

**Lebensdauerabschätzung
von metallischen Strukturen
mittels der Diskrete-Elemente-Methode
im gekoppelten thermo-mechanischen Feld**

Manfred Hahn

**INSTITUT FÜR
STATIK UND DYNAMIK
DER LUFT- UND
RAUMFAHRTKONSTRUKTIONEN**

UNIVERSITÄT STUTTGART

Lebensdauerabschätzung von metallischen Strukturen mittels der Diskrete-Elemente-Methode im gekoppelten thermo-mechanischen Feld

Von der Fakultät
Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Dipl.-Ing. Manfred Hahn
geboren in Bitburg

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Kröplin
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Thomas Wallmersperger
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder

Tag der Einreichung: 22. März 2012
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Oktober 2012

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen
Universität Stuttgart
2012

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Kröplin

D93

ISBN 978-3-942807-01-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen,
Universität Stuttgart, Stuttgart, 2012

Dieser Bericht kann über das Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 27, 70569 Stuttgart, Telefon: (0711) 6856-63612, Fax: (0711) 6856-63706, bezogen werden.

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen (ISD) der Universität Stuttgart im Rahmen des SFB-TR40 mit dem Titel *Technologische Grundlagen für den Entwurf thermisch und mechanisch hochbelasteter Komponenten zukünftiger Raumtransportsysteme*. Die Zusammenarbeit mit den Projektpartnern des TR40 war für mich sehr wertvoll. Nicht zuletzt entstanden dadurch reife und fundierte Überlegungen.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Kröplin für sein ständiges Interesse, die Unterstützung und seine fachlichen Hinweise. Nicht weniger danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Wallmersperger für die Co-Betreuung, die zahlreichen und wertvollen Anregungen und Fachgespräche, die sorgfältige Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Mitberichts. Die Begeisterung und Ideen von Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Kröplin und Prof. Dr.-Ing. Thomas Wallmersperger trugen wesentlich zum Erfolg dieser Arbeit bei. Ein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder für das entgegengebrachte Interesse und für die Übernahme des Mitberichts.

Auch danke ich den Kollegen am Institut, deren Freundschaft und Hilfsbereitschaft zu einer fruchtbaren Atmosphäre beitrugen. Die fachlichen Diskussionen mit den Meistern des Fachs gehören sicherlich mit zu den Höhepunkten am ISD, wobei Gunter Faust, Matthias Deuschle, Philipp Luithardt, Karsten Keller, Christian Messe und Prashant Kaswekar hervorzuheben sind.

Am Schluss richte ich meinen Dank an die drei Prinzen von Serendipity. Ohne deren Inspiration und Affirmation zur Offenheit und Ausdauer wäre diese Arbeit nicht so ausgefallen, wie sie ausgefallen ist.

Stuttgart, November 2012

Manfred Hahn

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xi
Kurzfassung	xix
Abstract	xxi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Problemdarstellung	1
1.2 Gegenwärtiger Wissensstand	2
1.3 Zielsetzung	4
1.4 Aufbau der Arbeit	4
2 Metallische Werkstoffe	7
2.1 Statistik metallischer Werkstoffe	9
2.2 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe	10
2.2.1 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe bei quasi-statischen Lasten	10
2.2.2 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe bei dynamischen Lasten .	14
2.2.3 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe bei statischer Dauerlast .	17
2.3 Thermisches Verhalten metallischer Werkstoffe	18
3 Numerische Methoden	19
3.1 Finite-Differenzen-Methode (FDM)	20
3.2 Finite-Elemente-Methode (FEM)	21
3.3 Finite-Volumen-Methode (FVM)	24
3.4 Randelement-Methode (BEM)	26
3.5 Elementfreie-Galerkin-Methode (EFGM)	27

3.6	Diskrete-Elemente-Methode (DEM)	28
4	Modellierung des quasistatischen Bruchverhaltens metallischer Werkstoffe	31
4.1	Analytische Beschreibung von Rissen in spröden linear elastischen Werkstoffen	31
4.1.1	K - Konzept	35
4.2	Kombinierte Belastungen von gleichen und unterschiedlichen Moden	38
4.3	Finite Probenabmessungen	39
4.4	Analytische Beschreibung von plastischen Fließzonen in duktilen linear elastischen Werkstoffen	39
4.4.1	Risslängenkorrektur nach IRWIN	42
4.5	Numerische Behandlung von Rissen in metallischen Werkstoffen	44
4.5.1	Bruchmechanik mit der Finite-Elemente-Methode (FEM)	44
4.5.2	Bruchmechanik mit der Randelement-Methode (BEM)	47
4.5.3	Bruchmechanik mit der Elementfreien-Galerkin-Methode (EFGM)	47
4.5.4	Rissfortschritt mit der Erweiterten-Finite-Elemente-Methode (XFEM)	48
4.5.5	Gemeinsame Behandlung verschiedener Skalen mit der FE ² -Methode	52
4.6	Bruchverhalten realer Werkstoffe	53
4.7	Thermisches Feld in rissbehafteten Körpern	54
5	Diskrete-Elemente-Methode (DEM)	57
5.1	Historischer Werdegang der Diskrete-Elemente-Methode	57
5.2	Diskrete-Elemente-Methode im heutigen Sinne aus dem Blickwinkel der Finite-Volumen-Methode	62
6	Behandlung des mechanischen Feldes mit der Diskrete-Elemente-Methode	69
6.1	Analytische Beschreibung des ebenen Spannungszustandes	69
6.2	Grenzübergang im mechanischen Feld mit der Finiten-Differenzen-Methode	72
6.3	Grenzübergang mit der Variationsrechnung für das Hexagon	78

6.4	Schwache Form des mechanischen Feldes	87
6.5	Verifikation des mechanischen Diskrete-Elemente-Modells	90
6.5.1	Materialparameter im mechanischen Feld	90
6.5.2	Randeffekte	92
6.5.3	Testfälle für Spannungen im Kontinuum	94
6.5.4	Spannungen aus dem allgemeinen Lastfall	100
6.5.5	Anwendung der mechanischen Diskrete-Elemente-Methode auf die Bruchmechanik	102
6.6	Spröde Werkstoffe	102
6.7	Duktile Werkstoffe	103
6.8	Lebensdauersimulation	108
7	Behandlung des thermischen Feldes mit der Diskrete-Elemente-Methode	117
7.1	Analytische Beschreibung des thermischen Feldes	117
7.2	Grenzübergang im thermischen Feld mit der Finiten-Differenzen-Methode	119
7.3	Schwache Form des thermischen Feldes	123
7.4	Verifikation des thermischen Diskrete-Elemente-Modells	126
7.4.1	Materialparameter im thermischen Feld	126
7.4.2	Wärme Flüsse im allgemeinen Lastfall	126
7.4.3	Exemplarische Rechnung mit homogener Wärmefreisetzung und Konvektion	128
7.4.4	Exemplarische Rechnung auf verschiedenen Skalen	130
7.4.5	Anwendung des thermischen Diskrete-Elemente-Modells auf eine ebene Scheibe mit Riss	133
8	Behandlung des thermo-mechanischen Feldes mit der Diskrete-Elemente- Methode	135
8.1	Analytische Beschreibung des thermo-mechanischen Feldes	136
8.1.1	Analytische Beschreibung des mechanischen Feldes	136
8.1.2	Analytische Beschreibung des thermischen Feldes	139
8.1.3	Analytische Beschreibung des gekoppelten thermo- mechanischen Feldes	145

8.2	Schwache Form des thermo-mechanischen Feldes	147
8.3	Untersuchung einer Raketendüse unter thermo-mechanischer Belastung .	152
8.4	Lebensdauersimulation im thermo-mechanischen Feld	156
9	Zusammenfassung und Ausblick	159
9.1	Zusammenfassung	159
9.2	Ausblick	162
Anhang		163
A	Transformation der Derivate	163
B	Partielle Integration der mechanischen Feldgleichung	165
C	Partielle Integration der thermischen Feldgleichung	167
Literaturverzeichnis		169

Nomenklatur

Koordinatensysteme

Symbol	Bezeichnung
X, Y, Z	globales Koordinatensystem bei großen Verformungen
e_x, e_y, e_z	orthogonale Einheitsvektoren der kartesischen Basis im Euklidischen Raum \mathbb{R}^3
x, y, z	globales Koordinatensystem bei kleinen Verformungen
Ξ, Θ	dem DEM Gitter angepasstes schiefwinkliges Koordinatensystem
ξ, η	stablokales Koordinatensystem
r, Θ	Polarkoordinatensystem

Mathematische Notationen

Symbol	Bezeichnung
\cup	Assemblierungsoperator
$\llbracket \rrbracket$	Sprungoperator
∇	Nabla
div	Divergenz
grad	Gradient
δ	Ableitungssymbol aus der Variationsrechnung
lim	Grenzwertbetrachtung
log	Logarithmus
$\frac{\partial A}{\partial B} = A_{,B}$	partielle Ableitung
\in	... ist in ... enthalten
$\partial..$	Teilgebiet

Kalligraphische Schriftsymbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
\mathcal{F}	[N]	Airysche Spannungsfunktion
$\bar{\mathcal{F}}$	[N]	approximierte Airysche Spannungsfunktion
\mathcal{J}	[J]	Arbeitsfunktional
\mathcal{H}	[–]	HEAVISIDEfunktion (Step-Funktion oder Signum-Funktion)
\mathcal{O}	[–]	vernachlässigbarer Fehler von höherer Ordnung
\mathcal{R}	[–]	Menge aller Elemente (Stäbe) im Netz
\mathcal{S}	[–]	Menge aller Knoten im Netz
\mathcal{S}_H	[–]	Untermenge aller Knoten im FE Netz mit HEAVISIDE Anreicherung
\mathcal{S}_{RS}	[–]	Untermenge aller Knoten im FE Netz mit Rissspitzen Anreicherung
\mathcal{T}	[K]	die auf den Nullpunkt bezogene absolute Temperatur

Matrizen und Vektoren

Symbol	Einheit	Bezeichnung
\mathbf{A}	[–]	Transformationsmatrix bei Drehung
\mathbf{e}	[m]	orthogonale Einheitsvektoren $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]^T$ der kartesischen Basis im Euklidischen Raum
\mathbf{N}_e	[–]	Vektor der Ansatzfunktionen des Elements e
\mathbf{n}	[m]	nach aussen gerichteter Normalenvektor mit einer Einheitslänge
\mathbf{q}	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	Wärmeflussvektor
$\bar{\mathbf{q}}$	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	approximierter Wärmeflussvektor
\mathbf{u}^{FEM}	[m]	das mit der FEM berechnete Verschiebungsfeld
\mathbf{u}^{DEM}	[m]	das mit der DEM berechnete Verschiebungsfeld
$\hat{\mathbf{u}}_k$	[m]	Vektor der Verschiebungsfreiwerte am jeweiligen Knoten k
\mathbf{X}	[m]	Ortsvektor des Materialpunktes mit den Koordinaten $[x, y, z]^T$

Lateinische Schriftsymbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
A	$[\text{m}^2]$	Querschnittsfläche eines Stabes
A_{hc}	$[\text{m}^2]$	Oberfläche an der Konvektion stattfindet
A_{Hex}	$[\text{m}^2]$	Seitenfläche des Hexagons
A_{Schub}	$[\text{m}^2]$	Angriffsfläche für die Schubkraft
a	$[-]$	geometrischer Unordnungsparameter
B	$[\text{m}]$	Breite der Scheibe
b	$[-]$	Neigungsexponent der BASQUIN-Gerade
C	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	Materialkonstante für das Potenzgesetz im plastischen Bereich
c	$[-]$	Korrekturfaktor
c_p	$[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}]$	auf die Masse bezogene spezifische Wärmekapazität
d	$[\text{m}]$	Dicke einer Scheibe
E	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	Elastizitätsmodul
E_t	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	Tangentenmodul
$E(\sigma)$	$[-]$	Erwartungs- oder Mittelwert
$F(\sigma)$	$[-]$	Verteilungsfunktion bzw. Ausfallwahrscheinlichkeit
F	$[\text{N}]$	Kraft
$F(\Gamma)$	$[\frac{\text{N}}{\text{m}}]$	Kraft bezogen auf den Wegrand
G	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	Schubmodul
H	$[\text{m}]$	Höhe der Scheibe
h_c	$[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}]$	Wärmeübergangskoeffizient der thermischen Konvektion an der Aussenwand
L	$[\text{m}]$	Länge der Scheibe
l	$[\text{m}]$	Länge eines Stabes
l_e	$[\text{m}]$	Länge eines Stabes mit der Nummer e
l_T	$[\text{m}]$	Seitenlänge des Hexagons
m	$[-]$	physikalischer Unordnungsparameter
N	$[-]$	Zyklenzahl (ein Zyklus entspricht einem Sinus)
N_D	$[-]$	Eckschwingspielzahl
n	$[-]$	Exponent für das Potenzgesetz im plastischen Bereich

$P(\sigma)$	$[-]$	Wahrscheinlichkeit, dass die Probe hält
Q	$[W]$	Wärmemenge
q_i	$[\frac{W}{m^2}]$	Wärmefluss, mit $i = x, y$
q_{int}	$[\frac{W}{m^3}]$	Quantität der Wärmequelle innerhalb des Gebietes pro Zeiteinheit und Einheitsvolumen
q_n	$[\frac{W}{m^2}]$	Wärmefluss entlang des Normalenvektors
q_{\perp}	$[\frac{W}{m^2}]$	Wärmefluss senkrecht zum Riss
R_m	$[\frac{N}{m^2}]$	Zugfestigkeit
$R_{p0,2}$	$[\frac{N}{m^2}]$	Streckgrenze des Werkstoffs
r	$[m]$	Radius im Polarkoordinatensystem
r_K	$[m]$	Kerbradius
S	$[J]$	Entropie
T	$[K]$	Temperatur
T_0	$[m]$	Referenztemperatur des Gases, Fluids oder Festkörpers
U_B	$[m]$	Energiefreisetzungsrate
U_{γ}	$[m]$	Oberflächenenergie
u_x	$[m]$	Verschiebung in x -Richtung
u_y	$[m]$	Verschiebung in y -Richtung
V	$[m^3]$	Volumen
X	$[\frac{N}{m^3}]$	auf die Volumeneinheit bezogene Volumenkräfte in x -Richtung
\bar{X}_n	$[\frac{N}{m}]$	auf die Dicke bezogene Kraft der Facettenfläche mit der Nummer n in x -Richtung
Y	$[\frac{N}{m^3}]$	auf die Volumeneinheit bezogene Volumenkräfte in y -Richtung
\bar{Y}_n	$[\frac{N}{m}]$	auf die Dicke bezogene Kraft der Facettenfläche mit der Nummer n in y -Richtung
z_m	$[N]$	approximierte AIRYSche Spannungsfläche
z_q	$[N]$	approximierte Wärmeflussfläche

Griechische Schriftsymbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
α	$[-]$	Koeffizient der mikroplastischen Vorschädigung
α_T	$[\frac{1}{K}]$	linearer Wärmeausdehnungskoeffizient
β	$[-]$	Ermüdungsexponent für die mikroplastische Verformung
χ	$[-]$	spannungsabhängiger Faktor
$\Delta\epsilon_{mp}$	$[-]$	Änderung der mikroplastischen Dehnung
ϵ_{ii}	$[-]$	Dehnungen, mit $i = x, y, z$
ϵ_{ges}	$[-]$	Gesamtdehnung
ϵ_{elast}	$[-]$	elastische Dehnung
ϵ_{mp}	$[-]$	mikroplastische Dehnung
ϵ_{plast}	$[-]$	plastische Dehnung
ϵ_{LGS}	$[-]$	Dehnung aufgrund der Last aus dem LGS
φ	[Rad]	Drehwinkel der Stäbe bzw. der Fachwerkstruktur
$\bar{\Gamma}$	$[-]$	Gammafunktion nach GAUSS
Γ_R	$[m^2]$	Rand der die Teilgebiete Ω^+ und Ω^- trennt
Γ_p	$[m^2]$	Kraftrand auf dem Rand von Ω
Γ_u	$[m^2]$	Wegrand auf dem Rand von Ω
Γ_R^+	$[m^2]$	Rand des Teilgebietes Ω^+
Γ_R^-	$[m^2]$	Rand des Teilgebietes Ω^-
Γ	$[m^2]$	Rand des Gebietes Ω
Γ_A	$[m^2]$	Oberfläche eines Stabes
γ_{ii}	[Rad]	Schubwinkel, mit $i = x, y, z$
γ_c	[J]	Energiefreisetzungskonstante der Oberfläche
γ_T	$[\frac{N}{m^2 K}]$	thermoelastische Konstante
η	$[m^3]$	lokale Koordinate quer zur Stablängsachse
κ	$[-]$	KOLOSOV-Konstante
λ	$[\frac{W}{m K}]$	Wärmeleitensor
λ_{ii}	$[\frac{W}{m K}]$	Wärmeleitwerte, mit $i = x, y, z$
λ_L	$[\frac{N}{m^2}]$	LAMÉ Parameter

μ	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	LAMÉ Parameter
ν	$[-]$	Querkontraktionszahl
Θ	$[-]$	Winkel im Polarkoordinatensystem
ρ	$[\frac{1}{\text{m}}]$	Krümmung
ρ_m	$[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	Dichte eines Körpers
σ_{Sk}	$[-]$	Skalenparameter der WEIBULL-Funktion
σ_{ii}	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	Normalspannungen mit $i = x, y, z$
σ_{ij}	$[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$	Schubspannungen mit $i, j = x, y, z$
$\partial\Omega$	$[\text{m}^3]$	kleines Teilgebiet aus dem Gesamtgebiet Ω
ξ	$[\text{m}]$	lokale Koordinate längs eines Stabes
ζ	$[-]$	Konstante oder Funktion der kinematischen Verfestigung für die mikroplastische Verformung
Ω	$[\text{m}^3]$	Gebiet
Ω^+	$[\text{m}^3]$	oberes Teilgebiet aus dem Gesamtgebiet Ω
Ω^-	$[\text{m}^3]$	unteres Teilgebiet aus dem Gesamtgebiet Ω

Subscripts

Symbol	Bezeichnung
e	Nummer des Elements bzw. Stabes
i	Zähler
j	Zähler
k	Nummer des Knotenpunktes
n	Nummer der Facettenfläche

Abkürzungen

Abkürzung	Bezeichnung
1D	eindimensional
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
BEM	Boundary-Element-Method (Randelementmethode)
CFD	Computational Fluid Dynamics

DE	diskrete Elemente
DEM	Diskrete-Elemente-Methode
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
DGL	Differentialgleichung
DGLn	Differentialgleichungen
EFG	Element-Free-Galerkin (Elementfreier-Galerkin)
EFGM	Element-Free-Galerkin-Method (Elementfreie-Galerkin-Methode)
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verformungszustand
FD	finite Differenzen
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FE	finite Elemente
FE ²	Multilevel Finite-Element-Method
FEM	Finite-Elemente-Methode
FVM	Finite-Volumen-Methode
HCF	High-Cycle-Fatigue
hex	hexagonal
IR	Infrarot
kfz	kubisch-flächenzentriert
krz	kubisch-raumzentriert
LCF	Low-Cycle-Fatigue
LEBM	linear elastische Bruchmechanik
LGS	lineares Gleichungssystem
MLS	Moving-Least-Squares
P-DGL	partielle Differentialgleichungen
PvK	Prinzip der virtuellen Kräfte
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
RVE	Repräsentatives-Volumen-Element
SFB	Sonderforschungsbereich
SPH	Smoothed-Particle-Hydrodynamics
XFEM	Extended-Finite-Element-Method

Kurzfassung

Aufgrund der hohen Streubreite der physikalischen Eigenschaften von metallischen Werkstoffen kann man deren Verhalten nicht zuverlässig voraussagen. Dies stellt insbesondere bei der Lebensdauervorhersage von industriell gefertigten Konstruktionen ein Problem dar.

Der atomare Aufbau eines metallischen Werkstoffs besteht in der Regel aus einem Hauptelement und einem oder mehreren Nebenkomponenten was dazu führt, dass beim Erstarren einer Metallschmelze auf der Atomskala die Anreicherung der Atome nicht strukturiert erfolgt, sondern mit zufällig verteilten Fehlern. Betrachtet man den Werkstoff auf einer höheren Skala so fällt auf, dass metallische Schmelzen an vielen Stellen zu erstarren beginnen und dass die Erstarrungskeime und die Grenzen der Erstarrungsfronten stochastisch verteilt sind. Die metallischen Werkstoffe sind also bei genauerer Betrachtung kein Kontinuum sondern ein Diskontinuum in dem die physikalischen Eigenschaften global betrachtet zu den in den Laborexperimenten beobachteten Werten verschmieren.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Werkstoff als ein Diskontinuum darzustellen, um die stochastisch verteilten physikalischen Eigenschaften auf einer kleinen Skala zu erfassen. Im Weiteren sollen auf einer größeren Skala die physikalischen Eigenschaften zu den global beobachteten Werten verschmieren. Dabei soll die in dieser Arbeit vorgestellte numerische Methode der diskreten Elemente im mechanischen Feld ausgebaut und im Folgenden auf andere physikalische Felder übertragen werden.

In metallischen Werkstoffen gehen bei zyklischen Belastungen im Inneren des Werkstoffs mikroplastische Verformungen vorstatten, welche mit zunehmender Zyklenzahl den Werkstoff an diskreten Stellen mit Mikroschäden sättigen. Dabei schreitet die diskrete Sättigung solange voran, bis der diskrete Ort übersättigt bzw. geschwächt ist und im Folgenden versagt. Die mikroplastischen Verformungen sind, wie auch die anderen physikalischen Parameter, mit einer statistischen Größe behaftet. Die diskrete Akkumulation der statistisch verteilten mikroplastischen Schädigung soll in das numerische Modell der Diskreten-Elemente-Methode (DEM) mit aufgenommen werden, so dass sich auf numerischem Weg Lebensdauersimulationen durchführen lassen.

Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit den mathematischen Beweisen für die Gültigkeit der DEM als numerische Methode, sowohl für das mechanische als auch für das thermische Feld. Die Beweisführung erfolgt über eine vergleichende Betrachtung

mit der Finite-Volumen-Methode (FVM), der Finite-Differenzen-Methode (FDM) und der Finite-Elemente-Methode (FEM). Dabei wird aus der FVM die Idee übernommen, dass physikalische Flüsse übertragen werden. Im Weiteren ergibt die Assemblierung von sechs Stäben, welche die physikalische Feldgröße übertragen, zusammen mit dem lokalen physikalischen Gleichgewicht den Finite-Differenzen-Stern der FDM. Zuletzt wird das globale Gleichgewicht mittels der FEM gewonnen. Im Nachlauf der Finite-Elemente-Rechnung lassen sich die Flussgrößen zurückbestimmen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie die Kopplung des mechanischen und thermischen Feldes mittels der DEM vorgenommen werden kann. Dazu wird ausgeführt, wie die beiden Felder zusammen wirken und wie stark deren Kopplung ist. Abschließend wird eine Lebensdauersimulation an einer thermo-mechanisch belasteten virtuellen Probe durchgeführt.

Das Ergebnis dieser Arbeit zeigt, dass die DEM eine Methode ist, um partielle Differentialgleichungen zu lösen, sowohl für Einzelfelder, als auch für gekoppelte Felder. Außerdem kann der Werkstoff durch die Methode als ein Diskontinuum betrachtet werden, so dass sich Lebensdauersimulationen mittels eines erweiterten Werkstoffmodells vornehmen lassen.

Abstract

Due to considerable variations in their physical properties, the mechanical behaviour of metallic materials cannot be reliably predicted, which makes life time predictions of industrially manufactured constructions particularly difficult.

Metallic structures are normally composed of one main element and one or more additional components. This leads to an arbitrary array of the atoms, rather than a structured one, during consolidation of the molten material. Looking at the material on a larger scale it can be observed that the molten metal starts to solidify in many places and that the solidification germs and the borders of the solidification fronts are distributed stochastically. Metallic materials are therefore not considered a continuum but rather a discontinuum whose physical properties are - globally seen - constant with the properties observed in lab tests.

The aim of this thesis is to consider the material as a discontinuum in order to determine the stochastically distributed material properties on a micro scale. Furthermore, these anisotropic physical properties are to result in constant physical properties on a macroscale. In order to achieve this, the numerical Discrete Element Method presented in this thesis will be extended to the mechanical field and subsequently also applied in the thermal field.

Inside metallic materials micro plastic deformations take place during cyclic loading, which, with an increasing number of cycles leads to a saturation of the material in discrete places. This discrete saturation continues until the discrete places are supersaturated or weakened which results in material failure. The discrete microplastic deformations are, just as all other material parameters, statistically distributed. This discrete accumulation of statistically distributed microplastic deformations is to be implemented into the numerical model of the Discrete Element Method (DEM) in order to be able to carry out numerical life time simulations.

An important part of this thesis deals with the mathematical proof of the DEM as a valid numerical method, for the mechanical as well as for the thermal field. This is achieved by a comparative viewing using the Finite-Volume-Method (FVM), the Finite-Difference-Method (FDM) and the Finite-Element-Method (FEM). From the FVM the idea of physical flows being transmitted is used. Furthermore the assembly of six bars carrying the physical field variables together with the local physical equilibrium result in the finite

difference stencil of the FDM. Finally the global equilibrium is found by using the FEM. The post processing of the finite element calculation determines the values of the physical flow.

This thesis shows how the coupling of the mechanical and thermal field can be achieved by using the DEM. For this it is explained, how the two fields interact and how strong the coupling is. Finally a numerical life time simulation is demonstrated on a thermo-mechanically loaded test specimen.

The result of the thesis proves the DEM to be a new method for solving partial differential equations, for single as well as for coupled fields. Also, with this method, the material can be considered as a discontinuum so that an extended material law can be used for life time predictions.

1 Einleitung

1.1 Motivation und Problemdarstellung

In der Natur findet man die vielfältigsten Elemente und Werkstoffe mit einer großen Streubreite an Eigenschaften. Dies hat zur Folge, dass die Werkstoffkenndaten teilweise starken Schwankungen unterliegen, wodurch die Tragwerkslebensdauer keine deterministische Größe ist, sondern eine Größe mit einer statistisch behafteten Ausfallwahrscheinlichkeit. Der Ingenieur steht trotz der großen Varianz der Materialparameter vor der Aufgabe, die Lebensdauer über die Betriebszeit der Konstruktion sicherzustellen. Die Vergangenheit hat jedoch immer wieder gezeigt, dass sich trotz allen Bemühungen, ausfallsichere Tragwerke zu bauen, katastrophale Unfälle nicht immer vermeiden lassen. Als die wohl bekanntesten Unfälle in der Luftfahrt gelten unter anderem die Flugzeugabstürze der DE-HAVILLAND Comet aus den Jahren 1953 und 1954, das Versagen und Abschalen einer größeren Rumpfsktion von einer BOEING 737 mit beinahe katastrophalem Ende aus dem Jahr 1988 und der Absturz einer BOEING 747-200 aus dem Jahr 1992 kurz nach dem Start in Amsterdam [186]. Schließlich, und als Motivation für diese Arbeit, ist das Versagen der Triebwerksdüse der europäischen Trägerrakete Ariane 5 mit der Flugnummer 157 aus dem Jahr 2002 zu nennen. Bei diesem Flug riss die aktiv gekühlte Struktur entlang des Kühlkanals auf, was im weiteren Flugverlauf zu einem Schubverlust führte. Die Trägerrakete konnte im Folgenden den Orbit nicht mehr erreichen und musste aus Sicherheitsgründen im Flug notgesprengt werden [73]. Das Versagen solcher aktiv gekühlten, thermisch-mechanisch belasteten Strukturen kann mit der in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Methode der diskreten Elemente untersucht werden.

Aus Laborversuchen weiß man, dass gleichartig hergestellte Prüfkörper, welche einer einachsigen quasistatischen mechanischen Last unterzogen werden, geringfügige Schwankungen hinsichtlich Elastizität, aber erhebliche Schwankungen hinsichtlich der Festigkeit und dem plastischen Fließverhalten aufweisen können [18]. Präzise Aussagen, wann ein Werkstoff unter einer rein statischen Last versagt sind also nicht möglich, sondern lediglich Angaben mit einer statistisch unterlegten Ausfallwahrscheinlichkeit. Wird ein Werkstoff dynamisch belastet, so spricht man von Lebensdauer. Bei dynamischen Lasten nimmt der aus den statischen Versuchen bekannte Mittelwert der maximal ertragbaren Spannung ab und gleichzeitig streuen die Werte über einen noch größeren Bereich als bei einer rein statischen Last. Gründe dafür sind in der inhomogenen Struktur des

Werkstoffs zu finden.

Das mechanische Verhalten von Tragwerken unter statischen, dynamischen und thermischen Lasten vorherzusagen hat seit der Antike, als die Menschheit begann Bauwerke aus Stein zu errichten, bis heute in der vom Leichtbau geprägten Welt stetig an Bedeutung gewonnen. Die ersten Untersuchungen und Überlegungen hinsichtlich der Bauteilfestigkeit gehen nachweislich bis GALILEO GALILEI und LEONARDO DA VINCI zurück [5, 151, 220].

In der heutigen Zeit kommt dem Leichtbau bei der Dimensionierung eines Tragwerks eine immer größere Bedeutung zu. Durch den Leichtbau wird die Tragfähigkeit des Werkstoffs zunehmend ausgereizt, weshalb der Aspekt der Lebensdauer immer wichtiger wird. Hierbei ist es von wesentlicher Bedeutung, genaue Angaben über die zur Anwendung kommenden Werkstoffe zu haben. Dabei tritt hier das Problem auf, dass die meisten Werkstoffkennblätter nicht vermerken, dass die Werkstoffdaten mit einer statistischen Sicherheit bzw. Unsicherheit versehen sind. Dies kommt dadurch zustande, dass der Werkstoff ein Diskontinuum ist, durchzogen mit mikro- und teilweise auch mesoskopischen Imperfektionen (Lunker, Risse, Einlagerungen, Korngrenzen, etc.), welche bei der Fertigung (Guß, Walzen, thermische Behandlungen, mechanische Bearbeitung, etc.) entstehen.

1.2 Gegenwärtiger Wissensstand

Analytische oder numerische Modelle zur Beschreibung der Tragfähigkeit von Bauteilen oder Komponenten stützen sich auf empirische Werkstoffkennwerte (E-Modul, maximal ertragbare Spannung, etc.). Numerische Modelle auf der Basis der finiten Elemente haben den Vorteil, dass sie auf alle Strukturgeometrien angewandt werden können. Die analytischen Modelle sind hingegen auf simple Geometrien bzw. Ränder beschränkt, da sich die gebietsbeschreibenden Differentialgleichungen (DGL) ansonsten nicht mehr lösen lassen, wobei die Anzahl der möglichen Lösungen nicht nur von den Rändern, sondern auch von der Anzahl der Variablen abhängt. Mit der DGL lassen sich die Felder einzeln analytisch beschreiben (das mechanische, das thermische, das elektrische, das magnetische Feld, usw.) und ebenso gekoppelte Felder (das thermo-mechanische, das elektro-magnetische Feld, usw.). Die gekoppelten Felder interagieren stets miteinander, bzw. tauschen untereinander Energie aus, und zwar in der Art und Weise, dass in der Summe ein Minimum an Energie beim Übergang von einem Zustand in den nächsten verbraucht wird. Vom Standpunkt der Mathematik sind gekoppelte Felder am schwierigsten und aufwendigsten zu lösen, weshalb nur wenige analytische Lösungen, für z.B. das gekoppelte thermo-mechanischen Feld, in der Literatur zu finden sind [163, 173, 182].

Die bekannteste numerische Methode ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Darunter fallen unter anderem die Untergruppen Extended-Finite-Elements (X-FEM) und die Methode FE^2 . Die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) wurde bisher auch in die Gruppe der FEM eingeordnet. Diese Methode erzielte bisher hervorragende Ergebnisse für die Darstellung von Rissen in spröden Werkstoffen [240] und in der Mehrkörpersimulation. Eine Kopplung der DEM zu anderen Feldern ist dem Autor allerdings nicht bekannt.

Gegenwärtig wird die Lebensdauer eines Werkstoffs empirisch im Labor ermittelt, wobei die Belastung z.B. im Zug-, Biege- oder Torsionsversuch meist einachsig ist. Die ermittelten Lebensdauerwerte werden in einem Diagramm, dem sogenannten WÖHLER-Diagramm, aufgetragen. Mehrachsige Lebensdauerexperimente sind sehr aufwendig und mit hohen Kosten verbunden, weshalb in der Literatur kaum Angaben dazu zu finden sind. Die WÖHLER-Versuche werden in der Regel bei Raumtemperatur (21°C) durchgeführt, können aber auch bei erhöhten Temperaturen durchgeführt werden. Jedoch sind die Versuche dann wieder mit erhöhtem Aufwand und Kosten verbunden. Theoretische Modelle zur Ermittlung der Lebensdauer an Bauteilen unter thermo-mechanischen Lasten sind dem Autor nicht bekannt.

Die Streubreite der mechanischen Eigenschaften resultiert aus dem mikroskopischen Verhalten, wobei die mikroskopischen Modelle der Metalle auf den Kristallgittertypen und den Bindungskräften zwischen den Atomen und Gleitebenen basieren. Einfachleerstellen in der Gitterstruktur, Fremdatome in der Gitterstruktur oder Fremdatome zwischen den Atomen der Gitterstruktur werden in den primitiven Gittermodellen nicht berücksichtigt. Somit lässt sich keine genaue und abgesicherte Aussage über das makroskopische Verhalten machen, da sich das mikroskopische Verhalten nicht vollständig erfassen lässt. Ingenieure sind zur Absicherung der Festigkeit bei statisch belasteten Tragwerken, und vielmehr noch zur Absicherung der Lebensdauer von Bauteilen mit dynamischen Lasten, auf Laborversuche angewiesen, wobei ein Versuch am echten Bauteil die höchste statistisch belegte Sicherheit mit sich bringt. Aus Kosten- und Zeitgründen ist es angebracht, derartige Versuche in der Zukunft numerisch durchzuführen, weshalb es das Ziel dieser Arbeit ist, neue Wege zur numerischen Lebensdauersimulation aufzuzeigen.

1.3 Zielsetzung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll die Diskrete-Elemente-Methode (DEM), welche das Verhalten des Kontinuums/Diskontinuums mit Stäben darstellt, ausgebaut werden, um Lebensdauervorhersagen an Komponenten die unter thermo-mechanischen Lasten stehen durchführen zu können.

Bevor die DEM in gekoppelten thermo-mechanischen Problemen zur Anwendung kommen kann, müssen die folgenden Fragen einzeln beantwortet werden:

1. Kann die DEM den Werkstoff als ein Kontinuum und Diskontinuum im mechanischen und thermischen Feld beschreiben?
2. Kann bewiesen werden, dass die DEM als numerische Methode im mechanischen und thermischen Feld uneingeschränkt verwendet werden darf?
3. Kann die DEM die statistischen Schwankungen in der Festigkeit bei statischen Lasten simulieren?
4. Kann das Verfahren die Lebensdauer eines Werkstoffs bei dynamischen Lasten simulieren?
5. Ist die numerische Methode auch in der Lage, die Wärmeflüsse bzw. die Temperaturen des thermischen Feldes bei vorgegebenen Temperaturreandbedingungen und/oder Wärmequellen, -senken, zu bestimmen?
6. Kann die DEM die oben aufgeführten Disziplinen bzw. Felder in einem Netz miteinander verbinden bzw. koppeln?

1.4 Aufbau der Arbeit

Gemäß der Liste in Abschnitt 1.3 ist die Arbeit so aufgebaut, dass die aufgeführten Fragen beantwortet werden.

Da die vorliegende Arbeit sehr viele Disziplinen beinhaltet, wie z.B. die numerische Umsetzung der Werkstoffmodelle im mechanischen, thermischen und thermo-mechanischen Feld, ist in Abb. 1.1 das Zusammenspiel der einzelnen Disziplinen dargestellt.

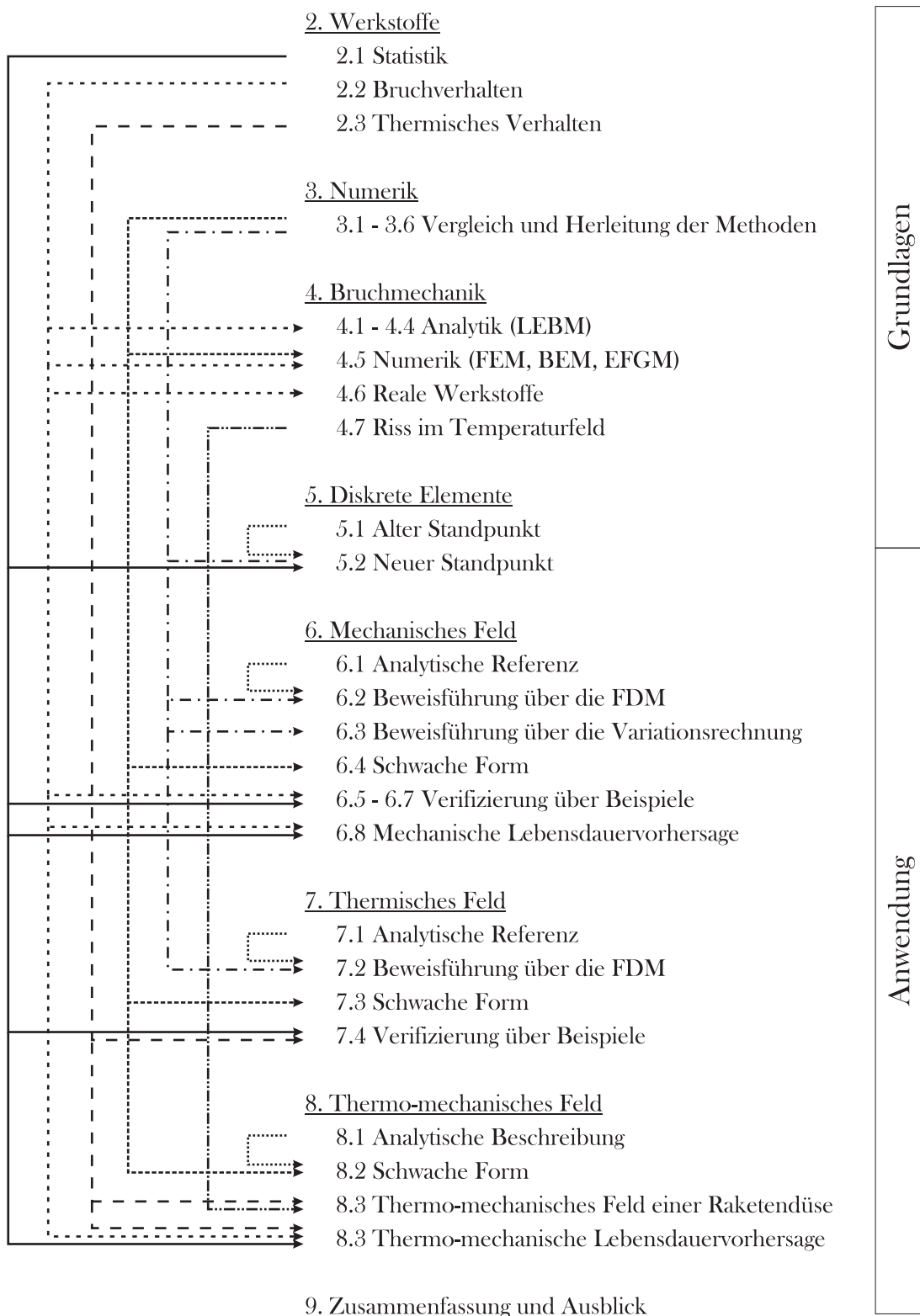


Abbildung 1.1: Aufbau der Arbeit und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Kapiteln und Abschnitten.

2 Metallische Werkstoffe

Diese Arbeit beschränkt sich darauf, die wesentlichen Aspekte der metallischen Werkstoffe, die für die Modellierung bzw. die Verifikation der numerischen Modelle erforderlich sind, hervorzuheben.

Metallische Werkstoffe werden entsprechend ihrer räumlichen Gitterstruktur, die durch die Anordnung der Atome gebildet wird, in drei Gruppen eingeteilt. Die kleinste immer wiederkehrende Einheit des Gitters wird Elementarzelle genannt. Die drei wichtigsten Elementarzellen sind das kubisch-flächenzentrierte Gitter (kfz), das kubisch-raumzentrierte Gitter (krz) und der hexagonale Gitteraufbau (hex), siehe hierzu auch die Abbildungen in Tab. 2.1. Werkstoffe in denen die Atome in Form eines Gitters angeordnet sind bezeichnet man als kristallin. Das Anreihen der Elementarzellen bzw. der Atome erfolgt beim Erstarren der Schmelze entweder an Keimzellen oder an Verunreinigungen.

Bei Werkstoffen die aus mehreren atomaren Grundelementen bestehen binden sich beim Erstarrungsprozess Atome mit niedriger Schmelztemperatur an die bereits erstarrten Elemente mit höherer Schmelztemperatur und bilden Kristalle. Die Kristalle wachsen beim Erstarren so lange, bis sie aneinander stoßen. Liegen in einer erstarrenden Schmelze viele Atome mit niedriger Schmelztemperatur vor, so werden die noch flüssigen Komponenten vor den Erstarrungsfronten her geschoben und erstarren später an den Grenzen der bereits erstarrten atomaren Strukturen mit der höheren Schmelztemperatur. Die im weiteren Wachstum behinderten Kristalle bezeichnet man als Körner und die Grenze zwischen ihnen als Korngrenzen. Der kristalline Aufbau eines Werkstoffs ist durch die vielen Kristalle mit ihren unterschiedlichen Ausrichtungen imperfekt. Weitere Defekte sind unter anderem freie Gitterpunkte und eingelagerte Fremdatome in der Gitterstruktur. Die eingelagerten Fremdatome sind entweder interkristallin in der Gitterstruktur oder zwischen den Atomen der Gitterstruktur [26, 208], siehe Abb. 2.1.

Metallische Werkstoffe sind polykristallin, bedingt durch den ungleichmäßigen Abkühlvorgang und die hohe Anzahl von Keimzellen. Die räumliche Ausrichtung ihrer Gitterstruktur ist zufällig. Die Größe der Körner kann, je nach Werkstoff, geringfügig durch die Abkühlgeschwindigkeit und die Anzahl der Keimzellen gesteuert werden [144].

Die mechanischen Eigenschaften von Werkstoffen werden im Wesentlichen von den folgenden Faktoren beeinflusst:

1. der inneren Gitterstruktur bzw. dem kristallinen Aufbau,

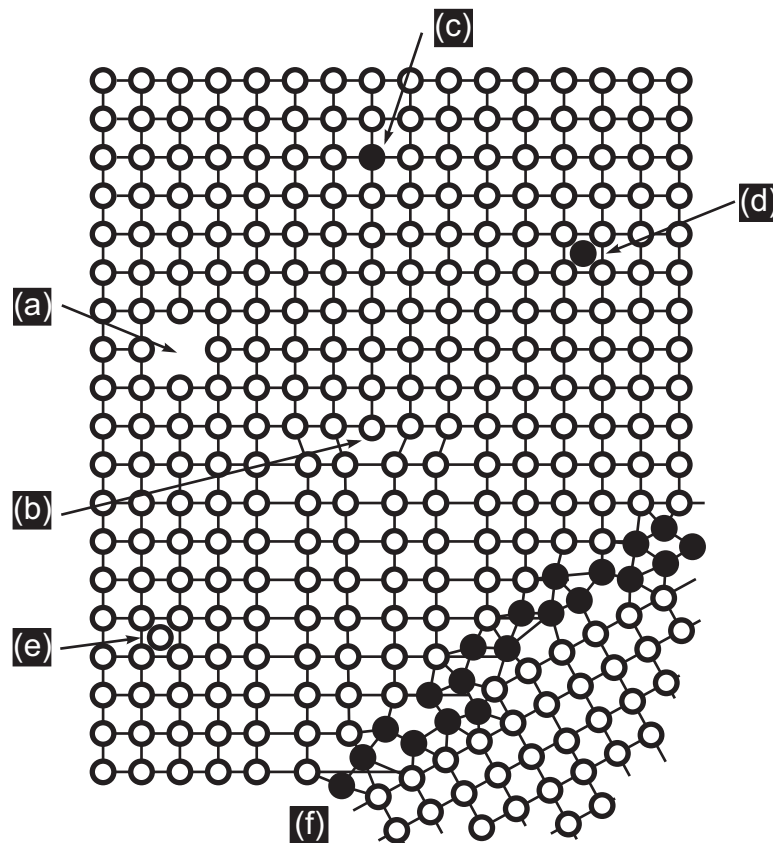


Abbildung 2.1: Schematisch dargestellte Gitterdefekte: (a) Gitterlücke, (b) Stufenversetzung in der Gitterstruktur, (c) Fremdatome, die im Grundwerkstoff ein Substitutionsmischkristall bilden, (d) eingelagertes Fremdatom, (e) Zwischengitteratom, (f) der erstarrende Werkstoff schiebt Fremdatome solange vor der Erstarrungsfront her, bis zwei Körner aneinander stoßen. Die Korngrenze wird dann von Fremdatomen gebildet.

2. dem stochastischen Wachstum der Körner und deren Größe während des Erstarrens,
3. den metallischen Bindungskräften auf der atomaren Ebene (neben dieser Bindungskraft für Metalle gibt es u.a. noch die Ionenbindung, die Elektronenpaarbindung und die VAN DER WAALS-Bindung),
4. den Einlagerungen im kristallinen Aufbau,
5. der Struktur und der Zusammensetzung der Korngrenzen und
6. der Korngröße und der Orientierung des Gitteraufbaus im Korn. Je weniger Körner, desto mehr prägt die zufällige Ausrichtung der wenigen Kristallgitter das mechanische Verhalten. D.h. bei größeren Körnern schwanken die mechanischen Eigenschaften mehr als bei kleinen Körnern.

2.1 Statistik metallischer Werkstoffe

Werkstoffe, bzw. deren Laborproben, verhalten sich unterschiedlich. Die Streubreite der Laborergebnisse hängt unter anderem vom Werkstoff, der Legierung, der Temperatur und den Umgebungsbedingungen ab. Dies erschwert es dem Ingenieur mit diesen Werkstoffen versagenssichere Konstruktionen zu entwickeln. Ein statistisches Verfahren, das die Laborergebnisse von Werkstoffen und deren Streuung gut beschreibt, ist das von WEIBULL [230, 231]

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{R_m}{\sigma_{Sk}} \right)^m \right] \quad \text{bzw.} \quad P(\sigma) = - \exp \left[- \left(\frac{R_m}{\sigma_{Sk}} \right)^m \right]. \quad (2.1)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $F(\sigma)$ die Verteilungsfunktion oder die Ausfallwahrscheinlichkeit, $P(\sigma)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Probe hält, m ist der Formparameter (Parameter, der die Streuung beeinflusst), R_m ist die Spannung bei der die Probe versagt und σ_{Sk} ist neben m ein Skalenparameter der nicht mit dem Mittel- oder Erwartungswert der WEIBULLverteilten Spannungen zu verwechseln ist.

In Gl. (2.1) beeinflusst der Formparameter m nicht nur die Verteilungsfunktion (d.h. deren Streubreite), sondern auch den Mittelwert der Ergebnisse. Für jeden Werkstoff sind σ_{Sk} und m spezifisch zu ermitteln. Große Werte für m bedeuten, dass die Ergebnisse nahe beieinander liegen und wenig streuen. Da die Festigkeitswerte für Metalle wenig variieren, liegt der Formparameter für diese bei ungefähr $m_{\text{Metall}} \approx 100$ [62].

Der Erwartungs- oder Mittelwert $E(\sigma)$ kann mit

$$E(\sigma) = \sigma_{Sk} \bar{\Gamma}(\bar{m}) \quad \text{mit} \quad \bar{m} = \frac{1+m}{m}. \quad (2.2)$$

berechnet werden, wobei $\bar{\Gamma}$ die Gammafunktion nach GAUSS ist [43]. Die Gammafunktion ist eine Funktion des Formparameters m . Wenn numerische Simulationen von Materialien mit einer WEIBULLverteilung durchgeführt werden, so wird mit Hilfe der Gammafunktion und Gl. (2.2) der Mittelwert der Materialparameter in Gl. (2.1) eingestellt und man erhält

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{R_m}{E(\sigma)} \bar{\Gamma}(\bar{m}) \right)^m \right] \quad \text{bzw.} \quad P(\sigma) = - \exp \left[- \left(\frac{R_m}{E(\sigma)} \bar{\Gamma}(\bar{m}) \right)^m \right]. \quad (2.3)$$

Die Untersuchungen von WEIBULL beziehen sich lediglich auf die Spannungen. Tatsächlich variieren aber alle Materialparameter um einen Mittelwert. Bei Metallen unterliegt der Elastizitätsmodul einer Variation von 5%, die Streckgrenze 7%, die Bruch- oder Festigkeitsgrenze 5%, die Bruchzähigkeit 15% und die Dauerfestigkeit hat die größte Variation mit 50%. Entsprechend der für das Tragwerk verlangten Sicherheit und der Streuung

der Werte müssen die aus den Laborergebnissen ermittelten Erwartungs- oder Mittelwerte abgemindert werden [71].

Die in den Werkstofftabellen angegebenen Festigkeitswerte entsprechen einer Überlebenswahrscheinlichkeit von 97,5% [18, 133]. Die Übertragung auf reale Bauteile erfolgt mittels der FKM-Richtlinie, in der unter anderem Bauteilkennwerte für die Bauteilgröße, die Anisotropie, den Temperatureinfluss und weitere Abschwächungsfaktoren angegeben sind [25, 115].

2.2 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe

Das Bruchverhalten von Werkstoffen ist sehr komplex. Die Bruchmerkmale ergeben sich aus den jeweiligen Beanspruchungsarten [26]. Man unterscheidet zwischen

1. dem Duktil- (bzw. Zäh-) und Sprödbbruch infolge einer quasi-statischen bzw. zügig aufgebrachten Last siehe Abb. 2.2
2. Dauerbrüchen infolge schwingender Last
3. Kriechbrüchen infolge langzeitiger Beanspruchung.

2.2.1 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe bei quasi-statischen Lasten

Der Werkstoff hat bei einer zügig aufgebrachten Last die höchste Festigkeit. Diese ist, bedingt durch die zufällige Anordnung der kristallinen Struktur, WEIBULL verteilt.

Die meisten Werkstoffe zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen linear elastischen Bereich haben, in dem die Dehnungen reversibel sind. An den elastischen Bereich schließt ein mehr oder minder großer plastischer Bereich an, von dem Dehnungen im Werkstoff zurück bleiben. Ist der plastische Bereich klein, so verhält sich der Werkstoff spröde. Bei einem ausgeprägten plastischen Bereich nennt man ihn duktil. Die Grenze zwischen dem elastischen und plastischen Bereich wird als Fließgrenze ϵ_f bezeichnet.

Im elastischen Bereich gilt das Gesetz von HOOKE und im plastischen Bereich das Potenzgesetz, siehe Abb. 2.3.

$$\text{linear elastischer Bereich: } \sigma_{\text{elast}} = E \cdot \epsilon_{\text{elast}} \quad (2.4)$$

$$\text{plastischer Bereich: } \sigma_{\text{plast}} = C \cdot \epsilon_{\text{plast}}^n, \quad (2.5)$$

wobei σ die Spannung im elastischen und plastischen Bereich, ϵ die Dehnung, R_m die Zugfestigkeit und $R_{p0,2}$ die Streckgrenze des Werkstoffs ist. Die materialspezifischen

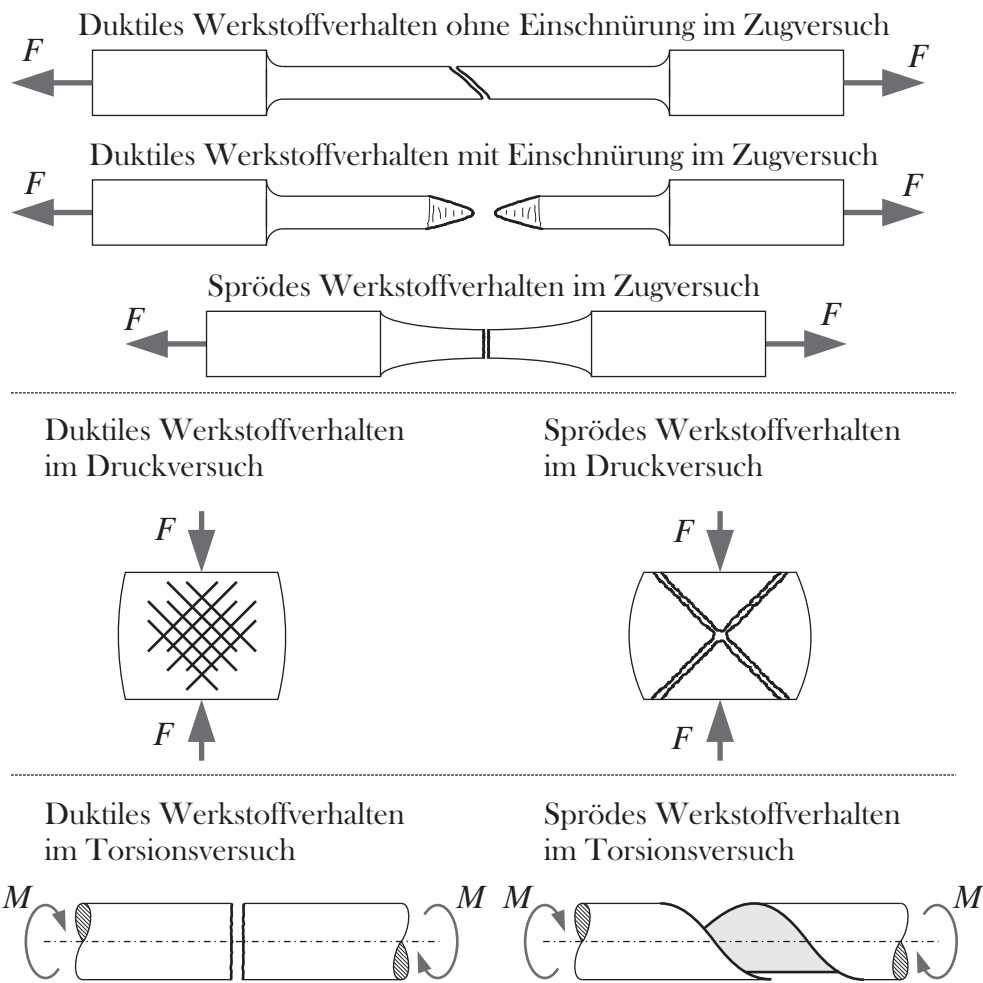


Abbildung 2.2: Prinzipielle Darstellung der Bruchformen von duktilen und spröden metallischen Werkstoffen mit rundem Probenquerschnitt. Die Abbildungen der Bruchformen sind der Literatur entnommen [71, 133].

Werkstoffparameter sind der Elastizitätsmodul E sowie die Steifigkeit im plastischen Bereich C und der Exponent n . Werte für die Werkstoffparameter E , C und n können der Literatur entnommen werden [126]. Die Gesetzmäßigkeiten der Gln. (2.4) und (2.5) sind nur gültig, wenn die Temperatur konstant bleibt.

Spröde Werkstoffe sind zum Beispiel Gusseisen, Porzellan, Glas und auch Titan. Die Querkontraktion ν dieser Werkstoffe ist in der Regel kleiner als $1/3$. Duktile Werkstoffe wie z.B. Blei, Kupfer und Aluminium haben hingegen Querkontraktionszahlen die größer als $1/3$ sind.

Das Bruchverhalten wird im Wesentlichen von der Beschaffenheit der inneren Gitterstruktur (kfz, krz oder hex) beeinflusst. Brüche werden durch Gleitung oder Trennung bzw. Spaltung der Atome hervorgerufen. Die erste Bruchform nennt man den Duktil-

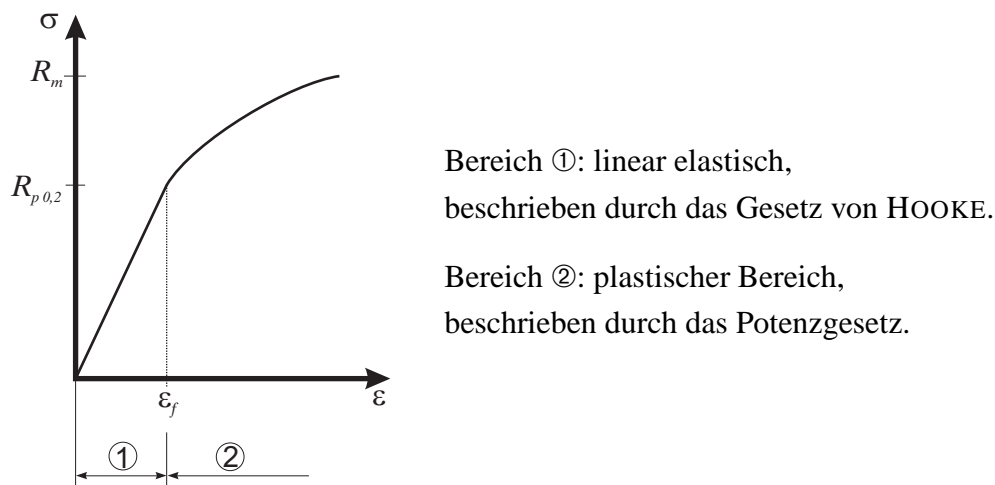


Abbildung 2.3: Das Verhalten von duktilen Werkstoffen ist in den linear elastischen Bereich, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt und den plastischen Bereich in dem das Potenzgesetz gilt, unterteilt.

bruch, die letztere den Spröbruch, vergleiche Abb. 2.2. Spaltung findet senkrecht zu den gering besetzten Gitterebenen statt, weil in ihnen die Zahl der zu brechenden Bindungen am kleinsten ist. Hingegen liegt Gleiten vor, wenn die Kristallebenen der jeweils am dichtesten belegten Kristallebenen übereinander gleiten. Der Widerstand gegen Gleiten wird zum einen durch den Abstand der Atome und zum anderen durch die mögliche Anzahl der Gleitebenen und Gleitrichtungen beeinträchtigt. Je dichter die Atome gepackt sind, umso weniger stehen sie sich beim Abgleiten im Weg. Werkstoffe mit kubisch-flächenzentrierten Gittern sind am leichtesten verformbar und gelten als duktil. Hingegen gelten Werkstoffe mit hexagonalem Gitter als spröde. Sie haben einen deutlich geringeren plastischen Bereich da sie nur wenige Gleitebenen, die auch schwieriger zu aktivieren sind, besitzen. Verschiedene Werkstoffe, deren Gitteraufbau sowie die Anzahl der Gleitebenen sind in Tab. 2.1 aufgelistet. Tieferegehende Erklärungen können der Literatur entnommen werden [71, 200].

Beim Gleit- und Trennbruch liegen die in der Praxis erreichten Festigkeitswerte um Größenordnungen unterhalb der theoretischen Gitterfestigkeit. Dies erklärt sich aus der Existenz kleiner Anrisse und Imperfektionen im kristallinen Aufbau (z.B. Einlagerungen, dem stochastischen Wachstum der Kristalle, deren Größe, den Korngrenzen selbst und der Orientierung des Gitteraufbaus). Einlagerungen in der Gitterstruktur können zum einen den kristallinen Aufbau verzerren und somit bei ungünstiger Platzierung das Abgleiten und im Weiteren Risse initiieren und zum anderen auch Risse stoppen. Ersteres ist für den Werkstoff negativ und letzteres positiv.

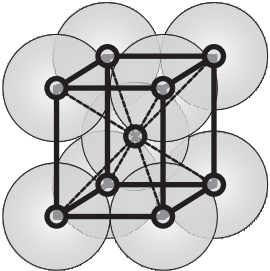
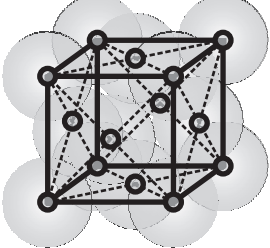
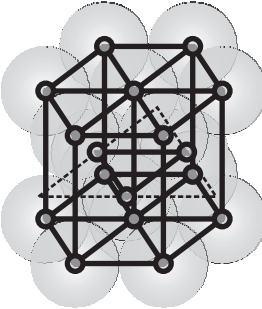
		
Kubisch-raumzentriert (krz)	Kubisch-flächenzentriert (kfz)	Hexagonale Gitterstruktur (hex)
Chrom, Wolfram, Molybdän, Niob, Vanadium, Eisen bei $T < 911^\circ\text{C}$	Aluminium, Gold, Kupfer, Blei, Nickel, Platin, Eisen bei $T > 911^\circ\text{C}$	Cadmium, Zink, Titan, Magnesium

Tabelle 2.1: Einteilung einiger Werkstoffe nach deren Gitterstrukturen, die für das duktile oder spröde Werkstoffverhalten verantwortlich sind.

Je nach Werkstoff können Korngrenzen ebenfalls Risse stoppen und das Risswachstum blockieren. Es ist aber auch möglich, dass Korngrenzen als Schwachstelle des polykristallinen Werkstoffs fungieren und Risse somit entlang der Korngrenzen entstehen und wachsen. Aus Beobachtungen ist bekannt, dass ein metallischer Werkstoff selbst bei sehr geringen Lasten, also noch im linear elastischen Bereich, Mikrorisse bildet, welche aber dann in ihrem Wachstum behindert werden [26, 126, 205]. Wie weit ein Riss wächst, hängt von den Einlagerungen und der Korngröße ab. Dies ist hinsichtlich der Lebensdauer sehr wichtig, siehe Abschnitt 2.2.2.

Gleitbrüche in polykristallinen (und quasiisotropen) Werkstoffen verlaufen in Richtung der maximalen Schubspannung, also unter $\pm 45^\circ$ zur Hauptspannungsrichtung, und Spaltbrüche verlaufen senkrecht zur größten Hauptspannungsrichtung. Auch Mischbrüche, d.h. Brüche mit Gleit- und Spaltbruchanteilen, sind möglich. Deshalb ist eine einwandfreie Zuordnung von Duktil- oder Sprödbbruch nur bedingt möglich. Zum Beispiel können instabile Risse, d.h. Risse mit Wachstum, bei explosionsartiger Ausbreitung Geschwindigkeiten erreichen, die bis an die Schallgeschwindigkeit des Werkstoffs herangehen und dann einen Sprödbbruch zur Folge haben, obwohl der Werkstoff duktil ist [26].

Dem kubisch-flächenzentrierten Metallgitter ist bei Temperaturabsenkung ein Übergang vom Duktilbruch zum Sprödbbruch eigentümlich. Ausgangspunkt dieser Temper-

aturversprödung ist eventuell die einsetzende Blockierungswirkung der Einlagerungen auf die Versetzungsbewegungen, infolge nachlassender Atomschwingungen bzw. Atombewegungen. Bei abnehmenden Temperaturen nimmt außerdem die Festigkeit des metallischen Werkstoffs zu, da mit Erschwerung der mikroplastischen Vorgänge die Rissbildungs- und Rissausbreitungseffekte verloren gehen. Selbst der Sprödbbruch läuft bei niedrigen Temperaturen anders ab als bei hohen [26]. Dieses Thema ist nach wie vor Gegenstand der aktuellen Forschung.

2.2.2 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe bei dynamischen Lasten

Dynamische Lasten führen zu den sogenannten Dauerbrüchen oder Ermüdungsbrüchen. Sie werden durch schwingende Beanspruchungen hervorgerufen, obwohl die Beanspruchung selbst noch im elastischen Bereich des Werkstoffs liegt. Faktoren die u.a. auf die Dauerfestigkeit, d.h. Anzahl der ertragbaren Lastzyklen, einwirken sind

- die Umgebungsbedingungen (Temperatur, Feuchtigkeit, chemische Einwirkungen),
- die Bauteilgeometrie (Form und Größe des Bauteils, Kerben, Einschnitte, Krafteinleitungen),
- der Werkstoff (Legierung, Gittertyp, Korngröße, Verunreinigungen),
- der Herstellungsprozess (maschinelle Bearbeitung, Schmieden),
- die Prüffrequenz, wobei eine Frequenzunabhängigkeit beobachtet wird, wenn die Prüffrequenz kleiner als ca. 2 – 5% der Eigenfrequenz ist,
- und der Oberflächenzustand.

Ein Faktor der einen sehr starken Einfluss auf die Dauerfestigkeit hat sind die Kerben, da diese zu Spannungskonzentrationen führen, vergleiche Abschnitt 4.1. Dabei ist grundsätzlich aber auch ein Dauerbruch an Bauteilen, die von der Konstruktion her keine spannungserhöhenden Kerben besitzen, möglich.

Die zum Dauerbruch führenden zyklischen Vorgänge bewirken innere Versetzungen, oder Gleitungen, welche die Atome hin und her bewegen und je nach Werkstoff (Gitteraufbau, Einlagerungen, usw.) unterschiedlich groß sind und unterschiedliche Richtungen haben können. Ein Dauerbruch beginnt mit der Entstehung von Mikrorissen, die eine Folge des Abgleitens einzelner Atome auf den Gitterebenen innerhalb des Kristallgitters sind, wobei das Abgleiten der Gitterebenen durch bestehende Versetzungen begünstigt wird. Bei polykristallinen Werkstoffen oder Legierungen sind mehrere Gleitsysteme an der Entstehung von Mikrorissen beteiligt. Wird ein Gleitsystem blockiert, so wird eine andere Gleitebene aktiviert. Dadurch kommt es nach und nach in zunehmendem Maß zu lokalen Verfestigungen, die bei weiter wirkender Last plötzlich aufreißen können und

kleine Klaffungen oder Mikrorisse im Werkstoff bilden. Der Werkstoff sucht sich im Folgenden selbst neue Lastpfade, wobei der beschriebene Vorgang sich so oft wiederholt, bis die vielen Mikrorisse zu einem Makroriss zusammen gewachsen sind. Das Abgleiten der Gitterebenen entsteht nicht nur im Inneren des Werkstoffs, sondern oft auch am Probenrand, da dort weniger Hindernisse für die Bewegung vorhanden sind [26, 205].

Ermüdungs- oder Dauerbrüche weisen nicht die typischen makroplastischen Verformungserscheinungen auf, wie dies bei quasi-statischen oder zügigen Belastungen der Fall ist. Auf einer Ermüdungsbruchfläche lassen sich zwei bis drei verschiedene Zonen erkennen. Zuerst eine glatte Bruchfläche, welche die eigentliche Dauerbruchfläche mit einer relativ niedrigen Rissausbreitungsgeschwindigkeit darstellt. Diese geht dann in eine zweite gröbere Zone über, in der sich der Riss mit erhöhter Geschwindigkeit ausbreitet und in der dritten Zone erfolgt der Bruch des Restquerschnitts als spröder oder duktiler Gewaltbruch [26, 126].

Zur Ausbildung des Bruchs ist je nach Beanspruchungshöhe eine bestimmte Anzahl von Schwing- oder Lastzyklen N erforderlich. Diese Anzahl entspricht der Lebensdauer, welche durchaus, je nach Werkstoff, Größenordnungen von $N = 10^7$ Zyklen und mehr erreichen kann. Üblicherweise werden die Belastungen, bzw. Spannungen, als Funktion der Beanspruchungszyklen in sogenannten WÖHLERkurven dargestellt. Diese Darstellung und diese Bezeichnung beziehen sich auf den Eisenbahningenieur WÖHLER, der zwischen 1850 und 1870 als einer der Ersten Schwingversuche an Eisenbahnachsen durchführte [241, 242, 243, 244]. Die ersten Schwingprüfungen führte aber nach heutigem Kenntnisstand der Oberbergrat ALBERT in Clausthal an geschweißten Ketten durch [2].

In der Praxis ist das Tückische an Dauerbrüchen, dass während der Ermüdung keine makroskopischen Verformungen zu erkennen sind. Die mikroskopischen Risse wachsen plötzlich und schnell zu einem Makroriss zusammen. Durch zerstörungsfreie Prüfmethoden kann ein Dauerbruch erst kurz vor dem globalen Versagen entdeckt werden. Deshalb wird es in zunehmendem Maß wichtig, die Lebensdauer auf numerischem Weg abzuschätzen.

Ein WÖHLER-Versuch ist ein dynamischer Ermüdungsversuch mit einer sinusförmigen Last. Dabei wird die Mittelspannung σ_0 und die Spannungsamplitude σ_A bis zum Bruch konstant gehalten. Die Ergebnisse der Wöhlerversuche werden in doppelt-logarithmischer Darstellung, mit der Spannungsamplitude σ_A auf der Ordinate und der Schwingspielzahl N auf der Abszisse, aufgetragen. Für jedes Lastniveau werden mehrere Versuche durchgeführt. Die Ergebnisse für die Lebensdauer sind WEIBULL verteilt, d.h. sie haben einen Mittelwert und eine Streubreite (Standardabweichung). Werden die Durchschnittswerte der einzelnen Lastniveaus miteinander verbunden, so ergibt sich die

sogenannte WÖHLER-Kennlinie, siehe Abb. 2.4. Die WÖHLER-Kennlinie kann in drei Bereiche aufgeteilt werden:

1. den *low-cycle-fatigue*-Bereich oder LCF-Bereich (Bereich der Kurzzeitfestigkeit)
2. den *high-cycle-fatigue*-Bereich oder HCF-Bereich (Zeitschwingfestigkeitsbereich)
3. und den *endurance-limit*-Bereich (Dauerschwingfestigkeitsbereich).

Der *low-cycle-fatigue*-Bereich (LCF) umfasst nur eine kleine Anzahl von Schwingspielen. In diesem Bereich geht die WÖHLER-Kurve in einen linear abfallenden Bereich über.

Der *high-cycle-fatigue*-Bereich ist der linear abfallende Bereich der WÖHLER-Kennlinie. Er wird mit der BASQUIN-Gleichung beschrieben [14, 39, 133].

$$\sigma_A = \left(\frac{A}{N} \right)^{1/b} \quad (2.6)$$

In dieser Gleichung ist A die Verschiebungskonstante im Achsenabschnitt der WÖHLER-Kurve, d.h. mit ihr lässt sich die BASQUIN-Gerade horizontal verschieben, und b ist der Ermüdungs- oder Neigungsexponent der BASQUIN-Gerade. σ_A ist die Spannungsamplitude und N die Zyklenzahl eines vollständigen Sinus.

Im *endurance-limit*-Bereich muss eine Unterscheidung zwischen Eisenwerkstoffen (mit ihren kubisch raumzentrierten Gitterstrukturen) und Nichteisenmetallen (kubisch flächenzentriertes Gitter) vorgenommen werden. Bei dem erstgenannten Werkstoff zeigt sich ab einer Schwingspielzahl von ca. $1 \cdot 10^6$ bis $5 \cdot 10^6$ ein annähernd horizontaler Verlauf. Hingegen zeigt das Streuband der Nichteisenmetalle diesen ausgeprägt flachen Bereich nicht auf, oder sehr viel später und auf niedrigerem Spannungsniveau. D.h. Nichteisenmetalle besitzen, wenn überhaupt, keinen ausgeprägten Dauerfestigkeitsbereich, siehe Abb. 2.4. Der Schnittpunkt der Dauerfestigkeitskurve mit der BASQUIN-Geraden (Gl. (2.6)) wird als Eckschwingspielzahl N_D bezeichnet [133]. Diese wird später im Abschnitt 6.8 wieder aufgegriffen, wenn es um die Modellierung der WÖHLER-Kurve geht.

Die WÖHLER-Versuche werden in aller Regel kraftgesteuert durchgeführt, wobei der Versuch aber auch dehnungsgesteuert gefahren werden kann. Dehnungsgesteuerte Versuche führen zu Kennlinien, die nicht dem typischen Verlauf der kraftgesteuerten WÖHLER-Kennlinie entsprechen. Einen ausführlichen Überblick über das Thema Dauerfestigkeit gibt HAIBACH und SCHÜTZ [110, 209].

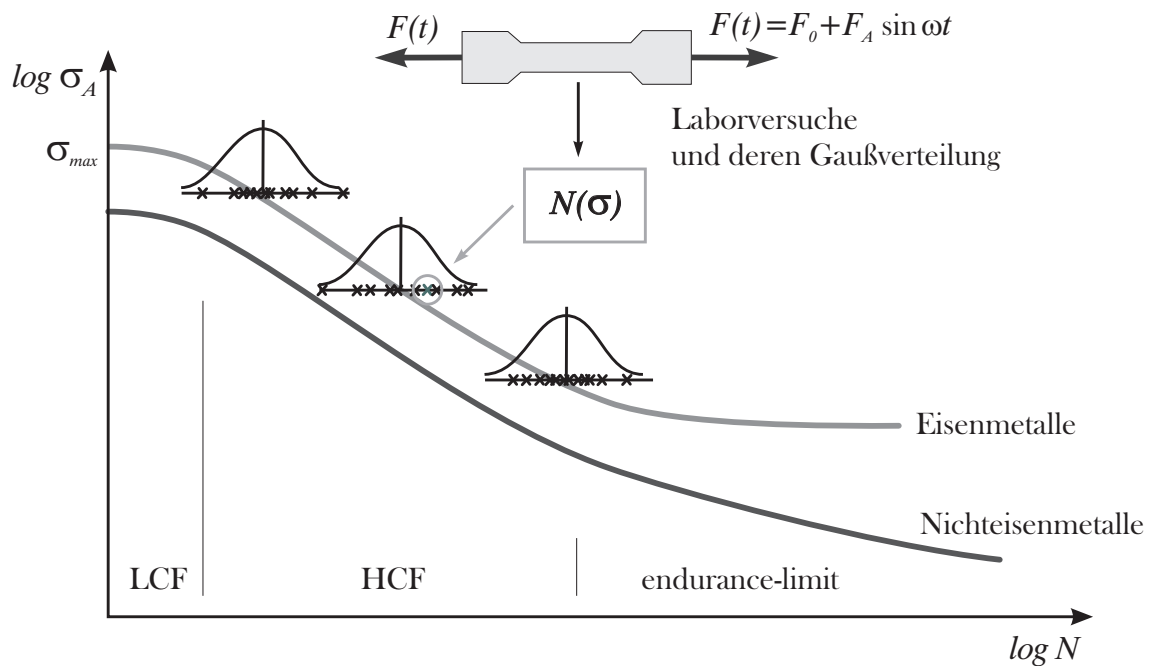


Abbildung 2.4: Proben werden bei den jeweiligen Lastniveaus bis zum Versagen belastet, wobei F_0 die Mittellast, F_A die Lastamplitude und ω die Frequenz ist, mit der sich die Last ändert. Die Anzahl der Lastzyklen N wird statistisch ausgewertet um einen Mittelwert zu finden, aus welchem eine Lebensdauerkurve oder WÖHLER-Kurve konstruiert wird. Die dargestellte WÖHLER-Linie entspricht einer Ausfallwahrscheinlichkeit von z.B. 50%. Die Einteilung der WÖHLER-Kennlinie erfolgt in einen LCF, HCF und in einen Dauerfestigkeitsbereich (endurance-limit). Nichtmetallische Werkstoffe besitzen keinen ausgeprägten Dauerfestigkeitsbereich.

2.2.3 Bruchverhalten metallischer Werkstoffe bei statischer Dauerlast

Kriechbrüche starten an kleinen Poren oder Hohlräumen, in denen sich viele Risse bilden. Ein Kriechbruch kann noch nach sehr langer Zeit nachdem die Last aufgebracht wurde, erfolgen. Bei Dauerbrüchen oder Ermüdungsbrüchen bilden sich im Gegensatz dazu nur wenige keilförmige Risse. In der Regel sind die Kriechbrüche Duktilbrüche, welche durch erhöhte Temperaturen in ihrer Entstehung und Ausbreitung gefördert werden. Bei niedrigen Temperaturen neigen Metalle eher zum Verspröden, d.h. die Neigung zum Kriechen nimmt ab. Kriechbrüche treten bei metallischen Werkstoffen bei Raumtemperatur kaum auf. Erst ab einer Temperatur von ca. 40% der Schmelztemperatur des Werkstoffs nimmt die Tendenz zum Kriechbruch zu. Bei hohen Temperaturen neigen metallische Werkstoffe dann zu interkristallinen Kriechbrüchen, d.h. der Bruch verläuft entlang der Korngrenzen [26]. Bei Kunststoffen ist der Effekt des Kriechbruchs hingegen oft auch bei Raumtemperatur zu beobachten.

2.3 Thermisches Verhalten metallischer Werkstoffe

Die Temperatur hat, wie oben beschrieben, einen Einfluß auf die mechanischen Eigenschaften. Umgekehrt können aber auch mechanische Effekte Temperaturquellen oder -senken im Werkstoff bilden. Diese Kopplung zwischen dem mechanischen und thermischen, bzw. dem thermischen und mechanischen Effekt, ist unterschiedlich stark ausgeprägt und wird in Kapitel 8 näher erläutert.

Erste Hinweise auf eine Temperaturänderung in Werkstoffen infolge einer mechanischen Last hat bereits 1805 von GOUGH gegeben, als er Gummi untersuchte [99]. GOUGH beobachtete bei Kautschuk eine Temperaturerhöhung beim Verbiegen von Proben, die auf innere Reibung, also auf plastische Effekte, zurückzuführen ist. In den Jahren nach GOUGHS Beobachtung wurde das thermische Feld vom mathematischen Standpunkt aus analysiert. Dabei wurde der nicht-reversible Effekt (Hysterese) in die Energiebilanz als Entropieterm mit einbezogen. Der Hysterese-Effekt tritt in metallischen Werkstoffen auf sobald diese plastifizieren.

Ein weiterer Hinweis auf eine Temperaturänderung in Werkstoffen infolge einer mechanischen Last, der unabhängig vom GOUGH-Effekt ist, erfolgte 1830 durch WEBER [229]. Er stellte an Pianosaiten die er plötzlich unter Zugspannung setzte fest, dass die Temperatur der Drähte abnimmt, solange die Last im linear elastischen Bereich verbleibt. Dieser Effekt ist reversibel, insofern die Pianosaiten nicht mit der Umgebung über Strahlung oder Konvektion Energie austauscht. Dieser Effekt wird als WEBER-Effekt bezeichnet und er tritt ausschließlich im linear-elastischen Bereich des Werkstoffs auf.

Der GOUGH-Effekt wird als *thermoplastischer Effekt* oder *Hysterese-Effekt* bezeichnet. Der WEBER-Effekt wird hingegen *thermoelastischer Effekt* genannt. In metallischen Werkstoffen überlagern sich der reversible WEBER-Effekt und der Hysterese-Effekt bzw. sie gehen langsam ineinander über. Dies liegt darin begründet, dass in metallischen Werkstoffen, besonders bei duktilen Werkstoffen, plastische Dehnungen und auch Mikrorisse bereits sehr früh im linear elastischen Bereich auftreten [26, 205]. Beide Effekte sind noch nicht mathematisch zu einer Formulierung gekoppelt worden, sondern lediglich getrennt. Eine vereinheitlichte Formulierung dürfte nach Meinung des Autors jedoch schwierig sein.

Die numerische Umsetzung und Implementierung von WEBER-Effekt und GOUGH-Effekt wird in Kapitel 8 im Detail erläutert.

3 Numerische Methoden

Um das Bruchverhalten sowie die Formulierungen in den verschiedenen Feldern numerisch umsetzen zu können, soll in diesem Kapitel eine kurze Übersicht über die verschiedenen Diskretisierungsverfahren gegeben werden.

Die numerischen Methoden dienen vom mathematischen Standpunkt aus dazu, den Verlauf der physikalischen Feldlinien durch das betrachtete Gebiet bei gegebenen Randbedingungen zu ermitteln. Das Feld wird analytisch durch partielle Differentialgleichungen beschrieben.

Bei den numerischen Methoden wird zwischen zwei Verfahren unterschieden. Diese sind die globale numerische Methode nach RAYLEIGH-RITZ und die lokalen Methoden, siehe Abschnitt 3.2. Bei den lokalen Methoden wird entweder das zu untersuchende Gebiet (Finite-Elemente-Methode oder Finite-Volumen-Methode) oder der Rand (Randelement-Methode) diskretisiert, oder aber das Gebiet wird lediglich mit Gitterpunkten versehen, ohne dass es unterteilt wird (Finite-Differenzen-Methode oder Elementfreie-Galerkin-Methode).

Die erste Idee, ein dreidimensionales Kontinuum in diskrete Bereiche die unter Last miteinander interagieren zu zerlegen, reicht bis in das Jahr 1868 zurück und findet sich in der Arbeit von KIRSCH [140]. KIRSCH betrachtete das Kontinuum unter anderem vom atomaren Standpunkt aus und verband die Moleküle mit elastischen Stäben, wobei er damit eigentlich die Atome meinte. Mittels eines Gleichungssystems versuchte er die Stabquerschnitte einer Gitterzelle so zu bestimmen, dass sich das räumliche Ersatzfachwerk wie das Kontinuum verhält. Außerdem beschrieb KIRSCH, dass die Nachbarstruktur ebenfalls geschwächt wird, wenn eine äußere Last die schwache Verbindung zweier Moleküle zum Aufreißen bringt und sich ein Riss im Weiteren auf diese Art fortpflanzen kann, siehe Abb. 3.1. Da das Fachwerk statisch unbestimmt ist, war der Aufwand zum Lösen des Gleichungssystems zu hoch, weswegen diese Idee dann in Vergessenheit geraten sein mag [143]. Allerdings ist sie aber sehr vielversprechend und dient als Basis für Rissfortschrittsimulationen mit diskreten Elementen in dieser Arbeit.

Ein Kontinuum in eine Fachwerkstruktur zu überführen wurde erst 1905 wieder von KLEIN und WIEGHARDT aufgegriffen, deren Überlegungen aber nur für den 2D-Fall gelten, siehe hierzu Abschnitt 3.6 und Kapitel 5.

In den Abschnitten 3.1 bis 3.6 wird ein kurzer Überblick über die heute gängigen

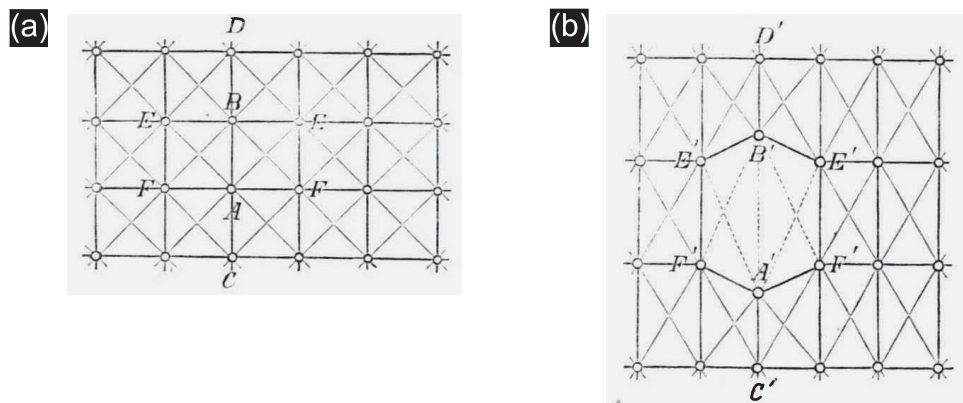


Abbildung 3.1: (a) Eine Struktur aus Molekülen, die mit elastischen Stäben miteinander verbunden ist, wird vertikal belastet. (b) Dabei trennen sich zwei Moleküle nach Erreichen der Stabilitätsgrenze voneinander und die Fachwerkstruktur klappt lokal auf. Die Verbindungen auf der linken und rechten Seite werden nun höher beansprucht. Bild und Erläuterungen stammen von KIRSCH [140].

numerischen Methoden gegeben. Sie werden einander am Beispiel eines physikalischen Problems, bei dem eine Strömung durch ein sich verengendes Rohr fließt, gegenübergestellt, siehe Abb. 3.2 (a). Das Gebiet wird mit Ω und der Rand mit Γ bezeichnet, siehe Abb. 3.2 (b).

3.1 Finite-Differenzen-Methode (FDM)

Numerische Methoden zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen wurden früh entwickelt, nachdem man erkannt hatte, dass analytische Lösungen nicht für alle Bauteilgeometrien gefunden werden können. Das älteste numerische Verfahren ist die Finite-Differenzen-Methode (FDM), welche auf STIRLING bis in das Jahr 1730 zurückzuführen ist [216]. Ausgebaut und auf einfache Differentialgleichungen (DGLn) angewandt wurde das Verfahren 1755 von EULER [76]. Im Weiteren wurde die FDM im Jahre 1860 von BOOLE auf partielle Differentialgleichungen übertragen, wodurch sich seither im mechanischen Feld Spannungen sowie im thermischen Feld Temperaturen einzeln und gekoppelt bestimmen lassen [35]. 1910 wandte RICHARDSON das Verfahren im großen Stil zur Festigkeitsanalyse eines Damms an [191].

Bei der FDM werden die Ableitungen der partiellen Differentialgleichung (P-DGL) mit ihren infinitesimalen Differenzen durch Differenzen mit finiter Größe ausgedrückt, die man Differenzenquotienten oder finite Differenzen nennt. Bei der FDM benötigt man Knotenpunkte in festgelegten Abständen, aus welchen die finiten Differenzen gebildet

werden.

Die Ableitungen der feldbeschreibenden Differentialgleichung werden durch TAYLOR-Reihen beschrieben, welche sich auf alle Gitterpunkte des Gebietes beziehen. Durch Addition und Subtraktion lassen sich die TAYLOR-Reihen zu den sogenannten Sternen kombinieren, siehe Abb. 3.2 (c) und (d). Diese Sterne müssen an jedem Knotenpunkt innerhalb des Gebietes angewandt werden, an dem ein Freiwert vorliegt. Die Genauigkeit der Methode richtet sich nach zwei Gesichtspunkten: Erstens nach dem Abstand zwischen den Gitterpunkten und zweitens nach dem zur Anwendung kommenden Finite-Differenzen-Stern und dem damit verbundenen Restfehler [168, 245].

Die FDM bestimmt den Verlauf und die Stärke der physikalischen Flussgröße durch das Gebiet Ω . Probleme treten mit dieser Methode an den Rändern auf, bei denen die Gitterpunkte über den Rand des Gebiets hinaus gehen, da dort kein Fluss vorhanden ist. Beschreibt man den Differenzenquotienten durch ein nicht-äquidistantes Gitter, so lassen sich die äußeren Knoten in das Gebiet verschieben, siehe Abb. 3.2 (d). Da die in das Gebiet verschobenen Knoten aber auch einen Freiwert darstellen, muss für diese Punkte auch ein Stern gefunden werden, was entweder nicht immer möglich ist oder zu Ungenauigkeiten führt, da die angepassten Sterne einen höheren numerischen Fehler mit sich bringen.

In der Mechanik ist die FDM durch die Finite-Elemente-Methode abgelöst worden. Es ist dem Autor nicht bekannt, dass die FDM zur Lebensdauerabschätzung eingesetzt wird. Einen guten Überblick über die FDM gibt [136].

3.2 Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die bekannteste numerische Methode ist die Finite-Elemente-Methode (FEM), welche 1956 von TURNER und CLOUGH ins Leben gerufen wurde [226]. Nach KURRER gelten als weitere Mitentwickler aus diesen Jahren ARGYRIS und ZIENKIEWICZ [151]. Diese Methode hat den Charme, dass das Tragwerk als solches mit glatten Rändern im Modell versehen ist, was bei der FDM nicht der Fall ist. Die FEM wurde schnell von mechanischen Problemen auf andere physikalische Gebiete übertragen, nachdem man erkannt hatte, dass die Basisformulierung für die FEM eine Variationsformulierung ist, welche dem *Minimum der potentiellen Energie* entspricht. Für das mechanische Feld wurde die Variationsformulierung von COURANT 1924 [61] und im Speziellen von HELLINGER 1914, bzw. von REISSNER 1950 beschrieben [117, 190].

Die FEM kann mittels dreier Varianten hergeleitet werden.

1. In der Mechanik wurde die FEM anfangs mittels dem virtuellen Arbeitssatz abgeleitet. ARGYRIS zeigte 1957, dass die Matrizenmethode, basierend auf dem virtuellen Arbeitssatz unter Verwendung von Einheitskräften oder Einheitsverschiebungen, zu den selben Ergebnissen führt [6]. Dies war für die Statik insofern wichtig, da das bis dahin relativ unbekanntes Deformationsverfahren dem Kraftgrößenverfahren gleich zog und fortan eine klare Unterscheidung zwischen dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) und dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) gemacht wurde. Auch erkannte man, dass die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie die Basis für das PvV und das PvK sind [151]. Beim PvK wird das Kraftfeld mit Ansatzfunktionen approximiert und das sich ergebende Gleichungssystem kann danach mittels den Krafrandbedingungen gelöst werden, die jedoch nicht immer bekannt sind. Beim PvV wird hingegen das Verschiebungsfeld mit Ansatzfunktionen approximiert und das Gleichungssystem wird anschließend mittels den stets bekannten Wegrandbedingungen gelöst. Deshalb hat sich für die FEM schließlich das PvV durchgesetzt.
2. Neben dem virtuellen Arbeitssatz kann die FEM auch mittels dem RAYLEIGH-RITZ-Verfahren abgeleitet werden. Zunächst haben Lord RAYLEIGH und RITZ unabhängig voneinander zur Lösung von Variationsproblemen globale Ansatzfunktionen verwendet [187, 194, 195]. RAYLEIGH benutzte zur Bestimmung der Eigenfrequenzen von Platten harmonische Funktionen, welche so aufgebaut waren, dass sie die Randbedingungen erfüllten. Diese harmonischen Funktionen setzte RAYLEIGH in das Funktional ein, um das Minimum der potentiellen Energie zu finden. RITZ verwendete hingegen Polynomansätze mit freien Koeffizienten, die ebenso die Randbedingungen erfüllen müssen. Nach Einsetzen der Polynomansätze in das Funktional und nach Integration kann das Potential nach den freien Koeffizienten abgeleitet werden, um das Minimum der potentiellen Energie zu finden. Die Methode, die Energie im Gebiet global mit einem oder mehreren Ansätzen zu beschreiben um das Minimum der potentiellen Energie zu finden, wird seither das RITZsche oder RAYLEIGH-RITZsche Verfahren genannt. Das Verfahren kann auch angewandt werden nachdem das Gebiet diskretisiert wurde, indem für jedes Teilgebiet lokale Ansätze in das Potential eingesetzt werden. Nach dem Zusammenfassen der Energieterme aus allen Teilgebieten, anschließender Integration und zuletzt dem Ableiten nach den Freiwerten, ergibt sich ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten.
3. Das Verfahren von GALERKIN aus dem Jahr 1915 ist die Basis um die Finiten-Elemente-Methode aus der Mechanik in andere physikalische Gebiete zu über-

tragen. Die Veröffentlichung von GALERKIN, die 1963 ins Englische übersetzt wurde, präsentierte eine Methode zum Lösen der Balkenbiegung und ein Verfahren zum Untersuchen von Beulvorgängen in mechanisch belasteten Platten [93]. GALERKIN, der die Variationsrechnung kannte, benutzte die feldbeschreibende DGL, multiplizierte diese mit einer Testfunktion und löste dann das Gebietsintegral. BUBNOV arbeitete mehrere Jahre vor Galerkin an diesem Thema, jedoch war der wesentliche Unterschied seiner Arbeit zu der von GALERKIN, dass er den Freiwert der feldbeschreibenden DGL als Wichtung benutzte und nicht eine oder mehrere Funktionen, die über das Gebiet gehen (wie GALERKIN dies tat). BUBNOV führte also eine Punktwichtung (Punktlokation) aus und GALERKIN eine globale Wichtung. Da BUBNOV das Prinzip der Wichtung erahnte und das Verfahren in einer Veröffentlichung vorstellte, wird das Verfahren auch das BUBNOV-GALERKIN-Verfahren genannt. Im Jahre 1940 erkannte PETROV, dass die Prozedur nach GALERKIN auch bei anderen Feldgleichungen angewandt werden kann und setzte die Methode erfolgreich auf dem Gebiet der nicht-linearen Hydrodynamik um [183]. Seither wird der Begriff GALERKIN-PETROV-Verfahren zumeist bei nicht-linearen Feldproblemen verwendet und die Bezeichnung GALERKIN-Verfahren fällt den linearen Feldproblemen zu [38]. Bei beiden Verfahren wird die gebietsbeschreibende DGL mit einer Testfunktion gewichtet und über das Gebiet integriert. Gemäß der Variationsrechnung ist die Testfunktion identisch mit der physikalischen Feldgröße bzw. der Feldfunktion.

Die mathematische Beschreibung der physikalischen Feldgleichungen ist mit dem virtuellen Arbeitssatz, dem RAYLEIGH-RITZschen Verfahren und dem GALERKIN-Verfahren gemäß der Variationsrechnung analytisch so lange exakt, bis die Feldlinien mit den Ansatzfunktionen approximiert werden. Einen guten Überblick über die Energiemethoden findet man z.B. in BETTEN, FINLAYSON, LANCZOS, REDDDY, WASHIZU und WUNDERLICH [28, 88, 153, 189, 228, 245].

Die FEM basiert darauf, dass das Gebiet Ω in Teilgebiete zerlegt wird, siehe Abb. 3.2 (e). Um das Minimum der potentiellen Energie zu finden, wird die Energieabsorption der Teilgebiete durch Verschiebungsansätze approximiert, siehe Abb. 3.2 (f). Die oben genannten Verfahren überführen das physikalische Problem in ein algebraisches Gleichungssystem. Dabei stellt die Lösung des Gleichungssystems mit den Freiwerten das globale Minimum der potentiellen Energie dar. Je besser die Ansatzfunktionen die Verschiebung beschreiben, desto genauer ist die Lösung. Dies bedingt aber, dass die Teilgebiete in denen die Feldlinien starken Änderungen unterliegen, feiner aufgelöst werden müssen.

Aufgrund des GALERKIN-Verfahrens konnten ab 1965 Berechnungen an thermischen

Feldern mit der FEM zum ersten Mal von WILSON, als dieser noch für AEROJET arbeitete, am Apollo Hitzeschild durchgeführt [237] werden, nachdem BIOT die Variationsformulierung des thermischen Feldes im Jahre 1955 beschrieben hatte [30, 31, 32]. Gekoppelte thermo-mechanische Feldberechnungen wurden 1968 von NICKELL und SACKMAN veröffentlicht [172], basierend auf den Variationsformulierungen aus dem Jahre 1963 von HERMANN [118]. Andere physikalische Bereiche wurden danach schnell von der Variationsformulierung erschlossen, so z.B. das thermo-magnetische Feld 1970 von PARKUS [181].

Einen kurzen geschichtlichen Überblick über die FEM liefern HIGGINS, CLOUGH, SAMUELSSON und ODEN [59, 121, 174, 203]. Einen tieferen Einblick in die Methoden und Verfahren der FEM geben BATHE, KNOTHE und ZIENKIEWICZ [15, 143, 248].

Die FEM wird in vielen physikalischen Gebieten eingesetzt. In der Strömungsmechanik haben sich jedoch andere Verfahren, wie z.B. die finiten Differenzen und die finiten Volumina, durchgesetzt. Die FEM wird unter anderem in der Mechanik zur Beschreibung von Rissen eingesetzt, siehe hierzu Abschnitt 4.5. Eine Lebensdauerabschätzung von Bauteilen mit der FEM ist nur bedingt in Verbindung mit dem *critical-plane-Verfahren* möglich [45, 179, 180].

3.3 Finite-Volumen-Methode (FVM)

Als jüngste numerische Methode hat sich die Finite-Volumen-Methode (FVM) etabliert. Neben der FDM und der FEM ist die FVM in der heutigen Zeit eine der wichtigsten numerischen Methoden auf dem Gebiet der CFD (computational fluid dynamics). An der Entwicklung der FVM aus den Jahren 1954 bis 1959, war GODUNOV maßgeblich mit beteiligt. Das Finite-Volumen-Verfahren basiert auf einem integralen Erhaltungssatz und nicht auf der partiellen Differentialgleichung. Die FVM wurde speziell dazu entwickelt, den Fluss durch ein Gebiet zu beschreiben, wobei die Flüsse über die Oberfläche bilanziert werden. Nach der Diskretisierung des Gebiets wird jedem Kontrollvolumen ein Knotenpunkt zugeordnet, welcher repräsentativ für den Mittelwert des diskreten Gebiets ist, d.h. die Freiwerte (Zustandsgrößen des Feldes) der integralen Flußbeziehung werden nicht wie bei der FEM oder FDM an den diskreten Gitterpunkten, sondern für den Knotenpunkt in der Mitte der Zelle bestimmt.

Die FVM setzt ein strukturiertes Gitter voraus. Bei einer wahllosen Diskretisierung des Gebiets in rechteckige und dreieckige Teilgebiete kann es an den Rändern, an denen der Fluss nicht senkrecht aus dem Gebiet austritt, zu numerischen Rundungsfehlern kommen,

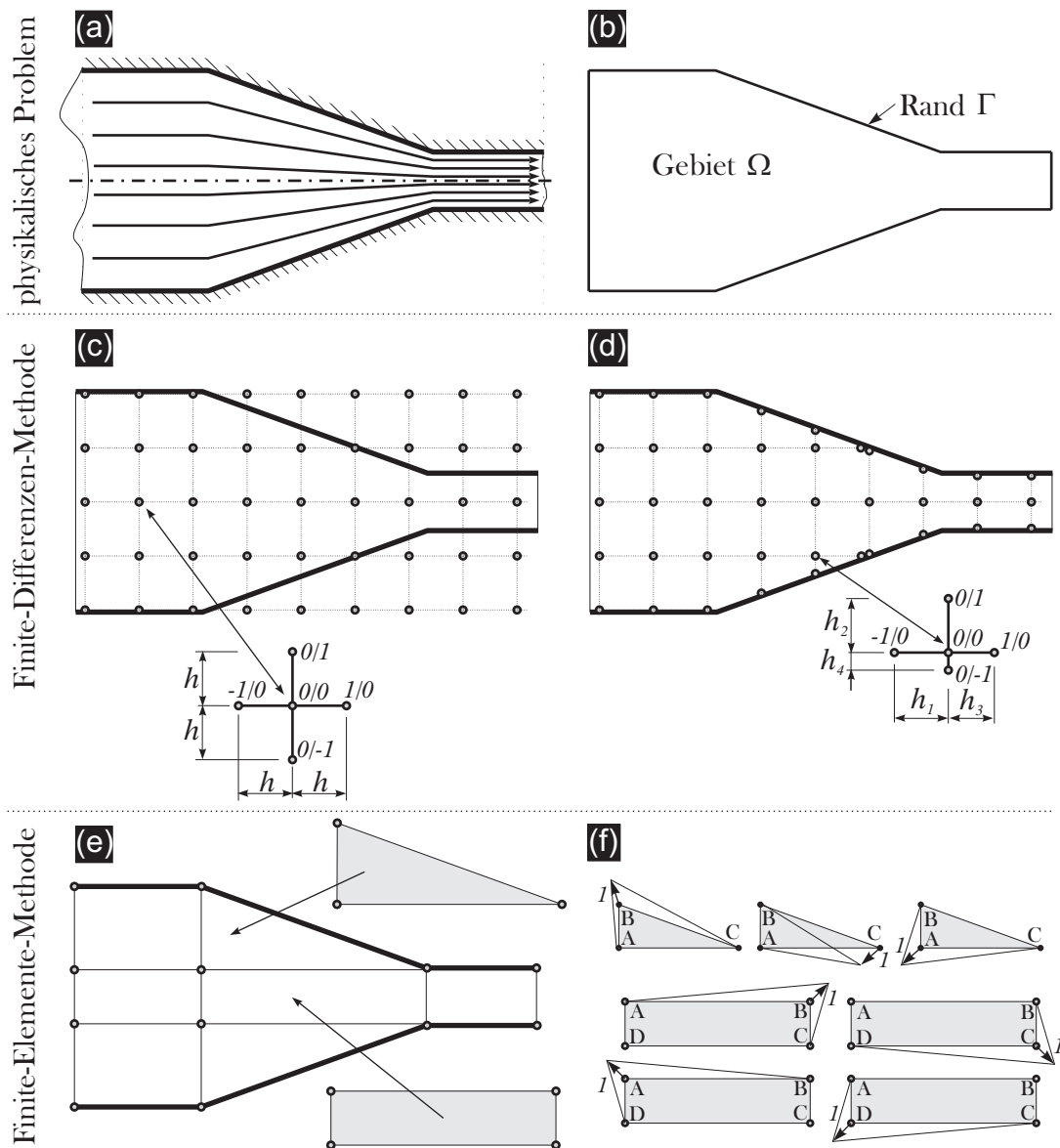


Abbildung 3.2: (a) Die Strömung in einem sich verengenden Rohr wird im Folgenden numerisch approximiert. (b) Das Gebiet, durch das der Fluss verläuft, wird mit Ω bezeichnet und der Rand mit Γ . (c) zeigt die äquidistanten Gitterpunkte der FDM im Gebiet. Dabei ragen die Gitterpunkte zum Teil über den Rand des Gebietes hinaus. (d) zeigt, wie die Gitterpunkte am Rand mit nicht-äquidistanten Gitterabständen in das Gebiet geholt werden. (e) Bei der FEM wird das Gebiet in Teilgebiete unterteilt. (f) Für jedes Teilgebiet lassen sich Ansatzfunktionen formulieren, die in die schwache Formulierung eingesetzt werden.

siehe Abb. 3.3 (a). Richtet sich das Gitter nach der Strömung, so wird der numerisch bedingte Rundungsfehler deutlich verringert, siehe Abb. 3.3 (b). Um sehr gute Ergebnisse zu erzielen, setzt die Finite-Volumen-Methode also vor der Netzerzeugung grobe Kennt-

nisse über das Feld voraus.

Die FVM wird hauptsächlich in der Strömungsmechanik und Thermodynamik eingesetzt. In der Mechanik hat die Methode noch keine Bedeutung, andererseits ist die FVM die Basis für die Diskrete-Elemente-Methode in dieser Arbeit, wobei die Zusammenhänge im Kapitel 5 dargestellt werden. Einen guten Überblick über die FVM gibt [168, 223].

3.4 Randelement-Methode (BEM)

Die Randelement-Methode oder die Boundary-Element-Method (BEM) geht bis in das Jahr 1963 auf die beiden Artikel von JASWON und SYMM zurück [135, 219]. 1966 folgte ein weiterer Artikel zu dem Thema von HESS [120]. Bei der Methode handelt es sich um eine allgemeine numerische Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen, in der das Volumenintegral mit Hilfe des Integralsatzes von GAUSS in ein Oberflächenintegral umgeformt wird. Somit muss nicht mehr das ganze Gebiet diskretisiert werden, sondern lediglich der Rand. Symmetrische Gebiete haben den weiteren Vorteil, dass der Rand auf der Symmetrielinie nicht diskretisiert werden muss. Auch werden bei gleicher Feldlinienauflösung weniger Elemente benötigt als bei der FEM. Es hat sich auch erwiesen, dass die Methode Gebiete mit sich verengenden Feldlinien (Spannungskonzentrationen) besser auflösen kann als andere numerische Methoden. Nachteilig ist, dass die auftretenden Matrizen nicht symmetrisch und voll besetzt sind.

Um mit der BEM physikalische Probleme lösen zu können, ist eine sogenannte Fundamentallösung erforderlich. Ist keine Fundamentallösung bekannt, so kann die BEM nicht angewendet werden. Für nicht-lineare Probleme ist zum Beispiel keine Fundamentallösung bekannt, da das Superpositionsprinzip nicht gilt [236].

Bei der BEM wird der Gebietsrand diskretisiert. Im Weiteren wird der Einfluss eines jeden Randelements auf die anderen Randelemente mittels der Fundamentallösung und der integralen Formulierung ausgewertet. Dabei wird ein Strahl von einem Elementknoten zu den anderen Elementen gebildet. Die Integration erfolgt über Winkelsegmente und führt zu einem Gleichungssystem. Bei der Integration muss darauf geachtet werden, dass die Integrationsrichtung gleich bleibt. Siehe hierzu die Abbildungen 3.3 (c) und (d).

Die Boundary-Element-Methode ist nicht so weit verbreitet wie die anderen oben vorgestellten Methoden, sie wird jedoch u.a. in der Bruchmechanik als numerische Methode eingesetzt. Einen allgemeinen Überblick liefert auch [13, 49, 94, 95, 129, 138]. Es ist dem Autor nicht bekannt, dass die BEM für Lebensdauersimulationen eingesetzt wird.

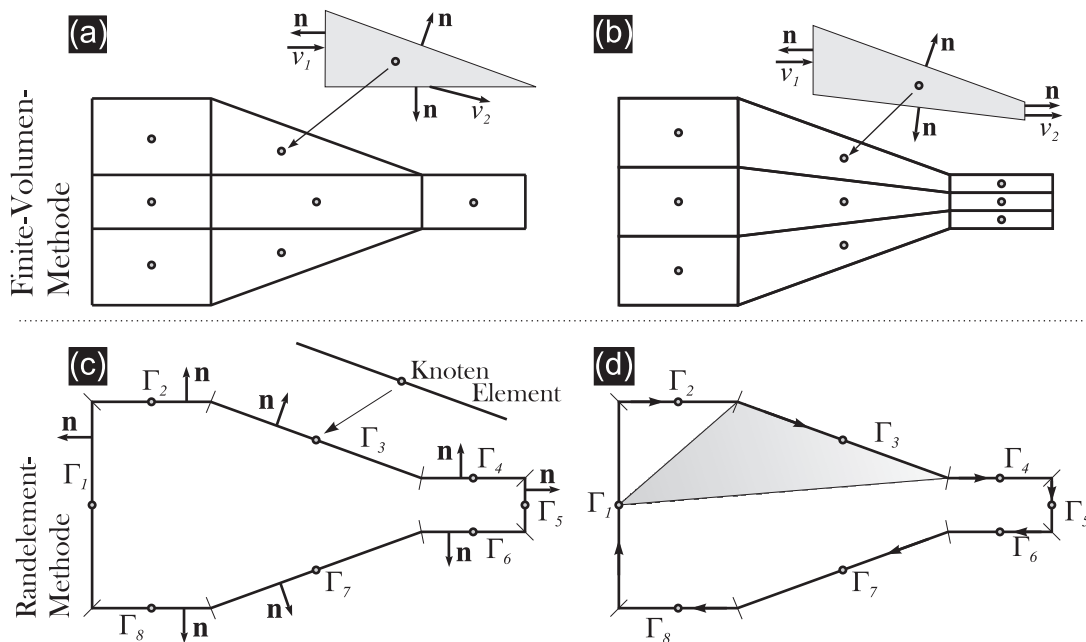


Abbildung 3.3: Abb. (a) zeigt eine schlechte Unterteilung des Gebiets in der FVM nach geometrischen Gesichtspunkten. Eine gute Diskretisierung richtet sich nach dem Stromlinienverlauf mit der Geschwindigkeit v_1 und v_2 (b). (c) zeigt die Diskretisierung des Randes mit der BEM. (d) Die Einträge der Matrizen werden durch Integrationen mittels eines Strahls ermittelt, der vom Knoten eines Elements zu den anderen Elementen führt.

3.5 Elementfreie-Galerkin-Methode (EFGM)

Die Elementfreie-Galerkin-Methode oder die Element-Free-Galerkin-Method (EFGM) geht auf LUCY aus dem Jahr 1977 zurück [158]. LUCY stellte damals eine netzfreie Methode für die Astrophysik vor, welche keine Ränder braucht. Er selbst nannte diese Methode *Monte-Carlo-Theory*. Später entstand aus der von ihm vorgestellten Methode die *Smooth-Particle-Hydrodynamics* (SPH). 1994 modifizierte BELYTSCHKO das Verfahren für die Bruchmechanik und gab der Methode den heute bekannten Namen *Element-Free-Galerkin-Method* (EFGM) oder einfach nur *Element-Free-Galerkin* (EFG) [21, 22].

Im weitesten Sinne kann die EFGM als eine Erweiterung der *Moving-Least-Squares* (MLS) Approximationsmethode angesehen werden, also als eine Fehlerquadratmethode für die Numerik.

Bei der EFG-Methode wird kein Netz generiert, sondern es werden lediglich Knotenpunkte im Gebiet definiert (wie bei der FDM), siehe Abb 3.4 (a). An jedem Knotenpunkt wird eine Einflußzone oder Wirkzone durch eine Kernel- oder Wichtungsfunktion (im weitesten Sinne auch Ansatzfunktion) beschrieben. Somit können die Knoten-

punkte nur miteinander interagieren, wenn ein Knotenpunkt in der Wirkzone eines anderen liegt. Numerische Schwierigkeiten stellen sich an den Rändern des Gebietes und den Unstetigkeiten wie z.B. den Rissen ein, da dort die Wirkzonen der Knotenpunkte über die Unstetigkeiten hinausgehen, was physikalisch nicht sein darf. Um die Ränder besser beschreiben zu können wird der Teil der Kernelfunktion der über den Rand hinausgeht abgeschnitten, weshalb sich Risse einfach in die Methode mit einbeziehen lassen, siehe Abb 3.4 (b). Es ist dem Autor nicht bekannt, dass die EFGM für Lebensdauersimulationen eingesetzt wird. Einen guten Überblick über die EFGM liefert BELYTSCHKO [20].

3.6 Diskrete-Elemente-Methode (DEM)

Ein weiteres numerisches Verfahren ist das Stabgitterverfahren. Es wurde erstmals im Jahre 1868 für 3D-Probleme von KIRSCH vorgestellt und 1905 von KLEIN auf 2D-Probleme übertragen [140, 141, 142]. KLEIN wies in seiner Veröffentlichung darauf hin, dass Spannungszustände in mechanisch belasteten Scheiben durch ein beliebig engmaschiges Netz bestehend aus Fachwerkstäben untersucht werden können. Daraufhin versuchte WIEGHARDT 1906 diesen Aspekt für die Praxis nutzbar zu machen, indem er hochgradig statisch unbestimmte Fachwerke, wie z.B. die Kölner Rheinbrücke, zu analysieren versuchte, indem er vorschlug, eine analytische Lösung von einer gleichwertig gelagerten Scheibe auf ein statisch unbestimmtes Fachwerkssystem zu übertragen [234]. Der interessante Aspekt, dass man die Spannungen von gleichwertig gelagerten und belasteten Fachwerken in Kontinuumsspannungen der Scheiben überführen kann, wurde erst 1927 wieder von RIEDEL in einer Veröffentlichung aufgegriffen und anhand eines Beispiels belegt. Diese Veröffentlichung ist ein Auszug aus seiner Dissertation, welche von PRANDTL angeregt wurde [192]. Das Übertragen von Spannungen aus Fachwerkkonfigurationen mit unterschiedlich angeordneten Stäben wurde erst wieder 1941 von HRENNIKOFF ausführlich untersucht [127, 128] und 1943 zeigte MCHENRY ein weiteres konkretes Anwendungsbeispiel für eine Scheibe mit Ausschnitt [161]. Das Verfahren war bis dahin unter der Bezeichnung *Stabgitterverfahren*, *Gitterrostmethode*, *Framework-Method*, *Spring-Network-Model* oder *Lattice-Model* bekannt. Angewendet wurde das Verfahren aber lediglich auf ebene Scheiben unter rein statischen Lasten. Weitere Details sind im Abschnitt 5.1 aufgeführt.

Das Stabgitterverfahren wird nun auch als Diskrete-Elemente-Methode (DEM) bezeichnet, wobei die Zuordnung des Begriffs doppeldeutig ist, denn unter dem Begriff der DEM versteht man auch Simulationen in der Molekulardynamik. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Stabgitterverfahren als DEM bezeichnet. Die Gründe hierfür werden einsichtig,

wenn Herleitung und Beweis der DEM in den Kapiteln 6 und 7 aufgezeigt werden. Die Verfahren der FEM, FDM und FVM, bzw. deren Grundphilosophie, spielen bei der Herleitung der DEM eine entscheidende Rolle, da alle drei Verfahren mit der DEM verknüpfbar sind.

Die von WIEGHARDT und HRENNIKOFF hergeleiteten Zellen (sich wiederholende Stabanordnungen mit denen das Gebiet diskretisiert wird, siehe hierzu Abb. 5.2) waren nur für regelmäßige Gebietsquerschnitte gedacht. Der Übergang von einem Gebietsquerschnitt zu einem anderen wurde 1963 von SPIERIG untersucht [214, 215]. Von ihm stammen die Übergangselemente, siehe Abb. 3.4 (c). Aus der Literatur kann nicht entnommen werden, dass WIEGHARDT, HRENNIKOFF und SPIERIG vorgesehen haben, die Methode auch in anderen physikalischen Gebieten als der Mechanik einzusetzen. In dieser Arbeit (Kapitel 6 und 7) wird gezeigt, dass die DEM aber grundsätzlich dazu in der Lage ist andere physikalische Gebiete zu erschließen.

Bei der Diskrete-Elemente-Methode wird das Gebiet in quadratische oder hexagonale Elemente, die sogenannten diskreten Elemente, aufgeteilt. Der Fluss des physikalischen Feldes strömt über die Ränder von einem diskreten Element zu den benachbarten diskreten Elementen. Hierbei stellt sich die Verteilung der Feldgröße über das gesamte Gebiet, also über alle diskreten Elemente verteilt so ein, dass das Minimum der potentiellen Energie gewahrt wird. Die Schwerpunkte der diskreten Elemente repräsentieren hierbei die Knotenpunkte die mit Stäben miteinander verbunden werden. Im übertragenen Sinn läßt sich der gesamte Fluss ebenso durch die Stäbe anstatt durch die Ränder der diskreten Elemente leiten. Der Querschnitt der Stäbe leitet sich aus der Randfläche der diskreten Elemente ab.

Bei der DEM handelt es sich also um eine Methode, in welcher die Verteilung der physikalischen Feldgröße mit dem Stabgitterverfahren bestimmt wird. Der Nachweis über die Zulässigkeit der DEM im mechanischen Feld erfolgt dadurch, dass die Stabspannungen innerhalb einer Einheitszelle mittels dem Kräftegleichgewicht und der Finite-Differenzen-Methode in die Airysche Spannungsfunktion überführt werden, siehe Kapitel 6. Im thermischen Feld ergibt das Gleichgewicht der Wärmeflüsse an einem Knoten den Finite-Differenzen-Stern der Wärmeleitungsgleichung, siehe Kapitel 7.

Die DEM wurde bereits erfolgreich zur Simulation von Rissen mit stochastischem Rissverlauf angewandt [240]. Eine Lebensdauersimulation ist bisher mit der Methode noch nicht gelungen. Tiefer gehende Erläuterungen zur DEM werden im Abschnitt 5.1 vorgestellt.

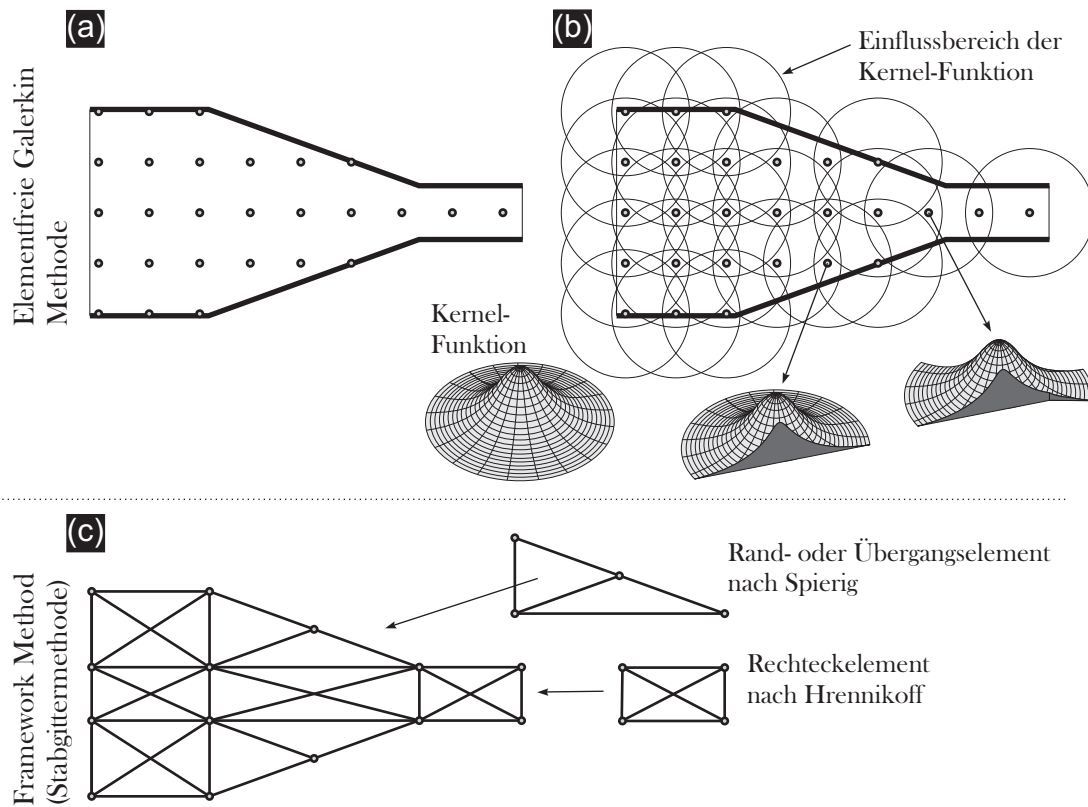


Abbildung 3.4: (a) zeigt die EFGM, in der das Gebiet mit Knoten versehen wird. Diese werden mit Kernel-Funktionen gewichtet (b). Die Kopplung eines Knotens zu den benachbarten Knoten erfolgt nur, wenn die Nachbarknoten in der Wirk- oder Einflusszone der Kernel-Funktion liegen. An den Rändern ist der Wirkungsbereich der Kernelfunktionen aufgehoben. (c) zeigt, wie das Gebiet mit der Stabgittermethode (DEM) gemäß HRENNIKOFF und SPIERIG mit elastischen Stäben diskretisiert werden könnte. Es ist nirgendwo in der Literatur ersichtlich, dass WIEGHARDT, HRENNIKOFF und SPIERIG in Betracht gezogen haben die Stabgittermethode in anderen physikalischen Gebieten als der Mechanik einzusetzen.

4 Modellierung des quasistatischen Bruchverhaltens metallischer Werkstoffe

4.1 Analytische Beschreibung von Rissen in spröden linear elastischen Werkstoffen

Die analytische Behandlung von Rissen wird in der linear elastischen Bruchmechanik (LEBM) abgehandelt. Hier wird das Verhalten von Rissen in Körpern aus makroskopischer Sicht mit den Mitteln der Kontinuumsmechanik beschrieben. Eine Belastungshistorie wird nicht mit einbezogen.

Die erste Beschreibung von Spannungen in Scheiben mit elliptischem Loch wurde 1909 von KOLOSOV vorgenommen [145]. Aus seinen Untersuchungen geht hervor, dass wenn die kleine Halbachse der Ellipse gegen Null geht, also zu einem Schlitz entartet, die Normalspannungen am Ende des Schlitzes unendlich groß werden und zwar unabhängig von der äußeren Belastung. Außerdem nimmt die Spannung mit $1/\sqrt{r}$ ab, wobei r der Radius der Risspitze ist. Aufgrund des $1/\sqrt{r}$ Verhaltens werden die Normalspannungen erst im Unendlichen zu Null, weshalb die Scheibenabmessungen im Verhältnis zum Loch sehr viel größer sein müssen, was für die Praxis eine Einschränkung bedeutet. Außerdem muss die Scheibendicke relativ zur Länge und Breite der Scheibe sehr gering sein, da sonst 3D-Effekte auftreten. Da die Spannungen um die Risspitze unendlich groß werden, kann kein Festigkeitskriterium mehr angewandt werden, da ein Bauteil mit Riss schon bei geringster Belastung versagen würde. Hingegen muß eingewendet werden, dass sich kein Werkstoff auf der atomaren Größenskala mehr linear elastisch und isotrop verhält. Außerdem würde sich aus der Belastung eine Plastifizierung im Werkstoff mit mehr oder minder großem endlichen Radius um die Risspitze ergeben [193, 225].

Einen neuen und bis dahin unüblichen Weg ging GRIFFITH 1920, indem er das Theorem vom Minimum der potentiellen Energie unter Einbeziehung der inneren Energie und der spezifischen Oberflächenenergie an spröden Werkstoffen anwandte, um die Restfestigkeit eines Bauteils mit Anriss zu finden. Die spezifische Oberflächenenergie setzte GRIFFITH mit der potentiellen Energie gleich, die bei der Bildung neuer Oberflächen an der Rissfront entsteht. Dabei liegen Oberflächenkräfte an der Ober- und Unterseite des Risses vor, die theoretisch mit den atomaren Bindungskräften gleichzusetzen sind. Das Resultat seiner theoretischen Betrachtung war eine Festigkeit, die umgekehrt proportional zur Wurzel

der Risslänge ist. Somit liegt auch bei dieser Betrachtung, ähnlich wie bei KOLOSOV, eine Singularität an der Risspitze vor. Jedoch konnte die Gleichung für die Festigkeit einer Probe mit Anriss prinzipiell experimentell verifiziert werden, auch wenn die für die Festigkeit gefundenen theoretischen Ergebnisse zu hoch waren. Bemerkenswert ist auch die Beobachtung von GRIFFITH, dass die Spannungen an der Risspitze das Zehnfache der in Laborversuchen gemessenen Festigkeit übersteigen können. Des Weiteren führte GRIFFITH Überlegungen und Versuche durch, um den tatsächlichen Radius an der Risspitze zu finden. Er stellte dabei fest, dass der Radius mindestens eine Größe von einigen Atomdurchmessern haben muss, jedoch nicht größer als $5 \cdot 10^{-5}$ Millimeter sein kann. GRIFFITH führte seine Experimente an Glas durch und stellte dabei fest, dass Proben eine höhere Festigkeit besitzen wenn die Oberfläche poliert ist. Er führte dies auf kleine Anrisse in der Oberfläche zurück, welche als Rissinitiatoren fungieren. Diese Tatsache geht mit der Feststellung einher, dass die Festigkeit der Proben generell viel geringer ist, als die theoretisch mögliche, was darauf hindeutet, dass der Werkstoff generell mit vielen Mikrorissen durchsetzt ist. Bemerkenswert ist auch, dass die Festigkeit einige Stunden nachdem der Prüfling präpariert wurde spontan abnimmt. Der Wert, auf den die Festigkeit abnimmt, hängt mit dem Probendurchmesser zusammen. Dabei beobachtet man an kleinen Prüflingen eine höhere Festigkeit als an großen [101].

Da GRIFFITH als Erster den Riss direkt von Anfang an als einen unendlich schmalen Schlitz betrachtete, im Gegensatz zu KOLOSOV, der den Riss durch einen Grenzübergang der kleinen Halbachse vom elliptischen Loch durchführte, wird dieser Schlitz als ein GRIFFITH-Riss bezeichnet. Seine Betrachtungen gelten strikt für spröde Materialien ohne Plastifizierung. Auch gehen seine theoretischen Überlegungen erstmalig von einer scharfen Risspitze mit einem Kerbradius von $r_K = 0$ aus, was seine Theorie von der von KOLOSOV unterscheidet [225].

Der Ansatz nach GRIFFITH sieht an der Rissoberfläche eine Abnahme der gespeicherten elastischen Energie (Energiefreisetzungsrate) U_B von

$$U_B = \begin{cases} -\frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} & \text{im ESZ} \\ -\frac{\pi \sigma^2 a^2 (1 - \nu^2)}{E} & \text{im EVZ} \end{cases} \quad (4.1)$$

vor, wobei σ eine konstante Randspannung, $2a$ die Risslänge (siehe Abb. 4.1 für den Modus I), E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl des Werkstoffs für die beiden Spannungszustände, den ebenen Spannungszustand (ESZ) und den ebenen Verformungszustand (EVZ), ist. Die Oberflächenenergie U_γ nimmt linear mit der Risslänge zu und berechnet sich aus den neu gebildeten Oberflächen der Ober- und Unterseite mit

Hilfe der materialspezifischen Energiefreisetzungs konstanten γ_c pro Einheitsfläche zu

$$U_\gamma = 2 (2 a) \gamma_c . \quad (4.2)$$

Die gesamte Energie während der Rissbildung berechnet sich aus $U_{ges.} = U_B + U_\gamma$. Das Maximum der Gesamtenergie berechnet sich aus der Bedingung $\frac{\partial U_{ges.}}{\partial a} = 0$. D.h. dass ein stabiles Risswachstum bei gegebener Spannung ab der Risslänge

$$a = \begin{cases} \frac{2 \gamma_c E}{\pi \sigma^2} & \text{im ESZ} \\ \frac{2 \gamma_c E}{\pi \sigma^2 (1 - \nu^2)} & \text{im EVZ} \end{cases} \quad (4.3)$$

bzw. bei gegebener Risslänge ab der Spannung

$$\sigma = \begin{cases} \sqrt{\frac{2 \gamma_c E}{\pi a}} & \text{im ESZ} \\ \sqrt{\frac{2 \gamma_c E}{\pi a (1 - \nu^2)}} & \text{im EVZ} \end{cases} \quad (4.4)$$

erfolgt.

Die linear elastische Bruchmechanik wurde erst 26 Jahre später von SNEDDON, GREEN, IRWIN und WILLIAMS weiterentwickelt. 1946 untersuchte SNEDDON das Spannungsfeld um die Risspitze für einfache Belastungen detailliert mit Hilfe von Polarkoordinaten (siehe Abb. 4.1) [212]. Ein weiterer Artikel folgte 1949 zusammen mit GREEN [100], basierend auf der nach WESTERGAARD benannten Methode [233], mittels der die Airysche Spannungsfunktion in den komplexen Zahlenraum transformiert wird. Bei der Entwicklung der Gleichungen werden höhere Terme vernachlässigt, so dass die Lösungen nur für das unmittelbare Nahfeld um den Riss gelten und lediglich einen Term für die $1/\sqrt{r}$ Singularität beinhalten [42]. Bei der Herleitung der Gleichungen muss unterschieden werden, ob ein ebener Spannungszustand oder ein ebener Dehnungszustand vorliegt, da dies einen erheblichen Unterschied für die Ergebnisse macht. Einen neuen und direkteren Zugang zum Rissfeld beschrieb WILLIAMS 1957 über die Eigenfunktionen des komplexen Potentials [235]. Das Lösungsfeld gilt ebenfalls, wie bei der WESTERGAARD-Methode, nur für das unmittelbare Nahfeld des Risses. Dennoch bietet die WILLIAMS-Methode den Vorteil, dass man neben dem einen Term für die $1/\sqrt{r}$ Singularität noch weitere Glieder aus der Reihenentwicklung erhält.

Die Gleichungen von SNEDDON wurden 1957 und 1958 von IRWIN auf drei unabhängige Rissöffnungsarten erweitert, wobei IRWIN das heute noch gängige K -Konzept, mit den Spannungsintensitätsfaktoren K_I (Öffnungsmodus = Zugbelastung senkrecht zum Riss),

K_{II} (Gleitmodus = Schubbelastung in der Rissebene) und K_{III} (Schermodus = Schubbelastung senkrecht zur betrachteten Scheibe), einführte [131, 132], siehe auch Abb. 4.1. Diese drei Rissöffnungsarten bzw. Rissmoden dienen zur Unterscheidung von drei unabhängigen Bewegungen der beiden Rissufer relativ zueinander. Da an den nachfolgenden Gleichungen, welche das Rissfeld für diese drei Moden beschreiben, SNEDDON, IRWIN und WILLIAMS gearbeitet haben, werden die Gleichungen entweder als SNEDDON-Gleichungen oder IRWIN-WILLIAMS-Gleichungen bezeichnet, siehe hierzu auch [96, 150, 225].

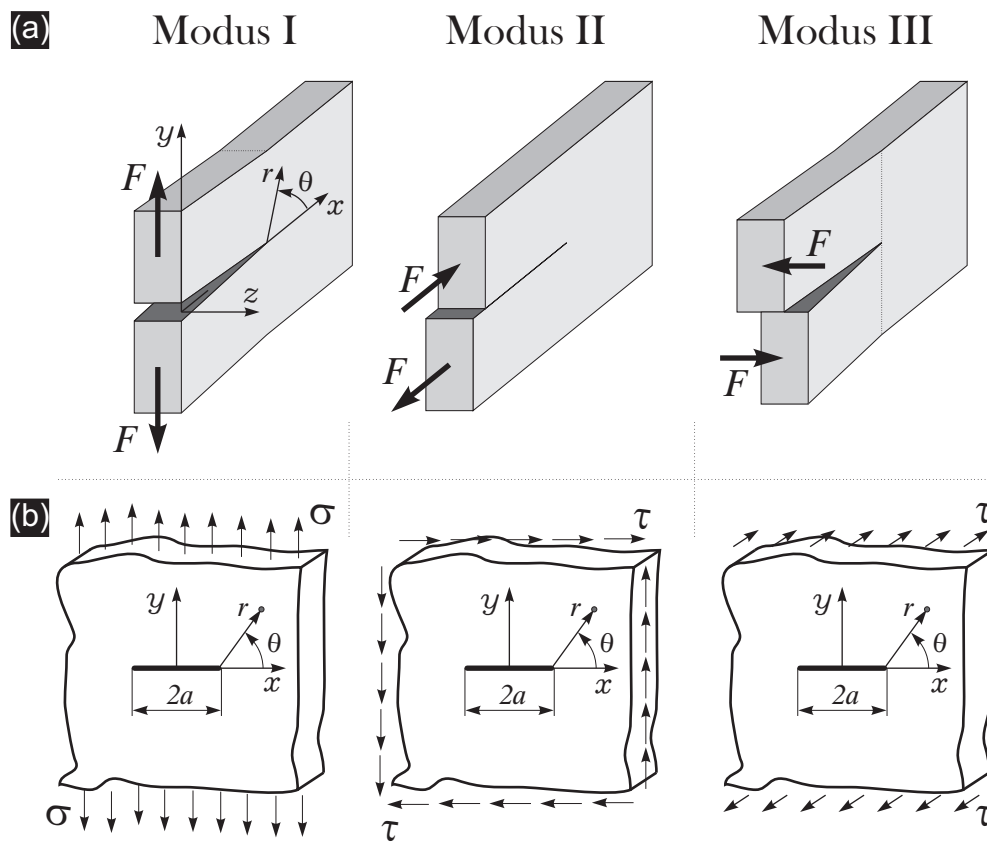


Abbildung 4.1: (a) Definitionen der Rissöffnungsarten (b) und der dazugehörige GRIFFITH-Riss mit den Definitionen der Koordinaten. Die Abbildungen sind der Literatur entnommen [96, 105, 150], allerdings ist zu beachten, dass das Momentengleichgewicht nicht in allen Abbildungen erfüllt wird.

4.1.1 K -Konzept

Das K -Konzept basiert auf den Gleichungen (4.3), bzw. (4.4), welche umgeschrieben werden können zu

$$\sigma \sqrt{\pi a} =: K = \begin{cases} \sqrt{2 \gamma_c E} & \text{im ESZ} \\ \sqrt{\frac{2 \gamma_c E}{1 - \nu^2}} & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Aus Gleichung (4.5) geht hervor, dass der neu definierte Spannungsintensitätsfaktor K nur von den Werkstoffparametern abhängt und somit über das Rissfeld konstant ist. Er kann als Amplitudenfaktor des Spannungsfeldes verstanden werden.

Modus I Belastung:

Für die Belastung im Modus I, gemäß Abb. 4.1, gelten im unmittelbaren Nahfeld der Risspitze für die Spannungen die folgenden Beziehungen

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \pi r}} \begin{pmatrix} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O} \end{pmatrix}; \text{ESZ}, \quad (4.6)$$

wobei \mathcal{O} die zur Vernachlässigung kommenden Terme höherer Ordnung darstellt. Der Spannungsintensitätsfaktor K_I ist in Anlehnung an Gl. (4.5)

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (4.7)$$

Die Spannungen in Dickenrichtung sind im ESZ gleich Null und im EVZ

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \pi r}} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}; \text{EVZ}. \quad (4.8)$$

Unter Verwendung des HOOKEschen Gesetzes berechnen sich die Dehnungen ϵ_{xx} , ϵ_{yy} und der Schubwinkel γ_{xy} für den ESZ und EVZ mit Gl. (4.6) zu

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2 G \sqrt{2 \pi r}} \begin{pmatrix} (\frac{\kappa-1}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ (\frac{\kappa-1}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

wobei

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.10)$$

den Schubmodul des Werkstoffs darstellt und κ die KOLOSOV-Konstante

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{im ESZ} \\ 3 - 4\nu & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Die Dehnung in Dickenrichtung ϵ_{zz} ist im EVZ per Definition identisch Null und im ESZ ergibt sich diese zu

$$\epsilon_{zz} = - \frac{K_I}{G \sqrt{2 \pi r}} \frac{\nu}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}; \text{ESZ.} \quad (4.12)$$

Da im ebenen Verformungszustand die beiden Spannungen σ_{xz} und σ_{yz} Null sind, ergeben sich die dazu korrespondierenden Schubwinkel γ_{xz} und γ_{yz} mittels des HOOKESchen Gesetzes ebenfalls zu Null.

Das Verschiebungsfeld ist nach der Methode von WESTERGAARD für den ESZ und EVZ

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2 G} \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \begin{Bmatrix} (\kappa - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ (\kappa - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

Modus II Belastung:

Für den Modus II werden die Nahfeldlösungen analog entwickelt. Mit dem Spannungsin-
tensitätsfaktor K_{II}

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (4.14)$$

ergeben sich die Spannungen zu

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \pi r}} \begin{Bmatrix} - (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O} \\ (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix}; \text{ESZ.} \quad (4.15)$$

Für den ESZ ist die Spannung in Dickenrichtung Null und im EVZ ist diese

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = - \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \pi r}} 2\nu \sin \frac{\theta}{2}; \text{EVZ.} \quad (4.16)$$

Die Dehnungen und Verzerrungen können aus dem HOOKESchen Gesetz und Gl. (4.15) für den ESZ zu

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{G \sqrt{2 \pi r}} \begin{Bmatrix} (- \frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ (\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix}; \text{ESZ,} \quad (4.17)$$

bzw. für den EVZ

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{G \sqrt{2 \pi r}} \begin{Bmatrix} \left(\nu - 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ \left(\nu + \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix} ; \text{EVZ} \quad (4.18)$$

bestimmt werden. Die Dehnung in Dickenrichtung ϵ_{zz} ist im EVZ per Definition identisch Null, hingegen sorgt die bei dem Mode vorliegende Belastung dafür, dass ϵ_{zz} im ESZ ebenfalls gleich Null ist. Ferner sind im EVZ die beiden Schubwinkel γ_{xz} und γ_{yz} und die dazu gehörigen Spannungen σ_{xz} und σ_{yz} ebenfalls Null.

Das dazugehörige Verschiebungsfeld folgt aus dem Verschiebungsansatz der WESTERGAARD-Methode für den ESZ und EVZ zu

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2 G} \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \begin{Bmatrix} (\kappa + 2 + \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ -(\kappa - 2 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Modus III Belastung:

Der Spannungsintensitätsfaktor K_{III} ist im Modus III

$$K_{III} = K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}. \quad (4.20)$$

Die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} und $\sigma_{zz} = 0$ sind in diesem Mode gleich Null. Da $\sigma_{zz} = 0$ ist liegt der ESZ vor. Die beiden verbleibenden Spannungen sind

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \pi r}} \begin{Bmatrix} - \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ + \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix} ; \text{ESZ}. \quad (4.21)$$

Unter Verwendung des HOOKESchen Gesetzes berechnen sich daraus die dazugehörigen Schubwinkel zu

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{G \sqrt{2 \pi r}} \begin{Bmatrix} - \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ + \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix} ; \text{ESZ}. \quad (4.22)$$

Die Verschiebungen u_x und u_y sind Null. Für die Verschiebung u_z erhält man mit dem Verschiebungsansatz nach WESTERGAARD

$$u_z = \frac{K_{III}}{E} (1 + \nu) \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \sin \frac{\theta}{2} ; \text{ESZ}. \quad (4.23)$$

Zusammenfassung:

Die Gleichungen (4.6) bis (4.22) gelten in strenger Form nur für Scheiben in denen der Riss deutlich kleiner ist als die Abmessungen der Scheibe (streng genommen wird die Scheibe sogar als unendlich groß betrachtet). Außerdem geht man von einem spröden Werkstoff aus. Ferner gelten die Gleichungen nur für das direkte Nahfeld um die Risspitze. Der Gültigkeitsbereich der Gleichungen liegt bei etwa $0,02 \cdot a$ bis $0,10 \cdot a$. Die Spannungen und Dehnungen verhalten sich bei Annäherung an die Risspitze singular mit $1/\sqrt{r}$, und die Verschiebungsfelder sind proportional zu \sqrt{r} . Alle Feldgrößen sind außerdem direkt proportional zum Spannungsintensitätsfaktor [150].

Für den praktischen Gebrauch müssen noch weitere Ergänzungen vorgenommen werden, und zwar:

- für kombinierte Belastungen bzw. Moden
- für Scheiben mit endlichen, also finiten, Abmessungen relativ zum Riss
- für duktile Werkstoffe
- für reale Werkstoffe.

4.2 Kombinierte Belastungen von gleichen und unterschiedlichen Moden

Spannungsintensitätsfaktoren vom gleichen Modus, die jedoch unterschiedlichen Lasten entstammen, können wie folgt überlagert werden

$$K_I = \sum_{j_I=1}^{n_I} K_{I j_I}, \quad K_{II} = \sum_{j_{II}=1}^{n_{II}} K_{II j_{II}} \quad \text{und} \quad K_{III} = \sum_{j_{III}=1}^{n_{III}} K_{III j_{III}}. \quad (4.24)$$

Liegen Belastungen vor, bei denen mehr als ein Modus zur Geltung kommt, so lassen sich die Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe der Energiefreisetzungsrates \mathcal{G} überlagern. Das Konzept basiert auf dem Prinzip von GRIFFITH, bzw. auf Gl. (4.5), welches umgeformt wird zu

$$K^2 = 2 \gamma_c E = \mathcal{G} E \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G} = 2 \gamma_c = \frac{K^2}{E}, \quad (4.25)$$

dabei stellt die Energiefreisetzungsrates \mathcal{G} nichts anderes als den doppelten Wert der materialspezifischen Energiefreisetzungskonstante γ_c dar, der einen festen Wert nicht überschreiten kann. Dies muss auch für kombinierte Belastungen gelten, d.h.

$$\mathcal{G} = 2 \gamma_c = \begin{cases} \frac{1}{E} [K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 (1 + \nu)] & \text{im ESZ} \\ \frac{1}{E} [(K_I^2 + K_{II}^2) (1 - \nu^2) + K_{III}^2 (1 + \nu)] & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.26)$$

Anhand der Theorie von GRIFFITH über die Energiefreisetzungsrate lässt sich feststellen, dass ein stabiles Risswachstum nur dann erfolgt, wenn die Summe der Belastungen aus den Moden I bis III einen materialspezifischen Wert überschreitet. Diesen Wert nennt man Risswiderstand bzw. Risswiderstandskraft \mathcal{G}_c . Den theoretischen Wert für \mathcal{G}_c kann man der Literatur entnehmen. Da die Werkstoffe den theoretischen Wert von $\mathcal{G}_c = 2\gamma_c$ jedoch nie erreichen, muss der werkstoffspezifische Wert anhand von Versuchen bestimmt werden, siehe hierzu auch [17, 41, 103].

4.3 Finite Probenabmessungen

Für den praktischen Gebrauch sind Scheiben mit finiten Abmessungen und Geometrien die von der Idealform abweichen wichtig. Jedoch sind für diese Fälle keine analytischen Lösungen vorhanden.

Die Anpassung des Spannungsverlaufs oder der Spannungsamplitude an die endlichen Abmessungen erfolgt über die Modifizierung des K -Faktors mit Hilfe eines dimensionslosen Geometriefaktors $Y = Y\left(\frac{a}{w}\right)$, der häufig auch als Formfunktion bezeichnet wird. Hierbei entspricht a der Risslänge und w einer charakteristischen Bauteilabmessung. Beim GRIFFITH-Riss ist $Y = 1$, wohingegen bei realen Strukturen der Geometriefaktor aufgrund der Spannungserhöhung immer größer als eins ist.

$$K_i = \sigma\sqrt{\pi a} Y_i\left(\frac{a}{w}\right) \quad \text{mit } i = \text{I, II, III} \quad (4.27)$$

Die Bestimmung der Geometriefaktoren kann auf numerischem Weg, experimentell oder durch modifizierte analytische Lösungen erfolgen, siehe hierzu auch [42, 72].

4.4 Analytische Beschreibung von plastischen Fließzonen in duktilen linear elastischen Werkstoffen

Die im obigen Abschnitt vorgestellte Theorie beschreibt das Rissfeld nur für isotrop-spröde Werkstoffe. Jedoch kommt es schon bei geringen Belastungen zu Spannungskonzentrationen an der Riss Spitze, wodurch die Fließgrenze des Werkstoffs σ_F überschritten wird und es zur Bildung einer plastischen Zone kommt. Die Größe der Plastifizierungszone an der Riss Spitze wird durch die vorherrschenden Spannungen kontrolliert, die wiederum durch die Spannungsintensitätsfaktoren festgelegt sind.

Voraussetzung für eine mathematische Beschreibung der plastischen Zone ist, dass diese

wesentlich kleiner als der Radius des Gültigkeitsbereiches r_K der Nahfeldlösungen ist, also $r_K \approx 0,02 \cdot a$ bis $0,10 \cdot a$ [150].

Modus I, Vergleichsspannung nach v. MISES für duktile Werkstoffe:

Für den Modus I werden aus den Gleichungen (4.6) bis (4.22) die Hauptspannungen mit Hilfe des MOHRschen Spannungskreises

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2}{4} + \sigma_{xy}^2} \quad (4.28)$$

gebildet. Aus dieser Gleichung ergibt sich für die Hauptspannungen σ_1 und σ_2

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.29)$$

und die Spannung σ_3 ist

$$\sigma_3 = \begin{cases} 0 & \text{im ESZ} \\ \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Aus diesen Hauptspannungswerten ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) kann eine Vergleichsspannung gebildet werden. Die Vergleichsspannung ist nach v. MISES

$$2\sigma_{V;Mises}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2. \quad (4.31)$$

Da im vorliegenden Fall die plastische Zone betrachtet werden soll, ist die Vergleichsspannung gleich der Fließspannung des Werkstoffs σ_F zu setzen, also $\sigma_{V;Mises} = \sigma_F$. Werden die Gleichungen (4.29) und (4.30) in Gl. (4.31) eingesetzt, so ergibt sich für die Vergleichsspannung bzw. Fließspannung

$$2\sigma_F^2 = \begin{cases} \frac{K_I^2}{2\pi r} \left(1 + \frac{3}{2}\sin^2\theta + \cos\theta\right) & \text{im ESZ} \\ \frac{K_I^2}{2\pi r} \left[\frac{3}{2}\sin^2\theta + (1 - 2\nu)^2(1 + \cos\theta)\right] & \text{im EVZ,} \end{cases} \quad (4.32)$$

wobei hier der Radius r gleich dem Fließradius r_p der plastischen Zone ist. Man erhält nach dem Umformen von Gl. (4.32) eine Relation für den Fließradius r_p als Funktion des Winkels und der Fließspannung

$$r_{p; I; Mises} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{2}\sin^2\theta + \cos\theta\right) & \text{im ESZ} \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F}\right)^2 \left[\frac{3}{2}\sin^2\theta + (1 - 2\nu)^2(1 + \cos\theta)\right] & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.33)$$

Die größten Amplituden der plastischen Zone können aus den Gleichungen (4.33) entnommen werden und sind $r_{p; I; Mises; ESZ; \max.} \approx 2,66$ bzw. $r_{p; I; Mises; EVZ; \max.} \approx 1,61$ und zwar für $\nu = \frac{1}{3}$, siehe hierzu auch Abb. 4.2 (a) und [42, 83, 96, 162, 199]

Modus I, Vergleichsspannung nach TRESCA für spröde Werkstoffe:

Wird die Vergleichsspannung nach TRESCA gebildet, so können die Hauptspannungen den Gleichungen (4.29) und (4.30) entnommen werden. Die Vergleichsspannung ist für den ESZ

$$\tau_{F; ESZ} = \frac{1}{2} \sigma_1 . \quad (4.34)$$

Für den EVZ ist die Vergleichsspannung entweder

$$\tau_{F; EVZ} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{oder} \quad \tau_{F; EVZ} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) , \quad (4.35)$$

je nachdem, welcher der beiden Werte am größten ist. Als Fließspannung wird $\tau_F = \frac{1}{2}\sigma_F$ verwendet. Hieraus ergibt sich mit den Gleichungen (4.34) und (4.35), wie oben bei v. MISES, für den Fließradius

$$r_{p; I; Tresca} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 2 \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 & \text{im ESZ} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder} \quad \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 2 \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2 \\ \text{oder} \quad \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 2 \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right. & \text{im EVZ ,} \end{cases} \quad (4.36)$$

wobei für den EVZ aus den beiden Gleichungen die Einhüllende gebildet werden muß. Die größten Amplituden der plastischen Zone können aus den Gleichungen (4.36) entnommen werden. Die Fließradien sind für den ESZ $r_{p; I; Tresca; ESZ; \max.} \approx 3,306$ und für den EVZ $r_{p; I; Tresca; EVZ; \max.} \approx 0,875$ bzw. $r_{p; I; Tresca; EVZ; \max.} = 2$ und zwar für $\nu = \frac{1}{3}$, siehe hierzu auch Abb. 4.2 (a) und [42, 96]

Modus II, Vergleichsspannung nach v. MISES für duktile Werkstoffe:

Wird die Vergleichsspannung für den zweiten Lastfall nach v. MISES gebildet, so können die Hauptspannungen wieder den Gleichungen (4.29) und (4.30) entnommen werden. Letztendlich ergibt sich für den Radius der plastischen Zone

$$r_{p; II; Mises} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_{II}}{\sigma_F} \right)^2 (25 - \cos \theta - \sin^2 \theta) & \text{im ESZ} \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_{II}}{\sigma_F} \right)^2 [24 + (1 - 2\nu)^2(1 - \cos \theta) - 18 \sin^2 \theta] & \text{im EVZ .} \end{cases} \quad (4.37)$$

Die plastische Zone ist im Vergleich zum Mode I in diesem Lastfall recht groß. Die Amplitude hat im ESZ bei $\theta = 0^\circ$ einen Maximalwert von $r_{p; II; Mises; ESZ; max.} = 24$ und bei $\theta = 180^\circ$ einen Extremwert von $r_{p; II; Mises; ESZ; max.} = 26$. Für den EVZ hat der Amplitudenfaktor bei $\theta = 0^\circ$ einen Extremwert von $r_{p; II; Mises; EVZ; max.} = 24$ und bei $\theta = 180^\circ$ einen Maximalwert von $r_{p; II; Mises; EVZ; max.} = 24,222$. Siehe hierzu auch Abb. 4.2 (b) und [42]

Modus III, Vergleichsspannung nach v. MISES für duktile Werkstoffe:

Abschließend wird noch der Radius der plastischen Zone für den Modus III nach v. MISES aufgeführt. Dieser ist für den ESZ und EVZ gleich

$$r_{p; III; Mises} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_{III}}{\sigma_F} \right)^2 \cdot 6, \quad (4.38)$$

d.h. es handelt sich hier um einen Kreis. Verglichen mit den anderen beiden Lastfällen, hat der Radius der plastischen Zone eine Größe von $r_{p; III; Mises; max.} = 6$ Einheitslängen, siehe hierzu auch Abb. 4.2 (c) und [42, 96].

4.4.1 Risslängenkorrektur nach IRWIN

Am Anfang des Abschnittes 4.4 wurde gezeigt wo der Rand einer plastischen Zone um einen Riss liegen würde. Dabei sind Form und Größe der plastischen Zone stark vom Lastfall abhängig. Bei dem im Folgenden gezeigten Korrekturvorschlag, der sich auf die plastische Zone bezieht und auf IRWIN zurück geht, wird ein ideal-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt [103].

Grundlage der beispielhaften Betrachtung sind die Spannungen in der Rissebene im Modus I bei $\theta = 0^\circ$, deren Werte sich aus Gl. (4.6) wie folgt ergeben

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a r}}, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{im ESZ} \\ 2\nu \sigma_{xx} & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.39)$$

Der Verlauf der rissöffnenden Spannung $\sigma_{yy}(r)$ kann aus Abb. 4.3 entnommen werden. Die Größe der plastischen Zone wurde bereits in diesem Abschnitt für die entsprechenden Lastfälle und mit Hilfe zweier Vergleichsspannungshypothesen entwickelt. Der plastische Fließradius beträgt für den Modus I gemäß Gl. (4.33)

$$r_{p; Mises}(\theta = 0) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 \cdot 2 & \text{im ESZ} \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 \cdot 2(1 - 2\nu)^2 & \text{im EVZ.} \end{cases} \quad (4.40)$$

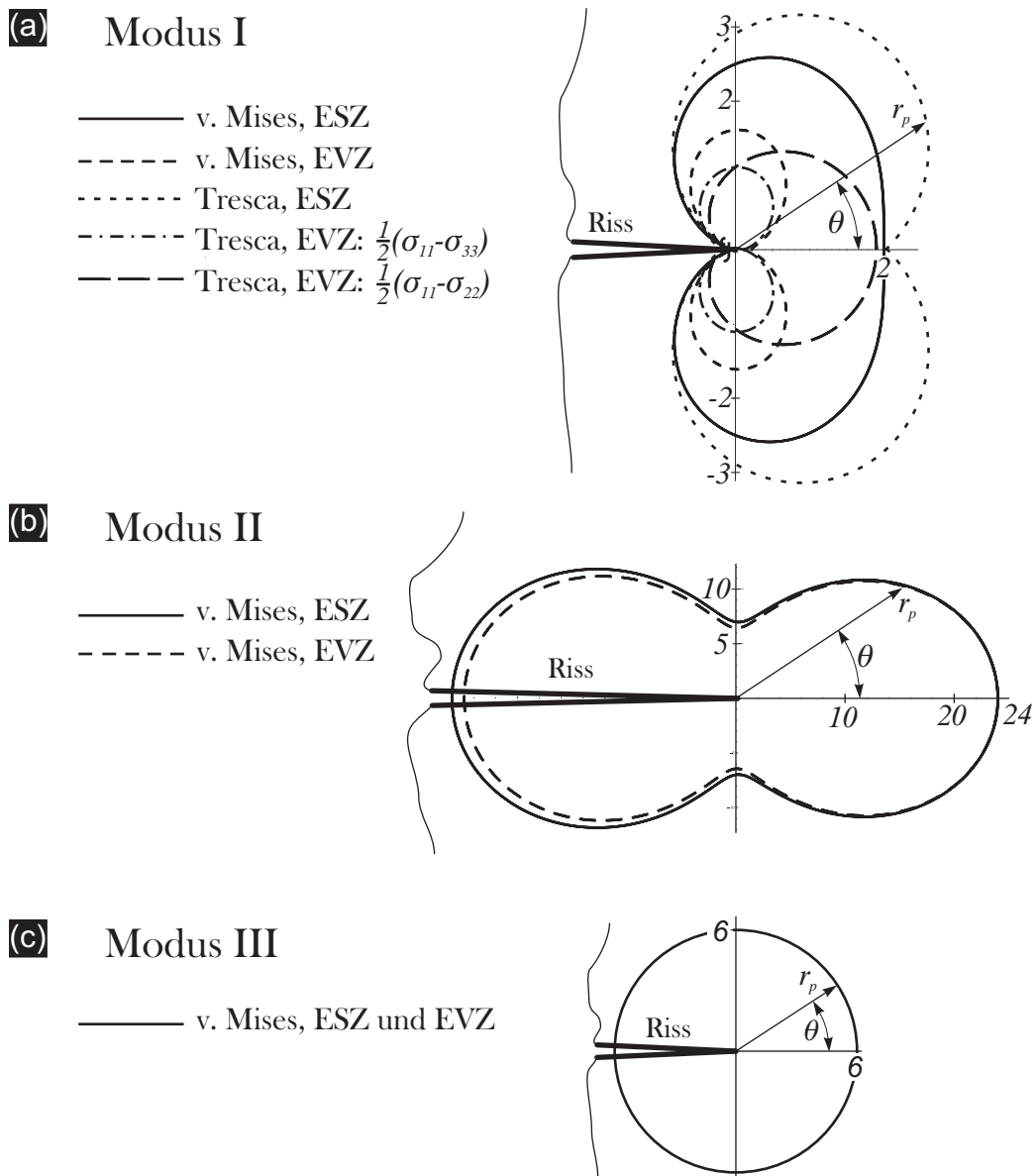


Abbildung 4.2: Größe und Form der plastischen Zone für Scheiben mit $\nu = 1/3$: (a) im Modus I nach der Vergleichsspannungshypothese von v. MISES und TRESCA, im ESZ und EVZ, (b) nach v. MISES für den ESZ und EVZ bei einer Modus II Belastung und (c), im Modus III für den ESZ und EVZ nach v. MISES.

D.h. der Radius der plastischen Zone ist im EVZ deutlich kleiner als im ESZ. Durch das Abschneiden des Spannungsverlaufs σ_{yy} bei σ_F , siehe Abb. 4.3 wird die resultierende Kraft in y -Richtung verfälscht. IRWIN hat dazu bereits 1956 vorgeschlagen, dass das Kräftegleichgewicht nur dann wiederhergestellt werden kann, wenn die Spannungen umverteilt werden, indem die plastische Zone eine größere Ausdehnung erhält [130]. Es ergibt sich die Bedingung, dass die Fläche der abgeschnittenen Kurve mit der hinzuge-

fügten Kurve äquivalent sein muss. Dies führt zu einem korrigierten Radius der plastischen Zone, der ungefähr doppelt so groß ist wie der ursprüngliche [150].

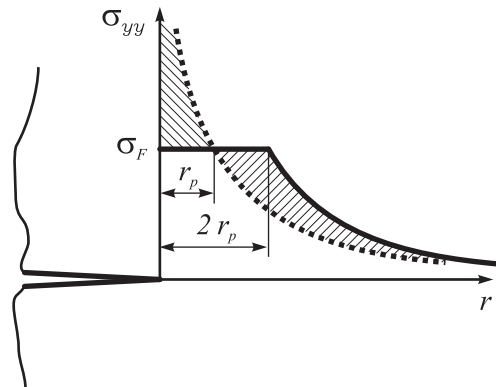


Abbildung 4.3: Korrigierte Größe der plastischen Zone an der Rissspitze gemäß IRWIN.

4.5 Numerische Behandlung von Rissen in metallischen Werkstoffen

In der klassischen Bruchmechanik wurden in den Jahren nach den ersten Veröffentlichungen von SNEDDON, IRWIN und WILLIAMS [130, 212, 235] weitere Veröffentlichungen mit neuen Betrachtungen initiiert, wobei sich aber keine Methode als allgemeingültig herauskristallisierte. Dies liegt daran, dass sich duktile und spröde Werkstoffe im Bruchbild grundsätzlich unterscheiden. Die analytischen Methoden wurden in den folgenden Jahren zwar weiterentwickelt, jedoch beruhte die Hoffnung für das Gebiet der Rissfelderbeschreibung auf der gerade neu entwickelten FEM. Die FEM setzte sich in der Bruchmechanik aber erst 1971 durch, nachdem GRIFFITHS und OWEN einen Artikel veröffentlicht hatten, in welchem gezeigt wurde, dass die bisherige analytische Lösung im Nahfeld des Risses hierbei unbrauchbar ist, da sie auf fehlerhaften Annahmen basiert [102]. Der Nachweis erfolgte durch das Experiment.

Im Folgenden werden die numerischen Methoden auf die Bruchmechanik angewendet. Allerdings eignen sich die Methoden nicht für Lebensdauerabschätzungen, da in ihnen eine Belastungshistorie nicht mit einbezogen wird.

4.5.1 Bruchmechanik mit der Finite-Elemente-Methode (FEM)

In der Mechanik werden mit der FEM Knotenpunktverschiebungen aus den angreifenden Lasten und mit der Gesamtsteifigkeit des Tragwerks berechnet. Aus den errechneten

Knotenpunktverschiebungen werden in einer Nachlaufrechnung elementweise die Spannungen bzw. Dehnungen bestimmt.

Die Gesamtsteifigkeit setzt sich aus den Einzelsteifigkeiten eines jeden Elementes zusammen. Die Elementsteifigkeiten ergeben sich aus der Problemstellung (bzw. dem Tragwerk, d.h. Stab, Balken, Scheibe,...), dem Feinheitsgrad der Diskretisierung und den Ansatzfunktionen für die Verschiebungen. Aufgrund der mathematischen Formulierung und der Verknüpfung zwischen dem Elastizitätsgesetz, dem Kräfte- und Momentengleichgewicht sowie der Verformungskinematik ist das Spannungs- und Dehnungsfeld um einen Polynomgrad niedriger als das Verschiebungsfeld. Da es bei der FEM wie im Abschnitt 3.2 erläutert darum geht, den Verlauf des physikalischen Feldes möglichst genau zu rekonstruieren, ergibt sich die Forderung, die Regionen in denen sich die Feldlinien stark ändern genauer aufzulösen bzw. feiner zu diskretisieren. Um diesem Anspruch gerecht zu werden, müssen die Gebiete um einen Riss besonders fein diskretisiert werden. Jedoch stellen sich mit zunehmendem Feinheitsgrad der Diskretisierung bei linear elastischer Betrachtung ohne Plastifizierung Spannungssingularitäten an der Rissspitze ein, welche auch schon von KOLOSOV, SNEDDON, IRWIN und vielen anderen analytisch beschrieben wurden. Abhilfe schafft auch hier die Einbeziehung der Plastizität, mit welcher die Spannungsspitzen abgebaut werden. Desweiteren kann das Rissfeld durch speziell dafür entwickelte Elemente besser beschrieben werden. Die wichtigste Methode für die numerische Simulation von Rissen ist die Erweiterte-FEM (X-FEM = Extended-FEM). Auch Inhomogenitäten im Material können mittlerweile von der FEM durch einen Mehrskalenansatz mit der Bezeichnung FE² erfasst werden [104].

Bruchmechanik mit der FEM unter Verwendung von regulären Elementen

Ziel der FEM-Analyse ist die Berechnung der bruchmechanischen Spannungsintensitätsfaktoren K_I bis K_{III} für Strukturen mit Anriss. Dabei ist wie beschrieben eine feine Diskretisierung nötig, um Approximationsfehler im Kraftfluss um die Rissspitze zu vermeiden. Außerdem müssen genügend Elemente im Kreisbogen um die Rissspitze verteilt sein, um die Winkelverteilung der Spannungen um die Rissspitze ausreichend gut zu berechnen. Da die FEM die Singularität um die Rissspitze nur sehr schlecht wiedergeben kann, fallen die mit der FEM zurück berechneten Spannungsintensitätsfaktoren zu klein aus [150].

Die Spannungsintensitätsfaktoren können aus der Nachlaufrechnung über zwei Wege berechnet werden, zum einen aus den Verschiebungsgleichungen (4.13) oder aber aus den Gleichungen der Spannungen (4.6). Für den Modus I lauten die Gleichungen (4.6)

und (4.13) in umgeschriebener Form

$$u_i(r, \theta) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^I(\theta) ; \quad (\text{ESZ und EVZ}), \text{ mit } i = x, y \text{ und} \quad (4.41)$$

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) ; \quad (\text{ESZ}), \text{ mit } i, j = x, y \quad (4.42)$$

wobei $g_i^I(\theta)$ und $f_{ij}^I(\theta)$ die Funktionen der Winkel sind. Für einen bestimmten Punkt mit den Koordinaten (r^*, θ^*) lassen sich die beiden Gleichungen (4.41) und (4.42) nach den Spannungsintensitätsfaktoren K_I^{FEM} umformen

$$K_I^{\text{FEM}}(r^*, \theta^*) = 2G \sqrt{\frac{2\pi}{r^*}} \frac{u_i^{\text{FEM}}(r^*, \theta^*)}{g_i^I(\theta^*)} ; \quad (\text{ESZ und EVZ}), \text{ mit } i = x, y \text{ und} \quad (4.43)$$

$$K_I^{\text{FEM}}(r^*, \theta^*) = \frac{\sqrt{2\pi r^*} \sigma_{ij}^{\text{FEM}}(r^*, \theta^*)}{f_{ij}^I(\theta^*)} ; \quad (\text{ESZ}), \text{ mit } i, j = x, y . \quad (4.44)$$

Das Schema zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren kann auf die anderen Belastungsmoden II und III übertragen werden. Die so berechneten Spannungsintensitätsfaktoren sind eine Funktion des Koordinatenpunktes. Vergleiche mit den exakten Lösungen zeigen, dass die so berechneten Spannungsintensitätsfaktoren in der Regel kleiner als die analytisch ermittelten sind. Dessen ungeachtet können aus der Literatur Koordinatenpunkte entnommen werden, die zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren geeignet sind, siehe hierzu [150].

Nachdem für jeden Lastfall die Spannungsintensitätsfaktoren berechnet wurden, werden diese mit Hilfe von Gl. (4.24) kombiniert, um im darauf folgenden Schritt die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} mit Gl. (4.26) zu bestimmen. Wird dabei der materialspezifische Wert für \mathcal{G}_c überschritten, so erfolgt stabiles Risswachstum.

Bruchmechanik mit der FEM unter Verwendung von Rissspitzenelementen

Da die reguläre FEM schlechte Ergebnisse liefert, wurden die finiten Elemente speziell für die Rissspitze modifiziert. Diese Rissspitzenelemente sitzen in unmittelbarer Rissumgebung und sind von regulären Elementen umgeben. Als Ansatzfunktionen werden Polynome verwendet, welche die $r^{-1/2}$ Singularität nachbilden. Diese singulären Rissspitzenansätze sind nicht mit den regulären Formfunktionen auf den Rändern zu den regulären Nachbarelementen kompatibel und erlauben häufig auch keine Starrkörperbewegungen.

Neben den Ansatzfunktionen, die auf den klassischen Verschiebungsmodellen basieren, wurden hybride Ansätze und gemischt-hybride Ansätze eingesetzt. Die Steifigkeitsmatrix des hybriden Rissspitzenelementes wird auch hier, wie bei den regulären Elementen

und den Rissspitzenelementen, durch die Verschiebungen der Randknotenvariablen ausgedrückt.

Diese Elemente dienen, ebenso wie die regulären Elemente, zur Bestimmung der K -Faktoren. Außerdem kann eine Rissfortschrittsberechnung durchgeführt werden, indem das Spannungsmaximum und dessen Richtung ermittelt wird um dann das Element mit der größten Spannung entlang der berechneten Hauptspannungsrichtung zu teilen, was jedoch zu einer Neuvernetzung des Gebietes führt.

Aufgrund der Besonderheiten der hier erwähnten Rissspitzenelemente haben sich diese nicht durchgesetzt [150].

Bruchmechanik mit weiteren FEM Verfahren

Neben den oben aufgeführten Elementen können die K -Faktoren noch über die globale Energiefreisetzungsrate, das Rissschließintegral, das J-Integral und mit bruchmechanischen Wichtungsfunktionen berechnet werden. Näheres zu diesen Methoden kann der Literatur, z.B. [150], entnommen werden.

4.5.2 Bruchmechanik mit der Randelement-Methode (BEM)

Wie im Abschnitt 3.4 erläutert, wird bei der Randelementmethode nur der Rand des Gebietes diskretisiert und nicht das Gebiet selbst. Der Rand wird dabei in Segmente unterteilt die linear, quadratisch oder noch höherer Ordnung sein können. Die BEM eignet sich gut für physikalische Probleme die eine Neuvernetzung erfordern, so wie es bei der Simulation des Rissfortschritts der Fall ist. Da die Methode Spannungskonzentrationen besonders gut auflöst, ist die BEM für die Simulation von Rissen prädestiniert, allerdings nur wenn der Werkstoff bis zum Bruch linear elastisch ist. Ein nicht-lineares Werkstoffverhalten kann mit der BEM nicht simuliert werden. Auch können die Korngrößenskala und die Bauteilskala nicht miteinander kombiniert werden, siehe auch Abb. 5.7 im Kapitel 5.

Die BEM konnte sich in den letzten Jahren trotz vieler Vorteile nicht durchsetzen, siehe hierzu auch [3, 116, 154, 160, 202].

4.5.3 Bruchmechanik mit der Elementfreien-Galerkin-Methode (EFGM)

Bei der EFGM wird das Gebiet nicht diskretisiert, sondern es werden lediglich Knotenpunkte im Gebiet vordefiniert. Jeder Knotenpunkt hat eine Einflusszone oder Wirkzone,

die durch die Kernel- oder Wichtungsfunktion beschrieben wird, weshalb die Knotenpunkte nur miteinander interagieren können, wenn ein Knotenpunkt in der Wirkzone anderer Knotenpunkte liegt. Um die Ränder besser beschreiben zu können wird der Teil der Kernelfunktion der über den Rand hinausgeht abgeschnitten, weshalb sich Risse einfach in die Methode mit einbeziehen lassen. Gebiete in denen ein Riss nur teilweise rein verläuft müssen insofern korrigiert werden, dass der Teil der Kernel-Funktion der über die Unstetigkeit hinausgeht von der Wichtungsfunktion subtrahiert wird. Dies stellt für die Programmierung einen großen Aufwand dar und macht den Lösungsalgorithmus langsam, so dass die Vorteile der Methode verloren gehen.

Die Methode ist sehr gut für große Deformationen geeignet, da keine Neuvernetzung erforderlich ist. Die dem Gebiet zugeordneten Punkte bleiben ortsfest. Bei Verformungen ändern sich lediglich die Überschneidungen der Einflusszonen. Die Simulation der Rissfortschritte ist erst jüngst gelungen [167]. Das Interesse an der EFGM hat in der Mechanik in den letzten Jahren allerdings deutlich nachgelassen. Selbst BELYTSCHKO, der die EFGM mitentwickelte, hat sich der XFEM zugewandt, um diese auf Rissfortschrittsprobleme anzuwenden. Mit der EFGM können die mesoskopische und makroskopische Skala nicht miteinander kombiniert werden, siehe auch Abb. 5.7 im Kapitel 5.

4.5.4 Rissfortschritt mit der Erweiterten-Finite-Elemente-Methode (XFEM)

Die Erweiterte-Finite-Elemente-Methode, oder die Extended-Finite-Element-Method (XFEM), wurde speziell für Rissprobleme und das Darstellen des Rissfortschrittes entwickelt und kommt ohne Neuvernetzung des Teilgebietes um den Riss aus. Der Vorteil dieser Methode ist, dass die Unstetigkeit des Risses mit zusätzlichen Ansatzfunktionen erfasst wird und dadurch die Energiebilanz ausgeglichen werden kann. Die Methode geht im Wesentlichen auf die Pionierarbeit von BELYTSCHKO, aber auch auf FLEMING und MOËS, aus den Jahren 1997 und 1999 zurück [23, 24, 50, 66, 70, 89, 166, 217], wobei die Grundlagen aber bereits 1996 geschaffen wurden [7, 164].

Die XFEM ist nicht auf die schon bestehenden Elementgrenzen, also das Netz, angewiesen, sondern das Element wird von dem sich bildenden Riss durchzogen. Einen guten Überblick über die XFEM verschaffen [36, 44, 137, 139]. Die XFEM dient nicht dazu, die mesoskopische und makroskopische Skala miteinander zu verbinden.

Wie im Abschnitt 3 beschrieben, dient die FEM der Rekonstruktion der Feldlinien. Für das diskretisierte Gebiet ohne den Riss wird die Verschiebung mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{u}^{\text{FEM}}(\mathbf{X}) = \sum_{n \in \mathcal{S}} N_n(\mathbf{X}) \hat{\mathbf{u}}_n \quad (4.45)$$

approximiert, wobei $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ das exakte Verschiebungsfeld darstellt, $\mathbf{u}^{FEM}(\mathbf{X}) = [u, v, w]^T$ dem errechneten, bzw. approximierten Verschiebungsfeld entspricht, $\mathbf{N}_n(\mathbf{X})$ ist der Vektor mit den Ansatzfunktionen, oder Formfunktionen, des Knotens k aus der Menge aller Knoten \mathcal{S} , $\hat{\mathbf{u}}_k = [u_k, v_k, w_k]^T$ ist der Vektor mit den Verschiebungsfreiwerten am jeweiligen Knoten k und $\mathbf{X} = \mathbf{x} = [x, y, z]^T$ ist der Ortsvektor des Materialpunktes, womit vorausgesetzt wird, dass mit $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ kleine Verschiebungen vorliegen. Die Komponenten der Orts- und Verschiebungsvektoren sind in der karthesischen Basis mit den orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$ des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 definiert.

In der XFEM wird der Ansatz in Gl. (4.45) erweitert bzw. angereichert, wobei zwischen zwei Bereichen unterschieden wird. Der erste Bereich ist das unmittelbare Nahfeld des Risses mit der Spannungssingularität und der zweite Bereich die Unstetigkeit des Risses selbst, welche die Rissspitze nicht beinhaltet.

Die Diskontinuität bzw. Unstetigkeit des Risses:

Die XFEM bietet die Möglichkeit ein Bauteil, unabhängig davon ob Risse im Tragwerk beinhaltet sind oder entstehen, beliebig zu vernetzen. Auch braucht das Gebiet während der Berechnung des Rissfortschrittes nicht neu vernetzt zu werden, was einen immensen Vorteil gegenüber der FEM (mit und ohne Rissspitzelementen) darstellt. Da das Gebiet um einen Riss aufgrund der freien Ränder wenig oder keine Energie aufnehmen kann, müssen die Ansatzfunktionen der Elemente die vom Riss durchzogen werden angereichert werden, so dass das Element bei Rissöffnung keine Energie mehr aufnehmen kann.

Definiert wird ein Gebiet $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$ mit dem Rand Γ , das entlang der Unstetigkeit Γ_R in die beiden Teilgebiete Ω^+ und Ω^- unterteilt ist, wobei Ω^+ das Teilgebiet ist, das in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n} zeigt. Das Gesamtgebiet besitzt einen Weg- und Krafrand Γ_u , bzw. Γ_p . Die Unstetigkeit wird mittels des Normalenvektors \mathbf{n} , des Sprungvektors $\llbracket u \rrbracket$ und dessen Rändern Γ^+ und Γ^- erfasst, siehe Abb. 4.4 (a). Die Anreicherung erfolgt auf Basis von Gl. (4.45)

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{u}^{FEM+US}(\mathbf{X}) = \sum_{n \in \mathcal{S}} \mathbf{N}_n(\mathbf{X}) \hat{\mathbf{u}}_n + \sum_{n \in \mathcal{S}_H} \mathbf{N}_n(\mathbf{X}) \mathcal{H}(\mathbf{X}) \mathbf{a}_n, \quad (4.46)$$

wobei \mathcal{S}_H eine Untermenge aller Knoten \mathcal{S} darstellt, deren Elemente von der Unstetigkeit $\llbracket u \rrbracket$ betroffen sind (siehe Abb. 4.4 (b)), \mathbf{a}_n sind zusätzliche Freiwerte der Sprungfunktion und \mathbf{u}^{FEM+US} ist der Vektor mit den unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen und den Unbekannten der Sprungfunktion. Bei fortschreitenden Rissen nimmt die Anzahl dieser zusätzlichen Freiwerte \mathbf{a}_n stetig zu, weshalb die Steifigkeitsmatrix des Gleichungssystems ständig größer wird. Gleichung (4.46) erfüllt die Partition-of-Unity, also $\sum \mathbf{N}_n(\mathbf{X}) = 1$, welche auch bei der FEM eine Bedingung zur Starrkörperdarstellung ist.

Da nicht alle Knoten gleich stark von der Unstetigkeit des Risses betroffen sind erfolgt eine Wichtung üblicherweise nach dem Flächenkriterium, siehe hierzu DOLBOW [69].

$\mathcal{H}(\mathbf{X})$ ist eine Heavisidefunktion (eine Art Sprung-Funktion oder Signum-Funktion), die wie folgt definiert ist

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}) = \begin{cases} +1 & \text{auf dem Rand } \Gamma^+ \\ -1 & \text{auf dem Rand } \Gamma^- . \end{cases} \quad (4.47)$$

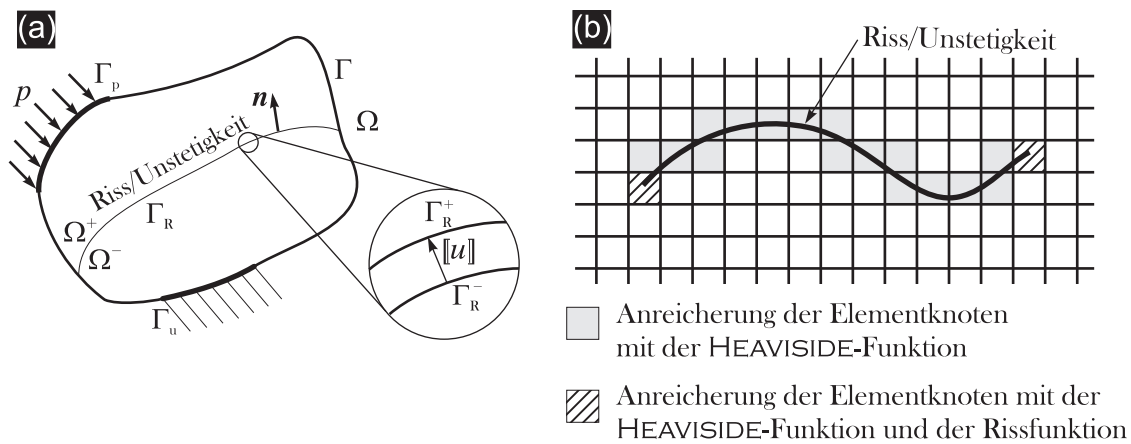


Abbildung 4.4: (a) Gebiet Ω mit der Grenzfläche der Unstetigkeit Γ_R . (b) Elemente deren Knoten angereichert werden. Elemente die nur mit der Unstetigkeit $[[u]]$ durchzogen sind werden nur mit der Heaviside-Funktion angereichert und Elemente welche die Risspitze beinhalten werden zusätzlich mit den Rissspitzenfunktionen angereichert.

Die Diskontinuität der Risspitze

Im regulären Gebiet ohne Riss werden für die Verschiebung Approximationsfunktionen verwendet, die einen linearen, quadratischen, oder höheren Polynomgrad haben. Andererseits können gemäß dem RAYLEIGH-RITZ-Verfahren auch Funktionen verwendet werden, welche die Verschiebungen genauer approximieren. Deshalb liegt es nahe, die analytischen Lösungen vom Rissfeld als Ansatzfunktionen zu verwenden. Die Verschiebungen um die Risspitze von Scheiben werden mit den Gleichungen (4.13) und (4.19) für den Modus I und II in kombinierter Form angegeben als

$$\begin{Bmatrix} u(r, \theta) \\ v(r, \theta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} K_I (\kappa - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} (\kappa + 2 + \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} \\ K_I (\kappa - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + K_{II} (-\kappa + 2 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix}. \quad (4.48)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$, $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ und $2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta$ lässt sich Gl. (4.48) in die in der Literatur [19, 196] angegebene

Form bringen

$$\begin{Bmatrix} u(r, \theta) \\ v(r, \theta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \begin{Bmatrix} Q_1(r, \theta) K_I + Q_2(r, \theta) K_{II} \\ Q_3(r, \theta) K_I + Q_4(r, \theta) K_{II} \end{Bmatrix}, \quad (4.49)$$

mit

$$\begin{aligned} Q_1(r, \theta) &= \sqrt{r} \left[(\kappa - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta \right] \\ Q_2(r, \theta) &= \sqrt{r} \left[(\kappa + 1) \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta \right] \\ Q_3(r, \theta) &= \sqrt{r} \left[(\kappa + 1) \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta \right] \\ Q_4(r, \theta) &= \sqrt{r} \left[(1 - \kappa) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Somit lautet nun der Vektor der Ansatzfunktionen um die Risssspitze in Anlehnung an Gl. (4.50)

$$\{F_\alpha(r, \theta)\}_{\alpha=1}^4 = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right], \quad (4.51)$$

wobei es nicht darauf ankommt die Konstante κ mit in die Ansatzfunktionen einzubeziehen, da die Freiwerte sich immer gemäß dem Minimum der potentiellen Energie einstellen. Die Polarkoordinaten können mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und den Winkelfunktionen in kartesische Koordinaten umgerechnet werden. Somit ergibt sich nun für die Elemente mit Risssspitze \mathcal{S}_{RS}

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{u}^{\text{FEM+US+RS}}(\mathbf{X}) &= \sum_{n \in \mathcal{S}} \mathbf{N}_n(\mathbf{X}) \hat{\mathbf{u}}_n + \sum_{n \in \mathcal{S}_H} \mathbf{N}_n(\mathbf{X}) \mathcal{H}(\mathbf{X}) \mathbf{a}_n \\ &+ \sum_{n \in \mathcal{S}_{RS}} \left(\mathbf{N}_n(\mathbf{X}) \sum_{\alpha=1}^4 F_\alpha(\mathbf{X}) \mathbf{b}_{n\alpha} \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

wobei \mathcal{S}_{RS} die Untermenge aller Knoten \mathcal{S} darstellt, deren Elemente die Risssspitze beinhalten, (siehe Abb. 4.4 (b)), $\mathbf{b}_{n\alpha}$ sind weitere Freiwerte welche die Risssspitze betreffen und $\mathbf{u}^{\text{FEM+US+RS}}$ ist der Vektor mit den unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen, den Unbekannten der Sprungfunktion und den Unbekannten der Risssspitzenanreicherung. Die Anzahl der Freiwerte $\mathbf{b}_{n\alpha}$ bleibt konstant, solange keine Rissverzweigung eintritt [66]. Üblicherweise werden nur die Knoten des Elementes angereichert in welchem die Risssspitze liegt, wobei optional weitere umliegende Elemente mit der Risssspitzenfunktion angereichert werden können.

4.5.5 Gemeinsame Behandlung verschiedener Skalen mit der FE²-Methode

Bei der FE² Methode handelt es sich um einen Mehrskalenansatz für das mechanische Feld, der von FEYEL 1999 entwickelt wurde [85, 86]. Diese Methode dient der Erfassung, numerischen Beschreibung und Implementierung von Materialinhomogenitäten, die das makroskopische Tragwerksverhalten beeinflussen. Die Vorgänge, die das makroskopische Verhalten stören, finden überwiegend nicht auf der atomaren Skala statt, sondern auf der Mikro-Meso-Skala, welche in der Größenordnung eines Kornes liegt. Dabei werden mikroskopische Risse als Inhomogenität angesehen. Makroskopische Risse finden in dem Modell keine besondere Berücksichtigung. Ebenso wenig wird ein dynamisches Risswachstum vom Modell beschrieben oder erfasst.

Bei der FE² Methode wird ein makroskopisches Modell erstellt, das die mikro- und mesoskopischen Inhomogenitäten beinhaltet. Dazu müssen auf der Mikro-Meso-Skala die relevanten Phänomene und ihr Geltungsbereich erfasst werden, um daraus die Größe eines repräsentativen Volumenelementes (RVE) zu bestimmen. Dazu wird zuerst das Material auf der Mikro-Meso-Skala homogenisiert, um so die homogenisierten Materialparameter des diskreten Punktes zu bestimmen, welche danach dem makroskopischen Modell zur weiteren Berechnung zurück übergeben werden.

Um auf der Mikro-Meso-Skala die homogenisierten Materialparameter des RVE zu bestimmen, muss jedoch

1. die Lösung der FE-Rechnung, also die Knotenpunktverschiebungen, bekannt sein,
2. eine Aussage über das physikalische Materialverhalten im RVE gemacht werden können,
3. das lokale Gleichgewicht der gebietsbeschreibenden DGL erfüllt sein,
4. die Randbedingungen des RVE bekannt sein, wobei die Randbedingungen von der FE-Lösung abhängig sind.

Die ersten drei Punkte werden durch die FE-Rechnung erfüllt. Der vierte Punkt kann nicht ohne weiteres erfüllt werden, da sich die Randerscheinungen des RVE aufgrund der im RVE stark ausgeprägten Anisotropie mit der FE-Lösung ändern. Deshalb schlägt FEYEL drei Möglichkeiten zur Lösung vor. Diese sind:

1. die Annahme einer gleichmäßigen Verformung entlang der RVE-Ränder,
2. die Annahme einer gleichmäßigen Spannungsverteilung entlang der RVE-Ränder,
3. Die Annahme, dass eine periodische Randbedingung die Form der Randerscheinung genau abdeckt und mit den periodischen Randerscheinungen der Nachbarelemente kompatibel ist.

Für diese Fälle müssen Transformationsbeziehungen gefunden werden um das makroskopische Verhalten auf die Mikro-Meso-Skala übertragen zu können. Dies kann mit Hilfe des Satzes von HILL-MANDEL über spezielle Transformationsmatritzen geschehen, welcher besagt, dass die durchschnittliche makroskopische Arbeit der durchschnittlichen mikroskopischen Arbeit im RVE entsprechen muss [213].

Die FE² Methode kann in ihrem Ablauf also wie folgt zusammengefasst werden. Zunächst wird auf der makroskopischen Ebene ein gewöhnliches FE-Modell erstellt, aus welchem die Knotenpunktverschiebungen berechnet werden. Danach wird das Verschiebungsfeld des makroskopischen Modells der Mikro-Meso-Skala übergeben und es werden für jeden Gaußpunkt neue Materialparameter aus den Verschiebungen und Inhomogenitäten bestimmt. Dazu müssen die physikalischen Gesetze der diskreten Punkte, also das Verhalten des RVE, bekannt sein, welches ausserdem die DGL des Gebietes erfüllen muss. Die neu bestimmten und degradierten Materialparameter werden danach dem makroskopischen Modell zurück übergeben und es wird mit diesen neuen Materialparametern eine erneute FE-Simulation durchgeführt. Das neu bestimmte Verschiebungsfeld wird wieder der Mikro-Meso-Ebene übergeben und es werden wiederum neue Materialparameter bestimmt, welche danach dem makroskopischen Modell wieder zurück übergeben werden. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis die Ergebnisse sich nicht mehr ändern [16].

4.6 Bruchverhalten realer Werkstoffe

Die kontinuumsmechanische Behandlung von Rissen kann im Allgemeinen *nicht* den echten physikalischen Bruchprozess mit seinem diskreten Rissverlauf wiedergeben, siehe Abb. 4.5. Die linear elastische Bruchmechanik behandelt den Riss für einen isotropen Werkstoff aus makroskopischer Sicht. Dabei fließen atomare Modelle (Kohesivzonenmodell) nicht in das Modell der Kontinuumsmechanik mit ein. Ein realer Werkstoff ist, wie in Kapitel 2 beschrieben, auf atomaren Ebene mit vielen Fehlern versehen, und auf der mesoskopischen Ebene stoßen die Gitter mit ihren unterschiedlichen Ausrichtungen an den Korngrenzen aneinander.

Eine realistische Beschreibung von Rissen kann mit numerischen Methoden, in welche stochastische Modelle einbezogen werden, durchgeführt werden. Dabei hat sich die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) als eine nützliche Methode erwiesen [34, 119, 240].

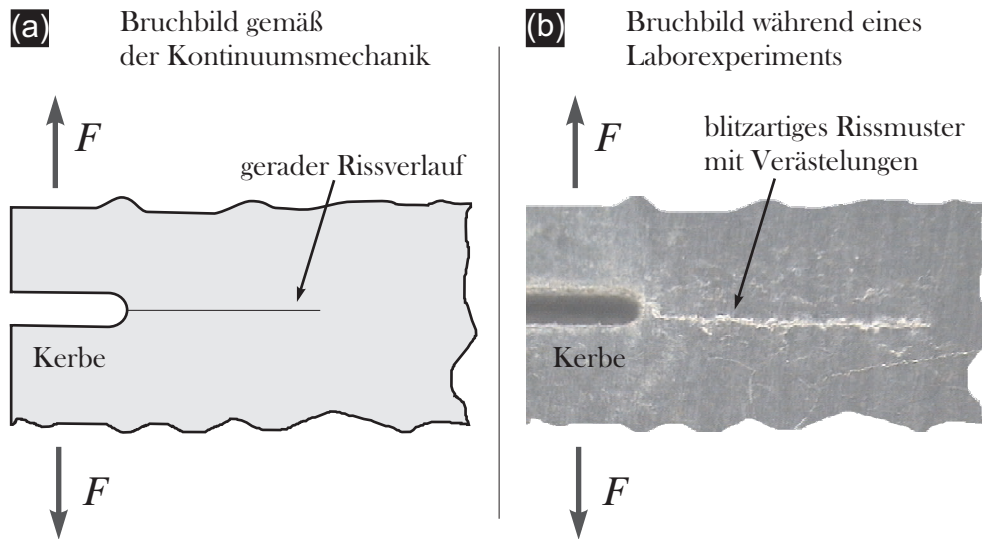


Abbildung 4.5: Rissbildung bei einer Probe im Modus I gemäß der Kontinuumsmechanik (a) und im Laborversuch (b). (Werkstoff: Al7075-T6)

4.7 Thermisches Feld in rissbehafteten Körpern

Das Temperaturfeld $T(x, y)$ in einem ebenen isotropen Körper mit Riss erhält man aus der Lösung des stationären Wärmeleitproblems

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (4.53)$$

Hierbei ist λ die Wärmeleitzahl des isotropen Körpers.

In dem konkreten Fall nehmen wir an, dass die Scheibe einen konstanten Wärmefluss senkrecht zum Riss q_{\perp} , infolge eines Temperaturgefälles bei fest vorgegebenen Temperaturen bei $y = \pm\infty$, hat. Die Oberfläche des Risses ist wärmeundurchlässig, so dass die Temperaturfeldlinien, wie in Abb. 4.6 (a) gezeigt, den Riss umlaufen müssen. Dies führt zu einer Konzentration der Feldlinien an der Risspitze. Die thermische Randbedingung an der Risspitze lautet $q_x = 0$, d.h. es findet kein Wärmefluss in x -Richtung statt. Diese Randwertaufgabe ist vom mathematischen Standpunkt her vollkommen identisch mit der einer mechanisch belasteten Scheibe im Modus III, siehe Abschnitt 4.1. Das Temperaturfeld ist analog zum Verschiebungsfeld der Gl. (4.23)

$$T(r, \theta) = -q_{\perp} \sqrt{\pi a} \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}, \quad (4.54)$$

wobei die Koordinaten in Abb. 4.6 (b) definiert sind. Der Wärmefluss ergibt sich in Analogie zu den Schubspannungen einer im Modus III belasteten Scheibe (siehe Gl. (4.21))

$$\begin{Bmatrix} q_x(r, \theta) \\ q_y(r, \theta) \end{Bmatrix} = -q_{\perp} \sqrt{\pi a} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \\ \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \end{Bmatrix}. \quad (4.55)$$

Weitere Erläuterungen können der Literatur entnommen werden [150].

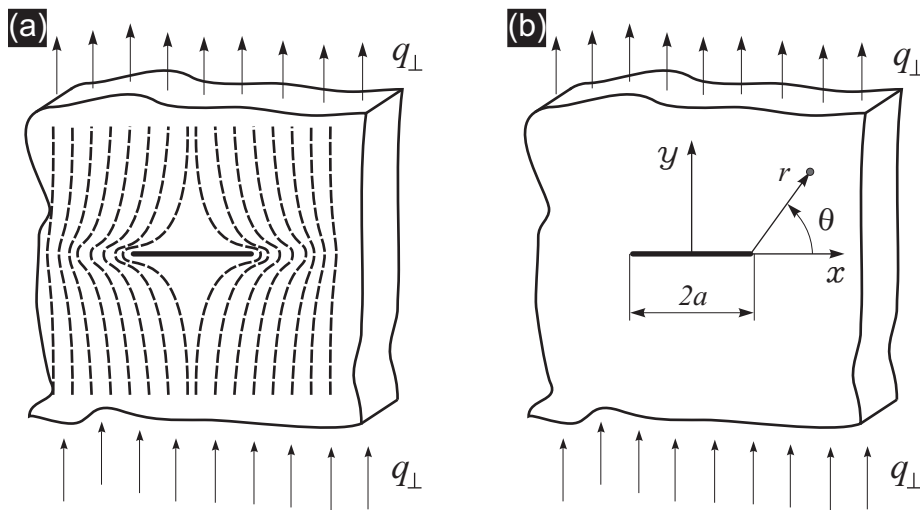


Abbildung 4.6: (a) Thermischer Fluss um einen Riss und (b) Definition der Koordinaten.

5 Diskrete-Elemente-Methode (DEM)

Die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM) unterscheiden sich prinzipiell in ihren Philosophien. Am prägnantesten wird der Unterschied dadurch ersichtlich, dass die FEM die Flussgröße in einem Teilgebiet mit Ansatzfunktionen beschreibt, während bei der DEM der Fluss durch Stäbe oder Balken übertragen wird, welche quasiisotrop angeordnet sind. Bei genauerer Betrachtung stellt man sogar fest, dass der DEM die drei großen numerischen Verfahren innewohnen. Diese sind die Finite-Elemente-Methode, die Finite-Volumen-Methode (FVM) und die Finite-Differenzen-Methode (FDM). Details dazu werden im Abschnitt 5.2 erläutert.

Wenn heute über die DEM gesprochen wird, so wird häufig darunter die Methode von CUNDALL verstanden, in welcher sich Partikel frei bewegen und über Kontakt miteinander interagieren [63, 64]. Dabei wird stets der Kontakt zu anderen Elementen und zur Umgebung überprüft, um eine Durchdringung der Elemente zu verhindern [29]. Dies ist die Methode der losen Elemente oder freien Partikel die nichts mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode gemeinsam hat. Die in dieser Arbeit verwendeten Elemente bleiben miteinander verbunden, solange kein Riss im Material entsteht. Die hier vorgestellte Diskrete-Elemente-Methode entspricht in der Vorgehensweise der Stab-Gittermethode von KLEIN und WIEGHARDT [141, 142, 234]. Siehe hierzu auch Abschnitt 5.1.

5.1 Historischer Werdegang der Diskrete-Elemente-Methode

Analytische Lösungen lassen sich nicht für alle Last-, Lager- und Randbedingungen finden. Deshalb wurde es zuerst in der Mechanik, später dann auch in anderen physikalischen Gebieten offensichtlich, dass numerische Verfahren für die Praxis notwendig sind. Als erste numerische Methode kam, dank STIRLING [216] und EULER [76], die Finite-Differenzen-Methode bereits seit 1730 bzw. 1755 für diverse Feldprobleme zur Anwendung und etablierte sich fest, siehe hierzu auch Abschnitt 3.6. Bezugnehmend auf mechanische Feldprobleme äußerte KLEIN 1905 die Vermutung, dass die Spannungsfläche einer elastisch-isotropen Scheibe im übertragenen Sinn in die Spannungsfläche eines elastisch-isotropen Dreiecksfachwerks übergeht, wenn das Fachwerk immer engmaschiger wird [141, 142]. Die Spannungsfläche auf die sich KLEIN in der

Veröffentlichung bezog ist die von AIRY eingeführte Spannungsfläche, siehe hierzu Abschnitt 6.1.

Die Richtigkeit dieser Vermutung von KLEIN wurde 1906 durch WIEGHARDT bestätigt [234]. Die Tatsache, dass die Spannungsfläche einer Scheibe mit der eines Fachwerks äquivalent ist bedeutet, dass man den Spannungszustand einer Scheibe in den Spannungszustand eines gleichwertig gelagerten, belasteten und geformten Fachwerks übertragen kann und ebenso umgekehrt, siehe Abb. 5.1. WIEGHARDT schien der Aufwand, den Spannungszustand einer Scheibe aus dem Spannungszustand eines engmaschigen Fachwerks zu schließen als nicht lohnend, da der Rechenaufwand zu hoch sei. Hingegen erschien es WIEGHARDT wichtig darauf hinzuweisen, dass sich die Spannungsverteilung einer Scheibe in Fachwerksspannungen von Gitterbrücken, wie etwa der Kölner Rheinbrücke, überführen läßt.

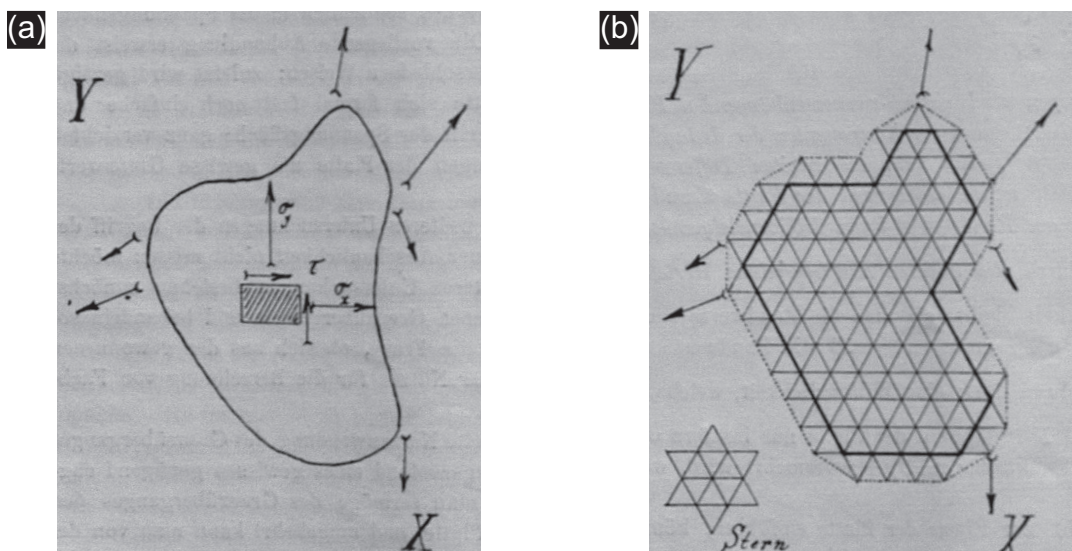


Abbildung 5.1: (a) Scheibe und ein mit (b) Stäben äquivalent zusammengesetztes Gebiet gemäß WIEGHARDT von 1906 [234]. Die Vermutung war, dass die Spannungen der Stäbe in Kontinuumsspannungen und umgekehrt umgerechnet werden können.

Zum Überführen der Spannungen untersuchte WIEGHARDT Dreiecks- und Vierecksnetze. Für das Dreiecksnetz stellte WIEGHARDT fest, dass es sich um ein elastisch-isotropes Dreiecksfachwerk handelt, wenn alle Stäbe die gleiche Steifigkeit haben, ansonsten nur um ein elastisches Dreiecksfachwerk. Dies ist insofern bemerkenswert, als WIEGHARDT bereits 1906 feststellte, dass sich anisotrope Werkstoffe durch eine Varianz in der Stabsteifigkeit darstellen lassen. Offensichtlich konnte WIEGHARDT diesem Gedanken nichts Praktisches abgewinnen, da er ihn nicht weiter verfolgte. Neben den Fachwerken mit dreieckiger Struktur untersuchte WIEGHARDT Vierecksfachwerke, für

welche er feststellte, dass für diese die Differentialgleichung der Scheibe, außer in Sonderfällen, nicht erfüllt wird. Desweiteren zeigte WIEGHARDT anhand eines Beispiels mit einem Dreiecksnetz, dass das Prinzip von SAINT-VENANT erfüllt wird und dass für die betrachteten Dreiecks- und Vierecksnetze die Querkontraktion bei $\nu = 1/3$ festliegt.

Nach WIEGHARDT modellierte RIEDEL 1927 eine einachsige unter Druck stehende Scheibe mit Vierecksnetzen [192]. Erst 1941 folgte eine weitere Veröffentlichung, die wohl in der Numerik am meisten zitierte von HRENNIKOFF [128]. Dieser leitete für die verschiedensten Netzstrukturen die Stabquerschnitte ab, so dass die Strukturen einen Querkontraktionswert von $1/3$ haben. Außerdem führte HRENNIKOFF eine Vierecksstruktur ein, mit der sich beliebige Querkontraktionswerte aus dem Modell einstellen lassen, wobei, wie in der Kontinuumsmechanik, die Bedingung $\nu < 0,5$ gilt. Bei dieser Zelle kann der Stabquerschnitt A_D kleiner als Null werden, wenn $\nu < 1/3$ wird, siehe Abb. 5.2 unten. Dieser Umstand wirkt sich nicht negativ auf die Bestimmung der Freiwerte, also die Verschiebungen, aus. Erwähnenswert ist auch die Dissertation von HRENNIKOFF, die ein Jahr davor veröffentlicht wurde [127]. Die von HRENNIKOFF untersuchten Zellen sind in Abb. 5.2 für eine charakteristische Stablänge l zusammengefasst, die sich aus dem Feinheitsgrad der Diskretisierung ergibt und d entspricht der Scheibendicke.

In Anlehnung an die letzte Zelle von HRENNIKOFF in Abb. 5.2 kann eine weitere Zelle für hexagonale Strukturen gefunden werden. Mit dieser neuen Zelle lässt sich die Querkontraktion der modellierten Scheibe einstellen. In ihr kann der Stabquerschnitt A_1 kleiner als Null werden, wenn $\nu < 1/3$ wird, was sich aber nicht negativ auf die Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen auswirkt, da die Steifigkeitsmatrix dadurch noch nicht singulär wird solange ν größer als Null verbleibt, siehe Abb. 5.3.

Im Anschluss an die Arbeit von HRENNIKOFF folgten weitere Veröffentlichungen, z.B. 1943 von MCHENRY [161] und 1944 von LIE [155]. Letzterer tat sich dadurch hervor, dass er Plattenstrukturen mit diskreten Balken untersuchte, wohingegen alle anderen bisher Stäbe zum Analysieren von Scheiben verwendeten. Als 1956 die Finite-Elemente-Methode (FEM) entwickelt wurde, geriet die Gittermethode mehr und mehr in den Hintergrund, weshalb erst 1963 eine weitere wichtige Arbeit zur Gittermethode von SPIERIG erschien [214, 215]. In dieser Arbeit wurden mechanische Elemente mit angepassten Eigenschaften vorgestellt, um in unregelmäßig geformten Tragwerken den Übergang von einem Gebietsquerschnitt zu einem anderen zu ermöglichen. Die sogenannten Übergangselemente sind für mechanische Feldprobleme unverzichtbar und SPIERIG brachte diese bei Scheiben, Platten und Schalen zur Anwendung. Außerdem zitierte SPIERIG in der Veröffentlichung von 1964, dass „verschiedene von LECKIE und LINDBERG durchge-

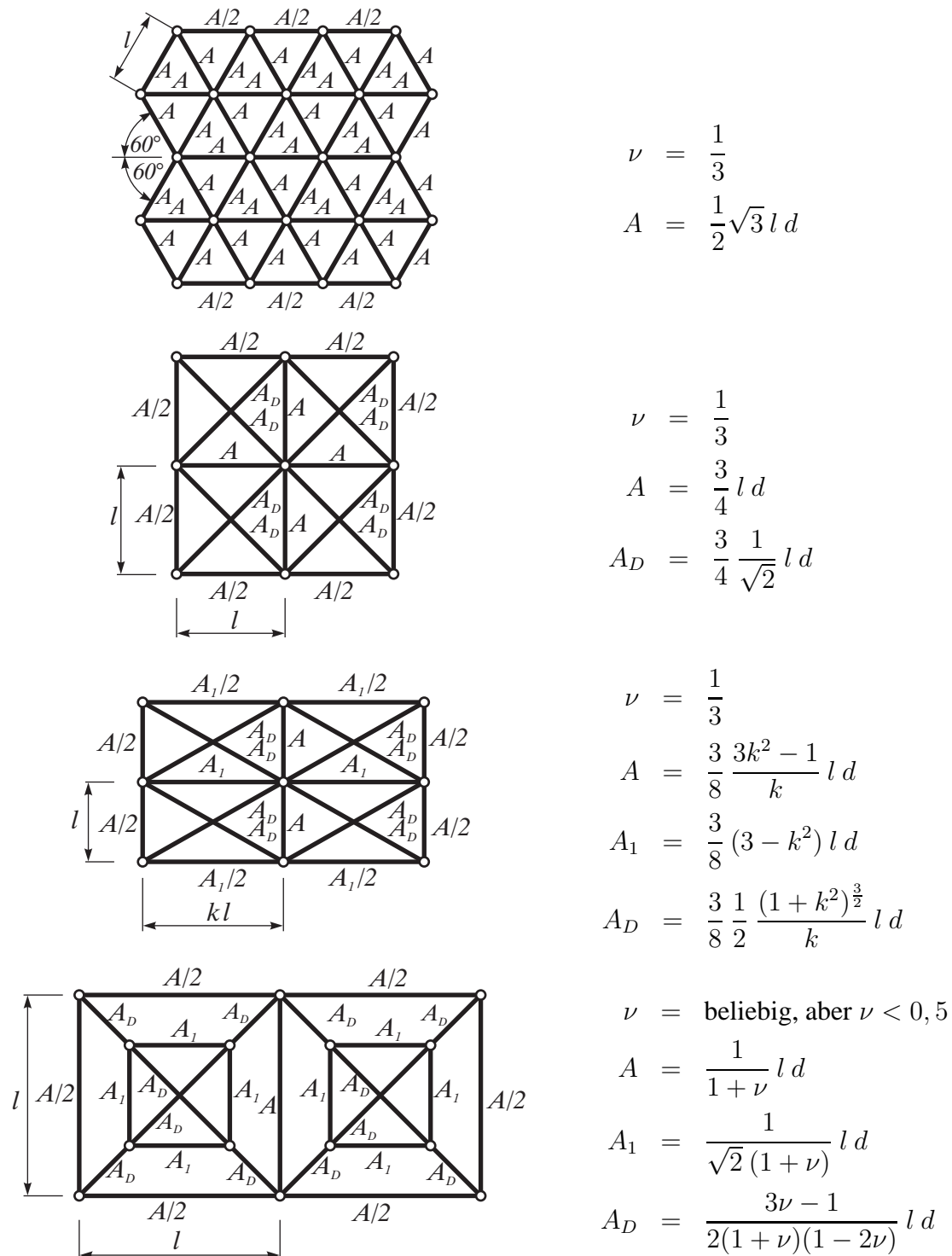


Abbildung 5.2: Gitterstrukturen und die zugehörigen Stabquerschnitte gemäß HRENNIKOFF [127, 128]. Die Stablänge l ergibt sich aus dem Feinheitsgrad der Diskretisierung und d ist die Scheibendicke.

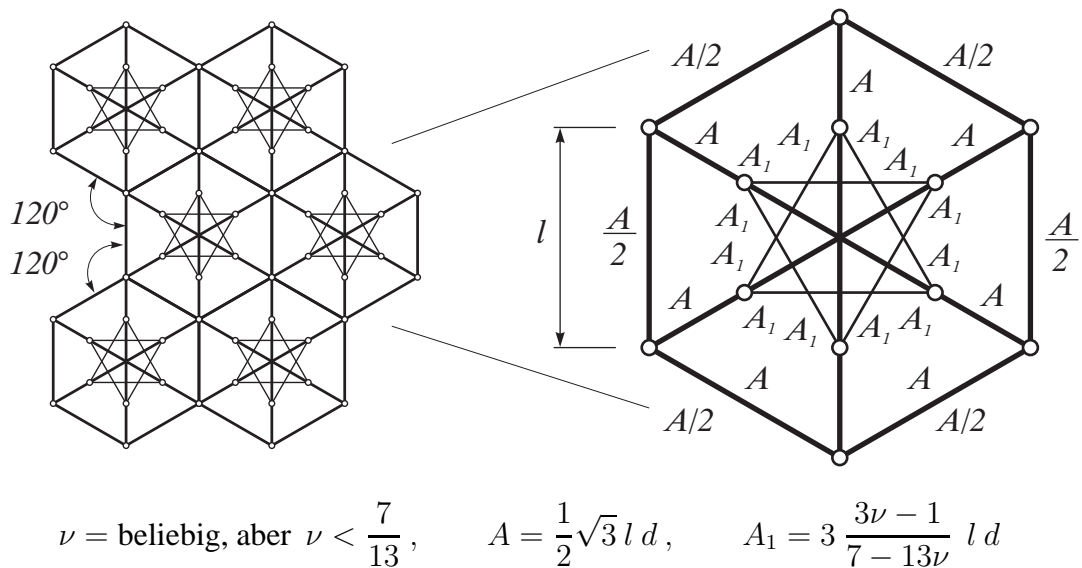


Abbildung 5.3: Links ist die Gitterstruktur, bestehend aus einer neuen hexagonalen Zelle in Anlehnung an die Idee von HRENNIKOFF dargestellt und rechts die Einzellzelle. Mit dieser Einheitszelle kann die Querkontraktion der flachen Kontinuumscheibe eingestellt werden. Die Stablänge l ergibt sich aus dem Feinheitsgrad der Diskretisierung und d ist die Scheibendicke.

fürte bisher unveröffentlichte Vergleichsrechnungen gezeigt haben, dass bei gleichem Rechenaufwand das Gitterrostmodell nach HRENNIKOFF z.T. wesentlich genauere Ergebnisse liefert als alle anderen betrachteten Konkurrenzverfahren“ [215], wobei mit diesen Konkurrenzverfahren die FEM und FDM gemeint sind. Wenngleich die Artikel von LECKIE und LINDBERG vom Autor nicht gefunden werden konnten, wird dieses Zitat von SPIERIG dennoch von der vorliegenden Arbeit untermauert.

Die Gründe dafür, dass die Gitterrostmethode bessere Ergebnisse liefert als die anderen numerischen Verfahren liegen offensichtlich an der Tatsache, dass die üblichen Ansatzfunktionen des Stabes die analytische Lösung exakt treffen. Außerdem ergibt die Assemblierung von sechs Stäben zu einem Hexagon, nach Grenzübergang der Stablänge zu Null, den Finiten-Differenzen-Stern der gebietsbeschreibenden Differentialgleichung, siehe Abschnitt 6.2. Beim Finite-Elemente-Verfahren wird hingegen eine Feldapproximation vorgenommen, welche die analytische Lösung, nach einem Grenzübergang zu unendlichen Elementen, nur in einfachen Fällen exakt zu treffen vermag.

Aus der Gitterrostmethode (oder Lattice-Model bzw. auch Framework-Method) entwickelte sich später die Diskrete-Elemente-Methode (DEM), und zwar nachdem CUNDALL 1971 den Begriff für lose Partikel verwendete, die bei dynamischen Vorgängen

den Kontakt zu den Nachbarelementen und der Umgebung prüfen, um eine Durchdringung zu verhindern [63]. Diese Methode wird auch Molekulardynamik genannt, siehe hierzu auch [29]. Die Gitterrostmethode kam in den darauf folgenden Jahren unter den verschiedensten Namen bei Simulationen von Rissen und Diskontinuitäten in Werkstoffen zur Anwendung, so z.B. auch unter den Namen *Lattice-Model* [147, 165, 177, 201, 206, 246, 247], oder *Spring-Network-Model* [34, 176], auch als *Discrete-Element-Methods* [11, 12, 29, 67, 68, 238, 239, 240] und sogar unter dem Begriff *Molecular-Dynamics* [122, 156, 197]. Mittlerweile sind diskrete Elemente auch mit finiten Elementen erfolgreich gekoppelt worden [152, 157, 198]. Die Stabgittermethode wird aber auch in der Architektur für den Gebäudebau verwendet. In den oben aufgeführten Arbeiten bzw. Veröffentlichungen kam die DEM bisher ausschließlich im 2D-Raum zur Anwendung, jedoch wurden jüngst erste Anwendungen im 3D-Raum vorgestellt [148, 149]. Einen guten Überblick hierzu liefert [218]. In dieser Arbeit wird für die Methode der Begriff der Diskreten-Elemente-Methode bevorzugt verwendet.

Es ist nirgendwo in der Literatur ersichtlich, dass die DEM in anderen physikalischen Gebieten als der Mechanik angewendet wurde, um Kraftflüsse zu analysieren. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, dass sich mit der DEM auch andere physikalische Flussgrößen, wie z.B. Wärmeflüsse, analysieren lassen. Dazu wird eine neue und allgemeinere Betrachtungsweise in dem nun folgenden Abschnitt vorgeführt. Aus dieser wird ersichtlich, wie die DEM in anderen physikalischen Gebieten zur Anwendung gebracht werden kann. Außerdem wird gezeigt, dass sich mit der DEM verschiedene physikalische Felder koppeln lassen. Im Speziellen wird die Kopplung für das mechanische und das thermische Feld gezeigt.

Bei einer genaueren Betrachtung der DEM ergibt sich, dass diese Methode nichts anderes als ein weiteres numerisches Verfahren zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen ist. Mittels der DEM wurden in der Arbeit von FLUCK bereits die vier Felder, das mechanische, das chemische (mit den gebundenen und freien Ionen), das elektrische und das thermische erfolgreich gekoppelt und zur Anwendung gebracht [90].

5.2 Diskrete-Elemente-Methode im heutigen Sinne aus dem Blickwinkel der Finite-Volumen-Methode

Alle numerischen Verfahren diskretisieren das Gebiet oder den Rand auf irgend eine Art und Weise, so auch die DEM. Dabei ist eine zwingende Forderung der DEM, dass das Gebiet lückenlos diskretisiert wird, sofern es keine klaffenden Risse oder andere Unstetigkeiten enthält. Die Diskretisierung kann nur lückenlos mit Dreiecken, Vierecken

oder Hexagonen erfolgen, wobei das Dreieck im Sechseck enthalten ist, siehe Abb. 5.4.

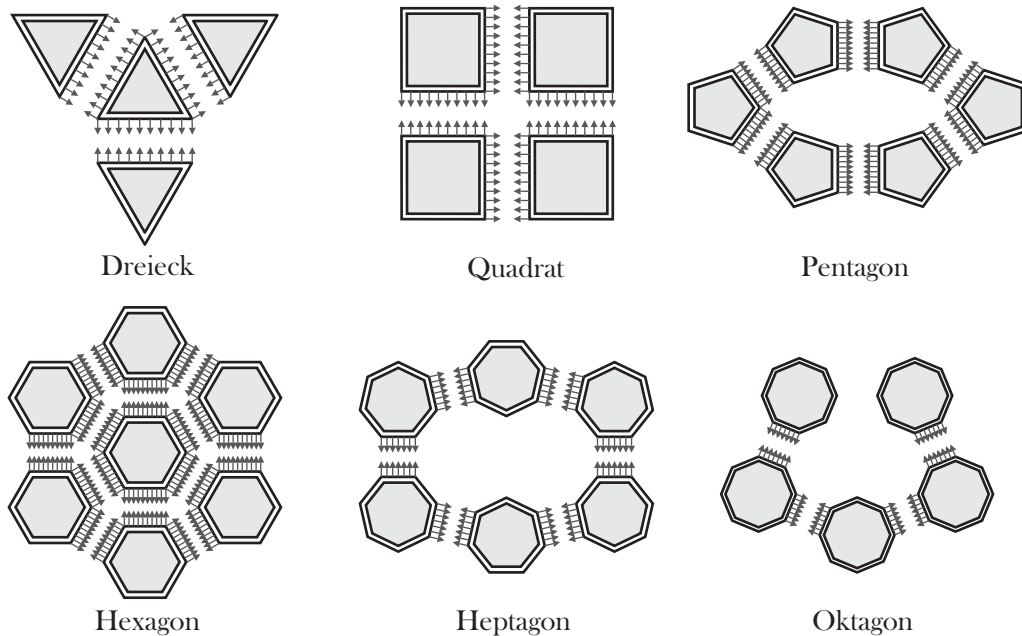


Abbildung 5.4: Ein Gebiet kann nur lückenlos in Dreiecke, Vierecke oder Hexagone diskretisiert werden.

Für die Bruchmechanik bietet die hexagonale Anordnung der Stäbe den Vorteil, dass alle Stäbe identische Materialparameter haben, falls ein isotroper Werkstoff modelliert wird. Bei der Verwendung von viereckigen Elementen müssen selbst im homogenen Werkstoffmodell die Diagonalstäbe mit unterschiedlichen Steifigkeiten und bruchmechanischen Parametern versehen werden. Dabei sind die Steifigkeitsparameter bekannt (siehe HRENNIKOFF [128]), nicht aber die bruchmechanischen Parameter, wie z.B. die Festigkeit. Aufgrund dieser Ungewissheit werden in dieser Arbeit ausschließlich Elemente mit hexagonaler Form verwendet. Auch wird aus den gleichen Gründen nicht die neue hexagonale Zelle in Abb. 5.3 verwendet, da zum einen die bruchmechanischen Parameter nicht bekannt sind und zum anderen weil die Querkontraktion für die Lebensdauer offensichtlich eine untergeordnete Rolle spielt.

Bei der in dieser Arbeit neu vorgestellten Betrachtungsweise der Diskreten-Elementen-Methode wird das Gebiet in hexagonale Elemente oder Partikel aufgeteilt (siehe Abb. 5.5 (a)). Diese hexagonalen Elemente stellen die sogenannten diskreten Elemente dar. Der Fluss des physikalischen Feldes, welcher bei den gegebenen Randbedingungen durch das gesamte diskretisierte Gebiet fließt, strömt über die Ränder von einem diskreten Element zu den benachbarten diskreten Elementen. Hierbei stellt sich die Verteilung der Feldgröße über das gesamte Gebiet, also über alle diskreten Elemente verteilt so ein, dass

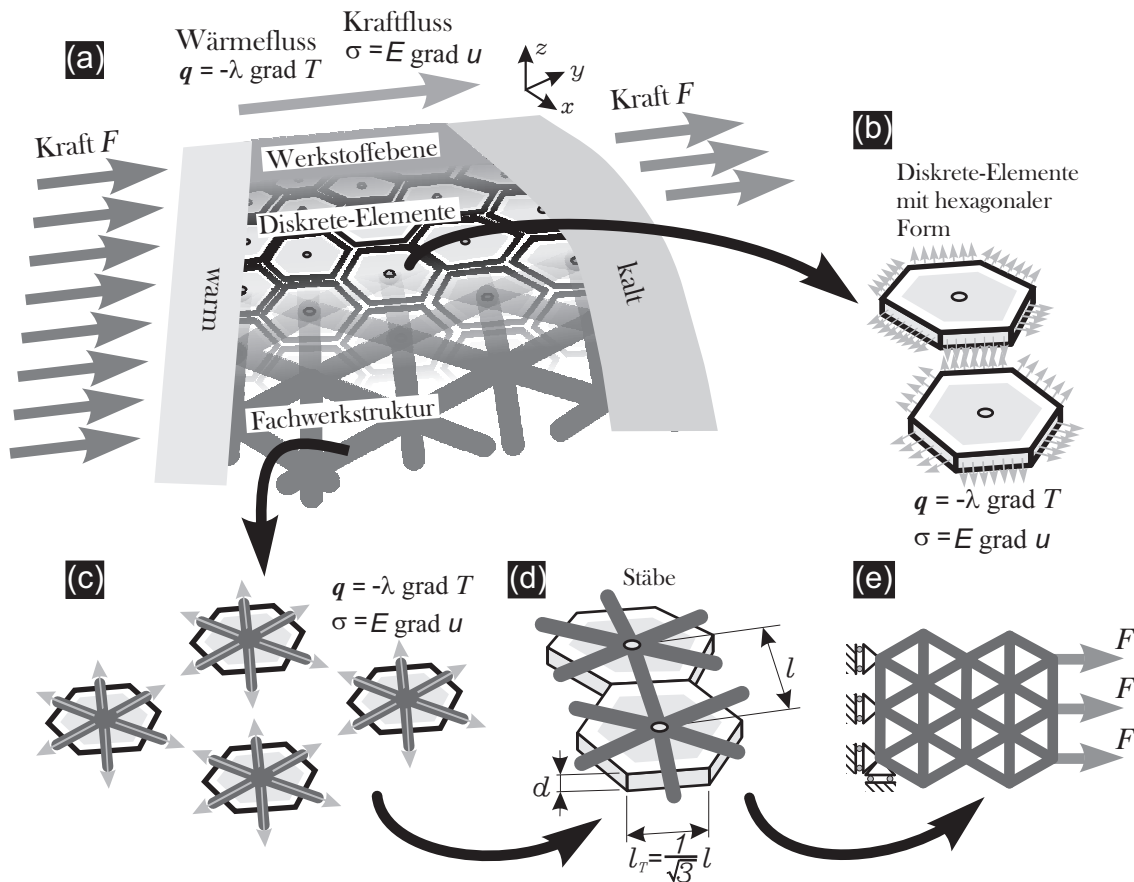


Abbildung 5.5: Eine Scheibe mit konstanten Materialparametern wird in gleichförmige hexagonale Elemente diskretisiert (a). Die Verteilung der Flussgröße erfolgt über die Ränder der Elemente (b). In der Diskrete-Elemente Theorie erfolgt die Verteilung der Flussgröße jedoch über die Stäbe (c). Die Dicke der Scheibe ist d und die Seitenlänge des Hexagons ist l_T . Der Querschnitt der Stäbe $l_T \cdot d$ und deren Länge l können aus der Geometrie der diskreten Elemente entnommen werden, welche vom Feinheitsgrad der Diskretisierung abhängt (d). Das Gleichgewicht wird aus den assemblierten Stäben über die Finite-Elemente-Methode gefunden, die dem Minimum der potentiellen Energie unterliegt (e).

das Minimum der potentiellen Energie gewahrt bleibt (siehe Abb. 5.5 (b)). Die Schwerpunkte der diskreten Elemente bilden hierbei die Knotenpunkte des Feldes, bzw. des Netzes. Verbindet man nun die Knotenpunkte mit Stäben, so lässt sich im übertragenen Sinn der gesamte Fluss ebenso durch die Stäbe leiten, anstatt über die Ränder der diskreten Elemente (siehe Abb. 5.5 (c)). Dabei wirken die Stäbe als Überträger der physikalischen Feldgröße, welche im mechanischen Feld die Spannung σ bzw. die Dehnung ϵ und im thermischen Feld den Wärmefluss q darstellt. Die Stärke oder die Intensität des mechanischen Feldes bestimmt sich aus dem Gradient der Verschiebung u und im ther-

mischen Feld aus dem Gradienten der Temperatur T . Der Querschnitt eines Stabes ergibt sich aus der betreffenden Randfläche des diskreten Elementes (siehe Abb. 5.5 (d)). Werden alle Knoten des Gebietes mit Stäben verbunden, so erhält man eine Fachwerkstruktur mit hexagonaler Form. Das Gleichgewicht des gesamten Systems lässt sich aus der assemblierten Stabstruktur, also der Fachwerkstruktur, über die Finite-Elemente-Methode finden, welche unter anderem auch dem Minimum der potentiellen Energie unterliegt, siehe Abb. 5.5 (e). Somit handelt es sich nun bei der DEM um die Methode in welcher die Verteilung der physikalischen Feldgrößen durch das Stabgitterverfahren von KLEIN und WIEGHARDT bestimmt wird.

Der Nachweis über die Zulässigkeit der DEM im mechanischen Feld erfolgt zum einen dadurch, dass sich die Stabspannungen innerhalb einer Einheitszelle mittels dem Kräftegleichgewicht und der Finite Differenzenmethode in die Airysche Spannungsfunktion überführen lassen, siehe Abschnitt 6.2 und zum anderen über die erste Variation der Stabpotentiale, welche den virtuellen Arbeitssatz der Scheibe liefert, siehe Abschnitt 6.3. Der Beweis, dass die Stabgittermethode im thermischen Feld angewandt werden darf, erfolgt lediglich über die Finite-Differenzen-Methode, da für dieses Feld keine Potentialfunktion definiert ist, siehe Abschnitt 7.2.

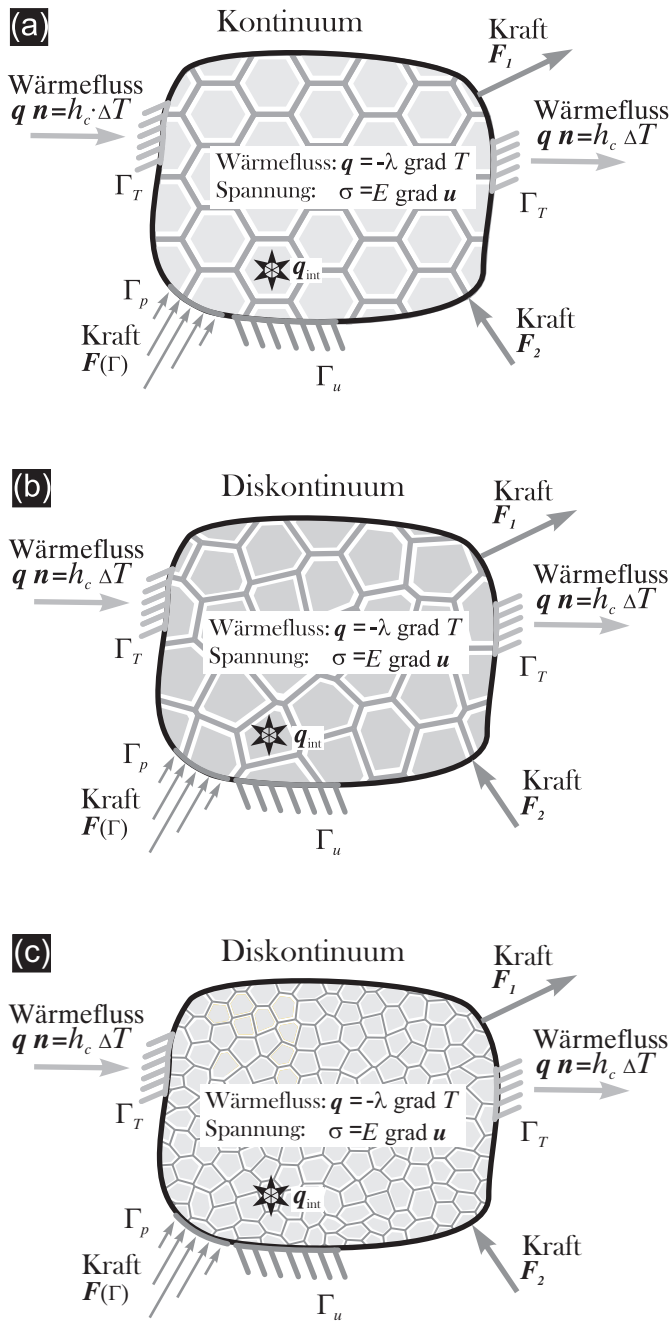
Anhand dieser Betrachtungen können die für das Modell relevanten Material- und Geometrieparameter eindeutig bestimmt werden. Die Größe der Hexagone und somit auch die Länge der Stäbe l ergibt sich aus dem Feinheitsgrad der Diskretisierung. Alle anderen Materialparameter entsprechen den tatsächlichen Materialparametern des Werkstoffs.

Das mechanische Verhalten homogener Werkstoffe kann mit unverzerrten Hexagonen (bzw. regelmäßig geformten diskreten Elementen) simuliert werden, siehe Abb. 5.6 (a). Jedoch treten bei genauerer Betrachtung am Rand Störungen auf, die ein gleichmäßiges Materialverhalten unmöglich machen, wobei auf diese Randerscheinungen im Abschnitt 6.5.2 eingegangen wird. Eine inhomogene Werkstoffmodellierung kann dadurch erfolgen, dass die hexagonale Form der diskreten Elemente zu Voronoi-Polygonen verzerrt wird, siehe Abb. 5.6 (b). Diese verzerrten diskreten Elemente bringen eine verzerrte Stabgitterstruktur mit sich, wobei die Gitterverzerrung einer statistischen Gleichverteilung der Knotenpunkte mit dem Unordnungsparameter a unterliegt. Der Unordnungsparameter hat einen Geltungsbereich von $0 \leq a < 1$, wobei $a = 0$ bedeutet, dass keine Unordnung, also eine regelmäßige hexagonale Struktur vorliegt. Für $a \rightarrow 1$ wird die Unordnung maximal, so dass die Stäbe sich fast überkreuzen. Der Einfluss des Unordnungsparameters auf das Materialmodell wurde unter anderem in der Arbeit von WITTEL untersucht und soll hier nicht weiter verfolgt werden [240].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die diskreten Materialeigenschaften

zu einem globalen Wert verschmieren bzw. sich homogenisieren, wenn ein Gebiet mit anisotropen Materialeigenschaften fein diskretisiert bzw. aufgelöst wird, siehe Abb. 5.6 (c). D.h. bei einer feinen Diskretisierung des Gebietes können die inhomogenen Materialeigenschaften in den kleinen diskreten Elementen wiedergefunden werden. Jedes diskrete Element hat seine individuellen Eigenschaften, die nicht mit denen der Nachbarelemente übereinstimmen müssen. Bei einer globalen Betrachtung hingegen werden repräsentative Materialwerte beobachtet, die mit den im Labor beobachteten Werten übereinstimmen. Aufgrund dessen geht mit der DEM die Mikroskala in die Makroskala über.

Die Frage die sich nun aufdrängt ist, wie fein ein Gebiet diskretisiert werden muss, um z.B. die statistisch verteilten Lebensdauerwerte eines Werkstoffs durch Simulationen vorfinden zu können? Aus dem Blickwinkel der obigen Erläuterungen (und Abb. 5.6) muss das Gebiet nicht feiner als bis zur Korngrößenskala des im numerischen Modell enthaltenen Werkstoffs diskretisiert werden, weil dies die kleinste Skala ist, die dem Gebiet durch eine regelmäßige Gitterstruktur konstante Materialparameter aufprägt. Da die Körner in metallischen Werkstoffen eine Größe von 0,015mm bis 0,25mm haben, führt dies zu einer erheblichen Anzahl an Freiheitsgraden im numerischen Modell. Je nach Anisotropiegrad bzw. Anzahl und Größe der Inhomogenitäten kann der Feinheitsgrad der Diskretisierung jedoch der nächst größeren Materialskala angepasst werden, siehe Abb 5.7.



- homogener Werkstoff mit isotropen Materialeigenschaften

- inhomogener Werkstoff mit anisotropen Materialeigenschaften
- das physikalische Verhalten entspricht lokal und global dem eines polykristallinen Werkstoffs

- inhomogener Werkstoff mit quasiisotropen Materialeigenschaften
- das physikalische Verhalten entspricht lokal dem eines polykristallinen Werkstoffs, jedoch sind die Materialeigenschaften global verschmiert bzw. homogenisiert

Abbildung 5.6: (a) Ein homogener Werkstoff wird durch unverzerrte Hexagone repräsentiert. (b) Inhomogene Werkstoffe lassen sich durch eine Verzerrung der diskreten Elemente bzw. der Gitterstruktur darstellen. (c) Wird das Gebiet mit vielen verzerrten Elementen diskretisiert, so verschmieren die Eigenschaften global. In diesen Abbildungen ist Γ_u der Wegrand, Γ_p der Krafterand, F_1 und F_2 sind die Kräfte, $F(\Gamma)$ ist eine auf den Wegrand bezogene Kraft, Γ_T der Temperaturrand, T die Temperatur, q der Wärmeflussvektor, q_{int} eine innere Wärmequelle, λ die Wärmeleitfähigkeit, \mathbf{n} der Normalenvektor am Rand und h_c der Wärmeübergangskoeffizient am Rand.

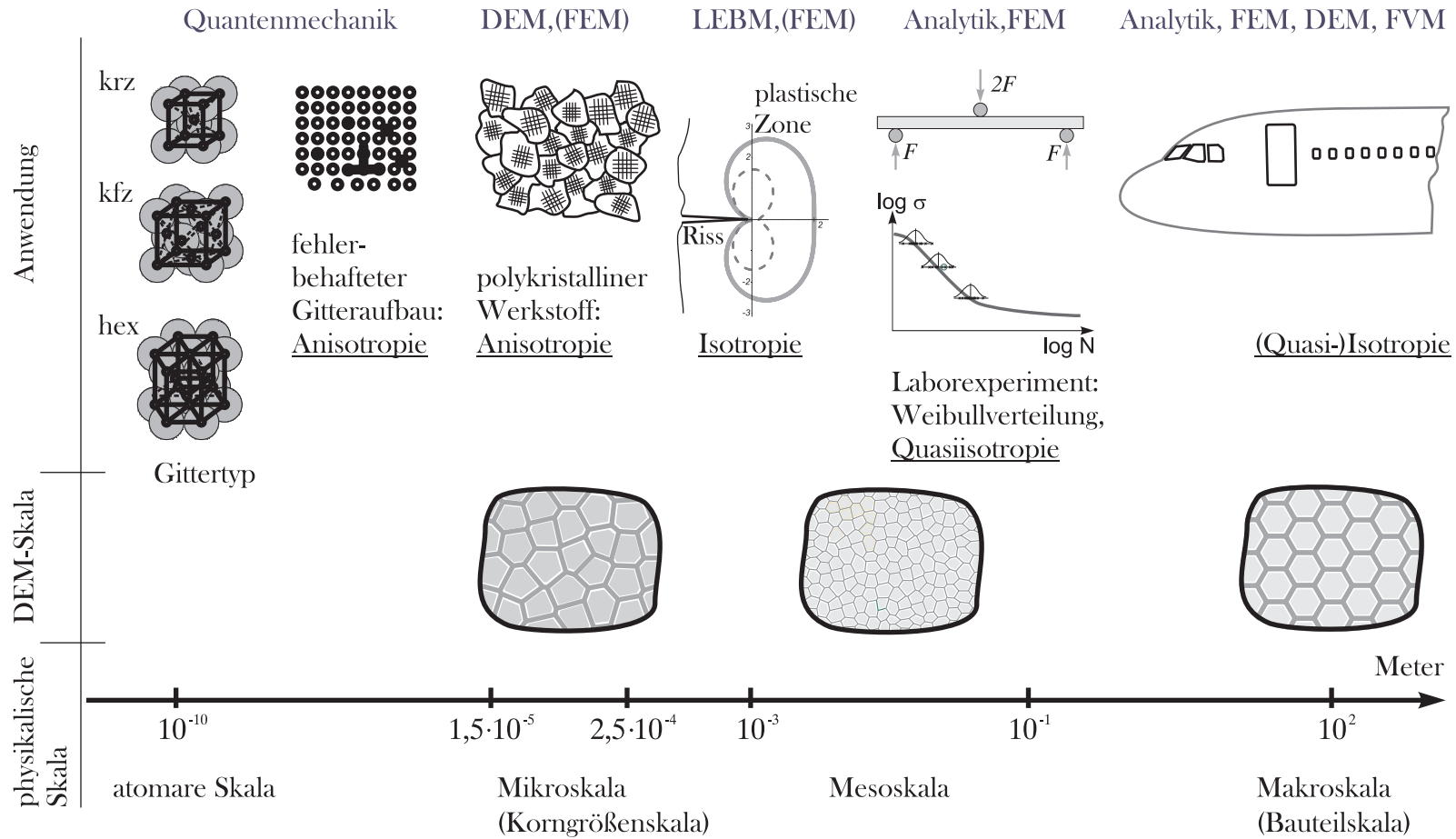


Abbildung 5.7: Mechanische Materialmodelle und Berechnungsmethoden.

6 Behandlung des mechanischen Feldes mit der Diskrete-Elemente-Methode

In diesem Kapitel wird die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) ausschließlich im mechanischen Feld für den ebenen Spannungszustand angewandt. Die Validierung der Methode erfolgt anhand eines Grenzübergangs, der zuerst mit finiten Differenzen und danach mittels der Variationsrechnung durchgeführt wird. In den folgenden Abschnitten wird das DE-Modell verifiziert und abschließend wird eine Lebensdauerabschätzung durchgeführt.

6.1 Analytische Beschreibung des ebenen Spannungszustandes

Die Bestimmung von Spannungsfeldern in Bauteilen ist nach wie vor eine Herausforderung für Ingenieure. Begonnen hat die analytische Beschreibung des Kontinuums im Jahre 1752, als EULER das Schnittprinzip einführte und ab 1757 wurde der Begriff der Spannungen in der Hydromechanik geprägt [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82]. Der Spannungsbegriff wurde erst 1824 von NAVIER [171] und 1827 bzw. 1829 von CAUCHY [47, 48] wieder aufgegriffen und aus der Hydromechanik in die Festkörpermechanik übertragen. Dabei schrieb CAUCHY die Spannungskomponenten in Matrixform nieder und definierte so den Begriff des Spannungstensors. Die Ausarbeitung von analytischen Lösungen für ebene oder räumliche Problemstellungen erwies sich aber bereits damals als sehr schwierig bzw. unmöglich. So konnten z.B. Spannungsfelder in ebenen Scheiben erst 1863 durch die Lösungsmethode von AIRY untersucht werden [1]. Für 3D-Spannungsprobleme gibt es selbst heute kaum Lösungen, außer für Sonderfälle. Einige der Lösungen stammen von PAGANO [178] aus dem Jahr 1969 oder von REDDY [188] aus dem Jahr 1988. Aufgrund der aufwendigen oder gar unmöglichen analytischen Beschreibung von realen Spannungsfeldern setzten sich die numerischen Methoden zunehmend durch.

Da in diesem Kapitel gezeigt wird wie die Lösung der Diskreten-Elemente-Methode, nach Grenzübergang von Elementen mit finiter Größe zu Elementen mit infiniter Größe in die gebietsbeschreibende Differentialgleichung übergeht, muss die gebietsbeschreibende Differentialgleichung für Scheiben im ebenen Spannungszustand gemäß der Methode von AIRY hergeleitet werden. Dabei ist der ebene Spannungszustand in dieser Arbeit von zentralem Interesse.

Für eine Scheibe im ebenem Spannungszustand, mit $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$ und $\sigma_{xz} = 0$ gemäß Abb. 6.1 gelten die Gleichgewichtsbeziehungen in x und y -Richtung

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0, \quad (6.1)$$

wobei X und Y die Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen Volumenkräfte darstellen und $p_x(y)$ und $p_y(x)$ die Komponenten der auf die Flächeneinheit der äußeren Ränder bezogenen Oberflächenkräfte sind.

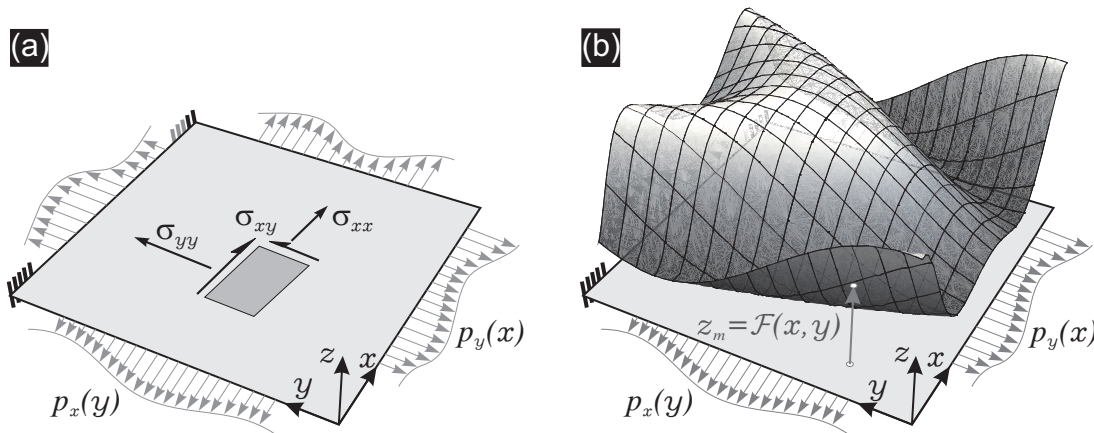


Abbildung 6.1: (a) Beliebig gelagerte Scheibe im ebenem Spannungszustand, mit den Randlasten $p_y(x)$, $p_x(y)$ und den daraus resultierenden inneren Spannungen $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ und $\sigma_{xy}(x, y)$. (b) Darstellung einer Airyschen Spannungsfläche über der Scheibe. Der z_m -Wert der Fläche entspricht dem Wert der Airyschen Spannungsfunktion \mathcal{F} .

Für die kinematischen Beziehungen gilt

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = v_{,y} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}. \quad (6.2)$$

Hierbei stellen ϵ_{xx} und ϵ_{yy} die Dehnungen und γ_{xy} den Schubwinkel dar und u , v sind die Verschiebungen in x und y -Richtung. Das Materialgesetz für den ebenen Spannungszustand lautet bei isotropen Materialien

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

worin E der E-Modul des Werkstoffs, G der Schubmodul und ν die Querkontraktion ist. Der E-Modul und der Schubmodul sind durch Gl. (4.10) miteinander verknüpft. Die

Dehnungen ϵ_{xx} und ϵ_{yy} können mit dem Schubwinkel γ_{xy} durch Gl. (6.2) über deren Ableitungen gekoppelt werden und bilden dann die Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (6.4)$$

Die Verknüpfung des Gleichgewichts aus den Gleichungen (6.1), dem Materialgesetz der Gl. (6.3) und der Kinematik der Gl. (6.2) bzw der Kompatibilitätsbedingung der Gl. (6.4) erfolgt über die Spannungsfunktion $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$, die 1863 von AIRY definiert wurde [1]. Diese Spannungsfunktion steht mit den Komponenten des CAUCHY-Spannungstensors wie folgt in Verbindung

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y}. \quad (6.5)$$

Diese drei Gleichungen erfüllen die Gleichgewichtsbeziehungen in Gl. (6.1), was erforderlich ist. Man erhält nach Einsetzen der Gleichungen. (6.3) und (6.5) in die Gl. (6.4) und unter Vernachlässigung der Volumenkräfte eine biquadratische homogene partielle DGL

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (6.6)$$

bzw.

$$\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial y^4} = \nabla^4 \mathcal{F} = 0, \quad (6.7)$$

für ebene Scheiben, welche man auch die AIRYSche-DGL nennt. Aus dieser DGL können analytische Lösungen für einfache Belastungen gefunden werden. Der Gleichung (6.7) wohnt ein Kräftegleichgewicht inne, welches lediglich für das Kontinuum, nicht jedoch für das Diskontinuum gilt. Eine Scheibe mit diskontinuierlichen Materialeigenschaften (oder plastifizierten Zonen) kann in Teilgebiete $\partial\Omega_i$ aufgeteilt werden, die für sich homogen und isotrop sind. Für jedes Teilgebiet ($\partial\Omega_i \in \Omega$) gilt Gl. (6.6). Bei der Assemblierung aller individuellen Teilgebiete zu dem gesamten Gebiet gilt, dass an allen Rändern die Verschiebungen der zueinander gehörigen Grenzflächen gleich sein müssen und ebenso ein Kräftegleichgewicht vorliegen muss. Aufgrund dessen existiert für jedes Teilgebiet $\partial\Omega_i$ eine eigene Spannungsfläche $\mathcal{F}_i(x, y)$. Aus den beschriebenen Gleichgewichtsgründen müssen die individuellen AIRYSche-Spannungsflächen $\mathcal{F}_i(x, y)$ lückenlos zusammengestückt werden, was aber dazu führt, dass die gesamte Spannungsfläche nicht stetig verläuft. Siehe hierzu auch [8, 97, 111].

6.2 Grenzübergang im mechanischen Feld mit der Finiten-Differenzen-Methode

Im folgenden Abschnitt wird der Nachweis erbracht, dass die exakte AIRYSche Spannungsfläche \mathcal{F} mit einer Fachwerkstruktur gemäß WIEGHARDT nachgebildet werden kann. Der Nachweis erfolgt über einen Grenzübergang mit der Finiten-Differenzen-Methode für das Hexagon. Dazu wird die Scheibe in eine endliche Anzahl von hexagonalen Teilgebieten \mathcal{R} , mit endlicher Größe $\partial\Omega_i$, zerlegt, also $\Omega = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \partial\Omega_i$. Dabei sind die hexagonalen Teilgebiete die diskreten Elemente. Über dem ausgeschnittenen Teilgebiet der Scheibe $\partial\Omega_i$ wird die approximierte AIRYSche-Spannungsfläche $\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}(x, y) \approx \mathcal{F}$ dargestellt, siehe Abb. 6.2 (a). Die approximierte Spannungsfläche ist aus dreieckigen Flächen, den Facettenflächen, zusammengesetzt und ein diskretes Element ist von sechs Facettenflächen I, II, ..., VI umgeben, siehe Abb. 6.2 (b). Die Projektion der Kanten der Facettenflächen, parallel zur z_m -Achse auf die Scheibe bzw. die Teilgebiete, fällt mit den Stabachsen zusammen. Da die Stäbe lediglich Längskräfte übertragen, geben sie die Wirkrichtung der Flussgröße vor. Wenn es nun gelingt zu zeigen, dass die approximierte Spannungsfläche $\bar{\mathcal{F}}(x, y)$ gleich der exakten AIRYSche-Spannungsfläche \mathcal{F} ist, dann ist der Beweis für die Richtigkeit der Methode erbracht.

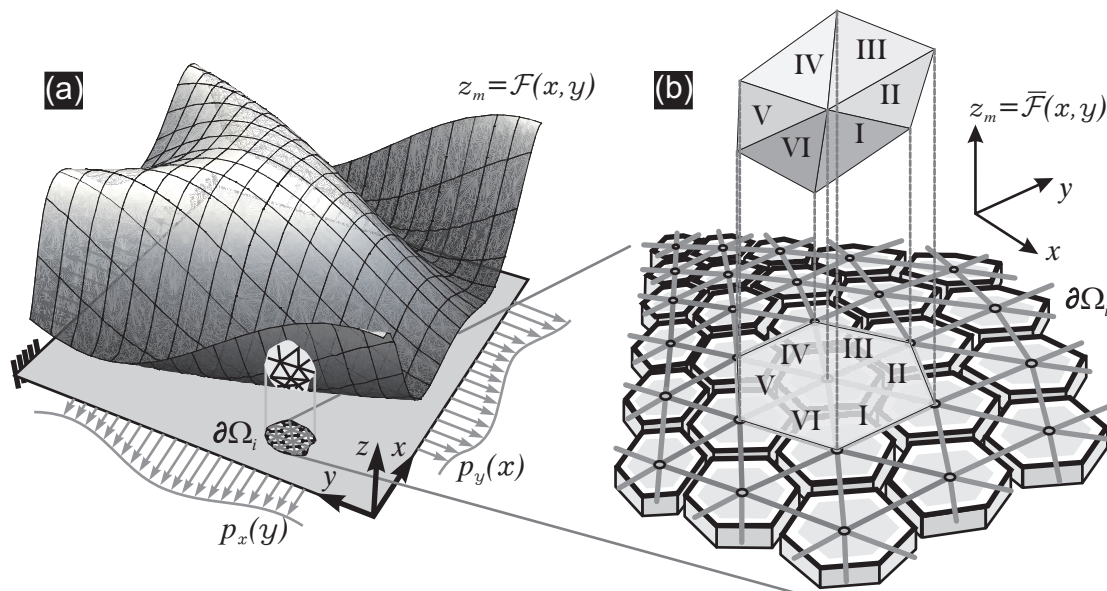


Abbildung 6.2: (a) die exakte AIRYSche Spannungsfläche aus Abb. 6.1 soll mit diskreten Elementen, bzw. Stäben, approximiert werden. (b) Dazu wird ein Teilgebiet $\partial\Omega_i$ von der Scheibe und der Spannungsfläche ausgeschnitten.

Gemäß den Gleichungen (6.5) werden die Spannungen aus der zweiten Ableitung der

exakten Spannungsfläche \mathcal{F} berechnet, was auch für die approximierte Spannungsfläche $\bar{\mathcal{F}}$ gelten muss. Die Kräfte werden hingegen aus der ersten Ableitung gebildet, siehe hierzu auch [4, 8, 97]. Wird z.B. nur eine finite Facettenfläche der Abb. 6.2 mit der Nummer II in Betracht gezogen, so berechnen sich aus der Neigung dieser Facettenfläche die Kraft pro Dicke \bar{X}_{II} in x -Richtung und die Kraft pro Dicke \bar{Y}_{II} in y -Richtung mit

$$\bar{X}_{II} = \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial y} \right|_{II} \quad \text{and} \quad \bar{Y}_{II} = - \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial x} \right|_{II}, \quad (6.8)$$

wobei \bar{X}_{II} und \bar{Y}_{II} die Einheit $\frac{N}{m}$ haben. Siehe hierzu auch Abb. 6.3.

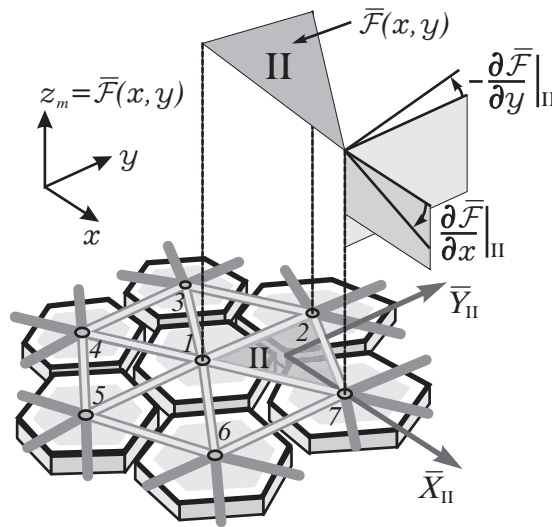


Abbildung 6.3: Die Facettenfläche aus Abb. 6.2 mit der Nummer II ist hier dargestellt. Die Ableitungen dieser einen Facettenfläche in x - und y -Richtung sind proportional zu den daraus resultierenden Kräften \bar{X}_{II} und \bar{Y}_{II} .

Nachdem sowohl im Kontinuum als auch im Diskontinuum immer ein Kräftegleichgewicht vorliegen muss wird die approximierte Spannungsfläche $\bar{\mathcal{F}}(x, y)$ lückenlos aus den einzelnen Facettenflächen zusammengesetzt.

Ein Stab ist von zwei Facettenflächen umschlossen, weswegen die Stabspannung aus der Neigung der beiden Facettenflächen bezüglich der Scheibenebene berechnet wird, siehe Abb. 6.4 (a). Gemäß der AIRYSchen Spannungsdefinition in Gl. (6.5) ergibt sich die Stabspannung $\sigma_{\xi\xi}$ im stablokalen ξ, η -Koordinatensystem aus der zweiten Ableitung in η -Richtung, wobei der Vektor ξ der Stablängsrichtung entspricht und η der Senkrechten dazu. Die zweite Ableitung, oder die Krümmung ρ , in η -Richtung ist proportional zur Spannung in ξ -Richtung

$$\rho \propto \sigma_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \eta^2}, \quad (6.9)$$

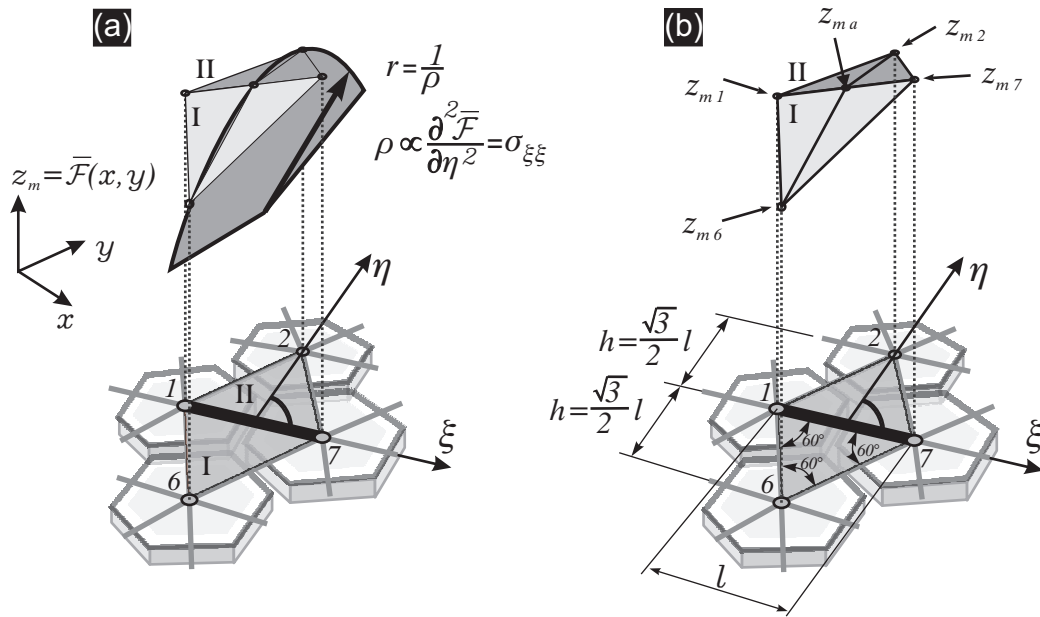


Abbildung 6.4: Die AIRYSche Spannungsfläche aus Abb. 6.1 wird mit diskreten Elementen approximiert. Dazu wird ein Teil der diskretisierten Scheibe mit der darüber liegenden Spannungsfläche ausgeschnitten. (a) Die Spannung in einem Stab wird aus der Neigung der beiden ihn umgebenden Facettenflächen gebildet. (b) Die aufgespannten approximierten Spannungsflächen ergeben sich aus den z_m -Werten.

wobei der Krümmungsradius r umgekehrt proportional zur Krümmung ist, also $\rho = 1/r$.

Um den Krümmungsradius der approximierten AIRYSchen-Spannungsfläche $z_m(x, y) = \bar{\mathcal{F}}(x, y)$ zu finden, der direkt über dem Stab mit den Knotennummern 1 und 7 liegt, werden die z_m -Werte der beiden Facettenflächen I und II mit ihren Knotennummern 1, 2, 6 und 7 herangezogen, siehe Abb. 6.4 (b). Die Kräfte $\bar{\xi}_I$ und $\bar{\xi}_{II}$, die sich aus den beiden Facettenflächen I und II in die Stablängsrichtung ξ ergeben, sind nach Gl. (6.8)

$$\bar{\xi}_I = \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \eta} \right|_I = \frac{z_{m a} - z_{m 6}}{h} \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_{II} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right|_{II} = \frac{z_{m 2} - z_{m a}}{h}. \quad (6.10)$$

Hierin ist h der Abstand zwischen zwei diskreten Elementen in η -Richtung und der Hilfspunkt $z_{m a}$ ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der beiden Werte $z_{m 1}$ und $z_{m 7}$, siehe Abb. 6.4 (b)

$$z_{m a} = \frac{1}{2} (z_{m 1} + z_{m 7}). \quad (6.11)$$

Mit den Gleichungen (6.10) und (6.11) ist die zweite Ableitung der approximierten AIRYSchen-Spannungsfläche

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} = \frac{\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right|_{II} - \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right|_I}{h} = \frac{z_{m 2} - 2 z_{m a} + z_{m 6}}{h^2} = \frac{z_{m 2} - z_{m 1} - z_{m 7} + z_{m 6}}{h^2}. \quad (6.12)$$

Aus Gründen der Einfachheit wird im Folgenden eine Fachwerkstruktur deren Stäbe gleich lang sind betrachtet, wodurch sich ein Winkel von $\frac{\pi}{3}$ zwischen den Stäben einstellt. Aufgrund dessen bilden die diskreten Elemente unverzerrte Hexagone, wodurch alle Stäbe den gleichen Querschnitt haben, siehe hierzu auch Abschnitt 5.1 und 5.2. Außerdem sei der Elastizitätsmodul aller Stäbe gleich. Die Spannung im Stab von Abb. 6.4 (b), der zwischen den Knotenpunkten 1 und 7 liegt, ist unter Einbeziehung der Geometriegröße $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ und der beiden Gleichungen (6.9) und (6.12)

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{1-7} = \frac{C}{h^2} (z_{m2} + z_{m6} - z_{m1} - z_{m7}) = \frac{4C}{3l^2} (z_{m2} + z_{m6} - z_{m1} - z_{m7}), \quad (6.13)$$

wobei C eine willkürliche Größe ist, welche die Kraft und weitere geometrische Größen (z.B. die Scheibendicke) beinhaltet und l ist die Stablänge.

Im nächsten Schritt wird eine Einheitszelle, bzw. ein repräsentatives Volumenelement, gemäß den Abbildungen 6.2, 6.3 und 6.5 (a) aus dem Fachwerk ausgeschnitten. Die Einheitszelle mit ihren zwölf Stäben, sowie den sieben inneren und sechs äußeren Knotenpunkten (1, 2, ..., 13), ist einfach statisch unbestimmt. Wird als Beispiel einer der äußeren Stäbe von einer Zelle die bisher spannungsfrei war um Δl verkürzt, so stehen aus Gleichgewichtsgründen alle äußeren Stäbe unter Zugbeanspruchung und alle inneren Stäbe unter Druckbeanspruchung, siehe Abb. 6.5 (b). Da alle Stäbe die gleiche Länge und Steifigkeit besitzen, ist der Betrag der Spannung in allen Stäben gleich. Das Spannungs- oder Kräftegleichgewicht in der Zelle kann also durch

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \sigma|_{\text{äußere Stäbe}} - \sum \sigma|_{\text{innere Stäbe}} \\ &= \sigma_{1-2} + \sigma_{1-3} + \sigma_{1-4} + \sigma_{1-5} + \sigma_{1-6} + \sigma_{1-7} \\ &\quad - \sigma_{2-3} - \sigma_{3-4} - \sigma_{4-5} - \sigma_{5-6} - \sigma_{6-7} - \sigma_{7-2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

ausgedrückt werden, wobei anhand der Vorzeichen der Umstand der Druck- und Zugspannung bereits berücksichtigt wurde.

Gemäß Abb. 6.6 sind die zwölf Stäbe der Einheitszelle von den zwölf Facettenflächen (I, II, ..., XII) umgeben, welche lückenlos aneinander gesetzt werden müssen. Um eine lückenlose Assemblierung der Facettenflächen zu gewährleisten, muss Gl. (6.13) auf alle zwölf Stäbe angewandt werden. Für die inneren Stäbe ergeben sich die Spannungen als Funktion der z_m -Werte zu

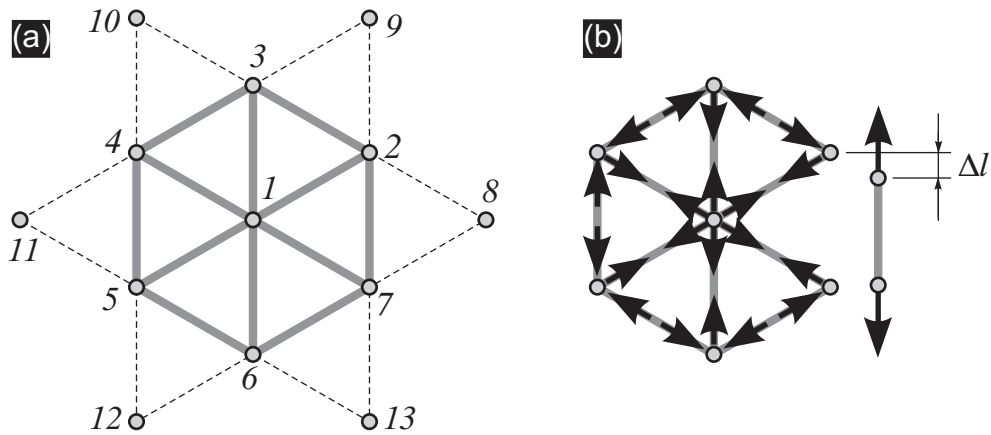


Abbildung 6.5: (a) Definition einer Einheitszelle mit ihren 12 Stäben, sowie den sieben inneren und sechs äußeren Knotenpunkten (1, 2, ..., 13) der Abbildungen 6.2 und 6.3. (b) Die Zelle ist einfach statisch unbestimmt. Wird einer der äußeren Stäbe um Δl verkürzt, so stehen aus Gleichgewichtsgründen alle äußeren Stäbe unter Zugbeanspruchung und alle inneren unter Druckbeanspruchung.

$$\sigma_{1-2} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m3} + z_{m7} - z_{m1} - z_{m2}) \quad \sigma_{1-3} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m2} + z_{m4} - z_{m1} - z_{m3}) \quad (6.15) \quad (6.16)$$

$$\sigma_{1-4} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m3} + z_{m5} - z_{m1} - z_{m4}) \quad \sigma_{1-5} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m4} + z_{m6} - z_{m1} - z_{m5}) \quad (6.17) \quad (6.18)$$

$$\sigma_{1-6} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m5} + z_{m7} - z_{m1} - z_{m6}) \quad \sigma_{1-7} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m2} + z_{m6} - z_{m1} - z_{m7}) \quad (6.19) \quad (6.20)$$

und die äußeren Stabspannungen können wie folgt ausgedrückt werden

$$\sigma_{2-3} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m1} + z_{m9} - z_{m2} - z_{m3}) \quad \sigma_{3-4} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m1} + z_{m10} - z_{m3} - z_{m4}) \quad (6.21) \quad (6.22)$$

$$\sigma_{4-5} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m1} + z_{m11} - z_{m4} - z_{m5}) \quad \sigma_{5-6} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m1} + z_{m12} - z_{m5} - z_{m6}) \quad (6.23) \quad (6.24)$$

$$\sigma_{6-7} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m1} + z_{m13} - z_{m6} - z_{m7}) \quad \sigma_{7-2} = \frac{4C}{3l^2} (z_{m1} + z_{m8} - z_{m2} - z_{m7}) \quad (6.25) \quad (6.26)$$

Werden die Gleichungen (6.15) bis (6.26) in Gl. (6.14) eingesetzt, so ergibt sich die Beziehung

$$(z_{m8} + z_{m9} + z_{m10} + z_{m11} + z_{m12} + z_{m13}) - 3(z_{m2} + z_{m3} + z_{m4} + z_{m5} + z_{m6} + z_{m7}) + 12z_{m1} = 0. \quad (6.27)$$

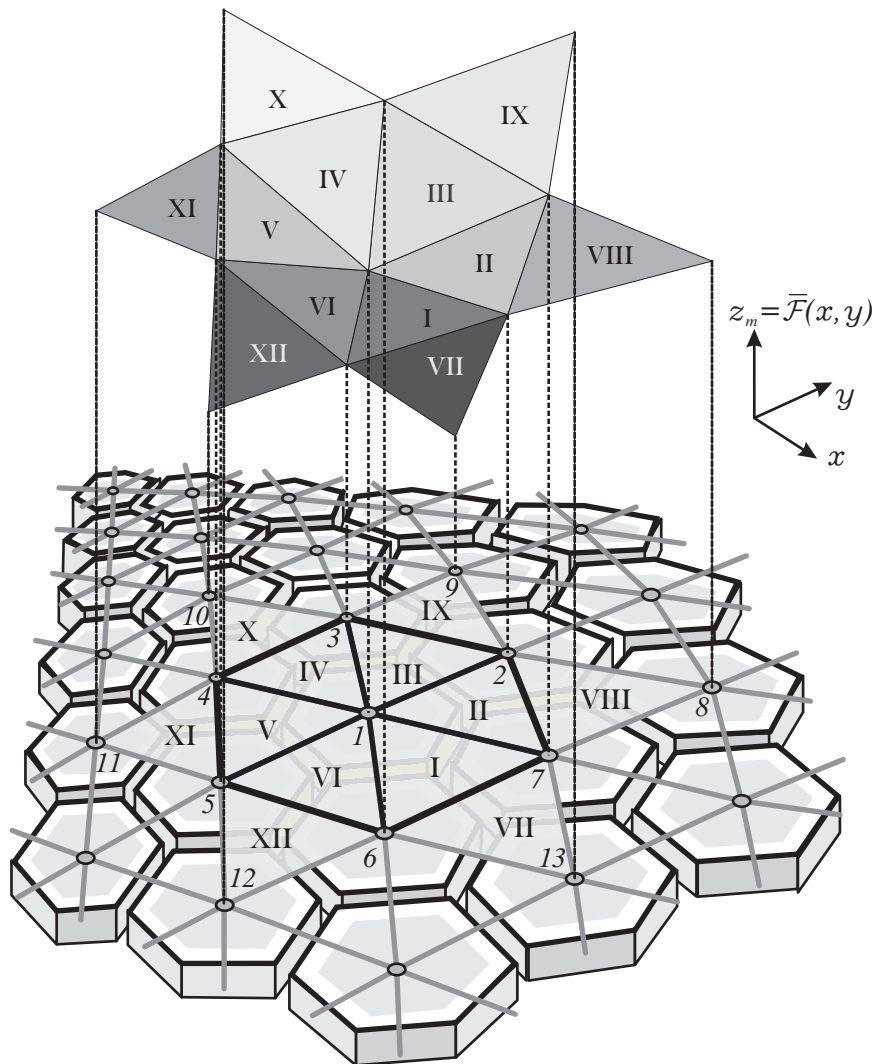


Abbildung 6.6: (a) Die Einheitszelle aus Abb. 6.5 ist von zwölf Facettenflächen (I, II, ..., XII) umgeben, welche aus Gleichgewichtsgründen lückenlos zusammengesetzt sein müssen.

Diese Gleichung drückt aus, dass das Kräftegleichgewicht, formuliert über die Spannungen in den Stäben, durch Werte der approximierten AIRYSchen-Spannungsfläche, also $z_m(x, y) = \bar{\mathcal{F}}(x, y)$, beschrieben werden kann. Wird Gl. (6.27) als Bild dargestellt, so erhält man einen Differenzen-Stern von einer Differentialgleichung vierter Ordnung [60], die nach Vertauschung der approximierten Spannungsfunktion $\bar{\mathcal{F}}(x, y)$ mit der exakten Spannungsfunktion $\mathcal{F}(x, y)$ identisch ist, siehe Abb. 6.7.

Somit ist der Beweis erbracht, vermöge des Grenzübergangs der Stablänge zu Null, dass die analytisch exakte AIRYSche Spannungsfläche mit einem Fachwerk, in welchem an jedem Knoten sechs äquidistant über den Umfang verteilte Stäbe angreifen, dargestellt werden kann. Eine solche Fachwerkstruktur nennt man quasi-isotropes Fachwerk.

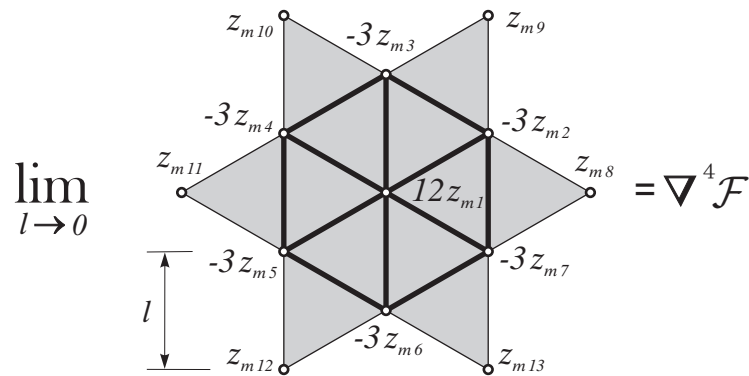


Abbildung 6.7: Grafische Darstellung der Gl. (6.27). Nach Grenzübergang der Stablänge l zu Null geht der Finite-Differenzen-Stern in eine Differentialgleichung vierter Ordnung über.

Neben dem Modell bei dem sechs Stäbe an einem Knotenpunkt angreifen wurde auch ein rechteckiges Modell entwickelt. WIEGHARDT führte für diese rechteckigen Zellen den Nachweis durch, dass sich mit ihnen die gebietsbeschreibende DGL *nicht* erfüllen lässt, außer in Sonderfällen [234]. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die Stäbe welche die Flussgröße übertragen eng mit der AIRYSchen Spannungsfläche zusammenhängen, wie in diesem Abschnitt gezeigt wurde. Da die AIRYSchen Spannungsfläche in der Regel eine 3D-Fläche ist, kann sie nur mit dreieckigen Facettenflächen lückenlos approximiert werden, siehe Abb. 6.8. Das von RIEDEL aus dem Jahr 1927 vorgestellte Beispiel mit Rechteckzellen erfüllt die Bedingung der lückenlosen Assemblierung der AIRYSchen Spannungsfläche, da die Last nur in eine Richtung wirkt [192]. Fazit ist aber, dass bis auf einige Sonderfälle rechteckige Zellen nicht zu empfehlen sind, wohingegen hexagonale Zellen stets verwendet werden können.

6.3 Grenzübergang mit der Variationsrechnung für das Hexagon

In diesem Abschnitt wird der Nachweis über die Richtigkeit der DEM mittels der Variationsrechnung erbracht. Dabei erfolgt der Nachweis in zwei Schritten. Zuerst wird eine Referenzlösung aus der analytischen Lösung zum virtuellen Arbeitssatz der Scheibe hin aufgebaut. Diese Referenzlösung wird im zweiten Schritt aus der ersten Variation der Stabenergie ebenfalls gefunden.

Da die Stäbe so angeordnet sind, dass sich ein quasiisotroper Verbund ergibt, muss eine Koordinatentransformation vom kartesischen Koordinatensystem mit den x,y -Koordinaten in ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit den Ξ,Θ -Koordinaten vorgenommen werden. Dabei legt die Struktur des Fachwerks die Wahl des in Abb. 6.9

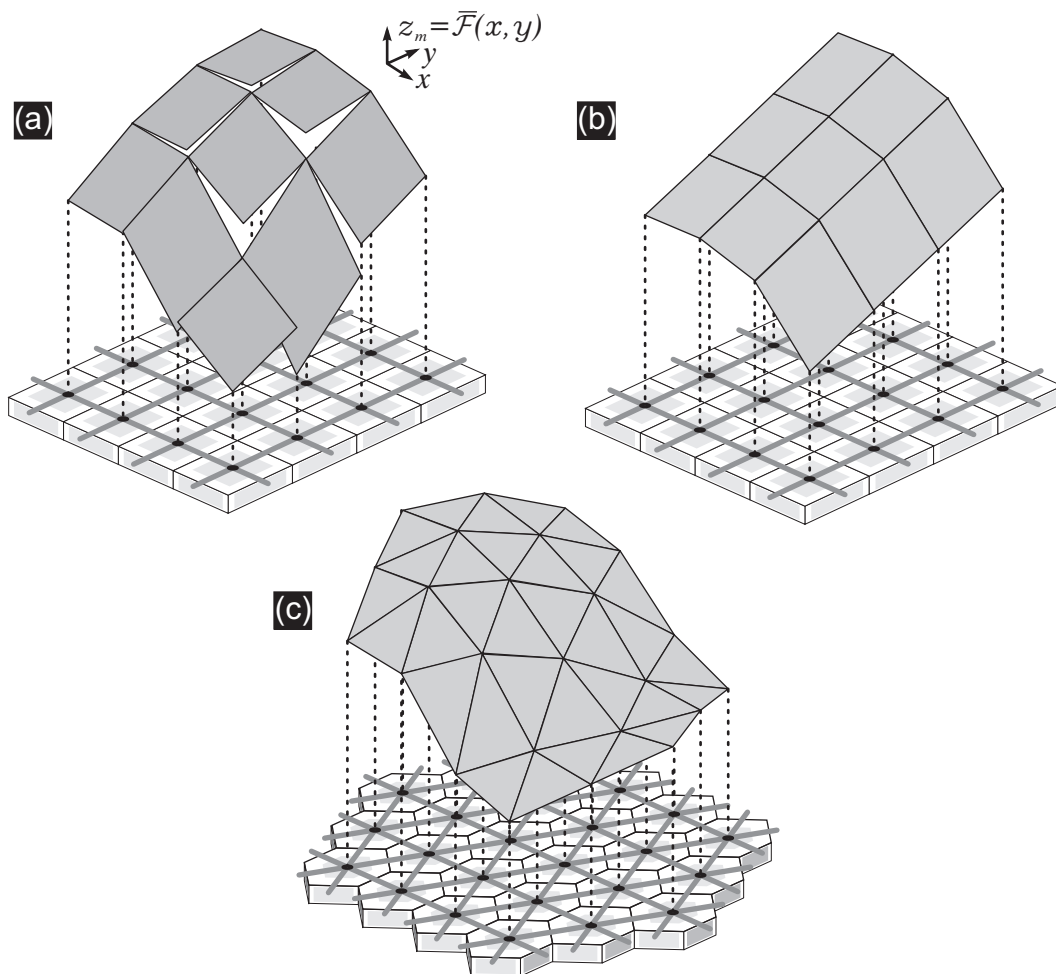


Abbildung 6.8: (a) Viereckige Facettenflächen können eine 3D-Spannungsfläche nicht lückenlos schließen, (b) ausser in Sonderfällen. (c) Dreieckige Facettenflächen können hingegen stets angewandt werden, weswegen hexagonale Zellen einen allgemeingültigen Charakter haben.

dargestellten Ξ, Θ -Koordinatensystems nahe.

Bildung einer Referenzlösung aus der AIRYSchen-DGL:

Den virtuellen Arbeitssatz der Scheibe erhält man über zwei Wege. Der erste Weg erfolgt über die BUBNOV-GALERKIN Formulierung der AIRYSchen-DGL (6.6) und anschließender partieller Integration. Der zweite Weg findet über die Rückbildung der BUBNOV-GALERKIN Formulierung zum Funktional und anschließender erster Variation statt. Da die DGL (6.6) selbstadjungierend ist, ist der zweite Weg der kürzere, weshalb dieser hier dargelegt wird. Tiefer führende Einzelheiten zur Variationsrechnung in der Mechanik können der Literatur entnommen werden [28, 61, 117, 204, 245].

Gemäß dem Verfahren von BUBNOV-GALERKIN wird die DGL (6.6) mit der Feldfunk-

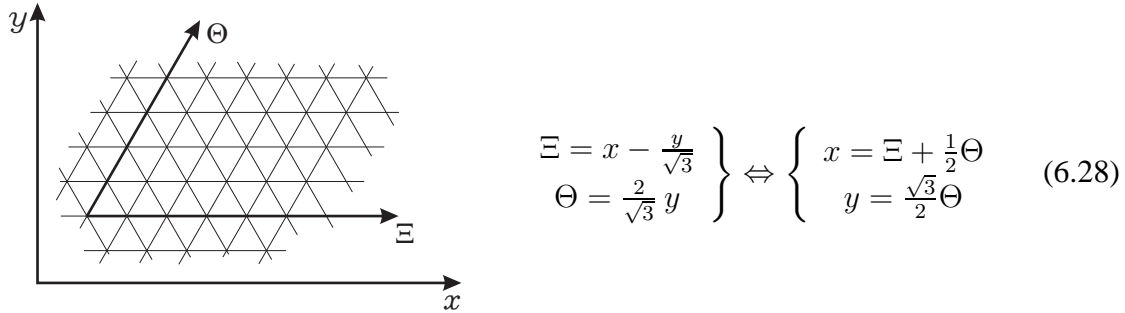


Abbildung 6.9: Rechtwinkliges x, y und schiefwinkliges Ξ, Θ -Koordinatensystem. Das schiefwinklige Koordinatensystem orientiert sich an der inneren Struktur der Fachwerkstäbe.

tion (hier nun die approximierte AIRYSche Spannungsfunktion $\bar{\mathcal{F}}$) gewichtet und über das Gebiet Ω integriert

$$0 = \int_x \int_y \frac{d}{E} \left(\frac{\partial^4 \mathcal{F}(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathcal{F}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathcal{F}(x, y)}{\partial y^4} \right) \delta \mathcal{F}(x, y) dx dy. \quad (6.29)$$

Hierin ist d die Dicke der Scheibe und E der Elastizitätsmodul des Werkstoffs. Die Rückbildung ergibt das folgende Funktional \mathcal{J}

$$\mathcal{J}(x, y) = \int_x \int_y \frac{d}{E} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy. \\ \stackrel{!}{=} \text{Minimum}. \quad (6.30)$$

In dieser Gleichung ist bereits berücksichtigt, dass die Formulierung nach BUBNOV-GALERKIN dem Minimum der potentiellen Energie entsprechen muss.

Nach einer Koordinatentransformation gemäß den Ableitungen im Anhang A ist das Funktional $\mathcal{J}(x, y)$ der Gl. (6.30) nicht mehr vom den rechtwinkligen Koordinaten, sondern von schiefwinkligen Koordinaten abhängig

$$\mathcal{J}(\Xi, \Theta) = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{8}{9} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi^2} \right)^2 + \frac{8}{9} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Theta^2} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{20}{9} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi \partial \Theta} \right)^2 + \frac{4}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Theta^2} \right. \\ \left. - \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi \partial \Theta} - \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi \partial \Theta} \right] d\Theta d\Xi \\ \stackrel{!}{=} \text{Minimum}. \quad (6.31)$$

In diesem Flächenintegral kommt der Faktor $\sqrt{3}/2$ durch die Transformation des Flächenelements $dx dy$ von den kartesischen in die schiefwinkligen Koordinaten mit der

Funktionaldeterminante

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi} & \frac{\partial y(\Xi, \Theta)}{\partial \Xi} \\ \frac{\partial x(\Xi, \Theta)}{\partial \Theta} & \frac{\partial y(\Xi, \Theta)}{\partial \Theta} \end{vmatrix} d\Theta d\Xi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} d\Theta d\Xi = \frac{\sqrt{3}}{2} d\Theta d\Xi \quad (6.32)$$

zustande [43].

Die Gleichung (6.31) entspricht der Formänderungsarbeit der Scheibe in Ξ, Θ -Koordinaten. Die erste Variation dieser Gleichung liefert nun den virtuellen Arbeitssatz in Ξ, Θ -Koordinaten.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}(\Xi, \Theta) = 0 = & \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} + \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right. \\ & + \frac{40}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} + \frac{4}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \\ & - \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} - \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \\ & \left. - \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} - \frac{16}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \right] d\Theta d\Xi. \quad (6.33) \end{aligned}$$

Hierin ist die Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Variation und Differentiation berücksichtigt [28], z.B. gilt für den ersten Term

$$\delta \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \right] = \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \quad (6.34)$$

und ebenso für die beiden anderen Terme in Gl. (6.33)

$$\delta \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right] = \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \quad (6.35)$$

und

$$\delta \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \right] = \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta}. \quad (6.36)$$

Teile der Gl. (6.33) können nun partiell integriert werden, wobei sich für den dritten Term

$$\begin{aligned} \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} d\Theta d\Xi &= \int_{\Xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Xi \\ &\quad - \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} d\Theta d\Xi \\ &= \int_{\Xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Xi - \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta \\ &\quad + \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} d\Theta d\Xi \quad (6.37) \end{aligned}$$

ergibt. Da die erste Ableitung der AIRYschen-Spannungsfunktion der Randlast entspricht, siehe Abschnitt 6.2 bzw. Abb. 6.3, muss die die erste Ableitung der virtuellen AIRYschen-Spannungsfunktion $\delta\mathcal{F}$, also der virtuellen Randlast, bei fest vorgegebener Randlast entlang des Kraftrandes Null sein. Somit werden die beiden Randterme von Gl. (6.37) Null, siehe hierzu auch [221]. Gleichung (6.37) liefert also den wichtigen und erstaunlichen Zusammenhang, dass

$$\int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} d\Theta d\Xi = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} d\Theta d\Xi \quad (6.38)$$

ist. Neben dieser einen partiellen Integration wird noch eine zweite ausgeführt, um einen weiteren notwendigen Zusammenhang aufzuzeigen. Für den fünften Term erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} d\Theta d\Xi &= \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta \\ &\quad - \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} d\Theta d\Xi \\ &= \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta - \int_{\Xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Xi \\ &\quad + \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} d\Theta d\Xi \\ &= \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta - \int_{\Xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Xi \\ &\quad + \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta \\ &\quad - \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2 \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta} d\Theta d\Xi \\ &= \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta - \int_{\Xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Xi \\ &\quad + \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta} \right]_{\Xi_1}^{\Xi_2} d\Theta - \int_{\Xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Xi \\ &\quad + \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} d\Theta d\Xi . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Auch hier sind wieder die Randterme bei fest vorgegebenen Randlasten aus den gleichen Gründen wie oben Null. Somit nimmt Gl. (6.39) die folgende Form an

$$\int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} d\Theta d\Xi = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} d\Theta d\Xi . \quad (6.40)$$

Mit Gl. (6.38) und (6.40) erhält man den Zusammenhang

$$\int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} d\Theta d\Xi = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} d\Theta d\Xi = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} d\Theta d\Xi, \quad (6.41)$$

womit sich der dritte, vierte und fünfte Term in Gl. (6.33) zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi} \int_{\Theta} \left[\frac{40}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} + \frac{4}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \right] d\Theta d\Xi \\ &= \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{48}{9} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} d\Theta d\Xi. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Der virtuelle Arbeitssatz der AIRYSchen Spannungsfunktion (Gl. (6.33)) nimmt nun abschließend mit Gl. (6.42) die folgende vereinfachte Form an

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}(\Xi, \Theta) = 0 &= \frac{1}{E} \frac{16}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\Xi} \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right. \\ &+ 3 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \left(\frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} + \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right) \\ &\left. - \frac{\partial^2 \delta \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right) \right] d\Theta d\Xi. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Gleichung (6.43) ist im folgenden die maßgebende Gleichung, die es aus der Energie der Stäbe zu finden gilt.

Bildung des virtuellen Arbeitssatzes aus der Energie der Stäbe:

Um die Referenzlösung (Gl. (6.43)) aus der Energie der Stäbe zu erhalten, müssen die Stabspannungen als Komponenten der Kontinuumsspannungen ausgedrückt werden. Das lokale Koordinatensystem ist das ξ, η -Koordinatensystem, wobei ξ in Richtung der Stabachse zeigt und η senkrecht dazu. Als globales Koordinatensystem kann das x, y -Koordinatensystem oder das Ξ, Θ -Koordinatensystem verwendet werden, wobei letzteres von Vorteil ist. Die Stabspannungen wirken per Definition nur entlang der lokalen Stabachse.

Da die Stäbe nun die exakte Lösung nachbilden sollen, wird die approximierete AIRYSche Spannungsfläche mit $\bar{\mathcal{F}}$ bezeichnet. Wenn nun gezeigt werden kann, dass der virtuelle Arbeitssatz der Scheibe, gebildet aus \mathcal{F} (also Gl. (6.43)), gleich dem virtuellen Arbeitssatz der Stäbe, gebildet aus $\bar{\mathcal{F}}$, ist, dann entspricht die Approximation der exakten Lösung.

Die Spannungen des Kontinuums werden nach Transformation in den AIRYSchen Spannungsraum, siehe hierzu Anhang, in den Ξ, Θ -Koordinaten wie folgt ausgedrückt,

siehe auch Abb. 6.10

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial y^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \quad (6.44)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \quad (6.45)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} . \quad (6.46)$$

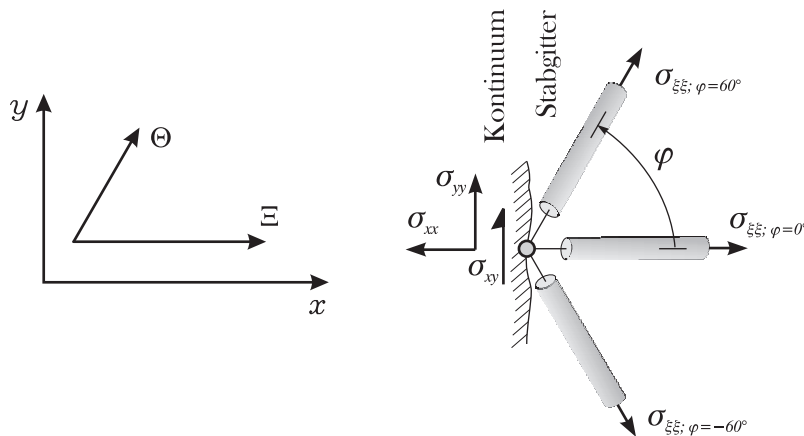


Abbildung 6.10: Die Stabspannungen werden als Komponenten der Kontinuumsspannungen ausgedrückt.

Wird das Koordinatensystem um den Winkel φ gedreht, so erfolgt die Transformation der Kontinuumsspannungen in die Richtung der Stablängsachse, also der ξ -Achse, mit der folgenden Beziehung

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin(2 \varphi) . \quad (6.47)$$

Mit dieser Gleichung wird die Stabspannung in den Komponenten der Kontinuumsspannung ausgedrückt, siehe auch Abb. 6.10. Da der Stab keine Spannungen senkrecht zur Stabachse und auch keinen Schub überträgt, brauchen die Spannungskomponenten des Stabes $\sigma_{\eta\eta}$ und $\sigma_{\xi\eta}$ nicht berücksichtigt zu werden.

An einem Knotenpunkt greifen sechs Stäbe an. Aus Gleichgewichtsgründen braucht nur eine Hälfte des Knotens mit drei Stäben betrachtet zu werden, weswegen im Folgenden drei Stäbe mit den Ausrichtungen von $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ und $\varphi_3 = -\frac{\pi}{3}$ berücksichtigt werden. Der erste Stab sei um $\varphi_1 = 0^\circ$ gedreht. Seine Spannung ist mit Gl. (6.44) und

(6.47) die Folgende

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi;\varphi_1=0^\circ} &= \sigma_{xx} \cdot 1 + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2}.\end{aligned}\quad (6.48)$$

Der zweite Stab ist um $\varphi_2 = 60^\circ$ gedreht. Die Spannung dieses Stabes ist mit den Gleichungen (6.44) bis (6.47)

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi;\varphi_2=60^\circ} &= \sigma_{xx} \cdot \frac{1}{4} + \sigma_{yy} \cdot \frac{3}{4} + \sigma_{xy} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2}.\end{aligned}\quad (6.49)$$

Der dritte Stab ist nun um $\varphi_3 = -60^\circ$ gedreht, weshalb dieser mit den Gleichungen (6.44) bis (6.47) die Spannung

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi;\varphi_3=-60^\circ} &= \sigma_{xx} \cdot \frac{1}{4} + \sigma_{yy} \cdot \frac{3}{4} + \sigma_{xy} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2}\end{aligned}\quad (6.50)$$

ertragen muss.

Die Energie der Stäbe ist gemäß der Kontinuumsmechanik proportional zum Integral über das Volumen aus dem Quadrat der Längsspannung und dividiert durch den Elastizitätsmodul [28, 245]

$$\Pi_{\text{Stab}} = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dV = \int_x \int_y \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} \, d \, dx \, dy = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{d}{2 E_e} \sigma_{\xi\xi}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \, d\Theta \, d\Xi, \quad (6.51)$$

wobei die Transformation der Koordinaten mit der Funktionaldeterminante in Gl. (6.32) durchgeführt wird, $E_e = E$ ist der Elastizitätsmodul des Stabes bzw. Gebietes und d die Scheibendicke.

Die drei Stäbe bilden zusammen eine quasiisotrope Struktur, die invariant gegenüber Drehungen mit dem Winkel φ ist. Diese Struktur hat gegenüber der Steifigkeit eines Einzelstabes $\frac{EA}{l}$ eine um den Faktor $3/2$ zu hohe Steifigkeit, siehe Abb. 6.11. Da die Steifigkeit um den Faktor $3/2$ zu hoch ist, ist auch die Spannung um diesen Faktor zu groß, weshalb die Spannung in Gl. (6.51) um diesen Faktor reduziert werden muss.

Das Potential der drei Stäbe berechnet sich mit Hilfe der Gleichungen (6.48), (6.49) und

$$\mathbf{K}_{\text{mech}} = \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

$$= \text{konstant}$$

Abbildung 6.11: Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{mech} der drei Stäbe ist invariant gegenüber einer Drehung mit einem Winkel φ und sie ist um den Faktor $3/2$ größer als die Steifigkeit eines Einzelstabes in seine Längsrichtung.

(6.50) nun zu

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Stäbe}} &= \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{d}{E} \left(\frac{2}{3} \right)^2 (\sigma_{\varphi_1=0^\circ}^2 + \sigma_{\varphi_2=60^\circ}^2 + \sigma_{\varphi_3=-60^\circ}^2) \frac{\sqrt{3}}{2} d\Theta d\Xi \\ &= \frac{d}{E} \frac{4}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\Xi} \int_{\Theta} \left[2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} - 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \right] d\Theta d\Xi, \quad (6.53) \end{aligned}$$

wobei sich der Faktor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ aus der Koordinatentransformation von den x,y -Koordinaten in die Ξ,Θ -Koordinaten ergibt. Der virtuelle Arbeitssatz wird nun aus der ersten Variation der obigen Gleichung gebildet

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{Stäbe}} &= \frac{d}{E} \frac{4}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\Xi} \int_{\Theta} \left(4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} + 8 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} + 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} - 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} - 4 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \right) d\Theta d\Xi. \quad (6.54) \end{aligned}$$

Aus Gl. (6.54) können, wie bei der Referenzbildung oben, auch wieder zwei Terme partiell integriert werden. Die partielle Integration würde auch wieder zu Randtermen mit Gliedern der Ordnung $\frac{\partial \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi}$ und $\frac{\partial \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta}$ führen. Die erste Ableitung der approximierten Spannungsfläche $\bar{\mathcal{F}}$ entspricht, über die Länge oder Breite der Struktur integriert, auch bei einer Fachwerkstruktur einer Randkraft mit der Dimension $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Da die Randkräfte stets fest vorgegeben sind, sind die virtuellen Randkräfte entlang der Ränder auch wieder Null. Diese Argumentation führt, in Analogie zu den Randtermen der Referenzlösung, zu den

folgenden beiden Zusammenhängen

$$\int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} d\Theta d\Xi = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} d\Theta d\Xi \quad (6.55)$$

$$\int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} d\Theta d\Xi = \int_{\Xi} \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} d\Theta d\Xi . \quad (6.56)$$

Nach Berücksichtigung der Gleichungen (6.55) und (6.56) mit Gl. (6.54) erhält man

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{Stäbe}}(\Xi, \Theta) = 0 &= \frac{d}{E} \frac{16}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\Xi} \int_{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \right. \\ &\quad + 3 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} - \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \left(\frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} + \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \delta \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi \partial \Theta} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{F}}}{\partial \Theta^2} \right) \right] d\Theta d\Xi . \quad (6.57) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist, abgesehen von der Vertauschung von \mathcal{F} und $\bar{\mathcal{F}}$, identisch mit Gl. (6.43). Somit ist nun gezeigt, dass die approximierte Spannungsfunktion $\bar{\mathcal{F}}$ identisch mit der exakten Spannungsfunktion \mathcal{F} ist.

6.4 Schwache Form des mechanischen Feldes

Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, wird bei der DEM die Flussgröße nicht über die Ränder des Hexagons geleitet, sondern über die Stäbe. Die Stäbe sind mit den Knotenpunkten, oder Schwerpunkten, der diskreten Elemente verbunden. Nachdem alle Stäbe zu einem quasiisotropen Fachwerk verbunden wurden, wird das Gleichgewicht z.B. über das Minimum der potentiellen Energie gesucht, was der Finite-Elemente-Methode entspricht. Da das Fachwerk quasiisotrop ist, ist das mechanische Verhalten invariant gegenüber Rotationen. Die Finite-Elemente Formulierung der Stäbe wird aus dem schwachen Gleichgewicht formuliert und lautet für ein Element e aus der Menge aller Stäbe \mathcal{R} im stablokalen ξ, η -Koordinatensystem, siehe Abb. 6.12 (a)

$$\mathbf{K}_{\text{mech } e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\xi}) , \quad (6.58)$$

wobei $\mathbf{K}_{\text{mech } e}(\boldsymbol{\xi})$ der Steifigkeitsmatrix, $\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) = [\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]^T$ dem Vektor der Knotenfreiwerte für die Knotenpunkte 1 und 2 entspricht (siehe Abb. 6.12) und $\mathbf{f}_e(\boldsymbol{\xi}) = [F_1, F_2]^T$ der Lastvektor ist. Der Ortsvektor des Materialpunktes ist im stablokalen Koordinatensystem $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$ dargestellt. Die Elementsteifigkeit eines jeden Stabes e bildet sich aus

$$\mathbf{K}_{\text{mech } e}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\xi=0}^{\xi=l_e} \mathbf{N}_{e,\xi}^T(\boldsymbol{\xi}) E_e A_e \mathbf{N}_{e,\xi}(\boldsymbol{\xi}) d\xi , \quad (6.59)$$

worin E_e der Elastizitätsmodul des Stabes bzw. des Werkstoffs, A_e der Stabquerschnitt, l_e die Stablänge und $N(\xi)$ der liegende Elementverschiebungsvektor ist, der die Knotenpunktsbezogenen Ansatzfunktionen beinhaltet, also

$$N_e(\xi) = \left[\left(1 - \frac{\xi}{l_e}\right) \quad \frac{\xi}{l_e} \right] \quad \text{und} \quad N_{e,\xi}(\xi) = \frac{1}{l_e} [-1 \quad 1] \quad \text{mit} \quad 0 \leq \xi \leq l_e. \quad (6.60)$$

Dieser Ansatz dient der Approximation des Verschiebungsfeldes in der DEM

$$\mathbf{u}^{\text{DEM}}(\xi) = N_e(\xi) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\xi). \quad (6.61)$$

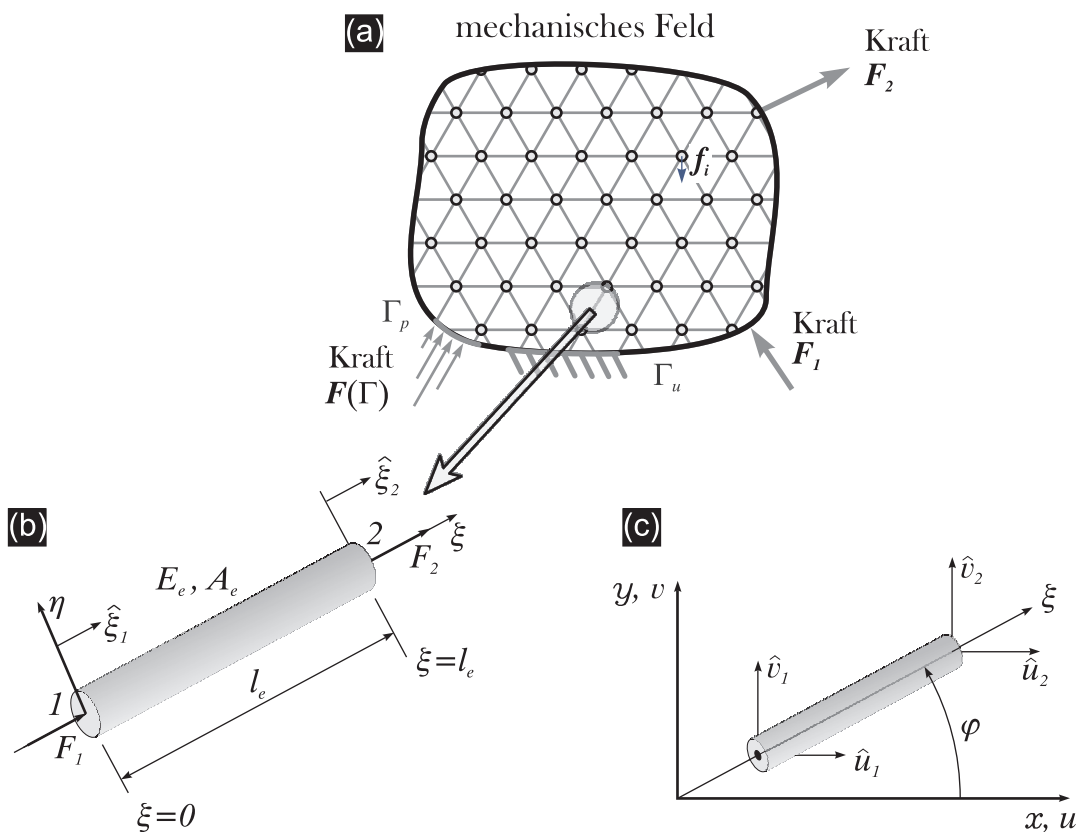


Abbildung 6.12: (a) Das Gebiet mit den angreifenden Einzelkräften F_i , den Volumenkräften f_i , den Randkräften $F(\Gamma)$ mit der Dimension $\frac{N}{m}$, wird gemäß der DEM mit Stäben diskretisiert. (b) Jeder Stab hat ein eigenes lokales ξ, η -Koordinatensystem, eigene Werkstoffparameter A_e, E_e, l_e und die stablokalen Verschiebungen $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ bzw. Kräfte F_1, F_2 . (c) Das stablokale Koordinatensystem ist gegenüber dem globalen Koordinatensystem um den Winkel φ gedreht.

Aus den Gleichungen (6.59) und (6.60) ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{K}_{\text{mech } e}(\xi) = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Diese Formulierung der Elementsteifigkeit ist analytisch exakt, da die Approximationsfunktionen in Gl. (6.60) das mechanische Verhalten exakt beschreiben [15, 27, 143, 248]. Es gilt also $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_e^{\text{DEM}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi})$.

Die Knotenpunktverschiebungen $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$, sowie die Lastkomponenten F_1 und F_2 , sind vektorielle Größen, weshalb sie vom stablokalen Koordinatensystem in das globale Koordinatensystem transformiert werden müssen. Aus dieser Transformation ergibt sich eine Transformationsbeziehung für die Steifigkeit. Die Transformationsbeziehung der in Abb. 6.12 (b) dargestellten Verschiebungen lautet

$$\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}), \quad (6.63)$$

worin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

die Transformationsmatrix darstellt [245]. Der Verschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi})$ hat die Komponenten $\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) = [\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]^T$ im stablokalen $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$ Koordinatensystem. Im globalen Koordinatensystem sind die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}) = [\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_2]^T$, wobei $\mathbf{X} = \mathbf{x} = [x, y]^T$ der Ortsvektor des Materialpunktes im global definierten kartesischen x, y -Koordinatensystem ist. Außerdem werden kleine Verschiebungen vorausgesetzt, also entspricht die aktuelle Konfiguration der Ausgangskonfiguration $\mathbf{X} = \mathbf{x}$.

Das schwache Gleichgewicht ist invariant gegenüber Drehung, d.h. es kann im stablokalen $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$ -Koordinatensystem oder im globalen $\mathbf{X} = \mathbf{x} = [x, y]^T$ -Koordinatensystem formuliert werden. Die Gleichgewichtsformulierung des Potentials lautet im $\boldsymbol{\xi}$ -Raum

$$\delta \Pi = 0 = \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \{ \mathbf{K}_{\text{mech } e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\xi}) \}. \quad (6.65)$$

Nach Einsetzen von Gl. (6.63) in (6.65) erhält man

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_{\text{mech } e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\xi}), \text{ bzw. } \mathbf{K}_{\text{mech } e}(\mathbf{X}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_e(\mathbf{X}) \quad (6.66)$$

$$\text{mit } \mathbf{K}_{\text{mech } e}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_{\text{mech } e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_e(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\xi}).$$

Die Assemblierung aller Stäbe \mathcal{R} erfolgt am Ende, nachdem die Steifigkeitsmatrix jedes Einzelements e bekannt ist aus

$$\mathbf{K}_{\text{mech}}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{K}_{\text{mech } e}(\mathbf{X}), \quad \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{f}_e(\mathbf{X}) \quad (6.67)$$

Mit diesen Beziehungen kann das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ anhand Gl. (6.58) bestimmt werden. Die Stabspannungen des jeweiligen Stabes e werden im Nachlauf berechnet

$$\sigma_e(\boldsymbol{\xi}) = E_e \frac{\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1}{l_e} \quad (6.68)$$

und ebenso die Dehnungen

$$\epsilon_e(\xi) = \frac{\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1}{l_e}. \quad (6.69)$$

Die lokalen Verschiebungen $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ werden mit Gl. (6.63) aus den globalen Verschiebungen $\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_2$ und \hat{v}_2 berechnet.

6.5 Verifikation des mechanischen Diskrete-Elemente-Modells

6.5.1 Materialparameter im mechanischen Feld

Bei Diskretisierung einer Scheibe in diskrete Elemente und anschließender Darstellung als Stabgittermethode, kann aus dem Inneren der Scheibe ein repräsentatives Volumenelement (RVE) ausgeschnitten werden, siehe Abb. 6.13 (a). Dieses RVE ist innerlich einfach statisch unbestimmt. Die Querschnitte und Abmessungen dieser repräsentativen Fachwerkstruktur sind aufgrund der Geometrie eindeutig definiert, siehe Abb. 6.13 (b).

Bei gleichförmig angreifender Last muss diese ebenso gleichförmig am RVE wirken, siehe Abb. 6.13 (c). Aufgrund der kinematischen Zwänge an den repräsentativen Volumenelementen im Inneren, können sich diese nur gleichförmig verformen, siehe Abb. 6.13 (d). Dabei wird eine ungleichmäßige Verformung von den Gleichgewichtskräften an den Kopfenden verhindert, siehe Abb. 6.13 (e). An den Rändern der mit den diskreten Elementen modellierten Scheibe fehlen die Gleichgewichtskräfte, weshalb es zu harmonischen Randerscheinungen kommt, siehe Abb. 6.13 (f). Die Randerscheinungen des RVE und dessen Gleichgewichtskräfte werden später in Abschnitt 6.5.2 wieder aufgegriffen.

Werden die horizontale und vertikale Verschiebung δ_u und δ_v (siehe Abb. 6.13 (d)), aufgrund der am RVE angreifenden Last mit

$$\delta_u = \frac{3}{2} \frac{F l}{E A}; \quad \delta_v = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{F l}{E A} \quad (6.70)$$

berechnet, so können damit die Dehnungen der Scheibe, bzw. des RVE zu

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta_u}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F}{E A}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\delta_v}{H} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{F}{E A}, \quad (6.71)$$

bestimmt werden, wobei E der Elastizitätsmodul des Werkstoffs, A der Querschnitt, l die Länge des Stabes, H die Höhe und L die Länge des RVE ist. Im Weiteren bestimmt sich daraus zum einen die sich einstellende Querkontraktion ν

$$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{1}{3}. \quad (6.72)$$

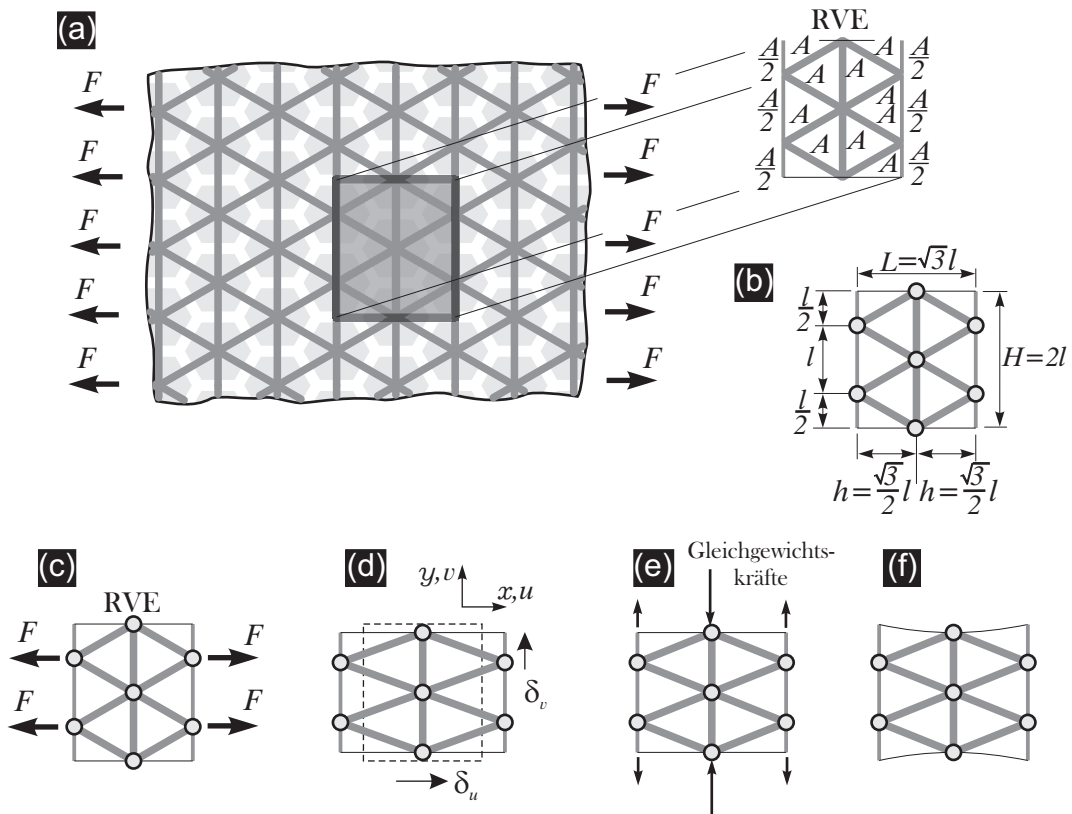


Abbildung 6.13: (a) Aus einer ebenen Scheibe wird ein repräsentatives Volumenelement (RVE) ausgeschnitten. (b) Die Querschnitte der Stäbe ergeben sich aus der Geometrie. (c) bis (f) zeigen die am RVE angreifenden Kräfte, die gleichmäßige Verformung des RVE, die zur gleichmäßigen Verformung dazugehörigen Gleichgewichtskräfte und eine ungleichmäßige Verformung am Rand aufgrund fehlender Gleichgewichtskräfte.

Eine weitere Möglichkeit die Querkontraktionszahl in isotropen Gitterstrukturen zu bestimmen ist in [106] angegeben.

Aus dem Vergleich der beiden Verschiebungen δ_u und δ_v mit der analytischen Lösung kann festgestellt werden, dass die beiden Verschiebungen des Stabgittermodells um den Faktor $\frac{3}{2}$ zu groß sind, weshalb eine Korrektur der Steifigkeit erforderlich ist, siehe auch Gl. (6.52) in Abb. 6.11. Da sich die Steifigkeit eines Stabes aus $\frac{EA}{l}$ ergibt, kann entweder der Elastizitätsmodul E , der Stabquerschnitt A oder die Länge l modifiziert werden, bis sich die richtige Steifigkeit einstellt. Der Elastizitätsmodul ist eine feste Größe des Werkstoffs. Die Stablänge gibt den Feinheitsgrad der Diskretisierung wieder. Der Stabquerschnitt ergibt sich aus dem Feinheitsgrad der Diskretisierung und der Scheibendicke, siehe Abb. 5.2 und 5.5. In dieser Arbeit wird die Korrektur der Steifigkeit über den Stabquerschnitt vorgenommen.

Die Seitenfläche des Hexagons A_{Hex} (siehe Abb. 5.5 in Abschnitt 5.2), welche für die Übertragung der Flussgröße verantwortlich ist, ergibt sich aus der Geometrie des Hexagons mit der Dicke der Scheibe d zu

$$A_{Hex} = \frac{1}{\sqrt{3}} l d . \quad (6.73)$$

Eine Korrektur der Steifigkeit erfolgt durch vergrößern des Stabquerschnittes um den Faktor $\frac{3}{2}$. Somit nehmen die Verschiebungen um den Faktor $\frac{2}{3}$ ab. Der korrigierte Stabquerschnitt ist nun

$$A = \frac{3}{2} A_{Hex} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} l d = \frac{\sqrt{3}}{2} l d . \quad (6.74)$$

Dieser Querschnitt ist mit den zusammengestellten Resultaten von HRENNIKOFF, dargestellt in Abb. 5.2, konform.

6.5.2 Randeffekte

Bisher wurde das DE-Modell lediglich für den inneren Bereich einer Scheibe beschrieben. Im Inneren der Scheibe treten keine störenden Effekte auf, wie sie am Rand des Modells induziert werden [119]. Das Problem der Randeffekte tritt nur bei hexagonalen Elementen auf und wird auch als harmonische Randerscheinung bezeichnet. Diese Randeffekte wurden sehr früh in der Entwicklungsgeschichte der DEM bemerkt, jedoch noch nicht behoben.

Durch das Aufbringen einer gleichförmigen Last stellen sich Schwankungen in den Spannungen der Diagonalstäbe vom Rand zum Inneren ein. Die Vertikalstäbe haben am Rand ein Maximum an Spannung, welche nach innen abnimmt, siehe auch Abb. 6.14 (a). Aufgrund dieser Randerscheinungen wurden bisher viereckige Zellen bevorzugt, obwohl sie nur eingeschränkt verwendet werden können. Vermutlich konnte sich wegen der harmonischen Randerscheinungen bei den hexagonalen Zellen und der eingeschränkten Verwendbarkeit der Rechteckzellen die DEM bisher nicht in der Kontinuumsmechanik durchsetzen.

Die DEM wurde in den vergangenen Jahren, obwohl es die beschriebenen harmonisch abklingenden Spannungen vom Rand ins Innere gibt, bei der Simulation von inhomogenen Werkstoffen unter Verwendung von hexagonalen Zellen eingesetzt. In den inhomogenen Werkstoffmodellen sind die Materialparameter statistischen Schwankungen unterworfen, weswegen die Randeffekte in den Spannungsschwankungen mit untergehen [40, 119].

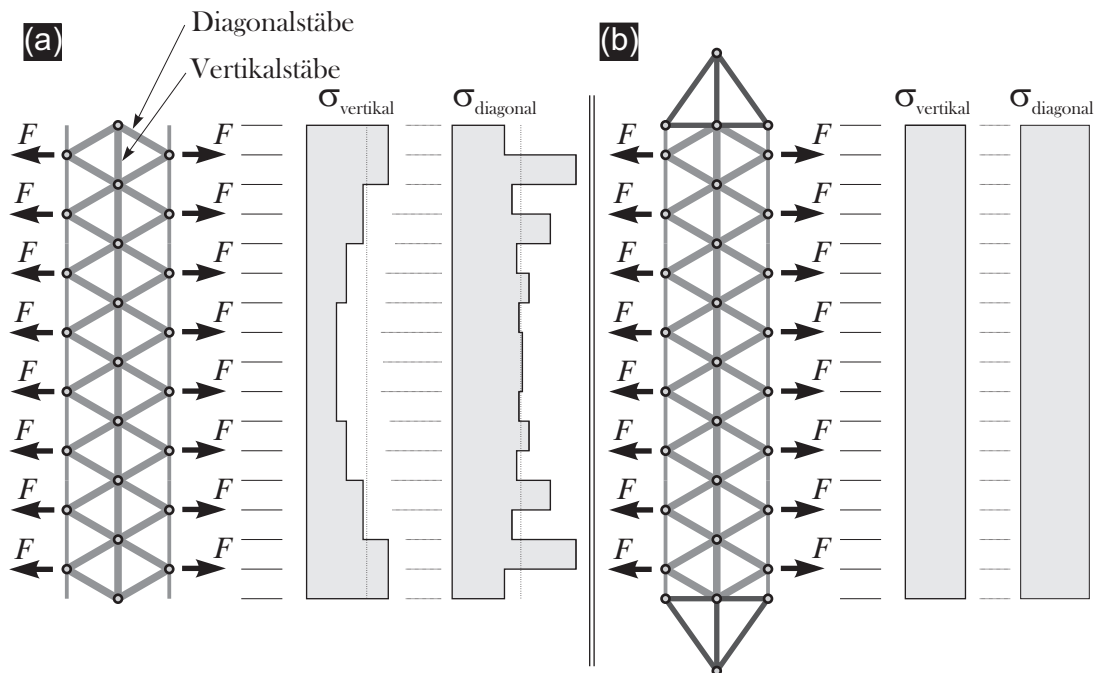


Abbildung 6.14: (a) Im DE-Modell schwanken die Spannungen der vertikalen und diagonalen Elemente, was gemäß der analytischen Lösung nicht sein darf. (b) Abhilfe bringen die Randelemente, welche bei gleichmäßiger Last dafür Sorge tragen, dass sich der Rand gleichmäßig verformt und die Spannungen konstant bleiben.

Die harmonischen Randerscheinungen kommen dadurch zustande, dass beim Ausschneiden eines repräsentativen Volumenelementes (RVE) aus dem Randbereich einer homogenen Scheibe sich das RVE am freien Rand aufgrund der fehlenden Gleichgewichtskräfte wie ein Sinus-Halbbogen verformen kann, siehe Abb. 6.15 (a) und (b). Diese Randerscheinungen wiederholen sich über die Länge bei allen RVEs und klingen nach innen hin ab. Abhilfe schaffen spezielle Stabelemente am Rand, welche eine sehr viel höhere Steifigkeit besitzen als die Stäbe selbst und somit kinematisch zwängend wirken. Diese speziellen Stabelemente am Rand werden an jedem RVE entlang des Randes angebracht, wodurch eine Klaffung zwischen den Randelementen entsteht, siehe Abb. 6.15 (c). Bei der Simulation von Rissen und Lebensdauer haben die Randelemente den Charme, dass sie vom Rand her ein Versagen des Modells verhindern. Werden die Randelemente weggelassen, so entstehen vom Rand her sofort Risse, die sich ins Innere des Modells fortpflanzen. In der Praxis entstehen bei Lebensdaueruntersuchungen bei manchen Werkstoffen erste Risse am Rand, weswegen die Randelemente den Vorteil haben, die Rissbildung am Rand numerisch kontrollieren oder steuern zu können.

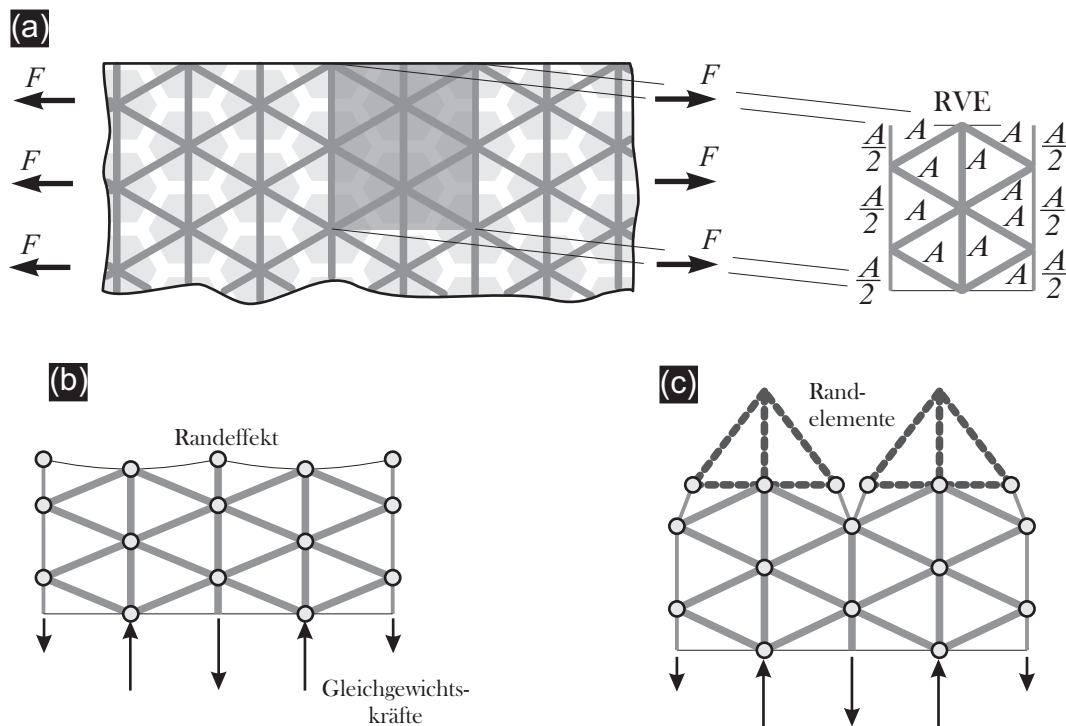


Abbildung 6.15: (a) Aus einer ebenen Scheibe wird am Rand ein repräsentatives Volumenelement (RVE) ausgeschnitten. (b) Am Rand entstehen bei der Stabgittermethode harmonische Randerscheinungen, die unrealistisch sind. (c) Diese harmonischen Randerscheinungen können durch spezielle Randelemente vollständig unterdrückt werden.

6.5.3 Testfälle für Spannungen im Kontinuum

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich aus den Ergebnissen der DEM-Simulation exakte kontinuumsbasierte Spannungen und Dehnungen reproduzieren lassen.

Testfall I: Last senkrecht zu den Vertikalstäben

Abbildung 6.16 (a) zeigt das Kontinuumsmodell einer Scheibe mit homogenen Werkstoffeigenschaften. Diese Scheibe wird mit der Diskrete-Elemente-Methode über die Länge L und über die Höhe H mit jeweils zwei repräsentativen Volumenelementen diskretisiert, siehe Abb. 6.16 (b). Dargestellt sind in der Abbildung zusätzlich zur Gitterstruktur auch die Randelemente.

Die homogene Scheibe hat einen Elastizitätsmodul von $E = 72000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Die an der Scheibe angreifende Kraft ist $F_{ges} = 4F = 40 \text{ N}$. Die Höhe beträgt $H = 4 \text{ mm}$ und die Länge $L = 4\frac{\sqrt{3}}{2}l = 3,4641 \text{ mm}$. Aus Gründen der Einfachheit hat der Stab eine Einheitslänge von $l = 1 \text{ mm}$ und die Dicke der Scheibe beträgt $d = 1 \text{ mm}$.

Die exakten Lösungen der Scheibe für die Längenänderung Δl_x in x -Richtung, die

Dehnung ϵ_{xx} und die Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} , ergeben sich zu

$$\Delta l_x = \frac{F_{\text{res}} L}{E d H} = 4,81125 \cdot 10^{-4} \text{ mm} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{xx} = \frac{\Delta l_x}{L} = 0,013889\% \quad (6.75)$$

und

$$\sigma_{xx} = \frac{F_{\text{res}}}{4 l d} = \frac{40 \text{ N}}{4 \text{ mm}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{yy} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (6.76)$$

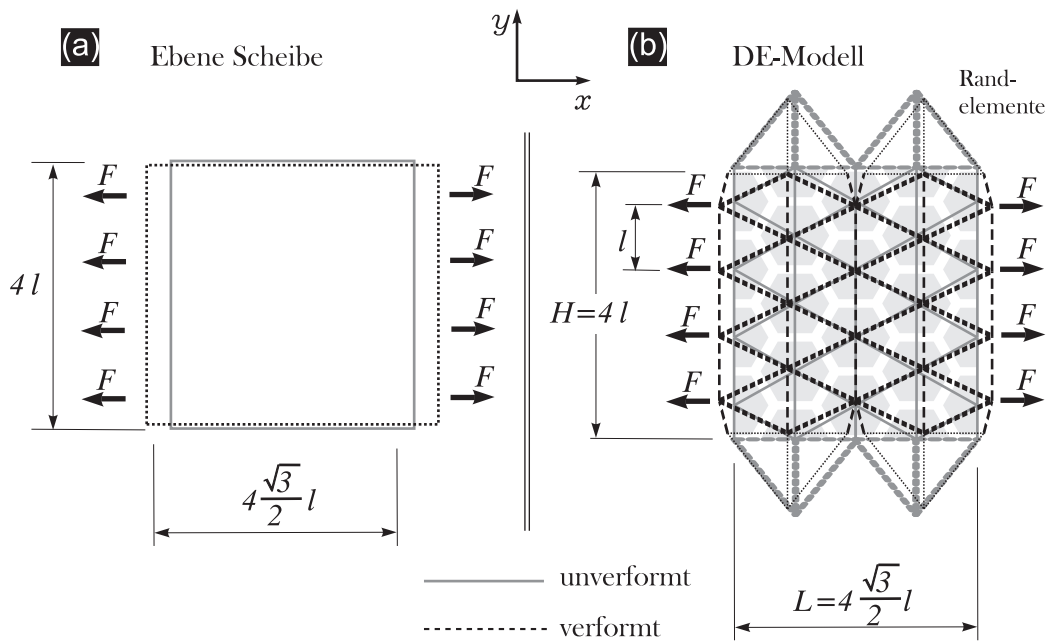


Abbildung 6.16: (a) Ebene Scheibe aus einem homogenen Werkstoff. (b) Zugehöriges Diskrete-Elemente-Modell für den Testfall I.

Die Materialparameter für das Diskrete-Elemente-Modell sind die gleichen wie für das analytische Modell. Gemäß Gl. (6.74) ist der Stabquerschnitt $A = \frac{\sqrt{3}}{2} l d = 0,866 \text{ mm}^2$. Die angreifende Kraft ist wieder $F_{\text{res}} = 40 \text{ N}$. Der Elastizitätsmodul der Randelemente soll um einen Faktor von 10^4 größer sein als derjenige der Gitterstäbe im Inneren der Scheibe. Aus der DEM Berechnung ergibt sich eine Verlängerung in x -Richtung von $\Delta l_x = 4,81125 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$. Dies ist die gleiche Verlängerung wie in Gl. (6.75), woraus sich für das Kontinuumsmodell dieselbe Dehnung ϵ_{xx} ergibt. Die vertikalen Stäbe des DE-Modells haben alle die gleiche Spannung $\sigma_{\text{vertikal}} = -3,3334 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und alle diagonalen Stäbe haben auch die gleiche Spannung mit $\sigma_{\text{diagonal}} = 6,6667 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Die Kontinuumsstressspannungen lassen sich aus den Ergebnissen des DE-Modells auf zwei Wege berechnen. Zum Einen, indem zuerst die Dehnungen des Kontinuums und dann die Spannungen berechnet werden, zum Anderen über das statische Gleichgewicht der Stabspannungen an einem Knoten. In dieser Arbeit wird der zweite Weg beschrieben, der zuerst beschriebene Weg ist in [106] dargestellt.

Die Abbildung 6.17 zeigt das zu bildende statische Gleichgewicht in x - und y -Richtung für einen Knotenpunkt. Die Spannungen des Kontinuums und der Stäbe können mit der allgemeingültigen Beziehung

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin(2\varphi) \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin(2\varphi) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) & \frac{1}{2} \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

transformiert werden, wobei σ_{11} die Stabspannung in Stablängsrichtung, σ_{22} die transversalen Stabspannungen, σ_{12} die Schubspannung und φ der Drehwinkel sind [4, 97, 146, 245]. Beim Stab sind die transversalen Spannungen und die Schubspannungen per Definition gleich Null, so dass sich die Beziehung (6.77) in

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \sigma_{11} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \varphi \\ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

reduzieren lässt. Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die Kontinuumsspannungen der Scheibe aus den Spannungen der Vertikalstäbe σ_{vertikal} und Diagonalstäbe σ_{diagonal} in Abb. 6.17 gemäß

$$\sigma_{xx} = \sigma_d \cdot \cos^2(30^\circ) + \sigma_v \cdot \cos^2(-30^\circ) = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.79)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_d \cdot \sin^2(30^\circ) + \sigma_v \cdot \sin^2(90^\circ) + \sigma_d \cdot \cos^2(150^\circ) = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\sigma_d \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 30^\circ) - \sigma_v \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 90^\circ) \\ &\quad - \sigma_d \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 150^\circ) = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \quad (6.81)$$

bestimmen.

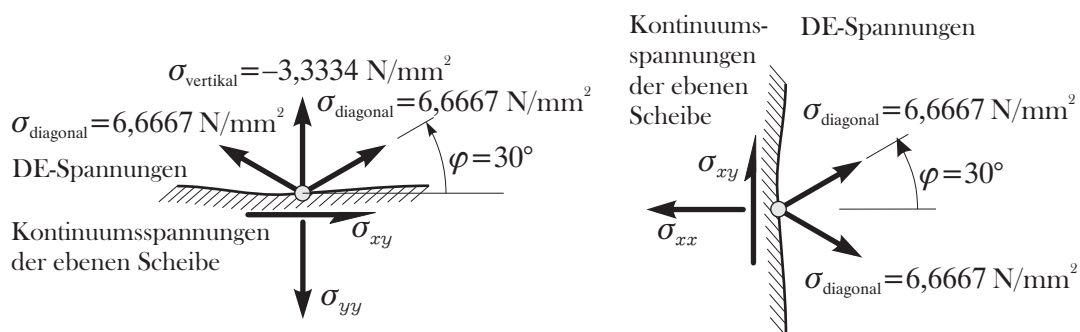


Abbildung 6.17: Die Spannungen der ebenen Scheibe σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} für den Testfall I werden aus dem statischen Gleichgewicht der an einem Knoten angreifenden Stabspannungen bestimmt.

Diese im Nachlauf berechneten Werte der Kontinuumsspannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} aus den Spannungen des DE-Modells stimmen exakt mit den analytischen Werten überein.

Testfall II: Last entlang der Vertikalstäbe

Beim Testfall II handelt es sich um das selbe Beispiel einer Scheibe mit homogenen Werkstoffeigenschaften wie in Testfall I, jedoch ist die Scheibe und somit auch das DE-Modell um 90° gedreht, siehe Abb. 6.18 (a) und (b). Durch dieses Beispiel soll gezeigt werden, dass das DE-Modell invariant für Drehungen ist.

Die homogene Scheibe hat einen Elastizitätsmodul von $E = 72000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Die an der Scheibe angreifende Kraft ist $F_{\text{res}} = 2F = 20 \text{ N}$. Die Höhe beträgt $H = 3,4641 \text{ mm}$ und die Länge ist $L = 4 \text{ mm}$, wobei aus Gründen der Einfachheit der Stab wieder eine Einheitslänge von $l = 1 \text{ mm}$ haben soll. Die Dicke der Scheibe ist weiterhin $d = 1 \text{ mm}$.

Die auf dem Kontinuumsmodell basierenden exakten Lösungen der Scheibe für die Längenänderung in x -Richtung Δl_x , die Dehnung ϵ_{xx} und die Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} ergeben sich zu

$$\Delta l_x = \frac{F L}{E d H} = 3,2075 \cdot 10^{-4} \text{ mm} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{xx} = \frac{\Delta l_x}{L} = 0,00801875\% \quad (6.82)$$

und

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{2\sqrt{3} l d} = \frac{20 \text{ N}}{2\sqrt{3} \text{ mm}^2} = 5,7735 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{yy} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} . \quad (6.83)$$

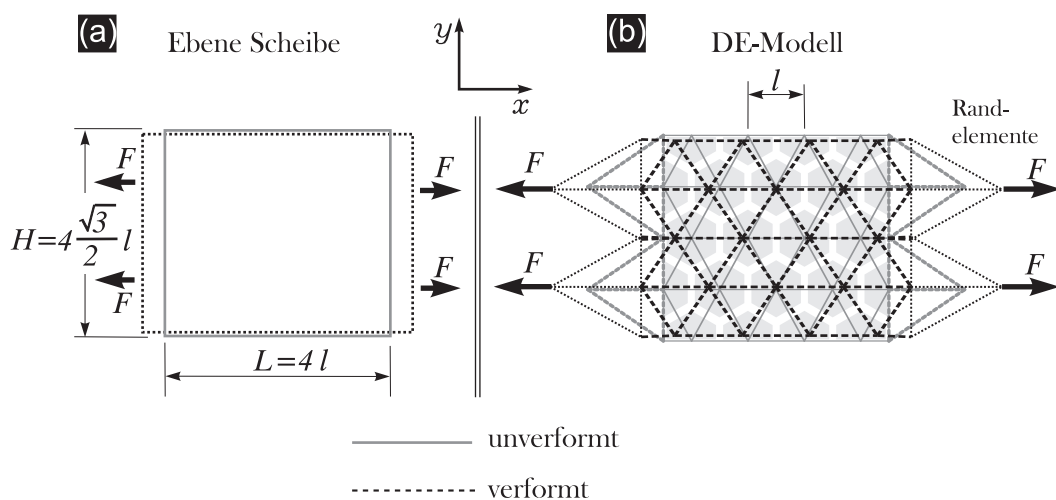


Abbildung 6.18: (a) Ebene Scheibe aus einem homogenen Werkstoff. (b) Zugehöriges Diskrete-Elemente-Modell für den Testfall II. Dieses Modell ist gegenüber dem aus Testfall I (Abb. 6.16) um 90° gedreht.

Die Materialparameter für das Diskrete-Elemente-Modell bleiben die gleichen wie im ersten Testfall. Gemäß Gl. (6.74) ist der Stabquerschnitt $A = \frac{\sqrt{3}}{2} l t = 0,866 \text{ mm}^2$. Die angreifende Kraft ist $F_{\text{res}} = 20 \text{ N}$. Der Elastizitätsmodul der Randelemente ist wieder um den Faktor 10^4 größer als derjenige der Gitterstäbe im Inneren der Scheibe. Aus der DE-Simulation ergibt sich eine Verlängerung des Stabgittermodells in x -Richtung von $\Delta l_x = 3,2075 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$. Diese Verlängerung entspricht der mit Gl. (6.82) exakt ermittelten. Die aus dem DE-Modell berechnete Dehnung des gesamten DE-Modells ϵ_{xx} stimmt ebenfalls exakt mit der analytischen Lösung überein.

Bei diesem Testfall tragen im DE-Modell alle horizontalen Stäbe eine Spannung von $\sigma_{\text{horizontal}} = -5,7735 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, wohingegen die diagonalen Stäbe mit $\sigma_{\text{diagonal}} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ spannungsfrei sind.

Die Stabspannungen werden, analog zum ersten Testfall, wieder mit Gl. (6.78) in Kontinuumsspannungen umgerechnet

$$\sigma_{xx} = \sigma_v \cdot \cos^2(0^\circ) + \sigma_d \cdot \cos^2(60^\circ) + \sigma_d \cdot \cos^2(-60^\circ) = 5,7735 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.84)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_v \cdot \sin^2(60^\circ) + \sigma_v \cdot \sin^2(120^\circ) = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} . \quad (6.85)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_d \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 60^\circ) - \sigma_v \cdot \frac{1}{2} \sin(0^\circ) - \sigma_d \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot (-60^\circ)) = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} . \quad (6.86)$$

Diese aus dem DE-Modell berechneten Kontinuumsspannungen stimmen exakt mit den analytischen Werten überein. Siehe hierzu auch Abb. 6.19.

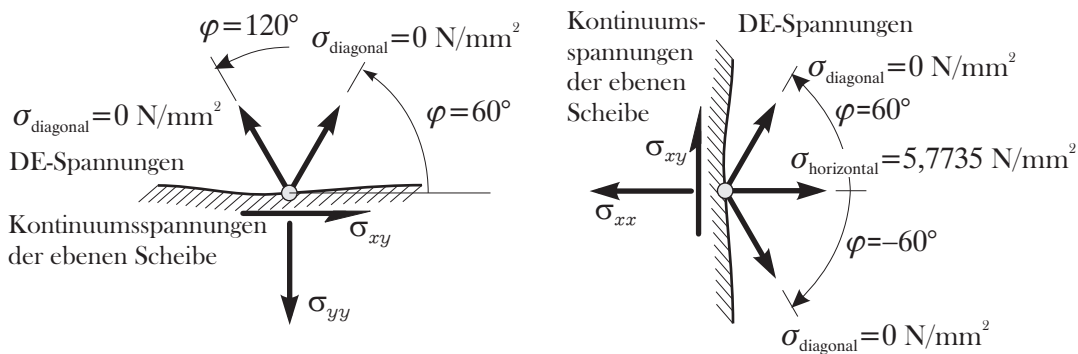


Abbildung 6.19: Die Spannungen der ebenen Scheibe σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} für den Testfall II werden aus dem statischen Gleichgewicht bestimmt.

Testfall III: Scheibe unter Schub

In diesem Testfall sollen die Schubeigenschaften des DE-Modells verifiziert werden. Abbildung 6.20 (a) zeigt eine Scheibe aus einem homogenen Werkstoff, wie dies auch in den Testfällen I und II der Fall war. Die Scheibe ist mit Stäben diskretisiert. Über die Länge

L und Höhe H werden jeweils zwei repräsentative Volumenelemente verwendet, siehe Abb. 6.20 (b). Belastet wird die Scheibe mit Kräften entlang des Randes. Dabei erfüllen die horizontal und vertikal wirkenden Kräfte das Momentengleichgewicht. Ohne dieses Momentengleichgewicht würden die Lagerkräfte die Ergebnisse beeinflussen.

Die homogene Scheibe hat einen Elastizitätsmodul von $E = 72000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, woraus sich mit Gl. (4.10) ein Schubmodul von $G = 27000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ mit einer Querkontraktion von $\nu = \frac{1}{3}$ ergibt. Die Annahme, dass die Querkontraktion $\nu = \frac{1}{3}$ beträgt ist insofern notwendig, da das DE-Modell nur diesen Querkontraktionswert wiedergeben kann. Als nomineller Kraftwert wird $F = 10 \text{ N}$ festgelegt. Mit dieser Kraft ergeben sich die in Abb. 6.20 (b) dargestellten horizontalen und vertikalen Kräfte zu $F_h = 2 F \sqrt{3} = 17,32051 \text{ N}$ und $F_v = 4 F = 10 \text{ N}$. Diese Kräfte erfüllen das Momentengleichgewicht. Die Höhe und die Länge der Scheibe ist wiederum $H = 4 \text{ mm}$ und $L = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} l = 3,4641 \text{ mm}$, wobei aus Gründen der Einfachheit der Stab wieder eine Einheitslänge von $l = 1 \text{ mm}$ hat und die Dicke der Scheibe $d = 1 \text{ mm}$ ist.

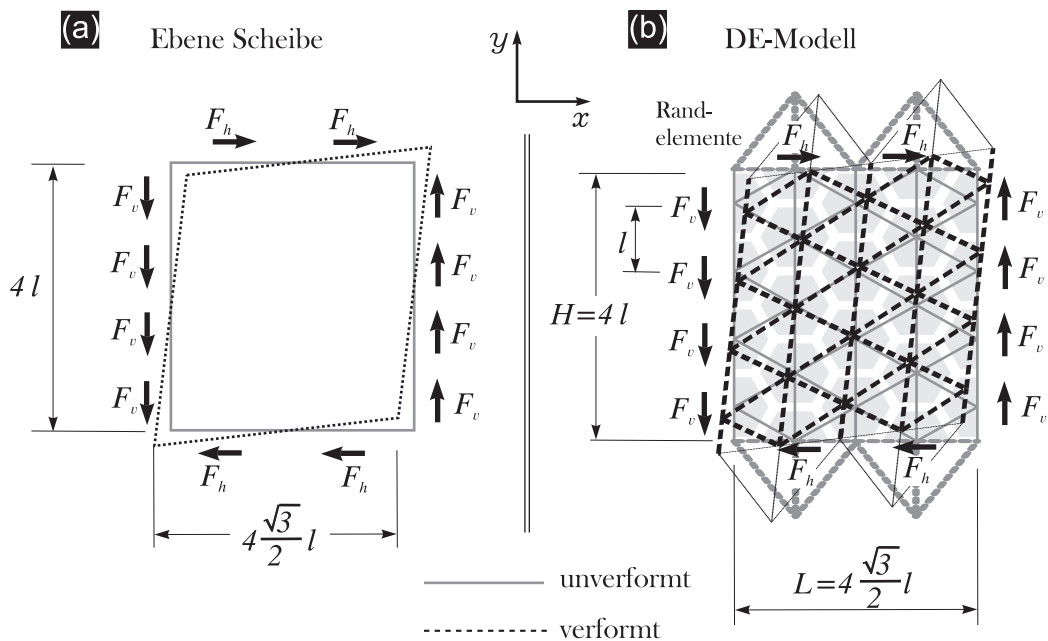


Abbildung 6.20: (a) Ebene Scheibe mit homogenen Werkstoffeigenschaften. (b) Zugehöriges Diskrete-Elemente-Modell für den Testfall III mit der Schublast.

Die analytischen Lösungen der Scheibe für den Schubwinkel γ_{xy} und die Schubspannung σ_{xy} sind mit der Angriffsfläche für den Schub $A_{Schub} = H d$ und unter der Annahme kleiner Schubwinkel ($\tan \gamma \approx \gamma$).

$$\gamma_{xy} = \frac{4 F_v}{H d G} = \frac{4 \cdot 10 \text{ N}}{4 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 27000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 3,7037 \cdot 10^{-4} \quad (6.87)$$

und

$$\sigma_{xy} = \frac{4 F_v}{A_{Schub}} = \frac{4 F_v}{H d} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (6.88)$$

Das DE-Modell liefert eine Schubverzerrung von $\gamma_{xy} = 3,7037 \cdot 10^{-4}$, was dem analytischen Wert in Gl. (6.87) exakt entspricht. Das Modell zeigt, dass die vertikalen Stäbe spannungsfrei sind, während die diagonal verlaufenden Stäbe die ganze Last aufnehmen. Außerdem haben die Randverstärkungen keinen Einfluß auf die Ergebnisse.

Die Kontinuumsspannungen werden wieder mit Gl. (6.78) aus den Stabspannungen

$$\sigma_{xx} = \sigma_c \cdot \cos^2(30^\circ) - \sigma_d \cdot \cos^2(-30^\circ) = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.89)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_d \cdot \sin^2(30^\circ) + \sigma_v \cdot \sin^2(90^\circ) - \sigma_v \cdot \sin^2(150^\circ) = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\sigma_d \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 30^\circ) - \sigma_v \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 90^\circ) \\ &\quad - (-\sigma_d) \cdot \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 150^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 11,547 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (6.91) \end{aligned}$$

berechnet. Auch hier stimmen die aus dem DE-Modell berechneten Spannungswerte exakt mit den analytischen Kontinuumsspannungen überein, siehe hierzu auch Abb. 6.21.

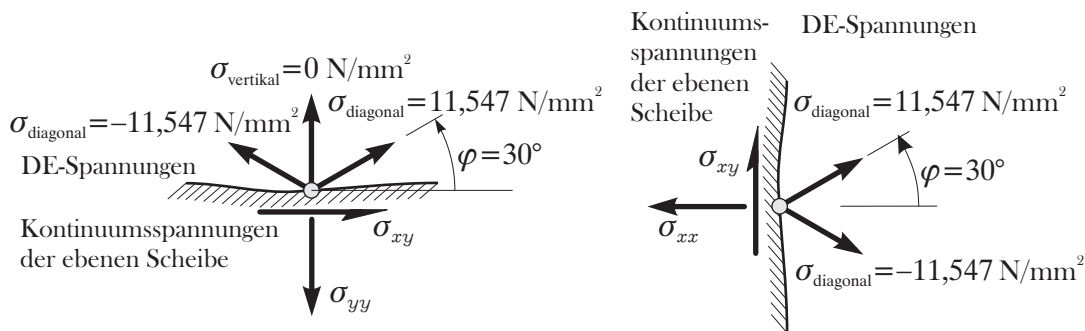


Abbildung 6.21: Die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} der Scheibe werden für den Testfall III aus dem Gleichgewicht um einen Knotenpunkt ermittelt.

6.5.4 Spannungen aus dem allgemeinen Lastfall

Aus den drei Testfällen des Abschnittes 6.5.3 geht ein Schema hervor, aus welchem die Normal- und Schubspannungen des Kontinuums aus den Stabspannungen berechnet werden können. Aus den Normalkräften ergeben sich in den Diagonalstäben konstante und identische Spannungen. Bei einer Schubbeanspruchung haben die diagonal nach oben und unten verlaufenden Stäbe den gleichen Wert, aber unterschiedliche Vorzeichen. Deshalb kann die Schubspannung aus der Differenz der Diagonalspannungen zum Mittelwert

bestimmt werden. Die Normalspannungen ergeben sich aus dem Mittelwert der Diagonalspannungen und aus den Spannungen in den Vertikalstäben.

Da es an jedem Knoten zu einer Spannungsumlagerung kommt, muss an jedem Knoten das Schnittprinzip angewandt werden. Im Folgenden werden für jede Schnittseite die resultierenden Spannungen gebildet und danach gemittelt, woraus sich die Kontinuums-
spannungen der Scheibe für jeden diskreten Punkt ergeben, siehe hierzu Abb. 6.22 (a).

Die Normalspannungen werden für das in Abb. 6.22 (a) dargestellte diskrete Element anhand des in den Abbildungen 6.22 (b) und (c) dargestellten Schnittprinzips mit Gl. (6.78) gefunden

$$\sigma_{xx}^+ = \sigma_1 \cdot \cos^2(30^\circ) + \sigma_6 \cdot \cos^2(330^\circ) = \frac{3}{4} (\sigma_1 + \sigma_6) \quad (6.92)$$

$$\sigma_{xx}^- = \sigma_3 \cdot \cos^2(150^\circ) + \sigma_4 \cdot \cos^2(210^\circ) = \frac{3}{4} (\sigma_3 + \sigma_4) \quad (6.93)$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_1 \cdot \sin^2(30^\circ) + \sigma_2 \cdot \sin^2(90^\circ) + \sigma_3 \cdot \sin^2(150^\circ) = \sigma_2 + \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_3) \quad (6.94)$$

$$\sigma_{yy}^- = \sigma_4 \cdot \sin^2(210^\circ) + \sigma_5 \cdot \sin^2(270^\circ) + \sigma_6 \cdot \sin^2(330^\circ) = \sigma_5 + \frac{1}{4} (\sigma_4 + \sigma_6) \quad (6.95)$$

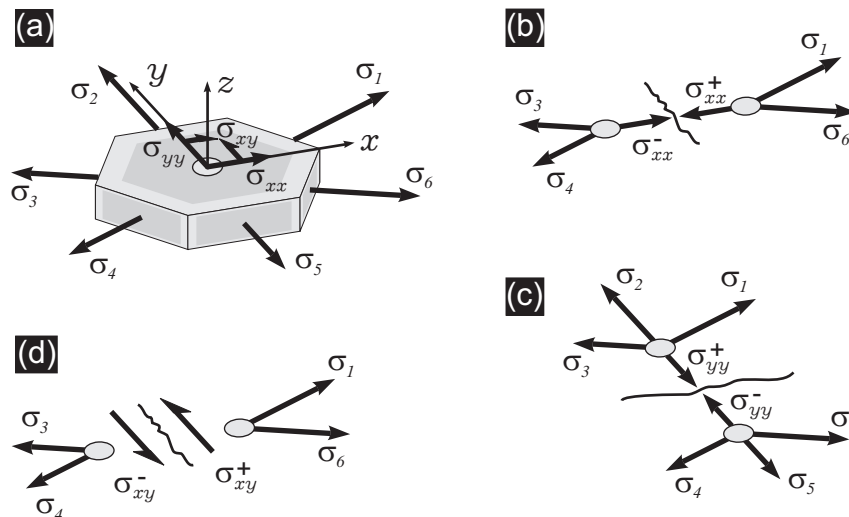


Abbildung 6.22: (a) Aus den Stabspannungen können die Kontinuumsstressspannungen des diskreten Elementes durch das Schnittprinzip gefunden werden. (b) zeigt die relevanten Spannungen für die Bildung von σ_{xx} , (c) die relevanten Stabspannungen für σ_{yy} und (d) die Stabspannungen für die Berechnung von σ_{xy} .

Die Schubspannungen des Kontinuums ergeben sich aus den Spannungen der Diagonalstäbe. Da die Diagonalstäbe den gleichen Spannungsbetrag mit unterschiedlichen Vorzeichen haben, können die Schubspannungen gemäß Abb. 6.22 (d) und mit Gl. (6.78)

zu

$$\sigma_{xy}^+ = \frac{\sigma_1 - \sigma_6}{2} \sin(2 \cdot 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sigma_1 - \sigma_6) \quad (6.96)$$

$$\sigma_{xy}^- = \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{2} \sin(2 \cdot 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sigma_4 - \sigma_3) \quad (6.97)$$

bestimmt werden.

Die Mittelwertbildung der Gleichungen (6.92) und (6.93), (6.94) und (6.95), sowie (6.96) und (6.97) ergibt die Kontinuumsspannungen für den diskreten Knotenpunkt

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}^+ + \sigma_{xx}^-) = \frac{3}{8} (\sigma_1 + \sigma_6 + \sigma_3 + \sigma_4) \quad (6.98)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} (\sigma_{yy}^+ + \sigma_{yy}^-) = \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_5) + \frac{1}{8} (\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_6) \quad (6.99)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^-) = \frac{\sqrt{3}}{8} (\sigma_1 + \sigma_4 - \sigma_3 - \sigma_6). \quad (6.100)$$

6.5.5 Anwendung der mechanischen Diskrete-Elemente-Methode auf die Bruchmechanik

Um den Nachweis zu erbringen, dass die DEM in der Bruchmechanik verwendet werden kann, werden der Modus I und II einer Scheibe, welche sich im ebenen Spannungszustand befindet, mit der DEM simuliert. Dabei werden die Stabspannungen mit den Gleichungen (6.98) bis (6.100) in Kontinuumsspannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} umgerechnet, woraus anschließend eine Vergleichsspannung mit

$$\sigma_{V; \text{Mises}; \text{DEM}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + 3 \sigma_{xy}^2} \quad (6.101)$$

gebildet wird [65, 123].

Die Ergebnisse für die Vergleichsspannung nach v. MISES aus den Belastungsmoden I und II sind in den Abbildungen 6.23 und 6.24 dargestellt. Zu erkennen sind die Spannungskonzentrationen an der Rissspitze, wobei der Betrag der Vergleichsspannung aus dem DE-Modell mit dem der in Abschnitt 4.4 und Abb. 4.2 (a) und (b) gezeigten Vergleichsspannungen aus der analytischen Bruchmechanik übereinstimmt.

6.6 Spröde Werkstoffe

Inhomogene Werkstoffe mit sprödem Materialverhalten, wie z.B. Beton, werden schon seit längerem mit der DEM simuliert [34, 119, 227, 239, 240]. Der inhomogene Werkstoff wird dabei durch verzerrte Hexagone dargestellt, welche ein ähnlich verzerrtes

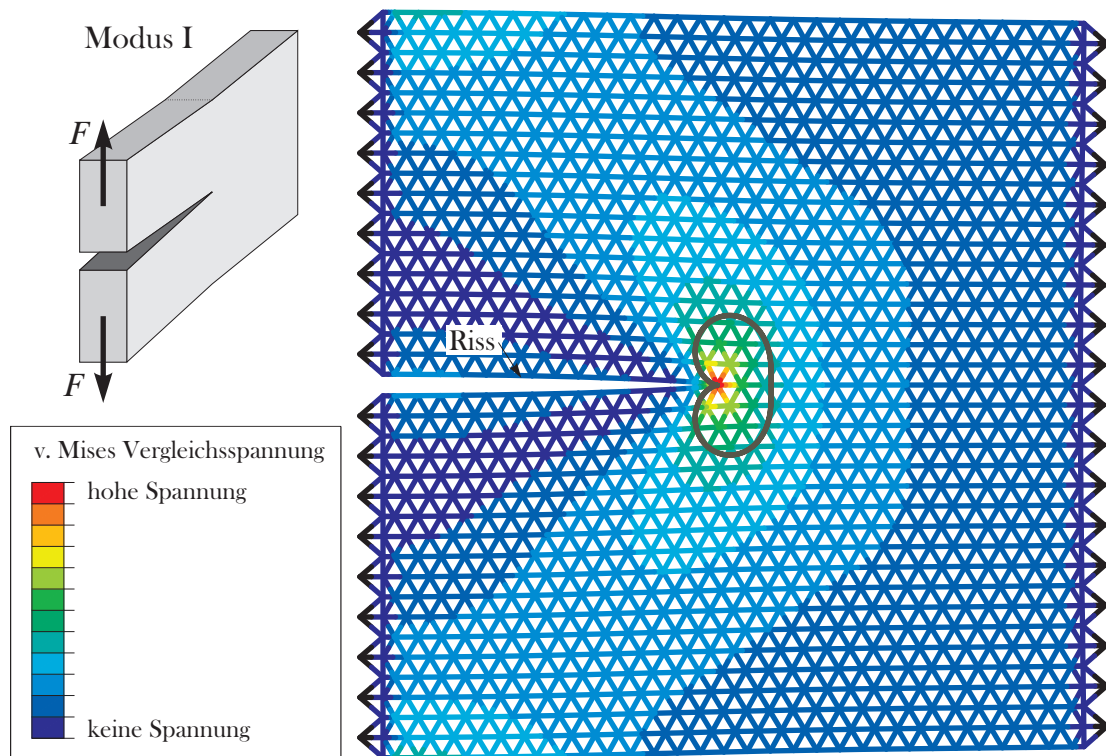


Abbildung 6.23: Vergleichsspannung nach v. MISES, gebildet aus einer DE-Simulation für den Belastungsmodus I. Das Vergleichsspannungsbild stimmt mit den Vergleichsspannungen aus der analytischen Bruchmechanik in Abb. 4.2 (a) überein.

Fachwerk erzeugen. Wie stark die Hexagone verzerrt werden, wird durch den von WITTEL eingeführten Unordnungsparameter a , kontrolliert [240]. Neben dieser geometrischen Unordnung wird noch die physikalische Unordnung verwendet. Mit der physikalischen Unordnung, und dem dazugehörigen Unordnungsparameter m , werden den Stäben WEIBULLverteilte Festigkeiten zugewiesen, siehe Abschnitt 2.1.

Aufgrund der geometrischen und physikalischen Unordnung lassen sich beeindruckende Rissbilder simulieren. Die Untersuchungen dazu finden sich in der oben genannten Literatur. In dieser Arbeit soll das DE-Modell unter anderem dahingehend erweitert werden, dass auch duktile Werkstoffe mit der DEM modelliert werden können.

6.7 Duktile Werkstoffe

Die meisten Werkstoffe weichen vor dem Bruch stark vom linear-elastischen Materialverhalten ab. Das nichtlineare Materialverhalten wird mit dem Potenzgesetz beschrieben, siehe hierzu Abschnitt 2.2.1. Allgemein gilt für das Potential bzw. die innere Energie

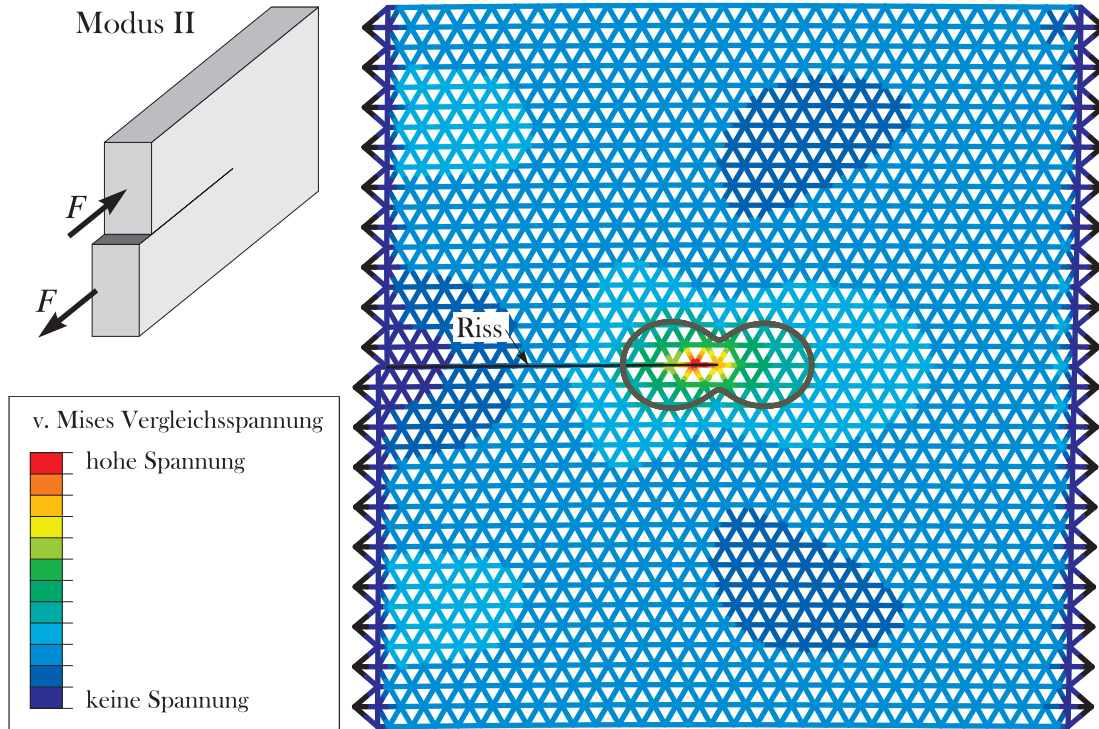


Abbildung 6.24: Vergleichsspannung nach v. MISES, gebildet aus einer DE-Simulation für den Modus II. Die aus dem DE-Modell gebildete Vergleichsspannung stimmt mit den Vergleichsspannungen aus der analytischen Bruchmechanik dargestellt in Abb. 4.2 (b), überein.

eines Werkstoffs

$$\Pi_{\text{Werkstoff}} = \int_V \int_{\epsilon} \sigma(\epsilon) d\epsilon dV . \quad (6.102)$$

Das duktile Verhalten wird typischerweise durch stückweise Linearisierung des nichtlinearen Materialverhaltens in das numerische Modell mit einbezogen, indem die Energie unterhalb der Spannungs-Dehnungs-Kurve in die einzelnen Energieanteile zerlegt wird. Wird der plastische Bereich z.B. mit zwei linearen Segmenten approximiert, so entstehen fünf Bereiche, aus denen sich die gesamte Energie zusammensetzt $\Pi_{\text{Werkstoff}} = \text{Bereich ①} + \text{Bereich ②} + \text{Bereich ③} + \text{Bereich ④} + \text{Bereich ⑤}$, siehe auch Abb. 6.25

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Werkstoff}} = & \int_0^l \frac{1}{2} \sigma_{f1} \epsilon_{f1} A d\xi + \int_0^l \sigma_{f1} (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1}) A d\xi \\ & + \int_0^l \frac{1}{2} (\sigma_{f2} - \sigma_{f1}) (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1}) A d\xi + \int_0^l \sigma_{f2} (\epsilon(\xi) - \epsilon_{f2}) A d\xi \\ & + \int_0^l \frac{1}{2} (\sigma(\xi) - \sigma_{f2}) (\epsilon(\xi) - \epsilon_{f2}) A d\xi . \end{aligned} \quad (6.103)$$

Hierin ist $dV = A d\xi$ das Volumen des Stabes, ξ die Längskoordinate und der Index f steht für die Fließgrenzen des Stabes mit der Länge l .

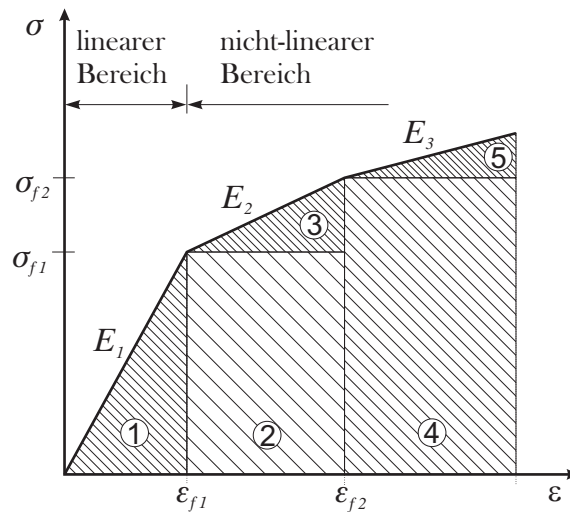


Abbildung 6.25: Die Energie im Spannungs-Dehnungs-Diagramm kann bei nicht-linearem Werkstoffverhalten in verschiedene Bereiche unterteilt werden. Hier ist die Kurve im plastischen Bereich in zwei Segmente aufgeteilt, was zu fünf Bereichen unterhalb der Kurve führt.

Das in Abb. 6.25 dargestellte innere Potential eines Stabes setzt sich aus dem Integral der fünf Anteile zusammen.

Wird die Gleichung (6.103) weiter ausformuliert, so folgt für das erste Integral

$$\int_0^l \frac{1}{2} \sigma_{f1} \epsilon_{f1} A d\xi = \int_0^l \frac{1}{2} \epsilon_{f1} E_1 \epsilon_{f1} A d\xi = \frac{1}{2} E_1 A l \epsilon_{f1}^2, \quad (6.104)$$

und für das zweite

$$\begin{aligned} \int_0^l \sigma_{f1} (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1}) A d\xi &= \int_0^l E_1 \epsilon_{f1} (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1}) A d\xi \\ &= E_1 A l \epsilon_{f1} (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1}) A \end{aligned} \quad (6.105)$$

das dritte

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{1}{2} (\sigma_{f2} - \sigma_{f1}) (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1}) A d\xi &= \int_0^l \frac{1}{2} E_2 (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1})^2 A d\xi \\ &= \frac{1}{2} E_2 A l (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1})^2. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Für das vierte Integral folgt unter Einbeziehung der kinematischen Beziehung $\epsilon(\xi) =$

$u_{,\xi}(\xi)$, den Gleichungen (6.60) und (6.61) sowie $\sigma_{f2} = E_1 \epsilon_{f1} + E_2(\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1})$

$$\begin{aligned} \int_0^l \sigma_{f2} (\epsilon(\xi) - \epsilon_{f2}) A \, d\xi &= \int_0^l \sigma_{f2} A u_{,\xi}(\xi) \, d\xi - \int_0^l \sigma_{f2} A \epsilon_{f2} \, d\xi \\ &= \int_0^l [E_1 \epsilon_{f1} + E_2(\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1})] A u_{,\xi}(\xi) \, d\xi - \sigma_{f2} A l \epsilon_{f2} \\ &= \int_0^l A \epsilon_{f1} (E_1 - E_2) u_{,\xi}(\xi) \, d\xi + \int_0^l A \epsilon_{f2} E_2 u_{,\xi}(\xi) \, d\xi \\ &\quad - \sigma_{f2} A l \epsilon_{f2} \end{aligned} \quad (6.107)$$

und zuletzt folgt für das fünfte Integral mit $\sigma(\xi) - \sigma_{f2} = E_3(\epsilon(\xi) - \epsilon_{f2})$

$$\int_0^l \frac{1}{2} (\sigma(\xi) - \sigma_{f2}) (\epsilon(\xi) - \epsilon_{f2}) A \, d\xi = \int_0^l \frac{1}{2} E_3 A (u_{,\xi}(\xi) - \epsilon_{f2})^2 \, d\xi. \quad (6.108)$$

Werden die Gleichungen (6.104) bis (6.108) in die Gl. (6.103) eingesetzt, so folgt für die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{Werkstoff}} &= \int_0^l A \epsilon_{f1} (E_1 - E_2) \delta u_{,\xi} \, d\xi + \int_0^l A \epsilon_{f2} E_2 \delta u_{,\xi} \, d\xi \\ &\quad + \int_0^l E_3 A (u_{,\xi} - \epsilon_{f2}) \delta u_{,x} \, d\xi. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Der Verschiebungsansatz wird gemäß den Gleichungen (6.60) und (6.61) vorgenommen

$$u(\xi) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) & \frac{\xi}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad u_{,\xi}(\xi) = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \xi \leq l. \quad (6.110)$$

Nach Einsetzen von Gl (6.110) in Gl. (6.109) und anschließender Integration folgt

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{Werkstoff}} &= \left\{ \begin{matrix} \delta \hat{u}_1 \\ \delta \hat{u}_2 \end{matrix} \right\}^T \cdot \left\{ \frac{E_3 A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} - (E_1 - E_2) A \epsilon_{f1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - (E_2 - E_3) A \epsilon_{f2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (6.111)$$

Obwohl diese Gleichung derjenigen der gesamten Energie (innere plus äußere Arbeit) sehr ähnlich sieht, stellt sie nur das innere Potential des Werkstoffs dar. Die beiden Terme der Rechthandseite können als innere Kräfte verstanden werden, die für die inneren Spannungen im Werkstoffmodell Sorge tragen, falls plastisches Fließen vorlag. Die inneren Spannungen bleiben somit erhalten, auch wenn keine externen Kräfte angreifen. Die obige Gleichung stellt den impliziten Lastfall dar. Der aktuelle Elastizitätsmodul für den

vorliegenden Lastfall kann mit dem Potenzgesetz nach Gl. (2.5) bestimmt werden, indem die Spannung nach der Dehnung abgeleitet wird

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E_t = n C \cdot \epsilon_{\text{plast}}^{n-1}. \quad (6.112)$$

Dieser Elastizitätsmodul heißt Tangentenmodul E_t .

Abbildung 6.26 zeigt das Ergebnis einer unter Last stehenden virtuellen Zugprobe. Es ergeben sich statistisch verteilte Risse, lokale Plastifizierungen und Bereiche, die noch im linear-elastischen Bereich verblieben sind.

Das hier vorgestellte Modell zur Erfassung der Plastifizierung ist dem PRANDTLschen Modell der Werkstoffrheologie ähnlich. Der Unterschied der oben vorgestellten Methode zu dem PRANDTLschen Modell ist jedoch, dass der Elastizitätsmodul dem Plastifizierungsgrad angepasst wird.

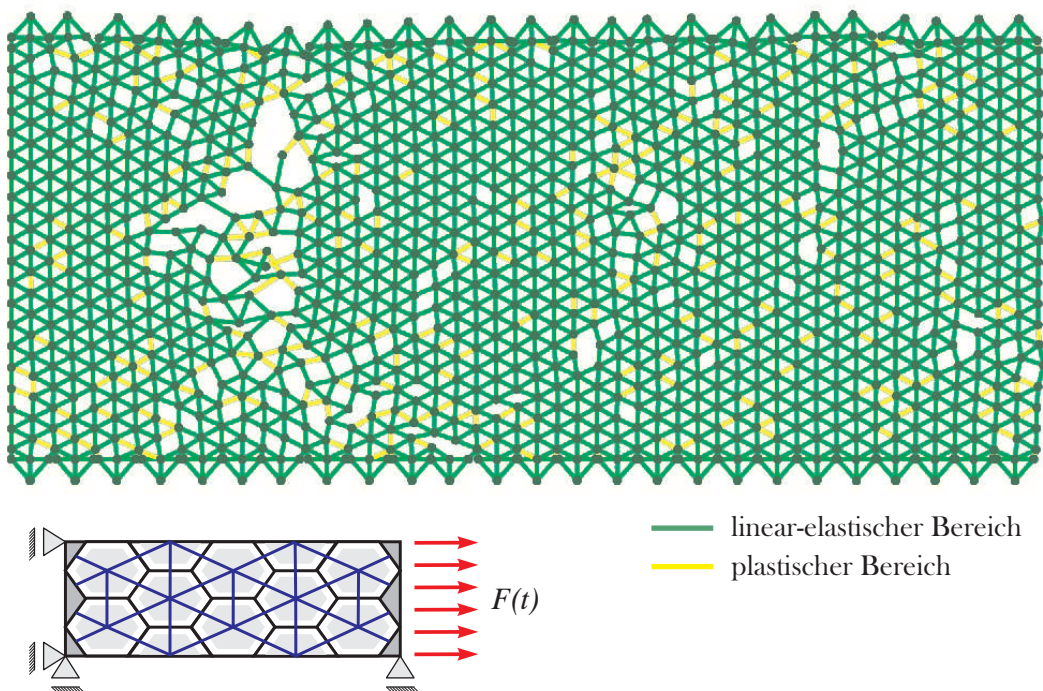


Abbildung 6.26: Dieses Beispiel zeigt eine flache Zugprobe, modelliert mit diskreten Elementen. Die Probe ist mit 10×25 repräsentativen Volumenelementen in der Höhe und Breite diskretisiert und hat außerdem einen physikalischen Unordnungsparameter von $m = 2$. Zu erkennen sind statistisch verteilte Zonen mit Rissen (hier wurden die Stäbe entfernt), Plastifizierungen und Bereiche die noch im linear-elastischen Bereich verblieben sind.

6.8 Lebensdauersimulation

Die Simulation von WÖHLER-Kennlinien stellt nicht für die DEM, sondern für das Werkstoffmodell eine Herausforderung dar. Bisher wurde das Werkstoffmodell als ein statisches Modell angesehen, d.h. selbst bei dynamischen Lasten bleiben die Werkstoffeigenschaften unverändert. Dies ist jedoch in der Realität nicht der Fall, da der Werkstoff aufgrund von dynamischen Lasten ermüdet. In der Literatur werden zahlreiche Faktoren untersucht und aufgeführt, die zur Ermüdung beitragen, siehe hierzu Abschnitt 2.2.2. Diese Faktoren sind, wie in diesem Abschnitt ersichtlich wird, für die DEM ungeeignet, da der Werkstoff im Allgemeinen als Kontinuum angesehen wird.

Im Abschnitt 2.2.2 wurde bereits erläutert, dass die Werkstoffeigenschaften mit zunehmender Zyklenzahl N aufgrund von diskreten Plastifizierungen und anschließender Rissbildung degradieren. Die diskreten mikroplastischen Verformungen nehmen nach jedem Zyklus zu, obwohl die Belastung vom makroskopischen Standpunkt aus im elastischen Bereich ist. Daraus ist zu schließen, dass die mikroplastischen Verformungen für das Werkstoffversagen verantwortlich sind. Diese Behauptung wird durch die Tatsache unterstützt, dass der Elastizitätsmodul während der dynamischen Belastung konstant bleibt.

Erweitertes Werkstoffmodell:

Die Akkumulation der mikroplastischen Schädigung wird in Anlehnung an die BASQUIN-Gl. (2.6) im Abschnitt 2.2.2 mit einem Potenzgesetz für den *high-cycle-fatigue*-Bereich (HCF) für die Dehnung durch die Gleichung

$$\epsilon_{mp\text{HCF}} = \alpha N^\beta \quad (6.113)$$

beschrieben. Mit dieser Formulierung kann die Akkumulation der mikroplastischen Verformungen erfasst werden. In dieser Gleichung ist α ein Parameter, der für die mikroplastische Vorschädigung steht, und dessen Bedeutung im Folgenden ersichtlich wird. Dieser Parameter ist unter anderem von den Inhomogenitäten und der Anzahl der im Werkstoff vorhandenen Mikrorisse abhängig, d.h. je mehr Schwachstellen im Werkstoff sind, desto größer ist α . Der Exponent β steht für die Anstrengung gegen Ermüdung im Werkstoff und muss zwischen Null und Eins liegen, also $0 < \beta < 1$.

Die Akkumulation der mikroplastischen Dehnung von einem Zyklus $(i-1)$ auf den nächsten (i) wird durch

$$\epsilon_{mp\ i} = \epsilon_{mp\ i-1} + \Delta\epsilon_{mp\ i} \quad (6.114)$$

ausgedrückt, worin $\epsilon_{mp i}$ die neue mikroplastische Dehnung, $\epsilon_{mp i-1}$ die alte und $\Delta\epsilon_{mp i}$ die Änderung der mikroplastischen Dehnung von einem Zyklus zum nächsten ist. Die alten und neuen mikroplastischen Dehnungen werden durch

$$\epsilon_{mp i} = \alpha N_i^\beta \quad \text{und} \quad (6.115)$$

$$\epsilon_{mp i-1} = \alpha N_{i-1}^\beta = \alpha (N_i - 1)^\beta \quad (6.116)$$

beschrieben. Diese beiden Gleichungen lassen sich zu einer Gleichung zusammenfassen

$$\epsilon_{mp i} = \epsilon_{mp i-1} \frac{\frac{\epsilon_{mp i}}{\alpha}}{\frac{\epsilon_{mp i-1}}{\alpha}} = \epsilon_{mp i-1} \frac{N_i^\beta}{(N_i - 1)^\beta} = \epsilon_{mp i-1} \left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^\beta ; (N_i > 1). \quad (6.117)$$

Nach Einsetzen von Gl. (6.117) in Gl. (6.114) erhält man nun für die Änderung der mikroplastischen Dehnung, ausgehend von der letzten akkumulierten mikroplastischen Dehnung

$$\Delta\epsilon_{mp i} = \left[\left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^\beta - 1 \right] \epsilon_{mp i-1} ; (N_i > 1). \quad (6.118)$$

In Gleichung (6.118) geht die tatsächlich in den Stäben vorliegende Spannung nicht ein, obwohl diese für die mikroplastische Verformung mit verantwortlich ist. Da die Dehnung im elastischen Bereich proportional zur Spannung ist, wird der spannungsabhängige Faktor χ

$$\chi = \frac{\sigma_{LGS}}{R_m} \quad (6.119)$$

eingeführt. In Gl. (6.119) ist σ_{LGS} die diskrete Spannung, die sich aufgrund der externen Last aus dem linearen Gleichungssystem in der Nachlaufrechnung für jeden Stab ergibt, und R_m ist die Zugfestigkeit des Werkstoffs. Mit χ kann die Änderung der mikroplastischen Dehnung

$$\Delta\epsilon_{mp i} = \left[\left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta \chi} - 1 \right] \epsilon_{mp i-1} ; (N_i > 1). \quad (6.120)$$

spannungsabhängig gemacht werden. Gleichung (6.120) wirkt im Werkstoff unabhängig davon, ob die Spannung im linear-elastischen oder plastischen Bereich ist. Wenn z.B. $\chi = 0$, dann ist auch die Änderung der mikroplastischen Dehnung Null und bei $\chi = 1$ ist die mikroplastische Verformung maximal.

Die in Gl. (6.120) beschriebene Änderung der mikroplastischen Dehnung $\Delta\epsilon_{mp i}$ nimmt aufgrund von dynamischen Lasten (bzw. der Zyklenzahl N) stetig ab. Nach Einsetzen

von Gl. (6.120) in Gl. (6.114) erhält man für die akkumulierte mikroplastische Dehnung

$$\epsilon_{mp\ i} = \epsilon_{mp\ i-1} \left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta\chi} ; (N_i > 1). \quad (6.121)$$

Aus Gleichung (6.121) geht hervor, dass die akkumulierte mikroplastische Dehnung stetig zunimmt, wodurch sich in den virtuellen Prüflingen keine Dauerfestigkeit einstellen kann. Eine Dauerfestigkeit stellt sich im Werkstoffmodell nur dann ein, wenn die mikroplastische Dehnung ab der Eckschwingspielzahl N_D abnimmt. Da sich nicht alle Werkstoffe im Bereich der Dauerfestigkeit gleich verhalten, kann keine feste Funktion die alle Werkstoffe mit einbezieht, eingeführt werden.

Damit die Akkumulation der mikroplastischen Dehnung ab der Eckschwingspielzahl N_D abnehmen kann, wird der Faktor ζ in Gl. (6.121) in den Exponenten eingeführt

$$\epsilon_{mp\ i} = \left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta\chi\zeta} \epsilon_{mp\ i-1} ; (N_i > 1). \quad (6.122)$$

Diese Gleichung gilt nur für den Bereich der Dauerfestigkeit. Ist $\zeta = 1$, so nimmt aufgrund der dynamischen Last die Akkumulation der mikroplastischen Dehnung stetig zu und der Werkstoff wird zunehmend mit Mikrorissen angereichert und somit schwächer, wohingegen $\zeta = 0$ bedeutet, dass keine weitere mikroplastische Dehnung mehr eintritt und es zu einer Dauerfestigkeit kommt. Dies kann als eine kinematische Verfestigung im Werkstoffmodell gedeutet werden. D.h. die Konstante ζ oder die Funktion $\zeta(N)$ steht für eine kinematische Verfestigung im Werkstoff, weshalb, falls $\zeta = 0$ ist, keine weiteren mikroplastischen Dehnungen mehr auftreten können.

Während der Simulation lässt sich die Änderung der mikroplastischen Dehnung mit der Fallunterscheidung

$$\Delta\epsilon_{mp\ i} = \begin{cases} \left[\left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta\chi} - 1 \right] \epsilon_{mp\ i-1} & \text{für } 1 < N_i < N_D \\ \left[\left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta\chi\zeta} - 1 \right] \epsilon_{mp\ i-1} & \text{für } N_i \geq N_D \end{cases} \quad (6.123)$$

berechnen. Für für die akkumulierte mikroplastische Dehnung $\epsilon_{mp\ i}$ gilt hingegen

$$\epsilon_{mp\ i} = \begin{cases} \epsilon_{mp\ i-1} \left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta\chi} & \text{für } 1 < N_i < N_D \\ \epsilon_{mp\ i-1} \left(\frac{N_i}{N_i - 1} \right)^{\beta\chi\zeta} & \text{für } N_i \geq N_D \end{cases} \quad (6.124)$$

Die gesamte Dehnung, die sich aus der Last und der akkumulierten mikroplastischen Dehnung $\epsilon_{mp\ i}$ ergibt, setzt sich aus

$$\epsilon_{\text{ges}}(F, N) = \epsilon_{\text{LGS}}(F) + \epsilon_{mp\ i}(N) \quad (6.125)$$

zusammen, worin ϵ_{LGS} die Dehnung aus der aktuell anliegenden Last ist, welche sich nach dem Lösen des linearen Gleichungssystems aus der Nachlaufrechnung ergibt. Aus dieser Gesamtdehnung ϵ_{ges} wird eine Gesamtspannung berechnet, die als Kriterium dafür dient, ob der Werkstoff (bzw. der Stab) an der diskreten Stelle im linear-elastischen Bereich oder im plastischen Bereich ist oder gar versagt hat.

Das vorgestellte erweiterte Werkstoffmodell reichert den Werkstoff bei zunehmender Zyklenzahl N exponentiell mit Mikrorissen an. Die Akkumulation erfolgt für jeden Stab bzw. diskreten Bereich im Werkstoff individuell, da alle Materialparameter WEIBULLverteilt werden. Die Anreicherung der diskreten Stäbe tritt so lange auf, bis der diskrete Bereich des Werkstoffs gesättigt ist, und es infolge dessen zum lokalen Versagen des einen Stabes kommt. Nachdem mehrere Stäbe versagt haben tritt im Folgenden eine zunehmende Schwächung der virtuellen Probe ein, die dann zum globalen Versagen führt.

Aus der Arbeit von WITTEL ist bekannt, dass der geometrische Unordnungsparameter a und der physikalische Unordnungsparameter m in Verbindung mit dem Feinheitsgrad der Diskretisierung einen Einfluss auf die statische Festigkeit und den Rissverlauf haben [240]. Der Einfluss der Parameter a und m auf die Lebensdauer wurde in der Arbeit von BOURIGA genauer untersucht [37]. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Festigkeit mit zunehmender geometrischer und physikalischer Unordnung abnimmt. Aufgrund dieser Ergebnisse wurde ein Korrekturfaktor c eingeführt, der die Festigkeitswerte der Stäbe in der DE-Simulation korrigiert, so dass sich unabhängig vom Grad der Unordnung im Mittel die theoretische Festigkeit des Werkstoffs ergibt, also

$$R_{m\ DEM} = c R_{m\ \text{Werkstoff}} \quad \text{und} \quad R_{p\ 0,2\ DEM} = c R_{p\ 0,2\ \text{Werkstoff}} . \quad (6.126)$$

Sind die Unordnungsparameter a und m Null, so ist $c = 1$. Dies gilt unabhängig vom Feinheitsgrad der Diskretisierung.

Simulation im Bereich $N_i < N_D$:

Die Simulation beginnt mit dem Festlegen der gängigen Werkstoffparameter. Ebenso muss der Ermüdungsexponent β und die mikroplastische Vorschädigung α festgelegt werden. Für den ersten Schwingzyklus entspricht die akkumulierte mikroplastische Dehnung der mikroplastischen Vorschädigung α

$$\epsilon_{mp\ 1} = \alpha .$$

Im zweiten Zyklus ergibt sich die akkumulierte mikroplastische Dehnung mit Gl. (6.124) zu

$$\epsilon_{mp2} = \epsilon_{mp1} \left(\frac{2}{2-1} \right)^{\beta\chi}$$

und im Weiteren gilt

$$\epsilon_{mp3} = \epsilon_{mp2} \left(\frac{3}{3-1} \right)^{\beta\chi}$$

$$\epsilon_{mp4} = \epsilon_{mp3} \left(\frac{4}{4-1} \right)^{\beta\chi}$$

⋮

Die spezifischen Daten und Konstanten für den exemplarischen virtuellen Lebensdauer-versuch sind in Tab. 6.1 aufgeführt, und die werkstoffspezifischen Werte in Tab. 6.2. Alle werkstoffspezifischen Werte werden mit der in Tab. 6.1 angegebenen physikalischen Unordnung m WEIBULLverteilt. Für diese werkstoffspezifischen Werte können prinzipiell unterschiedliche WEIBULLverteilungen angenommen werden, was der Einfachheit halber hier nicht gemacht wurde.

physikalische Bedeutung	Zeichen	Wert
Anzahl der RVEs in x - und y -Richtung	-	12×4
Geometrische Unordnung	a	0, 4
Physikalische Unordnung	m	6
Korrekturfaktor für die Unordnung	c	1, 6434
Einheitslänge des Stabelements ohne Variation	l_e	1 [mm]
Dicke der Scheibe	d	1 [mm]
Stabquerschnitt	$A = \frac{\sqrt{3}}{2} l d$	0.866 [mm ²]
Elastizitätsmodul des Werkstoffs	E	72000 [$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$]
Eckschwingspielzahl	N_D	10^5

Tabelle 6.1: Spezifische Werte für die WÖHLER-Simulation.

Als Last wird eine sich ändernde Kraft vom Typ

$$F(m) = F_A \sin \left(m \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.127)$$

physikalische Bedeutung	Zeichen	Wert
Streckgrenze des Werkstoffs	$R_{p0,2}$	470 $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
Zugfestigkeit des Werkstoffs	R_m	530 $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
Materialkonstante für das Potenzgesetz	C	828 $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
Exponent für das Potenzgesetz	n	0,11
Mikroplastische Vorschädigung	α	10^{-4}
Ermüdungsexponent	β	0,6

Tabelle 6.2: Spezifische Werkstoffkennwerte für die WÖHLER-Simulation. Alle diese Werte werden mit der in Tab. 6.1 angegebenen physikalischen Unordnung m WEIBULL-variiert.

verwendet, wobei F_A die Amplitude der Kraft ist, die für jeden Lebensdauerversuch konstant bleibt. Aus der Kraftamplitude F_A wird die Amplitude der Spannung σ_A der Scheibe berechnet. Die Werte der Kraftamplitude F_A werden aus den Spannungen σ_A des virtuellen Prüflings zurückgerechnet, wobei für die Spannungen praxisnahe Werte gewählt wurden, die zwischen $100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und $600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ liegen. Eine Schwingung bzw. ein Zyklus beinhaltet vier numerische Simulationen. Da in der Simulation keine Trägheitseffekte berücksichtigt werden sollen (d.h. die Prüffrequenz ist kleiner als ca. 2 – 5% der Eigenfrequenz, siehe Abschnitt 2.2.2), findet die Prüffrequenz in Gl. (6.127) keine Berücksichtigung.

Simulation im Bereich $N_i \geq N_D$:

Alle Materialparameter bleiben für den Bereich der Dauerfestigkeit unverändert. Für das exemplarische Beispiel wird für die kinematische Verfestigung die Funktion

$$\zeta = \zeta(N) = \frac{N_D}{N} \quad (6.128)$$

neu eingeführt. Die akkumulierte mikroplastische Dehnung für den Zyklus mit der Nummer N_D ist

$$\epsilon_{mp N_D} = \epsilon_{mp N_D-1} \left(\frac{N_D}{N_D - 1} \right)^{\beta} \chi \frac{N_D}{N_D}$$

und für die folgenden Zyklen gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_{mp N_{D+1}} &= \epsilon_{mp N_D} \left(\frac{N_D + 1}{N_D} \right)^{\beta} \chi \frac{N_D}{N_D + 1} \\ \epsilon_{mp N_{D+2}} &= \epsilon_{mp N_{D+1}} \left(\frac{N_D + 2}{N_D + 1} \right)^{\beta} \chi \frac{N_D}{N_D + 2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diskussion der Ergebnisse:

Das Resultat der numerischen Simulation für verschiedene Lastniveaus und mit den oben eingeführten Funktionen und Werkstoffparametern ist in Abb. 6.27 dargestellt. Werden die Durchschnittswerte der einzelnen Lastniveaus verbunden, ergibt sich eine WÖHLER-Kurve. Wie oben beschrieben, sind alle Werte der Tabelle 6.2 mit dem gleichen Parameter m WEIBULLverteilt. Werden nicht alle diese Werte WEIBULLverteilt, oder ist der Wert der WEIBULLverteilung m geringer, so nimmt die Varianz der Lebensdauerwerte ab.

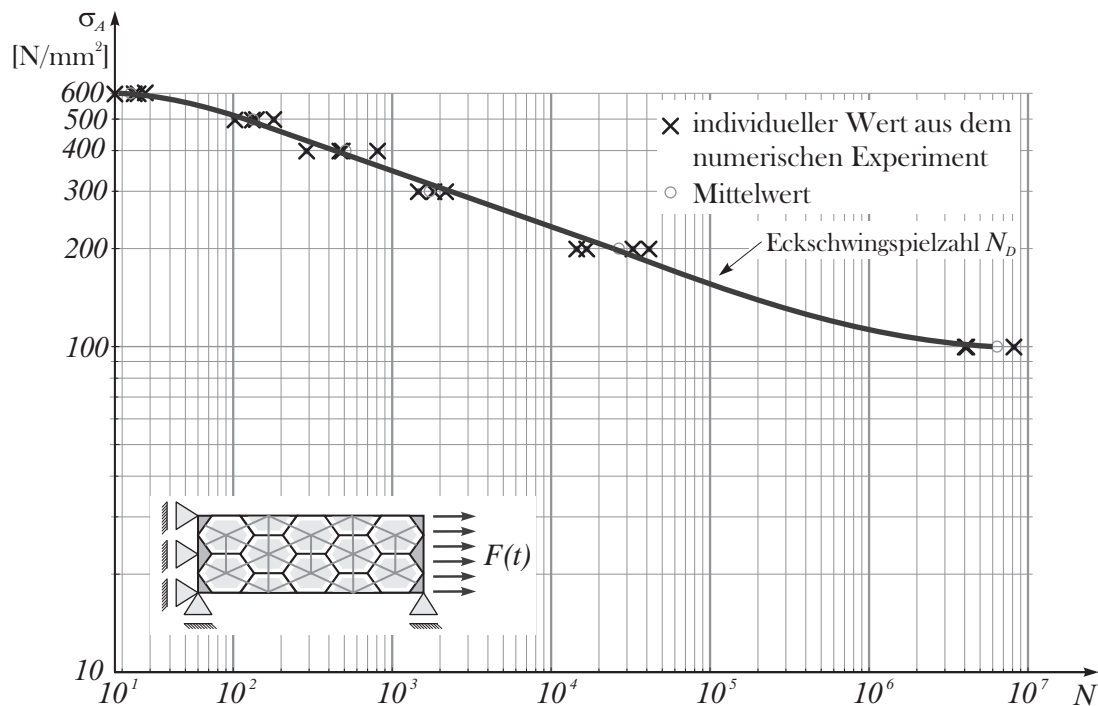


Abbildung 6.27: Ergebnis der WÖHLER-Simulation mittels der Daten aus den Tabellen 6.1 und 6.2.

Im Verlauf der einzelnen Simulationen zeigte sich, dass stets plastische Verformungen in der virtuellen Probe entstehen, die statistisch verteilt sind. Diese haben anfangs

noch keine Auswirkungen auf das weitere Verhalten. Die Probe baut aber durch die diskreten Plastifizierungen Lastspitzen im Material ab und es entstehen Lastumlagerungen bzw. neue Lastpfade, wodurch die virtuelle Probe wieder gleichförmiger belastet ist. Gegen Ende der Lebensdauersimulation entstehen weitere plastische Verformungen, aus denen Risse entstehen. Diese neuen diskreten plastischen Verformungen entstammen den individuellen mikroplastischen Dehnungen. Die mikroplastische Dehnung ist für jeden diskreten Bereich, der durch einen Stab repräsentiert wird, individuell, da die maximale Festigkeit der Stäbe WEIBULLverteilt ist. Im Laufe der Simulation nehmen die diskreten plastischen Verformungen und Risse exponentiell zu, wodurch es im Folgenden schnell zum Versagen der Probe kommt. Das prinzipielle Versagensbild sieht dem in Abb. 6.26 ähnlich.

Weitergehende Untersuchungen der numerischen Versuche mit andern Werten für α und β zeigen, dass β in der Regel zwischen 0,5 und 0,8 liegt und α in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-5} . Die beiden Parameter α und β sind werkstoffspezifisch und können aus den Labordaten zurückgerechnet werden [37]

Mit dem Wert der mikroplastischen Vorschädigung α wird die WÖHLER-Kurve horizontal verschoben. Hohe Werte für α bedeuten eine Verschiebung nach links. Der Ermüdungsexponent β hat einen Einfluss auf die Steigung der BASQUIN-Geraden, siehe Abschnitt 2.2.2. Bei hohen Werten für β ermüdet die virtuelle Probe schneller, siehe Abb. 6.28. Da die beiden Parameter α und β unabhängig voneinander sind, können die individuellen Werte beider Parameter bei gegebenem Diskrete-Elemente-Gitter bzw. dem Feinheitsgrad der Diskretisierung nach mehreren Simulationen und durch lineare Interpolation oder Extrapolation für den gegebenen Werkstoff gefunden werden, siehe hierzu auch [37, 108].

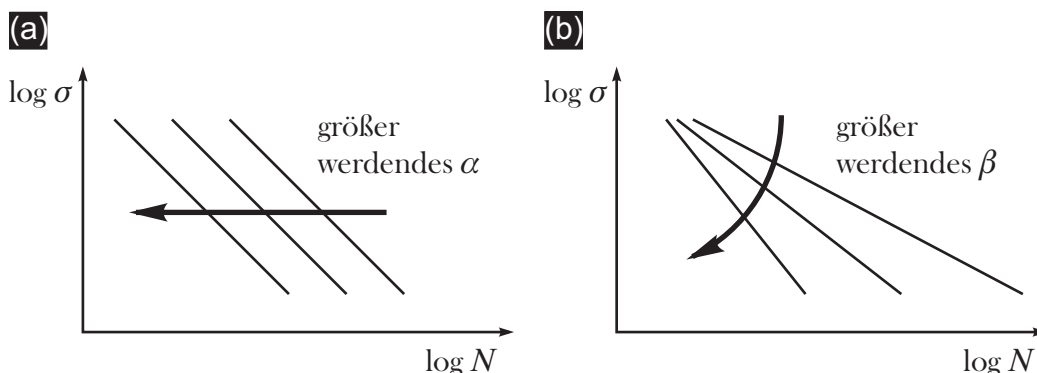


Abbildung 6.28: (a) Bei größer werdendem α verschiebt sich die WÖHLER-Kurve nach links. (b) Mit zunehmendem β wird die WÖHLER-Kurve steiler.

Das in diesem Abschnitt eingeführte Werkstoffmodell zur Beschreibung der mikroplas-

tischen Deformation liefert hinsichtlich der Lebensdauer gute Ergebnisse. Die vorgestellten Ergebnisse wurden aus einachsigen Simulationen gewonnen. Erste zweiachsige Simulationen wurden bereits von BOURIGA durchgeführt, jedoch müssen noch weitere Untersuchungen folgen, um die Modelle zu verfeinern, siehe [37].

7 Behandlung des thermischen Feldes mit der Diskrete-Elemente-Methode

In diesem Kapitel wird die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) ausschließlich im thermischen Feld angewendet. Zunächst erfolgt die Validierung der Methode anhand eines Grenzübergangs mit der Finiten-Differenzen-Methode. Anschließend wird die DEM anhand von Beispielen verifiziert.

Wie im mechanischen Feld gilt auch im thermischen Feld, dass die Ausarbeitung von analytischen Lösungen schwierig und aufwendig ist. Für die meisten allgemein zu Grunde liegenden Probleme ist das Finden der analytischen Lösung sogar unmöglich [46]. Aufgrund dessen sind numerische Lösungsmethoden unverzichtbar. Diese sind für das thermische Feld die Finite-Differenzen-Methode (FDM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM). Die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) wurde bisher noch nicht auf thermische Feldprobleme übertragen. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die DEM sehr wohl im thermischen Feld angewandt werden kann. Vergleiche mit der FEM zeigen sogar, dass die DEM im thermischen wie auch im mechanischen Feld zu vergleichbaren und oft auch zu besseren Ergebnissen fähig ist. Gründe hierfür sind im Abschnitt 5.1 aufgeführt.

7.1 Analytische Beschreibung des thermischen Feldes

Die Entwicklung der analytischen Lösungen für das mechanische und thermische Feld erfolgte parallel in der *École Polytechnique* in Paris. Während NAVIER 1824 und CAUCHY 1827 und 1829 die mechanischen Spannungen in Festkörpern detailliert beschrieben haben, arbeitete FOURIER 1821 an der Beschreibung des Wärmeflusses in Festkörpern [91, 92]. Sowohl FOURIER als auch CAUCHY wurden von der Arbeit EULERS aus der Hydromechanik inspiriert. Aufgrund dessen formulierte CAUCHY den nach ihm benannten Spannungstensor σ und FOURIER den Wärmeflussvektor q .

Dass zwei verschiedene physikalische Vorgänge ähnlich beschrieben werden können brachte v. HELMHOLTZ 1847 auf die Idee, dass der Kraftfluss und der Wärmefluss äquivalent zueinander sein müssen, weshalb CLAPEYRONS Prinzip der kleinsten Arbeit aus dem mechanischen Feld auch für Wärmeflüsse gelten muss [224]. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass tatsächlich eine Ähnlichkeit zwischen dem mechanischen und dem thermischen Feld besteht, und zwar wird der Wärmefluss vom thermischen Feld durch eine

Wärmeflussfläche dargestellt, ähnlich wie der Kraftfluss durch die AIRYSche Spannungsfläche im mechanischen Feld.

Der irreversible Prozess der Wärmeleitung wurde von FOURIER 1808 formuliert [170, 224] und lautet in der heutigen Schreibweise

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \operatorname{grad} T) + q_{\text{int}} = \rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7.1)$$

wobei ρ_m die Dichte des Werkstoffs, c_p die spezifische Wärmekapazität, T die Temperatur, t die Zeit, $\boldsymbol{\lambda}$ den Wärmeleitensor und q_{int} die inneren Quellen bzw. die produzierte Menge an Wärme pro Zeiteinheit und Einheitsvolumen darstellen [9, 46]. Wird die Wärmeleitfähigkeit einer flachen und dünnen Scheibe mit orthotropen Wärmeleiteigenschaften betrachtet, so erhält man

$$\lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q_{\text{int}} = \rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7.2)$$

mit den konstanten Wärmeleitwerten λ_{ii} in $i = x, y$ -Richtung. Die Gleichungen (7.2) und (7.1) werden als Wärmeleitgesetz bezeichnet.

Der Wärmeübergang am Rand wird mit dem FOURIERGesetz

$$q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = -\lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = h_c (T - T_0) \quad (7.3)$$

beschrieben, wobei \mathbf{n} der nach außen gerichteten Normalenvektor, \mathbf{q} der Wärmeflussvektor, q_n der Wärmefluss entlang des Normalenvektors, λ_n der Wärmeleitwert in Richtung des Normalenvektors, $\partial T / \partial n$ die Änderung der Temperatur entlang \mathbf{n} , h_c der Wärmeübergangskoeffizienten der thermischen Konvektion an der Aussenwand und T_0 die Temperatur des Gases oder des Fluids das die Aussenwand umströmt, ist [9, 46]. Das FOURIERGesetz für den Wärmefluss im Körper wird durch

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \operatorname{grad} T \quad (7.4)$$

zusammengefasst.

Es wird oftmals angenommen, dass Werkstoffe isotrope Wärmeleiteigenschaften haben. Auf der mikroskopischen Skala haben die Werkstoffe jedoch statistisch verteilte Wärmeleiteigenschaften, die sich nach der Ausrichtung der kristallinen Struktur richten. Auf der makroskopischen Skala verschmieren die mikroskopischen Werte zu einem Mittelwert und geben die Laborwerte eines polykristallinen Werkstoffs wieder. Bei einem einkristallinen Werkstoff richten sich die physikalischen Eigenschaften nach der Ausrichtung des Kristalls welches die Vorzugsrichtungen bildet. Thermische Untersuchungen an einkristallinen Werkstoffen wurden bereits 1848 von DE SÉNARMONT durchgeführt [210]. Bei der Methode nach DE SÉNARMONT wird die Oberfläche gleichmäßig

mit Wachs bestrichen. Auf die Oberfläche wird punktuell Wärme eingeleitet und die Kurve des schmelzenden Wachses gibt die Isotherme wieder. Anhand der Ausrichtung der Isothermen konnte DE SÉNARMONT die Hauptachsen der kristallinen Struktur bestimmen. Da die Kristalle im Aufbau symmetrisch sind, ergeben sich für das mechanische und thermische Feld dieselben orthotropen Eigenschaften. Neben den einkristallinen Werkstoffen haben Faserverbundwerkstoffe ebenfalls orthotrope mechanische und thermische Eigenschaften.

7.2 Grenzübergang im thermischen Feld mit der Finiten-Differenzen-Methode

Im folgenden Abschnitt wird der Nachweis erbracht, dass eine approximierte Wärmeflussfläche \bar{q} , gebildet aus einer hexagonalen Fachwerksstruktur bei einem Grenzübergang in die exakte Wärmeflussfläche q übergeht. Der Grenzübergang erfolgt mit der Finiten-Differenzen-Methode anhand des Hexagons.

Zunächst wird ein frei gewähltes 2D-Gebiet Ω von finiter Größe mit stückweise geraden Rändern, ohne Quellen und Senken, betrachtet, siehe Abb. 7.1 (a). Außerdem wird angenommen, dass der approximierte Wärmefluss \bar{q} ein stetig differenzierbares Vektorfeld ist. Für dieses Vektorfeld gilt in dem Gebiet

$$\int_V \operatorname{div} \bar{q} dV = 0, \quad (7.5)$$

wobei $V = A_d \cdot d$ das Volumen des Gebietes darstellt, mit d der Dicke der Scheibe und A_d deren Oberfläche in Dickenrichtung. Die Ober- und Unterseite der Scheibe sind adiabatisch, d.h. in z -Richtung finden keine Wärmeflüsse statt. Mit Hilfe des GAUSSSchen Integralsatzes kann Gl. (7.5) umgeschrieben werden in

$$\int_V \operatorname{div} \bar{q} dV = \int_A \bar{q} \cdot \mathbf{n} dA = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \cdot \mathbf{n}_i A_i = 0, \quad (7.6)$$

worin \mathbf{n}_i die Normalenvektoren auf den stückweise geraden Seitenflächen A_i sind und \bar{q}_i die lokalen Wärmeflüsse durch diese Flächen, siehe Abb. 7.1 (a). Gleichung (7.6) beschreibt das Gleichgewicht des Wärmeflusses in einer konservativen Integralform.

Wird als finites Gebiet die spezielle Form eines Hexagons gewählt, siehe Abb. 7.1 (b), so wird Gl. (7.6) mit $A_i = A_{hex} = \textit{konstant}$ zu

$$A_{hex} \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0, \quad (7.7)$$

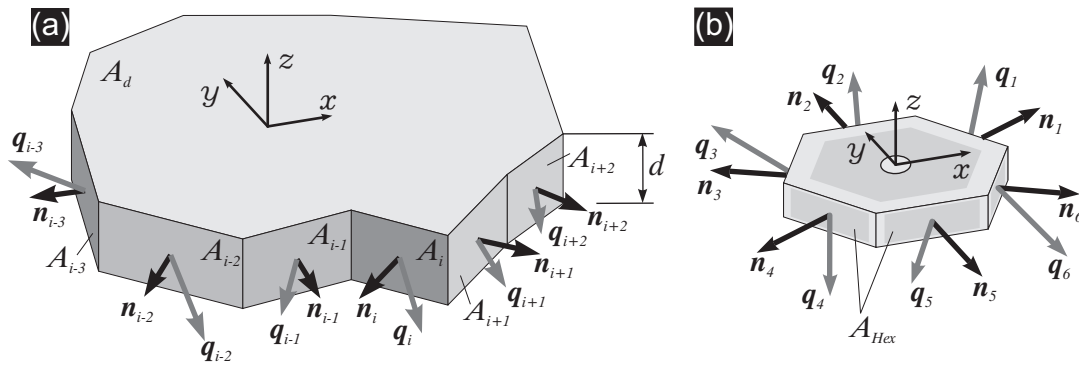


Abbildung 7.1: (a) Freigewähltes 2D-Gebiet von finiter Größe und den stückweise geraden Rändern A_i , den nach aussen gerichteten Normalenvektoren \mathbf{n}_i und den lokalen Wärmeflüssen \bar{q}_i . Die Ober- und Unterseite der Scheibe A_d ist adiabatisch. (b) Finites Gebiet mit der speziellen Form eines Hexagons.

wobei $A_{hex} = \frac{1}{\sqrt{3}} l d$ die Größe der Außenfläche eines regelmäßig geformten Hexagons darstellt und anhand der Geometrie des Hexagons bestimmt wird, siehe hierzu auch Gl. (6.73) im Abschnitt 6.5.1.

Um den Beweis für die Richtigkeit der Methode herbeizuführen, wird nun der skalare Wert des Wärmeflusses \bar{q} über der Scheibe in Äquivalenz zum mechanischen Feld als z_q -Wert dargestellt, siehe Abb. 7.2 (a). Die Konstruktion der approximierten Wärmeflussfläche muss lückenlos sein, solange keine Quellen oder Senken berücksichtigt werden. Der approximierte Wärmefluss für einen diskreten Knotenpunkt k ist

$$z_{qk}(x, y) = A_{Hex} \sum_{j=2}^7 \bar{q}_{1 \rightarrow j} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow j} = -A_{Hex} \sum_{j=2}^7 \lambda_{1 \rightarrow j} \cdot \text{grad } T(x, y)_{1 \rightarrow j} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow j}, \quad (7.8)$$

wobei sechs Elemente mit dem Zähler j das Element 1 umgeben, siehe Abb. 7.2 (b). Außerdem sollen alle Elemente der Einfachheit halber unverzerrt sein und die gleichen physikalischen Parameter haben. Für das diskrete Element mit der Bezeichnung 1 ergibt sich die Flussbilanz

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^7 \bar{q}_{1 \rightarrow i} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow i} &= \bar{q}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} + \bar{q}_{1 \rightarrow 3} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 3} + \bar{q}_{1 \rightarrow 4} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 4} + \bar{q}_{1 \rightarrow 5} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 5} \\ &\quad + \bar{q}_{1 \rightarrow 6} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 6} + \bar{q}_{1 \rightarrow 7} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 7} \\ &= \bar{q}_{1 \rightarrow 2} + \bar{q}_{1 \rightarrow 3} + \bar{q}_{1 \rightarrow 4} + \bar{q}_{1 \rightarrow 5} + \bar{q}_{1 \rightarrow 6} + \bar{q}_{1 \rightarrow 7} = 0, \quad (7.9) \end{aligned}$$

mit $\bar{q}_{1 \rightarrow i} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow i} = \bar{q}_{1 \rightarrow i} = -\bar{q}_{i \rightarrow 1}$.

Im Abschnitt 5.2 wurde dargelegt, dass die DEM die Flussgröße über Stäbe transportiert und nicht über die Ränder der hexagonalen Elemente, wobei beide Ansichtsweisen äqui-

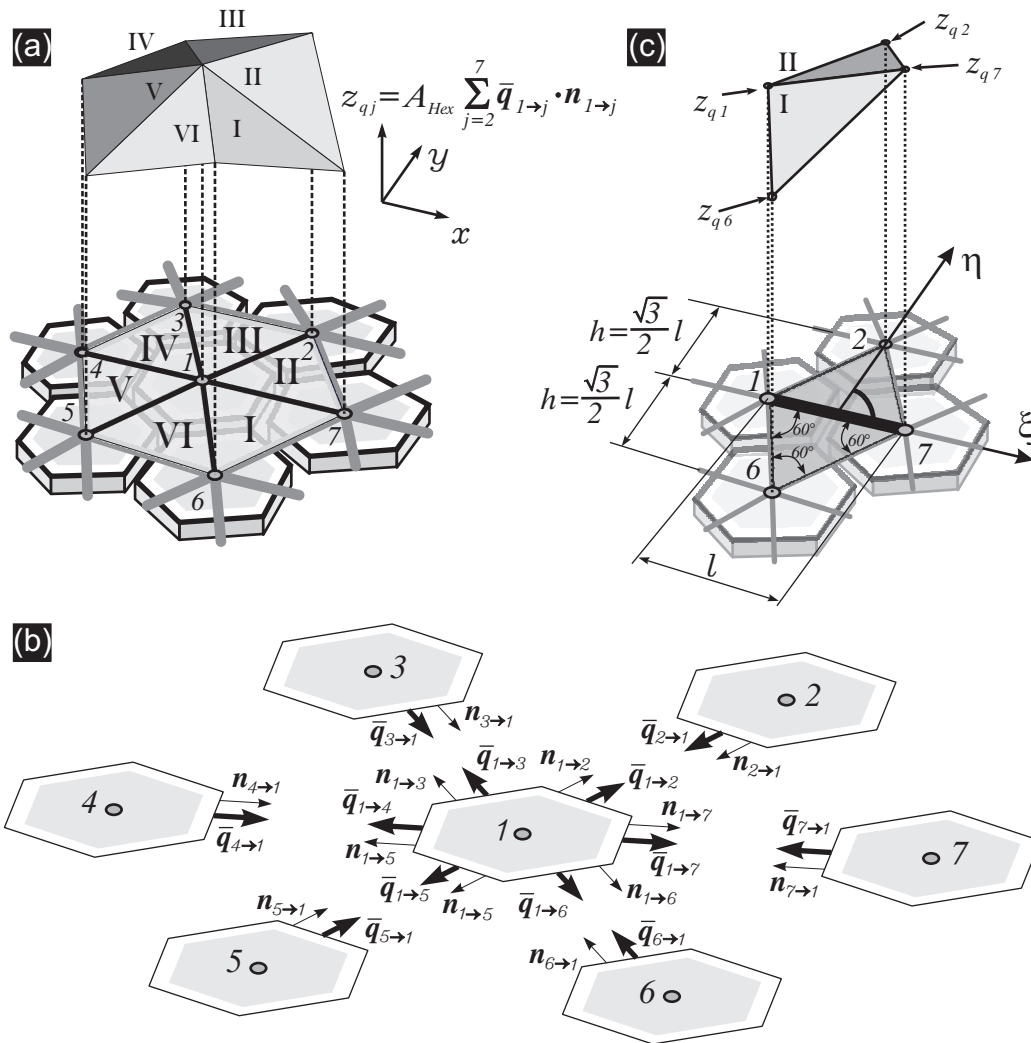


Abbildung 7.2: (a) Die approximierte Wärmeflussfläche $z_q(x, y)$ wird über der Scheibe als Fläche dargestellt. (b) Darstellung der einzelnen Wärmeflüsse in das Element eins $\bar{q}_{j \rightarrow 1}$ und aus dem Element eins $\bar{q}_{1 \rightarrow j}$. (c) Der Wärmefluss entlang eines Stabes kann aus den z_q -Werten der approximierte Wärmeflussfläche berechnet werden.

valent sind wie im Folgenden gezeigt wird. Der Wärmefluss entlang eines Stabes kann aus den z_q -Werten der approximierte Wärmeflussfläche berechnet werden.

Jeder Stab hat sein eigenes lokales ξ, η -Koordinatensystem, woraus sich mit der Geometrie ergibt, dass der Normalenvektor des diskreten Elementes $n_{1 \rightarrow 2}$ parallel zur ξ -Achse ist. Der Fluss entlang eines Stabes mit den Knotenpunkten 1 und 7 ist in Anlehnung an die Gleichungen (7.8) und (7.9)

$$\bar{q}_{1 \rightarrow 7} \cdot n_{1 \rightarrow 7} = \bar{q}_{1 \rightarrow 7} = \bar{q}_\xi = \frac{1}{A_{Hex}} (z_{q1} - z_{q7}). \quad (7.10)$$

Da der Stab per Definition keinen Wärmefluss quer zu seiner Längsachse übertragen

kann, ist $\bar{q}_\eta = 0$. Der Wärmefluss der anderen fünf Stäbe in deren lokalem ξ, η -Koordinatensystem ist gemäß Abb. 7.2 (b)

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{A_{Hex}} (z_{q1} - z_{q2}), & \bar{q}_{1 \rightarrow 3} &= \frac{1}{A_{Hex}} (z_{q1} - z_{q3}) \\ \bar{q}_{1 \rightarrow 4} &= \frac{1}{A_{Hex}} (z_{q1} - z_{q4}), & \bar{q}_{1 \rightarrow 5} &= \frac{1}{A_{Hex}} (z_{q1} - z_{q5}) \\ \text{und } \bar{q}_{1 \rightarrow 6} &= \frac{1}{A_{Hex}} (z_{q1} - z_{q6}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Für den Gleichgewichtsfall des diskreten Elementes mit der Nummer eins folgt nun mit den Gleichungen in (7.9) und (7.11)

$$\sum_{i=2}^7 \bar{q}_{1 \rightarrow i} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow i} = 0 = \frac{1}{A_{Hex}} (6 z_{q1} - z_{q2} - z_{q3} - z_{q4} - z_{q5} - z_{q6} - z_{q7}). \quad (7.12)$$

Die Darstellung des Wärmegleichgewichts in Gl. (7.12) ergibt den Finite-Differenzen-Stern einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in kartesischen Koordinaten, siehe Abb. 7.3. Nach Grenzübergang der Stablänge l gegen Null geht die grafische Darstellung des Finite-Differenzen-Sternes der approximierten Wärmeleitfläche \bar{q}_m in die analytisch exakte Differentialgleichung der Wärmeleitungsgleichung über, für den stationären Gleichgewichtszustand und unter Vernachlässigung der Quell- und Senkterme [60]. Somit ist der Beweis erbracht, dass mittels der DEM - unter Verwendung von hexagonalen diskreten Elementen - Wärmeflüsse berechnet werden können.

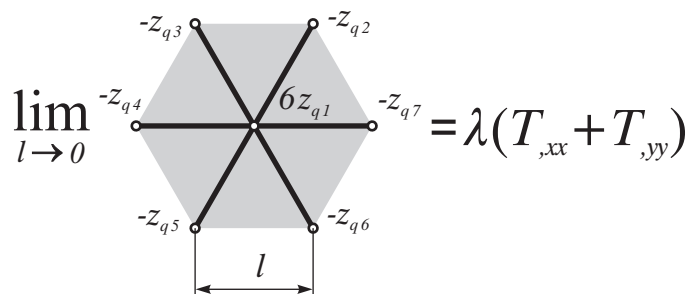


Abbildung 7.3: Grafische Darstellung der Gl. (7.12). Nach Grenzübergang der Stablänge l gegen Null geht der Finite-Differenzen-Stern in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung über, mit welcher die Wärmeleitung beschrieben werden kann.

Der oben gezeigte Beweis stützt sich auf hexagonale Zellen. Quadratische Zellen vermögen den Wärmetransport prinzipiell auch darzustellen, was aber nicht in dieser Arbeit gezeigt wird, siehe hierzu [107]. Für das thermische Feld gilt, in Analogie zum mechanischen Feld, dass mit viereckigen Zellen keine geschlossene Wärmeleitfläche rekonstruiert werden kann, weshalb viereckige Zellen nur verwendet werden können, wenn die

Wärmeflussrichtung im Feld konstant bleibt. Hexagonale Zellen können in Analogie zum mechanischen Feld stets verwendet werden, siehe hierzu auch Abb. 6.8.

7.3 Schwache Form des thermischen Feldes

Die Diskretisierung des thermischen Feldes wird nach dem PETROV-GALERKIN Verfahren durchgeführt, da im Gegensatz zum mechanischen Feld kein Potential (zumindest für den transienten Fall) und kein virtueller Arbeitssatz definiert sind. Nach dem BUBNOV-GALERKIN-Verfahren erhält man aus Gl. (7.1)

$$\delta \Pi_{\text{therm}} = 0 = \int_t \int_x \int_y \int_z (-\text{div}(-\lambda \text{grad}T) + \dot{q}_{\text{int}} - \rho_m c_p T_{,t}) \delta T(x, y, z, t) dz dy dx dt. \quad (7.13)$$

Hierin ist $\delta T(x, y, z, t)$ die Testfunktion oder die (virtuelle) Wichtung, ρ_m ist die Dichte des Körpers und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck. Wird ein stationäres Gleichgewicht vorausgesetzt, so erhält man

$$\delta \Pi_{\text{therm}} = 0 = \int_x \int_y \int_z (-\text{div}(-\lambda \text{grad}T) + \dot{q}_{\text{int}}) \delta T(x, y, z) dz dy dx. \quad (7.14)$$

Mit dem Divergenzsatz und dem Integralsatz folgt

$$\delta \Pi_{\text{therm}} = 0 = \int_x \int_y \int_z (\text{grad}\delta T \lambda \text{grad}T + \dot{q}_{\text{int}} \delta T) dz dy dx - \int_{\Gamma} h_c (T_0 - T) \delta T d\Gamma. \quad (7.15)$$

Hierbei ist Γ die Oberfläche des thermischen Gebietes. Wenn man berücksichtigt, dass die Stäbe den Wärmefluss \mathbf{q} lediglich in Stablängsrichtung transportieren, wird Gl. (7.15) zu

$$\delta \Pi_{\text{therm}} = 0 = \int_{\xi=0}^{\xi=l_e} (\lambda_{\xi\xi e} A_e T_{,\xi} \delta T_{,\xi} + \dot{q}_{\text{int}} \delta T) d\xi - \int_{\Gamma_A} h_c (T_0 - T) \delta T d\Gamma_A. \quad (7.16)$$

Darin ist $\lambda_{\xi\xi e}$ die Wärmeleitfähigkeit eines Elementes, bzw. Stabes, A_e der Stabquerschnitt (siehe hierzu Abschnitt 7.4.1) und Γ_A die Oberfläche des Stabes an der Konvektion statt findet. Die ξ -Richtung ist die Längsrichtung des Stabes im stablokalen $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$ Koordinatensystem, siehe Abb. 7.4.

Im Stab ist der Wärmefluss \mathbf{q} konstant, was im Stab zu einer linearen Temperaturverteilung führt. Der lineare Temperaturverlauf kann, wie im mechanischen Feld, mit der

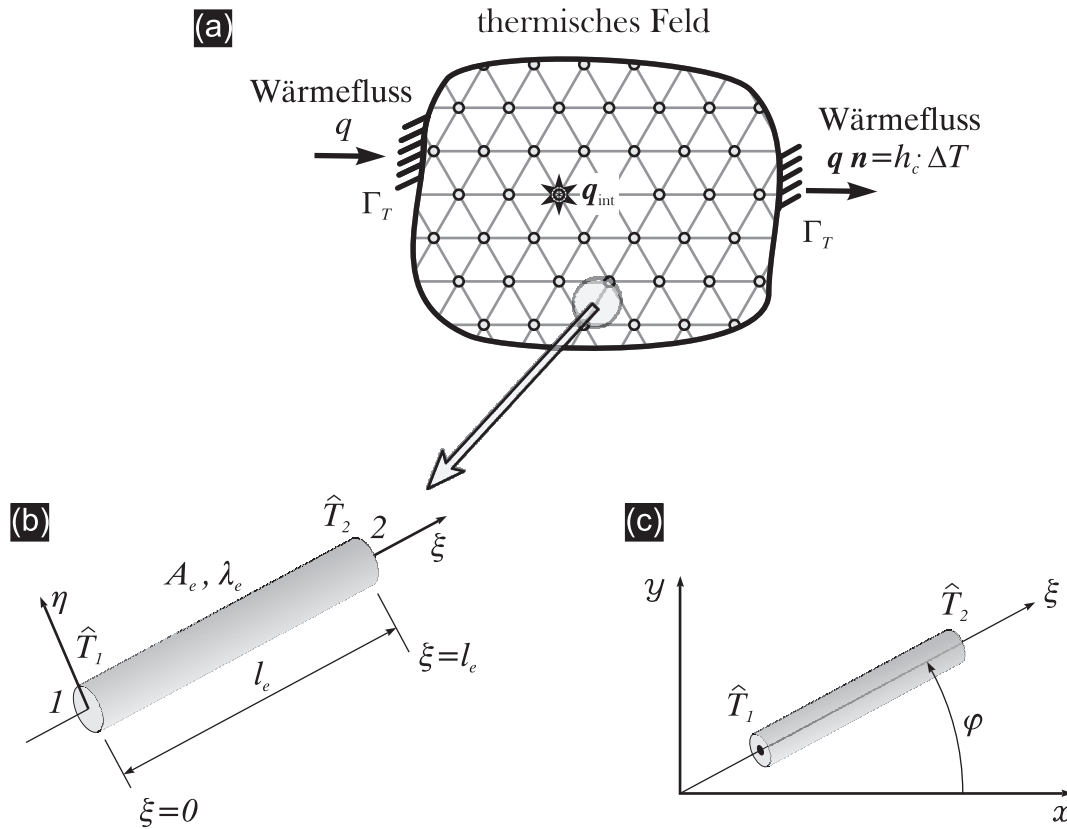


Abbildung 7.4: (a) Das Gebiet mit den Wärmeflüssen q und der Wärmequelle q_{int} , wird in der DEM mit Stäben diskretisiert. (b) Jeder Stab hat ein eigenes lokales ξ, η -Koordinatensystem, eigene Werkstoffparameter A_e, λ_e, l_e und die Knotenpunkttemperaturen T_1 und T_2 , die invariant gegenüber Rotation sind. (c) Das stablokale Koordinatensystem ist gegenüber dem globalen Koordinatensystem um den Winkel φ gedreht.

gleichen Ansatzfunktion beschrieben werden

$$T(x) = \left[\left(1 - \frac{\xi}{l_e}\right) \quad \frac{\xi}{l_e} \right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_e(\xi) \cdot \hat{\mathbf{T}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \xi \leq l_e, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{N}_e(\xi) = \left[\left(1 - \frac{\xi}{l_e}\right) \quad \frac{\xi}{l_e} \right], \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \delta \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \delta \hat{T}_1 \\ \delta \hat{T}_2 \end{bmatrix}.$$

Hierbei ist $\mathbf{N}_e(\xi)$ der liegende Vektor der Ansatzfunktionen und $\hat{\mathbf{T}}$ der Vektor der Temperaturfreiwerte an den Knotenpunkten 1 und 2, siehe Abb. 7.4. Da der Wärmestrom entlang des Stabes mit der Länge l_e konstant ist, ist die Approximation mit Gl. (7.17) analytisch exakt. Somit gilt für die Temperatur $T_e(\xi) = T_e^{\text{DEM}}(\xi) = \mathbf{N}_e(\xi) \cdot \hat{\mathbf{T}}_e$.

Die Gleichungen (7.16) und (7.17) führen für die Knotenpunkttemperaturen eines Stabes

zu einem Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{\text{therm}} = 0 &= \delta \hat{\mathbf{T}} \left\{ \left(\int_{x=0}^{x=l_e} \mathbf{N}_{e,\xi}^T(\boldsymbol{\xi}) \lambda_e A_e \mathbf{N}_{e,\xi}(\boldsymbol{\xi}) dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_A} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) h_c \Gamma_A \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_A \right) \hat{\mathbf{T}} - \int_{x=0}^{x=l_e} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) q_{\text{int}} A_e dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Gamma_A} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) h_c T_0 d\Gamma_A \right\} \\
&= \delta \hat{\mathbf{T}} \left\{ [\mathbf{K}_{\text{Leit } e}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{K}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi})] \cdot \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}_{q e}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi}) \right\}. \quad (7.18)
\end{aligned}$$

worin sich die Wärmeleitmatrix $\mathbf{K}_{\text{Leit } e}(\boldsymbol{\xi})$, die Wärmeübergangsmatrix $\mathbf{K}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi})$, der Vektor der eingepprägten Wärmequellen $\mathbf{f}_{q e}(\boldsymbol{\xi})$ und der Vektor des konvektiven Wärmeübergangs am Rand $\mathbf{f}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi})$ aus den vier Integralen im stablokalen $(\boldsymbol{\xi})$ -Koordinatensystem zusammensetzen.

Da die Temperatur ein Skalar ist, sind die Gleichungen (7.13) bis (7.18) invariant. Somit gilt für die Matrizen und Vektoren der Gl. (7.18) $\mathbf{K}_{\text{Leit } e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}_{\text{Leit } e}(\mathbf{x})$, $\mathbf{K}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}_{\text{Rand } e}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_{q e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}_{q e}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{f}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}_{\text{Rand } e}(\mathbf{x})$.

Nachdem für alle Stäbe bzw. Elemente e die Matrizen und Vektoren der Gl. (7.18) bekannt sind, erfolgt die Assemblierung über Stäbe \mathcal{R} im globalen Basissystem $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ mit

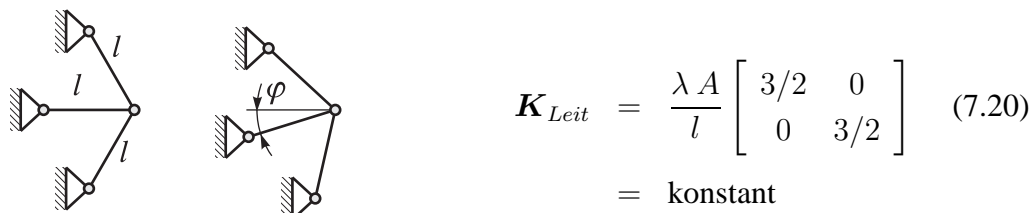
$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\text{Leit}}(\mathbf{x}) &= \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{K}_{\text{Leit } e}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{K}_{\text{Rand}}(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{K}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi}), \quad \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\xi}) \\
\mathbf{f}_q(\mathbf{x}) &= \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{f}_{q e}(\boldsymbol{\xi}), \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\text{Rand}}(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{f}_{\text{Rand } e}(\boldsymbol{\xi}). \quad (7.19)
\end{aligned}$$

Nach Bestimmung der Temperaturfreiwerte können im Nachlauf die Wärmeströme \mathbf{q} eines jeden Stabes e im stablokalen $\boldsymbol{\xi}$ -Koordinatensystem mit Gl. (7.3) bestimmt werden, siehe hierzu auch Abschnitt 7.4.2

7.4 Verifikation des thermischen Diskrete-Elemente-Modells

7.4.1 Materialparameter im thermischen Feld

Mit den in den Abschnitten 5.2 und 7.3 vorgestellten Methoden kann der Wärmefluss im thermischen Feld berechnet werden. Es stellt sich aber in Analogie zum mechanischen Feld heraus, dass die Wärmeleitmatrix \mathbf{K}_{Leit} einer Struktur, gebildet aus drei Stäben mit einer Winkelverteilung von $\frac{\pi}{3}$, 0 und $-\frac{\pi}{3}$, um den Faktor $\frac{3}{2}$ gegenüber dem Wärmeleitvermögen eines Einzelstabes $\frac{\lambda A}{l}$ zu groß ist. Dadurch ist der Wärmefluss um den Faktor $\frac{3}{2}$ zu klein, siehe Abb. 7.5.



$$\mathbf{K}_{Leit} = \frac{\lambda A}{l} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

= konstant

Abbildung 7.5: Die Wärmeleitmatrix \mathbf{K}_{Leit} der drei Stäbe ist invariant gegenüber einer Drehung mit einem Winkel φ und sie ist um den Faktor $3/2$ größer als das Wärmeleitvermögen eines Einzelstabes in seine Längsrichtung.

Auch im thermischen Feld kann die selbe Korrektur wie im mechanischen Feld an der Stabquerschnittsfläche vorgenommen werden. Aus der Geometrie des Hexagons lässt sich mit Gl. (6.73) der Stablänge l und der Scheibendicke d die Seitenfläche zu $A_{Hex} = \frac{1}{\sqrt{3}} l d$ bestimmen. Die Korrektur der Wärmeflussgröße erfolgt, indem die Querschnittsfläche um den Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert wird. Die korrigierte Querschnittsfläche zur Bestimmung der Wärmeflüsse mittels der DEM ist, in Übereinstimmung mit dem mechanischen Feld,

$$A = \frac{3}{2} A_{Hex} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} l d = \frac{\sqrt{3}}{2} l d. \quad (7.21)$$

7.4.2 Wärmeflüsse im allgemeinen Lastfall

Die im mechanischen Feld beobachteten Randeffekte sind im thermischen Feld nicht vorhanden. Somit brauchen die versteifenden Elemente am Rand des mechanischen Feldes nicht für das thermische Feld übernommen werden.

Die Wärmeflüsse der Stäbe fließen an einem Knotenpunkt zusammen. Der Wärmefluss eines Stabes \mathbf{q}_ξ kann mit der Transformationsbeziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx} \\ \mathbf{q}_{yy} \end{bmatrix} = \mathbf{q}_\xi \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

in die orthogonalen Flüsse q_{xx} und q_{yy} , entlang der x und y -Achse zerlegt werden [207].

Um den resultierenden Fluss aller Stäbe in x - und y -Richtung zu ermitteln, kann in Analogie zum Abschnitt 6.5.4 ein Schnitt am Knoten gebildet werden, siehe Abb. 7.6 (b) und (c). Für jede Seite eines Schnitts wird der Wärmefluss in x - und y -Richtung bilanziert

$$q_{xx}^+ = q_1 \cdot \cos(30^\circ) + q_6 \cdot \cos(330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} (q_1 + q_6) \quad (7.23)$$

$$q_{xx}^- = q_3 \cdot \cos(150^\circ) + q_4 \cdot \cos(210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} (q_3 + q_4) \quad (7.24)$$

$$q_{yy}^+ = q_1 \cdot \sin(30^\circ) + q_2 \cdot \sin(90^\circ) + q_3 \cdot \sin(150^\circ) = q_2 + \frac{1}{2} (q_1 + q_3) \quad (7.25)$$

$$q_{yy}^- = q_4 \cdot \sin(210^\circ) + q_5 \cdot \sin(270^\circ) + q_6 \cdot \sin(330^\circ) = -q_5 - \frac{1}{2} (q_4 + q_6) \quad (7.26)$$

Anschließend werden die beiden Flüsse der x -Richtung und ebenso die beiden Flüsse der y -Richtung gemittelt, um die resultierenden Flüsse des diskreten Punktes q_{xx} und q_{yy} zu erhalten, siehe Abb. 7.6 (a)

$$q_{xx} = \frac{1}{2} (q_{xx}^+ + q_{xx}^-) = \frac{\sqrt{3}}{4} (q_1 + q_6 - q_3 - q_4) \quad (7.27)$$

$$q_{yy} = \frac{1}{2} (q_{yy}^+ + q_{yy}^-) = \frac{1}{2} (q_2 - q_5) + \frac{1}{4} (q_1 + q_3 - q_4 - q_6) \quad (7.28)$$

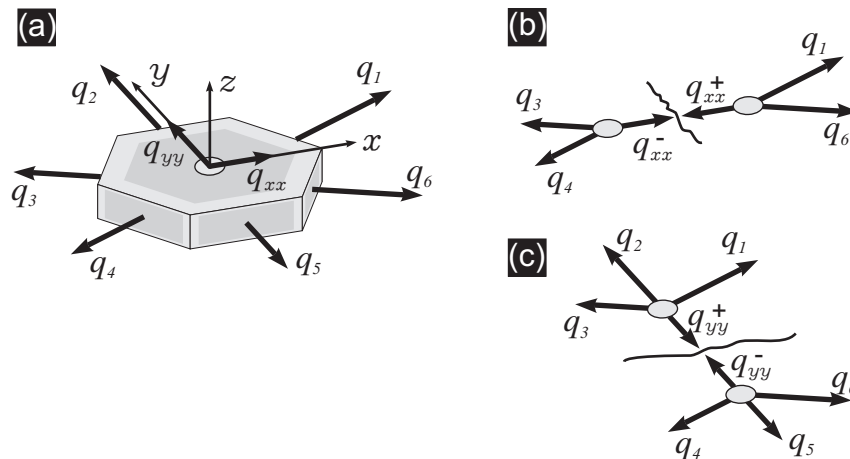


Abbildung 7.6: (a) Die Wärmeflüsse der Stäbe können in die Wärmeflüsse des diskreten Elementes in x -Richtung (b) und y -Richtung (c) transformiert werden.

7.4.3 Exemplarische Rechnung mit homogener Wärmefreisetzung und Konvektion

Analytische Referenzlösung:

Die analytische Lösung für eine Scheibe mit homogener Wärmefreisetzung und Konvektion an deren Kopfenden lautet

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{q_{\text{int}}}{\lambda} (x - L)^2 + \left(\frac{L}{h_c} + \frac{L^2}{2\lambda} \right) q_{\text{int}} + T_0, \quad (7.29)$$

worin L die halbe Länge der Scheibe, T_0 die Umgebungstemperatur, q_{int} die Stärke der Wärmequelle pro Einheitsvolumen, h_c der Wärmeübergangskoeffizient bei Konvektion und λ der Wärmeleitkoeffizient ist [232].

Die analytische Lösung ist in Abb 7.8 dargestellt. Die speziellen Werte für dieses Beispiel können der Tabelle 7.1 entnommen werden. Für das spezielle Beispiel ist die Höhe H bei Verwendung von unverzerrten Zellen $2\sqrt{3}l$.

physikalische Bedeutung	Zeichen	Wert
Länge der Scheibe	$2L$	7 [m]
Breite der Scheibe	H	$2\sqrt{3}$ [m]
Dicke der Scheibe	d	1 [m]
Länge eines Stabes	l	1 [m]
Umgebungstemperatur	T_0	20 [°C]
Wärmeleitkoeffizient	λ	$225 \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$
Wärmeübergangskoeffizient	h_c	$25 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$
Stärke der Wärmequelle	q_{int}	$100 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$
Stabquerschnitt	$A = \frac{\sqrt{3}}{2} l d$	0.866 [m ²]

Tabelle 7.1: Geometrische und physikalische Werte für das Beispiel in Abschnitt 7.4.3.

Numerische Lösung:

Aus Abb. 7.7 geht hervor, wie die für die Konvektion relevanten Flächen bestimmt werden können. Für die Stirnflächen der Scheibe ergeben sich die Werte für das zweite und vierte Integral der Gl. (7.18) zu

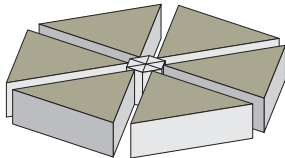
$$A_{k\text{I}} = \frac{1}{2} \frac{l d}{\sqrt{3}}, \quad A_{k\text{II}} = 2 \frac{l d}{\sqrt{3}}, \quad \text{und} \quad A_{k\text{III}} = 1 \frac{l d}{\sqrt{3}}. \quad (7.30)$$

Die homogene Wärmefreisetzung muss auf das Volumen der Hexagone bezogen werden. Da Teile eines Hexagons auch am Rand liegen, wird nun als Referenzvolumen das Volumen eines Dreiecks, gebildet aus einem Sechstel des Hexagons, festgelegt, welches

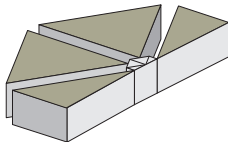


$$V_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \frac{l^2 d}{\sqrt{3}} \quad (7.31)$$

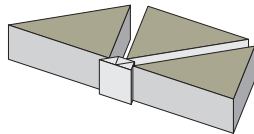
ist. Mit Hilfe dieses Referenzvolumens ergibt sich die produzierte Wärmemenge Q der diskreten Punkte I, II und V zu



$$Q_{\text{int I}} = 6 \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = 6 \cdot q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.32)$$

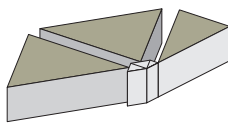


$$Q_{\text{int II}} = \left(2 + 2 \frac{1}{2}\right) \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = 3 \cdot q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.33)$$

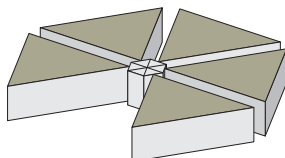


$$Q_{\text{int V}} = 3 \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = 3 \cdot q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.34)$$

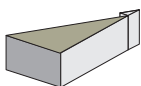
An den Knotenpunkten III, IV, VI und VII greifen Stäbe mit halber Länge an, siehe Abb. 7.7. Für diese Punkte ist die diskrete Wärmemenge



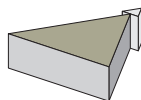
$$Q_{\text{int III}} = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = \frac{5}{2} \cdot q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.35)$$



$$Q_{\text{int IV}} = 5 \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = 5 \cdot q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.36)$$



$$Q_{\text{int VI}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = \frac{1}{2} \cdot q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.37)$$



$$Q_{\text{int VII}} = 1 \cdot V_{\text{ref}} \cdot q_{\text{int}} = q_{\text{int}} \cdot \frac{l^2 d}{4 \sqrt{3}} \quad (7.38)$$

In den Gleichungen (7.35) bis (7.38) wird trotz der halben Stablänge die für die anderen Stellen auch übliche Einheitsstablänge l eingesetzt.

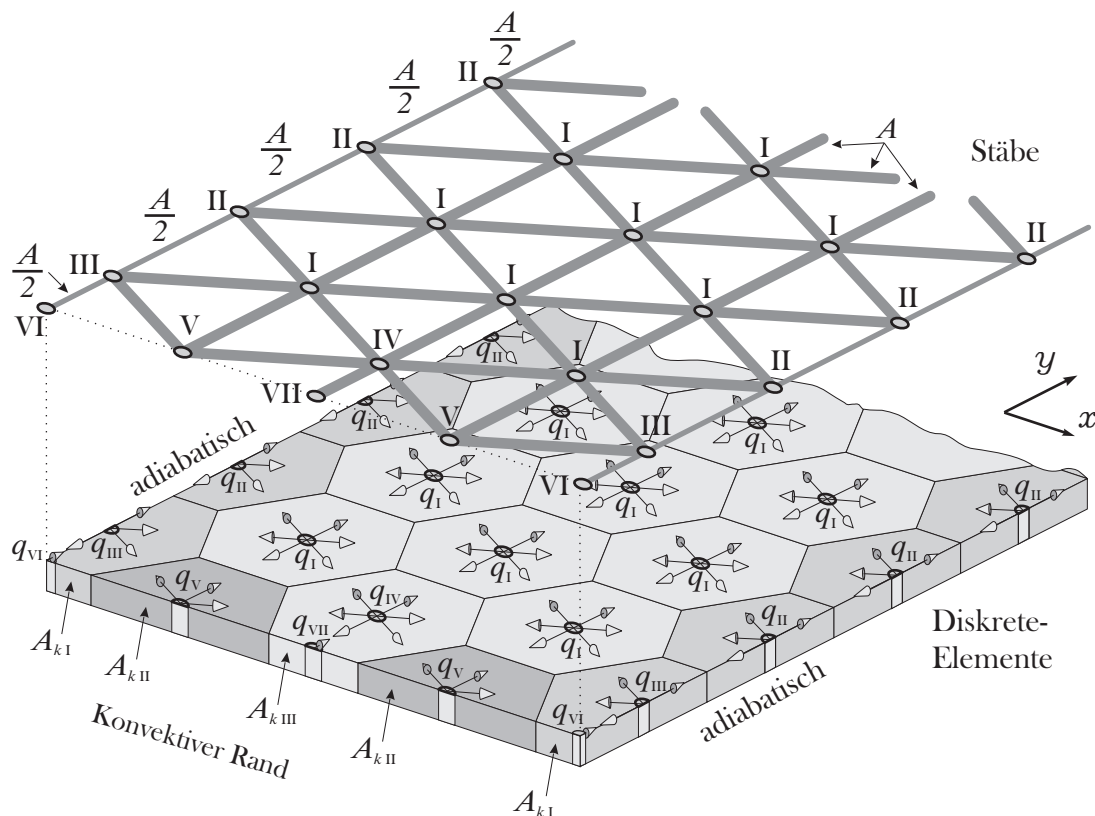


Abbildung 7.7: Diskretisierte Scheibe mit einer Quellenverteilung gleicher Stärke, welche auf die diskreten Knotenpunkte des Stabgitters umgerechnet wird.

Die Abbildung 7.8 zeigt den Vergleich zwischen der analytischen und numerischen Temperaturverteilung einer flachen Scheibe mit konstanter Quellenverteilung und Konvektion an den Rändern. Die numerische Lösung stimmt mit der analytischen Lösung, unter Vernachlässigung der Rundungsfehler, exakt überein.

7.4.4 Exemplarische Rechnung auf verschiedenen Skalen

In diesem Abschnitt wird das Beispiel aus dem Abschnitt 7.4.3 wieder aufgegriffen, um zu zeigen, wie sich mit der DEM die Mikro- und Makroskala miteinander verbinden lassen.

Im thermischen Feld lässt sich das homogene isotrope Werkstoffverhalten ebenso wie im mechanischen Feld durch reguläre Hexagone abbilden. Inhomogene oder anisotrope Werkstoffe werden mittels Voronoi-Polygonen modelliert. Je feiner ein inhomogener Werkstoff mit unregelmäßig geformten Hexagonen diskretisiert wird, desto mehr nähert sich das globale thermische Verhalten dem eines homogenen isotropen Werkstoffs an.

Abbildung 7.9 zeigt die Temperaturverteilung einer Scheibe mit homogener Quellen-

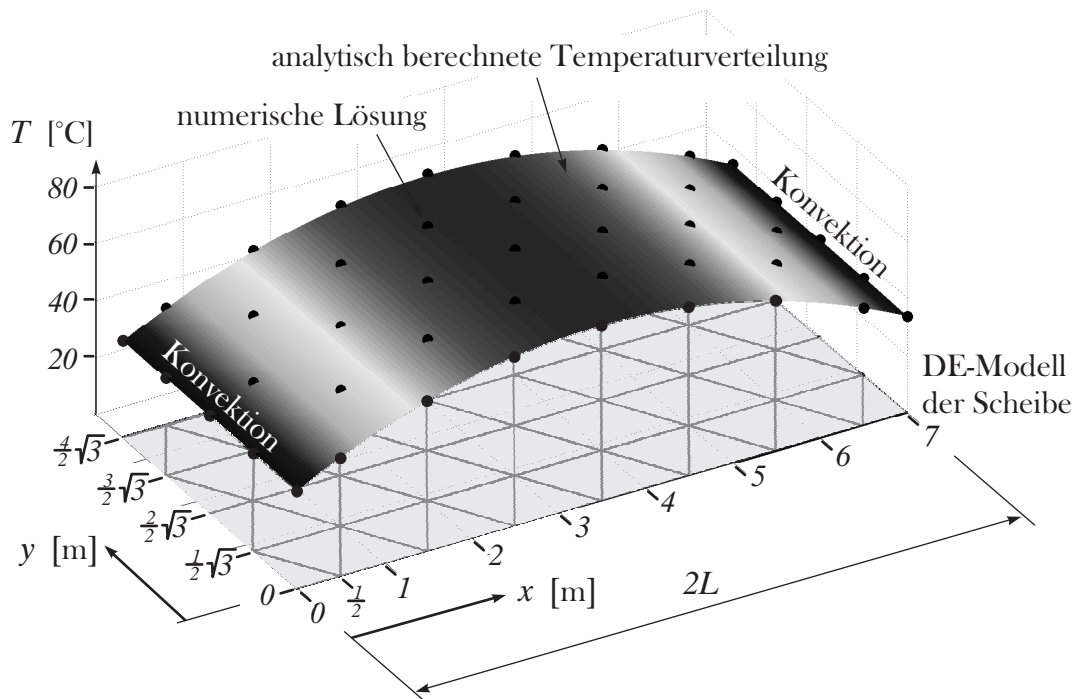


Abbildung 7.8: Analytische und numerische Temperaturverteilung einer flachen Scheibe mit Konvektion an der rechten und linken Seite.

verteilung. Das Gebiet wird zum einen mit unverzerrten und zum anderen mit verzerrten Hexagonen diskretisiert. Die Abmessungen des Gebietes werden in x - und y -Richtung als ganzzahliges Vielfaches eines RVE definiert. Bei grober Diskretisierung werden 2×2 RVE und bei feiner Diskretisierung werden 20×20 RVE verwendet. Die Abmessungen in x - und y -Richtung bleiben mit $B = \sqrt{3}\text{m}$ und $H = 2\text{m}$ konstant. Die Randtemperatur der Scheibe beträgt $T_0 = 20^\circ\text{C}$, der Wärmeleitwert ist $\lambda = 225 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$ und die Wärmequellenverteilung hat eine Stärke von $q_{\text{int}} = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$. Die analytische Lösung der Temperaturverteilung für dieses Problem ist [232]

$$\begin{aligned}
 T(x, y) = & \frac{q_{\text{int}}}{2\lambda} \left[\frac{B^2}{4} - \left(y - \frac{B}{2} \right)^2 + \right. \\
 & + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B^2}{(2n-1)^3 \pi^3} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2n-1}{B} \pi \left(x - \frac{H}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{2n-1}{B} \pi \frac{H}{2}\right)} \cdot \\
 & \left. \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{B} \pi \left(y - \frac{B}{2}\right)\right) \right] + T_0. \quad (7.39)
 \end{aligned}$$

Die analytische und die numerische Lösung der Temperaturverteilung sind in Abb. 7.9 (a) bis (d) gegeben, für eine grobe und eine feine Diskretisierung, mit und ohne Unordnung. Der geometrische Unordnungsparameter für die Beispiele (c) und (d) ist gleichverteilt und liegt bei $a = 0,9$. Es zeigt sich, dass die numerische Lösung ohne geometrische Unordnung die analytische Lösung recht gut approximieren kann, selbst bei grober

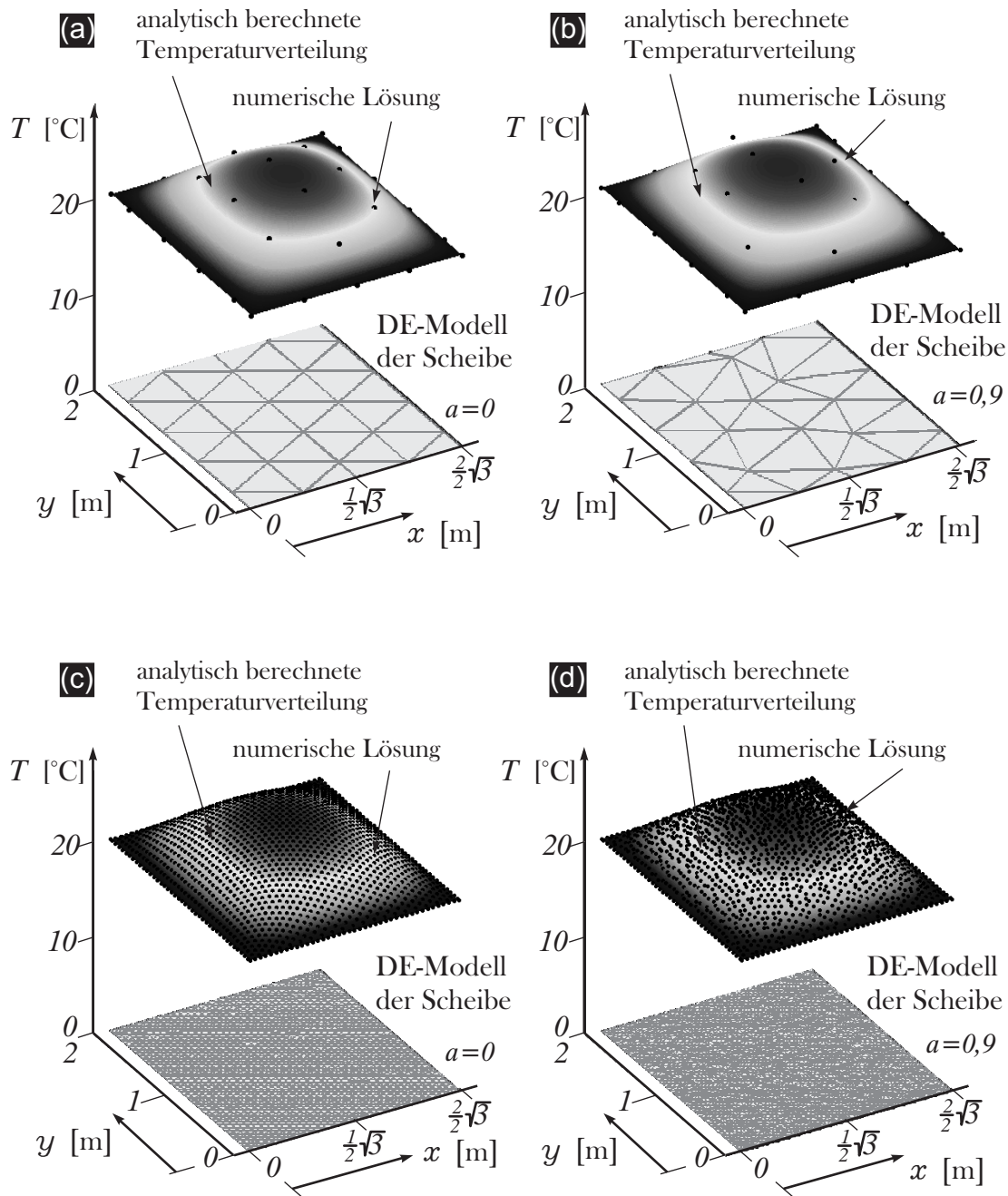


Abbildung 7.9: Temperaturverteilung in der Scheibe bei (a) unverzerrten Hexagonen und grober Diskretisierung, (b) verzerrten Hexagonen und grober Diskretisierung, (c) unverzerrten Hexagonen und feiner Diskretisierung, (d) verzerrten Hexagonen und feiner Diskretisierung.

Diskretisierung. Wird die geometrische Unordnung mit einbezogen, so wird die analytische Lösung nur gut approximiert, wenn das Gebiet fein diskretisiert wurde. Bei grober Diskretisierung weicht die numerische Lösung mit anwachsender geometrischer Unordnung an einigen Stellen zunehmend von der numerischen Lösung ab. Somit beinhaltet ein

fein diskretisiertes Gebiet mit hoher geometrischer Unordnung an den diskreten Punkten starke Schwankungen in den physikalischen Eigenschaften, die jedoch, global betrachtet, zu einem konstanten Wert verschmieren.

7.4.5 Anwendung des thermischen Diskrete-Elemente-Modells auf eine ebene Scheibe mit Riss

Der Wärmefluss verhält sich in der DE-Simulation so, wie es die analytische Lösung der Gl. (4.55) in Abschnitt 4.7 vermuten läßt. Der resultierende Wärmefluss q_{res} berechnet sich mit Gl. (4.55) aus

$$q_{res} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = q_{\perp} \sqrt{\frac{a}{2r}}, \quad (7.40)$$

worin q_x und q_y die Wärmeflüsse in der Scheibe, q_{\perp} der Wärmefluss senkrecht zum Riss mit der Länge a und r der Abstand vom Riss in Polarkoordinaten sind. Um die Risspitze bildet sich eine Singularität im Wärmefluss aus, siehe Abb. 7.10. Der Temperaturverlauf um die Risspitze hat keine Singularität, sondern ist proportional zu $r^{1/2}$, siehe Gl. (4.54).

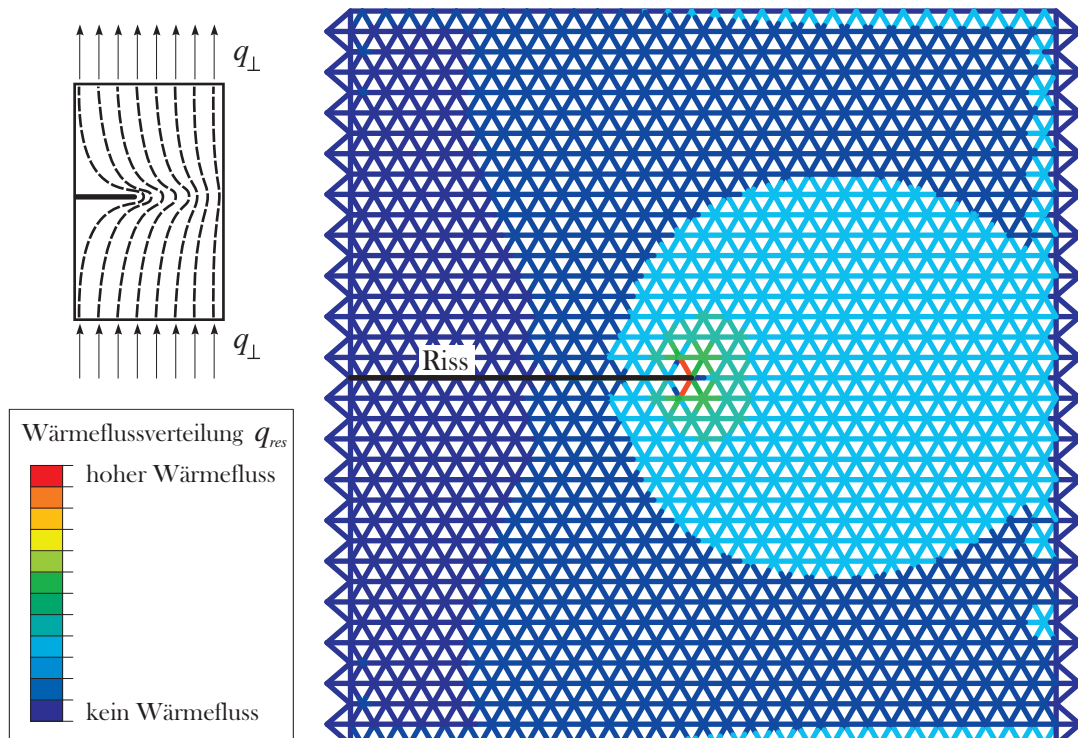


Abbildung 7.10: Der resultierende Wärmefluss und die Singularität um den Riss entspricht dem analytischen Bild in Abb. 4.6.

8 Behandlung des thermo-mechanischen Feldes mit der Diskrete-Elemente-Methode

Eine Kopplung des thermischen und mechanischen Feldes mittels der Diskreten-Elemente-Methode ist für bruchmechanische Vorgänge und Lebensdauersimulationen sehr vielversprechend, da mechanisch entstandene Risse einen Einfluss auf den Wärmefluss haben und ebenso hat der Wärmefluss einen Einfluss auf die Rissbildung da ein ungleichförmiger Wärmefluss mechanische Spannungen im Gebiet entstehen läßt. Die Kopplung beider Felder ist mit den diskreten Elementen einfach, da bei der Rissentstehung Stäbe aus dem DE-Modell entfernt werden und der Wärmefluss sich aufgrund dessen neue Wege suchen muss.

Eine analytische Formulierung, die das thermische und mechanische Feld vollständig bzw. beidseitig miteinander koppelt, ist dem Autor nicht bekannt. Eine Kopplung auf numerischem Wege ist jedoch über das BUBNOV-GALERKIN-Verfahren möglich. Die Kopplung beider Felder wird im Abschnitt 8.1.3 gezeigt.

In Kapitel 6 wurde gezeigt, dass die AIRYSche Spannungsfläche im mechanischen Feld proportional zum Kraftfluss ist. Im thermischen Feld existiert in völliger Äquivalenz zum mechanischen Feld eine Wärmeflussfläche die proportional zur Stärke des Wärmeflusses ist, siehe Kapitel 7. Somit ist die Behauptung von v. HELMHOLTZ aus dem Jahre 1847 untermauert, dass zwischen Kraftfluss und Wärmefluss eine Äquivalenz besteht, weshalb CLAPEYRONS Prinzip der kleinsten Arbeit aus dem mechanischen Feld auch für Wärmeflüsse gelten muss [224]. Losgelöst von dieser Tatsache, dass der Kraftfluss und der Wärmefluss gleichwertig sind, kommt PRIGOGINE im Jahre 1945 zur Überzeugung, dass es im mechanischen wie auch im thermischen Feld bei Zustandsänderungen eine Entropieerzeugung geben muss [185].

Seit Einführung der Entropie durch CLAUDIUS im Jahre 1850 ist bekannt, dass thermodynamische Prozesse Entropie erzeugen und deshalb irreversibel sind [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]. Für das mechanische Feld erweiterte PRIGOGINE die Gebietsgrenzen und bezog dabei z.B. Dämpfungseffekte der Luft, Hystereseeffekte oder auch Plastifizierungen mit ein [184, 185]. Ohne die Erweiterung der Gebietsgrenzen im mechanischen Feld wird keine Entropie erzeugt und das System ist somit reversibel, wodurch dann die gängigen Gleichungen der Mechanik gültig bleiben.

In der Mechanik werden seit den theoretischen Untersuchungen von EULER und BERNOULLI Potentialfunktionen verwendet, um Gleichgewichtszustände in Systemen zu finden [220]. Später wurde das Prinzip der Gleichgewichtsfindung aus dem Potential von der Mechanik auf andere physikalische Gebiete übertragen. Dabei ist der Gleichgewichtszustand im Extremum des Potentials zu finden. Da allerdings für die meisten physikalischen Systeme keine Potentialfunktionen definiert werden können, hat LJAPUNOV für diese Systeme eine nach ihm benannte rein formale Potentialfunktion definiert. Vom Standpunkt der Physik ist es sinnvoll die Vorzeichen der Potentiale so zu definieren, dass das Gleichgewicht im Minimum der Potentialfunktion ist. Diese Definition geht mit der Überlegung einher, dass die Natur stets den Weg des geringsten Widerstandes geht, weswegen nach PRIGOGINE in der Thermodynamik *das Prinzip der geringsten Entropieproduktion* [112, 184] und in der Mechanik *das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie* gilt [28, 169].

8.1 Analytische Beschreibung des thermo-mechanischen Feldes

8.1.1 Analytische Beschreibung des mechanischen Feldes

Im Folgenden werden die Differentialgleichungen des mechanischen Feldes aufgeführt, welche den Einfluss eines konstanten thermischen Feldes ohne Informationsrückfluss beinhalten. Die für den eindimensionalen (1D-), zweidimensionalen (2D-) und dreidimensionalen Fall (3D-Fall) hergeleiteten Differentialgleichungen sagen nichts über den Energiefluss vom mechanischen Feld zum thermischen aus, d.h. es lässt sich mit ihnen keine Temperaturverteilung infolge mechanischer Lasten bestimmen, d.h. die Kopplung des mechanischen und thermischen Feldes ist nur einseitig in Richtung des mechanischen Feldes, siehe Abb. 8.1.

3D-Fall:

Die erste analytische Beschreibung des mechanischen Feldes unter Einbeziehung der Temperatur für den 3D-Fall dürfte auf HOPKINSON aus dem Jahr 1879 zurückgehen [124].

Für den allgemeinen Fall wird ein 3D-Gebiet Ω mit stückweise glatten Rändern Γ betrachtet. Der Impulssatz liefert in x, y, z -Richtung die drei Gleichgewichtsbeziehungen

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho_m u_{i,tt}; \quad i, j = x, y, z. \quad (8.1)$$

In diesen drei Beziehungen sind σ_{ij} die Komponenten des CAUCHY Spannungstensors, f_i

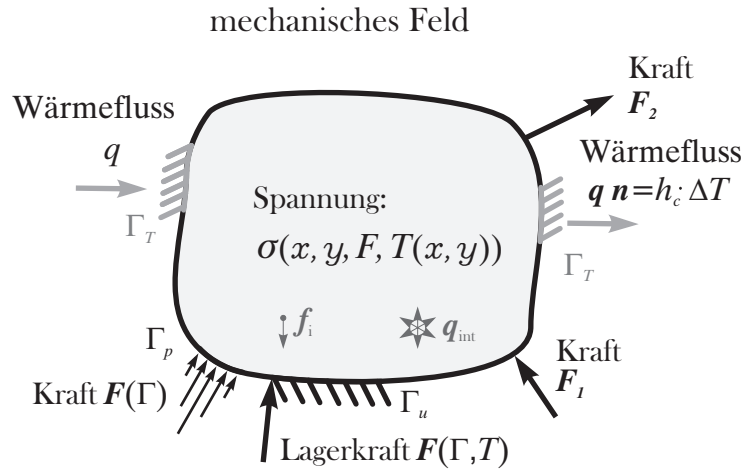


Abbildung 8.1: Im Gebiet entsteht ein Spannungsfeld $\sigma(x, y)$ als Funktion der Koordinaten, den angreifenden externen Punktkräften F_1 und F_2 , den externen Linienlasten $F(\Gamma)$ am Krastrand Γ_p , den internen Volumenkräften f_i , dem Krastrand $F(\Gamma)$, dem Wegrand Γ_u und der Temperaturverteilung $T(x, y)$. Die Temperaturverteilung entsteht aufgrund des Wärmeflusses q am Temperaturrand Γ_T und der Wärmequelle q_{int} . Außerdem hat die Temperaturverteilung bei statisch überbestimmt gelagerten Systemen einen Einfluss auf die Lagerkräfte $F(\Gamma_u, T)$ am Wegrand.

sind die Volumenkräfte des Körpers, $u_{i,tt}$ ist die zweite Ableitung der Verschiebungskomponenten u_i nach der Zeit t und ρ_m ist die Dichte des Körpers [98, 173, 222].

Werden die DUHAMEL-NEUMANN Beziehungen für einen isotropen homogenen Körper im isothermen Zustand

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \epsilon_{ij} + (\lambda_L \epsilon_{kk} - \gamma_T T) \delta_{ij}; \quad i, j = x, y, z \quad (8.2)$$

mit den Beziehungen zwischen den Verzerrungen ϵ_{ij} und Verschiebungen u_i in Tensornotation

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad i, j = x, y, z. \quad (8.3)$$

in Gl. (8.1) eingesetzt, so erhält man

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda_L + \mu) u_{j,ij} + f_i = \gamma_T T_{,i} + \rho_m u_{i,tt}; \quad i, j = x, y, z. \quad (8.4)$$

In Gl. (8.2) ist δ_{ij} das KRONECKER-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{für } i = j \\ 0; & \text{für } i \neq j. \end{cases} \quad (8.5)$$

Die Volumendilatation ϵ_{kk} ergibt sich aus der Spur des Dehnungstensors ϵ

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = u_{i,i} = \text{tr}(\epsilon); \quad i = x, y, z, \quad (8.6)$$

die LAMÉ Parameter λ_L und μ in den Gleichungen (8.2) und (8.4) lauten [146, 159, 245]

$$\lambda_L = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (8.7)$$

und die thermoelastische Konstante γ_T ist [173, 222]

$$\gamma_T = (3\lambda_L + 2\mu)\alpha_T = \frac{E\alpha_T}{1 - 2\nu}. \quad (8.8)$$

2D-Fall:

Für den hier gezeigten Fall werden die Körperkräfte f_i und die Massenträgheitskräfte $\rho_m \ddot{u}_i$ vernachlässigt. Die mathematische Form des mechanischen Feldes mit den Kopplungsthermen zum thermischen Feld basiert auf dem erweiterten HOOKEschen Gesetz für den ebenen Spannungszustand

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}(x, y, T(x, y)) \\ \epsilon_{yy}(x, y, T(x, y)) \\ \gamma_{xy}(x, y, T(x, y)) \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, T(x, y)) \\ \sigma_{yy}(x, y, T(x, y)) \\ \sigma_{xy}(x, y, T(x, y)) \end{bmatrix} + \alpha_T \begin{bmatrix} T(x, y) \\ T(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

wobei α_T der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient ist, $T(x, y)$ das auf die Ausgangstemperatur $T_0 = \text{const.}$ bezogene Temperaturfeld und $\mathcal{T}(x, y)$ das absolute Temperaturfeld, also

$$\mathcal{T}(x, y) = T(x, y) + T_0. \quad (8.10)$$

Mit der Verträglichkeitsbedingung (6.4), der Kinematik (6.2) und der Definition der AIRYSchen Spannungsfunktion (6.5) lässt sich die Beziehung (8.9) in die homogene thermomechanische partielle Differentialgleichung (DGL) überführen

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial y^4} \right) + \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (8.11)$$

bzw.

$$\nabla^4 \mathcal{F}(x, y, T(x, y)) + E \alpha_T \nabla^2 T(x, y) = 0. \quad (8.12)$$

Gleichung (8.12) ist nur für wenige Spezialfälle analytisch lösbar, siehe [74, 163, 182].

1D-Fall:

Da in der DEM die physikalische Feldgröße über Stäbe transportiert wird, wird die DGL des mechanischen Feldes mit der thermischen Ankopplung für den 1D-Fall hier aufgeführt. Diese DGL wird für die Formulierung des schwachen Gleichgewichtes mit der BUBNOV-GALERKIN-Methode verwendet. Die globale Koordinate x wird durch die stablokale Koordinate ξ ersetzt.

Das Gleichgewicht für den 1D-Fall lautet

$$\sigma_{\xi\xi,\xi}(\xi, t) + f_{\xi}(\xi, t) = \rho_m u_{,tt}(\xi, t), \quad (8.13)$$

wobei $f(\xi, t)$ die Körperkraft entlang der Stabachse ist. Das Materialgesetz, welches die Temperaturdehnung mit berücksichtigt, lautet

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, t, T(\xi, t)) &= E \epsilon_{\xi\xi}(\xi, t) - E \alpha_T T(\xi, t) \quad \text{bzw.} \\ \sigma_{\xi\xi,\xi}(\xi, t, T(\xi, t)) &= E \epsilon_{\xi\xi,\xi}(\xi, t) - E \alpha_T T_{,\xi}(\xi, t), \end{aligned} \quad (8.14)$$

worin der Elastizitätsmodul E und der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient α_T als konstant betrachtet werden. Mit der kinematischen Beziehung $\epsilon_{\xi\xi} = u_{\xi,\xi} = u_{,\xi}(\xi)$ und Gl. (8.14) folgt für Gl. (8.13) die DGL für den 1D-Fall

$$E u_{,\xi\xi}(\xi, t, T(\xi, t)) - E \alpha_T T_{,\xi}(\xi, t) + f_{\xi}(\xi, t) = \rho_m u_{,tt}(\xi, t). \quad (8.15)$$

8.1.2 Analytische Beschreibung des thermischen Feldes

Im folgenden Abschnitt werden die Differentialgleichungen des thermischen Feldes hergeleitet, welche den Einfluss eines konstanten mechanischen Feldes auf die Temperaturverteilung beinhalten. Mit den Differentialgleichungen für den 1D-, 2D- und 3D-Fall lassen sich die konstanten mechanischen Spannungen infolge der Temperaturverteilung zwar zurückrechnen, allerdings findet kein Energierückfluss vom thermischen zum mechanischen Feld statt, da sich ansonsten das Spannungsfeld aufgrund der Temperatur ändern würde, siehe Abb. 8.2.

3D-Fall:

Betrachtet wird wiederum ein 3D-Gebiet Ω mit stückweise glattem Rand Γ . In diesem Gebiet findet ein irreversibler Wärmefluss durch Wärmeleitung aus den Regionen höherer Temperaturen zu den Regionen niedrigeren Temperaturen statt. Dabei wird die Entropie S erzeugt. Dieser irreversible Prozess kann mittels

$$\mathcal{T} S_{,t} = -q_{i,i} + q_{\text{int}} = -\text{div } \mathbf{q} + q_{\text{int}}; \quad i = x, y, z \quad (8.16)$$

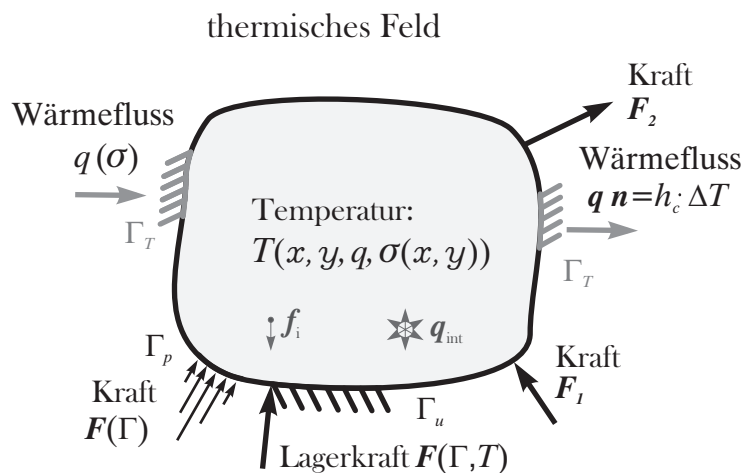


Abbildung 8.2: Im Gebiet entsteht ein Temperaturfeld $T(x, y)$ als Funktion der Koordinaten (x, y) , den Wärmeflüssen q , der Wärmequelle q_{int} , den angreifenden externen Punkt Kräften F_1 und F_2 , der externen Linienlast $F(\Gamma)$ am Krafrand Γ_p , der internen Volumenkraft f_i , dem Krafrand $F(\Gamma)$. Bei statisch überbestimmt gelagerten Systemen haben die am Wegrand Γ_u entstehenden Lagerkräfte $F(\Gamma_u, T)$ ebenfalls einen Einfluss auf das Temperaturfeld. Da interne und externe Kräfte im Inneren des Gebietes ein Spannungsfeld und ein Temperaturfeld erzeugen, hängt der Wärmefluss $q(\sigma)$, der über die Gebietsränder hinausgeht von den inneren Spannungen bzw. den Kräften ab.

ausgedrückt werden, wobei $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, y, z, t)$ die auf den Nullpunkt bezogene absolute Temperatur und $S_{,t}$ die pro Zeiteinheit erzeugte Entropie ist. q_i sind die Komponenten des Wärmeflussvektors \mathbf{q} und q_{int} ist die Quantität an Wärme, die pro Zeiteinheit und Einheitsvolumen erzeugt wird [98, 173, 222]. Mit dem FOURIERGesetz (Gl. (7.4)) gilt für den Wärmefluss \mathbf{q} im Körper

$$\mathbf{q} = q_i = -\lambda_{ij} T_{,j} = -\boldsymbol{\lambda} \text{grad } T ; \quad i, j = x, y, z, \quad (8.17)$$

worin $\boldsymbol{\lambda}$ die Wärmeleitmatrix für den aktuellen Zustand ist. Die Entropiebilanz ergibt sich aus dem Anteil der plastischen Verformung und der abtransportierten Wärme zu

$$S = \gamma_T \epsilon_{kk} + \frac{\rho_m c_p}{T_0} T(x, y, z, t), \quad (8.18)$$

worin ρ_m die lokale Dichte, c_p die auf die Masse bezogene spezifische Wärmekapazität des Körpers, T_0 die Referenztemperatur und $T(x, y, z, t)$ die aktuelle Temperatur am diskreten Punkt zum aktuellen Zeitpunkt ist [98, 173]. Die thermoelastische Konstante γ_T ergibt sich aus Gl. (8.8).

Mit den Gleichungen (8.17) und (8.18) wird Gl. (8.16) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left(\gamma_T \epsilon_{kk,t} + \frac{\rho_m c_p}{T_0} T_{,t} \right) &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_{\text{int}} \\ &= (\lambda_{ij} T_{,j})_{,i} + q_{\text{int}} ; \quad i, j = x, y, z \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \operatorname{grad} T) + q_{\text{int}} . \end{aligned} \quad (8.19)$$

Die in Gl. (8.19) enthaltene absolute Temperatur $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, y, z, t)$ kann mit der Referenztemperatur T_0 in die aktuelle Temperaturänderung $T = T(x, y, z, t)$ umgerechnet werden

$$T(x, y, z, t) = \mathcal{T}(x, y, z, t) - T_0 . \quad (8.20)$$

Somit wird Gl. (8.19)

$$\begin{aligned} (T + T_0) \left(\gamma_T \epsilon_{kk,t} + \frac{\rho_m c_p}{T_0} T_{,t} \right) &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_{\text{int}} \\ &= (\lambda_{ij} T_{,j})_{,i} + q_{\text{int}} ; \quad i, j = x, y, z \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \operatorname{grad} T) + q_{\text{int}} . \end{aligned} \quad (8.21)$$

Wenn in dieser Gleichung die zeitliche Änderung der plastischen Verformung infolge der Temperatur vernachlässigt wird (d.h. $\epsilon_{kk,t} = 0$) und außerdem angenommen wird, dass die sich einstellende Temperaturänderung $T(x, y, z, t)$ sehr klein ist, so wird Gl. (8.21) zur Wärmeleitungsgleichung (7.1).

Gleichung (8.21) beinhaltet die klassische Formulierung der Entropiezunahme infolge Plastifizierung, also den thermoplastischen Effekt. Der thermoplastische Effekt wird in diversen Veröffentlichungen beschrieben [134], er ist aber nach wie vor Gegenstand der aktuellen Forschung [114]. Neben dem thermoplastischen Effekt existieren weitere Effekte, welche einen Einfluss auf die Wärmegenerierung und Temperaturverteilung im Werkstoff haben. Diese sind unter anderem:

1. Die Phasenänderung. Wenn flüssige Werkstoffe abkühlen und von einer Phase in eine andere übergehen, nimmt die Temperatur zu. Werden Werkstoffe erwärmt, so wird für die Phasenumwandlung Energie absorbiert und die Temperatur des Werkstoffs bleibt trotz Energiezufuhr temporär konstant. Dieser Prozess kann als reversibel angenommen werden. Die mathematische Beschreibung dieses Prozesses und die numerische Implementierung ist Gegenstand der aktuellen Forschung.
2. Der WEBER-Effekt. Dieser ist reversibel und gilt nur im linear elastischen Bereich

von Festkörpern¹. Der WEBER-Effekt ist ein thermoelastischer Effekt, der 1830 von WEBER gefunden [229] wurde. Der Effekt stellt das Analogon zur Temperaturänderung von Gasen in den Festkörpern dar. D.h. wenn das Volumen (von Gas oder Festkörper) zunimmt, so nimmt die innere Temperatur ab. Die Temperaturänderung ist nur vom Wert der Volumendilatation abhängig und nicht von der Rate der Dilatation. In der heutigen Zeit wird der WEBER-Effekt in der zerstörungsfreien Prüfung von Werkstoffen eingesetzt. Da die generierte Temperatur sehr gering ist, kann sie nur mit Infrarot-Kameras sichtbar gemacht werden. Aus einem inhomogenen Temperaturfeld können dann Rückschlüsse auf Bauteilfehler getroffen werden.

Der WEBER-Effekt und der Phasenwandlungsprozess werden selten in der Fachliteratur beschrieben bzw. in das thermodynamische Gleichgewicht der Gl. (8.21) einbezogen. Für die Metallumformung ist der Phasenwandlungsprozess, die Volumendilatation und die Plastifizierungsrate von Bedeutung. Im linear elastischen Bereich eines Werkstoffs ist vom theoretischen Standpunkt aus der WEBER-Effekt der einzige im Hintergrund ablaufende Prozess. Tatsächlich ist der Werkstoff aber nach seiner Herstellung mit Mikrorissen durchsetzt. Bei einer mechanischen Last wachsen zum einen die Mikrorisse und zum anderen entstehen auch neue Mikrorisse, selbst wenn die mechanische Last im linear-elastischen Bereich ist [205]. Dabei reiben die Rissoberflächen aneinander und es entsteht nicht-reversible Wärme. Dies bedeutet, dass der WEBER-Effekt und der thermoplastische Effekt parallel zueinander im linear elastischen Bereich ablaufen [87], wobei die Temperaturänderung infolge des WEBER-Effektes beschrieben werden kann und die Temperaturänderung infolge des thermoplastischen Effektes nicht. Die Entropiemenge des thermoplastischen Effektes lässt sich nicht vollständig erfassen, da die Anzahl und das Risswachstum der Mikrorisse aufgrund vieler Faktoren, wie z.B. der Werkstoffbeschaffenheit und dem Herstellungsprozess, nicht abgeschätzt werden kann.

Die Temperaturänderung infolge des WEBER-Effektes bei infinitesimaler elastischer Deformation ist

$$T_{\text{Weber}} = - \frac{\sigma_{kk} T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p}, \quad (8.22)$$

mit

$$\sigma_{kk} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (8.23)$$

¹Entdeckt wurde der thermoelastische Effekt von WEBER. Der Entdecker des thermoplastischen Effektes ist GOUGH. Jener hat in Verbindung mit seinen Untersuchungen an Kautschuk beobachtet, dass eine Kautschukprobe sich beim Verbiegen erwärmt [99]. Auch ist zu vermuten, dass WEBER den Artikel von GOUGH nicht kannte. Weitere Details zum Thema Thermoelastizität und Thermoplastizität finden sich im Abschnitt 2.3.

als Spannungssumme oder erster Invariante des CAUCHYSchen Spannungstensors, dessen Komponenten mit der Volumendilatation aus Gl. (8.6) über

$$\epsilon_{kk} = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{\sigma_{kk}}{2G} + 3\alpha_T T \quad (8.24)$$

in Beziehung stehen und zu

$$\sigma_{kk} = \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} 2G (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} - 3\alpha_T T) \quad (8.25)$$

führen [163, 173, 182].

Wird in Gl. (8.21) die Änderung der Temperatur infolge des WEBER-Effekts hinzugefügt und außerdem angenommen, dass die Koppelsterme λ_{ij} des Wärmeleitensors Null sind, dann wird diese Gleichung zu

$$(T + T_{\text{Weber}} + T_0) \left(\gamma_T \epsilon_{kk,t} + \frac{\rho_m c_p}{T_0} \frac{d}{dt} (T + T_{\text{Weber}}) \right) = -\text{div } \mathbf{q}_{\text{ges}} + q_{\text{int}}, \quad (8.26)$$

wobei sich der gesamte Wärmefluss \mathbf{q}_{ges} aus den Anteilen von FOURIER (Gl. (8.17)) und WEBER zusammensetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\text{ges}} &= \mathbf{q} + \mathbf{q}_{\text{Weber}} \\ &= -\boldsymbol{\lambda} \text{grad } T + \boldsymbol{\lambda} \text{grad } T_{\text{Weber}}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Mit Gl. (8.27) wird Gl. (8.26) zu

$$\begin{aligned} (T + T_{\text{Weber}} + T_0) \left(\gamma_T \epsilon_{kk,t} + \frac{\rho_m c_p}{T_0} \frac{d}{dt} (T + T_{\text{Weber}}) \right) \\ = \text{div}(\boldsymbol{\lambda} \text{grad } T) - \text{div}(\boldsymbol{\lambda} \text{grad } T_{\text{Weber}}) + q_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Wie von WEBER beschrieben, ist die Temperaturänderung infolge des nach ihm benannten Effektes nur von der Volumendilatation und nicht von der Zeit abhängig, d.h. $\frac{d}{dt} T_{\text{Weber}} = 0$ [84, 113, 125, 211, 229]. Somit ergibt sich Gl. (8.28) zu

$$\begin{aligned} T \gamma_T \epsilon_{kk,t} + T_{\text{Weber}} \gamma_T \epsilon_{kk,t} + T_0 \gamma_T \epsilon_{kk,t} + T_{\text{Weber}} \frac{\rho_m c_p}{T_0} T_{,t} + T \frac{\rho_m c_p}{T_0} T_{,t} + \rho c_p T_{,t} \\ = \lambda_{xx,x} (T_{,x} - T_{\text{Weber},x}) + \lambda_{yy,y} (T_{,y} - T_{\text{Weber},y}) + \lambda_{zz,z} (T_{,z} - T_{\text{Weber},z}) \\ + \lambda_{xx} (T_{,xx} - T_{\text{Weber},xx}) + \lambda_{yy} (T_{,yy} - T_{\text{Weber},yy}) + \lambda_{zz} (T_{,zz} - T_{\text{Weber},zz}) \\ + q_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Diese Gleichung ist nicht-linear. Unter der Annahme, dass $\frac{T_{\text{Weber}}}{T_0} \ll 1$ und $\frac{T}{T_0} \ll 1$ ist kann sie linearisiert werden, indem der entsprechende Term vernachlässigt wird. Dies wird dadurch legitimiert, dass die Temperaturänderungen gering sind [173]. Gemäß

Gleichung (8.22) beträgt die Temperaturänderung infolge des WEBER-Effekts bei einem Werkstoff aus Stahl $T_{\text{Weber}} = -0,18138 \text{ K}$, wobei als Materialparameter $E = 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\alpha_T = 1,19 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$, $\rho_m = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $c_p = 456 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ verwendet wurden. Als Anfangstemperatur wurde ein Wert von $T_0 = 273,15^\circ \text{K}$ angenommen und die aufgebrachte Spannung beträgt in dieser beispielhaften Rechnung $\Delta\sigma = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, siehe auch [125].

Wird weiterhin angenommen, dass ein stationäres Gleichgewicht vorliegt, das Gebiet quellfrei und die Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{ii} = \text{konstant}$ sind, so folgt unter Berücksichtigung von Gl. (8.22)

$$0 = \lambda_{xx} \left(T_{,xx} + \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} \sigma_{kk,xx} \right) + \lambda_{yy} \left(T_{,yy} + \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} \sigma_{kk,yy} \right) + \lambda_{zz} \left(T_{,zz} + \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} \sigma_{kk,zz} \right). \quad (8.30)$$

2D-Fall:

Wird im Weiteren lediglich ein 2D-Fall mit konstanter Wärmeleitung ($\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda$) berücksichtigt, so ergibt sich aus Gl. (8.30) mit Gl. (8.23) und der Definition der AIRYSchen Spannungsfunktion der Gl. (6.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda (T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} (\sigma_{xx,xx} + \sigma_{yy,xx} + \sigma_{xx,yy} + \sigma_{yy,yy}) \\ &= \lambda (T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} (\mathcal{F}_{,yyxx} + \mathcal{F}_{,xxxx} + \mathcal{F}_{,yyyy} + \mathcal{F}_{,xxyy}) \\ &= \lambda \nabla^2 T(x, y) + \lambda \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} \nabla^4 \mathcal{F}(x, y). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Es ist dem Autor nicht bekannt, dass Gl. (8.31) für irgendwelche speziellen Fälle analytisch gelöst wurde.

1D-Fall:

Basis der 1D-Betrachtung ist Gleichung (8.29) mit der Linearisierung $\frac{T_{\text{Weber}}}{T_0} \ll 1$, $\frac{T}{T_0} \ll 1$ und GL. (8.6). Mit ihnen folgt nach Reduzierung der Variablen die folgende DGL

$$\begin{aligned} T \gamma_T \epsilon_{\xi\xi,t} + T_{\text{Weber}} \gamma_T \epsilon_{\xi\xi,t} + T_0 \gamma_T \epsilon_{\xi\xi,t} + \rho_m c_p T_{,t} \\ = \lambda_{\xi\xi,\xi} (T_{,\xi} - T_{\text{Weber},\xi}) + \lambda_{\xi\xi} (T_{,\xi\xi} - T_{\text{Weber},\xi\xi}) + q_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

wobei ξ entlang der Stabachse verläuft. Die Temperaturänderung nach WEBER (Gl. (8.22)) lautet unter Einbeziehung von Gl. (8.23)

$$T_{\text{Weber}} = - \frac{\sigma_{\xi\xi} T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p}. \quad (8.33)$$

Wird das Materialgesetz für den 1D-Fall (Gl. (8.14)) und die kinematische Beziehung $\epsilon_{\xi\xi} = u_{,\xi}$ eingesetzt, so folgt für Gl. (8.32) mit Gl. (8.33)

$$\begin{aligned} T \gamma_T u_{,\xi t} - \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} (E u_{,\xi} - E \alpha_T T) \gamma_T u_{,\xi t} + T_0 \gamma_T u_{,\xi t} + \rho_m c_p T_{,t} \\ = \lambda_{\xi\xi\xi} \left(T_{,\xi} + \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} (E u_{,\xi\xi} - E \alpha_T T_{,\xi}) \right) \\ + \lambda_{\xi\xi} \left(T_{,\xi\xi} + \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} (E u_{,\xi\xi\xi} - E \alpha_T T_{,\xi\xi}) \right) + q_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Nimmt man an, dass im Material zum Einen keine Plastifizierungen stattfindet, und dass sich zum Anderen im Stab über die Koordinate ξ die Wärmeleitfähigkeit nicht ändert, was legitim ist, da in der DEM ein Stab konstante Materialparameter hat, so folgt für Gl. (8.34)

$$\begin{aligned} \rho_m c_p T_{,t} &= \lambda_{\xi\xi} \left(T_{,\xi\xi} + \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} (E u_{,\xi\xi\xi} - E \alpha_T T_{,\xi\xi}) \right) + q_{\text{int}} \\ &= \lambda_{\xi\xi} \left(1 - \frac{E T_0 \alpha_T^2}{\rho_m c_p} \right) T_{,\xi\xi} + \lambda_{\xi\xi} \frac{E T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} u_{,\xi\xi\xi} + q_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

8.1.3 Analytische Beschreibung des gekoppelten thermo-mechanischen Feldes

Bei Betrachtung des gekoppelten thermo-mechanischen Feldes wirken für den 3D-Fall die Differentialgleichungen des mechanischen Feldes (8.4) und des thermischen Feldes (8.30) zusammen.

Im gekoppelten Fall entsteht im 3D-Gebiet aufgrund der Wärme- und Kraftflüsse ein Temperaturfeld $T(x, y, z)$ und ein Spannungsfeld $\sigma(x, y, z)$, wobei die beiden Differentialgleichungen des mechanischen Feldes (8.4) und des thermischen Feldes (8.30) zusammen wirken. Wie einleitend in diesem Kapitel beschrieben, wird im mechanischen und thermischen Feld beim Übergang vom Ausgangszustand in den neuen Endzustand Entropie erzeugt. Damit ein physikalisches System einen stabilen Gleichgewichtszustand einnehmen kann, muss das Potential des gekoppelten Feldes ein Extremum bzw. ein Minimum haben [185]. Dies bedeutet, dass das System vom Ausgangszustand in den neuen Endzustand ein *Minimum an Entropie* erzeugt, siehe auch Abb. 8.3. Eine aus den Differentialgleichungen des mechanischen und thermischen Feldes resultierende analytische Gesamtlösung ist dem Autor nicht bekannt.

Für den 2D-Fall können die analytischen Differentialgleichungen des mechanischen Feldes (8.12) und des thermischen Feldes (8.31) ohne die beidseitige Kopplung für

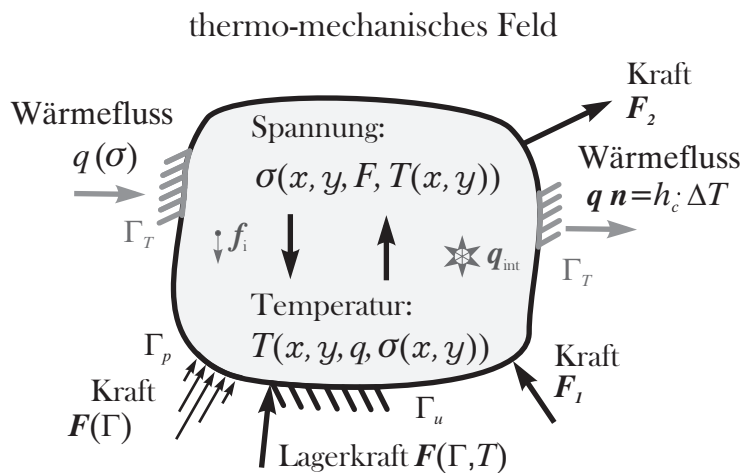


Abbildung 8.3: Im Gebiet entsteht durch die angreifenden externen Punktkräfte F_1 und F_2 , die externe Linienlast $F(\Gamma)$ am Krafrand Γ_p , die interne Volumenkraft f_i , dem Krafrand $F(\Gamma)$, den Wärmeflüssen q am Temperaturrand Γ_T und die Wärmequelle q_{int} ein Temperaturfeld $T(x, y, q, \sigma(x, y))$ und ein Spannungsfeld $\sigma(x, y, T(x, y))$ die sich aufgrund der beidseitigen Kopplung gegenseitig beeinflussen. Dabei wird vom Ausgangszustand in den Endzustand ein Minimum an Entropie erzeugt.

den ebenen Spannungszustand, wie in Tabelle 8.1 dargestellt, zusammengefasst werden. Diese Zusammenfassung ist insofern interessant, als die Matrixschreibweise der schwachen Form vom Gleichgewicht im nächsten Abschnitt auf ein ähnliches Bild führt.

	Spannungs- freiwerte	Temperatur- freiwerte
mechanisches Feld:	$\nabla^4 \mathcal{F}(x, y, T)$	$+ E \alpha_T \nabla^2 T(x, y, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$
thermisches Feld:	$\lambda \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_m c_p} \nabla^4 \mathcal{F}(x, y, T)$	$+ \lambda \nabla^2 T(x, y, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$

Tabelle 8.1: Zusammenfassung des mechanischen und thermischen Feldes für den 2D-Fall.

Für die DEM sind die Differentialgleichungen des mechanischen und thermischen Feldes (Gl. (8.15) und (8.35)) für den 1D-Fall von Bedeutung, weil die Stäbe die physikalische Feldgröße nur in Stablängsrichtung übertragen.

8.2 Schwache Form des thermo-mechanischen Feldes

Die vollständige thermo-mechanische Kopplung erfolgt wegen der zu Beginn dieses Kapitels erläuterten physikalischen Forderung, dass vom Ausgangszustand in den neuen Endzustand ein Minimum an Entropie erzeugt werden muss, mittels der ersten Variation des Gesamtpotentials Π_{total} [185]. Da für das vollständig gekoppelte thermo-mechanische Feldproblem keine mathematische Formulierung des Gesamtpotentials bekannt ist, muss die numerische Formulierung und Umsetzung des gekoppelten Feldproblems mittels der BUBNOV-GALERKIN-Methode erfolgen. Die Minimumforderung führt mittels der Variationsrechnung auf

$$\delta\Pi_{\text{total}} = \delta\Pi_{\text{mech}} + \delta\Pi_{\text{therm}} = 0. \quad (8.36)$$

Hierin ist $\delta\Pi_{\text{mech}}$ die erste Variation der mechanischen Feldgleichung und $\delta\Pi_{\text{therm}}$ die erste Variation der thermischen Feldgleichung. Demnach kann zunächst die erste Variation beider Einzelfelder (mit allen Koppelkonstanten) formuliert werden, bevor dann die Summe aus den beiden gebildet wird, siehe hierzu auch [109, 175].

Die erste Variation des mechanischen Feldes:

Die schwache Form des mechanischen Feldes für den 1D-Fall eines Elementes e geht aus Gl. (8.15) hervor

$$\delta\Pi_{\text{mech}} = \int_0^\tau \int_0^l [E_e u_{,\xi\xi}(\xi, t) - E_e \alpha_T e T_{,\xi}(\xi, t) + f(\xi, t) - \rho_m u_{,tt}(\xi, t)] \delta u(\xi, t) A_e d\xi dt, \quad (8.37)$$

worin δu_ξ die virtuelle Verschiebung in Stablängsrichtung, $A d\xi = dV$ das differentielle Volumenelement, $A = \frac{\sqrt{3}}{2} l t$ der Stabquerschnitt und τ der Zeitschritt über den integriert wird, ist.

Nach partieller Integration von Gl. (8.37), die im Anhang B aufgeführt ist, folgt für diese Gleichung

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\text{mech}} = & \int_0^\tau (F_1 \delta\hat{u}_1 + F_2 \delta\hat{u}_2) dt + \int_0^\tau \int_0^l A_e f(\xi, t) \delta u(\xi, t) d\xi dt \\ & - \int_0^\tau \int_0^l [E_e A_e (u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_T e T(\xi, t))] \delta u_{,\xi}(\xi, t) d\xi dt \\ & - [m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u(\xi, t)]_0^\tau + \int_0^\tau m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u_{,t}(\xi, t) dt. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Die erste Variation des thermischen Feldes:

Die schwache Form des thermischen Feldes geht mit der Vernachlässigung des thermoelastischen Effektes aus Gl. (8.35) hervor

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{therm}} = \int_0^\tau \int_0^l & \left[\lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi\xi}(\xi, t) + \lambda_{\xi\xi e} \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi\xi}(\xi, t) \right. \\ & \left. + q_{\text{int}} - \rho_{m e} c_{p e} T_{,t}(\xi, t) \right] \delta T(\xi, t) A_e d\xi dt. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Die partielle Integration dieser Gleichung kann Anhang C entnommen werden. Das Ergebnis dieser partiellen Integration ist

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{therm}} = & \int_0^\tau \int_{A_{h_c}} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) h_c (T(\xi, t) - T_0) \delta T(\xi, t) dA_{h_c} dt \\ & - \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) dV dt \\ & + \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T(\xi, t) \right]_0^l dt \\ & - \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) \right]_0^l dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi\xi}(\xi, t) d\xi dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^l [q_{\text{int}} A_e \delta T(\xi, t) - \rho_{m e} c_{p e} A_e T_{,t}(\xi, t) \delta T(\xi, t)] d\xi dt, \end{aligned} \quad (8.40)$$

worin A_{h_c} die Fläche ist an der Konvektion statt findet. Die Gleichung (8.40) zeigt, dass für die Verschiebungen $u(\xi, t)$ Ansätze von mindestens quadratischer Ordnung im Raum formuliert werden müssen. Bei Vernachlässigung des WEBER-Effekts vereinfacht sich Gl. (8.40) dahingehend, dass Temperatur und Verschiebung mit linearen Ansätzen approximiert werden können.

Die erste Variation des gekoppelten thermo-mechanischen Feldes:

Zur Kopplung des thermischen und mechanischen Feldes werden die Gleichungen (8.38) und (8.40) in Gl. (8.36) eingesetzt, wobei in der vollständigen Formulierung, d.h. ohne Vernachlässigung des WEBER-Effekts, für das thermische Feld quadratische Ansätze im Raum verwendet werden müssen.

Wie im Abschnitt 8.1.2 gezeigt, ist die Temperaturänderung infolge des WEBER-Effekts sehr gering. Ebenso können Massenträgheitseffekte vernachlässigt werden. Bleiben diese

beiden Effekte bei den diskreten Elementen unberücksichtigt, so folgt für das thermo-mechanische Feld im stationären Gleichgewichtszustand unter Verwendung von linearen Ansätzen für die Temperatur mit Gl. (7.17) und für die Verschiebung mit Gl. (6.60)

$$\delta\Pi_{\text{total}} = \begin{Bmatrix} \delta\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta\hat{\mathbf{T}}_e(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix}^T \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu e}(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{K}_{uT e}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{TT e}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) \\ \hat{\mathbf{T}}_e(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ue}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{f}_{Te}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad (8.41)$$

worin $\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi})$ bzw. $\delta\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi})$ die Vektoren der Knotenpunktverschiebungen des Elements im realen und virtuellen stablokalen Raum sind und $\hat{\mathbf{T}}_e(\boldsymbol{\xi})$ bzw. $\delta\hat{\mathbf{T}}_e(\boldsymbol{\xi})$ die Vektoren der Knotenpunkttemperaturen im realen und virtuellen Raum, siehe Abb. 8.4.

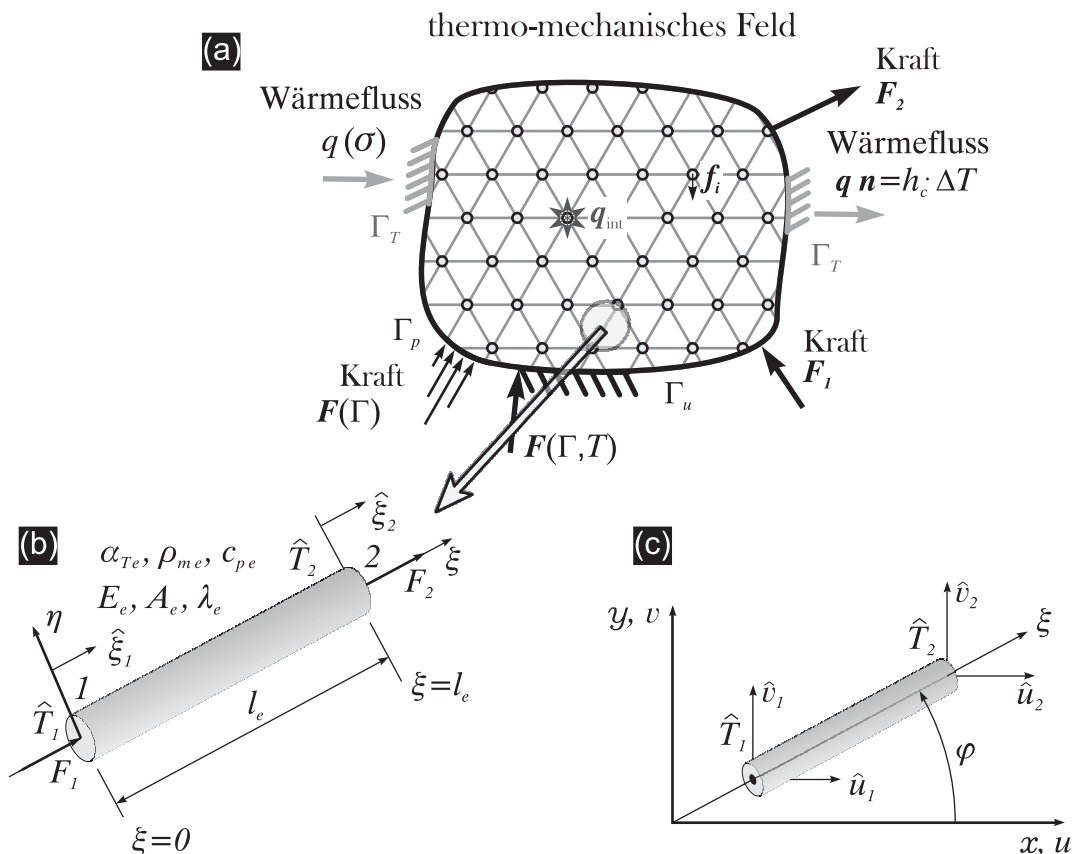


Abbildung 8.4: (a) In der DEM wird das Gebiet mit den angreifenden Kräften F_i , f_i , $F(\Gamma)$, den Wärmeflüssen q und der Wärmequelle q_{int} mit Stäben diskretisiert. (b) Jeder Stab hat ein eigenes lokales ξ, η -Koordinatensystem, eigene Werkstoffparameter A_e , E_e , l_e , λ_e , α_{Te} , ρ_{me} , c_{pe} , die stablokalen Verschiebungen $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, die Kräfte F_1 , F_2 und die invarianten Knotenpunkttemperaturen \hat{T}_1 , \hat{T}_2 . (c) Das stablokalen Koordinatensystem ist gegenüber dem globalen Koordinatensystem um den Winkel φ gedreht.

Die mechanische Steifigkeit eines Elementes $\mathbf{K}_{uu e}(\boldsymbol{\xi})$ ist

$$\mathbf{K}_{uu e}(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^l \mathbf{N}_{e,\xi}^T(\boldsymbol{\xi}) E_e A_e \mathbf{N}_{e,\xi}(\boldsymbol{\xi}) dx \quad (8.42)$$

und die Koppelsteifigkeit zum thermischen Feld $\mathbf{K}_{uT e}(\boldsymbol{\xi})$ ist

$$\mathbf{K}_{uT e}(\boldsymbol{\xi}) = - \int_0^l \mathbf{N}_{e,\xi}^T(\boldsymbol{\xi}) E_e A_e \alpha_{T e} \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) dx . \quad (8.43)$$

Weiterhin ist die Elementsteifigkeit des thermischen Feldes $\mathbf{K}_{TT e}$

$$\mathbf{K}_{TT e} = \int_0^l \mathbf{N}_{e,\xi}^T(\boldsymbol{\xi}) \lambda_{\xi\xi e} A_e \mathbf{N}_{e,\xi}(\boldsymbol{\xi}) dx + \int_{A_{h_c}} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) h_c \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) dA_{h_c} , \quad (8.44)$$

worin A_{h_c} die Fläche ist, an der Konvektion statt findet. Der Lastvektor eines Elements im mechanischen Feld ist

$$\mathbf{f}_{u e}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \int_0^l \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) A_e f(\boldsymbol{\xi}) dx - \int_0^l \mathbf{N}_{e,\xi}^T(\boldsymbol{\xi}) E_e A_e \alpha_{T e} T_0 dx \quad (8.45)$$

und im thermischen Feld

$$\mathbf{f}_{T e} = \int_0^l \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) q_{\text{int}} A_e dx + \int_{A_{h_c}} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) h_c T_0 dA_{h_c} . \quad (8.46)$$

Aus Gl. (8.41) geht hervor, dass das thermo-mechanische Feld nur einseitig gekoppelt ist, d.h. dass das mechanische Feld keinen Einfluss auf das thermische Feld hat. Dies vereinfacht den numerischen Prozess erheblich, da nun zuerst die thermischen und danach die mechanischen Freiwerte bestimmt werden können. Dadurch fallen numerische Instabilitäten aufgrund einer schlecht konditionierten Matrix weg. In der Formulierung des gekoppelten Feldes lassen sich temperaturabhängige Materialparameter, lokale Verfestigungen oder Schwachstellen im Werkstoff mit einbeziehen, wodurch realistische Simulationen möglich werden.

Die Transformation der Verschiebungen eines Elements im mechanischen Feld aus dem stablokalen $\boldsymbol{\xi}$ -Koordinatensystem in das globale \mathbf{X} -Koordinatensystem wird mit Gl. (6.63) vorgenommen ($\hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X})$), wobei wiederum vorausgesetzt wird, dass kleine Deformationen vorliegen, also $\mathbf{X} = \mathbf{x} = [x, y, z]^T$. Dabei gilt für die erste Zeile der Gl. (8.41)

$$\delta \Pi_{\text{mech}} = \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \cdot \left\{ \mathbf{K}_{uu e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{K}_{uT e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{T}}_e - \mathbf{f}_{u e}(\boldsymbol{\xi}) \right\} . \quad (8.47)$$

Nach dem Einsetzen von Gl. (6.63) folgt für Gl. (8.47)

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{mech}} &= \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T(\mathbf{X}) \cdot \left\{ \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_{uu e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}) - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_{uT e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{T}}_e - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f}_{u e}(\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T(\mathbf{X}) \cdot \left\{ \mathbf{K}_{uu e}(\mathbf{X}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}) - \mathbf{K}_{uT e}(\mathbf{X}) \cdot \hat{\mathbf{T}}_e - \mathbf{f}_{u e}(\mathbf{X}) \right\} , \end{aligned} \quad (8.48)$$

woraus sich für das mechanische Feld die Steifigkeit $\mathbf{K}_{uu e}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_{uu e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{A}$, die Koppelsteifigkeit $\mathbf{K}_{uT e}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_{uT e}(\boldsymbol{\xi})$ und der Lastvektor $\mathbf{f}_{u e}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f}_{u e}(\boldsymbol{\xi})$ ergeben.

Für die zweite Zeile von Gl. (8.41) muss keine Transformation vom stablokalen Raum in das globale Koordinatensystem vorgenommen werden, da die Temperaturen skalare Größen sind.

Nach Diskretisierung des Feldes mit diskreten Elementen und dem Erstellen aller Elementmatrizen und Vektoren im globalen Koordinatensystem erfolgt die Assemblierung der Matrizen über alle Stabelemente \mathcal{R} mit

$$\mathbf{K}_{uu}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{K}_{uu e}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{K}_{uT}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{K}_{uT e}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{K}_{TT} = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{K}_{TT e}. \quad (8.49)$$

Die Assemblierung aller Kraftvektoren ergibt über alle Stabelemente \mathcal{R}

$$\mathbf{f}_u(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{f}_{u e}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{f}_T = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \mathbf{f}_{T e} \quad (8.50)$$

und für die Freiwerte gilt analog

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}), \quad \delta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \delta \hat{\mathbf{u}}_e(\mathbf{X}), \quad \hat{T} = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \hat{T}_e, \quad \delta \hat{T} = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{R}} \delta \hat{T}_e. \quad (8.51)$$

Siehe hierzu auch Abb. 8.4.

8.3 Untersuchung einer Raketendüse unter thermo-mechanischer Belastung

Gekoppelte thermo-mechanische Anwendungsprobleme sind in der Technik oft zu finden. Ein Beispiel dafür ist die Struktur einer Raketendüse, ähnlich dem Vulcain 2 der Europäischen Trägerrakete ARIANE 5, siehe Abb. 8.5 (a).

Das in diesem Abschnitt verwendete Beispiel zeigt eine regenerativ gekühlte Düsenstruktur, d.h. eine Düsenstruktur, die durch Kühlkanäle in denen Flüssigwasserstoff strömt gekühlt wird, siehe Abb. 8.5 (b) und (c). Dabei liegt auf einem Abstand von 1 mm zwischen der Brennkammerwand und der Kühlkanalinnenseite eine Temperaturdifferenz von 910 K vor. Die genauen Abmessungen der Struktur können Abb. 8.5 (d) entnommen werden. Der Druck in der Brennkammer und in den Kühlkanälen beträgt 100 bar bzw. 250 bar.

Die Ergebnisse der DE-Simulation sind in Abb. 8.6 dargestellt. Wie in Abschnitt 8.2 erläutert, kann die Temperaturverteilung unabhängig von der mechanischen Last bestimmt werden. Abbildung 8.6 (a) zeigt die Temperaturverteilung bei den vorgegebenen Temperaturrandbedingungen. Es zeigt sich, dass lediglich ein kleiner Bereich um die Brennkammerwand einer hohen Temperaturlast unterliegt. Weil der überwiegende Teil der Struktur von der Referenztemperatur $T_0 = 273^\circ\text{K}$ auf ca. 40°K herunter gekühlt wird, schrumpft die Düse.

Die Abbildungen 8.6 (b) und (c) zeigen die im Nachlauf berechneten Stabspannungen bzw. die aus den Kontinuumsspannungen berechneten v. MISES-Vergleichsspannungen unter der Voraussetzung, dass die Düsenstruktur bei der Referenztemperatur spannungsfrei ist. Die zugehörigen Kontinuumsspannungen σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ und $\sigma_{r\varphi}$ sind in Abb. 8.7 (a) bis (c) dargestellt. Aus den Spannungsverteilungen geht hervor, dass der innere Bereich an der Brennkammerwand aufgrund des Schrumpfens der Düsenstruktur und der Wärmeausdehnung des Werkstoffs unter hohen Druckspannungen steht. Daher kann es dort zum Versagen der Düsenstruktur kommen.

Die Simulation zeigt außerdem, dass die mechanische Last wenig zur resultierenden Spannung beiträgt. Die Spannungen resultieren fast ausschließlich aus der aufgebrachten Temperaturverteilung. Weitere Details sind in der Arbeit von BAKRY enthalten [10].

Für die vorliegende Simulation müssen für das mechanische Feld die versteifenden Elemente am Rand verwendet werden. Diese werden jedoch nicht für das thermische Feld benötigt. Damit vom Rand her keine unrealistischen thermischen Zwängungen auf das Strukturmodell ausgeübt werden, muss den Elementen am Rand der selbe Wärmeleit-

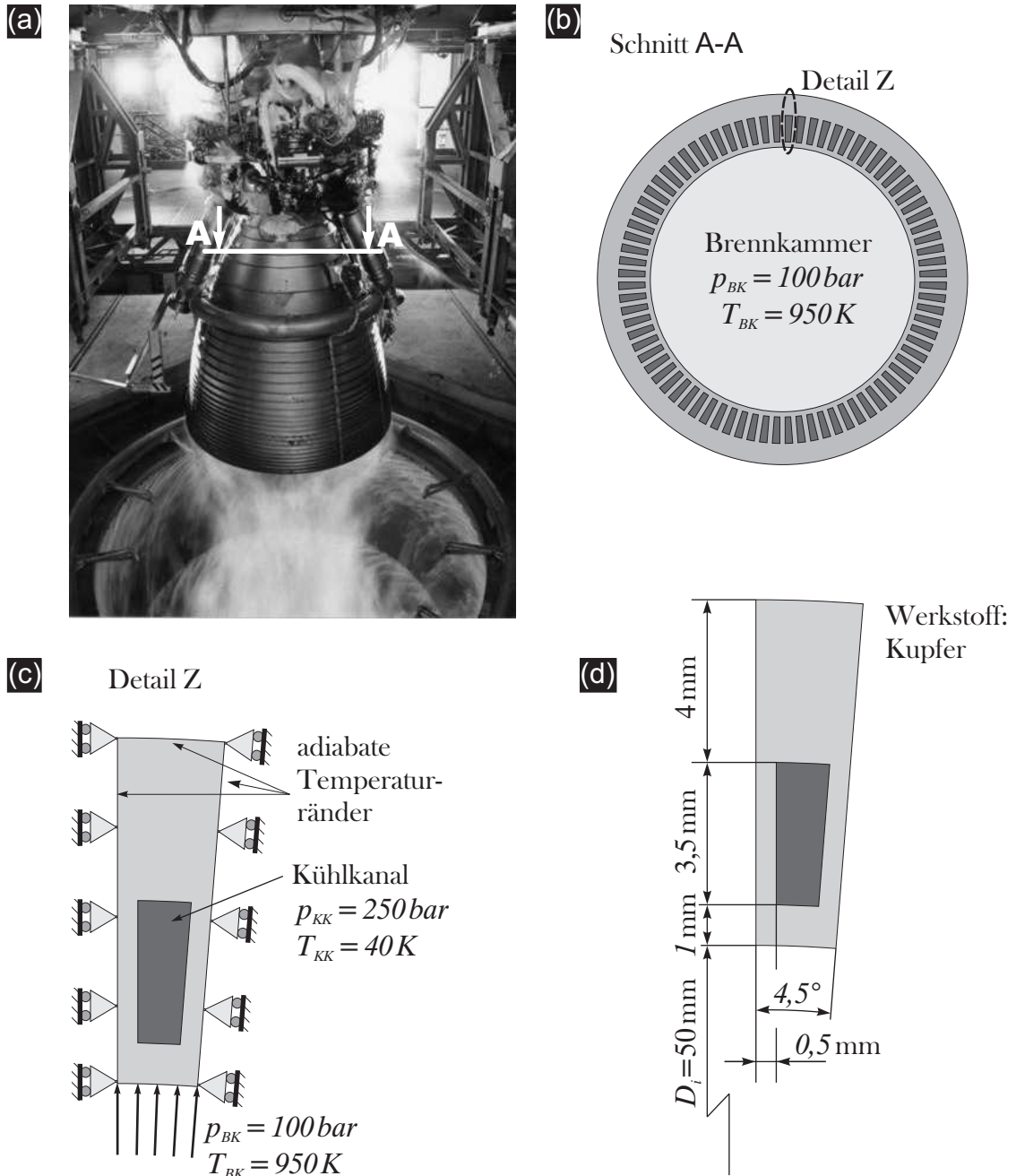


Abbildung 8.5: (a) Raketentriebwerk Vulcain 2 der Ariane 5 [Quelle: DLR-Lampoldshausen]. (b) Querschnitt der Brennkammerstruktur. Detail der Brennkammerstruktur mit den (c) thermischen und mechanischen Lasten und (d) den Abmessungen für die numerische Simulation.

und Wärmeausdehnungskoeffizient wie dem des Werkstoffs zugeordnet werden.

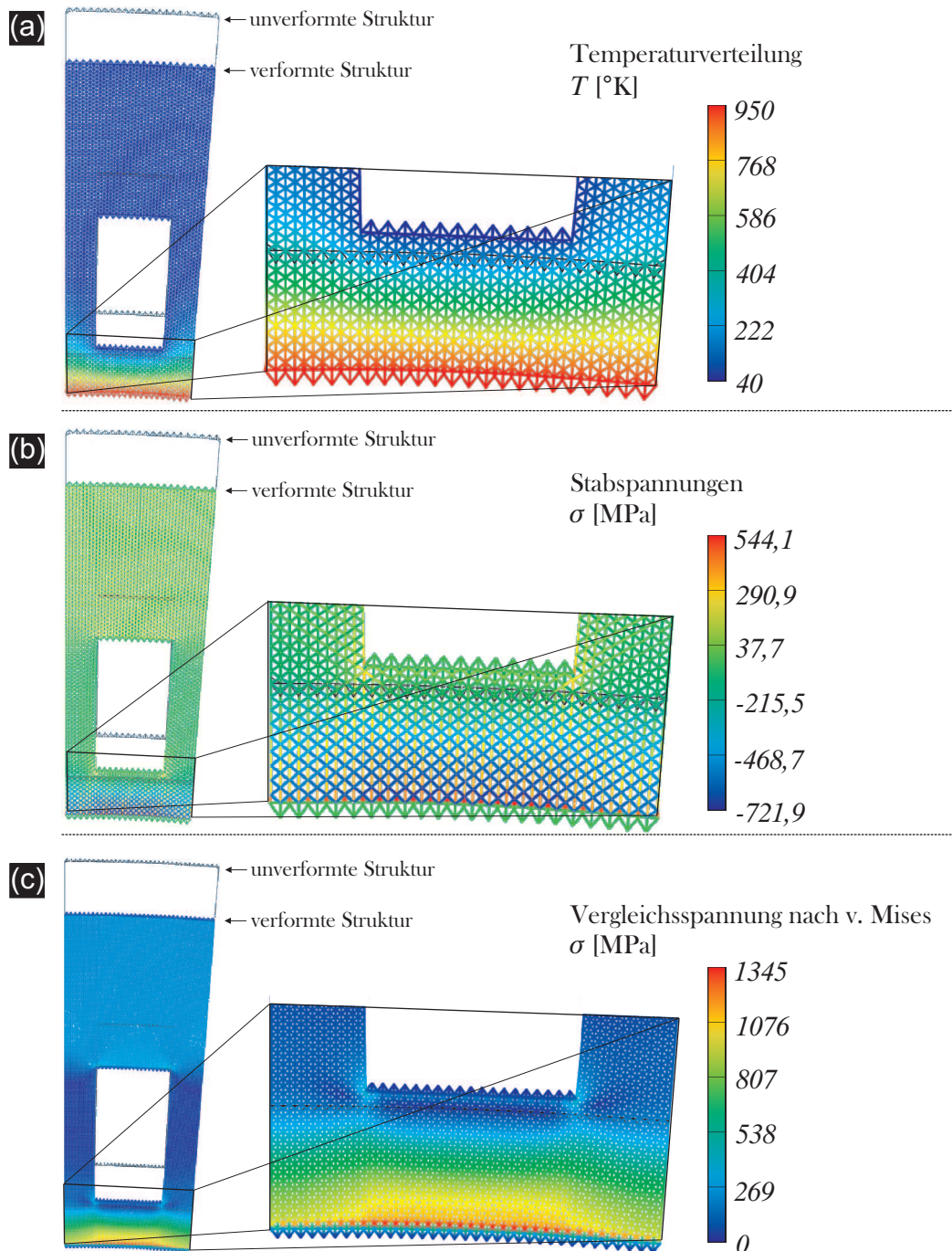


Abbildung 8.6: (a) Temperaturverteilung, (b) Stabspannungen und (c) v. MISES-Vergleichsspannungen der in Abb. 8.5 dargestellten Struktur. Die Verformungen sind 15-fach überhöht dargestellt.

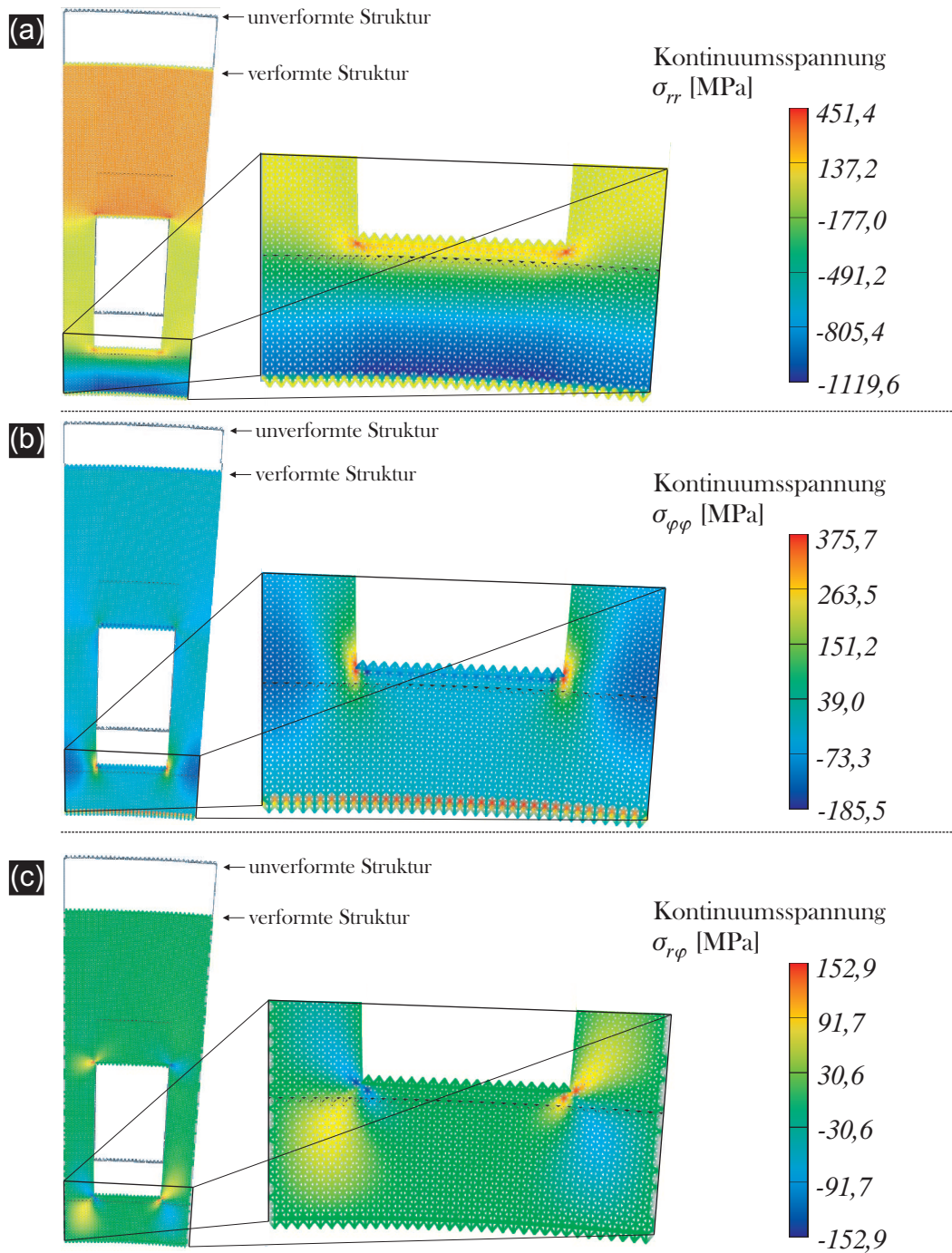


Abbildung 8.7: Kontinuumsstressungen der in Abb. 8.5 dargestellten Struktur; (a) σ_{rr} , (b) $\sigma_{\varphi\varphi}$ und (c) $\sigma_{r\varphi}$. Die Verformungen sind 15-fach überhöht dargestellt.

8.4 Lebensdauersimulation im thermo-mechanischen Feld

Nachdem die Nachweise erbracht wurden, dass sich mit der DEM zum Einen eine Lebensdauerabschätzung und zum Anderen die Wärmeflussberechnung vornehmen lässt, wird die Methode nun eingesetzt um eine Lebensdauersimulation an einer virtuellen Probe unter thermo-mechanischer Last zu ermitteln. Die dazu erforderlichen temperaturabhängigen Werkstoffparameter (Elastizitätsmodul, Wärmeleitfähigkeit und Wärmeausdehnungskoeffizient) wurden der Literatur entnommen [33].

Bei den dargestellten Simulationsergebnissen werden die Materialparameter aus Abschnitt 6.8 mit den Werten der beiden Tabellen 6.1 und 6.2 übernommen. Als thermische Last wird ein Wärmestrom in Längsrichtung der Scheibe vorgegeben, wobei die linke Seite der Scheibe um 100 K und die rechte um 50 K gegenüber der Raumtemperatur $T_0 = 273,15$ K erwärmt ist. Die Last in diesem Beispiel ist ebenfalls die gleiche wie in Abschnitt 6.8. Da die Lagerung eine Minimallagerung ist entstehen keine kinematischen Zwängungen infolge der Temperatur.

Während der Simulation treten in der virtuellen Probe Risse auf. Diese Risse behindern den Wärmefluss, wodurch im Modell lokal höhere Temperaturen entstehen, siehe Abb. 8.8. Aufgrund der lokal höheren Temperaturen werden die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffs verschlechtert, wodurch die Rissentstehung gefördert wird.

Aufgrund einer ungleichförmigen Temperaturverteilung entstehen in der Scheibe trotz Minimallagerung Spannungen, die im Vergleich zu den Spannungen aus der externen mechanischen Last unbedeutend sind.

Das Ergebnis der temperaturabhängigen WÖHLER-Simulation ist in Abb. 8.9 dargestellt. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der WÖHLER-Simulation ohne die erhöhte Temperatur ebenfalls in der Abbildung enthalten. Da die Werkstoffeigenschaften bei der erhöhten Temperatur degradieren, ist die Lebensdauer, wie zu erwarten, geringer. Als temperaturabhängige Materialparameter wurden der Elastizitätsmodul $E(T)$, der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_T(T)$ und der Wärmeleitkoeffizient $\lambda(T)$ verwendet. Aufgrund der niedrigeren Steifigkeit ist die Dehnung bei der vorliegenden Last höher, wodurch es schneller zum Versagen kommt.

Die mechanischen Spannungen die sich aus der oben angegebenen ungleichförmigen Temperaturverteilung ergeben sind sehr gering und haben deshalb einen vernachlässigbar geringen Einfluss auf die Lebensdauer. Die Dauerfestigkeit ist infolge der höheren Temperaturen und den damit verbundenen schlechteren Materialeigenschaften ebenfalls niedriger als ohne die Temperaturerhöhung [37, 108]. Abschließend kann festgestellt

werden, dass die geringere Lebensdauer bei dem vorgestellten Beispiel größtenteils auf die schlechten Werkstoffeigenschaften bei der erhöhten Temperatur zurückzuführen ist.

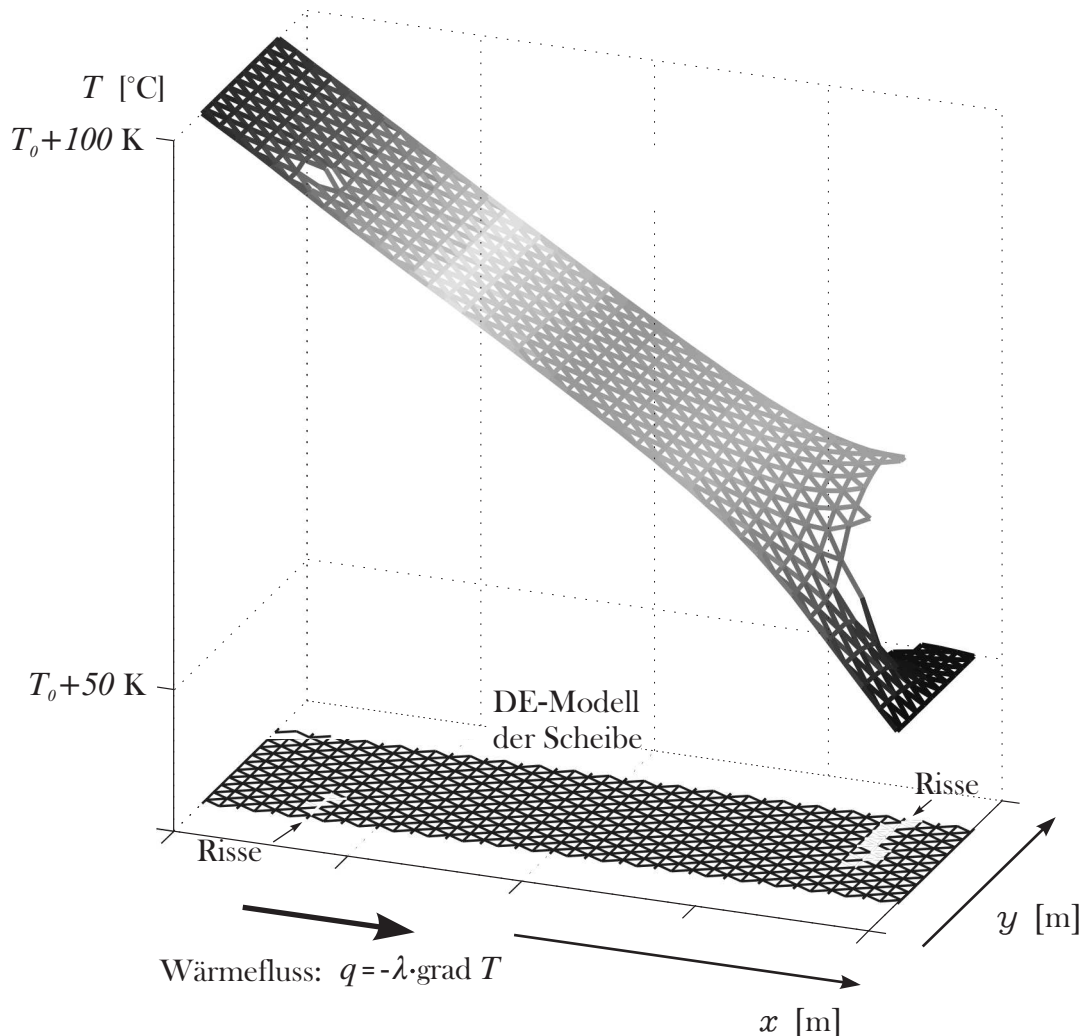


Abbildung 8.8: Virtuelle Scheibe mit einem Wärmefluss von links nach rechts. Der Wärmefluss wird durch Risse im Modell gestört.

Die Rissentstehung und das Versagensbild der Scheibe unter thermo-mechanischer Last sind prinzipiell der Rissentstehung und dem Versagensbild der reinen mechanischen Last ähnlich. Im Verlauf des virtuellen Versuchs entstehen langsam plastische Bereiche in der Probe, die statistisch verteilt sind. Ab einem bestimmten Zeitpunkt nehmen die plastischen Zonen in der Simulation schnell zu und es entstehen erste Risse die im Folgenden sehr schnell zum Versagen der Probe führen.

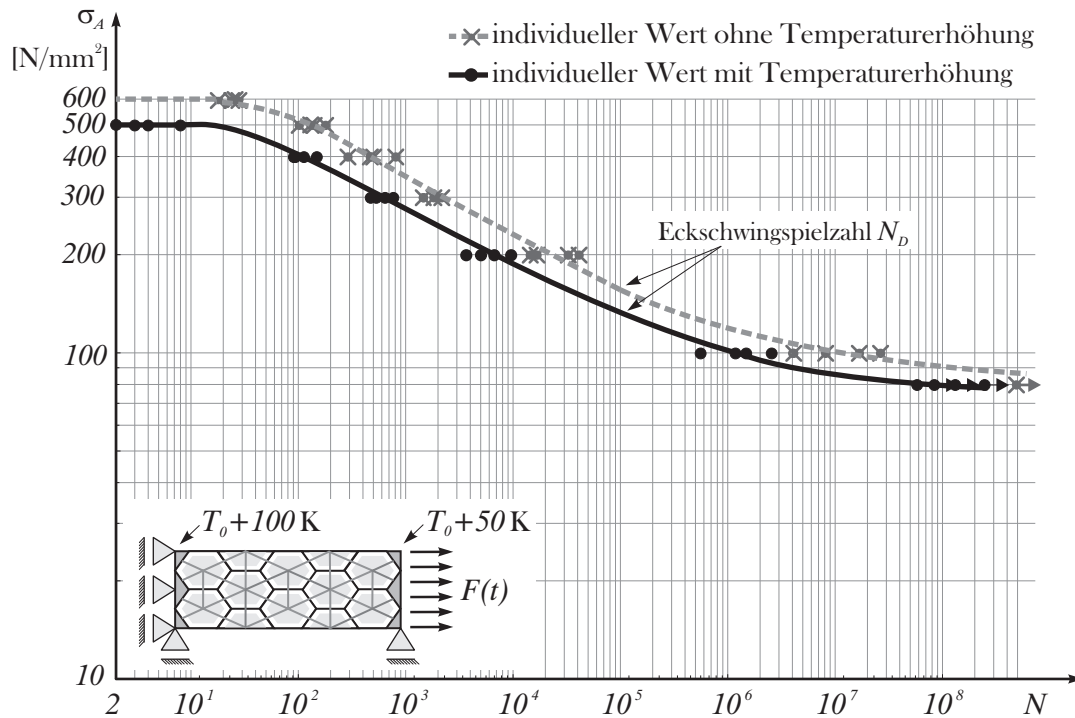


Abbildung 8.9: Ergebnis der temperaturabhängigen WÖHLER-Simulation mittels der Daten aus den Tabellen 6.1 und 6.2. Zum Vergleich ist die WÖHLER-Kurve ohne Temperaturerhöhung (bei $T = T_0$) ebenfalls dargestellt. Da die ungleichförmige Temperaturverteilung kaum mechanische Spannungen erzeugt, resultiert die geringere Lebensdauer fast ausschließlich aus den degradierten Materialeigenschaften bei der erhöhten Temperatur. Der letzte Wert des mechanischen WÖHLER-Versuchs und die letzten drei Werte des thermo-mechanischen WÖHLER-Versuchs sind Durchläufer, d.h. der virtuelle Versuch wurde abgebrochen. Die angegebenen Spannungswerte ergeben sich ausschließlich aus der mechanischen Last $F(t)$.

9 Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war es, eine Lebensdauerabschätzung mit diskreten Elementen an thermomechanisch belasteten metallischen Strukturen vorzunehmen.

Dazu sollten die folgenden Punkte aus Abschnitt 1.3 nachgewiesen bzw. widerlegt werden:

- **Kann die DEM den Werkstoff als ein Kontinuum und Diskontinuum im mechanischen und thermischen Feld beschreiben?**

Mit der DEM kann das Gebiet als homogen oder inhomogen angesehen werden. Der Werkstoff wird stets durch eine sternförmige Stabanordnung, bestehend aus sechs Stäben, modelliert. Dadurch stellen sich Probleme am Rand ein, allerdings haben die in dieser Arbeit vorgestellten Randelemente dazu beigetragen, dass der Werkstoff ganzheitlich als Kontinuum modelliert werden kann. Eine inhomogene Simulation kann durch eine Verzerrung der Elemente erreicht werden. Dadurch lässt sich eine Kopplung der Skalen erreichen. Dabei wird bei grober Diskretisierung mit verzerrten Elementen das physikalische Verhalten in den diskreten Bereichen, dargestellt durch die Stäbe, auf der Korngrößenkala inhomogen. Bei einer feinen Diskretisierung mit verzerrten Elementen verschmieren die physikalischen Eigenschaften langsam zu den aus Laborexperimenten an kleinen Prüflingen ermittelten Werten des homogenen Werkstoffs. Bei einer groben Diskretisierung mit unverzerrten Elementen (Hexagone) ist das physikalische Verhalten homogen. Dieses beobachtete Verhalten der diskreten Elemente gilt für alle Felder. Siehe hierzu auch Kapitel 5.

- **Kann bewiesen werden, dass die DEM als numerische Methode im mechanischen und thermischen Feld uneingeschränkt verwendet werden darf?**

Die Beweise für das mechanische Feld (Kapitel 6) und für das thermische Feld (Kapitel 7) haben gezeigt, dass die Diskrete-Elemente-Methode ein weiteres allgemeines Verfahren zum Lösen dieser Differentialgleichungen ist. Aus den Beweisen geht im Weiteren hervor, dass bei der DEM stets sechs Stäbe an einem Knoten angreifen müssen. Diese Stabanordnung kann über das Gleichgewicht mit dem Finite-Differenzen-Stern des Feldes in Verbindung gebracht werden. Nach einem Grenz-

übergang geht dieser finite Differenzen-Stern in die gebietsbeschreibende Differentialgleichung über. Dieses Vorgehen kann auch auf andere physikalische Gebiete übertragen werden, weswegen die DEM neben den anderen numerischen Methoden ein weiteres Verfahren zum Lösen partieller Differentialgleichungen ist.

○ **Kann die DEM die statistischen Schwankungen in der Festigkeit bei statischen Lasten simulieren?**

Die Arbeit von WITTEL [240] hat bereits gezeigt, dass statistische Schwankungen in die DEM mit einbezogen werden können. Im Abschnitt 2.1 werden die statistischen Parameter dargelegt. Aus den Beweisen in den Kapiteln 6 und 7 ist bekannt, dass bei der DEM stets sechs Stäbe an einem Knoten angreifen müssen (Ausnahme sind die Ränder). Hat ein Knoten lediglich fünf Stäbe und ein anderer dafür sieben, so kann mit dieser Anordnung kein homogener Werkstoff simuliert werden und bei der Simulation von inhomogenen Werkstoffen fallen die Werte aus der WEIBULL-Verteilung heraus.

○ **Kann das Verfahren die Lebensdauer eines Werkstoffs bei dynamischen Lasten simulieren?**

Um die Lebensdauer von Tragwerken simulieren zu können wurde das Werkstoffmodell erweitert, indem eine Akkumulation der mikroplastischen Schädigung für die diskreten Bereiche, welche durch die Stäbe repräsentiert werden, vorgenommen wurde. Dabei kann der Werkstoff bzw. die virtuelle Probe nur so lange mikroplastische Schädigungen aufnehmen, bis zuerst die diskreten Bereiche und dann die virtuelle Probe gesättigt sind. Siehe hierzu den Abschnitt 6.8.

○ **Ist die numerische Methode auch in der Lage, die Wärmeflüsse bzw. die Temperaturen des thermischen Feldes bei vorgegebenen Temperaturrandbedingungen und/oder Wärmequellen, -senken, zu bestimmen?**

Die Beispiele im Abschnitt 7.4.3 haben gezeigt wie die Implementierung erfolgt. Dazu muss die Intensität der Wärmequellen, -senken für die entsprechenden Knotenpunkte umgerechnet werden. Die Implementierung der Konvektion erfolgt über die Betrachtung der für die Konvektion relevanten Flächen.

○ **Kann die DEM die oben aufgeführten Disziplinen bzw. Felder in einem Netz miteinander verbinden bzw. koppeln?**

Neben der Kopplung von verschiedenen Skalen lassen sich auch verschiedene Felder koppeln, wie am Beispiel für das thermo-mechanische Feld gezeigt, siehe Kapitel 8. Dazu wird das Prinzip vom Minimum der geringsten Entropieproduktion mittels der Variationsrechnung bzw. dem GALERKIN-PETROV-Verfahren zur Anwendung gebracht.

Zusammenfassend kann durch die in dieser Arbeit vorgestellte Betrachtungsweise der Diskrete-Elemente-Methode ein Bezug zu den drei Säulen der Numerik, der Finite-Volumen-Methode, der Finite-Elemente-Methode und auch der Finite-Differenzen-Methode hergestellt werden, siehe Abb. 9.1. Gemäß der Finite-Volumen-Methode findet ein Fluss über die Ränder der diskreten Elemente statt. Theoretisch können die Flüsse ebenso mittels Stäben übertragen werden. Der Stabquerschnitt wird aus der Seitenfläche der diskreten Elemente (also den Hexagonen) gewonnen. Die hexagonale Stabanordnung geht nach Grenzübergang in den Finite-Differenzen-Stern der gebietsbeschreibenden DGL über. Nach Assemblierung der Stäbe wird das Gleichgewicht mittels der FEM aus dem Minimum der potentiellen Energie bzw. dem Prinzip vom Minimum der Entropieproduktion gefunden. Im Nachlauf der finiten Elemente Rechnung können die Flussgrößen bestimmt werden.

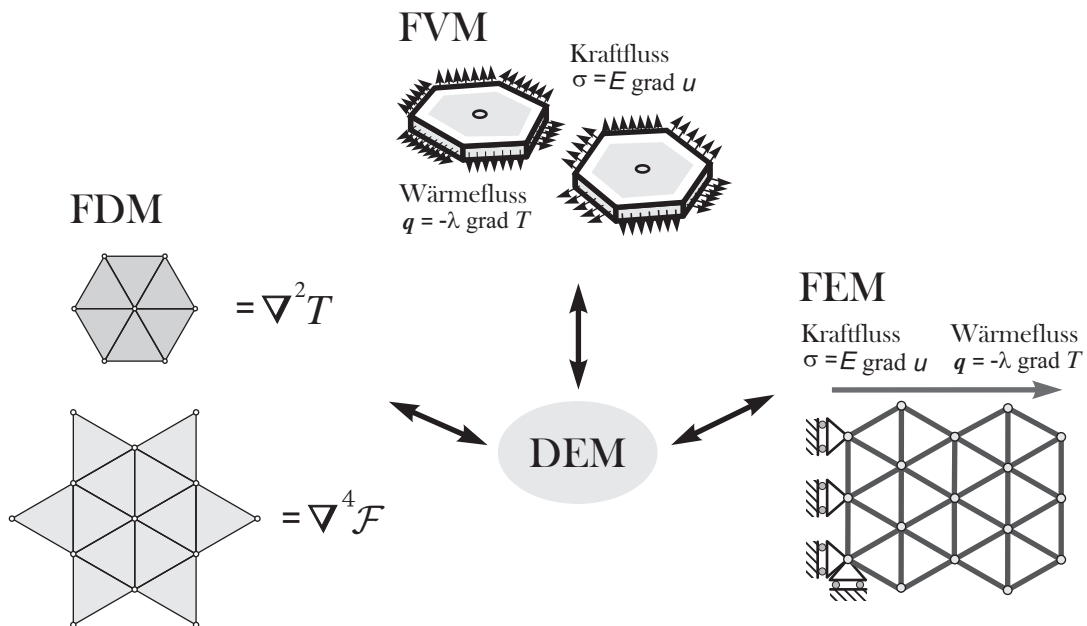


Abbildung 9.1: Die neue Betrachtungsweise der Diskrete-Elemente-Methode stellt einen Bezug zu den drei Säulen der Numerik her. Bei der Diskrete-Elemente-Methode (DEM) wie auch bei der Finite-Volumen-Methode (FVM) werden physikalischen Flussgrößen übertragen. Die Assemblierung der Stäbe, welche die physikalischen Flussgrößen übertragen, ergibt eine hexagonale Struktur. Das lokale physikalische Gleichgewicht führt über das Hexagon zu dem Finite-Differenzen-Stern der Finite-Differenzen-Methode (FDM). Das globale Gleichgewicht des physikalischen Feldproblems wird mittels der Finite-Elemente-Methode gefunden.

9.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit zeigt auf, wie verschiedene physikalische Felder miteinander gekoppelt werden können.

Die Beispiele aus dieser Arbeit beziehen sich auf rechteckige Scheiben, wobei die Abmessungen der Scheiben ganzzahlige Vielfache der in Abschnitt 6.5.2 vorgestellten repräsentativen Volumenelemente (RVE) sind. Bei der Verwendung von Scheibenabmessungen die nicht ein ganzzahligen Vielfaches eines RVE sind, müssen die RVE gedehnt oder gestaucht werden. Dazu müssen die Stabquerschnitte angepasst werden, da der Fluss nun nicht mehr senkrecht aus oder in die Seitenflächen der hexagonalen diskreten Elemente statt findet. Die entsprechenden Beziehungen für gedehnte oder gestauchte RVE müssen noch entwickelt werden.

Bei der numerischen Simulation von unregelmäßig geformten Tragwerken werden für den Übergang von einem Gebietsquerschnitt zu einem anderen Übergangselemente gebraucht. In der Arbeit von SPIERIG wurden diese Übergangselemente für das mechanische Feld hergeleitet. Es muss aber noch überprüft werden, ob die Übergangselemente für bruchmechanische Zwecke übernommen werden können. Die Entwicklung von Übergangselementen für andere physikalische Felder steht noch aus.

Die Methode könnte ihr Potential nach der Erweiterung in den 3D-Raum voll entfalten. Dazu wäre es nach Meinung des Autors erforderlich, tetraederförmige Elemente zu verwenden. Der noch ausstehende Beweis würde zeigen, wie die Materialparameter zu bestimmen sind.

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass es erforderlich ist, das ganze Gebiet mit hexagonalen Elementen gleicher Größe zu diskretisieren. Dies führt bei realen Bauteilen zu einer unnötig hohen Anzahl von Elementen bzw. Freiheitsgraden. Um die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren wäre es sinnvoll die diskreten Stabelemente mit finiten Scheibenelementen zu koppeln.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Versagensmodell zeigt, dass in der virtuellen Probe die Riss- oder Versagensinitiierung gleichmäßig über die Breite verteilt ist. Bei realen Werkstoffen kann es auch zu einem Versagen von außen nach innen kommen, wenn z.B. ein chemischer oder korrosiver Einfluss vorliegt. Dieses Verhalten kann mit der DEM durch eine schnellere Degradation der Randstäbe erfasst werden. Das Potential der DEM hinsichtlich der Lebensdauervorhersage lässt sich weiter ausbauen, indem die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle für einachsige Belastungen auf mehrachsige Belastungen übertragen werden.

Anhang

A Transformation der Derivate

Die Transformation der Derivate von den kartesischen Koordinaten in schiefwinklige Koordinaten, dargestellt in Abb. 6.9, erfolgt mit

$$\left. \begin{array}{l} \Xi = x - \frac{y}{\sqrt{3}} \\ \Theta = \frac{2}{\sqrt{3}} y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \Xi + \frac{1}{2}\Theta \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\Theta \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

und deren Derivate sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial \Xi}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial x}{\partial \Xi} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial \Theta} &= \frac{1}{2}, & \frac{\partial y}{\partial \Xi} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial \Theta} &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Die Ableitungen der AIRYSchen Spannungsfunktion können mit den Gleichungen (A.2) vom kartesischen Koordinatensystem in das schiefwinklige überführt werden. Für die ersten Ableitungen folgt

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Theta} \quad (\text{A.4})$$

und für die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \Xi} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial \Xi} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Theta} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \Xi} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Xi} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Theta} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

und zuletzt für die vierten Ableitungen

$$\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \Xi^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} = \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^4} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial y^4} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right) \\ &= \frac{1}{9} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^4} - \frac{8}{9} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^3 \partial \Theta} - \frac{32}{9} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta^3} + \frac{24}{9} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2 \partial \Theta^2} + \frac{16}{9} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Theta^4} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Xi \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Theta^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^4} - \frac{4}{3} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^3 \partial \Theta} + \frac{4}{3} \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \Xi^2 \partial \Theta^2}. \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

B Partielle Integration der mechanischen Feldgleichung

Die schwache Form des mechanischen Feldes für den 1D-Fall eines Elementes e geht aus Gl. (8.15) hervor

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\text{mech}} &= \int_0^\tau \int_0^l [E_e u_{,\xi\xi}(\xi, t) - E_e \alpha_{T_e} T_{,\xi}(\xi, t) + f(\xi, t) - \rho_m u_{,tt}(\xi, t)] \delta u(\xi, t) A_e \, d\xi \, dt \\ &= \int_0^\tau \int_0^l [E_e (u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t))_{,\xi} + f(\xi, t) - \rho_m u_{,tt}(\xi, t)] \delta u(\xi, t) A_e \, d\xi \, dt,\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

worin δu_ξ die virtuelle Verschiebung in Stablängsrichtung, $A \, d\xi = dV$ das differentielle Volumenelement, $A = \frac{\sqrt{3}}{2} l t$ der Stabquerschnitt und τ der Zeitschritt über den integriert wird, ist.

Wird der erste Term von Gl. (8.37) im Raum partiell integriert, so erhält man zunächst mit den Kräften

$$F_2 = [E_e A_e [u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t)]]_{\xi=l} \quad (\text{B.12})$$

und

$$F_1 = - [E_e A_e [u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t)]]_{\xi=0} \quad (\text{B.13})$$

und den virtuellen Verschiebungen $\delta\hat{u}_1$ und $\delta\hat{u}_2$ die virtuellen Arbeiten $F_1 \delta\hat{u}_1$ und $F_2 \delta\hat{u}_2$ an den Stellen $\xi = 0$ und $\xi = l$. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Kraft F_1 in Gl. (B.13), gemäß den in Abb. 8.4 definierten Vorzeichen, eine Druckkraft darstellt und somit ein negatives Vorzeichen bekommt. Somit ergibt sich für die partielle Integration des ersten Terms unter Berücksichtigung der thermischen Ausdehnung an den entsprechenden Stellen

$$\begin{aligned}& \int_0^\tau \int_0^l [E_e A_e (u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t))_{,\xi}] \delta u(\xi, t) \, d\xi \, dt = \\ &= \int_0^\tau [E_e A_e [\delta u(\xi, t) u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} \delta u(\xi, t) T(\xi, t)]_{\xi=0}^{\xi=l}] \, dt \\ &\quad - \int_0^\tau \int_0^l [E_e A_e (u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t))] \delta u_{,\xi}(\xi, t) \, d\xi \, dt \\ &= \int_0^\tau [F_1 \delta\hat{u}_1 + F_2 \delta\hat{u}_2] \, dt - \int_0^\tau \int_0^l [E_e A_e (u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t))] \delta u_{,\xi}(\xi, t) \, d\xi \, dt.\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Bei partieller Integration des dritten Terms nach der Zeit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_0^\tau \int_0^l \rho_m u_{,tt}(\xi, t) \delta u(\xi, t) A_e \, d\xi \, dt &= \int_0^l [A_e \rho_m u_{,t}(\xi, t) \delta u(\xi, t)]_0^\tau \, d\xi \\
 &\quad - \int_0^\tau \int_0^l A_e \rho_m u_{,t}(\xi, t) \delta u_{,t}(\xi, t) \, d\xi \, dt \\
 &= [m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u(\xi, t)]_0^\tau \\
 &\quad - \int_0^\tau m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u_{,t}(\xi, t) \, dt, \quad (\text{B.15})
 \end{aligned}$$

worin m_e die Masse des Stabes und $[m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u(\xi, t)]_0^\tau$ die zeitliche Änderung der virtuellen Arbeit, gebildet aus dem Produkt des Impulses und der virtuellen Verschiebung ist. Der letzte Term in Gl. (B.15) entspricht der ersten Variation der kinetischen Energie.

Somit ergibt sich aus Gl. (B.11) mit den Gleichungen (B.14) und (B.15)

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{\text{mech}} &= \int_0^\tau (F_1 \delta \hat{u}_1 + F_2 \delta \hat{u}_2) \, dt + \int_0^\tau \int_0^l A_e f(\xi, t) \delta u(\xi, t) \, d\xi \, dt \\
 &\quad - \int_0^\tau \int_0^l [E_e A_e (u_{,\xi}(\xi, t) - \alpha_{T_e} T(\xi, t))] \delta u_{,\xi}(\xi, t) \, d\xi \, dt \\
 &\quad - [m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u(\xi, t)]_0^\tau + \int_0^\tau m_e u_{,t}(\xi, t) \delta u_{,t}(\xi, t) \, dt. \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

C Partielle Integration der thermischen Feldgleichung

Die schwache Form des thermischen Feldes geht aus der Vernachlässigung des thermoelastischen Effektes aus Gl. (8.35) hervor

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{therm}} = \int_0^\tau \int_0^l \left[\lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi\xi}(\xi, t) + \lambda_{\xi\xi e} \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi\xi}(\xi, t) \right. \\ \left. + q_{\text{int}} - \rho_{m e} c_{p e} T_{,t}(\xi, t) \right] \delta T(\xi, t) A_e d\xi dt. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Die partielle Integration des ersten Termes liefert

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T(\xi, t) A_e d\xi dt \\ = \int_0^\tau \int_0^l \left[\lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi}(\xi, t) \right]_{,\xi} \delta T(\xi, t) dV dt \\ - \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) dV dt. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Mit dem FOURIERGESETZ (7.3) und dem SATZ VON GAUSS (7.6) folgt für den ersten Term der Gl. (C.18)

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l \left[\lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi}(\xi, t) \right]_{,\xi} \delta T(\xi, t) dV dt \\ = \int_0^\tau \int_{A_{h_c}} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T_e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) h_c (T(\xi, t) - T_0) \delta T(\xi, t) dA_{h_c} dt, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

wobei A_{h_c} die Fläche ist, an der Konvektion statt findet.

Um eine Temperaturänderung infolge einer mechanischen Last erfassen zu können, müssen mindestens quadratische Ansätze für die Temperatur gemacht werden. Ansonsten wird bei fest vorgegebenen Randtemperaturen die Temperaturänderung in der Mitte des Stabes nicht erfasst. Der zweite Term in Gl. (C.17) muss infolge dessen zwei mal

partiell integriert werden. Man erhält für diesen Term

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi\xi}(\xi, t) \delta T(\xi, t) A_e d\xi dt \\
&= \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T(\xi, t) \right]_0^l dt \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) d\xi dt \\
&= \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T(\xi, t) \right]_0^l dt \\
&\quad - \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) \right]_0^l dt \\
&\quad + \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi\xi}(\xi, t) d\xi dt. \quad (\text{C.20})
\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (C.18) bis (C.20) folgt nun für die schwache Form des thermischen Feldes in Gl. (C.17)

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{\text{therm}} &= \int_0^\tau \int_{A_{h_c}} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) h_c (T(\xi, t) - T_0) \delta T(\xi, t) dA_{h_c} dt \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} \left(1 - \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}^2}{\rho_{m e} c_{p e}} \right) T_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) dV dt \\
&\quad + \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi\xi}(\xi, t) \delta T(\xi, t) \right]_0^l dt \\
&\quad - \int_0^\tau \left[\lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi}(\xi, t) \right]_0^l dt \\
&\quad + \int_0^\tau \int_0^l \lambda_{\xi\xi e} A_e \frac{E_e T_0 \alpha_{T e}}{\rho_{m e} c_{p e}} u_{,\xi}(\xi, t) \delta T_{,\xi\xi}(\xi, t) d\xi dt \\
&\quad + \int_0^\tau \int_0^l [q_{\text{int}} A_e \delta T(\xi, t) - \rho_{m e} c_{p e} A_e T_{,t}(\xi, t) \delta T(\xi, t)] d\xi dt. \quad (\text{C.21})
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] AIRY, G. B.: On the strains in the interior of beams. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 153 (1863), S. 49–79
- [2] ALBERT, W. A. J.: Über Treibseile am Harz. In: *Archiv für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde* 10 (1837), S. 215–234
- [3] ALIABADI, M. H. und SALEH, A. L.: Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), S. 267–280
- [4] ALTENBACH, H., ALTENBACH, J. und NAUMENKO, K.: Ebene Flächentragwerke, Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1998
- [5] ARDENNE, M. v., MUSIOL, G. und KLEMRADT, U.: Effekte der Physik und ihre Anwendungen. Bd. 3. Wissenschaftlicher Verlag Harry Deutsch, 2005
- [6] ARGYRIS, J. H.: Die Matrizentheorie der Statik. In: *Ingenieur Archiv* 25 (1957), S. 174–192
- [7] BABUŠKA, I. und MELENK, J. M.: The Partition of Unity Method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), S. 727–758
- [8] BABUŠKA, I., REKTORYS, K. und VYČICHLO, F.: Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme. Akademie-Verlag-Berlin, 1960
- [9] BAEHR, H. D., STEPHAN, K.: Wärme– und Stoffübertragung. 4. Springer Verlag, Berlin, 2004
- [10] BAKRY, M.: Numerische Simulation von Versagensmechanismen in regenerativ gekühlten Raketentriebwerken mittels der Diskreten-Elemente-Methode, Studienarbeit, Universität Stuttgart, 2012
- [11] BALLHAUSE, D.: Diskrete Modellierung des Verformungs- und Versagensverhaltens von Gewebemembranen, Dissertation, Universität Stuttgart, 2007
- [12] BALLHAUSE, D., KÖNIG, M. und KRÖPLIN, B. H.: Modelling of woven fabrics with the Discrete Element Method. In: *Computers Materials and Continua* 4 (2005), S. 21–30
- [13] BANERJEE, P. K.: The Boundary Element Methods in Engineering. McGraw-Hill Book Company Europe, Berkshire, 1994

-
- [14] BASQUIN, O. H.: The exponential Law of Endurance Tests. In: *Proceedings of the ASTM 10* (1910), S. 625–630
- [15] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden. 2.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. – translated by P. Zimmermann
- [16] BAURAIN, N.: *Homogene und inhomogene Modellierung von metallischen Strukturen mittels Diskreter Elemente*, Studienarbeit, Universität Stuttgart, 2010
- [17] BAŽANT, Z. und PLANAS, J.: *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials.* CRC Press, Inc. London, 1998
- [18] BEITZ, W. und GROTE, K.-H.: *Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau. Bd. 19.* Springer Berlin, 1997
- [19] BELYTSCHKO, T. und BLACK, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), S. 601–620
- [20] BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M. und KRYSL, P.: Meshless methods: An overview and recent developments. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996), S. 3–47
- [21] BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y. und GU, L.: Element-free Galerkin Methods. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), S. 229–256
- [22] BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y. und GU, L.: A new implementation of the Element-free Galerkin Method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113 (1994), S. 397–414
- [23] BELYTSCHKO, T., MOËS, N., USUI, S. und PARIMI, C.: Arbitrary discontinuities in finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 993–1013
- [24] BELYTSCHKO, T., PARIMI, C., MOËS, N., SUKUMAR, N. und USUI, S.: Structured Extended Finite Element Methods for Solids Defined by Implicit Surfaces. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56(4) (2003), S. 609–635
- [25] BERGER, C., BLAUDEL, G., HODULAK, L., PYTTEL, B. und VARFOLOMEYEV, I.: *FKM-Richtlinie, Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. 3.* VDMA-Verlag, Frankfurt am Main, 2009
- [26] BERGMANN, W.: *Werkstofftechnik 1.* Carl Hanser Verlag München, 2008

- [27] BETTEN, J.: Finite Elemente für Ingenieure 1, Grundlagen, Matrixmethoden, Elastisches Kontinuum. 2. Springer Verlag, Berlin, 2003
- [28] BETTEN, J.: Finite Elemente für Ingenieure 2, Variationsrechnung, Energiemethoden, Näherungsverfahren, Nichtlinearitäten, Numerische Integration. 2. Springer Verlag, Berlin, 2004
- [29] BIĆANIĆ, N.: Discrete Element Methods. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol.1: Fundamentals*. Wiley VCH Verlag GmbH, 2004, S. 311–338
- [30] BIOT, M. A.: Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. In: *Physical Review* 97 (1955), S. 1463–1469
- [31] BIOT, M. A.: Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. In: *J. Appl. Phys.* 27 (1956), S. 240–253
- [32] BIOT, M. A.: Linear thermodynamics and the mechanics of solids. In: *Third U.S. national congress Appl. Mechanics, ASME, New York* (1958), S. 1–18
- [33] BLANKE, W.: *Thermophysikalische Stoffgrößen*. Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [34] BOLANDER JR., J. E. und SAITO, S.: Fracture analyses using networks with random geometry. In: *Engineering Fracture Mechanics* 61 (1998), S. 569–591
- [35] BOOLE, G.: Calculus Of Finite Differences. In: *Chelsea Publishing Company, New York* 4 (1860)
- [36] BORDAS, S., NGUYEN, P. V., DUNANT, C., GUIDOUM, A. und NGUYEN-DANG, H.: An extended finite element library. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71 (2007), S. 703–732
- [37] BOURIGA, M.: Numerische Simulation von Wöhler-Kennlinien mit der Diskrete-Elemente-Methode, Studienarbeit, Universität Stuttgart, 2011
- [38] BREMER, H.: Elastic multibody dynamics, A direct Ritz-approach. Springer Science+Business Media B.V., 2008
- [39] BÜRCEL, R., MAIER, H. J. und NIENDORF, T.: Handbuch Hochtemperatur-Werkstofftechnik, Grundlagen, Werkstoffbeanspruchungen, Hochtemperaturlegierungen und -beschichtungen. 4. Vieweg + Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2011
- [40] BRINELL, V.: Multiaxial, Nonproportional Fatigue: An approach by the Discrete Element Method, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 2010
- [41] BROBERG, K. B.: Cracks and Fracture. Academic Press, London, 1999
- [42] BROEK, D.: Elementary Engineering Fracture Mechanics. 4. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986

- [43] BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., MUSIOL, G. und MÜHLIG, H.: Taschenbuch der Mathematik. 6. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 2006
- [44] BRUSS, I.: Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien, Dissertation, Universität Stuttgart, 2011
- [45] CARPINTERI, A. und SPAGNOLI, A.: Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. In: *International Journal of Fatigue* 23 (2001), S. 135–145
- [46] CARSLAW, H. S. und JAEGER, J. C.: Conduction of heat in solids. 2. Oxford University Press, London, 1959
- [47] CAUCHY, A. L.: Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre on les lois du mouvement intérieur. In: *Exercices de Mathématique* 3 (1828), S. 160–187
- [48] CAUCHY, A. L.: Sur les l'équilibre et le mouvement intérieur des corps. In: *Exercices de Mathématique* 4 (1829), S. 293–319
- [49] CHENG, H. D. und CHENG, D. T.: Heritage and early history of the boundary element method. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29 (2005), S. 268–302
- [50] CHESSA, J. und BELYTSCHKO, T.: An extended finite element method for two-phase fluids. In: *Journal of Applied Mechanics (ASME)* 70(1) (2003), S. 10–17
- [51] CLAUSIUS, R.: Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 79 (1850), S. 368–397 und 500–524
- [52] CLAUSIUS, R.: Über einige Stellen der Schrift von Helmholtz „über die Erhaltung der Kraft“. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 89 (1853), S. 568–579
- [53] CLAUSIUS, R.: Über einige Stellen der Schrift von Helmholtz „über die Erhaltung der Kraft“, zweite Notitz. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 91 (1854), S. 601–604
- [54] CLAUSIUS, R.: Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 93 (1854), S. 481–506
- [55] CLAUSIUS, R.: Über die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 97 (1856), S. 441–558

- [56] CLAUSIUS, R.: Über die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 100 (1857), S. 353–380
- [57] CLAUSIUS, R.: Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 141 (1870), S. 124–130
- [58] CLAUSIUS, R.: Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Prinzipien. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 142 (1871), S. 433–461
- [59] CLOUGH, R. W.: Early Finite Element Research at Berkeley. In: *proceedings of the Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999* (1999)
- [60] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (The numerical treatment of differential equations). Bd. 2. Springer Verlag Berlin, 1955
- [61] COURANT, R. und HILBERT, D.: Methoden der mathematischen Physik, Band XII. In: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924, S. 1–445
- [62] COURTNEY, T. H.: Mechanical Behaviour of Materials. 2. Waveland Press INC, Illinois, USA, 2005
- [63] CUNDALL, P. A.: A computer model for simulation of progressive large scale movements in blocky rock systems. In: *Proceedings Symposium Int. Soc. Rock Mech., Nancy Metz, Paper II-8 1* (1971)
- [64] CUNDALL, C. A. und STRACK, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies. In: *Geotechnique* 29 (1979), S. 47–65
- [65] CZICHOS, H. und HENNECKE, M.: Hütte. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008
- [66] DAUX, C., MOËS, N., DOLBOW, J., SUKUMAR, N. und BELYTSCHKO, T.: Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended Finite Element Method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), S. 1741–1760
- [67] DESHPANDE, V. S., NESDLEMANN, A. und GIESSEN, E. V.: A discrete dislocation analysis of near-threshold fatigue crack growth. In: *Acta Mater.* 49 (2001), S. 3189–3203
- [68] DESHPANDE, V. S., NESDLEMANN, A. und GIESSEN, E. V.: Discrete dislocation modeling of fatigue crack propagation. In: *Acta Materialia* 50 (2002), S. 831–846

- [69] DOLBOW, J.: An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichement for Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA, Ph. D. Thesis, 1999
- [70] DOLBOW, J., MOËS, N. und BELYTSCHKO, T.: An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(51-52) (2001), S. 6825–6846
- [71] DOWLING, N. E.: Mechanical Behaviour of Materials, Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. 3. Person Education, INC.NJ, USA, 2007
- [72] EDWALDS, H. L. und WANHILL, R. J. H.: Fracture Mechanics. 3. Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, 1984
- [73] ESA: *Arianespace Flight 157 - Inquiry Board submits findings.* http://www.esa.int/esaCP/ESA7198708D_Expanding_0.html : Internet, esa news expanding frontiers from January, Abfragedatum: 08.08.2011 2003.
- [74] ESCHENAUER, H. und SCHNELL, W.: Elastizitätstheorie, Grundlagen, Flächen-tragwerke, Strukturoptimierung. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993
- [75] EULER, L.: Decouverte d'un nouveau principe de Mecanique. In: *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 6 E177 (1752), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 5, pp. 81 - 108, S. 185–217
- [76] EULER, L.: Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. E212 (geschrieben 1748, im Original als Buch publiziert 1755)
- [77] EULER, L.: Principes generaux de létat déquilibre des fluides. In: *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* 11 E225 (1757), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 12, pp. 2 - 53, S. 217–273
- [78] EULER, L.: Principes generaux du mouvement des fluides. In: *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 11 E226 (1757), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 12, pp. 54 - 91, S. 274–315
- [79] EULER, L.: Principia motus fluidorum. In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6 E258 (1761), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 12, pp. 133 - 168, S. 271–311
- [80] EULER, L.: Sectio prima de statu aequilibrui fluidorum . In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 12 E375 (1769), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 13, pp. 1 - 72, S. 305–416
- [81] EULER, L.: Sectio secunda de principiis motus fluidorum. In: *Novi Commentarii*

- academiae scientiarum Petropolitanae 14 E396 (1770), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 13, pp. 73 - 153, S. 270–386*
- [82] EULER, L.: Sectio tertia de motu fluidorum. In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 15 E409 (1771), Nr. Also in: Opera Omnia: Series 2, Volume 13, pp. 154 - 261, S. 219–360*
- [83] EWALDS, H. L. und WANHILL, R. J. H.: *Fracture Mechanics*. 3. Ewalds Arnold LTD., London, 1986
- [84] FEICKERT, W.: Ermittlung des vollständigen Spannungszustandes mit dem Verfahren der Thermoelastischen Spannungsanalyse. VDI Verlag, Düsseldorf, 1994
- [85] FEYEL, F.: A multilevel finite element method FE^2 to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. In: *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 3233–3244
- [86] FEYEL, F. und CHABOCHE, J.-L.: FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. In: *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering* 183 (2000), S. 309–330
- [87] FICKER, E.: Thermo-Emissions-Analyse als Methode in der Festkörpermechanik. In: *Österreichische Ingenieur- und Architektenzeitschrift* 7/8 (1991), S. 355–359
- [88] FINLAYSON, B. A.: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, London, 1972
- [89] FLEMING, F., CHU, Y., MORAN, B. und BELYTCHKO, T.: Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40(8) (1997), S. 1483–1504
- [90] FLUCK, E.: *Numerische Simulation von Hydrogelen mittels der Diskreten-Elemente-Methode*, Studienarbeit, Universität Stuttgart, 2012
- [91] FOURIER, J. B. J.: Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides. In: *Mémoires de l'Académie Royale des sciences de l'Institut de France, Œuvres complètes, tome 2 (1821)*
- [92] FOURIER, J. B. J.: *Théorie analytique de la chaleur*. F. Didot, 1822
- [93] GALERKIN, B. G.: Series solutions of some problems of elastic equilibrium of rods and plates (Titel übersetzt aus dem Russischen). In: *Vestnik Inzhenerov* 1 (1915), S. 897–908
- [94] GAUL, L. und FIEDLER, C.: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1997

- [95] GAUL, L., KÖGL, M. und WAGNER, M.: Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, An Introductory Course with Advanced Topics. Springer, Berlin, 2003
- [96] GDOUTOS, E. E. und SIH, G. C. (Hrsg.): Fracture Mechanics, Criteria and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990
- [97] GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. 6. Springer Verlag Wien New York, 1986
- [98] GLASER, S.: Berechnung gekoppelter thermomechanischer Prozesse, Dissertation, Universität Stuttgart, 1992
- [99] GOUGH, J.: A Description of a Property of Caoutchouc or Indian Rubber; with some Reflections on the case of the Elasticity of the Substance - In a Letter to Dr. Holme. In: *Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester* 1. Series 2 (1805), S. 288–295
- [100] GREEN, A. und SNEDDON, I. N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 46. Issue 01 (1950), S. 159
- [101] GRIFFITH, A. A.: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. 221 (1920), S. 163–198
- [102] GRIFFITHS, J. R. und OWEN, D. R. J.: An elastic-plastic stress analysis for a notched bar in plane strain bending. In: *Journal of the mechanics and physics of solids* 19 (1971), S. 419–431
- [103] GROSS, D. und SEELIG, T.: Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik. 4. Springer, Berlin, 2007
- [104] GUTIÉRREZ, M. A. und KRENK, S.: Stochastic Finite Elemente Methods. In: *Encyclopedia of computational mechanics, Vol. 2: Solids and Structures*. Wiley VCH Verlag GmbH, 2004, S. 657–682
- [105] HAHN, H. G.: *Bruchmechanik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1976
- [106] HAHN, M., WALLMERSPERGER, T. und KRÖPLIN, B.-H.: Discrete Element representation of continua: Proof of concept and determination of the material parameters. In: *Computational Materials Science* 50 (2010), S. 391–402
- [107] HAHN, M., SCHWARZ, M., KRÖPLIN, B.-H. und WALLMERSPERGER, T.: Discrete Element Method for the thermal field: Proof of concept and determination of the material parameters. In: *Computational Materials Science* 50 (2011), S. 2771–2784

- [108] HAHN, M., BOURIGA, M., KRÖPLIN, B.-H. und WALLMERSPERGER, T.: Life time prediction of metallic materials with the Discrete-Element-Method. In: *in Review* (2012)
- [109] HAHN, M., KRÖPLIN, B.-H. und WALLMERSPERGER, T.: Discrete Element Method for the thermo-mechanical field. In: *in preparation* (2012)
- [110] HAIBACH, E.: Betriebsfestigkeit, Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. Springer-Verlag, Berlin, 2006
- [111] HAKE, E. und MESKOURIS, K.: Statik der Flächentragwerke. Springer Berlin, 2001
- [112] HAKEN, H. und WUNDERLIN, A.: Die Selbststrukturierung der Materie. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1991
- [113] HARWOOD, N., CUMMINGS, W. M., HARWOOD, N. (Hrsg.) und CUMMINGS, W. M. (Hrsg.): Thermoelastic stress analysis. Adam Hilger, Bristol, 1991
- [114] HAUPT, P.: Continuum Mechanics and Theory of Materials. Springer, Berlin, 2001
- [115] HÄNEL, B., HAIBACH, E., SEEGER, T., WIRTHGEN, G. und ZENNER, H.: FKM-Richtlinie, Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. 3. VDMA-Verlag, Frankfurt am Main, 2003
- [116] HELLDÖRFER, B.: Ein Randelementbasiertes 3D-Rissfortschrittsmodul für Finite Elemente Systeme, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 2009
- [117] HELLINGER, E.: Die allgemeinen Ansätze der Mechnaik der Kontinua. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. B.G. Teubner, Leipzig, 1914, S. 602–694
- [118] HERMANN, G.: On variational principles in thermoelasticity and heat conduction. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 21(1) (1963), S. 151–155
- [119] HERMANN, H. J. und ROUX, S.: Modelization of fracture in disordered systems. In: *Statistical Models for the fracture of disordered media*. North-Holland, Amsterdam, 1990, S. 159–189
- [120] HESS, J. L. und SMITH, A. M. O.: Calculation of potential flow about arbitrary bodies. In: *Progress in Aeronautical Science*. Bd. 8. Pergamon Press, Oxford, 1966, S. 1–138
- [121] HIGGINS, T. J.: The Approximate Mathematical Methods of Applied Physics as Exemplified by Application to Saint-Venant’s Torsion Problem. In: *Journal of applied physics* 14 (1943), S. 469–480

- [122] HOLLAND, D. und MARDER, M.: Ideal brittle fracture of silicon studied with molecular dynamics. In: *Physical Review Letters* 80, No. 4 (1997), S. 746–749
- [123] HOLZMANN, G., MEYER, H. und SCHUMPICH, G.: Technische Mechanik, Teil 3 Festigkeitslehre. B. G. Teubner, Stuttgart, 1968
- [124] HOPKINSON, J.: On the stresses caused in an elastic solid by inequalities of temperature. In: *Messenger of Math* 8 (1879), S. 168–174
- [125] HORVÁTH, L.: *Experimentelle Untersuchungen der im Stahlbau typischen Bauteile mit Thermovision*, Dissertation, Technische Universität Cottbus, 2002
- [126] HOSFORD, W. F.: Mechanical behaviour of materials. Cambridge University Press, Cambridge UK, 2008
- [127] HRENNIKOFF, A. P.: Plane stress and bending of plates by method of articulated framework, MIT, Boston, Massachusetts, Ph. D. Thesis, 1940
- [128] HRENNIKOFF, A. P.: Solution of problems of elasticity by the framework method. In: *Journal of Applied Mechanics* 8 (1941), S. 169–175
- [129] HSIAO, G. C. und WENDLAND, W. L.: Boundary Element Methods: Foundation and Error Analysis. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 1*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 2004, S. 339–373
- [130] IRWIN, G. R.: Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. In: *Sagamore Research Conference Proceedings* 2 (1956), S. 289–305
- [131] IRWIN, G. R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. In: *Journal of applied Mechanics* 24(1) (1957), S. 361–364
- [132] IRWIN, G. R. und FLÜGGE, S. (Hrsg.): Fracture, in Handbuch der Physik. Springer Verlag, Berlin, 1958. S. 551–590
- [133] ISLER, L., RUOSS, H. und HÄFELE, P.: Festigkeitslehre-Grundlagen. 2. Springer-Verlag, Berlin, 1997
- [134] JANSOHN, W.: Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997
- [135] JASWON, M. A.: Integral equation methods in potential theory, Part I. In: *Proceedings of the Royal Society of London A* 275 (1963), S. 23–32
- [136] JORDAN, C.: Calculus of Finite Differences. Bd. 3. Chelsea Publishing Company, N.Y., 1965
- [137] KARIHALOO, B. L. und XIAO, Q. Z.: Modelling of stationary and growing cracks

- in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. In: *Computers and Structures* 81 (2003), S. 119–129
- [138] KATSIKADELIS, J. T.: Boundary Elements: Theory and Application. Elsevier Science Ltd., Oxford (UK), 2002
- [139] KÄSTNER, M.: Skalenübergreifende Modellierung und Simulation des mechanischen Verhaltens von textilverstärktem Polypropylen unter Nutzung der XFEM, Dissertation, Technischen Universität Dresden, 2009
- [140] KIRSCH, E. G.: Die Fundamentalgleichungen der Theorie der Elastizität fester Körper, hergeleitet aus der Betrachtung eines Systems von Punkten, welche durch elastische Streben verbunden sind. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 7(8) (1868), S. 481–487, 553–570, 631–638
- [141] KLEIN, F. und WIEGHARDT, K.: Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. In: *Archiv der Mathematik und Physik* 3 Reihe, 7 (1905), S. 1–10
- [142] KLEIN, F. und WIEGHARDT, K.: Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. In: *Archiv der Mathematik und Physik* 3 Reihe, 8 (1905), S. 95–119
- [143] KNOTHE, K. und WESSELS, H.: Finite Elemente, Eine Einführung für Ingenieure. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [144] KOCH, F. und PYZALLA, G.: Einführung in die Technologie. Verlag H. Stam GmbH, Köln.Porz, 1972
- [145] KOLOSOV, G. V.: Über die Anwendung der komplexen Funktionstheorie auf das ebene Problem der mathematischen Elastizitätstheorie, Original in russisch, Dissertation, Universität Yuriew (Dorpat), 1909
- [146] KOSSIRA, H.: Grundlagen des Leichtbaus: Einführung in die Theorie dünnwandiger stabförmiger Tragwerke. Springer Berlin, 1996
- [147] KOZICKI, J. und TEJCHMAN, J.: 2D lattice model for fracture in brittle materials. In: *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics* 53 (2) (2008), S. 71–88
- [148] KOZICKI, J. und TEJCHMAN, J.: Effect of steel fibres on concrete behavior in 2D and 3D simulations using lattice model. In: *Archives of Mechanics* 60(6) (2010), S. 465–492
- [149] KOZICKI, J. und TEJCHMAN, J.: Effect of fibrous bond on fracture process in

- concrete with steel fibres using irregular 3D lattice model. In: *Engineering Fracture Mechanics* (submitted for publication in 2010)
- [150] KUNA, M.: Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008
- [151] KURRER, K.-E.: Geschichte der Baustatik. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 2003
- [152] LABRA, C., ROJEK, J., OÑATE, E. und ZARATE, F.: Advances in discrete element modelling of underground excavations. In: *Acta Geotechnica* 3 (2008), S. 317–322
- [153] LANCZOS, C.: The variational principles of mechanics. 4. University of Toronto Press, 1977
- [154] LEONEL, E. D. und VENTURINI, W. S.: Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34 (2010), S. 122–129
- [155] LIE, K. H.: Berechnung der Fachwerke und ihrer verwandten Systeme auf neuem Wege. In: *Der Stahlbau* 8/9 and 10/11 (1944), S. 35–40 and 41–50
- [156] LIU, W. K., PARK, H. S. ; QIAN, D., KARPOV, E. G., KADOWAKI, H. und WAGNER, G. J.: Bridging scale methods for nanomechanics and materials. In: *Comput. Methods Applied Mech. Engrg.* 195 (2006), S. 1407–1421
- [157] LÖHNER, R. und OÑATE, E.: A general advancing front technique for filling space with arbitrary objects. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 1977–1991
- [158] LUCY, L. B.: A numerical approach to the testing of fission hypothesis. In: *The Astronomical Journal* 82 (1977), S. 1013–1024
- [159] MANG, H. und HOFSTETTER, G.: Festigkeitslehre. 3. Springer-Verlag, Wien, 2008
- [160] MANZOLI, O. L. und VENTURINI, W. S.: An implicit BEM formulation to model strong discontinuities in solids. In: *Computational Mechanics* 40(6) (2007), S. 901–909
- [161] MCHENRY, D.: A lattice analogy for the solution of stress problems. In: *Journal of the Institution of Civil Engineers* 21 (1943), S. 59–82
- [162] MEGUID, S. A.: Engineering Fracture Mechanics. Elsevier Applied Science, London, 1980
- [163] MELAN, E. und PARKUS, H.: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Springer-Verlag, Wien, 1953

- [164] MELENK, J. M. und BABUŠKA, I.: The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996), S. 289–314
- [165] MIER, J. G. M., VLIET, M. R. A. und WANG, T. K.: Fracture mechanisms in particle composites: statistical aspects in lattice type analysis. In: *Mechanics of Materials* 34 (2002), S. 705–724
- [166] MOËS, N. ; DOLBOW, J. ; BELYTSCHKO, T.: A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46(1) (1999), S. 1331–150
- [167] MOST, T.: Stochastic crack growth simulation in reinforced concrete structures by means of coupled finite element and meshless methods, Dissertation, Universität Weimar, 2005
- [168] MUNZ, C.-D. und WESTERMANN, T.: Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen. 2. Springer, Berlin, 2009
- [169] MÜLLER, G. H. und TIMPE, A.: Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1907, S. 3–51
- [170] MÜLLER, I.: A History of Thermodynamics, The Doctrine of Energy and Entropy. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [171] NAVIER, C. L. M. H.: Mémoires sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. In: *Mém. Acad. Sci. Fr.* 7 (1824), S. 375–393
- [172] NICKELL, R. E. und SACKMAN, J. L.: Variational principles for linear coupled thermoelasticity. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 26(1) (1968), S. 11–26
- [173] NOWACKI, W.: *Thermoelasticity*. 2. Polish Scientific Publisher, Warszawa, Pergamon Press, Frankfurt, 1986
- [174] ODEN, J. T. und NASH, S. G. (Hrsg.): Historical comments on Finite Elements. Reprinted from A History of Scientific Computing, ACM Press, New York, (1990) S. 152–166
- [175] ODEN, J. T. und REDDY, J. N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics. Springer Verlag, Berlin, 1976
- [176] OSTOJA-STARZEWSKI, M., SHENG, P. Y. und ALZEBDEH, K.: Spring network models in elasticity and fracture of composites and polycrystals. In: *Computational Materials Science* 7 (1996), S. 82–93

- [177] OSTOJA-STARZEWSKI, M.: Lattice models in micromechanics. In: *Applied Mechanics Reviews* 55 (1) (2002), S. 35–60
- [178] PAGANO, N. J.: Exact Solutions for rectangular Bidirectional Composites and Sandwichplates. In: *Mechanics of Composite Materials, Selected Works of Nicolas J. Pagano*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, S. 86–101
- [179] PAPADOPOULOS, I. V., DAVOLI, P., GORLA, C., FILIPPINI, M. und BERNASCONI, A.: A comparative Study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. In: *Int. J. Fatigue* 19, No. 3 (1997), S. 219–235
- [180] PAPADOPOULOS, I. V.: Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 21 (1998), S. 269–285
- [181] PARKUS, H.: *International centre for mechanical sciences*. Bd. Courses and lectures, No.58: *Variational principles in thermo- and magneto-elasticity*. Springer-Verlag, Wien, 1970
- [182] PARKUS, H.: *Thermoelasticity*. 2. Springer-Verlag, Wien, 1976
- [183] PETROV, G. I.: Application of the method of Galerkin to a problem involving the stationary flow of a viscous fluid (Titel übersetzt in Englisch). In: *Prikl. Matem. i Mekh.* 4 (1940), S. 36–47
- [184] PRIGOGINE, I.: *Etude Thermodynamique des Phenomenes Irreversibles (Study of the Thermodynamics of Irreversible Phenomenon) / Presented to the science faculty at the Free University of Brussels*. 1945. – Forschungsbericht
- [185] PRIGOGINE, I.: Time, Irreversibility and Structure. In: *The physicists conception of nature, Vorträge zum 70. Geburtstag von Paul Dirac*, Editor: D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1973, S. 561–593
- [186] RADAJ, D. und VORMWALD, M.: *Ermüdungsfestigkeit, Grundlagen für Ingenieure*. Bd. 3. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [187] RAYLEIGH, L. und STRUTT, J. W.: *Die Theorie des Schalles (aus dem englischen übersetzt mit dem Titel: Theory of sound, übersetzt von F. R. Neesen)*. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1880
- [188] REDDY, J. N., KRISHNAMOORTHY, C. S. und SEETHARAMU, K. N.: *Lecture Notes in Engineering, Finite Element Analysis for Engineering Design*. Springer-Verlag, Berlin, 1988

- [189] REDDY, J. N.: Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics. John Wiley and Sons Inc., Hoboken, NJ, USA, 2002
- [190] REISSNER, E.: On a variational theorem in elasticity. In: *J. Math. Phys.* 29 (1950), S. 90–95
- [191] RICHARDSON, L. F.: The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* (1910), S. 307–357
- [192] RIEDEL, W.: Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 7, Heft 3 (1927), S. 169–188
- [193] RIEMELMOSER, F. O.: Simulation der Versetzungsbewegung bei zyklisch belasteten Rissen, Montanuniversität Leoben, Österreich, Dissertation, 1997
- [194] RITZ, W.: Über eine Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik* 135 (1908), S. 1–61
- [195] RITZ, W.: Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. In: *Annalen der Physik* 28(4) (1909), S. 737–786
- [196] RÖDENAS, J. J., GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A., DIEZ, P. und FUENMAYOR, F. J.: Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199(37-40) (2010), S. 2607–2621
- [197] ROJEK, J., OÑATE, E., ZARATE, F. und MIQUEL, J.: Modelling of rock, soil and granular material using spherical elements. In: *2nd European Conference on Computational Mechanics; Cracow; Poland* (2001), S. 742–743
- [198] ROJEK, J. und OÑATE, E.: Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193, Issues 27-29 (2004), S. 3087–3128
- [199] ROSSMANITH, H.-P.: Grundlagen der Bruchmechanik. Springer Verlag, Wien, 1982
- [200] RÖSLER, J., HARDERS, H. und BÄKER, M.: Mechanisches Verhalten der Werkstoffe. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008
- [201] SAGAR, R. V. und PRASAD, B. K. R.: Modelling heterogeneity of concrete us-

- ing 2D lattice network for concrete fracture and comparison with AE study. In: *Sadhana, Indian Academy of Sciences* 34, Part 6 (2009), S. 865–886
- [202] SALEH, A. L. und ALIABADI, M. H.: Crack growth analysis in reinforced concrete using BEM. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124(9) (1998), S. 949–958
- [203] SAMUELSSON, A. und ZIENKIEWICZ, O. C.: History of the stiffness method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67 (2006), S. 149–157
- [204] SCHELLBACH, K.: Probleme der Variationsrechnung. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik* (1826), S. 293–363
- [205] SCHIJVE, J.: *Fatigue of structures and materials*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001
- [206] SCHLANGEN, E. und MIER, J. G. M.: Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. In: *Materials and Structures* 25 (1992), S. 534–542
- [207] SCHLECHT, S.: Implementierung der Diskreten-Elemente-Methode in ABAQUS, Studienarbeit, Universität Stuttgart, 2011
- [208] SCHOECK, G. und DORN, J. (Hrsg.): Thermodynamic Principles in High-temperature Materials. In: *Mechanical Behavior of Materials at elevated Temperatures*. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, London, 1961
- [209] SCHÜTZ, A.: A History of Fatigue. In: *Engineering Fracture Mechanics* 54 (2) (1996), S. 263–300
- [210] SÉNARMONT, M. H.: Mémoire sur la conductivite des substances cristallisées par la chaleur. In: *Second Mémoire Annales de Chimie Physique* 3 (XXII) (1848), S. 179–211
- [211] SHARPE, W. N. und SHARPE, W. N. J. (Hrsg.): *Handbook of Experimental Solid Mechanics*. Springer New York, 2008
- [212] SNEDDON, I. N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 187, 1009 (1946), S. 229–260
- [213] SOUZA NETO, E. A. und FEIJÓO, R. A.: Large Strain Multiscale solid constitutive models: Kinematical formulation. In: *Advanced Computational Materials Modeling: From Classical to Multi-Scale Techniques*. Wiley-VCH Verlag, Weinheim, Germany, 2011, S. 341–376
- [214] SPIERIG, S.: *Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten-, und Schalenproblemen*

- mit Hilfe der Gitterrostmethode, Dissertation, Technische Hochschule Hannover, 1963
- [215] SPIERIG, S.: Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gittermodellen. In: *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaften Gesellschaft V* (1964), S. 133–165
- [216] STIRLING, J.: Methodus Differentialis: sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum. In: *Londini (London), Typis Gul Bowyer* (1730)
- [217] SUKUMAR, N., HUANG, Z. Y., PRÉVOST, J.-H. und SUO, Z.: Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59 (2004), S. 1075–1102
- [218] SUMEC, J.: Developments in Civil Engineering. In: *Regular Lattice Plates and Shells* Bd. 33. Elsevier Science Publishers, 1990
- [219] SYMM, G. T.: Integral equation methods in potential theory, Part II. In: *Proceedings of the Royal Society of London A* 275 (1963), S. 33–46
- [220] SZABÓ, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien. Bd. 2. Birkenhäuser Verlag Stuttgart, 1979
- [221] SZABÓ, I.: Höhere Technische Mechanik. 6. Springer, Berlin, 2001
- [222] TANAKA, M., MATSUMOTO, T. und MORADI, M.: Application of boundary element method to 3-D problems of coupled thermoelasticity. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 16 (1995), S. 297–303
- [223] TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A. und H. PLETCHER, R.: Computational fluid mechanics and heat transfer. Taylor & Francis, Philadelphia, 1997
- [224] TRUESDELL, C. ; M. J. KLEIN, G. J. T. (Hrsg.): The tragicomical History of Thermodynamics 1822-1854, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 4. Springer Verlag Berlin, 1980
- [225] TRUNK, G.: Einfluß der Bauteilgröße auf die Bruchenergie von Beton, Dissertation, ETH-Zürich, 1999
- [226] TURNER, M., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. und TOPP, L. J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. In: *Journal of the aeronautical sciences / Institute of the Aeronautical Sciences, New York* 23 (1956), S. 805–823
- [227] VAN DER GIESSEN, E.: Creep rupture in polycrystalline material. In: *Mechanics of Microstructured Materials*. International Centre for Mechanical Sciences, CISM Courses and Lectures No. 464, Springer Wien New York, 2004, S. 283–306

- [228] WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2. Pergamon Press, Braunschweig, 1975
- [229] WEBER, W.: Über die spezifische Wärme fester Körper insbesondere der Metalle. In: *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 96 (20) (1830), S. 177–213
- [230] WEIBULL, W.: A Statistical Theory Of The Strength Of Materials. In: *Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm*. 151 (1939), S. 1–45
- [231] WEIBULL, W.: A statistical distribution function of wide applicability. In: *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), S. 293–297
- [232] WEIGAND, B.: Analytical methods for heat transfer and fluid flow problems. Springer, Berlin Heidelberg, 2004
- [233] WESTERGAARD, H. M.: Bearing Pressures and Cracks. In: *Journal of Applied Mechanics; Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Appendix* (1939), S. A49–A53
- [234] WIEGHARDT, K.: Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. In: *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes* 85 (1906), S. 139–176
- [235] WILLIAMS, M. L.: On the stress distribution at the base of a stationary crack. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), S. 109–114
- [236] WILLNER, K.: Kontinuums- und Kontaktmechanik, Synthetische und analytische Darstellung. Springer-Verlag, Berlin, 2003
- [237] WILSON, E. L.: A Digital Computer Program for the Steady State Temperature Analysis of Plane or Axisymmetric Bodies. In: *Report No. TD-44, Aerojet-General Corporation* (1965)
- [238] WITTEL, F. K., KUN, F., KRÖPLIN, B.-H. und HERMANN, H. J.: A study of transverse ply cracking using a discrete element method. In: *Computational Materials Science* 28, 3-4 (2003), S. 608–619
- [239] WITTEL, F. K., KUN, F., KRÖPLIN, B.-H. und HERMANN, H. J.: Breakup of shells under explosion and impact. In: *Physical Review E* 71 (2005)
- [240] WITTEL, F. K.: Diskrete Elemente - Modelle zur Bestimmung der Festigkeitsevolution in Verbundwerkstoffen, Dissertation, Universität Stuttgart, 2006
- [241] WÖHLER, A.: Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahn-Achseneinwirkenden Kräfte und der Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen. In: *Zeitschrift für Bauwesen* 10 (1860), S. 583–616

- [242] WÖHLER, A.: Über die Versuche zur Ermittlung der Festigkeit von Achsen, welche in den Werkstätten der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn zu Frankfurt a.d. O. angestellt sind. In: *Zeitschrift für Bauwesen* 13 (1863), S. 233–258
- [243] WÖHLER, A.: Resultate in der Central-Werkstatt der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn zu Frankfurt a. d. O. angestellten Versuche über die relative Festigkeit von Eisen, Stahl und Kupfer. In: *Zeitschrift für Bauwesen* 16 (1866), S. 67–84
- [244] WÖHLER, A.: Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl. In: *Zeitschrift für Bauwesen* 20 (1870), S. 73–106
- [245] WUNDERLICH, W. und PILKEY, W. C.: *Mechanics of structures, Variational and computational methods*. CRC Press, Inc., 2003
- [246] ZEIFMAN, M. I.: A coarse semi-analytical lattice model for lifetime statistics of loaded hierarchical materials. In: *Europhysics Letters* 63 (3) (2003), S. 333–339
- [247] ZIEGLER, E., ACCORSI, M. und BENNETT, M.: Continuum plate model for lattice block material. In: *Mechanics of Materials* 36 (2004), S. 753–766
- [248] ZIENKIEWICZ, O. C.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, London, 1977

