebiet, dargestellt, jedoch ohne Grönland Maske.

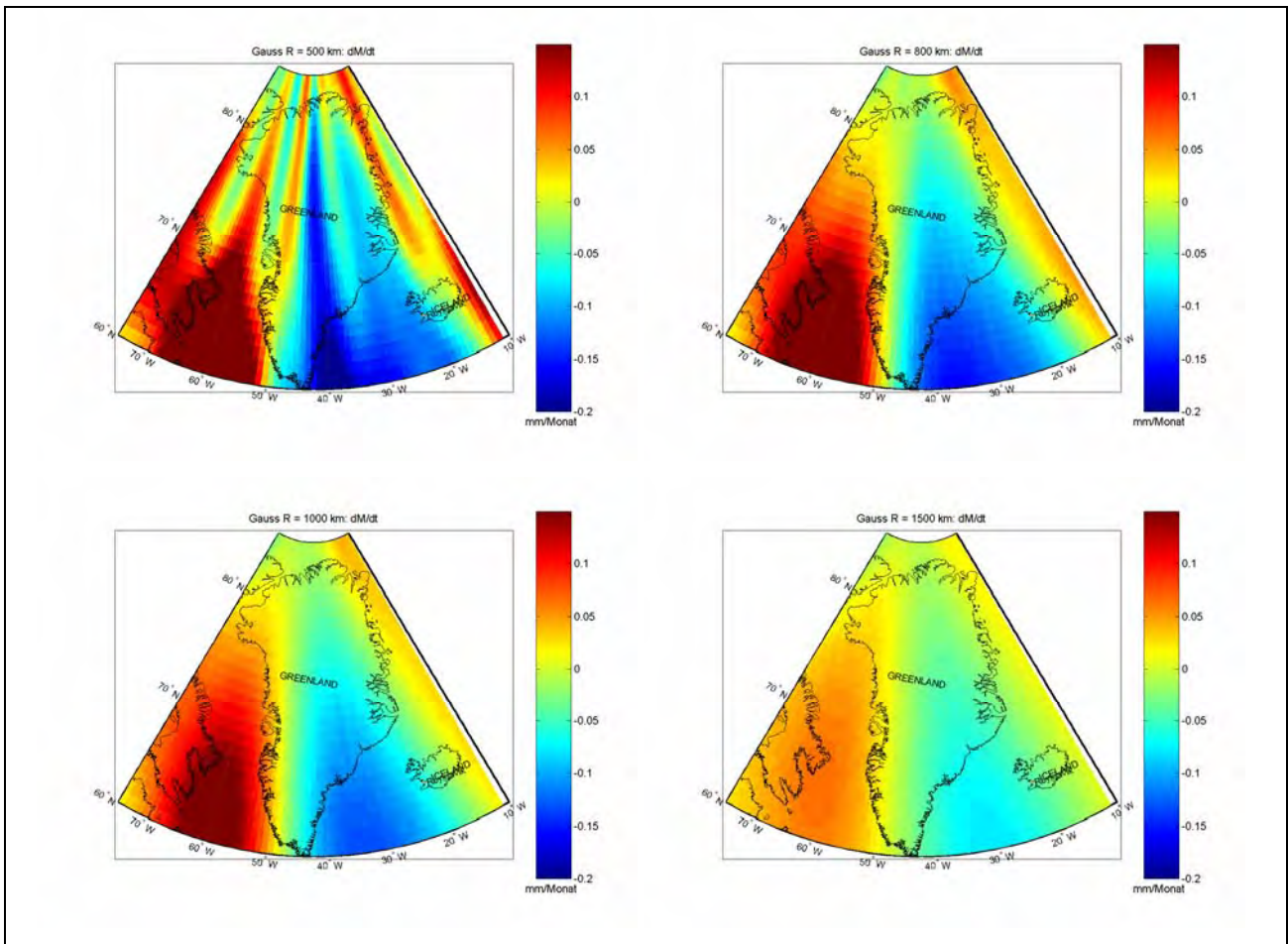


Abb. 5.6: \dot{M} ohne Grönlandmaske, gefiltert mit Parametern $R = 500, 800, 1000, 1500$ km

Hier sieht man die Quelle der positiven Signale über Westgrönland, nämlich ein starkes positives Signal über dem Atlantischen Ozean und Teilen Kanadas. Die Zunahme über Kanada beträgt, ebenfalls abhängig von der Wahl des Filterparameters, zwischen 0.05 und 0.2 mm im Monat.

Zeitliche Darstellung der Massedifferenzen:

Die zeitliche Darstellung der Masseänderungen wird als Gesamtmasse nach den Formeln (3.26) und (5.2) berechnet und für jede verfügbare Epoche im gegebenen Zeitraum als skalarer Wert dargestellt. Es wurden wie zuvor nur die ausgewählten Filterparameter $R = 500, 800, 1000$ und 1500 km für die Berechnungen verwendet.

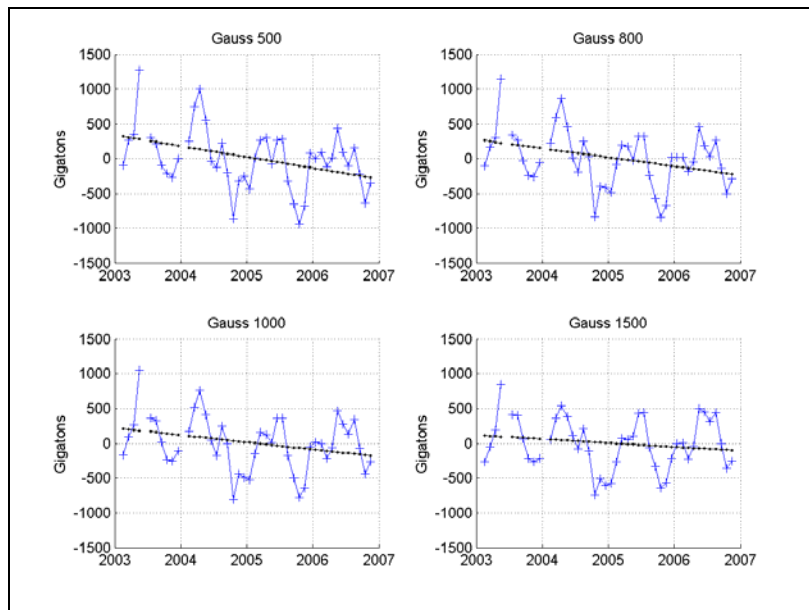


Abb. 5.7: Vergleich der Massendifferenzen nach Anwendung verschiedener Parameter, Darstellung jeweils für die Mitte des Monats

Man erkennt, dass die Schätzungen der Differenz der Gesamtmasse zum Mittel, mit zunehmendem Filterradius, geringer ausfallen. Auch weisen die Schätzungen der Massen für einzelne Epochen ebenfalls Unterschiede auf. Die Lücken in der Darstellung sind auf die fehlenden Monate im Datensatz zurückzuführen.

Die Abnahme der Grönländischen Eismassen ist in der unten stehenden Tabelle zusammengefasst. Die Größe ist in Masse pro Jahr angegeben.

Parameter des Gaussfilters	R = 500 km	R = 800 km	R = 1000 km	R = 1500 km
Differenz der Gesamtmasse	-154 Gigatonnen/J	-125 Gigatonnen/J	-101 Gigatonnen/J	-55 Gigatonnen/J

Tabelle 2: Zusammenstellung der Ergebnisse

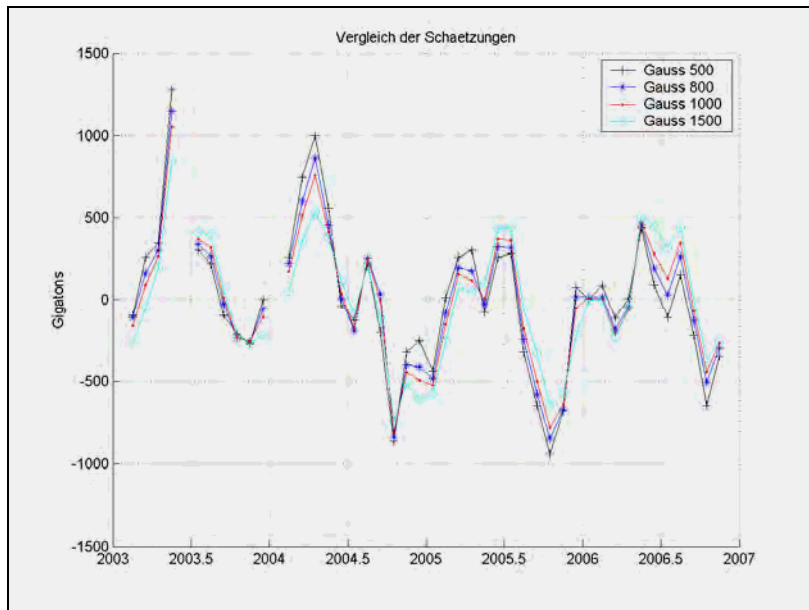


Abb. 5.8: Vergleich

Beim Vergleich der Schätzungen ist bei allen vier Varianten ein deutlich abnehmender Trend festzustellen, wie die folgende Abbildung zeigt:

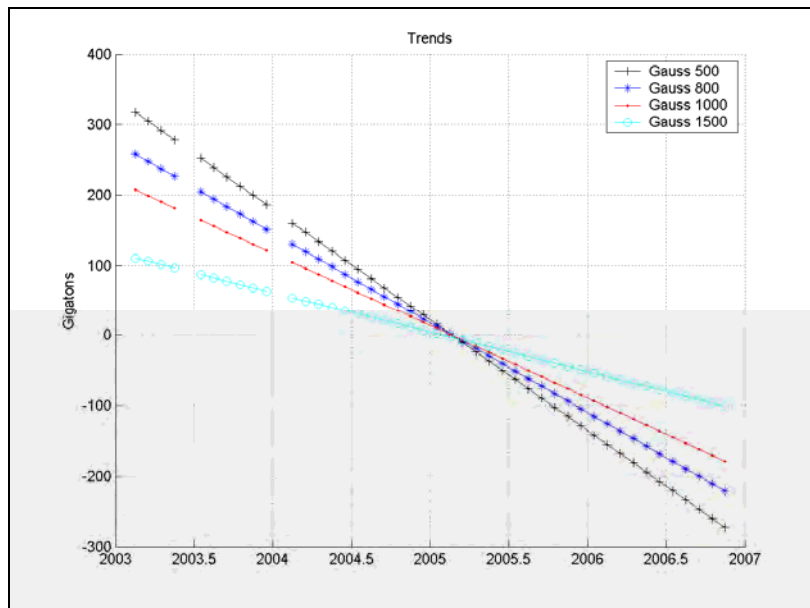


Abb. 5.9: Trends

Man sieht, dass die Trends mit zunehmendem Filterradius schwächer ausfallen. Die Steigung der Trendkurven wird relativ zum Zeitverlauf immer flacher und somit auch die Größe der Masseabnahme. Es fällt dabei auf, dass bei einer Verdoppelung des Filterradius von 500 auf 1000 km die Schätzung um ca. 50 Gigatonnen geringer ausfällt, also um etwa ein Drittel. Zwischen dem Radius 1000 km und 1500 km fällt die Schätzung um die Hälfte geringer aus.

Im nächsten Schritt wird eine Jahresbetrachtung der Massedifferenzen vorgenommen. Dazu werden für jedes Jahr die Massevariationen und die dazugehörigen Trendkurven berechnet. Hierbei ist jedoch die Quantität nicht aussagekräftig, da die Variationen von Monat zu Monat sehr groß sind und die Schätzung der Polynomkoeffizienten der Trendkurve genau diese Variationen berücksichtigt. Aber es lässt sich aus der grafischen Darstellung eine Aussage darüber treffen, wie sich die Masseabnahmen im Jahresvergleich verhalten. Exemplarisch wurde das Jahresverhalten für einen Filterradius von 500 km berechnet

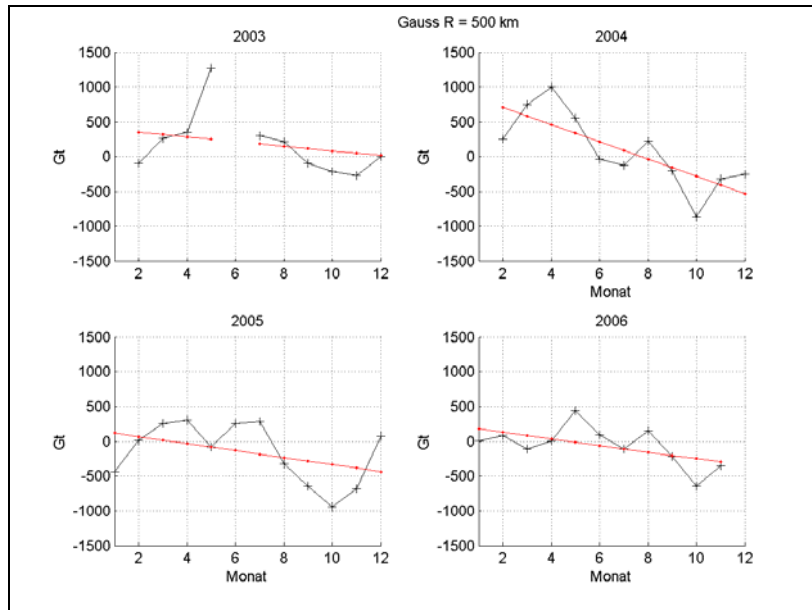


Abb. 5.10: Jahresbetrachtung

In dieser Betrachtung fällt auf, dass im Jahr 2004 die Masseabnahme am stärksten stattgefunden hat und im Jahr 2006 am geringsten.

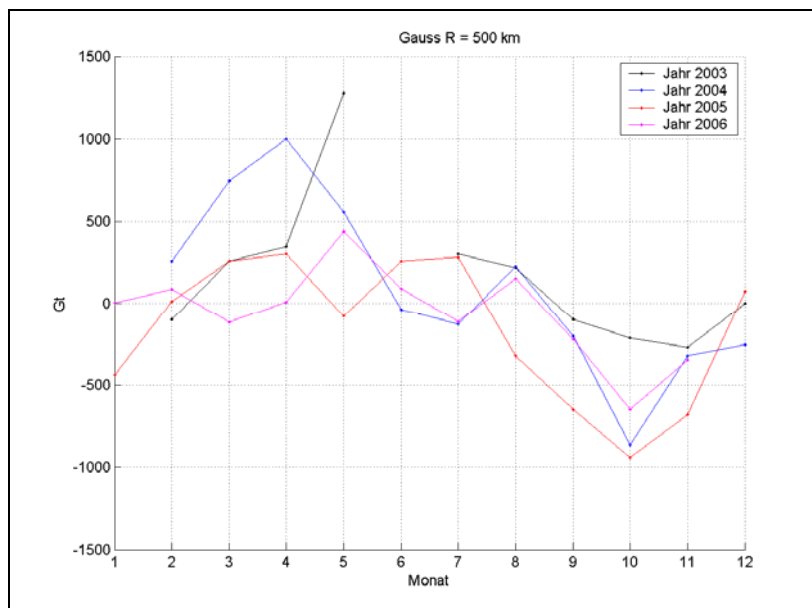


Abb. 5.11: Jahresvergleich

Zwischen den Monaten August (8) und Dezember (12) haben die Jahreskurven eine gute Übereinstimmung. Hier lässt sich das saisonale Verhalten ermitteln. Zwischen den Monaten April (4) und Juni (6) sind die saisonalen Ähnlichkeiten jedoch kaum zu erkennen.

Der letzte untersuchte Aspekt ist das zeitliche Verhalten der Masse für das Gesamtgebiet, ohne Anwendung der Grönlandmaske. Das Gesamtgebiet ist in der Abbildung 5.6. zu sehen. Es dehnt sich zwischen den Meridianen 10° West und 75° West, sowie den Breitenkreisen 60° Nord und 85° Nord aus.

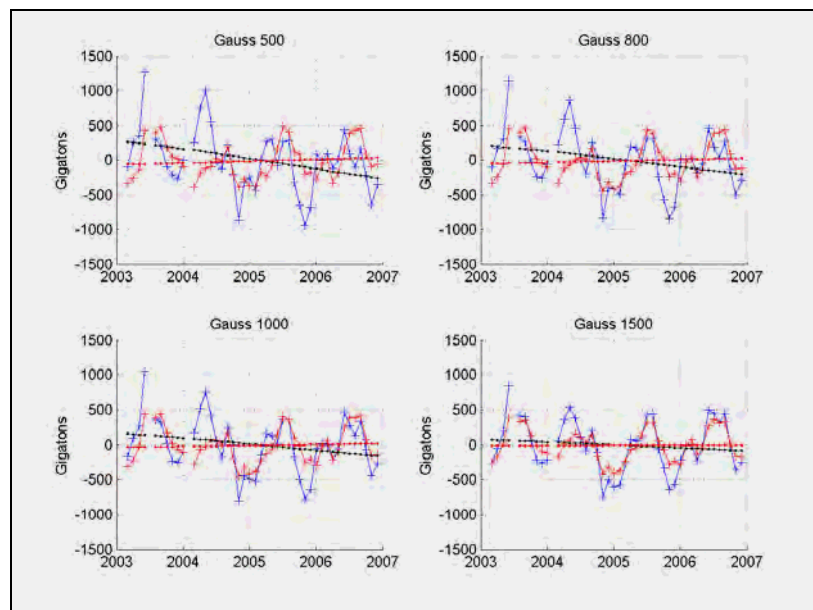


Abb. 5.12: Vergleich des zeitlichen Verhaltens mit Grönlandmaske (blau und schwarz) Verhalten ohne Grönlandmaske (rot).

Wie schon bei der räumlichen Betrachtung erwähnt wurde gibt es ein stark positives Signal über Kanada. Dieses Signal lässt die Gesamtmassebilanz positiv werden

Der positive Trend ist bei allen eingesetzten Filterparametern zu erkennen. Bei der numerischen Analyse der roten Kurven ergeben sich folgende Werte:

Parameter des Gaussfilters	R = 500 km	R = 800 km	R = 1000 km	R = 1500 km
Differenz der Gesamtmasse	+25 Gigatonnen/J	+19 Gigatonnen/J	+14 Gigatonnen/J	+3 Gigatonnen/J

Tabelle 3: Massedifferenzen für das Gesamtgebiet (ohne Grönlandmaske)

6 Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse

Dieses Kapitel soll noch einmal die wichtigsten Inhalte und Ergebnisse dieser Studienarbeit zusammenfassend erläutern und darüber hinaus die angewandten Methoden kritisch beleuchten.

Zusammenfassung

Der Schwerpunkt der Arbeit lag in der Auswertung der vom GFZ zur Verfügung gestellten Daten und sich daraus ableitenden Schätzungen der Massenänderungen im Gebiet Grönland. Zur qualitativen Verbesserung wurden die Koeffizienten mit einem räumlichen Filter vom Typ Gauss unter Verwendung verschiedener Filterparameter geglättet.

Der Inhaltliche Aufbau stellt sich wie folgt zusammen:

GRACE Missionsbeschreibung:

In diesem Kapitel wurden die wichtigsten Informationen über die GRACE-Mission zusammengetragen.

GRACE ist eine Tandem-Mission, bestehend aus zwei Satelliten, die ca.200 km Entfernung auf einer Bahn hintereinander fliegen. Diese bewegen sich auf einer fast polaren Bahn in einer Höhe von ca. 500 km und gehören somit zu den Low Orbit Satellites (LEOs). Die wichtigsten Ziele der Mission sind die Erforschung des Schwerefeldes der Erde und der Zusammensetzung der Atmosphäre. Die Verantwortung für die Mission wird von den Institutionen UTCSR, GFZ, JPL und NASA geteilt. Die Generierung der Daten erfolgt über die Abstandsmessung zwischen den beiden Satelliten. Die Daten werden als monatliche Kugelflächenkoeffizienten von der wissenschaftlichen Abteilung (SDS) der Mission zur Verfügung gestellt.

Schwerefeld der Erde und Masseschätzungen:

Die mathematischen Grundlagen für die Berechnung von Schwerefeldern und Oberflächendichten werden in diesem Kapitel vorgestellt. Die relevanten Größen wie das Potential, das Geoid und das Ellipsoid werden beschrieben. Vor allem auf den mathematischen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des Geoids und den Koeffizienten der Oberflächendichte wird ausführlich eingegangen.

Filterung und Glättung

Hier werden verschiedene Glättungsmethoden vorgestellt, mit denen man die Möglichkeit hat, verrauschte, hohe Frequenzanteile eines Schwerefeldes zu unterdrücken. Es werden 3 Filter und

deren Eigenschaften beschrieben und dargestellt: Räumlicher Filter vom Typ Gauss, Tiefpassfilter und Pellinen Filter. Die Berechnungen in dieser Studienarbeit wurde jedoch nur mit dem Gauss Filter durchgeführt.

Eismassenbilanz

Hier erfolgt die Anwendung des theoretischen Arbeitsteils auf die zur Verfügung gestellten Daten. Für die Schätzung der Eismassenänderungen wurden die Daten des GFZ durchprozessiert. Das Ergebnis war ein Negativtrend bei allen angewendeten Filterparametern. Die Berechnungen lieferten letztendlich eine jährliche Abnahme der Massen im Gebiet Grönland von ca. 55 - 155 Gigatonnen.

Bewertung der Ergebnisse

Schätzungen der Massenänderungen unterliegen vielen Unsicherheiten. Vor allem die gänzlich fehlenden Korrekturen um die Einflüsse der Atmosphäre, der Ozeane und der Postglazialen Landhebung (PGR) lassen die Unsicherheiten anwachsen. Trotzdem lässt sich bei allen durchgeführten Schätzungen ein abnehmender Trend feststellen. Wegen der relativ kurzen Zeitreihe von knapp 4 Jahren, aus der die Daten vorliegen, lässt sich jedoch nicht sagen ob der Negativtrend einen langperiodischen Prozess einleitet oder ob die Masseabnahme nur kurzfristiger Natur ist.

Abschließend lässt sich sagen, dass GRACE einen Vorteil bei Masseschätzungen gegenüber anderen Methoden hat. Die Beziehung zwischen Gravitation und der Masse ist durch das Newtonsche Gravitationsgesetz gegeben. Das ermöglicht einen direkten Zugriff auf die gesuchte Masse und erspart viele Umrechnungen. Der Nachteil liegt darin, dass das GRACE Signal keine Trennung zwischen dem Gravitationseffekt der Eisschicht und der darunter liegenden festen Erde macht.

Programmverzeichnis

Funktionsname	Aufgabe
gfz4matv6.mat	Datenfile (GFZ)
cs2sc.m	Konvertierung der Koeffizienten aus dem cs- in das sc-Format (Matthias Weigelt)
degvar.m	Berechnung des quadratischen Mittelwerts der Standardabweichung (Balaji Devaraju)
dichte.m	Berechnung der Verteilung der Dichtedifferenzen global oder lokal
gaussfltr.m	Berechnung der spektralen Koeffizienten des Gaussfilters in Abhängigkeit vom Radius
geoid.m	Berechnung des Geoids global oder lokal
legendre.m	Berechnung der Legendre-Polynome bis Grad und Ordnung N
lovec.m	Korrektur der Koeffizienten C_{lm} , S_{lm} mit Love-Zahlen
lowpass.m	Berechnung der spektralen Tiefpass Filterkoeffizienten
main_masse.m	Räumliche Darstellung der Massedifferenzen im Gebiet Grönland
main_masse2.m	Zeitliche Darstellung der Massedifferenzen im Gebiet Grönland
masscalc.m	Multiplikation der Punktdichten σ_i mit Gitterflächen A_i
pellinen.m	Berechnung der spektralen Pellinen Filterkoeffizienten in Abhängigkeit vom Radius
sh.m	Formale Umstellung der Matrix mit C_{lm} , S_{lm} in zwei Matrizen $M_{C_{lm}}$ und $M_{S_{lm}}$
shfunc.m	Auswertung der Kugelflächenfunktion an der Stelle λ_i, φ_i
Test2.m	Berechnung der Zeitachse für weitere Plots
Test3.m	Plotfunktion der zeitlichen Auswertung

Test4.m	Darstellung des Spektrums der Fehler
Test5.m	Plotfunktion der Jahresbetrachtungen

Literaturverzeichnis

<http://adsabs.harvard.edu/abs/2005GeoRL..3205501V> (Juni 2007)

http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/index_GRACE.html (Juni 2007)

<http://www.jpl.nasa.gov/news/features-print.cfm?feature=1315> (Juni 2007)

<http://www.jpl.nasa.gov/multimedia/slideshows/ipy-200703/> (Juni 2007)

<http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/305/5683/503> (Juni 2007)

<http://www.sciencedaily.com/releases/2006/09/060920193210.htm> (Juni 2007)

<http://www.tagesspiegel.de/politik/archiv/03.02.2007/3058948.asp> (Juni 2007)

Austen G., Baur O., Keller W. (2005): Use of High Performance Computing in Gravity Field Research. Oktober 2005, HLRS Workshop, Stuttgart

Becker S. (2004): Smoothed Spatial Averaging in the Interpretation of the Time Variable Global Gravity Field. Rheinische Friedrich- Wilhelms- Universität Bonn, Diplomarbeit (2004)

Bettadpur S. (2007): GRACE 327-742 (CSR-GR-03-03), UTCSR Level-2 Processing Standards Document For Level-2 Product Release 0004. (2007)

Box J. E., Bromwich D. H. (2004): Greenland Ice Sheet Surface Mass Balance 1991-2002: Application of Polar MM5 Mesoscale Model an In Situ Data. Journal of Geophysical Research 109 (2004), DOI: 10.1029/2003JD004445, S. 1-19

Chen J.L. (2006): Satellite Gravity Measurements Confirm Accelerated Melting of Greenland Ice Sheet. Science 313 (2006), DOI: 10.1126/science.1129007, S. 1-4

Flechtner F. (2007): GRACE 327-743 (GR-GFZ-STD-001), GFZ Level-2 Processing Standards Document For Level-2 Product Release 0004. (2007)

Krabill W. (2007): Greenland Ice Sheet: High-Elevation Balance and Peripheral Thinning. Science 289 (2000), DOI: 10.1126/science.289.5478.428, S. 1-4

Kusche J., Fenoglio-Marc L. (2006): On the Filtering of Time-Variable Spherical Harmonic GRACE Gravity Solutions. Juni 2006, Session 4, Hotine-Marussi Symposium, Wuhan

R. Forsberg (2006): Mass Change of the Greenland Ice Sheet from GRACE. Report, Danish National Space Center

Luthcke S. B. (2006): Recent Greenland Ice Mass Loss by Drainage Systems from Satellite Observations. *Science* 314 (2006), DOI: 10.1126/science.1130776, S. 1286-1289

Rignot E. (2006): Changes in the Velocity Structure of the Greenland Ice Sheet. *Science* 311 (2006), DOI: 10.1126/science.1121381, S. 1-6

Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gürr T., Eicker A., Kusche J., Sanchez L., Han S. C. (2006): Regional Gravity Modelling In Terms of Spherical Base Functions. *Journal of Geodesy* (2006), DOI: 10.1007/s00190-006-0101-5, S. 1-20

Sneeuw N. (2006): Physical Geodesy, Vorlesungsmanuskript Geodätisches Institut, Universität Stuttgart

Velicogna I., Wahr J. (2004): Acceleration of Greenland Ice Mass Loss in Spring 2004. *Nature* 443, (2006), DOI: 10.1038/science.1121381, S. 329-331

Velicogna I, Wahr J. (2005): Greenland Mass Balance from GRACE. *Geophysical Research Letters* 32, (2005), DOI: 10.1029/2005GL023955, S. 1-4

Wahr J., Molenaar M., Bryan F. (1998): Time variability of the Earth's Gravity Field: Hydrological and Oceanic Effects and their possible detection using GRACE. *Journal of Geophysical Research* 103, (1998) S. 30,205-30,229

Zenner L. (2006): Zeitliche Schwerefeldvariationen aus GRACE und Hydrologiedaten. Technische Universität München, Diplomarbeit (2006)