

**Harmonische Gravitationsfeldanalyse aus GPS-  
vermessenen kinematischen Bahnen niedrig fliegender  
Satelliten vom Typ CHAMP, GRACE und GOCE mit  
einem hoch auflösenden Beschleunigungsansatz**

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie  
der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Tilo Reubelt

aus Schwäbisch Hall

Hauptberichter: em. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. tech.h.c. mult.  
Dr.-Ing. E.h.mult E.W. Grafarend

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. N. Sneeuw

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. K.H. Ilk

Tag der mündlichen Prüfung: 11. April 2008

Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

2009



## Zusammenfassung

Mit dem Start der Satellitenmission CHAMP im Sommer 2000 fing eine neue Ära der Schwerefeldbestimmung an, die inzwischen durch GRACE (seit Frühjahr 2002) erweitert wurde und durch GOCE (ab 2009) komplettiert werden soll. Der große Erfolg dieser Satellitenmissionen liegt neben ausgefeilten Messprinzipien vor allem auch darin begründet, dass mit Beginn von CHAMP erstmalig globale, homogene und flächendeckende Schwerefelddaten erfasst werden konnten. Verschiedene Messprinzipien garantieren eine Modellierung der langwelligen Schwerefeldanteile (Detailstrukturen  $\geq 500$  km) mit CHAMP über eine Auflösung bis in mittelwellige Bereiche (Detailstrukturen  $\geq 250$  km) bei GRACE bis hin zu hochfrequenten Anteilen (Detailstrukturen  $\geq 150$  km) mit GOCE. Die angewandten Messverfahren sind dabei die Bahnvermessung mit GPS bei CHAMP, die Erfassung der Abstandsänderung zwischen zwei hintereinander fliegenden Satelliten mit Hilfe einer hochgenauen Mikrowellenverbindung bei GRACE sowie die differentielle Beschleunigungsmessung zwischen Probemassen (Satellitengradiometrie) bei GOCE.

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuartiges Verfahren — der Beschleunigungsansatz — zur Gravitationsfeldbestimmung aus der Bahnvermessung mit GPS am Beispiel des CHAMP-Satelliten untersucht. Die eigentlichen Messgrößen bei der Bahnanalyse sind Trägerphasen und Pseudostrecken der GPS-Messungen zwischen den hoch fliegenden GPS-Satelliten und dem niedrig fliegenden CHAMP-Satelliten. Zur Analyse dieser Messgrößen wird traditionell das auf der Integration der Variationsgleichungen beruhende bahndynamische Verfahren angewendet, welches aufgrund der Integration und des nichtlinearen Gleichungssystems sehr rechenaufwändig ist. Aus diesem Grunde wurden im Hinblick auf CHAMP alternative und effiziente Analysemethoden wie das Energieintegral, das Randwertproblem für kurze Bahnbögen und der Beschleunigungsansatz entwickelt und untersucht. Diese alternativen Verfahren setzen allerdings voraus, dass zuvor die kinematische Bahn des CHAMP-Satelliten aus den GPS-Messungen bestimmt wurde. Fortschritte in der kinematischen Bahnbestimmung, die eine Genauigkeit kinematischer Orbits von 1–3 cm ermöglichen, motivieren zusätzlich den Einsatz der alternativen Analyseverfahren.

Bei dem Beschleunigungsansatz werden zunächst aus kinematisch bestimmten CHAMP-Bahnen mittels numerischer Differentiation die auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen berechnet. Es zeigt sich dabei, dass aufgrund der zeitlichen Korrelation der Fehler kinematischer Bahndaten der rauschverstärkende Effekt der numerischen Differentiation stark abgeschwächt wird und somit die Satellitenbeschleunigungen genau genug bestimmt werden können. Nachdem diese Beschleunigungen von gravitativen und nicht-gravitativen Störeffekten bereinigt worden sind, können die gesuchten Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationsfeldmodells direkt durch Anwendung der Newton'schen Bewegungsgleichung bestimmt werden. Zur Lösung des großen linearen Gleichungssystems (für 2 Jahre CHAMP: ca. 6 Mio. Beobachtungen, 8278 Unbekannte für Grad und Ordnung 90) wird die hinsichtlich des Speicherplatzes und der Rechenzeit effiziente Methode der Präkonditionierten Konjugierten Gradienten vorgeschlagen und verwendet. Ein wichtiger Aspekt bei der Analyse von kinematischen Bahnen ist die Datenvorverarbeitung, da die Orbits Ausreißer enthalten, welche die Genauigkeit der Gravitationsfeldschätzung deutlich verschlechtern können. Es wurden verschiedene Verfahren zur Ausreißerelimination getestet, die entweder auf die Varianz-Information der kinematischen Bahnen zurückgreifen, oder Referenzinformation in Form von (reduziert) dynamischen Orbits und bereits bestehenden globalen Gravitationsfeldmodellen benötigen. Als überlegen gegenüber den Methoden der Datenvorverarbeitung erweisen sich die robusten Schätzer. Diese benötigen keine Referenzinformation, stattdessen werden ungenaue Beobachtungen iterativ heruntergewichtet.

Die Genauigkeit und Effizienz des Beschleunigungsansatzes wird in dieser Arbeit anhand der Analyse von simulierten und realen 2-jährigen kinematischen CHAMP-Bahnen untersucht. Vergleiche mit den Ergebnissen aus dem klassischen Verfahren und den weiteren alternativen Methoden zeigen, dass mit dem Beschleunigungsansatz Gravitationsfeldmodelle ähnlicher oder sogar höherer Genauigkeit erhalten werden können. Die Gravitationsfeldmodelle können aus dem 2-jährigen kinematischen Orbit bis ca. Grad 80 mit einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis  $> 1$  bestimmt werden und zeigen eine Genauigkeitssteigerung gegenüber dem besten Gravitationsfeld der Vor-CHAMP-Ära, EGM96, bis ca. Grad 65.

## Abstract

With the launch of the CHAMP satellite in summer 2000 the gravity field recovery entered a new era, which is continued by GRACE (since spring 2002) and will be completed by GOCE (from 2009). The great success of these satellite missions is not only guaranteed by sophisticated measurement principles but also by the global and complete coverage of the Earth with homogeneous gravity data. Different measurement principles enable the survey of long-wavelength-features (structures  $\geq 500$  km) by CHAMP, medium wavelengths (structures  $\geq 250$  km) by GRACE and high-frequency-parts (structures  $\geq 150$  km) with GOCE. The applied measurement principles are orbit determination by GPS (orbit analysis) at CHAMP, range-rate-measurements between two tandem-satellites by a high-precision microwave-link at GRACE and differential accelerometry between test masses (satellite gradiometry) at GOCE.

In the present study the acceleration approach is investigated, which is a new method for gravity field recovery from GPS-tracked satellite missions like CHAMP. The original measurements for orbit analysis are GPS-tracked carrier phases and pseudoranges between the high-Earth-orbiting GPS-satellites and the low-Earth-orbiting CHAMP-satellite. Traditionally, the dynamic approach based on the integration of the variational equations is applied for the analysis of these measurements, whose computational effort is very high due to a nonlinear system of equations and the integration. For this reasons alternative and efficient approaches as the energy-balance-method, the solution of the boundary value problem for short arcs and the acceleration approach have been developed and investigated in view of CHAMP. However, the application of these alternative approaches requires a kinematic orbit, which was estimated from the original GPS-measurements afore. The improvements made in kinematic orbit determination during the CHAMP-mission enable an orbit accuracy of 1–3 cm, which additionally motivates the use of alternative methods.

The most important step of the acceleration approach is the determination of the satellite's accelerations from the kinematic orbits by numerical differentiation. It turns out that the noise amplification normally caused by numerical differentiation is lessened strongly due to the time-correlation of the errors of kinematic orbit data which means that the accelerations can be determined with sufficient accuracy. After reduction of tides and non-gravitative disturbing accelerations and by application of Newton's Law of motion the spherical harmonic coefficients of the Earth's gravity field can be estimated. For the solution of the large linear system of equations (for 2 years of CHAMP: approx. 6 millions of observations, 8278 unknowns for degree/order 90/90) the method of the preconditioned conjugate gradients is proposed and applied due to its efficient memory usage and computation time. An important aspect in kinematic orbit analysis is data preprocessing, since these orbits contain outliers which can worsen the gravity field recovery significantly. Different procedures for outlier elimination have been tested, which either are based on the variance information of the kinematic orbits, reference information w.r.t. (reduced) dynamic orbits or existing gravity field models. Additionally, robust estimation proves to be superior to data preprocessing since there is no reference information needed but instead inaccurate observations are downweighted iteratively.

The accuracy and efficiency of the acceleration approach is investigated by means of the analysis of simulated and real 2-years kinematic CHAMP orbits. Comparisons with the results from the classical and the other alternative approaches show that models of similar or even higher accuracy can be estimated by means of the acceleration approach. The gravity field models recovered from the 2-years kinematic orbit exhibit a signal-to-noise ratio of  $>1$  for the spherical harmonic coefficients up to degree 80 and show an improvement in contrast to the best pre-CHAMP-model EGM96 up to degree 65.

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Zusammenfassung</b> .....   | <b>3</b>  |
| <b>Abstract</b> .....  | <b>4</b>  |
| <b>1 Einführung</b> .....  | <b>8</b>  |
| 1.1 Ein kurzer Abriss über die Entwicklung der Gravitationsfeldbestimmung .....          | 8         |
| 1.2 Die neuen Satellitenmissionen .....  | 8         |
| 1.2.1 Wozu werden Satelliten in der Gravitationsfeldbestimmung gebraucht? .....          | 8         |
| 1.2.2 Die Satellitenmission CHAMP .....  | 9         |
| 1.2.2.1 Zeitrahmen der Mission .....   | 9         |
| 1.2.2.2 Orbit und Missionsparameter .....  | 10        |
| 1.2.2.3 Der Satellit .....   | 11        |
| 1.2.2.4 Die Nutzlastinstrumente .....  | 12        |
| 1.2.2.5 Die Daten .....  | 13        |
| 1.2.2.6 Wissenschaftlicher Verlauf .....   | 13        |
| <b>2 Methoden der Bahnanalyse</b> .....  | <b>14</b> |
| 2.1 Allgemeine Bemerkungen .....   | 14        |
| 2.2 Newton'sche Bewegungsgleichung und die Kraftfunktion .....                           | 14        |
| 2.3 Analyseverfahren .....   | 15        |
| 2.3.1 Das klassische Verfahren .....   | 16        |
| 2.3.2 Methoden basierend auf kinematischen Orbits .....                                  | 18        |
| 2.3.2.1 Integration der Variationsgleichungen .....                                      | 19        |
| 2.3.2.2 Randwertproblem für kurze Bahnbögen .....  | 22        |
| 2.3.2.3 Die Energiebilanzmethode .....   | 24        |
| 2.3.2.4 Der Beschleunigungsansatz .....  | 25        |
| 2.4 Kurze Erörterung möglicher Vor- und Nachteile der beschriebenen Verfahren .....      | 32        |
| <b>3 Referenzsysteme</b> .....   | <b>37</b> |
| 3.1 Das raumfeste Referenzsystem .....   | 37        |
| 3.2 Das erdfeste Referenzsystem .....  | 38        |
| 3.3 Transformation zwischen Quasi-Inertialsystem und erdfestem Bezugssystem .....        | 38        |
| 3.4 Lokale Referenzsysteme .....   | 42        |
| 3.5 Satellitenfeste und instrumentenfeste Referenzsysteme .....                          | 43        |
| 3.6 Die Transformationen zwischen den Referenzsystemen im Überblick .....                | 47        |
| 3.7 Zeitsysteme .....  | 48        |
| <b>4 Das Gravitationsfeld der Erde</b> .....   | <b>49</b> |
| 4.1 Entwicklung des Gravitationsfeldes in Kugelflächenfunktionen .....                   | 49        |
| 4.1.1 Interpretation und Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten .....                | 51        |
| 4.1.2 Der Gravitationsvektor .....   | 53        |
| 4.2 Alternative Repräsentationen des Gravitationsfeldes .....                            | 54        |
| 4.2.1 Darstellung des Gravitationsfeldes mit ellipsoidisch-harmonischen Funktionen ..... | 54        |
| 4.2.2 Globale versus lokale Schwerefeldmodellierung .....                                | 55        |
| <b>5 Erfassung und Reduktion von Störbeschleunigungen</b> .....                          | <b>56</b> |
| 5.1 Modellierung von gravitativen Störbeschleunigungen (Gezeiten) .....                  | 56        |
| 5.1.1 Das gezeitenerzeugende Potential — der direkte Effekt der Himmelskörper .....      | 56        |
| 5.1.2 Die Gezeiten der festen Erde — der indirekte Effekt .....                          | 59        |
| 5.1.3 Ozeangezeiten .....  | 62        |
| 5.1.4 Vergleich der Größenordnungen .....  | 64        |
| 5.2 Nicht-gravitative Störbeschleunigungen .....   | 65        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>6</b>  | <b>Bestimmung von Beschleunigungen mittels numerischer Differentiation</b>                                       | <b>70</b>  |
| 6.1       | Numerische Differentiation basierend auf exakten Interpolationsverfahren   | 72         |
| 6.1.1     | Numerische Differentiation basierend auf den Interpolationsformeln von Newton                                    | 73         |
| 6.1.1.1   | Approximationsfehler   | 77         |
| 6.1.1.2   | Einfluss des Messrauschens   | 79         |
| 6.1.2     | Numerische Differentiation basierend auf Spline-Interpolation  | 84         |
| 6.1.2.1   | Approximationsfehler   | 84         |
| 6.1.2.2   | Gesamtfehler durch Approximationsfehler und Messrauschen   | 85         |
| 6.2       | Numerische Differentiation basierend auf glättenden Interpolationsverfahren                                      | 86         |
| 6.2.1     | Numerische Differentiation basierend auf Regressionspolynomen  | 86         |
| 6.2.2     | Numerische Differentiation basierend auf Ausgleichssplines   | 90         |
| 6.3       | Vergleich der einzelnen Differentiationsverfahren  | 92         |
| <b>7</b>  | <b>Lösung des linearen überbestimmten Gleichungssystems</b>  | <b>94</b>  |
| 7.1       | Das Gleichungssystem   | 94         |
| 7.1.1     | Das Spezielle Gauß-Markov-Modell   | 95         |
| 7.1.2     | Anmerkungen zur Dispersionsmatrix der Beobachtungen und zu der Gewichtung  | 96         |
| 7.1.3     | Regularisierung  | 101        |
| 7.2       | Iterative Gleichungssystemlöser  | 102        |
| 7.2.1     | Methode der Präkonditionierten Konjugierten Gradienten   | 104        |
| 7.2.1.1   | Erste Operation: Präkonditionierung  | 106        |
| 7.2.1.2   | Zweite Operation: Multiplikation der Normalgleichungsmatrix mit einem Vektor                                     | 108        |
| 7.2.2     | Konvergenzverhalten der PCCG   | 108        |
| 7.3       | Bemerkungen zur Bestimmung von Kalibrierungsparametern   | 110        |
| <b>8</b>  | <b>Gravitationsfeldanalyse aus simulierten CHAMP-Bahnen</b>  | <b>111</b> |
| 8.1       | Untersuchung des Modellfehlers   | 111        |
| 8.2       | Untersuchung des Gesamtfehlers   | 114        |
| 8.3       | Einfluss der Gewichtung  | 122        |
| 8.4       | Vergleich der unterschiedlichen Verfahren zur Analyse kinematischer Bahnen                                       | 123        |
| 8.4.1     | Modellfehler   | 123        |
| 8.4.2     | Gesamtfehler   | 123        |
| <b>9</b>  | <b>Analyse realer kinematischer CHAMP-Bahnen</b>   | <b>127</b> |
| 9.1       | Untersuchung der Korrelation kinematischer Bahnfehler  | 127        |
| 9.2       | Behandlung von Ausreißern  | 129        |
| 9.2.1     | Ausreißerelimination anhand von Orbitvarianzen   | 131        |
| 9.2.2     | Ausreißerelimination anhand der Schwellwertmethode   | 131        |
| 9.2.3     | Robuste Schätzverfahren  | 132        |
| 9.3       | Ergebnisse aus der Analyse kinematischer Orbits  | 134        |
| 9.4       | Vergleich der Ergebnisse aus unterschiedlichen Verfahren der Bahnanalyse   | 140        |
| <b>10</b> | <b>Ergebnisse und Ausblick</b>   | <b>144</b> |
|           | <b>Abkürzungen</b>   | <b>146</b> |
|           | <b>Anhang A: Grundlagen zur Berechnung und Darstellung des Gravitationsfeldes</b>                                | <b>148</b> |
| A.1       | Zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art  | 148        |
| A.2       | Normierte zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art  | 149        |
| A.3       | Ableitungen (normierter) zugeordneter Legendre'scher Funktionen 1. Art   | 149        |
| A.4       | Zirkularfunktionen   | 150        |
| A.5       | Struktur der Kugelflächenfunktionen  | 150        |
|           | <b>Anhang B: Koeffizienten der kubischen Splines und Ausgleichssplines bei vorgegebener erster Randableitung</b> | <b>152</b> |

---

|  |   |            |
|--|---|------------|
| B.1  | Kubische Splines mit vorgegebener erster Randableitung .....                            | 152        |
| B.2  | Kubische Ausgleichssplines mit vorgegebener erster Randableitung .....                  | 153        |
| <b>Anhang C: Methoden der Bahnbestimmung .....</b> |   | <b>155</b> |
| C.1  | Allgemeines und GPS-Beobachtungsgleichungen .....                                       | 155        |
| C.2  | Kinematische Bahnbestimmung .....   | 156        |
| C.3  | Dynamische Bahnbestimmung .....   | 157        |
| C.4  | Reduziert-dynamische Bahnbestimmung .....   | 158        |
| C.5  | Vergleich realer kinematischer, dynamischer und reduziert-dynamischer CHAMP-Orbits .... | 159        |
| <b>Literatur .....</b>                             |   | <b>160</b> |
| <b>Danksagung .....</b>                            |   | <b>169</b> |

# 1 Einführung

## 1.1 Ein kurzer Abriss über die Entwicklung der Gravitationsfeldbestimmung

Den Ausgangspunkt für die terrestrische Schwere- bzw. Gravitationsfeldbestimmung bildete historisch betrachtet die punktweise Vermessung der festen Erdoberfläche mittels Lotabweichungen im 19. Jahrhundert, ein großer Fortschritt wurde im 20. Jahrhundert durch den Einsatz gravimetrischer Messverfahren erreicht. Das Hauptproblem dieser Beobachtungen besteht neben dem immensen Messaufwand vor allem darin, dass damit nur die kontinentalen Gebiete erfasst werden können. Hinzu kommt, dass große Landstriche aufgrund von topografischen Gegebenheiten, dem immensen Zeitaufwand oder fehlenden finanziellen Mitteln nicht oder nur schlecht vermessen wurden. Dies führte letztendlich zu Insellösungen für das Schwerefeld, die aufgrund der unterschiedlichen Datenqualität noch von uneinheitlicher Genauigkeit waren. Die Vermessung von einzelnen Gewässern mittels Schiffsgravimetrie konnte hier keinen entscheidenden Beitrag leisten.

Der entscheidende Schritt hin zur globalen Schwerefeldmodellierung wurde mit dem Eintritt in das Zeitalter der künstlichen Erdsatelliten in den 70er-Jahren gemacht. Mittels Satellitenaltimetrie (GEOSAT, TOPEX/POSEIDON, ERS-1), mit der die Meeresoberfläche und damit das Geoid über den Ozeanen erfasst werden konnte, konnten nun große Datenlücken über den Ozeanen geschlossen werden. Eine andere Möglichkeit bot die Vermessung der Bahn der Satelliten, wobei der Satellit selbst der Probekörper ist, dessen Bahn durch das Gravitationsfeld der Erde beeinflusst wird. Messungen von Bahnstörungen lassen demnach ein Rückschluss auf das Gravitationsfeld zu. Die meisten dieser Satelliten (z.B. LAGEOS, Stella, GFZ-1, Starlette), die sich in Bahnhöhen zwischen 400 und 20000 km befanden, waren mit Laserreflektoren ausgestattet, somit konnten von ca. 40 weltweit verteilten Bodenstationen Laserentfernungsmessungen (SLR, engl.: *Satellite Laser Ranging*) zu den dort sichtbaren Satelliten durchgeführt werden. Allerdings konnten nur kurze, eindimensionale Bahnbögen aufgrund der geringen Anzahl von Laserinstrumenten bestimmt werden, zusätzlich war die Sensitivität für Feinstrukturen des Gravitationsfeldes bedingt durch die große Bahnhöhe stark reduziert. Dennoch konnte die Akkumulation von vielen tausenden solcher Bahnbögen einen nicht unerheblichen Anteil für die Verbesserung der langwelligen Strukturen des Gravitationsfeldes leisten. Verbleibende Datenlücken über den Polen, die mit Altimetrie nicht zu vermessen sind und die auf niedrige Bahnneigungen der SLR-Satelliten zurückzuführen sind, konnten teilweise mittels Fluggravimetrie geschlossen werden, wie beispielsweise durch Befliegung der Arktis und Grönlands. Die Fluggravimetrie bietet insgesamt eine effiziente Möglichkeit der gravimetrischen Vermessung kleinerer regionaler Gebiete mit höherer Auflösung als die Satelliten. Aus der Verschmelzung all dieser terrestrischen Daten, Satellitendaten und Fluggravimetriedaten konnten schließlich recht genaue globale Gravitationsfeldmodelle erstellt werden, das genaueste davon ist das *EGM96* (engl.: *Earth Gravity Model 1996*, Lemoine et al., 1998) mit einer räumlichen Auflösung von Detailstrukturen bis  $\lambda \approx 110$  km. An dieser Stelle muss natürlich auch erwähnt werden, dass die immer größer werdenden Datenmengen sowie die durch die erhöhte Datenqualität mögliche höhere Auflösung des Erdschwerefeldes auch immer höhere Anforderungen an die Auswertestrategie und Auswertelgorithmen sowie die Rechnertechnologie stellen. Insgesamt bleibt aber festzustellen, dass bisherige globale Gravitationsfeldmodelle wie das *EGM96* aufgrund der unterschiedlichen Datendichte, der immer noch vorhandenen Datenlücken und auch aufgrund der unterschiedlichen Homogenität, Genauigkeit, Auflösung und Sensitivität der einzelnen Datensätze für viele Anwendungen qualitativ nicht gut genug sind. Aber auch bei der regionalen Schwerefeldmodellierung in Gebieten, die durch dichte terrestrische Beobachtungen, die eigentlich eine hohe Auflösung garantieren, gut vermessen sind, wie beispielsweise Europa, liegt nach Denker (1995) das Hauptproblem in den langwelligen Fehlern der Kugelfunktionsentwicklungen und Schweredaten. Dieses Problem kann nach Denker (1995) nur durch eine neue Satellitenmission behoben werden

## 1.2 Die neuen Satellitenmissionen

### 1.2.1 Wozu werden Satelliten in der Gravitationsfeldbestimmung gebraucht?

Mit den drei neuen Satellitenmissionen *CHAMP*, *GRACE* und *GOCE* (s. u.) soll der Eintritt in eine neue Ära der Gravitationsfeldbestimmung gelingen. Diese Satelliten erlauben durch eine niedrige (Bahnhöhe 250–450 km), polnahe Umlaufbahn und ausgeklügelte Messverfahren zum ersten Mal eine globale, gleichmäßige und komplette Abdeckung der Erde mit homogenen Messdaten gleicher Sensitivität, Auflösung und Genauigkeit, die durch die automatische Messung zudem auch effizient durchgeführt wird. Dabei finden bei den Satellitenmissionen unterschiedliche Messprinzipien eine Anwendung, mit denen unterschiedliche Auflösungen des Gravitationsfeldes erfasst werden sollen. Speziell bei dem im Juli 2000 gestarteten *CHAMP*-Satelliten wurde erstmalig die Bahnbestimmung einer Gravitationsfeldmission mit *GPS* (*Globales Positionierungssystem*, engl.: *Global Positioning System*) realisiert, die im Gegensatz zu den SLR-Satelliten eine kontinuierliche, dreidimensionale und cm-genaue Erfassung der Satellitenbahn für die Gravitationsfeldanalyse ermöglicht. Die Messprinzipien und anvisierten Auflösungen der 3 Missionen sind:



- **CHAMP** (***C**hallenging **M**ini-satellite **P**ayload for Geophysical Research and Application*):
  - Start: 15. Juli 2000
  - Messprinzip: Bahnanalyse durch *high-low satellite-to-satellite-tracking (hl-SST)*
  - Auflösung: langwellige Strukturen bis ca.  $\lambda \approx 500\text{km}$  mit einer Genauigkeit  $< \lambda$  1 dm
  
- **GRACE** (***G**ravity **R**ecovery and **C**limate **E**xperiment*):
  - Start: 17. März 2002
  - Messprinzip: Messung der Abstandsänderung zwischen beiden GRACE-Satelliten mittels *low-low satellite-to-satellite tracking (ll-SST)* durch eine Mikrowellen K-Band-Verbindung
  - Auflösung: lange und mittlere Wellenlängen bis ca.  $\lambda \approx 270\text{km}$  mit cm-Genauigkeit
  
- **GOCE** (***G**ravity Field and Steady-State **O**cean **C**irculation **E**arth Explorer*):
  - Start: Ende 2008/Anfang 2009
  - Messprinzip: Satellitengrاديometrie (engl.: *satellite gravity gradients, SGG*, differentielle Beschleunigungsmessung zwischen je 2 Probemassen in alle 3 Raumrichtungen)
  - Auflösung: lang- bis kurzwellige Detailstrukturen bis  $\lambda \approx 140\text{km}$  mit einer Genauigkeit von 1–2 cm

Mit den drei Satellitenmissionen soll also schrittweise die Modellierung des Gravitationsfeldes von großen hin zu feineren Detailstrukturen gelingen. Dabei besitzen alle drei Satelliten einen GPS-Empfänger zur Bahnbestimmung, die bei den beiden Nachfolgemissionen von CHAMP, also GRACE und GOCE, nicht nur für die Positionierung der ll-SST und SGG-Messungen verwendet werden kann, sondern auch als zusätzliches Instrument für die Bahnanalyse zur Unterstützung der Auflösung von langwelligen Gravitationsfeldanteile angesehen werden kann. Folglich ist die Untersuchung von Auswerteverfahren der Bahnanalyse nicht nur für CHAMP von Bedeutung, sondern auch für die beiden Nachfolger GRACE und GOCE. In dieser Arbeit wird eine neuartige Methode für die Gravitationsfeldanalyse aus Satellitenbahnen basierend auf kinematisch bestimmten Orbits vorgestellt und anhand von simulierten und realen CHAMP-Bahnen getestet. Der Vergleich mit alternativen Verfahren geschieht dabei auf der Basis von Simulationsrechnungen (nur für die Methoden für kinematische Bahnen) und Modellen, die von anderen Instituten mit alternativen Methoden aus realen CHAMP-Daten bestimmt wurden.

### 1.2.2 Die Satellitenmission CHAMP

Die Satellitenmission CHAMP wurde von Prof. C. Reigber, ehemaliger Direktor der Division 1 „Kinematik und Dynamik der Erde“ des GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ), im Jahr 1994 als eine Antwort auf eine Initiative der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DLR) vorgeschlagen, mit der die Luft- und Raumfahrtindustrie in den neuen Bundesländern durch Finanzierung einer Kleinsatellitenmission unterstützt werden sollte. CHAMP wurde schließlich von der DLR ins Leben gerufen, welche die Mission auch zu 80% finanziert. Die wissenschaftliche Leitung trägt das GFZ zusammen mit der DLR, wobei die DLR hauptsächlich für den operationellen Ablauf der Mission verantwortlich ist. Entworfen und gebaut wurde der Satellit von der Daimler Chrysler Aerospace Jena Optronik GmbH (DJO) zusammen mit der Dornier Satellitensysteme GmbH (früher DSS, heute Astrium) und der Raumfahrt und Umwelttechnik GmbH (RST), wobei zahlreiche weitere internationale Institutionen Beiträge zu den Nutzlastinstrumenten lieferten.

Durch eine neuartige Kombination von verschiedenen Nutzlastinstrumenten soll CHAMP wichtige Beiträge zur geowissenschaftlichen Grundlagenforschung und zur Atmosphärenphysik leisten. Die drei Hauptbereiche, die mit CHAMP erforscht werden sollen sind:

- *Gravitationsfeld der Erde*: Verbesserung der Kenntnis der langwelligen Anteile ( $\lambda \approx 500\text{ km}$ ) des statischen Gravitationsfeldes der Erde sowie seine zeitlichen Veränderungen.
- *Magnetfeld der Erde*: Globale Schätzungen des magnetischen Hauptfeldes der Erde und des Magnetfeldes der Erdkruste sowie die zeitliche und räumliche Veränderungen dieser Komponenten.
- *Atmosphäre/Ionosphäre*: Bestimmung der vertikalen Temperatur- und Wasserdampfprofile (GPS-Radio-Okkultation), des elektrischen Feldes (digitales Ionendriftmeter), der Elektronendichte (GPS-Radiosondierung) sowie der Dichte der neutralen Atmosphäre (Akzelerometer).

Des Weiteren soll im Rahmen eines Experiments die Durchführung von GPS-Alimetrie mittels einer extra dafür an der Unterseite angebrachten GPS-Antenne erprobt werden.

Anmerkung: Die in den Abschnitten 1.2.2–1.2.2.6 dargestellten Informationen und Abbildungen sind im Wesentlichen der CHAMP-homepage ([http://www-app2.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/index\\_CHAMP.html](http://www-app2.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/index_CHAMP.html)) des GFZ entnommen.

### 1.2.2.1 Zeitrahmen der Mission

Nachdem die CHAMP-Mission genehmigt wurde, wurde innerhalb weniger Jahre die Mission geplant und anschließend durchgeführt. Die einzelnen Phasen gliedern sich in:

- **Phase A:** *Machbarkeitsstudie* (Oktober 1994–März 1995)
- **Phase B:** *Design- und Spezifizierung* (November 1995–Oktober 1996)  
*Redesignphase* (Ende 1996): Wechsel von Trägerrakete und Akzelerometer
- **Phase C/D:** *Herstellung und Test* (Januar 1997–15. Juli 2000)
- **Start:** 15. Juli 2000 in Plesetsk, Russland
- **Phase E:** *Durchführung der Mission*
  - *Anpassung, Kalibrierung und Validation* (15. Juli 2000–März 2001)
  - *Messung, Auswertung, Interpretation* (April 2001–ca. 2008)

### 1.2.2.2 Orbit und Missionsparameter

Damit die zuvor genannten Missionsziele der Gravitations- und Magnetfeldbestimmung sowie der Atmosphären- und Ionosphärensondierung erreicht werden können, müssen die Bahnparameter von CHAMP gewisse Bedingungen erfüllen. Wie zu sehen sein wird, stellt das Orbitdesign von CHAMP allerdings einen Kompromiss für die drei Ziele dar, da für jedes der drei Ziele allein ein anderer Orbit von Vorteil wäre. Die Bahnparameter (Keplerelemente) von CHAMP wurden vom GFZ für einen Zeitpunkt zum Anfang der Mission (1. August 2000, 0<sup>h</sup>00<sup>m</sup> GPST (*GPS-Systemzeit*, engl.: *GPS Time*)) wie folgt bekannt gegeben:

- Flughöhe zum Missionsbeginn/-ende: ca. 454 km/300 km
- große Halbachse:  $a = 6823,287$  km
- Inklination:  $i = 87,277^\circ$
- Exzentrizität:  $e = 0,004001$
- Argument des Perigäums:  $\omega = 257,706^\circ$
- Länge des aufsteigenden Knotens:  $\Omega = 144,210^\circ$
- mittlere Anomalie:  $M = 63,816^\circ$
- Apogäumshöhe/Perigäumshöhe: 474,05 km/418,23 km
- Umlaufzeit:  $T = 93,55$  min ( $\hat{=}$  15,4 Umläufe/Tag)
- Drehung der Knotenlinie:  $-0,37^\circ/\text{Tag}$  ( $\hat{=}$  Periode von ca. 966 Tagen)
- Drehung der Apsidenlinie:  $-3,88^\circ/\text{Tag}$  ( $\hat{=}$  Periode von ca. 93 Tagen)

Die wichtigsten der zuvor genannten Bahnparameter sollen kurz erläutert werden:

Ein möglichst kreisförmiger (kleine Exzentrizität  $e$ ) und vor allem polnaher Orbit (Inklination  $i \cong 90^\circ$ ) ist wichtig um eine möglichst gleichmäßige und komplette Abdeckung der Erde mit homogenen Orbit- und Magnetfeldmessdaten für die Gravitations- und Magnetfeldbestimmung zu bekommen. Dabei ist eine Inklination von ca.  $i = 87^\circ$  die größtmögliche, die von Plesetsk aus zu erreichen ist. Der Vorteil des CHAMP-Orbits mit einer deutlich von einem Jahr abweichenden nodalen Periode von 966 Tagen gegenüber einem sonnensynchronen Orbit ist die Variation der Lokalen Sonnenzeit in der Bodenspur des Satelliten, die für die Trennung von periodischen Phänomenen wie Gezeiten und Tag-Nacht-Variationen für alle drei Ziele von Bedeutung ist.

Die (anfängliche) Bahnhöhe von ca. 450 km stellt aus Sicht der drei Missionsziele einen Kompromiss dar. Während sie zur Beobachtung des magnetischen Hauptfeldes fast ideal ist, wäre für die Gravitationsfeldbestimmung eine niedrigere Bahnhöhe optimaler. Für die Anforderungen der Atmosphären- und Ionosphärensondierung, wo „von außen durch die unterschiedlichen atmosphärischen Schichten“ geschaut werden muss, ist mindestens eine solche Bahnhöhe notwendig bzw. wäre sogar eine größere Bahnhöhe wünschenswert.

Neben dem Kompromiss zwischen den drei Missionszielen ist eine anfängliche Flughöhe von ca. 450 km notwendig, um eine mindestens 5jährige Missionsdauer zu gewährleisten. Andernfalls würde der Satellit aufgrund der Atmosphärenreibung zu stark abgebremst und dadurch zu früh auf die Erde stürzen bzw. in deren Atmosphäre verglühen. Eine lange „Lebensdauer“ ist für die Erfassung von zeitlichen Veränderungen im Gravitations- und Magnetfeld von Bedeutung. Das durch die Atmosphärenreibung bedingte Absinken des CHAMP-Satelliten mit zunehmender Lebensdauer hat für die Gravitationsfeldbestimmung eine angenehme Nebenwirkung, da der Satellit dann eine bessere Sensitivität für Gravitationsfeldanteile einer höheren Frequenz hat. Es wird durch das Absinken also eine höhere Auflösung ermöglicht. Abbildung 1.1 zeigt den Verlauf der Flughöhe von CHAMP für die ersten 5 Jahre. Seit dem Start im Juli 2000 bis zur Mitte des Jahres 2005 ist der Satellit von ca. 450 km auf eine Bahnhöhe von ca. 360 km abgesunken. Das Absinken wird, wie oben erwähnt, durch die Atmosphärenreibung verursacht, die wiederum stark abhängig von der solaren Strahlungsaktivität ist. Da das Maximum des 11-jährigen Sonnenzyklus Ende 2002 stärker als erwartet ausfiel, trat ab Herbst ein sehr rasche Abnahme der Bahnhöhe ein (als Knick sichtbar), was anschließend zwei Bahnhebungsmanöver Mitte und Ende 2002 notwendig machte. Für die Missionszeit ab Mitte 2005 ist das Absinken der Bahn aufgrund einer geringen solaren Strahlung relativ gut vorhersagbar. Die nominelle sowie um  $2\sigma$  davon abweichende Modellierung der

Sonnenaktivität sagen jeweils ein Absinken unter 300 km für Ende 2007 und damit ein Missionsende für das Frühjahr 2008 voraus.

Folgende Bahnmanöver (in dem in dieser Arbeit analysierten Zeitraum) wurden bisher bei CHAMP durchgeführt:

- 10./11. Juni 2002: 1. Bahnhebungsmanöver: Perigäum um 20 km angehoben, um Exzentrizität der Bahn zu vermindern.
- 6. November 2002: 90°-Schwenkungsmanöver: CHAMP fliegt für 12 h mit dem Ausleger nach oben gedreht. Zweck: Rekalibrierung des Fluxgate-Magnetometers, Überprüfung von Akzelerometeroffsets und den Sternkameras.
- 9./10. Dezember 2002: 2. Bahnhebungsmanöver: Bahn um 20km angehoben.

Die Daten während des Zeitraumes der Bahnmanöver sollten bei der Gravitationsfeldbestimmung nicht verwendet werden, um Fehler bedingt durch die dadurch hervorgerufenen Störbeschleunigungen zu vermeiden.

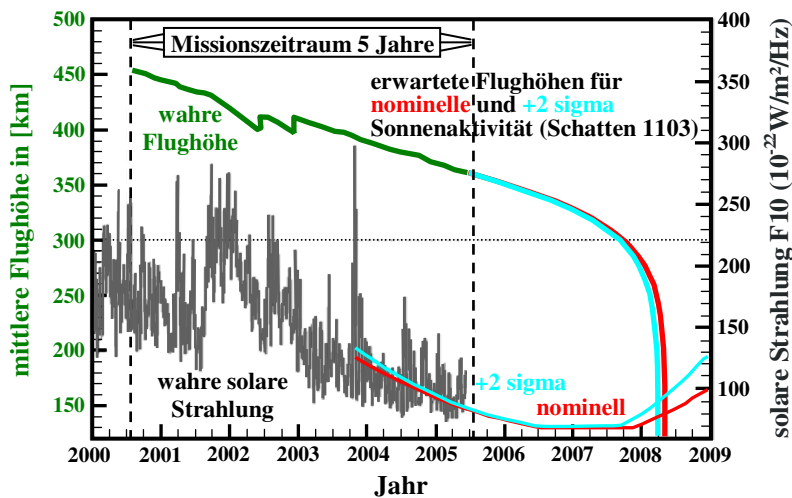


Abbildung 1.1: Absinken des CHAMP-Satelliten in Abhängigkeit von der Sonnenaktivität. Quelle: CHAMP-homepage des GFZ Potsdam.

### 1.2.2.3 Der Satellit

Der CHAMP-Satellit besteht, wie in Abbildung 1.2 ersichtlich, aus einem trapezoidförmigen Hauptkörper von etwa 4 m Länge und einem 4,044 m langen Ausleger, insgesamt besitzt der Satellit somit eine Länge von 8,333 m. Die Höhe des Hauptkörpers beträgt 75 cm, seine Unterseite ist 1,621 m breit und seine Oberseite besitzt eine Breite von 30 cm. Das Gewicht des Satelliten beträgt 522 kg, wovon ca. 30 kg auf die nachfolgend beschriebenen Nutzlastinstrumente und 20kg auf den Ausleger entfallen. Um eine hohe Stabilität bei einem möglichst niedrigen Gewicht zu gewährleisten, ist der Satellit aus einer Aluminium-Sandwich-Struktur aufgebaut. Insgesamt stellen die Form und der Aufbau des Satelliten einen Kompromiss zwischen seinem aerodynamischen Verhalten, der Anbringung der Nutzlastinstrumente und Subsysteme sowie der Bedingung, dass der Satellit in die Trägerrakete passt, dar.

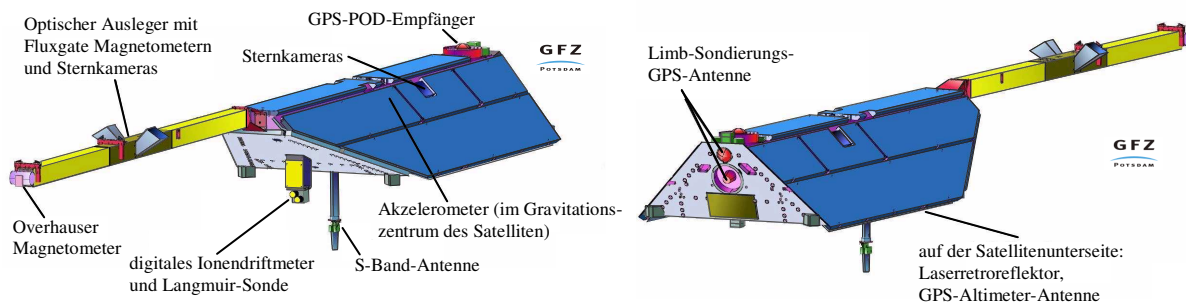


Abbildung 1.2: Vorder- und Rückansicht des CHAMP-Satelliten inklusive der Nutzlastinstrumente.

Für die Regelung der Fluglage besitzt der Satellit ein *Lage- und Bahnkontrollsystem* (engl.: *Attitude and Orbit Control Subsystem, AOCS*). Da der Satellit sich in nomineller Fluglage mit dem Ausleger in Flugrichtung befinden soll, er allerdings aufgrund seiner Trägheitsachsen eine Lage annehmen würde, in welcher der Ausleger radial nach außen zeigen würde, ist eine aktive Lageregelung notwendig. Um die nominelle Lage mit einer Genauigkeit von  $\pm 2^\circ$  und

$\pm 0,1\%$  einhalten zu können ist das AOCS mit einem Kaltgasantrieb bestehend aus 14 Steurdüsen ausgerüstet. Die Steurdüsen (Schubkraft je 20 mN, Zünddauer 0,1–1 s) sind so angebracht und werden so aktiviert, dass die auf den Satelliten wirkende resultierende Kraft möglichst verschwindet und er nur gedreht wird. Für die Betätigung der Steurdüsen besitzt der Satellit 2 Kaltgastanks mit je 32 kg Treibstoff, die so angebracht sind und verwendet werden, dass die Lage des Akzelerometers während der gesamten Mission nicht mehr als 2 mm vom Gravitationszentrum des Satelliten abweicht. Die Erfassung und Messung der Lage von CHAMP geschieht hauptsächlich durch 2 Sternkamera-paare, aber auch andere Nutzlastinstrumente wie die GPS-Antennen und das Fluxgate-Magnetometer liefern nützliche Informationen für die Lagebestimmung.

#### 1.2.2.4 Die Nutzlastinstrumente

Für die Erfüllung der Missionsziele trägt der CHAMP-Satellit wie in Abbildung 1.2 ersichtlich eine Reihe von Nutzlastinstrumenten an Bord. Diese sind:

- GPS-POD-Empfänger
- STAR-Akzelerometer
- 2 Sternkamera-paare
- ein Laserretroreflektor
- ein (skalares) Overhauser-Magnetometer
- zwei (vektorielle) Fluxgate-Magnetometer
- eine Limb-Sondierungs-GPS-Antenne
- ein digitales Ionendriftmeter mit Langmuir-Sonde
- eine GPS-Altimeter-Antenne

Die ersten 4 der zuvor genannten Nutzlastinstrumente sind für die Gravitations- und Bahnbestimmung von Bedeutung und werden nachfolgend kurz erläutert. Die drei auf dem Ausleger angebrachten Magnetometer dienen der Magnetfeldbestimmung, wobei das Hauptinstrument die beiden vektoriell messenden Fluxgate-Magnetometer sind und das die skalare Magnetfeldstärke messende Overhauser-Magnetometer hauptsächlich der Kalibrierung der beiden Fluxgate-Magnetometer dient. Für die Orientierung der Fluxgate-Magnetometer-Messungen ist eigens ein Sternkamera-paar auf dem Ausleger angebracht. Die Limb-Sondierungs-GPS-Antenne sowie das digitale Ionendriftmeter (mit Langmuir-Sonde) dienen, wie bereits erwähnt, der Erfüllung des dritten Missionszieles, also der Untersuchung der Atmosphäre und Ionosphäre. Die an der Unterseite angebrachte GPS-Altimeter-Antenne wird für das GPS-Altimetrie-Experiment verwendet.

##### GPS-POD-Empfänger:

Das Hauptinstrument für die Bahnbestimmung und damit schließlich für die Gravitationsfeldbestimmung ist der in Zenitrichtung zeigende, an der Satellitenoberseite angebrachte GPS-POD (*Präzise Bahnbestimmung*, engl.: *Precise Orbit Determination*)-Empfänger (zusammen mit dem Akzelerometer). Bei dem GPS-Empfänger handelt es sich um einen TRSR-2 (engl.: *Turbo Rogue Space Receiver 2*) Black Jack GPS Flugempfänger, der von der NASA (engl.: *National Aeronautics and Space Administration*) geliefert und von JPL (engl.: *Jet Propulsion Laboratories*) hergestellt wurde. Der GPS-Empfänger besitzt 16 Kanäle, von denen 12 für die präzise Bahnbestimmung benutzt werden. Auf diesen 12 Kanälen können die PRN (engl.: *Pseudo Random Noise*)-modulierten L1 und L2-Signale von bis zu 12 sichtbaren GPS-Satelliten empfangen werden, die dann in Pseudostrecken und Trägerphasenmessungen mit einer Frequenz von 0,1 Hz umgewandelt werden.

##### STAR-Akzelerometer:

Das von der *Französischen Raumfahrtbehörde* (fr.: *Centre National d'Etudes Spatiales*, CNES) bereitgestellte und von ONERA (fr.: *Office National d'Etudes et de Recherches Aéropatiales*) hergestellte STAR (engl.: *Space Tri-axis Accelerometer for Research Missions*)-Akzelerometer dient der Erfassung von nicht-konservativen Störbeschleunigungen, die z.B. durch die Atmosphärenreibung, dem solaren Strahlungsdruck oder der Erdalbedo erzeugt werden und die für eine möglichst genaue Gravitationsfeldbestimmung reduziert werden müssen. Beim STAR-Akzelerometer ist das Prinzip eines elektrostatischen Mikroakzelerometers realisiert. Insgesamt sollen mit dem Akzelerometer die linearen Störbeschleunigungen bzw. die Winkelbeschleunigungen im Genauigkeitsbereich von  $10^{-8}$ – $10^{-9}$  m/s<sup>2</sup> bzw.  $10^{-7}$  rad/s<sup>2</sup> in einem Messbereich von  $10^{-4}$ – $10^{-1}$  Hz bestimmt werden. Um Störungen durch Winkelbeschleunigungen und Gravitationsgradienten zu vermeiden, ist der Akzelerometersensor mit einer Abweichung von maximal 2 mm im Gravitationszentrum des Satelliten angebracht. Eine genauere Beschreibung des Akzelerometers sowie seiner Achsrichtungen findet sich in den Abschnitten 3.5 und 5.2.

##### Sternkamas:

Für die Orientierung der Messungen mit einer Genauigkeit weniger Bogensekunden besitzt CHAMP 2 Sternkamera-paare, die an der DTU (*Technische Universität von Dänemark, Lyngby*) entwickelt und hergestellt wurden. Für die

Lagebestimmung bilden die Sternkameras die innerhalb ihres Sichtfeldes ( $18,4^\circ \times 13,4^\circ$ ) gelegenen Sterne auf ein CCD-Array (*ladungsgekoppeltes Element*, engl.: *Charge Coupled Device*) ab. Durch Vergleich der Sternpositionen mit dem hochgenauen HIPPARCOS-Sternkatalog (engl.: *High Precision Parallax Collecting Satellite*) kann dann die Lage sehr genau bestimmt werden. Näheres zu den Achsrichtungen der Sternkameras ist in Abschnitt 3.5 zu finden.

#### Laserretroreflektor:

Der eigens vom GFZ hergestellte *Laserretroreflektor (LRR)* dient der 1–2 cm genauen Entfernungsbestimmung zwischen Bodenstation und CHAMP-Satellit. Da eine solche Entfernungsmessung nur im Sichtbarkeitsbereich einer Bodenstation möglich ist, handelt es sich um ein nicht-kontinuierliches Signal, welches hauptsächlich zur Überprüfung und Evaluierung der Bahnbestimmung als zur Orbitberechnung selbst herangezogen wird. Eine weitere Anwendung besteht in der Überprüfung und Verbesserung bestehender Korrekturmodelle für die Atmosphäre durch Verwendung von zweifarbigem Licht. Bei dem LRR handelt es sich um ein an der Unterseite montiertes passives Instrument, das aus 4 rechtwinklig zueinander und um jeweils einen Winkel von  $45^\circ$  gegen die Satellitenunterseite angebrachten, an der Innenseite metallbeschichteten Quarzglasprismen besteht.

#### **1.2.2.5 Die Daten**

Die Messdaten und Ergebnisse der CHAMP-Mission werden über das CHAMP-ISDC (engl.: *Information System and Data Centre*) des GFZ Potsdam bereitgestellt und können von angemeldeten Nutzern über die CHAMP-homepage bezogen werden. Die zur wissenschaftlichen Nutzung zur Verfügung gestellten Daten sind je nach Anzahl der an den Originaldaten angebrachten Verarbeitungsschritte in vier Stufen Level-1 bis Level-4 gegliedert. Die wichtigsten Daten für die Gravitationsfeldbestimmung sind dabei:

- die dekodierten hl-SST-Daten (Trägerphasen, Pseudostrecken) zwischen GPS-Satelliten und CHAMP sowie die GPS-Messungen zwischen GPS-Satelliten und den Bodenstationen in Level 1
- die Akzelerometerdaten inklusive Kalibrierungsparameter, Lageinformation und Orbitmanöver in Level 2
- die *nachprozessierten präzisen Orbits* (engl.: *Precise Science Orbits, PSO*) sowie die bestimmten Gravitationsfeldmodelle in Level 4
- Des weiteren wären noch die *schnellen wissenschaftlichen Orbits* (engl.: *Rapid Science Orbits, RSO*) in Level 3 zu nennen, die innerhalb weniger Stunden nach der Messung mit einer Genauigkeit von ca. 10 cm erzeugt werden und hauptsächlich der Orientierung der Magnetfeld- und Atmosphärenmessungen dienen, aber auch zu Vorstudien der Gravitationsfeldanalyse herangezogen werden können.

#### **1.2.2.6 Wissenschaftlicher Verlauf**

Die Präsentation und Diskussion ausführlicher Studien und Ergebnisse der CHAMP-Mission war und ist ein Thema bei vielen wissenschaftlichen Konferenzen. Hervorzuheben sind an dieser Stelle die 3 speziell CHAMP gewidmeten Konferenzen des GFZ Potsdam, zu denen Veröffentlichungen mit den wissenschaftlichen Beiträgen herausgegeben wurden bzw. geplant sind:

- *First CHAMP Science Meeting*, 22.–25. Januar 2002, GFZ Potsdam.  
Ziel: Diskussion des Status, der Aufgaben sowie der möglichen Richtungen von CHAMP, Präsentation erster Ergebnisse (Reigber et al., 2003b).
- *Second CHAMP Science Meeting*, 1.–4. September 2003, GFZ Potsdam.  
Ziel: Diskussion über die Nutzung und Anwendung der CHAMP-Daten, Präsentation fortgeschrittener Ergebnisse (Reigber et al., 2005b).
- *Joint CHAMP/GRACE Science Meeting*, 6.–8. Juli 2004, GFZ Potsdam.  
Ziel: Präsentation erster GRACE-Ergebnisse sowie fortgeschrittener CHAMP-Ergebnisse, Diskussion der Möglichkeiten der Kombination von CHAMP/GRACE-Daten sowie weiterer Datenquellen.

## 2 Methoden der Bahnanalyse

### 2.1 Allgemeine Bemerkungen

Das Hauptinstrument für die Gravitationsfeldbestimmung mit der *LEO* (*niedrig fliegend*, engl.: *Low Earth Orbiting*)-Satellitenmission CHAMP ist die Bahnanalyse, mit der hauptsächlich die langwelligen Anteile des Gravitationsfeldes mit einer Auflösung bis ca. 450 km erfasst werden können. Aber auch für die beiden Folgemissionen GRACE und GOCE ist die Bahnanalyse von Bedeutung, um deren jeweiliges primäres Messverfahren, die Mikrowellen-Inter-satellitenverbindung bzw. Gradiometrie im langwelligen Bereich zu unterstützen. Im Gegensatz zu früheren Satellitenmissionen, bei denen z.B. mit Hilfe von Lasermessungen die Entfernungen des Satelliten zu Bodenstationen gemessen wurden, werden die Bahnen der neueren Satellitenmissionen mit Hilfe des High-Low-Satellite-to-Satellite-Tracking erfasst. Dazu werden Messungen zur Bestimmung der Bahn zwischen den hochfliegenden GPS-Satelliten und den niedrig fliegenden LEO-Satelliten durchgeführt, die aus Pseudostrecken und Trägerphasen bestehen. Generell ist die Aufgabe der Bahnanalyse im vorliegenden Fall also die Bestimmung von Gravitationsfeldparametern (Unbekannte) aus den Beobachtungen von Pseudostrecken und Trägerphasen. Die Bahn der GPS-Satelliten wird dabei als bekannt vorausgesetzt, oder muss mit Hilfe weiterer Beobachtungen zwischen GPS-Satelliten und Bodenstationen mitgeschätzt werden. Weitere nützliche Beobachtungen für die Gravitationsfeldbestimmung wie sie z.B. die Satellitenmission CHAMP liefert, können die auf den Satelliten wirkenden Oberflächenkräfte sein, welche sich störend auf die Bahn auswirken, die aber mit Hilfe eines Akzelerometers gemessen werden können. Das Spektrum der zu schätzenden Parameter kann/muss unter anderem auch auf ausgewählte Gezeitenparameter wie die Konstituenten der Ozeangezeiten, um Kalibrierungsparameter des Akzelerometers sowie die Startelemente eines Bahn Bogens (initiale Position und Geschwindigkeit) erweitert werden. Für manche Verfahren der Bahnanalyse scheint auch eine Erweiterung der Parameterschätzung um GPS-bezogene Größen wie Phasenmehrdeutigkeiten oder Uhrenfehler sinnvoll.

### 2.2 Newton'sche Bewegungsgleichung und die Kraftfunktion

Die Beziehung zwischen der Bahn des Satelliten(-schwerpunktes)  $\mathbf{X}(t)$  und der einwirkenden Kräfte  $\mathbf{F}$ , insbesondere derjenigen, die durch das zu bestimmende Gravitationsfeld verursacht werden, ist durch die Newton'sche Bewegungsgleichung, formuliert im (Quasi-)Inertialsystem  $\mathbf{I}^*$ , gegeben:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}}(t) &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}(t)) \\ &= \sum_{u=1}^U \mathbf{f}_u(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_u(t))\end{aligned}\quad (2.1)$$

Es handelt sich hierbei um eine *Differentialgleichung* (DGL) zweiter Ordnung, deren Kraftfunktion  $\mathbf{F}$  selbst wieder von Funktionalen der Bahn  $\mathbf{X}(t)$  abhängt. Um die Bahn zu erhalten, muss diese DGL als Anfangs- oder Randwertaufgabe integriert werden, zuvor bietet sich jedoch die Transformation in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung an, um dies zu vereinfachen. In der Regel wird somit der Zusammenhang zwischen den gesuchten Gravitationsfeldparametern (im Parametervektor  $\mathbf{p}(t)$  enthalten) und den Bahnkoordinaten  $\mathbf{X}(t)$  nichtlinear, was generell ein Problem bei der Bahnanalyse darstellt.

Die Kraftfunktion  $\mathbf{F}$  kann in ihre verschiedenen erzeugenden Effekte, als spezifische Kräfte  $\mathbf{f}_u = \mathbf{F}_u / m$  notiert, aufgeteilt werden und kann dabei von der Position  $\mathbf{X}(t)$  und Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  des Satelliten sowie weiteren Parametern  $\mathbf{p}(t)$  abhängen, welche geophysikalische Effekte sowie bestimmte bautechnische Eigenschaften des Satelliten beschreiben. Manche der geophysikalischen Effekte besitzen auch eine explizite Zeitabhängigkeit. Insgesamt sieht die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der verschiedenen Effekte wie folgt aus:

#### Box 2.1: Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \Gamma_{\text{grav}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) + \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}(t)) + \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{non-grav}}(t)) \quad (2.2)$$

mit:

*Gravitationsvektor der Erde*

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{grav}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) &= \Gamma_{\text{static}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\Gamma, \text{static}}) \\ &\quad + \Gamma_{\text{time-variable}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\Gamma, \text{time-variable}}(t))\end{aligned}\quad (2.3)$$

*Gezeitenvektor (spezifische Gezeitenkraft)*

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}(t)) &= \mathbf{f}_{\text{n\_bodies}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{n\_bodies}}(t)) + \mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)) \\ &\quad + \mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t))\end{aligned}\quad (2.4)$$

(spezifische) nicht-gravitative Störkräfte

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{non-grav}}(t)) = & \mathbf{f}_{\text{air-drag}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{air-drag}}(t)) + \mathbf{f}_{\text{lift}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{lift}}(t)) \\ & + \mathbf{f}_{\text{solar-rad}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{solar-rad}}(t)) \\ & + \mathbf{f}_{\text{albedo}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{albedo}}(t)) + \mathbf{f}_{\text{control}}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die spezifische Kraftfunktion  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/m$  setzt sich demnach aus dem terrestrischen Gravitationsvektor  $\Gamma_{\text{grav}}$ , dem Gezeitenvektor  $\mathbf{f}_{\text{tidal}}$  sowie (spezifischen) nicht-gravitativen Störkräften  $\mathbf{f}_{\text{non-grav}}$  zusammen.

Der terrestrische Gravitationsvektor  $\Gamma_{\text{grav}}$  ist eine von der Satellitenposition  $\mathbf{X}$  abhängige Größe, für die Modellierung des Gravitationsfeldes der Erde wird normalerweise eine Kugelfunktionsentwicklung verwendet, in der die Gravitationsfeldparameter, bezeichnet als Kugelfunktionskoeffizienten linear eingehen. Im Falle des statischen Gravitationsfeldes  $\Gamma_{\text{static}}$  besitzen sie fixe Werte  $\mathbf{p}_{\Gamma, \text{static}}$ , zur Beschreibung zeitvariabler Effekte  $\Gamma_{\text{time-variable}}$  müssen sie selbst eine Funktion der Zeit sein ( $\mathbf{p}_{\Gamma, \text{time-variable}}(t)$ ). Auf die Modellierung des Gravitationsfeldes der Erde wird in Kapitel 4 noch genauer eingegangen.

Die Beschreibung der Effekte, welche durch Gezeiten hervorgerufen werden, gestaltet sich komplizierter. Für die Bestimmung der gesamten Gezeitenwirkung, die sich aus dem direkten Effekt der Himmelskörper  $\mathbf{f}_{\text{n_bodies}}$ , den Gezeiten der festen Erde (Deformationsreaktion,  $\mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{solid}}$ ) sowie den Ozeangezeiten ( $\mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}$ ) zusammensetzt, wird grundsätzlich nicht nur die Satellitenposition, sondern auch die Position und die Masse des jeweiligen erzeugenden Himmelskörpers (Parameter  $\mathbf{p}_{\text{n_bodies}}$ ) benötigt. Weitere Parameter (in  $\mathbf{p}_{\text{tides}}^{\text{solid}}$  enthalten) zur Beschreibung der Deformationsreaktion der Erde wie z.B. die Love-Zahlen werden für die Berechnung der Erdgezeiten verwendet, für die Modellierung der Ozeangezeiten (Parameter  $\mathbf{p}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}$ ) sind u.a. die Auflastzahlen von Bedeutung. Eine genauere Beschreibung zur Modellierung der Gezeiten findet sich in Kapitel 5.

Die Modellierung der nicht-konservativen (und nicht-gravitativen) Effekte, die in Form von Atmosphärenreibung ( $\mathbf{f}_{\text{air-drag}}$ ), Auftrieb ( $\mathbf{f}_{\text{lift}}$ ) sowie Strahlungsdruck der Sonne ( $\mathbf{f}_{\text{solar-rad}}$ ) und Erde ( $\mathbf{f}_{\text{albedo}}$ ) als Oberflächenkräfte am Satelliten angreifen bzw. durch Bahnkorrekturmanöver entstehen ( $\dot{\mathbf{X}}_{\text{control}}$ ), ist schwierig und oftmals ungenau. Dies liegt zum einen daran, dass die benötigten Modelle für Atmosphärendichte, Sonnenaktivität und Reflexionsparameter der Erde nur ungefähr bekannt sind, zum anderen daran, dass die dynamischen Parameter und Reflexionsparameter der Satellitenoberfläche nur schwer modellierbar sind (in Parametern  $\mathbf{p}_{\text{air-drag}}$ ,  $\mathbf{p}_{\text{lift}}$ ,  $\mathbf{p}_{\text{solar-rad}}$ ,  $\mathbf{p}_{\text{albedo}}$  enthalten). Deshalb sind die drei LEO-Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE mit einem Akzelerometer ausgestattet, das die Summe dieser nicht-gravitativen Effekte in Form einer Zeitreihe  $\mathbf{F}_{\text{akzi}}(t) = \mathbf{F}_{\text{non-grav}}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}_{\text{non-grav}}(t))$  misst. Die Messung der nicht-gravitativen Effekte bringt jedoch andere Probleme mit sich, da diese kalibriert werden müssen und viele derzeit nicht erklärbare Signale enthalten. Darauf soll in Abschnitt 5.2 näher eingegangen werden.

Es sollte bei der Formulierung der Bewegungsgleichung darauf geachtet werden, dass dies im (Quasi-)Inertialsystem  $\mathbf{I}^*$  geschieht. Betrachtet man die Bewegungsgleichung in einem bewegten System, z.B. im *erdfesten Bezugssystem* (auch *konventionelles terrestrisches System*, engl.: *Conventional Terrestrial System*, CTS)  $\mathbf{H}^*$ , so müssen zusätzliche Trägheitsbeschleunigungen, gelegentlich auch als Scheinbeschleunigungen bezeichnet, berücksichtigt werden.

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t)) - \underbrace{\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}(t))}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}} - \underbrace{2\boldsymbol{\omega}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)}_{\text{Coriolisbeschleunigung}} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{x}(t)}_{\text{Eulerbeschleunigung}} - \underbrace{\ddot{\mathbf{x}}_0(t)}_{\text{Anfahrbeschleunigung}} \quad (2.6)$$

Diese sind nach (2.6) die Zentrifugalbeschleunigung, die Coriolisbeschleunigung, die Eulerbeschleunigung und die Anfahrbeschleunigung (translatorische Beschleunigung des Ursprungs des bewegten Systems). Da in der Satellitengeodäsie das raumfeste bzw. das bewegte Bezugssystem normalerweise durch das *CIS* (*raumfestes Bezugssystem* bzw. *konventionelles Inertialsystem*, engl.: *Conventional Inertial System*) bzw. durch das CTS beschrieben werden, deren Ursprung im Geozentrum gelagert sind, fällt der letzte Term in (2.6), die translatorische Beschleunigung des Ursprunges, weg. Beim CIS handelt es sich somit nur um ein Quasi-Inertialsystem, da sein Ursprung nicht wirklich raumfest ist, sondern sich mit dem Geozentrum um das Baryzentrum unserer Galaxis bewegt. Der dadurch entstehende Fehler kann behoben werden, wenn die durch Gezeiten verursachten Beschleunigungen berücksichtigt werden

### 2.3 Analyseverfahren

Prinzipiell sind zwei Wege zur Bahnanalyse, also zur Bestimmung des Gravitationsfeldes aus low-low-SST Messungen möglich. Diese zwei Wege lassen sich in direkte Verfahren und in eine Art Zweischrittverfahren aufteilen. Bei direkten Verfahren werden aus den SST-Beobachtungen, also Pseudostrecken und Trägerphasenmessungen zwischen LEO und GPS-Satelliten, direkt die gesuchten Gravitationsfeldparameter sowie eventuell weitere Unbekannte wie Kalibrierungsparameter und Anfangsposition und -geschwindigkeit der Bahn bestimmt. Es handelt sich hierbei um ein so genanntes bahndynamisches Verfahren, da Parameter der dynamischen Kraftfunktion (z.B. Gravitationsfeldparameter) zusammen mit Anfangswerten der Bahn in einer Ausgleichung geschätzt werden, und somit die Bahn in Abhängigkeit von einer

Kraftfunktion parametrisiert wird. Dies stellt das klassische Verfahren dar, das auch vom GFZ für die Gravitationsfeldbestimmung mit CHAMP verwendet wird.

Beim Zweischrittverfahren hingegen werden zunächst die Positionen des LEO-Satelliten aus den SST-Beobachtungen bestimmt. In einem zweiten Schritt kann dann aus der bestimmten Bahn mit Hilfe verschiedener Verfahren das Gravitationsfeld sowie eventuell weitere Parameter bestimmt werden. Es ist hierbei darauf zu achten, dass die Positionsbestimmung des Satelliten rein aus den geometrischen (kinematischen) SST-Beobachtungen der Pseudostrecken und Trägerphasen ohne Anwendung einer Kraftfunktion geschieht (kinematische Bahnbestimmung). Anlass und Motivation dafür, solche Zweischrittverfahren bei der Gravitationsfeldbestimmung mit CHAMP anzuwenden, gibt die Tatsache, dass große Genauigkeitssteigerungen bei der Bestimmung kinematischer Orbits verzeichnet werden können. So beträgt die Genauigkeit kinematisch bestimmter CHAMP-Orbits inzwischen wenige cm (Švehla und Rothacher, 2002a,b, 2003, 2004) und entspricht somit der Genauigkeit dynamischer Orbits. Viele Forschungsgruppen verwenden deshalb inzwischen verschiedene solcher alternativer Zweischrittverfahren (z.B. Reubelt et al., 2003a,b, 2006; Mayer-Gürr et al., 2005a,b; Ilk et al., 2005; Földvary et al., 2005; Gerlach et al., 2003a,b; Weigelt, 2007) und erreichen damit ähnliche Genauigkeiten wie das klassische direkte Verfahren. Im Folgenden werden das klassische und die gebräuchlichsten alternativen Methoden kurz beschrieben. Weitere alternative Methoden basierend auf kinematischen Orbits, die im Zusammenhang mit der CHAMP-Mission noch keine Anwendung gefunden haben, können unter anderem in Schneider (2002) gefunden werden.

### 2.3.1 Das klassische Verfahren

Das klassische Verfahren wird im Rahmen der Gravitationsfeldanalyse mit CHAMP vom GFZ Potsdam angewendet. Zu den *EIGEN*-Modellen (engl.: *European Improved Gravity Model of the Earth by New Techniques*), die aus längeren Beobachtungsreihen entstanden sind, gehören EIGEN-1S (Reigber et al., 2002), EIGEN-2 (Reigber et al., 2003a) und EIGEN-CHAMP03S (Reigber et al., 2005c). Basierend auf Veröffentlichungen von Reigber (1989) und Cappellari et al. (1976) soll hier die Methodik skizziert werden.

Ausgangspunkt für das klassische, bahndynamische Verfahren zur Gravitationsfeldanalyse ist die folgende Vektorgleichung,

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} + \mathbf{X}_{\text{GPS}} - \mathbf{X}_{\text{LEO}} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

welche die Position  $\mathbf{X}_{\text{LEO}}$  des zu analysierenden LEO-Satelliten mit der Position  $\mathbf{X}_{\text{GPS}}$  des signalsendenden GPS-Satelliten über den Differenzvektor  $\mathbf{d}$  getreu Abbildung 2.1 verbindet. Sinnvollerweise sollten diese Vektoren bezüglich eines (Quasi-)Inertialsystems gegeben sein, um Scheinbeschleunigungen bei der Formulierung der Bewegung des LEO-Satelliten (sowie gegebenenfalls der GPS-Satelliten) zu vermeiden.

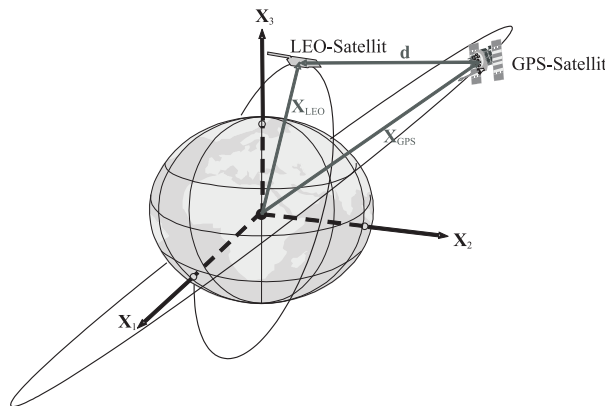


Abbildung 2.1: Darstellung der Messsituation.

Es kann durch die Messungen  $q$  zwischen GPS- und LEO-Satellit jedoch nicht der Differenzvektor zwischen den beiden Satelliten bestimmt werden, sondern nur die skalare Entfernung  $|\mathbf{d}|$ .

$$|\mathbf{d}| = q + \varepsilon = |\mathbf{X}_{\text{LEO}} - \mathbf{X}_{\text{GPS}}| \quad (2.8)$$

Allerdings ist dabei zu beachten, dass die Messungen  $q$ , die normalerweise aus Pseudostrecken  $\rho$  und Trägerphasen  $\psi$  bestehen, nicht die Entfernung direkt angeben, sondern noch Störeffekte und weitere Unbekannte, charakterisiert durch  $\varepsilon$ , enthalten (s. Abschnitt C.1). Diese Störeinflüsse entstehen hauptsächlich durch Änderung der Signalausbreitung durch Refraktion an der Ionosphäre sowie durch Uhrenfehler der GPS-Satelliten und des LEO-Satelliten. Einzelne dieser Effekte können durch Bildung von speziellen Linearkombinationen der Trägerfrequenzen oder durch Bildung von Differenzen der Beobachtungen (Einfach-/Doppel-/Tripel-Differenzen usw.) eliminiert werden. Die verbleibenden unbekanntenen Effekte müssen entweder in der Datenvorverarbeitung bestimmt werden, oder müssen als Unbekannte in



die Parameterschätzung aufgenommen werden und dort mitbestimmt oder eliminiert werden. Phasenmehrdeutigkeiten, die in den Beobachtungsgleichungen der Trägerphasen auftreten, können bei geeigneter Kombination von Beobachtungen oder Trägerfrequenzen herausfallen, oder müssen andernfalls in der Datenvorverarbeitung fixiert werden oder in die Ausgleichung als weitere Unbekannte eingeführt werden (eventuell entstehen dann Linearkombinationen der Phasenmehrdeutigkeiten als Unbekannte). Aus der allgemeinen Beobachtungsgleichung (2.9), in der zunächst die „Störparameter“  $\varepsilon$  mitberücksichtigt werden, kann generell die Abhängigkeit der Beobachtungen  $q$  von möglichen Einflussgrößen  $\mathbf{P}$  in Form eines funktionalen Zusammenhangs angegeben werden (2.10).

**Box 2.2: Beobachtungsgleichung des klassischen Verfahrens**

$$q = |\mathbf{X}_{\text{LEO}} - \mathbf{X}_{\text{GPS}}| - \varepsilon \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } q &= q(\mathbf{P}, t) = q(\mathbf{X}_{\text{LEO}}(t, \mathbf{Y}_{\text{LEO}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma}, \mathbf{p}_{\text{tidal}}, \mathbf{p}_{\text{non-grav}}, \mathbf{p}_{\text{rot}}), \mathbf{X}_{\text{GPS}}(t, \mathbf{Y}_{\text{GPS}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma}, \mathbf{p}_{\text{tidal}}, \mathbf{p}_{\text{non-grav}}, \mathbf{p}_{\text{rot}}), \varepsilon) \\ \text{b) } \text{ bzw. } q' &= q'(\mathbf{P}, t) = q'(\mathbf{X}_{\text{LEO}}(t, \mathbf{Y}_{\text{LEO}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma}), \mathbf{X}_{\text{GPS}}(t)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

mit:

- $q$ : Beobachtungen, t. B. Pseudostrecken  $\rho$ , Trägerphasen  $\psi$
- $q'$ : originäre oder abgeleitete Beobachtungen, z.B. Doppeldifferenzen von Pseudostrecken und Trägerphasen, oder Linearkombinationen der Trägerfrequenzen
- $t$ : Beobachtungszeitpunkt
- $\mathbf{P}$ : die Menge der Parameter, von denen die Beobachtungen abhängen
- $\mathbf{X}_{\text{LEO}}, \mathbf{X}_{\text{GPS}}$ : Position des LEO-/GPS-Satelliten zum Zeitpunkt  $t$
- $\mathbf{Y}_{\text{LEO}}^0, \mathbf{Y}_{\text{GPS}}^0$ : Anfangswerte von Position und Geschwindigkeit des LEO-/GPS-Satelliten
- $\mathbf{p}_{\Gamma}$ : Parameter des Erdgravitationsfeldes
- $\mathbf{p}_{\text{tidal}}$ : Parameter der Gezeitenmodelle
- $\mathbf{p}_{\text{non-grav}}$ : Parameter zur Formulierung von Oberflächenkräften
- $\mathbf{p}_{\text{rot}}$ : Erdrotationsparameter

Die Beobachtungen  $q$  sind also nach (2.9) eine Funktion der Positionen von LEO- und GPS-Satellit  $\mathbf{X}_{\text{LEO}}, \mathbf{X}_{\text{GPS}}$  sowie weiterer „Störeffekte“  $\varepsilon$ , wobei die Positionen von LEO- und GPS-Satellit von den Anfangswerten der LEO- und GPS-Bahnen  $\mathbf{Y}_{\text{LEO}}^0, \mathbf{Y}_{\text{GPS}}^0$ , den oben aufgeführten Parametern des Gravitationsfeldes  $\mathbf{p}_{\Gamma}$ , der Gezeiten  $\mathbf{p}_{\text{tidal}}$ , der Oberflächenkräfte  $\mathbf{p}_{\text{non-grav}}$ , der Erdrotation  $\mathbf{p}_{\text{rot}}$  sowie von der Zeit  $t$  abhängen. Der Zusammenhang zwischen den Satellitenpositionen und diesen Parametern ist durch die zuvor behandelte Bewegungsgleichung gegeben. Da in unserem Fall, also der Schätzung von Gravitationsfeldparametern  $\mathbf{p}_{\Gamma}$ , nur die Abhängigkeit der Beobachtungen von den zu schätzenden Parametern interessiert, sind in (2.10)b) nur noch die unbekannt Parameter berücksichtigt. Diese sind neben den Parametern des Gravitationsfeldes auch die Anfangswerte der Bahn des LEO-Satelliten  $\mathbf{Y}_{\text{LEO}}^0$ , können aber z.B. auch um Kalibrierungsparameter sowie weitere wichtige unbekannte Größen erweitert werden. Die Bahnen der GPS-Satelliten  $\mathbf{X}_{\text{GPS}}$  werden als bekannt vorausgesetzt und müssen deshalb in unserem Fall nicht weiter parametrisiert werden. Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Bahnen der GPS-Satelliten ebenso in Abhängigkeit der unbekannt Parameter  $\mathbf{Y}_{\text{GPS}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma}$  zu parametrisieren oder die GPS-Positionen als Unbekannte aufzunehmen. Dazu müssen aber als weitere Beobachtungen GPS-Messungen zwischen bekannten Bodenstationen und den GPS-Satelliten eingeführt werden. Beliebiger ist in diesem Fall die Bildung von Doppeldifferenzen zwischen LEO-Satellit und Bodenstation und zwischen zwei beobachtenden GPS-Satelliten (Švehla und Rothacher, 2002b). Eine mögliche Parametrisierung der GPS-Orbits sollte aber nur in Abhängigkeit sehr niederfrequenter Gravitationsfeldparameter geschehen, da die GPS-Satelliten aufgrund ihrer großen Bahnhöhe auf die höherfrequenten Anteile nicht mehr sensitiv sind. Da auch die oben schon erwähnten „abgeleiteten“ Beobachtungen, die durch Differenzenbildung sowie Linearkombinationen von Trägerphasen entstehen, verwendet werden können, wird in (2.10)b) ganz allgemein die Beobachtung mit  $q'$  gekennzeichnet. Abgeleitete Beobachtungen können je nach Art ihrer Kombination eine Funktion mehrerer GPS-Satelliten oder LEO-Positionen unterschiedlicher Zeitpunkte sein. Da bei solchen abgeleiteten Beobachtungen sowie in der Datenvorverarbeitung einzelne Störterme  $\varepsilon$  verschwinden bzw. bestimmt werden können, wird in (2.10)b) auf die Parametrisierung von  $\varepsilon$  als Unbekannte verzichtet. Einzelne Störterme  $\varepsilon$ , die nicht eliminiert worden oder in der Vorverarbeitung bestimmt worden sind, können aber jederzeit in die Beobachtungsgleichung (2.10)b) als Unbekannte aufgenommen werden.

Da die Beobachtungsgleichungen nichtlinear sind, müssen diese nach den zu schätzenden Parametern linearisiert werden und iterativ gelöst werden. Zunächst werden deshalb nach (2.11) Näherungswerte  $\mathbf{P}_R$  für die unbekannt Parameter  $\mathbf{P}$  eingeführt, was im allgemeinen gut zu bewerkstelligen ist, da die Gravitationsfeldparameter und die

Anfangswerte der LEO-Bahn näherungsweise schon bekannt sind. Bestimmt werden müssen also somit die Zuschläge  $\Delta \mathbf{P}$  zu den Näherungswerten. Unter Einführung von

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_R + \Delta \mathbf{P} \quad (2.11)$$

für die zu bestimmenden Parameter ergibt sich somit die linearisierte Beobachtungsgleichung

$$q'(t, \mathbf{P}) = q'_c(t, \mathbf{P}_R) + \sum_i \frac{\partial q'}{\partial P_i} \Delta P_i \quad (2.12)$$

bzw. nach Umstellen und Sortieren der zu schätzenden Parameter  $\Delta \mathbf{P}$  auf der rechten Seite die Formeln in Box 2.3:

**Box 2.3:** *linearisierte Beobachtungsgleichung des klassischen Verfahrens*

$$\Delta q' = q'(t, \mathbf{P}) - q'_c(t, \mathbf{P}_R) = \sum_i \frac{\partial q'}{\partial P_i} \Delta P_i \quad (2.13)$$

mit

„berechneten Beobachtungen“

$$q'_c(t, \mathbf{P}_R) = q'_c(\mathbf{X}_{\text{LEO}}(t, \mathbf{Y}_{\text{LEO,R}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma,R}), \mathbf{X}_{\text{GPS}}(t)) \quad (2.14)$$

„partielle Ableitungen“

$$\sum_i \frac{\partial q'}{\partial P_i} \Delta P_i = \left[ \frac{\partial q'}{\partial \mathbf{X}_{\text{LEO}}}, \frac{\partial q'}{\partial \mathbf{X}_{\text{GPS}}} \right]_{\mathbf{P}_R} \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial P_i} \right)_{\mathbf{P}_R} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{LEO}} \\ \mathbf{X}_{\text{GPS}} \end{bmatrix} \Delta P_i \quad (2.15)$$

bzw.

$$\sum_i \frac{\partial q'}{\partial P_i} \Delta P_i = \left[ \frac{\partial q'}{\partial \mathbf{X}_{\text{LEO}}} \right]_{\mathbf{Y}_{\text{LEO,R}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma,R}} \begin{bmatrix} \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{LEO}}}{\partial Y_{\text{LEO,R},j}^0} \right)_{\mathbf{Y}_{\text{LEO,R}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma,R}} \Delta Y_{\text{LEO},j}^0 \\ \sum_k \left( \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{LEO}}}{\partial p_{\Gamma,k}} \right)_{\mathbf{Y}_{\text{LEO,R}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma,R}} \Delta p_{\Gamma,k} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

In (2.12) sind  $q'(t, \mathbf{P})$  die (abgeleiteten) Beobachtungen,  $q'_c(t, \mathbf{P}_R)$  die aus den Näherungswerten berechneten Beobachtungen laut (2.14),  $\Delta q'$  die Differenz zwischen den wahren und den berechneten Beobachtungen und  $\partial q' / \partial P_i$  die partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichung (2.10) nach den zu bestimmenden Parametern nach (2.15) bzw. (2.16). Zur Bestimmung der „berechneten“ Beobachtungen  $q'_c(t, \mathbf{P}_R)$  nach (2.14) wird die Näherungsbahn  $\mathbf{X}_{\text{LEO}}(t, \mathbf{Y}_{\text{LEO,R}}^0, \mathbf{p}_{\Gamma,R})$  benötigt, die durch Integration der Bewegungsgleichung des LEO-Satelliten als Anfangswertaufgabe auf Basis der Näherungswerte  $\mathbf{P}_R$  berechnet werden kann. Die partiellen Ableitungen der Beobachtungen  $q'$  nach den gesuchten Parametern  $\mathbf{P}$  an der Stelle  $\mathbf{P}_R$  werden mit Hilfe der Kettenregel berechnet. Dazu müssen zunächst die partiellen Ableitungen der Beobachtung  $q'$  nach der Position des LEO-Satelliten  $\mathbf{X}_{\text{LEO}}$  und gegebenenfalls nach der des GPS-Satelliten  $\mathbf{X}_{\text{GPS}}$  aus der direkten Beziehung zwischen den Beobachtungen und den Satellitenpositionen bestimmt werden. Die Ableitung nach der GPS-Satellitenbahn entfällt, falls die Bahn des GPS-Satelliten nicht parametrisiert und als bekannt vorausgesetzt wird. Die Bestimmung der partiellen Ableitungen der Satellitenpositionen  $\mathbf{X}_{\text{LEO}}, \mathbf{X}_{\text{GPS}}$  nach den Parametern  $\mathbf{P}$ , insbesondere die Ableitung der LEO-Satellitenbahn  $\mathbf{X}_{\text{LEO}}$  nach den Gravitationsfeldparametern  $\mathbf{p}_{\Gamma}$  und den Anfangswerten  $\mathbf{Y}_{\text{LEO}}^0$  für den Fall der Beobachtungsgleichung nach (2.10) ist aufwändig. Der Zusammenhang zwischen Satellitenbahn und den zu schätzenden Parametern ist durch die Bewegungsgleichung und somit durch eine Differentialgleichung gegeben. Die Bestimmung dieser partiellen Ableitung geschieht über die Integration der Variationsgleichungen, die in Abschnitt 2.3.2.1 kurz skizziert werden.

Insgesamt muss dieses klassische Verfahren als aufwändig betrachtet werden, da es sich einerseits um ein nichtlineares Gleichungssystem handelt, das nur durch Iteration gelöst werden kann. Andererseits ist in jedem Iterationsschritt die numerische Integration der Bewegungsgleichung zur Bestimmung einer Näherungslösung für die Bahn sowie die numerische Integration der Variationsgleichungen für die Berechnung der partiellen Ableitungen notwendig. Somit ist der Rechenaufwand bei dieser Methode als hoch einzustufen. Als Nebenprodukt fällt bei dieser Methodik die Bahn des LEO-Satelliten an, die als Zwischenschritt aus verbesserten Näherungswerten  $\mathbf{P}_R$  bestimmt wird. Diese LEO-Satellitenbahn entspricht einem dynamischen Orbit, da für seine Erzeugung eine Kraftfunktion parametrisiert wurde.

### 2.3.2 Methoden basierend auf kinematischen Orbits

Um die nachfolgenden Methoden anwenden zu können, müssen bereits die Positionen des LEO-Satelliten vorliegen, die in einem ersten Schritt berechnet wurden. Dabei ist es wichtig, dass die Bahn des LEO-Satelliten nur aus der zur Verfü-

gung stehenden geometrischen Information in Form von GPS-Messungen (Pseudostrecken, Trägerphasen) bestimmt wurde. Man spricht dann von einer kinematischen Bahnbestimmung im Gegensatz zu einer dynamischen, welche zusätzlich noch die Bewegungsgleichung erfüllen muss und dazu eine Parametrisierung der Kraftfunktion benötigt. Die Verwendung eines dynamischen Orbits ist trotz des glatten Bahnverlaufes nicht zu empfehlen, da sonst das bestimmte Gravitationsfeld stark oder vollständig mit dem Input-Gravitationsfeld der Kraftfunktion korreliert ist.

Der Ausgangspunkt für alle nachfolgenden Verfahren ist die Bewegungsgleichung. Alle Methodiken können aus ihr abgeleitet werden, auch wenn dies auf den ersten Blick nicht so erscheint. Aufgrund der unterschiedlichen Behandlung der Beobachtungen ist zu erwarten, dass die Methodiken unterschiedlich auf die jeweiligen Eigenschaften (Rauschen, Datenlücken, ...) der Daten reagieren. Der Vorstellung der verschiedenen Verfahren folgt deshalb eine kurze Diskussion, in der auf eventuelle Vor- und Nachteile der jeweiligen Methoden eingegangen werden soll, speziell auch auf das Verhalten für verschiedene mögliche Rauschverhältnisse. Ein Vergleich der Verfahren erfolgt auf Basis von Simulationen in Kapitel 8 sowie einer Realdatenauswertung in Kapitel 9.

### 2.3.2.1 Integration der Variationsgleichungen

Den zunächst direktesten Weg für die Bestimmung von Gravitationsfeldparametern aus der kinematisch bestimmten Bahn  $\mathbf{X}(t)$  des LEO-Satelliten bietet die Lösung der Bewegungsgleichung auf Basis der Koordinaten. Dies erfordert eine zweifache Integration und führt auf eine nichtlineare Beziehung zwischen den beobachteten Koordinaten  $\mathbf{X}(t)$  und den gesuchten Gravitationsfeldparametern  $\mathbf{p}_r(t)$ , weswegen nur eine iterative Lösung des Gleichungssystems möglich ist. Die dazu benötigten partiellen Ableitungen des Satellitenortes  $\mathbf{X}(t)$  nach den zu bestimmenden Gravitationsfeldparametern  $\mathbf{p}_r(t)$ , die auch bei der klassischen Methode auftreten, stellen hierbei das Hauptproblem dar, da diese nicht explizit angegeben werden können, sondern numerisch bestimmt werden müssen. Ein häufig angewendetes Verfahren zur Bestimmung dieser partiellen Ableitungen ist die Integration der Variationsgleichungen. Die Bezeichnung „Variationsgleichungen“ wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet, hat sich aber ab den 60er Jahren in amerikanischen Veröffentlichungen (z.B. Escobal, 1968; Martin et al., 1976) wegen der Ähnlichkeit des Problems zu den in der klassischen Variationsrechnung studierten *Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen* durchgesetzt. Mit dem Einsatz von Satelliten zur Gravitationsfeldbestimmung ab den 60er und 70er Jahren wurden erste Gravitationsfeldmodelle aus der Bahnverfolgung von Satelliten unter Anwendung der Integration der Variationsgleichungen berechnet (z.B. Balmino et al., 1976). Inzwischen besteht eine Reihe von Literatur über die Bahn- und Parameterbestimmung mittels der Variationsgleichungen, z.B. Szebehely (1961), Escobal (1965), Riley et al. (1967), Balmino (1975), Cappelari et al. (1976), Gendt und Sorokin (1978), Beutler (1982), die folgenden Darstellungen beziehen sich auf Ballani (1988).

Das Integrationsverfahren der Variationsgleichungen ist als das exakteste Verfahren anzusehen, da auf bewusste Approximationen verzichtet wird und die kinematischen Orbits direkt als Beobachtungen verwendet werden anstatt daraus „abgeleitete“ Beobachtungen, wie dies bei manchen der nachfolgend beschriebenen Methoden der Fall ist. Allerdings ist es aufgrund der Integration auch das aufwendigste und wegen des nichtlinearen Zusammenhanges das Komplizierteste. Ausgehend von der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}(t)) \quad (2.17)$$

mit der (spezifischen) Kraftfunktion  $\mathbf{f} = \mathbf{F} / m$   
und

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} ; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} ; \quad \text{Startwerte: } \begin{matrix} \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0) \\ \dot{\mathbf{X}}_0 = \dot{\mathbf{X}}(t_0) \end{matrix} \quad (2.18)$$

soll das Beobachtungsmodell abgeleitet werden. Die erzeugende Kraftfunktion  $\mathbf{f}$ , hier als Kraft  $\mathbf{F}$  pro Masse  $m$  angegeben, ist für den Fall des Gravitationsfeldes eine Funktion des Satellitenortes  $\mathbf{X}$  sowie der Gravitationsfeldparameter  $\mathbf{p}_r \in \mathbf{p}$ , im Falle von Oberflächenkräften zusätzlich auch eine Funktion der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}$  des Satelliten. Für die eindeutige Lösung einer Differentialgleichung benötigt man grundsätzlich Anfangswerte oder Randwerte. In unserem Fall eignet sich die Betrachtung der Differentialgleichung als Anfangswertaufgabe mit der Anfangsposition  $\mathbf{X}_0$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}_0$ . Alternativ wäre auch eine Formulierung als Randwertaufgabe mit der Anfangsposition  $\mathbf{X}_0$  und der Endposition  $\mathbf{X}_N$  denkbar. Wie zu erkennen ist, hängt der Verlauf der Satellitenbahn nicht nur von den zu bestimmenden (Gravitationsfeld)-parametern  $\mathbf{p}$  (bzw.  $\mathbf{p}_r$ ) ab, sondern auch von der Wahl der Anfangswerte  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0$ . Deshalb ist es wichtig, dass im Verlauf der Ausgleichung auch diese Anfangswerte mitverbessert werden, um mögliche Fehler in den Gravitationsfeldparametern  $\mathbf{p}_r$  durch eine schlechte Wahl der Anfangswerte  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0$  zu vermeiden. Deswegen wird der Unbekanntenvektor  $\mathbf{u}$  um diese Anfangswerte erweitert:

**Box 2.4:** linearisierte Beobachtungsgleichung bei „Integration der Variationsgleichungen“

„Unbekanntenvektor“

$$\mathbf{u} = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})^T \quad ; \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \\ \dot{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

„Entwicklung der Unbekannten“

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \Delta \mathbf{u} \quad (2.20)$$

„linearisierte Beobachtungsgleichung“

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}, t) \approx \mathbf{X}(\mathbf{u}_R, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_R} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.21)$$

„Gleichungssystem — beobachtet minus berechnet“

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{u}_R, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_R} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.22)$$

„partielle Ableitungen“

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{u}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial X_0} & \frac{\partial X}{\partial Y_0} & \frac{\partial X}{\partial Z_0} & \frac{\partial X}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial X}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial X}{\partial \dot{Z}_0} & \frac{\partial X}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial X}{\partial p_n} \\ \frac{\partial Y}{\partial X_0} & \frac{\partial Y}{\partial Y_0} & \frac{\partial Y}{\partial Z_0} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Z}{\partial X_0} & \frac{\partial Z}{\partial Y_0} & \frac{\partial Z}{\partial Z_0} & \frac{\partial Z}{\partial \dot{X}_0} & \frac{\partial Z}{\partial \dot{Y}_0} & \frac{\partial Z}{\partial \dot{Z}_0} & \frac{\partial Z}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Z}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Da es sich, wie zuvor erwähnt, um ein nichtlineares Gleichungssystem handelt, müssen die Beobachtungsgleichungen  $\mathbf{X}(\mathbf{u}, t)$  an einem Entwicklungspunkt  $\mathbf{u}_R$  linearisiert werden (2.21) und dann iterativ gelöst werden. Die Wahl eines solchen Entwicklungspunktes  $\mathbf{u}_R$  für die Unbekannten  $\mathbf{u}$  stellt kein großes Problem dar (2.20), da in der Regel gute Näherungswerte für die Gravitationsparameter und die Anfangswerte existieren, die als Entwicklungspunkt dienen können. Bestimmt werden müssen also folglich nur noch die Zuschläge  $\Delta \mathbf{u}$  für die Unbekannten. Um das Gleichungssystem (2.22) für die Zuschläge der Unbekannten aufstellen zu können, muss zuvor die Satellitenbahn  $\mathbf{X}(\mathbf{u}_R, t)$  für den Entwicklungspunkt  $\mathbf{u}_R$ , also für die Näherungswerte der Unbekannten bestimmt werden. Dies kann durch Integration der Bewegungsgleichung als Anfangswertaufgabe geschehen, wobei die Näherungswerte für Startposition und -geschwindigkeit als Anfangswerte dienen und die Näherungswerte der Gravitationsfeldparameter zur Formulierung der Kraftfunktion  $\mathbf{f}$ . Schließlich müssen noch die partiellen Ableitungen der Satellitenbahn  $\mathbf{X}$  nach den zu bestimmenden Parametern  $\mathbf{u}$  gebildet werden (2.23), um das Gleichungssystem (2.22) aufzustellen. Wie dies funktioniert, soll kurz skizziert werden:

Die numerisch einfachste und zunächst nahe liegende Möglichkeit wäre die Approximation der gesuchten Ableitungen durch Differenzenquotienten (Ballani, 1988; Götzelmann, 2003b). Da der Rechenaufwand hierfür aber ein Vielfaches der normalen Bahnberechnung beträgt, bevorzugt man eine andere Möglichkeit. Ein solcher Ausgangspunkt sind die Variationsgleichungen, die Differentialgleichungen sind, welche die gesuchten Ableitungen als unbekannte, zu bestimmende Funktionen enthalten. Diese Differentialgleichungen erhält man aus der Bewegungsgleichung (2.17) durch Differentiation nach dem Unbekanntenvektor  $\mathbf{u}$ . Vertauschen der Zeitdifferentiation sowie Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) &= \left( \frac{\partial \ddot{\mathbf{X}}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{p})} \right) \left( \frac{\partial (\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{p})}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Teilt man diese kompakte Darstellung auf in die einzelnen Ableitungen der Kraftfunktion  $\mathbf{f}$  nach den in ihr enthaltenen Größen  $\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{p}$  so erhält man die etwas übersichtlichere Darstellung

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) \quad (2.25)$$

mit

$$\left( \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) \quad (2.26)$$

Hierbei muss man beachten, dass die Ableitung der Bahngeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}$  nach den Unbekannten  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p}$  durch Vertauschen auch als die zeitliche Differentiation der Ableitung der Satellitenposition  $\mathbf{X}$  nach den zu bestimmenden Parametern  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p}$  gesehen werden kann (2.26). Führt man nun die folgenden Abkürzungen (2.27) für die einzelnen partiellen Ableitungen ein, wobei  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{W}$  die gesuchten partiellen Ableitungen sind, so erhält man das folgende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (2.28). Terme, in denen die Ableitungen der Kraftfunktion nach der Geschwindigkeit auftreten, sind eingeklammert. Diese müssen in unserer Anwendung nicht berücksichtigt werden, da die Gravitationskraft nicht von der Bahngeschwindigkeit des Satelliten abhängt. Bei der Bestimmung von Parametern der Oberflächenkräfte sind solche Ableitungen allerdings zu beachten.

„Abkürzungen“

$$\mathbf{FX} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right); \mathbf{FV} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right); \mathbf{FC} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right); \mathbf{U} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)} \right); \mathbf{W} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (2.27)$$

„Differentialgleichungssystem 2. Ordnung“

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}} &= \mathbf{FX} \cdot \mathbf{U} + (\mathbf{FV} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \\ \ddot{\mathbf{W}} &= \mathbf{FX} \cdot \mathbf{W} + (\mathbf{FV} \cdot \dot{\mathbf{W}}) + \mathbf{FC} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Differentialgleichungssystemen für  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{W}$  liegt darin (2.29), dass der Parametervektor  $\mathbf{p}$  keinerlei Abhängigkeit von der Startposition  $\mathbf{X}$  und Startgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}$  besitzt und ein einzelner Parameter  $p$  nur direkt von sich selbst abhängt:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})} \right) = (\mathbf{0}_{n,6}, \mathbf{I}_{n,n}) \quad (2.29)$$

Das (lineare) Differentialgleichungssystem 2. Ordnung kann in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umgewandelt werden (2.30), wobei dann ein System mit doppelter Anzahl von Differentialgleichungen entsteht. Es tritt somit neben den Differentialgleichungen für jede der gesuchten partiellen Ableitungen  $\mathbf{U}, \mathbf{W}$  noch eine Differentialgleichung für deren zeitliche Ableitung  $\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{W}}$  auf. Es entsteht dann in Kurzform ausgedrückt ein Differentialgleichungssystem der Art  $\dot{\zeta} = f(\zeta)$ , das mit Hilfe numerischer Integrationsverfahren wie z.B. dem Runge-Kutta-Verfahren (z.B. Fehlberg, 1969, 1970; Albrecht, 1977; Götzelmann, 2003a,b; Engeln-Müllges, 1987) oder mit Mehrschrittverfahren wie dem Adams-Moulton-Adams-Bashforth-Prädiktor-Korrektor (z.B. Götzelmann, 2003a,b; Gendt, 1989; Schäfer, 2001; Engeln-Müllges, 1987) gelöst werden kann. Als Alternative kann auch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit eigens zur Lösung solcher Systeme entworfenen numerischen Integrationsverfahren gelöst werden (z.B. Götzelmann, 2003a,b; Gendt, 1989; Scheinert, 1996; Engeln-Müllges, 1987). Die eindeutige Lösung des Systems 2. Ordnung (2.28) erfordert für jede unbekannte Funktion zwei Anfangsbedingungen für  $t = t_0$ , nämlich einmal eine Anfangsbedingung für die unbekannte Funktion selbst und einmal für deren zeitliche Ableitungen (2.31). Diese Anfangsbedingungen sind dieselben wie diejenigen für das System 1. Ordnung, bei dem aber nur jeweils eine Anfangsbedingung pro Gleichung bei einer doppelten Anzahl von Gleichungen benötigt wird. Die Anfangsbedingungen ergeben sich im Wesentlichen aus der Identität, wobei jedoch zu beachten ist, dass die Anfangswerte der Bahn  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0$  keinerlei Abhängigkeit von den Parametern  $\mathbf{p}$  besitzen.

**Box 2.5:** Differentialgleichungssystem für die „Integration der Variationsgleichungen“

„Differentialgleichungssystem 1. Ordnung“    „Kurzform“

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{FX} \cdot \mathbf{U} + (\mathbf{FV} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{W}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{W}} \\ \mathbf{FX} \cdot \mathbf{W} + (\mathbf{FV} \cdot \dot{\mathbf{W}}) + \mathbf{FC} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dot{\zeta} = f(\zeta) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{„Anfangsbedingungen“} \\
 & \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)} \right)_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3,3} & \mathbf{0}_{3,3} \end{pmatrix} \quad ; \text{ für } \mathbf{U} \\
 & \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)} \right)_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)} \right)_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3,3} & \mathbf{I}_{3,3} \end{pmatrix} \quad ; \text{ für } \dot{\mathbf{U}} \\
 & \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{t=t_0} = \mathbf{0}_{3,n} \quad ; \text{ für } \mathbf{W} \\
 & \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{t=t_0} = \mathbf{0}_{3,n} \quad ; \text{ für } \dot{\mathbf{W}}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Die Integration der Variationsgleichungen zur Berechnung der partiellen Ableitungen kann gemeinsam in einem Schritt mit der Integration der Bewegungsgleichung durchgeführt werden. Neben der Lösung der Variationsgleichung ist nämlich auch die Lösung der Bewegungsgleichung (2.17) zur Bestimmung der Näherungsbahn  $\mathbf{X}(\mathbf{u}_R, t)$  notwendig, damit das zu lösende Gleichungssystem (2.22) aufgestellt werden kann. Dazu muss eventuell das System 2. Ordnung für die Bewegungsgleichungen in ein System 1. Ordnung mit doppelter Anzahl von Gleichungen ähnlich wie bei den Variationsgleichungen transformiert werden.

Untersuchungen haben ergeben, dass die besten Ergebnisse entstehen, wenn der Beobachtungszeitraum in mehrere Bahnbögen, z.B. mit Tageslänge, aufgeteilt wird (Ditmar et al., 2004; Ditmar und Klees, 2002). Andernfalls können sich z.B. Fehler bei der Modellierung von Oberflächenkräften aufgrund der Integration aufaddieren. Die Parameterschätzung durch reine Integration der Variationsgleichungen wird derzeit von keiner Gruppe für die Gravitationsfeldbestimmung aus Realdaten verwendet, wurde aber für Test- und Vergleichsrechnungen mit simulierten Daten von einigen Forschungsgruppen herangezogen (Ditmar und Klees, 2002; Ditmar et al., 2004; Ditmar und van Eck van der Sluijs, 2004; Visser et al., 2001). Der Vollständigkeit halber ist diese Methode hier aber kurz beschrieben, da sie einerseits für einen der Zwischenschritte beim klassischen Verfahren benötigt wird und andererseits bei der dynamischen Bahnbestimmung, wobei hier bei einem vorab als bekannt angenommenen Gravitationsfeld die Differentialgleichungen für  $\mathbf{W}$ ,  $\dot{\mathbf{W}}$  entfallen.

Die Parameterbestimmung durch Lösung der Variationsgleichungen ist ein sehr aufwändiges Verfahren. Durch Einführung geeigneter Verfahren bzw. anderer Beobachtungen, die aus kinematischen Orbits abgeleitet werden können, wird bei den folgenden Verfahren versucht, die Berechnung zu erleichtern ohne die Genauigkeit zu verschlechtern.

### 2.3.2.2 Randwertproblem für kurze Bahnbögen

Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Bewegungsgleichung auf der Ebene kinematisch bestimmter Koordinaten besteht darin, sie im Gegensatz zur vorherigen Methode als Randwertproblem zu betrachten. Das bedeutet, dass jetzt Randwerte in Form von Anfangs- und Endposition  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_n$  des Bahnbogens bestimmt werden oder vorhanden sein müssen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Die Idee des Integralgleichungsansatzes wurde von Schneider (1968) zur Bahnberechnung vorgeschlagen und von Reigber (1969) für die Gravitationsfeldbestimmung modifiziert. Zur Herleitung des Randwertproblems wird die Bewegungsgleichung (2.32) zweimal nach der Zeit  $t$  integriert. Das entstandene Zweifachintegral kann mit Hilfe einer Heaviside-Funktion, die als Green'sche Funktion benutzt wird, in ein Einfachintegral transformiert werden (s. auch Roach (1982) und Schäfer (2001)). Nach Ersetzen der beiden Integrationskonstanten mit Hilfe der beiden Randwerte erhält man schließlich die Formulierung der Bewegungsgleichung als Randwertproblem (2.34). Diese beschreibt die Position des Satelliten  $\mathbf{X}(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  über die Satellitenposition  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_n$  am Anfangs- bzw. Endzeitpunkt  $t_0, t_n$  des Bahnbogens, die Masse  $m$  des Satelliten, die Kraftfunktion  $\mathbf{F}$ , die von einem Parameterset  $\mathbf{p}$  abhängt, sowie über einen Integralkern  $K(t, t')$ . Das Integral läuft immer über den gesamten Zeitraum des Bahnbogens, wobei der Integralkern für die beiden Zeitbereiche vor und nach dem aktuellen Beobachtungszeitpunkt  $t$  unterschiedlich ist. Durch eine Normierung des Beobachtungszeitraumes eines Bahnbogens auf den Bereich  $[0, 1]$  (2.36) erhält man die einfachere Formulierung des Randwertproblems nach (2.37) mit dem modifizierten Integralkern (2.38). Die spezifische Kraftfunktion  $\mathbf{f}$ , welche die Bahn des Satelliten erzeugt, setzt sich auch hier zusammen aus dem Gravitationsvektor  $\Gamma_{\text{grav}}$ , dem Gezeitenvektor  $\mathbf{f}_{\text{tidal}}$  und den spezifischen, durch Oberflächenkräfte erzeugten Störkräften  $\mathbf{f}_{\text{non-grav}}$ . Dabei sind die Koeffizienten  $\mathbf{p}_\Gamma$  des Erdgravitationsfeldes die zu schätzenden Parameter, während die Parameter  $\mathbf{p}_{\text{tidal}}$  der Gezeiten aus Modellen bekannt sind und die nichtkonservativen Störkräfte durch Akzelerometer gemessen werden. Wie auch bei der vorherigen Methode müssen die 6 Konstanten zur eindeutigen Lösung der Bewegungsgleichung, in unserem Falle die Randwerte  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_n$ , als zusätzliche Unbekannte behandelt werden und bei der Ausgleichung mitgeschätzt oder durch geeignete Verfahren eliminiert werden, falls diese nicht von Interesse sind. Es besteht allerdings nach Mayer-Gürr et al. (2005b, auch persönlicher Kontakt) auch die alternative Möglichkeit, den Term aus den Randwerten  $(\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0)\tau + \mathbf{X}_0$  von den kinematisch bestimmten Positionen  $\mathbf{X}(t)$  abzuziehen und dann die Differenzen als Beobachtungen einzuführen. Dabei ist zu beachten, dass jetzt eine Linearkombination der ursprünglichen Positionen verwendet wird und eine Fehlerfortpflanzung durchgeführt werden muss.

**Box 2.6: Randwertproblem für kurze Bahnbögen**

„Bewegungsgleichung als DGL“

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}(t)) \quad (2.32)$$

„Randwerte“

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad ; \quad \mathbf{X}(t_n) = \mathbf{X}_n \quad (2.33)$$

„Bewegungsgleichung als Randwertproblem“

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0) \frac{t - t_0}{t_n - t_0} + \mathbf{X}_0 - \frac{1}{m(t_n - t_0)} \int_{t_0}^{t_n} K(t, t') \mathbf{F}(t', \mathbf{X}(t'), \dot{\mathbf{X}}(t'), \mathbf{p}(t')) dt' \quad (2.34)$$

„mit Integralkern“

$$K(t, t') = \begin{cases} (t' - t_0)(t_n - t) & \text{for } t' \leq t \\ (t - t_0)(t_n - t') & \text{for } t' \geq t \end{cases} \quad (2.35)$$

„oder“

 mit Zeittransformation von  $[t_0, t_n]$  nach  $[0, 1]$ 

$$T = t_n - t_0$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{T} \quad \text{und} \quad \tau' = \frac{t' - t_0}{T} \quad (2.36)$$

„Randwertproblem nach Zeittransformation“ (Fredholm-Integralgleichung)

$$\mathbf{X}(\tau) = (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0)\tau + \mathbf{X}_0 - \frac{T^2}{m} \int_{\tau=0}^1 K(\tau, \tau') \mathbf{F}(\tau', \mathbf{X}(\tau'), \dot{\mathbf{X}}(\tau'), \mathbf{p}(\tau')) d\tau' \quad (2.37)$$

„mit zeit-transformiertem Integralkern“

$$K(\tau, \tau') = \begin{cases} \tau'(1 - \tau) & \text{for } \tau' \leq \tau \\ \tau(1 - \tau') & \text{for } \tau' \geq \tau \end{cases} \quad (2.38)$$

„mit der spezifischen Kraftfunktion“

$$\mathbf{f}(\tau', \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{p}) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\tau', \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{p}) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f}(\tau', \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{p}) = \Gamma_{\text{grav}}(\tau', \mathbf{X}, \mathbf{p}_{\Gamma}) + \mathbf{f}_{\text{tidal}}(\tau', \mathbf{X}, \mathbf{p}_{\text{tidal}}) + \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(\tau')$$

Normalerweise ist die Satellitenposition  $\mathbf{X}(\tau)$ , welche zur Bestimmung der Kraftfunktion  $\mathbf{F}$  benötigt wird, selbst wiederum von der Kraftfunktion  $\mathbf{F}$  abhängig. Vernachlässigt man dies und verwendet stattdessen zur Berechnung der Kraftfunktion  $\mathbf{F}$  die kinematisch bestimmten Koordinaten des Satelliten, so kann ein lineares Gleichungssystem zur Schätzung der Gravitationsfeldparameter  $\mathbf{p}_{\Gamma}$  erhalten werden. Die Kraftfunktion kann an jeder kinematisch bestimmten Position diskret ausgewertet werden und durch ein Interpolationspolynom in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  approximiert werden, welches problemlos integriert werden kann. Eine geeignete Methode dafür besteht darin, das Integral so zu zerlegen, dass jeweils nur zwischen zwei Positionen integriert wird. Dazu wird ein Interpolationspolynom ungerader Ordnung  $k$  (z.B.  $k = 7, 9$ ) durch  $k + 1$  diskrete Punkte der Kraftfunktion gelegt und nur zwischen den mittleren beiden Punkten integriert. Durch Schieben des Interpolationspolynoms durch den gesamten Bahnbogen wird das gesamte Integral gelöst. Am Anfang und Ende des Bahnbogens muss jeweils der Rand des Interpolationspolynoms verwendet werden.

Die zu schätzenden Gravitationsfeldparameter bleiben nach der zuvor beschriebenen Integration linear im Gleichungssystem enthalten, es ist also keine Iteration zur Lösung notwendig. Prinzipiell wäre die beschriebene Methode auf einen gesamten Bahnbogen anwendbar. Es ist jedoch sinnvoll, den Beobachtungszeitraum in mehrere „kurze“ Bahnbögen zu unterteilen, um zu vermeiden, dass sich Fehler in der Modellierung der Kraftfunktion sowie bei der Polynominterpolation durch die Integration zu stark aufaddieren. In der Praxis erwies sich die Unterteilung in Bahnbögen mit einer Länge von ca. 30 Minuten als geeignet (Ilk et al., 2005; Mayer-Gürr, 2005b). Die vorgestellte Methode wird hauptsächlich am *Institut für Theoretische Geodäsie (ITG)* der Universität Bonn verwendet und verfeinert. Erste Ergebnisse aus 1- und 2-jährigen kinematisch bestimmten CHAMP-Bahnen (Švehla und Rothacher, 2003, 2004) zeigen bereits Erfolg versprechende Ergebnisse (Mayer-Gürr et al., 2005a,b; Ilk et al., 2005) mit ähnlichen Genauigkeiten wie bei der klassischen Methode.

Anmerkung: Auch die Lösung der Bewegungsgleichung als Anfangswertaufgabe, die im vorherigen Abschnitt mit Hilfe der Variationsgleichungen erzielt wird, kann durch Approximation der Kraftfunktion durch ein Interpolationspolynom in ein lineares Gleichungssystem überführt werden. Dazu wird zuvor, genauso wie beim Randwertproblem, die

Bewegungsgleichung zweimal integriert und das Zweifachintegral in ein Einfachintegral umgewandelt (2.40). Die Integrationskonstanten (2.41) ergeben sich hierbei direkt aus den Anfangswerten  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0$ . Die Lösung des Integrals erfolgt nach der gleichen Methode wie beim Randwertproblem. Neben den Gravitationsfeldparametern sind jetzt anstatt den Randwerten die Anfangswerte  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0$  als zusätzliche Unbekannte einzuführen. Die Lösung des Anfangswertproblems auf diese Art und Weise stellt eine linearisierte Version der „korrekten“ Lösung mit Hilfe der Variationsgleichung dar, die sich aber bei einem kurzen Bahnbogen kaum voneinander unterscheiden sollten.

„Bewegungsgleichung als Anfangswertaufgabe“ (Volterra-Integralgleichung)

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{m} \int_{t'=t_0}^t (t-t') \mathbf{F}(t', \mathbf{X}(t'), \dot{\mathbf{X}}(t'), \mathbf{p}(t')) dt' + \mathbf{C}(t-t_0) + \mathbf{D} \quad (2.40)$$

mit

„Integrationskonstanten als Anfangswerte“

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{X}}_0 \quad ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{X}_0 \quad (2.41)$$

### 2.3.2.3 Die Energiebilanzmethode

Die Idee, das Energieintegral zur Gravitationsfeldanalyse aus Satellitenbahndaten anzuwenden, reicht weiter zurück als die zuvor und auch die nachfolgend gezeigte Methode. Bereits 1836 hatte der Mathematiker C.G.J. Jacobi (1836) ein Bewegungintegral für das eingeschränkte Dreikörperproblem gefunden, dessen geodätische Anwendung wahrscheinlich das erste Mal von O'Keefe (1957) vorgeschlagen wurde. Die theoretischen Grundlagen für die Anwendung des Energieintegrals wurden von Bjerhammer (1967) und Schneider (1967) verfeinert, so dass auch zeitlich veränderliche Effekte durch Gezeiten und Reibungskräfte berücksichtigt werden können. Erste Simulationsrechnungen von Reigber (1969) mit dieser Methode führten jedoch zur Erkenntnis, dass mit den damals erreichbaren Messgenauigkeiten für Bahn und Geschwindigkeit die Energiebilanzmethode wohl zu keinen zufrieden stellenden Ergebnissen würde führen können. Angesichts der sich abzeichnenden Genauigkeitssteigerung in der Bahnvermessung mit GPS wurde die Methodik von Ilk (1983a, 1990) weiterentwickelt und von Jekeli (1999) im Hinblick auf die in naher Zukunft startenden Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE erneut aufgegriffen. Inzwischen ist die Energiebilanzmethode das zur CHAMP-Datenauswertung am häufigsten verwendete Verfahren. Aufgrund der hohen Genauigkeit der kinematisch bestimmten Bahnen konnten sehr gute Ergebnisse erzielt werden, die mit denjenigen des klassischen und anderer Ansätze vergleichbar sind (Han et al., 2002; Gerlach et al., 2003b; Howe et al., 2003; Sneeuw et al., 2003; Földváry et al., 2005; Weigelt, 2007). Ilk und Löcher (2003) und Löcher und Ilk (2005) verwenden das Energieintegral zur Validierung der Bahnbestimmung und der Gravitationsfeldmodelle. Eine Verallgemeinerung des Energiebilanzansatzes auf die allgemeinen Bewegungsgleichungen findet sich in Löcher und Ilk (2006).

Zunächst erscheint der Zugang zur Gravitationsfeldbestimmung über das Energieintegral völlig anders als bei den anderen Methoden, bei denen die Bewegungsgleichung gelöst werden muss. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die Gleichung für die Energiebilanzmethode (2.42) aus der Bewegungsgleichung (2.17) hergeleitet werden kann (Schneider, 1967). Die wichtigsten Schritte dazu sind die Multiplikation der Bewegungsgleichung mit  $d\mathbf{X}/dt$  und eine anschließende Integration über die Zeit. Betrachtet man die Energiebilanz nur für eine Satellitenbewegung im statischen Gravitationsfeld der Erde, so muss die Gesamtenergie  $E_0$  des mechanischen Systems, die sich aus der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  des Satelliten sowie seiner potentiellen (Lage-)Energie  $U$  zusammensetzt, eine Konstante sein. Diese Gesamtenergie ist die so genannte Hamilton-Konstante  $E_0$ , die zunächst unbekannt ist und die in der Datenvorverarbeitung oder in der Ausgleichung mitbestimmt werden kann. Die potentielle Energie  $U$ , normalerweise Gravitationspotential genannt, ist durch den Zusammenhang  $\Gamma_{\text{grav}} = \text{grad}U$  mit dem Gravitationsvektor  $\Gamma_{\text{grav}}$  der Erde verknüpft. Damit die Gesamtenergie des mechanischen Systems jedoch auch für eine reale Satellitenbewegung eine Konstante bleibt, müssen energetische Einflüsse weiterer Effekte reduziert werden. Dies sind zu einem „Energieschwankungen“ hervorgerufen durch Gezeiten (2.47) sowie durch die Rotation des Gravitationsfeldes der Erde (Term  $R(t)$ , (2.44)). Zum anderen sind es Energieverluste durch Reibungskräfte (2.46) verursacht durch die nicht-konservativen Oberflächenkräfte wie Atmosphärenreibung. Diese spezifischen nicht-konservativen Störkräfte  $\mathbf{f}_{\text{non-grav}}$  werden bei den neuartigen Satellitenmissionen durch Akzelerometer erfasst, weshalb eine Korrektur durch die numerische Lösung des entsprechenden Integrals möglich ist. Alternativ besteht die Möglichkeit, diese spezifischen Störkräfte zu modellieren. Aus (2.46) ist aufgrund der Multiplikation von spezifischen nichtkonservativen Störkräften  $\mathbf{f}_{\text{non-grav}}$  mit der Satellitengeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}$  ersichtlich, dass nur die Anteile der Oberflächenkräfte gegen die Flugrichtung einen Energieverlust bewirken. Diese werden hauptsächlich durch die Atmosphärenreibung verursacht und durch die „along-track“-Komponente des Akzelerometers erfasst.

Das größte Problem bei der Energiebilanzmethode stellt die Berechnung der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$ , also der „abgeleiteten“ Beobachtungen aus (2.43) dar. Hierzu wird die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}$  des Satelliten benötigt, die bei einem kinematischen Orbit normalerweise nicht anfällt. Deshalb muss sie mit Hilfe numerischer Differentiationsverfahren aus der Bahn  $\mathbf{X}(t)$  berechnet werden. Numerische Differentiation hat die Eigenschaft, Rauschen zu verstärken, vor allem auf



den höheren Frequenzen. Die Quadratur der numerisch differenzierten Größe  $\dot{\mathbf{X}}$  erhöht diesen negativen Effekt. Es hat sich allerdings herausgestellt, dass die kinematischen Orbits ein stark korreliertes Rauschen aufweisen (Švehla und Földvary, 2006; Reubelt et al., 2003a,b, 2006), weswegen die numerische Differentiation nur eine schwache oder gar keine Rauschverstärkung mit sich bringt (Reubelt et al., 2003a,b, 2006). Somit führt die Anwendung des Energieintegrals auf gute Ergebnisse, wobei trotzdem die Genauigkeit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{X}}$  die limitierende Größe bleibt (Foldvary et al., 2005). Eine eingehende Behandlung der Genauigkeit und Korrelation von kinematischen Bahnen sowie des rauschreduzierenden Einflusses der Korrelation bei numerischer Differentiation sind in Kapitel 6 und 9 zu finden.

**Box 2.7: Energiebilanzmethode**

„Energiebilanz“

$$E_{\text{kin}}(t) - U(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_\Gamma) - R(t) - \int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) dt - \int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) dt =$$

$$= E_0 = \text{const.} \quad (2.42)$$

mit  
der „kinetischen Energie“

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 \quad (2.43)$$

dem „Potential aufgrund der Rotation der Erde“

$$R(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial U(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_\Gamma)}{\partial t} dt \approx -\omega (X(t) \dot{Y}(t) - Y(t) \dot{X}(t)) \quad (2.44)$$

dem „Potential“

$$U(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_\Gamma) \quad (2.45)$$

dem „Energieverlust durch nicht-konservative Oberflächenkräfte“

$$\int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) dt = \int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t) d\mathbf{X} \quad (2.46)$$

und dem „Energieverlust durch Gezeiten“

$$\int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) dt = \int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}) d\mathbf{X} \quad (2.47)$$

Es hat sich gezeigt, dass die Energiebilanzmethode ein geeignetes Werkzeug zur Kalibrierung der „along-track“-Komponente des Akzelerometers ist (Gerlach et al., 2003a). Durch die Integration wirkt sich ein Offset (oder *Bias*) in dieser Komponente als Drift in der Energie aus. Da aber die Gesamtenergie  $E_0$  zu jedem Zeitpunkt konstant sein muss, kann aus einer längeren Beobachtungszeitreihe eine solche Energiedrift relativ genau festgestellt werden und daraus entsprechende Kalibrierungsparameter ermittelt werden. Die Kalibrierung kann bereits in der Datenvorverarbeitung durch Energievergleich an Bahnkreuzungspunkten oder Verwendung eines a-priori Gravitationsfeldes geschehen.

Anmerkung: Natürlich wirkt sich auch bei der Anfangs- und Randwertmethode ein Offset des Akzelerometers als ein Ansteigen des Wertes nach der Integration aus. Allerdings sind die Anfangs- und Randwertbedingung keine Bilanzgleichungen mit einer Konstanten, bei denen ein solches „Wegdriften“ schon bei der Datenvorverarbeitung detektiert werden kann. Hier müssen Kalibrierungsparameter in der Ausgleichung mitgeschätzt werden.

### 2.3.2.4 Der Beschleunigungsansatz

Der einfachste, natürlichste und anschaulichste Zugang zur Lösung der Bewegungsgleichung (2.48) ist, zunächst die Beschleunigungen des Satelliten zu bestimmen und dann die Bewegungsgleichung direkt auf der Ebene von Beschleunigungen zu lösen. Es entfällt somit jegliche Integration der Bewegungsgleichung und ein einfacher, linearer Zusammenhang zwischen den „beobachteten“ Beschleunigungen und den gesuchten Gravitationsfeldparametern entsteht, ohne dass Anfangs- und Randwerte in die Parameterschätzung aufgenommen werden müssen. Die Idee zur Gravitationsfeldbestimmung durch Lösung der Bewegungsgleichung auf Basis von Beschleunigungen ist nicht ganz neu und wurde schon von einer Reihe von Autoren für die Gravitationsfeldbestimmung anderer Planeten verwendet (z.B. Barriot und Balmino, 1992). In der Fluggravimetrie wurden schon einige Verfahren zur Bestimmung von Beschleunigungen aus GPS-Phasenmessungen (z.B. Jekeli und Garcia, 1997; Bruton, 2000) sowie aus GPS-bestimmten Trajektorien (Bruton, 2000) getestet und erfolgreich angewendet. Ansätze zur Anwendung der Beschleunigungsbestimmung in der terrestrischen Gravitationsfeldanalyse mit LEO-Satelliten wurden von Schäfer (2001) aufgezeigt, der zur Sensitivitätsanalyse solcher Satellitenmissionen einen Kalman-Filter für die Detektion von Beschleunigungen entwarf.

Trotz dieser Arbeiten mit positiven Erkenntnissen wurden solche „Beschleunigungsansätze“ im Vorfeld der Satellitenmissionen nicht weiter ernsthaft diskutiert und untersucht, da man sich aufgrund der später noch zu behandelnden

Probleme bei der Bestimmung von Beschleunigungen aus Beobachtungen bzw. aus kinematisch bestimmten Bahnen wenig Erfolg mit solchen Verfahren versprach. Erst mit dem Start der CHAMP-Mission im Juli 2000 und der sich abzeichnenden Genauigkeitssteigerung bei der Berechnung kinematischer Orbits (Švehla und Rothacher, 2002a,b) wurden Beschleunigungsverfahren von wenigen Autoren wieder aufgegriffen. Forscher aus dem Geodätischen Institut, Universität Stuttgart (Austen et al., 2002, Reubelt et al., 2003a,b) konnten mit Ergebnissen aus Simulationsrechnungen sowie ersten Realdatenanalysen die Anwendbarkeit von „Beschleunigungsansätzen“ belegen. Zur Berechnung von Beschleunigungen wurde hierzu die Satellitenbahn mit Hilfe der Interpolationsformel von Gregory-Newton numerisch differenziert. Weitere Autoren wie Fengler et al. (2004) wendeten ebenfalls die numerische Differentiation mit der Gregory-Newton-Interpolationsformel an, jedoch wird dort das Gravitationsfeld mit lokalisierenden Basisfunktionen wie sphärischen Splines und Wavelets modelliert. Aufgrund der guten Ergebnisse wurde die numerische Differentiation mit Gregory-Newton später auch zur Bestimmung von Geschwindigkeiten aus kinematischen Orbits (anstatt der direkten Verwendung der Geschwindigkeiten reduziert-dynamischer Bahnen) zur Auswertung des vorher beschriebenen Energieintegrals eingesetzt (Földvályi et al., 2005). Ein etwas modifizierter Beschleunigungsansatz, der auf der Berechnung mittlerer anstatt punktueller Beschleunigungen beruht, wurde von Ditmar et al. (2004) und Ditmar und van Eck van der Sluijs (2004) eingeführt und ebenfalls durch Simulationsrechnungen und Realdatenanalyse (Ditmar et al., 2006) evaluiert.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine genauere Untersuchung des Beschleunigungsansatzes und der damit erreichbaren Genauigkeit in der Gravitationsfeldbestimmung anhand von simulierten und realen CHAMP-Daten. Durch den Vergleich mit Ergebnissen aus simulierten und realen Daten, die mit den anderen Verfahren zur Gravitationsfeldbestimmung erreicht wurden, soll abgeschätzt werden, ob der Beschleunigungsansatz ein konkurrenzfähiges Verfahren zur Analyse von high-low-SST-Daten darstellt

Ausgehend von einem kinematischen Orbit  $\mathbf{x}(t)$ , der bezüglich des erdfesten Bezugssystems gegeben ist, soll der generelle Ablauf des Beschleunigungsansatzes, wie er beispielsweise in Austen et al. (2002) und Reubelt et al. (2003a,b, 2006) angewendet wurde, kurz erläutert werden. Die einzelnen Schritte sowie deren mathematische und physikalische Grundlagen werden in den nachfolgenden Kapiteln näher betrachtet. (2.48)–(2.50) geben den mathematischen Zusammenhang auf Basis der Bewegungsgleichung an, deren spezifische Kraftfunktion  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/m$  in ihre einzelnen Anteile, nämlich den Gravitationsvektor  $\mathbf{\Gamma}_{\text{grav}}$  der Erde, den Gezeitenvektor  $\mathbf{f}_{\text{tidal}}$  sowie die spezifischen nicht-konservativen Störkräfte  $\mathbf{f}_{\text{non-grav}}$  zerlegt wird (2.48). Die aus Modellen berechenbaren Gezeiteneffekte sowie die mit dem Akzelerometer erfassten nicht-konservativen Störeffekte werden unter der Berücksichtigung der Äquivalenz zwischen den kinematischen und dynamischen Größen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}} = \mathbf{f}_{\text{tidal}}$  und  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}} = \mathbf{f}_{\text{non-grav}}$  auf die linke Seite gebracht, so dass auf der linken Seite die „Beobachtungen“ stehen und auf der rechten Seite der Erdgravitationsvektor  $\mathbf{\Gamma}_{\text{grav}}$ , der durch die zu bestimmenden Gravitationsfeldparameter  $\mathbf{p}_{\Gamma}$  parametrisiert wird ((2.49), (2.50)). Um das Gleichungssystem aufstellen zu können, muss nun noch die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$ , die der Satellit erfährt, aus den Messungen bzw. aus den kinematischen Bahnen  $\mathbf{X}(t)$  extrahiert werden. In Abbildung 2.2 wird der Algorithmus anhand eines Ablaufdiagramms anschaulich dargestellt und gliedert sich in eine linke Seite, in der die Beobachtungen verarbeitet werden, und eine rechte Seite, in der das mathematische Modell zur Beschreibung des Gravitationsfeldes behandelt wird. Zunächst wird beschrieben, wie mit den Beobachtungen zu verfahren ist.

**Box 2.8: Beschleunigungsansatz**

„Bewegungsgleichung“

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}(t) &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathbf{\Gamma}_{\text{grav}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) + \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}) + \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t) \\ &= \text{grad } U(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) + \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}) + \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t) \\ &= \mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}} \text{grad } U(t, (\lambda, \phi, r), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) + \mathbf{f}_{\text{tidal}}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_{\text{tidal}}) + \mathbf{f}_{\text{non-grav}}(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

„Analyse im Quasi-Inertialsystem“

$$\underbrace{\ddot{\mathbf{X}}(t) - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}(t) - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}(t)}_{\substack{\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}(t) \\ \text{Gravitationsbeschleunigung im} \\ \text{raumfesten Bezugssystem}}} = \mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}} \text{grad } U(t, (\lambda, \phi, r), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) \quad (2.49)$$

„Analyse im lokalen System“

$$\underbrace{\left(\mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}}\right)^{-1} \left(\ddot{\mathbf{X}}(t) - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}(t) - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}(t)\right)}_{\substack{\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}^{\text{sph}}(t) \\ \text{Gravitationsbeschleunigung im} \\ \text{lokalen System}}} = \text{grad } U(t, (\lambda, \phi, r), \mathbf{p}_{\Gamma}(t)) \quad (2.50)$$

Die wichtigste Messgröße beim Beschleunigungsansatz stellt der kinematische Orbit  $\mathbf{x}(t)$  des LEO-Satelliten dar, der zuvor aus den eigentlichen high-low-SST-Messungen, also den GPS-Trägerphasen und Pseudostrecken bestimmt werden muss. In Anhang C werden die Grundzüge der kinematischen, aber auch der dynamischen und reduziert-dynamischen Bahnbestimmung näher erläutert. Da die Bewegungsgleichung (2.48) für einen Betrachter bezüglich des inertialen Referenzsystems gelten soll, um Trägheitsbeschleunigungen zu vermeiden, werden die Positionen des LEO-Satelliten in einem ersten Schritt ins raumfeste Bezugssystem transformiert. Eine für unsere Anwendung genügend genaue Realisation eines solchen raumfesten Bezugssystems bietet das CIS in Form eines Quasi-Inertialsystems. Zur Rotation ins raumfeste Bezugssystem sind neben der Drehung der Erde um die Erdachse, beschrieben durch die *wahre Greenwicher Sternzeit* (engl.: *Greenwich Apparent Sidereal Time, GAST*) noch die Nutation und Präzession der Erdachse sowie die Polbewegung zu berücksichtigen. Die numerische Berücksichtigung dieser Effekte geschieht durch Modellierung und ausgewertete Messungen, die vom *IERS* (engl.: *International Earth Rotation Service*) bereitgestellt werden. Alle für den Beschleunigungsansatz, speziell für die CHAMP-Datenauswertung relevanten Transformationen werden in Kapitel 3 behandelt.

Im zweiten Schritt müssen aus den LEO-Positionen  $\mathbf{X}(t)$  die auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  abgeleitet werden. Dies ist eine schwierige und nicht unproblematische Aufgabe, da einerseits die zweiten zeitlichen Ableitungen bestimmt werden müssen, aber andererseits die Bahn  $\mathbf{X}(t)$  nicht als kontinuierliches Signal vorliegt, sondern in Form diskreter Positionen. Der Weg, der also eingeschlagen werden muss, läuft also in einem ersten Schritt darauf hinaus, aus der Bahn eine kontinuierliche, zeitabhängige Funktion mit Hilfe einer Interpolationsformel zu erzeugen. Die zweimalige zeitliche Ableitung einer solchen Interpolationsfunktion stellt dann in der Regel kein großartiges mathematisches Problem mehr da. Eine solche Methodik wird als numerische Differentiation bezeichnet, wobei es viele Möglichkeiten für die Wahl einer Interpolationsfunktion gibt. Eine spezielle Variante bietet die numerische Differentiation im Frequenzraum (Bruton, 2000; Weigelt und Sneeuw, 2005), die ein spezielles frequenzabhängiges Design von Differentiationsfiltern zulässt, bei der aber Datenlücken ein Problem darstellen und auf die deshalb nicht näher eingegangen wird. Aus den zwei Schritten zur numerischen Differentiation, nämlich der Interpolation sowie der analytischen Zeitableitung der Interpolationsfunktion erklären sich die beiden problematischen Punkte bei der Bestimmung von Beschleunigungen mit numerischer Differentiation:

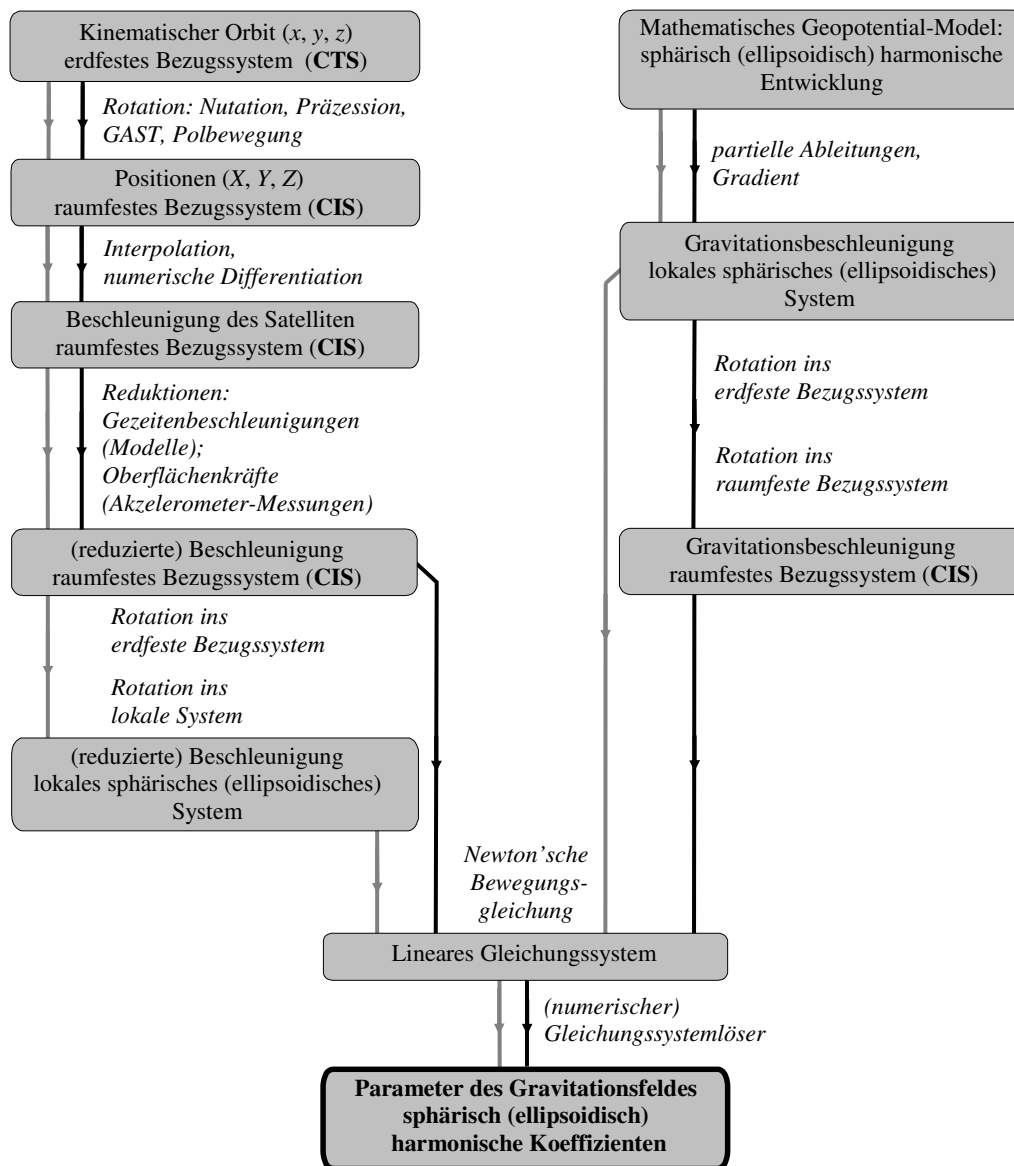
1. Approximiert die Interpolationsfunktion das wahre, kontinuierliche Signal (die Bahn) gut genug?
2. Wie verhält sich das Rauschen der (Bahn-)daten beim Ableiten/Differenzieren?

Während der erste Punkt in unserem Fall in der Regel kein großes Problem darstellt, da die Bahn genügend glatt und dicht genug diskretisiert vorliegt, ist der zweite Punkt der limitierende Faktor. Bekanntlich hat numerische Differentiation die Eigenschaft, dass sie das Messrauschen verstärkt. Dies gilt aber streng genommen nur, wenn es sich um weißes Rauschen handelt. Bei farbigem, positiv korreliertem Rauschen wird dieser rauschverstärkende Effekt jedoch abgemildert (Reubelt et al., 2003a,b, 2006). Gerade die Tatsache, dass GPS-Signale stark räumlich und zeitlich korreliert sind, gibt Anlass dazu, gute Ergebnisse mit „Beschleunigungsansätzen“ basierend auf numerischer Differentiation zu erreichen. In Kapitel 6 werden verschiedene numerische Differentiationsverfahren, die im Zeitbereich arbeiten, getestet und untersucht sowie die Problematik der numerischen Differentiation bei Rauschen näher beleuchtet. Auf die Korrelation der Fehler realer kinematischer Orbits wird in Abschnitt 9.1 näher eingegangen.

Um schließlich die durch das Gravitationsfeld der Erde verursachte Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}(t)$  aus den „abgeleiteten“ Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  extrahieren zu können, müssen nach (2.49), (2.50) noch die gravitativen Störbeschleunigungen, auch als Gezeitenbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}(t)$  bezeichnet, sowie die nicht-gravitativen Störbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}(t)$  abgezogen werden. Die Korrektur um Gezeitenbeschleunigungen, die sich aus dem direkten gravitativen Effekt von Sonne, Mond und Planeten, den Gezeiten der festen Erde sowie Ozean- und Polgezeiten ergeben, geschieht mit vorhandenen Modellen und wird näher in Kapitel 5 beschrieben. Für die Erfassung der nicht-gravitativen, nicht-konservativen Störbeschleunigungen, welche durch Oberflächenkräfte am Satelliten verursacht werden, ist eigens ein Messinstrument am Satelliten angebracht. Diese störenden Effekte entstehen hauptsächlich durch Atmosphärenreibung/-auftrieb sowie den Strahlungsdruck der Sonne und werden durch das so genannte Akzelerometer gemessen. Aufgrund diverser Einflüsse sind die Messungen des Akzelerometers teilweise stark fehlerbehaftet, so dass eine Kalibrierung des Instruments unumgänglich ist. Die Erfassung der nicht-konservativen Effekte durch das Akzelerometer, entstehende Probleme sowie mögliche Kalibrierungsmodelle werden in Abschnitt 5.2 behandelt.

Nachdem nun die von der Erde erzeugten Gravitationsbeschleunigungen aus den Messungen bestimmt wurden, muss ein entsprechendes Modell zur mathematischen Modellierung des Gravitationsfeldes, insbesondere des Gravitationsvektors, ausgewählt werden (rechte Seite des Ablaufdiagramms sowie von (2.49), (2.50)). Aufgrund der auf langwellige Gravitationsfeldanteile beschränkten Sensitivität der CHAMP-Daten bietet sich die Darstellung des Gravitationsfeldes mit globalen Basisfunktionen an. Gewöhnlich werden dazu die in Kapitel 4 beschriebenen Kugelfunktionsentwicklungen benutzt, mit denen das Gravitationspotential  $U$  modelliert wird. Um den Gravitationsvektor  $\boldsymbol{\Gamma}$  zu erhalten, wie er in der Bewegungsgleichung (2.48) auftritt, muss der räumliche Gradient dieses Geopotentials gebildet werden. Die Gradientenbildung geschieht am einfachsten durch partielles Ableiten und Normierung im lokalen (sphärischen) System, da das Geopotential in sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \phi, r)$  angegeben ist. Eine Alternative zu der Kugel-

funktionsentwicklung kann die Entwicklung in ellipsoidisch-harmonischen Funktionen darstellen. Näheres zur Darstellung und Berechnung des Gravitationsvektors findet sich ebenfalls in Kapitel 4.



**Abbildung 2.2:** Ablaufdiagramm des Beschleunigungsansatzes; schwarzer Weg: Lösung im Quasi-Inertialsystem; grauer Weg: Lösung im lokalen sphärischen System.

Anschließend muss das mathematische Modell des Gravitationsvektors noch vom lokalen (sphärischen) System ins raumfeste System transformiert werden. Dies geschieht mit Hilfe zweier Rotationen, von denen die erste die Transformation vom lokalen System in das erdfeste (kartesische) Bezugssystem beschreibt und die zweite die Rotation vom erdfesten Bezugssystem ins raumfeste Bezugssystem. Beide Transformationsschritte sind in (2.49), (2.50) zu einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}}$  zusammengefasst. Basierend auf der Newton'schen Bewegungsgleichung, die ein Äquivalenzprinzip zwischen kinematischen und dynamischen Größen darstellt, können nun der aus Satellitendaten bestimmte Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}$  und das Modell des Gravitationsvektors im raumfesten Bezugssystem gleichgesetzt werden. Dieser Weg zur Aufstellung des Gleichungssystems im raumfesten Bezugssystem ist in dem Ablaufdiagramm durch den schwarzen Pfad gekennzeichnet und mathematisch in (2.49) formuliert. Da das Gravitationspotential  $U$  eine lineare Funktion der zu bestimmenden Gravitationsfeldparameter (Kugelfunktionskoeffizienten) ist, ist auch das entstehende Gleichungssystem linear.

Eine andere Möglichkeit zur Aufstellung des Gleichungssystems ist die Formulierung im lokalen System. Diese Formulierung wird in (2.50) mathematisch dargestellt und ist im Ablaufdiagramm als grauer Pfad eingezeichnet. Wie in (2.50) zu sehen ist, wird die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}}$  einfach auf die linke Seite gebracht, es wird also einfach die aus Satellitendaten bestimmte Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}$  vom raumfesten Bezugssystem ins lokale Bezugssystem rotiert und das mathematische Modell des Gravitationsvektors bleibt im lokalen System bestehen. Der Vorteil einer Lösung des Gleichungssystems im lokalen System besteht darin, dass die Transformation der einzelnen Elemente der Designmatrix,

die durch das Modell des Gravitationsvektors aufgebaut werden, ins raumfeste System entfällt. Stattdessen müssen nur die drei Koordinaten des Beschleunigungsvektors  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}$  ins lokale System rotiert werden. Es kann somit durch eine Formulierung im lokalen System Rechenzeit eingespart werden. Eine Lösung (ohne Fehlerfortpflanzung und Gewichtung) des Gleichungssystems im lokalen System ist gegenüber einer Lösung im raumfesten System ohne nennenswerte Genauigkeitsverluste durchführbar, wenn die drei Komponenten  $\ddot{X}_{\text{red}}, \ddot{Y}_{\text{red}}, \ddot{Z}_{\text{red}}$  des Beschleunigungsvektors gleichgenau und unkorreliert sind (zeitliche Korrelationen werden durch die Rotation leicht verändert, aber: Korrelationslänge der Beschleunigungen ist sehr kurz, s. Abschnitt 7.1.2). Dies ist der Fall, wenn auch die drei Komponenten einer Satellitenposition  $\mathbf{X}(t)$  gleichgenau und unkorreliert sind. Es handelt sich dabei natürlich um idealisierende Annahmen die in der Realität nur bedingt der Fall sein werden, Reubelt et al. (2003a) konnten jedoch für erste kinematische Bahndatensätze solche Annahmen näherungsweise bestätigen. Für alle anderen Fälle ist es sinnvoll, eine Lösung im raumfesten Bezugssystem anzustreben oder eine Fehlerfortpflanzung mit anschließender Gewichtung durchzuführen.

Den letzten Schritt beim Beschleunigungsansatz stellt die Lösung des Gleichungssystems dar. Zur Implementierung eines geeigneten Gleichungssystemlösers sind einige wichtige Stichpunkte wie die Anzahl der Beobachtungen und Unbekannten sowie die Konditionierung des Systems zu beachten. Bei groß dimensionierten Gleichungssystemen ist eine herkömmliche Inversion des Gleichungssystems aufgrund des Speicher- und Rechenzeitaufwandes auf einem Standard-PC (engl.: *Personal Computer*) nur schwer oder gar nicht möglich. In einem solchen Fall bietet sich die Umsetzung auf einem Supercomputer an oder die Implementierung eines iterativen Gleichungssystemlösers. Bei einem iterativen Gleichungssystemlöser kann der speicher- und rechenzeitaufwändige Aufbau der Normalgleichungsmatrix umgangen werden, die Designmatrix wird zeilenweise aufgebaut und ausgewertet und muss somit nicht im Speicher gehalten werden und alle Matrixoperationen können in Vektoroperationen umgestellt werden. Somit lässt sich dann auch eine Lösung auf einem Standard-PC ermöglichen. Die numerische Stabilität der Lösung eines Gleichungssystems sowie die Konvergenzgeschwindigkeit einer iterativen Lösung werden durch eine eventuell schlechte Konditionierung des Gleichungssystems beschränkt. Die Konditionszahl und damit auch die numerische Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit wird durch so genannte Regularisierungsverfahren verbessert. In der Gravitationsfeldanalyse, speziell in der Satellitengeodäsie, wird hierfür normalerweise die Kaula-Regularisierung (Kaula, 1966) verwendet, die einem Signalmodell einer Kugelfunktionsentwicklung entstammt. Durch Präkonditionierung des Gleichungssystems mit einer ausreichend guten Approximation der Normalgleichungsmatrix kann die Konvergenzgeschwindigkeit eines iterativen Verfahrens gesteigert werden.

Die CHAMP-Mission, deren Daten in dieser Arbeit zur Gravitationsfeldanalyse verwendet werden, hat einen vorausichtlichen Messzeitraum von  $T_{\text{mission}} \geq 5$  Jahre. Dabei soll der Satellit auf einer Bahnhöhe zwischen  $h \approx 470$  km am Anfang und  $h \approx 270$  km am Ende der Mission fliegen, was einer Umlaufdauer (um die Erde) von ca.  $T_{\text{rev}} \approx 90$  min entspricht. Aus der durch die GPS-Messungen möglichen Abtastrate von  $\Delta t = 30$  s für die kinematischen Orbits ergeben sich also ca. 15 Mio. Beobachtungsgleichungen. Die mögliche Auflösung des Gravitationsfeldes, welche die Anzahl der zu schätzenden Gravitationsfeldparameter bestimmt, wird im Wesentlichen durch die zwei Faktoren Nyquist-Frequenz und Signal-zu-Rausch-Verhältnis bestimmt. Die Nyquist-Frequenz beschreibt die maximale Auflösung eines Signals, die bei einer gegebenen Abtastfrequenz bestimmt werden kann. Normalerweise sind hierfür 2 Abtastungen pro Wellenlänge notwendig. Aus der Umlaufdauer  $T_{\text{rev}} \approx 90$  min, die mit  $\Delta t = 30$  s abgetastet wird, ergibt sich eine ungefähre maximale Auflösung  $L$  des Gravitationsfeldes von

$$L \approx \frac{f_{\text{Nyq}}}{f_{\text{rev}}} \approx \frac{T_{\text{rev}}}{2 \Delta t} \approx 90 \quad \text{mit:} \quad \begin{cases} \text{Nyquist-Frequenz:} & f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2 \Delta t} \\ \text{Umlauffrequenz:} & f_{\text{rev}} = \frac{1}{T_{\text{rev}}} \end{cases} \quad (2.51)$$

Dieser Wert kann nur als ungefähre Anhaltspunkt für die maximale Auflösung zonaler harmonischer Koeffizienten angesehen werden. Für Koeffizienten höherer Ordnung (höhere tesserale und sektorielle), deren Strukturen in Nord-Süd-Richtung gröber sind (je höher die Ordnung, desto gröber, s. Anhang A, Abbildung A.3), scheint bei einer polnahen Bahn eine Auflösung bis zu einem höheren Grad als  $L$  möglich. Durch die Abweichung der realen CHAMP-Bahn von einer Polbahn entstehen kleinere polare Datenlücken, welche die Auflösbarkeit der Koeffizienten niedriger Ordnung (zonale und niedrige tesserale) beeinträchtigen.

Unter Auflösbarkeit im Sinne des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses kann man verstehen, dass ein Koeffizient als bestimmt gilt, wenn das Rauschen nicht größer ist als der Wert des Koeffizienten selbst. Unter diesem Aspekt kann die maximale Auflösung geringer werden als  $L$ , wenn z.B. das Messrauschen relativ groß und der Beobachtungszeitraum kurz ist. Durch Analyse eines größeren Datensatzes kann die Auflösung dann aber wiederum erhöht werden. Limitierende Faktoren der Auflösung bezüglich des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses sind ein ansteigendes Rauschen auf den höheren Frequenzen der Beschleunigungen, die Länge des Beobachtungszeitraumes und vor allem die stärker werdende Dämpfung des Gravitationsfeldsignals auf Satellitenhöhe für Kugelfunktionsterme ansteigenden Grades (höherer Auflösung). Die verbleibende Signalstärke in Prozent ergibt sich in der Bahnhöhe  $h$  für den Grad  $l$  zu

$$\text{Signalstärke [\%]} = \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} = \left( \frac{R_E}{R_E + h} \right)^{l+1} \quad (2.52)$$

| Bahnhöhe \ Auflösung | $h = 270 \text{ km}$ | $h = 470 \text{ km}$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $l = 0$              | 95,93%               | 93,13%               |
| $l = 10$             | 63,35%               | 45,71%               |
| $l = 50$             | 12,04%               | 2,65%                |
| $l = 90$             | 2,29%                | 0,15%                |

**Tabelle 2.1:** Signalstärke des Gravitationsfeldes nach (2.52) für den CHAMP-Satellit in unterschiedlicher Bahnhöhe  $h$  für verschiedene Auflösungen (Grad  $l$ ).

Für den CHAMP-Satelliten auf der Anfangs- ( $h \approx 470 \text{ km}$ ) und Endbahnhöhe ( $h \approx 270 \text{ km}$ ) sind die verbleibenden Signalanteile für verschiedene Grade  $l$  in Tabelle 2.1 angegeben. Deutlich zu sehen ist die Signalabnahme mit größer werdender Auflösung, so erfährt z.B. der CHAMP-Satellit zu Missionsbeginn für die Auflösung  $l = 90$  nur 0,15% des Signalanteils auf der Erdoberfläche. Das bedeutet allein schon bei gleichem Rauschen auf dieser Frequenz gegenüber einer Frequenz niedrigerer Auflösung ein vermindertes Signal-zu-Rausch-Verhältnis der bestimmten Gravitationsfeldparameter für die höhere Auflösung, welches durch ein stärkeres Rauschen auf den höheren Frequenzen des Beschleunigungssignals noch weiter abnimmt. Eine Auflösung bezüglich des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses bis zu Grad 90 wird also zu Beginn der Mission nur schwer erreicht werden. Deutlich zu erkennen aus Tabelle 2.1 ist jedoch ein Anstieg des Signalanteils mit abnehmender Bahnhöhe. So ist der verbleibende Signalanteil des Gravitationsfeldes für eine Auflösung bis Grad 90 am Ende der CHAMP-Mission 2,29%, was in etwa einem verbleibenden Signalanteil zu Missionsanfang für die Auflösung vom Grad 50 entspricht. Mit fortschreitender Missionsdauer und damit abnehmender Bahnhöhe wird also eine höhere Auflösung des Gravitationsfeldes bezüglich des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses und eine Genauigkeitssteigerung bedingt durch ein erhöhtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis möglich. Eine Auflösung bis Grad 90 und damit bis zur maximal möglichen Auflösung bedingt durch die Nyquist-Frequenz scheint zu Missionsende möglich.

Bezüglich des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses ist wahrscheinlich auch wieder eine größere Auflösung und bessere Genauigkeit der Koeffizienten höherer Ordnung gegenüber denjenigen niedrigerer Ordnung möglich. Dies liegt daran, dass das Gravitationsfeldsignal von Koeffizienten höherer Ordnung größere Strukturen in Nord-Süd-Richtung (Flugrichtung des Satelliten) besitzt als das von Koeffizienten niedrigerer Ordnung (aber vom selben Grad). Dieses Gravitationsfeldsignal bildet sich dann in den niedrigeren Frequenzen des Beschleunigungssignals des Satelliten ab, die eine bessere Genauigkeit (bedingt durch die numerische Differentiation) als die Anteile höherer Frequenzen besitzen, was zu einem besseren Signal-zu-Rausch-Verhältnis führt.

Die Bahnanalyse ist aufgrund ihres Messkonzeptes, der Auslegung der Satellitenbahn und der Genauigkeit und Abtastung des GPS-Signals auf die Bestimmung langwelliger Gravitationsfeldanteile begrenzt. Aus den obigen Überlegungen sowie auch aus Studien vor Beginn der CHAMP-Mission geht hervor, dass mindestens bis Grad 90 aufgelöst werden sollte, zu Ende der Mission sogar höher. Aus der Auflösung bis Grad 90 ergeben sich 8278 zu schätzende Gravitationsfeldparameter, eine Auflösung bis Grad 100 führt auf 10 198 Parameter und für eine Auflösung bis Grad 120 entstehen 14 638 Unbekannte. Versucht man nun, aus 5 Jahren CHAMP-Mission das Gravitationsfeld bis Grad 90 zu schätzen, so bringt die Dimension des Gleichungssystems Probleme mit sich. Die Bestimmung von 8278 Unbekannten aus ca. 15 Mio. Beobachtungen führt zu einem Gleichungssystem, für dessen Lösung ein sehr großer Rechenaufwand und auch viel Speicherplatz zur Speicherung von Design- und Normalgleichungsmatrizen benötigt werden. Mit einer normalen Inversion ist ein solches Gleichungssystem auf einem herkömmlichen PC nur schwer lösbar. Wie vorher schon erwähnt, bietet sich ein iteratives Lösungsverfahren an. Als geeignet erweist sich die Methode der Präkonditionierten Konjugierten Gradienten, deren Konvergenzgeschwindigkeit durch Präkonditionierung mit Hilfe einer blockdiagonalen Approximation der Normalgleichungsmatrix gesteigert werden kann. Eine detailliertere Betrachtung zur Lösung großer, überbestimmter Gleichungssysteme und genaue Beschreibung der Methode der Präkonditionierten Konjugierten Gradienten sowie eine Beschreibung der Regularisierung findet sich in Kapitel 7.

Ausführliche Untersuchungen zum entstehenden Modellfehler sowie zum Einfluss des Messrauschens beim Beschleunigungsansatz finden sich in Kapitel 8. Die Untersuchungen zum Beschleunigungsansatz werden durch eine Analyse realer kinematischer CHAMP-Orbits in Kapitel 9 abgeschlossen. Darin wird unter anderem auf die Korrelation realer kinematischer Bahnfehler sowie auf die Auswirkung einzelner Ausreißer auf die Genauigkeit des geschätzten Gravitationsfeldes eingegangen. Zur Behandlung von Ausreißern werden verschiedene Ansätze zur Elimination von Ausreißern vorgestellt und angewendet. Eine Alternative zur Ausreißerelimination stellen robuste Schätzverfahren dar, bei denen Ausreißer iterativ heruntergewichtet werden. Schließlich findet eine Evaluation der Ergebnisse durch Vergleich mit Resultaten aus alternativen Verfahren sowie dem bereits vor CHAMP bestehenden Gravitationsfeldmodell EGM96 (Lemoine et al., 1998) statt.

Eine modifizierte Art des „Beschleunigungsansatzes“ stellt ein Verfahren von Ditmar et al. (2004, 2006) und Ditmar und van Eck van der Sluijs (2004) dar, das im Gegensatz zu punktweisen Beschleunigungen mit mittleren Beschleunigungen arbeitet. Dieser Ansatz wird im Folgenden am Beispiel der  $X$ -Komponente beschrieben, analoges gilt für die  $Y$ - und  $Z$ -Komponente. Wie bereits von Reubelt et al. (2003a) untersucht und in Kapitel 6 beschrieben, reicht ein 3-Punkt-Differentiationsschema zur Bestimmung von (punktweisen) Beschleunigungen nicht aus und es sind mindestens 5, besser 7 oder 9 Punkte notwendig, um genügend genaue Ergebnisse zu erhalten. Ditmar und van Eck van der Sluijs (2004) konnten jedoch zeigen, dass Beschleunigungen, die mit dem 3-Punkt-Schema (2.53) berechnet worden sind, mittlere Beschleunigungen  $\bar{\ddot{X}}$  mit entsprechender Gewichtsfunktion  $w(s)$  nach (2.54) repräsentieren. Letzten Endes bedeutet das, dass bei Anwendung des 3-Punkt-Differentiators zur Erstellung des Beobachtungsvektors  $\mathbf{y}$  die Designmatrix  $\mathbf{A}_{pw}$  bei punktweisen Beschleunigungen noch mit einer (Filter-)Matrix  $\mathbf{E}$  multipliziert werden muss, um die Designmatrix  $\mathbf{A}_{avg}$  für mittlere Beschleunigungen zu erhalten (2.61). Die Matrix  $\mathbf{E}$  setzt sich zusammen aus den Koeffizienten des Mittelwertfilters  $\mathbf{e}$ , der angibt, wie sich die mittleren Beschleunigungen  $\bar{\ddot{X}}$  aus den punktweisen Beschleunigungen  $\ddot{X}$  nach (2.58) ergeben. Zur Ableitung des Mittelwertfilters wird zunächst ein Polynom der Ordnung  $2n$  für die punktweisen Beschleunigungen angesetzt (2.55), dessen Koeffizienten  $c_j$  sich nach (2.56) angeben lassen. Setzt man den Polynomansatz nun in das Mittelwertintegral (2.54) ein, so erhält man durch analytische Integration eine Beziehung (2.57) zwischen den Polynomkoeffizienten  $\mathbf{c}$  und der mittleren Beschleunigung  $\bar{\ddot{X}}$ . Setzt man nun die gefundenen Gleichungen (2.56) und (2.57) ineinander ein, so erhält man die Beziehung zwischen mittlerer und punktweisen Beschleunigungen nach (2.58) mit Hilfe des Mittelwertfilters  $\mathbf{e}$ , der sich aus (2.59) ergibt. Hierbei ist eine Zerlegung der Inversion von  $(\mathbf{V}^T)^{-1}$  in  $(\bar{\mathbf{V}}^T)^{-1}\mathbf{T}$  numerisch günstiger, da die Inversion von  $(\mathbf{V}^T)^{-1}$  für Polynome höherer Ordnung  $2n$  und damit größerer Filterlänge  $(2n+1)$  sehr schnell instabil wird. Die Anwendung des Mittelwertfilters muss ebenso wie die numerische Differentiation im (Quasi-)Inertialsystem erfolgen.

**Box 2.9: Beschleunigungsansatz für mittlere Beschleunigungen**

„Beschleunigung aus 3-Punkt-Schema“

$$\bar{\ddot{X}}(t) = \frac{X(t - \Delta t) - 2X(t) + X(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (2.53)$$

„Interpretation als mittlere Beschleunigung mit Gewichtsfunktion“

$$\bar{\ddot{X}}(t) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} w(s) \ddot{X}(t+s) ds \quad ; \quad \text{mit } w(s) = \frac{\Delta t - |s|}{(\Delta t)^2} \quad (2.54)$$

„Ableitung des Mittelwertfilters“

„Polynomansatz für punktweise Beschleunigungen“

$$\ddot{X}(t+s) = \sum_{j=0}^{2n} c_j s^j \quad ; \quad s \in [-n\Delta t; n\Delta t] \quad (2.55)$$

„mit der Bestimmungsgleichung für Polynomkoeffizienten“

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1} \cdot [\ddot{X}(t-n\Delta t), \dots, \ddot{X}(t+n\Delta t)]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -n\Delta t & \dots & (-n\Delta t)^{2n} \\ 1 & -(n-1)\Delta t & \dots & (-(n-1)\Delta t)^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n\Delta t & \dots & (n\Delta t)^{2n} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

„Analytische Lösung des Mittelwertintegrals für Polynomansatz“

$$\bar{\ddot{X}}(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{c} \quad ; \quad w_j = \begin{cases} 2(\Delta t)^j \left( \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} \right) & ; \quad \text{für gerades } j \\ 0 & ; \quad \text{für ungerades } j \end{cases} \quad ; \quad j \in [0; 2n] \quad (2.57)$$

„Zusammenhang zwischen mittleren und punktweisen Beschleunigungen“

$$\bar{\ddot{X}}(t) = \mathbf{e}^T \cdot [\ddot{X}(t-n\Delta t), \dots, \ddot{X}(t+n\Delta t)]^T \quad (2.58)$$

„mit Mittelwertfilter“

$$\mathbf{e} = (\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{w} = (\bar{\mathbf{V}}^T)^{-1} \mathbf{T} \mathbf{w} \quad (2.59)$$

$$\text{wobei } \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 1 & -n & \dots & (-n)^{2n} \\ 1 & -(n-1) & \dots & (-(n-1))^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \dots & (n)^{2n} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{T} = \text{diag}(T_{i,i}) \quad \text{mit } T_{i,i} = \Delta t^{(1-i)} \quad (2.60)$$

„Zusammenhang zwischen den Designmatrizen für  
mittlere und punktweise Beschleunigungen“

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_{\text{avg}} \mathbf{p}_{\Gamma} = \mathbf{E} \mathbf{A}_{\text{pw}} \mathbf{p}_{\Gamma} \quad (2.61)$$

Die Tatsache, dass in diesem Fall ein 3-Punkt-Schema zur Berechnung von Beschleunigungen notwendig ist, mag unter gewissen Gesichtspunkten als vorteilhaft erscheinen. Einerseits fallen in der Anwesenheit von Datenlücken und schlecht bestimmten Satellitenpositionen weniger Beschleunigungen weg, andererseits gestaltet sich auch die Fehlerfortpflanzung von Koordinaten auf Beschleunigungen und somit die Gewichtung leichter. Das Problem ist aber, dass Beobachtungen vom Typ „mittlere Beschleunigung“ weniger anschaulich als diejenigen vom Typ „punktweise Beschleunigung“ sind. Dies erklärt sich bei einer Betrachtung aus einem anderen Blickwinkel. Nach Mayer-Gürr et al. (2005b) lässt sich dieser Ansatz nämlich aus der Randwertaufgabe ((2.34) bzw. (2.37)) herleiten, in dem man das Randwertproblem für kurze Bahnbögen (Abschnitt 2.3.2.2) für einen „ultrakurzen“ Orbit mit 3 Punkten anwendet. Aus dieser Sichtweise wäre dieser Ansatz auch nicht mehr als ein „Beschleunigungsansatz“ zu interpretieren, da die Beobachtungen dann nur noch Linearkombinationen aus Satellitenpositionen darstellen.

## 2.4 Kurze Erörterung möglicher Vor- und Nachteile der beschriebenen Verfahren

Im Folgenden soll eine kurze Diskussion und Erörterung möglicher Stärken und Schwächen der vorgestellten Algorithmen vorgenommen werden. Dabei soll auf die einzelnen Fehlerquellen, die sich ungünstig auf die Parameterschätzung auswirken können, eingegangen werden. Aufgrund der unterschiedlichen mathematischen Methodiken, die in den einzelnen Verfahren eine Anwendung finden, können sich Ungenauigkeiten in den einzelnen Datenquellen sowie weitere spezielle Aspekte bei jedem Verfahren unterschiedlich auswirken. Welcher Ansatz zur Gravitationsfeldbestimmung schließlich am besten geeignet ist oder ob überhaupt einer der Algorithmen die anderen dominiert, kann nur über ausführliche Simulationen mit unterschiedlichen Rauschverhältnissen oder letzten Endes durch Realdatenauswertung mit ausführlicher Evaluierung und Validierung festgestellt werden. In den Abschnitten 8.4 und 9.4 werden als Beitrag zur Beantwortung dieser Fragestellung die Ergebnisse aus Simulationsrechnungen und Realdatenanalyse verglichen, die mit den einzelnen Verfahren erzielt wurden. Erste Vergleiche der einzelnen vorgestellten Verfahren untereinander wurden bereits von Ditmar et al. (2004) und Ditmar und van Eck van der Sluijs (2004) für simulierte Daten sowie von Mayer-Gürr et al. (2005a) auf der Basis von Realdaten vorgenommen.

Bezüglich der Kriterien Rechenzeit, Bahnfehler, Akzelerometerfehler, Kalibrierungsmöglichkeiten des Akzelerometers, Fehler der Gezeitenmodelle, Datenlücken, Exaktheit der Methodik und Redundanz soll nun eine Einschätzung einer möglichen erzielbaren Genauigkeit mit den jeweiligen Verfahren vorgenommen werden.

### *Rechenzeit:*

Aufgrund der Nichtlinearität des Gleichungssystems (Iteration!) sind das klassische Verfahren so wie die Lösung der Variationsgleichungen am zeitaufwendigsten. Hinzu kommt bei beiden Verfahren der erhöhte Zeitaufwand durch die numerische Integration der Variations- und Bewegungsgleichungen. Aufgrund der größeren Anzahl von Beobachtungsgleichungen ist das klassische Verfahren als etwas langsamer als die Methode der Variationsgleichungen einzustufen.

Für die Ausführung der drei anderen Methoden ist erheblich weniger Zeit notwendig, aber auch hier kann eine Einstufung erfolgen. Im Allgemeinen ist die Anwendung von numerischer Integration aufwendiger als die numerische Differentiation. Das bedeutet, dass das Randwertproblem für kurze Bahnbögen als etwas zeitintensiver einzuschätzen ist als die Energiebilanzmethode, bei der nur Akzelerometerwerte und Gezeiten integriert werden müssen (bei gleichzeitiger einmaliger Differentiation zur Extraktion von Geschwindigkeiten). Das schnellste Verfahren wäre somit der Beschleunigungsansatz. Für eine schnellere Durchführbarkeit bei der Energiebilanzmethode spricht allerdings, dass die Anzahl der Beobachtungsgleichungen sich auf ein Drittel reduziert, da die Energie im Gegensatz zu Positionen und Beschleunigungen eine skalare Größe ist.

Bei den Verfahren, die mit kinematischen Orbits arbeiten, muss genau genommen auch noch die Rechenzeit zur Generierung der kinematischen Orbits berücksichtigt werden, die allerdings wegen des linearen Gleichungssystems und fehlender Integration relativ kurz ist.

### *Fehler und Ungenauigkeiten im kinematischen Orbit (in den GPS-Messungen):*

Wie zu sehen ist, ist zur Aufstellung des Beobachtungsvektors bei einigen der oben genannten Methoden eine numerische Differentiation der kinematisch bestimmten Positionen notwendig. Bei anderen Verfahren wird eine numerische Integration zur Bestimmung von partiellen Ableitungen und zur Auswertung der Kraftfunktion gebraucht, wo unter anderem auch wieder die LEO-Position einfließt. Wie aus Abbildung 2.3 zu erkennen ist, hat jedoch numerische Differentiation und Integration erhebliche Auswirkung auf die Fehlerfortpflanzung in Abhängigkeit von der Art des Rauschens. Handelt es sich um ein Signal mit weißem Rauschen, so wird dieses Rauschen bei numerischer Differentiation verstärkt, wohingegen korreliertes Rauschen des ursprünglichen Signals gedämpft wird und sich teilweise auslöscht. Bei der numerischen Integration sieht es anders aus. Hier führt ein korreliertes Rauschen zu einer Verstärkung des Rauschens, während die Verstärkung bei weißem Rauschen weitaus weniger stark ausfällt und sich hohe Frequenzen sogar teilweise auslöschen können. Allgemein gilt, dass numerische Differentiation hochfrequentes

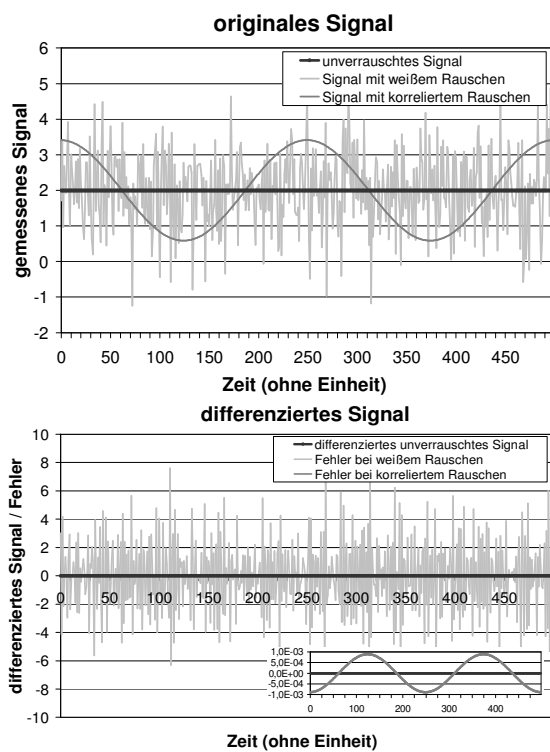


Rauschen verstärkt und niederfrequentes Rauschen abschwächt, bei numerischer Integration tritt der gegenteilige Effekt ein.

Geht man davon aus, dass die Beobachtungen, also die GPS-Messungen bzw. der kinematische Orbit weißes Rauschen enthalten, so ist es günstig, wenn diese Beobachtungen direkt in den Beobachtungsvektor einfließen. Dies wäre für das klassische Verfahren, die Integration der Variationsgleichungen sowie das Randwertproblem für kurze Bahnbögen der Fall. Die Integration der Variations-/Bewegungsgleichungen sowie der Kraftfunktion wäre für diese Verfahren wohl auch als unproblematisch anzusehen, da es sich um weißes Rauschen handelt. Probleme sind jedoch bei der Energiebilanzmethode sowie dem Beschleunigungsansatz zu sehen. Hier ist eine Verstärkung des Rauschens aufgrund der numerischen Differentiation zu erwarten.

Ist das Rauschen des kinematischen Orbits jedoch korreliert, so kann die Anwendung der Energiebilanzmethode sowie des Beschleunigungsansatzes zu einer Reduzierung des Rauschens aufgrund der numerischen Differentiation führen. Bei den anderen Methoden können jetzt jedoch Probleme aufgrund der Integration auftreten. Beim Beschleunigungsansatz sind gegenüber der Energiebilanzmethode aufgrund der zusätzlich auftretenden Integration leichte Vorteile zu sehen.

Ähnliche Beobachtungen sind schon von Ditmar et al. (2004) gemacht worden, die beim Vergleich des (modifizierten) Beschleunigungsansatzes mit der Integration der Variationsgleichungen herausgefunden haben, dass der Beschleunigungsansatz auf langwellige Fehler unempfindlicher reagiert, aber bei weißem Rauschen schlechter abschneidet. Eine endgültige Aussage ist zu diesem Stichpunkt derzeit nicht möglich, da die Korrelation des Rauschens kinematischer Orbits nicht genau bekannt ist.

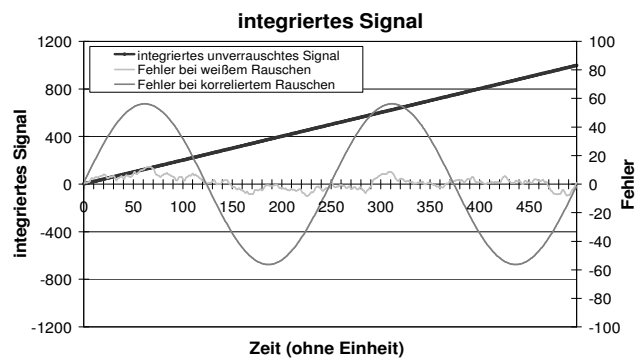


**Abbildung 2.3:** Verhalten eines verrauschten Signals bei numerischer Differentiation und Integration;

unverraushtes Signal (schwarz), Signal mit weißem Rauschen (hellgrau); Signal mit korreliertem Rauschen (dunkelgrau);

Differentiationsmethode: 3-Punkt-Schema

Integrationsmethode: Trapezformel.



*Fehler und Ungenauigkeiten in den Akzelerometermessungen*

Wie sich Fehler und Ungenauigkeiten der Akzelerometermessungen auf das Ergebnis auswirken ist momentan noch relativ schwer zu vorherzusagen, da das Verhalten des Akzelerometers noch nicht vollständig untersucht ist und viele Effekte in den Messungen noch nicht erklärbar sind (Perosanz et al., 2003). So treten neben dem normalen Messrauschen unter anderem Sprünge auf, die teilweise durch Betätigung der Steurdüsen oder anderer Instrumente entstehen, teilweise jedoch nicht erklärbar sind, die aber durch spezielle Filterung in der Vorverarbeitung weitestgehend beseitigt werden können (Förste und Choi, 2005; Perosanz et al., 2005). Fehler, die durch thermische Einflüsse entstehen (Oberndorfer und Müller, 2003) sind hingegen in der Vorverarbeitung schwieriger zu korrigieren und sind meistens langwelliger Art (Grunwaldt und Meehan, 2003). Des Weiteren beinhalten die Akzelerometermessungen auch einen Offset sowie eine Drift, die durch geeignete Kalibrierungstechniken (Perosanz et al., 2005) und Schätzverfahren (z.B. Gerlach et al., 2003) größtenteils beseitigt werden können, aber auch hier bleibt in der Regel ein Restfehler im Signal vorhanden. Besonders die Messungen der radialen Komponente haben sich als problematisch aufgrund einer Elektrodenfehlfunktion (Perosanz et al., 2003) herausgestellt. Aus einer Kombination der anderen Elektroden lässt sich die radiale Komponente jedoch weitestgehend rekonstruieren (Perosanz et al., 2003), allerdings nicht mit der Genauigkeit der anderen beiden Komponenten.

Aufgrund des breiten, teilweise unbekanntem Spektrums an Fehlern ist es von Vorteil, wenn die Akzelerometerdaten (gegebenenfalls nach Kalibrierung) direkt den Beobachtungsgleichungen ohne Integration zugeführt werden können. Die Integration der Akzelerometerdaten kann beim klassischen Verfahren, bei der Integration der Variationsgleichungen, beim Randwertproblem für kurze Bahnbögen sowie bei der Energiebilanzmethode aufgrund langweiliger Fehler sowie nicht beseitigter Offsets und Driften zu großen Fehlern führen (durch eine geeignete Parametrisierung können einige dieser Fehler jedoch reduziert oder beseitigt werden, s.u.). Beim Beschleunigungsansatz tritt diese Problematik nicht auf. Die Energiebilanzmethode bietet gegenüber allen anderen Methoden den Vorteil, dass hier die fehlerhafte radiale Komponente nicht verwendet werden muss.

#### *Kalibrierungsmöglichkeiten des Akzelerometers:*

Gerade die Tatsache, dass sich langweilige Fehler und insbesondere der Offset und die Drift durch die Integration vergrößern bzw. aufaddieren, führt dazu, dass diese Fehler in solchen Verfahren deutlich zu Tage treten und deshalb relativ genau in Form von Kalibrierungsparametern mitbestimmt oder eliminiert werden können. Gängig ist die Bestimmung von Kalibrierungsparametern für Offset und Skalierung, durch die Schätzung eines zeitabhängigen Offsets (Gerlach et al., 2003) oder täglichen Werten für den Offset (Mayer-Gürr et al., 2005b) können sogar weitere niederfrequente Störanteile herausgefiltert werden. Besonders effektiv gestaltet sich die Kalibrierung bei der Energiebilanzmethode, da hier eine Bilanzgleichung vorliegt, deren Wert eine Konstante sein muss. Bei dem Beschleunigungsansatz ist eine Kalibrierung schwieriger und voraussichtlich weniger genau, da hier keine Integration vorkommt, welche die zu kalibrierenden Effekte deutlich hervorbringt.

#### *Fehler in den Gezeitenmodellen:*

Bei der Auswertung mit den einzelnen Methoden müssen auch gravitative Effekte, die durch Gezeiten entstehen, berücksichtigt werden. Dies geschieht im Normalfall mit vorhandenen Modellen, welche die Gezeiten genügend genau beschreiben. Allerdings können Fehler in der Modellierung die Gravitationsfeldlösung beeinflussen. In der Regel wird zur Modellierung der Gezeiten eine Kugelfunktionsentwicklung niedrigen Grades verwendet. Dies bedeutet, dass die modellierten (spezifischen) Gezeitenkräfte, die am Satelliten angreifen, hauptsächlich langweilige Fehleranteile besitzen. Bei einer Integration der (spezifischen) Gezeitenkräfte tritt dann das Problem auf, dass solche Fehler verstärkt werden können. Dies gilt für die klassische Methode sowie die Integration der Variationsgleichungen, das Randwertproblem für kurze Bahnbögen und die Energiebilanzmethode. Ein Vorteil ist hier beim Beschleunigungsansatz zu sehen, da hier die spezifischen Gezeitenkräfte nicht integriert werden müssen.

#### *Probleme durch Datenlücken:*

Punkte, an denen keine oder offensichtlich nur sehr ungenaue Beobachtungen vorliegen, werden in diesem Kontext als Datenlücken bezeichnet. Für diese Punkte kann keine Beobachtungsgleichung aufgestellt werden. Allerdings beeinflussen Datenlücken im Falle numerischer Differentiation und Integration auch die benachbarten Punkte. Im Falle numerischer Differentiation mit einem  $n$ -Punkt-Schema sind auch die benachbarten  $(n-1)/2$  Punkte von der Datenlücke betroffen, für diese Punkte wird dann keine Beobachtungsgleichung aufgestellt.

Bei der numerischen Integration für das Randwertproblem für kurzen Bahnbögen und den Energieansatz ist im Prinzip der komplette Bahnbogen von der Datenlücke betroffen, da die Integration über diesen ganzen Zeitbereich läuft. Hier kann unter Hinnahme von Genauigkeitsverlusten die numerische Integration nur durchgeführt werden, wenn an der Datenlücke die Integrationsschrittweite um die ausgelassenen Datenpunkte erweitert wird oder der fehlende Datenpunkt aus den umliegenden Punkten interpoliert wird. Eine andere, aus Genauigkeitsgründen vorzuziehende Alternative wäre, den Bahnbogen an der Datenlücke in zwei neue Bögen aufzuteilen, deren Integrale dann die Datenlücke nicht enthalten. Dies erfordert allerdings die Einführung zusätzlicher Anfangs- oder Randbedingungen, bzw. bei der Energiebilanzmethode die Schätzung einer neuen Energiekonstante.

Ein geringeres Problem stellen die Datenlücken für die Integration bei den Verfahren nach Abschnitt 2.3.1 und Abschnitt 2.3.2.1 dar. Hier wird parallel zur Integration der Variationsgleichung, für welche die Satellitenposition benötigt wird, die Bewegungsgleichung integriert, welche die benötigte Position den physikalischen Gesetzen gehorchend liefert. Eine Datenlücke stellt hier also kein größeres Problem dar, und im Gegensatz zu den anderen Verfahren müssen weder Beobachtungsgleichungen für die daneben liegenden Positionen gestrichen werden (Beschleunigungsansatz, Energiebilanzmethode) noch zusätzliche Unbekannte in die Parameterschätzung mit aufgenommen werden oder Genauigkeitsverluste in Kauf genommen werden (Randwertproblem für kurze Bahnbögen, Energiebilanzmethode).

#### *Genauigkeit/Approximation des Verfahrens:*

Bevor ein Verfahren angewendet wird, muss sichergestellt sein, dass das mathematische Modell die physikalische Realität genügend gut erfasst. Bei einem exakten Ansatz ist das gewährleistet, sieht man von möglichen numerischen Problemen ab. Wird aber bei der Aufstellung des Modells und des Gleichungssystems an einer Stelle approximiert oder kleine Größen vernachlässigt, so ist zu zeigen, dass der daraus resultierende Fehler im Ergebnis genügend klein ist ( $\ll$  als Fehler durch Messrauschen). Die Auswirkungen eines solchen „Verfahrens- oder Modellfehlers“ können über eine Simulationsrechnung mit unverrauschten Daten festgestellt werden, indem man die erzielten Ergebnisse mit den

Eingangsdaten der Simulationsrechnung vergleicht. Für alle vorgestellten Methoden konnte gezeigt werden, dass der „Modellfehler“ klein genug ist (Reubelt et al., 2003a; Ditmar et al., 2004; Ditmar und van Eck van der Sluijs, 2004). Trotzdem ist eine Diskussion der verwendeten Approximationen als hilfreich anzusehen.

Verfahren, bei denen eine numerische Differentiation angewandt wird (Beschleunigungsansatz, Energiebilanzmethode), sind in diesem Kontext als approximativ anstatt exakt anzusehen. Hier wird ohne Bezug auf die physikalischen Eigenschaften der Bahnbewegung eine Interpolationsfunktion durch die diskret gegebenen Positionen gelegt, die fehlende Information dazwischen führt bei der Differentiation zu Approximationsfehlern. Allerdings ist die Approximation durch gebräuchliche Interpolationsfunktionen als genau genug einzustufen, da der Bahnverlauf relativ glatt ist.

Ähnlich verhält es sich bei der numerischen Integration bei dem Randwertproblem für kurze Bahnbögen sowie bei der Energiebilanzmethode. Auch hier ist die Integration eher als approximativ anstatt exakt einzustufen, weil die zu integrierende Funktion wiederum mit Hilfe einer Interpolationsfunktion (basierend auf dem kinematischen Orbit) angenähert werden muss, welche die Physik der Bahn nicht berücksichtigt. Aber auch hier sind die Differenzen zum wahren physikalischen Verlauf aufgrund der Glattheit der zu integrierenden Funktion als klein genug anzusehen, vor allem wenn der Integrationszeitraum klein genug gewählt wird.

Die numerische Integration der Differentialgleichungen (Bewegungs-/Variationsgleichungen) bei dem klassischen Verfahren sowie bei dem Variationsansatz kann in diesem Kontext als exakt oder zumindest als nur geringfügig approximativ klassifiziert werden, sieht man einmal von numerischen Einflüssen ab. Hier wird bei jedem Integrationschritt die Physik der jeweiligen Differentialgleichung berücksichtigt, da deren erzeugende Kraftfunktion für jeden Schritt ausgewertet wird. Eventuell auftretende Interpolationen zur Prädiktion werden über einen Korrektorschritt verbessert.

#### *Redundanz:*

Unter Redundanz soll hier die gesamte Redundanz der Ausgleichung betrachtet werden, die sich normalerweise aus der Differenz zwischen der Anzahl von Beobachtungen und Unbekannten ergibt. Bei gleichem Datenmaterial sollte eine größere Redundanz zu einer höheren Genauigkeit der Ergebnisse führen. Dies gilt allerdings nur mit Einschränkung, da unter anderem eine unterschiedliche Vorverarbeitung und unterschiedliche Verfahren zur Bereitstellung der Elemente des Beobachtungsvektors zu Genauigkeitsunterschieden trotz gleichem Datenmaterial führen (s.o.).

Unter diesem Gesichtspunkt verfügt das klassische Verfahren über die höchste Redundanz aufgrund der größeren Anzahl an Beobachtungsgleichungen. Die geringste Redundanz besitzt die Energiebilanzmethode, da hier pro Punkt nur eine Beobachtungsgleichung für die Energie als skalare Größe anstatt 3 Beobachtungsgleichungen wie bei den anderen alternativen Methoden anfällt. Dies führt nach Ditmar und van Eck van der Sluijs (2004) zu einem Genauigkeitsverlust in der Größenordnung von  $\sqrt{3}$ . Für die anderen 3 Verfahren ist die Redundanz nahezu ähnlich, aber bei einer größeren Anzahl von Datenlücken wird die Redundanz bei dem Beschleunigungsansatz und dem Randwertproblem für kurze Bahnbögen etwas geringer aufgrund zusätzlich wegfallender Beobachtungsgleichungen neben der Datenlücke bzw. aufgrund zusätzlicher unbekannter Randwerte.

Anmerkung: Die höhere Redundanz bei der klassischen Methode spielt wahrscheinlich keine Rolle, da die überschüssige Redundanz bei der Bestimmung der kinematischen Orbits genauigkeitssteigernd wirkt.

Wie zu sehen ist, gibt es kein Verfahren, das hinsichtlich aller Kriterien dominierend ist. Allerdings lässt sich anhand der vorherigen Diskussion auch keine Methode von vornherein aufgrund eines schlechten Abschneidens bei allen Stichpunkten ausschließen. Vielmehr ist es so, dass jede der einzelnen Methoden hinsichtlich mehrerer Kriterien gut abschneidet und bei anderen wieder schlechter. Welches Verfahren die besten Ergebnisse liefert oder ob es überhaupt ein solches gibt, liegt am Ende daran, welche Eigenschaften die vorliegenden Realdaten besitzen. Die wahre Genauigkeit der Realdaten, die für die Effizienz der einzelnen Verfahren mit entscheidend ist, wird aber nie genau bestimmt werden können, da die fehlerfreien Sollwerte nicht bekannt sind. Die Genauigkeit der Daten kann nur anhand von Ausgleichung und Fehlerfortpflanzung sowie Vergleichen mit unabhängigen Datensätzen abgeschätzt werden. So konnte beispielsweise hinsichtlich der Fragestellung, ob das Rauschen von kinematischen Orbits nun weiß oder korreliert ist, noch keine Einigung gefunden werden. Dies ist aber ein wichtiger Punkt bei der Diskussion, ob numerische Differentiation zu guten oder schlechten Ergebnissen führt.

Bei der vorherigen Diskussion wurde versucht, so gut wie möglich auf die Realität der Daten und Algorithmen Rücksicht zu nehmen. Für die Stichpunkte, an denen die Eigenschaften der Daten nicht ganz bekannt sind, wie z.B. das Rauschen der kinematischen Bahnen, hat die Diskussion allerdings einen hypothetischen Charakter. Aber auch hier wurde versucht, die verschiedenen herrschenden Ansichten mit einzubeziehen. In Tabelle 2.2 sind noch einmal kurz die Ergebnisse der obigen Diskussion zusammengefasst.

Der wohl wichtigste der oben behandelten Stichpunkte für die Genauigkeit der Gravitationsfeldanalyse ist die Genauigkeit der Satellitenbahn (Moore et al., 2003), die weiteren Kriterien spielen dann je nach Verfahren eine größere oder kleinere untergeordnete Rolle. So lässt sich dann aus unterschiedlich genauen Ergebnissen mit den einzelnen Verfahren auch ein Rückschluss daraus ziehen, ob das Rauschen der Bahn eher weiß oder korreliert ist. Eine unterschiedliche Reaktion von Beschleunigungsansatz und dem Variationsansatz auf verschiedene Arten von Rauschen, wie es von Ditmar et al. (2004) festgestellt wurde, bestätigt diese Vermutung.

| Verfahren<br>Kriterium                  | klassisches<br>Verfahren | Variations-<br>gleichungen | Randwert-<br>problem | Energiebilanz-<br>methode | Beschleu-<br>nigungsansatz |
|---|--------------------------|----------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------------|
| Rechenzeit                              | --                       | -                          | +                    | ++                        | ++                         |
| Bahn (weißes<br>Rauschen)               | +                        | +                          | +                    | -                         | -                          |
| Bahn (korreliertes<br>Rauschen)         | -                        | -                          | -                    | +                         | ++                         |
| Akzelerometer-<br>fehler (unkalibriert) | --                       | --                         | --                   | -                         | <b>0</b>                   |
| Kalibrierung des<br>Akzelerometers      | +                        | +                          | +                    | ++                        | -                          |
| Fehler der<br>Gezeitenmodelle           | -                        | -                          | -                    | -                         | +                          |
| Datenlücken                             | +                        | +                          | -                    | -                         | -                          |
| Approximation                           | +                        | +                          | <b>0</b>             | <b>0</b>                  | <b>0</b>                   |
| Redundanz                               | ++                       | +                          | <b>0+</b>            | -                         | <b>0+</b>                  |

**Tabelle 2.2:** Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren zur Bahnanalyse hinsichtlich einiger wichtiger Stichpunkte; Bewertungen: (++) deutlich positiv, (+) positive Tendenz, (0) neutral, (-) negative Tendenz, (-- ) deutlich negativ.

Im Folgenden soll nun der Beschleunigungsansatz näher untersucht werden, da diese Methodik im Gegensatz zu den anderen Verfahren bisher noch nicht oder nur beschränkt in früheren Veröffentlichungen behandelt worden ist. Ein Hauptaugenmerk gilt dabei der numerischen Differentiation, da diese der problematische Punkt ist. Vergleiche mit den anderen Methoden sollen auf Basis von simulierten und realen Daten in Kapitel 9 angestellt werden. Aus solchen Vergleichen soll dann auch hervorgehen, wie kritisch z.B. die numerische Differentiation wirklich ist. Bei ähnlichen Ergebnissen kann eventuell gefolgert werden, dass die Rauschverhältnisse des kinematischen Orbits wohl irgendwo zwischen den Extremen „weißes Rauschen“ und „stark korreliertes Rauschen“ liegen. Aber auch hier muss man vorsichtig sein, da ja auch die anderen Stichpunkte die Effizienz der jeweiligen Verfahren beeinflussen.

### 3 Referenzsysteme

In der Satellitengeodäsie spielen die Referenzsysteme eine wichtige Rolle. Für eine möglichst genaue Simulation und Analyse von Satellitendaten, insbesondere von Satellitenbahnen, ist eine präzise Definition und Realisierung von geodätischen Referenzsystemen sowie eine hochgenaue Erfassung und mathematische Beschreibung der Transformationsbeziehungen von außerordentlicher Bedeutung.

Ein Referenzsystem ist eindeutig definiert durch Angabe seines Ursprungs sowie der Richtung und des Maßstabes seiner drei Achsen. Es wird dabei zwischen der theoretischen Konzeption eines Referenzsystems (engl.: „reference system“) und seiner Vermarkung durch Koordinaten (Referenzrahmen, engl.: „reference frame“) unterschieden. Dies ist in der Problematik bei der mathematisch-physikalischen Umsetzung begründet, da die verwendeten Messungen fehlerbehaftet sein können, terrestrische Netze Deformationen unterliegen und ein (für das ganze Universum) raumfestes System eigentlich gar nicht realisiert werden kann bzw. genau genommen gar nicht existiert.

Im Folgenden sollen nun die für diese Arbeit relevanten Referenzsysteme sowie deren Transformationsbeziehungen beschrieben werden. Dieses Kapitel sowie auch die verwendete Bezeichnungsweise der Referenzsysteme und Transformationsbeziehungen basieren im Wesentlichen auf Richter (1986, 1995), McCarthy (1996), Gerstl (1999) sowie Grafarend (1979) und Grafarend et al. (1979a,b).

#### 3.1 Das raumfeste Referenzsystem

Die Bedeutung eines *Inertial- oder raumfesten Systems* liegt darin, dass in ihm die Newton’schen Bewegungsgleichungen gelten. Ein tatsächliches Inertialsystem mit absolut raumfesten Achsen und dem Massenmittelpunkt des Universums als Ursprung existiert jedoch nicht. Anstatt dessen definiert und realisiert der IERS das *konventionelle Inertialsystem (CIS, engl.: Conventional Inertial System)*, dessen Achsrichtungen bezüglich extragalaktischer Radioquellen raumfest sind und dessen Ursprung im Geozentrum gelagert wird. Es handelt sich dabei um ein Quasi-Inertialsystem, da der Ursprung mit dem Geozentrum mitbewegt wird. Werden die durch Gezeiten verursachten Beschleunigungen berücksichtigt, so gelten dort die Newton’schen Bewegungsgleichungen.

Das raumfeste Bezugssystem  $\mathbf{I}^\bullet$  ist nach Richter (1995) so festgelegt, dass es zur *Fundamentalepoche*  $t_0 = \text{J2000} = 1. \text{Januar } 2000, 12^{\text{h}} \text{ TDB}$  (*baryzentrische dynamische Zeit*) mit dem *mittleren zälestischen Äquatorsystem*  $\mathbf{e}^\bullet$  (engl.: *Mean of Date System, MDS*) übereinstimmt. Zu diesem Zeitpunkt ist also sein dritter Basisvektor  $\mathbf{I}_3^\bullet$  zum *mittleren zälestischen Ephemeridenpol* (engl.: *Celestial Ephemeris Pole (CEP)*), entspricht ungefähr der *mittleren Rotationsachse* und sein erster Basisvektor  $\mathbf{I}_1^\bullet$  zum *mittleren Frühlingsäquinoktium* gerichtet. Die Achsrichtungen des CIS sind mit denjenigen des *Sternkatalogs FK5 (Fünfter Fundamentalkatalog)* identisch (Richter, 1995a; Gerstl, 1999). Abbildung 3.1 zeigt eine graphische Veranschaulichung der Achsen eines raumfesten Referenzsystems anhand des konventionellen Inertialsystems CIS.

**raumfeste, (quasi-)inertiale Referenzsysteme**  
 Beispiel: *konventionelles Inertialsystem (CIS)  $\mathbf{I}^\bullet$*

Basisvektoren:

$$\mathbf{I}_1^\bullet = \frac{\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\Psi}_0}{\|\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\Psi}_0\|} = \mathbf{e}_1^\bullet(t_0)$$

$$\mathbf{I}_2^\bullet = \mathbf{I}_3^\bullet \times \mathbf{I}_1^\bullet = \mathbf{e}_2^\bullet(t_0)$$

$$\mathbf{I}_3^\bullet = \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\|\boldsymbol{\Omega}_0\|} = \mathbf{e}_3^\bullet(t_0)$$

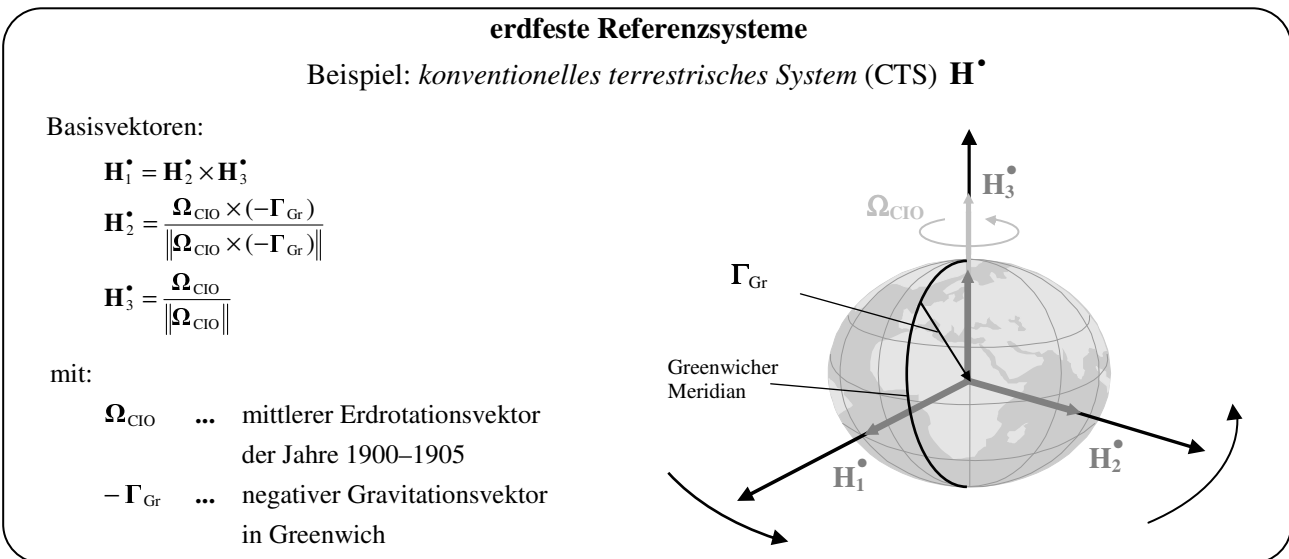
mit:

- $t_0$  ... Fundamentalepoche J2000,0
- $\boldsymbol{\Omega}_0$  ... mittlerer Rotationsvektor bei  $t_0$   
( $\approx$  Richtung des zälestischen Ephemeridenpols bei  $t_0$ )
- $\boldsymbol{\Psi}_0$  ... mittlerer Ekliptiknormalenvektor bei  $t_0$
- $\mathbf{e}^\bullet$  ... mittleres zälestisches Äquatorsystem

**Abbildung 3.1:** Das Quasi-Inertialsystem CIS.

### 3.2 Das erdfeste Referenzsystem

Für die Beschreibung des terrestrischen Gravitationsfeldes ist die Einrichtung eines *erdfesten Bezugssystems* von großer Bedeutung. Nach Richter (1995) ist das erdfeste System  $\mathbf{H}^\bullet$ , auch als *konventionelles terrestrisches System CTS* (engl.: *Conventional Terrestrial System*) bezeichnet, so definiert, dass sein dritter Basisvektor  $\mathbf{H}_3^\bullet$  die Richtung des *Konventionellen Internationalen Ursprungs CIO* (engl.: *Conventional International Origin*) hat und der erste Basisvektor  $\mathbf{H}_1^\bullet$  durch den *Greenwicher Nullmeridian* verläuft. Der erste Basisvektor  $\mathbf{H}_1^\bullet$  kann beispielsweise durch die Projektion des negativen Schwerevektors  $-\Gamma_{\text{Gr}}$  von *Greenwich* in die Äquatorebene gebildet werden und durch die festgesetzten Längen einiger astronomischer Observatorien realisiert werden. Der CIO entspricht der mittleren Richtung des Rotationsvektors der Erde in den Jahren 1900–1905. In Abbildung 3.2 ist das CTS mit seinen Achsen als Beispiel für ein erdfestes Referenzsystem abgebildet.



**Abbildung 3.2:** Das konventionelle terrestrische System CTS.

Einige Schwierigkeiten bereitet die Definition des erdfesten Systems, da die Erde ein dynamisches System ist und deswegen auch die Erdoberfläche nicht starr ist. Die Erdoberfläche besteht vielmehr aus unterschiedlichen Platten, die sich relativ zueinander mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Richtungen bewegen (Plattentektonik). Somit kann nach Richter (1986) einerseits kein erdfestes System gefunden werden, bezüglich dem sich alle Punkte der festen Erdoberfläche nicht bewegen und andererseits ist die Rotation jeder einzelnen Platte gegenüber dem raumfesten System geringfügig unterschiedlich. Anstatt eines „strengen“ erdfesten Systems kann deshalb nur ein „mittleres“ erdfestes Bezugssystem definiert werden, dass so gelagert ist, dass die Änderungen der Oberflächenpunkte im Mittel so klein wie möglich ausfallen. In Gerstl (1999) sind mehrere unterschiedliche Ausgleichungsansätze und Datumsfestsetzungen zur Definition eines erdfesten Systems beschrieben. Der IERS verwendet für die Orientierung seiner erdfesten Systeme (*ITRF*, engl.: *International Terrestrial Reference Frame*) eine Variante der *residualen Rotationsfreiheit*. Hierbei wird die Bedingung der Rotationsfreiheit der gemessenen Punktgeschwindigkeiten der Stationen gegenüber dem Geschwindigkeitsfeld eines vereinbarten Krustenmodells (*NNR-NUVELIA (No Net Rotation - Northwestern University Velocity Model 1A)*, DeMets et al., 1994) angewandt. Aufgrund ständig verbesserten Beobachtungs- und Auswerteverfahren und unregelmäßigen Deformationen wird jedes Jahr eine neu ausgeglichene Variante des ITRF vom IERS veröffentlicht (McCarthy, 1996). Das dieser Arbeit zugrunde liegende „mittlere“ erdfeste System ist aufgrund der verwendeten Transformationsbeziehungen des IERS zwischen raumfestem und erdfestem System das ITRF.

### 3.3 Transformation zwischen Quasi-Inertialsystem und erdfestem Bezugssystem

Die Transformation zwischen erdfestem und raumfestem Bezugssystem wird normalerweise nicht auf direktem Wege durchgeführt, sondern über zwischengeschaltete *wahre Äquatorsysteme* realisiert. Der Grund für diese traditionelle Parametrisierung der Erdrotation liegt darin, dass die dritten Achsen der Systeme CIS und CTS nicht durch die momentane Rotationsachse gebildet werden. Diese wird jedoch durch die dritte Achse der wahren Äquatorsysteme, die dem *wahren zälestischen Ephemeridenpol* entspricht, genau genug repräsentiert. Die Rotation des erdfesten Systems  $\mathbf{H}^\bullet$  gegenüber dem raumfesten System  $\mathbf{I}^\bullet$  wird, wie in Abbildung 3.3 gezeigt, durch die physikalischen Phänomene der *Präzession* und *Nutation* der Rotationsachse der Erde, der Rotation um den *Greenwicher Sternzeitwinkel* um diese Achse sowie der *Polbewegung* der Rotationsachse gegenüber  $\mathbf{H}^\bullet$  verursacht. Diese Phänomene können teilweise ausreichend genau modelliert werden oder müssen mit Hilfe von Messungen erfasst oder korrigiert werden. Die nicht modellierbaren Größen sowie die Korrekturwerte werden vom IERS als tägliche Werte im regelmäßig erscheinenden

IERS-Bulletin-B (<http://hpiers.obspm.fr/eoppc/bul/bulb/>) veröffentlicht und müssen auf den entsprechenden Zeitpunkt interpoliert werden. Die nachfolgend beschriebenen Transformationsschritte beziehen sich auf die *IERS-Conventions 1996* (McCarthy, 1996) und beruhen in der Theorie auf Capitaine (1990), wobei die Äquinoktien zur Beschreibung der zwischengeschalteten Bezugssysteme verwendet werden.

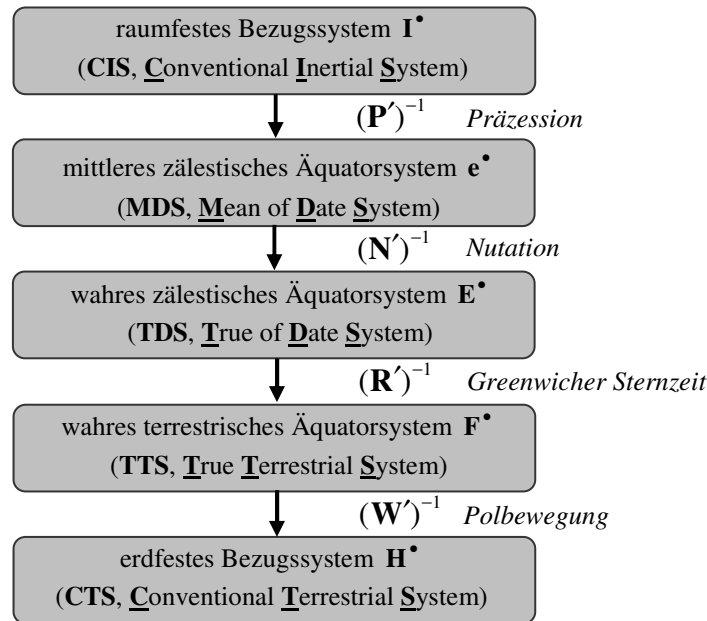


Abbildung 3.3: Folge der Transformationen zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem.

Mathematisch lässt sich die Transformation des Koordinatenvektors  $\mathbf{x}$  bzgl. des erdfesten Bezugssystems  $\mathbf{H}^\bullet$  in den Koordinatenvektor  $\mathbf{X}$  bzgl. des raumfesten Bezugssystems  $\mathbf{I}^\bullet$  mit Hilfe der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  in (3.1) formulieren, die sich aus der *Polbewegungsmatrix*  $\mathbf{W}'(t)$ , der *Rotationsmatrix der Greenwicher Sternzeit*  $\mathbf{R}'(t)$ , der *Nutationsmatrix*  $\mathbf{N}'(t)$  und der *Präzessionsmatrix*  $\mathbf{P}'(t)$  zusammensetzt. Als Zeitargument  $t$  wird die *terrestrische Zeit*  $TT$  seit dem 1. Januar 2000,  $12^h$   $TT$  in Julianischen Jahrhunderten verwendet (3.2).

**Box 3.1: Koordinatentransformation zwischen dem erdfesten Bezugssystem (CTS) und dem raumfesten Bezugssystem (CIS):**

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(t) \mathbf{x} = \mathbf{P}'(t) \mathbf{N}'(t) \mathbf{R}'(t) \mathbf{W}'(t) \mathbf{x} \tag{3.1}$$

wobei

$$t = (TT - 1. \text{Januar } 2000, 12^h \text{ TT}) \text{ in } \frac{\text{Tagen}}{36525} \tag{3.2}$$

$\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$  Koordinaten des Vektors bezüglich  $\mathbf{I}^\bullet$  mit  $\{\mathbf{I}_1^\bullet, \mathbf{I}_2^\bullet, \mathbf{I}_3^\bullet\} = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$

$\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  Koordinaten des Vektors bezüglich  $\mathbf{H}^\bullet$  mit  $\{\mathbf{H}_1^\bullet, \mathbf{H}_2^\bullet, \mathbf{H}_3^\bullet\} = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$

In einem ersten Schritt werden durch Transformation mit der Polbewegungsmatrix  $\mathbf{W}'$  die Koordinaten bzgl. des (mittleren) erdfesten Bezugssystems  $\mathbf{H}^\bullet$  in Koordinaten bzgl. des *wahren terrestrischen Äquatorsystems*  $\mathbf{F}^\bullet$  (engl.: *True Terrestrial System, TTS*) überführt, dessen dritte Achse  $\mathbf{F}_3^\bullet$  in Richtung des wahren zälestischen Ephemeridenpols zeigt und dessen erste Achse  $\mathbf{F}_1^\bullet$  rechtwinklig dazu im Greenwicher Meridian liegt. Die Polbewegungsmatrix  $\mathbf{P}'(t)$  ist eine differentielle Rotationsmatrix und ergibt sich nach (3.3) aus den beiden *Polkoordinaten*  $x_p, y_p$ , welche die Lage des wahren zälestischen Ephemeridenpols bezüglich des CTS angeben. Da die Polkoordinaten aufgrund von unregelmäßigen Einflüssen nur unzureichend modellierbar sind, werden diese durch Auswertung von Messungen bestimmt und vom IERS im IERS-Bulletin B veröffentlicht, eine Voraussage der *Polbewegungsparameter* findet sich im IERS-Bulletin A. Die Polbewegung setzt sich im wesentlichen aus 2 Anteilen zusammen: (i) die *Chandler'sche Periode* mit einer Dauer von 430 Tagen und einem Öffnungswinkel von ca.  $0,2''$ , welche durch die Abweichung der Hauptträgheitsachse von der Rotationsachse der Erde verursacht wird; (ii) ein unregelmäßiger jahresperiodischer Anteil mit einer Amplitude von  $0,05-0,1''$ , welcher auf eine Änderung des Drehimpulsvektors der „festen Erde“ bedingt durch jahreszeitliche Schwankungen der Atmosphäre und des Wasserhaushalts der Erde zurückgeführt wird. Hinzu kommt eine Drift (*Polwanderung*), die einer Veränderung des Trägheitstensors der Erde infolge nahezeitlicher Landhebung und Abschmelzen der polaren Landmassen zugeschrieben wird.

**Box 3.2: Polbewegungsmatrix  $\mathbf{W}'(t)$** 

$$\mathbf{W}'(t) = \mathbf{R}_1(y_p) \cdot \mathbf{R}_2(x_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

mit

 $x_p, y_p$  : Polkoordinaten des zälestischen Ephemeridenpols im CTS

Durch eine Rotation um die Achse des wahren zälestischen Ephemeridenpols um den (negativen) wahren Greenwicher Sternzeitwinkel  $\theta_{Gr}$  (auch *GAST* oder *GST*, engl. *Greenwich Apparent Siderial Time*) werden die Koordinaten bzgl. des wahren terrestrischen Äquatorsystems  $\mathbf{F}^\bullet$  in Koordinaten bzgl. des wahren zälestischen Äquatorsystems  $\mathbf{E}^\bullet$  (engl.: *True of Date System, TDS*) überführt, dessen erste Achse  $\mathbf{E}_1^\bullet$  zum wahren Frühlingsäquinoktium zeigt.

**Box 3.3: Rotationsmatrix der Greenwicher Sternzeit  $\mathbf{R}'(t)$** 

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{R}_3(-GST) \quad (3.4)$$

Transformation von UTC (Koordinierte Weltzeit) nach G(A)ST (wahre Greenwicher Sternzeit)

1. Schritt: Transformation von UTC nach GMST (mittlere Greenwicher Sternzeit)

$$GMST = GMST_{0^h UT1} + r[(DUT1) + UTC] \quad (3.5)$$

mit dem Maßstabsfaktor zwischen Sonnenzeit und Sternzeit

$$r = 1,002\,737\,909\,350\,795 + 5,9006 \cdot 10^{-11} T_u' - 5,9 \cdot 10^{-15} T_u'^2 \quad (3.6)$$

und GMST zum Zeitpunkt  $0^h UT1$ 

$$GMST_{0^h UT1} = \alpha_M - 12^h = 6^h 41^m 50^s,54841 + 8640184^s,812866 T_u' + 0^s,093104 T_u'^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6} T_u'^3 \quad (3.7)$$

$$\text{mit } T_u' = \frac{d_u'}{36525}$$

wobei  $d_u' \in \pm 0,5, \pm 1,5, \dots$ , Anzahl der vergangenen Tage seit 1. Januar 2000,  $12^h UT1$ 

2. Schritt: Transformation von GMST nach GST (Gleichung der Äquinoktien)

$$GST = GMST + \Delta\psi \cos \varepsilon_A + 0'',00264 \sin \Omega + 0'',000063 \sin 2\Omega \quad (3.8)$$

mit der mittleren Schiefe der Ekliptik

$$\varepsilon_A = 84381'',448 - 46'',8150t - 0'',00059t^2 + 0'',001813t^3 \quad (3.9)$$

der Nutation in Länge  $\Delta\psi$ 

und der mittleren ekliptikalen Länge des Mondes

$$\Omega = F_3 = 125^\circ,04455501 - 6962890'',2665t + 7'',4722t^2 + 0'',007702t^3 - 0'',00005939t^4 \quad (3.10)$$

Da GST ein auf der Erdrotation basierendes Zeitsystem ist, das sich zudem auf das von der periodischen Nutation abhängige wahre Frühlingsäquinoktium bezieht, handelt es sich um ein unregelmäßiges und nur unzureichend genau modellierbares Zeitmass. Zur Bestimmung von *GST* wird deshalb auf die über die Atomzeit realisierte, (von Schaltsekunden abgesehen) regelmäßig ablaufende *Koordinierte Weltzeit UTC* zurückgegriffen, wobei zur Berücksichtigung des unregelmäßigen Anteiles der Erdrotation Korrekturwerte herangezogen werden müssen, die aus Messungen abgeleitet worden sind. In einem ersten Schritt wird die *mittlere Greenwicher Sternzeit GMST* (engl.: *Greenwich Mean Sidereal Time*) aus *UTC* bestimmt (3.5). Dafür muss zunächst *UTC* in die von der Erdrotation abhängige *Weltzeit UT1* überführt werden. Dies geschieht mit Hilfe des Korrekturwertes  $DUT1 = UT1 - UTC$ , der vom IERS aus Messungen bestimmt und im IERS-Bulletin B veröffentlicht wird. Durch Multiplikation von *UT1* mit dem Maßstabsfaktor zwischen *Sonnenzeit* und *Sternzeit*,  $r$  (Aoki et al., 1982), kann der Anteil von *GMST*, der zwischen  $0^h UT1$  und dem aktuellen Zeitpunkt vergangen ist, bestimmt werden. Durch Addition der mittleren Greenwicher Sternzeit  $GMST_{0^h UT1}$  zum Zeitpunkt  $0^h UT1$ , die nach (3.7) der *Rektaszension  $\alpha_M$  der fiktiven mittleren Sonne bezogen auf das Frühlingsäquinoktium*  $- 12^h$  (Aoki et al., 1982) entspricht, erhält man schließlich die mittlere Greenwicher Sternzeit *GMST* zum Beobachtungszeitpunkt. Der zweite Schritt, die Transformation von *GMST* nach *GAST*, erfolgt mit Hilfe der *Gleichung der Äquinoktien* nach (3.8) (Aoki und Kinoshita, 1983), die den Winkel zwischen wahren und mittlerem Frühlingsäquinoktium angibt. Die beiden letzten Terme der Gleichung der Äquinoktien, die von der *mittleren ekliptikalen Länge*



des Mondes  $\Omega$  (3.10) abhängen und die Diskontinuitäten in UT1 minimieren sollen (Capitaine und Gontier, 1993), müssen erst für Zeitpunkte ab dem 1. Januar 1997 berücksichtigt werden.

Durch Transformation mit der Nutationsmatrix  $\mathbf{N}'$  aus (3.13) werden die Koordinaten bzgl. des wahren zälestischen Äquatorsystems  $\mathbf{E}^\bullet$  in Koordinaten bzgl. des mittleren zälestischen Äquatorsystems  $\mathbf{e}^\bullet$  überführt, dessen dritter Basisvektor  $\mathbf{e}_3^\bullet$  in Richtung des mittleren zälestischen Ephemeridenpols und dessen erster Basisvektor  $\mathbf{e}_1^\bullet$  in Richtung des mittleren Frühlingsäquinoktiums zeigt. Schließlich entsteht aus dem Koordinatenvektor bzgl. des mittleren zälestischen Äquatorsystems  $\mathbf{e}^\bullet$  durch Transformation mit der Präzessionsmatrix  $\mathbf{P}'$  aus (3.11) der Koordinatenvektor bzgl. des raumfesten Bezugssystems  $\mathbf{I}^\bullet$ .

Die Präzession wird durch Drehmomente der Sonne und des Mondes aufgrund der Erdabplattung und der schrägen Stellung der Erdachse hervorgerufen. Dies führt zu einem Kegelumlauf des mittleren zälestischen Ephemeridenpols um den *mittleren nördlichen Pol der Ekliptik* in etwa 25 800 Jahren mit einem Öffnungswinkel, welcher der *mittleren Schiefe der Ekliptik*  $\varepsilon_A$  (ca.  $23,5^\circ$ ) entspricht. Hinzu kommt noch der säkulare Effekt der wesentlich langsamer ablaufenden Präzession des Ekliptiksystems selbst. Die Präzession lässt sich aus den Ephemeriden von Sonne, Mond und Planeten als Funktion der Zeit sehr genau modellieren. Das derzeit verwendete *Präzessionsmodell* ist die *IAU (engl.: International Astronomical Union) 1976 Präzessionstheorie* nach Lieske et al. (1977) mit den drei Präzessionswinkeln  $\zeta_A, \theta_A, z_A$  aus (3.12).

**Box 3.4: Präzessionsmatrix  $\mathbf{P}'(t)$**

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{R}_3(\zeta_A)\mathbf{R}_2(-\theta_A)\mathbf{R}_3(z_A) \quad (3.11)$$

mit den Präzessionswinkeln

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 2306'',2181t + 0'',30188t^2 + 0'',017998t^3 \\ \theta_A &= 2004'',3109t + 0'',42665t^2 + 0'',041833t^3 \\ z_A &= 2306'',2181t + 1'',09468t^2 + 0'',018203t^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Box 3.5: Nutationsmatrix  $\mathbf{N}'(t)$**

$$\mathbf{N}'(t) = \mathbf{R}_1(-\varepsilon_A)\mathbf{R}_3(\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \quad (3.13)$$

mit der *mittleren Schiefe der Ekliptik*  $\varepsilon_A$  (s.o.)  
und der *Nutation in Länge*  $\Delta\psi$  und *Schiefe*  $\Delta\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \Delta\psi(\text{IAU1980}) + \delta\Delta\psi \\ \Delta\varepsilon &= \Delta\varepsilon(\text{IAU1980}) + \delta\Delta\varepsilon \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei

$\Delta\psi(\text{IAU1980}), \Delta\varepsilon(\text{IAU1980})$ : Modellparameter der IAU 1980 Nutationstheorie

$\delta\Delta\psi, \delta\Delta\varepsilon$ : Korrekturwerte für die Modellparameter

Berechnung der Modellparameter  $\Delta\psi(\text{IAU1980}), \Delta\varepsilon(\text{IAU1980})$

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\text{IAU1980}) &= \sum_{i=1}^{106} (A_i + A'_i t) \sin(\text{ARG}_i) \\ \Delta\varepsilon(\text{IAU1980}) &= \sum_{i=1}^{106} (B_i + B'_i t) \cos(\text{ARG}_i) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit den Argumenten } \text{ARG}_i = \sum_{j=1}^5 N_{i,j} F_j \\ \text{wobei } N_{i,j} \text{ ganzzahlige Multiplikatoren} \\ \text{der Fundamentalargumente } F_j \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Als Nutation wird die der Präzession überlagerte periodische Bewegung der wahren Rotationsachse gegenüber der mittleren Rotationsachse mit Perioden zwischen 4,7 Tagen und 18,6 Jahren und der maximalen Amplitude von einigen Bogensekunden bezeichnet. Die Nutation hat physikalisch gesehen die gleiche Ursache wie die Präzession, beschreibt aber die Auswirkungen der periodischen Änderungen des von Sonne, Mond und Planeten auf die Erdachse erzeugten Drehmoments. In den IERS-Conventions 1996 (McCarthy, 1996) wird die Nutation nach der *IAU 1980 Nutationstheorie* (Wahr, 1981a; Seidelmann, 1982) durch die *Nutation in Länge*  $\Delta\psi(\text{IAU1980})$  und die *Nutation in Schiefe*  $\Delta\varepsilon(\text{IAU1980})$  modelliert. Diese werden nach (3.15) aus den 106 Perioden des IAU 1980 Modells nach einer Fourier-ähnlichen Entwicklung berechnet. Die Argumente  $\text{ARG}_i$  der 106 Perioden setzen sich dabei nach (3.15) als ganzzahlige ( $N_{i,j}$ ) Linearkombinationen der 5 *Fundamentalargumente*  $F_j$  (auch als *Delaunay-Elemente* bezeichnet, s. Simon et al., 1994) zusammen. Die zugehörigen Amplituden  $(A_i + A'_i t), (B_i + B'_i t)$  enthalten nach (3.15) eine geringfügige zeitliche Drift. Die Werte  $N_j, A_i, B_i, A'_i, B'_i$  der 106 Perioden sind z.B. in McCarthy (1996) zu finden. Die Analyse von astronomi-

schen Beobachtungen (VLBI, LLR) zeigt jedoch, dass die Modellierung des wahren zälestischen Ephemeridenpols mittels der IAU 1980 Nutationstheorie größere Ungenauigkeiten enthält. Deshalb werden vom IERS Korrekturwerte  $\delta\Delta\psi$ ,  $\delta\Delta\epsilon$  für die Verbesserung (3.14) der modellierten Nutationen in Länge und Schiefe  $\Delta\psi$ (IAU1980),  $\Delta\epsilon$ (IAU1980) im IERS-Bulletin veröffentlicht. Alternativ wird in den IERS-Conventions 2003 (McCarthy und Petit, 2004) das verbesserte IAU 2000 Präzession-Nutations-Modell (Mathews et al., 2002) verwendet.

### 3.4 Lokale Referenzsysteme

Die *lokalen Referenzsysteme* haben ihre Bedeutung bei der Bestimmung des Gravitationsvektors als Gradient oder des Gravitationstensors aus einem (globalen) Gravitationsfeldmodell. Da dieses normalerweise in sphärischen (bzw. Jacobi-ellipsoidische Koordinaten) parametrisiert ist, bietet sich die Ableitung der obigen Größen direkt im jeweiligen lokalen System  $\mathbf{C}$  an. Die orthonormalen Basisvektoren  $\mathbf{e}_{u^1}, \mathbf{e}_{u^2}, \mathbf{e}_{u^3}$  eines lokalen Systems  $\mathbf{C}$  ergeben sich bei einer krummlinigen, aber orthogonalen Parametrisierung  $\mathbf{x}(u^1, u^2, u^3)$  des dreidimensionalen Raumes  $\mathfrak{R}^3$  des CTS direkt durch Normierung der kovarianten Tangentenvektoren  $\mathbf{g}_i = \partial\mathbf{x}/\partial u^i$ . Als Beispiel für ein lokales Referenzsystem ist in Abbildung 3.4 das lokale sphärische Referenzsystem  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  dargestellt, dass bei einer Parametrisierung des  $\mathfrak{R}^3$  in *sphärischen Koordinaten*  $\mathbf{x}(\lambda, \phi, r)$  nach (3.16) entsteht. Bei dem lokalen sphärischen System  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  handelt es sich um ein der Erde mitbewegtes Referenzsystem, dessen Ursprung im Beobachtungspunkt liegt (dies kann auch ein Satellit sein) und dessen erste beiden Basisvektoren die Tangentialebene an die Kugel am Beobachtungspunkt aufspannen. Dabei gibt der erste Basisvektor  $\mathbf{C}_1^{\text{sph}}$  die Ostrichtung an und der zweite Basisvektor  $\mathbf{C}_2^{\text{sph}}$  die Nordrichtung. Der dritte Basisvektor  $-\mathbf{C}_3^{\text{sph}}$  gibt die Zenitrichtung bezüglich der Kugel an ( $-\mathbf{C}_3^{\text{sph}}$  zeigt für sphärische Koordinaten zum Geozentrum).

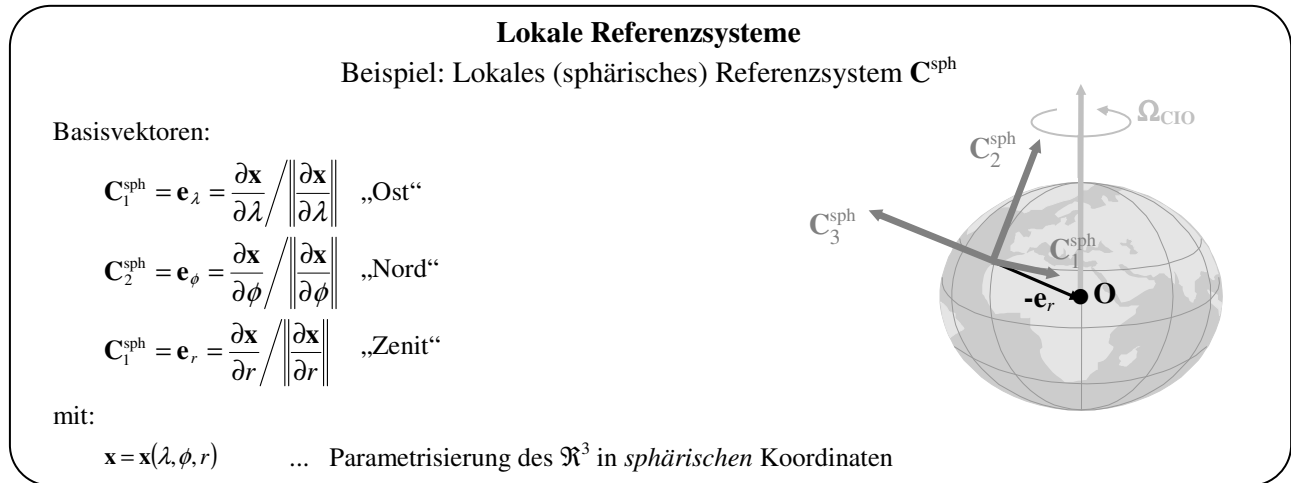


Abbildung 3.4: Lokale Referenzsysteme.

Die Parametrisierungen des  $\mathfrak{R}^3$  sind in Box 3.6 bzw. Box 3.7 in sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \phi, r)$  bzw. Jacobi-ellipsoidischen  $(\lambda^*, \phi^*, u)$  Koordinaten angegeben.

In Box 3.6 ist die direkte Transformation (3.16) von sphärischer Länge  $\lambda$ , sphärischer Breite  $\phi$  und des radialen Abstandes  $r$  eines Punktes in kartesische Koordinaten  $(x, y, z)$  sowie die Umkehrtransformation (auch inverse Transformation, (3.17)–(3.19)) zu finden. Für die Auswertung der Kugelfunktionsentwicklung sowie zur Aufstellung der anschließend behandelten Rotationsmatrix  $\mathbf{R}^{\text{sph}}$  an einem Beobachtungspunkt  $P(x, y, z)$  genügt bei der inversen Transformation die Bestimmung der trigonometrischen Funktionen  $\sin(\lambda)$ ,  $\cos(\lambda)$  (3.17) und  $\sin(\phi)$ ,  $\cos(\phi)$  (3.18).

In Box 3.7 ist der Vollständigkeit halber die Parametrisierung (3.20) des  $\mathfrak{R}^3$  in Jacobi-ellipsoidischen Koordinaten (Länge  $\lambda^*$ , Breite  $\phi^*$ , „radiale Koordinate“  $u$ ) angegeben, welche für die ellipsoidisch-harmonische Entwicklung des Gravitationsfeldes benötigt wird. Aus der Veranschaulichung geht hervor, dass es sich bei  $\phi^*$  um eine kreisreduzierte Breite handelt und dass für den Fall  $u = b$  das Referenzellipsoid mit den Halbachsen  $a, b$  parametrisiert wird. Die Flächen  $u = \text{const.}$  stellen konfokale Ellipsoide mit gleicher linearer Exzentrizität  $\epsilon$  und identischen Brennpunkten dar. Nähere Beschreibungen sowie grafische Veranschaulichungen von Jacobi-ellipsoidischen Koordinaten finden sich in Thong und Grafarend (1989) und Ardalán (2000).

Aus der Definition der Basisvektoren der lokalen Referenzsysteme lässt sich leicht eine Transformationsbeziehung zwischen dem erdfesten Referenzsystem  $\mathbf{H}^\bullet$  (CTS) und dem lokalen Referenzsystem  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  herleiten. Die Basisvektoren  $\mathbf{C}_1^{\text{sph}}, \mathbf{C}_2^{\text{sph}}, \mathbf{C}_3^{\text{sph}}$  des lokalen sphärischen Systems  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  ergeben sich nach (3.21) durch Normierung der kovarianten Tangentenvektoren  $\mathbf{g}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial\lambda$ ,  $\mathbf{g}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial\phi$ ,  $\mathbf{g}_3 = \partial\mathbf{x}/\partial r$ . Daraus lässt sich direkt der Zusammenhang zwischen den Basisvektoren  $\mathbf{C}_1^{\text{sph}}, \mathbf{C}_2^{\text{sph}}, \mathbf{C}_3^{\text{sph}}$  des lokalen sphärischen Systems  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  einerseits und den Basisvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  des erdfesten Bezugssystems  $\mathbf{H}^\bullet$  andererseits ablesen. Fasst man diesen Zusammenhang in einer Gleichung zusammen, so ergibt sich aus den Koordinaten der lokalen sphärischen Basisvektoren  $\mathbf{C}_1^{\text{sph}}, \mathbf{C}_2^{\text{sph}}, \mathbf{C}_3^{\text{sph}}$  bezüglich der erdfesten Basis  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  aus (3.21) direkt die Transformationsmatrix  $\mathbf{R}^{\text{sph}}$  (3.23), welche die Koordinaten eines Vektors  $\mathbf{x}$  bzgl. der erdfesten Basis  $\mathbf{H}^\bullet$  in Koordinaten  $\mathbf{x}_{\text{sph}}$  bzgl. der lokalen sphärischen Basis  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  überführt (3.22).

**Box 3.6: sphärische Koordinaten**

 Transformation von *sphärischen Koordinaten*  $(\lambda, \phi, r)$  in *kartesische Koordinaten*  $(x, y, z)$ 

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \lambda \\ r \cos \phi \sin \lambda \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

inverse Transformation:

$$\sin \lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad \cos \lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad \lambda \in \{\lambda \in \mathbf{R} \mid 0 \leq \lambda < 2\pi\} \quad (3.17)$$

$$\sin \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \quad \cos \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \quad \phi \in \{\phi \in \mathbf{R} \mid -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2\} \quad (3.18)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \quad r \in \{r \in \mathbf{R} \mid r > 0\} \quad (3.19)$$

**Box 3.7:** Transformation von *Jacobi-ellipsoidischen Koordinaten*  $(\lambda^*, \phi^*, u)$  in *kartesische Koordinaten*  $(x, y, z)$ 

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos \phi^* \cos \lambda^* \\ \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos \phi^* \sin \lambda^* \\ u \sin \phi^* \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

mit den Ellipsoidparametern

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{lineare Exzentrizität}$$

$a, b$  große und kleine Halbachse

**Box 3.8: lokales sphärisches Referenzsystem**

 Basisvektoren des *lokalen sphärischen Referenzsystems*  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$ 

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_1^{\text{sph}} = \mathbf{e}_\lambda &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \Big/ \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right\| = [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z] \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_2^{\text{sph}} = \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \Big/ \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right\| = [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z] \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_3^{\text{sph}} = \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \Big/ \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right\| = [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z] \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Tangentenvektoren} \\ \text{Normalenvektor} \end{array} \quad (3.21)$$

 Transformation zwischen *erdfestem Referenzsystem*  $\mathbf{H}^\bullet$  und *lokalem sphärischem Referenzsystem*  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$ 

$$\mathbf{x}^{\text{sph}} = \mathbf{R}^{\text{sph}} \cdot \mathbf{x} \quad (3.22)$$

mit

$$\mathbf{R}^{\text{sph}} = \mathbf{R}_3(\pi/2) \mathbf{R}_2(\pi/2 - \phi) \mathbf{R}_3(\lambda) = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

wobei

$$\mathbf{x}^{\text{sph}} = (x^{\text{sph}}, y^{\text{sph}}, z^{\text{sph}})^T$$

 Koordinaten des Vektors bezüglich  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$ 

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^T$$

 Koordinaten des Vektors bezüglich  $\mathbf{H}^\bullet$ 

### 3.5 Satellitenfeste und instrumentenfeste Referenzsysteme

Weitere wichtige Referenzsysteme bei der Gravitationsfeldanalyse aus CHAMP-Daten mit dem Beschleunigungsansatz sind die *satellitenfesten und instrumentenfesten Referenzsysteme*. Zum einen werden die nichtkonservativen (spezifischen) Störkräfte mit Hilfe eines fest im Satelliten installierten STAR-Akzelerometers gemessen. Zum anderen gelingt die Transformation dieser (spezifischen) Störkräfte ins raumfeste System  $\mathbf{I}^\bullet$  durch Auswertung von Messdaten der ebenfalls fest im Satelliten angebrachten Sternkameras.

### Satellitenfeste und instrumentenfeste Referenzsysteme

Beispiel: satellitenfestes Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$  und Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$

Basisvektoren des satellitenfesten

Referenzsystems:

$$\mathbf{B}_1^{S/C}, \mathbf{B}_2^{S/C}; \mathbf{B}_3^{S/C}$$

mit Ursprung: Gravitationszentrum  
des Satelliten

Basisvektoren des Akzelerometersystems:

(instrumentenfestes Referenzsystem)

$$\mathbf{B}_1^{ACC} \approx -\mathbf{B}_3^{S/C}, \mathbf{B}_2^{ACC} \approx \mathbf{B}_1^{S/C}; \mathbf{B}_3^{ACC} \approx -\mathbf{B}_2^{S/C}$$

mit Ursprung: Zentrum der Akzelerometer-  
prüfmasse = (nominelles) Gravitations-  
zentrum des Satelliten

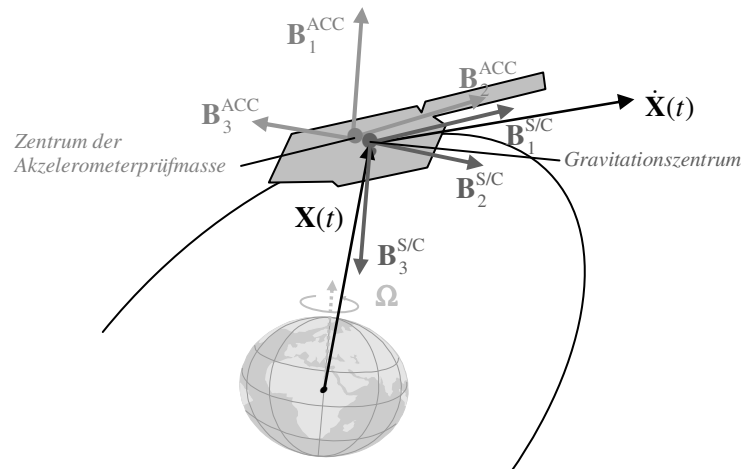
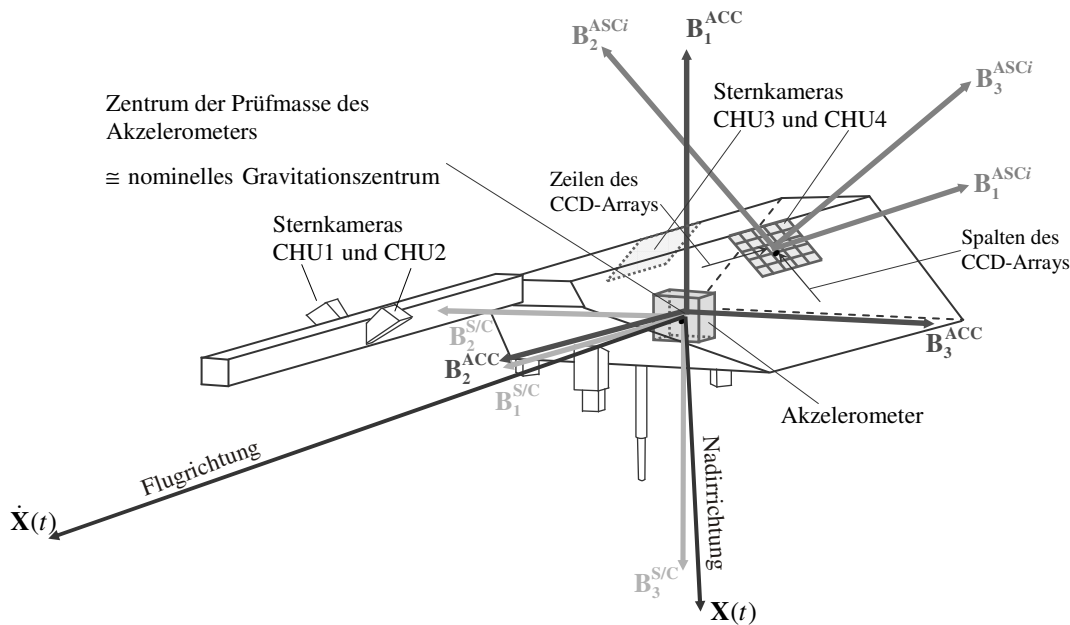


Abbildung 3.5: Satellitenfeste und instrumentenfeste Referenzsysteme.

Satellitenfeste Referenzsysteme  $\mathbf{B}^{S/C}$  besitzen, wie in Abbildung 3.5 angedeutet, im allgemeinen eine Ähnlichkeit mit bahnfesten Referenzsystemen, die sich an der Flugrichtung  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  des Satelliten sowie an der Nadirrichtung bzw. dem Ortsvektor  $\mathbf{X}(t)$  des Satelliten orientieren. Ein satellitenfestes Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$  ist normalerweise so eingerichtet, dass der erste Basisvektor  $\mathbf{B}_1^{S/C}$  nach vorne ( $\approx$  Flugrichtung  $\dot{\mathbf{X}}(t)$ ) zeigt, der dritte Basisvektor  $\mathbf{B}_3^{S/C}$  nach unten gerichtet ist ( $\approx$  Nadirrichtung  $-\mathbf{X}(t)$ ) und der zweite Basisvektor  $\mathbf{B}_2^{S/C}$  das System zu einem Rechtssystem vervollständigt. Der Ursprung sollte im Massenmittelpunkt bzw. im geringfügig davon abweichenden Gravitationszentrum (Schwerpunkt) des Satelliten gelagert sein. Aufgrund der Abweichung des fliegenden Satelliten von seiner nominellen Lage, die durch ein bahnfestes Referenzsystem vorgegeben ist, stimmen satellitenfestes und bahnfestes Referenzsystem auch nur ungefähr überein. Bei CHAMP wird mit Hilfe eines Steuermechanismus versucht, die Abweichung zwischen der wahren und der nominellen Lage im Bereich von  $2^\circ$  zu halten. Eine genauere Definition des satellitenfesten Referenzsystems von CHAMP ist in Tabelle 3.1 und in Schwintzer et al. (2002) zu finden, eine graphische Veranschaulichung bietet Abbildung 3.6.

Instrumentenfeste Referenzsysteme orientieren sich an dem entsprechenden Instrument und müssen daher nicht zwingend eine Ähnlichkeit mit den satellitenfesten Referenzsystemen aufweisen. Das Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$  ähnelt jedoch dem satellitenfesten Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$ , besitzt allerdings eine andere Definition der Achsen (Tabelle 3.1). So zeigt der erste Basisvektor  $\mathbf{B}_1^{ACC}$  jetzt ungefähr in Nadirrichtung und ist somit antiparallel zu  $\mathbf{B}_3^{S/C}$ , der zweite Basisvektor  $\mathbf{B}_2^{ACC}$  gibt ungefähr die Flugrichtung an und ist somit parallel zu  $\mathbf{B}_1^{S/C}$  und der dritte Basisvektor  $\mathbf{B}_3^{ACC}$  ist antiparallel zu  $\mathbf{B}_2^{S/C}$ . Für eine möglichst fehlerfreie Messung der nichtkonservativen Störkräfte sollte der Ursprung des Akzelerometersystems ( $\hat{=}$  Zentrum der Prüfmasse) möglichst gut mit dem Gravitationszentrum des Satelliten und damit mit dem Ursprung von  $\mathbf{B}^{S/C}$  übereinstimmen. Aufgrund von bautechnischen Ungenauigkeiten, Verformungen und Verlagerungen der Prüfmasse sind die Achsrichtungen von  $\mathbf{B}^{ACC}$  und  $\mathbf{B}^{S/C}$  nicht exakt parallel bzw. antiparallel und der Ursprung beider Systeme stimmt nicht genau überein. Diese Ausrichtungsfehler sind aber sehr klein und können im vorliegenden Fall vernachlässigt werden.

Große Unterschiede gegenüber dem satellitenfesten Referenzsystem weisen die instrumentenfesten Referenzsysteme  $\mathbf{B}^{ASC_i}$  der  $i = 4$  Sternkameras auf. Bei CHAMP sind jeweils zwei Sternkameras zu einer Einheit (engl.: *Advanced Stellar Compass*, ASC) zusammengefasst, von denen sich eine auf dem Ausleger und eine auf dem Körper des Satelliten befindet. Die Sternkameras sind, wie in Abbildung 3.6 ersichtlich, auf beiden Seiten des Satelliten so angebracht, dass sie schräg nach oben blicken. Aus der Definition der Sternkamerasysteme in Tabelle 3.1 sowie aus Abbildung 3.6 geht hervor, dass sich die ersten beiden Basisvektoren  $\mathbf{B}_1^{ASC_i}$ ,  $\mathbf{B}_2^{ASC_i}$  an den Zeilen und Spalten des jeweiligen CCD-Arrays ausrichten, der dritte Basisvektor  $\mathbf{B}_3^{ASC_i}$  mit der Mittelachse der Kamera zusammenfällt, der Ursprung durch den Schnittpunkt der Mittelachse mit dem CCD-Array gegeben ist und sich deshalb die Sternkamerasysteme nicht nur hinsichtlich ihrer Achsrichtungen vom satellitenfesten System unterscheiden, sondern ihm gegenüber auch noch verschoben sind. Die Lage der Sternkamera-Referenzsysteme gegenüber dem satellitenfesten Referenzsystem muss nach dem Bau des Satelliten bestimmt werden, die Orientierung der 4 Sternkamera-Referenzsysteme zueinander kann eventuell aus den Messungen der Sternkamera selbst verbessert werden.



**Abbildung 3.6:** CHAMP-Referenzsysteme: satellitenfestes Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$ , Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$  und Sternkamera-Referenzsystem  $\mathbf{B}^{ASCi}$  ( $i = 3,4$ ).

Definition: *satellitenfestes Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$  (körperfestes Referenzsystem)*

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\mathbf{B}_1^{S/C}$ | entlang der Längsseite in Richtung des Auslegers ausgerichtet, zeigt in nomineller Lage in Flugrichtung  |
| $\mathbf{B}_2^{S/C}$ | bildet mit $\mathbf{B}_1^{S/C}$ und $\mathbf{B}_3^{S/C}$ ein Rechtssystem: $\mathbf{B}_2^{S/C} = \mathbf{B}_3^{S/C} \times \mathbf{B}_1^{S/C}$ |
| $\mathbf{B}_3^{S/C}$ | zeigt in nomineller Lage in Nordrichtung   |
| Ursprung:            | Gravitationszentrum des Satelliten   |

Definition: *Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$  (instrumentenfestes Referenzsystem)*

|                      |   |
|----------------------|---|
| $\mathbf{B}_1^{ACC}$ | antiparallel zu $\mathbf{B}_3^{S/C}$ ( $\mathbf{B}_1^{ACC} \approx -\mathbf{B}_3^{S/C}$ ) |
| $\mathbf{B}_2^{ACC}$ | parallel zu $\mathbf{B}_1^{S/C}$ ( $\mathbf{B}_2^{ACC} \approx \mathbf{B}_1^{S/C}$ )      |
| $\mathbf{B}_3^{ACC}$ | antiparallel zu $\mathbf{B}_2^{S/C}$ ( $\mathbf{B}_3^{ACC} \approx -\mathbf{B}_2^{S/C}$ ) |
| Ursprung:            | Zentrum der Akzelerometerprüfmasse; entspricht dem nominellen Gravitationszentrum         |

Definition: *Sternkamera-Referenzsystem  $\mathbf{B}^{ASCi}$  (instrumentenfestes Referenzsystem)*

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $\mathbf{B}_1^{ASCi}$ | in Richtung der Zeilen des CCD-Arrays, nahezu (anti-)parallel zu $\mathbf{B}_1^{S/C}$ ; $\mathbf{B}_1^{ASCi} = \mathbf{B}_3^{ASCi} \times \mathbf{B}_2^{ASCi}$ |
| $\mathbf{B}_2^{ASCi}$ | in Richtung der Spalten des CCD-Arrays; besitzt eine negative Komponente in Richtung $\mathbf{B}_3^{S/C}$  |
| $\mathbf{B}_3^{ASCi}$ | entlang der Mittelachse der Kamera ausgerichtet; zeigt nach außen  |
| Ursprung:             | Schnittpunkt des CCD-Arrays mit der optischen Achse der Kamera   |

**Tabelle 3.1:** Satellitenfestes Referenzsystem, Akzelerometersystem und Sternkamera-Referenzsystem bei CHAMP.

Die Aufgabe der Sternkameras ist die Lagebestimmung. Durch Aufnahme des Sternenhimmels und Auswertung mit Hilfe des HIPPARCOS-Sternkatalogs gelingt die Lagebestimmung der Sternkameras und somit auch des ganzen Satelliten gegenüber des (fixen) Sternenhimmels und somit mit ausreichender Genauigkeit gegenüber dem raumfesten System  $\mathbf{I}$ . Die erste Sternkameraeinheit ASC\_A, die aus den beiden Kameras ( $i = 1,2$ ) CHU1 und CHU2 (engl.: Camera Head Units) besteht, dient dabei zur Interpretation der Magnetometermessungen. Für die Orientierung der Akzelerometermessungen (aber auch zur Lagebestimmung innerhalb des AOCS sowie zur Reduktion der GPS- und Laserentfernungsmessungen) von Bedeutung sind die Messungen der zweiten Sternkameraeinheit ASC\_B, die ebenfalls aus zwei Kameras (für  $i = 3,4$ ) CHU3 und CHU4 gebildet wird. Die Ablesungen dieser beiden Kameras werden bei der Nachprozessierung auf der Bodenstation in das satellitenfeste Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$  transformiert, so dass die in den Akzelerometerdateien (Level-1- und 2-Daten) in Form von Quaternionen ( $q_1, q_2, q_3, q_4$ ) angegebene Lageinformation

(10 s-Sampling) die Orientierung des satellitenfesten Referenzsystems  $\mathbf{B}^{S/C}$  gegenüber dem raumfesten System  $\mathbf{I}^*$  mit hoher Genauigkeit wiedergibt.

Die Transformation der durch das Akzelerometer erfassten (spezifischen) Störkräfte (Akzelerometervektor  $\mathbf{X}^{ACC}$ ) vom Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$  in Koordinaten  $\mathbf{f}_{\text{non-grav}}$  bezüglich des raumfesten Systems  $\mathbf{I}^*$  geschieht in zwei Schritten. Der erste Schritt ist die Koordinatentransformation des Vektors  $\mathbf{X}^{ACC}$  vom Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$  in den Vektor  $\mathbf{X}^{S/C}$  bezüglich des satellitenfesten Referenzsystems  $\mathbf{B}^{S/C}$  nach (3.24), welche sich aus dem Einbau des Akzelerometers in den CHAMP-Satelliten ergibt. Die Achsen  $\mathbf{B}_i^{ACC}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind nach Tabelle 3.1 mit ausreichender Genauigkeit durch die Achsen  $\mathbf{B}_i^{S/C}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des satellitenfesten Referenzsystems beschrieben, so dass sich die Transformationsmatrix  $(\mathbf{R}^{ACC})^{-1}$  in (3.24) durch elementare  $\mathbf{R}_3$ - und  $\mathbf{R}_1$ -Rotationen um  $90^\circ$  bzw.  $-90^\circ$  ergibt.

Im zweiten Schritt wird der Koordinatenvektor  $\mathbf{X}^{S/C}$  vom satellitenfesten Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$  in den Koordinatenvektor  $\mathbf{X}$  bezüglich des raumfesten Bezugssystems  $\mathbf{I}^*$  nach (3.25) mit Hilfe der Transformationsmatrix  $(\mathbf{R}^{S/C})^{-1}$  überführt. Die gesuchte Transformationsmatrix  $(\mathbf{R}^{S/C})^{-1}$  kann entsprechend (3.26) mit Hilfe der Quaternionen  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  aufgestellt werden. Eine Veranschaulichung der Quaternionen gelingt mit ihrer Definition aus (3.27) (Schwintzer et al., 2002): Diese setzen sich aus den Komponenten  $d_x^0, d_y^0, d_z^0$ , welche die Lage der normierten Drehachse  $\mathbf{d}^0$  bezüglich  $\mathbf{B}^{S/C}$  beschreiben, sowie dem zugehörigen Drehwinkel  $\delta$ , der die Koordinaten  $\mathbf{X}^{S/C}$  in die Koordinaten  $\mathbf{X}$  überführt, zusammen. Die Darstellung einer Drehung durch 4 Quaternionen ist überbestimmt, da eine Drehung im dreidimensionalen Raum vollständig durch drei Parameter beschrieben werden kann. Ein Zusammenhang zwischen dem vierten Quaternion und den drei anderen Quaternionen ist in der Definition in (3.27) gegeben, mit der die Transformationsmatrix  $(\mathbf{R}^{S/C})^{-1}$  vollständig durch drei Quaternionen aufgestellt werden könnte.

**Box 3.9: Transformation zwischen Akzelerometersystem und raumfestem Bezugssystem**

Transformation zwischen Akzelerometersystem  $\mathbf{B}^{ACC}$  und satellitenfestem Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$

$$\mathbf{X}^{S/C} = (\mathbf{R}^{ACC})^{-1} \cdot \mathbf{X}^{ACC} \quad \text{mit} \quad (\mathbf{R}^{ACC})^{-1} = \mathbf{R}_1(-\pi/2)\mathbf{R}_3(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{S/C} &= (X^{S/C}, Y^{S/C}, Z^{S/C})^T && \text{Koordinaten des Vektors bezüglich } \mathbf{B}^{S/C} \\ \mathbf{X}^{ACC} &= (X^{ACC}, Y^{ACC}, Z^{ACC})^T && \text{Koordinaten des Vektors bezüglich } \mathbf{B}^{ACC} \end{aligned}$$

Transformation zwischen satellitenfestem Referenzsystem  $\mathbf{B}^{S/C}$  und raumfestem Bezugssystem (CIS)  $\mathbf{I}^*$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{R}^{S/C})^{-1} \cdot \mathbf{X}^{S/C} \quad (3.25)$$

mit

$$(\mathbf{R}^{S/C})^{-1} = \begin{bmatrix} 2q_1^2 + 2q_4^2 - 1 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & 2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_2^2 + 2q_4^2 - 1 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & 2q_3^2 + 2q_4^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Die Rotation ist hierbei in *Quaternionen* angegeben:

$$\begin{aligned} q_1 &= d_x^0 \cdot \sin(\delta/2) && \text{normierte Drehachse: } \mathbf{d}^0 = [d_x^0, d_y^0, d_z^0]^T; |\mathbf{d}^0| = 1 \\ q_2 &= d_y^0 \cdot \sin(\delta/2) && \text{Drehwinkel: } \delta \\ q_3 &= d_z^0 \cdot \sin(\delta/2) && \text{Zusammenhang zwischen den Quaternionen:} \\ q_4 &= \cos(\delta/2) && q_4^2 = 1 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

### Die Transformationen zwischen den Referenzsystemen im Überblick

Ein Überblick über die zur CHAMP-Datenanalyse benötigten Referenzsysteme inklusive ihrer Transformationen ist in Abbildung 3.7 gegeben.

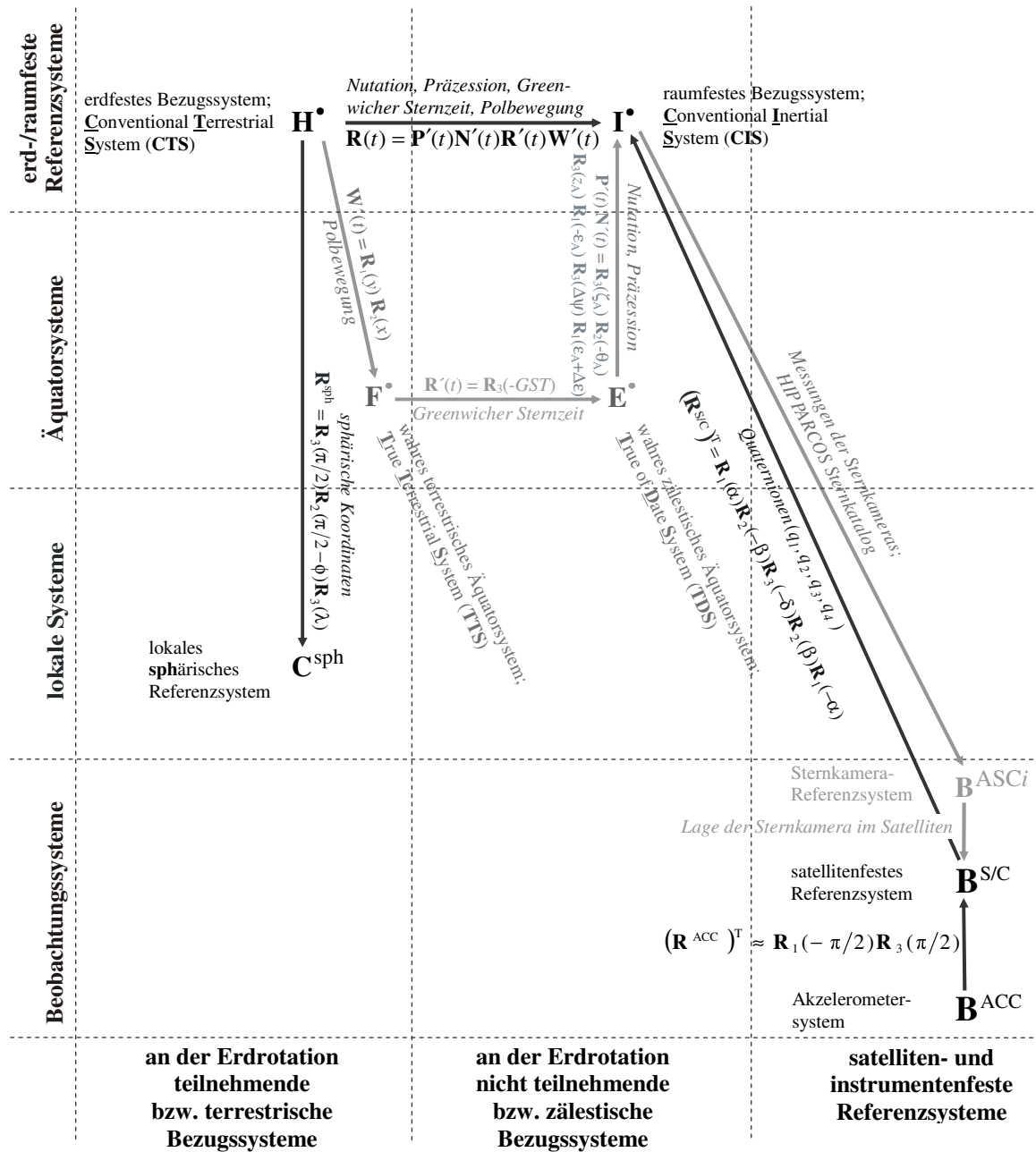


Abbildung 3.7: Überblick über die zur CHAMP-Datenanalyse benötigten Referenzsysteme und Transformationen.

In Anlehnung an Richter (1986) sind die Referenzsysteme, je nach Lage ihrer Grundebene, in die (in Abbildung 3.7 horizontal gegliederten) Kategorien *Beobachtungssysteme*, *lokale Systeme* und *Äquatorsysteme* aufgeteilt. Während sich die *Äquatorsysteme*, wie ihr Name andeutet, an der Äquatorebene der Erde orientieren, fällt die Grundebene der *Lokalen Systeme* mit der Tangentialebene an die Kugel bzw. an das Ellipsoid zusammen, weswegen eine Ähnlichkeit dieser Systeme mit den Horizontsystemen besteht. Die Grundebene der *Beobachtungssysteme* ist durch die Lage des jeweiligen Messinstruments vorgegeben. Von den Äquatorsystemen wurden als eigene Kategorie die *erd- und raumfesten Referenzsysteme* ausgegliedert, da trotz einer gewissen Ähnlichkeit aufgrund der Polbewegung und Präzession deren Grundebenen nicht mehr exakt mit der Äquatorebene übereinstimmen.

In Abbildung 3.7 ist eine weitere Feineinteilung der Systemanordnung in waagrechter Richtung gegeben. Je nachdem, ob die Referenzsysteme an der Erdrotation teilnehmen oder nicht, unterscheidet man zwischen *terrestrischen* oder *zälestischen* Bezugssystemen. Entscheidend für diese Einteilung ist, ob die Rotation der Greenwicher Sternzeit  $\mathbf{R}_3(-GST)$  berücksichtigt wurde. Alle weiteren Effekte der Erdrotation spielen dabei zunächst keine Rolle, weswegen die Bezeichnungen terrestrisch/zälestisch in dem einen oder anderen Fall nicht ganz exakt sein mögen. Unabhängig von

der Erdrotation, jedoch durch die Lage des Satelliten bestimmt sind die *satelliten- und instrumentenfesten Referenzsysteme*, die eine weitere Einteilung in der Waagerechten bilden.

### 3.6 Zeitsysteme

Für die Erfassung der Erdrotation in diesem Kapitel wurden bereits mehrere Zeitsysteme (TT, UTC, UT1, GMST, GAST) verwendet, die für eine hochgenaue Transformation zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem ebenfalls sehr genau bekannt sein müssen. So ist diese Transformation nur dann präzise möglich, wenn die Rotation um den zälestischen Ephemeridenpol durch die zugehörige, an die Erdrotation gebundene wahre Greenwicher Sternzeit genau genug erfasst wird. Die Satellitenbewegung hingegen gehorcht den Newton'schen Gesetzen, deren exakte Formulierung nicht nur ein räumliches Inertialsystem voraussetzt, sondern auch ein vollkommen gleichförmiges ablaufendes Zeitmass, eine *Inertialzeit*. Bei der Analyse von Satellitenbeobachtungen, speziell bei der über Signallaufzeiten realisierten GPS-Entfernungsmessung, spielen für gute Ergebnisse neben der hochgenauen Messtechnik auch die Berücksichtigung relativistischer Effekte eine Rolle, da die Satellitenuhren sich mit großer Geschwindigkeit im Gravitationsfeld bewegen. Ein ähnlicher Effekt muss auch bei der Planetenbewegung berücksichtigt werden. Aus diesen Betrachtungen wird klar, dass der Parameter „Zeit“ je nach Anwendung eine verschiedene Bedeutung hat. Die Zeitsysteme lassen sich in 3 Gruppen einteilen: diese basieren entweder auf der (unregelmäßigen) Erdrotation, der (gleichförmigen) Atomzeit oder auf der Bahnbewegung der Himmelskörper (und somit auf der Relativistik). Die wichtigsten Zeitsysteme sind im Folgenden angegeben, deren Transformationsbeziehungen finden sich in Abbildung 3.8.

*Auf der Erdrotation basierte Zeitsysteme:*

- GAST wahre Greenwicher Sternzeit (*Greenwich Apparent Sidereal Time*)
- GMST mittlere Greenwicher Sternzeit (*Greenwich Mean Sidereal Time*)
- UT1 Weltzeit (*Universal Time 1*  $\hat{=}$  (*GMT Greenwich Mean Time*))

*Auf Atomzeit basierende Zeitsysteme:*

- TAI Internationale Atomzeit (*Temps Atomique International*)
- UTC Koordinierte Weltzeit (*Universal Time Coordinated*)
- GPST GPS-Systemzeit (*Global Positioning System Time*)
- MEZ Mitteleuropäische Zeit
- MESZ Mitteleuropäische Sommerzeit

*Auf Bahnbewegung und Relativitätstheorie basierende Zeitsysteme:*

- TT Terrestrische Zeit (*Terrestrial Time*, auch TDT *Terrestrial dynamical Time*)

Die Anzahl der Schaltsekunden zwischen TAI und UTC beträgt für den 2-jährigen Zeitraum des analysierten kinematischen Orbits  $n = 32$  s. Die Zeitformate der für diese Arbeit verwendeten Datensätze sind: GPST (kinematischer/reduziert-dynamischer Orbit, Akzelerometerdaten des GFZ), TT (dynamische Orbits des GFZ). Hintergründe und Details über die Zeitsysteme sind u. a. in der Standardliteratur zur (Geodätischen) Astronomie oder der Physikalischen Geodäsie wie beispielsweise Seidelmann (1992) oder Torge (2001) zu finden.

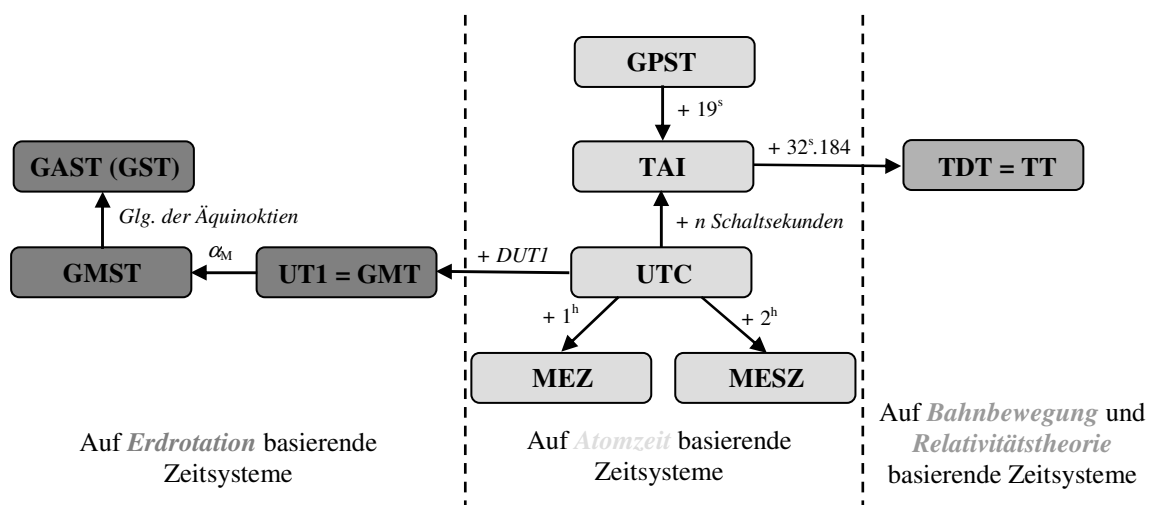


Abbildung 3.8: Transformation zwischen den Zeitsystemen.



## 4 Das Gravitationsfeld der Erde

### 4.1 Entwicklung des Gravitationsfeldes in Kugelflächenfunktionen

Die Grundlage zur Beschreibung des Gravitationsfeldes bildet das bereits von Newton (1687) in den „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ formulierte *Newton'sche Gravitationsgesetz*, welches die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_{\text{grav}}$  zwischen zwei Punktmassen beschreibt. Eine Anwendung dieses Gravitationsgesetzes auf infinitesimale Massen ermöglicht die mathematische Beschreibung des Gravitationsfeldes ausgedehnter Körper wie z.B. der Erde mit Hilfe einer Integralformel. Da das Gravitationsfeld (bzw. der Gravitationsvektor  $\mathbf{\Gamma}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{\text{grav}}/m$ ) wirbelfrei ( $\text{rot}\mathbf{\Gamma}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = 0$ ) und damit konservativ ist (z.B. Heiskanen und Moritz, 1967; Torge, 2001), lässt sich ein zugehöriges skalares Gravitationspotential  $U(\mathbf{x})$  gemäß  $\mathbf{\Gamma}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \text{grad}U(\mathbf{x})$  finden, welches der (massenspezifischen) potentiellen Energie eines Körpers im Gravitationsfeld entspricht. Für das Gravitationspotential  $U(\mathbf{x})$  eines Körpers mit einer beliebigen kontinuierlichen Dichteverteilung  $\rho(\mathbf{x}^*)$  ergibt sich schließlich das „*Newton-Integral*“ (Gravitationskonstante  $g$ , Quellpunkt  $\mathbf{x}^*$ , Auf- bzw. Berechnungspunkt  $\mathbf{x}$ ) nach (4.1). Für die Berechnung des wahren Gravitationspotentials sind diese Integralformeln allerdings ungeeignet, da einerseits die Dichteverteilung im Erdinneren sowie die Form der Erde (die Integralgrenzen) nicht oder nur unzureichend bekannt sind und andererseits selbst bei bekannter Dichteverteilung das Integral nur mit numerischen Methoden unter großem Rechenaufwand lösbar wäre. Vielmehr bietet sich eine andere Formulierung des Gravitationsfeldes an, die auf einer differentiellen Beschreibung durch die Feldgleichungen des Gravitationsfeldes (4.2) beruht: Dies sind die Poisson-DGL, die innerhalb der Erdmassen gilt und die Laplace-DGL (Gravitationsfeld ist quellenfrei im masselosen Raum) als Spezialfall der ersteren, die im masselosen Außenraum der Erde gilt. Mit Hilfe eines Separationsansatzes (4.3) können aus der Laplace-DGL zwei Repräsentationen für das Gravitationsfeld der Erde gefunden werden: eine so genannte „Außenraumentwicklung“ (4.4), die außerhalb ( $r \geq R$ ) der alle Erdmassen einhüllenden „Brillouin-Kugel (Radius  $R$ )“ gilt und eine „Innenraumentwicklung“ (4.5), die zusätzlich innerhalb der Brillouin-Kugel ( $r < R$ ) für außerhalb der Aufpunktkugel ( $r^* > r$ ) liegende Massen benutzt werden muss. Zur mathematischen Beschreibung des terrestrischen Gravitationsfeldes im masselosen Raum wird normalerweise nur die Außenraumentwicklung verwendet, da diese auch für Punkte innerhalb der Brillouin-Kugel ausreichend gut approximiert (Krarup, 1969). Die Entwicklung für aufsteigende Potenzen in  $r$  (Innenraumentwicklung) spielt eine Rolle für die Modellierung des gezeitenerzeugenden Potentials, da die Massen der Himmelskörper sich außerhalb der Aufpunktkugel ( $r^* > r$ ) befinden.

**Box 4.1: Feldgleichungen des Gravitationspotentials  $U(\mathbf{x})$  und deren Lösungen**

1. Möglichkeit: Lösung des Newton-Integrals bei bekannter Massenverteilung und Form der Erde:

$$U(\mathbf{x}) = g \iiint_{\text{Erde}} \frac{\rho(\mathbf{x}^*)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|} d^3\mathbf{x}^* \quad (4.1)$$

2. Möglichkeit: Lösung der partiellen Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes:

$$\text{div grad}U(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & ; \text{Laplace-Differentialgleichung (harmonisch, ausserhalb der Massen)} \\ -4\pi g\rho(\mathbf{x}) & ; \text{Poisson-Differentialgleichung (anharmonisch, innerhalb der Massen)} \end{cases} \quad (4.2)$$

Lösung der Laplace-Differentialgleichung: Separationsansatz in sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \phi, r)$ :

$$U(\lambda, \phi, r) = R(r) \cdot \Lambda(\lambda) \cdot \Phi(\phi) \quad (4.3)$$

Gravitationspotential im masselosen Raum:

Gravitationspotential im Außenraum der Brillouin-Kugel ( $r \geq R$ ), Nebenbedingung  $U(r \rightarrow \infty) = 0$ :

$$U(\lambda, \phi, r) = \frac{gm_E}{R_E} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_E}{r}\right)^{l+1} \bar{P}_{l,m}(\sin\phi) (c_{l,m} \cos(m\lambda) + s_{l,m} \sin(m\lambda)) \quad (4.4)$$

Gravitationspotential im Innenraum der Brillouin-Kugel ( $r < R$ ), Nebenbedingung  $U(r=0)$  beschränkt:

$$U(\lambda, \phi, r) = \frac{gm_E}{R_E} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r}{R_E}\right)^l \bar{P}_{l,m}(\sin\phi) (c'_{l,m} \cos(m\lambda) + s'_{l,m} \sin(m\lambda)) \quad (4.5)$$

Die Außenraumentwicklung in (4.4) wird als Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials der Erde bezeichnet, wobei  $r^{-l-1}P_{l,m}(\sin\phi)\cos(m\lambda)$ ,  $r^{-l-1}P_{l,m}(\sin\phi)\sin(m\lambda)$  Kugelfunktionen von Grad  $l$  und Ordnung  $m$  sind. Anstatt der (nicht normierten) zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $P_{l,m}$  (originäre Teillösung der Separation) werden normalerweise jedoch die vollständig normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $\bar{P}_{l,m}$  eingesetzt, da diese eine höhere numerische Stabilität sowie die Orthonormalität (4.9) der Kugelflächenfunktionen  $e^{l,m}(\lambda, \phi)$  (4.7) garantieren. Die Kugelfunktionsentwicklungen in (4.4) bzw. (4.5) sind durch Herausziehen der Erweiterungsgrößen  $gm_E/R_E$  (Zentralfeld) sowie  $(R_E)^{l+1}$  bzw.  $(1/R_E)^l$  so formuliert, dass die darin auftretenden, zunächst noch unbekannt

Kugelfunktionskoeffizienten  $c_{l,m}, s_{l,m}$  bzw.  $c'_{l,m}, s'_{l,m}$  dimensionslos sind und der Kugelfunktionskoeffizient  $c_{0,0}$  den Wert 1 annimmt.  $gm_E$  ist das Produkt aus Newton'scher Gravitationskonstante  $g$  und Erdmasse  $m_E$  und wird Geozentrische Gravitationskonstante genannt,  $R_E$  ist der Erdradius.

Die Kugelfunktionsentwicklung (4.4) bietet gegenüber der Integralformel (4.1) den Vorteil, dass — bei bekannten Kugelfunktionskoeffizienten — das Gravitationspotential an jedem beliebigen Punkt außerhalb der Erde durch Auswertung der Reihenentwicklung bestimmt werden kann.

Häufig wird auch die Darstellung in (4.6) für die Außenraumentwicklung verwendet, in der die Produkte aus den normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $\bar{P}_{l,m}(\sin\phi)$  und den Zirkularfunktionen  $\cos(m\lambda), \sin(m\lambda)$  zu den vollständig normierten Kugelflächenfunktionen  $e^{l,m}(\lambda, \phi)$  nach (4.7) zusammengefasst werden. Kugelflächenfunktionen sind im Gegensatz zu Kugelfunktionen, die räumlich und somit dreidimensional definiert sind, nur auf einer Kugeloberfläche definiert. Um die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen zu erreichen, müssen die zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $P_{l,m}(\sin\phi)$  gemäß (4.8) normiert werden.

**Box 4.2:** „Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials für den Außenraum“

$$U(\lambda, \phi, r) = \frac{gm_E}{R_E} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{R_E}{r}\right)^{l+1} e^{l,m}(\lambda, \phi) \cdot \begin{cases} c_{l,m} & ; m \geq 0 \\ s_{l,|m|} & ; m < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

„Definition der (vollständig normierten) Kugelflächenfunktionen“

$$e^{l,m}(\lambda, \phi) = \begin{cases} \bar{P}_{l,m}(\sin\phi) \cos(m\lambda) & ; m > 0 \\ \bar{P}_{l,0}(\sin\phi) & ; m = 0 \\ \bar{P}_{l,|m|}(\sin\phi) \sin(|m|\lambda) & ; m < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

„Zusammenhang zwischen normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art und (unnormierten) zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art“

$$\bar{P}_{l,m}(\sin\phi) = \begin{cases} \sqrt{2(2l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(\sin\phi) & ; m > 0 \\ \sqrt{2l+1} P_{l,0}(\sin\phi) & ; m = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Vollständig normierte Kugelflächenfunktionen besitzen eine Reihe von vorteilhaften Eigenschaften: (i) sie erfüllen die *Orthonormalitätsrelationen* (4.9), die beispielsweise zur Lösung von Oberflächenintegralen eingesetzt werden können; (ii) jede beliebige quadratintegrierbare Funktion  $f(\lambda, \phi)$  auf der Kugeloberfläche kann als *Entwicklung in Kugelflächenfunktionen* (4.10) angegeben werden, wobei sich mit den Orthonormalitätsrelationen eine einfache Integralformel zur Berechnung der Koeffizienten  $c_{l,m}^f$  (4.11) herleiten lässt. Diese Formel lässt sich mit numerischen Quadraturverfahren besonders gut für diskret gegebene Werte anwenden, die z.B. nach Fortsetzung nach unten und Interpolation oder Kleinst-Quadrate-Prädiktion/Kollokation (Heiskanen und Moritz, 1967; Moritz, 1980; Weigelt, 2007) auf einem regelmäßigen  $(\Delta\lambda \times \Delta\phi)$ -Gitter vorliegen. Eine aufwendige Formulierung und Lösung eines Gleichungssystems (oftmals sehr großer Dimension) zur Bestimmung der Koeffizienten kann entfallen. Dies wird z.B. bei der Lösung von Randwertproblemen oder Space-Wise-Ansätzen (z.B. Colombo, 1981; Rummel et al., 1993; Migliaccio et al., 2004) in der Satellitengeodäsie eingesetzt.

(i) *Orthonormalitätsrelationen*

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} e^{l,m}(\lambda, \phi) e^{k,j}(\lambda, \phi) \cos\phi \, d\lambda \, d\phi = 4\pi \delta_{lk} \delta_{mj} \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

(ii) *Kugelfunktionsentwicklung einer beliebigen, quadratintegrierbaren Funktion*

$$(4.10) \quad f(\lambda, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}^f e^{l,m}(\lambda, \phi) \quad \text{mit} \quad c_{l,m}^f = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} f(\lambda, \phi) e^{l,m}(\lambda, \phi) \cos\phi \, d\lambda \, d\phi \quad (4.11)$$

Bei der Entwicklung des Gravitationspotentials in Kugel(flächen)funktionen handelt es sich um eine spektrale Analyse (s. auch Anhang A.5), wobei der Grad  $l$  die Auflösung (Frequenz) mit der Wellenlänge  $\lambda = 40000/l$  [km] beschreibt und die Kugelfunktionskoeffizienten die zugehörigen Amplituden angeben. Der Dämpfungsterm  $(R_E/r)^{l+1}$  erzeugt dabei eine Abnahme der Amplitude (Signalstärke) mit zunehmendem Abstand von der Erde. Die Entwicklung des Gravitationspotentials in Kugel(flächen)funktionen eignet sich aufgrund der Tatsache, dass sie eine spektrale Analyse darstellt, zur Beschreibung eines globalen Gravitationsfeldes. Die Erfassung feinerer Detailstrukturen des Gravitationsfeldes (z.B. Gebirgsmassen wie die Alpen) mittels Kugelflächenfunktionen ist jedoch numerisch sehr aufwändig. Hierfür eignet sich eher die Verwendung stärker räumlich lokalisierender Basisfunktionen wie sphärische Wavelets. Diese Diskussion wird am Ende des Kapitels nochmals aufgegriffen.

Die Auflösung des Gravitationsfeldes mit Kugelflächenfunktionen wird im Allgemeinen in langwellige, mittelwellige, kurzwellige und gelegentlich auch sehr kurzwellige Anteile aufgeteilt. Für diese Zuordnung existieren in der Literatur unterschiedliche Möglichkeiten wie z.B. in Reigber (1989) und Schäfer (2001). Im Zusammenhang mit den neuen Satellitenmissionen bietet sich die folgende Einteilung an, bei der jedem Auflösungsbereich eine der neuen Satellitenmissionen zugeordnet werden kann:

|   | lang         | Mittel     | kurz       | sehr kurz |
|---|--------------|------------|------------|-----------|
| <b>Grad <math>l</math></b>              | 1–70         | 71–150     | 151–300    | > 301     |
| <b>Wellenlänge <math>\lambda</math></b> | 40000–571 km | 571–266 km | 266–133 km | < 133 km  |
| <b>Anzahl der Koeffizienten</b>         | 5037         | 17 617     | 67 497     | $\infty$  |

**Tabelle 4.1:** Einteilung der Kugel(flächen)funktionen (Grad  $l$  und zugehörige Wellenlänge  $\lambda$ ) in lang-, mittel-, kurz- und sehr kurzwellige Auflösungen sowie die Anzahl der jeweils notwendigen Koeffizienten.

Das Messprinzip und Missionslayout der CHAMP-Mission sind dabei so ausgelegt, dass der langwellige Anteil des Gravitationsfeldes bestimmt werden kann, GRACE erlaubt die zusätzliche Verbesserung des mittelwelligen Anteiles und GOCE soll schließlich auch noch kurzwellige Anteile messen. Sehr kurzwellige Anteile sind nur noch mit terrestrischen Messungen erfassbar, da bei Satelliten die Signaldämpfung, hervorgerufen durch den Term  $(R_E/r)^{l+1}$ , zu stark ist. Wie zu sehen ist, explodiert die Anzahl der zur Erfassung der einzelnen Bereiche notwendigen Gravitationsfeldkoeffizienten förmlich. Zur vollständigen Beschreibung des Gravitationsfeldes bis Grad  $L$  sind  $(L+1)^2$  Koeffizienten notwendig, was die zuvor erwähnte mühevollere Erfassung von feinen Detailstrukturen des Gravitationsfeldes mit Kugelfunktionsentwicklungen bestätigt.

Die hier beschriebenen Grundlagen sowie weitere Details zur Darstellung und mathematischen Modellierung des Gravitationsfeldes sind in der Standardliteratur zur Physikalischen Geodäsie (z.B. Heiskanen und Moritz, 1967; Pick et al., 1973; Torge, 2001, 2003) zu finden. Hinweise und Formeln für die Berechnung von Kugelflächenfunktionen, speziell den vollständig normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art sowie den Zirkularfunktionen können Anhang A entnommen werden.

#### 4.1.1 Interpretation und Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten

Für die Herleitung der Kugelfunktionsentwicklung besteht neben der Separation der Laplace-DGL noch eine zweite Möglichkeit, bei welcher der reziproke Abstand  $1/\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|$  in eine Taylor-Reihe nach sphärischen Koordinaten entwickelt wird. Das Einsetzen dieser Entwicklung in das Newtonintegral (4.1) führt dann ebenfalls auf die Kugelfunktionsentwicklung in (4.4), wobei sich für die Kugelfunktionskoeffizienten  $c_{l,m}, s_{l,m}$  folgende Integralformeln finden lassen (z.B. Torge, 2001, 2003):

$$\begin{aligned}
 c_{l,m} &= \frac{1}{m_E} \frac{1}{(R_E)^l} \frac{1}{2l+1} \iiint_{\text{Erde}} \rho(\mathbf{x}^*) (r^*)^l \bar{P}_{l,m}(\sin \phi^*) \cos(m\lambda^*) d^3\mathbf{x}^* \\
 s_{l,m} &= \frac{1}{m_E} \frac{1}{(R_E)^l} \frac{1}{2l+1} \iiint_{\text{Erde}} \rho(\mathbf{x}^*) (r^*)^l \bar{P}_{l,m}(\sin \phi^*) \sin(m\lambda^*) d^3\mathbf{x}^*
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Diese Integralformeln (4.12) sind nützlich für eine physikalische Interpretation der Kugelfunktionskoeffizienten, insbesondere derjenigen niedrigen Grades  $l$  (z.B. Torge, 2001, 2003; Grafarend et al., 2000). Die Berechnung der Koeffizienten mit diesen Formeln ist allerdings in der Praxis aus den gleichen Gründen wie beim Newton-Integral nur schlecht zu realisieren. Vielmehr müssen die Kugelfunktionskoeffizienten durch geeignete Messungen und Auswertungsverfahren bestimmt werden.

Bis heute wurde eine Vielzahl von Messverfahren zur Bestimmung von Gravitationsfeldparametern entwickelt, mit denen im Wesentlichen die Funktionale des Gravitationsfeldes, nämlich

- das Gravitationspotential  $U(\mathbf{x})$
- der Gravitationsvektor  $\Gamma_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \text{grad}U(\mathbf{x})$
- der Gravitationstensor  $\mathbf{M} = \text{grad}(\Gamma_{\text{grav}}(\mathbf{x})) = \text{grad} \otimes \text{grad}U(\mathbf{x})$

in-situ erfasst werden oder zumindest damit in Verbindung gebracht werden können. Die wichtigsten Verfahren zur Messung dieser drei das Gravitationsfeld beschreibender Größen sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Neben den „traditionellen“ Messmethoden, welche hauptsächlich die terrestrischen Schweremessungen inklusive Flug- und Schiffsgravimetrie sowie inzwischen auch die Altimetrie umfassen, sind auch die neuesten Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und

GOCE einschließlich einiger Möglichkeiten (mit Referenzen), sie mit dem Gravitationsfeld in Verbindung zu bringen, aufgenommen.

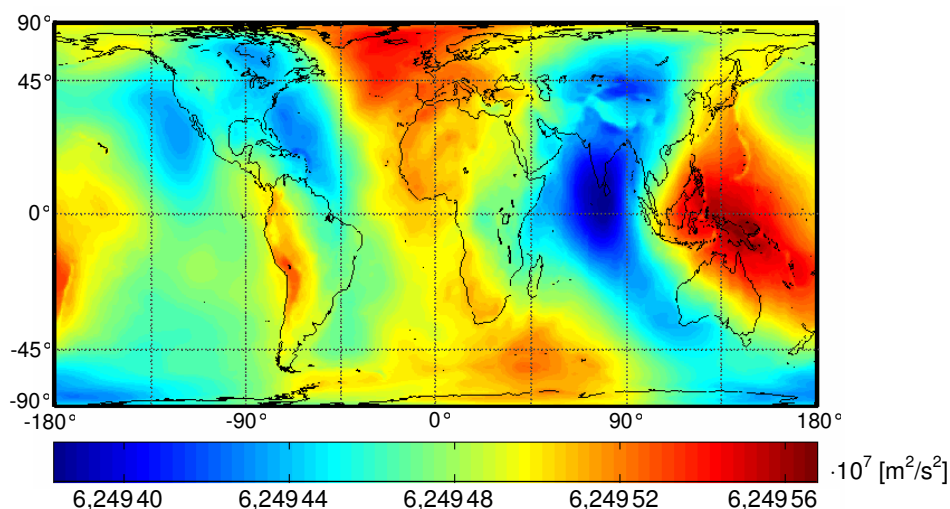
|  |  |
|--|--|
| Gravitationspotential                            | Erfassung von geopotentiellen Knoten (Potentialdifferenzen) mit gravimetrischem Nivellement, Bestimmung von Geoidundulationen (und somit des Störpotentials mit der Bruns-Formel) durch Altimetrie oder GPS-Vermessung der Erdoberfläche in Verbindung mit gravimetrischem Nivellement, Formulierung von high-low-SST <sup>1)</sup> (CHAMP) und low-low-SST <sup>2)</sup> (GRACE) als Energiebilanzmethode |
| Gravitationsvektor<br>(Betrag, Richtung, Vektor) | terrestrische Schweremessungen (relativ, absolut), Flug-/Schiffsgravimetrie (engl.: <i>airborne/ship-borne gravimetry</i> ), Formulierung von high-low-SST <sup>3)</sup> (CHAMP) und low-low-SST <sup>4)</sup> (GRACE) als Beschleunigungsansatz   |
| Gravitationstensor                               | Satellitengradiometrie (GOCE), Formulierung von low-low-SST (GRACE) als eindimensionale Gradiometrie <sup>5)</sup>   |

1) Gerlach et al., 2003b; 2) Jekeli, 1999; 3) Reubelt et al., 2003a; 4) Grafarend et al., 2003; 5) Keller und Sharifi, 2005

**Tabelle 4.2:** Messverfahren zur Messung von Gravitationspotential/-vektor/-tensor und damit der unbekanntenen Kugelfunktionskoeffizienten

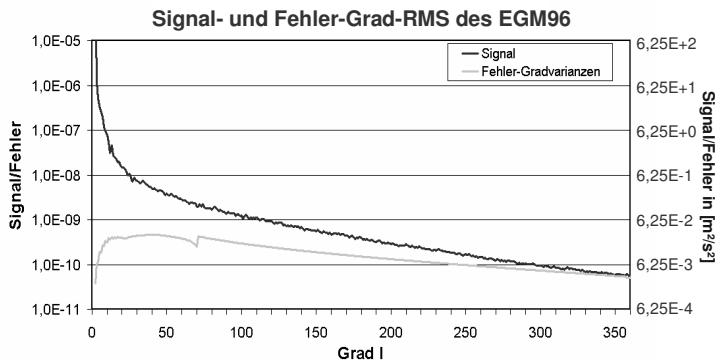
Bei manchen Verfahren können die Funktionale des Gravitationsfeldes nicht in-situ erfasst werden, sondern nur als akkumulierte Messung, wie beispielsweise Bahnstörungen oder die direkte Auswertung von high-low-SST und low-low-SST (auf Ebene der Messungen und/oder Koordinaten). Diese Messungen sind also eine Summe der Gravitationswirkung seit einem Referenzzeitpunkt. Deshalb muss zu ihrer Auswertung eine Differential- oder Integralgleichung formuliert werden, die aber im Normalfall den Gravitationsvektor mit den zu bestimmenden Kugelfunktionskoeffizienten enthält. Die verschiedenen Messverfahren konkurrieren jedoch nicht nur, sie ergänzen sich gegenseitig, da aufgrund des Messprinzips, des ausgemessenen Gebietes (global oder regional, auf den Landmassen oder dem Meer), der Messdichte sowie des sensitiven Messbereiches unterschiedliche Auflösungen des Gravitationsfeldes bestimmt werden.

Das bis zum Start der CHAMP-Mission genaueste globale Gravitationsfeld der Erde in Form einer Kugelfunktionsentwicklung war das in Abbildung 4.1 abgebildete *EGM96* (engl.: *Earth Gravity Model 1996*, Lemoine et al., 1996), das aus verschiedenen Datensätzen bis Grad und Ordnung 360/360 entwickelt wurde. Bis Grad/Ordnung 70/70 ist es eine Kombinationslösung aus Altimetriedaten von TOPEX/POSEIDON, ERS\_1 und GEOSAT, Normalgleichungen aus Oberflächenschweremessungen sowie Trackingdaten zu über 30 Satelliten. Die Kugelfunktionskoeffizienten von Grad 71 bis 359 wurden mit Hilfe einer blockdiagonalen Auswertemethode hauptsächlich aus verbesserten globalen Schweredaten der *DMA* (engl.: *Defense Mapping Agency*), den neuesten Fluggravimetriekampagnen der Arktis und Grönland sowie aus abgeleiteten Anomalien der Altimetriemission GEOSAT bestimmt, die Kugelfunktionskoeffizienten von Grad/Ordnung 360/360 stammen aus der Quadratlösung.



**Abbildung 4.1:** Das Gravitationspotential der Erde in  $[m^2/s^2]$  auf der Oberfläche der Referenzkugel mit  $R = 6378136,3$  m; Gravitationsfeldmodell: EGM96 bis Grad/Ordnung 360/360 (maximale Entwicklung) ohne Koeffizient  $c_{2,0}$ ; Kartenprojektion: Trystan Edwards Cylindrical Projection.

Charakteristisch für solche Darstellungen des Gravitationsfeldes sind die „Senke“ über dem Indischen Ozean und der „Berg“ über Neuguinea, die durch Massenunregelmäßigkeiten im Erdinneren verursacht werden. Nach der Formel von Bruns (1878;  $N = \delta W/\gamma$ ,  $N \hat{=}$  Geoidundulation,  $\delta W \hat{=}$  Störpotential,  $\gamma \hat{=}$  Oberflächenschwere) ergibt sich ein Unterschied von ca. 200 m zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt des Geoids. Eine häufig gebrauchte Darstellungsweise für die spektrale Repräsentation des Signals bzw. des Fehlers (Standardabweichung) sind Signal- bzw. Fehler-Grad-RMS ( $Signal_l$  bzw.  $\sigma_l$ ), die für jede Auflösung mit (4.13) bzw. (4.14) aus den Kugelfunktionskoeffizienten  $c_{l,m}, s_{l,m}$  eines Grades  $l$  sowie ihren Standardabweichungen  $\sigma_{c_{l,m}}, \sigma_{s_{l,m}}$  berechnet werden können (RMS: *quadratische Mittelwerte*, engl.: *Root Mean Square*). In Abbildung 4.2 sind das Signal und der Fehler des EGM96 als Grad-RMS angegeben. Charakteristisch für Kugelfunktionsmodelle ist einerseits die exponentielle Abnahme des Signals und des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses mit zunehmenden Grad  $l$ . Vor allem bei Satelliten-Gravitationsfeldmodellen ist eine schnelle Abnahme des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses infolge eines starken Anstiegs des Rauschens mit zunehmendem Grad  $l$  zu bemerken. Besonders auffällig ist der Knick in der Fehler-Grad-RMS-Kurve des EGM96 bei Grad 70, der durch die unterschiedlichen benutzten Datenquellen (Satellitendaten für  $l \leq 70$ , sonstige Daten für  $l > 70$ ) verursacht wird. Aus Abbildung 4.2 geht nach der Bruns-Formel hervor, dass ein Kugelfunktionskoeffizient von Grad 10 im Mittel eine Geoidundulation von ca. 60 cm verursacht, während dies bei einem Kugelfunktionskoeffizient von Grad 100 hingegen nur noch ca. 6 mm ausmacht. Dennoch kann ein Abbruch der Entwicklung des Gravitationsfeldes bei Grad 100 zu einem *omission*-Fehler (Vernachlässigungsfehler; Müller, 2001) im m-Bereich führen, da eine unendliche Zahl von Kugelfunktionskoeffizienten mit kleinen Werten im mm-Bereich und kleiner vernachlässigt wird. Somit ist bei einem Geoidfehler für einen maximalen Entwicklungsgrad  $L$  immer zu unterscheiden zwischen dem Abbruchfehler und einem durch die Ungenauigkeiten der Koeffizienten (Standardabweichungen) hervorgerufenen kumulativen Geoidfehler (*commission error*, Müller, 2001). In den Kugelfunktionskoeffizienten ist, wenn diese durch ein Gleichungssystem bestimmt werden, auch noch ein *Aliasingfehler* enthalten. Dieser entsteht durch die Schätzung von nur einer begrenzten Anzahl von unbekanntem Gravitationsfeldparametern aus Messungen, die eigentlich das komplette, nur durch unendlich viele Koeffizienten darstellbare Signal enthalten. Bei Satellitenbeobachtungen stellt der Aliasingfehler jedoch aufgrund der stärkeren Signaldämpfung der Anteile höheren Grades  $l$  (bedingt durch  $(R_E/r)^l$ ) ein geringeres Problem dar als bei terrestrischen Daten. Wird bei Satellitendaten die maximale Auflösung  $L$  groß genug gewählt, so ist das verbleibende, nicht parametrisierte Restsignal sehr klein und oftmals vernachlässigbar.



Definition von Signal- und Fehler-Grad-RMS:

$$Signal_l = \sqrt{\frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l (c_{l,m}^2 + s_{l,m}^2)} \quad ; \quad s_{l,0} = 0 \quad (4.13)$$

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l (\sigma_{c_{l,m}}^2 + \sigma_{s_{l,m}}^2)} \quad ; \quad \sigma_{s_{l,0}} = 0 \quad (4.14)$$

**Abbildung 4.2:** Signal- und Fehler-Grad-RMS des EGM96-Gravitationsfeldmodells, angegeben in folgenden Einheiten: dimensionslose Koeffizienten (linke Achse), Potential [ $m^2/s^2$ ] auf der Referenzkugel  $r = R_E$  (rechte Achse).

### 4.1.2 Der Gravitationsvektor

Der Gravitationsvektor  $\Gamma_{\text{grav}}$  ergibt sich nach (4.15) als Gradient (Tensor 1. Stufe) des Gravitationspotentials  $U$  und berechnet sich bezüglich der erdfesten, kartesischen Basis ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) nach (4.17). Da die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials  $U(\lambda, \phi, r)$  in sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \phi, r)$  erfolgt, ist auch die Bildung des Gradienten nach (4.16) bezüglich der krummlinigen, aber orthogonalen *sphärischen* Koordinaten  $(\lambda, \phi, r)$  besser geeignet. Der Gradient bezieht sich somit auf die lokale (sphärische) Basis ( $\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_r$ ). Da die (krummlinigen) sphärischen Koordinaten bzw. deren kovariante Tangentenvektoren  $\mathbf{g}_i$  orthogonal, aber nicht orthonormal sind, müssen diese noch mit Hilfe der Metrikoeffizienten  $g_{ij}$  normiert werden, was zu den Normierungsfaktoren in (4.16) führt. Die partiellen Ableitungen der Kugelfunktionsentwicklung von  $U$  können mit (4.18) gefunden werden, wobei die partiellen Ableitungen der normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $\bar{P}_{l,m}(\sin \phi)$  nach der Breite  $\phi$  mit Hilfe von Quasi-Rekursionsformeln (Anhang A) für eine numerisch effizienten Berechnung in einem Computerprogramm geschieht. Für die Transformation des Gradienten  $\Gamma_{\text{grav}}(\lambda, \phi, r)$  von der lokalen Basis in die erdfeste, kartesische Basis gibt es zwei Möglichkeiten: (i) direkte Transformation der Koordinaten des Gradienten  $\Gamma_{\text{grav}}(\lambda, \phi, r)$  mittels der Rotationsmatrix ( $\mathbf{R}^{\text{sph}}$ )<sup>T</sup> nach (4.19); (ii) die zur Formulierung des kartesischen Gradienten  $\Gamma_{\text{grav}}(x, y, z)$  nach (4.17) benötigten partiellen kartesischen Ableitungen des Gravitationspotentials können mit Hilfe der Kettenregel aus den partiellen sphärischen Ableitungen des Gravitationspotentials berechnet werden (4.20). Die darin enthaltenen partiellen Ableitungen der sphärischen Koordinaten nach den kartesischen Koordinaten  $\partial \lambda / \partial x_i, \partial \phi / \partial x_i, \partial r / \partial x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) können aus den partiellen

Ableitungen der kartesischen Koordinaten nach den sphärischen Koordinaten  $\partial x_i/\partial \lambda$ ,  $\partial x_i/\partial \phi$ ,  $\partial x_i/\partial r$  gemäß (4.21) bestimmt werden. Hierfür werden die Komponenten des kovarianten Metrikensors  $g_{ij}$  nach (4.22) benötigt, die sich aus den kovarianten Tangentenvektoren  $\mathbf{g}_i$  nach (4.23) zu  $(g_{11} = r^2 \cos^2 \phi, g_{22} = r^2, g_{33} = 1, g_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ ) ergeben (s. z.B. Klingbeil, 1966; Klotzek, 1995).

**Box 4.3:** „Gravitationsvektor als Gradient des Gravitationspotentials“

„allgemeine Darstellung“

$$\Gamma_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \text{grad}U(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

„Gradient in kartesischen Koordinaten“

$$(4.17) \quad \Gamma_{\text{grav}}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

„Gradient in sphärischen Koordinaten“

$$\Gamma_{\text{grav}}(\lambda, \phi, r) = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (4.16)$$

„partielle Ableitungen der Kugelfunktionsentwicklung“

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\lambda, \phi, r)}{\partial \lambda} &= \frac{g_{mE}}{R_E} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} m \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) (-c_{l,m} \sin(m\lambda) + s_{l,m} \cos(m\lambda)) \\ \frac{\partial U(\lambda, \phi, r)}{\partial \phi} &= \frac{g_{mE}}{R_E} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} (c_{l,m} \cos(m\lambda) + s_{l,m} \sin(m\lambda)) \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\sin \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial U(\lambda, \phi, r)}{\partial r} &= -\frac{g_{mE}}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (l+1) \left( \frac{R_E}{r} \right)^l \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) (c_{l,m} \cos(m\lambda) + s_{l,m} \sin(m\lambda)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

„Transformation des Gradienten von der sphärischen in die kartesische Basis“

Möglichkeit 1: Rotation des Gradienten

$$\Gamma_{\text{grav}}(x, y, z) = (\mathbf{R}^{\text{sph}})^T \Gamma_{\text{grav}}(\lambda, \phi, r) \quad (4.19)$$

Möglichkeit 2: Kettenregel

$$\Gamma_{\text{grav}}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x_I} \mathbf{e}_I = \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_I} + \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_I} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_I} \right) \mathbf{e}_I \quad ; \quad I = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

$$\text{mit den partiellen Ableitungen } \frac{\partial u^j}{\partial x_I} = \frac{1}{g_{jj}} \cdot \frac{\partial x^I}{\partial u^j} \quad ; \quad j, I = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

$$\text{dem kovarianten Metrikensor } g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (4.21)$$

$$\text{und den kovarianten Tangentenvektoren } \mathbf{g}_j = \frac{\partial x^I}{\partial u^j} \mathbf{e}_I \quad (4.23)$$

$$x_I = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \quad ; \quad u^j = (u^1, u^2, u^3) = (\lambda, \phi, r)$$

## 4.2 Alternative Repräsentationen des Gravitationsfeldes

### 4.2.1 Darstellung des Gravitationsfeldes mit ellipsoidisch-harmonischen Funktionen

Neben denen zur Darstellung des Gravitationsfeldes ungeeigneten kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  und den sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \phi, r)$  können weitere Parametrisierungen des dreidimensionalen Raumes gefunden werden, in denen eine Lösung der Laplace-DGL durch Separation möglich ist (Stäckel, 1897; Moon und Spencer, 1961; Grafarend, 1988). So gelingt die Separation für Jacobi-ellipsoidische Koordinaten  $(\lambda, \phi^*, u)$  (z.B. Thong und Grafarend, 1989), jedoch nicht für geodätische (Gauß-ellipsoidische) Koordinaten  $(L, B, H)$  (Grafarend, 1988).

Durch Lösung der Laplace-DGL (4.2) mit Hilfe eines Separationsansatzes in Jacobi-ellipsoidischen Koordinaten nach (4.24) erhält man nach Sondierung anhand von Nebenbedingungen schließlich die ellipsoidisch-harmonische Entwicklung des Gravitationspotentials  $U(\lambda, \phi^*, u)$  im Außenraum eines die gesamte Erdmasse einhüllenden Ellipsoids. Im Gegensatz zu den sphärischen Koordinaten ergibt sich außer für die Breite  $\phi^*$  auch für die „radiale“ Koordinate  $u$  die zugeordnete Legendre'sche DGL, von deren Lösungen nur die (zunächst noch komplexen) zugeordneten Legendre'schen Funktionen 2. Art  $Q_{l,m}(iu/\varepsilon)$  den Nebenbedingungen genügen (z.B. Hobson, 1965; Feistritzer, 1998). Numerisch stabiler sind allerdings die reellwertigen, stabilisierten, zugeordneten Legendre'schen Funktionen 2. Art  $Q_{l,m}^*(u/\varepsilon)$  (Thong und Grafarend, 1989). Durch Normierung mit  $1/Q_{l,m}^*(b/\varepsilon)$  sowie Herausziehen des Vorfaktors  $g_{mE}/\varepsilon \cdot \text{arccot}(b/\varepsilon)$  erhält man schließlich die Entwicklung des Gravitationspotentials  $U(\lambda, \phi^*, u)$  in ellipsoidisch-harmonischen Funktionen nach (4.25). Ohne größere Genauigkeitsverluste kann anstatt des einhüllenden Ellipsoids auch das (nicht alle Massen einschließende) Referenzellipsoid mit großer und kleiner Halbachse  $a, b$  und der linearen

Exzentrizität  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$  verwendet werden. Die ellipsoidisch-harmonischen Gravitationsfeldkoeffizienten  $c_{l,m}^{\text{ell}}, s_{l,m}^{\text{ell}}$  sind dimensionslos und der Koeffizient  $c_{0,0}^{\text{ell}}$  nimmt den Wert 1 an. Der Vorfaktor  $gm_E/\varepsilon \cdot \operatorname{arccot}(b/\varepsilon)$  ist das *Zentralfeld* der ellipsoidisch-harmonischen Entwicklung und entspricht dem Gravitationsfeld eines homogenen Referenzellipsoids mit Erdmasse  $m_E$  an der Oberfläche  $u = b$  des Referenzellipsoids.

**Box 4.4:** „Entwicklung des Gravitationspotentials in ellipsoidisch-harmonischen Funktionen“

„Separationsansatz in Jacobi-ellipsoidischen Koordinaten“

$$U(\lambda, \phi^*, u) = U(u) \cdot \Lambda(\lambda) \cdot \Phi^*(\phi^*) \quad (4.24)$$

„Gravitationspotential für den Außenraum des Ellipsoids ( $u > b$ )“

$$U(\lambda, \phi^*, u) = \frac{gm_E}{\varepsilon} \operatorname{arccot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{Q_{l,m}^*(u/\varepsilon)}{Q_{l,m}^*(b/\varepsilon)} \bar{P}_{l,m}(\sin \phi^*) (c_{l,m}^{\text{ell}} \cos(m\lambda) + s_{l,m}^{\text{ell}} \sin(m\lambda)) \quad (4.25)$$

Die Kugelfunktionskoeffizienten  $c_{l,m}, s_{l,m}$  und die ellipsoidisch harmonischen Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{ell}}, s_{l,m}^{\text{ell}}$  für einen entsprechenden Grad/Ordnung  $l/m$  unterscheiden sich vor allem bei höheren Auflösungen numerisch nur geringfügig. Um Kugelfunktionsmodelle mit ellipsoidisch-harmonischen Gravitationsfeldmodellen vergleichen zu können, müssen die Koeffizienten  $c_{l,m}, s_{l,m}$  und  $c_{l,m}^{\text{ell}}, s_{l,m}^{\text{ell}}$  ineinander überführt werden. Entsprechende Transformationsvorschriften sind in Jekeli (1988) zu finden.

Die Nachteile der ellipsoidisch-harmonischen Entwicklung gegenüber der Kugelfunktionsentwicklung sind ein deutlich höherer Rechenaufwand sowie die Tatsache, dass die  $Q_{l,m}^*(u/\varepsilon)$  nur durch Reihenabbruch anstatt durch praktikable geschlossene Formeln berechnet werden können. Hauptsächlich bei terrestrischen Anwendungen bietet die ellipsoidisch-harmonische Entwicklung jedoch eine Reihe von Vorteilen (z.B. Thong, 1993; Martinec und Grafarend, 1997; Ardalán und Grafarend, 2001), die im Wesentlichen darauf beruhen, dass die Gestalt der Erde durch ein Ellipsoid besser erfasst wird als durch eine Kugel. So kann beispielsweise bei Randwertaufgaben eine sphärische Approximation durch eine genauere ellipsoidische Approximation ersetzt werden, außerdem lässt sich für das zur Bildung eines Störpotentials benötigte Somigliana-Pizzetti-Normalfeld mit ellipsoidisch-harmonischen Funktionen eine geschlossene Darstellung finden. Für die Auswertung von Satellitendaten (mit einem time-wise-Ansatz) sind diese Vorteile allerdings nicht relevant, so dass die numerisch einfachere und schnellere Kugelfunktionsentwicklung vorzuziehen ist. Allerdings sind zur Beschreibung eines gleich auflösenden Gravitationsfeldes mit der ellipsoidischen Entwicklung wahrscheinlich weniger Parameter notwendig, da z.B. die Darstellung des ellipsoidischen Referenzfeldes (Somigliana-Pizzetti-Normalpotential) als erster Approximationsschritt mit wenigen Parametern möglich ist, während dazu theoretisch schon unendlich viele Kugelfunktionskoeffizienten benötigt werden.

Für eine ausführlichere Behandlung der ellipsoidisch-harmonische Entwicklung und der (reellwertigen, stabilisierten) zugeordneten Legendre'sche Funktionen 2. Art wird auf Hobson (1965), Jekeli (1988), Grafarend (1988), Thong (1993), insbesondere auf Thong (1989) und Thong und Grafarend (1989) verwiesen.

## 4.2.2 Globale versus lokale Schwerefeldmodellierung

Das Gravitationsfeld der Erde lässt sich nicht nur mit Hilfe globaler Basisfunktionen wie Kugelfunktionen oder ellipsoidisch harmonischen Funktionen darstellen, sondern auch mit lokalen Basisfunktionen. Nach der Unschärferelation (Freedon, 1999) lässt sich das Gravitationsfeld der Erde entweder mit einer starken Lokalisierung im räumlichen Bereich verbunden mit einer schwachen Lokalisierung im Frequenzbereich oder umgekehrt mit einer starken Lokalisierung im Spektralbereich einhergehend mit einer schwachen räumlichen Lokalisierung formulieren. Gängige Repräsentationen mit einer starken spektralen und dadurch schwachen räumlichen Lokalisierung sind die zuvor behandelten sphärisch und ellipsoidisch harmonischen Funktionen, eine stärkere räumlichere Lokalisierung wird z.B. durch Wavelets (Freedon, 1999; Freedon und Michel, 2004) oder harmonische Splines (z.B. Fengler et al., 2004) erreicht. Welche dieser Funktionen nun zur Beschreibung des Gravitationsfeldes verwendet werden sollten, hängt stark von der gegebenen Datendichte und der Auflösung des Gravitationsfeldes sowie des zu beschreibenden Gebiets ab. Während sich für die Darstellung eines globalen Gravitationsfeldes mit einer gröberen Auflösung (also ohne feinere Details) Funktionen mit einer spektralen Lokalisation, also die sphärisch oder ellipsoidisch harmonischen Funktionen eignen, bietet sich für eine regionale Gravitationsfeldanalyse oder hoch auflösende Modelle, in denen z.B. Detailstrukturen kleinerer Gebirgszüge sichtbar werden sollen, die räumlich lokalisierenden Funktionen an. Sinnvoll scheint in manchen Fällen auch die Kombination solcher Basisfunktionen (Freedon und Windheuser, 1997). Der globale, niedrig auflösende Anteil kann dann z.B. mit Kugelflächenfunktionen dargestellt werden und lokale Strukturen können dann mit Wavelets verfeinert werden. Die mögliche Verfeinerung einer globalen Analyse durch eine nachfolgende regionale Analyse konnte bereits auch in Ansätzen von Ilk et al. (2005) und Fengler et al. (2005) anhand von CHAMP-Daten gezeigt werden. Die Erfassung und Genauigkeit feinerer Detailstrukturen durch die zusätzliche regionale Analyse ist allerdings nur sehr begrenzt aufgrund der mangelnden Sensitivität der CHAMP-Daten für höhere Auflösungen. Aus diesem Grunde soll in dieser Arbeit von einer regionalen Verfeinerung abgesehen werden.

## 5 Erfassung und Reduktion von Störbeschleunigungen

Die auf den Satelliten wirkende und seine Bahn bestimmende Kraftfunktion setzt sich neben dem statischen Gravitationsfeld der Erde noch aus weiteren, in der Regel zeitlich veränderlichen Effekten zusammen. Sieht man zunächst von zeitvariablen Einflüssen des terrestrischen Gravitationsfeldes ab, die z.B. durch geodynamische Vorgänge (Plattentektonik, Konvektionsströme), Deformation (nicht durch Gezeiten verursacht) oder hydrologische Vorgänge entstehen, so lassen sich diese zeitvariablen Effekte, auch als Störkräfte bezeichnet, in zwei Gruppen aufteilen: *gravitative* und *nicht-gravitative Störkräfte*.

Bei den gravitativen Störkräften handelt es sich (für eine Betrachtung an einem beliebigen, aber festen Zeitpunkt  $t = \text{const.}$ ) ebenso wie bei der terrestrischen Gravitationskraft, um konservative Kraftfelder. Die gravitativen Störkräfte werden durch andere Himmelskörper wie den Mond, die Sonne oder auch die Planeten erzeugt und werden normalerweise unter dem Begriff „Gezeiten“ erfasst. Da die gravitativen Störkräfte für einen fixen Zeitpunkt konservativ sind, lassen sich die Gezeiten als (zeitabhängiges) Potential formulieren. Der direkte Anteil der Gezeiten sowie die Gezeiten der festen Erde können, da die Bahnen und Massen der Himmelskörper sowie das Reaktionsverhalten der (festen) Erde relativ gut bekannt sind, genau modelliert werden. Die Modellierung der Ozeangezeiten hingegen gestaltet sich aufgrund des komplexen Verhaltens der Ozeane problematischer.

Die nicht-gravitativen (bzw. nicht konservativen) Störbeschleunigungen werden im Gegensatz zu den gravitativen Störbeschleunigungen, welche durch Volumenkräfte erzeugt werden, durch Oberflächenkräfte, die am Satelliten angreifen, verursacht. Solche Oberflächenkräfte entstehen u. a. durch die Atmosphärenreibung, durch den direkten Strahlungsdruck der Sonne sowie durch den von der Erde reflektierten Strahlungsdruck. Die nicht-konservativen Störbeschleunigungen können nur recht grob modelliert werden, sie können jedoch durch ein geeignetes Messinstrument erfasst werden. Die Satellitenmission CHAMP enthält für die Messung der nicht-konservativen Störbeschleunigungen zum ersten Mal ein eigens dafür eingebautes Akzelerometer.

### 5.1 Modellierung von gravitativen Störbeschleunigungen (Gezeiten)

Die Gezeiten lassen sich in zwei Gruppen einteilen: (i) die direkte Gravitationswirkung der Himmelskörper und (ii) die indirekte Gravitationswirkung, die durch die Deformation des Erdkörpers infolge der Gezeitenkräfte entsteht. Die erste Gruppe wird als *direkter Effekt* beschrieben, die zweite Gruppe wird, je nachdem ob die durch Deformation der festen, ozeanlosen Erde oder ob die durch Verlagerung der Wassermassen (Ozeane) entstehenden Auswirkungen betrachtet werden, in die Gezeiten *der festen Erde* (*indirekter Effekt*) oder in die *elastischen Ozeangezeiten* eingeteilt.

#### 5.1.1 Das gezeitenerzeugende Potential — der direkte Effekt der Himmelskörper

Den größten Anteil an den Gezeiten stellt der *direkte Effekt* der Himmelskörper dar. Dieser ergibt sich aus der Beschleunigung, welche ein Körper durch die Anziehung des Himmelskörpers relativ zur Erde erfährt. Die zugehörige Potentialdarstellung wird *gezeitenerzeugendes Potential* oder auch *Gezeitenpotential* genannt. Die Bezeichnung „gezeitenerzeugend“ deutet an, dass der direkte Effekt die Ursache für weitere, später beschriebene Gezeiteneffekte ist. Allgemein gilt, dass der Mond aufgrund seiner Nähe zur Erde mit einem Anteil von 2/3 den größten Beitrag zur Gezeitenwirkung liefert, ungefähr 1/3 der Wirkung ist auf die Sonne zurückzuführen, der Anteil weiterer Planeten des Sonnensystems wie beispielsweise Merkur, Venus oder Mars ist gering und muss nur bei hochgenauen Anwendungen berücksichtigt werden.

Unter der Annahme, dass die Himmelskörper  $H_i$  (Ortsvektor  $\mathbf{x}_{H_i}$ , Masse  $m_{H_i}$ ) wegen ihres großen Abstandes zur Erde als Punktmassen betrachtet werden können, und dass die durch Anziehungskräfte eines Himmelskörpers verursachte Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{x}}_{H_i \rightarrow E}$  des Massenmittelpunktes der Erde in guter Näherung dem Gravitationsvektor  $\Gamma_{H_i \rightarrow E}$  des Himmelskörpers im Massenmittelpunkt der Erde entspricht (5.2), kann eine Formel zur Berechnung des direkten Effektes  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}}$  abgeleitet werden (z.B. Torge, 2003). Dieser ergibt sich nach (5.3) als Differenz der von den Himmelskörpern  $H_i$  am Satelliten (Ortsvektor  $\mathbf{x}$ ) verursachten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{x}}_{H_i \rightarrow \text{sat}}$  (5.1) und der Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{x}}_{H_i \rightarrow E}$  des Massenmittelpunktes der Erde.

#### Box 5.1: Der direkte Effekt

durch Gravitationswirkung des Himmelskörpers  $H_i$  am Satelliten erzeugte Beschleunigung:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{H_i \rightarrow \text{sat}} \hat{=} \Gamma_{H_i \rightarrow \text{sat}} = -\frac{gm_{H_i}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{H_i}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{H_i}) \quad (5.1)$$

Beschleunigung des Massenmittelpunktes der Erde aufgrund der Gravitationswirkung des Himmelskörpers  $H_i$ :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{H_i \rightarrow E} = \frac{m_{H_i}}{m_E} g \iiint_{\text{Erde}} \rho(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}_{H_i} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}_{H_i} - \mathbf{x}\|^3} d^3\mathbf{x} = -\frac{m_{H_i}}{m_E} \Gamma_{\text{grav}}(\mathbf{x}_{H_i}) \hat{=} \Gamma_{H_i \rightarrow E} = -\frac{gm_{H_i}}{\|\mathbf{x}_{H_i}\|^3} \mathbf{x}_{H_i} \quad (5.2)$$



direkter Effekt aller berücksichtigten Himmelskörper (erzeugte Beschleunigung)

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}} = \sum_i (\ddot{\mathbf{x}}_{\text{H}_i \rightarrow \text{sat}} - \ddot{\mathbf{x}}_{\text{H}_i \rightarrow \text{E}}) \approx \sum_i (\Gamma_{\text{H}_i \rightarrow \text{sat}} - \Gamma_{\text{H}_i \rightarrow \text{E}}) = \sum_i -gm_{\text{H}_i} \left( \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{H}_i})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{H}_i}\|^3} + \frac{(\mathbf{x}_{\text{H}_i})}{\|\mathbf{x}_{\text{H}_i}\|^3} \right) \quad (5.3)$$

Unter der Verwendung der Innenraumentwicklung (da  $(r_{\text{H}_i} > r)$ , (4.5)) kann für den direkten Effekt  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}}$  das gezeiterzeugende Potential  $V_{\text{tid}} = V_{\text{n\_bodies}}$  nach (5.4) gefunden werden (s. z.B. Torge, 2003). Dieses wird häufig mit Hilfe der Gezeitenpotentialkoeffizienten  $c_{l,m}^{\text{tid},i}, s_{l,m}^{\text{tid},i}$  (zeitabhängige Kugelfunktionskoeffizienten) formuliert, die von den zeitabhängigen sphärischen Koordinaten  $\lambda_{\text{H}_i}(t), \phi_{\text{H}_i}(t), r_{\text{H}_i}(t)$  des entsprechenden Himmelskörpers  $\text{H}_i$  bestimmt werden. Aus dem Term  $r^l / r_{\text{H}_i}^{l+1}(t)$  in (5.4), (5.5) wird deutlich, dass die Anteile für einen steigenden Grad  $l$  immer kleiner werden und bereits eine Entwicklung niedrigen Grades ausreicht, um  $V_{\text{tid}}$  genügend genau zu bestimmen. Durch Grad  $l = 2$  für die Sonne und Grad  $l = 3$  beim Mond ist bereits der größte Anteil erfasst. Allerdings können bei höher fliegenden Satelliten auch Gezeitenpotentialkoeffizienten höheren Grades bedingt durch den Term  $(r/R_E)^l$  in (5.4) signifikante Anteile erzeugen, die durch eine höhere Entwicklung (bis maximal Grad  $l = 6$ ) erfasst werden.

### Box 5.2: Das Gezeitenpotential

$$V_{\text{tid}}(t) = \sum_i \left( \sum_{l=2}^L \sum_{m=0}^{m=l} \left( \frac{r}{R_E} \right)^l \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) [c_{l,m}^{\text{tid},i} \cos(m\lambda) + s_{l,m}^{\text{tid},i} \sin(m\lambda)] \right) \quad (5.4)$$

mit den Gezeitenpotentialkoeffizienten der Himmelskörper  $\text{H}_i$

$$\left. \begin{matrix} c_{l,m}^{\text{tid},i} \\ s_{l,m}^{\text{tid},i} \end{matrix} \right\} = \frac{gm_{\text{H}_i}}{r_{\text{H}_i}(t)} \frac{1}{2l+1} \left( \frac{R_E}{r_{\text{H}_i}(t)} \right)^l \bar{P}_{l,m}(\sin \phi_{\text{H}_i}(t)) \cdot \begin{cases} \cos(m\lambda_{\text{H}_i}) \\ \sin(m\lambda_{\text{H}_i}) \end{cases} \quad (5.5)$$

Die Gezeitenpotentialkoeffizienten  $c_{l,m}^{\text{tid},i}, s_{l,m}^{\text{tid},i}$  und somit auch das Gezeitenpotential  $V_{\text{tid}}$  sind periodische Funktionen, deren Periodendauern sich ungefähr durch die Ordnung  $m$  zu  $1/m$  Tagen ergeben. Die halbtägigen Perioden ( $m = 2$ ) enthalten den größten Anteil, für  $m = 0$  erhält man zeitunabhängige (permanente) und langperiodische Anteile.

Die normierten zonalen Legendre'schen Funktionen  $\bar{P}_{l,0}(\sin \phi_{\text{H}_i}(t))$  enthalten für einen geraden Grad  $l$  einen nicht von der Breite  $\phi_{\text{H}_i}(t)$  abhängigen konstanten Anteil, weswegen der zeitliche Mittelwert der zugehörigen zonalen Gezeitenpotentialkoeffizienten  $c_{l,0}^{\text{tid},i}$  nicht mehr null ist. Die dadurch verursachten konstanten Anteile des Gezeitenpotentials  $V_{\text{tid}}(t)$ , der Mittelwert von  $V_{\text{tid}}(t)$ , werden als *Permanentgezeiten*  $V_{\text{tid}}^{\text{perm}}$  bezeichnet, die bereits von Darwin (1899) entdeckt wurden. Bei der Berechnung der Permanentgezeiten genügt es, nur die Anteile der Koeffizienten von Grad  $l = 2$  und Ordnung  $m = 0$  zu berücksichtigen. Die Koeffizienten  $c_{2,0}^{\text{perm,tid},i}$  der Permanentgezeiten sowie die die Permanentgezeiten  $V_{\text{tid}}^{\text{perm}}$  selbst ergeben sich gemäß (5.6) und (5.7), wobei  $\varepsilon$  die mittlere Schiefe der Ekliptik ist und  $\bar{r}_{\text{H}_i}$  der mittlere Abstand des Himmelskörpers vom Geozentrum.

### Box 5.3: Permanentgezeiten

Mittelwert der zonalen Gezeitenpotentialkoeffizienten von Grad  $l = 2$

$$c_{2,0}^{\text{perm,tid},i} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon - 1 \right) \frac{gm_{\text{H}_i}}{\bar{r}_{\text{H}_i}} \left( \frac{R_E}{\bar{r}_{\text{H}_i}} \right)^2 \quad (5.6)$$

Mittelwert des zonalen Gezeitenpotentials von Grad  $l = 2$

$$V_{\text{tid}}^{\text{perm}} = \sum_i \frac{gm_{\text{H}_i}}{\bar{r}_{\text{H}_i}} \frac{1}{4} \left( \frac{r}{\bar{r}_{\text{H}_i}} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon - 1 \right) (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (5.7)$$

Werden Schwerebeobachtungen von allen zeitabhängigen Gezeiteneffekten (direkt und indirekt) reduziert, so erhält man Beobachtungen im *mean-tide*-System. Werden des weiteren die Permanentgezeiten reduziert, gelangt man ins *zero-tide*-System, werden zusätzlich die permanenten Anteile der Gezeiten der festen Erde abgezogen, so reduziert man ins *tide-free*-System. Die meisten Gravitationsfeldmodelle sind bezüglich des tide-free-Systems angegeben, in die anderen Systeme gelangt man durch entsprechende Transformationen des Gravitationsfeldkoeffizienten  $c_{2,0}$ .

Das Gezeitenpotential  $V_{\text{tid}}(t)$  bzw. der direkte Effekt  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}}$  können mit Hilfe präziser Ephemeriden für die Sonne, den Mond und auch für die Planeten nach (5.4) und (5.3) bestimmt werden. Präzise Ephemeriden werden z.B. vom JPL bereitgestellt, die derzeit genaueste Version sind die *DE405-Ephemeriden* (engl.: *Development Ephemeris 405*, Standish, 1998). Eine andere Möglichkeit bietet die Auswertung von Gezeitenkatalogen (z.B. Cartwright und Taylor, 1971; Tamura, 1987), in denen das Gezeitenpotential in einer Fourier-ähnlichen Entwicklung nach Frequenzen mit zugehörigen Amplituden, den so genannten Partialtiden, vertafelt ist. Die Frequenzen ergeben sich dabei aus Linearkombinationen von sich ungefähr linear mit der Zeit ändernden Bahnelementen der Himmelskörper.

Die derzeit genaueste Entwicklung des gezeitenerzeugenden Potentials in Partialtiden ist der *HW95-Gezeitenkatalog* (Hartmann und Wenzel, 1995a,b), der 12 935 Partialtiden von Mond, Sonne sowie den Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn enthält. Abweichend zu (5.4) wurde beim HW95-Gezeitenkatalog die Formel aus (5.8) für das Gezeitenpotential  $V_{\text{tid}}(t)$  verwendet, wobei der Term in der zweiten Zeile der Korrektur des Effektes dient, der bei der Anziehung des Mondes und der Sonne durch die Erdabplattung hervorgerufen wird (Ilk, 1983b; Wilhelm, 1983; Dahlen, 1993). Es wird also die zuvor getroffene Annahme verbessert, dass die Beschleunigung  $\ddot{x}_{H_i \rightarrow E}$  des Massenmittelpunktes der Erde dem Gravitationsvektor  $\Gamma_{H_i \rightarrow E}$  des Himmelskörpers im Massenmittelpunkt entspricht. In (5.8) ist  $J_{2E}$  der zonale Kugelfunktionskoeffizient zweiten Grades und  $m_E$  die Erdmasse. Der HW95-Gezeitenkatalog wurde hinsichtlich seiner Genauigkeit ( $\approx 10^{-12} \text{ m/s}^2$ ) mit der Absicht entworfen, präzise Gravimetraufzeichnungen auswerten zu können. Hierfür wurde das Gezeitenpotential bis Grad  $l = 6$  für den Mond, bis  $l = 3$  für die Sonne und bis  $l = 2$  für die Planeten entwickelt und der Einfluss der Erdabplattung berücksichtigt. Als Grundlage des Gezeitenkataloges wurden die numerischen JPL-Ephemeriden DE200 (Standish, 1982, 1990) der Himmelskörper  $H_i$  unseres Sonnensystems für den Zeitraum 1850–2150 verwendet. Um den Genauigkeitsanforderungen zu genügen, wurden 12 935 der berechneten Partialtiden in den Gezeitenkatalog HW95 aufgenommen, die einen Schwellwert von  $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}^2$  überschreiten. Die angestrebte Genauigkeit von  $10^{-12} \text{ m/s}^2$  gilt für einen terrestrischen Punkt und ist für einen Satelliten aufgrund des Terms  $(r/R_E)^l$  nicht erreichbar.

**Box 5.4:** Das gezeitenerzeugende Potential  $V_{n\_bodies}(t) = V_{\text{tid}}(t)$

$$V_{\text{tid}}(t) = \sum_i \left( gm_{H_i} \sum_{l=2}^L \sum_{m=0}^{m=l} \frac{r^l}{r_{H_i}^{l+1}(t)} \frac{1}{2l+1} \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) \bar{P}_{l,m}(\sin \phi_{H_i}(t)) \cos[m(\lambda - \lambda_{H_i}(t))] \right. \\ \left. + gm_E \frac{R_E^2 r}{r_{H_i}^4(t)} J_{2E} \left[ \sqrt{\frac{3}{7}} \bar{P}_{1,0}(\sin \phi) \bar{P}_{3,0}(\sin \phi_{H_i}(t)) + \sqrt{\frac{2}{7}} \bar{P}_{1,1}(\sin \phi) \bar{P}_{3,1}(\sin \phi_{H_i}(t)) \cos(\lambda - \lambda_{H_i}(t)) \right] \right) \quad (5.8)$$

Entwicklung des gezeitenerzeugenden Potentials in Partialtiden:  
— der HW95 Gezeitenkatalog —

$$V_{\text{tid}}(t) = \sum_{n=1}^{12935} \left( \frac{r}{R_E} \right)^{l(n)} \bar{P}_{l(n),m(n)}(\sin \phi) \left[ C_n^{l(n),m(n)}(t) \cos(\alpha_n(t)) + S_n^{l(n),m(n)}(t) \sin(\alpha_n(t)) \right] \quad (5.9)$$

mit den zeitabhängigen Koeffizienten

$$C_n^{l(n),m(n)}(t) = C0_n^{l(n),m(n)} + t \cdot C1_n^{l(n),m(n)} \\ S_n^{l(n),m(n)}(t) = S0_n^{l(n),m(n)} + t \cdot S1_n^{l(n),m(n)} \quad (5.10)$$

und den Argumenten

$$\alpha_n(t) = m(n) \cdot \lambda + \sum_{j=1}^{11} k_{n,j} \cdot \arg_j(t) \quad \text{wobei } k_{n,1} = m(n) \quad (5.11)$$

die astronomischen Argumente sind dabei Polynome 4. Grades

$$\arg_j(t) = \arg_j(\text{J2000}) + a_j t + b_j t^2 + c_j t^3 + d_j t^4 \quad (5.12)$$

durch den direkten Gezeiteneffekt erzeugte Beschleunigung:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}}(t) \hat{=} \mathbf{f}_{\text{tid}}(t) = \mathbf{f}_{n\_bodies}(t) = \text{grad } V_{\text{tid}}(t) = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial V_{\text{tid}}(t)}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{tid}}(t)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial V_{\text{tid}}(t)}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (5.13)$$

Das Gezeitenpotential  $V_{\text{tid}}(t)$  lässt sich aus den 12 935 Partialtiden des HW95-Katalogs nach (5.9) berechnen, wobei  $C_n^{l(n),m(n)}(t), S_n^{l(n),m(n)}(t)$  die zu einer Partialtide  $n$  mit dem Argument  $\alpha_n(t)$  gehörenden Amplituden von Grad/Ordnung  $l/m$  sind. Die Amplituden  $C_n^{l(n),m(n)}(t), S_n^{l(n),m(n)}(t)$  enthalten dabei neben einem konstanten Anteil  $C0_n^{l(n),m(n)}, S0_n^{l(n),m(n)}$  noch eine geringfügige zeitliche Drift  $C1_n^{l(n),m(n)}, S1_n^{l(n),m(n)}$  (5.10). Die Argumente  $\alpha_n(t)$  ergeben sich gemäß (5.11) aus der sphärischen Länge  $\lambda$  des Beobachtungspunktes sowie aus den Linearkombinationen der astronomischen Fundamentalarargumente  $\arg_j(t)$  mit ganzzahligen Multiplikatoren  $k_{n,j}$ . Die 11 astronomischen Fundamentalarargumente  $\arg_j(t)$ , zu denen neben den 6 Doodson-Elementen (mittlere Mondzeit  $\tau = \text{GMST} + \pi - (F_3 + F_5)$ , ekliptikale Länge des Mondes  $s = F_3 + F_5$ , mittlere ekliptikale Länge der Sonne  $h = F_3 + F_5 - F_4$ , mittlere ekliptikale Länge des Mondperigäums  $p = F_3 + F_5 - F_1$ , negative mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Mondknotens  $N' = -F_5$ , mittlere ekliptikale Länge des solaren Perigäums  $p_s = F_3 + F_5 - F_4 - F_2$ ) auch die mittleren ekliptikalen Längen der Planeten Merkur ( $L_{\text{Mer}}$ ), Venus ( $L_{\text{Ven}}$ ), Mars ( $L_{\text{Mar}}$ ), Jupiter ( $L_{\text{Jup}}$ ), Saturn ( $L_{\text{Sat}}$ ) gehören, werden als Polynome 4. Grades der Zeit  $t$  formuliert (5.12), deren Koeffizienten ( $\arg_j(\text{J2000}), a_j, b_j, c_j, d_j$ ) in Hartmann und Wenzel (1995a) vertafelt sind. Der Zeitparameter  $t$  des HW95-Gezeitenkatalogs ist die dynamische baryzentrische Zeit TDB ( $\approx$  TT) seit dem 1. Januar 2000,  $12^{\text{h}}$  TDB ( $\approx$  TT) in Julianischen Jahrhunderten. Die zur Partialtide  $n$  gehörenden Parameter  $l(n), m(n), C0_n^{l(n),m(n)}, S0_n^{l(n),m(n)}, C1_n^{l(n),m(n)}, S1_n^{l(n),m(n)}, k_{n,j}$  sowie die Frequenz  $f_n$  und der erzeugende Himmelskörper  $H_i(n)$  können aus dem HW95-Gezeitenkatalog (erhältlich unter <http://bowie.gsfc.nasa.gov/hw95/data/hw95s.dat>) abgefragt werden. Die zur

Reduktion der Satellitenbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  benötigte, durch den direkten Effekt erzeugte Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}}(t)$  ergibt sich als Gradient aus dem Gezeitenpotential  $V_{\text{tid}}(t)$  nach (5.13) im lokalen System  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$ .

Aufgrund eines kleinen Unterschiedes zwischen dem linearen Glied des Delaunay-Elements  $F_5$  bei McCarthy (1996) und  $-N'$  bei Hartmann und Wenzel (1995a) und aufgrund einer fehlerhaften Berechnung von  $GMST$  (es wurde  $t$  in TT anstatt in UT1 bzw. UTC verwendet) bei Hartmann und Wenzel (1995a) sollten die Doodson-Elemente mit Hilfe der in McCarthy (1996) angegebenen Delaunay-Elemente  $F_i$  berechnet werden

Die ersten 8 Partialtiden des HW95 ergeben unter Vernachlässigung der geringen zeitlichen Driften  $C_1^{l(n),m(n)}$  die Permanentgezeiten. Hinzu kommen weitere langperiodische Partialtiden mit Periodendauern  $> 100$  Jahre, welche für den Missionszeitraum von CHAMP ebenfalls als Permanentgezeiten betrachtet werden können.

Für viele Anwendungen reicht es aus, nur Partialtiden mit Amplituden einer gewissen Größe zu berücksichtigen. In Hartmann und Wenzel (1995a) ist eine Tabelle angegeben, in der die erreichbare Genauigkeit für den direkten Effekt  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tid}}(t)$  bei einem entsprechenden Schwellwert der Amplituden  $C_n^{l(n),m(n)}(t), S_n^{l(n),m(n)}(t)$  vertafelt ist. Als Grundlage dieses Vergleichs dienten 524 288 mit HW95 berechnete stündliche Werte der Jahre 1970–2029 für die Beobachtungsstation Schiltach, die mit Prüfwerten von Wenzel (1995a) verglichen wurden. Bereits mit den 268 größten Partialtiden kann eine Genauigkeit von  $10^{-9}$  m/s<sup>2</sup> erreicht werden, für eine Genauigkeit von  $10^{-10}$  m/s<sup>2</sup> werden die 1273 größten Partialtiden benötigt, für eine Genauigkeit von  $10^{-8}$  m/s<sup>2</sup> reichen bereits die 85 größten Partialtiden aus. Dies gilt jedoch nur für einen terrestrischen Beobachtungspunkt, bei einem Satelliten in der Bahnhöhe  $h$  muss beachtet werden, dass sich das Signal einer Partialtide  $n$  vom Grad  $l(n)$  mit dem Faktor  $((R_E + h)/R_E)^{l(n)-1}$  verstärkt. Um die angegebenen Genauigkeitsangaben einhalten zu können, sollten vor der Auswahl anhand der Schwellwerte die Amplituden der Partialtiden mit diesem Verstärkungsfaktor multipliziert werden.

### 5.1.2 Die Gezeiten der festen Erde — der indirekte Effekt

Die feste, ozeanlose Erde antwortet auf die zuvor beschriebenen direkten Gezeiteneffekte mit Deformationen, die ihrerseits wiederum eine Veränderung des Gravitationspotentials und des Gravitationsvektors hervorrufen. Diese Veränderungen der Gravitation werden als *indirekter Effekt* der Gezeitenkräfte oder *Gezeiten der festen Erde* bezeichnet. Mathematisch gesehen können die Gezeiten der festen Erde  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  (5.14) durch das Deformationspotential ausgedrückt werden (z.B. Dow, 1988; Wahr 1981a, 1982). Für das Deformationspotential  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  ergibt sich unter entsprechenden Annahmen aus einem komplizierten Differentialgleichungssystem (Dow, 1988; Wahr 1982) eine relativ einfache, dem Gezeitenpotential  $V_{\text{tid}}(t)$  ähnliche Lösung, wobei die Deformationseigenschaften durch (eventuell komplexe und frequenzabhängige) Love-Zahlen  $k_{l,m}$  beschrieben werden. Allerdings muss für  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  die Außenraumentwicklung (4.4) verwendet werden, da die deformierten Massen innerhalb der Erde liegen. Die durch die Gezeiten der festen Erde erzeugten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  können durch Bildung des Gradienten aus  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  nach (5.15) bezüglich des lokalen Systems  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  bestimmt werden.

Die Koeffizienten der Gezeiten der festen Erde in (5.14) werden nach den IERS-Conventions 1996/2003 (McCarthy, 1996; McCarthy und Petit, 2004) in drei Schritten berechnet. Im ersten Schritt wird der frequenzunabhängige Anteil (Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{indp}}(t), s_{l,m}^{\text{indp}}(t)$ ) für ein je nach Wahl elastisches oder anelastisches Erdmodell berechnet, der den Hauptanteil der Gezeiten der festen Erde darstellt. Unter Vernachlässigung der Elliptizität und Rotation der Erde generieren die Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{tid},j}, s_{l,m}^{\text{tid},j}$  des gezeitenerzeugenden Potentials von Grad/Ordnung  $l/m$  einen Anteil des Deformationspotentials gleichen Grades  $l$  und gleicher Ordnung  $m$  (Dow, 1988). Somit können dann die Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{indp}}(t), s_{l,m}^{\text{indp}}(t)$  direkt aus den Gezeitenpotentialkoeffizienten  $c_{l,m}^{\text{tid},j}, s_{l,m}^{\text{tid},j}$  mit Hilfe der Love-Zahlen  $k_{l,m}$  bestimmt werden. Die Deformationsreaktion einer elastischen Erde kann durch reelle (elastische) Love-Zahlen  $k_{l,m}$  beschrieben werden. Die Starrheit des Erdmantels führt jedoch zu einer zeitlichen Verzögerung (Phasenverschiebung  $\delta_{l,m}$ ) der Deformationsreaktion der Erde gegenüber den Gezeitenkräften. Die Modellierung einer solchen verzögerten Reaktion einer anelastischen Erde gelingt mit Hilfe komplexer (anelastischer) Love-Zahlen  $k_{l,m} = \text{Re}(k_{l,m}) + i\text{Im}(k_{l,m})$ , wobei die Verzögerung durch einen kleinen imaginären Anteil  $\text{Im}(k_{l,m})$  beschrieben wird. Nach McCarthy (1996) lassen sich die Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{indp}}(t), s_{l,m}^{\text{indp}}(t)$  gemäß (5.16) in einer komplexen Darstellung aus der Position  $(\lambda_{H_j}, \phi_{H_j}, r_{H_j})$  und Masse  $m_{H_j}$  des erzeugenden Himmelskörpers  $H_j$  mit Hilfe der Love-Zahlen  $k_{l,m}$  berechnen. Damit können die Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{indp}}(t), s_{l,m}^{\text{indp}}(t)$  nach (5.17) direkt aus den Gezeitenpotentialkoeffizienten  $c_{l,m}^{\text{tid},j}, s_{l,m}^{\text{tid},j}$  bzw. aus den Partialtiden  $n$  (Amplituden  $C_n^{l,m}(t), S_n^{l,m}(t)$ , Multiplikatoren  $k_{n,j}$ ) mit gleichem Grad/Ordnung  $l/m$  des HW95-Gezeitenkatalogs berechnet werden. Für eine genaue Berechnung der  $c_{l,m}^{\text{indp}}(t), s_{l,m}^{\text{indp}}(t)$  reicht die Verwendung der Love-Zahlen vom Grad  $l = 2, 3$  sowie die Berücksichtigung der Effekte von Mond ( $j = 1$ ) und Sonne ( $j = 2$ ) ohne diejenigen der Planeten aus.

Im zweiten Schritt werden die Korrekturen, die aufgrund der Elliptizität und Rotation der Erde entstehen, berechnet. Die Elliptizität der Erde erzeugt nach Wahr (1981b) Veränderungen in den Koeffizienten 4. Grades  $c_{4,m}^e(t), s_{4,m}^e(t)$  aufgrund der Gezeitenwirkungen vom Grad  $l = 2$  (5.18). Aus der in den IERS-Conventions 1996 gegebenen komplexen Darstellung (5.18) zur Berechnung der Koeffizienten  $c_{4,m}^e(t), s_{4,m}^e(t)$ , für welche die Positionen und Massen der erzeugenden Himmelskörper benötigt werden, lässt sich eine Formel herleiten (5.19), mit der diese Koeffizienten direkt aus den Gezeitenpotentialkoeffizienten 2. Grades  $c_{2,m}^{\text{tid},j}, s_{2,m}^{\text{tid},j}(t)$  bzw. aus den Partialtiden 2. Grades des HW95-Gezeitenkatalogs (mit entsprechender Ordnung  $m$ ) bestimmt werden können. Die darin auftretenden Love-Zahlen 2. Grades  $k_{2,m}^+$  sowie die Love-Zahlen  $k_{l,m}$  sind in Tabelle 5.1 für eine elastische und anelastische Erde vertafelt.

**Box 5.5: Gezeiten der festen Erde**

$$V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t) = \sum_{l=2}^4 \sum_{m=0}^{m=l} \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) \left[ \left( c_{l,m}^{\text{indp}}(t) + c_{l,m}^e(t) + c_{l,m}^{\text{dep}}(t) \right) \cos(m\lambda) + \left( s_{l,m}^{\text{indp}}(t) + s_{l,m}^e(t) + s_{l,m}^{\text{dep}}(t) \right) \sin(m\lambda) \right] \quad (5.14)$$

durch Gezeiten der festen Erde erzeugte Beschleunigung (indirekter Effekt):

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t) \hat{=} \mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t) = \text{grad } V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t) = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (5.15)$$

Schritt 1: frequenzunabhängiger Anteil: Koeffizienten (komplexe Darstellung)

$$c_{l,m}^{\text{indp}}(t) - i s_{l,m}^{\text{indp}}(t) = \sum_j \frac{k_{l,m}}{2l+1} \frac{gm_{H_j}}{R_E} \left( \frac{R_E}{r_{H_j}(t)} \right)^{l+1} \bar{P}_{l,m}(\sin \phi_{H_j}(t)) e^{-im\lambda_{H_j}(t)} \quad (5.16)$$

$$\text{Koeffizienten aus HW95-Partialtiden (Argument } \theta_n = \sum_{j=1}^{11} k_{n,j} \arg_j(t) \text{)} \quad (5.17)$$

$$c_{l,m}^{\text{indp}}(t) = \sum_j \left( \text{Re}(k_{l,m}) c_{l,m}^{\text{tid},j}(t) + \text{Im}(k_{l,m}) s_{l,m}^{\text{tid},j}(t) \right) = \sum_{n(l,m)} \left\{ \text{Re}(k_{l,m}) \left( C_n^{l(n),m(n)}(t) \cos(\theta_n(t)) + S_n^{l(n),m(n)}(t) \sin(\theta_n(t)) \right) + \text{Im}(k_{l,m}) \left( -C_n^{l(n),m(n)}(t) \sin(\theta_n(t)) + S_n^{l(n),m(n)}(t) \cos(\theta_n(t)) \right) \right\}$$

$$s_{l,m}^{\text{indp}}(t) = \sum_j \left( \text{Re}(k_{l,m}) s_{l,m}^{\text{tid},j}(t) - \text{Im}(k_{l,m}) c_{l,m}^{\text{tid},j}(t) \right) = \sum_{n(l,m)} \left\{ \text{Re}(k_{l,m}) \left( -C_n^{l(n),m(n)}(t) \sin(\theta_n(t)) + S_n^{l(n),m(n)}(t) \cos(\theta_n(t)) \right) + \text{Im}(k_{l,m}) \left( -C_n^{l(n),m(n)}(t) \cos(\theta_n(t)) - S_n^{l(n),m(n)}(t) \sin(\theta_n(t)) \right) \right\}$$

Schritt 2: durch Elliptizität der Erde erzeugter Anteil: Koeffizienten (komplexe Darstellung)

$$c_{4,m}^e(t) - i s_{4,m}^e(t) = \sum_j \frac{k_{2,m}^+}{5} \frac{gm_{H_j}}{R_E} \left( \frac{R_E}{r_{H_j}(t)} \right)^3 \bar{P}_{2,m}(\sin \phi_{H_j}(t)) e^{-im\lambda_{H_j}(t)} \quad (5.18)$$

Koeffizienten aus HW95-Partialtiden

$$\left. \begin{matrix} c_{4,m}^e(t) \\ s_{4,m}^e(t) \end{matrix} \right\} = k_{2,m}^+ \sum_j \left\{ \begin{matrix} c_{2,m}^{\text{tid},j}(t) \\ s_{2,m}^{\text{tid},j}(t) \end{matrix} \right\} = k_{2,m}^+ \sum_{n(l=2,m)} \left\{ \begin{matrix} \left\{ C_n^{2,m(n)}(t) \cos(\theta_n(t)) + S_n^{2,m(n)}(t) \sin(\theta_n(t)) \right\} \\ \left\{ S_n^{2,m(n)}(t) \cos(\theta_n(t)) - C_n^{2,m(n)}(t) \sin(\theta_n(t)) \right\} \end{matrix} \right\} \quad (5.19)$$

|     |         | elastische Erde |             | anelastische Erde    |                      |             |
|-----|---------|-----------------|-------------|----------------------|----------------------|-------------|
| $l$ | $m$     | $k_{l,m}$       | $k_{l,m}^+$ | $\text{Re}(k_{l,m})$ | $\text{Im}(k_{l,m})$ | $k_{l,m}^+$ |
| 2   | 0       | 0,29525         | -0,00087    | 0,30190              | 0,0                  | -0,00089    |
| 2   | 1       | 0,29470         | -0,00079    | 0,29830              | -0,00144             | -0,00080    |
| 2   | 2       | 0,29801         | -0,00057    | 0,30102              | -0,00130             | -0,00057    |
| 3   | 0, 1, 2 | 0,093           | ...         |                      |                      |             |
| 3   | 3       | 0,094           | ...         |                      |                      |             |

**Tabelle 5.1:** Nominelle (frequenzunabhängige) Love-Zahlen der Gezeiten der festen Erde für eine elastische ( $k_{l,m}$  reell) bzw. anelastische ( $k_{l,m}$  komplex) Erde sowie Korrekturwerte  $k_{l,m}^+$  für die Elliptizität der Erde.

Die Erde besitzt eine Reihe von Eigenfrequenzen im Frequenzbereich der Gezeiten (Dow, 1988), wie beispielsweise diejenigen der *freien Nutation des Erdkerns* (engl.: *free core nutation, FCN*) oder des Chandler-wobbles. Partialtiden mit einer Anregungsfrequenz nahe diesen Eigenfrequenzen führen zu Resonanzeffekten in der Deformationsreaktion. Die Love-Zahlen  $k_{l,m}$  für Partialtiden im Bereich dieser Eigenfrequenzen besitzen eine starke Frequenzabhängigkeit und können große Werte annehmen. Aus diesem Grunde wird im dritten Schritt eine Korrektur aufgrund der Frequenzabhängigkeit der Love-Zahlen vorgenommen, wobei die in Schritt 1 verwendeten Love-Zahlen so gewählt sind (McCarthy, 1996), dass die Anzahl der Terme, für die eine frequenzabhängige Korrektur vorgenommen werden muss, minimal ist. Besonders die ganztägigen Anteile (Love-Zahlen der Ordnung  $m = 1$ ) zeigen ein stark frequenzabhängiges Verhalten, da ihr Frequenzspektrum nahe der freien Nutation des Erdkerns liegt. Aber auch die anderen Love-Zahlen zeigen teilweise ein frequenzabhängiges Verhalten, im langperiodischen Band ( $m = 0$ ) wird die Frequenzabhängigkeit durch die Anelastizität des Erdmantels hervorgerufen. Die frequenzabhängigen Werte wurden nach McCarthy (1996) aus dem elastischen *PREM-Erdmodell* (engl.: *Preliminary Earth Model*, Dziewonski und Anderson, 1981), bei dem die ozeanische Schicht durch eine feste Schicht ersetzt wurde, bestimmt, für die Auswertung der durch Anelastizität hervorgerufenen Effekte wurde das Erdmantelmodell von Widmer et al. (1991) verwendet. Die Koeffizienten  $c_{2,m}^{\text{dep}}(t)$ ,  $s_{2,m}^{\text{dep}}(t)$  für die frequenzabhängige Korrektur lassen sich nach McCarthy (1996) mit der komplexen Darstellung aus (5.20) aus den Partialtiden (Amplituden  $H_f$  (Einheit [m]) und Argumente  $\theta_f(t)$ ) des Gezeitenkatalogs von Cartwright und Taylor (1971) berechnen. Der Summationsindex  $f(2,m)$  deutet an, dass über alle Frequenzen mit signifikantem Korrekturbeitrag summiert werden muss. Die komplexen frequenzabhängigen Korrekturen der Love-

Zahlen  $\delta k_{2,m,f} = \delta k_{2,m,f}^{\text{Re}} + i \delta k_{2,m,f}^{\text{Im}}$  bzw. die in-phase und out-of-phase Amplituden  $A_{2,m,f}^{\text{ip}}$ ,  $A_{2,m,f}^{\text{op}}$  sowie die zugehörigen Multiplikatoren  $k_{f,j}$  der 6 Doodson-Elemente  $\arg_j(t)$  der 2 halbtägigen ( $m = 2$ ), 48 ganztägigen ( $m = 1$ ) sowie der 21 langperiodischen ( $m = 0$ ) Partialtiden mit relevanten Effekten können McCarthy (1996) und McCarthy und Petit (2003) entnommen werden. Mit Hilfe der Umrechnungsformeln (5.22) von Partialtiden der Frequenz  $f$  aus dem HW95-System (Einheit  $[\text{m}^2/\text{s}^2]$ ) in das Cartwright-Taylor-System (Einheit  $[\text{m}]$ ) können schließlich die Koeffizienten  $c_{2,m}^{\text{dep}}(t)$ ,  $s_{2,m}^{\text{dep}}(t)$  auch mit Hilfe der Partialtiden  $C_{n(f,j=1,2)}^{2,m}$ ,  $S_{n(f,j=1,2)}^{2,m}$  des HW95-Katalogs nach (5.23) berechnet werden. Bei der Umrechnung der Partialtiden nach (5.22) ist zu beachten, dass die Cartwright-Taylor-Partialtiden  $H_{f=f(l=2,m)}$  einer Frequenz  $f$  (von Grad  $l = 2$  und Ordnung  $m$ ) die Effekte von Sonne und Mond enthalten und dass deshalb die HW95-Partialtiden  $C_{n(f,j=1,2)}^{2,m}$  bzw.  $S_{n(f,j=1,2)}^{2,m}$  derselben Frequenz  $f$  (von Grad  $l = 2$  und Ordnung  $m$ ) für Mond ( $j = 1$ ) und Sonne ( $j = 2$ ) addiert werden müssen.

**Box 5.6:** Schritt 3: frequenzabhängiger Anteil: Koeffizienten (komplexe Darstellung)

$$c_{2,m}^{\text{dep}}(t) - i s_{2,m}^{\text{dep}}(t) = \eta_m \frac{gm_E}{R_E} \sum_{f(2,m)} (A_m \delta k_{2,m,f} H_f) e^{i\theta_f(t)} = \eta_m \frac{gm_E}{R_E} \sum_{f(2,m)} \underbrace{(A_m \delta k_{2,m,f}^{\text{Re}} H_f)}_{\text{in phase: } A_{2,m,f}^{\text{ip}}} + i \underbrace{A_m \delta k_{2,m,f}^{\text{Im}} H_f}_{\text{out of phase: } A_{2,m,f}^{\text{op}}} e^{i\theta_f(t)} \quad (5.20)$$

mit

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_E \sqrt{4(2 - \delta_{0,m})\pi}} \quad ; \quad \eta_m = \begin{cases} 1 & ; m \text{ gerade} \\ -i & ; m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5.21)$$

$H_f$  und  $\theta_f(t) = \sum_{j=1}^6 k_{f,j} \cdot \arg_j(t)$ : Amplituden und Argumente der Frequenz  $f$  nach Cartwright/Taylor

$\delta k_{2,m,f} = \delta k_{2,m,f}^{\text{Re}} + i \delta k_{2,m,f}^{\text{Im}}$ : Differenz zwischen frequenzabhängiger Love-Zahl und nomineller Love-Zahl  $k_{l,m}$

Umrechnung von HW95-Amplituden in Cartwright-Taylor-Amplituden

$$H_{f=f(l=2,m)} = \sum_{j=1}^2 (-1)^m \frac{R_E^2 \sqrt{4(2 - \delta_{0,m})\pi}}{gm_E} \begin{cases} C_{n(f,j=1,2)}^{2,m} & ; m = 0, 2 \\ S_{n(f,j=1,2)}^{2,m} & ; m = 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

Koeffizienten aus HW95-Partialtiden:

$$\begin{aligned} c_{2,m}^{\text{dep}}(t) &= \sum_{f(2,m)} \left\{ \delta k_{2,m,f}^{\text{Re}} \left( C_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \cos(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) + S_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \sin(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta k_{2,m,f}^{\text{Im}} \left( -C_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \sin(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) + S_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \cos(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) \right) \right\} \\ s_{2,m}^{\text{dep}}(t) &= \sum_{f(2,m)} \left\{ \delta k_{2,m,f}^{\text{Re}} \left( -C_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \sin(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) + S_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \cos(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta k_{2,m,f}^{\text{Im}} \left( -C_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \cos(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) - S_{n(f,j=1,2)}^{2,m(n)}(t) \sin(\theta_{n(f,j=1,2)}(t)) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Gezeiten der festen Erde können nicht so genau wie der direkte Effekt modelliert werden, da bei der Lösung des Differentialgleichungssystems einige Unsicherheiten (Materialparameter des Erdinneren, Randbedingungen) vorhanden sind und Vereinfachungen getroffen werden müssen.

Die (elastischen) Love-Zahlen 2. Grades liefern mit  $k_{2,m} \approx 0,3$  den weitaus größten Beitrag, die Love-Zahlen 3. Grades betragen nur noch ca. 1/3. Die Korrekturen für eine anelastische Erde, für die Elliptizität sowie für die Frequenzabhängigkeit der Love-Zahlen liegen nur noch im Bereich weniger Prozent. Da die gezeitenerzeugenden Partialtiden 3. Grades im Vergleich zu denjenigen 2. Grades relativ klein sind, können die Gezeiten der festen Erde bereits durch die elastischen Love-Zahlen 2. Grades  $k_{2,m}$  recht gut erfasst werden. Dadurch wird ersichtlich, dass die Gezeiten der festen Erde auf der Erdoberfläche nur ca. 30% des gezeitenerzeugenden Potentials betragen, für einen Satelliten wird das Verhältnis entsprechend der Abschätzung  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}} / V_{\text{tid}} = k_{2,0} (R_E / (R_E + h))^5$  geringer (bei CHAMP ca. 21%).

Die Permanentgezeiten  $V_{\text{tid}}^{\text{perm}}$  bewirken eine konstante Deformation des Erdkörpers und damit einen permanenten Anteil  $V_{\text{solid\_tides}}^{\text{perm}}$  an den Gezeiten der festen Erde, welcher bei der Berechnung von  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  enthalten ist. Zur Erfassung der permanenten Gezeiten der Festen Erde muss die Erde genau genommen als flüssiger Körper betrachtet werden und daher die Love-Zahlen für eine flüssige Erde ( $k_{\text{fl}} = 0,94$ ) herangezogen werden. Um die Gezeiten der festen Erde  $V_{\text{tides}}^{\text{solid}}(t)$  bezüglich des mean-tide-Systems (und des zero-tide-Systems) zu erhalten, müssen die zuvor bestimmten Gezeiten der festen Erde  $V_{\text{solid\_tides}}^{\text{solid}}(t)$  vom permanenten Anteil  $V_{\text{solid\_tides}}^{\text{perm}}$  unter Verwendung der nominellen Love-Zahlen  $k_{2,0}$  reduziert werden. Ins tide-free-System gelangt man, wenn der permanente Anteil  $V_{\text{solid\_tides}}^{\text{perm}}$  unter Verwendung der flüssigen Love-Zahl  $k_{\text{fl}}$  wieder addiert wird. Nach McCarthy (1996) können die Koeffizienten der permanenten Gezeiten der festen Erde  $V_{\text{solid\_tides}}^{\text{perm}}$  durch Multiplikation der Koeffizienten  $c_{2,0}^{\text{perm\_tid},j}$  der Permanentgezeiten mit der Love-Zahl  $k_{2,0}$  erhalten werden.  $V_{\text{solid\_tides}}^{\text{perm}}$  ergibt sich somit nach (5.24) und kann auch mit Hilfe der Amplituden  $C_{n(f=0)}^{2,0}$  der HW95-Partialtiden der Frequenz  $f = 0\text{Hz}$  (Nummern  $n = j = 1, \dots, 7$ , wobei  $n = j = 1$  für den Mond und  $n = j = 2$  für die Sonne) bestimmt werden.

permanente Gezeiten der festen Erde („zero frequency part“)

$$V_{\text{solid\_tides}}^{\text{perm}} = \sum_j k_{2,0} \left( \frac{R_E}{r} \right)^3 \bar{P}_{2,0}(\sin \phi) c_{2,0}^{\text{perm\_tid},j} = \sum_j k_{2,0} \left( \frac{R_E}{r} \right)^3 \bar{P}_{2,0}(\sin \phi) C_{n(f=0)=j}^{2,0} \quad (5.24)$$

Einen weiteren kleinen Beitrag der Gezeiten der festen Erde bilden die Polgezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{pole}}(t)$ . Die Richtungsänderung der Rotationsachse (Polbewegung  $x_p, y_p$ ) bezüglich des Erdkörpers verursacht nach Wahr (1985) eine Störung 1. Ordnung  $\Delta U_{\text{Zent}}$  von Grad/Ordnung  $l = 2/m = \pm 1$  im Zentrifugalpotential der Erde, welche wiederum eine kleine Deformation des Erdkörpers bewirkt. Die dadurch entstehenden Störungen des Gravitationspotentials werden als Polgezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{pole}}(t)$  bezeichnet. Die Polgezeiten ergeben sich nach McCarthy und Petit (2004) gemäß (5.25) für eine anelastische Erde (Love-Zahl  $k_2 = 0,3077 + i \cdot 0,0036$ ) mit den Koeffizienten  $c_{2,1}^{\text{pole\_tides}}, s_{2,1}^{\text{pole\_tides}}$  aus (5.26). Die Koeffizienten  $c_{2,1}^{\text{pole\_tides}}, s_{2,1}^{\text{pole\_tides}}$  sind eine Funktion der Polschwankungsparameter  $\Delta x_p, \Delta y_p$  (in [“], (5.27)), welche sich aus den Polbewegungsparametern  $x_p, y_p$  unter Elimination des linearen Trends  $\bar{x}_p, \bar{y}_p$  ergeben. Der lineare Trend  $\bar{x}_p, \bar{y}_p$  kann mit Hilfe der Näherungsformeln in (5.28) (McCarthy und Petit, 2004) abgeschätzt werden (Referenzzeitpunkt  $t_0 = \text{J2000}$ ), genauer sind allerdings die unter <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2000/chapter7/annual.pole> erhältlichen Werte. Berücksichtigt man, dass  $\Delta x_p, \Delta y_p$  um maximal 0,8“ variieren, so wird ersichtlich dass die Polgezeiten nur einen sehr kleinen Beitrag zu den Gezeiten der festen Erde leisten.

### Box 5.7: Polgezeiten

$$V_{\text{tides}}^{\text{pole}}(t) = \left( \frac{R_E}{r} \right)^3 \bar{P}_{2,1}(\sin \phi) \left( c_{2,1}^{\text{pole\_tides}}(t) \cos \lambda + s_{2,1}^{\text{pole\_tides}}(t) \sin \lambda \right) \quad (5.25)$$

mit den Koeffizienten der Polgezeiten

$$\begin{aligned} c_{2,1}^{\text{pole\_tides}} &= -\frac{\omega^2 R_E^2}{\sqrt{15}} (\text{Re}(k_2) \Delta x_p - \text{Im}(k_2) \Delta y_p) = -1,333 \cdot 10^{-9} [1/"] \cdot \frac{GM}{R_E} (\Delta x_p - 0,0115 \Delta y_p) \\ s_{2,1}^{\text{pole\_tides}} &= -\frac{\omega^2 R_E^2}{\sqrt{15}} (\text{Re}(k_2) \Delta y_p + \text{Im}(k_2) \Delta x_p) = -1,333 \cdot 10^{-9} [1/"] \cdot \frac{GM}{R_E} (\Delta y_p + 0,0115 \Delta x_p) \end{aligned} \quad (5.26)$$

mit den Polschwankungsparametern  $\Delta x_p, \Delta y_p$  in [“]:

$$\Delta x_p = x_p - \bar{x}_p \quad ; \quad \Delta y_p = -(y_p - \bar{y}_p) \quad (5.27)$$

wobei  $\bar{x}_p, \bar{y}_p$  der lineare Trend der Polbewegung ist:

$$\begin{aligned} \bar{x}_p(t) &= \bar{x}_p(t_0) + (t - t_0) \cdot \dot{\bar{x}}_p(t_0) \quad \text{mit} \quad \bar{x}_p(t_0) = 0,054 ["], \quad \dot{\bar{x}}_p(t_0) = 0,00083 ["/\text{Jahr}] \\ \bar{y}_p(t) &= \bar{y}_p(t_0) + (t - t_0) \cdot \dot{\bar{y}}_p(t_0) \quad \text{mit} \quad \bar{y}_p(t_0) = 0,357 ["], \quad \dot{\bar{y}}_p(t_0) = 0,00395 ["/\text{Jahr}] \end{aligned} \quad (5.28)$$

### 5.1.3 Ozeangezeiten

Die elastischen Ozeangezeiten entstehen durch das gezeitenerzeugende Potential und setzen sich aus zwei Anteilen zusammen: (i) die direkten Gravitationsänderungen, die durch die Verlagerung der Wassermassen entstehen (die eigentlichen Ozeangezeiten) sowie (ii) die indirekten Gravitationsänderungen, die durch die Deformation des festen Erdkörpers infolge der Veränderung der Ozeanauflast erzeugt werden (Ozeanauflastgezeiten). Im Vergleich zu den Gezeiten der festen Erde ist die Modellierung der elastischen Ozeangezeiten wesentlich komplizierter und mit größeren Unsicherheiten behaftet. Dies liegt daran, dass die Ozeane neben komplex geformten Küstenlinien auch unterschiedliche Wassertiefen besitzen. So besitzen die Ozeangezeiten auf dem offenen Meer Amplituden von ca. 0,5 m, während der Gezeitenhub in Küstennähe durch die Seichtigkeit von Schelfgebieten und die enge Form von Buchten bedeutend verstärkt wird. Die Frequenzen der Konstituenten der Ozeangezeiten stimmen mit den Frequenzen der einzelnen Partialtiden des gezeitenerzeugenden Potentials überein, allerdings kann eine starke Phasenverschiebung entstehen, da keine ungestörten Gezeitenbewegungen in den Ozeanen möglich sind. Die Ozeanauflastgezeiten erhält man durch Multiplikation der einzelnen Ozeangezeitentiden mit den so genannten Love’schen Auflastzahlen  $k'_i$ . Das Auflastpotential konvergiert im Gegensatz zum Deformationspotential (Gezeiten der festen Erde) nur sehr langsam (s. Tabelle 5.2).

Zur Modellierung der elastischen Ozeangezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$  bietet sich nach Dow (1988) eine harmonische Entwicklung an (5.29), die mit Hilfe der Amplituden  $\bar{D}_{l,m,p}^{\pm}$  (in [m]) und Phasen  $\varepsilon_{l,m,p}^{\pm}$  der einzelnen Konstituenten (von Grad  $l$  und Ordnung  $m$ ) der Welle  $p$ , die von der Partialtide  $p$  erzeugt wird, gelingt. (+) und (–) bezeichnen dabei prograde bzw. retrograde Wellen,  $\rho_w$  die Dichte des Wassers ( $\rho_w = 1025 \text{ kg/m}^3$ ). Die Koeffizienten  $c_{l,m}^{\text{ocean}}(t), s_{l,m}^{\text{ocean}}(t)$  der elastischen Ozeangezeiten können nach (5.30) aus den Amplituden  $\bar{D}_{l,m,p}^{\pm}$  und Phasen  $\varepsilon_{l,m,p}^{\pm}$  oder in einer anderen Schreibweise nach (5.31) aus den Koeffizienten  $C_{l,m,p}^{\pm}, S_{l,m,p}^{\pm}$  der prograden und retrograden Ozeangezeitenkonstituenten bestimmt werden. Die Koeffizienten  $C_{l,m,p}^{\pm}, S_{l,m,p}^{\pm}$  hängen dabei mit den Amplituden  $\bar{D}_{l,m,p}^{\pm}$  und Phasen  $\varepsilon_{l,m,p}^{\pm}$  gemäß (5.32) zusammen. Die

durch die elastischen Ozeangezeiten erzeugten Störbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$  können durch Gradientenbildung nach (5.33) aus den elastischen Ozeangezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$  bezüglich des lokalen Systems  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  berechnet werden.

**Box 5.8:** (elastische) Ozeangezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$

$$V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t) = 4\pi g R_E \rho_w \sum_p \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l \sum_{+} \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} \frac{1+k'_l}{2l+1} \bar{D}_{l,m,p}^{\pm} \bar{P}_{l,m}(\sin\phi) \cos(m\lambda \pm \theta_p(t) \mp \varepsilon_{l,m,p}^{\pm}) \quad (5.29)$$

$$= \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} \bar{P}_{l,m}(\sin\phi) \left[ c_{l,m}^{\text{ocean}}(t) \cos(m\lambda) + s_{l,m}^{\text{ocean}}(t) \sin(m\lambda) \right]$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_{l,m}^{\text{ocean}}(t) &= 4\pi g R_E \rho_w \frac{1+k'_l}{2l+1} \sum_p \left[ \bar{D}_{l,m,p}^+ \cos(\theta_p(t) - \varepsilon_{l,m,p}^+) + \bar{D}_{l,m,p}^- \cos(\theta_p(t) - \varepsilon_{l,m,p}^-) \right] \\ s_{l,m}^{\text{ocean}}(t) &= 4\pi g R_E \rho_w \frac{1+k'_l}{2l+1} \sum_p \left[ -\bar{D}_{l,m,p}^+ \sin(\theta_p(t) - \varepsilon_{l,m,p}^+) + \bar{D}_{l,m,p}^- \sin(\theta_p(t) - \varepsilon_{l,m,p}^-) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

oder

$$\begin{aligned} c_{l,m}^{\text{ocean}}(t) &= 4\pi g R_E \rho_w \frac{1+k'_l}{2l+1} \sum_p \left[ (C_{l,m,p}^+ + C_{l,m,p}^-) \cos(\theta_p(t)) + (S_{l,m,p}^+ + S_{l,m,p}^-) \sin(\theta_p(t)) \right] \\ s_{l,m}^{\text{ocean}}(t) &= 4\pi g R_E \rho_w \frac{1+k'_l}{2l+1} \sum_p \left[ (S_{l,m,p}^+ - S_{l,m,p}^-) \cos(\theta_p(t)) - (C_{l,m,p}^+ - C_{l,m,p}^-) \sin(\theta_p(t)) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Umrechnung von Amplituden  $\bar{D}_{l,m,p}^{\pm}$  und Phasen  $\varepsilon_{l,m,p}^{\pm}$  in Koeffizienten  $C_{l,m,p}^{\pm}$ ,  $S_{l,m,p}^{\pm}$

$$\begin{aligned} C_{l,m,p}^+ &= \bar{D}_{l,m,p}^+ \cos \varepsilon_{l,m,p}^+ & ; & & S_{l,m,p}^+ &= \bar{D}_{l,m,p}^+ \sin \varepsilon_{l,m,p}^+ \\ C_{l,m,p}^- &= \bar{D}_{l,m,p}^- \cos \varepsilon_{l,m,p}^- & ; & & S_{l,m,p}^- &= \bar{D}_{l,m,p}^- \sin \varepsilon_{l,m,p}^- \end{aligned} \quad (5.32)$$

durch (elastische) Ozeangezeiten erzeugte Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t) \doteq \mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$

$$\mathbf{f}_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t) = \text{grad } V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t) = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)}{\partial \lambda} \mathbf{e}_{\lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)}{\partial \phi} \mathbf{e}_{\phi} + \frac{\partial V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (5.33)$$

|                  |                  |                  |                     |                     |                     |
|------------------|------------------|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $k'_0 = 0,0000$  | $k'_1 = 0,0270$  | $k'_2 = -0,3030$ | $k'_3 = -0,1940$    | $k'_4 = -0,1320$    | $k'_5 = -0,1040$    |
| $k'_6 = -0,0890$ | $k'_7 = -0,0810$ | ...              | $k'_{48} = -0,0282$ | $k'_{49} = -0,0276$ | $k'_{50} = -0,0270$ |

**Tabelle 5.2:** Auszug aus den für das FES2002-Ozeangezeitenmodell verwendeten Auflastzahlen  $k'_l$ .

Zu den genauesten Modellen gehören die Grenoble *FES* (engl.: *Finite Element Solution*) Modelle (Le Provost et al., 1994), welche durch die numerische Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen (Laplace Tidal Equations (Laplace, 1775, 1776)) entstanden sind, wobei für neuere Versionen auch Altimetriellösungen assimiliert wurden. Die aktuellsten Versionen sind das FES2002 bzw. FES2004 (Lyard et al., 2006) mit einer Auflösung von  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ , welche pro- und retrograde Konstituenten bis Grad/Ordnung 50/50 bzw. 80/80 der 17 wichtigsten Partialtiden  $p$  (8 langperiodische, 4 ganztägige und 5 halbtägige Partialtiden) enthalten. In den FES2002/FES2004-Modellen sind sowohl die Amplituden  $\bar{D}_{l,m,p}^{\pm}$  und Phasen  $\hat{\varepsilon}_{l,m,p}^{\pm}$  in der Definition nach Schwiderski (1980)

$$\hat{\varepsilon}_{l,m,p}^{\pm} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_{l,m,p}^{\pm} - \eta \quad ; \quad \eta = \begin{cases} 0 & ; \text{ halbtägige und langperiodische Tiden} \\ \pi/2 & ; \text{ ganztägige Tiden mit } H_p > 0 \quad (K_1) \\ -\pi/2 & ; \text{ ganztägige Tiden mit } H_p < 0 \quad (O_1, P_1, Q_1) \end{cases} \quad (5.34)$$

wobei  $H_p$  die Amplituden der Cartwright-Taylor-Partialtiden sind, als auch die Koeffizienten  $C_{l,m,p}^{\pm}, S_{l,m,p}^{\pm}$  der einzelnen Konstituenten vertafelt.

Aus der Tatsache, dass zur Modellierung der elastischen Ozeangezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$  Konstituenten bis Grad/Ordnung 50/50 verwendet werden, wird ersichtlich, dass die Ozeangezeiten feiner als die anderen Gezeiteneffekte strukturiert sind. Allerdings fallen die elastischen Ozeangezeiten  $V_{\text{tides}}^{\text{ocean}}(t)$  kleiner aus, da die für eine Massenverlagerung zur Verfügung stehenden Wassermassen geringer sind als die durch Deformation verlagerte Masse der festen Erde.

Einige Anteile der Atmosphärengezeiten liegen im nahen Bereich der Gezeitenfrequenzen. So ist beispielsweise die halbtägige  $S_2$ -Tide stark beeinflusst von dem sich während des Tages periodisch ändernden Luftdruck infolge der Sonneneinstrahlung (1 mbar Luftdruckdifferenz  $\doteq$  Wasserhöhendifferenz von 0,995 cm (Dow, 1988)). Eine ebenfalls signifikante Auswirkung haben saisonale klimatische Effekte, die mit der  $S_{\text{sa}}$ -Welle korrelieren. Bei der Verwendung

der FES-Modelle sollte deshalb der prograde Term von Grad/Ordnung 2/2 der dominierenden  $S_2$ -Tide berücksichtigt werden, dessen Amplitude  $\bar{D}_{2,2,a}^+$  und Phase  $\varepsilon_{2,2,a}^+$  bzw. Koeffizienten  $C_{2,2,a}^+, S_{2,2,a}^+$  sich zu

$$\begin{aligned} \bar{D}_{2,2,a}^+ &= 0,350 \text{ cm } (\hat{=} 0,352 \text{ mbar}) & \text{ bzw. } & C_{2,2,a}^+ = 0,1311 \text{ cm} \\ \varepsilon_{2,2,a}^+ &= -68^\circ & & S_{2,2,a}^+ = -0,3245 \text{ cm} \end{aligned} \quad (5.35)$$

ergeben (Chapman und Lindzen, 1970).

### 5.1.4 Vergleich der Größenordnungen

In Tabelle 5.3 ist ein Vergleich der maximalen Wirkung der einzelnen Gezeiten (Potential in  $[\text{m}^2/\text{s}^2]$  sowie Beschleunigung in  $[\text{m}/\text{s}^2]$ ) sowie verschiedener Anteile des terrestrischen Gravitationsfeldes für einen Satelliten in den Bahnhöhen  $h = 470 \text{ km}$  und  $h = 250 \text{ km}$  aufgeführt.

Wie zu erkennen ist, nimmt die Auswirkung des terrestrischen Gravitationsfeldes mit höherer Auflösung und größerer Bahnhöhe ab. Dabei ist zu bemerken, dass die Gravitationswirkung für den höher fliegenden Satelliten schneller mit höher werdendem Grad  $l$  bedingt durch den Term  $(R_E/r)^l$  abnimmt als für einen niedriger fliegenden Satelliten. Aufgrund dessen ist das Gravitationssignal der Anteile für Grad  $l > 90$  für einen Satelliten in der Bahnhöhe  $h = 470 \text{ km}$  bereits so gering, dass es fast keinen Einfluss mehr auf die Satellitenbahn hat (Potential  $4,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2 \hat{=} 4 \text{ mm}$  Geoidgenauigkeit) und Koeffizienten von Grad  $l > 90$  aus der Bahnanalyse nicht mehr bestimmt werden können (Genauigkeit der aus der numerischen Differentiation bestimmten Beschleunigungen:  $10^{-5} \text{ m}/\text{s}^2$ ). Bei einer Bahnhöhe von  $h = 250 \text{ km}$  scheint jedoch auch die Bestimmung von Anteilen von Grad  $l > 90$  möglich. Auch bei den Anteilen des Gravitationsfeldes zwischen Grad 51 und 90 fällt auf, dass das Signal sowohl als Potential als auch als Beschleunigung für den niedriger fliegenden Satelliten ca. achtmal so groß ist wie für den höher fliegenden Satelliten und dass vor allem das Beschleunigungssignal die (Mess-)Genauigkeit der bestimmten Beschleunigungen übersteigt. Insgesamt wird aus Tabelle 5.3 deutlich, dass die Auflösung und Genauigkeit eines aus der Satellitenbahnanalyse bestimmten Gravitationsfeldes entscheidend von der Flughöhe des Satelliten abhängt.

Ein Vergleich des Signals der einzelnen Gezeiteneffekte mit den Signalen des terrestrischen Gravitationsfeldes ist nützlich, um beurteilen zu können, wie sich die Vernachlässigung einzelner Anteile bei der Reduktion auswirkt. Das größte Gezeitensignal entsteht durch das gezeitenerzeugende Potential, das auf der Erdoberfläche ca. dreimal so groß ist (bei Beschleunigungen ca. zweimal so groß) wie die Gezeiten der festen Erde. Für einen zunehmenden Abstand  $h$  von der Erde wird das Verhältnis zwischen dem direkten Effekt (Faktor  $((R_E+h)/R_E)^l$ ) und den Gezeiten der festen Erde (Faktor  $(R_E/(R_E+h))^{l+1}$ ) größer. Interessant ist, dass das durch Gezeiten verursachte Potential durchaus in der Größenordnung des von Grad  $l > 50$  verursachten terrestrischen Gravitationsfeldsignals liegt und für den höher fliegenden Satellit sogar das terrestrische Gravitationsfeldsignal der Grade  $l > 50$  um ein Vielfaches übertrifft. Deshalb kann gerade für höher fliegende Satelliten die korrekte Reduktion der Gezeiten, insbesondere des mit der Bahnhöhe zunehmenden direkten Effektes, von großem Einfluss auf die erreichbare Genauigkeit der Gravitationsfeldbestimmung sein. Allerdings bleibt dem entgegenzusetzen, dass die durch Gezeiten generierten Beschleunigungen mit einer maximalen Größenordnung von  $10^{-6} \text{ m}/\text{s}^2$  einerseits unter der Genauigkeit der bestimmten Satellitenbeschleunigungen liegen und andererseits auch kleiner als die Beschleunigungen sind, die durch Anteile des terrestrischen Gravitationsfeldes bis Grad 90 verursacht werden. Somit besteht die Möglichkeit, dass auch ohne die Reduktion der Gezeiten ein gutes Ergebnis erzielt werden kann. Da es sich bei der sphärisch harmonischen Gravitationsfeldanalyse um eine Art spektrale Analyse handelt, ist natürlich nicht nur ein Größenvergleich von terrestrischem Gravitationsfeld und Gezeiten im Zeitbereich von Interesse, sondern auch ein Vergleich im Frequenzbereich. Hier muss angemerkt werden, dass es sich bei dem direkten Effekt sowie den Gezeiten der festen Erde um hauptsächlich langwellige Gravitationswirkungen handelt, welche durch Kugelfunktionskoeffizienten niedrigen Grades ( $l = 2, \dots, 6$ , oft reicht auch Grad  $l = 2$  aus) erfasst werden können, die allerdings im Gegensatz zum terrestrischen Gravitationsfeld zeitabhängig sind. Die Gezeitenwirkungen müssen somit also genau genommen mit den langwelligen Anteilen (Grad 2–10) des Gravitationsfeldes verglichen werden. Vernachlässigt man den  $c_{2,0}$ -Term des terrestrischen Gravitationsfeldes, so betragen die Gezeiten weniger als 1% der langwelligen Anteile (Grad 2–10) des terrestrischen Gravitationsfeldes; würden die Gezeiten nicht reduziert, so wäre also ein Fehler von weniger als 1% in den langwelligen Koeffizienten des terrestrischen Gravitationsfeldes zu erwarten. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass es sich bei den Gezeiten ja um zeitvariable Effekte handelt. Da sich der Satellit im allgemeinen mit einer bestimmten Abtastfrequenz über die Erde hinwegbewegt, kann bei einer Vernachlässigung der Reduktion von Gezeiteneffekten somit ein Aliasing in Koeffizienten anderer Frequenzbereiche auftreten. Bei einer erdfesten Beobachtungsstation oder einem geostationären Satellit hingegen werden sich anstatt eines Aliasings die Gezeitenwirkungen über einen bestimmten Zeitbereich mitteln und bis auf die Permanentgezeiten sowie die permanenten Gezeiten der festen Erde herausfallen. Bei den Polgezeiten bleibt anzumerken, dass deren Einfluss sowohl auf das Potential als auch auf die Beschleunigung eine Größenordnung kleiner als derjenige der Gezeiten der festen Erde ist. Allerdings erreichen die zugehörigen Koeffizienten von Grad/Ordnung  $2/\pm 1$  durchaus die Größenordnung der terrestrischen Gravitationsfeldkoeffizienten von Grad/Ordnung  $2/\pm 1$ , weshalb eine Reduktion der Polgezeiten durchaus nützlich erscheint. Die Auswirkungen der Ozeangezeiten sind ebenfalls geringer als diejenigen der Gezeiten der festen Erde. Allerdings besitzen die Ozeangezeiten gegenüber den



anderen Gezeitentypen auch höherfrequente Anteile (bei FES2002 bis Grad/Ordnung 50/50), weshalb trotz der relativ geringen Auswirkung der Ozeangezeiten eine Reduktion sinnvoll ist, um die Genauigkeit höher auflösender Anteile des terrestrischen Gravitationsfeldes bei der Bahnanalyse nicht zu beeinflussen.

Es bleibt schlussendlich anzumerken, dass eine Reduktion sämtlicher Gezeiten sinnvoll ist, da die Abschätzung ihres Einflusses auf die Gravitationsfeldbestimmung aufgrund von komplexen Auswirkungen wie Aliasing bedingt durch das zeitabhängige Verhalten schwer zu beurteilen sind.

| Effekt  | Flughöhe | Potential [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ] |                      | Beschleunigung [m/s <sup>2</sup> ] |                      |
|---|----------|---|----------------------|------------------------------------|----------------------|
|   |          | h = 250 km                                  | h = 470 km           | h = 250 km                         | h = 470 km           |
| Gravitationsfeld der Erde <sup>1)</sup>             |          | 6,0·10 <sup>7</sup>                         | 5,8·10 <sup>7</sup>  | 9,1                                | 8,5                  |
| <i>Zentralfeld</i>                                  |          | 6,0·10 <sup>7</sup>                         | 5,8·10 <sup>7</sup>  | 9,1                                | 8,5                  |
| <i>Erdabplattung c<sub>2,0</sub></i>                |          | 5,64·10 <sup>4</sup>                        | 5,46·10 <sup>4</sup> | 2,7·10 <sup>-2</sup>               | 2,4·10 <sup>-2</sup> |
| <i>Grad 2–10 (ohne c<sub>2,0</sub>)</i>             |          | 7,9·10 <sup>2</sup>                         | 6,79·10 <sup>2</sup> | 5,6·10 <sup>-4</sup>               | 4,5·10 <sup>-4</sup> |
| <i>Grad 11–50</i>                                   |          | 8,2·10 <sup>1</sup>                         | 4,6·10 <sup>1</sup>  | 3·10 <sup>-4</sup>                 | 1,3·10 <sup>-4</sup> |
| <i>Grad 51–90</i>                                   |          | 8,1   | 1,2                  | 7,8·10 <sup>-5</sup>               | 1,0·10 <sup>-5</sup> |
| <i>&gt; Grad 90</i>                                 |          | 1,24  | 4,1·10 <sup>-2</sup> | 2,1·10 <sup>-5</sup>               | 6,2·10 <sup>-7</sup> |
| Gezeiten, direkter Effekt (gesamt) <sup>2)</sup>    |          | 6,57  | 7,02                 | 2,0·10 <sup>-6</sup>               | 2,1·10 <sup>-6</sup> |
| <i>ohne Permanentgezeiten</i>                       |          | 6,38  | 6,81                 | 1,94·10 <sup>-6</sup>              | 2,0·10 <sup>-6</sup> |
| <i>Permanentgezeiten</i>                            |          | 2,1   | 2,24                 | 6,3·10 <sup>-7</sup>               | 6,6·10 <sup>-7</sup> |
| Gezeiten der festen Erde (gesamt) <sup>3), 4)</sup> |          | 2,17  | 1,96                 | 9,8·10 <sup>-7</sup>               | 8,6·10 <sup>-7</sup> |
| <i>ohne permanenten Anteil</i>                      |          | 1,56  | 1,42                 | 7,1·10 <sup>-7</sup>               | 6,2·10 <sup>-7</sup> |
| <i>permanenter Anteil</i> <sup>4)</sup>             |          | 1,63  | 1,48                 | 7,4·10 <sup>-7</sup>               | 6,5·10 <sup>-7</sup> |
| Polgezeiten   |          | 0,115                                       | 0,104                | 5,2·10 <sup>-8</sup>               | 4,6·10 <sup>-8</sup> |
| elastische Ozeangezeiten <sup>5)</sup>              |          | 0,68  | 0,57                 | 6,9·10 <sup>-7</sup>               | 4,9·10 <sup>-7</sup> |

**Tabelle 5.3:** Auswirkungen von Gezeiten (Potential und Beschleunigung) im Vergleich zu Anteilen verschiedener Frequenzen des terrestrischen Gravitationsfeldes für einen Satelliten in der Bahnhöhe  $h = 250$  km sowie  $h = 470$  km. Verwendete Modelle: <sup>1)</sup> EGM96, <sup>2)</sup> Mond und Sonne bis Grad 6, <sup>3)</sup> einfaches Modell für Mond und Sonne bis Grad 3,  $k_{2,m} = 0,3$ ,  $k_{3,m} = 0,93$ , <sup>4)</sup> flüssige Love-Zahl für Permanentgezeiten  $k_{fl} = 0,94$ , <sup>5)</sup> FES2002.

## 5.2 Nicht-gravitative Störbeschleunigungen

Die nicht-gravitativen Störbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}$  werden durch die Atmosphärenreibung ( $\rightarrow \ddot{\mathbf{X}}_{\text{air-drag}}$ ), den direkten Strahlungsdruck der Sonne ( $\rightarrow \ddot{\mathbf{X}}_{\text{solar-rad}}$ ) sowie die durch die Erde reflektierte Strahlung, die so genannte Erdalbedo ( $\rightarrow \ddot{\mathbf{X}}_{\text{albedo}}$ ) erzeugt. Je nach Bauweise des Satelliten kann auch noch eine durch die Bewegung in der Atmosphäre generierte Auftriebskraft ( $\rightarrow \ddot{\mathbf{X}}_{\text{lift}}$ ) wirken, bei Satelliten mit integrierter Lageregelung können außerdem noch Störbeschleunigungen durch Orbitmanöver zur Bahnkontrolle ( $\rightarrow \ddot{\mathbf{X}}_{\text{control}}$ ) auftreten.

Für einen niedrig fliegenden Satelliten vom Typ CHAMP stellt die Atmosphärenreibung (z.B. King-Hele, 1987; Montenbruck und Eberhard, 2000) die größte Oberflächenkraft dar, die erzeugte Störbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{air-drag}}$  liegt in der Größenordnung von  $10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>. Die Atmosphärenreibung wirkt entgegen der Flugrichtung und bildet sich somit hauptsächlich in der negativen  $Y^{\text{ACC}}$ -Komponente der Akzelerometermessungen ab. Aufgrund der Atmosphärenrotation entsteht allerdings auch ein kleiner Anteil in cross-track-Richtung ( $Z^{\text{ACC}}$ -Komponente). Die Größenordnung der durch den direkten Strahlungsdruck der Sonne (z.B. Feltens, 1991) erzeugten Störbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{solar-rad}}$  liegt bei CHAMP im Bereich von  $10^{-8}$  m/s<sup>2</sup>. Für einen kugelförmigen Satelliten mit homogenen Reflexionseigenschaften zeigt  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{solar-rad}}$  (tritt nur bei direkter Sonneneinstrahlung auf) in die der Sonne entgegen gesetzte Richtung, bei einer anderen Bauweise können Abweichungen hiervon eintreten. Die durch die Erdalbedo (z.B. Knocke und Ries, 1987; Stephens et al., 1981) erzeugte Störbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{albedo}}$  liegt bei CHAMP in der Größenordnung von  $10^{-9}$  m/s<sup>2</sup>. Sie wirkt hauptsächlich in Zenitrichtung und findet sich deshalb in der (radialen)  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente wieder. Die Auftriebswirkung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{air-drag}}$  ist bei den meisten Satelliten gering und somit vernachlässigbar, die Lagekontrollsteuerung wird in der Regel so ausgeführt, dass der Satellit sich um sein Gravitationszentrum dreht und dadurch keine linearen Störbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{control}}$  erfährt.

Im Gegensatz zu den gravitativen Störbeschleunigungen sind die nicht-gravitativen Störbeschleunigungen von einer Reihe von schwierig und weniger genau modellierbaren Parametern abhängig wie beispielsweise den dynamischen Oberflächenparametern und Reflexionseigenschaften des Satelliten, der Atmosphärendichte, der Stärke der einfallenden solaren Strahlung oder den Reflexionseigenschaften der Erde. Anstatt der Modellierung bietet sich deshalb die Messung der nicht-konservativen Störbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}$  an. Dies ist im Gegensatz zu den gravitativen Störbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}$  möglich, da diese durch Oberflächenkräfte anstatt Volumenkräften erzeugt werden, die nur auf die Satellitenaußenfläche wirken.

In Abbildung 5.1 ist das generelle mechanische Messprinzip eines Instrumentes zur Erfassung von nicht-konservativen Störbeschleunigungen, eines so genannten Akzelerometers, dargestellt. Während die Gravitationskraft sowohl auf den Satelliten als auch auf die nicht mit dem Satelliten verbundene, im Satelliten frei schwebende Akzelerometerprüfmasse wirkt, können die Oberflächenkräfte nur auf den Satelliten wirken, aber nicht auf die frei schwebende Prüfmasse. Befindet sich die Prüfmasse im Gravitationszentrum ( $\approx$  Massenmittelpunkt) des Satelliten, so findet durch die Einwirkung rein gravitativer Kräfte keine Bewegung relativ zum Satelliten statt, die Prüfmasse erfährt also keine Relativbeschleunigung bezüglich des mitbewegten Systems Satellit. Anders sieht das bei den nicht-gravitativen Oberflächenkräften aus. Diese bremsen den Satelliten, die Prüfmasse kann sich jedoch ungehindert weiterbewegen und erfährt somit eine Relativbeschleunigung gegenüber dem Satelliten. Diese Relativbeschleunigung entspricht dann bis auf das Vorzeichen der nicht-gravitativen Störbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}$  des Satelliten. Damit die Relativbeschleunigung der Prüfmasse möglichst frei von den Einflüssen des Gravitationsgradienten und Rotationsbeschleunigungen des Satelliten ist, muss sich die Prüfmasse möglichst exakt im Gravitationszentrum des Satelliten befinden. Es bietet sich daher an, die Prüfmasse durch eine geeignete Vorrichtung immer im Gravitationszentrum des Satelliten zu halten und die dafür notwendigen Kräfte zu messen. Aus diesen Kräften ergibt sich dann die Relativbeschleunigung und somit  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}$ .

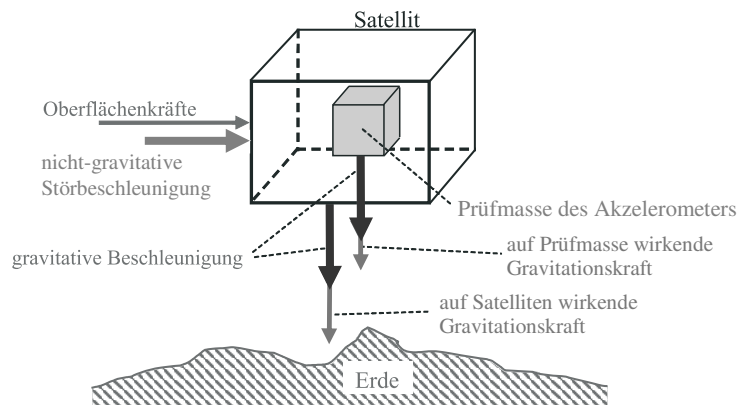
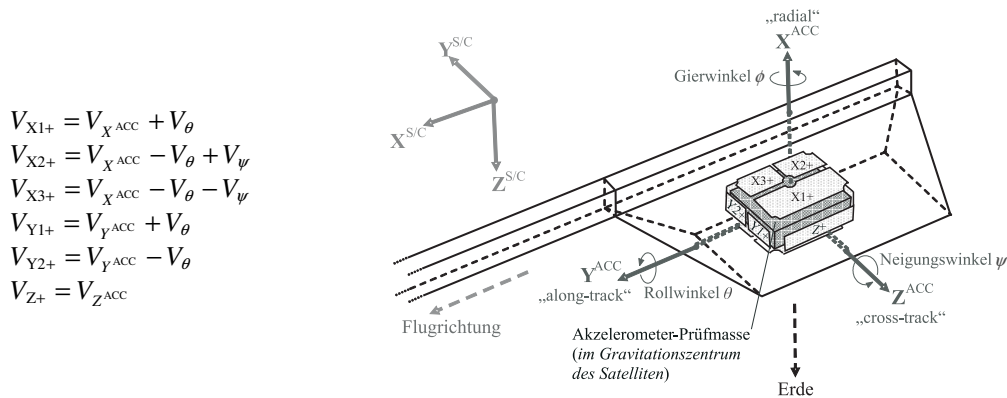


Abbildung 5.1: Messprinzip des Akzelerometers.

Das bei CHAMP eingebaute *STAR-Akzelerometer* (engl.: *Space Tri-axis Accelerometer for Research missions*), welches von der französischen Raumfahrtbehörde CNES bereitgestellt und von ONERA entwickelt und gebaut wurde, ist das erste Akzelerometer, das in einer Satellitenmission implementiert wurde. Beim STAR-Akzelerometer ist das Grundprinzip eines elektrostatischen Mikroakzelerometers realisiert. Dabei wird eine geladene Probemasse in einem elektrostatischen Feld in Ruhe gehalten. Die Stärke des elektrostatischen Feldes wird durch Elektrodenpaare gesteuert, die an den Wänden des elektrostatischen Käfigs angebracht sind. Die elektrische Spannung, die benötigt wird, um die Probemasse in Ruhe zu halten, ist ein Maß für die dazu benötigte elektrostatische Kraft, die wiederum proportional zur nicht-konservativen Störbeschleunigung ist. Aus der elektrischen Spannung kann also somit  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}$  ermittelt werden. Abbildung 5.2 zeigt schematisch den Aufbau des STAR-Akzelerometers im Gravitationszentrum des CHAMP-Satelliten. Hier wird die quaderförmige Prüfmasse durch die Anbringung entsprechender Spannungen an den Elektrodenpaaren (X1+, X1-), (X2+, X2-), (X3+, X3-), (Y1+, Y1-), (Y2+, Y2-), (Z+, Z-) im Zentrum gehalten. Dabei sind 6 Elektrodenpaare für die Kontrolle der 6 Freiheitsgrade (3 lineare Störbeschleunigungen, 3 Winkelbeschleunigungen) notwendig. Die  $X^{\text{ACC}}$ -/ $Y^{\text{ACC}}$ -/ $Z^{\text{ACC}}$ -Komponenten (radial/along-track/cross-track) der linearen nicht-konservativen Störbeschleunigungen und die  $\phi$ -/ $\theta$ -/ $\psi$ -Komponenten (Gierwinkel/Rollwinkel/Neigungswinkel) der Winkelbeschleunigung bzw. ihre zugehörigen Spannungswerte  $V_{X^{\text{ACC}}}$ ,  $V_{Y^{\text{ACC}}}$ ,  $V_{Z^{\text{ACC}}}$ ,  $V_{\phi}$ ,  $V_{\theta}$ ,  $V_{\psi}$  können durch Linearkombination der an den Elektroden angebrachten Spannungen gemäß den Gleichungen in Abbildung 5.2 ermittelt werden.

Die nominelle und vorab anvisierte Genauigkeit des STAR-Akzelerometers soll für die interessierende Messbandbreite ( $10^{-4}$ – $10^{-1}$  Hz) für die beiden sensitiveren  $Y^{\text{ACC}}$ - und  $Z^{\text{ACC}}$ -Achsen im Bereich  $< 3 \cdot 10^{-9}$  m/s<sup>2</sup> und für die weniger sensitive  $X^{\text{ACC}}$ -Achse im Bereich  $< 3 \cdot 10^{-8}$  m/s<sup>2</sup> liegen, wobei Störbeschleunigungen im Messbereich von  $\pm 10^{-4}$  m/s<sup>2</sup> erfasst werden können. Die a-priori-Genauigkeit der Winkelbeschleunigungen wird für dieselbe Messbandbreite mit  $10^{-7}$  rad/s<sup>2</sup> für die  $\phi$ -Komponente und mit  $5 \cdot 10^{-7}$  rad/s<sup>2</sup> für die  $\theta$  und  $\psi$ -Komponenten angegeben. Der Grund für das Vorhandensein einer weniger sensitiven Achse liegt in der Bauweise des Akzelerometers. Da die größte Störbeschleunigung in Flugrichtung wirkt und die Genauigkeit in Tangentialrichtung für die Gravitationsfeldbestimmung besonders hoch sein soll, ergibt sich die entsprechende Achsenanordnung. Bedingt durch die Umrechnung der gemessenen Spannungswerte in entsprechende Beschleunigungswerte, die durch vor dem Start ermittelte Daten erfolgt, enthalten die Beschleunigungswerte noch weitere Fehler, die allerdings durch Anbringung eines Offsets (Bias) und einer Skalierung weitestgehend behoben werden können. Die Kalibrierungsparameter können durchaus im Bereich von  $10^{-6}$ – $10^{-7}$  m/s<sup>2</sup> für den Bias und im Bereich von  $1 \pm 20\%$  für den Skalierungsfaktor liegen. Bestimmt werden müssen diese Kalibrierungsparameter durch eine Art In-Orbit-Kalibrierung, indem sie beispielsweise

bei der dynamischen Bahnbestimmung (Kang et al., 2003) oder der Gravitationsfeldbestimmung als unbekannte Parameter mitgeschätzt werden (Kang et al., 2003; Gerlach et al., 2003c; Mayer-Gürr et al., 2005b; Reigber et al., 2005c), oder durch Vergleich der erhaltenen Störbeschleunigungen mit modellierten nicht-gravitativen Störbeschleunigungen (Kang et al., 2003). Um die Stabilität der zuvor genannten Kenngrößen, vor allem aber der Bias- und Skalierungsparameter zu gewährleisten, besitzt das Akzelerometer ein spezielles thermisches Gehäuse, in dem die Temperatur bis auf eine Abweichung von  $\pm 1\text{K}$  konstant gehalten werden soll. Die Temperaturabhängigkeit der Bias- und Skalierungsparameter soll dann  $5 \cdot 10^{-8} \text{ms}^{-2}/^\circ\text{C}$  und  $2 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  für die  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente bzw.  $1 \cdot 10^{-8} \text{ms}^{-2}/^\circ\text{C}$  und  $5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  für die  $Y^{\text{ACC}}$ - und  $Z^{\text{ACC}}$ -Komponente betragen.

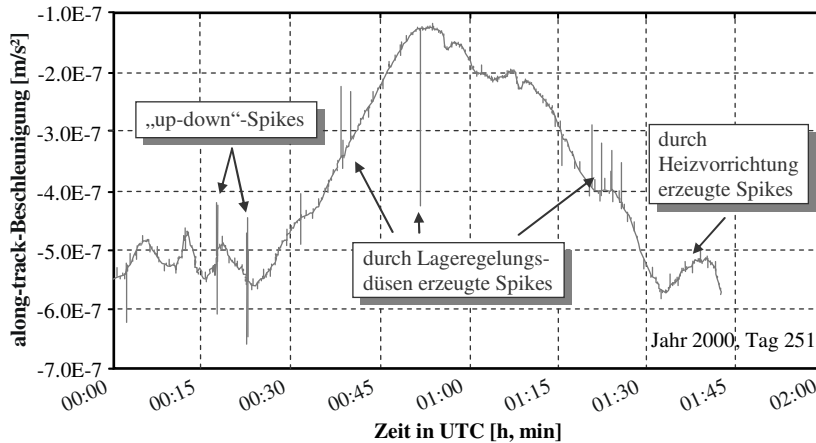


**Abbildung 5.2:** Skizze des STAR-Akzelerometers (nach Perosanz et al., 2003). Die geladene Prüfmassenelemente (grau) wird durch Anbringung variabler Spannungen  $V$  an den 6 Elektrodenpaaren  $X1, X2, X3, Y1, Y2, Z$  im Zentrum des elektrostatischen Käfigs gehalten. Aus Linearkombinationen der gemessenen Spannungen können die nicht-gravitativen Störbeschleunigungen (Linear- und Winkelbeschleunigungen) abgeleitet werden.

Anhand einer Validierung und Evaluierung von Level-1-Realdaten des STAR-Akzelerometers zeigt sich, dass das Messrauschen des Akzelerometers mit Werten zwischen  $10^{-9}$ – $10^{-8} \text{m/s}^2$  innerhalb der spezifizierten Grenzen liegt und dass auch die maximale Größenordnung für Bias- und Skalierungsparameter eingehalten werden kann (Grunwaldt und Meehan, 2003; Perosanz et al., 2003). Neben diesen Fehlerquellen treten allerdings noch eine Reihe anderer Störungen in den Messsignalen des Akzelerometers auf (Grunwaldt und Meehan, 2003; Perosanz et al., 2003), welche größtenteils jedoch, wie anschließend erwähnt, herausgefiltert werden können. Die wichtigsten dieser Störungen sind:

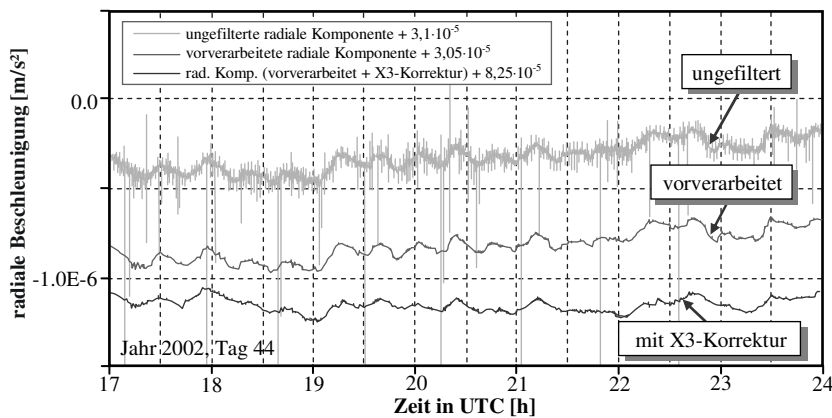
- Ausreißer (Spikes) in einer Größenordnung bis zu  $10^{-6} \text{m/s}^2$ , die durch eine nicht gleichmäßige Feuerung der Lageregelungs-Steuerdüsen hervorgerufen werden
- Störungen (bis  $10^{-7} \text{m/s}^2$ ), die durch die Oszillation des Auslegers infolge der Lagesteuerung entstehen
- kleinere Ausreißer (bis  $5 \cdot 10^{-8} \text{m/s}^2$ ), die durch elektrische Störungen bedingt durch Ein- und Ausschaltvorgänge der Heizung im thermischen Gehäuse entstehen
- unerklärte 2-sekündige „up-down-Spikes“ (bis  $10^{-7} \text{m/s}^2$ )
- große, kurze Spikes (bis  $10^{-5} \text{m/s}^2$ ), die einmal pro Umlauf auftreten („orbit counter spikes“) und vermutlich durch die fehlerhafte X3-Elektrode verursacht werden
- weitere unerklärte Ausreißer  $< 5 \cdot 10^{-8} \text{m/s}^2$
- Diskontinuitäten und Sprünge ( $< 10^{-7} \text{m/s}^2$ ) bedingt durch Operationen (z.B. Neustarts) der Interface- und Kontrolleinheit (ICU, Interface and Control Unit)
- Störsignale mit einer längeren Periode (10–20 Minuten) in der  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente, die auf eine Fehlfunktion der Spannungssteuerung einer Elektrode des X3-Elektrodenpaars zurückzuführen sind. Die X3-Elektrode reagiert mit einer erhöhten Sensitivität auf Temperaturschwankungen ( $7 \cdot 10^{-8} \text{ms}^{-2}/\text{Tag}$ ,  $-5 \cdot 10^{-6} \text{ms}^{-2}/^\circ\text{C}$ ,  $-2 \cdot 10^{-7} \text{ms}^{-2}/^\circ\text{C}/\text{Tag}$ ), die durch die Aktivität der Heizvorrichtung bedingt sind, sowie auf weitere externe Störungen.

In Abbildung 5.3 werden einige der zuvor genannten Arten von Ausreißern in der  $Y^{\text{ACC}}$ -Komponente der Level-1-Daten des Akzelerometers gezeigt. Diese Ausreißer lassen sich jedoch aufgrund ihrer Signalstruktur, die sich deutlich vom restlichen Signal abhebt, durch eine geeignete Vorverarbeitung herausfiltern. Die vom GFZ bereitgestellten Akzelerometerdaten (Level-2-Daten) sind bereits von solchen Ausreißern gemäß des in Förste und Choi (2005) beschriebenen Verfahrens gereinigt. Die wichtigsten Komponenten dieses Verfahrens sind (i) Ausschneiden der Daten an Kontrollsteuerungszeitpunkten, (ii) Polynomregression für sich überlappende 30-Sekunden-Intervalle mit anschließender Ausreißerdetektion anhand der  $2\sigma$ -Grenze und (iii) Datenkompression von 1 Hz auf 0,1 Hz durch Mittelwertbildung eines 10-Sekunden-Intervalls. In Abbildung 5.4 wird anhand eines Datensatzes der  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente gezeigt, wie durch diesen Vorverarbeitungsschritt die Messdaten von Ausreißern beseitigt werden.



**Abbildung 5.3:** Verschiedene Typen von Ausreißern (Spikes) in den Level-1-Akzelerometerdaten (ungefilterte nicht-gravitative Störbeschleunigungen, hier: lineare „along-track“-Beschleunigungen); Quelle: Grunwaldt und Meehan, 2003.

Für die Bereinigung von Diskontinuitäten und Sprüngen wird empfohlen, die Prozessierungsperioden entsprechend auszuwählen (Perosanz et al., 2005). Die Korrektur der durch das Fehlverhalten des X3-Elektrodenpaars verursachten längerperiodischen Störung, die nach den Gleichungen in Abbildung 5.2 neben der radialen  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente des Akzelerometers auch die  $\theta/\psi$ -Komponente der Winkelbeschleunigungen betrifft, gestaltet sich schwieriger, da sich das Störsignal nicht auffällig vom eigentlichen Signal entscheidet. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die 6 Freiheitsgrade der Akzelerometerprüfmasse aus den 11 funktionierenden der 12 Einzelelektroden mittels der Linearkombinationen in Abbildung 5.2 rekonstruiert werden können (Perosanz et al., 2003). Schließlich kann dadurch ein Korrekturwert für die  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente gefunden werden, der sich aus der  $\theta$ -Komponente der Winkelbeschleunigung zu  $da_x = 0,015 \cdot a_\theta$  ergibt (Förste und Choi, 2005). Dieser Term wird als X3-Korrektur bezeichnet und ist in den Level-2-Akzelerometerdaten angegeben.



**Abbildung 5.4:** Vergleich zwischen ungefilterten (Level-1-Daten) und vorverarbeiteten Akzelerometerdaten (Level-2-Daten) mit und ohne X3-Korrektur ( $da_x$ ); radiale Komponente, Revision 9, Tag 44, Jahr 2002. Quelle: Förste und Choi, 2005.

Abbildung 5.4 zeigt, wie das vorverarbeitete  $X^{\text{ACC}}$ -Akzelerometersignal vor und nach der Anbringung der X3-Korrektur aussieht. Es ist zu erkennen, dass einige länger periodische Signalanteile abgeschwächt werden. Der Vollständigkeit halber sollte erwähnt werden, dass noch ein zweiter Korrekturterm für die  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente durch Differentiation der Sternkameraquaternionen erhalten werden kann (Förste und Choi, 2005), der allerdings von wesentlich geringerer Bedeutung ist und derzeit vernachlässigt wird. Die  $\theta$ - und  $\psi$ -Komponenten der Winkelbeschleunigung bleiben weiterhin voll durch die Fehlfunktion der X3-Elektrode beeinträchtigt. Bedingt durch die Elektrodenfehlfunktion wurden außerdem neue Umrechnungsfaktoren ( $\text{Volt} \rightarrow \text{m/s}^2$ ) für die betroffene  $X^{\text{ACC}}$ -Komponente und  $\theta$ -Komponente bestimmt, die sich signifikant von den früheren Umrechnungsfaktoren unterscheiden (CHAMP newsletter Nr. 9 vom 2. April 2002, erhältlich über die CHAMP-homepage des GFZ). Eine weitere Korrekturgröße, welche in den Level-2-Daten angegeben ist, ist die Lorentzkraftkorrektur, die bis ca.  $5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$  betragen kann. Die Lorentzkraft entsteht durch die Bewegung der geladenen Probemasse im Magnetfeld der Erde.

Neben den vorverarbeiteten und von Ausreißern bereinigten Akzelerometerdaten  $X_{\text{prep}}^{\text{ACC}}$ ,  $Y_{\text{prep}}^{\text{ACC}}$ ,  $Z_{\text{prep}}^{\text{ACC}}$  und den Korrekturwerten für die Lorentzkraftkorrektur und für die X3-Korrektur  $da_x$  (und natürlich den Sternkameraquaternionen) sind in

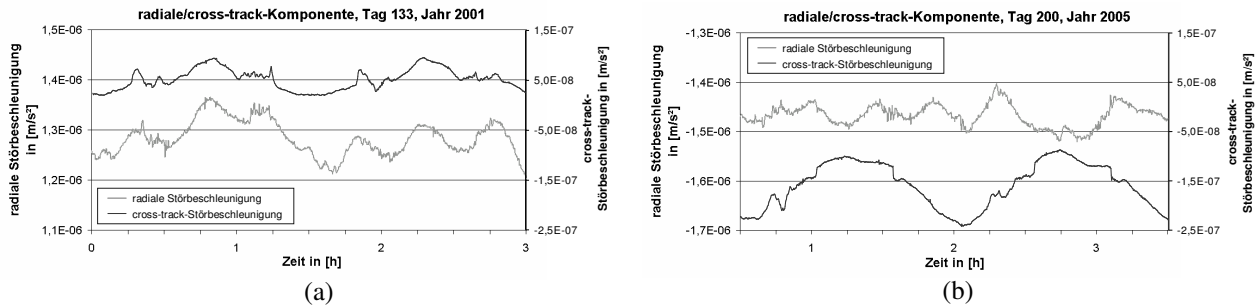
den Level-2-Akzelerometerdaten auch noch Bias- ( $acl\_k0_x, acl\_k0_y, acl\_k0_z$ ) und Skalierungsparameter ( $acl\_k1_x, acl\_k1_y, acl\_k1_z$ ) für die einzelnen Komponenten angegeben. Diese Bias- und Skalierungsparameter wurden vom GFZ aus Messdaten des Zeitraumes September–Dezember 2001 bestimmt und werden auch für Zeitpunkte außerhalb dieser Periode als gültig betrachtet. Die korrigierten Störbeschleunigungen  $X_{cor}^{ACC}$ ,  $Y_{cor}^{ACC}$ ,  $Z_{cor}^{ACC}$  bezüglich des Akzelerometersystems  $\mathbf{B}^{ACC}$  ergeben sich somit nach dem Schema

$$\text{korrigierte Messung} = (\text{vorverarbeitete Messung} + \text{Bias}) \cdot \text{Skalierung},$$

wobei die vorverarbeitete Messung der  $X^{ACC}$ -Komponente zuerst um die X3-Korrektur behoben werden muss, zu

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{non-grav}^{ACC} &= X_{cor}^{ACC} = (X_{prep}^{ACC} + da_x + acl\_k0_x) \cdot acl\_k1_x \\ \ddot{Y}_{non-grav}^{ACC} &= Y_{cor}^{ACC} = (Y_{prep}^{ACC} + acl\_k0_y) \cdot acl\_k1_y \\ \ddot{Z}_{non-grav}^{ACC} &= Z_{cor}^{ACC} = (Z_{prep}^{ACC} + acl\_k0_z) \cdot acl\_k1_z \end{aligned} \quad (5.36)$$

Es hat sich bei einigen Untersuchungen gezeigt, dass die Gültigkeit der vom GFZ Potsdam bestimmten Kalibrierungsparameter außerhalb der oben genannten Periode vor allem durch die Driften und Schwankungen der Biasparameter in Frage zu stellen ist. Dies ist vermutlich auch der Grund, warum in Abbildung 5.5a),b) die Vorzeichen der kalibrierten cross-track-Komponente und der radialen Komponente zwischen den beiden 4 Jahre auseinander liegenden Zeitpunkten wechseln. Eine Schätzung von Biasparametern, aber auch von Skalierungsparametern, innerhalb der Bahn- und Gravitationsfeldbestimmung scheint somit unumgänglich und wird daher häufig eingesetzt. Dabei werden verschiedene Parametrisierungen für die Kalibrierungsparameter angewendet, die von einer Schätzung jeweils eines Biasparameters pro Umlauf und linearer Akzelerometerkomponente (bzw. 2 Biasparameter für die  $X^{ACC}$ -Komponente pro Umlauf) (Reigber et al., 2005c) über die Bestimmung eines Biasparameters pro Tag und Komponente (Kang et al., 2003) bis hin zur Schätzung eines Biasparameters pro kurzem Bahnbogen und Komponente (Mayer-Gürr et al., 2005b) gehen. Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung eines zeitlich veränderlichen Bias wird in Gerlach et al. (2003c) gezeigt, indem für den Bias der along-track-Komponente ein Polynom 9. Ordnung geschätzt wird. Die zu bestimmenden (bzw. zu verbessernden) Kalibrierungsparameter können dabei direkt als Unbekannte in das Gleichungssystem zur Gravitationsfeldbestimmung mit aufgenommen werden (Mayer-Gürr et al., 2005b, Reigber et al., 2005c), oder in einer der eigentlichen Gravitationsfeldschätzung vorgeschalteten Kalibrierung (z.B. durch Auswertung von Energiebilanzen an Bahnkreuzungspunkten oder durch Betrachtung von Energieverlusten an Bahnpunkten mit Hilfe vorhandener Gravitationsfeldmodelle, Gerlach et al., 2003c) bestimmt werden.



**Abbildung 5.5:** Korrigierte Werte für die radiale und cross-track-Komponente der mit dem Akzelerometer erfassten Störbeschleunigungen für einen 3-stündigen Zeitraum ( $\approx 2$  Umläufe) für einen früheren und späteren Zeitpunkt der CHAMP-Mission.

## 6 Bestimmung von Beschleunigungen mittels numerischer Differentiation

Das eigentliche Problem beim Beschleunigungsansatz besteht darin, die auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen aus der gegebenen kinematischen Bahn zu bestimmen. Um Trägheitsbeschleunigungen zu vermeiden, werden die Beschleunigungen im Quasi-Inertialsystem CIS bestimmt, die im erdfesten System gegebenen kinematischen Orbits müssen also zuvor ins CIS transformiert werden.

Die Idee, Beschleunigungen oder auch Geschwindigkeiten aus GPS-Daten (Trägerphasen, Pseudostrecken, kinematische Orbits) zu bestimmen, ist in der Geodäsie nicht neu. Vor allem in der Fluggravimetrie, bei der die Messungen von kinematischen Störtermen bereinigt werden müssen, gab es schon einige Ansätze hierfür. Als Beispiele sind Brozena et al. (1989), Kleusberg et al. (1990), Jekeli und Garcia (1997), Cannon et al. (1997), Herbert (1997) oder Bruton (2000) anzusehen. In der Gravitationsfeldbestimmung aus Satellitendaten wurden allerdings bisher Ansätze, die auf numerische Differentiation zur Bestimmung von Beschleunigungen zurückgreifen, nicht näher verfolgt. Aus diesem Grunde soll diese Thematik im Folgenden genauer untersucht werden.

Läge die kinematische Bahn in Form kontinuierlicher Zeitreihen vor, so könnten die Beschleunigungen durch zweimaliges zeitliches Ableiten bestimmt werden. Da es sich bei den kinematischen Orbits aber um diskret bestimmte Positionen mit einem gegebenen Samplingintervall (hier:  $\Delta t = 30$  s) handelt, müssen hier numerische Differentiationsverfahren angewendet werden. Im Wesentlichen sind hierfür zwei Varianten denkbar:

- numerische Differentiation im Zeitbereich
- numerische Differentiation im Frequenzbereich.

Die numerische Differentiation im Zeitbereich besteht hauptsächlich aus zwei Schritten:

- 1.) Finden einer kontinuierlichen Funktion für die kinematische Bahn  $\mathbf{X}(t)$  bzw. einen Abschnitt von  $\mathbf{X}(t)$  in Form einer Interpolationsfunktion
- 2.) zweifaches Ableiten der Interpolationsfunktion nach der Zeit  $t$ .

An diesen zwei Schritten werden auch schon die Probleme, die mit der numerischen Differentiation verbunden sind, deutlich. Zum einen muss die Interpolationsfunktion so gewählt werden, dass sie nicht nur an den gegebenen Punkten  $\mathbf{X}(t)$  mit der Bahn übereinstimmt, sondern auch die dazwischen liegende, eigentlich unbekannte Bahn bestmöglich approximiert. Diese Abweichungen führen selbst bei einer fehlerfrei vorliegenden kinematischen Bahn bei der anschließenden Differentiation zu *Approximationsfehlern*. Aufgrund des relativ glatten Verlaufs einer Satellitenbahn ist es allerdings möglich, wie später zu sehen ist, relativ gut approximierende Interpolationsfunktionen zu finden. Das zweite Problem — das Hauptproblem — ist aber die Verstärkung des Rauschens durch die Differentiation, vor allem auf den höheren Frequenzen des Signals  $\mathbf{X}(t)$ . Da die kinematische Bahn (s. Anhang C) zahlreiche höherfrequente Fehler und Rauschanteile aufweist, ist dies zwangsläufig ein Problem, das noch näher betrachtet werden muss.

Die numerische Differentiation im Frequenzbereich gliedert sich hauptsächlich in 3 Schritte (Weigelt und Sneeuw, 2005):

- 1.) Transformation in den Frequenzbereich, z.B. durch *Fourier-Transformation*
- 2.) Differentiation im Frequenzbereich durch Multiplikation des spektralen Inhalts mit  $(i\omega)^2$
- 3.) Rücktransformation in den Zeitbereich durch die inverse Fourier-Transformation.

Im Prinzip entspricht diese Art der numerischen Differentiation derjenigen im Zeitbereich, wenn man das Anwenden der Fourier-Transformation als Auffinden der Interpolationsfunktion mit anschließender Differentiation betrachtet. Der Vorteil der numerischen Differentiation im Frequenzbereich liegt darin, dass das Prinzip des idealen Differentiators (Antoniou, 1993; Bruton, 2000; Weigelt und Sneeuw, 2005) mit der Frequenzantwort

$$H(e^{i\omega t}) = (i\omega)^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \quad \text{mit:} \quad \begin{array}{l} \omega: (\text{Kreis-})\text{Frequenz des Spektrums} \\ \omega_s = 2\pi / \Delta t: \text{Sampling - (Kreis-)Frequenz} \end{array} \quad (6.1)$$

verwirklicht werden kann und dass der Differentiator so modifiziert werden kann, dass das Signal auf bestimmten Frequenzen möglichst genau differenziert wird bzw. herausgefiltert oder gedämpft wird. Allerdings ist diese Methode im Gegensatz zur Differentiation im Zeitbereich nur auf längere Datensätze (z.B. 1 Tag) anwendbar, deshalb entstehen Probleme bei Datenlücken sowie einzelnen Ausreißern, die sich auf den gesamten Zeitraum verzögern (Weigelt und Sneeuw, 2005). Ein weiteres Problem ist das Aliasing. Durch Windowingtechniken können einige dieser Probleme vermindert werden. Insgesamt entstehen bei dieser Differentiationsmethode Randeffekte, die dazu führen, dass am Anfang und Ende des Datensatzes ein größerer Zeitraum an Daten abgeschnitten werden muss (Weigelt und Sneeuw, 2005). Aus diesen Gründen wurden im Rahmen dieser Arbeit nur Differentiationsmethoden im Zeitbereich untersucht.

Zur Verdeutlichung der Problematik der Verstärkung des Rauschens durch numerische Differentiation werden allerdings die Differentiation im Frequenzbereich sowie die Idee des idealen Differentiators nochmals aufgenommen. Die Transformation einer an den äquidistanten Stützstellen  $0 \leq n \leq N-1$  ( $N \hat{=}$  Anzahl der Punkte) mit den Zeitpunkten  $t_n = n \cdot \Delta t$  vorliegenden Zeitreihe  $x(n) = x(t_n)$  in den Frequenzbereich gelingt mit Hilfe der *diskreten Fourier-Transformation (DFT)*

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega_k t_n} \quad ; \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{inverse DFT}) \quad (6.2)$$

mit der zur Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi k/N\Delta t$  gehörenden Amplitude

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\omega_k t_n} \quad ; \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (\text{DFT}) \quad (6.3)$$

Etwas anschaulicher ist die mit der DFT verwandte reellwertige Fourier-Reihe

$$x(n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \underbrace{\cos(2\pi k/N\Delta t t_n)}_{\omega_k} + b_k \underbrace{\sin(2\pi k/N\Delta t t_n)}_{\omega_k} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad \begin{array}{l} a_0 = 2c_0 \\ a_k = 2\operatorname{Re}(c_k) \\ b_k = 2\operatorname{Im}(c_k) \end{array} \quad (6.4)$$

Beschreibt die Zeitreihe  $x(n) = x(t_n)$  die Satellitenbahn, so erhält man durch zweifaches Ableiten der *IDFT (inverse diskrete Fourier-Transformation)* bzw. der Fourier-Reihe nach der Zeit  $t$  die Beschleunigungen

$$x''(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (i\omega_k)^2 c_k e^{i\omega_k t_n} \quad (\text{IDFT}) \quad (6.5)$$

$$x''(n) = \sum_{k=1}^{N/2} \omega_k^2 a_k \cos(\omega_k t_n) + \omega_k^2 b_k \sin(\omega_k t_n) \quad (\text{Fourier-Reihe}) \quad (6.6)$$

Daraus ergibt sich dann der spektrale Transfer  $H(e^{i\omega_k T}) = (i\omega_k)^2$  eines idealen zweifachen Differentiators nach Antoniou (1993). Es ist daraus leicht zu erkennen, dass die Amplituden  $c_k$  bzw.  $a_k, b_k$ , die sich aus dem Signal und dem Rauschen auf der zugehörigen Kreisfrequenz  $\omega_k$  zusammensetzen, mit dem Faktor  $\omega_k^2$  verstärkt werden. Dies bedeutet, dass mit zunehmender Frequenz eine größere Erhöhung des Rauschens (und auch des Signals) eintritt. Somit lässt sich die das Rauschen verstärkende Eigenschaft des numerischen Differenzierens erklären. Ein Verlauf des Rauschens im Frequenzbereich in der parabolischen Form von  $\text{const} \cdot (\omega_k)^2$  ergibt sich allerdings nur für weißes Rauschen, das auf allen Frequenzen gleich ist ( $\sigma_k = \text{const}$ ). Ist das Rauschen des Signals  $x(n)$  jedoch stark (positiv) korreliert, wie dies bei GPS-Beobachtungen häufig der Fall ist, so nimmt das Rauschen in  $x(n)$  für zunehmende Frequenzen ab. Dies bedeutet dann, dass die Fehler auf den höheren Frequenzen durch numerische Differentiation nicht zu groß werden und dass somit eventuell numerische Differentiation bei Datensätzen mit (stark) korreliertem Rauschen eingesetzt werden kann. Eine andere Betrachtungsweise dieses Problems bietet sich im Zeit- (oder Orts-) bereich am Beispiel von Positionsdifferenzen an. Numerische Differentiation basiert, wie der Name sagt, auf der Differenzbildung aufeinander folgender Datenpunkte. Kann gezeigt werden, dass solche Differenzen genauer als die Datenpunkte selbst bzw. genau genug bestimmbar sind (z.B. fallen Offsets bei der Differenzbildung heraus), so können die Genauigkeitsverluste durch numerische Differentiation als akzeptabel betrachtet werden. Als Beispiel dient hier *DGPS (Differentielles GPS)*. Während die absolute Genauigkeit eines mit GPS vermessenen Punktes im dm- oder m-Bereich liegt, so kann die Basislinie (Positionsdifferenz) zwischen zwei Punkten (Abstand  $< 20$  km) mit mm- bis cm-Genauigkeit bestimmt werden. Die *relative* Genauigkeit ist also höher als die *absolute* Genauigkeit. Der Grund dafür ist, dass die GPS-Beobachtungen aufgrund ähnlicher Fehlereinflüsse stark korreliert sind und diese durch Differenzbildung weitestgehend herausfallen. Mathematisch betrachtet lässt sich dies wie folgt erklären:

Die beiden Positionen  $x_1$  und  $x_2$  (nur die  $x$ -Koordinate wird betrachtet) besitzen die Standardabweichung  $\sigma_x$  und die Korrelation  $\rho$ , somit ist deren Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\mathbf{C}_x = \sigma_x^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Für die Genauigkeit  $\sigma_{\Delta x}$  der Basislinie  $\Delta x_i^2 = x_2 - x_1$  ergibt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{\Delta x}^2 = \mathbf{C}_{\Delta x} = \mathbf{J}^T \mathbf{C}_x \mathbf{J} = \sigma_x^2 \cdot (2 - 2\rho) \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta x_i^2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta x_i^2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Somit ist die Standardabweichung der Basislinien  $\sigma_{\Delta x}$  für weißes Rauschen ( $\rho = 0$ ) um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer (rauschverstärkende Wirkung) als die Standardabweichung der Positionen  $\sigma_x$ , während für hohe Korrelationen mit  $\rho = 0,9$  bzw.  $\rho = 0,99$  (farbiges Rauschen) die Standardabweichung der Basislinien  $\sigma_{\Delta x}$  nur noch ca. 44% bzw. 14% der Standardabweichung der Positionen  $\sigma_x$  beträgt (rauschvermindernde Wirkung). Da die Positionsfehler des kinematischen Orbits aufgrund der Korrelationen der GPS-Messungen selbst sowie aufgrund des angewendeten Auswertalgorithmus größere Korrelationen untereinander besitzen (s. Anhang C), liegt die Vermutung nahe, dass numerische Differentiation zur Bestimmung von Beschleunigungen angewendet werden kann. Dies soll unter anderem in diesem Kapitel anhand simulierter Daten untersucht werden. Für die Untersuchung von Realdaten wird auf Kapitel 9 verwiesen.

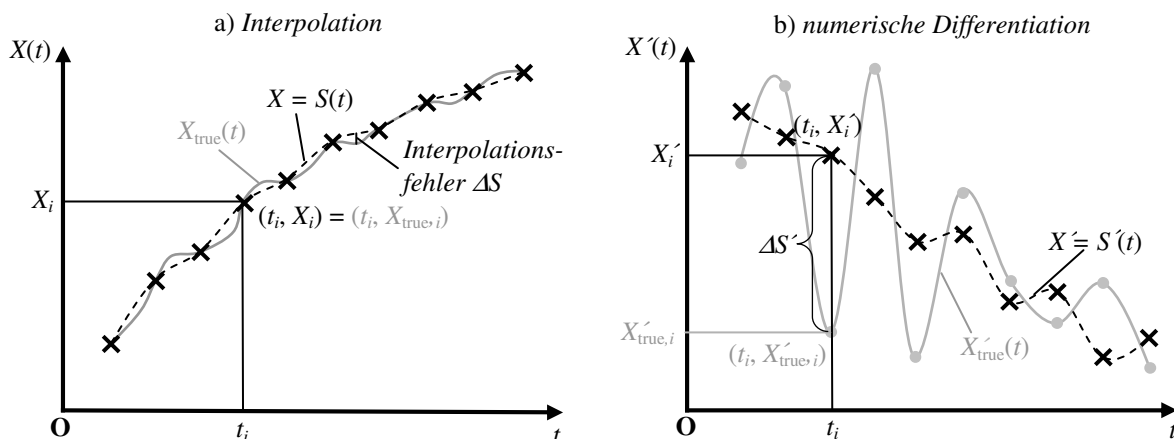
In diesem Kapitel werden zunächst verschiedene Interpolationsverfahren und Methoden zur numerischen Differentiation vorgestellt und auf ihre Approximationsgüte (Approximationsfehler) hin überprüft. Anschließend wird untersucht, wie diese auf das Rauschen in der kinematischen Bahn reagieren.

Ein weiterer Abschnitt befasst sich mit der numerischen Differentiation basierend auf glättenden Interpolations- oder Regressionsfunktionen, die nicht mehr exakt durch die Stützstellen verlaufen. Der Zweck solcher Regressionsfunktionen soll darin liegen, das Signal zu glätten und das Rauschen abzuschwächen.

In einer Gegenüberstellung der untersuchten Verfahren sollen dann die geeigneten Methoden herausgefunden werden.

## 6.1 Numerische Differentiation basierend auf exakten Interpolationsverfahren

Als exakte Interpolationsverfahren werden solche Interpolationsfunktionen  $X = S(t)$  angesehen, die genau durch die vorgegebenen Stützstellen  $(t_i, X(t_i))$  verlaufen. An den (nicht gemessenen) Zwischenpunkten hingegen wird die Interpolationsfunktion bedingt durch fehlende Information nicht mehr exakt mit der wahren Funktion  $X_{\text{true}}(t)$  übereinstimmen (s. Abbildung 6.1). Dies führt dann zu Interpolationsfehlern  $\Delta S$ , die sich beim Differenzieren dann als Approximationsfehler  $\Delta S'$  in den bestimmten Ableitungen zeigen (s. Abbildung 6.1).



**Abbildung 6.1:** Prinzip der exakten Interpolation  $X = S(t)$  sowie der anschließenden numerischen Differentiation  $X' = S'(t)$ . Aus den Abweichungen zwischen der Interpolationsfunktion  $X = S(t)$  und der wahren Funktion  $X_{\text{true}}(t)$  außerhalb der Stützstellen  $(t_i, X_i) = (t_i, X_{\text{true},i})$  entstehen Interpolationsfehler  $\Delta S(t) = S(t) - X_{\text{true}}(t)$ , die bei der numerischen Differentiation zu Approximationsfehlern  $\Delta S'(t_i) = X'_i - X'_{\text{true},i}$  an den Stützstellen führen.

Die in dieser Arbeit getesteten exakten Interpolationsverfahren sind

- die Polynominterpolation mit den Interpolationsformeln von Gregory-Newton
- Interpolation durch kubische Splines.

Im allgemeinen sind Splines für die Interpolation vorzuziehen, da diese aufgrund eines relativ niedrigen Grades der verwendeten Interpolationspolynome auch bei unruhigen Verläufen der zu interpolierenden Werte nicht zum „Durchschwingen“ neigen. Der Nachteil besteht darin, dass für die Spline-Interpolation Randwerte für die erste oder zweite Ableitung benötigt werden. Sind diese schlecht bestimmt oder nicht bekannt (es wird dann z.B. die zweite Randableitung zu Null gesetzt), so führt dies zu einem Ein- und Ausschwingverhalten an den Rändern des Splines, die interpolierten Werte an diesen Stellen können somit nicht verwendet werden. Zur Bestimmung von Randwerten kann alternativ ein einfaches Interpolationsverfahren wie Polynominterpolation herangezogen werden, wozu wiederum eine



größere Zeitreihe für die Interpolation benötigt wird. Insgesamt wird im Gegensatz zur herkömmlichen Polynominterpolation für die Spline-Interpolation ein größerer Datensatz der Zeitreihe  $X(t_i)$  benötigt, was ein Problem bei Datenlücken sowie auch bei Ausreißern darstellt, die sich auf die umliegenden Daten verzögern können.

Das „Durchschwingen“ bei Polynomen kann vermieden werden, wenn (i) der Verlauf der zu interpolierenden Zeitreihe relativ glatt und ruhig ist und (ii) somit ein Interpolationspolynom niedrigen Grades verwendet werden kann. Ein aufgrund des niedrigen Grades kurzes Interpolationsschema hat den Vorteil, dass bei Datenlücken und Ausreißern nur wenige Beobachtungen davor und danach verworfen werden müssen. Außerdem ist eine effektive Implementierung als Filter möglich, die eine äußerst zeitsparende Bestimmung der Ableitungen ermöglicht.

Da die Satellitenbahnen normalerweise mit einer bestimmten Abtastrate  $\Delta t$  vorliegen, werden in dieser Arbeit nur Interpolationsmethoden für äquidistante Stützstellen  $(t_i, X(t_i))$  mit konstanter Schrittweite  $h = t_{i+1} - t_i = \Delta t$  betrachtet.

### 6.1.1 Numerische Differentiation basierend auf den Interpolationsformeln von Newton

Bei der Interpolation nach Newton handelt es sich, wie bereits erwähnt, um eine Polynominterpolation. Im folgenden werden die wichtigsten Formeln zur Interpolation angegeben, genauere mathematische Details und Hintergründe sind in Standardwerken zur numerischen Mathematik wie beispielsweise in Engeln-Müllges und Reutter (1987) oder Maeß (1988) zu finden, die hier gemachten Angaben basieren auf Engeln-Müllges und Reutter (1987).

**Box 6.1:** Newton'sche Interpolationsformel für eine vektorwertige, äquidistante Zeitreihe von Satellitenpositionen

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_1 + q\Delta t) &= \mathbf{X}(t_1) + \binom{q}{1} \Delta_{3/2}^1 + \binom{q}{2} \Delta_2^2 + \dots + \binom{q}{n-1} \Delta_{1+(n-1)/2}^{n-1} = \\ &= \mathbf{X}(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{q}{i} \Delta_{1+i/2}^i \quad ; \quad q \in [0, n-1] \end{aligned} \tag{6.9}$$

mit

den vorwärts genommenen Differenzen und den Newton'schen Basispolynomen

$$\Delta_{1+i/2}^i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{i+j+1} \binom{i}{j-1} \mathbf{X}(t_j) \quad \binom{q}{i} \tag{6.10} \tag{6.11}$$

mit:

|   |  |
|---|--|
| $\mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t)$   | (vektorwertige) Interpolationsfunktion   |
| $t_i, \mathbf{X}(t_i)$  | Koordinaten der Stützstellen   |
| $t = t_1 + q\Delta t, \mathbf{X}(t_1 + q\Delta t)$  | Koordinaten des Evaluationspunktes   |
| $t_1, \mathbf{X}(t_1)$  | Koordinaten des Interpolationsanfangspunktes                                       |
| $t_n, \mathbf{X}(t_n)$  | Koordinaten des Interpolationsendpunktes   |
| $n$   | Anzahl der Stützstellen  |
| $h = t_{i+1} - t_i = \Delta t$  | Schrittweite (Samplingintervall)   |
| $q = (t - t_1) / \Delta t$  | Quotient der Zeitdifferenzen   |
| $\mathbf{X}(t_i) = \mathbf{I}_1^T X(t_i) + \mathbf{I}_2^T Y(t_i) + \mathbf{I}_3^T Z(t_i) = \mathbf{I}_1^T X_1 + \mathbf{I}_2^T Y_2 + \mathbf{I}_3^T Z_3 = \mathbf{X}_i$ | Koordinaten des Satelliten im raumfesten System $\mathbf{I}^T$ zum Zeitpunkt $t_i$ |

Bei der Newton'schen Interpolationsformel handelt es sich nach (6.9) um ein  $n$ -Punkt-Interpolationsschema, dessen Interpolationsfunktion  $\mathbf{S}(t)$  einem Polynom  $(n-1)$ -ten Grades entspricht. Die Interpolationsfunktion ist eine Produktsumme aus vorwärts genommenen Differenzen  $\Delta_{1+i/2}^i$  (6.10) und den Newton'schen Basispolynomen  $\binom{q}{i}$  (6.11). Die vorwärts genommenen Differenzen berechnen sich nach (6.10) aus den Koordinaten der kinematischen Bahn  $\mathbf{X}(t_i)$ , die zugehörigen Newton'schen Basispolynome ergeben sich nach (6.11) als Binomialkoeffizienten aus dem Quotient der Zeitdifferenzen  $q$  und der Ordnung  $i$  der zugehörigen vorwärts genommenen Differenz. Der Quotient der Zeitdifferenzen  $q$  ergibt sich dabei als Quotient der aktuellen Zeit  $t$  bezogen auf den Interpolationsanfangszeitpunkt  $t_1$  und der Schrittweite  $\Delta t$ . Eine Besonderheit der hier angegebenen Interpolationsfunktion ist, dass sie hier als eine vektorwertige Funktion formuliert ist im Gegensatz zur skalarwertigen Darstellung in Engeln-Müllges und Reutter (1987). Die Stützstellen bestehen in diesem Fall aus dem Zeitpunkt  $t_i$  und dem zugehörigen Positionsvektor  $\mathbf{X}(t_i) = [X(t_i), Y(t_i), Z(t_i)]^T$ . Es sind also in der vektorwertigen Interpolationsfunktion  $\mathbf{S}(t)$  drei skalarwertige Interpolationsfunktionen für die drei Zeitreihen von Stützstellen  $(t_i, X(t_i))$ ,  $(t_i, Y(t_i))$ ,  $(t_i, Z(t_i))$ , also jede der drei Komponenten der kinematischen Bahn, zusammengefasst. Die drei Zeitreihen können auch einzeln interpoliert werden, da die jeweiligen Interpolationsfunktionen unabhängig voneinander sind.

**Box 6.2:** Bestandteile der Newton'schen Interpolationsformel

$$\text{vorwärts genommene Differenzen } \Delta_{1+i/2}^i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{i+j+1} \binom{i}{j-1} \mathbf{X}(t_j) \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3/2}^1 &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \Delta_2^2 &= \mathbf{X}_3 - 2\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 \\ \Delta_{5/2}^3 &= \mathbf{X}_4 - 3\mathbf{X}_3 + 3\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \Delta_4^4 &= \mathbf{X}_5 - 4\mathbf{X}_4 + 6\mathbf{X}_3 - 4\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 \\ \Delta_{7/2}^5 &= \mathbf{X}_6 - 5\mathbf{X}_5 + 10\mathbf{X}_4 - 10\mathbf{X}_3 + 5\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \Delta_8^6 &= \mathbf{X}_7 - 6\mathbf{X}_6 + 15\mathbf{X}_5 - 20\mathbf{X}_4 + 15\mathbf{X}_3 - 6\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 \\ \Delta_{9/2}^7 &= \mathbf{X}_8 - 7\mathbf{X}_7 + 21\mathbf{X}_6 - 35\mathbf{X}_5 + 35\mathbf{X}_4 - 21\mathbf{X}_3 + 7\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \Delta_9^8 &= \mathbf{X}_9 - 8\mathbf{X}_8 + 28\mathbf{X}_7 - 56\mathbf{X}_6 + 70\mathbf{X}_5 - 56\mathbf{X}_4 + 28\mathbf{X}_3 - 8\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

und Newton'sche Basispolynome

$$\begin{aligned} \binom{q}{1} &= \frac{q!}{(q-1)!1} = q \\ \binom{q}{2} &= \frac{q!}{(q-2)!2!} = \frac{q^2 - q}{2} \\ \binom{q}{3} &= \frac{q!}{(q-3)!3!} = \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} \\ \binom{q}{4} &= \frac{q!}{(q-4)!4!} = \frac{q^4 - 6q^3 - 11q^2 - 6q}{24} \\ \binom{q}{5} &= \frac{q!}{(q-5)!5!} = \frac{q^5 - 10q^4 + 35q^3 - 50q^2 + 24q}{120} \\ \binom{q}{6} &= \frac{q!}{(q-6)!6!} = \frac{q^6 - 15q^5 + 85q^4 - 225q^3 + 274q^2 - 120q}{720} \\ \binom{q}{7} &= \frac{q!}{(q-7)!7!} = \frac{q^7 - 21q^6 + 175q^5 - 735q^4 + 1624q^3 - 1764q^2 + 720q}{5040} \\ \binom{q}{8} &= \frac{q!}{(q-8)!8!} = \frac{q^8 - 28q^7 + 322q^6 - 1960q^5 + 6769q^4 - 13132q^3 + 13068q^2 - 5040q}{40320} \end{aligned} \quad (6.14)$$

In (6.12)–(6.14) sind die vorwärts genommenen Differenzen  $\Delta_{1+i/2}^i$  sowie die Newton'schen Basispolynome  $\binom{q}{i}$  für ein 9-Punkt-Interpolationsschema angegeben, für ein kleineres Interpolationsschema werden von diesen entsprechend nur die ersten  $(n-1)$  vorwärts genommenen Differenzen bzw. Newton'schen Basispolynome verwendet. Wie zu sehen ist, sind die vorwärts genommenen Differenzen  $\Delta_{1+i/2}^i$  im Prinzip Koordinatendifferenzen höherer Ordnung  $i$ , welche die entsprechende  $i$ -te Ableitung an der Stelle  $t_{1+i/2}$  repräsentieren. Das Newton'sche Interpolationspolynom  $\mathbf{S}(t)$  stellt somit eine Art Taylor-Entwicklung der zu interpolierenden Funktion dar.

Zur Bestimmung der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  am Zeitpunkt  $t$  muss die Newton'sche Interpolationsfunktion  $\mathbf{S}(t)$  aus (6.9) gemäß (6.15) zweimal nach der Zeit  $t$  abgeleitet werden. Dazu müssen die Newton'schen Basispolynome, welche den Zeitdifferenzenquotienten  $q$  und somit die Zeit  $t$  enthalten, zweimal abgeleitet werden. Es entsteht dann die etwas komplizierte, allgemeine Formel nach Engeln-Müllges und Reutter (1987) in (6.16). In (6.17) sind die zweiten Ableitungen der Newton'schen Basispolynome  $\binom{q}{i}$  für ein 9-Punkt-Schema explizit in Abhängigkeit des Zeitdifferenzenquotienten  $q$  angegeben, für ein kleineres Interpolationspolynom müssen entsprechend wieder die ersten  $(n-1)$  der in (6.17) angegebenen  $\binom{q}{i}$  verwendet werden.

Aus Genauigkeits- und Symmetriegründen sollten immer Interpolationspolynome für eine ungerade Anzahl von Punkten, z.B. 3,5,7,9... Punkte, gewählt werden. Die höchste Genauigkeit (aus Symmetriegründen) für die zweite Ableitung  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  wird immer im Zentralpunkt mit  $t_{(n+1)/2}$  des Interpolationspolynoms erhalten, weswegen im Folgenden auch immer nur die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{X}}(t_{(n+1)/2})$  im Zentralpunkt ( $t_{(n+1)/2}$ ,  $\mathbf{X}(t_{(n+1)/2})$ ) bestimmt wird. Für den Zeitdifferenzenquotienten  $q$  ergibt sich im Zentralpunkt  $q = (n-1)/2$  und somit als Beispiel die zweiten Ableitungen der Newton'schen Basispolynome für das 9-Punkt-Schema mit  $q = 4$  gemäß (6.18).

**Box 6.3:** Zweite zeitliche Ableitung der Newton'schen Interpolationsformel für eine vektorwertige, äquidistante Zeitreihe von Satellitenpositionen

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{S}''(t) = \binom{q}{1}'' \Delta_{3/2}^1 + \binom{q}{2}'' \Delta_{3/2}^2 + \binom{q}{3}'' \Delta_{5/2}^3 + \dots + \binom{q}{n-1}'' \Delta_{1+(n-1)/2}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{q}{i}'' \Delta_{1+i/2}^i \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{\Delta t^2} & \left[ \Delta_2^2 + \frac{6(q-1)}{3!} \Delta_{5/2}^3 + \frac{2}{4!} [(q-2)(q-3) + (q-1)(q-3) + (q-1)(q-2) + 3q(q-2)] \Delta_3^4 + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\binom{q-j}{q-k} - 1}{(q-j)^2} \prod_{l=0}^{n-2} (q-l) \Delta_{1+(n-1)/2}^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

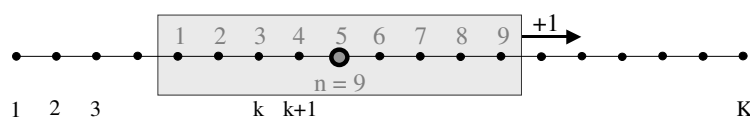
mit den zweiten Ableitungen der Newton'schen Basispolynome

$$\begin{aligned} \binom{q}{1}'' &= 0 \\ \binom{q}{2}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \\ \binom{q}{3}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (q-1) \\ \binom{q}{4}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{12q^2 - 36q + 22}{24} \\ \binom{q}{5}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{20q^3 - 120q^2 + 210q - 100}{120} \\ \binom{q}{6}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{30q^4 - 300q^3 + 1020q^2 - 1350q + 548}{720} \\ \binom{q}{7}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{42q^5 - 630q^4 + 3500q^3 - 8820q^2 + 9744q - 3528}{5040} \\ \binom{q}{8}'' &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{56q^6 - 1176q^5 + 9660q^4 - 39200q^3 + 81228q^2 - 78792q + 26136}{40320} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.17)$$

zweite Ableitungen der Newton'schen Basispolynome für 9 Stützstellen (Mittelpunkt:  $q = 4$ ):

$$\begin{aligned} \binom{q}{1}'' = 0 & \quad ; \quad \binom{q}{2}'' = \frac{1}{\Delta t^2} & \quad ; \quad \binom{q}{3}'' = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot 3 & \quad ; \quad \binom{q}{4}'' = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{35}{12} \\ \binom{q}{5}'' = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{5}{6} & \quad ; \quad \binom{q}{6}'' = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{-13}{180} & \quad ; \quad \binom{q}{7}'' = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{1}{90} & \quad ; \quad \binom{q}{8}'' = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \frac{-1}{560} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aus der numerischen Differentiation der Newton'schen Interpolationsformeln für  $n$  Punkte ergibt sich schließlich ein  $n$ -Punkt-Differentiationsfilter  $h(j \cdot \Delta t)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  mit konstanten Koeffizienten, die in Abbildung 6.2 für das 3-, 5-, 7- und 9-Punkt-Schema angegeben sind. Diese Filter berechnen die Beschleunigung im Mittelpunkt des Filterschemas, zur Bestimmung der Beschleunigung am benachbarten Punkt muss dieser Filter, ähnlich einer Operatormaske in der Bildverarbeitung (Abbildung 6.2), um einen Punkt vorwärts geschoben und angewendet werden.



|                        |                         |                        |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| $\frac{1}{\Delta t^2}$ | $-\frac{2}{\Delta t^2}$ | $\frac{1}{\Delta t^2}$ |
|------------------------|-------------------------|------------------------|

3-Punkt-Schema

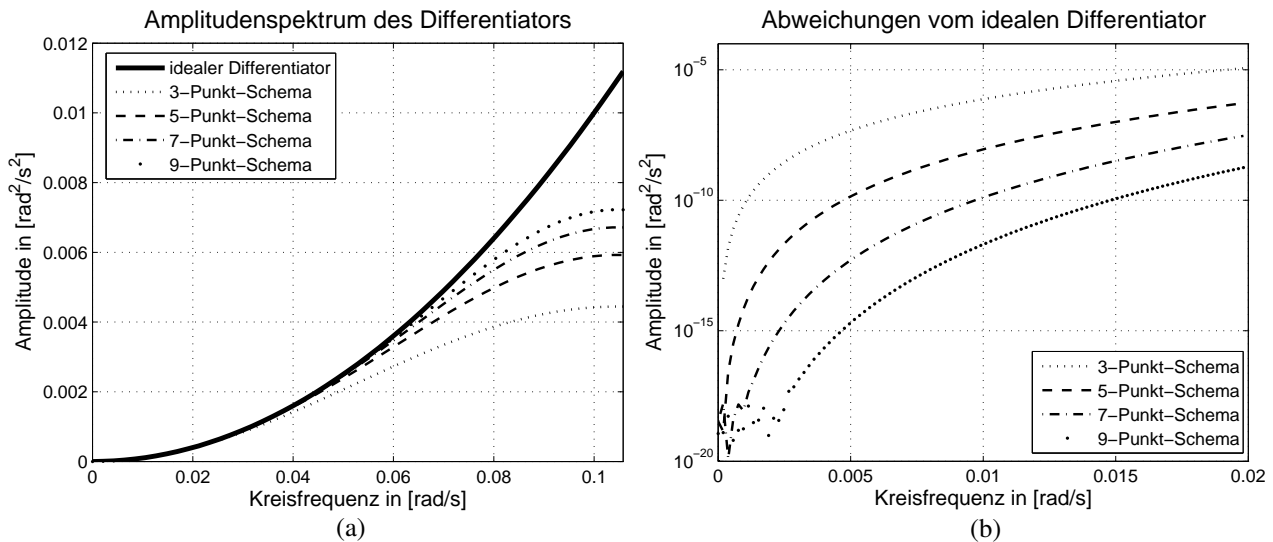
|                           |                         |                          |                         |                           |
|---------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $-\frac{1}{12\Delta t^2}$ | $\frac{4}{3\Delta t^2}$ | $-\frac{5}{2\Delta t^2}$ | $\frac{4}{3\Delta t^2}$ | $-\frac{1}{12\Delta t^2}$ |
|---------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|---------------------------|

5-Punkt-Schema

|                            |                           |                          |                            |                             |                           |                          |                |                           |                            |
|----------------------------|---------------------------|--------------------------|----------------------------|-----------------------------|---------------------------|--------------------------|----------------|---------------------------|----------------------------|
| $\frac{1}{90\Delta t^2}$   | $-\frac{3}{20\Delta t^2}$ | $\frac{3}{2\Delta t^2}$  | $-\frac{49}{18\Delta t^2}$ | $\frac{3}{2\Delta t^2}$     | $-\frac{3}{20\Delta t^2}$ | $\frac{1}{90\Delta t^2}$ | 7-Punkt-Schema |                           |                            |
| $\frac{-1}{560\Delta t^2}$ | $\frac{8}{315\Delta t^2}$ | $-\frac{1}{5\Delta t^2}$ | $\frac{8}{5\Delta t^2}$    | $-\frac{205}{72\Delta t^2}$ | $\frac{8}{5\Delta t^2}$   | $-\frac{1}{5\Delta t^2}$ |                | $\frac{8}{315\Delta t^2}$ | $\frac{-1}{560\Delta t^2}$ |

**Abbildung 6.2:** Numerische Differentiation basierend auf Newtoninterpolation als Operatormaske (Filter).

Bei dem Differentiationsfilter  $h(j \cdot \Delta t)$  handelt es sich nach Bruton (2000) um einen *FIR-Filter* (*Finite Impulsantwort*, engl.: *Finite Impulse Response*), da er nur eine begrenzte Länge besitzt. Da verschiedene Anteile des Gravitationsfeldes sich auf unterschiedlichen Frequenzen der Satellitenbahn sowie der daraus bestimmten Beschleunigungen abbilden, ist es wichtig zu wissen, wie gut die Ableitung des Signals auf den einzelnen Frequenzen mit dem Differentiationsfilter  $h(j \cdot \Delta t)$  approximiert wird. Die zur Impulsantwort  $h(j \cdot \Delta t)$  des Filters gehörende Frequenzantwort  $H_{\text{filter}}(e^{i\omega t})$  erhält man durch die Fourier-Transformation. Diese sollte nun für eine möglichst genaue Bestimmung des Gravitationsfeldes im interessierenden Frequenzbereich mit der Frequenzantwort eines idealen Differentiators nach (6.1) übereinstimmen. Abbildung 6.3a) zeigt die Frequenzantworten eines idealen Differentiators so wie diejenigen des 3-, 5-, 7- und 9-Punkt-Schemas. Wie zu sehen ist, liefern größere Differentiationsfilter eine bessere Approximation, das beste Ergebnis der untersuchten Filter liefert das 9-Punkt-Schema. Ein kleineres Differentiationsschema führt vor allem auf den höheren Frequenzen zu einer deutlich schlechteren Approximation, während auf den tieferen Frequenzen der ideale Differentiator scheinbar realisiert wird, wie aus Abbildung 6.3a) erkennbar ist. Allerdings zeigt ein Zoom in den tieferen Frequenzbereich nach Abbildung 6.3b), dass auch auf den niedrigeren Frequenzen Abweichungen zum idealen Differentiator existieren. Diese Abweichungen sind aber wiederum für einen längeren Differentiationsfilter kleiner. Es soll an dieser Stelle aber angemerkt werden, dass größere Differentiationsfilter Nachteile hinsichtlich anderer Kriterien besitzen können, wie später noch zu sehen sein wird.



**Abbildung 6.3:** a) Amplitudenspektrum eines idealen Differentiators sowie von auf Newton-Interpolation basierenden Filtern zur numerischen Differentiation (3-, 5-, 7- und 9-Punkt-Schema); b) Abweichungen vom idealen Differentiator im niedrigeren Frequenzbereich.

Für die Gravitationsfeldanalyse aus CHAMP mit einer Umlaufkreisfrequenz von  $\omega_{\text{rev}} = 2\pi/T_{\text{rev}} \approx 0,00116 \text{ rad/s}$  bedeutet dies, dass für eine Gravitationsfeldbestimmung bis Grad  $l = 50$  Kreisfrequenzen von  $\omega_{l=50} = 0,058 \text{ rad/s}$  und für Grad  $l = 90$  Kreisfrequenzen von  $\omega_{l=90} = 0,105 \text{ rad/s}$  aufgelöst werden müssen. Nach Abbildung 6.3a) können somit mit dem 9-Punkt-Filter Anteile vom Grad  $l = 50$  gut bestimmt werden während für Anteile vom Grad  $l = 90$  Genauigkeitseinbußen erwartet werden können. Allerdings finden sich die Anteile von Grad  $l = 90$  nicht nur auf der Kreisfrequenz  $\omega_{l=90}$  wieder, sondern auch im umliegenden Spektrum, weswegen für diese Anteile eventuell eine bessere Genauigkeit erwartet werden kann.

Der Vollständigkeit halber sollte noch erwähnt werden, dass die vorwärts genommenen Differenzen  $\Delta_{l+i/2}^i$  in Abhängigkeit von Koordinatendifferenzen  $\Delta \mathbf{X}_k^{k+1}$  aufeinander folgender Bahnpunkte anstatt der Positionen  $\mathbf{X}(t_i)$  selbst gemäß (6.19)–(6.21) formuliert werden können. Da im Falle von korreliertem Rauschen die Koordinatendifferenzen  $\Delta \mathbf{X}_k^{k+1}$  genauer bestimmt werden können als die absoluten Positionen  $\mathbf{X}(t_i)$ , wird die Verstärkung des Rauschens bei der numerischen Differentiation abgeschwächt.

**Box 6.4:** Berechnung der vorwärts genommenen Differenzen  
aus Koordinatendifferenzen aufeinander folgender Satellitenpositionen

Koordinatendifferenzen (Basislinien)

$$\Delta \mathbf{X}_k^{k+1} = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k \quad ; \quad (k \in \{1, \dots, n-1\}) \quad (6.19)$$

$$\text{vorwärts genommene Differenzen aus Koordinatendifferenzen } \Delta_{1+i/2}^i = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1+j} \binom{i-1}{j} \Delta \mathbf{X}_{j+1}^{j+2} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3/2}^1 &= \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_2^2 &= \Delta \mathbf{X}_2^3 - \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_{5/2}^3 &= \Delta \mathbf{X}_3^4 - 2\Delta \mathbf{X}_2^3 + \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_3^4 &= \Delta \mathbf{X}_4^5 - 3\Delta \mathbf{X}_3^4 + 3\Delta \mathbf{X}_2^3 - \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_{7/2}^5 &= \Delta \mathbf{X}_5^6 - 4\Delta \mathbf{X}_4^5 + 6\Delta \mathbf{X}_3^4 - 4\Delta \mathbf{X}_2^3 + \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_4^6 &= \Delta \mathbf{X}_6^7 - 5\Delta \mathbf{X}_5^6 + 10\Delta \mathbf{X}_4^5 - 10\Delta \mathbf{X}_3^4 + 5\Delta \mathbf{X}_2^3 - \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_{9/2}^7 &= \Delta \mathbf{X}_7^8 - 6\Delta \mathbf{X}_6^7 + 15\Delta \mathbf{X}_5^6 - 20\Delta \mathbf{X}_4^5 + 15\Delta \mathbf{X}_3^4 - 6\Delta \mathbf{X}_2^3 + \Delta \mathbf{X}_1^2 \\ \Delta_5^8 &= \Delta \mathbf{X}_8^9 - 7\Delta \mathbf{X}_7^8 + 21\Delta \mathbf{X}_6^7 - 35\Delta \mathbf{X}_5^6 + 35\Delta \mathbf{X}_4^5 - 21\Delta \mathbf{X}_3^4 + 7\Delta \mathbf{X}_2^3 - \Delta \mathbf{X}_1^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Für erste Anwendungen der numerischen Differentiation basierend auf der Newton'schen Interpolationsformel in der Gravitationsfeldbestimmung aus simulierten und realen CHAMP-Daten wird auf Reubelt et al. (2003a,b, 2006) verwiesen.

### 6.1.1.1 Approximationsfehler

Die folgenden Untersuchungen des Approximationsfehlers wurden basierend auf einer simulierten fehlerfreien Bahn (Abtastrate  $\Delta t = 30$  s) mit den Anfangswerten  $X_0 = -113\,604,674$  m,  $Y_0 = 339\,528,581$  m,  $Z_0 = 6831\,624,647$  m,  $\dot{X}_0 = -7238,784\,978$  m/s,  $\dot{Y}_0 = -2422,063\,573$  m/s,  $\dot{Z}_0 = 0,0$  m/s bzw. in Keplerelementen ( $a = 6841$  km ( $\hat{=}$  Bahnhöhe  $h = 470$  km),  $i = 87^\circ$ ,  $e = 0$ ,  $\Omega = 18^\circ 30'$ ,  $\omega = 90^\circ$ ,  $M = E = \nu = 0^\circ$ ) und dem EGM96-Gravitationsfeldmodell mit einer Entwicklung bis Grad/Ordnung 90/90 durchgeführt. Zur Bahnintegration wurde das am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart im Rahmen einer Diplomarbeit entwickelte C-Programm *SOSP2* (engl.: *Satellite Orbit Synthesis Programme 2*, Götzelmann, 2003a; Schäfer, 2001) verwendet, in welchem das modifizierte Prädiktor-Korrektor Verfahren 12. Ordnung nach Adams-Bashforth/Adams-Moulton für die Integration (Schrittweite: 5 s) des DGL-Systems implementiert ist (Gendt, 1989; Scheinert, 1996). In Abbildung 6.4 ist der Approximationsfehler  $\Delta S''$  (Soll – Ist, berechnet aus: Gravitationsvektor  $\mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}} \Gamma_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}} \text{grad}U(\mathbf{x})$  im CIS aus EGM96 bis Grad/Ordnung 90/90 – aus numerischer Differentiation bestimmten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  für einen Tag ( $\hat{=}$  ca. 15,5 Umläufe von CHAMP) bei Verwendung des 3-, 5-, 7- und 9-Punkt-Schemas jeweils im Zeitbereich und im Frequenzbereich als *PSD* (*Spektrale Leistungsdichten*, engl.: *Power Spectral Densities*) dargestellt (man beachte die unterschiedlichen Skalen für das 3-Punkt-Schema und die anderen Filter). Das PSD-Spektrum berechnet sich aus dem Frequenzspektrum  $c_k(\Delta S'')$  der Fourier-Transformation des Approximationsfehlers  $\Delta S''$  zu  $\text{PSD}(\omega_k) = \sqrt{2\Delta t \cdot |c_k(\Delta S'')|}$ . Das PSD-Spektrum des Approximationsfehlers steht mit seiner Standardabweichung mit

$$\sigma(\Delta S'') = \sqrt{\sum_{k=0}^{N/2} (\text{PSD}(\omega_k))^2 / (2\Delta t \cdot N)} \quad (6.22)$$

in Verbindung. In Abbildung 6.4 ist sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich sichtbar, dass ein längerer Differentiationsfilter höherer Ordnung (Filterordnung  $\hat{=}$  Polynomgrad) zu einem kleineren Approximationsfehler und somit einer größeren Genauigkeit der bestimmten Beschleunigungen führt. Die *RMS-Werte* des Approximationsfehlers im Zeitbereich (RMS-Werte von  $\Delta S''$ ) der einzelnen Filter sind  $\text{RMS}_{3\text{pkt}} = 5,3 \cdot 10^{-4}$  m/s<sup>2</sup>,  $\text{RMS}_{5\text{pkt}} = 1,29 \cdot 10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>,  $\text{RMS}_{7\text{pkt}} = 4,14 \cdot 10^{-8}$  m/s<sup>2</sup>,  $\text{RMS}_{9\text{pkt}} = 2,34 \cdot 10^{-8}$  m/s<sup>2</sup>. Vor allem der 3-Punkt-Filter zeigt eine um Größenordnungen deutlich schlechtere Approximation als die anderen.

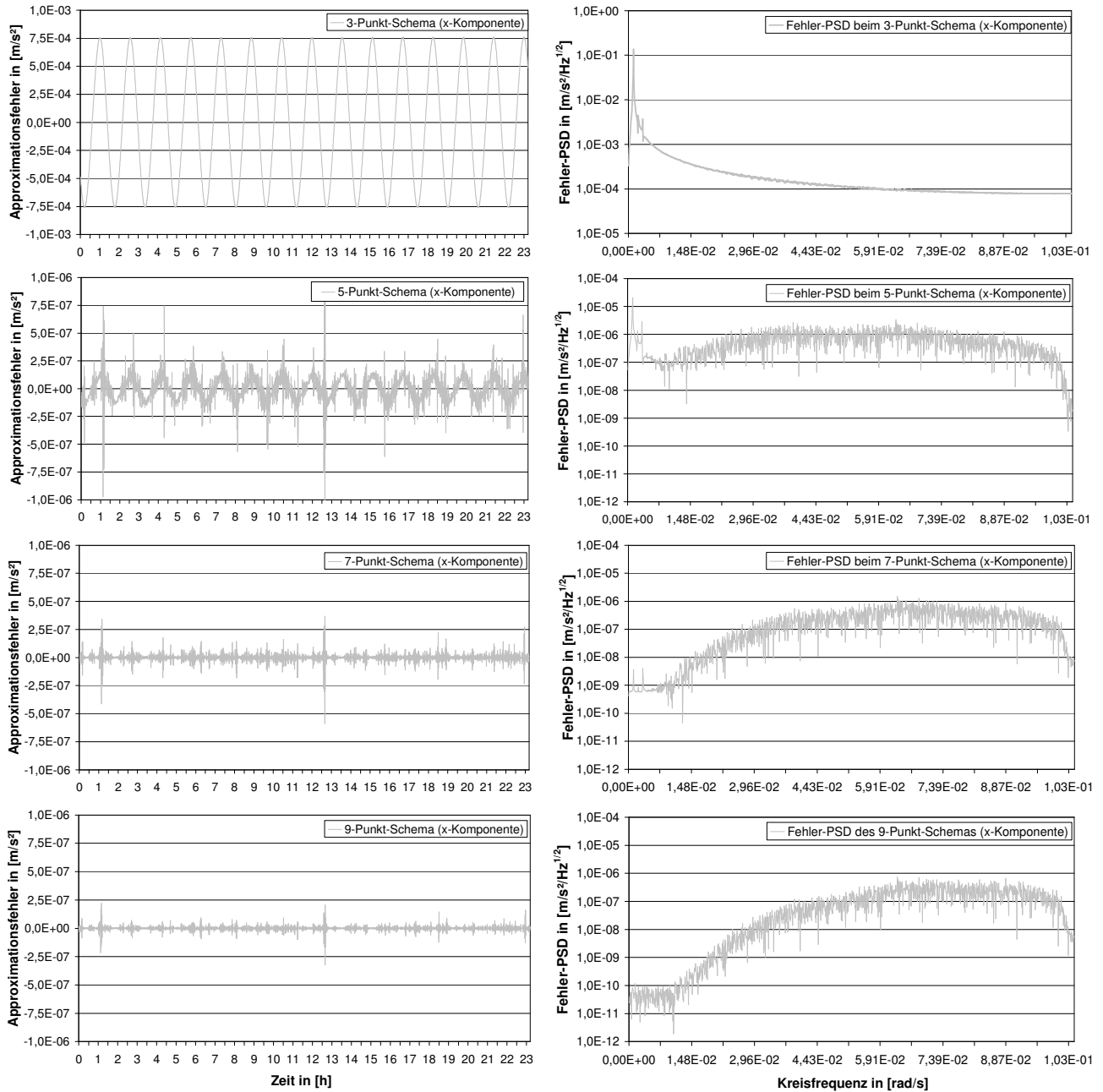


Abbildung 6.4: Zeitreihen und PSD-Spektren des Approximationsfehlers beim 3-, 5-, 7- und 9-Punkt-Schema für einen Tag eines simulierten fehlerfreien CHAMP-Orbits.

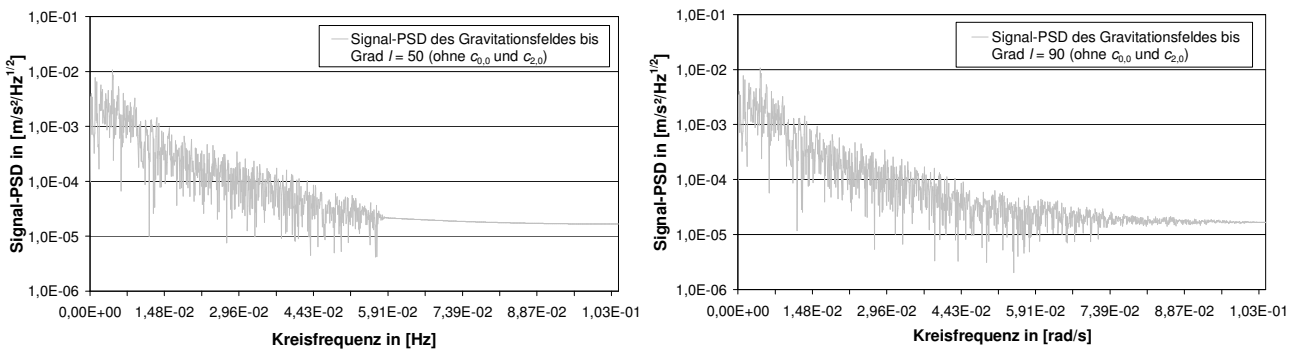


Abbildung 6.5: PSD-Spektren des EGM96-Gravitationsfeldsignals entlang des simulierten CHAMP-Orbits; Entwicklungen bis Grad  $l = 50$  und Grad  $l = 90$ .

Deutlich sichtbar sind vor allem beim 3-Punkt-Filter, aber auch beim 5-Punkt-Filter, systematische Abweichungen in Form einer Sinuskurve mit ca. 15,5 Perioden, die, wie im PSD-Spektrum erkennbar, hauptsächlich auf der Umlauffrequenz  $\omega_{ev}$ , aber auch auf den benachbarten Frequenzen, liegen. Mit größer werdender Ordnung des Differentiationsfilters nehmen diese systematischen Effekte ab, was im PSD-Spektrum an einer abnehmenden Amplitude vor allem auf den niedrigeren Frequenzen zu sehen ist. Auf den höheren Kreisfrequenzen mit  $\omega > 0,08$  rad/s ist hingegen für eine höher werdende Filterordnung ab dem 5-Punkt-Filter hingegen kaum eine Verbesserung mehr zu beobachten. Beim 7- und 9-Punkt-Filter ist zu den Zeitpunkten  $t = 1^h$  bzw.  $t = 13^h$  eine größere Abweichung in der Größenordnung von  $2\text{--}5 \cdot 10^{-7}$  m/s<sup>2</sup> zu sehen. Diese entsteht beim Überflug über Gebiete mit einem stärkeren Gravitationsfeldsignal wie beispielsweise dem Himalaya, bei denen der Approximationsfehler bedingt durch ein „raueres“ Signal größer ist.

Die PSD-Verläufe beim 3- und 5-Punkt-Schema widersprechen auf den ersten Blick den Erkenntnissen aus dem Vergleich zum idealen Differentiator, die in Abbildung 6.3a) dargestellt sind. Aufgrund der dort schlechter werdenden Approximation mit zunehmender Frequenz würde man bei den PSD-Spektren ebenfalls die größten Amplituden auf den höheren Frequenzen erwarten, was aber nicht der Fall ist. Der Grund für die großen Amplituden auf den niedrigeren Frequenzen der PSD-Spektren, vor allem auf der Umlauffrequenz, liegt darin, dass das Gravitationsfeldsignal auf diesen Frequenzen am höchsten ist. Da nach Abbildung 6.3b) aber das 3- und 5-Punkt-Schema auf den niedrigen Frequenzen den idealen Differentiator um Größenordnungen schlechter approximieren als längere Filter, lassen sich bedingt durch das starke Signal die großen Fehler-PSD-Spektren auf den niedrigen Frequenzen erklären.

In Abbildung 6.5 ist das PSD-Spektrum des durch die numerische Differentiation zu bestimmenden Gravitationsfeldes (hier: EGM96 ohne die beiden größten Anteile durch die Koeffizienten  $c_{0,0}$  und  $c_{2,0}$ ) einmal bis Grad  $l = 50$  und einmal bis Grad  $l = 90$  dargestellt. Deutlich zu sehen ist die abrupte Abnahme des Gravitationsfeldsignals beim Fall  $l = 50$  bei der Grad  $l = 50$  entsprechenden Kreisfrequenz  $\omega_{l=50} = 0,058$  rad/s. Die Fehler-PSD des 5-, 7- und 9-Punkt-Schemas liegen alle unterhalb des Signal-PSD des Gravitationsfeldes, weswegen eine Gravitationsfeldbestimmung mit diesen Filtern möglich sein sollte. Der 3-Punkt-Filter ist hingegen als kritisch zu betrachten, da sein Fehler-PSD oberhalb des Signal-PSD liegt. Zu dem Approximationsfehler des 9-Punkt-Schemas mit  $\text{RMS}_{9\text{pkt}} = 2,34 \cdot 10^{-8}$  m/s<sup>2</sup> wäre noch zu sagen, dass dieser im  $\mu\text{Gal}$ -Bereich und somit im Genauigkeitsbereich eines Gravimeters liegt.

Insgesamt ist es aus Sicht des Approximationsfehlers günstig, ein Differentiationsfilter höherer Ordnung zu verwenden. Von den untersuchten Filtern liefert der 9-Punkt-Filter die besten Ergebnisse.

### 6.1.1.2 Einfluss des Messrauschens

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie die einzelnen Filter auf das Rauschen und die Fehler in dem kinematischen Orbit reagieren. Bei der Bestimmung und Genauigkeitsanalyse kinematischer Orbits zeigt sich, dass diese, abgesehen von einzelnen Bahnpunkten schlechterer Genauigkeit (z.B. verursacht durch eine schlechte GPS-Konfiguration), eine relativ gleichmäßige Genauigkeit im Bereich weniger cm besitzen (Švehla und Rothacher, 2003, 2004, s. auch Anhang C). Ferner deuten weitere Untersuchungen darauf hin, dass die Bahnfehler stärkere Korrelationen aufweisen (Švehla und Földvary, 2006; Reubelt et al., 2003a,b, 2006, s. auch Anhang C). Die realen Rauschverhältnisse werden in Kapitel 9 näher untersucht. Für die folgenden Untersuchungen wurde eine Funktion zur Erzeugung eines Rauschens mit folgenden Eigenschaften implementiert: Die Zeitreihen der einzelnen Koordinaten  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  besitzen nach (6.23) die gleichen Genauigkeitseigenschaften, wobei die Genauigkeit einer Zeitreihe (hier am Beispiel von  $X_i$ ) durch korreliertes Rauschen mit der Standardabweichung der Positionen  $\sigma_x = \text{const.}$  (alle Positionen sind also gleichgenau) und der Korrelation  $\rho_{i,j} = \rho^{|j-i|}$  zwischen zwei Koordinaten nach (6.23) gegeben sei. Korrelationen der Zeitreihen der einzelnen Koordinaten  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  untereinander werden vernachlässigt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es sich bei dieser Rauschfunktion um ein stark vereinfachtes und idealisiertes Fehlerszenario handelt. Es ist aber dazu geeignet, den (großen) Einfluss der Korrelation der Bahnfehler einer Zeitreihe auf die Genauigkeit der durch numerische Differentiation bestimmten Beschleunigungen zu studieren. Der Einfluss der Korrelationen zwischen den Zeitreihen wird hierbei als wesentlich geringer eingeschazt, da die numerische Differentiation getrennt voneinander auf die Zeitreihen angewendet wird (oder werden kann). Außerdem hat sich bei der Analyse kinematischer Orbits gezeigt (Reubelt et al., 2003a,b), dass die Korrelationen zwischen den Zeitreihen als klein vermutet werden können.

Das verwendete Szenario führt für eine Bahn mit  $N$  Punkten auf die Varianz-Kovarianz-Matrizen für eine Koordinatenzeitreihe  $\mathbf{C}_X = \mathbf{C}_Y = \mathbf{C}_Z$  bzw. für alle Positionen  $\mathbf{C}_{X,Y,Z}$  gemäß (6.23). Solche Varianz-Kovarianz-Matrizen für korrelierte Beobachtungsfehler wurden bereits in der Bestimmung von Beobachtungsgewichten in Nivellementsnetzen bei Grafarend und Vanicek (1980) angewendet und konnten bei ersten Analysen von kinematischen Orbits von Reubelt et al. (2003a) und Marinkovic et al. (2003) durch Vergleich von kinematischen und dynamischen Orbits bestätigt werden. Formeln zur Erzeugung korrelierter Prozessfolgen finden sich beispielsweise in Beichelt (1997), die hier verwendete Fehlerfunktion (6.24) zur Simulation korrelierter Bahnfehler  $e_k$  mit den Eigenschaften  $\sigma_e = \sigma_x$ ,  $\rho_e = \rho^{|j-i|}$  ist Reubelt et al. (2003) entnommen. Neben einer Summenformel in (6.24) kann auch noch eine schnellere und effizientere Rekursionsformel (6.25) gefunden werden.  $e_k$  sind Fehler mit weißem Rauschen mit den Eigenschaften  $\sigma_e = \sigma_x$ ,  $\rho_e = 0$ , die z.B. mit der Matlabfunktion randn (Pseudozufallszahlen) erzeugt werden können. Als Standardabweichung für den Bahnfehler wurde in den Simulationen  $\sigma_x = 5$  cm verwendet, für die Korrelationen eine obere und untere Schranke von  $\rho = 0,99$  und  $\rho = 0,9$ . Es wird erwartet, dass sich die realen Bahnfehler innerhalb dieser Schranke befinden (s. dazu Kapitel 9).

In Abbildung 6.6 sind simulierte Bahnfehler (sowohl als Zeitreihe sowie im Frequenzbereich als Fehler-PSD) sowie die daraus entstehenden Fehler in den Koordinatendifferenzen  $\Delta \mathbf{X}_k^{k+1}$  für die obere und untere Fehlerschranke dargestellt. Deutlich zu erkennen ist der Einfluss der Korrelation  $\rho$ . Trotz gleicher Genauigkeit von  $\sigma_X = 5$  cm ist das Verhalten der Bahnfehler für die höhere Korrelation  $\rho = 0,99$  wesentlich ruhiger. Dies lässt sich sehr gut mit Hilfe der Fehler-PSD im Frequenzbereich erklären. Die Fehler-PSD auf den höheren Frequenzen sind bedingt durch die höhere Korrelation für die Bahn mit  $\rho = 0,99$  gegenüber den weniger korrelierten Bahnfehlern mit  $\rho = 0,9$  abgeschwächt, was dann im Zeitbereich für einen „ruhigeren“ Verlauf sorgt. Interessant ist die Auswirkung der Korrelation auf die Genauigkeit der Koordinatendifferenzen  $\Delta \mathbf{X}_k^{k+1}$ . Diese sind, wie erkennbar, durch die Korrelation wesentlich genauer als die Positionen selbst, ihre Standardabweichung liegt für  $\rho = 0,9$  mit  $\sigma_{\Delta X} = 2,2$  cm und für  $\rho = \pm 0,99$  mit nur  $\sigma_{\Delta X} = \pm 0,7$  cm deutlich unter der Bahngenauigkeit von  $\sigma_X = 5$  cm. Für eine höhere Korrelation werden damit höhere Genauigkeiten bei der numerischen Differentiation zu erwarten sein.

**Box 6.5:** Simulation des korreliertem Rauschens der Satellitenbahn  $X_i = (X_i, Y_i, Z_i)$

Varianz-Kovarianz-Matrix der Positionen

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{C}_Y = \mathbf{C}_Z = \sigma_X^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{N-1} \\ & 1 & \rho & \rho^2 & & \vdots \\ & & 1 & \rho & \ddots & \rho^3 \\ & & & 1 & \ddots & \rho^2 \\ \text{sym.} & & & & \ddots & \rho \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{C}_{X,Y,Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_X & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_Y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_Z \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$N \times N$   $3N \times 3N$

mit der Standardabweichung einer Koordinate und der Korrelation zwischen zwei Positionen  $X_i, X_j$   
 $\sigma_X = \text{const.}, \rho(X_i, X_j) = \rho_{i,j} = \rho^{|j-i|}$

simulierte Bahnfehler  $e_k$

Summenformel

$$\begin{aligned} e_0 &= \varepsilon_0 \\ e_1 &= \rho \cdot \varepsilon_0 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ e_k &= \rho^k \cdot \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^k \rho^{k-i} \sqrt{1-\rho^2} \cdot \varepsilon_i \end{aligned} \quad (6.25)$$

Rekursionsformel (schneller)

$$\begin{aligned} e_0 &= \varepsilon_0 \\ e_1 &= \rho \cdot \varepsilon_0 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ e_{k+1} &= e_k \cdot \rho + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \varepsilon_{k+1} \end{aligned} \quad (6.24)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &: \text{weißes Rauschen mit } \sigma_\varepsilon = \sigma_X, \rho_\varepsilon = 0 \\ e_k &: \text{simulierte Bahnfehler mit } \sigma_e = \sigma_X, \rho_e = \rho^{|j-i|} \end{aligned}$$

In Tabelle 6.1 sind die durch Fehlerfortpflanzung abgeschätzten Genauigkeiten der mit numerischer Differentiation bestimmten Beschleunigungen für unterschiedliche Differentiationsfilter und die beiden Rauschenszenarien angegeben. Auffällig sind vor allem zwei Eigenschaften:

- Eine höhere Korrelation der Bahnfehler führt, wie vermutet, zu einer höheren Genauigkeit der Beschleunigungen (hier um Faktor 3).
- Anders als beim Approximationsfehler reagiert ein Filter höherer Ordnung empfindlicher auf Rauschen ( $\sigma_{\ddot{X}} = 1,598 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  beim 9-Punkt-Schema gegenüber  $\sigma_{\ddot{X}} = 1,114 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  beim 3-Punkt-Schema).

Des Weiteren ist anzumerken, dass der durch Rauschen entstehende Fehler um Größenordnungen höher ist als der Approximationsfehler und im mGal-Bereich (ähnlich der Fluggravimetrie) liegt. Wie sich dies auf die Gravitationsfeldbestimmung auswirkt, wird später noch untersucht.

Ein weiterer Aspekt neben der Standardabweichung  $\sigma_{\ddot{X}}$  der Beschleunigungen sind deren Korrelationen  $\rho_{i,j}(\ddot{X})$ , die durch die Filterung entstehen. Diese müssen streng genommen bei der Gravitationsfeldschätzung berücksichtigt werden, eine möglichst kleine Korrelation  $\rho_{i,j}(\ddot{X})$  ist also von Vorteil, damit diese vernachlässigt werden kann. Die Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 zeigen die entstehenden Korrelationen bei Anwendung des jeweiligen  $n$ -Punkt-Filters für die beiden unterschiedlichen Rauschenszenarien. Bedingt durch die Korrelation der Bahnfehler sind auch die Fehler der Beschleunigungen  $\ddot{X}_i, \ddot{X}_j$  für  $|j-i| > (n-1)$  korreliert. Auffällig bei den Korrelationen ist

- eine (wenn auch nur geringfügig) kleinere Korrelation der Beschleunigungsfehler für eine höhere Korrelation der Bahnfehler, die zudem auch schneller auf den weiteren Nebendiagonalen abklingt
- die Fehler direkt benachbarter Beschleunigungen sind negativ korreliert



- kürzere Filter führen zu kleineren Korrelationen und geringeren Korrelationslängen bei den Beschleunigungsfehlern.

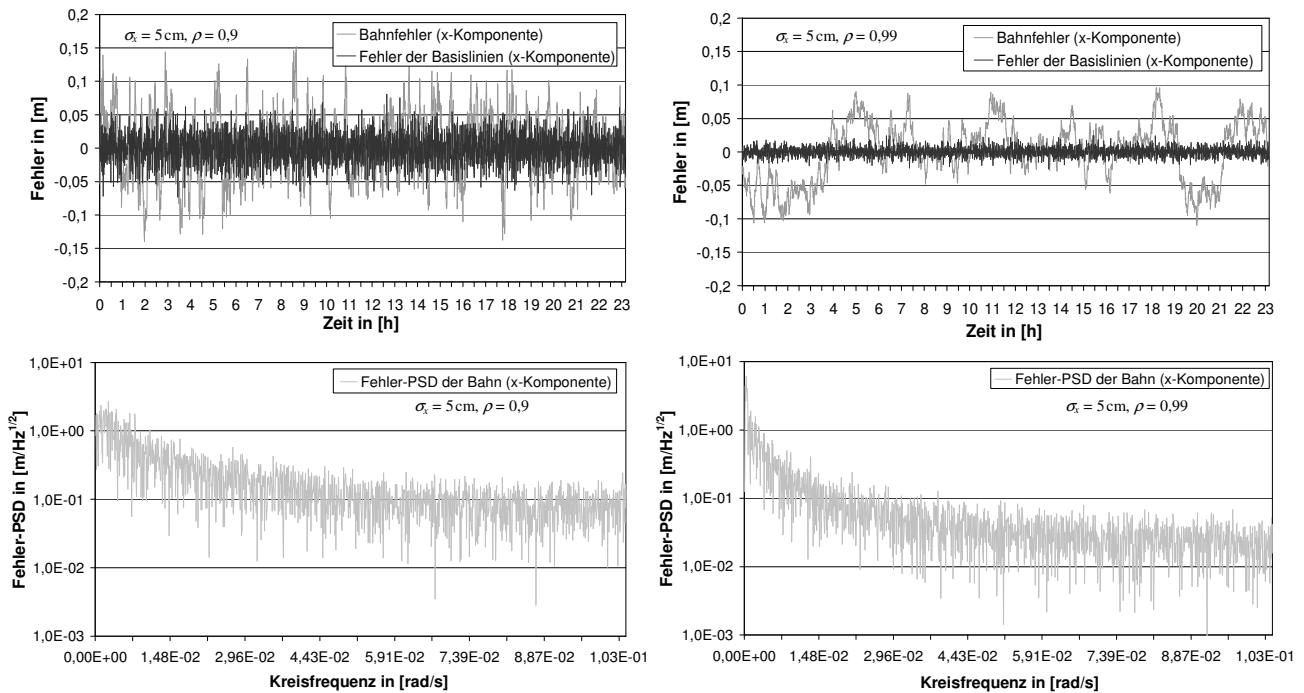


Abbildung 6.6: Fehler in den Positionen (als Zeitreihe sowie als Fehler-PSD) sowie Fehler in den Basislinien für einen Tag eines simulierten CHAMP-Orbits für zwei verschiedene Fehlerszenarien:  $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,9$  (linke Seite),  $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,99$  (rechte Seite).

| Filter \ Rauschen                                    | 3-Punkt                             | 5-Punkt                             | 7-Punkt                             | 9-Punkt                             |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho_{i,j} = 0,9^{ i-j }$  | $3,600 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ | $4,512 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ | $4,928 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ | $5,168 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ |
| $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho_{i,j} = 0,99^{ i-j }$ | $1,114 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ | $1,395 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ | $1,524 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ | $1,598 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ |

Tabelle 6.1: Durch Rauschen am Zentralpunkt verursachter Beschleunigungsfehler für verschiedene Differenzierungsfilter und Rauschszszenarien mit unterschiedlichen Korrelationen.

| Filter \ Korrelation | $\rho_{i,i+1}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+2}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+3}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+4}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+5}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+6}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+7}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+8}(\ddot{X})$ |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 3-Punkt              | $-5,0 \cdot 10^{-1}$     | $2,4 \cdot 10^{-4}$      | $2,1 \cdot 10^{-4}$      | $1,9 \cdot 10^{-4}$      | $1,7 \cdot 10^{-4}$      | $1,6 \cdot 10^{-4}$      | $1,4 \cdot 10^{-4}$      | $1,3 \cdot 10^{-4}$      |
| 5-Punkt              | $-5,7 \cdot 10^{-1}$     | $6,7 \cdot 10^{-2}$      | $-2,1 \cdot 10^{-3}$     | $1,2 \cdot 10^{-4}$      | $1,1 \cdot 10^{-4}$      | $9,9 \cdot 10^{-5}$      | $8,9 \cdot 10^{-5}$      | $8,0 \cdot 10^{-5}$      |
| 7-Punkt              | $-6,0 \cdot 10^{-1}$     | $1,1 \cdot 10^{-1}$      | $-1,3 \cdot 10^{-2}$     | $9,3 \cdot 10^{-4}$      | $5,9 \cdot 10^{-5}$      | $8,3 \cdot 10^{-5}$      | $7,5 \cdot 10^{-5}$      | $6,7 \cdot 10^{-5}$      |
| 9-Punkt              | $-6,2 \cdot 10^{-1}$     | $1,4 \cdot 10^{-1}$      | $-2,5 \cdot 10^{-2}$     | $3,4 \cdot 10^{-3}$      | $-2,1 \cdot 10^{-4}$     | $9,6 \cdot 10^{-5}$      | $6,7 \cdot 10^{-5}$      | $6,1 \cdot 10^{-5}$      |

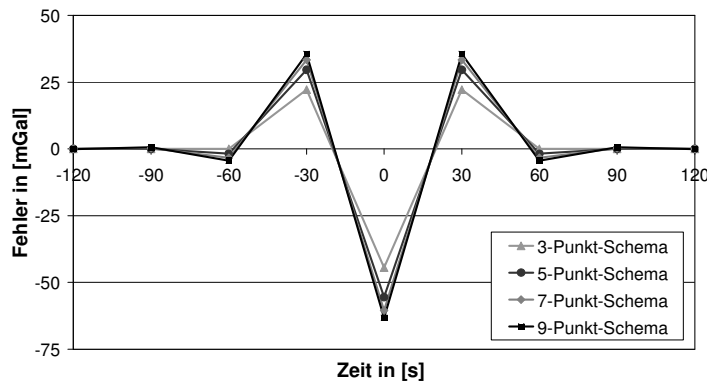
Tabelle 6.2: Korrelationen der Fehler der mit den unterschiedlichen Differenzierungsfiltern bestimmten Beschleunigungen für ein Rauschen der Bahn von  $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,9$ .

| Filter \ Korrelation | $\rho_{i,i+1}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+2}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+3}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+4}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+5}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+6}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+7}(\ddot{X})$ | $\rho_{i,i+8}(\ddot{X})$ |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 3-Punkt              | $-5,0 \cdot 10^{-1}$     | $2,5 \cdot 10^{-7}$      | $2,5 \cdot 10^{-7}$      | $2,4 \cdot 10^{-7}$      | $2,4 \cdot 10^{-7}$      | $2,4 \cdot 10^{-7}$      | $2,4 \cdot 10^{-7}$      | $2,3 \cdot 10^{-7}$      |
| 5-Punkt              | $-5,6 \cdot 10^{-1}$     | $6,6 \cdot 10^{-2}$      | $-2,2 \cdot 10^{-3}$     | $1,6 \cdot 10^{-7}$      | $1,5 \cdot 10^{-7}$      | $1,5 \cdot 10^{-7}$      | $1,5 \cdot 10^{-7}$      | $1,5 \cdot 10^{-7}$      |
| 7-Punkt              | $-6,0 \cdot 10^{-1}$     | $1,1 \cdot 10^{-1}$      | $-1,3 \cdot 10^{-2}$     | $8,2 \cdot 10^{-4}$      | $-3,3 \cdot 10^{-5}$     | $1,3 \cdot 10^{-7}$      | $1,3 \cdot 10^{-7}$      | $1,3 \cdot 10^{-7}$      |
| 9-Punkt              | $-6,1 \cdot 10^{-1}$     | $1,4 \cdot 10^{-1}$      | $-2,5 \cdot 10^{-2}$     | $3,3 \cdot 10^{-3}$      | $-2,9 \cdot 10^{-4}$     | $2,1 \cdot 10^{-5}$      | $-6,6 \cdot 10^{-5}$     | $1,1 \cdot 10^{-7}$      |

Tabelle 6.3: Korrelationen der Fehler der mit den unterschiedlichen Differenzierungsfiltern bestimmten Beschleunigungen für ein Rauschen der Bahn von  $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,99$ .

Wie die Korrelationen der Beschleunigungsfehler vermuten lassen, so wirkt sich ein einzelner Bahnfehler an einem Punkt auch auf die Beschleunigungen an den benachbarten Punkten aus. In Abbildung 6.7 ist die Auswirkung eines Bahnfehlers (Ausreißers) von  $\epsilon_x = 20 \text{ cm}$  an der Stelle  $t = 0 \text{ s}$  auf die Beschleunigungen dargestellt. Gut zu sehen ist,

dass bei einem Filter höherer Ordnung der Fehler nicht nur in einen weiteren Abstand von  $t = 0$  s verzögert wird, sondern dass ein längerer Filter auch zu größeren Fehlern führt. Die durch den Ausreißer entstehenden Beschleunigungsfehler sind an der Stelle  $t = 0$  s (je nach Filter) im Bereich von ca. 50 mGal und an den direkt benachbarten Punkten immerhin noch bei ca. 25 mGal. Da diese Störungen bereits beträchtlich sind, müssen solche Ausreißer, wie in den Abschnitten 9.2–9.2.3 beschrieben, speziell behandelt werden.



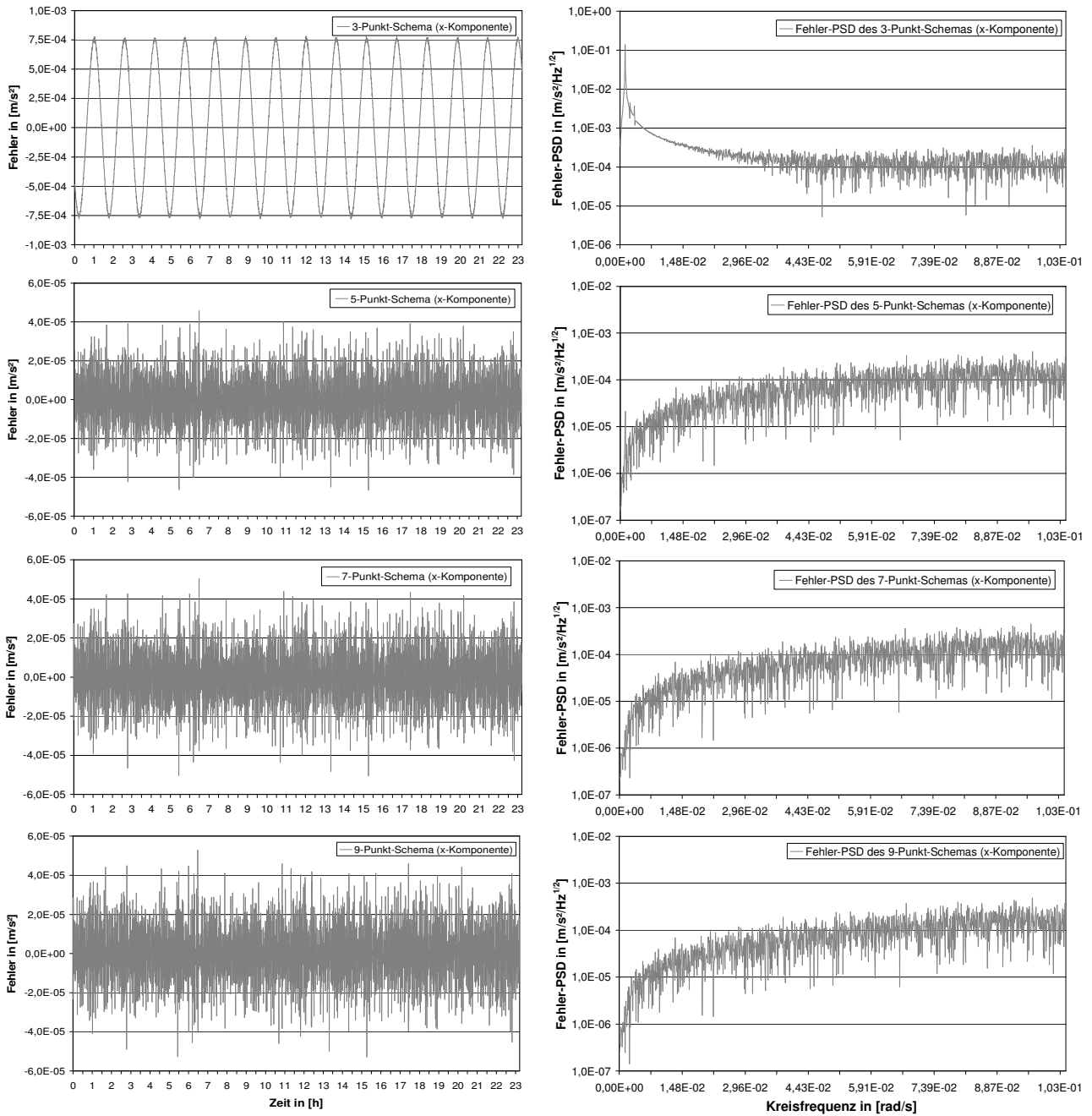
**Abbildung 6.7:** Durch einen Positionsfehler von  $\varepsilon_x = 20$  cm an der Stelle  $t = 0$  s verursachte Beschleunigungsfehler bei Verwendung verschiedener Differentiationsfilter.

Insgesamt lässt sich also feststellen, dass im Gegensatz zum Approximationsfehler aus Sicht der Sensitivität auf Messrauschen ein möglichst kurzer Differentiationsfilter von Vorteil ist. Die Wahl eines geeigneten Filters stellt einen Kompromiss zwischen möglichst guter Approximation des zu bestimmenden Signals sowie einer möglichst geringen Sensitivität auf Rauschen dar. Für einen kurzen Filter spricht des Weiteren, dass im Falle von Datenlücken weniger Beschleunigungen verloren gehen und dass im Falle von Ausreißern benachbarte Beschleunigungen weniger betroffen sind.

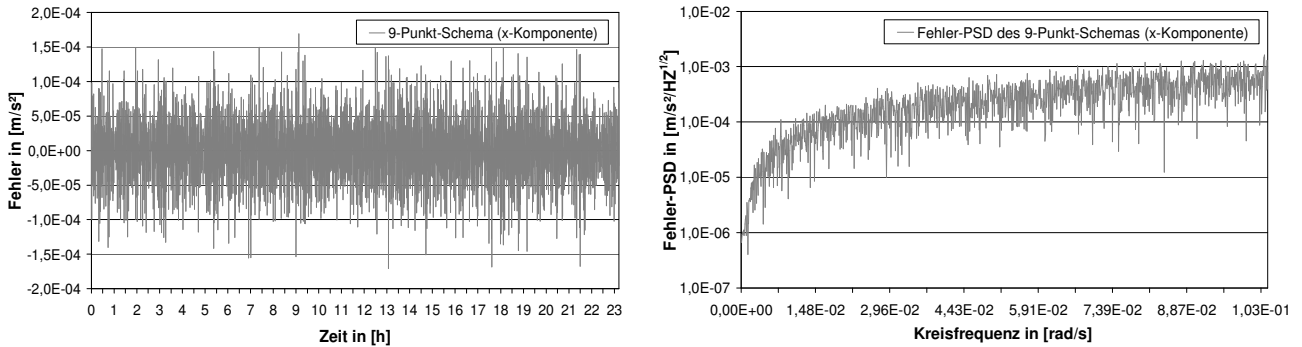
Abbildung 6.8 zeigt den Gesamtfehler (Approximationsfehler + Fehler durch Messrauschen) in den mit verschiedenen Differentiationsfiltern bestimmten Beschleunigungen als Zeitreihe sowie im Frequenzbereich als PSD-Spektrum für eine Bahn mit den Genauigkeitseigenschaften  $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ . Es ist zu erkennen, dass das 5-, 7- und 9-Punkt-Schema sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich zu ähnlichen Fehlern führen (RMS-Werte:  $\text{RMS}_{5\text{Pkt}} = 1,37 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ,  $\text{RMS}_{7\text{Pkt}} = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ,  $\text{RMS}_{9\text{Pkt}} = 1,56 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ) und dass die Fehler durch Messrauschen dominieren (s. als Vergleich die Approximationsfehler in Abbildung 6.4). Beim 3-Punkt-Schema (andere Skalierung!) ist im Zeitbereich ( $\text{RMS}_{3\text{Pkt}} = 5,3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$ ) ein fast identischer Fehlerverlauf wie beim Approximationsfehler erkennbar, es dominiert also insgesamt der Approximationsfehler. Ein Vergleich der PSD-Spektren des Approximationsfehlers und des Gesamtfehlers beim 3-Punkt-Schema zeigt, dass die niedrigen Frequenzen durch den Approximationsfehler bestimmt werden und erst ab Kreisfrequenzen  $> 0,02$  rad/s sich der Fehler des Messrauschens zeigt. Für Frequenzen ab  $0,06$  rad/s sind die Fehlerspektren des 3-Punkt-Schemas und der anderen Schemata identisch, für niedrigere Frequenzbereiche liefern die Filter höherer Ordnung geringere Fehler-PSD. Insgesamt lässt sich feststellen, dass das 3-Punkt-Schema ungeeignet ist und dass das 5-, 7- und 9-Punkt-Schema fast gleichwertig sind. Aus Gründen der besseren Approximation kann das 9-Punkt-Schema gewählt werden, um eine längere Verzögerung von Messfehlern zu vermeiden und ein besseres Verhalten bei Datenlücken zu gewährleisten empfiehlt sich das 5-Punkt-Schema.

Abbildung 6.9 zeigt den Gesamtfehler (Zeitreihe (andere Skalierung!) und Fehler-PSD) beim 9-Punkt-Schema für die Satellitenbahn mit geringerer Korrelation ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ) der Bahnfehler. Gegenüber der Bahn mit stärker korreliertem Rauschen sind die Fehler sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich deutlich größer, im Zeitbereich ergibt sich ein ca. um den Faktor 3 größerer Fehler ( $\text{RMS}_{9\text{Pkt}} = 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ). Der positive Einfluss einer höheren Korrelation bei der numerischen Differentiation wird somit deutlich sichtbar.

Ein Vergleich der Fehler-PSD der Beschleunigungen aus Satellitenbahnen beider Rauschenszenarien ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ) und ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) mit den Signal-PSD des Gravitationsfeldsignals aus Abbildung 6.5 zeigt, dass bei einer Korrelation von  $\rho = 0,9$  die Fehler-PSD für Kreisfrequenzen  $> \text{ca. } 0,025$  rad/s größer als das Signal sind und bei der höheren Korrelation von  $\rho = 0,99$  die Fehler-PSD für Kreisfrequenzen  $> \text{ca. } 0,044$  rad/s größer als das Signal sind. Dies würde bedeuten, dass eine Gravitationsfeldbestimmung nur bis ca. Grad 30–50 möglich wäre. Aufschluss darüber kann allerdings nur eine Simulation der Gravitationsfeldanalyse wie in Kapitel 8 geben.



**Abbildung 6.8:** Fehler (Zeitreihe und PSD-Spektren) in den mit verschiedenen Differentiationsfiltern bestimmten Beschleunigungen für einen Tag eines simulierten CHAMP-Orbits mit korreliertem Rauschen ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ).



**Abbildung 6.9:** Fehler (Zeitreihe und PSD-Spektren) in den mit dem 9-Punkt-Filter bestimmten Beschleunigungen für einen Tag eines simulierten CHAMP-Orbits mit korreliertem Rauschen ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ).

## 6.1.2 Numerische Differentiation basierend auf Spline-Interpolation

Ähnlich wie die Newton- oder Polynominterpolation basiert die Spline-Interpolation ebenfalls auf Polynomen. Allerdings wird hier nicht ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades an eine Zeitreihe  $X(t_i)$  mit  $n$  Punkten angepasst, sondern es wird für jedes Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  der zu interpolierenden Zeitreihe  $X(t_i)$  ein Polynom  $P_i(t)$  mit festem Grad  $k$  aufgestellt, das jeweils zwischen zwei Stützstellen  $(t_i, X_i)$ ,  $(t_{i+1}, X_{i+1})$  die  $(k-1)$ -mal stetig differenzierbare Interpolationsfunktion darstellt. Einen glatten Anschluss der Polynome  $P_i(t)$  und  $P_{i+1}(t)$  an den Stützstellen  $(t_{i+1}, X_{i+1})$  garantieren Übergangsbedingungen, beispielsweise gleiche erste und zweite Ableitungen  $P'_{i+1}(t_{i+1}) = P'_i(t_{i+1})$ ,  $P''_{i+1}(t_{i+1}) = P''_i(t_{i+1})$  an den Stützstellen. Der Vorteil der Spline-Interpolation gegenüber herkömmlicher Polynominterpolation ist, dass auch eine größere Zeitreihe durch Wahl einer Interpolationsfunktion kleineren Grades interpoliert werden kann und somit ein Überschwingen bei gleichzeitig guter Approximation vermieden werden kann. Als geeignet erweisen sich in der Regel *kubische Interpolationspolynome*  $P_i(t)$ .

Die sich damit ergebende *parametrische kubische Splinefunktion*  $S(t)$  setzt sich nach Engeln-Müllges und Reutter (1990) aus Polynomen dritten Grades (kubisch) zusammen:

$$S(t) = P_i(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3 \quad (6.26)$$

für  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$

Damit die Interpolationsbedingung  $S(t_i) = X_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  erfüllt ist und die Splinefunktion  $S(t)$  an den Stützstellen zweimal stetig differenzierbar ist, werden folgende  $4n$  Bedingungen an die kubischen Polynome  $P_i$  zur Bestimmung der unbekanntenen Polynomkoeffizienten gestellt:

$$\begin{aligned} (a) \quad & P_i(t_i) = X_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \\ (b) \quad & P_i(t_i) = P_{i-1}(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ (c) \quad & P'_i(t_i) = P'_{i-1}(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ (d) \quad & P''_i(t_i) = P''_{i-1}(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.27)$$

wobei formal  $P_n(t_n) = a_n$ ,  $P''_n(t_n) = 2c_n$  gesetzt wird. Zusammen mit zwei weiteren Randbedingungen erhält man  $4n+2$  Bedingungen zur Bestimmung der  $4n+2$  Koeffizienten  $a_i, b_i, c_i, d_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$  und  $a_n, c_n$ . Für die Wahl der Randbedingungen bestehen dabei mehrere Möglichkeiten. Die einfachste Möglichkeit, beispielsweise bei Unkenntnis über das Verhalten am Rand, bietet die *natürliche kubische Splinefunktion*, bei der die zweiten Ableitungen an den Rändern  $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$  einfach zu Null gesetzt werden. Sind die ersten  $S'(t_0) = \alpha$ ,  $S'(t_n) = \beta$  bzw. zweiten Randableitungen  $S''(t_0) = \alpha$ ,  $S''(t_n) = \beta$  bekannt, so kann die *kubische Splinefunktion mit vorgegebener erster Randableitung* bzw. die *verallgemeinerte natürliche kubische Splinefunktion* angewendet werden. In dieser Arbeit wurde die *kubische Splinefunktion mit vorgegebener erster Randableitung* angewendet, die benötigten Randableitungen wurden mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel hergeleitet. Formeln zur Berechnung der Polynomkoeffizienten der jeweiligen Splinefunktionen finden sich in Engeln-Müllges und Reutter (1990), im Anhang B (Abschnitt B.1) ist die Berechnung der *kubischen Splinefunktion mit vorgegebener erster Randableitung* zu finden.

Die ersten und zweiten Ableitungen an den Stützstellen (Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) können aus der Splinefunktion wie folgt ermittelt werden:

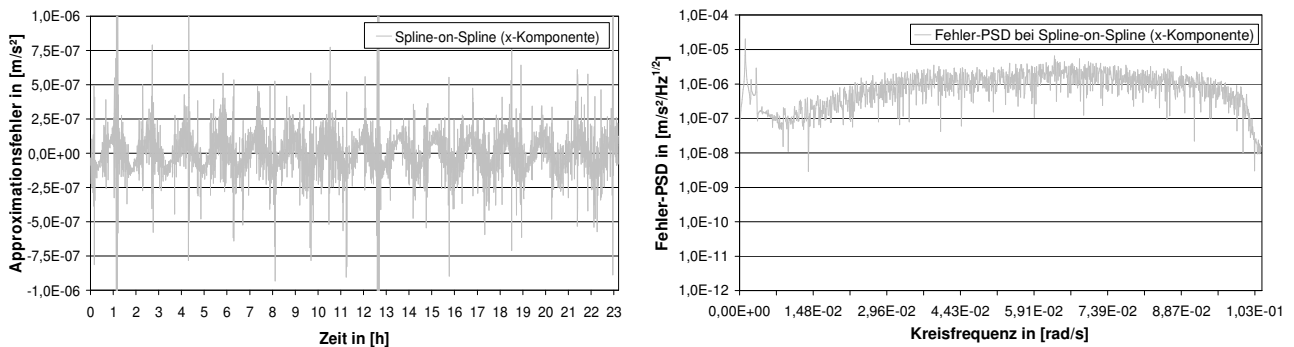
$$\begin{aligned} \dot{X}_i(t_i) &= S'(t_i) = P'_i(t_i) = b_i \quad ; \quad i = 1, n-1 \\ \ddot{X}_i(t_i) &= S''(t_i) = P''_i(t_i) = 2c_i \quad ; \quad i = 1, n-1 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die zweiten Ableitungen der Zeitreihe  $X(t_i)$  sollten allerdings nicht durch zweifaches Ableiten der Splinefunktion berechnet werden, da die dabei entstehenden Approximationsfehler recht groß sind. Dies liegt daran, dass bei zweifacher Ableitung eines kubischen Polynoms eine Gerade entsteht und an der Stützstelle somit ein Knick für die zweiten Ableitungen, die zweiten Ableitungen an den Stützstellen sind also nicht mehr differenzierbar. Zur Berechnung der zweiten Ableitungen (Beschleunigungen)  $\ddot{X}_i(t_i)$  eignet sich vielmehr das *Spline-On-Spline (SOS)* Verfahren, bei dem mit den erhaltenen Werten für  $\dot{X}_i(t_i)$  als Funktionswerte noch einmal eine kubische Spline-Interpolation (mit vorgegebener erster Randableitung) durchgeführt wird und die zugehörige Splinefunktion erneut abgeleitet wird. Die SOS-Interpolation wurde hier jeweils für halbtägige, sich an den Rändern überlappende Datensätze durchgeführt, deren erste Randableitungen mit Hilfe von Newtoninterpolation bestimmt wurden. Die im halben Überlappungsbereich liegenden Beschleunigungen wurden aufgrund von Einschwingeffekten (verursacht durch ungenau bestimmte Randwerte) verworfen. Es handelt sich bei der SOS-Interpolation also nicht um einen FIR-Filter.

### 6.1.2.1 Approximationsfehler

In Abbildung 6.10 ist der bei numerischer Differentiation basierend auf Spline-on-Spline-Interpolation entstehende Approximationsfehler im Zeit und Frequenzbereich dargestellt. Im Zeitbereich entsteht ein ähnliches Fehlerverhalten wie beim 5-Punkt-Schema mit systematischen Effekten in Form einer Sinuskurve mit ungefähr der Umlaufperiode  $T_{rev}$  und einer Amplitude von ca.  $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^2$ . Dies zeigt sich auch im Fehler-PSD, bei dem die Fehleramplitude auf der Umlauffrequenz stark ausgeprägt ist. Das Fehler-PSD des Approximationsfehlers bei SOS-Interpolation ähnelt insge-

samt auch dem Fehler-PSD des 5-Punkt-Schemas. Der Approximationsfehler ist mit  $\text{RMS}_{\text{SOS}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$  allerdings etwas höher als beim 5-Punkt-Schema. Aus Sicht des Approximationsfehlers ist bei SOS-Interpolation also ein ähnliches Ergebnis wie beim 5-Punkt-Schema zu erwarten, die Approximationsgüte von Filtern höherer Ordnung kann allerdings bedingt durch die kubischen Polynome bei SOS nicht erreicht werden.



**Abbildung 6.10:** Zeitreihe und PSD-Spektrum des Approximationsfehlers bei numerischer Differentiation basierend auf Spline-on-Spline-Interpolation für einen Tag eines simulierten fehlerfreien CHAMP-Orbits.

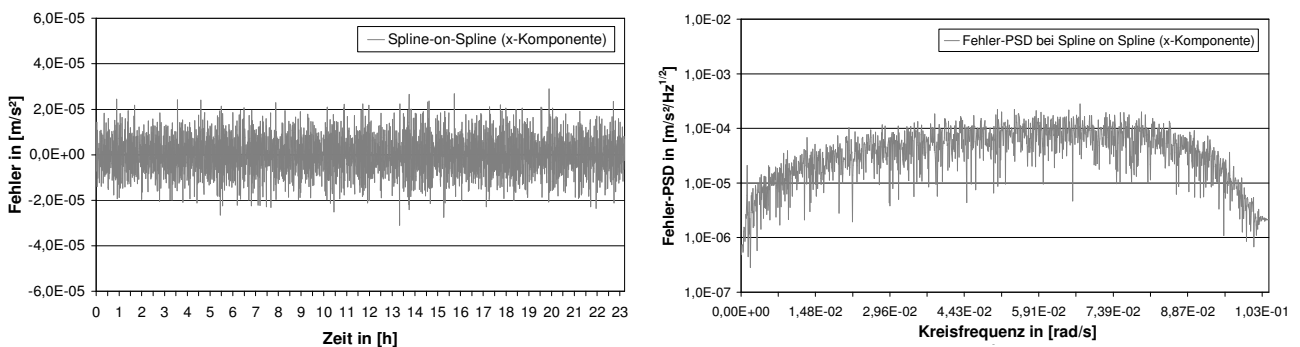
### 6.1.2.2 Gesamtfehler durch Approximationsfehler und Messrauschen

Der durch den Approximationsfehler und das Messrauschen entstehende Gesamtfehler bei SOS-Interpolation ist in Abbildung 6.11 im Zeit- und Frequenzbereich für das Rauschzenario ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ) dargestellt. Wie auch bei den Filtern höherer Ordnung überwiegt der durch das Messrauschen erzeugte Fehler. Allerdings ist der Gesamtfehler bei SOS-Interpolation wie in der Zeitbereichsdarstellung gut erkennbar kleiner als bei den Differentiationsfiltern, dies zeigt sich auch im RMS-Wert mit  $\text{RMS}_{\text{SOS}} = 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$  ( $\text{RMS}_{\text{SOS}} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  für  $\rho = 0,9$ ) gegenüber beispielsweise  $\text{RMS}_{\text{5Pkt}} = 1,37 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  ( $\text{RMS}_{\text{5Pkt}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  für  $\rho = 0,9$ ) beim 5-Punkt-Schema. Die Fehler-PSD-Darstellung zeigt, dass der geringere Gesamtfehler durch eine geringere Sensitivität auf Messrauschen auf den höheren Kreisfrequenzen ab  $\omega_k > 0,08 \text{ rad/s}$  bei SOS-Interpolation verursacht wird, auf den darunter liegenden Frequenzen ist die SOS-Interpolation fast identisch mit den Differentiationsfiltern. Dies lässt erwarten, dass mit SOS-Interpolation eventuell die Gravitationsfeldanteile höheren Grades besser bestimmt werden können, dies muss allerdings in einer simulierten Gravitationsfeldanalyse genauer untersucht werden.

Dem Vorteil eines niedrigeren Fehler-PSD auf den höheren Frequenzen bei SOS-Interpolation stehen folgende Nachteile gegenüber:

- größere Datenverluste an den Rändern (i) wegen des Ein- und Ausschwingverhaltens an den Rändern sowie (ii) wegen der Bestimmung von benötigten Randableitungen durch Newtoninterpolation → Probleme bei Datenlücken, es gehen in deren Umgebung mehr Daten verloren.
- Für SOS-Interpolation wird eine größere Zeitreihe  $X_i$  aufgrund zuvor genannter Probleme benötigt. Dadurch können sich Ausreißer auf eine größere Anzahl umliegender Beschleunigungen verzögern.
- Da bei Spline-Interpolation ein tridiagonales Gleichungssystem gelöst werden muss, ist diese langsamer als eine Filterung.

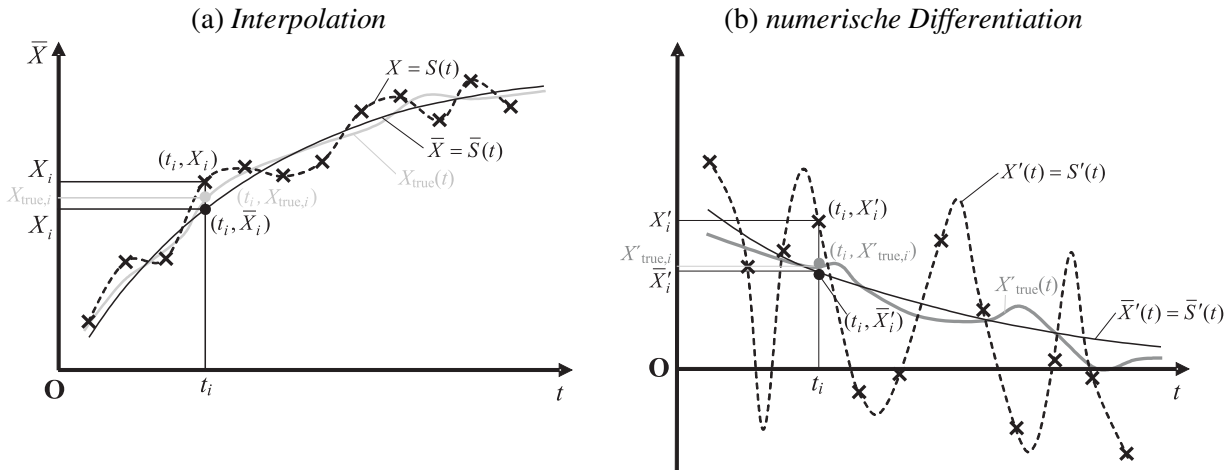
Insgesamt ist die SOS-Interpolation bei der Realdatenanalyse aufgrund von häufiger vorkommenden Datenlücken und Ausreißern schwerer zu realisieren als ein Differentiationsfilter basierend auf Newtoninterpolation.



**Abbildung 6.11:** Fehler (Zeitreihe und PSD-Spektrum) in den mit Spline-on-Spline-Interpolation bestimmten Beschleunigungen für einen Tag eines simulierten CHAMP-Orbits mit korreliertem Rauschen ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ).

## 6.2 Numerische Differentiation basierend auf glättenden Interpolationsverfahren

Wie sich in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt hat, reagieren die Differentiationsmethoden basierend auf exakten Interpolationsverfahren sensitiv auf Messrauschen. Es sollen deshalb in diesem Abschnitt Differentiationsverfahren basierend auf glättenden Interpolationsfunktionen getestet werden. Von der glättenden Interpolationsfunktion erhofft man sich, dass das Messrauschen der Zeitreihe  $X_i$  reduziert werden kann, was zu einem kleineren Fehler in den Beschleunigungen führt. Allerdings muss beachtet werden, dass bei der Glättung eventuell auch Signalanteile verloren gehen können. Der Hauptunterschied von glättenden Interpolationsverfahren  $\bar{S}(t)$  gegenüber exakten Interpolationsverfahren  $S(t)$  ist, dass bedingt durch ein zu lösendes überbestimmtes Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter der Interpolationsfunktion die Interpolationsbedingung  $\bar{S}(t_i) = X_i$  nicht mehr erfüllt ist. Dies ist aber gerade dann ein erwünschter Effekt, wenn die Differenz  $\Delta\bar{S}(t_i) = \bar{S}(t_i) - X_i$  dem Messrauschen möglichst gut entspricht und in der glättenden Interpolationsfunktion  $\bar{S}(t)$  das Messrauschen nahezu eliminiert wird.



**Abbildung 6.12:** Prinzip von exakten ( $X = S(t)$ ) und ausgleichenden ( $\bar{X} = \bar{S}(t)$ ) Interpolationsverfahren sowie numerischer Differentiation mittels exakter ( $X'(t) = S'(t)$ ) und ausgleichender ( $\bar{X}'(t) = \bar{S}'(t)$ ) Interpolationsverfahren;  $X_{\text{true}}, X'_{\text{true}}$  kennzeichnen dabei die wahren Werte sowie die wahren ersten Ableitungen.

In Abbildung 6.12 ist das Prinzip der glättenden Interpolation sowie der darauf basierenden numerischen Differentiation dargestellt. Aufgrund des Messrauschens weicht die gemessene diskrete Zeitreihe  $(t_i, X_i)$  von der wahren Funktion  $X_{\text{true}}(t)$  bzw. ihren diskreten Werten  $(t_i, X_{\text{true},i})$  ab. Die dadurch entstehende Abweichung der exakten Interpolationsfunktion  $X = S(t)$  von der wahren Funktion soll durch eine glättende Interpolationsfunktion  $\bar{X} = \bar{S}(t)$  verkleinert werden. Die diskreten Werte  $(t_i, \bar{X}_i)$  der glättenden Interpolation fallen jetzt natürlich nicht mehr mit den originären Messwerten  $(t_i, X_i)$  zusammen, sollen aber näher an den wahren Funktionswerten  $(t_i, X_{\text{true},i})$  liegen. Das durch die anschließende Differentiation  $X'(t) = S'(t)$  verstärkte Rauschen der exakten Interpolationsfunktion  $X = S(t)$  wird bei der Ableitung  $\bar{X}'(t) = \bar{S}'(t)$  der glättenden Interpolationsfunktion  $\bar{X} = \bar{S}(t)$  vermindert. Der Unterschied der geglätteten Ableitung  $\bar{X}'_i$  zur wahren Ableitung  $X'_{\text{true},i}$  an der Stelle  $t_i$  ist nicht mehr so groß wie derjenige der exakten Ableitung  $X'_i$ . Analog zu den Differentiationsverfahren basierend auf exakten Interpolationsverfahren werden diejenigen basierend auf den zugehörigen ausgleichenden Interpolationsverfahren, Polynomregression und Ausgleichsplines, getestet.

### 6.2.1 Numerische Differentiation basierend auf Regressionspolynomen

Den Ansatz für die glättende Interpolationsfunktion  $\bar{X} = \bar{S}(t)$  bildet das Regressionspolynom  $P(\bar{t})$ , welches so zentriert ist, dass am mittleren Beobachtungspunkt  $t_0$  des zu interpolierenden Zeitintervalls  $[t_{(1-M)/2}, t_{(M-1)/2}]$  der Zeitparameter  $\bar{t}_0 = t - t_0 = 0$  ist ( $M \hat{=}$  Maskenlänge des Regressionspolynoms, wobei  $M$  ungerade)

$$\bar{X}(t) = P(\bar{t}) = P(t - t_0) = \sum_{j=0}^L a_j (t - t_0)^j \quad ; \quad L \hat{=} \text{Grad des Polynoms mit } L < M - 1 \quad (6.29)$$

Damit ergeben sich die Beobachtungsgleichungen zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten  $a_j$  für die Zeitpunkte  $\bar{t}_i = t_i - t_0 = i\Delta t$  mit Schrittweite  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  zu

$$X_i = \sum_{j=0}^L a_j (i\Delta t)^j \quad ; \quad i = -\frac{M-1}{2}, (1), \dots, \frac{M-1}{2} \quad (6.30)$$

Aus numerischen Gründen werden die Beobachtungsgleichungen mit Hilfe von  $\bar{a}_j = a_j (\Delta t)^j$  transformiert in

$$X_i = \sum_{j=0}^L \bar{a}_j \cdot i^j \quad ; \quad i = -\frac{M-1}{2}, (1), \dots, \frac{M-1}{2} \quad (6.31)$$

wobei sich das folgende überbestimmte Gleichungssystem ergibt:

**Box 6.6: Gleichungssystem für Regressionspolynome**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-M}{2} & \left(\frac{1-M}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-M}{2}\right)^3 & \dots & \left(\frac{1-M}{2}\right)^L \\ 1 & \frac{3-M}{2} & \left(\frac{3-M}{2}\right)^2 & \left(\frac{3-M}{2}\right)^3 & \dots & \left(\frac{3-M}{2}\right)^L \\ 1 & \frac{5-M}{2} & \left(\frac{5-M}{2}\right)^2 & \left(\frac{5-M}{2}\right)^3 & \dots & \left(\frac{5-M}{2}\right)^L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{M-3}{2} & \left(\frac{M-3}{2}\right)^2 & \left(\frac{M-3}{2}\right)^3 & \dots & \left(\frac{M-3}{2}\right)^L \\ 1 & \frac{M-1}{2} & \left(\frac{M-1}{2}\right)^2 & \left(\frac{M-1}{2}\right)^3 & \dots & \left(\frac{M-1}{2}\right)^L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 = a_0 \\ \bar{a}_1 = a_1 \Delta t \\ \bar{a}_2 = a_2 \Delta t^2 \\ \bar{a}_3 = a_3 \Delta t^3 \\ \vdots \\ \bar{a}_L = a_L \Delta t^L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} X_{\frac{1-M}{2}} \\ X_{\frac{3-M}{2}} \\ X_{\frac{5-M}{2}} \\ \vdots \\ X_0 \\ \vdots \\ X_{\frac{M-3}{2}} \\ X_{\frac{M-1}{2}} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

das mit Hilfe des speziellen Gauß-Markov-Modells gelöst werden kann:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{gewichtete Lösung}) \quad (6.33)$$

mit Varianz-Kovarianz-Matrix  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{C}_x$  der gemessenen Koordinaten

(mit  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I} \hat{=}$  Einheitsmatrix, falls  $\mathbf{C}_x$  nicht bekannt ist)

Die aus der Ausgleichung geschätzte Varianz der Gewichtseinheit

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M - (L + 1)} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \quad (6.34)$$

sollte dabei die Varianz der Koordinaten  $X_i$  nicht überschreiten, um eine zu starke Glättung zu vermeiden. Für die Koordinaten, die Geschwindigkeiten sowie die Beschleunigungen zum Zeitpunkt  $t = t_0$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 \bar{X}(t = t_0) &= P(\bar{t} = 0) = a_0 = \bar{a}_0 \\
 \bar{X}'(t = t_0) &= P'(\bar{t} = 0) = a_1 = \bar{a}_1 / \Delta t \\
 \bar{X}''(t = t_0) &= P''(\bar{t} = 0) = 2a_2 = 2\bar{a}_2 / \Delta t^2
 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Wie auch schon beim Newton'schen Interpolationsverfahren ergeben sich wieder Filter zur Bestimmung von Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, wie hier für den Fall eines (ungewichteten) Regressionspolynoms vom Grad  $L = 8$  und der Länge  $M = 13$  gezeigt wird:

(geglättete) Positionen:

|                   |                  |                    |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                    |                  |                   |
|-------------------|------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|------------------|-------------------|
| $\frac{15}{4199}$ | $\frac{-9}{323}$ | $\frac{360}{4199}$ | $\frac{-465}{4199}$ | $\frac{-135}{4199}$ | $\frac{1350}{4199}$ | $\frac{2183}{4199}$ | $\frac{1350}{4199}$ | $\frac{-135}{4199}$ | $\frac{-465}{4199}$ | $\frac{360}{4199}$ | $\frac{-9}{323}$ | $\frac{15}{4199}$ |
|-------------------|------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|------------------|-------------------|

(geglättete) Geschwindigkeiten:  $(1/\Delta t)$ .

|                         |                       |                          |                        |                          |                     |   |                    |                         |                       |                           |                      |                          |
|-------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|---------------------|---|--------------------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|----------------------|--------------------------|
| $\frac{22963}{1763580}$ | $\frac{-4475}{58786}$ | $\frac{169087}{1175720}$ | $\frac{-8927}{881790}$ | $\frac{-145543}{587860}$ | $\frac{-559}{2261}$ | 0 | $\frac{559}{2261}$ | $\frac{145543}{587860}$ | $\frac{8927}{881790}$ | $\frac{-169087}{1175720}$ | $\frac{4475}{58786}$ | $\frac{-22963}{1763580}$ |
|-------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|---------------------|---|--------------------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|----------------------|--------------------------|

(geglättete) Beschleunigungen:  $(1/\Delta t)^2$ .

|                              |                          |                             |                              |                            |                         |                         |                         |                            |                              |                             |                          |                              |
|------------------------------|--------------------------|-----------------------------|------------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| $\frac{-1702789}{148140720}$ | $\frac{283943}{3292016}$ | $\frac{-4009809}{16460080}$ | $\frac{33854399}{148140720}$ | $\frac{5135029}{16460080}$ | $\frac{-18917}{126616}$ | $\frac{-55333}{124488}$ | $\frac{-18917}{126616}$ | $\frac{5135029}{16460080}$ | $\frac{33854399}{148140720}$ | $\frac{-4009809}{16460080}$ | $\frac{283943}{3292016}$ | $\frac{-1702789}{148140720}$ |
|------------------------------|--------------------------|-----------------------------|------------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|------------------------------|

**Abbildung 6.13:** Filter zur Berechnung der geglätteten Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung am Mittelpunkt beim Regressionspolynom des Grades  $L = 8$  und der Filterlänge  $M = 13$ .

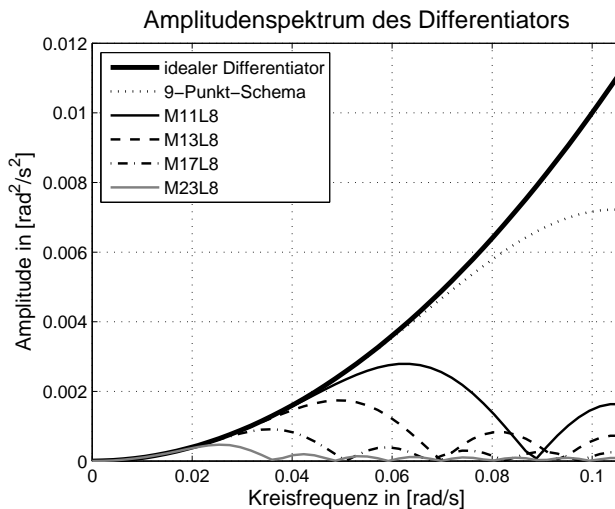
Es sind mehrere Anwendungsmöglichkeiten der Polynomregression denkbar:

- zweimaligen Ableitung eines Regressionspolynoms, das durch die Satellitenbahn gelegt wird, zur Bestimmung der Beschleunigungen
- zunächst Glättung der Satellitenbahn mit dem obigen Positionsfilter, anschließend numerische Differentiation mit den exakten Differentiationsfiltern basierend auf Newtoninterpolation

- zuerst numerische Differentiation mit einem exakten Differentiationsfilter basierend auf Newtoninterpolation, anschließend Glättung der bestimmten Beschleunigungen mit Polynomregression.

Es wären auf diese Weise noch weitere Kombinationsmöglichkeiten denkbar, die aber alle auf ähnliche Ergebnisse führen. Im Folgenden werden deshalb nur die Ergebnisse diskutiert, die durch zweifache Ableitung eines Regressionspolynoms der Länge  $M$  und des Grades  $L$  entstehen. Insbesondere werden Polynomfilter der Ordnung  $L = 8$  betrachtet.

Für die Untersuchung der Approximationsgüte wurden die Impulsantworten von Regressionspolynomfiltern (Ordnung  $L = 8$ ) verschiedener Länge  $M$  in den Frequenzbereich transformiert. Abbildung 6.14 zeigt das Amplitudenspektrum der zugehörigen Frequenzantworten im Vergleich zu einem idealen Differentiator und im Vergleich zum exakten 9-Punkt (ebenfalls Ordnung  $L = 8$ )-Differentiationsfilter. Wie zu sehen ist, wird die Annäherung an einen idealen Differentiator mit zunehmender Filterlänge (also stärkerer Glättung) schlechter. Schon bei einer Filterlänge von  $M = 11$  (also einer Überbestimmtheit von 2) ist die Unterdrückung des Signals auf den höheren Frequenzen gegenüber dem exakten Differentiationsfilter deutlich ausgeprägt. Bereits für Kreisfrequenzen  $> 0,045$  rad/s sind Abweichungen vom idealen Differentiator erkennbar. Dies bedeutet schließlich, dass bei einem glättenden Differentiationsverfahren nicht nur eine Abschwächung des Rauschens erhofft werden kann, sondern dass auch das auch Signalanteile herausgefiltert werden.



**Abbildung 6.14:** Amplitudenspektrum eines idealen Differentiators sowie von polynomialen Regressionsfiltern der Ordnung  $L = 8$  und unterschiedlichen Filterlängen  $M$ .

In Abbildung 6.15 ist der bei Anwendung von Polynomregressionsfiltern verschiedener Länge  $M$  (Ordnung  $L = 8$ ) entstehende Gesamtfehler im Zeit- und Frequenzbereich für einen Tag eines simulierten, verrauschten CHAMP-Orbits ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) im Vergleich zum exakten 9-Punkt-Differentiationsfilter dargestellt. Im Zeitbereich ist deutlich erkennbar, dass der Gesamtfehler durch Anwendung von Polynomregression gegenüber dem exakten Differentiationsfilter gleicher Ordnung  $L$  reduziert werden kann. Die durch die einzelnen Filter erzeugten RMS-Werte sind in Tabelle 6.4 angegeben. Für das Rauschenszenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) erreichen die Polynomregressionsfilter der Länge  $M = 17$  und 19 die geringsten RMS-Werte, für einen längeren Filter (hier:  $M = 27$ ) werden die RMS-Werte aufgrund zu starker Glättung wieder größer. Gegenüber dem exakten Differentiationsfilter kann der RMS-Wert durch Polynomregression um den Faktor 4 verkleinert werden. Die Interpretation, dass der Regressionsfilter der Länge  $M = 19$  aufgrund des niedrigsten RMS-Wertes die besten Ergebnisse liefert, ist aber mit Vorsicht zu betrachten. Im Zeitbereich machen sich nämlich bei einer Filterlänge  $M = 19$  systematische Effekte bemerkbar (hauptsächlich zu den Zeitpunkten  $t = 1^h$  und  $t = 13^h$  beim Überflug über Gebiete eines rauerer Gravitationsfeldes), die sich bei zunehmender Filterlänge  $M$  verstärken. Es ist deshalb ratsam, einen kürzeren Regressionsfilter zu benutzen, z.B. mit  $M = 13$ . Im Frequenzbereich ist erkennbar, dass die Unterdrückung des Gesamtfehlers mit zunehmender Länge  $M$  hauptsächlich auf den höheren Kreisfrequenzen ab ca.  $0,04$ – $0,05$  rad/s eintritt. Es tritt dabei wieder das charakteristische Muster der Frequenzantwort eines Regressionspolynom-Differentiators aus Abbildung 6.14 auf.

In Tabelle 6.5 sind die RMS-Werte für verschiedene Polynomregressionsfilter und den exakten 9-Punkt-Differentiationsfilter für das Rauschenszenario mit geringerer Korrelation, ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ), angegeben. Wie zu sehen ist, ist zu einer optimalen Unterdrückung des Rauschens jetzt eine größere Filterlänge  $M$  nötig. Den kleinsten RMS-Wert liefert die Filterlänge  $M = 23$ , aber auch hier sollte besser ein kürzerer Filter verwendet werden, da sich für  $M = 23$  im Zeitbereich wieder ähnliche systematische Effekte wie in Abbildung 6.4 zeigen. Es ist also zu erkennen, dass die Wahl einer geeigneten Filterlänge  $M$  erheblich von den Rauschverhältnisse der Daten abhängt.

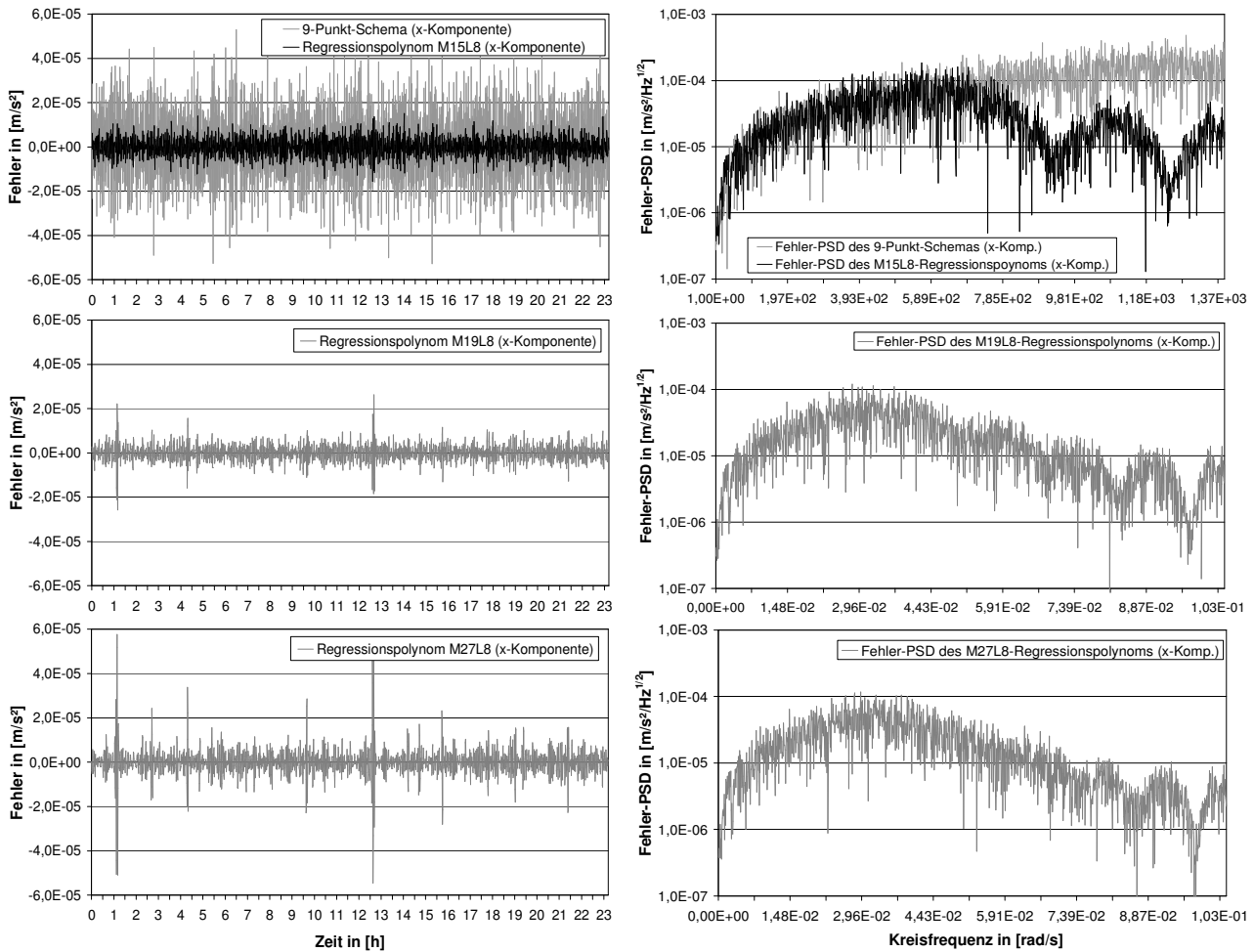
| Filter                  | 9-Punkt              | M13L8               | M15L8               | M17L8               | M19L8               | M27L8               |
|-------------------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| RMS [m/s <sup>2</sup> ] | $1,56 \cdot 10^{-5}$ | $5,2 \cdot 10^{-6}$ | $4,0 \cdot 10^{-6}$ | $3,5 \cdot 10^{-6}$ | $3,5 \cdot 10^{-6}$ | $5,9 \cdot 10^{-5}$ |

**Tabelle 6.4:** RMS-Werte von Regressionspolynomfiltern und exakten Differentiationsfiltern im Vergleich für das Rauschenszenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ).



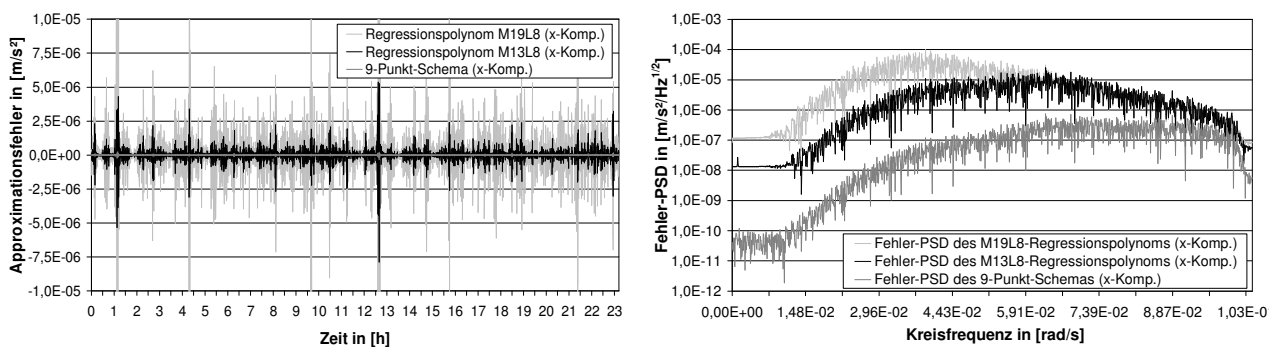
| Filter                  | 9-Punkt             | M17L8               | M19L8               | M21L8               | M23L8               | M29L8               |
|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| RMS [m/s <sup>2</sup> ] | $5,2 \cdot 10^{-5}$ | $1,0 \cdot 10^{-5}$ | $8,6 \cdot 10^{-6}$ | $7,4 \cdot 10^{-6}$ | $6,9 \cdot 10^{-6}$ | $7,4 \cdot 10^{-5}$ |

**Tabelle 6.5:** RMS-Werte von Regressionspolynomfiltern und exakten Differentiationsfiltern im Vergleich für das Rauschzenario ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,9$ ).



**Abbildung 6.15:** Fehler (Zeitreihe und PSD-Spektren) in den mit verschiedenen Polynomregressionsfiltern (Länge  $M$ , Polynomordnung  $L$ ) bestimmten Beschleunigungen für einen Tag eines simulierten CHAMP-Orbits mit korreliertem Rauschen ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ); im Vergleich dazu der (exakte) 9-Punkt-Differenzfilter (Ordnung 8).

Da es sich bei der numerischen Differentiation mit Regressionspolynomen nicht um ein Differentiationsverfahren beruhend auf exakter Interpolation handelt, muss untersucht werden, wie stark die Glättung von Signalanteilen ist. Aufschluss darüber gibt die Untersuchung des Approximationsfehlers für einen fehlerfreien Orbit. Dieser ist in Abbildung 6.16 für den exakten 9-Punkt-Differenzfilter sowie für zwei Polynomregressionsfilter der Längen  $M = 13$  und  $M = 19$  dargestellt.



**Abbildung 6.16:** Zeitreihen und PSD-Spektren des Approximationsfehlers bei Polynomregressionsfiltern (Länge  $M$ , Grad  $L$ ) und dem exakten 9-Punkt-Differenzfilter (Ordnung 8) im Vergleich.

Wie im Zeitbereich zu erkennen ist, führt eine Polynomregression mit größer werdender Filterlänge  $M$  gegenüber dem exakten Differentiationsfilter zu einem deutlich zunehmenden Approximationsfehler, der vor allem an den Stellen hohen Gravitationsfeldsignals (z.B. Himalaya) ausgeprägt ist. Dies deutet auf eine Glättung des Signals und damit einen Signalverlust hin. Im Frequenzbereich zeigt sich, dass dieser Signalverlust gegenüber dem exakten Differentiationsfilter den gesamten Frequenzbereich erfasst. Der größte Signalverlust, vor allem bei zunehmender Filterlänge  $M$ , tritt allerdings in den unteren Frequenzen auf. Dies bedeutet, dass die Gravitationsfeldbestimmung für die unteren Grade  $l < 50$  beeinträchtigt werden kann.

Insgesamt bleibt also festzustellen, dass der Rauschunterdrückung durch Polynomregression auf den höheren Frequenzen ein Signalverlust, vor allem auf den niedrigeren Frequenzen, gegenübersteht. Ob ein Genauigkeitsgewinn in der Gravitationsfeldbestimmung durch Einsatz von Polynomregressionsfiltern zu erreichen ist, bleibt schwierig zu beantworten. Aufschluss darüber gibt eine Simulation einer Gravitationsfeldanalyse in Kapitel 8.

## 6.2.2 Numerische Differentiation basierend auf Ausgleichssplines

Die glättende Variante der „exakten“ kubischen Splinefunktion ist die Interpolation mit *kubischen Ausgleichssplines* (engl.: *Smoothing Splines*) (Engeln-Müllges und Reutter, 1990; Eubank, 1988). Für die Messwerte  $(t_i, X_i(t_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  setzt sich die kubische Ausgleichssplinefunktion  $\bar{S}(t)$  nach Engeln-Müllges und Reutter (1990) in jedem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  aus Polynomen dritten Grades (kubisch) zusammen:

$$\bar{S}(t) = P_i(t) = a_i + b_i(t-t_i) + c_i(t-t_i)^2 + d_i(t-t_i)^3 \quad (6.36)$$

für  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$

mit den ausgeglichenen Koordinaten

$$\bar{S}(t_i) = \bar{X}_i \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Die entstehenden Differenzen  $(X_i - \bar{X}_i)$  zwischen den gemessenen Koordinaten  $X_i$  und ausgeglichenen Koordinaten  $\bar{X}_i$  sollen proportional zu den Sprüngen  $r_i$  der dritten Ableitung der Ausgleichssplinefunktion  $\bar{S}(t)$  in  $t_i$  sein. Die zugehörigen Gewichte  $w_i$  werden wie folgt gewählt:

$$w_i(X_i - \bar{X}_i) = r_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \quad ; \quad w_i > 0 \quad (6.37)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} r_0 &= P_0'''(t_0) \\ r_i &= P_i''(t_i) - P_{i-1}''(t_i) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ r_n &= -P_{n-1}'''(t_n) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Mit den zu der kubischen Splinefunktion (Abschnitt 6.1.2) analogen Bedingungen ( $\bar{S}(t)$  ist in  $[t_0, t_n]$  zweimal stetig differenzierbar)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & P_i(t_i) = \bar{X}_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \text{(b)} \quad & P_i(t_i) = P_{i-1}(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{(c)} \quad & P_i'(t_i) = P_{i-1}'(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \text{(d)} \quad & P_i''(t_i) = P_{i-1}''(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.39)$$

und zwei weiteren Randbedingungen erhält man dann die notwendigen Bedingungen zur Bestimmung der  $4n+2$  Koeffizienten  $a_i, b_i, c_i, d_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$  und  $a_n, c_n$ .

Die Gewichtung betreffend lässt sich feststellen, dass sich für  $w_i \rightarrow \infty$  die exakte Splinefunktion ergibt und für  $w_i \rightarrow 0$  eine ausgleichende Gerade. Durch eine gezielte Wahl der Gewichte kann man die ausgleichende Splinefunktion näher an den Messwerten verlaufen lassen (große  $w_i$ ) oder eine stärkere ausgleichende Wirkung erzielen (kleine  $w_i$ ). Eine ideale Gewichtung kann am besten durch Simulationen mit realistischen Fehlerfunktionen bestimmt werden. Die in den Simulationsrechnungen und in der Berechnung der Ausgleichssplines (Anhang B, Abschnitt B.2) verwendeten Gewichte  $W_i$  stehen mit den Gewichten  $w_i$  gemäß  $W_i = 6/w_i$  in Beziehung.

Die benötigten Randbedingungen können wie bei der normalen Splinefunktion  $S(t)$  z.B. mit der zuvor beschriebenen Newton'schen Interpolationsformel berechnet werden. Je nach Art der Randbedingungen (erste Randableitungen  $\bar{S}'(t_0) = \alpha, \bar{S}'(t_n) = \beta$ , zweite Randableitungen  $\bar{S}''(t_0) = \alpha, \bar{S}''(t_n) = \beta$  oder dritte Randableitungen  $\bar{S}'''(t_0) = \alpha, \bar{S}'''(t_n) = \beta$  bekannt, bzw.  $\bar{S}''(t_0) = \bar{S}''(t_n) = 0$  bei unbekanntem Randableitungen) ergeben sich wiederum verschiedene Varianten der kubischen Ausgleichssplines. In dieser Arbeit wurden, wie bei der normalen Splinefunktion, die *kubischen Ausgleichssplines mit vorgegebener 1. Randableitung* angewendet (s. Anhang B, Abschnitt B.2).

Die Funktionswerte (ausgeglichene Koordinaten) sowie die ersten Ableitungen (Geschwindigkeiten) an den Stützstellen  $(t_i, X_i(t_i))$  berechnen sich dann zu

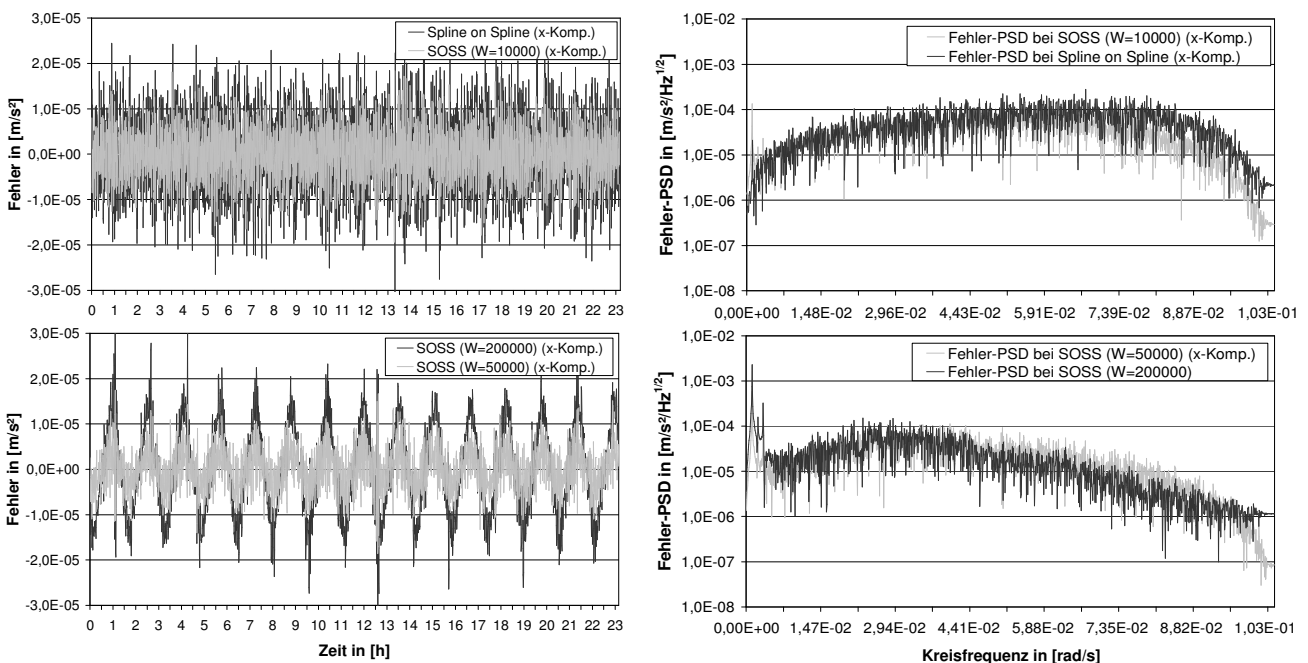
$$\begin{aligned} \bar{X}_i(t_i) &= \bar{S}(t_i) = P_i(t_i) = a_i \quad ; \quad i = 0, n \\ \bar{X}'_i(t_i) &= \bar{S}'(t_i) = P'_i(t_i) = b_i \quad ; \quad i = 1, n-1 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Zur Berechnung von zweiten Ableitungen (Beschleunigungen)  $\bar{X}_i''(t_i)$  wird wiederum das (Ausgleichs)Spline-On-(Ausgleichs)Spline-Verfahren verwendet, bei dem mit den erhaltenen Werten für  $\bar{X}_i'(t_i)$  als Funktionswerte noch einmal eine (Ausgleichs)Spline-Interpolation durchgeführt wird und die zugehörige (Ausgleichs)Splinefunktion erneut abgeleitet wird. Dabei kann exakte Spline-Interpolation mit Ausgleichssplines kombiniert werden, beispielsweise

- *Smoothing Spline on Smoothing Spline (SSOSS)*
- *Smoothing Spline on Spline (SSOS)*
- *Spline on Smoothing Spline (SOSS)*

die aber alle auf ähnliche Ergebnisse führen. Stellvertretend wird im Folgenden die Variante SOSS untersucht, bei der zuerst die Positionen mit einem Ausgleichsspline mit der Gewichtung  $W$  interpoliert werden und die daraus bestimmten Geschwindigkeiten anschließend mit exakten Splines interpoliert werden. An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass bei Verwendung von Ausgleichssplines die gleichen Nachteile wie bei exakten Splines gegenüber Polynomen auftreten, insbesondere ein noch stärkeres Ein-/Auswingsverhalten aufgrund der Gewichtung und eine noch größere Rechenzeit aufgrund eines jetzt zu lösenden fünfdiagonalen Gleichungssystems.

In Abbildung 6.17 ist der bei numerischer Differentiation mit Ausgleichssplines (SOSS) entstehende Gesamtfehler bei verschiedenen Gewichtungen für einen simulierten CHAMP-Orbit mit dem Rauschscenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich im Vergleich zur exakten Spline-Interpolation (SOS, bzw. SOSS mit  $W = 0$ ) dargestellt. Im Zeitbereich ist zu erkennen, dass durch Wahl einer geeigneten Gewichtung (hier:  $W = 10000$ ) das Rauschen abgeschwächt werden kann. Bei einer zu starken Gewichtung ( $W = 50000$ ) machen sich bereits systematische Effekte mit der Periodendauer eines Umlaufs  $T_{\text{rev}}$  bemerkbar, die sich bei noch höherer Gewichtung ( $W = 200000$ ) verstärken. Diese lassen sich durch die Tendenz der Ausgleichssplines, bei einer Gewichtung von  $W \rightarrow \infty$  eine ausgleichende Gerade zu ergeben, erklären. Es wird also offensichtlich auch Signal herausgefiltert bzw. geglättet. Im Frequenzbereich ist zu sehen, dass bei einer höheren Gewichtung  $W$  vor allem die Anteile des Gesamtfehlers auf den höheren Frequenzen vermindert werden. Allerdings erhöht sich gleichzeitig der für die sichtbaren systematischen Effekte verantwortliche Anteil des Gesamtfehlers auf den niedrigeren Frequenzen, der auf eine Glättung des Signals in diesem Frequenzbereich schließen lässt. In Tabelle 6.6 und Tabelle 6.7 sind die RMS-Werte bei Verwendung unterschiedlicher Gewichtungen  $W$  für die beiden Rauschscenarien ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) und ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ) angegeben. Für die Korrelation  $\rho = 0,99$  liefert eine Gewichtung von  $W = 50000$  trotz der systematischen Effekte in Abbildung 6.17 den günstigsten RMS-Wert. Der Gewichtungsfaktor sollte also aufgrund der systematischen Effekte (wie auch bei der Polynomregression) nicht nach dem niedrigsten RMS-Wert gewählt werden, sondern etwas kleiner. Dies zeigt sich auch bei der niedrigeren Korrelation von  $\rho = 0,9$ , bei der die Gewichtung  $W = 75000$  den kleinsten RMS-Wert bei auftretenden systematischen Effekten liefert. Bei niedrigerer Korrelation  $\rho$  der Koordinatenfehler ist, wie bei den Regressionspolynomen, wiederum eine stärker glättende Interpolationsfunktion für ein gutes Ergebnis notwendig.



**Abbildung 6.17:** Fehler (Zeitreihe und PSD-Spektren) in den mit verschiedenen Ausgleichssplines (Spline-on-Smoothing Spline (SOSS), Gewichtung  $W$ ) bestimmten Beschleunigungen für einen Tag eines simulierten CHAMP-Orbits mit korreliertem Rauschen ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ); im Vergleich dazu (exakte) Spline-on-Spline-Differentiation.

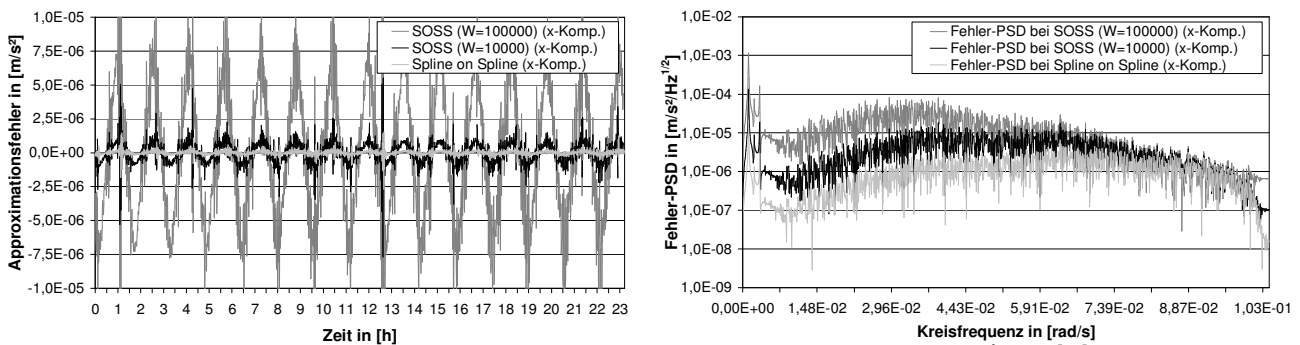
| Spline                  | SOS                 | SOSS                |                     |                     |                     |
|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Gewicht $W$             | 0                   | 10000               | 25000               | 50000               | 200000              |
| RMS [m/s <sup>2</sup> ] | $8,8 \cdot 10^{-6}$ | $5,9 \cdot 10^{-6}$ | $4,8 \cdot 10^{-6}$ | $4,5 \cdot 10^{-6}$ | $9,8 \cdot 10^{-6}$ |

**Tabelle 6.6:** RMS-Werte von Ausgleichssplines (SOSS, Gewichtung  $W$ ) und exakter Spline-on-Spline-Differentiation (SOS) im Vergleich für das Rauschscenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ).

| Spline                  | SOS                 | SOSS                |                     |                     |                     |
|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Gewicht $W$             | 0                   | 10000               | 25000               | 75000               | 500000              |
| RMS [m/s <sup>2</sup> ] | $2,8 \cdot 10^{-5}$ | $1,9 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $2,0 \cdot 10^{-5}$ |

**Tabelle 6.7:** RMS-Werte von Ausgleichssplines (SOSS, Gewichtung  $W$ ) und exakter Spline-on-Spline-Differentiation (SOS) im Vergleich für das Rauschscenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ).

In Abbildung 6.18 ist der Approximationsfehler im Zeit- und Frequenzbereich bei Verwendung von Ausgleichssplines unterschiedlicher Gewichtung  $W$  im Vergleich zur exakten Spline-Interpolation dargestellt. Im Zeitbereich ist für eine größer werdende Gewichtung  $W$  deutlich die Zunahme des Approximationsfehlers infolge Filterung und Glättung des Signals sichtbar. Wie bereits erwähnt, handelt es dabei hauptsächlich um systematische Effekte nahe der Umlaufkreisfrequenz  $\omega_{ev} = 1,1 \cdot 10^{-3}$  rad/s, wie dies im Frequenzbereich gut sichtbar ist. Außerdem verschlechtert sich bei einer größeren Gewichtung  $W$  die Approximation auf den niedrigeren Kreisfrequenzen  $< 0,06$  rad/s.



**Abbildung 6.18:** Zeitreihen und PSD-Spektren des Approximationsfehlers bei Verwendung von Ausgleichssplines (SOSS, Gewichtung  $W$ ) und exakter Spline-on-Spline-Differentiation im Vergleich.

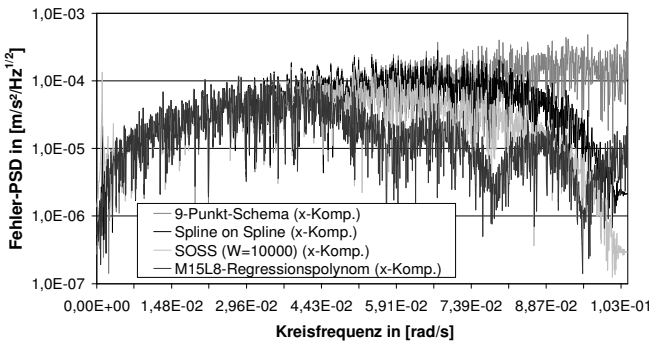
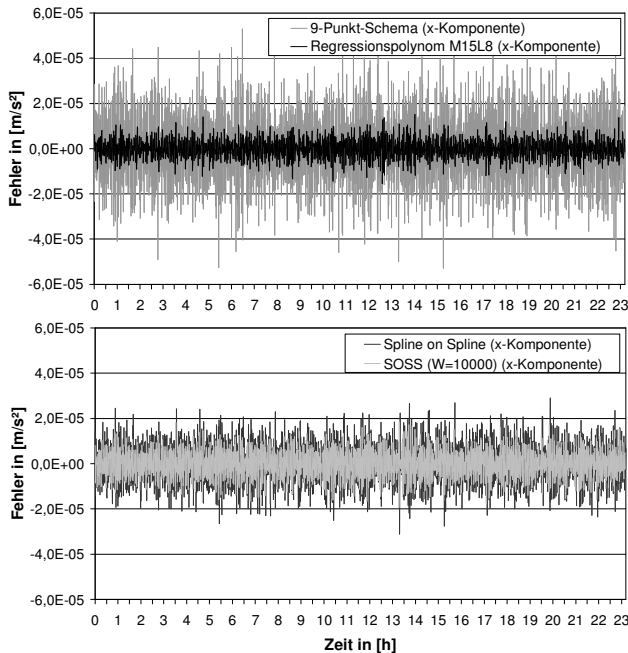
Insgesamt steht bei Verwendung von Ausgleichssplines der Reduzierung des Gesamtfehlers auf den höheren Frequenzen eine schlechter werdende Approximation auf den niedrigeren Frequenzen bedingt durch Signalglättung gegenüber. Ob durch Verwendung von Ausgleichssplines also eine Genauigkeitssteigerung in der Gravitationsfeldbestimmung ermöglicht wird, muss anhand von Simulationsrechnungen (s. Kapitel 8) untersucht werden.

### 6.3 Vergleich der einzelnen Differentiationsverfahren

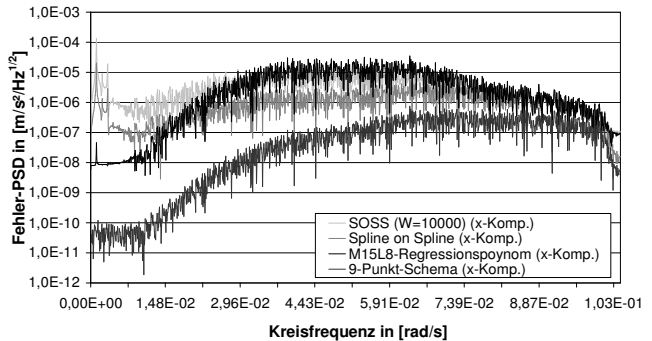
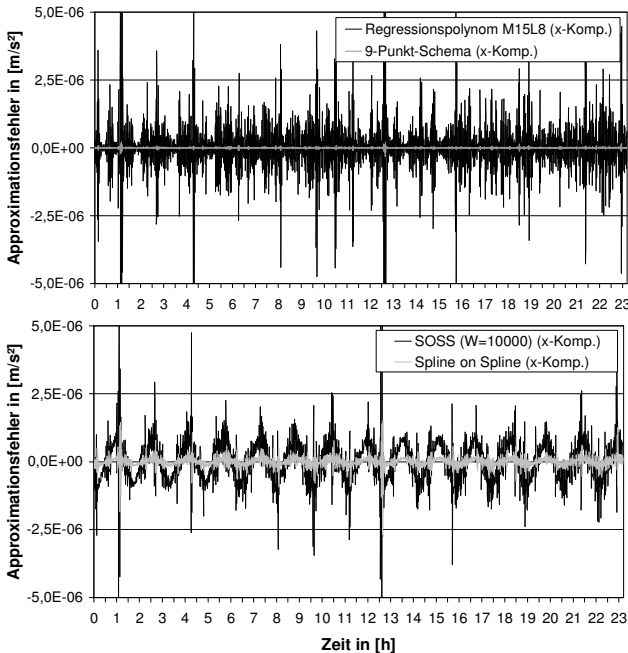
Im Folgenden werden die 4 vorgestellten Ansätze zur numerischen Differentiation (Polynominterpolation/Spline-Interpolation/Regressionspolynome/Ausgleichssplines) noch einmal kurz gegenübergestellt. In Abbildung 6.19 und Abbildung 6.20 ist dazu der Gesamtfehler für einen simulierten verrauschten CHAMP-Orbit ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) und der Approximationsfehler für einen simulierten fehlerfreien CHAMP-Orbit für ausgewählte Differentiationsverfahren (9-Punkt-Newtoninterpolation, Spline-on-Spline-Interpolation, M15L8-Regressionspolynom, Spline-on-Smoothing-Spline-Interpolation ( $W = 10000$ )) dargestellt.

Der größte Gesamtfehler, hauptsächlich bedingt durch die Sensitivität auf Rauschen, entsteht bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas ( $\text{RMS}_{9\text{Pkt}} = 1,598 \cdot 10^{-5}$  m/s<sup>2</sup>), das M15L8-Regressionspolynom führt zum geringsten Gesamtfehler ( $\text{RMS}_{\text{M15L8}} = 4,0 \cdot 10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>), dazwischen liegen die beiden Splineverfahren mit  $\text{RMS}_{\text{SOS}} = 1,37 \cdot 10^{-5}$  m/s<sup>2</sup> und  $\text{RMS}_{\text{SOSS}_W=10000} = 5,9 \cdot 10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>. Dabei bleibt festzustellen, dass die Differentiation basierend auf ausgleichenden Interpolationsverfahren aufgrund der Glättung weniger sensitiv auf Rauschen reagiert und deshalb (bei angemessener Glättung) zu geringeren Gesamtfehlern führt. Im Frequenzbereich wird deutlich, dass die Reduktion des Gesamtfehlers bei ausgleichenden Interpolationsverfahren, aber auch beim exakten Spline-on-Spline-Verfahren gegenüber dem 9-Punkt-Schema hauptsächlich auf den höheren Kreisfrequenzen oberhalb  $\omega > 0,05$  rad/s stattfindet, für darunter liegende Frequenzen ist das Spektrum des Gesamtfehlers (abgesehen von den erhöhten Fehlerspektren der Splineverfahren nahe der Umlauffrequenz) fast identisch. Dies würde bedeuten, dass durch glättende Verfahren (und auch SOS) gegenüber dem 9-Punkt-Schema eine Verbesserung in der Gravitationsfeldbestimmung für Grade  $l > 50$  zu erwarten wäre. Eine

solche Aussage ist aber mit Vorsicht zu treffen, da sowohl die ausgleichenden Interpolationsverfahren als auch die Spline-on-Spline-Methode aufgrund ihrer glättenden Eigenschaften zu einer deutlich schlechteren Approximation im gesamten Frequenzbereich, aber hauptsächlich auf den niedrigeren Frequenzen führen. Dies wird in der Fehler-PSD-Darstellung in Abbildung 6.20 deutlich. Auffällig ist außerdem die deutlich schlechtere Approximation der Splineverfahren auf den niedrigen Frequenzen nahe der Umlauffrequenz, die zu den sinusförmigen systematischen Effekten im Zeitbereich führen. Dieser Effekt wird bei Verwendung von Ausgleichssplines verstärkt. Es bleibt schließlich festzustellen, dass die numerische Differentiation basierend auf exakten Interpolationsverfahren zu einer deutlich besseren Approximation des zu erfassenden Signals führt als ausgleichende Interpolationsverfahren.



**Abbildung 6.19:** Vergleich des Gesamtfehlers (im Zeit- und Frequenzbereich) bei den unterschiedlichen Differentiationsverfahren für einen simulierten CHAMP-Orbit mit dem Rauschscenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ).



**Abbildung 6.20:** Vergleich des Approximationsfehlers (im Zeit- und Frequenzbereich) bei den unterschiedlichen Differentiationsverfahren für einen simulierten fehlerfreien CHAMP-Orbit.

Insgesamt steht also bei den ausgleichenden Interpolationsverfahren dem Vorteil der Reduzierung des Rauschens auf den höheren Frequenzen eine stärkere Glättung und Filterung des Signals im gesamten Frequenzbereich, hauptsächlich aber auf den niedrigeren Frequenzen, gegenüber. Ob also ein Vorteil durch Verwendung solcher ausgleichender Interpolationsverfahren bei der Gravitationsfeldbestimmung erzielt werden kann, muss in einer ausführlichen Gravitationsfeldsimulation untersucht werden. Aufgrund der in den vorhergehenden Kapiteln erwähnten Probleme bei der Interpolation mit (Ausgleichs)Splines ist — bei ähnlichen Genauigkeiten — die Polynominterpolation vorzuziehen.

## 7 Lösung des linearen überbestimmten Gleichungssystems

Bei der Anwendung des Beschleunigungsansatzes entsteht ein lineares, überbestimmtes Gleichungssystem, das allerdings aufgrund einer großen Anzahl von Beobachtungen (ca. 2 Mio. Bahnpunkte  $\hat{=}$  6 Mio. Beobachtungen) und zu bestimmender Parameter (8278 Unbekannte für eine Entwicklung bis Grad 90) von großer Dimension ist. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie das überbestimmte lineare Gleichungssystem basierend auf dem *Speziellen Gauß-Markov-Modell* gelöst werden kann. Dabei soll kurz auf Thematiken wie auftretende Probleme bei der Gewichtung und Aspekte der Regularisierung eingegangen werden. Für die Lösung groß dimensionierter Gleichungssysteme bietet sich in der Regel eine Umsetzung auf einem Großrechner und/oder die Implementierung iterativer Gleichungssystemlöser an. In dieser Arbeit wird das Verfahren der *Präkonditionierten Konjugierten Gradienten* eingesetzt, das eine schnelle Konvergenz ermöglicht und geringe Anforderungen an den Arbeitsspeicher stellt. Durch eine geeignete Präkonditionierung, die auf der Annahme einer idealen Bahn beruht, kann die Konvergenz zusätzlich verbessert werden.

### 7.1 Das Gleichungssystem

Als Lösungsstrategien zur Bestimmung der gesuchten Kugelfunktionskoeffizienten  $c_{l,m}, s_{l,m}$  bieten sich in der Satellitengeodäsie in der Regel zwei Möglichkeiten an:

- „time-wise-approach“
- „space-wise-approach“

Der *time-wise-approach* ist zunächst der natürlichere Zugang. Hier wird für jede einzelne Beobachtung die sich direkt daraus ergebende Beobachtungsgleichung aufgestellt. Das Problem dabei ist, dass sich bei Problemstellungen, bei denen eine Vielzahl von Unbekannten aus einer großen Anzahl von Beobachtungen bestimmt werden soll, ein groß dimensioniertes Gleichungssystem ergibt. Die Lösung solcher Systeme ist meist mit einem hohen Rechenaufwand verbunden und ist durch eine begrenzte Speicherkapazität limitiert. Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet die Auswertung als *space-wise-approach* (z.B. Colombo, 1981; Rummel et al., 1993; Migliaccio et al., 2004), bei dem die Beobachtungen mittels geeigneter Methoden auf ein regelmäßiges Kugel- oder Ellipsoidgitter (auf Satellitenhöhe oder in Höhe der Erdoberfläche) interpoliert oder präzisiert werden. Für die Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten kann jetzt entweder ein Gleichungssystem mit einer maximalen Dimension in der Anzahl der Gitterpunkte aufgestellt werden, dessen Normalgleichungsmatrix sich bei einer geeigneten Wahl der Gitterpunkte zu einer blockdiagonalen Matrix (z.B. 1 Block pro Ordnung  $m$ ) reduzieren lässt. Effektiver als die Aufstellung des Gleichungssystems ist meistens aber die Bestimmung der Kugelfunktionsparameter durch Quadraturverfahren auf der Kugel (s. Integralformel aus (4.11)). Dem Vorteil der höheren Effektivität (Rechenzeit, Speicher) steht allerdings gegenüber, dass durch die Interpolation auf das Gitter größere Fehler entstehen können, vor allem bei unterschiedlicher Genauigkeit der Beobachtungen. Des Weiteren ist eine Gewichtung der Beobachtungen nicht möglich bzw. nur schwer realisierbar, es sollten also gleichgenaue Beobachtungen vorausgesetzt werden. In dieser Arbeit wird die Lösung als *time-wise-approach* realisiert, um Ungenauigkeiten bedingt durch das Auswertemodell zu minimieren.

Bei der Analyse von reduzierten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}$ , die an  $N$  Bahnpunkten bezüglich des raumfesten Systems  $\mathbf{I}^*$  vorliegen, entsteht das überbestimmte Gleichungssystem nach (7.1) mit dem Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$ , dem Unbekanntenvektor  $\mathbf{x}$  der Designmatrix  $\mathbf{A}$  sowie dem Verbesserungsvektor  $\mathbf{e}$ . Die Anzahl  $U$  der zu bestimmenden Kugelfunktionsparameter, also die Dimension des Unbekanntenvektors  $\mathbf{x}$ , ergibt sich aus dem maximalen Grad  $L$ . Für eine Analyse bis Grad/Ordnung 90/90 sind somit 8278 Parameter zu schätzen, bei Grad/Ordnung 100/100 sind es 9997 und bei Grad/Ordnung 120/120 sind es sogar schon 14 397. Für jeden bestimmten Beschleunigungsvektor entstehen drei Beobachtungsgleichungen, für die Analyse des zweijährigen Orbits bedeutet das bei ca. 2 Mio. Bahnpunkten eine Dimension des Beobachtungsvektors  $\mathbf{y}$  von  $[6 \text{ Mio.} \times 1]$  und eine Dimension der Designmatrix  $\mathbf{A}$  von  $[6 \text{ Mio.} \times 8278]$  für eine Analyse bis Grad 90.

Für eine möglichst schnelle Aufstellung des Gleichungssystems bietet sich eine Formulierung im lokalen sphärischen System  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$  an, da hier die einzelnen Komponenten direkt aus dem Gravitationsbeschleunigungsvektor nach (4.18) entnommen werden können. Die Designmatrix  $\mathbf{A}$  und der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$  lassen sich nach (7.2), (7.3) in jeweils drei Teilmatrizen  $\mathbf{A}^\lambda, \mathbf{A}^\phi, \mathbf{A}^r$  bzw. Teilvektoren  $\mathbf{y}^\lambda, \mathbf{y}^\phi, \mathbf{y}^r$  der Dimensionen  $[N \times U]$  bzw.  $[N \times 1]$  für jede Richtung aufteilen, deren Komponenten gemäß (7.4)–(7.6) aus den Kugelflächenfunktionen  $e^{l,m}(\lambda_n, \phi_n)$  bzw. aus den reduzierten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}(t_n)$  berechnet werden können. Es ist dabei besonders geschickt, wie später noch zu sehen sein wird, die Designmatrizen  $\mathbf{A}^\lambda, \mathbf{A}^\phi, \mathbf{A}^r$  in der Form nach Abbildung 7.1 aufzustellen, in der die Komponenten ihrer Ordnung  $m$  entsprechend sortiert sind. Das Zuordnungsproblem (Grad  $l$ , Ordnung  $m$ )  $\rightarrow$  Spaltenindex  $j$  kann dabei nach (7.5) gelöst werden (s. auch Schuh, 1996). An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass die hier angegebenen Formeln für eine Analyse gelten, bei der die Koeffizienten vom Grad 1 nicht mitgeschätzt werden. Dies beruht auf der Annahme, dass der Ursprung des erdfesten Referenzsystems  $\mathbf{H}^*$  mit dem Schwerpunkt der Erde übereinstimmt.

**Box 7.1: Gleichungssystem des Beschleunigungsansatzes**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{e} \quad (7.1)$$

$[3N \times U] \quad [U \times 1] \quad [3N \times 1] \quad [3N \times 1]$

mit:

Anzahl der Unbekannten:  $U = L^2 + 2L - 2 = (L+1)^2 - 3$

Anzahl der bestimmten Beschleunigungsvektoren:  $N$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )

maximaler Grad:  $L$

 Analyse im lokalen System  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$ 

$$(7.2) \quad \text{Designmatrix: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\lambda \\ \mathbf{A}^\phi \\ \mathbf{A}^r \end{bmatrix} \begin{matrix} [N \times U] \\ [N \times U] \\ [N \times U] \end{matrix} ; \quad \text{Beobachtungsvektor: } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^\lambda \\ \mathbf{y}^\phi \\ \mathbf{y}^r \end{bmatrix} \begin{matrix} [N \times 1] \\ [N \times 1] \\ [N \times 1] \end{matrix} \quad (7.3)$$

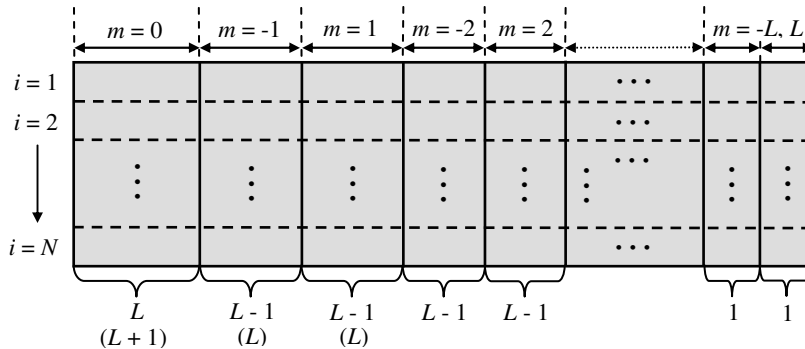
mit den Komponenten der Designmatrix:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} A_{i=n,j(l,m)}^\lambda &= \frac{1}{r_n \cos \phi_n} \frac{gm_E}{R_E} \left( \frac{R_E}{r_n} \right)^{l+1} \frac{\partial e^{l,m}(\lambda_n, \phi_n)}{\partial \lambda_n} \\ A_{i=n,j(l,m)}^\phi &= \frac{1}{r_n} \frac{gm_E}{R_E} \left( \frac{R_E}{r_n} \right)^{l+1} \frac{\partial e^{l,m}(\lambda_n, \phi_n)}{\partial \phi_n} \\ A_{i=n,j(l,m)}^r &= -(l+1) \frac{gm_E}{r_n^2} \left( \frac{R_E}{r_n} \right)^l e^{l,m}(\lambda_n, \phi_n) \end{aligned} \quad \text{mit } j(l,m) = \begin{cases} j=1 & ; l=m=0 \\ j=l & ; m=0, l \geq 2 \\ L+l-1+(L-1) \cdot \delta_{\text{sgn}(m),1} & ; |m|=1, l \geq 2 \\ -m^2+2|m|L-L+l+2|m|-3 + \\ + (L-m+1) \cdot \delta_{\text{sgn}(m),1} = \\ = 3L-1+l-|m|+(L-m+1) \cdot \delta_{\text{sgn}(m),1} + & ; |m| \geq 2, l \geq |m| \\ + (1-\delta_{|m|,2}) \cdot \sum_{k_m=2}^{|m|-1} \sum_{k_l=k_m}^L 2 \end{cases} \quad (7.5)$$

und den Komponenten des Beobachtungsvektors:

$$(7.6) \quad \begin{pmatrix} y_{i=n}^\lambda \\ y_{i=n}^\phi \\ y_{i=n}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^\lambda(t_n) \\ y^\phi(t_n) \\ y^r(t_n) \end{pmatrix} = (\mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}}(t_n))^{-1} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}(t_n) \quad \text{mit } \mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}}(t_n) = \mathbf{R}(t_n) \cdot (\mathbf{R}^{\text{sph}}(t_n))^{-1}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}(t_n) = [\mathbf{I}_1; \mathbf{I}_2; \mathbf{I}_3] \cdot [\ddot{X}_{\text{red}}(t_n); \ddot{Y}_{\text{red}}(t_n); \ddot{Z}_{\text{red}}(t_n)]^T$$


**Abbildung 7.1:** Struktur der Teilmatrizen  $\mathbf{A}^\lambda$ ,  $\mathbf{A}^\phi$ ,  $\mathbf{A}^r$  der Designmatrix.

### 7.1.1 Das Spezielle Gauß-Markov-Modell

Die Lösung des linearen, überbestimmten Gleichungssystems ( $n/u \hat{=}$  Anzahl der Beobachtungen/Unbekannte) führt unter der Annahme normalverteilter Beobachtungsfehler auf das Spezielle Gauß-Markov-Modell (Grafarend und Schaffrin, 1993; Grafarend, 2006). Das operationelle Element ist der reelle, stochastische Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$ , der durch den Erwartungswert  $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$  als Moment erster Ordnung und durch die Varianz-Kovarianz-Matrix  $\mathbf{D}\{\mathbf{y}\}$ , auch Dispersionsmatrix genannt, als Moment zweiter Ordnung charakterisiert wird. Der Erwartungswert  $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$  des Beobachtungsvektors  $\mathbf{y}$  liegt dabei im Spaltenraum  $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$  der Designmatrix  $\mathbf{A}$ . Die Dispersionsmatrix möge die Struktur  $\mathbf{D}\{\mathbf{y}\} = \sigma^2 \mathbf{V}$  besitzen, worin  $\mathbf{V}$  eine reelle, positiv-semidefinite  $n \times n$  Kofaktorenmatrix und  $\sigma^2$  eine positive, skalarwertige Varianzkomponente ist, bei unbekannter Kofaktorenmatrix kann  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I} \hat{=}$  Einheitsmatrix) verwendet werden. Beim speziellen Gauß-Markov-Modell, in dem sowohl die Designmatrix  $\mathbf{A}$  als auch die Kofaktorenmatrix  $\mathbf{V}$  vollen Rang besitzen, müssen sowohl die unbekannt Parameter  $\mathbf{x}$  als auch die unbekannt Varianzkomponente  $\sigma^2$  in Abhängigkeit des Beobachtungsvektors  $\mathbf{y}$  geschätzt werden. Durch Minimierung der quadratischen Form  $\sigma^2 \|\mathbf{L}\|_{\mathbf{V}}^2$  (wobei die lineare Form  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{y}$  gilt) erhält man den geschätzten Lösungsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  nach (7.8) als *besten linearen gleichmäßig*

unverzerrten Schätzer bezüglich der V-Norm (V-BLUUE), die Dispersionsmatrix  $\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\}$  der geschätzten Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  ergibt sich nach (7.9). Die Schätzung  $\hat{\sigma}^2$  der zur Bestimmung der Dispersionsmatrix benötigten Varianzkomponente  $\sigma^2$  ist nach (7.10) mit dem *besten invarianten quadratischen gleichmäßig unverzerrten Schätzer (BIQUUE)* möglich, für den zuvor die Beobachtungsresiduen  $\tilde{\mathbf{e}}$  von V-BLUUE nach (7.11) geschätzt werden müssen.

**Box 7.2:** „Spezielles Gauß-Markov Modell“

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}\}, \mathbf{E}\{\mathbf{y}\} \in \mathfrak{R}(\mathbf{A}), \text{rk } \mathbf{A} = u, \mathbf{D}\{\mathbf{y}\} = \sigma^2 \mathbf{V}, \text{rk } \mathbf{V} = n \quad (7.7)$$

V-BLUUE (Best Linear Uniformly Unbiased Estimation bezüglich der V-Norm)

$$\text{geschätzter Lösungsvektor:} \quad \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad (7.8)$$

$$\text{Dispersionsmatrix der geschätzten Lösung: } \mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (7.9)$$

Schätzung der Varianzkomponente  $\sigma^2$ :

BIQUUE (Best Invariant Quadratic Uniformly Unbiased Estimation)

$$\hat{\sigma}^2 = (n - u) \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{V}^{-1} \tilde{\mathbf{e}} \quad (7.10)$$

mit dem Residuenvektor aus V-BLUUE

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{E}}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (7.11)$$

Die Lösung V-BLUUE des stochastischen „Gauß-Markov-Modells“ ist nach Grafarend und Schaffrin (1993) äquivalent zur Lösung eines nicht-stochastischen inkonsistenten Gleichungssystems vermittelnder Beobachtungen  $\mathbf{Ax} + \mathbf{i} = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \notin \mathfrak{R}(\mathbf{A})$  mittels *W-LESS (Kleinste Quadrate Lösung (engl.: Least Squares Solution) bezüglich der W-Seminorm)*. Der Vektor der Inkonsistenzparameter  $\mathbf{i}$  ist dabei äquivalent zu  $\mathbf{e}$  und die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  ist äquivalent zu  $\mathbf{V}^{-1}$ . Die Lösung von W-LESS entsteht durch Minimierung der Zielfunktion  $\|\mathbf{i}\|_{\mathbf{W}}^2 = \mathbf{i}^T \mathbf{W} \mathbf{i} = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})$ , also Minimierung des gewichteten Quadrats des Inkonsistenzvektors  $\mathbf{i}$ .

Beim Speziellen Gauß-Markov-Modell wird nur der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$  als stochastisch, also als mit Fehlern behaftet, vorausgesetzt. Beim Beschleunigungsansatz ist aber genau genommen nicht nur der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$ , der sich aus numerischer Differentiation der kinematischen Bahn ergibt, mit Fehlern behaftet, sondern auch die Designmatrix, in welche die kinematischen Bahn und somit deren Fehler einfließen. Deshalb müsste ein Ausgleichungsmodell angesetzt werden, welches auch Fehler der Designmatrix zulässt und berücksichtigt. Lösungsansätze solcher Modelle, deren korrekte Lösung aber oftmals schwierig oder nicht realisierbar ist, bieten „total least squares“-Methoden. Es kann allerdings für den Beschleunigungsansatz gezeigt werden, dass die erzeugten Fehler in der Designmatrix von geringer Fehlerordnung sind und somit das Spezielle Gauß-Markov-Modell angemessen ist. Wie in Kapitel 6 angegeben, erzeugt ein Bahnfehler von  $\sigma_x = 5$  cm, je nach Korrelation  $\rho$ , einen Fehler im Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$  in der Größenordnung von 1–5 mGal. Der maximale Fehler in der Designmatrix  $\mathbf{A}$ , der aufgrund des am stärksten ausgeprägten Gravitationsgradienten in radialer Richtung  $\mathbf{e}_r$  entsteht, lässt sich aus dem Zentralterm zu

$$\sigma_{\Gamma_{\text{grav}}} = \pm \frac{\partial \Gamma_{\text{grav}}}{\partial r} \cdot \sigma_x = \pm \frac{2gm_E}{r^3} \cdot \sigma_x = \pm 0,012 \text{ mGal} \quad (7.12)$$

abschätzen. Die Auswirkungen der Fehler in der Designmatrix sind somit mindestens um zwei Größenordnungen kleiner und damit vernachlässigbar.

### 7.1.2 Anmerkungen zur Dispersionsmatrix der Beobachtungen und zu der Gewichtung

In diesem Abschnitt soll die Struktur der Varianz-Kovarianz-Matrix der Beschleunigungen, deren Inverse für die Gewichtung verwendet werden kann, näher betrachtet werden. Dabei soll vor allem auf die Korrelation der Beschleunigungsfehler näher eingegangen werden. Unabhängig davon, ob die kinematischen Bahnfehler korreliert sind oder nicht, werden die Fehler der durch numerische Differentiation bestimmten Beschleunigungen immer korreliert sein. Dies führt dazu, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix der Beschleunigungen sehr stark oder gar voll besetzt ist, was bei der Gewichtung einige Probleme mit sich bringen kann. Je nachdem, wie die Korrelationen der Beschleunigungsfehler ausfallen, besteht eventuell die Möglichkeit, die Korrelationen ganz (oder teilweise) zu vernachlässigen, ohne die Genauigkeit der Gravitationsfeldschätzung zu beeinträchtigen. Damit wäre im Idealfall eine ungewichtete Lösung bzw. bei unterschiedlicher Genauigkeit der Bahnpunkte eine Lösung mit diagonaler Gewichtsmatrix möglich, die ohne größere Probleme implementiert werden kann.

Da es sich bei den bestimmten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{x}}^{\text{sph}} = (\mathbf{R}_{\text{sph}}^{\text{CIS}}(t_n))^{-1} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{\text{red}}(t_n)$  (bzgl. des lokalen Systems  $\mathbf{C}^{\text{sph}}$ ) um abgeleitete Beobachtungen handelt, muss für eine Gewichtung eine Fehlerfortpflanzung der Varianz-Kovarianz-Matrix



$C_{x,y,z}^{\text{CTS}}$  der kinematischen Bahn, die normalerweise im erdfesten System CTS gegeben ist, durchgeführt werden. Die Varianz-Kovarianz-Matrix  $C_{\ddot{x}}^{\text{sph}}$  der Beschleunigungen ergibt sich dann nach (7.13), wobei sich die blockdiagonalen Jacobi-Matrizen  $J_{\text{CTS}}^{\text{CIS}}$  und  $J_{\text{CIS}}^{\text{sph}}$  aus den zugehörigen Rotationsmatrizen  $R(t)$  und  $(R_{\text{sph}}^{\text{CIS}})^{-1}$  zusammensetzen und die Jacobi-Matrix  $J_{\ddot{x}}^{\text{X}}$  aus den Koeffizienten des verwendeten Beschleunigungsfilters (in (7.18) für das 9-Punkt-Schema) gebildet wird. Da davon auszugehen ist, dass die Fehler der kinematisch bestimmten Positionskoordinaten korreliert sind, entsteht eine voll- oder zumindest stark besetzte Varianz-Kovarianz-Matrix  $C_{\ddot{x}}^{\text{sph}}$ , welche für die große Anzahl von Beobachtungen weder gespeichert noch invertiert werden kann. Eine Gewichtung ist also nur unter Annahmen und Vereinfachungen möglich.

**Box 7.3:** Dispersionsmatrix der Beschleunigungen im lokalen System  $C^{\text{sph}}$ :

$$D\{y\} = C_{\ddot{x}}^{\text{sph}} = (J_{\text{CIS}}^{\text{sph}})^T \cdot (J_{\ddot{x}}^{\text{X}})^T (J_{\text{CTS}}^{\text{CIS}})^T \cdot C_{x,y,z}^{\text{CTS}} \cdot J_{\text{CTS}}^{\text{CIS}} \cdot J_{\ddot{x}}^{\text{X}} \cdot J_{\text{CIS}}^{\text{sph}} \quad (7.13)$$

mit

- $C_{x,y,z}^{\text{CTS}}$  : Varianz-Kovarianz-Matrix der kinematischen Bahn im erdfesten System CTS
- $J_{\text{CTS}}^{\text{CIS}}$  : Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen der erdfesten Koordinaten (CTS) bzgl. der raumfesten Koordinaten (CIS)
- $J_{\ddot{x}}^{\text{X}}$  : Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen der bestimmten Beschleunigungen bzgl. den raumfesten Koordinaten (CIS)
- $J_{\text{CIS}}^{\text{sph}}$  : Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen der lokalen Koordinaten (im  $C^{\text{sph}}$ ) bezüglich der raumfesten Koordinaten

Die grundsätzliche Struktur der Varianz-Kovarianz-Matrix und der zugehörigen Gewichtsmatrix soll aber anhand des idealisierten Beispiels nach (7.14)–(7.16) kurz skizziert werden. Dazu wird angenommen, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix  $C_{X,Y,Z}$  der kinematischen Bahn bereits im raumfesten System CIS vorliegt und dass die Lösung des Gleichungssystems ebenfalls im raumfesten System CIS erfolgt. Für die Positionen werden die in den Simulationsrechnungen verwendeten Genauigkeitseigenschaften gemäß Abschnitt 6.1.1.2 verwendet. Dadurch erhält die Varianz-Kovarianz-Matrix  $C_{X,Y,Z}$  eine Blockdiagonalstruktur nach (7.15). Da zusätzlich die numerische Differentiation für jede der Zeitreihen  $X(t)$ ,  $Y(t)$  und  $Z(t)$  unabhängig voneinander verwendet werden kann, kann auch die Fehlerfortpflanzung für jede dieser Zeitreihen separat nach (7.16) durchgeführt werden. Es genügt sogar, die Fehlerfortpflanzung nur für eine Zeitreihe zu berechnen (7.16), da sowohl die Genauigkeitseigenschaften als auch die Filterkoeffizienten für alle Zeitreihen als gleich angenommen wurden.

**Box 7.4:** idealisierte Dispersionsmatrix der Beschleunigungen:

$$D\{y\} = C_{\ddot{x}} = (J_{\ddot{x}}^{\text{X}})^T \cdot C_{X,Y,Z} \cdot J_{\ddot{x}}^{\text{X}} \quad (7.14)$$

mit

$$C_{X,Y,Z} = \begin{bmatrix} C_X & 0 & 0 \\ 0 & C_Y & 0 \\ 0 & 0 & C_Z \end{bmatrix} ; \quad C_X = C_Y = C_Z \quad \text{und} \quad J_{\ddot{x}}^{\text{X}} = \begin{bmatrix} J_X^{\ddot{x}} & 0 & 0 \\ 0 & J_Y^{\ddot{x}} & 0 \\ 0 & 0 & J_Z^{\ddot{x}} \end{bmatrix} ; \quad J_X^{\ddot{x}} = J_X^{\ddot{x}} = J_X^{\ddot{x}} \quad (7.15)$$

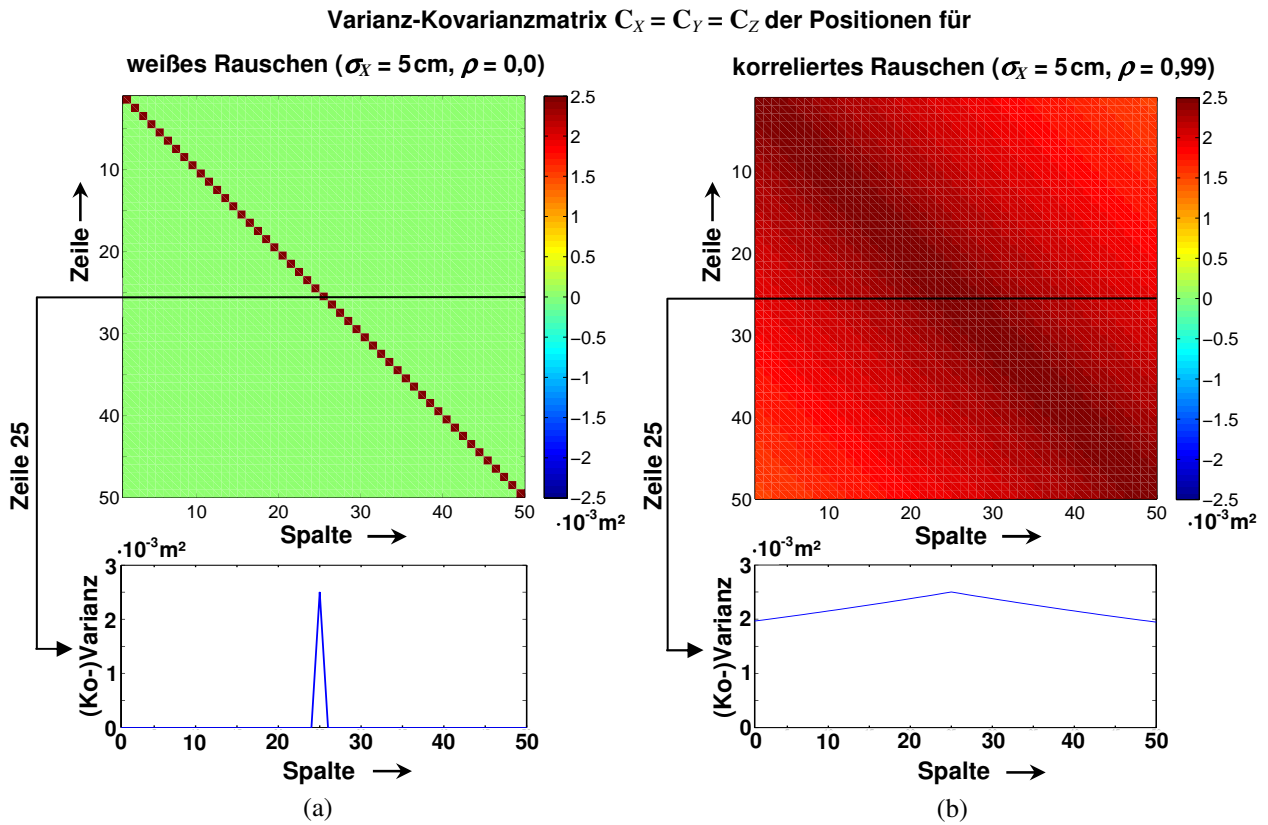
ergibt

$$C_{\ddot{x}} = \begin{bmatrix} C_X^{\ddot{x}} & 0 & 0 \\ 0 & C_Y^{\ddot{x}} & 0 \\ 0 & 0 & C_Z^{\ddot{x}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad C_X^{\ddot{x}} = C_Y^{\ddot{x}} = C_Z^{\ddot{x}} = (J_X^{\ddot{x}})^T \cdot C_X \cdot J_X^{\ddot{x}} \quad (7.16)$$

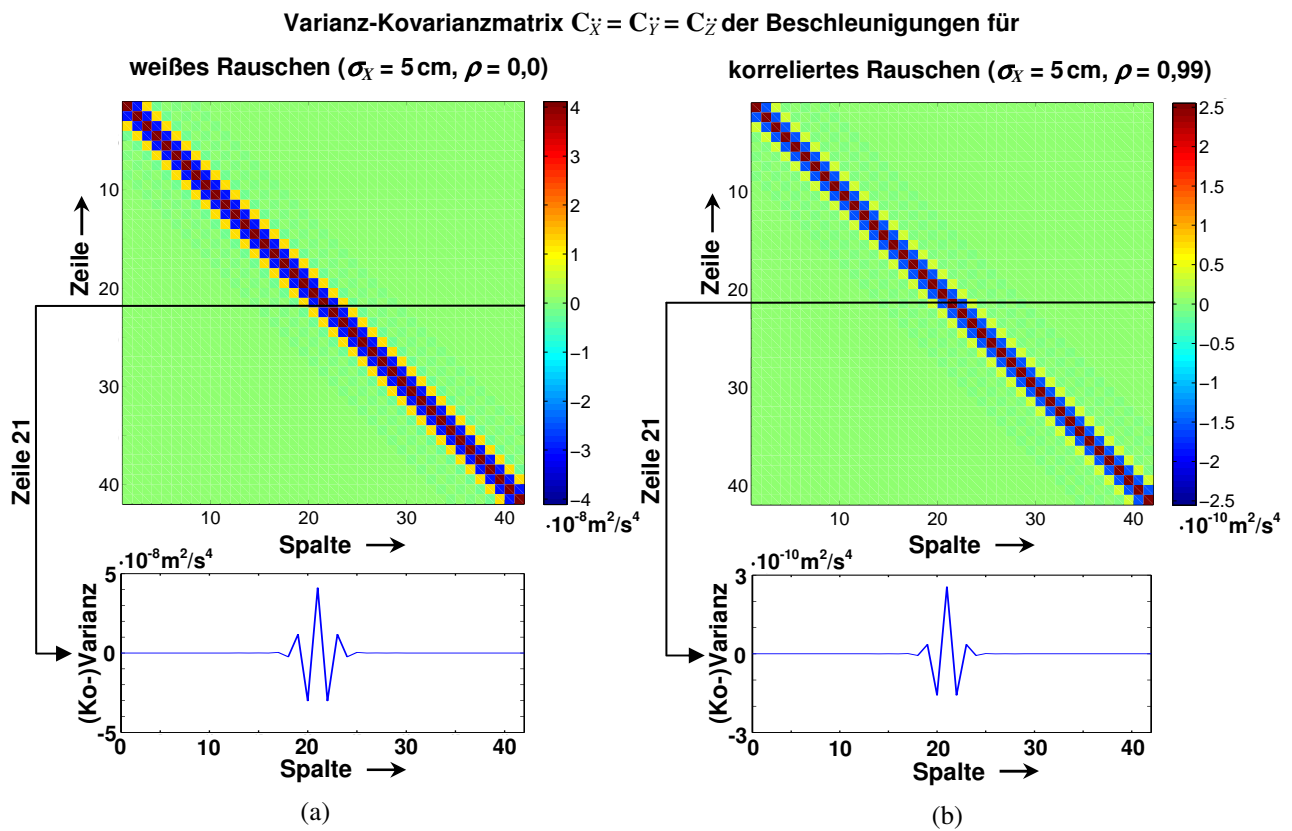
$$\text{Komponenten der Jacobi-Matrix: } [J_X^{\ddot{x}}]_{i,j} = \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_i)} \quad (7.17)$$

mit den Einträgen (am Beispiel des 9-Punkt-Schemas):

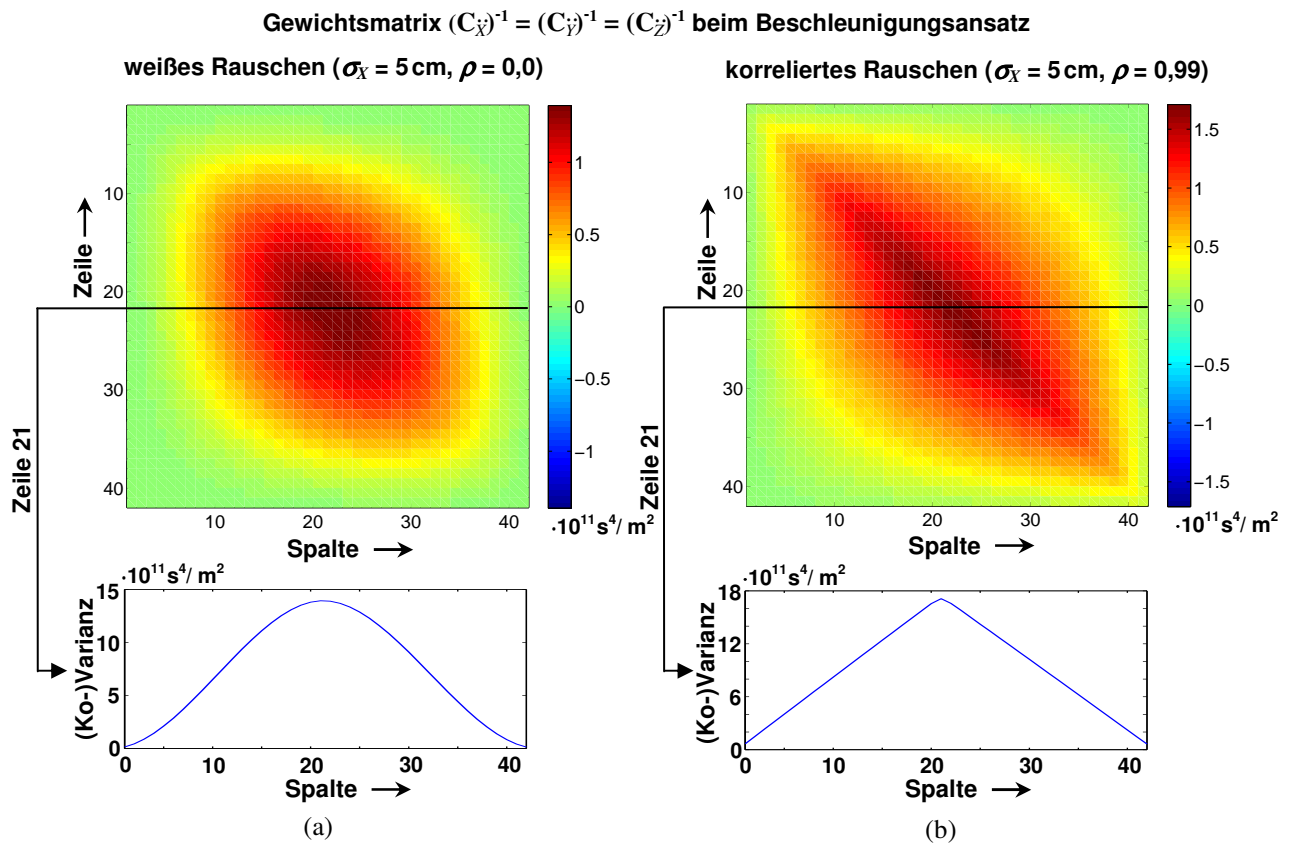
$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j-4})} = \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j+4})} = -\frac{1}{560\Delta t^2} & ; \quad \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j-3})} = \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j+3})} = -\frac{8}{315\Delta t^2} & ; \quad \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j-2})} = \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j+2})} = -\frac{1}{5\Delta t^2} \\ \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j-1})} = \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_{j+1})} = \frac{8}{5\Delta t^2} & ; \quad \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_j)} = -\frac{205}{72\Delta t^2} & ; \quad \frac{\partial \ddot{X}(t_j)}{\partial X(t_i)} = 0 \quad \text{für } |i-j| > 4 \end{aligned} \quad (7.18)$$



**Abbildung 7.2:** Schematische Darstellung der (idealisierten) Varianz-Kovarianz-Matrizen der Koordinaten für a) unkorrelierte Bahnfehler (links) und b) korrelierte Bahnfehler (rechts).



**Abbildung 7.3:** Schematische Darstellung der (idealisierten) Varianz-Kovarianz-Matrizen der Beschleunigungen für a) unkorrelierte Bahnfehler (links) und b) korrelierte Bahnfehler (rechts).



**Abbildung 7.4:** Schematische Darstellung der (idealisierten) Gewichtsmatrizen der Beschleunigungen für a) unkorrelierte Bahnfehler (links) und b) korrelierte Bahnfehler (rechts).

In Abbildung 7.2 und Abbildung 7.3 ist die Fehlerfortpflanzung (am Beispiel der Zeitreihe von  $X(t)$ ) von der Varianz-Kovarianz-Matrix der Koordinaten  $C_X$  hin zu der Varianz-Kovarianz-Matrix der Beschleunigungen  $C_{\ddot{y}}$  für die beiden Extremfälle unkorrelierte Bahnfehler ( $\rho = 0$ , linke Seite) und stark korrelierte Bahnfehler ( $\rho = 0,99$ , rechte Seite) dargestellt. Es ergibt sich für die Varianz-Kovarianz-Matrix der Beschleunigungen  $C_{\ddot{y}}$  eine symmetrische Töplitzmatrix, die für den Fall von unkorrelierten Bahnfehlern bandbegrenzt mit jeweils 8 Nebendiagonalen ist (bedingt durch die Filterlänge, hier: 9-Punkt-Schema) und für korrelierte Bahnfehler vollbesetzt ist, wobei in beiden Fällen allerdings die Einträge ab der 5. Nebendiagonalen sehr klein sind, wie in Abbildung 7.3 (sowie in Tabelle 6.3) zu sehen ist. Interessant ist dabei, dass sowohl für unkorrelierte als auch korrelierte Bahnfehler die Vorzeichen der Nebendiagonalen alternieren, insbesondere dass zwei direkt benachbarte Beschleunigungen negativ korreliert sind. Aus den Darstellungen der Varianz-Kovarianz-Matrizen der Beschleunigungen in Abbildung 7.3 können aber vor allem zwei essentielle Aspekte festgestellt werden:

- (i) Die Korrelation der Beschleunigungsfehler nimmt sowohl für unkorrelierte als auch korrelierte Bahnfehler sehr schnell ab, die Korrelationslänge ist somit relativ kurz ( $< 2$  Zeitpunkte, s. auch Tabelle 6.3). Die kurze Korrelationslänge der Beschleunigungsfehler ist vor allem für den Fall der stark korrelierten Bahnfehler bemerkenswert, da in diesem Fall der Differentiationsfilter offensichtlich auch als Dekorrelation wirkt.
- (ii) Die Korrelationen der Beschleunigungsfehler sind für unkorrelierte und korrelierte Bahnfehler sehr ähnlich, obwohl die Varianz-Kovarianz-Matrizen der Koordinaten in beiden Fällen völlig unterschiedlich sind.

Daraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Koordinaten hat nur einen geringen Einfluss auf die Varianz-Kovarianz-Matrix der Beschleunigungen. Die Stochastik der Koordinaten (die Korrelationen) muss also gar nicht genau bekannt sein für eine gewichtete Lösung beim Beschleunigungsansatz. Dies erscheint als ein Vorteil gegenüber Verfahren, bei denen die Varianz-Kovarianz-Matrix der Koordinaten direkt zur Gewichtung benutzt wird (Integration der Variationsgleichungen, Randwertproblem für kurze Bahnbögen) und damit genau bekannt sein sollte.
- Aufgrund der kurzen Korrelationslänge erscheint eine Vernachlässigung der Korrelationen der Beschleunigungsfehler und somit eine ungewichtete Lösung (bzw. eine Lösung mit diagonalen Gewichtsmatrix) ohne Genauigkeitsverluste in der Gravitationsfeldbestimmung möglich. Frühere Simulationsrechnungen von Austen und Reubelt (2000) und Wittwer (2004), bei denen die Dispersionsmatrizen in kleine, invertierbare Blöcke (z.B. halbtäglich oder täglich) unter Vernachlässigung der Korrelation zwischen diesen Blöcken unterteilt wurden und

zu keiner bzw. zu keiner signifikanten Verbesserung gegenüber einer ungewichteten Lösung führten, untermauern diese Vermutung.

Ob die Korrelationen der Beschleunigungsfehler bei der Gewichtung tatsächlich vernachlässigt werden können bzw. wie groß deren Einfluss auf die Güte der Gravitationsfeldlösung ist, bedarf allerdings genauerer Untersuchungen anhand von Simulationsrechnungen, wie in den Abschnitten 8.3 und 8.4 durchgeführt.

Welche Probleme entstehen, wenn (zumindest) die (größeren) Korrelationen der Beschleunigungsfehler bei der Lösung berücksichtigt werden müssen, sollen die folgenden Ausführungen erläutern. Obwohl die Töplitz-Struktur der Dispersionsmatrix  $\mathbf{C}_{\ddot{x}}$  (vor allem bei Bandbegrenzung auf die ersten 4 Nebendiagonalen) sehr vorteilhaft ist, da im Prinzip nur die von 0 abweichenden Werte der 1. Zeile der Matrix gespeichert werden müssen und sich die anderen Zeilen durch Verschiebung ergeben, entsteht bei deren Inversion eine unvorteilhafte Gewichtsmatrix  $\mathbf{W} = (\mathbf{C}_{\ddot{x}})^{-1}$ . Diese nach Abbildung 7.4 „bergförmige“ Matrix ist zum einen voll besetzt, zum anderen reicht es aufgrund unterschiedlicher Werte nicht mehr aus, nur eine Zeile zu speichern. Für eine große Anzahl von Beobachtungen kann die Gewichtsmatrix selbst für diesen idealisierten Fall also weder berechnet noch im Speicher gehalten werden.

Allerdings existiert eine Reihe von Verfahren, die hauptsächlich im Hinblick auf die Gewichtung von GOCE-SGG-Daten entworfen wurden, welche eine Gewichtung von großen Beobachtungsdatensätzen erlauben, deren Varianz-Kovarianz-Matrix eine bandlimitierte Töplitzstruktur aufweist. So schlägt beispielsweise Schuh (1996) Verfahren im Zeit- und Frequenzbereich vor, die auf der Anwendung von *ARMA-Filtern* (engl.: *AutoRegressive-Moving Average*) basieren. In Schuh (2000) werden ebenfalls ARMA-Filter verwendet, welche das inverse Rausch-PSD approximieren. Durch eine entsprechende Filterung des Beobachtungsvektors und der Designmatrix können nun die Daten dekorreliert werden. In Ditmar und Klees (2002) und Ditmar et al. (2007), wird die Töplitz-Struktur der Dispersionsmatrix so erweitert, dass eine zirkuläre Matrix entsteht. Die Inverse einer zirkulären Matrix ist leicht zu bestimmen und ergibt wiederum eine zirkuläre Matrix. Es muss also nur die erste Zeile der zirkulären Gewichtsmatrix berechnet und gespeichert werden, alle anderen Zeilen ergeben sich durch Verschieben. Speziell bei der Verwendung von iterativen Gleichungssystemlösern, bei denen die Gewichtung durch Multiplikation der Gewichtsmatrix mit einem Vektor erfolgt, kann gezeigt werden, dass diese Operation einer Filterung entspricht, die effizient durchgeführt werden kann. Allerdings müssen die durch die Erweiterung entstehenden „Eckeffekte“ speziell behandelt werden. Eine weitere Möglichkeit bei Verwendung von iterativen Gleichungssystemlösern bietet sich an, wenn die darin auftretende Multiplikation der Gewichtsmatrix  $(\mathbf{C}_{\ddot{x}})^{-1}$  mit einem Vektor  $\mathbf{u}$ , also  $\mathbf{v} = (\mathbf{C}_{\ddot{x}})^{-1} \cdot \mathbf{u}$ , als Lösung des Gleichungssystems  $\mathbf{u} = \mathbf{C}_{\ddot{x}} \cdot \mathbf{v}$  mit Töplitzstruktur gedeutet wird. In der Literatur existiert eine Vielzahl von Algorithmen zur Lösung solcher Töplitzsysteme wie beispielsweise in Levinson (1946), Trench (1974), Brent et al. (1980) oder in Strang (1986). Das Problem bei den zuvor genannten Verfahren liegt allerdings darin, dass diese bereits mit einem stark erhöhten Rechenaufwand verbunden sind. Eine effiziente Möglichkeit zur Gewichtung bei korreliertem Rauschen bieten semi-analytische Lösungsansätze, bei denen das Rausch-PSD direkt als spektraler Filter in der Gewichtsmatrix verwendet werden kann (Sneeuw, 2000; Wermuth et al., 2006). Allerdings setzen semi-analytische Verfahren gewisse Bedingung an den Orbit voraus, die in der Regel nicht erfüllt sind und zu Fehlern führen.

Bei der Auswertung von realen kinematischen Bahnen, deren stochastische Eigenschaften in der Regel nicht oder nur ungenau aus der kinematischen Bahnbestimmung bekannt sind, und die des weiteren Datenlücken, Ausreißer und einzelne Punkte mit schlechteren Genauigkeiten und unterschiedliche Korrelationen aufweisen, sind die zuvor beschriebenen Methoden allerdings nur bedingt einsatzfähig. Dies ist auch trotz der Vermutung, dass der Einfluss der Korrelationen der Bahnfehler auf die Korrelationen der Beschleunigungsfehler gering sei, zu beachten.

Nicht angesprochen wurden bisher in diesem Abschnitt die Varianzen der Beschleunigungen. Diese können bei der Gewichtung in Form einer diagonalen Gewichtsmatrix problemlos implementiert werden. Solange die kinematisch bestimmten Satellitenpositionen gleiche oder ähnliche Genauigkeiten und Korrelationen besitzen ist auch die Varianz der Beschleunigungen relativ konstant. Eine schlechtere Genauigkeit einzelner Bahnpunkte (z.B. aufgrund einer schlechten GPS-Konfiguration) sowie eine veränderte oder reduzierte Korrelation der Bahnfehler (z.B. verursacht durch einen Wechsel der verwendeten GPS-Satelliten) führen allerdings auf eine (stark) erhöhte Varianz der Beschleunigungen (s. Abschnitt 6.1.1.2), die bei der Gewichtung berücksichtigt werden muss. Allerdings ist die Bestimmung der Varianzen der Beschleunigungen aus der Fehlerfortpflanzung problematisch bzw. nicht möglich, da die tatsächlichen Genauigkeitseigenschaften (Varianzen und Korrelationen) des kinematischen Orbits im Normalfall nicht bekannt sind oder aus der kinematischen Bahnbestimmung nur unzureichend mitgeschätzt werden können (s. Abschnitt 9.2.1 und 9.3). Anstatt dessen scheint eher eine Ausreißerelimination (s. Abschnitt 9.2) oder die in Abschnitt 9.2.3 vorgeschlagene robuste Schätzung geeignet, bei welcher Beschleunigungen geringerer Genauigkeit in Form einer iterativen unkorrelierten Gewichtung anhand von Beobachtungsresiduen herunter gewichtet werden.

### 7.1.3 Regularisierung

Enthalten die vorhandenen Beobachtungsdaten nicht genügend Information zur eindeutigen Schätzung der gesuchten Parameter, beispielsweise wenn mehrere zu schätzende Parameter ein gleiches oder ähnliches Signal ergeben, so entsteht ein instabiles Gleichungssystem. Im schlimmsten Fall entsteht ein Rang- oder Datumsdefekt, was auf ein singuläres Gleichungssystem führt, welches mit dem zuvor gezeigten V-BLUUE-Schätzer nicht mehr zu lösen ist. In solchen Fällen, wenn also die Lösung nicht existent, eindeutig oder stabil ist, spricht man von „schlecht gestellten“ Problemen (*engl.*: ill-posed problems). Rein mathematisch betrachtet kann die Stabilität eines Gleichungssystems durch die Konditionszahl erfasst werden, die sich aus dem Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Eigenwert ergibt. Ist dieses Verhältnis sehr groß, so kann die Lösung nicht mehr stabil geschätzt werden. Als Faustregel gilt, dass die Zehnerpotenz die Anzahl der nicht mehr bestimmbar Stellen angibt, eine Konditionszahl von  $10^{16}$  bedeutet also bei einer Rechengenauigkeit von 16 Stellen, dass keine Lösung mehr bestimmt werden kann.

Im Allgemeinen sind die linearen Gleichungssysteme in der Satellitengeodäsie immer schlecht gestellte Probleme (z.B. Bouman und Koop, 1997; Sneeuw, 2000) und daher mehr oder weniger instabil. Eine irreguläre Datenverteilung aufgrund von fehlenden Daten oder polaren Datenlücken (nicht polare Orbits) kann genauso dafür verantwortlich sein wie unzureichende Information über das Gravitationsfeld in den Beobachtungen oder die Eigenschaften des stochastischen Modells, beispielsweise wenn das Instrument nicht im ganzen Spektralbereich misst. Ein Problem, das aber grundsätzlich bei Satelliten-Problemen auftritt, ist die Fortsetzung des gemessenen Gravitationsfeldsignals nach unten. Das dadurch unterdrückte Gravitationssignal höherer Grade  $l$  in den Satellitenmessungen verursacht Instabilitäten, da die zu schätzenden Koeffizienten dieser höheren Grade nun nicht mehr ausreichend durch das Signal erfasst werden. Um dennoch eine stabile und eindeutige Lösung zu erhalten, müssen weitere Bedingungen an die gewünschte Lösung gestellt werden bzw. weitere Vorinformationen über die gesuchte Lösung eingeführt werden. Solche Maßnahmen zur Stabilisierung bezeichnet man als Regularisierung, die inzwischen in der Behandlung von inversen geodätischen Problemen weit verbreitet ist (z.B. Rummel et al., 1979; Ilk, 1987). Zur Regularisierung bestehen im Prinzip mehrere Möglichkeiten, die davon abhängen, wie viel Vorinformation über die zu schätzende Lösung bekannt ist (s. z.B. Sneeuw, 2000; Xu, 1992). Da bei der Gravitationsfeldbestimmung auf bereits vorhandene Gravitationsfeldmodelle sowie Signalmodelle zurückgegriffen werden kann, bieten sich hier vor allem zwei Varianten an (Sneeuw, 2000; Mayer-Gürr et al., 2005b). Zum einen kann zur Regularisierung ein bereits vorhandenes Gravitationsfeldmodell als Beobachtung unter Berücksichtigung seiner Dispersionsmatrix für die Gewichtung eingeführt werden, oder es wird zur Regularisierung nur ein Signalmodell (z.B. ein Signal-Gradvarianzmodell nach der Regel von Kaula (1966)) verwendet. Da in dieser Arbeit hauptsächlich die Qualität der CHAMP-Daten demonstriert werden soll unter Verwendung von möglichst wenig Vorinformation, wird hier nur die zweite Variante weiterverfolgt.

**Box 7.5:** „Spezielles Gauß-Markov-Modell mit Datumdefekt (Kollinearität)“

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}\}, \mathbf{E}\{\mathbf{y}\} \in \mathfrak{R}(\mathbf{A}), \text{rk } \mathbf{A} = r \leq u, \mathbf{D}\{\mathbf{y}\} = \sigma^2 \mathbf{V}, \text{rk } \mathbf{V} = n \quad (7.19)$$

V,S-BLE (Best Linear Estimation bezüglich kombinierter  $\underline{V}$ -Norm und  $\underline{S}$ -(Semi-)Norm)

geschätzter Lösungsvektor :  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad (7.20)$

Dispersionsmatrix:  $\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}^{-1})^{-1} \quad (7.21)$

„Biasvektor“:  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{E}\{\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}^{-1})^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} \quad (7.22)$

Matrix der mittleren Schätzfehler:  $\mathbf{MSE}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{E}\{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T\} = \mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \quad (7.23)$   
(Mean Squared Error)

Regularisierungsmatrix:  $\mathbf{S}^{-1} = \alpha \mathbf{K} \quad (7.24)$

mit Regularisierungsparameter  $\alpha$

und Kaulamatrix  $\mathbf{K}$  mit  $K_{i,j} = \delta_{i,j} l^4(i) \quad (7.25)$

Die regularisierte Lösung des überbestimmten linearen Gleichungssystems führt nach Grafarend (1993) auf die Lösung des stochastischen *speziellen Gauß-Markov-Modells mit Datumdefekt*. Unter Einführung einer zunächst nicht näher spezifizierten Matrix  $\mathbf{S}$  führt die Minimierung der quadratischen Form  $\sigma^2 (\|\mathbf{L}\|_V^2 + \|\mathbf{I}_u - \mathbf{L}\mathbf{A}\|_S^2)$  (wobei die lineare Form  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{y}$  gilt) nach (7.20) auf den Lösungsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  als die *beste lineare Schätzung bezüglich der kombinierten V-Norm und S-(Semi-)Norm (V,S-BLE)*. Im Gegensatz zu V-BLUUE handelt es sich hier um eine verzerrte Schätzung von  $\mathbf{x}$ , deren Größe der Verzerrung durch die Matrix  $\mathbf{S}$  bestimmt wird. Die Dispersionsmatrix  $\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\}$  der verzerrten Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$  lässt sich aus (7.21) ermitteln, wobei beachtet werden muss, dass die Lösung zusätzlich noch durch den „Biasvektor“  $\boldsymbol{\beta}$  (7.22) verzerrt ist. Ein realistischeres Fehlermaß der verzerrten Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$  stellt deshalb die Matrix der mittleren Schätzfehler  $\mathbf{MSE}\{\hat{\mathbf{x}}\}$  (7.23) dar, die sich aus  $\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\}$  und  $\boldsymbol{\beta}$  zusammensetzt. Die Lösung V,S-BLE des stochastischen „Gauß-Markov-Modells mit Datumdefekt“ ist nach Grafarend und Schaffrin (1993) äquivalent zur Lösung eines nicht-

stochastischen *inkonsistenten rangdefekten Gleichungssystems* vermittelnder Beobachtungen  $\mathbf{Ax} + \mathbf{i} = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \notin \mathfrak{R}(\mathbf{A})$ ,  $\text{rk}(\mathbf{A}) \leq u$  mittels *R,W-HAPS (Hybrid Approximation Solution bezüglich einer kombinierten R- und W-Seminorm)*, wobei die Matrix  $\mathbf{R}$  äquivalent zur Matrix  $\mathbf{S}^{-1}$  ist. Die Lösung von R,W-HAPS entsteht durch Minimierung der Zielfunktion  $\|\mathbf{i}\|_{\mathbf{W}}^2 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{x}^T \mathbf{R}\mathbf{x}$ , also der simultanen („hybriden“) Minimierung des  $\mathbf{W}$ -gewichteten Quadrats des Inkonsistenzvektors  $\mathbf{i}$  und des  $\mathbf{R}$ -gewichteten Quadrats des Lösungsvektors  $\mathbf{x}$ .

Für die Bildung der Regularisierungsmatrix  $\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}$  bietet es sich an, die Inverse eines Signalmodells heranzuziehen. In der Satellitengeodäsie wird dazu häufig das Signal-Gradvarianzmodell  $\sigma_{l,m}^2 = 10^{-10} / l^4$  nach Kaula (1966) verwendet, wodurch sich die Regularisierungsmatrix  $\mathbf{S}^{-1}$  nach (7.24) als Produkt der diagonalen „Kaula-Matrix“  $\mathbf{K}$  und eines zunächst unbekanntem Regularisierungsparameters  $\alpha$  ergibt.

Es kann gezeigt werden, dass die Lösung V,S-BLE der Kombinationslösung der originären Beobachtungen  $\mathbf{y}$  und der „Nulllösung“  $\mathbf{x}_0$  als zusätzliche Beobachtung mit den zugehörigen Dispersionsmatrizen  $\mathbf{D}\{\mathbf{y}\} = \sigma^2 \mathbf{V}$  und  $\mathbf{D}\{\mathbf{x}_0\} = \mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1}$  entspricht. Dies bedeutet also, dass eine Verzerrung der Gravitationsfeldschätzung gegen die Nulllösung entsprechend des inversen Signal-Gradvarianzmodells entsteht. Dies trägt der Tatsache Rechnung, dass gerade die höheren Frequenzen aufgrund der spektralen Eigenschaften der Beobachtungen und der Fortsetzung nach unten schlecht bestimmbar sind und deshalb die Koeffizienten höheren Grades durch Vorinformation stabilisiert werden müssen. Ein meist angenehmer Nebeneffekt dabei ist, dass dadurch das Rauschen in den Koeffizienten höheren Grades abgeschwächt wird. Die Größe des Regularisierungsparameters  $\alpha$  bestimmt dabei, wie stark regularisiert und geglättet wird. Die Regularisierung spielt also hauptsächlich bei der Bestimmung von Modellen mit einer großen Auflösung eine Rolle. Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass V,S-BLE nicht nur bei der Lösung von rangdefekten Problemen eingesetzt werden kann, sondern auch zur Unterstützung schlecht gestellter Probleme mit vollem Rang dient.

Bei der Auswertung von CHAMP-Daten mit dem Beschleunigungsansatz zeigt sich aber, dass aufgrund der relativ geringen Bahnhöhe von CHAMP, der guten globalen Überdeckung mit Messdaten und der relativ geringen angezielten Auflösung des Gravitationsfeldes bis Grad 90, die im spektralen Bereich der Beobachtungen liegt, sich ein relativ stabiles Gleichungssystem ergibt. So führt beispielsweise die Analyse eines simulierten 45-tägigen Orbits bis Grad 50 auf eine geringe Konditionszahl von ca. 570. Dies bedeutet, dass im Prinzip eine Regularisierung nicht notwendig wäre. Zur Unterstützung des in den höheren Frequenzen (Grad 60–90) enthaltenen Gravitationsfeldsignals sowie zur Rauschunterdrückung dieser Gravitationsfeldanteile werden aber in dieser Arbeit neben der anvisierten, nicht regularisierten CHAMP-only-Lösung auch regularisierte Lösungen für verschiedene Regularisierungsparameter  $\alpha$  bestimmt (diese sind ja aufgrund der enthaltenen Information über das Signal-Gradvarianzmodell streng genommen nicht mehr als „CHAMP-only“ zu bezeichnen). Die Stärke der Regularisierung wird dabei durch die Wahl des Regularisierungsparameters  $\alpha$  bestimmt. Für das Auffinden eines idealen Regularisierungsparameters besteht in der Literatur eine Reihe von Verfahren (z.B. Hoerl and Kennard, 1970 a,b; Hanke, 1993; Hansen, 1993, 1994; Cai, 2004), auf die aber in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden soll. Vielmehr wird von den verschiedenen regularisierten Lösungen die beste durch Vergleich mit bereits vorhandenen Gravitationsfeldmodellen (z.B. EGM96) bzw. durch Vergleich mit der GRACE-Lösung EIGEN-GRACE02S (Reigber et al., 2005a), die von höherer Genauigkeit ist, gesucht. Die optimale Lösung sollte so regularisiert sein, dass sowohl deren Signal-Gradvarianzen als auch deren Grad-RMS der Differenz zu dem vorhandenen Modell bzw. zu EIGEN-GRACE02S die Kaula-Regel nicht überschreitet. Gleichzeitig darf der Regularisierungsparameter nur so groß gewählt werden, dass keine zu starke Glättung eintritt, dass also kein Anstieg der Grad-RMS durch die Regularisierung für die niedrigeren Grade erzeugt wird.

## 7.2 Iterative Gleichungssystemlöser

Aufgrund einer großer Anzahl von Beobachtungen (ca. 2 Mio. Bahnpunkte (2 Jahre)  $\hat{=}$  6 Mio. Beobachtungen) und zu bestimmender Parameter (8278 Unbekannte für eine Entwicklung bis Grad 90 bzw. 10 198/14 638 Unbekannte für eine Entwicklung bis Grad 100/120) entsteht ein groß dimensioniertes Gleichungssystem. Die Aufstellung und Lösung eines solchen großen Gleichungssystems wird durch die Numerik, den begrenzten Speicherplatz aber auch durch die Rechenzeit beschränkt. Im Prinzip müssen die folgenden Probleme in den Griff bekommen werden:

- (i) Die Designmatrix  $\mathbf{A}$  (Dimension 2 Mio.  $\times$  8278) kann nicht mehr gespeichert werden.
- (ii) Bei Problemstellungen mit höherer Auflösung ist auch die Speicherung der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}$  problematisch.
- (iii) Der Aufbau der Normalgleichungsmatrix ist mit einem enormen Rechen- und Zeitaufwand verbunden ( $3/2 \cdot n \cdot u^2$  Multiplikationen und Summationen bei einer ungewichteten Lösung).
- (iv) Die direkte Inversion der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  ist schwierig oder unmöglich aufgrund auftretender numerischer Instabilitäten (vor allem bei schlecht konditionierten Normalgleichungsmatrizen) sowie aufgrund des Speicherbedarfs und der Rechenzeit.

Bei Problemstellungen mit kleinerer Auflösung  $L$ , also einer geringeren Anzahl von zu bestimmenden Unbekannten  $u$ , und guter Konditionierung der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  stellt eventuell nur Punkt (i) ein Problem dar. In diesem Falle kann durch blockweisen Aufbau des Normalgleichungssystems

$$\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n} \quad (\text{mit } \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} = \sum_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{A}_i \text{ und } \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} = \sum_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{y}_i), \quad (7.26)$$

beispielsweise durch Tagesblöcke  $\mathbf{A}_i$  und  $\mathbf{y}_i$ , unter der Annahme, dass die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$  ebenfalls in solche Blöcke  $\mathbf{V}_i^{-1}$  unterteilt werden kann, eine direkte Lösung erzielt werden (s. z.B. Austen und Reubelt, 2000; Wittwer, 2004). Die Inversion des Normalgleichungssystems ist dann durch bekannte direkte Methoden wie z.B. die Gauß-Elimination oder Cholesky-Zerlegung möglich. Im Allgemeinen wird man aber bei großen Gleichungssystemen mit allen zuvor genannten Problemen konfrontiert, so dass andere Lösungsstrategien erforderlich sind. Eine Möglichkeit bietet die Lösung des Gleichungssystems auf einem Hochleistungsrechner (z.B. Wittwer, 2004; Baur und Grafarend, 2006), der größere Rechen- und Speicherkapazitäten und die Möglichkeit der parallelen Verarbeitung (z.B. nach dem zuvor beschriebenen Blockprinzip) an mehreren *CPU's* (engl.: *Central Processing Units*) gleichzeitig bietet. Eine andere Möglichkeit ist die Anwendung iterativer Gleichungssystemlöser, mit denen der Rechenaufwand reduziert werden kann und die wesentlich weniger Arbeitsspeicher benötigen. Dadurch ist oft auch schon die Lösung auf einem herkömmlichen PC möglich, oder sie bilden durch Implementierung auf einem Hochleistungsrechner eine effektive Methode zur Lösung großer Gleichungssysteme (z.B. Baur und Austen, 2005; Schuh, 1996). Der Vorteil der iterativen Gleichungssystemlöser gegenüber direkten Lösungsverfahren besteht darin, dass die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  weder aufgebaut noch invertiert werden muss und somit der benötigte Speicherplatz und die Rechenzeit stark reduziert werden können. Gleichzeitig wird bedingt durch die Iteration eine numerisch stabile Lösung erreicht. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass bei iterativen Verfahren keine Matrizenmultiplikationen mehr auftreten, sondern maximal die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Diese können als Vektor-Vektor-Multiplikation aufgefasst werden, so dass (abgesehen von einem eventuell verwendeten dünn besetzten Präkonditionierer  $\mathbf{N}_{\text{bd}}$ ) nur noch Vektoren mit einer maximalen Länge von der Anzahl der Beobachtungen (hier:  $3N$ ) im Arbeitsspeicher gehalten werden müssen. Dies bedeutet vor allem für die Designmatrix  $\mathbf{A}$  eine enorme Reduzierung des benötigten Arbeitsspeichers, da diese nur noch zeilenweise in den Speicher geladen und ausgewertet werden muss. Im vorliegenden Fall tritt eine weitere Vereinfachung ein, da die benötigte Zeile  $i$  der Designmatrix  $\mathbf{A}$  direkt aus der zugehörigen Satellitenposition ( $\lambda_i, \phi_i, r_i$ ) gemäß (7.4) berechnet werden kann und somit also nur die Satellitenpositionen anstatt der gesamten Designmatrix bekannt (anstatt irgendwo gespeichert) sein müssen.

Für die Lösung überbestimmter Gleichungssysteme und Normalgleichungssysteme existiert eine Vielzahl von Verfahren wie beispielsweise die *Block-Jacobi-Methode* (z.B. Schuh, 1996; Ditmar und Klees, 2002), das *LSQR-Verfahren* (*Least Squares QR-Zerlegung*, Paige und Saunders, 1982; Björck, 1996) und *Konjugierte-Gradienten-Verfahren* (*CG*) (Hestenes und Stiefel, 1952; Schuh, 1996; Ditmar und Klees, 2002) sowie deren *Variante für überbestimmte Least-Squares Probleme* (engl.: *Conjugate Gradients for Least Squares Problems, CGLS*, s. z.B. Björck, 1996). Wie sich aus ersten Anwendungen des LSQR-Algorithmus zeigt, kann die Konvergenzgeschwindigkeit iterativer Verfahren bedingt durch eine hohe Konditionszahl sehr gering sein. Nach Thamm (2003) sind somit bis zu 120 Iterationen für die Analyse bis Grad 70 aus einem 8-Tage-Orbit notwendig, für eine Analyse bis Grad 90 aus einem 45-Tage-Orbit sogar 293 Iterationen. Allerdings kann die Anzahl der Iterationen durch Präkonditionierung, die zu einer deutlichen Absenkung der Konditionszahl führt, drastisch verringert werden. Eine geeignete Präkonditionierung lässt sich, wie in Abschnitt 7.2.1.1 beschrieben, für iterative Verfahren, welche auf die Lösung des Normalgleichungssystems  $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n}$  (z.B. Block-Jacobi-Methode, Konjugierte Gradienten) anstatt der direkten Lösung des überbestimmten Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{e}$  (z.B. LSQR) abzielen, für Satellitenprobleme leicht finden. Die Präkonditionierung für iterative Gleichungssystemlöser für überbestimmte Probleme wie beispielsweise beim LSQR-Verfahren, bei denen vorzugsweise die Designmatrix  $\mathbf{A}$  anstatt der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  approximiert wird, ist schwieriger und nicht auf direktem Wege zu erhalten, aber durchaus möglich (Baur et al., 2007). Von den Iterationsverfahren zur Lösung von (konsistenten) Normalgleichungssystemen, die entsprechend Abschnitt 7.2.1.1 präkonditioniert werden können, erweist sich die Methode der *Präkonditionierten Konjugierten Gradienten* (*PCCG*) bedingt durch seine guten Konvergenzeigenschaften als effizient. So ergibt sich der spektrale Radius  $\rho_{\text{CG}}$  (Golub und van Loan, 1983; Schuh, 1996) bzw.  $\rho_{\text{PCCG}}$ , der für die Konvergenz verantwortlich ist, für die Methode der Konjugierten Gradienten (CG bzw. für PCCG) zu

$$(7.28) \quad \rho_{\text{CG}} = \left( \frac{1 - \sqrt{\text{cond}(\mathbf{N})}}{1 + \sqrt{\text{cond}(\mathbf{N})}} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \rho_{\text{PCCG}} = \left( \frac{1 - \sqrt{\text{cond}(\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{N})}}{1 + \sqrt{\text{cond}(\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{N})}} \right)^2 \quad (7.27)$$

und für die *Block-Jacobi-Methode* (*BJ*) (s. Schuh, 1996) zu

$$\rho_{\text{BJ}} = \lambda_{\text{max}}(\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{I}), \quad (7.29)$$

wobei  $\text{cond}()$  die Konditionszahl der Matrix ist und  $\lambda_{\text{max}}()$  der größte Eigenwert der Matrix. Bei geeigneter Wahl approximiert der Präkonditionierer  $\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1}$  die Inverse der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  genügend gut, so dass  $\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{N} \approx \mathbf{I}$  und  $\text{cond}(\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{N})$  nahe 1 ist. Konvergenz kann nur dann garantiert werden, wenn der spektrale Radius  $< 1$  ist, je kleiner der

spektrale Radius, desto besser die Konvergenzeigenschaften. Da der spektrale Radius bei CG und PCCG kleiner ist als bei BJ, konvergieren Verfahren, die auf Konjugierten Gradienten beruhen, in der Regel schneller. Im Gegensatz zu BJ ist bei CG und PCCG der spektrale Radius auch bei Wahl einer schlechten Prädiktionierung  $\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1}$  immer kleiner als 1, was die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz bei Verwendung von CG und PCCG erhöht. Aus diesen Gründen wurde in dieser Arbeit die im Folgenden vorgestellte PCCG-Methode verwendet, die auf einem normalen PC implementiert wurde.

Anmerkung: Bei iterativen Verfahren zur Lösung des Normalgleichungssystems  $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n}$  wird bedingt durch die „Quadrierung“ der Designmatrix, also  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , die Konditionszahl gegenüber iterativen Verfahren zur direkten Lösung überbestimmter Systeme  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{e}$  quadriert, da  $\text{cond}(\mathbf{N}) = \text{cond}^2(\mathbf{A})$  gilt. Deshalb ist in der Regel die Iteration bei Einsatz eines iterativen Gleichungssysteml6sers der zweiten Sorte wie dem LSQR-Verfahren schneller und stabiler als bei einem iterativen Gleichungssysteml6ser der ersten Sorte wie der CG-Methode. Durch den Einsatz eines geeigneten Prädiktionierers kann dieser Nachteil allerdings ausgeglichen werden.

### 7.2.1 Methode der Prädiktionierten Konjugierten Gradienten

Die Ausgleichung der Beobachtungsgleichungen  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{e}$  beruht, wie zuvor bereits erwähnt, auf der Minimierung der quadrierten Beobachtungsresiduen

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}. \quad (7.30)$$

Aus den partiellen Ableitungen dieser Funktion  $\Phi(\mathbf{x})$  nach den Unbekannten  $\mathbf{x}$  ergibt sich schließlich das Normalgleichungssystem  $\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$  oder anders ausgedrückt  $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n}$ . Die L6sung dieses Normalgleichungssystems kann als Suche des minimalen Funktionswertes des (Hyper-)Paraboloids aus (7.30) interpretiert werden. F6r diese Interpretation k6nnen iterative Methoden zur L6sung des symmetrischen linearen Gleichungssystems verwendet werden. Alle iterativen Methoden haben eine schrittweise Verbesserung des approximativen L6sungsvektors

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \bar{\alpha}_i \bar{\mathbf{p}}^{(i)} \quad (7.31)$$

gemeinsam. Diese schrittweise Verbesserung der approximativen L6sung  $\mathbf{x}^{(i)}$  beruht auf der (Relaxations-)Richtung  $\bar{\mathbf{p}}^{(i)}$  und dem zugeh6rigen Skalierungsfaktor  $\bar{\alpha}_i$ . Je nach Wahl der Relaxationsrichtung und des Skalierungsfaktors k6nnen verschiedene Iterationsverfahren unterschieden werden.

Wird die beste lokale Strategie am Approximationspunkt  $\mathbf{x}^{(i)}$  angewendet, dann dient die Richtung der st6rksten Abnahme, also des Gradienten, als Relaxationsrichtung  $\bar{\mathbf{p}}_G^{(i)}$

$$\bar{\mathbf{p}}_G^{(i)} = \text{grad} \Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{r}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{n}. \quad (7.32)$$

Der Faktor  $\bar{\alpha}_i$  wird so gewählt, dass der resultierende neue Approximationspunkt  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  einen minimalen Funktionswert von  $\Phi(\mathbf{x})$  entlang dieser Richtung ergibt, also

$$\bar{\alpha}_i = \left( \mathbf{r}^{(i)T} \mathbf{r}^{(i)} \right) / \left( \bar{\mathbf{p}}^{(i)T} \mathbf{N} \bar{\mathbf{p}}^{(i)} \right). \quad (7.33)$$

Die Qualit6t der L6sung  $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \bar{\alpha}_i \bar{\mathbf{p}}^{(i)}$  kann durch die Norm der Residuen  $\mathbf{r}^{(i+1)}$  abgesch6tzt werden, die mit

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \bar{\alpha}_i \mathbf{N} \bar{\mathbf{p}}^{(i)} \quad (7.34)$$

effektiv aus den Residuen  $\mathbf{r}^{(i)}$  der vorhergehenden Iteration berechnet werden k6nnen (das Produkt  $\mathbf{N} \bar{\mathbf{p}}^{(i)}$  wurde bereits bei der Berechnung von  $\bar{\alpha}_i$  nach (7.33) bestimmt).

Dieser Ansatz, auch als *Gradientenverfahren* bekannt, kann durch Verwendung der speziellen Form der Niveaulinien, die konzentrische Ellipsen sind, sowie unter Einf6hrung *konjugierter Suchrichtungen*, f6r welche die *N-Orthogonalit6t*  $\langle \bar{\mathbf{p}}^{(i+1)}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{p}}^{(i)} \rangle = 0$  gilt, verbessert werden. Dies f6hrt dann nach Schuh (1996) auf das Verfahren der Konjugierten Gradienten, welches von Hestenes und Stiefel (1952) eingef6hrt wurde. Durch Prädiktionierung kann die Konditionszahl des Normalgleichungssystems und damit die Konvergenzgeschwindigkeit wesentlich verbessert werden (Schuh, 1996; Ditmar und Klees, 2002). Eine zus6tzliche Stabilisierung f6r die Gleichm66igkeit und Monotonie der Konvergenz wird nach Ditmar und Klees (2002) mittels des „Sch6nauer-Smoothing“ (Sch6nauer, 2000) erreicht. Dies ergibt dann den in dieser Arbeit verwendeten Algorithmus der Prädiktionierten Konjugierten Gradienten nach Abbildung 7.5, der von Ditmar und Klees (2002) erfolgreich bei der Inversion von simulierten GOCE-SGG-Daten eingesetzt worden ist.



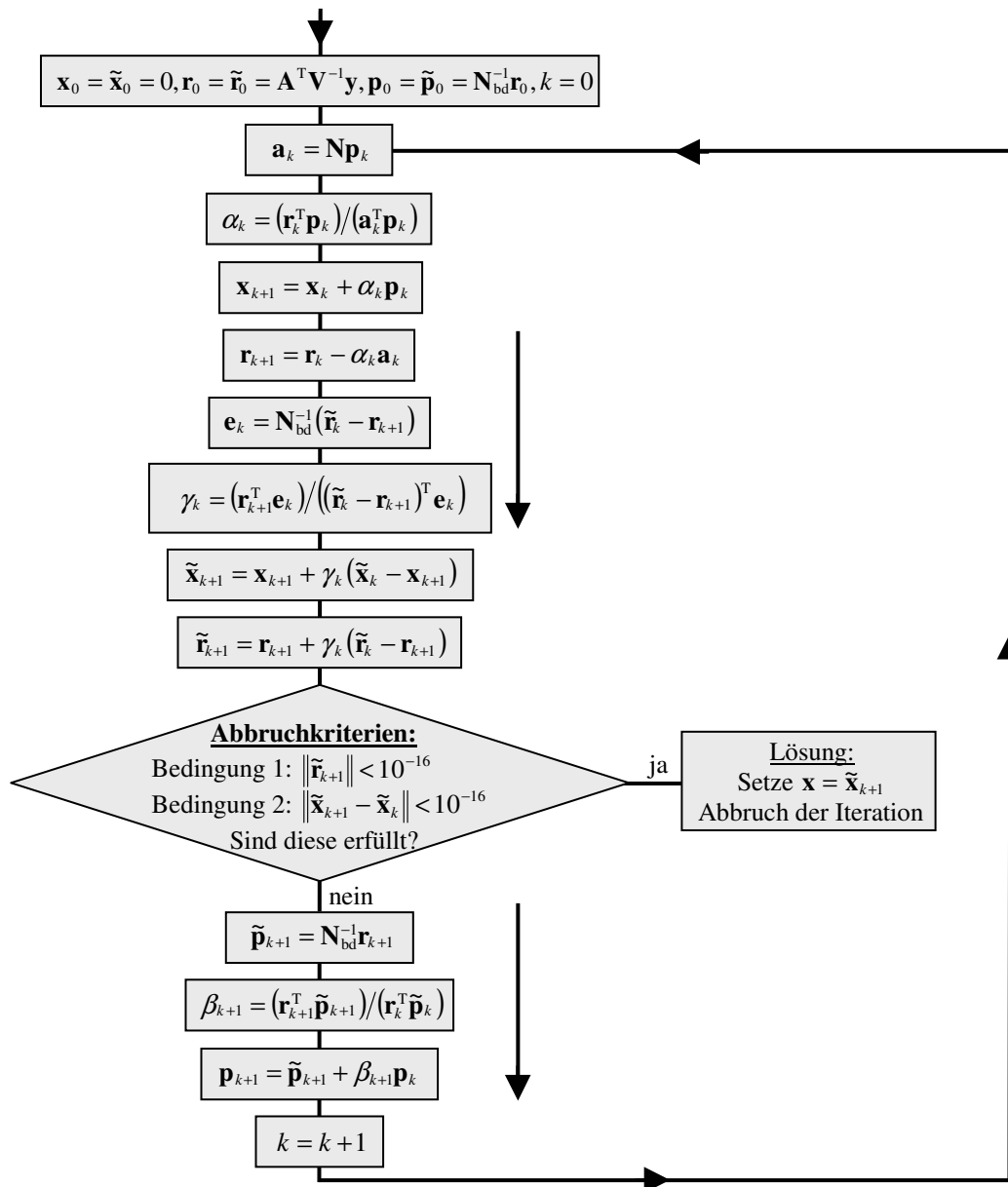


Abbildung 7.5: Ablaufdiagramm der Methode der Präkonditionierten Konjugierten Gradienten (PCCG).

Wie zu sehen ist, besteht PCCG abgesehen von zwei grundlegenden Rechenoperationen, den Matrix-Vektor-Operationen

- Präkonditionierung: Multiplikation des inversen Präkonditionierers  $\mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1}$  mit einem Vektor,  $\mathbf{e}_k = \mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1}(\tilde{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_{k+1})$  und  $\tilde{\mathbf{p}}_{k+1} = \mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{r}_{k+1}$
- Multiplikation der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  mit einem Vektor  $\mathbf{p}_k$ ,  $\mathbf{a}_k = \mathbf{N} \mathbf{p}_k$

und den Matrixrechenoperationen im Grundschrift,  $\mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$  und  $\mathbf{p}_0 = \tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{N}_{\text{bd}}^{-1} \mathbf{r}_0$  (ebenfalls Präkonditionierung), nur noch aus Rechenoperationen von Vektoren der maximalen Länge  $3N$ . Wie nachfolgend gezeigt wird, können diese Matrix-Vektor-Operationen unter gewissen Voraussetzungen ebenfalls als Vektor-Vektor-Operationen betrachtet werden bzw. effizient hinsichtlich Speicherbedarf und Rechenzeit durchgeführt werden. Daraus wird der geringe Speicherbedarf bei Anwendung des iterativen Gleichungssystemlösers PCCG ersichtlich. Da bei PCCG die Normalgleichungsmatrix weder explizit aufgebaut noch invertiert werden muss, wird zusätzlich der Rechenaufwand gegenüber einem direkten Gleichungssystemlöser deutlich reduziert. Die zu Beginn des vorherigen Abschnitts genannten Probleme (i)–(iv) können damit durch den Einsatz von PCCG umgangen werden.

Für die Definition eines Abbruchkriteriums kann die quadratische Norm der Residuen  $\|\tilde{\mathbf{r}}_{k+1}\|$  des jeweiligen Iterationsschrittes sowie die quadratische Norm der Differenz zweier aufeinander folgender Lösungen  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|$  heran genommen werden. Die Iteration ist dann abzubrechen, wenn beide Kriterien gewisse Schwellwerte  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  unterschreiten. Diese Schwellwerte richten sich nach der gewünschten Genauigkeit der Lösung. Bei voller Genauigkeit bietet sich eine Wahl von  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-16}$  an, eine ausreichend genaue Lösung wird allerdings oft schon vorher erreicht.

Ein Nachteil von iterativen Verfahren ist, dass kein Fehlermaß der bestimmten Lösungen  $\hat{\mathbf{x}}$  in Form einer Varianz-Kovarianz-Matrix  $\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\}$  bestimmt werden kann. Approximiert der Prädiktor  $\mathbf{N}_{bd}$  die Normalgleichungsmatrix genügend gut, so kann  $\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\}$  jedoch ungefähr abgeschätzt werden zu

$$\mathbf{D}\{\hat{\mathbf{x}}\} = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{V}_{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{N}_{bd}^{-1} \quad (7.35)$$

### 7.2.1.1 Erste Operation: Prädiktionierung

Prädiktionierung bedeutet im Prinzip nichts anderes als Multiplikation des Normalgleichungssystems  $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n}$  mit der Inversen einer Matrix  $\mathbf{N}_{bd}$ , welche die Normalgleichungsmatrix genügend gut approximiert und die gleichzeitig leicht handhabbar ist. Dadurch ergibt sich aus dem ursprünglichen Normalgleichungssystem ein „Hilfssystem“

$$\bar{\mathbf{N}}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{n}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_{bd}^{-1}\mathbf{N} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{N}_{bd}^{-1}\mathbf{n} \quad (7.36)$$

Bei guter Wahl von  $\mathbf{N}_{bd}$  entspricht die neue Normalgleichungsmatrix  $\bar{\mathbf{N}} \approx \mathbf{I}$ , was bedeutet, dass das Normalgleichungssystem  $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n}$  durch die Prädiktionierung bereits näherungsweise gelöst wurde und  $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{N}_{bd}^{-1}\mathbf{n}$  bereits eine Näherungslösung darstellt. Zusätzlich wird durch die Prädiktionierung die Konditionszahl des neuen „Hilfssystems“  $\bar{\mathbf{N}}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{n}}$  gegenüber dem ursprünglichen Normalgleichungssystem deutlich reduziert, da  $\text{cond}(\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_{bd}^{-1}\mathbf{N}) \approx \text{cond}(\mathbf{I}) \approx 1 \ll \text{cond}(\mathbf{N})$ . Diese Eigenschaften führen zu einer deutlichen Verbesserung der Konvergenzeigenschaften durch Prädiktionierung. Natürlich wird die Multiplikation des Normalgleichungssystems mit  $\mathbf{N}_{bd}^{-1}$  nicht explizit durchgeführt, da dieser Schritt für große Systeme gar nicht berechnet werden kann. Anstatt dessen wird die Prädiktionierung in den PCCG-Algorithmus gemäß Abbildung 7.5 integriert (s. z.B. Schuh, 1996).

Damit die Prädiktionierung praktikabel ist, sollten nach Ditmar und Klees (2002) folgende Bedingungen erfüllt sein:

- (i) Die Matrix  $\mathbf{N}_{bd}$  sollte die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  möglichst gut repräsentieren, das Matrixprodukt  $\mathbf{N}_{bd}^{-1} \cdot \mathbf{N}$  sollte also möglichst nahe an der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  sein.
- (ii) Der Prädiktor  $\mathbf{N}_{bd}$  sollte möglichst schnell berechenbar und dünn besetzt sein.
- (iii) Die Inversion des Prädiktors  $\mathbf{N}_{bd}$  bzw. die Inversion eines Gleichungssystems mit der Matrix  $\mathbf{N}_{bd}$  sollte möglichst schnell sein (viel kürzer als bei  $\mathbf{N}$ ).

Die erste Bedingung garantiert eine schnelle Konvergenz, die beiden anderen Bedingungen eine effiziente und schnelle Prädiktionierung.

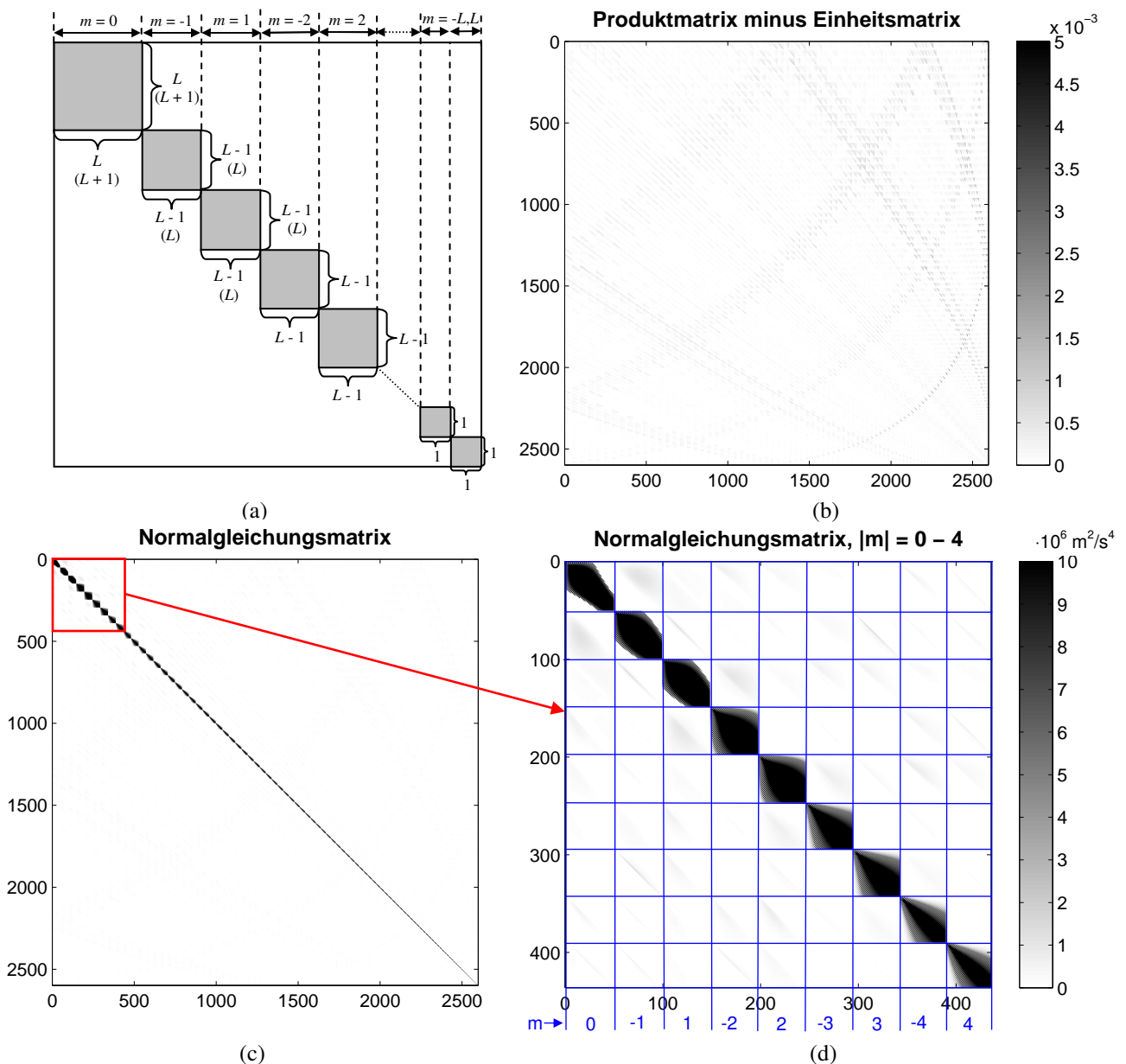
Bei Satellitenproblemen ist die Konstruktion eines geschickten Prädiktors aufgrund der Orthogonalität der in der Kugelfunktionsentwicklung enthaltenen Basisfunktionen möglich. Erfüllt die Satellitenbahn die Bedingungen eines „idealen“ Orbits (Colombo, 1986; Ditmar und Klees, 2002)

- der Orbit ist kreisförmig ( $r = \text{const.}$ ) und von konstanter Inklination ( $i = \text{const.}$ )
- die Erdrotation  $\omega_E$  sowie die Kreisgeschwindigkeit  $\omega_S$  des Satelliten sind konstant
- die Abtastrate  $\Delta t$  ist konstant und es gibt keine Datenlücken
- es handelt sich um eine Wiederholungsbahn (ganzzahlige Anzahl von Tagen  $N_d$  und Satellitenumdrehungen  $N_{rev}$ )
- die Beobachtungen sind gleichgenau und unkorreliert bzw. deren Dispersionsmatrix erfüllt bestimmte Eigenschaften (z.B. ist zirkulär (Ditmar und Klees, 2002))
- $H_d$  und  $N_{rev}$  besitzen keine gemeinsamen Teiler
- die maximale Auflösung ist  $L < N_{rev}/2$ ,

so kann gezeigt werden (wie am Beispiel von SGG-Beobachtungen in Ditmar und Klees, 2002), dass eine blockdiagonale Matrix entsteht. Sind die ersten 4 Bedingungen erfüllt, so sind nur die Anteile mit identischen Beträgen der Ordnung  $lml$ , also gleichen Frequenzen für  $\cos(m\lambda)$  und  $\sin(lml\lambda)$ , miteinander korreliert; es entstehen also Blöcke der maximalen Größe  $(2L \times 2L)$ . Sind außerdem noch die beiden letzten Bedingungen erfüllt, so verschwindet (i) zusätzlich die Korrelation zwischen den Anteilen mit  $\cos(m\lambda)$  und  $\sin(lml\lambda)$  für gleiche  $lml$  (also gleiche Frequenzen) und (ii) die Korrelation zwischen Anteilen mit geradem und ungeradem Grad  $l$ . Es verbleiben also Korrelationen zwischen Anteilen, welche die Bedingung  $m_1 = m_2$  und Parität( $l_1$ ) = Parität( $l_2$ ) erfüllen. Somit verbleiben Blöcke der maximalen Dimension  $(L/2+1 \times L/2+1)$ . Für einen tatsächlichen Orbit sind diese „idealen“ Bahnbedingungen in der Regel nicht erfüllt, so dass eine vollbesetzte Normalgleichungsmatrix entsteht. Allerdings sind die Korrelationen zwischen den Blöcken normalerweise relativ gering, so dass die blockdiagonale Matrix  $\mathbf{N}_{bd}$  aus den „idealen“ Bahnbedingungen die Charakteristik der tatsächlichen Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  gut erfasst. Die Blöcke einer solchen Matrix  $\mathbf{N}_{bd}$  sind verhältnismäßig schnell aufzubauen und zu invertieren, so dass die zuvor genannten Bedingungen (i)–(iii) für einen geeigneten Prädiktor erfüllt sind.

Im Gegensatz zu Ditmar und Klees (2002), wo der Prädiktor  $\mathbf{N}_{bd}$  aus den idealen Bahnbedingungen aufgebaut wird, wird in dieser Arbeit direkt der vorliegende kinematische Orbit zur Berechnung von  $\mathbf{N}_{bd}$  verwendet. Von der kompletten Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  werden nur die entsprechenden Blöcke berechnet, die dann als Prädiktor verwendet werden und effizient in einem Vektor gespeichert werden. Für den Prädiktor  $\mathbf{N}_{bd}$  wurde die folgende

Struktur nach Abbildung 7.6a) mit jeweils einem Block pro Ordnung  $m$  verwendet. Unter Beachtung der Symmetrie der Matrix  $\mathbf{N}_{bd}$  müssen für eine Analyse bis Grad  $L = 90$  nur 255 075 Elemente berechnet und gespeichert werden (vgl. 34266781 Elemente für die volle Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$ ). Dies bedeutet für die Erzeugung von  $\mathbf{N}_{bd}$  eine Reduzierung des Rechen- und Speicheraufwandes auf ca. 0,74% gegenüber  $\mathbf{N}$ . Der Rechenaufwand für die Inversion der  $2L+1$  Blöcke (hier: 181) der maximalen Dimension  $L$  bei  $\mathbf{N}_{bd}$  ist gegenüber der Inversion der Matrix  $\mathbf{N}$  mit der Dimension  $(L^2+2L-2 \times L^2+2L-2, \text{ hier: } 8278 \times 8279)$  gering. Somit sind Bedingungen (ii) und (iii) für den Präkonditionierer erfüllt. In Abbildung 7.6c,d) ist die volle Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  für die Analyse eines simulierten 90-tägigen CHAMP-Orbits (bis Grad 50) dargestellt. Wie bereits beschrieben, besteht die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  im Wesentlichen aus einer blockdiagonalen Struktur für jede Ordnung  $m$ , die als Präkonditionierer  $\mathbf{N}_{bd}$  dient. Die Abweichungen des Matrizenproduktes  $\mathbf{N}_{bd}^{-1} \cdot \mathbf{N}$  von der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  in Abbildung 7.6b) sind außerdem relativ gering (maximale Abweichung: 0,0124), womit Bedingung (i) erfüllt ist und eine schnelle Konvergenz möglich sein sollte. Die systematische, „drachenförmige“ Struktur der Abweichungen von der Einheitsmatrix ist wahrscheinlich auf Resonanzen in der Bahn zurückzuführen.



**Abbildung 7.6:** a) Struktur des Präkonditionierers  $\mathbf{N}_{bd}$ ; b) Differenzen zwischen der Produktmatrix  $\mathbf{N}_{bd}^{-1} \cdot \mathbf{N}$  und der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ , c) Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  und d) Zoom von  $\mathbf{N}$  für Grad  $|m| = 0,1,2,3,4$  für einen simulierten 90-tägigen CHAMP-Orbit (EGM96 bis Grad/Ordnung 50/50,  $h = 400 \text{ km}$ ,  $\Delta t = 30 \text{ s}$ ); bei b), c) und d) sind die Matrixkomponenten wie bei a) der Ordnung  $m$  nach geordnet.

### 7.2.1.2 Zweite Operation: Multiplikation der Normalgleichungsmatrix mit einem Vektor

Bei der PCCG-Methode tritt die Multiplikation der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  mit dem Vektor  $\mathbf{p}_k$  einmal pro Iterationsschritt auf. Der explizite Aufbau der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$ , der Speicher- und rechenzeitaufwändig ist, ist allerdings dazu nicht notwendig. Anstatt dessen kann die Operation  $\mathbf{Np}_k$  wie folgt aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{Np}_k &= (\mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} + \alpha_{\text{reg}} \mathbf{S}^{-1}) \mathbf{p}_k = \mathbf{A}^T (\mathbf{V}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{p}_k)) + \alpha_{\text{reg}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{p}_k = \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{u} && \text{(gewichtete Lösung)} \\ \text{mit } r_j &= \alpha_{\text{reg}} \cdot k_j \cdot (p_k)_j, (j=1, \dots, U) && (7.37) \\ w_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{p}_k, (i=1, \dots, 3N); v_i = \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{w}, (i=1, \dots, 3N); u_j = (\mathbf{A}^T)_j \mathbf{v}, (j=1, \dots, U) \end{aligned}$$

Diese Operation  $\mathbf{Np}_k$  kann also in nacheinander durchgeführte Multiplikationen der Matrizen  $\mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{V}^{-1}$  und  $\mathbf{A}$  bzw.  $\mathbf{S}^{-1}$  mit einem Vektor unterteilt werden. Diese Matrix-Vektor-Multiplikationen können nach (7.37) weiter in Vektor-Vektor-Multiplikationen der Vektoren  $\mathbf{A}_i$  ( $i$ -ter Zeilenvektor von  $\mathbf{A}$ ),  $\mathbf{V}_i^{-1}$  ( $i$ -ter Zeilenvektor der Gewichtsmatrix  $\mathbf{V}^{-1}$ ) und  $(\mathbf{A}^T)_j$  ( $j$ -ter Zeilenvektor der transponierten Designmatrix  $\mathbf{A}^T$ ) bzw. des „Kaula-Vektors“  $\mathbf{k} = \text{diag}(\mathbf{K})$  mit einem Vektor aufgespalten werden. Da die Designmatrix effektiver zeilenweise anstatt spaltenweise aus den Satellitenpositionen bedingt durch die Anwendung von Rekursionsformeln zur Berechnung der normierten Legendre'schen Funktionen aufgebaut und ausgewertet werden kann, bietet sich für die Multiplikation der transponierten Designmatrix  $\mathbf{A}^T$  mit einem Vektor  $\mathbf{v}$ , also  $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}$ , besser die folgende Aufspaltung in eine Skalar-Vektor-Multiplikation an:

$$\mathbf{u} = \sum_i^{3N} v_i (\mathbf{A}_i)^T, \quad (7.38)$$

wobei  $v_i$  das  $i$ -te Element des Vektors  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{A}_i$  der  $i$ -te Zeilenvektor von  $\mathbf{A}$  ist. Somit kann also die Operation  $\mathbf{Np}_k$  vollständig durch Vektoroperationen ausgedrückt werden, für die insgesamt nur maximal  $3N$  Elemente gespeichert werden müssen und die im Vergleich zum expliziten Aufbau der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  wesentlich schneller sind. Für die Auswertung von  $\mathbf{Np}_k$  muss jeweils nur eine Zeile der Designmatrix  $\mathbf{A}$  im Speicher gehalten werden, die nach (7.4) aus der zugehörigen Satellitenposition bestimmt wird. Diese zeilenweise Berechnung der Designmatrix ist gleichzeitig auch die rechenintensivste Operation bei den PCCG, die nach (7.37) zweimal pro Iterationsschritt durchgeführt werden muss. Der Vollständigkeit halber muss erwähnt werden, dass die vektorweise Multiplikation der Gewichtsmatrix  $\mathbf{V}^{-1}$  nur möglich ist, wenn die Dispersionsmatrix  $\mathbf{V}$  gewisse Bedingungen erfüllt (s. Ditmar und Klees, 2002, und Abschnitt 7.1.2).

Wird eine ungewichtete Lösung berechnet, so kann der Rechenaufwand weiter reduziert werden. Für die Berechnung der Operation  $\mathbf{Np}_k$  ergibt sich die Zerlegung in Vektormultiplikationen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{Np}_k &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha_{\text{reg}} \mathbf{S}^{-1}) \mathbf{p}_k = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{p}_k) + \alpha_{\text{reg}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{p}_k = \\ &= \mathbf{r} + \sum_{i=1}^{3N} ((\mathbf{A}_i)^T (\mathbf{A}_i \mathbf{p}_k)) ; r_j = \alpha_{\text{reg}} \cdot k_j \cdot (p_k)_j, (j=1, \dots, U) && \text{(ungewichtete Lösung)} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Der Zeit- und Rechenaufwand kann somit deutlich reduziert werden, da jetzt (abgesehen von der vernachlässigten Gewichtung) der zeilenweise Aufbau der Designmatrix nur noch einmal pro Iterationsschritt erfolgt. Werden bei einer Gewichtung die Korrelationen zwischen den Beobachtungen vernachlässigt, dann wird die Gewichtsmatrix eine Diagonalmatrix  $\mathbf{V}_d^{-1}$  mit den Elementen  $w_{i,i}$  und eine Berechnung des Produktes  $\mathbf{Np}_k$  ist gegenüber der ungewichteten Lösung praktisch fast ohne zusätzlichen Rechenaufwand möglich:

$$\begin{aligned} \mathbf{Np}_k &= (\mathbf{A}^T \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{A} + \alpha_{\text{reg}} \mathbf{S}^{-1}) \mathbf{p}_k = \mathbf{A}^T (\mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{p}_k)) + \alpha_{\text{reg}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{p}_k = \\ &= \mathbf{r} + \sum_{i=1}^{3N} w_{i,i} ((\mathbf{A}_i)^T (\mathbf{A}_i \mathbf{p}_k)) ; r_j = \alpha_{\text{reg}} \cdot k_j \cdot (p_k)_j, (j=1, \dots, U) && \text{(diagonale Gewichtsmatrix)} \end{aligned} \quad (7.40)$$

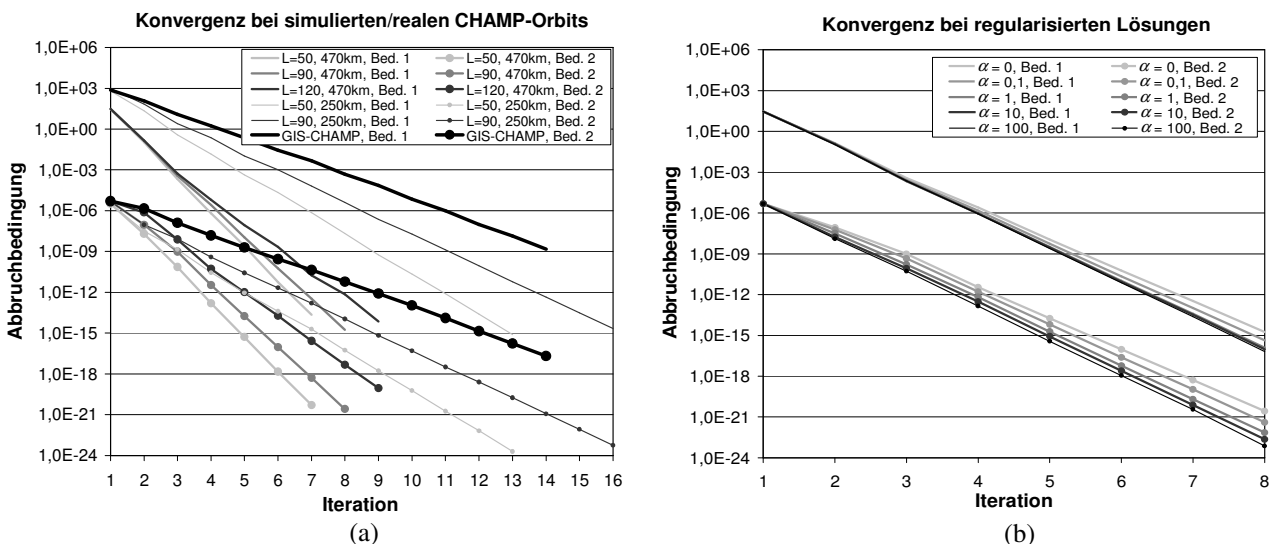
Eine diagonale Gewichtsmatrix kann beispielsweise bei der Verwendung eines robusten Schätzers eingesetzt werden (s. Abschnitt 9.2.3).

Eine Zerlegung der Rechenoperation  $\mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$  des Grundschrtes in Vektoroperationen ist auf ähnliche Weise wie in diesem Abschnitt für eine effektive Berechnung möglich.

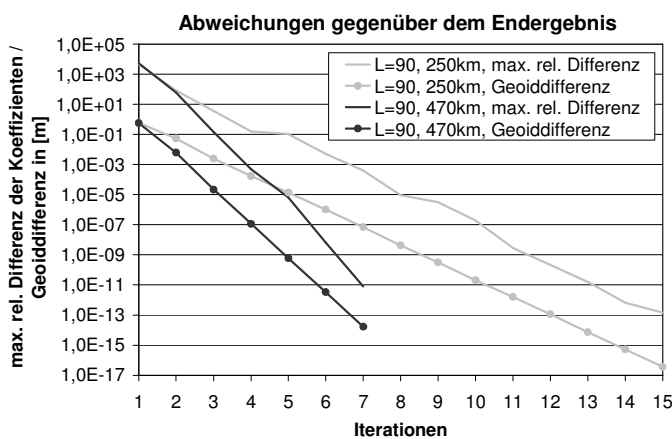
## 7.2.2 Konvergenzverhalten der PCCG

Das Konvergenzverhalten der PCCG-Methode wurde für verschiedene Simulationen (simulierte 1-jährige Orbits in unterschiedlichen Bahnhöhen  $h = 250$  km/470 km entsprechend Kapitel 8 sowie unterschiedliche Auflösungen  $L = 50/90/120$ ) sowie bei der Analyse von Realdaten (GIS-CHAMP-Modell (GIS: Geodätisches Institut der Universität Stuttgart) aus einem 2-jährigem kinematischen Orbit (ungewichtete Lösung, Ausreißerelimination anhand von Schwellwerten, s. Abschnitt 9.2.2) getestet. Als Abbruchkriterien wurden bei den Simulationen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-16} \sqrt{U}$  verwendet, bei den Realdaten wurde für Bedingung 2 die etwas gröbere Schranke  $\varepsilon_1 = 10^{-10} \sqrt{U}$  verwendet. Wie in Abbildung 7.7a) zu sehen ist, ist je nach Auflösung eine Konvergenz für die Bahnhöhe  $h = 470$  km in 7–9 Iterations-

schritten erreicht und für die Bahnhöhe  $h = 250$  km nach 13–16 Iterationsschritten. Die schlechtere Konvergenz für die niedrigere Bahn ist dadurch zu erklären, dass aufgrund eines höheren Gravitationsfeldsignals die Abweichung von der „idealen“ Bahn, speziell von der Bedingung des kreisförmigen Orbits konstanter Inklination, größer ist. Dadurch wird die Qualität des Prädiktionierers und damit die Konvergenzgeschwindigkeit verschlechtert. Die schlechtere Konvergenz für eine höhere Auflösung  $L$  ist einerseits ebenfalls auf den Prädiktionierer zurückzuführen, dessen Genauigkeit hinsichtlich des Kriteriums  $\mathbf{N}_{bd}^{-1} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{I}$  mit zunehmendem  $L$  abnimmt, andererseits auf eine größer werdende Konditionszahl bei zunehmender Auflösung. Für die Analyse eines größeren Datensatzes werden aufgrund der höheren Redundanz bessere Konvergenzeigenschaften erwartet, dies wurde allerdings nicht näher untersucht. Bei der Analyse des realen CHAMP-Orbits ergibt sich gegenüber der Analyse des simulierten Orbits in der Höhe  $h = 250$  km trotz der größeren Bahnhöhe ( $h = 375$ – $405$  km) und des längeren Beobachtungszeitraumes eine langsamere Konvergenz. Bezüglich Bedingung 2 ist das Konvergenzkriterium beim realen CHAMP-Orbit nach 12 Iterationen im Vergleich zu 8 Iterationen beim simulierten Orbit für  $h = 250$  km erfüllt, für Bedingung 1 mit herabgesetzter Schranke ( $\epsilon_1 = 10^{-10} \sqrt{U}$ ) ist dies nach 14 bzw. 10 Iterationen der Fall. Die schlechtere Konvergenz ist auf die größere Abweichung des realen Orbits von der „idealen“ Bahn aufgrund von Störbeschleunigungen (gravitativ und nicht-gravitativ), Bahnkorrekturmanövern, abnehmender Bahnhöhe wegen der Atmosphärenreibung und aufgrund von Datenlücken zurückzuführen. Abbildung 7.7b) zeigt die Konvergenz bei Verwendung unterschiedlich starker Regularisierungen am Beispiel der Analyse des Orbits für  $h = 470$  km mit dem Rauschen  $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ . Da die Regularisierung die Konditionszahl des Gleichungssystems verkleinert, werden die Konvergenzeigenschaften verbessert. Allerdings ist dieser Effekt nur relativ klein, da der Beitrag der Regularisierung im Gegensatz zur Prädiktionierung zur Verbesserung der Konditionszahl nur klein ist.



**Abbildung 7.7:** Konvergenz bei PCCG: a) Konvergenz nach Bedingung 1 und Bedingung 2 für verschieden hohe Auflösungen  $L$  bei der Analyse von simulierten 1-jährigen CHAMP-Orbits (Bahnhöhen  $h = 250$  km und  $h = 470$  km) sowie bei der Analyse des realen 2-jährigen kinematischen CHAMP-Orbits; b) Konvergenz bei Anwendung der Regularisierung (verschiedene Regularisierungsparameter  $\alpha$ ) für einen simulierten Orbit mit  $h = 470$  km und dem Rauschen  $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ .



**Abbildung 7.8:** Abweichung der Lösungen der einzelnen Iterationsschritte von dem Endergebnis für eine Analyse bis Grad 90 (für Bahnhöhen von jeweils  $h = 250$  km und  $h = 470$  km); Abweichungen als: (i) maximale relative Differenz der Koeffizienten in [m], (ii) Geoiddifferenz in [m].

Vergleicht man die Ergebnisse der einzelnen Iterationsschritte mit dem Endergebnis, so ist festzustellen, dass bereits mit weniger Iterationsschritten eine genaue Lösung erreicht werden kann. Aus Abbildung 7.8 ist zu erkennen, dass im Vergleich zum Endergebnis bereits nach 3 Iterationen ( $h = 470$  km) bzw. nach 5 Iterationen ( $h = 250$  km) eine Geoid-

differenz von  $< 0,1$  mm erreicht wird. Um eine Genauigkeit von 5 Stellen (ermittelt aus der maximalen relativen Differenz) für jeden bestimmten Koeffizienten zu erhalten, sind nach Abbildung 7.8 4 bzw. 6 Iterationen notwendig. Bei der Analyse realer Daten sind dann ebenfalls entsprechend weniger Iterationen notwendig. Insgesamt sind die PCCG aufgrund der schnellen Konvergenz und der guten Implementierbarkeit eine geeignete Methode zur Lösung großer Gleichungssysteme, speziell zur Lösung des beim Beschleunigungsansatz auftretenden Gleichungssystems.

### 7.3 Bemerkungen zur Bestimmung von Kalibrierungsparametern

Die mit den GFZ-Kalibrierungsparametern bereinigten Akzelerometerdaten  $X_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t)$ ,  $Y_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t)$ ,  $Z_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t)$  sind, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, oft nicht genau genug, so dass es sich anbietet, zusätzliche Kalibrierungsparameter, z.B. Bias  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $b_z$  und Skalierung  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $s_z$ , zu bestimmen. Allerdings hebt die Schätzung von diesen Kalibrierungsparametern innerhalb der Gravitationsfeldbestimmung aufgrund von Korrelationen mit den Gravitationsfeldparametern die Blockdiagonalität des Gleichungssystems für die „idealen“ Bahnbedingungen auf, so dass ein geeigneter Präkonditionierer für die PCCG-Methode schwieriger zu finden ist. Deshalb bietet es sich an, Kalibrierungsparameter a priori zu bestimmen. Aus der Newton'schen Bewegungsgleichung (7.41), die bzgl. des raumfesten Systems CIS gilt, kann die Kalibrierungsgleichung (7.42) abgeleitet werden. Die Formulierung der Kalibrierungsgleichung bietet sich aufgrund des festen Einbaus des Akzelerometers im satellitenfesten Referenzsystem  $\mathbf{B}^{\text{S/C}}$  an. Der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}(t_i)$  lässt sich für den jeweiligen Zeitpunkt  $t_i$  aus den mittels numerischer Differentiation bestimmten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}(t_i)$ , reduziert um den Gravitationsbeschleunigungsvektor der Erde  $\Gamma(t_i)$  und um modellierte Gezeitenbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}(t_i)$ , berechnen. Für die Berechnung des Gravitationsbeschleunigungsvektors  $\Gamma(t_i)$  bietet es sich an, das beste a-priori bekannte Gravitationsfeldmodell, z.B. EGM96, zu verwenden. Die kalibrierten Akzelerometerdaten  $X_{\text{cal}}^{\text{ACC}}(t_i)$ ,  $Y_{\text{cal}}^{\text{ACC}}(t_i)$ ,  $Z_{\text{cal}}^{\text{ACC}}(t_i)$  entstehen aus den GFZ-kalibrierten Akzelerometerdaten  $X_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t_i)$ ,  $Y_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t_i)$ ,  $Z_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t_i)$  gemäß (7.42), so dass sich für den Zeitpunkt  $t_i$  das Gleichungssystem  $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{A}(t_i) \cdot \mathbf{x}$  wie in (7.42) angegeben ergibt. Da Bias und Skalierung des Akzelerometers nicht über den ganzen Missionszeitraum hinweg konstant sind, bietet sich beispielsweise die tageweise Schätzung von Kalibrierungsparametern an.

#### Box 7.6: Kalibrierung von Akzelerometerdaten

„Newton'sche Bewegungsgleichung im raumfesten System (CIS)“

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \Gamma(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{p}_\Gamma(t)) + \ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}(t) + \ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}(t) \quad ; \quad \ddot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{I}_1^T, \mathbf{I}_2^T, \mathbf{I}_3^T] \cdot [\ddot{X}(t), \ddot{Y}(t), \ddot{Z}(t)]^T \quad (7.41)$$

$$\text{mit } \ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}(t) = (\mathbf{R}^{\text{S/C}}(t))^{-1} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{\text{non-grav}}^{\text{S/C}}(t) = (\mathbf{R}^{\text{S/C}}(t))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y_{\text{cal}}^{\text{ACC}}(t) \\ -Z_{\text{cal}}^{\text{ACC}}(t) \\ -X_{\text{cal}}^{\text{ACC}}(t) \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

„Kalibrierungsgleichung im satellitenfesten Referenzsystem  $\mathbf{B}^{\text{S/C}}$ “

$$\underbrace{\mathbf{R}^{\text{S/C}}(t_i) \cdot [\ddot{\mathbf{X}}(t_i) - \Gamma(t_i) - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{tidal}}(t_i)]}_{\mathbf{y}(t_i)} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t_i) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t_i) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X_{\text{cor}}^{\text{ACC}}(t_i) & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t_i)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s_y \\ b_y \\ s_z \\ b_z \\ s_x \\ b_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (7.42)$$

Um die Abhängigkeit der Kalibrierungsparameter von dem a-priori-Gravitationsfeld zu verringern, kann eine iterative Methodik eingesetzt werden, indem z.B. aus dem anschließend geschätzten Gravitationsfeld mittels der Kalibrierungsgleichung verbesserte Kalibrierungsparameter bestimmt werden können, die dann im nächsten Schritt wieder für die Schätzung eines neuen Gravitationsfeldes eingesetzt werden können usw. Allerdings soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass die Bestimmung von Kalibrierungsparametern innerhalb des Beschleunigungsansatzes als weniger zuverlässig als beispielsweise bei der Energiebilanzmethode (z.B. Gerlach et al., 2003a; Weigelt und Sneeuw, 2005; Földvary et al., 2005) angesehen werden muss. Dies wird deutlich, wenn man die Genauigkeit der Beobachtungen, also der numerisch bestimmten Beschleunigungen, die im Bereich von  $1\text{--}2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  liegt, mit der Größenordnung der zu bestimmenden Biasparameter vergleicht, die ca.  $10^{-6}\text{--}10^{-8} \text{ m/s}^2$  beträgt (Kang et al., 2003). Das Rauschen ist hier größer als die zu bestimmenden Parameter selbst.

## 8 Gravitationsfeldanalyse aus simulierten CHAMP-Bahnen

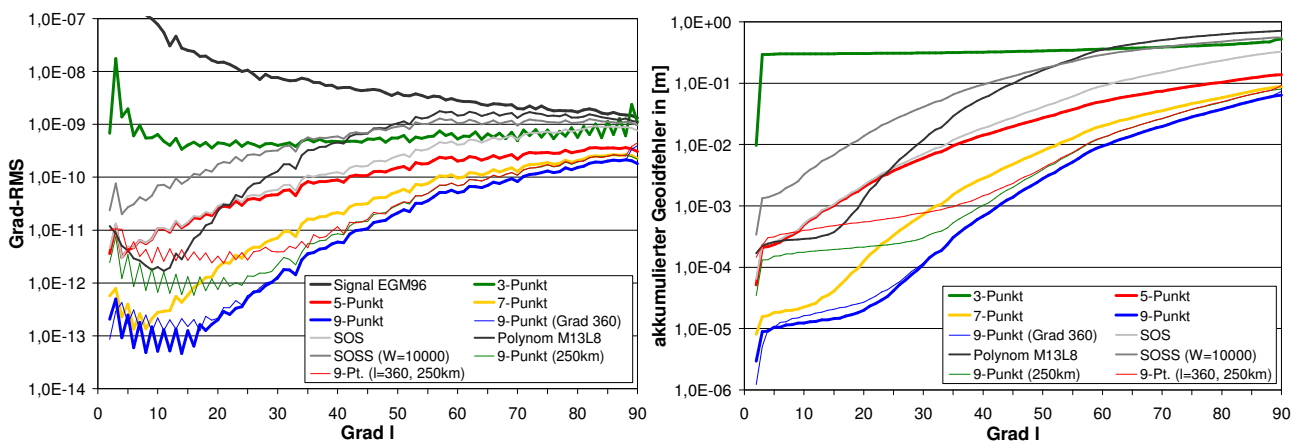
Im Folgenden wurden vollständige Gravitationsfeldanalysen simulierter kinematischer CHAMP-Orbits bis Grad/Ordnung 90/90 bzw. 70/70 durchgeführt, um die am besten geeignete der vorgestellten Methoden zur numerischen Differentiation herauszufinden. Des Weiteren soll untersucht werden, wie sich unterschiedliche Rauschverhältnisse des kinematischen Orbits sowie eine abnehmende Bahnhöhe des CHAMP-Satelliten und eine damit verbundene höhere Sensitivität für kürzere Wellenlängen des Gravitationsfeldes auf die Genauigkeit des geschätzten Gravitationsfeldes auswirken. Anhand der Gegenüberstellung von gewichteten und ungewichteten Lösungen soll ermittelt werden, wie groß der Einfluss der Korrelation der Beschleunigungsfehler auf die Gravitationsfeldbestimmung ist und ob diese Korrelationen bei der Kleinste-Quadrate-Schätzung vernachlässigt werden können. Ein Vergleich mit dem genauesten Gravitationsfeld vor Beginn der CHAMP-Mission, dem EGM96 (Lemoine et al., 1998), soll zeigen, wo Verbesserungen durch CHAMP-Daten erwartet werden können. Ein Vergleich mit dem vom GFZ mit dem klassischen Verfahren aus CHAMP-Daten bestimmten Modell EIGEN-2 (Reigber et al., 2003a) dient für die Bewertung, ob mit dem Beschleunigungsansatz Ergebnisse ähnlicher Qualität zu erwarten sind. Am Ende des Kapitels werden schließlich die verschiedenen Verfahren zur Analyse kinematischer Bahnen anhand von Testrechnungen gegenübergestellt

Neben dem bereits in Kapitel 6 benutzten simulierten CHAMP-Orbit in einer anfänglichen Bahnhöhe von  $h = 470$  km wurden außerdem simulierte Bahnen mit einer Höhe von  $h = 250$  km ( $X_0 = -109\,951,2565$  m,  $Y_0 = 328\,609,6671$  m,  $Z_0 = 6611\,926,1496$  m,  $\dot{X}_0 = -7358,065\,975$  m/s,  $\dot{Y}_0 = -2461,974\,436$  m/s,  $\dot{Z}_0 = 0,0$  m/s bzw. in Keplerelementen  $a = 6621$  km,  $i = 87^\circ$ ,  $e = 0$ ,  $\Omega = 18^\circ 30'$ ,  $\omega = 90^\circ$ ,  $M = E = \nu = 0^\circ$ ) entsprechend einem Zeitpunkt zu Missionsende verwendet. Der Zeitraum dieser simulierten Bahnen beträgt jeweils 1 Jahr mit einer Samplingzeit von  $\Delta t = 30$  s ( $\cong 2$  Mio. Bahnpunkte). Als Gravitationsfeldmodell dient das EGM96, entwickelt bis Grad/Ordnung 90/90, für die Untersuchung von Aliasingeffekten (*omission error*) wurde das EGM96 in den Bahnsimulationen bis Grad/Ordnung 360/360 entwickelt, Störbeschleunigungen wurden, da diese durch Modelle und Akzelerometermessungen erfasst werden können, nicht berücksichtigt. Für die Untersuchung der Sensitivität des Beschleunigungsansatzes auf Messrauschen wurden die beiden Rauschszenarien ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) und ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,9$ ) herangezogen.

### 8.1 Untersuchung des Modellfehlers

Zunächst einmal soll untersucht werden, welche Genauigkeit in der Gravitationsfeldbestimmung überhaupt für einen fehlerfreien Orbit möglich ist bedingt durch die Approximationseigenschaften (Approximationsfehler) der einzelnen Methoden zur numerischen Differentiation. Der dabei entstehende Fehler wird im Folgenden als Modellfehler bezeichnet und gibt die theoretisch maximal erreichbare Genauigkeit bei Verwendung des jeweiligen Differentiators an. Der Modellfehler setzt sich also neben eventuell auftretenden numerischen Effekten (z.B. bei der Lösung des Gleichungssystems) hauptsächlich aus den durch die Approximationsfehler des Differentiators hervorgerufenen Effekten zusammen.

Abbildung 8.1 zeigt den Modellfehler als Grad-RMS und akkumulierten Geoidfehler für die unterschiedlichen Differentiatoren für den simulierten CHAMP-Orbit mit einer Bahnhöhe von  $h = 470$  km. Wie schon bei der Untersuchung des Approximationsfehlers bei der numerischen Differentiation in Kapitel 6 vermutet, führt das 9-Punkt-Schema bedingt durch die beste Approximation zum geringsten Modellfehler. Bei Verwendung eines kürzeren Differentiationsschemas steigt der Modellfehler (sowohl als Grad-RMS als auch als akkumulierter Geoidfehler) an, vor allem das 3-Punkt-Schema führt mit Grad-RMS-Werten von  $> 10^{-10}$  und akkumulierten Geoidfehlern von  $> 30$  cm für Grad  $l > 5$  zu sehr großen Fehlern, die bereits die mit CHAMP anvisierte Genauigkeit übersteigen.



**Abbildung 8.1:** Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler in [m] des bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren erzeugten Modellfehlers für einen simulierten CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km, Grad // Ordnung  $m$  90/90, Zeitraum: 1 Jahr). Im Vergleich dazu die Fehler bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas für simulierte CHAMP-Orbits mit ( $h = 470$  km,  $l/m$  360/360), ( $h = 250$  km,  $l/m$  90/90), ( $h = 250$  km,  $l/m$  360/360).

Die Verwendung von Spline-Interpolation (SOS) führt zu einem etwas schlechteren Modellfehler als das 5-Punkt-Schema, der entstehende Geoidfehler für eine Entwicklung bis Grad  $l = 70$  liegt aber mit ca. 15 cm bereits fast in dem mit CHAMP anvisierten Genauigkeitsbereich. Die auf ausgleichenden Interpolationsmethoden beruhenden Differentiationsverfahren (hier das Regressionspolynom M13L8 und Spline-on-Smoothing-Spline SOSS mit Gewichtung  $W = 10\,000$ ) führen, wie in Kapitel 6 vorausgesagt, bereits bei niedrigen Graden bedingt durch Signalglättung zu erhöhten Fehlerkurven. Bereits bei einer Entwicklung bis Grad 50 ist ein Geoidfehler von  $> 10$  cm (bei Grad 70 sogar  $>$  als 35 cm) erreicht, welches die bei CHAMP angezielten Genauigkeiten übertrifft.

Befriedigende Ergebnisse hinsichtlich der Approximation des zu bestimmenden Gravitationsfeldes sind also nur bei dem 9-Punkt-Schema zu erwarten, die akkumulierten Geoidfehler liegen hier für eine Entwicklung bis Grad  $l = 50$  bei 2 mm, für Grad  $l = 70$  bei 2 cm und für Grad  $l = 90$  bei 6 cm. Allerdings bleibt auch hier zu bemerken, dass diese — wenn auch deutlich kleiner als die bei CHAMP anvisierte Genauigkeit — mit Werten im cm-Bereich doch schon recht groß sind. Dies ist auf die mit  $\Delta t = 30$  s recht schlechte Abtastung zurückzuführen (vgl. die Differenz zu einem idealen Differentiator in Abbildung 6.3), bei kleineren Abtastintervallen ist eine bessere Approximation zu erwarten.

Abbildung 8.1 zeigt außerdem noch den Modellfehler, der bei einer Bahnhöhe von CHAMP in  $h = 250$  km entsteht. Wie erwartet ist dieser wegen einer größeren Bahndynamik aufgrund des stärkeren Gravitationsfeldsignals etwas größer, die entstehenden Geoidfehler sind allerdings nur im mm-Bereich größer als für eine Bahn in der Höhe  $h = 470$  km.

Abbildung 8.1 zeigt des Weiteren, wie sich der Abbruch der Gravitationsfeldanalyse bei Grad  $l = 90$  bei einer Satellitenbahn, die durch ein vollständiges Gravitationsfeld (hier: EGM96 bis Grad  $l = 360$ ) erzeugt worden ist, auswirkt. Bei einer Bahnhöhe von  $h = 470$  km entstehen zusätzlich zum Modellfehler durch das Aliasing kleinere Fehler für Grad  $l < 25$  sowie für Grad  $l > 85$ , die sich auf den Geoidfehler maximal im mm-Bereich auswirken. Bei einer Bahnhöhe von  $h = 250$  km sind aufgrund des größeren Signalgehalts der abgebrochenen Gravitationsfeldanteile die Aliasingeffekte etwas größer. Diese wirken sich bis Grad 40 aus, die resultierenden Störungen im Geoid befinden sich allerdings auch nur im mm-Bereich. Insgesamt scheint der Abbruchfehler also kein Problem bei der Analyse von CHAMP-Daten mit dem Beschleunigungsansatz darzustellen.

In Tabelle 8.1 und Tabelle 8.2 sind die RMS-Werte und die (mit  $\cos(\phi)$  flächen-)gewichteten RMS-Werte des Geoidfehlers (auf dem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter) sowie der maximale Geoidfehler der Gravitationsfeldsimulationen aus Abbildung 8.1 für Entwicklungen bis Grad/Ordnung 70/70 und 90/90 gegenübergestellt. Abgesehen vom 3-Punkt-Schema liegen der normale RMS-Wert und der gewichtete RMS-Wert nahe beieinander, was auf eine (zumindest in der Breite  $\phi$ ) geographisch gleichmäßige Verteilung der Geoidfehler schließen lässt. Hervorzuheben sind vor allem die großen Modellfehler, die bei Verwendung der ausgleichenden Interpolationsverfahren (und auch bei der Spline-Interpolation sowie beim 3-Punkt-Schema) entstehen. Diese liegen im dm-Bereich mit Maximalwerten im m-Bereich. Einzig mit dem 9-Punkt-Schema und mit Abstrichen mit dem 7-Punkt-Schema können die Modellfehler im cm-Bereich gehalten werden. Allerdings ist zu erwähnen, dass die maximalen Fehler bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas doch schon bereits 20 cm bei einer Entwicklung bis Grad 70 und 57 cm bei einer Entwicklung bis Grad 90 betragen (2 cm für eine Entwicklung bis Grad 50).

| Differentiator |          | 3-Pkt. | 5-Pkt. | 7-Pkt. | 9-Pkt. | SOS   | M13L8 | SOSS  | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. |
|----------------|----------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| Bahn           | Höhe $h$ | 470 km |        |        |        |       |       |       |        | 250 km |        |
|                | Grad $l$ | 90     |        |        |        |       |       |       | 360    | 90     | 360    |
| RMS [m]        |          | 0,634  | 0,069  | 0,033  | 0,018  | 0,139 | 0,460 | 0,355 | 0,019  | 0,025  | 0,027  |
| gew. RMS [m]   |          | 0,386  | 0,074  | 0,035  | 0,020  | 0,150 | 0,502 | 0,386 | 0,020  | 0,026  | 0,027  |
| Maximum [m]    |          | 3,293  | 0,841  | 0,384  | 0,202  | 1,656 | 5,651 | 4,392 | 0,203  | 0,273  | 0,275  |

**Tabelle 8.1:** RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren für unterschiedliche simulierte fehlerfreie CHAMP-Orbits (Zeitraum: 1 Jahr). Entwicklung des analysierten Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 70/70.

| Differentiator |          | 3-Pkt. | 5-Pkt. | 7-Pkt. | 9-Pkt. | SOS   | M13L8 | SOSS  | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. |
|----------------|----------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| Bahn           | Höhe $h$ | 470 km |        |        |        |       |       |       |        | 250 km |        |
|                | Grad $l$ | 90     |        |        |        |       |       |       | 360    | 90     | 360    |
| RMS [m]        |          | 1,713  | 0,132  | 0,082  | 0,059  | 0,307 | 0,684 | 0,546 | 0,074  | 0,075  | 0,090  |
| gew. RMS [m]   |          | 0,517  | 0,138  | 0,088  | 0,064  | 0,327 | 0,714 | 0,595 | 0,074  | 0,081  | 0,091  |
| Maximum [m]    |          | 15,305 | 1,517  | 0,875  | 0,572  | 3,427 | 8,329 | 6,466 | 0,617  | 0,737  | 0,777  |

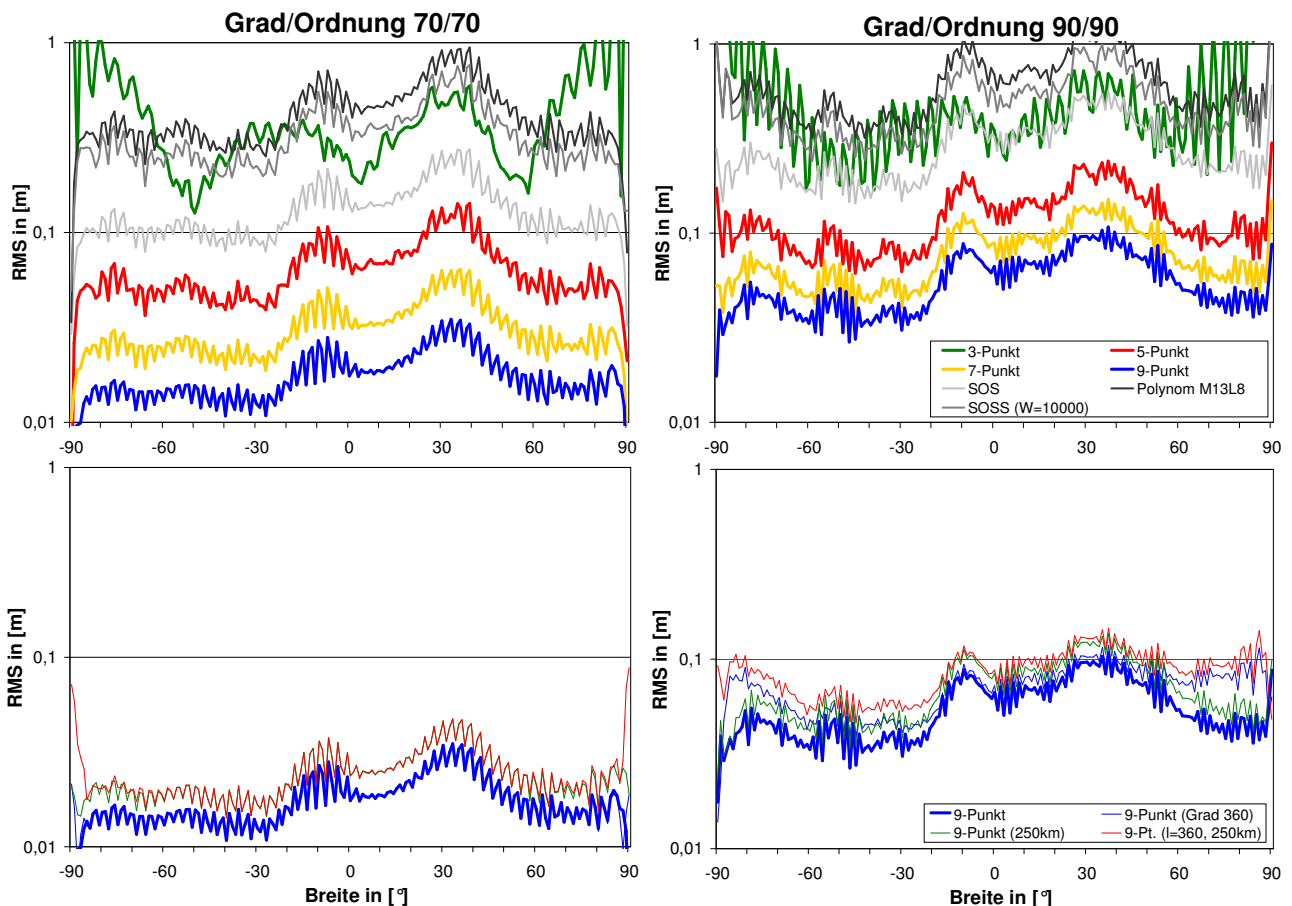
**Tabelle 8.2:** RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren für unterschiedliche simulierte fehlerfreie CHAMP-Orbits (Zeitraum: 1 Jahr). Entwicklung des analysierten Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 90/90.



Die geographische Verteilung der Geoidfehler mit der Breite  $\phi$  ist in Abbildung 8.2 als RMS pro Breitengrad dargestellt. Bis auf das 3-Punkt-Schema sind die Geoidfehler bei Verwendung des jeweiligen Differentiators über die Breite einigermaßen gleichmäßig verteilt. Auffällig ist aber, dass der Verlauf der RMS-Kurven über die Breite sowohl für eine Entwicklung bis 70/70 als auch 90/90 für alle Differentiatoren (und auch für die Bahnhöhe  $h = 250$  km) sehr ähnlich ist und diese im Prinzip nur um einen gewissen Offset zueinander versetzt sind. Dabei treten Maxima bei einer Breite  $\phi$  von ca.  $-10^\circ$  und  $35^\circ$  auf. Dies lässt auf einen systematischen Effekt schließen, der beispielsweise durch eine Glättung (infolge schlechter Approximation) des Signals in Gebieten höherer Gravitationswirkung entstehen kann. Abbildung 8.3, in der die Geoidfehler bis Grad/Ordnung 50/50, 70/70 und 90/90 auf einem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter dargestellt sind, bestätigt diese Vermutung: Die größten Modellfehler treten hauptsächlich in den Gebieten mit höherem Gravitationsfeldsignal wie dem Himalaya, den Anden sowie Indonesien auf und wachsen mit zunehmender Auflösung (Grad  $l$ ) an. Diese Fehler entstehen an den Stellen der auffällig großen Approximationsfehler im Beschleunigungssignal, die in Abbildung 6.4 sichtbar sind. Außerhalb dieser Gebiete ist die Approximation mit Werten im mm- bis cm-Bereich, wie in Abbildung 8.3 zu sehen ist, allerdings recht gut.

Abbildung 8.2 zeigt des weiteren, dass sich die Abbruchfehler bzw. die Aliasingeffekte (Kurve 9-Punkt gegenüber 9-Punkt (Grad 360) bzw. Kurve 9-Punkt (250km) gegenüber Kurve 9-Pt. ( $l = 360, 250$ km)) am stärksten an den Polen (bei einer Rekonstruktion bis Grad 70) bzw. in den Gebieten mit  $|\phi| > 45^\circ$  auswirken. Der Einfluss liegt für eine Rekonstruktion bis Grad 90 im cm-Bereich, aber deutlich unter der mit CHAMP anvisierten Genauigkeit.

In Abbildung 8.4 sind die relativen Modellfehler der Koeffizienten beispielhaft für das 9-Punkt-Schema für einen Orbit in einer Bahnhöhe von  $h = 470$  km dargestellt. Bis Grad 60 liegen die relativen Fehler der Koeffizienten weitestgehend unter 1%, darüber sind vor allem für die Koeffizienten niedrigerer Ordnung größere Fehler festzustellen, die teilweise so groß wie die Koeffizienten selbst sind. Die Koeffizienten hoher Ordnung  $m$  bleiben auch für hohe Grade  $l$  gut bestimmbar, hier scheint sogar eine Auflösung über Grad 90 hinaus denkbar.

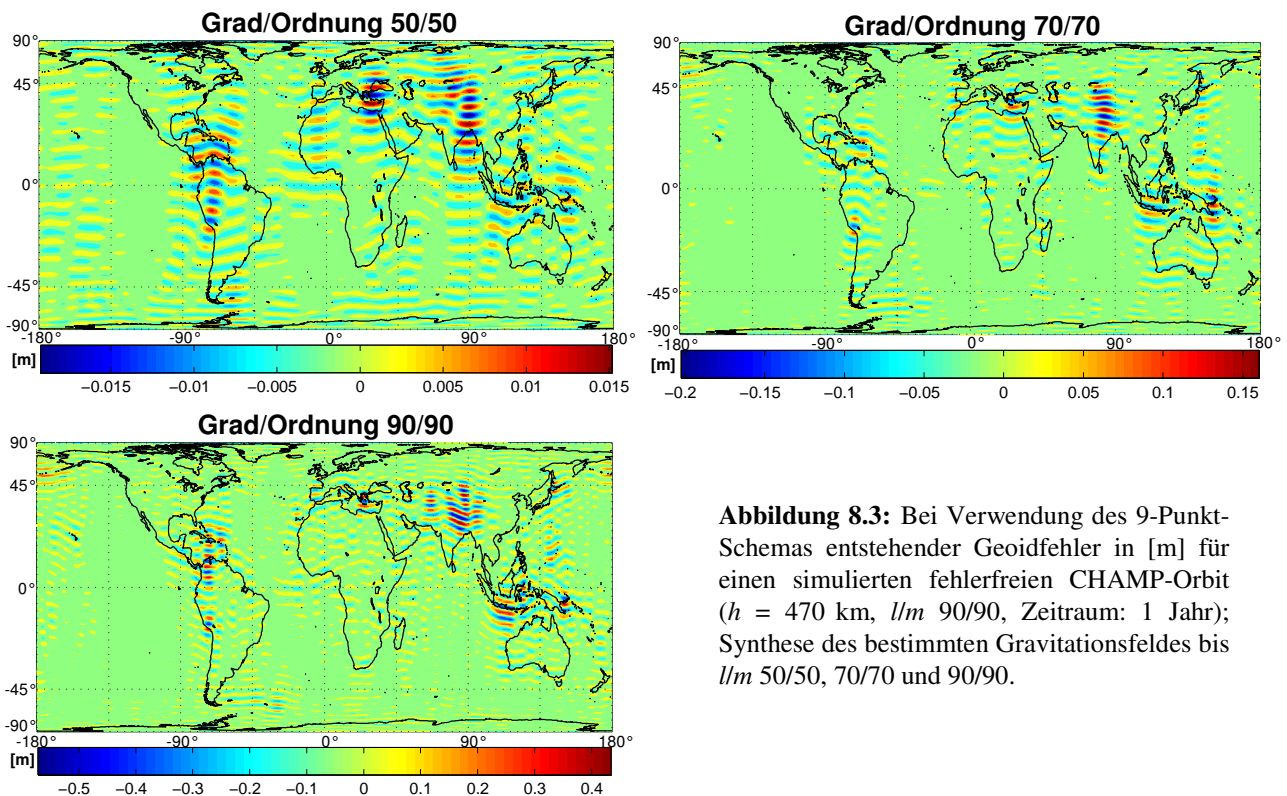


**Abbildung 8.2:** RMS pro Breitengrad des Modellfehlers (in [m]) für Entwicklungen des analysierten Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 70/70 (links) und Grad/Ordnung 90/90 (rechts); oben: bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren für einen simulierten CHAMP-Orbit mit  $h = 470$  km,  $l/m = 90/90$ , Zeitraum: 1 Jahr; unten: für simulierte CHAMP-Orbits mit ( $h = 470$  km,  $l/m = 90/90$ ), ( $h = 470$  km,  $l/m = 360/360$ ), ( $h = 250$  km,  $l/m = 90/90$ ) und ( $h = 250$  km,  $l/m = 360/360$ ) bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas.

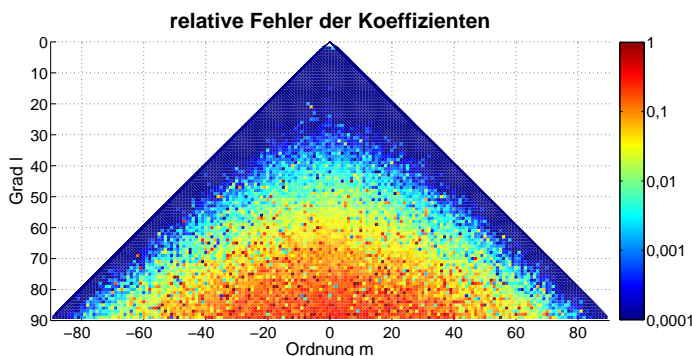
Insgesamt lassen sich die wichtigsten Erkenntnisse bezüglich des Modellfehlers wie folgt zusammenfassen:

- Bei den exakten Differentiationsfiltern muss für eine ausreichend gute Approximation mindestens ein 7-Punkt-Schema gewählt werden.

- Das 9-Punkt-Schema hat die besten Approximationseigenschaften aller getesteten Differentiatoren und führt somit zum geringsten Modellfehler; deshalb sollte das 9-Punkt-Schema verwendet werden.
- Vor allem die ausgleichenden Differentiatoren, aber auch die Spline-on-Spline-Interpolation führen aufgrund zu starker Glättung mit Modellfehlern im dm-Bereich und Maximalfehlern im m-Bereich zu unbefriedigenden Ergebnissen.
- Bis Grad 50 ist der Geoidfehler (beim 9-Punkt-Schema) mit 2 mm recht gering; für höhere Entwicklungen sind hingegen schon größere Abweichungen zu erwarten (2–3 cm bis Grad 70, 8–9 cm bis Grad 90).
- Vor allem in Gebieten stärkeren Gravitationsignals (z.B. Himalaya) sind größere Abweichungen zu erwarten.
- Auch wenn die Modellfehler (beim 9-Punkt-Schema) deutlich unter der mit CHAMP angezielten Genauigkeit liegen, sind sie trotzdem relativ groß. Der Grund liegt in der mit  $\Delta t = 30$  s relativ geringen Abtastung.
- Aliasingeffekte bzw. Abbruchfehler wirken sich bei einer tieferen Bahn stärker aus, stellen aber insgesamt aufgrund ihrer relativ geringen Größe kein Problem dar.
- Bei höheren Auflösungen sind vor allem die Koeffizienten niedrigerer Ordnung von größeren Fehlern betroffen.



**Abbildung 8.3:** Bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas entstehender Geoidfehler in [m] für einen simulierten fehlerfreien CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km,  $l/m$  90/90, Zeitraum: 1 Jahr); Synthese des bestimmten Gravitationsfeldes bis  $l/m$  50/50, 70/70 und 90/90.



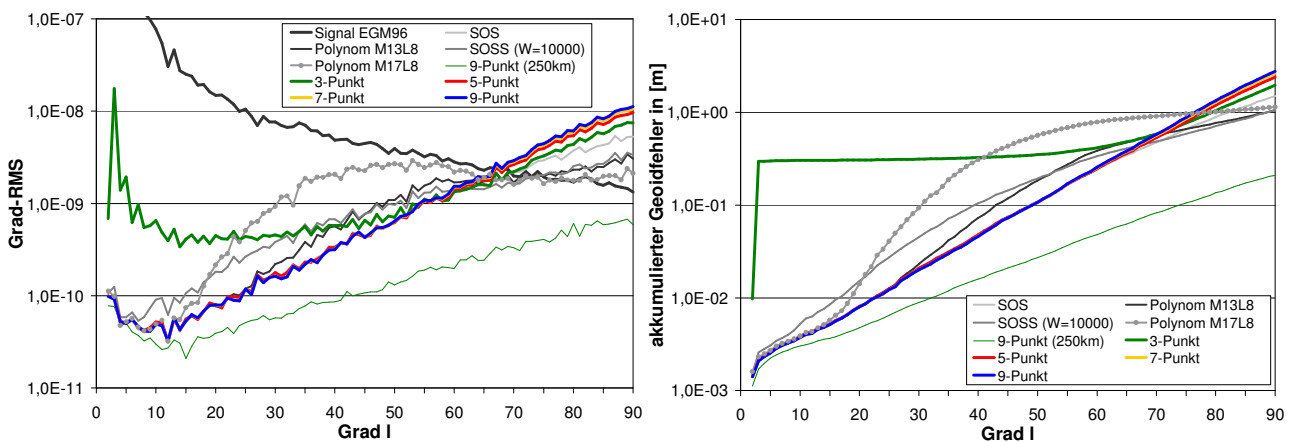
**Abbildung 8.4:** Relativer Fehler der Koeffizienten bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas für einen simulierten fehlerfreien CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km,  $l/m$  90/90, Zeitraum: 1 Jahr).

## 8.2 Untersuchung des Gesamtfehlers

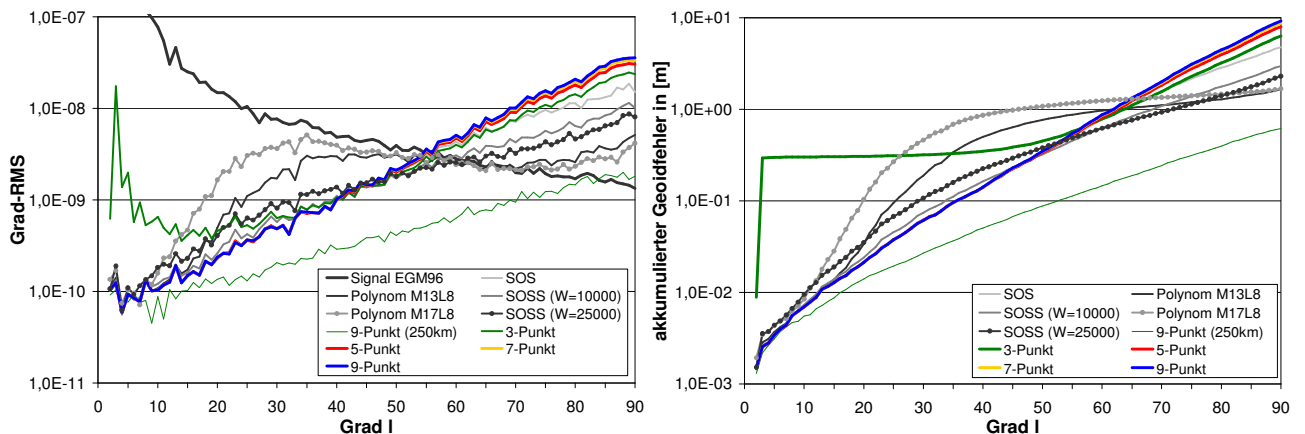
In diesem Abschnitt soll der Gesamtfehler bei der Gravitationsfeldanalyse aus kinematischen Bahnen untersucht werden. Der Gesamtfehler setzt sich hier aus dem zuvor beschriebenen, durch die Approximation und den Abbruchfehler bestimmten Modellfehler sowie den durch Messrauschen der kinematischen Bahn entstehenden Fehlern zusammen. Streng genommen müsste der Gesamtfehler noch weitere Fehlerquellen wie beispielsweise die Messfehler des Akzelerometers und Fehler bei der Modellierung von Gezeiten und der Erdorientierung mit einschließen. Bei der anvisierten Genauigkeit des Beschleunigungsansatzes für CHAMP-Daten sind jedoch diese Fehler gegenüber dem

durch das GPS-Rauschen erzeugten Einflusses aller Voraussicht nach als von geringerer Ordnung anzusehen und werden deshalb im folgenden vernachlässigt. Die Genauigkeit der Akzelerometerdaten liegt gemäß den CHAMP-Anforderungen im Bereich von  $3 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$  in dem für CHAMP interessanten Frequenzbereich ( $10^{-4}$ – $10^{-1} \text{ Hz}$ ) und liegt somit Größenordnungen unter den Genauigkeiten der aus den kinematischen Orbits bestimmten Beschleunigungen (Größenordnung  $10^{-5} \text{ m/s}^2$ , s. Kapitel 6); die Genauigkeiten der Gezeitenmodelle können als ähnlich betrachtet werden. Die Erdorientierungsdaten werden hauptsächlich für die Bestimmung der Bahn benötigt und können deshalb als ein Teil des Bahnfehlers betrachtet werden.

Abbildung 8.5 und Abbildung 8.6 zeigen den bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren entstehenden Gesamtfehler als Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler für die beiden Rauschsznarien ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ) und ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,9$ ). Wie zu sehen ist, ist der Verlauf der Fehlerkurven bei den exakten Differentiationsverfahren ( $n$ -Punkt-Schema und SOS) — ausgenommen das 3-Punkt-Schema — bis zum Schnitt von Fehler- und Signalkurve (für  $\rho = 0,99$  ca. bei Grad 70, bei  $\rho = 0,9$  ca. bei Grad 55) fast identisch, darüber zeigt sich eine leichte Fehlerabschwächung bei den kürzeren Interpolationsschemen sowie bei der Spline-Interpolation. Die ausgleichenden Interpolationsverfahren führen, je nach Stärke der Glättung, in den Bereichen ab Grad 10–30 bis zum Schnitt von Signal- und Fehlerkurve zu einem erhöhten Fehler gegenüber den exakten Interpolationsverfahren. Dies ist auf die beim Modellfehler sichtbare schlechte Approximation durch zu starke Glättung zurückzuführen. Eine deutliche Abschwächung der Fehlerkurven gegenüber denjenigen der exakten Interpolationsverfahren ist erst für höhere Grade sichtbar, in denen die Fehler schon über dem Signal liegen und die somit ohnehin als nicht bestimmt gelten. Die ausgleichenden Interpolationsverfahren führen also insgesamt nicht zu einer Verbesserung, sondern wegen der Signalglättung zu einer Verschlechterung im signifikant bestimmbar Bereich des Gravitationsfeldes und sollten deshalb nicht verwendet werden. Von den exakten Interpolationsverfahren, die im signifikant bestimmbar Bereich ähnliche Ergebnisse liefern, ist aufgrund der besseren Approximation (geringerer Modellfehler), die bei langen Beobachtungsreihen oder tieferen Bahnen von Bedeutung sein kann, das 9-Punkt-Schema vorzuziehen.



**Abbildung 8.5:** Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler in [m] des bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren erzeugten Gesamtfehlers für einen simulierten verrauschten CHAMP-Orbit ( $h = 470 \text{ km}$ ,  $l/m$  90/90, Zeitraum: 1 Jahr, Rauschsznario:  $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ). Im Vergleich dazu der Gesamtfehler bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas für einen simulierten verrauschten CHAMP-Orbit mit einer Bahnhöhe von  $h = 250 \text{ km}$  (Rauschsznario:  $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ).

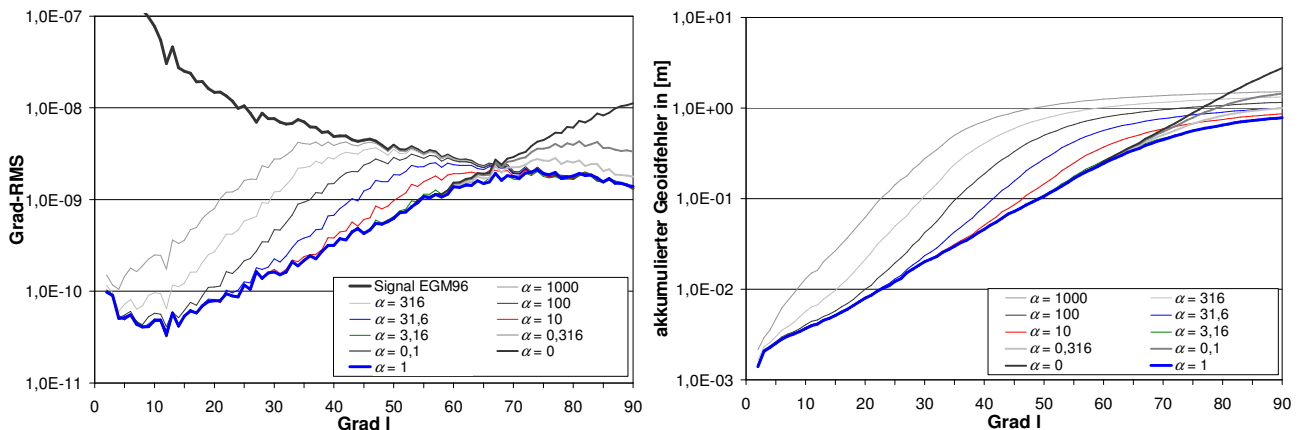


**Abbildung 8.6:** Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler in [m] des erzeugten Gesamtfehlers für das Rauschsznario ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,9$ ).

Die Geoidfehler liegen für das optimistischere Rauschszenario mit der Korrelation  $\rho = 0,99$  bei einer Rekonstruktion bis Grad/Ordnung 50/50 bei 10,7 cm und bis Grad/Ordnung 70/70 bei 57,7 cm und liegen somit im Bereich dessen, was für die größeren Bahnhöhen zu Beginn der CHAMP-Mission erwartet werden kann (s. EIGEN-2). Für das pessimistischere Rauschszenario können diese Werte nicht ganz erreicht werden, der Geoidfehler bis Grad 50 liegt hier bei 34,6 cm, eine Entwicklung bis Grad 70 erscheint nicht sinnvoll, da hier bereits die Fehler größer als das Signal selbst sind.

In Abbildung 8.5 und Abbildung 8.6 sind des Weiteren die Fehlerkurven für eine Bahnhöhe von  $h = 250$  km (entsprechend dem Ende der CHAMP-Mission) aufgetragen. Deutlich sichtbar sind die im Vergleich zu  $h = 470$  km wesentlich kleineren Fehler, welche eine Folge des stärkeren Signals und einer höheren Sensitivität für kürzere Wellenlängen des Gravitationsfeldes in einer niedrigeren Bahnhöhe sind. Die Geoidfehler betragen jetzt bei einer Rekonstruktion bis Grad 50 nur noch 2,7 cm (bei  $\rho = 0,99$ ) bzw. 8,7 cm (bei  $\rho = 0,9$ ) und für eine Rekonstruktion bis Grad 70 dann 8,2 cm (bei  $\rho = 0,99$ ) bzw. 24,1 cm (bei  $\rho = 0,9$ ). Für das pessimistischere Rauschszenario ( $\rho = 0,9$ ) ist jetzt eine Auflösung bis fast Grad 90 möglich, für das optimistischere Rauschszenario mit  $\rho = 0,99$  führt eine Rekonstruktion des Geoids bis Grad 90 auf eine Genauigkeit von 20,9 cm, es können sogar noch Gravitationsfeldanteile höheren Grades signifikant aufgelöst werden.

Abbildung 8.7 zeigt anhand der Grad-RMS sowie der akkumulierten Geoidfehler, wie sich unterschiedlich starke Regularisierungen nach der Kaula-Regel auf die Gravitationsfeldlösungen auswirken. Als Beispiel dient ein simulierter Orbit mit der Bahnhöhe  $h = 470$  km und dem Rauschszenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ), der mit dem 9-Punkt-Schema analysiert wurde. Gut sichtbar ist, wie die Grad-RMS-Kurve in dem Bereich, in dem sie über der Signalkurve liegt (Grad  $l > 65$ ), für ansteigende Regularisierungsparameter  $\alpha$  (hier:  $\alpha = 0,1$  und  $\alpha = 0,316$ ) abgeschwächt wird. Eine optimale Regularisierung wird für den Parameter  $\alpha = 1$  erreicht. Hier werden die Grad-RMS der Anteile für Grad  $l > 75$  in die Größe des Signals gebracht, die Fehlerkurve der Anteile des Bereichs zwischen Grad 60 und 75 kann gleichzeitig unter die Signalkurve und unter die Fehlerkurve der nicht regularisierten Lösung ( $\alpha = 0$ ) geschoben werden. Dies bedeutet, dass offensichtlich noch bis zu Grad 75 signifikante Anteile in der Gravitationsfeldlösung vorhanden sind, die durch die Regularisierung hervorgehoben werden können. Für die darüber liegenden Anteile ist durch die Regularisierung kein großer Gewinn mehr möglich, da die Fehlerkurve nicht mehr unter die Signalkurve gebracht werden kann; die Signalanteile sind hier nicht mehr signifikant.

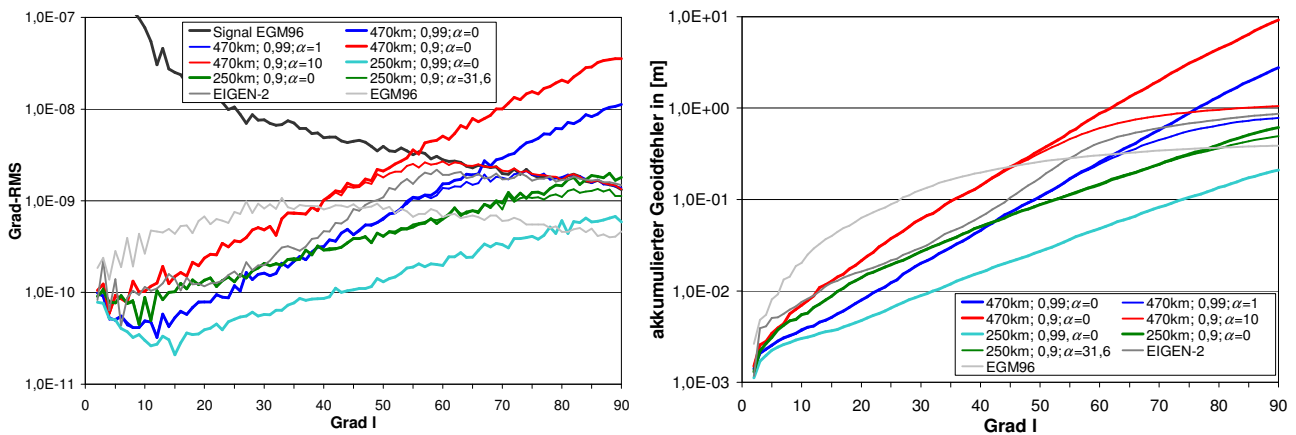


**Abbildung 8.7:** Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler in [m] für unterschiedlich stark regularisierte (Regularisierungsparameter  $\alpha$ ) Gravitationsfeldlösungen aus einem simulierten, verrauschten CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km,  $l/m$  90/90, Zeitraum: 1 Jahr, Rauschszenario:  $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ); Differentiator: 9-Punkt-Schema.

Für größere Regularisierungsparameter  $\alpha$  wird mit ansteigendem Wert die glättende Wirkung der Regularisierung sichtbar. Die Gravitationsfeldlösung wird immer stärker gegen die Nulllösung gedrückt, was sich im stärker werdenden Anstieg der Fehlerkurven im Bereich  $l < 65$  äußert, die beispielsweise für den Parameter ( $\alpha = 1000$ ) schon ab Grad 45 identisch mit der Signalkurve ist. Um ein optimales Ergebnis bei der Regularisierung zu erzielen, muss also darauf geachtet werden, dass diese nicht zu stark gewählt wird.

In Abbildung 8.8 sind für das Beispiel des 9-Punkt-Schemas noch einmal die erreichbaren Genauigkeiten (als Grad-RMS sowie akkumulierte Geoidfehler) für CHAMP-Orbits unterschiedlicher Bahnhöhe ( $h = 470$  km/250 km  $\hat{=}$  Anfang/Ende der Mission) und unterschiedlicher Genauigkeit ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99/0,9$ ) zusammengefasst, die dünnen Linien geben die zugehörigen optimalen regularisierten Lösungen an. Wie zu sehen ist, liegt jeweils zwischen den Grad-RMS zweier Lösungen für die gleiche Bahnhöhe bei unterschiedlichem Rauschen eine halbe Größenordnung. Das Rauschen der Bahn hat also eine starke Auswirkung auf die tatsächlich erreichbare Genauigkeit. Für unterschiedliche Bahnhöhen machen sich das stärkere Gravitationsfeldsignal und die höhere Sensitivität für kurzwelligere Anteile in einer niedrigeren Bahn deutlich bemerkbar. Die Grad-RMS-Kurve für  $h = 250$  km verläuft nicht nur deutlich unterhalb derjenigen für  $h = 470$  km, sondern sie steigt auch deutlich flacher an. Für Bahnhöhen in  $h = 470$  km ist, je nach Genauigkeit der Bahn, eine Auflösung des Gravitationsfeldes bis Grad 55–65 möglich, in einer Bahnhöhe von

$h = 250$  km kann eine Auflösung von Grad 80 bis über 90 hinaus erreicht werden. Durch Regularisierung kann die Auflösung um ca. 10–15 Grade erhöht werden, in der Bahnhöhe  $h = 250$  km ist für die Korrelation  $\rho = 0,99$  durch Regularisierung kein Genauigkeitsgewinn mehr möglich. Bezüglich der Regularisierung ist auch erkennbar, dass für eine geringere Korrelation der Bahnfehler (also größere relative Bahnfehler) aufgrund des höheren Rauschens der Beschleunigungen eine stärkere Regularisierung für ein optimales Ergebnis notwendig ist. Zusätzlich sind in Abbildung 8.8 auch noch die Fehlerkurven (Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler) des besten Gravitationsfeldmodells vor Beginn der Satellitenmissionen, EGM96 und des ersten CHAMP-only-Modells des GFZ Potsdam, EIGEN-2, dargestellt. Diese wurden aus dem Vergleich zum inzwischen verfügbaren, wesentlich genaueren GRACE-Modell EIGEN-GRACE02S (Reigber et al., 2005a) bestimmt. Gegenüber dem EGM96-Modell scheint mit CHAMP also, je nach Bahngenauigkeit, eine Verbesserung des Gravitationsfeldes für die anfängliche Bahnhöhe von  $h = 470$  km bis Grad 40–55 möglich und für eine Bahnhöhe am Ende,  $h = 250$  km, eine Verbesserung bis Grad 60–80. Der Vergleich der Ergebnisse für eine Bahnhöhe von  $h = 470$  km mit EIGEN-2, welches zwar aus CHAMP-Daten etwas geringerer Bahnhöhe (400–450 km), dafür aber eines kürzeren Zeitraumes (6 Monate) bestimmt wurde, zeigt, dass EIGEN-2 genau zwischen den Ergebnissen für die beiden Rauschszenerien ( $\rho = 0,99/0,9$ ) liegt. Die mit CHAMP anvisierte Genauigkeit sollte also erreicht werden können, und die beiden Rauschszenerien beschreiben eine untere und obere Grenze dessen, was erwartet werden kann. Es sollte an dieser Stelle angemerkt werden, dass EIGEN-2, wie in Abbildung 8.8 sichtbar, regularisiert ist und deshalb mit den regularisierten Simulationsergebnissen verglichen werden sollte. Die zu erwartenden Geoidgenauigkeiten liegen, je nach Bahngenauigkeit, für eine Bahnhöhe  $h = 470$  km für eine Auflösung bis Grad 50 bei 10–35 cm und für eine Auflösung bis Grad 70 zwischen 45–85 cm (regularisiert), für  $h = 250$  km sind für eine Auflösung bis Grad 50 ca. 2–9 cm und für eine Auflösung bis Grad 70 ca. 8–24 cm zu erwarten.



**Abbildung 8.8:** Die Gesamtfehler von Gravitationsfeldlösungen (Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler in [m]) für simulierte CHAMP-Orbits mit unterschiedlichen Bahnhöhen ( $h = 250$  km/470 km) und Korrelationen ( $\rho = 0,9/0,99$ ) im Vergleich; die dünnen Linien zeigen die zugehörigen optimal regularisierten Lösungen (Parameter  $\alpha$ ); Differentiator: 9-Punkt-Schema. Im Vergleich dazu die geschätzten Fehler des besten Modells vor der CHAMP-Ära, EGM96, und des vom GFZ bestimmten CHAMP-only-Modells EIGEN-2.

In Tabelle 8.3, Tabelle 8.4 und Tabelle 8.5 ist der RMS-Wert, der (mit  $\cos(\phi)$ ) gewichtete RMS-Wert des Geoidfehlers (auf dem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter) sowie der maximale Geoidfehler für Entwicklungen bis Grad/Ordnung 50/50, 70/70 und 90/90 für die verschiedenen Simulationen (unterschiedliche Differentiationsverfahren, Bahnhöhen, Rauschverhältnisse und Regularisierungsparameter) angegeben. Abgesehen vom 3-Punkt-Schema sind der gewichtete und ungewichtete RMS-Wert sehr ähnlich, allerdings fällt der ungewichtete RMS-Wert immer etwas kleiner aus. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Geoidfehler in den polnahen Gebieten etwas kleiner ausfällt.

Bei den Entwicklungen bis Grad 50/50, für welche das Gravitationsfeld signifikant bestimmbar ist, ist zu sehen, dass die exakten Interpolationsverfahren (bis auf das 3-Punkt-Schema) fast identische Ergebnisse liefern, während die ausgleichenden Interpolationsverfahren bedingt durch Signalfilterung zu deutlich schlechteren Ergebnissen führen. Da das Gravitationsfeld bis Grad 50 signifikant bestimmbar ist, ist durch Regularisierung kaum ein Genauigkeitsgewinn zu verzeichnen. Als Vergleich sind auch hier noch die Geoidfehler für das EGM96 und EIGEN-2 aufgeführt. Bis auf das Gravitationsfeld aus der Simulation mit der Bahnhöhe von 470 km und der Korrelation  $\rho = 0,9$  können die Genauigkeit des EIGEN-2 und Verbesserungen gegenüber dem EGM96 erreicht werden. Auffällig beim EGM96 sind der große maximale Geoidfehler von 3,348 m und der gegenüber dem gewichteten RMS-Wert deutlich höhere ungewichtete RMS-Wert. Diese sind wahrscheinlich auf lückenhafte Datensätze und fehlende Daten an den Polen zurückzuführen.

Bei einer Entwicklung bis Grad 70 ist für die Simulationen mit  $h = 470$  km,  $\rho = 0,99$  auf den ersten Blick ein Genauigkeitsgewinn der ausgleichenden Interpolationsverfahren gegenüber dem 9-Punkt-Schema erkennbar. Allerdings steigt der maximale Fehler im Vergleich dazu stark an, was auf eine Glättung in Bereichen starken Gravitationssignals schließen lässt. Auch das 5- und 7-Punkt-Schema sowie die Spline-Interpolation liefern jetzt etwas bessere Werte als das 9-Punkt-Schema. Dies ist aber auf eine stärkere Glättung in den höheren Frequenzbereichen der Beschleunigungen

zurückzuführen. Da die Grad-RMS-Kurve bei Grad 70 für eine Bahnhöhe von  $h = 470$  km bereits über der Signalkurve liegt, also das Gravitationsfeld bei Grad 70 nicht mehr signifikant bestimmbar ist, ergibt sich im Prinzip gegenüber dem 9-Punkt-Schema kein wirklicher Genauigkeitsgewinn. Ein Genauigkeitsgewinn ist jetzt aber durch Regularisierung zu erreichen, da dadurch die Grad-RMS-Kurve unterhalb (oder zumindest auf) der Signalkurve verläuft. Dies gilt jedoch nicht für eine Bahnhöhe von  $h = 250$  km, für welche aufgrund des guten Signal-zu-Rausch-Verhältnisses keine signifikante Genauigkeitssteigerung durch Regularisierung möglich ist. Die Genauigkeiten des EIGEN-2 können abgesehen für den Fall  $h = 470$  km,  $\rho = 0,9$  erreicht werden, eine Verbesserung gegenüber dem EGM96 ist nur bei niedrigeren Bahnhöhen möglich.

| Differentiator | 3-Pkt. | 5-Pkt. | 7-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | SOS   | M13L8 | SOSS  | 9-Pkt. | 9-Pkt. |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| Höhe $h$ [km]  | 470    |        |        |        |        |       |       |       | 470    |        |
| Korrelation    | 0,99   |        |        |        |        |       |       |       | 0,9    |        |
| $\alpha$       | 0      |        |        |        | 1      | 0     |       |       | 0      | 10     |
| RMS [m]        | 0,471  | 0,102  | 0,102  | 0,103  | 0,100  | 0,103 | 0,174 | 0,182 | 0,330  | 0,303  |
| gew. RMS [m]   | 0,348  | 0,107  | 0,107  | 0,107  | 0,106  | 0,109 | 0,183 | 0,193 | 0,346  | 0,321  |
| Maximum [m]    | 1,556  | 0,503  | 0,508  | 0,510  | 0,486  | 0,493 | 1,131 | 1,409 | 1,435  | 1,573  |

| 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | EGM96 | EIGEN-2   |
|--------|--------|--------|-------|-----------|
| 250    | 250    |        | -     | 400-450   |
| 0,99   | 0,9    |        | -     | unbekannt |
| 0      | 0      | 31,62  | -     | unbekannt |
| 0,025  | 0,082  | 0,083  | 0,339 | 0,189     |
| 0,027  | 0,087  | 0,088  | 0,258 | 0,171     |
| 0,124  | 0,396  | 0,369  | 3,348 | 1,034     |

**Tabelle 8.3:** RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren für unterschiedliche simulierte verrauschte CHAMP-Orbits (Zeitraum: 1 Jahr). Entwicklung des analysierten Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 50/50. Im Vergleich dazu EGM96 und EIGEN-2.

| Differentiator | 3-Pkt. | 5-Pkt. | 7-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | SOS   | M13L8 | SOSS  | 9-Pkt. | 9-Pkt. |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| Höhe $h$ [km]  | 470    |        |        |        |        |       |       |       | 470    |        |
| Korrelation    | 0,99   |        |        |        |        |       |       |       | 0,9    |        |
| $\alpha$       | 0      |        |        |        | 1      | 0     |       |       | 0      | 10     |
| RMS [m]        | 0,752  | 0,498  | 0,527  | 0,542  | 0,417  | 0,436 | 0,516 | 0,446 | 1,848  | 0,761  |
| gew. RMS [m]   | 0,583  | 0,532  | 0,562  | 0,577  | 0,448  | 0,474 | 0,564 | 0,485 | 1,991  | 0,822  |
| Maximum [m]    | 2,949  | 2,173  | 2,336  | 2,418  | 1,789  | 2,038 | 5,477 | 4,266 | 8,362  | 5,932  |

| 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | EGM96 | EIGEN-2   |
|--------|--------|--------|-------|-----------|
| 250    | 250    |        | -     | 400-450   |
| 0,99   | 0,9    |        | -     | unbekannt |
| 0      | 0      | 31,62  | -     | unbekannt |
| 0,076  | 0,224  | 0,219  | 0,452 | 0,608     |
| 0,082  | 0,241  | 0,239  | 0,341 | 0,602     |
| 0,409  | 1,093  | 1,311  | 5,536 | 6,204     |

**Tabelle 8.4:** RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler bei Verwendung verschiedener Differentiationsverfahren für unterschiedliche simulierte verrauschte CHAMP-Orbits (Zeitraum: 1 Jahr). Entwicklung des analysierten Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 70/70. Im Vergleich dazu EGM96 und EIGEN-2.

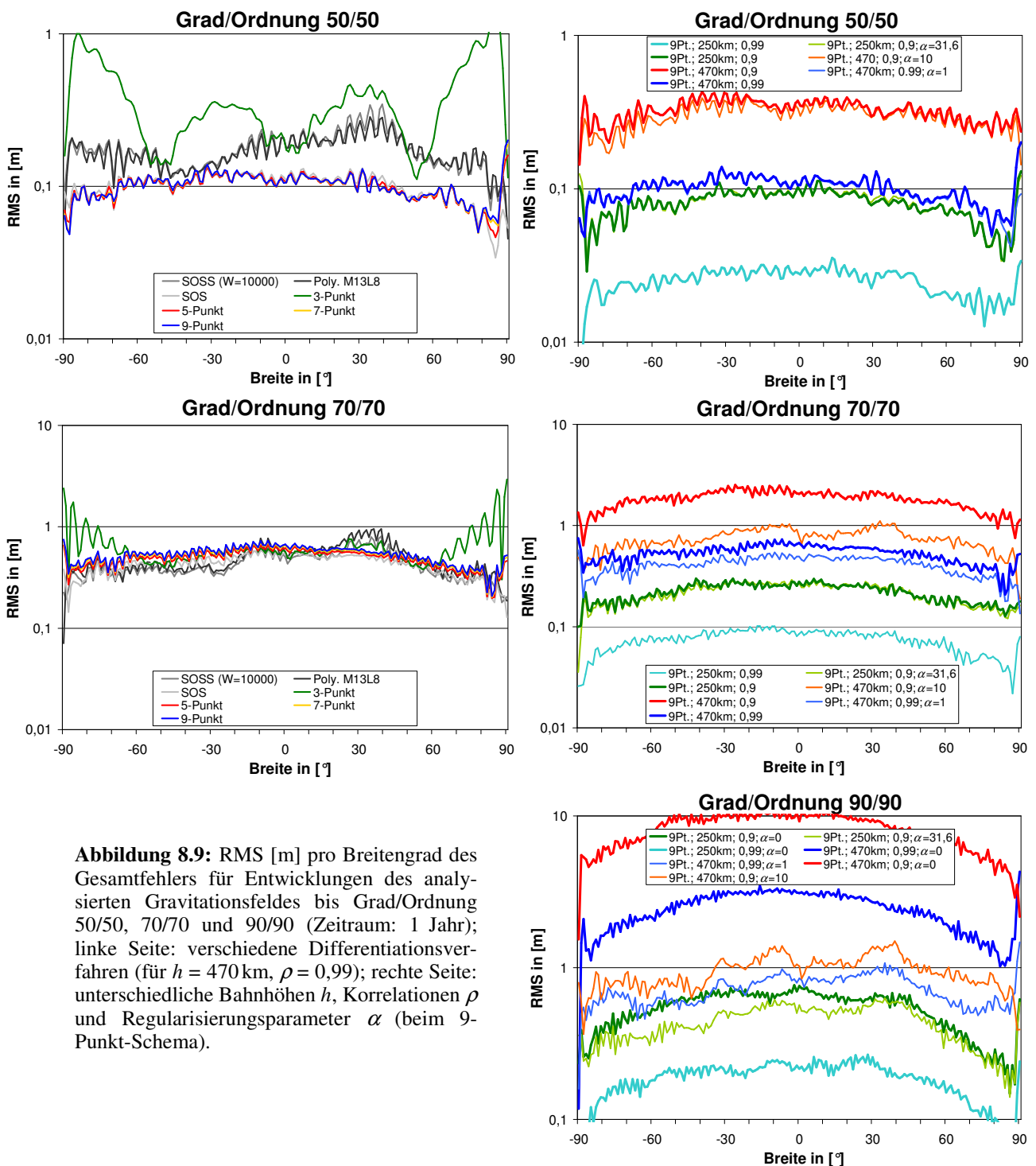
| Differentiator | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | 9-Pkt. | EGM96 | EIGEN-2   |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-----------|
| Höhe $h$ [km]  | 470    | 470    | 470    | 470    | 250    | 250    | 250    | -     | 400-450   |
| Korrelation    | 0,99   | 0,99   | 0,9    | 0,9    | 0,99   | 0,9    | 0,9    | -     | unbekannt |
| $\alpha$       | 0      | 1      | 0      | 10     | 0      | 0      | 31,6   | -     | unbekannt |
| RMS [m]        | 2,518  | 0,738  | 8,356  | 0,978  | 0,192  | 0,558  | 0,449  | 0,502 | 0,891     |
| gew. RMS [m]   | 2,758  | 0,781  | 9,168  | 1,051  | 0,209  | 0,614  | 0,491  | 0,387 | 0,864     |
| Maximum [m]    | 13,141 | 4,912  | 44,460 | 7,849  | 1,215  | 3,041  | 3,260  | 6,043 | 8,728     |

**Tabelle 8.5:** RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler für simulierte verrauschte CHAMP-Orbits (Zeitraum: 1 Jahr) mit unterschiedlichen Bahnhöhen ( $h = 250$  km/470 km) und Korrelationen ( $\rho = 0,9/0,99$ ); Differentiator: 9-Punkt-Schema; Entwicklung des Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 90/90. Im Vergleich dazu EGM96 und EIGEN-2.

Bei Entwicklungen bis Grad 90 (Tabelle 8.5) dominiert bei einer Bahnhöhe von 470 km das Rauschen die Gravitationsfeldlösung sehr stark, was durch die starke Reduzierung des Geoidfehlers bei Regularisierung sichtbar wird. Auch für die stärker verrauschte Bahn ( $\rho = 0,9$ ) in der Bahnhöhe von 250 km ist jetzt durch Regularisierung eine

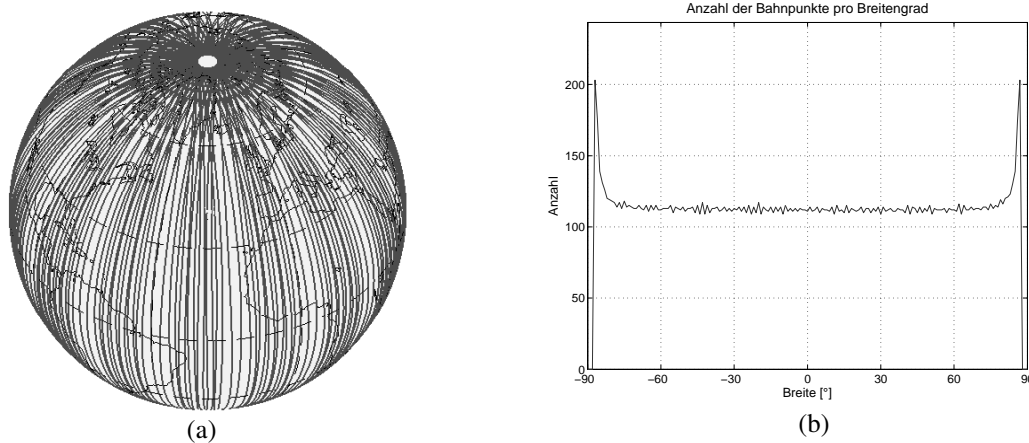
Reduzierung der Geoidfehler im cm-Bereich zu erkennen. Mit den regularisierten Lösungen können wiederum in etwa die Genauigkeiten des EIGEN-2 erreicht werden, eine Verbesserung gegenüber dem EGM96 ist nur noch bei einer Bahnhöhe von 250km und dem geringeren Rauschen von ( $\rho = 0,99$ ) möglich.

In Abbildung 8.9 sind die Geoidfehler pro Breitengrad für Rekonstruktionen des Geoids bis Grad/Ordnung 50/50, 70/70 und 90/90 dargestellt. Wie vermutet, fallen die Geoidfehler mit zunehmendem Betrag der Breite  $|\phi|$  etwas geringer aus. Dies ist wahrscheinlich auf die Bahnkonfiguration von CHAMP mit einer Inklination  $i \approx 87^\circ$  zurückzuführen, wie in Abbildung 8.10a,b) gezeigt. Die Bodenspur des Satelliten zeigt neben den relativ kleinen polaren Datenlücken in den Regionen für  $|\phi| > 80^\circ$  große Überlappungen, die zu sehr hohen Punktedichten (Abbildung 8.10b) in diesen Gebieten führen und damit zu einer besseren Schätzung des Gravitationsfeldes in diesen Bereichen. Außerdem zeigen sich gerade bei Verwendung der ausgleichenden Interpolationsverfahren wiederum wie auch bei der Untersuchung des Modellfehlers höhere Fehler in den Bereichen um  $\phi = -10^\circ$  und  $\phi = 35^\circ$ . Dies lässt darauf schließen, dass durch die ausgleichenden Interpolationsverfahren in diesen Bereichen Signal herausgefiltert wird. Auch bei der Regularisierung, vor allem bei einer Entwicklung bis Grad/Ordnung 90/90, ist auffällig, dass der Geoidfehler in diesen Breitenbereichen weniger reduziert werden kann. Dies liegt daran, dass durch die Regularisierung infolge der Verschiebung der Lösung in Richtung der Nulllösung bei den höheren Graden auch Signal herausgefiltert wird.

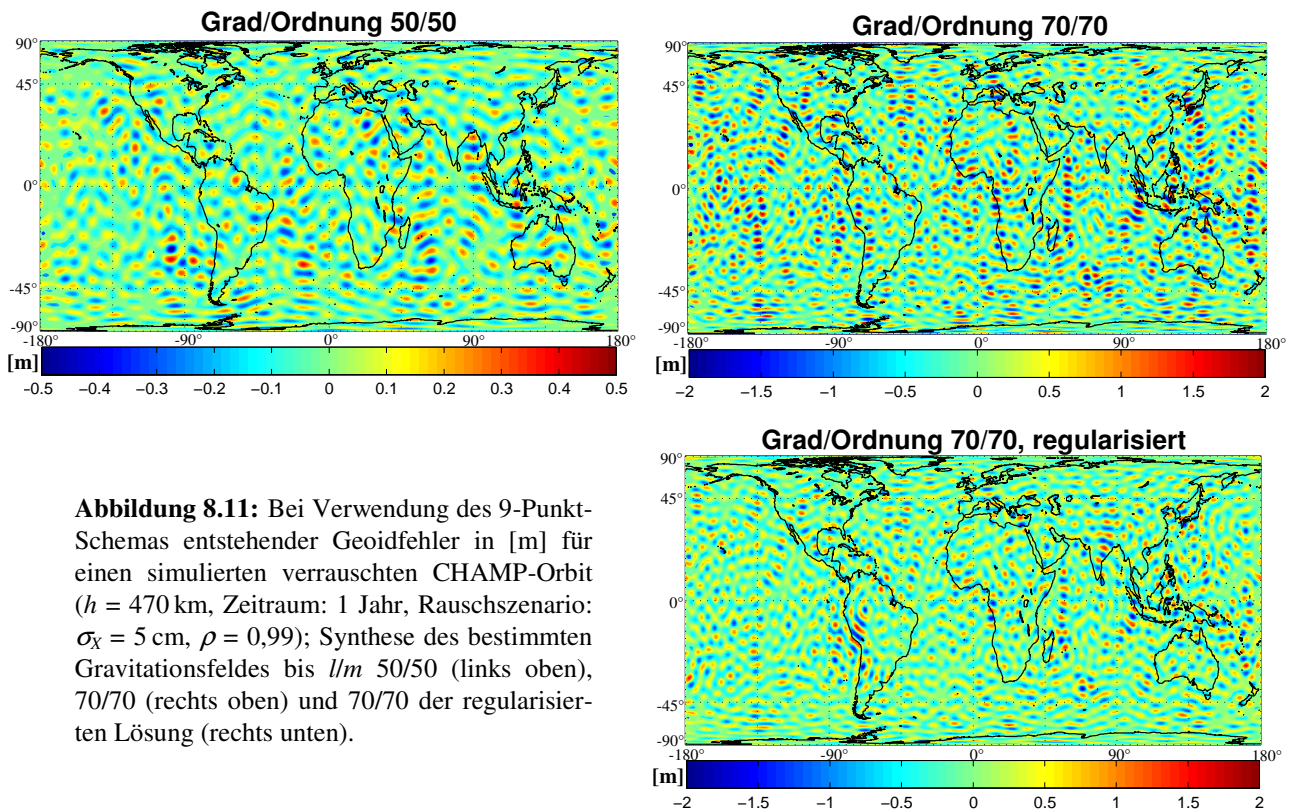


**Abbildung 8.9:** RMS [m] pro Breitengrad des Gesamtfehlers für Entwicklungen des analysierten Gravitationsfeldes bis Grad/Ordnung 50/50, 70/70 und 90/90 (Zeitraum: 1 Jahr); linke Seite: verschiedene Differenzierungsverfahren (für  $h = 470$  km,  $\rho = 0,99$ ); rechte Seite: unterschiedliche Bahnhöhen  $h$ , Korrelationen  $\rho$  und Regularisierungsparameter  $\alpha$  (beim 9-Punkt-Schema).

Abbildung 8.11 zeigt die geographische Verteilung der Geoidfehler am Beispiel der Analyse eines simulierten CHAMP-Orbits mit der Bahnhöhe  $h = 470$  km und dem Rauschscenario ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) mit dem 9-Punkt-Schema für Rekonstruktionen bis Grad/Ordnung 50/50 und 70/70 der unregularisierten Lösung sowie bis 70/70 für die regularisierte Lösung. Wie zu sehen ist, ist bei den nicht regularisierten Lösungen der Geoidfehler relativ gleichmäßig über die Erde verteilt. Die Regularisierung führt dazu, dass hauptsächlich die Fehler in den kürzeren Wellenlängen abgeschwächt werden. Allerdings macht sich gleichzeitig auch eine kleine Erhöhung des Geoidfehlers in Gebieten stärkeren Gravitationsfeldsignals wie dem Himalaya oder den Anden bemerkbar. Hier wird also bereits Signal durch die Regularisierung herausgefiltert. Die Ergebnisse der Regularisierung sind also mit Vorsicht zu verwenden.



**Abbildung 8.10:** a) Bodenspur und b) Anzahl der Bahnpunkte pro Breitengrad für einen simulierten CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km, Zeitraum: 1 Woche  $\cong$  20160 Bahnpunkte).

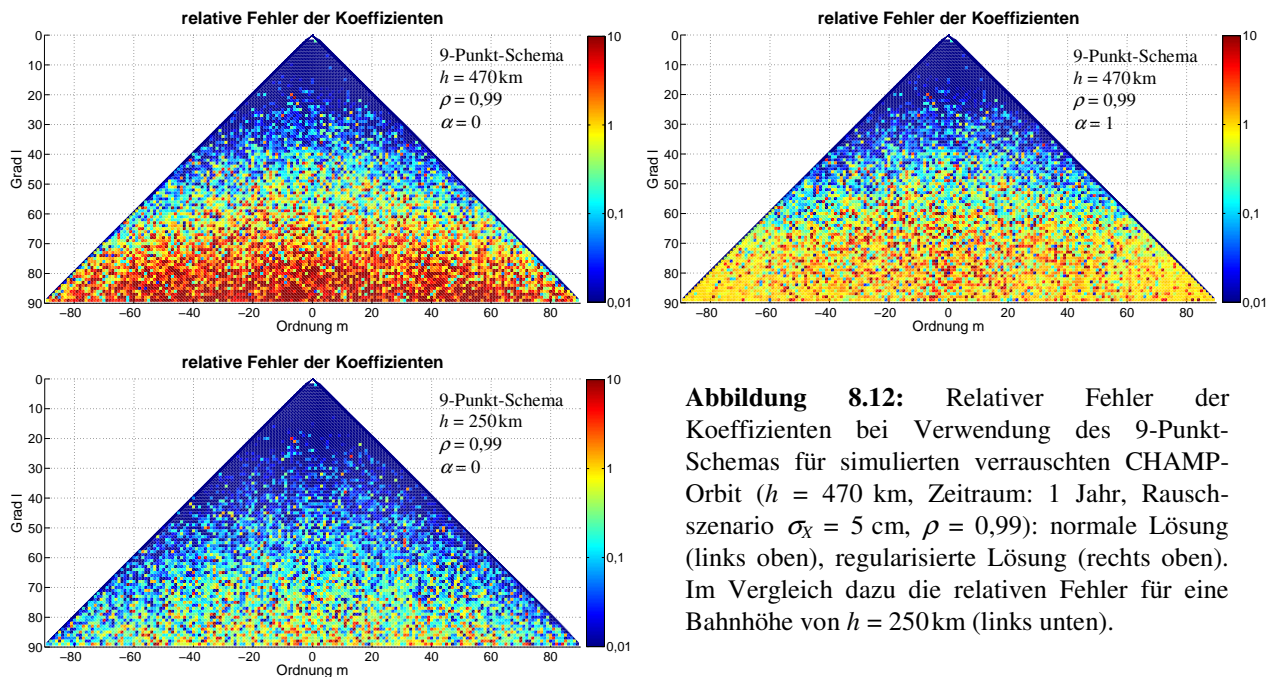


**Abbildung 8.11:** Bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas entstehender Geoidfehler in [m] für einen simulierten verrauschten CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km, Zeitraum: 1 Jahr, Rauschscenario:  $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ); Synthese des bestimmten Gravitationsfeldes bis  $l/m$  50/50 (links oben), 70/70 (rechts oben) und 70/70 der regularisierten Lösung (rechts unten).

Abbildung 8.12 zeigt die relativen Fehler der Koeffizienten der Gravitationsfeldlösungen bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas für CHAMP-Orbits in verschiedener Bahnhöhe ( $h = 470$  km und  $h = 250$  km) bei gleichen Rauschverhältnissen ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) sowie für die regularisierte Lösung der Bahnhöhe  $h = 470$  km. Wie bei dem Modellfehler ist auch bei dem Gesamtfehler zu beobachten, dass vor allem von den Koeffizienten höheren Grades diejenigen niedriger Ordnung schlecht bestimmt sind während diejenigen höherer Ordnung teilweise noch recht genau sind. Von der Regularisierung sind vor allem die Koeffizienten von Grad  $l > 60$  betroffen. Besonders diejenigen mit sehr großen relativen Fehlern  $> 1$  (also die nicht bestimmten Koeffizienten) werden gegen einen relativen Fehler von ca. 1 regularisiert.



Allerdings vergrößert sich auch der relative Fehler von ein paar gut bestimmten Koeffizienten höheren Grades (vor allem bei denjenigen höherer Ordnung) durch die Regularisierung. Bei einigen Koeffizienten höheren Grades und niedrigerer Ordnungen kann der relative Fehler durch die Regularisierung unter den Wert 1 geschoben werden. Der Vergleich der Ergebnisse für die Bahnhöhen 470 km und 250 km zeigt nochmals, wie stark die Genauigkeit durch die höheren Signalanteile auf einer tieferen Bahn gesteigert werden kann.



**Abbildung 8.12:** Relativer Fehler der Koeffizienten bei Verwendung des 9-Punkt-Schemas für simulierten verrauschten CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km, Zeitraum: 1 Jahr, Rausch-szenario  $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ): normale Lösung (links oben), regularisierte Lösung (rechts oben). Im Vergleich dazu die relativen Fehler für eine Bahnhöhe von  $h = 250$  km (links unten).

Zusammenfassend lässt sich also bezüglich des Gesamtfehlers feststellen:

- Innerhalb des signifikant bestimmbar Bereiches des Gravitationsfeldes, also für diejenigen Grade  $l$ , an denen die Grad-RMS-Kurve unterhalb der Signalkurve liegt, führen die exakten Interpolationsverfahren (bis auf das 3-Punkt-Schema) auf fast identische Genauigkeiten; aufgrund der besten Approximation ist das 9-Punkt-Schema vorzuziehen.
- Die Verwendung von ausgleichenden Interpolationsverfahren führt innerhalb des signifikant bestimmbar Bereiches des Gravitationsfeldes zu einer Verschlechterung infolge zu starker Glättung des Signals, eine Verbesserung ist nur für solche Auflösungen erkennbar, bei denen der Fehler ohnehin größer als das Signal selbst ist; die ausgleichenden Interpolationsverfahren sollten somit nicht verwendet werden.
- Es bestätigen sich somit die Aussagen, die anhand der bestimmten Beschleunigungen über die Differentiatoren in Kapitel 6 gemacht wurden: (i) das 9-Punkt-Schema hat die beste Approximation, (ii) bei den ausgleichenden Interpolationsverfahren steht dem Vorteil der Reduzierung des Rauschens auf den höheren Frequenzen eine Filterung des Signals auf den niedrigeren (und hier signifikanten) Frequenzen gegenüber.
- Die relative Bahngenauigkeit (beschrieben durch die Korrelation  $\rho$ ) bestimmt die erreichbare Genauigkeit des Gravitationsfeldes und beeinflusst diese sehr stark: zwischen den Ergebnissen für die höhere Korrelation  $\rho = 0,99$  ( $\hat{=}$  relativer Bahngenauigkeit  $\sigma_{\Delta X} = 0,7$  cm bei absoluter Bahngenauigkeit  $\sigma_x = 5$  cm) und den Ergebnissen für die niedrigere Korrelation  $\rho = 0,9$  ( $\hat{=}$   $\sigma_{\Delta X} = 2,2$  cm) liegt ca. eine halbe Größenordnung.
- Bedingt durch ein stärkeres Gravitationsfeldsignal und eine höhere Sensitivität für kurzwelligere Anteile ist bei einer niedrigerer Bahnhöhe  $h$  eine höhere Auflösung und Genauigkeit des Gravitationsfeldes möglich: es ergibt sich für  $h = 470$  km/250 km jeweils eine Auflösung bis Grad  $l = 65/ > 90$  bei einer Korrelation von  $\rho = 0,99$  und eine Auflösung bis Grad  $l = 55/80$  bei einer Korrelation von  $\rho = 0,9$ .
- Durch Regularisierung kann die Auflösung um ca. 10 Grade erhöht werden und die Genauigkeit der Koeffizienten im Bereich des Schnittes zwischen Grad-RMS- und Signalkurve etwas gesteigert werden. Allerdings kann bei der Regularisierung auch an manchen Stellen Signal verloren gehen.
- Die geographische Verteilung der Geoidfehler ist relativ gleichmäßig; allerdings werden diese in Richtung der Pole bedingt durch die Bahnkonfiguration von CHAMP etwas kleiner.
- Gegenüber dem besten Modell vor Beginn von CHAMP, dem EGM96, ist je nach Bahnhöhe und Genauigkeit eine Verbesserung der Koeffizienten im Bereich bis Grad 40–75 möglich.
- Die Simulationen für die Bahnhöhe  $h = 470$  km liegen in etwa in dem Genauigkeitsbereich des GFZ-Modells EIGEN-2, dass aus Daten einer ähnlichen Bahnhöhe (400–450 km) und eines ähnlichen Zeitraumes (6 Monate)

stammt. Der Beschleunigungsansatz sollte daher zu guten Ergebnissen führen, welche die an CHAMP gesetzten Ziele erfüllen sollten.

- Die Geoidfehler (gewichtete RMS-Werte) liegen, je nach relativer Bahngenauigkeit und Bahnhöhe, für eine Entwicklung bis Grad 50 zwischen 2,5 und 32cm und für eine Entwicklung bis Grad 70 zwischen 8 und 82cm.

### 8.3 Einfluss der Gewichtung

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie groß der Einfluss der Korrelationen der Beschleunigungsfehler auf die Gravitationsfeldschätzung ist. Dazu wurden Simulationsrechnungen für die beiden extremen Fälle (i) unkorrelierte Bahnfehler ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,0$ ) und (ii) stark korrelierte Bahnfehler ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ) durchgeführt. Verwendet wurde dazu ein 1-monatiger Orbit der Bahnhöhe  $h = 470 \text{ km}$ , der basierend auf dem EGM96 bis Grad/Ordnung 70/70 simuliert und anschließend bis zum selben Entwicklungsgrad analysiert worden ist. In Abbildung 8.13 sind die Genauigkeiten der Gravitationsfeldschätzungen für gewichtete (Korrelationen der Beschleunigungsfehler werden berücksichtigt) und ungewichtete Lösungen (Korrelationen der Beschleunigungsfehler werden vernachlässigt) in Form von Grad-RMS und akkumulierten Geoidfehlern dargestellt, in Tabelle 8.6 ist der RMS-Wert (normal und flächengewichtet) inklusive des maximalen Fehlers des Geoids auf dem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für unterschiedliche Entwicklungsgrade (bis Grad/Ordnung 30/30 und 50/50) angegeben. Aus diesen Fehlerdarstellungen lassen sich zwei grundlegende Feststellungen machen:

- Wie schon zuvor gezeigt, führt eine starke Korrelation der Bahnfehler infolge der dadurch wesentlich genauer bestimmbar Beschleunigungen zu einer wesentlich verbesserten Gravitationsfeldschätzung. Der Unterschied zwischen den Gravitationsfeldlösungen für unkorrelierte Bahnfehler und (stark) korrelierte Bahnfehler beträgt hier ca. eine Größenordnung.
- Gewichtete und die ungewichtete Lösungen weisen jeweils für unkorrelierte Bahnfehler und (stark) korrelierte Bahnfehler eine ähnliche Genauigkeit auf. Der Einfluss der Korrelationen der Beschleunigungsfehler ist also als gering für die Genauigkeit der Gravitationsfeldlösung einzuschätzen. Es ergibt sich daraus auch, wie bereits in Abschnitt 7.1.2 formuliert, eine Unabhängigkeit von der Stochastik (genauer: den Korrelationen) der kinematischen Bahnen.

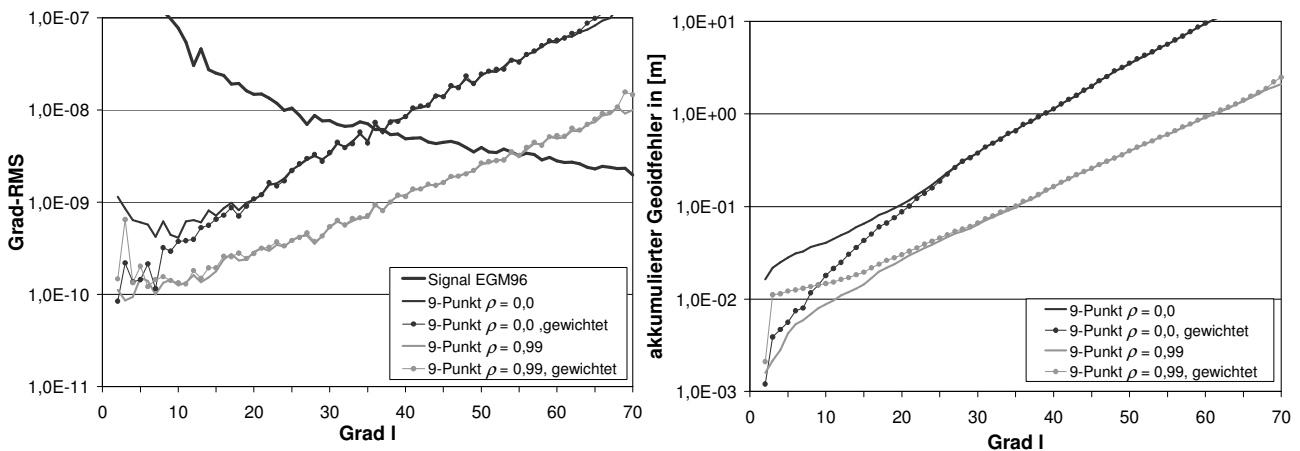


Abbildung 8.13: Vergleich (links als Grad-RMS, rechts als akkumulierte Geoidfehler) zwischen gewichteten und ungewichteten Lösungen bei unkorrelierten ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,0$ ) und korrelierten ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ) Bahnfehlern.

| Rauschen          | $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,0$ |       |          |        | $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,99$ |       |          |       |
|-------------------|---------------------------------------|-------|----------|--------|--|-------|----------|-------|
|                   | $L = 30$                              |       | $L = 50$ |        | $L = 30$                               |       | $L = 50$ |       |
| Entwicklungsgrad  |                                       |       |          |        |  |       |          |       |
| gewichtete Lösung | nein                                  | ja    | nein     | ja     | nein                                   | ja    | nein     | ja    |
| RMS [m]           | 0,381                                 | 0,389 | 3,262    | 3,679  | 0,061                                  | 0,065 | 0,371    | 0,375 |
| gew. RMS [m]      | 0,378                                 | 0,378 | 3,452    | 3,580  | 0,064                                  | 0,066 | 0,397    | 0,400 |
| Maximum [m]       | 1,441                                 | 1,474 | 14,011   | 16,095 | 0,234                                  | 0,244 | 1,581    | 1,617 |

Tabelle 8.6: Vergleich des Geoidfehlers (RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler) gewichteter und ungewichteter Lösungen bei unkorrelierten Bahnfehlern ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,0$ ) und korrelierten Bahnfehlern ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ) für unterschiedliche Entwicklungsgrade ( $L = 30, 50$ ).

Es zeigt sich sogar bei den Geoidfehlern für die Entwicklungsgrade  $L = 30, 50$  in Tabelle 8.6, dass die Vernachlässigung der Gewichtung eine minimal genauere Lösung als die gewichtete Schätzung erzeugt. Eine genauere Betrachtung von Abbildung 8.13 lässt aber erkennen, dass die Gewichtung bei den niedrigeren Graden ( $l < 20$ ) einen gewissen Einfluss

hat. Hier ergibt sich für die unkorrelierten Bahnfehler eine kleine Verbesserung durch die Gewichtung, während in der Gegenwart von korrelierten Bahnfehlern die Gewichtung zu einer leichten Verschlechterung führt. Geht man davon aus, dass das Rauschen kinematischer Bahnen korreliert ist, so ist demnach durch eine Berücksichtigung der Korrelationen der Beschleunigungsfehler keine Genauigkeitssteigerung zu erwarten. Aus diesem Grunde und auch der Tatsache, dass die Varianz-Kovarianz-Matrizen der kinematischen Orbits nicht bekannt sind, wird bei der Analyse realer kinematischer Bahnen in Kapitel 9 auf eine Gewichtung verzichtet.

## 8.4 Vergleich der unterschiedlichen Verfahren zur Analyse kinematischer Bahnen

Im Folgenden soll der Beschleunigungsansatz mit den in Kapitel 2 beschriebenen anderen Verfahren zur Analyse kinematischer Bahnen anhand Simulationsrechnungen verglichen werden. Verwendet wurde dazu, wie im vorhergehenden Abschnitt, ein 1-monatiger Orbit der Bahnhöhe  $h = 470$  km, der basierend auf dem EGM96 bis Grad/Ordnung 70/70 simuliert und anschließend bis zum selben Entwicklungsgrad analysiert worden ist. Die Integration der Variationsgleichungen wurde dabei nicht berücksichtigt, da das Randwertproblem für kurze Bahnbögen unter der Voraussetzung eines genügend kleinen Linearisierungsfehlers zu ähnlichen Ergebnissen führen sollte. Dies liegt, wie in Abschnitt 2.3.2.2 erläutert, daran, dass das Randwertproblem für kurze Bahnbögen eine linearisierte Version der Integration der Variationsgleichungen darstellt, welche den gleichen Beobachtungsvektor (die Koordinaten) besitzt. Der Umstand, dass es sich bei den zusätzlich zu schätzenden Unbekannten einmal um die Randwerte des Bahnboogens (beim Randwertproblem) und einmal um die Anfangswerte der Bahn (bei der Integration der Variationsgleichungen) handelt, sollte nur einen minimalen Einfluss auf die Genauigkeit haben. Zusätzlich zu dem in dieser Arbeit untersuchten Beschleunigungsansatz für „punktweise“ Beschleunigungen wurde auch noch derjenige für „mittlere“ Beschleunigungen in den Vergleich mit aufgenommen.

Für die numerische Differentiation beim „punktweisen“ Beschleunigungsansatz sowie bei der Energiebilanzmethode wurde das 9-Punkt-Schema verwendet, während beim Randwertproblem die Bahn in 90-minütige Bahnbögen ( $\approx 1$  Umlauf) unterteilt wurde, die mit einem Interpolationspolynom 5. Grades integriert wurden. Für die Bestimmung von mittleren Beschleunigungen wurde der Mittelwertfilter der Länge 5 eingesetzt.

### 8.4.1 Modellfehler

In Abbildung 8.14 ist der Fehler der einzelnen Verfahren dargestellt, der bei der Analyse eines unverrauschten Orbits entsteht. Bei allen Verfahren liegt dieser Modellfehler Größenordnungen unter der zu erwartenden Genauigkeit bei der Analyse von CHAMP HI-SST-Daten (s. Abschnitt 9.2), was darauf hindeutet, dass eine genügend gute Approximation der Verfahren (vgl. Abschnitt 2.4) gegeben ist. Eine Reduzierung der Modellfehler kann durch Auffinden eines noch besseren Verfahrens zur numerischen Differentiation (Beschleunigungsansätze, Energiebilanzmethode) bzw. zur numerischen Integration (Randwertproblem) sowie der Wahl eines höherwertigen Mittelwertfilters (Beschleunigungsansatz für punktweise Beschleunigungen) ermöglicht werden.

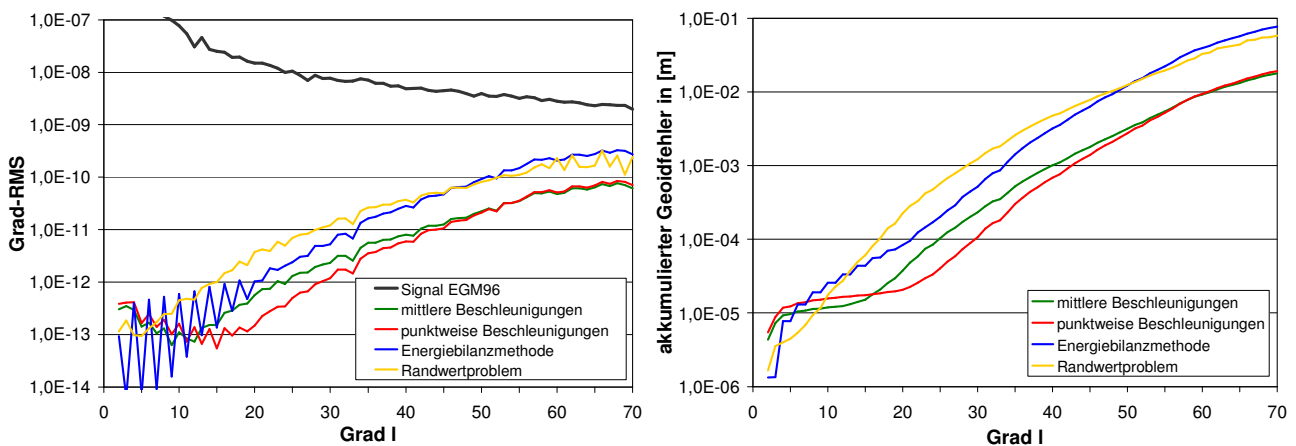
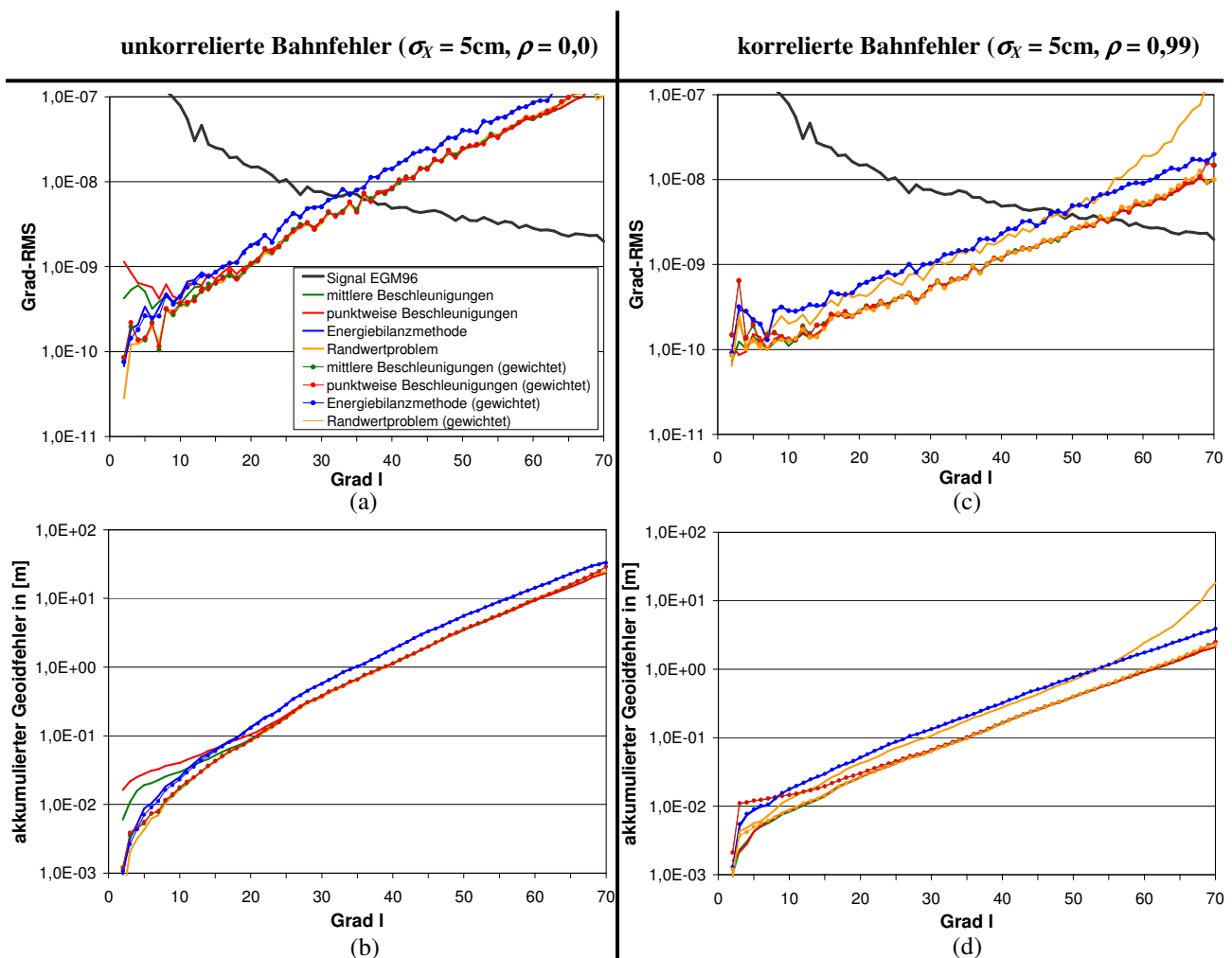


Abbildung 8.14: Modellfehler (links: Grad-RMS, rechts: akkumulierte Geoidfehler) der verschiedenen Verfahren.

### 8.4.2 Gesamtfehler

In diesem Abschnitt wurden zur Ermittlung des Gesamtfehlers Simulationsrechnungen für die beiden extremen Fälle (i) unkorrelierte Bahnfehler ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,0$ ) und (ii) stark korrelierte Bahnfehler ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) mit den unterschiedlichen Bahnanalyseverfahren durchgeführt, wobei jeweils ungewichtete und gewichtete Lösungen geschätzt wurden. Aus den Ergebnissen sollen Erkenntnisse darüber gewonnen werden, wie genau die unterschiedlichen Verfahren bei unterschiedlichem Rauschen der kinematischen Bahnen sind. In Abbildung 8.15 sind die entstehenden Fehler in Form von Grad-RMS und akkumulierten Geoidfehlern für unkorrelierte (a,b) und korrelierte (c,d) Bahnfehler dargestellt, in Tabelle 8.7 und Tabelle 8.8 ist der RMS-Wert (normal und flächengewichtet) inklusive des maximalen Fehlers

des Geoids auf dem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für eine Entwicklung bis Grad/Ordnung 50/50 für unkorrelierte und korrelierte Bahnfehler angegeben. Es ist zu erkennen, dass sowohl für unkorrelierte als auch korrelierte Bahnfehler die Beschleunigungsansätze für punktweise/mittlere Beschleunigungen (gewichtet/ungewichtet) und das Randwertproblem Ergebnisse fast identischer Genauigkeit liefern, falls eine Gewichtung beim Randwertproblem bei korrelierten Bahnfehlern vorgenommen wurde. Die zugehörigen Schaubilder überdecken sich daher in Abbildung 8.15 weitestgehend und sind deshalb optisch schwer zu trennen. Die Energiebilanzmethode hingegen führt für beide Rauschszzenarien zu deutlich schlechteren Ergebnissen, deren Fehler um den Faktor 1,5–2 größer sind. Dies entspricht in etwa dem infolge der geringeren Redundanz zu vermutenden Faktor von  $\sqrt{3}$  (vgl. Abschnitt 2.4). Auffällig ist bei dem Vergleich der Lösungen für unkorrelierte und korrelierte Bahnfehler, dass nicht nur der Beschleunigungsansatz von der starken Korrelation der Bahnfehler profitiert, sondern auch entgegen der in Abschnitt 2.4 aufgestellten These in gleichem Maße das Randwertproblem (falls die Korrelationen bei der Gewichtung berücksichtigt wurden!). Des Weiteren zeigt sich, dass durch numerische Differentiation entgegen der Vermutungen kein Informationsverlust und keine Rauschverstärkung gegenüber anderen Verfahren entstehen, bei denen keine numerische Differentiation benötigt wird. Allgemein kann festgestellt werden, dass eine größere Korrelation der Bahnfehler unabhängig vom Analyseverfahren zu einer höheren Genauigkeit des geschätzten Gravitationsfeldes führt. So ist beispielsweise der Geoidfehler für den Entwicklungsgrad  $L = 50$  nach Tabelle 8.7 und Tabelle 8.8 für die in der Simulation verwendeten Rauschverhältnisse für unkorrelierte Bahnfehler ungefähr um den Faktor 10 größer als für die korrelierten Bahnfehler.



**Abbildung 8.15:** Vergleich (Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler) der unterschiedlichen Verfahren zur Analyse kinematischer Satellitenbahnen für unkorrelierte ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,0$ ) und korrelierte ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,99$ ) Bahnfehler.

Bei dem Vergleich der gewichteten und ungewichteten Lösungen ist festzustellen, dass nicht nur die Beschleunigungsansätze (für punktweise/mittlere Beschleunigungen) sowohl für eine ungewichtete als auch eine gewichtete Lösung fast identische Genauigkeiten liefern, sondern auch die Energiebilanzmethode. Dies ist dadurch zu erklären, dass die Varianz-Kovarianz-Matrizen der kinetischen Energie nach Abbildung 8.16 ähnliche Eigenschaften wie die Varianz-Kovarianz-Matrizen der Beschleunigungen (s. Abschnitt 7.1.2) aufweisen. Zum einen ist sowohl für unkorrelierte als auch korrelierte Bahnfehler eine kurze Korrelationslänge für die Fehler der kinetischen Energie zu erkennen, welche für den geringen Einfluss der Gewichtung verantwortlich zu sein scheint. Zum anderen ist die Struktur der Varianz-

Kovarianz-Matrizen der kinetischen Energie für unkorrelierte und korrelierte Bahnfehler sehr ähnlich, was ein Indiz dafür ist, dass die Stochastik der Koordinaten (die Korrelationen) gar nicht genau bekannt sein muss für eine gewichtete Lösung der Energiebilanzmethode. Beim Randwertproblem zeigt sich jedoch, wie in Abschnitt 7.1.2 bereits angedeutet, dass die Gewichtung im Falle korrelierter Bahnfehler aufgrund der großen Korrelationslänge der Koordinaten (s. Abbildung 7.2) einen stärkeren Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung hat. Dies ist sowohl in Abbildung 8.15c) zu erkennen, in der die Grad-RMS-Kurve für die ungewichtete Lösung deutlich oberhalb derjenigen der gewichteten Lösung verläuft, als auch in Tabelle 8.8, wonach der Geoidfehler für eine Entwicklung bis Grad  $L = 50$  bei einer ungewichteten Lösung ungefähr doppelt so groß ist als bei einer gewichteten Lösung. Dies bedeutet einerseits, dass beim Randwertproblem im Falle korrelierter Bahnfehler immer ein gewichteter Lösungsansatz verwendet werden sollte, und andererseits, dass die stochastischen Eigenschaften (die Korrelationen) der Koordinaten möglichst genau bekannt sein sollten.

| Methodik                 | Randwertproblem                       |    | Energiebilanzmethode |        | mittlere Beschleunigungen |        | punktweise Beschleunigungen |        |
|--------------------------|---------------------------------------|----|----------------------|--------|---------------------------|--------|-----------------------------|--------|
| <b>Rauschen</b>          | $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,0$ |    |                      |        |                           |        |                             |        |
| <b>gewichtete Lösung</b> | nein                                  | ja | nein                 | ja     | nein                      | ja     | nein                        | ja     |
| <b>RMS [m]</b>           | 3,331                                 | -  | 5,518                | 5,332  | 3,309                     | 3,641  | 3,262                       | 3,679  |
| <b>gew. RMS [m]</b>      | 3,555                                 | -  | 5,603                | 5,577  | 3,472                     | 3,542  | 3,452                       | 3,580  |
| <b>Maximum [m]</b>       | 14,327                                | -  | 23,747               | 23,362 | 14,288                    | 15,966 | 14,011                      | 16,095 |

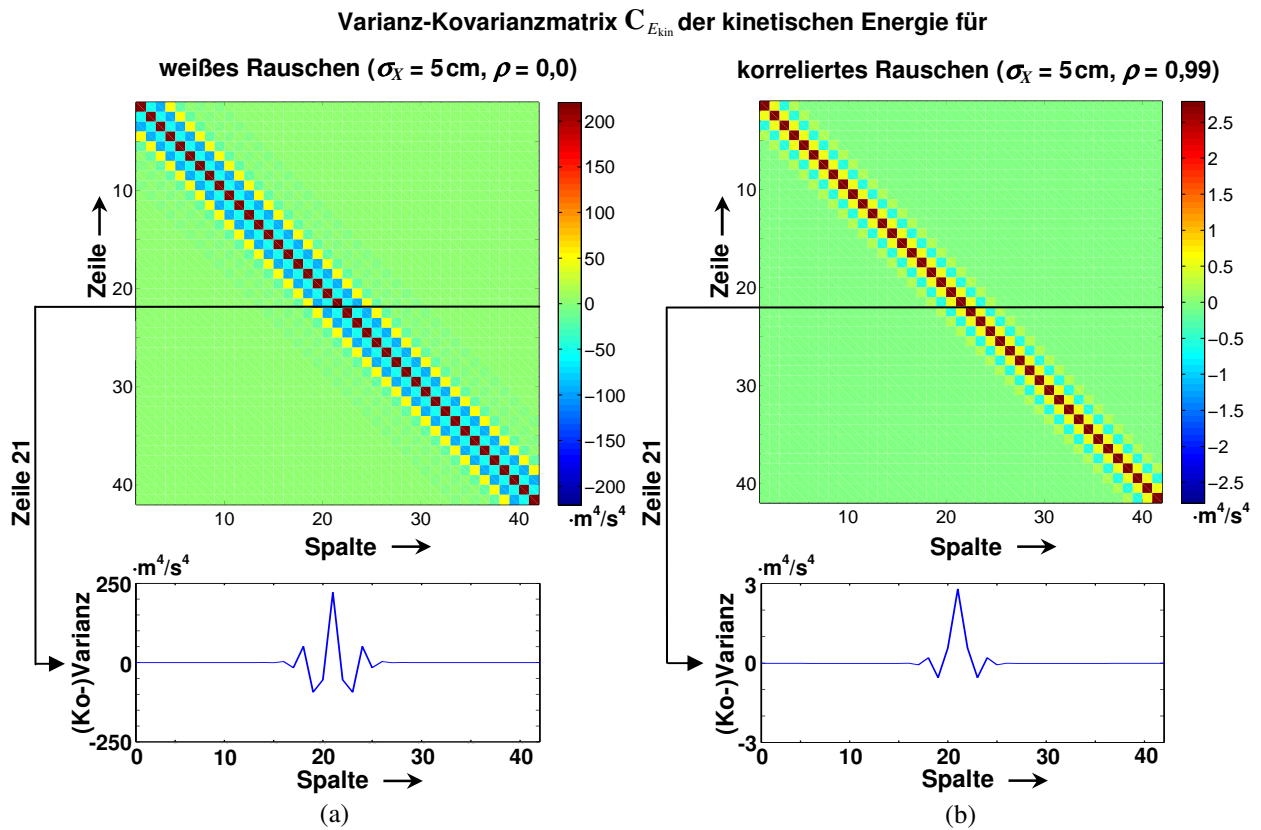
**Tabelle 8.7:** Geoidfehler (RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler) der verschiedenen Verfahren zur Analyse kinematischer Bahnen für unkorrelierte Bahnfehler ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,0$ ); Entwicklungsgrad  $L = 50$ .

| Methodik                 | Randwertproblem                        |       | Energiebilanzmethode |       | mittlere Beschleunigungen |       | punktweise Beschleunigungen |       |
|--------------------------|--|-------|----------------------|-------|---------------------------|-------|-----------------------------|-------|
| <b>Rauschen</b>          | $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,99$ |       |                      |       |                           |       |                             |       |
| <b>gewichtete Lösung</b> | nein                                   | ja    | nein                 | ja    | nein                      | ja    | nein                        | ja    |
| <b>RMS [m]</b>           | 1,078                                  | 0,371 | 0,7050               | 0,710 | 0,367                     | 0,371 | 0,371                       | 0,375 |
| <b>gew. RMS [m]</b>      | 0,697                                  | 0,399 | 0,764                | 0,769 | 0,393                     | 0,396 | 0,397                       | 0,400 |
| <b>Maximum [m]</b>       | 6,694                                  | 1,619 | 3,278                | 3,292 | 1,568                     | 1,596 | 1,581                       | 1,617 |

**Tabelle 8.8:** Geoidfehler (RMS, gewichtetes RMS und maximale Fehler) der verschiedenen Verfahren zur Analyse kinematischer Bahnen für korrelierte Bahnfehler ( $\sigma_x = 5 \text{ cm}, \rho = 0,99$ ); Entwicklungsgrad  $L = 50$ .

Der Vergleich zwischen den Lösungen der Beschleunigungsansätze für punktweise und mittlere Beschleunigungen lässt erkennen, dass beide Arten von Beschleunigungsansätzen (fast) identische Genauigkeiten liefern. Der in Abschnitt 6.1.1.2 beschriebene und in Tabelle 6.1 dargestellte Vorteil der günstigeren Fehlerfortpflanzung beim 3-Punkt-Differentiationsfilter hat also keine erkennbare Auswirkung auf die Gravitationsfeldbestimmung. Allerdings bleibt anzumerken, dass der Beschleunigungsansatz für mittlere Beschleunigungen bei der Auswertung von Realdaten den Vorteil bietet, dass im Falle von Datenlücken und Ausreißern jeweils nur die mittleren Beschleunigungen der beiden benachbarten Punkte wegfallen (bei Verwendung eines kurzen Mittelwertfilters). Mit dem Beschleunigungsansatz für mittlere Beschleunigungen kann erklärt werden, warum die Beschleunigungsansätze und das Randwertproblem zu Ergebnissen von fast gleicher Genauigkeit führen. Der Beschleunigungsansatz für mittlere Beschleunigungen kann nämlich nach Mayer-Gürr et al. (2005) auch als Randwertproblem für einen „ultrakurzen“ Orbit mit 3 Punkten aufgefasst werden (s. Abschnitt 2.3.2.4) und stellt somit das Bindeglied zwischen Randwertproblem und Beschleunigungsansatz dar. Randwertproblem und Beschleunigungsansatz besitzen demnach eine große Ähnlichkeit.

Als Ergebnis des Vergleichs der unterschiedlichen Analyseverfahren für simulierte kinematische Bahnen kann schließlich festgehalten werden, dass das Randwertproblem und die Beschleunigungsansätze der Energiebilanzmethode überlegen sind und zu ähnlichen Genauigkeiten führen. Für den Beschleunigungsansatz spricht zum einen, dass dieser gegenüber dem Randwertproblem wie in Abschnitt 2.4 beschrieben leichter zu implementieren und schneller ist. Zum anderen müssen beim Beschleunigungsansatz die Genauigkeitseigenschaften (hier: die Korrelationen) des kinematischen Orbits nicht bekannt sein und es kann ohne merkliche Genauigkeitsverluste auf eine Gewichtung verzichtet werden. Es muss allerdings angemerkt werden, dass diese Erkenntnisse zunächst nur für die simulierten Rausch-szenarien gelten. Die jeweiligen Analyseverfahren können sich bei realen Datensätzen mit Unregelmäßigkeiten im Rauschen sowie weiteren Fehlerquellen wie beispielsweise der Gezeitenmodellierung und den Akzelerometerdaten möglicherweise anders verhalten. Aus diesem Grunde ist im nachfolgenden Kapitel ein kurzer Vergleich für Ergebnisse aus Realdaten aufgeführt.



**Abbildung 8.16:** Schematische Darstellung der (idealisierten) Varianz-Kovarianz-Matrizen der kinetischen Energie für a) unkorrelierte Bahnfehler (links) und b) korrelierte Bahnfehler (rechts).

## 9 Analyse realer kinematischer CHAMP-Bahnen

In diesem Kapitel wird die Analyse von realen kinematischen CHAMP-Orbits näher erkundet. Zunächst einmal soll anhand der Untersuchung wahrer kinematischer CHAMP-Bahnen festgestellt werden, ob und wie stark die Fehler solcher Bahnen korreliert sind, da eine ausgeprägte Korrelation für eine genaue Gravitationsfeldbestimmung von Bedeutung ist. Ein zentrales Problem bei der Analyse von kinematischen Orbits ist, dass diese Ausreißer und Sprünge enthalten können, die sich negativ auf die Qualität der geschätzten Gravitationsfelder auswirken. Aus diesem Grunde werden in diesem Kapitel verschiedene Verfahren zur Behandlung von Ausreißern vorgestellt. Eine Evaluierung dieser Methoden findet anschließend anhand der Genauigkeit der erhaltenen Gravitationsfelder statt. Abschließend werden die Ergebnisse aus der Analyse der realen kinematischen Orbits mit dem Beschleunigungsansatz mit Gravitationsfeldern verglichen, die mit anderen Verfahren zur Analyse von SST-Messungen geschätzt wurden. Auf Basis dieser Ergebnisse soll ermittelt werden, ob der Beschleunigungsansatz ein geeignetes Verfahren zur Gravitationsfeldbestimmung ist. Die gezeigten Ergebnisse stammen aus der Analyse eines 2-jährigen kinematischen CHAMP-Orbits des Zeitraums (Tag 70, Jahr 2002–Tag 70, Jahr 2004) mit Bahnhöhen zwischen 385–415 km, die von D. Švehla und M. Rothacher von der FESG (Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie) am IAPG (Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie) der TUM (Technischen Universität München) bestimmt wurden (Švehla und Rothacher, 2004, s. auch Anhang C). Als Genauigkeitsmaß wurde die Differenz zwischen dem geschätzten Modell und dem bereits verfügbaren GRACE-Modell EIGEN-GRACE02S (Reigber et al., 2005a) verwendet. Dies scheint gerechtfertigt, da EIGEN-GRACE02S aufgrund der wesentlich genaueren GRACE-Daten von höherer Qualität ist (ca. 1 cm Geoidfehler bis Grad 70).

### 9.1 Untersuchung der Korrelation kinematischer Bahnfehler

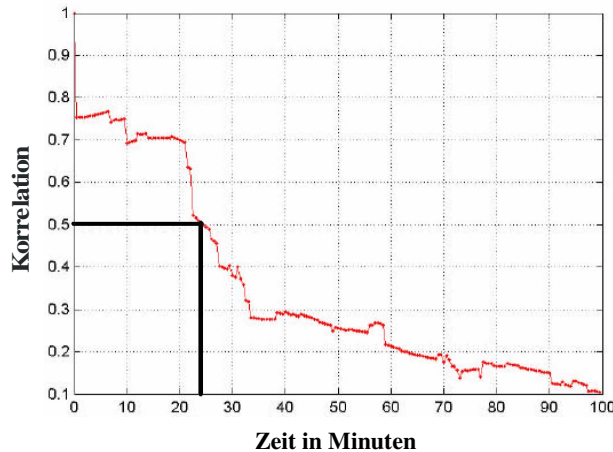
In diesem Abschnitt soll die Genauigkeit realer kinematischer Orbits näher untersucht werden. Eine hohe Genauigkeit der kinematischen Orbits, vor allem aber eine hohe Korrelation der Bahnfehler, sind essentiell für eine genügend genaue Bestimmung der Beschleunigungen mittels numerischer Differentiation und damit für die Schätzung hochqualitativer Gravitationsfelder. Die Bestimmung der tatsächlichen Genauigkeitsverhältnisse ist nicht möglich, da der wahre Orbit nicht bekannt ist. Es existieren jedoch einige Möglichkeiten, um die Genauigkeit kinematischer Orbits abschätzen zu können. Zu diesen gehören:

- Vergleich des kinematischen Orbits mit alternativen Bahnlösungen, z.B. dynamische oder reduziert-dynamische Orbits (Reubelt et al., 2003a,b, 2006; Švehla und Rothacher, 2004)
- Analyse der bei der Bahnbestimmung mitgeschätzten Varianz-Kovarianz-Matrix (Švehla und Rothacher, 2004)
- Evaluierung anhand externer Datensätze, z.B. SLR-Residuen (Švehla und Rothacher, 2003, 2004) oder KBR-Residuen bei GRACE (Švehla und Rothacher, 2003)
- Auswertung überlappender Orbits.

Im Folgenden werden die ersten 3 Möglichkeiten betrachtet, wobei für die Abschätzung der Korrelation aufgrund des stark lückenhaften Datenmaterials der SLR-Residuen nur die ersten beiden Möglichkeiten verwendet werden können. Die direkteste Genauigkeitsangabe liefert die bei der Bahnbestimmung mitgeschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix. Die Problematik bei deren Verwendung liegt allerdings darin, dass diese im Prinzip nur die „innere Genauigkeit“ beschreibt und daher meist zu optimistische Werte für die Varianzen liefert. Beim Vergleich mit externen Datensätzen muss beachtet werden, dass die externen Daten auch fehlerbehaftet sind. Eine zuverlässige Aussage über die Genauigkeit der kinematischen Orbits ist nur dann möglich, wenn diese externen Daten von höherer Genauigkeit sind. Eine höhere Genauigkeit der Vergleichsdaten kann bei der Evaluierung der absoluten Bahngenauigkeit anhand alternativer Bahnlösungen nicht gefordert werden, da die verschiedenen Verfahren zur Bahnbestimmung im Normalfall eine ähnliche absolute Bahngenauigkeit liefern. Des Weiteren muss beachtet werden, dass diese Bahnlösungen die gleichen Daten erhalten. Bei der Bildung der Differenzen verschiedener Orbits können dann eventuell Bahnfehler eliminiert werden, was zu einer zu optimistischen Fehlerabschätzung führen kann. Dennoch ist die Evaluierung anhand (reduziert-)dynamischer Orbits ein probates Mittel, da die Hauptfehlerquelle dieser Orbits die verwendeten Kräfte Modelle sind und somit die Fehler eine andere Charakteristik als diejenigen der kinematischen Orbits aufweisen. Eine Eliminierung der Fehler durch Differenzbildung zwischen kinematischem und (reduziert-)dynamischem Orbit ist daher nicht zu erwarten, die Differenz liefert somit ein realistisches Fehlerverhalten beider Orbits. Die absolute Genauigkeit des kinematischen und des (reduziert-)dynamischen Orbits sollte dann innerhalb dieser Differenz liegen. Im Gegensatz zur absoluten Genauigkeit ist jedoch die relative Genauigkeit beider Bahnlösungen nicht gleich. Aufgrund der Integration der Bewegungsgleichungen sind (reduziert-)dynamische Orbits wesentlich glatter als kinematische Orbits und besitzen daher eine höhere relative Genauigkeit. Daher kann aus dem Vergleich beider Orbits die relative Genauigkeit kinematischer Orbits und somit die Korrelationen deren Fehler gut abgeschätzt werden.

Die Analyse der Varianz-Kovarianz-Matrizen (eine  $3 \times 3$ -Matrix pro Position) des 2-jährigen kinematischen CHAMP-Orbits ergibt nach Švehla und Rothacher (2004) eine Standardabweichung der kinematischen Positionen von 1–3 cm (tägliche Werte). Dieser Wert kann für die absolute Bahngenauigkeit durch Untersuchung von SLR-Residuen im

Bereich von ca. 2–3 cm (tägliche RMS-Werte) bestätigt werden (Švehla und Rothacher, 2003, 2004). Für den Zeitraum Tag 195–Tag 2002 des Jahres 2002 wurden zusätzlich für kinematisch bestimmte Bahnabschnitte mit jeweils einer Länge von 13h volle Varianz-Kovarianz-Matrizen geschätzt. Aus der Analyse dieser Varianz-Kovarianz-Matrizen ergibt sich nach Švehla und Földvary (2006), wie in Abbildung 9.1 für Tag 200 ersichtlich, dass die Fehler direkt benachbarter Positionen mit  $\rho \approx 0,93$  stark korreliert sind. Für weiter voneinander entfernte Positionen nimmt die Korrelation auf Werte zwischen  $\rho \approx 0,7$ –0,8 ab. Insgesamt ist die Korrelationslänge kinematischer Orbits mit 20–30 Minuten recht lange.

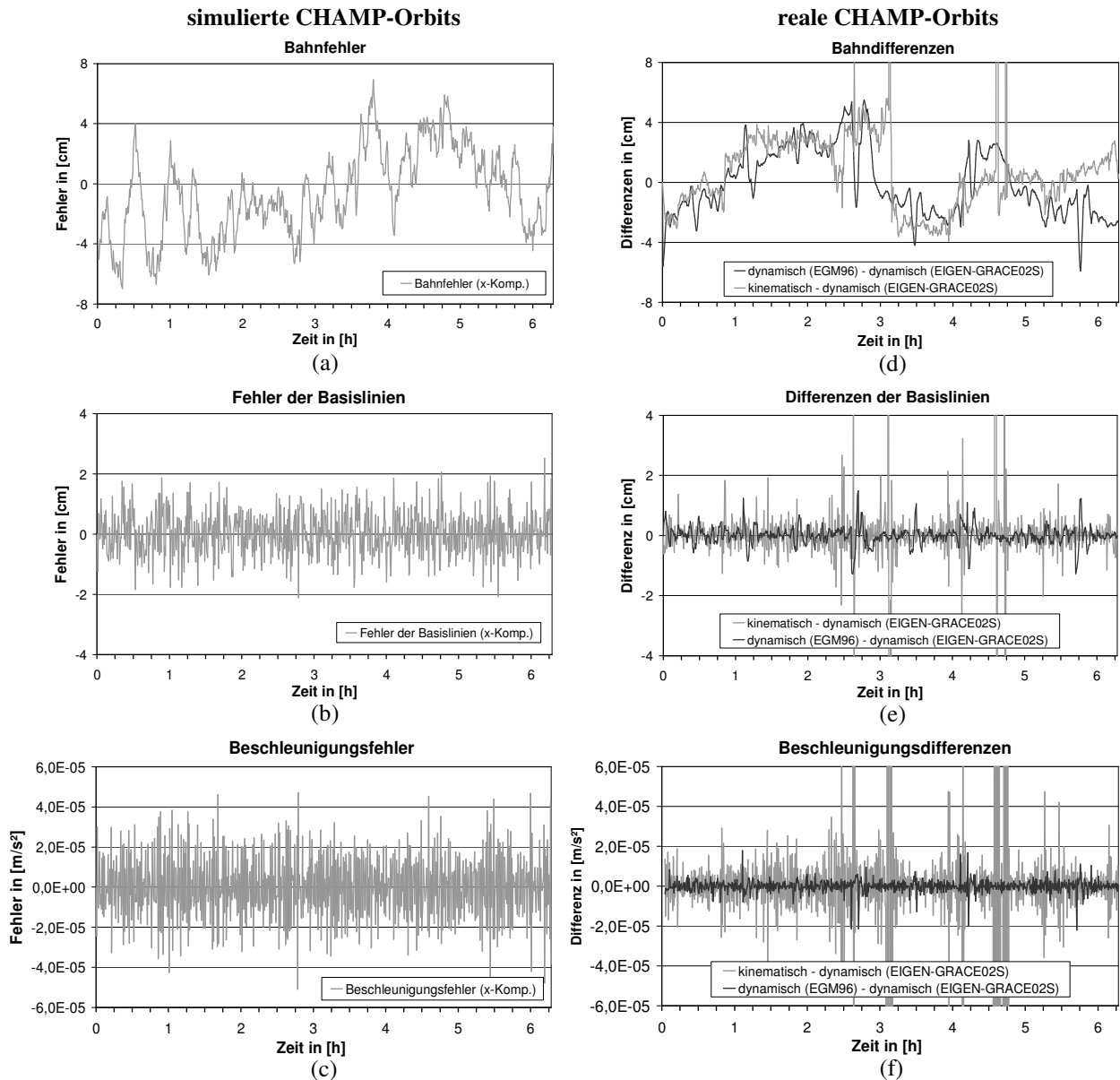


**Abbildung 9.1:** Korrelationen kinematisch bestimmter Satellitenbahnen mit einer Korrelationslänge von 20–30 Minuten (hier: CHAMP, Jahr 2002, Tag 200), geschätzt aus der Varianz-Kovarianz-Matrix der kinematischen Bahn; Quelle: Švehla und Rothacher (2005), Švehla und Foldvary (2006).

Aus dem Vergleich zwischen kinematischen und reduziert-dynamischen Orbits ergeben sich nach Švehla und Rothacher (2003, 2004) und auch nach Abbildung 9.2d) RMS-Werte zwischen 1–3 cm, womit eine absolute Genauigkeit kinematischer Orbits von 1–3 cm bestätigt werden kann. Für die Bestimmung der Korrelation der Fehler kinematischer Orbits aus einem Bahnvergleich wurde bei Reubelt et al. (2003a) die Auto- bzw. Kreuzkorrelationsfunktion auf die Differenz zwischen einem kinematischen und einem dynamischen Orbit angewendet. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Korrelation der Fehler benachbarter Bahnpunkte ( $\rho \approx 0,99$ ), eine ausgeprägte Korrelationslänge (ca. 20 min) sowie eine fast verschwindende Korrelation der X-, Y- und Z- Komponenten untereinander. Allerdings ist die Verwendung der Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen als kritisch zu sehen, da die (reduziert-)dynamischen Orbits bei gleicher absoluter Genauigkeit sehr hoch korreliert sind. Die ermittelten Werte für die Korrelation können dann zu einem großen Anteil von den (reduziert-)dynamischen Orbits verursacht sein und sind somit nicht mehr aussagekräftig. Deswegen wird hier ein anderer Weg zur Ermittlung der Korrelation wie in Reubelt et al. (2006) verwendet. Aus Bahnvergleichen sollen die absolute und die relative Genauigkeit  $\sigma_X$  bzw.  $\sigma_{\Delta X}$  des kinematischen Orbits abgeschätzt werden, woraus sich nach Formel (6.8) die Korrelation zu  $\rho = 1 - \sigma_{\Delta X}^2 / 2\sigma_X^2$  ermitteln lässt.

Abbildung 9.2d)–f) zeigt die Differenzen (hellgrau) der Bahnpunkte/Basislinien/Beschleunigungen zwischen dem kinematischen Orbit und einem reduziert-dynamischen Orbit für einen Ausschnitt (ca. 4 Umläufe) des Tages 200, Jahr 2002. Der reduziert-dynamische Orbit wurde von D. Švehla und M. Rothacher an der TU München basierend auf dem Gravitationsfeldmodell EIGEN-GRACE02S prozessiert. Nach der Elimination von Ausreißern mit der Schwellwertmethode (s. nächster Abschnitt) ergeben sich RMS-Werte von  $\text{RMS}_X = 2 \text{ cm} / \text{RMS}_{\Delta X} = 6 \text{ mm} / \text{RMS}_{\ddot{X}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ . Zusätzlich sind noch die Differenzen (dunkelgrau) zwischen zwei reduziert-dynamischen Orbits abgebildet, die jeweils basierend auf EIGEN-GRACE02S und EGM96 berechnet wurden. Die RMS-Werte dieser Bahn-/Basislinien-/Beschleunigungs-Differenzen sind  $\text{RMS}_{X,\text{dyn}} = 2 \text{ cm} / \text{RMS}_{\Delta X,\text{dyn}} = 3 \text{ mm} / \text{RMS}_{\ddot{X},\text{dyn}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ . Wie zu sehen ist, sind aufgrund der hohen relativen Genauigkeit reduziert-dynamischer Orbits die Basislinien- und Beschleunigungsdifferenzen wesentlich genauer als bei der Differenz zwischen kinematischem und reduziert-dynamischen Orbit. Daher eignen sich die Basislinien und Beschleunigungen eines reduziert-dynamischen Orbits zur Evaluierung der Basislinien und Beschleunigungen des kinematischen Orbits. Die Genauigkeiten des auf EIGEN-GRACE02S basierenden Orbits sind wahrscheinlich sogar besser als  $\text{RMS}_{\Delta X,\text{dyn}} = 3 \text{ mm}$  und  $\text{RMS}_{\ddot{X},\text{dyn}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$  anzusehen, da EIGEN-GRACE02S von höherer Qualität als EGM96 ist. Ein Großteil dieser RMS-Werte sind somit dem auf EGM96 basierenden Orbit zuzuschreiben, womit der auf EIGEN-GRACE02S basierende Orbit eine gute Referenz für darstellt. Die absolute Genauigkeit ist jedoch im Gegensatz zur relativen Bahngenauigkeit weniger stark von der Art der Bahnbestimmung abhängig und für alle 3 Orbits als ähnlich mit einem Bereich von 2–3 cm zu betrachten. Insgesamt lassen sich also die absolute und die relative Genauigkeit des kinematischen Orbits zu  $\sigma_X = 2\text{--}3 \text{ cm}$  und  $\sigma_{\Delta X} = 6\text{--}9 \text{ mm}$  abschätzen, was nach (6.8) zu Korrelationen im Bereich  $\rho = 0,9\text{--}0,98$  führt. Abbildung 9.2a)–c) zeigt die Bahn-/Basislinien-/Beschleunigungsfehler eines simulierten CHAMP-Orbits mit den Genauigkeitseigenschaften  $\sigma_X = 3 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,97$ . Es ergibt sich insgesamt ein recht ähnlicher Verlauf wie für die Differenzen zwischen kinematischem und reduziert-dynamischen Orbit mit Standardabweichungen von  $\sigma_X = 3 \text{ cm} / \sigma_{\Delta X} = 0,73 \text{ cm} / \sigma_{\ddot{X}} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ .





**Abbildung 9.2:** a),b),c) Fehler der Bahn/Basislinien/Beschleunigungen (x-Komponente) für einen simulierten CHAMP-Orbit ( $h = 470$  km,  $\Delta t = 30$  s,  $\sigma_x = 3$  cm,  $\rho = 0,97$ ) bzgl. des raumfesten Systems; d), e), f) Differenzen der Bahnen/Basislinien/Beschleunigungen zwischen realen CHAMP-Orbits (Jahr 2002, Tag 200, GPS-Zeit,  $\Delta t = 30$  s) im raumfesten System; hellgrau: Differenz zwischen kinematischem und reduziert-dynamischem Orbit (basierend auf EIGEN-GRACE02S), dunkelgrau: Differenzen zwischen 2 reduziert-dynamischen Orbits (EIGEN-GRACE02S, EGM96).

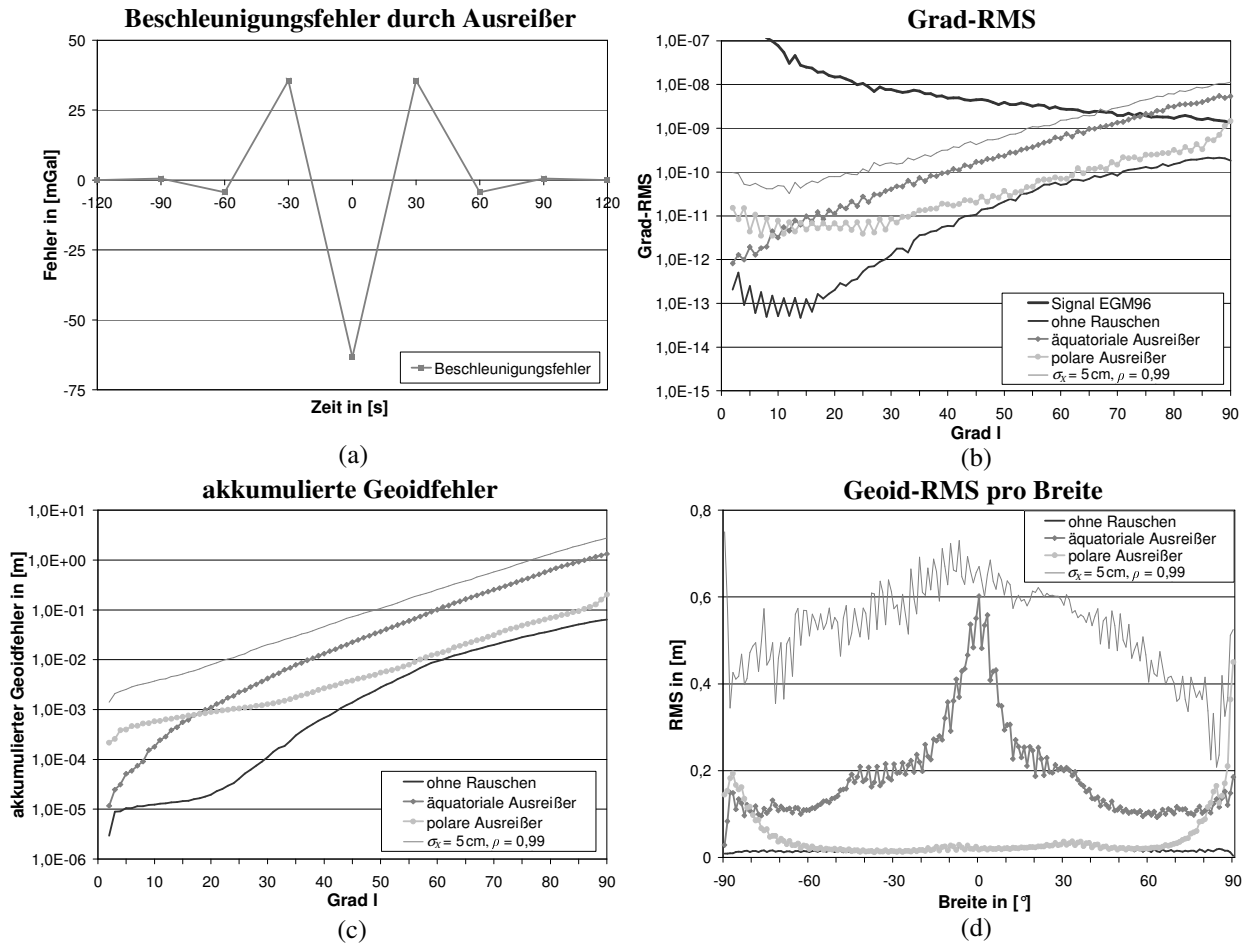
Wie sich aus den Untersuchungen zeigt, sind die Fehler kinematischer Orbits deutlich korreliert, wobei die tatsächliche Korrelation aufgrund eines nicht vorhandenen wahren Orbits nicht feststellbar ist.

Für die Simulationen in den Kapiteln 6 und 8 wurden Orbits mit gleicher relativer Genauigkeit, aber etwas schlechterer absoluter Genauigkeit als in diesem Abschnitt abgeschätzt, verwendet. Da die relative Genauigkeit für die Genauigkeit der Beschleunigungen und damit des Gravitationsfeldes verantwortlich ist, sollten sich aus den Simulationen realistische Ergebnisse ergeben. Die benutzten Genauigkeitseigenschaften sind  $\sigma_x = 5$  cm und  $\rho = 0,99$ , die auf Genauigkeiten für die Basislinien (relative Genauigkeit) und Beschleunigungen von  $\sigma_{\Delta x} = 0,7$  cm und  $\sigma_{\ddot{x}} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  führen. Als „worst-case“-Szenario für eine obere Fehlerschranke wurden  $\sigma_x = 5$  cm und  $\rho = 0,9$  verwendet, die Genauigkeiten für die Basislinien und Beschleunigungen von  $\sigma_{\Delta x} = 2,2$  cm und  $\sigma_{\ddot{x}} = 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  ergeben.

## 9.2 Behandlung von Ausreißern

Im Gegensatz zu reduziert-dynamischen Orbits sind kinematische Orbits weniger glatt und können Datenlücken und Ausreißer sowie Sprünge aufweisen (s. Anhang C). Diese sind hauptsächlich auf eine schlechte Beobachtungsgeometrie der GPS-Satelliten, nicht entdeckte Phasensprünge (Cycle-slips), eine wechselnde Satellitenkonstellation, zu wenig sichtbare Satelliten oder falsch bestimmte Phasenmehrdeutigkeiten zurückzuführen. Solche Ausreißer und Sprünge

haben, wie in Abbildung 9.3 dargestellt, einen großen Einfluss auf die Qualität der Gravitationsfeldbestimmung. Bereits wenige solcher Ausreißer reichen aus, um die Genauigkeit der geschätzten Gravitationsfeldmodelle signifikant zu verschlechtern. Nach Abbildung 9.3a) führt ein Ausreißer von 20 cm zu einem Fehler in der Beschleunigung an dieser Position von 63 mGal. Des Weiteren werden durch den Differentiationsfilter der Länge  $n$  auch noch die  $(n-1)/2$  benachbarten Beschleunigungen beeinflusst. Der verursachte Fehler in den direkt benachbarten Beschleunigungen beträgt immerhin noch ca. 36 mGal. Im Vergleich zu der normalen Standardabweichung der numerisch bestimmten Beschleunigungen im Bereich 1–2 mGal stellt dies einen signifikanten Fehler dar. Um den Einfluss solcher Ausreißer auf die Gravitationsfeldschätzung zu testen, wurden zwei verschiedene Simulationen eines 1-jährigen simulierten, rauschfreien CHAMP-Orbits ( $h = 470$  km) durchgeführt, der einmal mit 1 Ausreißer pro Woche (insgesamt 52) im Bereich der Pole und einmal mit 1 Ausreißer pro Woche im Bereich des Äquators versehen wurde. Es ist dabei zu beachten, dass die Anzahl der Ausreißer in der Realität viel höher ist und dass die Ausreißer teilweise auch größere Werte annehmen können.



**Abbildung 9.3:** Fehler durch einzelne Ausreißer: a) durch einen Ausreißer von 20 cm zum Zeitpunkt  $t = 0$  verursachter Beschleunigungsfehler; b),c),d) Grad-RMS, akkumulierte Geoidfehler, Geoidfehler pro Breite (Entwicklung bis Grad 70) für verschiedene Simulationen eines 1-jähriger Orbits: unverrauschter Orbit, 52 Ausreißer (1 pro Woche) in Polnähe, 52 Ausreißer (1 pro Woche) in Äquaturnähe, Orbit mit Rauschen ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ).

Wie in Abbildung 9.3b)–d) zu sehen ist, führen bereits wenige Ausreißer zu einem signifikanten Anstieg der Fehlerkurven gegenüber der Lösung aus einem unverrauschten Orbit. Teilweise wird sogar schon das Fehlerniveau der Lösung aus einem verrauschten Orbit ( $\sigma_x = 5$  cm,  $\rho = 0,99$ ) fast oder zumindest bis auf eine halbe Fehlerordnung erreicht. Interessant ist die Abhängigkeit der Genauigkeit des Gravitationsfeldes von der geographischen Lage der Fehler. Während der Genauigkeitsverlust durch polare Ausreißer wesentlich geringer ist und sich nach Abbildung 9.3b) hauptsächlich in den niedrigeren Graden bemerkbar macht, ist bei den äquatorialen Ausreißern die Grad-RMS-Kurve für alle Auflösungen um 1–1,5 Größenordnungen schlechter gegenüber der unverrauschten Lösung. Des Weiteren sind nach Abbildung 9.3d) die durch polare Ausreißer verursachten Geoidfehler hauptsächlich auch nur auf polnahe Gebiete beschränkt, während die durch äquatoriale Ausreißer verursachten Geoidfehler global verteilt sind, wobei natürlich die größten Fehler in Äquaturnähe auftreten. Die maximalen Geoid-RMS-Werte pro Breite betragen bei den äquatorialen Ausreißern ca. 60 cm im Gegensatz zu ca. 20 cm (ohne polare Datenlücken) bei den polaren Ausreißern. Der geringere Einfluss der polaren Ausreißer lässt sich durch die höhere Datendichte (s. Abbildung 8.10a),b)) in polnahen Gebieten erklären.

Aus den Simulationsrechnungen ist zu erkennen, dass der Beschleunigungsansatz hoch-sensitiv auf die in den kinematischen Orbits enthaltenen Ausreißer und Sprünge reagiert. Die Genauigkeit der bestimmten Gravitationsfelder ist deshalb zu einem hohen Maß davon abhängig, ob diese Ausreißer detektiert und entsprechend behandelt werden. Im Allgemeinen gibt es zwei verschiedene Konzepte um Ausreißer in der Parameterbestimmung zu behandeln. Eine Methode ist, die Ausreißer und Sprünge in der Datenvorverarbeitung aus dem Beobachtungsvektor zu eliminieren, z.B. durch statistische Tests oder Filterung. Ein anderer Weg ist der Einsatz robuster Schätzverfahren, bei denen Ausreißer heruntergewichtet werden und die daher weniger sensitiv auf Ausreißer reagieren als die normale Kleinste-Quadrate-Lösung.

Innerhalb der Vorbereitung zur GOCE-Mission wurden bereits anhand simulierter GOCE-SGG-Daten intensive Studien zur Behandlung und Elimination von Ausreißern betrieben (Kern und Allesch, 2003; Kern et al., 2005). Verschiedene statistische Tests (Grubbs Test, Dixon Test, Schwellwertuntersuchung anhand der Mahalanobis-Distanz) und Filtermethoden wurden dort getestet. Die besten Ergebnisse lieferten dabei die Waveletfilterung sowie eine Kombination aus Waveletfilterung und Dixon-Test. Die Genauigkeit konnte jedoch durch eine zusätzliche Elimination von Ausreißern anhand Beobachtungsresiduen innerhalb des Gleichungssystemlösers gesteigert werden. In einer anderen Studie wurden außerdem robuste Schätzverfahren zur Ausreißerbehandlung angewendet (Kargoll, 2005).

Bei der Analyse von echten CHAMP-Daten können solche Verfahren zur Ausreißerbehandlung nun an Realdaten getestet werden, wie beispielsweise in Götzelmann et al. (2006) und Reubelt et al. (2006). Im Folgenden wurden zwei Verfahren zur Ausreißerelimination

- Elimination anhand von Orbitvarianzen
- Elimination anhand von Schwellwerten

sowie als Alternative die robusten Schätzverfahren getestet.

### 9.2.1 Ausreißerelimination anhand von Orbitvarianzen

Die einfachste Art der Ausreißerdetektion ist die Elimination anhand der Varianzen, die bei der kinematischen Bahnbestimmung mittels Varianz-Kovarianz-Transformation mitgeschätzt werden. Für den kinematischen Orbit sind die Varianzen in Form von  $3 \times 3$ -Matrizen pro Bahnpunkt (3 Varianzen ( $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ ) für jede Koordinate ( $x, y, z$ ) sowie die 3 Kovarianzen  $\sigma_{x,y}, \sigma_{x,z}, \sigma_{y,z}$  zwischen den Koordinaten) in den Orbit-Datenfiles mit angegeben. Durch Setzen eines Schwellwertes, z.B. der häufig verwendete  $3\sigma$ -Sigma-Wert ( $\sigma \hat{=}$  mittlere Standardabweichung des Orbits), können dann alle Bahnpunkte mit größerer Standardabweichung entfernt werden. In dieser Arbeit wurde die Ausreißerelimination anhand von Orbitvarianzen so angewendet, dass ca. 20% aller Bahnpunkte eliminiert wurden. Die Vor- und Nachteile dieser Methode sind:

- *Vorteile:* Methode ist einfach und schnell.
- *Nachteile:* Die Orbitvarianzen entstammen aus der Bahnbestimmung und reflektieren somit nur die „innere“ Genauigkeit der Ausgleichung; Ausreißer müssen deshalb nicht immer durch eine große Varianz gekennzeichnet sein und umgekehrt.

### 9.2.2 Ausreißerelimination anhand der Schwellwertmethode

In der Gravitationsfeldbestimmung mit dem Beschleunigungsansatz können Ausreißer im Wesentlichen auf zwei Stufen detektiert und eliminiert werden. Einerseits können die Ausreißer in dem gegebenen kinematischen Orbit selbst herausgefiltert werden. Ein zweiter Ansatz zur Ausreißerdetektion bietet sich bei den mittels numerischer Differentiation bestimmten Beschleunigungen an. Da die zu filternden Daten sowohl das eigentliche Signal selbst als auch die Fehler enthalten, ist es von Vorteil, das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu reduzieren (Albertella et al., 2000; Kern et al., 2005). Die Ausreißer treten somit in den residualen Daten deutlicher in Erscheinung und sind somit leichter zu identifizieren. Für die Reduktion der kinematischen Orbits steht mit dem reduziert-dynamischen Orbit ein geeigneter Datensatz zur Verfügung. Da reduziert-dynamische Orbits einen sehr glatten Verlauf haben, treten die Ausreißer in den Differenzen zwischen kinematischen und reduziert-dynamischen Orbits deutlich hervor. Aufgrund der deutlich höheren relativen Genauigkeit reduziert-dynamischer Orbits bietet sich die Ausreißersuche auf der Ebene der Differenz der Basislinien zwischen kinematischem und reduziert-dynamischem Orbit anstatt auf der Ebene der Differenz beider Orbits selbst an. Neben Ausreißern treten vor allem auch Sprünge in solchen Basisliniendifferenzen hervor, die somit identifiziert werden können. Als Referenzdaten für die Reduktion der kinematischen Beschleunigungen können die aus dem reduziert-dynamischen Orbit ermittelten Beschleunigungen oder die aus einem bereits vorhandenen Gravitationsfeldmodell (z.B. EGM96) berechneten Beschleunigungen dienen. Nach Reduktion der Referenzdaten können dann alle diejenigen Bahnpunkte/Basislinien/Beschleunigungen eliminiert werden, deren Differenzen einen bestimmten Schwellwert überschreiten. Der Schwellwert sollte genügend groß gewählt werden, um zu verhindern, dass (i) die Gravitationsfeldschätzung nicht durch das in den Referenzdaten enthaltene Gravitationsfeld beeinflusst wird und (ii) das eigentlich genaue Datenpunkte nicht aufgrund schlechter Referenzinformation entfernt werden. Deshalb ist es sinnvoll, den Schwellwert größer als  $3 \cdot \text{RMS}$ -Wert der Differenz zu wählen. Vor allem bei der Filterung der Bahnpunkte ist dies zu

beachten, um Problem (ii) zu vermeiden, da die absolute Genauigkeit des kinematischen und des reduziert-dynamischen Orbits in etwa gleich ist. Auf Basis der in Abschnitt 9.1 ermittelten RMS-Werte wurden die Schwellwerte für die Elimination von Bahnpunkten/Basislinien/Beschleunigungen zu 50 cm/10 cm/5 mGal gewählt, womit ca. 20% der Daten eliminiert werden. Als Referenzinformation für die Bahnpunkte und Basislinien wurde der auf EGM96 basierende reduziert-dynamische Orbit aus Abschnitt 9.1 (s. auch Anhang C.4) verwendet, als Referenzinformation für die Beschleunigungen dienen die aus dem EGM96 (bis Grad  $L = 90$ ) berechneten Beschleunigungen. Die Vorteile und Nachteile der Schwellwertmethode sind:

- *Vorteile:* Ebenfalls einfache und schnelle Methode, wenn auch aufwendiger als die Filterung anhand von Orbitvarianzen; aufgrund guter Referenzdaten zuverlässiger als die Orbitvarianzen.
- *Nachteile:* Bei zu kleiner Wahl der Schwellwerte besteht die Gefahr, dass gute Daten eliminiert werden und dass die Gravitationsfeldlösung gegen die Referenzdaten „gedrückt“ wird.

### 9.2.3 Robuste Schätzverfahren

Für die Parameterschätzung innerhalb des Beschleunigungsansatzes wird das spezielle Gauß-Markov-Modell verwendet, das im Falle nicht-stochastischer Beobachtungen mit der Kleinste-Quadrate-Lösung (W-LESS) äquivalent ist. Die Kleinste-Quadrate Lösung setzt eine Gauß'sche Normalverteilung der Beobachtungsdaten voraus, die jedoch im Falle von Ausreißern und größeren Fehlern nicht mehr erfüllt ist. Aus diesem Grunde reagiert die Kleinste-Quadrate-Schätzung sensitiv auf solche Ausreißer und tendiert dazu, diese Ausreißer in die geschätzten Parameter zu verwischen. Dies führt dann zu größeren Fehlern in den bestimmten Parametern, wie in Abschnitt 9.2 gezeigt. Daher eignet sich der Einsatz von Schätzverfahren, denen eine besser an die Daten angepasste Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt und die deshalb robuster gegenüber Ausreißern sind als die Kleinste-Quadrate-Schätzung. Selbst Gauß argumentierte, dass die Wahl der quadratischen Objektfunktion, die bei der Kleinste-Quadrate-Schätzung minimiert werden muss, eher willkürlich ist, auch wenn sie durch den Vorteil des daraus resultierenden linearen Schätzers gerechtfertigt ist (Caspary, 1988).

Die ersten Ansätze für die Theorie der robusten Schätzverfahren sind in Huber (1964) zu finden. Die rechentechnische Effizienz von auf der  $L_1$ -Norm basierenden Ausgleichungsverfahren wurde von Schlossmacher (1973) durch den Einsatz einer iterativen Gewichtung anstatt linearer Programmierungsverfahren verbessert. Dieses Konzept wurde später auf andere robuste Schätzverfahren übertragen (Beaton und Tukey, 1974). Ein Überblick über verschiedene robuste Schätzverfahren kann u.a. in Koch (1996) oder Caspary (1988) gefunden werden.

Robuste Schätzverfahren können nach Huber (1981) als *Maximum-Likelihood*-Schätzer (dt.: maximale Wahrscheinlichkeit) interpretiert werden mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N p(y_i, \mathbf{x}) \quad (9.1)$$

des Beobachtungsvektors  $\mathbf{y}$  mit  $N$  stochastisch unabhängigen Beobachtungen  $y_i$  und dem Vektor  $\mathbf{x}$  der zu bestimmenden unbekannt Parameter. Maximum-Likelihood-Schätzungen  $\hat{\mathbf{x}}$  werden durch Maximierung von  $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  gefunden, was der Minimierung von

$$\sum_{i=1}^N -\ln p(y_i, \mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (9.2)$$

entspricht aufgrund der stetigen Monotonie des natürlichen Logarithmus. Unter der Annahme normalverteilter Beobachtungen mit

$$p(y_i, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} v_i^2(y_i, \mathbf{x})\right) \quad (9.3)$$

führt dies auf die Minimierung der Quadratsumme der Beobachtungsresiduen  $v_i$  (Vektor der Beobachtungsresiduen  $\mathbf{v}$  entspricht dem Inkonsistenzvektor  $\mathbf{i}$  bei W-LESS bzw. dem Verbesserungsvektor  $\mathbf{e}$  beim Speziellen Gauß-Markov-Modell) und damit zu der Kleinste-Quadrate-Schätzung. Weicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Gauß'schen Normalverteilung ab, so muss eine andere Objektfunktion  $\rho(\mathbf{v})$  minimiert werden:

$$\sum_{i=1}^N \rho(v_i(y_i, \mathbf{x})) \rightarrow \min \quad (9.4)$$

Die notwendige Bedingung ergibt sich dann zu:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho(v_i(y_i, \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (9.5)$$

Unter der Beachtung, dass  $\partial v_i / \partial x$  die transponierte  $i$ -te Reihe der Designmatrix  $\mathbf{A}$  ist und unter Einführung von  $\Psi(\mathbf{v})$  mit  $[\psi(v_i)] = [\partial \rho(v_i) / \partial v_i]$  ergibt sich

$$\mathbf{A}^T \cdot \Psi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \tag{9.6}$$

Um den Einfluss eines Ausreißers auf die Schätzung zu minimieren, muss der „Einflussterm“  $\psi(v_i)$  eine beschränkte Funktion sein. Unter Einführung der diagonalen Gewichtsmatrix  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_{i,i})$  mit  $[w_{i,i}] = [\psi(v_i) / v_i]$  ergibt sich aus (9.6)  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{0}$  und unter Berücksichtigung der Beobachtungsresiduen  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}$  erhält man schließlich

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \tag{9.7}$$

Dies entspricht dem zu lösenden Normalgleichungssystem der Kleinste-Quadrate-Schätzung W-LESS und bietet nach Beaton und Tukey (1974) eine Möglichkeit, eine robuste Schätzung durch iterative Regewichtung der normalen Kleinste-Quadrate-Schätzung wie folgt zu erhalten:

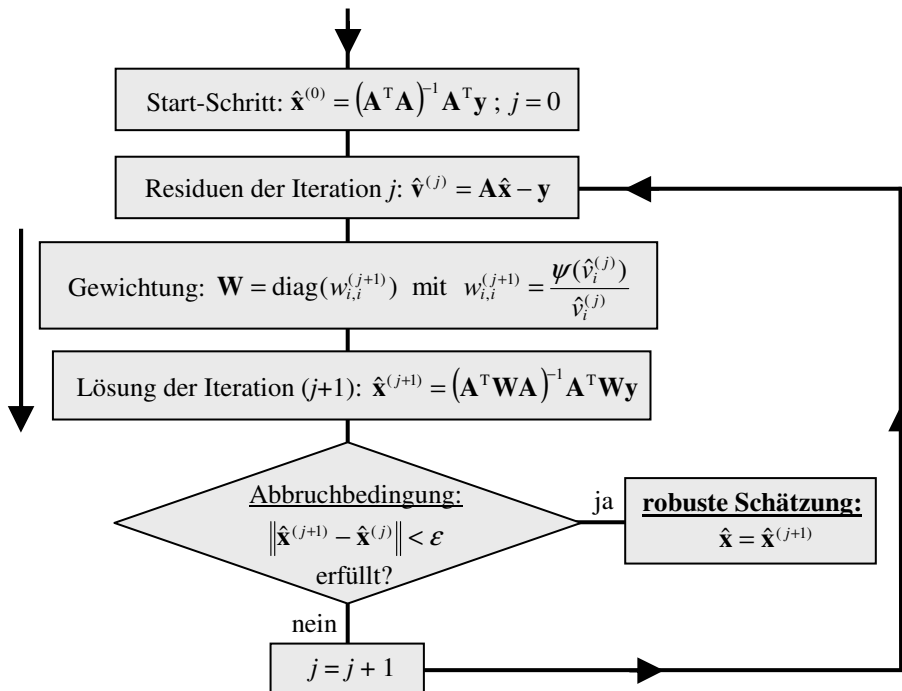


Abbildung 9.4: Ablaufdiagramm der Robusten Schätzung mittels iterativer Regewichtung.

Eine Zusammenstellung von Robusten Schätzverfahren sowie der zugehörigen Wahrscheinlichkeits-, Objekt-, Einfluss- und Gewichtsfunktionen findet sich beispielsweise in Somogyi und Závoti (1993). Ein häufig angewendetes robustes Schätzverfahren ist die Huber-Methode, deren Einflussfunktion  $\psi(v_i)$  und die sich daraus ergebende Gewichtsfunktion  $w_{i,i}(v_i)$  in Tabelle 9.1 angegeben sind:

| Method         | Kleinste-Quadrate | Huber-Methode   |
|----------------|-------------------|---|
| $\psi(v_i)$    | $v_i$             | $v_i$ falls $ v_i  \leq a$<br>$(a \cdot v_i) /  v_i $ falls $ v_i  > a$ |
| $w_{i,i}(v_i)$ | 1                 | 1 falls $ v_i  \leq a$<br>$a /  v_i $ falls $ v_i  > a$                 |

Tabelle 9.1: Einflussfunktion und Gewichtsfunktion bei der Kleinste-Quadrate Schätzung und bei der robusten Schätzung mit der Huber-Methode.

Die Implementierung einer diagonalen Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  in einem iterativen GleichungssystemlÖser wie PCCG ist gegenüber einer ungewichteten Lösung ohne großen zusätzlichen Aufwand möglich, wie in Abschnitt 7.2.1.2 beschrieben.

Entgegen der Voraussetzungen für die zuvor beschriebene robuste Schätzung sind allerdings die Beobachtungen  $y_i$ , also die mittels numerischer Differentiation bestimmten Beschleunigungen, aufgrund des verwendeten Differentiationsfilters sowie aufgrund der Korrelationen der Fehler kinematischer Bahndaten selbst korreliert. Eine Dekorrelation des Beobachtungsdatensatzes mittels eines „Whiteningfilters“ (z.B. Schuh, 2000) ist wenig sinnvoll, da die neuen dekorrelierten Beobachtungen Linearkombinationen der ursprünglichen Beobachtungen sind und die Ausreißer somit den

ganzen Datensatz beeinflussen. Es gibt eine Reihe von Vorschlägen, wie robuste Schätzverfahren an korrelierte Datensätze angepasst werden können (z.B. Xu, 1989). Diese führen im Prinzip auf eine volle Gewichtsmatrix, die allerdings aus rechen- und speichertechnischen Gründen nicht realisierbar ist (s. Abschnitt 7.1.2). Nach Koch (1996) ist die Vernachlässigung von gegenseitigen Abhängigkeiten der Beobachtungen untereinander jedoch akzeptabel, da der iterative Prozess der Gewichtung die Abhängigkeit von Beobachtungen mit Ausreißern von denjenigen ohne Ausreißer beseitigt. Des Weiteren wird die Vernachlässigung von Korrelationen durch Simulationsrechnungen von Xu (1989) angeregt. Diese zeigen, dass robuste Schätzverfahren für unkorrelierte Daten auch gut bei korrelierten Daten funktionieren, da deren Ergebnisse wesentlich besser als diejenigen der normalen Kleinste-Quadrate-Ausgleichung sind.

Der Vor- und Nachteile der robusten Schätzung gegenüber der Ausreißerelimination in der Datenvorverarbeitung sind:

- Vorteile: Es wird keine Referenzinformation benötigt, folglich besteht auch keine Gefahr der Abbildung der Referenzinformation in der Lösung; es werden alle Daten verwendet und entsprechend gewichtet.
- Nachteile: Aufgrund der Iteration sind diese wesentlich rechenaufwändiger, speziell bei großen Gleichungssystemen stellt dies ein Problem dar.

Der Rechenaufwand bei der robusten Schätzung kann allerdings bei Einsatz iterativer Gleichungssystemlöser wie PCCG reduziert werden, indem für die Lösung der Zwischenschritte der robusten Schätzung schwächere Konvergenzkriterien angesetzt werden. Neuere Untersuchungen zeigen weitere Möglichkeiten zur Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit robuster Schätzverfahren, indem anstatt der iterativen Regewichtung eine modifizierte Newton-Methode verwendet wird (Kargoll, 2005).

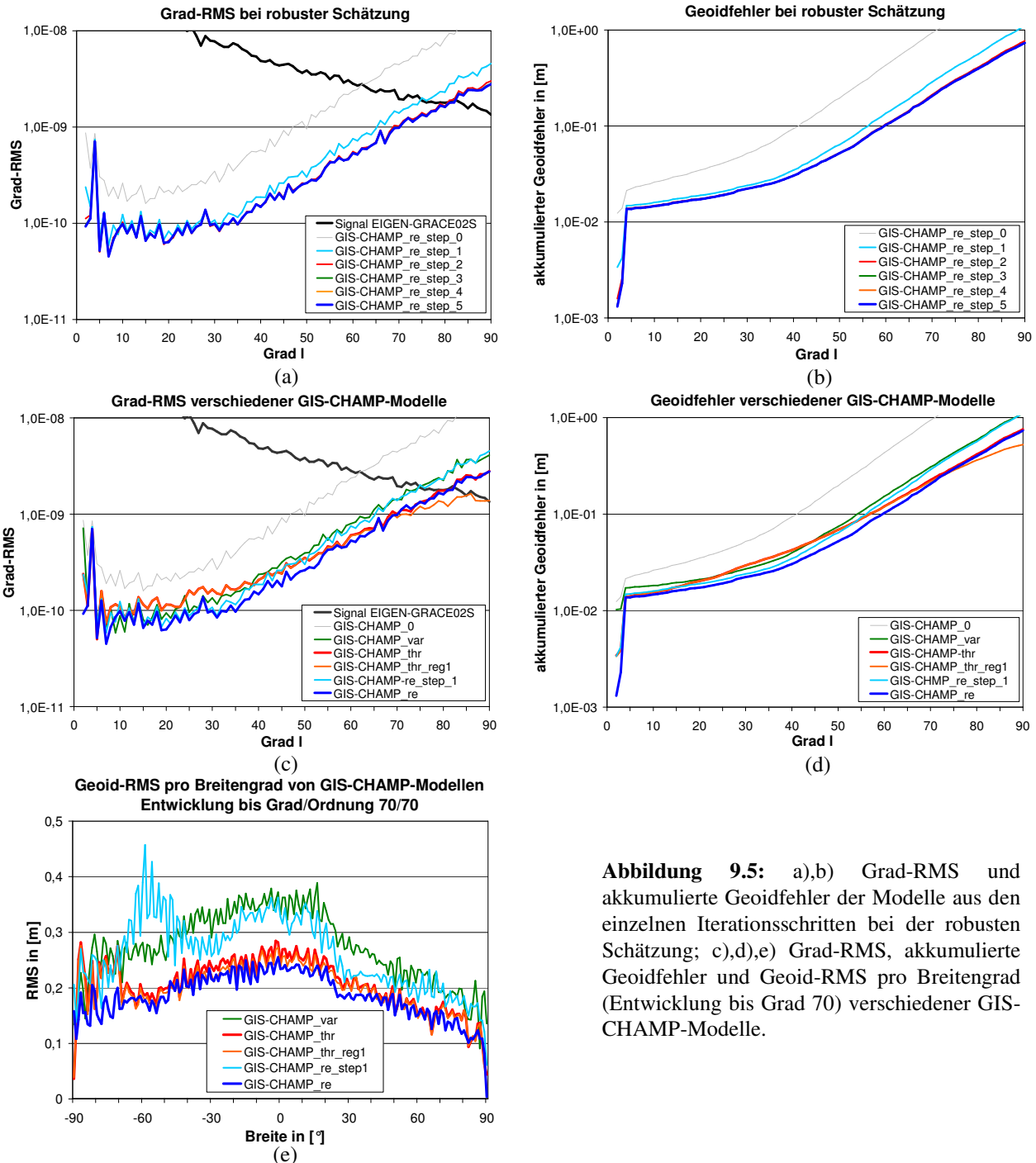
### 9.3 Ergebnisse aus der Analyse kinematischer Orbits

Mit Hilfe der zuvor genannten Verfahren zur Behandlung von Ausreißern wurden mit dem Beschleunigungsansatz aus dem zweijährigen kinematischen Orbit verschiedene Gravitationsfeldmodelle (GIS-CHAMP plus entsprechender Zusatz) bis Grad  $L = 90$  bestimmt. Die mittels numerischer Differentiation ermittelten Beschleunigungen wurden vor der Analyse von gravitativen Störbeschleunigungen wie dem direkten Effekt von Sonne, Mond und Planeten, den Gezeiten der festen Erde, Ozeangezeiten sowie Polgezeiten befreit. Auf die Reduktion von nicht-gravitativen Störbeschleunigungen wurde aufgrund der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Probleme der Akzelerometerdaten (Daten enthalten eventuell Störungen, die nicht von Oberflächenkräften stammen; enthaltene Bias- und Skalierungsparameter sind innerhalb des PCCG-Verfahrens schwierig zu schätzen) verzichtet. Sofern nicht extra erwähnt, wurde auf Regularisierung verzichtet, um eine Verzerrung durch Vorinformation zu vermeiden. Die geschätzten GIS-CHAMP-Modelle sind:

- GIS-CHAMP\_0: Normale, ungewichtete ( $\mathbf{W} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$ ) Kleinste-Quadrate-Lösung W-LESS bzw. V-BLUUE ohne Elimination von Ausreißern.
- GIS-CHAMP\_var: Normale, ungewichtete ( $\mathbf{W} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$ ) Kleinste-Quadrate-Lösung W-LESS bzw. V-BLUUE mit Elimination von Ausreißern anhand der Orbitvarianzen, wobei ca. 20% der kinematisch bestimmten Bahnpunkte eliminiert wurden.
- GIS-CHAMP\_thr: Normale, ungewichtete ( $\mathbf{W} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$ ) Kleinste-Quadrate-Lösung W-LESS bzw. V-BLUUE mit Elimination von Ausreißern anhand der Schwellwertmethode. Für die Bahnpunkte/Basislinien/Beschleunigungen wurden die Schwellwerte 50 cm/10 cm/5 mGal gewählt, womit ca. 20% aller möglichen Beschleunigungen eliminiert wurden.
- GIS-CHAMP\_thr\_reg1: Regularisierte Version von GIS-CHAMP\_thr mit Regularisierungsparameter  $\alpha = 1$ .
- GIS-CHAMP\_re: Lösung aus der robusten Schätzung mit der Huber-Methode; für den Parameter wurde  $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  gewählt.

In Abbildung 9.5 sind die Ergebnisse, die aus der Analyse der realen CHAMP-Daten unter Anwendung der verschiedenen Strategien zur Behandlung von Ausreißern bestimmt worden sind, als Grad-RMS, akkumulierte Geoidfehler sowie Geoid-RMS pro Breitengrad im Vergleich zu EIGEN-GRACE02S dargestellt. Wie aus Abbildung 9.5(c),d) zu erkennen ist, kann die Genauigkeit der Gravitationsfeldschätzung durch eine Detektion und Behandlung von Ausreißern in Form von Ausreißerelimination oder robuster Schätzung gegenüber der normalen Kleinste-Quadrate-Lösung ohne Ausreißerelimination deutlich verbessert werden. Die Genauigkeitssteigerung liegt hierbei für die einzelnen Grade zwischen einer halben und einer ganzen Größenordnung. Bei dem Vergleich der beiden Verfahren zur Ausreißerelimination fällt auf, dass die Schwellwertmethode für höherfrequente Anteile ab Grad  $l > 40$  zu besseren Ergebnissen führt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass nicht alle Ausreißer durch hohe Orbitvarianzen gekennzeichnet sind und damit mit den Orbitvarianzen nicht alle Ausreißer detektiert und beseitigt werden konnten. Allerdings sind die Ergebnisse für die Koeffizienten niedrigeren Grades mit  $l < 40$  mit der Ausreißerelimination anhand der Orbitvarianzen besser bestimmt als bei Anwendung der Schwellwertmethode. Als Begründung hierfür kann aufgeführt werden, dass zur Bestimmung niederfrequenter Anteile eine ununterbrochene Zeitreihe eines längeren Zeitraumes notwendig ist. Bei der Schwellwertmethode wird jedoch der Datensatz hauptsächlich wegen der Filterung der bestimmten Beschleunigungen mehr „zerstückelt“ als bei der Filterung der Bahnpunkte anhand der Orbitvarianzen. Genauere Ergebnisse als die Verfahren zur Ausreißer-

elimination liefert allerdings die robuste Schätzung. Vor allem die Koeffizienten für Grad  $l < 65$  können durch robuste Schätzung gegenüber dem Modell GIS-CHAMP\_thr besser bestimmt werden. Für Anteile höheren Grades liefern die beiden Verfahren allerdings ähnliche Ergebnisse, was darauf hindeutet, dass mit der Schwellwertmethode Ausreißer zuverlässig erkannt werden und somit hochfrequente Störungen im Signal beseitigt werden können. Die höhere Qualität der niederfrequenten Anteile lässt sich damit erklären, dass bei der robusten Schätzung alle Daten verwendet werden und somit ein weitestgehend ununterbrochener Datensatz (ausgenommen Datenlücken) vorliegt.

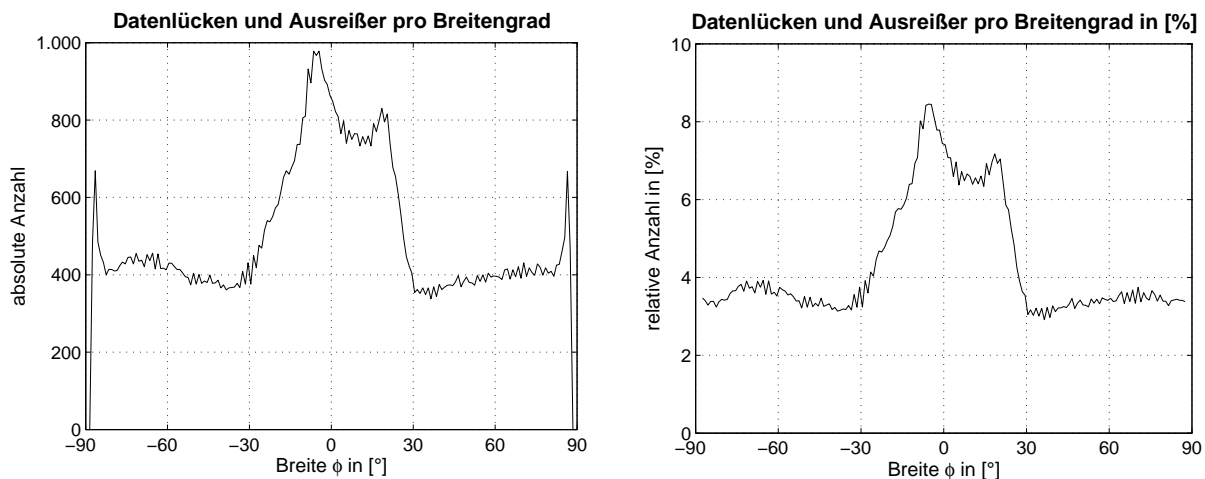


**Abbildung 9.5:** a),b) Grad-RMS und akkumulierte Geoidfehler der Modelle aus den einzelnen Iterationsschritten bei der robusten Schätzung; c),d),e) Grad-RMS, akkumulierte Geoidfehler und Geoid-RMS pro Breitengrad (Entwicklung bis Grad 70) verschiedener GIS-CHAMP-Modelle.

Die Analyse des kinematischen Datensatz zeigt, dass bei Anwendung des Beschleunigungsansatzes und einer optimalen Strategie zur Behandlung von Ausreißern die Bestimmung von Gravitationsfeldanteilen bis Grad 80 mit einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von  $> 1$  möglich ist, was in etwa den Erwartungen aus den Simulationsrechnungen entspricht. Durch Einsatz von Regularisierung kann die Genauigkeit von Koeffizienten von Grad  $l > 70$  gesteigert werden, wie am Modell GIS-CHAMP\_thr\_reg1 ersichtlich ist.

In Abbildung 9.5a),b) ist das Konvergenzverhalten der robusten Schätzung dargestellt (step\_ gibt den Iterationsschritt an). Wie zu sehen ist, wird mit dem ersten Iterationsschritt (step\_1) bereits eine deutliche Genauigkeitssteigerung gegenüber der normalen, ungewichteten Kleinst-Quadrate-Schätzung (GIS-CHAMP\_re\_step\_0  $\hat{=}$  GIS-CHAMP\_0) erreicht. Abbildung 9.5c),d) dokumentiert, dass diese (Zwischen-)Lösung bereits eine ähnliche Genauigkeit wie die

Lösung aus der Ausreißerelimination anhand der Orbitvarianzen, GIS-CHAMP\_var, besitzt. Ab der zweiten Iteration (step\_2) ist nach Abbildung 9.5a) keine Genauigkeitssteigerung mehr erkennbar und somit im Prinzip Konvergenz erreicht. Das Modell GIS-CHAMP\_re entspricht der Lösung aus dem 5. Iterationsschritt, GIS-CHAMP\_re\_step\_5. Abbildung 9.5e) zeigt die Abhängigkeit der Geoidfehler von der Breite  $\phi$  von verschiedenen GIS-CHAMP-Modellen für eine Entwicklung bis Grad/Ordnung 70/70. Auffällig ist, dass die Geoidfehler für höhere Breiten kleiner sind als für äquatoriale Gebiete. Eine Erklärung dafür liefert die geographische Verteilung der CHAMP-Daten. Nach Abbildung 8.10a),b) ist bedingt durch die leichte Inklination des CHAMP-Satelliten die Datendichte in höheren Breiten größer, was in diesen Regionen auf eine genauere Bestimmung des Geoids führt. Eine zweite Erklärung könnte sein, dass mehr Datenlücken und Ausreißer (Differenz zwischen kinematischem und reduziert-dynamischem Orbit  $> 50$  cm) in äquatorialen Breiten zu finden sind (Abbildung 9.6). Wie in Abbildung 9.5e) zu sehen ist, ist die Größe und Verteilung der Geoidfehler mit der Breite  $\phi$  bei der robusten Schätzung und der Schwellwertmethode ähnlich. Deutlich schlechter sind GIS-CHAMP\_var sowie das Modell aus dem 1. Iterationsschritt der robusten Schätzung. Vor allem GIS-CHAMP\_re\_step\_1 zeigt, trotz ähnlicher Genauigkeit wie GIS-CHAMP\_var, stärkere Unregelmäßigkeiten in der geographischen Verteilung der Fehler auf, weswegen ein Abbruch nach der 1. Iteration bei der robusten Schätzung als kritisch anzusehen ist. Dies wird auch aus Tabelle 9.2 ersichtlich, in der die RMS-Werte, die gewichteten RMS-Werte sowie die maximalen Geoidfehler verschiedener GIS-CHAMP-Modelle für eine Entwicklung bis Grad 70 auf einem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter angegeben sind. Während der normale und der gewichtete RMS-Wert mit 27 cm bzw. 28,7 cm im Bereich von GIS-CHAMP\_var liegen, tritt ein sehr großer maximaler Geoidfehler von 2 m auf. Insgesamt ist bei allen GIS-CHAMP-Modellen, bedingt durch die zuvor genannte geographische Verteilung der Geoidfehler, der gewichtete RMS-Wert etwas größer als der normale RMS-Wert. Der Einfluss einer korrekten Behandlung von Ausreißern zeigt sich auch in dieser Tabelle: Durch Ausreißerelimination bzw. robuste Schätzung können der RMS-Wert und vor allem der maximale Geoidfehler gegenüber der normalen, ungewichteten Kleinste-Quadrate-Lösung deutlich reduziert werden (22,4 cm bzw. 20,4 cm gegenüber 93,5 cm und 1,04 m bzw. 0,92 m gegenüber 12,34 m).



**Abbildung 9.6:** Datenlücken und Ausreißer des kinematischen Orbits pro Breitengrad; a) absolute Anzahl, b) relative Anzahl (Ausreißer/Datenlücken im Vergleich zur möglichen Anzahl der Beobachtungen pro Breitengrad)

| Modell              | GIS-CHAMP_ |       |       |          |       |          | EIGEN-CHAMP |       | EGM96 |
|---------------------|------------|-------|-------|----------|-------|----------|-------------|-------|-------|
|                     | 0          | var   | thr   | thr_reg1 | re    | re_step1 | -3p         | 03S   |       |
| <b>RMS [m]</b>      | 0,868      | 0,281 | 0,211 | 0,205    | 0,189 | 0,270    | 0,356       | 0,233 | 0,452 |
| <b>gew. RMS [m]</b> | 0,935      | 0,305 | 0,224 | 0,217    | 0,204 | 0,287    | 0,282       | 0,235 | 0,341 |
| <b>Maximum [m]</b>  | 12,34      | 1,258 | 1,037 | 0,965    | 0,915 | 2,009    | 2,664       | 1,575 | 5,536 |

**Tabelle 9.2:** RMS-Wert, gewichteter RMS-Wert sowie maximaler Wert der Geoiddifferenz zwischen verschiedenen CHAMP-Modellen (und EGM96) und EIGEN-GRACE02S.

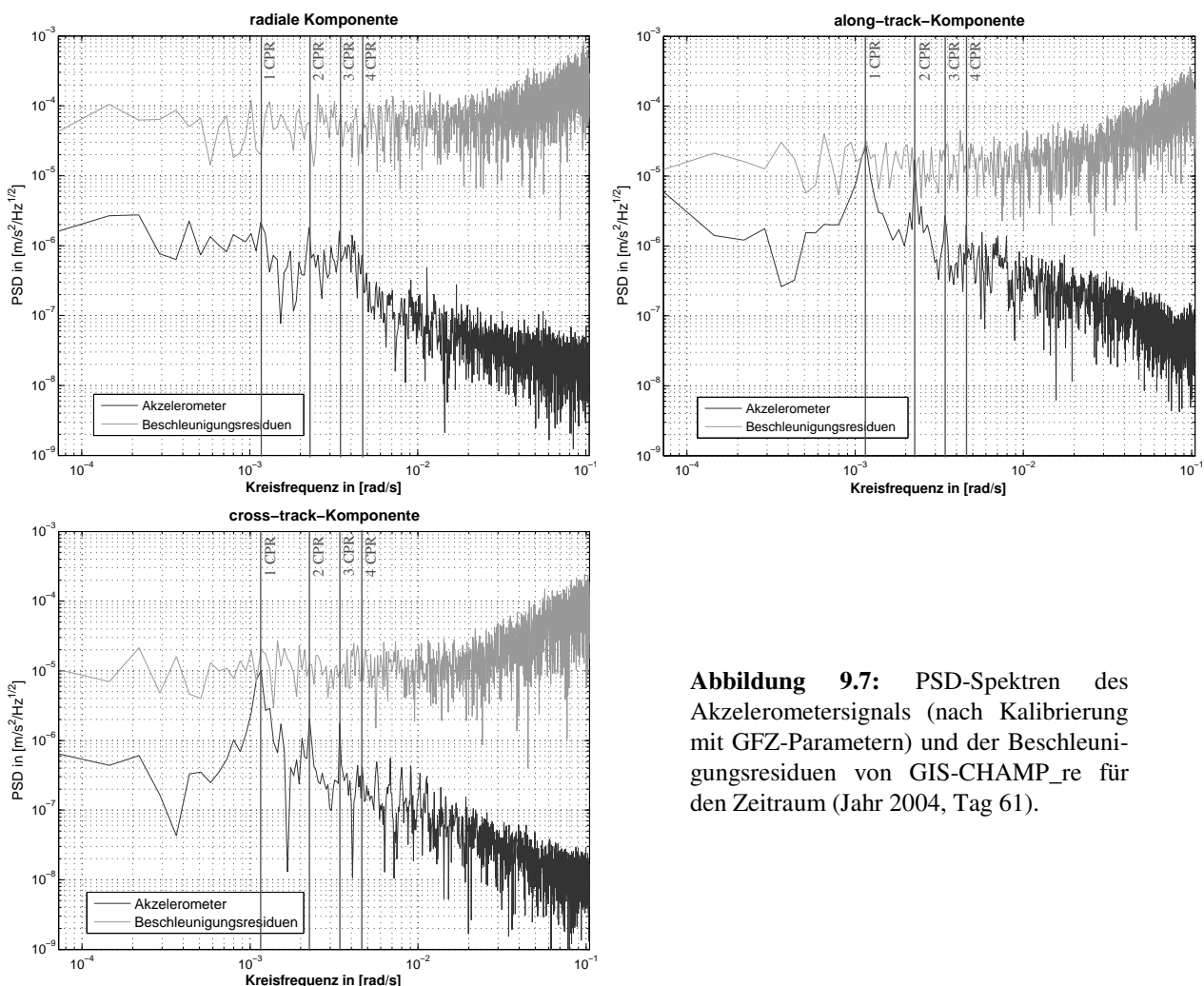
Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Genauigkeit von Gravitationsfeldmodellen, die mit dem Beschleunigungsansatz bestimmt worden sind, durch eine adäquate Behandlung von Ausreißern deutlich verbessert werden kann. Dabei übertreffen die Ergebnisse der robusten Schätzung diejenigen der Ausreißerelimination. Die Gründe hierfür sind:

- Bei der robusten Schätzung ist keine Vorinformation in Form von Orbitvarianzen oder Referenzdaten notwendig. Daher besteht auch keine Gefahr, dass diese in der Lösung abgebildet werden können.
- Anstatt einer rigorosen Schwellwertelimination werden alle Daten verwendet, die iterativ anhand von Residuen gewichtet werden. Die Information zur Gewichtung stammt rein aus den Beobachtungsdaten.



Als Nachteil der robusten Schätzung kann angesehen werden, dass diese deutlich zeitaufwendiger ist, da eine wiederholte iterative Lösung des Gleichungssystems notwendig ist. Dies kann vor allem bei sehr groß dimensionierten Gleichungssystemen wie bei der GOCE-Datenanalyse ein großes Problem darstellen, so dass die Ausreißerelimination in der Vorverarbeitung vorzuziehen ist (Kern und Allesch, 2003). Im vorliegenden Fall zeigt sich allerdings, dass die robuste Schätzung schnell konvergiert und im Prinzip 2 Iterationsschritte ausreichen, so dass aufgrund der höheren Genauigkeit die robuste Schätzung angewendet werden sollte.

Die vorliegenden GIS-CHAMP-Modelle wurden aus Beschleunigungen geschätzt, die nicht mit den Akzelerometerdaten reduziert wurden und die somit noch nicht-konservative Störbeschleunigungen enthalten. Im Folgenden soll kurz erklärt werden, warum trotzdem eine hohe Genauigkeit bei der Gravitationsfeldbestimmung erreichbar ist. In Abbildung 9.7 sind die PSD-Spektren der Akzelerometermessungen nach Korrektur mit Kalibrierungsparametern des GFZ sowie die PSD-Spektren der Beschleunigungsresiduen aus der robusten Schätzung (GIS-CHAMP\_re) in along-track, cross-track sowie in radialer Richtung dargestellt. Für die PSD-Spektren wurde ein Tag (Tag 61, Jahr 2004) mit möglichst niedriger Bahnhöhe ( $h \approx 385$  km) und somit erhöhter Atmosphärenreibung ausgewählt. Die Akzelerometerdaten dieses Tages enthalten keine Datenlücken, auftretende Datenlücken im Residuendatensatz sowie Ausreißer (Bahnpunkte/Basislinien mit RMS-Werten  $> 50$  cm/ $> 10$  cm sowie Beschleunigungsresiduen  $> 10$  mGal) wurden zu null gesetzt.



**Abbildung 9.7:** PSD-Spektren des Akzelerometersignals (nach Kalibrierung mit GFZ-Parametern) und der Beschleunigungsresiduen von GIS-CHAMP\_re für den Zeitraum (Jahr 2004, Tag 61).

Es fällt auf, dass die PSD-Spektren der Akzelerometerdaten relativ stark auf den niedrigeren Kreisfrequenzen ( $< 4 \cdot 10^{-3}$  rad/s) sind und für höhere Frequenzen abnehmen, während die PSD-Spektren der Beschleunigungsresiduen aufgrund ihrer negativen Korrelation mit größer werdender Frequenz zunehmen. Die größte Störbeschleunigung wird durch die Atmosphärenreibung verursacht, deshalb liefert wie erwartet die along-track-Akzelerometerkomponente das stärkste Signal. Auffällig sind vor allem große Amplituden in den PSD-Spektren der along-track- und cross-track-Komponente, die bei der Umlauffrequenz (engl.: *1 cycle per revolution, 1 CPR*) sowie bei Vielfachen der Umlauffrequenz (2 CPR, 3 CPR, ...) auftreten. Die große Amplitude bei 1 CPR kann durch die Exzentrizität des Orbits sowie die mit einem Umlauf wechselnde Sonneneinstrahlung (und die sich damit verändernde Temperatur und Dichte der Atmosphäre) erklärt werden. Bei der cross-track-Komponente kommt hinzu, dass die durch die Rotation der Atmosphäre verursachte Reibung bei einem aufsteigenden Bahnbogen nach rechts und für einen absteigenden Bahnbogen nach links gerichtet ist. Die Amplitude bei 2 CPR ist nur noch bei der along-track-Komponente sehr stark

ausgeprägt und kann auf Variationen in der Atmosphärenreibung zurückgeführt werden, die durch die Abplattung der Erde sowie Temperaturunterschiede über polaren und äquatorialen Gebieten verursacht werden. Wie aus Abbildung 9.7 zu erkennen ist, liegen die Akzelerometersignale auf allen Frequenzen eine oder mehrere Größenordnungen unter dem PSD-Spektren außer für die zuvor genannten Frequenzen. Auf den Frequenzen für 1 CPR und 2 CPR liegen die Amplituden des along-track- und cross-track-Akzelerometersignals knapp unterhalb der Beschleunigungsresiduen bzw. sind fast genauso groß. Daraus lässt sich schließen, dass das Akzelerometersignal vom Rauschen absorbiert wird und somit im Prinzip keinen Einfluss auf die Gravitationsfeldbestimmung hat. Allerdings muss beachtet werden, dass die nicht-konservativen Störbeschleunigungen im Gegensatz zu den Beschleunigungsresiduen keine stochastischen Größen sind. Deshalb ist auf den Frequenzen nahe 1 CPR und 2 CPR ein Einfluss auf die Gravitationsfeldschätzung denkbar. Dies beträfe jedoch im Wesentlichen die Koeffizienten niedrigen Grades ( $1 \text{ CPR}/2 \text{ CPR} \approx \text{Frequenz für Grad } l = 1/2$ ). Für einen geringen Einfluss der Akzelerometermessungen auf die Gravitationsfeldbestimmung spricht außerdem:

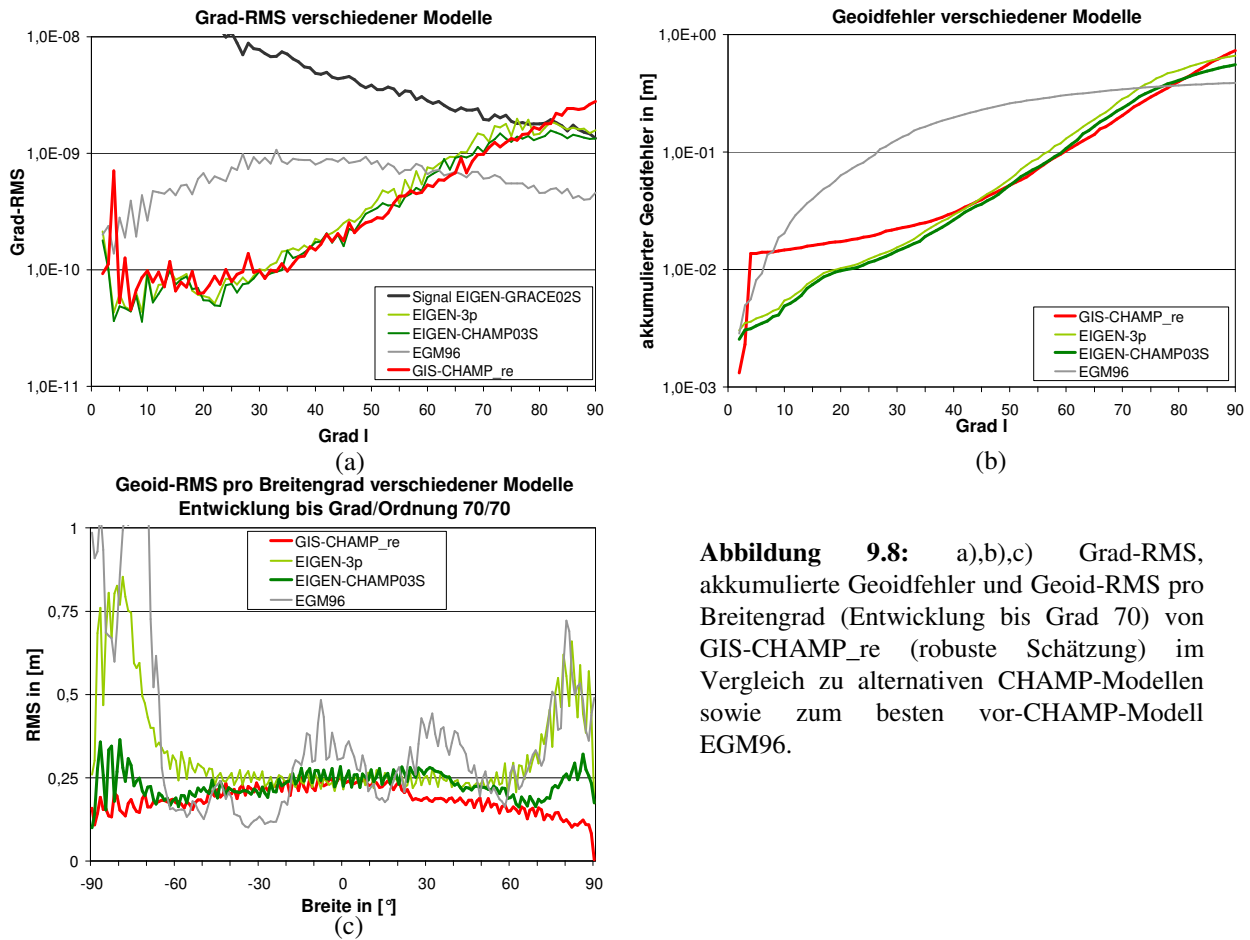
- Die Atmosphärenreibung in along-track-Richtung ist zwar relativ stark, ihre Richtung hängt aber davon ab, ob der Satellit sich auf einem aufsteigenden oder einem absteigendem Bahnbogen befindet. Solange die Anzahl der auf- und absteigenden Bahnbögen über einer Region ungefähr gleich ist, löschen sich die durch Atmosphärenreibung hervorgerufenen Signale gegenseitig fast aus.
- Auch wenn die Beschleunigungsresiduen in radialer Richtung am größten sind, ist die radiale Komponente die wichtigste, da in dieser Richtung das Gravitationsfeldsignal am stärksten ist. In radialer Richtung wirkt allerdings so gut wie keine Atmosphärenreibung, so dass die radiale Komponente am wenigsten von den Akzelerometermessungen beeinträchtigt wird.

Insgesamt lässt sich also feststellen, dass die nicht-konservativen Störbeschleunigungen keinen Einfluss auf die Genauigkeit der Gravitationsfeldbestimmung mit dem Beschleunigungsansatz haben und deswegen auf die Reduktion der Akzelerometerdaten verzichtet werden kann. Eine ähnliche Erkenntnis wurde von Ditmar et al. (2007) bei Anwendung des Beschleunigungsansatzes für „mittlere“ Beschleunigungen getroffen.

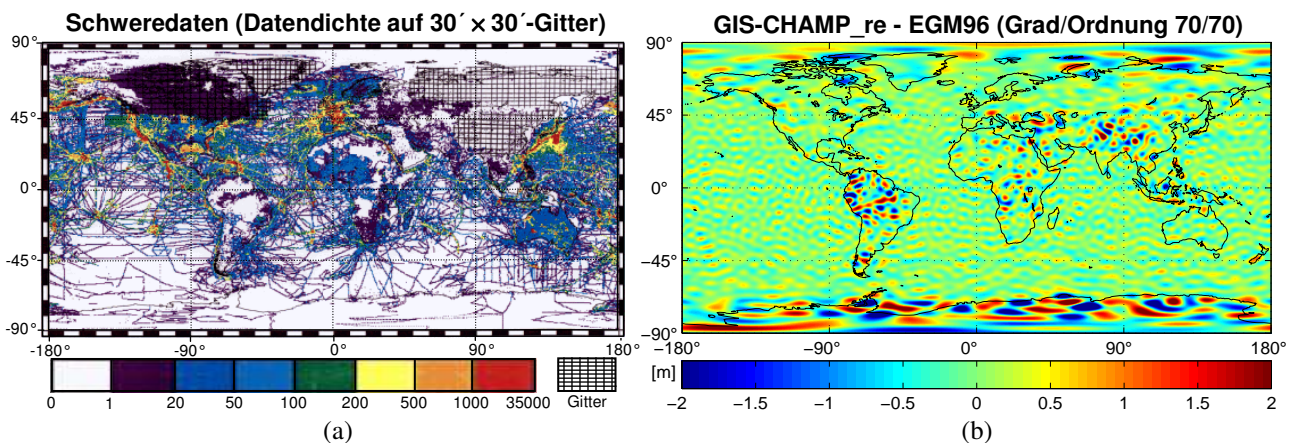
Abbildung 9.8a),b),c) zeigt GIS-CHAMP\_re im Vergleich zu den „offiziellen“ CHAMP-Gravitationsfeldlösungen EIGEN-3p und EIGEN-CHAMP03S (Reigber et al., 2005c) sowie zum besten Gravitationsfeldmodell der Vor-CHAMP-Ära, EGM96, in Form von Grad-RMS, akkumulierten Geoidfehlern sowie Geoid-RMS pro Breitengrad für eine Entwicklung bis Grad 70. Die Modelle EIGEN-3p und EIGEN-CHAMP03S wurden vom GFZ-Potsdam aus einem dreijährigen CHAMP-Datensatz des Zeitraumes Juli 2000–Juni 2003 mit dem klassischen, bahndynamischen Verfahren bestimmt. Beide Modelle wurden komplett bis Grad/Ordnung 120/120 aufgelöst, sensitive und resonante Anteile wurden bis Grad 140 bestimmt, wobei ab Grad 65 bzw. 60 regularisiert wurde. EIGEN-CHAMP03S stellt die überarbeitete und endgültige Version von EIGEN-3p dar.

Wie sich in Abbildung 9.8a) anhand der Grad-RMS zeigt, weisen die CHAMP-Modelle eine ähnliche Genauigkeit auf. Bis Grad 35 sind die EIGEN-Modelle etwas besser, zwischen Grad 40 und 75 sind die Grad-RMS-Werte bei GIS-CHAMP\_re etwas kleiner. Ab Grad 75 sind wiederum die EIGEN-Modelle bedingt durch die Regularisierung etwas genauer. Für die höhere Qualität der niedrigerfrequenten Anteile bis Grad 40 bei den EIGEN-Modellen ist wahrscheinlich der größere Datensatz (3 Jahre im Gegensatz zu 2 Jahren) verantwortlich. Die geringere Genauigkeit der höherfrequenten Anteile zwischen Grad 40 und 75 ist auf eine geringere Sensitivität des für die EIGEN-Modelle verwendeten Datensatzes zurückzuführen, da diese Daten aus einem älteren Zeitraum mit vorwiegend größeren Bahnhöhen (395–455 km im Gegensatz zu 385–415 km) entstammen. Abbildung 9.8c) dokumentiert, dass die geographische Verteilung der Geoidfehler mit der Breite  $\phi$  bei GIS-CHAMP\_re gleichmäßiger ist als bei den EIGEN-Modellen. Speziell in den polnahen Gebieten weisen die EIGEN-Modelle, vor allem EIGEN-3p, eine größere Abweichung auf als GIS-CHAMP\_re, während in den äquatorialen Gebieten alle drei Modelle fast gleichgenau sind. Die größere Homogenität von GIS-CHAMP\_re äußert sich auch in den RMS-Werten (normal und gewichtet) und den maximalen Geoiddifferenzen in Tabelle 9.2. Während der gewichtete RMS-Wert der Geoiddifferenzen bis Grad 70 für GIS-CHAMP\_re und EIGEN-CHAMP03S mit 20,4 cm bzw. 23,5 cm recht ähnlich ist, weist EIGEN-CHAMP03S eine deutlich höhere maximale Geoiddifferenz mit 1,575 m gegenüber 0,915 m bei GIS-CHAMP\_re auf. Die deutlich schlechtere Homogenität von EIGEN-3p zeigt sich in dem großen Unterschied zwischen ungewichtetem und gewichtetem RMS-Wert von 28,2 cm bzw. 35,6 cm und einer sehr großen maximalen Geoiddifferenz.

Der Vergleich der CHAMP-Modelle mit EGM96 in Abbildung 9.8a) verdeutlicht, welchen Beitrag CHAMP für die Gravitationsfeldbestimmung liefert. Gegenüber EGM96 ist eine Genauigkeitssteigerung bis Grad 65 erkennbar, die teilweise bis zu einer Größenordnung beträgt. Die Darstellung der Geoid-RMS-Werte pro Breitengrad in Abbildung 9.8c) zeigt, dass die geographische Verteilung der Geoidfehler beim EGM96 völlig inhomogen ist. Dies ist auf die inhomogenen Datensätze unterschiedlicher Herkunft, Genauigkeit, Datendichte und Sensitivität zurückzuführen, die für die Berechnung des EGM96 verwendet wurden. So treten gerade in den Breiten, in denen keine oder nur wenige und ungenaue Messwerte vorlagen, die größten Fehler auf. Dies sind die Pole sowie die Breitenbereiche bei  $\phi \approx 30^\circ$  (nördliches Afrika, Naher Osten) und  $\phi = -10^\circ$  (Brasilien, südliches Zentralafrika). Folglich müssten in diesen Gebieten die größten Unterschiede zwischen CHAMP-Modellen und EGM96 und damit die größten Verbesserungen durch CHAMP gegenüber EGM96 zu erwarten sein.



Dies wird durch Abbildung 9.9a),b) bestätigt, in der die terrestrische Schweredatenbank des *BGI* (fr.: *Bureau Gravimétrique International*) sowie die Geoiddifferenz zwischen GIS-CHAMP\_re und EGM96 für eine Entwicklung bis Grad/Ordnung 70/70 dargestellt ist. Die Graphiken zeigen, dass die größten Unterschiede zwischen GIS-CHAMP\_re und EGM96 genau in denjenigen (schon zuvor genannten) Gebieten auftreten, in denen keine oder wenig terrestrische Daten, welche eine Grundlage für das EGM96 sind, vorliegen. Aus diesem Grunde ist gerade in diesen Gebieten durch die CHAMP-Daten eine deutliche Verbesserung zu erreichen.



Insgesamt lässt sich also feststellen, dass mit dem Beschleunigungsansatz Gravitationsfeldmodelle ähnlicher Qualität wie mit dem klassischen Ansatz bestimmt werden können und dass durch CHAMP-Daten eine signifikante Verbesserung der Kenntnis der lang- und mittelwelligen Gravitationsfeldanteile sowie des Gravitationsfeldes in Gebieten geringer terrestrischer Datendichte möglich ist.

## 9.4 Vergleich der Ergebnisse aus unterschiedlichen Verfahren der Bahnanalyse

In der Einführung wurden verschiedene Möglichkeiten zur Bahnanalyse bzw. zur Auswertung von CHAMP-hl-SST-Daten beschrieben. In dieser Arbeit wurde speziell der Beschleunigungsansatz näher vorgestellt und für die Gravitationsfeldanalyse verwendet. Tatsächlich wurden aber von anderen Instituten zeitgleich weitere CHAMP-Modelle bestimmt, bei denen die weiteren Ansätze wie die Energiebilanzmethode, das Randwertproblem für kurze Bahnbögen sowie das klassische, bahndynamische Verfahren zum Einsatz kamen. Um die einzelnen Verfahren nicht nur anhand von Simulationsrechnungen bewerten zu können, sondern auch anhand von realen Daten, werden im Folgenden die CHAMP-Modelle aus diesen Verfahren gegeneinander verglichen. Die einzelnen Modelle sind:

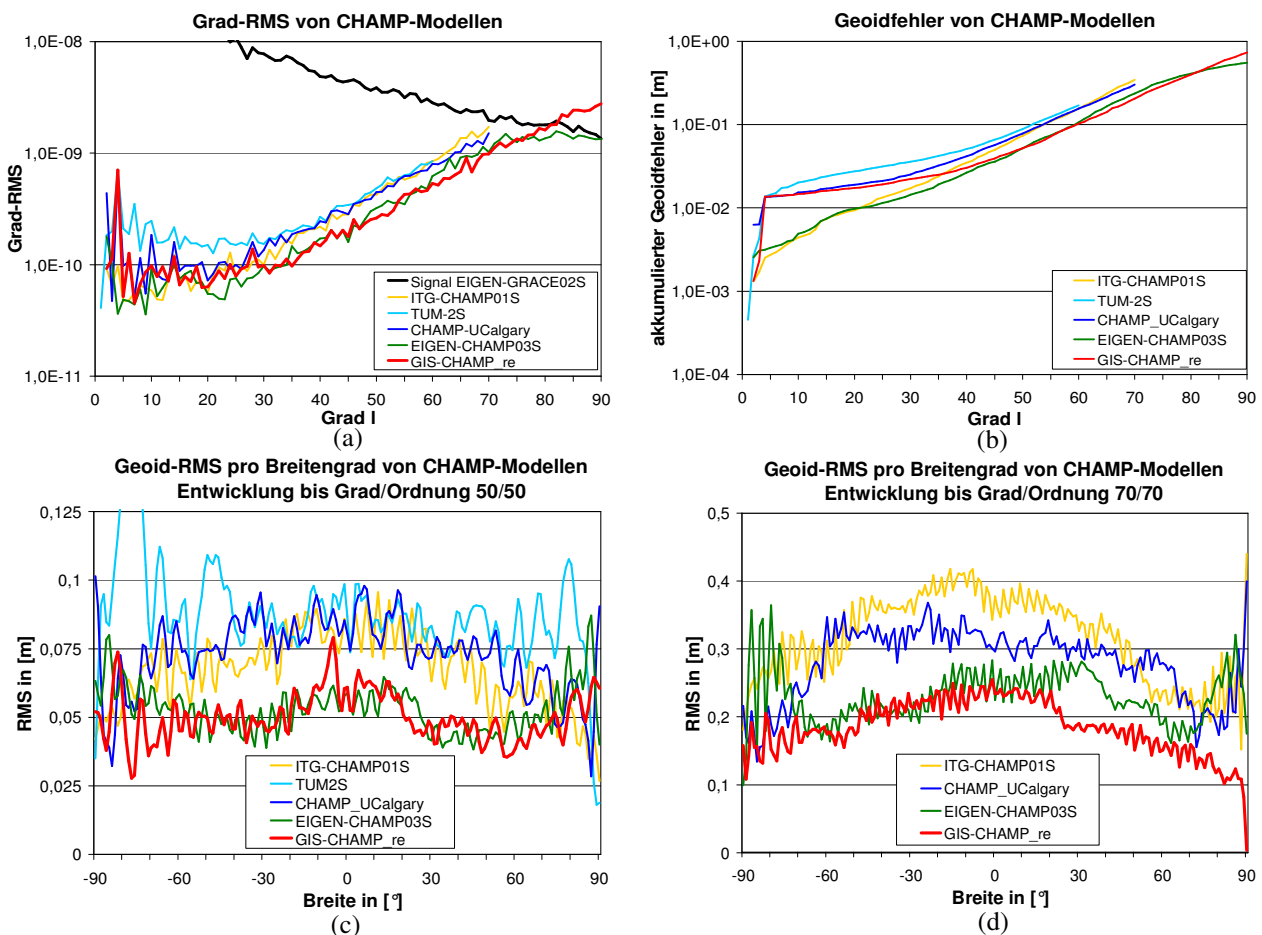
- **GIS-CHAMP\_re**: Methodik: Beschleunigungsansatz; Datensatz: 2-jähriger kinematischer Orbit des Zeitraumes März 2002–März 2004; Flughöhe: 385–415 km; Auflösung: Grad/Ordnung 90/90, keine Regularisierung; Schätzverfahren: robuste Schätzung mit Huber-Methode; Akzelerometerdaten vernachlässigt; Referenz: diese Arbeit, Reubelt et al., 2006.
- **EIGEN-CHAMP03S**: Methodik: klassisches, bahndynamisches Verfahren; Datensatz: 3 Jahre CHAMP-hl-SST-Daten (Trägerphasen und Pseudostrecken) des Zeitraumes Juli 2000–Juni 2003; Flughöhe: 395–455 km; Auflösung: Grad/Ordnung 120/120, resonante Anteile bis Grad 140, Regularisierung ab Grad 60; Schätzverfahren: Kleinste Quadrate; Akzelerometerdaten: Schätzung von Biasparametern 1 mal pro Umlauf für die along-track- und cross-track-Komponente sowie 2 mal pro Umlauf für die radiale Komponente; Referenz: Reigber et al., 2005c.
- **ITG-CHAMP01S**: Methodik: Randwertproblem für kurze Bahnbögen; Datensatz: 1-jähriger kinematischer Orbit des Zeitraumes März 2002–März 2003; Flughöhe: 395–415 km; Auflösung: Grad/Ordnung 90/90, keine Regularisierung (regularisierte Versionen ITG-CHAMP01K und ITG-CHAMP01E existieren); Schätzverfahren: Kleinste-Quadrate mit Gewichtung der Positionen mittels Orbitvarianzen, außerdem Schätzung einer Varianzkomponente pro Bahnbogen; Akzelerometerdaten: Schätzung von 1 Biasparameter pro Bahnbogen und Komponente; Referenz: Mayer-Gürr et al., 2005b.
- **CHAMP\_UCalgary**: Methodik: Energiebilanzmethode; Datensatz: 2-jähriger kinematischer Orbit des Zeitraumes März 2002–März 2004; Flughöhe: 385–415 km; Auflösung: Grad/Ordnung 70/70, keine Regularisierung; Schätzverfahren: Kleinste-Quadrate mit breitenabhängiger Gewichtung, Ausreißerelimination anhand Positions-/Basisliniendifferenzen zwischen kinematischem und reduziert-dynamischem Orbit (Schwellwerte 20 cm/5 cm) sowie anhand von Potentialdifferenzen zum EGM96 (Schwellwerte: 4-RMS bzw.  $5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ); Akzelerometerdaten: Bestimmung Energiedrift (verursacht durch Bias) pro Tag/Bahnbogen in der Datenvorverarbeitung anhand EGM96; Referenz: Weigelt (2007).
- **TUM2S**: Methodik: Energiebilanzmethode; Datensatz: 2-jähriger kinematischer Orbit des Zeitraumes März 2002–März 2004; Flughöhe: 385–415 km; Auflösung: Grad/Ordnung 60/60, keine Regularisierung; Schätzverfahren: Kleinste Quadrate, Ausreißerelimination anhand Positionsdifferenzen zwischen kinematischem und reduziert-dynamischem Orbit; Akzelerometerdaten: Reduktion von Bias- und Drift des Akzelerometers durch Anwendung eines low-pass-Filters auf die Differenz zwischen der Energie und EGM96; Referenz: Földvály et al., 2005.

Bei dem Vergleich muss allerdings beachtet werden, dass für die Bestimmung der Modelle teilweise verschiedene CHAMP-Datensätze unterschiedlicher Länge und Bahnhöhe verwendet wurden, was einen Einfluss auf die Genauigkeit des Gravitationsfeldes, vor allem in den höheren Graden, haben kann. Zudem wurden unterschiedliche Schätzverfahren (robuste Schätzung, ungewichtete/gewichtete Ausgleichungsverfahren) eingesetzt, was ebenfalls eine größere Auswirkung auf die Qualität des Gravitationsfeldes haben kann, wie sich bei den GIS-CHAMP-Modellen gezeigt hat. Deswegen kann nur grob beurteilt werden, welche Verfahren zur Analyse von hl-SST-Daten am meisten geeignet sind. In Abbildung 9.10a,b) sind die Fehler der einzelnen Modelle als Grad-RMS sowie als akkumulierte Geoiddifferenzen zu EIGEN-GRACE02S gegenüber gestellt. Wie sich in den Grad-RMS-Werten zeigt, liegen die Fehler aller Modelle in einer ähnlichen Größenordnung. Es fällt allerdings auf, dass die drei Modelle ITG-CHAMP01S, TUM2S und CHAMP\_UCalgary ab Grad 35 einen ähnlichen, aber gegenüber den anderen beiden Modellen erhöhten RMS-Wert haben. Bei ITG-CHAMP01S ist dies dadurch zu erklären, dass dafür nur ein 1-jähriger-Datensatz etwa gleicher Bahnhöhe verwendet worden ist. Bei Verwendung des 2-jährigen Datensatzes wäre eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor  $\sqrt{2}$  (unter der Annahme normalverteilter Beobachtungen) zu erwarten, womit der Verlauf der Grad-RMS-Kurve bei ITG-CHAMP01S dann ähnlich wäre wie bei GIS-CHAMP\_re und EIGEN-CHAMP03S. Da aber gerade die Grad-RMS-Werte der beiden Modelle aus der Energiebilanzmethode ab Grad 30 erhöht sind, ist zu vermuten, dass die etwas niedrigere Genauigkeit (ca. Faktor 1,5) auf die Energiebilanzmethode zurückzuführen ist, wie schon anhand von simulierten Daten in Abschnitt 8.4.2 gezeigt wurde. Für den niederfrequenten Bereich kleiner als Grad 30 ist mit der Energiebilanzmethode eine ähnliche Genauigkeit wie mit den anderen Verfahren erreichbar, wie CHAMP\_UCalgary zeigt. Die größeren Grad-RMS-Werte von TUM2S für Koeffizienten im Bereich <Grad 30 im Vergleich zu CHAMP\_UCalgary werden wahrscheinlich durch die Tiefpassfilterung zur Beseitigung von Bias- und Driftparametern des Akzelerometers verursacht (M. Weigelt, persönliche Kommunikation), welche anscheinend zusätzlich das Gravita-

tionsfeldsignal auf diesen Frequenzen teilweise herausfiltert. Bei den Modellen, die aus dem 2-jährigen kinematischen Orbit bestimmt wurden, zeigt sich in Abbildung 9.10a),b) gerade bei Grad 4 ein stark erhöhter, quasi identischer Geoidfehler, der bei den beiden anderen Modellen nicht zu erkennen ist. Die Ursache dafür ist deshalb eher in dem verwendeten Datensatz und nicht in dem eingesetzten Verfahren zur hl-SST-Analyse zu suchen. Auf die Unterschiede zwischen EIGEN-CHAMP03S und GIS-CHAMP\_re soll nicht mehr näher eingegangen werden, da diese bereits zuvor beschrieben worden sind.

Insgesamt bestätigen die Grad-RMS-Kurven der realen CHAMP-Modelle aus Abbildung 9.10a) die Erkenntnisse aus den Simulationsrechnungen in Abschnitt 8.4.2. Diese sind, dass der Energieansatz einerseits zu etwas schlechteren Ergebnissen (Faktor 1,5–2) gegenüber den anderen Verfahren führt, und dass der Beschleunigungsansatz und das Randwertproblem (bei entsprechender Gewichtung) in etwa gleichwertige Ergebnisse liefern. Dabei macht sich der Einfluss einer nicht vollständig korrekten Gewichtung beim Randwertproblem mit Vernachlässigung der Korrelationen zwischen den Positionen beim Modell ITG-CHAMP01S nicht so stark bemerkbar, wie in Abschnitt 8.4.2 (speziell Abbildung 8.15c)) vermutet. Dies liegt zum einen daran, dass die tatsächliche Korrelation der Bahnfehler nach Abbildung 9.1 nicht so stark ausfällt wie in der Simulation in Abschnitt 8.4.2 ( $\rho = 0,99$ ). Zum anderen wird anscheinend durch die Berücksichtigung von Orbitvarianzen und die Varianzkomponentenschätzung beim ITG-CHAMP01S die Vernachlässigung von Korrelationen gut kompensiert.

Die Darstellungen der Geoid-RMS-Werte pro Breitengrad für Entwicklungen bis Grad/Ordnung 50/50 und 70/70 in Abbildung 9.10c),d) zeigt ebenfalls, dass die Fehler bei EIGEN-CHAMP03S und GIS-CHAMP\_re kleiner sind als bei den anderen Modellen, wobei die geographische Verteilung der Geoidfehler bei EIGEN-CHAMP03S etwas inhomogener mit größeren Fehlern an den polnahen Gebieten ist. Bei ITG-CHAMP01S und CHAMP\_UCalgary ist, wenn auch die Fehler etwas größer sind, eine ähnliche geographische Verteilung der Fehler wie bei GIS-CHAMP\_re mit kleineren Fehlern in polnahen Gebieten als in äquatorialen Gebieten erkennbar. Dies ist wahrscheinlich auf die geographische Verteilung der CHAMP-Daten (s. Abbildung 8.10a),b)) und der Ausreißer (s. Abbildung 9.6) zurückzuführen.



**Abbildung 9.10:** Vergleich verschiedener CHAMP-only-Modelle; a) Grad-RMS, b) akkumulierte Geoidfehler; c),d) Geoid-RMS pro Breitengrad für Entwicklungen bis Grad/Ordnung 50/50 und 70/70.

In Tabelle 9.3 und Tabelle 9.4 sind die ungewichteten und gewichteten RMS-Werte der Geoiddifferenzen sowie die maximale Geoiddifferenz auf dem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für Entwicklungen bis Grad/Ordnung 50/50 und 70/70 vertafelt. Die Geoidfehler sind bei GIS-CHAMP\_re und EIGEN-CHAMP03S ähnlich, wobei der maximale Geoidfehler bei EIGEN-CHAMP03S für die Entwicklung bis Grad 50 (wahrscheinlich aufgrund des größeren Datensatzes) etwas geringer ist und für die Entwicklung bis Grad 70 größer ist (wahrscheinlich aufgrund der geringeren Sensitivität wegen der

größeren Flughöhe). Bei Berücksichtigung des  $\sqrt{2}$ -Faktors wegen des kürzeren Datensatzes sind auch die Fehler des ITG-CHAMP01S als gleich groß wie bei GIS-CHAMP\_re und EIGEN-CHAMP03S zu betrachten. Die Geoidfehler der Modelle aus der Energiebilanzmethode sind dann in etwa 1,5 mal so groß wie diejenigen der anderen Modelle.

| Modell        | GIS-CHAMP_re          | EIGEN-CHAMP03S        | ITG-CHAMP01S    | TUM2S         | CHAMP_UCalgary |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|---------------|----------------|
| Methodik      | Beschleunigungsansatz | Klassisches Verfahren | Randwertproblem | Energiebilanz | Energiebilanz  |
| Zeitraum      | 2 Jahre               | 3 Jahre               | 1 Jahr          | 2 Jahre       | 2 Jahre        |
| Bahnhöhe [km] | 385–415               | 395–455               | 395–415         | 385–415       | 385–415        |
| RMS [m]       | 0,051                 | 0,054                 | 0,069           | 0,090         | 0,075          |
| gew. RMS [m]  | 0,052                 | 0,052                 | 0,074           | 0,088         | 0,078          |
| Maximum [m]   | 0,268                 | 0,207                 | 0,313           | 0,474         | 0,328          |

**Tabelle 9.3:** RMS-Wert, gewichteter RMS-Wert und maximale Differenz der Geoidundulation verschiedener CHAMP-only-Modelle im Vergleich zu EIGEN-GRACE02S; Entwicklung bis Grad/Ordnung 50/50.

| Modell       | GIS-CHAMP_re          | EIGEN-CHAMP03S        | ITG-CHAMP01S    | TUM2S         | CHAMP_UCalgary |
|--------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|---------------|----------------|
| Methodik     | Beschleunigungsansatz | Klassisches Verfahren | Randwertproblem | Energiebilanz | Energiebilanz  |
| RMS [m]      | 0,190                 | 0,234                 | 0,323           | -             | 0,286          |
| gew. RMS [m] | 0,205                 | 0,235                 | 0,345           | -             | 0,303          |
| Maximum [m]  | 0,916                 | 1,575                 | 1,528           | -             | 1,299          |

**Tabelle 9.4:** RMS-Wert, gewichteter RMS-Wert und maximale Differenz der Geoidundulation verschiedener CHAMP-only-Modelle im Vergleich zu EIGEN-GRACE02S; Entwicklung bis Grad/Ordnung 70/70.

Besonders interessant ist die Verteilung der relativen Fehler der einzelnen Koeffizienten, die für die 4 Modelle GIS-CHAMP\_re, EIGEN-CHAMP03S, ITG-CHAMP01S und CHAMP\_UCalgary bis Grad/Ordnung 70/70 in Abbildung 9.11 dargestellt sind. Während die Fehler pro Grad  $l$ , wie sich in den Grad-RMS aus Abbildung 9.10a) zeigt, bei den einzelnen Modellen ziemlich ähnlich sind, sind bei der Verteilung der Fehler eines Grades  $l$  auf die einzelnen Ordnungen  $m$  bei den einzelnen Modellen größere Unterschiede zu erkennen. Besonders auffällig ist bei den beiden Modellen ITG-CHAMP01S und EIGEN-CHAMP03S, die beide auf der direkten Lösung der Bewegungsgleichung als Randwertaufgabe bzw. als Anfangswertaufgabe beruhen, dass die Koeffizienten höherer Ordnung  $ml$  genauer bestimmt worden sind als diejenigen niedrigerer Ordnung. Etwas weniger ausgeprägt ist dies bei dem Modell aus dem Beschleunigungsansatz, GIS-CHAMP\_re, bei dem die Koeffizienten höherer Ordnung etwas weniger genau und die Koeffizienten niedrigerer Ordnung etwas genauer bestimmt sind als bei ITG-CHAMP01S und EIGEN-CHAMP03S. Bei dem Modell aus der Energiebilanzmethode, CHAMP\_UCalgary, ist eine Abhängigkeit der Genauigkeit der Koeffizienten eines Grades  $l$  von der Ordnung  $m$  praktisch nicht erkennbar. Die relativen Fehler werden hier nur mit zunehmendem Grad  $l$  größer, nicht aber mit abnehmender Ordnung  $ml$ . Somit besitzen bei CHAMP\_UCalgary die sektoriellen und nahezu sektoriellen Koeffizienten für Grad  $l > 50$  keine erhöhte Genauigkeit wie bei den anderen Modellen. Offensichtlich hängt also die Verteilung der Fehler der Koeffizienten eines Grades  $l$  auf die einzelnen Ordnungen  $m$  von der Wahl des Verfahrens zur Gravitationsfeldbestimmung ab, wobei aber der RMS-Wert pro Grad relativ ähnlich ist (abgesehen von dem Faktor 1,5 bei ITG-CHAMP01S wegen des kürzeren Datensatzes sowie bei CHAMP\_UCalgary).

Schließlich sind noch die Geoiddifferenzen der Modelle GIS-CHAMP\_re, EIGEN-CHAMP03S, ITG-CHAMP01S und CHAMP\_UCalgary im Vergleich zu EIGEN-GRACE02S auf dem  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für Entwicklungen bis Grad 70 in Abbildung 9.12 dargestellt. Hier zeigt sich wieder der zuvor in den Abbildungen des relativen Fehlers erkennbare Effekt, dass bei den Modellen ITG-CHAMP01S und EIGEN-CHAMP03S die Koeffizienten niedrigerer Ordnung eine geringere Genauigkeit besitzen. Da Kugelflächenfunktionen niedrigerer Ordnung, besonders die zonalen Kugelflächenfunktionen, eine in Ost-West-Richtung ausgeprägte Struktur besitzen, weisen die Geoidfehler bei diesen beiden Modellen auch eine Ost-West-Struktur auf. Bei GIS-CHAMP\_re ist aufgrund des geringeren Genauigkeitsunterschieds zwischen Koeffizienten niedrigerer und höherer Ordnung eine solche Ost-West-Struktur weniger ausgeprägt bzw. nur noch schwer erkennbar, und bei CHAMP\_UCalgary ist die Struktur der Geoidfehler in Ost-West-Richtung und Nord-Süd-Richtung aufgrund der von der Ordnung  $m$  unabhängigen Fehlerverteilung ähnlich. Die Geoidfehler der Modelle GIS-CHAMP\_re, ITG-CHAMP01S und CHAMP\_UCalgary sind relativ gleichmäßig über die Erde verteilt, bei EIGEN-CHAMP03S hingegen fällt auf, dass in gewissen Gebieten die Geoidfehler etwas höher sind. Dazu gehören die Himalaya-Region, Südamerika mit den Anden und Karibik sowie Indonesien/Neuguinea. Dies sind genau diejenigen

Gebiete mit höherem und rauerem Gravitationsfeldsignal, bei denen aufgrund des Approximationsfehlers des Differentiators auch schon ein höherer Modellfehler beim Beschleunigungsansatz sichtbar ist (s. Abbildung 8.3) und bei denen durch Regularisierung in Abbildung 8.11 ein Anwachsen des Geoidfehlers bedingt durch Signalglättung erkennbar ist. Da EIGEN-CHAMP03S bereits ab Grad 60 regularisiert ist, sind die erhöhten Geoidfehler in diesen Gebieten wohl auf eine zu starke Regularisierung bei diesem Modell zurückzuführen.

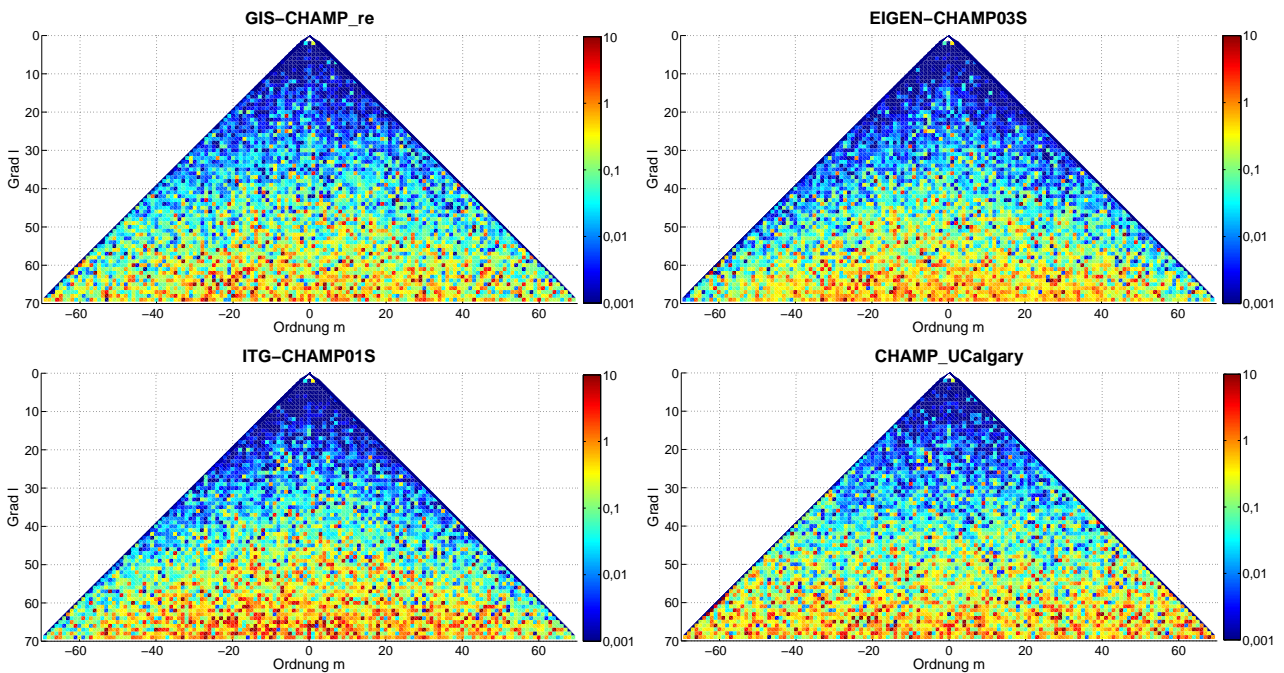


Abbildung 9.11: Relative Fehler der Koeffizienten bei verschiedenen CHAMP-only-Modellen.

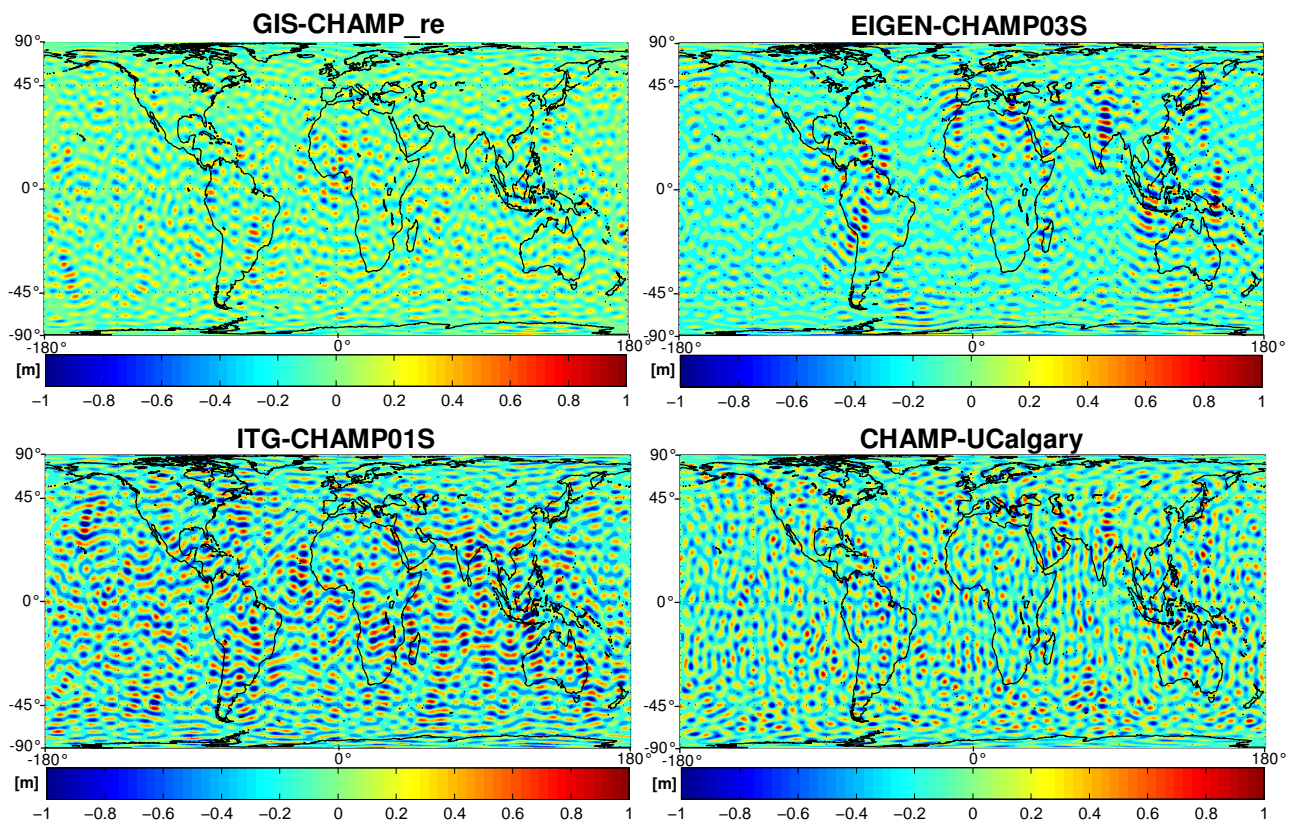


Abbildung 9.12: Geoiddifferenzen verschiedener CHAMP-only-Modelle im Vergleich zu EIGEN-GRACE02S, Entwicklung bis Grad/Ordnung 70/70.

## 10 Ergebnisse und Ausblick

Beim Beschleunigungsansatz handelt es sich aufgrund des linearen Gleichungssystems, der Vermeidung von Integration und der einfachen Einsetzbarkeit von Differentiationsfiltern um ein schnelles und leicht zu implementierendes Verfahren zur Gravitationsfeldbestimmung aus kinematischen Orbits bzw. aus HI-SST-Beobachtungen. Trotz des mit  $\Delta t = 30$  s relativ großen Abtastintervalls der kinematischen CHAMP-Orbits ist bereits mit einem Differentiationsfilter niedriger Ordnung (7- oder 9-Punkt-Schema) eine gute Approximation des Beschleunigungssignals möglich, was zu einem akzeptablen Modellfehler der geschätzten Gravitationsfelder führt. Dabei hat sich der 9-Punkt-Differentiationsfilter als ideal hinsichtlich des Approximationsfehlers (nimmt mit zunehmender Filterlänge ab) und der Fortpflanzung von Positionsfehlern (nimmt mit zunehmender Filterlänge zu) herausgestellt. Wie sich in Simulationsrechnungen zeigt, (i) reagiert der Beschleunigungsansatz aufgrund der „aufrauenden“ Wirkung der numerischen Differentiation äußerst empfindlich auf Ausreißer und Sprünge im kinematischen Orbit. Des weiteren (ii) hängt die erreichbare Genauigkeit der Gravitationsfeldbestimmung hauptsächlich von der relativen Genauigkeit der kinematischen Bahndaten anstatt von ihrer absoluten Genauigkeit ab. In den Untersuchungen wurde demonstriert, dass die Ausreißer und Sprünge beim Beschleunigungsansatz zuverlässig detektiert und behandelt werden können, z.B. in der Datenvorverarbeitung durch Elimination oder durch iterative Gewichtung im Rahmen robuster Schätzverfahren. Durch Einsatz solcher Methoden zur Ausreißerbehandlung ist eine signifikante Genauigkeitssteigerung gegenüber einer herkömmlichen Kleinste-Quadrate-Lösung ohne Ausreißerelimination möglich. Ferner hat sich bei der Untersuchung und Analyse von Realdaten herausgestellt, dass die Bahnfehler kinematischer Orbits relativ stark korreliert sind. Eine genauere Evaluierung kinematischer Orbits zeigt, dass die relative Genauigkeit kinematischer Orbits bei einer absoluten Genauigkeit von 2–3 cm unter 1 cm liegt und somit die Satellitenbeschleunigungen mit einer Genauigkeit von 1–2 mGal mittels numerischer Differentiation bestimmt werden können. Dies führt schließlich auf eine Geoidgenauigkeit von 5 cm für eine Entwicklung bis Grad 50 und 20 cm für eine Entwicklung bis Grad 70 und entspricht damit den Genauigkeiten offizieller CHAMP-Modelle.

Als problematische Datenquelle haben sich die Akzelerometerdaten erwiesen. Diese besitzen neben den durch den Bau des Instruments bedingten Bias- und Skalierungsparametern noch weitere Störsignale wie Spikes sowie thermale und instrumentelle Einflüsse, die teilweise nicht herausgefiltert werden können und die sich somit negativ auf die Gravitationsfeldbestimmung auswirken können. Beim Beschleunigungsansatz kann gezeigt werden, dass auf die Reduktion von Akzelerometerdaten verzichtet werden kann, da deren Signal unterhalb des Rauschniveaus der mittels numerischer Differentiation bestimmten Satellitenbeschleunigungen liegt. Bei der Auswertung der realen CHAMP-Daten wurde auf eine Berücksichtigung der Korrelation der Satellitenbeschleunigungen verzichtet. Da die Satellitenbeschleunigungen mittels eines Differentiationsfilters aus dem kinematischen Orbit bestimmt wurden, muss genau genommen eine Fehlerfortpflanzung der Bahnfehler vorgenommen werden, die im Falle korrelierter Bahnfehler zu einer vollbesetzten Gewichtsmatrix der Satellitenbeschleunigungen führt. Eine Berücksichtigung einer solchen Gewichtsmatrix wäre nur unter Annahmen realisierbar, wobei der Rechenaufwand allerdings enorm ist. Es zeigt sich jedoch, dass die Korrelationszeit der Beschleunigungsfehler unabhängig von der Stärke der Korrelation der Bahnfehler sehr kurz ist ( $< 60$  s), was dazu führt, dass die Berücksichtigung der Korrelationen der Beschleunigungsfehler bei der Schätzung der Gravitationsfeldparameter kaum einen Einfluss auf deren Genauigkeit hat. Aus diesem Grunde können beim Beschleunigungsansatz im Gegensatz zu Verfahren, bei denen die Bahnpositionen direkt als Beobachtungen verwendet werden (Randwertproblem, Integration der Variationsgleichungen), die Korrelationen der Gewichtsmatrix vernachlässigt werden. Beim Randwertproblem hingegen zeigt sich anhand von Simulationsrechnungen mit stark korrelierten Bahnfehlern, dass eine Vernachlässigung der Korrelationen aufgrund der großen Korrelationslänge (20–30 Minuten bei realen kinematischen Orbits!) der Bahnfehler zu größeren Genauigkeitsverlusten bei der Gravitationsfeldschätzung führen kann. Daraus wird auch ein weiterer Vorteil des Beschleunigungsansatzes deutlich, der darin liegt, dass beim Beschleunigungsansatz die Stochastik (hier: die Korrelationen) der kinematischen Bahn eigentlich nicht bekannt sein muss, während dies beim Randwertproblem für eine entsprechende Gewichtung sehr wohl der Fall sein sollte. Ähnliche Beobachtungen hinsichtlich der Gewichtung bei den zuvor genannten Analyseverfahren sind auch schon von Ditmar et al. (2006) bei dem modifizierten Beschleunigungsansatz basierend auf mittleren Beschleunigungen gemacht worden. Nach Ditmar et al. (2006) reagiert der Beschleunigungsansatz nicht sensitiv auf niederfrequentes (und somit korreliertes) Rauschen, weswegen auf eine exakte Gewichtung kein großer Wert gelegt werden müsse. Bei der Integration der Variationsgleichungen oder dem Randwertproblem für kurze Bahnbögen bedeute der Verzicht auf eine Gewichtung hingegen, dass ein weißes Rauschen für die Satellitenpositionen vorausgesetzt werde. Dies entspräche der Annahme, dass das Rauschen in den Beschleunigungen proportional zu dem Quadrat der Frequenz zunähme. Aus diesem Grunde würde das Signal auf den niedrigen Frequenzen sehr hoch gewichtet werden, so dass schon ein geringes Rauschen auf diesen Frequenzen die Genauigkeit des Gravitationsfeldmodells deutlich verschlechtert. Beim Beschleunigungsansatz, wie er in dieser Arbeit zur Auswertung von Realdaten implementiert wurde, kann zusätzlich die robuste Schätzung die Vernachlässigung von Korrelationen teilweise kompensieren, wie in Abschnitt 9.2.3 erwähnt.

Die verschiedenen konkurrierenden Verfahren zur Bahnanalyse wurden anhand simulierter und realer CHAMP-Daten miteinander verglichen. Dabei konnten die Ergebnisse aus den realen CHAMP-Daten die aus den Simulationsrechnungen gewonnenen Erkenntnisse bestätigen. Der Beschleunigungsansatz, das Randwertproblem (bei



Berücksichtigung einer entsprechenden Gewichtung) sowie das klassische Verfahren führen zu Ergebnissen vergleichbarer Genauigkeit, wie die Darstellung von Grad-RMS-Kurven erkennen lässt. Die mit der Energiebilanzmethode geschätzten Gravitationsfelder weisen hingegen eine um den Faktor 1,5 schlechtere Genauigkeit auf. Dies könnte auf die verminderte Redundanz bei der Energiebilanzmethode (Energie ist eine skalare Größe) zurückzuführen sein, die ungefähr den Faktor  $\sqrt{3}$  bewirken würde. Bei einer näheren Untersuchung der Ergebnisse aus Realdaten fallen weitere kleine Unterschiede auf, die aber eventuell auch dem Einsatz unterschiedlicher Verfahren zur Ausreißerelimination und Datengewichtung und den verschiedenen Beobachtungszeiträumen mit variierenden Bahnhöhen zugeschrieben werden können. So ist zu beobachten, dass vor allem mit den beiden Verfahren, die auf der direkten Lösung der Bewegungsgleichung beruhen, also dem Randwertproblem für kurze Bahnbögen sowie dem klassischen Verfahren, aber auch mit dem Beschleunigungsansatz die Koeffizienten höherer Ordnung  $l$ , also die sektoriellen und nahezu sektoriellen Koeffizienten, genauer bestimmt wurden, wohingegen Koeffizienten niedrigerer Ordnung etwas ungenauer ausfielen. Mit der Energiebilanzmethode hingegen wurden alle Koeffizienten eines Grades  $l$  in etwa gleich genau bestimmt. Bei den vorliegenden Realdaten führen die alternativen Analyseverfahren für kinematische Bahnen, speziell der Beschleunigungsansatz, zu Ergebnissen ähnlicher Genauigkeit wie das klassische Verfahren, bei welchem die hl-SST-Daten direkt als Beobachtungen verwendet werden. Dies ist neben der Leistungsfähigkeit der alternativen Analyseverfahren vor allem auch auf die hohe Qualität der kinematischen Orbits zurückzuführen, die durch Verbesserung der Bahnbestimmungsalgorithmen ermöglicht wurde. Wie bereits erwähnt, ist speziell beim Beschleunigungsansatz die hohe Korrelation der Bahnfehler für eine hohe Genauigkeit in der Gravitationsfeldbestimmung verantwortlich. Entgegen den Vermutungen zeigt sich aber, dass das Randwertproblem (bei einer entsprechenden Gewichtung) und die Energiebilanzmethode in gleichem Maße von einer hohen Korrelation der Bahnfehler profitieren wie der Beschleunigungsansatz. Neben der hohen Qualität der kinematischen Orbits ist also eine hohe Korrelation der Bahnfehler eine wichtige Voraussetzung für eine möglichst genaue Gravitationsfeldbestimmung.

Es lässt sich also insgesamt feststellen, dass mit allen vorgestellten Verfahren gute Ergebnisse erhalten werden können, wobei das klassische Verfahren, der Beschleunigungsansatz sowie das Randwertproblem als etwas genauer eingestuft werden können. Die niedrigsten Geoiddifferenzen (20,5 cm bis Grad 70) im Vergleich zu EIGEN-GRACE02S wurden bei der Auswertung von Realdaten mit dem Beschleunigungsansatz erhalten, wobei berücksichtigt werden muss, dass unterschiedliche Schätzverfahren und Methoden zur Ausreißerbehandlung angewendet wurden, die ebenfalls einen Einfluss auf die Genauigkeit haben. Der Beschleunigungsansatz besitzt den Vorteil, dass er das schnellste und am leichtesten zu implementierende Verfahren ist, dass Akzelerometerdaten nicht berücksichtigt werden müssen, dass die Korrelationen in der Gewichtsmatrix vernachlässigt werden können und somit die Korrelationen der Bahnfehler nicht bekannt sein müssen und dass aufgrund der Vermeidung von Integration Fehler nicht aufaddiert werden. Es konnte gezeigt werden, dass sich die numerische Differentiation, die normalerweise zu einer Verstärkung des Rauschens führt, bei dem Beschleunigungsansatz und den vorliegenden Realdaten unproblematisch ist. Dies liegt zum einen daran, dass die Positionsfehler korreliert sind und somit die Satellitenbeschleunigungen relativ genau bestimmt werden können, zum anderen kann der Einfluss von Ausreißern durch Ausreißerelimination oder robuste Schätzverfahren stark reduziert werden. Die problemlose Anwendung der numerischen Differentiation wird außerdem dadurch belegt, dass der Beschleunigungsansatz gleichermaßen auf das Rauschen reagiert wie das Randwertproblem bei einer entsprechenden Gewichtung. Die hohe Qualität der CHAMP-Daten zeigt sich darin, dass eine signifikante Genauigkeitssteigerung gegenüber dem besten Gravitationsfeldmodell vor CHAMP, dem EGM96, möglich ist. So können Verbesserungen vor allem im langwelligen Bereich bis Grad 65 und in terrestrisch schlecht vermessenen Gebieten erreicht werden.

Aufgrund der erhaltenen Erkenntnisse und Ergebnisse bietet sich der Einsatz des Beschleunigungsansatzes im Rahmen der Gravitationsfeldanalyse aus GRACE- und GOCE-Daten an, wobei allerdings hier die Analyse von hl-SST-Daten bzw. kinematischer Orbits zur Unterstützung der eigentlichen Messgrößen dieser Missionen, der ll-SST-Daten bzw. der SGG-Daten, für die langwelligen Gravitationsfeldanteile dient. Wie sich der Beschleunigungsansatz in Kombination mit diesen Beobachtungstypen verhält, muss allerdings noch untersucht werden. In dieser Arbeit wurden die einzelnen Ergebnisse durch Vergleich mit der GRACE-Lösung EIGEN-GRACE02S evaluiert. Weitere Vergleiche mit unabhängigen Datensätzen, wie z.B. terrestrische Datenquellen (z.B. Nivellementsdaten, GPS-Messungen, Schweredaten, Altimetrie in Kombination mit Ozeantopographie, ...) oder Bahnanpassung können zusätzliche Aussagen über die Genauigkeiten und Charakteristiken der mit den einzelnen Verfahren erhaltenen Modelle liefern. Für einen detaillierten Vergleich der einzelnen Verfahren zur Gravitationsfeldbestimmung aus hl-SST-Daten, insbesondere deren Reaktion auf bestimmte Eigenschaften (Datenlücken, Fehlerarten) der Beobachtungsdaten sind weitere Simulationen und Analysen von Realdaten nötig. Speziell beim Beschleunigungsansatz scheinen weitere Genauigkeitssteigerungen durch verbesserte Verfahren zur numerischen Differentiation, der Parameterschätzung (z.B. robuste Schätzer) und Ausreißerelimination möglich. Einen großen Anteil an der hohen Qualität der Gravitationsfeldmodelle aus dem Beschleunigungsansatz, der Energiebilanzmethode sowie dem Randwertproblem für kurze Bahnbögen hat die hohe Genauigkeit der kinematischen Orbits. In der kinematischen Bahnbestimmung konnte in den letzten Jahren, speziell bei den Satellitenmissionen CHAMP und GRACE erhebliche Fortschritte und Qualitätssteigerungen verzeichnet werden. Auch hier scheint noch eine weitere Genauigkeitssteigerung möglich. Motiviert durch die guten Ergebnisse in der Gravitationsfeldbestimmung sollte weitere Arbeit in die Verbesserung der kinematischen Bahnbestimmung investiert werden.

## Abkürzungen

|                      |  |
|----------------------|--|
| <b>AOCS</b>          | <i>Attitude and Orbit Control Subsystem</i>  |
| <b>ARMA</b>          | <i>AutoRegressive-Moving Average</i>   |
| <b>ASC</b>           | <i>Advanced Stellar Compass</i>  |
| <b>BIQUUE</b>        | <i>bester invarianter quadratischer gleichmäßig unverzerrter Schätzer</i>          |
| <b>BJ</b>            | <i>Block-Jacobi-Methode</i>  |
| <b>CCD</b>           | <i>Charge Coupled Device</i>   |
| <b>CEP</b>           | <i>Celestial Ephemeris Pole</i>  |
| <b>CG</b>            | <i>Conjugate Gradients</i>   |
| <b>CGLS</b>          | <i>Conjugate Gradients for Least Squares Problems</i>                              |
| <b>CGS</b>           | <i>Conventional Gravitational System</i>   |
| <b>CHAMP</b>         | <i>Challenging Mini-satellite Payload for Geophysical Research and Application</i> |
| <b>CHU</b>           | <i>Camera Head Units</i>   |
| <b>CIO</b>           | <i>Conventional International Origin</i>   |
| <b>CIS</b>           | <i>Conventional Inertial System</i>  |
| <b>CNES</b>          | <i>Centre National d'Etudes Spatiales</i>  |
| <b>CPR</b>           | <i>cycles per revolution</i>   |
| <b>CPU</b>           | <i>Central Processing Unit</i>   |
| <b>CTS</b>           | <i>Conventional Terrestrial System</i>   |
| <b>DE200 / DE405</b> | <i>Development Ephemeris</i>   |
| <b>DFT</b>           | <i>diskrete Fourier-Transformation</i>   |
| <b>DGL</b>           | <i>Differentialgleichung</i>   |
| <b>DGPS</b>          | <i>differentielles GPS</i>   |
| <b>DJO</b>           | <i>Daimler Chrysler Aerospace Jena Optronik GmbH</i>                               |
| <b>DLR</b>           | <i>Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt</i>                          |
| <b>DMA</b>           | <i>Defense Mapping Agency</i>  |
| <b>DSS</b>           | <i>Dornier Satellitensysteme GmbH (heute Astrium)</i>                              |
| <b>DTU</b>           | <i>Technische Universität von Dänemark, Lyngby</i>                                 |
| <b>DUT1</b>          | <i>Differenz zwischen Weltzeit und koordinierter Weltzeit</i>                      |
| <b>EGM96</b>         | <i>Earth Gravity Model 1996</i>  |
| <b>EIGEN</b>         | <i>European Improved Gravity Model of the Earth by New Techniques</i>              |
| <b>FCN</b>           | <i>free core nutation</i>  |
| <b>FES</b>           | <i>Finite Element Solution</i>   |
| <b>FESG</b>          | <i>Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie (der TU München)</i>                   |
| <b>FIR</b>           | <i>Finite Impulse Response</i>   |
| <b>FK5</b>           | <i>Fünfter Fundamentalkatalog (Sternkatalog)</i>                                   |
| <b>GAST (GST)</b>    | <i>Greenwich Apparent Siderial Time</i>  |
| <b>GFZ</b>           | <i>GeoForschungsZentrum Potsdam</i>  |
| <b>GIS</b>           | <i>hier: Geodätisches Institut der Universität Stuttgart</i>                       |
| <b>GMST</b>          | <i>Greenwich Mean Sidereal Time</i>  |
| <b>GMT</b>           | <i>Greenwich Mean Time</i>   |
| <b>GOCE</b>          | <i>Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Earth Explorer</i>             |
| <b>GPS</b>           | <i>Global Positioning System</i>   |
| <b>GPST</b>          | <i>Global Positioning System Time</i>  |
| <b>GRACE</b>         | <i>Gravity Recovery and Climate Experiment</i>                                     |
| <b>HIPPARCOS</b>     | <i>High Precision Parallax Collecting Satellite</i>                                |
| <b>hl-SST</b>        | <i>high-low satellite-to-satellite-tracking</i>                                    |
| <b>HW95</b>          | <i>Hartmann und Wenzel 1995 (Gezeitenkatalog)</i>                                  |
| <b>IAPG</b>          | <i>Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie (der TU München)</i>      |
| <b>IAU</b>           | <i>International Astronomical Union</i>  |
| <b>IDFT</b>          | <i>inverse diskrete Fourier-Transformation</i>                                     |
| <b>IERS</b>          | <i>International Earth Rotation Service</i>  |
| <b>IGS</b>           | <i>International GPS Service</i>   |
| <b>ISDC</b>          | <i>Information System and Data Centre</i>  |
| <b>ITG</b>           | <i>Institut für Theoretische Geodäsie (der Universität Bonn)</i>                   |
| <b>ITRF</b>          | <i>International Terrestrial Reference Frame</i>                                   |
| <b>JPL</b>           | <i>Jet Propulsion Laboratories</i>   |
| <b>J2000</b>         | <i>1. Januar 2000, 12h</i>   |
| <b>LEO</b>           | <i>Low Earth Orbiting, Low Earth Orbiter</i>                                       |

|                    |  |
|--------------------|--|
| <b>II-SST</b>      | <i>low-low satellite-to-satellite tracking</i>   |
| <b>LRR</b>         | <i>Laserretroreflektor</i>   |
| <b>LSQR</b>        | <i>Least Squares QR-Zerlegung</i>  |
| <b>MESZ</b>        | <i>Mitteleuropäische Sommerzeit</i>  |
| <b>MEZ</b>         | <i>Mitteleuropäische Zeit</i>  |
| <b>MDS</b>         | <i>Mean of Date System</i>   |
| <b>MSE</b>         | <i>Mean Squared Error</i>  |
| <b>NASA</b>        | <i>National Aeronautics and Space Administration</i>                                     |
| <b>NNR-NUVELIA</b> | <i>No Net Rotation - Northwestern University Velocity Model 1A</i>                       |
| <b>ONERA</b>       | <i>Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales</i>                           |
| <b>PC</b>          | <i>Personal Computer</i>   |
| <b>PCCG</b>        | <i>Preconditioned Conjugate Gradients</i>  |
| <b>POD</b>         | <i>Precise Orbit Determination</i>   |
| <b>PREM</b>        | <i>Preliminary Earth Model</i>   |
| <b>PRN</b>         | <i>Pseudo Random Noise</i>   |
| <b>PSD</b>         | <i>Power Spectral Density</i>  |
| <b>PSO</b>         | <i>Precise Science Orbits</i>  |
| <b>RMS</b>         | <i>Root Mean Square</i>  |
| <b>RSO</b>         | <i>Rapid Science Orbits</i>  |
| <b>RST</b>         | <i>Raumfahrt und Umwelttechnik GmbH</i>  |
| <b>R,W-HAPS</b>    | <i>Hybrid Approximation Solution bezüglich einer kombinierten R- und W-Seminorm</i>      |
| <b>SGG</b>         | <i>Satellitengradiometrie</i>  |
| <b>SLR</b>         | <i>Satellite Laser Ranging</i>   |
| <b>SOS</b>         | <i>Spline on Spline</i>  |
| <b>SOSP</b>        | <i>Satellite Orbit Synthesis Programme</i>   |
| <b>SOSS</b>        | <i>Spline on Smoothing Spline</i>  |
| <b>SSOS</b>        | <i>Smoothing Spline on Spline</i>  |
| <b>SSOSS</b>       | <i>Smoothing Spline on Smoothing Spline</i>  |
| <b>STAR</b>        | <i>Space Tri-axis Accelerometer for Research missions</i>                                |
| <b>TAI</b>         | <i>Temps Atomique International</i>  |
| <b>TDB</b>         | <i>Barycentric Dynamical Time</i>  |
| <b>TDS</b>         | <i>True of Date System</i>   |
| <b>TDT</b>         | <i>Terrestrial dynamical Time</i>  |
| <b>TRSR-2</b>      | <i>Turbo Rogue Space Receiver 2</i>  |
| <b>TT</b>          | <i>Terrestrial Time</i>  |
| <b>TTS</b>         | <i>True Terrestrial System</i>   |
| <b>TUM</b>         | <i>Technische Universität München</i>  |
| <b>UTC</b>         | <i>Universal Time Coordinated</i>  |
| <b>UT1</b>         | <i>Universal Time</i>  |
| <b>V-BLUUE</b>     | <i>bester linearer gleichmäßig unverzerrter Schätzer bezüglich der V-Norm</i>            |
| <b>V,S-BLE</b>     | <i>beste lineare Schätzung bezüglich der kombinierten V-Norm und S-(Semi-)Norm</i>       |
| <b>W-LESS</b>      | <i>Kleinste Quadrate Lösung (engl.: Least Squares Solution) bezüglich der W-Seminorm</i> |

## Anhang A: Grundlagen zur Berechnung und Darstellung des Gravitationsfeldes

### A.1 Zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art

Bei der Separation der Laplace-DGL entsteht für die Breite  $\phi$  die DGL in (A.2), aus welcher durch die Substitution  $t = \sin \phi$  die Standardform der zugeordneten Legendre'schen DGL ((A.1), z.B. Bronstein und Semendjajew, 1980) entsteht. Mögliche Lösungen dieser DGL sind die zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $P_{l,m}(\sin \phi)$ , sowie die zugeordneten Legendre'sche Funktionen 2. Art  $Q_{l,m}(\sin \phi)$ . Die hier interessierenden zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art können z.B. mit der Differentialformel von Rodriguez (A.3) oder der Summenformel aus (A.4) berechnet werden (z.B. Heiskanen und Moritz, 1967; Torge, 2001). Wesentlich effizienter hinsichtlich Rechenzeit und Rechengenauigkeit (kein Zahlenüberlauf aufgrund hoher Fakultäten) für eine Verarbeitung am Computer sind jedoch die Rekursionsformeln (A.5). Mögliche Rechenwege für die Rekursionsformeln sind in Abbildung A.1 aufgezeigt. Zuerst werden die  $P_{l,m}(\sin \phi)$  für Grad  $l =$  Ordnung  $m$  berechnet (Diagonalelemente, 1), anschließend bieten sich zwei Varianten zur Berechnung der weiteren  $P_{l,m}(\sin \phi)$  an. In beiden Möglichkeiten werden als nächstes die Nebendiagonalelemente bestimmt (2a, 3a) und schließlich die restlichen  $P_{l,m}(\sin \phi)$  (2b, 3b), jedoch bei der ersten Variante in „waagrechten Reihen“ bei gleichbleibender Ordnung  $m$  und bei der zweiten Variante in „senkrechten Reihen“ für jeden Grad  $l$ . Diese und weitere Rekursionsformeln, insbesondere auch die nachfolgend beschriebenen Rekursionsformeln zur Bestimmung normierter zugeordneter Legendre'scher Funktionen sowie deren Ableitungen können beispielsweise in Wenzel (1985), Paul (1987), Knickmeyer (1989) und Belikov und Taybatorov (1992) gefunden werden.

#### Box A.1: Legendre'sche Funktionen

zugeordnete Legendre'sche Differentialgleichung

$$(1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P(t) - 2t \frac{d}{dt} P(t) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] P(t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Substitution:  $t = \sin \phi$

$$\cos^2 \phi \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) - \sin \phi \cos \phi \frac{d}{d\phi} \Phi(\phi) + [l(l+1) \cos^2 \phi - m^2] \Phi(\phi) = 0 \quad (\text{A.2})$$

mit  $\Phi(\phi) = P_{l,m}(\sin \phi)$

Lösung: zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art  $P_{l,m}(\sin \phi)$

— Berechnungsmethoden —

Formel von Rodriguez:

$$P_{l,m}(t) = \frac{1}{2^l l!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}} (t^2-1)^l \quad ; \quad t = \sin \phi \quad (\text{A.3})$$

Summenformel:

$$P_{l,m}(\sin \phi) = \frac{1}{2^l} (1 - \sin^2 \phi)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-m-2k)!} (\sin \phi)^{l-m-2k} \quad (\text{A.4})$$

wobei  $K$  die größte ganze Zahl, welche  $K \leq \frac{(l-m)}{2}$  erfüllt

Rekursionsformeln:

Startwert:  $P_{0,0}(\sin \phi) = 1$

$$(1) \quad P_{l+1,l+1}(\sin \phi) = (2l+1) \cos \phi P_{l,l}(\sin \phi)$$

$$(2a) \quad P_{l+1,l}(\sin \phi) = (2l+1) \sin \phi P_{l,l}(\sin \phi)$$

$$(2b) \quad P_{l+1,m}(\sin \phi) = \frac{1}{l-m+1} [(2l+1) \sin \phi P_{l,m}(\sin \phi) - (l+m) P_{l-1,m}(\sin \phi)] \quad (\text{A.5})$$

$$(3a) \quad P_{l,l-1}(\sin \phi) = \tan \phi P_{l,l}(\sin \phi)$$

$$(3b) \quad P_{l,m-1}(\sin \phi) = \frac{1}{(l+m)(l-m+1)} [2m \tan \phi P_{l,m}(\sin \phi) - P_{l,m+1}(\sin \phi)]$$

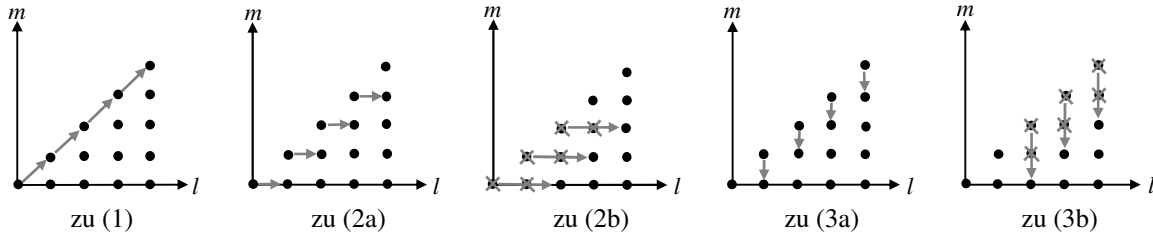


Abbildung A.1: Schematische Darstellung zur rekursiven Berechnung zugeordneter Legendre'scher Funktionen 1. Art.

### A.2 Normierte zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art

Um sehr große Werte oder gar einen Zahlenüberlauf der  $P_{l,m}(\sin \phi)$  bei hohem Grad/Ordnung  $l/m$  zu vermeiden und die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen  $e^{l,m}(\lambda, \phi)$  zu erreichen, empfiehlt sich eine Normierung nach (A.6). Aus Genauigkeits- und Effizienzgründen sollten die normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $\bar{P}_{l,m}(\sin \phi)$  direkt berechnet werden anstatt durch eine nachträgliche Normierung der zuvor bestimmten zugeordneten Legendre'schen Funktionen  $P_{l,m}(\sin \phi)$ . Aus den Rekursionsformeln (A.5) für die  $P_{l,m}(\sin \phi)$  können mit Hilfe von (A.6) Rekursionsformeln (A.7) für die direkte Berechnung der  $\bar{P}_{l,m}(\sin \phi)$  hergeleitet werden. Der Rechenweg ist in Abbildung A.2 dargestellt und ähnlich wie bei den  $P_{l,m}(\sin \phi)$ , allerdings muss durch die unterschiedliche Normierung der zonalen ( $m = 0$ ) Funktionen der Sonderfall in (A.7), Formel 3b abgespalten werden. Formel 1 und 2 aus (A.7) wurden zur Implementierung der für diese Arbeit entwickelten Algorithmen verwendet.

**Box A.2:** normierte zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art

Definition: normierte zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art

$$\bar{P}_{l,m}(\sin \phi) = \begin{cases} \sqrt{2(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\sin \phi) & ; m > 0 \\ \sqrt{2l+1} P_{l,0}(\sin \phi) & ; m = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Rekursionsformeln:

Startwerte:  $\bar{P}_{0,0}(\sin \phi) = 1$  ;  $\bar{P}_{1,1}(\sin \phi) = \sqrt{3} \cos \phi$

(1)  $\bar{P}_{l+1,l+1}(\sin \phi) = \sqrt{\frac{2l+3}{2l+2}} \cos \phi \bar{P}_{l,l}(\sin \phi)$  ;  $l \geq 1$

(2)  $\bar{P}_{l+1,m}(\sin \phi) = \sqrt{\frac{2l+3}{(l+m+1)(l-m+1)}} \left[ \sqrt{2l+1} \sin \phi \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) - \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{2l-1}} \bar{P}_{l-1,m}(\sin \phi) \right]$

(3a)  $\bar{P}_{l,m}(\sin \phi) = \frac{1}{\sqrt{(l+m+1)(l-k)}} \left[ 2(m+1) \tan \phi \bar{P}_{l,m+1}(\sin \phi) - \sqrt{(l+m+2)(l-m-1)} \bar{P}_{l,m+2}(\sin \phi) \right]$  ;  $m \geq 1$  (A.7)

(3b)  $\bar{P}_{l,0}(\sin \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \left[ 2 \tan \phi \bar{P}_{l,1}(\sin \phi) - \sqrt{(l+2)(l-1)} \bar{P}_{l,2}(\sin \phi) \right]$

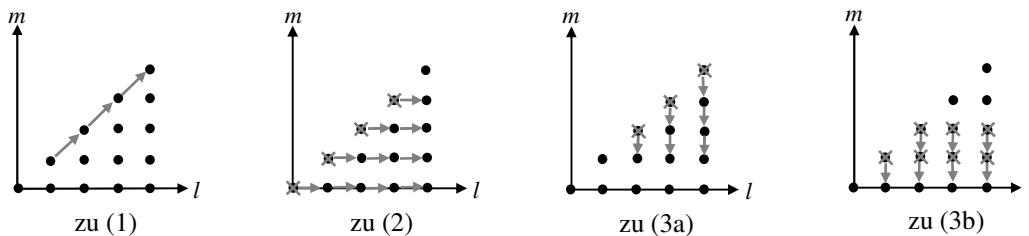


Abbildung A.2: Schematische Darstellung zur rekursiven Berechnung normierter zugeordneter Legendre'scher Funktionen 1. Art.

### A.3 Ableitungen (normierter) zugeordneter Legendre'scher Funktionen 1. Art

Eine effiziente Berechnung der ersten Ableitungen ( $P'_{l,m}(\sin \phi)$  bzw.  $\bar{P}'_{l,m}(\sin \phi)$ ) der (normierten) zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $P_{l,m}(\sin \phi)$  bzw.  $\bar{P}_{l,m}(\sin \phi)$  innerhalb eines Computerprogramms wird mit „Quasi-

Rekursionsformeln“ ermöglicht, die auf bereits zuvor bestimmte (normierte) zugeordnete Legendre'sche Funktionen 1. Art zurückgreifen.

Die Berechnung der  $P'_{l,m}(\sin \phi)$  gelingt mit der Quasi-Rekursionsformel aus (A.8), die allerdings an den Polen singularär ist. Dieses Problem kann durch die nicht-singularäre Formulierung in (A.9) behoben werden, allerdings muss aber dann der Sonderfall für die Ordnung  $m = 0$  abgespalten werden. Durch Einführung der Normierung aus (A.6) enthält man die „Quasi-Rekursionsformeln“ für die Berechnung der  $\bar{P}'_{l,m}(\sin \phi)$  ((A.10), (A.11)), wobei hier für die nicht-singularäre Formulierung (A.11) weitere Sonderfälle aufgrund der unterschiedlichen Normierung für die zonalen Funktionen abgespalten werden müssen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Singularitäten an den Polen keine Probleme für unsere Anwendungen darstellen, da die zu analysierenden Satelliten nur eine polnahe Bahn beschreiben.

**Box A.3: 1. Ableitungen Legendre'scher Funktionen**

*Erste Ableitungen der zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art:*  
(singularär für  $\phi \pm \pi/2$ )

$$P'_{l,m}(\sin \phi) = \frac{1}{\cos \phi} \left[ (l+1) \sin \phi P_{l,m}(\sin \phi) - (l-m+1) P_{l+1,m}(\sin \phi) \right] \quad (\text{A.8})$$

(nicht singularäre Formulierung)

$$\begin{aligned} P'_{l,0}(\sin \phi) &= P_{l,1}(\sin \phi) & ; m = 0 \\ P'_{l,m}(\sin \phi) &= \frac{1}{2} \left[ P_{l,m+1}(\sin \phi) - (l+m)(l-m+1) P_{l,m-1}(\sin \phi) \right] & ; m \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

*Erste Ableitungen der normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art:*  
(singularär für  $\phi \pm \pi/2$ )

$$\bar{P}'_{l,m}(\sin \phi) = \frac{1}{\cos \phi} \left[ (l+1) \sin \phi \bar{P}_{l,m}(\sin \phi) - (l-m+1) \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m+1)}{(2l+3)(l-m+1)}} \bar{P}_{l+1,m}(\sin \phi) \right] \quad (\text{A.10})$$

(nicht singularäre Formulierung)

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{l,0}(\sin \phi) &= \sqrt{\frac{l(l+1)}{2}} \bar{P}_{l,1}(\sin \phi) & ; m = 0 \\ \bar{P}'_{l,1}(\sin \phi) &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(l+2)(l-1)} \bar{P}_{l,2}(\sin \phi) - \sqrt{2l(l+1)} \bar{P}_{l,0}(\sin \phi) \right] & ; m = 1 \\ \bar{P}'_{l,m}(\sin \phi) &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \bar{P}_{l,m+1}(\sin \phi) - \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \bar{P}_{l,m-1}(\sin \phi) \right] & ; m \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## A.4 Zirkularfunktionen

Bei der Berechnung des Gravitationspotentials sowie der Kugelflächenfunktionen treten die Funktionen  $\cos(m\lambda)$ ,  $\sin(m\lambda)$  auf. Da diese Terme für jede Ordnung  $m$  berechnet werden müssen und die häufige Berechnung von Sinus-/Kosinusfunktionen innerhalb eines Computerprogramms rechenzeitaufwändig ist, bietet sich die Anwendung der folgenden Rekursionsformeln an ((A.12), Thong, 1989). Mit diesen müssen für einen Auswertepunkt nur einmal  $\cos(\lambda)$  und  $\sin(\lambda)$  berechnet werden, für höhere Ordnungen wird anschließend auf das vorhergehende numerische Ergebnis zurückgegriffen:

$$\begin{aligned} \cos((m+2)\lambda) &= 2 \cos(\lambda) \cos((m+1)\lambda) - \cos(m\lambda) & ; m \geq 0 \\ \sin((m+2)\lambda) &= 2 \cos(\lambda) \sin((m+1)\lambda) - \sin(m\lambda) & ; m \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Als Startwerte werden dabei (für  $m = 0$ ) gewählt:  $\cos(0) = 1$ ,  $\sin(0) = 0$ . Ein weiterer Vorteil bei Verwendung dieser Rekursionsformeln ist, dass nicht die vollständige inverse Transformation zur Bestimmung von  $\lambda$  angewendet werden muss. Es genügen vielmehr die Formeln aus (3.17), die  $\cos(\lambda)$  und  $\sin(\lambda)$  direkt liefern.

## A.5 Struktur der Kugelflächenfunktionen

Interessant ist die Struktur der Kugelflächenfunktionen  $e^{lm}(\lambda, \phi)$ , die sich in Nord-Süd-Richtung aus dem Verlauf der normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen 1. Art  $\bar{P}_{l,m}(\sin \phi)$  ergibt und in Ost-West-Richtung aus den Zirkularfunktionen  $\cos(m\lambda)$ ,  $\sin(m\lambda)$ . Es können drei verschiedene Typen unterschieden werden: *zonale*, *sektorielle* und *tesseral* Kugelflächenfunktionen. Diese sind in Abbildung A.3 am Beispiel von ausgewählten Kugelflächenfunktionen vom Grad  $l = 7$  auf der Kugel dargestellt, wobei Bereiche mit positiven Werten weiß und Bereiche mit negativen Werten schwarz eingezeichnet sind. Die zonalen Kugelflächenfunktionen ergeben sich für die Ordnung  $m = 0$  und teilen die Kugel in  $l+1$  waagrechte Streifen ein. Die sektoriellen Kugelflächenfunktionen erhält man für  $l = |m|$ , sie spalten die Kugel in  $2l$  waagrechte Kugelsektoren auf. Die verbleibenden, als tesseral bezeichneten Kugelflächen-

funktionen für  $0 < |m| < l$  teilen die Kugel in  $4m$  sphärische Dreiecke und  $2m(l-m-1)$  sphärische Rechtecke ein. Solche Darstellungen der Kugelflächenfunktionen können u.a. in Schäfer (2001) und Rabel (1997) gefunden werden.



*zonal*  
( $m = 0$ )

Beispiel:  $e^{7,0}(\lambda, \phi)$



*sektoriell*  
( $l = |m|$ )

Beispiel:  $e^{7,7}(\lambda, \phi)$



*tesseral*  
( $0 < |m| < l$ )

Beispiel:  $e^{7,3}(\lambda, \phi)$

**Abbildung A.3:** Struktur der Kugelflächenfunktionen.





## B.2 Kubische Ausgleichssplines mit vorgegebener erster Randableitung

(nach Engeln-Müllges und Reutter, 1990)

**Box B.3:**

*Randbedingungen:*

$$S'(t_0) = \alpha \quad ; \quad S'(t_n) = \beta \quad (\text{B.9})$$

Mit der *Schrittweite*  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , der *Gewichtsfunktion*  $W_i = \frac{6}{w_i}$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ ,

$$H_i = \frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n-2$$

*und den Abkürzungen*

$$F_1 = \frac{\Delta t_0 - (W_0 / \Delta t_0^2) - (W_1 / \Delta t_0) H_0}{2\Delta t_0^2 + 1 / \Delta t_0 (W_0 + W_1)} \quad ; \quad F_2 = \frac{W_1 / (\Delta t_0 \Delta t_1)}{2\Delta t_0^2 + 1 / \Delta t_0 (W_0 + W_1)}$$

$$F_3 = \frac{(W_{n-1} / \Delta t_{n-2} \Delta t_{n-1})}{2\Delta t_{n-1}^2 + 1 / \Delta t_{n-1} (W_{n-1} + W_n)} \quad ; \quad F_4 = \frac{\Delta t_{n-1} - (W_{n-1} / \Delta t_{n-1}) H_{n-2} - (W_n / \Delta t_{n-1}^2)}{2\Delta t_{n-1}^2 + 1 / \Delta t_{n-1} (W_{n-1} + W_n)} \quad (\text{B.10})$$

$$G_1 = W_1 H_0 + (W_0 / \Delta t_0) - \Delta t_0^2 \quad ; \quad -G_2 = W_1 / \Delta t_1 \quad ; \quad G_3 = 3((X_1 - X_0) - \alpha \Delta t_0)$$

$$G_4 = W_{n-1} / \Delta t_{n-2} \quad ; \quad G_5 = W_n / \Delta t_{n-1} + W_{n-1} H_{n-2} - \Delta t_{n-1}^2 \quad ; \quad G_6 = 3(\beta \Delta t_{n-1} - (X_n - X_{n-1}))$$

erhält man das folgende fünfdiagonale lineare Gleichungssystem:

$$\left( F_1 G_1 + 2(\Delta t_0 + \Delta t_1) + \frac{W_0}{\Delta t_0^2} + W_1 H_0^2 + \frac{W_2}{\Delta t_1^2} \right) c_1 + \left( h_1 - \frac{W_1}{\Delta t_1} H_0 - \frac{W_2}{\Delta t_1} H_1 - F_1 G_2 \right) c_2 + \left( \frac{W_2}{\Delta t_1 \Delta t_2} \right) c_3 =$$

$$= 3 \left( \frac{X_2 - X_1}{\Delta t_1} - \frac{X_1 - X_0}{\Delta t_0} \right) - F_1 G_3$$

$$\left( h_1 - \frac{W_1}{\Delta t_1} H_0 - \frac{W_2}{\Delta t_1} H_1 - F_1 G_2 \right) c_1 + \left( 2(\Delta t_1 + \Delta t_2) + \frac{W_1}{\Delta t_1^2} + W_2 H_1^2 + \frac{W_3}{\Delta t_2^2} - F_2 G_2 \right) c_2 +$$

$$+ \left( h_2 - \frac{W_2}{\Delta t_2} H_1 - \frac{W_3}{\Delta t_2} H_2 \right) c_3 + \left( \frac{W_3}{\Delta t_2 \Delta t_3} \right) c_4 = 3 \left( \frac{X_3 - X_2}{\Delta t_2} - \frac{X_2 - X_1}{\Delta t_1} \right) - F_2 G_3$$

$$\left( \frac{W_{i-1}}{\Delta t_{i-2} \Delta t_{i-1}} \right) c_{i-2} + \left( h_{i-1} - \frac{W_{i-1}}{\Delta t_{i-1}} H_{i-2} - \frac{W_i}{\Delta t_{i-1}} H_{i-1} \right) c_{i-1} + \left( 2(\Delta t_{i-1} + \Delta t_i) + \frac{W_{i-1}}{\Delta t_{i-1}^2} + W_i H_{i-1}^2 + \frac{W_{i+1}}{\Delta t_i^2} \right) c_i +$$

$$\text{Box B.4: } + \left( h_i - \frac{W_i}{\Delta t_i} H_{i-1} - \frac{W_{i+1}}{\Delta t_i} H_i \right) c_{i+1} + \left( \frac{W_{i+1}}{\Delta t_i \Delta t_{i+1}} \right) c_{i+2} = 3 \left( \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t_i} - \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta t_{i-1}} \right) - F_2 G_3 \quad ; \quad i = 3, 4, \dots, n-3 \quad (\text{B.11})$$

$$\left( \frac{W_{n-3}}{\Delta t_{n-4} \Delta t_{n-3}} \right) c_{n-4} + \left( h_{n-3} - \frac{W_{n-3}}{\Delta t_{n-3}} H_{n-4} - \frac{W_{n-2}}{\Delta t_{n-3}} H_{n-3} \right) c_{n-3} +$$

$$+ \left( 2(\Delta t_{n-3} + \Delta t_{n-2}) + \frac{W_{n-3}}{\Delta t_{n-3}^2} + W_{n-2} H_{n-3}^2 + \frac{W_{n-1}}{\Delta t_{n-2}^2} - F_3 G_4 \right) c_{n-2} + \left( h_{n-2} - \frac{W_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} H_{n-3} - \frac{W_{n-1}}{\Delta t_{n-2}} H_{n-2} + F_3 G_5 \right) c_{n-1} =$$

$$= 3 \left( \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} - \frac{X_{n-2} - X_{n-3}}{\Delta t_{n-3}} \right) - F_3 G_6$$

$$\left( \frac{W_{n-2}}{\Delta t_{n-3} \Delta t_{n-2}} \right) c_{n-3} + \left( h_{n-2} - \frac{W_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} H_{n-3} - \frac{W_{n-1}}{\Delta t_{n-2}} H_{n-2} + F_3 G_5 \right) c_{n-2} +$$

$$+ \left( 2(\Delta t_{n-2} + \Delta t_{n-1}) + \frac{W_{n-2}}{\Delta t_{n-2}^2} + W_{n-1} H_{n-2}^2 + \frac{W_n}{\Delta t_{n-1}^2} - F_4 G_5 \right) c_{n-1} = 3 \left( \frac{X_n - X_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} - \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} \right) - F_4 G_6$$

**Box B.5:***Bestimmung von  $c_0$  und  $c_n$ :*

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{3((X_1 - X_0) - \alpha \Delta t_0) + (W_1 H_0 + (W_0 / \Delta t_0) - \Delta t_0^2)c_1 - (W_1 / \Delta t_1)c_2}{2\Delta t_0^2 + 1 / \Delta t_0 (W_0 + W_1)} \\
 c_n &= \frac{3(\beta \Delta t_{n-1} - (X_n - X_{n-1})) + (W_{n-1} H_{n-2} + (W_n / \Delta t_{n-1}) - \Delta t_{n-1}^2)c_{n-1} - (W_{n-1} / \Delta t_{n-2})c_{n-2}}{2\Delta t_{n-1}^2 + 1 / \Delta t_{n-1} (W_{n-1} + W_n)}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

*Bestimmung von  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ :*

$$\begin{aligned}
 a_0 &= X_0 + \frac{2}{w_0 \Delta t_0} (c_0 - c_1) \\
 a_i &= X_i - \frac{2}{w_i} \left[ \frac{1}{\Delta t_{i-1}} c_{i-1} - \left( \frac{1}{\Delta t_{i-1}} + \frac{1}{\Delta t_i} \right) c_i + \frac{1}{\Delta t_i} c_{i+1} \right] ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\
 a_n &= X_n - \frac{2}{w_n \Delta t_{n-1}} (c_{n-1} - c_n)
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

*Bestimmung der  $b_i$ :*

$$b_i = \frac{1}{\Delta t_i} (a_{i+1} - a_i) - \frac{\Delta t_i}{3} (c_{i+1} + 2c_i) ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{B.14}$$

*Bestimmung der  $d_i$ :*

$$d_i = \frac{1}{3\Delta t_i} (c_{i+1} - c_i) ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{B.15}$$

## Anhang C: Methoden der Bahnbestimmung

### C.1 Allgemeines und GPS-Beobachtungsgleichungen

Für die Bestimmung der LEO-Satellitenbahn aus GPS-Messungen bestehen verschiedene Möglichkeiten, von denen je nach Anwendung die geeignete ausgewählt werden muss. Die drei prinzipiellen Verfahren zur Bahnbestimmung, die inzwischen auf eine ähnliche absolute Bahngenauigkeit führen, sind die

- kinematische Bahnbestimmung
- dynamische Bahnbestimmung
- reduziert-dynamische Bahnbestimmung.

Die zur Verfügung stehenden GPS-Messgrößen sind Pseudostrecken, welche durch die P-Code-Messungen (Wellenlänge  $\lambda = 29,3$  cm) gegeben sind, sowie die Trägerphasen der L1- und L2-Frequenzen (Wellenlängen  $\lambda_1 = 19,05$  cm,  $\lambda_2 = 24,45$  cm). Da die Trägerphasen mit einem Messrauschen von ca. 1–3 mm wesentlich genauer sind als die Pseudostrecken (Messrauschen ca. 10 cm), basiert die präzise Bahnbestimmung hauptsächlich auf der Auswertung von Trägerfrequenzen. Der Ausgangspunkt für die Bahnbestimmung ist somit die Beobachtungsgleichung der Trägerphasen  $\psi_{\text{LEO},i}^s$  nach Švehla und Rothacher (2002b) zwischen LEO-Empfänger und GPS-Satellit  $s$  auf der Frequenz  $f_i$  ( $i = 1, 2$ )

$$\psi_{\text{LEO},i}^s = \rho_{\text{LEO}}^s + c(\tilde{\alpha}_{\text{LEO}} + \tilde{\alpha}_{\text{sys},i}^s) - c(\tilde{\alpha}^s + \tilde{\alpha}^{\text{sys},i}) + \delta\rho_{\text{ion},i} + \delta\rho_{\text{rel}} + \delta\rho_{\text{mul},i} + \delta\rho_{\text{pc},i} + \lambda_i \cdot N_{\text{LEO},i}^s + \varepsilon_i \quad (\text{C.1})$$

Die beobachtete Trägerphase  $\psi_{\text{LEO},i}^s$  (Samplingzeit  $\Delta t = 30$  s) enthält nach dieser Gleichung neben der eigentlich benötigten Strecke  $\rho_{\text{LEO}}^s = |\mathbf{x}_{\text{LEO}} - \mathbf{x}^s|$  zwischen LEO- und GPS-Satellit  $s$  noch einige weitere „störende“ Größen wie die Uhrenfehler  $\tilde{\alpha}_{\text{LEO}}, \tilde{\alpha}^s$  des LEO- und der GPS-Satelliten, die Signalverzögerungen  $\tilde{\alpha}_{\text{sys},i}^s, \tilde{\alpha}^{\text{sys},i}$  des LEO- und GPS-Satellitensystems, die Laufzeitverzögerung  $\delta\rho_{\text{ion},i}$  der Ionosphäre, die relativistische Korrektur  $\delta\rho_{\text{rel}}$ , die Mehrwegeeffekte  $\delta\rho_{\text{mul},i}$ , den Offset und die Variationen des LEO-Phasenzentrums  $\delta\rho_{\text{pc},i}$ , die Phasenmehrdeutigkeiten  $N_{\text{LEO},i}^s$  sowie das Messrauschen  $\varepsilon_i$  ( $c =$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Einige dieser „störenden“ Effekte können durch Bildung von Einfach- und Mehrfachdifferenzen der Trägerphasen, durch Bildung von Linearkombinationen der Trägerfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  oder auch durch Bildung von Linearkombinationen zwischen P-Code und Trägerphasen eliminiert werden. Durch eine gezielte Kombination der zuvor genannten Linearkombinationen unter Anwendung der Differenzenbildung der Trägerphasen können auch einzelne Störgrößen in der Vorverarbeitung bestimmt werden, wie beispielsweise Phasenmehrdeutigkeiten mit Hilfe der Melbourne-Wübbena-Linearkombination (Melbourne, 1985; Švehla und Rothacher, 2002a).

Die in dieser Arbeit verwendeten kinematischen und reduziert-dynamischen 2-jährigen CHAMP-Orbits des Zeitraumes (Tag 70, Jahr 2002–Tag 70, Jahr 2004), die an der FESG/IAPG der TUM von D. Švehla und M. Rothacher (2004) berechnet wurden, basieren auf der ionosphärenfreien Linearkombination

$$\begin{aligned} \psi_{\text{LEO},3}^s &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \psi_{\text{LEO},1}^s - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \psi_{\text{LEO},2}^s \\ &= \rho_{\text{LEO}}^s + c \cdot \tilde{\alpha}_{\text{LEO,clk},3} - c \cdot \tilde{\alpha}^{\text{s,clk},3} + \delta\rho_{\text{rel}} + \delta\rho_{\text{mul},3} + \delta\rho_{\text{pc},3} + B_{\text{LEO},3}^s + \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

der beiden Trägerphasen  $\psi_{\text{LEO},1}^s, \psi_{\text{LEO},2}^s$  (Švehla und Rothacher, 2002b). Der Vorteil dieser Linearkombination besteht darin, dass keine ionosphärischen Laufzeitverzögerungen mehr auftreten, allerdings verdreifacht sich das Messrauschen  $\varepsilon_3$  und die ionosphärenfreie Phasenmehrdeutigkeit  $B_{\text{LEO},3}^s$  ist nicht mehr ganzzahlig. Der ionosphärenfreie LEO-Uhrenfehler  $\tilde{\alpha}_{\text{LEO,clk},3}$  setzt sich hierbei aus dem wahren LEO-Uhrenfehler  $\tilde{\alpha}_{\text{LEO}}$  sowie den Signalverzögerungen  $\tilde{\alpha}_{\text{sys},1}^s, \tilde{\alpha}_{\text{sys},2}^s$  des LEO-Satellitensystems zusammen, der ionosphärenfreie GPS-Uhrenfehler  $\tilde{\alpha}^{\text{s,clk},3}$  besteht aus dem wahren GPS-Uhrenfehler  $\tilde{\alpha}^s$  sowie den Signalverzögerungen  $\tilde{\alpha}^{\text{sys},1}, \tilde{\alpha}^{\text{sys},2}$  des GPS-Satellitensystems. Zieht man in Betracht, dass die relativistische Korrektur  $\delta\rho_{\text{rel}}$  gut modelliert werden kann bzw. durch die GPS-Uhrenfehler gut absorbiert wird (bei Doppeldifferenzen wird  $\delta\rho_{\text{rel}}$  sogar eliminiert), dass Mehrwegeeffekte durch elevationswinkelabhängige Gewichtung der GPS-Beobachtungen stark reduziert werden können und dass das LEO-Phasenzentrum genau genug bekannt ist, so verbleiben neben dem gesuchten LEO-Orbit  $\mathbf{x}_{\text{LEO}}$  nur noch die LEO- und GPS-Uhrenfehler sowie die Phasenmehrdeutigkeiten als Unbekannte. Für die Bahnbestimmung werden bei Švehla und Rothacher (2002b) nun zwei Auswerteverfahren für die Trägerphasen in Erwägung gezogen:

- die Auswertungen der einfachen (ionosphärenfreien) Trägerphasen zwischen GPS- und LEO-Satellit (Null-differenzen)
- Bildung von Doppeldifferenzen der ionosphärenfreien Trägerphasen zwischen LEO-Satellit und einer Bodenstation über die Satelliten  $k$  und  $s$ :

$$\psi_{\text{grd,LEO},3}^{\text{s,k}} = (\psi_{\text{LEO},3}^k - \psi_{\text{grd},3}^k) - (\psi_{\text{LEO},3}^s - \psi_{\text{grd},3}^s) \quad (\text{C.3})$$

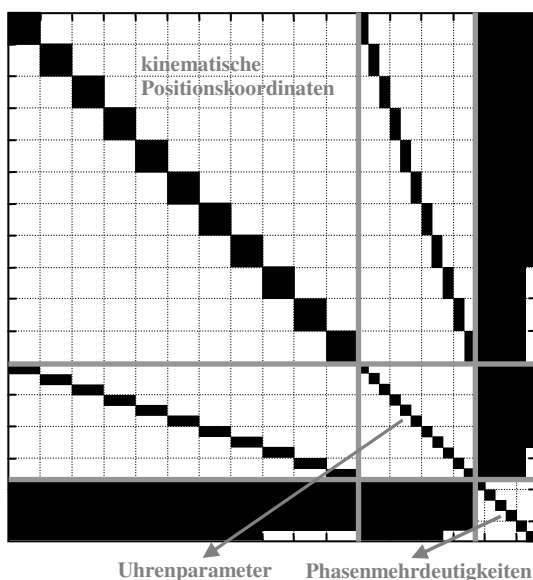
Die Auswertung von Nulldifferenzen erfordert hochgenaue GPS-Satellitenbahnen  $\mathbf{x}^s$  und GPS-Uhrenparameter, wie sie beispielsweise durch den IGS (engl.: *International GPS Service*) bereitgestellt werden. Als unbekannte Parameter verbleiben neben der LEO-Bahn noch die Phasenmehrdeutigkeiten sowie die LEO-Uhrenfehler. Neben der Notwendigkeit von vorhandenen hochgenauen GPS-Orbits und Uhrenparametern kann auch der Umstand, dass keine ganzzahligen Phasenmehrdeutigkeiten geschätzt werden können, als Nachteil dieses Verfahrens angesehen werden. Dem gegenüber steht allerdings, dass diese Methode recht zuverlässig und einfach ist, da die Anzahl der zu schätzenden Parameter recht überschaubar ist und vor allem die Prozessierung großer Datenmengen der IGS Bodenstationen entfällt.

Im Gegensatz zu den Nulldifferenzen werden bei der Bildung von Doppeldifferenzen die Uhrenfehler der GPS-Satelliten eliminiert und dadurch entfällt die Notwendigkeit von hochgenauen GPS-Uhrenparametern. Durch die Bildung aller möglichen Basislinien zwischen LEO-Satellit und den Bodenstationen entsteht allerdings eine sehr große Menge zu verarbeitender Beobachtungen und auch die Zahl der unbekannt Parameter vergrößert sich im Gegensatz zu den Nulldifferenzen, da mehr Phasenmehrdeutigkeiten bestimmt werden müssen. Da auch die LEO-Uhrenfehler bei den Doppeldifferenzen eliminiert werden, setzen sich jetzt die Unbekannten insgesamt aus dem LEO-Orbit sowie den Phasenmehrdeutigkeiten der Doppeldifferenzen zusammen. Als Nachteil der Methode werden der erhöhte Rechenaufwand sowie die Verdoppelung des Rauschens durch Doppeldifferenzenbildung angesehen. Dem gegenüber steht allerdings, dass alle Uhrenparameter eliminiert werden und dass vor allem die Auswertung von Doppeldifferenzen die Schätzung ganzzahliger Phasenmehrdeutigkeiten ermöglicht (Švehla und Rothacher, 2002a,b).

Wie sich herausgestellt hat, führt die Bestimmung ganzzahliger Phasenmehrdeutigkeiten der Doppeldifferenzen zu keiner signifikanten Genauigkeitssteigerung. Aufgrund des geringeren Rechenaufwandes und Messrauschens wurden die hier verwendeten kinematischen und reduziert-dynamischen Orbits aus Nulldifferenzen bestimmt. Die verwendeten kinematischen und reduziert-dynamischen Orbits wurden als Tageslösungen berechnet.

## C.2 Kinematische Bahnbestimmung

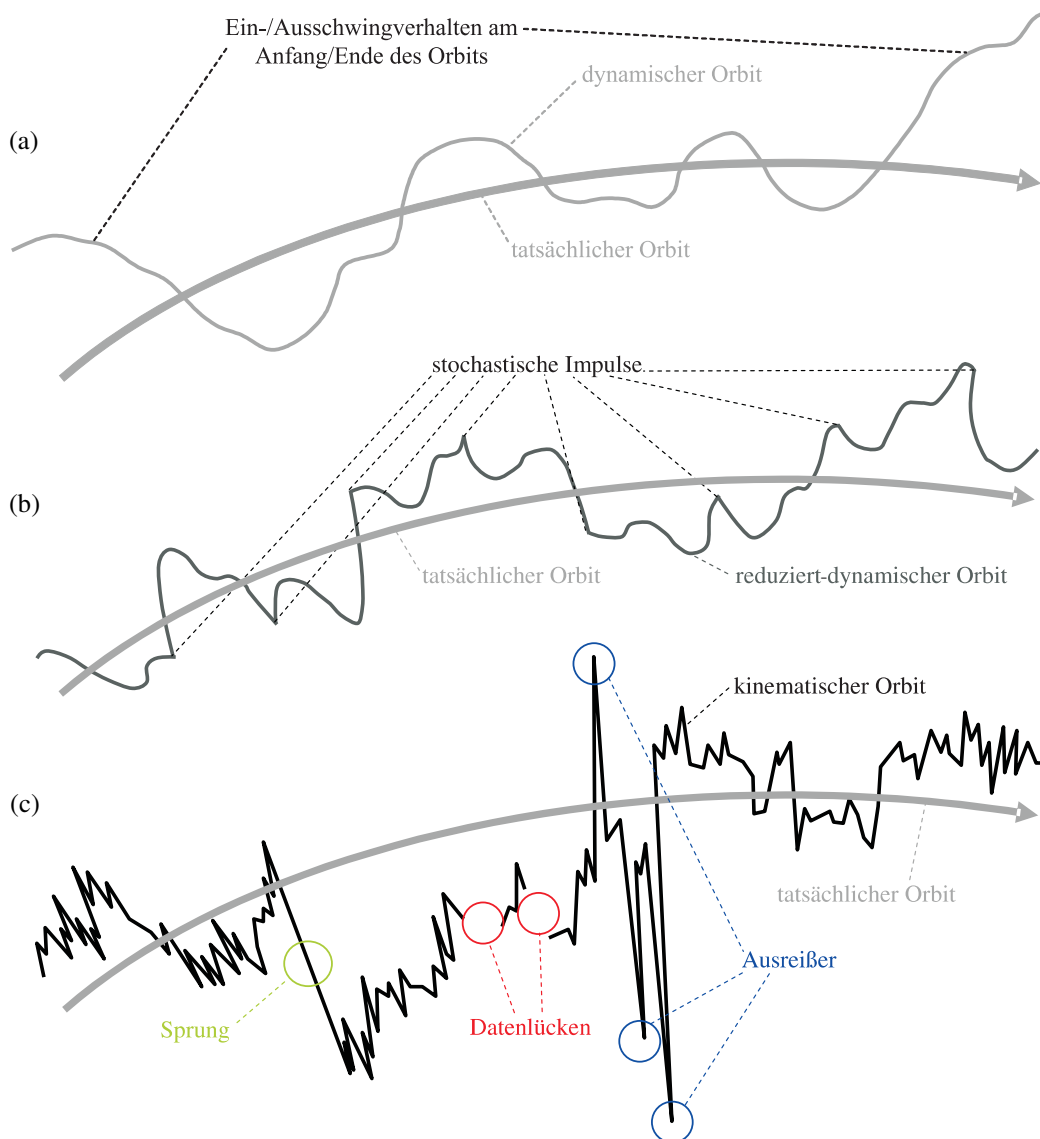
Die auf den ersten Blick natürlichste Art der Positionsbestimmung eines Satelliten ist die kinematische Bahnbestimmung. Wie zuvor beschrieben, wird aus der rein „geometrischen“ Information der GPS-Messungen ohne Berücksichtigung physikalischer Eigenschaften einer Satellitenbahn die Position des LEO-Satelliten bestimmt. Im vorherigen Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass bei der Auswertung von Nulldifferenzen der ionosphärenfreien Linearkombination als Unbekannte bei der Bahnbestimmung sowohl die LEO-Bahn  $\mathbf{x}_{\text{LEO}}$  selbst als auch die LEO-Uhrenfehler jeder Messepoche und die Phasenmehrdeutigkeiten der Nulldifferenzen eingehen. Die zu schätzenden Unbekannten des LEO-Orbits  $\mathbf{x}_{\text{LEO}}$  sind bei der kinematischen Bahnbestimmung die drei Positionskoordinaten jeder Epoche. Abbildung C.1 zeigt die entstehende Normalgleichungsmatrix bei der kinematischen Bahnbestimmung für den Zeitraum von 11 Epochen. Wie deutlich zu sehen ist, entsteht pro Epoche ein  $3 \times 3$ -Block für die Positionskoordinaten sowie ein damit korrelierter Uhrenparameter. Die Positionen (und auch die Uhrenparameter) sind in der Normalgleichungsmatrix zunächst nicht direkt miteinander korreliert, was auf eine voneinander unabhängige Schätzung der einzelnen Positionen und somit auf weißes Rauschen des Orbits schließen lässt. Dies entspricht allerdings nur der halben Wahrheit, da, wie in Abbildung C.1 zu sehen ist, in der Normalgleichungsmatrix auch noch Phasenmehrdeutigkeiten auftreten, die über mehrere Epochen hinweg gültig sind. Bei der Inversion der Normalgleichungsmatrix führt dies dann schließlich auch zu teilweise recht starken Korrelationen der einzelnen Positionen untereinander. Des Weiteren existieren außer den durch die Aufstellung des Beobachtungsmodells hervorgerufenen Abhängigkeiten auch noch zeitliche Korrelationen der GPS-Messungen selbst (siehe auch DGPS), die wiederum eine zeitliche Korrelation der kinematisch bestimmten Positionen hervorrufen. Die Tatsache, dass die Fehler kinematischer Orbits korreliert sind, stellt für die Gravitationsfeldbestimmung mit dem Beschleunigungsansatz eine wichtige Grundlage dar.



**Abbildung C.1:** Normalgleichungsmatrix für die Bestimmung eines kinematischen Orbits aus der ionosphärenfreien Linearkombination von einfachen Trägerphasenmessungen (Nulldifferenzen) zwischen LEO- und GPS-Satelliten (11 Epochen):  $3 \times 3$ -Blöcke der kinematischen Positionskoordinaten pro Epoche, 11 LEO-Uhrenparameter (1 pro Epoche) und 6 Phasenmehrdeutigkeiten der Nulldifferenzen. Quelle: Švehla und Rothacher (2002b).

Abbildung C.2c) zeigt, wie ein kinematisch bestimmter Orbit typischerweise aussieht. Neben einem zackigen Verlauf, der hauptsächlich einem weißen Rauschen entspricht, sind auch längere Perioden sichtbar, in denen der kinematische oberhalb oder unterhalb der tatsächlichen Bahn liegt und die somit korreliertes Rauschen andeuten. Außerdem enthalten kinematische Orbits eine Reihe von Störungen, die außerhalb dieses „normalen“ Rauschens liegen. Dies sind hauptsächlich Datenlücken und Ausreißer, die durch eine schlechte Beobachtungsgeometrie der GPS-Satelliten entstehen, sowie Sprünge, die durch nicht entdeckte Phasensprünge (Cycle-slips), eine wechselnde Satellitenkonstellation oder falsch bestimmte Phasenmehrdeutigkeiten hervorgerufen werden können.

Da die kinematischen Orbits aus der rein geometrischen Information der GPS-Messungen abgeleitet werden, eignen sie sich für die anschließende Gravitationsfeldbestimmung mit einem der in den Abschnitten 2.3.2–2.3.2.4 beschriebenen Verfahren. Von enormer Bedeutung für die erreichbare Genauigkeit ist allerdings die richtige Behandlung bzw. Elimination der Ausreißer und Sprünge.



**Abbildung C.2:** Prinzipien und Eigenschaften dynamisch bestimmter Orbits (a), reduziert-dynamisch bestimmter Orbits (b) und kinematisch bestimmter Orbits (c).

### C.3 Dynamische Bahnbestimmung

Die dynamische Bahnbestimmung unterscheidet sich von der kinematischen Bahnbestimmung darin, dass als Unbekannte für den LEO-Orbit  $\mathbf{x}_{\text{LEO}}$  nicht die 3 Positionskoordinaten jeder Epoche geschätzt werden, sondern dass der LEO-Orbit selbst parametrisiert wird und somit der Bewegungsgleichung eines Satelliten (2.17) gehorcht. Der Parametrisierung des LEO-Orbits liegt meist ein möglichst reales physikalisches Modell zu Grunde. Sie besteht neben den Anfangs- bzw. Randwerten ( $X_0, \dot{X}_0$  bzw.  $X_0, X_n$ ) des LEO-Orbits aus der Formulierung der auf den Satelliten wirkenden Kraftfunktion, die durch das terrestrische Gravitationsfeld, die Gezeiten, Oberflächenkräfte sowie eventuell weitere störende Kräfte beschrieben wird. Die zu bestimmenden Unbekannten der Parametrisierung des LEO-Orbits

$\mathbf{X}_{\text{LEO}} = \mathbf{X}_{\text{LEO}}(\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p})$  bzw.  $\mathbf{X}_{\text{LEO}} = \mathbf{X}_{\text{LEO}}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_n, \mathbf{p})$  sind immer mindestens die Anfangs- bzw. Randwerte, hinzu kommen je nach Wahl noch Parameter  $\mathbf{p}_u$  des Parametervektors  $\mathbf{p}$  der Kraftfunktion, wenn diese im Voraus nicht genau genug bekannt sind. Da gerade die Modellierung der Oberflächenkräfte schwierig ist und den Genauigkeitsansprüchen oft nicht genügt, ist es sinnvoll, Parameter für den solaren Strahlungsdruck oder auch die Atmosphärenreibung mitzuschätzen anstatt a-priori zu modellieren. Werden bei der dynamischen Bahnbestimmung die Parameter des terrestrischen Gravitationsfeldes mitgeschätzt, so entspricht dies der Gravitationsfeldbestimmung nach dem klassischen, bahndynamischen Verfahren aus Abschnitt 2.3.1. Die Berechnung der für die dynamische Bahnbestimmung benötigten partiellen Ableitungen des LEO-Orbits nach den Unbekannten geschieht mit Hilfe der Integration der Variationsgleichungen (s. Abschnitt 2.3.2.1). Wie bereits erwähnt, werden die gesuchten Koordinaten der Satellitenbahn bei der dynamischen Bahnbestimmung nicht als Unbekannte mitgeschätzt, allerdings können diese durch zeitgleiche Integration von Variations- und Bewegungsgleichung bei der Bahnausgleichung mitberechnet werden.

Die zu bestimmenden Unbekannten bei der dynamischen Bahnbestimmung bei der Auswertung von Nulldifferenzen der ionosphärenfreien Linearkombination sind nun also die unbekannt Parameter des LEO-Orbits  $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p}_u$  bzw.  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_n, \mathbf{p}_u$  sowie LEO-Uhrenfehler und Phasenmehrdeutigkeiten. Auch wenn somit bei der dynamischen Bahnbestimmung im Normalfall weniger Parameter bestimmt werden müssen ( $\rightarrow$  höhere Redundanz) als im kinematischen Fall, ist die absolute Genauigkeit dynamischer Orbits aufgrund von Schwierigkeiten bei der Modellierung der Kraftfunktion meist nicht besser. Da die einzelnen Satellitenpositionen nun eine Funktion der LEO-Parametrisierung sind und durch Integration entstehen, sind die Positionen hoch korreliert, es treten also im Gegensatz zum kinematischen Orbit hauptsächlich langwellige Bahnfehler auf. Nebenbei ermöglicht die dynamische Bahnbestimmung durch Integration der Bewegungsgleichung auch die Positionsrechnung an Punkten mit einer schlechten, für die kinematische Bahnbestimmung nicht ausreichenden GPS-Konstellation. Dynamische Orbits sind also, wie in Abbildung C.2a) zu sehen, sehr glatt und enthalten weder Datenlücken, Ausreißer und Sprünge. Da in den dynamischen Orbits bereits ein Gravitationsfeld steckt, eignen sich diese nicht für eine anschließende Gravitationsfeldbestimmung. Allerdings sind sie wegen ihres glatten Verlaufs bei der Detektion von Ausreißern und Sprüngen in kinematischen Orbits sehr hilfreich.

Im Gegensatz zu kinematischen Orbits, deren Genauigkeit maßgeblich von der Qualität der verwendeten GPS-Uhrenparameter und der Anzahl der GPS-Satelliten abhängt, wird die Genauigkeit der dynamischen Orbits neben den GPS-Uhrenparametern hauptsächlich von der Güte der LEO-Parametrisierung und der Qualität der verwendeten Kraftmodelle bestimmt. Bedingt durch die Integration der Variationsgleichungen können sich Mängel in der Parametrisierung und in den Kraftmodellen aufsummieren. Um solche Effekte möglichst gering zu halten, ist es ratsam, den Beobachtungszeitraum in mehrere kurze Bahnbögen aufzuteilen. Der Vollständigkeit halber sollte noch erwähnt werden, dass die Genauigkeit am Anfang und Ende eines dynamischen Orbits geringer ist (Ein-/Ausschwingverhalten), da der Zwang durch die GPS-Beobachtungen hier geringer ist.

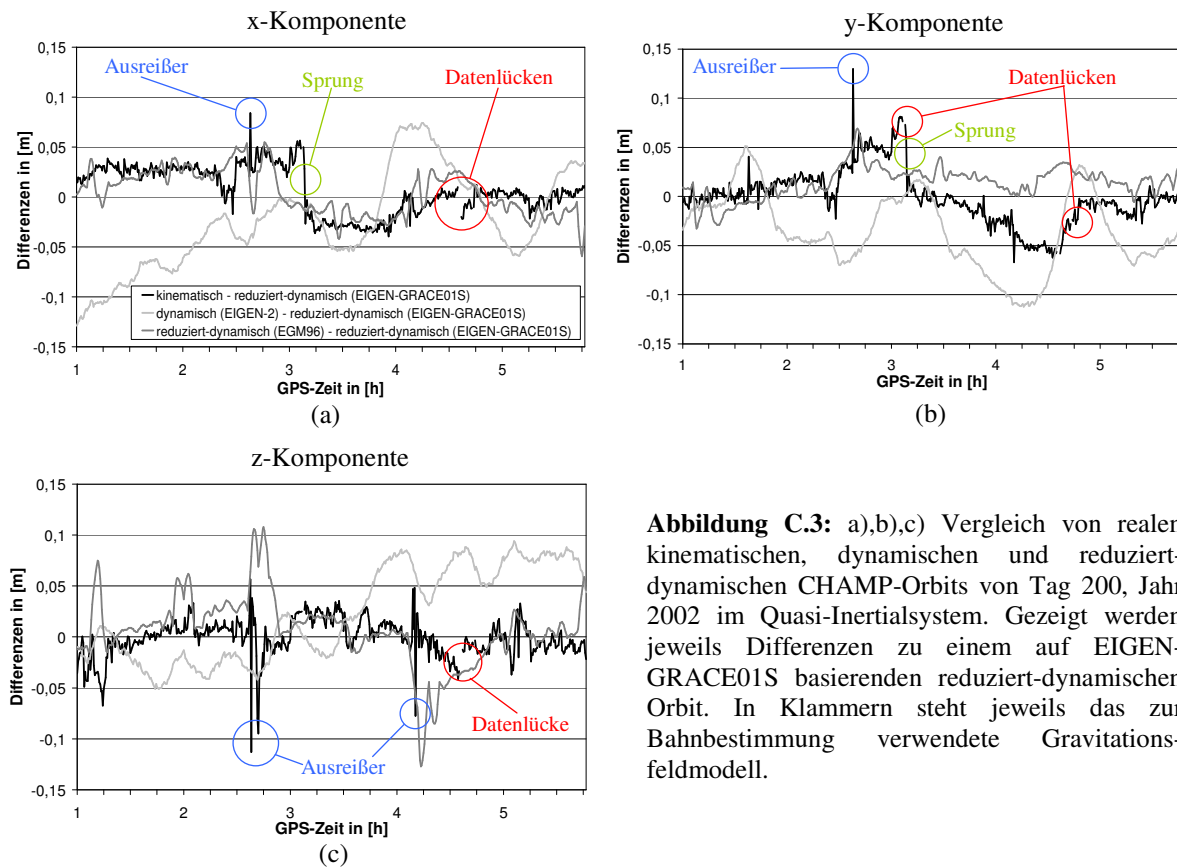
#### C.4 Reduziert-dynamische Bahnbestimmung

In der reduziert-dynamischen Bahnbestimmung wird versucht, die Vorteile von kinematischer und dynamischer Bahnbestimmung zu vereinen bei gleichzeitiger Einschränkung der Nachteile beider Methoden. Das bedeutet also, dass die daraus hervorgehenden Orbits einerseits glatt sein sollen und weder Datenlücken, Ausreißer und Sprünge aufweisen dürfen. Andererseits soll die Aufsummierung von Ungenauigkeiten, die durch die dynamische Bahnintegration infolge der Mängel in der Parametrisierung des dynamischen Orbits, also der Ungenauigkeiten der verwendeten Kraftmodelle entsteht, möglichst unterbunden werden. Um ein möglichst ideales Ergebnis zu erhalten, muss also die „geometrische“ Information möglichst gut mit der dynamischen Information verknüpft werden. Prinzipiell gibt es eine Vielzahl von Ansätzen der reduziert-dynamischen Bahnbestimmung, die alle irgendwo im Bereich zwischen kinematischer und dynamischer Bahnbestimmung anzusiedeln sind. Die in dieser Arbeit verwendeten reduziert-dynamischen Bahnen sind sehr eng mit der reinen dynamischen Bahnbestimmung verbunden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass alle 6–15 Minuten so genannte pseudo-stochastische Impulse für alle 3 Raumrichtungen (radial, along-track, cross-track) geschätzt werden, die Fehler durch Mängel der dynamischen Parametrisierung und der verwendeten Kraftmodelle ausgleichen sollen. Die pseudo-stochastischen Impulse werden dabei an den Geschwindigkeiten angebracht. Tatsächlich kann nach Švehla und Rothacher (2002b) die häufige Anbringung von stochastischen Impulsen als Modellierung der Atmosphärenreibung und anderer Kräfte mit vielen Parametern angesehen werden. Der Übergang von dynamischer Bahnbestimmung zur reduziert-dynamischen Bahnbestimmung ist somit als fließend anzusehen, jedoch können reduziert-dynamische Orbits als qualitativ etwas besser angesehen werden. Die zu schätzenden Unbekannten der Parametrisierung der LEO-Bahn sind bei den hier verwendeten reduziert-dynamischen Orbits die 6 Anfangsbedingungen, 9 Parameter für den Strahlungsdruck der Sonne, ein Skalierungsfaktor für die Atmosphärenreibung sowie die pseudo-stochastischen Impulse der 3 Raumrichtungen alle 6–15 min. Abbildung C.2b) zeigt schematisch, wie ein reduziert-dynamischer Orbit aussieht. Es treten im Gegensatz zum kinematischen Orbit keine Datenlücken, Sprünge und Ausreißer auf, im Vergleich zum dynamischen Orbit werden langwellige Fehleranteile sowie das Ein- und Ausschwingverhalten am Rand durch die stochastischen Impulse unterdrückt. Da die stochastischen Impulse an der Geschwindigkeit angebracht werden, kann der Orbit an diesen Stellen manchmal leicht abknicken. Wie auch die dynamischen Orbits sind die reduziert-dynamischen Orbits für die anschließende Gravitationsfeldbestimmung ungeeignet,

da in ihrer Parametrisierung bereits ein Gravitationsfeld steckt. Wie die dynamischen Orbits eignen sie sich jedoch aufgrund ihrer Glattheit für die Detektion von Ausreißern im kinematischen Orbit.

### C.5 Vergleich realer kinematischer, dynamischer und reduziert-dynamischer CHAMP-Orbits

Die in den vorherigen Abschnitten beschriebenen prinzipiellen Eigenschaften von kinematischen, dynamischen und reduziert-dynamischen Orbits sollen nun im Folgenden durch reale CHAMP-Orbits bestätigt werden. In Abbildung C.3a),b),c) sind die X-, Y- und Z-Komponenten eines kinematischen, dynamischen und reduziert-dynamischen CHAMP-Orbits für den Zeitraum von ca.  $4\frac{3}{4}$  h ( $\cong 3$  Umläufen) für den Tag 200 des Jahres 2002 bezüglich des Quasi-Inertialsystems mit einer Schrittweite von  $\Delta t = 30$  s dargestellt. Die gezeigten kinematischen und reduziert-dynamischen Orbits wurden entsprechend den oben angegebenen Beschreibungen von Švehla und Rothacher (2004) am IAPG der TU München berechnet, wobei für die Parametrisierung des Gravitationsfeldes beim reduziert-dynamischen Orbit das EGM96 (Lemoine et al., 1998) bis Grad/Ordnung 120/120 verwendet wurde. Die verwendeten dynamischen Orbits (PSO, König et al., 2005) wurden vom GFZ Potsdam basierend auf einer leicht verbesserten Version des EIGEN-2 Gravitationsfeldes (Reigber et al., 2003a) berechnet. Da die wahre Satellitenbahn nicht bekannt ist, werden jeweils die Differenzen zu einem reduziert-dynamischen Orbit der TU München (Švehla und Rothacher, 2004), der mit einem Gravitationsfeld der GRACE-Mission — EIGEN-GRACE01S (Reigber et al., 2005a) — parametrisiert worden ist, gezeigt. Dieser reduziert-dynamische Orbit kann aufgrund der sehr hohen Qualität des GRACE-Gravitationsfeldes von überlegener Genauigkeit angesehen werden und eignet sich deshalb und wegen seiner Glattheit als Referenzorbit.



**Abbildung C.3:** a),b),c) Vergleich von realen kinematischen, dynamischen und reduziert-dynamischen CHAMP-Orbits von Tag 200, Jahr 2002 im Quasi-Inertialsystem. Gezeigt werden jeweils Differenzen zu einem auf EIGEN-GRACE01S basierenden reduziert-dynamischen Orbit. In Klammern steht jeweils das zur Bahnbestimmung verwendete Gravitationsfeldmodell.

Gut zu erkennen sind die Eigenschaften der jeweiligen Orbits. Der kinematische Orbit weist einen vergleichsweise zackigen Verlauf, unterlegt mit längeren Perioden, auf, wobei vereinzelt die charakteristischen Datenlücken, Ausreißer und Sprünge auftreten. Der dynamische Orbit kennzeichnet sich, wie erwartet, durch längerperiodische, teilweise größere Abweichungen und weist einen sehr glatten Verlauf auf (die kleineren Perioden im Bereich weniger Minuten sind wahrscheinlich auf den subtrahierten reduziert-dynamischen Orbit zurückzuführen). Der auf dem EGM96 basierende reduziert-dynamische Orbit weist im Gegensatz zum dynamischen Orbit hauptsächlich kleinere Differenzen mit kürzeren Perioden im Bereich von 5–20 Minuten auf, die auf die Einführung der stochastischen Impulse zurückzuführen sind. Der Verlauf ist aber immer noch glatt, die wenigen Stellen mit größeren Differenzen sind aller Wahrscheinlichkeit nach der geringeren Qualität des EGM96 zuzuschreiben. Bemerkenswert ist die hohe Genauigkeit insbesondere der kinematischen und reduziert-dynamischen Orbits im Bereich von 2–3 cm, die durch Tests mit SLR-Daten (Švehla und Rothacher, 2003, 2004) bestätigt wird.

## Literatur

- Albertella A, Migliaccio F, Sansò F, Tscherning CC (2000) *Scientific Data Production Quality Assessment Using Local Space-Wise Preprocessing (Study Team 2 — Workpackage 4)*. In: Sünkel H (Hrsg.) *From Eötivös to mGal*, Final Report, ESA/ESTEC Contract 13392/98/NL/GD, Graz, Österreich, 305321
- Albrecht P (1977) *The Runge-Kutta Theory in a Nutshell*, SIAM Journal on Numerical Analysis 14, 1006–1021
- Antonioni A (1993) *Digital Filters: Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, New York, USA
- Aoki S, Kinoshita H, Guinot B, Kaplan GH, McCarthy DD, Seidelmann PK (1982) *The New Definition of Universal Time*, Astronomy and Astrophysics, 105 (2), 359–361
- Aoki S, Kinoshita H (1983) *Note on the Relation between the Equinox and Guinot's Non-Rotating Origin*, Celestial Mechanics 29, 335–360
- Ardalan AA (2000) *High Resolution Regional Geoid Computation in the World Geodetic Datum 2000 Based upon Collocation of Linearized Observational Functionals of the Type GPS, Gravity Potential and Gravity Intensity*, Dissertation, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Ardalan AA, Grafarend EW (2001) *Somigliana-Pizzetti Gravity: the International Gravity Formula Accurate to the sub-nanoGal Level*, Journal of Geodesy 75 (7–8), 424–437
- Austen G, Reubelt T (2000) *Räumliche Schwerefeldanalyse aus semi-kontinuierlichen Ephemeriden niedrigfliegender GPS-vermessener Satelliten vom Typ CHAMP, GRACE und GOCE*, Diplomarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Austen G, Grafarend EW, Reubelt T (2002) *Analysis of the Earth's Gravitational Field from Semi-Continuous Ephemeris of a Low Earth Orbiting GPS-Tracked Satellite of Type CHAMP, GRACE or GOCE*. In: Adam J, Schwarz KP (Hrsg.) *Vistas for Geodesy in the New Millennium, IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, Hungary, September 2–7, 2001*, IAG Symposia, Vol. 125, Springer-Verlag, 309–315
- Ballani L (1988) *Partielle Ableitungen und Variationsgleichungen zur Modellierung von Satellitenbahnen und Parameterbestimmung*, Vermessungstechnik 36 (6), 192–194
- Balmino G (1975) *Numerical Methods of Orbital Dynamics*, In: Giacaglia GEO (Hrsg.) *Satellite Dynamics*, Proceedings of the COSPAR/IAU/IUTAM Symposium, São Paulo, Brazil, June 19–21, 1974, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 50–97
- Balmino G, Reigber C, Moynot B (1976) *A Geopotential Model Determined from Recent Satellite Observing Campaigns (GRIM 1)*, manuscripta geodaetica 1, 41–69
- Barriot JP, Balmino G (1992) *Estimation of Local Planetary Gravity Fields Using Line of Sight Gravity Data and an Integral Operator*, Icarus 99, 202–224
- Baur O, Austen G (2005) *A Parallel Iterative Algorithm for Large-Scale Problems of Type Potential Field Recovery from Satellite Data*, Proceedings of the Joint CHAMP/GRACE Science Meeting, GFZ Potsdam, July 6–8, 2004, Internet-Publikation ([www.gfz-potsdam.de/pb1/JCG/jcg\\_index.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/JCG/jcg_index.html))
- Baur O, Grafarend EW (2006) *High-Performance GOCE Gravity Field Recovery from Gravity Gradient Tensor Invariants and Kinematic Orbit Information*. In: Flury J, Rummel R, Reigber C, Rothacher M, Boedecker G, Schreiber U (Hrsg.) *Observation of the Earth System from Space*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 239–253
- Baur O, Austen G, Kusche J (2007) *Efficient GOCE Satellite Gravity Field Recovery Based on Least-Squares Using QR Decomposition*, Journal of Geodesy, online first, DOI 10.1007/s00190-007-0171-z
- Beaton A, Tukey J (1974) *The fitting of Power Series, Meaning Polynomials, Illustrated on Band-Spectroscopic Data*, Technometrics 16, 147–192
- Beichelt F (1997) *Stochastische Prozesse für Ingenieure*, B. G. Teubner, Stuttgart
- Belikov MV, Taybatorov KA (1992) *An Efficient Algorithm for Computing the Earth's Gravitational Potential and its Derivatives at Satellite Altitudes*, manuscripta geodaetica 17, 104–116
- Beutler G (1982) *Lösung von Parameterbestimmungsproblemen in Himmelsmechanik und Satellitengeodäsie mit modernen Hilfsmitteln*, Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 34, Bern, Schweiz
- Bjerhammar A (1967) *A new Approach to Satellite Geodesy*, US Army Engineer Geodesy, Intelligence and Mapping Research and Development Agency (GIMRADA), Fort Belvoir, Alexandria, Virginia, USA
- Björck A (1996) *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, USA
- Bouman J, Koop R (1997) *Quality Differences between Tikhonov Regularisation and Generalized Biased Estimation in Gradiometric Analysis*, DEOS Progress Letters 97.1, 42–48
- Brent R, Gustavson F, Yun D (1980) *Fast Solution of Toeplitz System of Equations and Computation of Padé Approximants*, Journal of Algorithms 1 (3), 259–295
- Bronstein IN, Semendjajew KA (1980) *Taschenbuch der Mathematik*, 19., völlig überarbeitete Auflage herausgegeben von Grosche G und Ziegler V, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main



- Brozena JM, Peters MF, Salman R (1997) *Arctic Airborne Gravity Measurement Program*. In: Segawa J, Fujimoto H, Okubo S (Hrsg.) *Gravity, Geoid and Marine Geodesy, International Symposium No. 117, Tokyo, Japan, September 30–October 5, 1996*, IAG Symposia, Vol. 117, Springer-Verlag, 131–138
- Bruns H (1878) *Die Figur der Erde, ein Beitrag zur europäischen Gradmessung*, Publikation des Königlich-Preußischen Geodätischen Instituts, Verlag P. Stankiewicz, Berlin
- Bruton, AM (2000) *Improving the Accuracy and Resolution of SINS/DGPS Airborne Gravimetry*, UCGE Report 20145, Doktorarbeit, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Kanada
- Cai J (2004) *Statistical Inference of the Eigenspace Components of a Symmetric Random Deformation Tensor*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 577, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Cannon ME, Schwarz KP, Wei M (1992) *A Consistency Test of Airborne GPS Using Multiple Monitor Stations*, Bulletin Géodésique 66 (1), 2–11
- Capitaine N, Gontier AM (1993) *Accurate Procedure for Deriving UT1 at a Submilliarcsecond Accuracy from Greenwich Sidereal Time or from Stellar Angle*, Astronomy and Astrophysics 275, 645–650
- Capitaine N (1990) *The Celestial Pole Coordinates*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 48, 127–143
- Cappelari JO, Velez CE, Fuchs AJ (1976) *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, NASA GSFC Report X-582-76-77, Greenbelt, Maryland, USA
- Cartwright DE, Taylor RJ (1971) *New Computations of the Tide-Generating Potential*, The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 23, 45–74
- Caspary W (1988) *Fehlerverteilungen, Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen*, Zeitschrift für Vermessungswesen 113 (3), 123–133
- Chapman S, Lindzen R (1970) *Atmospheric Tides*, D. Reidel, Dordrecht, Niederlande
- Colombo OL (1981) *Numerical Methods for Harmonic Analysis on the Sphere*, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Report 310, Columbus, USA
- Dahlen FA (1993) *Effect of the Earth's Ellipticity on the Lunar Potential*, Geophysical Journal International 113 (1), 250–251
- Darwin GH (1899) *The Theory of the Figure of the Earth Carried to the Second Order of Small Quantities*, Monthly notices of the Royal Astronomical Society 60, 82–125
- DeMets C, Gordon RG, Argus DF, Stein S (1994) *Effect of Recent Revisions to the Geomagnetic Reversal Time Scale on Estimates of Current Plate Motions*, Geophysical Research Letters 21 (20), 2191–2194
- Denker H (1995) *Großräumige Höhenbestimmung mit GPS- und Schwerefelddaten*, In: Heck B, Illner M (Hrsg.) *GPS-Leistungsbilanz '94*, Schriftenreihe des DVW, Band 18, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart
- Ditmar P, Klees R (2002) *A Method to Compute the Earth's Gravity Field from SGG / SST Data to be Acquired by the GOCE Satellite*, Delft University Press, Delft, Niederlande
- Ditmar P, van Eck van der Sluijs A, Kuznetsov V (2004) *Modelling the Earth's Gravity Field from Precise Satellite Orbit Data: the Acceleration Approach Works! In: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International GOCE User Workshop, ESA/ESRIN, Frascati, Italy, March 8–10, 2004*, ESA, Internet-Publikation ([http://earth.esa.int/workshops/goce04/participants/81/paper\\_accelerations.pdf](http://earth.esa.int/workshops/goce04/participants/81/paper_accelerations.pdf))
- Ditmar P, van Eck van der Sluijs A (2004) *A Technique for Modelling the Earth's Gravity Field on the Basis of Satellite Accelerations*, Journal of Geodesy 78 (1–2), 12–33
- Ditmar P, Kuznetsov V, van Eck van der Sluijs AA, Schrama E, Klees R (2006) *'DEOS\_CHAMP-01C\_70': a Model of the Earth's Gravity Field Computed from Accelerations of the CHAMP Satellite*, Journal of Geodesy 79 (10–11), 586–601
- Ditmar P, Klees R, Liu X (2007) *Frequency-Dependent Data Weighting in Global Gravity Field Modelling from Satellite Data Contaminated by Non-Stationary Noise*, Journal of Geodesy 81 (1), 81–96
- Dow JM (1988) *Ocean Tides and Tectonic Plate Motions from Lageos*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 344, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Dziewonski AM, Anderson DL (1981) *Preliminary Reference Earth Model (PREM)*, Physics of the Earth and Planetary Interiors 25, 297–356
- Engeln-Müllges G, Reutter F (1987) *Numerische Mathematik für Ingenieure*, 5. überarbeitete Auflage, BI Wissenschaftsverlag, Zürich, Schweiz
- Engeln-Müllges G, Reutter F (1990) *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen*, 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich
- Escobal PR (1965) *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney
- Escobal PR (1968) *Methods of Astrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney
- Eubank RL (1988) *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Statistics: Textbooks and Monographs, Vol. 90, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel

- Fehlberg E (1969) *Klassische Runge-Kutta-Formeln fünfter bis siebenter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle*, Computing 4, 93–106
- Fehlberg E (1970) *Klassische Runge-Kutta Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweitenkontrolle*, Computing 6, 61–71
- Feistritzer M (1998) *Geoidbestimmung mit geopotentiellen Knoten*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 486, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Feltens J (1991) *Nicht-gravitativ Störeinflüsse bei der Modellierung von GPS-Erdumlaufbahnen*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 371, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Fengler MJ, Freedon W, Michel V (2004) *The Kaiserslautern Multiscale Geopotential Model SWITCH-03 from Orbit Perturbations of the Satellite CHAMP and Its Comparison to the Models EGM96, UCPH2002\_02\_0.5, EIGEN-1s, and EIGEN-2*, Geophysical Journal International 157 (2), 499–514
- Fengler MJ, Freedon W, Kusche J (2005) *Multiscale Geopotential Solutions from CHAMP Orbits and Accelerometry*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.) *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 139–144
- Földváry L, Švehla D, Gerlach C, Wermuth M, Gruber T, Rummel R, Rothacher M, Frommknecht B, Peters T, Steigenberger P (2005) *Gravity Model TUM-2Sp Based on the Energy Balance Approach and Kinematic CHAMP Orbits*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.), *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 13–16
- Förste C, Choi S (2005) *CHAMP Accelerometer Preprocessing at GeoForschungsZentrum Potsdam*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.) *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 169–174
- Freedon W, Windheuser U (1997) *Combined Spherical Harmonic and Wavelet Expansion*, Applied and Computational Harmonic Analysis 4, 1–37
- Freedon W (1999) *Multiscale Modelling of Spaceborne Geodata*, B. G. Teubner, Stuttgart
- Freedon W, Michel V (2004) *Multiscale Potential Theory (with Application to the Geosciences)*, Monograph, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston
- Gendt G, Sorokin NA (1978) *Probleme bei der numerischen Integration von Satellitenbahnen mit hoher Genauigkeit*, Vermessungstechnik 26 (5), Berlin, 291–295
- Gendt G (1989) *Bestimmung geodynamischer Parameter mit Hilfe satellitengeodätischer Verfahren*, Veröffentlichungen 103, Zentralinstitut für Physik der Erde, Potsdam
- Gerlach C, Sneeuw N, Visser P, Švehla D (2003a) *CHAMP Gravity Field Recovery Using the Energy Balance Approach*, Advances in Geosciences 1, 73–80
- Gerlach C, Földváry L, Švehla D, Gruber T, Wermuth M, Sneeuw N, Frommknecht B, Oberndorfer H, Peters T, Rothacher M, Rummel R, Steigenberger P (2003b) *A CHAMP only Gravity Field Model from Kinematic Orbits Using the Energy Integral*, Geophysical Research Letters 30 (20), 2037, doi: 10.1029/2003GL018025
- Gerlach C, Sneeuw N, Visser P, Švehla D (2003c) *CHAMP Gravity Field Recovery with the Energy Balance Approach*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (Hrsg.) *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 134–139
- Gerstl M (1999) *Bezugssysteme der Satellitengeodäsie*. In: Schneider M (Hrsg.) *3. DFG-Rundgesprach zum Thema Bezugssysteme*, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Band 5, Frankfurt am Main, 110–119
- Golub G, van Loan C (1983) *Matrix Computations*, North Oxford Academic, Oxford, England
- Götzelmann M (2003a) *Simulation von Satellitenbahnen unter Berücksichtigung von direkten Gezeiteneffekten*, Studienarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Götzelmann M (2003b) *Short-Arc Bahnanpassung bei niedrig fliegenden Satelliten*, Diplomarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Götzelmann M, Keller W, Reubelt T (2006) *Gross Error Compensation for Gravity Field Analysis Based on Kinematic Orbit Data*, Journal of Geodesy 80 (4), 184–198
- Grafarend E (1979) *Space-Time Geodesy*, Bolletino di Geodesia e Scienze Affini 38 (2), 306–343
- Grafarend E, Mueller JJ, Papo HB, Richter B (1979a) *Investigations on the Hierachy of Reference Frames in Geodesy and Geodynamics*, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Report 289, Columbus, USA
- Grafarend E, Mueller JJ, Papo HB, Richter B (1979b) *Concepts for Reference Frames in Geodesy and Geodynamics: the Reference Directions*, Bulletin Géodésique 53, 195–213
- Grafarend E, Vanıček P (1980) *On the Weight Estimation in Leveling*, National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), Report NOS 86, NGS 17, Rockville, USA
- Grafarend E (1988) *The Geometry of the Earth’s Surface and the Corresponding Function Space of the Terrestrial Gravitational Field*. In: *Festschrift Rudolph Sigl zum 60. Geburtstag*, DGK, Reihe B, Angewandte Geodäsie, Heft Nr. 287, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 76–94

- Grafarend EW, Schaffrin B (1993) *Ausgleichsrechnung in linearen Modellen*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich
- Grafarend EW, Engels J, Varga P (2000) *The Temporal Variation of the Spherical and Cartesian Multipoles of the Gravity field: the generalized MacCullagh representation*, Journal of Geodesy 74 (7–8), 519–530
- Grafarend EW, Novák P, Austen G, Sharifi MA (2003) *The GRACE Processor for a Spherical Harmonic Analysis of Temporal Variations of Geopotential*. In: Rudloff A, Stroink L (Hrsg.): *Geotechnologien; Observation of the System Earth from Space, Status Seminar, Bavarian State Mapping Agency (BLVA), Munich, 12–13 June 2003, Programme & Abstracts*, Koordinierungsbüro Geotechnologien, Geotechnologien Science Report No. 3, Potsdam
- Grafarend EW (2006) *Linear and Nonlinear Models: Fixed Effects, Random Effects, and Mixed Models*, Walter de Gruyter, Berlin, New York
- Grunwaldt L, Meehan TK (2003) *CHAMP Orbit and Gravity Instrument Status*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (Hrsg.) *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 3–10
- Han SC, Jekeli C, Shum CK (2002) *Efficient Gravity Field Recovery Using In Situ Disturbing Potential Observables from CHAMP*, Geophysical Research Letters 29 (16), 1789, doi: 10.1029/2002GL015180
- Hanke M, Hansen PC (1993) *Regularization Methods for Large-Scale Problems*, Surveys on Mathematics for Industry 3, 253–315
- Hansen PC (1993) *The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems*, SIAM Journal on Scientific Computing 14, 1487–1503
- Hansen PC (1994) *A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems*, Numerical algorithms 6, 1–35
- Hartmann T, Wenzel HG (1995a) *Catalogue HW95 of the Tide Generating Potential*, Bulletin d'Information des Marées Terrestres 123, 9278–9301
- Hartmann T, Wenzel HG (1995b) *The HW95 Tidal Potential Catalogue*, Geophysical Research Letters 22 (24), 3553–3556
- Heiskanen WA, Moritz H (1967) *Physical Geodesy*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, London
- Herbert J (1997) *High Accuracy GPS Velocity Using the Carrier Phase Observable*. In: Cannon ME, Lachapelle G (Hrsg.) *Proceedings of the International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation: KIS97, Banff, Canada, June 3–6, 1997*, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Kanada, 265–269
- Hestenes MR, Stiefel E (1952) *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, Journal of Research of the National Bureau of Standards 49, 409–436
- Hobson EW (1965) *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea Publishing Company, New York, USA
- Hoerl AE, Kennard RW (1970a) *Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems*, Technometrics 12, 55–67
- Hoerl AE, Kennard RW (1970b) *Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems*, Technometrics 12, 69–82
- Howe E, Stenseng L, Tscherning CC (2003) *Analysis of one Month of State Vector and Accelerometer Data for the Recovery of the Gravity Potential*, Advances in Geosciences 1, 1–4
- Huber PJ (1964) *Robust Estimation of a Location Parameter*, Annals of Mathematical Statistics 35, 73–101
- Huber PJ (1981) *Robust Statistics*, Wiley, New York, USA
- Ilk KH (1983a) *Formulierung von Energieaustauschbeziehungen zur Ausmessung des Gravitationsfeldes*. In: Schneider M (Hrsg.), *Die Arbeiten des Sonderforschungsbereichs 78 Satellitengeodäsie der Technischen Universität München im Jahre 1982*, Astronomisch-Geodätische Arbeiten der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Nr. 43, München, 128–166
- Ilk KH (1983b) *Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper — Gravitationswechselwirkung*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 288, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Ilk KH (1987) *On the Regularization of Ill-Posed Problems*. In: Holota P (Hrsg.) *Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets, Part I*, Proceedings of the International IAG/COSPAR/IAU Symposium, September 15–20, 1986, Prague, Czechoslovakia, Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Prag, Tschechien, 365–383
- Ilk KH (1990) *Zukünftige Möglichkeiten der globalen hochauflösenden Schwerefeldbestimmung*. In: Schneider M (Hrsg.), *Satellitengeodäsie — Ergebnisse aus dem gleichnamigen Sonderforschungsbereich der Technischen Universität München*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, Basel, Cambridge, New York, 213–255
- Ilk KH, Löcher A (2003) *The Use of Energy Balance Relations for Validation of Gravity Field Models and Orbit Determination*. In: Sansò F (Hrsg.) *A Window on the Future of Geodesy, Proceedings of the International*

- Association of Geodesy, IAG General Assembly, Sapporo, Japan, June 30–July 11, 2003*, IAG Symposia, Vol. 128, Springer-Verlag, 494–499
- Ilk KH, Mayer-Gürr T, Feuchtinger M (2005) *Gravity Field Recovery by Analysis of Short Arcs of CHAMP*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.), *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 127–132
- Jacobi CGJ (1836) *Über ein neues Integral für den Fall der drei Körper, wenn die Bahn des störenden Planeten kreisförmig angenommen und die Masse des gestörten vernachlässigt wird*, Monthly Reports of the Berlin Academy of Science, July 1836
- Jekeli C (1988) *The Exact Transformation between Ellipsoidal and Spherical Harmonic Expansions*, manuscripta geodaetica 13, 106–113
- Jekeli C, Garcia R (1997) *GPS Phase Accelerations for Moving-Base Vector Gravimetry*, Journal of Geodesy 71 (10), 630–639
- Jekeli C (1999) *The Determination of Gravitational Potential Differences from Satellite-to-Satellite Tracking*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 75, 85–101
- Kang Z, Bettadpur S, Tapley B, Cheng M, Ries J (2003) *Determination of CHAMP Accelerometer Calibration Parameters*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (Hrsg.) *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 19–25
- Kargoll B (2005) *Comparison of Some Robust Parameter Estimation Techniques for Outlier Analysis Applied to Simulated GOCE Mission Data*. In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (Hrsg.) *Gravity, Geoid and Space Missions, GGSM 2004, IAG International Symposium, Porto, Portugal, August 30–September 3, 2004*, IAG Symposia, Vol. 129, Springer-Verlag, 77–82
- Kaula W (1966) *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, USA
- Keller W, Sharifi MA (2005) *Satellite Gradiometry Using a Satellite Pair*, Journal of Geodesy 78 (9), 544–557
- Kern M, Allesch M (2003) *WP Ia-3: Pre-Processing*. In: Pail R (Hrsg.) *Austrian Space Application Programme — GOCE Data Archiving and Processing Center (DAPC) Graz, Phase Ia, Final Report*, Graz University of Technology, Graz, Österreich, 53–99
- Kern M, Preimesberger T, Allesch M, Pail R, Bouman J, Koop R (2005) *Outlier Detection Algorithms and Their Performance in GOCE Gravity Field Processing*, Journal of Geodesy 78 (9), 509–519
- King-Hele D (1987) *Satellite Orbits in an Atmosphere: Theory and Applications*, Blackie and Son Ltd., Glasgow, London, England.
- Kleusberg A, Peyton D, Wells D (1990) *Airborne Gravity and the Global Positioning System*. In: *IEEE PLANS' 90, Position Location and Navigation Symposium Record: the 1990's — a Decade of Excellence in the Navigation Sciences*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, USA, 273–278
- Klingbeil E (1966) *Tensorrechnung für Ingenieure*, BI Hochschultaschenbücher, Band 197, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich
- Klotzek B (1995) *Einführung in die Differentialgeometrie — Band I und II*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main
- Knickmeyer EH (1989) *Eine approximative Lösung der allgemeinen linearen Geodätischen Randwertaufgabe durch Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 304, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Knocke P, Ries J (1987) *Earth Radiation Pressure Effects on Satellites*, CSR-TM-87-01, Austin, Texas, USA
- Koch KR (1996) *Robuste Parameterschätzung*, Allgemeine Vermessungsnachrichten 103 (1), 1–18
- König R, Michalak G, Neumayer KH, Schmidt R, Zhu SY, Meixner H, Reigber C (2005) *Recent Developments in CHAMP Orbit Determination at GFZ*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.) *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 65–70
- Krarpup T (1969) *A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy*, Danish Geodetic Institute, Vol. 44, Kopenhagen, Dänemark
- Laplace PS (1775) *Recherches sur plusieurs points de système du Monde*, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris 88, 75–182 (veröffentlicht 1778)
- Laplace PS (1776) *Recherches sur plusieurs points du système du Monde*, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris 89, 177–264, 525–552 (veröffentlicht 1779)
- Lemoine FG, Kenyon SC, Factor JK, Trimmer RG, Pavlis NK, Chinn DS, Cox CM, Klosko SM, Luthcke SB, Torrence MH, Wang YM, Williamson RG, Pavlis EC, Rapp RH, Olson TR (1998) *The Development of the Joint NASA Goddard Space Flight Center and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*, NASA/TP-1998-206861, Greenbelt, Maryland, USA
- Le Provost C, Genco ML, Lyard F, Vincent P, Cancail P (1994) *Spectroscopy of the World Ocean Tides from a Finite Element Hydrodynamic Model*, Journal of Geophysical Research 99 (C12), 24777–24798

- Levinson (1946) *The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction*, Journal of Mathematical Physics 25, 261–278
- Lieske JH, Lederle T, Fricke W, Morando B (1977) *Expression for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants*, Astronomy and Astrophysics 58, 1–16
- Löcher A, Ilk KH (2005) *Energy Balance Relations for Validation of Gravity Field Models and Orbit Determinations Applied to the Results of the CHAMP Mission*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.) *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 53–58
- Löcher A, Ilk KH (2006) *A Validation Procedure for Satellite Orbits and Force Function Models Based on a New Balance Equation Approach*. In: Tregoning P, Rizos C (Hrsg.) *Dynamic Planet — Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools, IAG Symposium, Cairns, Australia, August 22–26, 2005*, IAG Symposia, Vol. 130, Springer-Verlag, 280–287
- Lyard F, Lefèvre F, Letellier T, Francis O (2006) *Modelling the Global Ocean Tides: Modern Insights from FES2004*, Ocean Dynamics 56 (5–6), 394–415
- Maeß G (1988) *Vorlesungen über numerische Mathematik II*, Akademie Verlag, Berlin
- Marinković P, Grafarend E, Reubelt T (2003) *Space Gravity Spectroscopy: the Benefits of Taylor-Karman Structured Criterion Matrices*, Advances in Geosciences 1, 113–120
- Martin TV, Oh IH, Eddy WF, Kogut JA (1976) *GEODYN System Description*, Wolf Research and Development Group, Riverdale, Maryland, USA
- Martinec Z, Grafarend EW (1997) *Solution to the Stokes Boundary-Value Problem on an Ellipsoid of Revolution*, Studia geophysica et geodaetica 41, 103–129
- Mathews PM, Herring TA, Buffett BA (2002) *Modeling of Nutation-Precession: New Nutation Series for Nonrigid Earth, and Insights into the Earth's Interior*, Journal of Geophysical Research 107 (B4), 10.1029/2001JB000390
- Mayer-Gürr T, Feuchtinger M, Kusche J (2005a) *A Comparison of Various Procedures for Global Gravity Field Recovery from CHAMP Orbits*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.), *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 151–156
- Mayer-Gürr T, Ilk KH, Eicker A, Feuchtinger M (2005b) *ITG-CHAMP01: a CHAMP Gravity Field Model from Short Kinematic Arcs over a One-Year Observation Period*, Journal of Geodesy 78 (7–8), 462–480
- McCarthy DD (1996) *IERS Conventions 1996*, IERS Technical Note 21, Observatoire de Paris, Frankreich
- McCarthy DD, Petit G (2004) *IERS Conventions 2003*, IERS Technical Note 32, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main
- Melbourne WG (1985) *The Case for Ranging in GPS Based Geodetic Systems*. In: Goad C (Hrsg.) *First International Symposium on Precise Positioning with the GPS*. U. S. Department of Commerce, Rockville, Maryland, USA, 373–386
- Migliaccio F, Reguzzoni M, Sansò F (2004) *Space-Wise Approach to Satellite Gravity Field Determination in the Presence of Coloured Noise*, Journal of Geodesy 78 (4–5), 304–313
- Montenbruck O, Eberhard G (2000) *Satellite Orbits, Models, Methods, Applications*, Springer-Verlag
- Moon P, Spencer D (1961) *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg
- Moore P, Turner JF, Qiang Z (2003) *Error Analysis of CHAMP Data for Recovery of the Earth's Gravity Field*, Journal of Geodesy 77 (7–8), 369–380
- Moritz H (1980) *Advanced Physical Geodesy*, Wichmann, Karlsruhe
- Müller J (2001) *Die Satellitengradiometriemission GOCE — Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 541, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Newton I (1687) *Principia*, Bancroft Library, University of Berkeley, Berkeley, Kalifornien, USA
- Oberndorfer H, Müller J (2003) *CHAMP Accelerometer and Star Sensor Data Combination*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (Hrsg.) *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 26–31
- O'Keefe JA (1957) *An Application of Jacobi's Integral to the Motion of an Earth Satellite*, The Astronomical Journal 62 (8), 266–267
- Paige CC, Saunders MA (1982) *Algorithm 583: LSQR: Sparse Linear Equations and Least Squares Problems*, ACM Transactions on Mathematical Software 8 (2), 195–209
- Paul MK (1978) *Recurrence Relations for Integrals of Associated Legendre Functions*, Bulletin Géodésique 52, 177–190
- Perosanz F, Biancale R, Loyer S, Lemoine JM, Perret A, Touboul P, Foulon B, Pradels G, Grunwaldt L, Fayard T, Vales N, Sarrailh M (2003) *On Board Evaluation of the STAR Accelerometer*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (Hrsg.) *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 11–18

- Perosanz F, Biancale R, Lemoine JM, Vales N, Loyer S, Bruinsma S (2005) *Evaluation of the CHAMP Accelerometer on Two Years of Mission*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.) *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 77–82
- Pick M, Pícha J, Vyskočil V (1973) *Theory of the Earth's Gravity Field*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, London, New York
- Pizzetti P (1894) *Sulla espressione della gravita alla superficie del geoide, supposto ellissoidico*, Atti Reale Accademia dei Lincei, Ser. V, 3, 166–172
- Rabel D (1997) *Kugelfunktionsentwicklungen des Gravitationspotentials am Beispiel des OSU91A*, Studienarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Reigber C (1969) *Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 137, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Reigber C (1989) *Gravity Field Recovery from Satellite Tracking Data*. In: Sansò F, Rummel R (Hrsg.) *Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination*, Lecture Notes in Earth Sciences, Vol. 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 197–234
- Reigber C, Balmino G, Schwintzer P, Biancale R, Bode A, Lemoine JM, König R, Loyer S, Neumayer H, Marty JC, Barthelmes KH, Perosanz F, Zhu SY (2002) *A High Quality Global Gravity Field Model from CHAMP GPS Tracking Data and Accelerometry (EIGEN-1S)*. *Geophysical Research Letters*, 29 (14), 1692, doi: 10.1029/2002GL015064
- Reigber C, Schwintzer P, Neumayer H, Barthelmes KH, König R, Förste C, Balmino G, Biancale R, Lemoine JM, Loyer S, Bruinsma S, Perosanz F, Fayard T (2003a) *The CHAMP-only Earth Gravity Field Model EIGEN-2*. *Advances in Space Research* 31 (8), 1883–1888, doi: 10.1016/S0273-1177(03)00162-5
- Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (2003b) *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
- Reigber C, Schmidt R, Flechtner F, König R, Meyer U, Neumayer KH, Schwintzer P, Zhu SY (2005a) *An Earth Gravity Field Model Complete to Degree and Order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S*, *Journal of Geodynamics* 39 (1), 1–10
- Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (2005b) *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
- Reigber C, Jochmann H, Wunsch J, Petrović S, Schwintzer P, Barthelmes F, Neumayer KH, König R, Förste C, Balmino G, Biancale R, Lemoine JM, Loyer S, Perosanz F (2005c) *Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP*. In: Reigber C, Lühr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.), *Earth Observation with CHAMP — Results from Three Years in Orbit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 25–30
- Reubelt T, Austen G, Grafarend EW (2003a) *Harmonic Analysis of the Earth's Gravitational Field by means of Semi-Continuous Ephemerides of a Low Earth Orbiting GPS-tracked Satellite. Case study: CHAMP*, *Journal of Geodesy* 77 (5–6), 257–278
- Reubelt T, Austen G, Grafarend EW (2003b) *Space Gravity Spectroscopy-Determination of the Earth's Gravitational Field by means of Newton Interpolated LEO Ephemeris; Case Studies on Dynamic (CHAMP Rapid Science Orbit) and Kinematic Orbits*, *Advances in Geosciences* 1, 127–135
- Reubelt T, Götzelmann M, Grafarend EW (2006) *Harmonic Analysis of the Earth's Gravitational Field from Kinematic CHAMP Orbits Based on Numerically Derived Satellite Accelerations*. In: Flury J, Rummel R, Reigber C, Rothacher M, Boedecker G, Schreiber U (Hrsg.) *Observation of the Earth System from Space*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 27–42
- Richter B (1986) *Entwurf eines nichtrelativistischen Geodätisch-astronomischen Bezugssystems*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 322, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Richter B (1995) *Die Parametrisierung der Erdorientierung*, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 120 (3), 109–114
- Riley JD, Bennett MM, McCormick E (1967) *Numerical Integration of Variational Equations*, *Mathematics of Computation* 21 (97), 12–17
- Roach GF (1982) *Green's Functions*, 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge University Press, Cambridge, England
- Rummel R, Schwarz KP, Gerstl M (1979) *Least Squares Collocation and Regularization*, *Bulletin Géodésique* 53, 343–361.
- Rummel R, van Gelderen M, Koop R, Schrama E, Sansò F, Brovelli MA, Migliaccio F, Sacerdote F (1993) *Spherical Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry*, *Publications on Geodesy, New Series, No. 39*, Netherlands Geodetic Commission, Delft, Niederlande
- Schäfer C (2001) *Space Gravity Spectroscopy — The Sensitivity Analysis of GPS-Tracked Satellite Missions (Case Study CHAMP)*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 534, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Scheinert M (1996) *Zur Bahndynamik niedrigfliegender Satelliten*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 435, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München

- Schlossmacher EJ (1973) *An Iterative Technique for Absolute Deviations Curve Fitting*, Journal of the American Statistical Association 68, 857–859
- Schneider M (1967) *Beiträge zur Bahnmechanik künstlicher Erdsatelliten, Teil II*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 113, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Schneider M (1968) *A General Method of Orbit Determination*, Library Translation, Band 1279, Royal Aircraft Establishment, Ministry of Technology, Farnborough, England
- Schneider M (2002) *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*, IAPG/FESG-Schriftenreihe, Nr. 15, IAPG, München
- Schönauer W (2000) *Scientific Supercomputing: Architecture and Use of Shared and Distributed Memory Parallel Computers*, Self-Edition by Willi Schönauer, Karlsruhe
- Schuh WD (1996) *Tailored Numerical Solution Strategies for the Global Determination of the Earth's Gravity Field*, Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 81, Graz, Österreich
- Schuh WD (2000) *Scientific Data Processing Algorithms (Study Team 1 — Workpackage 3)*. In: Sünkel H (Hrsg.) *From Eötös to MilliGal*, Final Report ESA/ESTEC Contract 13392/98/NL/GD, Graz, Österreich, 97–148
- Schwiderski EW (1980) *Ocean Tides, Part II: A Hydrodynamical Interpolation Model*, Marine Geodesy 3, 219–255
- Schwintzer P, Lühr H, Reigber C, Grunwaldt L, Förste C (2002) *CHAMP Reference Systems, Transformations and Standards*, Dokument CH-GFZ-RS-002, Ausgabe 2.3, 18.04.2002, GFZ Potsdam, Internet-Publikation ([www.gfz-potsdam.de/html/projects/index.html](http://www.gfz-potsdam.de/html/projects/index.html))
- Seidelmann PK (1982) *1980 IAU Theory of Nutation: The Final Report of the IAU Working Group on Nutation*, Celestial Mechanics 27, 79–106
- Seidelmann PK (1992) *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley, Kalifornien, USA.
- Simon JL, Bretagnon B, Chapront J, Chapront-Touzé M, Francou G, Laskar J (1994) *Numerical Expressions for Precession Formulae and Mean Elements for the Moon and Planets*, Astronomy and Astrophysics 282 (2), 663–683
- Sneeuw N (2000) *A Semi-Analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite Observations*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 527, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Sneeuw N, Gerlach C, Švehla D, Gruber C (2003) *A First Attempt at Time-Variable Gravity Recovery from CHAMP Using the Energy Balance Approach*. In: Tziavos IN (Hrsg.), *Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, August 26–30, 2002*, International Gravity and Geoid Commission (IGGC) of the IAG and the Department of Geodesy and Surveying of the Aristotle University of Thessaloniki, 237–242
- Somogyi J, Závoti J (1993) *Robust Estimation with Iteratively Reweighted Least-Squares Method*, Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica 28 (3–4), 413–420
- Stäckel P (1897) *Über die Integration der Hamilton'schen Differentialgleichung mittelst Separation der Variablen*, Mathematische Annalen 49, 145–147
- Standish EM (1982) *Orientation of the JPL Ephemerides, DE200/LE200, to the Dynamical Equinox of J2000*, Astronomy and Astrophysics 114 (2), 297–302
- Standish EM (1990) *The Observational Basis for JPL's DE200, the Planetary Ephemeris of the Astronomical Almanac*, Astronomy and Astrophysics 233 (1), 252–271
- Standish EM (1998) *JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405*, JPL Interoffice Memorandum IOM 312. F-98-048
- Stephens GL, Campbell GG, Vonder Haar TH (1981) *Earth Radiation Budgets*, Journal of Geophysical Research 86 (C10), 9739–9760
- Strang G (1986) *A Proposal for Toeplitz Matrix Calculations*, Studies in Applied Mathematics 74 (2), 171–176
- Švehla D, Rothacher M (2002a) *Kinematic Orbit Determination of LEOs Based on Zero- or Double-Difference Algorithms Using Simulated and Real SST Data*. In: Adam J, Schwarz KP (Hrsg.) *Vistas for Geodesy in the New Millennium, IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, Hungary, September 2–7, 2001*, IAG Symposia, Vol. 125, Springer-Verlag, 322–328
- Švehla D, Rothacher M (2002b) *Kinematic and Reduced Dynamic Precise Orbit Determination of Low Earth Orbiters*, Advances in Geosciences 1, 47–56
- Švehla D, Rothacher M (2003) *Kinematic Precise Orbit Determination for Gravity Field Determination*. In: Sansò F (Hrsg.) *A Window on the Future of Geodesy, Proceedings of the International Association of Geodesy, IAG General Assembly, Sapporo, Japan, June 30–July 11, 2003*, IAG Symposia, Vol. 128, Springer-Verlag, 181–188
- Švehla D, Rothacher M (2004) *Two Years of CHAMP Kinematic Orbits for Geosciences*, Geophysical Research Abstracts, Vol. 6, 06645

- Švehla D, Földváry L (2006) *From Kinematic Orbit Determination to Derivation of Satellite Velocity and Gravity Field*. In: Flury J, Rummel R, Reigber C, Rothacher M, Boedecker G, Schreiber U (Hrsg.) *Observation of the Earth System from Space*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 177–192
- Szebehely VG (1961) *The Generalized Inverse Problem of Orbit Computation*, In: van de Hulst HC, de Jager C, Moore AF (Hrsg.), *Space Research II*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Space Science Symposium, Florence, Italy, April 10–14, 1961, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Niederlande, 318–338
- Tamura Y (1987) *A Harmonic Development of the Tide-Generating Potential*, Bulletin d'Informations des Marées Terrestres, 99, 6813–6855
- Thamm C (2003) *Iterative Lösung von "Least-Squares" Problemen großer Dimension mittels des LSQR-Algorithmus*, Studienarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Thong NC, Grafarend EW (1989) *A Spheroidal Harmonic Model of the Terrestrial Gravitational Field*, manuscripta geodaetica 14, 285–304
- Thong NC (1989) *Simulation of Gradiometry Using the Spheroidal Harmonic Model of the Gravitational Field*, manuscripta geodaetica 14, 404–417
- Thong NC (1993) *Untersuchungen zur Lösung der fixen gravimetrischen Randwertprobleme mittels sphäroidaler und Greenscher Funktionen*, DGK, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 399, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Torge W (2001) *Geodesy, 3rd Edition*, Walter de Gruyter, Berlin, New York
- Torge W (2003) *Geodäsie*, 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York
- Trench W (1974) *Inversion of Toeplitz Band Matrices*, Mathematics of Computation 28 (128), 1089–1095
- Visser PNAM, van den IJssel J, Koop R, Klees R (2001) *Exploring Gravity Field Determination from Orbit Perturbations of the European Gravity Mission GOCE*, Journal of Geodesy 75 (2–3), 89–98
- Wahr JM (1981a) *The Forced Nutations of an Elliptical, Rotating, Elastic and Oceanless Earth*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 64, 705–727
- Wahr JM (1981b) *Body Tides on an Elliptical, Rotating, Elastic and Oceanless Earth*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 64, 677–703
- Wahr JM (1982) *Computing Tides, Nutations, and Tidally-Induced Variations in the Earth's Rotation Rate for a Rotating, Elliptical Earth*. In: Moritz H, Sünkel H (Hrsg.) *Geodesy and Global Dynamics*, 3<sup>rd</sup> International Summer School, Admont, Austria, August 30–September 10, 1982, Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 41, Graz, Österreich
- Wahr JM (1985) *Deformation Induced by Polar Motion*, Journal of Geophysical Research 90 (B11), 9363–9368
- Weigelt M, Sneeuw N (2005) *Numerical Velocity Determination and Calibration Methods for CHAMP Using the Energy Balance Approach*. In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (Hrsg.) *Gravity, Geoid and Space Missions, GGSN 2004, IAG International Symposium, Porto, Portugal, August 30–September 3, 2004*, IAG Symposia, Vol. 129, Springer-Verlag, 54–59
- Weigelt M (2007) *Global and Local Gravity Field Recovery from Satellite-to-Satellite Tracking*, UCGE Report 20248, Doktorarbeit, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Kanada
- Wenzel HG (1985) *Hochauflösende Kugelflächenfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Habilitationsschrift, Hannover
- Wermuth M, Rummel R, Földváry L (2006) *Mission Simulation and Semi-Analytical Gravity Field Analysis for GOCE SGG and SST*. In: Flury J, Rummel R, Reigber C, Rothacher M, Boedecker G, Schreiber U (Hrsg.) *Observation of the Earth System from Space*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 193–208
- Widmer R, Masters G, Gilbert F (1991) *Spherically Symmetric Attenuation within the Earth from Normal Mode Data*, Geophysical Journal International 104 (3), 541–553
- Wilhelm H (1983) *Earth's Flattening Effect on the Tidal Forcing Field*, Journal of Geophysics 52 (2), 131–135
- Wittwer T (2004) *High Performance Computing im Einsatz zur Schwerefeldanalyse mit CHAMP, GRACE und GOCE*, Diplomarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
- Xu P (1989) *On Robust Estimation with Correlated Observations*, Bulletin Géodesique 63, 237–252
- Xu P (1992) *The Value of Minimum Norm Estimation of Geopotential Fields*, Geophysical Journal International 111 (1), 170–178



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen denjenigen herzlich bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. E.W. Grafarend für die Aufgabenstellung und Betreuung der Dissertationsschrift. Von Anfang an war er von der Leistungsfähigkeit des untersuchten Verfahrens überzeugt gewesen und hat mich in vielen wertvollen Diskussionen zur Weiterentwicklung der Methodik motiviert. Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. K.H. Ilk und bei Herrn Prof. N. Sneeuw für die Übernahme des Korreferats und viele hilfreiche Anmerkungen, Kommentare und Diskussionen gerade in der Endphase der Dissertation.

Ein großer Dank gilt auch all meinen Kollegen am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart, die mich während meiner Dissertation begleitet haben und mir immer mit Rat und Tat beiseite standen. Insbesondere zu erwähnen ist Dipl.-Ing. M. Götzelmann für die Bereitstellung eines Programms zur Satellitenbahnberechnung und von Ergebnissen der Ausreißerelimination und robusten Schätzung sowie Dr.-Ing. G. Austen, der lange Zeit mit mir gemeinsam den verwendeten Ansatz getestet und weiterentwickelt hat, so z.B. während der gemeinsam angefertigten Diplomarbeit. An dieser Stelle sei auch Dr.-Ing. O. Baur genannt, der im Rahmen seiner Arbeit ebenfalls auf den Beschleunigungsansatz zurückgriff und mit vielen Diskussionen zum Gelingen dieser Arbeit beitrug. Herzlich bedanken möchte ich mich außerdem bei Herrn Dr.-Ing. B. Richter vom DGFI (*Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut*) für die Hilfe bei der Implementation der Rotationsmatrizen für die Transformationen zwischen erdfestem und raumfestem Bezugssystem. Einen wichtigen Beitrag leisteten auch Dipl.-Ing. R. Schlesinger, der praktisch alle Computerprobleme löste, unsere Sekretärin Frau A. Vollmer, die bei allen administrativen Problemen zur Seite stand und mich mit dem morgendlichen Kaffee ermunterte sowie M.Sc. B. Devaraju mit seinen vielen heiteren Statements und seinem erfrischendem Lachen. Zu einem wertvollen Gedankenaustausch im Rahmen seiner Dissertation trug auch Dr.-Ing. M. Weigelt bei.

Viele weitere Kollegen aus anderen Instituten trugen durch ihre eigenen Fachvorträge und Diskussionen bei Konferenzen, ihre eigene wissenschaftliche Arbeiten und Informationsaustausch per e-mail zum Gelingen dieser Arbeit bei. Auch bei ihnen möchte ich mich bedanken.

Ein großer Dank gebührt auch dem GFZ Potsdam für die Durchführung der CHAMP-Mission sowie für die großzügige Bereitstellung der CHAMP-Daten. Ebenso möchte ich mich auch bei Herrn D. Švehla von der FESG der TU München für die zur Verfügung gestellten hochgenauen kinematischen und reduziert-dynamischen CHAMP-Bahnen bedanken. Ohne diese Daten wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Schließlich möchte ich mich noch bei meinen Eltern und meiner Schwester bedanken, die mich immer mit aller Kraft unterstützen und mir jederzeit ein Gefühl von Geborgenheit vermitteln.