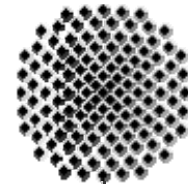




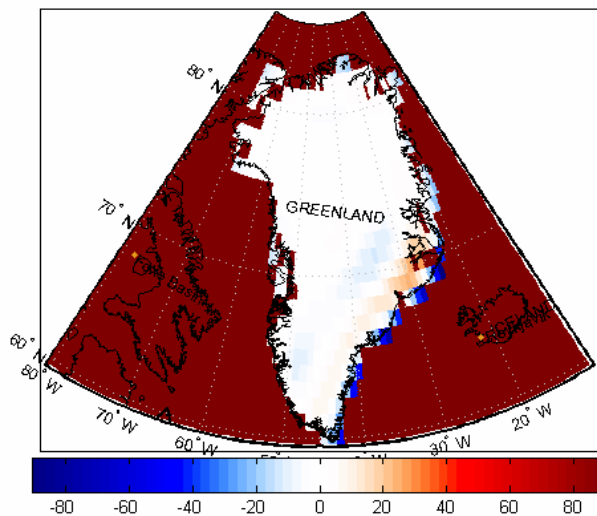
Universität Stuttgart

Geodätisches Institut



---

# Punktmasseschätzungen auf Grönland aus GRACE



Studienarbeit im Studiengang  
**Geodäsie und Geoinformatik**  
an der Universität Stuttgart

**Jing Xia**

Stuttgart, Dezember 2008

---

**Betreuer:**

Dr.-Ing. Oliver Baur  
Universität Stuttgart

**Prüfer:**

Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw  
Universität Stuttgart

## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, Jing Xia, dass ich die von mir eingereichte Studienarbeit zum Thema

### **Punktmasseschätzungen auf Grönland aus GRACE**

selbstständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Ort, Datum: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_



1. Einleitung.....	2
1.1. Motivation .....	2
1.2. Zielsetzung .....	2
2. Grundlagen.....	4
2.1. GRACE .....	4
2.2. Schwereänderungen in Satellitenhöhe aus GRACE.....	5
2.2.1. Mathematische Herleitung .....	5
2.2.2. Lineare Änderung der Kugelfunktionskoeffizienten .....	7
2.3. Schwereänderungen aus der Massenanziehung.....	10
2.4. Formulierung des Ausgleichsmodells .....	11
2.4.1. Beobachtungsgleichungen .....	11
2.4.2. Ausgleichsmodell.....	12
3. Analyse .....	14
3.1. Auswahl von Massepunkten.....	14
3.1.1. Räumliche Auflösung der Beobachtungen.....	14
3.1.2. Verteilung von Massepunkten.....	15
3.2. Spektraler Entwicklungsgrad.....	17
3.3. Bestimmung des Regularisierungsparameters.....	21
4. Vergleich mit anderen Schätzungen.....	28
5. Zusammenfassung .....	31
6. Summery.....	32
7. Literaturverzeichnis .....	33

# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation

Grönland wartet mit einem der größten Vorräte frischen Wassers der Erde auf (Velicogna und Wahr, 2005). Mit ungefähr 2,5 Millionen  $\text{km}^3$  sammelt sich hier rund 10% der globalen Eismasse. Das komplette Schmelzen der grönländischen Eiskappe hätte einen mittleren Meeresspiegelanstieg um ca. 6,5m zur Folge. Mit Hilfe von Laser-Altimetrie wurde gezeigt, dass die grönländische Eisverlustrate im Zeitraum 1997 bis 2003 im Bereich von  $-80 \pm 12 \text{km}^3/\text{Jahr}$  lag (Chen et al., 2006). Veränderungen in der grönländischen Eiskappe beeinflussen nicht nur den globalen Meeresspiegel, sondern darüber hinaus die Nordatlantische Zirkulation und damit das globale Klima. Die Auswertung von GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) Daten zeigt, dass in den letzten Jahren ein verstärkter Schmelzprozess eingesetzt hat, welcher sich vor allem an den Rändern Grönlands bemerkbar macht. Im Rahmen der Klimawandeldebatte ist es wichtig, diese Änderungen so genau wie möglich zu bestimmen.

## 1.2. Zielsetzung

In dieser Arbeit wird die Massenänderung auf Grönland über die daraus resultierende Gravitationsänderung geschätzt. Die GRACE Schwerefeldkoeffizienten werden dazu benutzt, Schwereänderungen in Satellitenhöhe zu berechnen. GRACE sieht nur Gesamtsignale. Die Signale beziehen sich auf das Eisschmelze, Ozean, Atmosphäre, GIA (glacial Isostatic Adjustment) usw. Davon ist die GIA die viskoelastische Reaktion der festen Erde zum Eisentladen über vergangenen tausend Jahre. Wenn die Eisschicht sich verschmelzt, nimmt die Schwere von Eis ab und hebt sich das ganz Grönland hoch. In dieser Arbeit werden die Gesamtsignale benutzt, d.h. die

Wirkungen aus allen Faktoren (z.B. aus Ozean in der Umgebung von Grönland oder aus atmosphärischen Effekten) werden nicht getrennt. Es wird angenommen, dass die Distanzänderungen zwischen den zwei GRACE-Satelliten nur von Schwereänderungen verursacht werden. Die Schwereänderungen werden mittels Punktmassenänderungen über Grönland modelliert. Die Untersuchungen fokussieren auf die Auswahl von Massepunkten, den Entwicklungsgrad der Schwerefeldkoeffizienten (spektrale Auflösung), die Gravitationsänderungen und den Einfluss der notwendigen Regularisierung. Daran schließt sich der Vergleich mit alternativen Abschätzungen der Eismengenänderung über Grönland.

Diese Arbeit basiert auf einer Methode nach Forsberg und Reeh (2006). Um die Schwereänderungen in Massenänderungen zu konvertieren, wird eine Inversion über die Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt.

## 2. Grundlagen

### 2.1. GRACE

Die GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) Mission wurde vom DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt) und der NASA/JPL in Kooperation entwickelt. Das Projekt verspricht die Bestimmung des globalen Geoids mit einer Genauigkeit im cm-Bereich, und ist damit um einen Faktor fünf bis zehn genauer als bisherige Methoden der Satellitengeodäsie. Primäres Ziel von GRACE ist die Bestimmung des zeitvariablen Erdschwerefeldes. Die zeitliche Auflösung beträgt ca. 30 Tage. GRACE besteht aus zwei baugleichen Satelliten in einer niedrigen Umlaufbahn. Aufgrund ihres korrelierten Orbits erhielten die Satelliten die Spitznamen „Tom“ und „Jerry“. GRACE basiert auf den Vorarbeiten zum Satelliten CHAMP (Challenging Minisatellite Payload). Die Satelliten wurden am 17. März 2002 mit einer Rockot-Rakete von Plessezk aus in eine nahezu polare ( $89^\circ$  Inklination) und zirkulare Umlaufbahn mit einer Anfängshöhe von 500km gebracht. Die Satelliten arbeiten nach dem SST-Prinzip (Satellite-to-Satellite Tracking): Sie umrunden die Erde auf derselben Bahn in etwa 200km Abstand und messen per Mikrowellen-Verbindung kontinuierlich die gegenseitige Distanz. Dadurch lassen sich Unregelmäßigkeiten des Schwerefeldes mit hoher Präzision analysieren, obwohl die Schwereanomalien in einigen hundert Kilometern Höhe deutlich weniger sensitiv sind als an der Erdoberfläche.

Das Missionsprinzip ist denkbar einfach: Unregelmässigkeit in der Massenverteilung der Erde wirken sich auf die Bahnbewegung der Satelliten aus. Die relative Auswirkung zwischen den Satelliten (Vergrößerung oder Verkleinerung der Distanz) wird über den Mikrowellen-Link gemessen (K-Band). Dadurch kann auf die Struktur des Erdschwerefeldes geschlossen werden. Wenn sich ein Satellit beispielsweise einem Gebiet höherer Schwerkraft (z.B. Gebirge) annähert, wird er zu diesem Gebiet hingezogen und geringfügig beschleunigt (im Vergleich zu einer ungestörten Bahn), und der Satellitenabstand vergrößert sich. Wenn sich der andere Satellit auch an das

Gebiet mit höherer Schwerkraft annähert und der erste Satellit langsam vorbei fliegt, verringert sich die Geschwindigkeit von dem ersten Satelliten wegen dieser Anziehung und der zweite Satellit wird beschleunigt. Dadurch verringert sich die Distanz wenn der erste Satellit das Gebiet höherer Schwerekraft passiert hat, da er abgebremst wird.

Man benutzt die Beobachtungen der Entfernungsänderung zwischen den beiden Satelliten zur wiederholten Bestimmung der sphärischen harmonischen Koeffizienten des Erdschwerefeldes (sogenannte Monatslösungen). Die Differenz zweier Koeffizientensätze beschreibt die monatlichen Änderung des Schwerefeldes und damit monatlichen Variationen der Massenverteilung.

Die wissenschaftliche Auswertung erfolgt vorrangig am CSR (Center of Space Research), am JPL (Jet Propulsion Laboratory) sowie am GFZ (GeoForschungsZentrum) Potsdam. In dieser Arbeit werden die Lösungen des CSR verwendet.

## **2.2. Schwereänderungen in Satellitenhöhe aus GRACE**

Aus GRACE Beobachtungen werden die sphärischen harmonischen Koeffizienten des Erdschwerefeldes mit monatlicher Auflösung bereit gestellt. Mit Hilfe der Koeffizienten lassen sich die entsprechenden Schwereänderungen berechnen.

### **2.2.1. Mathematische Herleitung**

Normalerweise wird das Potenzial des Erdschwerefeldes  $U_{\text{Grav}}(\lambda, \varphi, r)$  in einer Kugelfunktionsentwicklung dargestellt. Diese erhält man nach der Lösung eines Separationsansatzes in sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \varphi, r)$  der LAPLACE-Differentialgleichung

$$\Delta U_{\text{Grav}}(\lambda, \varphi, r) = 0. \quad (1)$$

Gleichung (1) gilt für den Außenraum der Erde. Die Kugelfunktionsentwicklung für den Außenraum der Erde sieht wie folgt aus (Heiskanen und Moritz, 1967):



$$\begin{aligned}
U_{\text{Grav}}(\lambda, \varphi, r) &= \frac{GM}{R} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n u_{n,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} e^{n,m}(\lambda, \varphi) \\
&= \frac{GM}{r} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n u_{n,m} \left(\frac{R}{r}\right)^n e^{n,m}(\lambda, \varphi).
\end{aligned} \tag{2}$$

Die unbekanntenen Koeffizienten  $u_{n,m}$  ( $n$  bezeichnet den Grad und  $m$  die Ordnung des Kugelfunktionstermes) in Gleichung (2) können aus Beobachtungen im Kraftfeld der Erde (so z.B. aus GRACE) bestimmt werden. Der maximale spektrale Entwicklungsgrad ist mit  $N$  bezeichnet. In der Kugelfunktionsentwicklung treten die sogenannten Kugelflächenfunktionen  $e^{n,m}(\lambda, \varphi)$  auf. Die Kugelflächenfunktionen können mit Hilfe der zugeordneten normierten Legendre-Funktionen erster Art  $\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$  berechnet werden gemäß (Heiskanen und Moritz, 1967)

$$e^{n,m}(\lambda, \varphi) = \begin{cases} \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \cdot \cos m\lambda; & m > 0 \\ \bar{P}_{n,0}(\sin \varphi) & ; m = 0 \\ \bar{P}_{n,|m|}(\sin \varphi) \cdot \sin|m|\lambda; & m < 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Mit

$$e^{n,m}(\lambda, \varphi) = \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \cdot \cos m\lambda \rightarrow u_{n,m} = \bar{C}_{n,m} \quad \text{für } m \geq 0 \text{ (Kosinus-Terme)}, \tag{4}$$

$$e^{n,m}(\lambda, \varphi) = \bar{P}_{n,|m|}(\sin \varphi) \cdot \sin|m|\lambda \rightarrow u_{n,m} = \bar{S}_{n,m} \quad \text{für } m < 0 \text{ (Sinus-Terme)} \tag{5}$$

wird Gleichung (2) zu

$$U_{\text{Grav}}(\lambda, \varphi, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^N \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi). \tag{6}$$

Darin bedeuten:

$U_{\text{Grav}}$  : Gravitationspotenzial in sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \varphi, r)$ ,

$R$ : mittlerer Erdradius,

$r=R+500\text{km}$ : Distanz des Satelliten zum Geozentrum (die Berechnung der Schwereänderungen wird in 500km Satellitenhöhe durchgeführt),

$GM=3,986004415 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$  : Geozentrische Konstante,

$\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  : Kugelflächenfunktionskoeffizienten (nominiert), und

$\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$  : Legendre-Funktionen (nominiert).

Der Gravitationsvektor ist der Gradient des Gravitationspotenzials:

$$\mathbf{g} = \text{grad}U_{\text{Grav}} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} e_\lambda + \frac{\partial U}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r} e_r. \quad (7)$$

Für die radiale Komponente wird:

$$g = \frac{\partial U_{\text{Grav}}(\lambda, \varphi, r)}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi). \quad (8)$$

Darin werden die Legendre-Funktionen nach Formel (9) berechnet und nach Formel (10) normiert:

$$\begin{aligned} P_{n+1,n+1}(\sin \varphi) &= (2n+1) \cdot \cos \varphi \cdot P_{n,n}(\sin \varphi), \\ P_{n+1,1}(\sin \varphi) &= (2n+1) \cdot \sin \varphi \cdot P_{n,n}(\sin \varphi), \\ P_{n+1,m}(\sin \varphi) &= \frac{1}{n-m+1} [(2n+1) \cdot \sin \varphi \cdot P_{n,m}(\sin \varphi) - (n+m) \cdot P_{n-1,m}(\sin \varphi)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Normierung: } \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot P_{n,m}(\sin \varphi). \quad (10)$$

### 2.2.2. Lineare Änderung der Kugelfunktionskoeffizienten

Zur Berechnung von Schwereänderungen müssen die entsprechenden Koeffizientenänderungen benutzt werden. In Arbeit untersuche ich die Schwereänderung (linearer Trend) vom 01.04.2002 bis zum 31.03.2007. Der Analysezeitraum erstreckt sich somit über fünf Jahre. Deshalb muss vor allem darauf geachtet werden, die Änderungen in den Kugelfunktionskoeffizienten korrekt zu bestimmen, und zwar über eine Regressionsgerade pro Koeffizient.

Das Vorgehen ist wie folgt:

- Pro Koeffizient fallen 57 absolute Lösungen an (Anzahl der Epochen bzw. Anzahl der GRACE-Monatslösungen). Im Analysezeitraum werden für die drei Monate 6/2002, 7/2002 und 6/2003 vom CSR keine Lösungen geliefert. Die monatlichen Lösungen vom 01.04.2002 bis zum 31.03.2007 sind in Tabelle 1 zusammen gefasst.

Tabelle 1: monatliche GRACE-Lösungen des CSR

Jahr	Monate	Anzahl der Lösungen
2002	4, 5, 8, 9, 10, 11, 12	7
2003	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12	11
2004	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	12
2005	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	12
2006	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	12
2007	1, 2, 3	3
		$\Sigma=57$

Sei die Gesamtanzahl der Epochen von Koeffizienten  $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$   $T$  ( $T=57$ ), so ergeben sich die Mittelwerte von  $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  zu

$$\begin{aligned}\bar{C}_{n,m}^{\text{Mittelwert}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \bar{C}_{n,m}(t), \\ \bar{S}_{n,m}^{\text{Mittelwert}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \bar{S}_{n,m}(t).\end{aligned}\tag{11}$$

- Von jeder einzelnen Monatslösung wird das Mittel der 57 Lösungen abgezogen, was in Residualwerte resultiert:

$$\begin{aligned}d\bar{C}_{n,m}(t) &= \bar{C}_{n,m}(t) - \bar{C}_{n,m}^{\text{Mittelwert}}, \\ d\bar{S}_{n,m}(t) &= \bar{S}_{n,m}(t) - \bar{S}_{n,m}^{\text{Mittelwert}}.\end{aligned}\tag{12}$$

- An die 57 Residualwerte wird eine Regressionsgerade angepasst mit den Parametern  $a_{C_{n,m}}$  und  $b_{C_{n,m}}$  gemäß:

$$y_{C_{n,m}} = a_{C_{n,m}} \cdot t + b_{C_{n,m}} \Rightarrow \begin{pmatrix} d\bar{C}_{n,m}(t=0) \\ \vdots \\ d\bar{C}_{n,m}(t=56) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 56 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{C_{n,m}} \\ b_{C_{n,m}} \end{pmatrix},\tag{13}$$

$$y_{S_{n,m}} = a_{S_{n,m}} \cdot t + b_{S_{n,m}} \Rightarrow \begin{pmatrix} d\bar{S}_{n,m}(t=0) \\ \vdots \\ d\bar{S}_{n,m}(t=56) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 56 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{S_{n,m}} \\ b_{S_{n,m}} \end{pmatrix}.\tag{14}$$

- Die Steigung der Regressionsgerade gibt den linearen Trend des Koeffizienten an. Als Beispiel sind in den Abb. 1 und 2 der lineare Trend der Koeffizienten  $d\bar{C}_{9,1}$

und  $d\bar{S}_{9,1}$  dargestellt.

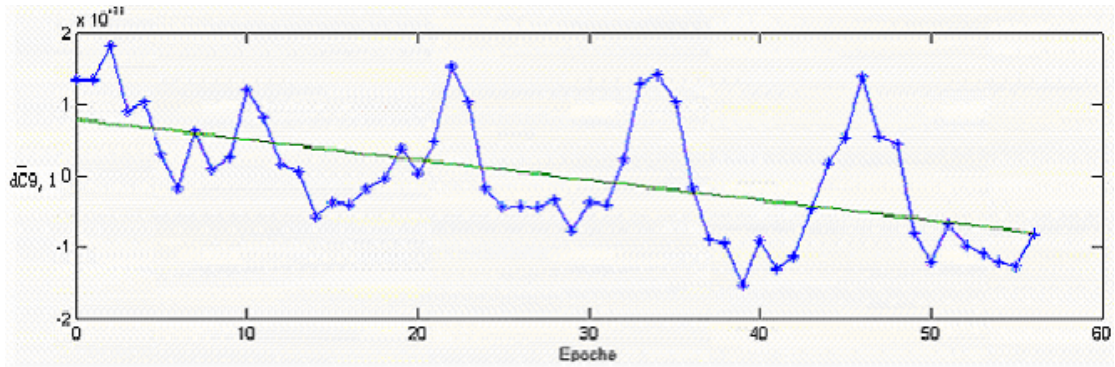


Abbildung 1: Linearer Trend  $d\bar{C}_{9,1}$

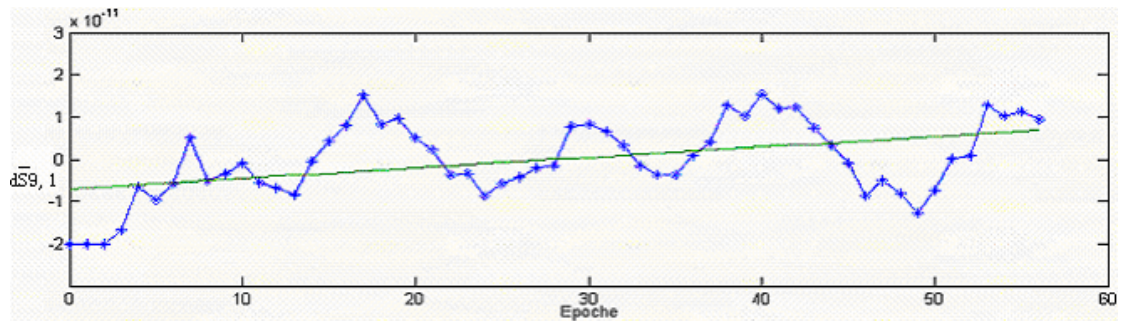


Abbildung 2: Linearer Trend  $d\bar{S}_{9,1}$

Der Trend über den Gesamtzeitraum der berücksichtigten monatlichen Lösungen gibt die Änderung des Koeffizienten  $\Delta\bar{C}_{n,m}$  und  $\Delta\bar{S}_{n,m}$  über die gesamte Zeitspanne:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{n,m} &= (a_{C_{n,m}} \cdot 56 + b_{C_{n,m}}) - (a_{S_{n,m}} \cdot 0 + b_{S_{n,m}}), \\ \Delta\bar{S}_{n,m} &= (a_{S_{n,m}} \cdot 56 + b_{S_{n,m}}) - (a_{C_{n,m}} \cdot 0 + b_{C_{n,m}}).\end{aligned}\tag{15}$$

Die neu berechneten Koeffizientenänderungen werden in Gleichung (8) eingesetzt. Damit ergeben sich die entsprechenden Schwereänderungen relativ zum zeitlichen Mittel zu

$$\Delta g = -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi).\tag{16}$$

### 2.3. Schwereänderungen aus der Massenanziehung

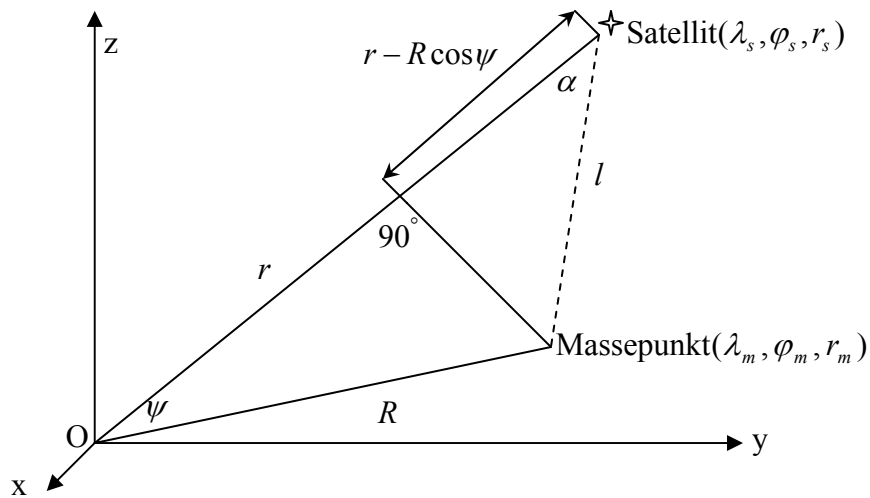


Abbildung 3: Beziehung zwischen Satellit und Massepunkt

Gemäß Abb. 3 hat der Raumwinkel  $\psi$  mit den Satellitenkoordinaten  $(\varphi_s, \lambda_s)$  und den Massepunktskoordinaten  $(\varphi_m, \lambda_m)$  folgende Beziehung (Heiskanen und Moritz, 1967):

$$\cos \psi = \sin \varphi_s \sin \varphi_m + \cos \varphi_s \cos \varphi_m \cos(\lambda_m - \lambda_s). \quad (17)$$

Nach dem Kosinussatz wird  $l = (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{1/2}$ . Darüber hinaus ist die gravitative Anziehung einer Punktmassen bekannt mit  $a = \frac{Gm}{l^2}$ . Der Anteil der Anziehung in radiale Richtung ist  $g = a \cos \alpha = \frac{Gm}{l^2} \cos \alpha$  mit  $\cos \alpha = \frac{r - R \cos \psi}{l}$ .

Damit wird

$$g = \frac{Gm}{l^2} \cdot \frac{r - R \cos \psi}{l} = Gm \cdot \frac{r - R \cos \psi}{l^3} = Gm \cdot \frac{r - R \cos \psi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}. \quad (18)$$

Wenn sich die Masse verändert, ändert sich auch deren gravitative Wirkung. Die Schwereänderung (Forsberg und Reeh, 2006) wird zu

$$\Delta g = G \cdot \Delta m \cdot \frac{r - R \cos \psi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}. \quad (19)$$

Jeder Massepunkt beeinflusst die Schwerekraft in allen Berechnungspunkten. Deshalb

ist die Schwereänderung  $\Delta g$  in einem beliebigen Beobachtungspunkt  $i$  die Summe aller Schwereänderungen, die von punktuellen Massenänderungen  $u=1,\dots,U$  verursacht werden:

$$\Delta g_i = \sum_{u=1}^U G \cdot \Delta m_u \frac{r - R \cos \psi_{i,u}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{i,u})^{3/2}}. \quad (20)$$

## 2.4. Formulierung des Ausgleichsmodells

In Kapitel 2.2.2. wurde die Gleichung (16) hergeleitet. Sie erlaubt die Berechnung von Schwereänderungen über die monatlichen GRACE-Lösungen (Änderungen der Kugelfunktionskoeffizienten). Die so berechneten „Beobachtungen“ bilden die linke Seite der Gleichung (20). Weiterhin sind sämtliche Konstanten sowie die Koordinaten der Beobachtungs- und Massepunkte vorgegeben. Somit sind nur die Punktmassenänderungen  $\Delta m_u$  unbekannt. Die Inversion von Gleichung (20) liefert die gewünschten Massenänderungen der Massepunkte innerhalb des Testgebiets Grönland. Die Inversion von Gleichung (20) erfolgt unter der Bedingung minimaler Verbesserungsquadratsumme.

### 2.4.1. Beobachtungsgleichungen

Mit (16) und (20) sind zwei Gleichungen für die Schwereänderungen gegeben:

$$\Delta g_i = \sum_{u=1}^U G \cdot \Delta m_u \frac{r - R \cos \psi_{i,u}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{i,u})^{3/2}},$$

$$\Delta g_i = -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda_i + \Delta \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda_i) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi_i).$$

Wir nehmen an, dass die Anzahl der Beobachtungen  $I$  ( $i=1,\dots,I$ ) ist ( $\rightarrow S(\varphi_i, \lambda_i, r)$ ) mit  $r=R+500\text{km}$  und die Anzahl der Massepunkte  $U$  ( $u=1,\dots,U$ ) ist ( $\rightarrow P(\varphi_u, \lambda_u, R)$ ).

dabei ist  $U$  die Anzahl der Koordinatenpaare von Grönland, also jede Unbekannte  $\Delta m_u$

bezieht sich auf die Koordinaten  $P(\varphi_u, \lambda_u, R)$ . Die unbekanntenen Massenänderungen fallen nicht pro Epoche an, sondern über die gesamte Zeitspanne. Die Beobachtungsgleichungen werden demnach zu

$$\begin{aligned} \Delta g_i &= -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda_i + \Delta \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda_i) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi_i) \\ &= \sum_{u=1}^U G \cdot \Delta m_u \frac{r - R \cos \psi_{i,u}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{i,u})^{3/2}} \end{aligned} \quad (21)$$

In Matrix-Vektorschreibweise  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$  wird

$$\mathbf{x} = (\Delta m_1 \quad \Delta m_2 \quad \cdots \quad \Delta m_u), \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = G \cdot \begin{pmatrix} \frac{r - R \cos \psi_{1,1}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{1,1})^{3/2}} & \frac{r - R \cos \psi_{1,2}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{1,2})^{3/2}} & \cdots & \frac{r - R \cos \psi_{1,U}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{1,U})^{3/2}} \\ \frac{r - R \cos \psi_{2,1}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{2,1})^{3/2}} & \frac{r - R \cos \psi_{2,2}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{2,2})^{3/2}} & \cdots & \frac{r - R \cos \psi_{2,U}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{2,U})^{3/2}} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{r - R \cos \psi_{i,1}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{i,1})^{3/2}} & \frac{r - R \cos \psi_{i,2}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{i,2})^{3/2}} & \cdots & \frac{r - R \cos \psi_{i,U}}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_{i,U})^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (23),$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda_1 + \Delta \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda_1) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi_1) \\ -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda_2 + \Delta \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda_2) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi_2) \\ \vdots \\ -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda_I + \Delta \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda_I) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi_I) \end{pmatrix} \quad (24)$$

#### 2.4.2. Ausgleichungsmodell

Im Gauß-Markov-Modell (Koch, 1999) gemäß  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$  wird durch Minimierung

der Verbesserungsquadratsumme  $\mathbf{v}'\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$ :

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \min \rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})'(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}},$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{y} = \min_{\mathbf{x}}, \quad (25)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{y} = \min_{\mathbf{x}}.$$

Der Extremwertaufgabe entspricht die Formulierung

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{v}'\mathbf{v})}{\partial\mathbf{x}} &= 0, \\ \Rightarrow 2\mathbf{A}'\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}'\mathbf{y} &= 0, \\ \Rightarrow \mathbf{A}'\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}'\mathbf{y}, \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{26}$$

Allerdings kann die Matrix  $\mathbf{A}$  schlecht konditioniert oder singulär sein, d.h.  $\det(\mathbf{A}'\mathbf{A}) \rightarrow [0]$ , deshalb ist die Kleinste-Quadrate-Lösung  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{y}$  nicht zwangsläufig zielführend. Im Fall der Singularität muss man die Matrix regularisieren. Das regularisierte Minimierungsproblem mit Regularisierungsmatrix  $\mathbf{\Gamma}$  (Hansen, 2005) lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'\mathbf{v} &= \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}\|^2, \\ \mathbf{v}'\mathbf{v} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \\ \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}\|^2 &\rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \\ \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})'(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{\Gamma}\mathbf{x})'(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}) &= \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{y} + \mathbf{x}'\mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \tag{27} \\ \frac{\partial\mathbf{v}'\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}} &= 2\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{A}'\mathbf{y} + 2\mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{x} = 0, \\ \Rightarrow (\mathbf{A}'\mathbf{A} + \mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Gamma})\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}'\mathbf{y}, \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}'\mathbf{A} + \mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Die Wirkung der Regularisierung ist abhängig von der Wahl der Matrix  $\mathbf{\Gamma}$  (z.B.  $\mathbf{\Gamma} = \lambda\mathbf{I}$  mit Regularisierungsparameter  $\lambda$ ). Wenn  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$  ist, geht die regularisierte Lösung in der ursprüngliche Kleiste-Quadrate-Lösung (26) über. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Regularisierungsmatrix zu  $\mathbf{\Gamma} = \lambda\mathbf{I}$  gewählt.



### **3. Analyse**

Die berechneten Ergebnisse (Punktmassenänderungen) werden von vielen Parametern beeinflusst. Ich untersuche die Auswirkungen in drei Richtungen: die Auswahl der Massepunkte, den maximalen spektralen Entwicklungsgrad  $N$  und die Wahl des Regularisierungsparameters  $\lambda$ .

#### **3.1. Auswahl von Massepunkten**

Jeder einzelne Massepunkt hat einen Einfluss auf die Schwere in jedem Beobachtungspunkt. Deshalb spielt die Auswahl von Massepunkten eine wichtige Rolle. Es ist bekannt, dass die grönländische Eiskappe vor allem am Rand starken Massenvariationen unterlegen ist. Daher untersucht dieses Kapitel zwei Fragen:

1. wie dicht soll man die Massepunkte wählen?
2. wie soll man die Massepunkte verteilen?

##### **3.1.1. Räumliche Auflösung der Beobachtungen**

Bei der Berechnung von Massenänderungen sollte man sich entscheiden, mit welcher räumlichen Auflösung man die Beobachtungspunkte wählt, d.h. das Intervall zwischen benachbarten Punkten. Abb. 4 zeigt zwei räumliche Auflösungen ( $1^\circ$  und  $0,25^\circ$ ) von Schwereänderungen aus GRACE-Lösungen. Das Testgebiet ist aus zwei Teilen zusammen gesetzt. Das Eine fasst den Bereich von  $61,5^\circ$  bis  $80,5^\circ$  westlicher Länge und von  $75,5^\circ$  bis  $85,5^\circ$  nördlicher Breite um. Das andere erstreckt sich von  $10,5^\circ$  bis  $60,5^\circ$  westlicher Länge und von  $59,5^\circ$  bis  $85,5^\circ$  nördlicher Breite.

Mit einer räumliche Auflösung von  $1^\circ$ , d.h. einem  $1^\circ \times 1^\circ$  Gitter, ist die Anzahl der Beobachtungen 1597 und die Anzahl der Unbekannten 676, d.h. innerhalb des Testgebiets werden in 1597 Punkten Schwereänderungen berechnet, welchen 676 Punkte als Massepunkte gegenüber stehen. Die Redundanz ist somit 921. Wenn die Auflösung  $0,25^\circ$  beträgt,  $0,25^\circ \times 0,25^\circ$  Gitter, werden innerhalb des Testgebiets 23905

Beobachtungen berücksichtigt und Massenänderungen in 10579 Punkten auf Grönland berechnet. In diesem Fall ist die Redundanz 13326. Je dichter die Beobachtungen und Massepunkte gewählt werden, desto größer wird die Redundanz. Von der  $1^\circ$  Auflösung zur  $0,25^\circ$  Auflösung vergrößert sich die Redundanz um den Faktor 14, deshalb können im zweiten Fall die Massenänderungen mit höherer Genauigkeit bestimmt werden.

Leider gestaltet sich der Speicheraufwand im Fall der Auflösung von  $0,25^\circ$  als so groß, dass das Matlab-Programm die Berechnung nicht durchführen kann. Deshalb kann ich die Massenänderung mit dieser Auflösung nicht berechnen. In den folgenden Untersuchungen wird deshalb mit einer Auflösung von  $1^\circ$  gerechnet.

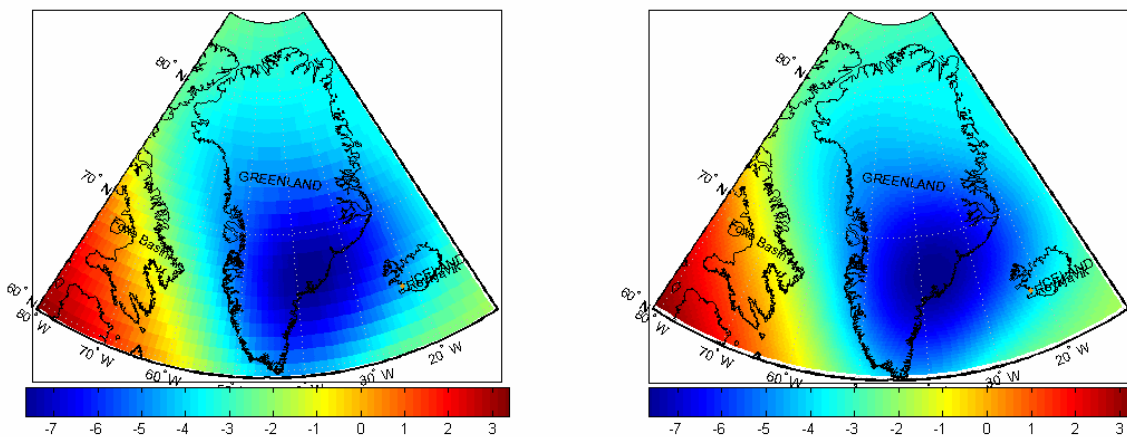


Abbildung 4: Schwereänderungen in Satellitenhöhe (500km) in  $\mu\text{Gal}$ ; links: räumliche Auflösung  $1^\circ$ ; rechts: räumliche Auflösung  $0,25^\circ$ .

### 3.1.2. Verteilung von Massepunkten

Die Verteilung von Massepunkten bezieht sich auf die Wahl, wo man die Massepunkte auf Grönland lokalisiert. Beispielsweise kann man die Massepunkte auf einem regelmäßigen Gitter über Grönland verteilen. Nach Abb. 4 indessen zeigen sich die stärksten Massenänderungen im Südosten Grönlands. Deshalb kann man die Massepunkte alternativ nur entlang der Ostküste von Grönland auswählen.

Werden die Massepunkte über ganz Grönland verteilt, so resultieren die Punktmasseänderungen auf der linken Seite in Abb. 5. Das Muster beweist die Aussage,

dass die stärksten Massenänderungen entlang des östlichen Rands auftreten. Mit der Beschränkung von Massepunkten am östlichen Rand resultiert die rechte Seite in Abb. 5. Über ganz Grönland werden die Massepunkte regelmäßig mit der Auflösung  $1^\circ$  verteilt. Wenn das Testgebiet nur den östlichen Rand umfasst, werden nur die ersten 10 Punkte auf jedem Breitenkreis über Grönland von Ost nach West in der Berechnung berücksichtigt. Für die Berechnungen wurde in beiden Fällen der spektrale Entwicklungsgrad zu  $N = 30$  gesetzt und der Regularisierungsparameter zu  $\lambda = 10^{-43}$  in dem Testgebiet über ganz Grönland, und zu  $\lambda = 10^{-44}$  in dem Gebiet am östlichen Rand gewählt.

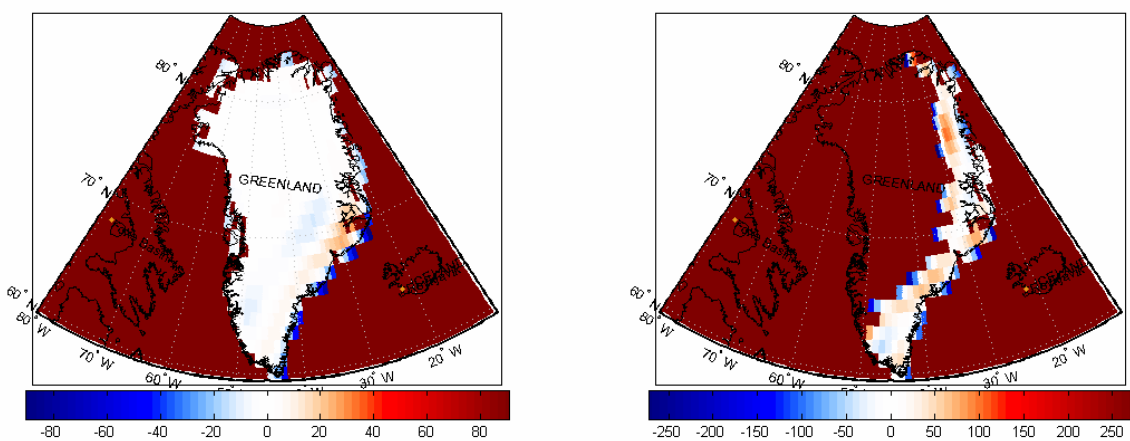


Abbildung 5: Berechnete Volumenänderungen in  $\text{km}^3$  über den Gesamtzeitraum (5 Jahre); Verteilung der Massepunkte über ganz Grönland (linke Figur) bzw. nur am östlichen Rand (rechte Figur)

Mit der Verteilung der Massepunkte über ganz Grönland beträgt die Volumenänderung der Eiskappe über den Gesamtzeitraum (5 Jahre)  $-1134\text{km}^3$ . Die jährliche Änderung ist  $-227\text{km}^3$ . Wenn man die Massepunkte nur am östlichen Rand von Grönland wählt, beträgt die gesamte Volumenänderung  $-1105\text{km}^3$ , mit einer jährlichen Änderung von  $-221\text{km}^3$ . Somit ist der Betrag der Volumenänderung weitgehend unabhängig von der Verteilung der Massepunkte.

In den gewählten Punkten am Rand wird die Summe der Eisvolumenänderungen zu  $-754\text{km}^3$ , wenn man die Volumenänderungsschätzung für ganz Grönland vornimmt. Somit findet ca. 68% der gesamten Eisvolumenänderung am östlichen Rand statt.

### 3.2. Spektraler Entwicklungsgrad

Die Abb. 6 bis 11 zeigen die Schwereänderungen samt den daraus geschätzten Volumenänderungen in Abhängigkeit des spektralen Entwicklungsgrades  $N$ . Die Verteilung der Massepunkte erfolgt über ganz Grönland. Für die Berechnungen wurde der Regularisierungsparameter zu  $\lambda = 10^{-43}$  gesetzt.

Wenn der Entwicklungsgrad sehr klein ist, z.B.  $N = 5$  oder  $N = 10$ , wird anhand der Abb. 6 und 7 deutlich, dass eine stark Glättung statt findet. Die Schwereänderungen sind relativ regelmäßig auf dem ganzen Gebiet verteilt. Mit wachsendem Entwicklungsgrad treten die räumlichen Strukturen mehr und mehr hervor. Es wird zunehmend deutlich, dass das stärkste Signal im Südosten Grönlands lokalisiert ist.

Auf der numerischen Seite ist festzuhalten, dass die Summe der Schwereänderungen über das ganze Testgebiet mit dem Entwicklungsgrad ansteigt, vergleiche Tabelle 2. Sehr deutlich ist dies für niedrige Entwicklungsgrade,  $N = 5, 10, 15$ . Ab  $N = 30$  sind die Unterschiede nur noch sehr gering. Je höher der Entwicklungsgrad ist, umso kleiner ist der Unterschied der Summe. Die entsprechende Aussage gilt für die Volumenänderung in Tabelle 3.

In den Tabellen 2 und 3 bezeichnen  $\Delta g_N$  die Summe der Schwereänderungen aller Massepunkte mit Entwicklungsgrad  $N$  und  $\Delta v_N$  die entsprechende Summe der Volumenänderungen.  $d\Delta g_N$  steht für die Differenz zwischen  $\Delta g_{N_1}$  mit dem Entwicklungsgrad  $N_1$  und  $\Delta g_{N_2}$  mit dem Entwicklungsgrad  $N_2$ . Entsprechend ist  $d\Delta v_N$  die Differenz der Volumenänderungen zwischen den zwei Entwicklungsgraden  $N_1$  und  $N_2$ . Mit den Gleichungen (28) und (29) werden die prozentuale Abweichung  $p_g$  der Schwereänderungen und  $p_v$  der Volumenänderungen berechnet für verschiedene Entwicklungsgrade  $N$ .

$$\begin{aligned} d\Delta g_N &= \Delta g_{N_2} - \Delta g_{N_1} \\ p_g &= \frac{d\Delta g_N}{\Delta g_{N_1}} \cdot 100 = \frac{\Delta g_{N_2} - \Delta g_{N_1}}{\Delta g_{N_1}} \cdot 100 \end{aligned} \quad (28)$$

Tabelle 2: Differenzen und Abweichungen von Schwereänderungen in Abhängigkeit des Entwicklungsgrades  $N$ .

Grad $N$	5	10	15	30	45	60
$\Delta g_N$ [ $\mu\text{Gal}$ ]	-2.97	-6.20	-6.60	-6.54	-6.55	-6.55
$d\Delta g_N$ [ $\mu\text{Gal}$ ]	-3.23	-0.40	0.06	-0.01	-0.01	
$p_g$ [%]	108.55	6.49	-0.96	0.11	0.09	

$$d\Delta v_N = \Delta v_{N_2} - \Delta v_{N_1}$$

$$p_v = \frac{d\Delta v_N}{\Delta v_{N_1}} \cdot 100 = \frac{\Delta v_{N_2} - \Delta v_{N_1}}{\Delta v_{N_1}} \cdot 100 \quad (29)$$

Tabelle 3: Differenzen und Abweichungen von Volumenänderungen in Abhängigkeit des Entwicklungsgrades  $N$ .

Grad $N$	5	10	15	30	45	60
$\Delta v_N$ [ $\text{km}^3$ ]	-490.25	-1034.79	-1122.13	-1133.93	-1134.04	-1131.61
$d\Delta v_N$ [ $\text{km}^3$ ]	-544.54	-87.33	-11.80	-0.12	2.43	
$p_v$ [%]	111.07	8.44	1.05	0.01	-0.21	

In Abb. 12 wird gezeigt, wie sich der jährliche Volumenverlust mit steigendem Entwicklungsgrad ändert. Dazu wurde der Regularisierungsfaktor zu  $\lambda = 10^{-43}$  gewählt. Die Abbildung beweist, dass es keinen großen Unterschied der Eisverlustschätzung auf Grönland zwischen den Entwicklungsgraden 30, 45 und 60 gibt.

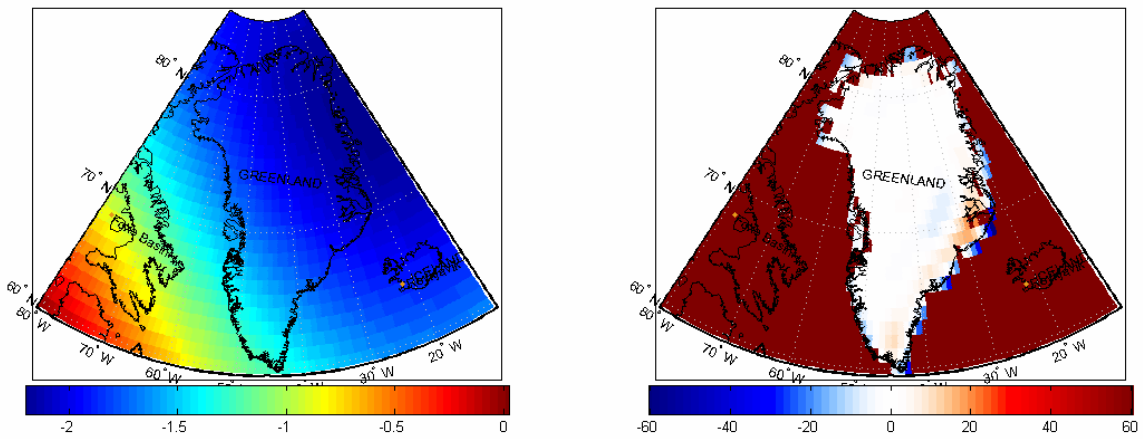


Abbildung 6: links: Schwereänderungen [ $\mu\text{Gal}$ ] in Satellitenhöhe (500km); rechts: Volumenänderung [ $\text{km}^3$ ]; spektraler Entwicklungsgrad  $N = 5$

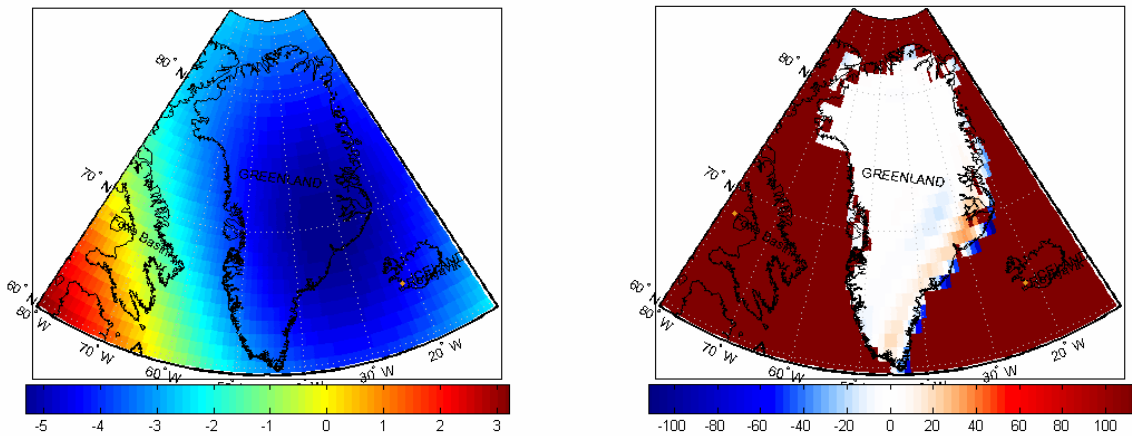


Abbildung 7: links: Schwereänderungen [ $\mu\text{Gal}$ ] in Satellitenhöhe (500km); rechts: Volumenänderung [ $\text{km}^3$ ]; spektraler Entwicklungsgrad  $N = 10$

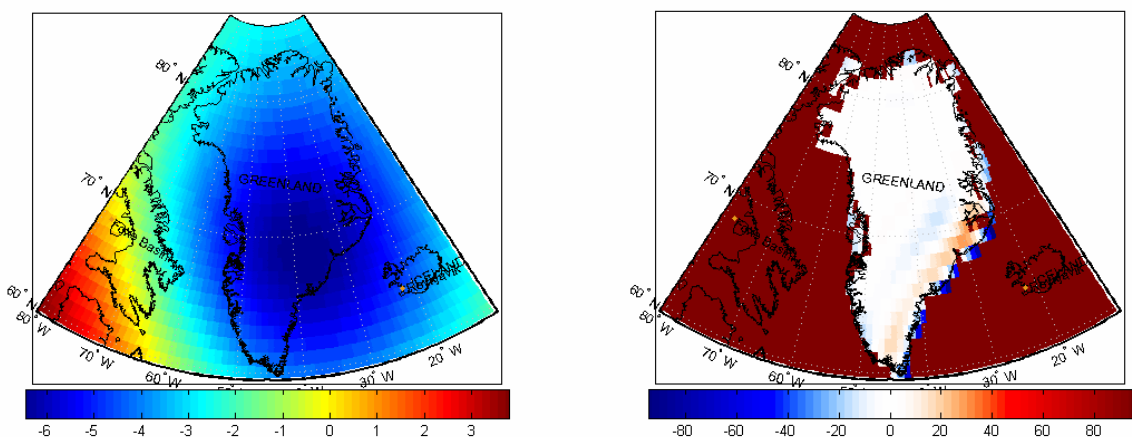


Abbildung 8: links: Schwereänderungen [ $\mu\text{Gal}$ ] in Satellitenhöhe (500km); rechts: Volumenänderung [ $\text{km}^3$ ]; spektraler Entwicklungsgrad  $N = 15$

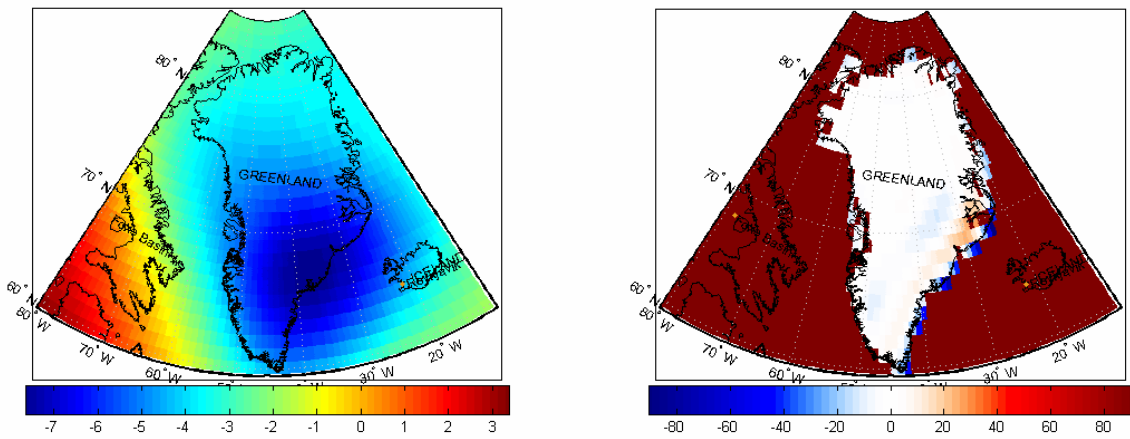


Abbildung 9: links: Schwereänderungen [ $\mu\text{Gal}$ ] in Satellitenhöhe (500km); rechts: Volumenänderung [ $\text{km}^3$ ]; spektraler Entwicklungsgrad  $N = 30$

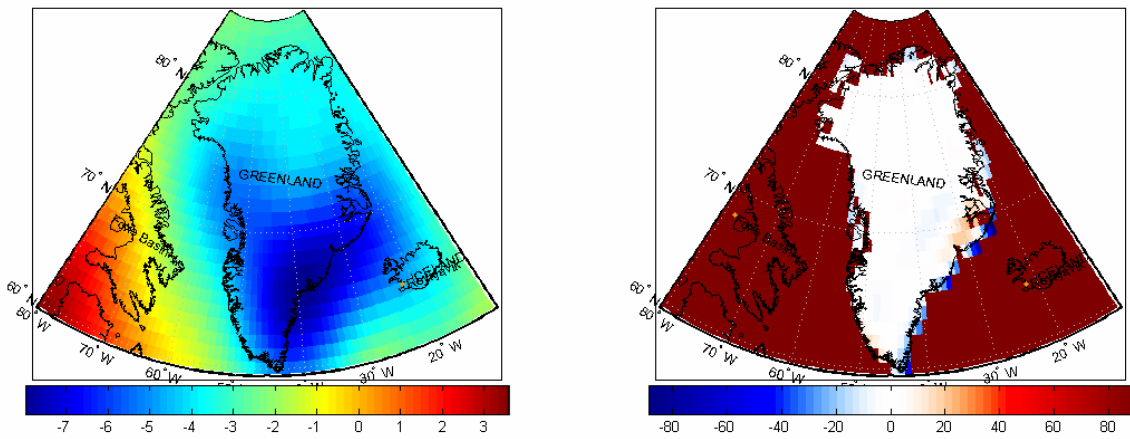


Abbildung 10: links: Schwereänderungen [ $\mu\text{Gal}$ ] in Satellitenhöhe (500km); rechts: Volumenänderung [ $\text{km}^3$ ]; spektraler Entwicklungsgrad  $N = 45$

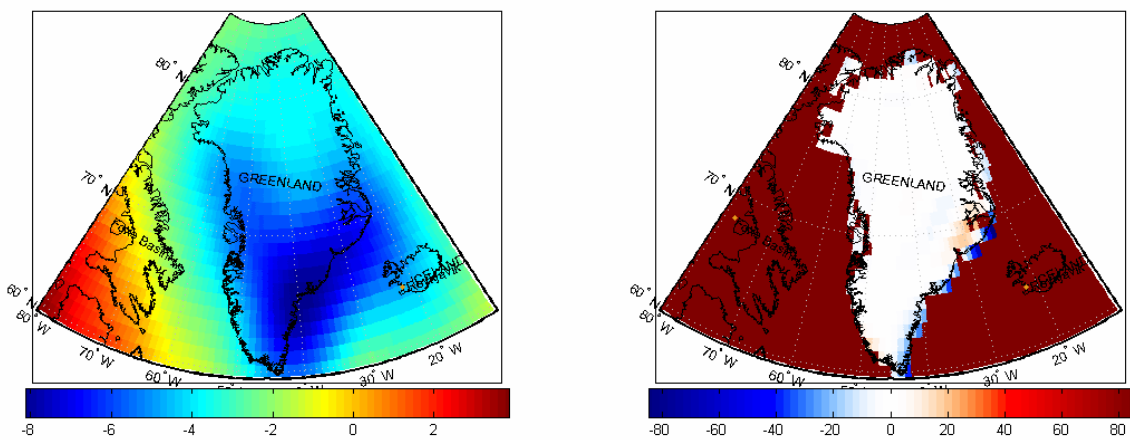


Abbildung 11: links: Schwereänderungen [ $\mu\text{Gal}$ ] in Satellitenhöhe (500km); rechts: Volumenänderung [ $\text{km}^3$ ]; spektraler Entwicklungsgrad  $N = 60$

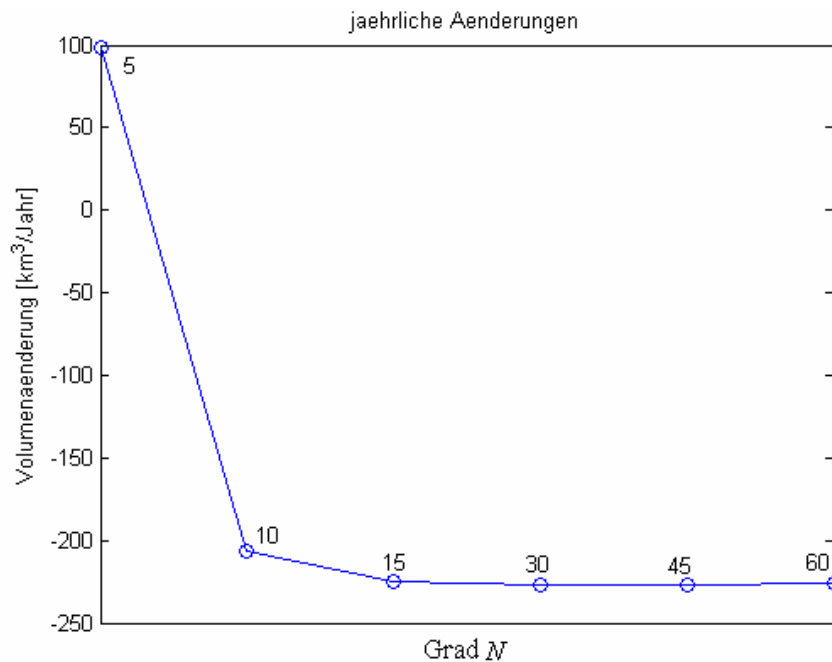


Abbildung 12: Jährliche gesamte Volumenänderung über Grönland, abhängig vom spektralen Entwicklungsgrad  $N$

### 3.3. Bestimmung des Regularisierungsparameters

Im Gauß-Markov-Modell (Koch, 1999)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$  wird  $\hat{\mathbf{x}}$  nach Gleichung (27) berechnet. Wenn  $\mathbf{\Gamma} = \lambda \cdot \mathbf{I}$  mit einer Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  und Regularisierungsparameter  $\lambda$  gilt, so wird

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'\mathbf{v} &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{\Gamma x}\|^2 = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}'\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{y} . \end{aligned} \quad (30)$$

Regularisierung ist notwendig um inverse Probleme zu lösen, falls die Minimierung der Verbesserungsquadratsumme völlig dominiert wird durch Beiträge von Datenfehlern und Rundungsfehlern. Durch das Hinzufügen des Regularisierungsterms können diese Beiträge gedämpft werden (Hansen, 2005).

Bei der Regularisierung muss darauf geachtet werden, dass einerseits bei zu starker Dämpfung die Lösung stark verzerrt wird ( $\|\mathbf{x}\|$  dominiert). Auf der anderen Seite, wenn zu wenig Regularisierung auferlegt wird, passt sich zwar die Lösung den gegebenen Daten gut an, aber die Lösung wird instabil gegenüber nur kleinen



Änderungen im Datenmaterial ( $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$  dominiert).

Um eine Balance zwischen den Termen  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$  und  $\|\mathbf{x}\|$  zu finden, wird das sogenannte L-Kurve-Kriterium verwendet. Es trägt den Betrag der Residuen  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$  gegenüber den Betrag der Lösung  $\|\hat{\mathbf{x}}\|$  auf. Beide Größen sind abhängig von der Wahl des Regularisierungsparameters.

Wenn der Regularisierungsparameter  $\lambda$  klein ist, dominiert der Term  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$ . Für einen großen Regularisierungsparameter  $\lambda$  dominiert der Term  $\|\mathbf{x}\|$ . Die optimale Wahl von  $\lambda$  stellt sich dann ein, wenn der Einfluss beide Terme minimal wird. Dies entspricht dem Punkt auf der L-Kurve mit maximaler Krümmung („Eckpunkt“).

Die Größenordnung der Hauptdiagonalelemente von  $\mathbf{A}'\mathbf{A}$  liegt im Bereich  $10^{-42}$ . Deshalb werden Regularisierungsparameter von  $\lambda = 10^{-48}$  bis  $\lambda = 10^{-48}$  untersucht. Die Schrittweite innerhalb dieses Intervalls erfolgt in Zehnerpotenzen.

In dieser Arbeit wird die Wirkung des Regularisierungsparameters  $\lambda$  für beide in Kapitel 3.1.2. eingeführte Testgebiete untersucht, vergleiche Abb. 13 und 14.

Für beide Fälle liegt die maximale Krümmung im Bereich  $\lambda = 10^{-41}$  und  $\lambda = 10^{-46}$ . Die Abb. 15 und 16 fokussieren auf diesen Abschnitt.

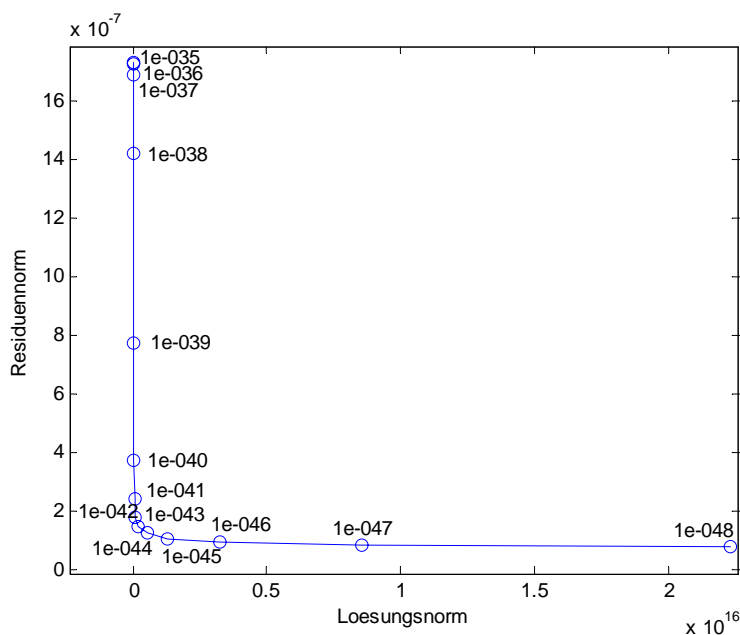


Abbildung 13: L-Kurve mit Regularisierungsparametern (Testgebiet: ganz Grönland)

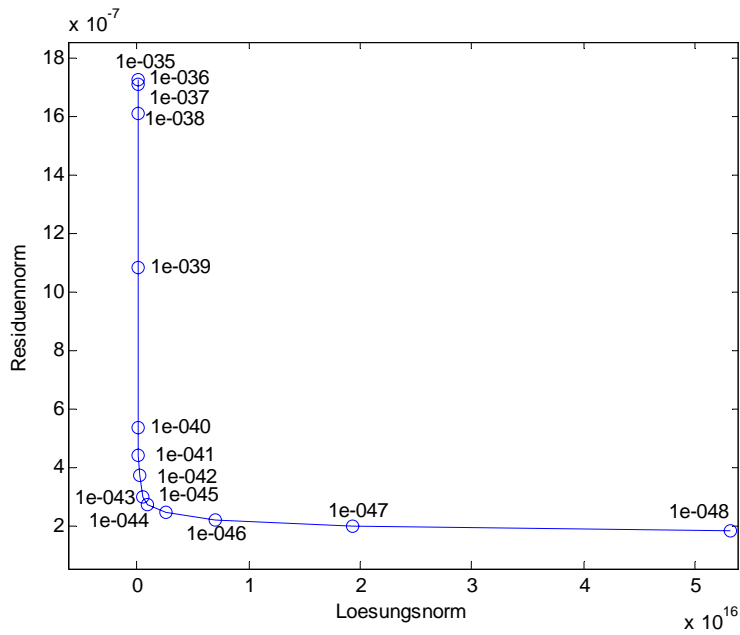


Abbildung 14: L-Kurve mit Regularisierungsparametern (Testgebiet: der östlicher Rand Grönlands)

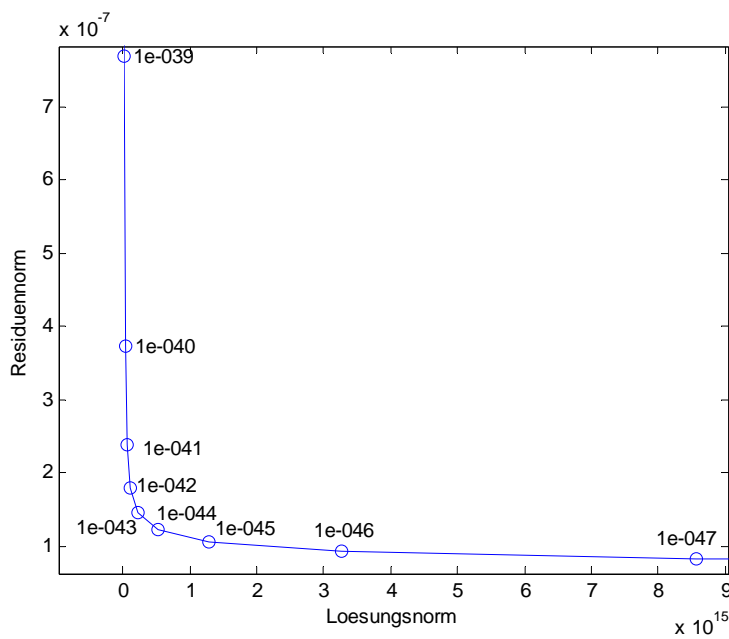


Abbildung 15: Vergrößerung der L-Kurve in Abb. 13

In Abb. 15 steigt der Betrag  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$  mit der Vergrößerung des Regularisierungsparameters sehr stark an, während sich der Betrag  $\|\mathbf{x}\|$  sehr geringfügig verändert. Wenn der Regularisierungsparameter kleiner als  $10^{-45}$  ist, verhalten sich die Änderungen der Beträge umgekehrt. Zwischen  $\lambda = 10^{-41}$  und  $\lambda =$

$10^{-45}$  wird die Krümmung der L-Kurve maximal. Der „Eckpunkt“ wird aus Abb. 15 für  $\lambda = 10^{-43}$  abgelesen. In Abb. 16 krümmt sich die L-Kurve im Punkt mit Regularisierungsparameter  $\lambda = 10^{-44}$  am stärksten.

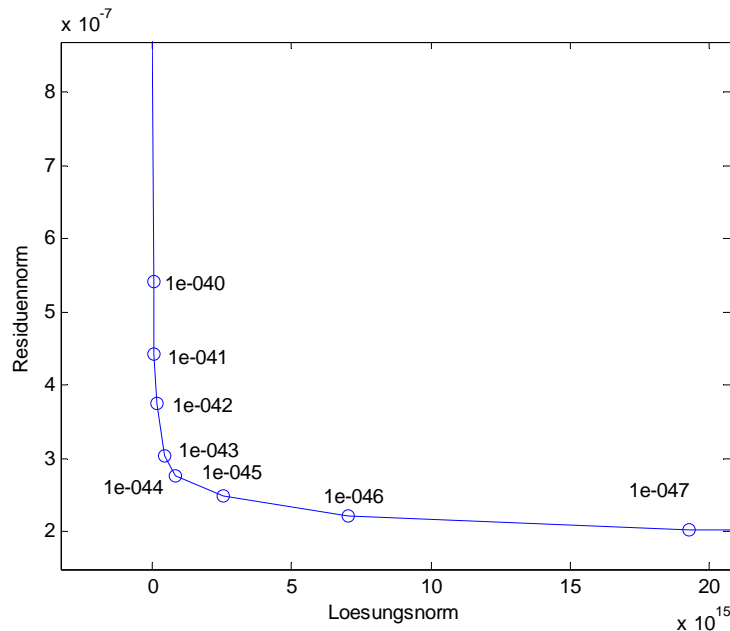


Abbildung 16: Vergrößerung der L-Kurve in Abb. 14

Abbildungen 17 bis 19 zeigen die Schätzung von Eisvolumenänderung über Grönland abhängig vom Regularisierungsparameter. Der Entwicklungsgrad  $N$  wird konstant zu  $N = 30$  gesetzt.

Die Verteilung der Volumenänderungen wird nicht stark von  $\lambda$  beeinflusst. Die stärksten Änderungen treten immer am östlichen Rand von Grönland aus. Der Betrag der Gesamtvolumenänderung nimmt hingegen stark mit wachsendem  $\lambda$  ab, vgl. Abb. 20 und 21.

Die Abb. 20 und 21 zeigen den Einfluss des Regularisierungsparameter  $\lambda$  auf die Schätzung der jährlichen Eisvolumenänderung. In den Abbildungen kann man sehen, dass für  $\lambda$  größer als  $10^{-37}$  fast keine Volumenänderung statt findet. Zwischen  $\lambda = 10^{-37}$  und  $\lambda = 10^{-41}$  steigt die Verlustrate stark an. Wenn  $\lambda$  kleiner als  $10^{-41}$  ist, ändert sich die Verlustrate wieder in geringerem Maße.

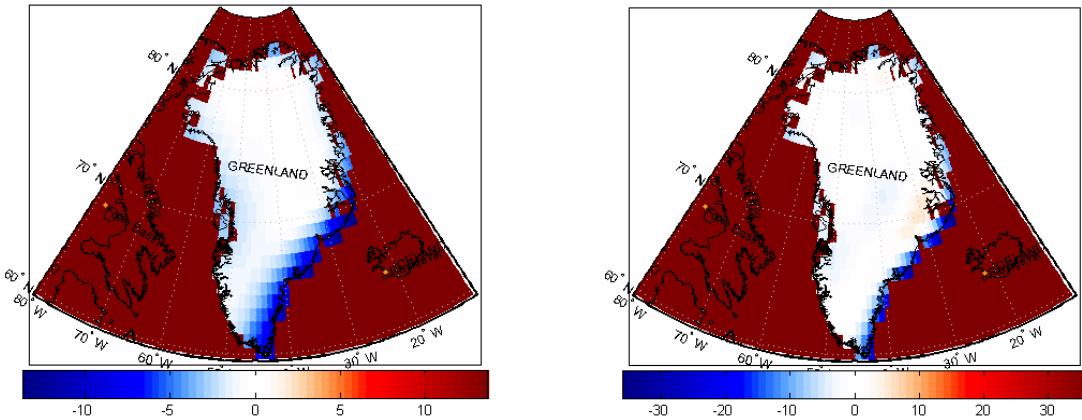


Abbildung 17: Eisvolumenänderungen [km<sup>3</sup>] über ganz Grönland mit Entwicklungsgrad  $N = 30$  und Regularisierungsparameter  $\lambda = 10^{-41}$  (linke Figur) und  $\lambda = 10^{-42}$  (rechte Figur)

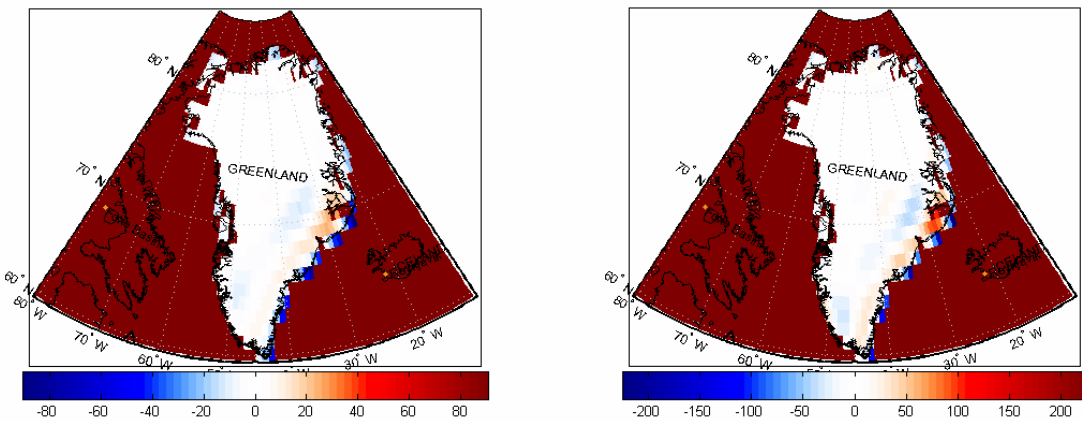


Abbildung 18: Eisvolumenänderungen [km<sup>3</sup>] über ganz Grönland mit Entwicklungsgrad  $N = 30$  und Regularisierungsparameter  $\lambda = 10^{-43}$  (linke Figur) und  $\lambda = 10^{-44}$  (rechte Figur)

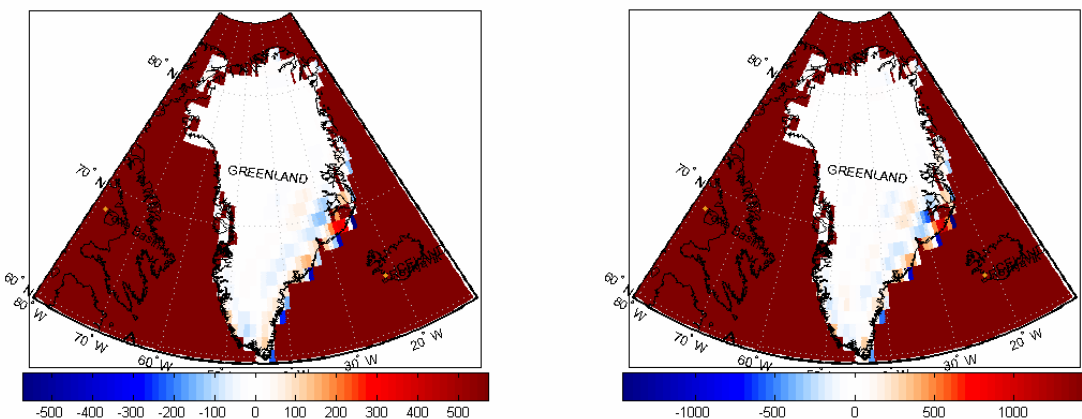


Abbildung 19: Eisvolumenänderungen [km<sup>3</sup>] über ganz Grönland mit Entwicklungsgrad  $N = 30$  und Regularisierungsparameter  $\lambda = 10^{-45}$  (linke Figur) und  $\lambda = 10^{-46}$  (rechte Figur)

Abb. 15 zeigt, dass die Schätzung der Eisvolumenänderung für  $\lambda = 10^{-43}$  optimal ist, wenn das Testgebiet über ganz Grönland ist. In Kapitel 3.2. wird festgestellt, dass die Eisvolumenänderungsschätzung für Entwicklungsgrad  $N = 30$  optimal ist. In Kapitel 3.1.2. wird gezeigt, dass die Verteilung von Massepunkten die Schätzung der Eisvolumenänderung schwach beeinflusst. Deshalb kann ich die Bedingungen für eine optimale Schätzung zusammenfassen: (i) Die Massepunkte sind über ganz Grönland zu verteilen, (ii) der spektrale Entwicklungsgrad zur Berechnung der GRACE-Schwereänderungen kann zu  $N = 30$  gesetzt werden und (iii) der Regularisierungsparameter für die Inversion wird optimal mit  $\lambda = 10^{-43}$ .

Wenn alle Bedingungen erfüllt werden, ist die gesamte Volumenänderung über ganz Grönland zwischen 2002 und 2007 nach der Schätzungsberechnung  $-1134\text{km}^3$ , das heißt in den fünf Jahren beträgt die jährliche Volumenänderung ungefähr  $-227\text{km}^3/\text{Jahr}$ .

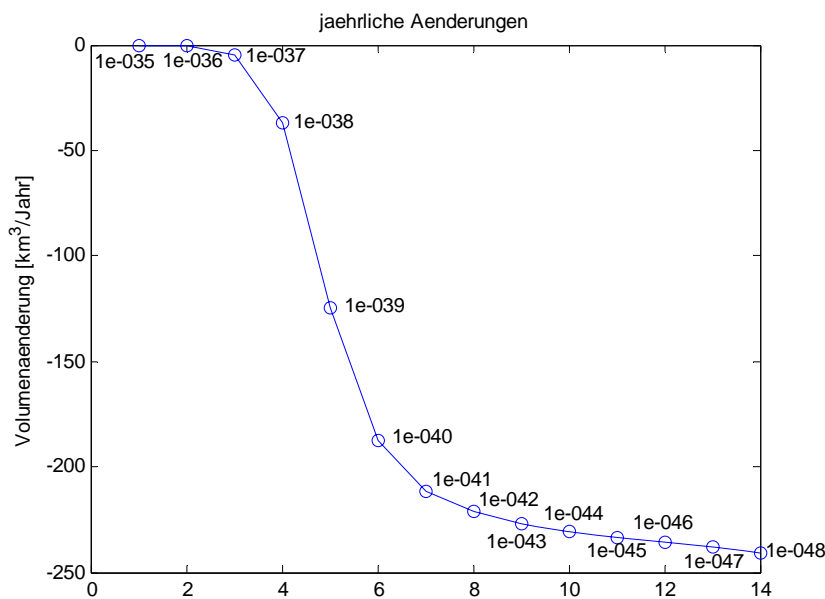


Abbildung 20: Jährliche Eisvolumenänderung für verschiedene Regularisierungsparameter  $\lambda$ ; Testgebiet: ganz Grönland

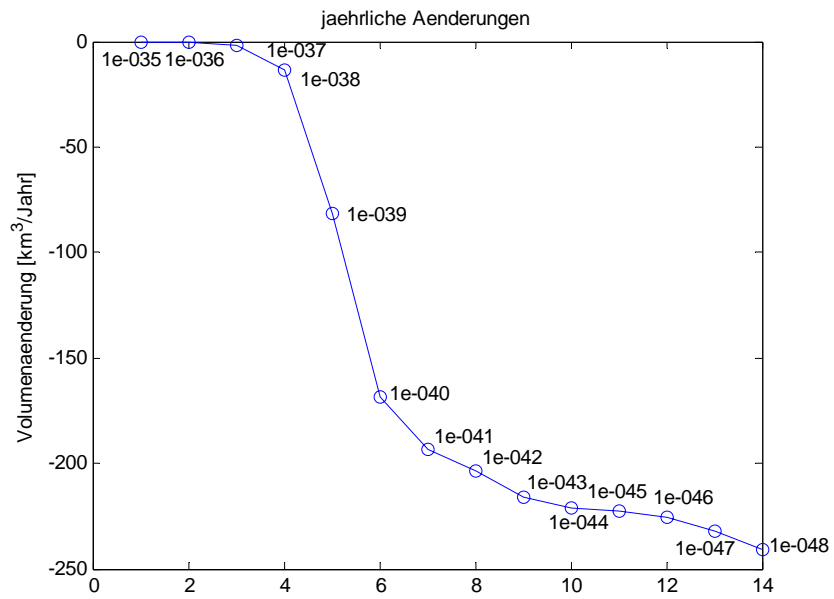


Abbildung 21: Jährliche Eisvolumenänderung für verschiedene Regularisierungsparameter  $\lambda$ ; Testgebiet: östlicher Rand Grönlands

## 4. Vergleich mit anderen Schätzungen

Um die Änderung der Eisschicht auf Grönland zu untersuchen, stehen viele Methoden zur Verfügung. Eine davon ist die Punktmasseschätzung, die in dieser Arbeit vorgenommen wird. Darüber hinaus gibt es vielerlei alternative Schätzmethode. Mit einer optimalen Filterung wurde der lineare Trend der Eismassen über ganz Grönland bestimmt (Chen et al., 2006). Die optimale Filterung wurde entwickelt um das Signal-zu-Rausch Verhältnis zu maximieren. Mit dieser Methode ist die Eisschmelzrate  $-239\text{km}^3/\text{Jahr}$ , die zwischen 2002 und 2005 aus über 3,5 Jahren an Beobachtungen abgeschätzt wurde. In einer anderen Untersuchung von Velicogna und Wahr (2005) wurden 22 monatliche GRACE-Schwerefelder benutzt um einen linearen Trend von Eismassen auf Grönland zwischen 2002 und 2004 abzuschätzen, mit einer Volumenabnahme von  $-80\text{km}^3/\text{Jahr}$ . Sie haben für einen anderen untersuchten Zeitraum, zwischen 2002 und 2006, eine neue Abschätzung mit einer Eisschmelzrate von  $-248\text{km}^3/\text{Jahr}$  gemacht (Velicogna und Wahr, 2006). Luthcke et al. (2006) haben die Berechnung mit GRACE Daten von 2003 bis 2005 durchgeführt und bekamen eine Eisschmelzrate von  $-110\text{km}^3/\text{Jahr}$ . In einem anderen Zeitraum zwischen 2002 und 2005 wurde die Eisschmelzrate von  $-184\text{km}^3/\text{Jahr}$  abgeschätzt (Ramillien et al., 2006). In Tabelle 4 sind die Ergebnisse verschiedener Untersuchungen basierend auf GRACE-Daten dargestellt.

Die Laser-Altmetrie zeigt, dass das Eis auf Grönland eine Schmelzrate von  $-80\text{km}^3/\text{Jahr}$  zwischen 1997 und 2003 aufweist (Krabill, 2004). Eine Untersuchung, die auf Satelliten-Interferometrie basiert, liefert eine Schmelzrate von  $-90\text{km}^3$  im Jahr 1996, von  $-138\text{km}^3$  im Jahr 2000 und von  $-224\text{km}^3$  im Jahr 2005 (Rignot und Kanagaratnam, 2006). Zwally et al. (2005) haben die Daten aus Altmetrie benutzt und den jährlichen Eisschmelzvorgang zu  $-12\text{km}^3$  zwischen 1992 und 2002 berechnet. In Tabelle 5 sind die Ergebnisse der Untersuchungen aus anderen Datenquellen dargestellt.

Allgemein gesagt gibt es drei Ansätze: (i) gravimetrische Verfahren (GRACE-Daten

werden benutzt um Gravitationsänderungen in Massenänderungen zu transformieren), (ii) geometrische Verfahren (die Daten aus Laser- und Radar-Altimetrie werden eingesetzt um die Höhenänderungen in Massenänderungen zu transformieren) und (iii) InSAR-Verfahren.

Die Tabelle 4 und Tabelle 5 zeigen, dass die Unterschiede zwischen den Abschätzungen groß sind. Verschiedene Annahmen sind nötig für verschiedene Datenquellen. Jede Datenquelle bringt ihre eigene Datenfehler und Approximationen in der Berechnung. Außerdem spielt die Berechnungsmethode eine wichtige Rolle. Tabelle 4 beweist diese Aussage.

Eine andere Ursache ist der untersuchte Zeitraum. Alle Abschätzungen haben die Daten von verschiedenen Zeiträumen benutzt. Anhand von Tabelle 5 wird deutlich, dass im Vergleich zu frühen Jahren es seit 2000 einen großen Anstieg des Eisverlustes gibt. Die Eisschmelzrate hat nach Tabelle 4 seit 2005 besonders schnell zugenommen.

Insgesamt kann nicht festgestellt werden, welches Berechnungsverfahren optimal ist und welche Abschätzung der tatsächlichen Schmelzrate am nächsten kommt. Aber es ist bedeutend, dass die Eisschicht auf Grönland seit 2000 immer schneller schmilzt.

Tabelle 4 Untersuchungen mit GRACE-Daten

Studie	Eisschmelzrate [km <sup>3</sup> /Jahr]	Zeitraum
Diese Arbeit	-227	2002-2007
Forsberg, 2004	-84	2002-2004
Forsberg, 2006	-133	2002-2006
Velicogna und Wahr, 2005	-80	2002-2004
Ramillien et al., 2006	-184	2002-2005
Velicogna und Wahr, 2006	-248	2002-2006
Chen et al., 2006	-239	2002-2005
Lutheke et al., 2006	-110	2003–2005



Tabelle 5 Untersuchungen mit anderen Mehtoden

Studie	Eisschmelzrate [km <sup>3</sup> /Jahr]	Methode	Zeitraum
Krabill et al., 2000	-51	Altimetrie	1993-1999
Zwally et al.,2005	-12	Altimetrie	1992-2002
Krabill et al., 2004	-80	Altimetrie	1997-2003
Rignot und Kanagaratnam, 2006	-90	InSAR	1996
	-138		2000
	-224		2005

## 5. Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Massenänderungen über Grönland durch die Analyse von GRACE-Schwereänderungen berechnet. Eine Inversion wird über die Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt.

Der Zeitraum ist von April 2002 bis März 2007 und enthält insgesamt 57 Epochen (57 GRACE-Monatslösungen). Wenn die Kugelflächenfunktionen bis zum Entwicklungsgrad 30 entwickelt werden und der Regularisierungsparameter zu  $\lambda = 10^{-43}$  gesetzt wird, liegt der optimale Fall vor, um die Massenänderung bzw. die Volumenänderung von Eis zu berechnen. In diesem Fall wird die Eisschmelzrate auf Grönland zu  $-227\text{km}^3/\text{Jahr}$  berechnet. Nach dem Vergleich von zwei Massenpunktverteilungen (Verteilung der Massepunkte über ganz Grönland und nur am östlichen Rand Grönlands) wird festgestellt, dass der Eisverlust am östlichen Rand fast 70% des gesamten Eisverlustes ausmacht. Wenn die Massenpunkte auf dem ganzen Land gewählt werden, ist die Massenänderung  $-227\text{km}^3/\text{Jahr}$ ; wenn die Massenpunkte am Rand des Landes liegen, ist die Massenänderung  $-221\text{km}^3/\text{Jahr}$ . Wenn der Entwicklungsgrad der Kugelflächenfunktionen größer als 30 ist, wird das Ergebnis nicht stark beeinflusst. Zur Bestimmung des Regularisierungsparameters wird das L-Kurve-Kriterium verwendet. Dieser Parameter beeinflusst die berechneten Massenänderungen stark. Mit Hilfe der L-Kurve wird der Punkt mit der größten Krümmung (Eckpunkt) ausgesucht. Der entsprechende Regularisierungsparameter wird für eine optimale Schätzung gewählt.

Schlüsselwörter: GRACE, Punktmassenschätzung, Eismassenänderung, Grönland, Regularisierung

## 6. Summery

In this paper the mass changes of ice over Greenland is calculated by the transformation of gravity changes. An inversion is carried out by the least squares method. The observation time range is from April 2002 to March 2007 including 57 epochs. If the spherical harmonic series are expanded to degree 30 and the regularization factor is set to  $\lambda = 10^{-43}$ , it is the optimal case to estimate the mass change as well as the volume change of the ice. In this case, the ice loss rate of Greenland is calculated as  $-227\text{km}^3/\text{year}$ . It is noticed that the result is not strongly influenced, if the spherical harmonic series are expanded to the degree higher than 30. After the comparison between two kinds of mass point distribution (1<sup>st</sup> case: mass points distribute over the whole Greenland; 2<sup>nd</sup> case: mass points distribute only on the east coast of the Greenland), it is indicated that the ice disappearance of the east coast accounts for about 70% over the whole Greenland. When the mass points are used for the whole island, the ice loss rate is  $-227\text{km}^3/\text{year}$ ; when the mass points are used for the east coast, the ice loss rate is  $-221\text{km}^3/\text{year}$ . In order to determine the regularization parameter, the L-curve-criterion is utilized. The parameter influences the mass change strongly. Using the L-Curve-Criterion is the point with the largest curve investigated. The appropriate regularization parameter will be chosen for the optimal estimation.

Keywords: GRACE, point mass estimation, ice-mass variations, Greenland, regularization

## 7. Literaturverzeichnis

- [1] Chen JL, Wilson CR, Tapley B D (2006): Satellite gravity measurements confirm accelerated melting of the Greenland ice sheet. *Science Express*, 313, 1958-1960, DOI: 10.1126/science.1129007
- [2] Forsberg R, Reeh N (2006): Mass change of the Greenland ice sheet from GRACE. *Gravity Field of the Earth – 1st meeting of the International Gravity Field Service*, Springer
- [3] Hansen PC (2005): The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DK-2800 lyngby, Dänemark
- [4] Heiskanen WA, Moritz H (1967): *Physical Geodesy*. WH Freeman and Company, San Francisco, London
- [5] Koch KR (1999): *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Springer Berlin Heidelberg, New York
- [6] Krabill WB, Abdalati W, Frederick E, Manizade S, Martin C, Sonntag J, Swift R, Thomas R, Wright W, Zungel J (2000): Greenland Ice Sheet: High-Elevation Balance and Peripheral Thinning. *Science*, 289,428-430, DOI:0.1126/science.289.5478.428
- [7] Krabill W, Hanna E, Huybrechts P, Abdalati W, Cappelen J, Csatho B, Federick E, Manizade S, Marin C, Sonntag J, Wsift R, Thomas R, Zungel J (2004): Greenland ice sheet: Increased coastal thinning. *Geophysical research letters*, 31, L24402, DOI: 1029/2004GL021533
- [8] Luthcke S, Zwally J, Abdalati W, Rowlands D, Ray R, Nerem RS, Lemoine F, McCarthy J, Chin D (2006): Recent Greenland ice mass loss by drainage system from satellite gravity observations. *Science*, 314, 1286-1289
- [9] Ramillien G, Lombard A, Cazenave A, Ivins AR, M. Llubes, Remy F, Biancale R (2006): Interannual variations of the mass balance of the Antarctic and Greenland ice sheets from GRACE. *Glob. Planet. Change*, 53, 198-208

- [10] Rignot EJ und Kanagaratnam P (2006): Changes in the Velocity Structure of the Greenland Ice Sheet. *Science*, 311,986-990, DOI: 10.1126/science.1121381
- [11] Velicogna I, Wahr J (2005): Greenland mass balance from GRACE. *Geoph. Res. Lett.*, 32, L18505, DOI: 10.1029/2005GL023955
- [12] Velicogna I und Wahr J (2006): Measurements of time-Variable Gravity Show Mass Loss in Antarctica. *Science*, 311,1754-1756, DOI: 10.1126/science.1123785
- [13] Zwally HJ et al. (2005): Mass changes of the Greenland and Antarctic ice sheets and shelves and contributions to sea-level rise: 1992-2002. *J. Glaciol*, 51, 509-527