

Dipl.-Ing. Ewald Krämer, Otterfing

**Theoretische Untersuchungen  
der stationären Rotorblatt-  
umströmung mit Hilfe eines  
Euler-Verfahrens**

Reihe **7**: Strömungstechnik

Nr. **197**

---

Krämer, Ewald

## Theoretische Untersuchungen der stationären Rotorblattumströmung mit Hilfe eines Euler-Verfahrens

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 7 Nr. 197. Düsseldorf: VDI-Verlag 1991.  
256 Seiten, 108 Bilder.

**Für die Dokumentation:** Numerische Aerodynamik – Hubschrauberrotorblatt – Transsonischer Blattspitzenbereich – Wake Capturing – Blatt-Nachlauf-Interferenz – Randwirbelabsenkung – Euler-Verfahren – Implizites Upwind-Verfahren – Gauß-Seidel-Relaxation – Flux-Difference-Splitting

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Berechnung der aerodynamischen Umströmung eines Hubschrauberrotorblattes auf der Basis der Eulerschen Bewegungsgleichungen. Besonderes Merkmal des Verfahrens ist die Tatsache, daß der von dem betrachteten Blatt generierte Nachlauf, der einen entscheidenden Einfluß auf die Strömungsverhältnisse vor dem nachfolgenden Blatt hat (Blatt-Nachlauf-Interferenz), nicht durch ein Wirbelmodell vorgegeben, sondern als Teil der Lösung berechnet wird („Wake-Capturing“). Bei dem verwendeten impliziten Lösungsverfahren handelt es sich um eine Finite-Volumen-Methode unter Verwendung eines Upwind-Schemas höherer Ordnung. Der Lösungsweg basiert auf der Charakteristikenmethode für hyperbolische Gleichungssysteme. Im Ergebnisteil der Arbeit werden die Resultate einer Reihe von Berechnungen für einen zweiblättrigen Modellrotor dargestellt und mit experimentellen Meßdaten sowie mit Ergebnissen anderer theoretischer Methoden verglichen. Daneben liegt ein Schwerpunkt der Arbeit auf der Darstellung des berechneten Nachlaufes in verschiedenen Referenzebenen zwischen den Rotorblättern sowie auf der Wiedergabe seiner zeitlichen Entwicklung (Anfahrvorgang).

---

### Die Reihen der FORTSCHRITT-BERICHTE VDI:

- |  |  |
|--|--|
| 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente | 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik                                   |
| 2 Fertigungstechnik                      | 13 Fördertechnik   |
| 3 Verfahrenstechnik                      | 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik                                   |
| 4 Bauingenieurwesen                      | 15 Umwelttechnik   |
| 5 Grund- und Werkstoffe                  | 16 Technik und Wirtschaft  |
| 6 Energieerzeugung                       | 17 Biotechnik  |
| 7 Strömungstechnik                       | 18 Mechanik/Bruchmechanik  |
| 8 Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik | 19 Wärmetechnik/Kältetechnik   |
| 9 Elektronik                             | 20 Rechnerunterstützte Verfahren<br>(CAD, CAM, CAE, CAP, CAQ, CIM, ) |
| 10 Informatik/Kommunikationstechnik      | 21 Elektrotechnik  |
| 11 Schwingungstechnik                    |  |

© VDI-Verlag GmbH · Düsseldorf 1991

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Photokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt Printed in Germany

ISSN 0178-9538

ISBN 3-18-149707-X

### Danksagung

Allen voran gilt mein besonderer Dank meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Wagner, für seine hervorragende Betreuung, seine Förderung, seine Anregungen und Ratschläge, sowie seine beispielhafte Unterstützung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Förster danke ich sehr für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat, für die fruchtbaren Diskussionen und für die Übernahme des Koreferates, ebenso wie Herrn Prof. Dr.sc.math. K. Marti für die Übernahme des Vorsitzes.

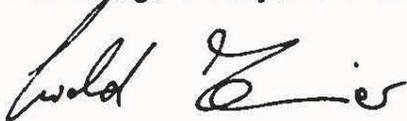
Besonderer Dank gebührt auch meinen Kollegen des Instituts für Luftfahrttechnik und Leichtbau der Universität der Bundeswehr München für die freundschaftliche Zusammenarbeit, die stete Diskussions- und Hilfsbereitschaft sowie die fachliche Unterstützung.

Aus diesem Kreis besonders hervorheben möchte ich meinen Freund Johann Hertel, mit dem ich in enger persönlicher und fachlicher Verbundenheit ein großes Stück des Weges gemeinsam gegangen bin.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dr.-Ing. A. Eberle für die bereitwillige Überlassung des von ihm entwickelten EUFLEX-Verfahrens, das den Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit darstellte.

Nicht zuletzt gebühren Dank und Anerkennung meiner lieben Frau Ute und meinem Sohn Simon. Durch ihr selbstloses, rücksichtsvolles Verhalten in all den Jahren, durch ihre Geduld und Nachsicht, verbunden mit der Hinnahme mancherlei Entbehrungen und der Unterordnung eigenen Interessen, haben sie einen großen Anteil am Gelingen dieser Arbeit.

Otterfing, im September 1991



<u>Inhalt</u>	Seite
<b>Bezeichnungen</b>	iii
<b>1. Einleitung</b>	1
1.1 Allgemeines	1
1.2 Stand der Forschung	3
1.3 Ziel der vorliegenden Arbeit	8
<b>2. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen in konservativer Form</b>	11
2.1 Allgemeine Formulierung der Euler-Gleichungen	12
2.2 Formulierung in einem nichtrotierenden System	15
2.2.1 Darstellung in kartesischen Koordinaten	15
2.2.2 Darstellung in zylindrischen Koordinaten	16
2.3 Übergang auf ein mitrotierendes System	17
2.3.1 Euler-Gleichungen im mitbewegten kartesischen Bezugssystem	17
2.3.2 Euler-Gleichungen im mitbewegten zylindrischen Bezugssystem	18
2.3.3 Abspaltung der Relativanteile aus den abhängigen Variablen	19
2.4 Transformation in krummlinige Koordinaten	23
2.4.1 Transformation der kartesischen Bewegungsgleichungen	25
2.4.2 Transformation der zylindrischen Bewegungsgleichungen	26
2.5 Normierung der geometrischen und physikalischen Größen	33
<b>3. Numerisches Verfahren</b>	35
3.1 Überblick über bestehende Verfahren	35
3.2 Beschreibung des verwendeten Lösungsalgorithmus	40
3.2.1 Finite-Volumen-Diskretisierung	40
3.2.2 Approximativer Riemann-Löser	42
3.2.3 Bestimmung der Anfangszustände des Riemann-Problems	46
3.2.4 Flußlimiting	51
3.2.5 CFL-Bedingung und lokaler Zeitschritt	53
3.3 Impliziter Algorithmus	55
3.3.1 Beschreibung der gebräuchlichsten Verfahren	55
3.3.2 Darstellung des verwendeten impliziten Lösungsverfahrens	62
3.3.3 Maßnahmen zur Stabilitätserhaltung	71
3.3.4 Einbeziehung des Kräftevektors	75
3.4 Motivation zur Verwendung absoluter Strömungsgrößen	76
3.4.1 Ermittlung der Durchflußbilanz durch ein Kontrollvolumen	76

3.4.2	Übergang auf absolute Strömungsgrößen	79
3.5	Numerische Implementierung der Randbedingungen	80
<b>4.</b>	<b>Netzgenerierung</b>	<b>88</b>
4.1	Anforderungen und Netztopologien	88
4.2	Generierungsalgorithmus	90
4.3	Ausgeführte Netze	93
4.4	Blockstrukturierte Netze	95
<b>5.</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>98</b>
5.1	Vorbemerkungen	98
5.1.1	Anfahrvorgang	98
5.1.2	Überlagerung von Wirbeln	101
5.1.3	Grundsätzliches zur Auswertung	103
5.2	Ergebnisse für die berechneten Testfälle	106
5.2.1	Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.52$ und $\theta_c = 0^\circ$	107
5.2.2	Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.815$ und $\theta_c = 5^\circ$	108
5.2.3	Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.439$ und $\theta_c = 8^\circ$	115
5.2.4	Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.794$ und $\theta_c = 8^\circ$	118
5.2.5	Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.877$ und $\theta_c = 8^\circ$	120
5.2.6	Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.794$ und $\theta_c = 12^\circ$	121
5.2.7	Vergleich mit anderen Theorien	122
5.3	Betrachtung der Nachlaufstruktur	127
5.3.1	Zeitliche Entwicklung	127
5.3.2	Wirbeltransport	130
5.4	Einflüsse auf die Lösung	138
5.4.1	Abhängigkeit der Lösung vom Diskretisierungsgrad	138
5.4.2	Einflüsse durch den Lösungsalgorithmus	143
5.4.3	Einfluß des Fernfeldrandes	151
5.4.4	Verwendung blockstrukturierter Netze	153
<b>6.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>155</b>
<b>7.</b>	<b>Literatur</b>	<b>160</b>
<b>A.</b>	<b>Anhang</b>	<b>170</b>
	<b>Bildteil</b>	<b>177</b>

Bezeichnungen

Formelzeichen

a	Schallgeschwindigkeit
A, B, C	Jacobimatrizen der Flüsse E, F, G
$c_l$	lokaler Auftriebsbeiwert im Profilschnitt
$c_L$	globaler Auftriebsbeiwert
$c_p$	Druckbeiwert
$C_v, C_p$	spezifische Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen bzw. Druck
D	Determinante der Jacobimatrix der inversen Abbildung, $D =  J^{-1} $
E, F, G	Flußvektoren im kartesischen bzw. zylindrischen System
$\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$	Flußvektoren im transformierten System
$\left. \begin{array}{l} e_x, e_y, e_z \\ e_r, e_\theta, e_z \\ e_\xi, e_\eta, e_\zeta \end{array} \right\}$	lokale Basen der entsprechenden Koordinatensysteme
e	spezifische Totalenergie pro Volumeneinheit
$\bar{e}$	Roenergie pro Volumeneinheit
$\bar{e}$	absolute spezifische Totalenergie pro Volumeneinheit
$e'$	spezifische innere Energie pro Volumeneinheit
f	Vektor massenbezogener Kräfte, die auf ein Volumenelement wirken
h	spezifische Totalenthalpie pro Masseneinheit
$\bar{h}$	Rothalpie pro Masseneinheit
$\bar{h}$	absolute spezifische Totalenthalpie pro Masseneinheit
I	Einheitsmatrix
J	Jacobimatrix der Abbildung des physikalischen auf den Rechenraum
K	Kräftevektor in den Euler-Gleichungen
l	Blatt- bzw. Profiltiefe
l, m, n	konservative Strömungsvariablen ( $\rho u, \rho v, \rho w$ )
L	5 x 5-Blockmatrix in der Koeffizientenmatrix des Relaxationsverfahrens
L'	lokale Auftriebskraft (zweidimensional)
Ma	Machzahl
M	Matrix zur Konvertierung des nichtkonservativen in den konservativen Lösungsvektor
n	Flächennormaleneinheitsvektor
OD	Vektor der Nebendiagonalelemente
p	statischer Druck

$P_t$	Totaldruck
$P, Q, R$	Quellterme der Poissongleichung
$q$	Geschwindigkeitsvektor, $q = (u, v, w)^T$
$r$	Ortsvektor
$R$	Blattradius
$R$	spezifische Gaskonstante
$R$	Vektor der Riemann-Invarianten oder Vektor der expliziten RHS
Res	Residuum
$s$	Wegkoordinate (beim Linienintegral)
$S$	Flächennormalenvektor oder Jacobimatrix des Kräftevektors $K$
$S$	Fläche (Betrag)
$t$	Zeitkoordinate
$T$	Temperatur
$T, T^{-1}$	Matrizen der rechten bzw. linken Eigenvektoren der Jacobimatrix $A$
$u, v, w$	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in $x, y, z$ - bzw. $\vartheta, r, z$ - Richtung
$U, V, W$	kontravariante Geschwindigkeitskomponenten im krummlinigen Koordinatensystem
$v_\infty$	Anströmgeschwindigkeit (allgemeine Bezeichnung)
$V$	Zellvolumen
$w_1$	induzierte Abwindgeschwindigkeit
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$X, Y, Z$	allgemeine Koordinaten
$\alpha$	lokaler Anstellwinkel
$\Gamma$	Zirkulation
$d\Gamma/dS$	Zirkulationsdichte
$\vartheta, r, z$	zylindrische Koordinaten
$\theta_c$	kollektiver Blattanstellwinkel
$\kappa$	Isentropenexponent
$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	Eigenwerte der Jacobischen Flußmatrizen
$\Lambda$	Streckung
$\Lambda$	Diagonalmatrix der Eigenwerte
$\xi, \eta, \zeta$	krummlinige Koordinaten
$\rho$	Dichte
$\tau$	Zeitkoordinate im transformierten System
$\phi$	Vektor der abhängigen konservativen Variablen $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T$
$\phi$	beliebige Strömungsgröße des Vektors $\phi$
$\chi$	Öffnungswinkel der Periodizitätsebene

- $\psi$  Azimuthwinkel, Wirbelalter
- $\omega$  Unterrelaxationsfaktor oder Komponente des Drehgeschwindigkeitsvektors  $\omega$
- $\omega$  Drehgeschwindigkeitsvektor,  $\omega = (0,0,\omega)^T$

### Indizes

- a auf den Schallstaudruck bezogen
- akt Reaktionsgröße (in Zusammenhang mit Sensorfunktionen)
- B "Bezug-" oder "Block-"
- i, j, k Indizes der betrachteten Volumenzelle bzw. des betrachteten Netzknotenpunktes
- t, r lokale zeitliche Ableitung, Kurzform für  $(\frac{\partial}{\partial t})$  bzw.  $(\frac{\partial}{\partial r})$
- tip Größe an der Blattspitze
- krit kritische Größe
- l, r Zustände links und rechts einer Zellfläche
- o, u Ober-, Unterseite
- $\left. \begin{array}{l} x, y, z \\ \vartheta, r, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{array} \right\}$  lokale räumliche Ableitungen in den entsprechenden Koordinatensystemen, Kurzform für  $(\frac{\partial}{\partial \dots})$
- $\infty$  Wert einer Größe in ungestörter Strömung

### Hochstellungen

- n Größe zum n-ten Zeitniveau
- T transponierte Matrix bzw. transponierter Vektor
- $\gamma$  Gauß-Seidel-Relaxationsindex
- $\nu$  Newton- bzw. Subiterationsindex
- 1 inverse Matrix
- + / - bei Differenzenoperatoren : Vorwärts- / Rückwärtsdifferenz  
bei Vektoren bzw. Matrizen: Gesplitteter Anteil, der zu den positiven / negativen Eigenvektoren gehört
- \* nichtkonservative Größen
- (k) Darstellung im kartesischen System
- (z) Darstellung im zylindrischen System

## Abkürzungen

ADI	Alternating Direction Implicit (-Method)
AF	Approximative Faktorisierung
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy (-Zahl)
FD	Finite-Differenzen (-Verfahren)
FDS	Flußdifferenzensplitting
FE	Finite-Elemente (-Verfahren)
FV	Finite-Volumen (-Verfahren)
FVS	Flußvektorsplitting
GS	Gauß-Seidel (-Methode)
LGS	lineares Gleichungssystem
LHS	linke Gleichungsseite
LU	Lower-Upper (-Matrixzerlegung)
NGS	Nicht-Gauß-Seidel (-Methode)
RHS	rechte Gleichungsseite
SCM	Split Coefficient Matrix (-Method)

## Operatoren

$\frac{d}{dt}, \frac{d}{dr}$	substantielle Ableitung
$f(\dots)$	Funktion von ...
$O(\dots)$	Fehler der Größenordnung ...
$\frac{\partial}{\partial \dots}$	lokale Ableitung
$\delta$	allgemeiner Differenzenoperator
$\Delta$	Differenz, i.d.R. Rückwärtsdifferenz 1. Ordnung
$\nabla$	Nabla-Operator
$ _n,  _\nu$	Operation durchgeführt zum Zeitpunkt $n$ bzw. $\nu$

## Sonstige Zeichen

$\tilde{(\quad)}$	dimensionsbehaftete Größen
$\dot{(\quad)}$	lokale zeitliche Ableitung
$\bar{(\quad)}$	absolute Strömungsgrößen oder Größen im transformierten System

## 1. Einleitung

### 1.1 Allgemeines

Der Hubschrauber stellt aufgrund seiner VTOL-, seiner Langsamflug- und seiner Schwebeflugfähigkeiten eine der bedeutendsten Entwicklungen in der Luftfahrttechnik dar. Im Such- und Rettungsdienst, für Überwachungsaufgaben, bei der Versorgung schlecht zugänglicher Gebiete, im Off-Shore-Verkehr, etc. und nicht zuletzt auch im militärischen Einsatz hat der Hubschrauber gerade wegen dieser Fähigkeiten große Bedeutung gewonnen.

Sein Missionsprofil ist allerdings begrenzt durch eine im Vergleich zu anderen Fluggeräten recht niedrige Höchstgeschwindigkeit, die im allgemeinen bei wenig über 300 km/h liegt. Eine beträchtliche Anhebung dieser Grenze ist mit dem konventionellen Hubschrauberkonzept wegen des damit verbundenen überproportional anwachsenden Bedarfs an installierter Leistung sehr schwierig. Neuen Konzepten, wie z.B. der Kipprotortechnik gilt daher verstärkt die Aufmerksamkeit bei zukünftigen Entwicklungen.

Dennoch bietet auch der Hubschrauber in seiner jetzigen Form durchaus noch Raum für lohnenswerte Verbesserungen im Hinblick auf eine Steigerung der Leistungsfähigkeit und des Einsatzpotentials. Dabei sind insbesondere zu nennen:

- Erhöhung der Wirtschaftlichkeit durch
  - niedrigeren Verbrauch
  - höhere Nutzlast
  - größere Reisefluggeschwindigkeit
- Lärmverminderung
- Reduzierung von Vibrationen
- Erhöhung der Sicherheit
- Verbesserung von Flugeigenschaften und -komfort

In jedem der genannten Bereiche spielt die Aerodynamik eine mehr oder weniger bedeutende Rolle. Dies betrifft in überwiegenderem Maße die Auslegung des Hauptrotors als die zentrale Komponente des Hubschraubers, die sowohl für die Erzeugung des Auf- und des Vortriebs, als auch für die Steuerung verantwortlich ist. Aber auch eine widerstandssarme Gestaltung des Rumpfes und eine effiziente Auslegung von Leitwerk und Heckrotor, sowie die Minimierung der Interferenzen zwischen diesen Bauteilen sind von großer Bedeutung.

Die Thematik der vorliegenden Arbeit betrifft die aerodynamische Auslegung

des Hauptrotors. In ihm liegen die hauptsächlichsten Gründe für die bestehenden Leistungsgrenzen, aber auch das größte Potential im Hinblick auf mögliche Verbesserungen.

Eine Eigenheit der Rotorströmung ist die radial veränderliche Anströmgeschwindigkeit entlang der Rotorblätter. Hinzu kommt, daß im Vorwärtsflug die Anströmbedingungen zusätzlich noch vom Azimutwinkel abhängig sind. Aufgrund der Addition von Flug- und Rotordrehgeschwindigkeit ist der Staudruck am vorlaufenden Blatt wesentlich höher als am rücklaufenden, wo lediglich die Differenz beider Geschwindigkeitsanteile zum Tragen kommt. Diese Überlagerung führt im inneren Bereich des rücklaufenden Blattes gar zu einer Rückanströmung. Bild 1.1-1 (nach Wagner [1]) zeigt schematisch die Anstellwinkel- und Machzahlverteilung über der Rotorkreisscheibe für den Vorwärtsflug einer BO 105 bei 280 km/h.

Um trotz dieser unsymmetrischen Verhältnisse eine gleichmäßige Auftriebsverteilung zu gewährleisten, ist u.a. eine Vergrößerung des Einstellwinkels am rücklaufenden Blatt und damit die Erzeugung höherer Auftriebsbeiwerte notwendig. Diese Forderung wächst mit zunehmender Vorwärtsgeschwindigkeit, da der Bereich des rücklaufenden Blattes, der noch zur Auftriebserzeugung beiträgt, immer kleiner wird, und auch der resultierende Staudruck weiter sinkt.

Eine Obergrenze für die maximal mögliche Fluggeschwindigkeit des Hubschraubers ist somit gegeben, wenn der höchstzulässige Auftriebsbeiwert  $c_{l,max}$  überschritten wird und es zu lokalen Abreißeffekten kommt. Abhilfe könnte eine Erhöhung der Rotordrehzahl schaffen, was seinerseits aber infolge steigender Kompressibilität zu Transsonikproblemen am vorlaufenden Blatt führt, die mit einem starken Widerstandsanstieg und eventuell mit stoßinduzierten Grenzschichtablösungen verbunden sind. Damit ist eine zweite Limitierung der Höchstgeschwindigkeit gegeben.

Die Optimierung des dynamischen Hochauftriebsverhaltens am rücklaufenden, wie auch die Reduzierung der transsonischen Effekte am vorlaufenden Blatt sind somit gleichermaßen bedeutsam.

Während für die erstgenannte Aufgabe die zu Verfügung stehenden numerischen Hilfsmittel noch sehr begrenzt sind und man sich sehr stark auf empirische Erkenntnisse stützen muß, wurde in jüngster Vergangenheit eine Reihe von nichtlinearen Verfahren entwickelt, die eine theoretische Beschreibung der Strömungszustände am vorlaufenden Blatt ermöglichen.

Als eines der bedeutendsten Anwendungsgebiete ist z.B. die geometrische Optimierung des Blattspitzenbereiches zu nennen, bei der u.a. durch Nutzbarmachung des Pfeilungseffektes eine Reduzierung der Auswirkungen einer hohen Blattspitzenmachzahl, wie z.B. des Wellenwiderstandes, erreicht wird.

Die als Ergebnis dieser Untersuchungen entwickelten Blattspitzen, die z.T. inzwischen bereits serienmäßig Verwendung finden (z.B. EH 101, Super Puma Mk II, BO 108, Sikorsky S76), sind Beispiele dafür, wie die Anwendung hochmoderner numerischer Verfahren zu Lösungen führt, die mit "klassischen" Methoden kaum zu erreichen gewesen wären.

Die exakte mathematische Beschreibung des äußerst komplexen Strömungsfeldes eines Hubschrauberrotors stellt hohe Ansprüche an die verwendeten Verfahren. Ein typisches Phänomen der Rotorströmung ist die Beeinflussung eines jeden Blattes durch den Nachlauf der vorlaufenden Blätter. Der induzierte Abwind führt zu einer erheblichen Reduzierung des effektiven Anstellwinkels und damit auch des resultierenden Auftriebs. Eine bedeutende Rolle spielt dabei der äußere Blattspitzenwirbel, der je nach Stärke und Abstand vom betrachteten Blatt mehr oder weniger starke Geschwindigkeitsänderungen induziert (Bild 1.1-2, nach Wagner[1]). Die Auswirkungen einer solchen Blatt-Nachlauf-Interferenz auf die lokalen Strömungsverhältnisse werden z.B. in Bild 1.1-3 deutlich.

Um die tatsächlichen Anströmverhältnisse an einem Rotorblatt beschreiben zu können, ist also die genaue Kenntnis der Struktur des Nachlaufes und insbesondere der Lage und Stärke der abgehenden Wirbel erforderlich. Dies ist umso bedeutender, je geringer die Fluggeschwindigkeit des Hubschraubers ist, da der gesamte Nachlauf mit der Geschwindigkeit der Anströmung nach hinten weggeschwemmt wird. Im Schwebeflug sind die Auswirkungen der Blatt-Nachlauf-Interferenz besonders deutlich spürbar, da das Wirbelsystem, bestehend aus einem starken äußeren Randwirbel und einer Wirbelschicht, die von einem inneren Randwirbel begleitet wird, über einen sehr langen Zeitraum Einfluß auf das aktuelle Strömungsfeld des Rotors ausübt. In Bild 1.1-4 (nach Landgrebe [2]) ist der Nachlauf eines Rotorblattes im Schwebезustand schematisch dargestellt.

Das vorliegende Verfahren hat zum Ziel, das Strömungsfeld gerade für diesen komplexen Fall des stationären Schwebefluges durch die richtige Erfassung des induzierten Nachlaufes zu beschreiben und die resultierende Auftriebsverteilung durch Berücksichtigung der Interferenzeffekte möglichst gut wiederzugeben. Es soll damit einen Beitrag dazu leisten, durch eine Optimierung der Geometrie die Probleme am vorlaufenden Blatt zu reduzieren.

## 1.2 Stand der Forschung

Die Physik der realen Luftströmung um einen festen oder bewegten Körper wird derzeit am genauesten durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Sie allein sind in der Lage, alle wesentlichen Eigenschaften, wie z.B. Kompressi-

bilität, Reibung, Turbulenz, Wärmeleitung, Erzeugung und Transport von Drehung, etc. zu erfassen.

Die numerische Lösung der vollen Navier-Stokes-Gleichungen ist mit den bisher zur Verfügung stehenden Mitteln für realistische Konfigurationen jedoch so gut wie unmöglich. Es sind daher Vereinfachungen nötig, die zu den sog. "Thin-Layer-" oder zu den "reynoldsgemittelten" Navier-Stokes-Gleichungen führen. Jedoch auch damit erfordern die Berechnungen noch einen erheblichen Zeit- und Speicherplatzbedarf und sind zudem oft nur auf einfache Geometrien beschränkt. Ein derzeit ungelöstes Problem stellt auch die Entwicklung eines universell verwendbaren Turbulenzmodelles dar. Die Eignung der bisher verwendeten Modelle ist sehr stark von den Strömungsverhältnissen abhängig.

Betrachtet man die Strömung als reibungsfrei und adiabat, so lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen in die Euler-Gleichungen überführen. Für viele Anwendungsfälle ist diese Approximation der realen Strömung zulässig und führt zu keinen gravierenden Fehlern in der berechneten Lösung. Die Grenzen von Euler-Verfahren sind jedoch dann erreicht, wenn Grenzschicht-, Ablöse- und ähnliche reibungsbedingte Effekte eine Rolle spielen. In jedem Fall ist zu beachten, daß Verdichtungsstöße von einem reibungslosen Verfahren in ihrer Lage und Stärke nicht korrekt wiedergegeben werden.

Eine weitere Vereinfachung der Bewegungsgleichungen ist unter der Voraussetzung der Drehungsfreiheit möglich. Gemäß dem Croccoschen Wirbelsatz erfährt eine isenthalpe und rotationsfreie Strömung im stationären Fall im gesamten Strömungsgebiet keinen Entropiezuwach. Sie wird mathematisch durch die volle Potentialgleichung (FPE) beschrieben. Im Gegensatz zu den Euler- bzw. Navier-Stokes-Verfahren existiert dabei nur noch eine abhängige Strömungsvariable, was ihre Lösung erheblich beschleunigt.

Geht man weiter davon aus, daß die auftretenden Störungen klein sind, so erhält man die transsonische Potentialgleichung kleiner Störungen (TSP). Sie ist beschränkt auf dünne Profile und kleine Anstellwinkel.

Die letzte an dieser Stelle erwähnte Vereinfachung führt zu einer Linearisierung der Potentialgleichung. Ein besonderes Merkmal der linearen Verfahren ist die Überführung der Differential- in eine Integralgleichung, die dann nur noch entlang der definierten Oberfläche gelöst werden braucht. Zu dieser Klasse der sog. Singularitätenverfahren gehören beispielsweise die Traglinien-, die Tragflächen-, die Panelverfahren etc.

Alle der genannten Methoden finden in irgendeiner Form auch bei der Berechnung aerodynamischer Probleme bei der Hubschrauberrotorblattumströmung Verwendung. Zwar reduziert sich in der Reihenfolge der Aufzählung die Genauigkeit

und damit der Gültigkeitsbereich der Methoden, in gleichem Maße sinkt aber auch der Aufwand, der zur Erreichung einer Lösung notwendig ist.

Gerade aus diesem Grund sind auch die Singularitätenverfahren vor allem für Vorabschätzungen und Prinzipuntersuchungen weiterhin unverzichtbar, obwohl sie nicht in der Lage sind, nichtlineare Effekte, wie z.B. die Kompressibilität, die gerade im transsonischen Geschwindigkeitsbereich der vorlaufenden Rotorblätter dominant sind, zu erfassen. Sie sind daher auf stoßfreie Strömungsfälle im niedrigen Geschwindigkeitsbereich beschränkt.

Bei Johnson [3] sowie bei Davis & Chang [4] ist eine sehr ausführliche und umfassende Auflistung der in der Hubschraubertechnik verwendeten Verfahren basierend auf der linearen Potentialtheorie zu finden.

Mit dem Übergang auf die nichtlinearen Methoden ergibt sich gleichzeitig die Notwendigkeit, die Bewegungsgleichungen im gesamten Strömungsfeld, anstatt nur entlang der Oberfläche zu lösen. Dies geschieht iterativ m.H. diskreter numerischer Differenzenverfahren und unter Verwendung sog. körperangepaßter Raumnetze.

Die ersten Ergebnisse für eine transsonische Rotorblattumströmung mit Hilfe der nichtlinearen TSP-Gleichung wurden von Caradonna & Isom [5] für einen auftriebslosen Rotor im Schwebeflug erzielt. Ballhaus & Caradonna [6] führten mit einer Version dieses Verfahrens Untersuchungen über den Einfluß der Blattspitzengeometrie durch und Caradonna & Isom [7] und Isom [8] erweiterten es auf den instationären Vorwärtsflug. In der Folgezeit erfolgte eine stetige Weiterentwicklung der Verfahren, insbesondere auch in Europa (z.B. [9-12]) Als Vorstufe zur Berechnung auftriebsbehafteter Rotorströmung, die sehr stark durch die Interferenz des Rotornachlaufes mit dem betrachteten Blatt geprägt ist, wurden von Caradonna [13] Untersuchungen zur Interferenz eines stromaufwärts erzeugten diskreten Wirbels mit einem Rotorblatt gemacht. Es folgten Berechnungen auftriebsbehafteter Fälle [14-17], bei denen die Nachlaufeflüsse z.B. durch lokale Anstellwinkelkorrekturen modelliert wurden. Bei dem in [15] verwendeten Schema ist beispielsweise ein Differenzenverfahren iterativ mit einem linearen Trimmcode (CAMRAD) gekoppelt.

Mit dem Übergang auf die vollen Potentialgleichungen entfielen die Beschränkungen auf kleine Störungen. Für reibungsfreie transsonische Strömungen, in denen nur moderate Überschallfelder auftreten, stellt die volle Potentialgleichung bereits eine sehr gute Näherung dar. Eine erste Anwendung einer quasistationären Formulierung der FPE ist bei Arieli & Tauber [18] zu finden. Das Verfahren wurde von Egolf & Sparks [19] mit einem Wirbelmodell gekoppelt. Chang verwendet in [20] ebenfalls die quasistationäre und in [21] die voll instationäre Form der FPE. Die genannten Verfahren verwenden die nichtkonservative

Gleichung. Die konservative Potentialgleichung findet man z.B. in [22-24]. Die Einschränkung potentialtheoretischer Verfahren, daß die zugrundeliegende Strömung rotationsfrei und damit isentrop sein muß, führt dazu, daß der Nachlauf eines auftriebserzeugenden Blattes nicht wiedergegeben werden kann. Da von diesem aber ein entscheidender Einfluß auf das Strömungsgebiet vor dem nachfolgenden Blatt ausgeht, ist die Einführung eines Nachlaufmodells oder die iterative Kopplung mit einem geeigneten linearen Verfahren erforderlich. Damit hängt die Genauigkeit der Lösung von der Güte des Nachlaufmodelles ab. Diese sind aber i.a. auf einfache Geometrien und Grundrisse beschränkt und müssen jeweils auf den speziellen Berechnungsfall angepaßt werden.

In [2] und [3] findet sich eine Übersicht über die gebräuchlichsten Nachlaufmodelle. Als Beispiele solcher Kopplungen von FPE-Verfahren mit einem Nachlaufmodell seien die Arbeiten von Sankar & Prichard [22], Strawn & Caradonna [23,24], Tung & Chang [25,26], Steinhoff & Ramachandran [27] und Tauber et al. [28-30] genannt.

Der nächste Schritt in der Entwicklung numerischer Methoden für die Hubschrauberrotorströmung wurde durch die Einführung der Euler-Verfahren vollzogen. Wie bereits in den zuvor beschriebenen Fällen handelt es sich hierbei in der Regel um Weiterentwicklungen von Algorithmen, die bereits bei der Berechnung der Festflügelumströmung Anwendung fanden.

Der entscheidende Vorteil der Euler- gegenüber den Potentialgleichungen liegt darin, daß sie die anisentrope, drehungsbehaftete Strömung richtig beschreiben. Dies läßt eine korrekte Behandlung auch von starken Verdichtungsstößen (mit Ausnahme der auf Reibungseffekte zurückzuführenden Abweichungen) sowie die Generierung und den verlustfreien Transport von Drehung zu. Damit sind die Voraussetzungen erfüllt, die Geometrie des Nachlaufes eines auftriebserzeugenden Blattes, seinen Transport in Richtung auf das nachfolgende Blatt und schließlich das komplexe Problem der Blatt-Nachlauf-Interferenz implizit zu erfassen und korrekt wiederzugeben.

Zunächst wurde dieser Vorteil jedoch nicht genutzt, sondern weiterhin die von den Potentialverfahren her bekannte Kopplung mit einem externen Nachlaufmodell beibehalten. Damit ließ sich zwar der Rechenraum sehr eng begrenzen, die bereits erwähnten Nachteile der Abhängigkeit der Lösung vom Modell mußten jedoch in Kauf genommen werden. Beispiele für gekoppelte Euler-Verfahren, angewendet auf den stationären Schweb- oder den instationären Vorwärtsflug, sind die Arbeiten von Roberts & Murman [31,32], Sankar et al. [33,34], Chang & Tung [35] und Agarwal & Deese [36]. Der Einfluß des Nachlaufes wurde dabei in der Regel durch lokale Anstellwinkelkorrekturen über den Fernfeldrand oder durch eine entsprechende Modifizierung der Festkörperrandbedingung am Blatt eingebracht.

Zu erwähnen sind auch die Veröffentlichungen von Wake et al. [37] und Chen et al. [38] über die Anwendung ihrer Euler-Verfahren für auftriebslose stationäre und instationäre Rotorströmungen.

Die Kopplung mit linearen Nachlaufmodellen bewirkte, daß die Verbesserungen in der Lösung gegenüber den Potentialverfahren in keinem Verhältnis zu dem wesentlich höheren Aufwand standen. Kroll [39,40] war der erste, der die Eigenschaft von Euler-Verfahren im Hinblick auf Transport und Erhalt von Drehung dazu ausnutzte, den Strömungszustand vor dem betrachteten Blatt als einen Teil der Lösung allein durch das Euler-Verfahren selbst berechnen zu lassen und konnte damit unter Verwendung eines in sich geschlossenen Rechenraumes gänzlich auf ein externes Wirbelmodell verzichten.

Auch bei dem Verfahren, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, wurde dieses Konzept vertreten (Krämer et al. [41-43], Hertel et al. [44,45], Wagner et al. [46]).

Inzwischen findet diese Technik, die als "Wake-Capturing" bezeichnet wird, immer größere Verbreitung (z.B. [47,48]). Die Ergebnisse sind durchaus vielversprechend und lassen den Schluß zu, daß die "reinen" Verfahren in Zukunft vermehrt Anwendung finden werden

Der Nachteil dieser Verfahren liegt in einer zwangsweise großen Dimensionierung des Rechenraumes, da zum einen die komplette Rotorkreisscheibe eingeschlossen sein muß, und zum anderen die Ausbreitung des Nachlaufes durch den Fernfeldrand nicht behindert werden darf. Insbesondere im Schwebeflug besitzt der Nachlauf noch in relativ weit abgesenkten Bereichen einen Einfluß auf das Rotorblatt und muß daher möglichst unverfälscht wiedergegeben werden. Der Preis für den Verzicht auf ein Nachlaufmodell liegt also in einem erhöhten Rechen- und Speicherplatzaufwand.

Diesen zu reduzieren ist die Absicht eines neuen Verfahrens von Hertel [49], der zwar die Berechnung des Strömungszustandes mit einer reinen Euler-Methode beibehält, diesem aber die stationäre Lösung eines linearen Verfahrens als Startlösung sowie als Fernfeldrandbedingung vorgibt. Insbesondere was die Reduzierung des Rechenraumes angeht, konnten damit bereits erste Erfolge erzielt werden.

Die bisherige Aufzählung verschiedener Euler-Verfahren bezog sich auf Anwendungen in der Hubschraubaerodynamik. Neben der dominierenden Problematik der Blatt-Nachlauf-Interferenz ist vor allem die rotatorische Bewegung des untersuchten Körpers kennzeichnend. Dies hat insbesondere einen Einfluß auf die Formulierung der Grundgleichungen. Letzteres trifft ebenfalls auf die Berechnung der Umströmung von Propellern, Verdichtern, Turbinen, etc. zu. Aus diesem Grunde seien, auch wenn in diesen Fällen aufgrund der axialen An-

strömung mit in der Regel sehr hohen Geschwindigkeiten der Nachlauf eher eine vernachlässigbare Rolle spielt, mit den Arbeiten von Whitfield et al. [50], Bober et al. [51], Barton et al. [52,53] und Yokota [54] einige Verfahren aus dem verwandten Bereich der Triebwerksaerodynamik an dieser Stelle erwähnt.

Als letzte und damit aufwendigste Stufe der numerischen Methoden sind die Navier-Stokes-Verfahren zu nennen, die erst in allerjüngster Zeit Einzug in die Rotor-aerodynamik gefunden haben (z.B. Wake [55], Wake & Sankar [56], Agarwal & Deese [57,58], Srinivasan & McCroskey [59,60]).

Aufgrund des hohen Aufwandes, der zum Erreichen einer konvergenten Lösung erforderlich ist, wird das Berechnungsgebiet meist auf einen engen Bereich um das Rotorblatt bzw. dessen Blattspitze beschränkt, so daß auch hier die Kopplung mit einem Wirbelmodell notwendig ist.

Allerdings konnten von Srinivasan et al. [61] inzwischen auch erste Ergebnisse einer reinen "thin-layer" Navier-Stokes-Rechnung präsentiert werden.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist die Anwendung von Navier-Stokes-Verfahren für die Untersuchung der Strömungsverhältnisse am vorlaufenden Blatt, bei dem Reibungseinflüsse eine untergeordnete Rolle spielen, gemessen am erforderlichen Aufwand im Vergleich zu Euler- oder FPE-Verfahren eher unwirtschaftlich. Dennoch stellt ihre Weiterentwicklung gerade auch im Hinblick auf die noch ungelösten Probleme am rücklaufenden Blatt eine unbedingte Notwendigkeit dar.

### 1.3 Ziel der vorliegenden Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines robusten Euler-Verfahrens zur Berechnung der transsonischen Rotorblattumströmung.

Wichtigstes Merkmal des Verfahrens soll der Verzicht auf jegliche Kopplung mit einem externen Nachlaufmodell sein. Vielmehr ist beabsichtigt, unter Ausnutzung der Fähigkeit der Euler-Gleichungen, im Strömungsgebiet erzeugte Drehung zu erfassen und verlustfrei zu transportieren, den Blattnachlauf als Teil der Lösung zu behandeln und auf diese Art das gesamte Strömungsfeld des Hubschrauberrotors implizit zu beschreiben. Die Interferenz des Nachlaufes mit den Rotorblättern und die daraus resultierenden lokalen Veränderungen der Anströmbedingungen, die ihrerseits eine erhebliche Beeinflussung der Auftriebsverteilung bewirken, gehören zu den zentralen physikalischen Erscheinungen der Rotor-aerodynamik. Die korrekte Wiedergabe dieser komplexen, hochgradig nicht-linearen Phänomene im Rahmen erforderlicher Genauigkeit soll mit dem vorliegenden "reinen" Euler-Verfahren ermöglicht werden.

Eine solche Vorgehensweise, die als "Wake-Capturing" bezeichnet wird, wurde hauptsächlich aus zwei Gründen ausgewählt. Zum einen besitzen die mit einem Nachlaufmodell gekoppelten Verfahren den Nachteil, daß die Lösung entscheidend von der Genauigkeit des verwendeten Modells abhängt. Da dieses in der Regel auf linearen Methoden basiert, lassen sich bestimmte Effekte, wie z.B. Kompressibilität, komplexe Profil- und Blattgeometrien, etc., nicht oder nur approximativ, z.B. durch Einbeziehung empirischer Daten, berücksichtigen. Zwar konnten m.H. solcher gekoppelten Verfahren sowohl auf der Basis der Euler- als auch der Potentialgleichungen beispielsweise für die in Kap. 5.2 beschriebenen Testfälle Ergebnisse erzielt werden, die ausgezeichnet mit den Meßwerten übereinstimmten (vgl. Kap. 5.2.7), es muß jedoch berücksichtigt werden, daß die verwendeten Nachlaufmodelle exakt auf die berechneten Fälle abgestimmt wurden, und daß in der Regel sogar die bei den Messungen gleichzeitig ermittelte Geometrie der jeweiligen Randwirbeltrajektorie einbezogen wurde. Zum zweiten kann davon ausgegangen werden, daß m.H. eines linearen Nachlaufmodells nur ein Teil der Vorgänge, die sich im Nachlauf eines Hubschrauberrotors abspielen, beschrieben wird. Dabei können die hinreichend bekannten primären Effekte sicherlich mehr oder weniger exakt modelliert werden, untergeordnete physikalische Nebenerscheinungen, über deren Entstehung und Existenz zum gegenwärtigen Zeitpunkt vielleicht sogar noch Unklarheit besteht, lassen sich, wenn überhaupt, jedoch nur mit einem "reinen" nichtlinearen Verfahren erfassen. Dabei ist es durchaus denkbar, daß neuartige Erkenntnisse über spezielle Vorgänge im Nachlauf gewonnen werden können, die den bisherigen theoretischen Methoden verschlossen waren.

Während der überwiegende Teil der bisher entwickelten Euler- bzw. Navier-Stokes-Verfahren die Kopplung mit einem linearen Nachlaufmodell vollzieht, ist die Anzahl der eingesetzten Wake-Capturing-Verfahren noch gering. Neben dem eigenen sind bisher nur die bereits in Kap. 1 2 erwähnten Verfahren von Kroll [40], Chen et al. [47] und Srinivasan et al. [61] bekannt.

Die verwendeten Lösungsalgorithmen sind jedoch sehr unterschiedlich. Krolls Verfahren beruht auf dem Zentrale-Differenzen-Schema von Jameson et al. [62] und verwendet einstellbare künstliche Dissipationsterme zur Vermeidung von Instabilitäten (vgl. Kap. 3.1). Chen et al. benutzen ein hybrides Verfahren, bei dem ein Steger-Warming Flux-Vector-Splitting [63] in Umfangs- und Jamesons zentrale Differenzen in den beiden anderen Richtungen verwendet werden. Das Verfahren von Srinivasan et al. ist ein vollständiges Upwind-Verfahren, basierend auf dem Flux-Difference-Splitting von Roe [64] (vgl. Kap. 3.1). Die implizite linke Seite wird durch eine LU-Zerlegung invertiert.

Auch bei dem vorliegenden Euler-Verfahren soll eine reine Upwind-Diskretisie-

rung verwendet und so die explizite Addition künstlicher Viskositäten vermieden werden. Dies soll zu einem sehr robusten, universell einsetzbaren Verfahren führen, bei dem keinerlei Anpassungen an den jeweils aktuellen Strömungszustand nötig sind, und das eine hohe Stabilität bei geringer numerischer Dissipation aufweist. Kern des Verfahrens ist der EUFLEX-Algorithmus von Eberle [65], der für die Belange der Rotorströmung umgestaltet werden soll. Zur Lösung der impliziten Form der Differenzgleichungen soll ein Relaxationsalgorithmus verwendet werden, der von Brenneis [66] für instationäre Profil- und Flügelumströmungen entwickelt wurde.

Da die Genauigkeit der Lösung auf dem Blatt von dem berechneten Anströmzustand abhängt, liegt ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit in der Bewertung der Frage, wie gut das induzierte Strömungsfeld vor dem betrachteten Rotorblatt durch das Euler-Verfahren wiedergegeben wird. Daher sind im Ergebnisteil neben Druckverläufen u.ä. vor allem auch eine Reihe von Darstellungen der Nachlaufgeometrie bis zu einem Bereich von mehr als einem Rotordurchmesser unterhalb der Rotorkreisscheibe in verschiedenen Ebenen zwischen dem vorlaufenden und dem nachfolgenden Blatt gezeigt.

Auch die numerische Behandlung des Anfahrprozesses eines Rotors ist ausführlich dargestellt. Damit soll ein Eindruck vermittelt werden, ab welchem Zeitpunkt Veränderung im Nachlauf für das Strömungsfeld nicht mehr von Bedeutung sind.

Der Einfluß der vorlaufenden Blätter ist im stationären Schwebeflug besonders groß, so daß dieser in dem betrachteten Zusammenhang gegenüber dem Vorwärtsflug als der kritischere Flugzustand bezeichnet werden kann. Aus diesem Grund sollen mit dem vorliegenden Verfahren zunächst nur stationäre Fälle betrachtet werden und eine Ausweitung auf instationäre Verhältnisse erst zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.

Voraussetzung für die Anwendung einer Wake-Capturing Methode ist die Erzeugung eines in sich geschlossenen Rechenraumes, der außerdem ausreichend groß dimensioniert sein muß, um die Ausbreitung des Nachlaufes, d.h. insbesondere die Absenkung von Randwirbel und Wirbelschicht nicht zu behindern. In der vorliegenden Arbeit wurde außerdem Wert darauf gelegt, daß sich das Berechnungsgebiet bis zur Rotordrehachse hin erstreckt, um so die Einflüsse des inneren Randwirbels und der kompletten Wirbelschicht erfassen zu können.

Die Validierung des Verfahrens soll im Bereich subsonischer bis hoher transsonischer Geschwindigkeiten u.a. durch den Vergleich mit Messungen von Caradonna & Tung für einen zweiblättrigen Modellrotor [67] erfolgen.

## 2. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen in konservativer Form

Die Erhaltungssätze für Masse, Impuls- und Energie bilden die fundamentalen Gleichungen der Fluidodynamik.

Unter Vernachlässigung von Reibung, Wärmeleitung, Wärmezufuhr- und -abfuhr, sowie ohne Berücksichtigung von Massenkräften lassen sich diese in ein Gleichungssystem überführen, das als die sogenannten Euler-Gleichungen bezeichnet wird. Sie erlauben die exakte Berechnung reibungsfreier, adiabater, kompressibler und rotationsbehafteter Strömung um beliebig geformte Körper in sämtlichen Geschwindigkeitsbereichen.

Bei der Herleitung der Euler-Gleichungen erhält man ausgehend von einem ortsfesten Kontrollvolumen die integrale, konservative Formulierung, die den Ausgangspunkt für das in der vorliegenden Arbeit verwendete numerische Verfahren darstellt.

Der konservativen Form wurde der Vorzug vor der sogenannten nichtkonservativen Form gegeben, da für die interessierenden Anwendungsfälle vor allem in transsonischen Geschwindigkeitsbereichen die Fähigkeit konservativer Verfahren, Diskontinuitäten in der Strömung (z.B. Verdichtungsstöße) ohne besondere externe Maßnahmen korrekt zu erfassen (shock capturing), ausschlaggebend sind.

In Kap. 2.2 werden die konservativen Euler-Gleichungen von der integralen in die differentielle Form überführt und für ein nichtrotierendes Koordinatensystem aufgelistet, so wie sie z.B. bei einer Festflügelberechnung gebräuchlich sind. Es werden die Formulierungen im kartesischen und im zylindrischen System gegenübergestellt.

Die spezifischen Anströmverhältnisse eines sich drehenden Hubschrauberrotors legen insbesondere für den Schwebeflug, auf den sich die vorliegende Arbeit konzentriert, den Übergang auf ein mitrotierendes, blattfestes Koordinatensystem nahe, da nur in einem solchen die Anströmgeschwindigkeit als stationär betrachtet werden kann. Die daraus resultierende Veränderung der Erhaltungsgleichungen ist in Kap. 2.3.1 und 2.3.2 beschrieben.

Im Laufe der Untersuchungen hatte sich herausgestellt, daß eine Aufspaltung des Geschwindigkeitsvektors in je einen Anteil der reinen Drehgeschwindigkeit und der induzierten Störgeschwindigkeiten erforderlich ist (vgl. hierzu Kap. 3.4). Der damit verbundenen Neuformulierung der Bewegungsgleichungen ist Kap. 2.3.3 gewidmet.

Zuletzt behandeln Kap. 2.4 die Transformation der Grundgleichungen in ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem und Kap. 2.5 die Normierung der verwendeten physikalischen auf dimensionslose Größen.

## 2.1 Allgemeine Formulierung der Euler-Gleichungen

Wählt man zur Herleitung der reibungsfreien, adiabaten Erhaltungsgleichungen ein endlich großes, ortsfestes Kontrollvolumen  $V$ , das durch seine Oberfläche  $S$  begrenzt sei, so erhält man die konservativen Euler-Gleichungen in integraler Form.

Daneben bestehen die Möglichkeiten, statt von einem ortsfesten, von einem mit der Strömung mitbewegten Kontrollvolumen auszugehen, was dann auf die nichtkonservative Form führt, oder statt eines endlichen Volumens  $V$  ein infinitesimal kleines Kontrollvolumen  $\delta V$  zu betrachten, woraus sich sofort die differentielle Schreibweise ableitet. Alle diese genannten Methoden sind ausführlich bei Anderson [68,69] beschrieben.

Für das vorliegende konservative Finite-Volumen-Verfahren erfolgt die Herleitung anhand eines ortsfesten Kontrollvolumens und führt auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho q dS &= 0 \quad , \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V \rho q dV + \iint_S \rho q \otimes q dS &= - \iint_S p dS + \iiint_V \rho f dV \quad , \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V e dV + \iint_S e q dS &= - \iint_S p q dS + \iiint_V \rho f q dV \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hierin bezeichnen  $\rho$  die Dichte,  $p$  den Druck,  $q$  den Geschwindigkeitsvektor, bestehend aus den Komponenten  $(u, v, w)^T$ , sowie  $e$  die spezifische Totalenergie pro Volumeneinheit, die sich gemäß der Beziehung

$$e = e' + \rho/2 q^2 \tag{2.2}$$

aus den Anteilen der inneren und der kinetischen Energie zusammensetzt. Der Vektor  $f$  auf der rechten Seite der Impuls- und der Energiegleichung beinhaltet massenbezogene Volumenkräfte, die auf die Fluidteilchen wirken. Hierunter versteht man z.B. Gravitations- und elektromagnetische Kräfte, die, wie eingangs erwähnt, vernachlässigt werden, aber auch Zentrifugal- und Corioliskräfte, die bei der Verwendung eines rotierenden Koordinatensystems als sogenannte Scheinkräfte einzuführen sind (s. Kap. 2.3).

Da von einem ortsfesten Kontrollvolumen ausgegangen worden war, dessen äußere Begrenzung sich nicht verändert, ist es gestattet, die lokale zeitliche Ableitung unter das Integralzeichen zu ziehen und desweiteren  $\frac{\partial}{\partial t}dV = 0$  zu setzen. Dies ist auch im Hinblick auf den Anwendungsbereich der vorliegenden Arbeit erlaubt, da nur stationäre Fälle betrachtet werden. Auch solange instationäre Effekte lediglich durch die Überlagerung von Rotordrehgeschwindigkeit und Vorwärtsgeschwindigkeit entstehen, ist diese Vorgehensweise korrekt, wohingegen die Einbeziehung resultierender Blattbewegungen (Nicken, Schlagen, Schwenken), die eine Verschiebung bzw. Deformation der diskreten Volumina mit sich bringt, eine solche Vereinfachung nicht gestattet.

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf die Oberflächen ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho q) \right) dV &= 0 \quad , \\ \iiint_V \left( \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla(\rho q \otimes q) + \nabla p - \rho f \right) dV &= 0 \quad , \quad (2.3) \\ \iiint_V \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla((e+p)q) - \rho f q \right) dV &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die oben aufgeführten Integralgleichungen sind nur dann für beliebig gewählte Kontrollvolumina erfüllt, wenn die Integranden ihrerseits Null sind. Es gilt demzufolge:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho q) &= 0 \quad , \\ \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla(\rho q \otimes q) + \nabla p - \rho f &= 0 \quad , \quad (2.4) \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla((e+p)q) - \rho f q &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Der Term  $(q \otimes q)$  bezeichnet das sogenannte dyadische Produkt, das in seinem Ergebnis einen Tensor 2. Grades liefert. Dies ist bei der Aufspaltung der vektoriellen Impulsgleichung in die Komponentenschreibweise von Bedeutung.

Gl.(2.4) stellt die reibungsfreien, kompressiblen Euler-Gleichungen in differentieller, konservativer Form für ein beliebiges Koordinatensystem dar

Die noch fehlende Beziehung zwischen den Zustandsvariablen  $p$  und  $e'$  bzw.  $e$  läßt sich unter den Voraussetzungen, daß intermolekulare Kräfte vernachlässigbar (ideales Gas) und die spezifischen Wärmen  $C_v$  und  $C_p$  konstant sind (kalorisch perfektes Gas,  $T < 500^\circ\text{C}$ ) m.H. der für diesen Fall gültigen thermodynamischen Gleichungen finden.

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase folgt

$$p = \rho RT \quad , \quad (2.5)$$

wobei sich die spezifische Gaskonstante  $R$  ergibt zu

$$R = C_p - C_v = \frac{\kappa - 1}{\kappa} C_p \quad (2.6)$$

mit dem Isentropenexponenten

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = 1.4 \quad (2.7)$$

der für das betrachtete Strömungsmedium Luft unter den genannten Bedingungen konstant ist.

Desweiteren gilt für die innere Energie pro Volumeneinheit

$$e' = \rho C_v T \quad , \quad (2.8)$$

womit sich der Druck berechnen läßt zu

$$p = (\kappa - 1) e' \quad (2.9a)$$

$$\text{bzw.} \quad p = (\kappa - 1)(e - \rho/2 q^2) \quad . \quad (2.9b)$$

Gl.(2.4) bildet nunmehr in Verbindung mit Gl.(2.9b) ein System von fünf gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die fünf konservativen Unbekannten  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$ ,  $\rho w$  und  $e$ .

Unter Beibehaltung der instationären Formulierung auch für stationäre Probleme bewahren die Euler-Gleichungen ihren hyperbolischen Charakter im gesamten Geschwindigkeitsbereich sub-, trans- und supersonischer Strömung, was die Anwendung eines zeitlich fortschreitenden Lösungsverfahrens ohne Rücksicht auf lokale Unterschallgebiete erlaubt.

## 2.2 Formulierung in einem nichtrotierenden System

### 2.2.1 Darstellung in kartesischen Koordinaten

Für ein festes oder gleichförmig bewegtes kartesisches Koordinatensystem ergibt sich aus Gl.(2.4) mit  $f=0$  und  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$  die allgemein bekannte Darstellung der Eulerschen Bewegungsgleichungen in differentieller Form:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Es bezeichnen  $\phi$  den konservativen Lösungsvektor mit den Strömungsgrößen

$$\phi = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T$$

sowie E, F und G die Vektoren der Flußdichte, die im folgenden dem allgemeinen Sprachgebrauch entsprechend kurz Flußvektoren oder Flüsse genannt werden, mit den Komponenten

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho wu \\ \rho hu \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho wv \\ \rho hv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho hw \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Die in der Energiegleichung vorkommende Größe h bezeichnet die Totalenthalpie pro Masseneinheit und berechnet sich zu

$$h = \frac{e + p}{\rho} \quad (2.12)$$

Für eine stationäre, reibungsfreie und adiabate Strömung ist sie entlang einer Stromlinie konstant. Für den häufigen Fall einer gleichförmigen Anströmung ist sie darüber hinaus im gesamten Strömungsgebiet konstant.

### 2.2.2 Darstellung in zylindrischen Koordinaten

Aufgrund der speziellen Geometrie der Rotorströmung wurde auch eine Formulierung der Euler-Gleichungen in zylindrischen Koordinaten untersucht.

In Bild 2.2-1 sind die beiden verwendeten Koordinatensysteme und die Lage des Rotorblattes skizziert. Letzteres rotiert um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = (0, 0, \omega)^T$ .

Entgegen der üblichen Gepflogenheit wurde die Richtung der  $\theta$ -Achse des zylindrischen Koordinatensystems umgekehrt, um eine Konsistenz zur x-Achse im kartesischen System zu erhalten. Der damit verbundenen Vorzeichenumkehrung wurde durch die Vertauschung der r- und  $\theta$ -Komponenten in der Vektordarstellung Rechnung getragen, womit eine völlige Übereinstimmung zum kartesischen Rechtssystem gewährleistet ist. Dementsprechend ist auch die Zuordnung der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $q = (u, v, w)^T$  in beiden Systemen gleich.

Die Herleitung der Formulierung der Bewegungsgleichungen im raumfesten zylindrischen System erfolgt erneut ausgehend von Gl.(2.4). Der Unterschied zum kartesischen System ergibt sich aus den Komponenten des Nabla-Operators  $\nabla$  sowie aus der Tatsache, daß bei der Ableitung in  $\theta$ -Richtung die Drehung der Basen mitberücksichtigt werden muß.

Löst man Gl.(2.4) für Zylinderkoordinaten ( $f=0$ ,  $\nabla = (\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z})^T$ ) auf, so erhält man die Euler-Gleichungen analog zu Gl.(2.10) zu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = K^{(z')} \quad (2.13)$$

Die Vektoren der abhängigen Variablen  $\phi$  und der Flüsse E, F und G enthalten dabei die gleichen Komponenten wie im kartesischen System (Gl.(2.11)). Hinzugekommen ist jedoch ein Vektor  $K^{(z')}$ , der die Terme beinhaltet, die aus der Ableitung der Basen im zylindrischen System resultieren. Er lautet:

$$K^{(z')} = - \frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} v \\ 2uv \\ v^2 - u^2 \\ vw \\ vh \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.3 Übergang auf ein mitrotierendes Koordinatensystem

Da in einem Inertialsystem die Strömung um einen Hubschrauberrotor auch im Schwebeflug instationär ist, empfiehlt sich bei Beschränkung auf ausschließlich solche Flugzustände der Übergang auf ein mitrotierendes, blattfestes Koordinatensystem, wie es in Bild 2.2-1 skizziert ist, da die Strömung dann als stationär betrachtet werden kann. Das Rotorblatt bewegt sich mit der Drehgeschwindigkeit  $\omega = (0, 0, \omega)^T$  entgegen der positiven  $\theta$ -Richtung um die z-Achse.

In der Literatur findet man für Rotor- und Propelleranwendungen sowohl Formulierungen in blattfesten kartesischen (z.B. [35, 36, 39, 40, 54, 57, 58]) als auch zylindrischen Koordinaten (z.B. [49, 51-53]), ohne daß sich jedoch signifikante Vorteile der einen oder der anderen Variante erkennen ließen. Dabei ist jedoch anzumerken, daß keiner der genannten Autoren eine direkte Gegenüberstellung beider Bezugssysteme für das von ihm verwendete Verfahren präsentiert hat.

In der vorliegenden Arbeit wurden beide Koordinatensysteme miteinander verglichen. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Kap. 5.4.2 dargelegt. Im folgenden sind die Bewegungsgleichungen in den entsprechenden Formulierungen aufgeführt.

#### 2.3.1 Euler-Gleichungen im mitbewegten kartesischen Bezugssystem

Gemäß Truckenbrodt [70] sind bei dem nicht kräftefreien Übergang auf ein nicht ruhendes bzw. nicht gleichförmig bewegtes Koordinatensystem zusätzliche Trägheitskräfte einzuführen, die den auftretenden Beschleunigungskräften entsprechen. Im Falle eines rotierenden Koordinatensystems sind dies die Zentrifugal- und die Corioliskraft.

Diese sind sowohl bei der Impuls- als auch bei der Energiegleichung zu berücksichtigen und führen somit in Gl.(2.10) zu einer rechten Seite, die ungleich Null ist.

In den Gl.(2.1) - (2.4) gilt nunmehr für den Kraftvektor  $\rho f$ :

$$\rho f = \rho f_z + \rho f_c \quad (2.15)$$

mit den Beschleunigungen

$$\begin{array}{ll} f_z = -\omega \times (\omega \times r) & \text{als Anteil der Zentrifugalkraft} \\ \text{und } f_c = -2(\omega \times q) & \text{als Anteil der Corioliskraft.} \end{array}$$

Führt man die entsprechenden Vektormultiplikationen aus, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned}\omega &= (0, 0, \omega)^T, \\ q &= (u, v, w)^T, \\ r &= (x, y, z)^T\end{aligned}$$

der Vektor  $K^{(f,k)}$  der volumenbezogenen Kräfte im kartesischen System zu:

$$K^{(f,k)} = K^{(k)} = \rho\omega \begin{pmatrix} 0 \\ (2v+\omega x) \\ -(2u-\omega y) \\ 0 \\ \omega(ux+vy) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

womit die Eulerschen Bewegungsgleichungen analog zu Gl.(2.10) mit unveränderten Ausdrücken für E, F und G nach Gl.(2.11) nun zu schreiben sind zu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = K^{(k)}. \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Euler-Gleichungen im mitbewegten zylindrischen Bezugssystem

Führt man die in Kap. 2.3.1 beschriebene Berechnung des Kräftevektors für Zylinderkoordinaten durch, so erhält man mit  $r = (0, r, 0)^T$ :

$$K^{(f,z)} = \rho\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ \omega r - 2u \\ 0 \\ v\omega r \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Damit lauten die Euler-Gleichungen für ein mitrotierendes zylindrisches Koordinatensystem:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = K^{(z)} \quad (2.19)$$

mit dem Lösungsvektor  $\phi$ , den in Vergleich zum kartesischen System unveränderten Flüssen E, F und G (Gl.(2.11)), sowie einem neuen Vektor  $K^{(z)}$ , der sich

aus den bekannten Vektoren der Ableitungs- (2.14) und der Kraftterme (2.18) zusammengesetzt zu:

$$K^{(z)} = K^{(z')} + K^{(f,z)} = - \frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} v \\ 2v(u-\omega r) \\ v^2 - (u-\omega r)^2 \\ vw \\ v(h - (\omega r)^2) \end{pmatrix} . \quad (2.20)$$

### 2.3.3 Abspaltung der Relativanteile aus den abhängigen Variablen

Im Laufe der Untersuchungen stellte sich heraus, daß eine der elementaren Forderungen an einen Lösungsalgorithmus, die exakte Erhaltung der unverfälschten, gleichförmigen Strömung in einem ungestörten Strömungsgebiet, bei der Verwendung der Euler-Gleichungen in einer der Formen, wie sie in den Kap. 2 3.1 und 2.3.2 dargestellt wurden, nicht erfüllt ist.

Schuld daran ist die Verwendung relativer Größen, d.h. die Darstellung der Geschwindigkeit und der Energie bezogen auf das mitrotierende Bezugssystem. In Kap. 3.4 wird gezeigt, daß dieses Problem durch die Elimination der Geschwindigkeitsanteile der freien Anströmung aus den konservativen Strömungsvariablen gelöst und die Qualität der Lösung erheblich verbessert werden konnte.

An dieser Stelle sei die resultierende neue Formulierung der Euler-Gleichungen aufgeführt.

Der Transport von Masse, Impuls und Energie durch die Oberfläche eines blatt- und damit ortsfesten Kontrollvolumens erfolgt mit der Geschwindigkeit  $q$ . Diese setzt sich zusammen aus einem induzierten Anteil, der sogenannten Störgeschwindigkeit und der Rotationsgeschwindigkeit. Für ein sich mit der Geschwindigkeit  $\omega$  drehendes Rotorblatt gilt bei einem körperfesten Koordinatensystem der Zusammenhang:

$$\bar{q} = q + (\omega \times r) , \quad (2.21)$$

worin die Größe  $\bar{q}$  den reinen Störgeschwindigkeitsanteil beschreibt. Am Beispiel eines zylindrischen Koordinatensystems gilt damit:

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \omega r \\ v \\ w \end{pmatrix} . \quad (2.22)$$

Darüberhinaus enthalten die transportierten Größen Impuls und Energie ihrerseits Bestandteile, die sich nach dem gleichen Muster in Stör- und Anströmanteile unterteilen lassen. So gilt für die spezifische Gesamtenergie pro Volumeneinheit:

$$e = \frac{p}{\kappa-1} + \frac{\rho}{2} q^2 \quad , \quad (2.23)$$

$$= \frac{p}{\kappa-1} + \frac{\rho}{2} (\bar{q}^2 - 2\bar{q}(\omega \times r) + (\omega r)^2)$$

und entsprechend für die Gesamtenthalpie pro Masseneinheit:

$$h = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \quad , \quad (2.24)$$

$$= \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (\bar{q}^2 - 2\bar{q}(\omega \times r) + (\omega r)^2) \quad .$$

Die Elimination der Anteile der freien Anströmung läßt sich nun auf zwei verschiedene Arten vornehmen, die zu zwei unterschiedlichen Algorithmen führen. Die erste Möglichkeit besteht in der Einführung der sogenannten Rothalpie  $\bar{h}$  und daraus abgeleitet der Roenergie  $\bar{e}$ , für die die Zusammenhänge

$$\bar{h} = h - \frac{1}{2}(\omega r)^2 \quad , \quad (2.25)$$

$$\bar{e} = e - \frac{\rho}{2}(\omega r)^2$$

gelten. Damit tritt an die Stelle der Beziehungen (2.23/2.24):

$$\bar{e} = \frac{p}{\kappa-1} + \frac{\rho}{2} (\bar{q}^2 - 2\bar{q}(\omega \times r)) \quad (2.26)$$

$$\text{bzw.} \quad \bar{h} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (\bar{q}^2 - 2\bar{q}(\omega \times r)) \quad . \quad (2.27)$$

Ein anderer Weg besteht darin, ein neues Paar von Größen einzuführen, das gänzlich unabhängig von dem Anteil der freien Strömung ist:

$$\bar{e} = \frac{p}{\kappa-1} + \frac{\rho}{2} \bar{q}^2 \quad , \quad (2.28)$$

$$\bar{h} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{\bar{q}^2}{2} \quad . \quad (2.29)$$

Die Größen  $\bar{e}$  und  $\bar{h}$  werden im folgenden als absolute spezifische Totalenergie pro Volumeneinheit bzw. als absolute spezifische Totalenthalpie pro Masseneinheit bezeichnet und stehen mit den bisherigen Größen über die Beziehungen

$$\bar{e} = \bar{e} + \rho \bar{q}(\omega \times r) = e + \rho(\bar{q}(\omega \times r) - \frac{(\omega r)^2}{2}) \quad (2.30)$$

bzw. 
$$\bar{h} = \bar{h} + \bar{q}(\omega \times r) = h + \bar{q}(\omega \times r) - \frac{(\omega r)^2}{2} \quad (2.31)$$

in Zusammenhang.

Bei den meisten der Autoren, die sich der Methode der Geschwindigkeitsaufspaltung für rotierende Strömungen in der Hubschrauber- oder Triebwerksaerodynamik bedienen (z.B. [35,39,40,57,58]), ist in Verbindung mit Gl.(2.21) die Version nach Gl.(2.26/2.27) zu finden. Dies resultiert aus der Tatsache, daß die Gesamthenthalpie  $\bar{h}$  in einer stationären, adiabaten, reibungsfreien und axial gleichförmigen Strömung im Gegensatz zu  $h$  nicht nur auf einer Stromlinie, sondern im gesamten Gebiet konstant ist. Die Rothalpie ist damit eine Invariante. Kroll [40] sieht darin einen Vorteil seines Verfahrens, da sie damit aus den räumlichen Derivativa der diskreten Energiegleichung herausgezogen werden kann und diese damit für den stationären Endzustand ( $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$ ) in die diskrete Kontinuitätsgleichung übergeht.

In der vorliegenden Arbeit wurde jedoch der Weg gemäß Gl.(2.28/2.29) beschritten. In Kap 3.4 konnte der Nachweis erbracht werden, daß dies bei dem verwendeten Algorithmus Vorteile gegenüber einer Formulierung mit Roenergie und Rothalpie entsprechend Gl.(2.26/2.27) brachte.

Die mit  $\bar{e}$  gebildete neue Energiegleichung wurde durch exakte mathematische Umformungen aus der ursprünglichen Energiegleichung hergeleitet (siehe Anhang A.1). Damit blieb der physikalische Inhalt dieses Erhaltungssatzes bestehen, während die bei der Verwendung von  $e$  bzw.  $\bar{e}$  auftretenden numerischen Schwierigkeiten bei der Diskretisierung vermieden werden konnten.

Mit Hilfe dieser Umformung, die von der Formulierung in relativen Größen gemäß Gl.(2.17) bzw. (2.19) ausgeht, ergeben sich für die Euler-Gleichungen in den im Bild 2.2-1 dargestellten Koordinatensystemen nun neue Beziehungen. Da sich an der vektoriellen Schreibweise nichts geändert hat, wird diese im folgenden formell beibehalten. Es gilt also weiterhin:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = K^{(k)} \quad (2.17)$$

bzw.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = K^{(z)} \quad (2.19)$$

Unterschiedlich sind jedoch die neuen Elemente der Vektoren  $\phi$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $K^{(k)}$  und  $K^{(z)}$ . So lauten die Euler-Gleichungen in ihren verschiedenen Ausführungen

nun in Komponentenschreibweise im einzelnen:

a) bei Verwendung der absoluten Geschwindigkeit und der Roenergie:

a1) im mitbewegten kartesischen System

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho uu+p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ \rho hu \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho vv+p \\ \rho vw \\ \rho hv \end{pmatrix}_y + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho ww+p \\ \rho hw \end{pmatrix}_z - \rho \omega \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

mit  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}+\omega y \\ \bar{v}-\omega x \\ \bar{w} \end{pmatrix} ;$

a2) im mitbewegten zylindrischen System

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}_t + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho uu+p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ \rho hu \end{pmatrix}_\theta + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2+p \\ \rho vw \\ \rho hv \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2+p \\ \rho hw \end{pmatrix}_z - \frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} v \\ 2v\bar{u} \\ v^2-\bar{u}^2 \\ vw \\ v\bar{h} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

mit  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}+\omega r \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} ;$

b) bei Verwendung absoluter Geschwindigkeit und absoluter Energie:

b1) im kartesischen System

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho uu+p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ \rho hu-p\omega y \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho vv+p \\ \rho vw \\ \rho hv+p\omega x \end{pmatrix}_y + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho ww+p \\ \rho hw \end{pmatrix}_z - \rho \omega \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

mit  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}+\omega y \\ \bar{v}-\omega x \\ \bar{w} \end{pmatrix} ;$

b2) im zylindrischen System

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \bar{e} \end{pmatrix}_t + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho uu+p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ \rho hu-pwr \end{pmatrix}_\theta + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2+p \\ \rho wv \\ \rho hv \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2+p \\ \rho hw \end{pmatrix}_z = -\frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} v \\ 2vu \\ v^2-\bar{u}^2 \\ vw \\ v\bar{h} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

mit  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}+\omega r \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ .

Es sollte darauf hingewiesen werden, daß es sich bei den in den Lösungsvektoren von Gl. (2.34) und (2.35) enthaltenen Größen um Variablen handelt, die auf ein Inertialsystem bezogen sind. Die Euler-Gleichungen selbst wurden jedoch zur Erhaltung des stationären Strömungszustandes in einem mitrotierenden System abgeleitet und nur durch eine mathematisch konsistente Elimination der Relativanteile in die beschriebene Form gebracht. Dies drückt sich in der rechten Seite sowie in der Tatsache aus, daß die Geschwindigkeitsterme im Lösungsvektor keine Funktionen von  $(\omega t)$  sind. Dies wäre dann der Fall, wenn die Grundgleichungen, wie z.B. in [33,37,38,47,50,56,59-61], zum Zwecke instationärer Berechnungen auf ein Inertialsystem bezogen worden wären. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird im folgenden daher bevorzugt von "absoluten" statt von "inertialsystembezogenen" Größen gesprochen.

Gl. (2.34) führt nach Transformation auf krummlinige Koordinaten zu den bei [51-53] verwendeten Beziehungen. Dort wird jedoch der Übergang direkt vom raumfesten zylindrischen auf ein mitbewegtes krummliniges System vollzogen, so daß die Rotationsgeschwindigkeit ähnlich wie bei den kartesischen Inertialsystemen über die instationären Transformationsterme  $\xi_t, \eta_t, \zeta_t$  berücksichtigt wird.

#### 2.4 Transformation in krummlinige Koordinaten

Um die Euler-Gleichungen numerisch lösen zu können, sind diese zu diskretisieren. Die Differentialoperatoren werden dazu durch geeignete Differenzoperatoren ersetzt. Die Bildung dieser Differenzen erfolgt auf der Grundlage sogenannter Rechennetze, die den betrachteten Raum in genügend kleine, lückenlos aneinanderstoßende, nicht überlappende Zellen unterteilen. Bei der vorliegenden zellenmittelpunktorientierten Finite-Volumen-Methode werden die Strömungsgrößen den Mittelpunkten dieser Zellen, den sogenannten finiten Volumen zugeordnet und sind in deren Inneren räumlich konstant. In jedem der so ent-

standenen Kontrollvolumina werden die diskretisierten Euler-Gleichungen gelöst. Dabei ergibt sich die mittlere zeitliche Veränderung der Strömungsgrößen in jeder Zelle aus der Bilanz der Flüsse durch deren Begrenzungsflächen. Dies entspricht einer Approximation der in Gl.(2.1) enthaltenen Integrale und gewährleistet die Konservativität.

Eine Möglichkeit einer solchen räumlichen Diskretisierung besteht darin, völlig reguläre Netze zu erzeugen, in denen die Netzlinien parallel zu den Koordinatenachsen des kartesischen bzw. zylindrischen Systems verlaufen. Gl.(2.4) könnte nach Übergang auf die Differenzenform dann sofort gelöst werden.

Dies ist jedoch wenig sinnvoll, da solche Netze umfangreiche Interpolationen an den Körperoberflächen erfordern, da diese in der Regel nicht mit Netzebenen zusammenfallen. Desweiteren ist eine lokale Verdichtung der Netzlinien in Bereichen hoher Strömungsgradienten gar nicht oder nur sehr schwer möglich, was aber für die Güte der Lösung von großer Wichtigkeit ist.

Aus diesen Gründen ist man dazu übergegangen, sogenannte körperangepasste Netze zu generieren, die diese Nachteile nicht besitzen. Die Erzeugung solcher Netze für die vorliegenden Anwendungsfälle ist in Kap. 4 beschrieben.

Zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen auf der Basis dieser Rechenetze existieren bei den gebräuchlichen Finite-Volumen-Verfahren prinzipiell zwei Vorgehensweisen, die sich jedoch nur formell voneinander unterscheiden, im Ergebnis aber das gleiche beinhalten.

Zum einen können, unmittelbar ausgehend von der integralen Form der Euler-Gleichungen (Gl.(2.1)), die Oberflächenintegrale zur Bestimmung der Flüsse durch die Zellseitenwände mit den direkten physikalischen Koordinaten der betrachteten Fläche ausgeführt werden. Eine solche Methode wird z.B. von Kroll [39,40], Agarwal & Deese [36,57,58], etc. bevorzugt.

Üblicherweise betrachtet man jedoch das Netz als ein System neuer, sogenannter krummliniger Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , das so aufgebaut ist, daß die Netzlinien mit den Koordinatenrichtungen  $\xi$ -,  $\eta$ -, bzw.  $\zeta$ -konst. zusammenfallen und der Abstand zwischen zwei benachbarten Netzlinien jeweils  $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$  beträgt. Dies entspricht einer Abbildung des von dem Rechenetz überdeckten physikalischen Raumes auf den sogenannten Rechen- oder Indexraum. Die differentiellen Euler-Gleichungen werden nun in das oben beschriebene krummlinige Koordinatensystem transformiert. Dieser Vorgang ist im folgenden beschrieben. Die Abbildungsvorschrift liefert die notwendigen metrischen Terme, die die Eigenschaft besitzen, an den Zellflächen den dort gültigen Flächennormalenvektoren zu entsprechen. Dadurch ist die Konservativität bei der Bestimmung der Flüsse durch die Oberfläche des betrachteten Kontrollvolumens gewährleistet.

### 2.4.1 Transformation der kartesischen Bewegungsgleichungen

Die allgemeine Transformation der Bewegungsgleichungen vom kartesischen in ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem ist in der Literatur bereits sehr ausführlich behandelt (z.B. Anderson et al. [71], Thompson et al. [72]) und auch von vielen Autoren, die sich ihrer bedienen, noch einmal beschrieben worden (z.B. [54,65,66]). An dieser Stelle sei daher der Vollständigkeit halber nur noch einmal das Ergebnis wiederholt.

Die Abbildung von Gl.(2.17), bzw. Gl.(2.32) und Gl.(2.34), auf krummlinige Koordinaten liefert nach Anwendung der Kettenregel die streng konservative Beziehung:

$$\bar{\phi}_r + \bar{E}_\xi + \bar{F}_\eta + \bar{G}_\zeta = \bar{K} \quad (2.36)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= D \cdot \phi \quad , \\ \bar{E} &= E \cdot \bar{\xi}_x + F \cdot \bar{\xi}_y + G \cdot \bar{\xi}_z \quad , \\ \bar{F} &= E \cdot \bar{\eta}_x + F \cdot \bar{\eta}_y + G \cdot \bar{\eta}_z \quad , \\ \bar{G} &= E \cdot \bar{\zeta}_x + F \cdot \bar{\zeta}_y + G \cdot \bar{\zeta}_z \quad , \\ \bar{K} &= D \cdot K^{(k)} \quad . \end{aligned}$$

D entspricht der Determinante der Jacobimatrix der inversen Abbildung, die im vorliegenden stationären Verfahren zeitlich konstant ist und daher in der lokalen zeitlichen Ableitung enthalten sein darf. Die Bestimmung der metrischen Terme  $\bar{\xi}_x$ ,  $\bar{\xi}_y$ , etc. kann Anhang A.2 entnommen werden.

Im diskreten Fall entspricht D dem Volumen der betrachteten Zelle und die Terme  $\bar{\xi}_x$ ,  $\bar{\xi}_y$ , etc. geben, an den Zellflächen ermittelt, die Komponenten der Flächennormalenvektoren wieder.

Voraussetzung für die Gültigkeit der durchgeführten Transformation ist, daß die Determinante der Jacobimatrix J ungleich Null ist und die enthaltenen Ableitungen stetig sind.

Gl.(2.36) lautet damit in Komponentenschreibweise unter Verwendung der absoluten Geschwindigkeit und der absoluten Energie, d.h. mit E, F, G,  $K^{(k)}$  gemäß Gl.(2.34):

$$D \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \bar{u} \\ \rho \bar{v} \\ \rho \bar{w} \\ \bar{e} \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho(\bar{U} + \omega(y\bar{\xi}_x - x\bar{\xi}_y)) \\ \rho \bar{u}(\bar{U} + \omega(y\bar{\xi}_x - x\bar{\xi}_y)) + p\bar{\xi}_x \\ \rho \bar{v}(\bar{U} + \omega(y\bar{\xi}_x - x\bar{\xi}_y)) + p\bar{\xi}_y \\ \rho \bar{w}(\bar{U} + \omega(y\bar{\xi}_x - x\bar{\xi}_y)) + p\bar{\xi}_z \\ \bar{e}(\bar{U} + \omega(y\bar{\xi}_x - x\bar{\xi}_y)) + p\bar{U} \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho(\bar{V} + \omega(y\bar{\eta}_x - x\bar{\eta}_y)) \\ \rho \bar{u}(\bar{V} + \omega(y\bar{\eta}_x - x\bar{\eta}_y)) + p\bar{\eta}_x \\ \rho \bar{v}(\bar{V} + \omega(y\bar{\eta}_x - x\bar{\eta}_y)) + p\bar{\eta}_y \\ \rho \bar{w}(\bar{V} + \omega(y\bar{\eta}_x - x\bar{\eta}_y)) + p\bar{\eta}_z \\ \bar{e}(\bar{V} + \omega(y\bar{\eta}_x - x\bar{\eta}_y)) + p\bar{V} \end{pmatrix}_y \\
 \\
 \begin{pmatrix} \rho(\bar{W} + \omega(y\bar{\zeta}_x - x\bar{\zeta}_y)) \\ \rho \bar{u}(\bar{W} + \omega(y\bar{\zeta}_x - x\bar{\zeta}_y)) + p\bar{\zeta}_x \\ \rho \bar{v}(\bar{W} + \omega(y\bar{\zeta}_x - x\bar{\zeta}_y)) + p\bar{\zeta}_y \\ \rho \bar{w}(\bar{W} + \omega(y\bar{\zeta}_x - x\bar{\zeta}_y)) + p\bar{\zeta}_z \\ \bar{e}(\bar{W} + \omega(y\bar{\zeta}_x - x\bar{\zeta}_y)) + p\bar{W} \end{pmatrix}_z = D\rho\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{v} \\ -\bar{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Neben den bereits bekannten Größen bezeichnen hierin  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{W}$  die mit der Determinante  $D$  multiplizierten kontravarianten Störgeschwindigkeiten, die sich aus der Beziehung

$$\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_x & \bar{\eta}_x & \bar{\zeta}_x \\ \bar{\xi}_y & \bar{\eta}_y & \bar{\zeta}_y \\ \bar{\xi}_z & \bar{\eta}_z & \bar{\zeta}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

berechnen lassen.

Gl.(2.37) bildet zusammen mit Gl.(2.38) den Ausgangspunkt für das in der vorliegenden Arbeit verwendete kartesische Euler-Verfahren.

#### 2.4.2 Transformation der zylindrischen Bewegungsgleichungen

Die Transformation der differentiellen Euler-Gleichung von zylindrischen in krummlinige Koordinaten wird etwas ausführlicher beschrieben, da hier eine Besonderheit zu beachten ist, die für die Diskretisierung der Gleichungen und die Aufstellung des numerischen Verfahrens von Bedeutung ist.

Es war:

$$\phi_t + \frac{1}{r} E_\theta + F_r + G_z = K^{(z)} \quad (2.19)$$

Die Substitution der partiellen räumlichen Ableitungen erfolgt m.H. der Kettenregel, die bei einer allgemeinen Abbildung der Form

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi(\theta, r, z) \quad , \\
 \eta &= \eta(\theta, r, z) \quad , \\
 \zeta &= \zeta(\theta, r, z) \quad , \\
 r &= r \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

liefert:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{\theta} & \eta_{\theta} & \zeta_{\theta} \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} .
 \tag{2.40}$$

Die unbekannt metrischen Terme in Gl.(2.40) erhält man durch Invertierung der Jacobimatrix der inversen Abbildung, die lautet:

$$J^{-1} = \frac{\partial(\theta, r, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{pmatrix} \theta_{\xi} & \theta_{\eta} & \theta_{\zeta} \\ r_{\xi} & r_{\eta} & r_{\zeta} \\ z_{\xi} & z_{\eta} & z_{\zeta} \end{pmatrix}
 \tag{2.41}$$

unter Verwendung der Funktionaldeterminante  $|J| = 1/|J^{-1}|$  zu:

$$\begin{aligned}
 \xi_{\theta} &= |J| \cdot (r_{\eta} z_{\zeta} - r_{\zeta} z_{\eta}) \quad , \\
 \xi_r &= |J| \cdot (\theta_{\zeta} z_{\eta} - \theta_{\eta} z_{\zeta}) \quad , \\
 \xi_z &= |J| \cdot (\theta_{\eta} r_{\zeta} - \theta_{\zeta} r_{\eta}) \quad , \\
 \eta_{\theta} &= |J| \cdot (r_{\zeta} z_{\xi} - r_{\xi} z_{\zeta}) \quad , \\
 \eta_r &= |J| \cdot (\theta_{\xi} z_{\zeta} - \theta_{\zeta} z_{\xi}) \quad , \\
 \eta_z &= |J| \cdot (\theta_{\zeta} r_{\xi} - \theta_{\xi} r_{\zeta}) \quad , \\
 \zeta_{\theta} &= |J| \cdot (r_{\xi} z_{\eta} - r_{\eta} z_{\xi}) \quad , \\
 \zeta_r &= |J| \cdot (\theta_{\eta} z_{\xi} - \theta_{\xi} z_{\eta}) \quad , \\
 \zeta_z &= |J| \cdot (\theta_{\xi} r_{\eta} - \theta_{\eta} r_{\xi}) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

wobei die metrischen Terme der rechten Seite aus den Netzdaten einfach zu bestimmen sind.

Wendet man Gl.(2.40) auf Gl.(2.19) an, so folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \phi_r + \frac{1}{r} \cdot (E_{\xi} \xi_{\theta} + E_{\eta} \eta_{\theta} + E_{\zeta} \zeta_{\theta}) + F_{\xi} \xi_r + F_{\eta} \eta_r + F_{\zeta} \zeta_r + \\
 + G_{\xi} \xi_z + G_{\eta} \eta_z + G_{\zeta} \zeta_z = K^{(z)} .
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Bis zu diesem Punkt verlief die Herleitung analog zu der für kartesische Ausgangskordinaten. Die dort durch die Substitution der partiellen räumlichen Derivativa entstandene Beziehung hatte zunächst ebenfalls ihre Divergenzform verloren, konnte aber, wie Viviani [73] und Vinokur [74] als erste gezeigt hatten, dadurch wieder in eine streng konservative Form gebracht werden, daß man durch die Determinante der Jacobimatrix  $J$  dividiert und m.H. von Termen, die Null betragen (z.B.  $E(\xi_x)_\xi$ , etc.), eine geeignete Erweiterung durchführt. Gerade dies ist jedoch im zylindrischen Fall aufgrund des Koeffizienten  $\frac{1}{r}$  nicht mehr möglich. Die zur Herstellung der konservativen Form im transformierten System nötigen Erweiterungen müßten u.a. die Terme  $E \cdot (\frac{\xi_\theta}{r})_\xi$ ,  $E \cdot (\frac{\eta_\theta}{r})_\eta$  und  $E \cdot (\frac{\zeta_\theta}{r})_\zeta$  beinhalten. Da diese aber ungleich Null sind, würde ein solches Vorgehen zu einem falschen Ergebnis führen.

Schreibt man Gl.(2.19) jedoch um in die Form

$$\phi_t + \frac{1}{r} (E_\theta + \hat{F}_r + \hat{G}_z) = \hat{K}(z) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \hat{F} = r \cdot F &\Rightarrow \hat{F}_r = r \cdot F_r + F, \\ \hat{G} = r \cdot G &\Rightarrow \hat{G}_z = r \cdot G_z \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \hat{K}(z) = K(z) + \frac{F}{r}$$

und führt dann die Substitution der Ableitungen gemäß Gl.(2.40) durch, so liefert dies:

$$\begin{aligned} r \cdot \phi_r + E_\xi \xi_\theta + (rF)_\xi \xi_r + (rG)_\xi \xi_z &+ \\ E_\eta \eta_\theta + (rF)_\eta \eta_r + (rG)_\eta \eta_z &+ \\ E_\zeta \zeta_\theta + (rF)_\zeta \zeta_r + (rG)_\zeta \zeta_z &+ \\ E \cdot [(\xi_\theta)_\xi + (\eta_\theta)_\eta + (\zeta_\theta)_\zeta] &+ \\ (rF) \cdot [(\xi_r)_\xi + (\eta_r)_\eta + (\zeta_r)_\zeta] &+ \\ (rG) \cdot [(\xi_z)_\xi + (\eta_z)_\eta + (\zeta_z)_\zeta] &= r \cdot K(z) + F = r \cdot \hat{K}(z). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die metrischen Anteile bestimmen sich aus Gl.(2.42) und die Erweiterungsterme in den eckigen Klammern betragen nun, wie erforderlich, Null.

Durch Umsortierung erhält man:

$$\begin{aligned} r \cdot \phi_r + (E\xi_\theta + (rF)\xi_r + (rG)\xi_z)_{\xi} + (E\eta_\theta + (rF)\eta_r + (rG)\eta_z)_{\eta} \\ + (E\zeta_\theta + (rF)\zeta_r + (rG)\zeta_z)_{\zeta} = r \cdot \hat{K}(z) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nach Multiplikation mit der zeitinvarianten Determinante der inversen Abbildungsmatrix  $|J^{-1}|$  und Einführung einer verkürzten Schreibweise ergibt sich schließlich die bekannte streng konservative Beziehung:

$$\bar{\phi}_r + \bar{E}_{\xi} + \bar{F}_{\eta} + \bar{G}_{\zeta} = \bar{K} \quad (2.47)$$

dieses Mal mit:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= D \cdot \phi \quad , \\ \bar{E} &= E \cdot \bar{\xi}_\theta + F \cdot \bar{\xi}_r + G \cdot \bar{\xi}_z \quad , \\ \bar{F} &= E \cdot \bar{\eta}_\theta + F \cdot \bar{\eta}_r + G \cdot \bar{\eta}_z \quad , \\ \bar{G} &= E \cdot \bar{\zeta}_\theta + F \cdot \bar{\zeta}_r + G \cdot \bar{\zeta}_z \quad , \\ \bar{K} &= D \cdot (K^{(z)} + F/r) \quad . \end{aligned}$$

Darin sind:

$$D = |J^{-1}| \cdot r$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_\theta &= (r_{\eta z \zeta} - r_{\zeta z \eta}) = |J^{-1}| \cdot \xi_\theta = \frac{D}{r} \cdot \xi_\theta \quad , \\ \bar{\xi}_r &= r \cdot (\theta_{\zeta z \eta} - \theta_{\eta z \zeta}) = D \cdot \xi_r \quad , \\ \bar{\xi}_z &= r \cdot (\theta_{\eta r \zeta} - \theta_{\zeta r \eta}) = D \cdot \xi_z \quad , \\ \bar{\eta}_\theta &= (r_{\zeta z \xi} - r_{\xi z \zeta}) = |J^{-1}| \cdot \eta_\theta = \frac{D}{r} \cdot \eta_\theta \quad , \\ \bar{\eta}_r &= r \cdot (\theta_{\xi z \zeta} - \theta_{\zeta z \xi}) = D \cdot \eta_r \quad , \\ \bar{\eta}_z &= r \cdot (\theta_{\zeta r \xi} - \theta_{\xi r \zeta}) = D \cdot \eta_z \quad , \\ \bar{\zeta}_\theta &= (r_{\xi z \eta} - r_{\eta z \xi}) = |J^{-1}| \cdot \zeta_\theta = \frac{D}{r} \cdot \zeta_\theta \quad , \\ \bar{\zeta}_r &= r \cdot (\theta_{\eta z \xi} - \theta_{\xi z \eta}) = D \cdot \zeta_r \quad , \\ \bar{\zeta}_z &= r \cdot (\theta_{\xi r \eta} - \theta_{\eta r \xi}) = D \cdot \zeta_z \quad . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Wie auch die entsprechenden Terme des kartesischen Systems (Gl.(2.36)), so bezeichnen  $D$  das zeitlich konstante Zellvolumen und die überstrichenen metrischen Größen die Komponenten der Flächennormalenvektoren, wodurch sich die geometrische Lage und Ausdehnung der durchströmten Oberflächen des Kontrollvolumens, wie für ein Finite-Volumen-Verfahren notwendig, exakt erfassen lassen.

Wichtig ist die Tatsache, daß  $r$  über die Größen  $\bar{\xi}_r$ ,  $\bar{\xi}_z$ , etc. in den räumlichen

Ableitungen  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta}$  und  $\frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta}$  von Gl.(2.47) enthalten ist. Dadurch wird die Vergrößerung der Austrittsfläche des Kontrollvolumens in radialer Richtung, worauf im Anschluß an diesen Abschnitt noch eingegangen wird, automatisch richtig erfaßt.

Gl.(2.47) lautet damit in Komponentenschreibweise unter Verwendung der absoluten Geschwindigkeit und der absoluten Energie, d.h. mit E, F, G,  $K^{(z)}$  gemäß Gl.(2.35):

$$D \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \bar{u} \\ \rho \bar{v} \\ \rho \bar{w} \\ \bar{e} \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho(\bar{U} + \omega r \bar{\xi}_\theta) \\ \rho \bar{u}(\bar{U} + \omega r \bar{\xi}_\theta) + p \bar{\xi}_\theta \\ \rho \bar{v}(\bar{U} + \omega r \bar{\xi}_\theta) + p \bar{\xi}_r \\ \rho \bar{w}(\bar{U} + \omega r \bar{\xi}_\theta) + p \bar{\xi}_z \\ \bar{e}(\bar{U} + \omega r \bar{\xi}_\theta) + p \bar{U} \end{pmatrix}_\theta + \begin{pmatrix} \rho(\bar{V} + \omega r \bar{\eta}_\theta) \\ \rho \bar{u}(\bar{V} + \omega r \bar{\eta}_\theta) + p \bar{\eta}_\theta \\ \rho \bar{v}(\bar{V} + \omega r \bar{\eta}_\theta) + p \bar{\eta}_r \\ \rho \bar{w}(\bar{V} + \omega r \bar{\eta}_\theta) + p \bar{\eta}_z \\ \bar{e}(\bar{V} + \omega r \bar{\eta}_\theta) + p \bar{V} \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho(\bar{W} + \omega r \bar{\zeta}_\theta) \\ \rho \bar{u}(\bar{W} + \omega r \bar{\zeta}_\theta) + p \bar{\zeta}_\theta \\ \rho \bar{v}(\bar{W} + \omega r \bar{\zeta}_\theta) + p \bar{\zeta}_r \\ \rho \bar{w}(\bar{W} + \omega r \bar{\zeta}_\theta) + p \bar{\zeta}_z \\ \bar{e}(\bar{W} + \omega r \bar{\zeta}_\theta) + p \bar{W} \end{pmatrix}_z =$$

$$- D \frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{u}v \\ \bar{u}^2 + \frac{p}{\rho} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{W}$  bezeichnen die mit der Determinante D multiplizierten kontravarianten Störgeschwindigkeiten, die sich aus der Beziehung

$$\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_\theta & \bar{\eta}_\theta & \bar{\zeta}_\theta \\ \bar{\xi}_r & \bar{\eta}_r & \bar{\zeta}_r \\ \bar{\xi}_z & \bar{\eta}_z & \bar{\zeta}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

bestimmen lassen.

Gl.(2.49) bildet zusammen mit Gl.(2.50) den Ausgangspunkt für das in der vorliegenden Arbeit alternativ zum kartesischen verwendete zylindrische Euler-Verfahren.

Die Notwendigkeit, die differentiellen zylindrischen Euler-Gleichungen vor der Transformation unzuschreiben, läßt sich bei Betrachtung des bereits bei der allgemeinen Herleitung verwendeten Kontrollvolumens verifizieren. Ausschlaggebend ist dabei die Flußbilanz in radialer Richtung.

Das Prinzip soll anhand der Kontinuitätsgleichung exemplarisch verdeutlicht werden. Für den Massenfluß in radialer Richtung ergibt sich nach Bild 2.4-1:

$$\begin{aligned}
 & \text{- beim Einströmen: } A_1 = \rho v r d\theta dz \\
 & \text{- beim Ausströmen: } A_2 = \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} dr \right) (r+dr) d\theta dz
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Bildet man die Flußbilanz  $A_2 - A_1$ , so verbleibt:

$$A_2 - A_1 = \rho v r d\theta dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} dr (r+dr) d\theta dz \quad . \tag{2.52}$$

Bezeichnet  $r$  den Radius des Zellenmittelpunktes, so ergibt sich mit  $dV = r d\theta dr dz$ :

$$A_2 - A_1 = \left( \frac{\rho v}{r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} \right) dV + O(dr^2 d\theta dz) \quad . \tag{2.53}$$

Mit den noch fehlenden Anteilen der Flußbilanzen in den beiden anderen Raumrichtungen lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} (\rho u)_\theta + (\rho v)_r + (\rho w)_z = - \frac{\rho v}{r} \tag{2.54}$$

wobei der Term  $-\frac{\rho v}{r}$  die rechte Seite bildet.

Mathematisch resultiert dieser Anteil aus der Ableitung der Basen bei Anwendung des Nabla-Operators auf den Vektor  $\rho q$  (vgl. Gl.(2.13/2.14)).

Anschaulich läßt er sich aus der um  $d\theta dr dz$  vergrößerten Austrittsfläche aus dem betrachteten Kontrollvolumen erklären (Bild 2.4-1).

Gleiches gilt ebenso für die Terme  $\frac{\rho v u}{r}$ ,  $\frac{\rho v^2}{r}$ ,  $\frac{\rho v w}{r}$  und  $\frac{\rho v h}{r}$  aus der Impuls- und der Energiegleichung.

In Gl.(2.47) wird der Vergrößerung der Austrittsfläche in radialer Richtung durch die lineare Abhängigkeit der Komponenten der Flächennormalenvektoren  $\bar{\xi}_r(r)$ ,  $\bar{\xi}_z(r)$ , etc. vom Radius (Gl.(2.48)) berücksichtigt. Diese werden bei dem vorliegenden numerischen Verfahren dazu hergenommen, die Flüsse durch die Begrenzungsflächen der einzelnen finiten Volumina zu berechnen. Die besagten ableitungsbedingten Terme sind daher bereits in den Flußbilanzen berücksichtigt und dürfen in der diskretisierten Form nicht noch einmal auf der rechten Seite erscheinen.

Dieser Forderung kann, am Beispiel der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt, durch

eine Überführung von Gl.(2.54) in die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} [(\rho u)_{\theta} + (r\rho v)_r + (r\rho w)_z] = 0 \quad (2.55)$$

Rechnung getragen werden.

Wendet man dieses Prinzip auf die vollständigen Euler-Gleichungen in zylindrischen Koordinaten an, so erhält man die bekannte Beziehung:

$$\phi_c + \frac{1}{r} (E_{\theta} + \hat{F}_r + \hat{G}_z) = \hat{K}^{(z)} \quad (2.44)$$

mit  $\hat{F} = r \cdot F$ ,  $\hat{G} = r \cdot G$  und  $\hat{K}^{(z)} = K^{(z)} + \frac{F}{r}$ .

Führt man analog zum Massen- Impuls- und Energiefluß auch für den Druck die Bilanz an der Oberfläche des Kontrollvolumens in radialer Richtung durch, so kommt man analog zu Gl.(2.53) zu dem Ergebnis:

$$F_2 - F_1 = \left( \frac{P}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} \right) dV + O(dr^2 d\theta dz) \quad (2.56)$$

Der aus der vergrößerten Angriffsfläche herrührende Anteil  $\frac{P}{r} dV$  findet in  $\hat{K}^{(z)}$  über den Flußvektor  $F$  eine gleich große Gegenkraft, so daß sich die Resultierende wie erforderlich aufhebt. Der vernachlässigbare Fehler der Größenordnung  $O(dr^2 d\theta dz)$  ergibt sich aus der Tatsache, daß diese Gegenkraft nur aus einem volumengemittelten Druck gebildet werden kann.

Die beschriebene Betrachtungsweise setzt voraus, daß auch für die Druckbilanzbildung die lokalen Basen an den jeweiligen Zellflächen verwendet werden, deren Orientierung sich in  $\theta$ -Richtung verändern. Bezieht man sich statt dessen auf eine Basis im Zellenmittelpunkt, die für das gesamte Volumen gültig ist, so läßt sich die erforderliche Gegenkraft auch durch eine Zerlegung der Kraftvektoren in  $\theta$ -Richtung erzeugen (Bild 2.4-2). Dadurch entfällt der Druckanteil in  $\hat{K}^{(z)}$  auf der rechten Seite.

Diese Methode ist bei Hertel [49] beschrieben. Sie ist allerdings bei einem Fehler, der in der gleichen Größenordnung wie bei Gl.(2.56) liegt, numerisch aufwendiger.

## 2.5 Normierung der geometrischen und physikalischen Größen

Es hat sich allgemein als vorteilhaft erwiesen, zur Lösung physikalischer Probleme nicht mit dimensionsbehafteten, sondern mit dimensionslosen Größen zu arbeiten.

Die geometrischen Größen sind in der vorliegenden Arbeit auf die Blattiefe  $l$  bezogen. Es wurden überwiegend Untersuchungen für nichtzugespitzte Blätter mit rechteckiger Blattspitze durchgeführt, für die die Blattiefe konstant ist. Da im allgemeinen Fall die Blattiefe mit dem Radius variieren kann, ist eine bestimmte Radialstation zu definieren, an der die Referenztiefe ermittelt wird.

Bei der Skalierung der physikalischen Größen ist es sinnvoll, eine völlige Unabhängigkeit sowohl von atmosphärischen Höheneinflüssen als auch von der Radialkoordinate zu erzielen.

Als Normierungsgrößen boten sich daher die Dichte und die Schallgeschwindigkeit der ungestörten Strömung  $\bar{\rho}_\infty$  und  $\bar{a}_\infty$  an.

Aus den dimensionsbehafteten Größen, die mit einer Tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) gekennzeichnet sind, lassen sich damit folgende normierte Größen schaffen:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}_\infty} , & e &= \frac{\tilde{e}}{\bar{\rho}_\infty \bar{a}_\infty^2} \quad (\text{desgl. für } \bar{e}, \bar{e}) , \\
 u &= \frac{\tilde{u}}{\bar{a}_\infty} \quad (\text{desgl. für } \bar{u}) , & p &= \frac{\tilde{p}}{\bar{\rho}_\infty \bar{a}_\infty^2} , \\
 v &= \frac{\tilde{v}}{\bar{a}_\infty} \quad (\text{desgl. für } \bar{v}) , & h &= \frac{\tilde{h}}{\bar{a}_\infty^2} \quad (\text{desgl. für } \bar{h}, \bar{h}) , \\
 w &= \frac{\tilde{w}}{\bar{a}_\infty} , & \omega &= \frac{\tilde{\omega} l}{\bar{a}_\infty} .
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Die Werte der ungestörten Strömung (Index  $\infty$ ), die als Anfangs- und Randbedingung in dem kartesischen, bzw. dem zylindrischen Verfahren Verwendung finden, betragen nach dieser Normierung:

$$\begin{aligned}
 \rho_\infty &= 1 , & w_\infty &= 0 , \\
 u_\infty^{(z)} &= \omega r = Ma_{t,p} \cdot (r/R) , & e_\infty &= \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\omega r)^2 , \\
 u_\infty^{(k)} &= \omega x = Ma_{t,p} \cdot (x/R) , & \bar{e}_\infty &= \bar{e}_\infty = \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_\infty(z) = \bar{u}_\infty(k) = 0 \quad , \quad & p_\infty = \frac{1}{\kappa} \quad , \quad (2.58) \\ \bar{v}_\infty(z) = 0 \quad , \quad & h_\infty = \frac{1}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\omega r)^2 \quad , \\ \bar{v}_\infty(k) = -\omega y = -Ma_{tip} \cdot (y/R) \quad , \quad & \bar{h}_\infty = \bar{h}_\infty = \frac{1}{(\kappa-1)} \quad , \\ \bar{v}_\infty(k) = 0 \quad , \quad & \omega = \frac{Ma_{tip}}{R} \quad .\end{aligned}$$

Somit geht außer bekannten Konstanten als einzige variable Größe nur die Blattspitzenmachzahl in den numerischen Berechnungsprozeß ein.

### 3. Numerisches Verfahren

#### 3.1 Überblick über bestehende Verfahren

Zur numerischen Lösung der Euler-Gleichungen lassen sich im wesentlichen zwei große Gruppen von Verfahren unterscheiden, zum einen die Zentrale-Differenzen- und zum anderen die Upwind-Verfahren.

Bei ersteren, zu denen insbesondere das Verfahren nach Jameson et al. [62] gehört, geschieht die räumliche Approximation durch zweite Ordnung genaue symmetrische (zentrale) Differenzenbildung. Der führende Abbruchfehler des Differenzenschemas beinhaltet daher Ableitungen 3. Grades, was zu einem dispersiven Verhalten führt, das besonders gravierend im Bereich hoher Druckgradienten, z.B. in der Nähe von Verdichtungsstößen oder am Staupunkt, ist. Dort kann es zu starken numerischen Oszillationen kommen, die sich nur dadurch vermeiden lassen, daß durch explizite Addition von Dämpfungsgliedern die Ordnung des Verfahrens lokal auf 1 zurückgeschaltet wird.

Aber auch in Regionen geringer Gradienten ist das Zentrale-Differenzen-Schema zu wenig dissipativ. Die bestehende Entkopplung der geraden und der ungeraden Punkte resultiert in einem instabilen Verhalten. Zur Stabilisierung ist ebenfalls die Addition von Dämpfungstermen nötig, die in diesem Fall von der Ordnung ( $\Delta x^3$ ) sind.

Jameson fand eine Kombination von zweiten und vierten Differenzen der abhängigen Strömungsvariablen, die m.H. zweier Koeffizienten gewichtet werden. Die Bestimmung dieser Koeffizienten erfolgt angepaßt an den lokalen Strömungszustand und wird über eine Sensorfunktion zur Aufspürung von Druckgradienten sowie über von außen festzulegende Parameter gesteuert.

In Verbindung mit einer mehrstufigen Runge-Kutta-Zeitschrittmethode konnte er damit die Stabilitäts- und Dämpfungseigenschaften seines Zentrale-Differenzen-Verfahrens drastisch verbessern, so daß es inzwischen, nicht zuletzt auch wegen des geringeren Rechenaufwandes, zu einem der meistverwendeten Euler-Verfahren geworden ist.

Im Bereich der Rotorströmung findet es z.B. bei Kroll [39,40], Agarwal & Deese [36,57,58], Roberts & Murman [31,32], Chang & Tung [35] Anwendung.

Zentrale-Differenzen-Schemata in Verbindung mit Jamesons oder ähnlichen künstlichen Dissipationstermen findet man auch in einigen hybriden Verfahren, wie z.B. in [33,34,37,38,55,59].

Ein Nachteil der Zentralen-Differenzen-Verfahren, die auch als "artificial viscosity methods" bezeichnet werden, bleibt aber trotz allem in der Notwen-

digkeit der expliziten Addition künstlicher Dämpfungsterme bestehen. Dabei liegt das Problem insbesondere in der von außen zu treffenden Wahl der Höhe des Dissipationsmaßes begründet. Sein Optimum ist aber lösungsabhängig und kann daher oftmals nur durch Probieren gefunden und muß von Fall zu Fall angepaßt werden. Wollte man statt dessen eine ähnliche Robustheit, wie bei den weiter unten beschriebenen Upwind-Verfahren erzielen, müßten die Dämpfungskoeffizienten so groß gewählt werden, daß wichtige Details der Strömung, inklusive Stöße, verschmiert würden.

An dieser Stelle sei aufgrund seiner historischen Bedeutung auch die finite Differenzenmethode von MacCormack [75] erwähnt, eines der ersten vielversprechenden und weitverbreiteten numerischen Verfahren zur Lösung der Euler-Gleichungen.

Es handelt sich hierbei zwar nicht um ein Zentrale-Differenzen-Verfahren im Sinne des zuvor beschriebenen, hat mit diesem jedoch gemeinsam, daß zur Stabilisierung die Addition künstlicher Dämpfungsterme erforderlich ist. Es kann daher den "artificial viscosity methods" zugerechnet werden.

Das Verfahren ist eine Abwandlung der zweistufigen Lax-Wendroff-Methode und wie diese zweiter Ordnung genau in der Zeit und im Raum. Es ist ein sog. Predictor-Corrector-Verfahren, bei dem im einen Schritt eine Vorwärts- und im anderen Schritt eine Rückwärtsdifferenz zur Approximation der räumlichen Derivativa verwendet wird. Dadurch kommt es, ähnlich wie bei der Zentrale-Differenzen-Methode, zu einer Gleichgewichtung der beiden Ableitungsrichtungen, was das Schema signifikant von den Upwind-Verfahren, bei denen die Ableitungsrichtung dem physikalischen Informationstransport innerhalb der Strömung angepaßt wird, unterscheidet.

Eine Upwind-Formulierung des MacCormack-Verfahren wurde durch Warming & Beam [76] entwickelt und findet in einer Finiten-Volumen-Ausführung z.B. bei Whitfield et al. [77] Verwendung.

Der entscheidende Nachteil des MacCormack-Verfahrens ist die Abhängigkeit der Lösung vom gewählten Zeitschritt, was dazu geführt hat, daß es mehr und mehr von anderen Verfahren abgelöst wurde.

Bei der zweiten großen Klasse von Verfahren, den sog. Upwind-Methoden, besteht die Notwendigkeit der Addition künstlicher Dämpfungsterme nicht, da sie von Natur aus dissipativ sind. Da keine zentralen, sondern einseitig orientierte Differenzen um den betrachteten Punkt gebildet werden, ergeben sich die Dissipationsanteile implizit durch die Terme des Abbruchfehlers.

Die Upwind-Methoden machen sich die Eigenheit hyperbolischer partieller Differentialgleichungen zu Nutze, die darin besteht, daß sich Informationen

innerhalb des von den unabhängigen Variablen aufgespannten Raumes nur entlang bestimmter Richtungen ausbreiten. Dies hat zur Folge, daß Störungen, die von einem bestimmten Ort ausgehen, nur einen begrenzten Bereich des Lösungsgebietes erreichen können (beschränktes Einflußgebiet), andererseits aber auch, daß der Zustand eines Punktes innerhalb dieses Lösungsgebietes nur von einem Teil der Informationen, die von anderen Punkten ausgehen, abhängt (beschränktes Abhängigkeitsgebiet). Die ausgezeichneten Richtungen, entlang derer der Informationstransport erfolgt und die die Einfluß- bzw. Abhängigkeitsgebiete begrenzen, werden als Charakteristiken bezeichnet.

Diese Theorie der charakteristischen Signalausbreitung ist die Grundlage der zur Lösung hyperbolischer Gleichungen entwickelten Charakteristikenmethode und damit die Basis der verwendeten Upwind-Verfahren.

In der stationären Formulierung besitzen die Euler-Gleichungen jedoch nur im reinen Überschall einen hyperbolischen Charakter, weshalb dort ohne Schwierigkeiten sogenannte Raumschrittverfahren verwendet werden können, bei denen die Hauptströmungsrichtung als hyperbolische Koordinate fungiert (z.B. [78]). Der Einsatzbereich solcher Verfahren ist damit allerdings erheblich eingeschränkt.

Es hat sich daher eingebürgert, die instationären Euler-Gleichungen zu lösen, die für alle Strömungszustände hyperbolisch sind. Die Zeit stellt dabei die Koordinate dar, in deren Richtung vorangeschritten wird. Damit ist ihr ihre eigentliche physikalische Bedeutung genommen, weshalb man auch von der quasi-stationären Formulierung der Euler-Gleichungen spricht. Das zeitliche Inkrement in den abhängigen Variablen entspricht in diesem Fall lediglich dem Residuum.

Man unterscheidet im wesentlichen vier Grundformen der Upwind-Verfahren. Dies sind zunächst die  $\lambda$ -Methode [79] und die Split Coefficient Matrix Method (SCM) [80]. Beide Methoden gehen auf den gleichen Grundgedanken zurück und basieren auf der nichtkonservativen Form der Euler-Gleichungen. Damit ist es ihnen jedoch nicht möglich, Diskontinuitäten im Strömungsfeld korrekt zu beschreiben. Diese müssen stattdessen explizit behandelt werden. Die dazu verwendete Technik wird allgemein als "shock fitting" bezeichnet.

Geht man stattdessen von der konservativen Form der Euler-Gleichungen aus, so sind die darauf aufbauenden Verfahren in der Lage, Diskontinuitäten implizit wiederzugeben ("shock capturing"). Dies gilt gleichermaßen für die Methoden des Flux-Vector Splittings (FVS) und des Flux-Difference Splittings (FDS). Die überwiegende Zahl der heute gebräuchlichen Upwind-Verfahren zur Lösung der Euler- oder Navier-Stokes-Gleichungen gehört zu diesen Verfahren.

Bei dem FVS, das von Steger & Warming [63] eingeführt wurde, werden die Fluß-

vektoren in zwei Anteile aufgespalten, die jeweils nur mit den positiven bzw. negativen Eigenwerten ihrer Jacobimatrizen gebildet werden. Dies ist möglich aufgrund der Homogenitätseigenschaft der Flußvektoren und der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren der Jacobimatrizen. Die charakteristische Eigenschaft der entstandenen Teilflüsse erlaubt es, jeden von ihnen einseitig in der jeweils zutreffenden Richtung zu differenzieren, d.h. die partiellen Ableitungen des mit den positiven Eigenwerten assoziierten Teilflusses durch rückwärts und die des zu den negativen Eigenwerten gehörigen Teilflusses durch vorwärts gerichtete Differenzen zu approximieren. Von dieser Methode wird noch in Kap. 3.3 die Rede sein, da ihre Grundidee Bestandteil des in dieser Arbeit verwendeten impliziten Lösungsalgorithmus ist.

Neben dem Steger-Warming Splitting ist insbesondere das Splitting nach van Leer [81] verbreitet. Ausgehend von dem gleichen Grundgedanken erhält van Leer etwas andere Teilflüsse, mit dem Vorteil, daß diese auch bei einem Vorzeichenwechsel eines Eigenwertes weiterhin stetig differenzierbar bleiben. Ein Vergleich beider Methoden kann [82] entnommen werden.

Es ist ein wichtiges Merkmal der beiden erwähnten Methoden, daß zuerst die Teilflüsse mit den Strömungsgrößen aus den Volumenmitten anhand der dort geltenden Eigenwerte gebildet werden. Danach werden dann auf die so gebildeten Teilflüsse die Upwind-Differenzenoperatoren 1. oder 2. Ordnung in der jeweiligen Richtung angewendet. Es wird also zuerst gesplittet und dann differenziert.

Eine alternative Vorgehensweise besteht darin, zunächst die Strömungsgrößen der benachbarten Zellen m.H. entsprechender Upwind-Formulierungen auf die Begrenzungsflächen des betrachteten Volumens zu extrapolieren und dann dort die Aufspaltung vorzunehmen und die Teilflüsse zu bestimmen. Die Approximation der räumlichen Ableitung der Euler-Flüsse besteht dann lediglich noch in der Bildung der zentralen Differenzen der Teilflüsse zwischen den gegenüberliegenden Zellflächen. Diese Vorgehensweise, bei der zuerst differenziert und dann gesplittet wird, wird als MUSCL-Typ Schema bezeichnet [83]. Es war ursprünglich dazu entwickelt worden, die Genauigkeit von FDS-Verfahren, die im folgenden beschrieben werden, zu erhöhen, ist aber ebenso auf die FVS-Methoden anwendbar.

Die Implementierung einer FVS-Methode mit Steger-Warming Splitting und van Leer's MUSCL-Schema in ein Euler-Verfahren zur Berechnung der Hubschrauberrotorströmung ist z.B. bei Chen et al. [38] zu finden.

Die Theorie der FDS-Verfahren ist sehr stark verknüpft mit der Lösung eines Riemann-Problems. Die Strömungsgrößen werden innerhalb eines Kontrollvolumens als konstant angenommen. Da sie aber von Zelle zu Zelle variieren kön-

nen, kommt es an den Begrenzungsflächen zwischen zwei benachbarten Volumina zu einer Diskontinuität. Deren Auflösung ist abhängig vom lokalen Strömungszustand und wird von den jeweiligen Strömungsgleichungen beschrieben. Die Bestimmung der zeitlichen Entwicklung, mit der die Auflösung einer Diskontinuität zwischen zwei konstanten Anfangszuständen vonstatten geht, wird als Lösung eines Riemann-Problems bezeichnet.

Bei den heute gebräuchlichen numerischen Verfahren werden an jeder dieser Begrenzungsflächen jeweils nur eindimensionale Riemann-Probleme gelöst, d.h. die Ausbreitung der von den Diskontinuitäten ausgehenden Informationen ist auf die Richtung normal zu dieser Fläche limitiert. Die Erweiterung auf Mehrdimensionalität steckt noch in den Anfängen [84]. Erste positive Ergebnisse wurden z.B. von Parpia & Michalek [85] vorgestellt.

Die Auflösung der Diskontinuität und der Transport von Informationen erfolgt in Form von Wellen, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit und -richtung durch die Eigenwerte des hyperbolischen Gleichungssystems gegeben ist.

Im Falle eines eindimensionalen Systems erwartet man eine Entropie- und zwei akustische bzw. Druckwellen. Beim Durchgang einer Entropiewelle durch einen bestimmten Punkt im Strömungsfeld ändern sich dort nur die Entropie bzw. die Dichte, während sich beim Durchgang akustischer Wellen Druck, Dichte und Geschwindigkeit ändern. Die Intensität und die Art der transportierten Störungen, sowie die Ausbreitungsrichtung der jeweiligen Welle bestimmen den neuen Strömungszustand in diesem Punkt, vorausgesetzt er liegt innerhalb des Einflußgebietes der Diskontinuität, das durch die Steigungen der Charakteristiken im Ort-Zeit-Raum vorgegeben ist.

Die Differenz in den Flußvektoren zweier Punkte rechts und links der ursprünglichen Diskontinuität läßt sich daher aufspalten in die jeweiligen Beiträge, die durch die einzelnen Wellen induziert wurden. Diese werden unterschieden in Beiträge, die von den nach links laufenden, und Beiträge, die von den nach rechts laufenden Wellen stammen. Aus dieser Anschauung leitet sich der Begriff "Flux-Difference Splitting" ab.

Die Summe der Einzelbeiträge bestimmen den Zustand in einem festgelegten Intervall. Wählt man beispielsweise ein Intervall, das von zwei gegenüberliegenden Begrenzungsflächen eines finiten Kontrollvolumens gebildet wird, so sind die Beiträge der rechtslaufenden Wellen, die von der linken und die Beiträge der linkslaufenden Wellen, die von der rechten Diskontinuität ausgehen, zu berücksichtigen. Dies geschieht dadurch, daß man die durch die charakteristische Wellenausbreitung bestimmten Strömungszustände an den Zellflächen z.B. mit Hilfe der Charakteristikenmethode ermittelt. Damit lassen sich dort die neuen Flußvektoren und nach Bildung der Flußbilanzen die Werte der Strö-

mungsgrößen im Volumenmittelpunkt bestimmen.

Die Genauigkeit der FDS-Verfahren ist im wesentlichen durch die Definition des linken und rechten Anfangszustandes des Riemann-Problems gegeben. Durch entsprechende Upwind-Differenzenbildung aus den Werten benachbarter Volumina läßt sich die Ordnung formal bis auf 3 steigern.

Für eine ausführlichere Beschreibung der Idee der FDS-Verfahren sei z.B. auf Pandolfi [86] oder LeVeque [87,88] verwiesen.

Eines der grundlegenden Verfahren, in dem die Theorie des FDS verwirklicht wurde, ist die Methode nach Godunov [89]. Dort wird das Riemann-Problem exakt gelöst, was jedoch infolge der Nichtlinearität der Euler-Gleichungen bedeutet, daß dies iterativ geschehen muß. Zur Reduzierung des Aufwandes wurden daher Verfahren abgeleitet, die das Riemann-Problem approximativ lösen. Am bekanntesten sind die Verfahren nach Roe [64], Osher [90] und Eberle [65,91,92]. Das vorliegende Verfahren zur Lösung der Euler-Gleichungen für Probleme der Hubschrauberrotorströmung wurde aus dem letztgenannten entwickelt. Es findet auch bei Hertel [49] Anwendung. Ebenfalls auf dem EUFLEX-Algorithmus von Eberle beruht das Verfahren von Stahl [93,94].

Die Anwendung reiner FDS-Verfahren auf rotierende Strömungen ist noch relativ selten. In neuerer Zeit wurde von Srinivasan et al. [61] ein Navier-Stokes-Verfahren vorgestellt, das die Methode nach Roe verwendet.

Vergleiche zwischen einigen FDS-, FVS- und Zentrale-Differenzen-Verfahren können beispielsweise in [95-99] gefunden werden.

## 3.2 Beschreibung des verwendeten Lösungsalgorithmus

### 3.2.1 Finite-Volumen-Diskretisierung

Das vorliegende Verfahren beruht auf einer Finiten-Volumen-Diskretisierung der integralen Form der Euler-Gleichungen (Gl.(2.1)). Die bei der Netzgenerierung entstandenen Schnittpunkte der Netzlinien bilden die Ecken der Kontrollvolumina. Entsprechend Gl.(2.1) wird die zeitliche Änderung des Strömungszustandes in der Zelle bestimmt durch die Flüsse durch ihre Oberfläche, die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte und die auf das Gesamtvolumen wirkenden Massenkkräfte. Durch die Tatsache, daß jede Austrittsfläche eines Volumens identisch zu der Eintrittsfläche eines benachbarten Volumens ist, ist diese Formulierung von Natur aus konservativ und daher besonders geeignet zur Lösung konservativer Strömungsgleichungen.

Die Überführung der integralen Form in die differentielle Divergenzform nach Gl.(2.4) ist nur ein formaler Akt und ändert an der Eigenschaft der Gleichungen nichts, vorausgesetzt man behält die konservativen Variablen ( $\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e$ ) bei.

Durch die Transformation der Differentialgleichungen auf krummlinige Koordinaten, die in Kap. 2.4 beschrieben ist, hält die Geometrie des betrachteten Volumens über die Transformationsdeterminante und die Flächennormalenvektoren zur Bestimmung der metrischen Terme wieder Einzug in den numerischen Algorithmus.

Einige Autoren umgehen den Weg über die Transformation und approximieren die Volumen- und Oberflächenintegrale direkt im kartesischen oder zylindrischen System. Hierbei werden jedoch im Endeffekt die gleichen mathematischen Operationen ausgeführt, wie zur Bestimmung der metrischen Terme bei der Transformation, so daß die beiden Methoden wohl gleichbedeutend sind. Als Beispiel für eine solche Vorgehensweise sind das Jameson- [62] und die darauf aufbauenden Verfahren (s. Kap. 3.1) zu nennen.

Wie bereits erwähnt, werden die Strömungsgrößen den Volumenmittelpunkten zugeordnet und für die gesamte Zelle als konstant betrachtet. Alternativ dazu existieren die sog. Zelleneckpunktschemata, bei denen die abhängigen Variablen den Knotenpunkten der Netzlinien zugeordnet werden. Sie bieten damit u.a. einen interessanten Ausgangspunkt für Multigridverfahren (z.B. [100,101]). Ein Vergleich zwischen einem Zellenmittelpunkt- und zwei Zelleneckpunktschemata findet sich z.B. in der Arbeit von Rossow [102].

Neben den Finite-Volumen-Verfahren (FV) existieren insbesondere noch die Finite-Elemente- (FE) und die Finite-Differenzen-Verfahren (FD). Während ersteren der Durchbruch innerhalb der numerischen Aerodynamik noch nicht gelungen ist, besitzen die FD-Verfahren nicht zuletzt deswegen eine große Bedeutung, weil sie die ersten Methoden zur Diskretisierung partieller Differentialgleichungen darstellten, und daher eine große Verbreitung gefunden haben.

FD-Verfahren sind nicht nur auf die nicht-konservative Form der Euler-Gleichungen beschränkt, sondern sind auch auf die Divergenzform (Gl.(2.4)) anwendbar. Sie erfüllen so ebenfalls die Forderung nach Konservativität und sind in der Lage, Verdichtungsstöße implizit wiederzugeben ("shock-capturing"). Der Unterschied zwischen FV- und FD-Verfahren liegt dann lediglich noch in der Bestimmung der metrischen Terme im Falle nichtkartesischer Netze und in der Tatsache, daß bei den FD-Methoden die Strömungsgrößen, wie bei den Zelleneckpunktschemata, in den Netzknotenpunkten abgelegt werden

Die Bestimmung der metrischen Terme ist jedoch ein gewisser Schwachpunkt der

FD-Verfahren, was insbesondere darin resultiert, daß zusätzliche Maßnahmen erforderlich sind, um die ungestörte Anströmung auf einem krummlinigen Netz ausreichend genau zu repräsentieren (vgl. [103]). Srinivasan et al. [61] verwenden daher in ihrem FD-Verfahren eine FV-Methode zur Berechnung der Metrik. Ein Vergleich zwischen FD- und FV-Verfahren und zwischen FE- und FD-Verfahren läßt sich z.B. bei Vinokur [104,105] finden.

### 3.2.2 Approximativer Riemann-Löser

In dem vorliegenden Verfahren werden die Flüsse an den Zellflächen mit Hilfe der Charakteristikenmethode bestimmt. Dazu wird an jeder dieser Flächen ein eindimensionales Riemann-Problem approximativ gelöst.

Auf eine detaillierte Beschreibung der einzelnen mathematischen Operationen wird verzichtet, da der Lösungsalgorithmus im Kern nahezu unverändert aus dem EUFLEX-Verfahren übernommen werden konnte, und sich bei Eberle [65] eine ausführliche Herleitung finden läßt. Auch in der Arbeit von Brenneis [66], der das EUFLEX-Verfahren auf instationäre Nickschwingungen von Profilen und Flügeln anwendete, ist der Riemann-Löser noch einmal umfassend dargestellt. Der Vollständigkeit halber werden lediglich die einzelnen Schritte, die zur Bestimmung der Strömungsgrößen an den Zellflächen führen, aufgelistet.

Ausgangspunkt sind die transformierten Euler-Gleichungen in konservativer Form:

$$\bar{\phi}_r + \bar{E}_\xi + \bar{F}_\eta + \bar{G}_\zeta = \bar{K} \quad (2.36)$$

Da wegen der Eindimensionalität des Riemann-Lösers eine Wellenausbreitung nur normal zu den Zellflächen in Betracht gezogen wird, kann diese Beziehung in vier einzelne Operatoren aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(\xi)}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \phi^{(\eta)}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \phi^{(\zeta)}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial r} - \bar{K} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Gesamtänderung  $\phi_r$  ergibt sich zu  $\phi_r = \phi_r^{(\xi)} + \phi_r^{(\eta)} + \phi_r^{(\zeta)} + \phi_r^{(k)}$  unter der Voraussetzung, daß die Flüsse auf dem gleichen zeitlichen Niveau gebildet werden.

Der letzte Anteil ist für die Lösung des Riemann-Problems ohne Bedeutung. Seine zeitliche Integration erfolgt unabhängig von der Flußbildung und unter der Annahme, daß die in  $\bar{K}$  enthaltenen Variablen aus den Volumenmittelpunkten zum Zeitpunkt  $r$  stammen und über den Zeitschritt  $\Delta r$  näherungsweise konstant sind.

Es ist wichtig anzumerken, daß die Größen  $\phi_r^{(\xi)}$ ,  $\phi_r^{(\eta)}$ ,  $\phi_r^{(\zeta)}$  und  $\phi_r^{(k)}$  keine physikalische Bedeutung haben. Sie können daher jeweils so gewählt werden, daß die Gln.(3.1) erfüllt sind, ohne daß dadurch der Lösungsbereich von Gl.(2.36) eingeschränkt wird. Die Gln.(3.1) stellen somit nach Förster [106] keine Verschärfung der Bedingung (2.36) dar.

Die ersten drei Gleichungen beschreiben jeweils ein System mit nur zwei unabhängigen Variablen. Ihre Struktur ist völlig identisch, so daß im folgenden nur eine Beziehung exemplarisch betrachtet wird. Dies sei mit einigen Schreibvereinfachungen die Gleichung:

$$\phi_r + E_\xi = 0 \quad (3.1a)$$

Entsprechend der Charakteristikenmethode wird dieses System partieller Differentialgleichungen (DGL) in einen Satz von gewöhnlichen DGLn, die als "kanonisch-hyperbolische DGLn" bezeichnet werden, überführt. Diese bestehen aus den Kompatibilitätsbeziehungen, die nur auf ganz speziellen Linien im  $(\xi, r)$ -Raum, den sogenannten Charakteristiken, gelten, sowie aus den Richtungsgleichungen, die den Verlauf dieser Linien beschreiben.

Die inverse Steigung der Charakteristiken entspricht den Eigenwerten des Systems, die als erstes gefunden werden müssen. Dazu wird Gl.(3.1a) in eine quasilineare Form

$$\phi_r + A(\phi) \cdot \phi_\xi = 0 \quad (3.2)$$

gebracht, wobei  $A$  die Jacobimatrix  $A = \partial E / \partial \phi$  darstellt. Diese läßt sich über die Beziehung

$$A = T \Lambda T^{-1} \quad (3.3)$$

diagonalisieren, wobei  $T, T^{-1}$  die Matrizen der rechten bzw. linken Eigenvektoren und  $\Lambda$  die Matrix mit den Eigenwerten von  $A$  auf der Hauptdiagonalen

bezeichnen.

Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren werden im allgemeinen nicht aus der Jacobimatrix  $A$  der konservativen Beziehung (3.2) berechnet, sondern, da dies weniger aufwendig ist, aus der entsprechenden Matrix  $A^*$  der analogen nicht-konservativen Gleichung

$$\phi_r^* + A^*(\phi) \cdot \phi_\xi^* = 0 \quad (3.4)$$

mit dem Lösungsvektor  $\phi^* = D(\rho, u, v, w, p)^T$ . Zwischen den beiden Lösungsvektoren besteht die Beziehung  $M = \partial\phi / \partial\phi^*$ , so daß gilt:

$$A^* = M^{-1} A M \quad (3.5)$$

Da  $A$  und  $A^*$  ähnliche Matrizen sind, besitzen sie die gleichen Eigenwerte. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \dot{\xi}_{1,2,3} &= u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z \quad , \\ \lambda_1 = \dot{\xi}_4 &= \lambda_0 + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \quad , \\ \lambda_2 = \dot{\xi}_5 &= \lambda_0 - a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

und ergeben sich aus der Lösung der charakteristischen Gleichung von  $A^*$ . Auch die Matrizen der rechten und linken Eigenvektoren werden zunächst für  $A^*$  berechnet und m.H. von  $M$  bzw.  $M^{-1}$  in  $T$  bzw.  $T^{-1}$  umgerechnet.

Die einzelnen Elemente der bisher verwendeten Matrizen können [66] oder [77] entnommen werden.

Die gesuchten Kompatibilitätsgleichungen erhält man nun, indem man Gl.(3.2) auf die durch die Eigenwerte vorgegebenen Charakteristiken projiziert. Dies geschieht durch Linksmultiplikation von Gl.(3.2) mit dem zu der jeweiligen Charakteristik gehörenden transponierten Eigenvektor. In Matrixschreibweise ergibt dies für alle fünf Charakteristiken:

$$T^{-1}(\phi_r + A(\phi) \cdot \phi_\xi) = 0 \quad (3.7)$$

oder unter Verwendung von Gl.(3.3):

$$T^{-1}(\phi_r + T A T^{-1} \cdot \phi_\xi) = 0 \quad (3.8)$$

An dieser Stelle wird nun  $T^{-1}$  näherungsweise als konstant angenommen und un-

ter die Differentialoperatoren gezogen. Damit ergibt sich die charakteristische Form der Euler-Gleichungen zu:

$$\frac{\partial(T^{-1}\phi)}{\partial r} + \lambda \cdot \frac{\partial(T^{-1}\phi)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.9)$$

Bildet man die Richtungsableitung entlang den Charakteristiken, was in diesem Fall der Bildung der Totalableitung  $d(\dots)/dr = \partial(\dots)/\partial r + \lambda \cdot \partial(\dots)/\partial \xi$  im  $(\xi, r)$ -Raum entspricht, so lauten die Kompatibilitätsgleichungen nun:

$$\frac{d(T^{-1}\phi)}{dr} = 0 \quad (3.10)$$

Sie drücken aus, daß die charakteristischen Variablen  $T^{-1}\phi$  entlang der entsprechenden Charakteristik unveränderlich sind. Die Größen  $T^{-1}\phi$  werden daher auch als Riemann-Invarianten bezeichnet.

Zur Ermittlung des Zustandes in einem gesuchten Punkt im  $(\xi, r)$ -Raum (Bild 3.2-1) werden die Charakteristiken, die sich in diesem Punkt schneiden, zurückverfolgt und die Werte für die Riemann-Invarianten an ihren Fußpunkten anhand der konservativen Strömungswerte  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  auf dem Zeitniveau  $r$  bestimmt. Die Art und Weise, wie diese  $\phi_m$  ermittelt werden, bestimmt die Genauigkeit des Verfahrens und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Sei  $R = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)^T$  der Vektor der Riemann-Invarianten, so ergibt die Intergration von Gl.(3.10):

$$T^{-1}\phi = \text{const.} = R \quad (3.11)$$

mit

$$\begin{aligned} r_1 &= t_1 \phi_0 \quad , \\ r_2 &= t_2 \phi_0 \quad , \\ r_3 &= t_3 \phi_0 \quad , \\ r_4 &= t_4 \phi_1 \quad , \\ r_5 &= t_5 \phi_2 \quad . \end{aligned}$$

wobei die  $t_i$  die Zeilenvektoren von  $T^{-1}$  darstellen.

Aus Gl.(3.11) lassen sich schließlich die gesuchten, charakteristisch gemittelten Strömungsgrößen  $\phi$  durch Linksmultiplikation mit  $T$  ermitteln zu:

$$\phi = T \cdot R \quad (3.12)$$

Das Ergebnis dieser Operation ist in Anhang A.3 aufgeführt.

Beim Übergang von Gl.(3.8) auf Gl.(3.9) war vorausgesetzt worden, daß  $T^{-1}$  konstant sei. Dasselbe gilt für die Eigenwerte, die die Steigungen der Charakteristiken angeben. Diese vereinfachenden Annahmen haben zur Folge, daß die Charakteristiken, die bei nichtlinearen hyperbolischen Problemen im allgemeinen gekrümmte Kurven sind, nun linear verlaufen (vgl. Bild 3.2-1), und daß das Riemann-Problem im Gegensatz zu der exakten Methode von Godunov [89] nicht iterativ gelöst werden muß. Der verwendete Algorithmus ist daher der Gruppe der approximativen Riemann-Lösern zuzurechnen.

Eberle hat den von ihm entwickelten und in der vorliegenden Arbeit verwendeten homogenen Riemann-Löser inzwischen weiter verbessert [107,108]. In der oben beschriebenen Ausführung tauchen in der Beziehung (3.12) zur Ermittlung der neuen konservativen Strömungsgrößen die Geschwindigkeit und die Schallgeschwindigkeit als Koeffizienten auf. Sie werden durch zentrale Mittelung aus den beiden benachbarten Zellen zum Zeitpunkt  $\tau$  bestimmt und konstant gehalten. Dies führt zu der besagten Linearisierung des Problems.

Ausgehend von einer Formulierung der Euler-Gleichungen in den Strömungsgrößen Geschwindigkeit, Schallgeschwindigkeit und Entropie, wie sie auch z.B. beim  $\lambda$ -Schema [79] Verwendung findet, hat Eberle nun einen iterationsfreien, sog. halbexakten Riemann-Löser entwickelt, mit dessen Hilfe sich diese Koeffizienten ebenfalls durch eine charakteristische Mittelung bestimmen lassen, so daß sie anschließend zur Erhöhung der Genauigkeit in den bestehenden homogenen Riemann-Löser eingesetzt werden können.

### 3.2.3 Bestimmung der Anfangszustände des Riemann-Problems

Wie bereits erwähnt, ist ein Riemann-Problem dadurch gekennzeichnet, daß sich die Anfangsbedingung für die zu lösende hyperbolische DGL aus zwei konstanten Zuständen zusammensetzt, zwischen denen ein Sprung besteht.

Aus Bild 3.2-1 ging hervor, daß die den jeweiligen Charakteristiken zugeordneten Fußpunktwerte  $\phi_0, \phi_1$  und  $\phi_2$  je nach Vorzeichen des betreffenden Eigenwertes von dem Strömungszustand rechts bzw. links von der betrachteten Zellfläche zu ermitteln sind. Gemäß der Definition des Riemann-Problems sind diese Zustände konstant und bilden an der betrachteten Kontaktfläche eine Diskontinuität. Sie sind im folgenden mit  $\phi_l$  bzw.  $\phi_r$  bezeichnet.

Somit gilt zum Zeitpunkt  $\tau$  an der Trennfläche zwischen den Volumina mit den Indices  $i$  und  $i+1$ :

$$\phi_{m,i+h} = \frac{1}{2} [(1+\text{sign } \lambda_{m,i+h}) \cdot \phi_l + (1-\text{sign } \lambda_{m,i+h}) \cdot \phi_r] \quad (3.13)$$

$m = 0, 1, 2$  .

Die Formulierung der Anfangszustände  $\phi_l$  und  $\phi_r$  bestimmt die Genauigkeit des verwendeten Verfahrens. In der ursprünglichen Methode von Godunov wurden sie einfach den entsprechenden Werten in den beiden Volumina links und rechts der betrachteten Zellfläche gleichgesetzt, wodurch das Verfahren 1. Ordnung genau war.

Eine Erhöhung der Genauigkeit läßt sich erreichen, wenn die Werte für  $\phi_l$  und  $\phi_r$  mit Hilfe einer geeigneten Upwind-Extrapolation aus den Mittelpunktwerten mehrerer benachbarter Zellen gebildet werden. Wie in [108] und [66] ausgeführt, ist aufgrund der homogenen Eigenschaft der Flußvektoren die Genauigkeitsordnung bei der Bestimmung der Strömungsvariablen zumindest im eindimensionalen Fall direkt übertragbar auf die Bildung der Flußdifferenzen. Bei mehrdimensionalen Problemen ist dies nur bis zur 2. Ordnung gewährleistet, da die Annahme, die Strömungsgrößen seien über der durchströmten Fläche konstant, bei der integralen Bestimmung der Flüsse zu einem entsprechenden Fehler führt. Van Leer gibt in [109] eine geschlossene Formel für  $\phi_l$  und  $\phi_r$  an, bei der die Differenz zwischen beiden Größen durch die Variation eines Parameters wahlweise 2. und 3. Ordnung genau bestimmt werden kann.

Das vorliegende Verfahren benutzt den Fünf-Punkt-Ansatz nach Eberle [110], bei dem die Werte des rechten und des linken Zustandes aus den jeweils vier benachbarten Volumina nach folgendem Schema gebildet werden (Bild 3.2-2):

An der Zellfläche bei  $i+h$  gilt

- für den linken Zustand (maßgeblich für positive Eigenwerte):

$$\phi_{l,i+h} = a\phi_i + b\phi_{i-1} + c\phi_{i+1} + d\phi_{i+2} \quad (3.14a)$$

- und für den rechten Zustand (maßgeblich für negative Eigenwerte):

$$\phi_{r,i+h} = a\phi_{i+1} + b\phi_{i+2} + c\phi_i + d\phi_{i-1} \quad (3.14b)$$

Entsprechend werden die Zustände an der Zellfläche  $i-h$  errechnet.

Bildet man nun die Differenzen  $\Delta\phi_l = \phi_{l,i+h} - \phi_{l,i-h}$  und  $\Delta\phi_r = \phi_{r,i+h} - \phi_{r,i-h}$ , so ergibt sich bei positiven Eigenwerten:

$$\Delta\phi_{\ell} = (a-c)\phi_i + (b-a)\phi_{i-1} - b\phi_{i-2} + (c-d)\phi_{i+1} + d\phi_{i+2} \quad (3.15)$$

sowie ein entsprechender Ausdruck bei negativen Eigenwerten für  $\Delta\phi_r$ .

Nun werden die  $\phi_{i+k}$ ,  $k = -2, -1, 1, 2$ , in einer Taylorreihe um den Punkt  $i$  dritter Ordnung genau entwickelt und in Gl.(3.15), bzw. die analoge Beziehung für  $\Delta\phi_r$  eingesetzt.

Es ergibt sich (am Beispiel für  $\lambda > 0$ ):

$$\Delta\phi_{\ell} = (a+b+c+d)\phi_{\xi} + \frac{1}{2}(c-a+3(d-b))\phi_{\xi\xi} + \frac{1}{6}(c+a+7(d+b))\phi_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{24}(c-a+15(d-b))\phi_{\xi\xi\xi\xi} \quad (3.16)$$

Durch Auswahl der Parameter  $a, b, c, d$  lassen sich alle bekannten Schemata unterschiedlicher Genauigkeitsordnungen erzeugen.

Dabei hat der Koeffizient bei  $\phi_{\xi}$  aus Konsistenzgründen immer 1 zu betragen. Für Verfahren 2. Ordnung muß der Koeffizient bei  $\phi_{\xi\xi}$  und für Verfahren 3. Ordnung zusätzlich noch der Koeffizient bei  $\phi_{\xi\xi\xi}$  0 sein. Der Vorfaktor bei  $\phi_{\xi\xi\xi\xi}$  bestimmt bei Verfahren höherer Ordnung das Viskositätsniveau (VN) und damit neben der Dissipation auch deren Stabilität.

Im folgenden ist anhand der Werte an der Zellfläche  $i+\frac{1}{2}$  eine Auswahl infragekommender Schemata aufgelistet. Das Viskositätsniveau ist dabei zu Vergleichszwecken mit angegeben, wobei nur der in Klammern stehende Anteil berücksichtigt wurde.

Für das erste Ordnung genaue, klassische Upwind-Schema gilt:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a=1, \quad b=c=d=0 & \quad \rightarrow \quad \phi_{\ell, i+\frac{1}{2}} = \phi_i, \\ & \quad \phi_{r, i+\frac{1}{2}} = \phi_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.17a)$$

Zweiter Ordnung genaue Schemata lassen sich konstruieren mit:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a=\frac{3}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}, \quad c=d=0 & \quad \rightarrow \quad \phi_{\ell, i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3\phi_i - \phi_{i-1}), \\ & \quad \phi_{r, i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3\phi_{i+1} - \phi_{i+2}). \end{aligned} \quad (3.17b)$$

Dies ist ein vollständig einseitiges Upwind-Schema mit  $VN = 6$ .

$$\bullet \quad a=1, \quad b=\frac{1}{4}, \quad c=\frac{1}{4}, \quad d=0 \quad \longrightarrow \quad \phi_{\ell, i+h} = \phi_i + \frac{1}{4}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}), \quad (3.17c)$$

$$\phi_{r, i+h} = \phi_{i+1} + \frac{1}{4}(\phi_i - \phi_{i+2}).$$

dies ist ein sog. Upwind-biased Schema mit  $VN=3$ .

$$\bullet \quad a=c=\frac{1}{2}, \quad b=d=0 \quad \longrightarrow \quad \phi_{\ell, i+h} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}), \quad (3.17d)$$

$$\phi_{r, i+h} = \phi_{\ell, i+h}.$$

Dies ist das bekannte Zentrale-Differenzen Schema, das im Jameson-Verfahren [62] benutzt wird. Wie bereits in Kap. 3.1 erwähnt, ist das Verfahren dispersiv (der Koeffizient vor  $\phi_{\xi\xi\xi}$  ist  $\neq 0$ ) und besitzt keine natürliche Dissipation ( $VN=0$ ). Es ist daher instabil. Die Entkopplung der geraden von den ungeraden Punkten ist ersichtlich bei Betrachtung der Differenzen  $\Delta\phi_{\ell}$  bzw.  $\Delta\phi_r$ . So ist  $\Delta\phi_{\ell, i} = \Delta\phi_{r, i} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})$ . Die von Jameson eingeführte Addition künstlicher Dämpfungsterme durch vierte Differenzen der Strömungsvariablen erzeugt die zur Stabilität notwendige Dissipation, die den Upwind-Verfahren aufgrund  $VN \neq 0$  bereits natürlich und vor allem auch physikalisch fundiert innewohnt.

Eine Erhöhung auf dritte Ordnung läßt sich erzielen mit:

$$\bullet \quad a=\frac{5}{6}, \quad b=\frac{1}{6}, \quad c=\frac{2}{6}, \quad d=0 \quad \longrightarrow \quad \phi_{\ell, i+h} = \frac{1}{6}(5\phi_i - \phi_{i-1} + 2\phi_{i+1}), \quad (3.17e)$$

$$\phi_{r, i+h} = \frac{1}{6}(5\phi_{i+1} - \phi_{i+2} + 2\phi_i).$$

Dies ist ein sog. Upwind-biased Schema dritter Ordnung mit einem Viskositätsniveau  $VN=2$ .

Ein vierter Ordnung genaues Verfahren ergäbe sich mit:

$$\bullet \quad a=c=\frac{7}{12}, \quad b=d=\frac{1}{12} \quad \longrightarrow \quad \phi_{\ell, i+h} = \frac{1}{12}(7(\phi_i + \phi_{i+1}) - \phi_{i-1} - \phi_{i+2}), \quad (3.17f)$$

$$\phi_{r, i+h} = \phi_{\ell, i+h}.$$

Dieses Zentrale-Differenzen Schema ist ebenfalls instabil.

In der vorliegenden Arbeit wird das von Eberle in [110] vorgestellte sog. Low-Dispersion Schema verwendet. Es ist verwandt mit dem Upwind-biased Schema dritter Ordnung und trägt seinen Namen aufgrund der Tatsache, daß der Koeffizient vor der dritten Ableitung ( $c+a+7(d+b)$ ) unter allen Strömungsbedingungen, also auch in Gebieten stärkerer Gradienten, gleich Null bleibt, so daß das Verfahren keine dispersiven Anteile aus dem Term dritter Ordnung enthält. Es kann durch folgende Forderungen an die Koeffizienten in Gl.(3.16) konstruiert werden:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & a+b+c+d = 1 \quad , \\ & c-a-3(d-b) = -A \quad A \geq 0 \quad , \\ & c+a+7(d+b) = 0 \quad , \\ & c-a+15(d-b) = B \quad B > 0 \quad . \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Parameter zu:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{24}(14+15A+3B) \quad , \\ b &= -\frac{1}{24}(2+A+B) \quad , \\ c &= \frac{1}{24}(14-15A-3B) \quad , \\ d &= \frac{1}{24}(-2+A+B) \quad . \end{aligned} \tag{3.17g}$$

Die Zustände rechts und links der Zellfläche ergeben sich als Funktionen von A und B durch Einsetzen dieser Parameter in Gl.(3.14a) bzw. (3.14b).

In Strömungsgebieten mit geringen Gradienten ist  $A=A_0=0$  und  $B=B_0$ . Das Verfahren ist dann 3.Ordnung genau und das Stabilitätsmaß wird durch den Wert für  $B_0$  bestimmt (da  $VN=B$ ).  $B_0$  kann von außen vorgegeben werden, so daß ein Einfluß auf das Dissipationsverhalten des Verfahrens möglich ist, wenn dies gewünscht wird. Für  $B=2$  entspricht das Schema dem Upwind-biased Verfahren 3.Ordnung (3.17e). Unterschiede ergeben sich dann nur in Bereichen größerer Strömungsgradienten, wo  $A \neq 0$  ist. Die dann kontinuierlich einsetzende Flußlimitierung, die im nächsten Kapitel beschrieben ist, führt bei dem Upwind-biased Verfahren zum Anstieg des Dispersionsanteils.

Der Vergleich beider Schemata zeigte für die in dieser Arbeit behandelten Anwendungsfälle leichte Vorteile zugunsten des Low-Dispersion Schemas, so daß dieses für die im Ergebnisteil beschriebenen Berechnungen verwendet wurde. Der Wert für  $B_0$  war dabei so gewählt, daß B in "ruhigen" Strömungsgebieten etwa 2 betrug.

Durch die Bestimmung der  $\phi_l$  und  $\phi_r$  an den Zellfläche m.H. einer der oben beschriebenen Upwind-Schemata ist das Riemann-Problem definiert. Seine Lösung entsprechend Kap. 3.2.2 liefert über Gl.(3.13) die  $\phi_m$ ,  $m = 0, 1, 2$ , und daraus mittels Gl.(3.11) und (3.12) die gesuchten charakteristisch gemittelten konservativen Strömungsgrößen  $\phi$ , aus denen sich dann letztlich die Flüsse durch diese Zellfläche berechnen lassen.

Die Flußdifferenzen werden dabei nur noch zentral gebildet, der Upwind-Charakter des Verfahrens resultiert aus der Art der Bildung der Strömungsgrößen.

Die explizite numerische Approximation der Ausgangsgleichung (3.1a) lautet also für das i-te Volumenelement unter Verwendung einer 1.Ordnung genauen Vorwärtsdifferenz in der Zeit:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} [(E(\phi)_{i+h}^n - E(\phi)_{i-h}^n)] \quad (3.18)$$

und damit das komplette explizite Differenzenschema für Gl.(2.36) in allen drei Dimensionen unter Berücksichtigung von  $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{\phi}_{i,j,k}^n - \Delta \tau [ & (\bar{E}(\phi)_{i+h,j,k}^n - \bar{E}(\phi)_{i-h,j,k}^n) + (\bar{F}(\phi)_{i,j+h,k}^n - \bar{F}(\phi)_{i,j-h,k}^n) + \\ & (\bar{G}(\phi)_{i,j,k+h}^n - \bar{G}(\phi)_{i,j,k-h}^n) - \bar{K}_{i,j,k} ] \quad (3.19) \end{aligned}$$

### 3.2.4 Flußlimiting

Bei allen Verfahren höherer Ordnung ist es erforderlich, zur Vermeidung numerischer Oszillationen im Bereich von Diskontinuitäten, z.B. am Stoß, eine lokale Reduzierung der Genauigkeitsordnung herbeizuführen, um sicherzustellen, daß die Punkte vor dem Stoß keine Informationen aus dem Bereich hinter dem Stoß erhalten. Die Erzeugung eines monotonen Stoßprofils ist daher nur bei Schemata 1. Ordnung möglich.

Die lokale Absenkung der Genauigkeitsordnung erfolgt m.H. eines sog. Limiters. Dieser besteht aus zwei Komponenten, einer Sensorfunktion zum Aufspüren von Diskontinuitäten im Strömungsfeld und einem "Regler", der die eigentliche Reduzierung der Verfahrensgenauigkeit vornimmt. Dies geschieht in der Regel nicht impulsartig, wie z.B. noch mit dem min-mod-Limiter aus [82], sondern kontinuierlich, wie z.B. bei den Limitern nach Eberle [110], Koren [111] oder van Albada [112,82]. Die beiden letztgenannten bieten den Vorteil, daß sie stetig differenzierbar sind. Der van-Albada-Limiter wurde von Eberle weiterentwickelt [107,108].

Bei den kontinuierlichen Limitern erfolgt der Übergang zu niedrigerer Ordnung bis zu einer gewissen Grenze zunächst proportional zu dem "Ausschlag" des Sensors, dessen Empfindlichkeit in der Regel einstellbar ist. Erst nach Erreichen dieser Grenze ist das verwendete Schema vollständig einseitig.

Der von Eberle für das Upwind-biased Verfahren 3. Ordnung verwendete Limiter arbeitet nach folgendem Prinzip: Das aktuelle Schema wird als Überlagerung der Schemata (3.17a), (3.17b) und (3.17e) aufgebaut, die jeweils mit einem Faktor, der Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, versehen sind. Im Normalfall beträgt nur der Faktor vor dem Schema 3. Ordnung eins, während die beiden anderen null sind. Werden Strömungsgradienten entdeckt, so reduziert sich der erste Faktor in dem Maße, wie es dem von der Sensorfunktion gelieferten Wert entspricht. Gleichmaßen steigen die beiden anderen Faktoren an. In dieser Phase besteht also eine Mischform zwischen den beteiligten Schemata. Erst bei sehr starken Gradienten, wie z.B. am Stoß, ist der Faktor vor dem dritter Ordnung Schema null und der vor dem zweiter bzw. erster Ordnung Schema eins, wobei in transsonischen Berechnungsfällen mit nicht allzu starken Stößen das Schema 2. Ordnung ausreichend ist.

Bei Verwendung des Low-Dispersion Schemas ist eine Überlagerung mit den "klassischen" einseitigen Upwind-Formulierungen 1. bzw. 2. Ordnung nicht möglich, da diese nicht die Bedingung eines verschwindenden Dispersionsfaktors erfüllen  $(c-a+7(d+b) \neq 0)$ . Statt dessen geht man so vor, daß ausgehend von der Forderung am Stoß  $(c-d=0)$  die Grenzwerte für A und B bestimmt werden [110]. Sie betragen:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{2}{3} \quad , \\ B_s &= \frac{4}{3} \quad , \end{aligned} \tag{3.20}$$

wobei der Index "s" kennzeichnet, daß es sich um die Werte am Stoß handelt. Die Regelung der Verfahrensgenauigkeit erfolgt nun entsprechend der Stärke der festgestellten Strömungsgradienten zwischen den Grenzen  $A_0 = 0$  und  $A_s$  bzw. zwischen  $B_0$  und  $B_s$ .

Eine geeignete Größe zur Erfassung von Diskontinuitäten ist die Machzahl, da in ihr alle Strömungsgrößen enthalten sind.

Dazu wird an der betrachteten Zellfläche die dritte Ableitung des Quadrates der Machzahl gebildet gemäß:

$$Ma_{\xi\xi\xi_{i+\frac{1}{2}}}^2 = Ma_{i+2}^2 - Ma_{i-1}^2 - 3(Ma_{i+1}^2 - Ma_i^2) \quad . \tag{3.21}$$

Dies führt dann zu der Sensorfunktion

$$A = \min (A_S, \alpha |Ma_{\xi\xi\xi_{i+\frac{1}{2}}}^2|) \quad , \quad (3.22)$$

aus der sich der Koeffizient des Dissipationstermes dann errechnet zu:

$$B = B_0(1 - \frac{3}{2}A) + 2A \quad . \quad (3.23)$$

Der Wert  $\alpha$  steuert die Empfindlichkeit des Sensors und  $B_0$  das Stabilitätsmaß. Beides sind Konstanten, die von außen vorgegeben werden. Sie brauchen jedoch für alle durchgeführten Berechnungsfälle nicht verändert zu werden.

### 3.2.5 CFL-Bedingung und lokaler Zeitschritt

Eine der wichtigsten Stabilitätskriterien für hyperbolische Differentialgleichungen ist die Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)-Bedingung. Sie sagt aus, daß ein explizites numerisches Verfahren nur dann stabil ist, wenn das numerische Abhängigkeitsgebiet eines Punktes P das analytische Abhängigkeitsgebiet vollständig einschließt.

Bild 3.2-3 soll diesen Zusammenhang verdeutlichen. Die analytische Lösung in P ist abhängig von dem schraffierten Bereich, der durch die Charakteristiken begrenzt wird. Ihre Steigungen sind für die eindimensionale Gleichung (3.2) durch die Kehrwerte der Eigenwerte  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  gegeben. Das numerische Abhängigkeitsgebiet ist durch das Dreieck SPT definiert, dessen Grenzen durch die Verbindungslinien der "Netzkpunkte"  $i+1, n$  und  $i-1, n$  mit  $i, n+1$  gebildet werden. Die CFL-Bedingung fordert, daß die Steigung dieser Linien flacher als die der Charakteristiken ist.

Dies ist so lange gewährleistet, solange der aktuelle Zeitschritt  $\Delta\tau$  kleiner oder gleich der maximal möglichen Schrittweite  $\Delta\tau_{max}$  ist, die sich ergibt, wenn man die Charakteristik des betragsmäßig größten Eigenwertes in der dargestellten Form durch die "Netzkpunkte"  $i+1, n$  und  $i-1, n$  aufträgt.

Eine physikalische Interpretation besagt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Eigenwerte die kontravarianten Störungsausbreitungsgeschwindigkeiten darstellen, daß der gewählte Zeitschritt  $\Delta\tau$  kleiner oder gleich der Zeit sein muß, die eine Störung benötigt, um sich von einem Netzkpunkt zum nächsten auszubreiten.

Die CFL-Bedingung lautet demnach:

$$\text{CFL} := \lambda \cdot \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \leq 1 \quad , \quad (3.24)$$

wobei CFL die aktuelle CFL-Zahl bezeichnet.

Der theoretisch maximal mögliche Zeitschritt errechnet sich daraus zu:

$$\Delta \tau_{\max \xi} = \frac{\Delta \xi}{\max |\lambda_m|} \quad , \quad m = 0, 1, 2 \quad . \quad (3.25)$$

Unter Berücksichtigung der beiden anderen Dimensionen und der Tatsache, daß  $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$  ist, beträgt der aktuelle Zeitschritt:

$$\Delta \tau = \frac{\text{CFL}}{\max(|\lambda_m^\xi|, |\lambda_m^\eta|, |\lambda_m^\zeta|)} \quad , \quad m = 0, 1, 2 \quad . \quad (3.26)$$

Der Wert für CFL wird vorgegeben. Eine Obergrenze von 1 ist jedoch nur für eindimensionale Probleme zutreffend, für mehrdimensionale Fälle sind wesentlich kleinere Werte nötig. Faktisch muß der für das aktuelle Verfahren maximal mögliche Wert durch Ausprobieren gefunden werden.

Für die in der vorliegenden Arbeit mit dem expliziten Verfahren behandelte Berechnung der Hubschrauberrotorströmung lag die maximale CFL-Zahl für das verwendete Verfahren bei etwa 0.15 (vgl. Kap. 5.4.2).

Für instationäre Probleme, bei denen Zeitechtheit gefordert ist, muß Gl. (3.26) zunächst für alle Kontrollvolumina berechnet werden, um so den kleinsten Zeitschritt des Zeithniveaus  $\tau^n$  herauszufinden, der von der lokalen Störungsausbreitungsgeschwindigkeit abhängig ist. Dieser ist dann für die zeitliche Integration auf  $\tau^{n+1}$  global in allen Zellen gleich.

Bei stationären Problemen, bei denen Zeitechtheit keine Rolle spielt, kann hingegen für jede Zelle nach Gl. (3.26) ein individueller Zeitschritt  $\Delta \tau_{i,j,k}$  berechnet werden. Diese Methode des sog. "local time stepping" bietet den Vorteil einer erheblich schnelleren Konvergenz und wurde auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

### 3.3 Implizites Lösungsverfahren

Wie in Kap. 3.2.5 beschrieben, unterliegen explizite Verfahren der sog. CFL-Restriktion, die die Zeitschrittweite limitiert. Daraus resultiert eine entsprechend hohe Iterationszahl, bis der gewünschte konvergente Zustand erreicht ist.

Demgegenüber bieten implizite Lösungsverfahren den Vorteil, daß eine solche Bedingung zur Erhaltung der Stabilität im Prinzip nicht existiert. Gewisse Approximationen, die bei einigen Verfahren zur Vereinfachung des Lösungsalgorithmus durchgeführt wurden, können zwar ebenfalls eine Begrenzung der Zeitschrittweite erforderlich machen, diese ist jedoch wesentlich weniger einschränkend als bei den expliziten Verfahren.

Der Nachteil einer CFL-Restriktion ist besonders gravierend bei der Berechnung instationärer Probleme. In diesem Fall muß ein globaler Zeitschritt verwendet werden, der durch die kritischste Zelle bestimmt wird. In der vorliegenden Arbeit wurden zwar nur stationäre Berechnungen durchgeführt, eine Erweiterung auf den instationären Vorwärtsflug ist jedoch für die nächste Zukunft geplant, so daß spätestens dann die Verwendung eines impliziten Verfahrens unumgänglich ist.

Die Konvergenzrate impliziter Verfahren kann je nach Problemstellung um durchaus ein bis zwei Größenordnungen höher liegen als bei expliziten Algorithmen. Zwar hat man einen größeren Aufwand pro Iterationsschritt in Kauf zu nehmen, jedoch lassen sich damit insgesamt immer noch beträchtliche Einsparungen in der Gesamtrechenzeit erzielen.

Vergleiche zwischen einem expliziten und einem impliziten Lösungsalgorithmus für stationäre zweidimensionale Fälle, die z.B. von Rai [113] oder Lerat et al. [114] durchgeführt wurden, lassen Beschleunigungen um den Faktor 5 herum realistisch erscheinen. Höhere Werte sind bei instationären Berechnungsfällen möglich. So hat z.B. Brenneis [66] Beschleunigungen von weit mehr als 10 bei der Berechnung nickender Profile erreichen können und Lerat et al. [114] erzielten bei instationären Machzahlschwingungen einen Faktor 7.

Im dreidimensionalen Fall ist der Rechenzeitgewinn etwas geringer, da der Aufwand pro Zeitschritt bei den impliziten Verfahren überproportional ansteigt (vgl. Kap. 5.4.2).

#### 3.3.1 Beschreibung der gebräuchlichsten Verfahren

Die Mehrheit der zur Zeit im Einsatz befindlichen impliziten Methoden läßt

sich grob in drei Kategorien einteilen: Es sind zum einen die sogenannten Mehrschrittverfahren mit impliziter Residuen-Glättung (z.B. MacCormack [115], der sein explizites Predictor-Corrector Verfahren weiterentwickelt hat, oder z.B. Jameson & Baker [116], die das bekannte Runge-Kutta-Vierschrittverfahren verwenden), zum zweiten die Approximativen Faktorisierungsschemen (AF) (z.B. Beam & Warming [117], Briley & McDonald [118]) und schließlich die iterativen Relaxationsverfahren (z.B. Brenneis [66], Chakravarthy [119,120]), zu denen auch das in dieser Arbeit verwendete Verfahren gehört.

Die beiden letzten Methoden haben die größte Verbreitung gefunden und sollen im folgenden kurz beschrieben werden.

Ausgangspunkt ist die Verwendung von Rückwärtsdifferenzen für die Approximation der zeitlichen Ableitung in den instationären Euler-Gleichungen. Eine 1. Ordnung genaue Formulierung lautet gegenüber der expliziten Schreibweise:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = -(E_\xi^{n+1} + F_\eta^{n+1} + G_\zeta^{n+1}) \quad (3.27)$$

Wegen der nichtlinearen Abhängigkeit der Flußvektoren von den Strömungsgrößen der linken Seite erfolgt eine Linearisierung mittels einer Taylorentwicklung zu:

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= E^n + \left. \frac{\partial E}{\partial \phi} \right|_n (\phi^{n+1} - \phi^n) + O(\Delta t^2) \quad , \\ F^{n+1} &= F^n + \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_n (\phi^{n+1} - \phi^n) + O(\Delta t^2) \quad , \\ G^{n+1} &= G^n + \left. \frac{\partial G}{\partial \phi} \right|_n (\phi^{n+1} - \phi^n) + O(\Delta t^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nach Einführung der Beziehungen

$$\begin{aligned} A^n &= \left. \frac{\partial E}{\partial \phi} \right|_n \quad , \quad B^n = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_n \quad , \quad C^n = \left. \frac{\partial G}{\partial \phi} \right|_n \quad , \\ \Delta \phi^{n+1} &= \phi^{n+1} - \phi^n \end{aligned} \quad (3.29)$$

für die Jacobischen Matrizen bzw. für die Rückwärtsdifferenz des Lösungsvektors ergibt sich aus Gl.(3.27):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \phi^{n+1}}{\Delta t} + (A^n \cdot \Delta \phi^{n+1})_\xi + (B^n \cdot \Delta \phi^{n+1})_\eta + (C^n \cdot \Delta \phi^{n+1})_\zeta &= \\ &= -(E_\xi^n + F_\eta^n + G_\zeta^n) = \text{RHS} \quad , \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei die rechte Seite (RHS) den Flußdifferenzen aus der expliziten Formulierung entspricht und daher auch als der explizite Anteil bezeichnet wird. Dieselbe Beziehung in einer vereinfachten Schreibweise liefert mit Einführung der Einheitsmatrix I den Ausdruck:

$$\left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \xi} A^n + \frac{\partial}{\partial \eta} B^n + \frac{\partial}{\partial \zeta} C^n \right) \cdot \Delta \phi^{n+1} = \text{RHS} \quad (3.31)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich die räumlichen Differenzen des Lösungsvektors  $\left( \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \phi^{n+1} \right)_{i,j,k}$  etc. durch eine lineare Funktionen der Strömungswerte aus den benachbarten Zellen beschreiben lassen, ist mit Gl.(3.31) formell ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A \cdot \phi = b \quad (3.32)$$

zu lösen.

A ist dabei eine  $n \times n$  Matrix ( $n$  = Anzahl der Volumenelemente  $\times$  Anzahl der abhängigen Variablen), die infolge der Mehrdimensionalität der untersuchten Probleme über eine große Bandbreite verfügt. Ihre Invertierung gestaltet sich daher äußerst schwierig.

Einen Lösungsansatz stellt die Faktorisierung der linken Seite dar, d.h. die geeignete Aufspaltung von A in mehrere Teilmatrizen.

Entsprechend der Art der Faktorisierung unterscheidet man zwei gängige Vorgehensweisen:

Im ersten Fall, der auf die Verfahren von Beam & Warming [117] bzw. von Briley & McDonald [118] zurückgeht, wird nach Verwendung zentraler Differenzen auf der LHS eine Faktorisierung in die drei Raumrichtungen vollzogen. Gl. (3.31) wird dabei überführt in

$$\left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \xi} A^n \right) \left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \eta} B^n \right) \left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} C^n \right) \Delta \phi^{n+1} = \text{RHS} \quad (3.33)$$

Die Lösung erhält man nun schrittweise wie folgt:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Schritt :} & \quad \left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \xi} A^n \right) \Delta \phi^{* n+1} = \text{RHS} \\ 2. \text{ Schritt :} & \quad \left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \eta} B^n \right) \Delta \phi^{** n+1} = \Delta \phi^{* n+1} \\ 3. \text{ Schritt :} & \quad \left( \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} C^n \right) \Delta \phi^{n+1} = \Delta \phi^{** n+1} \\ 4. \text{ Schritt :} & \quad \phi^{n+1} = \phi^n + \Delta \phi^{n+1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dadurch wird das dreidimensionale Problem auf drei eindimensionale Gleichungen reduziert, wobei die Matrizen der linken Seiten bei ausschließlicher Verwendung der beiden Nachbarpunkte zur Bildung der räumlichen Ableitungen nun blocktridiagonal besetzt sind, was deren Invertierung erheblich vereinfacht. Verfahren dieser Art, die unter dem Namen ADI (Alternate-Direction-Implicit) bekannt sind, wurden zuerst von Steger [121] bzw. Pulliam & Steger [122] auf die Euler-Gleichungen angewendet. Pulliam & Chausee [123] entwickelten das Verfahren weiter, indem sie eine Diagonalisierung der Jacobimatrizen durchführten. In neuerer Zeit finden sich ADI-Verfahren z.B. bei Jameson & Yoon [124] für 2D-Fälle, sowie z.B. bei Bober et al. [51] und Barton et al. [52,53], die die diagonalisierte ADI-Version für 3D-Propellerumströmungen verwenden. Sankar et al. [33,34] verwenden die ADI-Methode innerhalb eines gemischten implizit-expliziten (hybriden) Lösungsalgorithmus für 3D-Rotorströmungen.

Der Nachteil der ADI-Verfahren besteht in erheblichen Stabilitätsproblemen im dreidimensionalen Fall, die auch für stationäre Anwendungen eine drastische Reduzierung des Zeitschrittes verlangen. Ungünstig wirkt sich weiterhin die Verwendung zentraler räumlicher Differenzen aus, was bekanntermaßen die Einführung von Dämpfungsgliedern zur Vermeidung numerischer Oszillationen und Instabilitäten besonders im Stoßbereich erfordert.

Dies läßt sich vermeiden, wenn man sich der in Kap. 3.1 beschriebenen Upwind-Verfahren bedient. Sie ermöglichen die Konstruktion robusterer Algorithmen mit erweitertem Stabilitätsbereich. Wie bereits in Kap. 3.1 erwähnt, muß sich bei diesen die Richtung der Differenzenbildung an der Richtung der charakteristischen Wellenausbreitung, die durch die Vorzeichen der lokalen Eigenwerte der Jacobimatrix aus Gl.(3.29) repräsentiert werden, orientieren.

Eines der bereits genannten Verfahren, das dieser Forderung Rechnung trägt, ist das sog. Flux-Vector-Splitting (FVS). Dabei werden die Flüsse  $E$ ,  $F$  und  $G$  in jeweils zwei Teilflüsse aufgespalten, die den positiven bzw. den negativen Eigenvektoren zugeordnet sind, und für die dann die passende Upwind-Richtung individuell ausgewählt wird.

Eine Vielzahl von Methoden und Variationen sind inzwischen gebräuchlich, wobei die Verfahren nach Steger & Warming [63] und van Leer [81] die bekanntesten sind.

Die FVS-Technik nach Steger & Warming sei andeutungsweise hier kurz skizziert, da sie im impliziten Teil des in der vorliegenden Arbeit verwendeten Lösungsalgorithmusses Anwendung findet.

Die Darstellung erfolgt nur anhand der  $\xi$  - Richtung, da die beiden anderen Raumrichtungen analog behandelt werden. Außerdem ist die zeitliche Indizierung weggelassen, solange Mißverständnisse ausgeschlossen werden können.

Mit Hilfe der Beziehung

$$A = T \Lambda T^{-1} \quad (3.35)$$

läßt sich die Jacobimatrix diagonalisieren. Es bezeichnen  $T$ ,  $T^{-1}$  die Matrizen der rechten bzw. linken Eigenvektoren und  $\Lambda$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte. Das besagte Splitting geschieht nun dadurch, daß die Eigenwerte von  $A$  in solche mit positivem und solche mit negativem Vorzeichen aufgeteilt werden

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i^+ + \lambda_i^- \\ \text{mit } \lambda_i^+ &= \frac{\lambda_i + |\lambda_i|}{2} \\ \text{und } \lambda_i^- &= \frac{\lambda_i - |\lambda_i|}{2} \quad , \quad i = 0, 1, 2 \quad , \end{aligned} \quad (3.36)$$

so daß sich bilden läßt:

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^- \quad (3.37)$$

Dies eingesetzt in Gl.(3.35) liefert die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= T \Lambda^+ T^{-1} \quad , \\ \Lambda^- &= T \Lambda^- T^{-1} \quad , \end{aligned} \quad (3.38)$$

aus denen sich dann die gesplitteten Flüsse berechnen lassen zu

$$\begin{aligned} E^+ &= \Lambda^+ \phi \quad , \\ E^- &= \Lambda^- \phi \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Bei den Größen  $\Lambda^+$  und  $\Lambda^-$  die gemäß Gl.(3.38) oder m.H. eines anderen Splittingverfahrens erzeugt wurden, spricht man von den sogenannten "approximativen" Jacobimatrizen. Die "echten" Jacobimatrizen ergeben sich analog Gl. (3.29) aus der Ableitung der gesplitteten Flußvektoren zu:

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \frac{\partial E^+}{\partial \phi} \quad , \\ \Lambda^- &= \frac{\partial E^-}{\partial \phi} \quad . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nach [63] sind diese beiden Typen im allgemeinen nicht identisch. Die Anwendung der approximativen Jacobians statt der echten findet aber vermehrt Anwendung, da ihre Berechnung weniger zeitaufwendig ist. Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß ihr Einsatz in AF-Schema zu Beeinträchtigungen der Stabilität führt, die eine Reduktion des maximal zulässigen Zeitschrittes erzwingen [82,125].

Setzt man Gl.(3.40) in Gl.(3.31) ein, so erhält man die Beziehung:

$$\left( \frac{I}{\Delta t} + \delta_{\xi}^{-} A^{+n} + \delta_{\xi}^{+} A^{-n} + \delta_{\eta}^{-} B^{+n} + \delta_{\eta}^{+} B^{-n} + \delta_{\zeta}^{-} C^{+n} + \delta_{\zeta}^{+} C^{-n} \right) \Delta \phi^{n+1} = \text{RHS} \quad (3.41)$$

Hierin entsprechen die Bezeichnungen  $\delta_{\xi}^{-}$ ,  $\delta_{\xi}^{+}$ , etc. Differenzenoperatoren mit Rückwärts-, bzw. Vorwärtscharakter, so wie es der charakteristischen Signal- ausbreitung entspricht.

Das FVS führt somit wiederum auf ein LGS der Form (3.32), für deren Lösung sich Relaxations- oder Faktorisierungsschemata eignen.

Bei der approximativen Faktorisierung mittels FVS erhält man die Gleichung:

$$\left( \frac{I}{\Delta t} + \delta_{\xi}^{-} A^{+n} + \delta_{\eta}^{-} B^{+n} + \delta_{\zeta}^{-} C^{+n} \right) \left( \frac{I}{\Delta t} + \delta_{\xi}^{+} A^{-n} + \delta_{\eta}^{+} B^{-n} + \delta_{\zeta}^{+} C^{-n} \right) \Delta \phi^{n+1} = \text{RHS} \quad (3.42)$$

die analog zu (4.8) wiederum schrittweise gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Schritt : } & \left( \frac{I}{\Delta t} + \delta_{\xi}^{-} A^{+n} + \delta_{\eta}^{-} B^{+n} + \delta_{\zeta}^{-} C^{+n} \right) \Delta \phi^{* n+1} = \text{RHS} \\ 2. \text{ Schritt : } & \left( \frac{I}{\Delta t} + \delta_{\xi}^{+} A^{-n} + \delta_{\eta}^{+} B^{-n} + \delta_{\zeta}^{+} C^{-n} \right) \Delta \phi^{n+1} = \Delta \phi^{* n+1} \\ 3. \text{ Schritt : } & \phi^{n+1} = \phi^n + \Delta \phi^{n+1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Durch die Verwendung reiner Upwind-Differenzen gelingt es auf diese Weise, je eine obere und eine untere Blockdreiecksmatrix (LU) zu schaffen, die sofort aufgelöst werden können.

Die Vorteile dieser Methode gegenüber den räumlich faktorisierten ADI-Verfahren liegen in geringerem Rechenaufwand, geringerem Speicherplatzbedarf, einer unbegrenzten Stabilität auch für dreidimensionale Anwendungen und in der Vermeidung der Addition künstlicher Viskositätsterme.

Außer in der grundlegenden Arbeit von Steger & Warming [63] finden sich Anwendungen in ähnlicher Form auch bei Belk et al. [126] und Whitfield et al.

[50] unter dem Namen "Two-Pass-Algorithm", bei letzterem für dreidimensionale Propfan-Berechnungen.

Anderson et al. [82], Thomas et al. [127] und von Lavante et al. [128] haben das FVS mit einem ADI-Verfahren gekoppelt, ohne damit jedoch deren gravierenden Nachteile signifikant schmälern zu können. Immerhin konnte auf die Einführung von Dämpfungsgliedern verzichtet, sowie eine etwas bessere Stoßauflösung erreicht werden.

Eine der "Faktorisierung mittels FVS" verwandte Form stellen die unter dem Namen "Approximative LU-Faktorisierung" bekannten Verfahren dar, deren Ausgangspunkt die Arbeiten von Jameson & Turkel [129] bilden, und die z.B. bei Yoon [130] bzw. bei Jameson & Yoon [131] Verwendung finden.

Sehr gute Ergebnisse für dreidimensionale Verdichterberechnungen konnten von Caughey und Mitarbeitern [54,132] erzielt werden, die das LU-Verfahren auf rotierende Koordinatensysteme erweiterten.

Der Unterschied zu den zuvor beschriebenen Schemen liegt in einer anderen Splittingmethode. Bei dem von Jameson & Turkel vorgeschlagenen Verfahren werden approximative Jacobimatrizen unter Verwendung der Spektralradien verwendet. So gilt dann im Gegensatz zu Gl.(3.38):

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{A + |A|I}{2} \quad , \\ A^- &= \frac{A - |A|I}{2} \quad , \end{aligned} \tag{3.44}$$

mit  $|A| = \max(|\lambda_i|)$ ,  $i = 0,1,2$  ,

B, C entsprechend .

Wegen der Beibehaltung zentraler Differenzen auf der RHS der linearisierten impliziten Euler-Gleichungen müssen allerdings auch hier künstliche Dissipationsterme eingeführt werden, die bei der Faktorisierung der LHS zusätzlich mit berücksichtigt werden müssen.

Da es sich weder bei der räumlichen noch bei der eigenwertorientierten Faktorisierung um eine mathematisch exakte Aufspaltung handelt, sondern nur um eine Näherung, die mit einem Faktorisierungsfehler der Ordnung  $O(\Delta\tau^3)$  (bei ADI), bzw.  $O(\Delta\tau^2)$  (bei LU) behaftet ist, ist der Zeitschritt aus Konvergenzgründen beschränkt [66,82,113,124]. Außerdem ist der Wert des Zeitschrittes, bei dem die optimale Konvergenz erreicht wird, nicht a priori zu bestimmen und kann von Anwendungsfall zu Anwendungsfall variieren. Für ihre FVS-ADI-

Verfahren fanden Anderson [82] und Thomas [127] für den zweidimensionalen Fall beispielsweise eine maximale CFL-Zahl von 5-30, die jedoch nur bei Verwendung der echten Jacobimatrizen erreicht werden konnte (s. auch [128]). Bei dreidimensionalen Anwendungen reduziert sich dieser Wert noch einmal drastisch. Der Vorteil gegenüber den weniger aufwendigen expliziten Verfahren ist für 3-D Berechnungen damit praktisch nicht mehr gegeben. Daher blieben die ADI-Verfahren in der Praxis weitgehend auf 2D-Anwendungen begrenzt.

Etwas besser sieht die Situation bei den LU-Verfahren aus, da die Zeitschrittbeschränkung hier nicht ganz so gravierend ist. Immerhin konnten Whitfield et al. [50] CFL-Zahlen im Bereich von 20 und mehr für dreidimensionale Propfan-Anwendungen erzielen. Sinnvolle Werte liegen bei 2D- bzw. 3D-Berechnungen aber eher in der Größenordnung von 5-15 [54,126,130].

Neben den AF-Verfahren gewinnen daher seit neuestem die sogenannten Relaxationsverfahren mehr und mehr an Bedeutung. Sowohl das Fehlen einer Zeitschrittbeschränkung als auch die hohe Konvergenzrate bei der Erzeugung zeit-asymptotischer stationärer Lösungen ist ein großer Vorteil dieser Verfahren [119,120,127].

Durch die Verwendung von Upwinddifferenzen 1. Ordnung für die räumlichen Ableitungen in Gl.(3.31) wird die Koeffizientenmatrix des zu lösenden linearen Gleichungssystems (3.32) streng diagonaldominant, weswegen sich die Anwendung eines klassischen Relaxationsverfahrens anbietet. Daß die Lösung dabei iterativ erfolgt, wird durch die bei sehr großen Zeitschritten erreichbare hohe Konvergenzgeschwindigkeit gegenüber den nicht-iterativen AF-Schemen, die dafür aber einer Zeitschrittbeschränkung unterliegen, ausgeglichen.

Ausgangspunkt ist wiederum Gl.(3.31), die durch ein geeignetes Flußsplitting in eine Form gemäß Gl.(3.41) überführt wird. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems erfolgt nun nicht mehr mit Hilfe einer Faktorisierung, sondern durch Anwendung eines Relaxationsverfahrens, z.B. durch eine Linien- oder Punktrelaxation in Form eines iterativen Gauß-Seidel- oder eines Jacobiverfahrens. Eine ausführliche Darstellung der in Frage kommenden Methoden findet sich bei Chakravarthy [119,120].

### 3.3.2 Darstellung des verwendeten impliziten Lösungsverfahrens

Aus den bereits genannten Gründen, von denen insbesondere die hohe Konvergenzrate bei großen Zeitschritten für zeitasymptotische, stationäre Lösungen den Ausschlag gab, wurde der Verwendung eines Relaxationsverfahrens der Vorzug

gegeben.

In der Praxis sehr gut bewährt hat sich der im Hause MBB entwickelte Punktrelaxationsalgorithmus [66,133,134], der für das vorliegende Verfahren übernommen wurde.

In den angegebenen Literaturstellen ist dieses Verfahren eingehend beschrieben worden, doch sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Elemente gestattet. Diese werden gleichzeitig um die Anteile ergänzt, die aus den Besonderheiten der Anpassung des Verfahrens auf die Rotorströmung resultieren.

Die transformierten Euler-Gleichungen für die Hubschrauberrotorströmung nach Gl.(2.36) lauten in impliziter Form:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta r} + \delta_\xi \bar{E}^{n+1} + \delta_\eta \bar{F}^{n+1} + \delta_\zeta \bar{G}^{n+1} - \bar{K}^{n+1} = 0 \quad (3.45)$$

wobei die räumlichen Differenzenoperatoren  $\delta_\xi$ ,  $\delta_\eta$ ,  $\delta_\zeta$  auf geeigneten Upwind-Schemata der gewünschten Genauigkeit beruhen. Der Vektor  $\bar{K}$  enthält die aus der Rotation des blattfesten Koordinatensystems resultierenden Kräfte, sowie bei Verwendung zylindrischer Ausgangskordinaten die Anteile aus der Ableitung der lokalen Basen (siehe Kap. 2).

Aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit der Flüsse vom Lösungsvektor ist eine direkte Lösung dieser Beziehung nicht möglich.

Einen Ansatz bietet das Newton-Verfahren, das bekanntermaßen für die Lösung allgemeiner, nichtlinearer Gleichungen der Form

$$N(q) = 0 \quad (3.46)$$

sehr gut geeignet ist. Das Ergebnis  $q$  von Gl.(3.46) wird iterativ ermittelt durch die Lösung einer Sequenz linearer Beziehungen der Form

$$\left. \frac{\partial N}{\partial q} \right|_\nu \cdot (q^{\nu+1} - q^\nu) = -N(q^\nu) \quad , \nu = 0, 1, \dots \quad (3.47)$$

unter Vorgabe einer Startlösung für  $q^{\nu=0}$ .

Auch Gleichung (3.45) läßt sich einer Idee von Chakravarthy [119,120] bzw. Jespersen & Pulliam [123] folgend, durch eine entsprechende Umformung in eine Newton-Methode überführen. Damit kann dann analog zu Gl.(3.47) der Lösungsvektor zum Zeitpunkt  $\nu+1$  iterativ ermittelt werden. Es gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} \phi^{n, \nu=0} &= \phi^n, \\ \lim_{\nu \gg 1} \phi^{n, \nu} &\rightarrow \phi^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die Umwandlung der Euler-Gleichungen in eine Newton-Methode erfolgt m.H. einer Linearisierung entsprechend Gl.(3.28) um den Subiterationszeitpunkt  $\nu$  und führt auf die Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \phi^{n, \nu+1}}{\Delta \tau} + \delta_\xi (A^{n, \nu} \Delta \phi^{n, \nu+1}) + \delta_\eta (B^{n, \nu} \Delta \phi^{n, \nu+1}) + \delta_\zeta (C^{n, \nu} \Delta \phi^{n, \nu+1}) - (S^{n, \nu} \Delta \phi^{n, \nu+1}) - \\ - \frac{\phi^n - \phi^{n, \nu}}{\Delta \tau} - (\delta_\xi \bar{E} + \delta_\eta \bar{F} + \delta_\zeta \bar{G} - \bar{K})^{n, \nu} \end{aligned} \quad (3.49)$$

oder in einer vereinfachten Schreibweise:

$$\begin{aligned} \left( \frac{I}{\Delta \tau} + \delta_\xi A^{n, \nu} + \delta_\eta B^{n, \nu} + \delta_\zeta C^{n, \nu} - S^{n, \nu} \right) (\phi^{n, \nu+1} - \phi^{n, \nu}) - \\ - \frac{\phi^n - \phi^{n, \nu}}{\Delta \tau} - (\delta_\xi \bar{E} + \delta_\eta \bar{F} + \delta_\zeta \bar{G} - \bar{K})^{n, \nu} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\text{mit } \Delta \phi^{n, \nu+1} = \phi^{n, \nu+1} - \phi^{n, \nu}.$$

Beginnend mit  $\nu = 0$  und daraus folgend  $\phi^{n, 0} = \phi^n$  iteriert man solange, bis  $\phi^{n, \nu+1} \approx \phi^{n, \nu}$  ist, und damit die LHS von Gl.(3.50) gegen Null geht. Auf der rechten Seite bleibt dann mit  $n, \nu \rightarrow n+1$  die bekannte implizite Ausgangsgleichung (3.45) zurück.

Auch der Kräftevektor  $\bar{K}^{n+1}$  wurde gemäß Gl.(3.28) linearisiert. Unter Ausnutzung der Homogenitätseigenschaft

$$\bar{K} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \phi} \phi, \quad (3.51)$$

die für die Formulierungen von  $\bar{K}$  nach Gl.(2.37) und (2.49) erfüllt ist, wurde die Jacobimatrix  $S^n$  mit

$$S^n = \frac{\partial \bar{K}^n}{\partial \phi} \quad (3.52)$$

in die LHS von Gl.(3.50) eingeführt. Die Homogenität vom Grade 1 des Kräftevektors läßt sich mit Hilfe der in Anhang A.4 aufgelisteten Matrix  $S^n$  am Beispiel von Gl.(2.49) leicht verifizieren.

Im Falle stationärer Berechnungen, wie sie für die vorliegende Arbeit von Interesse sind, ist Zeitkonsistenz nicht erforderlich. Die vereinfachte Newton-Methode schreibt sich dann zu:

$$\left(\frac{I}{\Delta\tau} + \delta_{\xi} A^n + \delta_{\eta} B^n + \delta_{\zeta} C^n - S^n\right) \Delta\phi^{n+1} = -(\delta_{\xi} \bar{E} + \delta_{\eta} \bar{F} + \delta_{\zeta} \bar{G} - \bar{K})^n \quad (3.53)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta\phi^{n+1}$$

und wird iterativ über den Index n zum konvergenten Endzustand geführt (vgl. auch [127,134]).

Für diesen Spezialfall der stationären Strömung entspricht Gl. (3.53) Gl. (3.31). Der Ausdruck "Newton-Methode" ist in beiden Fällen strenggenommen nur für  $\Delta\tau \rightarrow \infty$  gültig. Im Gegensatz zu den AF-Schemen, bei denen aus genannten Gründen der Zeitschritt begrenzt sein muß, ist man bei der Lösung der unfaktorierten Euler-Gleichungen jedoch in der Tat bestrebt, den Zeitschritt unendlich groß zu halten, um der optimalen quadratischen Konvergenz der Newton-Methode möglichst nahe zu kommen.

Wie aus Gl. (3.47) ersichtlich, verlangt das volle Newton-Verfahren die Verwendung der echten Jacobischen Ableitung  $\left(\frac{\partial N}{\partial q}\right)$  des Operators N der rechten Seite. Auf den Fall der nichtlinearen Euler-Gleichungen übertragen bedeutet dies, daß nicht nur die echten Jacobimatrizen  $A^{\pm}$ ,  $B^{\pm}$  und  $C^{\pm}$ , so wie sie sich aus Gl. (3.40) ergeben, zu verwendet wären, sondern daß zusätzlich die auf der RHS gewählte räumliche Diskretisierung auch auf der LHS angewendet werden müßte.

Die direkte Lösung der Newton-Methode ist in Anbetracht der Größe und Struktur der Koeffizientenmatrix der LHS jedoch ohnehin unpraktikabel. Daher ist man bestrebt, Vereinfachungen zu treffen. Hierzu gehört die Anwendung eines geeigneten Relaxationsverfahrens zur indirekten Lösung der Newton-Methode. Grundlage hierfür ist die Verwendung eines Upwindschemas 1. Ordnung auf der LHS. Dies führt zu einer Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix, was Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung eines einfachen Relaxationsverfahren ist.

Auch die Verwendung einer 2. bzw. einer gemischt 1./2. Ordnung genauen Upwind-Formulierung ist noch ein möglicher Kompromiß, der jedoch alles in allem keine nennenswerten Vorteile bringt, wie z.B. in Vergleichsrechnungen von Brenneis [66] gezeigt werden konnte. Außerdem ist die Diagonaldominanz dadurch nicht mehr gegeben (vgl. [127,135]).

Im vorliegenden Fall wurde ausschließlich mit einer 1. Ordnung genauen Upwind-Diskretisierung gerechnet, was für die interessierenden stationären Berech-

nungsfälle völlig ausreicht, wie auch z.B. von Degrez [135] bestätigt wird. Chakravarthy [120] vertritt die These, daß die Vereinfachung der räumlichen Diskretisierung auf der LHS nicht mehr von zusätzlichem Nachteil sei, da man sich durch die Anwendung eines Relaxationsverfahrens ohnehin von der echten Newton-Methode und dem Idealfall der quadratischen Konvergenz entferne. Überdies ist die Genauigkeit des Anteils auf der LHS vor allem bei stationären Berechnungen von untergeordneter Bedeutung, da im Falle der Annäherung an die konvergente Lösung der Lösungsvektor  $\Delta\phi \rightarrow 0$  geht und damit die gesamte LHS lediglich einen Iterationsoperator darstellt. Die Genauigkeit der Lösung wird dann einzig und allein durch die Ordnung der Diskretisierung der RHS bestimmt.

Als weitere Vereinfachung kann zur Einsparung von Rechenzeit die Verwendung approximativer Jacobimatrizen hinzukommen. Dabei ist das ganze Spektrum, wie es aus dem Bereich der AF-Schemen bekannt ist, unter Abwägung der damit verbundenen Nachteile denkbar. Jespersen & Pulliam [125] sprechen in diesem Zusammenhang dann von einer modifizierten Newton-Methode.

Für das vorliegende Verfahren wiesen Eberle [133] und Brenneis [66] jedoch nach, daß die Jacobimatrizen auf der LHS, die sich aus Gl.(3.38) berechnen, exakt den echten Jacobians entsprechen.

Mit Hilfe der gesplitteten Jacobimatrizen lassen sich die räumlichen Differenzen in den Gl.(3.49), (3.53) wie folgt bestimmen (die Indices j,k sind der Einfachheit halber weggelassen):

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}(A \cdot \Delta\phi)_i &= A_{i+1/2} \Delta\phi_{i+1/2} - A_{i-1/2} \Delta\phi_{i-1/2} \\ &= A_{i+1/2}^+ \Delta\phi_{i+1/2}^+ + A_{i+1/2}^- \Delta\phi_{i+1/2}^- \\ &\quad - A_{i-1/2}^+ \Delta\phi_{i-1/2}^+ - A_{i-1/2}^- \Delta\phi_{i-1/2}^- \end{aligned} \quad (3.54)$$

Der Upwind-Charakter ergibt sich durch die Bestimmung der Zustände  $i+1/2$  bzw.  $i-1/2$  des Lösungsvektors  $\Delta\phi$  entsprechend der charakteristischen Signalausbreitungsrichtung. Analog zu den Beziehungen (3.17) gilt:

bei einer 1. Ordnung genaue Approximation:

a) bei positiven Eigenwerten:

$$\begin{aligned} - \Delta\phi_{i+1/2}^+ &= \Delta\phi_i \\ - \Delta\phi_{i-1/2}^+ &= \Delta\phi_{i-1} \end{aligned}$$

b) bei negativen Eigenwerten: (3.55a)

$$\begin{aligned} - \Delta\phi_{i+h_1}^- &= \Delta\phi_{i+1} \\ - \Delta\phi_{i-h_1}^- &= \Delta\phi_i \end{aligned}$$

bzw. bei einer 2. Ordnung genauen Approximation:

a) bei positiven Eigenwerten:

$$\begin{aligned} - \Delta\phi_{i+h_1}^+ &= 1.5\Delta\phi_i - 0.5\Delta\phi_{i-1} \\ - \Delta\phi_{i-h_1}^+ &= 1.5\Delta\phi_{i-1} - 0.5\Delta\phi_{i-2} \end{aligned}$$

b) bei negativen Eigenwerten: (3.55b)

$$\begin{aligned} - \Delta\phi_{i+h_1}^- &= 1.5\Delta\phi_{i+1} - 0.5\Delta\phi_{i+2} \\ - \Delta\phi_{i-h_1}^- &= 1.5\Delta\phi_i - 0.5\Delta\phi_{i+1} \end{aligned}$$

In der vorliegenden Arbeit wurde das 1.Ordnung genaue Schema verwendet, da es weniger Rechenaufwand erfordert und für stationäre Berechnungsfälle, bei denen  $\Delta\phi$  im konvergenten Zustand ohnehin gegen Null geht, völlig ausreichend ist.

Wie aus der Indizierung von Gl.(3.54) hervorgeht, werden die Eigenwerte an den Durchflußflächen eines betrachteten Volumenelementes  $i, j, k$  bestimmt. Mit Hilfe von Gl.(3.36) bis (3.38) werden anschließend die insgesamt vier Jacobi-matrizen pro Raumrichtung  $A_{i+h_1}^\pm, A_{i-h_1}^\pm, \text{ etc.}$  ebenfalls an den Zellflächen ermittelt.

Führt man dies für alle Volumenelemente durch, so lassen sich die Gl.(3.50) bzw. (3.53) mit  $R_{i,j,k}$  als Vektor der expliziten rechten Seite in Koeffizien-tenmatrixform schreiben zu:



Gl.(3.56) treten an den Rechenraumrändern auf.

Herrscht in einer Randzelle die freie Anströmung, was bei dem vorliegenden Verfahren infolge der Anwendung charakteristischer Randbedingungen an den Ein- bzw. Anströmrändern im Fernfeld der Fall ist, so ist  $\Delta\phi$  in dieser Zelle gleich Null. Dies führt lediglich dazu, daß die entsprechende Spalte in der Koeffizientenmatrix fehlt.

Anders verhält sich die Situation an Periodizitäts- bzw. Schnittebenen (s. Kap. 3.5). Beide zeichnen sich dadurch aus, daß sie nur eine Grenze im Indexraum darstellen, im physikalischen Raum jedoch inmitten einer kontinuierlichen Strömung liegen. Demzufolge besitzen sie Nachbarzellen, in denen  $\Delta\phi \neq 0$  ist, die sich jedoch im Indexraum an einer völlig anderen Stelle befinden. Diesem Umstand wird durch die Besetzung der entsprechenden Position in der Koeffizientenmatrix mit der zugehörigen Blockmatrix Rechnung getragen, was mit einer nicht unerheblichen Beeinträchtigung der Tridiagonalstruktur verbunden ist. Dies ist bei der Auswahl eines geeigneten Invertierungsverfahrens zu berücksichtigen.

In der vorliegenden Arbeit wird zur Lösung des linearen Gleichungssystems (3.56) ein Relaxationsalgorithmus verwendet. In [120] ist eine Auswahl der in Frage kommenden Verfahren vorgestellt, die auf Systeme mit diagonaldominanten Koeffizientenmatrizen anwendbar sind. Es handelt sich dabei um Linien- oder Punktrelaxationsverfahren, die sich ihrerseits in Gauß-Seidel- (GS) und Nicht-Gauß-Seidel-Methoden (NGS) unterteilen lassen. Im Gegensatz zu den NGS-Methoden verwenden GS-Methoden auf der rechten Seite des Gleichungssystems bereits die neuesten zur Verfügung stehenden Werte des Lösungsvektors. Dies beschleunigt die Konvergenz, verhindert jedoch aufgrund auftretender Rekursionen die Vektorisierbarkeit. Um diesen Nachteil zu umgehen, wurde das sogenannte Schachbrettverfahren kreiert, das bei Chakravarthy [120] zu den NGS- und bei Eberle [133] und Brenneis [66] zu den GS-Methoden gezählt wird und tatsächlich Merkmale beider Varianten aufweist. Die vorhandenen Netzpunkte werden in sogenannte schwarze und weiße Punkte unterteilt, die wie auf einem Schachbrett angeordnet sind. Jeder Iterationsdurchlauf wird in zwei Teildurchläufe unterteilt, in denen jeweils nur die schwarzen bzw. nur die weißen Punkte berechnet werden. So entspricht jeder Teildurchlauf eigentlich einem NGS-Verfahren, während durch die Verwendung der Ergebnisse des ersten Teildurchlaufes im zweiten der GS-Charakter zum Tragen kommt, was letztlich eine nahezu unveränderte Konvergenzrate zu den reinen GS-Verfahren liefert.

Bei der Punktrelaxation werden alle Nebendiagonalelemente der LHS, multipliziert mit dem entsprechenden Element des Lösungsvektors, auf die rechte

Seite gebracht, so daß die Koeffizientenmatrix nun nur noch die  $5 \times 5$ -Blockmatrizen auf der Diagonalen enthält. Dadurch kann jede Zeile auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$L_{i,j,k}^n \cdot \Delta\phi_{i,j,k}^{n+1,\gamma} = \omega \cdot (R_{i,j,k}^n + OD_{i,j,k}^{n,\bar{\gamma}}) \quad (3.58a)$$

reduziert werden. Der Vektor OD beinhaltet die Summe der Nebendiagonalelemente  $L_m$  ( $m = -3 \dots 3, m \neq 0$ ), multipliziert mit dem zugehörigen Anteil des Lösungsvektors.

Der Iterationsindex für das Relaxationsverfahren ist mit  $\gamma$  bezeichnet. Der Wert für  $\bar{\gamma}$  richtet sich nach dem gewählten Relaxationsverfahren. Bei einer NGS-Methode werden die Off-Diagonal-Elemente mit Elementen des Lösungsvektors aus dem vorherigen Iterationsschritt gebildet, so daß  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$  ist.

Bei GS-Methoden werden immer die neuesten verfügbaren Werte verwendet, so daß bei einem Sweep von oben nach unten für alle aus dem unteren Dreiecksbereich der ursprünglichen Koeffizientenmatrix stammenden Elemente  $\bar{\gamma} = \gamma$  gilt. Der Integrationsindex  $n$ , bzw. analog dazu bei instationärer Rechnung der Subiterationsindex  $\nu$ , bleiben während der Relaxation unverändert.

Zur Erhöhung der Stabilität und zur Dämpfung von Fehlern, die aus den unterschiedlichen Genauigkeitsgraden der Diskretisierung auf der LHS und der RHS resultieren, ist ein Unterrelaxationsfaktor  $\omega$  eingeführt, der für die in dieser Arbeit betrachteten Berechnungsfälle in der Größenordnung  $0.7 \dots 0.9$  lag. Der Einfluß von  $\omega$  auf Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität ist in Kap. 5.4.2 beschrieben.

Eine Untersuchung des sinnvollen Wertebereiches für  $\omega$  bei zweidimensionalen, instationären Berechnungen ist bei Brenneis [66] zu finden. Außerdem wurde dort eine alternative Form zu Gl. (3.58a) vorgestellt, bei der sich der Unterrelaxationsfaktor nur auf die Werte der rechten Seite des LGS bezieht:

$$L_{i,j,k}^n \cdot \Delta\phi_{i,j,k}^{n+1,\gamma} = \omega \cdot R_{i,j,k}^n + OD_{i,j,k}^{n,\bar{\gamma}} \quad (3.58b)$$

Brenneis stellte nur geringfügige Unterschiede zwischen den Versionen (3.58a) und (3.58b) fest. Die Formulierung nach (3.58b) ergab eine etwas geringere Anfälligkeit von  $\omega$  auf Veränderungen des Berechnungsfalles und eine verminderte Empfindlichkeit der Lösung auf  $\omega$ -Variationen.

In beiden Fällen führt eine Erhöhung des Unterrelaxationsfaktors zu einer Verminderung der Rechenzeit, solange die Stabilität des Verfahrens dabei noch

gewährleistet bleibt.

Die Auflösung des auf 5 Gleichungen reduzierten Systems (3.58) erfolgt für jede Netzzelle mittels einer analytisch exakten Gauß-Elimination zu jedem Iterationszeitpunkt  $\gamma$ .

### 3.3.3 Maßnahmen zur Stabilitätserhaltung

Gemäß Gl.(3.57) setzt sich die Matrix  $L_{i,j,k}$  aus den eigenwertgesplitteten Jacobimatrizen sowie aus dem Kehrwert des Zeitschrittes auf der Hauptdiagonalen zusammen. Bei zeitechten Problemen ist der Anteil  $1/\Delta\tau$  entsprechend festgelegt, während im stationären Fall  $\Delta\tau \rightarrow \infty$  angestrebt wird, um somit der optimalen quadratischen Konvergenz der Newton-Methode möglichst nahe zu kommen.

Andererseits erfordert die Gauß-Seidel-Relaxation zur Invertierung der Koeffizientenmatrix die Diagonaldominanz derselben. In aller Regel ist diese bei einer Upwind-Diskretisierung 1.Ordnung auf der LHS auch für  $1/\Delta\tau = 0$  automatisch gegeben, wie anhand der linearen, skalaren Modellgleichung

$$c \quad u_x + a u_y + b u = 0 \quad (3.59)$$

gezeigt werden kann. In Abhängigkeit von den Vorzeichen der Koeffizienten  $a, b$  läßt sich ein einfaches implizites Upwind-Schema finden zu:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \left( \frac{a+|a|}{2} \right)^{n+1} \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \left( \frac{b+|b|}{2} \right)^{n+1} \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) \\ - \left( \frac{a-|a|}{2} \right)^{n+1} \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \left( \frac{b-|b|}{2} \right)^{n+1} \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0 \end{aligned}$$

bzw. nach Umsortierung: (3.60)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{|a|}{\Delta x} + \frac{|b|}{\Delta y} \right) u_{i,j}^{n+1} - \left( \frac{a+|a|}{2\Delta x} \right) u_{i-1,j}^{n+1} - \left( \frac{b+|b|}{2\Delta y} \right) u_{i,j-1}^{n+1} \\ + \left( \frac{a-|a|}{2\Delta x} \right) u_{i+1,j}^{n+1} + \left( \frac{b-|b|}{2\Delta y} \right) u_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^n \end{aligned}$$

Überführt man dies in Matrixschreibweise, so erkennt man sofort, daß das System für 1. Ordnung genaue Upwind-Schemata auf natürliche Weise diagonal-dominant ist, d.h. es gilt für die Elemente  $d_{ij}$  der LHS-Matrix:

$$|d_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |d_{ij}| \quad (3.61)$$

Nach Anderson et al. [71] muß aber für mindestens ein Element die strenge Diagonaldominanz gelten, d.h. für mindestens ein  $d_{ii}$  ist in Gl.(4.35) "≥" durch ">" zu ersetzen. Zusammen mit Gl.(3.61) stellt dies eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer GS-Methode dar.

Es ist jedoch nicht auszuschließen, daß es im Laufe der Iteration aufgrund kritischer Strömungszustände in einzelnen Zellen lokal zu Stabilitätsproblemen infolge fehlender Diagonaldominanz kommen kann. In einem solchen Fall ist es zur besseren Konditionierung des Relaxationsproblems erforderlich, über den Term  $I/\Delta\tau$  eine Erhöhung der Diagonaldominanz herbeizuführen.

Voraussetzung für eine sinnvolle Anwendung dieser Maßnahme ist die Existenz eines Sensors, der zum einen sich ankündigende Probleme rechtzeitig erkennt und zum anderen die notwendige Zeitschrittreduzierung so vornimmt, daß die Beeinträchtigung der Konvergenzrate so gering wie möglich ist. Wenn Zeitkonsistenz keine Rolle spielt, wird nur in den kritischen Zellen der Wert für  $I/\Delta\tau$  erhöht, während in den anderen der unendlich große Zeitschritt beibehalten werden kann.

Eine Möglichkeit zur Definition einer Sensorfunktion besteht z.B. darin, die Größe der Diagonalelemente  $d_{\ell\ell}$  der Matrix  $L_{i,j,k}^n$  aus Gl.(3.58) zu ermitteln, und bei Unterschreiten einer vorgegebenen Grenze lokal einen Term  $(I/\Delta\tau)_{i,j,k}$  zu addieren.

Die Höhe dieser Schwelle, sowie die Größe des lokalen Zeitschrittes haben, wie auch der Relaxationsfaktor  $\omega$ , einen erheblichen Einfluß auf Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität des Verfahrens und sind daher mit Bedacht auszuwählen.

Im einer ersten Version des Sensors, die von dem Eberleschen Algorithmus zur Festflügelberechnung übernommen wurde, wurde die untere Schranke für die Hauptdiagonalelemente dem Kehrwert einer kritischen Zeitschrittweite  $\Delta\tau_{krit}$  gleichgesetzt, die sich analog zu Gl.(3.26) errechnen läßt. Für diejenigen Zellen, in denen gilt:

$$\min(d_{\ell\ell}) > \frac{\max(|\lambda_n^\xi|, |\lambda_n^\eta|, |\lambda_n^\zeta|)}{CFL_{krit}} = \frac{1}{\Delta\tau_{krit}} \quad (3.62)$$

wird mit einem unendlich großen Zeitschritt gerechnet, da keine Stabilitätsprobleme zu erwarten sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird der Zeitschritt lokal von  $\Delta\tau \rightarrow \infty$  auf  $\Delta\tau = \Delta\tau_{krit}$  reduziert, und damit werden die Hauptdiagonalelemente in der betreffenden Zelle um  $1/\Delta\tau_{krit}$  erhöht.

Es ist ein Kennzeichen dieses Sensors, daß "Sensorgröße" und "Reaktionsgröße" identisch sind. Ihr Betrag  $(1/\Delta\tau_{krit})$  ist u.a. von der Wahl von  $CFL_{krit}$  abhängig, dessen Wert von außen vorgegeben werden kann.

Kap. 5.4.2 beschreibt die Auswirkungen der Wahl von  $CFL_{krit}$  in Abhängigkeit des Unterrelaxationsfaktors  $\omega$  auf Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit.

Eine erfolgreiche Modifikation dieses Sensors bestand darin, "Sensor-" und "Reaktionsgröße" zu entkoppeln. Während Gl. (3.62) weiterhin als untere Schranke fungierte, wurden die Hauptdiagonalelemente im Bedarfsfall nun um den Betrag  $1/\Delta r_{akt}$  vergrößert, mit  $\Delta r_{akt} < \Delta r_{krit}$ , bzw.  $CFL_{akt} < CFL_{krit}$ . Damit ließ sich eine Verbesserung gegenüber dem ursprünglichen Sensor erzielen, wie in Kap. 5.4.2 gezeigt wird.

In einer dritten Variante, die sich für die vorliegende Problematik der Hub-schrauberrotorströmung als besonders effizient erwies, wurde die Sensorgröße nicht mehr konstant angesetzt, sondern als Funktion der Radialkoordinate der betrachteten Zelle bestimmt. Als geeignet stellt sich eine Beziehung der Form

$$CFL_{krit}(r) = \min(CFL_{krit\infty}, (1+\varepsilon \cdot r^\nu) \cdot CFL_{krit0}) \quad (3.63)$$

heraus, wobei  $\varepsilon = 1$  und  $\nu = 3$  gesetzt wurden. Die Sensorfunktion erfährt dabei einen nichtlinearen Verlauf von einem niedrigen Wert bei  $r = 0$  ( $CFL_{krit0}$ ) auf einen höheren Grenzwert  $CFL_{krit\infty}$  im Bereich "unkritischerer" Radien.  $CFL_{krit\infty}$  entspricht dem  $CFL_{krit}$  in Gl. (3.62) und konnte sehr hoch eingestellt werden.  $CFL_{krit0}$  wurde einfachheitshalber dem Wert der Reaktionsgröße  $CFL_{akt}$  gleichgesetzt. Aktuelle Zahlenwerte können Kap. 5.4.2 entnommen werden. Die lokale Schranke für die Diagonalelemente ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (3.63) in Gl. (3.62).

Es ist wichtig anzumerken, daß die in Kap. 5.4.2 gefundenen optimalen Werte für  $CFL_{krit\infty}$ ,  $CFL_{akt}$ ,  $\omega$  und  $\gamma$  für alle in dieser Arbeit gezeigten Berechnungsfälle konstant gehalten wurden, daß also die Robustheit des Verfahrens nicht negativ beeinflusst wurde.

Als Alternative zu den beschriebenen Sensoren, die alle auf dem gleichen Grundprinzip, der Festlegung einer kritischen Größe für die Hauptdiagonalelemente beruhen, wurde eine zweite Funktion untersucht, bei der die lokale zeitliche Änderung der Divergenz des Massenflusses bestimmt wird. Diese sollte bei stationären Problemen negativ oder zumindest gleich Null sein:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\rho v) \leq \varepsilon \quad (3.64)$$

$\varepsilon$  stellt hier eine vom Nutzer anzugebende Konstante  $\geq 0$  dar, die eine gewisse Schwankung während des Iterationsverlaufes erlaubt. Diese Methode hatte sich in der Praxis jedoch nicht bewährt und wurde deswegen nicht weiter verfolgt

Besondere Beachtung ist den ersten Iterationsschritten zu widmen. Aufgrund der zu Beginn noch schlechten Konditionierung des Systems treten hier für  $\Delta r \rightarrow \infty$  auf jeden Fall Stabilitätsprobleme auf. Diese können durch die genannten Maßnahmen u.U. nicht aufgefangen werden, es sei denn man wählt  $\Delta r_{krit}$  grundsätzlich sehr klein, was aber aus Konvergenzgründen für den weiteren Iterationsverlauf nicht ratsam ist. Als günstig hat sich erwiesen, während der ersten Schritte eine sukzessive Erhöhung des Zeitschrittes auf  $\Delta r \rightarrow \infty$  zu vollziehen.

Eine von vielen Möglichkeiten, die zu einer schlechten Konditionierung der Koeffizientenmatrix führen können, fand Brenneis [66] in einer ungünstigen Kombination des Seitenverhältnisses einer Zelle und der Durchströmmachzahl. Dies kann dazu führen, daß die Diagonalelemente des mittels Gauß-Elimination zu lösenden Gleichungssystems (3.58) unter bestimmten Umständen zu Null werden, was zum Abbruch des Rechenlaufes führt.

Abhilfe bietet die Rechtsmultiplikation von  $L_{i,j,k}$  mit der Transformationsmatrix  $M$  (siehe Kap. 3.2.2), die die konservativen Variablen in die nichtkonservativen umwandelt.

Damit läßt sich Gl.(3.58) umformen zu:

$$L_{i,j,k}^{*n} \cdot \Delta\phi_{i,j,k}^{*n+1,\gamma} = \text{RHS} \quad ,$$

$$\text{mit } L_{i,j,k}^{*n} = L_{i,j,k}^n \cdot M_{i,j,k}^n \quad (3.65)$$

$$\text{und } \Delta\phi_{i,j,k}^{*n+1,\gamma} = D(\Delta\rho, \Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta p)^T \quad .$$

Nach erfolgter Lösung ist der Vektor der nichtkonservativen Variablen in den der gesuchten konservativen zu überführen mittels

$$\Delta\phi_{i,j,k}^{n+1,\gamma} = M_{i,j,k}^n \cdot \Delta\phi_{i,j,k}^{*n+1,\gamma} \quad (3.66)$$

Brenneis konnte nachweisen, daß es nun keine physikalisch sinnvolle Kombination von Zellseitenverhältnis und Durchströmmachzahl mehr gibt, bei der ein Diagonalelement von  $L_{i,j,k}^*$  zu Null wird.

Entsprechend wurden dann auch die Hauptdiagonalelemente  $d_{ll}$  von  $L_{i,j,k}^*$  anstelle von  $L_{i,j,k}$  in Gl.(3.62) verwendet.

### 3.3.4 Einbeziehung des Kräftevektors

Aufgrund seiner homogenen Eigenschaft konnte der Kräftevektor  $\bar{K}$  ebenso wie die Flußvektoren  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  und  $\bar{G}$  m.H. einer Taylorentwicklung linearisiert werden. Die Einbeziehung der dabei entstandenen Jacobimatrix  $S^n$  (siehe Anhang A.4) in die LHS von Gl.(3.50) bzw. (3.53) ist damit ohne weiteres möglich.

Betrachtet man allerdings die Konditionierung von  $S$ , so erkennt man sofort, daß die Bedingung für Diagonaldominanz (Gl.(3.61)) nicht erfüllt ist, da die Hauptdiagonale nur sehr schwach besetzt ist.

Für den Fall verschwindend geringer Störgeschwindigkeiten, wie sie in einigem Abstand vom Blatt durchaus auftreten können, bleibt beispielsweise im zylindrischen System übrig:

$$S^{,n} = \lim_{q \rightarrow 0} S^n = \frac{D}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

Damit verschlechtert die Einbeziehung der Matrix  $S^n$  in Gl.(3.50) bzw. (3.53) die Konditionierung des Gesamtsystems und kann demzufolge numerische Schwierigkeiten bei der Relaxation bewirken. Dieser Effekt macht sich besonders bemerkbar bei kleinen Radien und/oder großen Zellvolumina.

In Kap. 5.4.2 werden die Ergebnisse mehrerer Laufreihen mit und ohne Einbeziehung von  $S^n$  miteinander verglichen. Sie stellen den angesprochenen negativen Einfluß deutlich heraus. Es zeigt sich dort, daß die Parameter, mit denen sich die Stabilität der Relaxation steuern läßt, z.B. der Unterrelaxationsfaktor  $\omega$ , erheblich niedriger gewählt werden mußten, wenn  $S^n$  einbezogen wurde. Da dies aber gleichzeitig eine Reduzierung der Konvergenzgeschwindigkeit zur Folge hat, wird das Gesamtergebnis signifikant verschlechtert.

Beschränkt man sich auf die Lösung eines stationären Problems, so stellt die gesamte LHS in Gl.(3.53) lediglich einen Iterationsoperator dar, dessen exakter Wert bei Erreichen des konvergenten Endzustandes wegen  $\Delta\phi^{n+1} \rightarrow 0$  uninteressant geworden ist. Daher führt eine Berücksichtigung von  $S^n$  auch zu keinerlei Genauigkeitszuwachs. Aus diesen Gründen wurde bei stationären Problemen auf die Einbeziehung von  $S^n$  verzichtet.

Die zu lösende modifizierte Gleichung lautet also letztlich:

$$\left( \frac{I}{\Delta r} + \delta_\xi A^n + \delta_\eta B^n + \delta_\zeta C^n \right) \Delta\phi^{n+1} = - \left( \delta_\xi \bar{E} + \delta_\eta \bar{F} + \delta_\zeta \bar{G} - \bar{K} \right)^n. \quad (3.68)$$

### 3.4 Motivation zur Verwendung absoluter Strömungsgrößen

#### 3.4.1 Ermittlung der Durchflußbilanz durch ein Kontrollvolumen

Die Verwendung der integralen Form der Euler-Gleichungen erfordert die Bestimmung der Massen-, Impuls- und Energieflüsse durch die Zellflächen der einzelnen finiten Volumina.

Dazu sind die im Lösungsvektor enthaltenen konservativen Strömungsvariablen  $\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e$  mit der lokalen Transportgeschwindigkeit und dem Flächennormalenvektor zu multiplizieren. Es gilt:

$$\iint_S \phi \cdot q \, dS = \iint_S \phi (q \cdot n) \, dS \quad , \quad (3.69)$$

wobei  $\phi$  stellvertretend für ein beliebiges Element des Lösungsvektors stehen möge und  $n$  den Flächennormaleneinheitsvektor bezeichnet.

Bei der Wahl eines blattfesten, mitrotierenden Koordinatensystems sind in der Geschwindigkeit  $q$  gemäß Gl.(2.21) sowohl der Anteil der freien Anströmung ( $\omega \times r$ ), als auch der Anteil der Störgeschwindigkeiten ( $\bar{q}$ ) enthalten:

$$q = \bar{q} + (\omega \times r) \quad . \quad (2.21)$$

Entgegen der Vorgehensweise bei der Festflügelberechnung, bei der die Transportgeschwindigkeit ( $q \cdot n$ ) über der betrachteten Fläche als konstant angenommen werden kann, stellt sich aufgrund des  $(\omega \times r)$ -Anteiles bei der Rotorblattströmung das Problem der radialen Veränderlichkeit.

Eine diskrete Approximation des Flächenintegrals aus Gl.(3.69) zu

$$\iint_S \phi (q \cdot n) \, dS \approx \sum_{i=1}^m \phi_i q_i n_i S_i \quad , \quad (3.70)$$

wobei der Index  $i$  die  $i$ -te Zellfläche eines betrachteten Volumenelementes bezeichnet, das durch  $m$  solcher Flächen begrenzt wird, ist nur möglich, wenn alle beteiligten Strömungsgrößen über der zu integrierenden Fläche konstant sind. Dies ist aufgrund von Gl.(2.21) zunächst einmal nicht der Fall. Um dennoch eine einfache Formulierung entsprechend Gl.(3.70) beibehalten zu können, muß die veränderliche Anströmgeschwindigkeit ( $\omega \times r$ ) durch einen konstanten Wert ( $\omega \times r_{B_1}$ ) ersetzt werden, wobei  $r_{B_1}$  den Ortsvektor zu einem für die betrachtete Fläche gültigen Bezugspunkt darstellt, so daß gilt:

$$\iint_S (\omega \times r) n dS = \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} (\omega \times r)_i n_i dS_i = \sum_{i=1}^m (\omega \times r_{B_i}) \iint_{S_i} n_i dS_i = \sum_{i=1}^m (\omega \times r_{B_i}) n_i \cdot S_i \quad (3.71)$$

Eine Möglichkeit besteht darin,  $r_{B_i}$  als arithmetisches Mittel der vier Eckpunkte der betrachteten Fläche zu ermitteln. Dies ist allerdings nur dann mathematisch exakt, wenn die Projektion der Fläche auf die Ebene senkrecht zur Anströmrichtung genau einem Rechteck entspricht. Da dies im allgemeinen natürlich nicht der Fall ist, würde bei einer solchen Vorgehensweise ein beträchtlicher Fehler entstehen, der sich in einem unphysikalischen Verschwinden bzw. Entstehen von Masse, Impuls und Energie auswirken würde.

Der Fehler in diesem Ansatz liegt darin, daß zwar Größe und Orientierung der Durchströmfläche  $S_i$ , nicht aber die Veränderung ihrer geometrischen Form in radialer Richtung berücksichtigt werden. Die korrekte Auflösung des Integrals (3.69) liefert für den Anteil der freien Anströmung am Beispiel eines zylindrischen Koordinatensystems:

$$\iint_S (\omega \times r) n dS = -\omega \cdot \iint_S r dS^{(\theta)} = -\omega \cdot \sum_{i=1}^m \left( \int_r r \cdot z(r) dr \right)_i \quad (3.72)$$

wobei  $S^{(\theta)}$  die Komponente des Flächennormalenvektors in Strömungsrichtung, d.h. die Projektion von  $S$  auf die  $(r, z)$ -Ebene darstellt, mit  $\int dS^{(\theta)} = z(r) dr$ . Die Berechnung von  $\int r \cdot z(r) dr$  für eine beliebig geformte Fläche im Raum bedeutet einen nicht unerheblichen Rechenaufwand, der um so mehr zu Buche schlägt, je größer die Anzahl der Netzzellen ist.

Es wurde daher nach einem Weg gesucht, dieses Integral durch eine Summenform analog zu Gl.(3.70) zu ersetzen, ohne dabei an Genauigkeit einzubüßen. Dies gelingt in der Tat, wenn man die betrachtete Fläche in zwei Dreiecke unterteilt, wie dies in Bild 3.4-1 gezeigt ist, und jedes dieser beiden Dreiecke getrennt betrachtet.

Diese Vorgehensweise erlaubt nicht nur eine Approximation, sondern sogar die mathematisch exakte Berechnung des gesuchten Integrals in einfacher Form zu:

$$\iint_S \phi(\omega \times r) n dS = -\omega \cdot \sum_{i=1}^m \left( \phi \cdot \int_r r \cdot z(r) dr \right)_i = -\omega \cdot \sum_{i=1}^m \phi_i \cdot (r_{i,1} S_{i,1}^{(\theta)} + r_{i,2} S_{i,2}^{(\theta)}) \quad (3.73)$$

mit  $r_{i,1}, r_{i,2}$  als Radialkoordinaten des Flächenschwerpunktes der beiden Dreiecke

und  $S_{i,1}^{(\theta)}, S_{i,2}^{(\theta)}$  als Projektionsflächen der beiden Dreiecke in Anströmrichtung.

Das "≈"-Zeichen weist dabei auf die bei diskreten Verfahren übliche Annahme hin, daß  $\phi$  über der betrachteten Zellfläche konstant sei.

Die jeweiligen Flächenschwerpunkte lassen sich gemäß [136] unter Verwendung der Koordinaten der Eckpunkte des betrachteten Dreiecks berechnen zu:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= 1/3 \cdot (x_{1i,j} + x_{2i,j} + x_{3i,j}) \quad , \\ & \quad \quad \quad i=1..m, j=1,2 \quad , \\ y_{i,j} &= 1/3 \cdot (y_{1i,j} + y_{2i,j} + y_{3i,j}) \quad , \\ r_{i,j} &= \sqrt{x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2} \quad . \end{aligned} \tag{3.74}$$

Die Größe der Dreiecksflächen ermittelt man über die Flächenvektoren

$$S_{i,j} = 0.5 ((r_3 - r_2)_{i,j} \times (r_1 - r_2)_{i,j}) \tag{3.75}$$

als deren Norm zu:

$$S_{i,j} = \sqrt{S_{i,j}^{(\theta)^2} + S_{i,j}^{(r)^2} + S_{i,j}^{(z)^2}} \quad , \tag{3.76}$$

wobei die einzelnen Komponenten die Projektionsflächen in die jeweilige Koordinatenrichtung repräsentieren.

Mit dieser Maßnahme konnte die vollständige Konservativität bei der ungestörten Durchströmung einer Zelle sichergestellt werden.

Die Approximation von Gl.(3.69) lautet demnach für ein zylindrisches Koordinatensystem:

$$\iint_S \phi(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \phi(\bar{\mathbf{q}} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{i=1}^m \phi_i \bar{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{n}_i S_i + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^m \phi_i \cdot (r_{i,1} S_{i,1}^{(\theta)} + r_{i,2} S_{i,2}^{(\theta)}) \tag{3.77}$$

### 3.4.2 Übergang auf absolute Strömungsgrößen

Die Aufspaltung der Transportgeschwindigkeit und die getrennte Approximation der beiden Flußanteile sind jedoch noch nicht ausreichend.

Bei einer Formulierung der Euler-Gleichungen in relativen Strömungsgrößen, die auf ein blattfestes, mitbewegtes Koordinatensystem bezogen sind, ist die in Kap. 3.4.1 getroffene Voraussetzung, die Elemente des Lösungsvektors über der betrachteten Zellfläche als konstant annehmen zu können, nicht mehr haltbar. Da auch sie abhängig vom Radius sind, sind ähnliche Maßnahmen zu ergreifen wie im Falle der Konvektionsgeschwindigkeit.

Am Beispiel der Umfangsgeschwindigkeit und der Energie im zylindrischen System sei die Problematik dargestellt. Ersetzt man  $\phi$  in Gl.(3.77) durch:

$$\rho u = \rho(\bar{u} + \omega r)$$

bzw.

$$e = \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{\rho}{2} ((\bar{u} + \omega r)^2 + v^2 + w^2) \quad ,$$

so erhält man:

$$\iint_S \rho u(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \rho u(\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_S \rho u(\omega r) dS^{(\theta)}$$

(3.78)

bzw.

$$\iint_S e(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S e(\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_S e(\omega r) dS^{(\theta)} \quad .$$

Betrachtet man einmal nur den jeweils letzten Term, d.h. den Anteil, der einem Transport der Strömungsgrößen mit der Geschwindigkeit der freien Anströmung entspricht, und der in einigem Abstand vom Rotorblatt um Größenordnungen höher ist, als der jeweils erste Anteil, so ergibt sich unter Verwendung von Gl.(3.72) für die i-te Fläche (der Index i sei der Übersichtlichkeit halber weggelassen):

$$\iint_S \rho u(\omega r) dS^{(\theta)} \cong \omega \cdot \rho \bar{u} \cdot \int_r r \cdot z(r) dr + \omega^2 \cdot \rho \cdot \int_r r^2 \cdot z(r) dr$$

bzw.

(3.79)

$$\iint_S e(\omega r) dS^{(\theta)} \cong \omega \cdot \bar{e} \cdot \int_r r \cdot z(r) dr + \omega^2 \cdot \rho \bar{u} \cdot \int_r r^2 \cdot z(r) dr + \frac{\omega^3}{2} \cdot \rho \cdot \int_r r^3 \cdot z(r) dr$$

mit  $\bar{e}$  nach Gl.(2.28).

Während die jeweils ersten Integralterme analog zu dem im vorigen Kapitel beschriebenen Verfahren gemäß Gl.(3.73) in einfacher Art durch eine Summenform substituiert werden können, gelingt dies nicht mehr, wenn  $r$  in den Potenzen  $r^3$  bzw.  $r^4$  vorkommt.

Die einzige Möglichkeit, auch hier den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen zu halten und dennoch eine mathematisch exakte Wiedergabe der Geschwindigkeits- bzw. Energiebilanz zu erhalten, besteht darin, von den relativen auf absolute Strömungsvariablen entsprechend Gl.(2.21),(2.28) überzugehen und alle  $(\omega r)$ -Anteile aus den Größen des Lösungsvektors zu eliminieren. Dadurch entfallen die Integralterme höherer Ordnung in  $r$ .

An dieser Stelle zeigt sich auch, daß die von einigen Autoren verwendete Roenergie (Gl.(2.26)) anstelle der absoluten Energie bei der beschriebenen Vorgehensweise das Problem nur teilweise lösen würde, da das mittlere Integral in Gl.(3.79) bestehen bleibt. Der resultierende Fehler wäre aufgrund des Koeffizienten  $\rho \bar{u}$  allerdings gering, da sich die Größe der Durchströmfläche und damit die Höhe des Fehlers bei der Approximation bei vernünftiger Diskretisierung umgekehrt proportional zum Betrag der Störgeschwindigkeiten verhalten.

Am Beispiel der Aufgabe, in dem für die Untersuchungen am Rotorblatt verwendeten geschlossenen, aber leeren Rechenraum die ungestörte Anströmung zu bewahren, werden in Kap. 5.4.2 die Auswirkungen der Verwendung von relativen bzw. absoluten Größen, und bei letzteren die Unterschiede bei Verwendung der Roenergie bzw. der absoluten Energie gegenübergestellt.

### 3.5 Numerische Implementierung der Randbedingungen

Infolge des endlichen Berechnungsgebietes ergibt sich die Notwendigkeit, auf den so entstandenen künstlichen Grenzen die Werte der diskreten Variablen in geeigneter Weise vorzuschreiben.

Desweiteren muß dafür gesorgt werden, daß entlang der Körperoberfläche die Tangentialbedingung erfüllt wird.

Neben diesen "klassischen" Randbedingungen, die generell für alle Strömungsuntersuchungen gültig sind, sind je nach verwendeter Netztopologie und je nach spezifischen Besonderheiten des untersuchten physikalischen Berechnungsfalles weitere Bedingungen zu berücksichtigen.

In der vorliegenden Arbeit traten fünf verschiedene Arten von Randbedingungen auf:

- Fernfeldrandbedingungen
- Festkörperrandbedingungen
- periodische Randbedingung
- Bedingungen an Schnittebenen im Netz
- Bedingungen an Blockgrenzen

In Bild 3.5-1 sind im Vorgriff auf die in Kap. 4 enthaltenen Ausführungen zur Netzgenerierung die Struktur der in dieser Arbeit verwendeten Netze vom 0-0-Typ sowie die Zuordnungen zwischen dem physikalischen und dem Indexraum dargestellt. Die an den jeweiligen Begrenzungsflächen geltenden Randbedingungen sind eingetragen.

### Fernfeldrandbedingungen

Durch die Endlichkeit des Lösungsgebietes entsteht eine künstliche Berandung, an der die Werte der abhängigen Variablen vorgeschrieben werden müssen. In der Regel ist dies der Zustand der freien Anströmung, woraus sich die Erfordernis ergibt, daß der Fernfeldrand genügend weit vom untersuchten Körper entfernt liegt, in einem Bereich, in dem die zu erwartenden Strömungsgradienten ausreichend klein sind.

Dies macht u.U. eine recht große Ausdehnung des zu diskretisierenden Raumes notwendig, was sich im Berechnungsaufwand niederschlägt. Besonders kraß ist dies z.B. bei der zweidimensionalen Profilmströmung, bei der der Abstand der stromabwärts liegenden Grenze vom Körper extrem groß sein muß, um im Unterschall keinen unerwünschten Einfluß auf die Lösung zu erhalten. Aber auch bei der Berechnung der Umströmung um einen Hubschrauberrotor im stationären Schwebflug muß, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, der Rechenraum, vor allem unterhalb der Rotorkreisscheibe, sehr groß gewählt werden.

Insbesondere in der Profilberechnung wird vielfach versucht, diesen Nachteil zu umgehen, indem man an den Fernfeldrändern nicht die freie Anströmung, sondern eine modifizierte Bedingung ansetzt, die den physikalischen Strömungszustand in geringerer Entfernung vom Körper zumindest näherungsweise beschreibt. So verwendet Drela [137] z.B. die Geschwindigkeiten, die ein Einzelwirbel induziert, der an die Stelle des Profils tritt und dessen Zirkulation besitzt. Hertel [49] untersuchte für die Rotorblattströmung anhand einiger der Testfälle, die auch in der vorliegenden Arbeit verwendet wurden, die Vorgabe eines

Strömungszustandes, der sich aus der stationären Lösung eines halbempirischen, linearen Verfahrens unter Verwendung eines vorgeschriebenen Nachlaufmodells (prescribed wake model) ergab. Es handelt sich dabei um eine Kombination der Verfahren von Kocurek [138,139] und Landgrebe [140]. Mit Hilfe des Biot-Savart-schen Gesetz werden die durch die Nachlaufwirbelschicht in den Randzellen induzierten Geschwindigkeiten errechnet, die Isentropenbeziehung liefert mit der örtlichen Schallgeschwindigkeit und der konstanten Rothalpie den Druck und die Dichte. Hertel konnte mit dieser Methode bereits erste Erfolge im Hinblick auf eine Verkleinerung des Rechenraumes und eine dadurch bedingte Rechenzeiterparnis erzielen [43,45,49,141].

In der vorliegenden Arbeit wurde parallel dazu ausschließlich mit einer freien Strömung als Fernfeldbedingung gearbeitet. Sie wird an der oberen, der unteren und der äußeren Netzgrenze angesetzt. Dies entspricht bei der verwendeten 0-0-Topologie der Rechenetze der Ebene  $k = k_{max}$  im Indexraum (Bild 3.5-1).

Die Vorgabe fester Werte in den Randzellen muß so geschehen, daß nichtphysikalische Reflexionen an den Grenzen vermieden werden. Dies wird mit sogenannten nichtreflektierenden Randbedingungen erreicht.

Die dahinter stehende Theorie basiert auf der Signalausbreitungseigenschaft hyperbolischer Gleichungssysteme für den eindimensionalen Fall. Verbreitet ist vor allem die Verwendung der Riemann-Invarianten (z.B. [35,36,57,116]) oder der charakteristischen Variablen (z.B. [40,142]).

Die explizite Einführung solcher spezieller Maßnahmen am Rand erübrigen sich jedoch, wenn bereits der Gesamtalgorithmus zur Lösung der Bewegungsgleichungen auf die Charakteristikentheorie aufgebaut ist.

Bei diesen sogenannten Upwind-Schemen, zu denen auch das vorliegende gehört, ist die Reflexionsfreiheit an den Grenzen sehr einfach zu erfüllen.

An den Fernfeldrändern (Bild 3.5-1) werden alle Variablen entsprechend dem gewünschten Zustand (z.B. Umgebungszustand) in der äußersten Zellschicht vorgeschrieben. An den Grenzen ins Rechenrauminnere werden, wie an allen Oberflächen der finiten Volumina, anhand der lokalen Eigenwerte die Steigungen der Charakteristiken ermittelt.

Diese geben Auskunft darüber, ob es sich um ein subsonisches oder ein supersonisches Ein- bzw. Ausströmen durch die betrachtete Fläche handelt. Dementsprechend wird der Informationsfluß aus den benachbarten Zellen gesteuert. Bild 3.5-2 zeigt die möglichen vier Zustände an den Fernfeldgrenzen, wobei ein supersonisches Aus- bzw. Einströmen im Falle der Hubschrauberrotorströmung bei Verwendung eines in sich geschlossenen Rechennetzes nicht vorkommt.

Entscheidend für die Reflexionsfreiheit ist, daß die von außen kommenden Charakteristiken keine Information aus dem Rechenrauminneren weitertransportie-

ren, während die aus dem Inneren keine Informationen von außerhalb enthalten dürfen. Dies ist bei den Upwind-Schemata erster und zweiter Ordnung automatisch gewährleistet, im Falle der Verwendung eines Algorithmusses höherer Ordnung (Upwind-biased 3. Ordnung) ist an den Grenzen die Ordnung entsprechend zu reduzieren.

### Festkörperrandbedingung

An undurchlässigen Körperoberflächen ist im Falle der reibungsfreien Strömung die kinematische Strömungsbedingung der Form

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.80)$$

zu erfüllen.

Sie besagt, daß die Geschwindigkeit normal zur Körperkontur und damit der Massenfluß durch die feste Oberfläche verschwinden. Der nullte Eigenwert ( $\lambda_0$ ) an der körperangepaßten Begrenzungsfläche der angrenzenden finiten Volumen muß damit zu Null werden.

Beiträge zu den Flußbilanzen der Impuls- und der Energiegleichung (zu letzterer nur bei Verwendung der absoluten Energie) liefert demzufolge nur noch der Druck (vgl. Gl. (2.37), (2.49)).

Um eine dreidimensionale Extrapolation der in den Volumenmittelpunkten bekannten Druckwerte auf die Körperoberfläche zu vermeiden, werden alle Strömungsgrößen an der an den Körper anstoßenden Zellfläche in gleicher Weise berechnet, wie im Inneren des Rechenraumes. Dazu sind folgende Maßnahmen zu ergreifen:

- Schaffung sogenannter fiktiver Zellen im Körperinneren durch Extrapolation aus den angrenzenden Strömungszellen
- Korrektur des Geschwindigkeitsvektors an der Körperoberfläche nach der Beziehung

$$\bar{\mathbf{q}}_x = \bar{\mathbf{q}} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (3.81)$$

mit  $\mathbf{n}$  als Flächennormaleneinheitsvektor.

Dies entspricht einem Abschneiden des Normalgeschwindigkeitsanteils.

- Berechnung der gesuchten Strömungsgrößen an der Körperoberfläche m.H. des Riemannschen Lösungsalgorithmus unter Berücksichtigung der Forderung  $\lambda_0 = 0$  und unter Verwendung von  $\bar{\mathbf{q}}_x$  zur Bestimmung der Charakteristiken und der Riemann-Invarianten.

Details zur numerischen Umsetzung dieser Methode können [65,66] entnommen werden.

### Periodische Randbedingung

Die Strömung um einen Hubschrauberrotor kann für den Fall, daß sich dieser translatorisch gar nicht (Schwebeflug) oder nur in Richtung der Drehachse (Steig- oder Sinkflug) bewegt, als periodisch angesehen werden, d.h. es herrscht an allen Blättern der gleiche Strömungszustand. Daher besteht die Möglichkeit, nur ein einziges Blatt zu betrachten und den Einfluß der restlichen Blätter über eine sogenannte periodische Randbedingung zu erfassen. Sei  $n$  die Anzahl der Rotorblätter, so läßt sich der kreisförmig geschlossene Rechenraum um die Rotorkreisscheibe in  $n$  gleichgroße Teilgebiete mit einem Öffnungswinkel von  $\chi = 2\pi/n$  zerlegen, die jeweils nur ein Blatt beeinhaltet. Gleiches gilt auch bei der Betrachtung  $n$ -blättriger Propeller, Verdichter, etc. unter axialer Anströmung.

Die durch die Teilung entstandenen Schnittebenen sollten möglichst koplanar sein. Sie bilden die Randfläche  $j = 1$  in dem in Bild 3.5-1 dargestellten Rechenraum.

Um Interpolationen zu vermeiden, empfiehlt es sich, diese Ebenen symmetrisch zur Rotationsachse auszuführen, so daß die Linienverteilungen in der Ein- und Austrittsebene deckungsgleich sind. Dies erfordert allerdings einen höheren Aufwand bei der Netzgenerierung, da die Periodizitätsebene in diesem Fall keine Neigung um die  $y$ -Achse haben darf (zur Orientierung der Koordinatenachsen siehe Bild 2.2-1). Der Übergang auf den tatsächlichen Blatteinstellwinkel muß dabei auf dem relativ kurzen Stück des Blattanschlusses von der Drehachse bei  $r = 0$  bis zur inneren Blattwurzel geschehen, was bei stark angestellten Blättern, die u.U. noch eine hohe Verwindung haben, nicht ganz unproblematisch ist.

Die periodische Randbedingung besagt anschaulich, daß das, was durch die Ebene hinter dem Rotorblatt den Rechenraum verläßt, sofort und verlustfrei in diesen durch die Ebene vor dem Rotorblatt wieder einströmt.

Sind die beiden Periodizitätsebenen so generiert worden, daß die finiten Flächen der Aus- und der Eintrittsebene deckungsgleich sind, so ist diese Aussage auch für jedes der an diese Ebenen anstoßenden Volumina gültig, so daß die Konservativität beim Übergang von einem Volumen an der Austritts- in das korrespondierende Volumen an der Eintrittsebene gewahrt ist.

Zur Vereinfachung des Algorithmusses werden zwei fiktive Zellschichten ( $j = 0$  und  $j = -1$ ) erzeugt, auf die die letzte ( $j = 1$ ) bzw. vorletzte ( $j = 2$ ) Zellschicht

aus dem eigentlichen Rechenraum abgebildet werden. Dadurch läßt sich auch die Verfahrensgenauigkeit 3. Ordnung beibehalten.

Die Abbildungsvorschriften für die physikalischen und geometrischen Größen bezogen auf die Volumenmittelpunkte lauten:

a) für zylindrische Koordinaten

$$\hat{r}_{i,j,k} = r'_{i,j,k} \quad , \quad (3.82)$$

$$\hat{\phi}_{i,j,k} = \phi_{i,j,k}$$

mit  $\phi = (\rho, \rho\bar{u}, \rho v, \rho w, \bar{e})^T$  ,

$$r = (\theta, r, z)^T \quad ,$$

$$r' = (\theta - \chi \cdot \nu, r, z)^T \quad , \quad \chi = 2\pi/n \quad , \quad \nu = \text{sign}(\theta)$$

$$\Rightarrow \nu = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } i \text{ eine Zelle an der Austrittsfläche bezeichnet} \\ -1 & , \text{ wenn } i \text{ eine Zelle an der Eintrittsfläche bezeichnet} \end{cases}$$

und der Indexzuordnung

$$\hat{i} = i_2 - i + i_{\max} \cdot (\min(1, \max(0, i+1-i_2))) \quad , \quad i = 1 \dots i_{\max} \quad ,$$

$$\hat{j} = 1 - j \quad , \quad j = 1, 2 \quad , \quad (3.83)$$

$$\hat{k} = k \quad , \quad k = 1 \dots k_{\max} \quad ,$$

wobei  $i_2$  den Index der Netzlinie, die in die Profilnase mündet, bezeichnet ( $i_2 = i_{\max}/2+1$ ). Die Indexzuordnung gilt ausschließlich für die verwendeten Netze mit 0-0-Topologie und der in Bild 3.5-1 dargestellten Indizierungssystematik.

b) für kartesische Koordinaten

$$\hat{r}_{i,j,k} = T_{i,j,k} \cdot r_{i,j,k} \quad ,$$

$$\hat{\bar{q}}_{i,j,k} = T_{i,j,k} \cdot \bar{q}_{i,j,k} \quad ,$$

$$\hat{\rho}_{i,j,k} = \rho_{i,j,k} \quad ,$$

$$\hat{\bar{e}}_{i,j,k} = \bar{e}_{i,j,k} \quad (3.84)$$

$$\text{mit } \mathbf{r} = (x, y, z)^T, \\ \bar{\mathbf{q}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})^T,$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\nu \cdot \sin \chi & 0 \\ \nu \cdot \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = 2\pi/n, \quad \nu = \text{sign}(x)$$

$$\Rightarrow \nu = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i \text{ eine Zelle an der Austrittsfläche bezeichnet} \\ -1, & \text{wenn } i \text{ eine Zelle an der Eintrittsfläche bezeichnet} \end{cases}$$

und der Indexzuordnung gemäß Gl.(3.83).

Bei begrenztem Speicherplatz besteht die Möglichkeit, anstelle einer Belegung fiktiver Zellen die beteiligten Volumina über die analytische Indexzuordnung direkt anzusprechen, wie in der vorliegenden Arbeit geschehen.

#### Randbedingungen an Schnittebenen

Hierbei handelt es sich um fiktive Grenzen, die dadurch bestimmt sind, daß sie nur im Rechenraum, nicht aber im physikalischen Raum existieren. Sie sind bedingt durch die Netztopologie und treten bei O- und C-Netzen auf.

Bei den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Netzen vom O-O-Typ bestehen zwei solcher Schnittebenen (s. Bild 3.5-1). Die eine erstreckt sich von der Blatthinterkante zum Fernfeldrand und trennt die Zellschichten mit den Indices  $i=1$  und  $i=i_{max}$ , während die zweite von der Blattspitze zum Fernfeldrand verläuft und für  $j=j_{max}$  die Volumina der Unterseite ( $i=1 \dots i_2-1$ ) von denen der Oberseite ( $i=i_2 \dots i_{max}$ ) trennt.

Wie auch bei der periodischen Randbedingung besteht die Aufgabe lediglich darin, die Indices der Volumen mit gemeinsamer Begrenzungsfläche zu finden, so daß die Flußbestimmung mit der gleichen Genauigkeit wie im Inneren des Rechenraums stattfinden kann. Die Belegung fiktiver Zellen ist nicht erforderlich.

#### Randbedingungen an Blockgrenzen

Verwendet man blockstrukturierte Netze, so sind an den Blockgrenzen Maßnahmen vorzusehen, die einen konservativen Informationsaustausch zwischen den beiden Blöcken gewährleisten. Da es unterschiedliche Formen blockstrukturierter Netze

gibt, sind auch die erforderlichen Maßnahmen unterschiedlich. Kap. 4.4 gibt hierzu einen kurzen Überblick.

In der vorliegenden Arbeit wurde die einfachste Art der Blockstrukturierung gewählt, bei der die Netzlinien der beiden Blöcke an der gemeinsamen Grenze aneinanderstoßen. Dies war aufgrund der geometrischen Gegebenheiten ohne große Netzverzerrungen möglich und erfordert den geringstmöglichen Aufwand bezüglich der Erstellung der Flußbilanzen über die Blockgrenze hinweg. Wie bereits an den zuvor beschriebenen Rändern ist erneut lediglich eine Indexzuordnung zu erstellen.

Die Lage der Blöcke im Indexraum ist Bild 3.5-1 zu entnehmen.

### Innerer Netzrand

Bei den meisten Autoren, die sich mit der Berechnung der Hubschrauberrotorströmung beschäftigen, wird der Netzkörper nicht bis zur Drehachse bei  $r = 0$  ausgedehnt, sondern endet noch auf dem Blatt, unabhängig davon, ob ein in sich geschlossener Rechenraum ohne Nachlaufmodell (z.B. [38,47,61]) oder nur eine Diskretisierung eines engen Bereiches um das Blatt (z.B. [33-37,56,57]) verwendet wurden. In der Regel ist die Ursache hierfür das Auftreten numerischer Schwierigkeiten in den Zellen bei  $r \rightarrow 0$ . Dadurch wird jedoch die Definition einer zusätzlichen Randbedingung erforderlich. Nichtreflektierende Randbedingungen, verschiedene Methoden der Extrapolation bestimmter Strömungsgrößen oder die Vorgabe einer 2-D Bedingung sind die gebräuchlichsten Varianten.

Auch in eigenen früheren Arbeiten wurde bei Verwendung eines H-Netzes ein solcher Weg beschränkt [41,42,44,46,143]. Abgesehen von den negativen Einflüssen, die die Vorgabe künstlicher Bedingungen an einem solchen Rand, der sich im Gegensatz zum Fernfeldrand in unmittelbarer Nähe des interessierenden Strömungsgebietes befindet, auf die Lösung hat, besteht ein sehr großer Nachteil darin, daß der innere Randwirbel und sein Beitrag auf die Ausbildung der Nachlaufschicht sowie die inneren Teile der Nachlaufschicht selbst nicht erfaßt werden können. Außerdem werden Querströmungseffekte, z.B. infolge einer starken Blattverwindung, in der Nähe dieser Grenze falsch wiedergegeben.

Aus diesem Grunde wurden in der vorliegenden Arbeit nur solche Netze verwendet, die das komplette Strömungsgebiet bis zur Rotationsachse einschließen. Somit entfällt die Vorgabe einer zusätzlichen Randbedingung. Numerische Probleme entstehen bei dem verwendeten Lösungsalgorithmus in den achsnahen Zellen nicht.

## 4. Netzgenerierung

### 4.1 Anforderungen und Netztopologien

Zur numerischen Lösung der Euler-Gleichungen ist die Erzeugung sog. Rechenetze erforderlich, die den betrachteten Strömungsraum um den zu untersuchenden Körper in genügend kleine, lückenlos aneinanderstoßende, nicht überlappende Zellen unterteilen, in denen dann die diskretisierten Gleichungen iterativ gelöst werden.

Von der Beschaffenheit des Gitters geht ein erheblicher Einfluß auf die Qualität der Lösung aus. Bei der Generierung ist daher besondere Sorgfalt zu üben.

Kriterien für die Güte von Rechenetzen sind in erster Linie die Netzfeinheit, d.h. die Größe der aus der Diskretisierung entstandenen Volumina, der Verzerrungsgrad einzelner Zellen, der insbesondere im Bereich starker geometrischer Veränderungen sehr hoch sein kann, das Verhältnis der Kantenlängen der Volumina und schließlich die Homogenität, d.h. das Größenverhältnis benachbarter Zellen.

Der durch den Übergang von der differentiellen auf die Differenzenform der Bewegungsgleichungen entstehende Abbruchfehler ist u.a. abhängig vom Abstand der diskreten Aufpunkte, d.h. vom Diskretisierungsgrad des zugrundeliegenden Netzes. Der führende Term des Abbruchfehlers ist maßgebend für die dispersiven und dissipativen Eigenschaften des Lösungsverfahrens. Erstere sind an die Terme des Abbruchfehlers gekoppelt, die die Ableitungen ungerader Ordnung enthalten, während die Dissipation durch die Terme mit den Ableitungen gerader Ordnung bestimmt wird. Eine zu hohe Dispersion führt zu Phasenfehlern im zeitlichen Verlauf sich wellenförmig ausbreitender Informationen und ist daher insbesondere bei instationären Untersuchungen von Nachteil. Eine zu hohe Dissipation führt zu einer Verschmierung von Gradienten, unabhängig davon, ob diese physikalisch korrekt oder numerisch bedingt sind. Andererseits ist eine zu geringe Dissipation aber ebenfalls von Nachteil, da eine Dämpfung numerisch induzierter Störungen nicht mehr ermöglicht ist, und es dadurch zu einem instabilen Verhalten kommt.

Die Terme des Abbruchfehlers werden zum einen durch die Art der Differenzbildung bestimmt und sind daher verfahrenstypisch. In Kap. 3.2.3 sind einige der üblichen Schemata u.a. in Bezug auf ihr Dissipationsniveau miteinander verglichen. Zum zweiten bestimmt aber auch die Netzfeinheit signifikant die Größenordnung dieser Terme, da der Aufpunktsabstand in der Potenz der Verfahrensgenauigkeit eingeht.

In der konkreten Anwendung auf die Berechnung der Rotorströmung muß bei einem

zu groben Netz nicht nur mit einer Beeinträchtigung eventuell auftretender Stöße im äußeren Blattbereich, sondern auch mit einer verstärkten Diffusion der Randwirbel bzw. des gesamten Nachlaufes gerechnet werden. Dies wiederum hätte bei dem verwendeten Wake-Capturing-Verfahren einen negativen Einfluß auf die Wiedergabe des Anströmzustandes vor dem betrachteten Blatt und damit letztlich auf die gesamte Druckverteilung entlang der Oberfläche. In Kap. 5.4.1 wird auf die Unterschiede zwischen den auf verschiedenen feinen Netzen erzeugten Nachlaufgeometrien eingegangen.

Aufgrund der beschriebenen Auswirkungen ist man bestrebt, eine sehr feine Auflösung des Strömungsgebietes zu erreichen. Dem stehen jedoch in aller Regel beschränkte Ressourcen in Bezug auf den zur Verfügung stehenden Speicherplatz und auf eine vertretbare Rechenzeit entgegen, so daß man, zumindest noch beim jetzigen Stand der Computertechnologie, zu erheblichen Kompromissen gezwungen ist. Die daraus resultierende Anforderung an die verwendeten Rechennetze besteht daher darin, eine besonders hohe Auflösung in den Bereichen starker Strömungsgradienten, also vor allem in Körperrnähe, in Stoßbereichen etc., aufzuweisen, gleichzeitig aber in Bereichen geringer Änderungen, wie z.B. im Fernfeld, eine möglichst geringe Zellenzahl zu besitzen.

Je nach Anwendungsfall und je nach Geometrie des zu untersuchenden Körpers kann die "optimale" Netzstruktur unterschiedlich sein. Es sind daher in der Vergangenheit viele verschiedene Gittertypen entwickelt worden, die sich vor allem durch den charakteristischen Verlauf der Netzlinien unterscheiden. Man spricht in diesem Zusammenhang von sog. C-, O-, H- oder L-Netzen, wobei die Form der Buchstaben auf diesen Verlauf hindeutet. Eine Aufstellung der verschiedenen Netztopologien findet man beispielsweise bei Cucinelli [144] oder Thompson et al. [72,145].

Für dreidimensionale Anwendungsfälle kann die Netzstruktur in Profil- und Spannweitenrichtung unterschiedlich sein, so daß dann Kombinationen der oben genannten Grundtypen vorliegen. Im Bereich rotierender Strömungen finden sich vor allem H-H-Netze (z.B. [49]), O-O-Netze (z.B. [40,43]), O-H-Netze (z.B. [36]) und C-H-Netze (z.B. [33-35,38,50,61]).

In der vorliegenden Arbeit wurden ausschließlich Netze vom O-O-Typ (im folgenden kurz als O-Netze bezeichnet) verwendet. Das gleiche Euler-Verfahren wurde von Hertel [49] parallel dazu mit verschiedenen H-H-Netzen (kurz H-Netze) betrieben. Die spezifischen Vorteile der H-Netze liegen in einer im gesamten physikalischen Raum sehr gleichmäßigen Diskretisierung. Dies ist eine günstige Voraussetzung für den Wirbeltransport. Nachteilig wirkt sich in erster Linie die hohe Gesamtpunktzahl aus, die bei der Forderung nach einer einigermaßen feinen Auflösung des Körperrnäherbereiches zwangsläufig in Kauf zu nehmen ist,

da aufgrund der spezifischen H-Topologie die globale Zelldichte nach außen hin nicht abnehmen kann.

Demgegenüber weisen O-Netze ein wesentlich besseres Verhältnis von Auflösungsvermögen im Körperrahmbereich und resultierender Gesamtpunktzahl auf, was bei vergleichbarem Diskretisierungsgrad im Bereich des Körpers zu einem erheblich geringeren Gesamtaufwand der nachfolgenden Strömungsrechnung führt. Dem steht jedoch der Nachteil gegenüber, daß mit der nach außen hin abnehmenden Auflösung auch solche Bereiche des Strömungsfeldes betroffen sind, durch die der Nachlauf auf dem Weg zum nachfolgenden Blatt transportiert werden muß.

#### 4.2 Generierungsalgorithmus

Zur Generierung numerischer Rechengitter haben sich im wesentlichen zwei Methoden bewährt, zum einen die algebraischen, und zum anderen die differentiellen Verfahren.

Bei ersteren erfolgt eine mehrparametrische Interpolation zwischen den Außenrändern und der Körperoberfläche. Die Verwendung expliziter Funktionen ermöglicht eine äußerst schnelle Generierung, erfordert jedoch die Vorgabe einer Reihe von Eingabeparametern, die auf die jeweilige Konfiguration anzupassen sind. Als Beispiel einer solchen Methode sei die transfinite Interpolation nach Eriksson [146] genannt, die z.B. von Kroll angewendet wird [40]. Auch Stahl [94] macht von einer algebraischen Netzgenerierungsmethode Gebrauch.

Bei den differentiellen Verfahren unterscheidet man entsprechend dem verwendeten Gleichungstyp zwischen hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Methoden. In den ersten beiden Fällen wird nur die Punkteverteilung an der Körperoberfläche vorgegeben und das Netz dann nach außen hin aufgebaut. Auf die Gestalt der äußeren Berandung hat man jedoch keinen Einfluß. Bei den elliptischen Verfahren können hingegen auch die Bedingungen am Außenrand vorgeschrieben werden und es erfolgt eine kontinuierliche Punkteverteilung innerhalb eines abgeschlossenen Raumes. Diese Methode ist sehr flexibel und äußerst anwenderfreundlich, da praktisch nur die Geometrie der Körperkontur und die Außenmaße der Berandung vorgegeben werden müssen.

Der in dieser Arbeit zur Erzeugung der O-Netze verwendete Algorithmus gehört zur letztgenannten Gruppe und basiert auf der Lösung der Poisson-Gleichungen

$$\begin{aligned} X_{\xi\xi} + X_{\eta\eta} + X_{\zeta\zeta} &= P \cdot , \\ Y_{\xi\xi} + Y_{\eta\eta} + Y_{\zeta\zeta} &= Q \cdot , \\ Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta} + Z_{\zeta\zeta} &= R \cdot , \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei X,Y,Z die gesuchten Koordinaten der Netzknotenpunkte im kartesischen oder im zylindrischen System und  $\xi, \eta, \zeta$  die krummlinigen, gitterkonformen Koordinaten im Rechenraum darstellen.

P,Q,R bezeichnen die sog. Quellterme, mit denen die Punkteverteilung gesteuert werden kann. Im vorliegenden Verfahren werden sie ihrerseits durch die Lösungen der Laplace-Gleichungen

$$\begin{aligned} P_{\xi\xi} + P_{\eta\eta} + P_{\zeta\zeta} &= 0, \\ Q_{\xi\xi} + Q_{\eta\eta} + Q_{\zeta\zeta} &= 0, \\ R_{\xi\xi} + R_{\eta\eta} + R_{\zeta\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

bestimmt. Man erhält ein entkoppeltes System 4. Ordnung, das nach Approximation der Ableitungen durch zentrale Differenzen iterativ gelöst werden kann. Details zum Lösungsalgorithmus, speziell zur Generierung von H-Netzen können der Arbeit von Schwarz [147] entnommen werden. Dort findet sich auch eine Beschreibung über die Berechnung zweier charakteristischer Größen zur Beurteilung der Netzgüte. Dies ist zum einen das Zellvolumen, das bei einem negativen Wert auf eine unerlaubte Überschneidung von Netzlinien hinweist, und zum anderen der Verzerrungsgrad der einzelnen Volumina, der einen bestimmten Minimalwert nicht unterschreiten sollte.

Eine Besonderheit stellt die Vorgabe der Randbedingungen an der Körperoberfläche dar. Sie soll anhand von Bild 4.2-1 verdeutlicht werden.

Während die Quellterme am Fernfeldrand alle zu Null gesetzt werden, um dort eine möglichst gleichförmige Verteilung der Netzlinien zu erhalten, möchte man diese an der Oberfläche stark verdichten. Dazu kann man beispielsweise die Koordinaten der zweiten Netzebene (die erste Netzebene bezeichnet bei der O-Netz-Systematik die Körperoberfläche) in Form eines definierten Normalenabstandes von der Oberfläche explizit vorgeben. Die notwendigen Randbedingungen für die Lösung des Gleichungssystems (4.2) ergeben sich dann in diesen Punkten durch die Ermittlung von P,Q,R aus Gl.(4.1). Es handelt sich hierbei um eine dynamische Randbedingung, da dazu auch die Koordinaten der erst im Laufe der Iteration ermittelten dritten Netzebene benötigt werden. Bei der expliziten Vorgabe der Koordinaten der zweiten Netzsicht und damit der Größe der körpernächsten Zellen ist darauf zu achten, daß die Größe der angrenzenden, frei generierten Zellreihen nicht zu stark davon abweichen. Eine solche metrische Diskontinuität in Körpernähe würde zu erheblichen Ungenauigkeiten in der Lösung der Euler-Gleichungen führen, was sich sowohl in der Druckverteilung als auch im Totaldruckverlust niederschlägt, wie anhand zweidimensionaler Prinzipuntersuchungen festgestellt werden konnte.

Alternativ dazu kann man auf die Vorgabe der Koordinaten der Punkte der zweiten Netzebene verzichten und setzt sie statt dessen ins Verhältnis zum Abstand der dritten Netzreihe von der Oberfläche. Damit läßt sich der Übergang in der Größe der Volumina in Normalenrichtung exakt beeinflussen. Demgegenüber hat man jedoch nur einen indirekten Einfluß auf den tatsächlichen Abstand der zweiten Netzebene von der Oberfläche.

Schwarz [148] verwendet, gerade auch im Hinblick auf eine möglichst feine und dennoch homogene Diskretisierung des Körpernahbereiches, inzwischen einen Algorithmus 6.Ordnung der Form

$$\nabla^6 X = 0 \quad (4.3)$$

(für Y und Z entsprechend), der analog zu Gl.(4.1),(4.2) in drei Systemen 2. Ordnung, bestehend aus zwei Poisson- und einer Laplacegleichung, gelöst wird. Damit steigen jedoch auch Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Weiterentwicklung des ursprünglichen Systems 4.Ordnung verwendet. Eine der wichtigsten Modifikationen besteht darin, die dynamische Randbedingung für die Poisson-Terme nicht schon auf der zweiten Netzebene, sondern weiter im Feldinneren auf der n-ten Ebene vorzuschreiben (s. Bild 4.2-1). Hier wiederum ermitteln sich die Werte der Quellterme entsprechend Gl.(4.1) aus den Koordinaten der (noch nicht explizit bekannten) Punkte auf der (n+1)-ten und der (n-1)-ten Ebene in Normalen-, sowie der n-ten Ebene in Profil- und Spannweitenrichtung. Die Bestimmung der "Zwischenebenen" 2 bis (n-1), die nicht am Iterationsprozeß beteiligt sind, erfolgt algebraisch über die Vorgabe von Verhältnisgrößen bezogen auf den Abstand der Punkte der n-ten Netzebene von der Körperoberfläche. Diese Werte können für alle drei Koordinatenrichtungen unterschiedlich sein, so daß die Netzlinien im Bereich zwischen der Körperoberfläche und der n-ten Ebene keine Geradenstücke, sondern dreidimensional gekrümmte Kurven darstellen. Auf diese Art kann z.B. der Abgangswinkel der Linien von der Körperoberfläche gesteuert oder eine Abhängigkeit vom lokalen Krümmungsradius der Kontur geschaffen werden.

Der Wert für n ist beliebig vorgebar und bewegte sich in der Größenordnung 4 - 5, n=2 führt auf das Originalverfahren zurück.

Das beschriebene Verfahren erlaubt die Konzentration von Gitterebenen im Körpernahbereich und ermöglicht gleichzeitig eine sehr homogenen Verteilung derselben. Außerdem entsteht kein Mehraufwand gegenüber dem ursprünglichen Poissonalgorithmus.

### 4.3 Ausgeführte Netze

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Rechennetze besitzen eine O-Topologie sowohl um das Profil als auch in radialer Richtung. Dies ist schematisch in Bild 3.5-1 dargestellt. Ebenfalls dort eingetragen ist die Indizierungs-systematik und die Struktur des zugehörigen Rechenraumes.

Aufgrund der Betrachtung ausschließlich stationärer Flugzustände bezogen auf ein blattfestes Koordinatensystem sind die Strömungszustände vor den einzelnen Rotorblättern identisch. Es genügt daher die Betrachtung eines einzelnen Blattes und die Erfassung des Einflusses der anderen Blätter über die sog. periodische Randbedingung (vgl. Kap. 3.5). Der in sich geschlossene physikalische Raum läßt sich dann bei einem n-blättrigen Rotor in n Teilräume mit einem Öffnungswinkel von  $\chi = 2\pi/n$  zerlegen. Damit kann der benötigte Rechenaufwand um den Faktor n reduziert werden.

Um eine Interpolation der Strömungsgrößen an der Periodizitätsebene zu vermeiden, ist sicherzustellen, daß die Netzkpunkteverteilung in dieser Ebene symmetrisch zur Rotationsachse ist. Das hat zur Konsequenz, daß der Einstellwinkel des Blattes auf der relativ kurzen Länge des Blattanschlusses auf Null abgebaut werden muß, was insbesondere bei stark verwundenen Blättern nicht ganz unproblematisch ist. Darüberhinaus ist es erforderlich, das Rotorblatt bereits unter seinem aktuellen Einstellwinkel in das Rechennetz einzubetten, da eine Vorgabe der Anströmrichtung über die Fernfeldrandbedingungen, wie bei Flügel- oder Profiliberechnungen üblich, in diesem Fall nicht möglich ist.

Die erste Generation der verwendeten O-Netze besaß in Anlehnung an die bis dahin verwendeten H-Netze, sowie aufgrund der einfachen Vorgabe der Randbedingungen für den Netzgenerierungsalgorithmus die äußere Form eines Zylinders. Die in [41,42,46] präsentierten Rechnungen waren auf solchen Netzen erzeugt worden. Die Ausdehnung des Netzkörpers betrug zunächst 12 Blattiefen in radialer Richtung und jeweils 8 Blattiefen ober- und unterhalb der Rotorkreisscheibe. Ein solches Netz ist in Bild 4.3-1 dargestellt.

Es stellte sich jedoch sehr bald heraus (vgl. [42]), daß der gewählte Abstand des Fernfeldrandes viel zu gering ist und damit die Ausbreitung des Nachlaufes sowohl in radialer Richtung als auch in seiner Absenkung behindert wird. In Kap. 5.4.3 sind die Auswirkungen eines zu engen Netzes dargestellt. Daraufhin wurde die Ausdehnung der äußeren Grenzen erheblich erweitert. Dies geschah dadurch, daß das Originalnetz beibehalten, und die zusätzlichen Netzkpunkte durch Interpolation zwischen alter und neuer Außenberandung ermittelt wurden. Die Größe der Zellen stieg dabei kontinuierlich um einen festzulegenden Faktor an.

Insgesamt waren die Ergebnisse mit den zylinderförmigen O-Netzen im Hinblick auf die Wiedergabe des Nachlaufes jedoch nicht zufriedenstellend. Dies lag insbesondere auch in der ungünstigen äußeren Form des Netzkörpers begründet, die der O-Topologie nicht entgegenkommt. So existieren beispielsweise entlang der oberen und unteren umlaufenden Kante sehr großen Zellen, die die bekannten Nachteile in Bezug auf das Diffusionsverhalten zur Folge haben.

Es wurde daher für die in dieser Arbeit verwendeten Standardnetze von einer zylindrischen auf eine ellipsoide Außenkontur übergegangen und, angepaßt an die Form der Rotorkreisscheibe, ein sog. abgeplattetes Rotationsellipsoid als Berandung vorgegeben (Bild 4.3-2). Für die Untersuchung auftriebsbehafteter Fälle wurde dieses Netz nach außen erweitert, so daß die beiden großen Halbachsen in der Regel eine Länge von etwa 30, die kleine von etwa 24 Blattiefen hatten (Bild 4.3-3). Für einzelne Detailuntersuchungen wurden auch hin und wieder andere Außenmaße benutzt. Die bereits bei den zylinderförmigen Netzen eingeführte Vorgehensweise, zunächst einen etwa halb so großen Innenkörper zu generieren, und anschließend durch einen schnellen algebraischen Algorithmus den Außenbereich anzufügen, wurde beibehalten. Dies bietet neben einer Rechenzeiterparnis bei der Generierung vor allem den Vorteil, daß der Auflösungsgrad im Innen- und Außenbereich individuell festgelegt werden kann.

Die Netzpunktzahl war aufgrund der zur Verfügung stehenden Ressourcen auf 200.000 limitiert. Die Aufteilung dieser Punkte variierte je nach Ausführung in den Grenzen  $80 \leq i_{max} \leq 128$  entlang der Profilloberfläche,  $41 \leq j_{max} \leq 49$  in Spannweiten- und  $34 \leq k_{max} \leq 60$  in Normalenrichtung.

Die Ergebnisse auf den verschiedenen Netzvarianten dieser Gruppe differierten untereinander kaum. Lediglich die Veränderung der Zellenzahl in  $\xi$ -Richtung machte sich in der Druckverteilung entlang der Profilkontur bemerkbar. In der Berechnung des Nachlaufes ergab sich eine weitestgehende Übereinstimmung. Im Ergebnisteil ist daher stellvertretend pro Testfall nur eine Lösung für die feinen Netze aufgeführt.

Demgegenüber wurden jedoch Vergleichsrechnungen auf einem sehr viel gröberen Netz durchgeführt, das über eine Gesamtzahl von etwa 60.000 Punkten, aufgeteilt in  $i_{max} = 64$ ,  $j_{max} = 35$ ,  $k_{max} = 28$ , verfügte. Die Ergebnisse sind in Kap. 5.4.1 beschrieben und mit denen auf dem feinen Netz verglichen. Das Netz selbst ist in Bild 4.3-4 dargestellt.

In den Bildern 4.3-5 - 4.3-8 sind einige Details der generierten Netze zu sehen.

Bild 4.3-5 zeigt die Oberflächendiskretisierung des Rotorblattes. Im Innenbereich endet das Blatt bei  $r/R = 0.15$ . Die Modellierung des Blattanschlusses zur Rotationsachse wurde vernachlässigt, so daß die Netzzellen in diesem

Bereich ungehindert durchströmt werden können. Aufgrund der Forderung einer symmetrischen Periodizitätsebene erfahren die Netzlinien im Wurzelbereich einen starken Knick, da die Nickachse durch die Blattvorderkante verläuft. Bild 4.3-6 stellt die Diskretisierung des Blattspitzenbereiches dar, und Bild 4.3-7 die Periodizitätsebene.

Zuletzt zeigt Bild 4.3-8 einen Blick auf die Rotorkreisebene, sowohl bei dem feinen als auch bei dem groben Netz. Man erkennt hieran deutlich die bereits angesprochene Problematik des sehr unterschiedlichen Diskretisierungsniveaus entlang des Randwirbelpfades, die für die O-Topologie typisch ist.

#### 4.4 Blockstrukturierte Netze

Die in Kap. 4.3 beschriebenen Netze verfügen allesamt über einen spezifischen Nachteil, der mit der O-Topologie zusammenhängt. Eine Erweiterung des physikalischen Raumes und damit auch der Anzahl der Zellen unterhalb der Rotorkreis-scheibe, was für eine ungehinderte Absenkung des Nachlaufes notwendig ist, bedingt gleichzeitig auch eine ebensolche Erweiterung in radialer Richtung sowie oberhalb des Blattes. Dies geht zulasten der Rechenzeit und des Speicherplatzes, obwohl die Strömungszustände in diesen Bereichen eine bedeutend geringere Zellenzahl zuließen.

Aus diesem Grund bot sich die Verwendung blockstrukturierter Netze an, bei denen ein eigenständiger Netzblock das nun in seiner Größe reduzierte Grundnetz nach unten verlängerte.

Blockstrukturierte Netze sind in der numerischen Aerodynamik vor allem dann gebräuchlich, wenn das Strömungsfeld um sehr komplexe Geometrien, wie z.B. um ein komplettes Flugzeug mit Rumpf, Flügel, Leitwerken, Triebwerksgondeln etc., berechnet werden soll. Die Erfassung einer solchen Konfiguration in einem einzigen Netzkörper ist oftmals nur unter sehr großem Aufwand und dann u.U. nur in unbefriedigender Ausführung möglich.

Eine ausführliche Beschreibung der auch als "composite grids" bezeichneten Netze und eine Reihe von Anwendungsbeispielen für komplexe Konfigurationen finden sich z.B. in [149,150]. Die im folgenden verwendete Terminologie entspricht derjenigen aus dem letztgenannten Werk.

Anhand der Gestaltung des Übergangsbereiches zwischen zwei benachbarten Netzblöcken lassen sich die verschiedenen Typen blockstrukturierter Netze in Gruppen unterteilen.

Sind die Begrenzungsflächen benachbarter Blöcke koplanar und stoßen sie ohne Überlappung aneinander, so spricht man von sogenannten "patched-" oder "block

grids" . Überschneiden sich die Blockgrenzen, so handelt es sich um sogenannte "overlapping-", "overlaid-" oder auch "chimera grids" (z.B. [151]). Sind dabei ein oder mehrere eigenständige Netze in ein oder mehrere Hauptnetze eingebettet, so ist auch der Begriff "embedded grids" gebräuchlich. Der Informationsaustausch über die sich u.U. willkürlich überlappenden Netzgrenzen erfolgt mit Hilfe aufwendiger Interpolationsverfahren, die die Konservativität sicherstellen sollen.

Unter den "block-" oder "patched grids" findet man im wesentlichen zwei Varianten. Stoßen die Netzlinien an der gemeinsamen Blockgrenze in gemeinsamen Punkten aneinander, so spricht man von einem kontinuierlichen Netz, während bei einem diskontinuierlichen Netz die Netzlinien zweier benachbarter Teilräume an beliebigen Stellen auf die gemeinsame Begrenzungsfläche treffen können. Bei letzteren besteht der Vorteil insbesondere in der Flexibilität bei der Generierung unabhängiger Einzelnetze und in der Möglichkeit, Teilnetze mit unterschiedlichem Diskretisierungsgrad zu schaffen. Demgegenüber besteht jedoch die Notwendigkeit, an den gemeinsamen Blockgrenzen Maßnahmen zur Wahrung eines konservativen Informationsaustausches zu ergreifen. Eine solche Methode ist beispielsweise in [113] beschrieben.

Die kontinuierlichen Netze zeichnen sich vor allem durch eine problemlose Bildung der Flußbilanzen über die Blockgrenzen hinweg aus. Allerdings sind die einzelnen Teilnetze aufeinander abzustimmen und es kann trotz der Verwendung von Glättungsalgorithmen zu Inhomogenitäten in Netzlinienverlauf und -dichte an den Netzübergängen kommen. Man spricht in einem solchen Fall von metrischen Diskontinuitäten.

Im Bereich rotierender Strömungen finden sich Anwendungen beider Varianten beispielsweise in der Hubschrauberaerodynamik zur Berechnung von Rotor-Rumpfinterferenzen (siehe z.B. Hinweise in [48]) oder in der Triebwerksentwicklung zur Untersuchung der Strömung durch einen Verdichter mit Leit- und Laufrädern [152] bzw. für gegenläufige Propfans [50]. Kennzeichnend ist, daß es sich hierbei um instationäre Vorgänge handelt, bei denen die Relativbewegung hauptsächlich in einer Ebene stattfindet. Dadurch kann eine Überlappung der Netze vermieden werden.

In der vorliegenden Arbeit wurden kontinuierliche Blocknetze verwendet, wobei die einfache Informationsübergabe und, damit verbunden, die nur beschränkten Änderungen im Algorithmus zur Strömungsberechnung ausschlaggebend waren. Zusätzlich wurde versucht, die Diskontinuitäten beim Übergang der Netzlinien so gering wie möglich zu halten. Aufgrund der geometrischen Gegebenheiten an der Unterseite des Ursprungsnetzes bot sich die Verwendung einer H-Netz-Topologie an.

Bild 4.3-9 zeigt die Symmetrieffläche eines so erzeugten Blocknetzes, bei dem der obere Teil noch die zylindrische Form hat, was das Ansetzen des Bodenblockes besonders einfach macht. Störend sind lediglich die metrischen Diskontinuitäten im Außenbereich der Übergangsfläche.

Die Ausführung mit einem ellipsoiden Grundnetz ist in Bild 4.3-10 dargestellt. Die Gesamtpunktzahl beider Blocknetze war um etwa 40% geringer als die der global vergrößerten Netze mit vergleichbarem Diskretisierungsgrad, was eine deutliche Rechenzeiterparnis versprach. Außerdem bedingt die äußere Form des unteren Netzblockes eine Konzentrierung der Netzlinien und damit eine bessere Auflösung im unteren Bereich.

Die Ergebnisse, die mit diesen beiden Netzen erzielt wurden und die in Kap. 5.4.4 beschrieben sind, erfüllten die Erwartungen jedoch nicht. Der gesamte Rotornachlauf senkte sich überhaupt nicht ab, der Übergang zwischen den beiden Netzblöcken schien wie eine nahezu undurchlässige Wand zu wirken.

Erst eine Erhöhung der Zellenzahl im unteren Netzblock schaffte Abhilfe (Bild 4.3-11). Gleichzeitig wurde auch die metrische Diskontinuität an der Berührungsfläche der beiden Netzblöcke beseitigt, was aber für sich allein ohne Einfluß auf die geschilderte Problematik war. Bild 4.3-12 zeigt das für einen Teil der in Kap. 5.2 präsentierten Ergebnisse standardmäßig verwendete Netz in Globalansicht.

grids". Überschneiden sich die Blockgrenzen, so handelt es sich um sogenannte "overlapping-", "overlaid-" oder auch "chimera grids" (z.B. [151]). Sind dabei ein oder mehrere eigenständige Netze in ein oder mehrere Hauptnetze eingebettet, so ist auch der Begriff "embedded grids" gebräuchlich. Der Informationsaustausch über die sich u.U. willkürlich überlappenden Netzgrenzen erfolgt mit Hilfe aufwendiger Interpolationsverfahren, die die Konservativität sicherstellen sollen.

Unter den "block-" oder "patched grids" findet man im wesentlichen zwei Varianten. Stoßen die Netzlinien an der gemeinsamen Blockgrenze in gemeinsamen Punkten aneinander, so spricht man von einem kontinuierlichen Netz, während bei einem diskontinuierlichen Netz die Netzlinien zweier benachbarter Teilräume an beliebigen Stellen auf die gemeinsame Begrenzungsfläche treffen können. Bei letzteren besteht der Vorteil insbesondere in der Flexibilität bei der Generierung unabhängiger Einzelnetze und in der Möglichkeit, Teilnetze mit unterschiedlichem Diskretisierungsgrad zu schaffen. Demgegenüber besteht jedoch die Notwendigkeit, an den gemeinsamen Blockgrenzen Maßnahmen zur Wahrung eines konservativen Informationsaustausches zu ergreifen. Eine solche Methode ist beispielsweise in [113] beschrieben.

Die kontinuierlichen Netze zeichnen sich vor allem durch eine problemlose Bildung der Flußbilanzen über die Blockgrenzen hinweg aus. Allerdings sind die einzelnen Teilnetze aufeinander abzustimmen und es kann trotz der Verwendung von Glättungsalgorithmen zu Inhomogenitäten in Netzlinienverlauf und -dichte an den Netzübergängen kommen. Man spricht in einem solchen Fall von metrischen Diskontinuitäten.

Im Bereich rotierender Strömungen finden sich Anwendungen beider Varianten beispielsweise in der Hubschrauber-aerodynamik zur Berechnung von Rotor-Rumpfinterferenzen (siehe z.B. Hinweise in [48]) oder in der Triebwerksentwicklung zur Untersuchung der Strömung durch einen Verdichter mit Leit- und Laufrädern [152] bzw. für gegenläufige Propfans [50]. Kennzeichnend ist, daß es sich hierbei um instationäre Vorgänge handelt, bei denen die Relativbewegung hauptsächlich in einer Ebene stattfindet. Dadurch kann eine Überlappung der Netze vermieden werden.

In der vorliegenden Arbeit wurden kontinuierliche Blocknetze verwendet, wobei die einfache Informationsübergabe und, damit verbunden, die nur beschränkten Änderungen im Algorithmus zur Strömungsberechnung ausschlaggebend waren. Zusätzlich wurde versucht, die Diskontinuitäten beim Übergang der Netzlinien so gering wie möglich zu halten. Aufgrund der geometrischen Gegebenheiten an der Unterseite des Ursprungsnetzes bot sich die Verwendung einer H-Netz-Topologie an.

Bild 4.3-9 zeigt die Symmetrieffläche eines so erzeugten Blocknetzes, bei dem der obere Teil noch die zylindrische Form hat, was das Ansetzen des Bodenblockes besonders einfach macht. Störend sind lediglich die metrischen Diskontinuitäten im Außenbereich der Übergangsfläche.

Die Ausführung mit einem ellipsoiden Grundnetz ist in Bild 4.3-10 dargestellt. Die Gesamtpunktzahl beider Blocknetze war um etwa 40% geringer als die der global vergrößerten Netze mit vergleichbarem Diskretisierungsgrad, was eine deutliche Rechenzeitersparnis versprach. Außerdem bedingt die äußere Form des unteren Netzblockes eine Konzentrierung der Netzknoten und damit eine bessere Auflösung im unteren Bereich.

Die Ergebnisse, die mit diesen beiden Netzen erzielt wurden und die in Kap. 5.4.4 beschrieben sind, erfüllten die Erwartungen jedoch nicht. Der gesamte Rotornachlauf senkte sich überhaupt nicht ab, der Übergang zwischen den beiden Netzblöcken schien wie eine nahezu undurchlässige Wand zu wirken.

Erst eine Erhöhung der Zellenzahl im unteren Netzblock schaffte Abhilfe (Bild 4.3-11). Gleichzeitig wurde auch die metrische Diskontinuität an der Berührungsfläche der beiden Netzblöcke beseitigt, was aber für sich allein ohne Einfluß auf die geschilderte Problematik war. Bild 4.3-12 zeigt das für einen Teil der in Kap. 5.2 präsentierten Ergebnisse standardmäßig verwendete Netz in Globalansicht.

## 5. Ergebnisse

### 5.1 Vorbemerkungen

#### 5.1.1 Anfahrvorgang

Die Berechnung einer Hubschrauberrotorumströmung mittels eines Euler-Verfahrens in einem blattfesten Koordinatensystem geht üblicherweise von der ungestörten Strömung als Anfangsbedingung aus. Die Geschwindigkeit dieser "Ruhestromung" entspricht der Rotordrehzahl. In der Realität ist der Start der Iteration mit der Situation eines Rotors vergleichbar, der impulsartig auf die vorgegebene Drehzahl beschleunigt.

Dabei erzeugt der Rotor in der Anfangsphase seiner Drehung einen instationären Anfahrvorgang, der sich völlig von dem bekannten stationären Nachlaufzustand unterscheidet.

Analog dazu führt das Ausgehen von dem oben definierten Ruhezustand auch in der numerischen Simulation zu einem ähnlichen Effekt, der, obwohl zeitlich veränderlich, auch bei Verwendung eines stationären Berechnungsverfahrens beobachtet werden kann, und der, wie auch in der Realität, eine sehr lange Zeit in Anspruch nimmt, bis sich der gewünschte stationäre Endzustand einstellt.

Dies steht in völligem Gegensatz zu der Strömung um einen Festflügel, bei dem der Anfahrwirbel mit der Geschwindigkeit der freien Anströmung nach hinten wegschwimmt und relativ schnell seinen Einfluß auf den Flügel verliert.

Die Frage, die sich in diesem Zusammenhang zunächst stellt, ist, inwieweit sich der reale und der numerisch simulierte Anfahrvorgang zumindest qualitativ entsprechen.

Da in der Literatur, mit Ausnahme von Cantaloube & Huberson [153], bisher kaum qualitative, geschweige denn quantitative Aussagen zu den Anfahrvorgängen an einem Hubschrauberrotor veröffentlicht worden sind, wurde in Zusammenarbeit mit Mitarbeitern des Instituts für Luft- und Raumfahrttechnik der RWTH Aachen eine Versuchsreihe an einem Modellrotor im Windkanal durchgeführt, um einige Erkenntnisse über die Physik des Anfahrvorganges zu gewinnen. Hierzu wurde aus der Blattspitze eines Rotorblattes bereits beim Start Rauch ausgeblasen, und die sich ergebenden Strömungsbilder wurden mit einer Videokamera aufgezeichnet. Die im Bildteil dargestellte Sequenz (Bild 5.1-1) repräsentiert die

zeitliche Veränderung im Anfahrvorgang.

Bild 5.1-1a gibt den Zustand nach etwa 6 Rotorumdrehungen wieder. Anstelle von diskreten Einzelwirbeln erkennt man lediglich einen Wirbelring, der außerhalb des Rotorkreises und etwa eine Blatttiefe unterhalb der Blattebene liegt. In dieser Position verharrt er im folgenden noch eine geraume Zeit, wobei die neu entstehenden Spitzenwirbel aufgesogen werden. Dadurch erhöhen sich der sichtbare Durchmesser und auch der Zirkulationsinhalt dieses Wirbelkomplexes, der im folgenden als der eigentliche Anfahrwirbel bezeichnet werden soll.

Nach einer gewissen Zeit beginnt er sich unter Beibehaltung seiner radialen Position aufgrund von Selbstinduktionen allmählich abzusenken. Dieser Zustand ist in Bild 5.1-1b ersichtlich, wobei man nun auch einen diskreten, neu entstandenen Spitzenwirbel ausmachen kann. Dieser wird jedoch, wie zunächst auch alle ihm nachfolgenden, durch die von dem Anfahrwirbel induzierten, einwärts gerichteten Geschwindigkeitskomponenten nach innen gedrückt, gerät hier in den Einfluß des vom Rotor induzierten Abwindes und bewegt sich daher schneller nach unten als der Anfahrwirbel selbst, den er dabei innen überholt. Im Laufe dieses Prozesses wird er allerdings ebenfalls von dem Anfahrwirbel aufgesogen, dessen Ausdehnung und Zirkulation sich dadurch weiter erhöht.

Bild 5.1-1c zeigt die weitere chronologische Entwicklung. Der Anfahrwirbel hat sich weiter abgesenkt, sein Einfluß ist aber weiterhin so stark, daß alle neu entstehenden Randwirbel in der beschriebenen Weise beeinflußt werden. Erst wenn sein Abstand von der Rotorkreisscheibe ausreichend groß ist, stellt sich der bekannte stationäre Zustand in der typisch eingeschnürten Form ein, wobei nun auch die einzelnen diskreten Wirbel zu erkennen sind (Bild 5.1-1d).

Das Problem der gegenseitigen Beeinflussung der Randwirbel ist in einer Prinzipskizze in Bild 5.1-2 aufgezeigt, die auf eine Idee von Schöttl und Behr [154] zurückgeht. Hierbei drücken die einwärts gerichteten Geschwindigkeitskomponenten die jeweils darüber liegenden Wirbelteile nach innen, während die auswärts gerichteten Komponenten die darunter liegenden Wirbel nach außen drücken. Daraus resultiert die markante eingeschnürte Form des Gesamtgebildes im stationären Fall. Da der Anfahrwirbel dieses Systems nach unten abschließt, fehlt ihm die einwärts gerichtete Komponente tiefer liegender Wirbel, was zu der besonderen Lage außerhalb der Rotorkreisscheibe führt.

Die zuvor beschriebenen Phänomene lassen sich auch mit Hilfe eines einfachen Wirbelleiter-Verfahrens reproduzieren [155]. Bild 5.1-3, das der zitierten Arbeit entnommen wurde, zeigt die zeitliche Entwicklung der Nachlaufschrift und des Randwirbels nach einem impulsförmigen Start. Das prinzipielle Verhalten ist das gleiche, das auch in den Experimenten beobachtet werden konnte.

Erneut werden das lange Verharren des Anfahrwirbelringes in der Nähe der Rotorkreisscheibe, sein anschließendes, langsames Absinken und die Einschnürung der nachfolgenden Wirbel deutlich.

Dieses Ergebnis bestätigt nachdrücklich die Annahme, daß es sich bei den beschriebenen Effekten um rein selbstinduktive Beeinflussungen handelt, da das Wirbelleiter-Verfahren keine Reibungs- oder Diffusionsterme beinhaltet.

In Kap. 5.3.1 wird auf die Reproduktion des Anfahrvorganges durch das verwendete Euler-Verfahren eingegangen. Die Ergebnisse, die sozusagen als Nebenprodukt auf dem Weg zur Berechnung des stationären Endzustandes abfallen, unterstreichen die Fähigkeit des Verfahrens, die komplexen Probleme der Hubschrauberrotorströmung richtig zu erfassen. Sie sind außerdem sehr hilfreich bei der Interpretation der Ergebnisse am Ende der Iteration.

Sowohl die Beobachtungen aus den experimentellen Untersuchungen als auch die Erkenntnisse aus den Berechnungen mit dem Wirbelleiterverfahren machten deutlich, daß eine erhebliche Zeit verstreicht, bis der Anfahrprozeß abgeschlossen ist und sich der gewünschte stationäre Zustand eingestellt hat. Dies bestätigte sich auch bei der numerischen Simulation m.H. des Euler-Verfahrens. Da kein externes Wirbelmodell verwendet wird, ergibt sich zwangsläufig ein enormer Rechenzeitbedarf bis zum Erreichen der angestrebten stationären Lösung.

Es ist daher wünschenswert, eine Möglichkeit zu schaffen, wie der Anfahrvorgang numerisch in kürzerer Zeit abgehandelt oder sogar komplett übersprungen werden könnte.

Einen denkbaren Ansatzpunkt bildet die Anwendung der Technik der sequentiellen Netzverfeinerung, bei der der gesamte Anfahrvorgang zeitsparend auf einem groben Netz abgearbeitet werden könnte, bevor zur Erhöhung der Genauigkeit auf ein feineres Netz übergegangen wird. Die bisher in dieser Hinsicht begonnenen eigenen Untersuchungen sind jedoch noch im Gange.

Weiter fortgeschritten ist hingegen die Entwicklung einer Methode, deren Ziel die vollständige Auslassung der numerischen Behandlung des Anfahrvorganges ist. Hertel [49] hat dazu in seiner Arbeit Alternativen zu der üblichen Gepflogenheit untersucht, die ungestörte Ruheströmung als Anfangs- und Fernfeldrandbedingung zu verwenden, und statt dessen die stationäre Lösung eines Verfahrens niedriger Ordnung vorgegeben. In dem zitierten Werk sind die Vorteile, aber auch die Grenzen eines solchen kombinierten Verfahrens ausführlich beschrieben.

### 5.1.2 Überlagerung von Wirbeln

Ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der Wiedergabe des numerisch berechneten Nachlaufes, da dieser die Anströmbedingung für das nachfolgende Blatt bestimmt.

Eine naheliegende Form der Darstellung ist die Auftragung der Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene senkrecht durch die Rotorkreisscheibe. Zweckmäßigerweise erfolgt der Schnitt bei einem konstanten Azimuthwinkel, da so die Anteile der Drehgeschwindigkeit des Rotors entfallen und nur die induzierten Anteile sichtbar werden.

Da der von einem diskreten Euler-Verfahren generierte Randwirbel aufgrund der numerischen Dissipation, hervorgerufen durch die Eigenschaften des Differenzenverfahren selbst sowie durch die Netzdiskretisierung, einen quasi-viskosen Kern besitzt (vgl. z.B. [156,157]), ist eine Geschwindigkeitsverteilung ähnlich der eines realen reibungsbehafteten Wirbels zu erwarten.

Die Auftragung der induzierten Geschwindigkeiten ist daher sehr gut geeignet, wenn das darzustellende Strömungsfeld nur von einem einzelnen Wirbel erzeugt wurde, wie es z.B. bei einem festen Flügel der Fall ist.

Sind jedoch mehrere Wirbel beteiligt, und liegen diese noch relativ dicht beieinander und/oder verfügen infolge der Diffusion über einen großen Trägheitsradius, so kommt es infolge der Überlagerung der einzelnen induzierten Geschwindigkeitsfelder zu einem sehr großen Informationsverlust in Bezug auf Lage, Stärke und Anzahl der beteiligten Einzelwirbel.

Dies hatte z.B. dazu geführt, daß in [41] die mit dem vorliegenden Euler-Verfahren erzielten Ergebnisse falsch interpretiert worden waren. So wurde irrtümlicherweise davon ausgegangen, daß es sich bei einer Nachlaufstruktur, wie exemplarisch in Bild 5.1-4 aufgetragen, nur um einen einzigen Wirbel handelte, der zudem noch eine völlig falsche Lage und eine deformierte Gestalt besaß. In Wirklichkeit handelt es sich bei der gezeigten Verteilung jedoch um das Resultat einer Überlagerung mehrerer diskreter Einzelwirbel.

Um diesen Effekt zu verdeutlichen, und um eine Alternative zu finden, die gerade dann, wenn mehrere Wirbel vorhanden sind, eine zuverlässige Auswertung erlaubt, wurde die zu erwartende Trajektorie des äußeren Blattspitzenwirbels durch eine Anzahl diskreter Potentialwirbelringe modelliert (siehe Bild 5.1-5), die in jedem Punkt der Referenzfläche eine bestimmte Geschwindigkeit induzieren. Durch eine Festkörperdrehung innerhalb eines definierten Radiuses, dem sog. Trägheitsradius, wurde der quasi-viskose Kern des von dem Euler-Verfahren generierten Wirbels nachgebildet. Anhand dieses Modells, bei dem Anzahl, Lage, Wirbelstärke und Trägheitsradius der Wirbelringe variiert

werden konnten, ließen sich die Auswirkungen auf das induzierte Gesamtgeschwindigkeitsfeld in der Nachlaufebene untersuchen.

In Bild 5.1-6 ist die Verteilung eines einzigen Potentialwirbelringes zu sehen. Man erkennt deutlich den viskosen Innenkern und die Lage der Wirbelachse am Ort verschwindender Umfangsgeschwindigkeit. Man beachte die unsymmetrische Induktion, die aufgrund der Krümmung des Wirbels im Abwindgebiet erheblich größer ist als im Aufwindgebiet.

Bild 5.1-7 zeigt eine ähnliche Geschwindigkeitsverteilung, bei der ebenfalls ein Gebiet verschwindender Umfangsgeschwindigkeit existiert, in dem man die Achse eines Einzelwirbels vermuten könnte. In Wirklichkeit aber wurde diese Verteilung von vier solcher Ringe erzeugt, deren Lage durch Kreuze markiert ist. Zusätzlich unterscheiden sich die beteiligten Wirbel durch verschiedene Trägheitsradien und Wirbelstärken. Die aktuellen Werte können Bild 5.1-7 entnommen werden.

Es wird deutlich, daß die Geschwindigkeitsverteilung allein also keinen Aufschluß über die tatsächlichen Verhältnisse im Rotornachlauf geben kann.

Bedeutend mehr Informationen lassen sich jedoch gewinnen, wenn die Zirkulationsdichteverteilung  $d\Gamma/dS$  in Isolinienform aufgetragen wird. Aus der Beziehung

$$\Gamma = \oint_C q ds = \iint_S (\nabla \times q) dS \quad (5.1)$$

geht hervor, daß die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve  $C$  identisch ist zu dem Integral der Drehung ( $\text{rot } q$ ) über einer Fläche  $S$ , die durch  $C$  begrenzt wird.

Die Zirkulationsdichte läßt sich demzufolge einfach aus dem Skalarprodukt des lokalen Drehungsvektors mit dem Normaleneinheitsvektor der Referenzfläche ermitteln zu:

$$\frac{d\Gamma}{dS} = (\nabla \times q) n \quad (5.2)$$

Ein einzelner Wirbelring liefert eine Zirkulationsdichteverteilung, wie sie in Bild 5.1-8 dargestellt ist. Auch hier erkennt man deutlich den Durchmesser des viskosen Innenkerns und die Unsymmetrie infolge der Krümmung des Wirbelringes.

Diese typische Struktur ist aber, anders als im Falle der induzierten Geschwindigkeit, auch noch bei einer Überlagerung mehrerer Wirbelringe auszumachen (Bild 5.1-9). Die Form der Isolinien läßt vier kreisförmige, ineinandergreifende Gebilde erkennen, deren Radien den vorgegebenen Ausdehnungen der Wirbelkerne und deren Mittelpunkte den Durchstoßpunkten der Wirbelachsen durch die Referenzfläche entsprechen. Es ist zu beachten, daß die angezeigten lokalen

Maxima rein aus der Überlagerung resultieren, nicht aber die Wirbelpositionen wiedergeben.

In der Tat erwies sich die Auftragung der Zirkulationsdichteverteilung als sehr geeignetes Instrument für die Visualisierung der durch das Euler-Verfahren errechneten Nachlaufstruktur. Insbesondere gelang es, den Randwirbelpfad so genau zu bestimmen, daß eine Validierung der Ergebnisse anhand von empirischen Daten möglich war (s. Kap. 5.2, 5.3).

Neben der Zirkulationsdichte lieferte auch die Auftragung des Totaldruckverlustes Informationen über die Struktur des Nachlaufes und wurde daher zur Auswertung der errechneten Ergebnisse zusätzlich mitherangezogen.

Wie bereits erwähnt, sorgt die infolge der Diskretisierung der Euler-Gleichungen eingebrachte künstliche Viskosität dafür, daß die berechneten Wirbel einen reibungsbehafteten Charakter haben. Das bedeutet, daß sich ein viskoser Wirbelkern ausbildet, in dem die Umfangsgeschwindigkeit auf Null abfällt, und in dem ein deutlicher Totaldruckverlust auftritt. Nach dem Croccoschen Wirbelsatz liegt dabei eine Abweichung in den Richtungen von Geschwindigkeits- und Drehungsvektor vor ( $\mathbf{q} \times \text{rot} \mathbf{q} \neq 0$ ). Infolge der dissipationsbedingten Diffusion des Wirbels wird der Totaldruckverlust im weiteren Verlauf wieder geringer (s. z.B. [156]). Für die Entstehung solcher viskosen Wirbel ist in ähnlicher Weise wie auch für die implizite Erfüllung der Kuttaschen Abflußbedingung die numerische Dissipation verantwortlich, auf die Höhe des anfänglich auftretenden Totaldruckverlustes hat sie jedoch keinen Einfluß. Dieser ist zunächst im wesentlichen unabhängig vom Diskretisierungsgrad des verwendeten Rechennetzes, wie z.B. von Powell [157] oder Newsome & Kandil [158] bestätigt wird, der Gradient im Abklingen des Maximums im Kern wächst jedoch mit zunehmender Dissipation.

### 5.1.3 Grundsätzliches zur Auswertung

Die im folgenden Ergebnisteil dargestellten Druck- sowie die daraus durch Integration ermittelten Kraftbeiwerte sind einesteils auf den lokalen, d.h. radial veränderlichen Staudruck der ungestörten Strömung, andernteils auf den Schallstaudruck (Index "a") bezogen. Letzteres bietet die Möglichkeit, die Ergebnisse an verschiedenen Profilschnitten direkt miteinander vergleichen zu können. So gilt unter Verwendung der Normierungsvorschriften aus Kap. 2.5 (die Tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) bezeichnet die dimensionsbehafteten Größen):

$$c_p = \frac{\bar{p} - \bar{p}_\infty}{(\bar{\rho}_\infty/2 \cdot \bar{q}_\infty^2)} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}(\omega r)^2} \quad (5.3)$$

$$c_{p_s} = \frac{\bar{p} - \bar{p}_\infty}{(\bar{\rho}_\infty/2 \cdot \bar{a}_\infty^2)} = 2 \cdot (p - p_\infty) \quad (5.4)$$

$$c_l = - \int_0^1 \Delta c_p d\left(\frac{x}{l}\right) \quad \text{mit } \Delta c_p = c_{p_o} - c_{p_u} \quad (5.5)$$

$$c_{l_s} = - \int_0^1 \Delta c_{p_s} d\left(\frac{x}{l}\right) = c_l \cdot (\omega r)^2 \quad (5.6)$$

$$c_L = \int_0^1 c_{l_s} d\left(\frac{Y}{R}\right) \quad (5.7)$$

Der zur Bildung der Beiwerte benötigte Druck wird gemäß Gl. (2.9b) direkt aus den Strömungsgrößen in den Mittelpunkten der körpfernächsten Zellen ermittelt. Es findet keine Extrapolation auf die Körperoberfläche statt.

Neben den Druck- und Machzahlverläufen an der Blattoberfläche sind auch die berechneten Strömungsgrößen im Nachlauf von großem Interesse. Da es sich bei dem vorliegenden Verfahren um eine Wake-Capturing-Methode handelt, bei der der Strömungszustand vor dem nachfolgenden Blatt ein reiner Bestandteil der Euler-Lösung ist, kommt der Wiedergabe der Nachlaufstruktur und hier insbesondere der Randwirbel eine große Bedeutung zu.

Zur besseren Interpretation der Ergebnisse im Nachlauf ist es zweckmäßig, diese in Ebenen senkrecht durch die Rotorkreisscheibe darzustellen. Um nur die induzierten Strömungsanteile zu erfassen, sollten diese Ebenen in radialer Richtung verlaufen und durch die Rotordrehachse gehen. Im Gegensatz zu H-Netzen besitzen die in der vorliegenden Arbeit verwendeten O-Gitter keine Netzebenen, die dieser Forderung näherungsweise entsprechen würden. Es ist daher notwendig, Schnittebenen durch das Netz zu legen und die Strömungsgrößen hierauf abzubilden. Diese Ebenen schneiden die Rotorkreisscheibe unter einem bestimmten Azimuthwinkel  $\psi$ , der relativ zur Blattvorderkante gezählt wird. Aufgrund der Eulerschen Betrachtungsweise des Strömungsproblems liegt diese immer bei  $\psi = 0^\circ$ . Der Bereich hinter dem Rotorblatt erstreckt sich von  $\psi = 0^\circ$  bis  $\psi = 90^\circ$ , der Bereich vor dem (nachfolgenden) Blatt von  $\psi = -90^\circ$  bis  $\psi = 0^\circ$ . In Bild 5.1-10 ist die Lage verschiedener solcher Schnittebenen relativ zum Blatt dargestellt. Die Winkelstellungen entsprechen denjenigen, die in Kapitel 5.3.2 zur Untersuchung des Wirbeltransportes verwendet werden. Bei der Betrachtung der im folgenden gezeigten Ergebnisse ist zu beachten, daß die Ebenen für  $0 \leq \psi \leq 50^\circ$  das Blatt schneiden, also nur z.T. die Verhältnisse im Nachlauf wiedergeben.

Die Interpolation der Strömungsgrößen erfolgt linear zwischen jeweils zwei

benachbarten Zellen, deren Mittelpunkte diesseits und jenseits der Schnittebene liegen. Hierbei werden sinnvollerweise nicht die in den Volumenmittelpunkten gegebenen Komponenten des Lösungsvektors herangezogen, sondern diese zuvor in die darzustellenden Größen, wie z.B. Geschwindigkeit, Totaldruckverlust oder Zirkulationsdichte umgerechnet.

Durch diese Abbildung entsteht in der Schnittebene ein relativ ungeordneter Haufen von Aufpunkten. Die Darstellung z.B. von Geschwindigkeitsvektoren ist auf dieser Grundlage möglich. Sie besitzt jedoch die Nachteile einer starken Unübersichtlichkeit im Bereich großer Netzdichte und einer unterbewußten Beeinträchtigung der Objektivität bei der Betrachtung der Ergebnisse infolge der deutlich erkennbaren Netzlinienstruktur und der sich verändernden Punktdichte. Außerdem ist es mit den zur Verfügung stehenden Graphikroutinen z.Zt. nicht möglich, Isolinien basierend auf einer unstrukturierten Aufpunktsverteilung zu erzeugen.

Infolgedessen ist eine weitere, in diesem Fall zweidimensionale Interpolation notwendig, die die Größen der willkürlich verteilten Punkte auf ein geordnetes Raster überträgt.

Bedingt durch diese zweifache Datenumwandlung sind die dargestellten Größen fehlerbehaftet. Dies kann sich insbesondere im Verlauf der Isolinien auswirken, die im allgemeinen sensibel auf eine leichte Veränderung der Basisdaten reagieren. Hinzu kommt, daß das zugrundeliegende reguläre Raster relativ grob ist. Bei den für die Darstellung der Nachlaufgeometrie gewählten Bildausschnitten, die eine sehr große Ausdehnung haben, um die Absenkung der Randwirbel möglichst weit verfolgen zu können, führt dies dazu, daß die lokalen, z.T. sehr konzentrierten Maxima der darzustellenden Strömungsgrößen oftmals betragsmäßig gar nicht korrekt erfaßt werden können, es sei denn, ein Aufpunkt liegt zufällig in ihrer unmittelbaren Nähe. Besonders gravierend stellt sich dieses Problem im Blattnahbereich. Die in den folgenden Kapiteln gezeigten Isolinienauftragungen sind daher für quantitative Analysen, gerade was die Bestimmung der Extrema im Inneren eines neu entstehenden Wirbels angeht, nur sehr bedingt geeignet. Aber auch die qualitative Interpretation der dargestellten Ergebnisse wird durch eine Reihe von ausschließlich auswertebedingten Erscheinungen, wie z.B. durch einen unruhigen Verlauf der Isolinien in einigem Abstand vom Blatt, eine Orientierung derselben entlang den Rasterlinien im Blattnahbereich vor allem in horizontaler Richtung sowie eine starke Abhängigkeit der Verläufe von der Dichte des Aufpunktrasters ebenfalls besonders im Blattnahbereich, beeinträchtigt. Dies sollte bei der Betrachtung besonders der in den Kap. 5.2 und 5.3 dargestellten Isolinienverläufe berücksichtigt werden.

Für die Zukunft ist eine Verbesserung des Auswertalgorithmusses dringend erforderlich.

## 5.2 Ergebnisse für die berechneten Testfälle

Zur Validierung des entwickelten Verfahrens wurde eine größere Zahl von Testfällen berechnet, zu denen experimentelle Vergleichsdaten zur Verfügung stehen. Hierbei handelt es sich um Messungen, die von Caradonna & Tung [67] für einen zweiblättrigen Modellrotor im Schwebeflugzustand durchgeführt worden waren. Die dabei verwendeten Rotorblätter sind unverwunden und haben einen rechteckigen Grundriß bei einer Streckung von  $\Lambda=6$ . Sie besitzen ein symmetrisches NACA-0012 Profil. Die Blattspitze ist nicht gerundet, sondern gerade abgeschnitten. Der Blattanschluß beträgt etwa eine Blattiefe und wurde bei der Netzgenerierung approximativ berücksichtigt (s. Kap. 4.3). Dadurch konnte die Umströmung der Blattwurzel und die Ausbildung eines inneren Blattspitzenwirbels wiedergegeben werden.

Die Überprüfung des vorliegenden Verfahrens wurde anhand folgender Testfälle vollzogen:

- $Ma_{tip} = 0.520$  ,  $\theta_c = 0^\circ$
- $Ma_{tip} = 0.815$  ,  $\theta_c = 5^\circ$
- $Ma_{tip} = 0.439$  ,  $\theta_c = 8^\circ$
- $Ma_{tip} = 0.794$  ,  $\theta_c = 8^\circ$
- $Ma_{tip} = 0.877$  ,  $\theta_c = 8^\circ$
- $Ma_{tip} = 0.794$  ,  $\theta_c = 12^\circ$

Es wurde damit ein weiter Bereich der sub- und transsonischen Anströmungen abgedeckt, was im Hinblick auf eine Bewertung der Stärken und Schwächen des entwickelten Verfahrens als wichtig erachtet wird.

Es handelt sich hierbei um Standardtestfälle, die auch von den meisten der in Kap. 1.2 genannten Autoren berechnet wurden. Dies eröffnet die Möglichkeit zu Vergleichen zwischen den verwendeten Potential-, Euler- und Navier-Stokes-Verfahren, sowie zwischen den Wake-Capturing- und denjenigen Verfahren, die ein speziell auf den Modellrotor abgestimmtes Nachlaufmodell verwenden.

Die Ergebnisse der eigenen Berechnungen sind in den nachfolgenden Unterkapiteln aufgeführt.

Die dazu verwendeten Rechennetze vom O-Typ mit ellipsoider Außenkontur wurden in Kap. 4 beschrieben. Die im folgenden dargestellten Ergebnisse wurden auf Netzen mit 110.000 - 150.000 Zellen errechnet. Diese Zahlen beziehen sich auf den inneren Grundkörper mit einer Ausdehnung der Halbachsen von  $15 \times 15 \times 12$  Blatt-

tiefen. In den auftriebsbehafteten Fällen wurde dieses Grundnetz zur Erfassung des Nachlaufes entweder global auf die doppelte Größe erweitert (Bild 4.3-3) oder nach unten um einen zweiten Netzblock ergänzt (Bild 4.3-12). In Kapitel 5.4 werden die Einflüsse von Veränderungen der Netzstruktur beschrieben.

### 5.2.1 Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.52$ und $\theta_c = 0^\circ$

Die erste Untersuchung erfolgte für den auftriebslosen Fall bei einer Blattspitzenmachzahl von  $Ma_{t,p} = 0.52$ .

Dies eröffnet bei der vorhandenen symmetrischen und unverwundenen Blattgeometrie die Möglichkeit, das Verfahren zunächst ohne den Einfluß der Blatt-Nachlauf-Interferenz zu testen.

Dadurch lassen sich eventuell vorhandene unphysikalische Erscheinungen, die numerisch bedingt und durch Unzulänglichkeiten im Verfahren produziert worden sein könnten, deren Existenz aber infolge der Überlagerung durch die auftriebsbedingten Effekte unter Umständen unerkannt geblieben wäre, leichter aufspüren. Denkbar wären in diesem Zusammenhang z.B. die Akkumulierung numerischer Fehler infolge der Verwendung eines völlig in sich abgeschlossenen Rechenraumes, Stabilitätsprobleme im unmittelbaren Bereich der Rotordrehachse, Ungenauigkeiten in der diskreten Ermittlung der Flußbilanzen oder in der Wiedergabe der ungestörten Strömung, etc.

In Bild 5.2-1 ist der Vergleich zwischen den errechneten und den gemessenen Druckverteilungen an fünf Radialstationen über der Blattiefe dargestellt. Die Übereinstimmung mit den Meßdaten ist sehr gut und liefert einen ersten Anhaltspunkt für die Genauigkeit des entwickelten Verfahrens. Signifikante Abweichungen zwischen Theorie und Praxis, die auf Reibungseffekte zurückzuführen wären und demzufolge von dem verwendeten Verfahren nicht erfaßt werden könnten, sind bei dieser Anströmbedingung kaum zu erwarten.

Das Auftreten numerisch bedingter akkumulativer Probleme konnte nach Beseitigung anfänglicher Fehlerquellen nicht mehr beobachtet werden. Exemplarisch sei in Bild 5.2-2 die zeitliche Entwicklung der Machzahl dargestellt, die nach dem raschen Erreichen des stationären Zustandes auch bei fortschreitender Iteration keine Veränderungen mehr erfuhr.

Auch die Identität des Druckverlaufes auf Ober- und Unterseite wurde, wie aus Bild 5.2-1 ersichtlich, nicht durch numerische Störungen beeinträchtigt.

Die gezeigten Ergebnisse wurden auf einem feinen Netz mit  $128 \times 34 \times 25$  Volumina erzeugt. Die Reduzierung der Netzdichte auf  $64 \times 34 \times 17$ , was einer Verringerung

der Gesamtzellenzahl auf etwa ein Drittel entspricht, liefert den in Bild 5.2-3 dargestellten Druckverlauf. Die Unterschiede sind in diesem Fall relativ gering, die Rechenzeitersparnis ist jedoch beträchtlich.

Das läßt den Schluß zu, daß die schlechtere Auflösung der Körperoberfläche und des Blattnahbereiches von keinem allzu großen Einfluß ist. Dabei ist jedoch die Einfachheit der Blattgeometrie zu bedenken. Inwieweit sich die grobere Netzstruktur jedoch auf den Nachlauftransport und damit auf die Güte des berechneten Anströmzustandes auswirkt, müssen die Untersuchungen der auftriebsbehafteten Fälle zeigen.

### 5.2.2 Modellrotor bei $Ma_{t,p} = 0.815$ und $\theta_c = 5^\circ$

Im nächsten Schritt wurde das Verfahren an einem auftriebsbehafteten Fall unter transsonischen Anströmbedingungen und unter vollständiger Berücksichtigung der Interferenz des berechneten Nachlaufes mit dem betrachteten Blatt getestet. Die Blattspitzenmachzahl betrug dabei 0.815 und der kollektive Anstellwinkel  $5^\circ$ .

An der Blattoberseite bildet sich im Außenbereich ein lokales Überschallgebiet aus, das sich über das Blattende hinaus bis in die freie Strömung erstreckt, und das mit einem schwachen Verdichtungsstoß abschließt (Bild 5.2-4a).

In Bild 5.2-4b sind demgegenüber die Verhältnisse ohne Berücksichtigung der Blatt-Wirbel-Interferenz an einem isolierten Blatt aufgetragen. Man erkennt deutlich die Auswirkungen des höheren effektiven Anstellwinkels infolge fehlender induzierter Abwindgeschwindigkeiten, die sich in einer Ausweitung des Überschallgebietes in Bereiche kleinerer Radien sowie in einer Erhöhung des maximalen Unterdruckes auf der Oberseite äußern.

In Bild 5.2-5 ist die Druckverteilung dargestellt. Der Vergleich der berechneten mit den gemessenen Werten zeigt an den ersten vier Radialstationen eine sehr gute Übereinstimmung. Lediglich im äußersten Blattbereich ( $r/R = 0.96$ ) wird das gemessene Druckminimum nicht ganz erreicht.

Betrachtet man zunächst nur die vier inneren Stationen, so erkennt man ganz leichte Abweichungen im Druckabfall an der Nase. Hier könnte ein noch feineres Netz (das bestehende hatte  $128 \times 34 \times 25$  Zellen) eventuell Abhilfe schaffen. Es ist aber auch anzumerken, daß beispielsweise der in den Messungen erreichte Spitzenwert bei  $r/R = 0.8$  fehlerbehaftet sein könnte, da gerade an dieser Meßstelle im auftriebslosen Fall ein beträchtlicher Unterschied in den gemessenen Werten zwischen Ober- und Unterseite festzustellen ist.

Nicht ganz optimal verläuft die Rekompensation bei  $r/R = 0.89$ , die etwas zu flach

wiedergegeben wird.

Dennoch sind die mit der Wake-Capturing-Methode erzielten Ergebnisse zumindest an den ersten vier Radialstationen alles in allem sehr zufriedenstellend.

Anders sieht die Situation hingegen an der äußersten Radialstation aus. Hier wird von dem verwendeten Verfahren ein zu geringer Unterdruck, d.h. also ein zu starker Blattspitzenverlust errechnet.

Die Frage nach der Ursache für diese Abweichung konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht abschließend beantwortet werden. Naheliegende Vermutungen, wie z.B. ein Einfluß der lokalen Netzfeinheit, der Netzgröße, der geometrischen Ausführung der Blattspitze etc. erwiesen sich für diesen Testfall als nicht zutreffend. Entsprechende Modifikationen führten, wenn überhaupt, nur zu sehr geringen Veränderungen.

Denkbar wäre aber auch eine ungenaue Berechnung des induzierten Strömungsfeldes infolge eines zu weit außen liegenden Blattspitzenwirbels des vorlaufenden Blattes und daraus resultierend ein Fehlen der aufwärts gerichteten induzierten Geschwindigkeiten an der äußersten Blattspitze. Damit ließe sich der zu geringe Auftrieb an der Oberseite erklären, hingegen scheinen die gute Wiedergabe des Verlaufs an der Unterseite sowie auch die sehr gute Übereinstimmung an den anderen Radialstationen dieser These zu widersprechen, da in beiden Fällen eine Beeinträchtigung durch eine falsche Wirbellage ebenfalls hätte spürbar sein müssen.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt wird als wahrscheinlichste Ursache eine dissipationsbedingte Diffusion des Randwirbels angenommen, die durch die nicht optimale Diskretisierung der O-Netz-Struktur im Bereich des Wirbelpfades hervorgerufen wird. Die Auswirkungen dieser Diffusion auf die Nachlaufgeometrie sind in Kap. 5.3.2 beschrieben. Für diese Vermutung sprechen auch eine weitere leichte Absenkung des errechneten Druckminimums bei Verwendung eines größeren Netzes (Kap. 5.4) sowie nicht zuletzt auch jüngste Ergebnisse von Hertel [49], die bei Verwendung des gleichen Lösungsalgorithmus in Verbindung mit einem zwar in Blattnähe gröber, dafür aber zwischen den Rotorblätter feiner diskretisierenden H-Netz eine Verbesserung des Problems zeigten.

Die Integration der Oberflächendrücke gemäß Gl.(5.5) liefert den in Bild 5.2-6 dargestellten Verlauf des auf den örtlichen Staudruck bezogenen Auftriebswertes  $c_f$  über dem Blattradius. Wie aufgrund von Bild 5.2-5 zu vermuten, ist die Übereinstimmung mit den Meßwerten sehr gut. Eine Ausnahme bildet jedoch der Wert bei  $r/R=0.89$ . Die Größenordnung der Abweichung von mehr als 50% ist erstaunlich, da sich die gemessenen und die berechneten Druckverläufe an dieser Radialstation auch nicht wesentlich stärker voneinander unterscheiden, als an den anderen Stationen. Es muß daher angenommen werden, daß der Referenzwert,

der seinerseits aus einer numerischen Integration der diskreten, gemessenen Druckdaten ermittelt wurde, fehlerbehaftet ist. An der äußersten Radialstation ist ganz deutlich der zu große Blattspitzenverlust in den theoretischen Ergebnissen zu erkennen.

Die in den vorangegangenen Bildern gezeigten Ergebnisse wurden mit einem Rotorblatt gerechnet, dessen äußeres Ende abgerundet war (Bild 5.2-7a). Vergleichsrechnungen mit senkrecht abgeschnittenen Ende (Bild 5.2-7b) führten zu leichten Änderungen der Strömungswerte im äußersten Blattspitzenbereich. Bild 5.2-8a zeigt gegenüber Bild 5.2-4a eine starke Geschwindigkeitsabnahme bei gleichzeitiger Erhöhung des Unterdruckes in Blattiefenrichtung ab  $r/R \approx 0.99$ . Dies deutet auf eine veränderte Ablösung des Randwirbels von der Blattspitze hin. Im Falle der senkrechten Ausführung dürfte die Ablöselinie durch die scharfe Kante vorgegeben sein, während sie bei einer runden Kontur nicht von vorneherein definiert ist. Die Auswirkungen dieses veränderten Ablöseverhaltens auf den restlichen Blattbereich sind relativ gering. Lediglich das Gebiet maximaler Übergeschwindigkeit ist etwas kleiner geworden. Demzufolge ist auch in den Druckverteilungen an den in Bild 5.2-5 gezeigten Radialstationen für  $r/R < 0.89$  überhaupt kein Unterschied spürbar. An der äußersten Station bei  $r/R = 0.96$  führt das abgeschnittene Ende zu einem etwas geringeren Unterdruck an der Oberseite (Bild 5.2-8b).

Das veränderte Strömungsverhalten im äußersten Bereich spiegelt sich in der Auftriebsverteilung (Bild 5.2-8c) in einem geringeren Blattspitzenabfall und einer höheren Saugspitze in der letzten Zellreihe wider. Die anscheinend bessere Übereinstimmung mit dem Meßwert bei  $r/R = 0.96$  ist rein zufällig, wie man aus Bild 5.2-8b leicht erkennt. Hier wirken größere Druckunterschiede im hinteren Profilbereich dem Defizit im vorderen Teil entgegen.

Wie bereits erwähnt, wird in der vorliegenden Arbeit u. a. ein Schwerpunkt auf die Darstellung des berechneten Nachlaufs, und hier insbesondere auf das Einschnürungsverhalten der äußeren Randwirbel gelegt. Das soll dazu beitragen, Einsicht in die Struktur und in die Vorgänge im Nachlauf einer Rotorströmung, wie sie von einem auf den Euler-Gleichungen basierenden Wake-Capturing-Verfahren berechnet wird, zu gewinnen.

Die Wiedergabe und Auswertung der Nachlaufstruktur erfolgt anhand von Isolinienplots der Zirkulationsdichte und des Totaldruckverlustes, die sich im Gegensatz zur Auftragung der Geschwindigkeitsvektoren für eine qualitative und zum Teil auch für eine bedingte quantitative Analyse als sehr gut geeignet herausgestellt hatten (vgl. Kap. 5.1.2).

Dabei soll an dieser Stelle zunächst nur die Struktur des Nachlaufes im sta-

tionären Endzustand im Vordergrund stehen. Seine zeitliche Entwicklung ist in Kap. 5.3.1 beschrieben. Sie ist geprägt durch einen sehr langwierigen und komplexen Anfahrprozeß (vgl. Kap. 5.1.1), der analog zur Realität von einem Wake-Capturing-Verfahren, das von der ungestörten Strömung als Anfangsbedingung ausgeht, numerisch simuliert wird.

Streng genommen handelt es sich bei dem, was im folgenden als stationärer Endzustand bezeichnet wird, auch nur um eine Momentaufnahme des instationären Anfahrprozesses, der allerdings schon sehr weit fortgeschritten ist. Man erkennt dies daran, daß der eigentliche Anfahrwirbel noch immer vorhanden ist und seine Lage weiterhin ändert. Seine Absenkung ist aber in der Regel so groß, daß eine Veränderung des relevanten Strömungsfeldes vor dem nachfolgenden Blatt nicht mehr auftritt.

In Bild 5.2-9 ist die Zirkulationsdichteverteilung in einer Referenzebene aufgetragen, die die Rotorkreisscheibe  $30^\circ$  hinter dem Blatt senkrecht schneidet. In dieser Darstellung läßt sich die Einschnürung des äußeren Randwirbels sehr gut erkennen. Dafür mußten jedoch der Wertebereich und die Abstufung der Isolinien geeignet gewählt werden, was zulasten einer differenzierteren Wiedergabe des Blattnahbereiches geht. So steigt die Zirkulationsdichte in dem ausgesparten inneren Bereich des äußeren Randwirbels auf etwa 0.4, und der Durchmesser des viskosen Kerns ist geringer als das Auflösungsvermögen der verwendeten Darstellung, was auf sehr hohe induzierte Umfangsgeschwindigkeiten im Wirbelinneren schließen läßt. Der Auswertalgorithmus ist auch verantwortlich für eine unzureichende Wiedergabe der Ergebnisse in der Wirbelschicht, einen unruhigen Verlauf der Isolinien, sowie eine Orientierung derselben vor allem entlang den horizontalen Rasterlinien im Blattnahbereich (vgl. Kap. 5.1.3).

Unterhalb des äußeren Wirbels läßt sich noch einigermaßen diskret der Randwirbel des vorlaufenden Blattes erkennen. Die maximale Zirkulationsdichte im Kern ist infolge der diffusionsbedingten Abnahme der Konzentration auf etwa 15% des ursprünglichen Wertes gefallen. Mit zunehmendem Wirbelalter setzt sich diese Tendenz mit vermindertem Gradienten fort. Insgesamt besitzt die Abnahme der Zirkulationsdichte im Wirbelinneren über der Absenkung in etwa hyperbolischen Charakter.

Einen ähnlichen, wenn auch weniger ausgeprägten Effekt haben Röttgermann et al. [159] mit einem linearen Wirbelleiterverfahren erzielt, bei dem die Wirbeldiffusion an die Aufweitung der Wirbelschicht gekoppelt wurde. Inwieweit vergleichbare Zusammenhänge in der von dem Euler-Verfahren generierten Lösung enthalten sind, oder ob es sich ausschließlich um einen Effekt der Diskretisierung handelt, läßt sich noch nicht beantworten.

Aufgrund der gegenseitigen Überlagerungseffekte und der Diffusion der abge-

senkten Wirbelanteile ist keine Einzelauflösung mehr möglich, jedoch läßt sich mit den Erkenntnissen aus Kap. 5.1.2 die Einhüllende der Durchstoßpunkte der Wirbelzentren durch die Referenzebene sehr gut bestimmen.

Die so ermittelte Einschnürung läßt sich im stationären Endzustand mit vorhandenen Meßdaten vergleichen. Dies sind zunächst die Hitzdrahtmessungen, die Caradonna & Tung [67] zusätzlich zu den Druckmessungen für einen Teil der Strömungsfälle ihrer umfangreichen Testreihe am Modellrotor durchgeführt haben. Die für den vorliegenden Fall ermittelte Wirbellage ist in Bild 5.2-9 durch Kreuze markiert.

Leider erlauben diese Daten nur eine Verfolgung des Wirbelpfades über etwas mehr als eine Rotorumdrehung. Daher wurde in die Darstellung der errechneten Ergebnisse zu Vergleichszwecken zusätzlich die Einhüllende der Trajektorie des Blattspitzenwirbels eingetragen, wie sie das lineare Berechnungsverfahren von Kocurek [138] für diesen Testfall liefert. Kocurek verwendet ein vorgeschriebenes Nachlaufmodell, in das eine Vielzahl experimenteller Daten eingeflossen ist. Wegen dieses hohen empirischen Anteils wird die so ermittelte Wirbellage für eine Validierung des vorliegenden Algorithmusses als durchaus geeignet erachtet.

Die Übereinstimmung der numerisch berechneten Einschnürung der Randwirbelstruktur mit den Vergleichsdaten sowohl von Caradonna & Tung als auch von Kocurek kann als sehr gut bezeichnet werden. Dies ist ein wichtiges Teilergebnis für die Bewertung der Frage, wie gut das vorliegende Euler-Verfahren trotz der zu beobachtenden Diffusionseffekte in der Lage ist, die Generierung und den Transport des Nachlaufes wiederzugeben und den Strömungszustand vor dem nachfolgenden Blatt ohne zusätzliche Kopplungsmodelle mit ausreichender Genauigkeit zu beschreiben.

Anhand der aufgetragenen Zirkulationsdichteverteilung erkennt man weiterhin, daß sich der Anfahrwirbel bis auf etwa 15 Blattiefen abgesenkt (vgl. hierzu Bild 5.3-1 in Kap. 5.3.1) und eine radiale Position von etwa dem 1.3-fachen des Rotorradius eingenommen hat. Auch hier haben Diffusionseffekte im Laufe der Zeit zu einer starken Aufweitung geführt.

Sehr deutlich wird auch der innere Randwirbel in Blattnähe wiedergegeben. Die entlang der Hinterkante abgehende Wirbelschicht verfügt ebenfalls noch über eine sehr hohe Konzentration, eine Analyse ist aufgrund des schlechten Auflösungsgrades in Bild 5.2-9 in diesem Abschnitt jedoch nicht möglich. In den weiter abgesenkten Bereichen erkennt man noch die typische schräge Lage der Wirbelschicht vom vorlaufenden Blatt, jedoch ist es im wesentlichen zu einer Verschmelzung der linksdrehenden Wirbel der Wirbelschicht und des inneren Randwirbels gekommen. Im weiteren Verlauf der Absenkung wird das Ge-

biet negativer Zirkulation eingeschnürt und endet bei etwa 12 Blattiefen. Hier dominiert der starke Einfluß des äußeren Anfahrwirbels. In diesem Bereich sehr nahe an der Drehachse besitzen die verwendeten O-Netze in großer Entfernung von der Rotorkreisscheibe wegen ihres sternförmigen Linienverlaufes eine extrem schlechte Auflösung (vgl. Bild 4.3-7), die dadurch noch verstärkt wird, daß die Punkteverteilung in radialer Richtung sehr stark in der Nähe der äußeren Blattspitze konzentriert ist, während der Innenbereich ausgedünnt wurde (vgl. Bild 4.3-5). Dies wurde bewußt in Kauf genommen, da von hier keine entscheidende Beeinflussung des Gesamtergebnisses, insbesondere in dem in erster Linie interessierenden Bereich der Blattspitze, ausgeht. In Anbetracht der schlechten Diskretisierung und der damit verbundenen hohen Diffusion ist die Wiedergabe der Verhältnisse am inneren Blattrand durchaus zufriedenstellend. Es ist aufgrund der begrenzten Ausdehnung des Gebietes negativer Zirkulation nach unten jedoch nicht auszuschließen, daß ein Verlust an linksdrehender Zirkulation auftritt. Zumindest findet aber eine quasi-viskose Vermischung mit positiver Zirkulation statt.

Eine Erfassung dieses Innenwirbels und der kompletten Wirbelschicht, sowie der Interferenzen auch mit dem äußeren Randwirbel ist nur möglich, wenn sich der Rechenraum bis zur Rotorachse hin ausdehnt. Wird der Bereich kleiner Radien ausgespart, wie dies bei einigen Autoren der Fall ist, lassen sich die genannten Phänomene nicht erfassen.

Eine weitere physikalische Größe, die für die Interpretation der numerischen Ergebnisse im Hinblick auf die Struktur des Nachlaufes sehr gut geeignet ist, ist der Totaldruckverlust, der im Kern eines viskosen Wirbels, wie er von einem diskreten Euler-Verfahren erzeugt wird, am größten ist. Bild 5.2-10 gibt den in Bild 5.2-9 dargestellten Zustand noch einmal in Form des Totaldruckverlustes wieder.

Bezüglich der Einschnürung der Randwirbeltrajektorie zeigt sich erneut eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den empirischen Vergleichswerten. Daß der Totaldruckverlust die Ergebnisse der Zirkulationsdichteverteilung wie in diesem Fall exakt bestätigt, ist nicht unbedingt selbstverständlich, obwohl es sich um zwei Darstellungsformen ein und desselben physikalischen Zustandes handelt. Im Vorgriff auf spätere Ausführungen, insbesondere über Berechnungen mit groben Netzen, sei allerdings darauf hingewiesen, daß sich aufgrund von Überlagerungen verschiedener numerischer Einflüsse durchaus unterschiedliche Ergebnisse einstellen können.

Überlagerungseffekte analog zu denen, die in Kap. 5.1.2 im Zusammenhang mit dem induzierten Geschwindigkeitsfeld angesprochen wurden, führten auch dazu, daß das lokale Maximum im Totaldruckverlust, das in Bild 5.2-10 bei  $z/l \approx -1.3$

auszumachen ist, nicht mit dem Durchstoßpunkt der Achse des Wirbels vom vorlaufenden Blatt zusammenfällt. Dieser liegt, wie aus Bild 5.2-9 ersichtlich, bei etwa  $-0.8$ .

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde der dargestellte Wertebereich nach unten auf  $0.45\%$  und nach oben auf  $1.6\%$  begrenzt, um die für die Ermittlung der Randwirbeleinschnürung notwendigen Isolinienverläufe deutlich herauszustellen. Dadurch sind einige Informationen, wie z.B. über die Wirbelschicht und den inneren Randwirbel nicht oder nur unzureichend enthalten.

Der Totaldruckverlust im Wirbelkern beträgt an dieser Position ( $\psi = 30^\circ$ ) ca.  $5.7\%$ , nachdem er direkt hinter dem Blatt etwa  $8\%$  betragen hatte. Im weiteren Verlauf führt die Wirbeldiffusion zu einer Aufweitung und zu einer Abnahme des Totaldruckverlustes im Kern (vgl. Kap. 5.3.2). Der Randwirbel des vorlaufenden Blattes besitzt nach einem Alter von  $210^\circ$  nur noch ca.  $0.8\%$ , und der weit abgesenkte Anfahrwirbel noch etwa  $0.6\%$ .

Der Vollständigkeit halber seien in Bild 5.2-11 die induzierten Geschwindigkeitsvektoren in der Referenzebene dargestellt. Sie korrespondieren mit den jeweiligen Zuständen in den Bildern 5.2-9 bzw. 5.2-10. Das Gebiet induzierten Abwindes innerhalb eines sich einschnürenden Zylinders läßt sich einigermaßen gut erkennen. Wie aber bereits in Kap. 5.1.2 erwähnt, ist die verwertbare Information über die Nachlaufgeometrie, wie z.B. die Einschnürung, gering. Interessant erscheint jedoch ein Blick auf den Bereich kleiner Radien. Der linke Bildrand entspricht der Rotordrehachse. In ihrer Nähe sind keinerlei Ungewöhnlichkeiten, die auf numerische Störungen zurückzuführen sind, festzustellen.

In Bild 5.2-12 ist die zeitliche Entwicklung der auf den Schallstaudruck bezogenen Auftriebsbeiwerte an den bekannten fünf Radialstationen sowie für das gesamte Blatt aufgetragen. Das Erreichen eines konvergenten Zustandes wird dabei nicht nur von dem Iterationsverhalten des Verfahrens selbst, sondern auch von dem instationären Ablauf des Anfahrprozesses bestimmt. So sind die wesentlichen Vorgänge in der Entwicklung des Rotornachlaufes, wie sie z.B. in Kap. 5.1.1 beschrieben wurden, deutlich erkennbar.

Die Kurven beginnen bei einem zu hohen Auftrieb, der aus der Anfangsbedingung der freien Anströmung resultiert. Es wird also zu Beginn der Iteration ein isoliertes Blatt simuliert. Aufgrund des durch den Anfahrwirbel induzierten Abwindfeldes und der damit verbundenen Senkung des effektiven Anstellwinkels vor allem im äußeren Blattbereich erreichen die Auftriebsbeiwerte zunächst ein lokales Minimum. Danach senkt sich der Anfahrwirbel ab und verliert an Einfluß auf das Strömungsfeld vor dem Blatt, so daß der Auftrieb wieder ansteigt. Dies wird unterstützt durch die beginnende Einschnürung der neu entstehenden Randwirbel. Nach einem leichten Überschwingen stellt sich der sta-

tionäre Endzustand ein. Die korrespondierende Entwicklung der berechneten Nachlaufgeometrie ist in Kap. 5.3.2 behandelt. Über die auf der Abszisse eingetragenen Iterationen ist eine Korrelation zu den dort gezeigten Bildern möglich. Die Gesamtrechnenzeit bis zum Erreichen des dargestellten Zustandes betrug etwa 85h auf einem Convex C-202 Computer. Man erkennt aber, daß sich bereits wesentlich früher keine gravierenden Änderungen in der Auftriebsverteilung mehr ergeben.

### 5.2.3 Modellrotor bei $Ma_{tip} = 0.439$ und $\theta_c = 8^\circ$

Die für diesen rein subsonischen Fall berechnete Druckverteilung ist in Bild 5.2-13 aufgetragen und mit den Messungen verglichen. Der hohe Grad an Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, der sich für die beiden vorhergehenden Testfälle eingestellt hatte, konnte dieses Mal nicht ganz erreicht werden, da das Druckminimum an der Nase über der gesamten Blattlänge zu gering ausfiel. Auf den verbleibenden 95% der Blattiefe auf der Oberseite und auf der gesamten Unterseite ist die Genauigkeit der Lösung hingegen ausgezeichnet.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde u.a. der Einfluß des Diskretisierungsgrades als eine der möglichen Ursachen für diese Diskrepanz im Nasenbereich näher untersucht. Wie bereits erwähnt, ist die numerische Dissipation für das Diffusionsverhalten der Nachlaufwirbel verantwortlich. Ein groberes Netz sollte daher zu einer stärkeren Aufweitung, und damit eine Veränderung des Strömungszustandes vor dem betrachteten Blatt führen.

Die in dieser Hinsicht durchgeführten Maßnahmen brachten jedoch keinen Aufschluß. Stellvertretend für diese Untersuchungen ist in Bild 5.2-13 zusätzlich der Druckverlauf aufgetragen, wie er auf einem groben Netz, das in  $\xi$ - und  $\zeta$ -Richtung jeweils nur die Hälfte an Zellen besaß, errechnet wurde. Unterschiede sind bis auf den Nasenbereich praktisch kaum spürbar und auch dort nur relativ gering.

Dies zeigt, daß der induzierte Anströmzustand vor dem betrachteten Blatt in beiden Fällen nahezu identisch gewesen sein muß und durch die unterschiedliche Diskretisierung nicht in dem Maße beeinflußt wurde, wie es zu vermuten gewesen wäre. Zudem spricht auch die hervorragende Übereinstimmung auf der Oberseite für  $x/l > 0.05$  sowie auf der gesamten Unterseite eher dafür, daß das Strömungsfeld vor dem Blatt richtig berechnet wurde, da sich anderenfalls eine falsche Verteilung des effektiven Anstellwinkels und damit eine Beeinträchtigung der Lösung auf dem gesamten Blatt hätte ergeben müssen.

Bei Kroll [40] ist ein ähnlicher Vergleich für den gleichen Testfall zu fin-

den. Bei seinem Wake-Capturing-Verfahren sind die Unterschiede zwischen feinem und grobem Netz, die in etwa den gleichen Diskretisierungsgrad hatten, wie die in der vorliegenden Arbeit verwendeten, wesentlich ausgeprägter. Auf dem groben Netz ergaben sich an den inneren Radialstationen höhere Unterdrücke an der Ober- und geringere Unterdrücke an der Unterseite, was auf einen zu hohen effektiven Anstellwinkel schließen läßt. Mit dem feinen Netz konnte er hingegen eine insgesamt recht gute Übereinstimmung, insbesondere im kritischen Nasenbereich, erzielen.

Es wurde auch die Möglichkeit untersucht, daß der verwendete Riemann-Algorithmus in seiner aktuellen Fassung und mit der gewählten Parametereinstellung prinzipiell Schwierigkeiten bei der Wiedergabe starker Druckgradienten im Nasenbereich haben könnte. An einem zweidimensionalen Modellfall, für den der gemessene Druckverlauf eine ähnliche Charakteristik besitzt, konnte jedoch das Gegenteil nachgewiesen werden (Bild 5.2-14).

Zur Verbesserung der unzureichenden Übereinstimmung der Druckverteilung im Nasenbereich sind also über diese Arbeit hinausgehend weitere Untersuchungen notwendig.

Die Integration der Druckverteilung entlang der Spannweite liefert den in Bild 5.2-15 dargestellten Verlauf des Auftriebsbeiwertes. Die Übereinstimmung zu den experimentellen Werten ist ausgezeichnet, die Auswirkungen der zu geringen Druckminima an der Nase auf den Auftrieb sind verhältnismäßig klein.

Die Nachlaufgeometrie ist in den Bildern 5.2-16 und 5.2-17 dargestellt. Aufgetragen sind Verteilungen von Zirkulationsdichte und Totaldruckverlust am Ende des Berechnungszeitraumes etwa  $30^\circ$  hinter dem Blatt. Auch in diesem Fall sollte, wie bereits in dem Kapitel zuvor, hauptsächlich die Einschnürung des äußeren Randwirbels im Vordergrund stehen, was eine schlechte Wiedergabe der Verhältnisse in der Rotorkreisebene zur Folge hat. Davon ist vor allem die Wirbelschicht betroffen.

Zur Überprüfung der theoretisch berechneten Einschnürung sind wiederum die Positionen der Randwirbel gemäß Caradonna & Tung [67] bzw. nach Kocurek [138] eingetragen. Auch für diesen Testfall ist die Übereinstimmung mit der experimentell bestimmten Nachlaufgeometrie sehr gut.

Für die Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf gilt im wesentlichen das im vorigen Kapitel Gesagte. Aufgrund der geringeren Blattbelastung gegenüber dem dort behandelten transsonischen Fall ist das Zirkulationsdichteniveau allgemein etwas niedriger.

Entsprechend hat auch die Höhe des Totaldruckverlustes abgenommen ( $\approx 2\%$  bei  $\psi = 30^\circ$ ,  $\approx 3.5\%$  bei  $\psi = 15^\circ$ , Wert der ersten dargestellten Isolinie:  $0.1\%$ ). Trotz der extrem niedrigen Werte kann man die Trajektorie unterhalb des Rotorblattes

noch sehr gut verfolgen. Im Bereich um  $z/l \approx -6$  treten jedoch geringe Abweichungen in der angezeigten Einschnürung gegenüber den experimentellen Ergebnissen, aber auch gegenüber der Zirkulationsdichte auf. In diesem Fall scheint der Totaldruckverlust noch von anderen numerischen Einflüssen betroffen zu sein.

Im weiter abgesenkten Bereich ist die Diffusion infolge des Netzeinflusses sehr deutlich spürbar. Dabei tritt signifikant der Übergang vom feiner diskretisierten Innennetz (Ausdehnung der Halbachsen  $15 \times 15 \times 12$ ) in das gröbere Außennetz (vgl. Bild 4.3-3) hervor, in das sich der Anfahrwirbel gerade hineinbewegt hat. Die Auswirkungen der wesentlich höheren Dissipation auf die Diffusion der Wirbelanteile, die sich in diesem Außenbereich befinden, ist auffällig. Zusätzlich weisen die Isolinien genau am Übergang einen Zacken auf. Offensichtlich wurde der Netzübergang an dieser Stelle nicht sauber ausgeführt, so daß es zu einer Diskontinuität im Linienverlauf oder in der Größe der benachbarten Zellreihen gekommen ist. Beide Effekte schlagen sich im übrigen auf die Zirkulationsdichteverteilung in weitaus geringerem Maße nieder.

Die grobe Diskretisierung des Außennetzes führt zwar zu einer Erhöhung der Diffusion, davon sind jedoch nur solche Wirbelanteile betroffen, die auf das Strömungsfeld keinen Einfluß mehr haben. Die dadurch gewonnene Rechenzeit rechtfertigt dieses Vorgehen. Gleichzeitig ist die Möglichkeit geschaffen, daß die abgesenkten Wirbelanteile, die nach den Ausführungen in Kap. 5.1.1 für die Einschnürung des darüberliegenden Wirbelsystems mitverantwortlich sind, zumindest näherungsweise erhalten bleiben. Andererseits würde ein Verzicht auf eine Vergrößerung des physikalischen Raumes und ein Belassen des Fernfeldrandes an den Grenzen des Innennetzes zu einer Blockierung der Wirbelabsenkung führen, die Rückwirkungen auf das Strömungsfeld im Blattnahbereich hat (vgl. Kap. 5.4.3).

Die Struktur des Nachlaufs in verschiedenen Schnittebenen von der Blatthinterkante bis zum nachfolgenden Blatt ist für diesen Testfall ausführlich in Kap. 5.3.2 beschrieben.

In Bild 5.2-18 sind die Verläufe der Auftriebsbeiwerte über der Zeit aufgetragen. Auch sie weisen die gleichen charakteristischen Grundzüge wie für den zuvor behandelten transsonischen Fall auf. Zum Vergleich sind, wie bereits in Bild 5.2-13, die Kurven für das feine und das grobe Netz gegenübergestellt. Die Rechenzeiterparnis beträgt etwa 70% bei einer, wie Bild 5.2-13 ausweist, nur geringfügigen Verschlechterung der Ergebnisse. Allerdings ist dabei auch zu berücksichtigen, daß es sich bei der niedrigen Blattspitzenmachzahl und dem moderatem Anstellwinkel um einen unterkritischen Anströmzustand handelt. Dieses wird auch durch die in Bild 5.2-19 aufgetragenen, auf den Schallstaudruck bezogenen Isobaren deutlich.

#### 5.2.4 Modellrotor bei $Ma_{t1p} = 0.794$ und $\theta_c = 8^\circ$

Im vorliegenden Testfall betrug die Rotordrehgeschwindigkeit 2250 Umdrehungen pro Minute, was einer Blattspitzenmachzahl von  $Ma_{t1p} = 0.794$  entspricht. Dadurch entsteht im Außenbereich des Blattes an der Oberseite ein ausgeprägtes Überschallfeld, das mit einem starken Verdichtungsstoß abschließt. Dies ist sehr gut in Bild 5.2-20 zu erkennen. Der charakteristische Verlauf der Isobaren am äußersten Blattende weist aus, daß die gezeigte Berechnung für ein Blatt mit gerade abgeschnittenem Ende durchgeführt worden war (vgl. Bild 5.2-8).

Die lokale Druckverteilung an den einzelnen Radialstationen ist Bild 5.2-21 zu entnehmen. Die Übereinstimmung mit den gemessenen Daten ist im großen und ganzen sehr gut, die errechneten Werte weisen aber, wie bereits bei dem in Kap. 5.2-2 beschriebenen Fall, erneut einen zu geringen Unterdruck im Blattspitzenbereich auf.

Bezüglich der Abweichung im Druckminimum bei  $r/R = 0.8$  ist aufgrund der Feststellungen in Kap. 5.2.2 und aufgrund der Abweichungen, die im auftriebslosen Fall in den Messungen auftraten, nicht auszuschließen, daß der Meßwert fehlerbehaftet ist.

Es bietet sich daher ein Blick auf die Ergebnisse anderer Autoren an. Berechnete Druckverteilungen zum vorliegenden Testfall wurden z.B. von Kroll [40], Chen & McGroskey [47] und von Chang & Tung [35] veröffentlicht. In den beiden erstgenannten Arbeiten wurde ein Wake-Capturing-, in der letzten Arbeit ein Euler-Verfahren, das mit einem auf den Modellrotor abgestimmten Wirbelmodell gekoppelt wurde, verwendet.

Interessanterweise sind jedoch gerade an dieser Radialstation die Ergebnisse sehr unterschiedlich. Die genannten Wake-Capturing-Verfahren erreichen zwar die gemessene Saugspitze, der Unterdruck an den nachfolgenden Meßstellen ist dafür aber deutlich zu hoch. Das mit dem Wirbelmodell gekoppelte Verfahren zeigt hingegen eine sehr gute Übereinstimmung an allen Meßstellen, mit Ausnahme der einen besagten. Es liefert damit den gleichen Verlauf, wie das vorliegende Verfahren.

An den äußeren Radialstationen ( $r/R = 0.89$  und  $r/R = 0.96$ ) führen die Verfahren von Kroll und von Chang & Tung im Hinblick auf das Erreichen des gemessenen Unterdruckes an der Oberseite zu besseren Ergebnissen als das vorliegende. An den inneren Stationen ist für  $r/R = 0.5$  ein Vergleich leider nicht möglich, da in keinem der genannten Werke die dort errechneten Verläufe gezeigt worden sind. Für  $r/R = 0.68$  findet man ein Ergebnis in [40], der dort errechnete Unterdruck auf der Oberseite ist jedoch über der ersten Profilhälfte höher als die Meßwerte.

Ein weiterer Aspekt bei der Bewertung der Druckverteilung ist die Wiedergabe der Stoßlage. Diese wird, wie in Bild 5.2-21 erkennbar, von dem vorliegenden Verfahren sehr genau bestimmt. Offensichtlich sind viskose Einflüsse, die dazu führen, daß die von dem reibungslosen Verfahren berechnete Position des Verdichtungsstoßes weiter hinten liegt als die tatsächliche, für diesen Testfall noch sehr gering.

Auch die anderen, oben zitierten Euler-Verfahren haben eine gute Übereinstimmung zu der gemessenen Stoßlage erzielt.

In Bild 5.2-22 ist die Zirkulationsdichteverteilung in der Referenzebene  $30^\circ$  hinter dem Blatt dargestellt. Die Iteration wurde für diesen Fall so weit getrieben, daß der Anfahrwirbel bereits nicht mehr zu erkennen ist. Dies setzt natürlich ein entsprechend dimensioniertes Netz voraus. Die beiden äußeren Randwirbel sind sehr gut zu erkennen, wobei die Konzentration des Wirbels vom vorlaufenden Blatt aufgrund der Diffusion bereits drastisch abgenommen hat. Bei den weiter abgesenkten Wirbelteilen ist der Betrag der Zirkulationsdichte weiter gesunken, so daß infolge der Überlagerung die Einzelwirbel nicht mehr aufzulösen sind. Gleichzeitig fand eine moderate Aufweitung des Gebietes positiver Zirkulation statt.

Weiterhin sind der Wirbel am inneren Blattrand sowie die neu entstandene Wirbelschicht ebenfalls deutlich auszumachen.

Der Bereich negativer Zirkulation ist nicht so stark eingeengt wie in den zuvor behandelten Testfällen. Dies wird auf die leicht verbesserte Diskretisierung des für diesen Fall verwendeten Rechnernetzes in der betroffenen Region zurückgeführt.

Für diese Strömungsbedingung wurde keine neuerliche Berechnung der Randwirbellage mit dem Verfahren von Kocurek durchgeführt, da die Messungen von Caradonna & Tung gezeigt haben, daß die Randwirbeltrajektorie unabhängig von der Rotordrehzahl ist. Dies gilt sogar, wenn die Blattspitzenmachzahl transsonisch geworden ist. Die eingetragenen Vergleichsdaten sind also identisch mit denjenigen, die für den im vorherigen Kapitel beschriebenen Testfall ermittelt worden waren. Wie bereits dort ist auch in diesem Fall die Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den experimentellen Ergebnissen ausgezeichnet.

Während sich die Einschnürung der Randwirbel nicht verändert hat, hat aufgrund des höheren Auftriebs ihre Intensität zugenommen. Dies wird deutlich in einem höheren Zirkulationsdichteniveau.

Wie auch für den vorherigen Testfall ist der Zustand des Nachlaufs in verschiedenen Referenzebenen über einen Blattumlauf in Kap. 5.3.2 dargestellt.

In Ergänzung zur Zirkulationsdichte wurde in Bild 5.2-23 der Totaldruckver-

lust aufgetragen. Gegenüber den beiden zuvor behandelten Testfällen (Bilder 5.2-8 und 5.2-17) sind jedoch zwei grundsätzliche Veränderungen eingetreten. Zum einen ist das Gesamtniveau des Totaldruckes höher, was aber nur z.T. mit der höheren Auftriebsbelastung des Blattes begründet werden kann. Ein zusätzlicher Einfluß geht von dem verwendeten Netz aus, bei dem es sich in diesem Fall um ein blockstrukturiertes Netz mit angesetztem Bodenteil handelte (vgl. Kap. 4.4). Wie in Kap. 5.4.4 noch näher ausgeführt wird, führen die blockstrukturierten Netze allgemein zu einer Erhöhung des Totaldruckverlustes im Nachlauf. Ursache ist vermutlich die Nähe des Fernfeldrandes auf Höhe der Rotorkreisebene, und daraus resultierend eine Beeinträchtigung der Strömung. Ebenfalls typisch für die in dieser Arbeit verwendeten blockstrukturierten Netze ist die Tatsache, daß die Randwirbeleinschnürung in der Auswertung des Totaldruckverlustes etwas zu gering ausfällt und nicht mehr exakt mit dem entsprechenden Ergebnis der Zirkulationsdichteauftragung zusammenpaßt. Auch hier sind die Ursachen wahrscheinlich in Einflüssen zu suchen, die vom Fernfeldrand ausgehen.

Im Gegensatz zum vorigen Testfall, bei dem sich der Unterschied zwischen Innen- und Außenbereich des global erweiterten Netzes deutlich im Totaldruckverlust widerspiegelte, ist hier der Übergang zwischen den beiden Netzblöcken nicht zu erkennen, da die metrische Diskontinuität vermieden werden konnte.

Bild 5.2-24 zeigt die Verteilung des Auftriebsbeiwertes über der Spannweite. Abweichungen sind bei 80% und 89% des Blattradiuses erkennbar, wo die errechneten Werte zu hoch (1) sind. Betrachtet man allerdings die zugehörigen Druckverteilungen in Bild 5.2-21, und vergleicht auch die Werte an den anderen Radialstationen, so wäre in diesem Bereich eine bessere Übereinstimmung, oder bestenfalls eine Unterschreitung der experimentellen Daten zu erwarten gewesen.

#### 5.2.5 Modellrotor bei $Ma_{tip} = 0.877$ und $\theta_c = 8^\circ$

Die weitere Erhöhung der Rotordrehzahl führt zu einer Ausweitung des Überschallfeldes auf der Blattoberseite und zu einer Verstärkung des Verdichtungsstoßes (Bild 5.2-25).

Die zugehörige Druckverteilung ist Bild 5.2-26 zu entnehmen. Die gerechneten Daten stimmen mit den gemessenen über weite Bereiche des Blattes recht gut überein, weisen aber im äußeren Blattbereich, wie bereits bei den Testfällen zuvor, weiterhin zu geringe Unterdrücke an der Oberseite auf.

Die Betrachtung der Strömung als reibungsfrei zeigt im vorliegenden Fall

deutliche Auswirkungen im Stoßbereich. Die Vernachlässigung viskoser Einflüsse, wie z.B. der Stoß-Grenzschicht-Interaktion, führt zu dem typischen Phänomen der Wiedergabe eines zu starken und zu weit hinten liegenden Stoßes.

In Bild 5.2-27 ist die Struktur des Nachlaufes dargestellt. Die Iteration wurde zu einem vergleichsweise frühen Zeitpunkt abgebrochen, so daß der Anfahrwirbel noch sehr dominant ist. Besonders groß ist in diesem Fall auch der Einfluß des inneren Randwirbelsystems.

Die Zirkulationsdichte und damit auch die Zirkulation der abgehenden äußeren Randwirbel haben aufgrund der Drehzahlsteigerung weiter zugenommen, es zeigt sich aber erneut, daß ihre Einschnürung relativ unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit ist. Die Vergleichsdaten nach Kocurek entstammen wie zuvor der Berechnung für  $Ma_{t1p} = 0.439$ .

#### 5.2.6 Modellrotor bei $Ma_{t1p} = 0.794$ und $\theta_c = 12^\circ$

Im letzten Beispiel wurde ein Fall mit einem Anstellwinkel von  $12^\circ$  und einer Blattspitzenmachzahl von  $Ma_{t1p} = 0.794$  berechnet.

Diese extremen Bedingungen liegen jedoch im Grenzbereich dessen, was mit einem reibungslosen Verfahren sinnvoll und möglich ist.

Dementsprechend ist auch die Qualität der errechneten Druckverteilung nicht überzeugend (Bild 5.2-28). Vermutlich führt die Nichtberücksichtigung dominanter Reibungseinflüsse (Grenzschicht, Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungen, Turbulenz, Ablösung) gerade bei diesem hohen Anstellwinkel nicht nur zu einer veränderten Strömung entlang der Körperoberfläche, sondern beeinflusst auch den Nachlauf und damit das induzierte Strömungsfeld vor dem nachfolgenden Blatt.

Srinivasan et al. [61] haben den gleichen Testfall mit Hilfe eines Navier-Stokes-Verfahrens berechnet, wobei bessere Resultate erzielt wurden. Dazu ist anzumerken, daß für den in Kap. 5.2.5 behandelten, weniger kritischen Fall, der ebenfalls in [61] zu finden ist, die Unterschiede zu dem vorliegenden reibungslosen Verfahren deutlich geringer und im wesentlichen nur auf Stoßlage und -stärke begrenzt waren. Es konnten jedoch leider keine Veröffentlichungen gefunden werden, in denen die Ergebnisse eines reibungslosen Wake-Capturing-Verfahrens für diesen Testfall präsentiert wurden. Daher ist es schwierig, zwischen Reibungs- und Verfahrenseinflüssen zu differenzieren.

Bild 5.2-29 zeigt den Verlauf des Auftriebsbeiwertes über dem Radius.

Die Druckverteilung auf der Blattoberseite ist in Bild 5.2-30 gezeigt. Gegenüber dem vergleichbaren Fall bei einem Anstellwinkel von  $8^\circ$  (Bild 5.2-20)

ist das Überschallgebiet in Blattiefenrichtung schmaler und die maximale Übergeschwindigkeit ist geringfügig höher.

Bild 5.2-31 gibt die Zirkulationsdichteverteilung im Blattnachlauf wieder. Der Drehungsinhalt ist erwartungsgemäß höher als in den vorangegangenen Testfällen. Aufgrund der größeren Blattbelastung und des daraus resultierenden stärkeren Abwindfeldes hat sich die von der Hinterkante abgehende Wirbelschicht weiter abgesenkt. Auch bei der Wirbelschicht des vorlaufenden Blattes ist die stärkere Neigung noch gut zu erkennen.

Als empirische Referenzdaten stehen lediglich die gemessenen Wirbelpositionen nach Caradonna & Tung [67] zur Verfügung, die durch Kreuze gekennzeichnet sind. Eine Berechnung der Wirbeltrajektorie m.H. des Verfahrens von Kocurek wurde nicht durchgeführt.

#### 5.2.7 Vergleich mit anderen Theorien

In den vorherigen Kapiteln wurden die Ergebnisse des vorliegenden Verfahrens den gemessenen Referenzdaten im stationären Schwebeflug gegenübergestellt. Die Übereinstimmung mit den Messungen kann sowohl was die Druckverteilung als auch was die Einschnürung der Randwirbeltrajektorie betrifft als sehr gut bezeichnet werden.

In diesem Abschnitt soll nun ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer nicht-linearer theoretischer Verfahren stattfinden. Dieser kann sich jedoch nur auf die Druckverteilung erstrecken, da Angaben zu den errechneten Nachlaufstrukturen nur in ganz wenigen Einzelfällen veröffentlicht wurden.

Wie bereits erwähnt, stellen die umfangreichen Messungen von Caradonna & Tung [67] an dem zweiblättrigen Modellrotor die bedeutendste experimentelle Datenbasis für den stationären Schwebeflug dar und werden daher von einer großen Zahl von Autoren zur Validierung ihres Verfahrens herangezogen. Für die in dieser Arbeit untersuchten Testfälle stellt die untenstehende Auflistung, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, eine repräsentative Auswahl von Veröffentlichungen dar, in denen ebenfalls numerische Ergebnisse zu den jeweiligen Fällen gefunden werden können.

Testfall	Ma = 0.520	Ma = 0.815	Ma = 0.439	Ma = 0.794	Ma = 0.877	Ma = 0.794
Verfahren	$\theta_c = 0^\circ$	$\theta_c = 5^\circ$	$\theta_c = 8^\circ$	$\theta_c = 8^\circ$	$\theta_c = 8^\circ$	$\theta_c = 12^\circ$
Potentialverf. m. Wirbelmodell			[19] [27]		[14] [19] [23] [27]	[19] [23]
Euler-Verfahren	[36] [38] [40]					
• m. Wirbelmodell			[36]	[35]	[35] [36]	
• Wake-Capturing		[49]	[40] [47] [49]	[40] [47]	[47] [61]	
Navier-Stokes- Verfahren	[57] [58]					
• m. Wirbelmodell			[56] [57] [58] [60]		[57] [58] [60]	
• Wake-Capturing			[61]		[61]	[61]

Da zu den meisten der aufgeführten Fälle ein Vergleich mit den Ergebnissen aus den zitierten Veröffentlichungen bereits in den entsprechenden Kapiteln (5.2.2-5.2.4, 5.2.6) zu finden ist, sei an dieser Stelle eine detaillierte Gegenüberstellung exemplarisch nur noch für den Testfall bei  $Ma_{t,p} = 0.877$  und  $\theta_c = 8^\circ$  durchgeführt. Die dabei getroffenen Aussagen gelten im allgemeinen in gleicher Weise auch für die übrigen Berechnungen.

Prinzipiell läßt sich sagen, daß bei Verwendung eines Nachlaufmodelles die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten für die aufgeführten Testfälle in der Regel ausgezeichnet ist. Dies ist unabhängig von dem zugrundeliegenden Verfahren und trifft vor allem auch auf die Potentialverfahren zu, die den mit Abstand geringsten Aufwand zur Erzielung der Lösung bei gleicher Genauigkeit erfordern. Sehr gute Ergebnisse erzielten auch Chang & Tung [35] mit ihrem gekoppelten Euler-Verfahren.

Es darf dabei allerdings nicht übersehen werden, daß die verwendeten Nachlaufmodelle ganz speziell auf die geometrischen und physikalischen Bedingungen des gerade berechneten Testfalles angepaßt wurden und z.T. sogar die vermessene Nachlaufstruktur einbezogen wurde. Die Übertragbarkeit solcher Modelle auf geometrisch anspruchsvollere Rotorgeometrien, zu denen a priori keine empirischen Daten zur Verfügung stehen, muß als gering angesehen werden. Dies ist mit ein Grund für die fortschreitende Entwicklung von Wake-Capturing-Verfahren, auch wenn in den vorliegenden Fällen die gekoppelten Verfahren aus den besagten Gründen im allgemeinen Ergebnisse liefern, die besser mit den

Messungen übereinstimmen und wegen des wesentlich kleineren Rechenraumes vor allem weniger Rechenaufwand benötigen.

Deutliche Einbußen in der Qualität der Lösung sind bei den Ergebnissen von Agarwal & Deese [36,57,58] und Srinivasan & McCroskey [60] festzustellen, die ihre Euler- bzw. Navier-Stokes-Verfahren mit einfacheren, allgemeingültigeren Nachlaufmodellen (z.B. mittels Nachlaufkorrekturen aus den Leistungsrechnungsprogrammen HOVER oder CAMRAD) gekoppelt haben. Daran wird deutlich, wie stark die Lösung von der Qualität und der Genauigkeit der Nachlaufmodelle abhängig ist.

In Bild 5.2-32 sind die Ergebnisse des vorliegenden Wake-Capturing-Verfahrens auf der Basis der Euler-Gleichungen exemplarisch mit den gekoppelten Modellen von [57] und [60], die die Navier-Stokes-Gleichungen verwenden, verglichen. Es muß erwähnt werden, daß die Vergleichskurven in den folgenden Bildern aus den jeweiligen Veröffentlichungen m.H. eines Digitalisierungsgerätes entnommen wurden. Dadurch sind an einigen Stellen Qualitätseinbußen aufgetreten, die nicht auf das Lösungsverfahren zurückzuführen sind.

Die Ergebnisse mit dem vorliegenden Verfahren sind deutlich besser an den inneren Radialstationen, was wohl darauf zurückzuführen ist, daß in den Nachlaufmodellen der Einfluß des inneren Randwirbels und der Wirbelschicht nicht oder nur unzureichend berücksichtigt ist. Die fehlenden Abwindkomponenten führen zu einem zu großen effektiven Anstellwinkel.

Bei  $r/R = 0.8$  sind Unterschiede vor allem in der Rekompensation feststellbar, die die gekoppelten Navier-Stokes-Verfahren mit einem zu flachen Gradienten wiedergeben. Der Druckanstieg wird von dem vorliegenden Verfahren besser reproduziert, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Lage des Stoßes aufgrund der Betrachtung der Strömung als reibungsfrei bekanntermaßen zu weit hinten liegt.

Für  $r/R = 0.89$  fehlen die entsprechenden Ergebnisse in [57,58], so daß ein Vergleich nur mit [60] möglich ist. Dort werden der Druckabfall an der Nase sowie der maximale Unterdruck etwas besser, der Verlauf an der Unterseite aber etwas schlechter als bei dem vorliegenden Verfahren wiedergegeben. Bezüglich des Verdichtungsstoßes gilt das für die vorige Radialstation Gesagte. Am äußersten Blattende steht wiederum nur eine Referenzkurve, diesmal diejenige aus [57], zur Verfügung. In diesem Bereich sind die Ergebnisse beider Verfahren nicht zufriedenstellend. Bei dem vorliegenden Verfahren wird, wie bereits in den Kap. 5.2.2 - 5.2.6 für alle Testfälle übereinstimmend festgestellt wurde, der Blattspitzenverlust zu stark wiedergegeben und damit der gemessene Unterdruck nicht erreicht. Selbiges tritt aber auch bei dem gekoppelten Navier-Stokes-Verfahren auf.

Dieser Vergleich, der für die anderen Testfälle zu ähnlichen Aussagen führt, zeigt, daß das entwickelte Wake-Capturing-Verfahren zu einem nicht unerheblichen Zuwachs an Genauigkeit in der Lösung gegenüber den mit einem allgemeingültigen Nachlaufmodell gekoppelten Euler- oder Navier-Stokes-Verfahren führt.

Diese Feststellung trifft in gleicher Weise auch für die Wake-Capturing-Verfahren anderer Autoren, z.B. nach [40],[47] oder [61] zu, die ebenfalls eine deutliche Verbesserung zu den gekoppelten Methoden erreichen konnten.

In Bild 5.2-33 ist das vorliegende Euler-Verfahren mit den Ergebnissen der Wake-Capturing-Methoden nach Chen et al. [47] (Euler) und Srinivasan et al. [61] (Navier-Stokes) verglichen. Bei Chen sind bedauerlicherweise nur die Druckverläufe an der dritten und vierten Radialstation aufgetragen. Aufgrund der Ausführungen in [47] und der dort gezeigten Verläufe für  $Ma_{tip} = 0.794$ ,  $\theta_c = 8^\circ$ , die zumindest noch für die zweite Station bei  $r/R = 0.68$  dargestellt sind, ist davon auszugehen, daß im inneren Bereich ein deutlich zu hoher effektiver Anstellwinkel errechnet wird, der in noch stärkerem Maße als bei den in Bild 5.2-32 gezeigten Verläufen der gekoppelten Verfahren zu einem zu großen Unterdruck an der Oberseite und einem zu niedrigen Unterdruck an der Unterseite führt. Ein solcher Effekt konnte im vorliegenden Verfahren vermieden werden, da im Gegensatz zu [47] der Rechenraum bis zur Rotordrehachse ausgedehnt wurde, und so der Einfluß des inneren Randwirbels und der vollständigen Wirbelschicht mitberücksichtigt werden konnte

An den beiden gezeigten Radialstationen für  $r/R = 0.8$  und  $r/R = 0.89$  unterscheiden sich die Ergebnisse von Chen et al. und die eigenen kaum, jedoch beschreibt das vorliegende Verfahren den Druckanstieg sowie den Verlauf entlang der Unterseite etwas besser.

Die qualitativ besten Ergebnisse, die bisher für den betrachteten Modellrotor veröffentlicht wurden, wurden von Srinivasan et al. [61] mit einem Wake-Capturing-Verfahren auf Basis der Navier-Stokes-Gleichungen erzielt.

Wie aus Bild 5.2-33 ersichtlich, konnten Srinivasan et al. eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Meßwerten erzielen, insbesondere auch was Stoßlage und -stärke angeht. Die Ergebnisse mit dem vorliegenden Euler-Verfahren sind demgegenüber etwas schlechter. Dabei ist es jedoch wichtig anzumerken, daß die in [61] gezeigten Ergebnisse auf einem Rechennetz mit fast 1.000.000 Netzzellen erzeugt wurden, wohingegen die eigenen Berechnungen auf Netzen durchgeführt wurden, die lediglich ein Fünftel dieser Volumenzahl besaßen. Wie sich dieser geringere Aufwand auf die Ergebnisse niederschlägt, kann ebenfalls [61] entnommen werden, da dort der gleiche Testfall mit dem gleichen Verfahren auf einem Netz mit etwa 130.000 Zellen berechnet wurde, was den in dieser Arbeit verwendeten Netzen vergleichbar ist, wenn nur der innere Netzteil betrachtet

wird. Unter diesen Bedingungen sind die Ergebnisse aus [61] und die eigenen nahezu identisch, abgesehen von der Wiedergabe von Stoßlage und -stärke sowie dem bekannten Defizit des eigenen Verfahrens in der Beschreibung des Blattspitzenverlustes.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der ebenfalls in [61] zu findende Vergleich zwischen der reibungsbehafteten und einer reibungsfreien Version ihres Wake-Capturing-Verfahrens unter Verwendung ein und desselben Netzes mit 1.000.000 Zellen. In Bild 5.2-34 ist die reibungsfreie Lösung aufgetragen. Die Vorteile der wesentlich feineren Diskretisierung werden besonders im Druckabfall an der Nase und im äußeren Blattbereich deutlich. Gleichzeitig ist aber auch zu erkennen, daß die Verdichtungsstöße von dem eigenen und von dem Euler-Verfahren nach [61] nahezu gleichwertig wiedergegeben werden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das entwickelte Wake-Capturing-Verfahren auf der Grundlage der reibungsfreien Euler-Gleichungen auch im Vergleich mit anderen numerischen Verfahren zur Berechnung der Rotorströmung sehr gute und, mit Ausnahme des Blattspitzenverlustes, in vielen Fällen sogar genauere Ergebnisse liefert. Dabei ist zu berücksichtigen, daß aufgrund der Vernachlässigung der Reibungsterme sowie wegen der Begrenztheit der zur Verfügung stehenden Ressourcen der Gesamtaufwand relativ gering war.

### 5.3 Betrachtung der Nachlaufstruktur

Im Rahmen der Ergebnisdiskussion war für die berechneten Testfälle in den entsprechenden Kapiteln die Geometrie des Nachlaufes in einer Referenzfläche hinter dem Rotorblatt dargestellt worden. Dabei hatte sich insbesondere die Auftragung der Zirkulationsdichteverteilung als vorteilhaft erwiesen. Der Vergleich der berechneten und der gemessenen, bzw. empirisch ermittelten Einschnürung zeigte eine ausgezeichnete Übereinstimmung.

Der dargestellte Zustand entsprach der Situation am Ende der Berechnungen und wurde als stationär definiert, da sich die noch immer vorhandenen zeitveränderlichen Effekte auf Bereiche beschränkten, die keinen Einfluß auf das Rotorblatt mehr hatten.

In diesem Kapitel soll nun zum einen die zeitliche Entwicklung des Nachlaufes, d.h. die numerische Wiedergabe des Anfahrprozesses beschrieben werden. Zum anderen wird die Struktur des Nachlaufes in verschiedenen Referenzebenen zwischen dem betrachteten und dem nachfolgenden Blatt dargestellt, um so einen Einblick in den Wirbeltransport durch das verwendete Euler-Verfahren in Zusammenhang mit den benutzten Rechennetzen vom O-O-Typ zu gewinnen.

#### 5.3.1 Zeitliche Entwicklung

Üblicherweise benutzen die zur Berechnung der Hubschrauberrotorströmung verwendeten Wake-Capturing-Verfahren analog zur Profil- oder Flügelberechnung die freie Anströmung als Anfangsbedingung. Dies gilt auch für das vorliegende Euler-Verfahren. Das Ausgehen von diesem Ruhezustand führt in der Simulation wie auch in der Realität zur Generierung eines sehr lang andauernden und komplexen Anfahrprozesses.

In Kap.5.1.1 wurden die physikalischen Vorgänge eines realen Anfahrprozesses anhand der Auswertung von Experimenten aufgezeigt. In diesem Abschnitt sollen diesen Erkenntnissen die Ergebnisse der numerischen Berechnung gegenübergestellt werden, um so einen Eindruck darüber zu erhalten, wie solche komplexen Effekte von einem Euler-Verfahren behandelt werden. Außerdem soll mit dem Wissen über das Zustandekommen der in Kap. 5.2 gezeigten Nachlaufstrukturen die Interpretation der Darstellungen erleichtert werden.

Es ist vorauszuschicken, daß der instationäre Anfahrprozeß von einem stationären Verfahren unter Verwendung lokaler Zeitschritte nachgebildet wurde. Damit ist innerhalb des Berechnungsgebietes die Zeitechtheit nicht gewahrt. Ebenso wenig besteht die Möglichkeit, eine Zuordnung zwischen einem gewissen

"numerischen" Zeitpunkt (Anzahl der Iterationen) und einer realen Zeit, ausgedrückt in Einheiten von Sekunden oder in Grad der Blattbewegung, zu vollziehen. Daher kann der numerische Anfahrprozeß nur qualitativ bewertet werden, was jedoch dem Informationsgehalt der dargestellten Ergebnisse keinen Abbruch tut. Darüber hinaus liegen für den Anfahrprozeß verständlicherweise keine experimentellen Daten vor, die über eine qualitative Filmauswertung hinausgingen. Erst für den Zustand nach Erreichen des stationären Endzustandes ist ein zahlenmäßiger Vergleich möglich.

Die im folgenden gezeigten Ergebnisse wurden für den Testfall bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  erzielt. Die Auswahl gerade dieses Falles ist willkürlich, auch für die anderen Testfälle konnten die gleichen charakteristischen Eigenschaften für den berechneten Anfahrvorgang beobachtet werden.

Bild 5.3-1 zeigt die zeitliche Entwicklung des Blattnachlaufes zu verschiedenen Iterationszeitpunkten anhand der Zirkulationsdichteverteilung in einer Referenzebene, die  $30^\circ$  hinter dem Blatt senkrecht auf der Rotorkreisscheibe steht. Die Bildsequenz zeigt sehr deutlich die Ausbildung der beiden Randwirbelsysteme. Der numerisch berechnete Anfahrprozeß weist dabei das typische Verhalten auf, das auch in den Experimenten beobachtet werden konnte (vgl. 5.1.1):

Zunächst vereinigen sich die äußeren Randwirbel der beiden Rotorblätter zu einem Ring, der eine geraume Zeit bewegungslos im Bereich der Blattspitzen verharret. Dabei wird er ständig mit Zirkulation gespeist, woraufhin sich auch sein geometrischer Querschnitt kontinuierlich erhöht. Diese Situation, dargestellt in Bild 5.3-1a entspricht in etwa Bild 5.1-1a. Nach einer gewissen Zeit beginnt sich der Wirbelring analog zu Bild 5.1-1b abzusenken, und die neu entstehenden Wirbelsegmente werden nun sichtbar. Dies erkennt man an der Form der Isolinien, die zunehmend länglicher werden (Bild 5.3-1b,c). Entsprechend den Erkenntnissen aus Kap. 5.1.2 ist dies ein Zeichen für das Vorhandensein mehrerer sich überlagernder Wirbel in der Schnittebene. Aufgrund der diffusionsbedingten Aufweitung der älteren Wirbelanteile ist die Identifizierung der einzelnen Wirbelzentren kaum möglich, aber die radiale Lage des Wirbelpfades läßt sich relativ genau bestimmen. Eine Einschnürung existiert in dieser Phase noch nicht. Diese wird dann zu einem späteren Zeitpunkt sichtbar (Bild 5.3-1e), der in etwa mit dem Zustand in Bild 5.1-1c vergleichbar ist. Die Isolinien unmittelbar unterhalb der Blattebene beginnen sich einwärts zu richten, während der Anfahrwirbel, der für diesen Effekt verantwortlich ist, seine radiale Position beibehält und sich stetig weiter absenkt. Auf diese Weise beginnt sich der stationäre Zustand nach und nach einzustellen (Bilder 5.3-1f-h). Im letzten der gezeigten Bilder besitzt der Anfahrwirbel bereits einen Abstand von ca. 15 Flügeltiefen zur Rotorkreisscheibe und hat in

dieser Entfernung jeglichen unmittelbaren Einfluß auf das Blatt verloren. Er ist aber weiterhin für die eingeschnürte Form des über ihm liegenden Wirbelsystems verantwortlich.

Die Iteration wurde an dieser Stelle abgebrochen, da die erwünschten Informationen erbracht worden sind. Veränderungen im Strömungsfeld vor dem Rotorblatt, die eine Auswirkung auf den Druckverlauf haben könnten, ergeben sich ohnehin nicht mehr. Der in Bild 5.3-1h dargestellte Zustand, der dem in Bild 5.2-9 entspricht, wird daher als stationärer Endzustand bezeichnet, obwohl dies im eigentlichen Sinne nur für den Bereich oberhalb des Anfahrwirbels zutrifft, da sich letzterer zumindest noch so lange weiterbewegt, bis der Netzboden erreicht ist.

Mit zunehmender Absenkung, d.h. mit steigendem Wirbelalter treten in den tieferen Regionen die typischen netzbedingten Diffusionserscheinungen (Abnahme der Konzentration, Aufweitung, Absinken des Zirkulationsdichtemaximums) auf. Dies ist vor allem im Bereich des Anfahrwirbels spürbar. Dieser Effekt wird durch die Tatsache unterstützt, daß das Rechengitter mit zunehmender Entfernung vom Rotorblatt eine gröber werdende Diskretisierung aufweist.

Ebenso wie für den äußeren Randwirbel spiegelt sich der Anfahrprozeß auch in der zeitlichen Entwicklung des inneren Randwirbels und der Wirbelschicht wider. Die Diffusionseffekte führen in diesem Fall dazu, daß das Gebiet negativer Zirkulation, nachdem es sich bereits sehr weit nach unten ausgedehnt hatte, insbesondere durch den äußeren Anfahrwirbel wieder reduziert wird. Offensichtlich kommt es in dieser Zone zu dissipationsbedingten Vermischungsvorgängen zwischen den Anteilen mit rechtsdrehender und mit linksdrehender Zirkulation.

In Bild 5.3-2 ist der gleiche Vorgang noch einmal anhand der Auftragung des Totaldruckverlustes dargestellt. Wie bereits bei der Zirkulationsdichte werden die charakteristischen Phänomene des physikalischen Anfahrprozesses qualitativ sehr gut wiedergegeben.

Zu Beginn der Anfahrphase besitzt der sich bildende Anfahrwirbel einen sehr hohen Totaldruckverlust, der etwa anderthalbmal so hoch ist, wie der eines "normalen" Randwirbels an dieser Stelle, 30° hinter dem Blatt. Mit zunehmendem Alter des Anfahrwirbels verringert sich dieser Wert infolge der angesprochenen Diffusionseffekte zusehends.

Im Anfangsstadium sind auch noch sehr gut die Bestandteile der Wirbelschicht zu erkennen. Auch hier nimmt der Totaldruckverlust mit zunehmendem Alter ab, so daß das Niveau unterhalb des dargestellten Wertebereiches sinkt.

In den Bildern 5.3-2e-h erkennt man sehr deutlich den Übergang vom Innennetz

ins Außernetz, der sich bei etwa 12 Blattiefen unterhalb der Rotorkreisscheibe befindet. Diese Problematik wurde bereits in Kap. 5.2.3 angesprochen. Offensichtlich handelt es sich hier um eine metrische Diskontinuität im Verlauf der Netzlinien oder im Übergang der Zellgrößen. Beseitigt man diesen Mangel durch Verwendung eines Glättungsalgorithmusses, oder durch eine bessere Verteilung der Gesamtzellenzahl auf die einzelnen Raumrichtungen, so lassen sich die Knicke in den Verläufen der Isolinien beseitigen, wie in Bild 5.3-3 zu sehen ist. Die diesem Fall zugrundeliegende Verteilung der Netzknoten führte darüber hinaus auch zu einer Veränderung des netzinduzierten Dissipationsniveaus. Dies hat einen leichten Einfluß auf die Höhe des Totaldruckverlustes, nicht jedoch auf die wiedergegebene Wirbellage und die Zirkulationsdichteverteilung.

Wie bereits erwähnt, wird auf die Darstellung der zeitlichen Entwicklungen des Nachlaufes für die anderen Testfälle an dieser Stelle verzichtet, da sie keine neuen Informationen liefert. Der numerische Anfahrprozeß lief qualitativ in der gleichen Weise ab, wie zuvor beschrieben.

### 5.3.2 Wirbeltransport

Die Fähigkeit des zugrundeliegenden EUFLEX-Verfahrens im Hinblick auf die Zirkulationserhaltung im Nachlauf eines Flügels wurde von Wanke et al. [160] und Hertel [49] untersucht. In beiden Fällen ergab sich, daß über eine Entfernung von bis zu 8 Flügeltiefen der Verlust an Drehung weniger als 3% betrug. Damit konnte nachgewiesen werden, daß das Verfahren die Forderung des Thomson'schen Wirbelsatzes sehr gut erfüllt.

Die Berechnungen wurden auf H-Netzen durchgeführt, die den Vorteil bieten, daß die Zellenzahl und damit der Diskretisierungsgrad in den betrachteten Ebenen hinter dem Flügel bis zum Fernfeldrand nahezu konstant bleibt.

Diese günstige Eigenschaft besitzen die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Netze vom O-Typ nicht. Bei ihnen wird der Diskretisierungsgrad in Umfangs- wie auch in Normalenrichtung mit zunehmender Entfernung vom Rotorblatt deutlich schlechter (siehe Bilder 4.3-7, 4.3-8). Dies bedeutet, daß ein Wirbelelement, das an der Blattspitze generiert wird und sich entlang des Wirbelpfades fortbewegt, bis zum Passieren der Symmetrieebene zunächst immer größer werdende Kontrollvolumina durchläuft, um anschließend bei Annäherung an das nachfolgende Blatt wieder in Bereiche zunehmend feinerer Auflösung zu gelangen.

Darüber hinaus handelte es sich in den beiden oben erwähnten Fällen jeweils um die Betrachtung eines gleichförmig angeströmten Festflügels, bei dem

wesentlich einfachere Bedingungen vorliegen, als im Falle der Rotorströmung. So verläßt der Randwirbel schon nach sehr kurzer Zeit das Berechnungsgebiet, d.h. der Transport erfolgt nur über wenige Flügeltiefen, während er im vorliegenden Fall nach einer Absenkung von beispielsweise 15 Blattiefen und mehreren Rotorumdrehungen schon einen erheblich älteren Zustand erreicht hat. Desweiteren sind bei der Rotorströmung zusätzliche Interferenzen mit dem Blatt, zwischen den gegensinnig drehenden Wirbeln und zwischen den Wirbelanteilen unterschiedlichen Alters zu berücksichtigen.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich für den wesentlich komplexeren Fall der Rotorströmung und unter Verwendung eines O-Netzes der Drehungsinhalt im Nachlauf verhält.

Zunächst soll jedoch zumindest qualitativ die Diffusion, d.h. die Aufweitung der Wirbel mit zunehmendem Alter und der Abfall der Maxima von Totaldruckverlust, Zirkulationsdichte, etc. im Wirbelkern, die durch die netz- und verfahrensbedingte Dissipation verursacht sind, betrachtet werden.

In Bild 5.3-4 ist am Beispiel des Testfalles mit  $Ma_{t,p} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$  aus Kap. 5.2.4 die Zirkulationsdichte in verschiedenen Referenzebenen zwischen den beiden Rotorblättern aufgetragen. Die Ebenen schneiden die Rotorkreisscheibe senkrecht bei den angegebenen Azimutwinkeln.  $\psi = 0^\circ$  entspricht der Blattvorderkante, die Bereiche  $0^\circ < \psi \leq 90^\circ$  und  $-90^\circ \leq \psi < 0^\circ$  repräsentieren die Regionen hinter dem betrachteten bzw. vor dem nachfolgenden Blatt, und die Symmetrieebene befindet sich bei  $\psi = \pm 90^\circ$ . Die jeweilige Position der Schnittebene ist ein Maß für das Wirbelalter.

Die in Bild 5.1-10 eingezeichnete Lage der Schnittebenen bezogen auf die Rotorkreisscheibe verdeutlicht u.a., bis zu welchem Winkel die Schnittebene noch durch das Blatt verläuft. So wird beispielsweise bei  $\psi = 10^\circ$  die Blatthinterkante erst bei ca. 95%, bei  $\psi = 20^\circ$  erst bei 45% des Blattradiuses geschnitten.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse sind die bereits in Kap. 5.1.3 erwähnten auswertebedingten Nachteile hinsichtlich eines unruhigen Verlaufes der Isolien, einer Orientierung derselben entlang den Rasterlinien im Blattnahbereich sowie einer starken Abhängigkeit von der Dichte des Aufpunktrasters zu berücksichtigen.

Noch auf dem Blatt ( $\psi = 5^\circ$ ) sind sehr deutlich die neuentstehenden Wirbel am Äußeren und am inneren Blattende zu sehen. Die weißen Flecken in ihrem Inneren besagen, daß die Beträge der Zirkulationsdichte so hoch sind, daß sie außerhalb des dargestellten Wertebereiches liegen. Eine Begrenzung des Wertebereiches ist aber notwendig, um die älteren Wirbelanteile auch noch erfassen zu können, die aufgrund der Diffusion stark an Intensität verloren haben.

Unterhalb der äußeren Blattspitze sieht man noch den Randwirbel des vorlaufenden Blattes, die Zirkulationsdichte in seinem Inneren hat jedoch nach einer halben Rotorumdrehung bereits sehr stark abgenommen. Folglich sind auch die tiefer liegenden Anteile der beiden Randwirbel nicht mehr diskret auszumachen. Der starke Verlust an Konzentration und die Überlagerung mit den höher und tiefer liegenden Wirbelanteilen führen dazu, daß lediglich noch die radiale Lage der Wirbelachsen beim Durchgang durch die Referenzfläche einigermaßen zu bestimmen ist. In ähnlicher Weise erkennt man im inneren Blattbereich noch die Wirbelschicht des vorlaufenden Blattes in der für einen Rotornachlauf typischen schrägen Lage.

Bei  $\psi = 10^\circ$  hat der äußere Randwirbel gerade die Blattspitze verlassen. Im nächsten Bild ( $\psi = 20^\circ$ ) wird zum ersten Mal der bereits in der freien Strömung liegende äußere Teil der Wirbelschicht sichtbar, die aufgrund des starken Gradienten der blattgebundenen Zirkulation in radialer Richtung (vgl. Bild 5.3-7) eine hohe negative Zirkulationsdichte hat.

Bei  $\psi = 30^\circ$  ist die Wirbelschicht nun fast vollständig zu sehen, da diese Schnittebene nur noch auf den inneren 30% über das Blatt verläuft. Der äußere Blattspitzenwirbel hat sich bereits merklich aufgeweitet, und der Wert der Zirkulationsdichte im Inneren ist auf etwa 30% des Maximums kurz hinter der Hinterkante abgefallen.

Weitere  $10^\circ$  später hat die Diffusion des äußeren Randwirbels weiter zugenommen, sein Durchmesser ist gestiegen, und das Maximum im Kern beträgt nur noch 20%. Die Wirbelschicht beginnt sich abzusenken, wobei aufgrund des Auswerterasters die Absenkung, die außen stärker ist als innen, stufenförmig wiedergegeben wird. Wirbelschicht und Randwirbel des vorlaufenden Blattes senken sich ebenfalls weiter ab, haben aber gegenüber dem Zustand direkt unter dem Blatt nur geringfügig an Konzentration verloren.

Bis zum Erreichen der Symmetrieebene ( $\psi = 60^\circ, 85^\circ$ ) ist die Aufweitung von Randwirbel und Wirbelschicht weiter fortgeschritten, die maximale Zirkulationsdichte beträgt nur noch etwa 7%. In diesem Bereich ist das O-Netz im Vergleich zum Blattnahbereich relativ grob. Wirbel und Wirbelschicht des vorlaufenden Blattes sind nur noch andeutungsweise zu erkennen.

Die letzten fünf Bilder der Sequenz zeigen die Nachlaufstruktur bei Annäherung an das nachfolgende Blatt ( $\psi = -70^\circ \dots -5^\circ$ ). Interessanterweise steigt im weiteren Verlauf die Diffusion des äußeren Randwirbels kaum noch. Die maximale Zirkulationsdichte im Kern beträgt konstant etwa 5%. Man erkennt deutlich die zunehmende Absenkung des Randwirbels und der Wirbelschicht. Der Randwirbel des vorlaufenden Blattes ist nicht mehr zu sehen, lediglich die längliche Form der Isolinien weist noch auf seine Existenz hin. Der innere Randwirbel ist in die Wirbelschicht übergegangen.

Das letzte Bild ( $\theta = -5^\circ$ ) gibt die Verhältnisse kurz vor dem Auftreffen auf das Blatt wieder. Die Absenkung des äußeren Randwirbels beträgt nach einem Umlauf von  $180^\circ$  etwas mehr als eine halbe Blatttiefe bei einer Einschnürung von ca. 88%.

Im Laufe der weiteren Rotorumdrehungen führen die Diffusion und die Überlagerung der induzierten Effekte dazu, daß die abgesenkten Einzelwirbel nicht mehr aufgelöst werden können. Die charakteristische Form der Isolinien zeigt aber, daß trotz der Diffusion die Einschnürung korrekt wiedergegeben wird. Ab ca. 3 Blattiefen unterhalb der Rotorkreisebene ist die Zirkulationsdichteverteilung über dem gesamten Umlauf praktisch konstant.

In Bild 5.3-5 ist die gleiche Sequenz für einen Rotor unter geringerer Belastung ( $Ma_{tip} = 0.439$ ,  $\theta_c = 8^\circ$ ) dargestellt.

Das bisher Gesagte trifft bei erwartungsgemäß geringeren Beträgniveau im wesentlichen auch für die Ergebnisse dieses subsonischen Berechnungsfalles zu. Aufgrund der geringeren absoluten Werte für die Zirkulationsdichte im Wirbelkern ist auch der diffusionsbedingte Abfall über dem Wirbelalter prozentual geringer. Beim Erreichen der Symmetrieebene besitzt der äußere Randwirbel noch etwa 15% seiner ursprünglichen Stärke, im Bereich vor dem nachfolgenden Blatt liegt er konstant bei etwa 11%.

Im folgenden Abschnitt stellt sich nun die Frage nach der Erhaltung der Gesamtdrehung im Strömungsfeld des Hubschrauberrotors.

Dazu erfolgt die numerische Integration der Geschwindigkeit entlang einer geschlossenen Kurve C, die alle oder einen Teil der Durchstoßpunkte der Randwirbel durch die Referenzebene umschließt. Die Zirkulation ergibt sich dann aus Gl.(5.1) zu:

$$\Gamma = \oint_C q \, ds \quad , \quad (5.1)$$

wobei die Integrationsrichtung gegen den Uhrzeigersinn verläuft und somit einen positiven Wert für den äußeren Blattspitzenwirbel liefert. Da die Integrationskurve vollständig in der jeweiligen Schnittebene liegt, ist sie rein zweidimensional, und die Geschwindigkeitsanteile normal zu dieser Ebene brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

Daneben ist auch die Ermittlung der Zirkulation über das Flächenintegral

$$\Gamma = \iint_A \frac{d\Gamma}{dS} \, dS \quad (5.8)$$

möglich, zumal die Zirkulationsdichteverteilung  $\frac{d\Gamma}{dS}$  für die Isolinien darstel-

lung bereits explizit ermittelt wurde.

Die letztgenannte Methode erwies sich infolge höherer Fehler bei der diskreten, numerischen Integration zwar als etwas ungenauer, lieferte aber davon abgesehen im wesentlichen die gleichen Ergebnisse.

Zunächst wurde das Integrationsgebiet so gewählt, daß möglichst nur die Beiträge der äußeren Randwirbel erfaßt wurden. In Bild 5.3-6 ist die entsprechende Integrationskurve mit der Bezeichnung 1 dargestellt. Sie reicht bis 1.6 Blattiefen unter die Rotorkreisscheibe und schneidet diese bei  $r/R \approx 0.85$ .

Die Zirkulation des Randwirbels sollte in etwa dem Maximum der Zirkulation des blattgebundenen Wirbels, das bei einem Rotorblatt nahe an der Blattspitze auftritt, entsprechen.

Mit Hilfe des Kutta-Joukowski Theorems

$$L' = \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma \quad (5.9)$$

und der Beziehung für den lokalen Auftrieb

$$L' = \frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2 \cdot c_l \cdot l \quad (5.10)$$

ergibt sich mit  $v_{\infty} = \omega r$  der Zusammenhang zwischen der örtlichen blattgebundenen Zirkulation und dem Auftriebsbeiwert zu:

$$\frac{\Gamma}{\omega R^2} = \frac{c_l \cdot (r/R)}{2 \cdot (R/l)} \quad (5.11)$$

bzw. unter Verwendung von Gl.(5.6):

$$\frac{\Gamma}{\omega R^2} = \frac{\tilde{c}_{l_a}}{2 \cdot Ma_{t_1 p}^2 \cdot (r/l)} \quad (5.12)$$

wobei die Tilde ( $\tilde{\quad}$ ) zur Kennzeichnung der dimensionsbehafteten Größen weglassen wurde. Es hat sich eingebürgert, zur besseren Vergleichbarkeit die Zirkulation auf  $(\omega R^2)$  zu beziehen. Dies hat den Vorteil, daß die Größe  $(\Gamma/(\omega R^2))$  dimensionslos ist.

Der folgende Vergleich wurde am Beispiel der in den Kap. 5.2-2 bis 5.2-4 behandelten Testfälle durchgeführt. Es sind dies die Fälle  $\theta_c = 5^\circ$ ,  $Ma_{t_1 p} = 0.815$ ,  $\theta_c = 8^\circ$ ,  $Ma_{t_1 p} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$ ,  $Ma_{t_1 p} = 0.794$ .

Mit Hilfe von Gl.(5.11) lassen sich die spannweitigen Verläufe des Auftriebsbeiwertes aus den Bildern 5.2-6, 5.2-15 und 5.2-24 umrechnen und in Form der Zirkulation des blattgebundenen Wirbels über dem Radius auftragen (Bild

5.3-7).

Der Verlauf des Zirkulationsinhaltes über dem Azimuthwinkel (bei festgehaltenem Blatt) ist in Bild 5.3-8 für die drei Testfälle aufgetragen. Man erkennt sehr deutlich die Zunahme der Zirkulation über dem Blatt, sowie ein Abfallen derselben im weiteren Verlauf infolge des Austritts des Randwirbels aus dem begrenzten Integrationsgebiet.

Vergleicht man nun diese Zuwächse an Zirkulation in den Referenzebenen mit den Maxima der Verläufe der blattgebundenen Zirkulation in Bild 5.3-7, so erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung für alle drei Testfälle. Das bedeutet, daß die vom Blatt an das Strömungsgebiet abgegebene Zirkulation in etwa korrekt erfaßt wird. Gleichzeitig ist zu erkennen, daß der Randwirbel vom vorlaufenden Blatt seine Drehung ungefähr beibehalten hat, da die im Integrationsgebiet erfaßte Zirkulation kurz vor dem Auftreffen auf das betrachtete Blatt in der Größenordnung des Zuwachses durch den neu entstehenden Randwirbel liegt. Eine solche quantitative Analyse ist jedoch mit großer Unsicherheit verbunden, da es nicht möglich ist zu beurteilen, welche Anteile von welchen Wirbeln nun exakt von dem Integrationsgebiet erfaßt werden.

Eine Ausweitung des Integrationsgebietes nach unten erbrachte erwartungsgemäß den gleichen Zuwachs an Zirkulation beim Durchschreiten des Blattes. Aufgrund der größeren Anzahl erfaßter Randwirbel stieg das Gesamtniveau der in Bild 5.3-8 aufgetragenen Kurven kontinuierlich an.

Läßt man die Integrationskurve durch die Rotordrehachse laufen und umschließt somit das gesamte Blatt (Bild 5.3-6, Kurve 2), so können damit auch die Anteile der Wirbelschicht und des inneren Randwirbels erfaßt werden, deren Drehrichtung in beiden Fällen der des äußeren Blattspitzenwirbels entgegengesetzt ist. In der Gesamtbilanz sollte im stationären Zustand keine Drehung vom Blatt an den Nachlauf abgegeben werden.

Betrachtet man Bild 5.3-9, so erkennt man bei allen drei Testfällen, daß in der Tat die Gesamtzirkulation im Nachlauf nahezu völlig konstant ist und beim Durchschreiten des Blattes keinerlei Zuwachs oder Absenkung erfährt. Das bedeutet, daß sich die von der Hinterkante abgehenden Wirbel im Gesamtbetrag ihrer Drehung aufheben, ebenso wie die Anteile, die das Integrationsgebiet kontinuierlich durch dessen Begrenzung verlassen.

Dieses erfreuliche, weil mit den theoretischen Vorstellungen in Einklang stehende Ergebnis wird jedoch getrübt durch die Tatsache, daß bei einem der drei Testfälle die Gesamtzirkulation im Integrationsgebiet erheblich von Null verschieden ist, was bei potentialtheoretischer Betrachtung und Integration über eine Trefftz-Fläche nicht der Fall sein dürfte.

Hierfür können zunächst einmal mehrere Ursachen in Betracht kommen, die mit

der Art der Ermittlung des integralen Wertes erklärt werden könnten. So steht z.B. die verwendete Integrationsebene senkrecht auf der Rotorkreisscheibe und ist damit nicht an den lokalen Strömungsvektoren orientiert. Die einzelnen Wirbel der Wirbelschicht sowie die beiden Randwirbel durchdringen die Referenzebene daher nicht parallel zur Flächennormalen, wobei zusätzlich noch zu berücksichtigen ist, daß die Richtungen der örtlichen Drehungsvektoren aufgrund der Rotationsbehaftetheit der Strömung ( $\mathbf{q} \times (\text{rot} \mathbf{q}) \neq 0$ ) von denen der Strömungsvektoren abweicht. Die Neigung der Wirbelschicht einschließlich des inneren Randwirbels ist jedoch von der des äußeren Randwirbels verschieden, wie man z.B. in Bild 1.1-4 erkennen kann. Dadurch werden in der Integrations-ebene unterschiedlich große Anteile der links- bzw. rechtsdrehenden Wirbel erfaßt. Weitere Beiträge könnten durch die Durchschneidung zusammengehöriger Wirbelschichten durch die Integrationskurve oder durch ähnliche Effekte, die mit der willkürlichen Wahl des Integrationsgebietes zusammenhängen, verursacht sein. Schließlich könnten gewisse Einflüsse auch auf weiterhin noch instationäre Vorgänge im Anfahrwirbelbereich zurückgehen, und es darf vor allem nicht außer Acht gelassen werden, daß aufgrund der Verwendung lokaler Zeitschritte keine einheitliche Zeit im Berechnungsgebiet herrscht.

Die aufgezählten Gründe sind für sich allein jedoch nicht ausreichend, um die tatsächlichen Phänomene in dem durch das Euler-Verfahren generierten Nachlauf zu erklären. Verändert man nämlich das in Bild 5.3-6 durch die Kurve 2 gekennzeichnete Integrationsgebiet durch Verschiebung der unteren, waagerechten Begrenzungslinie, so verändert sich damit für alle drei Testfälle auch die ermittelte Zirkulation beträchtlich. In Bild 5.3-10 ist die Abhängigkeit des Drehungsinhaltes von der Ausdehnung des Integrationsgebietes ersichtlich. Ein Verschieben der unteren Grenze in Richtung auf den Netzboden führt zu einem stetigen Anwachsen der Zirkulation. Verläuft die Grenze beispielsweise bei  $z/l = -15$ , was den in Kap. 5.2 gezeigten Ausdehnungen entspricht, so beträgt die erfaßte Drehung bereits mehr als das Fünffache des Wertes der blattgebundenen Zirkulation.

Offensichtlich kommt es mit zunehmendem Abstand von der Rotorkreisscheibe zu einem Übergewicht an positiver Zirkulation. Diese Vermutung wird auch bestätigt durch die bereits in Kap. 5.2.2 beschriebene Beobachtung, daß das Gebiet negativer Drehung mit zunehmender Absenkung immer mehr eingeschnürt wird und etwa 12 Blattiefen unterhalb der Rotorebene endet, während sich das Gebiet positiver Zirkulation in diesem Bereich immer mehr ausweitet (Bild 5.2-9). Auch bei der Auswertung der in Kap. 5.3.1 beschriebenen zeitlichen Entwicklung des Nachlaufes konnte festgestellt werden, daß die Zirkulation im Integrationsgebiet mit fortschreitender Iteration zunahm, und erst wieder etwas

zurückging, als der Anfahrwirbel den betrachteten Bereich zu verlassen begann. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist nicht klar, wie es zu diesem unphysikalischen Anwachsen der Zirkulation im Nachlauf kommt. Zur Klärung dieser Frage ist eine Reihe weiterer Untersuchungen nötig, die zum Beispiel die Abhängigkeit von der Diskretisierung, der Netztopologie, der Art der Auswertung etc. klären sollten.

## 5.4 Einflüsse auf die Lösung

### 5.4.1 Abhängigkeit der Lösung vom Diskretisierungsgrad

Die in den vorherigen Kapiteln gezeigten Ergebnisse wurden auf Netzen mit etwa 110.000–150.000 Zellen im inneren Grundnetz erzeugt. Dieses hatte die Form eines Halbellipsoids mit einer Ausdehnung der Halbachsen von  $15 \times 15 \times 12$  Blattiefen und wurde für die auftriebsbehafteten Rechnungen zur Vermeidung einer Behinderung der Wirbelausbreitung durch zusätzliche Zellen nach außen hin erweitert (vgl. Kap. 4.3). Dazu wurden je nach Ausführung noch einmal 40.000–50.000 Volumina verwendet.

Zur Unterscheidung werden Netze mit dieser Gesamtpunktzahl als feine Netze bezeichnet. Der Begriff "fein" ist jedoch nur relativ zu verstehen und kein absolutes Maß für den Diskretisierungsgrad. In [61] sind beispielsweise Ergebnisse einer Euler-Rechnung für den Modellrotor präsentiert, die auf einem Netz mit ca. 1.000.000 Netzzellen erzielt wurden. Die für die vorliegende Arbeit zur Verfügung stehenden Ressourcen erlaubten jedoch nur eine Obergrenze von ca. 200.000 Zellen.

Es hatte sich in den vorherigen Kapiteln gezeigt, daß durch die zwangsläufige Einbeziehung des zeitaufwendigen, instationären Anfahrvorgangs in den numerischen Iterationsprozeß die benötigte Rechenzeit sehr hoch ist. Einsparungen ließen sich erzielen, wenn die Netzpunktzahl gesenkt werden könnte. Ein Beispiel dafür gab die Auftragung der zeitlichen Entwicklung der Auftriebsbeiwerte in Bild 5.2-18. In diesem Kapitel soll daher der Frage nachgegangen werden, wie stark und in welchen Teilbereichen die Lösung in Abhängigkeit von Blattspitzenmachzahl und kollektivem Anstellwinkel durch das aus einer Netzvergrößerung resultierende Ansteigen der Abbruch- und Diskretisierungsfehler beeinflusst wird.

Dazu wurde die Gesamtzellenzahl im inneren Grundnetz auf etwa 40.000 reduziert, die sich auf 64 Zellen in  $\xi$ -Richtung, 34 in  $\eta$ -Richtung und 18 in  $\zeta$ -Richtung aufteilen. Weitere 20.000 Zellen dienten der globalen Netzerweiterung. Gleichzeitig wurden aus Effizienzgründen die Maße des Grundnetzes auf  $12 \times 12 \times 8$  Blattiefen verringert, die Abmessungen des Gesamtnetzes aber beibehalten.

Der überwiegende Teil der Untersuchungen wurde für den Testfall mit  $Ma_{t1p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  durchgeführt, für den die Resultate auf dem feinen Netz in Kap. 5.2.2 beschrieben sind. Es werden aber auch Ergebnisse für  $Ma_{t1p} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$  (Kap. 5.2.3), bzw. für  $Ma_{t1p} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$  (Kap. 5.2.4) gezeigt.

Im Vorgriff auf die Ausführungen in diesem Kapitel waren bereits in den Bildern 5.2-3 und 5.2-13 Druckverteilungen, die auf einem groben Netz errechnet worden waren, denen auf dem feinen Netz gegenübergestellt worden. In beiden Fällen waren die Unterschiede minimal, jedoch handelte es sich dabei auch um Anströmungen im relativ unkritischen subsonischen Geschwindigkeitsbereich.

Im folgenden wird neben der Druckverteilung auch die Nachlaufstruktur auf dem groben und dem feinen Netz miteinander verglichen. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß aufgrund der Verwendung lokaler Zeitschritte keine zeitliche Korrelation besteht. Die Auswertung der berechneten Nachlaufgeometrie bleibt im wesentlichen auf den äußeren Randwirbel beschränkt.

Der wichtigste Bestandteil des Gesamtergebnisses im Hinblick auf Auslegungsaufgaben ist die Druckverteilung entlang der Blattoberfläche. Vergleicht man für den transsonischen Testfall bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  die Ergebnisse für das feine Netz aus Bild. 5.2-5 mit denen für das grobe Netz (Bild 5.4-1), so stellt man zwar etwas größere Unterschiede als im Falle subsonischer Anströmbedingungen (Bild 5.2-18), insgesamt aber zumindest im inneren Blattbereich nur moderate Unterschiede fest.

Signifikant ist lediglich der flachere Gradient der Rekompensation an den beiden äußeren Radialstationen beim groben Netz, der in erster Linie auf die größere Ausdehnung der Volumina entlang der Körperoberfläche zurückzuführen sein dürfte.

Bei genauem Hinsehen erkennt man leichte Anzeichen einer Beeinflussung des Strömungsfeldes durch die schlechtere Diskretisierung des groben Netzes in Form einer geringfügigen Veränderung der effektiven Anstellwinkelverteilung. Im inneren Bereich ( $r/R \leq 0.8$ ) ist der Druckunterschied leicht höher, an den beiden äußeren Stationen etwas kleiner als im feinen Netz. Damit scheinen die wirbelinduzierten Abwind- bzw. Aufwindgeschwindigkeiten geringer zu sein, was durch eine höhere Diffusion des Randwirbels verursacht worden sein könnte.

Erstaunlich ist auch das geringe Ausmaß des Unterschieds im errechneten Druckminimum an der äußersten Radialstation. Zwar ist der Unterdruck im feinen Netz etwas höher, im großen und ganzen ist die Differenz jedoch nicht so bedeutend, als daß man davon sprechen könnte, daß ein auch im feinen Netz noch nicht ausreichender Diskretisierungsgrad eindeutig die Ursache für die bei allen Testfällen zu beobachtende Abweichung von den Messungen sei.

Eine andere Aufteilung der Gesamtpunktzahl im feinen Netz auf die drei Richtungen des krummlinigen Koordinatensystems unterstützte diesen Eindruck. Durch diese Maßnahme wurde u.a. auch die Zellenform verändert, die nach [49] einen Einfluß auf das Aufweitungsverhalten des Randwirbels haben müßte. Insbesondere eine erhebliche Steigerung der Punktzahl und damit der Verdichtung normal zur

Blattoberfläche führte auf einen Druckverlauf, der im Bereich derer lag, die in Bild 5.4-1 gezeigt sind. Da gleichzeitig die Punktzahl in Umfangsrichtung etwas reduziert werden mußte (80×41×48 Zellen im Innenetz), wurde die Rekompensation ähnlich schlecht wiedergegeben wie im groben Netz. Dies bestätigt die Annahme, daß es sich hierbei lediglich um einen Effekt der Volumengröße in Blattiefenrichtung handelt.

Inwieweit sich Veränderungen im abgesenkten Bereich des Nachlaufes eingestellt haben, läßt sich anhand der Druckverteilungen nicht erkennen, da das Strömungsfeld vor dem Blatt in weitaus größtem Maße von den Wirbeln im Nahbereich und von den blattinduzierten Abwindgeschwindigkeiten bestimmt wird.

Da die typische eingeschnürte Form, wie in Kap. 5.1.1 beschrieben, einen Effekt der gegenseitigen und der Eigenbeeinflussung der Randwirbel darstellt, liegt der Gedanke nahe, daß in Bereichen gröberer Diskretisierung stärkere Diffusionsvorgänge stattfinden, die zu einer Beeinträchtigung der Wirbelstruktur, insbesondere bei den älteren Wirbelteilen führen. Dadurch wären die nach innen gerichteten induzierten Geschwindigkeitskomponenten der unteren Wirbel schwächer, das in Bild 5.1-2 dargestellte Gleichgewicht würde sich verschieben und sich eine andere Nachlaufgeometrie einstellen.

In der Tat belegen die Auswertungen der Zirkulationsdichteverteilung diese Vermutung. Vergleicht man die Ergebnisse für den stationären Endzustand, so stellt man bei dem groben Netz (Bild 5.4-2) eine etwas geringere Einschnürung als auf dem feinen Netz fest (vgl. Bild 5.2-9). Desweiteren hat das Niveau der Zirkulationsdichte unterhalb der Blattebene abgenommen und eine stärkere Aufweitung der Wirbel im Vergleich zum feinen Netz stattgefunden. Alle drei Erscheinungen sind Anzeichen für eine höhere Diffusion infolge der netzbedingten Dissipation.

Die Auftragung des Totaldruckverlustes (Bild 5.4.3) liefert weitestgehend die gleichen Erkenntnisse, zeigt aber eine etwas größere Einschnürung der Randwirbel, als dies aus der Zirkulationsdichteverteilung herauszulesen war. Die gute Übereinstimmung mit den empirischen Daten ist in diesem Fall eher zufällig. In anderen Berechnungen (s. auch z.B. Bild 5.4.5) wird die Einschnürung als Folge erhöhter numerischer Dissipation im groben Netz durch den Totaldruckverlust eher zu stark wiedergegeben, in aller Regel aber stärker als durch die Zirkulationsdichte. Offensichtlich finden dabei im Totaldruckverlust, in den im Gegensatz zur Zirkulationsdichte neben der Geschwindigkeit auch noch Dichte und statischer Druck eingehen, höhere numerische Überlagerungseffekte statt, die zu einer Verschiebung der Maxima führen. Daraus läßt sich ableiten, daß der Grad der Nichtübereinstimmung zwischen beiden Größen auf die Höhe dieser zusätzlichen Einflüsse hinweist.

Interessant ist auch die nach außen weisende Orientierung der Isolinien ab  $z/l = -8$ . Genau an dieser Stelle befindet sich der Übergang vom Innen- ins Außennetz (vgl. Bild 4.3-4). Dieser Effekt war völlig analog auch im feinen Netz zu beobachten (Bild 5.2-10), bei dem sich das Innennetz bis auf 12 Blatt-tiefen unterhalb der Rotorkreisebene ausdehnte. Vergleicht man diesbezüglich den Zirkulationsdichteverlauf zwischen grobem und feinem Netz, so stellt man einen solch deutlichen Hinweis auf den Übergang in einen Bereich schlechterer Diskretisierung nicht fest. Die Aufweitung am unteren Bildrand ist in beiden Fällen ähnlich und in erster Linie durch den Anfahrwirbel verursacht (vgl. auch Kap. 5.3.1).

Ein zahlenmäßiger Vergleich zwischen den Maxima des Totaldruckverlustes auf dem feinen und auf dem groben Netz ist mit großer Unsicherheit behaftet, da das Niveau des Totaldruckverlustes sehr stark auch von anderen Effekten, wie z.B. von der Empfindlichkeit des Flußlimiters (s. Kap. 5.4.2) oder vom Relaxationsfaktor abhing, die zwar den Verlauf der Isobaren nicht beeinflussten, aufgrund der eingebrachten künstlichen Viskosität jedoch das Gesamtniveau veränderten. Auch die blockstrukturierten Netze führten zu anderen Zahlenwerten. Tendenziell ließ sich aber feststellen, daß der maximale Totaldruckverlust im Inneren eines neu entstehenden Wirbels relativ unabhängig vom Diskretisierungsgrad ist. Im weiteren Verlauf führt die erhöhte Diffusion auf den groben Netzen jedoch zu einem rascheren Abbau der Intensität. Dies wird teilweise kompensiert durch die größeren Verluste, die infolge des höheren Viskositätsniveaus auf groben Netzen entstehen. So ist beispielsweise auch zu erklären, warum in Bild 5.2-16 der Totaldruckverlust im Anfahrwirbel wieder ansteigt, nachdem dieser in das grobere Außennetz übergegangen war.

Für die beiden anderen Testfälle bei  $\Theta_c = 8^\circ$  und  $Ma_{t,1p} = 0.439$  bzw.  $Ma_{t,1p} = 0.794$  führten die Vergleichsrechnungen auf den groben Netzen zu ähnlichen Ergebnissen wie zuvor beschrieben.

Die Unterschiede in den Druckverteilungen für den subsonischen Fall sind Bild 5.2-13 zu entnehmen. Sie sind verschwindend gering. Die Zirkulationsdichte (Bild 5.4-4) und der Totaldruckverlust (Bild 5.4-5) im Nachlauf weisen die bekannten Besonderheiten auf. Nach der Zirkulationsdichte ergibt sich eine zu geringe, nach dem Totaldruckverlust eine davon abweichende, zu starke Einschnürung. Der Verlauf der Isobaren im unteren Bereich weist deutlich den Bereich des groben Außennetzes aus.

Gleiches gilt für die Auswertung der Nachlaufgeometrie im transsonischen Fall bei  $Ma_{t,1p} = 0.794$  (Bilder 5.4-6 und 5.4-7).

Die Unterschiede in den Druckverteilungen zwischen dem groben und dem feinen

Netz sind jedoch deutlich größer (Bild 5.4-8) und bewegen sich etwa in der Größenordnung derer, die im ersten Testfall (Bild 5.4-1) auftraten. Dies trifft insbesondere auf die Verläufe an der Oberseite im äußeren Blattbereich zu.

Im Druckverlauf zeigt sich also eine Abhängigkeit der Auswirkung einer schlechteren Diskretisierung von dem Anströmzustand. Je unkritischer dieser ist, desto besser ist die Übereinstimmung und desto geringer ist der Genauigkeitsverlust bei der Verwendung eines gröberen Netzes. Diese Gesetzmäßigkeit ist von der Berechnung von Körpern, die frei angeströmt werden, bekannt und läßt sich z.B. sehr einfach bei einer Profilberechnung nachweisen. Im Falle der Rotorströmung zeigt dies aber auch, daß eine Beeinträchtigung der Druckverteilung durch eine ungenauere Berechnung der induzierten Anströmbedingungen, z.B. infolge erhöhter Wirbeldiffusion, zu geringer Einschnürung etc., von zweitrangiger Bedeutung ist. Diese Phänomene sind nämlich bei den in diesem Abschnitt betrachteten Fällen in etwa gleichem Maße ausgeprägt, während die Unterschiede in den Druckverteilungen stark differieren.

Je nach Anwendungsfall kann also, insbesondere wenn keine starken transsonischen Effekte zu erwarten sind, in Anbetracht des wesentlich geringeren Aufwandes (in den betrachteten Fällen 60.000 Volumina, Rechenzeiterparnis  $\approx 70\%$ ) die Verwendung eines gröberen Netzes durchaus überlegenswert sein.

Der Nachlauf wird durch einen schlechteren Diskretisierungsgrad in der zu erwartenden Art und Weise beeinträchtigt. Infolge erhöhter Diffusion sinken Einschnürung und Intensität der Wirbel, und ihre Aufweitung nimmt zu. Die Auswirkungen auf die Strömungsverhältnisse vor dem Blatt sind jedoch relativ gering. Insbesondere werden solche Bereiche des Nachlaufes stärker beeinflusst, die aufgrund ihres Abstandes vom Blatt nur noch von untergeordneter Bedeutung sind.

Als ein deutlicher Effekt grober Diskretisierung erwies sich die Diskrepanz in der Einschnürung der äußeren Randwirbel, wie sie aus der Auftragung der Totaldruckverteilung gegenüber der Zirkulationsdichteverteilung herauszulesen war.

Noch nicht abschließend beantwortet ist die Frage, inwieweit die Wiedergabe des zu niedrigen Unterdruckes im Bereich der Blattspitze ein Effekt der Netzfeinheit ist. Betrachtet man die äußerst geringe Verbesserung, die z.B. für den Fall  $Ma_{t,p} = 0.815$ ,  $\theta_c = 5^\circ$  (Bild 5.4-1) durch die erhöhte Diskretisierung erzielt werden konnte, so deutet dies eher auf einen untergeordneten Einfluß hin. Für den in Bild 5.4-8 dargestellten Fall ist der Unterschied zwischen feinem und grobem Netz etwas größer. Es verbleibt aber auch auf dem feinen Netz immer noch ein erhebliches Defizit, so daß insgesamt die Vermutung nahe liegt, daß hier noch weitere Effekte eine Rolle spielen.

#### 5.4.2 Einflüsse durch den Lösungsalgorithmus

Aufgrund der erheblich kürzeren Rechenzeiten und in Kenntnis der auftretenden Ungenauigkeiten wurden die im folgenden beschriebenen Untersuchungen zum überwiegenden Teil auf Rechengittern in der Größenordnung von etwa 60.000 Zellen durchgeführt.

Es wurde lediglich der transsonische Anströmfall bei  $Ma_{t,1} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  betrachtet, so daß die in den Bildern 5.3-1 bis 5.3-3 gezeigten Ergebnisse als Referenz dienen.

Im folgenden wird beschrieben, welche Einflüsse auf die Lösung von bestimmten Veränderungen im Lösungsalgorithmus bzw. von der Wahl gewisser Steuerparameter ausgehen. Dabei werden sowohl die Genauigkeit der Lösung als auch die benötigte Rechenzeit bewertet.

#### Wahl des Koordinatensystems

In Kap. 2 sind die Eulerschen Bewegungsgleichungen sowohl in kartesischen (Gl.(2.34)) als auch in zylindrischen Ausgangskordinaten (Gl.(2.35)) aufgeführt. Daraus resultieren gewisse Unterschiede im Lösungsalgorithmus, die vor allem die Bestimmung der Flächennormalenvektoren sowie die vektorielle Zerlegung der freien Anströmung an den Durchströmflächen der Kontrollvolumina betreffen. Desweiteren sind bei Verwendung der zylindrischen Formulierung die Drehung der Basen in  $\theta$ -Richtung sowie die daraus resultierenden Ableitungsterme zu berücksichtigen.

Die Berechnungen mit beiden Programmversionen ergaben vollkommen identische Ergebnisse, sowohl was den Druckverlauf, als auch was die Verteilungen von Zirkulationsdichte und Totaldruckverlust im Nachlauf betrifft. Daran gemessen gibt es keinen Grund, die eine oder die andere Formulierung zu bevorzugen.

Aufgrund eines etwas geringeren Rechenaufwandes pro Iterationsschritt ergaben sich für den kartesischen Algorithmus leichte Rechenzeitvorteile, was letztlich den Ausschlag dafür gab, für die weiteren Berechnungen diese Programmversion zu verwenden.

#### Wahl der Strömungsgrößen

In Kap. 3.4 wurde die Notwendigkeit der Einführung absoluter Strömungsgrößen hervorgehoben. Werden statt dessen die relativen Größen verwendet, wie das

bei einer räumlich konstanten Anströmgeschwindigkeit üblich und sinnvoll ist, so kommt es aufgrund einer ungenauen Approximation der Durchströmung der Kontrollvolumina zu numerischen Fehlern, die sich mit der Zeit akkumulieren. In den einzelnen Zellen werden dabei Masse, Impuls und Energie produziert bzw. vernichtet.

Die Auswirkungen dieser Verletzung der Konservativität werden am ehesten deutlich, wenn man versucht, auf einem leeren Netz die freie Anströmung zu reproduzieren. Da die herauszustellenden Effekte von der Größe der Kontrollvolumina abhängen, wurde ein besonders grobes Netz erzeugt, das nur über knapp 15.000 Zellen bei einer Ausdehnung von 60 Blattiefen in radialer und jeweils 40 Blattiefen ober- und unterhalb der xy-Ebene verfügte.

In Bild 5.4-9 sind die Residuenverläufe bei Verwendung relativer und absoluter Strömungsvariablen gegenübergestellt. Die jeweils untere Kurve bezeichnet den größten Fehler zum aktuellen Iterationszeitpunkt, ermittelt aus der Summe der Flußbilanzdefizite aller fünf Strömungsgrößen in jeder Zelle. Die darüber liegende Kurve gibt die maximale Abweichung der fünf errechneten Strömungswerte vom wahren Zustand der ungestörten Anströmung wieder. Somit sind:

$$\text{Res}_1 = \max_{i,j,k} \sum_{m=1}^5 |\phi_m^n - \phi_m^{n-1}| \quad (5.13)$$

und

$$\text{Res}_2 = \max_{i,j,k} \sum_{m=1}^5 |\phi_m^n - \phi_m^0| \quad (5.14)$$

Während der erste Verlauf also die Veränderung von Iterationsschritt zu Iterationsschritt darstellt, bezeichnet die zweite Kurve einen absoluten Wert und zeigt damit an, ob sich ein begrenzter Zustand einstellt.

Bei Verwendung absoluter Größen bewegen sich die Fehler konstant im Bereich der Maschinengenauigkeit von  $10^{-11}$  für den verwendeten 48-bit Rechner, bzw. von  $10^{-7}$  im Falle der hier gezeigten Rechnung auf einem 32-bit Rechner. Demgegenüber verursachen die relativen Größen immense Defizite in den Flußbilanzen, die zu einer unphysikalischen Veränderungen von Masse, Impuls und Energie führen. Im Extremfall entsteht dadurch eine Geschwindigkeitsinduzierung, wie in Bild 5.4-10 in einer Ebene senkrecht zur Anströmung dargestellt. Im Vergleich dazu liegen die in einer Querströmungsebene induzierten Geschwindigkeiten bei Verwendung absoluter Variablen in der Größenordnung von  $10^{-7}$  und, was besonders wichtig ist, schaukeln sich trotz des geschlossenen Rechenraumes auch in den Zellen, die unmittelbar an der Rotordrehachse liegen, nicht auf. Vor den Untersuchungen auf dem leeren Netz war der oben erwähnte transsonische Testfall mit Rotorblatt auf einem gewöhnlichen Netz berechnet worden. Aufgrund

der besseren Diskretisierung sind die Auswirkungen zwar bei weitem nicht so gravierend, wie beispielsweise in Bild 5.4-10 dargestellt, dennoch sind sie in den Ergebnissen deutlich spürbar.

Am wenigsten waren noch die Druckverteilung an der Oberfläche und die Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf betroffen. Letztere ist in Bild 5.4-11 dargestellt und weist gegenüber einer vergleichbaren Rechnung mit absoluten Größen (Bild 5.4-2) eine weitaus größere Diffusion im äußeren Randwirbelbereich, das Fehlen jeglicher Einschnürung sowie deutliche numerische Schwierigkeiten in der Nähe der Rotordrehachse auf.

Betrachtet man dagegen die Totaldruckverteilung (Bild 5.4-12), so ist die vorhandene Nachlaufgeometrie überhaupt nicht mehr zu erkennen. Das ganze Ausmaß der Beeinträchtigung der Lösung wird jedoch erst sichtbar, wenn man die Verteilung des Totaldruckverlustes über einem größeren Netzausschnitt aufträgt (Bild 5.4-13). Er weist eine völlig unphysikalische Struktur auf. Besonders auffällig sind die Inseln negativen Totaldruckverlustes, die sich entlang der oberen und unteren Netzkanten (das verwendete Netz hatte noch eine zylinderförmige Außenkontur) gebildet haben. An den gleichen Stellen waren in Bild 5.4-10 Wirbel zu erkennen.

Zum Vergleich ist demgegenüber das Ergebnis der Berechnung des gleichen Falles unter Verwendung absoluter Strömungsgrößen in Bild 5.4-14 gegenübergestellt.

Bei der Ableitung der zugrundeliegenden Form der Euler-Gleichungen wurde in Kap. 2.3.3 darauf hingewiesen, daß einige Autoren nicht die vollständig absoluten Größen verwenden, sondern die Energiegleichung statt dessen mit der Roenergie und der Rothalpie bilden, d.h. auf die Eliminierung des gemischten Terms  $\bar{q}(\omega \times r)$  verzichten (Gl. (2.26)-(2.29)). In Kap. 3.4 wurde gezeigt, daß dies bei der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Approximation der differentiellen Euler-Gleichungen nicht ganz korrekt ist. In Bild 5.4-15 ist das Residuum auf einem leeren Netz unter Verwendung der Roenergie statt der absoluten Energie aufgetragen. Der Unterschied gegenüber Bild 5.4-9a beträgt immerhin fast zwei Größenordnungen. Die Kurve der maximalen Abweichung vom Zustand der ungestörten Anströmung, die hier nicht eingetragen ist, verlief bei etwa  $10^{-4}$ . Dabei ist zu berücksichtigen, daß die beim leeren Netz auftretenden Störgeschwindigkeiten  $\bar{q}$  verschwindend gering sind und der gemischte Term daher sehr klein bleibt.

Da andererseits der auftretenden Fehler proportional zur Größe der Durchströmfläche ist, kann bei vernünftiger Diskretisierung der Fehler in einer Rotorberechnung in der Regel vernachlässigt werden. Dennoch wurde in der vorliegenden Arbeit auf die absolute Energie übergegangen.

Rechenzeitvergleich zwischen explizitem und implizitem Algorithmus

In [141] wurde bereits gezeigt, daß das explizite und das implizite Verfahren keine Unterschiede in der Qualität der Lösung aufwiesen. Dies war zu erwarten, da der implizite Teil des Algorithmusses lediglich zur Beschleunigung der Iteration dient und bei Erreichen eines konvergenten Zustandes zu Null wird. Der implizite Algorithmus geht dann in den expliziten über.

Im Vordergrund der im folgenden beschriebenen Untersuchung stand die Optimierung der Rechenzeit des impliziten Algorithmusses durch eine geeignete Wahl der einstellbaren Parameter unter der Vorgabe, daß die einmal gefundene Kombination für alle zu berechnenden Testfälle beibehalten werden kann und nicht auf den jeweiligen Anwendungsfall anzupassen ist.

Der theoretische Hintergrund ist in den Kap. 3.2.5 und 3.3.3 beschrieben.

Das explizite Verfahren erlaubte für die Berechnung der beschriebenen Testfälle eine CFL-Zahl von höchstens 0.15. Dies ist geringer, als mit dem gleichen Algorithmus für Festflügelberechnungen erreicht werden konnte. Dort lagen die CFL-Zahlen in der Regel in Größenordnungen von etwa 0.2 - 0.25. Die Ursache für diesen Unterschied ist unklar. Es liegt die Vermutung nahe, daß die Veränderlichkeit der Anströmgeschwindigkeit über dem Radius und damit vielleicht auch das unterschiedliche Kompressibilitätsniveau eine Rolle spielen. Die auf dieser Überlegung basierende Einführung einer radial veränderlichen CFL-Zahl brachte jedoch keinen Erfolg.

Ebensowenig konnten Abhängigkeiten davon festgestellt werden, ob die Eulerschen Grundgleichungen in kartesischen oder zylindrischen, bzw. in relativen oder absoluten Koordinaten formuliert wurden. Da jedoch der Übergang auf den impliziten Lösungsalgorithmus beabsichtigt war, wurden die diesbezüglichen Untersuchungen nicht weitergeführt.

Für das implizite Relaxationsverfahren bestehen solche grundsätzlichen Beschränkungen in der Iterationsschrittweite nicht. Im allgemeinen wird mit einem unendlich großen Zeitschritt gerechnet, um so die höchstmögliche Konvergenzrate zu erreichen. Treten in einzelnen Zellen Stabilitätsprobleme auf, so wird dort lokal die CFL-Zahl von dem Wert "unendlich" auf einen endlichen Wert  $CFL_{\text{krit}}$  reduziert. Über die Beziehung (3.62) liegt damit auch der lokale Zeitschritt  $\Delta\tau_{\text{krit}}$  fest.

Die Wahl von  $CFL_{\text{krit}}$  beeinflusst neben der Stabilität auch die benötigte Rechenzeit signifikant. Der eigentliche Beschleunigungsparameter ist aber der Unterrelaxationsfaktor  $\omega$ . Seine Optimierung kann jedoch nur in Abhängigkeit von  $CFL_{\text{krit}}$  erfolgen, da sich beide Parameter gegenseitig beeinflussen. Schließlich hat auch noch die Anzahl  $\gamma$  der durchgeführten Gauß-Seidel-Iterationen

eine Auswirkung auf die Rechenzeit.

Im folgenden sind die Ergebnisse dieses Optimierungsproblems in Form eines Rechenzeitvergleiches gegenüber dem expliziten Verfahren mit  $CFL = 0.15$  in Bild 5.4-16 aufgetragen. Der explizite Referenzfall ist strichpunktiert dargestellt. Als Bewertungskriterium wird die Zeit herangezogen, die benötigt wird, bis die Verläufe der Auftriebsbeiwerte ihr lokales Minimum erreicht haben. Dieser Zeitpunkt, der in den Diagrammen durch eine senkrechte Linie markiert ist, kennzeichnet, wie in Kap. 5.2.2 beschrieben, in etwa den Zeitpunkt, zu dem die Absenkung des Anfahrwirbels beginnt. Exemplarisch wird nur die Radialstation  $r/R = 0.8$  gezeigt.

Die Auftragung erfolgte über der tatsächlich benötigten Rechenzeit, um so dem unterschiedlichen Aufwand pro Zeitschritt, der bei dem impliziten Verfahren etwa viermal höher ist, Rechnung zu tragen. Die Vergleiche wurden auf einem Vektorrechner vom Typ Convex C-201 durchgeführt, auf dem die Rechenzeit des expliziten Verfahrens ca. 0.13 ms pro Iterationsschritt und Volumenelement betrug. Die Hundertprozentmarke entspricht etwa 45.000 sec.

Aus Effizienzgründen wurde für diese Vergleiche nur ein kleines Grundnetz ohne äußeren Erweiterungsbereich verwendet, so daß die Gesamtzellenzahl relativ gering gehalten werden konnte. Dadurch wird zwar, wie in Kap 5.4.3 noch näher ausgeführt wird, die Absenkung der Randwirbel verhindert, jedoch das schnelle Erreichen eines, wenn auch physikalisch nicht ganz korrekten, konvergenten Endzustandes ermöglicht. Dies zeigt sich in den gegenüber Bild 5.2-12 veränderten Verläufen der Auftriebsbeiwerte. Diese Vereinfachung tut dem grundsätzlichen Aussagewert der Untersuchungen über das Verhältnis der Rechenzeit keinen Abbruch und wird durch den geringeren Aufwand gerechtfertigt.

Die ersten impliziten Ergebnisse wurden mit dem Sensor nach Gl.(3.62) für  $CFL_{krit} = 10$ ,  $\omega = 0.6$  und  $\gamma = 2$  erzielt. Gegenüber dem expliziten Code ergaben sich jedoch nur geringe Rechenzeitvorteile (Bild 5.4-16a).

Im nächsten Schritt wurde  $\omega$  auf 0.8 erhöht, was jedoch zu einem instabilen Verhalten und letztlich zum Abbruch des Programmes führte. Erst eine zusätzliche Reduzierung von  $CFL_{krit}$  auf 1 lieferte wieder ein konvergentes Ergebnis. Damit war jedoch die Schranke so hoch gesetzt, daß der Sensor in weiten Teilen des Berechnungsgebietes ansprach und eine Reduzierung des lokalen Zeitschrittes und damit eine Senkung der Konvergenzrate bewirkte. Der Vorteil des höheren Unterrelaxationsfaktors war damit aufgehoben, und die Gesamtrechenzeit blieb praktisch unverändert.

In einem weiteren Lauf wurde ein zusätzlicher Gauß-Seidel-Iterationsschritt ( $\gamma = 3$ ) eingeführt. Dies wirkte sich jedoch nachteilig aus, da das Verfahren nun fast ebenso langsam konvergierte wie im expliziten Fall (Bild 5.4-16b).

Auch in weiteren Versuchen mit anderen Kombinationen von  $\omega$  und  $CFL_{krit}$  lag das Optimum bei  $\gamma=2$ .

Als nächste Maßnahme wurden die Sensorfunktion und die im Bedarfsfall eingeleitete Zeitschrittreduzierung entkoppelt. Die bisherigen Ergebnisse hatten nämlich gezeigt, daß ein zu spät reagierender Sensor (hohes  $CFL_{krit}$ ) zu einer zu geringen Erhöhung der Hauptdiagonalelemente führte, während ein kleiner Wert für  $CFL_{krit}$  von sehr vielen Zellen überschritten wurde, so daß die Sensorfunktion zu oft ansprach und damit die Konvergenzrate erheblich verringerte, obwohl keine unmittelbare Notwendigkeit vorlag.

Wie in Kap. 3.3.3 beschrieben, wurden daher neben der Sensorgröße  $CFL_{krit}$  die Reaktionsgröße  $CFL_{akt}$  eingeführt, mit  $CFL_{krit} > CFL_{akt}$ , daraus folgt  $\Delta r_{krit} > \Delta r_{akt}$ . Der Erfolg dieser Entkoppelung wurde bei der Nachrechnung des Falles mit  $CFL_{krit} = 10$ ,  $\omega = 0.8$  und  $\gamma = 2$  deutlich. Während in der ursprünglichen Version ( $CFL_{krit} = CFL_{akt}$ ) das Programm, wie erwähnt, aufgrund erheblicher Stabilitätsprobleme abbrach, stellte sich mit  $CFL_{akt} = 1$  nicht nur eine konvergente Lösung ein, durch diese Maßnahme ließ sich auch die benötigte Rechenzeit auf 40% verringern (Bild 5.4-16c).

Eine Erhöhung von  $CFL_{krit}$  in der Hoffnung, das Verfahren weiter zu beschleunigen, führte zu Instabilitäten im Bereich kleiner Radien, wohingegen das Verhalten an den äußeren Radialstationen unkritisch blieb.

Aus dieser Beobachtung resultierte die Überlegung, die Sensorfunktion so zu modifizieren, daß der Wert für  $CFL_{krit}$  nicht mehr im ganzen Berechnungsgebiet konstant ist, sondern eine Funktion der Radialkoordinate darstellt (Gl.(3.63)). Dabei war die Empfindlichkeit des Sensors für  $r \rightarrow 0$  besonders hoch ( $CFL_{krit_0}$ ) und nahm nach außen bis auf einen Grenzwert, der nicht weiter unterschritten wurde ( $CFL_{krit_m}$ ), ab.

Bild 5.4-16d zeigt die zeitliche Entwicklung des Auftriebsbeiwertes für einen impliziten Lauf mit folgender Parameterkombination:

$$CFL_{krit_m} = 20, \quad CFL_{akt} = CFL_{krit_0} = 1, \quad \omega = 0.85, \quad \gamma = 2$$

Im Vergleich zum expliziten Referenzlauf ließ sich eine Beschleunigung um den Faktor 3 erreichen. Eine Variation von  $CFL_{krit_m}$  brachte im untersuchten Bereich von 5 bis 100 keine Veränderung des Ergebnisses mehr. Das bedeutet, daß das Verfahren auch bei sehr hohen Werten für  $\omega$  noch äußerst stabil ist. Der weitere Anstieg des Beschleunigungsfaktors gegenüber Bild 5.4-16c ist somit fast ausschließlich auf die Erhöhung des Relaxationsfaktors  $\omega$  zurückzuführen. Die geeignete Wahl von  $CFL_{krit}(r)$  innerhalb sinnvoller Grenzen dient lediglich dazu, den mit einem steigenden  $\omega$  einhergehenden Verlust an numerischer Stabilität aufzufangen.

Ein weiteres Anheben des Relaxationsfaktors auf  $\omega = 0.9$  führte zunächst nicht zum Erfolg, da bereits in der Anfangsphase der Berechnung Instabilitäten auftraten. Diese ließen sich jedoch einfach dadurch beseitigen, daß der Relaxationsfaktor, von einem niederen Wert beginnend (z.B.  $\omega = 0.8$ ), während der ersten 100 Iterationsschritte sukzessive auf  $\omega = 0.9$  gesteigert wurde. Der Erfolg dieser zusätzlichen Maßnahme drückt sich in einer weiteren Geschwindigkeitssteigerung aus. In Bild 5.4-16e ist erkennbar, daß damit ein Beschleunigungsfaktor von knapp 4 gegenüber dem expliziten Referenzlauf erreicht werden konnte.

Wie bereits eingangs erwähnt, stand neben dem Rechenzeitgewinn vor allem die Robustheit des Verfahrens, d.h. die universelle Anwendbarkeit auf alle Strömungszustände ohne Neuanpassung der Parameter im Vordergrund. Für die aktuellen Produktionsläufe wurde daher nicht an die obere Grenze des Zulässigen gegangen, sondern eine Kombination entsprechend Bild 5.4-16d mit  $\omega = 0.8$  gewählt. Mit dieser Einstellung wurden alle in Kap. 5.2 beschriebenen Berechnungen durchgeführt.

#### Einbeziehung der Jacobimatrix des Kräftevektors auf der LHS der impliziten Gleichung

Aufgrund der spezifischen Besonderheiten der Hubschrauberrotorströmung besitzen die Eulerschen Bewegungsgleichungen einen inhomogenen Anteil in Form des Kräftevektors  $\bar{K}$  (Gl.(3.45)). Bei der Herleitung des impliziten Algorithmusses besteht die Möglichkeit, diesen analog zu den Flußvektoren  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  und  $\bar{G}$  m.H. einer Taylorentwicklung zu linearisieren und die dabei entstehende Jacobimatrix  $S^n$  auf der LHS der impliziten Gleichung (3.53) zu berücksichtigen.

Die schlechte Konditionierung von  $S$  (Anhang A.4) läßt jedoch vermuten, daß mit ihrer Einbeziehung die Stabilität des Gesamtsystems verschlechtert wird.

Zur Untersuchung dieser Frage wurden verschiedene Laufreihen mit und ohne Einbeziehung von  $S^n$  durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen. Zur Herausstellung des Stabilitätseffektes wurden die Berechnungen im leeren Netz durchgeführt, so daß keine überlagernde Veränderung der ungestörten Anströmung erfolgte. Dadurch konnte außerdem der Gl.(3.67) zugrunde liegende Grenzübergang zu verschwindenden Störgeschwindigkeiten simuliert werden.

Die Ergebnisse sind in Bild 5.4-17 gegenübergestellt, wobei in jedem Diagramm der Unterrelaxationsfaktor  $\omega$  als Parameter fungierte und beginnend mit  $\omega = 0.3$  in Schritten von 0.2 gesteigert wurde.

Von links nach rechts wurde  $CFL_{krit}$  ausgehend von  $CFL_{krit} = 1$  um jeweils eine

Größenordnung bis zum Wert von  $CFL_{krit} = 100$  erhöht. Als Sensor diente noch die Ausführung nach Gl.(3.62) mit identischen Sensor- und Reaktionsgrößen.

Die eingetragenen Kurven bezeichnen den im jeweiligen Iterationsschritt aufgetretenen maximalen lokalen Fehler nach Gl.(5.13) (untere Kurve) sowie die Abweichung von der ungestörten Anströmung nach Gl.(5.14) (obere Kurve).

Im ersten Bildpaar ( $CFL_{krit} = 1$ ) erkennt man praktisch keinen Unterschied zwischen dem Lauf mit und ohne Einbeziehung von  $S^n$ . Dies liegt daran, daß der Anteil  $(I/\Delta t)_{krit}$ , der im Bedarfsfall zu den Hauptdiagonalelementen hinzuaddiert wird, größer ist, als der schädliche Einfluß von  $S^n$  auf die Nebendiagonalelemente, so daß dieser gar nicht zum Tragen kommt. Außerdem ist der Sensor in diesem Fall so empfindlich, daß ein Großteil der Zellen auch ohne die Einbeziehung von  $S^n$  als vermeintlich kritisch eingestuft wird. Dies verbessert zwar die Konditionierung der Koeffizientenmatrix, geht aber zulasten der Konvergenzrate, wie bereits im vorigen Abschnitt gefunden wurde.

Anders sieht es aus, wenn der kritische Zeitschritt vergrößert wird. Bei Einbeziehung von  $S^n$  führt bereits ein  $\omega$  von 0.5 zur Divergenz des Verfahrens, da die eingeleiteten Stabilisierungsmaßnahmen hier bereits nicht mehr ausreichen, wohingegen im anderen Fall dieser Effekt erst bei  $\omega = 0.9$  auftritt.

Da, wie gezeigt, ein größerer Unterrelaxationsfaktor zu einem beschleunigten Erreichen des konvergenten Zustandes und damit zu einer Verminderung der Rechenzeit führt, ist die Einbeziehung von  $S^n$  von großem Nachteil. Dem stehen keinerlei Vorteile gegenüber, wie sich auch bei weiteren Testrechnungen mit einem 3D-Rotor zeigte. Es wurde daher dazu übergegangen, auf die Einbeziehung von  $S^n$  zu verzichten und die implizite Gleichung in der Form (3.68) zu verwenden.

### Flußlimiter

Bei Verfahren höherer Ordnung ist es notwendig, zur Vermeidung numerischer Oszillationen, die durch eine Differenzenbildung über Diskontinuitäten (z.B. Verdichtungsstöße) hinweg verursacht werden, die Verfahrensgenauigkeit lokal herabzusetzen, um so ein monotones Stoßprofil zu erhalten.

Bestandteil solcher Limiter ist eine Sensorfunktion, die starke Strömungsgradienten aufspüren soll. Sie steuert dabei abhängig von der Intensität der Veränderungen in der Strömung das Maß der Reduzierung der Verfahrensordnung. Über einen Parameter kann die Empfindlichkeit und damit der Zeitpunkt und das Ausmaß dieser Reduzierung gesteuert werden. Einzelheiten zu den verwen-

deten Sensorfunktionen sind Kapitel 3.2.4 zu entnehmen.

Sowohl der Druckverlauf wie auch die wesentlichen Strukturen der Nachlaufgeometrie (Einschnürung, Absenkung) wurden durch eine Variation der Empfindlichkeit der Sensorfunktion innerhalb der untersuchten Bandbreite nicht beeinflusst. Wird die Sensibilität jedoch zu stark vermindert, so tritt bei transsonischer Anströmung erwartungsgemäß eine Verschlechterung des  $c_p$ -Verlaufes ein. Die Zirkulationsdichteverteilung blieb in allen Fällen identisch.

Eine Abhängigkeit von der Empfindlichkeit der Sensorfunktion konnte jedoch beim Totaldruckverlust im Nachlauf festgestellt werden. Zwar war in allen Fällen der Verlauf der Isobaren identisch, d.h. es wurde immer die gleiche Randwirbellage angezeigt, Differenzen traten jedoch in der Höhe des Totaldruckverlustes auf. Mit fallender Sensibilität der Sensorfunktion nahm der Totaldruckverlust im Wirbelinneren ab und war am geringsten, wenn keine Limitierung stattfand. Das höhere Dissipationsniveau der Schemata niedriger Ordnung (vgl. Kap. 3.2.3) wirkt sich also im gesamten Nachlauf aus.

#### 5.4.3 Einfluß des Fernfeldrandes

Die ersten Ergebnisse mit dem beschriebenen Wake-Capturing-Verfahren wurden für den zweiblättrigen Modellrotor nach Caradonna & Tung auf einem Netz erzeugt, wie es in Bild 4.3-1 dargestellt ist [41,44].

Es besitzt eine O-O-Topologie und eine zylinderförmige Außenkontur. Die Abmessungen betragen 24 Blattiefen im Durchmesser und 8 Blattiefen oberhalb sowie ebensoviele unterhalb der Rotorkreisscheibe. Gemessen an den Netzgrößen zur Berechnung der Umströmung um einen Flügel, oder auch verglichen mit den Netzen anderer Autoren zur Berechnung der Hubschraub rotorströmung mit einem Wake-Capturing-Verfahren besitzt dieses Netz im Prinzip eine recht große Ausdehnung.

In Bild 5.4-18 ist exemplarisch die Druckverteilung für den Testfall  $Ma = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  gezeigt. Sie weist eine passable Übereinstimmung mit den Meßwerten auf. Abweichungen zeigen sich jeweils im Nasenbereich, wo die unzureichende Wiedergabe des Druckabfalles auf die zu grobe Diskretisierung zurückzuführen ist. Unbefriedigend ist weiterhin die errechnete Druckverteilung an der Blattspitze. Das Ergebnis ist durchaus vergleichbar mit den in Bild 5.3-1 gezeigten Resultaten.

Ein Blick auf die Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene senkrecht zur Rotorkreisscheibe offenbart jedoch einen erheblichen Nachteil des verwendeten Netzes (Bild 5.4-19). Die sich absenkenden Wirbel erreichen schon nach kurzer Zeit den unteren Netzboden. Da dieser nicht durchströmt werden kann, kommt

Größenordnung bis zum Wert von  $CFL_{krit} = 100$  erhöht. Als Sensor diente noch die Ausführung nach Gl.(3.62) mit identischen Sensor- und Reaktionsgrößen.

Die eingetragenen Kurven bezeichnen den im jeweiligen Iterationsschritt aufgetretenen maximalen lokalen Fehler nach Gl.(5.13) (untere Kurve) sowie die Abweichung von der ungestörten Anströmung nach Gl.(5.14) (obere Kurve).

Im ersten Bildpaar ( $CFL_{krit} = 1$ ) erkennt man praktisch keinen Unterschied zwischen dem Lauf mit und ohne Einbeziehung von  $S^n$ . Dies liegt daran, daß der Anteil  $(I/\Delta t)_{krit}$ , der im Bedarfsfall zu den Hauptdiagonalelementen hinzuaddiert wird, größer ist, als der schädliche Einfluß von  $S^n$  auf die Nebendiagonalelemente, so daß dieser gar nicht zum Tragen kommt. Außerdem ist der Sensor in diesem Fall so empfindlich, daß ein Großteil der Zellen auch ohne die Einbeziehung von  $S^n$  als vermeintlich kritisch eingestuft wird. Dies verbessert zwar die Konditionierung der Koeffizientenmatrix, geht aber zulasten der Konvergenzrate, wie bereits im vorigen Abschnitt gefunden wurde.

Anders sieht es aus, wenn der kritische Zeitschritt vergrößert wird. Bei Einbeziehung von  $S^n$  führt bereits ein  $\omega$  von 0.5 zur Divergenz des Verfahrens, da die eingeleiteten Stabilisierungsmaßnahmen hier bereits nicht mehr ausreichen, wohingegen im anderen Fall dieser Effekt erst bei  $\omega = 0.9$  auftritt.

Da, wie gezeigt, ein größerer Unterrelaxationsfaktor zu einem beschleunigten Erreichen des konvergenten Zustandes und damit zu einer Verminderung der Rechenzeit führt, ist die Einbeziehung von  $S^n$  von großem Nachteil. Dem stehen keinerlei Vorteile gegenüber, wie sich auch bei weiteren Testrechnungen mit einem 3D-Rotor zeigte. Es wurde daher dazu übergegangen, auf die Einbeziehung von  $S^n$  zu verzichten und die implizite Gleichung in der Form (3.68) zu verwenden.

### Flußlimiter

Bei Verfahren höherer Ordnung ist es notwendig, zur Vermeidung numerischer Oszillationen, die durch eine Differenzenbildung über Diskontinuitäten (z.B. Verdichtungsstöße) hinweg verursacht werden, die Verfahrensgenauigkeit lokal herabzusetzen, um so ein monotones Stoßprofil zu erhalten.

Bestandteil solcher Limiter ist eine Sensorfunktion, die starke Strömungsgradienten aufspüren soll. Sie steuert dabei abhängig von der Intensität der Veränderungen in der Strömung das Maß der Reduzierung der Verfahrensordnung. Über einen Parameter kann die Empfindlichkeit und damit der Zeitpunkt und das Ausmaß dieser Reduzierung gesteuert werden. Einzelheiten zu den verwen-

deten Sensorfunktionen sind Kapitel 3.2.4 zu entnehmen.

Sowohl der Druckverlauf wie auch die wesentlichen Strukturen der Nachlaufgeometrie (Einschnürung, Absenkung) wurden durch eine Variation der Empfindlichkeit der Sensorfunktion innerhalb der untersuchten Bandbreite nicht beeinflusst. Wird die Sensibilität jedoch zu stark vermindert, so tritt bei transsonischer Anströmung erwartungsgemäß eine Verschlechterung des  $c_p$ -Verlaufes ein. Die Zirkulationsdichteverteilung blieb in allen Fällen identisch.

Eine Abhängigkeit von der Empfindlichkeit der Sensorfunktion konnte jedoch beim Totaldruckverlust im Nachlauf festgestellt werden. Zwar war in allen Fällen der Verlauf der Isobaren identisch, d.h. es wurde immer die gleiche Randwirbellage angezeigt, Differenzen traten jedoch in der Höhe des Totaldruckverlustes auf. Mit fallender Sensibilität der Sensorfunktion nahm der Totaldruckverlust im Wirbelinneren ab und war am geringsten, wenn keine Limitierung stattfand. Das höhere Dissipationsniveau der Schemata niedrigerer Ordnung (vgl. Kap. 3.2.3) wirkt sich also im gesamten Nachlauf aus.

#### 5.4.3 Einfluß des Fernfeldrandes

Die ersten Ergebnisse mit dem beschriebenen Wake-Capturing-Verfahren wurden für den zweiblättrigen Modellrotor nach Caradonna & Tung auf einem Netz erzeugt, wie es in Bild 4.3-1 dargestellt ist [41,44].

Es besitzt eine O-O-Topologie und eine zylinderförmige Außenkontur. Die Abmessungen betragen 24 Blattiefen im Durchmesser und 8 Blattiefen oberhalb sowie ebensoviele unterhalb der Rotorkreisscheibe. Gemessen an den Netzgrößen zur Berechnung der Umströmung um einen Flügel, oder auch verglichen mit den Netzen anderer Autoren zur Berechnung der Hubschraub rotorströmung mit einem Wake-Capturing-Verfahren besitzt dieses Netz im Prinzip eine recht große Ausdehnung.

In Bild 5.4-18 ist exemplarisch die Druckverteilung für den Testfall  $Ma = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  gezeigt. Sie weist eine passable Übereinstimmung mit den Meßwerten auf. Abweichungen zeigen sich jeweils im Nasenbereich, wo die unzureichende Wiedergabe des Druckabfalles auf die zu grobe Diskretisierung zurückzuführen ist. Unbefriedigend ist weiterhin die errechnete Druckverteilung an der Blattspitze. Das Ergebnis ist durchaus vergleichbar mit den in Bild 5.3-1 gezeigten Resultaten.

Ein Blick auf die Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene senkrecht zur Rotorkreisscheibe offenbart jedoch einen erheblichen Nachteil des verwendeten Netzes (Bild 5.4-19). Die sich absenkenden Wirbel erreichen schon nach kurzer Zeit den unteren Netzboden. Da dieser nicht durchströmt werden kann, kommt

es zu einem Aufstau. Außerdem erkennt man, daß auch der seitliche Rand zu einer Beeinträchtigung der Wirbelbewegung beiträgt.

In Bild 5.4-20 ist die zeitliche Entwicklung des Auftriebsbeiwertes aufgetragen. Nach einem sehr rasch erreichten lokalen Minimum wächst der Auftrieb infolge der beginnenden Absenkung wieder an. Anschließend sinkt er jedoch kontinuierlich ab, was darauf hindeutet, daß sich nun vermehrt Rezirkulationseffekte einstellen.

Die beschriebenen Effekte lassen sich auch sehr gut an der zeitlichen Entwicklung des Totaldruckverlustes im Nachlauf ablesen (Bild 5.4-21).

Bild 5.4-21a zeigt die beginnende Absenkung des Anfahrwirbels, wobei man jedoch bereits die blockierende Wirkung des Netzrandes erkennen kann. Im nächsten Bild (Bild 5.4-21b) hat der Anfahrwirbel seine tiefstmögliche Lage erreicht und der Totaldruckverlust im Nachlauf beginnt anzusteigen und sich auszuweiten. Bis zum Ende der Iteration verstärkt sich dieser Effekt erheblich und hat auch den Bereich oberhalb der Rotorkreisscheibe erfaßt (Bild 5.4-21c).

Bild 5.4-22 zeigt die zugehörige Zirkulationsdichteverteilung, die ihrerseits die Unzulänglichkeit des verwendeten Netzes unterstreicht.

In Anbetracht aller durch das zu kleine Netz hervorgerufenen unerwünschten Effekte infolge einer starken Blockierung des Nachlaufes ist es umso erstaunlicher, daß die errechnete  $c_p$ -Verteilung ein einigermaßen brauchbares Niveau besitzt. In Bild 5.4-18 war jedoch bewußt die Situation zu dem Zeitpunkt dargestellt worden, an dem die Auftriebsbeiwerte nach Beginn der Absenkung ihr lokales Maximum erreicht hatten. Vergleicht man dagegen den Druckverlauf am Ende der Iteration, korrespondierend zu Bild 5.4-21c, so erkennt man ein Abnehmen vor allem der Unterdrücke auf der Oberseite (Bild 5.4-23), wie es auch durch die Verläufe der integralen Werte in Bild 5.4-20 angezeigt wird.

Es ist auffällig, daß die Verschlechterung in den Druckverläufen erst nach und nach infolge der auftretenden Rezirkulation auftrat, und nicht bereits durch die falsch berechnete Nachlaufgeometrie verursacht wurde.

Dies zeigt, daß die für die Ermittlung der lokalen Kräfte und Momente notwendige Druckverteilung nur in einem sehr geringen Umfang von den älteren Wirbelanteilen abhängt, sondern im wesentlichen vom Geschehen im unmittelbaren Blattnahbereich geprägt wird. Dies bedeutet, daß das induzierte Strömungsfeld in erster Linie von den Nachlaufwirbeln des vorlaufenden Blattes bestimmt wird.

Nichtsdestoweniger haben die in diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse deutlich die Notwendigkeit der Verwendung wesentlich größerer Netze gezeigt, um eine Beeinträchtigung der Wirbelausbreitung zu vermeiden.

#### 5.4.4 Blockstrukturierte Netze

In Kapitel 4.4 war die Generierung blockstrukturierter Netze beschrieben worden. Die Untersuchung ihrer Eignung für die Berechnung der Hubschrauberrotorströmung erfolgte anhand des transsonischen Testfalles mit  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$ . Der Diskretisierungsgrad entsprach dabei in der Regel dem der groben Netze aus Kap. 5.4.1.

Im ersten Versuch wurden die in Bild 4.3-9 und Bild 4.3-10 dargestellten Netze verwendet.

Die Ergebnisse erfüllten die Erwartungen jedoch ganz und gar nicht. Wie man in Bild 5.4-24 für das zylinderförmige Netz erkennt, senkte sich der Randwirbel überhaupt nicht ab, der Übergang zwischen den beiden Netzblöcken scheint wie eine nahezu undurchlässige Wand zu wirken. Ein analoges Bild vermittelt die Zirkulationsdichte (Bild 5.4-25).

Das gleiche Phänomen ergab sich auch bei Verwendung des elliptischen Grundnetzes.

Dies war umso erstaunlicher, als in beiden Fällen die Durchströmfläche aus dem oberen in den unteren Netzblock mit dem zweifachen Rotordurchmesser geometrisch ausreichend groß bemessen worden war, so daß eine Behinderung der Wirbelausbreitung nicht hätte auftreten dürfen, wie man in Bild 5.4-24 deutlich sieht. Außerdem war sichergestellt, daß die Randbedingung an der Blockgrenze ein ungestörtes Durchströmen ermöglichte.

Die Ursache fand sich schließlich in der Größe des angesetzten Blockes im Rechenraum. Entsprechend Bild 3.5-1 beträgt die Anzahl der Volumina in  $\xi$ -Richtung  $i_{B_1} - i_{B_2}$ , in  $\eta$ -Richtung  $j_{B_{max}} - 1$  und in  $\zeta$ -Richtung  $k_{B_{max}} - k_{max}$ . Die schraffierten Flächen kennzeichnen die Ebenen, in denen als Randbedingung die freie Anströmung definiert wurde.

In den verwendeten Netzen wurde die Zellenzahl in  $\xi$ - und in  $\eta$ -Richtung zu klein gewählt. Das bedeutet, daß nicht allein die geometrische, sondern vor allem auch die numerische Ausdehnung des angesetzten Blockes von großer Wichtigkeit ist.

In den beschriebenen Fällen war der numerische Abstand zwischen zwei Grenzen, an denen die ungestörte Strömung als Randbedingung vorgeschrieben wurde, zu gering, so daß nahezu keine Strömungsgradienten errechnet wurden. Anders als z.B. die Vorgabe einer festen, parallelen Wand bei einer Kanalströmung wirkte die freie Strömung in diesem Fall blockierend.

Mit der Generierung der in Bild 4.3-11 und 4.3-12 dargestellten Netzes konnte dieses Problem beseitigt werden. Die Ergebnisse zeigen nun eine weitestgehende

Übereinstimmung zu den Resultaten auf den global erweiterten Netzen (vgl. Kap. 5.4.1), wobei die Blockgrenze nun ungehindert durchströmt wird und sich die Absenkung des Randwirbels in den bekannten Größenordnungen bewegt (Bild 5.4-26). Die Einschnürung wird allerdings, auch im Vergleich zu den groben Netze, etwas zu gering wiedergegeben. Die Druckverteilung entlang der Blattoberfläche entspricht den Ergebnissen auf den global erweiterten Netzen und ist der in Bild 5.4-1 gezeigten vergleichbar.

Aufgrund der notwendigen Erweiterung des Rechenraumes für den unteren Netzblock lag die Rechenzeiterparnis nicht mehr ganz so hoch, wie bei den zuerst verwendeten Blocknetzen, betrug aber immerhin noch fast 30% gegenüber einem vergleichbaren global erweiterten Netz.

Bei Betrachtung des Totaldruckverlustes im Nachlauf stellt man allerdings doch zwei signifikante Unterschiede zu den in Kap 5.4.1 beschriebenen Ergebnissen fest. Zum einen ist die angezeigte Einschnürung wesentlich geringer und das Gesamtniveau des Totaldruckverlustes deutlich höher als in den vergleichbaren Berechnungen mit global erweiterten Netzen (Bild 5.4-27). Außerdem nahm der Totaldruckverlust im Nachlauf mit fortschreitender Iterationszahl kontinuierlich zu.

Die Ursache liegt vor allem in der Nähe des Fernfeldrandes im Bereich seitlich und oberhalb der Rotorkreisscheibe. Der fehlende seitliche Abstand führt dazu, daß die aufwärts gerichtete Strömung in diesem Bereich wie in einem Kanal senkrecht nach oben geführt wird, was in Bild 5.4-28 gut zu erkennen ist. Daher fehlen in diesem Bereich die notwendigen einwärts gerichteten Geschwindigkeitskomponenten. Es ist aus diesem Grunde empfehlenswert, den unteren Netzblock mindestens auf Höhe der Rotorkreisebene anzusetzen. Der Bereich oberhalb des Rotors bildet aufgrund der Undurchlässigkeit der Fernfeldgrenzen sozusagen das Reservoir für die durch die Rotorkreisscheibe nach unten strömenden Luftmassen. Je kleiner der zu Verfügung stehende Raum ist, desto höhere Verluste entstehen mit der Zeit im gesamten Rechenraum und sind demzufolge auch im Nachlauf spürbar. Im allgemeinen ist dieser Effekt innerhalb des betrachtungswürdigen Zeitraumes jedoch unkritisch, so daß außer einem Anwachsen des Totaldruckverlustes keine bedeutenden Auswirkungen entstehen. Nichtsdestoweniger sollte aber auch für diesen Fall eine Modifizierung der Fernfeldrandbedingungen, z.B. in dem von Hertel [49] vorgeschlagenen Sinne, untersucht werden, um ein Einströmen in den Rechenraum zu ermöglichen.

Trotz dieser noch bestehenden, geringen Probleme bieten die Blocknetze aufgrund des geringeren Rechenaufwandes eine brauchbare Alternative zu den global erweiterten Netzen.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ausgehend von einem bestehenden Algorithmus zur Lösung der instationären Eulerschen Bewegungsgleichungen für Festflügelkonfigurationen ein Verfahren zur Berechnung des Strömungsfeldes eines Hubschrauberrotors entwickelt.

Ein besonderes Merkmal des Verfahrens ist die Betrachtung des Blattnachlaufes als Teil der Lösung, so daß die für die Hubschrauber-aerodynamik typische Blatt-Nachlauf-Interferenz implizit, d.h. ohne Zuhilfenahme eines externen Wirbelmodells wiedergegeben wird. Eine solche Vorgehensweise wird als Wake-Capturing-Methode bezeichnet.

Der dem Verfahren zugrundeliegende Algorithmus gehört zu der Klasse der sog. Upwind-Schemata, bei denen sich die Differenzenbildung an dem aktuellen, lokalen Strömungszustand, d.h. an der charakteristischen Störungsausbreitungsrichtung orientiert. Dies bietet den Vorteil, daß die für die numerische Stabilität erforderliche künstliche Dissipation in einer dem tatsächlichen physikalischen Strömungszustand angepaßten, natürlichen Weise über den Abbruchfehler der Differenzengleichung implizit enthalten ist und nicht von außen eingebracht werden muß. Dies macht das Verfahren sehr robust.

Ausgangspunkt des Algorithmus ist eine Finite-Volumen-Diskretisierung der integralen Form der Euler-Gleichungen unter Verwendung der konservativen Strömungsvariablen. An der gemeinsamen Zellfläche zweier benachbarter Volumina wird basierend auf der Theorie der Charakteristikenmethode ein eindimensionales Riemann-Problem approximativ gelöst. Die Anfangszustände links- und rechtsseits der betrachteten Fläche werden durch eine an den lokalen Eigenwerten orientierte, charakteristische Extrapolation höherer Ordnung aus den Werten der Strömungsgrößen in den benachbarten Volumina gebildet. Durch Verwendung der instationären Formulierung auch für ausschließlich stationäre Probleme behalten die Euler-Gleichungen in allen Geschwindigkeitsbereichen ihren hyperbolischen Charakter. Die zeitliche Dimension stellt dabei die Iterationsrichtung dar. Im konvergenten Endzustand geht die zeitliche Veränderung der Strömungsvariablen gegen Null.

Zur Beschleunigung der Berechnung wurde der Lösungsalgorithmus von einer zunächst expliziten auf eine implizite Formulierung erweitert. Die Invertierung der Koeffizientenmatrix der linken Gleichungsseite erfolgt m.H. eines Punkt-Gauß-Seidel-Relaxationsalgorithmus.

Im Schweb-, bzw. Steig- oder Sinkflug eines Hubschraubers läßt sich der Strömungszustand vor jedem der vorhandenen Rotorblätter als zeitlich konstant betrachten, wenn man von einem blattfesten Koordinatensystem ausgeht. Dies

wurde in der vorliegenden Arbeit vollzogen, wobei sowohl ein zylindrisches als auch ein kartesisches Koordinatensystem verwendet wurde. Letzteres bietet geringfügige Rechenzeitvorteile. Anschließend wurden die Bewegungsgleichungen in ein rechennetzangepaßtes, krummliniges Koordinatensystem überführt.

Durch die Transformation der Gleichungen von einem Inertial- auf ein nicht gleichförmig mitbewegtes System sind zusätzliche Beschleunigungen, die aus der Zentrifugal- und aus der Corioliskraft resultieren, auf der rechten Seite der Euler-Gleichungen zu berücksichtigen.

Im Laufe der Arbeit stellte sich heraus, daß der Anteil der Rotationsgeschwindigkeit aus den Lösungsvariablen und aus den Flußtermen der Impuls- und der Energiegleichung eliminiert werden mußte, da sonst die fundamentale Anforderung an das numerische Verfahren, die unveränderte Reproduktion der ungestörten freien Anströmung, nicht erfüllt werden konnte. Die Euler-Gleichungen wurden dazu von den relativen auf absolute Größen, die denen des Inertialsystems entsprechen, umgeschrieben.

Für die Zukunft bietet sich im Hinblick auf die Berechnung des instationären Vorwärtsfluges an, auch den stationären Flugzustand in einem Inertialsystem zu behandeln. Die Drehung des Rotors kann dann über die Netzbewegung in Form zeitabhängiger Terme in den Transformationsbeziehungen vom kartesischen oder zylindrischen auf das krummlinige System Berücksichtigung finden.

Die Anwendung der Wake-Capturing-Methode erfordert die Erzeugung in sich geschlossener Rechennetze, da der gesamte Nachlauf auf dem Weg zum nachfolgenden Blatt erfaßt werden muß. Dadurch wird der zu diskretisierende Raum entsprechend groß. In der vorliegenden Arbeit wurden Netze mit O-O-Topologie verwendet, die den Vorteil bieten, in dem relevanten Blattnahbereich eine sehr gute Auflösung bei vergleichsweise geringer Gesamtpunktzahl und damit geringem Rechenaufwand zu ermöglichen. Nachteilig wirkt sich jedoch aus, daß sich die Diskretisierung auch entlang des Wirbelpfades vergrößert und der Nachlauf dadurch einer erhöhten Diffusion unterliegt.

Der Rechenraum wurde bis zur Rotordrehachse hin ausgedehnt, wodurch auch die Betrachtung des inneren Randwirbels sowie der gesamten Wirbelschicht ermöglicht wurde.

Die Berechnungsergebnisse des entwickelten Wake-Capturing-Verfahrens wurden an einer Reihe von sub- und transsonischen Testfällen überprüft und mit den Messungen von Caradonna & Tung für einen zweiblättrigen Modellrotor verglichen. Die errechneten Druckverteilungen entlang der Blattoberfläche zeigten dabei eine sehr gute Übereinstimmung mit den Meßwerten, solange Reibungseinflüsse vernachlässigbar klein waren. Schwächen zeigte das vorliegende Verfahren in

der Wiedergabe des Blattspitzenverlustes, der bei allen betrachteten Testfällen zu groß ausfiel. Variationen in der geometrischen Ausgestaltung des Blattes sowie in der lokalen Diskretisierung brachten nicht die gewünschten Verbesserungen. Die Frage nach der Ursache dieser Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment konnte in der vorliegenden Arbeit nicht abschließend beantwortet werden. Anzeichen sprechen jedoch dafür, daß Diffusionseffekte beim Wirbeltransport dazu führen, daß der auf das Blatt auftreffende Randwirbel des vorlaufenden Blattes ein Geschwindigkeitsfeld induziert, das gewisse Abweichungen von der Realität aufweist.

Der Vergleich mit anderen bereits existierenden Verfahren zur Berechnung der stationären Rotorblattumströmung zeigte deutliche Genauigkeitsvorteile in der Druckverteilung gegenüber den Verfahren, die mit einem allgemeingültigen Nachlaufmodell gekoppelt sind. Gegenüber den bestehenden Wake-Capturing-Verfahren ergaben sich z.T. bessere, z.T. gleichwertige Ergebnisse. Stärke und Lage des Verdichtungsstoßes wurde mit den für reibungslose Verfahren üblichen Abweichungen wiedergegeben, die bei den Navier-Stokes-Methoden im allgemeinen nicht auftraten. Die qualitativ besten Resultate wurden von Srinivasan et al. [61] erzielt, deren Rechenetz jedoch mehr als die fünffache Zellenzahl der in der vorliegenden Arbeit verwendeten besaß, und deren Berechnung daher einen erheblich höheren Rechenaufwand erforderte.

Ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit wurde auf die Darstellung des von dem Euler-Verfahren berechneten Nachlaufes gelegt, um so zum Verständnis der Vorgänge im Strömungsfeld eines Hubschrauberrotors und deren Wiedergabe durch ein diskretes numerisches Verfahren beizutragen.

Es zeigte sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung der theoretisch bestimmten Einschnürung der äußeren Randwirbeltrajektorie mit den empirischen Vergleichsdaten über eine Entfernung von mehr als 15 Blattiefen unterhalb der Rotorkreisscheibe.

Andererseits erwies sich aber auch die durch eine teilweise recht grobe Raumdiskretisierung verursachte Dissipation als sehr hoch, was zu einer starken Aufweitung der anfänglich konzentrierten Wirbel und zu einem raschen Abbau der Extrema in den Strömungsgrößen, wie z.B. Zirkulationsdichte und Totaldruckverlust, im Wirbelkern führte. Umso erstaunlicher ist jedoch die Tatsache, daß die Einschnürung trotz dieser starken Diffusionseffekte richtig wiedergegeben wurde und erst bei Verwendung sehr grober Netze und dem damit verbundenen weiteren Anstieg der Dissipation eine merkliche Beeinträchtigung erfuhr. Was den Erhalt der Drehung im gesamten Nachlauf angeht, so konnte zum einen festgestellt werden, daß die vom Blatt an das Feld abgegebene Zirkulation über der gesamten Blattlänge betrachtet Null ergibt, da sich rechts- und linksdre-

hende Zirkulation aufheben. Der äußere Randwirbel allein besitzt dabei eine Stärke, die dem Maximum der blattgebundenen Zirkulation, das bei einem radial veränderlich angeströmten Rotorblatt in der Nähe der Blattspitze liegt, entspricht. Andererseits zeigte jedoch die Integration der induzierten Geschwindigkeit entlang einer geschlossenen Kurve einen Zuwachs an Gesamtzirkulation im Nachlauf mit zunehmender Ausdehnung des Integrationsgebietes unterhalb der Rotorkreisscheibe. Auch für diesen Effekt sind vermutlich Diffusionserscheinungen verantwortlich.

Bei allen Untersuchungen bezüglich der Struktur des Nachlaufes muß dem Umstand Rechnung getragen werden, daß die O-Netz-Topologie die Interpolation der in den Volumina errechneten Strömungsgrößen auf die zur Darstellung verwendeten Referenzebenen erforderlich macht. Auf diesen wiederum muß zur Auftragung von Isolinen ein reguläres Aufpunktraster verwendet werden. Durch diese Maßnahmen werden die tatsächlichen Ergebnisse verfälscht, und insbesondere die Extrema werden nur zufällig oder in unzureichender Stärke erfaßt. Eine quantitative Analyse ist daher nur bedingt möglich. Hier sollte in der Zukunft unbedingt das gesamte Post-Processing verbessert werden, um zu einer objektiveren Darstellung der Ergebnisse zu gelangen.

Neben der Auftragung der Nachlaufstruktur in verschiedenen Referenzebenen vor und hinter dem betrachteten Rotorblatt für den stationären Endzustand wurde auch deren zeitliche Entwicklung betrachtet und qualitativ mit dem realen Anfahrprozeß eines startenden Rotors verglichen. Auch hier zeigte sich eine sehr gute prinzipielle Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis, die darauf hindeutet, daß die grundsätzlichen Mechanismen zur Generierung des Nachlaufes und zur gegenseitigen Interferenz zwischen jungen und alten Nachlaufstrukturen von einem Euler-Verfahren sehr gut wiedergegeben werden können. Insbesondere diene die nähere Untersuchung des numerischen Anfahrvorganges auch dazu, die Ergebnisse für den quasi-stationären Endzustand besser zu interpretieren.

Es wurde aber auch deutlich, daß der Iterationsprozeß eine sehr lange Zeit in Anspruch nimmt, da beim Ausgehen von der freien Anströmung als Anfangsbedingung dieser Anfahrprozeß von einem Wake-Capturing-Verfahren grundsätzlich mitsimuliert wird, und demzufolge eine beträchtliche Zeit vergeht, bis die Anströmbedingungen vor dem betrachteten Blatt einigermaßen konstant sind. Diese Problematik schlägt besonders stark zu Buche, wenn sehr feine Rechennetze verwendet werden, die ihrerseits ohnehin eine hohe Rechenzeit erfordern.

In Einzelfällen stellt der Übergang auf grobere Netze eine Alternative dar, da je nach Anwendungsfall die Einbußen in der Qualität der Lösung vertretbar sind. Insgesamt aber sollte nach Möglichkeiten gesucht werden, den numerischen Anfahrprozeß zu umgehen oder zu verkürzen. Ansätze in dieser Richtung bieten

z.B. die Grid-Sequence-Methode, die Implementierung von Fernfeldrändern, die durchströmt werden können, oder die Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen, die aus der stationären Lösung eines linearen Verfahrens ermittelt wurden (vgl. z.B. [49]).

Um die Ausbreitung des Nachlaufes nicht zu behindern, sind die Ausmaße des diskretisierten physikalischen Raumes ausreichend groß zu wählen. Dies betrifft insbesondere den Bereich der Wirbelabsenkung unterhalb der Rotorkreis-ebene, aber auch den seitlichen Abstand zum Fernfeldrand. Bei Verwendung eines O-Netzes ist im Prinzip nur eine Ausdehnung des physikalischen Raumes in allen Richtungen möglich. Dieser kann aber in seinem Außenbereich grob diskretisiert werden, da eine Wirbelbeeinflussung durch erhöhte Dissipation in diesen Regionen keinen Einfluß auf das Ergebnis am Blatt hat.

Alternativ ist auch die Verwendung blockstrukturierter Netze sinnvoll, bei denen ein angesetzter Netzblock mit H-Topologie den Raum unterhalb des Blattes erweitert. Diese Variante ermöglicht eine etwas geringere Netzpunktzahl und reduziert damit den Aufwand, aber auch in diesem Fall darf der den Rotor umschließende Grundkörper nicht zu klein gewählt werden.

Als zukünftige Aufgaben hinsichtlich der Weiterentwicklung des vorliegenden Verfahrens sind Verbesserungen in der Wiedergabe des Druckverlaufes an der Blattspitze sowie im Rechenzeitbedarf wünschenswert. Auch die Methoden zur Netzgenerierung und vor allem das Post-Processing sind verbesserungswürdig. Weitere Aufmerksamkeit sollte der Untersuchung der Nachlaufstruktur gewidmet werden. Hierzu gehört auch eine noch tiefer gehende Auswertung bereits vorhandener Ergebnisse.

Auch der Einfluß der Netzstruktur und der Netztopologie insbesondere auf den Wirbeltransport sollte intensiver untersucht werden. Es ist nicht auszuschließen, daß z.B. die ungenaue Wiedergabe des Druckverlaufes an der Oberseite im Blattspitzenbereiches auf eine zu hohe Diffusion, die durch die O-Netz Topologie verursacht wird, zurückzuführen ist.

Alsdann ist die Erweiterung des Verfahrens auf den instationären Vorwärtsflug und eine weitere Verifikation an Testfällen mit komplexerer Rotorgeometrie in Bezug auf Blattanzahl, Verwindung, Profilierung, Blattspitzengrundriß etc. ein nächster logischer Schritt in der Fortführung der vorliegenden Arbeit. Langfristig bietet das Verfahren in der gegenwärtigen Ausführung auch die Möglichkeit einer einfachen Erweiterung um die Reibungsterme und damit den Übergang auf einen Navier-Stokes-Algorithmus, was auch im Hinblick auf die Behandlung der Probleme am rücklaufenden Blatt im schnellen Vorwärtsflug erforderlich ist.

## 7. Literatur

- [1] Wagner, S.: Hubschraubertechnik I. Vorlesungsmanuskript, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik (1987).
- [2] Landgrebe, A.J.: The Wake Geometry of a Helicopter Rotor and Its Influence on Rotor Performance. 28th Annual Forum of the American Helicopter Society, Paper Nr. 620 (1972).
- [3] Johnson, W.: Recent Developments in Rotary-Wing Aerodynamic Theory. AIAA-Journal, Band 24, Nr.8 (1986).
- [4] Davis, S.S., Chang, I-C.: The Critical Role of Computational Fluid Dynamics in Rotary-Wing Aerodynamics. Vertica, Band 11, Nr.1/2, S. 43-63 (1987).
- [5] Caradonna, F.X., Isom, M.P.: Subsonic and Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades. AIAA Journal, Band 10, S. 1506-1512 (1972).
- [6] Ballhaus, W.F., Caradonna, F.X.: The Effect of Planform Shape on the Transonic Flow Past Rotor Tips. AGARD-CP-111 (1972).
- [7] Caradonna, F.X., Isom, M.P.: Numerical Calculation of Unsteady Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades. AIAA Journal, Band 14, S. 482-488 (1976).
- [8] Isom, M.P.: Unsteady Subsonic and Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades. NASA CR 2463 (1974).
- [9] Caradonna, F.X., Philippe, J.J.: The Flow over a Helicopter Blade Tip in the Transonic Regime. Vertica, Band 2, Nr. 1 (1978).
- [10] Chattot, J.J.: Calculation of Three-Dimensional Unsteady Transonic Flows Past Helicopter Blades. NASA TP 1721 (1980).
- [11] Caradonna, F.X.: Finite Difference Methods for the Solution of Unsteady Flows. NASA TM 84248 (1982).
- [12] Chattot, J.J., Philippe, J.J.: Pressure Distribution Computation on a Non-Lifting Symmetrical Helicopter Blade in Forward Flight. La Recherche Aérospatiale, Nr. 1980-5 (1980).
- [13] Caradonna, F.X.: The Transonic Flow on a Helicopter Rotor. Dissertation, Stanford University (1978).
- [14] Caradonna, F.X., Tung, C., Desopper, A.: Finite-Difference Modelling of Rotor Flows Including Wake Effects. Journal of the American Helicopter Society, Band 29, S. 26-33 (1984).
- [15] Tung, C., Caradonna, F.X., Boxwell, D.A., Johnson, W.R.: The Prediction of Transonic Flow on Advancing Rotors. 40th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Washington, D.C. (1984).
- [16] Desopper, A.: Study of the Unsteady Transonic Flow on Rotor Blades with Different Tip Shapes. 10th European Rotorcraft Forum, Den Haag (1984).
- [17] Caradonna, F.X., Tung, C.: Finite-Difference Computation of Rotor Loads. International Conference on Rotorcraft Basic Research, Triangle

- Park, N. Carolina (1985).
- [18] Arieli, R., Tauber, M.E.: Computation of Subsonic and Transonic Flow about Lifting Rotor Blades. AIAA Paper 79-1667, (1979).
  - [19] Egolf, T.A., Sparks, S.P.: Hovering Rotor Airload Prediction Using a Full Potential Flow Analysis with a Realistic Wake Geometry. 41st Annual National Forum of the American Helicopter Society, Ft. Worth, TX (1985).
  - [20] Chang, I-C.: Transonic Flow Analysis for Rotors - Part I. Three-Dimensional, Quasi-Steady, Full-Potential Calculation. NASA TP 2375 (1984).
  - [21] Chang, I-C.: Transonic Flow Analysis for Rotors - Part II. Three-Dimensional, Unsteady, Full-Potential Calculation. NASA TP 2375 (1985).
  - [22] Sankar, N.L., Prichard, D.: Solution of Transonic Flow Past Rotor Blades Using the Conservative Full-Potential Equation. AIAA Paper 85-5012 (1985).
  - [23] Strawn, R.C., Caradonna, F.X.: Numerical Modeling of Rotor Flows with a Conservative Form of the Full-Potential Equations. AIAA Paper 86-0079 (1986).
  - [24] Strawn, R.C., Caradonna, F.X.: Conservative Full-Potential Model for Unsteady Transonic Rotor Flow. AIAA-Journal, Band 25, Nr.2, S. 193-198 (1987).
  - [25] Tung, C., Chang, I-C.: Rotor Transonic Computation with Wake Effect. 4th International Conference on Applied Numerical Modeling, Taiwan (1984).
  - [26] Chang, I-C., Tung, C.: Numerical Solution of the Full-Potential Equation for Rotors and Oblique Wings Using a New Wake Model. AIAA Paper 85-0268 (1985).
  - [27] Steinhoff, J., Ramachandran, K.: Free Wake Analysis of Compressible Rotor Flows. AIAA Paper 87-0542 (1987).
  - [28] Tauber, M.E., Hicks, R.M.: Computerized Three-Dimensional Aerodynamic Design of a Lifting Rotor Blade. 36th Annual Forum of the American Helicopter Society (1980).
  - [29] Tauber, M.E.: Computerized Aerodynamic Design of a Transonically 'Quiet' Blade. 40th Annual Forum of the American Helicopter Society (1984).
  - [30] Tauber, M.E., Owen, F.K., Langhi, R.G., Palmer, G.E.: Comparison of Calculated and Measured Velocities Near the Tip of a Model Rotor Blade at Transonic Speeds. NASA TM 86697 (1985).
  - [31] Roberts, T.W., Murman, E.M.: Solution Method for a Hovering Helicopter Rotor Using Euler Equations. AIAA Paper 85-0436 (1985).
  - [32] Roberts, T.W., Murman, E.M.: Euler Solutions for the Flow Around a Hovering Helicopter Rotor. AIAA Paper 86-1784 (1986).
  - [33] Sankar, N.L., Wake, B.E., Lekoudis, S.G.: Solution of the Unsteady Euler Equations for Fixed and Rotor Wing Configurations. AIAA Paper 85-0120 (1985).

- [34] Sankar, N.L., Tung, C.: Euler Calculations for Rotor Configurations in Unsteady Forward Flight. 42nd Annual Meeting of the American Helicopter Society, Washington, D.C. (1986).
- [35] Chang, I-C., Tung, C.: Euler Solution of the Transonic Flow for a Helicopter Rotor. AIAA Paper 87-0523 (1987).
- [36] Agarwal, R.K., Deese, J.E.: Euler Calculations for Flowfield of a Helicopter Rotor in Hover. AIAA Paper 86-1782 (1986).
- [37] Wake, B.E., Sankar, N.L., Lekoudis, S.G.: Computation of Rotor Blade Flows Using the Euler Equations. Journal of Aircraft, Band 23, Nr.7 S. 582-588 (1986).
- [38] Chen, C.L., McCroskey, W.J., Ying, S.X.: Euler Solution of Multiblade Rotor Flow. Thirteenth European Rotorcraft Forum, Arles, Paper Nr. 2-2 (1987).
- [39] Kroll, N.: Computation of the Flow Fields of Propellers and Hovering Rotors Using Euler Equations. 12th European Rotorcraft Forum, Garmisch-Partenkirchen, Paper Nr. 28 (1986).
- [40] Kroll, N.: Berechnung von Strömungsfeldern um Propeller und Rotoren im Schwebeflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen. Dissertation, TU Braunschweig (1989).
- [41] Krämer, E., Hertel J., Wagner, S.: Computation of Subsonic and Transonic Helicopter Rotor Flow Using Euler Equations. 13th European Rotorcraft Forum, Arles, Paper Nr. 2-14 (1987). Auch erschienen in: Vertica, Band 12, Nr. 3, S. 279-291 (1988).
- [42] Krämer, E.; Hertel, J.; Wagner, S.: A Study of the Influence of a Helicopter Rotor Blade on the Following Blades Using Euler Equations. 14th European Rotorcraft Forum, Mailand, Paper Nr. 6 (1988).
- [43] Krämer, E.; Hertel, J.; Wagner, S.: Euler Procedure for Calculation of the Steady Rotor Flow with Emphasis on Wake Evolution. AIAA, 8th Applied Aerodynamic Conference, Portland, OR, AIAA Paper 90-3007 (1990).
- [44] Hertel, J., Krämer, E., Wagner, S.: Euler Solutions for Steady Flow of a Helicopter Rotor. 2nd International Conference on Rotorcraft Basic Research, College Park, Maryland (1988).
- [45] Hertel, J., Krämer, E., Wagner, S.: Complete Euler-Solution for a Rotor in Hover and a Propeller in Forward Flight. 16th European Rotorcraft Forum, Glasgow, Paper Nr. I.4.2 (1990).
- [46] Wagner, S.; Krämer, E.; Hertel, J.: Anwendung der Eulergleichungen zur Berechnung stationärer Rotorströmungen unter Berücksichtigung des Nachlaufesinflusses auf das nachfolgende Blatt. Jahrbuch 1988 I der DGLR, S. 333-344 (1988).
- [47] Chen, C.L., McCroskey, W.J.: Numerical Simulation of Helicopter Multi-Bladed Rotor Flow. AIAA Paper 88-0046 (1988).
- [48] McCroskey, W.J.: Some Rotorcraft Applications of Computational Fluid Dynamics. 2nd International Conference on Rotorcraft Basic Research, College Park, Maryland (1988).

- [49] Hertel, J.: Euler-Lösungen der stationären Rotorströmung für Schweben- und den axialen Vorwärtsflug mit Einbeziehung linearer Methoden. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg (1991).
- [50] Whitfield, D.L., Swafford, T.W., Janus, J.M., Mulac, R.A., Belk, D.M.: Three-Dimensional Unsteady Euler Solutions for Propfans and Counter-Rotating Propfans in Transonic Flow. AIAA Paper 87-1197 (1987).
- [51] Bober, L.J., Chausee, D.S., Kutler, P.: Prediction of High Speed Propeller Flow Fields Using a Three-Dimensional Euler Analysis. AIAA Paper 83-0188 (1983).
- [52] Barton, J.M., Yamamoto, O., Bober, L.J.: Inviscid Analysis of Advanced Turboprop Propeller Flow Fields. AIAA Paper 85-1263 (1985).
- [53] Barton, J.M., Yamamoto, O., Bober, L.J.: Euler Analysis of Transonic Propeller Flows. Journal of Propulsion, Band 3, Nr. 3 (1987).
- [54] Yokota, J.W.: An L-U Implicit Multigrid Algorithm to Solve the Euler Equations for Transonic Flow in Rotating Turbomachinery Passages. Dissertation, Cornell University (1987).
- [55] Wake, B.E.: Solution Procedure for the Navier-Stokes Equations Applied to Rotors. Dissertation, Georgia Institute of Technology (1987).
- [56] Wake, B.E., Sankar, N.L.: Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Flow about a Rotor Blade. National Specialists Meeting on Aerodynamics and Aeroacoustics, Arlington, TX (1987).
- [57] Agarwal, R.K., Deese, J.E.: Navier-Stokes Calculations of the Flowfield of a Helicopter Rotor in Hover. AIAA Paper 88-0106 (1988).
- [58] Agarwal, R.K., Deese, J.E.: Euler/Navier-Stokes Calculations of the Flowfield of a Helicopter Rotor in Hover and Forward Flight. 2nd International Conference on Rotorcraft Basic Research, College Park, Maryland (1988).
- [59] Srinivasan, McCroskey, W.J.: Navier-Stokes Simulation of Unsteady Three-Dimensional Blade-Vortex Interactions. 45th Annual Meeting of the American Helicopter Society, Boston, MA (1989).
- [60] Srinivasan, McCroskey, W.J.: Navier-Stokes Calculations of Hovering Rotor Flowfields. Journal of Aircraft, Band 25, Nr.10, S.865-874 (1988).
- [61] Srinivasan, G.R., Baeder, J.D., Obayashi, S., McCroskey, W.J.: Flowfield of a Lifting Hovering Rotor - A Navier-Stokes Simulation. 16th European Rotorcraft Forum, Glasgow, Paper Nr. I.3.5 (1990).
- [62] Jameson, A., Schmidt, W., Turkel, E.: Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge Kutta Time Stepping Schemes. AIAA Paper 81-1259 (1981).
- [63] Steger, J.L., Warming, R.F.: Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods. Journal of Computational Physics, Band 40, S. 263-293 (1981).
- [64] Roe, P.L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. Journal of Computational Physics, Band 43, Nr.2, S. 357-372 (1981).

- [65] Eberle, A.: MBB-EUFLEX. A New Flux Extrapolation Scheme Solving the Euler Equations for Arbitrary 3-D Geometry and Speed. MBB/LKE122/S/PUB/140 (1984).
- [66] Brenneis, A.: Berechnung instationärer zwei- und dreidimensionaler Strömungen um Tragflügel mittels eines impliziten Relaxationsverfahrens zur Lösung der Eulergleichungen. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg (1989).
- [67] Caradonna, F.X., Tung, C.: Experimental and Analytical Studies of a Model Rotor in Hover. NASA TM 81232 (1981).
- [68] Anderson, J.D.: Fundamentals of Aerodynamics. McGraw-Hill Book Company, New York (1984).
- [69] Anderson, J.D.: Introduction to Computational Fluid Dynamics. VKI-Lecture Series 1986-01 (1986).
- [70] Truckenbrodt, E.: Fluidmechanik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).
- [71] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H.: Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, New York (1984).
- [72] Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., Mastin, G.W.: Numerical Grid Generation. North-Holland, New York (1985).
- [73] Viviani, H.: Conservative Forms of Gas Dynamic Equations. La Recherche Aérospatiale, Nr. 1974-1, S. 65-68 (1974).
- [74] Vinokur, M.: Conservation Equations of Gas-Dynamics in Curvilinear Coordinate Systems. Journal of Computational Physics, Band 14, S. 105-125 (1974).
- [75] MacCormack, R.W.: The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. AIAA Paper 69-354 (1969).
- [76] Warming, R.F., Beam, R.M.: Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Unsteady Aerodynamic Flows. AIAA Second Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut, S.17-28 (1975).
- [77] Whitfield, D.L., Janus, J.M.: Three-Dimensional Unsteady Euler Equations Solution Using Flux Vector Splitting. AIAA Paper 84-1552 (1984).
- [78] Weiland, C.: A Split-Matrix Method for the Integration of the Quasi-Conservative Euler-Equations. Notes on Numerical Fluid Mechanics, Band 13, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, S.383-390 (1986).
- [79] Moretti, G.: The  $\lambda$ -Scheme. Computers & Fluids, Band 7, S.191-205 (1979).
- [80] Chakravarthy, S.R., Anderson, D.A., Salas, M.D.: The Split Coefficient Matrix Method for Hyperbolic Systems of Gasdynamic Equations. AIAA Paper 80-0268 (1980).
- [81] van Leer, B.: Flux Vector Splitting for the Euler Equations. Lecture Notes in Physics, Band 170, S. 507-512 (1982).

- [82] Anderson, W.K., Thomas, J.L., van Leer, B.: Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. AIAA Journal, Band 24, Nr. 9, S. 1453-1460 (1986).
- [83] van Leer, B.: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V: A Second-Order Sequel to Godunov's Method. Journal of Computational Physics, Band 32, S.101-136 (1979).
- [84] Powell, K.G., van Leer, B., Roe, P.L.: Towards a Genuinely Multi-Dimensional Upwind Scheme. VKI-Lecture Series 1990-03 (1990).
- [85] Parpia, I.H., Michalek, D.J.: A Shock Capturing Method for Multidimensional Flow. AIAA Paper 90-3016 (1990).
- [86] Pandolfi, M.: Upwind Formulations for the Euler Equations. VKI-Lecture Series 1987-04 (1987).
- [87] LeVeque, R.J.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser-Verlag, Basel (1990).
- [88] LeVeque, R.J.: Hyperbolic Conservation Laws and Numerical Methods. VKI-Lecture Series 1990-03 (1990).
- [89] Godunov, S.K.: A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics. Math. Sb., Band 47 (1959).
- [90] Osher, S., Solomon, F.: Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. Mathematics of Computation, Band 38, Nr.158, S.339-374 (1982).
- [91] Eberle, A., Misegades, K.: Euler Solution for a Complete Fighter Aircraft at Sub- and Supersonic Speed. AGARD-Symposium on "Applications of Computational Fluid Dynamics in Aeronautics", Aix-en-Provence (1986).
- [92] Eberle, A.: 3D Euler Calculations Using Characteristic Flux Extrapolation. AIAA Paper 85-0119 (1985).
- [93] Stahl, H.: Application of a 3D Euler Code to Transonic Blade Tip Flow. 12th European Rotorcraft Forum, Garmisch-Partenkirchen, Paper Nr. 29 (1986).
- [94] Stahl-Cucinelli, H.: Application of 3D Euler Code to Rotor Blade Tips. 15th European Rotorcraft Forum, Amsterdam, Paper Nr. 15 (1989).
- [95] van Leer, B., Thomas, J.L., Roe, P.L., Newsome, R.W.: A Comparison of Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-1104 (1987).
- [96] van Leer, B.: On the Relation Between Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. ICASE Report Nr. 81-11 (1981).
- [97] Dervieux, A., Vijayasundaram, G.: On Numerical Schemes for Solving the Euler Equations of Gas Dynamics. INRIA Workshop on Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics, Rocquencourt (1983).
- [98] Grossman, B., Walters, R.W.: An Analysis of Flux-Split Algorithms for Euler's Equations with Real Gases. AIAA Paper 87-1117 (1987).

- [99] Roberts, T.W.: The Behavior of Flux-Difference Splitting Schemes near Slowly Moving Shock Waves. *Journal of Computational Physics*, Band 90, Nr.1, S.141-160 (1990).
- [100] Jameson, A.: A Vertex Based Multigrid Algorithm for Three Dimensional Compressible Flow Calculations. In: AMD-Vol. 78, *Numerical Methods for Compressible Flow*.
- [101] Hall, M.G.: Cell-Vertex Multigrid Scheme for Solution of the Euler Equations. *Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Reading (1985).
- [102] Rossow, C.-C.: Berechnung von Strömungsfeldern durch Lösung der Euler-Gleichungen mit einer erweiterten Finite-Volumen Diskretisierungsmethode. *Dissertation, TU Braunschweig* (1989).
- [103] Kordulla, W.: Integration of the Navier-Stokes Equations in Finite-Volume Formulation. *VKI-Lecture Series 1987-04* (1987).
- [104] Vinokur, M.: An Analysis of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Conservation Laws. *NASA CR-177416* (1986).
- [105] Vinokur, M.: The Relation of Finite Element and Finite Difference Methods. *NASA CR-2764* (1976).
- [106] Förster, K.: Private Kommunikation. *Universität der Bundeswehr München* (1991).
- [107] Eberle, A.: Numerische Elemente für DEMONSTRATOR-Nachrechnungen mit einem neuen Euler-Verfahren. *MBB-UFE-AERO-MT-832* (1989).
- [108] Eberle, A., Schmatz, M., Bissinger, N.: Generalized Fluxvectors for Hypersonic Shock-Capturing. *AIAA 90-0390* (1990).
- [109] van Leer, B.: Upwind-Difference Methods for Aerodynamic Problems Governed by the Euler Equations. *Lectures in Applied Mathematics*, Band 22, Teil 2, S.327-336 (1985).
- [110] Eberle, A.: Characteristic Flux Averaging Approach to the Solution of Euler's Equations. *VKI-Lecture Series 1987-04* (1987).
- [111] Koren, B.: Upwind Schemes, Multigrid and Defect Correction for the Steady Navier-Stokes Equations. *11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics* (1988).
- [112] van Albada, G.D., van Leer, Roberts, J.W.W.: A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics. *Astronomy & Astrophysics*, Band 108 (1982).
- [113] Rai, M.M.: An Implicit, Conservative, Zonal-Boundary Scheme for Euler Equation Calculations. *Computers & Fluids*, Band 14, Nr. 3, S. 295-319 (1989).
- [114] Lerat, A., Sidès, J., Daru, V.: An Implicit Finite-Volume Method for Solving the Euler Equations. *Lecture Notes in Physics*, Band 170, S. 343-349 (1982).
- [115] MacCormack, R.W.: A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flows. *AIAA Paper 81-0110* (1981).

- [116] Jameson, A., Baker, T.J.: Solution of the Euler Equations for Complex Configurations. AIAA Paper 83-1929 (1983).
- [117] Beam, R.M., Warming, R.F.: An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form. Journal of Computational Physics, Band 22, S. 87-110 (1976).
- [118] Briley, W.R., McDonald, H.: Solution of the Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations by an Implicit Technique. Lecture Notes in Physics, Band 35, S. 105-110 (1974).
- [119] Chakravarthy, S.R.: Relaxation Methods for Unfactored Implicit Upwind Schemes. AIAA Paper 84-0165 (1984).
- [120] Chakravarthy, S.R.: Development of Upwind Schemes for the Euler Equations. NASA CR 4043 (1987).
- [121] Steger, J.L.: Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Geometries with Application to Airfoils. AIAA Paper 77-0665 (1977).
- [122] Pulliam, T.H., Steger, J.L.: Implicit Finite Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow. AIAA Journal, Band 18, No. 2, S. 159-167 (1980).
- [123] Pulliam, T.H., Chausee, D.S.: A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm. Journal of Computational Physics, Band 39, S. 347-363 (1981).
- [124] Jameson, A., Yoon, S.: Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes. AIAA Journal, Band 24, Nr. 11, S. 1737-1743 (1986).
- [125] Jespersen, D.C., Pulliam, T.H.: Flux Vector Splitting and Approximate Newton Methods. AIAA Paper 83-1899 (1983).
- [126] Belk, D.M., Whitfield, D.L.: Three-Dimensional Euler Solutions on Blocked Grids Using an Implicit Two-Pass Algorithm. AIAA Paper 87-0450 (1987).
- [127] Thomas, L.J., van Leer, B., Walters, R.W.: Implicit Flux-Split Schemes for the Euler Equations. AIAA Paper 85-1680 (1985).
- [128] von Lavante, E., Haertl, A., Claes, D.: Numerical Solutions of the Euler Equations Using Simplified Flux Vector Splitting. AIAA Journal, Band 25, Nr. 8, S. 1050-1051 (1987).
- [129] Jameson, A., Turkel, E.: Implicit Schemes and LU Decompositions. Mathematics of Computation, Band 37, S. 385-397 (1981).
- [130] Yoon, S.: Numerical Solution of the Euler Equations by Implicit Schemes with Multiple Grids. Dissertation, Princeton University (1985).
- [131] Jameson, A., Yoon, S.: LU Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations. AIAA Paper 86-0105 (1986).
- [132] Yokota, J.W., Caughey, D.A.: An L-U Implicit Multigrid Algorithm for the Three-Dimensional Euler Equations. AIAA Paper 87-0453 (1987).

- [133] Eberle, A., Schmatz, M.A., Schäfer, O.: High-Order Solutions of the Euler Equations by Characteristic Flux Averaging. ICAS-Paper 86-1.2.1 (1986).
- [134] Schmatz, M.A., Brenneis, A., Eberle, A.: Verification of an Implicit Relaxation Method for Steady and Unsteady Viscous and Inviscid Flow Problems. MBB/FE122/S/PUB/330 (1988).
- [135] Degrez, G.: Implicit Time Dependent Methods for Inviscid and Viscous Compressible Flow. VKI-Lecture Series 1986-01 (1986).
- [136] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. Main (1979).
- [137] Drela, M.: Two-Dimensional Transonic Aerodynamic Design and Analysis Using the Euler Equations. Gas Turbine Laboratory, MIT, Cambridge, GTL Report Nr.187 (1986).
- [138] Kocurek, J.D.: A Lifting Surface Performance Analysis with Circulation Coupled Wake for Advanced Configuration Hovering Rotors. Dissertation, Texas A&M University (1979).
- [139] Kocurek, J.D., Berkowitz, L.F., Harris, F.D.: Hover Performance Methodology at Bell Helicopter Textron. 36th Annual Forum of the American Helicopter Society, Washington D.C., Paper Nr. 80-3 (1980).
- [140] Landgrebe, A.: An Analytical and Experimental Investigation of Helicopter Rotor Hover Performance and Wake Geometry Characteristics. Prepared by United Aircraft Corporation Research Laboratories East Hartford, Connecticut, USAAMRDL TR 71-24 (1971).
- [141] Spelten, R., Krämer, E., Hertel, J.: Untersuchung instationärer Transsonik-Effekte und Randwirbeleinflüsse auf die Aerodynamik von Drehflüglerrotoren. BMFT-Abschlußbericht (1989).
- [142] Whitfield, D.L.: Three-Dimensional Unsteady Euler Equation Solutions Using Flux Vector Splitting. Short Course on Numerical Grid Generation, Mississippi State University (1984).
- [143] Scheitle, H., Spelten, R., Hertel, J., Krämer, E.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen stationärer und instationärer Machzahl-effekte im transsonischen Geschwindigkeitsbereich von Profilen und Blattspitzen von Hubschrauberrotoren. BMFT-Abschlußbericht (1988).
- [144] Cucinelli, G.: Grundlagen der Rechennetzzerzeugung. MBB/LKE127/AERO/MT/717 (1985).
- [145] Thompson, J.F. (Hrsg.): Numerical Grid Generation. North-Holland (1982).
- [146] Eriksson, L.E.: Practical Three-Dimensional Mesh Generation Using Transfinite Interpolation. VKI-Lecture Series (1983).
- [147] Schwarz, W.: Dreidimensionale Netzgenerierung für ein Finites Volumen-verfahren. MBB/LKE122/S/PUB/206 (1985).
- [148] Schwarz, W.: Elliptic Grid Generation System for Three-Dimensional Configurations Using Poisson Equation. 1st International Conference on Numerical Grid Generation, in: Computational Fluid Dynamics, Pine-

- ridge Press, S. 341-352 (1986).
- [149] Thompson, J.F., Steger, J.L., Yoshihara, H. (Hrsg.): Three Dimensional Grid Generation for Complex Configurations-Recent Progress. AGARDograph No.309 (1988).
- [150] AGARD-CP-464: Applications of Mesh Generation to Complex 3-D Configurations (1989).
- [151] Benek, J.A., Buning, P.G., Steger, J.L.: A 3-D Chimera Grid Embedding Technique. AIAA Paper 85-1523-CP (1985).
- [152] Rai, M.M.: Unsteady Three-Dimensional Navier-Stokes Simulations of Turbine Rotor-Stator Interaction. AIAA Paper 87-2058 (1987).
- [153] Cantaloube, B., Huberson, S.: A New Approach Using Vortex Point Method for Prediction of Rotor Performance in Hover and Forward Flight. Vertica, Band 10, Nr. 2 (1986).
- [154] Schöttl, Ch., Behr, R.: Private Kommunikation. Universität der Bundeswehr München (1989).
- [155] Röttgermann, A.: Ein Singularitätenverfahren zur Berechnung des Nachlaufes von Mehrblattrotorsystemen. Diplomarbeit Nr. 88/10, Universität der Bundeswehr München, Institut für Luftfahrttechnik und Leichtbau (1988).
- [156] Hitzel, S.: Low and High Speed, High Angle-of-Attack Flow around a Delta-Wing by an Euler-Simulation. Prediction and Exploration of Separated Flows, Royal Aeronautical Society, London (1989).
- [157] Powell, K.G.: Computation of Compressible, Vortical Flows. VKI-Lecture Series 1990-03 (1990).
- [158] Newsome, R.W., Kandil, O.A.: Vortical Flow Aerodynamics - Physical Aspects and Numerical Simulation. AIAA Paper 87-0205 (1987).
- [159] Röttgermann, A., Behr, R., Wagner, S.: Calculation of Blade-Vortex Interaction of Rotary Wings in Incompressible Flow by an Unsteady Vortex-Lattice-Method Including Free Wake Analysis. Vortrag gehalten beim 7. GAMM-Seminar in Kiel, Jan. 1991. Wird erscheinen in: Notes on Numerical Fluid Mechanics - Proceedings of the 7th GAMM-Seminar (1991).
- [160] Wanie, K.M., Hirschel, E.H., Schmatz, M.A.: Analysis of Numerical Solutions for Three-Dimensional Lifting Wing Flows. Eingereicht zur Veröffentlichung in der ZFW (1991).

Anhang

A.1 Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen für absolute Strömungsvariablen aus den Grundgleichungen im mitbewegten relativen System

Es wird an dieser Stelle nur das kartesische Koordinatensystem betrachtet, die Herleitung für zylindrische Koordinaten verläuft analog.

Nach der Herleitung am finiten Kontrollvolumen und Übergang auf die differentielle Schreibweise ergibt sich im mitbewegten kartesischen Bezugssystem die Grundform der konservativen Euler-Gleichungen zu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = K^{(k)} \quad (2.17)$$

mit

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho h u \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho w v \\ \rho h v \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ \rho h w \end{pmatrix}, \quad K^{(k)} = \rho \omega \begin{pmatrix} 0 \\ (2v + \omega x) \\ -(2u - \omega y) \\ 0 \\ \omega(u x + v y) \end{pmatrix}$$

$$(2.11/2.16)$$

und dem Lösungsvektor der relativen Strömungsgrößen:

$$\phi = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T .$$

Der Übergang auf absolute Koordinaten sieht die Verwendung der Störgeschwindigkeit  $\bar{q}$  und der absoluten spezifischen Totalenergie pro Volumeneinheit  $\bar{e}$  vor. Der neue Lösungsvektor lautet dann:

$$\phi = (\rho, \rho \bar{u}, \rho \bar{v}, \rho \bar{w}, \bar{e})^T .$$

Die modifizierte Impuls- und Energiegleichung ergeben sich m.H. folgender Umformung:

a) Impulsgleichung

$$\begin{aligned} \text{Es ist : } \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad & u = \bar{u} + \omega y \quad , \\ & v = \bar{v} - \omega x \quad , \\ & w = \bar{w} \quad . \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Terme der Impulsgleichung in Umfangsrichtung substituieren zu:

$$\begin{aligned}
 (\rho u)_t &= (\rho \bar{u})_t + (\rho \omega y)_t - (\rho \bar{u})_t + \rho_t \cdot \omega y , \\
 (\rho u^2 + p)_x &= (\rho \bar{u}u + p)_x + (\rho u \omega y)_x - (\rho \bar{u}u + p)_x + (\rho u)_x \cdot \omega y , \\
 (\rho uv)_y &= (\rho \bar{u}v)_y + (\rho v \omega y)_y - (\rho \bar{u}v)_y + (\rho v)_y \cdot \omega y + \rho v \omega , \\
 (\rho uw)_z &= (\rho \bar{u}w)_z + (\rho w \omega y)_z - (\rho \bar{u}w)_z + (\rho w)_z \cdot \omega y , \\
 \rho \omega (2v + \omega x) &= 2\rho v \omega + \rho \omega^2 x .
 \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß die mit  $(\omega y)$  multiplizierten Terme in ihrer Summe Null ergeben, da sie exakt die Kontinuitätsgleichung erfüllen. Der verbleibende Term der dritten Zeile und die Terme des Kräftevektors lassen sich zu dem Ausdruck  $\rho \omega \bar{v}$  zusammenfassen.

Die neue Impulsgleichung in Umfangsrichtung lautet somit:

$$(\rho \bar{u})_t + (\rho \bar{u}u + p)_x + (\rho \bar{u}v)_y + (\rho \bar{u}w)_z = \rho \omega \bar{v} . \quad (2.34)$$

Ein völlig analoges Vorgehen für die v-Komponente liefert die neue Impulsgleichung in radialer Richtung zu:

$$(\rho \bar{v})_t + (\rho \bar{v}u)_x + (\rho \bar{v}v + p)_y + (\rho \bar{v}w)_z = -\rho \omega \bar{u} . \quad (2.34)$$

Die Impulsgleichung in z-Richtung bleibt unverändert.

## b) Energiegleichung

$$\text{Es ist : } e = \bar{e} + \rho \omega \cdot (\bar{u}y - \bar{v}x) + \frac{\rho}{2} \cdot (\omega r)^2 .$$

Damit lassen sich die Terme der Energiegleichung substituieren zu:

$$\begin{aligned}
 e_t &= \bar{e}_t + (\rho \bar{u})_t \omega y - (\rho \bar{v})_t \omega x + \rho_t \cdot \frac{1}{2} (\omega r)^2 , \\
 (\rho hu)_x &= ((e+p)u)_x , \\
 &= ((\bar{e}+p)u)_x + \omega y \cdot (\rho \bar{u}u)_x - \omega x \cdot (\rho \bar{v}u)_x - \rho \omega \bar{v}u + (\rho u)_x \cdot \frac{1}{2} (\omega r)^2 + \rho \omega^2 x , \\
 (\rho hv)_y &= ((e+p)v)_y , \\
 &= ((\bar{e}+p)v)_y + \omega y \cdot (\rho \bar{u}v)_y - \omega x \cdot (\rho \bar{v}v)_y + \rho \omega \bar{u}v + (\rho v)_y \cdot \frac{1}{2} (\omega r)^2 + \rho v \omega^2 y ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho h w)_z &= ((e+p)w)_z, \\
 &= ((\bar{e}+p)w)_z + \omega y \cdot (\rho \bar{u} w)_z - \omega x \cdot (\rho \bar{v} w)_z + (\rho w)_z \cdot \frac{1}{2}(\omega r)^2, \\
 \rho \omega^2 (ux+vy) &= \rho u \omega^2 x + \rho v \omega^2 y.
 \end{aligned}$$

Erneut läßt sich die Kontinuitätsgleichung, die dieses Mal mit  $\frac{1}{2}(\omega r)^2$  multipliziert ist, abspalten. Weiterhin kürzen sich die beiden Anteile des Kräftevektors gegen entsprechende Anteile der zweiten und dritten Zeile heraus.

Setzt man

$$-\rho \omega \bar{v} \bar{u} = -\omega y \cdot (\rho \omega \bar{v}) - \rho \omega \bar{v} \bar{u}$$

und

$$\rho \omega \bar{u} \bar{v} = -\omega x \cdot (\rho \omega \bar{u}) + \rho \omega \bar{u} \bar{v}$$

und erweitert obige Beziehungen um die Druckanteile  $\omega y \cdot p_x - \omega y \cdot p_x$  und  $\omega x \cdot p_y - \omega x \cdot p_y$ , so lassen sich zusätzlich die mit  $(\omega y)$  multiplizierte Impulsgleichung in Umfangsrichtung und die mit  $(-\omega x)$  multiplizierte Impulsgleichung in radialer Richtung abspalten.

Damit bleibt letztlich übrig:

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_t + (\bar{e}u+p\bar{u})_x + (\bar{e}v+p\bar{v})_y + ((\bar{e}+p)w)_z &= 0 \\
 \text{oder} & \\
 \bar{e}_t + (\rho \bar{h}u - \omega y p)_x + (\rho \bar{h}v + \omega x p)_y + (\rho \bar{h}w)_z &= 0 \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

A.2 Metrik der Koordinatentransformation

Die Berechnung der metrischen Terme aus Gl.(2.36) erfolgt m.H. der Elemente der Jacobimatrix der inversen Abbildung (nach Lit.[71]). Sei

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}$$

die Jacobimatrix der Abbildung des physikalischen auf den Rechenraum, so ist

$$J^{-1} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$$

die Jacobimatrix der inversen Abbildung und es gilt:

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix}^{-1}$$

Mit

$$D = |J^{-1}|$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x &= (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) = D \cdot \xi_x \quad , \\ \bar{\xi}_y &= (x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta) = D \cdot \xi_y \quad , \\ \bar{\xi}_z &= (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) = D \cdot \xi_z \quad , \\ \bar{\eta}_x &= (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) = D \cdot \eta_x \quad , \\ \bar{\eta}_y &= (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) = D \cdot \eta_y \quad , \\ \bar{\eta}_z &= (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) = D \cdot \eta_z \quad , \\ \bar{\zeta}_x &= (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) = D \cdot \zeta_x \quad , \\ \bar{\zeta}_y &= (x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta) = D \cdot \zeta_y \quad , \\ \bar{\zeta}_z &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = D \cdot \zeta_z \quad . \end{aligned}$$

A.3 Bestimmung der charakteristisch gemittelten Strömungsgrößen

Für jeden Zeitschritt werden an den Zellflächen jedes Volumens m.H. des in Kap. 3.2.2 beschriebenen Riemann-Lösers die charakteristisch gemittelten konservativen Strömungsvariablen ermittelt.

Dabei ergibt die Auflösung von Gl.(3.12) am Beispiel einer  $\xi = \text{konst.}$  Fläche im kartesischen Ausgangssystem unter Verwendung absoluter Koordinaten für:

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \bar{I} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \bar{u} \\ \rho \bar{v} \\ \rho \bar{w} \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho(u-wy) \\ \rho(v+wx) \\ \rho w \\ \bar{e} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \rho_0 \bar{\rho} + \bar{I}_0 \bar{I} + \bar{m}_0 \bar{m} + \bar{n}_0 \bar{n} + \bar{e}_0 \bar{e} + r_1 + r_2 \quad ,$$

$$\bar{I} = \rho_0 [\bar{\xi}_x \bar{q} + \bar{u}(\bar{\rho}-1)] + \bar{I}_0 (\bar{u}\bar{I} - \bar{\xi}_x^2 + 1) + \bar{m}_0 (\bar{u}\bar{m} - \bar{\xi}_x \bar{\xi}_y) + \bar{n}_0 (\bar{u}\bar{n} - \bar{\xi}_x \bar{\xi}_z) + \bar{e}_0 \bar{u}\bar{e} + r_1 (\bar{u} + a\bar{\xi}_x) + r_2 (\bar{u} - a\bar{\xi}_x) \quad ,$$

$$\bar{m} = \rho_0 [\bar{\xi}_y \bar{q} + \bar{v}(\bar{\rho}-1)] + \bar{I}_0 (\bar{v}\bar{I} - \bar{\xi}_x \bar{\xi}_y) + \bar{m}_0 (\bar{v}\bar{m} - \bar{\xi}_y^2 + 1) + \bar{n}_0 (\bar{v}\bar{n} - \bar{\xi}_y \bar{\xi}_z) + \bar{e}_0 \bar{v}\bar{e} + r_1 (\bar{v} + a\bar{\xi}_y) + r_2 (\bar{v} - a\bar{\xi}_y) \quad ,$$

$$\bar{n} = \rho_0 [\bar{\xi}_z \bar{q} + \bar{w}(\bar{\rho}-1)] + \bar{I}_0 (\bar{w}\bar{I} - \bar{\xi}_x \bar{\xi}_z) + \bar{m}_0 (\bar{w}\bar{m} - \bar{\xi}_y \bar{\xi}_z) + \bar{n}_0 (\bar{w}\bar{n} - \bar{\xi}_z^2 + 1) + \bar{e}_0 \bar{w}\bar{e} + r_1 (\bar{w} + a\bar{\xi}_z) + r_2 (\bar{w} - a\bar{\xi}_z) \quad ,$$

$$\bar{e} = \rho_0 [\bar{q}^2 + \bar{q}^2 (\frac{\bar{\rho}}{2} - 1)] + \bar{I}_0 (\frac{\bar{q}^2}{2} \bar{I} + \bar{u}\bar{q}\bar{\xi}_x) + \bar{m}_0 (\frac{\bar{q}^2}{2} \bar{m} + \bar{v}\bar{q}\bar{\xi}_y) + \bar{n}_0 (\frac{\bar{q}^2}{2} \bar{n} + \bar{w}\bar{q}\bar{\xi}_z) + \bar{e}_0 \frac{\bar{q}^2}{2} \bar{e} + r_1 (\bar{h} + a\bar{q}) + r_2 (\bar{h} - a\bar{q})$$

mit:

$$\bar{\rho} = 1 + \bar{e} \frac{\bar{q}^2}{2}, \quad \bar{q}^2 = (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2),$$

$$\bar{l} = -\bar{e}\bar{u}, \quad \bar{q} = \bar{u}\bar{\xi}_x + \bar{v}\bar{\xi}_y + \bar{w}\bar{\xi}_z,$$

$$\bar{m} = -\bar{e}\bar{v},$$

$$\bar{n} = -\bar{e}\bar{w},$$

$$\bar{e} = -\frac{\kappa-1}{a^2},$$

$$r_1 = \frac{1}{2a^2} \left( \rho_1 [(\kappa-1)\frac{\bar{q}^2}{2} - a\bar{q}] + l_1 [a\bar{\xi}_x - \bar{u}(\kappa-1)] + m_1 [a\bar{\xi}_y - \bar{v}(\kappa-1)] + \right. \\ \left. n_1 [a\bar{\xi}_z - \bar{w}(\kappa-1)] + e_1(\kappa-1) \right),$$

$$r_2 = \frac{1}{2a^2} \left( \rho_2 [(\kappa-1)\frac{\bar{q}^2}{2} + a\bar{q}] - l_2 [a\bar{\xi}_x + \bar{u}(\kappa-1)] - m_2 [a\bar{\xi}_y + \bar{v}(\kappa-1)] - \right. \\ \left. n_2 [a\bar{\xi}_z + \bar{w}(\kappa-1)] + e_2(\kappa-1) \right),$$

$$\bar{\xi}_x = \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}, \quad \bar{\xi}_y = \frac{\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}, \quad \bar{\xi}_z = \frac{\xi_z}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}.$$

Dabei Bezeichnen die Indices 0,1,2 die Fußpunktwerte der konservativen Strömungsgrößen.

Die Werte in den beiden anderen Koordinatenrichtungen ergeben sich, wenn man  $\xi$  durch  $\eta$  bzw.  $\zeta$  ersetzt.

A.4 Jacobimatrix des Kräftevektors

Durch Ableitung des Kräftevektors  $\bar{K}$  nach den Elementen des konservativen Lösungsvektors ergibt sich die Jacobimatrix S.

Mit einer Formulierung von  $\bar{K}$  gemäß Gl.(2.49) ergibt damit im zylindrischen Ausgangssystem:

$$S = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \phi} = \frac{D}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v\bar{u} & -v & -\bar{u} & 0 & 0 \\ \hat{q}-\bar{u}^2 & 2\bar{u}-\hat{u} & -\hat{v} & -\hat{w} & \kappa-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \hat{q} &= (\kappa-1) \frac{\bar{u}^2}{2} , \\ \hat{u} &= (\kappa-1)u , \\ \hat{v} &= (\kappa-1)v , \\ \hat{w} &= (\kappa-1)w . \end{aligned}$$

Die Multiplikation von S mit dem Lösungsvektor  $\phi$  führt wieder auf den Vektor  $\bar{K}$ , so daß die Homogenität erfüllt ist.

BILDTEIL

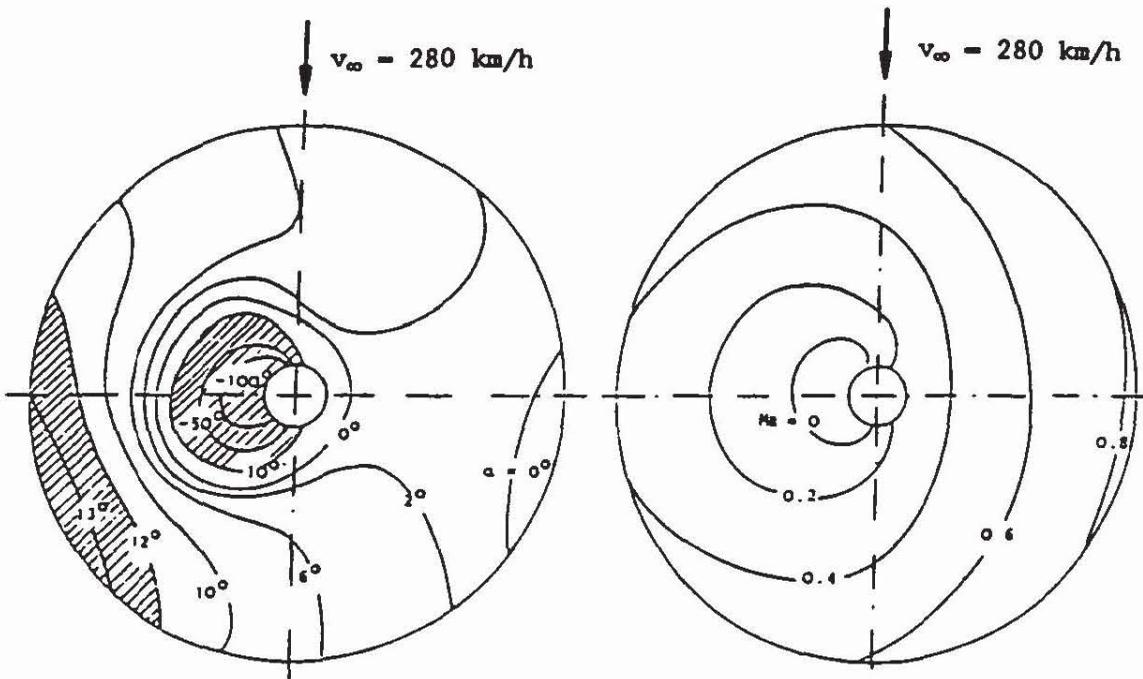


Bild 1.1-1: Anstellwinkel- und Machzahlverteilung über der Rotorkreisscheibe am Beispiel einer BO 105 im Vorwärtsflug (nach [1])

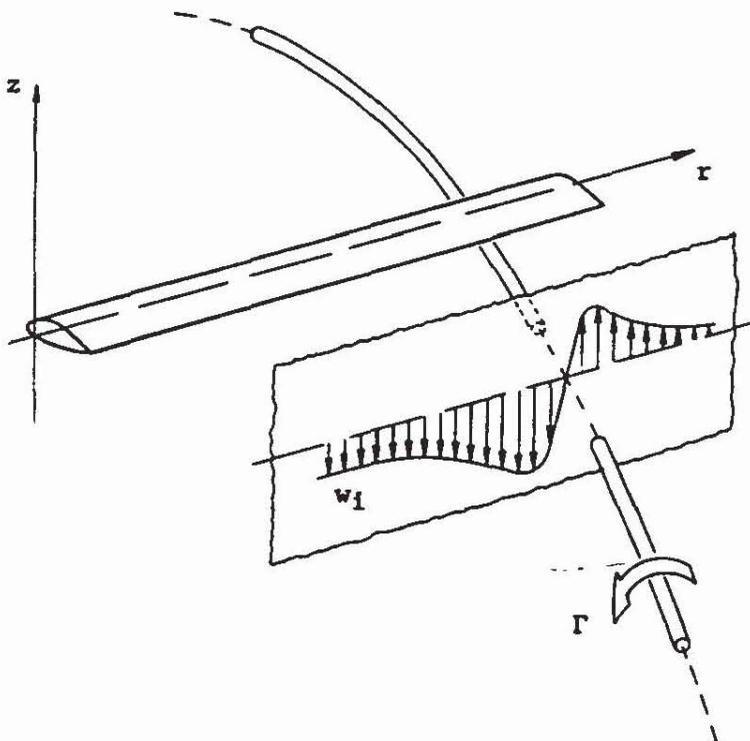


Bild 1.1-2: Geschwindigkeitsinduktion durch den Randwirbel des vorlaufenden Blattes

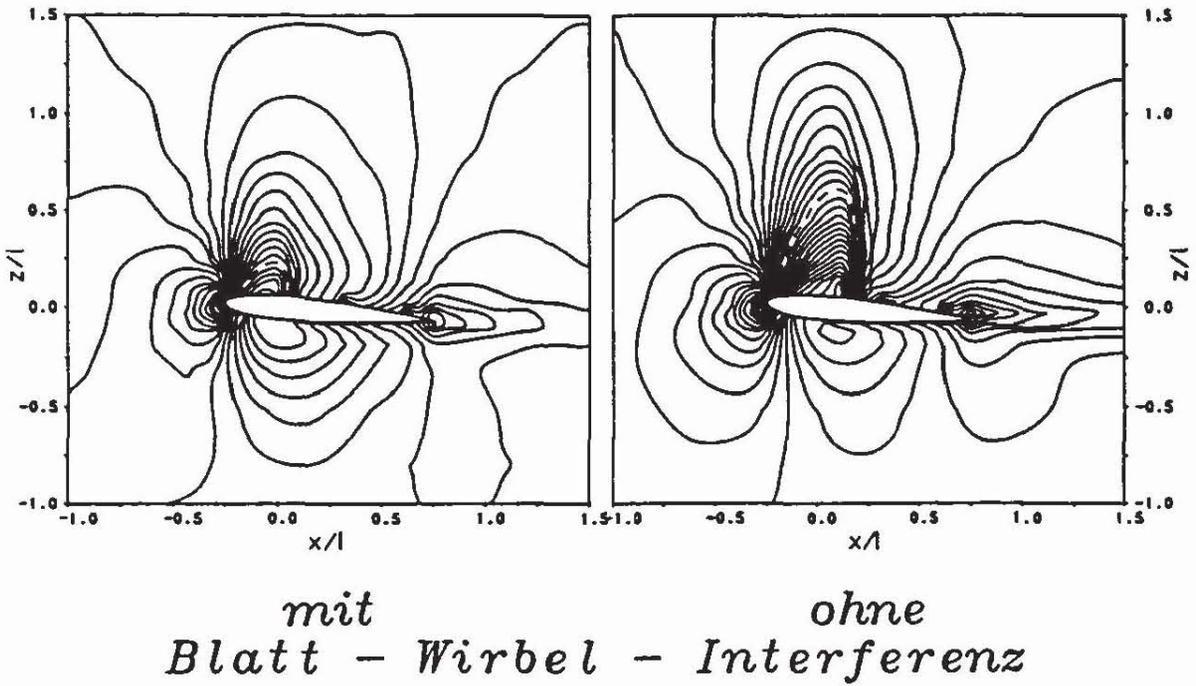


Bild 1.1-3: Änderung der Auftriebsverteilung am Blatt durch den Einfluß der Blatt-Wirbel-Interferenz (qualitativ, Machzahlkonturen in einem zweidimensionalen Profilschnitt nahe der Blattspitze)

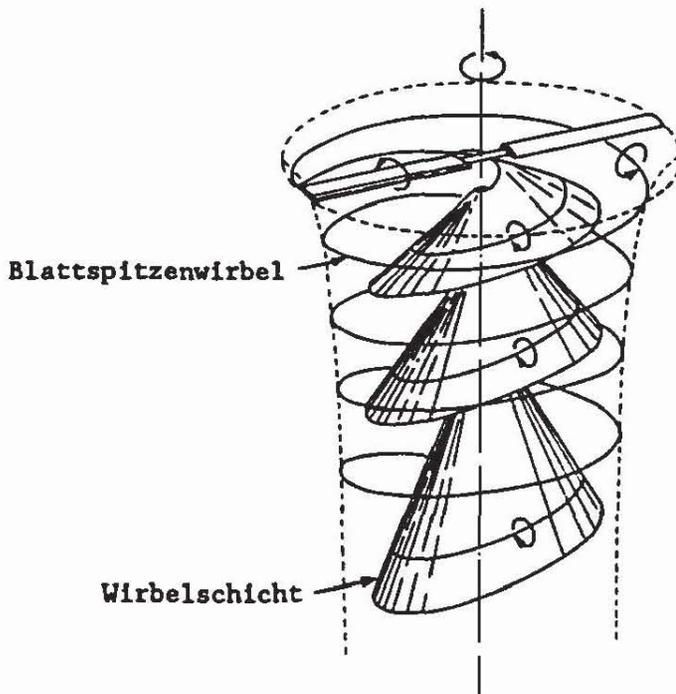


Bild 1.1-4: Schematische Darstellung der Nachlaufstruktur eines Rotorblattes (nach [2])

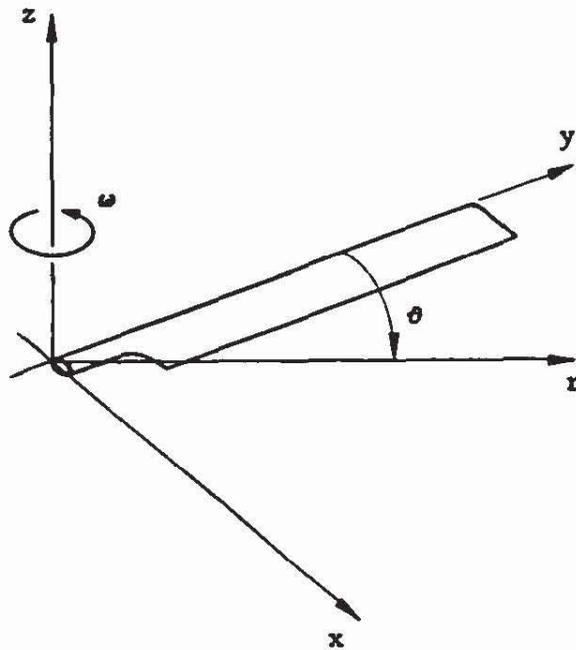


Bild 2.2-1: Verwendete Koordinatensysteme

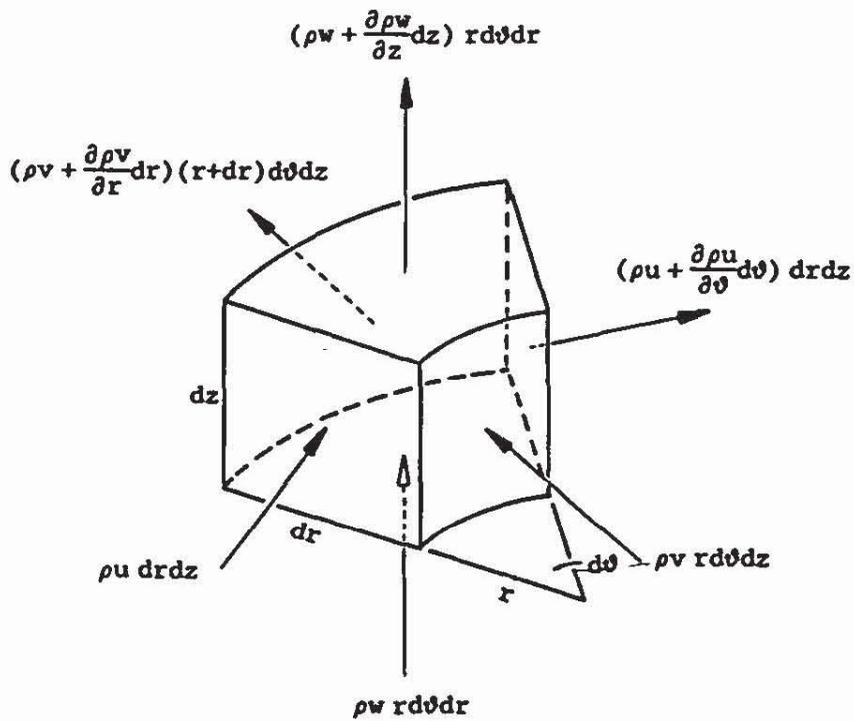


Bild 2.4-1: Massenfluß durch ein infinitesimales Kontrollvolumen im zylindrischen Koordinatensystem

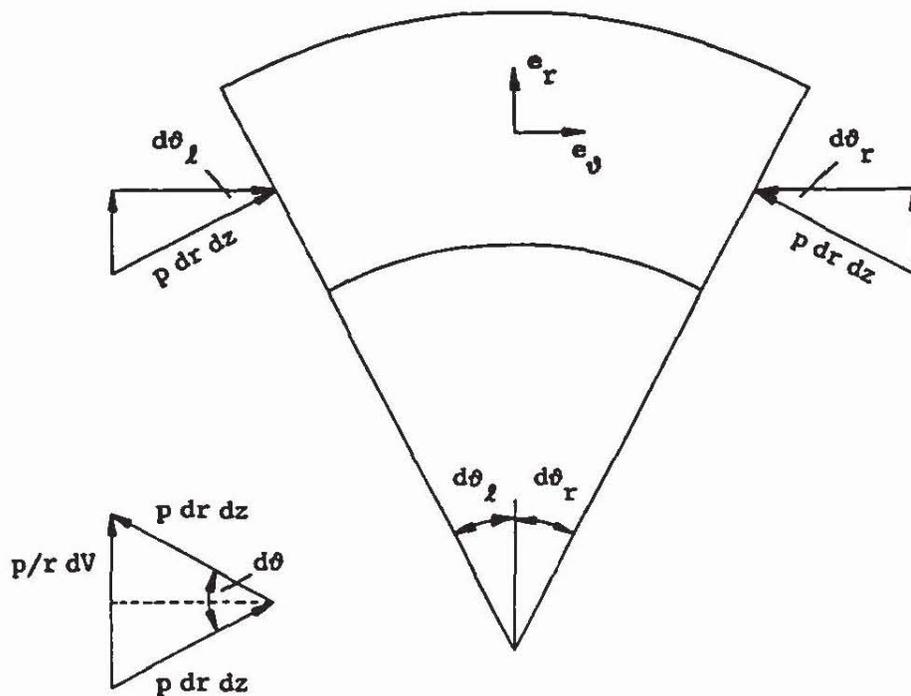


Bild 2.4-2: Vektorielle Zerlegung der Druckkräfte am Kontrollvolumen bei Bezug auf eine mittelpunktsorientierte Basis (nach [49])

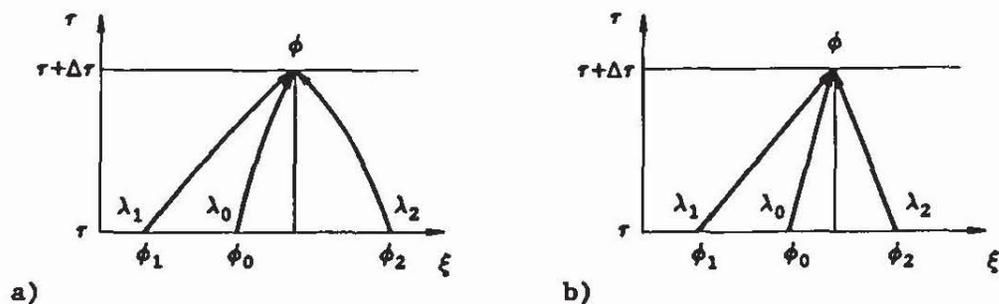


Bild 3.2-1: Nichtlinearer (a) und linearer (b) Riemannlöser

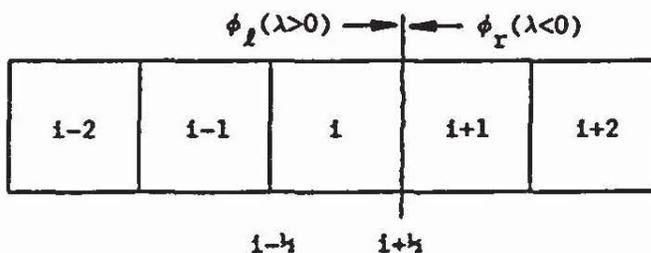


Bild 3.2-2: Charakteristische Flußmittelung



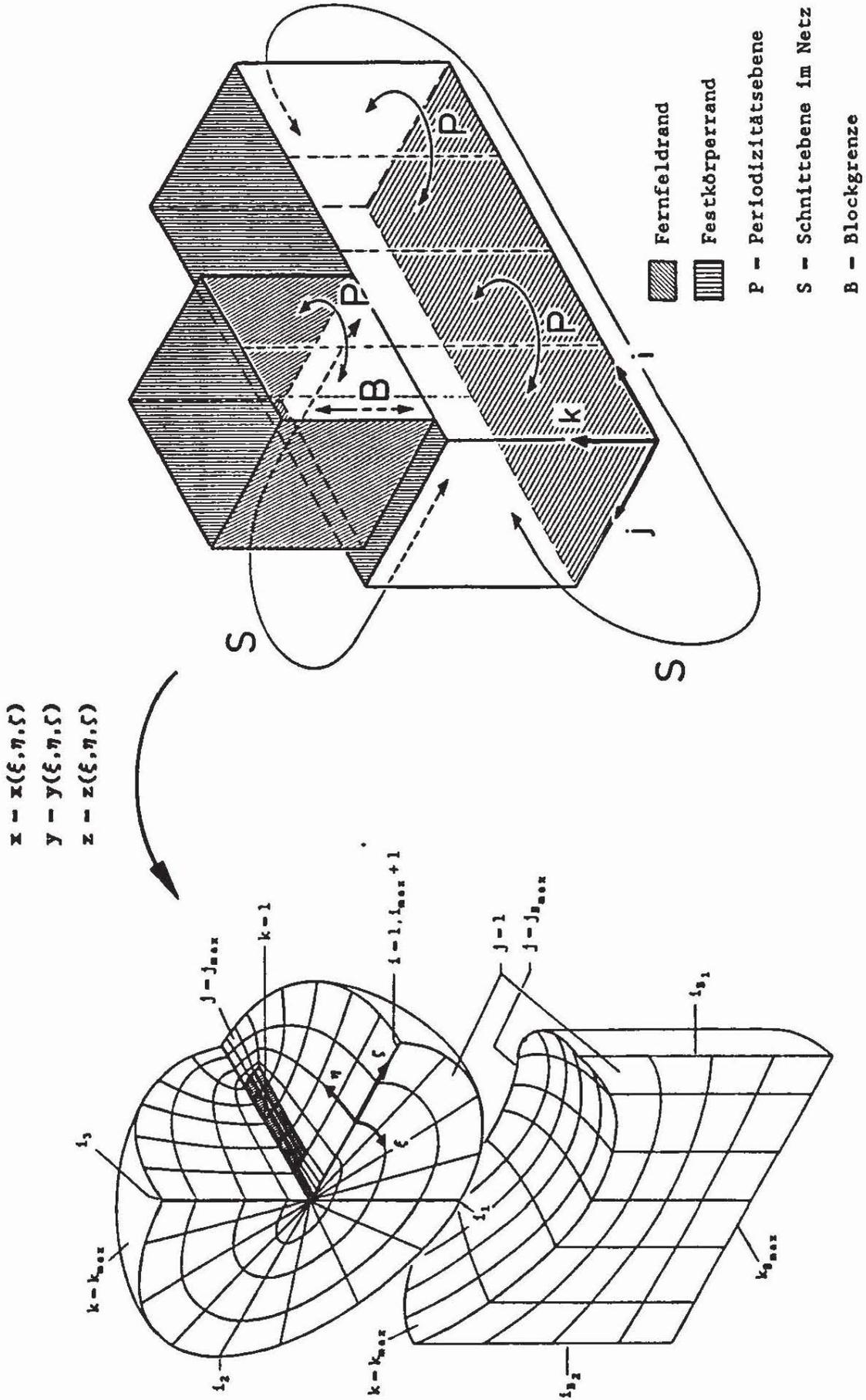


Bild 3.5-1: Topologie der verwendeten Rechnernetze und Randbedingungen im Indexraum

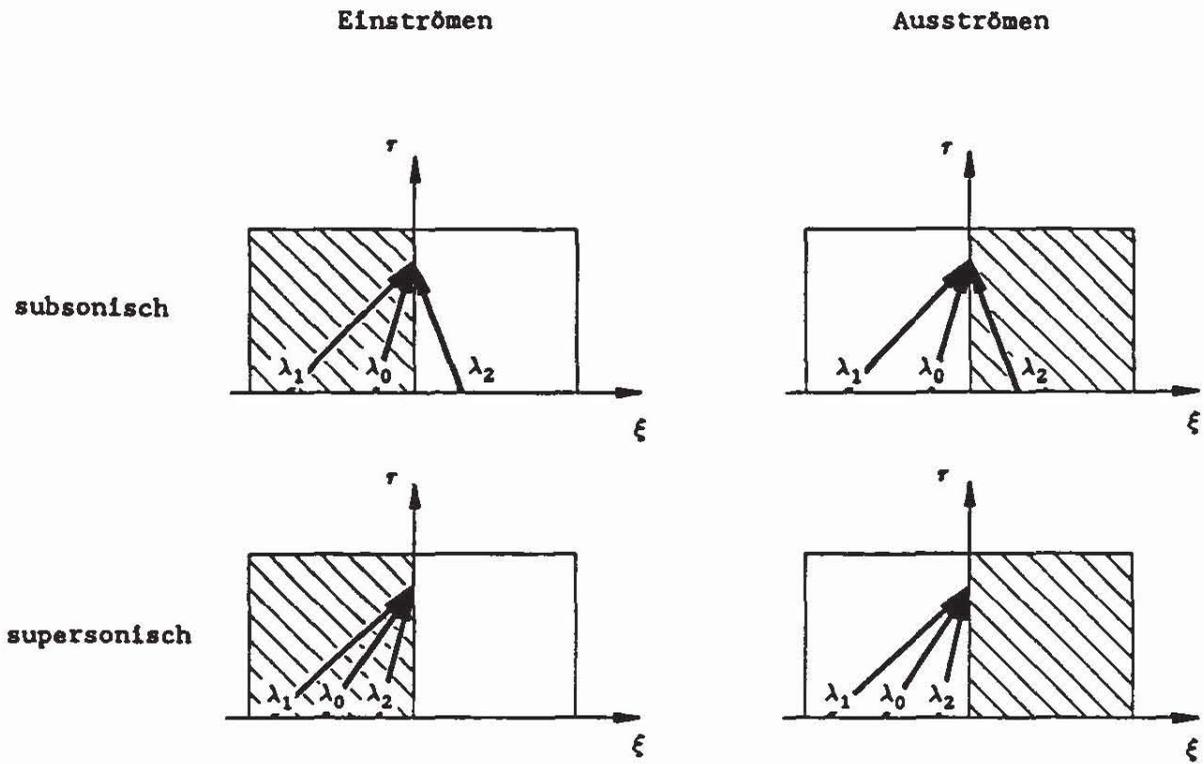


Bild 3.5-2: Charakteristische Strömungszustände am Fernfeldrand

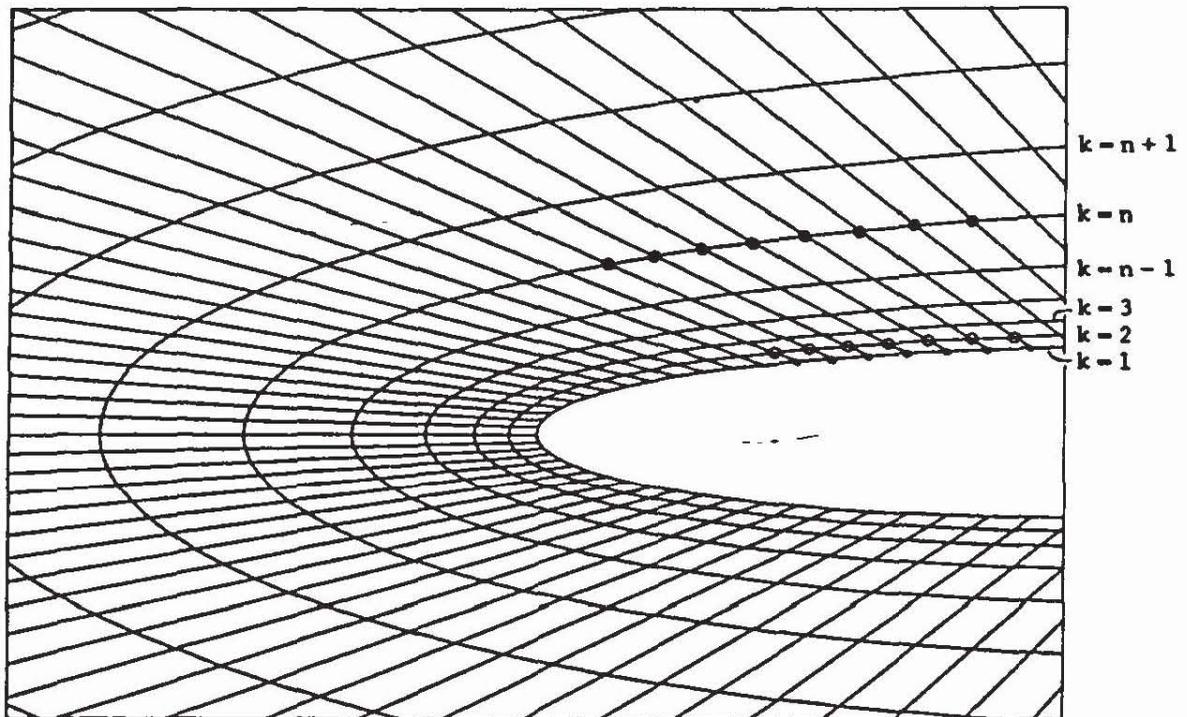


Bild 4.2-1: Randbedingungen für elliptischen Netzgenerierungsalgorithmus

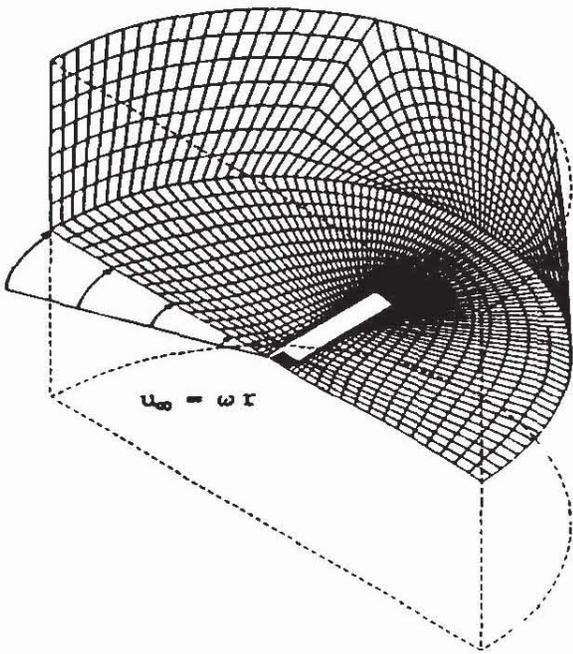


Bild 4.3-1: O-O-Netz,  
zylindrische Außenkontur

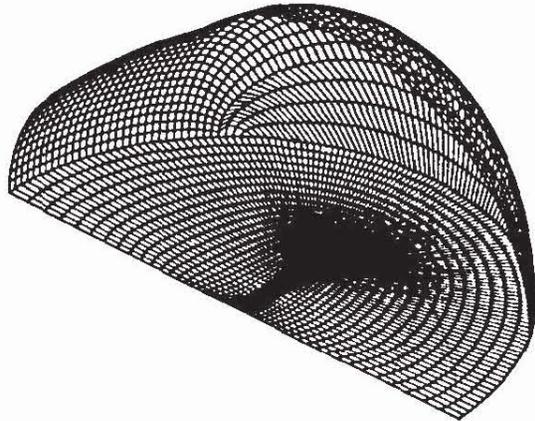


Bild 4.3-2: O-O-Netz,  
ellipsoide Außenkontur (110.000 Zellen)

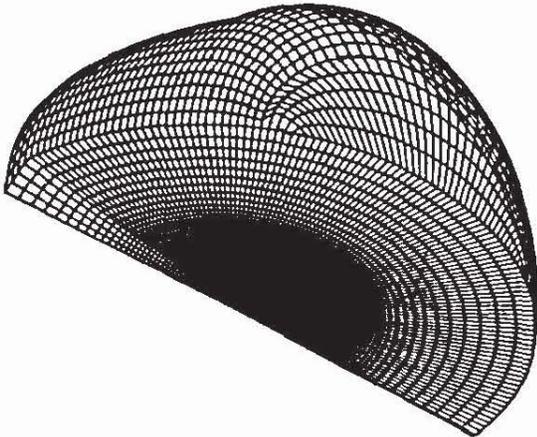


Bild 4.3-3: O-O-Netz, ellipsoide  
Außenkontur mit  
globaler Erweiterung  
(200.000 Zellen)

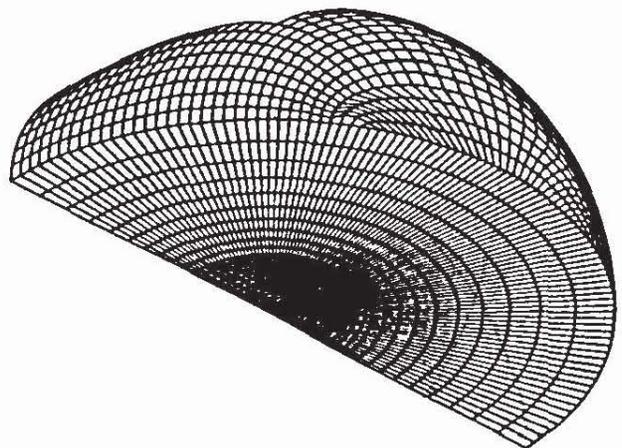


Bild 4.3-4: O-O-Netz, ellipsoide  
Außenkontur mit  
globaler Erweiterung  
(60.000 Zellen)

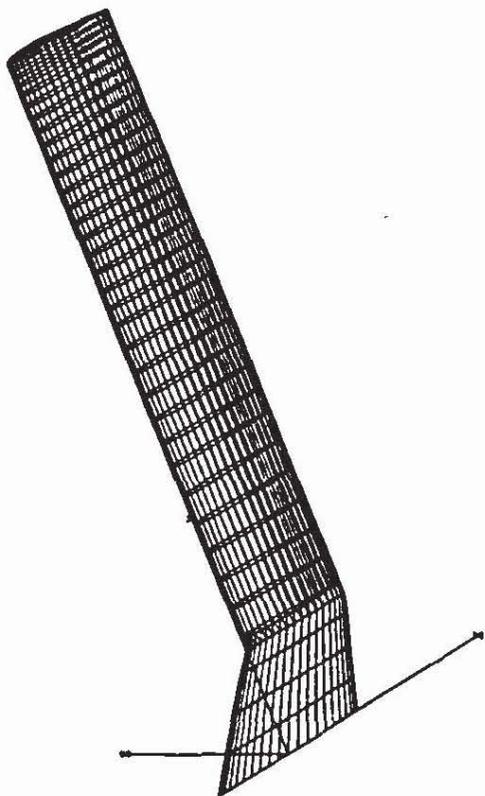


Bild 4.3-5: Oberflächendiskretisiertes Rotorblatt

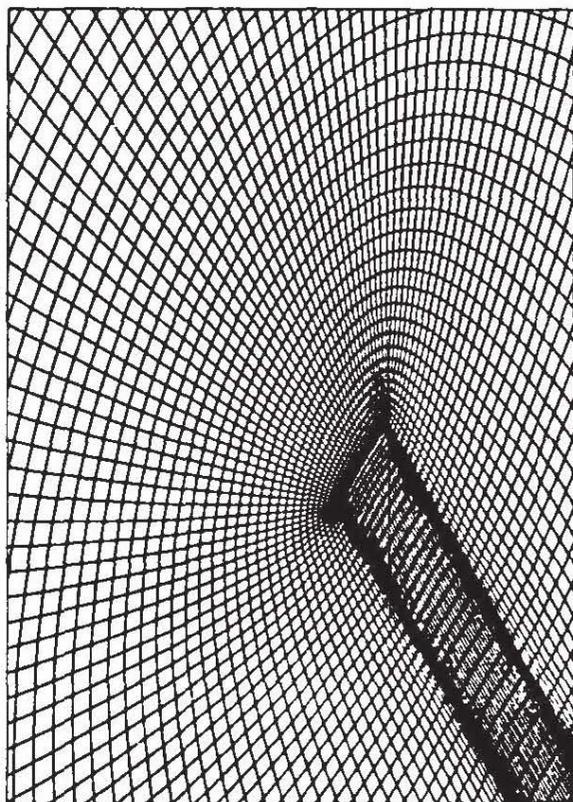


Bild 4.3-6: Blattspitzenbereich

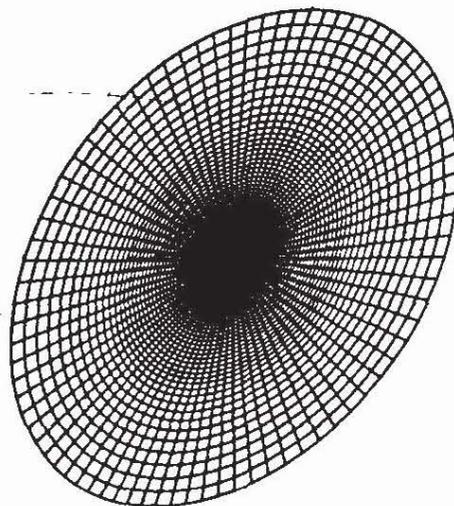


Bild 4.3-7: Periodizitätsebene

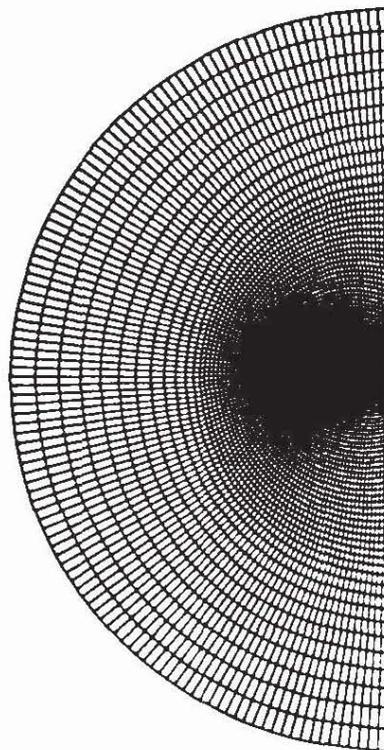
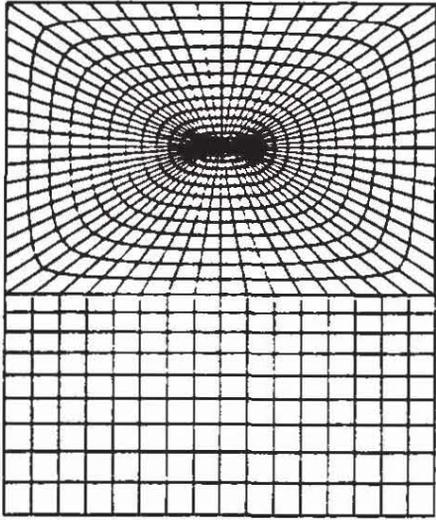
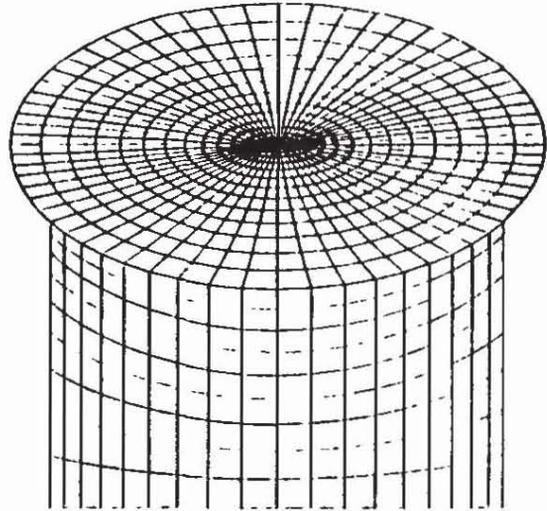


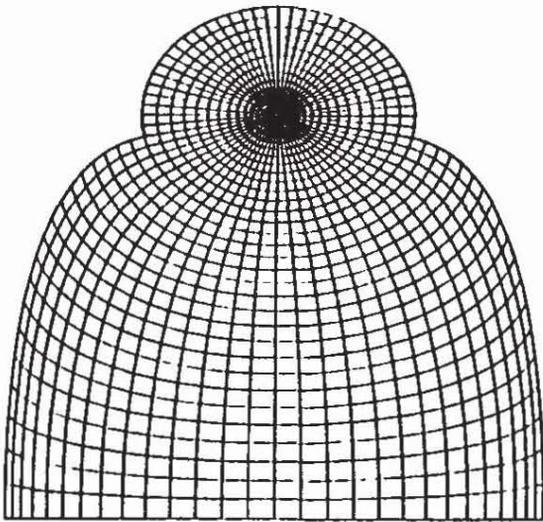
Bild 4.3-8: Rotorkreisscheibe



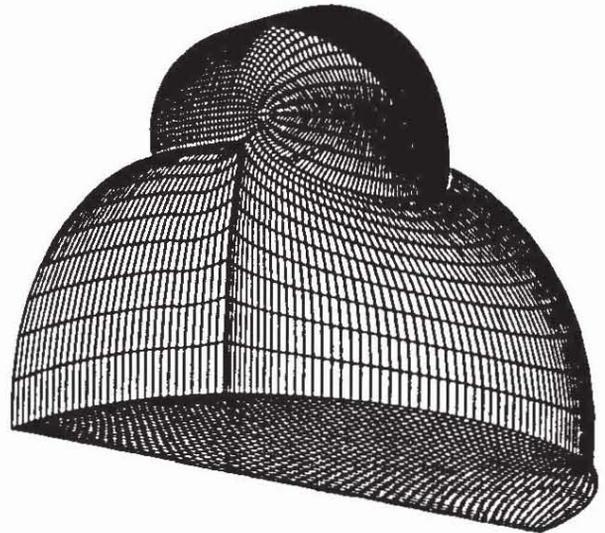
**Bild 4.3-9: Blockstrukturiertes Netz mit zylinderförmigem Grundkörper (Symmetrieebene)**



**Bild 4.3-10: Blockstrukturiertes Netz mit ellipsoidem Grundkörper (Symmetrieebene)**



**Bild 4.3-11: Blockstrukturiertes Netz mit ellipsoidem Grundkörper und erweitertem Bodenteil (Symmetrieebene)**



**Bild 4.3-12: Blockstrukturiertes Netz mit ellipsoidem Grundkörper und erweitertem Bodenteil (Globalansicht)**



a)



b)



c)



d)

Bild 5.1-1: Zeitliche Entwicklung des Anfahrvorganges am Modellrotor

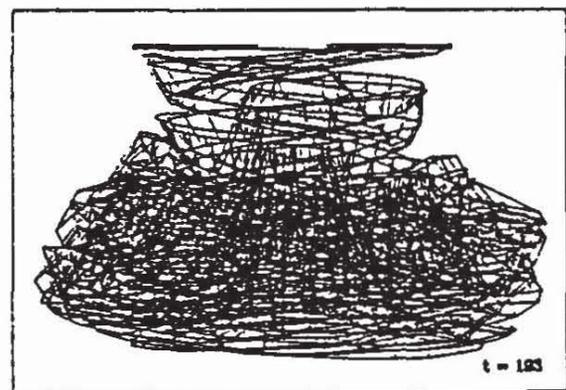
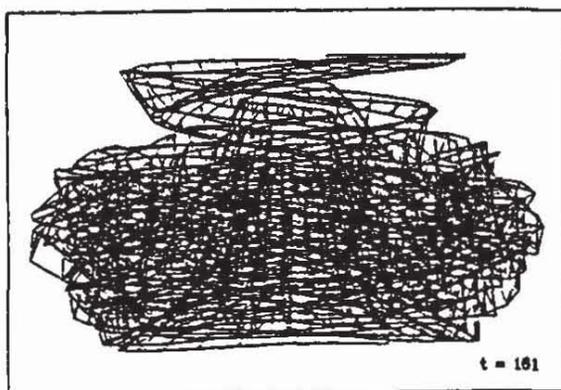
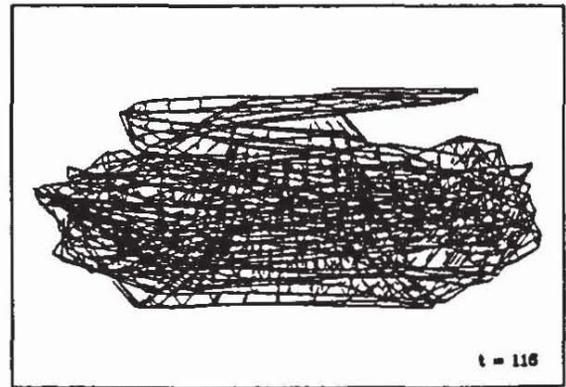
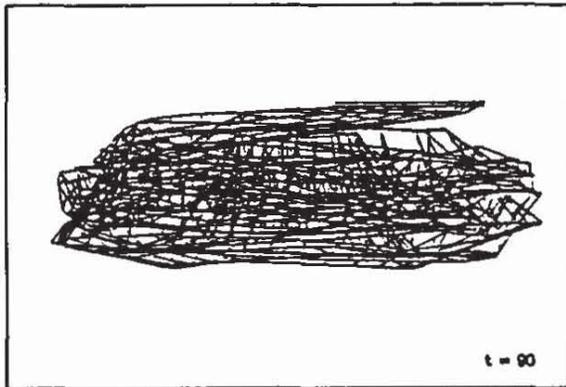
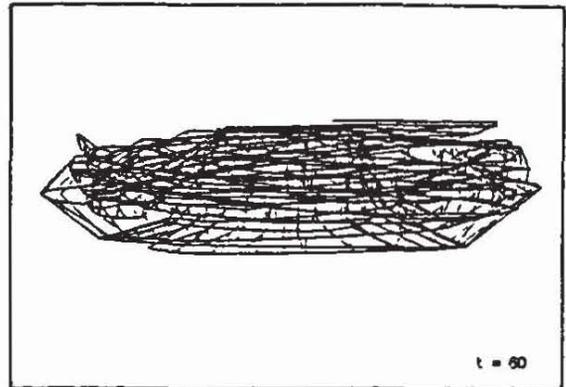
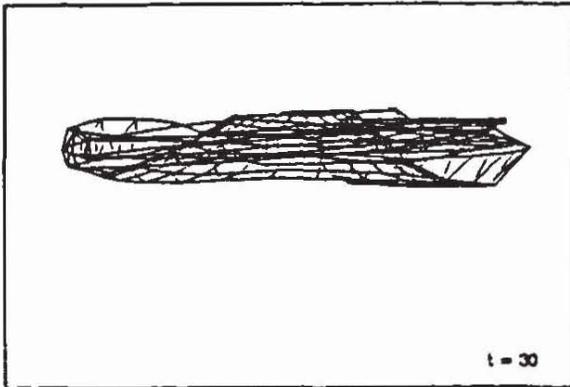


Bild 5.1-3: Simulation des Anfahrvorganges mit einem Wirbelleiter-Verfahren (nach [154])

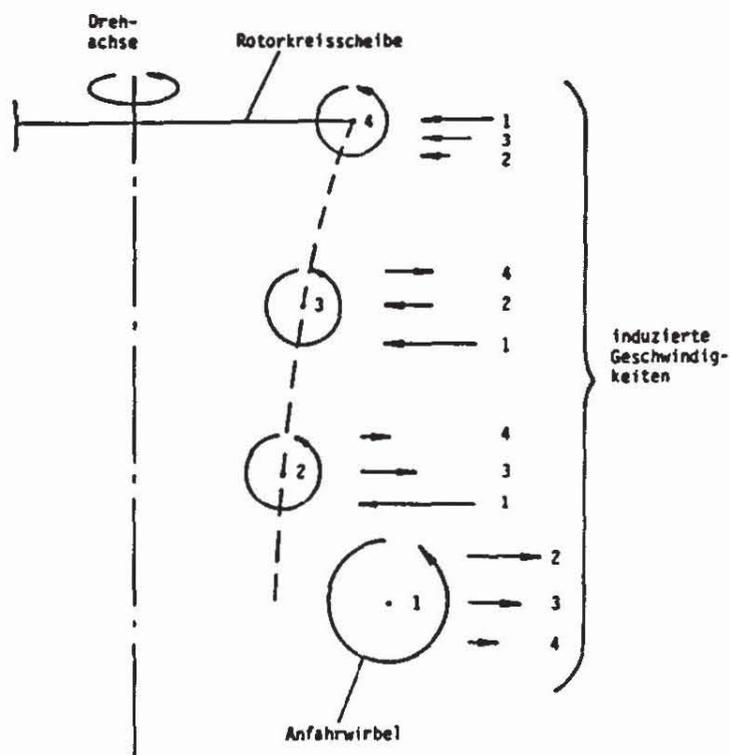


Bild 5.1-2: Gegenseitige Beeinflussung der Randwirbel im Nachlauf eines Hubschrauberrotors (Prinzipische Skizze nach [153])

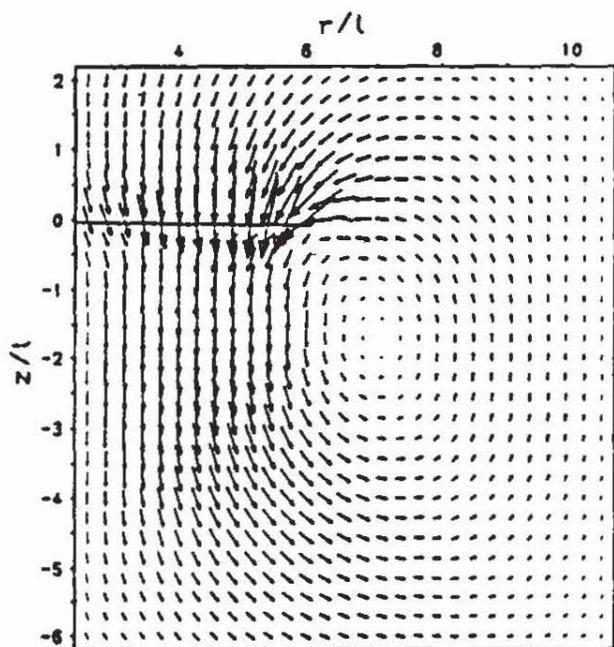


Bild 5.1-4: Berechnete Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf

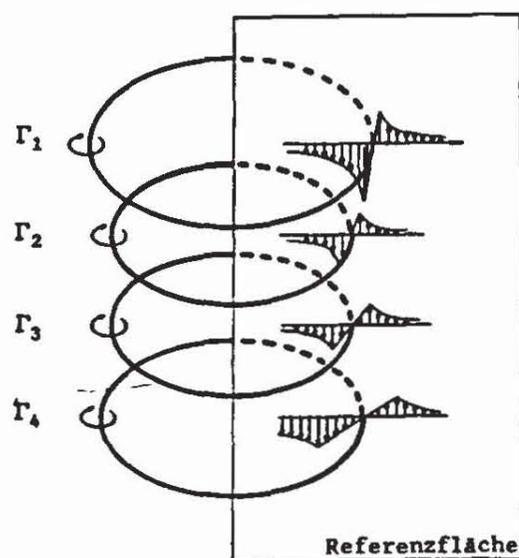


Bild 5.1-5: Überlagerung von Potentialwirbeln (Modellproblem)

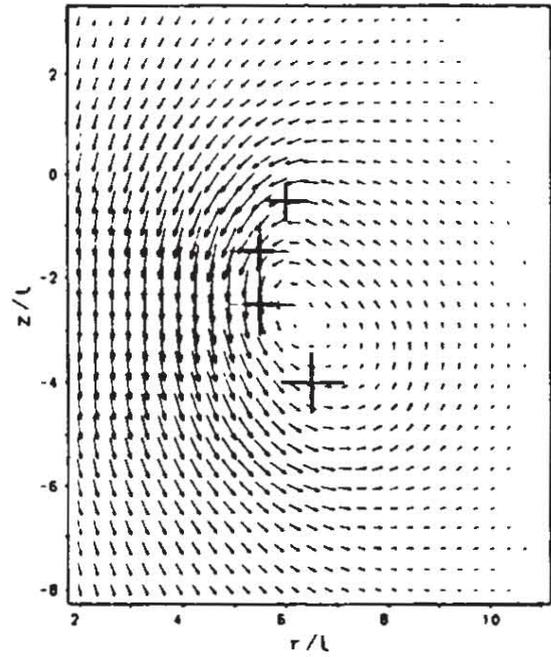
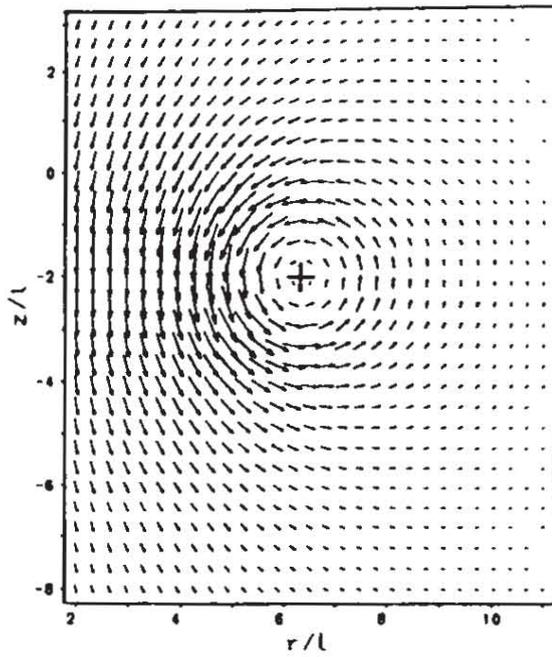


Bild 5.1-6: Einzelner Potentialwirbel (Geschwindigkeitsverteilung)

Bild 5.1-7: Vier überlagerte Potentialwirbel (Geschwindigkeitsverteilung)

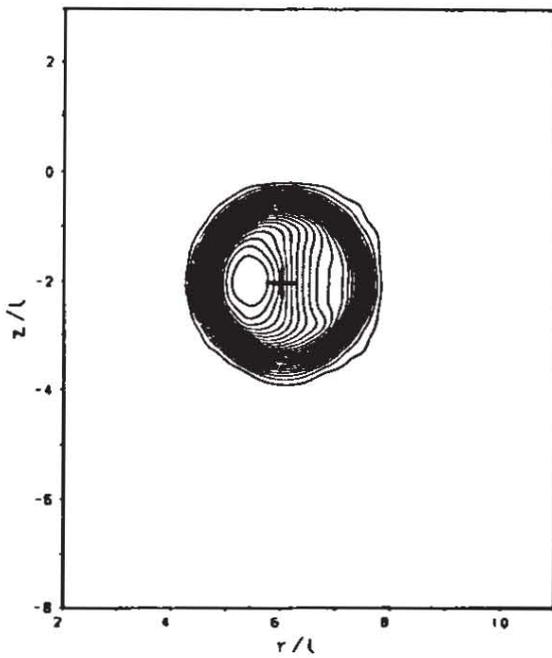


Bild 5.1-8: Einzelner Potentialwirbel (Zirkulationsdichtevert.)

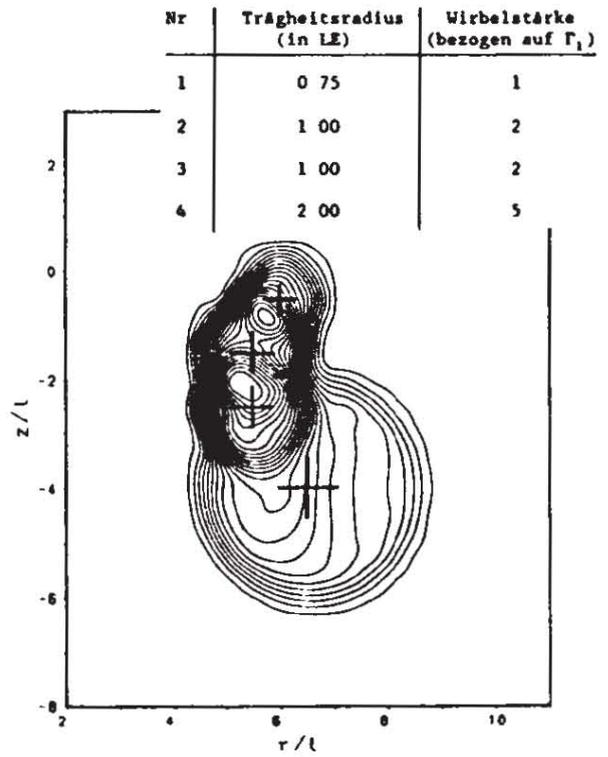


Bild 5.1-9: Vier überlagerte Potentialwirbel (Zirkulationsdichteverteilung)

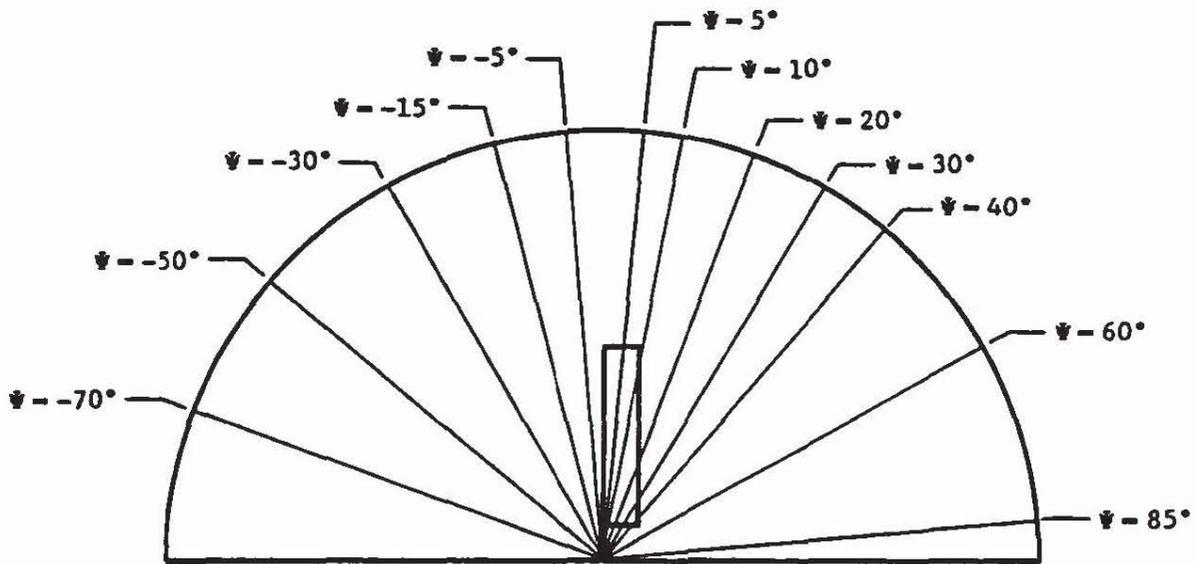


Bild 5.1-10: Lage der Schnittebenen bezogen auf das betrachtete Blatt

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

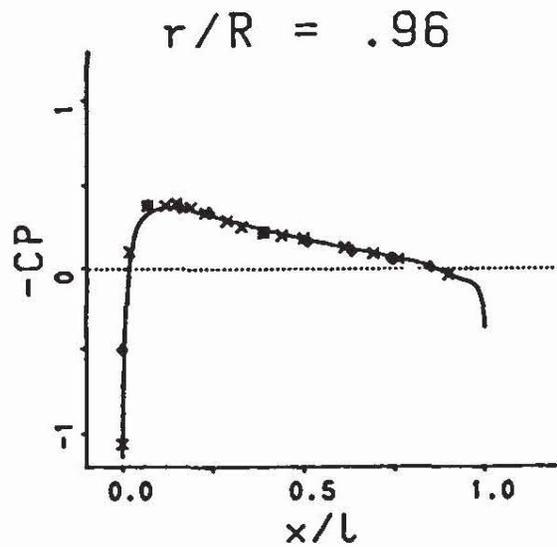
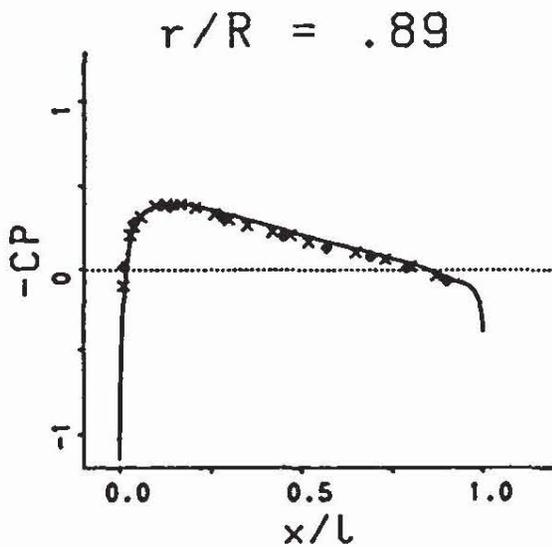
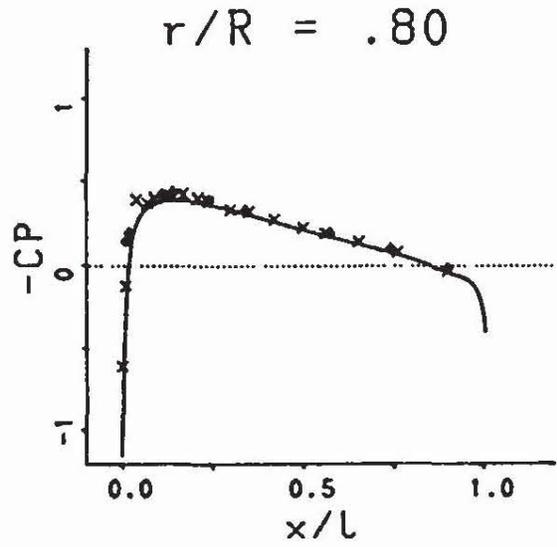
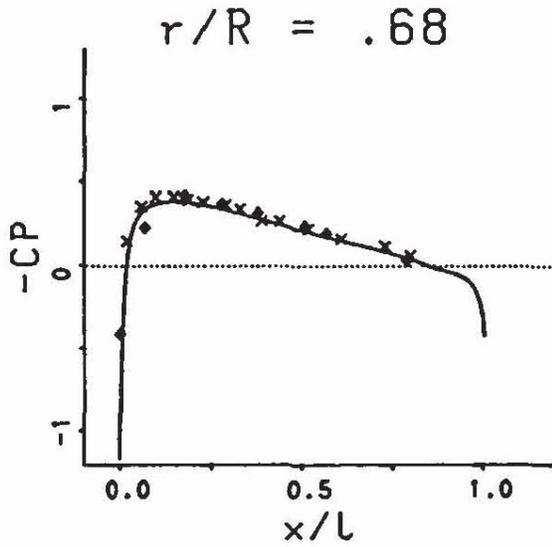
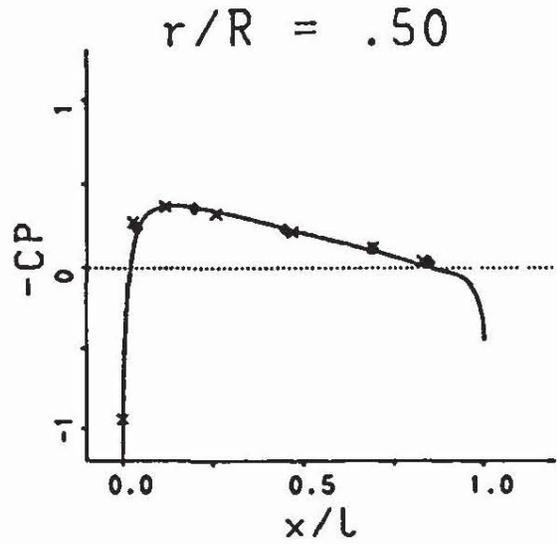


Bild 5.2-1: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t,lp} = 0.52$  und  $\theta_c = 0^\circ$   
 Feines Netz mit  $128 \times 34 \times 25$  Zellen

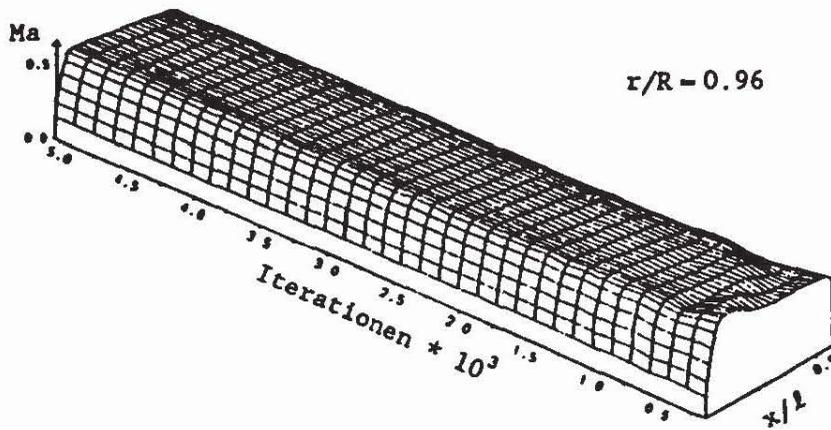


Bild 5.2-2: Zeitliche Entwicklung der Machzahlverteilung im Profilschnitt

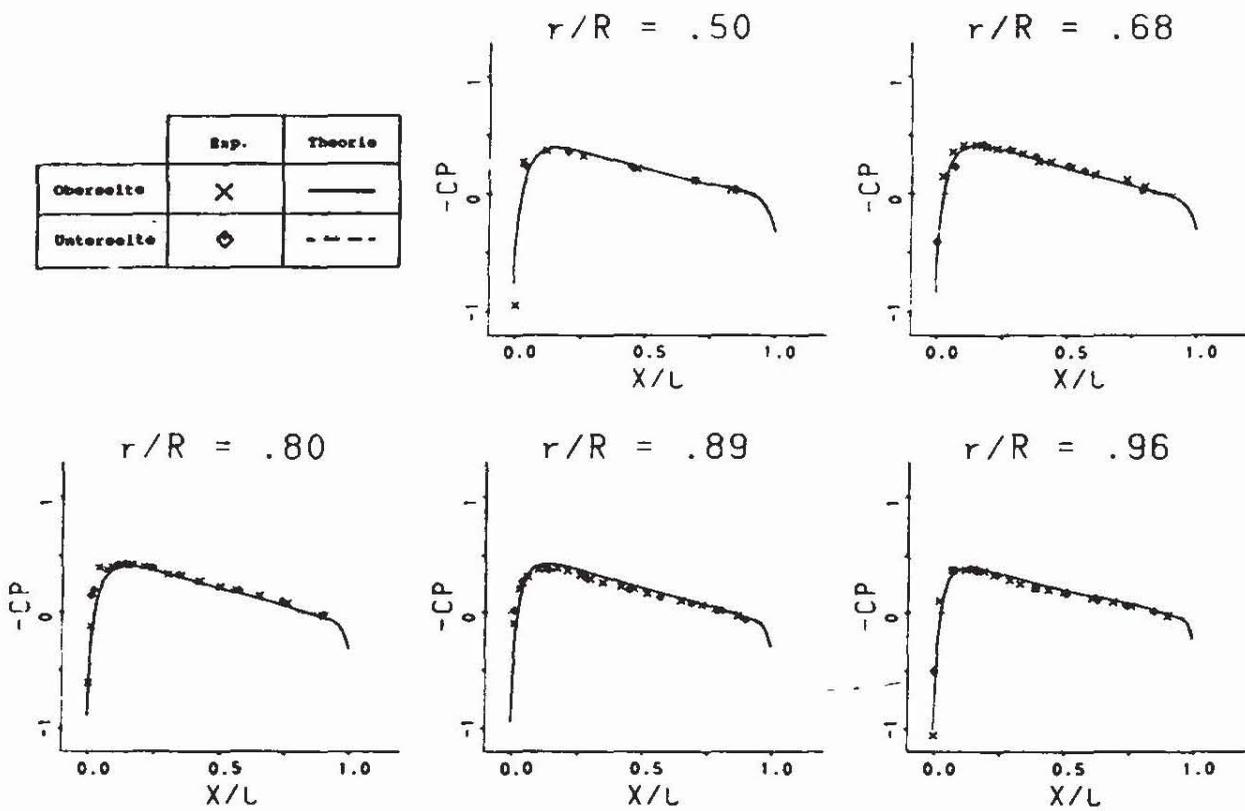
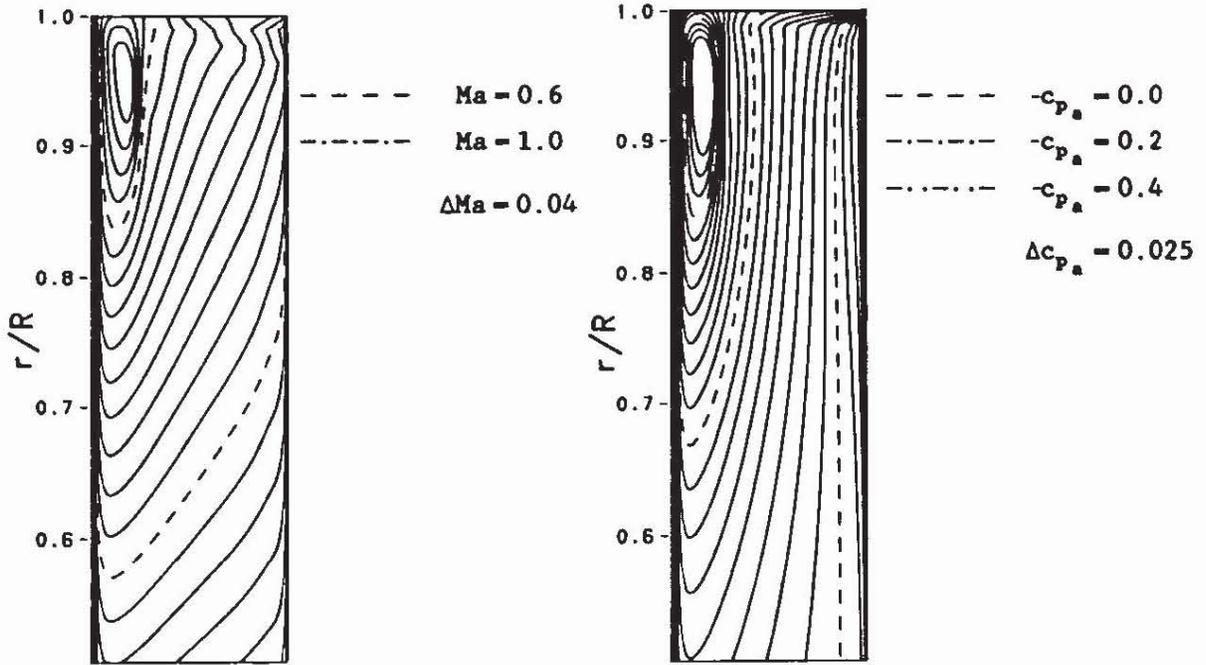
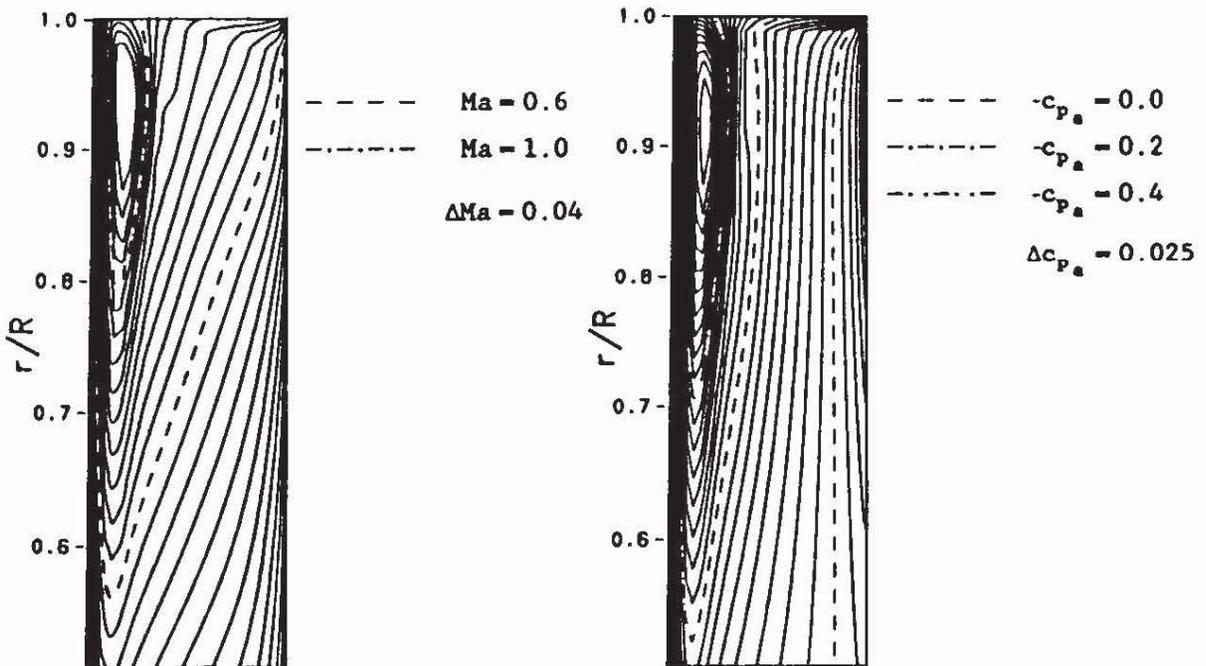


Bild 5.2-3: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.52$  und  $\theta_c = 0^\circ$ . Grobes Netz mit  $64 \times 34 \times 17$  Zellen



a) Mit Blatt - Nachlauf - Interferenz



b) Ohne Blatt - Nachlauf - Interferenz

Bild 5.2-4: Machzahl- und Druckverteilung auf der Blattoberseite des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$ . Auswirkung der Blatt - Nachlauf - Interferenz

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

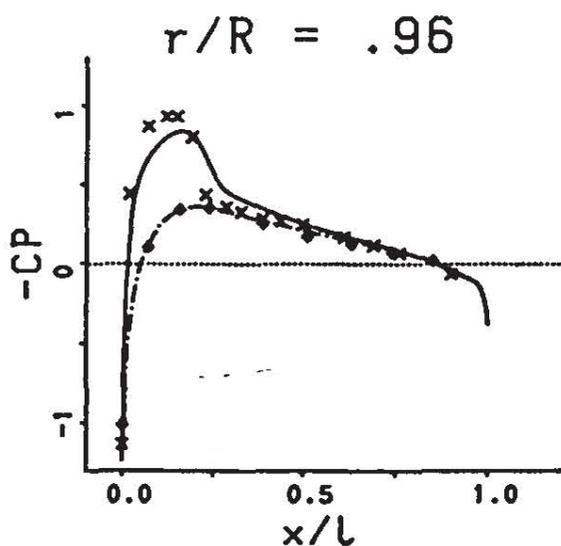
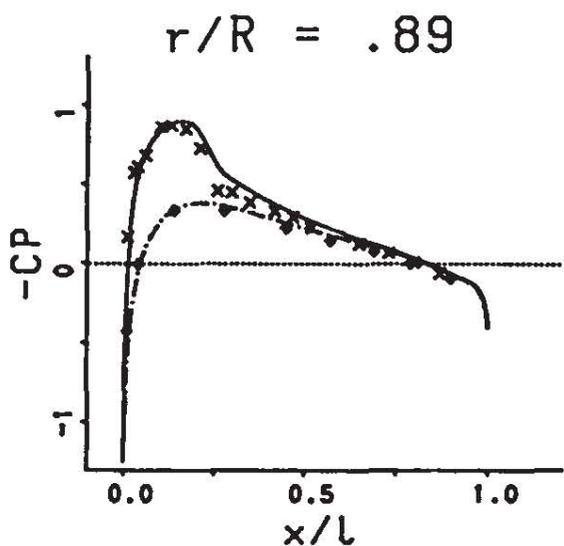
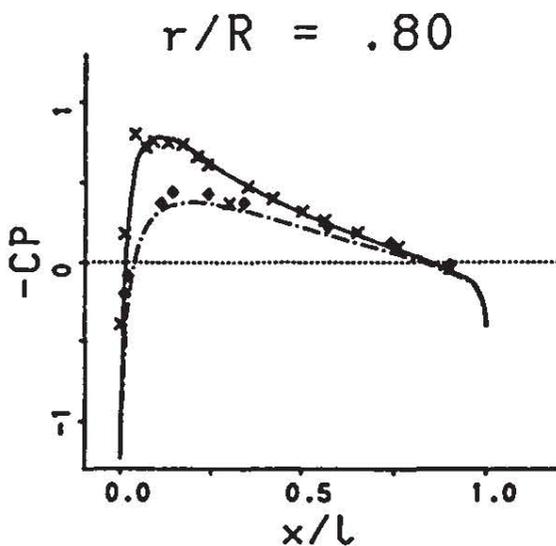
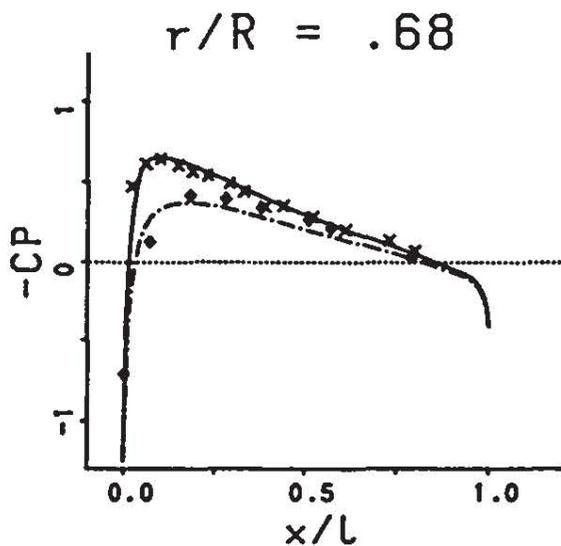
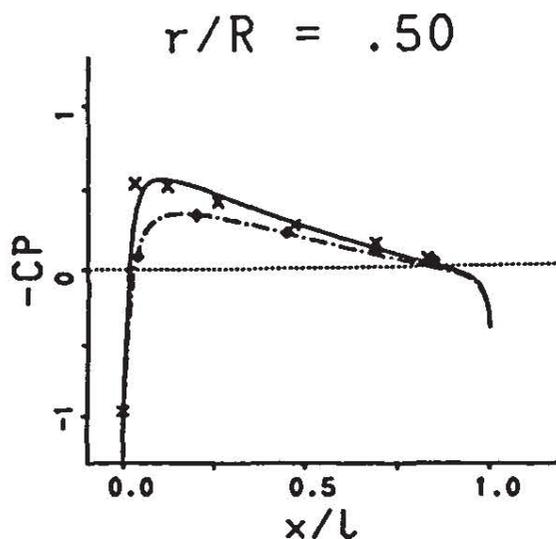


Bild 5.2-5: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t1p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$

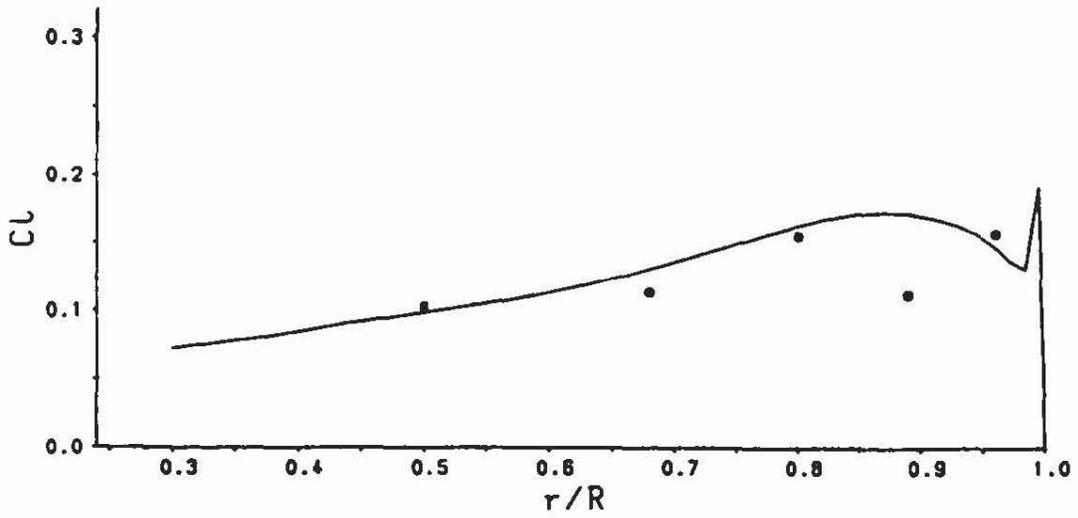
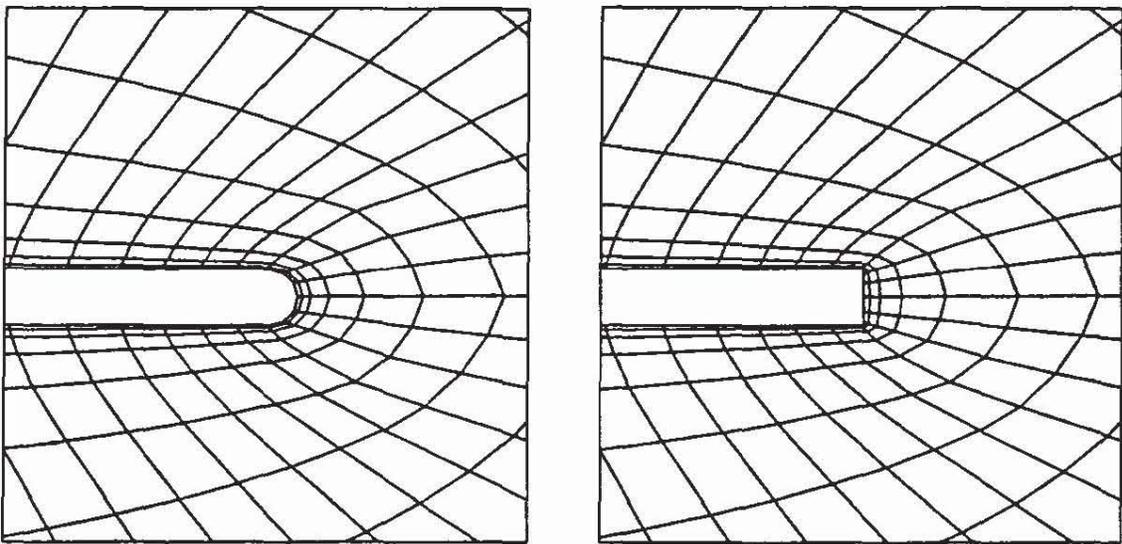


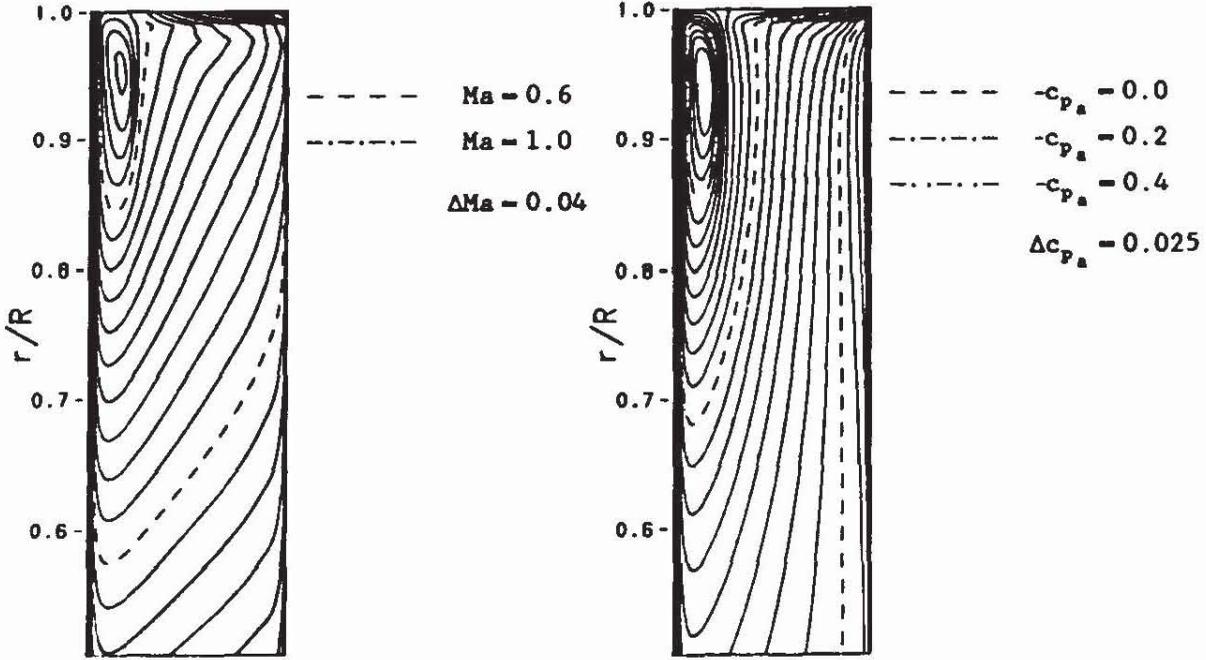
Bild 5.2-6: Radialer Verlauf des Auftriebsbeiwertes für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$



a) abgerundet

b) abgeschnitten

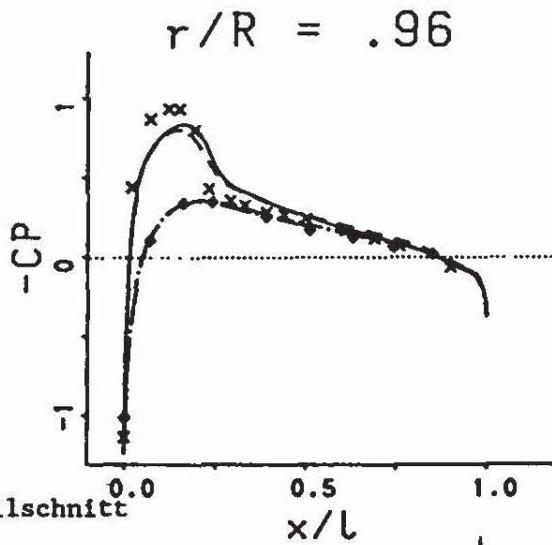
Bild 5.2-7: Geometrische Ausführungen des Blattendes beim Modellrotor



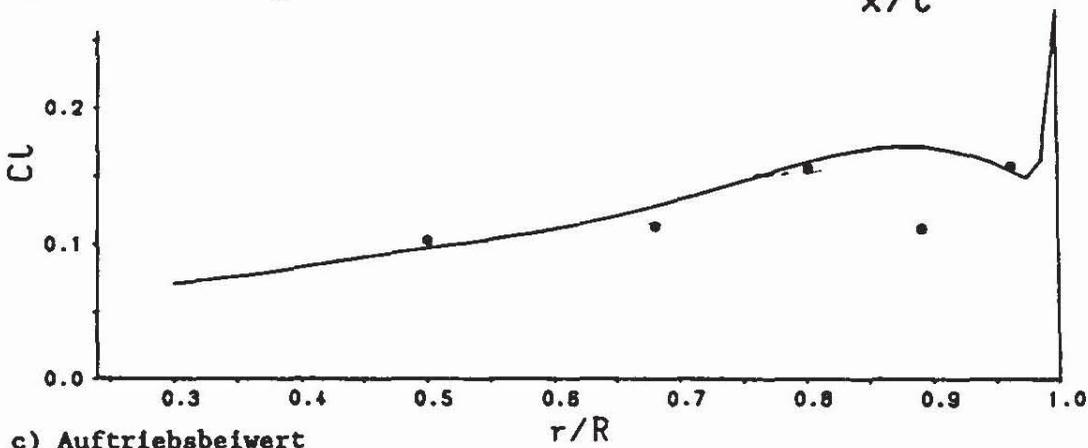
a) Machzahl- und Druckverteilung auf der Oberseite

	Exp.	Theorie
Oberseite	×	— 1) - - - 2)
Unterseite	◇	- · - · 1) · · · · 2)

- 1) rundes Blattende
- 2) abgeschnittenes Blattende



b) Druckverteilung im äußersten Profilschnitt



c) Auftriebsbeiwert

Bild 5.2-8: Ergebnisse für den Modellrotor mit abgeschnittenem Blattende bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$

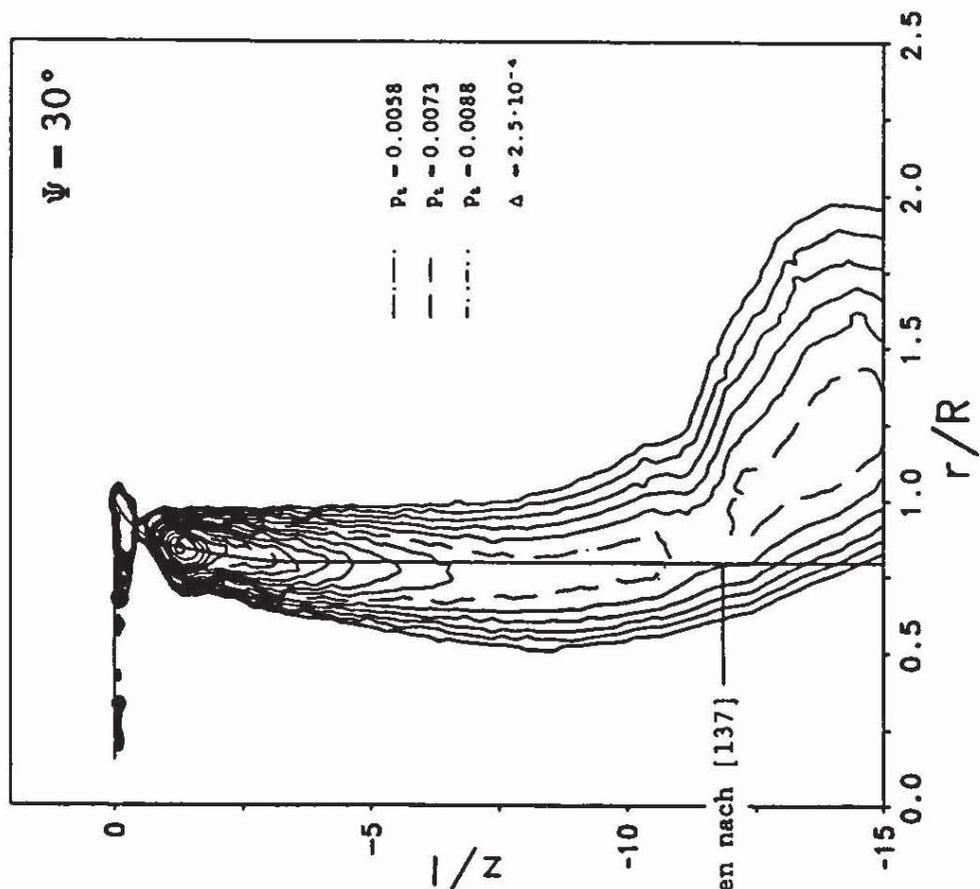


Bild 5.2-10: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

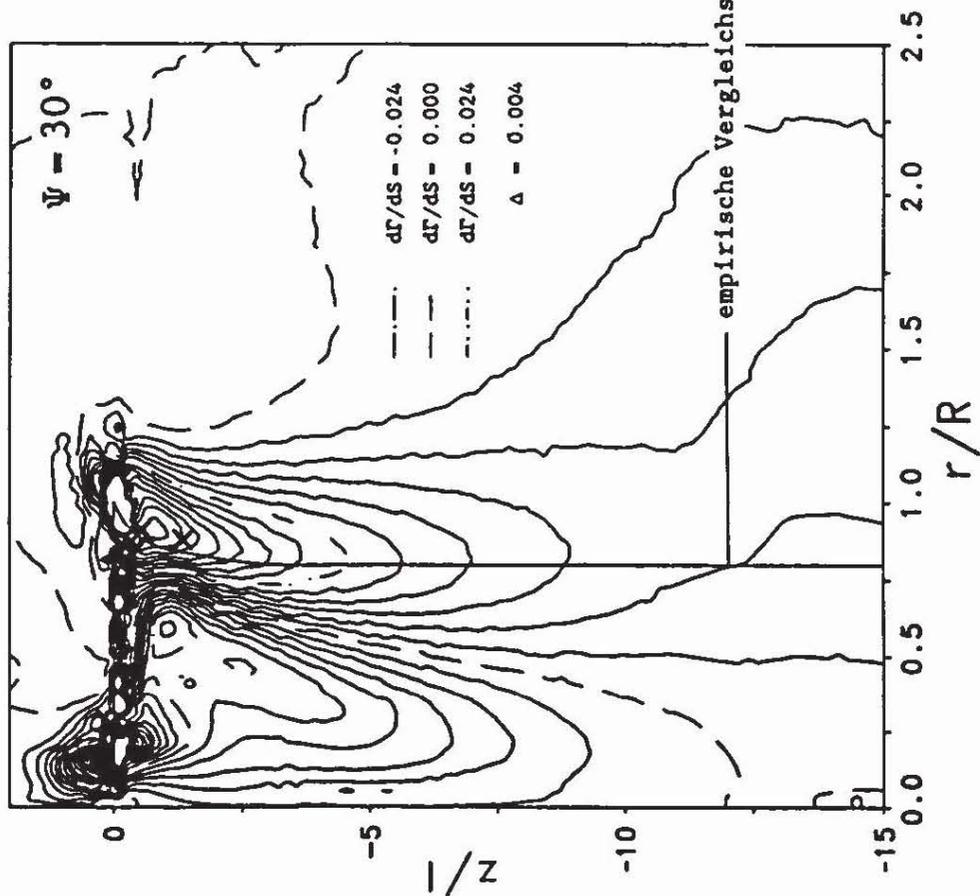


Bild 5.2-9: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

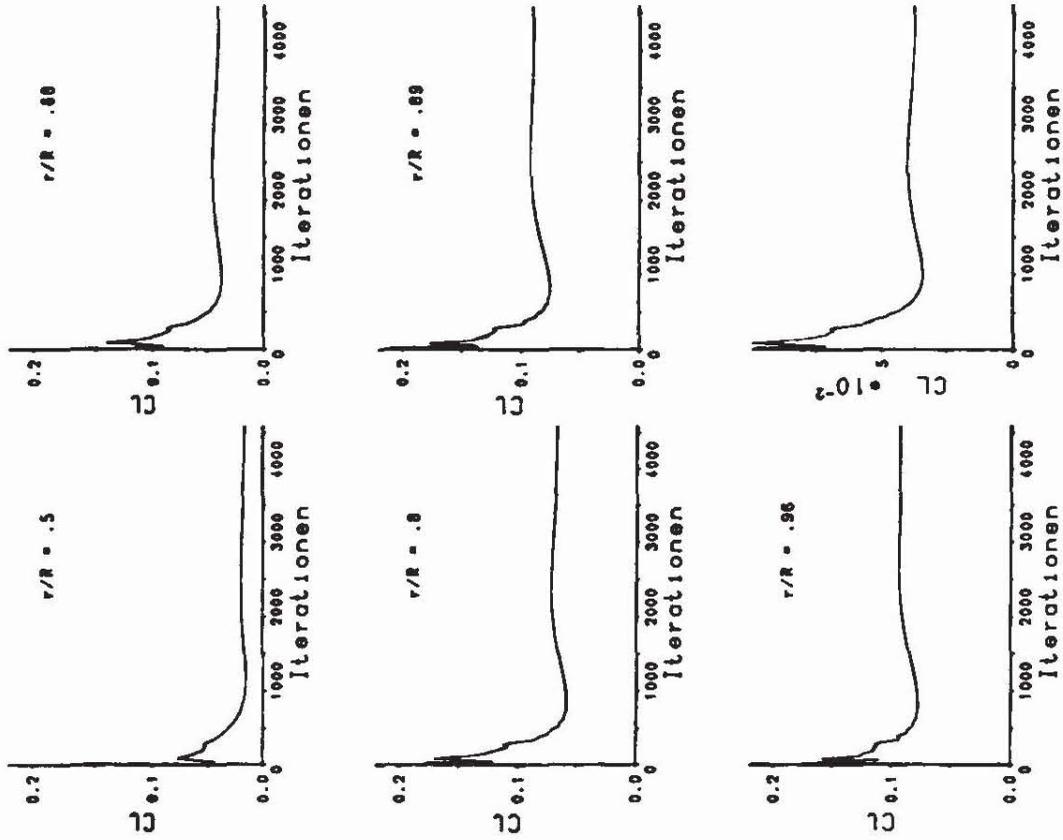


Bild 5.2-12: Konvergenzverlauf der Auftriebsbeiwerte

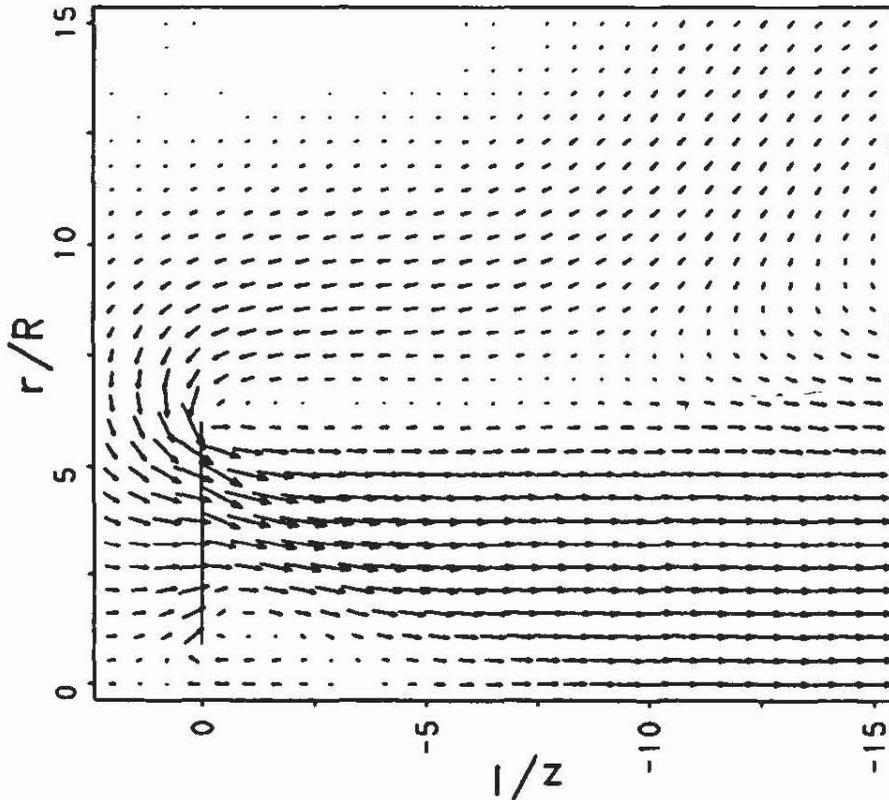


Bild 5.2-11: Induzierte Geschwindigkeitsverteilung  
im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

	Exp.	Theorie
Oberseite	×	— 1) - - - 2)
Unterseite	◇	- · - · 1) - · - · 2)

- 1) feines Netz (128 × 34 × 34 Zellen)  
 2) grobes Netz (64 × 34 × 17 Zellen)

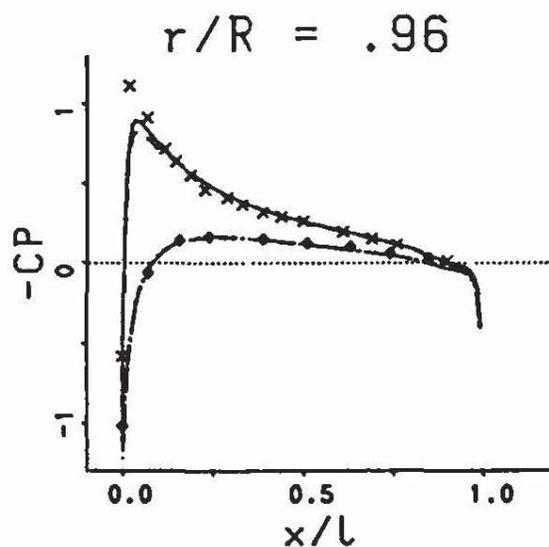
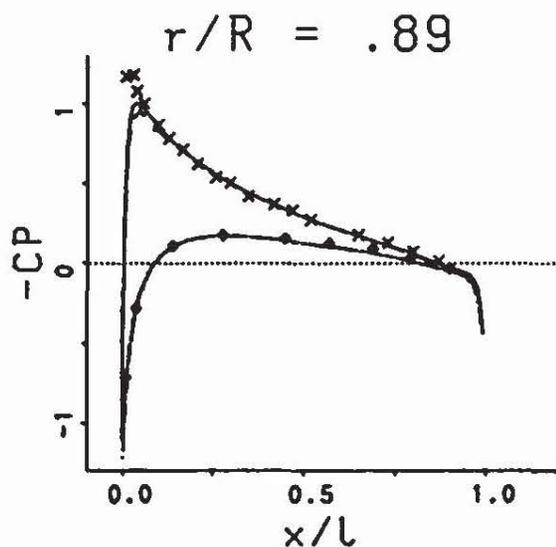
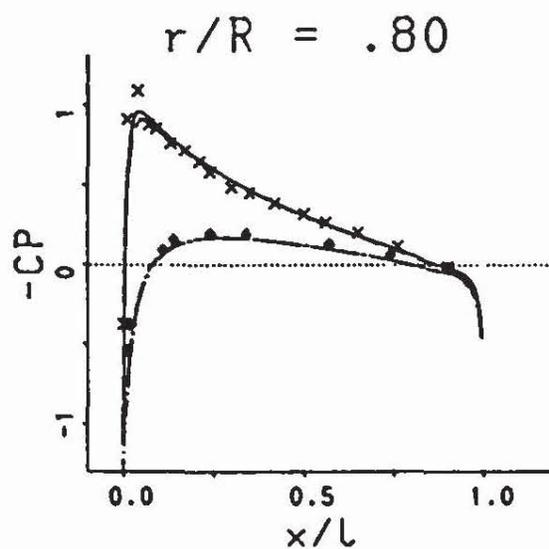
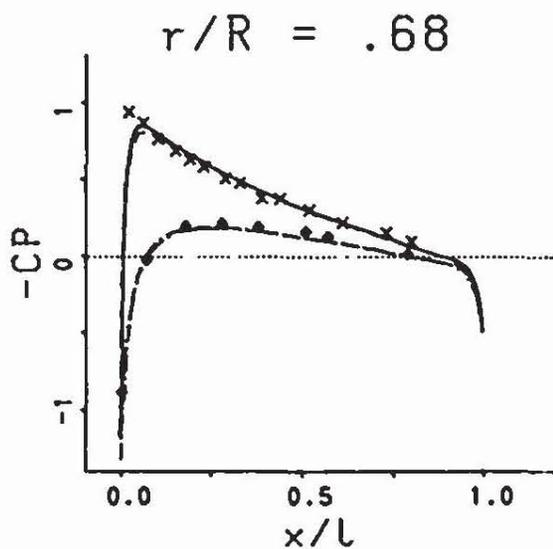
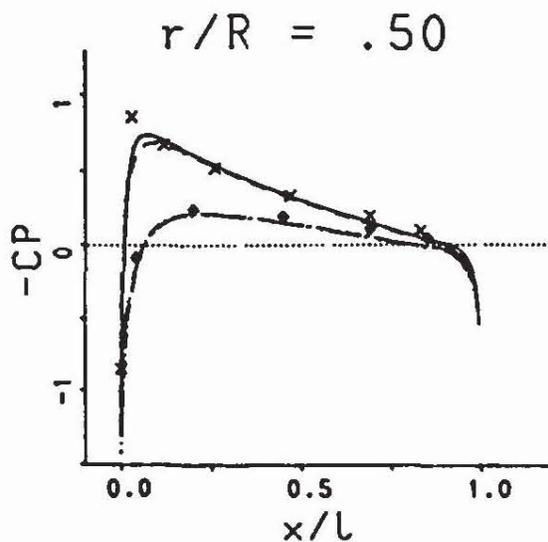


Bild 5.2-13: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$   
 Vergleich zwischen feinem und grobem Netz

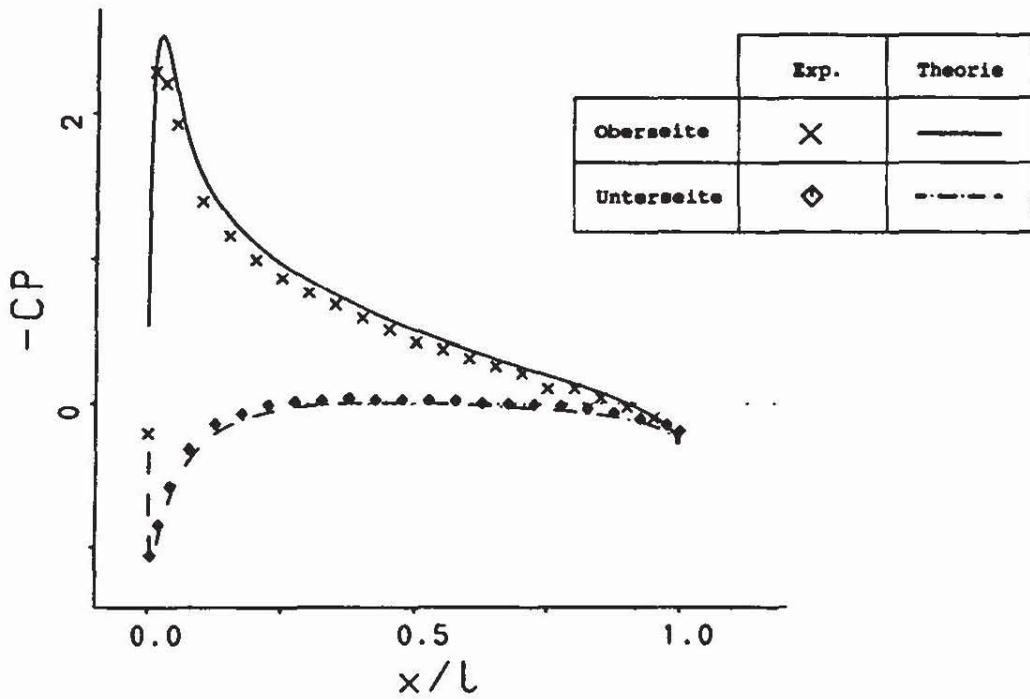


Bild 5.2-14: Druckverteilung für ein NACA0012 - Profil bei  $Ma = 0.5$ ,  $\alpha = 6^\circ$  (zweidimensionales Modellproblem)

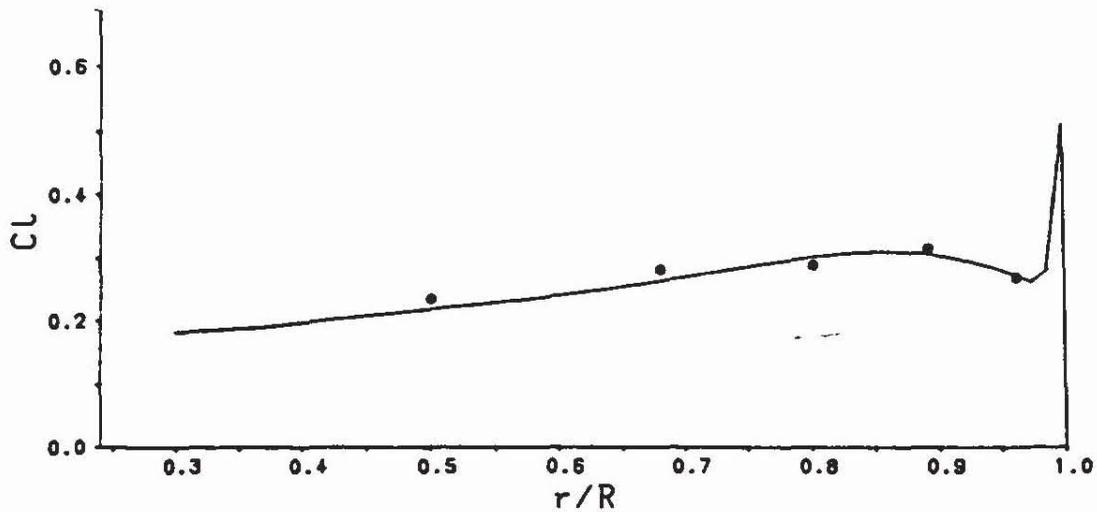


Bild 5.2-15: Radialer Verlauf des Auftriebsbeiwertes für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$

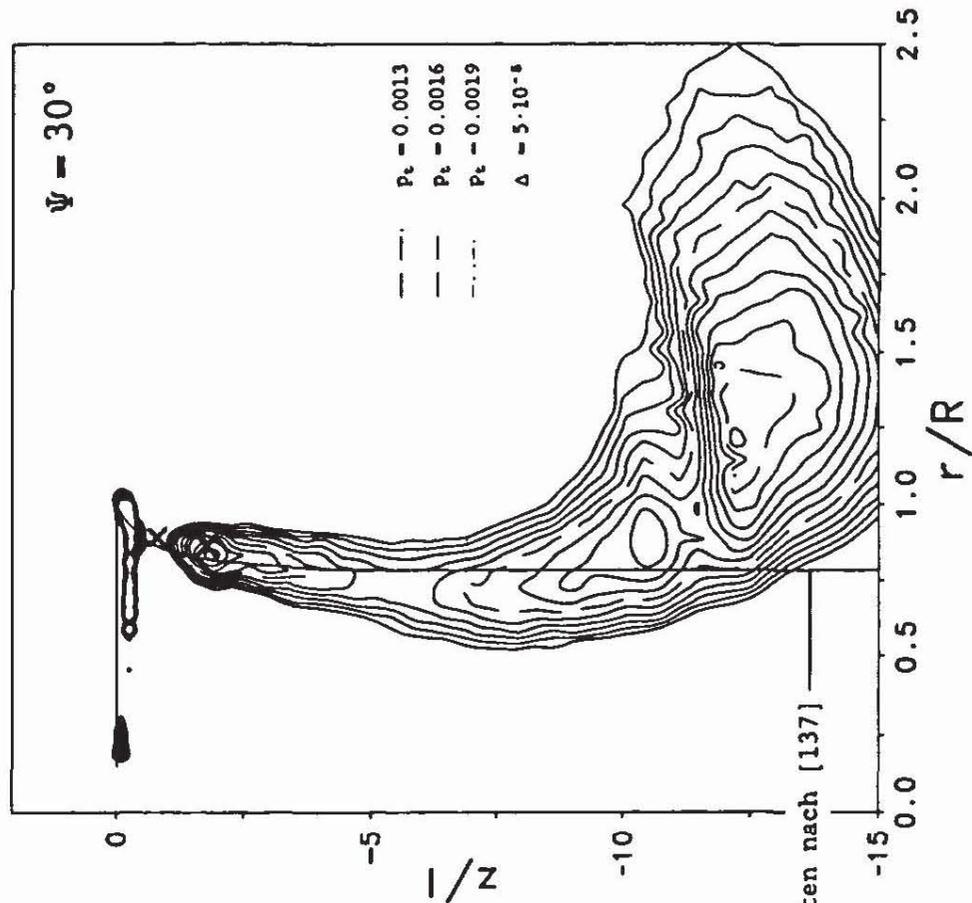


Bild 5.2-16: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

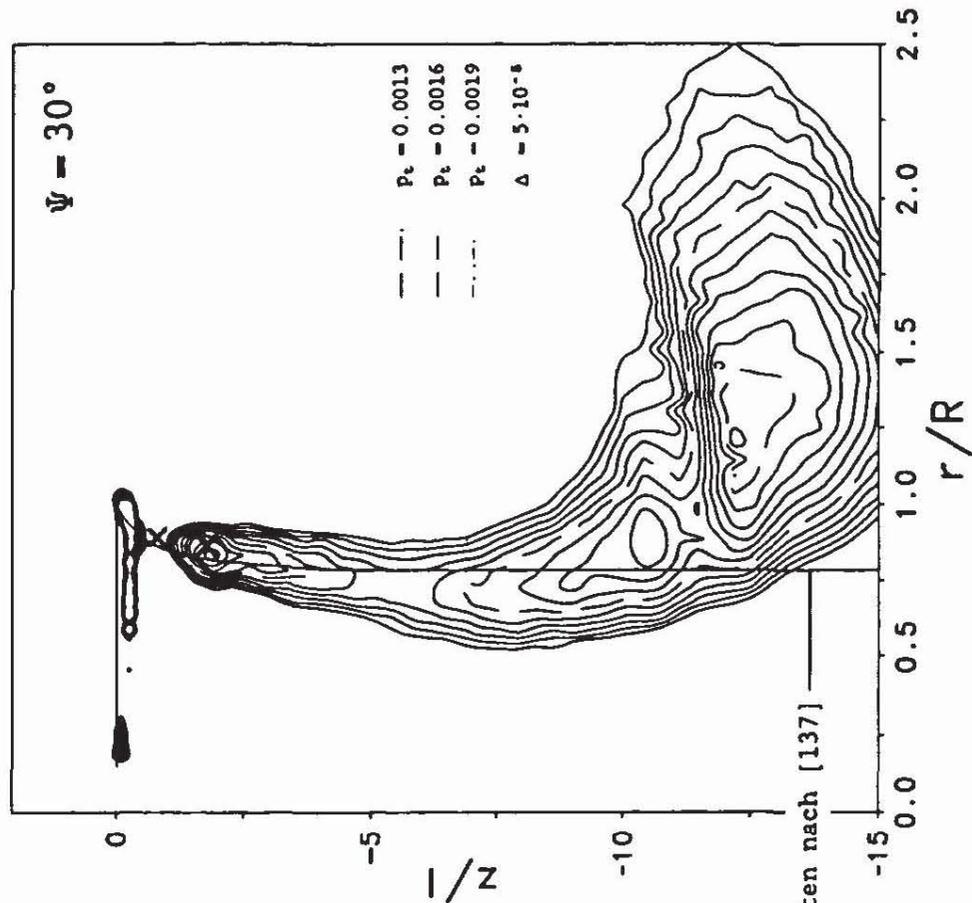


Bild 5.2-17: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

— feines Netz  
- - - - - grobes Netz

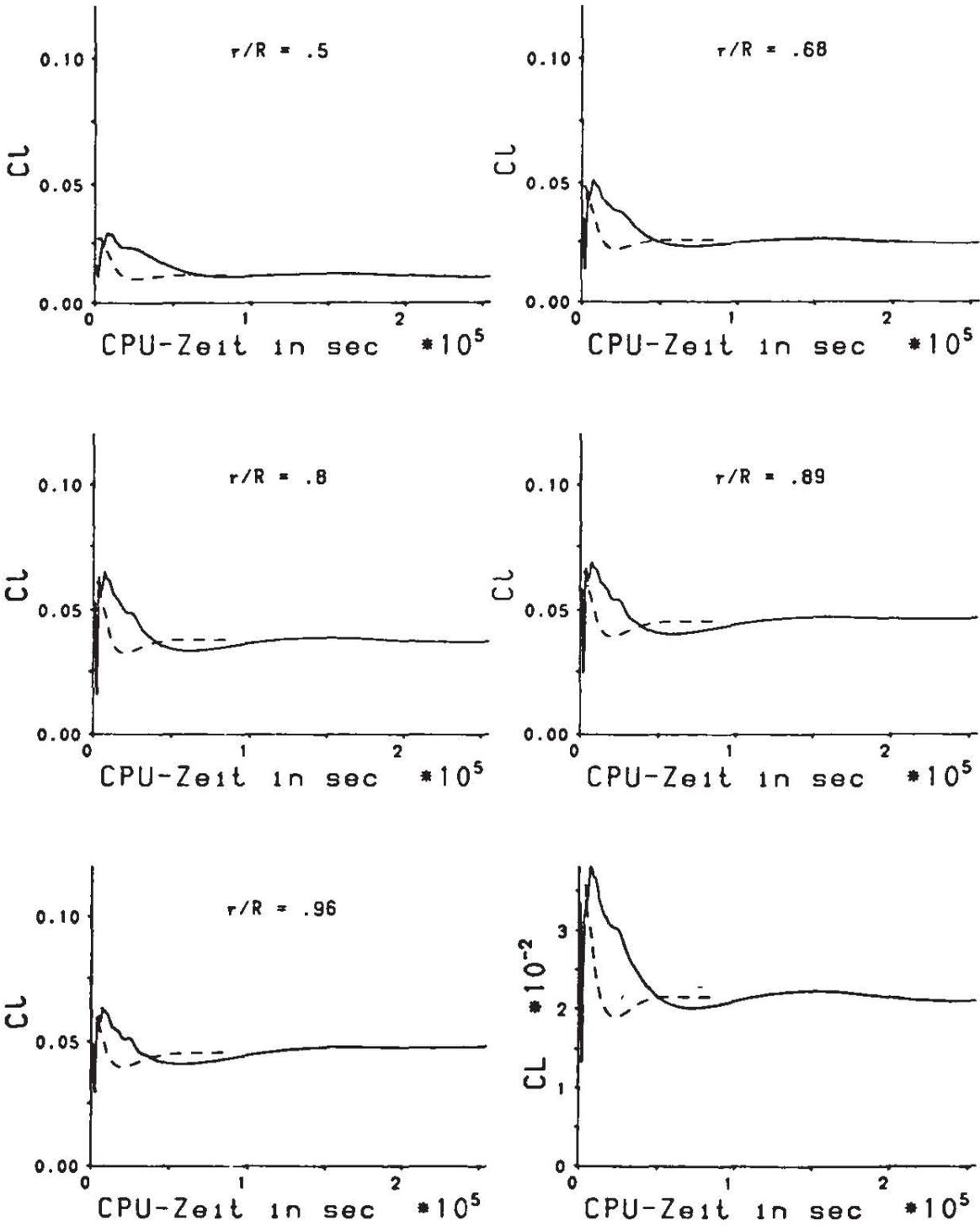


Bild 5.2-18: Zeitliche Entwicklung der Auftriebsbeiwerte. Vergleich zwischen feinem und grobem Netz

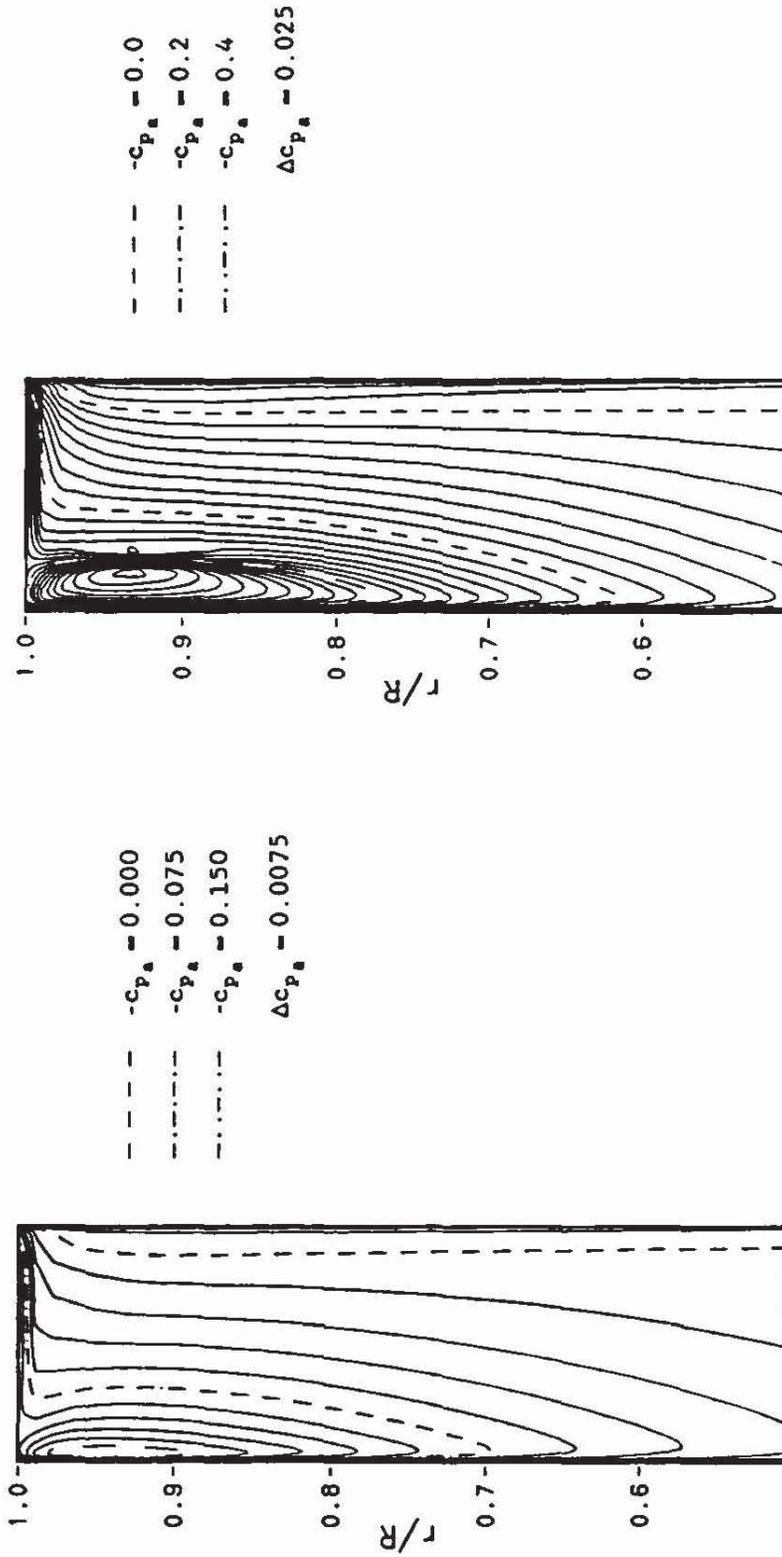


Bild 5.2-19: Druckverteilung auf der Blattoberseite des Modellrotors bei  $Ma_{t,ip} = 0.439$  und  $\theta_c = -8^\circ$

Bild 5.2-20: Druckverteilung auf der Blattoberseite des Modellrotors bei  $Ma_{t,ip} = 0.794$  und  $\theta_c = -8^\circ$

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

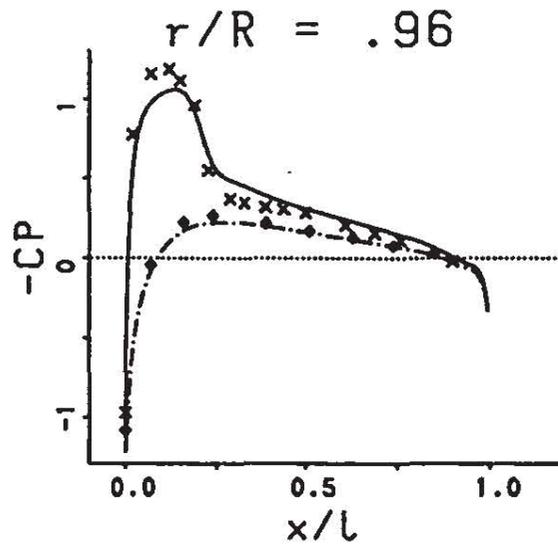
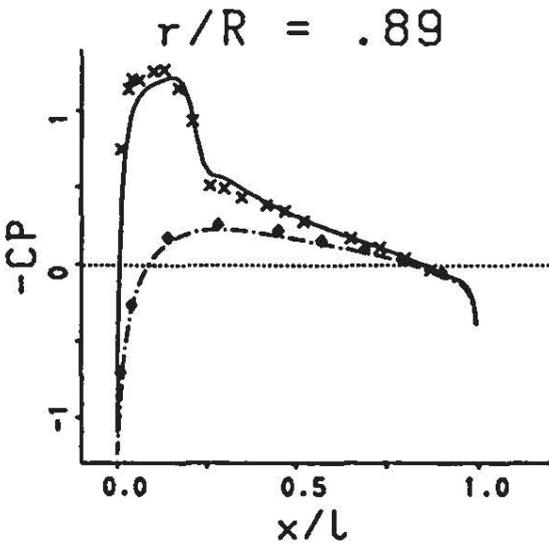
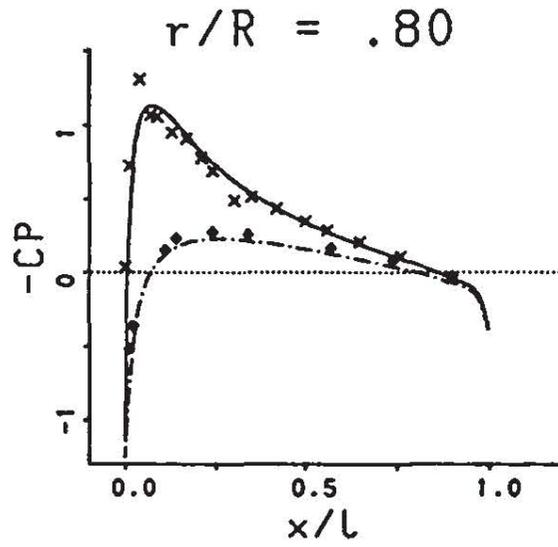
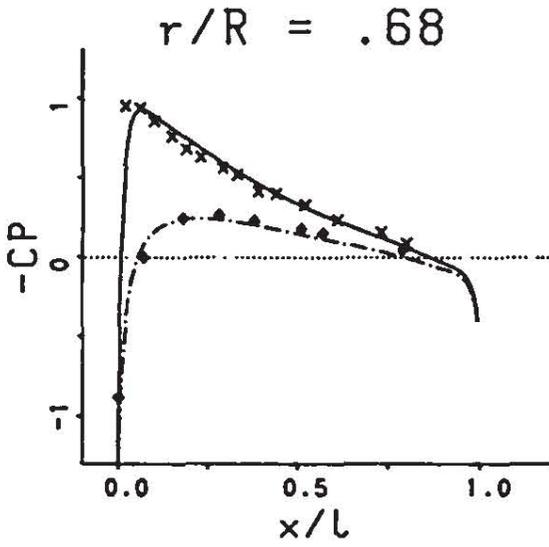
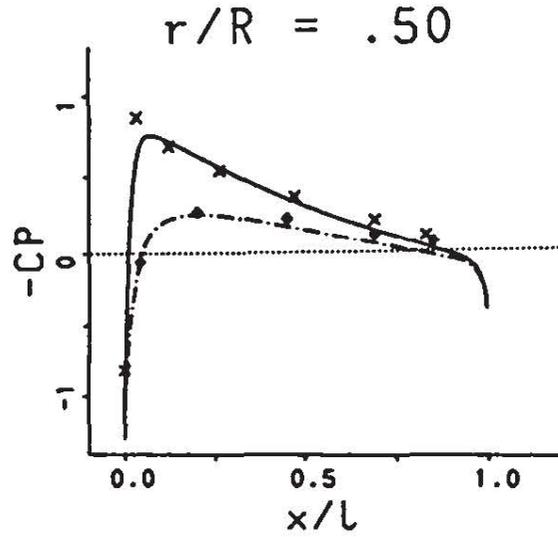


Bild 5.2-21: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t1p} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$

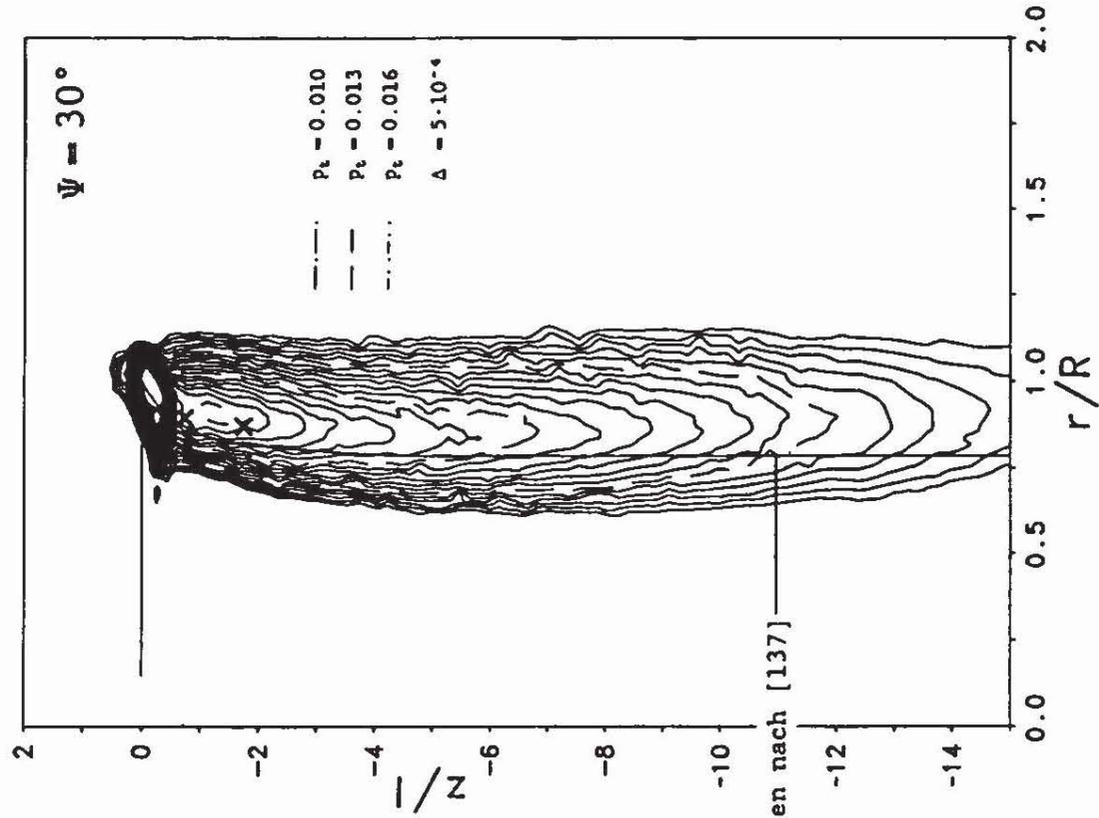


Bild 5.2-23: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

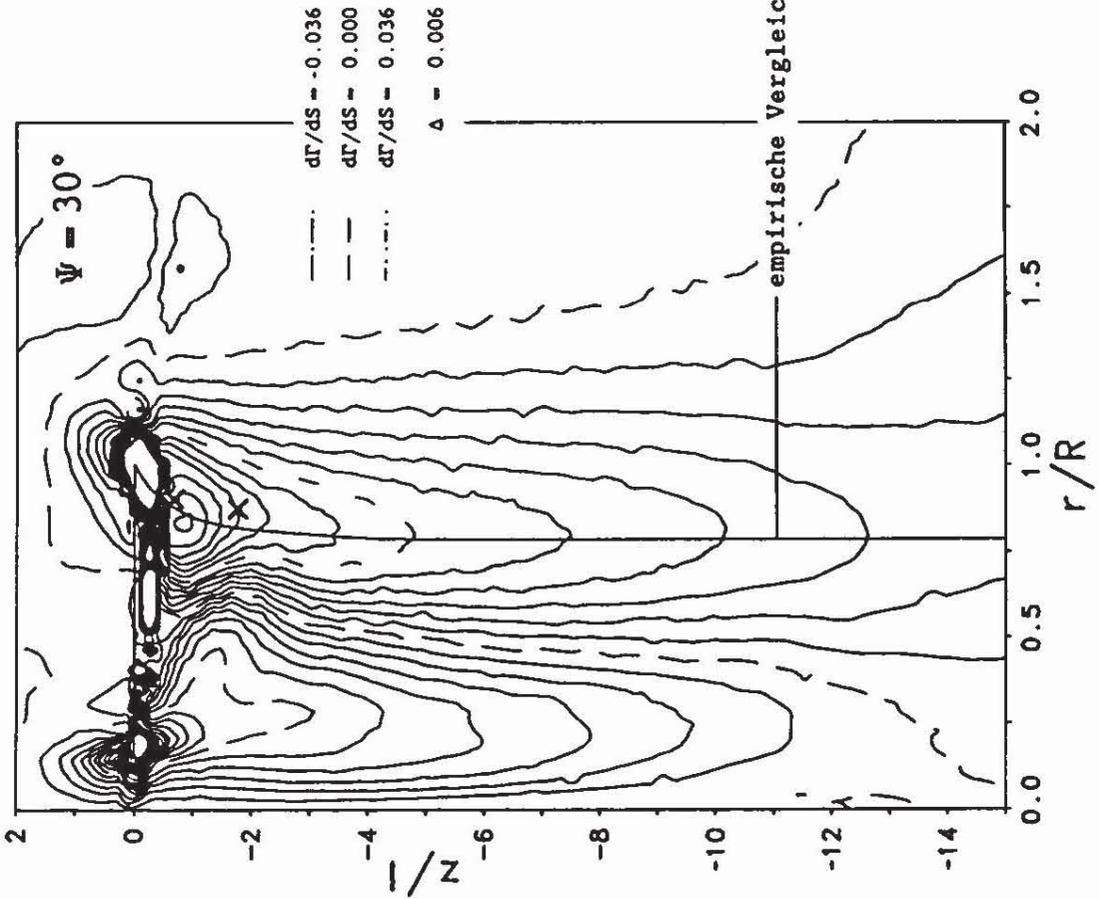


Bild 5.2-22: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

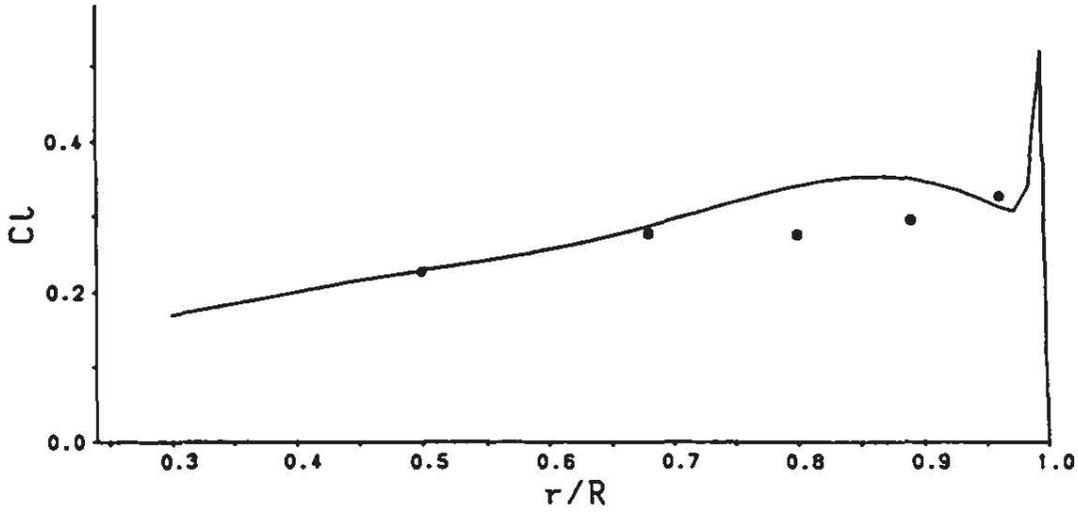


Bild 5.2-24: Radialer Verlauf des Auftriebsbeiwertes für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$

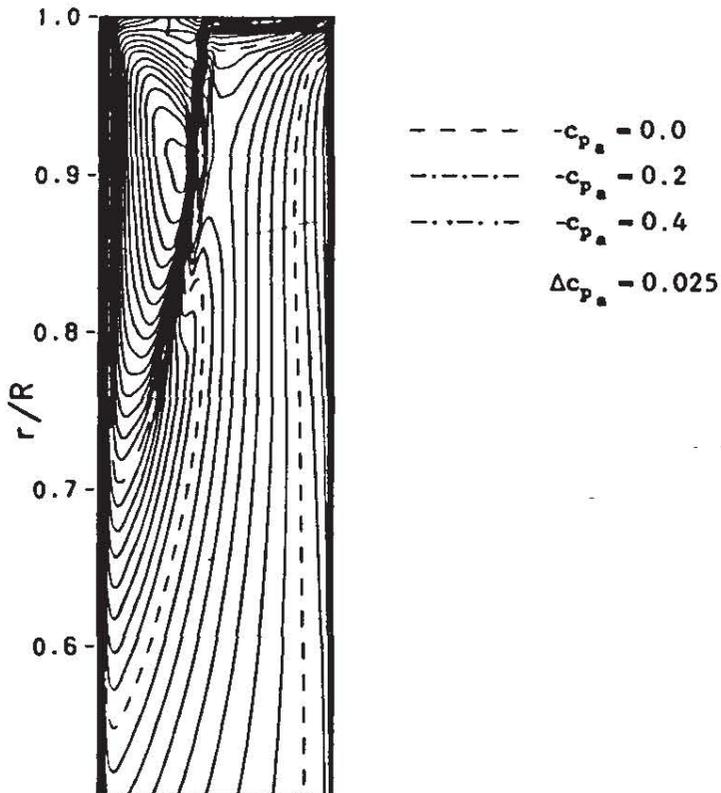


Bild 5.2-25: Druckverteilung auf der Blattoberseite des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.877$  und  $\theta_c = 8^\circ$

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

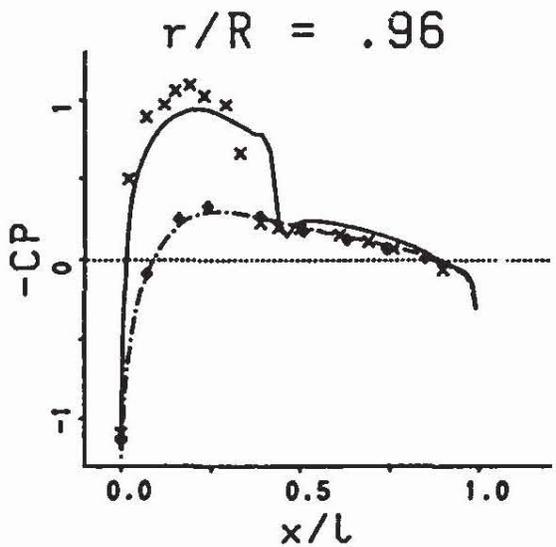
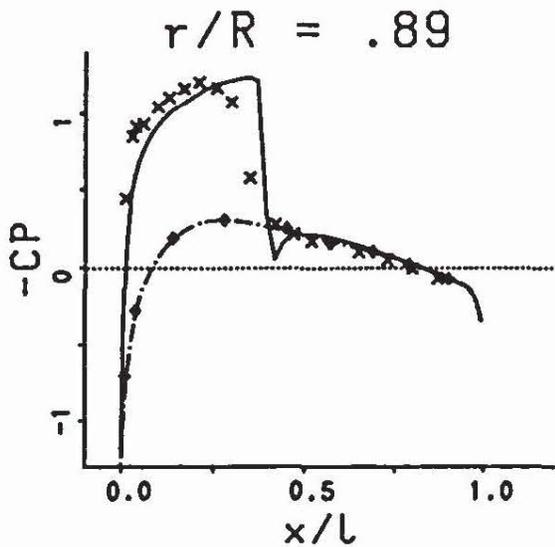
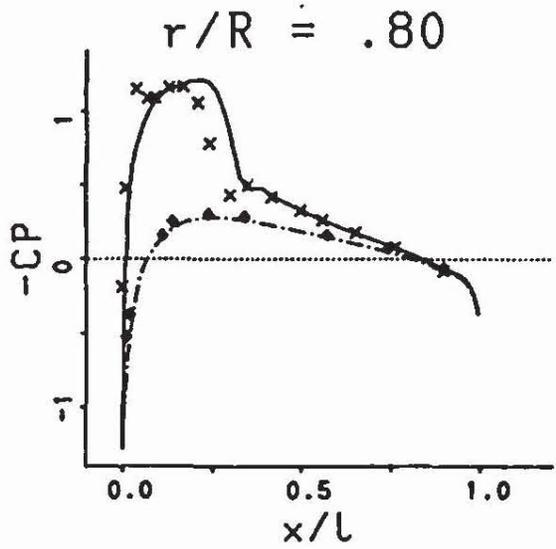
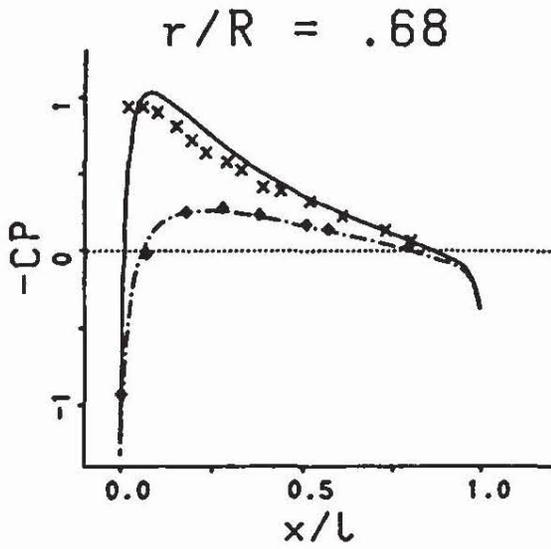
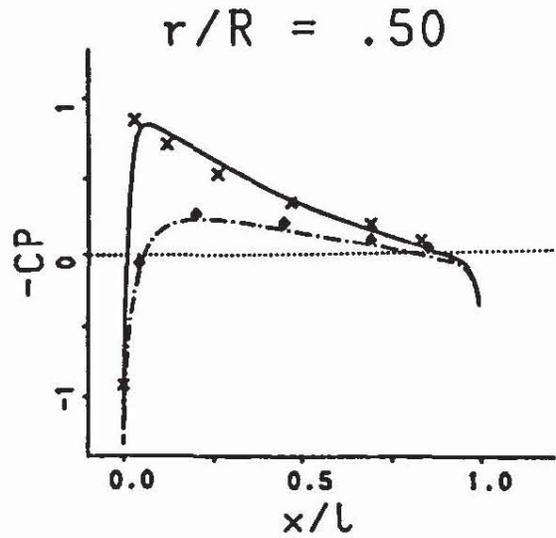


Bild 5.2-26: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t,ip} = 0.877$  und  $\theta_c = 8^\circ$

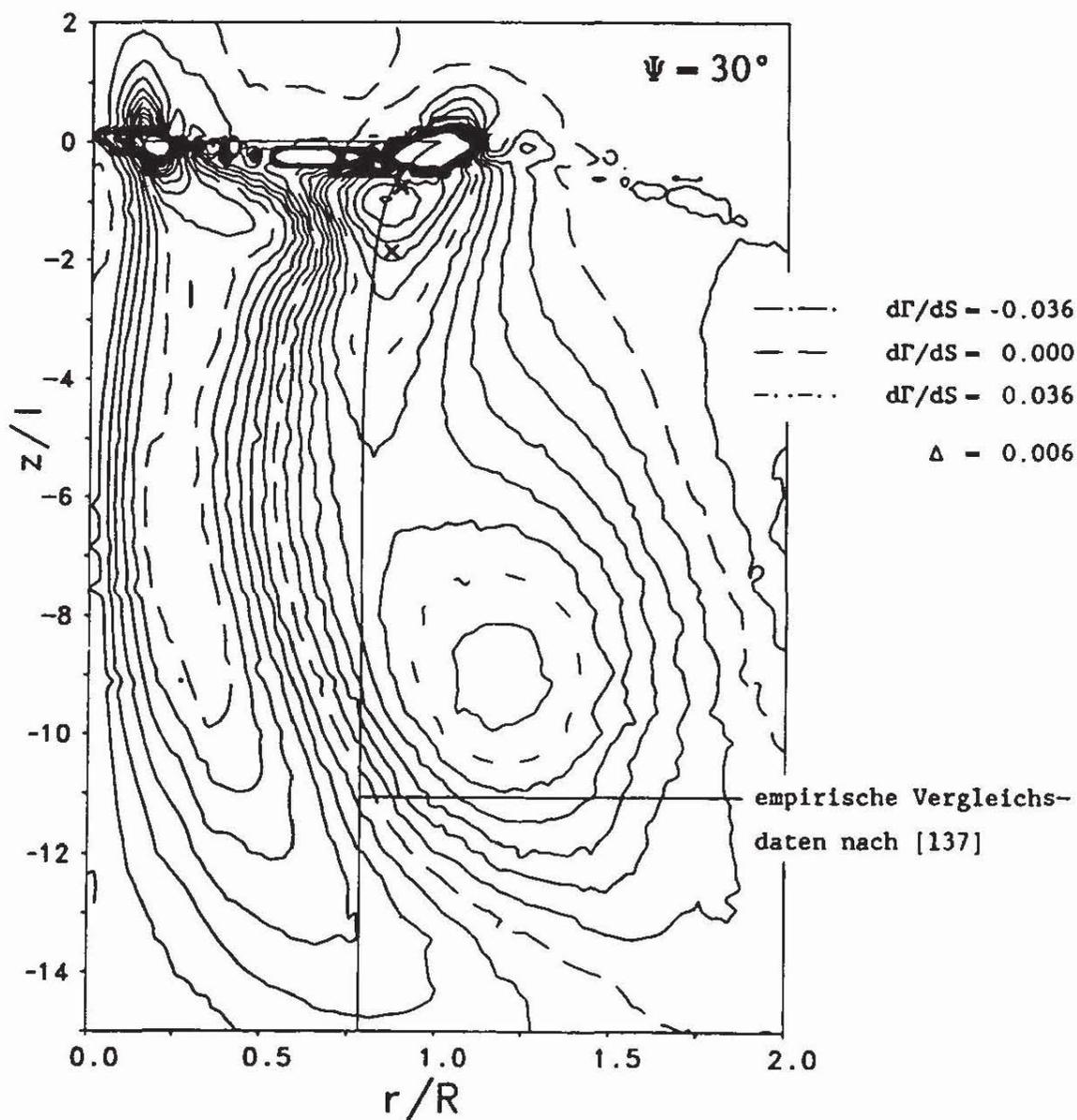


Bild 5.2-27: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.877$  und  $\theta_c = 8^\circ, 30^\circ$  hinter dem Blatt

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

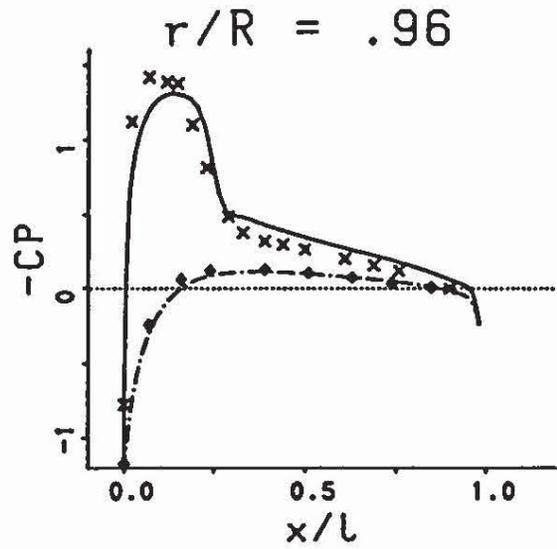
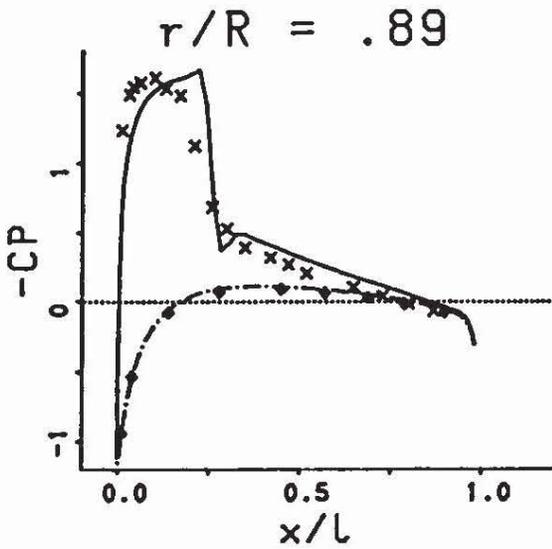
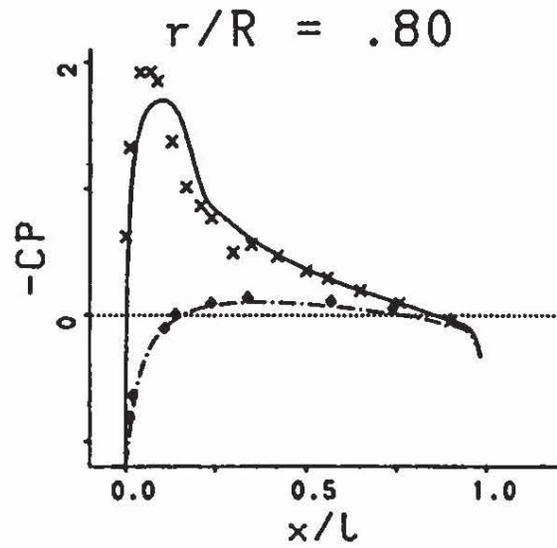
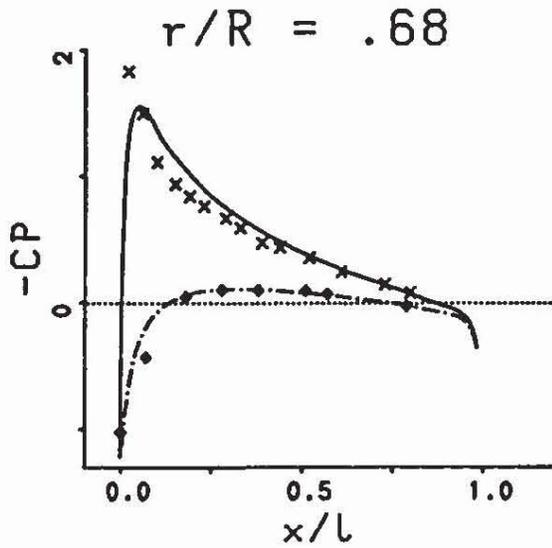
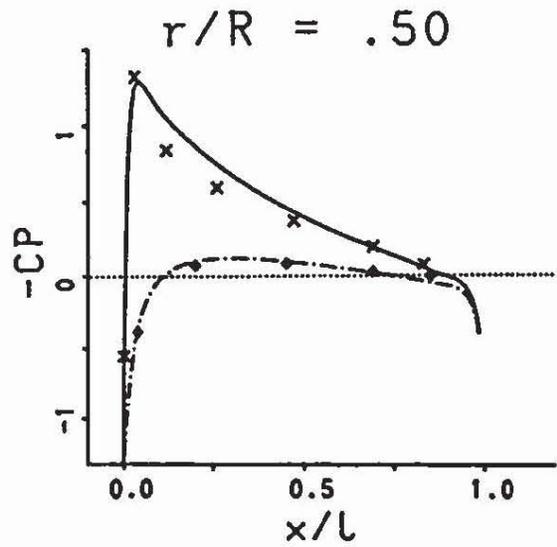


Bild 5.2-28: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{c1p} = 0.794$  und  $\theta_c = 12^\circ$

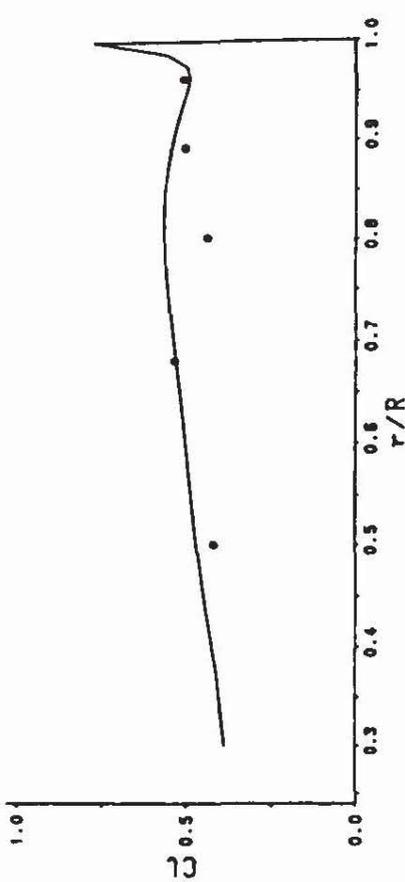


Bild 5.2-29: Radialer Verlauf des Auftriebsbeiwertes für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 12^\circ$

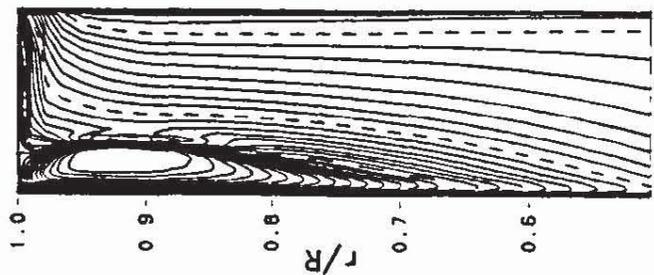


Bild 5.2-30: Druckverteilung auf der Blatt-  
oberseite des Modellrotors bei  
 $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 12^\circ$

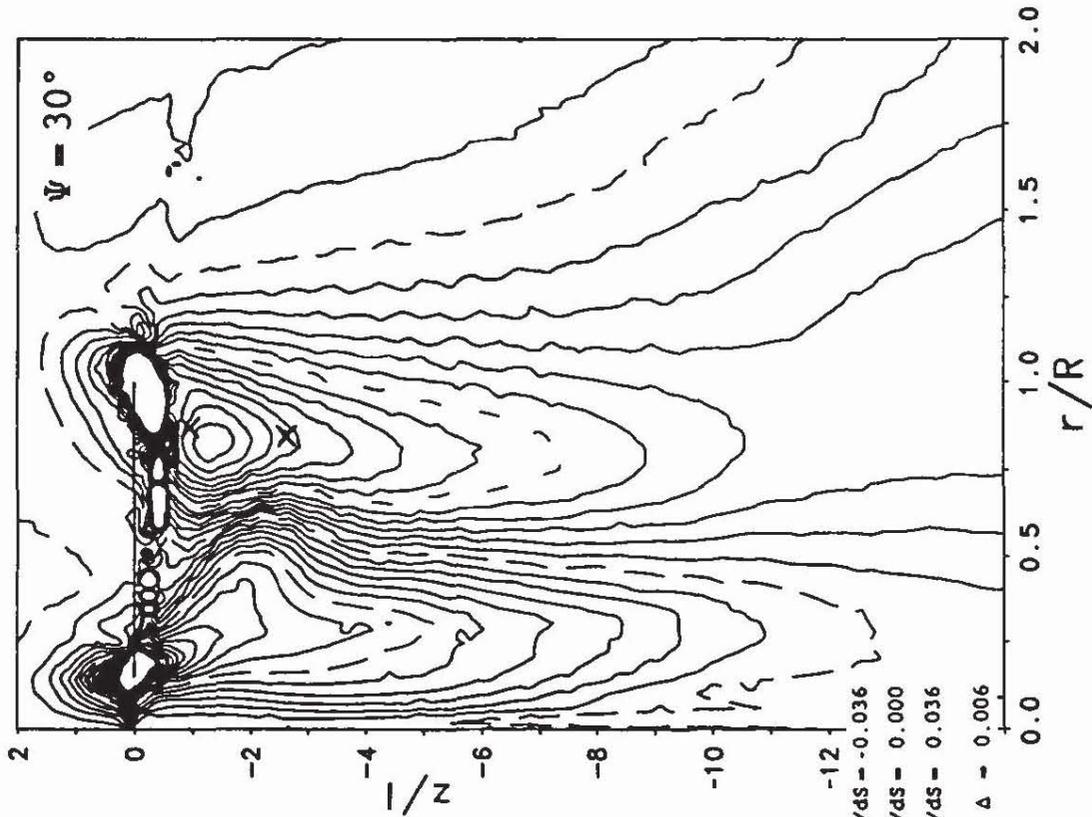


Bild 5.2-31: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf  
des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  
 $\theta_c = 12^\circ$ ,  $30^\circ$  hinter dem Blatt

Experiment	Vorliegendes Verfahren
x ◊	—
Verfahren nach [57] NS mit Wirbelmodell	Verfahren nach [60] NS mit Wirbelmodell
- - - -	- - - -

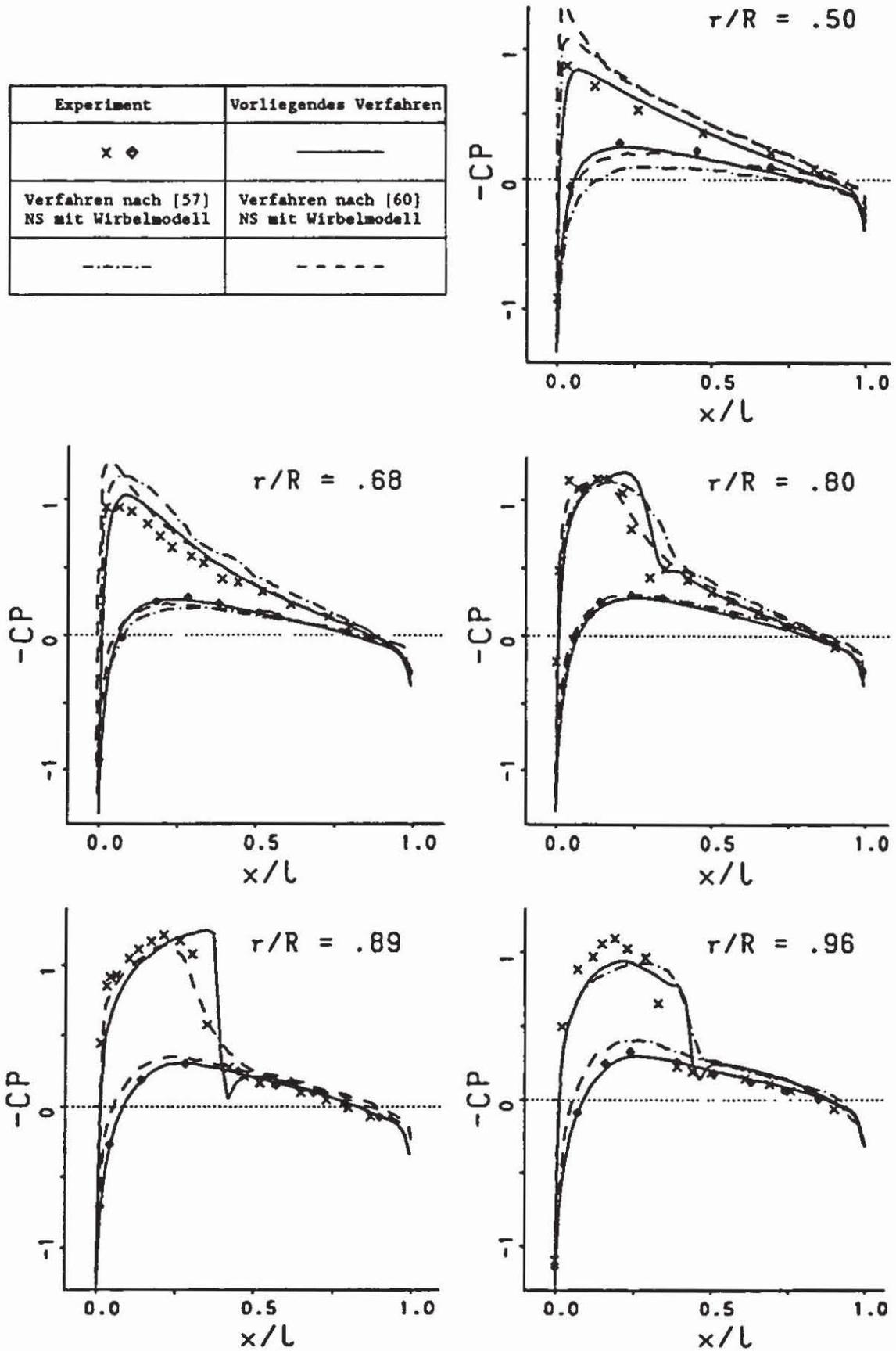


Bild 5.2-32: Vergleich der Ergebnisse des eigenen Verfahrens mit denen nach [57] und [60] (Navier-Stokes-Verfahren mit Wirbelmodell gekoppelt)

Experiment	Vorliegendes Verfahren
x ◊	—
Verfahren nach [47] Euler Wake-Capturing	Verfahren nach [61] NS Wake-Capturing
- - - -	- - - -

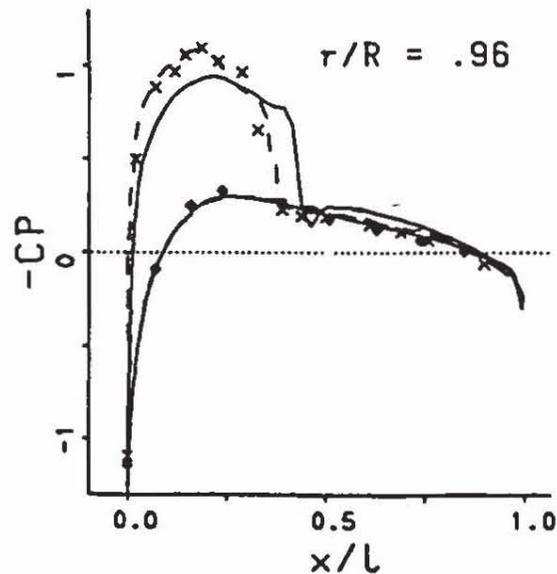
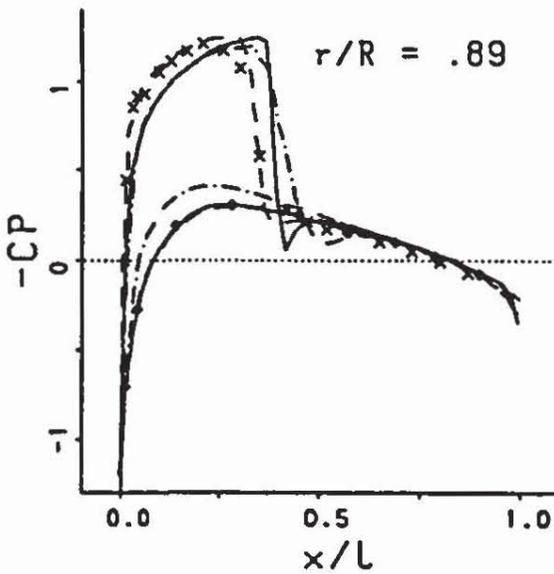
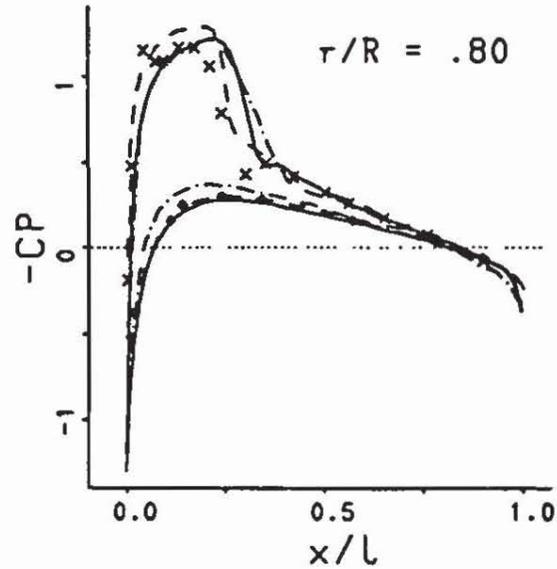
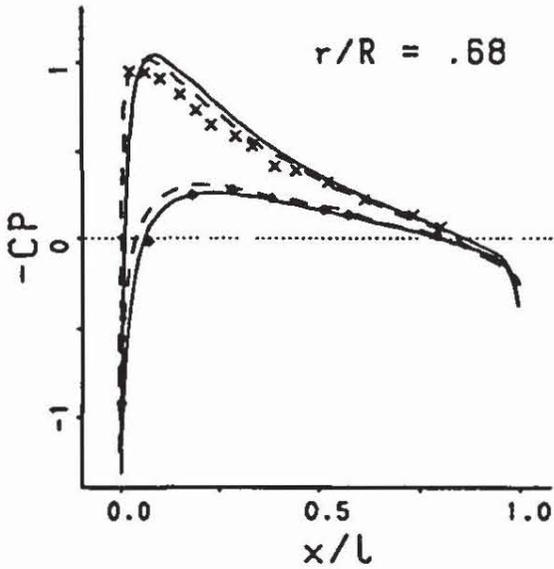
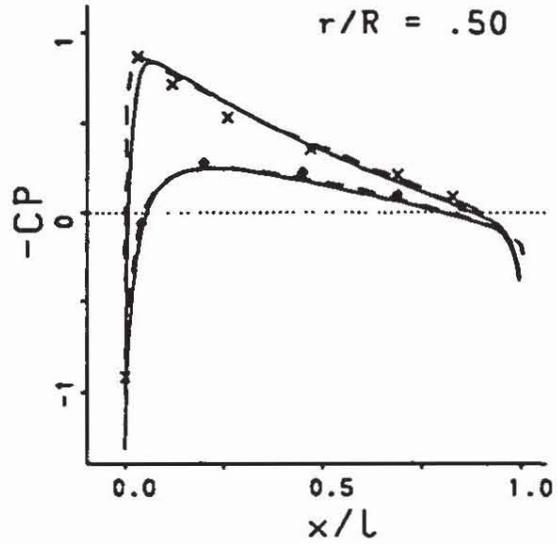


Bild 5.2-33: Vergleich der Ergebnisse des eigenen Verfahrens mit denen nach [47] und [61] (Wake-Capturing-Verfahren auf Basis der Euler- bzw. Navier-Stokes-Gleichungen)

Experiment	Vorliegendes Verfahren
x ◊	—
	Verfahren nach [61] Euler Wake-Capturing
	- - - - -

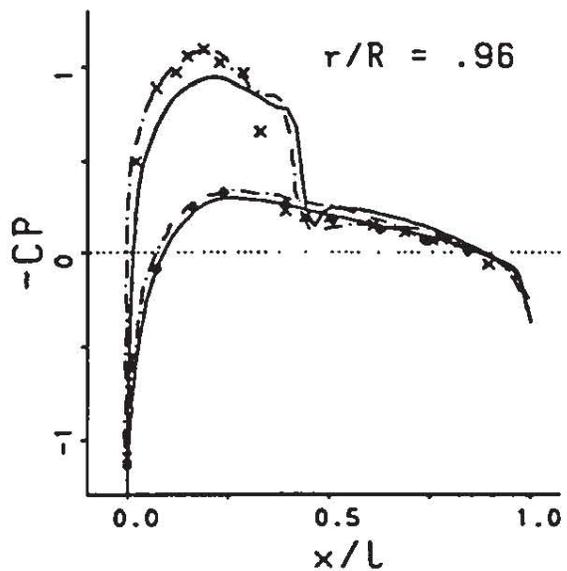
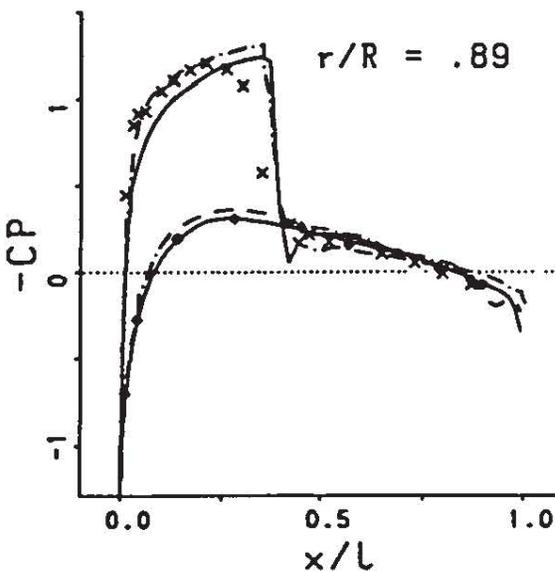
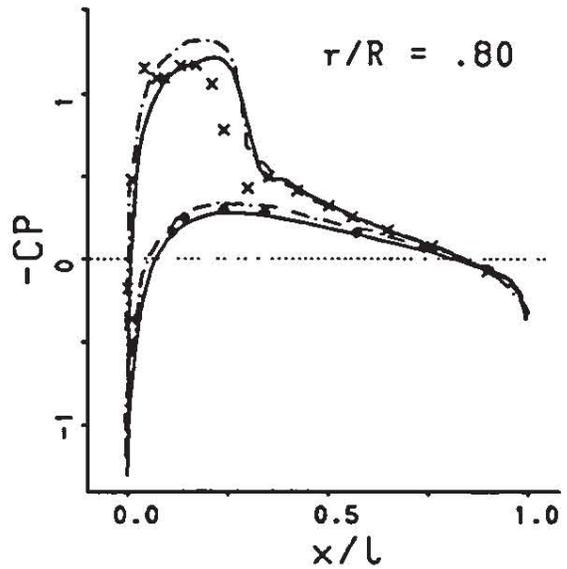
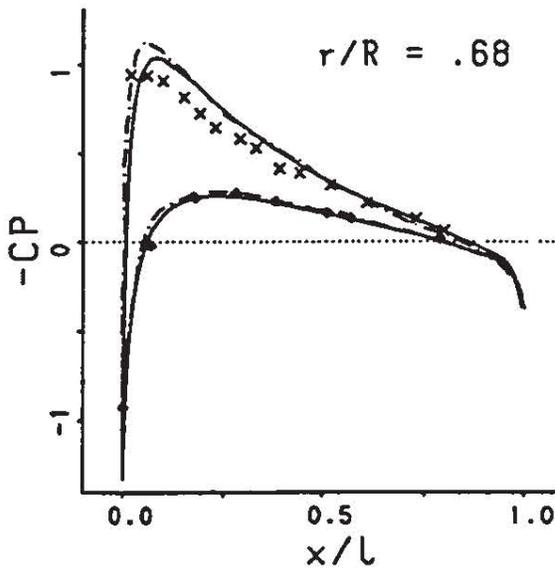
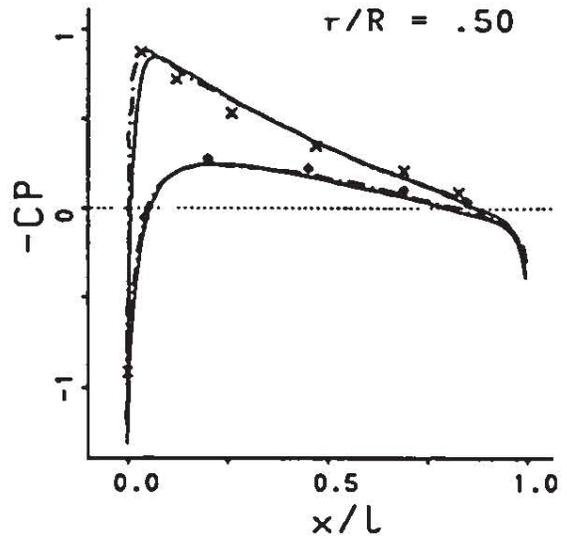
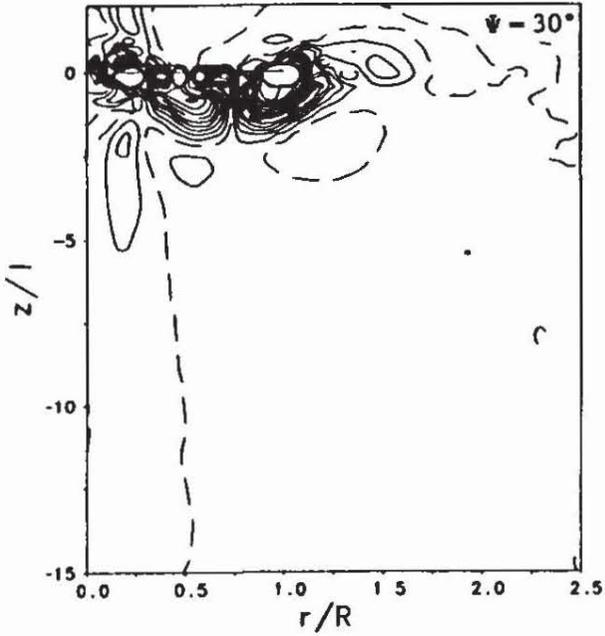
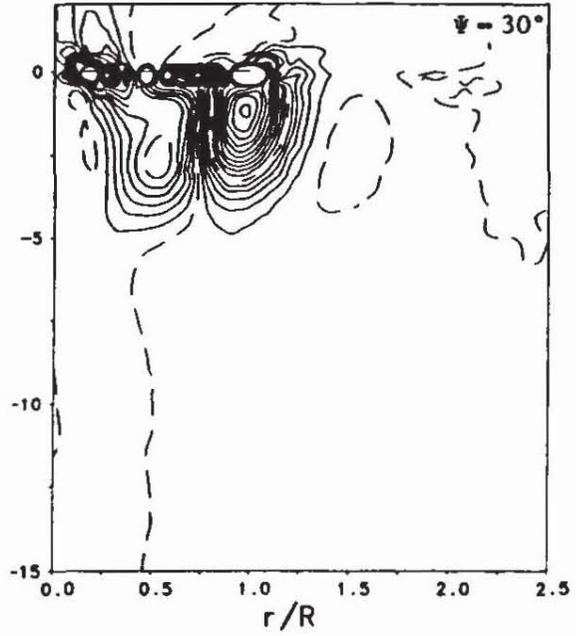


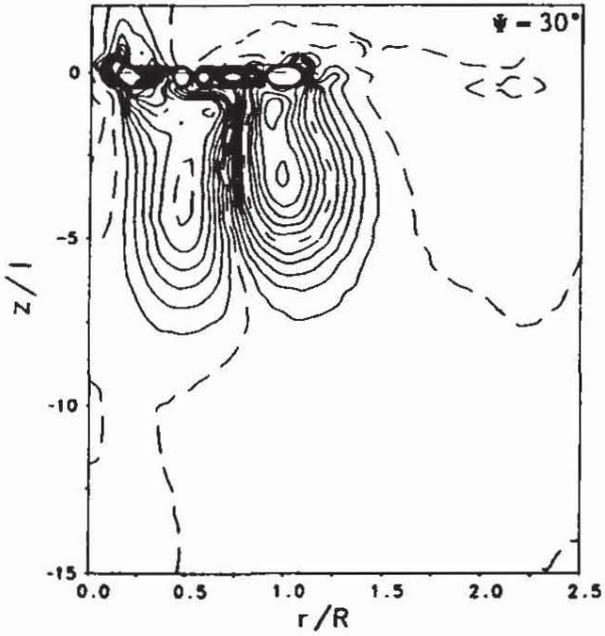
Bild 5.2-34: Vergleich der Ergebnisse des eigenen Verfahrens mit denen nach [61] (Wake-Capturing-Verfahren auf Basis der Euler-Gleichungen, sehr feines Netz)



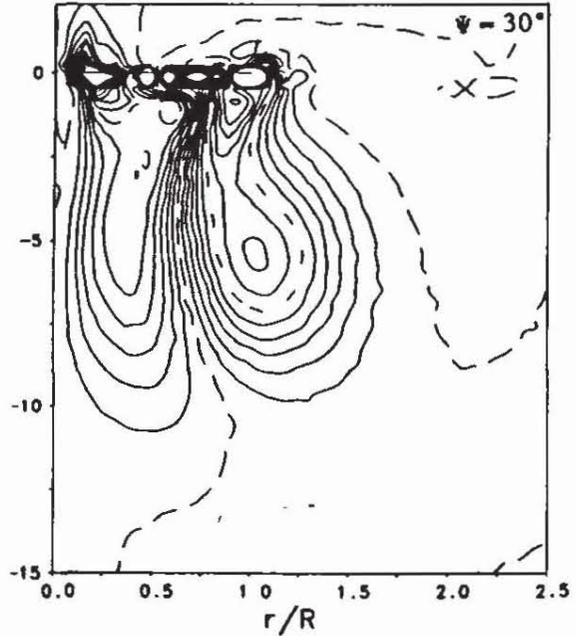
a) 500 Iterationen



b) 1000 Iterationen



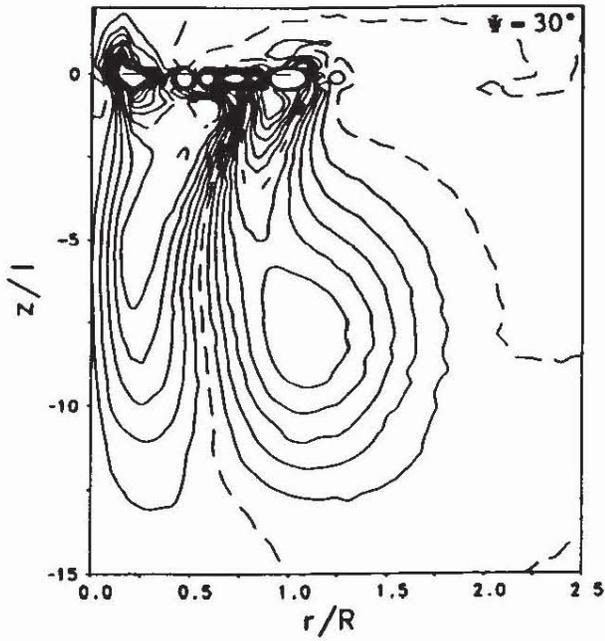
c) 1500 Iterationen



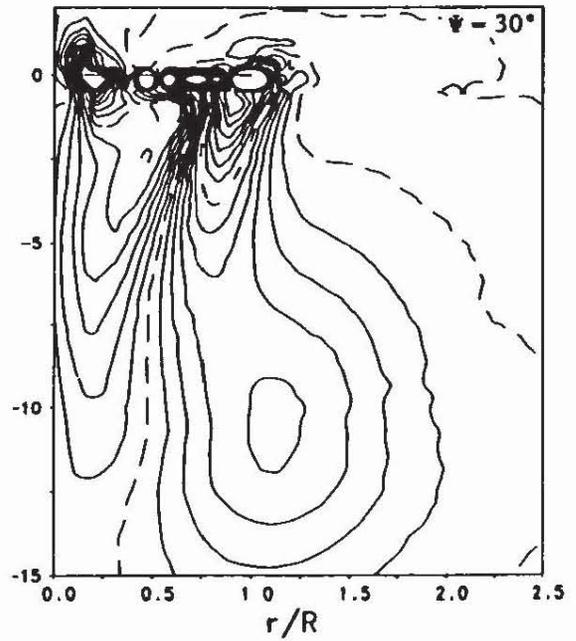
d) 2000 Iterationen

- - - -  $d\Gamma/dS = -0.024$   
 - - - -  $d\Gamma/dS = 0.000$   
 - - - -  $d\Gamma/dS = 0.024$   
 $\Delta = 0.004$

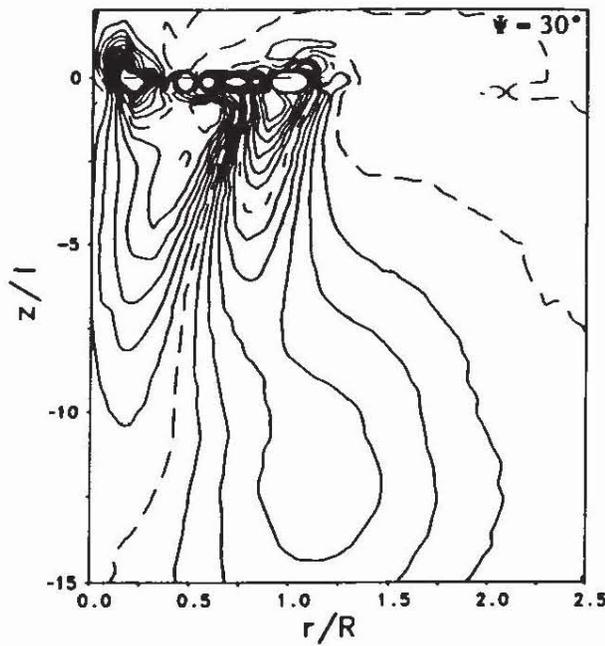
Bild 5.3-1: Zeitliche Entwicklung des mit dem Wake-Capturing-Verfahren berechneten Nachlaufes für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (Zirkulationsdichteverteilung)



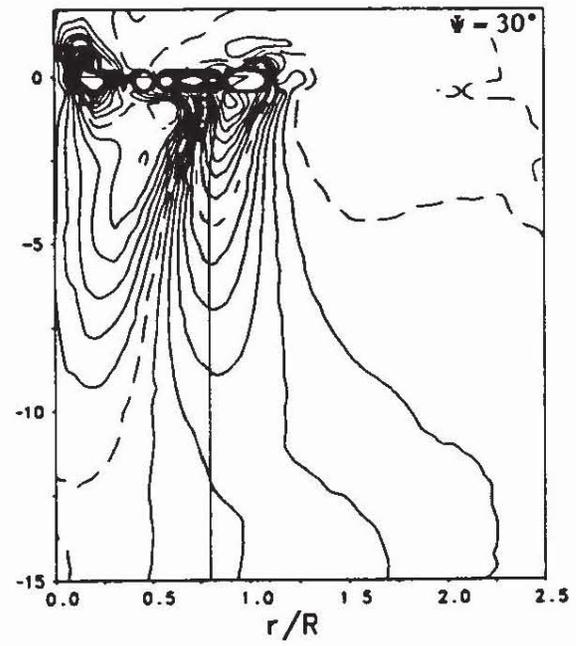
e) 2500 Iterationen



f) 3000 Iterationen



g) 3500 Iterationen



h) 4600 Iterationen

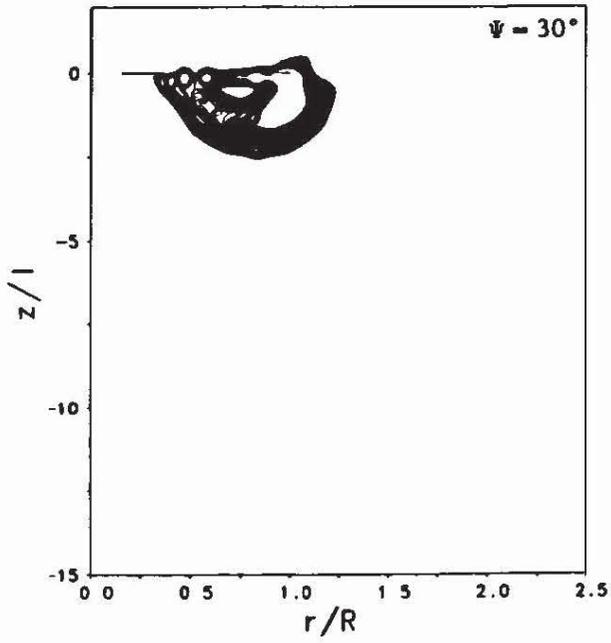
---  $d\Gamma/ds = -0.024$

---  $d\Gamma/ds = 0.000$

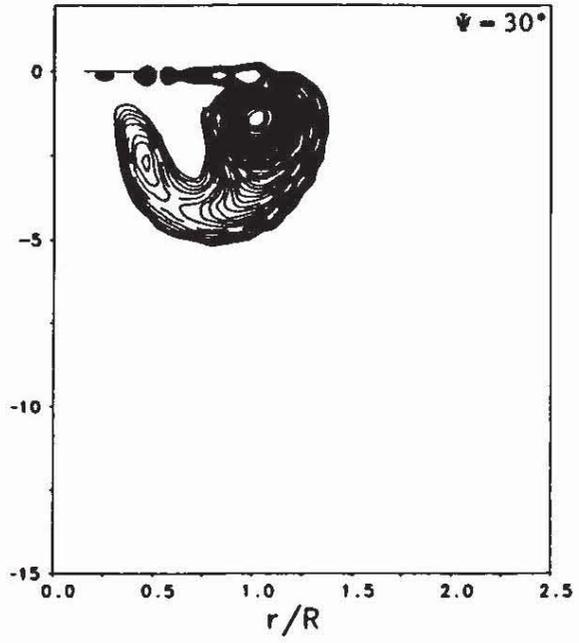
---  $d\Gamma/ds = 0.024$

$\Delta = 0.004$

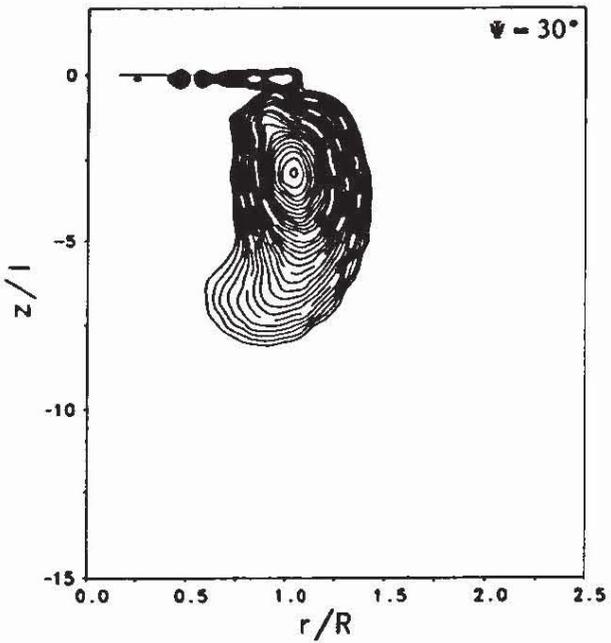
Bild 5.3-1: Zeitliche Entwicklung des mit dem Wake-Capturing-Verfahren (Forts.) berechneten Nachlaufes für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (Zirkulationsdichteverteilung)



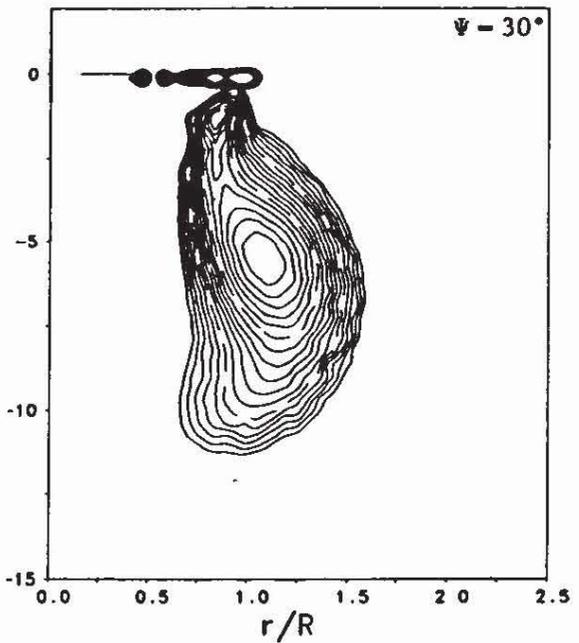
a) 500 Iterationen



b) 1000 Iterationen



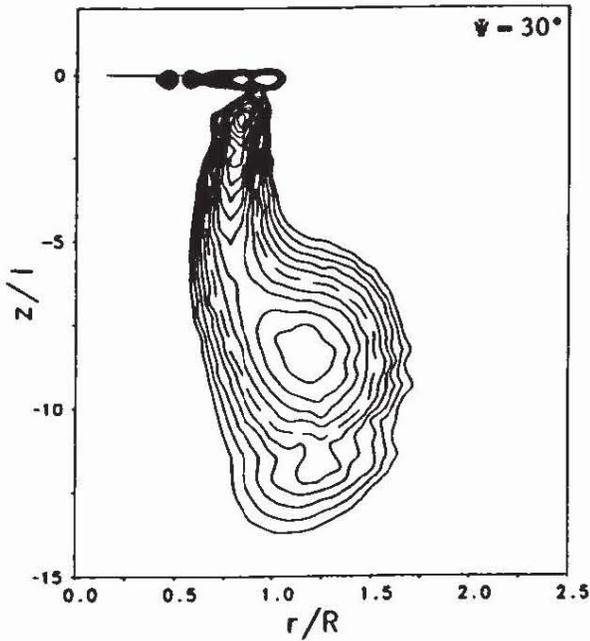
c) 1500 Iterationen



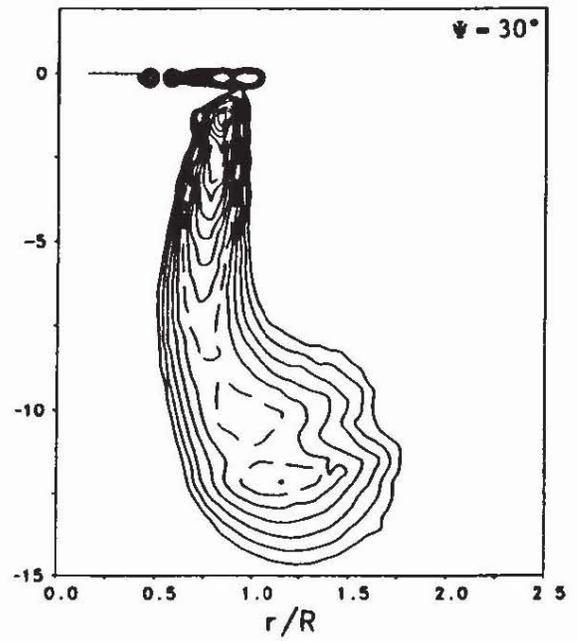
d) 2000 Iterationen

- - - -  $p_t = 0.0058$   
 - - - -  $p_t = 0.0073$   
 - - - -  $p_t = 0.0088$   
 $\Delta = 2.5 \cdot 10^{-4}$

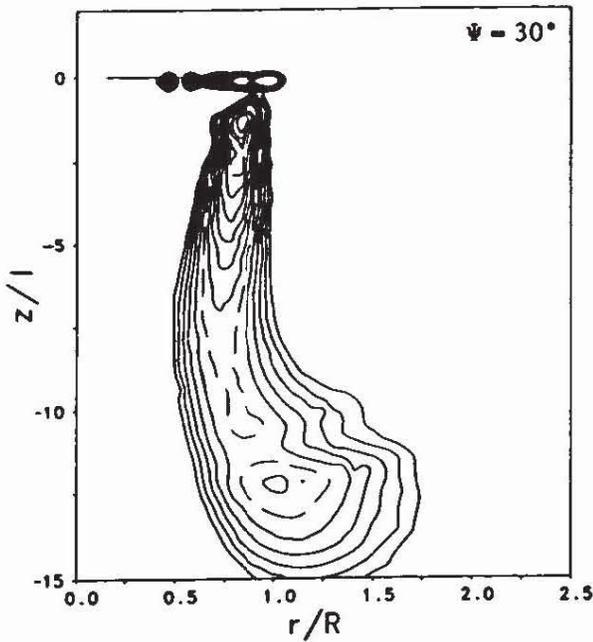
Bild 5.3-2: Zeitliche Entwicklung des mit dem Wake-Capturing-Verfahren berechneten Nachlaufes für den Modellrotor bei  $Ma_{t1p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (Totaldruckverlust)



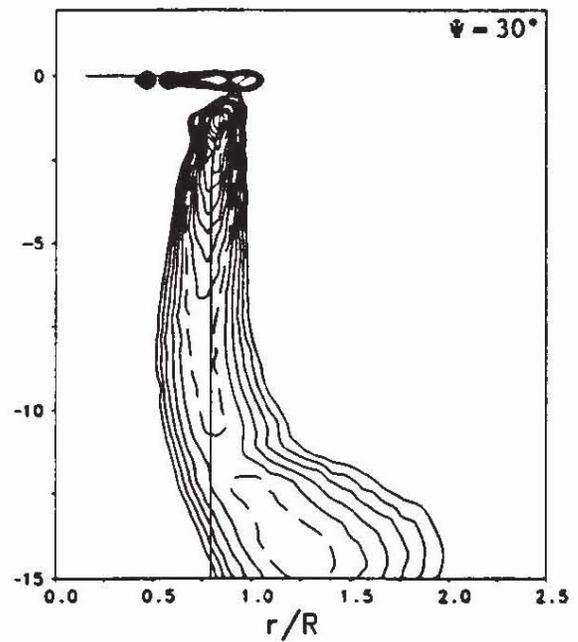
e) 2500 Iterationen



f) 3000 Iterationen



g) 3500 Iterationen



h) 4600 Iterationen

- - - -  $p_t = 0.0058$   
 - - - -  $p_t = 0.0073$   
 - - - -  $p_t = 0.0088$   
 $\Delta = 2.5 \cdot 10^{-4}$

Bild 5.3-2: Zeitliche Entwicklung des mit dem Wake-Capturing-Verfahren (Forts.) berechneten Nachlaufes für den Modellrotor bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (Totaldruckverlust)

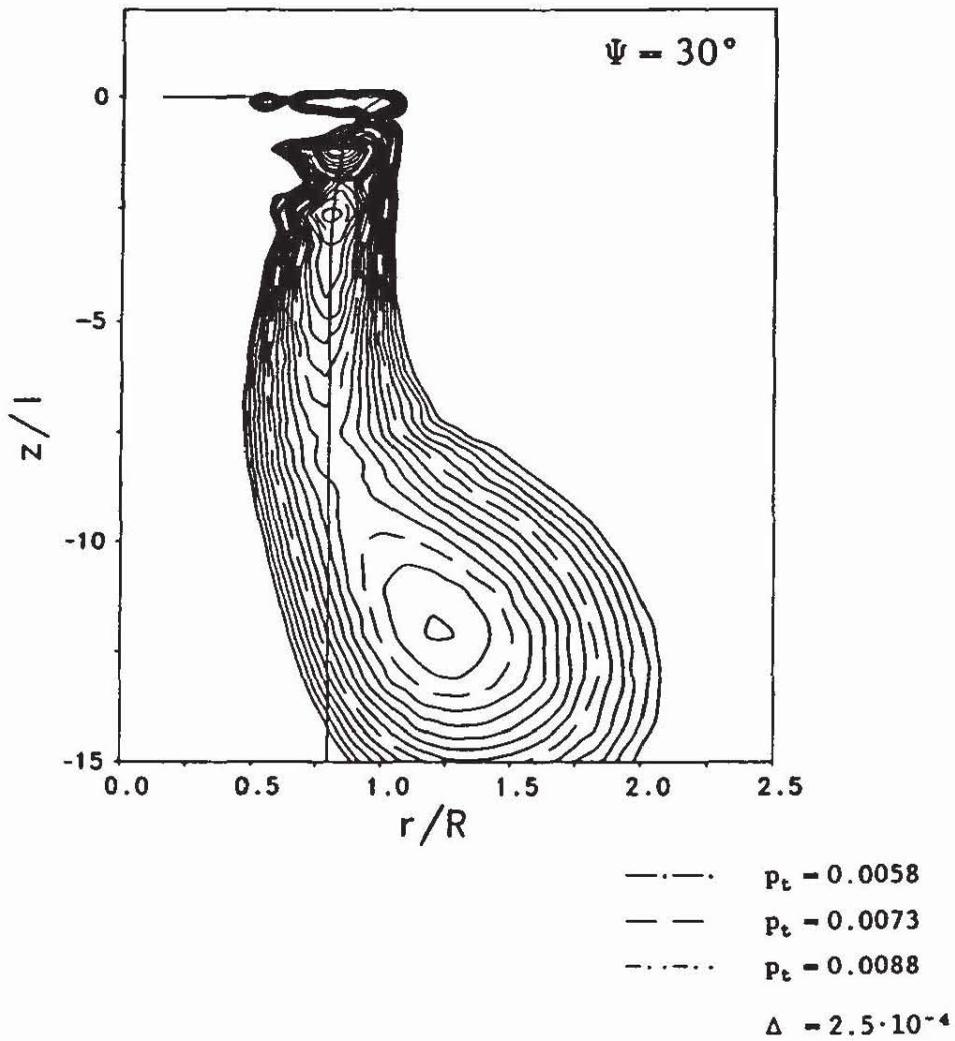


Bild 5.3-3: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (mod. Netz ohne metrische Diskontinuität)

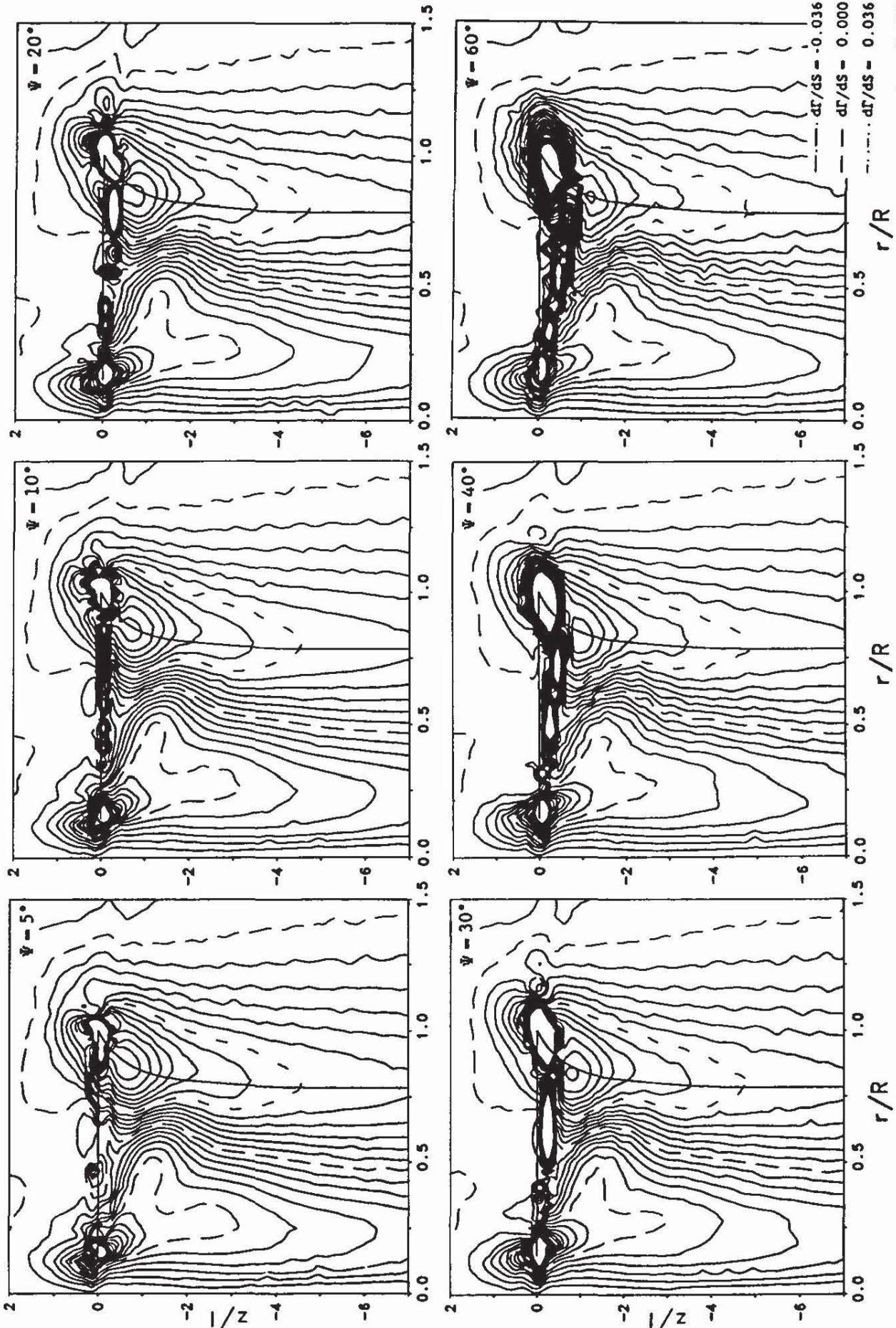


Bild 5.3-4: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$

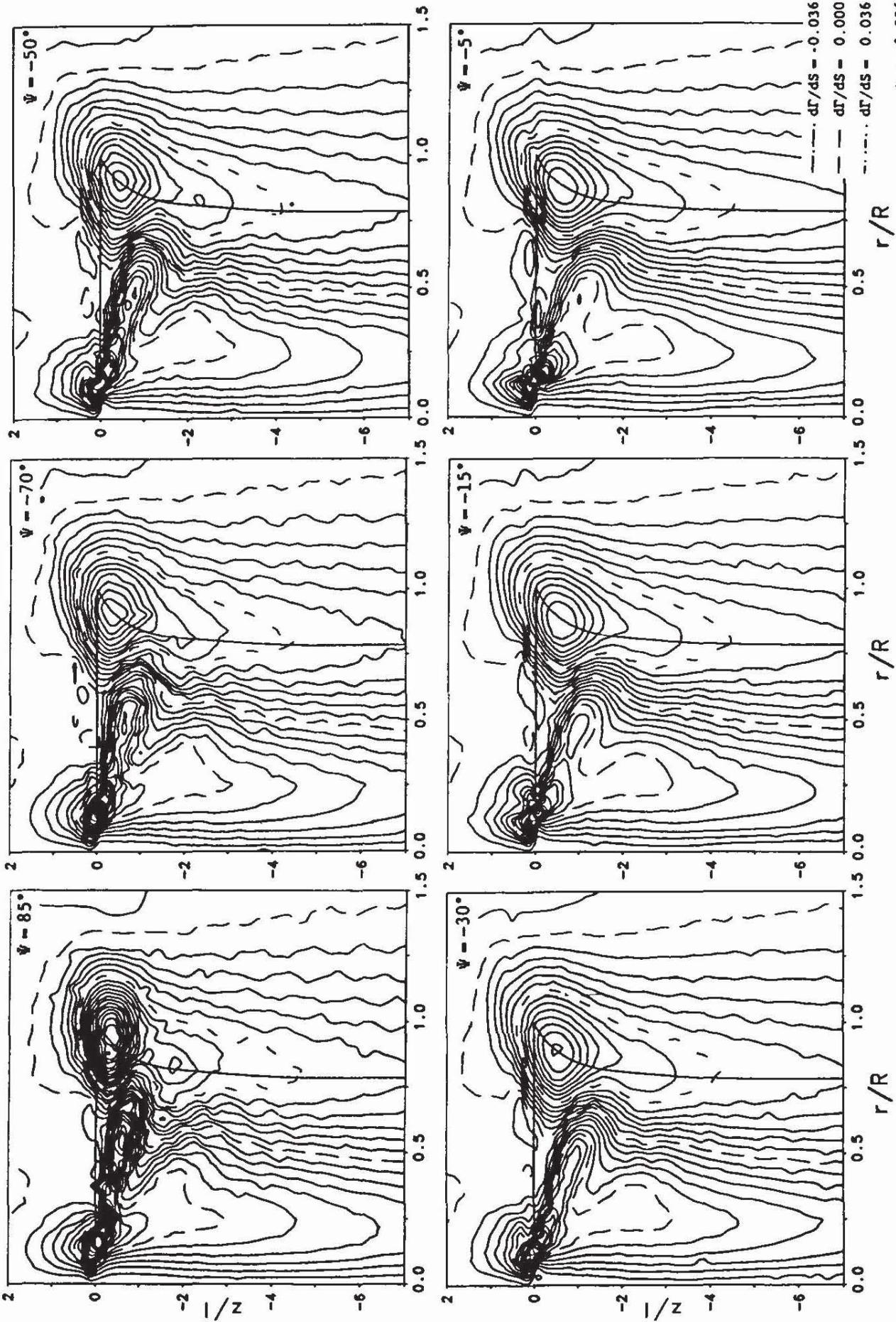


Bild 5.3-4 (Forts.): Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$   $\Delta = 0.006$

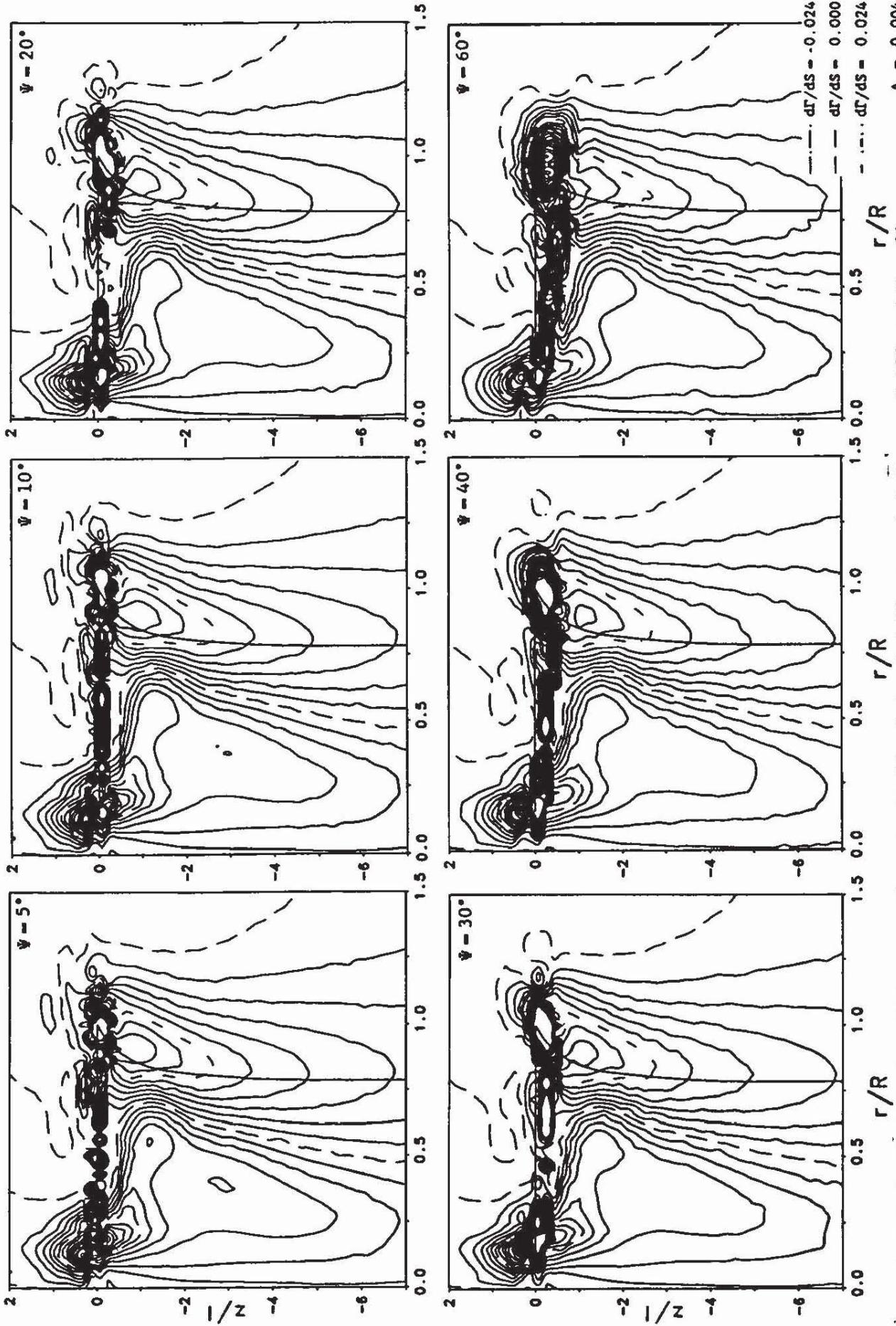


Bild 5.3-5: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$

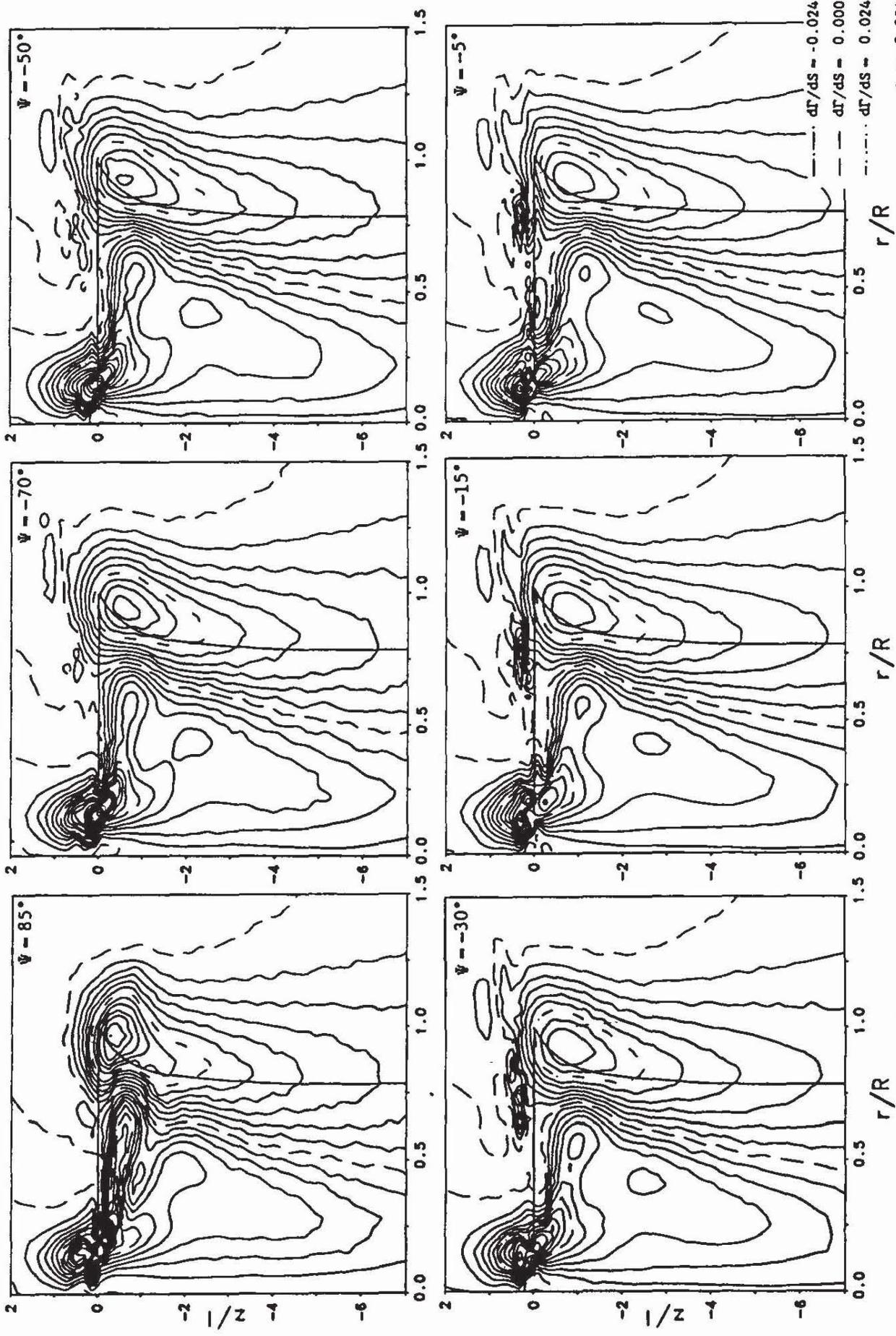


Bild 5.3-5 (Forts.): Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$   $\Delta = 0.004$

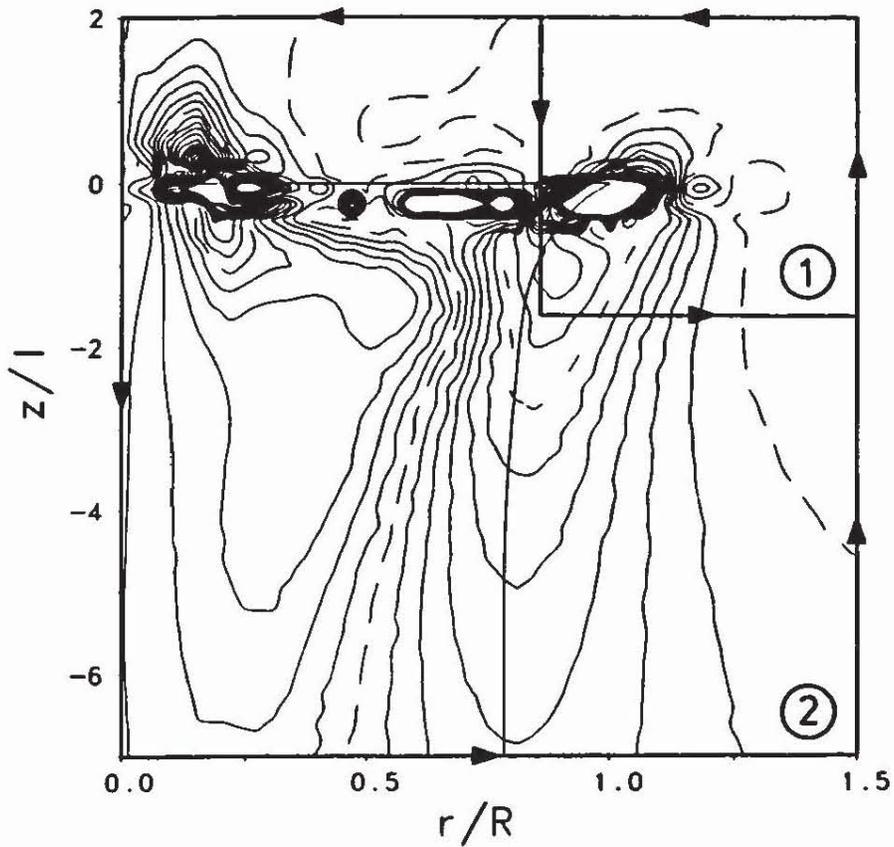


Bild 5.3-6: Integrationskurven zur Bestimmung der Zirkulation nach Gl.(5.1)

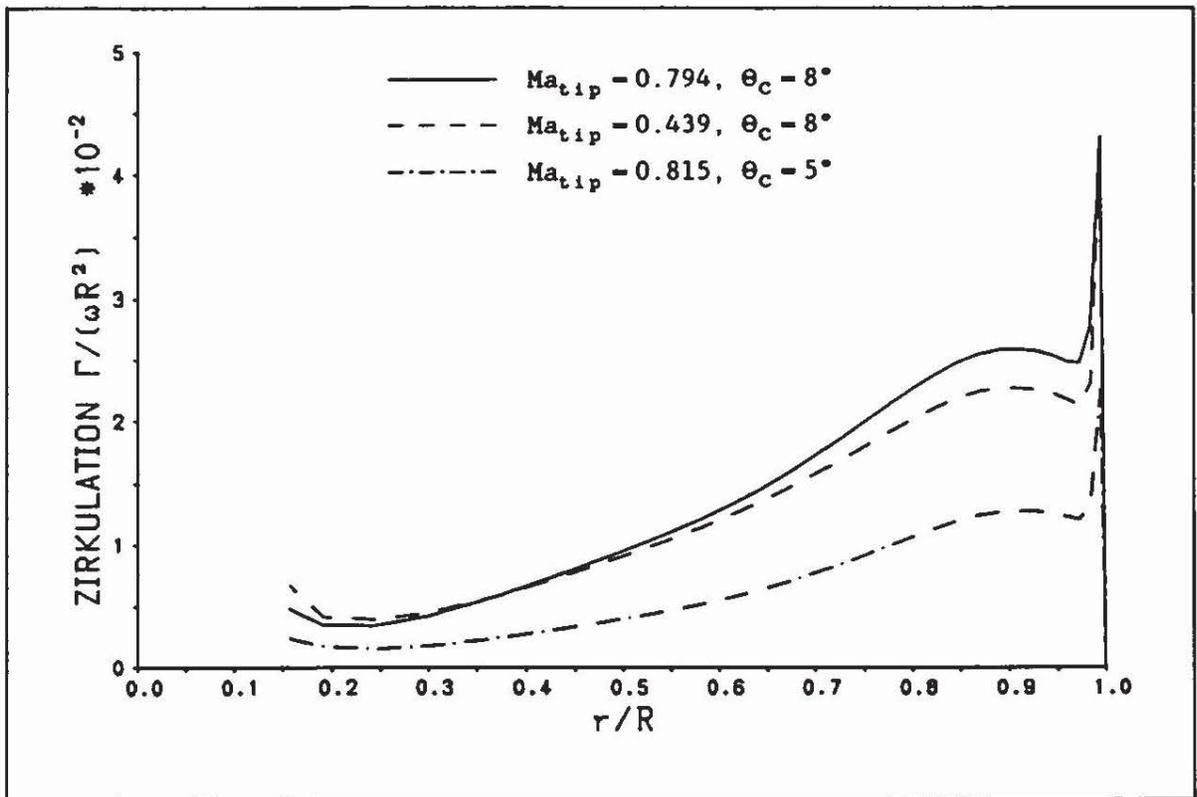
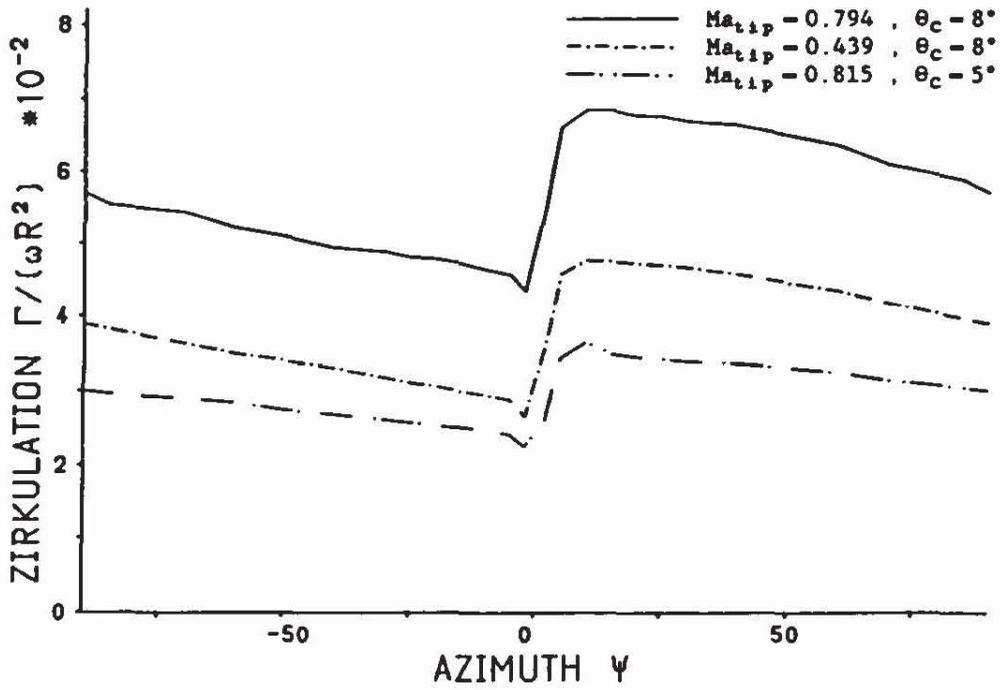
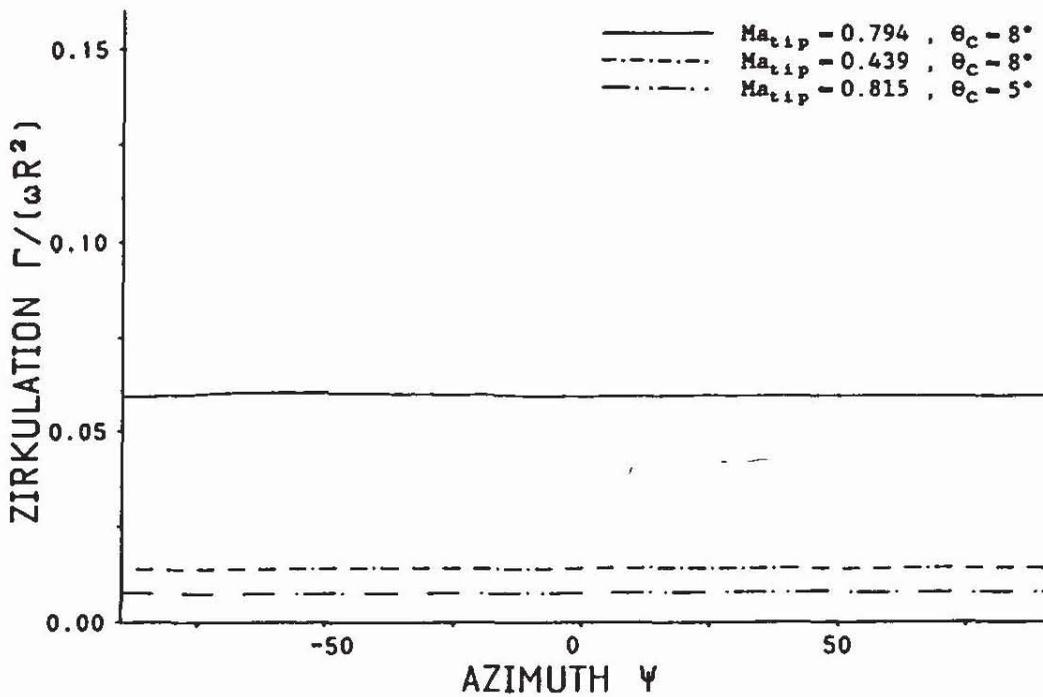


Bild 5.3-7: Zirkulation des blattgebundenen Wirbels



### INTEGRATIONSKURVE 1

Bild 5.3-8: Verlauf der Zirkulation über dem Azimuthwinkel (Integrationsgebiet 1)



### INTEGRATIONSKURVE 2

Bild 5.3-9: Verlauf der Zirkulation über dem Azimuthwinkel (Integrationsgebiet 2)

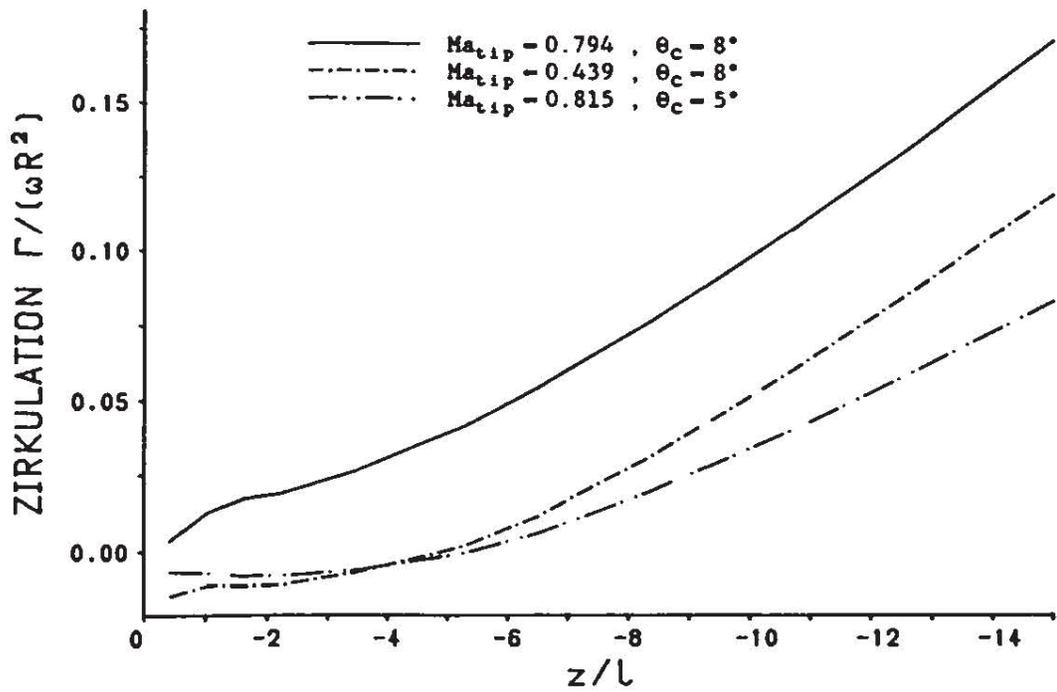


Bild 5.3-10: Zirkulationsinhalt im Nachlauf in Abhängigkeit von der Größe des Integrationsgebietes

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	— 1) - - - 2)
Unterseite	◇	- · - · 1) - · - · 2)

1) feines Netz

2) grobes Netz

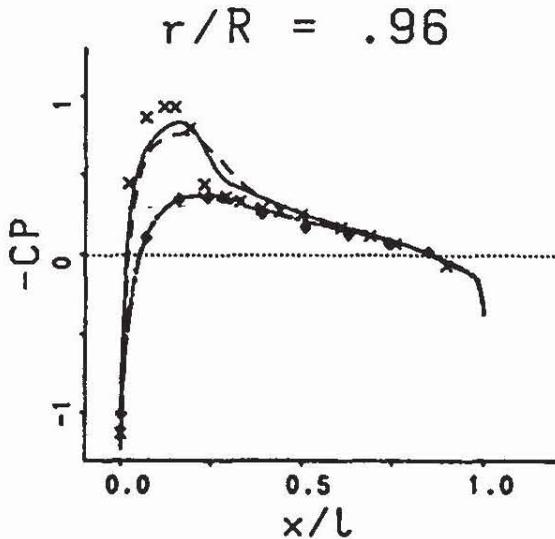
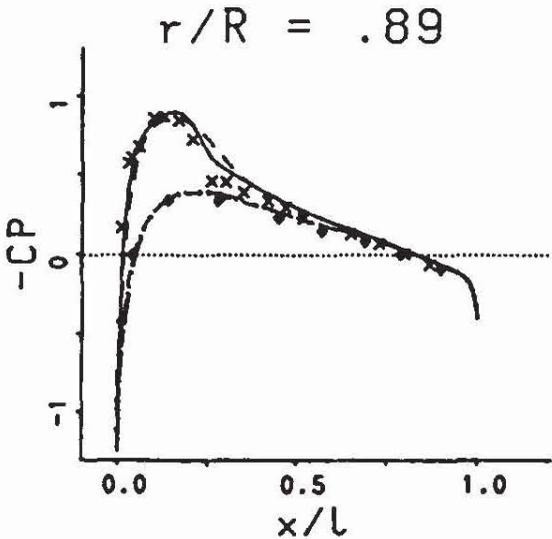
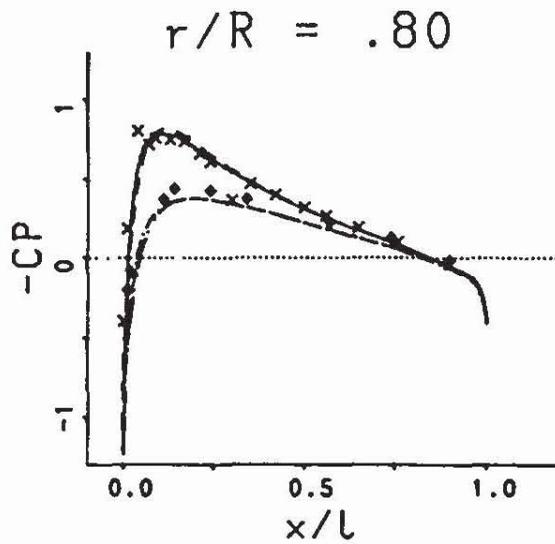
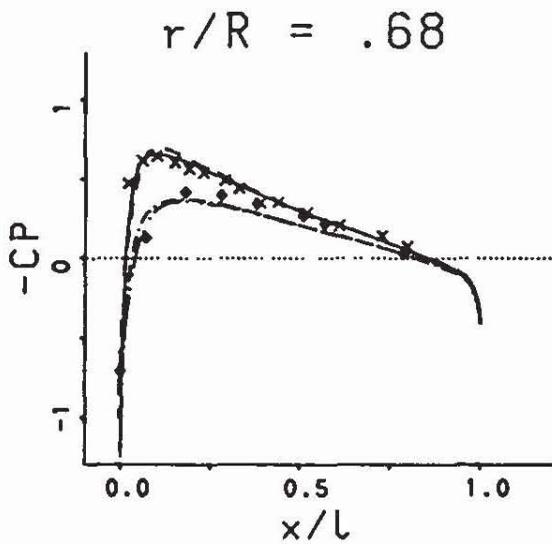
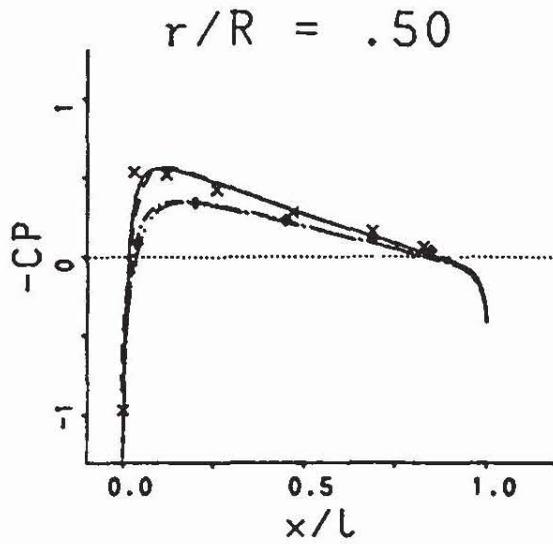


Bild 5.4-1: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$   
 Vergleich zwischen feinem und grobem Netz

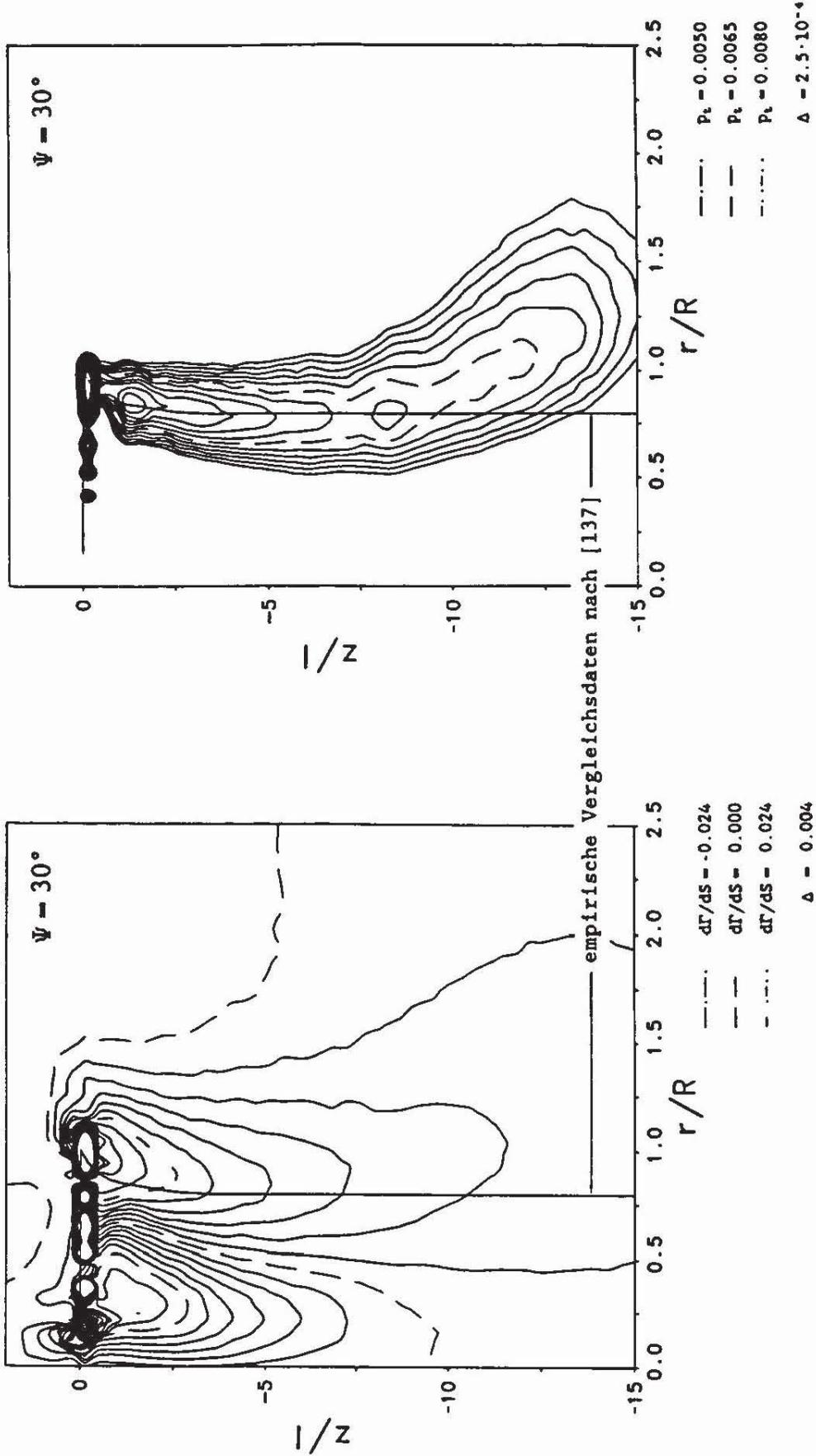


Bild 5.4-2: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (grobes Netz)

Bild 5.4-3: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (grobes Netz)

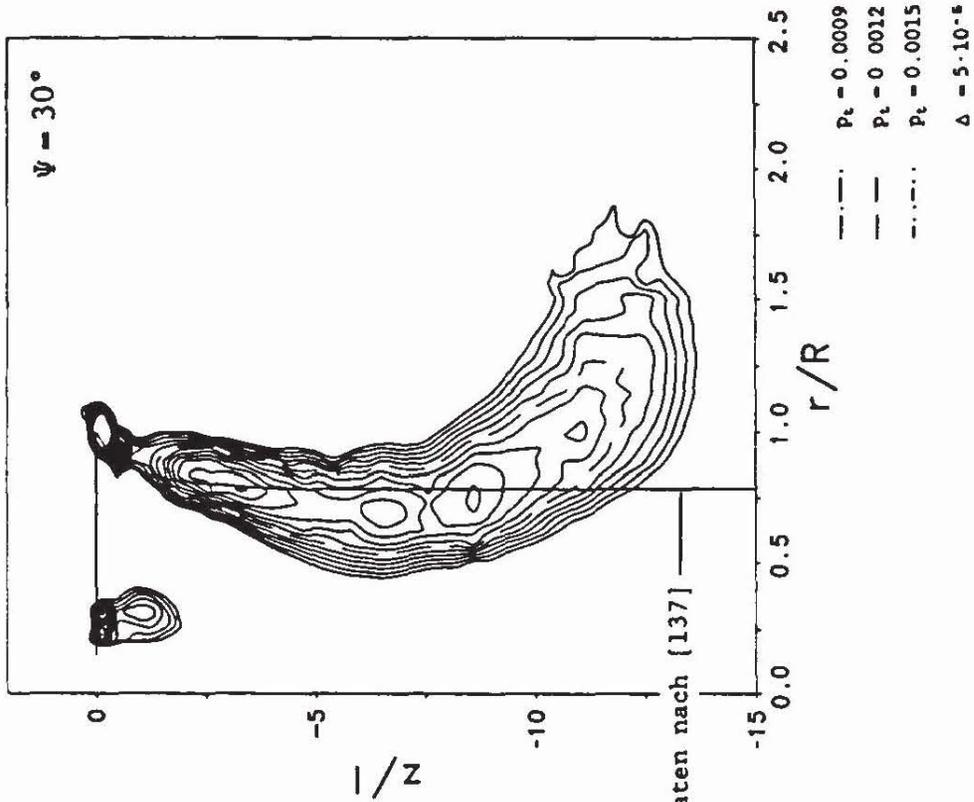


Bild 5.4-5: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$  (grobes Netz)

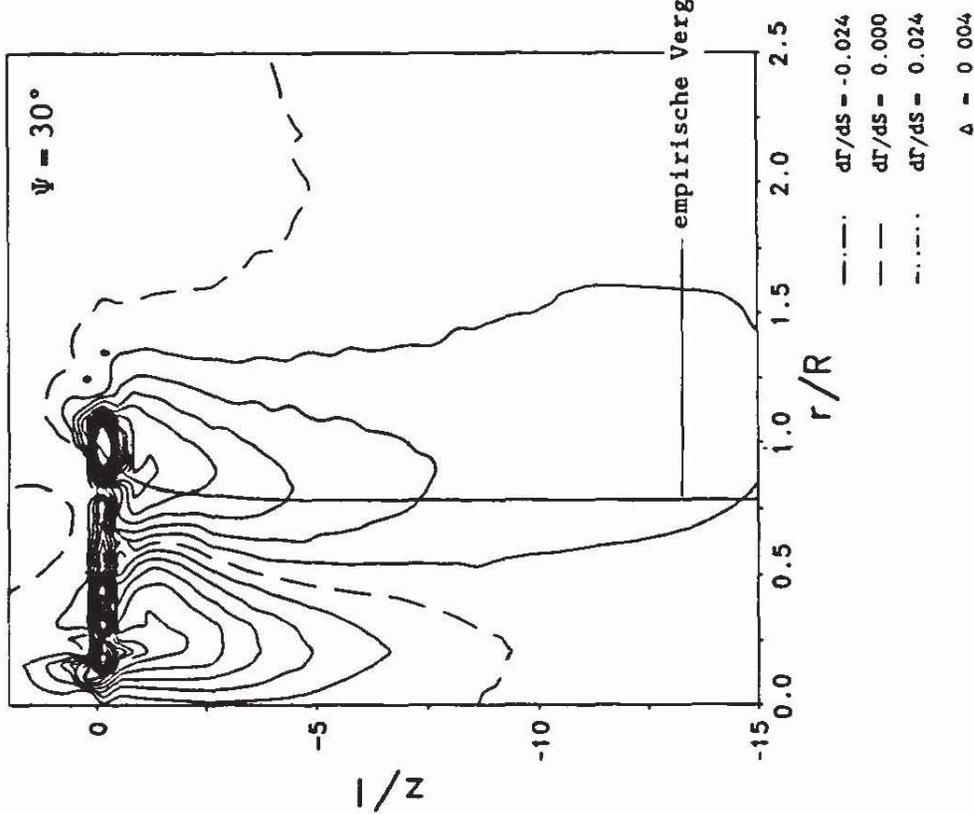


Bild 5.4-4: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.439$  und  $\theta_c = 8^\circ$  (grobes Netz)

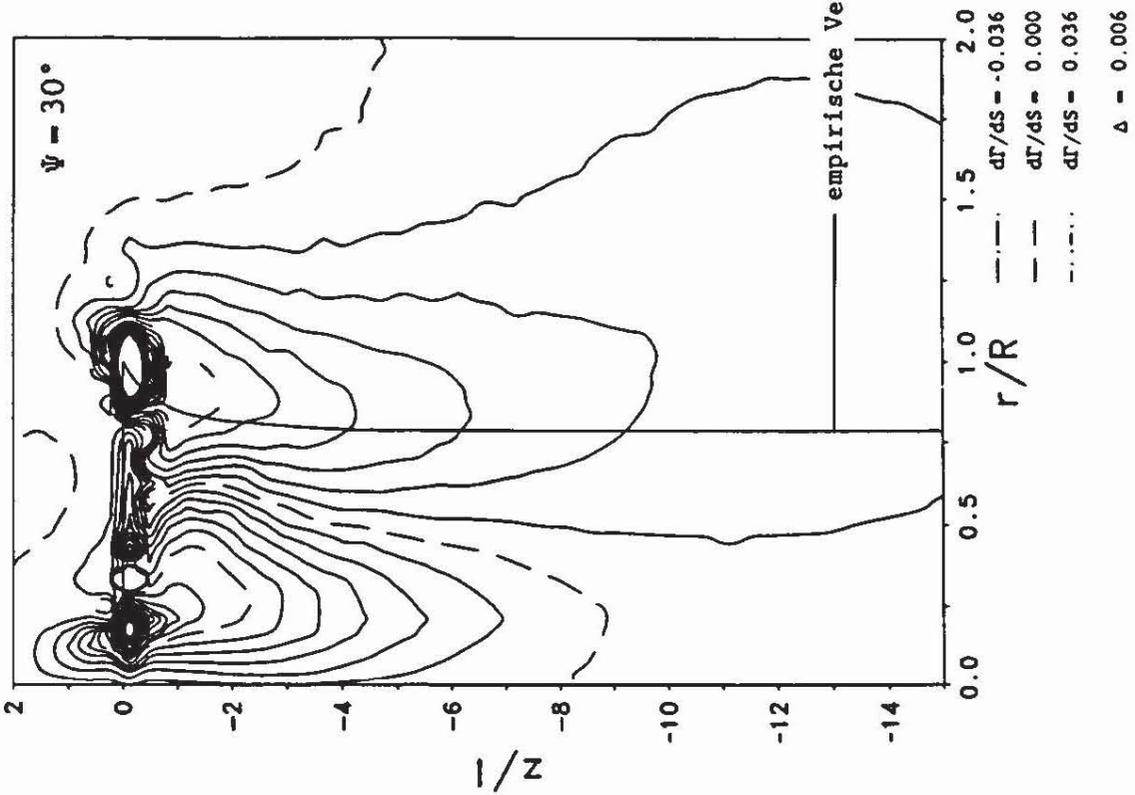


Bild 5.4-6: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$  (grobes Netz)

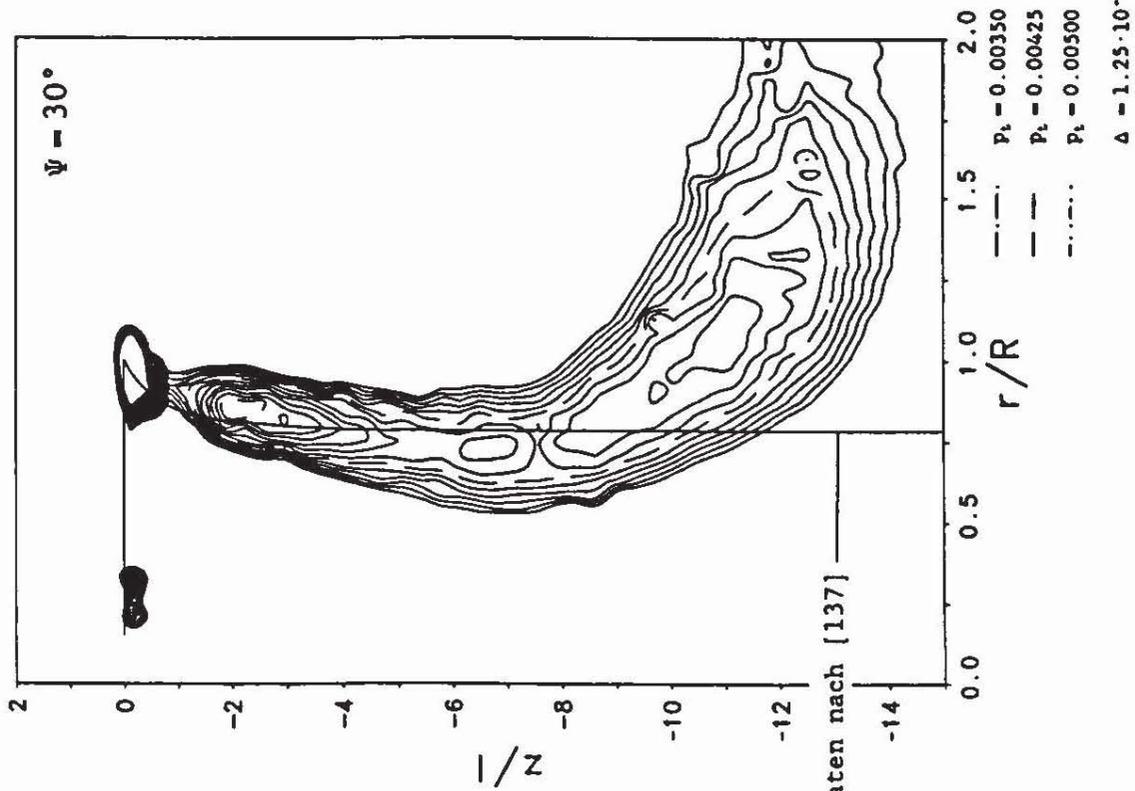


Bild 5.4-7: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$  (grobes Netz)

	Exp.	Theorie
Oberseite	×	— 1) - - - 2)
Unterseite	◇	- - - 1) - · - · - 2)

1) feines Netz  
2) grobes Netz

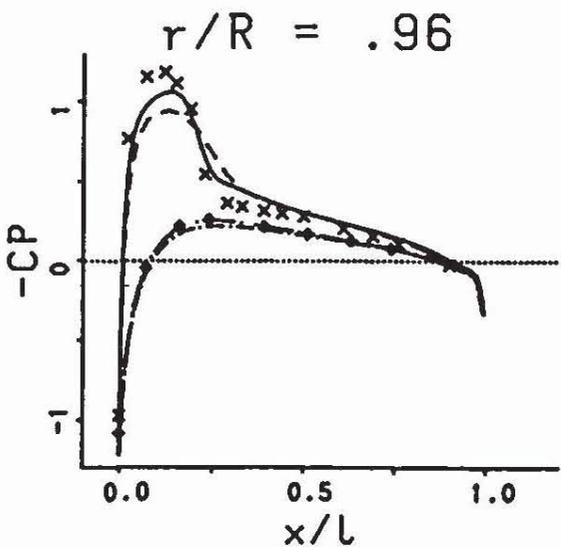
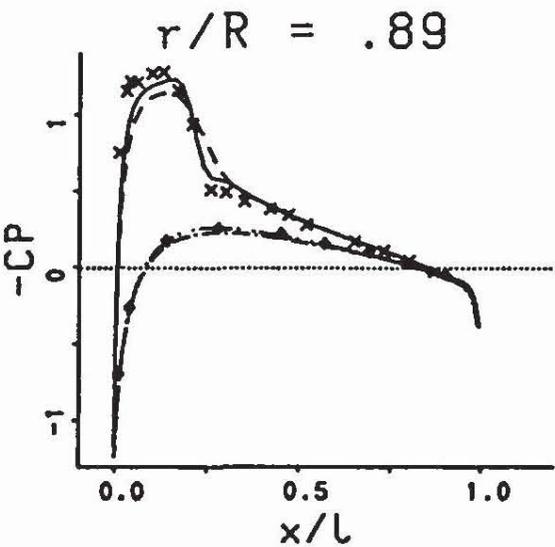
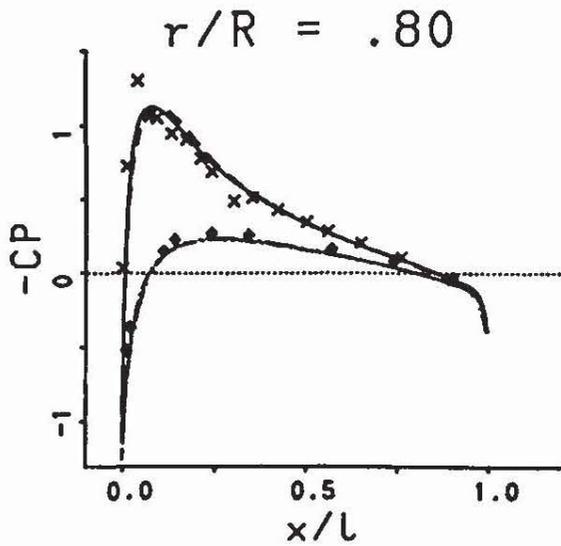
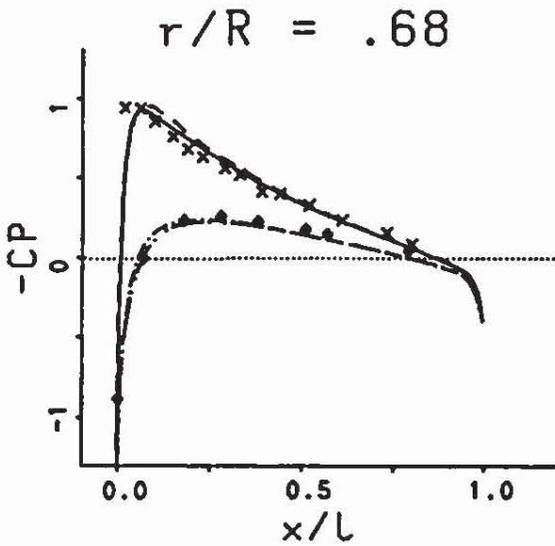
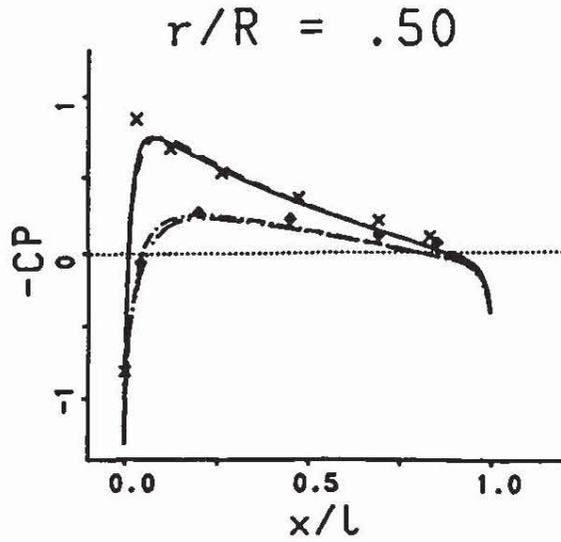


Bild 5.4-8: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t1p} = 0.794$  und  $\theta_c = 8^\circ$   
Vergleich zwischen feinem und grobem Netz

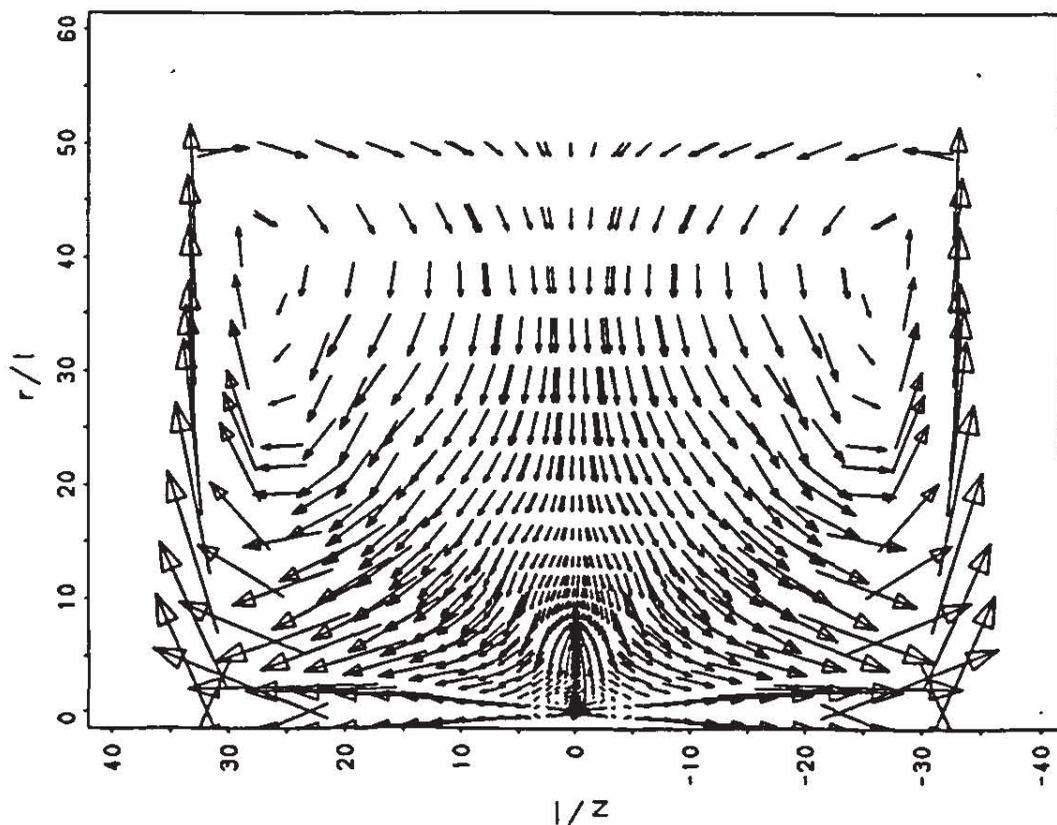
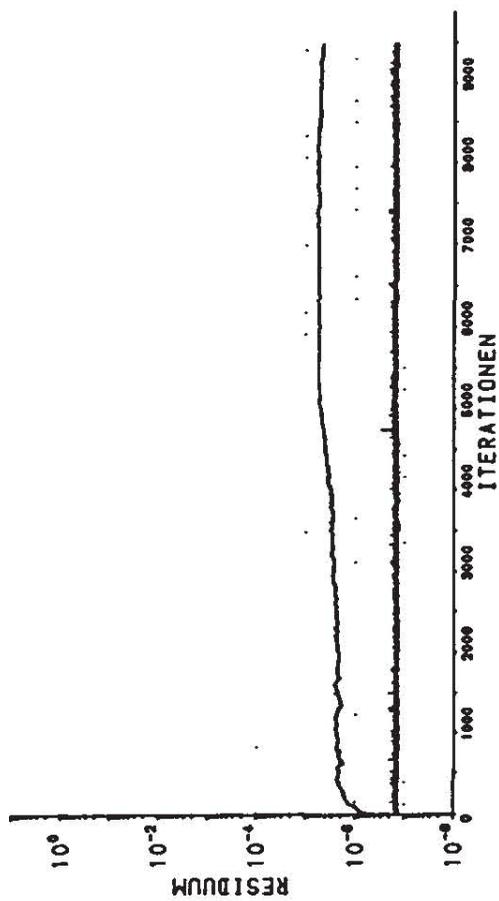
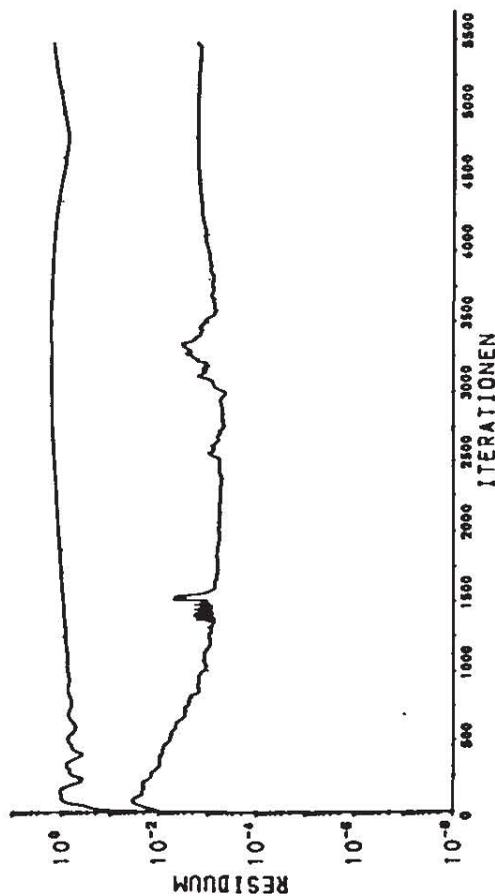


Bild 5.4-10: Induzierte Geschwindigkeitsverteilung im leeren Netz bei Verwendung relativer Strömungsgrößen



a) absolute Strömungsgrößen



b) relative Strömungsgrößen

Bild 5.4-9: Residuenverläufe (leeres Netz)

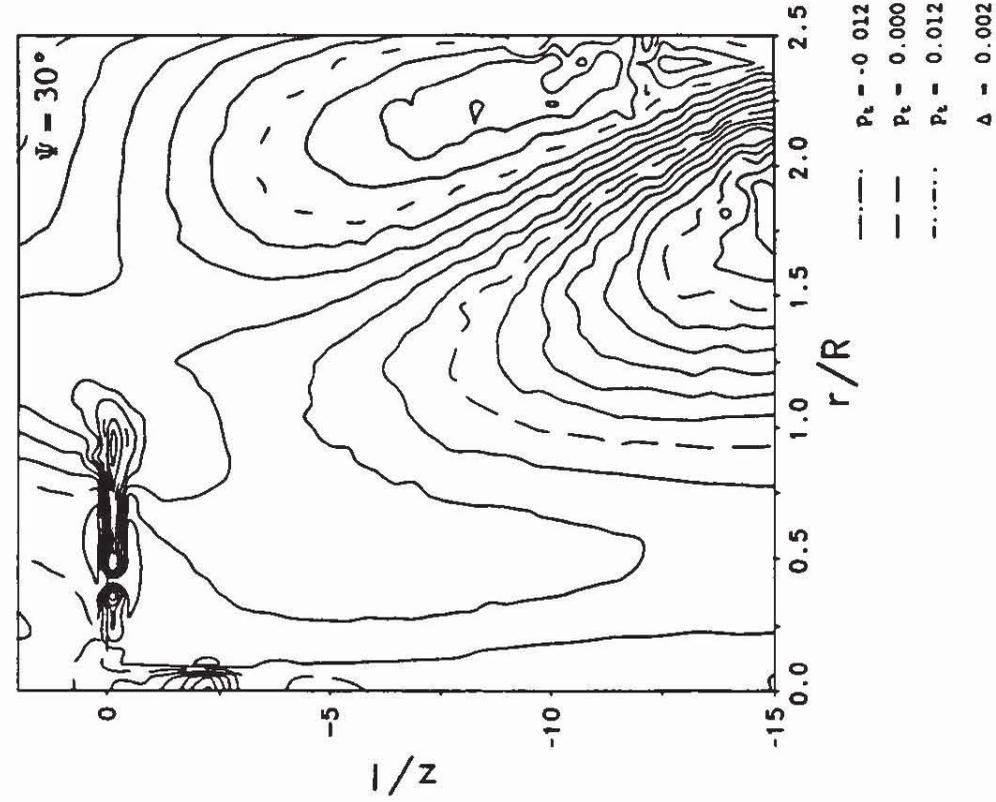


Bild 5.4-12: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (relative Strömungsgrößen)

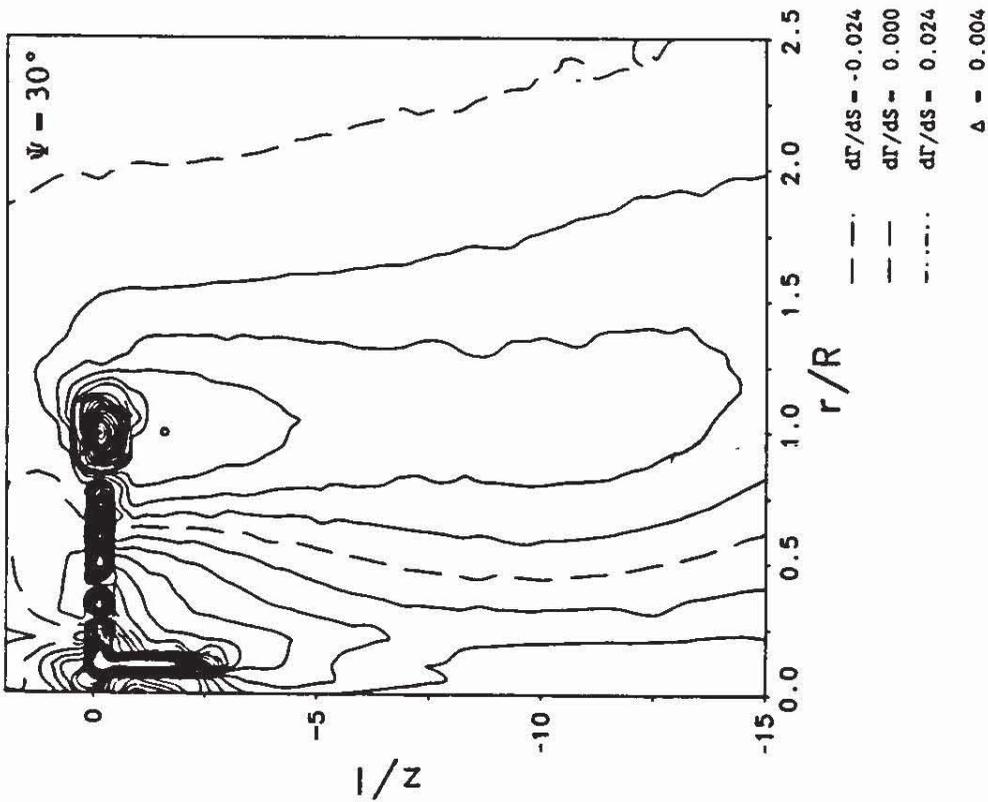


Bild 5.4-11: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (relative Strömungsgrößen)

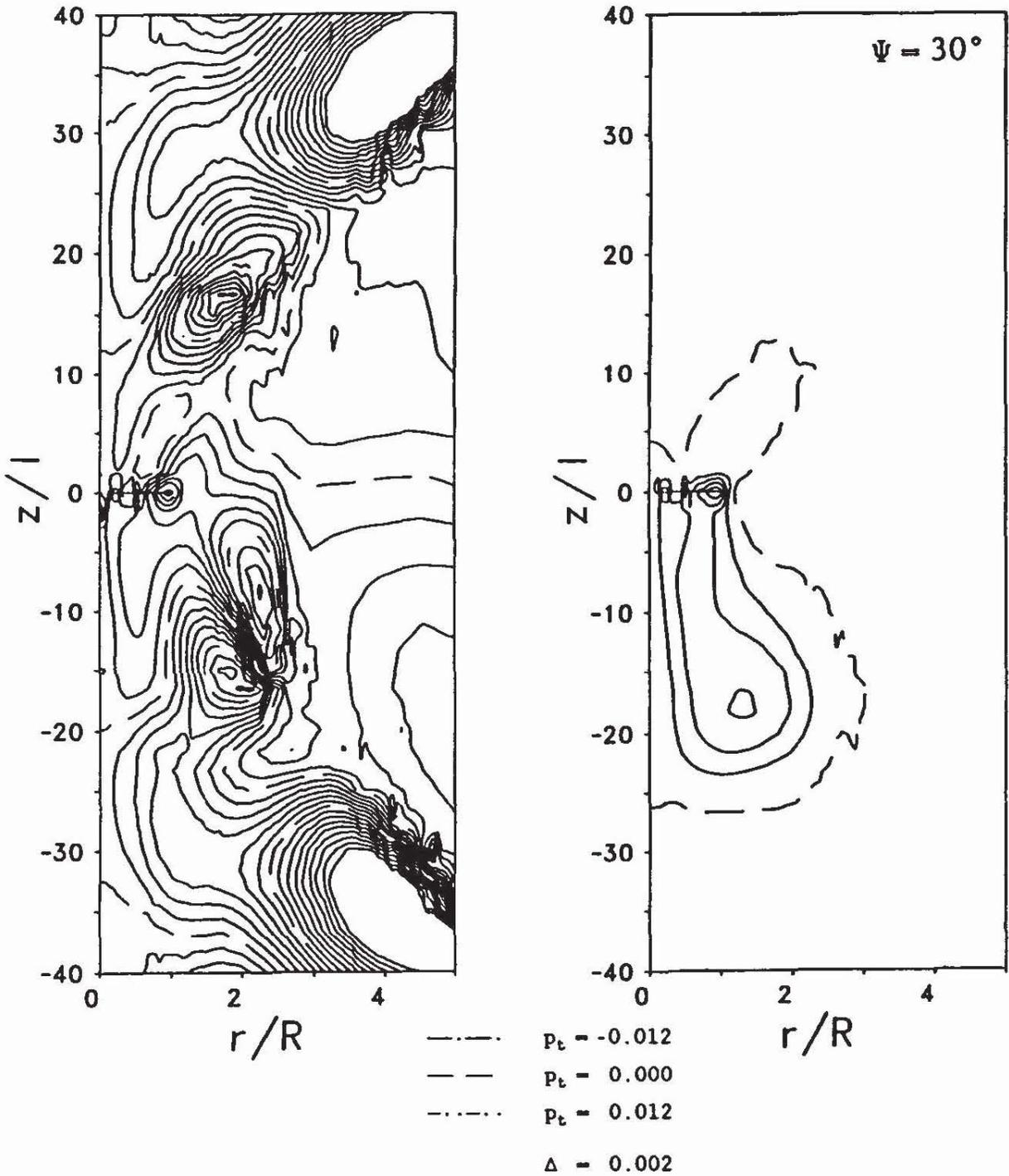


Bild 5.4-13: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t1p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (relative Strömungsgrößen)

Bild 5.4-14: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t1p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (absolute Strömungsgrößen)

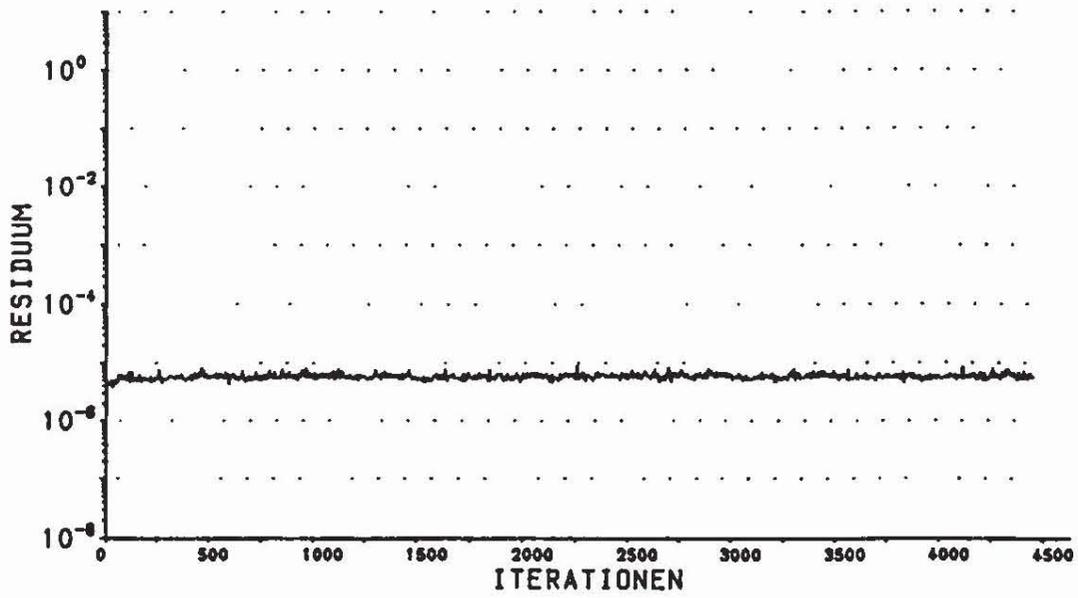


Bild 5.4-15: Residuenverlauf bei Verwendung der Roenergie (leeres Netz)

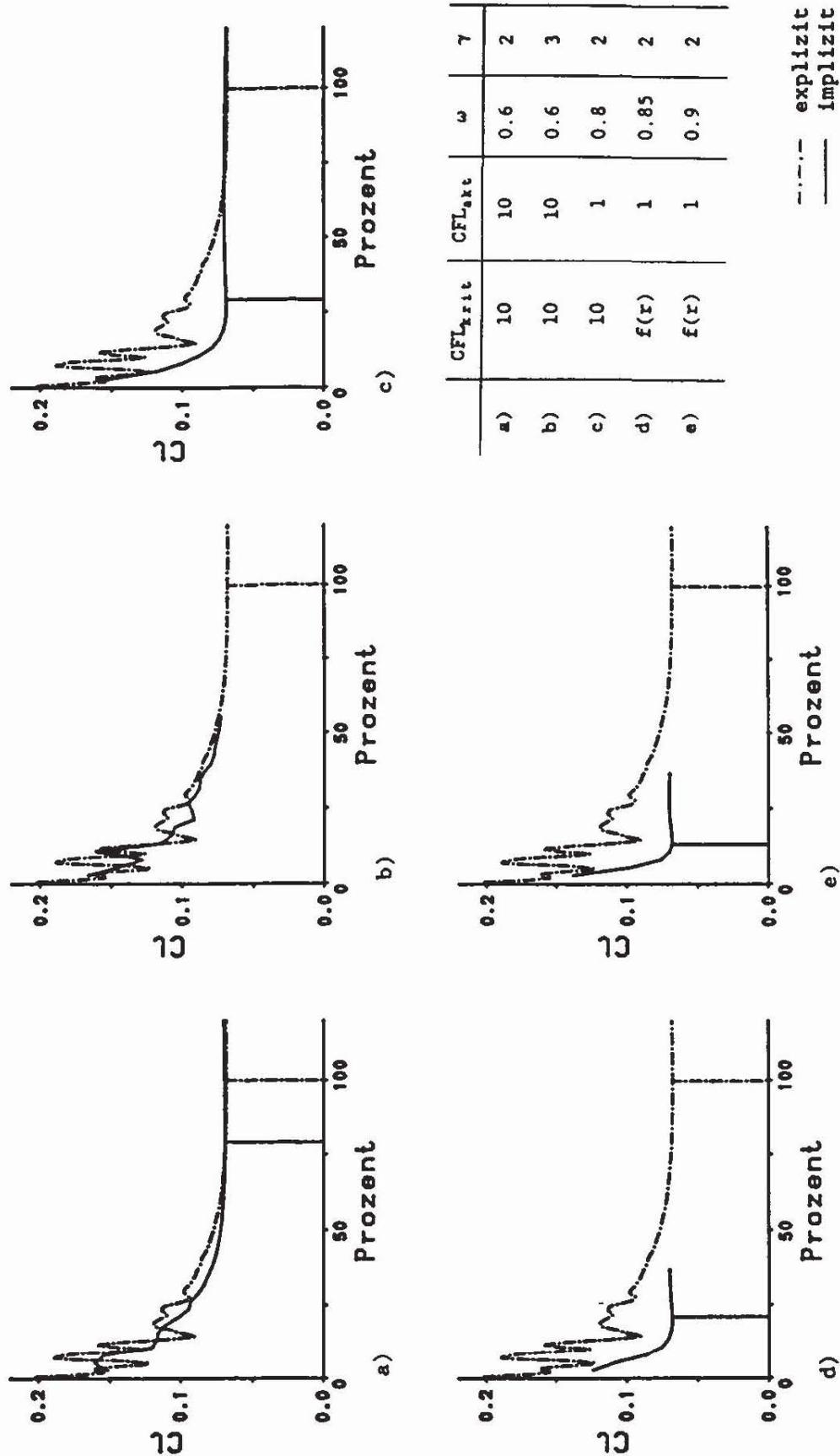
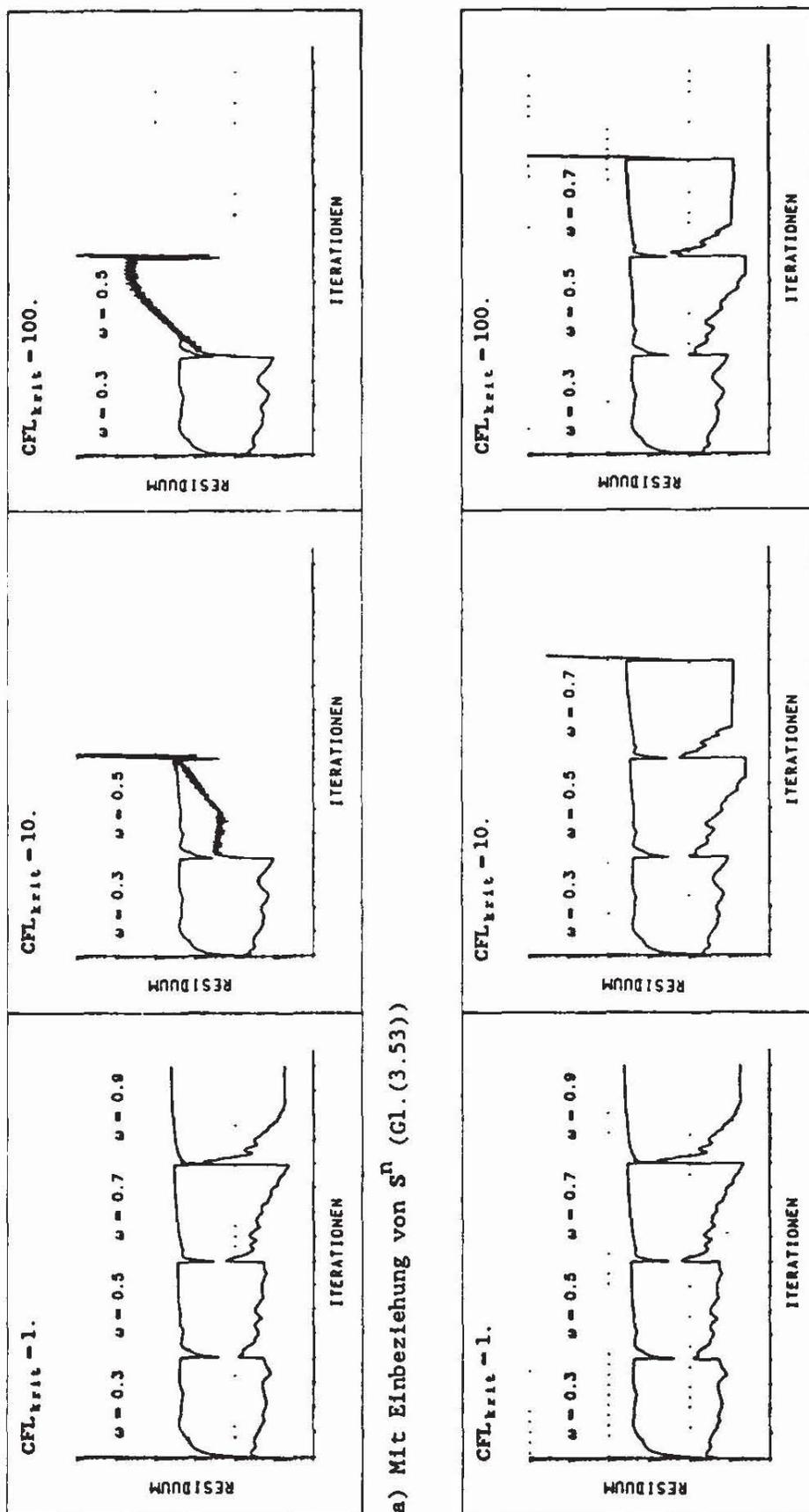


Bild 5.4-16: Rechenzeitvergleich zwischen explizitem und implizitem Verfahren



a) Mit Einbeziehung von  $s^n$  (Gl.(3.53))

b) Ohne Einbeziehung von  $s^n$  (Gl.(3.68))

Bild 5.4-17: Einfluß der Einbeziehung des Kräftevektors auf die numerische Stabilität des Verfahrens

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

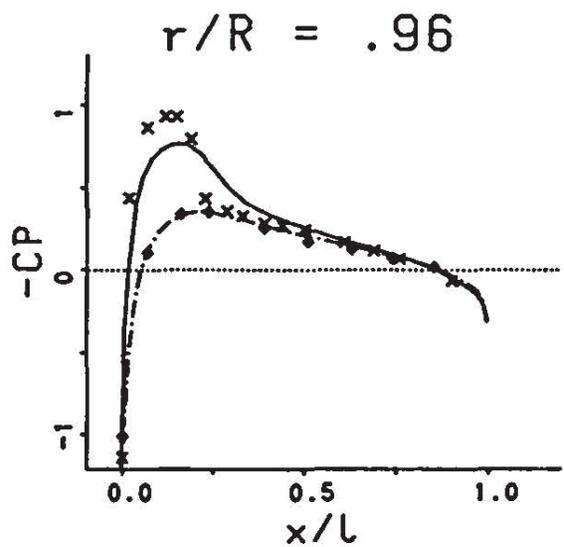
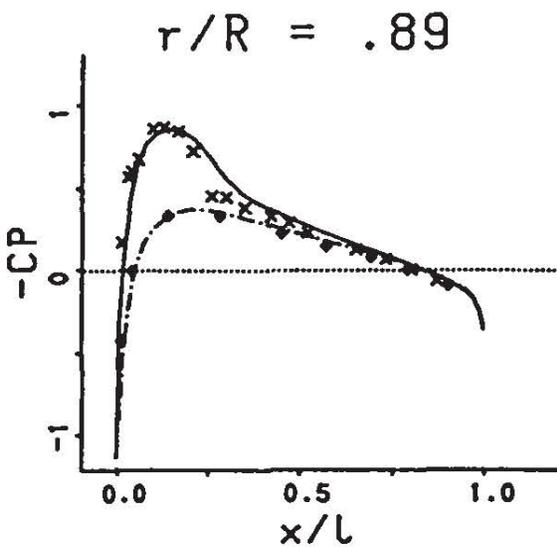
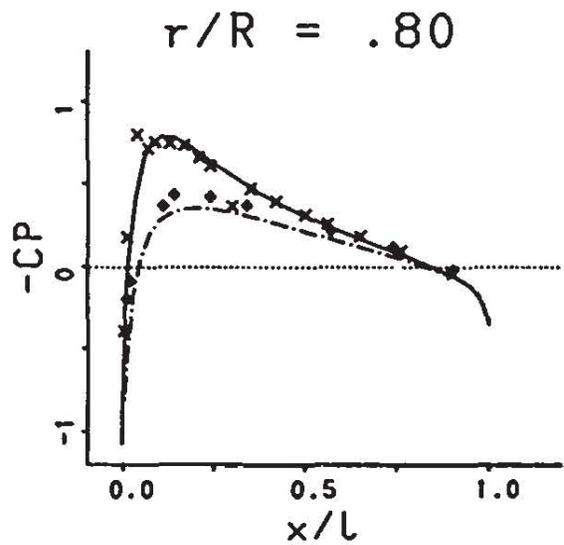
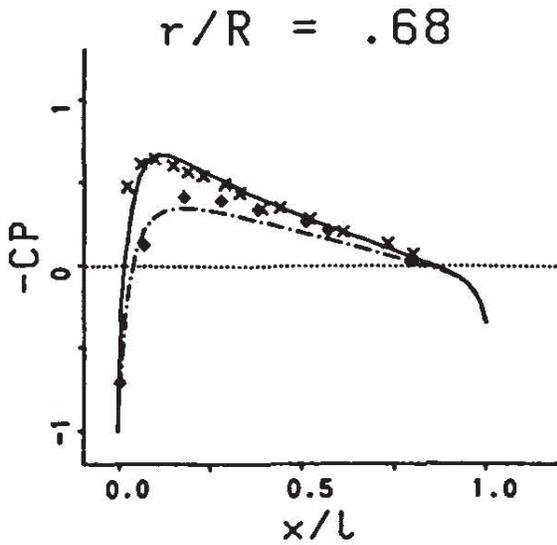
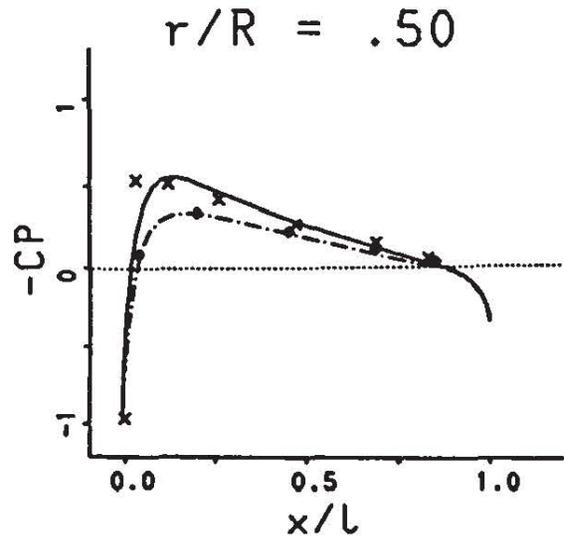


Bild 5.4-18: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (kleines Netz)

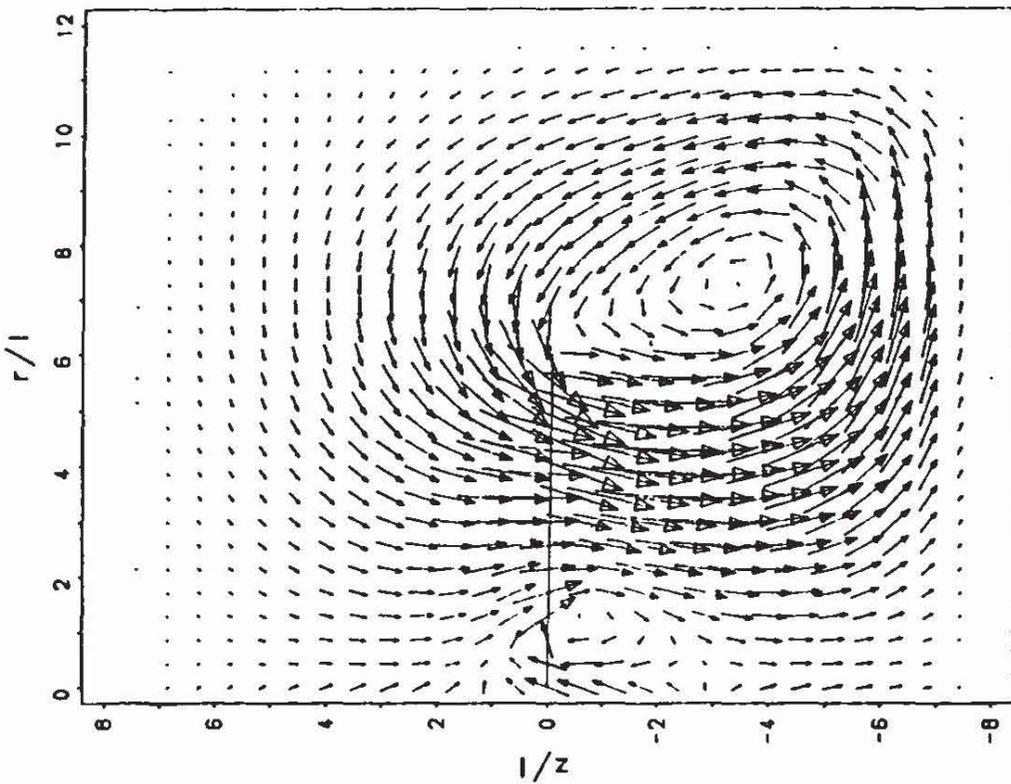


Bild 5.4-19: Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (kleines Netz)

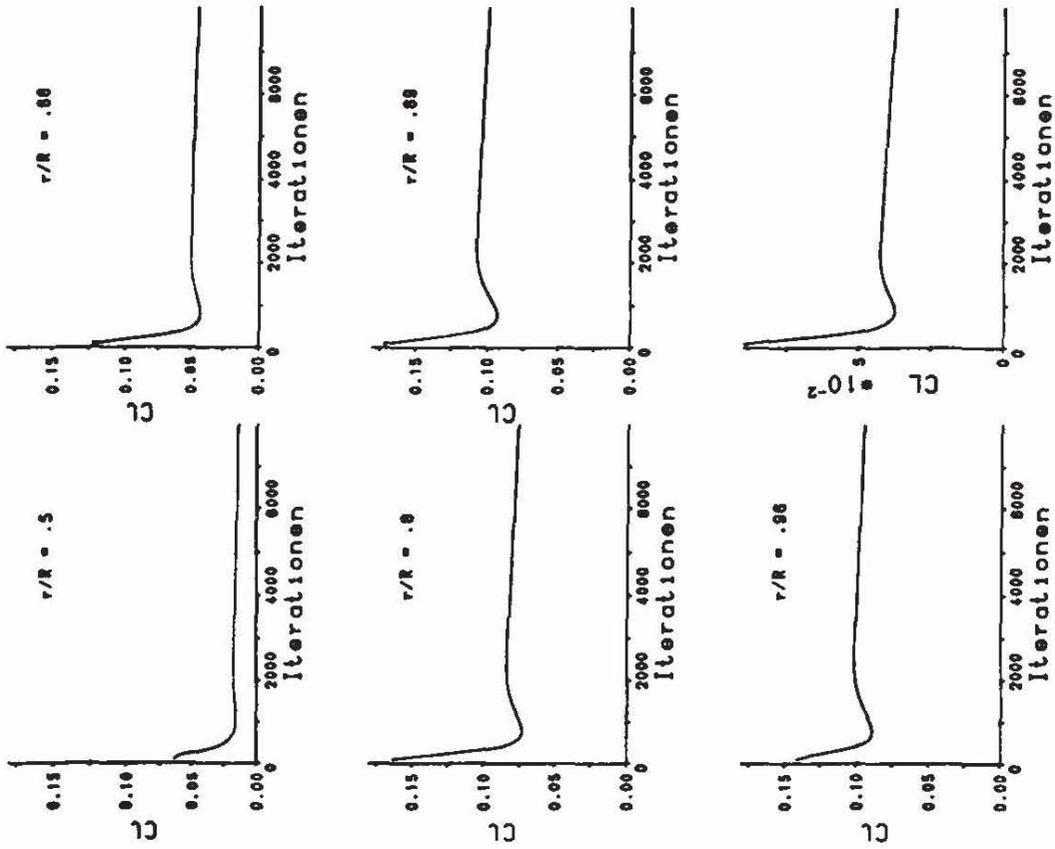


Bild 5.4-20: Zeitliche Entwicklung der Auftriebsbeiwerte (kleines Netz)

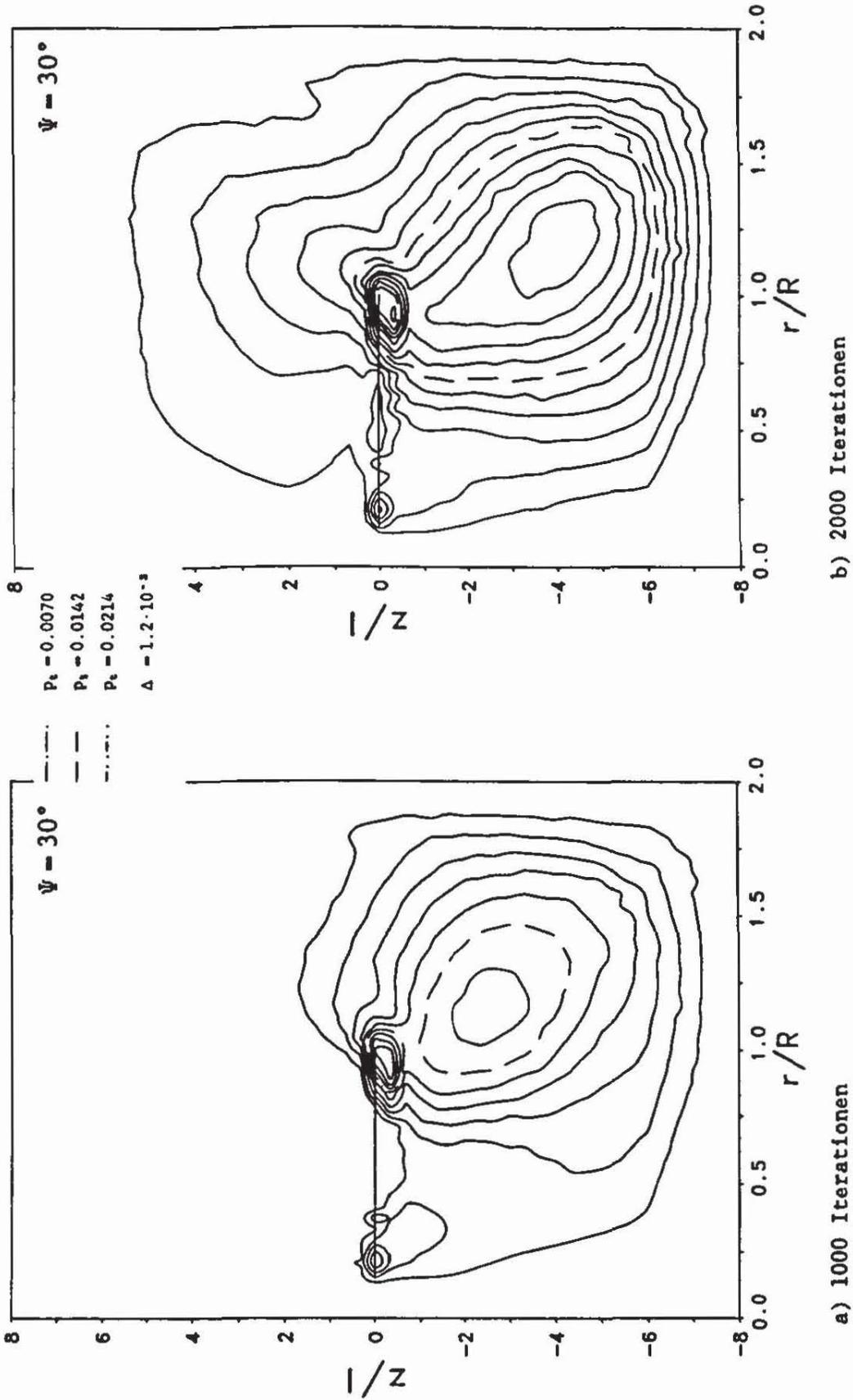


Bild 5.4-21: Zeitliche Entwicklung des Totaldruckverlustes im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (kleines Netz)

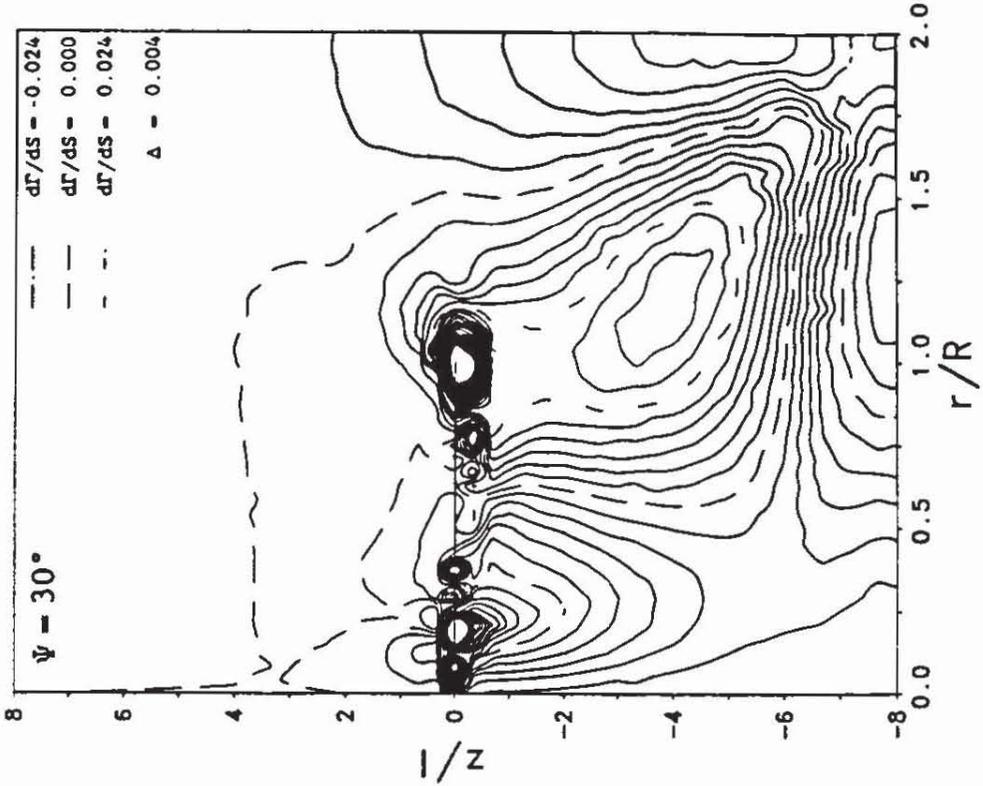


Bild 5.4-22: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (kleines Netz)

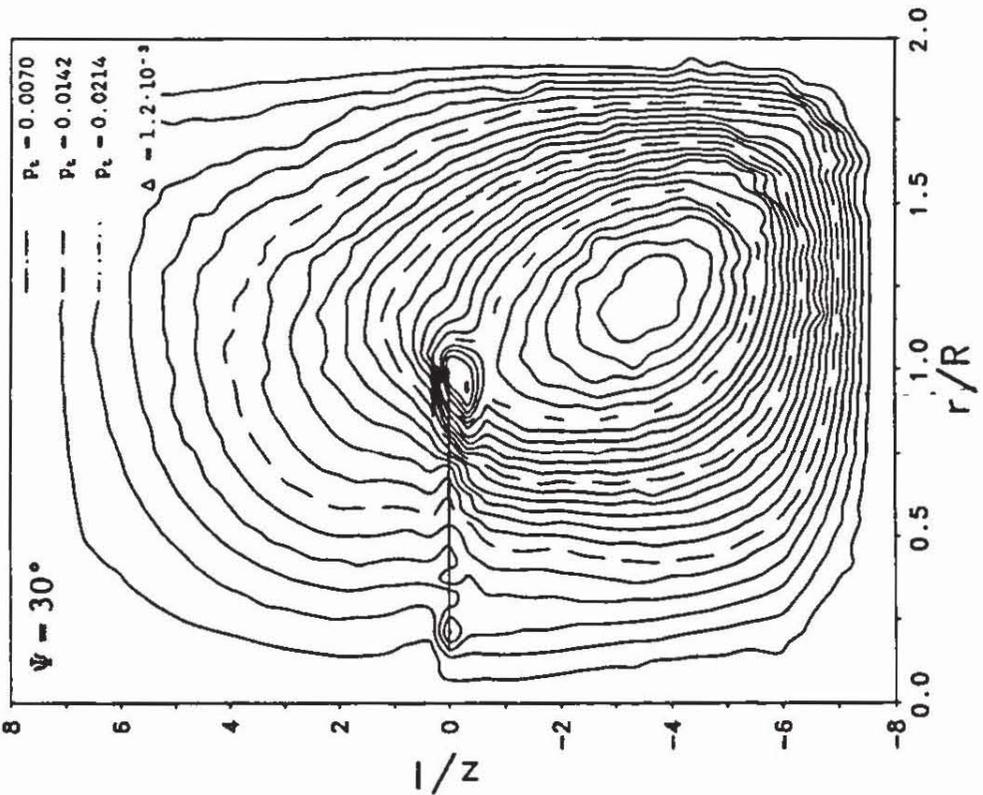


Bild 5.4-21: Zeitliche Entwicklung des Totaldruckverlustes im Nachlauf des Modellrotors (Forts.) bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (kleines Netz)

	Exp.	Theorie
Oberseite	X	—
Unterseite	◇	- - -

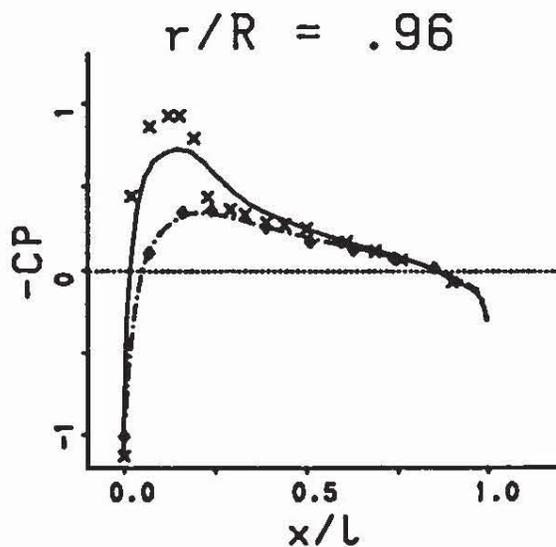
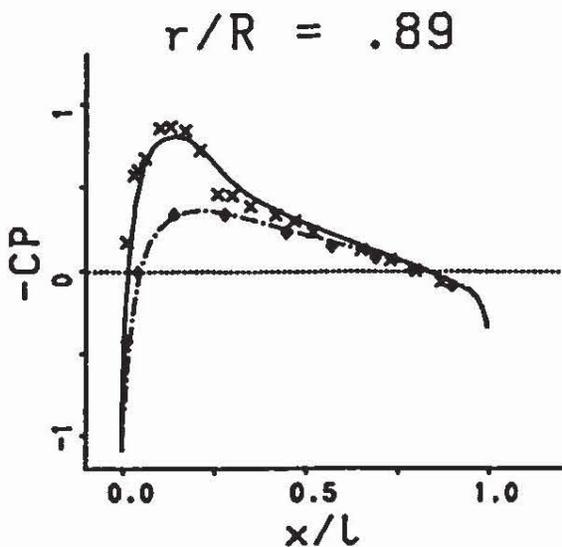
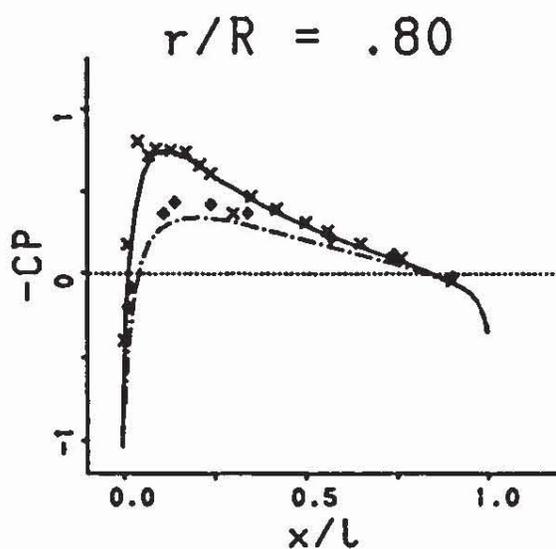
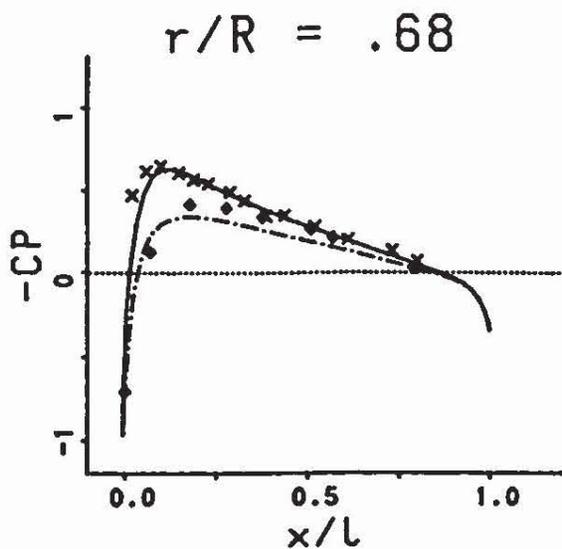
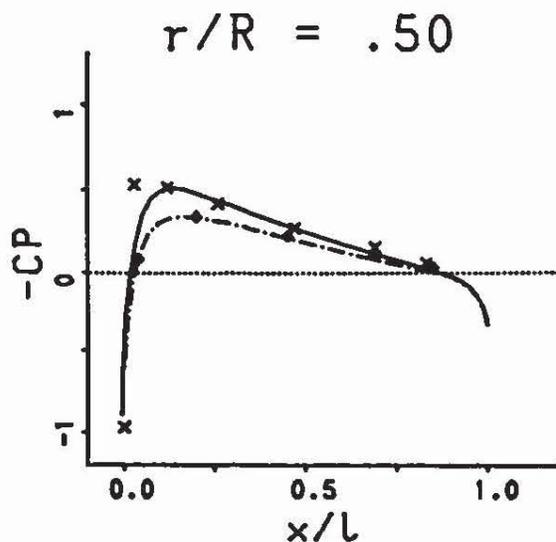


Bild 5.4-23: Druckverteilung für den Modellrotor bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (kleines Netz, Ende der Iteration)

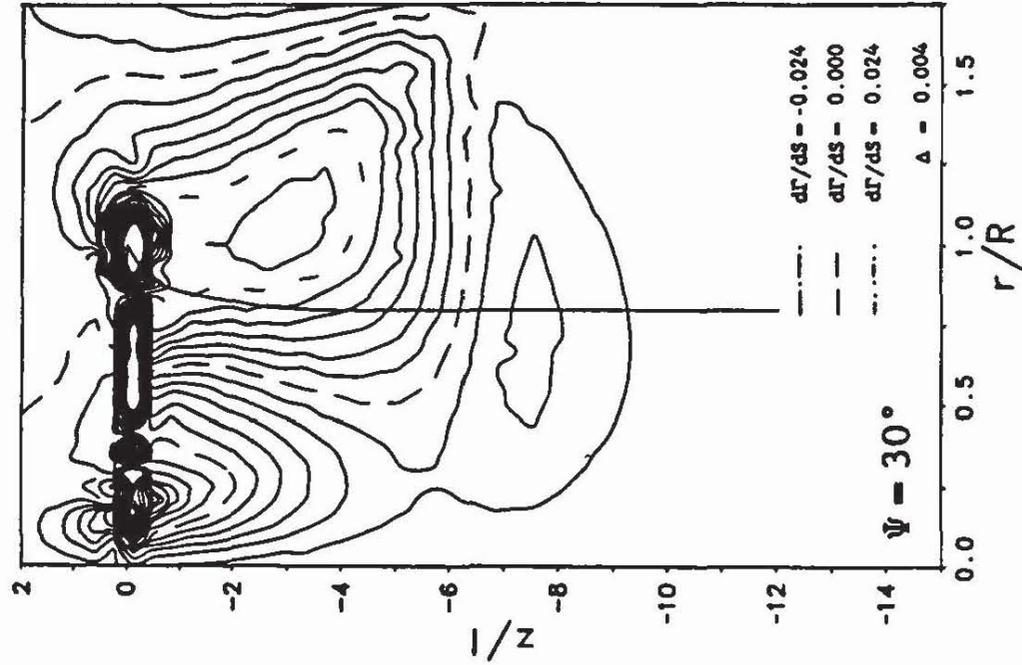


Bild 5.4-25: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (blockstrukturiertes Netz nach Bild 4.3-9)

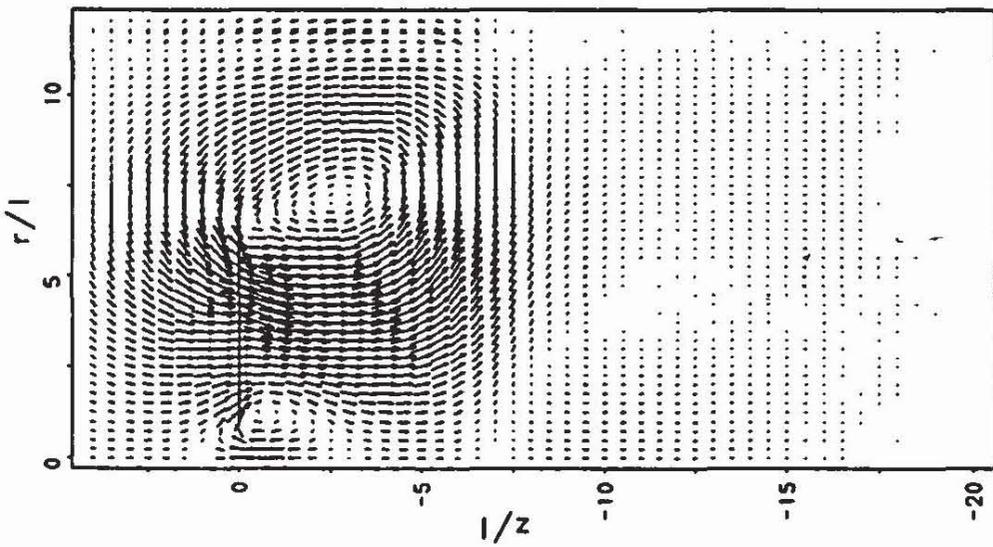


Bild 5.4-24: Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t,p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (blockstrukturiertes Netz nach Bild 4.3-9)

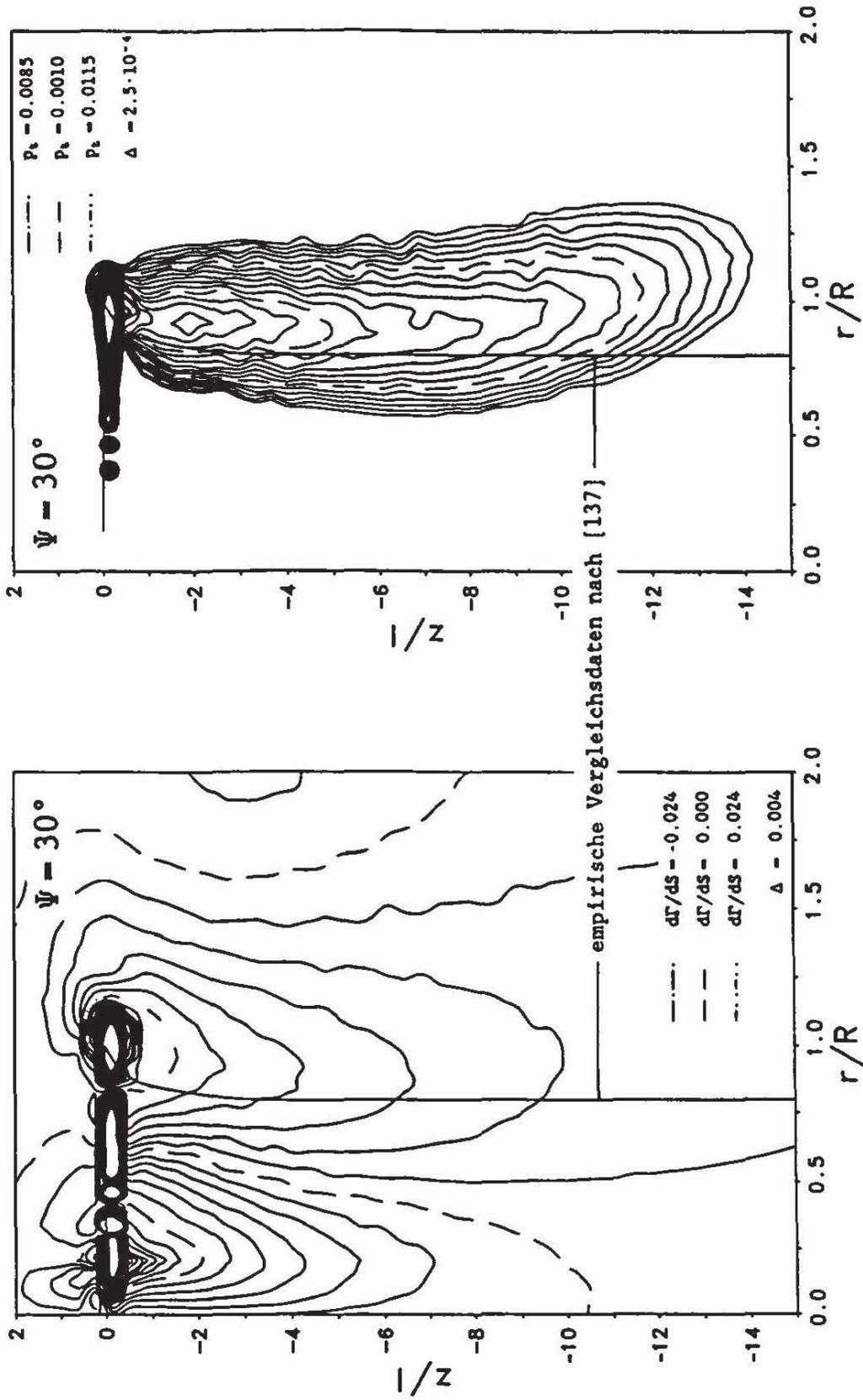


Bild 5.4-26: Zirkulationsdichteverteilung im Nachlauf des Bild 5.4-27: Totaldruckverlust im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{tip} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (blockstrukturiertes Netz nach Bild 4.3-11)

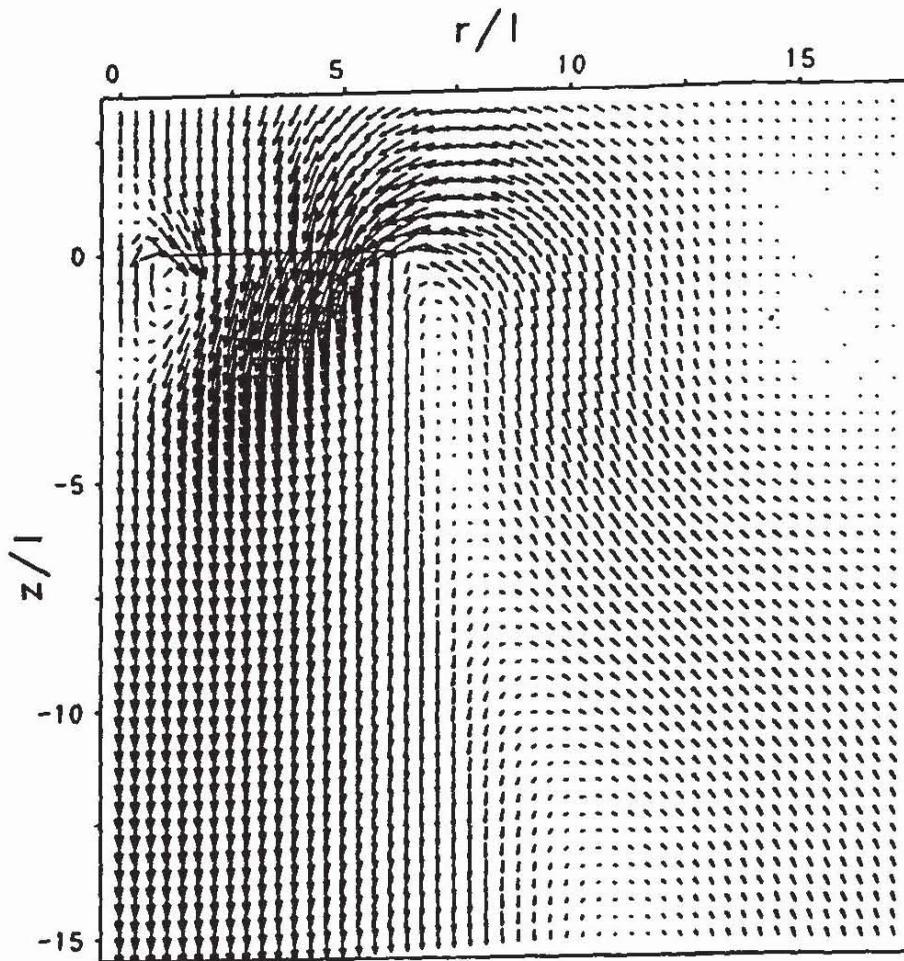


Bild 5.4-28: Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf des Modellrotors bei  $Ma_{t1p} = 0.815$  und  $\theta_c = 5^\circ$  (blockstrukt. Netz nach Bild 4.3-11)