

Turbulenzmodellierung und Detached Eddy Simulationen mit einem Discontinuous Galerkin Verfahren hoher Ordnung

Von der Fakultät
Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Ingenieurwissenschaft (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

von
Christian Lübon
geboren in Biberach

Hauptberichter : Prof. Dr.-Ing. Siegfried Wagner
Mitberichter : Prof. Dr. Claus-Dieter Munz
Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele

Tag der mündlichen Prüfung: 12.08.2010

Institut für Aerodynamik und Gasdynamik
der Universität Stuttgart

2011

Für meinen Vater Achim Lübon

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart.

Herrn Professor Siegfried Wagner gilt mein besonderer Dank für die Möglichkeit diese Arbeit an seinem Institut anzufertigen und die Übernahme des Hauptberichts. Ich bedanke mich für das entgegengebrachte Vertrauen und die jederzeit gegebene Unterstützung, sei sie nun fachlicher Natur, im Rahmen des Hochleistungsrechnens oder darin dieser Arbeit den letzten Schliff zu geben.

Herr Professor Claus-Dieter Munz hat durch seine Vorlesungen mein Interesse an den numerischen Methoden und den Discontinuous Galerkin Verfahren geweckt. Dafür und für die Übernahme des Mitberichts möchte ich mich bedanken.

Auch bei Herrn Professor Thiele möchte ich mich für die Übernahme des Mitberichts, sowie für die Zusammenarbeit im Rahmen des Projekts FREQUENZ bedanken.

Mein Dank gebührt weiterhin all jenen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Besonders möchte ich mich bei Doktor Manuel Keßler für die freundschaftliche Kooperation, das Projektmanagement und die fachliche Beratung bedanken.

Für das erstklassige Arbeitsklima und die interessanten Diskussionen bedanke ich mich bei meinen Kollegen.

Außerdem danke ich all denen, die mich bei der Erstellung meiner Dissertation begleitet haben, besonders bei meinen Eltern Ingrid und Achim Lübon, die mir die Möglichkeit des Studiums und der Promotion eröffnet haben.

Christian Lübon

Inhaltsverzeichnis

Symbole	xi
Abkürzungen	xv
Zusammenfassung	xvii
Abstract	xix
1. Einleitung	1
1.1. Das aerodynamische Problemfeld	1
1.2. Stand der Forschung	2
1.3. Ziele und Gliederung der Arbeit	5
2. Strömungsmechanische Erhaltungsgleichungen	7
2.1. Euler Gleichungen	7
2.1.1. Linearisierung der Euler Gleichungen	8
2.1.2. Charakteristiken Theorie	10
2.2. Navier-Stokes Gleichungen	14
2.3. Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen	15
2.3.1. Reynolds und Favre Mittelung	16
2.3.2. Turbulenzmodellierung	18
2.3.2.1. Spalart-Allmaras Turbulenzmodell	20
2.3.2.2. Wilcox $k - \omega$ Turbulenzmodell	22
2.4. Large Eddy Simulation	23
2.5. Detached Eddy Simulation	25
3. Discontinuous Galerkin Verfahren	27
3.1. Die Euler Gleichungen	28
3.2. Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen	29
3.3. Turbulenzmodellierung	30

3.4.	Limitierungsstrategien	32
3.4.1.	Stoßlimitierung	32
3.4.2.	Limitierung der Turbulenzgrößen	33
3.5.	Elemente und Basisfunktionen	34
3.5.1.	Transformation in den Rechenraum	34
3.5.2.	Basisfunktionen	36
3.5.3.	Massenmatrizen	38
3.6.	Randbedingungen	38
3.6.1.	Reibungsbehaftete Wände	38
3.6.2.	Fernfeld Randbedingung	39
3.6.3.	Extrapolierte Randbedingung und Dämpfungszonen	39
3.6.4.	Charakteristische Randbedingungen	40
3.7.	Dreidimensionale gekrümmte Ränder hoher Ordnung	42
3.7.1.	Normalenvektoren	43
3.7.2.	Polynomiale Interpolation	43
3.7.3.	Räumliche Transformation	44
3.7.4.	Zell-Projektion	46
3.8.	Räumliche Integration	47
3.9.	Zeitintegration	48
3.9.1.	Explizit	48
3.9.2.	Implizit	49
3.10.	Die numerischen Werkzeuge	51
3.10.1.	Partitionierung	52
3.10.2.	Parallelisierung	53
3.10.3.	Gitterverwaltung und Datenausgabe	54
3.10.4.	Adaption	56
4.	Ergebnisse	61
4.1.	Detached Eddy Simulationen in der Anwendung	61
4.1.1.	Auslegungsrechnungen und Windkanalkorrektur	62
4.1.2.	Detached Eddy Simulationen	66
4.1.2.1.	Spannweitige Geschwindigkeitskorrelationen	67
4.1.2.2.	Das Wandgesetz für turbulente Strömungen	68
4.1.2.3.	Nachlaufuntersuchungen und Vergleich mit dem Experiment	69

4.2. Discontinuous Galerkin Verfahren	71
4.2.1. Das Konvergenzverhalten	71
4.2.2. Reibungsfreie Strömungen	79
4.2.2.1. Kugelumströmungen mit isoparametrischen Ele- menten	79
4.2.2.2. Transsonische Strömungen	82
4.2.3. Laminare Strömung	85
4.2.3.1. Grenzschicht an der ebenen Platte	85
4.2.3.2. Stationäre Kugelumströmung	86
4.2.3.3. Instationäre Kugelumströmungen	89
4.2.4. Turbulente Strömung	92
4.2.4.1. Grenzschicht an der ebenen Platte	92
4.2.4.2. Die FREQUENZ Konfiguration	95
4.2.5. Detached Eddy Simulation	97
4.2.5.1. Kugelumströmung mit laminarer Ablösung	97
4.2.5.2. Turbulente Strömung an einer Kugel	101
4.2.6. Parallele Leistung und Speedup	103
5. Zusammenfassung und Ausblick	109
Anhang	113
A. Basisfunktionen	113
B. Charakteristische Randbedingungen	117
C. Gaußintegration	119
D. Konvergenztabelle	121
Literaturverzeichnis	135

Symbole

Lateinische Buchstaben:

A, B, C	Jakobi-Matrizen
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$	Jakobi-Matrizen für primitive Variable
C_s	Smagorinsky-Konstante
c_a	Auftriebsbeiwert
c_f	Reibungswiderstandsbeiwert
c_p	Druckbeiwert
c_w	Widerstandsbeiwert
d	Wandabstand
E	Spezifische Totalenergie
$\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_v$	Reibungsfreier und viskoser Flussvektor
G	Filterfunktion
h	Gitterweite
J	Jakobi-Matrix
\underline{J}	Transformations Jakobi-Matrix
k	Turbulente kinetische Energie
l_c	Feinstrukturlänge
l_{DES}	Turbulentes DES Längenmaß
l_t	Turbulentes Längenmaß
M	Massenmatrix
Ma	Mach-Zahl
N	Polynomgrad
\vec{n}	Normalenvektor
$P_n^{\alpha, \beta}$	Jacobi-Polynome
p	Druck, Konvergenzordnung
$p(\xi, \eta)$	Polynomiale Oberflächendarstellung
Pr	Prandtl-Zahl
Pr_t	Turbulente Prandtl-Zahl

$q(\xi, \eta, \zeta)$	Transformationspolynom
\vec{q}	Wärmeflussvektor
R	Residuum
R_{ii}	Korelationskoeffizient
Re	Reynolds-Zahl
S	Entropie
Tu_∞	Turbulenzgrad im Fernfeld
U	Vektor der Erhaltungsgrößen
\tilde{U}	Gemittelte Erhaltungsgrößen
\bar{U}	Mittelwert der Erhaltungsgrößen (RANS), Grobstrukturanteil (LES)
U'	Schwankung der Erhaltungsgrößen (RANS), Feinstrukturanteil (LES)
U''	Fluktuation der Erhaltungsgrößen
u^+	Dimensionslose, grenzschichtskalierte Geschwindigkeit
u, v, w	Kartesische Komponenten des Geschwindigkeitsvektors
V	Testfunktion
v_t	Turbulentes Geschwindigkeitsmaß
\vec{v}	Vektor der Gesamtgeschwindigkeit
v	Testfunktion oder Basisfunktion
v_t	Turbulentes Geschwindigkeitsmaß
W	Vektor der Charakteristische Variablen
x, y, z	Koordinaten im physikalischen System
y^+	Dimensionslose, grenzschichtskalierte Wanddistanz

Griechische Buchstaben:

α	Anstellwinkel
Δ	Gitter- oder Filterweite
δ_{ij}	Kronecker-Delta Funktion
ϕ_k	Basisfunktionen
γ	Adiabaten Exponent
η	Dimensionsloser Wandabstand
Λ	Charakteristische Jacobi-Matrizen
λ	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient

λ_t	Turbulenter Wärmeleitfähigkeitskoeffizient
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Eigenwerte
μ	Molekulare Viskosität
μ_t	Turbulente Wirbelviskosität
\tilde{v}	Arbeitsvariable des SA-Turbulenzmodells
Θ	Gradient der primitiven Variablen
ρ	Dichte
τ, τ_{ij}	Spannungstensor
Ω	Vektor der Wirbelstärke, Kontrollvolumen
ω	Spezifische Dissipationsrate
$ \Omega $	Betrag der Wirbelstärke
$\partial\Omega$	Ränder des Kontrollvolumens
ξ, η, ζ	Koordinaten im Rechenraum
ψ	Indikator des räumlichen Auflösungsvermögens
$\psi_i^a, \psi_{ij}^b, \psi_{ijj}^c$	Grundfunktionen orthogonaler Basen

Abkürzungen

ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
AWB	Aeroakustische Windkanal Braunschweig
BI-CGStab	Biconjugate Gradient Stabilized Method
BMWI	Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie
CAD	Computer Aided Design
CFD	Computational fluid dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
CGNS	CFD General Notation System
DES	Detached Eddy Simulation
DG	Discontinuous Galerkin
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DNS	Direkte Numerische Simulation
DRP	Dispersion Relation Preserving
EI	Euler Implizit
ENO	Essentially Non Oscillatory
FAS	Full-Approximation Storage
FE	Finite Elemente
FREQUENZ	Forschung zur Reduktion und Ermittlung des Quell- lärms mittels Experiment und Numerik bei Zivilver- kehrsflugzeugen
FV	Finite Volumen
GMRES	Generalized Minimum Residual
HT	Intel Hyper-Threading
IAG	Institut für Aerodynamik und Gasdynamik
ILU	Incomplete Lower-Upper Methode
ITL	Iterative Template Library
LES	Large Eddy Simulation
LDG	Local Discontinuous Galerkin
MPI	Message Passing Interface

MTL	Matrix Template Library
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
ONERA	Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes Equations
RKDG	Runge-Kutta Discontinuous Galerkin
SA	Spalart-Allmaras Turbulenzmodell
SUNWinT	Stuttgart University Numerical Wind Tunnel
TED	Trailing Edge Device
URANS	Unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes Equations
WENO	Weighted Essentially Non Oscillatory

Zusammenfassung

In letzter Zeit wuchs die Bedeutung der numerischen Simulation von Strömungen im industriellen Umfeld. Meist ist die Strömung dreidimensional, turbulent, abgelöst und das bei komplexen Geometrien. Aufgrund der Komplexität solcher Probleme ist eine kontinuierliche Weiterentwicklung der numerischen Methoden und Lösungsverfahren zwingend erforderlich.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Discontinuous Galerkin Verfahren hoher Ordnung vorgestellt, um abgelöste turbulente Strömungen um komplexe Geometrien mit unstrukturierten Gittern und hoher Genauigkeit zu berechnen.

Die Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren verbinden Ideen aus den Finite Elemente (FE) und Finite Volumen (FV) Verfahren, beispielsweise hohe Genauigkeit durch einen polynomialen Ansatz innerhalb der Zellen, oder die Wellenausbreitung mit den damit verbundenen Riemann Problemen. Ursprünglich wurde die Methode für hyperbolische Erhaltungsgleichungen wie die Euler-Gleichungen entwickelt. In der realen Anwendung ist die Strömung meist aber turbulent, dreidimensional und instationär. Die ursprünglich entwickelten DG Verfahren für die Euler-Gleichungen enthielten nur Ableitung erster Ordnung. Der Durchbruch zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen mit ihren Ableitung zweiter Ordnung gelang Bassi und Rebay. Danach musste ein weiterer großer Schritt getan werden, die Erweiterung der Algorithmen zur Behandlung von turbulenten Strömungen. Die instationären Reynolds gemittelten Navier-Stokes (URANS) Gleichungen mussten gelöst werden. Dafür wurden die Algorithmen von Bassi und Rebay sowie von Landmann um Turbulenzmodelle erweitert. Darauf aufbauend wurde in der vorliegenden Arbeit die Methode zuerst für dreidimensionale turbulente Strömungen und später auf eine Detached Eddy Simulation (DES) erweitert.

Um die hohe Ordnung und den damit verbundenen Effizienzgewinn des Verfahrens nachzuweisen wurde zuerst eine Konvergenzanalyse durchgeführt, später dann die ausgezeichnete Skalierbarkeit auf massiv parallelen Höchst-

leistungsrechnern demonstriert. Danach werden einige ausgewählte Ergebnisse, wie die Strömung längs einer Platte oder die Strömung um eine Kugel, die nicht mit herkömmlichen URANS Methoden bestimmt werden kann, mit hoher Genauigkeit berechnet und mit der Theorie beziehungsweise dem Experiment verglichen.

Abstract

In recent times the numerical simulation of flow problems obtained rising importance in the industrial environment. In most cases the flow is three dimensional, turbulent, separated and the geometries are complex. These flow problems are difficult to gather, so a continuous improvement of the numerical solution methods and algorithms is necessary.

This thesis presents a high-order Discontinuous Galerkin method for the numerical simulation of this separated turbulent flows around complex geometries using unstructured grids.

The Discontinuous Galerkin (DG) method combines ideas from the Finite Element (FE) and Finite Volume (FV) methods, the physics of wave propagation, expressed by Riemann problems, and the accuracy obtained by high-order polynomial approximations within elements. It was originally developed for hyperbolic conservation laws in 2D flow, including the Euler equations. However, in real life applications the flow is in most cases turbulent, unsteady and 3D. The original development of DG methods was devoted to the Euler equations that contain only first derivatives. The breakthrough for solving the Navier-Stokes equations with second derivatives was achieved by Bassi and Rebay. Still another big step was to be done, namely to extend the algorithms for the handling of turbulent flows. The unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes (URANS) equations had to be solved. Thus, the algorithms had to be extended to include turbulence models, done by Bassi and Rebay or Landmann. Based on this experience, in this thesis, the algorithms were enhanced to three-dimensional turbulent flow. This was done by solving the URANS equations and later on by implementing a Detached Eddy simulation (DES) model.

To demonstrate the high-order method and the efficiency improvement a convergence analysis was performed, additional computational aspects were discussed and the excellent scalability on massive parallel supercomputers were demonstrated. Some results, like flows over a flat plate and around a

sphere, which could not be predicted with an unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes calculation, are calculated with high accuracy and compared with theory and experiments, respectively.

1. Einleitung

1.1. Das aerodynamische Problemfeld

Die numerische Berechnung von Strömungen hat sehr stark an Bedeutung gewonnen. Im Laufe der letzten Jahre wurden nicht nur immer größere Probleme im Sinne von komplizierten Geometrien und immer höherer räumlicher wie zeitlicher Auflösung mit Erfolg bearbeitet, sondern auch immer schwieriger zu diskretisierende Gleichungen gelöst.

Die Beschreibung realer Probleme und der stattfindenden Physik ging einher mit dem Zuwachs an Rechenleistung, aber auch mit der Verbesserung der mathematischen Theorie sowie der gesteigerten Effizienz der numerischen Verfahren. Somit konnte sich die Computational Fluid Dynamic (CFD) neben dem Experiment und der analytischen Theorie als drittes Standbein der Strömungsmechanik entwickeln.

Abgelöste turbulente Strömungen spielen eine zentrale Rolle in vielen ingenieurtechnischen Anwendungen, allerdings stellen zuverlässige Berechnungen dieser Strömung auch nach jahrzehntelanger intensiver Forschung eine große Herausforderung dar. Verschiedene Turbulenzmodelle, hauptsächlich auf der Wirbelviskosität basierend, wurden zu diesem Zweck entwickelt, sind aber teilweise von enttäuschender Genauigkeit. Eine Verbesserung der Vorhersage für turbulente Strömungen kann eine Kopplung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes (RANS) Gleichungen mit der Large Eddy Simulation (LES) liefern. Allerdings setzt hierbei eine direkte Simulation der entstehenden großskaligen Wirbel ein numerisches Verfahren von geringer numerischer Dissipation oder höherer Ordnung voraus.

In dieser Arbeit wird nun ein Verfahren hoher Genauigkeit, die Discontinuous Galerkin Methode, vorgestellt und mit Hilfe einiger Beispiele untersucht, um dann schlussendlich die Kombination dieser Diskretisierung mit einer hybriden Turbulenzmodellierung zwischen RANS und LES zu demonstrieren.

1.2. Stand der Forschung

Im Rahmen des Fortschritts in der CFD wurden verschiedene Programmpakete entwickelt, die mittlerweile sehr weit ausgereift sind und auch im industriellen Umfeld eingesetzt werden. Neben zahlreichen kommerziellen Programmen wie StarCD, Fluent, CFX, Cobalt und Fine entstanden auch an den Forschungseinrichtungen Codes wie FLOWer [51, 52] und Tau [39] (DLR) oder elsA [40] (ONERA). Auch wenn diese Tools auf den ersten Blick nur wenige Gemeinsamkeiten besitzen, basieren sie doch alle auf den selben Grundkonzepten, die im Prinzip mehr oder minder unverändert seit über zwanzig Jahren eingesetzt werden. Sie alle lösen die RANS [75] Gleichungen mit verschiedenen Turbulenzmodellen und verwenden eine Finite Volumen (FV) Diskretisierung zweiter Ordnung im Raum.

Neben diesen etablierten Lösern wurden jedoch auch weitere Forschungen unternommen, die jeweils in Teilbereichen signifikante Verbesserungen darstellten.

Zum ersten betraf dies das physikalische Modell, wo im Grundlagenbereich die Direkte Numerische Simulation (DNS) [37] mit entsprechend hochspezialisierten Verfahren bei fundamentalen Untersuchungen wie der Entstehung von Turbulenz recht erfolgreich ist. Für etwas höhere Reynoldszahlen verspricht die Grobstruktursimulation oder Large Eddy Simulation (LES) [77] einen gewissen Fortschritt, mittlerweile sind jedoch hybride Verfahren wie die so genannten Detached Eddy Simulationen (DES) [84] in Mode gekommen, die versuchen, die jeweiligen Vorteile von RANS und LES zu verbinden. Gerade DES zeigt beispielsweise bei massiv abgelösten Strömungen ausgezeichnete Ergebnisse.

Zum zweiten, auf Seite der Diskretisierung, wurden zahlreiche Arbeiten zu Verfahren höherer Ordnung veröffentlicht, auf strukturierten Gittern wären beispielsweise die Dispersion Relation Preserving (DRP) Verfahren [88] oder kompakte Differenzen [61] zu nennen. Sie sind jedoch im wesentlichen beschränkt auf Tensorproduktgitter, am besten noch mit konstanter Maschenweite, und somit ungeeignet für auch nur einigermaßen realitätsnahe Geometrien. Besser geeignet für komplexere Geometrien sind unstrukturierte Gitter, bei denen die Implementierung von Verfahren höherer Ordnung ungleich schwieriger ist. Zu nennen wären hier die Essentially Non Oscillatory (ENO) oder Weighted Essentially Non Oscillatory (WENO) Verfahren [45], die ih-

re höhere Ordnung über Rekonstruktionen berechnen, oder eben auch die Discontinuous Galerkin (DG) Methode, eine Mischung zwischen Finiten Elementen und Finiten Volumen.

Drittens wurde auch die Integration in der Zeit genauer in Betracht genommen, allerdings mit weniger spektakulären Erfolgen. Bei den impliziten Methoden findet eine langsame, aber stetige Entwicklung hin zu Krylov-Raum-Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen beziehungsweise der linearen Approximationen statt. Auch die DG Diskretisierung kann auf die Zeitachse ausgedehnt werden [94, 95], allerdings dauert auch hier die Entwicklung noch an.

Seit der ersten Anwendung der Discontinuous Galerkin Methode auf die stationären, linearen, hyperbolischen Differentialgleichungen des Neutronentransportproblems von Reed und Hill [74] im Jahr 1973 hat eine aktive Weiterentwicklung auf verschiedenen physikalischen Gebieten (wie zum Beispiel Aeroakustik, Elektromagnetismus, Meteorologie, Ozeanographie) stattgefunden. In den Anfängen konzentrierte sich die fundamentale Entwicklung und Anwendung auf hyperbolische Probleme.

Die ersten Anwendungen auf die Strömungsmechanik liegen noch nicht so lange zurück. Erste gasdynamische Simulationen mit Hilfe der linearisierten Euler Gleichungen existieren einige, wobei hier vor allem die Arbeiten von Cockburn und Shu [22, 23, 24, 27] zu nennen sind. Aus diesen Arbeiten geht das Runge-Kutta DG Verfahren (RKDG) hervor, welches erfolgreich auf mehrdimensionale, nichtlineare hyperbolische Systeme wie die Euler Gleichungen angewandt werden kann. Ein numerischer Vergleich zwischen RKDG und einem Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) Finite Volumen Verfahren für zahlreiche Modellgleichungen ist in [101] vorgenommen worden. Hierbei zeigt sich, dass man mit RKDG vergleichbare Genauigkeit wie mit WENO-FV auf wesentlich größeren Gittern erzielen kann, wodurch die Rechenzeiten mit RKDG deutlich geringer ausfallen. Zu bedenken ist aber der erhöhte Speicheraufwand auf der Seite von RKDG. Um den Rechenaufwand der Quadraturen zu verringern sind quadraturfreie Verfahren für die (linearisierten) Euler Gleichungen, welche vor allem im Bereich der Aeroakustik eingesetzt werden, von Atkins und Shu [6] entwickelt worden.

Aufgrund der sehr viel versprechenden Ergebnisse bei der reibungsfreien Strömungssimulation mit DG Verfahren wurde mit der Weiterentwicklung der Methode für Konvektion-Diffusion-Systeme, wie zum Beispiel die Navier-

Stokes Gleichungen, begonnen. Das Hauptproblem sind hierbei die viskosen Flüsse aus unstetigen Daten, welche zu Diskontinuitäten des Flussvektors über die Zellgrenzen führen [100]. Die Weiterentwicklung der DG Methode für partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung ist deshalb von großem Interesse und es existieren zahlreiche Ansätze für elliptische Probleme, die sich nur schwer in gewisse Gruppen einteilen lassen. Arnold et al. untersuchen und vergleichen in [3] eine Vielzahl der aktuell vorhandenen Verfahren für elliptische Probleme zweiter Ordnung bezüglich ihrer Konsistenz-, Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften.

Bassi und Rebay machen sich die von FE-Methoden bekannte Mixed Method zu Nutze und führen den Gradienten der Lösungsvariablen als neue unabhängige Variable ein, um ein System erster Ordnung zu erhalten, welches wieder mit Hilfe von DG Verfahren bearbeitet wird [9]. Die Verallgemeinerung dieser Vorgehensweise hinsichtlich Stabilität und Fehlerabschätzung wurde von Cockburn und Shu ausgearbeitet und als LocalDG (LDG) bezeichnet [26]. Ein offensichtlicher Nachteil von LDG ist die erhöhte Anzahl der zu berechnenden Freiheitsgrade und damit der gesteigerte Speicher- und Rechenaufwand des Verfahrens. Bassi und Rebay [11] zeigen jedoch, dass durch geeignete Umformungen vermieden werden kann, auch den Lösungsgradienten global abzuspeichern. Positiv anzumerken ist, dass LDG auch bei der Lösung transsonischer Probleme mit Stößen ohne Limiter auszukommen scheint [9, 63].

Die Hinzunahme der viskosen Terme in den Navier-Stokes Gleichungen führt bei expliziten Methoden bekanntlich zu einer starken Reduktion der maximal verwendbaren CFL Zahl, was Bassi und Rebay dazu veranlasste, eine implizite Methode in der Zeit heranzuziehen. Die auftretenden Gleichungssysteme behandeln sie mit Hilfe des Generalized Minimum Residual (GMRES) Verfahrens [11]. Bassi und Rebay haben ihre Methode auch erfolgreich auf die Reynolds gemittelten Navier-Stokes (RANS) Gleichungen unter Zuhilfenahme eines $k-\omega$ Turbulenzmodells angewandt [12]. Im zweidimensionalen Fall erzielte auch Landmann [53, 54] mit dem Spalart-Allmaras Modell sowie dem $k-\omega$ Turbulenzmodell bemerkenswerte Ergebnisse. Eine interessante Variante zur Behandlung der viskosen Terme zweiter Ordnung stammt von Baumann und Oden (BO) [14], deren theoretische Wurzeln in der Global Element und Interior Penalty Methode liegen [7]. BO kommt ohne zusätzliche Variablen aus und ist demnach weniger rechen- und speicheraufwändig als

das oben beschriebene LDG. Numerische Vergleichsrechnungen dieser beiden Methoden in [13] zeigen Schwachstellen auf der Seite der BO-Methode, welche sich durch Konvergenzprobleme auf groben Gittern bemerkbar machen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt und Forschungsbereich im Umfeld der DG Methode ist die Modellierung der Basis- bzw. Ansatzfunktionen. Hier ist die mittlerweile weit fortgeschrittene Basisformulierung für hybride dreidimensionale Gitter (Tetraeder, Hexaeder, Pyramiden und Prismen) von Karniadakis, Sherwin [47] und Warburton [97] zu nennen. Die Formulierung zeichnet sich durch ihre Orthogonalität aus, was zu diagonalen Massenmatrizen führt, welche leicht invertiert werden können.

Instationäre reibungsbehaftete Simulationen wurden von Lomtev et al. auf festen wie auch auf bewegten Rechengittern mit Hilfe der Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) Formulierung mit guten Ergebnissen durchgeführt [63, 64]. Zur erwähnen sind hier auch die Veröffentlichungen von van der Vegt [94, 95], welche sich mit reibungsfreien, instationären DG-Simulationen auf bewegten Rechengittern mit Hilfe von ALE befassen. Eine hervorragende Performance des in der Zeit impliziten Verfahrens wird unter anderem durch den Einsatz eines Full-Approximation Storage (FAS) Multigrid Verfahrens für die stationären Gleichungen in der Pseudozeit erreicht [17]. Hierbei werden auch Vergleiche mit State-of-the-Art Strömungslösern für Helikopterrotoren wie FLOWer [71] und OVERFLOW [86] durchgeführt, welche das enorme Potential der DG Verfahren untermauern.

Aufgrund der diskontinuierlichen und lokalen Formulierung sind DG Verfahren exzellent parallelisierbar und adaptierbar. Zahlreiche numerische Studien weisen eine ausgezeichnete Skalierbarkeit auf (massiv) parallelen Systemen nach [2, 15, 16]. *hp*-adaptive Verfahren, welche sowohl Elementunterteilungen als auch die lokale Erhöhung der Ansatzordnung im Element selbst beinhalten, können die Effizienz der DG Verfahren erheblich steigern [34, 17]. Die angesprochenen Stärken, vor allem die hohe Genauigkeit auf unstrukturierten Gittern machen DG Verfahren neuerdings auch für den Einsatz in der Turbulenzforschung [21, 28] interessant.

1.3. Ziele und Gliederung der Arbeit

Das Ziel der Dissertation ist die weitere Entwicklung des am IAG entstandenen DG Strömungslösers SUNWinT im Hinblick auf hochgenaue DES-Simu-

lationen, die Anwendung auf technisch relevante Strömungsprobleme und die Beurteilung der Eignung und Effizienz der eingesetzten Methodik.

Dabei richtet sich zu Anfang das Interesse auf die räumliche Diskretisierung. Die technisch relevanten Strömungsprobleme spielen sich zumeist um dreidimensionale gekrümmte Geometrien ab. Dabei ist häufig die Lage und Größe der relevanten strömungsmechanischen Phänomene unbekannt. Aus diesem Grund soll der bestehende zweidimensional arbeitende Strömungslöser Stuttgart University Numerical Wind Tunnel (SUNWinT) um dreidimensionale Elemente erweitert werden, die auch in der Lage sein sollen gekrümmte Oberflächen adäquat zu behandeln. Dabei ist besonderes Augenmerk auf die Adaptierbarkeit der Methoden zu legen.

Die Natur der Strömung bei den schon mehrfach erwähnten technisch relevanten Strömungsproblemen ist fast immer turbulent und häufig abgelöst. Eben solche Strömungen sollen hier berechnet werden, was zuerst eine dreidimensionale Erweiterung der Turbulenzmodelle und gegebenenfalls eine bessere Stabilisierung der zugrunde liegenden Gleichungen erforderlich macht. Als nächstes soll dann auf Basis dieser Modelle eine DES Methode implementiert und anhand einfacher Beispiele validiert werden.

Zu guter Letzt geht es um die Beurteilung der implementierten Methoden in punkto Genauigkeit, Gitteranforderungen, Paralleleffizienz und Robustheit.

Die Arbeit ist dabei folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 werden die mathematischen und physikalischen Grundlagen erläutert. Die relevanten Gleichungen und auch die Turbulenzmodelle werden vorgestellt. Kapitel 3 behandelt die Diskretisierung mittels der Discontinuous Galerkin Verfahren, erläutert die Stabilisierungsstrategien und stellt am Ende die verwendete numerische Toolkette vor. Danach folgen in Kapitel 4 für jeden physikalisch interessanten Reynoldszahlen-Bereich einige Ergebnisse. Schlussendlich fasst dann Kapitel 5 die Arbeit zusammen und gibt einen weiteren Ausblick.

2. Strömungsmechanische Erhaltungsgleichungen

In diesem Kapitel werden die verwendeten strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen und ihr Gültigkeitsbereich vorgestellt, um die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Modifikationen nachvollziehen zu können. Zuerst werden die reibungsfreien Euler Gleichungen (Abschnitt 2.1) vorgestellt, danach die Navier-Stokes Gleichungen (Abschnitt 2.2) und zu guter Letzt werden die Möglichkeiten der Turbulenzmodellierung (Abschnitt 2.3, 2.4 und 2.5) aufgezeigt.

2.1. Euler Gleichungen

Werden Reibungsterme und die Wärmeleitung vernachlässigt gelten die Euler Gleichungen der Fluidmechanik, deren differentielle konservative Form lautet

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \mathcal{F}_i(U) = 0. \quad (2.1)$$

U stellt dabei den Vektor der konservativen Erhaltungsgrößen dar

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

und $\mathcal{F}_i = (F_i^x, F_i^y, F_i^z)$ ist der reibungsfreie Flusstensor

$$F_i^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_i^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, F_i^z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Die spezifische totale Energie E wird mit der inneren Energie e und der kinetischen Energie berechnet

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad (2.4)$$

die Zustandsgleichung lautet dann

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right) \quad (2.5)$$

mit dem Adiabaten Exponent $\gamma = 1.4$ für Luft.

2.1.1. Linearisierung der Euler Gleichungen

Vorbereitend für die Theorie der Charakteristiken in Abschnitt 2.1.2 werden hier die Euler Gleichungen linearisiert. Eine quasi-lineare Form der Gleichung 2.1 lautet

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(U)}{\partial U} \right) \nabla U = 0 \quad (2.6)$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (2.7)$$

Hierbei sind A , B und C die Jacobi-Matrizen des Flussvektors \mathcal{F}_i . Sie sind definiert als

$$A \equiv \frac{\partial \mathcal{F}_i^x}{\partial U} \quad B \equiv \frac{\partial \mathcal{F}_i^y}{\partial U} \quad C \equiv \frac{\partial \mathcal{F}_i^z}{\partial U}. \quad (2.8)$$

Nach Ausführung der partiellen Ableitungen ergeben sich die Matrizen aus Gleichung 2.9. Analog dazu können die Euler Gleichungen auch in der Formulierung in primitiven Variablen linearisiert werden. Dabei stellt \tilde{U} den Vektor der primitiven Erhaltungsgrößen dar

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{\gamma-1}{2} |\vec{v}|^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -u[\gamma E - (\gamma-1)|\vec{v}|^2] & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (|\vec{v}|^2 + 2u^2) & -(\gamma-1)uw & -(\gamma-1)uw & \gamma u \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -uw & v & u & 0 & 0 \\ -v^2 + \frac{\gamma-1}{2} |\vec{v}|^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -v[\gamma E - (\gamma-1)|\vec{v}|^2] & -(\gamma-1)uw & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (|\vec{v}|^2 + 2v^2) & -(\gamma-1)vw & \gamma v \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -w^2 + \frac{\gamma-1}{2} |\vec{v}|^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & (3-\gamma)w & \gamma-1 \\ -w[\gamma E - (\gamma-1)|\vec{v}|^2] & -(\gamma-1)uw & -(\gamma-1)vw & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (|\vec{v}|^2 + 2w^2) & \gamma w \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

der dann zu folgenden Jacobi-Matrizen führt

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \\
 \tilde{B} &= \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 & 0 & v \end{bmatrix}, \\
 \tilde{C} &= \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 & w \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mit diesen Matrizen gestaltet sich die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren wesentlich einfacher als mit den Matrizen für konservative Variablen. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrizen für konservative Variablen sind dieselben wie für primitive Variablen, da die Matrizen durch Ähnlichkeitsabbildung ineinander transformiert werden können. Die Jacobi-Matrizen für den eindimensionalen beziehungsweise zweidimensionalen Fall, erhält man einfach durch Streichen entsprechender Zeilen [43].

2.1.2. Charakteristiken Theorie

Charakteristiken sind Riemann-Invarianten für hyperbolische Gleichungen, wie zum Beispiel die Euler Gleichungen. Eine Riemann-Invariante einer Welle ist eine Funktion der Zustandsvariablen, die sich entlang dieser Welle nicht verändert. Durch diese Voraussetzung kann sichergestellt werden, dass jede Welle komplett von den anderen entkoppelt ist. Allerdings sind die Wellen nur beim linearen Gleichungssystem komplett entkoppelt, weshalb die Charakteristiken meist nur mit der lokal linearisierten Form der Euler Gleichungen bestimmt werden können [4].

Für numerische Verfahren sind die Charakteristiken wichtig, da entlang dieser die Information des Strömungsfeldes transportiert wird, beispielsweise Druckschwankungen. Der Lösungsweg eines numerischen Verfahrens sollte daher konsistent mit Richtung und Geschwindigkeit des Transports der Information sein, also konsistent mit den Charakteristiken. Bestimmt werden diese durch die Eigenwerte der Jacobi-Matrizen.

Anhand des eindimensionalen Falls soll hier die Bedeutung der Charakteristiken erläutert werden. Die Eigenwerte geben den Verlauf der Charakteristiken in der x - t -Ebene an.

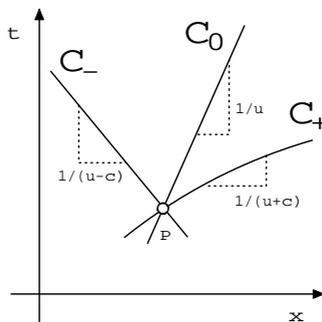


Abbildung 2.1.: Charakteristiken

Durch jeden beliebigen Punkt der Ebene verlaufen für die Euler Gleichungen drei Charakteristiken, genau so viele wie es Eigenwerte gibt (Abbildung 2.1). Für die Steigung der Charakteristiken durch einen beliebig gewählten Punkt in der x - t -Ebene gilt in diesem Fall

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{u-c}, \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{u+c}. \quad (2.12)$$

Die Charakteristik $\lambda_2 = u$ symbolisiert die Information, die von einem Fluidelement mit der Geschwindigkeit u transportiert wird - die Teilchenbahn. Die Charakteristiken $\lambda_1 = u - c$ und $\lambda_3 = u + c$ stehen für die Information, die nach rechts oder links beziehungsweise in positiver oder negativer x -Richtung mit lokaler Schallgeschwindigkeit relativ zum Fluidelement in Bewegung transportiert wird (Abbildung 2.1). Sie werden rechts- beziehungsweise linkslaufende Machlinien genannt [69].

Zur Berechnung der charakteristischen Variablen müssen die Matrizen A , B , C beziehungsweise die Matrizen \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} auf Hauptachsen gebracht werden. Es muss eine Transformationsmatrix L gefunden werden, welche die Linearkombination

$$\tilde{K} = k_x \tilde{A} + k_y \tilde{B} + k_z \tilde{C} \quad (2.13)$$

auf Hauptachsen transformiert. Da es nicht möglich ist alle drei Matrizen gleichzeitig zu diagonalisieren, besteht die Transformationsmatrix aus einer Linearkombination dreier Transformationsmatrizen, von denen jeweils eine \tilde{A} , \tilde{B} oder \tilde{C} zuzuordnen ist. Die einzelnen Transformationsmatrizen lassen sich durch entsprechendes Setzen der jeweiligen Koeffizienten bestimmen, zum Beispiel $k_x = 1$, $k_y = 0$, $k_z = 0$ für die Transformationsmatrix von \tilde{A} . Die Transformationsmatrizen werden bestimmt durch Lösen des speziellen Eigenwertproblems

$$\det(\tilde{K} - \lambda I) = 0. \quad (2.14)$$

Für die Eigenwerte ergibt sich daraus

$$\lambda_1 = \vec{v}\vec{k} - c \quad (2.15)$$

$$\lambda_{2,3,4} = \vec{v}\vec{k} \quad (2.16)$$

$$\lambda_5 = \vec{v}\vec{k} + c. \quad (2.17)$$

Im eindimensionalen Fall ist der dreifache Eigenwert $\lambda_{2,3,4}$ nur ein einfacher beziehungsweise im zweidimensionalen Fall ein doppelter. Dementsprechend gibt es auch nur drei beziehungsweise vier Eigenvektoren. Zur Bestimmung der Eigenvektoren \tilde{l} muss das homogene Gleichungssystem

$$\tilde{l}_j \tilde{K} = \lambda_j \tilde{l}_j \quad (2.18)$$

gelöst werden. Wegen des dreifachen Eigenwertes können die entsprechenden Eigenvektoren aus dem zugehörigen Unterraum frei gewählt werden. Sie sind hier so bestimmt, dass die Koeffizienten der Eigenvektoren, die zum dreifachen Eigenwert gehören, proportional zu $1/|\vec{k}|$ sind, wobei $|\vec{k}|$ für die Länge des Normalenvektors auf dem Rand steht. Für die Eigenvektoren ergibt sich

dann

$$\tilde{l}_1 = [0 \quad -k_x \quad -k_y \quad -k_z \quad 1/(\rho c)] \quad (2.19)$$

$$\tilde{l}_2 = [k_x \quad 0 \quad k_z \quad -k_y \quad k_x/c^2] \quad (2.20)$$

$$\tilde{l}_3 = [k_y \quad -k_z \quad 0 \quad k_x \quad k_y/c^2] \quad (2.21)$$

$$\tilde{l}_4 = [k_z \quad k_y \quad -k_x \quad 0 \quad k_z/c^2] \quad (2.22)$$

$$\tilde{l}_5 = [0 \quad k_x \quad k_y \quad k_z \quad 1/(\rho c)] \quad (2.23)$$

Die gesuchte Transformationsmatrix L^{-1} kann dann aus den zeilenweisen Eigenvektoren gebildet werden. Die konservativen Jacobi-Matrizen werden dann einfach durch die Transformation

$$\Lambda = L^{-1}(\tilde{A}\tilde{k})L = L^{-1}M^{-1}(\tilde{A}\tilde{k})ML \quad (2.24)$$

in die charakteristischen Jacobi-Matrizen umgewandelt werden. Sie ergeben sich zu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \vec{v}\vec{k} - c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{v}\vec{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{v}\vec{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{k} - c \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Durch Multiplikation von Gleichung 2.1 mit $P = ML$ von rechts und $P^{-1} = L^{-1}M^{-1}$ und zusammenfassen von $P^{-1}U$ zu W und $P^{-1}\partial U$ zu ∂W ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \nabla W = 0, \quad (2.26)$$

mit dem Vektor der charakteristischen Variablen

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{k}\vec{v} + \frac{p}{\rho c} \\ \rho - \frac{p}{c^2} \\ k_x w - k_z u \\ k_y u - k_x v \\ \vec{k}\vec{v} + \frac{p}{\rho c} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Den eindimensionalen, beziehungsweise zweidimensionalen Fall, erhält man wiederum durch Streichen der entsprechenden Zeilen und Null setzen der zugehörigen Geschwindigkeiten.

2.2. Navier-Stokes Gleichungen

Werden zu den Euler Gleichungen Effekte wie Wärmeleitung und Viskosität hinzugefügt, so erhält man die Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \mathcal{F}_i(U) - \nabla \mathcal{F}_v(U, \nabla U) = 0. \quad (2.28)$$

Auch hier stellt U wieder den Vektor der konservativen Variablen dar und \mathcal{F}_i und \mathcal{F}_v sind die konvektiven beziehungsweise diffusiven Flussfunktionen. Der neue Term $\nabla \mathcal{F}_v$ in Gleichung 2.28 ist die Divergenz des viskosen Flusstensors $\mathcal{F}_v = (F_v^x, F_v^y, F_v^z)$

$$\begin{aligned} F_v^x &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix}, \\ F_v^y &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}, \\ F_v^z &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit dem viskosen Spannungstensor τ :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Da in dieser Rechnung Luft als Gas vorausgesetzt wird, kann von einem Newtonschen Fluid, für das die Scherspannung proportional zum Geschwindkeitsgradienten ist, ausgegangen werden:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.31)$$

Dabei ist δ_{ij} das Kronecker-Delta und μ die molekulare Viskosität. Diese Viskosität ist für einatomige Gase nur eine Funktion der Temperatur. Auch bei Luft, die aus mehratomigen Gasen besteht, hat sich gezeigt, dass diese Annahme in den meisten Anwendungen hinreichend genau ist. Deshalb wird hier das Gesetz von Sutherland [93] verwendet

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\mu_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S} \\ \mu_0 &= 1.716 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s} \\ T_0 &= 273.15K \\ S &= 110.55K\end{aligned}\tag{2.32}$$

Für die letzte Zeile des Flusstensors \mathcal{F}_v wird der Wärmeflussvektor q benötigt, der aus dem Fourierschen Gesetz stammt:

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\tag{2.33}$$

Der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient λ ist abhängig von der molekularen Viskosität μ , der Wärmekapazität c_p und der Prandtl-Zahl Pr :

$$\lambda = \frac{\mu c_p}{Pr}\tag{2.34}$$

Die Prandtl-Zahl ist eine temperaturabhängige Stoffgröße eines Fluids, bei Luft kann aber in einem weiten Temperaturbereich $200K < T < 700K$ von einer konstanten Prandtl-Zahl, $Pr = Pr(T) \approx 0.72$, ausgegangen werden.

2.3. Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen

Mit den Navier-Stokes Gleichungen (2.28) ist es prinzipiell möglich, Strömungen mit beliebig hoher Reynoldszahl zu berechnen. Die meisten aerodynamisch wichtigen Strömungen sind aber turbulent und besitzen ein breites Spektrum an turbulenten Längenskalen. Laut Kolmogorov ist das Verhältnis zwischen den größten turbulenten Skalen und den kleinsten Skalen, der Kolmogorov Microskala, proportional zu $Re^{3/4}$ [49, 50]. Um alle Skalen auflösen zu können, werden aus diesem Grund ungefähr $\mathcal{O}(Re^{3/4})$ Gitterzellen pro Raumrichtung benötigt. Da Turbulenz ein dreidimensionales Phänomen ist werden natürlich $\mathcal{O}(Re^{9/4})$ Zellen benötigt. Bei einer Reynoldszahl von 10^7 ,

wie sie im Reiseflug eines Verkehrsflugzeugs leicht auftreten kann, werden dann für eine Direkte Numerische Simulation (DNS) $\mathcal{O}(10^{16})$ Gitterzellen benötigt, was natürlich deutlich über der Leistung der heutigen Computer-generation und Generationen in absehbarer Zukunft liegt.

In der praktischen Anwendung haben sich statistische Rechenverfahren, die sogenannten Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Simulationen (RANS), durchgesetzt. Dabei werden die Strömungsgrößen in einen Mittelwert und einen Schwankungswert aufgespalten und nur die Mittelwerte werden berechnet, mehr dazu in Abschnitt 2.3.1. Um diese gemittelten Gleichungen auch formal lösen zu können, werden empirische Turbulenzmodelle benötigt, die in Abschnitt 2.3.2.1 und Abschnitt 2.3.2.2 beschrieben werden. Diese Modelle sind sehr gut geeignet, um einfache turbulente Strömungen zu berechnen und wurden an typischen aerodynamischen Problemen wie zum Beispiel einer Profilmströmung kalibriert. Bei komplexeren Konfigurationen, insbesondere mit starken Strömungsablösungen, verlässt man den Gültigkeitsbereich dieser RANS-Turbulenzmodelle und ist gezwungen den Modellierungsaufwand zu verringern, natürlich zu Lasten der Rechenzeit. Hierbei hat sich das Konzept der Filterung mit den Large Eddy Simulationen (LES) durchgesetzt, siehe Abschnitt 2.4. Ein großer Teil des Rechenmehraufwands für eine solche Simulation ist mit der sehr feinen Gitterauflösung in Wandnähe begründet, was dann auch die Motivation zur Entwicklung von hybriden Verfahren war, die die Vorteile zwischen RANS und LES verbinden. Siehe dazu Abschnitt 2.5, Detached Eddy Simulationen (DES), die auch einen Großteil dieser Arbeit ausmachen.

2.3.1. Reynolds und Favre Mittelung

Reynolds Ansatz [75] zum Approximieren von turbulenten Fluktuationen baut auf einer Spaltung der Strömungsgrößen U in einen Mittelwert \bar{U} und einen Schwankungswert U' auf

$$U(\vec{x}, t) = \bar{U}(\vec{x}, t) + U'(\vec{x}, t) \quad (2.35)$$

Die Fluktuationen werden nicht durch die numerische Rechnung bestimmt, sondern vollständig durch das Turbulenzmodell vorgegeben, illustriert in Abbildung 2.2.

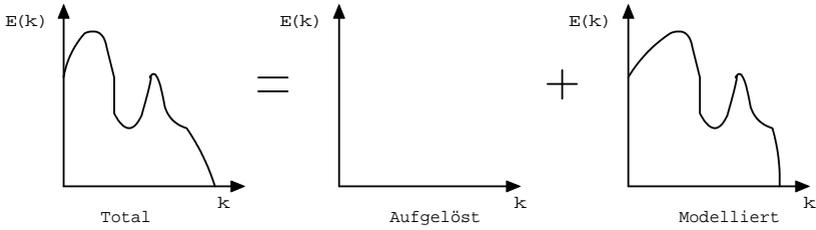


Abbildung 2.2.: Energiespektrum der RANS Lösung

Die gemittelten Werte werden in der Praxis oft durch eine zeitliche Mittelung bestimmt.

$$\bar{U}(\vec{x}, t) \approx \bar{U}(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} U dt \quad (2.36)$$

Wenn kompressibel gerechnet wird, dann wird in den meisten Luftfahrtanwendungen eine Mittelung mit der Dichte nach Favre verwendet [38]. Bei diesem Ansatz sind die gemittelten Größen folgendermaßen definiert:

$$\tilde{U} = \frac{\overline{\rho U}}{\bar{\rho}} \quad (2.37)$$

Aus Gleichung (2.35) wird dann

$$U = \tilde{U} + U'' \quad (2.38)$$

mit \tilde{U} für den Mittelwert und U'' für die Fluktuation. Setzt man nun diese Gleichung in die Navier-Stokes Gleichungen (2.28) ein und mittelt zeitlich, so erhält man die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS), die formal nahezu mit den gewöhnlichen Navier-Stokes Gleichungen übereinstimmen. Durch den Mittelungsprozess erhält man allerdings zwei zusätzliche Terme, die man als turbulente Schubspannungen (τ_{ij}) beziehungsweise als turbulenten Wärmefluss (q_j) interpretieren kann.

$$(\tau_{ij})_{turb} = -\overline{\rho u_i'' u_j''} \quad (2.39)$$

$$(q_j)_{turb} = c_p \overline{\rho T'' u_j''} \quad (2.40)$$

Durch das Auftreten von Korrelationen zwischen den Schwankungsgeschwindigkeiten ist das Gleichungssystem nicht mehr geschlossen. Eine exakte physikalische Erfassung ist nicht mehr möglich. Zur Schließung des Gleichungssystems werden daher empirische Informationen in Form von Turbulenzmodellen benötigt.

Sollen instationäre Effekte berechnet werden, so müssen die Strömungsgrößen noch weiter aufgespalten werden:

$$U(\vec{x}, t) = \bar{U}(\vec{x}) + U(\vec{x}, t)_c + U'(\vec{x}, t) \quad (2.41)$$

Der erste Term stellt wie beim stationären Ansatz die zeitliche Mittelung dar, der zweite Term die berechneten Schwankungen und der dritte Term entspricht den turbulenten Fluktuationen, bestimmt durch das Turbulenzmodell. Unter $U(\vec{x}, t)_c$ kann man sich die Verteilung der kohärenten Moden der Strömung vorstellen, wohingegen $U'(\vec{x}, t)$ die zufälligen turbulenten Schwankungen darstellt, siehe Abbildung 2.3.

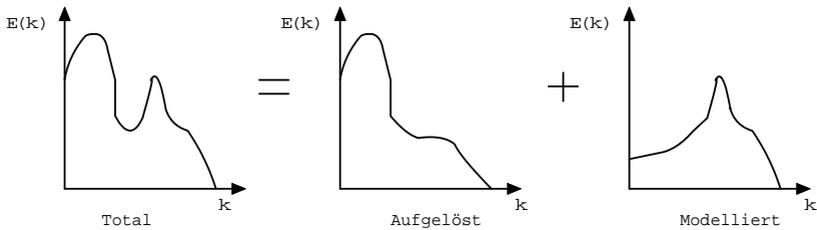


Abbildung 2.3.: Energiespektrum einer URANS Lösung

Wird dieser Ansatz weiterentwickelt, erhält man später die instationären Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Simulationen (URANS). Dabei ist darauf zu achten, dass das Intervall Δt so groß gewählt wird, dass die turbulenten Fluktuationen erfasst werden, aber gleichzeitig noch klein ist gegen die von der Rechnung aufgelösten instationären Schwankungen. Es muss also eine genügend große spektrale Lücke vorhanden sein.

2.3.2. Turbulenzmodellierung

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Turbulenzmodelle, das Spalart-Allmaras Eingleichungsmodell, Abschnitt 2.3.2.1, und das Wilcox $k - \omega$ Zweigleichungsmodell, Abschnitt 2.3.2.2, stehen exemplarisch für eine Vielzahl verschiedener Turbulenzmodelle. Beides sind empirische Modelle erster Ordnung und beruhen auf dem Konzept der turbulenten Viskosität und werden deshalb auch als Wirbelviskositätsmodelle bezeichnet.

Mit der Einführung einer Wirbelviskosität μ_t folgt aus Gleichung (2.39) für den turbulenten Spannungstensor:

$$\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \quad (2.42)$$

Hierbei steht k für die turbulente kinetische Energie $k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_j''}$. Analog dazu führt man den turbulenten Wärmeleitungskoeffizienten λ_t ein, mit dem sich folgender turbulenter Wärmeflussvektor ergibt

$$c_p \overline{\rho T'' u_j''} = -\lambda_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.43)$$

mit

$$\lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t}, \quad (2.44)$$

dabei steht Pr_t für die turbulente Prandtl Zahl, die für Luft gleich 0.9 ist. Betrachte man nur die mittleren Strömungsgrößen und lässt die entsprechenden Symbole weg, so erhält man mit den turbulenten Schubspannungen (2.42) und dem turbulenten Wärmefluss (2.43) ein Gleichungssystem, das formal identisch mit den Navier-Stokes Gleichungen (2.28) ist

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \mathcal{F}_i(U) - \nabla \mathcal{F}_v(U, \nabla U) = 0, \quad (2.45)$$

mit F_i und F_v analog zu (2.3) und (2.29). Allerdings müssen jetzt τ_{ij} und q_j modifiziert werden um auch die turbulenten Größen zu berücksichtigen:

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \quad (2.46)$$

$$q_j = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.47)$$

Wir erhalten also nahezu die gleichen Gleichungen wie im laminaren Fall, allerdings mit zwei neuen Unbekannten, der Wirbelviskosität μ_t und der turbulenten kinetische Energie k , die jetzt durch ein Turbulenzmodell berechnet werden müssen.

Der Impulsaustausch infolge der Turbulenzbewegung wird durch die großskaligen Turbulenzelemente dominiert. Daher erscheint es plausibel, den lokalen Zustand der Wirbelviskosität μ_t aus dem jeweiligen Längenmaßstab und den charakteristischen Geschwindigkeiten dieser Elemente zu bestimmen, wobei dafür mindestens zwei Größen zu ermitteln sind. Also wird für das

Längenmaß l_t und das Geschwindigkeitsmaß v_t jeweils eine Modellgleichung benötigt. Im Falle von Eingleichungsmodellen wird in der Regel eine partielle Differentialgleichung für v_t herangezogen und l_t aus algebraischen Beziehungen bestimmt. Zweigleichungsmodelle verwenden sowohl für v_t als auch für l_t partielle Differentialgleichungen. Es wurden aber auch Modelle entwickelt, die ohne spezielle Berücksichtigung von v_t und l_t auskommen. Auch das im folgenden Abschnitt beschriebene Wirbelviskositätsmodell nach Spalart und Allmaras arbeitet ohne Längen- und Geschwindigkeitsmaß-Gleichungen.

2.3.2.1. Spalart-Allmaras Turbulenzmodell

Das Spalart-Allmaras (SA) Turbulenzmodell [82] läßt sich in die Klasse der Eingleichungsmodelle einordnen. Oft wird bei Eingleichungsmodellen als Basis die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k verwendet, beim SA-Modell wird jedoch direkt eine partielle Differentialgleichung für die Modellierung einer mit der dynamischen Wirbelviskosität μ_t verknüpften Arbeitsvariablen $\tilde{\nu}$ herangezogen und damit auf eine zweite, algebraische Gleichung zur Bestimmung des Längenmaßstabes verzichtet. Die eingeführte partielle Differentialgleichung besitzt die allgemeine Form einer Transportgleichung. Das Raum-Zeit-Verhalten von $\tilde{\nu}$ wird also durch die folgende Transportgleichung modelliert

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial \rho \tilde{\nu} u_i}{\partial x_i}}_{II} = \frac{1}{\sigma} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right)}_{III} + \rho c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] + \underbrace{c_{b1} (1 - f_{t2}) \rho \tilde{S} \tilde{\nu}}_{IV} - \underbrace{\left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho \tilde{\nu}}{d} \right)^2}_{V} + \underbrace{\rho f_{t1} \Delta U^2}_{VI} \quad (2.48)$$

Die linke Seite ($I + II$) von (2.48) stellt die Summe aus zeitlicher und konvektiver Änderung, also im Lagrangeschen Sinne substantielle beziehungsweise materielle Ableitung der Arbeitsvariablen $\tilde{\nu}$ dar. Die rechte Seite wird durch Produktions- (IV), Destruktions- (V) und Diffusionsterme (III) bestimmt. Teil (VI) stellt den so genannten Tripterm dar, der bei bekannter Transitions-lage einen Übergang von laminarer auf turbulente Strömung ermöglicht. Es ist genauso möglich die Transitionsterme ($f_{t1} = f_{t2} = 0$) zu vernachlässigen und die Transitions-lage durch Ein- beziehungsweise Ausschalten der entspre-

chenden Quellterme zu bestimmen, was durchaus üblich ist und auch in der vorliegenden Arbeit geschieht.

Die Wirbelviskosität μ_t ist mit der Arbeitsvariable $\tilde{\nu}$ durch folgende Gleichung verknüpft:

$$\mu_t = \rho\nu_t = \rho\tilde{\nu}f_{v1} \quad (2.49)$$

Der Produktionsterm ist proportional zu

$$\tilde{S} = |\Omega| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (2.50)$$

mit $|\Omega|$ als Betrag des Wirbelstärkevektors Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

und d dem Abstand zur nächsten Wand, der hier die turbulente Längenskala l_t darstellt. Das Modell wird durch einige Kalibrierfunktionen

$$f_w = \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (2.52)$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad (2.53)$$

$$r = \min \left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}, 10 \right) \quad (2.54)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.55)$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (2.56)$$

und Kalibrierkonstanten

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0.1355, & c_{b2} &= 0.622, & \sigma &= \frac{2}{3}, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}, & c_{w2} &= 0.3, & c_{w3} &= 2.0, \\ \kappa &= 0.41, & c_{v1} &= 7.1 \end{aligned} \quad (2.57)$$

vervollständigt. Als Randbedingungen für die Arbeitsvariable $\tilde{\nu}$ werden an Wänden und im Fernfeld folgende Werte vorgeschrieben:

$$\tilde{\nu}_{\text{Wand}} = 0 \quad (2.58)$$

$$\tilde{\nu}_{\infty} = \frac{\nu_{\infty}}{100} \quad (2.59)$$

2.3.2.2. Wilcox $k - \omega$ Turbulenzmodell

Bei den Zweigleichungs Turbulenzmodellen wird als Modellgleichung für die turbulente Geschwindigkeitsskala in der Regel eine Feldgleichung für die turbulente kinetische Energie k herangezogen. Das Geschwindigkeitsmaß kann dann zu $v_t = \sqrt{k}$ aus der turbulenten kinetischen Energie berechnet werden. Die turbulente Längenskala l_t wird im Wilcox $k - \omega$ Turbulenzmodell [99] aus der spezifischen Dissipationsrate ω berechnet $l_t = \sqrt{k}/\omega$. Das räumliche und zeitliche Verhalten wird durch zwei Differentialgleichungen bestimmt.

Für die turbulente kinetische Energie gilt also

$$\underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial \rho k u_i}{\partial x_i}}_{II} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_{k1} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]}_{III} + \underbrace{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\beta^* \rho \omega k}_V, \quad (2.60)$$

für die spezifische Dissipationsrate:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \omega}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial \rho \omega u_i}{\partial x_i}}_{II} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_{\omega 1} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right]}_{III} + \underbrace{\gamma_1 \frac{\omega}{k} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\beta_1 \rho \omega^2}_V. \quad (2.61)$$

Wie im Spalart-Allmaras Modell stellen die linke Seite ($I+II$) von Gleichung (2.60) und (2.61) die Summe aus zeitlicher und konvektiver Änderung dar, die rechte Seite wird wiederum durch Diffusions- (III), Produktions- (IV) und Destruktionsterme (V) bestimmt. Der turbulente Spannungstensor hat dann wieder die folgende Form

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k, \quad (2.62)$$

mit der Wirbelviskosität:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}. \quad (2.63)$$

Auch dieses Modell wird durch Kalibrierkonstanten vervollständigt:

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.5, & \sigma_{\omega 1} &= 0.5, & \beta_1 &= 0.0075, \\ \beta^* &= 0.09, & \gamma_1 &= \frac{5}{9} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Als Randbedingungen für die Arbeitsvariablen k und ω werden an Wänden nach Menter [67] folgende Werte vorgeschrieben:

$$k_{Wand} = 0 \quad (2.65)$$

$$\omega_{Wand} = \frac{60\mu}{\rho\beta_1(\Delta y_1)^2} \quad (2.66)$$

Hierbei ist Δy_1 der Abstand des ersten Gitterpunkts zu Wand. Für den Fernfeldrand wird k aus der Turbulenzintensität Tu_∞ berechnet und ω aus dem Verhältnis von Wirbelviskosität μ_t und molekularer Viskosität μ bezeichnet als r_μ

$$k_\infty = \frac{3}{2}Tu_\infty(\vec{v}_\infty)^2, \quad (\text{Vorgabe: } Tu_\infty = 0.005) \quad (2.67)$$

$$\omega_\infty = \frac{\rho_\infty k_\infty}{r_{\mu,\infty}\mu_\infty}, \quad (\text{Vorgabe: } r_{\mu,\infty} = 10^{-5}) \quad (2.68)$$

Aus Stabilitätsgründen wird häufig, auch bei uns, eine besondere Formulierung des Modells verwendet, bei der die Arbeitsvariable ω durch $\tilde{\omega} = \ln(\omega)$ ersetzt wird [12]. Nun kann ω numerisch nicht mehr negativ werden und hat auch in Wandnähe einen glatteren Verlauf. Die Transition wird wie beim SA-Modell im letzten Abschnitt (2.3.2.1) durch Ein- beziehungsweise Ausschalten der entsprechenden Quellterme simuliert.

2.4. Large Eddy Simulation

Im Gegensatz zur Mittelung bei den RANS-Simulationen wird bei der Large Eddy Simulation (LES) eine Aufteilung der turbulenten Strukturen in grobe und feine Strukturen vorgenommen. Um die verschiedenen Skalen zu trennen, werden die physikalischen Strömungsgrößen U durch Filterung in einen Grobstrukturanteil \bar{U} und in einen Feinstrukturanteil U' aufgespalten:

$$U(\vec{x}, t) = \bar{U}(\vec{x}, t) + U'(\vec{x}, t) \quad (2.69)$$

Die beiden Größen \bar{U} und U' stehen hier für die gefilterten Variablen und sollten nicht mit den gemittelten Größen aus Gleichung (2.35) verwechselt werden. Die kleinen Skalen werden dann mittels eines Feinstrukturansatzes modelliert und die Grobstruktur wird durch das Gitter aufgelöst, Abbildung 2.4.

Der Grobstrukturanteil lässt sich mathematisch durch eine räumliche Filterung der physikalischen Größe mit der Filterfunktion $G(x_i, x'_i)$ durchführen

$$\bar{U}(x_i) = \int_{\Omega} G(x_i, x'_i)U(x'_i) dx'_i \quad (2.70)$$

für die gelten muss:

$$\int_{\Omega} G(x_i, x'_i) dx_i = 1 \quad (2.71)$$

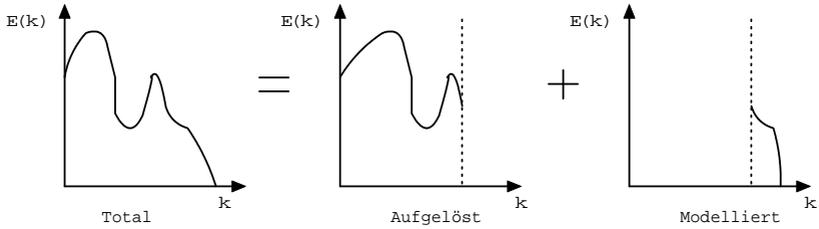


Abbildung 2.4.: Energiespektrum der LES

Diese Filterfunktion stellt eine räumliche Mittelung oder eine Tiefpassfilterung dar. Einige häufig verwendete Filter sind der Top-Hat-Filter, der Gauß-Filter oder der Sharp-Cutoff-Filter [77].

Wendet man einen dieser Filter auf die Navier-Stokes Gleichungen (2.28) an, so erhält man wie bei den RANS-Gleichungen nahezu identische Gleichungen, allerdings auch hier mit einem Zusatzterm τ_{ij} , der zusätzliche Feinstruktur-Spannungen darstellt. Diese Spannungen sind dem Reynoldsschen Spannungstensor nur formal ähnlich, da sie keine Mittelung darstellen, sondern eine Aufteilung in verschiedene Skalen. Wenn die Filterweite Δ gegen Null strebt verschwinden diese Spannungen und ein kontinuierlicher Übergang zur DNS findet statt.

Das bekannteste Feinstrukturmodell ist das Modell nach Smagorinsky [81], das bereits im Jahr 1963 entwickelt wurde. Es baut auf dem Wirbelviskositätsansatz auf, der die Feinstrukturspannungen τ_{ij} mit den großskaligen Spannungen \bar{S}_{ij} in Beziehung setzt:

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (2.72)$$

Die Viskosität ν_t dient als Proportionalitätsfaktor und lässt sich aus dem Prandtlschen Mischungsweg herleiten:

$$\nu_t = l_c u_c \quad (2.73)$$

Dabei stellt \bar{S}_{ij} den Deformations-/Spannungstensor dar

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad |\bar{S}_{ij}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (2.74)$$

und l_c die Feinstrukturlänge, die mit der Smagorinsky-Konstante C_s und der Filterweite Δ gebildet wird

$$l_c = C_s \Delta \quad (2.75)$$

Die Smagorinsky-Konstante ist, im Gegensatz zu ihrem Namen, nicht konstant, sondern variiert abhängig vom Strömungscharakter im Bereich $0.065 < C_s < 0.2$. In Wandnähe muss eine Dämpfungsfunktion verwendet werden, da sonst das Modell dort versagt.

2.5. Detached Eddy Simulation

Unter der Detached Eddy Simulation (DES) versteht man einen hybriden Ansatz, der RANS und LES miteinander verbindet. Das erste DES Modell wurde von Spalart et. al. [84] im Jahr 1997 entwickelt und baut auf seinem Turbulenzmodell [82] auf, später wurden weitere hybride Ansätze entwickelt [18, 83, 87], die sich im Wesentlichen durch das RANS-seitige Turbulenzmodell unterscheiden.

Für die Entwicklung der DES-Verfahren gab es zwei verschiedene Gründe. Zum einen gibt es bei URANS Rechnungen Fehler bei stark abgelösten Strömungen, zum anderen sind die Anforderungen an die Rechenzeit bei einer LES enorm. Insbesondere im Bereich von Wänden benötigt eine LES ohne Wandfunktion extrem feine Gitter zur Auflösung aller Skalen. Dabei bestimmen die Scherspannungen in Wandnähe die Turbulenz, die schon durch einfache lineare Wirbelviskositätsmodelle vorhergesagt werden kann, somit bietet sich die Verwendung eines RANS-Modells in diesem Bereich an.

Die Implementierung des DES-Ansatzes beruht immer auf einer Modifikation des turbulenten Längenmaßes. Beim Spalart-Allmaras Modell (2.48) ist das entscheidende Längenmaß der Wandabstand d , dessen Modifikation im Modell ausgesprochen einfach ist. Er wird ersetzt durch:

$$l_{DES} = \min \left(d, C_{DES}^{SA} \Delta \right) \quad (2.76)$$

Hierbei ist Δ die Gitterweite oder, vergleichbar zur LES, die Filterweite und $C_{DES}^{SA} = 0.65$ eine Kalibrierkonstante. In Grenzschichtnähe ist der Wandabstand dominierend ($d \ll \Delta$) und das Modell verhält sich wie ein Standard SA-Modell. Weiter weg von der Wand mit $d \gg \Delta$ reagiert es wie ein LES Feinstrukturmodell.

Die Verknüpfung zwischen DES und dem SA-Modell ist nicht entscheidend, weshalb auch andere Turbulenzmodelle durch Modifikation des turbulenten Längenmaßstabes in ein DES-Modell überführt werden können. Wendet man

diesen Ansatz beispielsweise auf das $k - \omega$ Modell an, so muss zuerst das turbulente Längenmaß bestimmt werden:

$$l_{k-\omega} = \frac{k^{1/2}}{\beta^* \omega} \quad (2.77)$$

dies wird dann in das DES Längenmaß überführt

$$l_{DES} = \min \left(l_{k-\omega}, C_{DES}^{k-\omega} \Delta \right) \quad (2.78)$$

mit der Kalibrierkonstante $C_{DES}^{k-\omega} = 0.78$. Nun unterscheidet sich die Situation vom SA-Modell, in dem das Längenmaß explizit auftaucht. Nach Strelets [87] muss allerdings nur der Dissipationsterm der k -Transportgleichung (2.60) verändert werden:

$$D_{RANS}^k = \beta^* \rho k \omega = \frac{\rho k^{3/2}}{l_{k-\omega}} \quad (2.79)$$

Nach einem einfachen Austausch von $l_{k-\omega}$ in (2.79) durch l_{DES} aus (2.78) folgt nun

$$D_{DES}^k = \frac{\rho k^{3/2}}{l_{DES}} \quad (2.80)$$

und das $k - \omega$ Modell verhält sich wie ein DES-Modell. Das heißt, in Wandnähe arbeitet es im RANS Modus, ansonsten verhält es sich ähnlich einem Smago-rinsky-Feinstrukturmodell.

3. Discontinuous Galerkin Verfahren

Die Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren verbinden Ideen aus der Finite-Elemente- (FE) mit Ansätzen aus der Finite-Volumen-Methode (FV), wie zum Beispiel die Wellenausbreitung, ausgedrückt durch das Riemannproblem, oder die Ansatzfunktionen höherer Ordnung innerhalb der Elemente. Ursprünglich wurde es für zweidimensionale hyperbolische Erhaltungsgleichungen wie die Euler Gleichungen entwickelt [10]. Die meisten Anwendungen sind allerdings dreidimensional und vor allen Dingen turbulent. Für die Euler Gleichungen benötigte man im Originalverfahren nur erste Ableitungen. Der Durchbruch für die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen mit zweiten Ableitungen gelang etwas später Bassi und Rebay [9], die in einem weiteren Schritt ihren Algorithmus auch für turbulente Strömungen erweiterten [12].

In der vorliegenden Arbeit wird der DG Ansatz zur räumlichen Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen angewandt. Eine hohe Effizienz und Genauigkeit des Verfahrens erfordert auch eine hohe Ordnung, die Implementierung erfolgte hier bis zu sechsten Ordnung, Abschnitt 3.5. Um diese hohen Genauigkeiten auch in der Nähe umströmter Körper zu erreichen, wird hierfür in Abschnitt 3.7 eine neuartige Methode, basierend auf isoparametrischen Elementen, vorgestellt, die auch die Krümmung der Wände im Strömungsfeld berücksichtigt. Die zeitliche Integration besteht aus einem expliziten oder alternativ impliziten numerischen Verfahren, siehe dazu Abschnitt 3.9. Möglich ist es allerdings auch alle Dimensionen der kompletten Erhaltungsgleichungen mit der DG Methode in einem so genannten Space-Time Ansatz zu diskretisieren [94]. Die in dieser Arbeit anfangs verwendeten Stabilisierungsstrategien für die Turbulenzgleichungen wurde ursprünglich von Landmann [53] entwickelt, bei dreidimensionalen Problemen sind sie allerdings nur eingeschränkt praktikabel, weshalb hier in Abschnitt 3.4 neue Wege gegangen wurden. Am Ende des Kapitels, in Abschnitt 3.10, wird die für die hier durchgeführten Rechnungen, die den Einsatz von Höchstleistungsrechnern erforderlich machen, zwingend erforderliche numerische Toolkette vorgestellt.

3.1. Die Euler Gleichungen

Multipliziert man die differentielle Form der Euler Gleichungen (2.1) - ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung - mit einer Testfunktion V und integriert über ein Kontrollvolumen Ω erhält man die Gleichung

$$\int_{\Omega} V \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \mathcal{F}_i(U) \right) d\Omega = 0, \quad (3.1)$$

aus der dann nach partieller Integration

$$\int_{\Omega} V \cdot \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} V \cdot \mathcal{F}_i(U) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \mathcal{F}_i(U) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

folgt. Diskretisiert man nun den Funktionenraum und das Kontrollvolumen Ω mit einer Anzahl von sich nicht überlappenden Elementen E , so erhält man folgende analoge Gleichung,

$$\int_E V_h \cdot \frac{\partial U_h}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial E} V_h \cdot \mathcal{F}_i(U_h) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_E \nabla V_h \cdot \mathcal{F}_i(U_h) d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

Hierbei sind die Funktionen U_h und V_h auf jedem Element definiert und ergeben sich durch Linearkombination von n Basisfunktionen ϕ_k

$$U_h(x, t) = \sum_{k=1}^n U_k(t) \phi_k(x), \quad V_h(x) = \sum_{k=1}^n V_k \phi_k(x). \quad (3.4)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der n Basisfunktionen ϕ_k ist Gleichung 3.3 äquivalent zu folgendem System aus n Gleichungen

$$\int_E \phi_k \cdot \frac{\partial U_h}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial E} \phi_k \cdot \mathcal{F}_i(U_h) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_E \nabla \phi_k \cdot \mathcal{F}_i(U_h) d\Omega = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.5)$$

Mit diesem System können nun die n Freiheitsgrade $U_k(t)$ der unbekanntenen Lösung U_h bestimmt werden.

Wir verwenden polynomiale Funktionen ϕ_k vergleichbar zu Karniadakis und Sherwin [47], die eine hierarchische und orthogonale Basis aufspannen. Details hierzu finden sich in Abschnitt 3.5.2. Die Orthogonalität verringert den numerischen Aufwand, da alle Massenmatrizen (Abschnitt 3.5.3) diagonal sind und damit ihre Invertierung trivial ist.

Um die Unstetigkeiten an den Kantenintegralen aufzulösen, werden analog zu den FV Verfahren numerische Flüsse gebildet [27]. Zur näherungsweise Lösung des Riemann Problems verwenden wir meist den gebräuchlichen

HLL-Fluss [41] $\mathcal{F}_i \approx \mathcal{F}_{\text{HLL}}(U^+, U^-)$. Dabei wird $(\cdot)^+$ und $(\cdot)^-$ für die Werte aus dem Inneren oder von außerhalb des Volumenelements verwendet. Implementiert wurden auch andere Riemann Löser, wie der Roe- oder der Godunov-Fluss [90], wobei der Einfluss des Flusses mit zunehmender numerischer Ordnung abnimmt, da die Sprünge im Allgemeinen an den Kanten entsprechend kleiner werden, Abbildung 3.1.

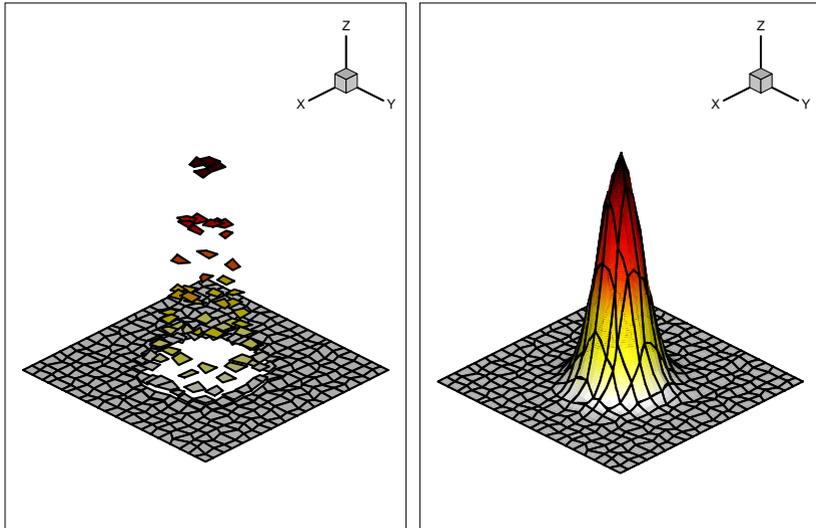


Abbildung 3.1.: Gaußpuls im Druck, diskretisiert durch den FV Ansatz (links) und den DG Ansatz (rechts)

3.2. Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen

Zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen (2.28) ist es nun notwendig auch zweite Ableitungen zu berücksichtigen. Basierend auf Bassi und Rebay [10] transformieren wir die Gleichungen zu einem System erster Ordnung mit dem Gradient der Lösung ∇U als neue Unbekannte Θ . Damit erhalten wir:

$$\nabla U - \Theta = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_i(U) - \nabla \cdot \mathcal{F}_v(U, \Theta) = 0. \quad (3.7)$$

Wir wenden diesmal den DG Ansatz auf das ganze Gleichungssystem an, integrieren wieder über das Kontrollvolumen Ω und erhalten nach partieller Integration

$$\int_{\Omega} V \cdot \Theta \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} V \cdot U \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla V \cdot U \, d\Omega = 0, \quad (3.8)$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} V \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} V \cdot \mathcal{F}_i(U) \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \mathcal{F}_i(U) \, d\Omega}_{=\text{Euler}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} V \cdot \mathcal{F}_v(U, \Theta) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla V \cdot \mathcal{F}_v(U, \Theta) \, d\Omega}_{=\text{Navier-Stokes}} = 0. \quad (3.9)$$

Danach wird das Rechengebiet, analog zu den Euler Gleichungen (3.2), mit einzelnen Elementen E diskretisiert und der DG-Mechanismus angewendet. Die Auflösung der Unstetigkeiten an den Kanten ist der kritische Punkt in der schwachen Formulierung der DG Verfahren für die viskosen Terme oder generell für Terme mit höhere Ableitungen. Konvektive Flüsse werden wie bei den Euler Gleichungen gelöst, für die zusätzlichen Flüsse setzen wir allerdings, analog zu Bassi und Rebay [9], einen zentralen Fluss für das Zusatzintegral in der Gradientengleichung (3.8) an $\mathcal{F}_{\text{aux}} = \frac{1}{2} (U^+ + U^-)$, genauso wie für das Integral der viskosen Flüsse $\mathcal{F}_v = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_v^+(U^+, \Theta^+) + \mathcal{F}_v^-(U^-, \Theta^-))$. Auch hier wird die Notation $(\cdot)^+$ und $(\cdot)^-$ für die Werte aus dem Inneren oder von außerhalb des Volumenelements verwendet. Die Flüsse sind abhängig vom Vektor der konservativen Variablen U , gemäß Gleichung (2.2), und vom Gradienten der primitiven Variablen,

$$\Theta = \nabla \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ T_x & T_y & T_z \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Die Methode kann in die Klasse der lokalen DG Verfahren eingeordnet werden [25] und wird auch als das erste Bassi-Rebay Verfahren (BR1) bezeichnet.

3.3. Turbulenzmodellierung

Wir lösen die RANS Gleichungen und die Turbulenzgleichungen vollständig gekoppelt, das bedeutet, dass der Zustandsvektor oder der Flusstensor um

die entsprechenden Turbulenzgrößen erweitert wird,

$$U_{SA} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \frac{\rho E}{\rho \tilde{\nu}} \end{pmatrix}, \quad U_{k-\omega} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \frac{\rho E}{\rho k} \\ \rho \tilde{\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Für den Gradienten ergibt sich dann

$$\Theta_{SA} = \nabla \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ T_x & T_y & T_z \\ \tilde{\nu}_x & \tilde{\nu}_y & \tilde{\nu}_z \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{k-\omega} = \nabla \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \\ k \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ T_x & T_y & T_z \\ k_x & k_y & k_z \\ \tilde{\omega}_x & \tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_z \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

und für den Flussvektor

$$F_{i,SA}^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \frac{(\rho e_t + p)u}{\rho \tilde{\nu}} \end{pmatrix}, \quad F_{v,SA}^x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \frac{u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x}{\frac{1}{\sigma}(\mu + \rho \tilde{\nu})\tilde{\nu}_x} \end{pmatrix}$$

$$F_{i,k-\omega}^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \frac{(\rho e_t + p)u}{\rho k} \\ \rho u \tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad F_{v,k-\omega}^x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \frac{u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x}{(\mu + \sigma_{k1}\mu_t)k_x} \\ \frac{(\mu + \sigma_{\omega1}\mu_t)\tilde{\omega}_x}{\rho k} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nur die x-Komponente dargestellt. Aufgrund der Produktions- und Destruktionsterme in den Gleichungen des Turbulenzmodells müssen in Gleichung (3.9) noch entsprechende Quellterme eingebaut werden, näheres dazu siehe Landmann [53].

3.4. Limitierungsstrategien

3.4.1. Stoßlimitierung

Die bei transsonischen Problemen auftretenden Verdichtungsstöße stellen ein für die numerische Strömungsmechanik schwer zu lösendes Problem dar. Da die Stoßdicke nur einige freie Molekül-Weglängen beträgt ist man gezwungen an der oft unbekanntenen Stoßposition sehr fein zu diskretisieren. Wird ein gröberes Gitter verwendet, so reagieren FV-Verfahren erster Ordnung aufgrund ihrer hohen Dämpfung recht gutmütig, Verfahren hoher Ordnung allerdings neigen hier zu Instabilitäten. Eine Diskretisierung, die alle Stöße direkt auflöst ist in der Praxis nicht praktikabel, weshalb hier auf groben Gittern gerechnet wird und das numerische Verfahren durch das Prinzip der künstlichen Viskosität nach Persson et al. [72] stabilisiert wird.

Hierbei werden Unstetigkeiten, die durch Stöße hervorgerufen sein können, für eine Sensorvariable s_i , meist die Dichte, über den Indikator $\psi(s_i)$ ermittelt,

$$\psi(s_i) = \log \left(\frac{\widehat{s}_i^T M_h \widehat{s}_i}{\widehat{s}_i^T M \widehat{s}_i} \right). \quad (3.14)$$

M ist die gewöhnliche Massenmatrix, M_h entspricht der Massenmatrix des DG Elements, wenn nur Koeffizienten höherer Ordnung verwendet werden. Der Indikator wird somit aus der gesamten Norm und der Norm beschränkt auf die höheren Freiheitsgrade berechnet. Damit können nun Zellen mit einem großen hochfrequenten Anteil, was häufig ein Anzeichen für eine unteraufgelöste Diskretisierung oder Oszillationen ist, erkannt werden.

Wenn nun der Stoß detektiert wurde, wird der entsprechenden Zelle ein bestimmter konstanter Wert an Viskosität hinzugefügt, der über folgende

glatte Funktion bestimmt wird

$$\epsilon_e = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \psi(s_i) < \psi_0 - \kappa \\ \frac{\epsilon_0}{2} \left(1 + \sin \frac{\pi(\psi(s_i) - \psi_0)}{2\kappa} \right) & \text{wenn } \psi_0 - \kappa \leq \psi(s_i) \leq \psi_0 + \kappa \\ \epsilon_0 & \text{wenn } \psi(s_i) > \psi_0 + \kappa \end{cases} \quad (3.15)$$

mit $\epsilon_0 \sim h/p$ und $\psi_0 \sim 1/p^4$. h und p sind dabei die Elementgröße und die DG Ansatzordnung. κ wird empirisch so gewählt, dass der Stoß scharf aufgelöst wird.

Den Euler Gleichungen wird nun ein künstlicher Viskositätsterm hinzugefügt,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \mathcal{F}_i(U) = \nabla \cdot (\epsilon \nabla U), \quad (3.16)$$

über den jeder Zelle ein konstanter Anteil an künstlicher Viskosität ϵ_e hinzugefügt werden kann. Somit ist es nun möglich Stöße innerhalb einer Zelle aufzulösen, Beispiele dazu in Abschnitt 4.2.2.2.

3.4.2. Limitierung der Turbulenzgrößen

Für Finite Volumen Verfahren ist bekannt, dass die Diskretisierung eines Turbulenzmodells sehr schwierig sein kann. Auch hier neigen Verfahren höherer Ordnung zu Instabilität, wenn die numerische Auflösung nicht ausreicht, um die dahinter liegende Physik korrekt wiederzugeben. Um Oszillationen in der Wirbelviskosität oder negative Werte bei den Transportvariablen, wie zum Beispiel $\tilde{\nu}$, zu verhindern, ist es nötig die Turbulenzgleichungen künstlich zu stabilisieren.

Hier wird für Rechnungen niedriger Ordnung, also für P^0 - oder P^1 -Elemente eine "harte" Limitierung nach Landmann [53] verwendet. Dabei darf die Näherungslösung u_h innerhalb der Elemente nicht unter Null fallen. Für den konstanten oder linearen DG Polynom Ansatz ist es leicht diese Bedingung zu erfüllen, da nur der integrale Mittelwert, beziehungsweise die Werte an den Elementgrenzen überprüft werden müssen. Deutlich schwieriger wird es für einen Ansatz hoher Ordnung, also höher als P^1 -Elemente, da hier ein globales Minimum gesucht werden muss. Aus diesem Grund wird jetzt für höherwertige Elemente das Konzept der künstlichen turbulenten Viskosität nach Nguyen et al. [70] verwendet, das auf der oben beschriebenen künstlichen Viskosität zur Stoßlimitierung aufbaut. Dabei werden die jeweiligen

Turbulenzgleichungen um einen künstlichen Viskositätsterm zur Stabilisierung erweitert:

$$\mathcal{F}_{stab}(U, \nabla U) = \frac{h}{p} \epsilon(\psi(\tilde{v})) \mathcal{F}_v(U, \nabla U). \quad (3.17)$$

h und p sind die Elementgröße und die DG Ansatz Ordnung, \tilde{v} ist die Sensorvariable, in diesem Beispiel die Transportvariable des Spalart-Allmaras Turbulenzmodells. Gemäß Gleichung (3.14) stellt der Indikator $\psi(\tilde{v})$ wiederum den Hochfrequenzanteil der Sensorvariable \tilde{v} dar. $\epsilon(\psi)$ entspricht dann wieder dem elementweise konstanten Viskositätsparameter in der Modellgleichung.

Wenn nun Zellen mit einem hochfrequenten Anteil detektiert werden, dann wird der entsprechende Diffusionsterm eingeschaltet und eine stückweise konstante Viskosität in diesen Elementen zur Gleichung hinzugefügt.

3.5. Elemente und Basisfunktionen

Die DG Diskretisierung kann prinzipiell mit allen Elementen durchgeführt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der bestehende Code, der bereits eindimensionale Linienintervalle und zweidimensionale Dreieckselemente beinhaltete, auf zweidimensionale Vierecks- und auf dreidimensionale Hexaeder- sowie Tetraederelemente erweitert. Diese Elemente, die im physikalischen Raum eine beliebige Gestalt annehmen dürfen, werden im Rechenraum auf ein Einheitselement transformiert, näheres dazu in Abschnitt 3.5.1. In Abschnitt 3.5.2 werden dann die Basisfunktionen gebildet, die orthogonal und hierarchisch sind und aus Tensorprodukten der Jacobi-Polynome bestehen. Bei geschickter Wahl dieser Funktionen ist es möglich, das Gleichungssystem 3.5 weitgehend entkoppelt zu rechnen, deshalb ist der Aufstellung der Massenmatrizen ein separater Abschnitt gewidmet (3.5.3).

3.5.1. Transformation in den Rechenraum

Die Elementtransformation vom physikalischen Raum in den Rechenraum wird hier exemplarisch an einem Tetraederelement durchgeführt, dargestellt in Abbildung 3.2.

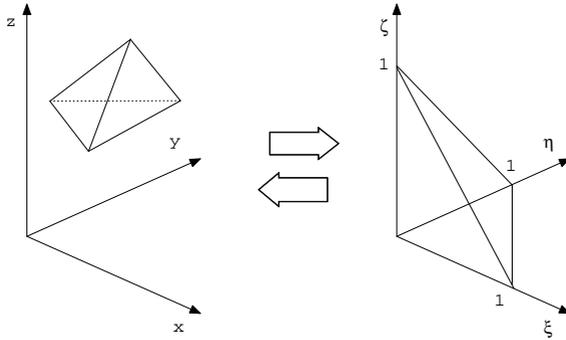


Abbildung 3.2.: Physikalischer Raum (links) und Rechenraum (rechts)

In diesem einfachen Fall genügt eine lineare Transformation:

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + (y_4 - y_1)\zeta \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta + (z_4 - z_1)\zeta.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Diese Transformation wird beispielsweise für die im Rahmen der räumlichen Diskretisierung häufig berechneten Integrale über die Zellen benötigt. Es gilt

$$\int_{E_{phy}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{E_{num}} f(\xi, \eta, \zeta) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (3.19)$$

mit folgender Jacobi-Matrix und ihrer Determinante

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Hier ist die Determinante J konstant und muss bei Integrationen über die Zellen nur als konstanter Faktor berücksichtigt werden. Für höherwertige Elemente sind entsprechend aufwändigere Transformationen nötig, bei Hexaederelementen wird schon eine bilineare Transformation benötigt und für gekrümmte Elemente (Abschnitt 3.7) noch aufwändigere Transformationen. Dabei ist dann die Integrationsdeterminante $J(\xi, \eta, \zeta)$ abhängig von ξ , η und ζ , weshalb sie bei jeder Integration von Gleichung 3.19 berücksichtigt werden muss und auch noch den Grad des Integranden erhöht.

3.5.2. Basisfunktionen

Von entscheidender Bedeutung für die DG Diskretisierung ist die Wahl der Basisfunktionen. Für eindimensionale Elemente wie Linien sind nodale Basen ausreichend, für zweidimensionale [53] und dreidimensionale Elemente wurden, analog zu Karniadakis und Sherwin [47], Basen ϕ_k gewählt, die aus Tensorprodukten von Jacobi-Polynomen gebildet wurden. Ein Vorteil dieser Basen ist, dass sie orthogonal sind, was zu diagonalen Massenmatrizen (Abschnitt 3.5.3) führt, die dann entsprechend trivial zu invertieren sind und somit den Rechenaufwand verringern. Ein weiterer Vorteil ist die hierarchische Struktur der Basen (Anhang A), wodurch für eine Erhöhung der Ordnung einfach Basisfunktionen ϕ_k zu den existierenden Basisfunktionen hinzugefügt werden. Dies ermöglicht später eine einfach zu implementierende Konvergenzbeschleunigung mittels p-Multigrid [65], bei der der Wechsel zwischen den Ordnungen dann trivial ist.

Die Jacobi-Polynome

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right], \quad \alpha, \beta > -1 \quad (3.21)$$

sind eine Familie von polynomialen Lösungen des singulären Sturm-Liouville Problems [98]. Aus ihnen werden nun drei Grundfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_i^a(x) &= P_i^{0,0}(x), \\ \psi_{ij}^b(x) &= \left(\frac{1-x}{2} \right)^i P_j^{2i+1,0}(x), \\ \psi_{ijk}^c(x) &= \left(\frac{1-x}{2} \right)^{i+j} P_k^{2i+2j+1,0}(x) \end{aligned} \quad (3.22)$$

gebildet, aus denen dann beispielsweise eine orthogonale Hexaederbasis

$$\psi_{pqr}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \psi_p^a(\eta_1) \psi_{pq}^b(\eta_2) \psi_{pqr}^c(\eta_3) \quad (3.23)$$

konstruiert werden kann.

Für die zugehörige orthogonale Tetraederbasis müssen die Tetraederkoordinaten in Hexaederkoordinaten überführt werden, siehe dazu Abbildung 3.3, was dann nach Lomtev und Karniadakis [63] zu folgender Transformationsvorschrift führt

$$\eta_1 = \frac{2(1+\xi_1)}{-\xi_2 - \xi_3} - 1, \quad \eta_2 = \frac{2(1+\xi_2)}{1 - \xi_3} - 1, \quad \eta_3 = \xi_3, \quad (3.24)$$

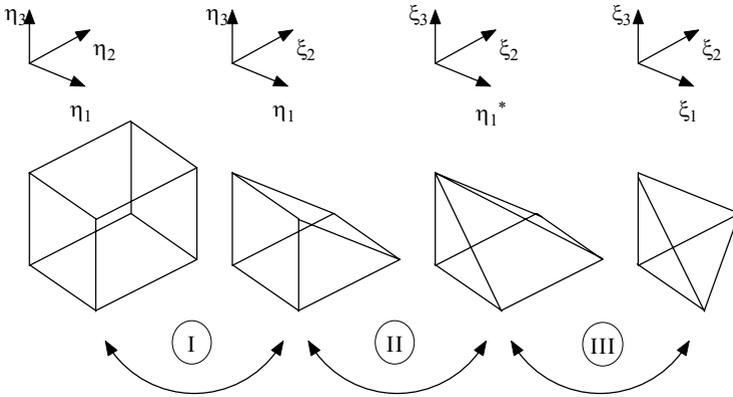


Abbildung 3.3.: Hexaeder-Tetraeder Transformation

mit deren Hilfe die Basis berechnet wird:

$$\psi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \psi_p^a(\eta_1)\psi_{pq}^b(\eta_2)\psi_{pqr}^c(\eta_3). \tag{3.25}$$

Die maximale Polynomordnung dieser spektralen Basen kann von Elementtyp zu Elementtyp variieren. Die Zahl der Basisfunktionen wird über den Polynomgrad N bestimmt und ist beispielsweise in 3D als $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{2}$ definiert und in Tabelle 3.1 zu sehen.

Element / Polynomordnung N	0	1	2	3	4	5
Linie	1	2	3	4	5	6
Dreieck	1	3	6	10	15	21
Viereck	1	3	6	10	15	21
Tetraeder	1	4	10	20	35	56
Hexaeder	1	4	10	20	35	56

Tabelle 3.1.: Zahl der Basisfunktionen

Für eine polynomiale Basis vom Grad N laufen die Indizes nun von

$$0 \leq p \leq N, \quad 0 \leq q \leq N, \quad 0 \leq r \leq N, \quad p + q + r \leq N, \tag{3.26}$$

was beispielsweise bei einer linearen Approximation ($N = 1$) zu den Permutationen $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ für p , q und r und zu vier Basen führt.

3.5.3. Massenmatrizen

Man kann das Gleichungssystem 3.5 auch allgemein und vektoriell schreiben,

$$M \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + R(U) = 0. \quad (3.27)$$

Hierbei stellt U den Vektor der Freiheitsgrade U_h , R den Residuenvektor und M die Massenmatrix ($n \times n$) dar. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$M_{kj} = \int_E \phi_k \phi_j \, d\Omega. \quad (3.28)$$

Da wir ausschließlich orthogonale Basisfunktionen verwenden, ergibt sich für einfache geometrische Elemente eine diagonale und konstante Massenmatrix:

$$\int_E \phi_k \phi_j \, d\Omega = 0, \quad k \neq j. \quad (3.29)$$

Für Elemente, die eine höherwertige Transformation als die lineare benötigen, muss bei der Berechnung die oben beschriebene Transformationsdeterminante berücksichtigt werden.

3.6. Randbedingungen

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen erfordert meist das Vorschreiben von Randbedingungen. Wird der Gradient der Lösung vorgegeben spricht man von Neumann-Randbedingungen, werden direkt die Werte vorgeschrieben spricht man von Dirichlet-Randbedingungen.

3.6.1. Reibungsbehaftete Wände

Am umströmten Körper setzen wir die Strömungsgeschwindigkeiten an der Wand gleich Null,

$$u_{\text{Rand}} = v_{\text{Rand}} = w_{\text{Rand}} = 0. \quad (3.30)$$

Es wird angenommen, dass es sich um eine adiabate Wand handelt. Das heißt der Wärmestrom durch sie hindurch ist ebenfalls gleich Null, was dazu führt, dass der Temperaturgradient auch gleich Null sein muss,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_{\text{Rand}} = 0. \quad (3.31)$$

Für die restlichen Variablen, einschließlich der Werte für die Gradientengleichung, aber außer den Turbulenzgrößen, werden die Werte aus dem Strömungsfeld verwendet. Die Turbulenzgrößen werden auf die im Modell vorgeesehenen Werte an der Wand gesetzt, siehe Abschnitt 2.3.2.1 und 2.3.2.2.

3.6.2. Fernfeld Randbedingung

Liegt der Rand des Rechengebietes weit entfernt vom umströmten Körper, so dass sein Einfluss zu vernachlässigen ist und keine Störungen bis hierhin transportiert werden, so spricht man von einem Fernfeldrand. Als Randbedingung zur Berechnung der Randflüsse wird jetzt, wie bei Dirichlet Randbedingungen üblich, der komplette Zustandsvektor u_{Rand} im Unendlichen vorgegeben

$$u_{\text{Rand}} = \begin{pmatrix} \rho_{\infty} \\ \rho_{\infty} u_{\infty} \\ \rho_{\infty} v_{\infty} \\ \rho_{\infty} w_{\infty} \\ \rho_{\infty} E_{\infty} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Die Flussberechnung erfolgt dann analog zu den inneren Flüssen, abhängig vom inneren Zellzustand und natürlich auch abhängig vom Fernfeldrandzustand, mit beispielsweise $\mathcal{F}_{\text{Euler}} \approx \mathcal{F}_{\text{HLL}}(u_h^i, u_h^{bc})$.

3.6.3. Extrapolierte Randbedingung und Dämpfungszonen

Die Verwendung der oben beschriebenen Fernfeldrandbedingung setzt voraus, dass keine Störungen oder Abweichungen vom Zustand im Unendlichen am Rand ankommen. Häufig ist dies in praktischen Rechnungen jedoch nicht der Fall, und es ist natürlich auch nicht möglich den Rand des Rechengebiets bis ins Unendliche auszudehnen, weshalb eine verbesserte Randbedingung verwendet werden muss. Eine einfache Möglichkeit für solch eine Randbedingung ist ein Extrapolationsrand, beim dem der Randzustand gleich dem

Zustand der inneren Zelle ist,

$$u_{\text{Rand}} = u_i. \quad (3.33)$$

Hiermit ist nun beispielsweise freies Ausströmen möglich. Allerdings sind, da eintretende Charakteristiken nicht berücksichtigt werden, Extrapolationsränder im Unterschall theoretisch, und auch häufig praktisch, instabil. Abhilfe schafft hier ein räumlicher Filter, der dämpfend wirkt, aber die integralen Mittelwerte erhalten muss und somit immer noch konservativ ist.

$$U_{k,f}(t, x) = \begin{cases} 0, & x > x_{max} \\ U_k(t) \cdot \frac{x_{max} - x}{x_{max} - x_{min}}, & x_{min} > x > x_{max} \\ U_k(t) \cdot 1, & x < x_{min} \end{cases} \quad (3.34)$$

zeigt exemplarisch einen einfachen linearen Filter, der alle höheren Freiheitsgrade innerhalb eines Bereiches wegdämpft und danach mit P^0 -Elementen weiter rechnet,

$$U_{h,f} = \sum_{k=2}^n U_{k,f}(t, x) v_k(x). \quad (3.35)$$

3.6.4. Charakteristische Randbedingungen

Festzuhalten ist nun, dass numerische Randbedingungen, wie die oben beschriebenen Fernfeld Randbedingungen, oft unphysikalische Reflexionen am Rand des Rechengebietes erzeugen und durch Aufzwingen einer bestimmten Strömung am Rand die Lösung verfälschen, sowie Extrapolationsränder häufig instabil werden und somit oft zu gar keinem Ergebnis führen.

Beim DG-Verfahren kann die Wellenausbreitung durch eine hohe räumliche Genauigkeit sehr exakt wiedergegeben werden, weshalb gerade hier nicht reflektierende Randbedingungen von großem Nutzen sind [5]. Die nun implementierten charakteristische Randbedingungen erfüllen diese Anforderungen und besitzen trotz der hohen Zahl von freien Werten eine größere Stabilität als Extrapolationsränder. Man nutzt bei diesen charakteristischen Rändern die Tatsache, dass hyperbolische Gleichungssysteme wie die Euler Gleichungen die Ausbreitung von Wellen wiedergeben, wobei zwischen ein- und austretenden Wellen unterschieden werden muss. Während austretende Wellen durch die Lösung am oder innerhalb des Randes definiert sind, hängen eintretende Wellen nur von den äußeren Bedingungen ab.

Anforderung an die charakteristische Randbedingung ist, alle zur Bestimmung des kompletten Strömungsverhaltens notwendigen Informationen bereitzustellen. Die Anzahl der vorzugebenden Bedingungen richtet sich nach der Anzahl der eintretenden Charakteristiken. Sie können durch die Eigenwerte λ_i , die den Wellengeschwindigkeiten entsprechen, bestimmt werden, einen Überblick liefert Anhang B. Beim Ausströmen im Überschall zeigen beispielsweise alle Charakteristiken nach außen, beim Ausströmen im Unterschall hat dagegen ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen (Abbildung 3.4).

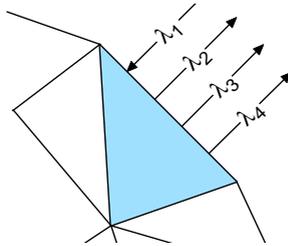


Abbildung 3.4.: Zweidimensionales Ausströmen im Unterschall mit den vier Einflussrichtungen aus einer Randzelle (blau)

Zur allgemeinen Bestimmung der Randbedingung müssen zunächst alle Eigenwerte berechnet werden. Entsprechend dieser Eigenwerte werden dann die charakteristischen Variablen w mit Werten von innerhalb des Rechengitters oder von außen vorgegebenen Werten bestimmt.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \mp k_x u \mp k_y v \mp k_z w + \frac{p}{\rho_0 c_0} \\
 w_2 &= k_x \left(\rho - \frac{p}{c_0^2} \right) - k_y w + k_z v \\
 w_3 &= k_x w + k_y \left(\rho - \frac{p}{c_0^2} \right) - k_z u \\
 w_4 &= -k_x v + k_y u + k_z \left(\rho - \frac{p}{c_0^2} \right) \\
 w_5 &= \pm k_x u \pm k_y v \pm k_z w + \frac{p}{\rho_0 c_0}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

In diesem dreidimensionalen Fall stellen k_i die Komponenten des Normalenvektors dar, die Vorzeichen sind entsprechend der Richtung des Normalenvek-

tors zu wählen. Im Unterschied zu Touloupoulos und Ekaterinaris [91] werden hier keine Gradienten der Lösung verwendet, was das Verfahren einfacher und deutlich robuster macht. Mit diesen charakteristischen Variablen sowie den zugehörigen Eigenwerten kann dann der charakteristische Fluss berechnet werden. Alternativ dazu ist es natürlich auch möglich, die hier erzeugten charakteristischen Variablen in primitive Variablen zurück zu transformieren und die sonst üblichen Flussfunktionen zu verwenden.

3.7. **Dreidimensionale gekrümmte Ränder hoher Ordnung**

Strömungsmechanische Untersuchungen, wie zum Beispiel die Berechnung einer Tragflügelumströmung, spielen sich meist auf dreidimensionalen, gekrümmten Oberflächen ab. Eine Diskretisierung solch einer Oberfläche mit klassischen geradlinigen Elementen, wie zum Beispiel Dreiecken oder Tetraedern ist manchmal ausreichend, oft versagt sie aber, vor allen Dingen bei Verfahren hoher Ordnung mit sehr groben Gittern. Wenn man beispielsweise die reibungsfreie Strömung um eine Kugel oder um einen Zylinder mit klassischen Elementen berechnet, erhält man eine instationäre Lösung mit Ablösung an den durch die Diskretisierung hervorgerufenen geraden Randkanten (Abschnitt 4.2.2.1). Bassi und Rebay [10] haben als erste für zweidimensionale Elemente gezeigt, dass sie nur dann in der Lage sind, die richtige Lösung zu treffen, wenn sie Dreieckselemente mit einer entsprechend der Kontur gekrümmten Kante verwenden. Die nächsten Abschnitte zeigen, dass diese Krümmung auch im dreidimensionalen, wenngleich mit ungleich höherem Aufwand, möglich ist. Später, bei den Ergebnissen, sieht man, dass ein Code, der Verfahren höherer Ordnung verwendet, auch gekrümmte Ränder unterstützen muss.

Die übliche ingenieurmäßige Vorgehensweise bei der Diskretisierung eines Strömungsfeldes ist die Konstruktion einer im allgemeinen gekrümmten Oberfläche, die dann durch einen Gittergenerator in geradlinige Elemente unterteilt und vernetzt wird. Der dabei entstehende Informationsverlust kann nur durch eine direkte Schnittstelle zwischen CAD-Geometrie und CFD-Löser kompensiert werden. Leider ist es aufgrund von Formatrestriktionen und fehlender Standardisierung im Allgemeinen nicht möglich, eine solche Schnittstelle zu implementieren. Pragmatischer ist es, aus den im Gitter vorhandenen Informationen eine möglichst glatte Oberfläche zu rekonstruieren.

3.7.1. Normalenvektoren

Die einzigen im Gitter vorhandenen Informationen zur Rekonstruktion der ursprünglichen Oberfläche sind die diskreten Randzellen und Randpunkte selbst. Hierfür wird zuerst für jedes Randdreieck der Normalenvektor berechnet, um dann im nächsten Schritt für die Randpunkte einen mittleren Vektor aus all diesen angrenzenden Dreiecks-Normalenvektoren zu bestimmen. Als Gewichtungsfunktionen existieren zwei Alternativen, zum einen der Winkel zwischen den angrenzenden Dreiecksseiten und zum anderen die Fläche des angrenzenden Dreiecks, zwischen deren Ergebnissen allerdings kein großer Unterschied besteht.

3.7.2. Polynomiale Interpolation

Wird die räumliche Diskretisierung mit Tetraederelementen durchgeführt, so sind für jede Randfläche neun Bedingungen bekannt, zum einen die drei Eckpunkte und zum anderen die Richtung der zugehörigen Normalenvektoren:

$$p(v_i) = 0, \quad i \in 1, 2, 3 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial p(v_i)}{\partial \bar{x}} = \bar{n}(v_i), \quad i \in 1, 2, 3. \quad (3.38)$$

Damit kann jetzt folgendes Polynom $p(\xi, \eta)$ im lokalen ξ - η Randkoordinatensystem mit neun Freiheitsgraden berechnet werden:

$$\begin{aligned} p(\xi, \eta) = & a_1 + a_2 \cdot \xi + a_3 \cdot \eta + a_4 \cdot \xi^2 + a_5 \cdot \eta^2 \\ & + a_6 \cdot \xi^3 + a_7 \cdot \xi^2 \cdot \eta + a_8 \cdot \xi \cdot \eta^2 + a_9 \cdot \eta^3, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$v_i(\xi, \eta)$ sind die Punkte mit ihren partiellen Ableitungen $n(v_i(\xi, \eta))$, berechnet aus den Normalenvektoren des vorangegangenen Abschnitts.

Nachdem nun das lineare Gleichungssystem für die Polynomkoeffizienten a gelöst wurde, erhält man die umhüllende Oberfläche der Wände im Strömungsfeld, Abbildung 3.5.

Im Gegensatz zur Ursprungsdiskretisierung ist die erste Ableitung der neu generierten Oberfläche nun an den Elementgrenzen stetig, was natürlich eine deutlich bessere Annäherung an die Originalgeometrie darstellt. Denkbar sind allerdings auch andere Approximationen als die hier verwendeten Polynome. So könnten beispielsweise trigonometrische Funktionen oder Wurzelfunktionen verwendet werden, die dann in der Lage wären, eine Kugel,

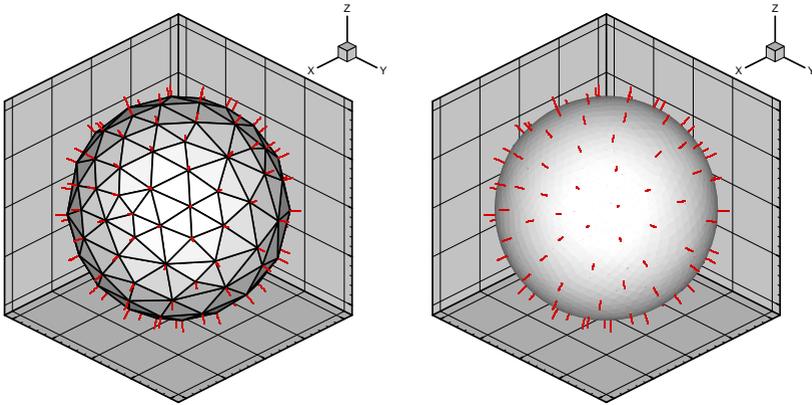


Abbildung 3.5.: Dreidimensional polynomiale Interpolation an einer Kugeloberfläche

beziehungsweise symmetrische NACA Profile exakt wiederzugeben. Für den allgemeinen Fall ist aber das hier verwendete Verfahren vorzuziehen, wo es doch auch bei der gezeigten Konfiguration zwar nicht exakt die Kugeloberfläche wiedergibt, allerdings den maximalen Fehler von 3% auf 0.3% um eine Größenordnung reduzieren kann, Abbildung 3.6.

3.7.3. Räumliche Transformation

Analog zu Abschnitt 3.5.1 muss nun das Tetraederelement mit mindestens einer gekrümmten Oberfläche zwischen numerischem und physikalischem System transformiert werden, wofür eine lineare Transformation leider nicht mehr ausreichend ist.

Wir wechseln nun vom ξ - η - ζ System zum physikalischen x - y - z System mit Hilfe eines Polynoms der folgenden Form

$$q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} \alpha_{ijk} \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^k, \quad (3.40)$$

in unserem Fall ein kubisches Polynom mit 20 Transformationspunkten P_i , mit dem sich nach Schwarz [80] folgende Transformationsmatrix aufstellen lässt:

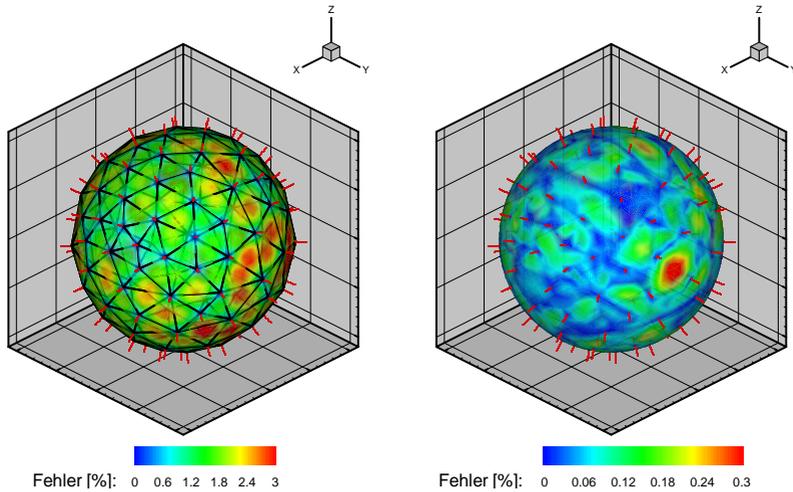


Abbildung 3.6.: Fehler zwischen der diskreten Kugeloberfläche und der exakten Kugeloberfläche (links), beziehungsweise zwischen der polynomialen Interpolation (rechts) und der exakten Geometrie

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} q(P_1(\xi, \eta, \zeta)) \\ q(P_2(\xi, \eta, \zeta)) \\ \dots \\ q(P_{20}(\xi, \eta, \zeta)) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Nach Invertierung dieser Matrix wird das Gleichungssystem

$$\alpha = A \cdot q_e \quad (3.42)$$

gelöst, hierbei ist q_e der Punkt-Vektor im physikalischen System. Mit den Koeffizienten α erhalten wir nun einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen:

$$\begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} \begin{bmatrix} \alpha_{x_{ijk}} \\ \alpha_{y_{ijk}} \\ \alpha_{z_{ijk}} \end{bmatrix} \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^k. \quad (3.43)$$

Mit dieser Vorgehensweise verlieren wir unerfreulicherweise die Eigenschaft einer konstanten Transformations-Jakobimatrix, die jetzt bei den recht häufig

auftretenden Volumen- oder Oberflächenintegralen mit berücksichtigt werden muss:

$$|\underline{J}(\xi, \eta, \zeta)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} x(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial}{\partial \xi} y(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial}{\partial \xi} z(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} x(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial}{\partial \eta} y(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial}{\partial \eta} z(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} x(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial}{\partial \zeta} y(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial}{\partial \zeta} z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint f(\xi, \eta, \zeta) |\underline{J}(\xi, \eta, \zeta)| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (3.45)$$

Die Gaußintegration zur Lösung der Integrale an den Randzellen wird aus diesem Grund etwas aufwändiger. Das Rechengebiet beinhaltet in der Regel aber nur sehr wenige reine Randzellen, womit die Erhöhung des Rechenaufwands insgesamt vernachlässigbar ist.

3.7.4. Zell-Projektion

Wenn nun wie vorausgesetzt eine Tetraederzelle eine gekrümmte Wand besitzt, kann nicht mehr wie im zweidimensionalen Fall davon ausgegangen werden, dass die inneren Zellkanten noch gerade und eben sind, Abbildung 3.7.

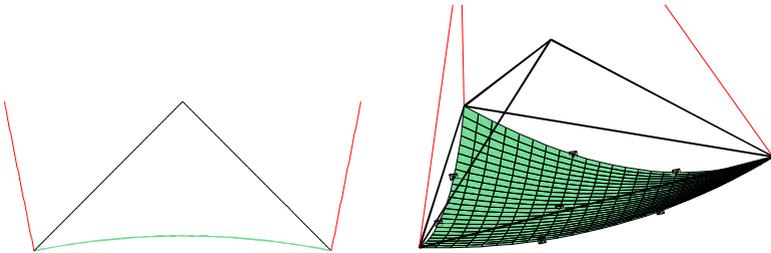


Abbildung 3.7.: Gekrümmte Zellen, im 2D mit geraden Innenkanten und im 3D mit gekrümmter Randkante und mit gekrümmten Innenkanten

Um Löcher im Rechengebiet zu vermeiden und damit auch die Konservativität des Verfahrens zu gewährleisten, muss eine zweite Schicht aus gekrümmten Zellen um die ursprünglich transformierten Wandzellen gelegt werden, zu

sehen als rote Zellen in Abbildung 3.8. Die Vorgehensweise ist ähnlich der bei Wandzellen, wobei hier allerdings kein gekrümmtes Polynom bestimmt wird, sondern nur die Transformationspunkte der beiden Zellschichten aufeinandergelegt werden und die inneren Zellen der bekannten kubischen Transformation, Gleichung 3.43, unterzogen werden.

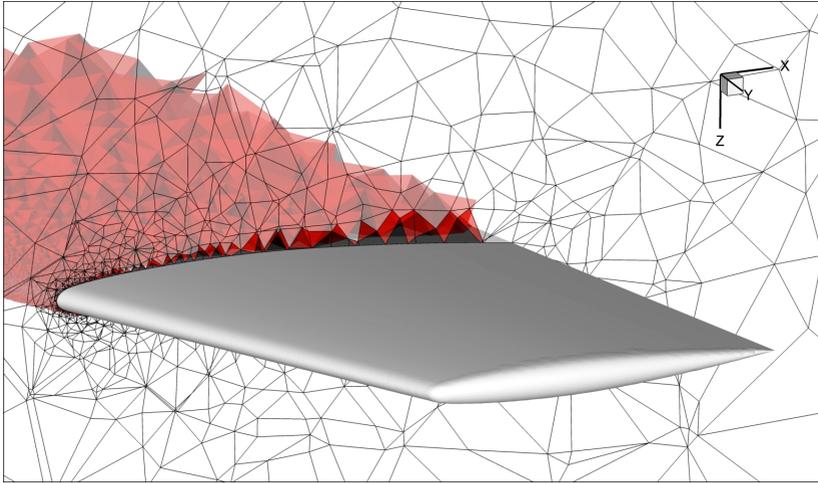


Abbildung 3.8.: Onera M6 Flügel, mit gekrümmten Wandzellen (schwarz) und einer zweiten Schicht gekrümmter innerer Zellen (rot)

3.8. Räumliche Integration

Im Rahmen der Finite-Volumen Diskretisierung und insbesondere bei den Discontinuous Galerkin Verfahren müssen einige Integrationen für die räumliche Diskretisierung durchgeführt werden. Bei einfachen Problemen wie zum Beispiel der Aufstellung der Massenmatrix, Gleichung 3.29, ist eine analytische Integration im Vorfeld mit anschließender Auswertung im Löser möglich und im allgemeinen auch am kostengünstigsten. Leider ist dieser Weg bei entsprechend aufwändigen Integranden nicht mehr möglich. Deshalb muss hier numerisch integriert werden.

Betrachtet man beispielsweise den letzten Term der diskretisierten Euler

Gleichungen, Gleichung 3.2, also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla V \cdot \mathcal{F}_i \, d\Omega &= \iiint \nabla V(x, y, z) \cdot \mathcal{F}_i(x, y, z) \, dx \, dy \, dz & (3.46) \\ &= \iiint \nabla V(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathcal{F}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot \left| \underline{J}(\xi, \eta, \zeta) \right| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \end{aligned}$$

so folgt mittels numerischer Integration:

$$\int_{\Omega} \nabla V \cdot \mathcal{F}_i \, d\Omega \approx \sum_{j=1}^N \omega_j \nabla V(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \cdot \mathcal{F}_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \cdot \left| \underline{J}(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \right|. \quad (3.47)$$

Entscheidend für die Performance der numerischen Integration ist die Anzahl und Lage der verwendeten Integrationspunkte. Hier unterscheidet man verschiedene Methoden wie zum Beispiel die Gauß-Legendre-Integration oder die monomialen Quadraturverfahren [31, 32], Details zu den hier verwendeten Integrationen siehe Anhang C.

3.9. Zeitintegration

Die räumliche Diskretisierung, beispielsweise von Gleichung 3.2, mit der Discontinuous Galerkin Methode führt zu folgendem Gleichungssystem

$$M(U) \frac{\partial U}{\partial t} = W(U). \quad (3.48)$$

Dabei stellt $U = (U_1, U_2, \dots, U_j, \dots)^T$ den Vektor der globalen Freiheitsgrade dar. U_j selbst ist allerdings auch ein Vektor, der die Freiheitsgrade für des Element j beinhaltet. Ähnlich verhält es sich für den Residuenvektor $W = (W_1, W_2, \dots, W_j, \dots)^T$. M entspricht diesmal der globalen Massenmatrix, die sich aus den in Abschnitt 3.5.3 diskutierten Elementmassenmatrizen zusammensetzt. Obige Gleichung ist kontinuierlich in der Zeit und kann nun durch verschiedene Integrationstechniken gelöst werden. Man unterscheidet zwischen den expliziten und den impliziten Methoden.

3.9.1. Explizit

Wird eine explizite Zeitintegrationsmethode verwendet, dann kann das Residuum W nur mit dem Zustand U am alten Zeitlevel t^n berechnet werden:

$$M(U) \frac{\partial U}{\partial t} = W(U^n) \quad (3.49)$$

Wir verwenden Einschrittverfahren höherer Ordnung, sogenannte Runge-Kutta Verfahren, die ihre höhere Ordnung durch zusätzliche Stützstellen innerhalb des Integrationsintervalls $[t^n, t^{n+1}]$ erreichen. Durch eine geschickte Wahl der Stützstellen ist es oft möglich auf Abspeicherung der Daten zu verzichten und einfach das Residuum aufzuaddieren.

Die hier verwendeten m -stufigen Runge-Kutta Integrationen werden nach folgender Formel durchgeführt

$$\begin{aligned} k_i &= M^{-1}W(U^n + \Delta t a_i k_{i-1}), \quad i = 1, \dots, m \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t \sum_{i=1}^m (b_i k_i). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Hierbei stellen a_i und b_i Koeffizienten dar, die von der Art des Verfahrens und von der Ordnung abhängen. Sie sind in Tabelle 3.2 aufgetragen.

\mathcal{O}	m_{min}	$a = (a_1, \dots, a_m)^T$	$b = (b_1, \dots, b_m)^T$
1	1	0	1
2	2	$(0 \ 1)^T$	$(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2})^T$
3	3	$(0 \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3})^T$	$(\frac{1}{4} \ 0 \ \frac{3}{4})^T$
4	4	$(0 \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{2} \ 1)^T$	$(\frac{1}{6} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{6})^T$
5	6	$(0 \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{2} \ \frac{3}{4} \ 1)^T$	$(\frac{7}{90} \ 0 \ \frac{32}{90} \ \frac{12}{90} \ \frac{32}{90} \ \frac{7}{90})^T$
6	7	$(0 \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{5}{6} \ \frac{1}{6} \ 1)^T$	$(\frac{13}{200} \ 0 \ \frac{11}{40} \ \frac{11}{40} \ \frac{4}{25} \ \frac{4}{25} \ \frac{13}{200})^T$

Tabelle 3.2.: Runge-Kutta Koeffizienten

Es fällt auf, dass oberhalb einer Genauigkeit von vierter Ordnung die Stufenzahl m die Ordnung \mathcal{O} übersteigt und die Verfahren ineffizienter werden, man spricht von der Butcher-Schranke. Aus diesem Grund erfreut sich das Verfahren vierter Ordnung besonders großer Beliebtheit.

3.9.2. Implizit

Explizite Verfahren haben den Vorteil, dass sie mit geringem Aufwand pro Integrationsschritt zu lösen sind und sie sich parallelisieren lassen. Von Nachteil ist ihr Stabilitätslimit, das insbesondere bei steifen Differentialgleichungen, wie den Turbulenzgleichungen, ein gravierender Nachteil ist.

Bei der impliziten Zeitintegrationsmethode hängt das Residuum W vom Zustand U am neuen Zeitlevel t^n ab:

$$M(U) \frac{\partial U}{\partial t} = W(U^{n+1}) \quad (3.51)$$

Diese Gleichung wird durch eine einfache "Backward-Euler" Methode diskretisiert,

$$M(U) \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = W(U^{n+1}). \quad (3.52)$$

Obige Gleichung stellt ein System von nichtlinearen Gleichungen für alle Freiheitsgrade U^{n+1} dar. Um dieses System zu lösen, muss die nichtlineare rechte Seite linearisiert werden,

$$\begin{aligned} W(U^k) &= W^k = W^{k-1} + \Delta W + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= W^{k-1} + \left(\frac{\delta W}{\delta U} \right)^{k-1} (U^k - U^{k-1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (3.53)$$

hierbei stellt $(\delta W/\delta U)$ die Jacobi-Matrix $J(U)$ des Systems dar. Die Matrizen für beispielsweise die Euler Gleichungen sind noch recht einfach und können oben in Gleichung 2.9 nachgelesen werden. Für die Navier-Stokes Gleichungen und auch die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen verhält es sich etwas komplizierter. Details hierzu finden sich bei Landmann [53].

Wird nun das mehrdimensionale Newton-Raphson Verfahren angewandt erhalten wir folgendes iteratives Schema,

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^n \\ \underbrace{\left[\frac{M}{\Delta t} - \left(\frac{\partial W}{\partial U} \right)^{k-1} \right]}_A \underbrace{(U^{(k)} - U^{(k-1)})}_x &= \underbrace{W(U^{(k-1)}) - \frac{M}{\Delta t} (U^{(k-1)} - U^{(0)})}_b, \\ & \qquad \qquad \qquad k = 1, \dots, m \\ U^{n+1} &= U^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Zu Anfang jedes Zeitschritts wird die Newton-Iteration mit U^n , also dem Wert des alten Zeitschritts, als Anfangswert gestartet. Dann werden, um die Lösung des Gleichungssystems 3.52, also U^{n+1} , zu finden, m -Iterationen durchlaufen. Das gesamte Verfahren kann als Ineinanderschachtelung von drei Schleifen gesehen werden. Die Äußerste stellt bei instationären Problemen die Zeitschleife des ganzen Problems dar. Die nächste Schleife stellt die

Newton-Iteration dar, die dann die dritte Schleife, die Lösung des linearen Gleichungssystems ($Ax = b$) beinhaltet.

Dieses System wird hier iterativ durch eine C++ Bibliothek, die Matrix Template Library (MTL) in Verbindung mit der Iterative Template Library (ITL) gelöst. Dazu muss das Gleichungssystem zuerst zur schnelleren Lösung vorkonditioniert werden, zumeist mittels der Incomplete Lower-Upper (ILU) Zerlegung, um dann mit Hilfe der Krylov Unterraummethoden GMRES [76] und BI-CGStab [96] gelöst zu werden. Genaueres hierzu findet sich wiederum bei Landmann [53].

3.10. Die numerischen Werkzeuge

Ausgereifte CFD-Strömungslöser, die über einen großen Funktionsumfang verfügen, sind zwangsläufig sehr komplex und haben eine sehr umfangreiche Programmstruktur. Diese Problematik wird bei einem Löser höherer Ordnung verstärkt, da nicht nur mit einer räumlichen Ordnung gerechnet wird, sondern wie hier beispielsweise mit bis zu sechs. Dies führt bei einer Rechnung, bei der drei Dimensionen und 10 verschiedenen Gleichungen zur Auswahl stehen, zu 180 verschiedenen Kombinationen, für die auch noch verschiedene Zeitintegrationen und Konvergenzbeschleuniger zur Auswahl stehen. Aus diesem Grund sind die hier verwendeten Programme in der Programmiersprache C++ geschrieben und im wesentlichen objektorientiert aufgebaut. Dies führt dazu, dass alle Programmteile nur einmal geschrieben werden müssen, man erhält einen übersichtlicheren und kompakteren Code. Außerdem trägt zu dieser Übersichtlichkeit der modulare Aufbau der gesamten Prozesskette bei, bei der möglichst alles, was nicht zum unmittelbaren Lösen der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen beiträgt, ausgelagert wurde.

Die wesentlichen Bestandteile des hier verwendeten Pakets sind der DG-Strömungslöser Stuttgart University Numerical Wind Tunnel (SUNWinT), verbunden mit einem Gitterpartitionierer (Splitter), seinem Pendant (Joiner) und einem Adapterer (Adaptation), siehe Abbildung 3.9. Als universelle Schnittstelle dient das CGNS Format [73].

Durch diesen modularen Aufbau ist es nun beispielsweise möglich, eine sequenzielle Rechnung zu partitionieren (Abschnitt 3.10.1), dann zu parallelisieren (Abschnitt 3.10.2) oder sie dann später auf einem größeren Rechner

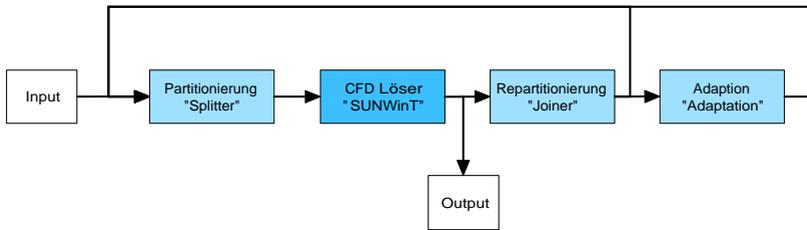


Abbildung 3.9.: Toolkette

zu repartitionieren und vielleicht auch im Lauf der Rechnung das Gitter zu adaptieren (Abschnitt 3.10.4).

3.10.1. Partitionierung

Bei der heutigen Entwicklung von Höchstleistungsrechnern zeichnet sich ein Paradigmenwechsel ab. Bisher wurde die Leistungssteigerung in erster Linie durch Beschleunigung der einzelnen Prozessoren erreicht. Da aber die Geschwindigkeit des Hauptspeichers nicht im gleichen Maße gesteigert werden konnte, setzt nun bei der tatsächlich zu erzielenden Leistung eine Stagnation ein. Somit macht es heute mehr Sinn, statt die theoretische Leistung eines einzelnen Prozessors immer weiter zu steigern, die dann doch nicht zum Tragen kommt, einfach eine große Anzahl zusammen zu schalten. Diese große Zahl von bis zu mehreren Tausend von Prozessoren kann nicht mehr effizient auf einen gemeinsamen Speicher zugreifen, sondern jedem Prozessor wird sein eigener Speicher zugeordnet, der dann über entsprechend schnelle Netzwerke miteinander verknüpft ist. Effiziente Rechnungen sind dann allerdings nur noch mit Verfahren möglich, bei denen die Kommunikation nur einen kleinen Teil der Gesamtzeit in Anspruch nimmt. Finite Volumen Verfahren sind hier im Nachteil, da relativ große Datenmengen an den Nahtstellen zu übertragen sind. Aufgrund ihrer Kompaktheit sind die Discontinuous Galerkin Verfahren hingegen außerordentlich gut geeignet für Rechnungen auf massiv parallel arbeitenden Supercomputern.

Das Verfahren ist mit Hilfe der "Message Passing Interface" (MPI) Bibliothek parallelisiert, die größtmögliche Flexibilität und Portabilität gewährleistet. Dabei wird das unstrukturierte Gitter in einzelne möglichst gleich große

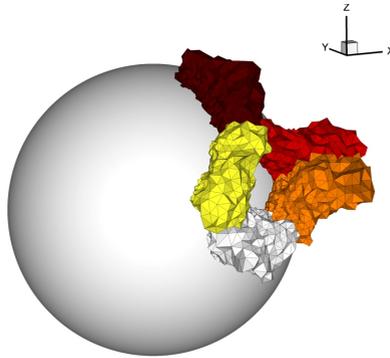


Abbildung 3.10.: Zonen bei einer Kugelumströmung und Tetraederdiskretisierung

Partitionen unterteilt, wobei jeder Prozessor für ein Gebiet zuständig ist. Aufgrund einiger wünschenswerter Eigenschaften, wie zum Beispiel minimale Konnektivitäten, ist diese Aufgabe ein schwieriges Unterfangen, weshalb wir das etablierte Softwarepaket METIS [48] nutzen. Die Algorithmen, die hier verwendet werden, beruhen auf einer Multilevel-Graphpartitionierung, ein Beispiel ist in Abbildung 3.10 zu sehen.

3.10.2. Parallelisierung

Beim Start des Strömungslösers liest jeder MPI-Prozess seine Gitterpartition ein und initialisiert diese, das heißt, er berechnet Anfangsbedingungen, Randbedingungen sowie die Konnektivitäten zu den einzelnen Nachbarzonen. Danach beginnt die iterative Berechnung der Strömung:

- Projektion des Zellzustands auf die Ränder
- Senden des Randzustands über Standard MPI-Kommandos zur benachbarten Zone und Vorbereiten des asynchronen Empfangs der entsprechenden Partnerzustände
- Währenddessen Berechnung der Innenflüsse und Zellintegrale
- Nach Abschluss aller lokalen Operationen folgt das Warte, bis alle Randinformationen vorliegen
- Berechnung der Randflüsse

Mit dieser Vorgehensweise ist es möglich, den durch die DG Methode entstehenden Mehraufwand, beispielsweise die Berechnung des Zellintegrals, auszunutzen um die Netzwerklatenz zu verdecken. Dank all dieser Maßnahmen und Methoden ist für die explizite Zeitintegration ein nahezu linearer Geschwindigkeitszuwachs möglich (Abschnitt 4.2.6). Die implizite Zeitintegration ist bis jetzt wegen der sehr schwierigen Vorkonditionierung nicht parallelisiert.

3.10.3. Gitterverwaltung und Datenausgabe

Bei der Berechnung ingenieurmäßiger Probleme in Verbindung mit Verfahren höherer Ordnung stößt man zwangsweise auf zwei Probleme. Zum ersten die Datenausgabe und Visualisierung der Lösung für eine Elementordnung größer als P^1 und zum zweiten auf die schnelle Datenspeicherung der meist recht großen Datenmengen.

Die gebräuchlichen Visualisierungsprogramme sind nur in der Lage, schrittweise lineare Daten darzustellen, was für die etablierten Löser mit ihrer Genauigkeit von zweiter Ordnung auch ausreichend ist. Da also keine polynomiale Approximation dargestellt werden kann, wird hier jedes Element in kleine Subzellen unterteilt, die wiederum linear dargestellt werden, aber doch die Genauigkeit der Visualisierung deutlich erhöhen.

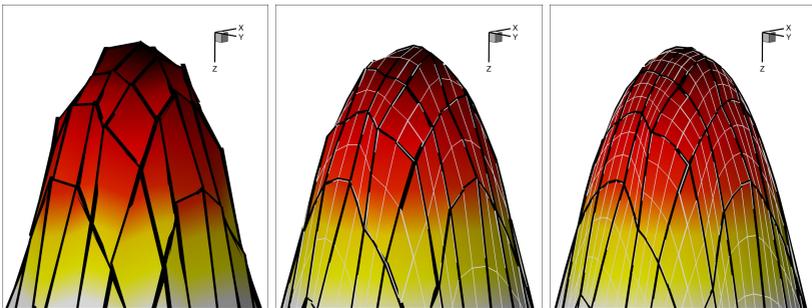


Abbildung 3.11.: Stückweise lineare zweidimensionale Visualisierung (links 2.Ordnung bis rechts 4.Ordnung)

In Abbildung 3.11 ist links die exakt wiedergegebene lineare Lösung zweiter Ordnung zu sehen, rechts wird bei höheren Ordnungen die Lösung stückweise angenähert. Die Zahl der inneren Stützpunkte ist hierbei so groß gewählt,

dass über eine Transformationsmatrix V die DG-Lösung U_k exakt aus der Punktwolke P bestimmt werden kann.

$$U_k = \bar{V} \cdot P \quad (3.55)$$

Damit kann der Löser aus den Visualisierungsdaten wieder neu gestartet werden.

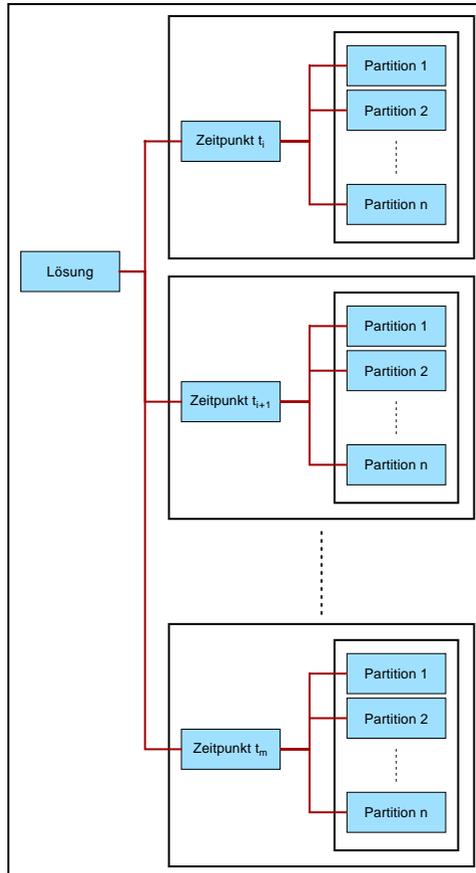


Abbildung 3.12.: Datenmanagement

Das zweite Problem, die großen Datenmengen und die Ausgabegeschwindigkeit, wird durch paralleles Schreiben aller Zonen gelöst. Das heißt, jeder

Prozess auf der Zielplattform des Löfers, also großen PC-Clustern, schreibt eine einzelne Ausgabedatei für jeden Zeitschritt. Die einzelnen Dateien werden dann über Links in der "Master" Datei zu einer Komplettlösung zusammengesetzt, siehe dazu Abbildung 3.12.

3.10.4. Adaption

Die übliche Vorgehensweise bei der Berechnung eines strömungsmechanischen Problems besteht darin, das Gebiet von Interesse anfangs mit einem Gittergenerator zu diskretisieren, um dann die entsprechenden Gleichungen auf diesem Gitter zu lösen. Bereiche, in denen besondere Phänomene zu erwarten sind, wie zum Beispiel die Grenzschicht, Wirbel oder Ablösegebiete werden im Vorfeld feiner vernetzt, um dort eine höhere Genauigkeit zu erzielen. Im allgemeinen ist die genaue Position dieser Phänomene im Vorfeld der Rechnung nicht bekannt, was oft zu nur mäßig genauen Ergebnissen führt. Hier ist die Möglichkeit wünschenswert, das Gitter während der laufenden Rechnung verändern zu können. Dies stellt sich für strukturierte Gitter als recht schwierig heraus, bei den hier verwendeten unstrukturierten Gittern ist eine Gitteradaption allerdings problemlos möglich.

Zur sinnvollen Adaption des Gitters ist ein Fehlerschätzer oder Fehlerindikator nötig, der anhand der aktuellen Lösung bestimmte Bereiche zur Adaption markiert. Implementiert sind drei Möglichkeiten, zum Ersten die manuelle Auswahl des zu adaptierenden Bereiches über ein Fenster, zum Zweiten die Markierung aller Zellen mit großen Gradienten und zum Dritten die Indikation aller unteraufgelösten Zellen mittels des bei der Limitierung bereits bewährten Persson-Indikators [70, 72].

Es existieren mittlerweile verschiedene Verfahren zur adaptiven Verfeinerung unstrukturierter Gitter. Das Verfahren sollte einfach zu implementieren sein, keine stark verzerrten Gitter erzeugen und lokal begrenzt sein. Da die Programmstruktur eines CFD Löfers durch Implementierung von sehr viel Funktionalität sehr unübersichtlich werden kann, sollte die Adaption in einem externen Tool erfolgen, das separat von dem eigentlichen Strömungslöser in einer Skriptumgebung gestartet wird. Dafür wurden drei verschiedene Strategien implementiert:

- Bisektionsverfahren oder Grün-Grün-Verfahren:

Hier wird nur die längste Kante einer markierten Zelle geteilt, weshalb

anschließend die Nachbarzelle ebenfalls an dieser Kante geteilt werden muss, Abbildung 3.13.

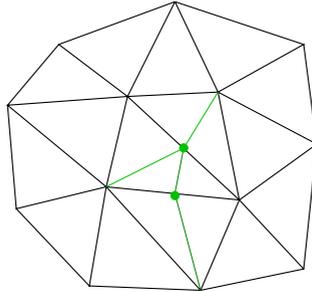


Abbildung 3.13.: Grün-Grün Adaption zweier Zellen (2D)

Das Bisektionsverfahren ermöglicht es, das zuerst verfeinerte Gitter wieder auf den Ausgangszustand zu vergrößern. Das Verfahren hat den Nachteil, dass insbesondere in 3D bei Gittern mit Gradienten in der Zellgröße zu große Bereiche verfeinert werden. Dies ist auf die Forderung zurückzuführen, dass immer die längste Kante einer Zelle in der Mitte geteilt wird, wodurch zu spitze Winkel bei einer wiederholten Adaption vermieden werden sollen. Dadurch werden in der Regel aber mehr Zellen verfeinert als markiert worden sind.

- **Rot-Grün-Verfahren:**

Das Rot-Grün-Verfahren ist ein häufig verwendetes und robustes Verfahren zur Gitteradaption [42]. Hierbei werden die markierten Zellen im zweidimensionalen Fall in vier ähnliche Zellen (rot) verfeinert und anschließend dabei entstandene so genannte "hängende Knoten" durch eine Bisektion der Nachbarzellen (grün) aufgelöst, Abbildung 3.14 links. Im Dreidimensionalen gestaltet sich die Adaption etwas schwieriger, durch die Rotverfeinerung entstehen sieben Sub-Tetraeder, deren "hängende Knoten" durch drei verschiedene Arten der Grünverfeinerung aufgelöst werden müssen, Abbildung 3.14 rechts.

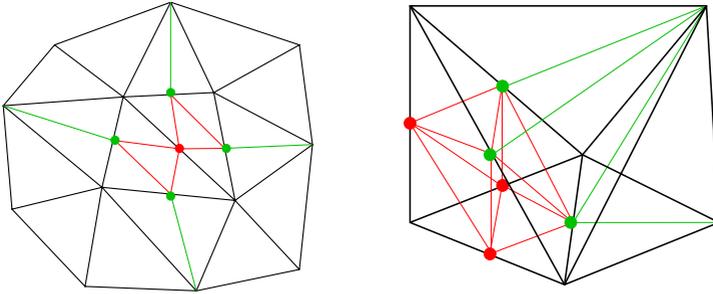


Abbildung 3.14.: Rot-Grün Adaption, 2D (links) und 3D (rechts)

Um eine Vergrößerung auf die Ausgangstriangulation durchführen zu können, müssen allerdings die Verbindungen zwischen den Spender- und Empfängerzellen gespeichert werden, was sich in einem externen Tool mit standardisierten Datenschnittstellen nur sehr schwer realisieren lässt.

- Remeshing:

Beim Remeshing wird ein zu adaptierender Bereich des Gitters ausgewählt und alle Gitterpunkte mit der Triangulation innerhalb dieses Bereichs gelöscht. Anschließend werden dem gewünschten Feinheitsgrad entsprechend neue Gitterpunkte in dem Gebiet erstellt und beispielsweise nach der Advancing-Front Methode [62] eine neue Triangulation erstellt, Abbildung 3.15.

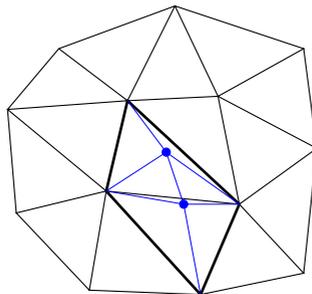


Abbildung 3.15.: Remeshing mit der Advancing-Front-Methode

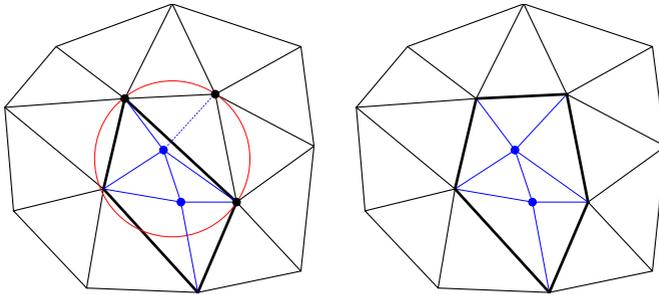


Abbildung 3.16.: Glättung mit Hilfe der Delaunay-Triangulation

In der Regel ist es empfehlenswert die Qualität dieses neuen Gitters, wie in Abbildung 3.16 zu sehen, durch ein Delaunay-Verfahren [33, 85] zu verbessern. Dabei dürfen im Umkreis eines Dreiecks des Netzes keine weiteren Punkte enthalten sein, was dazu führt, dass die Dreiecke des Netzes möglichst große Innenwinkel aufweisen. Das Remeshing-Verfahren eignet sich ebenfalls sehr gut um zu feine Bereiche wieder zu vergrößern, da das Verfahren keinen Unterschied zwischen vergrößern und verfeinern kennt. Lediglich die Anzahl der zu setzenden Punkte in dem ausgewählten Gebiet ist im Falle der Vergrößerung niedriger als bei einer Verfeinerung.

Mit den hier vorgestellten Adaptionsverfahren ist man nun weitgehend unabhängig vom Ausgangsgitter, was natürlich eine deutliche Rechenzeiterparnis mit sich bringt. Zu Bedenken ist allerdings, dass in einzelnen Bereichen des Gitters die Zahl der Freiheitsgrade und damit natürlich das spektrale Auflösungsvermögen verändert wird, was bei instationären Vorgängen eine gewisse Initialisierungszeit erfordert. Außerdem ist es meist nach einer Adaption erforderlich das Gitter neu zu partitionieren, da sich die Zellenzahl stark verändert.

4. Ergebnisse

Die in diesem Kapitel gezeigten Strömungsfelder wurden mit zwei recht unterschiedlichen CFD-Lösern berechnet. Im ersten Teil (Kapitel 4.1) wird der im Rahmen des Verbundprojekts Megaflow unter Schirmherrschaft des DLR entwickelte Löser FLOWer [51] verwendet. Er stellt den etablierten Stand der Technik für kommerzielle und anwendungsnahe Löser dar, das heißt strukturierte Gitter und eine Genauigkeit von zweiter Ordnung. Aufbauend auf den URANS Gleichungen und dem damit verbundenen hohen Modellierungsgrad ist er in der Lage auch recht komplexe Probleme und auch Komplettkonfigurationen zu berechnen. Der zweite Teil dieses Kapitels (Abschnitt 4.2) beinhaltet die Ergebnisse, die mit dem neuen Discontinuous Galerkin Ansatz berechnet wurden. Dabei werden zur besseren Diskretisierung komplexer Geometrien unstrukturierte Gitter verwendet, auf denen sogar prinzipiell mit beliebig hoher Ordnung und Genauigkeit gerechnet werden kann, was das numerische Verfahren effizienter macht (Kapitel 4.2.5) und auch für eine Detached- oder Large Eddy Simulation entscheidende Vorteile bringt (Kapitel 4.2.1).

4.1. Detached Eddy Simulationen in der Anwendung

Zunehmende Anforderungen an Sicherheit, Leistungsfähigkeit und Umweltverträglichkeit von Verkehrsflugzeugen lassen sich nur durch den Einsatz neuer Technologien erfüllen. Ein möglicher Ansatz hierbei sind sogenannte Mini-TEDs (Trailing Edge Devices), kleine, nahe der Hinterkante des Tragflügels beziehungsweise der Landeklappen ausfahrbare Klappen, die einen erheblichen Auftriebs- und Widerstandszuwachs verursachen. Damit lassen sich beispielsweise langsamere und steilere Landeanflüge verwirklichen, die unter anderem die Geräuschbelastung der Anwohner von Flughäfen erheblich verringern könnten. Dieser Effekt ist jedoch nur dann zu erzielen, wenn die Mini-TEDs nicht selbst eine erhebliche zusätzliche Lärmquelle darstellen. Im

Unterschied zu dem Auftriebszuwachs, der experimentell bereits nachgewiesen ist, sind die akustischen Eigenschaften der Mini-TEDs noch weitgehend unbekannt. Der subjektive Eindruck scheint jedoch darauf hin zu deuten, dass der zusätzliche Auftrieb mit einer gewissen Anhebung des Lärmpegels erkaufte wird. Im Rahmen des vom Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie (BMWi) geförderten multilateralen Verbundvorhabens FREQUENZ (Forschung zur Reduktion und Ermittlung des Quelllärms mittels Experiment und Numerik bei Zivilverkehrsflugzeugen) wurde mit Hilfe des aerodynamischen Feldverfahrens FLOWer und der Detached Eddy Simulation die für die Lärmerzeugung relevanten instationären Phänomene an den Mini-TEDs sowie die Schallabstrahlung ins Fernfeld mittels direktem Transport und der akustischen Analogie untersucht [59].

4.1.1. Auslegungsrechnungen und Windkanalkorrektur

Ausgangspunkt der verwendeten Tragflügelgeometrie ist ein Drei-Element-Profil eines Airbus A320. Zwischen dem Hauptelement und dem Slat, beziehungsweise dem Flap befindet sich ein Spalt, der eine für die weiteren Untersuchungen unerwünschte zusätzliche Lärmquelle darstellt. Im ersten Schritt wurde der Flap-Spalt durch den Projektpartner Airbus geschlossen. Durch den entstandenen Knick an der Oberseite neigte das Profil allerdings zu Strömungsablösungen, was die Ursprungsgeometrie nicht tat. Nach Rücksprache mit der Firma Airbus wurde das Profil durch geringe Änderungen ab einer Flügeltiefe von etwa 40% durch das IAG modifiziert, so dass die Strömung nun deutlich länger anliegt, Abbildung 4.1.

Da das Validierungs-Windkanalexperiment auch akustische Daten liefern sollte, wurde aufgrund der Zugänglichkeit und der Möglichkeit ganze Mikrofonarrays zu platzieren im aeroakustischen Windkanal Braunschweig (AWB) gemessen. Da es sich hier um einen Kanal mit Freistrahle handelt und eine Hochauftriebskonfiguration mit entsprechend großen Anstellwinkeln untersucht wird, tritt leider eine nicht unerhebliche Strahlableitung auf, welche die Vergleichbarkeit mit der Realität in Frage stellt. Mit Hilfe des denkbar einfachsten Falls, dem Profil ohne Trailing Edge Device, wird daher zuerst die Vergleichbarkeit von Experiment und Simulation untersucht. Gerechnet wurde eine zweidimensionale und vollturbulente RANS unter Berücksichtigung der Windkanalumgebungsdaten. Als charakteristische Vergleichsgröße

zwischen Experiment und Simulation dient der Auftriebsbeiwert und damit die Zirkulation.

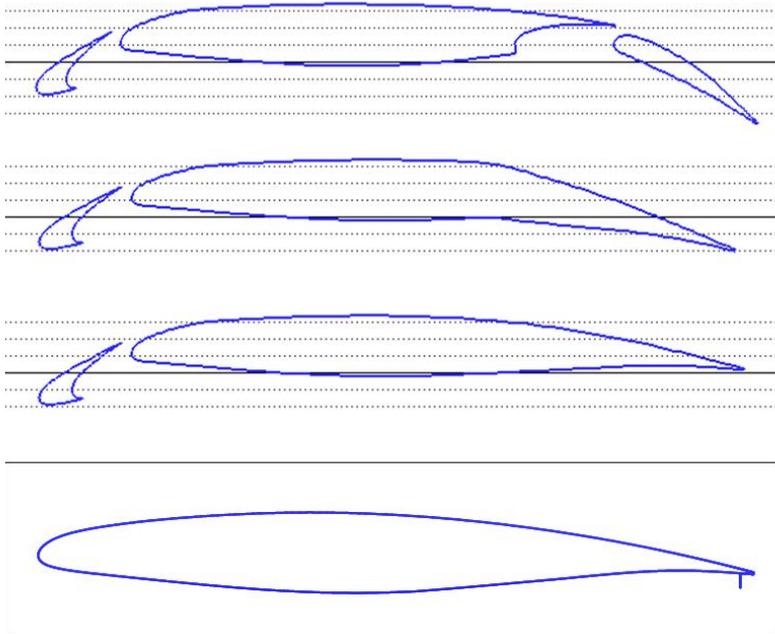


Abbildung 4.1.: Das FREQUENZ Tragflügelprofil

Wie in Abbildung 4.2, der Auftriebspolare der reinen Profilkonfiguration, zu sehen ist, entspricht bei gleichem c_a ein Anstellwinkel im Windkanal von $\alpha = 14^\circ$ einem gerechneten Anstellwinkel in der Simulation von $\alpha = 7^\circ$. Dies bestätigt auch der Verlauf des Druckbeiwerts c_p über der Profiloberfläche, siehe Abbildung 4.3. Die analoge Vorgehensweise für die Konfiguration mit um 90° ausgefahrener Hochauftriebshilfe liefert ähnliche Ergebnisse, auch hier entspricht die gerechnete Konfiguration mit $\alpha = 7^\circ$ einer experimentellen Anordnung von $\alpha = 14^\circ$, siehe Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5.

Aufgrund dieser recht guten Übereinstimmung wird im weiteren Vorgehen davon ausgegangen, dass das Strömungsfeld und die Zirkulation des experimentellen und gerechneten Problems bei den jeweils unterschiedlichen Anstellwinkeln im Wesentlichen übereinstimmt.

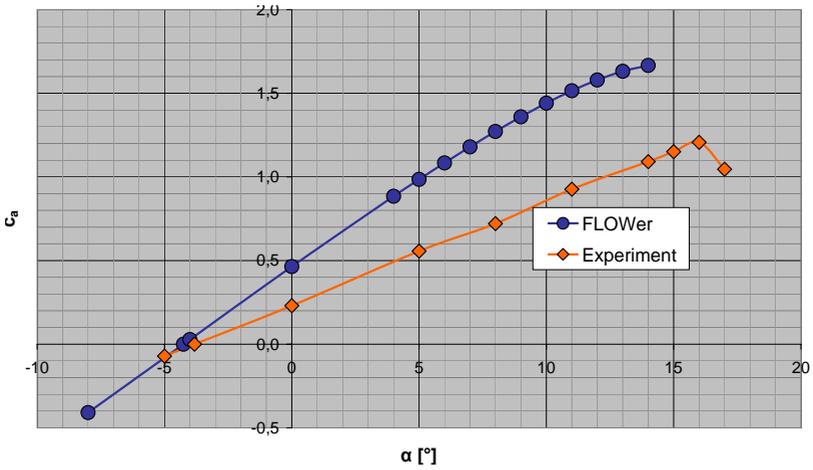


Abbildung 4.2.: Auftriebspolare des FREQUENZ-Profiles

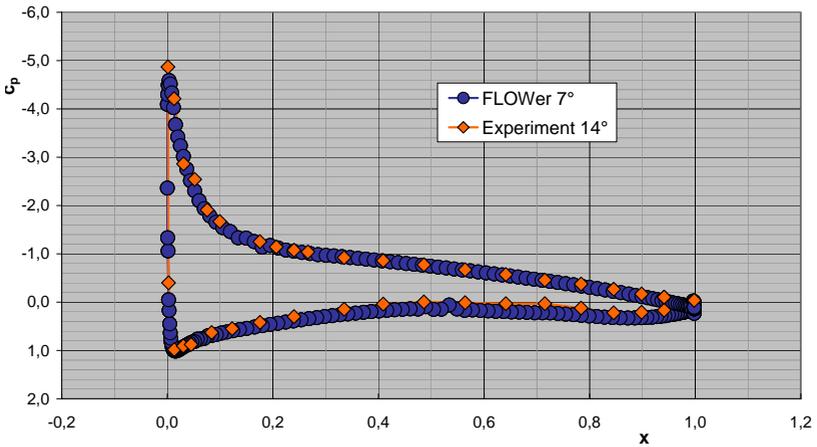


Abbildung 4.3.: Druckbeiwert des FREQUENZ-Profiles

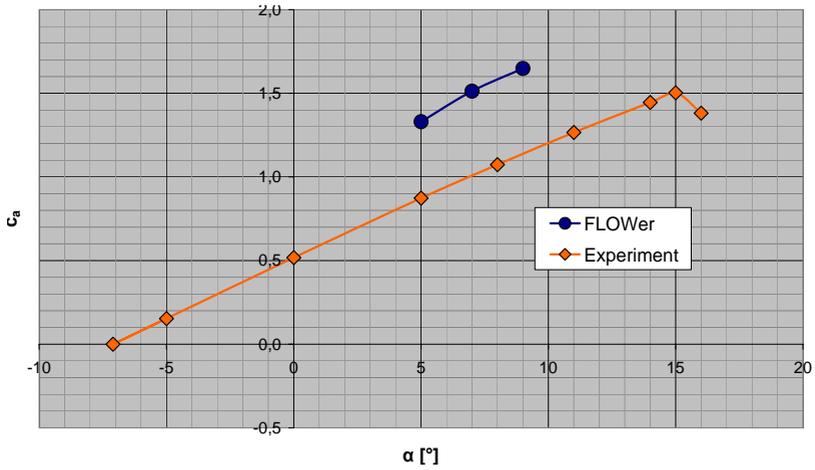
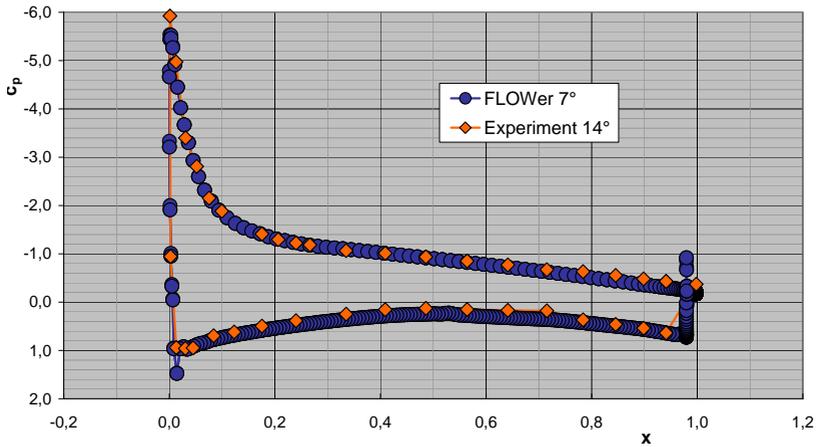


Abbildung 4.4.: Auftriebspolare mit ausgefahrenem Mini-TED



4.1.2. Detached Eddy Simulationen

Aufgrund des turbulenten Strömungscharakters an der Hinterkante, insbesondere hinter der Hochauftriebshilfe, erscheint die Verlässlichkeit der Ergebnisse des "Unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes" (URANS) Ansatzes für die Strömung hinter diesem quasi stumpfen Körper zweifelhaft. Aus diesem Grund wurde eine "Detached Eddy Simulation" (DES) dieser Konfiguration durchgeführt, die nun direkt Teile der instationären turbulenten Strömung berechnet und damit die turbulenten Strukturen besser modelliert. Die für die Anfachung der LES benötigten Störungen der Strömung werden dabei durch die Hochauftriebshilfe und die stumpfe Hinterkante hervorgerufen. Abbildung 4.6 zeigt die Strömung in einem Profilschnitt, die Wirbelstärke wird mit Hilfe des λ_2 Kriteriums [44] visualisiert.

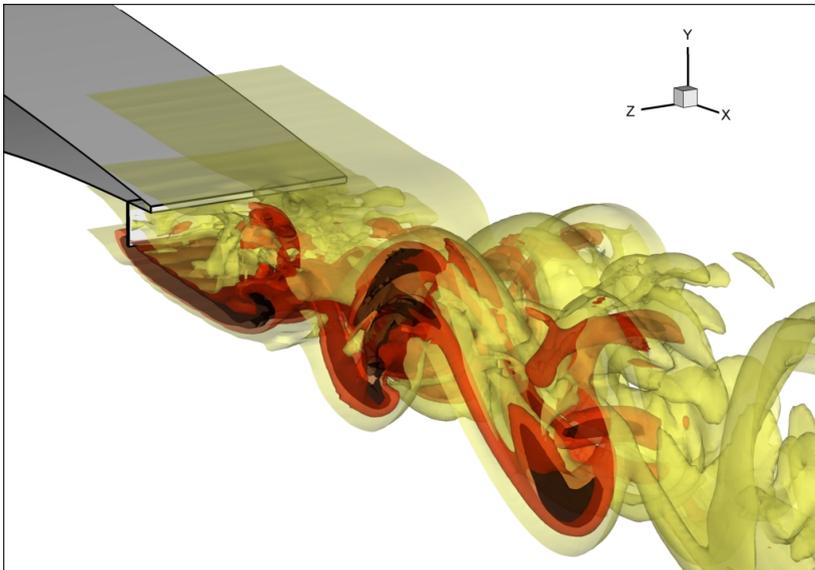


Abbildung 4.6.: λ_2 Isoflächen an der Profilhinterkante

4.1.2.1. Spannweite Geschwindigkeitskorrelationen

Möchte man dreidimensionale anisotrope Strukturen an einem zweidimensionalen und spannteilig extrudierten Profil berechnen, so muss man auf eine ausreichende Auflösung und ausreichende Ausdehnung in Spannweitenrichtung achten. In unserem Fall beträgt die spannteilige Länge 10% der Profiltiefe. Um zu zeigen, dass diese Größe ausreichend ist, wurden die Geschwindigkeitskorrelationen untersucht. Der Korrelationskoeffizient wird mit folgender Formel berechnet:

$$R_{ii} = \frac{\langle \dot{u}_i(z) \cdot \dot{u}_i(z+r) \rangle}{\langle \dot{u}_i(z)^2 \rangle} \quad (4.1)$$

Der linke und rechte Rand wird als Referenzwert $\dot{u}_i(z)$ verwendet. Für gleiche Geschwindigkeitsfluktuationen sollte die Korrelation gleich eins und für unkorrelierte Fluktuationen gleich Null sein. In unserm Fall, Abbildung 4.7, sieht man, wie der Korrelationskoeffizient am gegenüberliegenden Rand gegen Null strebt, was darauf schließen lässt, dass 10% Ausdehnung in Spannweitenrichtung ausreichend sind.

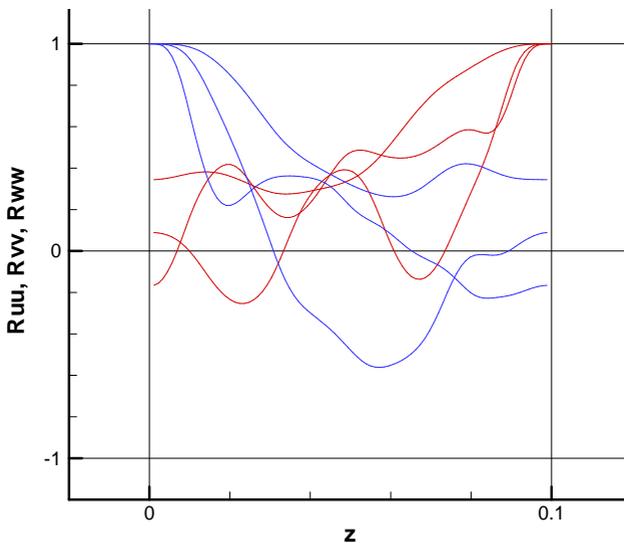


Abbildung 4.7.: Korrelationen aller drei Geschwindigkeitskomponenten, linker Rand (blau) oder rechter Rand (rot)

4.1.2.2. Das Wandgesetz für turbulente Strömungen

Bei der Simulation von turbulenten Grenzschichten mittels Turbulenzmodellen hat man Sorge zu tragen, dass die Grenzschicht in Wandnähe korrekt modelliert wird und die Diskretisierung des Rechengebiets an diesen Stellen ausreichend fein ist. Ein bewährter Test für diese Grenzschichten ist das universelle Wandgesetz [79]. Es sagt die mittlere Geschwindigkeitsverteilung an einer ebenen Platte voraus und ist für kleine y^+ Werte auch für Profile geeignet. In unserem Fall wird das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil bei 50% Profiltiefe extrahiert (Abbildung 4.8).

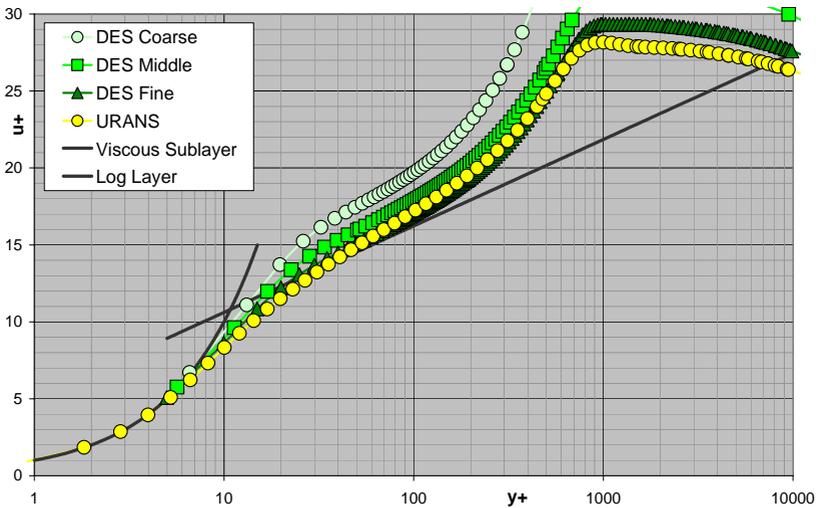


Abbildung 4.8.: Das Wandgesetz für turbulente Grenzschichten

Wir sehen eine gute Übereinstimmung mit der laminaren Unterschicht, eine mäßige Übereinstimmung mit dem logarithmischen Wandgesetz und ab $y^+ > 120$ den Einfluss des Grenzschichttrands. Wenn wir im DES Fall die Gitterauflösung in der Grenzschicht vergrößern, erreichen wir eine etwas bessere Übereinstimmung, die URANS Lösung ist bei grober Auflösung besser in der Lage den "Log Layer" zu treffen.

4.1.2.3. Nachlaufuntersuchungen und Vergleich mit dem Experiment

Ein Teil der experimentellen Messungen ist die Untersuchung des Nachlaufs hinter dem Profil mittels der Hitzdrahtanemometrie. Die Hitzdrahtmessungen mit einer Ein-Sensor-Sonde wurden direkt hinter dem Profil an den schwarz markierten Streifen in Abbildung 4.9 durchgeführt.

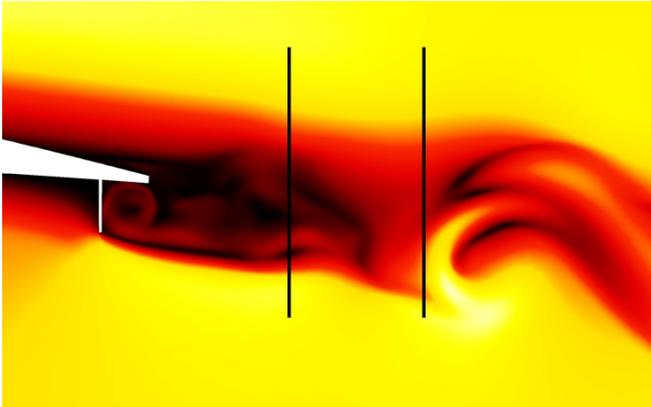


Abbildung 4.9.: Hitzdrahtmessungen, im Hintergrund eine Momentanaufnahme der Geschwindigkeitsverteilung der DES

In Abbildung 4.10 ist die zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsverteilung aus dem Experiment, schwarz, die zeitlich gemittelte Verteilung der Simulation, "FLOWer mean" in gelb, und die entsprechenden Extremwerte zu sehen. Beim ersten Sensor (S1) ist der Verlauf der Daten sehr ähnlich, allerdings existiert eine kleine Verschiebung. Im Gegensatz dazu zeigt der Vergleich des zweiten Sensors (S2) keine Verschiebung sondern eine geringfügig andere Tendenz. Dies könnte ein Hinweis auf die doch etwas unterschiedliche Anströmbedingung zwischen Experiment und Simulation sein und würde bedeuten, dass es zum Vergleich nicht ausreichend ist, nur den Auftriebsbeiwert zu berücksichtigen.

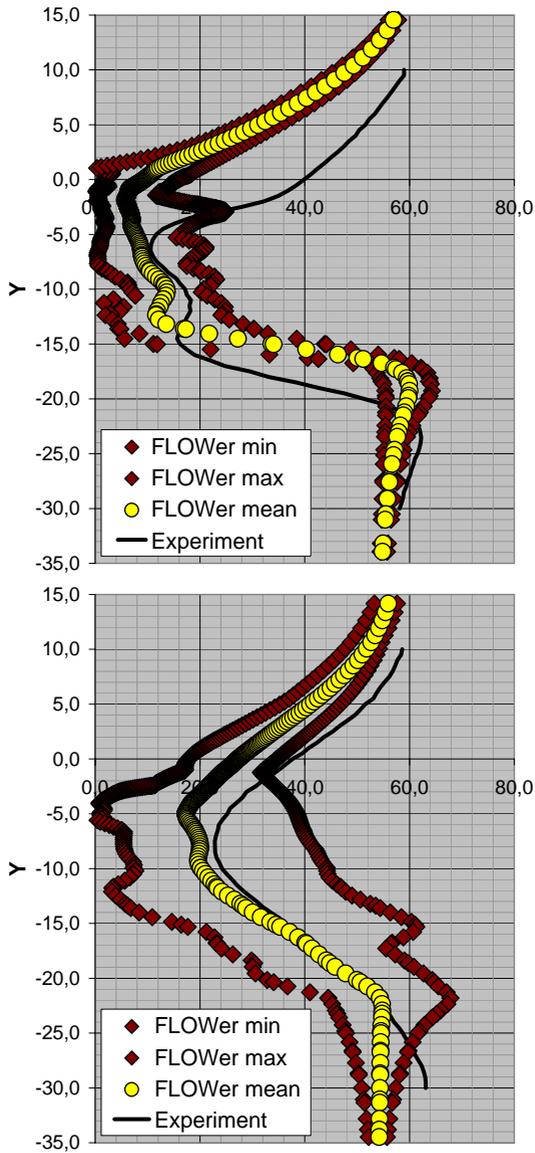


Abbildung 4.10.: Hitzdrahtmessungen und DES Simulationen
(oben S1, unten S2)

4.2. Discontinuous Galerkin Verfahren

Im ersten Teil dieses Kapitels konnte gezeigt werden, dass, mittels Detached Eddy Simulationen und Verfahren zweiter Ordnung, auch industriell relevante Probleme gelöst werden können. Es ist uns gelungen mit dem aus der DES gewonnenen Strömungsfeld die Akustik richtig vorherzusagen [59] und somit die "High Fidelity" Schiene des FREQUENZ Projekts abzudecken [36]. Wünschenswert wäre allerdings eine flexiblere Gittergestaltung und eine höhere Genauigkeit des verwendeten Verfahrens.

Der zweite Teil des Kapitels zeigt nun Ergebnisse, die auf der Discontinuous Galerkin Diskretisierung aufbauen und von anfangs noch recht einfachen Tests, wie reibungsfreien Strömungen, zu immer komplexer werdenden Problemen übergehen, bis zur Detached Eddy Simulationen.

Eine einfache, gleichzeitig aber schwer zu berechnende, Konfiguration stellt die Strömung um eine Kugel dar, die hier stellvertretend für alle stumpfen Körper mit abgelösten Strömungen untersucht wird. Die erste Schwierigkeit besteht schon in der korrekten Vorhersage des reibungsfreien Strömungsfeldes, das bei unzureichend genauer Randdiskretisierung zu unphysikalischen Effekten führt, dies wird in Abschnitt 4.2.2.1 demonstriert. Danach werden die qualitativ unterschiedlichen physikalisch interessanten Bereiche behandelt: angefangen bei sehr geringen Reynoldszahlen, die beispielsweise zu einer dreidimensionalen Wirbelstraße, ähnlich der Kármánschen Wirbelstraße, führen (näheres dazu in Abschnitt 4.2.3.3) bis hin zu Reynoldszahlen von $Re > 10^6$ mit vollturbulentem Strömungsfeld, siehe Abschnitt 4.2.5.2.

4.2.1. Das Konvergenzverhalten

Ein wichtiger Schritt zur Verifikation des entwickelten Programmcodes ist die formale Ordnung des DG Verfahrens zu überprüfen. Dabei ist die übliche Vorgehensweise, die Gitterkonvergenzordnung p zu bestimmen, die mit der gewünschten Genauigkeitsordnung übereinstimmen sollte. Hierfür wird systematisch die Gitterauflösung beziehungsweise die Zellenzahl variiert. Der Diskretisierungsfehler ist dann definiert als

$$\|\Delta y(x, h)\| = y(x, h) - y(x) = \mathcal{O}(h^p) \quad (4.2)$$

mit h als charakteristischer Gittergröße, $y(x, h)$ als numerischer Lösung für dieses Gitter und $y(x)$ als analytisch exakter Lösung. Da die exakte Lösung

des Problems bekannt sein muss, ist diese Vorgehensweise auf einige spezielle Testfälle limitiert. Nach induktiver Verallgemeinerung besteht jedoch die Hoffnung, dass es sich in anderen Fällen ähnlich verhält. Jetzt kann die formale Ordnung p durch Vergleich zweier Diskretisierungsfehler auf unterschiedlichen Gittern bestimmt werden

$$\frac{\|\Delta y(x, h_1)\|}{\|\Delta y(x, h_2)\|} = \frac{h_1^p}{h_2^p}. \quad (4.3)$$

Durch Bildung des Logarithmus folgt

$$\ln \frac{\|\Delta y(x, h_1)\|}{\|\Delta y(x, h_2)\|} = p \ln \frac{h_1}{h_2}, \quad (4.4)$$

und für die Konvergenzordnung p gilt

$$p = \frac{\ln(\|\Delta y(x, h_1)\|) - \ln(\|\Delta y(x, h_2)\|)}{\ln \frac{h_1}{h_2}}. \quad (4.5)$$

Da ausschließlich auf regelmäßigen Gittern gerechnet wird, verwenden wir für die Definition der charakteristischen Gittergröße h die Zellenzahl in eine Raumrichtung. Zur Auswertung wird ein charakteristischer Wert für den globalen Fehler gesucht. Deshalb wird der Diskretisierungsfehler über eine Fehlernorm im gesamten Rechengebiet Ω durch Summation jedes integralen Einzelfehlers Δu_E bestimmt. Gängig sind drei Fehlernormen, die lineare Norm ($L_1, \|\cdot\|_1$), die quadratische Norm ($L_2, \|\cdot\|_2$) und die maximums Norm ($L_\infty, \|\cdot\|_\infty$):

$$\|\Delta \mathbf{u}\|_1 = \int_{\Omega} |\Delta u_h| dV \quad (4.6)$$

$$\|\Delta \mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} [\Delta u_h]^2 dV} \quad (4.7)$$

$$\|\Delta \mathbf{u}\|_\infty = \max_E (\max_n \Delta u_E^{[n]}). \quad (4.8)$$

Um nun schlussendlich den skalaren Fehler Δy für die Konvergenzordnung bestimmen zu können, wird die mittlere Elementfehlnorm $\Delta \mathbf{u}$ über alle Zellen n bestimmt:

$$\|\Delta \mathbf{y}\|_1 = \frac{\sum \|\Delta \mathbf{u}\|_1}{n} \quad (4.9)$$

$$\|\Delta \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\frac{\sum \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2}{n}} \quad (4.10)$$

$$\|\Delta \mathbf{y}\|_\infty = \max(\|\Delta \mathbf{u}\|_\infty). \quad (4.11)$$

Als analytischer Testfall für die Euler Gleichungen wird ein Gaußpuls in der Dichte ρ bei konstantem Druck p_0 und konstanter Geschwindigkeit u_0 verwendet, dessen Anfangsbedingung folgendermaßen lautet:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 + a \exp\left[-\ln\left(2\frac{|x-x_0|^2}{\sigma^2}\right)\right] \\ \rho u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{p_0}{\gamma-1} + \frac{(\rho u_0)^2}{2\rho} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

mit der Pulshöhe a , der Breite σ und der Position x_0 . Die exakte Lösung des sich bewegenden Gaußpulses ist trivial und besteht darin, dass sich der Puls mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 unverändert durch das Rechengebiet bewegt, siehe Abbildung 4.11.

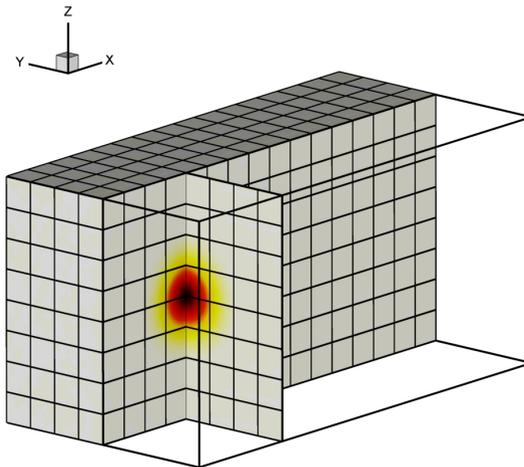


Abbildung 4.11.: Gaußpuls in der Dichte, diskretisiert mit Hexaedern

Da die Bewegung ein instationärer Prozess ist, muss zwischen räumlicher und zeitlicher Diskretisierung unterschieden werden. Für die ersten Beispiele ist die Diskretisierungsordnung p in Raum und Zeit identisch.

Um die Vor- beziehungsweise Nachteile dieser Methode aufzuzeigen, wird zuerst die eindimensionale Liniendiskretisierung untersucht, Abbildung 4.12. Aufgetragen ist der L_1 -Fehler über der Gitterauflösung in doppelt logarithmischer Darstellung, Details können im Anhang D nachgelesen werden. Die

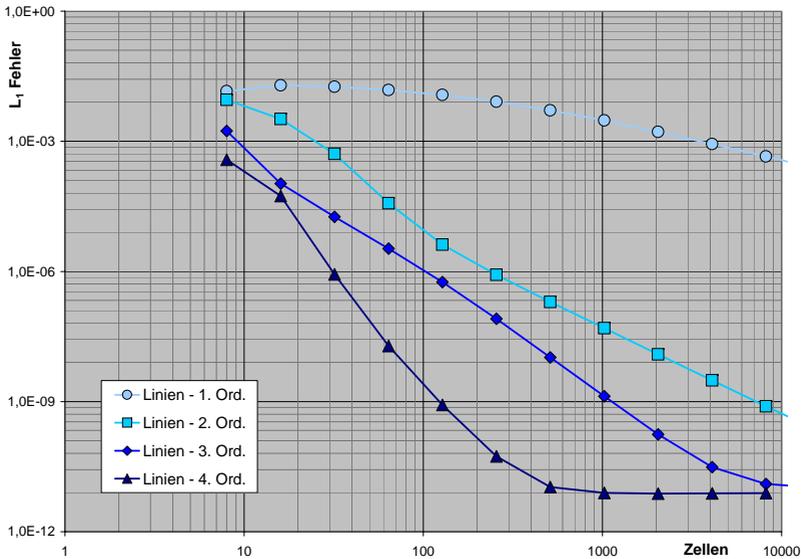


Abbildung 4.12.: Konvergenzraten für Linienelemente

Steigung der Kurven stellt die Konvergenzordnung dar. Man erkennt auf der linken Seite, dass sehr grobe Gitter nicht in der Lage sind, die Anfangsbedingung korrekt wiederzugeben, weshalb sich die korrekte Ordnung erst für etwas feinere Gitter einstellt. Sie sollte asymptotisch für $h \rightarrow 0$ erreicht werden. Wählt man das Gitter allerdings zu fein, so stößt man bei $\approx 10^{-11}$ an die Rechengenauigkeit des Computers. Im dreidimensionalen Fall dagegen ist es allerdings aufgrund der Praktikabilität kaum möglich in diesen Bereich vorzudringen, da dafür 1000^3 Zellen notwendig wären.

Für die Zeitintegration wird ein Runge-Kutta Verfahren gleicher Ordnung wie im Raum gewählt, das bekanntermaßen ab $\mathcal{O} > 4$ an die "Butcher Barrier" [19] stößt und deshalb ineffizient wird, da die Zahl der Stufen überproportional ansteigt. Der explizite Zeitschritt wurde immer mit 50% des Stabilitätslimits für reibungsfreie Strömungen gewählt.

Abbildung 4.13 zeigt den Konvergenzverlauf für die Tetraedertopologie bis zur fünften Ordnung und für die Hexaedertopologie bis zur sechsten Ordnung.

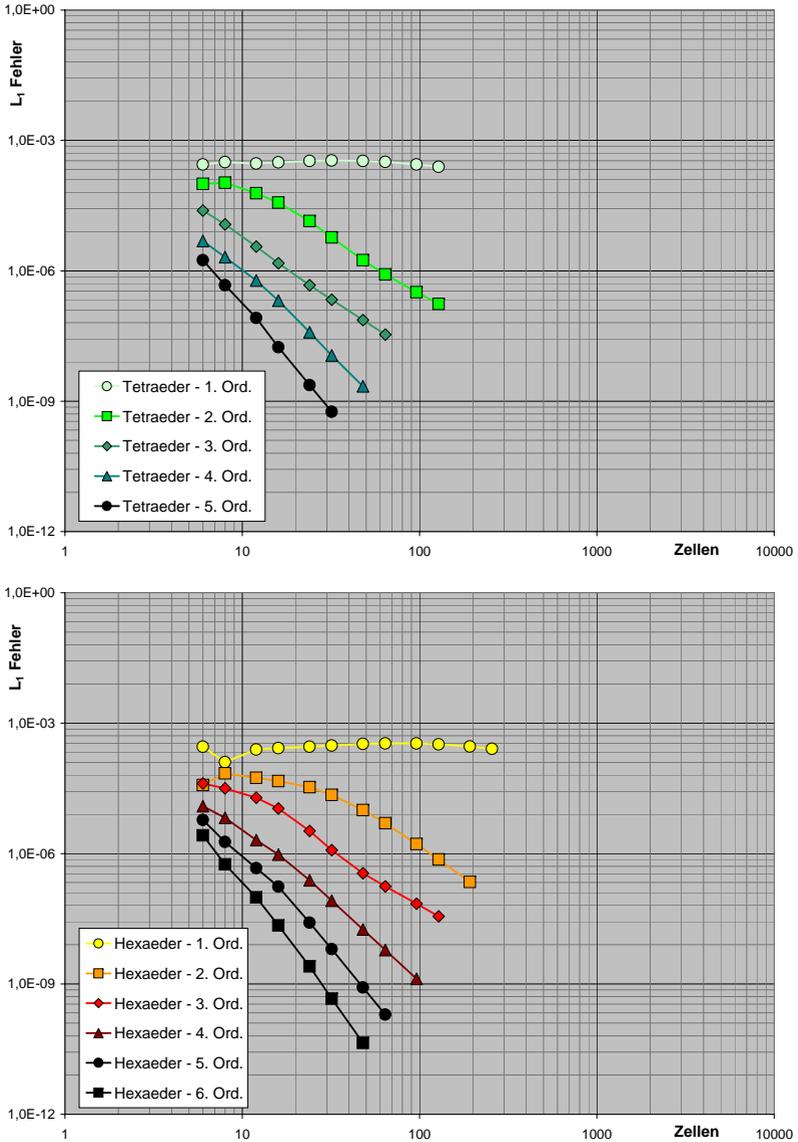


Abbildung 4.13.: Konvergenzraten für Tetraeder- und Hexaederelemente

Geplottet wurde hier der L_1 -Fehler über der Gitterdichte, die Konvergenzordnung ist an der Steigung zu erkennen und ist für alle Polynomordnungen q identisch zur optimalen Konvergenz von $\mathcal{O}(h^{q+1})$, siehe Anhang D.

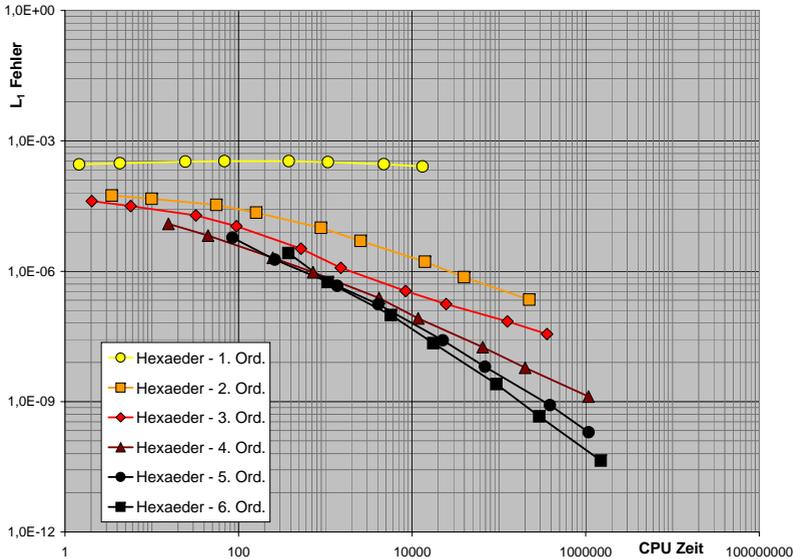


Abbildung 4.14.: Konvergenzraten für Hexaederelemente

Auch der Vergleich von Fehler und Rechenzeit (Abbildung 4.14) ist sehr aussagekräftig. Hier erkennt man, dass es viel effizienter ist, eine gewünschte Genauigkeit mit einem Verfahren hoher Ordnung zu erreichen. Um beispielsweise eine Genauigkeit von 10^{-6} zu erreichen, ist ein Verfahren vierter Ordnung optimal, das als Zeitintegration ein vierstufiges Runge-Kutta Verfahren verwendet. Bei noch höherer zeitlicher Ordnung wird das Runge-Kutta Verfahren langsam ineffizient, so benötigt beispielsweise ein Verfahren fünfter Ordnung bereits sechs Schritte, was erst bei noch höheren Genauigkeit Vorteile bringt.

Da die Runge-Kutta Discontinuous Galerkin (RKDG) Verfahren einer starken Zeitschrittbeschränkung unterliegen, wird zu guter Letzt der Einfluss der zeitlichen Diskretisierung untersucht. Bei dem hier betrachteten Gaußpuls ist

nur die konvektive Grenze interessant, die folgendermaßen berechnet wird

$$CFL = \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2(p-1)+1} \quad (4.13)$$

und in Tabelle 4.1 aufgetragen wurde.

p	1	2	3	4	5	6
CFL	1	0.333	0.2	0.143	0.111	0.091

Tabelle 4.1.: Konvektives Zeitschrittlimit

Mittels impliziter Zeitintegration (Abschnitt 3.9.2) kann dieses Limit überwunden werden, allerdings nur bei einer Genauigkeit von erster Ordnung in der Zeit. Bei stationären Vorgängen spielt die Genauigkeit der Zeitintegration natürlich keine Rolle, bei instationären Problemen wie dem Gaußpuls allerdings schon.

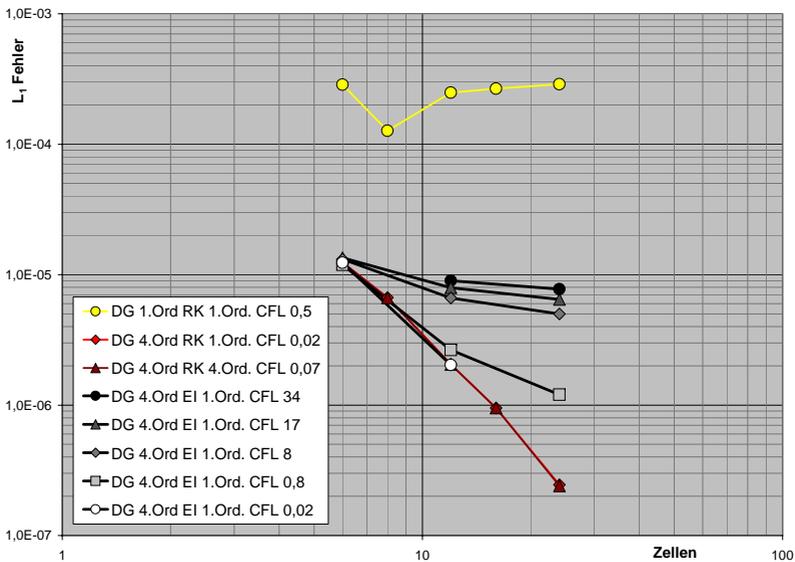


Abbildung 4.15.: Konvergenzraten für verschiedene Zeitintegrationen und Zeitschrittweiten

Abbildung 4.15 und Anhang D verdeutlichen diese Problematik. Als Referenz dient auch hier der konvektierte Gaußpuls auf Hexaederelementen, mit $\mathcal{O}1$ DG im Raum und einem $\mathcal{O}1$ Runge-Kutta Verfahren in der Zeit, beziehungsweise mit $\mathcal{O}4$ DG und einem $\mathcal{O}4$ Runge-Kutta Verfahren, der sich mittels expliziter Zeitintegration durch das Rechengebiet bewegt. Man sieht deutlich, dass man allein durch Erhöhen der räumlichen Ordnung eine Größenordnung an Genauigkeit gewinnt. Wird dann die lokale CFL-Zahl verringert, erreicht man wiederum das Genauigkeitsniveau der expliziten Zeitintegration hoher Ordnung. Das Genauigkeitsniveau an sich ist auch abhängig von der Machzahl, Abbildung 4.16, was natürlich nichts an der Tatsache ändert, dass für kleine Zeitschritte das Genauigkeitsniveau der hohen Ordnung erreicht wird.

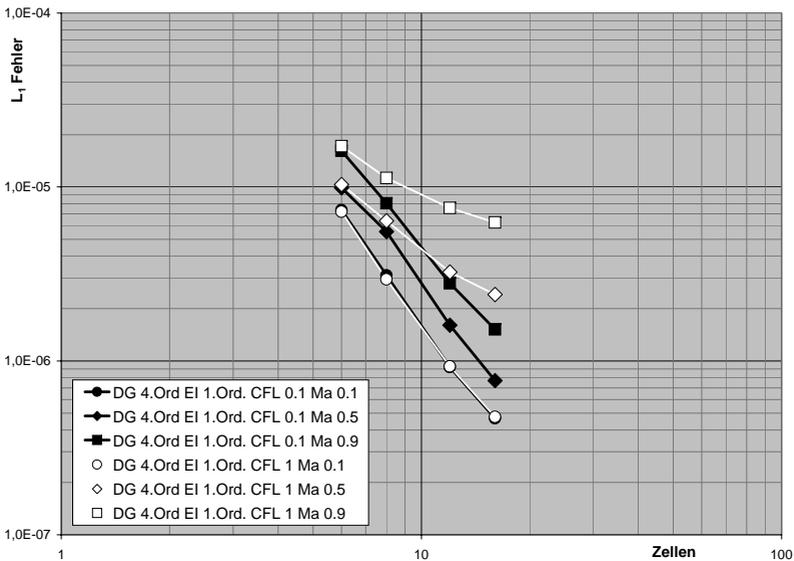


Abbildung 4.16.: Konvergenzraten für die Implizite Zeitintegration bei verschiedenen Machzahlen

Dies ist eine Bestätigung einer Strategie, die auf globale große Zeitschritte abzielt. In kleinen Zellen, hauptsächlich in der durch die Turbulenzmodellierung weitgehend stationären Grenzschicht, wird eine hohe lokale CFL-Zahl

wirksam, die zu einer unterdurchschnittlichen zeitlichen Auflösung führt. In Zellen, die außerhalb der Grenzschicht liegen ist die CFL-Zahl kleiner 1 und die zeitliche Auflösung entsprechend hoch.

4.2.2. Reibungsfreie Strömungen

4.2.2.1. Kugelumströmungen mit isoparametrischen Elementen

Das erste Beispiel zeigt die reibungsfreie Umströmung einer Kugel die durch Diskretisierung der Euler Gleichungen (Abschnitt 2.1) berechnet wird. Hier erwarten wir für niedrige Machzahlen eine stationäre Strömung, ähnlich der Potentiallösung.

Zuerst diskretisieren wir das Rechengebiet mit klassischen Tetraedern mit geraden Dreieckskanten und erhalten leider nur eine hochgradig instationäre Strömung und in manchen Fällen sogar Ablöseerscheinungen an den Elementgrenzen. Da hier jedoch mit den Euler Gleichungen gerechnet wurde, haben diese Turbulenzen keinerlei physikalischen Hintergrund. Durch Verwendung dieser gradlinigen Diskretisierung wird die Kontur durch ein Polygon angenähert, das naturgemäß Ecken besitzt. In diesen Ecken ist der Potentialfluss singularär, was zu unendlichen Geschwindigkeiten führen würde.

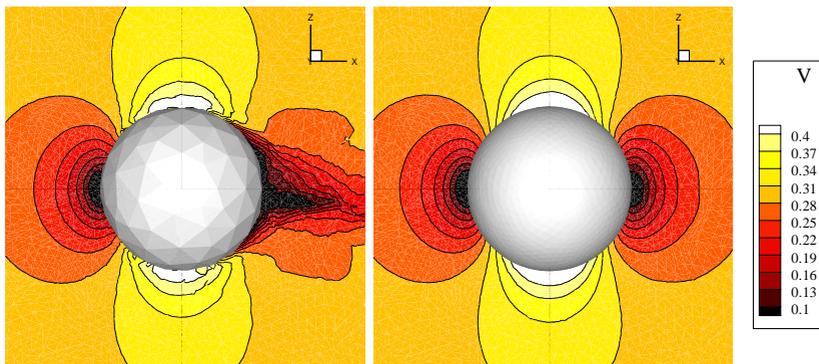


Abbildung 4.17.: Reibungsfreie Kugelumströmung: klassische Elemente (links) und gekrümmte Zellen (rechts)

Die Abbildung 4.17 zeigt im linken Bild diese Problematik. Um die Lösung

zu verbessern hat man nun zwei Möglichkeiten: Zum Ersten kann man das Gitter verfeinern und somit eine höhere Genauigkeit erreichen, was bei Finite-Volumen Verfahren der übliche Weg ist. Die zweite Möglichkeit ist, auf dem bestehenden groben Gitter zu rechnen und die Genauigkeit des Verfahrens zu erhöhen, also die Zellordnung. Laut den Untersuchungen aus Abschnitt 4.2.1 ist es besser und effizienter, diese Zellordnung zu erhöhen. Aus diesen Gründen verwenden wir ein sehr grobes Gitter mit nur 20 Zellen in Kugel-Umfangsrichtung, die dann aber mit einem Verfahren vierter Ordnung mit je 20 Freiheitsgraden pro Zelle hochgenau aufgelöst werden. Da die Auflösung an den Rändern sehr grob ist, wird die im Abschnitt 3.7 erläuterte Randdiskretisierung mit gekrümmten isoparametrischen Elementen an der Kugeloberfläche angewendet [60]. Abbildung 4.17 zeigt rechts die Lösung mit den neuen isoparametrischen Zellen, die weitestgehend der Potentiallösung entspricht [58].

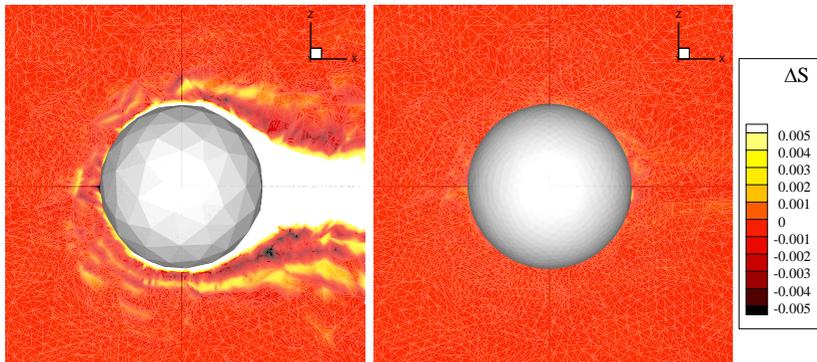


Abbildung 4.18.: Entropiedifferenz, klassische Elemente (links) und gekrümmte Zellen (rechts)

Ein guter Indikator für die Lösungsqualität ist der Entropieunterschied. Nach Munz [68] gilt für die Entropiezunahme in einem System kalorisch idealer Gase:

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (4.14)$$

Des Weiteren gilt

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \quad , \quad p = \rho RT, \quad (4.15)$$

damit erhält man für die Entropiezunahme

$$\Delta S = S - S_\infty = \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \frac{T}{T_\infty} - \ln \frac{p}{p_\infty} \right) \frac{p_\infty}{\rho_\infty T_\infty}. \quad (4.16)$$

In Abbildung 4.18 wird diese Entropiedifferenz deutlich, der Unterschied in der maximal Entropiezunahme zwischen klassischen und gekrümmten Elementen liegt bei etwa 1000:1.

Abbildung 4.19 zeigt die Verteilung des Druckbeiwerts auf der Kugeloberfläche. Der von der Potentialtheorie vorhergesagte minimale Druckbeiwert liegt bei einer Machzahl von $Ma_\infty = 0.1$ bei $c_{p,min} = -1.25$ und wird von der isoparametrischen Diskretisierung auch korrekt berechnet.

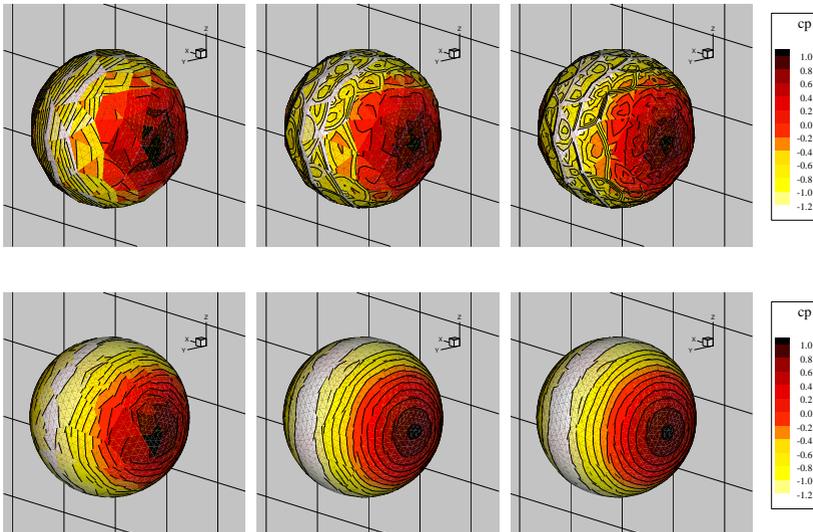


Abbildung 4.19.: Reibungsfreie Kugelumströmung, klassisch (oben) und gekrümmt (unten), 2. bis 4. Ordnung (von links nach rechts)

4.2.2.2. Transsonische Strömungen

Erhöht man nun die Machzahl, so wird die Strömung transsonisch und Verdichtungsstöße treten auf. Diese Stöße verursachen erhebliche numerische Probleme, die hier durch die Methode der künstlichen Viskosität aus Abschnitt 3.4.1 gelöst wurden.

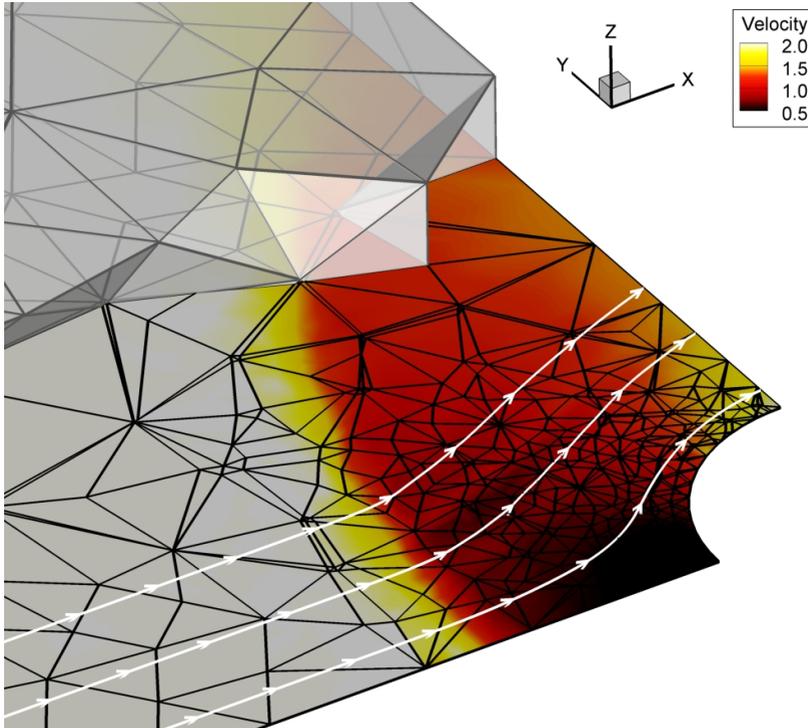


Abbildung 4.20.: Machzahlverteilung für die dreidimensionale Strömung um einen Zylinder

Analog zu Persson et al. [72] zeigt die Konfiguration in Abbildung 4.20 die Umströmung eines Zylinders bei einer Machzahl von $M_\infty = 2.0$, dabei entsteht eine abgelöste Kopfwelle vor dem Zylinder. Das Rechengebiet wird durch einen Einströmrand, Symmetrierandbedingungen und einen charakteristischen Ausströmrand begrenzt. Durch die Verdrängung des Zylinders wird

die Strömung ab dem Staupunkt vom Unterschall in den Überschall beschleunigt, weshalb am Ausströmrand alle Charakteristiken nach außen laufen und es prinzipiell auch möglich ist, eine reine Extrapolationsrandbedingung zu verwenden. Die Diskretisierung dieses Problems stellt die absolute Minimal-konfiguration dar und steht von seinen Dimensionen auf den ersten Blick im krassen Widerspruch zu den "Best Practices Guidelines" [20]. Aufgrund der einfachen Strömungstopologie, den charakteristischen Rändern und dem hohen Auflösungsvermögen des Verfahrens ist dies hier aber ohne weiteres möglich.

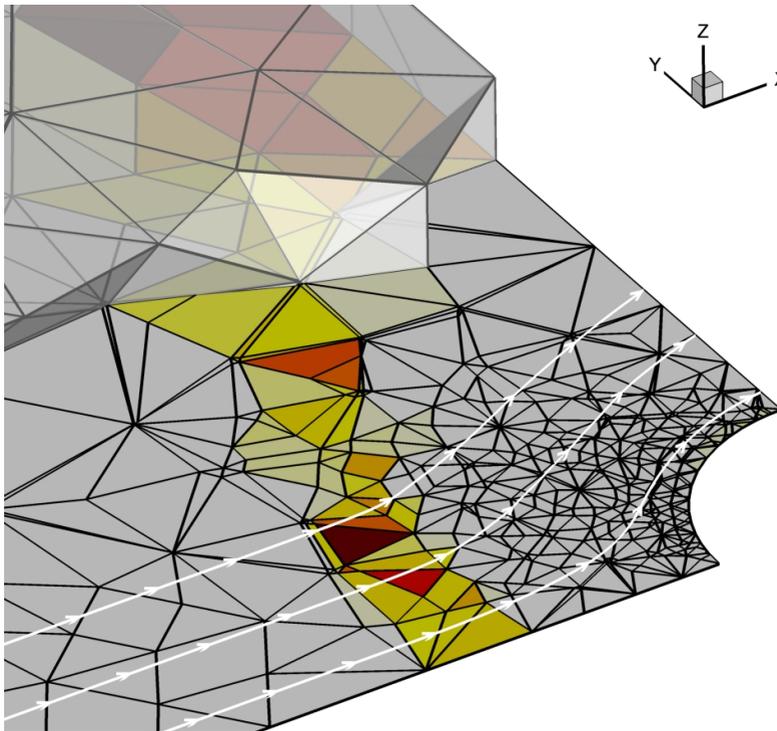


Abbildung 4.21.: Verteilung der künstlichen Viskosität um einen Zylinder (3D)

Die Diskretisierung erfolgt mittels der Euler Gleichungen mit einer zusätzlichen Gradientenbehandlung für die künstlich zugefügte Viskosität. Für hohe Recheneffizienz und zur möglichst guten Auflösung der Stöße wird mit einem

DG Ansatz der Ordnung $\mathcal{O}4$ gerechnet und aufgrund des stationären Charakters des Problems mit einem Runge-Kutta Verfahren der Ordnung $\mathcal{O}1$ in der Zeit integriert. Die theoretisch vorhergesagten Werte von $p/p_\infty = 4.5$ und $M/M_\infty = 0.29$ konnten mit $p/p_\infty \approx 4.55$ und $M/M_\infty \approx 0.32$ recht gut wiedergegeben werden. Oszillationen sind weitgehend gedämpft und die DG Zellen sind in der Lage, auch Stöße innerhalb nur einer Zelle aufzulösen. Abbildung 4.21 zeigt die Verteilung der künstlichen Viskosität, die fast ausschließlich in der Nähe des Stoßes hinzugefügt wurde.

Durch den zugrunde liegenden Finite-Element Ansatz erhöht sich das Auflösungsvermögen der DG Zellen mit der Elementordnung. Eine noch bessere Auflösung lässt sich über feinere Gitter oder besser noch durch lokale Gitteradaption bewerkstelligen (Abbildung 4.22), die hier bei gleicher Stoßauflösung nur 4% der Gitterzellen oder der Rechenzeit benötigt.

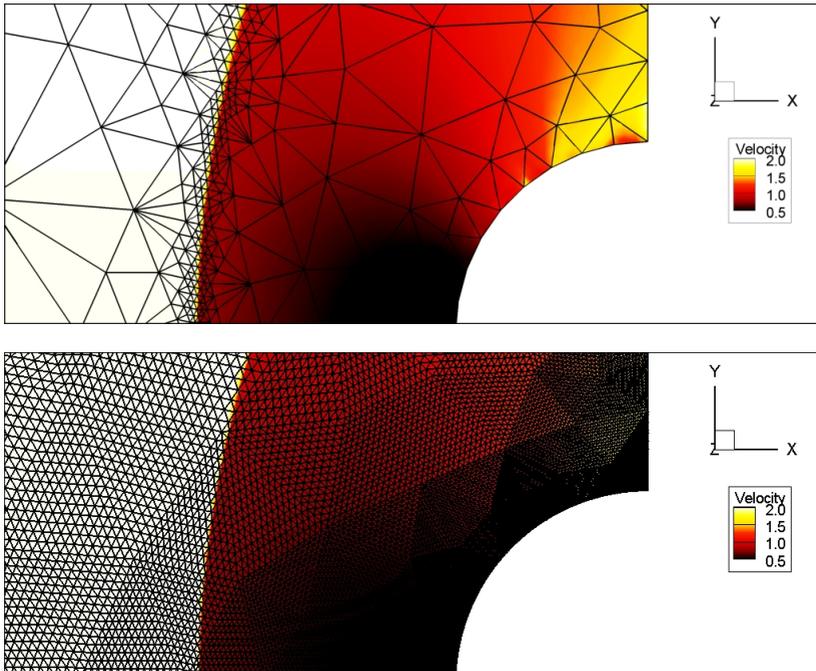


Abbildung 4.22.: Supersonische Strömung bei Mach 2 (2D) (oben: adaptiert - 1230 Zellen, unten: feines Gitter - 33792 Zellen)

4.2.3. Laminare Strömung

4.2.3.1. Grenzschicht an der ebenen Platte

Für die Validierung der viskosen Terme bietet sich die Berechnung der Strömung entlang einer ebenen Platte an, die mit den theoretisch vorhergesagten Geschwindigkeitsprofilen verglichen werden kann. Gerechnet wurde mit einer Reynoldszahl von $Re = 1 \cdot 10^5$ und einer Machzahl von $M_\infty = 0.3$. Für die gezeigten Ergebnisse wurde ein sehr grobes Gitter verwendet, es besaß insgesamt 256 Zellen und nur 8 Zellen in Normalenrichtung.

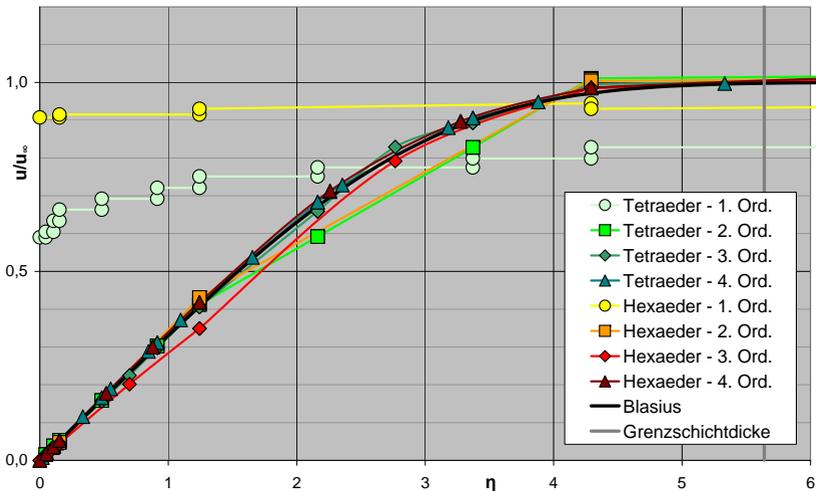


Abbildung 4.23.: Geschwindigkeitsprofil

Man erkennt im Vergleich der Geschwindigkeitsprofile in Abbildung 4.23 dass die Lösung erster Ordnung, die P^0 Lösung, komplett an der Physik vorbeigeht. Im Gegensatz dazu erhält man gute Ergebnisse für Elemente ab P^2 . Bemerkenswert ist auch, dass mit nur 2 Zellen die Grenzschicht korrekt aufgelöst wird.

Das gleiche gilt für die Verteilung des Reibungsbeiwerts (Abbildung 4.24), sie liegt ab den P^2 -Elementen auf der theoretisch vorhergesagten Kurve. Der Plattenanfang bei $x = 0$ und das Plattenende bei $x = 1$ stellen jeweils eine Singularität dar, die durch die Theorie nicht abgedeckt wird.

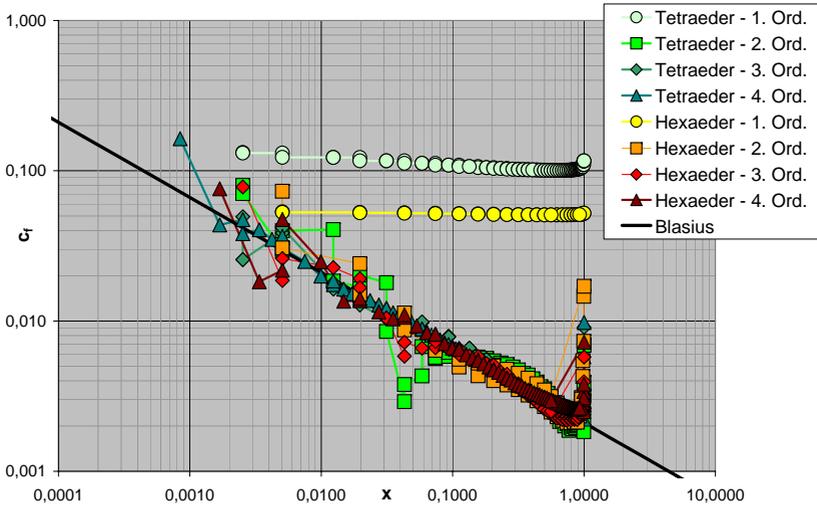


Abbildung 4.24.: Der Reibungsbeiwert

4.2.3.2. Stationäre Kugelumströmung

Das folgende Beispiel zeigt die stationäre laminare Strömung um eine Kugel, die hier stellvertretend für eine ganze Familie von Körpern berechnet wurde. Für sehr geringe Reynoldszahlen existiert eine exakte Lösung, die symmetrische Stokes-Lösung. Bei Reynoldszahlen zwischen $Re = 20$ und $Re = 210$ ergibt sich eine stationäre, abgelöste und rotationssymmetrische Strömung.

Wie in Bild 4.25 zu sehen löst die Strömung von der Kugeloberfläche bei einem Ablöswinkel Θ_s ab und läuft an einem Punkt x_s wieder zusammen. Dabei wird eine stationäre Ablöseblase mit dem Zentrum bei (x_c, y_c) gebildet.

Für die numerischen Untersuchungen in diesem Abschnitt wurden die experimentell häufig untersuchten Reynoldszahlen von $Re = 50, 100, 150$ verwendet. Für eine gitterunabhängige Lösung wurde auf verschiedenen feinen Gittern gerechnet. Die gezeigten Ergebnisse stammen von einem Gitter mit ursprünglich 14000 Zellen, das dann durch Rot-Grün Adaption (Abschnitt 3.10.4) auf insgesamt 55000 Zellen verfeinert wurde (Abbildung 4.26). In Umfangsrichtung der Kugel werden 40 isoparametrische Zellen verwendet, was bei einem annähernd isotropen Gitter bedeutet, dass die Grenzschicht mit nur einer Zelle aufgelöst wird.

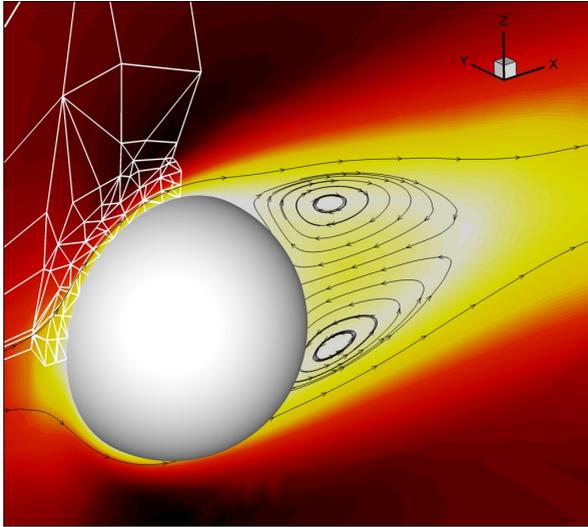


Abbildung 4.25.: Geschwindigkeitsverteilung mit Stomlinien und einem Gittersegment bei $Re=100$

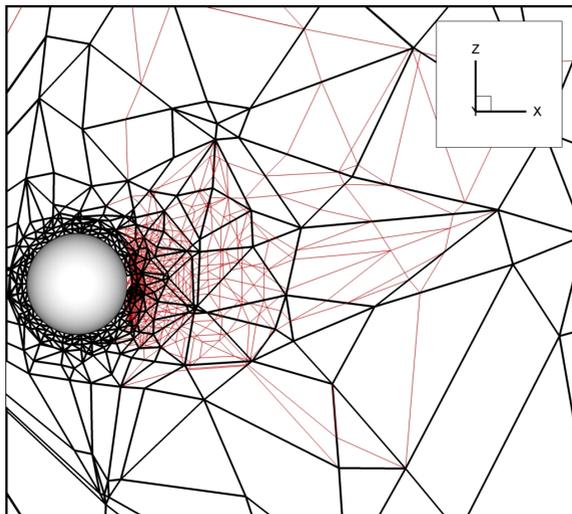


Abbildung 4.26.: Ursprungsgitter (schwarz) und das zweifach verfeinerte Gitter (rot)

Bei den untersuchten Reynoldszahlen bleibt die Strömungstopologie gleich, allerdings verändert sich die Lage und die Länge der Ablöseblase, sowie der Widerstandsbeiwert der Kugel (Abbildung 4.27). Tabelle 4.2 zeigt eine gute Übereinstimmung der hier berechneten Ergebnisse mit den Simulationen von Johnson et. al. [46] sowie den Experimenten von Taneda [89].

	Θ_s	x_s	(x_c, y_c)
Re=50			
SUNWinT $\mathcal{O}4$	$\approx 140^\circ$	0.40	(0.63, 0.19)
Johnson et. al.	139°	0.41	(0.64, 0.21)
Taneda		0.45	
Re=100			
SUNWinT $\mathcal{O}4$	$\approx 128^\circ$	0.88	(0.76, 0.29)
Johnson et. al.	127°	0.88	(0.76, 0.29)
Taneda	126°	0.89	
Re=150			
SUNWinT $\mathcal{O}4$	$\approx 122^\circ$	1,18	(0.81, 0.32)
Johnson et. al.	121°	1,21	(0.83, 0.33)

Tabelle 4.2.: Vergleiche zur stationären Kugelumströmung

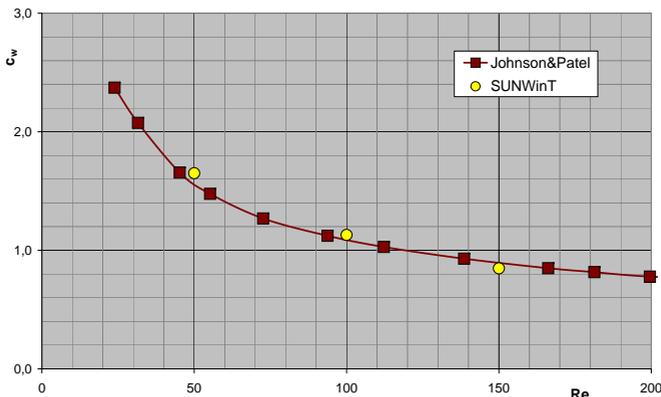


Abbildung 4.27.: Widerstandsbeiwert der laminaren Kugelumströmung

4.2.3.3. Instationäre Kugelumströmungen

Für eine Kugelumströmung mit Reynoldszahlen größer 270 erhält man eine instationäre Lösung mit laminarer Grenzschicht. Im hier gerechneten Fall bei $Re = 300$ erwartet man eine periodische Strömung, die durch Wirbelablösungen dominiert ist, ähnlich der zweidimensionalen Kármánschen Wirbelstrasse. Anfangs liegt die Strömung noch an, löst dann aber durch den positiven Druckgradienten ab und bildet eine Reihe von Ablöseblasen und Wirbeln, die zu einer Ebene symmetrisch sind. In Abbildung 4.28 sind sehr schön die Wirbelstraße als auch die X-Y Symmetrieebene zu erkennen, Abbildung 4.29 zeigt die Wirbelstärkeverteilung für jede viertel Periode und Abbildung 4.30 zeigt zu guter Letzt die zugehörigen Stromlinien.

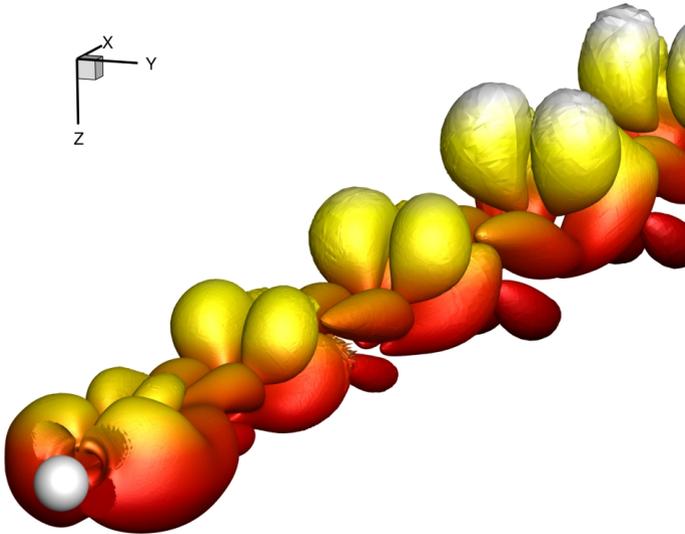


Abbildung 4.28.: Konturoberfläche der spannweiten Geschwindigkeitsverteilung

Die Kugel liegt im Zentrum des Rechengebiets, das einen Durchmesser von 80 Kugelradien beziehungsweise eine Länge von 140 Kugelradien hat. Als Randbedingungen werden überall fest vorgeschriebene Fernfeldrandbedingungen verwendet, außer am Ausströmrand, hier wird nach einer kleinen Dämpfungszone mit charakteristischen Variablen gerechnet.

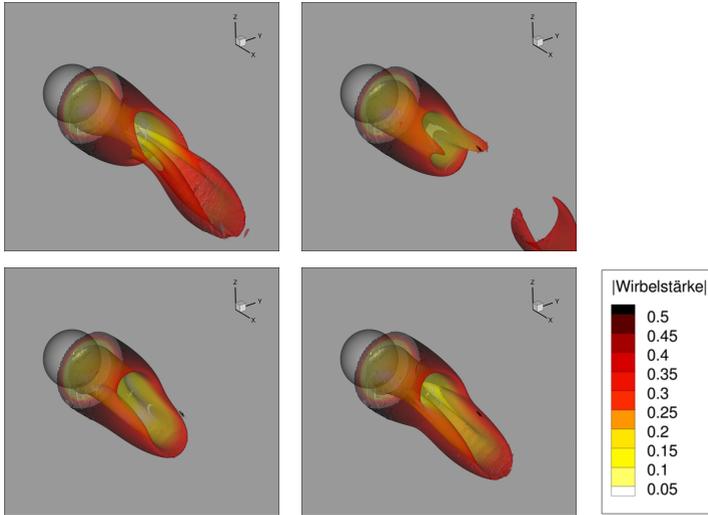


Abbildung 4.29.: Konturoberfläche der Wirbelstärke, in Farbe die Geschwindigkeit, für eine Periode

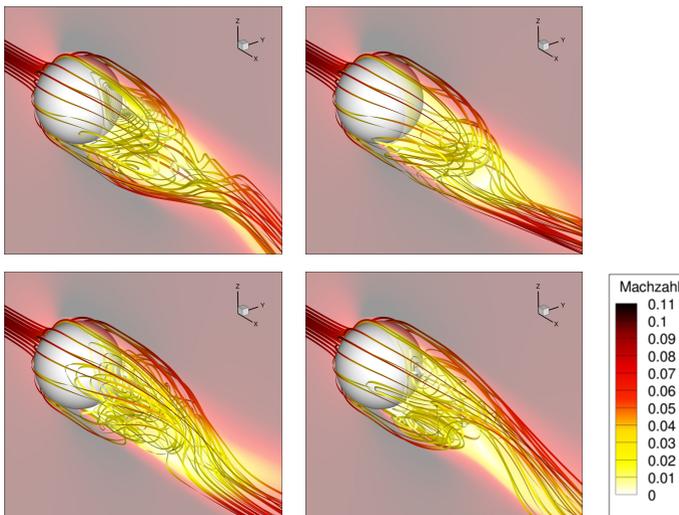


Abbildung 4.30.: Stromlinienbilder für eine Periode

Das Diskretisierungsgitter wurde mit einem der üblichen Gittergeneratoren für unstrukturierte Gitter innerhalb kürzester Zeit vernetzt. Das lag zum einen an der recht einfachen Geometrie, zum anderen aber an der Tatsache, dass unstrukturierte Gitter verwendet werden, bei denen sich die Vernetzung deutlich einfacher als mit strukturierten Gittern gestaltet, insbesondere für komplexe Geometrien. Dies stellt für eine spätere ingenieurmäßige Verwendung ein enormes Potential dar. Ein weiterer großer Vorteil von unstrukturierten Gitter ist ihre Adaptierbarkeit, so war das Gitter in seiner Ursprungsform sehr grob und enthielt nur $\approx 1.5 \cdot 10^4$ Zellen. Während des Lösen vergrößerte sich dann durch mehrmaliges Adaptieren die Zellenzahl auf $\approx 6.6 \cdot 10^5$ Zellen, Abbildung 4.31. Nach der Detektion und Markierung mit dem Persson-Indikator wurde ausschließlich mit der Rot-Grün Verfeinerung adaptiert.

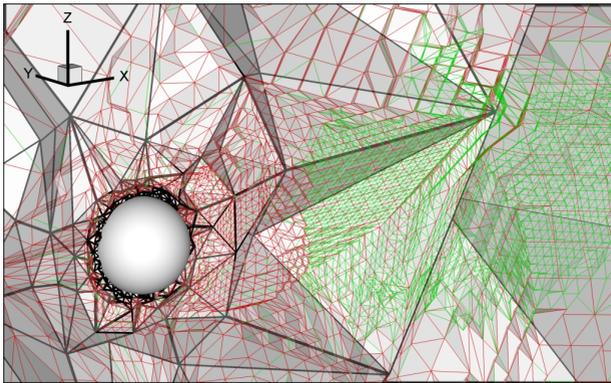


Abbildung 4.31.: Ursprungsgitter (schwarz) mit Adaptionsebenen 3 und 5

Interessanterweise entsteht durch die periodische Wirbelablösung auch ein geringer Auftrieb, die Mittelwerte von c_a und c_w mit 0.063 beziehungsweise 0.665 zeigen eine gute Übereinstimmung verglichen mit den Daten von Johnson et. al. [46] von $c_a = 0.069$ und $c_w = 0.656$. Aus den Frequenzen dieser Größen konnte eine, auf der Anströmgeschwindigkeit und dem Kugeldurchmesser D basierende, Strouhalzahl von $St = \frac{f \cdot D}{U_\infty} = 0.139$ bestimmt werden. Diese stimmt auch recht genau mit den Simulationen von Johnson et. al. [46] mit $St = 0.137$ überein und liegt in der Nähe der Experimente von Sakamoto et. al. [78] mit $St = 0.15 - 0.165$.

4.2.4. Turbulente Strömung

4.2.4.1. Grenzschicht an der ebenen Platte

Wie bei der laminaren Strömung eignet sich auch für die Validierung einer turbulenten Strömung die Berechnung der Umströmung längs einer ebenen Platte, hier bei einer Reynoldszahl von $Re = 3 \cdot 10^7$ und einer Machzahl von $M_\infty = 0.3$. Dabei wurden verschiedene Gitter mit unterschiedlichen Größen verwendet, die gezeigten Ergebnisse stammen wie im laminaren Fall auch von einem, für die DG-Verfahren typischen, sehr groben Gitter, mit nur 32 Zellen in Strömungsrichtung und 8 Zellen in Normalenrichtung.

Es wurde eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den theoretisch vorhergesagten Kurven des Reibungsbeiwerts (Abbildung 4.32) für eine Elementordnung ab P^2 gefunden. Der Plattenanfang bei $x = 0$ und das Plattenende bei $x = 1$ sind wieder analytisch nicht zugängliche Punkte.

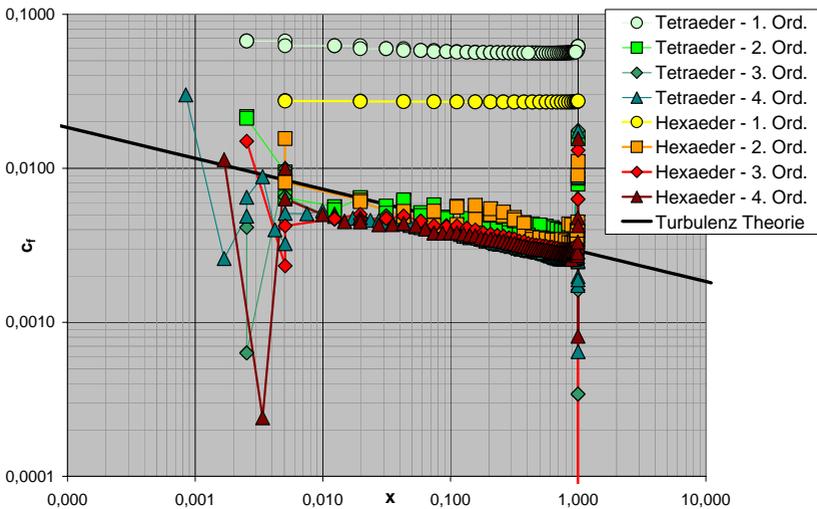


Abbildung 4.32.: Der Reibungsbeiwert, Spalart-Allmaras Turbulenzmodell

Auch für die Geschwindigkeitsverläufe des turbulenten Wandgesetzes [79] wurde, ab einer Elementordnung von P^2 , eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Numerik (Abbildung 4.33) gefunden.

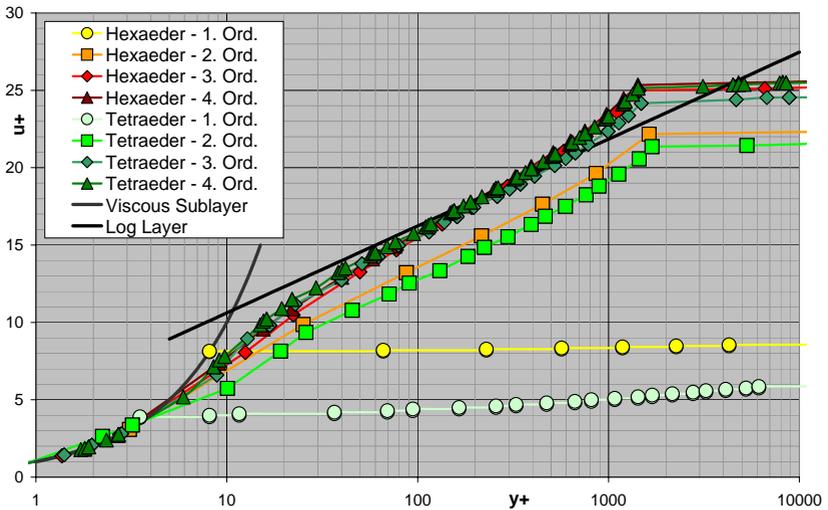
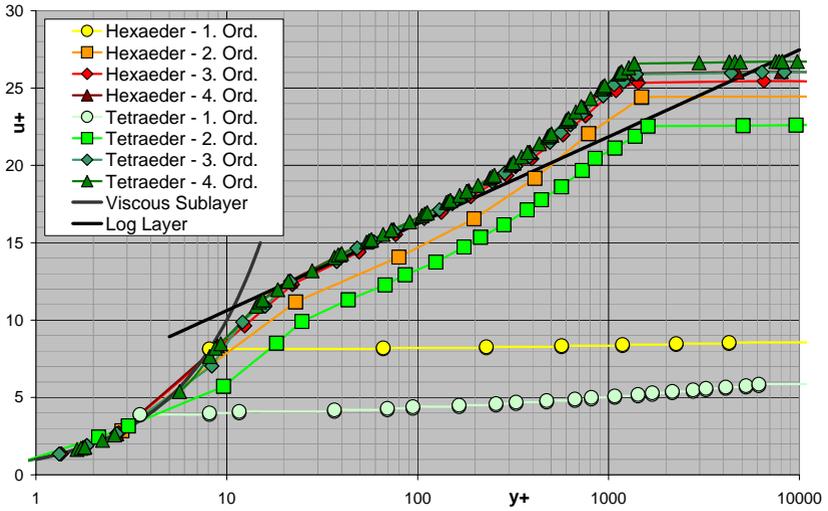


Abbildung 4.33.: Das turbulente Wandgesetz, Spalart-Allmaras Turbulenzmodell (oben), $k-\omega$ Turbulenzmodell (unten)

Die dritte Ordnung der Hexaeder beispielsweise arbeitet mit zehn Freiheitsgraden pro Zelle, was vergleichbar mit einem 1D-Element in Normalenrichtung mit 3 Freiheitsgraden ist. Das bedeutet, dass unser Gitter mit 8 Zellen in Normalenrichtung genau 24 Freiheitsgrade in dieser Richtung besitzt. Bei der Berechnung der Tetraederergebnisse wurde jede Hexaederzelle in fünf (Sub-) Tetraeder aufgeteilt, was natürlich bedeutet, dass im ganzen Tetraedernetz nun fünf mal so viele Freiheitsgrade vorhanden sind.

Zur Stabilisierung der Turbulenzgleichungen können aufgrund der einfachen Strömungsstruktur sowohl die "harte" Limitierung nach Landmann [53] als auch die Limitierung mittels künstlicher turbulenter Viskosität nach Nguyen et al. [70] verwendet werden.

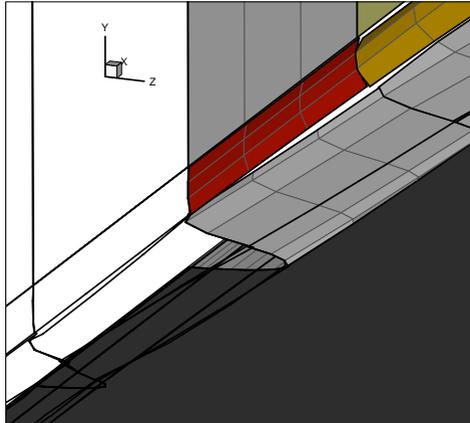


Abbildung 4.34.: Limitierung der Turbulenzgrößen mittels künstlicher Viskosität

In Abbildung 4.34 ist exemplarisch für das Spalart-Allmaras Turbulenzmodell der Verlauf der Transportvariablen $\tilde{\nu}$ zu sehen. Sie zeigt, auf der z-Achse aufgetragen, den typischen bauchigen Verlauf, der bei $Y = 0$ mit $\tilde{\nu} = 0$ beginnt, dann ansteigt und am Grenzschichttrand auf den Fernfeldwert zurückgehen soll. Allerdings ist hier die Auflösung nicht ausreichend, auch erkennbar an den Sprüngen zwischen den DG-Zellen. Damit $\tilde{\nu}$ nicht negativ wird oder zu oszillieren beginnt, wird an den vom Indikator detektierten Stellen künstliche Viskosität (rot) in die Turbulenzgleichung hinzugefügt, die eine dämpfende Wirkung hat.

4.2.4.2. Die FREQUENZ Konfiguration

Als guter Testfall bietet sich die eingangs schon berechnete FREQUENZ Konfiguration an. Es werden wiederum zwei Konfigurationen berechnet, zum einen die Referenzgeometrie ohne Hochauftriebshilfe und zum anderen die Konfiguration mit um 90° ausgefahrenen Mini-TED. Als Referenzwerte dienen die FLOWer Rechnung bei einem Anstellwinkel von 7° und das Referenzexperiment bei einem korrigierten Anstellwinkel von 14° . Aufgrund der hohen Ordnung und des unstrukturierten Verfahrens wird ein neues und deutlich gröberes Gitter verwendet, Abbildung 4.35.

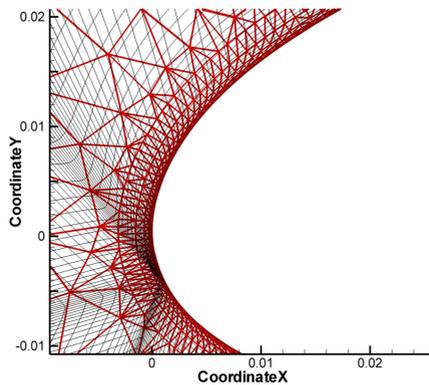


Abbildung 4.35.: Nasenbereich des Rechengitters
(FLOWer - Schwarz, SUNWinT - Rot)

Die FLOWer Rechnung, mit einer Genauigkeit von zweiter Ordnung, läuft auf einem Gitter mit $2.3 \cdot 10^4$ Zellen, was zwar exakt $2.3 \cdot 10^4$ Freiheitsgraden entspricht, durch die Verfahrensordnung allerdings vergleichbar ist mit einem DG Verfahren mit $6.9 \cdot 10^4$ Freiheitsgraden. Die Discontinuous Galerkin Rechnung auf ihrem groben Gitter mit $7 \cdot 10^3$ Zellen hat bei einer Ordnung von vier $7.0 \cdot 10^4$ Freiheitsgrade, das heißt die Zahl der Freiheitsgrade ist weitgehend identisch.

Weitgehend identisch ist auch das Ergebnis. Die Druckverteilungen stimmen recht gut überein, im Fall mit dem ausgefahrenen Mini-TED ist die Saugspitze bei der SUNWinT Discontinuous Galerkin Simulation etwas stärker ausgeprägt. Gerechnet wurde wiederum vollturbulent, im FLOWer-Fall mit dem $k - \omega$ Modell, bei SUNWinT mit dem bewährten Spalart-Allmaras Modell.

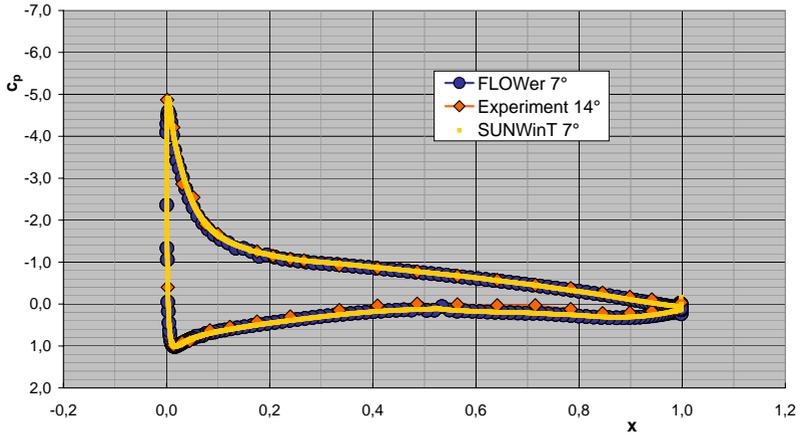


Abbildung 4.36.: Druckbeiwert des FREQUENZ-Profiles

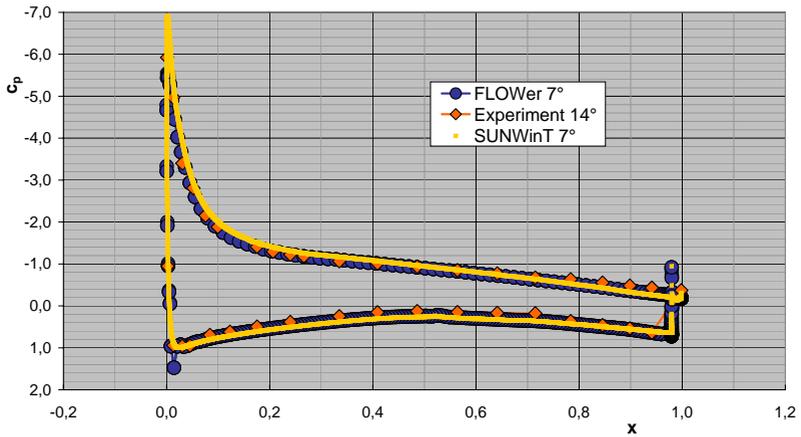


Abbildung 4.37.: Druckbeiwert des FREQUENZ-Profiles mit MiniTED

4.2.5. Detached Eddy Simulation

Eine gute Möglichkeit, die Vorteile und Einschränkungen von Detached Eddy Simulationen zu untersuchen, ist die Umströmung einer Kugel [57]. Sie gehört zur Klasse der abgelösten Strömungen, deren Ablösung nicht durch Kanten der Geometrie festgelegt ist, sondern einzig und allein von externen Effekten wie zum Beispiel druckinduzierter Ablösung. Es ist nicht möglich, diese Strömung durch einen klassischen URANS-Ansatz zu berechnen, da keine spektrale Lücke zwischen den modellierten Frequenzen des Turbulenzmodells und den transienten Frequenzen der Simulation besteht. Aus diesem Grund handelt es sich hier um einen ausgezeichneten Test für Detached Eddy Simulationen. Die Kugelumströmung ist ebenso wie die Strömung um Zylinder bekannt für ihren "Einbruch" im Widerstandsbeiwert bei höheren Reynoldszahlen, der auf die unterschiedliche Lage des Ablösepunktes bei laminaren und turbulenten Grenzschichten zurückzuführen ist.

4.2.5.1. Kugelumströmung mit laminarer Ablösung

Bei einer unterkritischen Reynoldszahl von $Re = 2 \cdot 10^4$ bildet sich eine laminare Grenzschicht mit laminarer Ablösung (Abbildung 4.38).

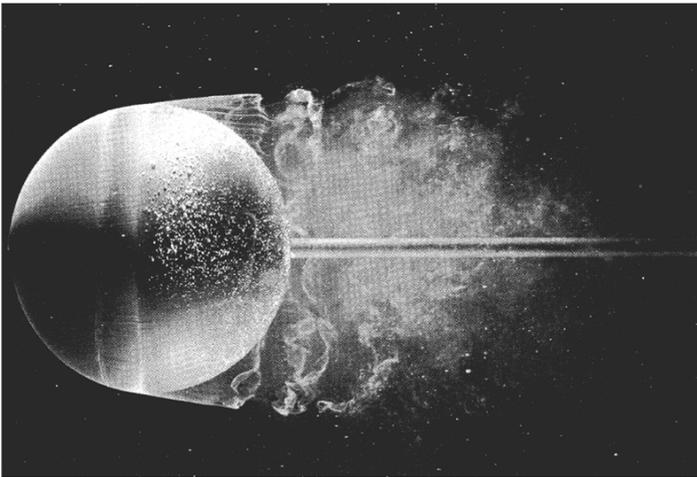


Abbildung 4.38.: Instationäre Strömung an einer Kugel bei $Re = 15000$ [Quelle: ONERA, Werle 1980]

Die Schwierigkeit, das Turbulenzmodell in laminaren Bereichen abzuschalten, wird durch den so genannten "ungetrippten Ansatz" nach Travin et al. [92] gelöst, somit kann die Transition im Nachlauf stattfinden. Die Rechnungen wurden mit verschiedenen unstrukturierten Gittern durchgeführt, die gezeigten Ergebnisse stammen von einem Gitter mit $\approx 1 \cdot 10^6$ Zellen und einer räumlichen Ordnung von vier, was insgesamt $\approx 20 \cdot 10^6$ Freiheitsgraden im ganzen Rechengebiet entspricht. Als Randbedingungen werden aufgrund des hohen Fernfeldabstands Freistrombedingungen gewählt. Aus diesem Grund und auch auf Grund des groben Gitters am Ausströmrand kann auf eine Dämpfungszone verzichtet werden.

In Abbildung 4.39 ist die Geschwindigkeitsverteilung aufgetragen. Die Voraussage des Ablösepunktes durch die Simulation, definitionsgemäß dem Winkel zwischen dem vorderen Staupunkt und der Ablöselinie, von $\Theta \approx 81^\circ$ stimmt recht gut mit dem Experiment von Achenbach ($\Theta = 82.5^\circ$) [1] überein.

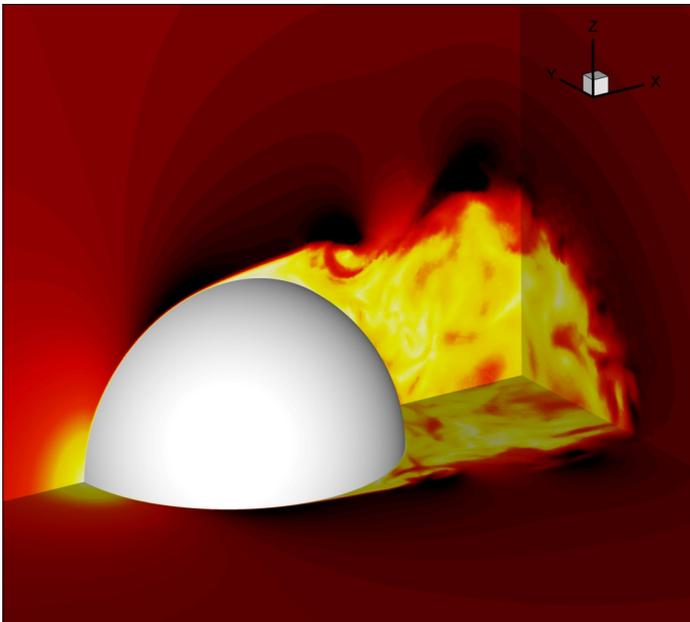


Abbildung 4.39.: Geschwindigkeitsverteilung

In Bild 4.40 ist ein Vergleich der Druckverteilungen und der Verlauf des Reibungsbeiwerts, der vorliegenden Simulation, den Simulationen von Constantinescu et al. [30] bei $Re = 1 \cdot 10^4$ und den Experimenten von Achenbach [1] bei einer Reynoldszahl von $1.62 \cdot 10^4$ zu sehen. Die Vorhersage dieser unterkritischen Strömung zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Referenzen, der Wert von c_f wird etwas überschätzt, was an der geringfügig anderen Reynoldszahl liegen mag.

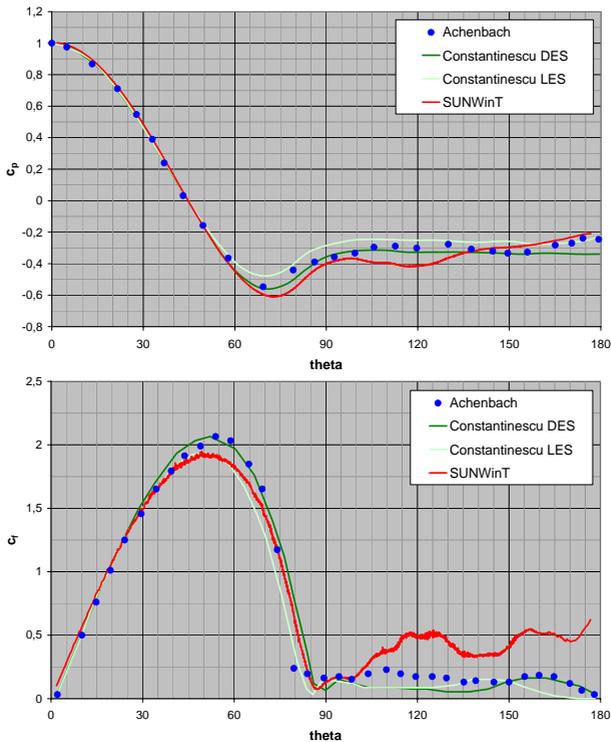


Abbildung 4.40.: Druckverteilung und Reibungsbeiwert

Um die Turbulenzgleichungen zu stabilisieren wird das in Abschnitt 3.4.2 vorgestellte Verfahren der künstlichen numerischen Dissipation verwendet. Die Menge der künstlichen Viskosität ist nicht unerheblich, sie übersteigt die der physikalischen Viskosität teils deutlich, allerdings wird sie hier haupt-

sächlich am Rand des Nachlaufs eingebracht (Abbildung 4.41), um die Wirbelviskosität des Spalart-Allmaras Turbulenzmodells, aufgetragen auf der Z-Achse, glatt auf den Freistromwert zu reduzieren.

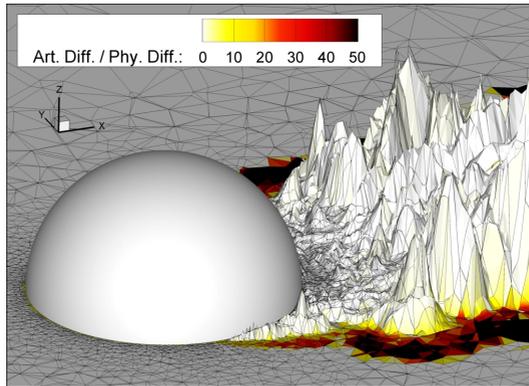


Abbildung 4.41.: Künstliche Dissipation bei $Re = 2 \cdot 10^4$ und P^3 -Elementen

In Abbildung 4.42 ist das räumliche Energiespektrum $E(k)$ in einem Punkt im Nachlauf bei $r = 0.75 \cdot D$ und $\Theta = 180^\circ$ zu sehen. Auch hier ist eine recht gute Übereinstimmung des Spektrums mit der Theorie von Kolmogorov [49, 50] zu erkennen.

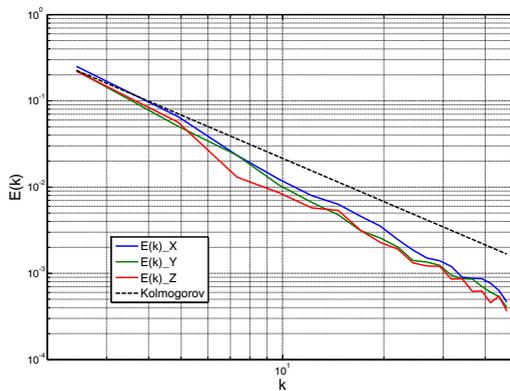


Abbildung 4.42.: Räumliches Spektrum der Geschwindigkeitsfluktuationen

4.2.5.2. Turbulente Strömung an einer Kugel

Der nächste Testfall entspricht der gleichen Kugelkonfiguration, allerdings bei einer deutlich höheren überkritischen Reynoldszahl, bei $Re = 1.14 \cdot 10^6$. Hier bildet sich nach kurzer laminarer Anlaufstrecke eine vollturbulente Grenzschicht aus, die dem Druckgradienten länger standhalten kann und deutlich später ablöst (Abbildung 4.43). Die Dimensionen der Rechengitters entsprechen dem der oben vorgestellten Konfiguration, auch die Zellenzahl von $\approx 1 \cdot 10^6$ ist ähnlich, allerdings entfallen hier sehr viel mehr Zellen auf die außerordentlich dünne Grenzschicht.

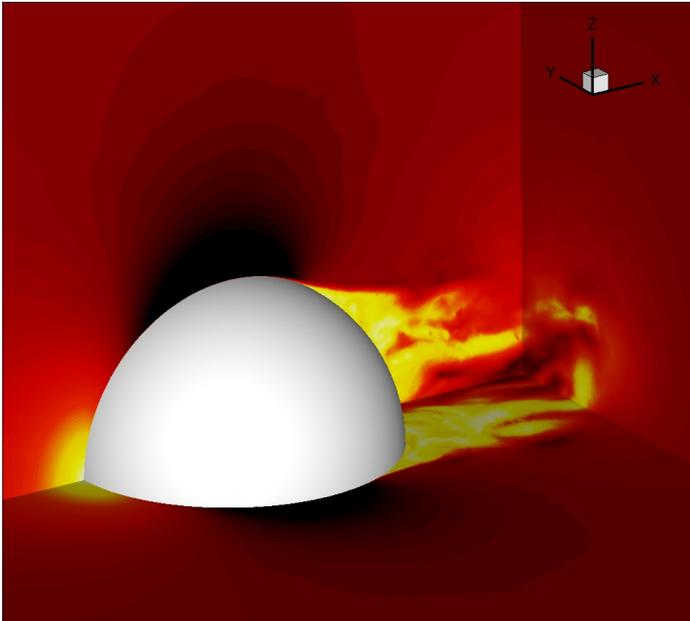


Abbildung 4.43.: Geschwindigkeitsverteilung

Auch hier stimmt die Voraussage des Ablösepunktes durch die Simulation von $\Theta \approx 115^\circ$ recht gut mit dem Experiment von Achenbach ($\Theta = 118^\circ$) [1] überein. Bild 4.44 zeigt die Druckverteilungen und den Verlauf des Reibungswerts der vorliegenden Simulation, den Simulationen von Constantinescu et al. [29] bei $Re = 1.1 \cdot 10^6$ und wiederum den Experimenten von Achenbach

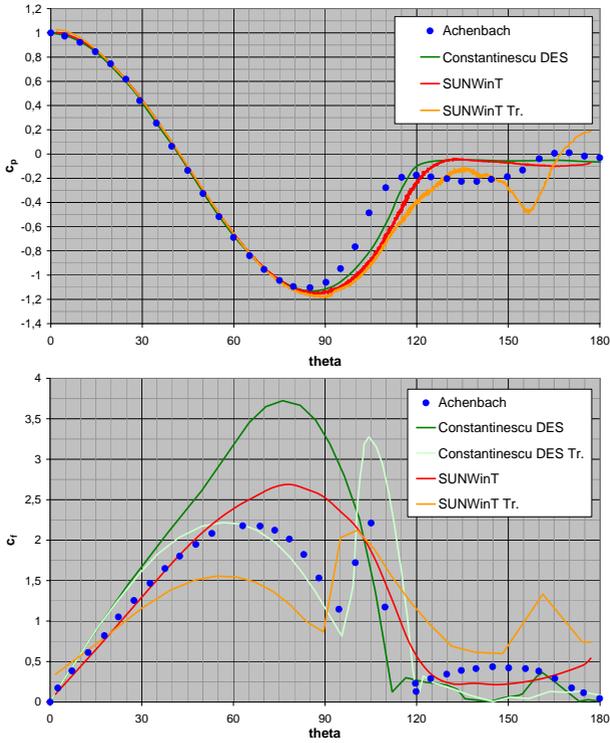


Abbildung 4.44.: Druckverteilung und Reibungsbeiwert

[1] diesmal bei $Re = 1.14 \cdot 10^6$. Die Übereinstimmung der Druckbeiwerte ist akzeptabel, bei den Reibungsbeiwerten fällt allerdings eine fundamentale Diskrepanz zu den Experimenten von Achenbach auf, da der charakteristische Peak bei einem Winkel von $\Theta \approx 100^\circ$ fehlt. Dies liegt an der vollturbulenten Simulation, bei der nicht, wie im Experiment, bei einem Winkel von $\approx 90^\circ$ Transition stattfindet. Durch Ausschalten der entsprechenden Quellterme in den Turbulenzgleichungen kann die Transition allerdings auch numerisch erfasst werden, was dann zu einer laminaren Anlaufstrecke bis $\Theta = 90^\circ$ mit anschließender turbulenter Grenzschicht führt und einen sprunghaften Anstieg des Reibungsbeiwerts zur Folge hat (SUNWinT Tr. und Constantinescu DES Tr.).

In Abbildung 4.45 ist auf der $x - y$ Ebene das turbulente Längenmaß zu

sehen. In der Nähe des Körpers ist es außerordentlich gering und wird mit zunehmender Entfernung größer. Bei der DES ist in der URANS Grenzschicht das entscheidende Längenmaß der Wandabstand, weiter außen bei der LES allerdings die Filterweite. Auf der $x - z$ Ebene ist das für diese Simulation entscheidende Maß aufgetragen, im roten Bereich wird URANS gerechnet und weiter außen dann LES. Die $y - z$ Ebene zeigt einen Teil des Gitters.

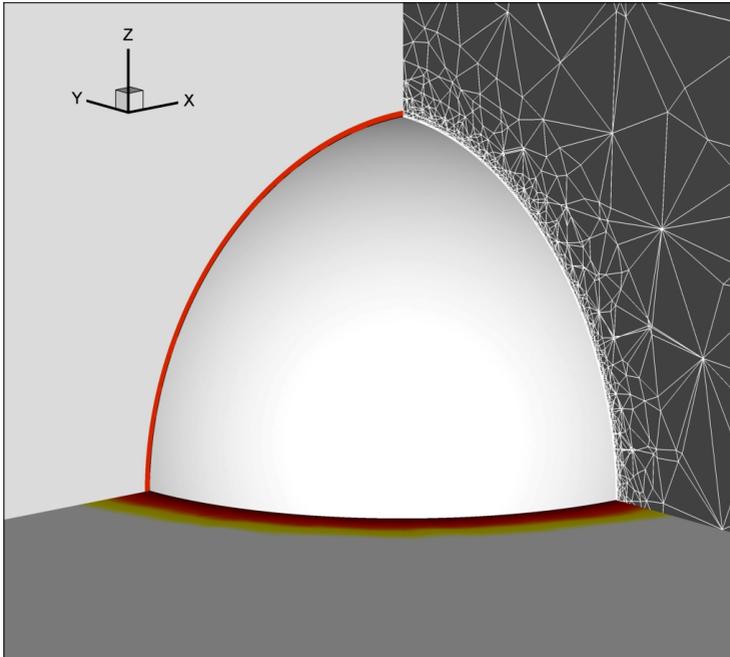


Abbildung 4.45.: Turbulentes Längenmaß

4.2.6. Parallele Leistung und Speedup

Strömungsmechanische Probleme mit sehr hoher räumlicher als auch zeitlicher Auflösung wie die oben gezeigten können nicht auf einem Prozessor berechnet werden, sondern erfordern Höchstleistungsrechner.

Ein Grund, der für die DG-Diskretisierung spricht, ist der nahezu lineare Geschwindigkeitszuwachs bei der Verwendung mehrerer Prozessoren auf un-

strukturierten Gittern. Dies kann nur schwer mit reinen Finite-Volumen Verfahren höherer Ordnung erreicht werden, da hier immer eine Rekonstruktion der Zustandsgrößen berechnet wird, die von Volumendaten der Nachbarelemente abhängt was viel Datenaustausch bedeutet.

Um diese Paralleleffizienz zu untersuchen wurde mit einer realistischen Konfiguration, einer der oben gezeigten Kugelgeometrien, und einem Tetraedernetz gerechnet, das in bis zu 128 Zonen geteilt war [55]. Als Rechner diente ein PC-Cluster aus Dual-Xeon Prozessoren mit einem Infiniband-Netzwerk.

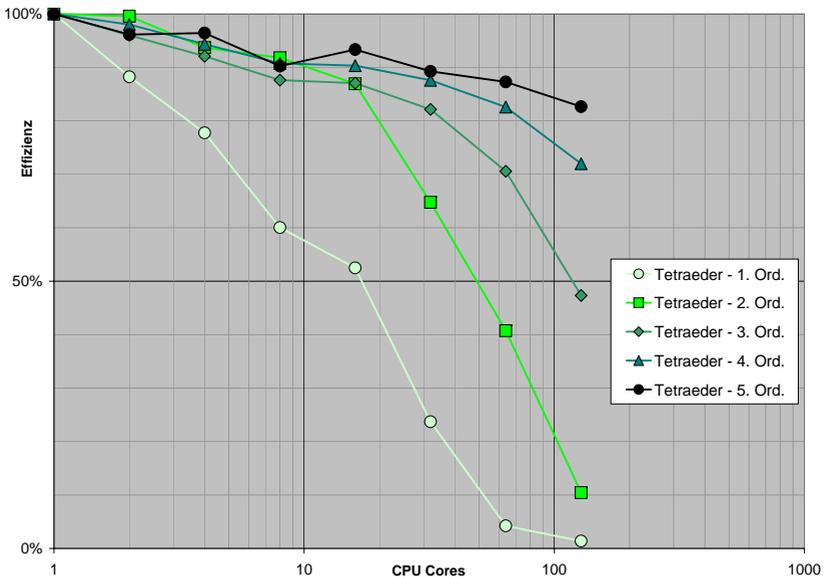


Abbildung 4.46.: Recheneffizienz abhängig von der Ordnung des Verfahrens

In Abbildung 4.46 ist zu sehen, dass der Speedup von der räumlichen Ordnung des Discontinuous Galerkin Verfahrens abhängig ist. Wenn wir beispielsweise ein Verfahren fünfter Ordnung mit 35 Freiheitsgraden pro Zelle verwenden, dann wird verhältnismäßig viel in den Zellen gerechnet, mit nur sehr geringem Austausch zu den Nachbarzellen und damit zu den Zonenrändern. Im Gegensatz dazu wird bei einem Verfahren erster Ordnung, das einem Finite-Volumen Verfahren entspricht, kaum etwas in den Zellen

gerechnet, sondern nur Riemann-Probleme an den Rändern gelöst, für die sehr viele Daten ausgetauscht werden müssen und die Effizienz dann gegen Null strebt. Natürlich ist der Geschwindigkeitszuwachs auch abhängig von der Zonengröße, das heißt von der Anzahl der pro Prozessor abgearbeiteten Zellen. Je größer die Zonen werden, desto besser ist das Verhältnis zwischen Oberfläche und Volumen, das heißt, desto mehr wird lokal gerechnet und desto weniger Daten müssen ausgetauscht werden (Abbildung 4.47).

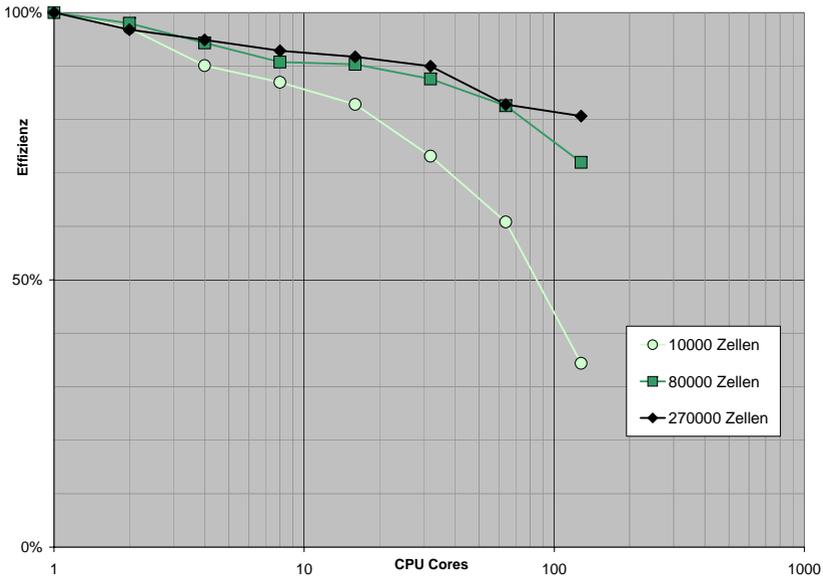


Abbildung 4.47.: Recheneffizienz abhängig von der Zonengröße

Berücksichtigt man nun all diese Erkenntnisse so ist man auch auf massiv parallelen System in der Lage eine ausgezeichnete Performance zu erzielen [56]. Gerechnet wird wiederum ein Tetraedergitter mit der bekannten DES Kugelkonfiguration, diesmal bei vierter Ordnung mit 20 Freiheitsgraden pro Zelle. Das Gitter beinhaltet $1 \cdot 10^6$ Zellen, die von 32 auf bis zu 4096 Zonen verteilt werden. Das bedeutet hier, dass pro Zone zwischen $5 \cdot 10^3$ und $6 \cdot 10^5$ Freiheitsgrade berechnet werden.

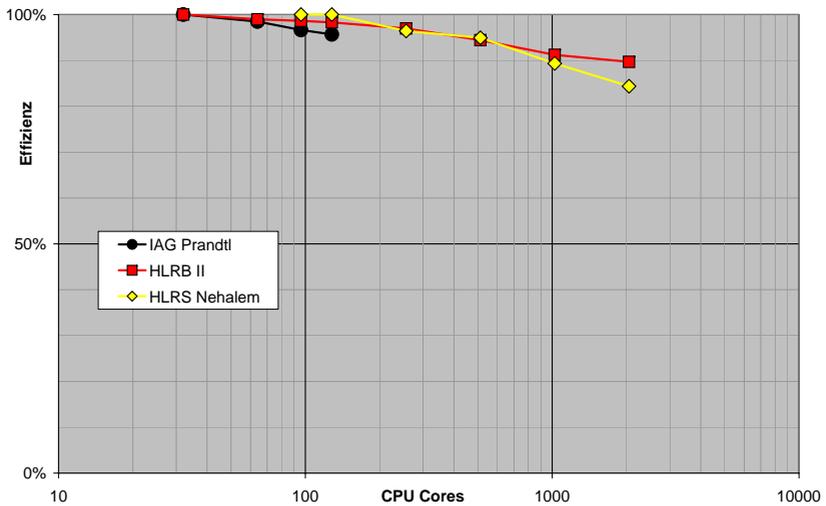
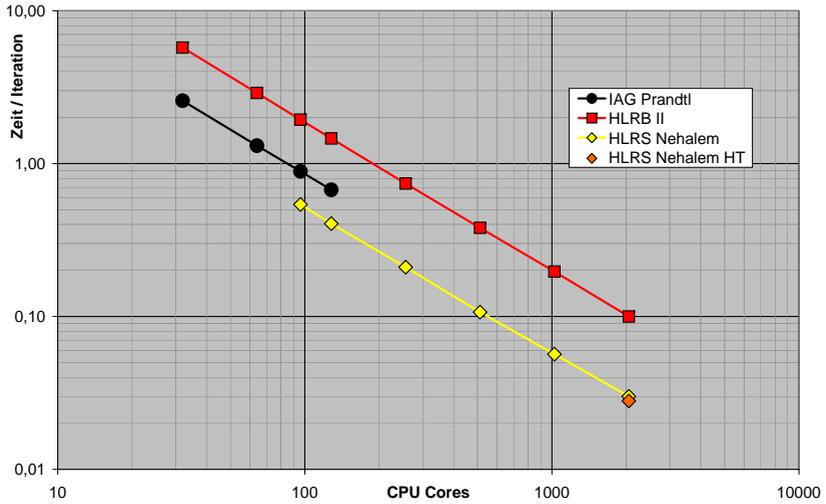


Abbildung 4.48.: Recheneffizienz auf massiv parallelen Systemen

Die gezeigten Ergebnisse (Abbildung 4.48) wurden auf drei PC-Clustern gerechnet, zum einem dem IAG-Cluster Prandtl, bestehend aus 72 Intel-Xeon 5160 Prozessoren, dem Hochleistungszentrum Bayern (HLRB II) bestehend aus 4864 Intel Itanium2 Prozessoren und schlussendlich auf dem Nehalem-Cluster des Rechenzentrums Stuttgart mit 1400 Intel-Xeon X5560 Prozessoren. Der Speedup auf den Rechnern ist bis zur Vollauslastung noch weitgehend linear, die Parallel-Effizienz des Verfahrens liegt auch bei 2048 Zonen noch bei $\approx 85\%$.

Rechner	IAG Prandtl	HLRB SGI Altix	HLRS Nehalem	HLRS Nehalem HT
Compiler Version	GNU/GCC 4.1.0	Intel 10.1	Intel 11.0	Intel 11.0
Peakperformance (GFlops/Core)	12,0	6,4	11,2	11,2
Zonen	128	2048	2048	4096
Cores	128	2048	2048	2048
GFlops/Core	1,2	0,3	1,9	2,7
Leistung/Core	10%	5%	17%	24%
GFlops - Total	150	614	3810	5530

Tabelle 4.3.: Leistung

Die maximale Leistung auf dem HLRS Nehalem Cluster pro Prozessorkern lag mit ungefähr 17% der Peakperformance von 11,2 GFlops auf einem für Scalarprozessoren erfreulich hohen Level, Tabelle 4.3. Damit konnte eine Maximalleistung von bis zu 3,8 TFlops mit 512 Prozessoren oder 2048 Kernen erzielt werden. Wird zusätzlich die Intel Hyper-Threading (HT) Technologie verwendet und werden pro Prozessorkern zwei Prozesse gestartet, kann die Leistung noch weiter, auf 24% der Peakperformance oder insgesamt 5,5 TFlops, gesteigert werden.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein dreidimensional arbeitender DG-Strömungslöser für DES-Simulationen entwickelt und anhand einiger im gesamten Reynoldszahlspektrum angesiedelter Testfälle validiert. Dabei konnte das große Potential dieser Methode demonstriert werden und hoch genaue Simulationen mit ausgezeichneter Parallel-Effizienz durchgeführt werden.

Hierfür wurde zuerst der Strömungslöser für realistische und allgemeine Probleme auf drei Dimensionen erweitert. Die danach durchgeführten obligatorischen Konvergenztests zeigen einen deutlichen Effizienzgewinn in Bereichen hoher Genauigkeit, was auch den Hauptgrund für den Einsatz von Verfahren höherer Ordnung darstellt. Durch geschickte Parallelisierung konnte die Netzwerklatenz überdeckt werden, was die Discontinuous Galerkin Verfahren für massiv parallele Hochleistungscomputer besonders interessant macht. Hierbei konnten beeindruckende Ergebnisse mit hohen FLOP-Raten erzielt werden.

Darüber hinaus wurden im Bereich der räumlichen Diskretisierung die Randbedingungen entscheidend verbessert. Um realistische Geometrien mit den, aufgrund der höheren Effizienz erforderlichen, groben Gittern berechnen zu können, wurden gekrümmte isoparametrische Elemente entwickelt, die eine außerordentliche Verbesserung für realistische Geometrien darstellen. Auf der anderen Seite, den Fernfeldrändern, konnten charakteristische Variable mit den zugehörigen charakteristischen Randbedingungen implementiert werden, die beispielsweise akustische Wellen, die durch die sehr guten Transporteigenschaften des Verfahrens bis zum Rand transportiert werden, ungehindert aus dem Rechengebiet strömen lassen.

Da zu Beginn der Rechnung der Strömungscharakter meist nicht bekannt ist, erwies sich die Möglichkeit, das Gitter zu adaptieren als ungemein hilfreich. Aus Gründen einer klaren, übersichtlichen und gekapselten Codestruktur wurde kein Löser verwendet, der alle Funktionalität für Pre- und Postprocessing selbst beinhaltet, sondern eine Toolkette. Dabei wurden verschiedene

Methoden zur Gitteradaption untersucht, die alle innerhalb dieser Kette einsetzbar sind, von einfachen Verfahren wie der Rot-Grün Adaption bis hin zur komplett neuen Gittergenerierung, die sich dann auch als am leistungsfähigsten, aber auch als am komplexesten, herausgestellt hat.

Der nächste wichtige Aspekt dieser Arbeit ist die Erweiterung und Verbesserung der zugrunde liegenden physikalischen Modellierung. Die Turbulenzmodelle wurden für dreidimensionale Strömungen erweitert. Aufgrund der hohen Ordnung und der recht groben Gitter ist eine Stabilisierung der Turbulenzgleichungen nötig, die anfänglich analytisch erfolgte und jetzt basierend auf einer hinzugefügten künstlichen Viskosität erfolgt und ausgezeichnet funktioniert. Ein schöner Nebeneffekt dieser künstlichen Viskosität ist die Möglichkeit, bei Anwendung auf die Euler oder Navier-Stokes Gleichungen, auch Oszillationen, beispielsweise hervorgerufen durch Verdichtungsstöße, stabilisieren zu können. Deshalb ist jetzt auch die Berechnung trans- oder supersonischer Strömungen möglich.

Die letzte und wichtigste Erweiterung war die Überführung der Turbulenzmodelle in ein Large Eddy Subgridscale Modell, womit es nun mittels der gerade vorgestellten Anzahl von Innovationen und Verbesserungen nun erstmalig möglich war, mit einem unstrukturierten Löser hoher Ordnung und Genauigkeit eine Detached Eddy Simulation durchzuführen und damit in das industriell bedeutsame Feld der abgelösten Strömungen hinter stumpfen Körpern vorzudringen.

Nachdem nun in der vorliegenden Arbeit deutliche Verbesserungen in der räumlichen Diskretisierung, sowie in der physikalischen Modellierung vorgestellt wurden, muss das Augenmerk in der Zukunft zum einen darauf gerichtet sein, komplexe Geometrien und Komplettkonfigurationen zu berechnen und zum anderen geeignete Konvergenzbeschleuniger zu implementieren.

Das Fernziel des hier vorgestellten Löser besteht in der Berechnung von Rotorsystemen, seien es Standard Hubschrauberkonfigurationen mit nur einem Rotor oder sogenannte "Open Rotor" Antriebe mit zwei gegenläufigen Propellern hintereinander, mit bewegten Gittern, der so genannten Chimera Technik [35]. Dabei ist die hohe Genauigkeit und der sehr gute Wirbelerhalt der numerischen Methode von entscheidender Bedeutung, was die DG-Verfahren hier besonders interessant macht.

Im Bereich der Konvergenzbeschleunigung ist es in erster Linie notwen-

dig, das sehr restriktive Zeitschrittlimit der DG-Verfahren zu überwinden. Dazu sollte die implizite Zeitintegration analog zu Bassi et. al. [8] überarbeitet und mit der "Block Jacobi" Vorkonditionierung parallelisiert werden. Im nächsten Schritt kann dann das implizite Verfahren recht einfach mit einem p-Multigrid [65] und später auch mit einem unstrukturierten h-Multigrid [66] noch weiter beschleunigt werden.

Danach kann die DG-Methode bei besserer Effizienz und höherer Genauigkeit als die etablierten Strömungslöser auch im industriellen Umfeld Fuß fassen.

A. Basisfunktionen

Tetraeder

TabelleA.1.: Tetraeder Basisfunktionen bis zur 4. Ordnung

Basis	$\mathcal{O}1$	$\mathcal{O}2$	$\mathcal{O}3$	$\mathcal{O}4$
1	1	1	1	1
2		$2\zeta - 1 + \xi + \eta$	$2\zeta - 1 + \xi + \eta$	$2\zeta - 1 + \xi + \eta$
3		$-1 + \eta + 3\xi$	$-1 + \eta + 3\xi$	$-1 + \eta + 3\xi$
4		$-1 + 4\eta$	$-1 + 4\eta$	$-1 + 4\eta$
5			$1 - 2\xi - 2\eta + \xi^2 + 2\eta\xi + \eta^2 - 6\zeta + 6\zeta\xi + 6\zeta\eta + 6\zeta^2$	$1 - 2\xi - 2\eta + \xi^2 + 2\eta\xi + \eta^2 - 6\zeta + 6\zeta\xi + 6\zeta\eta + 6\zeta^2$
6			$\eta^2 + 6\eta\xi - 2\eta + 2\zeta\eta + 10\zeta\xi - 2\zeta + 5\xi^2 + 1 - 6\xi$	$\eta^2 + 6\eta\xi - 2\eta + 2\zeta\eta + 10\zeta\xi - 2\zeta + 5\xi^2 + 1 - 6\xi$
7			$1 - 2\eta + \eta^2 - 8\xi + 8\eta\xi + 10\xi^2$	$1 - 2\eta + \eta^2 - 8\xi + 8\eta\xi + 10\xi^2$
8			$6\eta^2 + 6\eta\xi + 12\zeta\eta - 7\eta - \xi - 2\zeta + 1$	$6\eta^2 + 6\eta\xi + 12\zeta\eta - 7\eta - \xi - 2\zeta + 1$
9			$6\eta^2 - 7\eta + 18\eta\xi + 1 - 3\xi$	$6\eta^2 - 7\eta + 18\eta\xi + 1 - 3\xi$
10			$1 - 10\eta + 15\eta^2$	$1 - 10\eta + 15\eta^2$
11				$\eta^3 + 12\zeta\eta^2 + 3\eta^2\xi - 3\eta^2 + 3\eta + 24\zeta\xi\eta - 6\eta\xi + 30\zeta^2\eta - 24\zeta\eta + 3\xi^2\eta - 24\zeta\xi + \xi^3 - 30\zeta^2 - 3\xi^2 + 12\zeta - 1 + 12\zeta\xi^2 + 30\zeta^2\xi + 20\zeta^3 + 3\xi$

TabelleA.1.: Tetraeder Basisfunktionen bis zur 4. Ordnung (Fortsetzung)

Basis	$\mathcal{O}1$	$\mathcal{O}2$	$\mathcal{O}3$	$\mathcal{O}4$
12				$\eta^3 - 3\eta^2 + 6\zeta\eta^2 + 9\eta^2\xi + 3\eta + 48\zeta\xi\eta - 18\eta\xi + 6\zeta^2\eta + 15\xi^2\eta - 12\zeta\eta + 7\xi^3 - 48\zeta\xi + 9\xi - 6\zeta^2 - 15\xi^2 + 6\zeta - 1 + 42\zeta\xi^2 + 42\zeta^2\xi$
13				$\eta^3 - 3\eta^2 + 13\eta^2\xi + 2\zeta\eta^2 + 3\eta - 26\eta\xi + 33\xi^2\eta - 4\zeta\eta + 24\zeta\xi\eta + 2\zeta + 21\xi^3 - 33\xi^2 + 13\xi + 42\zeta\xi^2 - 24\zeta\xi - 1$
14				$-1 + 15\eta^2\xi + 45\xi^2\eta - 30\eta\xi + 15\xi + 3\eta - 3\eta^2 - 45\xi^2 + \eta^3 + 35\xi^3$
15				$8\eta^3 - 17\eta^2 + 48\zeta\eta^2 + 16\eta^2\xi + 10\eta - 18\eta\xi - 54\zeta\eta + 48\zeta\xi\eta + 8\xi^2\eta + 48\zeta^2\eta - 1 - \xi^2 + 6\zeta - 6\zeta\xi + 2\xi - 6\zeta^2$
16				$8\eta^3 + 48\eta^2\xi - 17\eta^2 + 16\zeta\eta^2 + 10\eta - 54\eta\xi - 18\zeta\eta + 40\xi^2\eta + 80\zeta\xi\eta - 5\xi^2 + 6\xi - 1 - 10\zeta\xi + 2\zeta$
17				$8\eta^3 - 17\eta^2 + 64\eta^2\xi - 72\eta\xi + 80\xi^2\eta + 10\eta + 8\xi - 10\xi^2 - 1$
18				$28\eta^3 + 28\eta^2\xi + 56\zeta\eta^2 - 42\eta^2 - 14\eta\xi - 28\zeta\eta + 15\eta + \xi - 1 + 2\zeta$
19				$28\eta^3 + 84\eta^2\xi - 42\eta^2 - 42\eta\xi + 15\eta - 1 + 3\xi$
20				$-1 + 18\eta - 63\eta^2 + 56\eta^3$

Hexaeder

TabelleA.2.: Hexaeder Basisfunktionen bis zur 4. Ordnung

Basis	$\mathcal{O}1$	$\mathcal{O}2$	$\mathcal{O}3$	$\mathcal{O}4$
1	1	1	1	1
2		$-1+2\xi$	$-1+2\xi$	$-1+2\xi$
3		$-1+2\eta$	$-1+2\eta$	$-1+2\eta$
4		$-1+2\zeta$	$-1+2\zeta$	$-1+2\zeta$
5			$1-6\xi+6\xi^2$	$1-6\xi+6\xi^2$
6			$1-6\eta+6\eta^2$	$1-6\eta+6\eta^2$
7			$1-6\zeta+6\zeta^2$	$1-6\zeta+6\zeta^2$
8			$1-2\eta-2\xi+4\xi\eta$	$1-2\eta-2\xi+4\xi\eta$
9			$1-2\zeta-2\xi+4\xi\zeta$	$1-2\zeta-2\xi+4\xi\zeta$
10			$1-2\zeta-2\eta+4\eta\zeta$	$1-2\zeta-2\eta+4\eta\zeta$
11				$-1+12\xi-30\xi^2+20\xi^3$
12				$-1+12\eta-30\eta^2+20\eta^3$
13				$-1+12\zeta-30\zeta^2+20\zeta^3$
14				$-1+2\eta+6\xi-12\xi\eta-6\xi^2+12\xi^2\eta$
15				$-1+2\zeta+6\xi-12\xi\zeta-6\xi^2+12\xi^2\zeta$
16				$-1+2\zeta+6\eta-12\eta\zeta-6\eta^2+12\eta^2\zeta$
17				$-1+6\eta-6\eta^2+2\xi-12\xi\eta+12\xi\eta^2$
18				$-1+6\zeta-6\zeta^2+2\xi-12\xi\zeta+12\xi\zeta^2$
19				$-1+6\zeta-6\zeta^2+2\eta-12\eta\zeta+12\eta\zeta^2$
20				$-1+2\zeta+2\eta-4\eta\zeta+2\xi-4\xi\zeta-4\xi\eta+8\xi\eta\zeta$

B. Charakteristische Randbedingungen

Die charakteristischen Variable w_i werden bei einlaufenden Charakteristiken mit dem äußeren Zustand, dem physikalische Zustand, und bei herauslaufenden Charakteristiken mit dem inneren Zustand, dem numerischen Zustand, berechnet. Demzufolge ergeben sich die in Tabelle B.1 dargestellten Randbedingungen.

TabelleB.1.: Verschiedene Strömungssituationen bei charakteristischen Rändern

Dimension	Rand	Physikalische Randbedingun- gen	Numerische Randbedingun- gen
1	Überschall-Einströmen	w_2, w_3	w_1
	Überschall-Einströmen	w_1, w_2, w_3	-
	Überschall-Ausströmen	w_1	w_2, w_3
	Überschall-Ausströmen	-	w_1, w_2, w_3
2	Überschall-Einströmen	w_2, w_3, w_4	w_1
	Überschall-Einströmen	w_1, w_2, w_3, w_4	-
	Überschall-Ausströmen	w_1	w_2, w_3, w_4
	Überschall-Ausströmen	-	w_1, w_2, w_3, w_4
3	Überschall-Einströmen	w_2, w_3, w_4, w_5	w_1
	Überschall-Einströmen	w_1, w_2, w_3, w_4, w_5	-
	Überschall-Ausströmen	w_1	w_2, w_3, w_4, w_5
	Überschall-Ausströmen	-	w_1, w_2, w_3, w_4, w_5

C. Gaußintegration

Tetraeder

Zur numerischen Integration des Polynoms $p(x, y, z) \in P^k$ über ein Referenz-Tetraeder,

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} p(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \approx \sum_i^N \omega_i p(x_i, y_i, z_i),$$

werden insgesamt N Integrationspunkte $p(x_i, y_i, z_i)$ und deren Gewichte ω_i verwendet:

TabelleC.1.: Integrationsregeln für Tetraederelemente

k	N	$p(x_i, y_i, z_i)$	ω_i
1	1	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$\omega_1 = 1$
2	4	$(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20})$ $(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20})$ $(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20})$ $(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{20}, \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{20})$	$\omega_1 = \frac{1}{4}$ $\omega_2 = \frac{1}{4}$ $\omega_3 = \frac{1}{4}$ $\omega_4 = \frac{1}{4}$
5	15		
7	31	Monomiale Quadratur, Vergleich [31, 32]	
9	53		

Hexaeder

Zur numerischen Integration eines Polynoms $p(x, y, z) \in P^k$ über ein Referenz-Hexaeder,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \approx \sum_i^N \omega_i p(x_i, y_i, z_i),$$

werden insgesamt N Integrationspunkte $p(x_i, y_i, z_i)$ und deren Gewichte ω_i verwendet:

TabelleC.2.: Integrationsregeln für Hexaederelemente

k	N	$p(x_i, y_i, z_i)$	ω_i
1	1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\omega_1 = 1$
3	8	$(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_1 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_2 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_3 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_4 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_5 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_6 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_7 = \frac{1}{8}$
		$(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}))$	$\omega_8 = \frac{1}{8}$
5	14	Monomiale Quadratur, Vergleich [31, 32]	
7	38		
9	58		
11	90		

D. Konvergenztabellen

Linien

TabelleD.1.: Konvergenzraten für P^0 Linienelemente

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
8	$3,0 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	-1,1	-0,4	-0,7
16	$6,6 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	-0,1	0,1	0,1
32	$7,3 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	0,1	0,2	0,2
64	$6,7 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$	0,3	0,4	0,3
128	$5,6 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	0,4	0,5	0,4
256	$4,3 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	0,6	0,7	0,6
512	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	0,7	0,8	0,7
1024	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	0,8	0,9	0,8
2048	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	0,9	0,9	0,9
4096	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	1,0	1,0	1,0
8192	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$			

TabelleD.2.: Konvergenzraten für P^1 Linienelemente

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
8	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	0,7	1,5	1,2

TabelleD.2.: Konvergenzraten für P^1 Linienelemente (Fortsetzung)

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
16	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	2,4	2,7	2,4
32	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	2,6	3,8	3,4
64	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	2,8	3,2	3,1
128	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	2,5	2,3	2,4
256	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-7}$	$7,4 \cdot 10^{-6}$	2,3	2,1	2,1
512	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	2,2	2,0	2,0
1024	$8,6 \cdot 10^{-6}$	$4,9 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	2,1	2,0	2,0
2048	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	2,0	2,0	2,0
4096	$4,9 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	2,0	2,0	2,0
8192	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$7,8 \cdot 10^{-10}$	$6,4 \cdot 10^{-9}$	2,0	2,0	2,0

TabelleD.3.: Konvergenzraten für P^2 Linienelemente

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
8	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	2,3	4,0	3,5
16	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-4}$	2,6	2,5	2,5
32	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	2,8	2,4	2,5
64	$6,1 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$	2,6	2,6	2,6
128	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-7}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	2,8	2,8	2,8
256	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$8,0 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^{-7}$	2,9	2,9	2,9
512	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	3,0	3,0	3,0

TabelleD.3.: Konvergenzraten für P^2 Linienelemente (Fortsetzung)

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
1024	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	3,0	2,9	3,0
2048	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$			
4096	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-11}$	$4,0 \cdot 10^{-10}$	0,2	2,5	2,0
8192	$2,9 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-11}$	$3,5 \cdot 10^{-10}$	-0,1	1,3	0,2

TabelleD.4.: Konvergenzraten für P^3 Linienelemente

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
8	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	2,9	2,8	2,7
16	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$			
32	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-7}$	$9,4 \cdot 10^{-6}$	4,7	6,0	5,5
64	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$	5,3	5,5	5,4
128	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$8,4 \cdot 10^{-10}$	$0,1 \cdot 10^{-8}$	4,6	4,5	4,5
256	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$5,5 \cdot 10^{-11}$	$6,3 \cdot 10^{-10}$	3,8	3,9	4,0
512	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-11}$	$3,0 \cdot 10^{-10}$	-0,3	2,4	1,1
1024	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$7,8 \cdot 10^{-12}$	$3,0 \cdot 10^{-10}$	-0,2	0,5	0,0
2048	$3,0 \cdot 10^{-8}$	$7,6 \cdot 10^{-12}$	$3,0 \cdot 10^{-10}$	-0,1	0,0	0,0
4096	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$7,6 \cdot 10^{-12}$	$3,0 \cdot 10^{-10}$	-0,1	0,0	0,0
8192	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$7,8 \cdot 10^{-12}$	$3,0 \cdot 10^{-10}$	0,0	0,0	0,0

Der grün markierte Bereich stellt hier exemplarisch den für die Konvergenzanalyse relevanten Bereich dar. Oberhalb der Markierung ist das sehr grobe Gitter nicht in der Lage die Anfangsbedingung korrekt wiederzugeben, unter-

halb der Markierung wird die Rechengenauigkeit des Computers bei $\approx 10^{-11}$ erreicht. In beiden Fällen sind die Ergebnisse nicht verwertbar.

Tetraeder

TabelleD.5.: Konvergenzraten für P^0 Tetraederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6		$2,4 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$			
8		$4,5 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	-2,3	-0,4	-1,4
12	2,1	$6,9 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$	-1,1	0,2	0,1
16	7,3	$8,1 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	-0,5	-0,2	0,2
24	$3,7 \cdot 10^1$	$9,0 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	-0,3	-0,2	0,1
32	$1,1 \cdot 10^2$	$9,2 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	-0,1	-0,1	0,1
48	$5,9 \cdot 10^2$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	0,1
64	$1,8 \cdot 10^3$	$9,1 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	0,1	0,2	0,2
96	$9,2 \cdot 10^3$	$8,7 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	0,1	0,3	0,2
128	$2,9 \cdot 10^4$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	0,2	0,5	0,3

TabelleD.6.: Konvergenzraten für P^1 Tetraederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	1,1	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$			
8	3,2	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	-2,1	-0,2	-0,1
12	$1,8 \cdot 10^1$	$3,7 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	0,6	1,4	1,1
16	$5,1 \cdot 10^1$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	1,0	1,7	1,1
24	$2,7 \cdot 10^2$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^{-4}$	1,4	2,4	1,8
32	$8,1 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	1,3	3,0	2,6

TabelleD.6.: Konvergenzraten für P^1 Tetraederelemente (Fortsetzung)

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
48	$4,3 \cdot 10^3$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	2,2	2,9	2,8
					2,7	2,6	2,7
64	$1,3 \cdot 10^4$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	2,8	2,3	2,4
					2,7	2,2	2,2
96	$7,7 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$			
128	$2,0 \cdot 10^5$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$9,4 \cdot 10^{-6}$			

TabelleD.7.: Konvergenzraten für P^2 Tetraederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$3,5 \cdot 10^1$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$			
8	$9,9 \cdot 10^1$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	1,5	2,5	2,1
					2,4	2,9	2,4
12	$5,6 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	1,9	3,0	2,8
					1,7	2,9	2,3
16	$1,6 \cdot 10^3$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	1,4	2,7	2,3
					1,7	2,7	2,4
24	$8,9 \cdot 10^3$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	1,7	2,7	2,4
					2,2	2,7	2,5
32	$2,5 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	1,7	2,7	2,4
					2,2	2,7	2,5
48	$1,4 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$7,4 \cdot 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-6}$	2,2	2,7	2,5
					2,2	2,7	2,5
64	$4,0 \cdot 10^5$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-6}$			

TabelleD.8.: Konvergenzraten für P^3 Tetraederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$2,5 \cdot 10^2$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$			
8	$7,0 \cdot 10^2$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	1,1	3,0	2,0
					1,6	3,1	2,6

TabelleD.8.: Konvergenzraten für P^3 Tetraederelemente (Fortsetzung)

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
12	$4,0 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$	$6,2 \cdot 10^{-5}$	3,2	3,7	3,3
16	$1,1 \cdot 10^4$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$			
24	$6,3 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	3,5	4,1	3,8
32	$1,8 \cdot 10^5$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	4,3	4,3	4,1
48	$1,0 \cdot 10^6$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	4,7	4,1	4,0

TabelleD.9.: Konvergenzraten für P^4 Tetraederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$1,9 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	1,0	4,6	4,4
8	$5,5 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$			
12	$3,0 \cdot 10^4$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	4,0	4,3	3,8
16	$8,8 \cdot 10^4$	$9,8 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	3,5	5,4	5,1
24	$4,8 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	3,8	5,0	4,6
32	$1,4 \cdot 10^6$	$6,9 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	4,0	4,9	4,5

Hexaeder

TabelleD.10.: Konvergenzraten für P^0 Hexaederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6		$1,7 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$			
8		$4,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	4,5	2,8	3,7
12		$2,5 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$	-4,2	-1,7	-2,9
16		$4,6 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	-2,1	-0,3	-0,8
24	1,5	$7,0 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	-1,1	-0,2	-0,1
32	4,3	$8,1 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	-0,5	-0,2	0,0
48	$2,4 \cdot 10^1$	$9,0 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	-0,3	-0,2	0,0
64	$6,9 \cdot 10^1$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	-0,1	-0,1	0,1
96	$3,8 \cdot 10^2$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	0,1
128	$1,1 \cdot 10^3$	$9,2 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-3}$	0,1	0,2	0,1
192	$4,7 \cdot 10^3$	$8,8 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	0,1	0,3	0,2
256	$1,3 \cdot 10^4$	$8,4 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	0,2	0,4	0,3

TabelleD.11.: Konvergenzraten für P^1 Hexaederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6		$1,9 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$			
8		$2,7 \cdot 10^{-1}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	-1,3	-2,2	-1,1
12	3,5	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	-1,4	0,6	0,0
16	$1,0 \cdot 10^1$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	-0,7	0,6	0,4

TabelleD.11.: Konvergenzraten für P^1 Hexaederelemente (Fortsetzung)

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
24	5,5·10 ¹	5,8·10 ⁻¹	3,4·10 ⁻⁵	1,7·10 ⁻³	0,0	0,8	0,7
					0,6	1,4	1,1
32	1,6·10 ²	4,8·10 ⁻¹	2,2·10 ⁻⁵	1,2·10 ⁻³	1,2	2,0	1,6
					1,9	2,4	2,1
48	8,9·10 ²	3,0·10 ⁻¹	1,0·10 ⁻⁵	6,5·10 ⁻⁴	2,4	2,7	2,5
					2,8	2,9	2,8
64	2,5·10 ³	1,7·10 ⁻¹	5,0·10 ⁻⁶	3,6·10 ⁻⁴	2,9	2,9	2,9
96	1,4·10 ⁴	6,6·10 ⁻²	1,7·10 ⁻⁶	1,3·10 ⁻⁴			
128	4,0·10 ⁴	3,0·10 ⁻²	7,3·10 ⁻⁷	5,9·10 ⁻⁵			
192	2,2·10 ⁵	9,3·10 ⁻³	2,2·10 ⁻⁷	1,8·10 ⁻⁵			

TabelleD.12.: Konvergenzraten für P^2 Hexaederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	2,0	6,0·10 ⁻¹	4,1·10 ⁻⁵	2,6·10 ⁻³	1,5	0,9	2,1
					0,2	1,2	1,2
8	5,7	3,9·10 ⁻¹	3,2·10 ⁻⁵	1,4·10 ⁻³	1,2	2,0	1,5
					2,1	2,9	2,4
12	3,2·10 ¹	3,6·10 ⁻¹	1,9·10 ⁻⁵	8,9·10 ⁻⁴	2,0	3,6	3,2
					2,5	3,0	3,1
16	9,5·10 ¹	2,5·10 ⁻¹	1,1·10 ⁻⁵	5,8·10 ⁻⁴	2,5	3,0	3,1
					2,5	2,4	2,5
24	5,3·10 ²	1,1·10 ⁻¹	3,3·10 ⁻⁶	2,2·10 ⁻⁴	2,3	2,3	2,2
					2,2	2,3	2,2
32	1,5·10 ³	6,0·10 ⁻²	1,2·10 ⁻⁶	8,8·10 ⁻⁵			
48	8,4·10 ³	2,2·10 ⁻²	3,5·10 ⁻⁷	2,6·10 ⁻⁵			
64	2,5·10 ⁴	1,1·10 ⁻²	1,8·10 ⁻⁷	1,3·10 ⁻⁵			
96	1,3·10 ⁵	4,3·10 ⁻³	7,0·10 ⁻⁸	5,1·10 ⁻⁶			
128	3,6·10 ⁵	2,3·10 ⁻³	3,6·10 ⁻⁸	2,7·10 ⁻⁶			

TabelleD.13.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$1,6 \cdot 10^1$	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-4}$			
8	$4,5 \cdot 10^1$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	3,7	2,2	2,7
12	$2,5 \cdot 10^2$	$9,3 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	1,7	2,9	2,4
16	$7,2 \cdot 10^2$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	2,0	2,7	2,4
24	$4,1 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	1,6	3,4	3,0
32	$1,2 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-8}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$	2,5	3,7	3,5
48	$6,5 \cdot 10^4$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	3,4	3,8	3,6
64	$2,0 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-9}$	$7,1 \cdot 10^{-7}$	4,0	3,8	3,7
96	$1,1 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	4,0	3,8	3,7

TabelleD.14.: Konvergenzraten für P^4 Hexaederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$8,5 \cdot 10^1$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$5,9 \cdot 10^{-6}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$			
8	$2,6 \cdot 10^2$	$9,6 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	3,7	4,1	4,2
12	$1,4 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	2,1	3,4	3,0
16	$4,1 \cdot 10^3$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	2,4	3,4	3,1
24	$2,3 \cdot 10^4$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$	4,1	4,7	4,3
32	$6,9 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-9}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$	4,3	4,9	4,7
48	$3,9 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$8,3 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	4,7	5,0	4,9
64	$1,1 \cdot 10^6$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-10}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	4,4	5,0	4,9

TabelleD.15.: Konvergenzraten für P^5 Hexaederelemente

Zellen- zahl	Rechen- zeit [s]	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$3,8 \cdot 10^2$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$			
8	$1,1 \cdot 10^3$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-7}$	$5,4 \cdot 10^{-5}$	5,6	5,4	6,0
12	$5,7 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	3,3	4,3	3,8
16	$1,8 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	5,3	5,1	4,8
24	$9,4 \cdot 10^4$	$9,0 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	$3,9 \cdot 10^{-7}$	3,1	5,4	5,0
32	$2,9 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-10}$	$7,6 \cdot 10^{-8}$	4,1	5,9	5,7
48	$1,5 \cdot 10^6$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-11}$	$7,4 \cdot 10^{-9}$	5,5	5,8	5,7

Zeitintegration

TabelleD.16.: Konvergenzraten für P^0 Hexaederelemente, Runge-Kutta $\mathcal{O}1$, CFL 0.5

Zellenzahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$	4,5	2,8	3,7
8	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	-4,2	-1,7	-2,9
12	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$	-2,1	-0,3	-0,8
16	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	-1,1	-0,2	-0,1
24	$7,0 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$			

TabelleD.17.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Runge-Kutta $\mathcal{O}4$, CFL 0.07

Zellenzahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-4}$	3,7	2,2	2,7
8	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	1,7	2,9	2,4
12	$9,3 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	2,0	2,7	2,4
16	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	1,6	3,4	3,0
24	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$			

TabelleD.18.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Runge-Kutta $\mathcal{O}1$, CFL 0.02

Zellenzahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-4}$	3,8	2,2	2,7
8	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$			

TabelleD.18.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Runge-Kutta $\mathcal{O}1$, CFL 0.02 (Fortsetzung)

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
12	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	1,7	2,9	2,5
				1,7	2,7	2,4
16	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$	1,2	3,3	3,0
24	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$			

TabelleD.19.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Euler Implizit $\mathcal{O}1$, CFL 0.02

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-4}$	2,4	2,6	2,5
12	$9,8 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$			

TabelleD.20.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Euler Implizit $\mathcal{O}1$, CFL 0.8

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$5,6 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,2	2,2	1,4
12	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$			
24	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,7	1,1	0,9

TabelleD.21.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Euler Implizit $\mathcal{O}1$, CFL 8

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$6,7 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0,2	1,0	0,4

TabelleD.21.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Euler Implizit $\mathcal{O}1$, CFL 8 (Fortsetzung)

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
12	$5,7 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-6}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$	0,1	0,4	0,3
24	$5,4 \cdot 10^{-1}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$7,7 \cdot 10^{-4}$			

TabelleD.22.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Euler Implizit $\mathcal{O}1$, CFL 17

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
6	$7,0 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	0,1	0,8	0,3
12	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$7,9 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$			
24	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$6,4 \cdot 10^{-6}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$	0,0	0,3	0,2

TabelleD.23.: Konvergenzraten für P^3 Hexaederelemente, Euler Implizit $\mathcal{O}1$, CFL 34

Zellen- zahl	L_∞	L_1	L_2	\mathcal{O}_{L_∞}	\mathcal{O}_{L_1}	\mathcal{O}_{L_2}
12	$7,1 \cdot 10^{-1}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	-0,1	0,2	0,2
24	$7,4 \cdot 10^{-1}$	$7,8 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$			

Literaturverzeichnis

- [1] E. ACHENBACH: *Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 54, S. 565–575, 1972.
- [2] D. AHARONI UND A. BARAK: *Parallel iterative discontinuous Galerkin finite-element methods*. In: Discontinuous Galerkin Methods, B. Cockburn, G. E. Karniadakis und C.-W. Shu, eds., Springer, 2000, S. 247–254.
- [3] D. N. ARNOLD, F. BREZZI, B. COCKBURN UND D. MARINI: *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 39, No. 5, S. 1749–1779, 2001.
- [4] H. L. ATKINS: *Nonreflective Boundary Conditions for High-Order Methods*. AIAA Journal, Vol. 32, No. 3, S. 512–518, 1994.
- [5] H. L. ATKINS UND F. Q. HU: *A Discrete Analysis of Non-reflecting Boundary Conditions for Discontinuous Galerkin Method*. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, Vol. AIAA 2003-3301, 2003.
- [6] H. L. ATKINS UND C.-W. SHU: *Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin methods for hyperbolic equations*. AIAA Journal, Vol. 36, S. 775–782, 1998.
- [7] I. BABUŠKA, C. E. BAUMANN UND J. T. ODEN: *A discontinuous hp finite element method for diffusion problems: 1-D analysis*. Comput. Math. Appl., Vol. 37, S. 103–122, 1999.
- [8] F. BASSI, A. CRIVELLINI, D. A. DI PIETRO UND S. REBAY: *An implicit high-order discontinuous Galerkin method for steady and unsteady incompressible flows*. Computers & Fluids, Vol. 36, S. 1529–1546, 2007.
- [9] F. BASSI UND S. REBAY: *A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations*. Journal of Computational Physics, Vol. 131, S. 267–279, 1997.
- [10] F. BASSI UND S. REBAY: *High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Solution of the 2D Euler Equations*. Journal of Computational Physics, Vol. 138, S. 251–285, 1997.
- [11] F. BASSI UND S. REBAY: *GMRES for discontinuous Galerkin solution of the compressible Navier-Stokes equations*. In: Discontinuous Galerkin Methods, B. Cockburn, G. E. Karniadakis und C.-W. Shu, eds., Springer, 2000, S. 197–208.

-
- [12] F. BASSI UND S. REBAY: *A High order discontinuous Galerkin method for compressible turbulent flows*. In: *Discontinuous Galerkin Methods*, B. Cockburn, G. E. Karniadakis und C.-W. Shu, eds., Springer, 2000, S. 77–88.
- [13] F. BASSI UND S. REBAY: *Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, S. 197–207, May 2002.
- [14] C. E. BAUMANN UND J. T. ODEN: *A discontinuous hp finite element method for the Euler and the Navier-Stokes equations*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 31, S. 79–95, 1999.
- [15] K. S. BEY UND A. PATRA: *A parallel hp-adaptive discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws*. *Appl. Numer. Math.*, Vol. 20, S. 321–286, 1996.
- [16] K. S. BEY, A. PATRA UND J. T. ODEN: *hp-version discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws: A parallel strategy*. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 38, S. 3889–3908, 1995.
- [17] O. J. BOELENS, H. VAN DER VEN, B. OSKAM UND A. A. HASSAN: *Boundary Conforming Discontinuous Galerkin finite element approach for rotorcraft simulations*. *Journal of Aircraft*, Vol. 39, No. 5, S. 776–785, September-October 2002.
- [18] U. BUNGE, C. MOCKETT UND F. THIELE: *Guidelines for Implementing Detached-Eddy Simulation Using Different Models*. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 11, 2007.
- [19] J. C. BUTCHER: *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley, 1987.
- [20] M. CASEY UND WINTERGERSTE T.: *Best Practices Guidelines for CFD*. ER-COFTAC Publication, 2000.
- [21] CENTER FOR TURBULENCE RESEARCH: *Discontinuous Galerkin methods for turbulence simulation*. Summer Programm 2002, 2002.
- [22] B. COCKBURN, S. HOU UND C.-W. SHU: *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Scalar Conservation Laws IV: The Multidimensional Case*. *Math. Comput.*, Vol. 54, S. 545–581, 1990.
- [23] B. COCKBURN, S. Y. LIN UND C.-W. SHU: *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Scalar Conservation Laws III: One Dimensional Systems*. *Journal of Computational Physics*, Vol. 84, S. 90–113, 1989.
- [24] B. COCKBURN UND C.-W. SHU: *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Scalar Conservation Laws II: General Framework*. *Math. Comput.*, Vol. 52, S. 411–435, 1989.

- [25] B. COCKBURN UND C. W. SHU: *The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 35, S. 337–361, 1998.
- [26] B. COCKBURN UND C.-W. SHU: *The local Discontinuous Galerkin Method for time-dependent convection-diffusion systems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 35, S. 2440–2463, 1998.
- [27] B. COCKBURN UND C.-W. SHU: *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Scalar Conservation Laws V: Multidimensional Systems*. Journal of Computational Physics, Vol. 141, S. 199–224, 1998.
- [28] S. COLLIS: *The DG/VMS Method for Unified Turbulence Simulation*. In: 32nd AIAA Fluid Dynamics Conference, St.Louis USA, AIAA, June 24–27 2002.
- [29] G. S. CONSTANTINESCU, R. PACHECO UND K. D. SQUIRES: *Detached-Eddy Simulation of Flow over a Sphere*. AIAA Journal, Vol. AIAA Paper 2002-0425, 2002.
- [30] G. S. CONSTANTINESCU UND K. D. SQUIRES: *LES and DES Investigations of Turbulent Flow over a Sphere*. 38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Vol. AIAA Paper 2000-0540, 2000.
- [31] R. COOLS: *Monomial cubature rules since "Stroud": a compilation – part 2*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 112, S. 21–27, 1999.
- [32] R. COOLS UND P. RABINOWITZ: *Monomial cubature rules since "Stroud": a compilation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 48, S. 309–326, 1993.
- [33] B. DELAUNAY: *Sur la sphere vide*. Bulletin of Academy of Sciences of the USSR, S. 793–800, 1934.
- [34] K. D. DEVINE UND J. E. FLAHERTY: *Parallel adaptive hp-refinement techniques for conservation laws*. Appl. Numer. Math., Vol. 20, S. 367–386, 1996.
- [35] M. DIETZ, M. KESSLER, E. KRÄMER UND S. WAGNER: *Tip Vortex Conservation on a Helicopter Main Rotor using Vortex-Adapted Chimera Grids*. AIAA Journal, Vol. 45, No. 8, 2007.
- [36] R. EWERT, R. EMUNDS, L. PANEK, F. THIELE, D. KÖNIG, W. SCHRÖDER, A. KOLB, M. SCHNEIDER, M. GRÜNEWALD, M. KESSLER, C. LÜBON, M. ROSE UND B. DEINERT: *Numerical prediction of aircraft noise emissions for selected lownoise design concepts*. In: Euronoise, Tampere Finland, 2006.
- [37] H. FASEL: *Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 78, No. 2, S. 620–628, 1976.
- [38] A. FAVRE: *Equation des gaz turbulents compressibles*. Journal de Mécanique, Vol. 4, No. 3, 1965.

- [39] M. GALLE: *Ein Verfahren zur numerischen Simulation kompressibler reibungsbehafteter Strömungen auf hybriden Netzen*. DLR FB 99-04, 1999.
- [40] M. GAZAIX, A. JOLLES UND M. LAZAREFF: *The elsA Object-Oriented Computational tool for industrial applications*. In: 23rd Congress of ICAS, Toronto, Canada, 2002.
- [41] A. HARTEN, P. D. LAX UND B. VAN LEER: *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*. SIAM Review, 1983.
- [42] D. HEMPEL: *Isotropic refinement and recoarsening in two dimensions*. Numerical Algorithms, Vol. 13, No. 1, S. 33–43, 1996.
- [43] C. HIRSCH: *Numerical computation of internal and external flows*. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2007.
- [44] J. JEONG UND F. HUSSAIN: *On the identification of a vortex*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 285, S. 69–94, 1995.
- [45] G.-S. JIANG UND C.-W. SHU: *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*. Journal of Computational Physics, Vol. 126, S. 202–228, 1996.
- [46] T. A. JOHNSON UND V. C. PATEL: *Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 378, S. 19–70, 1999.
- [47] G. E. KARNIADAKIS UND S. J. SHERWIN: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2nd. Auflage, 2005.
- [48] G. KARYPIS UND V. KUMAR: *A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs*. SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 20, S. 359–392, 1998.
- [49] A. N. KOLMOGOROV: *Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 32, S. 16–18, 1941.
- [50] A. N. KOLMOGOROV: *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluids for Very Large Reynolds Numbers*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 30, S. 299–303, 1941.
- [51] N. KROLL, B. EISFELD UND H.M BLEECKE: *The Navier-Stokes Code FLOWer*. Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 71, S. 58–71, 1999.
- [52] N. KROLL, C.-C. ROSSOW, K. BECKER UND F. THIELE: *MEGAFLOW - A numerical flow simulation system*. ICAS-Paper 98-2.7.4, September 1998.
- [53] B. LANDMANN: *A parallel discontinuous Galerkin code for the Navier-Stokes and Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*. PhD thesis, University of Stuttgart, 2008.
- [54] B. LANDMANN, KESSLER, S. WAGNER UND E. KRÄMER: *A Parallel Discontinuous Galerkin Code for the Navier-Stokes Equations*. In: AIAA Paper 2006-111, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, 2006.

-
- [55] C. LÜBON, M. KESSLER UND S. WAGNER: *A Parallel CFD Solver Using the Discontinuous Galerkin Approach*, High Performance Computing in Science and Engineering, Garching/Munich 2007, Springer, 2009.
- [56] C. LÜBON, M. KESSLER UND S. WAGNER: *A Parallel CFD Solver Using the Discontinuous Galerkin Approach*, High Performance Computing in Science and Engineering, Garching/Munich 2009, Springer, 2010.
- [57] C. LÜBON, M. KESSLER UND S. WAGNER: *Turbulence Modeling and Detached Eddy Simulation with a High-Order Unstructured Discontinuous Galerkin Code*, Vol. 112 of Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Springer, 2010.
- [58] C. LÜBON, M. KESSLER, S. WAGNER UND E. KRÄMER: *High-Order Boundary Discretization for Discontinuous Galerkin Codes*. In: AIAA Paper 2006-2822, 25nd AIAA Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, 2006.
- [59] C. LÜBON, M. KESSLER, S. WAGNER UND E. KRÄMER: *Detached Eddy Simulation of Separated Flow on a High-Lift Device and Noise Propagation*, Vol. 97 of Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Springer, 2007.
- [60] C. LÜBON UND S. WAGNER: *Three-Dimensional Discontinuous Galerkin Codes to Simulate Viscous Flow by Spatial Discretization of High Order and Curved Elements on Unstructured Grids*, Vol. 96 of Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Springer, 2007.
- [61] S. K. LELE: *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*. Journal of Computational Physics, Vol. 103, No. 1, S. 16–42, 1992.
- [62] H. S. LO: *A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, S. 1403–1426, 1985.
- [63] I. LOMTEV UND G. E. KARNIADAKIS: *A Discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 29, S. 587–603, 1999.
- [64] I. LOMTEV, R. KIRBY UND G. E. KARNIADAKIS: *A discontinuous Galerkin method in moving domains*. In: Discontinuous Galerkin Methods, B. Cockburn, G. E. Karniadakis und C.-W. Shu, eds., Springer, 2000, S. 375–383.
- [65] H. LUO, J. D. BAUM UND R. LÖHNER: *Fast p -Multigrid Discontinuous Galerkin Method for Compressible Flows at All Speeds*. AIAA Journal, Vol. 46, No. 3, S. 635–652, 2008.
- [66] D.J. MAVRIPLIS UND A. JAMESON: *Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes*. AIAA Paper 89-0120, 1989.
- [67] F. R. MENTER: *Zonal Two Equation k - ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows*. AIAA Paper 93-2906, 1993.

- [68] C.-D. MUNZ: *Theoretische Gasdynamik*. IAG Universität Stuttgart, Sommersemester 2004. Auflage, 2004.
- [69] C.-D. MUNZ UND T. WESTERMANN: *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen: ein interaktives Lehrbuch für den Ingenieur*. Springer, 2006.
- [70] N. C. NGUYEN, P.-O. PERSSON UND J. PERAIRE: *RANS Solutions Using High Order Discontinuous Galerkin Methods*. 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Vol. AIAA Paper 2007-0914, 2007.
- [71] K. PAHLKE UND CHELLI E.: *Calculation of Multiblade Rotors in Forward Flight Using a 3D Navier-Stokes Method*. In: In 26th European Rotorcraft Forum, The Hague, Netherlands, September 2002.
- [72] P.-O. PERSSON UND J. PERAIRE: *Sub-Cell Shock Capturing for Discontinuous Galerkin Methods*. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Vol. AIAA Paper 2006-0112, 2006.
- [73] DIANE POIRIER, STEVEN R. ALLMARAS, DOUGLAS R. MCCARTHY, MATTHEW F. SMITH UND FRANCIS Y. ENOMOTO: *The CGNS System*. AIAA Paper 98-3007, 1998.
- [74] W.H. REED UND T.R. HILL: *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. tech. rep., Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [75] O. REYNOLDS: *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*. Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 186-I, S. 123–164, 1895.
- [76] Y. SAAD UND M. H. SCHULTZ: *GMRES A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol. 7, No. 3, S. 856–869, 1986.
- [77] P. SAGAUT: *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, 2002.
- [78] H. SAKAMOTO UND H. HANIU: *A Study on Vortex Shedding From Spheres in a Uniform Flow*. Journal of Fluids Engineering, Vol. 112, S. 386–392, 1990.
- [79] H. SCHLICHTING: *Grenzschicht-Theorie*. Braun, Karlsruhe, 1982.
- [80] H.R. SCHWARZ: *Methode der finiten Elemente*. Teubner, 1980.
- [81] J. SMAGORINSKY: *General Circulation Experiments with the Primitive Equations*. The Basic Experiment, Mon. Weather Rev., Vol. 91, S. 99–165, 1963.
- [82] P. R. SPALART UND S. R. ALLMARAS: *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*. La Recherche Aérospatiale, Vol. 1, S. 5–21, 1994.
- [83] P. R. SPALART, S. DECK, M. L. SHUR, K. D. SQUIRES, M. KH. STRELETS UND A. TRAVIN: *A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 20, No. 3, 2006.

- [84] P. R. SPALART, W.-H. JOU, M. STRELETS UND S.R. ALLMARAS: *Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach*. In: Advances in DNS/LES, 1997.
- [85] G. S. SPRAGLE, W. R. MCGRORY UND J. FANG: *Comparison of 2D Unstructured Grid Generation Techniques*. AIAA Paper 91-0726, 1991.
- [86] R.C. STRAWN, J. AHMAD UND E.P.N. DUQUE: *Rotorcraft aeroacoustics computations with overset-grid CFD Methods*. In: 54th American Helicopter Society Annual Forum, Washington D.C. USA, May 1998.
- [87] M. STRELETS: *Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows*. AIAA Paper 2001-0879, 2001.
- [88] C. K. W. TAM UND J. C. WEBB: *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*. Journal of Computational Physics, Vol. 107, S. 262–281, 1993.
- [89] S. TANEDA: *Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers*. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 11, No. 10, S. 1104–1108, 1956.
- [90] E. F. TORO: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, 2nd Edition*. Springer, 1999.
- [91] I. TOULOPOULOS UND EKATERINARIS A.: *Implementation of Characteristic Boundary Conditions, to the Discontinuous Galerkin Method*. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Vol. AIAA 2006-108, 2006.
- [92] A. TRAVIN, M. SHUR, M. STRELETS UND P. SPALART: *Detached-Eddy Simulation Past a Circular Cylinder*. Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 63, S. 293–313, 2000.
- [93] E. TRUCKENBRODT: *Fluidmechanik*. Springer, 1980.
- [94] J.J.W. VAN DER VEGT UND H. VAN DER VEN: *Space-time discontinuous Galerkin finite element method with dynamic grid motion for inviscid compressible flows I. General Formulation*. Journal of Computational Physics, Vol. 217, S. 589–611, 2002.
- [95] J.J.W. VAN DER VEGT UND H. VAN DER VEN: *Space-time discontinuous Galerkin finite element method with dynamic grid motion for inviscid compressible flows II. Efficient flux quadrature*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, S. 4747–4780, 2002.
- [96] H. A. VAN DER VORST: *BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol. 13, No. 2, S. 631–644, 1992.
- [97] T.C. WARBURTON: *Spectral/hp methods on polymorphic multi-domains: Algorithms and Applications*. PhD thesis, Brown University, 1998.
- [98] J. WEIDMANN: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. Vieweg+Teubner, 2003.

- [99] D. WILCOX: *Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models*. AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, S. 1299–1310, 1988.
- [100] M. ZHANG UND C.-W. SHU: *An analysis of three different formulations of the discontinuous Galerkin method for diffusion equations*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 13, No. 3, S. 395–413, 2003.
- [101] T. ZHOU, Y. LI UND C.-W. SHU: *Numerical comparison of WENO finite volume and Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods*. Journal of Scientific Computing, Vol. 16, S. 145–171, 2001.