

# Zur aktiven Schallabstrahlungsminderung an Strukturen

Von der Fakultät Maschinenbau der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
**Klaus Hermann**  
aus Aulendorf

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. A. Kistner  
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. G. Hübner

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Januar 2006

Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik der  
Universität Stuttgart

2006

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit von 1995 bis 1998 als Doktorand in der Zentralen Forschung der Robert Bosch GmbH. Die Forschungsarbeiten wurden 1998 abgeschlossen und repräsentieren somit den damaligen Forschungs- und Wissensstand.

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Kistner danke ich, dass er mich während der gesamten Promotionsdauer betreute und mir zahlreiche und wertvolle Anregungen gab, insbesondere bei mathematischen und mechanischen Fragestellungen.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stetter für die freundliche Übernahme des Mitberichts und für seine Ratschläge, vor allem zu den durchgeführten Experimenten. Aufgrund seines Gesundheitszustands konnte er ab 2000 seine Funktion als Zweitgutachter nicht weiter wahrnehmen.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. G. Hübner danke ich, dass er sich nach dem Ausscheiden Prof. Stetters spontan anbot, die Funktion des Mitberichters zu übernehmen. Außerdem danke ich ihm für seine wertvollen Hinweise und für sein besonderes Interesse an meiner Arbeit. Seine Vorschläge, die Schalleistung mit der Direkten Finite Elemente Methode (DFEM) und dem Schallintensitätsmessverfahren zu bestimmen, konnten nicht mehr in der Form von Simulations- und Versuchsergebnissen berücksichtigt werden, da ich zwischenzeitlich für die DaimlerChrysler AG tätig war.

Der Robert Bosch GmbH danke ich, dass sie diese Studie durch das Bereitstellen der Forschungsmittel unterstützte und meinen fünfmonatigen Studien- und Forschungsaufenthalt am Virginia Polytechnic Institute (VPI), Blacksburg, U.S.A. ermöglichte, der entscheidend zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen hat. In diesem Zusammenhang danke ich Prof. Dr. C.R. Fuller und Prof. Dr. R.A. Burdisso für die dortige Betreuung und für die Gewährleistung einer äußerst forschungsfreundlichen Infrastruktur und Arbeitsumgebung. Ferner danke ich allen Mitarbeitern des Vibrations & Acoustics Laboratory am VPI für die überaus gastfreundliche Zusammenarbeit.

Allen Mitarbeitern der Abteilung FV/FLP der Robert Bosch GmbH, Arbeitsgruppe Akustik, danke ich für die große Hilfsbereitschaft sowie für die kollegiale und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre.

Entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit hat die ausgezeichnete firmenseitige Betreuung durch Herrn Dr. rer. nat. K. Bendel beigetragen, bei dem ich mich herzlich für die vielen kreativen Diskussionen und sachkundigen Hinweise bedanke. Herrn Dr. rer. nat. W. Keiper danke ich für die Unterstützung bei organisatorischen Angelegenheiten. Den Herren I. Brauer, R. Müller, R.D. Raithelhuber, W. Rottler und M. Walton danke ich für ihre tatkräftige Unterstützung beim Anfertigen von Teilen des Versuchsaufbaus und bei dessen Nutzung. Für die Unterstützung bei der Durchführung der Finite-Elemente-Simulationen danke ich den Herren Dipl.-Ing. H. Dietzhausen und Dipl.-Ing. V. Scheef. Weiter schulde ich Herrn Dipl.-Ing.(BA) O. Geppert großen Dank für sein enormes Engagement beim gemeinsamen Durchführen von Experimenten.

Schließlich danke ich ganz besonders meiner Ehefrau, meinem Sohn, meinen Eltern, Geschwistern und Freunden, dass sie mich stets unterstützten und motivierten und dadurch auf ihre Weise zum erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit beitrugen.

Gärtringen, im August 2006

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einer speziellen aktiven Schallminderungstechnik, der aktiven Schallabstrahlungsminderung (Active Structural Acoustic Control, ASAC). Mit ASAC wird die Schwingung einer Struktur derart beeinflusst, dass sie weniger Schallleistung abstrahlt. Dies erreicht man, indem gezielt zusätzliche Kräfte und/oder Momente auf der Strukturoberfläche eingeleitet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein adaptives digitales ASAC-System modelliert, rechnerisch optimiert und das Modell im Experiment weiter untersucht. Als Struktur wird eine rechteckige Stahlplatte mit den Maßen  $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$  gewählt, die an den Rändern fest eingespannt ist. Die Anzahl der verwendeten Aktoren und Sensoren wird auf jeweils zwei begrenzt, um im Hinblick auf kostengünstige praktische Anwendungen des ASAC-Systems den Aufwand klein zu halten.

Für die Plattenschwingung wird ein vollständiges mathematisches Modell hergeleitet. Dabei wird eine Alternative zur üblichen Rayleigh-Ritz-Methode vorgestellt, die vergleichbar genau, aber erheblich effizienter und anschaulicher ist. Außerdem wird die Schallabstrahlung modelliert und eine Formel für die modale Abstrahlungseffizienz einer an den Rändern fest eingespannten Platte aufgestellt.

Unter der Annahme idealer Verhältnisse werden mathematische Modelle für ASAC-Systeme mit unterschiedlicher Anregung entwickelt. Dabei wird der für eine effiziente Simulation von ASAC-Systemen wichtige mathematische Beweis erbracht, dass bei einem einzelnen ASAC-Aktor die Phase zwischen dem Schallanregungs- und Aktorsignal im optimalen Fall ein ganzzahliges Vielfaches von  $180^\circ$  betragen muss. Mit mehreren ASAC-Aktoren ist dies nicht mehr zwingend notwendig. Jedoch wird in dieser Arbeit gezeigt, dass man auch in diesem Fall die Simulationsprogramme effizienter machen kann, wenn man annimmt, dass die Phasen zwischen den Schallanregungs- und Aktorsignalen jeweils ein ganzzahliges Vielfaches von  $180^\circ$  betragen.

Um mit maximal zwei ASAC-Aktoren im betrachteten Frequenzbereich bis 1 kHz eine deutlich hörbare Schallminderung zu erreichen, müssen ihre Positionen optimiert werden. Zu diesem Zweck werden in dieser Arbeit mehrere Optimierungsmethoden vorgestellt. Dabei wird gezeigt, wie Genetische Algorithmen zur effektiven Optimierung mehrerer ASAC-Aktorpositionen ein-



gesetzt werden können.

Die Leistungsfähigkeit des betrachteten ASAC-Systems wird mittels der abgestrahlten Schallleistung bewertet, die über die Schwingform der Struktur berechnet werden kann. Da das verwendete Hüllflächenschalldruckmessverfahren abhängig von der Modenverteilung zu unterschiedlichen systematischen Fehlern führt, die in der vorliegenden Arbeit noch näher erläutert werden, wird hier die Bewertung allein anhand des berechneten Schallleistungswerts vorgenommen und durch gemessene Werte der Schallleistung sowie durch im Experiment gewonnene subjektive Eindrücke ergänzt, weil hierdurch Erkenntnisse gewonnen wurden, die die Simulationen nicht liefern konnten.

Als ASAC-Aktoren wurden Shaker und Piezoelemente verwendet. Der Einfluss der Kopplungsart zwischen der Platte und den Piezoelementen auf die Schwingform der Platte und damit auf das Schallminderungsergebnis bei ASAC wurde ebenfalls messtechnisch untersucht.

Die Simulationen von ASAC mit einem einzigen punktförmig wirkenden und optimal platzierten Aktor ergaben im untersuchten Frequenzbereich 50 bis 500 Hz monofrequent Schallleistungsminderungen bis zu 17.2 dB, im Mittel 10.6 dB für die exemplarisch betrachteten Frequenzen 100 Hz, 150 Hz und 300 Hz, jeweils mit einem optimal platzierten Aktor. Wurde der Aktor intuitiv positioniert, wurden im Frequenzbereich 50 bis 500 Hz Schallleistungsminderungen von bis zu 12.3 dB erreicht. Die mittlere Schallleistungsminderung betrug für die Frequenzen 100 Hz, 150 Hz und 300 Hz lediglich 1.5 dB. In entsprechenden Simulationen mit zwei Piezoelementen als ASAC-Aktoren wurden im Frequenzbereich 300 bis 700 Hz Schallleistungsminderungen bis 15.0 dB berechnet, im Mittel 11.3 dB für die beispielhaft gewählten Frequenzen 300 Hz, 500 Hz und 700 Hz, jeweils mit optimalen Aktorpositionen. Mit intuitiv bestimmten Aktorpositionen betrug die Schallleistungsminderung exemplarisch für 300 Hz nur 2.4 dB. Es konnte beobachtet werden, dass das ASAC-System besonders bei höheren Frequenzen sehr empfindlich auf Veränderungen der Aktorpositionen bzw. der Frequenz reagierte.

Im Experiment waren die berechneten Effekte, insbesondere die erzielten Schallpegelminderungen, subjektiv deutlich wahrnehmbar. Die gemessenen und berechneten Schallleistungswerte zeigten die gleichen Tendenzen. In der praktischen Realisierung spielt auch die Einspannung der Stahlplatte eine große Rolle. Hierzu konnte nachgewiesen werden, dass sich die vermeintlich fest eingespannte Platte für höhere Frequenzen zunehmend wie eine freie Platte verhält.

Daraus ergibt sich, dass sich das betrachtete ASAC-System mit maximal zwei Aktoren bei höheren Frequenzen erst dann für praktische Anwendungen eignet, wenn die anregende Frequenz konstant ist und die Aktoren sehr genau platziert werden können. Für die Simulation ist ein sehr genaues Modell erforderlich. Dabei muss insbesondere die im Modell angenommene Einspannung der schwingenden Struktur annähernd der realen entsprechen.

# Abstract

This thesis presents the application of a special noise control technique called the “Active Structural Acoustic Control (ASAC)” for a rectangular clamped plate. With ASAC the vibration of a structure is modified by applying additional forces or torques such that there is a reduction in the radiated noise power.

An adaptive digital ASAC system has been modelled and numerically optimized. The vibration model has been investigated in more detail with experiments. In the experimental setup a rectangular steel plate of the size  $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$  with edges clamped has been used. Since this thesis focuses on providing low-cost solutions, the number of actuators and sensors has been limited to two.

For the vibration of the plate a complete mathematical model has been derived. An alternative to the classic Rayleigh-Ritz method is presented which is comparably accurate but much more efficient and easy to visualize. Furthermore, the sound radiation has been modelled and an expression for the modal radiation efficiency of a clamped plate is presented.

Mathematical models for differently excited ASAC systems have been developed by assuming ideal conditions. For the case of a single actuator it has been analytically proven that the phase between the exciting signal and the actuator signal in optimum conditions has to be a whole number multiple of 180 degrees. With multiple actuators this is no longer necessary. However, it is analytically shown in this thesis that the simulation programs can be made more efficient by making the above assumption.

If the noise power needs to be reduced significantly by using at the most two actuators in the frequency range up to 1 kHz, their positions have to be optimized. For this purpose, several optimization techniques are discussed in this work. It is shown as to how Genetic Algorithms can be applied to efficiently optimize the locations of multiple actuators.

The performance of the investigated ASAC systems is evaluated with the radiated noise power which can be calculated from the oscillation of the structure. The noise pressure measuring technique of the surface envelope results in different systematic errors dependent on the modal distribution. Due to these errors, also discussed in this thesis, the ASAC systems are exclusively evaluated by calculated noise power values and completed by experimentally measured noise

power levels and subjective perceptions of noise pressure levels.

As actuators both shakers and piezo elements are used. The influence of the coupling between the plate and the piezoelectric actuators on the vibration mode of the plate and on the noise power level reduction through ASAC is experimentally investigated.

The simulations of ASAC with an optimally positioned shaker as an actuator in the investigated frequency range of 50 Hz to 500 Hz produced a monofrequent noise level reduction up to 17.2 dB with an optimally placed secondary actuator and an average of 10.6 dB for exemplarily investigated frequencies of 100 Hz, 150 Hz and 300 Hz respectively.

When the secondary actuator is placed intuitively in the same frequency range of 50 Hz to 500 Hz, then the noise power level reduction reaches up to 12.3 dB and is only 1.5 dB on an average for the frequencies of 100 Hz, 150 Hz and 300 Hz respectively. In the simulation with two piezo elements as ASAC actuators, a noise power reduction level of 15.0 dB in the frequency range of 300 to 700 Hz was obtained. An average of 11.3 dB was obtained for frequencies of 300 Hz, 500 Hz and 700 Hz respectively after optimal positioning of the secondary actuators. With intuitively determined actuator positions the noise power level reduction for 300 Hz is only 2.4 dB. It is observed that the ASAC system behaves very sensitively for slight changes in the actuator locations and especially more for higher frequencies.

The simulated effects have been subjectively perceived in the experiments, in particular the resulting noise pressure level reductions. The measured and calculated noise power values show the same tendencies. In practical applications the clamping of the steel plate also plays an important role. It can be shown that the clamped plate behaves more and more as a free, unclamped plate for higher frequencies.

Therefore, the analyzed ASAC systems with at the most two actuators are only suitable for practical applications at higher frequencies if the exciting frequency is constant and the actuators can be placed very accurately. For the simulation a very accurate model is needed, especially if the model for the clamping of the vibrating structure has to be very close to reality.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>4</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>12</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>18</b>
<b>2 Grundlagen der aktiven Schallabstrahlungsminderung</b>	<b>21</b>
2.1 Passive Lärminderung . . . . .	21
2.1.1 Grenzen der passiven Lärminderung . . . . .	23
2.2 Aktive Lärminderung . . . . .	24
2.2.1 Aktive akustische Lärminderung (ANC) . . . . .	26
2.2.2 Aktive Schwingungsunterdrückung (AVC) . . . . .	26
2.2.3 Aktive Schallabstrahlungsminderung (ASAC) . . . . .	28
2.2.4 Funktionsweise der aktiven Schallabstrahlungsminderung . . . . .	28
2.2.5 Aufbau eines ASAC-Systems . . . . .	32
<b>3 Modellierung der aktiven Schallabstrahlungsminderung</b>	<b>40</b>
3.1 Modellierung der Plattenschwingung . . . . .	40
3.1.1 Lösung der homogenen PDGL . . . . .	44
3.1.2 Lösung der inhomogenen PDGL . . . . .	47
3.1.3 Punktförmige Anregung durch eine harmonische Kraft . . . . .	49

3.1.4	Anregung der Platte mit einem Piezoelement . . . . .	50
3.2	Schallabstrahlungsrechnung . . . . .	53
3.2.1	Methoden der Schallabstrahlungsrechnung . . . . .	53
3.2.2	Berechnung der Schalldrucks mittels Rayleigh-Integral . . . . .	55
3.2.3	Bestimmung der Schallintensität . . . . .	57
3.2.4	Berechnung der Schalleistung . . . . .	58
3.3	Anzahl der zu berücksichtigenden Schwingungsmoden . . . . .	59
3.4	Modellierung des ASAC-Systems . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Optimierung der Sekundäraktorpositionen</b>	<b>75</b>
4.1	Formulierung des Optimierungsproblems . . . . .	75
4.2	Optimierungsmethoden . . . . .	76
4.2.1	Deterministische Optimierungsverfahren . . . . .	76
4.2.2	Stochastische Optimierungsverfahren . . . . .	78
4.3	Optimierung durch Genetische Algorithmen . . . . .	79
4.3.1	Funktionsweise von Genetischen Algorithmen . . . . .	80
4.3.2	Skalierung des Fitnesswerts . . . . .	84
4.4	Anwendung von Genetischen Algorithmen auf ASAC . . . . .	84
4.4.1	Wahl des Gitters . . . . .	84
4.4.2	Kodierung . . . . .	85
4.4.3	Bestimmung des Fitnesswerts . . . . .	86
4.4.4	Verbesserung des einfachen Genetischen Algorithmus . . . . .	87
4.4.5	Wahl der Parameter . . . . .	93
4.4.6	Beschränkungen bezüglich der Sekundäraktorpositionen . . . . .	94
4.4.7	Simulation eines Genetischen Algorithmus zur Optimierung der Sekundäraktorpositionen bei ASAC . . . . .	95

<b>5</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>98</b>
5.1	Einspannung der Stahlplatte . . . . .	99
5.2	Aktoren . . . . .	100
5.2.1	Shaker . . . . .	101
5.2.2	Piezoelemente . . . . .	102
5.3	Controller dX-57 . . . . .	108
5.4	Fehlermikrofone . . . . .	108
5.5	Messgröße zur Bewertung eines ASAC-Systems . . . . .	109
5.5.1	Verfahren zur Messung der Schalleistung . . . . .	109
5.5.2	Messung der Schalleistung mit dem Hüllflächenschalldruckverfahren . . .	110
5.6	Messung der Schwingformen . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Simulations- und Messergebnisse</b>	<b>116</b>
6.1	Anpassung des mathematischen Schwingungsmodells . . . . .	116
6.1.1	Experimentelle Modalanalyse (EMA) . . . . .	117
6.1.2	Modellvergleich . . . . .	119
6.1.3	Skalierung der Anregungssignale . . . . .	120
6.2	Anregung mit Piezoelementen . . . . .	120
6.2.1	Anregung einer Stahlplatte mit einem Piezoelement . . . . .	121
6.2.2	Einseitiges und beidseitiges Ankleben der Piezoelemente . . . . .	121
6.3	ASAC mit einem punktförmigen Sekundäraktor (Shaker) . . . . .	126
6.3.1	Intuitiv gewählte Position des Sekundärshakers . . . . .	127
6.3.2	Optimierung der Sekundärshakerposition . . . . .	134
6.4	ASAC mit örtlich verteilten Sekundäraktoren (Piezoelemente) . . . . .	139
6.4.1	Intuitiv gewählte Positionen der Piezoelemente . . . . .	139
6.4.2	Optimierung der Position der Piezoelemente . . . . .	143

6.4.3	Sensitivität des ASAC-Systems bezüglich der Sekundäraktorpositionen . . . . .	148
6.4.4	Erklärungen für die Abweichung der Simulations- von den Messergebnissen	155

**7 Zusammenfassung und Ausblick** **158**

**A Ermittlung der Kostenfunktion im Zeitbereich** **161**

A.1	Berechnung der Plattenschwingung bei Anregung mit einem Piezoelement . . . . .	161
A.2	Modale Schallabstrahlungseffizienz einer rechteckigen, an den Rändern fest eingespannten Platte . . . . .	162
A.3	Zeitliche Integration verschiedener Summenterme . . . . .	163
A.4	Beschreibung der Kostenfunktion in Matrizenform . . . . .	165

**B Bewertung der Schalleistungsmessungen aus Kap. 5 und 6 nach dem Hüllflächenschalldruckverfahren** **167**

B.1	Messabstand . . . . .	167
B.2	Gestalt der Messfläche . . . . .	168
B.3	Dimension der Doppelkapsel aus Holz . . . . .	169
B.4	Dimension der reflektierenden Holzplatte . . . . .	169
B.5	Anzahl der Mikrofone . . . . .	169

**Literaturverzeichnis** **170**

# Verzeichnis benutzter Symbole

$a$	Länge einer rechteckigen Platte, Skalierungsfaktor (Kap. 4.3.2) oder Beschleunigung eines Plattenpunkts senkrecht zur Plattenoberfläche (Kap. 5.2.1.1, Kap. 6.1.1)
$a_i$	Koeffizienten der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung für die Plattenschwingung
$a_{pe}$	Länge eines Piezoelements
$a_{st,i}$	Beschleunigung des $i$ -ten Strukturpunkts
$\underline{A}_{m,n,u,v}$	Matrix zur Berechnung der Kostenfunktion für ASAC
$b$	Breite einer rechteckigen Platte
$\underline{b}_{m,n,u,v}$	Vektor zur Berechnung der Kostenfunktion für ASAC
$c$	Schallgeschwindigkeit in Luft
$c_i$	Koeffizienten der Lösungsfunktionen der Rayleigh-Ritz-Methode
$c_{m,n,u,v}$	Skalar zur Berechnung der Kostenfunktion für ASAC
$C_{pe}$	elektrische Kapazität eines Piezoelements
$C_0$	Konstante, die die Wirkung eines Piezoelements auf eine Platte beschreibt
$d$	Minimum des mittleren euklidischen Abstands zwischen zwei Positionskonfigurationen
$d_{ij}$	Sharing-Abstand zwischen dem $i$ -ten und dem $j$ -ten Chromosom
$d_{max}$	Länge der Gitterdiagonalen
$d_{m,n,u,v}$	Skalar zur Berechnung der Kostenfunktion für ASAC
$d_{pe}$	Konstante, die den Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung und spezifischem Moment eines Piezoelements beschreibt
$dS$	Inhalt eines Elements auf einer Halbkugeloberfläche
$D$	Biegesteifigkeit des Plattenmaterials
$e(n)$	Fehler- oder Differenzsignal in der Mikrofonposition
$E$	Elastizitätsmodul (Kap. 2.1.1, Kap. 3), $z$ -Transformierte von $e(n)$ (Kap. 2.2.5.2) oder elektrische Feldstärke (Kap. 5.2.2.1)
$E_a, E_e$	absorbierte bzw. einfallende Schallenergie
$E_{max}$	maximale elektrische Feldstärke
$E_{pe}$	Elastizitätsmodul des Piezomaterials



$f$	Frequenz
$f_a$	Abtastfrequenz
$f_D$	Dopplerfrequenz
$f_g$	Grenzfrequenz
$f_{g,h}$	Grenzfrequenz eines Hochpassfilters
$f_{g,t}$	Grenzfrequenz eines Tiefpassfilters
$f_i$	Fitnesswert der $i$ -ten Zeichenkette eines Genetischen Algorithmus
$f_i^*$	skaliertes Fitnesswert der $i$ -ten Zeichenkette eines Genetischen Algorithmus
$f_M$	Modulationsfrequenz
$f_{m,n}$	Eigenfrequenz der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$f_n = f(n)$	diskrete Funktion
$f_p$	Frequenz der Primärerregung
$f_r$	Resonanzfrequenz
$f_u$	untere Grenzfrequenz des Schallmessraums
$F$	Amplitude der sinusförmigen Erregerkraft bei punktförmiger Anregung
$F(z)$	$z$ -Transformierte von $f_n$
$F_{pk}$	Kraftamplitude des $k$ -ten Primäraktors
$\hat{F}_{sl}$	Betrag der Kraftamplitude des $l$ -ten Sekundäraktors
$F_{sl} = \pm \hat{F}_{sl}$	vorzeichenbehaftete Kraftamplitude des $l$ -ten Sekundäraktors
$F^*$	Erregerkraft bei punktförmiger Anregung
$\underline{F}_s$	Vektor der Kraftamplituden der Sekundäraktorsignale
$g_{m,n}$	ortsabhängiger Anteil der Modalamplitude $W_{m,n}$
$g_{p(m,n)k}$ ,	
$g_{s(m,n)l}$	ortsabhängige Teile der Modalamplituden der Schwingungsanteile, die durch die Primär- bzw. Sekundäraktoren verursacht werden
$G_{m,n}$	modaler Frequenzgang
$h$	Dicke einer Platte oder einer Wand
$h_{ij}$	Hamming-Abstand zwischen der $i$ -ten und $j$ -ten Zeichenkette
$h_{pe}$	Dicke eines Piezoelements
$H$	$z$ -Übertragungsfunktion der Strecke zwischen Sekundärquelle und Fehlermikrofon
$H(u)$	Hilfsfunktion zur Berechnung der Eigenfunktionen der Balkenschwingungen
$I$	Betrag der Schallintensität
$J$	Kostenfunktion bei Optimierungen
$J(u)$	Hilfsfunktion zur Berechnung der Eigenfunktionen der Balkenschwingungen
$k$	Wellenzahl in Luft

$k_{m,n}$	Steifigkeitsterm der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$k_{st}$	Wellenzahl in einer Struktur
$k_x, k_y$	Strukturwellenzahl in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$K$	Korrekturwert für die Luftschalleistungsberechnung
$l$	Anzahl der Filterkoeffizienten
$l_d$	definierte Länge eines Schemas
$L$	Konstante, die die Wirkung eines Piezoelements auf die Platte beschreibt
$L_{m,n}$	Produkt aus modaler Abstrahlungseffizienz und modalem Frequenzgang
$L_P$	Schalleistungspegel
$\bar{L}_p$	flächig und zeitlich gemittelter Schalldruckpegel
$L_{p,i}$	zeitlich gemittelter Schalldruckpegel in der $i$ -ten Mikrofonposition
$L_{p1}, L_{p2}$	Schalldruckpegel vor bzw. nach einer Wand
$L_s$	Messflächenmaß
$m, n$	Indizes der Eigenschwingungen
$\bar{m} = \rho_M h$	spezifische Masse der Platte
$m_{m,n}$	Massenterm der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$M$	ortsunabhängige Amplitude des spezifischen Moments
$M^*$	spezifisches Moment (Moment pro Längeneinheit)
$\hat{M}$	ortsabhängige Amplitude des spezifischen Moments
$M_i$	Position des $i$ -ten Mikrofons
$M_{s_i}$	$i$ -tes Linienmoment am Rand eines rechteckigen Piezoelements
$\hat{M}_{sl}$	Amplitude des spezifischen Moments des $l$ -ten Sekundäraktors
$N$	Anzahl der Positionskombinationen der Sekundäraktoren
$N_B$	Anzahl der Bits pro Akteurposition
$N_C$	Anzahl der Zeichen pro Zeichenkette
$N_D$	Anzahl der Durchläufe eines Optimierungsalgorithmus
$N_F$	Anzahl der Fehlermikrofone
$N_{GP}$	Anzahl der Gitterpunkte
$N_M$	Anzahl der Messmikrofone
$N_p$	Anzahl der Primäraktoren
$N_{pop}$	Größe der Population (= Anzahl der Zeichenketten) eines Genetischen Algorithmus
$N_s$	Anzahl der Sekundäraktoren
$N_x, N_y$	Anzahl der Gitterlinien in $x$ bzw. $y$ -Richtung
$N_1$	Frequenzkonstante eines Piezoelements
$p$	Betrag des Schalldrucks
$p_z$	Druckamplitude auf der Plattenoberfläche infolge einer Anregung
$p_z^*$	Drucksignal auf der Plattenoberfläche infolge einer Anregung
$p^*$	Schalldruck als komplexwertige Größe

$P$	Schalleistung (Kap. 3 und Kap. 4) oder Polarisation (Kap. 5)
$P_i$	Position des $i$ -ten Piezo-Aktors
$P_{m,n}$	Modalamplituden des Anregungssignals
$P_{mit}$	Schalleistung mit ASAC
$P_{ohne}$	Schalleistung ohne ASAC
$\underline{r}$	Positionsvektor des Beobachtungspunkts
$r(n)$	Referenzsignal
$r^*(n)$	gefiltertes Referenzsignal
$r_M$	Abstand eines Fehlermikrofons vom Mittelpunkt einer rechteckigen Platte
$r_{st,i}$	Ortsvektor des $i$ -ten Strukturpunkts
$\underline{r}_s$	Ortsvektor der senkrechten Projektion des Beobachtungspunkts auf die Platte
$R$	Schalldämmmaß (Kap. 2.1), $z$ -Transformierte des Referenzsignals $r(n)$ (Kap. 2.2.5.2) oder Abstand des Beobachtungspunkts vom Mittelpunkt einer rechteckigen Platte (Kap. 3.2.2)
$R_{pe}$	ohmscher Widerstand eines Piezoelements
$s$	Weg, um den ein Sekundäraktor verschoben wird
$s(d_{ij})$	Sharing-Funktion
$S$	Fläche einer (halbkugelförmigen) Messfläche
$S_{aa}$	Autospektraldichte der Beschleunigung $a$
$S_{aF}, S_{Fa}$	Kreuzspektraldichten bezüglich der Beschleunigung $a$ und der Kraft $F$
$S_{FF}$	Autospektraldichte der Kraft $F$
$S_i$	Position des $i$ -ten Shaker-Aktors
$S_0$	normierte Halbkugeloberfläche
$t_e$	Zeit zur Übertragung des Primärerregungssignals zum Fehlersensor
$t_s$	Zeit zur Übertragung des Primärerregungssignals über den Controller zum Fehlersensor
$t_{str}$	zeitliche Verzögerung des Primärerregungssignals durch die Sekundärübertragungsstrecke
$T$	Dauer einer Sinusperiode
$T_p$	Dauer einer Sinusperiode bei Anregung mit der Frequenz $f_p$
$U$	Amplitude der elektrischen Spannung zur Ansteuerung eines Piezoelements
$U^*$	elektrische Spannung zur Ansteuerung eines Piezoelements
$U_{max}$	maximale elektrische Spannung zur Ansteuerung eines Piezoelements
$v$	Geschwindigkeit eines Strukturpunkts
$v_{m,n,eff}$	räumlich gemittelte Effektivgeschwindigkeit der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$v_n$	flächennormale Komponente der Schallschnelle
$V$	Wellenzahltransformierte der Geschwindigkeit $v$ (Kap. 2.2.4.1) und Volumen der Doppelkapsel aus Holz (Kap. B.3)

$V_V$	Volumen des Schallmessraums.
$w$	Plattenauslenkung
$w_h$	Lösung der homogenen Schwingungsgleichung einer Platte
$w_i(n)$	$i$ -ter Filterkoeffizient für den $n$ -ten Zeitschritt
$w_{(m,n)h}(x, y)$	ortsabhängige Amplitude der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$w_{part}$	partikuläre Lösung der Schwingungsgleichung einer Platte
$w_1$	ortsabhängige Amplitude der Plattenschwingung
$W$	$z$ -Transformierte der Filterkoeffizienten
$W_k$	Wahrscheinlichkeit für die Kreuzung
$W_m$	Wahrscheinlichkeit für die Mutation
$W_{(m,n)h}(x, y)$	Modalamplitude der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$W_{p(m,n)k}$	Modalamplitude des Schwingungsanteils, der durch den $k$ -ten Primäraktor verursacht wird
$W_{s(m,n)l}$	Modalamplitude des Schwingungsanteils, der durch den $l$ -ten Sekundäraktor verursacht wird
$(x, y)$	kartesische Koordinaten in der Struktur
$x(n)$	Eingangssignal des digitalen Filters
$(x_F, y_F)$	kartesische Koordinaten des Anregungspunkts bei punktförmiger Anregung
$(x_{pk}, y_{pk}),$ $(x_{sl}, y_{sl})$	kartesische Koordinaten des $k$ -ten Primäraktors bzw. des $l$ -ten Sekundäraktors
$(x_1, y_1),$ $(x_2, y_2)$	kartesische Koordinaten der Eckpunkte eines rechteckigen Piezoelements
$X$	$z$ -Transformierte von $x(n)$
$y(n)$	Ausgangssignal des digitalen Filters
$Y$	$z$ -Transformierte von $y(n)$
$z$	kartesische Koordinate senkrecht zur Strukturoberfläche
$\alpha$	Schallabsorptionsgrad (Kap. 2.1), Konvergenzfaktor für den LMS-Algorithmus (Kap. 2.2.5.1) oder charakteristische Größe für die Schallabstrahlung (Kap. 3.2.2)
$\alpha_1, \alpha_2$	Hilfsgrößen zur Berechnung der Eigenschwingungen
$\beta$	charakteristische Größe für die Schallabstrahlung
$\beta_1$	Hilfsgröße zur Berechnung der Eigenschwingungen
$\delta(x)$	Dirac-Funktion
$H_n$	$(n, n)$ -Hesse-Matrix
$\Delta H_{n-k}$	$(n - k)$ -Hauptabschnittsdeterminante von $H_n$
$\Delta m, \Delta n$	Anzahl der zusätzlich zu berücksichtigenden Schwingungsmoden
$\Delta P$	Schallleistungsminderung

$\Delta\bar{P}$	mittlere Schallleistungsminderung einer Population von Aktorpositionskonfigurationen
$\Delta\varphi_s$	Abweichung von der Phasenverschiebung $180^\circ$ zwischen Primär- und Sekundärschall
$\epsilon$	Faktor zur Berechnung der Schallleistung
$\eta_{m,n}$	charakteristische Größe für die Schallabstrahlung der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$\gamma^2$	Kohärenz zwischen zwei Signalen
$\Im\{\zeta\}$	Imaginärteil von $\zeta$
$\kappa$	Ähnlichkeitswert
$\kappa_g$	genotypischer Ähnlichkeitswert
$\kappa_p$	phänotypischer Ähnlichkeitswert
$\lambda$	Wellenlänge in Luft oder Wellenlänge eines Lasers in Vakuum
$\lambda_{HeNe}$	Wellenlänge eines Helium-Neon-Laserstrahls
$\lambda_n$	Wellenlänge der $n$ -ten Mode
$\lambda_u$	Wellenlänge bezüglich der unteren Grenzfrequenz des Schallmessraums
$\lambda_x$	Wellenlänge in $x$ -Richtung
$\mu$	Konvergenzfaktor eines Gradientenverfahrens
$\nabla^2$	Laplace-Operator
$\nu$	Querkontraktionszahl des Plattenmaterials
$\nu_{pe}$	Querkontraktionszahl des Piezomaterials
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
$\omega_{m,n}$	Kreisfrequenz der $(m, n)$ -Eigenschwingung
$\omega_p = 2\pi f_p$	Kreisfrequenz der Primärerregung
$\varphi$	Phasenverschiebung
$\varphi_{pk}$	Phasenverschiebung des $k$ -ten Primäraktors
$\varphi_s$	Phasenverschiebung zwischen Primär- und Sekundärschall
$\varphi_{sl}$	Phasenverschiebung des $l$ -ten Sekundäraktors
$\phi$	Winkel in der Horizontalen bezüglich der $x$ -Achse
$\psi_n(y)$	$n$ -Eigenfunktion der Balkenschwingung in $y$ -Richtung
$\Re\{\zeta\}$	Realteil von $\zeta$
$\rho$	Dichte von Luft
$\rho_M$	Dichte des Plattenmaterials
$\sigma(x)$	Sprungfunktion
$\varsigma$	modale Abstrahlungseffizienz
$\theta$	Abstrahlwinkel bezüglich der Normalenrichtung der Strukturoberfläche
$\chi_i(x, y)$	Lösungsfunktionen der Rayleigh-Ritz-Methode
$\xi_m(x)$	$m$ -Eigenfunktion der Balkenschwingung in $x$ -Richtung
$\zeta$	Faktor, der die Schallabstrahlung infolge der Überlagerung aus Primär- und Sekundärerregung im Zeitbereich beschreibt

# Kapitel 1

## Einleitung

In der modernen Industriegesellschaft hat sich unter allen Umwelteinflüssen, die der Mensch am Arbeitsplatz, im Verkehr, zu Hause oder bei der Erholung erfährt, der Lärm als besonders unangenehm herauskristallisiert. So kommt es beispielsweise, dass aufgrund des gestiegenen Umweltbewusstseins und gehobener Ansprüche die Kaufentscheidung für ein Produkt in immer stärkerem Maße durch dessen akustische Eigenschaften beeinflusst wird. Außerdem werden die Gesetzesauflagen zur Begrenzung der Lärmbelastung am Arbeitsplatz immer weiter verschärft. Aus diesen Gründen kommt der Lärmbekämpfung eine stetig wachsende Rolle zu.

Zur Lärm- oder Schallminderung stehen zahlreiche Techniken zur Verfügung, die sich in passive und aktive Methoden unterteilen lassen. Passiv kann die Schallemission durch konstruktive Maßnahmen an der Quelle oder durch die Verwendung von schalldämmenden oder schalldämpfenden Materialien gemindert werden. Um den Luftschall auch bei tiefen Frequenzen hörbar zu mindern, werden große Massen und Dicken der Dämm- und Dämpfstrukturen benötigt. Vor allem in diesem Frequenzbereich bieten sich ergänzend aktive Schallminderungsverfahren an.

Bei klassischen Methoden der aktiven Schallminderung wird mittels Lautsprechern ein Gegenschallsignal zur Kompensation des Schalls durch Interferenz erzeugt (Active-Noise-Control-System, ANC-System). Mit diesen Techniken kann der Schall im Raum hauptsächlich nur lokal in unmittelbarer Entfernung der Sensoren (Mikrofone) kompensiert werden.

Daraus entstand die Idee, bereits die Abstrahlung des Schalls zu verhindern, um somit eine bessere Schalleistungsminderung zu erzielen. Mit Hilfe der seit Anfang der 80er Jahre entwickelten Methode der aktiven Schallabstrahlungsminderung (Active Structural Acoustic Control, ASAC) wird im Gegensatz zu ANC die Ursache des Schalls, also die Schwingung einer Struktur, so beeinflusst, dass die Struktur weniger Schalleistung abstrahlt. Dies geschieht durch das Einleiten zusätzlicher Kräfte und/oder Momente auf der Strukturoberfläche.

In der vorliegenden Arbeit wird ein adaptives digitales ASAC-System modelliert, rechnerisch optimiert und das Modell im Experiment weiter untersucht. Frühere Arbeiten [25, 27, 77] haben bereits gezeigt, dass ASAC-Systeme durch die Verwendung entsprechend vieler Aktoren und Sensoren bei einfachen geometrischen Strukturen zu einer deutlichen Schalleistungsminderung führen, selbst wenn ein breitbandiges Schallsignal vorliegt. Als mögliche Anwendungen kommen dabei vergleichsweise große Strukturen wie z.B. Rumpfe von Flugzeugen oder Unterseebooten sowie Autokarosserien in Frage. Mit der Zahl der Aktoren und Sensoren steigen der Aufwand und die Systemkosten stark an, was u.a. daran liegt, dass die Komplexität des für ASAC notwendigen Regelsystems mit dem Quadrat der Anzahl der Aktoren und Sensoren zunimmt.

Um diese Technik auch in Großserienprodukten wie Haushaltsgeräten ökonomisch einzusetzen, ist das Ziel dieser Arbeit, ein ASAC-System, das mit maximal zwei Aktoren und Sensoren auskommt, auf die erzielbare Schallabstrahlungsminderung, seine Robustheit und seine praktische Anwendbarkeit zu untersuchen. Als zu betrachtende Struktur ist eine Stahlplatte gewählt worden, die die Maße  $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$  besitzt und an den Rändern fest eingespannt ist. Während frühere Arbeiten vorwiegend bei tiefen Frequenzen durchgeführt wurden, wurde hier besonderes Augenmerk auf höhere Frequenzen (hohe Modendichten) gelegt.

Neben der Anzahl der Aktoren haben auch die Aktorpositionen einen großen Einfluss auf die erreichbare Schallabstrahlungsminderung. Deshalb werden in dieser Arbeit vollständige mathematische Modelle für verschiedenartig konfigurierte ASAC-Systeme hergeleitet, auf deren Grundlage die Aktorpositionen rechnerisch optimiert werden. In diesem Zusammenhang wird gezeigt, wie Genetische Algorithmen zur effizienten Optimierung mehrerer Aktorpositionen eingesetzt werden können.

In der vorliegenden Arbeit werden zuerst in Kapitel 2 die Grundlagen der Schallminderung vermittelt. Es werden passive Schallminderungsverfahren vorgestellt und deren Grenzen aufgezeigt. Ausgehend davon werden aktive Methoden zur Schallminderung beschrieben und auf ihre praktische Anwendbarkeit geprüft. Die aktive Schallabstrahlungsminderung (ASAC) wird vorgestellt, indem ihre Funktionsweise und der Aufbau eines ASAC-Systems diskutiert werden.

In Kapitel 3 wird ein mathematisches Modell für ein System zur aktiven Schallabstrahlungsminderung an einer rechteckigen Platte hergeleitet, die an den Rändern fest eingespannt ist. Darauf aufbauend werden in Kapitel 4 die Aktorpositionen optimiert, um im Falle von maximal zwei Aktoren eine deutlich hörbare Wirkung des ASAC-Systems zu erzielen. Als Optimierungskriterium wird gewählt, dass die von der schwingenden Platte abgestrahlte Schalleistung minimal sein soll. Es wird geprüft, inwieweit Genetische Algorithmen zur Optimierung mehrerer Aktorpositionen eingesetzt werden können.

Zur experimentellen Verifikation des mathematischen Schwingungsmodells mit Körperschallmessungen ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Versuchsaufbau entwickelt und realisiert worden. Zusätzlich wurde mit einer vorhandenen Vorrichtung die Schalleistung nach

dem Hüllflächenschalldruckverfahren gemessen. Beide Versuchsanordnungen werden in Kapitel 5 beschrieben.

In Kapitel 6 werden die Simulations- und Messergebnisse diskutiert und davon Aussagen bezüglich der praktischen Anwendbarkeit von ASAC-Systemen mit maximal zwei Aktoren abgeleitet. Dabei dienen die gemessenen Schalleistungswerte vorrangig der qualitativen Ergänzung. Die Ergebnisse der Arbeit sind in Kapitel 7 zusammengefasst.



## Kapitel 2

# Grundlagen der aktiven Schallabstrahlungsminderung

Klassisch werden zur Lärmbekämpfung *passive Methoden* verwendet. Dabei sollte die Schallabstrahlung möglichst direkt an der Schallquelle durch konstruktive Primärmaßnahmen gemindert werden. Außerdem können passive Sekundärmaßnahmen ergriffen werden, wie z.B. die *Schalldämmung* mittels einer Wand oder Kapsel oder die *Schalldämpfung* im Raum.

Die klassischen Verfahren sind bei tiefen Frequenzen aufwendig. Dort bieten sich *aktive Schallminderungsmethoden* an, die seit Beginn der 70er Jahre für zahlreiche Anwendungen vorgestellt wurden. Bei diesen Techniken werden Aktoren eingesetzt, die das Schallfeld aktiv beeinflussen. Es besteht die Möglichkeit, mit Hilfe der *aktiven akustischen Schallminderung* direkt auf das Schallfeld einzuwirken oder die Schwingung der schallabstrahlenden Struktur durch *aktive Schwingungsunterdrückung* oder *aktive Schallabstrahlungsminderung* zu beeinflussen. [Abb. 2.1](#) gibt einen Überblick über die gängigen Lärminderungsverfahren.

### 2.1 Passive Lärminderung

Durch konstruktive Maßnahmen an der Schallquelle kann erreicht werden, dass die Quelle weniger Schall abstrahlt. Denkbar ist beispielsweise die Veränderung der Masse, der Abmessungen, der Form und des Materials der abstrahlenden Flächen. Die *Schalldämmung* an einer Wand [3, 71, 93] stellt eine sekundäre Lärminderungsmethode dar, mit der die Schallabstrahlung im Nahbereich der Schallquellen gemindert werden kann. Dabei wird erreicht, dass nur ein Teil der von einer Quelle erzeugten Schallenergie durch die Wand durchgelassen wird. Der übrige Teil wird an der Wand reflektiert, in der Wand durch *Schallabsorption* in Wärme umgesetzt oder als Körperschall an benachbarte Bauteile abgeleitet, wie [Abb. 2.2](#) zeigt.

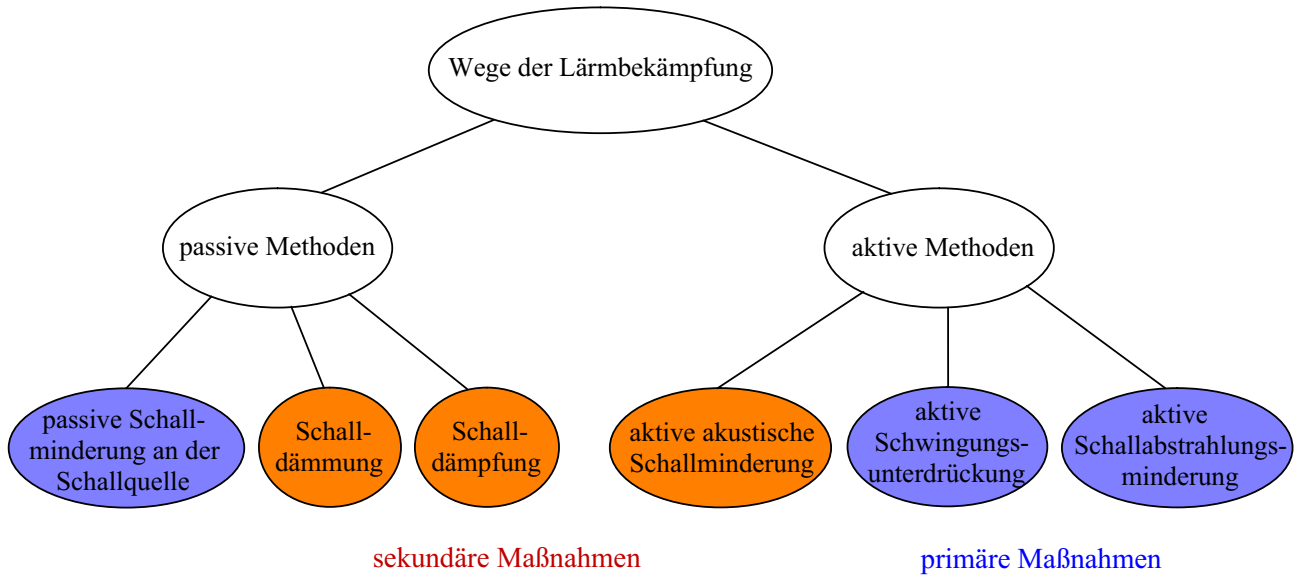


Abbildung 2.1: Lärmminderungsverfahren.

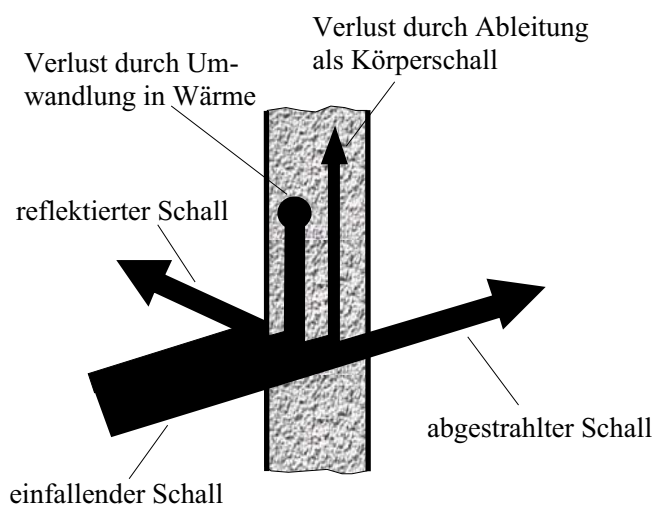


Abbildung 2.2: Schalldämmung an einer Wand.

Der Grad der Schalldämmung wird durch das *Schalldämmmaß*  $R$  charakterisiert, das definiert ist als

$$R = L_{p1} - L_{p2} \quad , \quad (2.1)$$

wobei  $L_{p1}$  und  $L_{p2}$  den Schalldruckpegel vor bzw. nach der betrachteten Wand bedeuten. Eine weitere passive Sekundärmaßnahme zur Schallminderung ist die *Schalldämpfung*, bei der ausschließlich das Absorptionsprinzip angewandt wird. Absorption von Luftschall wird durch schallschluckende Materialien, Resonatoren und Schalldämpfer erzielt. Körperschall kann durch körnige Medien, homogene Dämpfungsschichten und Resonanzdämpfung absorbiert werden [71]. Der Grad der Schallabsorption an einer Grenzschicht wird beschrieben durch den *Schallabsorptionsgrad*  $\alpha$ . Dafür gilt

$$\alpha = \frac{E_a}{E_e} \quad , \quad (2.2)$$

wobei  $E_e$  und  $E_a$  die einfallende bzw. absorbierte Schallenergie bedeuten.

### 2.1.1 Grenzen der passiven Lärminderung

In diesem Abschnitt wird an Beispielen gezeigt, dass die Schallminderung durch klassische Maßnahmen mit fallender Frequenz aufwändiger wird. Das Schalldämmmaß einer ebenen Wand (vgl. Gl. (2.1)) kann oberhalb der Grenzfrequenz<sup>1</sup> erhöht werden, indem man die Masse bzw. Dicke der Wand vergrößert. Unterhalb der Grenzfrequenz muss die Wand versteift werden, um das Schalldämmmaß zu vergrößern [3]. In jedem Fall nimmt das Schalldämmmaß mit sinkender Frequenz tendenziell ab, was in [Abb. 2.3](#) beispielhaft für Betonwände ( $\rho = 1600 \text{ kg m}^{-3}$ ) unterschiedlicher Dicken dargestellt ist.

Der Schallabsorptionsgrad  $\alpha$  fällt ebenfalls mit abnehmender Frequenz. Dies ist in [Abb. 2.4](#) für unterschiedliche Absorptionsmaterialien dargestellt. Die abgebildeten Frequenzgänge können anschaulich erklärt werden: Je kleiner die Frequenz  $f$  ist, umso größer ist nach

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2.3)$$

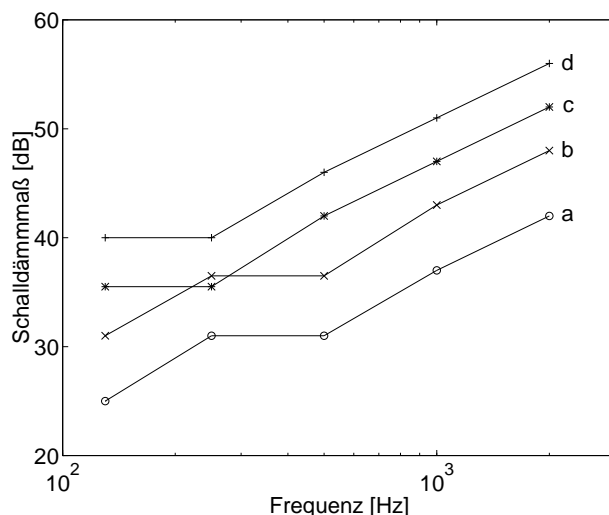
die Wellenlänge  $\lambda$ , wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft bedeutet. Mit steigender Wellenlänge sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass die Schallwellen in die Poren der schallabsorbierenden Materialien vordringen können, um dort in Form von Verwirbelungen oder als Wärme im Absorbermaterial zu dissipieren. Somit sinkt der Absorptionsgrad  $\alpha$  mit fallender Frequenz.

---

<sup>1</sup>Die Grenzfrequenz  $f_g$ , bei der die Biegeschwindigkeit in der Wand gleich wie die der Luft bei streifendem Einfall ist, ist für eine Wand der Dichte  $\rho$ , der Dicke  $h$ , der Querkontraktionszahl  $\nu$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  gegeben durch [3]

$$f_g = \frac{c^2}{2\pi h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad .$$

Deshalb müssen die Masse und Dicke des Absorbers vergrößert werden, um auch bei sehr tiefen Frequenzen eine hohe Schallminderung zu erzielen. Als Faustregel gilt, dass passive Sekundärmaßnahmen zur Luftschallminderung zu aufwändig sind, wenn die Frequenz kleiner als 2 kHz ist.



	Dicke [mm]	Masse/Fläche [kg/m <sup>2</sup> ]
a	50	80
b	100	160
c	150	240
d	200	320

Abbildung 2.3: Schalldämmmaß für Betonwände unterschiedlicher Dicken (aus [3]).

## 2.2 Aktive Lärminderung

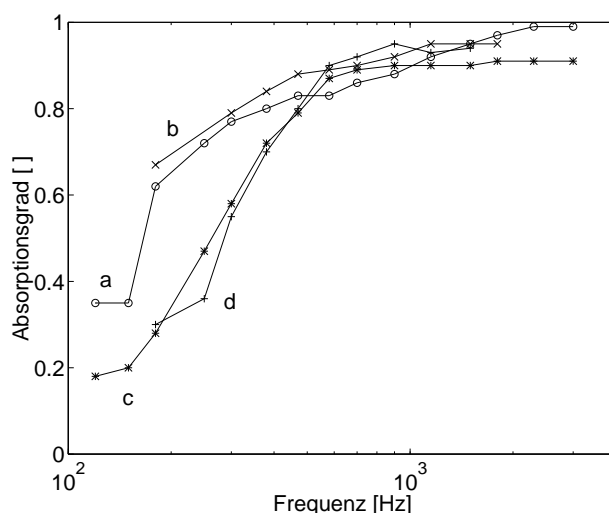
Bei tiefen Frequenzen können zur Lärminderung Techniken eingesetzt werden, deren Grundprinzip darin besteht, dass ein vorhandener *Primärlärm* durch ein künstlich erzeugtes Gegenschallsignal durch Interferenz lokal kompensiert wird. Der Gegenschall entspricht einem Abbild des Primärlärms, das um die *Phase*  $\varphi_s$  gegenüber dem Primärlärm verschoben ist. Im idealen Fall beträgt die Phase

$$\varphi_s = 180^\circ \quad , \quad (2.4)$$

so dass sich der Primärlärm und der Gegenschall gegenseitig lokal auslöschen. Je mehr sich die Phase von  $180^\circ$  unterscheidet, umso schlechter kann der Primärlärm durch den Gegenschall kompensiert werden. Das spielt vor allem bei hohen Frequenzen eine Rolle, was in [54] am Beispiel der akustischen Schallminderung erläutert wird. Demnach darf die Phase um maximal

$\Delta\varphi_s = 5^\circ$  von  $180^\circ$  abweichen, wenn eine Schalleistungsminderung von mindestens 20 dB erzielt werden soll. Bei der Frequenz  $f = 2$  kHz entspricht dies einer Wegstrecke

$$s = \lambda \frac{\Delta\varphi_s}{360^\circ} = \frac{c\Delta\varphi_s}{360^\circ f} \approx 2.4 \text{ mm} \quad .$$



$d$  ... Absorberschichtdicke  
 $d_N$  ... Nenndicke des Materials

- a) Kamilit-Mineralwolle-Bahn BBP 60/60,  $d = 110$  mm (2 Lagen je  $d_N = 60$  mm)
- b) Lose Glaswolle, spinnbar,  $d = 100$  mm,  $\rho_A = 75$  kg/m<sup>3</sup>
- c) Kamilit-Mineralwolle-Bahn BBP 60/80,  $d = 70$  mm ( $d_N = 80$  mm)
- d) Basaltwollefilz;  $d = d_N = 70$  mm

Abbildung 2.4: Schallabsorptionsgrad verschiedener Materialien (aus [3]).

Die Gegenschallquelle darf also nicht um mehr als 2.4 mm verschoben platziert werden, wenn eine Schalleistungsminderung von mindestens 20 dB erreicht werden soll. Diese Wegstrecke wird noch kleiner, wenn neben dem Phasenfehler der Amplitudenfehler im Gegenschallsignal berücksichtigt wird. Man sieht also, dass die Systemanforderungen in einem experimentellen Aufbau eines aktiven akustischen Schallminderungssystems bei hohen Frequenzen nur schwer einzuhalten sind. Diese Aussage gilt analog für alle aktiven Schallminderungstechniken. Wie in Abb. 2.1 dargestellt ist, können unter aktiven Lärm-minderungsverfahren die *aktive akustische Lärm-minderung*, die *aktive Schwingungsunterdrückung* sowie die *aktive Schallabstrahlungs-minderung* zusammengefasst werden.

## 2.2.1 Aktive akustische Lärminderung (ANC)

Bei der aktiven akustischen Lärminderung, die auch unter dem Begriff *Active Noise Control (ANC)* bekannt ist, wird einem Primärlärmsignal mit Hilfe von Zusatzschallquellen ein Gegen- oder Sekundärschallsignal überlagert, das den Primärlärm nach dem Prinzip der destruktiven Interferenz kompensieren soll.

In [Abb. 2.5](#) ist ein einfaches ANC-System dargestellt. Ein Lautsprecher erzeugt das Sekundärschallsignal, das dem Primärlärm überlagert wird. Mit Hilfe eines Mikrofons wird das Summensignal gemessen und negativ verstärkt zum Lautsprecher zurückgeführt. Dieses System wird in aktiven Kopfhörern oder Gehörschutzkapseln eingesetzt. Der Primärlärm wird dabei nur in unmittelbarer Umgebung des Mikrofons deutlich verringert.

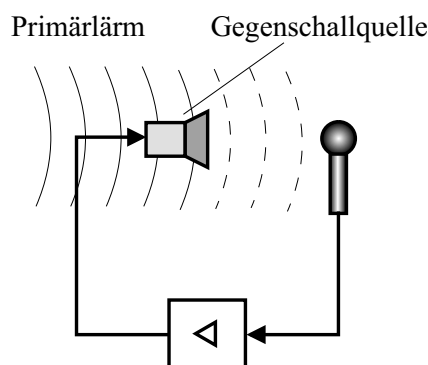


Abbildung 2.5: *Einfaches ANC-System.*

Im Allgemeinen führen einfache ANC-Systeme nur in bestimmten Punkten oder in eindimensionalen Systemen (z.B. ebene Wellen in einem Rohr) zu einer erkennbaren Lärminderung. In dreidimensionalen Schallfeldern müssen viele Mikrofone und Sekundärlautsprecher aufgestellt werden, damit der Schall generell gemindert werden kann. Außerdem muss der Verstärker durch einen Mehrkanalregler ersetzt werden. Selbst in diesem Fall ist die gleichmäßige Schallminderung im Raum schwierig, insbesondere wenn die Lärmquelle räumlich ausgedehnt ist [17, 90]. Zur Lösung des Problems der räumlichen Schallminderung bei tiefen Frequenzen bieten sich alternative aktive Verfahren an, die im Folgenden vorgestellt werden. Bei diesen Techniken wird nicht die Wirkung, also der Lärm, bekämpft, sondern die Ursache, d.h. die Lärmerzeugung.

## 2.2.2 Aktive Schwingungsunterdrückung (AVC)

Bei der aktiven Schwingungsunterdrückung (*Active Vibration Control (AVC)*) verringert man die Auslenkungen einer schwingenden und schallabstrahlenden Struktur in bestimmten Punkten. [Abb. 2.6](#) zeigt ein einfaches System zur aktiven Schwingungsunterdrückung. Ein Körperschallsensor misst die Beschleunigung senkrecht zur Oberfläche in einem Punkt der schwingen-

den Struktur. Als Körperschallsensoren werden üblicherweise Beschleunigungsaufnehmer oder PVDF-Folien eingesetzt (siehe Kap. 2.2.5.5). Das Messsignal wird negativ verstärkt und dem Sekundäraktor zugeführt. Je nachdem, ob der Sekundäraktor punktförmig (z.B. als elektromagnetischer Schwingungserreger, Shaker) oder flächig (Piezoelement) auf die Struktur einwirkt, übt er eine Kraft bzw. ein Moment auf die Strukturoberfläche aus.

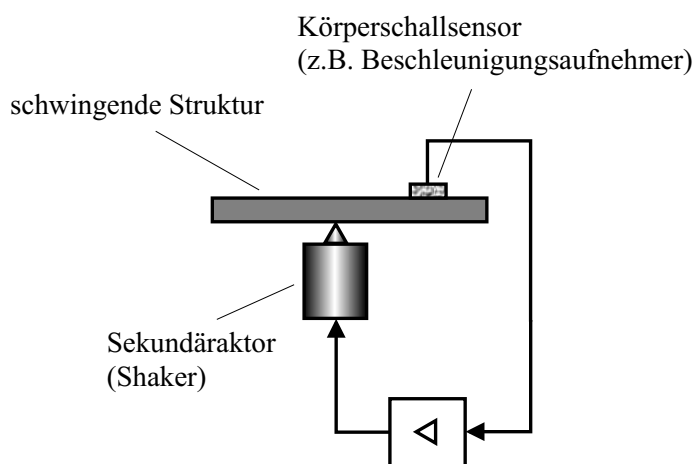


Abbildung 2.6: *Einfaches AVC-System.*

Die Unterdrückung der Schwingung in  $N_F$  Punkten der Strukturoberfläche entspricht mathematisch der Minimierung der Kostenfunktion  $J$ , die aus der Summe der Quadrate der Beschleunigungsbeträge in den  $N_F$  Punkten gebildet wird. Das Optimierungskriterium lautet

$$J(\underline{r}_{st,1}, \underline{r}_{st,2}, \dots, \underline{r}_{st,M}) = \sum_{i=1}^{N_F} |a_{st,i}|^2 \stackrel{!}{=} \min \quad , \quad (2.5)$$

wobei  $\underline{r}_{st,i}$  der Ortsvektor und  $a_{st,i}$  die Beschleunigung senkrecht zur Strukturoberfläche des  $i$ -ten Punkts auf der Strukturoberfläche sind.

AVC besitzt u.a. zwei Nachteile:

1. Die Schwingung kann nur in unmittelbarer Umgebung der Sensoren unterdrückt werden. In ungünstigen Fällen nimmt die mittlere Schwingungsamplitude sogar zu.
2. Selbst wenn die mittlere Schwingungsamplitude durch AVC verkleinert wird, bedeutet das noch nicht, dass weniger Schalleistung abgestrahlt wird. Durch AVC kann die Struktur möglicherweise auf besser abstrahlende Schwingformen ausweichen. Wenn AVC auch Schallminderung zur Folge haben soll, muss die Schwingung in vielen Punkten der Struktur unterdrückt werden. Dann werden entsprechend viele Aktoren und Sensoren benötigt [75].

Ein Spezialfall der Schwingungsunterdrückung ist die *aktive Stabilisierung* einer Struktur (*Active Instability Control (AIC)*). Dabei wird die Schwingung bereits im Einschwingvorgang unterdrückt.

### 2.2.3 Aktive Schallabstrahlungsminderung (ASAC)

Bei der aktiven Schallabstrahlungsminderung, die man auch als *Active Structural Acoustic Control (ASAC)* bezeichnet, wird in Analogie zu AVC die Schwingung einer Struktur beeinflusst. Mittels eines oder mehrerer Sekundäraktoren werden punktförmig, z.B. durch einen elektromagnetischen Schwingungserreger, zusätzliche Kräfte oder flächig zusätzliche Momente direkt auf die Strukturoberfläche übertragen, wie in Abb. 2.7 dargestellt.

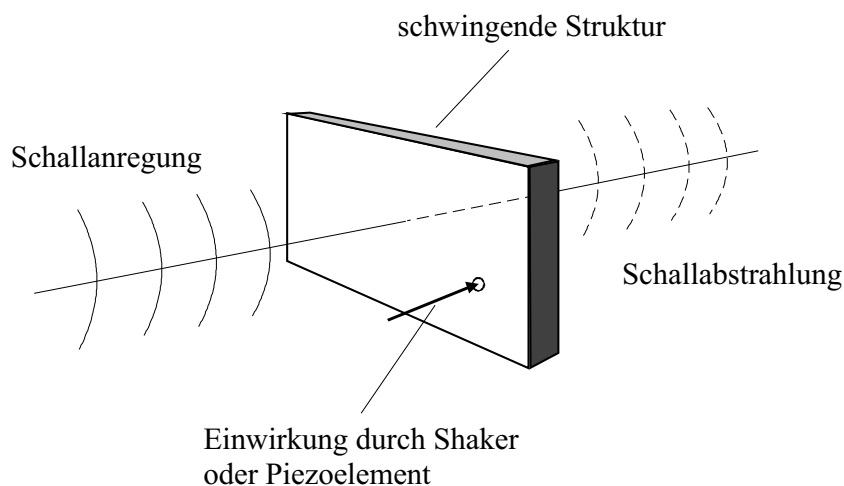


Abbildung 2.7: *Prinzip von ASAC.*

Im Gegensatz zu AVC ist nicht die Schwingungsunterdrückung das Ziel, sondern die Schallabstrahlungsminderung. Dies entspricht einer Minimierung der Kostenfunktion  $J$ , die nicht wie bei AVC direkt von Strukturschwingungsgrößen abhängt, sondern von Schallfeldgrößen (Schalldruck, Schallintensität, Schallleistung, o.ä.). Wenn beispielsweise die Schalldrücke mit  $N_F$  Fehlermikrofonen gemessen werden, liegt es nahe, die Kostenfunktion als Summe der quadrierten Schalldruckbeträge in den Fehlermikrofonpositionen zu definieren:

$$J = \sum_{i=1}^{N_F} p_i^2 \stackrel{!}{=} \min . \quad (2.6)$$

Sinnvollerweise sollte die Schallleistung  $P$  als Kostenfunktion genommen werden (vgl. Kap. 3.2.4). Dies setzt voraus, dass genügend Mikrofone zur Schallleistungsmessung vorhanden sind. In Kap. 3 wird die mathematische Modellierung der aktiven Schallabstrahlungsminderung im Detail erklärt.

### 2.2.4 Funktionsweise der aktiven Schallabstrahlungsminderung

Um das Prinzip der aktiven Schallabstrahlungsminderung zu verstehen, werden zunächst einige Grundlagen der Schallabstrahlung betrachtet. Die Schwingung einer Struktur setzt sich



gemäß der Fourieranalyse aus unendlich vielen Eigenschwingungen zusammen, die als *Schwingungsmoden* bezeichnet werden. Jeder Schwingungsmode ist eine *Eigen-* oder *Resonanzfrequenz* zugeordnet. Bei ebenen Strukturen, die an den Rändern fest eingespannt sind, werden die Schwingungsmoden gemäß der Anzahl ihrer Bäuche bezeichnet. Aus Gründen der einfacheren Darstellung soll dies im Folgenden anhand einer eindimensionalen Struktur, z.B. eines Balkens, veranschaulicht werden: Bei einer Eigenschwingung mit  $n$  Bäuchen spricht man dann von der  $n$ -Mode. In Abb. 2.8 sind die 2-Mode und die 3-Mode eines an den Enden einfach unterstützten Balkens dargestellt. Unter der Voraussetzung, dass die Wellenlänge  $\lambda_n$  der strahlenden  $n$ -Mode klein gegenüber der Wellenlänge  $\lambda$  des Schalls in Luft ist ( $\lambda_n < \lambda$ ), können die in Abb. 2.8 gemäß ihrer Phasenlage mit  $+$  und  $-$  gekennzeichneten Viertelwellenbereiche als lokale Schallquellen aufgefasst werden [81]. Dann führen benachbarte gegenphasige Viertelwellenbereiche zu einem “*akustischen Kurzschluss*” in der Umgebung der Struktur. Bei geradzahligem Moden kompensieren sich diese Gebiete in ihrer Wirkung, während bei ungeradzahligem Moden die Bereiche an den Enden übrigbleiben. Das hat für  $\lambda_n < \lambda$  folgende Konsequenzen:

1. Ungeradzahligem Moden strahlen Schall besser ab als geradzahligem.
2. Die Schallabstrahlung der ungeradzahligem Moden geschieht hauptsächlich an den Rändern der schwingenden Struktur [81, 108].

Außerdem gilt die Faustregel, dass die Abstrahlungseffizienz mit zunehmender Zahl der Schwingungsbäuche sinkt, da die randnahen, schallabstrahlenden Bereiche kleiner werden.

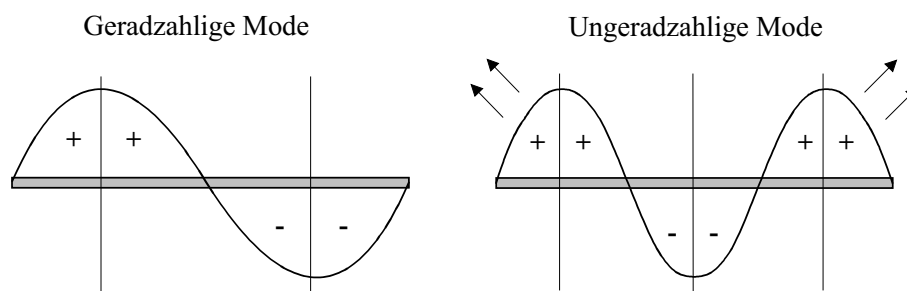


Abbildung 2.8: *Eigenschwingungen eines Balkens.*

Wenn die Wellenlänge  $\lambda_n$  der strahlenden Mode größer ist als in Luft ( $\lambda_n > \lambda$ ), kann die Schallabstrahlung nicht mehr durch das Prinzip der Strahlerzerlegung erklärt werden. Ein akustischer Kurzschluss kann dann nur sehr eingeschränkt auftreten, so dass langwellige Strahler den Schall effizient ins Fernfeld abstrahlen. Der Schall wird unter einem bestimmten Winkel  $\theta$  zur Normalenrichtung der Strukturoberfläche abgestrahlt. Nach [81] gilt für  $\theta$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{\lambda_n} \quad . \quad (2.7)$$

Generell kann die folgende Aussage gemacht werden: Je größer das Verhältnis aus Strahlerlänge zur Wellenlänge des Luftschalls ist, desto mehr Moden strahlen Schall effizient ins Fernfeld ab.

Bei ASAC müssen deshalb zur Verringerung der Schallabstrahlung niedrige ungeradzahlige Schwingungsmoden gedämpft werden auf Kosten der Verstärkung hoher geradzahliger Moden. Im nächsten Abschnitt wird dieser Vorgang im sog. *Wellenzahlbereich* erklärt.

### 2.2.4.1 Erklärung der Funktionsweise von ASAC im Wellenzahlbereich

Die Anzahl der Wellen pro Längeneinheit wird angegeben durch die Wellenzahl  $k$ , die definiert ist als [36, 51]

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (2.8)$$

mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$ , wobei  $f$  die Frequenz ist. Mit Hilfe der Wellenzahl kann für eine Funktion  $f(x, y)$  die *Wellenzahltransformation* durchgeführt werden:

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dy dx \quad . \quad (2.9)$$

Wird diese Transformation auf die Geschwindigkeit  $v(x, y)$  eines Luftteilchens an der Oberfläche einer ebenen Struktur angewandt, erhält man die Geschwindigkeitsverteilung im Wellenzahlbereich:

$$V(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dy dx \quad . \quad (2.10)$$

Eine Strukturschwingung wird also nicht wie bei der Fourierzerlegung im Zeitbereich als Summe unendlich vieler Eigenschwingungen (zugehörige Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i = 2\pi f_i$ ) betrachtet, sondern als Zusammenwirken unendlich vieler Wellen, die durch die Wellenzahlen

$$k_i = \sqrt{k_{x,i}^2 + k_{y,i}^2} \quad (2.11)$$

charakterisiert werden. Abb. 2.9 zeigt beispielhaft eine Geschwindigkeitsverteilung  $V(k_x)$  bei guter Schallabstrahlung bezüglich der Wellenzahl  $k_x$  in  $x$ -Richtung. Dabei beschreibt  $k$  die Wellenzahl in Luft. Bei der Geschwindigkeitsverteilung im Wellenzahlbereich unterscheidet man zwei Gebiete:

1.  $k_x < k$ :

In diesem Fall folgt aus Gl. (2.8) für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$ , dass  $c_x > c$  ist. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit  $c_x$  der Schallwellen innerhalb der Struktur in  $x$ -Richtung größer ist als die Schallgeschwindigkeit  $c$  in Luft. Deshalb wird dieser Bereich als *Überschallbereich* bezeichnet. Wegen Gl. (2.8) gilt außerdem für die  $n$ -te Schwingungsmoden  $\lambda_n > \lambda$ . Es liegt also ein langwelliger Strahler vor, der Schall unter dem Winkel  $\theta$  (vgl. Gl. (2.7)) effizient ins Fernfeld abstrahlt.

2.  $k_x > k$ :

Da hier für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$  die Schallgeschwindigkeit in der Struktur

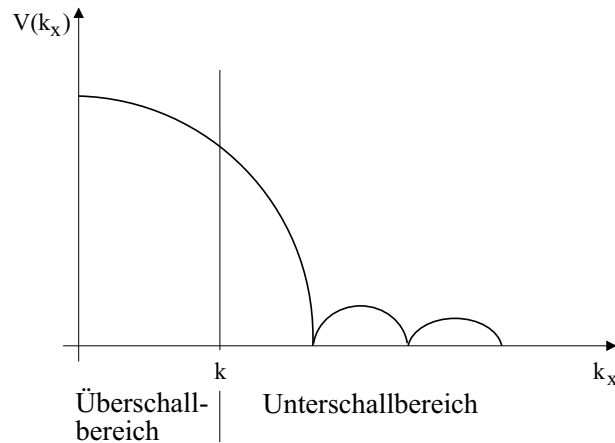


Abbildung 2.9: *Geschwindigkeitsanteile im Wellenzahlbereich bei guter Schallabstrahlung*

kleiner als in Luft ist ( $c_x < c$ ), wird dieses Gebiet *Unterschallbereich* genannt. Die Wellenlänge  $\lambda_n$  der  $n$ -ten Eigenschwingung ist in diesem Fall kleiner als in Luft:  $\lambda_n < \lambda$ . Im Unterschallbereich befinden sich also die kurzwelligen Schwingungsmoden, die den Schall wegen des akustischen Kurzschlusses nicht effizient ins Fernfeld abstrahlen.

Bei zweidimensionalen Strukturen sind die beiden Bereiche folgendermaßen gegeben [36, 42]:

$$\begin{aligned} \text{Überschallbereich: } & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} < k \quad , \\ \text{Unterschallbereich: } & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k \quad . \end{aligned} \tag{2.12}$$

In Tab. 2.1 sind die wichtigsten Eigenschaften der beiden Gebiete aufgeführt. Damit ASAC funktionieren kann, müssen die dominanten Schwingungsanteile vom Überschallbereich zum Unterschallbereich verlagert werden. Dies wird in Abb. 2.10 veranschaulicht.

Tabelle 2.1: *Aufteilung des Wellenzahlbereichs.*

	Überschallbereich	Unterschallbereich
Schallgeschwindigkeit	$c_{st} > c$	$c_{st} < c$
Wellenzahl (eindim. Fall)	$k_x < k$	$k_x > k$
Wellenzahl (zweidim. Fall)	$k_{st} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} < k$	$k_{st} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k$
Wellenlänge	$\lambda_{st} > \lambda$	$\lambda_{st} < \lambda$
Art der Schwingform	niedermodal (langwellige Schwingungen)	hochmodal (kurzwellige Schwingungen)
Abstrahlung ins Fernfeld	effizient	nicht effizient

$st = \dots$  in der Struktur.

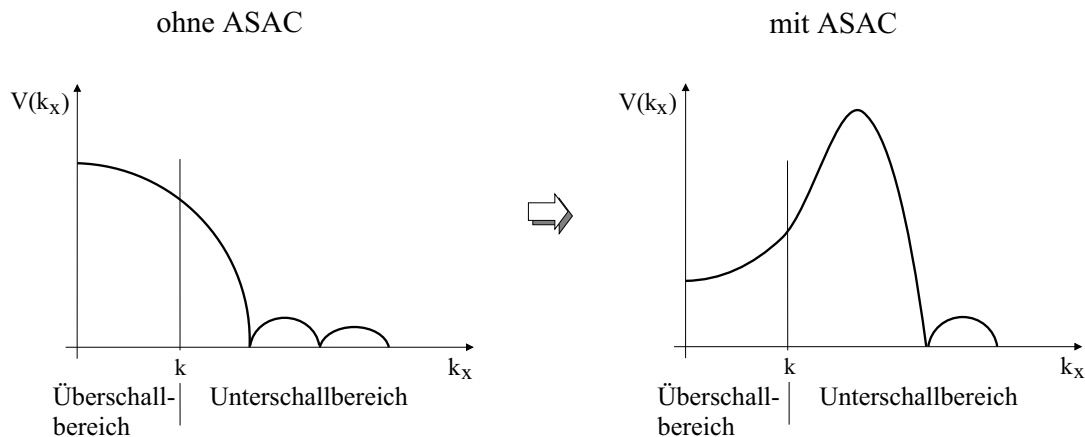


Abbildung 2.10: ASAC im Wellenzahlbereich.

## 2.2.5 Aufbau eines ASAC-Systems

In Abb. 2.11 ist ein einkanaliges ASAC-System dargestellt. Mit Hilfe eines *Fehlersensors* wird ein zum Schalldruck im Fernfeld korreliertes Signal gemessen, das sogenannte *Fehlersignal*. Dieses Signal stellt das Restsignal (“Fehler”) dar, das bei der Überlagerung aus Primär- und Sekundärschall entsteht. Der *Controller* berechnet aus dem Fehlersignal  $e$  und dem Referenzsignal  $r$  die Stellgröße  $y$  für den Sekundäraktor, der in Form eines Schwingungserregers auf die Struktur einwirkt. Der Aufbau des Controllers wird in Kap. 2.2.5.1 erläutert. Abhängig davon, wie das Referenzsignal zustande kommt, gibt es zwei Systemstrukturen:

### 1. Feedforward-Struktur:

Korreliert das Referenzsignal mit dem Störsignal (Wirkung des Primärsignals in der Position des Fehlersensors), liegt eine *Feedforward-Struktur* vor. Das System entspricht dann einer adaptiven Steuerung [9, 16, 42]. Wenn die Signallaufzeit des Referenzsignals inklusive aller Verstärker und Filter kleiner als die Signallaufzeit des Primärsignals von der Quelle bis zum Fehlersensor ist, dann ist ein Feedforward-System *kausal*, d.h. das System kann rechtzeitig auf Änderungen des Primärsignals reagieren (vgl. Kap. 2.2.5.3). Wenn das Fehlersignal  $e$  und das Primärerregungssignal  $x$  kohärent sind, d.h. in ausreichendem Maße linear voneinander abhängen, können selbst stochastische Signale kompensiert werden [54].

### 2. Feedback-Struktur:

Wird das Referenzsignal  $r$  vom Fehlersensor geliefert, spricht man von einer *Feedback-Struktur* des Systems, d.h. das Primärerregungssignal wird als Störgröße in einem Regelkreis betrachtet [6, 42, 110]. Aufgrund der Rückkopplung des Fehlersignals kann das System instabil werden, insbesondere bei kleinem Fehlersignal und/oder bei hoher Verstärkung. Außerdem ist ein Feedback-System stets *akausal*, was i.d.R. den Einsatz bei breitbandigen Geräuschen verhindert. Wegen der genannten Nachteile sollte die Feedback-

Struktur nur gewählt werden, wenn ein zum Primärsignal korreliertes Signal nicht messbar ist, so dass ein anderes Signal als Referenz genommen werden muss.

Aufgrund besserer Stabilitätseigenschaften wird allgemein empfohlen, ein Feedforward-System anzuwenden, vorausgesetzt dass ein zur Primärerregung korreliertes Signal verfügbar ist.

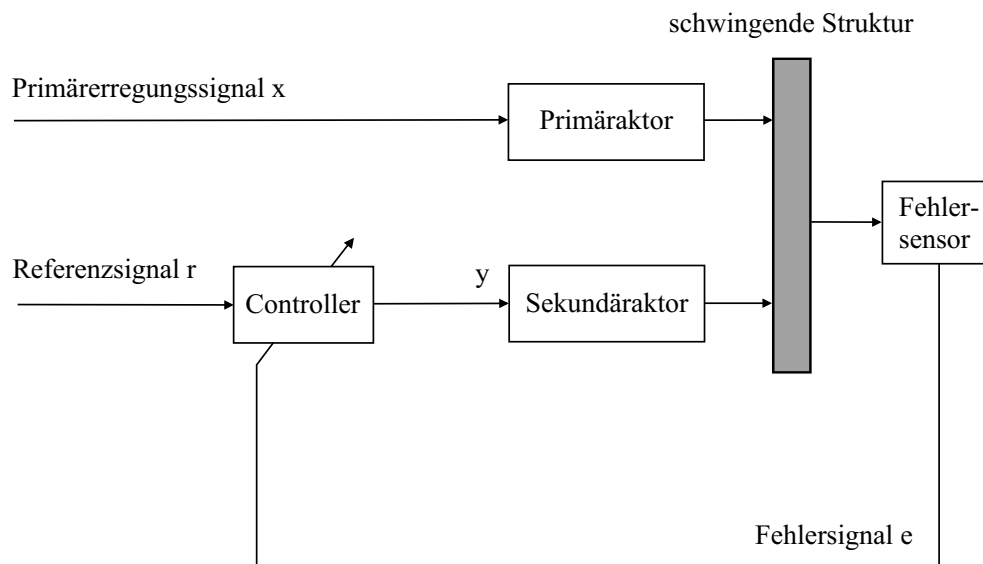


Abbildung 2.11: *Einkanaliges ASAC-System.*

### 2.2.5.1 Aufbau des Controllers

Der Controller besitzt die in [Abb. 2.12](#) dargestellte Struktur. Das Kernstück des Controllers ist ein adaptives digitales Filter, das zu jedem Zeitschritt  $n$  aus dem Referenzsignal  $r$  das Signal  $y$  für den Sekundäraktor bestimmt gemäß

$$y(n) = \sum_{i=0}^{l-1} w_i r(n-i) \quad , \quad (2.13)$$

wobei  $w_i$  die Filterkoeffizienten und  $l$  die Anzahl der Filterkoeffizienten bedeuten. Die Filterkoeffizienten  $w_i$  werden durch einen Least-Mean-Squares-Algorithmus (LMS) zu jedem Zeitschritt neu berechnet. Der LMS-Algorithmus bestimmt aus dem gefilterten Referenzsignal  $r^*$  und dem Fehlersignal  $e$  die Filterkoeffizienten  $w_i$ , so dass der Erwartungswert  $J = E\{e^2\}$  minimal wird. Nach [84, 110] ist der LMS-Algorithmus gegeben durch

$$w_i(n+1) = w_i(n) - \alpha e(n) r^*(n-i) \quad , \quad (2.14)$$

wobei  $e(n)$  das Fehlersignal zum  $n$ -ten Zeitschritt und  $r^*(n-i)$  das gefilterte Referenzsignal zum  $(n-i)$ -ten Zeitschritt bedeuten. In [54, 110] wird für den Konvergenzfaktor  $\alpha = 2\mu$  eine

Abschätzung für die obere Stabilitätsgrenze des LMS-Algorithmus angeben<sup>2</sup> zu

$$\alpha_{max} \approx \frac{1}{\overline{(r^*)^2} l} \quad , \quad (2.15)$$

wobei  $\overline{(r^*)^2}$  der Mittelwert des quadrierten gefilterten Referenzsignals  $r^*$  und  $l$  die Anzahl der Filterkoeffizienten sind. Bei der Abtastung der einzelnen Signale muss nach dem *Shannonschen Abtasttheorem* die Abtastfrequenz mindestens das Doppelte der höchsten im System vorkommenden Signalfrequenz betragen.

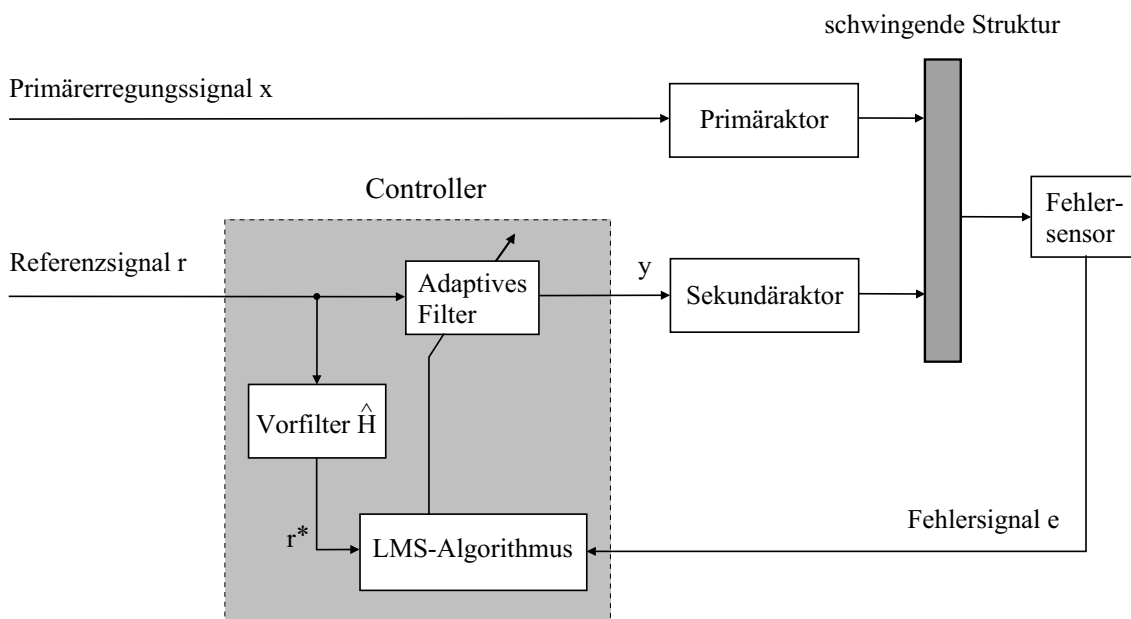


Abbildung 2.12: *Einkanaliges ASAC-System.*

### 2.2.5.2 Berechnung des Vorfilters für das Referenzsignal

Die Übertragungsfunktion zwischen dem Ausgang des adaptiven Filters und dem Fehlersensorausgang spielt für die Dynamik des LMS-Algorithmus eine große Rolle. Da die Sekundärübertragungstrecke im Wesentlichen eine zeitliche Verzögerung darstellt, steht das Fehlersignal  $e$  gegenüber dem Referenzsignal jeweils um eine gewisse Zeitspanne  $t_{str}$  verzögert zur Verfügung. Aus diesem Grund muss das andere Eingangssignal des LMS-Algorithmus, d.h. das Referenzsignal  $r$ , um  $t_{str}$  verzögert werden, was durch ein entsprechendes digitales Filter erreicht werden kann. Im Folgenden wird das benötigte Filter berechnet. Zur besseren Anschaulichkeit werden die einzelnen Vorgänge mit Hilfe der Übertragungsfunktionen beschrieben. Hierzu wird die  $z$ -Transformation eingeführt [10, 110]. Sie ist für eine diskrete Funktion  $f_n$  gegeben durch

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (2.16)$$

<sup>2</sup>Der Konvergenzfaktor  $\mu$  beschreibt die Konvergenz des Gradientenverfahrens  $g_i(n+1) = g_i(n) - \mu \frac{\partial J}{\partial g_i(n)}$ , das die Kostenfunktion  $J$  minimiert.

mit  $f_n = f(n)$ . Wird die  $z$ -Transformation auf Gl. (2.13) angewandt, erhält man

$$Y(z) = w_0 \mathcal{Z}\{r_n\} + w_1 \mathcal{Z}\{r_{n-1}\} + \dots + w_{l-1} \mathcal{Z}\{r_{n-l+1}\} \quad , \quad (2.17)$$

wobei  $r_i = r(i)$  gilt. Der Verschiebungssatz der  $z$ -Transformation

$$\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = z^{-k} \mathcal{Z}\{f_n\} \quad (2.18)$$

beschreibt die Verzögerung um  $k$  Zeittakte zwischen dem abgetasteten Zeitsignal  $f_n$  und dem abgetasteten und verzögerten Zeitsignal  $f_{n-k}$ . In Abb. 2.13 ist der Spezialfall einer zeitlichen Verzögerung um einen Zeittakt ( $k = 1$ ) dargestellt. Mit Gl. (2.18) folgt aus Gl. (2.17)

$$Y(z) = W(z)R(z) \quad (2.19)$$

mit der  $z$ -Übertragungsfunktion  $W(z)$  des adaptiven Filters, die gegeben ist durch

$$W(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + \dots + w_{l-1} z^{l-1} \quad . \quad (2.20)$$

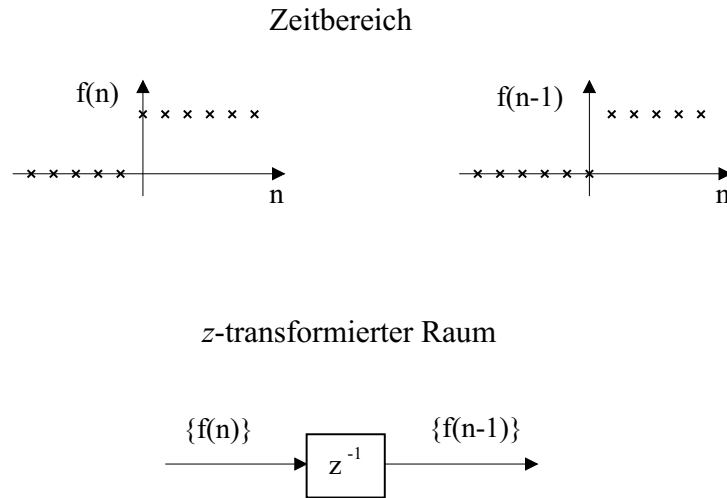


Abbildung 2.13: Verzögerung um einen Zeittakt ( $k = 1$ ) eines abgetasteten Zeitsignals  $f_n$ .

Die Übertragungsstrecke zwischen der Primärerregung und dem Fehlersensorausgang hat kaum Einfluss auf die dynamischen Eigenschaften des LMS-Algorithmus. Ihre Übertragungsfunktion kann deshalb mit 1 gleichgesetzt werden. Wenn man im  $z$ -Bereich für die Strecke zwischen dem adaptiven Filter und dem Fehlersensorausgang die Übertragungsfunktion  $H(z)$  ansetzt, ergibt sich für das  $z$ -transformierte Fehlersignal

$$\begin{aligned} E(z) &= \mathcal{Z}\{e_n\} = X(z) + H(z)Y(z) \\ &= X(z) + R^*(z)W(z) \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit

$$R^*(z) = H(z)R(z) \quad . \quad (2.22)$$

Um das Eingangssignal  $r^*$  für den LMS-Algorithmus zu erhalten, muss also das Referenzsignal  $r$  mit der Übertragungsfunktion  $H$  gefiltert werden. In diesem Fall spricht man vom *Filtered-x-LMS-Algorithmus* [82, 109]. Abb. 2.14 zeigt das Block-Diagramm einer praktischen Implementierung des Filtered-x-LMS-Algorithmus. Das Referenzsignal  $r$  wird mit der Übertragungsfunktion  $\hat{H}(z)$  eines digitalen Filters gefiltert, dessen Systemantwort eine Näherung für die Antwort der wahren Übertragungsstrecke zwischen dem Ausgang des adaptiven Filters und dem Fehlersensorausgang darstellt. Die Koeffizienten des Filters  $\hat{H}$  werden in einer Identifikationsphase vor dem Start des LMS-Algorithmus eingestellt. In [42, 110] wird beschrieben, wie der LMS-Algorithmus für mehrkanalige Systeme formuliert werden kann.

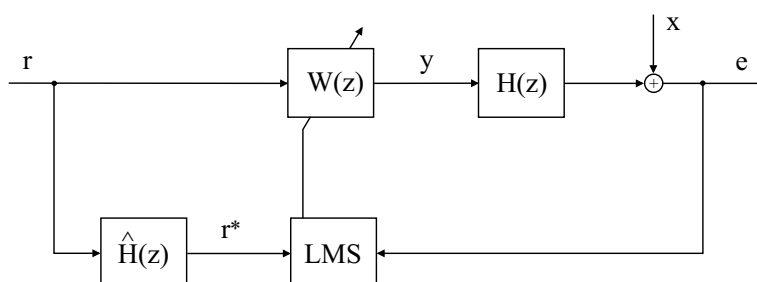


Abbildung 2.14: *Filtered-x-LMS-Algorithmus*.

### 2.2.5.3 Kausalitätsaspekt

Bei der adaptiven Schalleistungsminderung muss das Steuersignal  $y$ , das vom Rechner bestimmt wird und sich über den Aktor auf das physikalische System überträgt, rechtzeitig beim Fehlersensor ankommen, damit es die Wirkung der Primärerregung kompensieren kann. Wenn dies erfüllt ist, heißt das System *kausal* [18, 34, 54]. Die Mindestanforderung für Kausalität lautet also  $t_s \leq t_e$ , wobei  $t_s$  die Zeit ist, die benötigt wird, um aus dem Primärsignal das Steuersignal zu berechnen und über den Sekundäraktor zum Fehlersensor zu übertragen. Entsprechend ist  $t_e$  die Zeit, bis das Primärsignal beim Fehlersensor ankommt. In Abb. 2.15 und Abb. 2.16 sind die Laufzeiten für eine Feedforward- bzw. Feedback-Struktur des ASAC-Systems dargestellt.

Mit einer Feedback-Struktur kann die Kausalitätsbedingung nicht eingehalten werden, da die Laufzeit  $t_s$  stets größer als  $t_e$  ist. Das System kann daher nur zeitverzögert auf Änderungen im Primärerregungssignal reagieren. Insbesondere ist die Kompensation, d.h. die totale Auslöschung, stochastischer Signale unmöglich. Lediglich periodische Signale, die eine gewisse Zeit anliegen und somit eine bestimmte *Korrelationslänge* aufweisen, können kompensiert werden [54]. In diesem Fall schätzt der Controller den zukünftigen Verlauf der periodischen Signale, er wirkt also als *Prädiktor*. Je größer die Zeitverzögerung zwischen Primär- und Sekundärsignal in der Position des Fehlersensors ist, desto größer muss die Korrelationslänge des



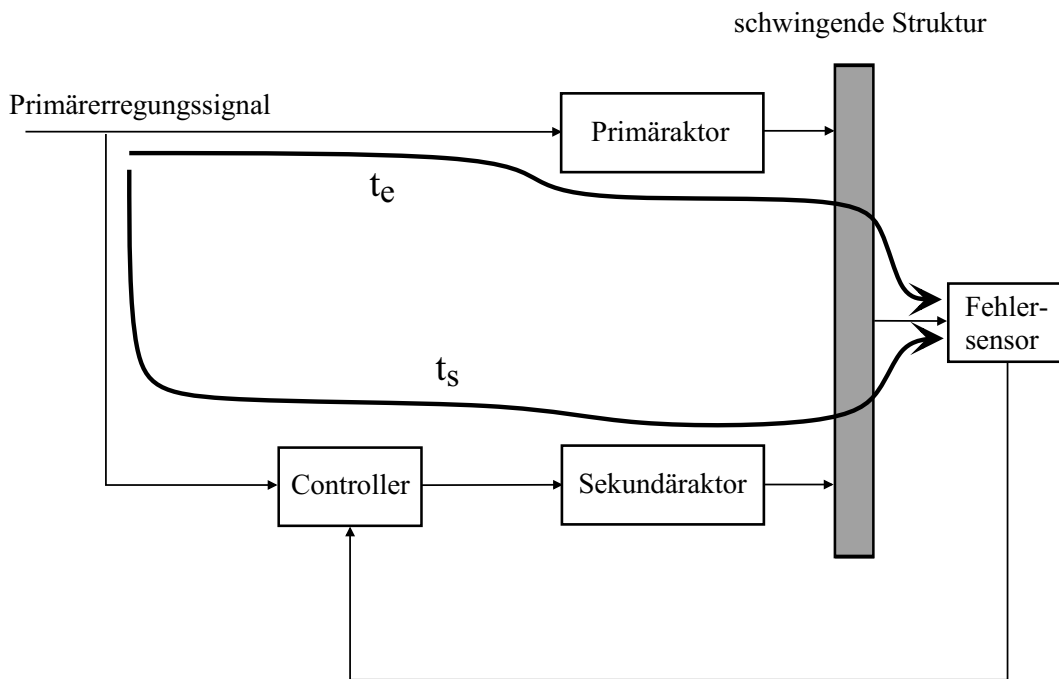


Abbildung 2.15: Laufzeiten bei ASAC mit Feedforward-Struktur.

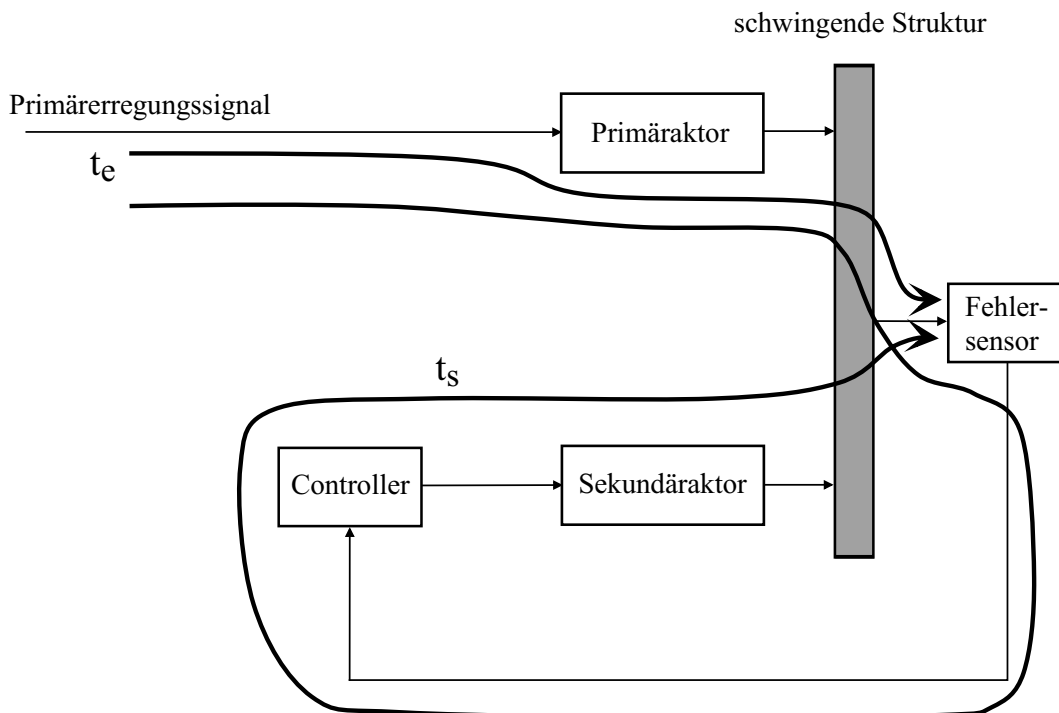


Abbildung 2.16: Laufzeiten bei ASAC mit Feedback-Struktur.

Primärerregungssignal sein, um eine Kompensation zu bewirken.

#### 2.2.5.4 Wahl der Körperschallaktoren

In den folgenden Abschnitten werden Aktoren und Sensoren vorgestellt, die bei ASAC benutzt werden können. Es wird lediglich ein Überblick gegeben, jedoch findet der Leser in den angegebenen Referenzen ausführlichere Darstellungen.

Bei ASAC unterscheidet man zwischen *aktiven* und *semiaktiven* Körperschallaktoren [42].

##### 1. Aktive Körperschallaktoren:

Diese Aktoren übertragen mechanische Energie auf eine schwingende Struktur. Beispiele für derartige Aktoren sind:

- elektromagnetische Schwingungserreger (Shaker),
- Piezoelemente (als Keramikelement oder als Folie realisiert) [62, 104],
- Moonie-Aktoren [85],
- magnetostriktive Aktoren [50],
- elektrohydraulische Aktoren.

##### 2. Semiaktive Körperschallaktoren:

Diese Aktoren sind grundsätzlich passive Elemente, d.h. sie speichern oder dissipieren Energie, ohne mechanische Energie an die Struktur abzugeben. Sie verhalten sich wie Dämpfungsglieder, deren Dämpfung verändert werden kann. Beispiele für semiaktive Aktoren sind:

- elektrorheologische Flüssigkeiten [43, 98],
- Shape Memory Alloys (SMA) [67],
- aktiv-passive Verbundelemente [8, 41].

Die Wahl des richtigen Aktors hängt von den Systemanforderungen ab bezüglich Kraft, Moment, Hub, Energieverbrauch, Frequenzgang und Strukturgröße sowie der Art der Ankopplung an die Struktur. Wenn die Aktoren einzeln angesteuert werden, besitzt das Steuersystem entsprechend viele Kanäle. Das hat vor allem bei hochmodalen Schwingformen, bei denen viele Aktoren benötigt werden, einen hohen Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf zur Folge. Falls die Signalstatistik hinreichend bekannt ist, können zur Verringerung der Kanalanzahl mehrere Aktoren zu Gruppen zusammengefasst werden [19, 38]. Diese Methode entspricht dem Vorbild aus der Humanbiologie, nach dem mehrere Muskeln des Menschen jeweils durch einen einzigen Impuls angesteuert werden.

### 2.2.5.5 Wahl der Fehlersensoren

Zur Schalleistungsminderung können *akustische Sensoren* (Mikrofone) oder *Körperschallsensoren* benutzt werden. Generell gilt, dass akustische Fehlersensoren zu einer höheren Schalleistungsminderung führen als Körperschallsensoren [75]. Das liegt daran, dass eine Schallgröße wie z.B. die Schalleistung minimiert werden muss, wenn man die Schallabstrahlung deutlich verringern will. Akustische Sensoren messen den Schalldruck, also eine Schallfeldgröße. Dagegen messen Körperschallsensoren Beschleunigungen auf der Strukturoberfläche. Da aus diesen Beschleunigungen die erforderlichen Schallgrößen berechnet oder geschätzt werden müssen<sup>3</sup>, ergeben sich Ungenauigkeiten, die sich negativ auf das Ergebnis der Schalleistungsminderung auswirken. Trotzdem gibt es Fälle, bei denen aus praktischen Gründen auf Körperschallsensoren zurückgegriffen werden muss. Es gibt zwei Arten von Körperschallsensoren: *flächenverteilte*, *kontinuierliche Sensoren* und *Punktsensoren*.

#### 1. Flächenverteilte Sensoren:

Zu den flächenverteilten Körperschallsensoren gehören *Polymer Polyvinylidene Fluoride (PVDF)* Folien und *Shape Memory Alloys (SMA)*.

##### (a) Polymer Polyvinylidene Fluoride (PVDF) Folien:

PVDF-Folien [20, 23, 24], die dünne Piezoelemente darstellen, sind leicht, flexibel und beeinflussen deshalb kaum die Dynamik einer schwingenden Struktur. Allerdings sind ihre Form und ihre Fähigkeiten zum Detektieren bestimmter Schwingformen fest vorgegeben. Das kann zu Schwierigkeiten führen, wenn sich die schwingende Struktur oder die Primärerregung ändern. Dann ist es besser, mit mehreren punktförmig wirkenden Sensoren zu arbeiten.

##### (b) Shape Memory Alloys (SMA):

SMA sind Materialien, die nach einer Verformung wieder ihre ursprüngliche Gestalt annehmen, sobald sie erhitzt werden. Sie besitzen also ein “Formgedächtnis”. SMA dienen nicht nur als Aktoren, sondern sie können auch als Sensoren eingesetzt werden [7]. Ihre Vorteile liegen in den großen zulässigen Dehnungen und ihrer Robustheit gegenüber Umwelteinflüssen.

#### 2. Punktsensoren:

Punktförmig wirkende Sensoren haben eine kleine Grundfläche und sind als *Beschleunigungsaufnehmer* auf dem Markt erhältlich. Wenn sie klein sind, beeinflussen sie kaum die Dynamik einer schwingenden Struktur. Bei entsprechend großer Zahl können mit ihnen ähnlich viele Eigenschwingungen erfasst werden wie mit flächenverteilten Sensoren. Ferner können durch die beliebige Positionierung zusätzliche Freiheitsgrade bezüglich der optimalen Detektion bestimmter Schwingformen ausgenutzt werden.

---

<sup>3</sup>siehe *DFEM* [59, 61], *Modellreferenzmethode* [21] oder *Wellenzahldetektion* [74, 75].

# Kapitel 3

## Modellierung der aktiven Schallabstrahlungsminderung

### 3.1 Modellierung der Plattenschwingung

Die Dynamik einer isotropen Platte konstanter Dicke wird beschrieben durch die partielle Differentialgleichung<sup>1</sup> [26, 52, 73, 79, 102]

$$D\nabla^2\nabla^2w + \bar{m}\frac{\partial^2w}{\partial t^2} = p_z^* \quad . \quad (3.1)$$

Dabei ist  $w$  die Auslenkung der Platte senkrecht zur Plattenoberfläche, und  $\bar{m}$  stellt die spezifische Masse dar, die durch

$$\bar{m} = \rho_M h \quad (3.2)$$

gegeben ist, wobei  $\rho_M$  die Dichte des Plattenmaterials und  $h$  die Dicke der Platte sind. Aufgrund einer äußeren Erregerkraft ergibt sich im betrachteten Punkt der Druck  $p_z^*$ . Für die Konstante  $D$ , die die Biegesteifigkeit des Plattenmaterials charakterisiert, gilt nach [73] die Beziehung

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned} E &= \text{Elastizitätsmodul } [N/m^2] \quad , \\ h &= \text{Plattendicke} \quad , \\ \nu &= \text{Querkontraktionszahl oder Poisson-Konstante} \quad . \end{aligned}$$

$\nabla^2$  ist der Laplace-Operator, auf den in diesem Kapitel noch näher eingegangen wird. In Gl. (3.1) sieht man, dass der Druck  $p_z^*$  im Gleichgewicht zu zwei Drucktermen steht: Der erste

---

<sup>1</sup>In der Literatur wird eine Differentialgleichung (DGL) des Typs (3.1) als *partielle Differentialgleichung (PDGL) vierter Ordnung des elliptischen Typs mit konstanten Koeffizienten* oder als *inhomogene biharmonische Gleichung* bezeichnet [102].

wird gebildet aus  $D\nabla^2\nabla^2w$  und kommt zustande durch Zugspannungen infolge von Materialverformungen. Der zweite Druckterm ist durch  $\bar{m}\partial^2w/\partial t^2$  gegeben und resultiert aus dem Wirken von Trägheitskräften. Es ist zu beachten, dass Gl. (3.1) nur unter den Annahme gilt, dass das Material der Platte homogen, isotrop und elastisch ist und dass die Plattendicke sowie die Auslenkungen gegenüber den übrigen Plattenmaßen vernachlässigbar sind. Außerdem werden Scherkräfte in der Querschnittsfläche eines Plattenelements vernachlässigt. Als weitere Bedingung muss die *Kirchhoffsche Hypothese* gelten, nach der gerade Linien, die senkrecht zur mittleren Plattenebene<sup>2</sup> sind, nach der Durchbiegung der Platte weiterhin gerade sind und senkrecht auf der mittleren Plattenebene stehen [73]. Im Falle einer rechteckigen Platte, wie sie in Abb. 3.1 dargestellt ist, kann gemäß [10] für den Laplace-Operator  $\nabla^2$  in Gl. (3.1) der Ausdruck

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

eingesetzt werden, wobei  $\partial^2/\partial x^2$  und  $\partial^2/\partial y^2$  die zweiten partiellen Ableitungen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung bedeuten. Somit lässt sich die PDGL (3.1) der Plattendynamik schreiben als

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_z^* \quad (3.5)$$

mit

$$w = w(x, y, t) \quad , \quad p_z^* = p_z^*(x, y, t) \quad .$$

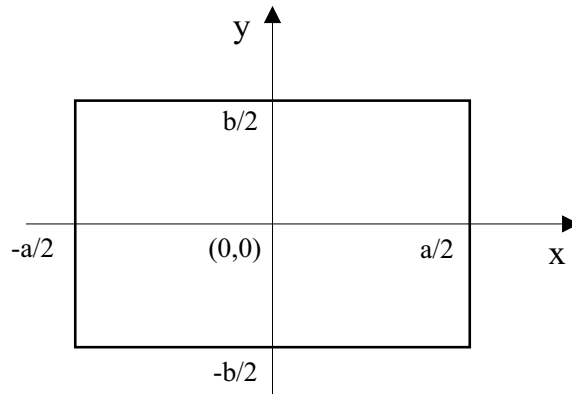


Abbildung 3.1: *Koordinatensystem für eine rechteckige Platte der Länge  $a$  und der Breite  $b$ .*

Alternativ könnte die Dynamik einer schwingenden Platte, so wie in [57, 61] vorgeschlagen, mit Hilfe der Wellentheorie beschrieben werden. Ein bedeutender Vorteil dieser Methode ist zum einen, dass die o.g. Vereinfachungen (z.B. Vernachlässigung von Scherkräften) nicht gemacht werden, so dass die Physik der Platte exakt beschrieben wird. Zum anderen führt dieses Verfahren auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die keine gemischten Ableitungsterme enthalten. Somit sind Probleme von vornherein ausgeschlossen, die durch fehlende Orthogonalität der Lösungsfunktionen entstehen könnten (vgl. Kap. 3.1.1). Jedoch wird in [61] für den

<sup>2</sup>Ebene, die sich genau zwischen der Plattenober- und Unterseite befindet und zu beiden Seiten parallel ist.

Fall einer an den Rändern einfach gestützten rechteckigen Platte gezeigt, dass die auf diese Weise ermittelten Eigenfrequenzen zwar allgemein mit gemessenen Werten gut übereinstimmen, aber insbesondere bei sehr tiefen Frequenzen in Einzelfällen um 30% von den Messwerten abweichen können. Im Gegensatz dazu wird mit der hier vorgestellten Methode und einer Anpassung des Rechenmodells an ein Finite-Elemente-Modell (vgl. Kap. 6.1.2) erreicht, dass die berechneten Eigenfrequenzen im relevanten Frequenzbereich von 0 bis 1000 Hz um maximal 10% von gemessenen Werten abweichen.

Da es sich bei Gl. (3.5) um eine PDGL vierter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen handelt, werden zur eindeutigen Lösung  $4 \times 2 = 8$  Randbedingungen (RB) benötigt. Wenn die rechteckige Platte aus Abb. 3.1 an den Rändern fest eingespannt ist, dann lauten die RB:

$$w \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases} = 0 \quad , \quad (3.6-a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{2} \end{cases} = 0 \quad , \quad (3.6-b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \begin{cases} y = -\frac{b}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases} = 0 \quad . \quad (3.6-c)$$

Die RB in Gl. (3.6-a) sind vom Dirichlet-Typ. Sie bedeuten, dass an den Plattenrändern die Auslenkung verschwindet. Die RB in Gl. (3.6-b) und (3.6-c) stellen Neumannsche RB dar, die gewährleisten, dass die Platte an den Rändern eben aufliegt [105]. Wegen der auftretenden zweiten Ableitung nach der Zeit benötigt man zwei Anfangsbedingungen (AB). Als erste AB gilt, dass der Anfangswert von  $w$  einer gegebenen Auslenkungsverteilung  $w_1(x, y)$  entspricht. In gleicher Weise wird ein bestimmter Startwert von  $\partial w / \partial t$  gefordert. Somit ergeben sich die AB zu

$$w|_{t=0} = w_1(x, y) \quad , \quad (3.7-a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} |_{t=0} = i\omega w_1(x, y) \quad , \quad (3.7-b)$$

wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz der Plattenschwingung ist. Mit der Annahme, dass die Platte harmonisch mit

$$p_z^*(x, y, t) = p_z(x, y)e^{i\omega_p t} \quad (3.8)$$

angeregt wird, wobei  $\omega_p$  ungleich den Resonanz- oder Eigenkreisfrequenzen der Platte ist, kann die Auslenkung  $w(x, y, t)$  unter Berücksichtigung der AB (3.7) folgendermaßen angesetzt

werden<sup>3</sup>:

$$w = w_1(x, y)e^{i\omega t} \quad . \quad (3.9)$$

Dabei stellt  $w_1(x, y)$  die ortsabhängige Amplitude der Plattenschwingung dar. Im eingeschwungenen Zustand schwingt die Platte mit der Erregerfrequenz  $\omega_p$ , und es folgt

$$w = w_1(x, y)e^{i\omega_p t} \quad . \quad (3.10)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (3.8) und (3.10) in Gl. (3.5) erhält man

$$D \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) - \bar{m} \omega_p^2 w_1 = p_z \quad (3.11)$$

mit den zugehörigen RB aus (3.6). Für die rein numerische Lösung der PDGL (3.11) kann man u.a. auf die *Finite-Differenzen-Methode* sowie auf die *Finite-Elemente-Methode* zurückgreifen [105]. Auf diese Verfahren wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen. Statt dessen werden analytische Verfahren behandelt, mit deren Hilfe man die gesuchte Lösung der PDGL erhält und außerdem aufgezeigt bekommt, wie die Plattenschwingung von den Materialparametern, den Abmessungen und der Anregung der Platte abhängen. Dabei bieten sich u.a. Näherungsverfahren an, die auf der Variationsrechnung basieren, wie beispielsweise die *Galerkin-Methode* oder das *Rayleigh-Ritz-Verfahren* [95, 102]. Bei beiden Methoden setzt sich die Lösungsfunktion aus einer endlichen Anzahl von gewählten Funktionen  $\chi_i$  zusammen, die die geometrischen RB erfüllen, jedoch die PDGL der schwingenden Struktur nicht exakt lösen. Die Lösungsfunktion der PDGL (3.11) lässt sich also bezüglich des in Abb. 3.1 dargestellten Koordinatensystems in der Form

$$w_1(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(x, y) \quad (3.12)$$

schreiben, wobei  $c_i$  die zu bestimmenden Koeffizienten sind und  $\chi_i(x, y)$  räumlich variable Funktionen repräsentieren. In [95] wird für die Rayleigh-Ritz-Methode vorgeschlagen, die Koeffizienten  $c_i$  durch Minimierung der Deformationsenergie

$$J = \iint_A \left( \frac{1}{2} D (\nabla^2 w_1)^2 - p_z w_1 \right) dx dy \quad (3.13)$$

zu bestimmen, was notwendigerweise erfordert:

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0 \quad . \quad (3.14)$$

Wenn man die Funktionen  $\chi_i$  im Fall einer an den Rändern fest eingespannten Platte als Produkt

$$\chi_i = \xi_m(x) \psi_n(y) \quad (3.15)$$

---

<sup>3</sup>Wenn die ungedämpfte Platte bei einer Resonanzfrequenz angeregt wird, lautet nach [37] der Ansatz für die Plattenauslenkung  $w = w_1(x, y)te^{i\omega t}$ .

der Eigenfunktionen  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  entsprechender Balkenschwingungen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ansetzt, können die Koeffizienten  $c_i$  in Gl. (3.12) als Modalamplituden interpretiert werden [95].

Da sich beim Weiterrechnen für die Koeffizienten  $c_i$  komplizierte Ausdrücke ergeben, wird in der vorliegenden Arbeit eine Methode vorgestellt, mit der das System, bestehend aus der PDGL (3.11) und den RB (3.6), einfacher gelöst werden kann. Hierzu wird zunächst die homogene PDGL

$$D \underbrace{\left( \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} \right)}_{Term_1} - \underbrace{\bar{m} \omega^2 w_h}_{Term_2} = 0 \quad (3.16)$$

gelöst. Beim Vergleich von Gl. (3.16) mit (3.11) fällt auf, dass in  $Term_2$  die Kreisfrequenz  $\omega$  anstelle von  $\omega_p$  enthalten ist. Das liegt daran, dass Gl. (3.11) den eingeschwungenen Zustand beschreibt, bei dem die Platte mit der Erregerfrequenz  $\omega_p$  schwingt, während die homogene PDGL (3.16) das Einschwingverhalten charakterisiert, bei dem die Kreisfrequenz der Plattenschwingung zunächst als beliebig angesetzt werden kann. Die Lösung der homogenen PDGL liefert die Eigenschwingungen und die zugehörigen Eigenfrequenzen der Plattenschwingung. Im nächsten Schritt löst man die inhomogene PDGL und bestimmt die partikuläre Lösung  $w_{part}(x, y)$ . Bei linearen PDGLen ergibt sich die Gesamtlösung als Linearkombination der homogenen und der partikulären Lösung [10], und man erhält

$$w_1 = w_h + w_{part} \quad . \quad (3.17)$$

Unter der Annahme einer geringfügig vorhandenen Dämpfung der Plattenschwingung kann die homogene Lösung im eingeschwungenen Zustand vernachlässigt werden, so dass gilt [37]:

$$w_1 = w_{part} \quad . \quad (3.18)$$

### 3.1.1 Lösung der homogenen PDGL

In [79, 102] wird vorgeschlagen, die PDGL (3.16) mit Hilfe der Modalzerlegung zu lösen. Dabei wird die Lösung gemäß

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{(m,n)h}(x, y) = \sum_{m,n} w_{(m,n)h}(x, y) \quad (3.19)$$

in ihre  $(m, n)$ -Eigenschwingungen<sup>4</sup> zerlegt, die durch die ortsabhängigen Amplituden  $w_{(m,n)h}(x, y)$  charakterisiert sind. Für diese Schwingungsamplituden wählt man zur Trennung der Variablen den Produktansatz

$$w_{(m,n)h}(x, y) = W_{(m,n)h} \xi_m(x) \psi_n(y) \quad . \quad (3.20)$$

---

<sup>4</sup>Unter den  $(m, n)$ -Eigenschwingungen oder den  $(m, n)$ -Moden einer Platte versteht man die Eigenresonanzschwingungen mit ortsfesten Amplituden. Bei einer an den Rändern fest eingespannten Platte besitzt die  $(m, n)$ -Eigenschwingung  $m$  Schwingungsbäuche in  $x$ -Richtung und  $n$  Bäuche in  $y$ -Richtung.



In Gl. (3.20) stellen  $W_{(m,n)h}$  die Modalamplituden der homogenen Lösung und  $\xi_m(x)$  sowie  $\psi_n(y)$  die Eigenfunktionen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung dar. Da die PDGL (3.16) nicht nur zwischen den Resonanzfrequenzen gilt, sondern auch bei den Resonanzfrequenzen selbst, müssen die durch Gl. (3.20) beschriebenen Eigenschwingungen einzeln die PDGL (3.16) sowie die RB (3.6) erfüllen. Somit betrachtet man eine einzelne  $(m, n)$ -Mode und erhält durch Einsetzen der Beziehung (3.20) in Gl. (3.16) —  $w_h$  wird durch  $w_{(m,n)h}$  und  $\omega$  durch  $\omega_{m,n}$  ersetzt — nach wenigen Umformungen

$$k_{m,n} - m_{m,n}\omega_{m,n}^2 = 0 \quad (3.21)$$

mit

$$k_{m,n} = D \left( \frac{d^4 \xi_m}{dx^4} \psi_n + 2 \frac{d^2 \xi_m}{dx^2} \frac{d^2 \psi_n}{dy^2} + \xi_m \frac{d^4 \psi_n}{dy^4} \right) , \quad (3.22-a)$$

$$m_{m,n} = \bar{m} \xi_m \psi_n . \quad (3.22-b)$$

Dabei kann  $k_{m,n}$  als Steifigkeitsterm und  $m_{m,n}$  als Massenterm der  $(m, n)$ -Eigenbewegung aufgefasst werden. Aus Gl. (3.21) folgt für die Eigenfrequenz der  $(m, n)$ -Eigenschwingung:

$$f_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \omega_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{m,n}}{m_{m,n}}} . \quad (3.23)$$

Der nächste Schritt besteht im Auffinden geeigneter Eigenfunktionen für  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$ . Wenn man eine einzelne Eigenschwingung betrachtet, indem man in Gl. (3.16)  $w_h$  durch  $w_{(m,n)h}$  ersetzt und dafür wiederum den Ausdruck aus Gl. (3.20) übernimmt, erhält man für die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} w_{(m,n)h} = W_{(m,n)h} & (a_1 \sin \alpha_1 x \sin \gamma_1 y + a_2 \sin \alpha_1 x \cos \gamma_1 y \\ & + a_3 \cos \alpha_1 x \sin \gamma_1 y + a_4 \cos \alpha_1 x \cos \gamma_1 y \\ & + a_5 \sinh \alpha_2 x \sinh \gamma_2 y + a_6 \sinh \alpha_2 x \cosh \gamma_2 y \\ & + a_7 \cosh \alpha_2 x \sinh \gamma_2 y + a_8 \cosh \alpha_2 x \cosh \gamma_2 y) \end{aligned} \quad (3.24)$$

mit

$$\alpha_1^2 + \gamma_1^2 = \beta_1^2 , \quad (3.25-a)$$

$$\alpha_2^2 + \gamma_2^2 = \beta_1^2 , \quad (3.25-b)$$

$$\beta_1^4 = \frac{\omega_{m,n}^2 \bar{m}}{D} . \quad (3.25-c)$$

Die Eigenfunktionen  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  sind bei einer an den Rändern einfach gestützten Platte

mit den RB

$$w \left| \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right. = 0 \quad , \quad (3.26\text{-a})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left| \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{2} \end{array} \right. = 0 \quad , \quad (3.26\text{-b})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left| \begin{array}{l} y = -\frac{b}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right. = 0 \quad (3.26\text{-c})$$

geschlossen darstellbar. Man erhält sie, indem man die RB aus Gl. (3.26) in die allgemeine Lösung (3.24) einsetzt. Das ist erlaubt, weil die Auslenkungen  $w_{m,n}$  der Eigenbewegungen (in Analogie zur Gesamtauslenkung) die RB erfüllen müssen. Dadurch ergibt sich für die gesuchten Eigenfunktionen

$$\xi_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \quad , \quad (3.27\text{-a})$$

$$\psi_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right) \quad . \quad (3.27\text{-b})$$

Im Gegensatz dazu lassen sich die Eigenfunktionen der an den Rändern fest eingespannten Platte nicht exakt berechnen [102]. Der Grund dafür ist, dass nach Einsetzen der RB (3.6) in Gl. (3.24) acht nichtlineare Gleichungen vorliegen, die sich analytisch nicht nach den unbekanntenen Koeffizienten  $a_i$  auflösen lassen. Deshalb muss man auf eine alternative Lösungsmethode zurückgreifen:

Für  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  in Gl. (3.20) werden die Eigenfunktionen von an den Enden fest eingespannten Balken der Länge  $a$  in  $x$ -Richtung und der Länge  $b$  in  $y$ -Richtung angesetzt. Diese Eigenfunktionen sind gegeben durch [95, 101, 102]

$$\xi_m(x) = J \left( \frac{\lambda_m x}{a} \right) - \frac{J(\lambda_m)}{H(\lambda_m)} H \left( \frac{\lambda_m x}{a} \right) \quad , \quad (3.28\text{-a})$$

$$\psi_n(y) = J \left( \frac{\lambda_n y}{b} \right) - \frac{J(\lambda_n)}{H(\lambda_n)} H \left( \frac{\lambda_n y}{b} \right) \quad (3.28\text{-b})$$

mit

$$J(u) = \cosh u - \cos u \quad , \quad (3.29\text{-a})$$

$$H(u) = \sinh u - \sin u \quad , \quad (3.29\text{-b})$$

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1 \quad , \quad (3.29-c)$$

$$\cos \lambda_n \cosh \lambda_n = 1 \quad . \quad (3.29-d)$$

Für große Werte von  $m$ , in guter Näherung ab  $m > 8$ , gilt

$$\frac{1}{\cosh \lambda_m} \approx 0 \quad . \quad (3.30)$$

Die Lösung der Gleichung

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1$$

nähert sich also den Nulldurchgängen der Kosinusfunktion an. Man erhält demnach

$$\lambda_m \approx \frac{2m+1}{2} \pi \quad , \quad m \in \{\mathcal{Z} \mid m > 8\} \quad . \quad (3.31)$$

Es ist zu beachten, dass der Ansatz (3.20) mit den Eigenfunktionen aus Gl. (3.28) nur eine Näherungslösung für die homogene PDGL (3.16) mit den RB (3.6) darstellt. Allerdings ist der Fehler, den man bei der Approximation macht, gering, da die Funktionen

$$\chi_{m,n} = \xi_m \psi_n \quad (3.32)$$

die Orthogonalitätseigenschaft

$$\iint_R \chi_{m,n} \chi_{m',n'} dx dy = \begin{cases} \gamma \neq 0 & \text{für } m = m' \wedge n = n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.33)$$

auch annähernd besitzen, wenn der Laplace-Operator  $\nabla$  (vgl. Gl. (3.4)) auf sie angewandt wird [95]. Die Lösung der PDGL (3.16) mit den RB (3.6) ist also hinreichend genau gegeben durch die Beziehungen (3.19) und (3.20) mit den Eigenfunktionen aus Gl. (3.28).

### 3.1.2 Lösung der inhomogenen PDGL

Zur Lösung der inhomogenen PDGL (3.11) mit den RB (3.6) wird für die partikuläre Lösung  $w_{part}$  ein ähnlicher Modalzerlegungsansatz wie in (3.19) und (3.20) gewählt:

$$w_{part}(x, y) = \sum_{m,n} W_{m,n} \xi_m(x) \psi_n(y) \quad . \quad (3.34)$$

Für die rechte Seite der PDGL (3.11) wird ebenfalls eine Modalzerlegung durchgeführt gemäß

$$p_z = \sum_{m,n} P_{m,n} \xi_m(x) \psi_n(y) \quad , \quad (3.35)$$

wobei  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  die Eigenfunktionen aus Gl. (3.28) sind. Es gilt wieder, dass die  $(m,n)$ -Eigenschwingungen einzeln die PDGL erfüllen müssen. Daher setzt man die Argumente der Summen aus den Gleichungen (3.34) und (3.35) in die PDGL (3.11) ein und gelangt mit den Beziehungen (3.22) zu der Gleichung

$$W_{m,n} (k_{m,n} - m_{m,n}\omega_p^2) = P_{m,n}\xi_m(x)\psi_n(y) \quad . \quad (3.36)$$

Wegen den Gleichungen (3.21) und (3.22) folgt daraus

$$W_{m,n} = \frac{P_{m,n}}{\bar{m}(\omega_{m,n}^2 - \omega_p^2)} \quad , \quad (3.37)$$

wobei  $W_{m,n}$  die Modalamplituden der partikulären Lösung  $w_{part}$  sind.

Bei der Bestimmung von  $P_{m,n}$  wird die Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  ausgenutzt (vgl. [95]):

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \xi_m(x)\xi_{m'}(x)dx = \begin{cases} a & \text{für } m = m' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad (3.38)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_n(y)\psi_{n'}(y)dy = \begin{cases} b & \text{für } n = n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (3.39)$$

Multipliziert man Gl. (3.35) von rechts mit  $\psi_{n'}(y)$  und integriert beide Seiten längs der  $y$ -Achse im geschlossenen Intervall  $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ , erhält man

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p_z(x,y)\psi_{n'}(y)dy = \sum_{m,n} P_{m,n}\xi_m(x) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_n(y)\psi_{n'}(y)dy \quad . \quad (3.40)$$

Mit Gl. (3.39) verschwindet auf der rechten Seite von (3.40) die Summe über  $n$ , und es folgt

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p_z(x,y)\psi_n(y)dy = b \sum_m P_{m,n}\xi_m(x) \quad . \quad (3.41)$$

Entsprechend werden beide Seiten von Gl. (3.41) mit  $\xi_{m'}(x)$  multipliziert. Anschließend integriert man längs der  $x$ -Achse im geschlossenen Intervall  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ . Des Weiteren benutzt man die Beziehung (3.38), vertauscht die Integrationsreihenfolge und gelangt zu der Gleichung

$$P_{m,n} = \frac{1}{ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p_z(x,y)\xi_m(x)dx \psi_n(y)dy \quad . \quad (3.42)$$

Die Gesamtlösung der PDGL (3.5) mit den RB (3.6) im eingeschwungenen Zustand lässt sich nun mit Hilfe der Beziehungen (3.10) und (3.18) näherungsweise angeben durch

$$w = w_{part} e^{i\omega_p t} \quad . \quad (3.43)$$

Dabei ist  $w_{part}$  die partikuläre Lösung der PDGL aus (3.11). Sie wird mit Hilfe der Beziehungen (3.28), (3.34), (3.37) und (3.42) bestimmt.

### 3.1.3 Punktförmige Anregung durch eine harmonische Kraft

Abb. 3.2 zeigt eine rechteckige, an den Rändern fest eingespannte Platte, in deren Mitte sich der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befindet. Die Platte wird im Punkt  $(x_F, y_F)$  mit der senkrecht zur Plattenoberfläche wirkenden Kraft

$$F^* = F e^{i\omega_p t} \quad (3.44)$$

angeregt. Somit kann nach [102] für  $p_z$  in (3.11) oder (3.42) bei einer punktförmigen Anregung

$$p_z = F \delta(x - x_F) \delta(y - y_F) \quad (3.45)$$

geschrieben werden. Dabei ist  $\delta$  die *Dirac*-Funktion, die gemäß [11] gegeben ist durch

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } x_0 < x < x_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{für } x > x_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (3.46)$$

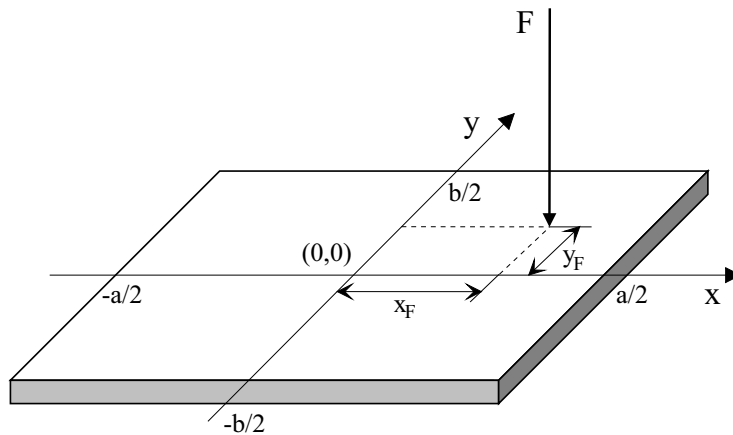


Abbildung 3.2: *Punktförmige Anregung mit der Kraft F.*

Durch Einsetzen von Gl. (3.45) in Gl. (3.42) erhält man

$$P_{m,n} = \frac{F}{ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \delta(x - x_F) \xi_m(x) dx \delta(y - y_F) \psi_n(y) dy \quad . \quad (3.47)$$

Wegen der Ausblendeigenschaft der  $\delta$ -Funktion [40]

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0), \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad (3.48)$$

folgt aus Gl. (3.47):

$$P_{m,n} = \frac{F}{ab} \xi_m(x_F) \psi_n(y_F) \quad . \quad (3.49)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.49) in Gl. (3.37) erhält man für die Modalamplituden

$$W_{m,n} = F g_{m,n}(x_F, y_F) \quad (3.50)$$

mit

$$g_{m,n}(x_F, y_F) = \frac{\xi_m(x_F) \psi_n(y_F)}{ab \bar{m} (\omega_{m,n}^2 - \omega_p^2)} \quad , \quad (3.51-a)$$

$$\bar{m} = \rho_M h \quad . \quad (3.51-b)$$

Man erkennt, dass  $W_{m,n}$  zur Kraftamplitude  $F$  des Aktors proportional ist, was später von großer Bedeutung sein wird. Die Abhängigkeit der Modalamplituden vom Ort des Aktors wird durch den Faktor  $g_{m,n}(x_F, y_F)$  beschrieben.

### 3.1.4 Anregung der Platte mit einem Piezoelement

Auf die Platte aus Abb. 3.2 wird eine rechteckige Piezokeramikscheibe aufgeklebt, wie in Abb. 3.3 gezeigt. Durch Anlegen der elektrischen Spannung  $U^* = U e^{i\omega_p t}$  wird das Piezoelement abwechselnd gestreckt und gestaucht. Diese Verzerrungen werden über die Klebeschicht auf die Platte übertragen. Es lässt sich nach [101] erreichen, dass die Amplitude  $\hat{M}$  des spezifischen Moments<sup>5</sup>  $M^* = \hat{M} e^{i\omega_p t}$ , das auf die Platte ausgeübt wird, innerhalb der Aktorgrenzen konstant ist. Dann kann  $\hat{M}$  gemäß [31, 70] mit Hilfe der Sprung- oder Heavyside-Funktion

$$\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1 & \text{für } x > \varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{für } 0 < x < \varepsilon \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad . \quad (3.52)$$

in der Form

$$\hat{M} = M \left[ \sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2) \right] \left[ \sigma(y - y_1) - \sigma(y - y_2) \right] \quad (3.53)$$

geschrieben werden, wobei  $M$  durch

$$M = C_0 \frac{d_{pe} U}{h_{pe}} \quad (3.54)$$

---

<sup>5</sup>Das spezifische Moment ist hier definiert als Moment pro Längeneinheit.

gegeben ist. In Gl. (3.54) sind  $h_{pe}$  die Dicke und  $d_{pe}$  die Spannungskonstante des Piezoelements. Wenn die Klebeschicht zwischen dem Piezoelement und der Platte als vernachlässigbar dünn betrachtet wird, gilt für die Konstante

$$C_0 = -E \frac{1 + \nu_{pe}}{1 - \nu} \frac{L}{1 + \nu - (1 + \nu_{pe})L} \frac{2}{3} h^2 \quad , \quad (3.55)$$

wobei  $E$  den Elastizitätsmodul,  $h$  die Dicke und  $\nu$  die Querkontraktionszahl der Platte bezeichnen [70]. Der Index  $pe$  bezieht sich auf das Piezoelement. Die Größe  $L$  ist durch

$$L = -\frac{E_{pe}}{E} \frac{1 - \nu^2}{1 - \nu_{pe}^2} \frac{3hh_{pe}(2h + h_{pe})}{2(h^3 + h_{pe}^3) + 3hh_{pe}^2} \quad (3.56)$$

gegeben.

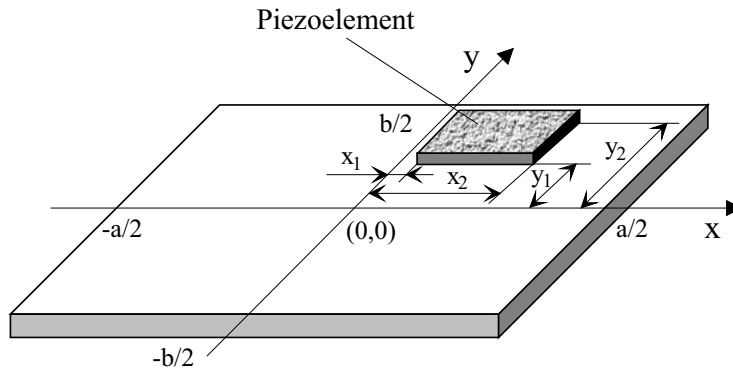


Abbildung 3.3: Anregung mit einem Piezoelement.

Um vom spezifischen Moment zu dem Druckterm  $p_z$  zu gelangen, der die Anregung der Platte und damit die rechte Seite der PDGL (3.11) bildet, muss  $\hat{M}$  jeweils zweimal in  $x$ - und  $y$ -Richtung differenziert werden [31]:

$$p_z = \nabla^2 \hat{M} = \frac{\partial^2 \hat{M}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{M}}{\partial y^2} \quad . \quad (3.57)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.53) und der Beziehung<sup>6</sup>

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \delta(x)$$

folgt aus Gl. (3.57)

$$p_z = M \left\{ \left[ \frac{d\delta(x - x_1)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_2)}{dx} \right] [\sigma(y - y_1) - \sigma(y - y_2)] \right. \\ \left. + [\sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2)] \left[ \frac{d\delta(y - y_1)}{dy} - \frac{d\delta(y - y_2)}{dy} \right] \right\} \quad . \quad (3.58)$$

<sup>6</sup>Dies folgt direkt durch Ableiten von Gl. (3.52) nach  $x$  und Vergleich mit Gl. (3.46).

Wenn man diesen Ausdruck ausmultipliziert, erhält man

$$\begin{aligned}
 p_z = & \frac{d\delta(x-x_1)}{dx} \underbrace{M [\sigma(y-y_1) - \sigma(y-y_2)]}_{M_{S_1}} \\
 & - \frac{d\delta(x-x_2)}{dx} \underbrace{M [\sigma(y-y_1) - \sigma(y-y_2)]}_{M_{S_2}} \\
 & + \frac{d\delta(y-y_1)}{dy} \underbrace{M [\sigma(x-x_1) - \sigma(x-x_2)]}_{M_{S_3}} \\
 & - \frac{d\delta(y-y_2)}{dy} \underbrace{M [\sigma(x-x_1) - \sigma(x-x_2)]}_{M_{S_4}}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

mit  $M$  aus Gl. (3.54) und  $M_{S_1}$ ,  $M_{S_2}$ ,  $M_{S_3}$  und  $M_{S_4}$  als Linienmomenten an den Rändern der Piezokeramik. Das Wirken eines über der Fläche des Piezoelements konstanten spezifischen Moments  $M$  resultiert also nach zweifacher Differentiation in Linienmomenten, die nur an den Rändern des Piezoelements wirken. Zur Veranschaulichung dient Abb. 3.4, in der das Piezoelement und die Platte im Querschnitt dargestellt sind.

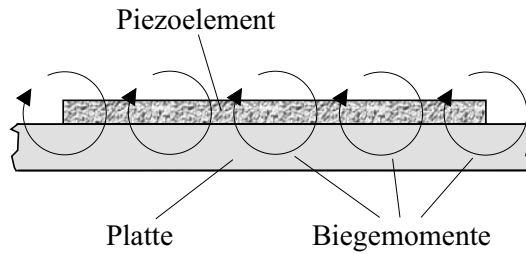


Abbildung 3.4: *Linienmomente bei Anregung mit einem Piezoelement.*

Dort wird gezeigt, wie sich die konstanten Momente innerhalb der Piezoffläche gegenseitig kompensieren, so dass lediglich die Linienmomente an den Rändern übrig bleiben. Indem der Ausdruck aus Gl. (3.58) in (3.42) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P_{m,n} = & \frac{M}{ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ \left[ \frac{d\delta(x-x_1)}{dx} - \frac{d\delta(x-x_2)}{dx} \right] [\sigma(y-y_1) - \sigma(y-y_2)] \right. \\
 & \left. + [\sigma(x-x_1) - \sigma(x-x_2)] \left[ \frac{d\delta(y-y_1)}{dy} - \frac{d\delta(y-y_2)}{dy} \right] \right\} \\
 & \cdot \xi_m(x) dx \psi_n(y) dy \quad .
 \end{aligned} \tag{3.60}$$



Unter Anwendung der Beziehung

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\delta(x-x_0)}{dx} \phi(x) dx = -\phi'(x_0) \quad \text{mit } \phi'(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} \text{ und } x_1 < x_0 < x_2 \quad , \quad (3.61)$$

die in A.1 hergeleitet wird, folgt aus Gl. (3.60) nach kurzer Rechnung

$$P_{m,n} = \frac{M}{ab} \left\{ \left[ \xi'_m(x_2) - \xi'_m(x_1) \right] \int_{y_1}^{y_2} \psi_n(y) dy + \int_{x_1}^{x_2} \xi_m(x) dx \left[ \psi'_n(y_2) - \psi'_n(y_1) \right] \right\} \quad (3.62)$$

mit  $M$  aus Gl. (3.54),  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  aus Gl. (3.28),  $\xi'_m(x) = d\xi_m(x)/dx$  und  $\psi'_n(y) = d\psi_n(y)/dy$ . Wenn Gl. (3.62) in Gl. (3.37) eingesetzt wird, erhält man

$$W_{m,n} = M g_{m,n}(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (3.63)$$

mit

$$g_{m,n}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{ab\bar{m}(\omega_{m,n}^2 - \omega_p^2)} \cdot \left\{ \left[ \xi'_m(x_2) - \xi'_m(x_1) \right] \int_{y_1}^{y_2} \psi_n(y) dy + \int_{x_1}^{x_2} \xi_m(x) dx \left[ \psi'_n(y_2) - \psi'_n(y_1) \right] \right\} \quad (3.64)$$

Gl. (3.63) verdeutlicht, dass in Analogie zum Fall der punktförmigen Erregung auch bei der flächigen Anregung mit einem Piezoaktor die Modalamplituden  $W_{m,n}$  der Plattenschwingung zur Amplitude  $M$  des Anregungssignals proportional sind.

## 3.2 Schallabstrahlungsrechnung

### 3.2.1 Methoden der Schallabstrahlungsrechnung

Das Schallfeld einer Geräuschquelle wird durch Schalldruck, durch Schallschnelle oder Schallintensität beschrieben. Diese *Luftschallfeldgrößen* sind in der Regel nur in Spezialfällen ausreichend zur Beschreibung der Quelle, da sie von Umgebungseinflüssen abhängig sind. Demgegenüber ist die Beschreibung der Schallabstrahlung mittels der von einer Schallquelle insgesamt abgestrahlten *Schallleistung* weitgehend unabhängig von der Umgebung. Deshalb werden im Folgenden die Verfahren zur Schallabstrahlungsrechnung getrennt vorgestellt als

- Verfahren zur Berechnung von Luftschallfeldgrößen,
- Verfahren zur Berechnung der Schalleistung.

### 3.2.1.1 Verfahren zur Berechnung von Luftschallfeldgrößen

Die Grundlage zur Berechnung des Schalldruckes  $p$  in einem homogenen, ruhenden Medium bildet die *Wellengleichung (Helmholtz-Gleichung)* [52]. Sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad , \quad (3.65)$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft bedeutet. Auf dieser Gleichung bauen im Wesentlichen die heutzutage gängigen Verfahren zur Berechnung von Luftschallfeldgrößen auf:

- *Helmholtz-Integralgleichung* [52]: Aus der Wellengleichung folgt durch Fouriertransformation und mit Hilfe des 2. Greenschen Satzes die Helmholtz-Integralgleichung. Die Lösung dieser Gleichung führt auf den Schalldruck in einem beliebigen Feldpunkt in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz.
- *Separationsverfahren* [12]: Für den Strahler wird ein bezüglich der Wellengleichung separierbares Koordinatensystem definiert. Die Wellengleichung wird gelöst, indem eine Koordinate dieses Koordinatensystems als konstant betrachtet wird.
- *Rayleigh-Integral* [12, 36, 51, 69]: Für den Spezialfall einer schwingenden Platte, die wie in [Abb. 3.5](#) gezeigt, in eine unendlich große, starre Wand eingebettet ist, vereinfacht sich das Helmholtz-Integral zum Rayleigh-Integral.
- *Randelementmethode (Boundary Element Method, BEM)* [44, 52]: Die Strahleroberfläche wird in kleine Teilflächen zerlegt, in denen Schalldruck und -schnelle als konstant betrachtet werden können. Durch Einsetzen der flächennormalen Komponente der Schallschnelle in diesen Oberflächenelementen in die Helmholtz-Integralgleichung wird der Schalldruck an der Oberfläche und in einer anschließenden Rechnung für beliebige Feldpunkte berechnet.
- *Methode der Finiten Elemente (FEM)* [5, 52]: Bei diesem Verfahren wird das Schallfeld diskretisiert. Für jedes Teilvolumen wird nach dem Hamiltonschen Prinzip die Lagrange-Funktion minimiert und daraus der Schalldruck in beliebigen Feldpunkten bestimmt.
- *Multipolstrahlersynthese* [52]: Der Strahler wird durch ein System von Multipolen, das im Innern des Strahlers angenommen wird, so ersetzt, dass die Schallschnelle auf der Strahleroberfläche und damit das gesamte abgestrahlte Schallfeld möglichst gut approximiert werden.

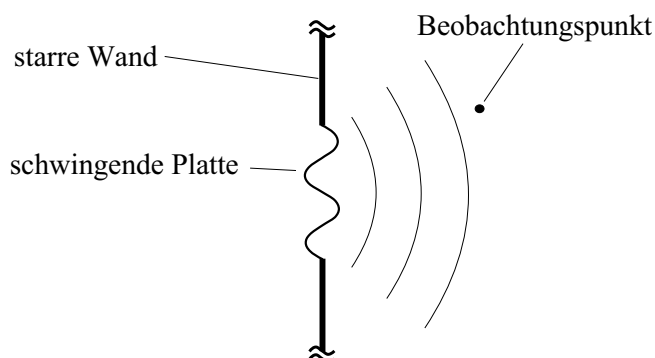


Abbildung 3.5: Schallabstrahlung von einer schwingenden Platte.

### 3.2.1.2 Verfahren zur Berechnung der Schalleistung

Die Methoden zur rechnerischen Bestimmung der Schalleistung können folgendermaßen klassifiziert werden:

- *Hüllflächenintegration*: In diskreten Punkten einer die Schallquelle umgebenden Hüllfläche werden Luftschallfeldgrößen (Schalldruck, Schallschnelle oder Schallintensität) bestimmt. Die Schalleistung ergibt sich durch entsprechend gewichtete Integration dieser Luftschallgrößen über dieser Messfläche.
- *Genormtes Körperschallverfahren*: Bei diesem durch [66, 87] genormten Verfahren wird die Schalleistung über die auf der Strahleroberfläche gemessene flächennormale Amplitude der Schwingschnelle bestimmt. Allerdings wird dabei die Phaseninformation der Schallschnelle vernachlässigt, so dass die Schalleistung nur bis auf einen im Allgemeinen unbekanntem Faktor, den *Schallabstrahlungsgrad*, bestimmt werden kann.
- *Direkte Finite Elemente Methode (DFEM)*: Bei der von Hübner entwickelten Methode [46, 56, 58, 59, 61, 94] wird im Gegensatz zum Genormten Körperschallverfahren sowohl die flächennormale Amplitude als auch die Phase der Schwingschnelle bestimmt. Über die Addition von Einzelschalleistungen von Finiten Elementen auf der Strahleroberfläche und deren Wechselwirkungsschalleistungen wird daraus die Gesamtschalleistung exakt bestimmt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Schalleistung mit Hilfe des Rayleigh-Integrals und dem Hüllflächenintegrationsverfahren bestimmt, was in den folgenden Abschnitten genauer erläutert wird.

## 3.2.2 Berechnung der Schalldrucks mittels Rayleigh-Integral

Die Schallabstrahlung in Luft von einer harmonisch schwingenden, ebenen Struktur, die von einer unendlich großen, starren Wand umgeben ist (vgl. Abb. 3.5), kann nach [12, 36, 51, 69]

mit dem Rayleigh-Integral

$$p^*(\underline{r}, t) = \frac{\rho}{2\pi} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w(\underline{r}_S, t)}{\partial t^2} e^{-ikR} dS \quad (3.66)$$

beschrieben werden mit

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Dichte von Luft} \quad , \\ \underline{r} &= \text{Positionsvektor des Beobachtungspunkts } (r = |\underline{r}|) \quad , \\ p^* &= \text{Schalldruck im Abstand } r \text{ vom Mittelpunkt der schwingenden Struktur} \quad , \\ \underline{r}_S &= \text{Positionsvektor eines Elements (Fläche } dS) \text{ auf der Strukturoberfläche} \quad , \\ w &= w_{part} \sin \omega_p t = \text{Plattenauslenkung} \quad , \\ R &= \text{Abstand des Beobachtungspunkts von der schwingenden Struktur} \quad , \\ k &= \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{Wellenzahl in Luft} \quad . \end{aligned}$$

Bei einer rechteckigen Struktur, wie sie in Abb. 3.6 dargestellt ist, lässt sich  $R$  in der Form

$$\begin{aligned} R &= (r - |\underline{r}_S| \sin \theta) / \cos \theta \\ &= r / \cos \theta - (x \cos \phi + y \sin \phi) \tan \theta \end{aligned} \quad (3.67)$$

schreiben. Für  $|\underline{r}| \gg |\underline{r}_S|$ , d.h. im *Fernfeld* der Platte, vereinfacht sich der Nenner von  $e^{-ikR}/R$  aus Gl. (3.66) zu  $r$ , während sich der Zähler wegen der relativen Phasenbeziehungen zwischen den infinitesimal kleinen Teilstrahlern der Platte nicht vereinfachen lässt. Man erhält deshalb aus Gl. (3.66)

$$p^*(r, \phi, \theta, t) = \frac{\rho e^{-ikr}}{2\pi r} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} e^{i\left(\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b}\right)} dx dy \quad (3.68)$$

mit

$$\alpha = ka \sin \theta \cos \phi \quad , \quad (3.69\text{-a})$$

$$\beta = kb \sin \theta \sin \phi \quad . \quad (3.69\text{-b})$$

Indem die Beziehung (3.34) in (3.68) eingesetzt wird und die Reihenfolge der Summation und der beiden Integrationsoperationen vertauscht wird, ergibt sich für den Schalldruckwert

$$p^*(r, \phi, \theta, t) = -\frac{\rho \omega_p^2 e^{-ikr}}{2\pi r} \sin \omega_p t \sum_{m,n} W_{m,n} \eta_{m,n}(\phi, \theta) \quad . \quad (3.70)$$

Der Term  $\eta_{m,n}(\phi, \theta)$ , der die Schallabstrahlung der  $(m, n)$ -Schwingungsmode charakterisiert, ist gegeben durch

$$\eta_{m,n}(\phi, \theta) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \xi_m(x) \psi_n(y) e^{i\left(\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b}\right)} dx dy \quad . \quad (3.71)$$

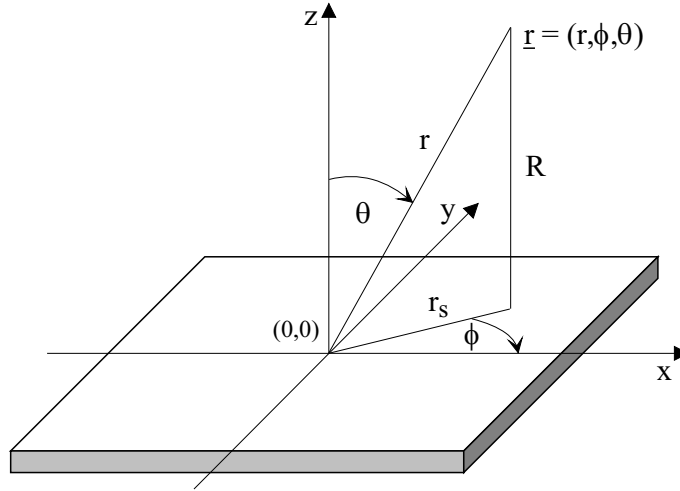


Abbildung 3.6: Rechteckstruktur mit Beobachtungspunkt im Fernfeld.

Bei  $N_p$  vorhandenen Primärquellen mit den Kraftamplituden  $F_{pk}$  und Phasen  $\varphi_{pk} = 0$  ( $k =$  Index der Primäraktoren) sowie  $N_s$  existierenden Sekundärquellen mit den Kraftamplituden  $F_{sl}$  und Phasen  $\varphi_{sl}$  ( $l =$  Index der Sekundäraktoren) ist der Schalldruck im Zeitbereich gegeben durch

$$p^*(r, \phi, \theta, t) = -\frac{\rho\omega_p^2 e^{-ikr}}{2\pi r} \zeta(\phi, \theta, t) \quad (3.72)$$

mit

$$\zeta(\phi, \theta, t) = \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} W_{p(m,n)k} \sin \omega_p t + \sum_{l=1}^{N_s} W_{s(m,n)l} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \right) \eta_{m,n}(\phi, \theta) \quad (3.73)$$

In dieser Gleichung sind  $W_{p(m,n)k}$  die Modalamplituden des Schwingungsanteils, der durch den  $k$ -ten Primäraktor verursacht wird, und  $W_{s(m,n)l}$  die Modalamplituden bezüglich des  $l$ -ten Sekundäraktors. Da  $\eta_{m,n}(\phi, \theta)$  komplexwertig ist, kann der Betrag des Schalldrucks geschrieben werden als

$$p(r, \phi, \theta, t) = \frac{\rho\omega_p^2}{2\pi r} \sqrt{\Re^2\{\zeta\} + \Im^2\{\zeta\}} \quad (3.74)$$

mit  $\Re\{\zeta\}$  und  $\Im\{\zeta\}$  als Real- bzw. Imaginärteil von  $\zeta$ . Dabei ist  $\zeta$  durch Gl. (3.73) gegeben. Es fällt auf, dass der Betrag des Schalldrucks eine ortsabhängige Größe ist, d.h. er hängt ab vom Positionsvektor  $\underline{r} = (r, \phi, \theta)$  des Punkts, in dem der Schalldruck bestimmt wird.

### 3.2.3 Bestimmung der Schallintensität

Der Betrag der Schallintensität, die eine Vektorgröße darstellt, kann durch zeitliche Mittelung des Produkts aus Schalldruck  $p$  und Schallschnellevektor  $\underline{v}$  bestimmt werden [52, 60]:

$$I = \overline{|p(t)\underline{v}(t)|} \quad (3.75)$$

Im Fernfeld wird daraus

$$I = \frac{\tilde{p}^2}{\rho c} \quad , \quad (3.76)$$

wobei  $\tilde{p}$  den Effektivwert des Schalldrucks,  $\rho$  die Dichte von Luft und  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft unter den gegebenen meteorologischen Bedingungen darstellen. Den Effektivwert  $\tilde{p}$  des Schalldrucks berechnet man mittels der Beziehung

$$\tilde{p}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt \quad . \quad (3.77)$$

### 3.2.4 Berechnung der Schalleistung

Die Schalleistung, die von einer Schallquelle in einen Halbraum abgestrahlt wird, kann bestimmt werden, indem die flächennormale Komponente der Schallintensität auf einer Halbkugel<sup>7</sup> mit dem Radius  $r$  integriert wird. Demnach ergibt sich für die Schalleistung

$$P = \iint_S I_n dS \quad (3.78)$$

oder im Fernfeld unter Berücksichtigung der Gl. (3.76)

$$P = \frac{1}{\rho c} \iint_S \tilde{p}^2 dS \quad . \quad (3.79)$$

Dabei ist  $dS$  ein Flächenelement auf der Halbkugeloberfläche, wie in [Abb. 3.7](#) gezeigt. Für die Fläche  $dS$  des Halbkugелеlements kann man deshalb

$$dS = d_1 d_2 = (r_1 d\phi)(r d\theta) = r^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (3.80)$$

schreiben. Nach Einsetzen von (3.80) in Gl. (3.79) ergibt sich

$$P = \frac{1}{\rho c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}^2 r^2 d\phi \sin \theta d\theta \quad . \quad (3.81)$$

Mit Gl. (3.74) kann Gl. (3.81) umgeschrieben werden in

$$P = \frac{\rho \omega_p^4}{4\pi^2 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} (\Re^2\{\zeta\} + \Im^2\{\zeta\}) dt d\phi \sin \theta d\theta$$

oder

$$P = \frac{\rho \omega_p^5}{8\pi^3 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{T_p} (\Re^2\{\zeta\} + \Im^2\{\zeta\}) dt d\phi \sin \theta d\theta \quad (3.82)$$

mit  $T_p = 2\pi/\omega_p$ . Gl. (3.82) zeigt, dass die Schalleistung im Gegensatz zum Schalldruck und der Schallintensität (vgl. Gl. (3.72) und (3.75)) nicht von der Position des Beobachtungspunkts abhängt.

---

<sup>7</sup>Grundsätzlich sind verschiedenartige Hüllflächen denkbar, die den Halbraum abdecken.

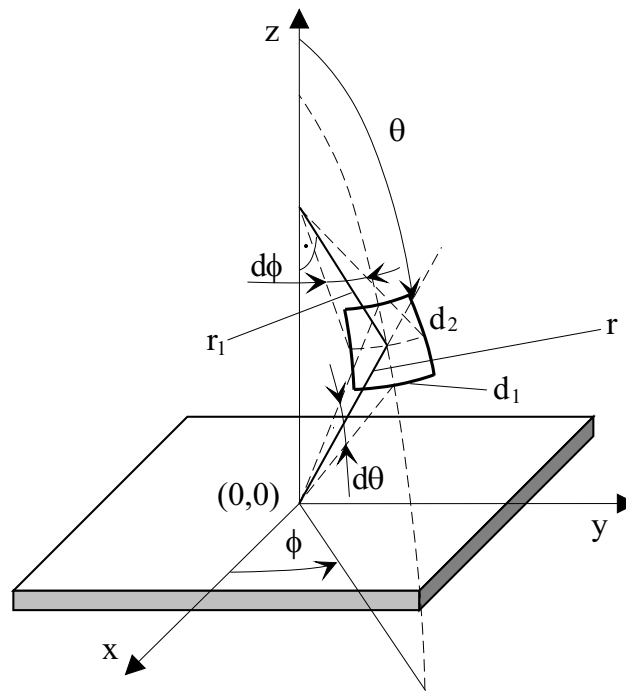


Abbildung 3.7: Geometrie des Flächenelements auf der Halbkugel.

### 3.3 Anzahl der zu berücksichtigenden Schwingungsmoden

Wenn die Schallleistung numerisch mit Hilfe des Rayleigh-Integrals berechnet wird, kann nur eine begrenzte Anzahl von Schwingungsmoden berücksichtigt werden. Bei der Wahl der Anzahl der Moden muss daher ein Kompromiss gefunden werden zwischen kurzer Rechenzeit und kleinem Fehler, der durch das Weglassen der restlichen Schwingungsmoden entsteht. Bei der Beantwortung der Frage, wie viele Schwingungsmoden in die Schallabstrahlungsrechnung eingehen sollen, spielen zwei Prinzipien eine Rolle:

1. Je weiter die Erregerfrequenz  $f_p$  von der Eigenfrequenz  $f_{m,n}$  der  $(m, n)$ -Mode entfernt ist, desto kleiner ist die modale Schwingungsamplitude  $W_{m,n}$  bei gleichbleibender Amplitude des Anregungssignals (vgl. Gl. (3.37)).
2. Wie bereits in Kap. 2.2.4 gezeigt wurde, besitzen die Schwingungsmoden bezüglich ihrer Schallabstrahlung unterschiedliche Richtungscharakteristiken. Es gibt Schwingungsmoden, die Schall in alle Richtungen gleich stark abstrahlen (*Kugel- oder Monopolstrahler*), und andere, die den Schall bevorzugt in bestimmte Richtungen weiterleiten. Außerdem unterscheiden sich die Schwingungsmoden in der Stärke der Schallabstrahlung ins Fernfeld, d.h. die Schallwellen, die von der schwingenden Struktur ins Nahfeld abgesandt werden, pflanzen sich je nach Schwingungsmode verschieden stark ins Fernfeld fort. Vor allem bei höheren, geradzahligem Schwingungsmoden bleibt ein großer Teil der abgestrahlten

Schalleistung im Nahfeld (“akustischer Kurzschluss” — siehe Kap. 2.2.4), so dass die Schallwellen sehr abgeschwächt im Fernfeld ankommen.

Wallace [42, 106] hat den letzteren Sachverhalt genauer untersucht und für die rechteckige Platte in Abb. 3.1 die *modale Abstrahlungseffizienz*<sup>8</sup>

$$\varsigma_{m,n} = \frac{P}{\rho c a b v_{m,n,eff}^2} \quad (3.83)$$

definiert. Dabei ist  $P$  die Schalleistung der  $(m, n)$ -Mode und  $v_{m,n,eff}^2$  das Quadrat der flächig gemittelten Effektivgeschwindigkeit der  $(m, n)$ -Mode der Platte (Seitenlängen  $a$  und  $b$ ) in  $z$ -Richtung. Anschaulich ist der Nenner in Gl. (3.83) die Schalleistung, die von einem Kolben mit rechteckigem Querschnitt (Querschnittsfläche:  $ab$ ) in Luft abgestrahlt wird (akustische Impedanz in Luft:  $\rho c$ ), wenn der Kolben mit der Geschwindigkeitsamplitude  $\sqrt{2}v_{m,n,eff}$  sinusförmig schwingt. Nach den Herleitungen in A.2 ergibt sich für die modale Abstrahlungseffizienz einer an den Rändern fest eingespannten Platte in Luft

$$\varsigma_{m,n} = \frac{\omega_p^2}{4\pi^2 c^2 a b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \Re^2\{\eta_{m,n}\} + \Im^2\{\eta_{m,n}\} \right) d\phi \sin \theta d\theta \quad , \quad (3.84)$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft,  $\omega_p$  die Kreisfrequenz der Erregung,  $\Re\{\eta_{m,n}\}$  und  $\Im\{\eta_{m,n}\}$  der Real- bzw. Imaginärteil von  $\eta_{m,n}$  sind. Die Größe  $\eta_{m,n}$  ist mit Gl. (3.71) berechenbar, die Eigenfunktionen  $\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  mit Gl. (3.28). In [Abb. 3.8](#) sind die modalen Abstrahlungseffizienzwerte für die ersten  $(m, n)$ -Schwingungsmoden dargestellt. Dabei wird der Frequenzbereich  $0 \dots 2$  kHz gewählt, da die aktive Schallabstrahlungsminderung im höherfrequenten Bereich nur selten funktioniert (vgl. Kap. 2.2). Zum Vergleich sind in [Abb. 3.9](#) drei  $(m, m)$ -Schwingungsmoden im Frequenzbereich  $0 \dots 6$  kHz einander gegenübergestellt.

In [Abb. 3.8](#) erkennt man, dass die Werte  $\varsigma_{m,n}$  aller dargestellten Schwingungsmoden bei einer bestimmten Frequenz gleich eins sind. Oberhalb dieser Frequenz, die in der Literatur (u.a. [69]) *kritische Frequenz* genannt wird, ist die strukturelle Wellenlänge größer als die akustische Wellenlänge, so dass kein akustischer Kurzschluss im Nahfeld der Platte stattfinden kann [42]. Die kritische Frequenz ist umso größer, je höher die Mode ist. Sowohl in [Abb. 3.8](#) als auch in [Abb. 3.9](#) wird bestätigt, was bereits in Kap. 2 angedeutet wurde:

1. Ungeradzahlige Schwingungsmoden strahlen Schall besser ab als geradzahlige.
2. Die Abstrahlungseffizienz nimmt mit zunehmender Modenzahl ab. Dieser Effekt ist allerdings schwächer als der zuerst genannte. Daher strahlt beispielsweise die  $(3, 1)$ -Mode Schall effizienter ab als die  $(2, 2)$ -Mode.

Bei der Wahl der zu berücksichtigenden Schwingungsmoden erweist es sich als zweckmäßig, für eine gegebene Erregerfrequenz  $f_p$  die nächstgelegene Schwingungsmode zu bestimmen, die

---

<sup>8</sup>In der deutschsprachigen Literatur wird  $\varsigma$  als Abstrahlgrad bezeichnet



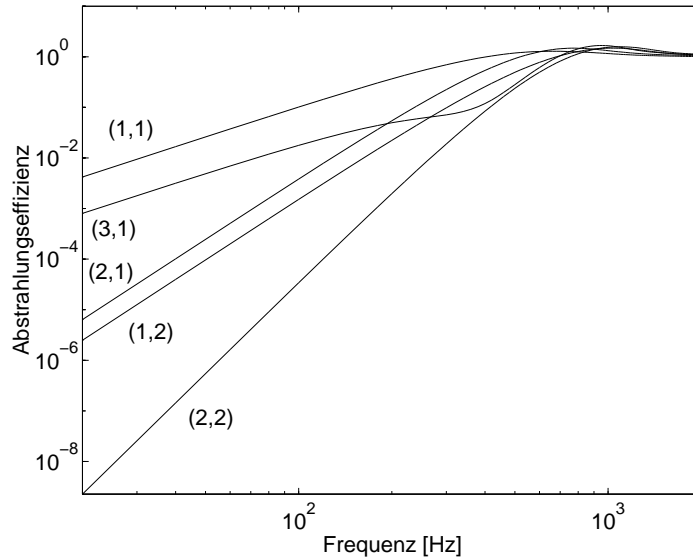


Abbildung 3.8: Modale Abstrahlungseffizienzen der ersten Schwingungsmoden einer rechteckigen, an den Rändern fest eingespannten Platte.

fortan als  $(m_p, n_p)$ -Mode bezeichnet wird. Durch die anschließende Berechnung des Schallfelds werden alle Schwingungsmoden berücksichtigt, deren Eigenfrequenzen kleiner oder gleich der Eigenfrequenz der  $(m_p + \Delta m, n_p + \Delta n)$ -Schwingungsmoden sind, wobei man  $\Delta m, \Delta n \in \mathcal{N}$  frei wählen kann. Als günstiger Wert für  $\Delta m$  und  $\Delta n$  hat sich

$$\Delta m = \Delta n = 5 \quad (3.85)$$

herausgestellt. Am Beispiel  $f_p = 300$  Hz wird der Fehler abgeschätzt, den man bei dieser Vorgehensweise durch das Weglassen der restlichen Moden macht. Die  $(7, 3)$ -Mode ist die am nächsten bei 300 Hz liegende, gut schallabstrahlende Mode. Daher werden alle Schwingungsmoden berücksichtigt, deren Eigenfrequenzen kleiner oder gleich der Eigenfrequenz der  $(12, 8)$ -Mode ( $f_{12,8} = 1197$  Hz) sind. Für einige der nächsthöheren Schwingungsmoden wird das Produkt

$$L_{m,n} = \varsigma_{m,n} G_{m,n} \quad (3.86)$$

der modalen Abstrahlungseffizienz  $\varsigma_{m,n}$  und des modalen Frequenzgangs aus Gl. (3.37)

$$G_{m,n} = \frac{W_{m,n}}{P_{m,n}} = \frac{1}{\bar{m}(\omega_{m,n}^2 - \omega_p^2)} \quad (3.87)$$

gebildet. In Tab. 3.1 sind die Werte  $L_{m,n}$  der Schwingungsmoden sowie das Verhältnis  $L_{m,n}/L_{7,3}$  eingetragen. Man erkennt an den sehr kleinen Werten von  $L_{m,n}/L_{7,3}$ , dass die Schwingungsmoden mit Eigenfrequenzen über 1197 Hz einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Schallabstrahlung haben.

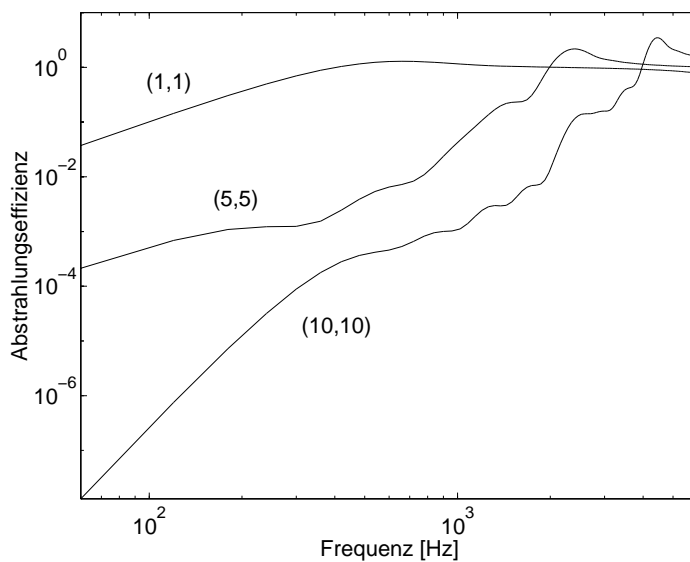


Abbildung 3.9: Modale Abstrahlungseffizienzen einiger  $(m,m)$ -Schwingungsmoden einer rechteckigen, an den Rändern fest eingespannten Platte.

Tabelle 3.1:  $L_{m,n}$  und  $L_{m,n}/L_{7,3}$  für die nächsthöheren Moden der  $(12,8)$ -Mode.

$(m,n)$ -Mode	$f_{m,n}$	$L_{m,n} \left[ \frac{\text{S}^2}{\text{kg}} \right]$	$L_{m,n}/L_{7,3}$
(7,3)	308	1.15e-09	1.0
(12,8)	1197	2.82e-14	2.46e-05
(10,9)	1198	5.40e-13	4.70e-04
(18,1)	1217	8.21e-14	7.15e-05
(15,6)	1223	1.73e-13	1.51e-04
(16,5)	1227	1.67e-13	1.45e-04

### 3.4 Modellierung des ASAC-Systems

In Abb. 3.10 ist ein System zur aktiven Schallabstrahlungsminderung an einer Platte dargestellt. Das System besitzt Feedforward-Struktur, d.h. das Primärerregungssignal ist gleichzeitig das Referenzsignal für den Controller (siehe Abb. 2.11). Der Controller, der aus einem adaptiven digitalen Filter, einem digitalen Vorfilter und dem LMS-Algorithmus besteht (vgl. Abb. 2.12), bestimmt die Ansteuersignale  $y_j$  der Sekundäraktoren. Er stellt also die Kraftamplituden und Phasen der Sekundäraktorsignale zur Verfügung, die das aus den Quadraten der Fehlersensorsignale gebildete Summensignal minimieren. Wenn Mikrofone als Fehlersensoren eingesetzt werden, sind die Fehlersensorsignale als Schalldrücke gegeben.

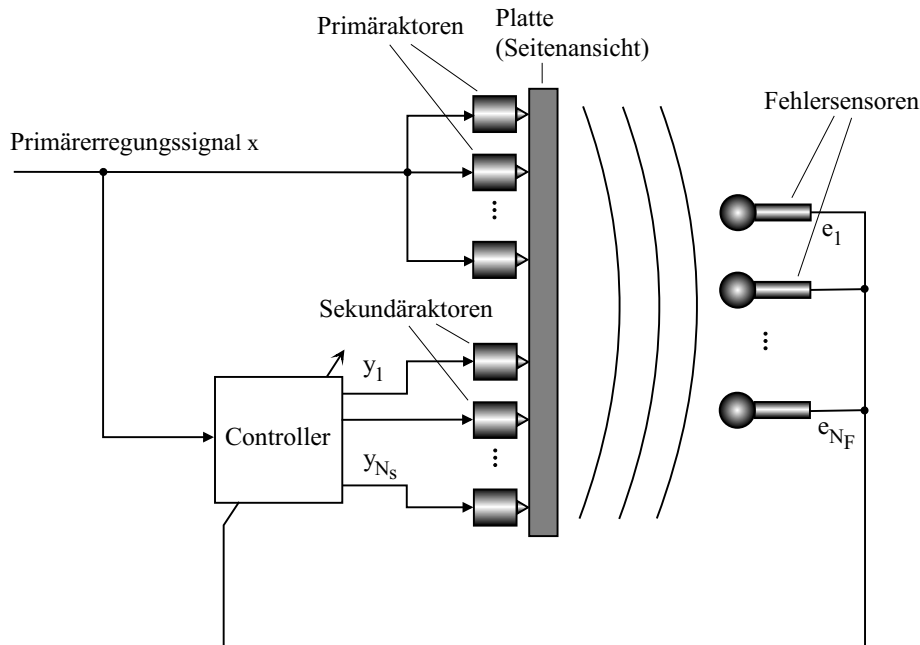


Abbildung 3.10: *Aktive Schallabstrahlungsminderung an einer Platte.*

Mathematisch betrachtet löst der Controller ein Optimierungsproblem der Form

$$J(\underline{F}_s, \underline{\varphi}_s) \stackrel{!}{=} \min \quad . \quad (3.88)$$

Dabei sind  $\underline{F}_s$  und  $\underline{\varphi}_s$  Vektoren, deren Komponenten die Kraftamplituden bzw. die Phasen der Sekundäraktorsignale darstellen. Die Kostenfunktion ist gegeben als

$$J = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sum_{q=1}^{N_F} p_q^2 \quad (3.89)$$

mit  $T_p = 2\pi/\omega_p$ . Die Größe  $p_q$  stellt den Schalldruckbetrag beim  $q$ -ten Fehlermikrofon bei insgesamt  $N_F$  Mikrofonen dar. Durch Einsetzen von Gl. (3.74) in die Beziehung (3.89) erhält

man

$$J = \frac{\rho^2 \omega_p^5}{8\pi^3} \int_0^{T_p} \sum_{q=1}^{N_F} \frac{1}{r_q^2} \left( \Re^2\{\zeta\} + \Im^2\{\zeta\} \right) dt \quad , \quad (3.90)$$

wobei  $\zeta$  durch Gl. (3.73) gegeben ist und  $\Re\{\zeta\}$ ,  $\Im\{\zeta\}$  der Real- bzw. Imaginärteil von  $\zeta$  sind. Wenn die Fehlermikrofone im Abstand  $r_q = r$  vom Plattenmittelpunkt platziert werden, folgt aus Gl. (3.90)

$$J = \varepsilon \int_0^{T_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left( \Re^2\{\zeta\} + \Im^2\{\zeta\} \right) dt \quad (3.91)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{\rho^2 \omega_p^5}{8\pi^3 r^2} \quad . \quad (3.92)$$

Bei punktförmiger Anregung sind wegen der Beziehung (3.50) die Modalamplituden  $W_p(m, n)$  und  $W_s(m, n)$  proportional zu den zugehörigen Kraftamplituden  $F_{pk}$  bzw.  $\hat{F}_{sl}$  ( $F_{pk} > 0$ ,  $\hat{F}_{sl} > 0$ ) der Primär- bzw. Sekundäraktoren, so dass sie in der Form

$$W_{p(m,n)k} = F_{pk} g_{p(m,n)k} \quad , \quad (3.93-a)$$

$$W_{s(m,n)l} = \hat{F}_{sl} g_{s(m,n)l} \quad (3.93-b)$$

geschrieben werden können. Die Faktoren  $g_{p(m,n)k}$  und  $g_{s(m,n)l}$  hängen vom Ort und der Art der Aktoren ab. Sie sind für eine punktförmige Anregung durch Gl. (3.51-a) gegeben, wobei für den  $k$ -ten Primäraktor die Koordinaten  $(x_{pk}, y_{pk})$  und für den  $l$ -ten Sekundäraktor die Koordinaten  $(x_{sl}, y_{sl})$  anstelle von  $(x_F, y_F)$  einzusetzen sind. Die nachfolgenden Untersuchungen in diesem Kapitel werden für den Fall durchgeführt, dass die Aktoren punktförmig sind. Jedoch gelten die hergeleiteten Beziehungen auch, wenn die Punktaktoren durch flächig wirkende Piezoaktoren ersetzt werden. Um dies zu verdeutlichen, wird Gl. (3.63) auf den  $l$ -ten Sekundäraktor angewandt als

$$W_{s(m,n)l} = M_{sl} g_{s(m,n)l} \quad , \quad (3.94)$$

wobei  $g_{s(m,n)l}$  mittels Gl. (3.64) bestimmt wird. Man erkennt, dass analog zur punktförmigen Erregung die Modalamplituden  $W_{s(m,n)l}$  proportional zur entsprechenden Signalamplitude  $M_{sl}$  sind. Demnach lassen sich die Gleichungen für die punktförmige Erregung auf die flächige Anregung mit Piezoelementen anwenden, indem man in Gl. (3.93-b)  $\hat{F}_{sl}$  durch  $M_{sl}$  ersetzt und den Term  $g_{s(m,n)l}$  mittels Gl. (3.64) bestimmt. Durch Einsetzen von Gl. (3.93) in (3.73) ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta(\phi, \theta, \hat{F}_{sl}, \varphi_{sl}, t) = & \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} \sin \omega_p t \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \right) \eta_{m,n}(\phi, \theta) \quad . \end{aligned} \quad (3.95)$$

Damit folgt aus Gl. (3.91), dass die Kostenfunktion quadratisch von den Kraftamplituden  $\hat{F}_{sl}$  der Sekundäraktoren abhängt. Als notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Minimums der Kostenfunktion  $J$  muss der Gradientenvektor von  $J$  gleich dem Nullvektor sein:

$$\text{grad } J = \left( \frac{\partial J}{\partial \hat{F}_{s1}} \quad \cdots \quad \frac{\partial J}{\partial \hat{F}_{sN_s}} \quad \frac{\partial J}{\partial \varphi_{s1}} \quad \cdots \quad \frac{\partial J}{\partial \varphi_{sN_s}} \right) = \underline{0}^T \quad . \quad (3.96)$$

Wegen des quadratischen Zusammenhangs zwischen  $J$  und den Kraftamplituden  $\hat{F}_{sl}$  ist ein lokales Minimum von  $J$  bezüglich  $\hat{F}_{sl}$  gleichzeitig ein absolutes Minimum. Mit Gl. (3.91) und Gl. (3.95) erhält man aus (3.96)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \hat{F}_{sl}} &= 2\varepsilon \int_0^{T_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left( \Re\{\zeta\} \frac{\partial \Re\{\zeta\}}{\partial \hat{F}_{sl}} + \Im\{\zeta\} \frac{\partial \Im\{\zeta\}}{\partial \hat{F}_{sl}} \right) dt \\ &= 2\varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \int_0^{T_p} \left( \Re\{\zeta\} \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right. \\ &\quad \left. + \Im\{\zeta\} \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) dt \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

mit  $l = 1, \dots, N_s$  und  $\varepsilon$  aus Gl. (3.92).

Daraus folgt mit den in A.3 gezeigten Umformungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \hat{F}_{sl}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left\{ \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \cos \varphi_{sl} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \cos(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \right) \cdot \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \\
&\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\
&\quad + \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \cos \varphi_{sl} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \cos(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \right) \cdot \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \\
&\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \left. \right\} \\
&\stackrel{!}{=} 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \varphi_{sl}} &= 2\varepsilon \int_0^{T_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left( \Re\{\zeta\} \frac{\partial \Re\{\zeta\}}{\partial \varphi_{sl}} + \Im\{\zeta\} \frac{\partial \Im\{\zeta\}}{\partial \varphi_{sl}} \right) dt \\
&= 2\varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \int_0^{T_p} \left( \Re\{\zeta\} \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \cos(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right. \\
&\quad \left. + \Im\{\zeta\} \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \cos(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) dt \\
&\stackrel{!}{=} 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Mit den Herleitungen in A.3 wird daraus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \varphi_{sl}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left\{ \left[ \sum_{m,n} \left( - \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \sin \varphi_{sl} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \sin(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \right) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \right. \\
&\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\
&\quad \left. + \left[ \sum_{m,n} \left( - \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \sin \varphi_{sl} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \sin(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \right) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right\} \\
&\stackrel{!}{=} 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Nach [47] muss als weitere notwendige Bedingung für ein lokales Minimum die *Hesse-Matrix*

$$H_{2N_s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{s1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{s1} \partial \hat{F}_{sN_s}} & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{s1} \partial \varphi_{s1}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{s1} \partial \varphi_{sN_s}} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{sN_s} \partial \hat{F}_{s1}} & \cdots & & & & \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{sN_s}^2} \end{pmatrix}, \tag{3.101}$$

die reell und symmetrisch ist, positiv semidefinit sein. Als hinreichende Bedingung gilt, dass die  $(2N_s, 2N_s)$ -Matrix  $H_{2N_s}$  positiv definit ist. Für die positive (Semi-)Definitheit einer reell symmetrischen  $(n, n)$ -Matrix  $H_n$  ist es notwendig und hinreichend, dass sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten<sup>9</sup> sowie die Determinante  $\Delta H_n$  positiv (nicht-negativ) sind [111].

<sup>9</sup>Die Hauptabschnittsdeterminante  $\Delta H_{n-k}$  entsteht, indem man in  $\Delta H_n$  die letzten  $k$  Zeilen und Spalten streicht.

Für die Elemente der Hesse-Matrix gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{si} \partial \hat{F}_{sj}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \cos(\varphi_{si} - \varphi_{sj}) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\
 &\quad + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \cos(\varphi_{si} - \varphi_{sj}) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \\
 &\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] , \tag{3.102}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{si} \partial \varphi_{sj}} &= \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{sj} \partial \hat{F}_{si}} \\
 &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \hat{F}_{sj} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \sin(\varphi_{sj} - \varphi_{si}) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\
 &\quad + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \sin(\varphi_{sj} - \varphi_{si}) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \\
 &\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] , \tag{3.103}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{si} \partial \varphi_{sj}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \hat{F}_{si} \hat{F}_{sj} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \cos(\varphi_{si} - \varphi_{sj}) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\
 &\quad + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \cos(\varphi_{si} - \varphi_{sj}) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \\
 &\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] . \tag{3.104}
 \end{aligned}$$

Zunächst wird der Fall untersucht, in dem ein einzelner Sekundäraktor vorhanden ist. Dann



folgt aus Gl. (3.100), dass  $\sin \varphi_s = 0$  oder

$$\varphi_s = \nu\pi \quad \text{mit } \nu \in \mathcal{Z}_0 \quad (3.105)$$

gelten muss. Der Sekundäraktor schwingt also im optimalen Fall — Kostenfunktion  $J$  ist lokal minimal — entweder gleich- oder gegenphasig zu den Primäraktoren, je nachdem, wo er sich auf der Platte relativ zu den Primäraktoren befindet. Zur Überprüfung der weiteren notwendigen Bedingung für ein lokales Minimum werden die Determinante  $\Delta H_2 = |H_2|$  und die einzige Hauptabschnittsdeterminante  $\Delta H_1$  der Hesse-Matrix  $H_2$  untersucht. Da nur ein einziger Sekundäraktor vorhanden ist, folgt aus den Gleichungen (3.102) bis (3.104)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_s^2} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right)^2 \right] , \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_s \partial \varphi_s} = \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_s \partial \hat{F}_s} = 0 \quad , \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_s^2} &= \hat{F}_s^2 \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right)^2 \right] \\ &= \hat{F}_s^2 \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_s^2} . \end{aligned} \quad (3.108)$$

In der Praxis kann der Fall ausgeschlossen werden, dass sich der Sekundäraktor exakt in einer sog. Knotenlinie der Schwingungsmoden der Platte befindet. Deshalb ist das Produkt der Eigenfunktionen  $\xi_m(x_F)$  und  $\psi_n(y_F)$  in Gl. (3.51-a) ungleich Null, so dass

$$g_{s(m,n)} \neq 0 \quad (3.109)$$

geschrieben werden kann. Damit folgt wegen Gl. (3.106) für die Hauptabschnittsdeterminante  $\Delta H_1$  der Hesse-Matrix  $H_2$

$$\Delta H_1 = \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_s^2} > 0 \quad . \quad (3.110)$$

Entsprechend ergibt sich mit Gl. (3.108) für die Determinante  $\Delta H_2$  von  $H_2$

$$\Delta H_2 = |H_2| = \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_s^2} \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_s^2} - \underbrace{\left( \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_s \partial \varphi_s} \right)^2}_{=0} > 0 \quad . \quad (3.111)$$

Da sowohl die Hauptabschnittsdeterminante als auch die Determinante von  $H_2$  positiv sind, ist  $H_2$  positiv definit, und die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum der Kostenfunktion  $J$  ist erfüllt.

Im allgemeinen Fall, d.h. wenn  $N_s$  Sekundäraktoren ( $N_s > 1$ ) vorhanden sind, kann Gl. (3.100) auch erfüllt werden, wenn gilt:  $\varphi_{sl} \neq \nu\pi$ ,  $\nu \in \mathcal{Z}_0$ . Es ist also nicht mehr zwingend notwendig, dass die Sekundäraktoren jeweils gleich- oder gegenphasig operieren. Dabei sind die möglichen Phasenbeziehungen durch die Bedingung eingeschränkt, dass die Hesse-Matrix  $H_{2N_s}$  aus Gl. (3.101) positiv semidefinit sein muss. Trotzdem ist es zweckmäßig, sich auf den Teilbereich der Lösungen zu beschränken, der durch  $\varphi_s = \nu\pi$ ,  $\nu \in \mathcal{Z}_0$  beschrieben wird. In diesem Fall können die Kraftamplituden der Sekundäraktoren analytisch ermittelt werden, die die Kostenfunktion  $J$  lokal minimieren.

Zuvor muss nachgewiesen werden, dass Gl. (3.105) tatsächlich auf ein lokales Minimum von  $J$  führt. Mittels vollständiger Induktion wird im Folgenden bewiesen, dass die Hesse-Matrix  $H_{2N_s}$  positiv definit ist, was die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum darstellt.

Der Induktionsanfang lautet:

Die Hesse-Matrix  $H_1 = \partial^2 J / \partial \hat{F}_s^2 > 0$  ist positiv definit — dies folgt aus Gl. (3.106) unter der Voraussetzung, dass sich der Sekundäraktor nicht exakt in einer Knotenlinie der Schwingungsmoden der Platte befindet. Außerdem sei die Hesse-Matrix  $H_{2N_s+1}$  positiv definit, d.h.

$$\Delta H_{2N_s+1-k} > 0 \quad \text{mit } k = 0, \dots, 2N_s \quad . \quad (3.112)$$

Es ist zu zeigen, dass die  $(2(N_s+1), 2(N_s+1))$ -Matix  $H_{2(N_s+1)}$  positiv definit ist:

Durch Einsetzen der Gl. (3.105) in die Beziehungen (3.102) bis (3.104) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{si} \partial \hat{F}_{sj}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} \pm g_{s(m,n)j} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \right. \\ &\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\ &\quad + \left( \sum_{m,n} \pm g_{s(m,n)j} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \\ &\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \quad , \quad (3.113) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{F}_{si} \partial \varphi_{sj}} = \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{sj} \partial \hat{F}_{si}} = 0 \quad (3.114)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{si} \partial \varphi_{sj}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \hat{F}_{si} \hat{F}_{sj} \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} \pm g_{s(m,n)j} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \right. \\ &\quad \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\ &\quad + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)j} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right) \\ &\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)i} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] . \end{aligned} \quad (3.115)$$

Insbesondere gilt unter Berücksichtigung der Ungleichung (3.109)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{s(N_s+1)}^2} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \hat{F}_{s(N_s+1)}^2 \sum_{q=1}^{N_F} \left[ \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)(N_s+1)} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)(N_s+1)} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$> 0 .$$

Wenn man den Entwicklungssatz für Determinanten [111] benutzt, nach dem der Determinantenwert der Summe der Produkte aus den Elementen einer Zeile oder einer Spalte der betrachteten Matrix mit ihren “vorzeichenversehenen” Unterdeterminanten entspricht, erhält man für die Determinante  $\Delta H_{2(N_s+1)}$  der Diagonalmatrix  $H_{2(N_s+1)}$

$$\Delta H_{2(N_s+1)} = \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi_{s(N_s+1)}^2} \Delta H_{2N_s+1} . \quad (3.117)$$

Mit den Beziehungen (3.112) und (3.116) folgt aus Gl. (3.117)

$$\Delta H_{2(N_s+1)} > 0 , \quad (3.118)$$

was zusammen mit der Ungleichung (3.112) die positive Definitheit der Matrix  $H_{2(N_s+1)}$  gewährleistet.

Nachdem der Nachweis erbracht ist, dass Gl. (3.105) auf Teillösungen des Minimierungsproblems bezüglich der Kostenfunktion  $J$  führt, kann in Gl. (3.95)

$$\hat{F}_{sl} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) = \pm \hat{F}_{sl} \sin \omega_p t = F_{sl} \sin \omega_p t \quad (3.119)$$

gesetzt werden. Damit lässt sich Gl. (3.95) schreiben als

$$\zeta(\phi, \theta, F_{sl}, t) = \sin \omega_p t \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} F_{sl} \right) \eta_{m,n}(\phi, \theta) \quad , \quad (3.120)$$

und aus Gl. (3.96) wird

$$\text{grad } J = \left( \frac{\partial J}{\partial F_{s1}} \quad \cdots \quad \frac{\partial J}{\partial F_{sN_s}} \right) = \underline{0}^T \quad . \quad (3.121)$$

Aus Gl. (3.97) erhält man die Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Kräfte  $F_{sl}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial F_{sl}} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left\{ \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} F_{sj} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \cdot \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \\ &\quad + \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} F_{sj} \right) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right] \\ &\quad \left. \cdot \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right\} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

mit  $l = 1, \dots, N_s$  und  $\varepsilon$  aus Gl. (3.92). Da es aufwändig ist, das aus den Beziehungen (3.122) zusammengesetzte Gleichungssystem nach den Unbekannten  $F_{sl}$  aufzulösen, wird eine alternative Lösungsmethode gewählt. Hierzu setzt man Gl. (3.120) in Gl. (3.91) ein, was zu der Beziehung

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \left\{ \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} F_{sl} \right) \Re\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} F_{sl} \right) \Im\{\eta_{m,n}(\phi_q, \theta_q)\} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.123)$$

führt. In Matrizenform lautet Gl. (3.123)

$$J = \frac{\pi\varepsilon}{\omega_p} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{m,n} \sum_{u,v} \left( c_{m,n,u,v} + \underline{b}_{m,n,u,v}^T \underline{F}_s + \underline{F}_s^T \underline{A}_{m,n,u,v} \underline{F}_s \right) \quad , \quad (3.124)$$

wobei  $\underline{F}_s^T = [ F_{s1} \ \cdots \ F_{sN_s} ]$  den transponierten Kraftvektor darstellt. In A.4 wird gezeigt, dass für  $c_{m,n,u,v}$ ,  $\underline{b}_{m,n,u,v}^T$  und  $\underline{A}_{m,n,u,v}$  die Gleichungen

$$\underline{A}_{m,n,u,v} = d_{m,n,u,v} \underline{g}_{s(m,n)} \underline{g}_{s(u,v)}^T \quad , \quad (3.125\text{-a})$$

$$\underline{b}_{m,n,u,v}^T = 2d_{m,n,u,v} \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{g}_{s(u,v)}^T \quad , \quad (3.125\text{-b})$$

$$c_{m,n,u,v} = d_{m,n,u,v} \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{F}_p^T \underline{g}_{p(u,v)} \quad (3.125\text{-c})$$

gelten mit

$$\underline{g}_{p(i,j)}^T = [ g_{p(i,j)1} \ \cdots \ g_{p(i,j)N_p} ] \quad , \quad (3.126\text{-a})$$

$$\underline{g}_{s(i,j)}^T = [ g_{s(i,j)1} \ \cdots \ g_{s(i,j)N_s} ] \quad , \quad (3.126\text{-b})$$

$$\underline{F}_p^T = [ F_{p1} \ \cdots \ F_{pN_p} ] \quad , \quad (3.126\text{-c})$$

$$\underline{F}_s^T = [ F_{s1} \ \cdots \ F_{sN_s} ] \quad , \quad (3.126\text{-d})$$

$$d_{m,n,u,v} = \Re\{\eta_{m,n}\}\Re\{\eta_{u,v}\} + \Im\{\eta_{m,n}\}\Im\{\eta_{u,v}\} \quad . \quad (3.126\text{-e})$$

Da die Matrix  $\underline{A}_{m,n,u,v}$  symmetrisch ist, gilt nach [111]

$$\frac{\partial(\underline{F}_s^T \underline{A}_{m,n,u,v} \underline{F}_s)}{\partial \underline{F}_s} = 2 \underline{F}_s^T \underline{A}_{m,n,u,v} \quad . \quad (3.127)$$

Deshalb folgt mit Gl. (3.124) aus Gl. (3.121)

$$\text{grad } J = \frac{\pi \varepsilon}{\omega} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{m,n,u,v} \left( \underline{b}_{m,n,u,v}^T + 2 \underline{F}_s^T \underline{A}_{m,n,u,v} \right) = \underline{Q}^T \quad , \quad (3.128)$$

wobei  $\sum_{m,n,u,v}$  die Kurzschreibweise für  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty}$  ist. Gl. (3.128) wird nach  $\underline{F}_s^T$  aufgelöst, so dass sich der Vektor der optimalen Kraftamplituden

$$\underline{F}_s^T = -\frac{1}{2} \left( \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{m,n,u,v} \underline{b}_{m,n,u,v}^T \right) \left( \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{m,n,u,v} \underline{A}_{m,n,u,v} \right)^{-1} \quad (3.129)$$

ergibt. Wegen der Symmetrie der Matrix  $\underline{A}_{m,n,u,v}$  gilt entsprechend

$$\underline{F}_s = -\frac{1}{2} \left( \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{m,n,u,v} \underline{A}_{m,n,u,v} \right)^{-1} \left( \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{m,n,u,v} \underline{b}_{m,n,u,v} \right) \quad . \quad (3.130)$$

Mit dieser Gleichung können die optimalen Kraftamplituden auch dann bestimmt werden, wenn nicht die Schallabstrahlung, d.h. die Summe der Schalldruckquadrate bei bestimmten Mikrofonpositionen im Fernfeld, sondern die Plattenschwingung in bestimmten Punkten unterdrückt werden soll. Im letzteren Fall entfällt in den Beziehungen (3.126) der Faktor  $d_{m,n,u,v}$ , der die Schallabstrahlung von der Platte beschreibt. Dann ergeben sich anstelle der Gleichungen (3.126)

$$\underline{A}_{m,n,u,v} = \underline{g}_{s(m,n)} \underline{g}_{s(u,v)}^T \quad , \quad (3.131\text{-a})$$

$$\underline{b}_{m,n,u,v}^T = 2 \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{g}_{s(u,v)}^T \quad , \quad (3.131\text{-b})$$

$$c_{m,n,u,v} = \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{F}_p^T \underline{g}_{p(u,v)} \quad . \quad (3.131\text{-c})$$

Die Elemente der Vektoren  $\underline{g}_{p(m,n)}$  und  $\underline{g}_{s(m,n)}$ , die die Aktoren beschreiben, werden für die punktförmige Anregung mit Gl. (3.51-a) bestimmt oder bei Verwendung eines Piezoelements mit Gl. (3.64).

Mit Hilfe der zum Schluss dieses Kapitels hergeleiteten Beziehungen können die betrachteten ASAC-Systeme sehr effizient berechnet werden. Die Herleitung der Gleichungen war nur möglich, weil angenommen wurde, dass die Sekundäraktorsignale jeweils um ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  gegeneinander verschoben sind (siehe Gl. (3.105)).

## Kapitel 4

# Optimierung der Sekundäraktorpositionen

Die Lage der Sekundäraktoren spielt bei ASAC eine entscheidende Rolle: Wenn Sekundäraktoren beispielsweise in den Knotenlinien einer für die Schallabstrahlung wichtigen Schwingungs- mode liegen und punktförmig wirken, können sie diese Mode nicht beeinflussen. Als Folge kann die Schallabstrahlung weniger stark gemindert werden, als dies bei günstigeren Positionen der Sekundäraktoren der Fall wäre. Es gibt also frequenzabhängige Sekundäraktorpositionen, bei denen ASAC gut funktioniert, und solche, wo nur eine geringe Schalleistungsminderung erreicht werden kann. Die richtige Positionierung der Aktoren ist umso wichtiger, je weniger Aktoren vorhanden sind [1]. Um eine möglichst große Schalleistungsminderung zu erhalten, müssen die Positionen der Sekundäraktoren optimiert werden.

### 4.1 Formulierung des Optimierungsproblems

Gegeben sei ein ASAC-System mit  $N_p$  Primäraktoren,  $N_s$  Sekundäraktoren und einer rechteckigen, an den Rändern fest eingespannten Platte. Die Schallabstrahlung von der Platte wird hier durch die Schalleistung beschrieben, da jene im Gegensatz zur Schallintensität richtungs- unabhängig ist (vgl. Kap. 3). Gesucht ist diejenige Anordnung der Sekundäraktoren, die die Schalleistungsminderung maximiert, was mathematisch durch

$$\Delta P(x_{s_1}, \dots, x_{s_{N_s}}, y_{s_1}, \dots, y_{s_{N_s}}) = P_{ohne} - P_{mit} \stackrel{!}{=} \max \quad (4.1)$$

ausgedrückt wird. Dabei ist  $P_{ohne}$  die Schalleistung ohne ASAC, wenn nur die Primäraktoren wirken, und  $P_{mit}$  die Schalleistung, wenn mit den Sekundäraktoren ASAC betrieben wird. Die Schalleistungen können mit Gl. (3.82) berechnet werden. In Gl. (4.1) sind  $x_{s_i}$  und  $y_{s_i}$  die kartesischen Koordinaten des  $i$ -ten Sekundäraktors. Wegen der stark nichtlinearen Eigenfunktionen

$\xi_m(x)$  und  $\psi_n(y)$  aus Gl. (3.28) beschreibt Gl. (4.1) ein nichtlineares Optimierungsproblem. Die Sekundäraktoren können überall auf der Platte positioniert werden mit Ausnahme der Plattenränder, da die Ränder Knotenlinien aller Schwingungsmoden sind. Deshalb lauten die Nebenbedingungen der Optimierung:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} < x_{s_i} < \frac{a}{2} \quad , \\ -\frac{b}{2} < y_{s_i} < \frac{b}{2} \quad . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wenn mehrere Sekundäraktoren vorhanden sind, besitzt die Schalleistungsminderung bezüglich der Aktorpositionen mehrere lokale Maxima. Das ist wichtig für die Wahl eines passenden Optimierungsverfahrens. Im folgenden Abschnitt wird ein Überblick über gängige Optimierungsmethoden gegeben. Außerdem wird diskutiert, welche Methoden sich für das gestellte Problem eignen.

## 4.2 Optimierungsmethoden

In [Abb. 4.1](#) ist dargestellt, wie sich die verschiedenen Techniken zur Optimierung einer mathematischen Funktion einteilen lassen. Im Folgenden werden die einzelnen Methoden beschrieben. Außerdem wird erläutert, warum Genetische Algorithmen für die vorliegende Arbeit gewählt werden.

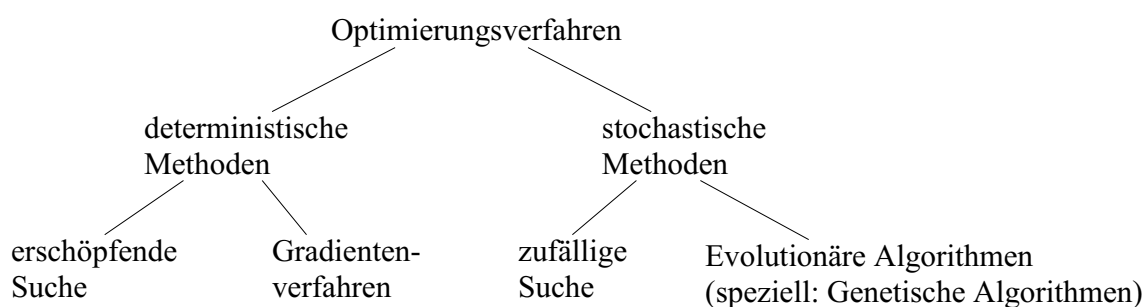


Abbildung 4.1: *Klassifikation der Optimierungsverfahren.*

### 4.2.1 Deterministische Optimierungsverfahren

#### 4.2.1.1 Gradientenverfahren

Bei einem Gradientenverfahren wird nach dem Prinzip des steilsten Auf- oder Abstiegs der Gradient einer Funktion  $J$  verfolgt, um z.B. das Maximum bzw. Minimum zu erreichen. Die



notwendige Bedingung für ein Extremum lautet

$$\text{grad } J = \underline{0}^T \quad . \quad (4.3)$$

Hinreichend für ein Maximum ist, wenn zusätzlich die *Hesse-Matrix*  $\partial^2 J / \partial \underline{x}^2$  mit  $\underline{x}^T = (x_{s_1}, \dots, x_{s_{N_s}})$  negativ definit ist (vgl. Kap. 3.4). Daher lassen sich Gradientenverfahren lediglich auf Probleme anwenden, bei denen die Kostenfunktion mindestens zweimal partiell nach den Unbekannten differenziert werden kann. Gradientenverfahren führen den Anwender nur zu einem lokalen Extremum. Deshalb sind sie ungeeignet für Optimierungsprobleme, bei denen viele lokale Extrema vorhanden sind. Bei derartigen Problemen kann ein Gradientenverfahren je nach Startpunkt in einem anderen lokalen Extremum enden, das u.U. weit vom absoluten Extremum entfernt ist. Da die Optimierung der Sekundäraktorpositionen bei ASAC ein solches Problem darstellt, muss in diesem Fall auf alternative Optimierungsverfahren zurückgegriffen werden. In den nächsten Abschnitten werden diese Techniken vorgestellt.

#### 4.2.1.2 Erschöpfende Suche

Bei der zweiten deterministischen Methode der erschöpfenden Suche werden alle zulässigen Lösungen bestimmt. Anschließend wird aus der Lösungsmenge, die endlich viele Elemente enthält, die beste Lösung ausgewählt. Um die erschöpfende Suche auf das Optimierungsproblem in Gl. (4.1) anwenden zu können, werden die erlaubten Positionen der Sekundäraktoren diskretisiert. Dann liegen die Aktoren z.B. auf den Kreuzungspunkten eines gleichmäßigen, auf der gesamten Plattenfläche definierten Gitters, wie in [Abb. 4.2](#) dargestellt. In  $x$ -Richtung sind  $N_x$  Gitterpunktzeilen vorhanden, in  $y$ -Richtung  $N_y$  Zeilen. Es müssen alle  $N$  Positionskombinationen der  $N_s$  Sekundäraktoren bestimmt werden. Für  $N$  gilt

$$N = \binom{N_{GP}}{N_s} = \frac{N_{GP}!}{(N_{GP} - N_s)! N_s!} \quad (4.4)$$

mit

$$\begin{aligned} N_{GP} &= \text{Anzahl der Gitterpunkte} \quad , \\ N_s &= \text{Anzahl der Sekundäraktoren} \quad . \end{aligned}$$

Wenn beispielsweise  $N_{GP} = 1000$  Gitterpunkte vorhanden sind, die gemäß [Abb. 4.3](#) aus  $N_x = 40$  Gitterzeilen in  $x$ -Richtung und  $N_y = 25$  Gitterzeilen in  $y$ -Richtung gebildet werden können, und  $N_s = 2$  Sekundäraktoren verwendet werden, muss man bei der erschöpfenden Suche

$$N = \binom{1000}{2} = 499500$$

Kombinationen betrachten. Die Berechnung der Kostenfunktion, also der Schalleistungsminde- rung, ist sehr rechenzeitintensiv und muss für jede Kombination der Sekundäraktorpositionen

neu durchgeführt werden. Mit einem einzigen Sekundäraktor ist der Aufwand, der beispielsweise durch die erschöpfende Suche entsteht, noch vertretbar. Jedoch müssen für den Fall mehrerer Sekundäraktoren alternative Techniken angewandt werden, die mit weniger Berechnungen der Kostenfunktion auskommen. Diese Methoden werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

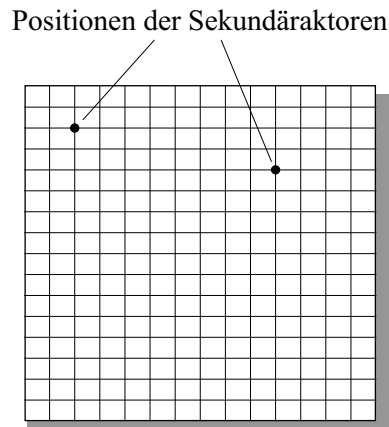


Abbildung 4.2: Gitter für die Akteurpositionen.

0	1			39
x	x	.	.	x
40	41			79
x	x			x
		.		.
		.	.	.
960		.	.	999
x		.	.	x

Abbildung 4.3: Platte mit 1000 möglichen Sekundäraktorpositionen.

## 4.2.2 Stochastische Optimierungsverfahren

Bei stochastischen Optimierungstechniken werden nicht mehr alle Lösungskandidaten betrachtet, um zum Optimum zu gelangen. Statt dessen werden pseudo-zufallsgetrieben in der Regel nur suboptimale Lösungen bestimmt.

#### 4.2.2.1 Zufällige Suche

Die zufällige Suche stellt die einfachste stochastische “Optimierungsmethode” dar. In  $N_D$  Durchläufen werden rein zufällig Lösungskandidaten ermittelt. Am Ende entscheidet man sich für den besten Kandidaten. Je größer  $N_D$  ist, umso höher ist einerseits die Wahrscheinlichkeit, das absolute Maximum zu finden; andererseits steigt damit der Rechenzeitaufwand. Wenn Wiederholungen ausgeschlossen sind, kann erst nach  $N_D = N$  Durchläufen mit  $N$  aus Gl. (4.4) garantiert werden, dass die bisher bestimmten Kandidaten nahe beim absoluten Maximum liegen. Im folgenden Abschnitt werden Optimierungsmethoden vorgestellt, die diesen Nachteil mindern.

#### 4.2.2.2 Evolutionäre Algorithmen

Evolutionäre Algorithmen liefern bereits nach vergleichsweise wenigen Schritten suboptimale Lösungen, die nahe beim Optimum liegen. Dies wird erreicht, indem die zufällige Suche durch deterministische Elemente gesteuert und in die richtige Richtung gelenkt wird. Dabei werden gute Eigenschaften der Lösungskandidaten beibehalten und kombiniert, so dass sich die Kandidaten tendenziell verbessern.

In der vorliegenden Arbeit wird nur auf eine Sonderklasse der Evolutionären Algorithmen eingegangen, die *Genetischen Algorithmen*. Der interessierte Leser findet eine ausführliche Diskussion der Evolutionären Algorithmen in [4, 92, 96].

### 4.3 Optimierung durch Genetische Algorithmen

Genetische Algorithmen (GA) sind spezielle Evolutionäre Suchalgorithmen, die auf dem Prinzip der natürlichen Selektion und der natürlichen Genetik beruhen [28, 49]. Mit Hilfe der Operationen *Reproduktion* und *Kreuzung* werden die “Gene” guter Kandidaten unterstützt und kombiniert, und mittels *Mutation* werden neue “Gene” eingeführt, um nicht vorschnell potentiell gute Lösungen zu vernachlässigen. Auf die genannten drei Hauptoperationen wird in Kap. 4.3.1 näher eingegangen. Genetische Algorithmen weisen die folgenden wesentlichen Merkmale auf [49]:

- GA suchen grundsätzlich nach dem Maximum einer Funktion.
- GA benutzen kodierte Werte der für das Optimum in Frage kommenden Kandidaten und nicht die Kandidaten selbst.
- GA benutzen die Kostenfunktion anstelle von Ableitungen und anderem Hilfswissen. Daher besitzen sie keinerlei Beschränkungen im Suchraum, z.B. Stetigkeit oder Differenzierbarkeit der Kostenfunktion, wie es beispielsweise bei Gradientenverfahren gefordert wird.

- GA sind leistungsfähig in der Suche nach dem Optimum und sind außerdem einfach zu programmieren. Sie eignen sich deshalb gut für Implementierungen auf dem Rechner.
- GA arbeiten grundsätzlich stochastisch, enthalten allerdings deterministische Elemente. Vor allem diese Eigenschaft macht GA *robust*, d.h. auf viele Optimierungsprobleme gleichermaßen anwendbar.
- GA suchen nach einer Menge von Lösungen und nicht nach einer einzigen Lösung. Deshalb kann der Anwender am Ende der Optimierung aus einer Reihe von suboptimalen Lösungen die für die Problemstellung günstigste auswählen. Bei dieser Wahl spielt z.B. eine Rolle, wie groß die Stellgrößen (z.B. Aktorkräfte) sind.

Insbesondere wegen der letzten Eigenschaft eignen sich GA gut für die Optimierung der Sekundäraktorpositionen bei ASAC. Wenn mehrere Sekundäraktoren vorhanden sind, besitzt die Schalleistungsminderung bezüglich der Sekundäraktorpositionen viele lokale Maxima. Daher ist es ein großer Vorteil, wenn sich ein Optimierungsverfahren nicht nur auf ein lokales Maximum konzentriert, das gegebenenfalls weit vom absoluten Maximum entfernt ist, sondern wie GA eine Reihe an suboptimalen Lösungen zur Auswahl stellt. Wie das gelingt, wird im nächsten Abschnitt und insbesondere in Kap. 4.4 erläutert.

### 4.3.1 Funktionsweise von Genetischen Algorithmen

Genetische Algorithmen operieren mit einer Menge von Zeichenketten. Die Zeichenketten werden gemäß dem Vorbild aus der Biologie *Chromosomen* genannt, wobei die einzelnen Zeichen die *Gene* darstellen. Als *Population* wird die Menge der Zeichenketten bezeichnet. Abb. 4.4 zeigt eine Population mit  $N_{pop}$  Zeichenketten, die in diesem Beispiel aus binären Zeichen bestehen. Die binäre Kodierung ist für GA nicht zwingend vorgeschrieben, jedoch erweist sie sich im Hinblick auf die Leistungsfähigkeit des GA am vorteilhaftesten (vgl. Kap. 4.4.2).

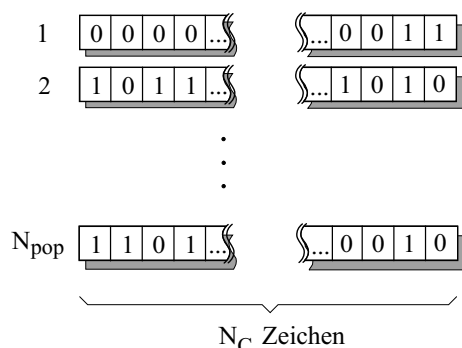


Abbildung 4.4: *Population von Chromosomen.*

Am Anfang wird die Population zufällig initialisiert. Danach werden schrittweise neue Generationen der Population erzeugt, wobei gewöhnlich die Anzahl der Populationsmitglieder nicht

verändert wird. Hingegen ändert sich analog zur Evolutionslehre das genetische Material der Chromosomen, also die einzelnen Zeichen der Zeichenketten. Bei diesem Änderungs- oder Evolutionsprozess kommen im Wesentlichen drei Hauptoperationen zur Anwendung: *Reproduktion*, *Kreuzung* (oder *Paarung*) und *Mutation*.

#### 1. Reproduktion:

Bei der Reproduktion werden Chromosomen identisch in die nächste Generation übernommen. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Kopieren ergibt sich aus dem sog. *Fitnesswert*, der die Güte der Zeichenkette oder ihre Nähe zum Optimum angibt. Er ist durch die zu maximierende Kostenfunktion  $J$  des Optimierungsproblems  $J \stackrel{!}{=} \max$  gegeben. In Kap. 4.4.3 wird erläutert, wie der Fitnesswert bei der Optimierung der Sekundäraktorpositionen für ASAC bestimmt wird. Je größer der Fitnesswert ist, umso mehr soll sich die entsprechende Zeichenkette in zukünftigen Generationen durchsetzen. Bei einem GA kommt also das aus der Natur bekannte Darwinistische Prinzip zur Anwendung, nach dem der Beste gewinnt.

Unter den verschiedenen Verfahren zur Reproduktion der Zeichenketten hat sich die *Roulette-Rad-Methode* durchgesetzt. In [Abb. 4.5](#) wird diese Selektionsmethode beispielhaft für vier binäre Zeichenketten veranschaulicht. Ein Roulette-Rad ist in Segmente eingeteilt, die den Chromosomen entsprechen. Dabei sind die Segmentflächen proportional zu den relativen Fitnesswerten der Chromosomen. Das Roulette-Rad wird  $N_{pop}$  Mal gedreht ( $N_{pop}$  = Anzahl der Chromosomen; hier:  $N_{pop} = 4$ ). Die Chromosomen, bei denen es stehenbleibt, werden in die nächste Generation übernommen. Im gezeigten Beispiel reproduziert sich die vierte Zeichenkette wegen des höchsten relativen Fitnesswerts im Mittel am häufigsten.

#### 2. Kreuzung:

Wie bei biologischen Vorgängen werden auch bei einem GA Chromosomen gekreuzt oder gepaart. Dabei betrachtet man jeweils zwei Zeichenketten. Ab einer zufällig gewählten Stelle  $i$  ( $1 \leq i < N_C$ ,  $N_C$  = Anzahl der Zeichen im Chromosom) werden die Zeichen ausgetauscht. In [Abb. 4.6](#) ist dieser Vorgang am Beispiel zweier binärer Zeichenketten dargestellt. Man sieht, dass die Zeichen nach der zufällig gewählten zweiten Position ausgetauscht werden.

#### 3. Mutation:

Mit der Mutation werden einzelne, zufällig ausgewählte Zeichen verändert. [Abb. 4.7](#) zeigt, wie das zufällig gewählte achte Zeichen einer binären Zeichenkette verändert wird.

### 4.3.1.1 Bedeutung der Hauptoperationen

Während durch die Mutation neue genetische Information von außen in die Population eingebracht wird, was die Diversität in der Population erhält bzw. erhöht, ist die Kreuzung der

Nr.:		Fitnesswert (abs.):	Fitnesswert (rel.):
1	0 0 0 0 0 0 1 1 1 1	1	0.1
2	1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	1	0.1
3	1 1 0 1 1 0 0 0 1 0	3	0.3
4	0 1 1 0 1 1 1 1 1 1	5	0.5

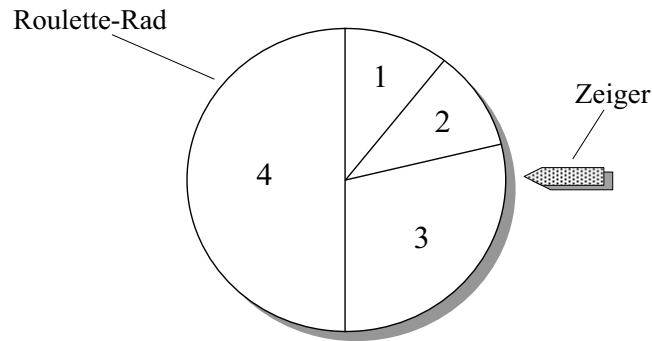


Abbildung 4.5: Reproduktion mit der Roulette-Rad-Methode.

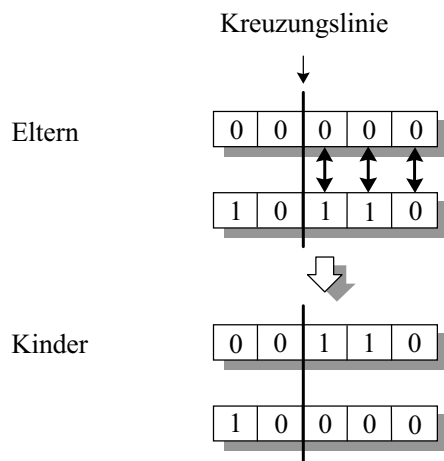


Abbildung 4.6: Kreuzung binärer Zeichenketten.

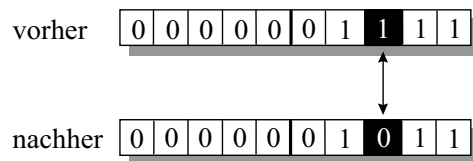


Abbildung 4.7: Mutation bei einer binären Zeichenkette.

“Motor” der Evolution. Zusammen mit der Reproduktion verbreitet die Kreuzung das genetische Material innerhalb der Population. Wenn keine Mutation stattfindet, dann konvergiert die Population zwar schnell, aber einige lokale Maxima werden dabei nicht beachtet. Dagegen hat das Fehlen der Kreuzung zur Folge, dass das System in der Umgebung der vorhandenen lokalen Maxima weitersucht, ohne die guten Eigenschaften zu kombinieren [28].

#### 4.3.1.2 Beschreibung der Genetischen Algorithmen durch die Schematheorie

Die Funktionsweise der GA kann am besten mit der von J. Holland entwickelten *Schematheorie* erklärt werden [55]. Demnach erkennen GA alle möglichen Ähnlichkeiten in einer Population von Zeichenketten und verbinden kurze *Schemata*, die zu hohen Fitnesswerten beitragen und auch “Building Blocks” genannt werden, zu Zeichenketten, die näher beim Optimum liegen. Schemata stellen also gute Eigenschaften dar, die kombiniert werden, damit die Chromosomen zukünftiger Generationen tendenziell hohe Fitnesswerte haben. In Abb. 4.8 sind Beispiele für binäre Zeichenketten dargestellt, in denen die Schemata schwarz markiert sind und nur 0 oder 1 als Zeichen enthalten. Die Sterne stehen stellvertretend für 0 oder 1.

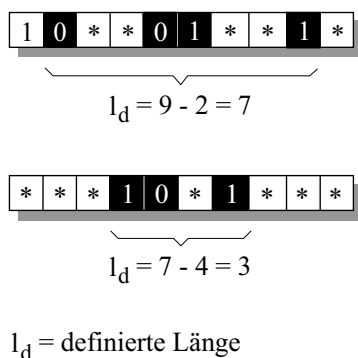


Abbildung 4.8: *Schemata in binären Zeichenketten.*

Für Schemata werden zwei wichtige Größen definiert:

1. Definierte Länge:

Die *definierte Länge*  $l_d$  eines Schemas ist der Positionsabstand zwischen dem ersten und dem letzten Zeichen. Beispielsweise beträgt die definierte Länge des ersten Schemas in Abb. 4.8  $l_d = 7$ . Beim zweiten Schema gilt entsprechend  $l_d = 3$ .

2. Ordnung:

Die *Ordnung* eines Schemas ist definiert als die Anzahl der Zeichen innerhalb des Schemas. Die beiden Schemata in Abb. 4.8 haben die Ordnung 4 bzw. 3.

Das *Fundamentaltheorem* oder *Schematheorem* der Genetischen Algorithmen besagt, dass Schemata, die überdurchschnittliche Fitnesswerte aufweisen, deren definierte Längen kurz sind und

die niedrige Ordnungen besitzen, sich für eine unendlich große Population exponentiell fortpflanzen [48, 49]. Daher werden Schemata mit einer nahezu optimalen Rate gesammelt und mittels Kreuzung kombiniert. Die Mutation hat nur einen geringen Einfluss auf die Schemata. Sie dient aber dazu, genetisches Material, das potentiell wichtig ist, in zukünftigen Generationen beizubehalten.

### 4.3.2 Skalierung des Fitnesswerts

Die Bewertung der Populationsmitglieder anhand ihrer Fitnesswerte kann bei wenigen Chromosomen, die bezüglich des Fitnesswerts viel besser sind als die anderen, dazu führen, dass die guten Chromosomen nicht mit den anderen Mitgliedern der Population rekombinieren. Als Folge stellt sich schnell ein nicht erwünschter, stabiler Zustand mit einem einzigen guten Chromosom ein. Ein weiteres Problem tritt auf, wenn sich bei Chromosomen mit ähnlichen Fitnesswerten die besseren nicht genügend stark durchsetzen. Zur Lösung beider Probleme wird in der Literatur vorgeschlagen, den Fitnesswert zu skalieren [48, 49]. Dies kann linear geschehen durch die Vorschrift

$$f_i^* = a f_i \quad , \quad (4.5)$$

wobei  $f_i$  und  $f_i^*$  den ursprünglichen bzw. skalierten Fitnesswert des  $i$ -ten Chromosoms bedeuten, oder nichtlinear mit Hilfe des *Sharing-Prinzips* (vgl. Kap. 4.4.4.1).

## 4.4 Anwendung von Genetischen Algorithmen auf ASAC

Wie bei der erschöpfenden Suche benötigt man zur Anwendung von GA diskretisierte Problemparameter. Daher wird auf der Platte ein Gitter für die Sekundäraktorpositionen definiert (vgl. Abb. 4.2).

### 4.4.1 Wahl des Gitters

Je kleiner die Abstände zwischen benachbarten Gitterlinien sind, umso genauer kann die optimale Positionskonfiguration der Sekundäraktoren bestimmt werden. Allerdings steigt der Rechenzeitaufwand mit zunehmender Zahl der Gitterpunkte. Es ist praktikabel, so viele Gitterlinien in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung zu wählen, dass die Sekundäraktoren in allen Halbwellen der beteiligten Schwingungsmoden platziert werden können. Im Folgenden wird die Wahl des Gitters an einem Beispiel demonstriert: Bei einer quadratischen Platte der Seitenlänge 1 m sollen die Schwingungsmoden bis einschließlich der (4,4)-Mode berücksichtigt werden. Damit es möglich



ist, dass ein Sekundäraktor in einem beliebigen Schwingungsbauch der (4,4)-Mode gelegt werden kann, muss das Gitter mindestens vier Gitterlinien in  $x$ - und  $y$ -Richtung aufweisen. Man wählt deshalb z.B. ein Gitter mit  $N_{GP} = 5^2 = 25$  Punkten.

### 4.4.2 Kodierung

Bei der Kodierung stellt sich zunächst die Frage nach dem Alphabet, in das kodiert werden soll. Nach [49] eignet sich das binäre Alphabet für die Kodierung am besten, da es unter allen Kodieralphabeten die maximale Anzahl von Schemata pro Informationsbit liefert. Deshalb werden in der vorliegenden Arbeit die Positionskonfigurationen der Sekundäraktoren in binäre Zeichenketten kodiert. Als Beispiel wird in [Abb. 4.9](#) eine rechteckige Platte gezeigt, auf der zwei Sekundäraktoren an 32 möglichen Positionen platziert werden können. Wegen  $2^5 = 32$  lassen sich die Kombinationen von jeweils zwei der 32 möglichen Sekundäraktorpositionen leicht in binäre Zeichenketten kodieren, was in [Abb. 4.10](#) beispielhaft gezeigt wird.

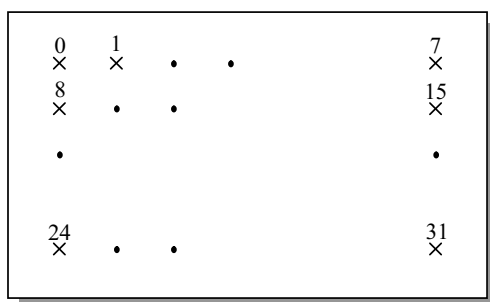


Abbildung 4.9: Platte mit 32 möglichen Sekundäraktorpositionen.

Dabei werden die Positionsnummern der beiden Sekundäraktoren in fünf Bits kodiert, so dass man Chromosomen mit jeweils zehn Bits erhält. Die binäre Kodierung ist eindeutig, wenn wie im gezeigten Beispiel gilt

$$N_{GP} = 2^{N_B} \tag{4.6}$$

mit

$$\begin{aligned}
 N_{GP} &= \text{Anzahl der Gitterpunkte} \quad , \\
 N_B &= N_C/N_s = \text{Anzahl der Bits pro Aktor} \quad , \\
 N_C &= \text{Anzahl der Bits pro Chromosom} \quad , \\
 N_s &= \text{Anzahl der Sekundäraktoren} \quad .
 \end{aligned}$$

Falls Gl. (4.6) nicht erfüllt werden kann, wird die Zahl  $N_{GP}$  so gewählt, dass sie einerseits in ein Produkt  $N_{GP} = N_x N_y$  ( $N_x, N_y =$  Anzahl der Gitterlinien in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung) zerlegt werden kann und andererseits etwas kleiner als  $2^{N_B}$  ist. Man kodiert dann einen ganzzahligen

Wert  $a_i$  in die Binärzahl  $a_b$  nach der Vorschrift

$$a_b = \text{round} \left( \frac{2^{N_B} - 1}{N_{GP} - 1} (a_i - 1) \right) \quad (4.7)$$

mit der Operation “round”, die nach der nächstgelegenen ganzen Zahl rundet. Die Dekodierung erfolgt mittels

$$a_i = 1 + \text{round} \left( \frac{N_{GP} - 1}{2^{N_B} - 1} a_b \right) \quad (4.8)$$

Wegen  $N_{GP} < 2^{N_B}$  ist der Zusammenhang zwischen  $a_b$  und  $a_i$  nicht eindeutig, d.h. zwei Binärzahlen repräsentieren u.U. die gleiche Aktorposition. Dies ist in [Tab. 4.1](#) für  $N_{GP} = 5$  und  $N_B = 3$  veranschaulicht. Einerseits reduziert diese Redundanz der Binärzahlen geringfügig die Wirkung der Mutation, weil die Veränderung eines einzelnen Bits nicht notwendigerweise einen Positionswechsel der Sekundäraktoren bedeuten muss. Da ohnehin empfohlen wird, die Wahrscheinlichkeit der Mutation gegenüber der Kreuzung klein zu halten [28], ist dies als Vorteil der Redundanz zu werten. Andererseits vergrößert die Redundanz die Reproduktionswahrscheinlichkeit einiger Sekundäraktorenpositionen (vgl. Kap. 4.3.1). Als Folge reproduzieren sich diese Chromosomen nicht mehr streng nach ihren Fitnesswerten, der GA wird also verfälscht. Aus diesem Grund sollte die Redundanz so gering wie möglich gehalten werden. Im Beispiel aus Kap. 4.4.1 ist eine Platte mit 25 Gitterpunkten für die Sekundäraktoren gegeben. Die Zahl 25 lässt sich mit fünf Binärbits kodieren. Die Kodierung ist stark redundant, da mit fünf Binärbits 32 Punkte dargestellt werden können. Deshalb ist es besser,  $N_{GP} = 6 \cdot 5 = 30 < 32$  mit sechs Gitterlinien in  $x$ - und fünf Gitterlinien in  $y$ -Richtung zu wählen.

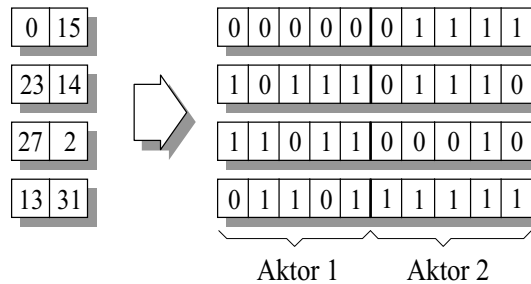


Abbildung 4.10: *Beispiel einer Kodierung von vier Kombinationen zweier Sekundäraktorenpositionen.*

### 4.4.3 Bestimmung des Fitnesswerts

Wie bereits erwähnt wurde, wird mit einem GA grundsätzlich nach dem Maximum einer Funktion gesucht. Zu diesem Zweck werden in einer Population die Chromosomen unterstützt, die hohe Fitnesswerte haben. Da bei ASAC die Schallleistungsminderung  $\Delta P$  maximiert werden

soll (siehe Gl. (4.1)), bildet die Schalleistungsminderung  $\Delta P_i$ , die sich mit der  $i$ -ten Positionskonfiguration der Sekundäraktoren ergibt, den Fitnesswert  $f_i$  des entsprechenden Chromosoms:

$$f_i = \Delta P_i \quad . \quad (4.9)$$

Tabelle 4.1: *Redundanz bei der Kodierung.*

$a_b$	Binärdarstellung von $a_b$	$a_i$
0	0 0 0	1
1	0 0 1	2
2	0 1 0	2
3	0 1 1	3
4	1 0 0	3
5	1 0 1	4
6	1 1 0	4
7	1 1 1	5

#### 4.4.4 Verbesserung des einfachen Genetischen Algorithmus

Das Fundamentaltheorem der GA besagt, dass sich bei einer unendlich großen Population die besten Schemata exponentiell vermehren (vgl. Kap. 4.3.1.2). Dadurch bildet sich eine ständig wachsende Zahl von Chromosomengruppen (Spezies), die die guten Schemata kombinieren. Ist die Population begrenzt, konvergiert der GA gegen eine einzige Lösung, selbst wenn sich Chromosomen mit gleich guten Schemakombinationen herausbilden. Dieses Phänomen wird *genetische Drift* genannt [48, 99]. Es ist in stochastischen Fehlern begründet, die sich während der Simulation anhäufen und schließlich die Population gegen eine einzige Alternative konvergieren lassen. Zur Linderung der genetischen Drift wird das sogenannte *Sharing* eingeführt.

##### 4.4.4.1 Sharing

Das Sharing-Prinzip hat seinen Ursprung in der Theorie der *Nischen* und *Spezies* [48, 49, 97]. Eine Spezies ist eine Teilpopulation. Als Nische wird eine Teilmenge der Funktionswerte einer Funktion bezeichnet. Mit einem einfachen GA siedelt sich eine immer größer werdende Spezies in einer Nische um die beste Lösung an, da sich die Mitglieder der Spezies mit einer höheren Wahrscheinlichkeit als ihre Konkurrenten reproduzieren. Die Population wird dadurch zunehmend homogener, was den Entwicklungsprozess hemmt. Um dem entgegen zu wirken,

wird Sharing eingeführt, bei dem die Mitglieder die knappen Ressourcen ( $\hat{=}$  Fitnesswerte) untereinander aufteilen. Dadurch sinkt ihre Reproduktionswahrscheinlichkeit, und das umso stärker, je ähnlicher sich die Mitglieder der Spezies sind. Es wird also die Konkurrenz ähnlicher Mitglieder einer Spezies verstärkt. Als Folge bleiben andere Nischen, d.h. andere lokale Maxima, bestehen, und es werden sogar wegen der Mutation immer neue Nischen gebildet, in denen sich stabile Teilpopulationen ansiedeln.

In Abb. 4.11 ist dargestellt, wie sich Sharing bei einer Funktion  $f(x)$  mit mehreren lokalen Maxima auswirkt. Die Kreuze symbolisieren die Populationsmitglieder einer späten Generation. Im linken Diagramm erkennt man, dass sich die Populationsmitglieder ohne Sharing um eines der lokalen Maxima konzentrieren. In den meisten Fällen handelt es sich dabei um das absolute Maximum, jedoch kann es vorkommen, dass die Population durch den GA zu einem tieferen Maximum konvergiert. Das ist vor allem bei kleinen Populationen der Fall [48]. Da ein GA ohne Sharing zu einem einzigen lokalen Maximum konvergiert, werden die übrigen Maxima vernachlässigt oder gänzlich ignoriert. Durch Verwendung von Sharing werden die Populationsmitglieder auf mehrere lokale Maxima verteilt (vgl. rechtes Diagramm in Abb. 4.11). Man erhält also nicht nur eine einzige Lösung, sondern eine Menge von Alternativlösungen, unter denen man den besten Kandidaten auswählen kann.

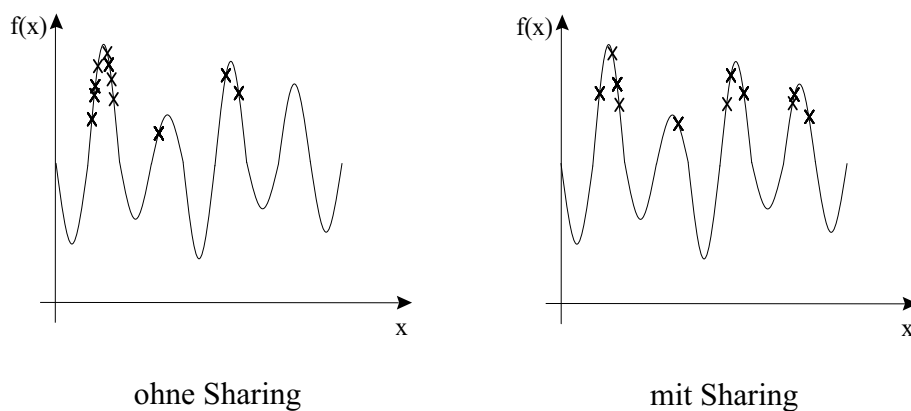


Abbildung 4.11: *Sharing bei einer Funktion  $f(x)$  mit mehreren lokalen Maxima.*

#### 4.4.4.2 Implementierung des Sharing-Prinzips

Das Sharing entspricht einer nichtlinearen Gewichtung des Fitnesswerts. Nachfolgend wird erläutert, wie diese Gewichtung im Einzelnen funktioniert:

Zunächst wird die *Sharing-Funktion* definiert als

$$s(d_{ij}) = \begin{cases} 1 - d_{ij} & \text{für } 0 \leq d_{ij} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.10)$$

wobei  $d_{ij}$  der *Sharing-Abstand* zwischen dem  $i$ -ten und dem  $j$ -ten Chromosom ist. Die Sharing-Funktion, die in [Abb. 4.12](#) dargestellt ist, beschreibt, wie sehr zwei Populationsmitglieder miteinander verwandt sind. Mit  $s(d_{ij})$  kann der Fitnesswert  $f_i$  des  $i$ -ten Chromosoms angepasst werden:

$$f_i^* = \frac{f_i}{N_{pop} \sum_{j=1} s(d_{ij})} . \quad (4.11)$$

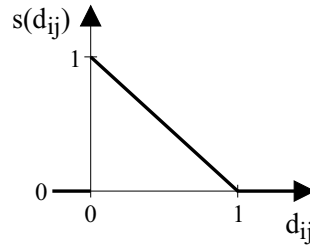


Abbildung 4.12: *Sharing-Funktion*.

Bei der Berechnung der Sharing-Funktion gibt es zwei Möglichkeiten, den Sharing-Abstand zu bestimmen [48]:

1. Phänotypisches Sharing:

Die Sharing-Funktion wird auf der Basis der Abstände zwischen den unkodierten Problemparametern berechnet. Im Falle der Sekundäraktorpositionen sind diese Abstände durch die euklidischen Abstände zwischen den Aktoren gegeben. Zur Berechnung der euklidischen Abstände werden jeweils zwei Positionskonfigurationen betrachtet und dabei das Minimum des mittleren euklidischen Abstands bestimmt. [Abb. 4.13](#) zeigt ein Beispiel zweier Positionskonfigurationen dreier Sekundäraktoren. Durch Vergleich aller Verbindungsmöglichkeiten zwischen den Positionen beider Konfigurationen erhält man einen minimalen Wert des mittleren euklidischen Abstands, der in [Abb. 4.13](#) der mittleren Länge der durchgezogen gezeichneten Strecken entspricht. Dieser minimale Wert des euklidischen Abstands muss noch normiert werden. Hierzu wird er durch die Länge  $d_{max}$  der Gitterdiagonale dividiert. Der gesuchte Sharing-Abstand ergibt sich dann zu

$$d_{ij} = \frac{d}{d_{max}} . \quad (4.12)$$

2. Genotypisches Sharing:

Die Sharing-Funktion wird direkt aus der Zeichenkette bestimmt. Hierzu dient der *Hamming-Abstand*  $h_{ij}$ , der die Anzahl der unterschiedlichen Zeichen zwischen dem  $i$ -ten und  $j$ -ten Chromosom angibt [2]. Mit der Anzahl  $N_C$  der Zeichen eines Chromosoms ist der *Sharing-Abstand*  $d_{ij}$  dann gegeben durch

$$d_{ij} = \frac{h_{ij}}{N_C} . \quad (4.13)$$

Aufgrund des viel geringeren Rechenaufwands wird in der vorliegenden Arbeit das genotypische Sharing dem phänotypischen Sharing vorgezogen. Das hat den Nachteil, dass Sekundäraktoren, die stark unterschiedliche Positionsnummern besitzen, obwohl sie eng zusammen liegen, durch das genotypische Sharing in unterschiedlichen Nischen angesiedelt werden. Dadurch wird die Wirkung des Sharing gehemmt.

- Aktorpositionen der Konfiguration 1
- Aktorpositionen der Konfiguration 2

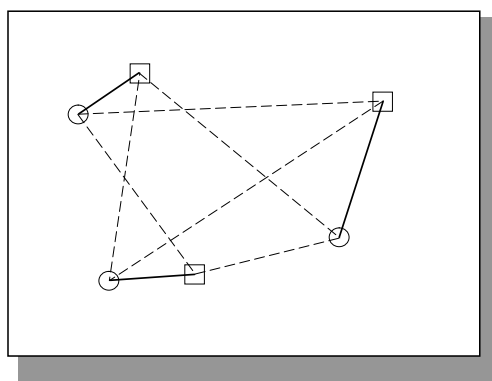


Abbildung 4.13: *Minimum des mittleren Abstands zwischen zwei Positionskonfigurationen von drei Sekundäraktoren.*

#### 4.4.4.3 Beurteilung der Wirkungsweise des Sharing

Die Wirkungsweise des Sharing-Prinzips ist bei einer Funktion  $f(x)$ , die nur eine Unbekannte  $x$  enthält, leicht ersichtlich (siehe Abb. 4.11). Ohne Sharing konzentrieren sich die meisten Populationsmitglieder nach einigen Generationen um ein einziges Maximum, das normalerweise das absolute Maximum ist. Mit Hilfe von Sharing verteilen sich die Populationsmitglieder auf mehrere Maxima. Bei einer Fitnessfunktion, die wie im Falle der Schalleistungsminderung von mehreren unabhängigen Variablen abhängt, kann die Wirkungsweise von Sharing nur indirekt beurteilt werden. Dazu werden verschiedene Größen betrachtet:

##### 1. Standardabweichung:

Zunächst wird die Standardabweichung der Kostenfunktion über der Population bestimmt. Abb. 4.14 zeigt eine Population von zehn Chromosomen einer bestimmten Generation. Die Standardabweichung der Kostenfunktion beträgt 4.5. Nimmt sie über viele Generationen tendenziell ab, bedeutet das, dass entweder die Populationsmitglieder immer ähnlichere Fitnesswerte aufweisen und dabei trotzdem sehr verschieden sein können oder dass sich die Populationsmitglieder auf ein einziges Maximum konzentrieren. Wenn die Standardabweichung tendenziell steigt, kann das einerseits darauf hinweisen, dass die Population immer unterschiedlicher wird. Andererseits kann es auch ein Zeichen sein,

dass sich die Populationsmitglieder um ein einziges Maximum gruppieren, obwohl sich ihre Kostenfunktionswerte wegen eines in der Nähe des Maximums sehr steilen Verlaufs der Kostenfunktion deutlich unterscheiden.

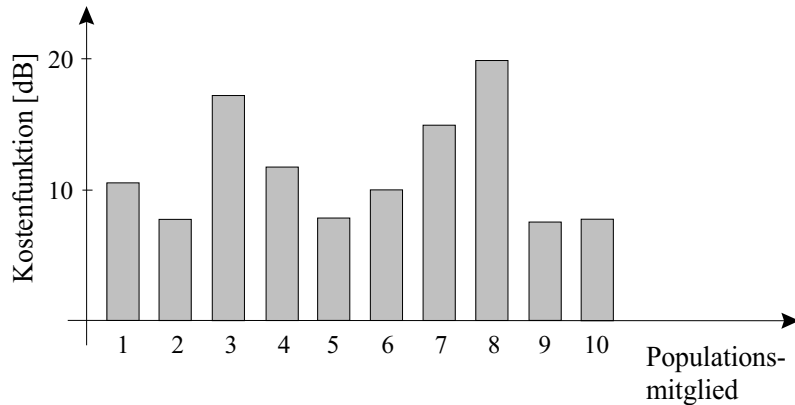


Abbildung 4.14: *Kostenfunktionswerte einer Population mit 10 Chromosomen.*

In [Abb. 4.15](#) sind die Standardabweichungen des Fitnesswerts einer Population mit 20 Mitgliedern (Positionskonfigurationen der Sekundäraktoren) über 50 Generationen ohne bzw. mit Sharing dargestellt. Der Fitnesswert entspricht der Schalleistungsminderung in dB, die mit ASAC an einer fest eingespannten Platte erzielt wird. Man erkennt, dass die Standardabweichung mit Sharing nicht so schnell abnimmt wie ohne Sharing. Wie bereits angesprochen wurde, bedeutet das nicht zwangsläufig, dass sich mit Sharing die Populationsmitglieder um mehrere Maxima ansammeln. Die Betrachtung der Standardabweichung reicht also alleine noch nicht aus, um das Sharing bei einer Kostenfunktion mehrerer unabhängiger Variablen genau beurteilen zu können. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit eine neue Größe eingeführt, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

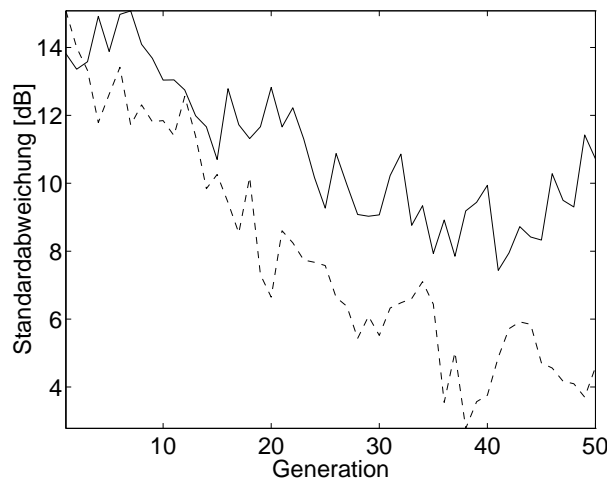


Abbildung 4.15: *Standardabweichung der Schalleistungsminderung mit (—) und ohne (---) Sharing.*

2. Ähnlichkeitswert:

Der Ähnlichkeitswert  $\kappa$  wird definiert als der Mittelwert der Sharing-Funktionen  $s(d_{ij})$  einer Population, d.h.

$$\kappa = \frac{2}{N_{pop}(N_{pop} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{pop}-1} \sum_{j=i+1}^{N_{pop}} s(d_{ij}) \quad , \quad (4.14)$$

wobei  $d_{ij}$  der Sharing-Abstand zwischen dem  $i$ -ten und dem  $j$ -ten Chromosom ist. Je nach Definition des Sharing-Abstands werden in dieser Arbeit für den Ähnlichkeitswert unterschiedliche Typen eingeführt:

(a) Phänotypischer Ähnlichkeitswert:

Der phänotypische Ähnlichkeitswert  $\kappa_p$  beschreibt die Ähnlichkeit der dekodierten Populationsmitglieder. Er ist durch Gl. (4.14) gegeben, wenn die Sharing-Abstände  $d_{ij}$  die Abstandswerte zwischen den dekodierten Populationsmitgliedern bedeuten. Wie bereits gezeigt wurde, können die Sharing-Abstände bei Positionskonfigurationen als euklidische Abstände aufgefasst und entsprechend mit Gl. (4.12) berechnet werden. Deshalb sitzen bei phänotypisch ähnlichen Konfigurationen die Aktoren auf dicht benachbarten Positionen.

(b) Genotypischer Ähnlichkeitswert:

Die Ähnlichkeit der kodierten Populationsmitglieder (= Chromosomen) wird durch den genotypischen Ähnlichkeitswert  $\kappa_g$  charakterisiert. Er wird mit Gl. (4.14) bestimmt. Dabei sind die Sharing-Abstände  $d_{ij}$  mit Gl. (4.13) aus den Hamming-Abständen  $h_{ij}$  zu berechnen. Es muss beachtet werden, dass eine genotypische Ähnlichkeit zweier Positionskonfigurationen von Aktoren keine Information über die tatsächliche physikalische Lage der Aktoren enthält.

Abb. 4.16 und Abb. 4.17 zeigen typische Verläufe des genotypischen und phänotypischen Ähnlichkeitswerts für 50 Generationen einer Population mit 20 Mitgliedern (= Positionskonfigurationen der Sekundäraktoren) mit und ohne genotypischem Sharing. Am Anfang wird die Population zufällig initialisiert. Der genotypische Ähnlichkeitswert startet mit dem Wert 0.5, der für Populationen mit ausreichender Anzahl an Genen typisch ist. Im gezeigten Beispiel ist der phänotypische Ähnlichkeitswert zu Beginn höher. Dies ist wegen der speziellen Normierung des Sharing-Abstands (siehe Gl. (4.12)) ebenfalls typisch, falls Populationsmitglieder ausreichend viele Punkte im Suchraum darstellen. Die Ähnlichkeitswerte können nur dann kleiner als 0.5 werden, wenn die Population entsprechend klein ist. Der Wert Null kann von beiden Ähnlichkeitswerten erreicht werden, wenn die Population lediglich zwei Mitglieder umfasst — beim genotypischen Ähnlichkeitswert dann, wenn sich die beiden Mitglieder in allen Zeichen unterscheiden und beim phänotypischen Ähnlichkeitswert dann, wenn die beiden Mitglieder genau zwei Punkte in gegenüberliegenden Ecken des Suchraums darstellen. Für späte Generationen gleichen sich die Ähnlichkeitswerte aneinander an. Es ist daher unerheblich, ob zur



Beurteilung des genotypischen Sharings der genotypische oder phänotypische Ähnlichkeitswert herangezogen wird.

Ohne genotypisches Sharing (Abb. 4.16) konvergieren die meisten Populationsmitglieder zu einem einzigen Maximum, so dass die Ähnlichkeitswerte gegen eins streben. Mit genotypischem Sharing steigen die Ähnlichkeitswerte langsamer an, und sie pendeln sich auf ein tieferes Niveau ein. Die stationären Werte schwanken dann gewöhnlich zwischen 0.7 und 0.8. Auf jeden Fall bleiben die Ähnlichkeitswerte von eins entfernt, was darauf hindeutet, dass die Population nicht nur zu einem einzigen Maximum konvergiert.

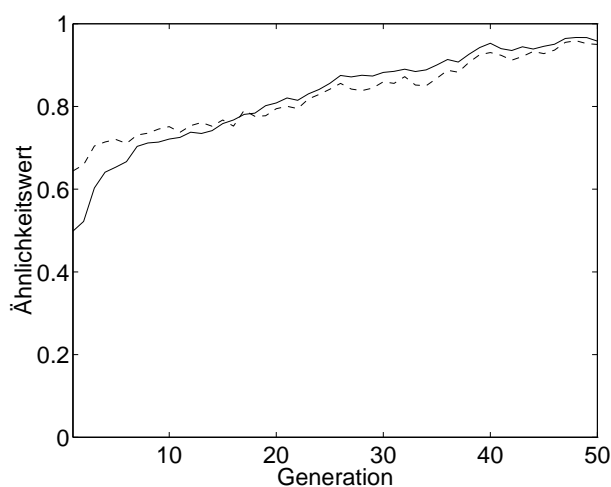


Abbildung 4.16: Genotypischer (—) und phänotypischer (---) Ähnlichkeitswert ohne Sharing.

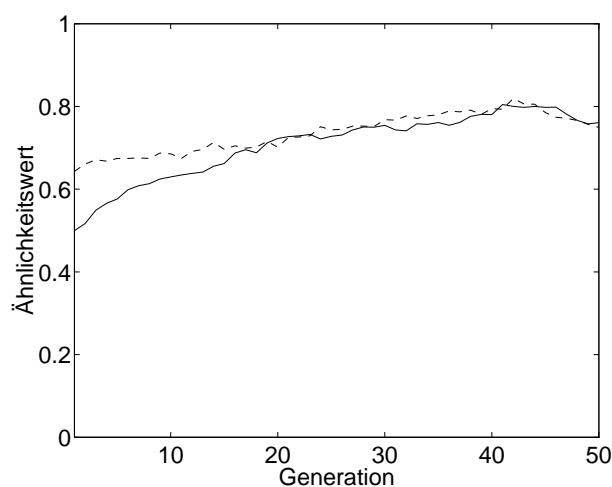


Abbildung 4.17: Genotypischer (—) und phänotypischer (---) Ähnlichkeitswert mit Sharing.

#### 4.4.5 Wahl der Parameter

In diesem Abschnitt werden Vorschläge zur Wahl der folgenden Parameter gemacht:

- $N_B$  = Anzahl der Bits pro Akteurposition ,
- $N_D$  = Anzahl der Generationen ,
- $N_{pop}$  = Populationsgröße ,
- $W_m$  = Wahrscheinlichkeit für die Mutation ,
- $W_k$  = Wahrscheinlichkeit für die Kreuzung .

Die Wahl von  $N_{pop}$  richtet sich zum einen nach der Rechenzeit, die mit zunehmendem  $N_{pop}$  steigt. Als obere Grenze von  $N_{pop}$  gilt die maximale Anzahl  $N$  der Lösungsmöglichkeiten. Wenn man

beispielsweise zwei Sekundäraktoren in 30 verschiedenen Punkten platzieren kann, ergeben sich

$$N = \binom{30}{2} = 435$$

Kombinationsmöglichkeiten. Die Größe  $N_{pop}$  darf nicht zu klein sein, da sonst der Effekt der genetischen Drift zu stark wird und nicht mehr durch Sharing abgefangen werden kann. In mehreren Testläufen sind selbst bei großen Werten von  $N$  (z.B.  $N > 100000$ ) mit der Wahl von  $N_{pop}$  zwischen 20 und 50 gute Erfahrungen gemacht worden. Die Anzahl  $N_D$  der Generationen sollte so gewählt werden, dass der GA innerhalb der Simulationszeit konvergieren kann. Nach zahlreichen Tests hat sich  $N_D$  zwischen 50 und 100 als sinnvoll erwiesen. Zur Dimensionierung der Wahrscheinlichkeitsparameter  $W_m$  und  $W_k$  werden Vorschläge in der Literatur gemacht [97]. Der Parameter  $W_m$  wird dabei an die Anzahl  $N_B$  der Bits pro Sekundäraktor gekoppelt:

$$W_m = 0.001N_B \quad . \quad (4.15)$$

Für die Wahl der Kreuzungswahrscheinlichkeit wird in [97]  $W_k = 0.6$  vorgeschlagen. Dieser Wert hat sich in vielen Tests bewährt, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurden.

#### 4.4.6 Beschränkungen bezüglich der Sekundäraktorpositionen

Wenn weniger punktförmige Primäraktoren als Sekundäraktoren vorhanden sind, versucht der GA, die Sekundäraktoren in die Positionen der Primäraktoren zu legen. Dort können die Sekundäraktoren den Einfluss der Primäraktoren direkt kompensieren, so dass die Plattenschwingung unterdrückt wird. Dies resultiert in der größtmöglichen Schalleistungsminderung. Um zu erreichen, dass der GA diesen trivialen Fall ausklammert, können *verbotene Zonen* um die Primäraktoren definiert werden. In diesen Zonen, die im einfachsten Fall rechteckig sind und in [Abb. 4.18](#) zu sehen sind, dürfen die Sekundäraktoren nicht platziert werden.

Die verbotenen Zonen werden im GA so implementiert, dass Chromosomen (= kodierte Positionskonfigurationen), die durch Mutation und Kreuzung gebildet werden, auf ihre Gültigkeit überprüft werden. Falls sich einer oder mehrere Aktoren in einer verbotenen Zone befinden, werden die entsprechenden Chromosomen mittels Mutation so lange verändert, bis eine gültige Konfiguration entsteht oder der Algorithmus nach einer vorgegebenen Maximalzahl vergeblicher Versuche abgebrochen wird. Alternativ zur Verwendung von verbotenen Zonen hat man die Möglichkeit, mehr Primäraktoren als Sekundäraktoren zu benutzen [97]. Dann ist es bezüglich der Schalleistungsminderung nicht mehr optimal, wenn sich die Sekundäraktoren in Positionen der Primäraktoren befinden. Der GA versucht deshalb, die Sekundäraktoren anderswo zu platzieren.

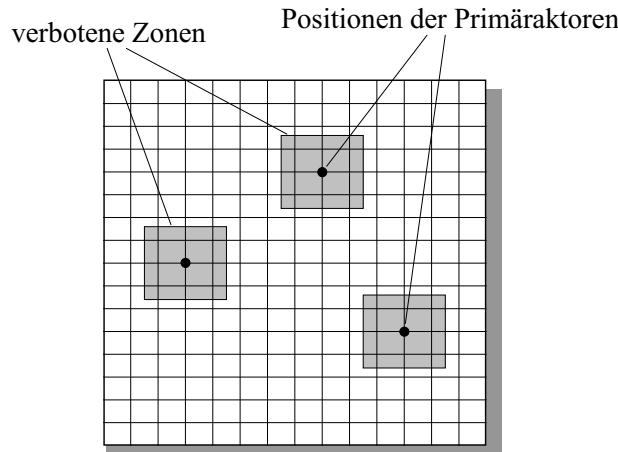


Abbildung 4.18: Verbotene Zonen für die Sekundäraktoren.

#### 4.4.7 Simulation eines Genetischen Algorithmus zur Optimierung der Sekundäraktorpositionen bei ASAC

In diesem Abschnitt wird anhand eines Simulationslaufs die Wirkungsweise eines GA diskutiert, der zur Optimierung der Sekundäraktorpositionen bei ASAC verwendet wird. In [Abb. 4.19](#) wird eine Platte gezeigt, auf der ein Gitter mit  $6 \cdot 5 = 30$  möglichen Sekundäraktorpositionen definiert ist. Es sind drei punktförmige Primäraktoren vorhanden, die sich in den Positionen 5, 8 und 22 befinden. Da zwei Sekundäraktoren benutzt werden, überwiegt die Zahl der Primäraktoren, so dass auf verbotene Zonen verzichtet werden kann. Die Optimierung soll für die Erregerfrequenz  $f_p = 29$  Hz durchgeführt werden, die nahe bei der Eigenfrequenz der (1,1)-Mode der Platte liegt ( $f_{1,1} \approx 26$  Hz).

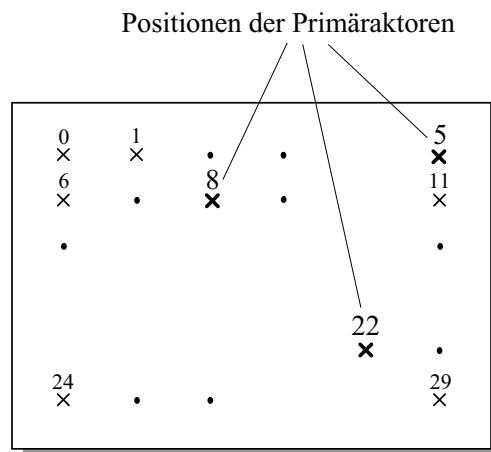


Abbildung 4.19: Platte mit 30 möglichen Sekundäraktorpositionen.

Da ein GA ein stochastischer Prozess ist, wird der Algorithmus mehrmals simuliert, um anschließend die Mittelwerte der interessierenden Größen zu bilden. Es hat sich gezeigt, dass zehn

Simulationsläufe ausreichen und einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit darstellen. Außerdem wurden in mehreren Tests günstige Werte für die Parameter des GA ermittelt:

$$\begin{aligned}
 N_B &= 5 && \text{Anzahl der Bits pro Akteurposition} \quad , \\
 N_D &= 50 && \text{Anzahl der Generationen} \quad , \\
 N_{pop} &= 20 && \text{Populationsgröße} \quad , \\
 W_m &= 0.001N_B && \text{Wahrscheinlichkeit für die Mutation} \quad , \\
 W_k &= 0.6 && \text{Wahrscheinlichkeit für die Kreuzung} \quad .
 \end{aligned}$$

Die folgenden Schaubilder enthalten stets die Mittelwerte über 10 Simulationsläufe. In [Abb. 4.20](#) ist dargestellt, wie der über der Population gemittelte Wert  $\Delta\bar{P}$  der Schalleistungsminderung zunimmt. Es ist zu erkennen, dass Sharing das Anwachsen von  $\Delta\bar{P}$  hemmt. Das liegt daran, dass sich die Populationsmitglieder ohne Sharing auf das höchste Maximum der Schalleistungsminderung konzentrieren, während sie sich mit Sharing auf mehrere, möglicherweise tiefere Maxima verteilen. [Abb. 4.21](#) zeigt die Verteilung der Schalleistungsminderung über der Population der 50. Generation.

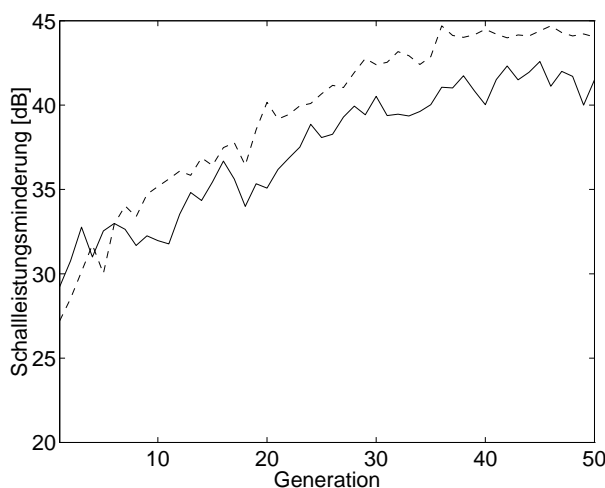


Abbildung 4.20: Mittlere Schalleistungsminderung mit (—) und ohne (---) genotypischem Sharing.

Ohne Sharing ist die Verteilung homogener, was darauf hindeutet, dass sich die Populationsmitglieder mit Sharing in mehr Nischen ansammeln als ohne Sharing. Diese Vermutung wird bestätigt, wenn die Standardabweichung der Schalleistungsminderung und die Ähnlichkeitswerte betrachtet werden (siehe [Abb. 4.15](#) bis [Abb. 4.17](#)). Es ist zu erkennen, dass die Standardabweichung der Schalleistungsminderung mit Sharing nicht so stark absinkt wie ohne Sharing. Das weist darauf hin, dass Sharing einer Konzentration auf ein einziges Maximum entgegenwirkt. Die Ähnlichkeitswerte erreichen mit Sharing lediglich einen Wert von 0.7 bis 0.8, was typisch ist für eine Verteilung der Populationsmitglieder auf mehrere Maxima. Zum Vergleich streben die Ähnlichkeitswerte ohne Sharing gegen eins ([Abb. 4.16](#)).

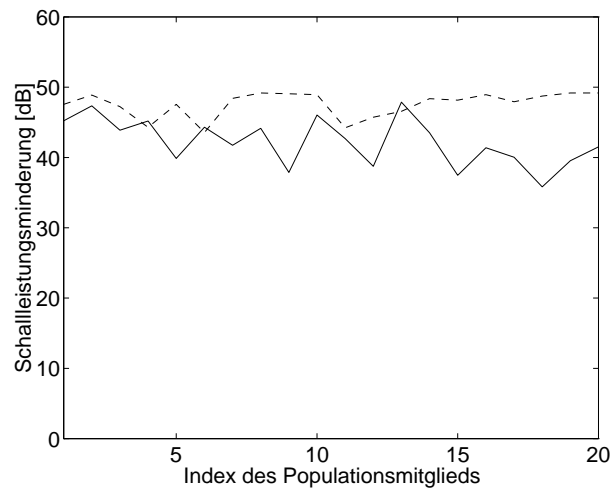


Abbildung 4.21: Verteilung der Schalleistungsminderung über der Population mit (—) und ohne (---) Sharing.

## Kapitel 5

# Experimenteller Aufbau

Die aktive Schallabstrahlungsminderung wird an einer rechteckigen Stahlplatte ( $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$ ) demonstriert, die an den Rändern fest eingespannt ist. Wie in der Simulation soll die Stahlplatte den Schall hauptsächlich einseitig abstrahlen. In Kap. 5.1 wird gezeigt werden, wie die feste Einspannung sowie die einseitige Schallabstrahlung der Platte realisiert werden.

Die Stahlplatte kann primär durch Kraftanregung in einem Punkt (Shaker), durch flächige Anregung (Piezoscheiben) oder durch Luftschallanregung zum Schwingen angeregt werden. Bei den in dieser Arbeit beschriebenen Versuchen wird die Platte durch einen elektromagnetischen Schwingungserreger (Shaker) angeregt, der mit einem Sinussignal angesteuert wird. Diese Art der Anregung kann in der Simulation unter Vernachlässigung der Masse<sup>1</sup> des schwingfähigen Teils des Shakers einfach und genau nachgebildet werden (vgl. Kap. 3.1.3). Im Gegensatz dazu könnte man eine Luftschallanregung durch Lautsprecher analytisch nur angenähert beschreiben.

Der Primärshaker wird von unten an der Platte befestigt, damit der zur Kompensation der Schallabstrahlung eingesetzte Sekundäraktor, der von oben auf die Platte einwirkt, beliebig positioniert werden kann. Die Position des Primärshakers wird so gewählt, dass er möglichst nicht in den Knotenlinien der Eigenschwingungen liegt, die im zu untersuchenden Frequenzbereich auftreten. In der vorliegenden Arbeit wird als Position des Primärshakers (0.08 m, 0.107 m) gewählt, wie in [Abb. 5.1](#) dargestellt.

Ein Signalgenerator liefert das sinusförmige Anregungssignal, wobei Tests für verschiedene Frequenzen durchgeführt werden. Außerdem wird die Wirkung des ASAC-Systems bei multitonaler Anregung untersucht. Zur Kompensation der Schallabstrahlung werden sekundär entweder punktförmig oder flächig wirkende Aktoren (Shaker bzw. Piezoelemente) benutzt. Als Steuereinheit wird der Controller dX-57 der Fa. Digisonix eingesetzt [29], auf den in Kap. 5.3 näher eingegangen wird. Da ein zum Primärerregungssignal korreliertes Signal verfügbar ist,

---

<sup>1</sup>In Kap. 6.2.1 wird durch Simulationen und Messungen gezeigt, dass die Vernachlässigung der schwingfähigen Shaker-Masse zulässig ist.

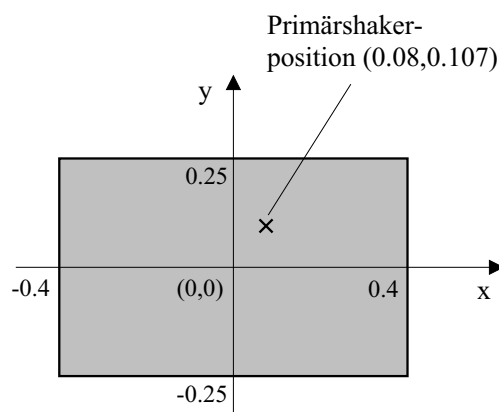


Abbildung 5.1: *Position des Primärshakers (Koordinaten in m).*

wird zur Kompensation die Feedforward-Struktur gewählt (vgl. Kap. 2.2.5).

Die Fehlersensoren sind Mikrofone, die im Abstand 1 m vom Mittelpunkt der Stahlplatte angebracht werden. Es werden Versuche mit einem einkanaligen System (1 Sekundäraktor, 1 Fehlermikrofon) und einem zweikanaligen System (2 Aktoren, 2 Fehlermikrofone) durchgeführt. In [Abb. 5.2](#) ist der Versuchsaufbau für ein einkanaliges ASAC-System dargestellt. Das Mikrofonsignal wird verstärkt und zur Beseitigung der tieffrequenten Signalanteile mit einem analogen Hochpassfilter (Grenzfrequenz:  $f_{g,h} = 20$  Hz) gefiltert. Ein analoges Tiefpassfilter (Grenzfrequenz:  $f_{g,t} = 1$  kHz) beseitigt entsprechend die Signalanteile über 1 kHz. Das sinusförmige Signal für die Primärerregung wird von einem FFT-Analysator der Fa. Onosokki erzeugt. In Kap. 5.5.2 wird ein vorhandener Messaufbau erläutert, mit dem die Schalleistung nach DIN 45635, Teil 1 [86] gemessen werden kann. Außerdem wird dargestellt, wie die Schwingformen der Stahlplatte mit Hilfe eines *Scanning-Laser-Vibrometers* gemessen wurden (Kap. 5.6).

## 5.1 Einspannung der Stahlplatte

Die Stahlplatte wird an den Rändern zwischen zwei 5 mm dicken Stahlrahmen an 60 Punkten fest verschraubt. Diese Rahmen sind von einem 25 mm dicken Holzrahmen umgeben, der den Deckel einer quaderförmigen Doppelkapsel aus Holz bildet. Die Doppelkapsel hat die Außenmaße  $1200 \times 800 \times 920$  mm<sup>3</sup>. Sie ist in [Abb. 5.3](#) im Vertikalschnitt dargestellt. Die Innenkapsel ist durch eine Glaswollschicht von der Außenkapsel getrennt und darin federnd gelagert. Alle Wände der Holzkapseln sind 25 mm dick. Schallwellen hoher Frequenzen werden durch die Glaswollschicht stark gedämpft. Bei niedrigen Frequenzen besitzt die Doppelkapsel wegen der im Vergleich zur Stahlplatte viel größeren Masse und der höheren Steifigkeit eine um mehrere Größenordnungen höhere akustische Impedanz als die Stahlplatte. Deshalb wird der weitaus größte Teil der Schalleistung durch die Stahlplatte nach oben abgestrahlt, während die Schallabstrahlung von der Doppelkapsel u.a. aufgrund der Auskleidung der Innenkapsel mit Glaswolle

und der federnd gelagerten Innenkapsel vernachlässigt werden kann.

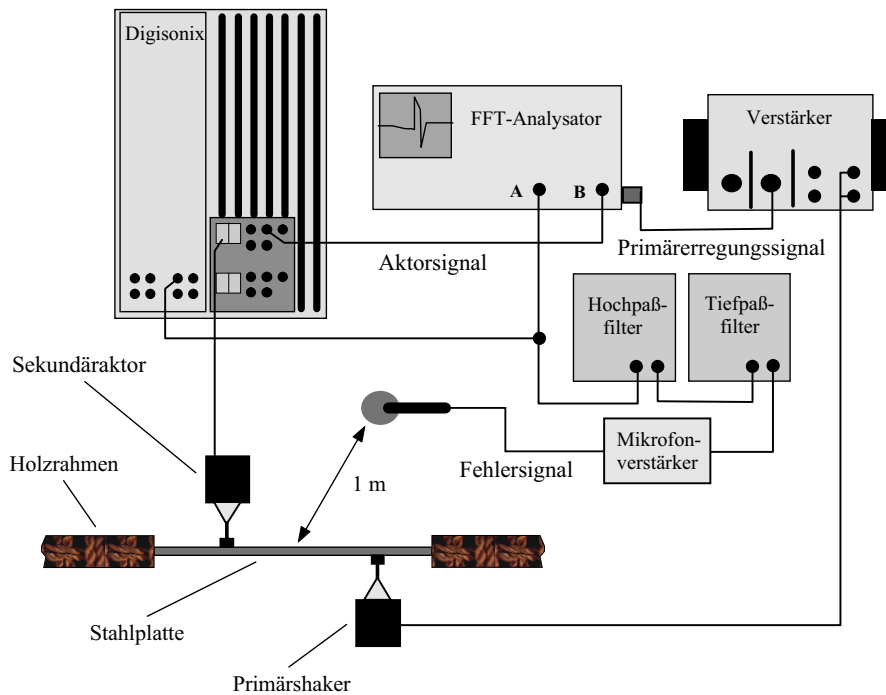


Abbildung 5.2: Versuchsaufbau des ASAC-Systems (aus [45]).

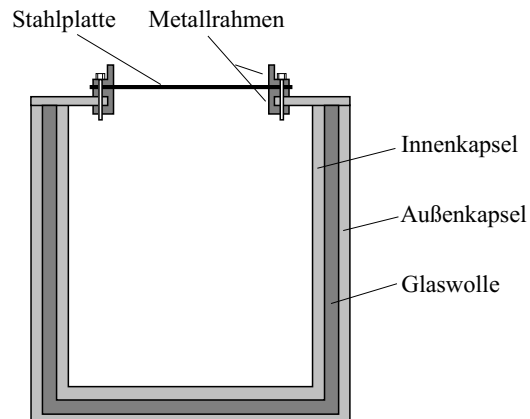


Abbildung 5.3: Schalldämmung mittels einer Doppelkapsel aus Holz.

## 5.2 Aktoren

In den Experimenten der vorliegenden Arbeit wird ein Shaker dazu benutzt, die Stahlplatte zu Schwingungen anzuregen. Als Sekundäraktoren für die Kompensation werden entweder Shaker



oder Piezoelemente eingesetzt. Die Anforderungen an die Aktoren beziehen sich hauptsächlich auf Kraft, Hub, Frequenzbereich, Ansteuerspannung und Verfügbarkeit. Für die Versuche sind Aktorkräfte im Newton-Bereich und Hübe bis zu einigen Millimetern erforderlich. Der Frequenzbereich sollte mindestens Frequenzen von 25 Hz (Eigenfrequenz der (1,1)-Mode liegt bei 26 Hz) bis 1 kHz umfassen.

### 5.2.1 Shaker

Shaker sind für vergleichsweise große Hübe und Kräfte geeignet. Sie können in einem weiten Frequenzbereich von 0 Hz bis zu mehreren kHz eingesetzt werden. Die verwendeten Shaker vom Typ 4810 der Fa. Brüel & Kjær [15] sind spezifiziert für einen Frequenzbereich von 0 Hz bis 18 kHz. Zwischen 65 Hz und 4 kHz ist die maximal übertragbare Kraft 10 N, der maximale Hub bei tiefen Frequenzen beträgt 6 mm. Mit dem ohmschen Widerstand von  $3.5 \Omega$  und dem maximalen Eingangsstrom von 1.6 A (RMS) kann der zur Kompensation der Schallabstrahlung eingesetzte Shaker direkt durch die integrierten Leistungsverstärker des dX-57-Controllers betrieben werden.

#### 5.2.1.1 Ankopplung der Shaker

Bei der Ankopplung der Shaker an die Stahlplatte kann zwischen loser oder starrer Kopplung gewählt werden.

1. Lose Kopplung:

Liegt die Shakerspitze lose auf der Stahlplatte auf, können nur Druck-, aber keine Zugkräfte übertragen werden. Einerseits entsteht ohne ausreichende statische Vorspannung durch das ständige Anschlagen der Shakerspitze an die Platte ein Klirrgeräusch, d.h. ein Geräusch mit hohen Oberwellenanteilen. Andererseits verändert man durch eine statische Vorspannung des Shakers die effektive Steifigkeit der Platte und damit seine dynamischen Eigenschaften.

2. Starre Kopplung:

Besser ist eine starre Verbindung zwischen Shaker und Platte. Um eine möglichst momentenfreie Kraftübertragung zu erreichen, ist eine Ankopplung über ein Metallstäbchen (Stinger) zu empfehlen, was in [Abb. 5.4](#) gezeigt wird.

Der verwendete Stinger hat eine Länge von 3 cm. In den Messungen wird zwischen dem Stinger und der Platte ein Kraftsensor befestigt, der die zur experimentellen Modalanalyse benötigte Kraft im Anregungspunkt misst (siehe Kap. 6.1.1). Die starre Kopplung hat den Nachteil, dass die dynamischen Eigenschaften der Platte durch die zusätzliche Masse des Kraftaufnehmers, des Stingers und des schwingfähigen Teils des Shakers beeinflusst

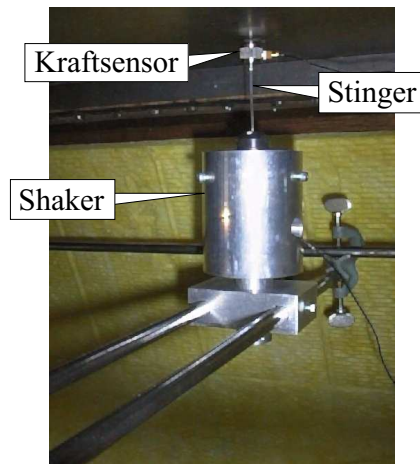


Abbildung 5.4: Ankopplung des Shakers über einen Stinger.

werden. Um diesen Einfluss zu verdeutlichen, werden im Anregungspunkt die auf die Platte übertragene Kraft  $F$  und die Beschleunigung  $a$  gemessen. Nach [72] stellt der Quotient  $F/a$  die *dynamische Masse* des gemessenen Systems im Anregungspunkt dar. In [Abb. 5.5](#) ist das gemessene Frequenzspektrum der dynamischen Masse bei Anregung im beliebig gewählten Punkt<sup>2</sup> ( $x = 0.08$  m,  $y = 0.107$  m) bezüglich des Koordinatensystems aus [Abb. 5.1](#) dargestellt. Man erkennt, dass die dynamische Masse frequenzabhängig ist. Ihre Minima befinden sich bei den Resonanzfrequenzen des Systems, weil dort eine geringe Kraft ausreicht, um große Beschleunigungswerte zu erzielen.

Die Masse des verwendeten Kraftaufnehmers vom Typ 8200 der Fa. Brüel & Kjær [13] beträgt 21 g. Nach [15] ist die Masse des schwingungsfähigen Teils des verwendeten Shakertyps 18 g. Zusammen mit der Stingermasse 3 g ergibt sich die zusätzliche Masse 42 g, die in der Nähe der Resonanzfrequenzen des Gesamtsystems bis zu 50% der dynamischen Systemmasse betragen kann. Deshalb sollte möglichst nicht nahe bei den Resonanzfrequenzen angeregt werden, um die Messergebnisse besser mit den Simulationsergebnissen vergleichen zu können.

## 5.2.2 Piezoelemente

Im Gegensatz zu Shakern, die punktförmig wirken, können mit Piezoelementen flächige Aktoren realisiert werden. Diese Aktoren, die auf alle Schwingungsmoden einwirken können, beeinflussen die Schwingungsmoden auch dann, wenn sie in Knotenlinien platziert werden.

---

<sup>2</sup>Der Anregungspunkt soll so gewählt werden, dass er nicht in den Knotenlinien der zu berücksichtigenden Schwingungsmoden liegt.

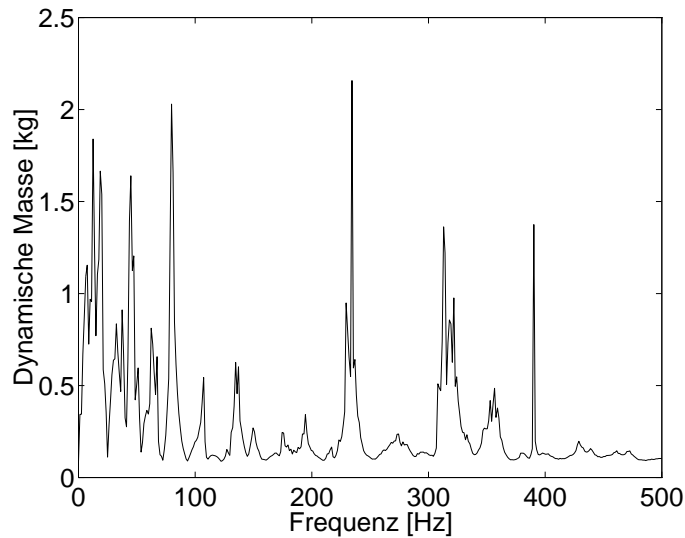


Abbildung 5.5: *Dynamische Masse des Platte-Kraftsensor-Stinger-Shaker-Systems im Anregungspunkt ( $x = 0.08\text{ m}$ ,  $y = 0.10\text{ m}$ ).*

### 5.2.2.1 Funktionsweise von Piezoelementen

Bestimmte Kristalle setzen bei mechanischer Verformung infolge von Druck oder Zug elektrische Ladung frei. Diese Eigenschaft wird als *piezoelektrischer Effekt* bezeichnet [83, 107]. Der umgekehrte Vorgang, bei dem ein angelegtes elektrisches Feld mechanische Spannungen und Verformungen erzeugt, heißt *inverser Piezoeffekt*. Als Basismaterialien für Piezoelemente können zahlreiche in der Natur vorkommende Kristalle, wie z.B. Quarz, oder polykristalline, ferroelektrische Materialien, z.B. Bleititanat oder Bleizirkonat, benutzt werden. Bei diesen Stoffen sind in den Kristallen von vornherein Ladungsdipole vorhanden. Wenn wenig unterhalb einer materialspezifischen Temperatur, der sogenannten *Curie-Temperatur*, eine elektrische Spannung angelegt wird, entsteht ein elektrisches Feld, das die Dipole der Kristalle ausrichtet, wie in Abb. 5.6 dargestellt.

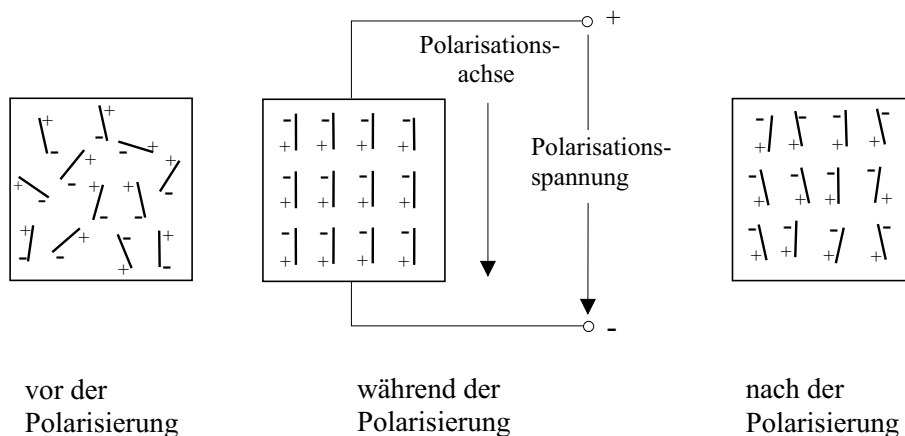


Abbildung 5.6: *Ausrichtung der Dipole im Piezokristall (aus [107]).*

Während dieses Vorgangs, der als *Polarisationsprozess* bezeichnet wird, wird der Kristall verformt. Nachdem die elektrische Spannung abgeschaltet worden ist, verharren die Dipole annähernd in der polarisierten Stellung. Außerdem bleibt die Verformung des Kristalls erhalten. Ähnlich wie bei ferromagnetischen Stoffen besteht bei ferroelektrischen Materialien eine Hysteresebeziehung zwischen der Polarisation  $P$  (Ladung/Flächeneinheit) und der elektrischen Feldstärke  $E$ , was in Abb. 5.7 zu sehen ist.

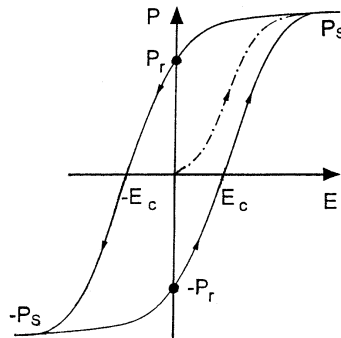


Abbildung 5.7: *Hysterese zwischen der Polarisation  $P$  und der elektrischen Feldstärke  $E$  (aus [45]).*

Weit unterhalb der Curie-Temperatur kann das Piezoelement normal betrieben werden, indem man eine elektrische Spannung anlegt. Ist diese Spannung der Polung des Piezoelements entgegengesetzt gerichtet, wird das Piezoelement gestreckt, andernfalls wird es gestaucht, wie in Abb. 5.8 gezeigt. Dabei besteht zwischen der angelegten Spannung und der Dehnung des Piezoelements ein linearer Zusammenhang.

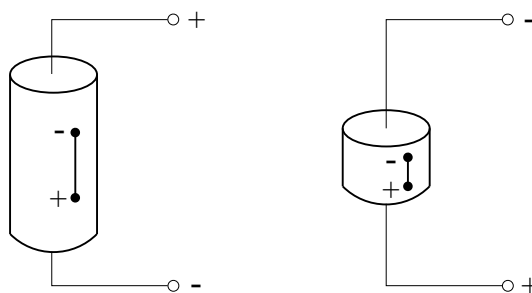


Abbildung 5.8: *Piezoelement im Normalbetrieb (aus [107]).*

Oberhalb der Curie-Temperatur verlieren die Dipole der Piezokristalle ihre klare Ausrichtung, so dass der Piezoeffekt nicht auftreten kann. Um diese *Depolarisation* zu vermeiden, sollte ein Piezoelement nicht über die Curie-Temperatur hinaus erhitzt werden (z.B. beim Löten). Außerdem sollte beim Betrieb des Piezoelements die vorgegebene Grenze für die elektrische Feldstärke  $E$  eingehalten werden, weil ein Überschreiten dieser Grenze ebenfalls eine Depolarisation zur Folge hat.

Bei den verwendeten Piezoelementen des Typs PZT-5H der Fa. Morgan Matroc sind folgende Grenzen vorgegeben [83]:

$$\begin{aligned} \text{Curie-Temperatur: } & 195 \text{ }^\circ\text{C} \quad , \\ \text{Max. Betriebstemperatur: } & 110 \text{ }^\circ\text{C} \quad , \\ \text{Max. Feldstärke } E_{max} : & 500 \text{ V/mm} \quad . \end{aligned}$$

Mit der Dicke  $h_{pe}$  der Piezoelemente ergibt sich für die maximal anzulegende Spannung

$$U_{max} = E_{max}h_{pe} \quad . \quad (5.1)$$

### 5.2.2.2 Ansteuerung der Piezoelemente

Piezoelemente benötigen zum Aufbau des elektrischen Felds eine vergleichsweise große elektrische Spannung. Bei den verwendeten Piezoscheiben der Dicke  $h_{pe} = 0.5 \text{ mm}$  liegt die Versorgungsspannung je nach Arbeitspunkt bei 50 - 70 V, wobei nach Gl. (5.1) Spannungen bis  $U_{max} = 250 \text{ V}$  zugelassen sind. Die verwendeten Piezoscheiben werden im Frequenzbereich 100 Hz bis 1 kHz typisch mit Stromstärken 10 - 40 mA betrieben<sup>3</sup>.

### 5.2.2.3 Ankleben der Piezoelemente

Um Leckströme zu vermeiden, sollte beim Ankleben der Piezoelemente auf die Metallplatte darauf geachtet werden, dass zwischen der Piezo-Unterseite und der Platte keine elektrisch leitende Verbindung besteht. Inzwischen sind Piezoelemente verfügbar, bei denen beide Leitungskontakte auf einer Seite angebracht sind. Somit können sie problemlos mit der anderen Seite auf elektrisch leitende Strukturen geklebt werden. Bei den in der Arbeit verwendeten Piezoelementen sind die Leitungskontakte auf beiden Seiten. Man behilft sich, indem man eine sehr dünne, elektrisch leitende Folie (z.B. aus Nickel, Dicke 10  $\mu\text{m}$ ) einseitig an der Piezoscheibe anlötet, wie es in [Abb. 5.9](#) dargestellt ist. Zur elektrischen Isolierung trägt man auf der Stahlplatte an der gewünschten Position eine dünne Schicht Klebstoff auf, die man aushärten lässt. Mittels einer Teflonfolie, die auf die Klebeschicht gelegt wird, erreicht man eine gleichmäßige Schichtdicke. Auf die getrocknete Schicht wird das Piezoelement angeklebt. Wie bereits erwähnt wurde, darf das Piezoelement beim Anlöten der Kontaktleitungen nicht zu stark erhitzt werden, weil es sonst depolarisiert oder zerstört wird. In [Abb. 5.10](#) ist zu erkennen, wie die Platte durch die Stauch- und Dehnbewegungen der Piezoelemente gebogen wird.

---

<sup>3</sup>Durch Messungen wurde für die verwendeten Piezoscheiben der Maße  $25 \times 25 \times 0.5 \text{ mm}^3$  die Kapazität  $C_{pe} = 30 \text{ nF}$  sowie der ohmsche Widerstand  $R_{pe} = 4.4 \text{ k}\Omega$  ermittelt.

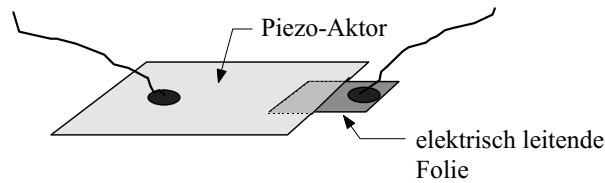


Abbildung 5.9: Kontaktieren des Piezoelements (aus [45]).

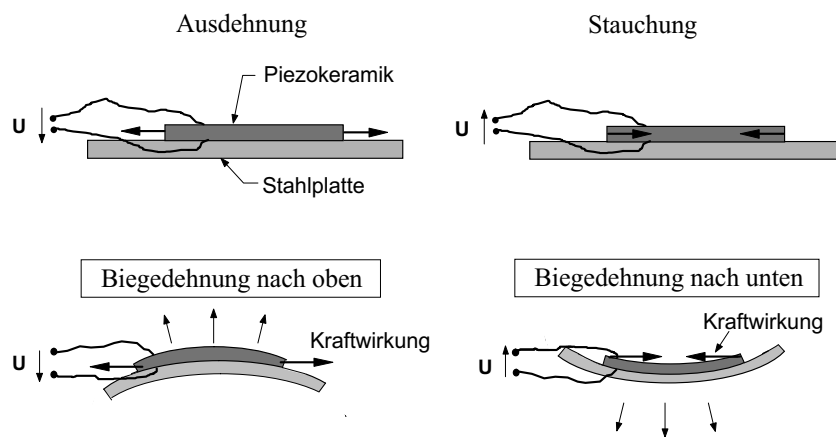


Abbildung 5.10: Durchbiegung der Stahlplatte durch ein aufgeklebtes Piezoelement (aus [45]).

#### 5.2.2.4 Form und Abmessungen

Da die an den Rändern fest eingespannte Stahlplatte rechteckig ist, bilden sich Schwingungsmoden aus, deren Knotenlinien parallel zu den Plattenrändern verlaufen. Um deshalb die Beziehungen für das analytische Schwingungsmodell einfach und trotzdem ausreichend genau zu gestalten, werden bei den Piezoaktoren dünne Scheiben mit rechteckiger Grundfläche gewählt. Die Länge und Breite der Piezoscheiben sollten gerade so groß sein, dass die höchsten zu berücksichtigenden Schwingungsmoden beeinflusst werden können. Besitzt z.B. die höchste zu berücksichtigende Schwingungsmoden die Wellenlänge  $\lambda_x$  in  $x$ -Richtung, dann sollte die Länge  $a_{pe}$  des Piezoelements ca.  $0.1\lambda_x$  bis  $0.5\lambda_x$  betragen. Die Piezoelemente sollten nicht zu klein gewählt werden, da sie sonst nur schlecht auf niedrige Schwingungsmoden einwirken können. Die Untergrenze liegt im vorliegenden Fall bei ca. 10 mm.

Bei gleichbleibender Grundfläche steigt die Piezo-Masse mit zunehmender Dicke und damit ihr Einfluss auf die Dynamik der Stahlplatte. Dieser Einfluss wird in der analytischen Rechnung und der Simulation vernachlässigt. Außerdem werden bei dickeren Piezoelementen höhere elektrische Spannungen benötigt. Bei sehr dünnen Piezoscheiben ( $h_{pe} < 0.5h$ ,  $h_{pe}$  = Dicke des Piezoelements,  $h$  = Plattendicke) nimmt das übertragbare Biegemoment mit steigender Dicke  $h_{pe}$  zu. Jedoch sinkt das Biegemoment bei dicken Piezoelementen mit zunehmender Dicke  $h_{pe}$ ,

weil das Piezoelement immer steifer wird. Es gibt also eine optimale Dicke eines auf einer Stahlplatte aufgeklebten Piezoelements, die nach [30, 70] ungefähr die Hälfte der Plattendicke beträgt. Dies wird in Abb. 5.11 veranschaulicht, wo das spezifische Biegemoment  $M^*$  (Biegemoment pro Längeneinheit) als Funktion des Dickenverhältnisses  $h_{pe}/h$  dargestellt ist.

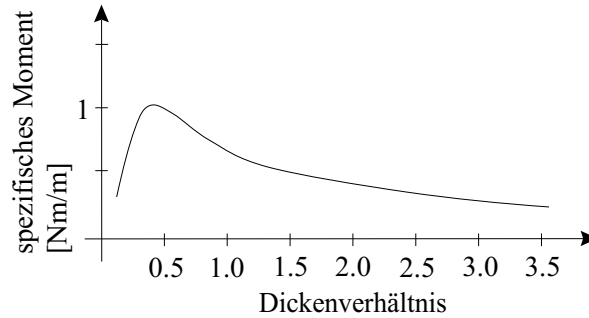


Abbildung 5.11: *Abhängigkeit des spezifischen Biegemoments  $M^*$  vom Dickenverhältnis  $h_{pe}/h$  (aus [70]).*

### 5.2.2.5 Frequenzabhängigkeit der Auslenkung

Im Gegensatz zu Shakern, die auch bei sehr tiefen Frequenzen ( $f < 100$  Hz) wirkungsvoll eingesetzt werden können, besitzen Piezoelemente bei hohen Frequenzen einen höheren Wirkungsgrad als im unteren Frequenzbereich. Dies wird durch Abb. 5.12 verdeutlicht, wo für ein Piezoelement des verwendeten Typs PZT-5H die Auslenkung in Abhängigkeit der Frequenz qualitativ dargestellt ist.

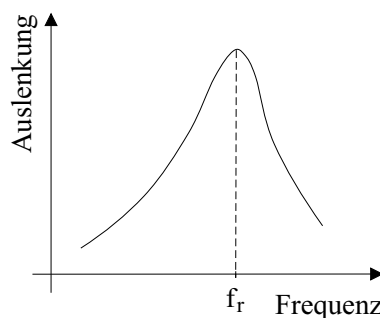


Abbildung 5.12: *Abhängigkeit der Auslenkung von der Frequenz bei einem Piezoelement (aus [83]).*

Die Resonanzfrequenz  $f_r$ , bei der die Auslenkung maximal ist, wird nach [83] bestimmt zu

$$f_r = \frac{N_1}{a_{pe}} \quad (5.2)$$

mit der Frequenzkonstanten  $N_1$  und der Länge  $a_{pe}$  des Piezoelements. Mit  $N_1 = 1420 \text{ Hz m}$  [83] und der Länge  $a_{pe} = 25 \text{ mm}$  erhält man daraus

$$f_r = 56.8 \text{ kHz.} \quad (5.3)$$

Für sehr tiefe Frequenzen ( $f < 100 \text{ Hz}$ ) können die erforderlichen Hübe und Kräfte nicht mehr aufgebracht werden. Wenn Eigenschwingungen mit tiefen Eigenfrequenzen eine Rolle spielen, ist deshalb bei ASAC mit Piezoelementen von vornherein ein schlechteres Ergebnis zu erwarten als mit Shakern.

### 5.3 Controller dX-57

Der Controller dX-57 der Fa. Digisonix enthält einen Mikroprozessor des Typs TMS320C26 der Fa. Texas Instruments für den parametrierbaren Filtered-X-LMS-Algorithmus (vgl. Kap. 2.2.5.2) und ein digitales Vorfilter für das Referenzsignal. Außerdem sind A/D-Wandler und einstellbare digitale Hoch- und Tiefpassfilter für die Eingangssignale enthalten sowie D/A-Wandler und Leistungsverstärker (maximale Leistung pro Verstärker: 50 W) für die Ausgangssignale. Da man sich bei ASAC auf den niederfrequenten Bereich (z.B.  $f < 1 \text{ kHz}$ ) beschränkt, ist die gewählte Abtastfrequenz  $f_a = 2 \text{ kHz}$  unter Berücksichtigung des Shannonschen Abtasttheorems ausreichend.

Die Filterkoeffizienten des Vorfilters für das Referenzsignal werden vom Controller in einem Identifikationslauf bestimmt. Dabei wird über den Ausgang ein bandbegrenztes Rauschen auf den Sekundäraktor übertragen und durch Messung der Systemantwort die Übertragungsstrecke zwischen Sekundäraktor und Fehlersensor, genauer gesagt zwischen Ausgang und Eingang des Controllers, identifiziert.

### 5.4 Fehlermikrofone

Als Fehlermikrofone dienen 1/2-Zoll-Elektret-Kondensatormikrofone des Typs Brüel & Kjær 4133 mit konstantem Frequenzgang zwischen 20 Hz und 16 kHz. Es werden Versuche durchgeführt mit einem einkanaligen ASAC-System, bei dem ein Fehlermikrofon ausreicht, und einem zweikanaligen System, bei dem neben zwei Aktoren auch zwei Mikrofone verwendet werden. Die Fehlermikrofone werden aus praktischen Gründen im Abstand 1 m vom Plattenmittelpunkt positioniert. Bei einkanaligem Betrieb wird für das Mikrofon die Position senkrecht über dem Plattenmittelpunkt gewählt. Das zweite Mikrofon wird gegebenenfalls unter dem Winkel  $45^\circ$  zur Plattenoberfläche platziert (Position  $M_7$ ), wie in [Abb. 5.13](#) gezeigt.



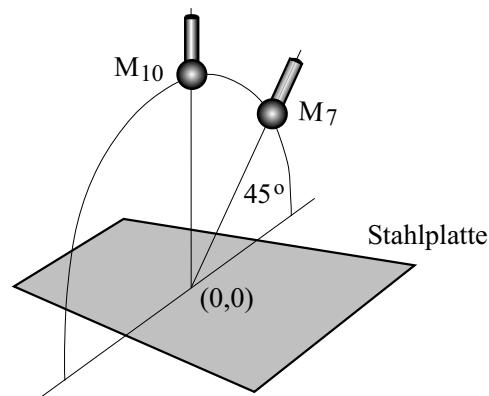


Abbildung 5.13: *Positionierung zweier Fehlermikrofone.*

## 5.5 Messgröße zur Bewertung eines ASAC-Systems

In Kap. 4 wurde für die Optimierung der Sekundäraktorpositionen die Schalleistung als Gütefunktional benutzt. Es ist deshalb naheliegend, zur Bewertung dieser Optimierung und zur Beurteilung eines ASAC-Systems die Änderung der abgestrahlten Schalleistung mit und ohne ASAC zu messen, also bevor und nachdem der Controller eingeschaltet wird.

### 5.5.1 Verfahren zur Messung der Schalleistung

Während in Kapitel 3.2.1.2 Methoden zur Bestimmung der Schalleistung aus analytischen Daten vorgestellt wurden, sollen hier die wichtigsten Verfahren zur Bestimmung aus Messgrößen erläutert werden. Diese Methoden lassen sich in zwei Gruppen unterteilen:

- Verfahren, bei denen Luftschallgrößen gemessen werden.
- Verfahren, die gemessene Körperschallgrößen verwenden.

In den folgenden Abschnitten werden diese beiden Gruppen näher erläutert.

#### 5.5.1.1 Bestimmung der Schalleistung aus gemessenen Luftschallgrößen

Die Methoden zur Bestimmung der Schalleistung durch Messung von Luftschallgrößen werden folgendermaßen klassifiziert [52]:

- *Hüllflächenschalldruckverfahren*: Dieses Verfahren beruht auf der zeitlich gemittelten Messung von Schalldrücken in diskreten Punkten einer Messfläche in hinreichend großem Abstand vom Messobjekt, der Mittelung der Schalldruckpegel über dieser Messfläche und anschließender Korrektur durch ein Messflächenmaß [64, 86].

- *Hüllflächenschallintensitätsverfahren*: Die über einer Messfläche gemessenen zeitlich gemittelten Schallintensitäten werden über dieser Messfläche addiert [60, 89].
- *Hallraumverfahren*: In einem Hallraum werden Schalldrücke gemessen und anschließend zeitlich und räumlich gemittelt [88].
- *Vergleichsverfahren*: Um Umgebungseinflüsse zu kompensieren, werden die Schalldrücke sowohl der zu vermessenden Schallquelle als auch einer geeichten Prüfschallquelle in identischen diskreten Punkten derselben Messfläche gemessen [65].

### 5.5.1.2 Bestimmung der Schalleistung aus gemessenen Körperschallgrößen

Die Methoden zur Bestimmung der Schalleistung aus gemessenen Körperschalldaten sind identisch mit den in Kapitel 3.2.1.2 für analytische Eingangsdaten vorgestellten Methoden, also:

- *Hüllflächenintegration*: Bei diesem Verfahren wird die flächennormale Komponente der Schallschnelle auf der Strahleroberfläche in diskreten Punkten gemessen. Daraus wird mit Hilfe der in Kap. 3.2.1.1 vorgestellten Methoden der Schalldruck in diskreten Punkten auf einer Messfläche berechnet. Die Schalleistung ergibt sich dann durch Integration des mit  $1/(\rho c)$  bewerteten quadrierten Schalldruckeffektivwerts über dieser Messfläche.
- *Genormtes Körperschallverfahren*: Wie in Kap. 3.2.1.2 bereits erwähnt wurde, wird bei dieser Methode die Schalleistung basierend auf gemessenen Effektivwerten der flächennormalen Amplitude der Schwingschnelle auf der Strahleroberfläche ermittelt.
- *Direkte Finite Elemente Methode (DFEM)*: Die flächennormale Amplitude und die Phase der Schwingschnelle werden in diskreten Punkten auf der Strahleroberfläche gemessen und direkt, d.h. nicht über die Integration von Luftschallgrößen, in die Luftschalleistung umgerechnet. Auch hier gehen Konstanten des Gasmediums (Luft) in die Berechnung der Luftschalleistung ein.

### 5.5.2 Messung der Schalleistung mit dem Hüllflächenschalldruckverfahren

In der vorliegenden Arbeit wurde ein vorhandener Messaufbau benutzt, mit dem die Schalleistung nach dem genormten Hüllflächenschalldruckverfahren gemessen wurde. Zunächst wird der Messaufbau beschrieben: Es wurden zehn Mikrofone verwendet, die gemäß [64, 86] wie in [Abb. 5.14](#) gezeigt halbkugelförmig platziert wurden. Der für diese Anordnung geforderte reflektierende Boden wurde durch eine 20 mm dicke, runde Holzplatte mit dem Radius 1 m approximiert. Auf Beugungseffekte, die am Rand der für Wellenlängen der tieferen Frequenzen zu kleinen Platte auftreten, wird in Kap. B.4 näher eingegangen.

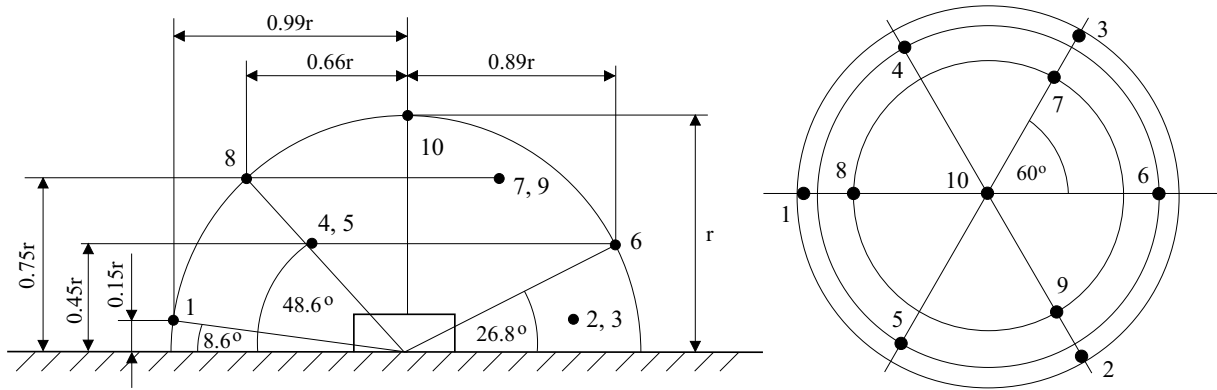


Abbildung 5.14: Positionierung der Mikrofone auf einer Halbkugel zur Schallleistungsmessung nach ISO 3745-1977(E) (aus [64]).

Mit den Mikrofonen werden die Schalldrücke in den jeweiligen Positionen gemessen. Daraus kann der flächig und zeitlich gemittelte Schalldruckpegel

$$\bar{L}_p = 10 \lg \left( \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} 10^{0.1 L_{p,i}} \right) \text{ dB} \quad (5.4)$$

bestimmt werden, wobei  $L_{p,i}$  die zeitlich gemittelten Schalldruckpegel in den  $N_M = 10$  gleichmäßig verteilten Mikrofonpositionen sind. Umgebungseinflüsse werden durch einen Korrekturwert  $K$  berücksichtigt ([86], siehe Gl. (5.9)). Gemäß der Beziehung

$$K = K_0 + K_1 + K_2 \quad (5.5)$$

setzt sich dieser Korrekturwert aus Einzelkorrekturen zusammen, wobei mit  $K_0$  die Abweichung der Messtemperatur von der Referenztemperatur  $23^\circ \text{ C}$  und die Abweichung des statischen Luftdrucks vom entsprechenden Referenzdruck 1013 mbar berücksichtigt werden, mit  $K_1$  der Einfluss durch Fremdgeräusche berücksichtigt wird und mit  $K_2$  Umgebungseinflüsse infolge von Schallreflexionen und -absorptionen außerhalb des halbkugelförmigen Messbereichs eingerechnet werden. Da sich die Umgebungsbedingungen während und zwischen den durchgeführten Messungen nur geringfügig änderten, wurde der berechnete Korrekturwert  $K = 0.4 \text{ dB}$  als konstant betrachtet.

Der Oberflächeninhalt  $S$  der halbkugelförmigen Messfläche geht über das Messflächenmaß

$$L_s = 10 \lg \left( \frac{S}{S_0} \right) \text{ dB} \quad (5.6)$$

mit der Bezugsfläche

$$S_0 = 1 \text{ m}^2$$

in die Berechnung der Schallleistung ein. Mit der Beziehung

$$S = 2\pi r_M^2 \approx 6.28 \text{ m}^2 \quad (5.7)$$

folgt aus Gl. (5.6)

$$L_s \approx 8 \text{ dB} \quad . \quad (5.8)$$

Der Schalleistungspegel  $L_P$  ergibt sich dann zu

$$L_P = \bar{L}_p - K + L_s \approx \bar{L}_p + 7.6 \text{ dB} \quad (5.9)$$

mit  $\bar{L}_p$  aus Gl. (5.4).

Zur Schalleistungsmessung wurde das Messdatenerfassungssystem Typ 508 der Firma Norsonic benutzt, das die Schalldrücke in den zehn Messpositionen gleichzeitig erfasst und die oben genannten Rechenschritte ausführt. Im Anschluss an die Messung können aus den gespeicherten Daten Frequenzspektren der Schalldruckverläufe in den Mikrofonpositionen mit unterschiedlicher Auflösung berechnet und dargestellt werden. In [Abb. 5.15](#) ist der Versuchsaufbau zur Ermittlung von  $L_P$  dargestellt.

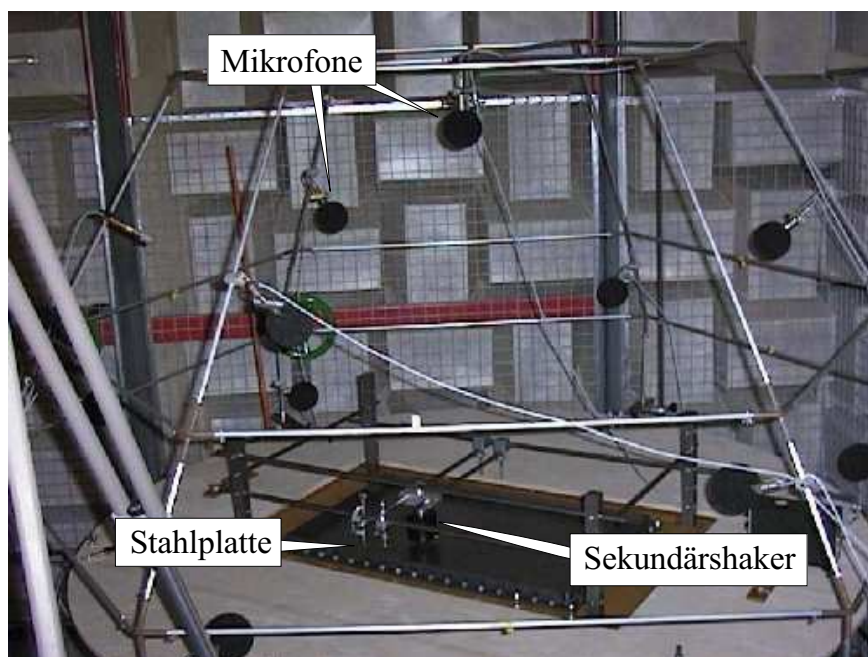


Abbildung 5.15: Versuchsaufbau für die Schalleistungsmessung.

Im Anhang B wird gezeigt, dass der durch die Messgröße  $L_p$  bestimmte Schalleistungspegel nicht in jedem Fall genau genug ist, die rechnerisch erreichten Geräuschminderungen — z.B. die in Kap. 6 genannte, durch intuitive Platzierung eines einzelnen Sekundäraktors im Mittel erzielte Schalleistungsminderung von 1.5 dB — experimentell zu verifizieren.

## 5.6 Messung der Schwingformen

Zur Erklärung der Wirkungsweise von ASAC-Systemen können die Schwingformen der Stahlplatte gemessen werden. Hierzu wird auf der Stahlplatte ein Messgitter definiert. In den Mess-

punkten misst man die Beschleunigungen der Platte senkrecht zur Oberfläche. Um örtliches Aliasing zu vermeiden, sollten die Abstände zwischen den Gitterpunkten kleiner als die halbe Wellenlänge der höchsten zu messenden Schwingungsmoden sein.

Die gemessenen Beschleunigungen werden bezüglich Betrag und Phase mit einem Bezugssignal verglichen, das beispielsweise durch das Kraftsignal am punktförmigen Anregungsort gegeben sein kann. Zur Messung der Kraft befestigt man zwischen dem Stinger des Primärshakers und der Platte einen Kraftsensor. Aus dem Kraftsignal und den gemessenen Beschleunigungssignalen können die Übertragungsfunktionen vom Anregungsort zu den jeweiligen Gitterpunkten berechnet werden.

Mit Hilfe der experimentellen Modalanalyse lassen sich in der Folge die Eigenschwingungen, Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungswerte bestimmen (vgl. Kap. 6.1.1). Die Beschleunigungen können auf zwei Arten gemessen werden:

1. Messung durch Beschleunigungsaufnehmer:

Zur Messung der Beschleunigungen werden in den Messpunkten piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer mit Wachs angeklebt. Hierzu eignen sich nur kleine Aufnehmer geringer Masse, z.B. Beschleunigungsaufnehmer des Typs 4374 der Fa. Brüel & Kjær (Masse: 0.65 g) [14], deren Einfluss auf die Dynamik der Platte vernachlässigt werden kann. Die Messung mit Beschleunigungsaufnehmern gestaltet sich besonders bei vielen Messpunkten als zu aufwändig.

2. Berührungslose Beschleunigungsmessung:

Bei der berührungslosen Beschleunigungsmessung werden im Wesentlichen drei Kopplungsarten angewandt:

- induktiv,
- kapazitiv,
- optisch.

Induktive und kapazitive Sensoren messen die Auslenkung einer Schwingung. Bei konstanter Schwingbeschleunigung und -leistung sinkt die Schwingungsamplitude mit zunehmender Frequenz, so dass die Messung der Auslenkung immer schwieriger wird. Außerdem müssen induktive und kapazitive Sensoren nahe über der schwingenden Struktur platziert werden, damit das Signal-Rauschverhältnis groß genug ist. Auf diese Weise wird die maximal messbare Auslenkung begrenzt. Die häufigsten optischen Sensoren zur Schwingungsmessung sind *Triangulations-Abstandssensoren* [80] und *Laser-Doppler-Vibrometer*.

Die ersteren messen ebenfalls Auslenkungen, so dass sie dieselben Nachteile aufweisen wie induktive und kapazitive Aufnehmer. Im Gegensatz dazu erfassen Laser-Doppler-Vibrometer die Geschwindigkeit und sind daher den anderen Sensortypen hinsichtlich

Auflösung und Genauigkeit überlegen, insbesondere bei höheren Frequenzen. In der vorliegenden Arbeit werden Schwingungen mit einem Laser-Doppler-Vibrometer gemessen.

Das Prinzip der Laser-Doppler-Vibrometrie beruht auf der Interferenz zweier Laserstrahlen, die vom Messobjekt bzw. von einem Referenzspiegel reflektiert werden und auf einem Detektor ein Streifenmuster bilden. Wenn das Messobjekt mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt wird, variiert die Lichtintensität auf dem Detektor mit der *Dopplerfrequenz* [78]

$$f_D = \frac{2v}{\lambda} \quad , \quad (5.10)$$

wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Laserstrahls in Vakuum ist. Wird die Wellenlänge  $\lambda_{\text{HeNe}} = 632.8$  mm eines HeNe-Lasers in Gl. (5.10) eingesetzt, erhält man

$$f_D = 3.16v \quad . \quad (5.11)$$

Der vom Messobjekt reflektierte Strahl besitzt die Frequenz  $f \pm f_D$ , während der Referenzstrahl die Frequenz  $f$  hat. Mathematisch kann die Interferenz der beiden Laserstrahlen beschrieben werden durch [78]

$$\sin f + \sin(f \pm f_D) = 2 \sin \frac{\pm f_D + 2f}{2} \cos \frac{\pm f_D}{2} \quad . \quad (5.12)$$

Da die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist, kann das Vorzeichen von  $f_D$  und damit die Bewegungsrichtung des Messobjekts nicht erkannt werden. Deshalb wird beim Referenzstrahl eine Frequenzmodulation mit der Frequenz  $f_M$  durchgeführt. Dann folgt aus Gl. (5.12)

$$\sin(f + f_M) + \sin(f \pm f_D) = 2 \sin \frac{\pm f_D + f_M + 2f}{2} \cos \frac{f_M \pm f_D}{2} \quad . \quad (5.13)$$

Die Frequenzmodulation geschieht mit einem optoakustischen Modulator, der als *Braggzelle* bezeichnet wird. In [Abb. 5.16](#) ist das Prinzip des Laser-Doppler-Vibrometers dargestellt. Darin sind  $f$  die Frequenz des Laserstrahls,  $f_D$  die Dopplerfrequenz und  $f_M$  die Modulationsfrequenz.

In den Messungen wird das *Laser-Scanning-Vibrometer PSV200 (Polytec Scanning Vibrometer)* der Fa. Polytec verwendet [91]. Es ermöglicht ein schnelles und automatisches Abtasten ebener Flächen. [Abb. 5.17](#) zeigt den Versuchsaufbau mit dem Laser-Messkopf des verwendeten Scanning-Laser-Vibrometers.

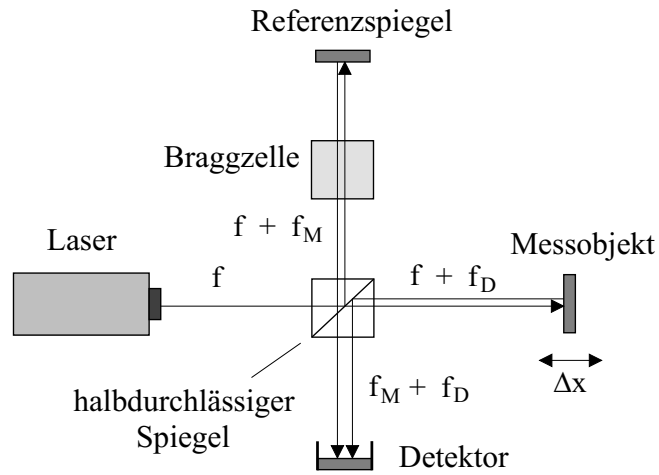


Abbildung 5.16: Funktionsprinzip eines Laser-Doppler-Vibrometers (aus [91]).

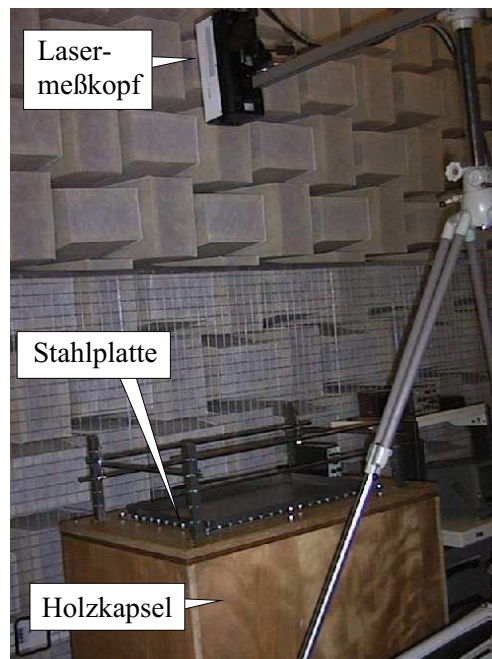


Abbildung 5.17: Schwingungsmessung mit dem Scanning-Laser-Doppler-Vibrometer.

## Kapitel 6

# Simulations- und Messergebnisse

Das mathematische Modell aus Kap. 3 für die Plattenschwingung beschreibt die Wirklichkeit nicht exakt (Toleranzen, Einspannung, Inhomogenitäten, usw.). Deshalb wird in diesem Kapitel zunächst die reale Struktur vermessen und das mathematische Modell angepasst. Dies geschieht mit Hilfe der experimentellen Modalanalyse. Auf der Grundlage der in Kap. 3 hergeleiteten Gleichungen werden verschiedene ASAC-Systeme simuliert. Außerdem werden mit den in Kap. 4 vorgestellten Methoden die Positionen der Sekundäraktoren optimiert und die entsprechenden ASAC-Systeme getestet. Sämtliche Simulationen wurden mit MATLAB [103] durchgeführt. Dabei wurden die rechenzeitintensiven Programmteile in MEX-Format (MATLAB-executable file) kompiliert, was bis zu 70% an Rechenzeit einsparte. Die Simulationsergebnisse werden mit den Ergebnissen des Experiments verglichen und zusammen mit den letzteren interpretiert.

### 6.1 Anpassung des mathematischen Schwingungsmodells

Für die in Kap. 5 vorgestellte rechteckige, an den Rändern fest eingespannte Stahlplatte ( $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$ ) wurden folgende Werte für Stahl eingesetzt [39]:

$$\text{Elastizitätsmodul: } E = 2.06 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ ,}$$

$$\text{Dichte: } \rho_M = 7820 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ ,}$$

$$\text{Querkontraktionszahl: } \nu = 0.29 \text{ .}$$

Mit diesen Werten und Gl. (3.23) werden die Eigenfrequenzen der Stahlplatte berechnet. Zum Vergleich ist mit Hilfe des Programms I-DEAS [100] ein Finite-Elemente-Modell (FE-Modell)



der Stahlplatte erstellt worden. Beide Modelle werden nachfolgend mit den experimentellen Daten verglichen und angepasst.

### 6.1.1 Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Bei der experimentellen Modalanalyse (EMA) wurden die Betriebsschwingungen bei breitbandiger oder impulsförmiger Anregung gemessen und daraus die *Modalparameter* einer Struktur bestimmt, die durch die Eigenfrequenzen, die modalen Dämpfungswerte sowie die Schwingformen der Eigenschwingungen gegeben sind [35]. Klassisch wird eine Struktur bei der experimentellen Modalanalyse mit einem Impulshammer angeregt. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Beschleunigung in einem festen Strukturpunkt zu messen und die Position des Anregungspunkts zu variieren.

Demgegenüber wird die Struktur in der vorliegenden Arbeit mit einem Shaker angeregt, der mit einem pseudo-stochastischen Breitbandsignal angesteuert wird. In diesem Fall ist es günstiger, den Shaker über einen Stinger und einen Kraftsensor fest an die Struktur anzukoppeln und die Position des Punkts für die Beschleunigungsmessung zu verändern. Man bestimmt die Übertragungsfunktionen zwischen der Anregung  $F$  und der Systemantwort  $a$  in verschiedenen Punkten. Da sowohl die Anregung als auch die Systemantwort stochastische Signale sind, wäre die Bestimmung der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich mittels

$$H(\omega) = \frac{a(\omega)}{F(\omega)} \quad (6.1)$$

stark fehlerbehaftet. Deshalb wird in [35] vorgeschlagen, durch Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate den Einfluss des im Eingangs- und Ausgangssignal vorhandenen Rauschens zu vermindern, was zu den beiden Kalkulatoren

$$H_1(\omega) = \frac{S_{Fa}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} \quad , \quad (6.2)$$

$$H_2(\omega) = \frac{S_{aa}(\omega)}{S_{aF}(\omega)} \quad (6.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \quad , \\ f &= \text{Frequenz} \quad , \\ S_{aa}, S_{FF} &= \text{Autospektraldichte der Beschleunigung bzw. der Kraft} \quad , \\ S_{aF}, S_{Fa} &= \text{Kreuzspektraldichten bezüglich der Beschleunigung} \\ &\quad \text{und der Kraft} \end{aligned}$$

führt. Mit zunehmender Anzahl der Mittelungen aus den entsprechenden Kreuzspektraldichten konvergieren  $H_1$  und  $H_2$  gegen die gesuchte Übertragungsfunktion  $H$ . Nahe der Resonanzfrequenzen ist das Kraftsignal klein, so dass die Autospektraldichte  $S_{FF}$  zu großen Ungenauigkeiten neigt. Als Folge ist der Kalkulator  $H_1$  ungenau, so dass in diesem Fall besser  $H_2$  genommen

werden sollte. Im Gegensatz dazu ist bei den Antiresonanzen das Beschleunigungssignal klein, so dass der Fehler der Autospektraldichte  $S_{aa}$  groß ist. Hier führt der Kalkulator  $H_1$  zu genaueren Ergebnissen. Mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate werden die Frequenzgänge von definierten mechanischen Schwingungsmodellen (Feder-Masse-Dämpfer-Systeme) mit wahlweise einem oder mehreren Freiheitsgraden an die gemessenen Übertragungsfunktionen angepasst und daraus die Modalparameter bestimmt.

Für die Berechnung der Modalparameter sind Rechnerprogramme erhältlich wie z.B. das Programm ICATS [63], das für die Modalanalyse der vorliegenden Arbeit benutzt wurde. Da die experimentelle Modalanalyse ein lineares System voraussetzt [35] und bei der Auswertung der Messdaten lineare Modelle angewandt werden, muss zu Beginn geprüft werden, ob zwischen den Beschleunigungssignalen und dem Kraftsignal der Anregung eine annähernd lineare Beziehung besteht. Zu diesem Zweck bestimmt man die *Kohärenz*, die den statistischen Zusammenhang zweier Signale beschreibt. Nach [35] ist sie durch

$$\gamma^2 = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \quad (6.4)$$

mit  $H_1$ ,  $H_2$  aus den Gleichungen (6.2) und (6.3) gegeben. Beträgt ihr Wert ungefähr eins, dann besteht ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Signalen. Nur dann macht es Sinn, eine experimentelle Modalanalyse durchzuführen, die zu einem linearen Modell der Struktur führt. Je kleiner die Kohärenz ist, umso kleiner ist der deterministische Anteil in den Übertragungsfunktionen und umso größer ist der Anteil an Messrauschen. In [Abb. 6.1](#) ist beispielhaft der Frequenzgang der Kohärenz zwischen der Kraft im Anregungspunkt (0.08 m, 0.107 m) und der Beschleunigung im Punkt (0.00 m, -0.05 m) dargestellt. Im betrachteten Fall ist die Kohärenz oberhalb von 80 Hz nahe eins.

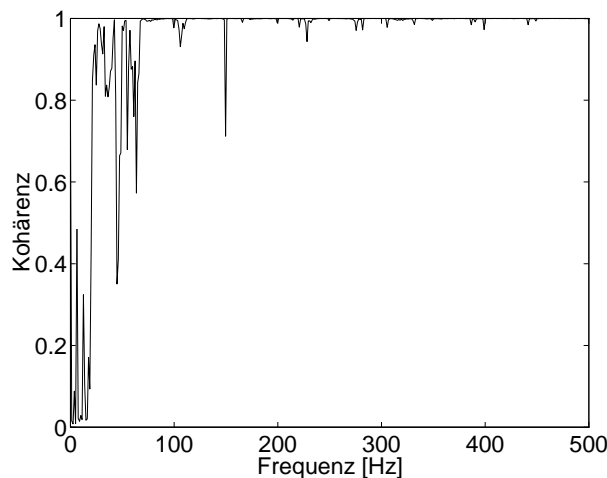


Abbildung 6.1: *Kohärenz zwischen der Kraft und der Beschleunigung in zwei Punkten der betrachteten rechteckigen Stahlplatte.*

## 6.1.2 Modellvergleich

In Tab. 6.1 sind für die ersten zehn Schwingungsmoden die Eigenfrequenzen aufgelistet, die sich durch Simulation des analytischen Modells nach Gl. (3.23), durch Simulation eines Finite-Elemente-Modells (FE-Modells) mit 100 Gitterpunkten und durch eine experimentelle Modalanalyse ergeben haben. Die Eigenfrequenzen stimmen gut miteinander überein. Die Unterschiede zwischen den Eigenfrequenzen des FE-Modells und des analytischen Modells nach Gl. (3.23) kommen hauptsächlich dadurch zustande, dass bei der analytischen Zerlegung der Plattenschwingung in orthogonale Balkenschwingungen die Wechselbeziehungen zwischen den Balken nicht berücksichtigt werden. Zur Anpassung des analytischen Schwingungsmodells wird das FE-Modell als Referenz genommen, weil die experimentelle Modalanalyse von situationsbezogenen Parametern (Details der Einspannung, Homogenität usw.) abhängig ist. Außerdem sind vor allem im hochmodalen Bereich nicht mehr alle Eigenfrequenzen mit der experimentellen Modalanalyse auflösbar.

Tabelle 6.1: *Eigenfrequenzen der Schwingung der betrachteten Stahlplatte ( $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$ ).*

Nr. der Mode	Mode	FE-Modell [Hz]	exp. Modalanalyse mit ICATS [Hz]	analytisches Modell nach Gl. (3.23) [Hz]
1	(1,1)	26.0	24.0	28.0
2	(2,1)	38.4	38.8	42.5
3	(3,1)	59.6	57.9	62.0
4	(1,2)	64.7	62.9	65.1
5	(2,2)	76.3	70.7	82.7
6	(4,1)	89.2	86.5	92.3
7	(3,2)	96.2	92.3	106.2
8	(1,3)	123.1	110.8	124.0
9	(4,2)	124.5	121.0	126.8
10	(5,1)	126.7	128.7	128.1

Als zu verändernde Größe für die Anpassung des analytischen Modells an das FE-Modell wurde der Elastizitätsmodul aus Gl. (3.3) gewählt, da er in direktem Zusammenhang mit den Schwingungseigenfrequenzen der Platte steht. Der Elastizitätsmodul wurde mit einem Faktor multipliziert. Dieser Faktor wurde so bestimmt, dass nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Summe der quadrierten Differenzen zwischen den Eigenfrequenzen des analytischen Modells und des FE-Modells im interessierenden Frequenzbereich von 0 bis 1000 Hz minimal wurde. Auf diese Weise ergab sich der Faktor 0.893. In Tab. 6.2 sind die Eigenfrequenzen eingetragen, die sich mit dem geänderten Elastizitätsmodul ergeben. Zur Modellanpassung könnte

diese Methode der kleinsten Fehlerquadrate in abgewandelter Form angewandt werden, indem die einzelnen Fehlerquadrate je nach Bedeutung der entsprechenden Eigenschwingung unterschiedlich gewichtet werden.

Tabelle 6.2: *Eigenfrequenzen der Schwingung der betrachteten Stahlplatte ( $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$ ).*

Nr. der Mode	Mode	FE-Modell [Hz]	exp. Modalanalyse mit ICATS [Hz]	angepasstes analytisches Modell [Hz]
1	(1,1)	26.0	24.0	25.8
2	(2,1)	38.4	38.8	39.2
3	(3,1)	59.6	57.9	60.1
4	(1,2)	64.7	62.9	62.1
5	(2,2)	76.3	70.7	76.4
6	(4,1)	89.2	86.5	87.6
7	(3,2)	96.2	92.3	98.1
8	(1,3)	123.1	110.8	116.3
9	(4,2)	124.5	121.0	125.5
10	(5,1)	126.7	128.7	127.2

### 6.1.3 Skalierung der Anregungssignale

Um die Simulations- und Messergebnisse vergleichen zu können, wird das Ansteuersignal für den Primärshaker so gewählt, dass ohne ASAC in der Position des Fehlermikrofons ein bestimmter Schalldruckpegel (hier: 60 dB) erreicht wird. Weiterhin wird in der Simulation angenommen und im Experiment gewährleistet, dass der Sekundärshaker einen höheren Schalldruckpegel in der Position des Fehlermikrofons erzeugen kann, z.B. 70 dB.

## 6.2 Anregung mit Piezoelementen

In diesem Kapitel werden die Gleichungen aus Kap. 3.1.4 im Experiment überprüft, die die Anregung einer Stahlplatte mit örtlich verteilten Schwingungserregern (Piezoelemente) beschreiben. Dabei wird der Einfluss der schwingfähigen Masse des Primärshakers untersucht. Außerdem wird erörtert, wie sich die Schwingform ändert, wenn die Stahlplatte nicht nur mit einem einzelnen Piezoelement, sondern mit zwei beidseitig der Platte angeklebten Piezoelementen angeregt wird. Die Piezoelemente werden gemäß [Abb. 6.2](#) in der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) an der Platte befestigt.

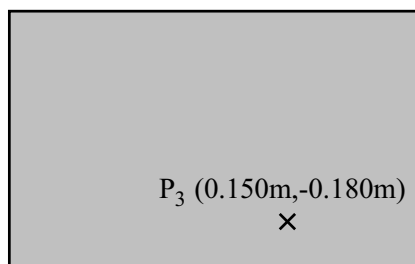


Abbildung 6.2: *Stahlplatte mit der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) der Piezoelemente.*

### 6.2.1 Anregung einer Stahlplatte mit einem Piezoelement

Für die folgenden Simulationen und Messungen wurden Piezoelemente verwendet, die die Maße  $25 \times 25 \times 0.5 \text{ mm}^3$  haben. Die Dicke 0.5 mm der Piezoelemente ist gewählt worden, da Piezoelemente hinsichtlich der Schwingungsanregung den größten Wirkungsgrad haben, wenn sie halb so dick sind wie die Platte, an der sie befestigt sind (siehe Kap. 5.2.2.4). Um den Einfluss der schwingfähigen Masse des Primärshakers auf die Schwingform zu zeigen, wurde die Stahlplatte mit einem Piezoelement in der Position  $P_3$  (vgl. Abb. 6.2) angeregt und die Schwingform mit und ohne angekoppeltem Primärshaker gemessen, der nicht angesteuert wird.

In [Abb. 6.3](#) und [Abb. 6.4](#) sind die Ergebnisse der Simulation und der Messung bei 50 Hz und 700 Hz dargestellt. Die Messergebnisse mit und ohne angekoppeltem Primärshaker stimmen weitgehend überein. Zwischen den berechneten und den gemessenen Schwingformen bestehen ebenfalls nur geringe Unterschiede. Es zeigt sich also, dass die schwingfähige Masse des Primärshakers (insgesamt 42 g) die Dynamik der Plattenschwingung im unteren Frequenzbereich (bis 1 kHz) nur unmerklich beeinträchtigt.

### 6.2.2 Einseitiges und beidseitiges Ankleben der Piezoelemente

In Kap. 3.1.4 ist mathematisch beschrieben worden, wie eine Stahlplatte mit einem aufgeklebten Piezoelement zu Schwingungen angeregt wird. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die Kirchhoffsche Hypothese gilt (Kap. 3.1), d.h. die Stahlplatte sollte eine reine Durchbiegung erfahren. Streng genommen kann das mit angeklebten Piezoelementen nur erreicht werden, wenn sie in der gleichen Position beidseitig der Stahlplatte angebracht sind und gegenphasig angesteuert werden. Die Stahlplatte erhält beidseitig das gleiche elektrische Potential, um ein überflüssiges elektrisches Feld über der Klebeschicht zu vermeiden. Das erreicht man, indem die polarisierten Piezoelemente wie in [Abb. 6.5](#) gezeigt an die Stahlplatte angeklebt und angesteuert werden. Wenn man im Gegensatz dazu ein einzelnes Piezoelement einseitig an der Stahlplatte anklebt, wird die Platte nicht nur gebogen, sondern auch gedehnt oder gestaucht.

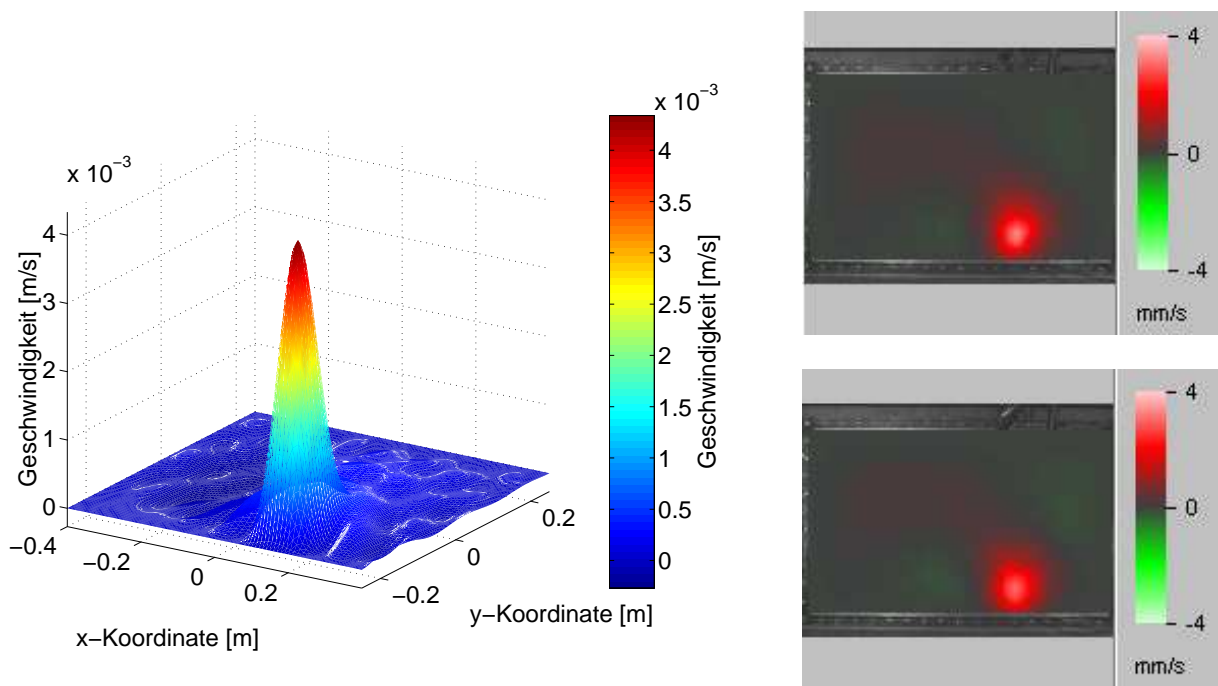


Abbildung 6.3: Berechnete (links) und gemessene (rechts) Schwingform bei Anregung einer Stahlplatte mit einem Piezoelement in der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) mit (rechts oben) und ohne (rechts unten) angekoppeltem Primärshaker;  $f = 50$  Hz.

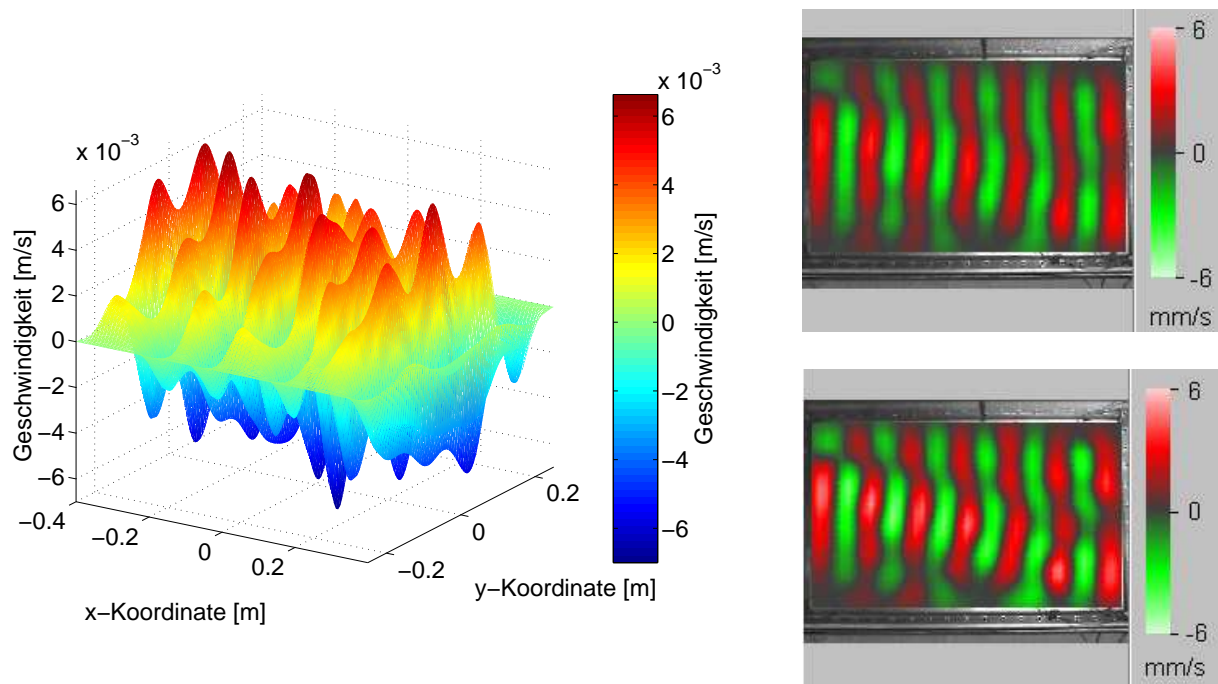


Abbildung 6.4: Berechnete (links) und gemessene (rechts) Schwingform bei Anregung einer Stahlplatte mit einem Piezoelement in der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) mit (rechts oben) und ohne (rechts unten) angekoppeltem Primärshaker;  $f = 700$  Hz.

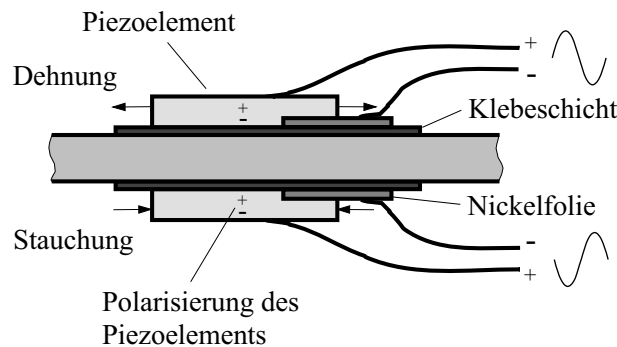


Abbildung 6.5: *Polung und Ansteuerung von zwei Piezoelementen, die beidseitig an eine Stahlplatte angeklebt sind.*

Es kann angenommen werden, dass die Dehnung und Stauchung ausreichend klein sind, um die Dynamik der Platte nicht zu beeinflussen. Im Folgenden soll diese Annahme überprüft werden. Zu diesem Zweck sind Fälle simuliert und getestet worden, bei denen ein Piezoelement in der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) einseitig (entweder oben oder unten) oder zwei Piezoelemente beidseitig an die Stahlplatte geklebt wurden.

Nach Kap. 5.2.2.4 sollten die beidseitig befestigten Piezoelemente im optimalen Fall zusammen halb so dick wie die Platte sein. In den Versuchen wurden Piezoelemente benutzt, die mit 0.5 mm doppelt so dick waren wie im optimalen Fall. Da jedoch die maximale Ansteuerungsspannung groß genug war, konnten bei den untersuchten Frequenzen selbst mit dieser Dicke die erforderlichen Hübe und Kräfte zur Verfügung gestellt werden, so dass das Messergebnis dadurch nicht beeinträchtigt wurde. Die [Abb. 6.6](#) bis [Abb. 6.8](#) zeigen die Simulations- und Messergebnisse, die sich bei den Frequenzen 100 Hz, 300 Hz und 700 Hz ergeben haben. Dabei wurde die Amplitude der Ansteuerungsspannung bei der jeweiligen Frequenz konstant gehalten. Für 100 Hz und 300 Hz stimmen die gemessenen Schwingformen weitgehend überein. Außerdem besteht zwischen ihnen und den berechneten Schwingformen große Ähnlichkeit. Bei 700 Hz sind die Schwingformen immer noch sehr ähnlich, jedoch nehmen die Unterschiede zwischen der einseitigen und beidseitigen Anregung der Platte mit steigender Frequenz zu. Das liegt zum einen daran, dass die beidseitig befestigten Piezoelemente nicht genau gleich und in der gleichen Position an der Platte angeklebt werden können.

Zum anderen können zwei beidseitig der Platte befestigte Piezoelemente besser auf Schwingungen mit kleiner Wellenlänge einwirken als ein einzelnes Piezoelement. Dies erklärt vor allem, dass der Unterschied zwischen den Geschwindigkeitsamplituden bei einseitiger Anregung und den Amplituden bei beidseitiger Anregung mit zunehmender Frequenz immer größer wird. Dies ist in [Tab. 6.3](#) erkennbar. Bei der untersuchten Stahlplatte der Maße  $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$  ist die Schwingform bereits bei 300 Hz hochmodal.

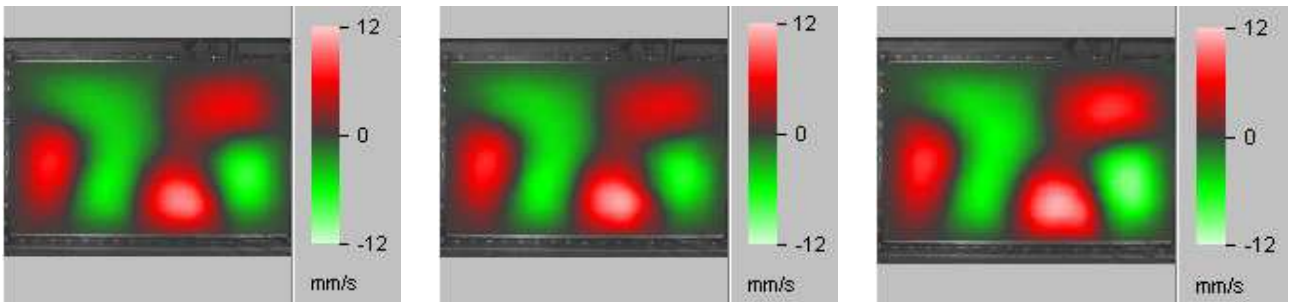
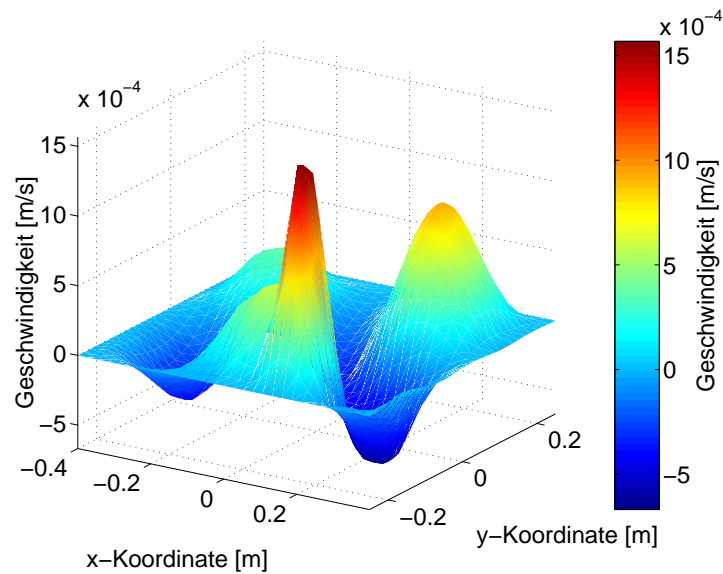


Abbildung 6.6: Berechnete Schwingform bei Anregung einer Stahlplatte mit zwei beidseitig in der Position  $P_3$  ( $0.150\text{ m}$ ,  $-0.180\text{ m}$ ) der Platte befestigten Piezoelementen (oben) und gemessene Schwingform (unten) bei Anregung mit einem einzelnen Piezoelement (links: Piezoelement oben angeklebt; Mitte: Piezoelement unten angeklebt) oder mit zwei beidseitig angeklebten Piezoelementen in der Position  $P_3$  (rechts);  $f = 100\text{ Hz}$ .

Wenn man die Platte bei höheren Frequenzen anregt, entstehen Schwingformen, deren wichtigste Eigenschwingungen Wellenlängen im cm-Bereich haben. Bei  $700\text{ Hz}$  wird z.B. hauptsächlich die  $(13,1)$ -Mode angeregt, deren Wellenlänge in  $x$ -Richtung  $80\text{ cm}/13 \approx 6.2\text{ cm}$  beträgt. Die verwendeten Piezoelemente der Maße  $25 \times 25 \times 0.5\text{ mm}^3$  sind deshalb nur etwas kleiner als die halbe Wellenlänge der wichtigsten Eigenschwingung, so dass diese Eigenschwingung kaum beeinflusst werden kann. Es müssten also kleinere Piezoelemente benutzt werden, was allerdings bei sehr tiefen Frequenzen (z.B.  $f = 100\text{ Hz}$ ) wegen der dort auftretenden großen Wellenlängen zu Problemen führt. Die Piezoelemente müssen also je nach Anwendung so dimensioniert werden, dass sie in kritischen Frequenzbändern die entsprechenden Eigenschwingungen anregen können.



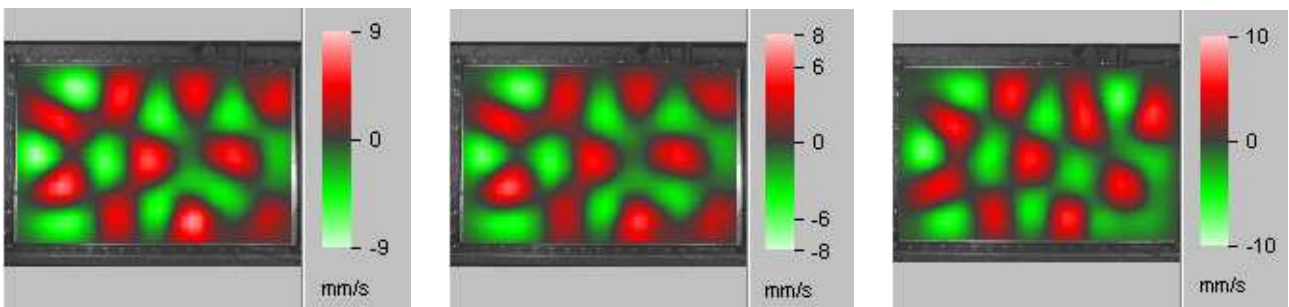
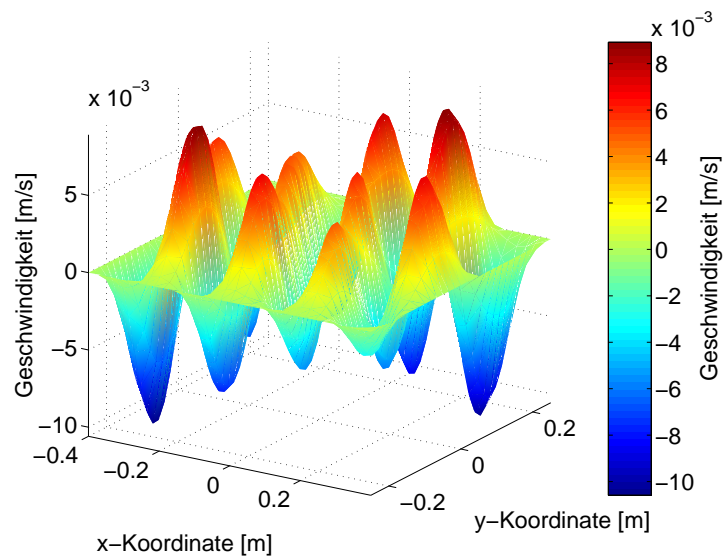


Abbildung 6.7: Berechnete Schwingform bei Anregung einer Stahlplatte mit zwei beidseitig in der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) der Platte befestigten Piezoelementen (oben) und gemessene Schwingform (unten) bei Anregung mit einem einzelnen Piezoelement (links: Piezoelement oben angeklebt; Mitte: Piezoelement unten angeklebt) oder mit zwei beidseitig angeklebten Piezoelementen in der Position  $P_3$  (rechts);  $f = 300$  Hz.

Tabelle 6.3: Gemessene maximale Geschwindigkeitsamplituden der Plattenschwingungen [mm/s].

Frequenz [Hz]	einseitige Anregung (Piezoelement oben)	einseitige Anregung (Piezoelement unten)	zweiseitige Anregung
100	12	12	12
300	9	8	10
700	6	6	8

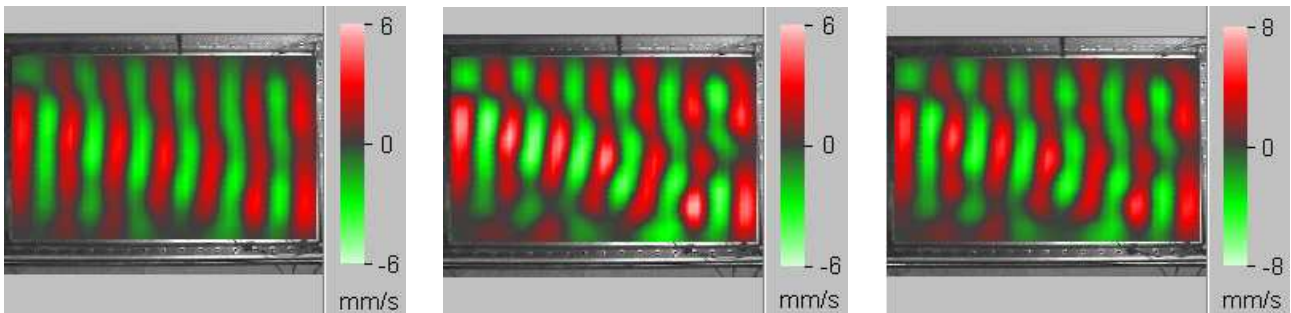
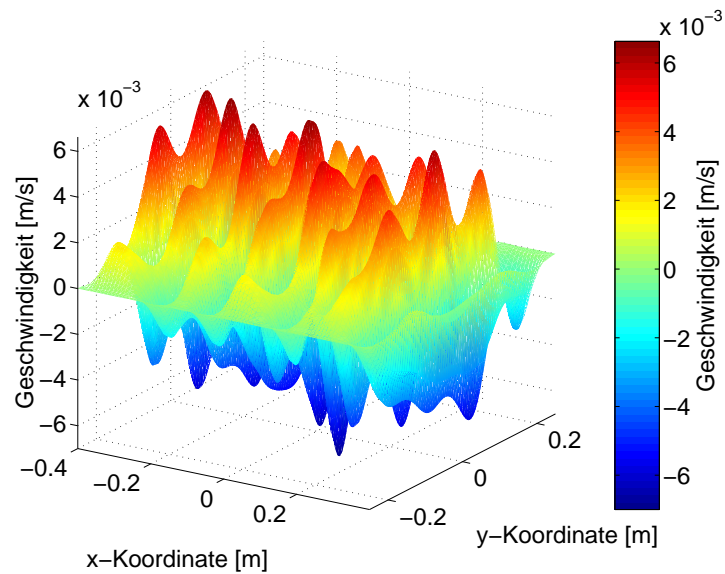


Abbildung 6.8: Berechnete Schwingform bei Anregung einer Stahlplatte mit zwei beidseitig in der Position  $P_3$  (0.150 m, -0.180 m) der Platte befestigten Piezoelementen (oben) und gemessene Schwingform (unten) bei Anregung mit einem einzelnen Piezoelement (links: Piezoelement oben angeklebt; Mitte: Piezoelement unten angeklebt) oder mit zwei beidseitig angeklebten Piezoelementen in der Position  $P_3$  (rechts);  $f = 700$  Hz.

### 6.3 ASAC mit einem punktförmigen Sekundäraktor (Shaker)

Die an den Rändern fest eingespannte Stahlplatte wird primär von einem Shaker im Punkt (0.08 m, 0.107 m) mit einem Sinussignal einer einzelnen Frequenz angesteuert. Zur Kompensation wird als Sekundäraktor in diesem Versuch ebenfalls ein Shaker verwendet. Die optimale Position des Sekundärshakers ist erwartungsgemäß an der Stelle, an der der Primärshaker an die Platte angekoppelt ist. Wird der Sekundärshaker dort platziert und mit dem zur Anregung gegenphasigen Signal beaufschlagt, heben sich die Shaker in ihrer Wirkung auf. Als Folge bleibt die Platte in Ruhe, und es wird kein Schall abgestrahlt. Dies ist der triviale Fall, der sowohl in

der Simulation als auch im Experiment nachgewiesen werden konnte. Von größerem Interesse sind die Fälle, bei denen der Primär- und der Sekundärshaker in verschiedenen Positionen sind und trotzdem noch große Schalleistungsminderungen erzielt werden. Bei der Untersuchung dieser Fälle ist zweistufig vorgegangen worden, was in den nächsten beiden Abschnitten erläutert wird.

### 6.3.1 Intuitiv gewählte Position des Sekundärshakers

Zunächst wurde der Sekundärshaker intuitiv dort platziert, wo eine hohe Schalleistungsminderung erwartet wird. In [Abb. 6.9](#) ist diese Position als  $S_1$  bezeichnet. Man erhält sie, indem man die Primärshakerposition an der Plattenmitte spiegelt. Außerdem wurde die Wirkung von ASAC untersucht, wenn der Sekundärshaker im Mittelpunkt der Stahlplatte positioniert wird. Dieser Punkt ist in [Abb. 6.9](#) mit  $S_2$  gekennzeichnet. In diesem Fall kann der Sekundärshaker die geradzahligen Moden nicht ansteuern, weil ihre Knotenlinien durch die Plattenmitte verlaufen. Es ist interessant zu erfahren, wie sich das auf die erreichbare Schalleistungsminderung auswirkt. Weiterhin ist in Messungen untersucht worden, welchen Einfluss die Fehlermikrofonposition auf die Schalleistungsminderung durch ASAC hat. In [Abb. 5.13](#) wurden bereits die beiden Positionen gezeigt, in denen das Fehlermikrofon befestigt wurde.

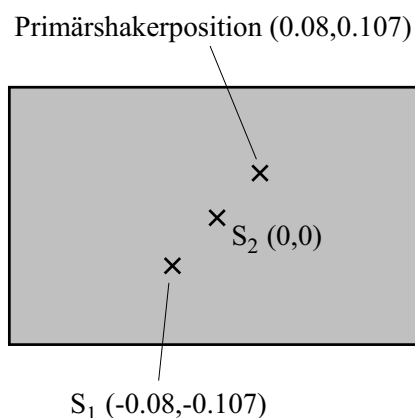


Abbildung 6.9: *Intuitiv gewählte Positionen für den Sekundärshaker (Koordinaten in m).*

#### 6.3.1.1 Sekundärshaker in der Position $S_1$

Im ersten ASAC-Versuch wird der Sekundärshaker in der Position  $S_1$  platziert, das Fehlermikrofon in der Position  $M_{10}$  (vgl. [Abb. 5.13](#)). In [Abb. 6.10](#) sind die Betriebsschwingungen dargestellt, die sich ohne ASAC durch Messung und Simulation für verschiedene Frequenzen ergeben haben. [Abb. 6.11](#) zeigt die entsprechenden Schwingformen mit ASAC.

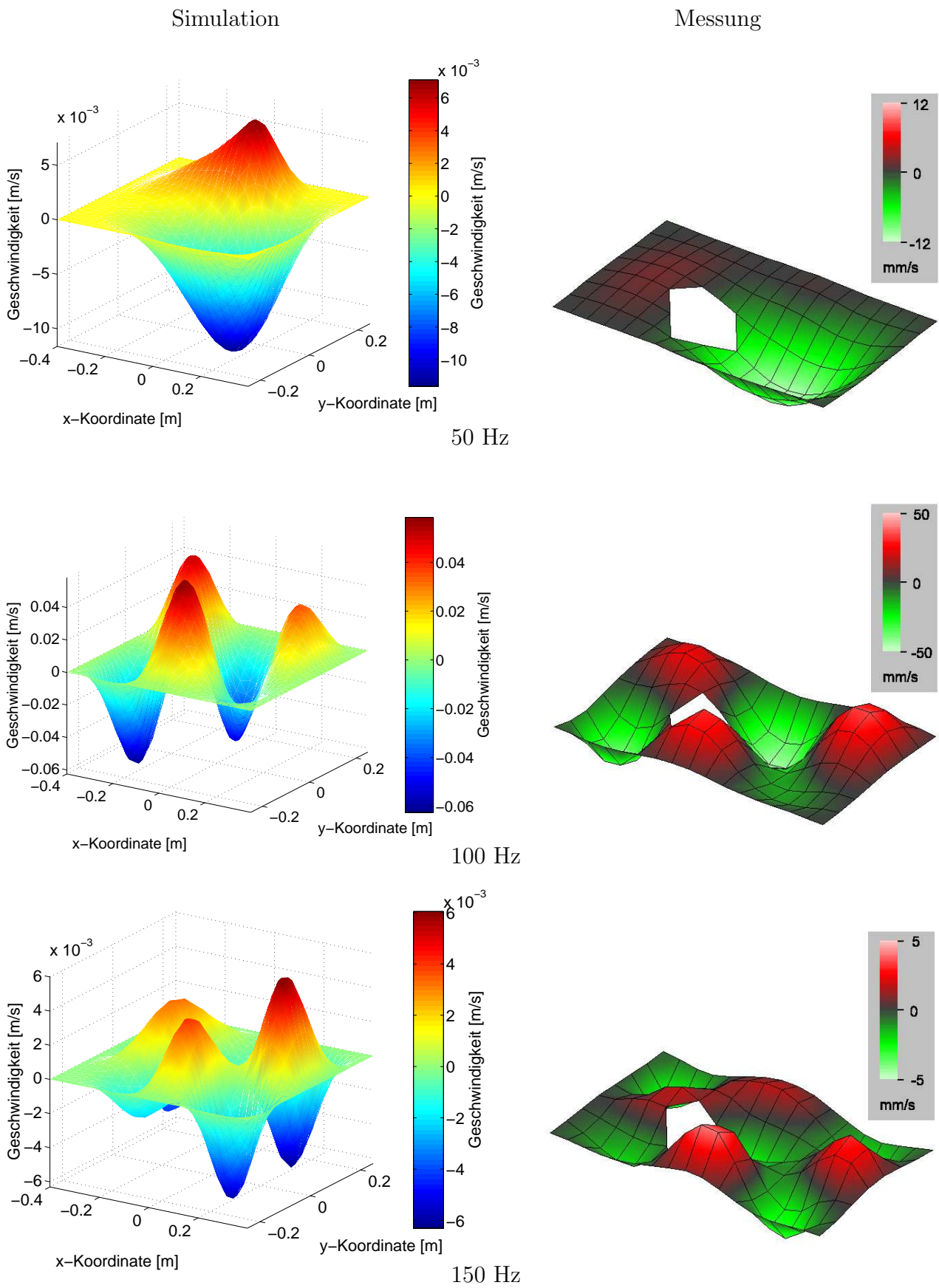


Abbildung 6.10: Berechnete und gemessene Betriebschwingformen ohne ASAC; Sekundärshakerposition  $S_1$  (aus [45]).

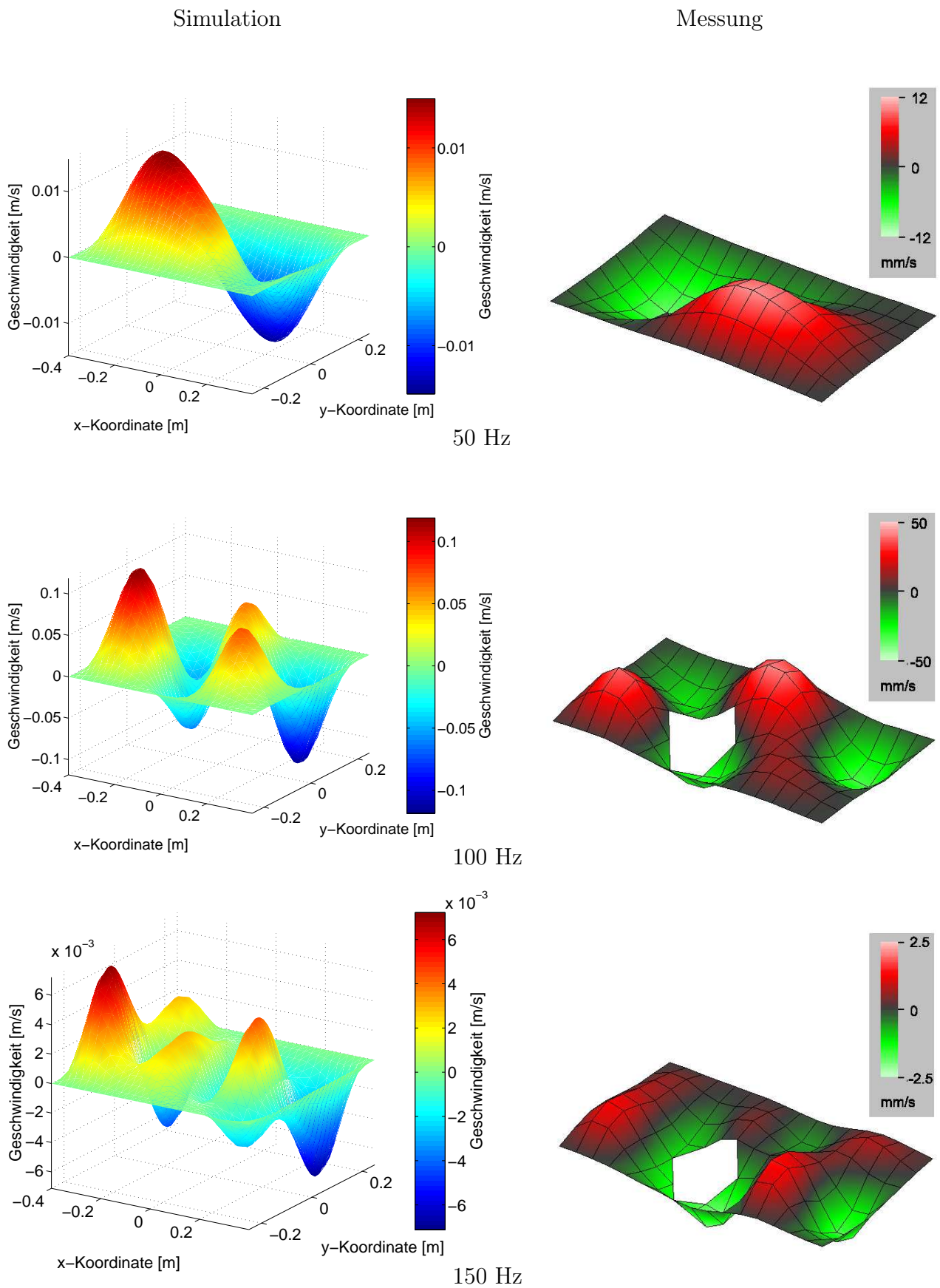


Abbildung 6.11: Berechnete und gemessene Betriebsschwingformen mit ASAC; Sekundärshakerposition  $S_1$  (aus [45]).

Bei den gemessenen Schwingformen ist eine Lücke zu erkennen. An dieser Stelle befindet sich der Sekundärshaker. Die durch ihn verdeckten Punkte auf der Plattenoberfläche waren für die Messung nicht zugänglich. Die durch Simulation und im Experiment bestimmten Betriebschwingungen stimmen i.A. qualitativ überein. Lediglich bei 150 Hz gibt es mit ASAC deutliche Abweichungen.

In [Tab. 6.4](#) sind die Minderungswerte des Schalldrucks in der Position  $M_{10}$  und der Schallleistung eingetragen, die man für verschiedene Frequenzen durch ASAC erhält. Die großen quantitativen Unterschiede in den Schalldruckminderungswerten kommen hauptsächlich dadurch zustande, dass in der Rechnung von einem idealen ASAC-System ausgegangen wird, dessen digitales Filter unendlich viele Filterkoeffizienten aufweist. Dies hat zur Folge, dass der Schalldruck in der Fehlermikrofonposition  $M_{10}$  durch ASAC in der Simulation viel stärker gedämpft wird als im Experiment. Für die Abweichungen zwischen den gemessenen und berechneten Schalleistungswerten sind neben den experimentellen Unsicherheiten, wie z.B. der nicht idealen Ankopplung des Shakers, die in Anhang B genannten Gründe verantwortlich (u.a. Nahfeldfehler). Nochmals sei darauf hingewiesen, dass die nachfolgend vorgestellten ASAC-Systeme wegen der großen Messstreuung (inkl. Nahfeldfehler, vgl. Kap. B.1) primär anhand der berechneten Schalleistung beurteilt werden. Trotzdem werden die Messwerte aufgeführt, um daraus gegebenenfalls Aussagen zur Wirkungsweise von ASAC abzuleiten. Beispielsweise zeigt [Tab.6.4](#), dass die berechneten und gemessenen Schalleistungswerte die gleichen Tendenzen aufweisen.

Tabelle 6.4: *Schalldruckminderung in der Position  $M_{10}$  und Schalleistungsminderung mit dem Sekundärshaker in der Position  $S_1$  (Werte aus [45]).*

Frequenz [Hz]	Schalldruckminderung [dB]		Schalleistungsminderung [dB]	
	Simulation	Messung	Simulation	Messung
50	35.2	12.5	10.3	5.5
100	24.6	3.3	-5.4	0.6
150	52.5	18.0	12.3	8.8
300	37.3	12.5	-4.6	-3.4
500	55.0	19.4	1.0	-0.2

Bei den Messungen und Simulationen konnten zwei Effekte beobachtet werden:

- Der akustische Kurzschluss von benachbarten Plattenelementen, der als das wichtigste Prinzip von ASAC eine Schallabstrahlung ins Fernfeld verhindern soll (vgl. Kap. 2.2.4), zeigte sich u.a. bei 50 Hz. Für diese Frequenz wurde durch ASAC eine Schalleistungsminderung von 10.3 dB erzielt, obwohl die Schwingungsamplituden in der Messung gleich blieben und in der Simulation sogar leicht zunahmen. Das lässt sich anhand der Schwingungsbilder erklären: Während ohne ASAC einer der beiden Schwingungsbüchse beinahe



doppelt so groß war wie der andere, waren die beiden Schwingungsbäuche mit ASAC annähernd gleich groß. Als Folge konnte ein Interferenzeffekt im Nahfeld der Platte auftreten.

Noch deutlicher zeigte sich die Wirkung des akustischen Kurzschlusses für 150 Hz. Die Betriebsschwingung, die durch die ungeradzahlige und sehr gut abstrahlende (3,3)-Mode beherrscht wurde, verwandelte sich in eine Schwingform, die hauptsächlich aus der geradzahligen (4,2)-Mode bestand. Diese symmetrische Mode führte ebenfalls zum akustischen Kurzschluss im Nahfeld der Platte, so dass daraus eine berechnete Schalleistungsminde- rung von 12.3 dB resultierte. Die gemessene Schalldruckminderung in der Mikrofonposi- tion  $M_{10}$  fiel mit 18.0 dB erwartungsgemäß deutlich höher aus.

- Für manche Frequenzen war eine starke Richtungscharakteristik der Schallabstrahlung zu beobachten. Für Frequenzen, für die in der Mikrofonposition  $M_{10}$  auch ohne ASAC ein lokales Schalldruckminimum vorlag, konnte auch durch ASAC keine Verbesserung erzielt werden, wie z.B. bei 100 Hz. Dadurch konnte durch den zusätzlichen Sekundäraktor sogar mehr Schall abgestrahlt werden, solange sich der Schalldruck in dieser Messposition nicht erhöhte. Als Folge davon nahm die Schalleistung zu, die Schalleistungsminde- rung betrug entsprechend -5.4 dB.

In anderen Beispielen ( $f > 200$  Hz) wurde beobachtet, dass der Schalldruckpegel in der Position  $M_{10}$  zwar deutlich gesenkt werden konnte, dass aber die Schalleistung durch ASAC nur geringfügig abnahm. Das lag daran, dass die Wellenlänge des Schalls nach  $\lambda = c/f$  für  $f > 200$  Hz klein war, so dass die Schalldruckminderung stark vom Ort abhing und nur in der Position des Fehlermikrofons große Werte erreichte. Für 500 Hz wurde z.B. in der Mikrofonposition  $M_{10}$  eine Schalldruckminderung von 19.4 dB gemessen, während die berechnete Schalleistung durch ASAC nur um 1.0 dB abnahm (vgl. Tab. 6.4).

### 6.3.1.2 Sekundärshaker in der Position $S_2$

Im Folgenden werden Simulationen und Messungen vorgestellt, bei denen sich der Sekundärshaker in der Plattenmitte (Position  $S_2$ ) befindet. [Abb. 6.12](#) und [Abb. 6.13](#) zeigen die Schwing- formen, die sich für verschiedene Frequenzen ohne bzw. mit ASAC ergeben haben. Erwartungs- gemäß wird die (3,3)-Eigenschwingung, die den größten Anteil an der Schwingform bei der Frequenz 150 Hz hat, durch den Sekundärshaker besonders stark beeinflusst. Allerdings kann der Sekundärshaker keine geradzahligen Moden anregen.

Deshalb wird die (3,3)-Mode durch ASAC nicht in eine geradzahlige Mode umgewandelt, wie dies bei ASAC erwartet wird. Stattdessen werden höhere ungeradzahlige Moden mit niedrigerer Abstrahlungseffizienz erzeugt. Dadurch wird eine Schalleistungsminde- rung von 8.3 dB erzielt, wie in [Tab. 6.5](#) gezeigt. Die durch Simulation und Messung gewonnenen Ergebnisse zeigen gleiche Tendenzen. Ähnlich wie in Kap. 6.3.1.1 sind die quantitativen Unterschiede bezüglich

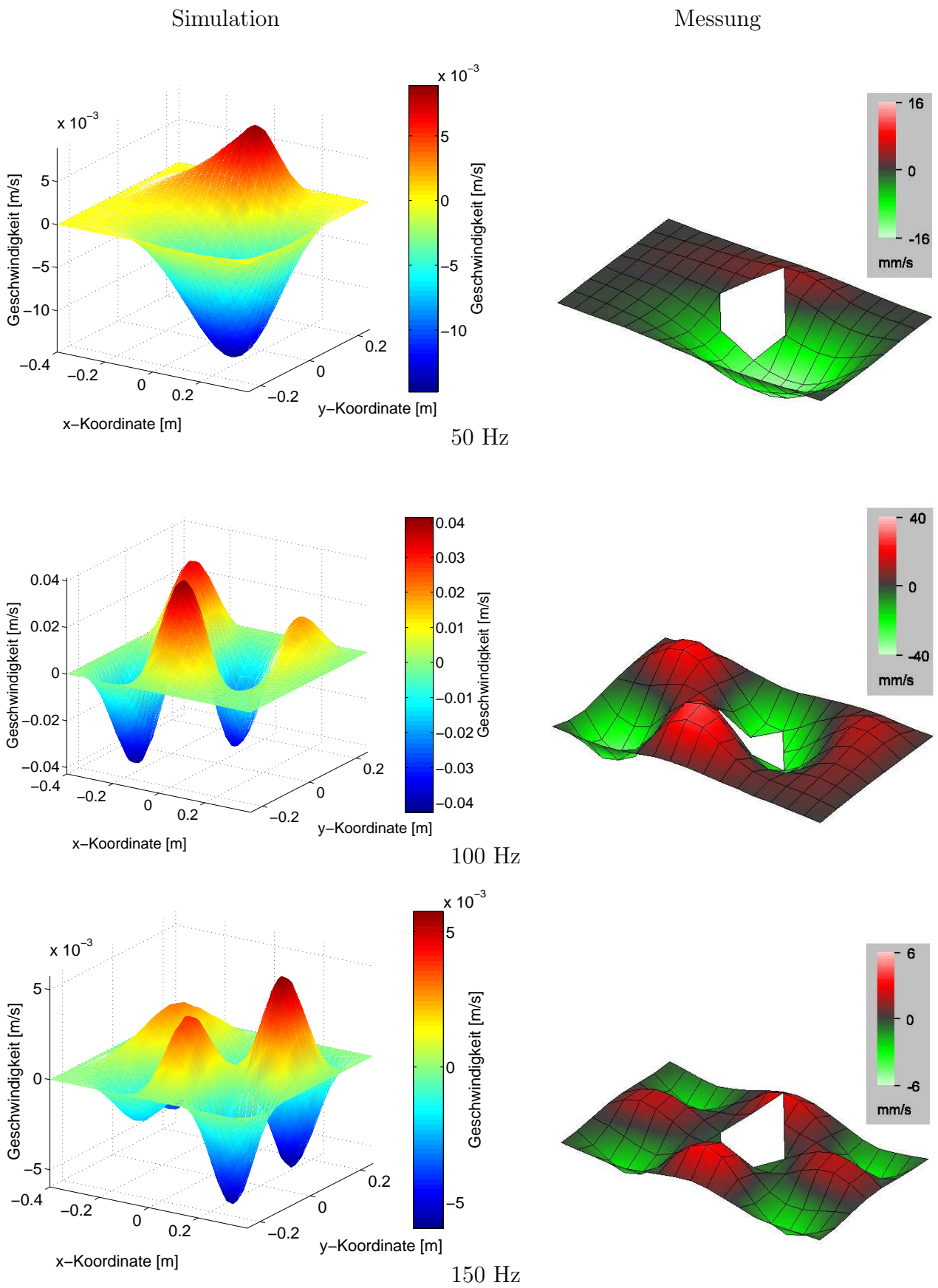


Abbildung 6.12: Berechnete und gemessene Betriebsschwingformen ohne ASAC; Sekundärshakerposition  $S_2$  (aus [45]).



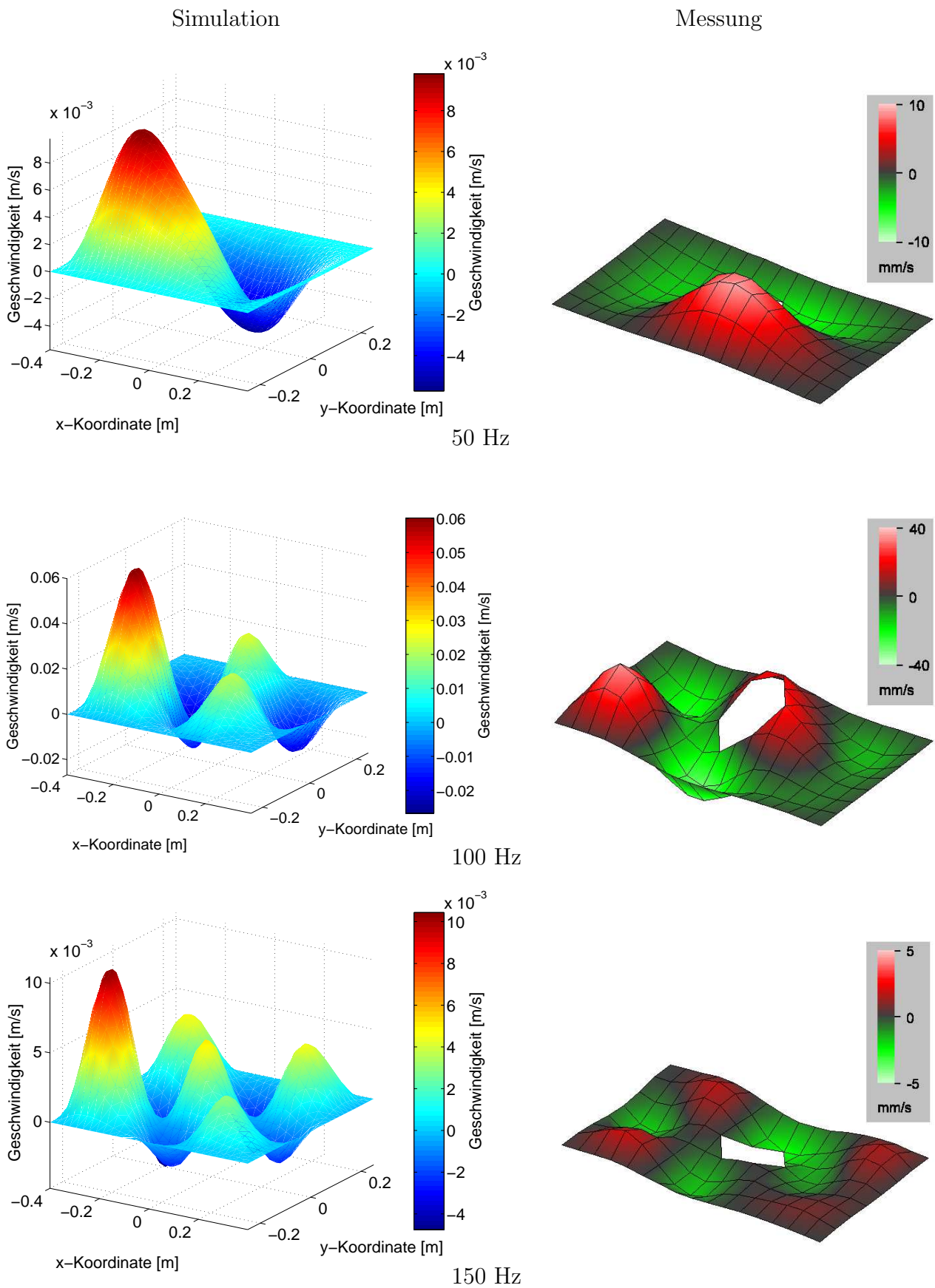


Abbildung 6.13: Berechnete und gemessene Betriebsschwingformen mit ASAC; Sekundärshakerposition  $S_2$  (aus [45]).

der Schalldruckwerte hauptsächlich damit erklärbar, dass das ASAC-System in der Rechnung idealisiert wird. Die entsprechenden Unterschiede zwischen den Schalleistungswerten gehen vorrangig auf die in Kap. 5.5.2 genannten Gründe zurück.

Tabelle 6.5: *Schalldruckminderung in der Position  $M_{10}$  und Schalleistungsminderung mit dem Sekundärshaker in der Position  $S_2$  (Werte aus [45]).*

Frequenz [Hz]	Schalldruckminderung [dB]		Schalleistungsminderung [dB]	
	Simulation	Messung	Simulation	Messung
50	18.7	13.1	8.5	6.5
100	8.1	4.4	0.0	-3.5
150	13.0	9.3	8.3	7.2
300	12.1	8.4	2.1	2.6
500	4.8	4.4	1.6	-1.5

### 6.3.2 Optimierung der Sekundärshakerposition

Um die Position des Sekundärshakers zu optimieren, wird die Methode der erschöpfenden Suche gewählt (vgl. Kap. 4.2.1.2). Dabei wird zunächst auf der Stahlplatte je nach gewünschter Genauigkeit ein rechteckiges Gitter mit beispielsweise 2500 oder 10000 Punkten festgelegt, die die möglichen Sekundärshakerpositionen darstellen. Für jede Position des Sekundärshakers wird der Schalleistungspegel berechnet, der sich durch ASAC ergibt. Auf diese Weise erhält man Verteilungen des Schalleistungspegels über den Koordinaten des Sekundärshakers, wie sie beispielhaft in den [Abb. 6.14](#) bis [Abb. 6.16](#) für 100 Hz, 150 Hz und 700 Hz dargestellt sind. Wenn der Sekundärshaker am Plattenrand positioniert wird, bleibt er wegen der festen Einspannung wirkungslos.

Wie erwartet wird das absolute Minimum der Schalleistung erreicht, wenn der Sekundärshaker und der Primärshaker in derselben Position platziert werden. Die Positionen von Primär- und Sekundärshaker müssen dabei sehr genau übereinstimmen, da die kleinste Abweichung eine große Zunahme des Schalleistungspegels zur Folge hat. Dieser Fall ist deshalb für praktische Versuche unbrauchbar. Besser geeignet sind Positionen des Sekundärshakers, bei denen einerseits die Schalleistung durch ASAC stark gemindert wird und die es andererseits gestatten, dass der Sekundärshaker geringfügig verschoben werden darf, ohne dass die Schalleistung drastisch zunimmt. Diese Gebiete weisen einen relativ flachen Verlauf der Schalleistung auf. Die Bereiche, in denen die Schalleistung durch ASAC zunimmt, können auf den Verlauf der Knotenlinien der in der Schwingform vorherrschenden Eigenschwingung hindeuten.

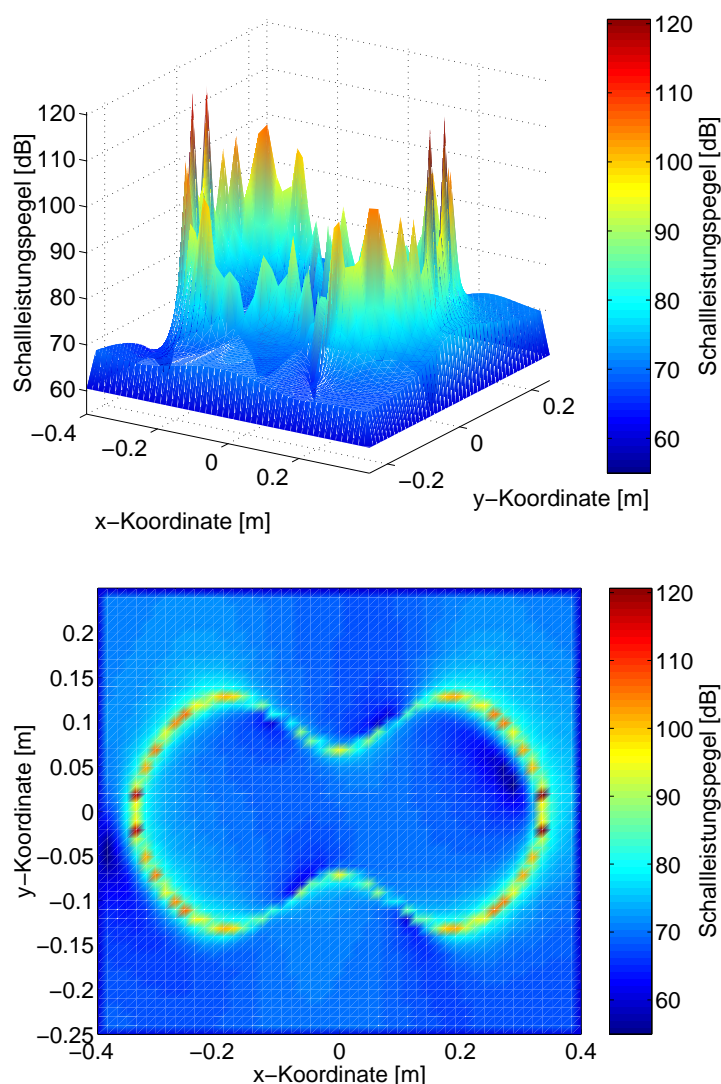


Abbildung 6.14: Verteilung der Schalleistung über den Koordinaten des Sekundärshakers bei 100 Hz.

Das wird durch [Abb. 6.15](#) bestätigt, wo die roten Bereiche entlang der Knotenlinien der bei 150 Hz dominierenden (3,3)-Mode verlaufen. Die “guten” Gebiete werden mit zunehmender Frequenz kleiner. Es wird also mit steigender Frequenz immer schwieriger, den Sekundärshaker geeignet zu platzieren.

Für die drei untersuchten Frequenzen wurde eine Sekundärshakerposition aus einem “guten” und einem “schlechten” Bereich ausgesucht und die Schalleistung berechnet und gemessen. Die [Tab. 6.6](#) und [Tab. 6.7](#) zeigen die Mess- und Simulationsergebnisse. In [Tab. 6.6](#) stimmen die berechneten und gemessenen Schalleistungsminderungen gut überein. Offensichtlich wirken sich hier die in [Kap. 5.5.2](#) angesprochenen Effekte kaum aus. Im Gegensatz dazu zeigen die entsprechenden Werte in [Tab. 6.7](#) zwar eine ähnliche Tendenz, jedoch gibt es große quantitative Unterschiede.

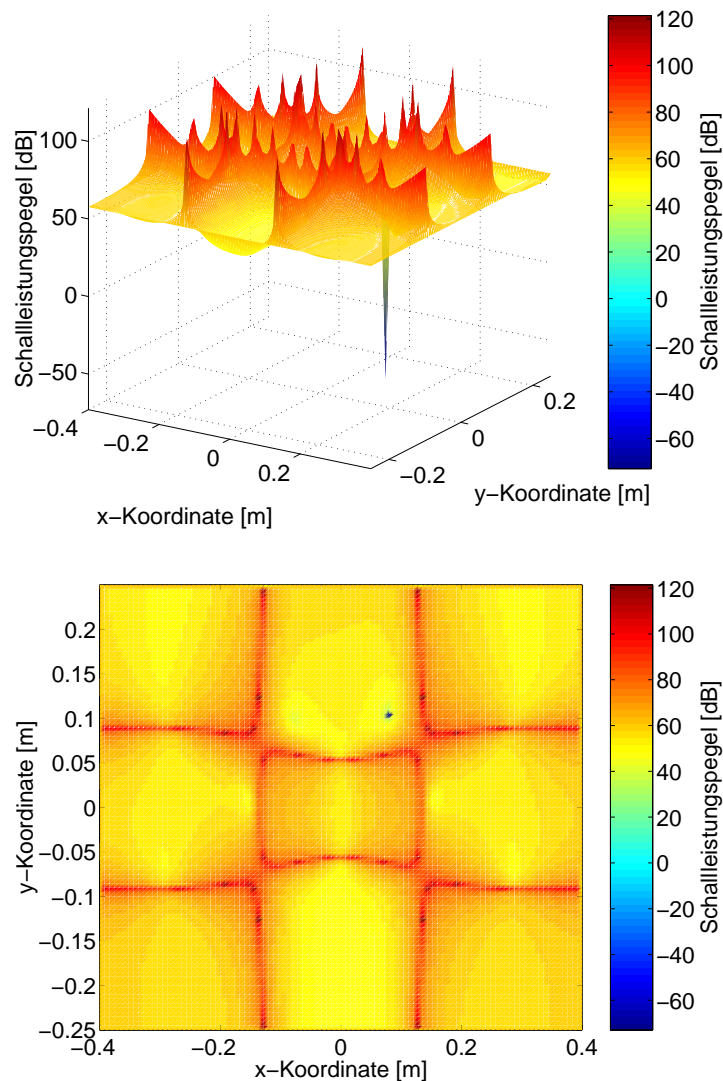


Abbildung 6.15: Verteilung der Schalleistung über den Koordinaten des Sekundärshakers bei 150 Hz (aus [45]).

Außerdem befinden sich die gewählten ungünstigen Sekundärshakerpositionen in der Simulation exakt auf einer Knotenlinie. Deshalb kann der Sekundärshaker diese Mode nicht beeinflussen. Als Folge weicht das ASAC-System auf Eigenschwingungen aus, die den Schalldruck in der Fehlermikrofonposition zwar mindern, aber die Schalleistung stark ansteigen lassen. In der Messung ist dieser Effekt nicht so deutlich, da sich der Sekundärshaker aufgrund experimenteller Unsicherheiten nicht exakt in einer Eigenschwingungsknotenlinie platzieren lässt. Ein weitaus wichtigeres Ergebnis erhält man, wenn Tab. 6.6 mit Tab. 6.4 verglichen wird. Bei den drei untersuchten Frequenzen 100 Hz, 150 Hz und 300 Hz haben sich für die mittels Simulation bestimmten optimierten Sekundärshakerpositionen größere Schalleistungsminderungen ergeben. Dies wird durch [Abb. 6.17](#) veranschaulicht.

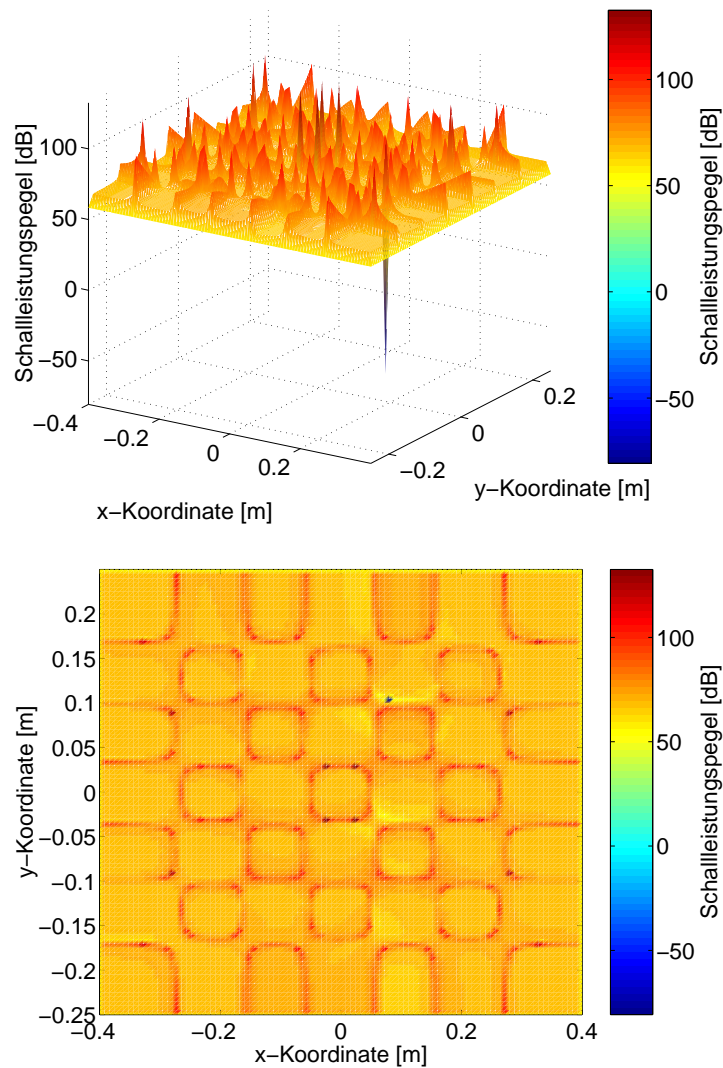


Abbildung 6.16: Verteilung der Schalleistung über den Koordinaten des Sekundärshakers bei 700 Hz.

Obwohl in den Abb. 6.14 bis Abb. 6.16 die “guten” Bereiche bezüglich der Schalleistungsminderung flach verlaufen, kann diese stark absinken, wenn der Sekundärshaker zu weit von seiner optimalen Position entfernt platziert wird. Dies unterstreicht die Wichtigkeit, die Position des Sekundärshakers rechnerisch zu optimieren, um dadurch die durch ASAC erzielbare Schalleistungsminderung zu steigern. Auf diese Weise ist es beispielsweise gelungen, für 150 Hz die Schalleistungsminderung von 12.3 dB (intuitive Platzierung des Sekundärshakers) auf 17.2 dB zu erhöhen.

Tabelle 6.6: Berechnete und gemessene Schalleistungsminderung bei optimierten Sekundärshakerpositionen.

Frequenz [Hz]	Koordinaten des Sekundärshakers ( $x_s, y_s$ ) [m]	Schalleistungsminderung [dB]	
		Simulation	Messung
100	(0.288, 0.05)	8.8	8.6
150	(0.016, -0.215)	17.2	15.5
300	(0.2, -0.155)	5.8	4.5

Tabelle 6.7: Berechnete und gemessene Schalleistungsminderung bei ungünstigen Sekundärshakerpositionen.

Frequenz [Hz]	Koordinaten des Sekundärshakers ( $x_s, y_s$ ) [m]	Schalleistungsminderung [dB]	
		Simulation	Messung
100	(0.32, 0.05)	-20.9	1.9
150	(0.136, -0.125)	-63.8	-6.0
300	(0.168, -0.065)	-64.8	-18.8

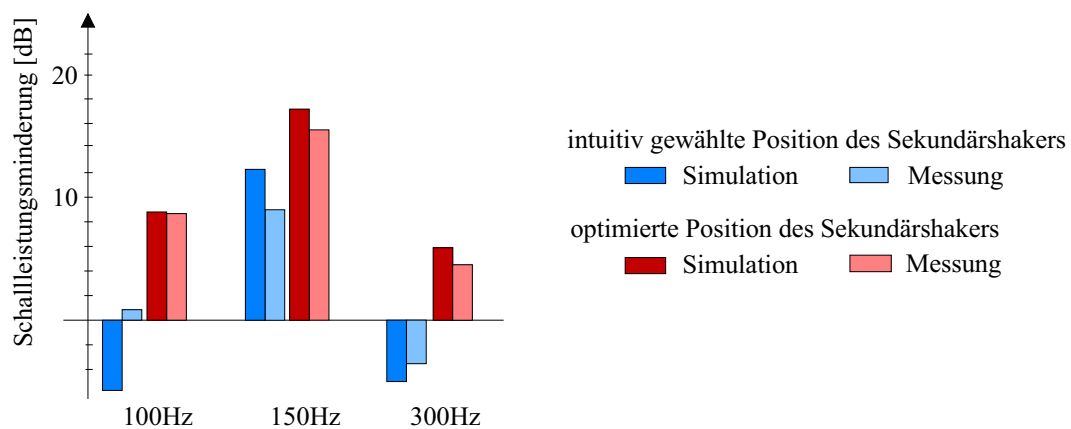


Abbildung 6.17: Schalleistungsminderung durch ASAC bei intuitiv gewählter und optimierter Positionierung des Sekundärshakers.

## 6.4 ASAC mit örtlich verteilten Sekundäraktoren (Piezoelemente)

In diesem Abschnitt werden Effekte beschrieben, die beim Einsatz von Piezoelementen als Sekundäraktoren für ASAC entstehen. Als Primäraktor dient weiterhin ein Shaker in der Position (0.08 m, 0.107 m). Im Folgenden wird der Fall behandelt, bei dem zwei Piezoelemente als Sekundäraktoren benutzt werden. Zunächst werden die beiden Piezoelemente intuitiv dort positioniert, wo sie vermutlich eine hohe Schallleistungsminderung verursachen. Im nächsten Schritt werden die Positionen der Piezoelemente optimiert. Die folgenden Untersuchungen wurden für die Frequenz  $f = 300$  Hz durchgeführt. Dabei dienten die beiden Mikrofone in den Positionen  $M_7$  und  $M_{10}$  als Fehlersensoren (vgl. Abb. 5.13). Um die Ergebnisse der Simulationen und der Experimente besser vergleichen zu können, wird die Ansteuerung des Primärshakers stets so gewählt, dass er alleine in der Mikrofonposition  $M_{10}$  (senkrecht über der Plattenmitte) einen Schalldruckpegel von 60 dB erzeugt. Die Sekundäraktoren sollen einen höheren Pegel verursachen können, damit sie der Wirkung des Primärshakers effektiv entgegen steuern können. Als Grenzpegel wird 70 dB gewählt.

### 6.4.1 Intuitiv gewählte Positionen der Piezoelemente

Diesmal wird bei der intuitiven Positionierung der Sekundäraktoren so vorgegangen, dass für  $f = 300$  Hz die Schwingform berechnet wird, die sich durch bloße Anregung mit dem Primärshaker ergibt. Diese Schwingform ist in [Abb. 6.18](#) dargestellt. Die deutliche Asymmetrie der Schwingform kommt dadurch zustande, dass sich geradzahlige und ungeradzahlige Schwingungsmoden überlagern. Im nächsten Schritt befestigt man die Piezoelemente auf der Stahlplatte in den Positionen, an denen die berechnete Schwingform eine maximale Geschwindigkeitsamplitude aufweist. Es ist anzunehmen, dass die Piezoelemente dort am besten auf die Schwingung einwirken können. In [Abb. 6.18](#) sind solche Positionen beispielsweise durch  $P_1$  (0.23 m, 0.19 m),  $P_2$  (0.23 m, -0.09 m) und  $P_3$  (0.15 m, -0.18 m) gegeben, die in [Abb. 6.19](#) explizit dargestellt sind. Simulationsrechnungen haben gezeigt, dass die beste Kombination aus den Positionen  $P_1$  und  $P_3$  besteht.

Die [Abb. 6.20](#) und [Abb. 6.21](#) stellen die Schwingformen dar, die für die Sekundäraktorpositionen  $P_1$  und  $P_3$  mit und ohne ASAC bei  $f = 300$  Hz berechnet und gemessen wurden. In [Tab. 6.8](#) sind die entsprechenden Schalldruck- und Schallleistungsminderungen aufgelistet. Die gemessenen Schwingformen stimmen nicht mit den berechneten überein. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Eigenfrequenzen der an den berechneten und gemessenen Schwingungen vorherrschenden Eigenschwingungen nicht übereinstimmen. Dies wird auf den folgenden Seiten, insbesondere in Kap. 6.4.1.1, näher erläutert.



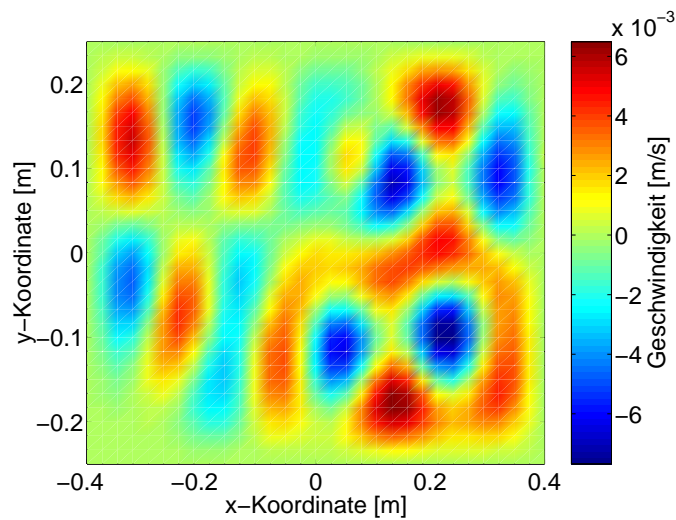


Abbildung 6.18: *Schwingform bei Anregung der Stahlplatte mit dem Primärshaker für  $f = 300$  Hz.*

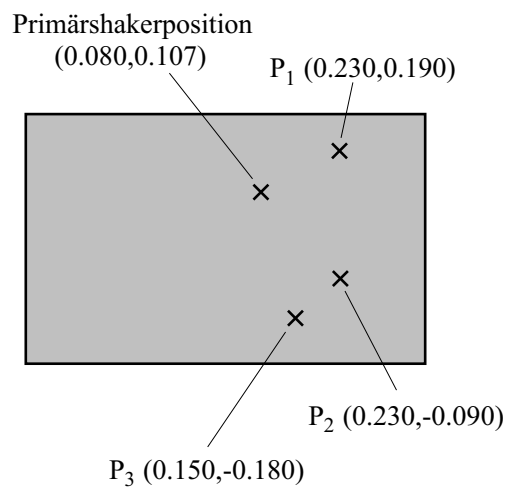


Abbildung 6.19: *Intuitiv gewählte Positionen  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  für die Sekundäraktoren (Piezoelemente) bei  $f = 300$  Hz (Koordinaten in m).*

Wie in Kap. 6.1 gezeigt, wurde das mathematische Modell der Plattenschwingung so angepasst, dass die Summe der Fehlerquadrate bezüglich der berechneten und gemessenen Eigenfrequenzen im Frequenzbereich  $0 \dots 1$  kHz minimal sind. Das schließt jedoch nicht aus, dass sich einzelne gemessene Eigenfrequenzen stark von den berechneten Werten unterscheiden können (größte beobachtete Abweichung: 10%). Dies soll im Folgenden erläutert werden.



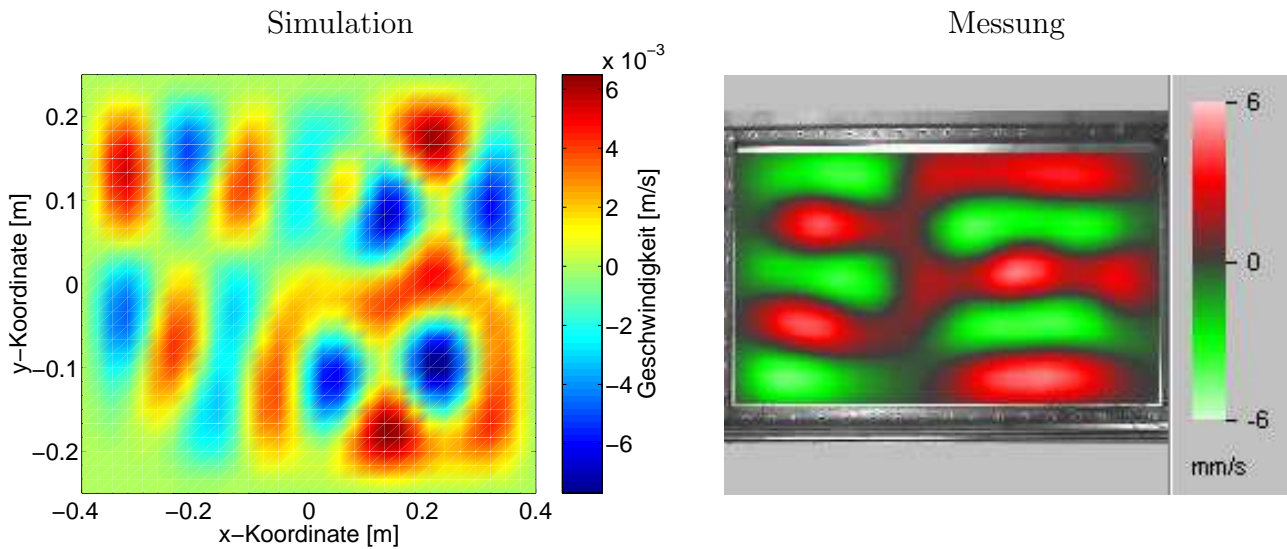


Abbildung 6.20: Berechnete und gemessene Betriebsschwingformen ohne ASAC für  $f = 300$  Hz.

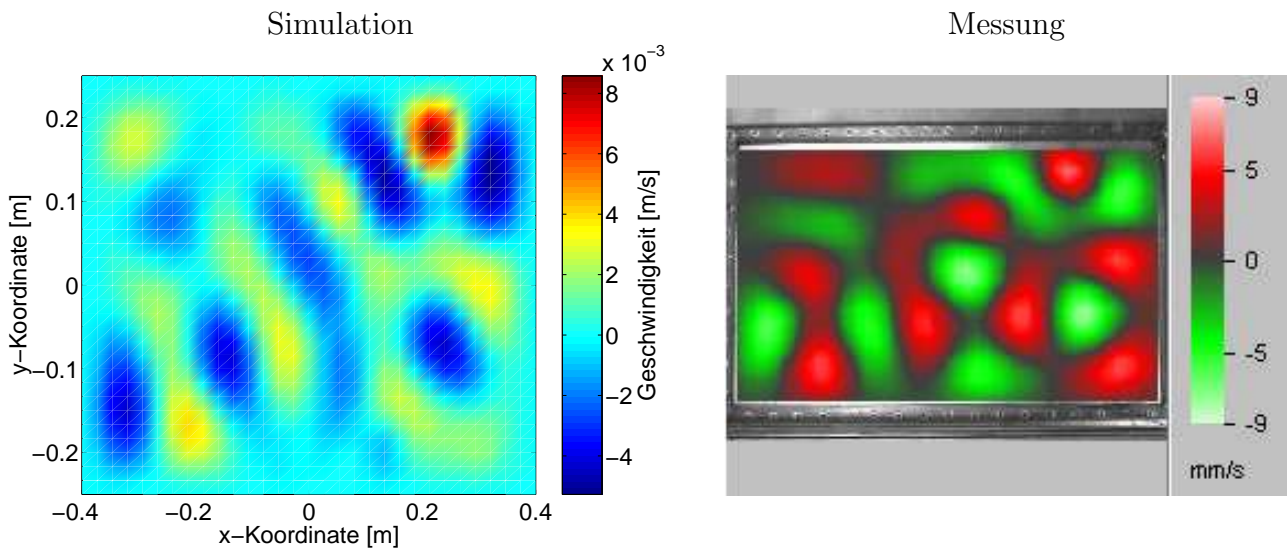


Abbildung 6.21: Berechnete und gemessene Betriebsschwingformen mit ASAC für  $f = 300$  Hz; intuitiv gewählte Positionen  $P_1$  und  $P_3$  der beiden Sekundäraktoren.

Tabelle 6.8: Berechnete und gemessene Schalldruck- und Schalleistungsminderung für  $f = 300$  Hz; intuitiv gewählte Positionen  $P_1$  und  $P_3$  der beiden Sekundäraktoren ( $M_i =$  Mikrofonpositionen).

Frequenz [Hz]	Schalldruckminderung [dB]		Schalleistungsminderung [dB]			
	Simulation		Messung			
	$M_7$	$M_{10}$	$M_7$	$M_{10}$		
300	12.5	21.7	9.6	8.2	2.4	4.6

### 6.4.1.1 Anpassung des Experiments an die Simulation

Für 300 Hz wird z.B. die gemessene Schwingform ohne ASAC durch die (2,5)-Mode bestimmt, deren berechnete Eigenfrequenz  $f = 293$  Hz beträgt. Demnach müsste die Schwingform, die sich in der Simulation für  $f = 300$  Hz ergibt, im Experiment bei einer höheren Frequenz auftreten. Diese Vermutung wird durch Abb. 6.22 bestätigt, in der die gemessenen Schwingformen mit und ohne ASAC für  $f = 308$  Hz dargestellt sind. In Tab. 6.9 sind die für  $f = 308$  Hz gemessenen Schalldruck- und Schalleistungsminderungen den entsprechenden Werten gegenübergestellt, die für  $f = 300$  Hz berechnet wurden. Die in Abb. 6.22 dargestellten Betriebsschwingungen bei  $f = 308$  Hz stimmen im Wesentlichen mit den in Abb. 6.20 und Abb. 6.21 gezeigten berechneten Schwingungen bei  $f = 300$  Hz überein.

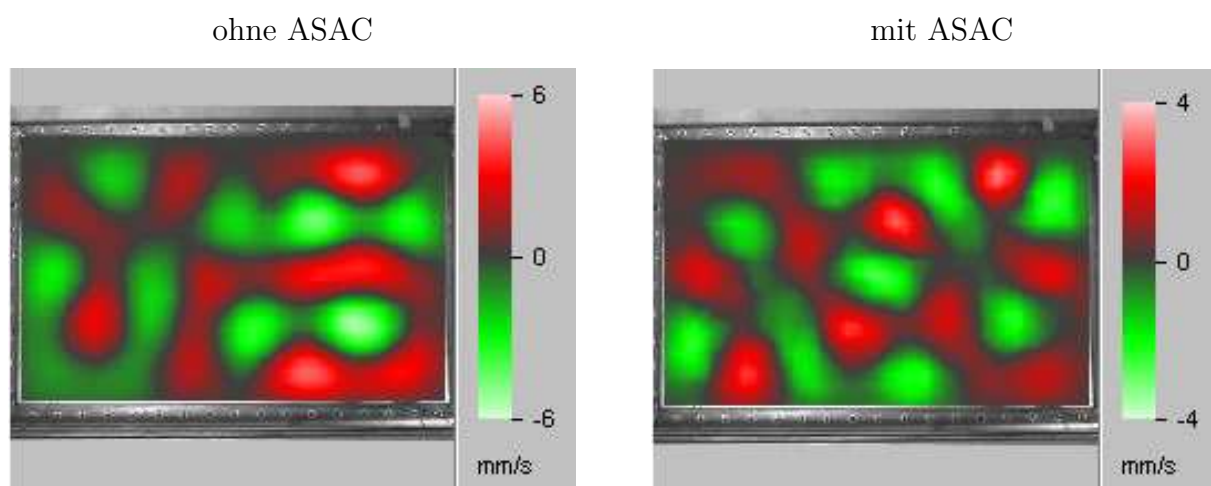


Abbildung 6.22: Gemessene Betriebsschwingformen mit und ohne ASAC für  $f = 308$  Hz; intuitiv gewählte Positionen  $P_1$  und  $P_3$  der beiden Sekundäraktoren.

Tabelle 6.9: Berechnete ( $f = 300$  Hz) und gemessene ( $f = 308$  Hz) Schalldruck- und Schalleistungsminderung; intuitiv gewählte Positionen  $P_1$  und  $P_3$  der beiden Sekundäraktoren ( $M_i =$  Mikrofonpositionen).

Schalldruckminderung [dB]				Schalleistungsminderung [dB]	
Simulation (300 Hz)		Messung (308 Hz)		Simulation (300 Hz)	Messung (308 Hz)
$M_7$	$M_{10}$	$M_7$	$M_{10}$		
12.5	21.7	10.8	18.2	2.4	3.2

Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass ein ASAC-System im hochmodalen Bereich sehr empfindlich auf Frequenzänderungen reagiert. Als Folge müssen in einem mathematischen ASAC-Modell die Eigenfrequenzen der Schwingungen genau bekannt sein, wenn eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulations- und Versuchsergebnissen erzielt werden soll.

## 6.4.2 Optimierung der Position der Piezoelemente

Die Positionen der beiden Sekundäraktoren (Piezoelemente) für  $f = 300$  Hz werden nun mit Hilfe von Genetischen Algorithmen optimiert, die in Kap. 4.3 vorgestellt wurden. Für die möglichen Positionen der Sekundäraktoren wird auf der gesamten Plattenfläche ein Gitter mit  $33 \times 31 = 1023$  Gitterpunkten definiert. Wegen  $1023 = 2^{10} - 1$  werden  $N_B = 10$  Bits benutzt, um die Positionen der Sekundäraktoren eindeutig binär zu kodieren. Als Populationsgröße wird  $n_{pop} = 20$  gewählt. Die Simulation wird nach 50 erzeugten Generationen abgebrochen. Nach jeder Generation werden die bis dahin besten 20 Positionspaare abgespeichert.

Nach den Erkenntnissen aus Kap. 4.4.5 werden die Kreuzungswahrscheinlichkeit  $W_k = 0.6$  und die Mutationswahrscheinlichkeit  $W_m = 0.001N_B = 0.01$  gewählt. Damit die Population nicht nur zu einer einzigen Lösung konvergiert, benutzt man das Sharing-Prinzip (vgl. Kap. 4.4.4.1). Während der Optimierung mit dem Genetischen Algorithmus wurde die Schallleistung 883 Mal berechnet. Zum Vergleich hätte die Schallleistung bei einer erschöpfenden Suche  $(1023 \times 1022)/2 = 522.753$  Mal bestimmt werden müssen.

Als erstes Ergebnis der Optimierung zeigt [Abb. 6.23](#), wie die über der jeweiligen Generation gemittelte Schallleistungsminderung tendenziell zunimmt, während der Genetische Algorithmus immer neue Generationen von jeweils 20 Sekundäraktorkombinationen erzeugt.

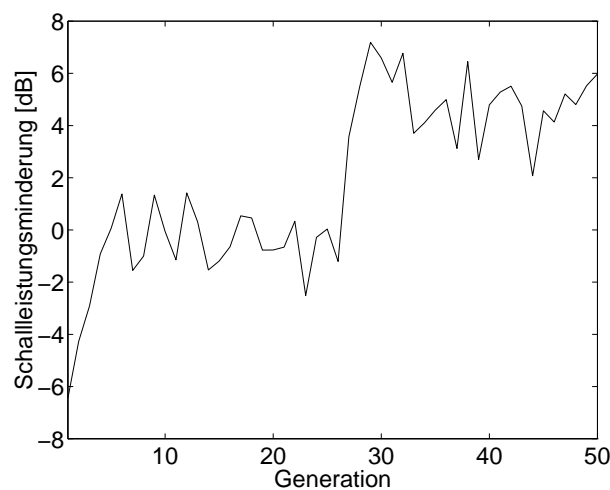
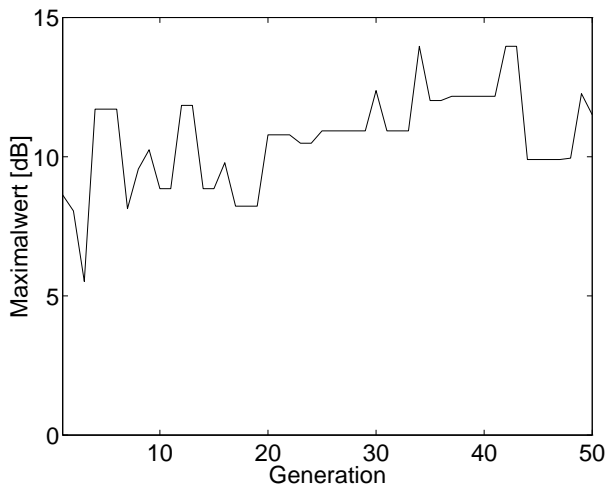


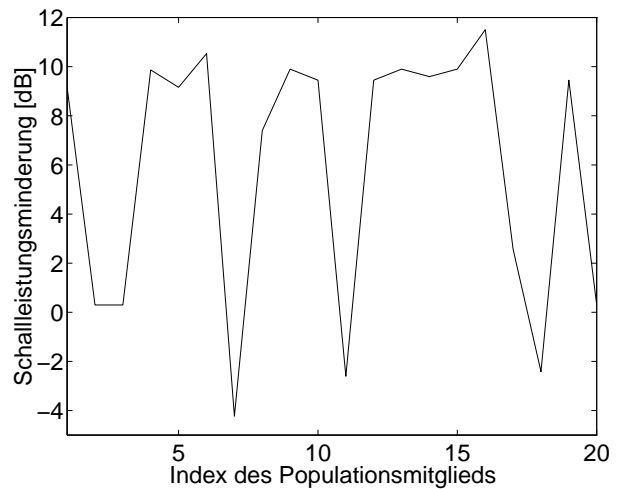
Abbildung 6.23: Optimierung zweier Sekundäraktorpositionen mit einem Genetischen Algorithmus für  $f = 300$  Hz: Mittlere Schallleistungsminderung der Sekundäraktorkomplexe.

Die mittlere Schallleistungsminderung ist zu Beginn negativ, da viele Sekundäraktorkomplexe der ersten Generationen eine Zunahme der Schallleistung durch ASAC verursachen, anstatt sie zu verringern. Jedoch erreicht die mittlere Schallleistungsminderung erwartungsgemäß nach wenigen Generationen positive Werte. In [Abb. 6.24](#) sind weitere Simulationsergebnisse des Genetischen Algorithmus dargestellt. Ebenso wie die mittlere Schallleistungsminderung nimmt

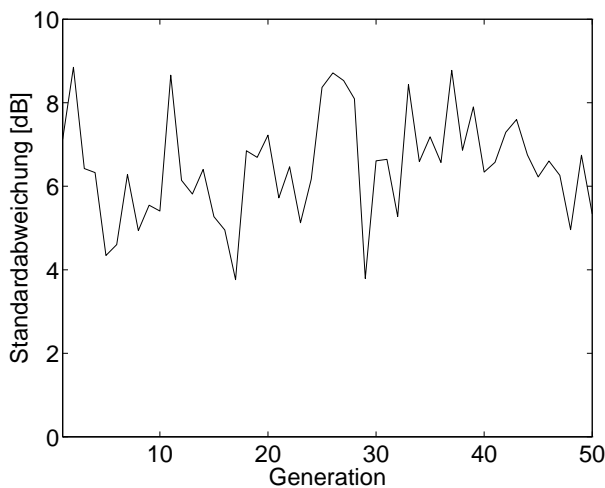
auch die maximale Schalleistungsminderung tendenziell zu, was in Abb. 6.24 links oben zu erkennen ist. Das Bild rechts oben zeigt die Verteilung der Schalleistungsminderung über den Sekundäraktorpaaren der 50. Generation. Diese Generation besitzt sieben “schlechte” Sekundäraktorpaare (Populationsmitglieder) mit Schalleistungsminderungspegeln kleiner als 5 dB und 13 “gute” Sekundäraktorpaare.



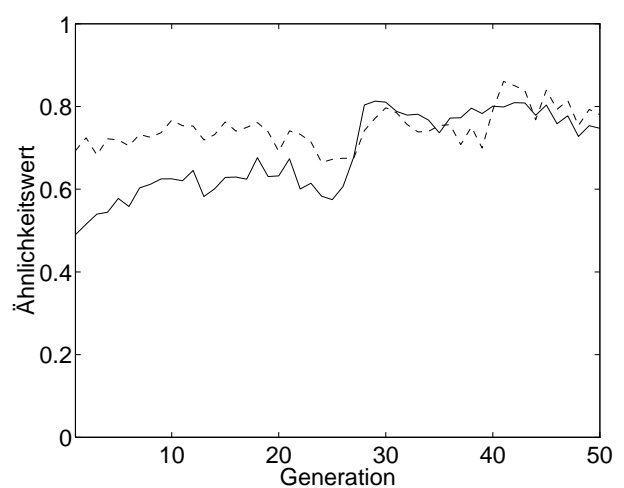
Maximale Schalleistungsminderung der Sekundäraktorpaare.



Schalleistungsminderung der Sekundäraktorpaare der letzten Generation.



Standardabweichung der Schalleistungsminderung der Sekundäraktorpaare.



Genotypischer (—) und phänotypischer (---) Ähnlichkeitswert.

Abbildung 6.24: *Ergebnisse der Optimierung zweier Sekundäraktorpositionen mit einem Genetischen Algorithmus für  $f = 300$  Hz.*

Links unten ist die Standardabweichung der Schalleistungsminderung über den Generationen dargestellt. Diese Standardabweichung bleibt in der Tendenz konstant. Im Gegensatz dazu

steigen die Ähnlichkeitswerte tendenziell an und verharren dann zwischen den Werten 0.6 und 0.8, was im Diagramm rechts unten von Abb. 6.24 veranschaulicht ist. Die beiden unteren Bilder von Abb. 6.24 weisen darauf hin, dass die Lösungen des Genetischen Algorithmus nicht zu einer einzigen, sondern zu mehreren Maxima konvergieren, d.h. das Sharing-Prinzip funktioniert.

Unter den 20 besten Paaren der Sekundäraktorpositionen, die von dem Genetischen Algorithmus generiert worden waren, wurden die beiden optimierten Positionen  $P_4$  und  $P_5$  ausgewählt. Diese sind in [Abb. 6.25](#) dargestellt. Die Sekundäraktorpaaare mit den höchsten Schalleistungsminderungswerten lagen bei den Simulationen meistens in der Nähe der Plattenränder. Das ist dadurch zu erklären, dass die Aktoren in der Nähe der Plattenränder im niederfrequenten Bereich (z.B.  $f < 1$  kHz) gleichermaßen auf alle Eigenschwingungen einwirken können.

#### 6.4.2.1 Vergleich der Simulations- und Messergebnisse

Es wurde bereits gezeigt, dass in der vorliegenden Arbeit die für  $f = 300$  Hz berechnete Schwingform im Experiment der Schwingform für  $f = 308$  Hz entspricht. Deshalb sind in [Abb. 6.26](#) die Schwingformen dargestellt, die ohne ASAC für  $f = 300$  Hz berechnet und für  $f = 308$  Hz gemessen wurden. Zum Vergleich zeigt [Abb. 6.27](#) die entsprechenden Schwingformen, die sich mit ASAC ergeben. In [Tab. 6.10](#) sind die Minderungswerte für die Schalldrücke in den Mikrofonpositionen  $M_7$  und  $M_{10}$  sowie die Schalleistungsminderung eingetragen. Obwohl die Schwingungsamplituden durch ASAC zunehmen, verringert sich die ins Fernfeld abgestrahlte Schalleistung. Das liegt daran, dass die unsymmetrische Betriebsschwingung durch ASAC in eine annähernd symmetrische Schwingung umgewandelt wird, bei der der akustische Kurzschluss zwischen benachbarten Plattenelementen sehr wirksam ist.

Während ohne ASAC die Schwingformen beinahe völlig übereinstimmen (siehe [Abb. 6.26](#)), weichen sie mit ASAC voneinander ab ([Abb. 6.27](#)). Diese Abweichungen kommen hauptsächlich durch die rechnerische Idealisierung des ASAC-Systems (unendlich viele Filterkoeffizienten des adaptiven digitalen Filters) sowie experimentelle Unsicherheiten zustande. Trotz der Abweichungen sind in beiden Diagrammen in [Abb. 6.27](#) die Schwingungsamplituden fast gleich groß. Außerdem ist in beiden Schwingungsbildern zu erkennen, dass sich die höchste Schwingungsamplitude in der Nähe der Sekundäraktorposition  $P_5$  (0.282 m, -0.219 m) befindet. Der Unterschied zwischen der berechneten und gemessenen Schwingform ist größer, wenn bei  $f = 300$  Hz gemessen wird. Die [Tab. 6.10](#) zeigt, dass die bei 300 Hz für die optimierten Positionen der Sekundäraktoren berechnete Schalleistungsminderung mit 14.0 dB deutlich über der infolge der intuitiven Positionierung der Sekundäraktoren erreichten Schalleistungsminderung von 2.4 dB liegt (vgl. [Tab. 6.9](#)). Diese Ergebnisse sind in [Abb. 6.28](#) dargestellt.

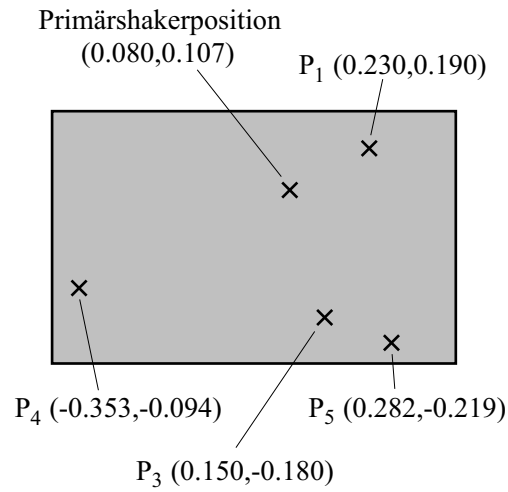


Abbildung 6.25: Intuitiv gewählte Positionen  $P_1$  und  $P_3$  und optimierte Positionen  $P_4$  und  $P_5$  der zwei Piezoelemente bei  $f = 300$  Hz (Koordinaten in m).

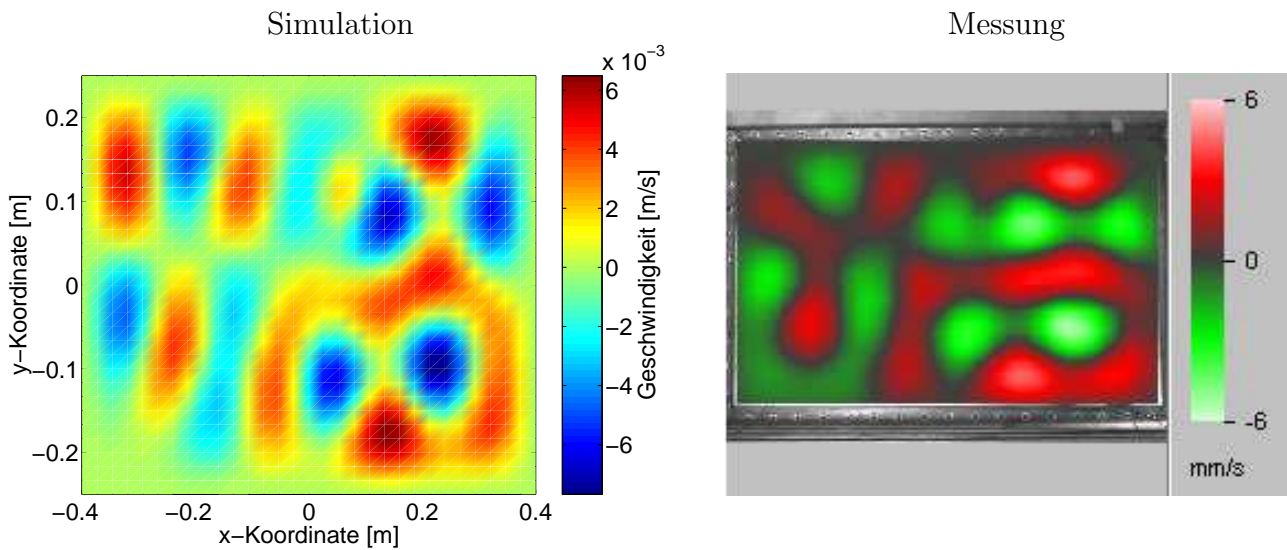


Abbildung 6.26: Für  $f = 300$  Hz berechnete und für  $f = 308$  Hz gemessene Betriebschwingformen ohne ASAC.

Tabelle 6.10: Berechnete ( $f = 300$  Hz) und gemessene ( $f = 308$  Hz) Schalldruck- und Schalleistungsminderung; optimierte Positionen  $P_4$  und  $P_5$  der beiden Sekundäraktoren ( $M_i =$  Mikrofonpositionen).

Schalldruckminderung [dB]				Schalleistungsminderung [dB]	
Simulation (300 Hz)		Messung (308 Hz)		Simulation (300 Hz)	Messung (308 Hz)
$M_7$	$M_{10}$	$M_7$	$M_{10}$		
16.5	22.7	13.2	20.1	14.0	10.6

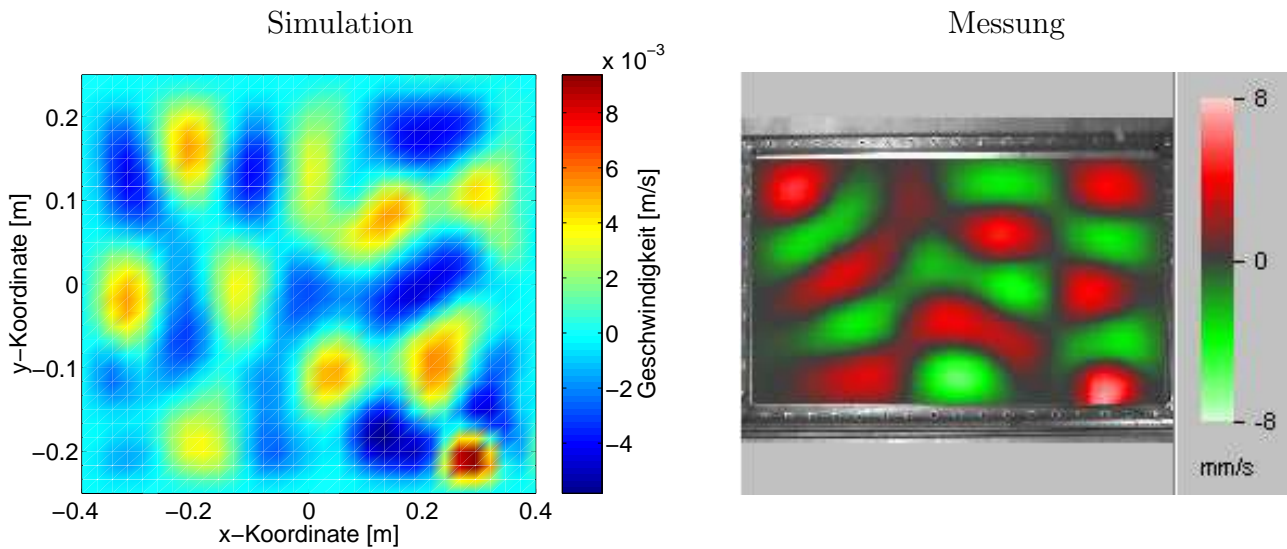


Abbildung 6.27: Für  $f = 300$  Hz berechnete und für  $f = 308$  Hz gemessene Betriebschwingformen mit ASAC.

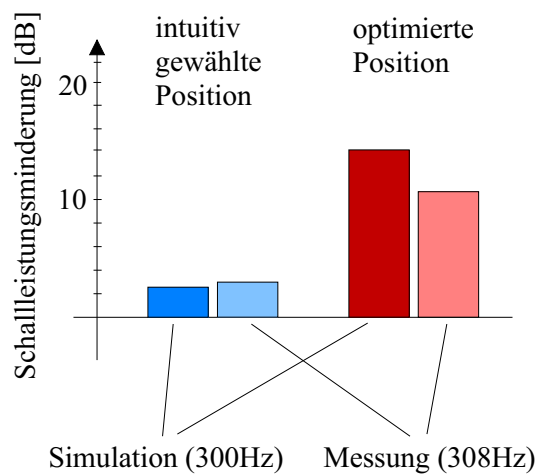


Abbildung 6.28: Schalleistungsminderung durch ASAC bei intuitiv gewählten Positionen  $P_1$  und  $P_3$  bzw. optimierten Positionen  $P_4$  und  $P_5$  der beiden Sekundäraktoren (Piezoelemente).



### 6.4.3 Sensitivität des ASAC-Systems bezüglich der Sekundäraktorpositionen

#### 6.4.3.1 Anregung mit der Frequenz 300 Hz

In diesem Abschnitt wird am Beispiel der beiden optimierten Positionen  $P_4$  und  $P_5$  untersucht, wie sehr die für  $f = 300$  Hz durch ASAC erzielbare Schalleistungsminderung von der Position der Sekundäraktoren abhängt. Zuerst wurde in einer Simulation für  $f = 300$  Hz die Position  $P_4$  variiert, während die Position  $P_5$  konstant blieb. In einer weiteren Simulation wurde die Position  $P_4$  festgehalten und  $P_5$  verändert. Abb. 6.29 zeigt die berechneten Schalleistungsminderungen über den jeweiligen Verschiebungskoordinaten. Der Punkt (0.0 m, 0.0 m) entspricht dabei den Punkten  $P_4$  bzw.  $P_5$ .

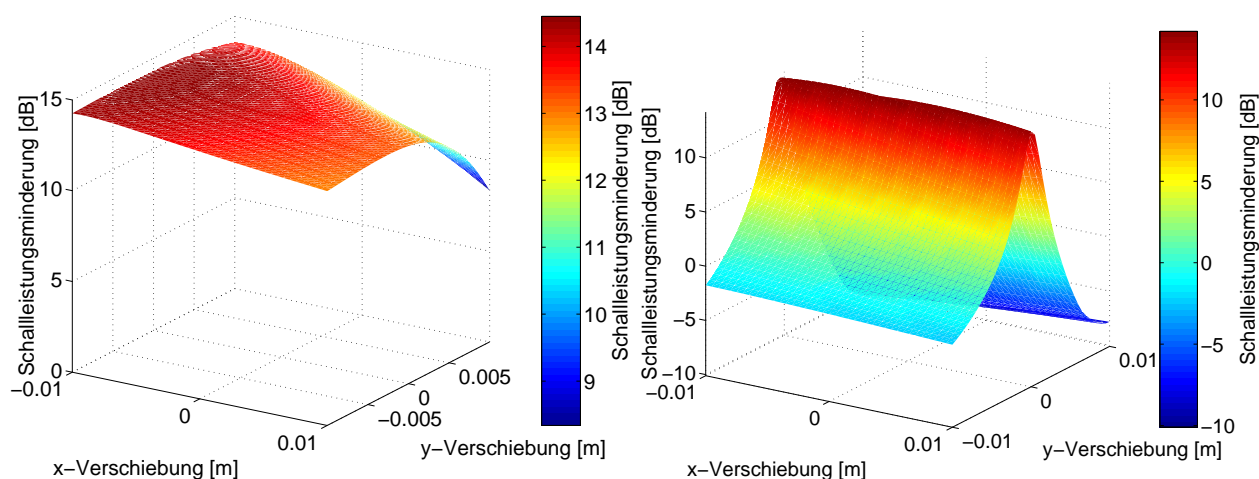


Abbildung 6.29: Sensitivität der berechneten Schalleistungsminderung bezüglich der Sekundäraktorpositionen  $P_4$  (links) und  $P_5$  (rechts) für  $f = 300$  Hz.

Wegen des flachen Verlaufs der Schalleistungsminderung im linken Diagramm aus Abb. 6.29 ist die Position  $P_4$  unkritisch, d.h.  $P_4$  kann in weiten Grenzen verändert werden, ohne dass dadurch die erzielbare Schalleistungsminderung stark abnimmt. Im rechten Diagramm aus Abb. 6.29 verändert sich die Schalleistungsminderung in  $x$ -Richtung kaum, während sie im höchsten Punkt bezüglich der  $y$ -Achse in beiden Richtungen stark abnimmt. Durch Ändern der  $y$ -Koordinate von  $P_5$  um 10 mm kann die Schalleistungsminderung um bis zu 10 dB abnehmen, was im Experiment auch subjektiv deutlich wahrgenommen werden konnte. Dazu wurde die Position  $P_5$  zunächst um 10 mm in die positive  $x$ -Richtung verschoben.

Abb. 6.30 zeigt die Schwingformen, die sich mit ASAC für  $f = 308$  Hz vor und nach der Verschiebung ergaben. In beiden Fällen war die gemessene Schwingform annähernd gleich. Subjektiv war keine Änderung der Lautstärke feststellbar, was auf eine geringe Sensitivität bezüglich der positiven  $x$ -Achse hindeutet. Durch Verschiebung von  $P_5$  um 10 mm in positiver  $y$ -



Richtung erhielt man die in [Abb. 6.31](#) dargestellte Schwingform. Sie unterscheidet sich deutlich von der ursprünglichen Schwingform mit ASAC für 308 Hz (vgl. [Abb. 6.30](#) links). Außerdem war die geringere Schalleistungsminderung auch im Experiment messbar. Obwohl die Versuche wegen des großen Aufwands nur stichprobenhaft durchgeführt werden konnten, verdeutlichen sie zusammen mit den Simulationen, wie empfindlich ein ASAC-System bezüglich der Positionen der Sekundäraktoren sein kann.

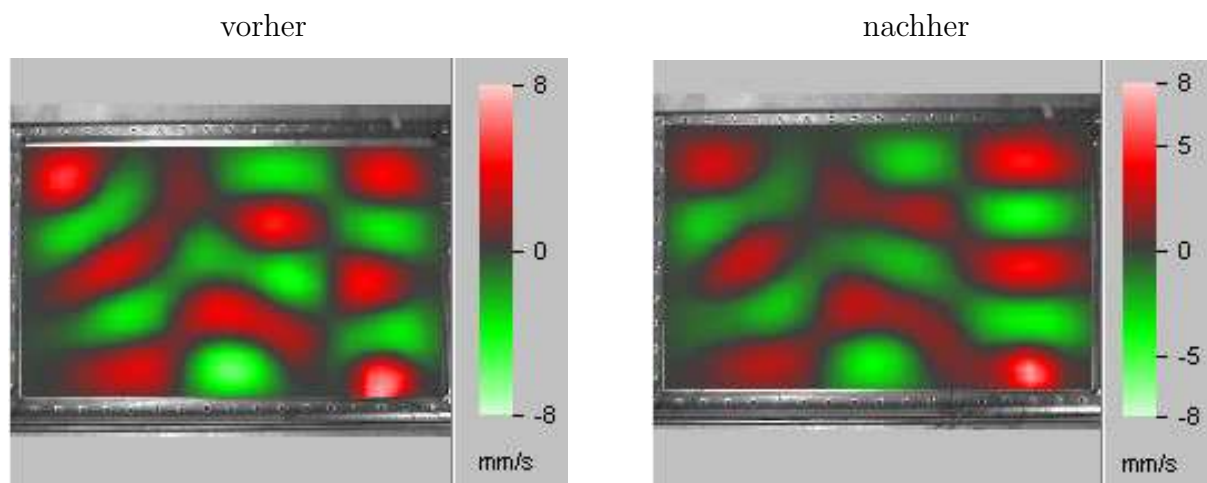


Abbildung 6.30: Gemessene Schwingformen vor und nach Verschieben des Sekundäraktors (Position  $P_5$ ) um 10 mm in positiver  $x$ -Richtung für  $f = 308$  Hz mit ASAC.

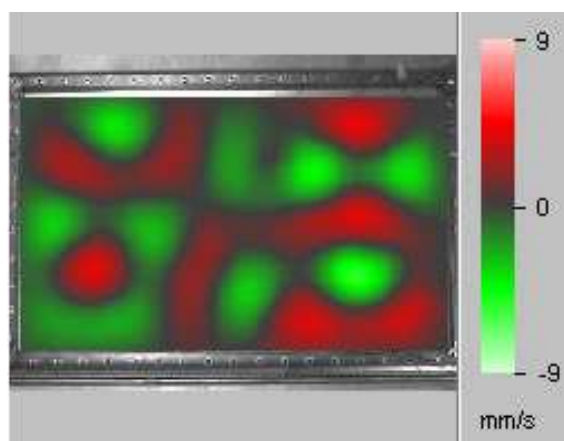


Abbildung 6.31: Gemessene Schwingform nach Verschieben des Sekundäraktors (Position  $P_5$ ) um 10 mm in positiver  $y$ -Richtung für  $f = 308$  Hz mit ASAC.

Der Gedanke liegt nahe, dass die in der Simulation für 300 Hz beobachtete Sensitivität von der relativen Lage der Sekundäraktoren zu den Knotenlinien der am stärksten abstrahlenden Eigenschwingungen abhängt. Das würde bedeuten, dass nahe dieser Knotenlinien eine große Empfindlichkeit beobachtet werden könnte. Diese Vermutung kann für 300 Hz widerlegt werden.

In Abb. 6.32 sind die beiden Positionen  $P_4$  und  $P_5$  sowie die Knotenlinien der bei 300 Hz am stärksten abstrahlenden (2,5)- und (7,3)-Mode dargestellt (Eigenfrequenzen 293 Hz bzw. 307 Hz). Man erkennt, dass  $P_5$  nur wenig näher bei einer Knotenlinie liegt als  $P_4$ , obwohl für diese Position eine viel größere Sensitivität beobachtet wurde (Abb. 6.29). Außerdem zeigte Abb. 6.29, dass das betrachtete ASAC-System bezüglich der Position  $P_5$  in  $y$ -Richtung viel sensibler reagiert als in  $x$ -Richtung. Allerdings sieht man in Abb. 6.32, dass die nächstgelegene Knotenlinie von  $P_5$  in  $x$ -Richtung und nicht in  $y$ -Richtung zu erreichen ist.

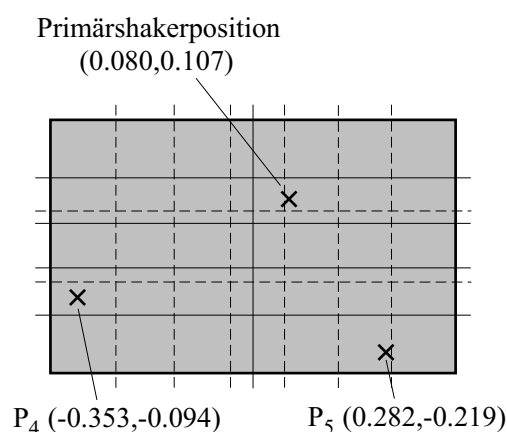


Abbildung 6.32: Relative Lage der optimierten Positionen  $P_4$  und  $P_5$  der zwei Piezoelemente bezüglich der Knotenlinien der (2,5)-Mode (—) und (7,3)-Mode (- - -).

### 6.4.3.2 Ersetzen eines Piezoelements durch einen Shaker

Um die Sensitivität bezüglich der Position  $P_5$  umfassend zu analysieren, sollte das dort befestigte Piezoelement durch einen Shaker ersetzt werden. Dieser könnte im Versuch ohne großen Aufwand verschoben werden. Im Experiment zeigte sich jedoch, dass die Sekundäranregung durch die Kombination aus Shaker und Piezoelement zu einer anderen Schwingform führt als die Sekundäranregung mit zwei Piezoelementen. In Abb. 6.33 sind die besagten Schwingungen dargestellt, die mit ASAC für  $f = 308$  Hz gemessen wurden. Sie sind zwar ähnlich, jedoch besitzen sie stark unterschiedliche Amplituden.

Die Optimierung der Sekundäraktorpositionen führt zu einem besseren Ergebnis als die intuitive Positionswahl, vorausgesetzt dass die Eigenfrequenzen des Modells und der Versuchsplatte hinreichend genau übereinstimmen (Fehler  $< 1\%$ ) und entweder die Sekundäraktoren exakt platziert werden oder die Sensitivität der Schallleistungsminderung bezüglich der betrachteten Aktorpositionen gering ist.

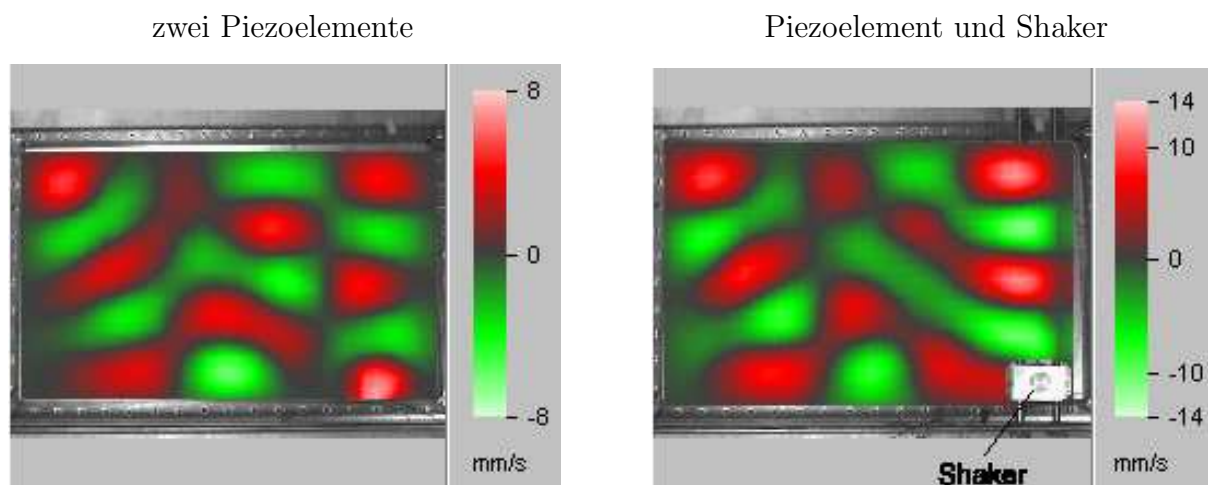


Abbildung 6.33: Schwingformen mit Piezoelementen als Sekundäraktoren in den Positionen  $P_4$  und  $P_5$  (links) bzw. mit einem Piezoelement in  $P_4$  und einem Shaker in  $P_5$  (rechts) für  $f = 308$  Hz.

### 6.4.3.3 Anregung mit Frequenzen nahe 300 Hz

In Kap. 6.4.3.1 wurde gezeigt, dass die Schalleistungsminderung für 300 Hz stark von den Positionen der Sekundäraktoren abhängt. Im Folgenden soll untersucht werden, ob dies auch auf benachbarte Frequenzen zutrifft. Zu diesem Zweck werden die Positionen zweier Piezoelemente, die als Sekundäraktoren benutzt werden, für 295 Hz, 305 Hz und 310 Hz mit Hilfe von Genetischen Algorithmen optimiert. Anschließend werden für die optimierten Positionen Sensitivitätsanalysen durchgeführt.

In [Abb. 6.34](#) sind die besten der optimierten Positionen für die untersuchten Frequenzen dargestellt. Ebenso wie für 300 Hz befinden sich die optimierten Positionen der Sekundäraktoren auch für benachbarte Frequenzen stets nahe der Plattenränder. Allerdings unterscheiden sie sich deutlich von den optimierten Positionen für 300 Hz (vgl. [Abb. 6.25](#)). Außerdem weichen die für 295 Hz, 305 Hz und 310 Hz mit den optimierten Sekundäraktorpositionen erzielbaren Schalleistungsminderungen teilweise stark von dem für 300 Hz berechneten Wert ab, wie in [Tab. 6.11](#) gezeigt. Für die nahe 300 Hz optimierten Sekundäraktorpositionen wurde die Sensitivität analysiert.

Die [Abb. 6.35](#) und [Abb. 6.36](#) zeigen, wie sich die Schalleistungsminderung für 295 Hz bzw. 305 Hz ändert, wenn die Sekundäraktoren aus ihren optimierten Positionen verschoben werden. Während die dargestellten Flächen für 295 Hz steil verlaufen, was auf eine hohe Empfindlichkeit des ASAC-Systems auf Verschiebungen der Sekundäraktorpositionen hindeutet, ist diese Sensitivität für 305 Hz geringer. Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass nicht nur die durch ASAC erzielbare Schalleistungsminderung stark frequenzabhängig ist, sondern auch die Sensitivität des ASAC-Systems bezüglich der Sekundäraktorpositionen. Außerdem ist durch bloße

Kenntnis der Schwingform und der Positionen der Sekundäraktoren noch keine Vorhersage der Sensitivität möglich.

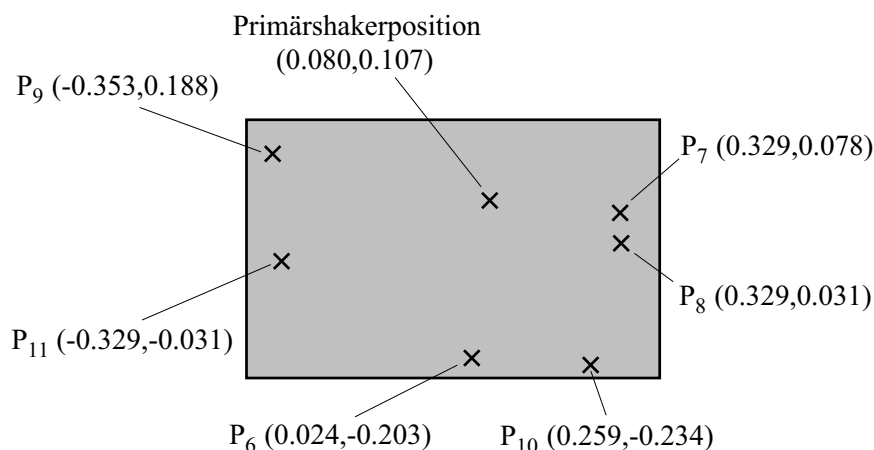


Abbildung 6.34: Optimierte Positionen  $P_6$ ,  $P_7$  (295 Hz),  $P_8$ ,  $P_9$  (305 Hz),  $P_{10}$ ,  $P_{11}$  (310 Hz) der zwei Piezoelemente (Koordinaten in m).

Tabelle 6.11: Berechnete Schalleistungsminderungen mit optimierten Positionen der Sekundäraktoren für benachbarte Frequenzen von 300 Hz.

Frequenz [Hz]	optimierte Positionen		Schalleistungsminderung [dB]
295	$P_6$	$P_7$	15.7
300	$P_4$	$P_5$	14.0
305	$P_8$	$P_9$	16.5
310	$P_{10}$	$P_{11}$	15.8

#### 6.4.3.4 Anregung mit höheren Frequenzen

In diesem Kapitel soll die Sensitivität des betrachteten ASAC-Systems bezüglich der Sekundäraktorpositionen für höhere Frequenzen (z.B. Modendichten von mehr als zehn Moden pro 100 Hz Bandbreite) untersucht werden. Hierzu werden für 500 Hz und 700 Hz die Positionen zweier Piezoelemente optimiert, die als Sekundäraktoren benutzt werden. Zur Optimierung werden Genetische Algorithmen verwendet.

In [Abb. 6.37](#) sind die nach mehreren Optimierungsläufen für 500 Hz bzw. 700 Hz ermittelten besten Positionspaare der Sekundäraktoren dargestellt. Für die Positionen  $P_{12}$  und  $P_{13}$  wurde eine Schalleistungsminderung von 5.4 dB berechnet, für  $P_{14}$  und  $P_{15}$  eine Schalleistungsminderung von 15.0 dB. Ähnlich wie bei 300 Hz liegen die optimierten Aktorpositionen nahe der

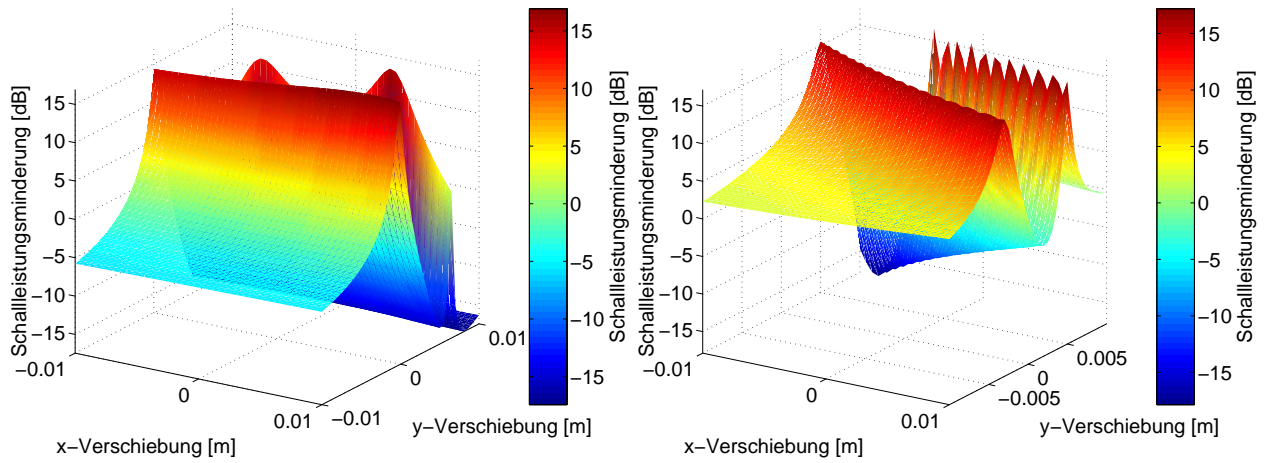


Abbildung 6.35: Sensitivität der berechneten Schalleistungsminderung bezüglich der Sekundäraktorpositionen  $P_6$  (links) und  $P_7$  (rechts) für  $f = 295$  Hz.

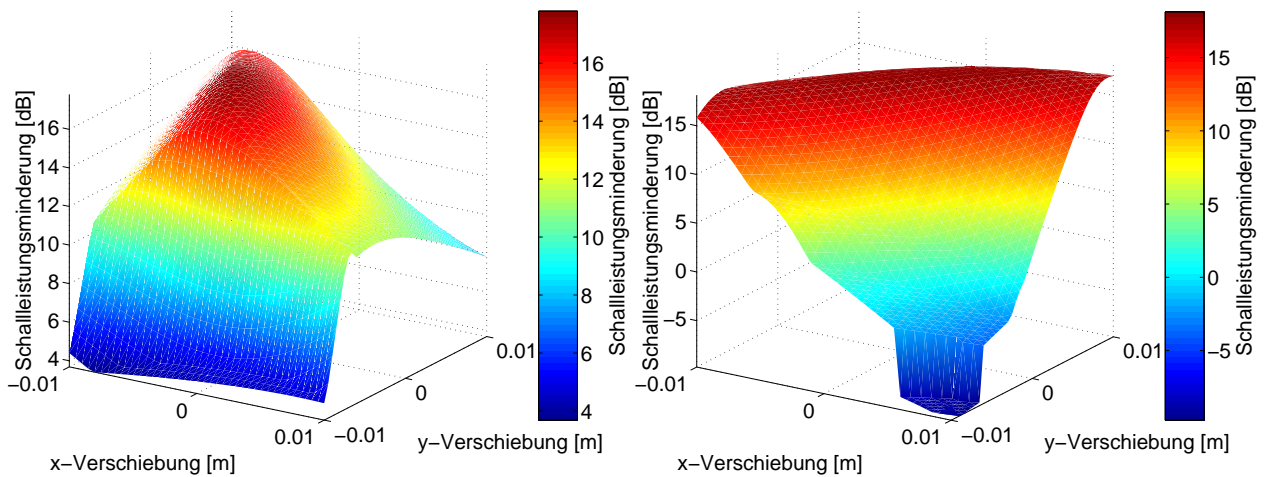


Abbildung 6.36: Sensitivität der berechneten Schalleistungsminderung bezüglich der Sekundäraktorpositionen  $P_8$  (links) und  $P_9$  (rechts) für  $f = 305$  Hz.

Plattenränder, jedoch nimmt der Abstand dieser Positionen zu den Plattenrändern mit steigender Frequenz tendenziell zu. Die [Abb. 6.38](#) veranschaulicht, wie sich die für  $f = 500$  Hz durch ASAC erzielbare Schalleistungsminderung verändert, wenn die Piezoelemente aus den optimierten Positionen  $P_{12}$  bzw.  $P_{13}$  verschoben werden. In [Abb. 6.39](#) sind die entsprechenden Ergebnisse für die Frequenz 700 Hz dargestellt. In den gezeigten Beispielen ist eine eher geringe Positionsempfindlichkeit zu beobachten. Die Sensitivität nimmt also nicht zwangsläufig mit der Frequenz zu. Sie nimmt auch nicht kontinuierlich ab, was Simulationen mit alternativen optimierten Positionen zeigen.

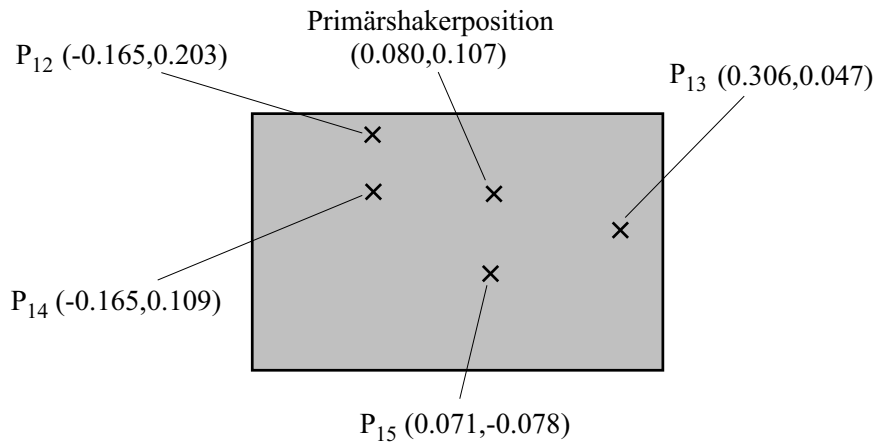


Abbildung 6.37: Optimierte Positionen  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  (500 Hz) und  $P_{14}$ ,  $P_{15}$  (700 Hz) der zwei Piezoelemente (Koordinaten in m).

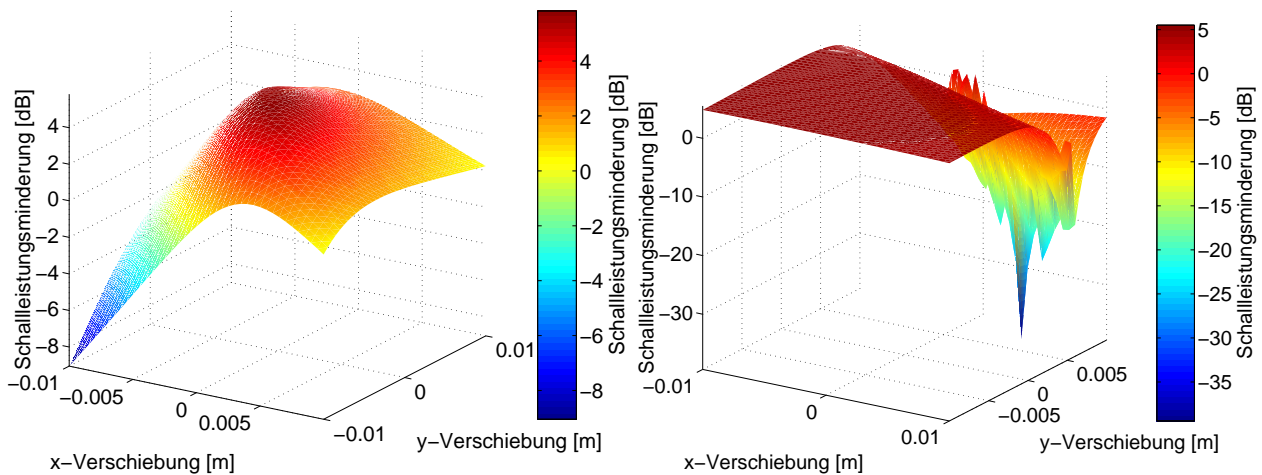


Abbildung 6.38: Sensitivität der berechneten Schalleistungsminderung bezüglich der Sekundäraktorpositionen  $P_{12}$  (links) und  $P_{13}$  (rechts) für  $f = 500$  Hz.

Ein Zusammenhang zwischen der Sensitivität des betrachteten ASAC-Systems bezüglich der Sekundäraktorpositionen und der Frequenz bzw. den Knotenlinien der am stärksten abstrahlenden Eigenschwingungen konnte nicht nachgewiesen werden. Deshalb fehlt bislang eine plausible

Erklärung für die teilweise starke Empfindlichkeit des ASAC-Systems auf die Verschiebung der Sekundäraktorpositionen und somit jede Möglichkeit einer Vorhersage der Sensitivität.

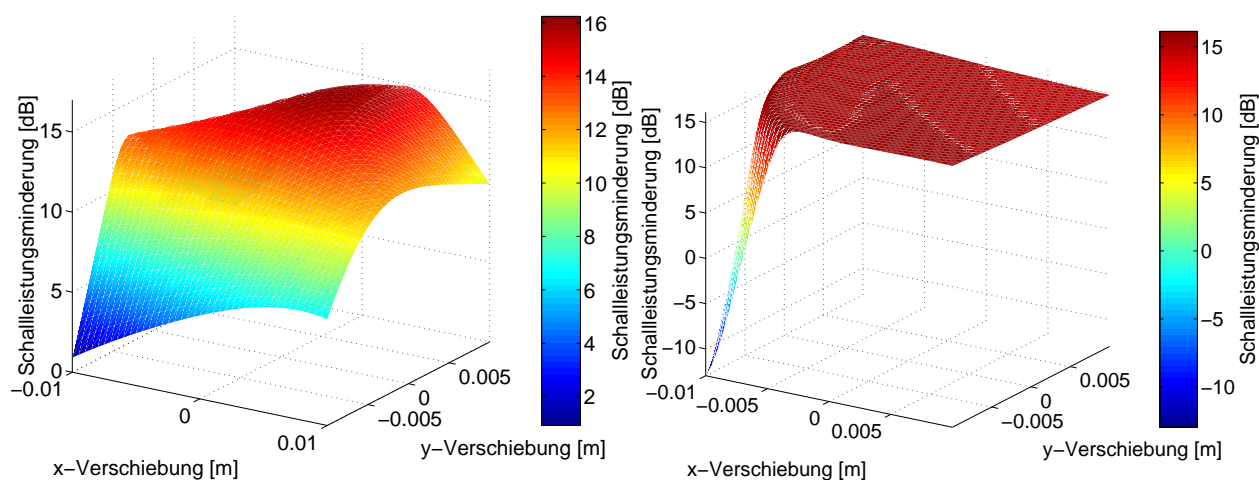


Abbildung 6.39: Sensitivität der berechneten Schalleistungsminderung bezüglich der Sekundäraktorpositionen  $P_{14}$  (links) und  $P_{15}$  (rechts) für  $f = 700$  Hz.

#### 6.4.4 Erklärungen für die Abweichung der Simulations- von den Messergebnissen

In diesem Abschnitt werden Fehlerquellen erörtert, die dafür verantwortlich sein könnten, dass die Messergebnisse der vorliegenden Arbeit von den Simulationsergebnissen abweichen. Zur besseren Orientierung werden die Fehler in zwei Klassen eingeteilt:

##### 1. Fehlerquellen im Experiment:

- Das Messobjekt ist eine Stahlplatte, die an den Rändern fest zwischen zwei 5 mm dicken Stahlrahmen eingespannt ist (vgl. Kap. 5.1). Die Einspannung ist trotz der in 60 Punkten beidseitig mit 5 mm dicken Stahlrahmen und dem 25 mm dicken Deckel der Holzkapsel verschraubten Stahlplatte (siehe Abb. 5.3) nur annähernd ideal. Bei hochfrequenten Schwingungen der Platte (z.B.  $f > 600$  Hz) sind die Amplituden sehr klein (im  $\mu\text{m}$ -Bereich), so dass die Schwingungen am Plattenrand trotz Einspannung nicht mehr vernachlässigt werden können.

Wie in [Abb. 6.40](#) beispielhaft für 700 Hz gezeigt wird, verhält sich die Platte dann zunehmend so, als ob sie an den Rändern frei wäre.

- Die Ankopplung eines Shakers an die Platte ist ebenfalls nicht ideal. Die schwingfähige Masse des Shakers hat zwar nur einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf die



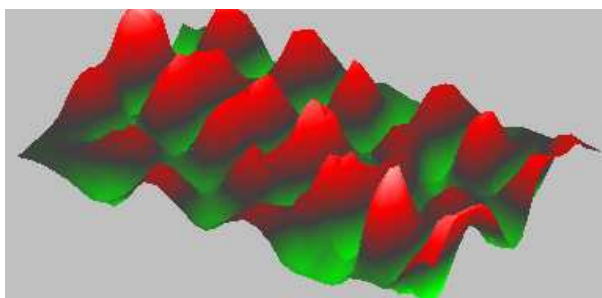


Abbildung 6.40: Gemessene Plattenschwingungen für  $f = 700$  Hz; Anregung mit einem Piezoelement in Position  $P_3$ .

Dynamik der Stahlplatte, jedoch kann trotz des verwendeten Stingers keine momentenfreie Kraftübertragung realisiert werden. Allerdings beträgt der Fehler weniger als 1% der Amplitude, was durch Versuche mit mehreren unterschiedlichen Stingern gezeigt werden konnte.

- Die Klebeverbindungen zwischen den Piezoaktoren und der Platte stellen eine weitere Fehlerquelle dar. Hier haben insbesondere die Dicke und die Steifigkeit einen Einfluss auf die übertragenen Momente.
- Die Schallmessungen im Schallmessraum sind nicht immer ideal. Für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz 100 Hz des Schallmessraums treten vermehrt Reflexionen auf, so dass der Schalldruck eine zusätzliche Ortsabhängigkeit erhält. Diese Ortsabhängigkeit wird in der Rechnung nicht berücksichtigt.
- Eine weitere Fehlerquelle ist das Messrauschen, das bei Messungen stets vorhanden ist. Dieser Fehler wurde jedoch durch große Signalstörabstände und analoge Tiefpassfilter (Grenzfrequenz  $f_{g,h} = 20$  Hz, siehe Kap. 5) ausreichend klein gehalten. Der Störpegel durch Netzeinstreuung betrug deutlich weniger als 10 dB und konnte deshalb vernachlässigt werden.
- Nach ISO 3745-1977(E) sollte zur Bestimmung der Schallleistung der Abstand der Mikrofone vom Messobjekt groß gegenüber den Dimensionen des Messobjekts sein. Bei dem vorhandenen Messaufbau war der Abstand der Fehlermikrofone mit einem Meter vorgegeben. Der Nahfeldfehler wurde nicht korrigiert.
- Der Wirkungsgrad von Piezoelementen sinkt mit zunehmender Wellenlänge. Deshalb unterscheiden sich die berechneten und gemessenen Schwingformen stark, wenn in ihnen Eigenschwingungsformen von sehr kleinen Eigenfrequenzen eine Rolle spielen.

## 2. Systematische Fehler im Rechenmodell:

- Das digitale Filter, mit dem das Ansteuersignal für die Sekundäraktoren bestimmt wird, wurde in der Rechnung nicht mit endlich vielen Filterkoeffizienten modelliert,



sondern als ideal betrachtet (unendlich viele Filterkoeffizienten). Das führt zu Unterschieden zwischen den Mess- und Rechenergebnissen bezüglich der mit ASAC erzielbaren Schalldruck- und Schalleistungsminderung.

- Obwohl Schwingungen dünner Stahlplatten nur wenig gedämpft sind, was sich besonders in der Nähe der Resonanzfrequenzen zeigt, darf die Dämpfung streng genommen nicht vernachlässigt werden. Außerdem entsteht ein Fehler durch die Frequenzgänge der Aktorverstärker. Da jedoch sowohl im Experiment als auch in der Simulation die Anregungssignale so eingestellt wurden, dass der Schalldruckpegel ohne ASAC in der Mikrofonposition  $M_{10}$  60 dB betrug, wirkte sich der Fehler kaum aus.
- Im rechnerischen Schwingungsmodell der vorliegenden Arbeit werden die Plattenschwingungen als Überlagerung von Balkenschwingungen betrachtet. Die Kopplung zwischen den Balken bleibt unberücksichtigt, was vor allem bei höheren Frequenzen (z.B.  $f > 700$  Hz) zu einem Fehler führt.

## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

Um der zunehmenden Lärmbelästigung begegnen und den gestiegenen Anforderungen an die Lebensqualität entsprechen zu können, ist eine Vielzahl von Lärminderungsverfahren entwickelt worden. Die passiven Methoden, die auf den Prinzipien der Schalldämmung und -dämpfung basieren, funktionieren gut für Frequenzen oberhalb von 1 bis 2 kHz. Allerdings müssen die Masse und Dicke der schalldämpfenden Stoffe mit sinkender Frequenz zunehmen, damit eine deutliche Schallminderung erzielt werden kann. Dies wurde in Kapitel 2 anhand von Beispielen gezeigt.

Für tiefere Frequenzen unterhalb von 1 kHz ist die Lärmbekämpfung mit passiven Mitteln teuer und benötigt viel Platz. Hier bieten aktive Lärminderungsverfahren eine effiziente Alternative, zumal sie in den letzten Jahren durch die rasante Entwicklung der digitalen Signalprozessoren zunehmend an Bedeutung gewonnen haben und immer weiter verbessert worden sind.

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Methode der aktiven Schallabstrahlungsminderung (ASAC), mit der im Gegensatz zu ANC-Systemen nicht der Schall mit Gegenschall bekämpft wird, sondern die Schwingung von Strukturen derart beeinflusst wird, dass letztere weniger Schall abstrahlen. Während in früheren Arbeiten gezeigt wurde, dass ASAC bei geringen Modendichten gut funktioniert, wurde in dieser Arbeit geprüft, inwieweit diese Technik auch bei höheren Frequenzen, also bei höheren Modendichten, effektiv ist. Dabei wurden im Hinblick auf kostengünstige praktische Anwendungen ASAC-Systeme untersucht, die maximal zwei Aktoren und Sensoren enthalten.

Im dritten Kapitel wurde ein vollständiges mathematisches Modell für die Schwingung einer an den Rändern fest eingespannten Platte sowohl für punktförmige (Shaker) als auch für flächige Anregung (Piezoelemente) hergeleitet. Dabei wurde eine Alternative zur gängigen Rayleigh-Ritz-Methode vorgestellt, die vergleichbar genau, aber erheblich effizienter und anschaulicher ist. Außerdem wurde die Schallabstrahlung modelliert und eine Formel für die modale Abstrahlungseffizienz einer an den Rändern fest eingespannten Platte hergeleitet.

Mit der Annahme, dass der für die ASAC-Regelung verwendete LMS-Algorithmus ideal arbeitet, d.h. dass er den Schall ideal kompensieren kann, wurden mathematische Modelle für ASAC-Systeme mit einem und mehreren ASAC-Aktoren entwickelt. Durch die analytischen Herleitungen konnten neue Zusammenhänge zwischen Systemparametern und dem Schalleistungsminderungsergebnis erschlossen werden, was u.a. zur Optimierung der Simulationsprogramme genutzt werden konnte. Beispielsweise wurde der mathematische Beweis erbracht, dass bei einem einzelnen ASAC-Aktor die Phase zwischen dem Schallanregungs- und Aktorsignal im optimalen Fall ein ganzzahliges Vielfaches von  $180^\circ$  betragen muss. Außerdem wurde gezeigt, dass es auch bei ASAC mit mehreren Aktoren günstig ist, von Phasenlagen zwischen den Schallanregungs- und Aktorsignalen auszugehen, die jeweils ein ganzzahliges Vielfaches von  $180^\circ$  betragen. Aufgrund dieser Erkenntnisse, die beide der Anschauung entsprechen, ist es möglich, Rechnerprogramme zur Simulation von ASAC-Systemen effizienter zu gestalten.

Die Positionen der ASAC-Aktoren sind optimiert worden, um bei ASAC-Systemen mit maximal zwei Aktoren eine deutliche Schalleistungsminderung zu erzielen. Es wurde gezeigt, dass mehrere Aktorpositionen effektiv mit Genetischen Algorithmen optimiert werden können. Dabei wurden verschiedene Versionen der Genetischen Algorithmen getestet und Ähnlichkeitswerte eingeführt, um die Wirkung des sogenannten Sharing-Prinzips besser beurteilen zu können.

Die Leistungsfähigkeit des betrachteten ASAC-Systems wurde mittels der berechneten abgestrahlten Schalleistung bewertet. Zudem wurde im Verlauf der vorliegenden Arbeit ein Versuchsaufbau entwickelt und realisiert, bestehend aus einer rechteckigen Stahlplatte der Maße  $800 \times 500 \times 1 \text{ mm}^3$ , die an den Rändern mit einem Stahlrahmen im Deckel einer Holzkapsel fest eingespannt ist. Mit diesem Messaufbau wurde u.a. das mathematische Schwingungsmodell verifiziert. Zur Messung der Schalleistung mit dem Hüllflächenschalldruckverfahren wurde ein vorhandener Messaufbau benutzt, der eine rationelle Messung und Auswertung erlaubt. Da sich in den Akustikmessungen Tendenzen zeigten, die bereits in den Simulationen beobachtet werden konnten und diese auch sehr gut mit im Experiment gewonnenen subjektiven Eindrücken korrelierten, wurden die berechneten Schalleistungswerte durch gemessene Werte der Schalleistung ergänzt.

Durch die umfangreichen Simulationsrechnungen und Messungen konnten neue Erkenntnisse über die Funktionsweise von ASAC-Systemen hinsichtlich günstiger Aktorpositionen gesammelt werden. Der Einfluss der Kopplungsart zwischen der Platte und ASAC-Aktoren, Piezoelementen oder Shakern, auf die Schwingform der Platte und damit auf das Schalleistungsminderungsergebnis wurde messtechnisch untersucht. Die optimalen Positionen für Shaker und Piezoelemente und die erzielbare Schalleistungsminderung können sehr verschieden sein. Mit einem Shaker betrug die Schalleistungsminderung im hierfür untersuchten Frequenzbereich 50 bis 500 Hz monofrequent bis zu 17.2 dB, im Mittel 10.6 dB für die exemplarisch betrachteten Frequenzen 100 Hz, 150 Hz und 300 Hz, jeweils mit einem optimal platzierten Shaker. Wurde der Shaker intuitiv positioniert, betrug die Schalleistungsminderung im Frequenzbereich 50 bis 500 Hz

maximal 12.3 dB, für die Frequenzen 100 Hz, 150 Hz und 300 Hz im Mittel lediglich 1.5 dB. In Simulationen mit zwei Piezoelementen als Aktoren wurden im entsprechend betrachteten Frequenzbereich 300 bis 700 Hz Schalleistungsminderungen bis 15.0 dB berechnet, im Mittel 11.3 dB für die beispielhaft gewählten Frequenzen 300 Hz, 500 Hz und 700 Hz, jeweils mit optimalen Sekundäraktorpositionen. Mit intuitiv bestimmten Sekundäraktorpositionen betrug die Schalleistungsminderung exemplarisch für 300 Hz nur 2.4 dB.

Das ASAC-System reagierte besonders bei höheren Frequenzen sehr empfindlich auf Veränderungen in Aktorposition und in Frequenz. Anhand zahlreicher Simulationen für verschiedene Frequenzen wurde gezeigt, dass die hohe Sensitivität bezüglich bestimmter Aktorpositionen nicht direkt von der Wellenlänge der Eigenschwingungen bei der jeweiligen Frequenz abhängt, insbesondere nicht nur von der relativen Lage der Aktoren zu den Knotenlinien der am stärksten abstrahlenden Eigenschwingungen. Für die Frequenz 300 Hz konnte die Empfindlichkeit des ASAC-Systems bezüglich kleiner Variation der Position der Aktoren sogar im Experiment subjektiv deutlich wahrgenommen werden.

Um ASAC mit wenigen Aktoren bei Frequenzen über 300 Hz, d.h. bei hoher Modendichte einzusetzen, müssen also die Aktoren und die Referenzmikrofone sehr genau platziert werden. Besonders die Positionen der Aktoren können sehr empfindliche Reaktionen auf Verschiebungen von wenigen Millimetern zeigen. Außerdem sind die optimalen Positionen sehr frequenzabhängig. Deshalb sind in der Regel Simulationen notwendig. Diese müssen einerseits die Randbedingungen ausreichend genau berücksichtigen und andererseits ein effizientes Auffinden der optimalen Aktorpositionen ermöglichen, z.B. mittels Genetischer Algorithmen.

Für monofrequente Anregung konnten immer Aktorpositionen mit signifikanter Minderung der Schallabstrahlung gefunden werden. Jedoch ergibt sich aus der oben erwähnten hohen Sensitivität der erzielbaren Schalleistungsminderung bezüglich Aktorposition und Anregfrequenz, dass für ASAC mit wenigen Aktoren und Sensoren (Anzahl jeweils  $\leq 2$ ) bei höheren Frequenzen über ein breiteres Frequenzband insgesamt keine hohe Schalleistungsminderung erwartet werden kann.

## Anhang A

# Ermittlung der Kostenfunktion im Zeitbereich

In diesem Abschnitt werden Terme hergeleitet, die bei der Berechnung der Plattenschwingung und der Bestimmung der Kostenfunktion des ASAC-Algorithmus auftreten.

### A.1 Berechnung der Plattenschwingung bei Anregung mit einem Piezoelement

Das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\delta(x - x_0)}{dx} \phi(x) dx \quad (\text{A.1})$$

mit der Dirac-Impulsfunktion  $\delta(x)$  (siehe Kap. 3.1.3, Gl. (3.46)) und der im Intervall  $[x_1, x_2]$  stetigen und differenzierbaren Funktion  $\phi(x)$  soll gelöst werden. Dabei gilt

$$x_1 < x_0 < x_2 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Wenn das Integral in Gl. (A.1) partiell integriert wird, erhält man

$$\begin{aligned} I &= \left[ \delta(x - x_0) \phi(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) \frac{d\phi(x)}{dx} dx \\ &= \delta(x_2 - x_0) \phi(x_2) - \delta(x_1 - x_0) \phi(x_1) - \frac{d\phi(x)}{dx} \Bigg|_{x=x_0} . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Wegen  $\delta(x) = 0$  für  $x \neq 0$  verschwinden die ersten beiden Terme in Gl. (A.3), und es bleibt

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\delta(x - x_0)}{dx} \phi(x) dx = - \frac{d\phi(x)}{dx} \Bigg|_{x=x_0} = -\phi'(x_0) \quad . \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Modale Schallabstrahlungseffizienz einer rechteckigen, an den Rändern fest eingespannten Platte

Für eine rechteckige, an den Rändern fest eingespannte Platte der Seitenlängen  $a$  und  $b$  (vgl. Abb. 3.1) soll die modale Abstrahlungseffizienz

$$\zeta_{m,n} = \frac{P}{\rho c a b v_{m,n,eff}^2} \quad (\text{A.5})$$

mit

$$\begin{aligned} P &= \text{Schallleistung} \quad , \\ \rho c &= \text{akustische Impedanz in Luft} \quad , \\ v_{m,n,eff} &= \text{räumlich gemittelte Effektivgeschwindigkeit der } (m,n)\text{-Mode der} \\ &\quad \text{Plattenschwingung in } z\text{-Richtung} \end{aligned}$$

berechnet werden (vgl. Kap. 3.3, Gl. (3.83)).

Für  $v_{m,n,eff}^2$  gilt nach Definition

$$v_{m,n,eff}^2 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \frac{1}{ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left( \frac{dw_{m,n}(x,y,t)}{dt} \right)^2 dx dy dt \quad . \quad (\text{A.6})$$

Durch Einsetzen von

$$w_{m,n}(x,y,t) = W_{m,n} \xi_m(x) \psi_n(y) \sin \omega_p t \quad (\text{A.7})$$

folgt aus Gl. (A.6)

$$\begin{aligned} v_{m,n,eff}^2 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \frac{1}{ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (\omega_p W_{m,n} \xi_m(x) \psi_n(y) \sin \omega_p t)^2 dx dy dt \\ &= \frac{\omega_p^2 W_{m,n}^2}{2ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \xi_m^2(x) dx \psi_n^2(y) dy \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mit den Beziehungen (vgl. Gl. (3.38) und Gl. (3.39))

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \xi_m^2(x) dx = a \quad , \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_n^2(y) dy = b \quad (\text{A.10})$$

folgt daraus

$$v_{m,n,eff}^2 = \frac{\omega_p^2 W_{m,n}^2}{2} \quad . \quad (\text{A.11})$$

Die Schalleistung  $P$  ist durch

$$P = \frac{1}{\rho c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}^2 r^2 d\phi \sin \theta d\theta \quad (\text{A.12})$$

gegeben — vgl. Gl. (3.79) —, wobei  $\tilde{p}$  den Effektivwert des Drucks  $p(t) = \hat{p} \sin \omega_p t$  ist. Gemäß der Beziehung (3.70) gilt für einen einzigen modalen Anteil

$$\tilde{p}(r, \phi, \theta) = -\frac{\rho \omega_p^2 e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi r}} W_{m,n} \eta_{m,n}(\phi, \theta) \quad (\text{A.13})$$

mit  $\eta_{m,n}(\phi, \theta)$  aus Gl. (3.71). Mit Gl. (A.13) erhält man aus Gl. (A.12)

$$P = \frac{\rho \omega_p^4 W_{m,n}^2}{8\pi^2 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \Re^2 \{ \eta_{m,n} \} + \Im^2 \{ \eta_{m,n} \} \right) d\phi \sin \theta d\theta \quad , \quad (\text{A.14})$$

wobei  $\Re \{ \eta_{m,n} \}$  und  $\Im \{ \eta_{m,n} \}$  den Real- bzw. Imaginärteil von  $\eta_{m,n}$  darstellen. Wenn Gl. (A.11) und Gl. (A.14) in Gl. (A.5) eingesetzt werden, ergibt sich für die modale Abstrahlungseffizienz der an den Rändern fest eingespannten Platte

$$\varsigma_{m,n} = \frac{\omega_p^2}{4\pi^2 c^2 ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \Re^2 \{ \eta_{m,n} \} + \Im^2 \{ \eta_{m,n} \} \right) d\phi \sin \theta d\theta \quad . \quad (\text{A.15})$$

### A.3 Zeitliche Integration verschiedener Summenterme

In Kap. 3.4 werden zur Berechnung des Gradienten der Kostenfunktion zwei zeitliche Integrale benötigt, die im Folgenden berechnet werden.

1.) Das erste Zeitintegral (siehe Gl. (3.97)) ist gegeben durch

$$Q_1 = \int_0^{T_p} \Re \{ \zeta \} \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Re \{ \eta_{m,n} \} dt \quad (\text{A.16})$$

mit

$$\begin{aligned} \zeta(\phi, \theta, \hat{F}_{sl}, \varphi_{sl}) = & \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} \sin \omega_p t \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \right) \eta_{m,n}(\phi, \theta) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

den reellen Größen  $g_{p(m,n)k}F_{pk}$  und  $g_{s(m,n)l}\hat{F}_{sl}$  sowie der komplexen Größe  $\eta_{m,n}(\phi, \theta)$  aus Gl. (3.71). Es wird über eine ganze Sinusperiode integriert, d.h.  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ .

Durch Einsetzen der Gl. (A.17) in Gl. (A.16) erhält man

$$Q_1 = \int_0^{T_p} \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \sin \omega_p t + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \sin(\omega_p t + \varphi_{sj}) \right) \cdot \Re\{\eta_{m,n}(\phi, \theta)\} \right] \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Re\{\eta_{m,n}\} \right) dt \quad . \quad (\text{A.18})$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung [10]

$$\sin(\phi + \theta) = \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta \quad (\text{A.19})$$

können die Ausdrücke  $\sin \omega_p t \sin(\omega_p t + \varphi_{sl})$  und  $\sin(\omega_p t + \varphi_{sj}) \sin(\omega_p t + \varphi_{sl})$  partiell integriert werden:

$$\int_0^{T_p} \sin \omega_p t \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) dt = \frac{\pi}{\omega_p} \cos \varphi_{sl} \quad (\text{A.20})$$

$$\int_0^{T_p} \sin(\omega_p t + \varphi_{sj}) \sin(\omega_p t + \varphi_{sl}) dt = \frac{\pi}{\omega_p} \cos(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \quad . \quad (\text{A.21})$$

Damit folgt aus (A.18)

$$Q_1 = \frac{\pi}{\omega_p} \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \cos \varphi_{sl} + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \cos(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \right) \Re\{\eta_{m,n}\} \right] \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \Re\{\eta_{m,n}\} \quad . \quad (\text{A.22})$$

2.) Das zweite Zeitintegral (vgl. Gl. (3.99)) ist gegeben durch

$$Q_2 = \int_0^{T_p} \Re\{\zeta\} \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \cos(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Re\{\eta_{m,n}\} dt \quad . \quad (\text{A.23})$$

Gl. (A.17) wird in Gl. (A.23) eingesetzt, was zu der Beziehung

$$Q_2 = \int_0^{T_p} \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \sin \omega_p t + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \sin(\omega_p t + \varphi_{sj}) \right) \cdot \Re\{\eta_{m,n}(\phi, \theta)\} \right] \left( \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \cos(\omega_p t + \varphi_{sl}) \Re\{\eta_{m,n}\} \right) dt \quad (\text{A.24})$$



führt. Die trigonometrische Beziehung [10]

$$\cos(\phi + \theta) = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \quad (\text{A.25})$$

ermöglicht zusammen mit Gl. (A.19) die partielle Integration der Terme

$$\int_0^{T_p} \sin \omega_p t \cos(\omega_p t + \varphi_{sl}) dt = -\frac{\pi}{\omega_p} \sin \varphi_{sl} \quad , \quad (\text{A.26})$$

$$\int_0^{T_p} \sin(\omega_p t + \varphi_{sj}) \cos(\omega_p t + \varphi_{sl}) dt = \frac{\pi}{\omega_p} \sin(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \quad . \quad (\text{A.27})$$

Damit folgt aus Gl. (A.24)

$$\begin{aligned} Q_2 = & \frac{\pi}{\omega_p} \left[ \sum_{m,n} \left( -\sum_{i=1}^{N_p} g_{p(m,n)i} F_{pi} \sin \varphi_{sl} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_s} g_{s(m,n)j} \hat{F}_{sj} \sin(\varphi_{sj} - \varphi_{sl}) \right) \Re\{\eta_{m,n}\} \right] \sum_{m,n} g_{s(m,n)l} \hat{F}_{sl} \Re\{\eta_{m,n}\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

## A.4 Beschreibung der Kostenfunktion in Matrizenform

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie der Term aus Gl. (3.123)

$$\begin{aligned} Q_3 = & \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} F_{sl} \right) \Re\{\eta_{m,n}(\phi, \theta)\} \right]^2 \\ & + \left[ \sum_{m,n} \left( \sum_{k=1}^{N_p} g_{p(m,n)k} F_{pk} + \sum_{l=1}^{N_s} g_{s(m,n)l} F_{sl} \right) \Im\{\eta_{m,n}(\phi, \theta)\} \right]^2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

wobei  $\eta_{m,n}$  die komplexe Größe aus Gl. (3.71) darstellt, auf die Matrizenform

$$Q_4 = \sum_{m,n} \sum_{u,v} \left( c_{m,n,u,v} + \underline{b}_{m,n,u,v}^T \underline{F}_s + \underline{F}_s^T \underline{A}_{m,n,u,v} \underline{F}_s \right) \quad (\text{A.30})$$

gebracht werden kann. Mit der Definition der Vektoren

$$\underline{g}_{p(i,j)}^T = [ g_{p(i,j)1} \quad \cdots \quad g_{p(i,j)N_p} ] \quad , \quad (\text{A.31})$$

$$\underline{g}_{s(i,j)}^T = [ g_{s(i,j)1} \quad \cdots \quad g_{s(i,j)N_s} ] \quad , \quad (\text{A.32})$$

$$\underline{F}_p^T = [ F_{p1} \quad \cdots \quad F_{pN_p} ] \quad , \quad (\text{A.33})$$

$$\underline{F}_s^T = [ F_{s1} \quad \cdots \quad F_{sN_s} ] \quad (\text{A.34})$$

$$(\text{A.35})$$

kann Gl. (A.29) folgendermaßen geschrieben werden:

$$Q_3 = \left[ \sum_{m,n} \left( \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p + \underline{g}_{s(m,n)}^T \underline{F}_s \right) \Re\{\eta_{m,n}(\phi, \theta)\} \right]^2 + \left[ \sum_{m,n} \left( \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p + \underline{g}_{s(m,n)}^T \underline{F}_s \right) \Im\{\eta_{m,n}(\phi, \theta)\} \right]^2 . \quad (\text{A.36})$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man daraus

$$Q_3 = \sum_{m,n,u,v} \left( \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{F}_p^T \underline{g}_{p(u,v)} + 2 \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{g}_{s(u,v)}^T \underline{F}_s + \underline{F}_s^T \underline{g}_{s(m,n)} \underline{g}_{s(u,v)}^T \underline{F}_s \right) d_{m,n,u,v} \quad (\text{A.37})$$

mit

$$d_{m,n,u,v} = \Re\{\eta_{m,n}\} \Re\{\eta_{u,v}\} + \Im\{\eta_{m,n}\} \Im\{\eta_{u,v}\} . \quad (\text{A.38})$$

Der Vergleich von Gl. (A.30) mit Gl. (A.37) ergibt

$$\underline{\underline{A}}_{m,n,u,v} = d_{m,n,u,v} \underline{g}_{s(m,n)} \underline{g}_{s(u,v)}^T , \quad (\text{A.39})$$

$$\underline{b}_{m,n,u,v}^T = 2 d_{m,n,u,v} \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{g}_{s(u,v)}^T , \quad (\text{A.40})$$

$$c_{m,n,u,v} = d_{m,n,u,v} \underline{g}_{p(m,n)}^T \underline{F}_p \underline{F}_p^T \underline{g}_{p(u,v)} \quad (\text{A.41})$$

mit  $d_{m,n,u,v}$  aus Gl. (A.38).

## Anhang B

# Bewertung der Schalleistungsmessungen aus Kap. 5 und 6 nach dem Hüllflächenschalldruckverfahren

Nachfolgend wird gezeigt, dass der durch die Messgröße  $L_p$  bestimmte Schalleistungspegel nicht in jedem Fall genau genug ist, die rechnerisch erreichten Geräuschkinderungen — z.B. die in Kap. 6 genannte, durch intuitive Platzierung eines einzelnen Sekundäraktors im Mittel erzielte Schalleistungsminderung von 1.5 dB — experimentell zu verifizieren. Es wurden hierzu im Einzelnen Vorschriften geprüft, die folgende Messparameter betreffen:

- Messabstand,
- Gestalt der Messfläche,
- Dimension der Doppelkapsel,
- Dimension der reflektierenden Grundplatte im Vergleich zu relevanten Luftschallwellenlängen — Beugungseffekte,
- Anzahl der Mikrofone.

### B.1 Messabstand

Bei dem in Abb. 5.15 gezeigten Versuchsaufbau ist der Messabstand  $d$  nach [86] der kürzeste Abstand der halbkugelförmigen Messfläche von der schwingenden Stahlplatte. Mit dem Radius

$r = 1$  m der Messfläche und den Abmessungen  $0.8 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$  der Platte ergibt sich

$$d = \left(1 - \sqrt{(0.8/2)^2 + (0.5/2)^2}\right) \text{ m} \approx 0.53 \text{ m} \quad . \quad (\text{A.1})$$

Für Messungen der Genauigkeitsklasse 1 wird gefordert, dass dieser Abstand mindestens den halben Kugelradius beträgt, also

$$d \geq r/2 = 0.5 \text{ m} \quad (\text{A.2})$$

mit  $r \geq 1$  m. Beide Bedingungen sind im vorliegenden Fall gerade noch erfüllt. Neuere Versionen von ISO 3745, Abschnitt 8.2, verlangen dagegen, dass der Messabstand  $d$  mehr als das Doppelte der Plattendiagonalenlänge beträgt, was bei der Messung nicht erfüllt wurde. Im vorliegenden Fall wurde also für die betrachteten Frequenzen im oder zumindest nahe beim Nahfeld der schallabstrahlenden Platte gemessen. Der Fehler, der dadurch verursacht wird, wird als *Nahfeldfehler* bezeichnet. Nach [52, 56, 58] kommt er dadurch zustande, dass die Schallleistung über das Schalldruckquadrat gemäß Gl. (3.79) bestimmt wird und nicht über die allgemeingültige Beziehung

$$P = \iint_S \overline{p(t)v_n(t)}^t dS \quad (\text{A.3})$$

mit dem Schalldruck  $p$ , der flächennormalen Komponente  $v_n$  der Schallschnelle und der Integrationsfläche  $S$ . Dieser Nahfeldfehler kann in einen *Impedanz-* und *Winkelfehler* zerlegt werden. Allein der Impedanzfehler beträgt bei einer Frequenz von 150 Hz und bei einem Abstand der Messmikrofone von 1 m für Kugelstrahler der Ordnung größer als eins — d.h. mindestens Dipolstrahler — mindestens 2 dB. Für die Strahlerordnung 6 ergibt sich sogar ein Fehler von 25 dB. Da durch ASAC vor allem höhere Strahlerordnungen erzeugt werden, ist der Impedanzfehler mit und ohne ASAC mit Sicherheit unterschiedlich groß.

Wegen dieses systematischen Fehlers wurden die in der Arbeit untersuchten ASAC-Systeme anhand der berechneten Schallleistung beurteilt. Da sowohl die über die gemessenen Schalldrücke bestimmte Schallleistung als auch die Schalldruckpegel an den Einzelmikrofonpositionen gut mit den simulierten Werten korrelieren und dies auch mit dem subjektiven Eindruck übereinstimmt, werden sie zusätzlich in der Arbeit aufgeführt, zumal sie wichtige zusätzliche Erkenntnisse liefern.

## B.2 Gestalt der Messfläche

Der o.g. Winkelfehler kommt dadurch zustande, dass der lokale Schallintensitätsvektor nicht senkrecht auf die Messfläche steht. Nach [58] lässt sich zeigen, dass der Winkelfehler im Nahfeld einer halbkugelförmigen Messfläche verglichen mit dem Impedanzfehler meist eher unbedeutend ist.

### B.3 Dimension der Doppelkapsel aus Holz

Die in Kap. 5.1 vorgestellte Doppelkapsel aus Holz besitzt ein Volumen von

$$V = (1.20 \times 0.80 \times 0.92) \text{ m}^3 \approx 0.88 \text{ m}^3 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Dies entspricht 0.44% des Volumens

$$V_V = (9.0 \times 5.0 \times 4.5) \text{ m}^3 = 202.5 \text{ m}^3 \quad (\text{A.5})$$

des Schallmessraums. Demnach wird die in [86] für Schalleistungsmessungen der Genauigkeitsklasse 1 geäußerte Forderung nur knapp eingehalten, nach der das Volumen der Schallquelle vorzugsweise maximal 0.5% des Volumens des Schallmessraums betragen sollte.

### B.4 Dimension der reflektierenden Holzplatte

Wie zu Beginn von Kap. 5.5 bereits erwähnt wurde, ist die schwingende Stahlplatte von einer 20 mm dicken, runden Holzplatte mit dem Radius 1 m umgeben, deren Mittelpunkt in der Mitte der Stahlplatte liegt. Die Platte befindet sich auf der Doppelkapsel ca. 1 m über dem Boden des Schallmessraumes. Damit ist die Forderung einer eingebetteten Abstrahlung in einen Halbraum nicht erfüllt, da die Schallausbreitung am Rand der Holzplatte gebeugt wird (vgl. hierzu [93], S. 221 ff.), wodurch die Messung der Schalldrücke in den randnahen Messpunkten stark frequenzabhängig beeinflusst ist. Außerdem wurde eingangs bereits erwähnt, dass im Abstand von 1 m gemessen wurde. Demnach wurde am Rand der Grundplatte, also im Beugungsbereich, gemessen.

### B.5 Anzahl der Mikrofone

Wie bereits erwähnt wurde, umfasst der in Abb. 5.15 dargestellte Versuchsaufbau u.a. zehn Mikrofone. Nach [86] muss für die Schalleistungsmessungen der Genauigkeitsklasse 1 die Anzahl der Mikrofone mindestens doppelt so groß sein wie die Differenz in dB zwischen dem höchsten und niedrigsten gemessenen Schalldruckpegel in den interessierenden Frequenzbändern, und für die Genauigkeitsklasse 2 genügt der Multiplikator 1. Bei Messungen im Frequenzbereich von 300 bis 500 Hz wurden mit der vorliegenden Versuchsanordnung (zehn Mikrofone) maximal 9.5 dB zwischen dem höchsten und niedrigsten Schalldruckpegel gemessen. Damit sind für diesen Frequenzbereich Schalleistungsmessungen der Klasse 1 nicht, aber der Genauigkeitsklasse 2 gerade noch möglich.

## Literaturverzeichnis

- [1] Akishita S., Mitani Y. I., Miyaguchi H., *Sound Transmission Control through Rectangular Plate by Using Piezoelectric Ceramics as Actuators and Sensors*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 5, 371–378, 1994.
- [2] Anderson J. B., Mohan S., *Source and channel coding*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.
- [3] Autorenkollektiv, Leitung Schirmer W., *Lärmbekämpfung*, Verlag Tribüne, Berlin, 1971.
- [4] Bäck T., *Evolutionary algorithms in theory and practice: evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms*, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [5] Bathe K.-J., *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [6] Baumann W. T., Ho F. S., Robertshaw H. H., *Active structural acoustic control of broadband disturbances*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 92, 1998–2005, 1992.
- [7] Baz A., Poh S., Gilheany J., *A multi-mode distributed sensor for vibrating beams*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 165, 481–495, 1993.
- [8] Baz A., Ro J., *Optimum design and control of active constrained layer damping*, Transactions of the ASME Special 50th Anniversary Design Issue, Vol. 117(B), 135–144, 1995.
- [9] Bies D. A., Hansen C. H., *Engineering Noise Control: Theory and practice*, Spon, London, 1997.
- [10] Bronstein I. N., Semendjajew K. A., *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1987.
- [11] Bronstein I. N., Semendjajew K. A., *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1996.
- [12] Brosze O., *Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1958.
- [13] Brüel & Kjær, *Force Transducers Types 8200 & 8201 — Instruction Manual*, Brüel & Kjær, 1973.
- [14] Brüel & Kjær, *Accelerometers — Instructions and Applications*, Brüel & Kjær, 1976.
- [15] Brüel & Kjær, *Mini-Shaker Type 4810 — Instruction Manual*, Brüel & Kjær, 1987.

- [16] Burdisso R. A., Fuller C. R., *Theory of feedforward controlled system eigenproperties*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 153, 437–451, 1992.
- [17] Burdisso R. A., Fuller C. R., *Dynamic behavior of structural-acoustic systems in feedforward control of sound radiation*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 92, 277–286, 1992.
- [18] Burdisso R. A., Vipperman J. S., Fuller C. R., *Causality analysis of feedforward-controlled systems with broadband inputs*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 94, 234–242, 1993.
- [19] Cabell R. H., Lester H. C., Mathur G. P., Tran B. N., *Optimization of actuator arrays for aircraft interior noise control*, AIAA-Paper No. 93-4447, 1993.
- [20] Clark R. L., Fuller C. R., *Optimal placement of piezoelectric actuators and polyvinylidene fluoride error sensors in active structural acoustic control approaches*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 92, 1521–1533, 1992.
- [21] Clark R. L., Fuller C. R., *A model reference approach for implementing active structural acoustic control*, Vol. 92, 1534–1544, 1992.
- [22] Clark R. L., Fuller C. R., Burdisso R. A., *Design approaches for shaping polyvinylidene fluoride sensors in active structural acoustic control (ASAC)*, Proceedings of the Conference on Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and Their Application, Technomic Press, 702–726, 1992.
- [23] Collins S. A., *Sensors for structural control applications using piezoelectric polymer film*, S. M. Thesis, MIT, Cambridge, Mass., 1990.
- [24] Collins S. A., von Flotow A. H., *Active vibration isolation for spacecraft*, 42nd Congress of the International Astronautical Federation, Montreal, Paper No. IAF-91-289, 1991.
- [25] Concilio A., De Vivo L., *A Comparison of Different Strategies for Interior Active Noise Control by Piezoactuators*, ISMA21, Vol. 1, 247–258, 1996.
- [26] Cremer L., Heckl M., *Körperschall, berichtigter Reprint der Erstaufgabe*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [27] Dai Y., Fuller C.R., *Numerical Simulation of Active Control of Interior Noise in a Business Jet with Point Force Actuators — Optimization of Transducers*, Inter-Noise 95, Vol. 1, 533–536, 1995.
- [28] Davis L., *Handbook of genetic algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [29] Digisonix, *dX-57 Digital sound and vibration controller – installation, operation and maintenance manual*, Digisonix, Nelson Industries, 1992.
- [30] Dimitriadis E. K., Fuller C. R., Rogers C. A., *Piezoelectric Actuators for Noise and Vibration Control of Thin Plates*, 12th ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, Montreal, 1989.

- [31] Dimitriadis E. K., Fuller C. R., Rogers C. A., *Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates*, Transactions of the ASME, Vol. 113, 100–107, 1991.
- [32] Døssing O., *Strukturen prüfen — Teil 1: Mechanische Beweglichkeitsmessungen*, Brüel & Kjær, 1989.
- [33] Døssing O., *Strukturen prüfen — Teil 2: Modalanalyse und Simulation*, Brüel & Kjær, 1989.
- [34] Elliott S. J., Stothers I. M., Nelson P. A., *A Multiple Error LMS Algorithm and Its Application to the Active Control of Sound and Vibration*, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, Vol. ASSP-35, 1423–1434, 1987.
- [35] Ewins D. J., *Modal testing: theory and practice*, Research Studies Press, Taunton, Somerset, 1988.
- [36] Fahy F. J., *Sound and structural vibration*, Academic Press, London, 1985.
- [37] Feldmann D., *Repetitorium der Ingenieur-Mathematik: Teil 1*, C. Feldmann, Springe, 1990.
- [38] Feng L., *Active control of structurally radiated sound using multiactuator method*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 98, 397–402, 1995.
- [39] Fischer U., Heinzler M., *Tabellenbuch Metall*, 40. überarbeitete und erweiterte Auflage, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 1997.
- [40] Föllinger O., *Laplace- und Fourier-Transformation*, 6. überarbeitete Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1993.
- [41] Fuller C. R., Gentry C.A., Guigou C., *Active control of sound with foam-PVDF composite skins*, Proceedings of ICCE/2, Second International Conference on Composites Engineering, 239–240, 1995.
- [42] Fuller C. R., Elliott S. J., Nelson P. A., *Active Control of Vibration*, Academic Press, London, 1996.
- [43] Gandhi M. V., Thompson B. S., *Dynamically-tunable smart composites featuring electro-rheological fluids*, Proceedings of the SPIE Conference on Fiber Optic Smart Structures and Skins II, SPIE Publication, Vol. 1170, 294–304, 1989.
- [44] Gaul L., Fiedler C., *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1997.
- [45] Geppert O., *Aufbau und Test einer Einrichtung zur Unterdrückung der Schallabstrahlung von ebenen Flächen mit Hilfe von Piezo-Aktoren*, Diplomarbeit, Berufsakademie Stuttgart, Stuttgart, 1997.
- [46] Gerlach A., *Ein Beitrag zur Erweiterung und Anwendung der Direkten Finiten Elemente Methode zur Bestimmung der abgestrahlten Luftschalleistung dreidimensional ausgedehnter Körperschallquellen*, Shaker Verlag, Aachen, 2000.



- [47] Gill P. E., Murray W., Wright M. H., *Practical Optimization*, Academic Press, London, 1981.
- [48] Goldberg D. E., Richardson J., *Genetic Algorithms with Sharing for Multimodal Function Optimization*, Genetic algorithms and their applications: Proceedings of the second International Conference on Genetic Algorithms, 41–49, 1987.
- [49] Goldberg D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997.
- [50] Goodfriend M. J., Shoop K. M., *Adaptive characteristics of the magnetostrictive alloy, Terfenol-D, for active vibration control*, Proceedings of the Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, Technomic Press, 199–209, 1991.
- [51] Heckl M., *Abstrahlung von ebenen Schallquellen*, *Acustica*, Vol. 37, 155–166, 1977.
- [52] Heckl M., Müller H. A., *Taschenbuch der Technischen Akustik, 2. Auflage*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [53] Henn H., Sinambari G. R., Fallen M., *Ingenieurakustik*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1984.
- [54] Hiller C., *Aktive Lärmkompensation auf der Basis stochastischer Gradientenverfahren*, Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1995.
- [55] Holland J. H., *Adaption in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [56] Hübner G., *Analysis of errors in measuring machine noise under free-field conditions*, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 54, 967–977, 1973.
- [57] Hübner G., *Description of Structure-Borne Sound Intensity for Arbitrarily Shaped Bars and Shells based on a Wave Theory*, CETIM, 129–136, Senlis, 1990.
- [58] Hübner G., *Zur Schalleistung von Schallquellensystemen - Abstrahlung, Messung: Impedanz- und Winkelfehler*, DAGA 1975, Braunschweig, Kongreßbericht VDE-Verlag, 129–136, Berlin, 1975.
- [59] Hübner G., Messner J., Meynerts E., *Schallabstrahlungsberechnung mit der Direkten Finite Elemente Methode*, Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz - Forschung Fb479, Dortmund, 1986.
- [60] Hübner G., Rieger W., *Schallintensitätsmessverfahren zur Schalleistungsbestimmung in der Praxis*, Wirtschaftsverlag NW, Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz - Forschung Fb550, Bremerhaven, 1988.
- [61] Hübner G., Messner J., Rieger W., *Schalleistungsbestimmung mit der Direkten Finite Elemente Methode*, Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz - Forschung Fb660, Dortmund, 1992.

- [62] IEEE Standard on Piezoelectricity, *IEEE Standard on Piezoelectricity*, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, 1988.
- [63] Imperial College of Science, Technology and Medicine, *ICATS - Reference Manual*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Mechanical Engineering Department, London, 1997.
- [64] International Standard Organization (ISO), *ISO 3745: Acoustics — Determination of sound power levels of noise sources — Precision methods for anechoic and semi-anechoic rooms*, International Standard Organization, 1977.
- [65] International Standard Organization (ISO), *ISO 3747: Acoustics — Determination of sound power levels of noise sources — Survey method using a reference sound source*, International Standard Organization, 1987.
- [66] International Standard Organization (ISO), *ISO/TR 7849: Acoustics — Estimation of airborne noise emitted by machinery using vibration measurement*, International Standard Organization, 1987.
- [67] Jackson C. M., Wagner H. J., Wasilewski R. J., *55-Nitinol — the alloy with a memory: its physical metallurgy, properties and applications*, NASA-SP-5110, Washington, 1972.
- [68] Johnson M. E., Elliott S. J., *Active control of sound radiation using volume velocity cancellation*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 98, 2174–2186, 1995.
- [69] Junger M. C., Feit D., *Sound, Structures and their Interaction*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1986.
- [70] Kim S. J., Jones J. D., *Optimal Design of Piezoactuators for Active Noise and Vibration Control*, AIAA Journal, Vol. 29, 2047–2053, 1991.
- [71] Kurtze G., *Physik und Technik der Lärmbekämpfung*, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1964.
- [72] Kurze U. J., *Lärmarm konstruieren XII — Mechanische Impedanzen*, Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz, Forschung Fb 398, Dortmund, 1985.
- [73] Leissa A. W., *Vibrations of Plates*, Acoustical Society of America, Woodbury, 1993.
- [74] Maillard J. P., Fuller C. R., *Advanced time domain wave-number sensing for structural acoustic systems. I. Theory and design*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 95, 3252–3261, 1994.
- [75] Maillard J. P., Fuller C. R., *Advanced time domain wave-number sensing for structural acoustic systems. II. Experiments on active broadband radiation control of a simply supported plate*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 98, 2613–2621, 1995.
- [76] Main G. L., *Active control of structural acoustics for naval applications*, Inter noise 92, 431–434, 1992.

- [77] Mathur G.P., *Application of Active Control Techniques to Aircraft Cabin Reduction*, Active Control of Noise and Vibrations, International Workshop organized by CETIM, Senlis, 1996.
- [78] Meier P., *Vibrationen auf der Spur*, Maschinenmarkt — Wochenjournal für die Industrie, Heft-Nr. 21, Vogel Verlag und Druck KG, Würzburg, 1991.
- [79] Meirovitch L., *Analytical Methods in Vibrations*, The MacMillan Company, New York, 1967.
- [80] Micro-Epsilon Messtechnik, *OptoNCDT Serie 1600 — Berührungsloser, laser-optischer Wegsensor*, Micro-Epsilon Messtechnik, Ortenburg, 1990.
- [81] Möser M., Jakob A., *Grundlagen der aktiven Minimierung der Schallabstrahlung von schwingenden Platten*, Forschungsbericht des Instituts für Technische Akustik der TU Berlin, Berlin, 1996.
- [82] Morgan D. R., Sanford C., *A control theory approach to the stability and transient analysis of the filtered  $x$  LMS adaptive notch filter*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Signal Processing, Vol. 40, 2341–2346, 1980.
- [83] Morgan M., *Piezoelectric Ceramics – Data Book for Designers*, Morgan Matroc Limited – Transducer Products Division, Southampton, 1997.
- [84] Nelson P. A., Elliott S. J., *Active control of sound*, Academic Press, London, 1995.
- [85] Newnham R. E., Dogan A., Xu Q. C., Onitsuka K., Tressler J., Yoshikawa S., *Flexensional “moonie” actuators*, Proceedings of 1993 IEEE Ultrasonics Symposium, 509–513, 1993.
- [86] Normenausschuß Akustik und Schwingungstechnik (FANAK), *DIN 45635 Teil 1 — Geräuschemessung an Maschinen; Luftschallemission, Hüllflächenverfahren, Rahmenverfahren für 3 Genauigkeitsklassen*, Deutsches Institut für Normung e.V., 1984.
- [87] Normenausschuß Akustik und Schwingungstechnik (FANAK), *DIN 45635 Teil 8 — Geräuschemessung an Maschinen; Luftschallemission, Körperschallmessung; Rahmenverfahren*, Deutsches Institut für Normung e.V., 1987.
- [88] Normenausschuß Akustik und Schwingungstechnik (FANAK), *DIN 45635 Teil 2 — Geräuschemessung an Maschinen; Luftschallemission, Hallraum-Verfahren; Rahmen-Messverfahren (Genauigkeitsklasse 1)*, Deutsches Institut für Normung e.V., 1987.
- [89] Normenausschuß Akustik, Lärminderung und Schwingungstechnik (NALS), *DIN EN ISO 9614-1 — Bestimmung der Schalleistungspegel von Geräuschquellen aus Schallintensitätsmessungen*, Deutsches Institut für Normung e.V., 1995.
- [90] Pan J., Snyder S. D., Hansen C. H., *Active control of far-field sound radiation by a rectangular panel*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 91, 2056–2066, 1992.
- [91] Polytec, *Operator’s Manual for Polytec Scanning Vibrometer PSV-200*, Polytec, Waldbronn, 1997.

- [92] Rechenberg I., *Evolutionstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*, Fromann-Holzboog, Stuttgart, 1973.
- [93] Reichardt W., *Grundlagen der Technischen Akustik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1968.
- [94] Rieger W., *Entwicklung eines Messverfahrens zur Bestimmung der abgestrahlten Luftschallleistung ebener Strahler auf der Grundlage der DFEM*, Dissertation an der Universität Stuttgart, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Stuttgart, 1997.
- [95] Ritz W., *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, Verlag Georg Reimer, Berlin, 1909.
- [96] Schwefel H. P., *Numerical optimization of computer models*, Wiley, Chichester, 1981.
- [97] Simpson M. T., Hansen C. H., *Use of genetic algorithms to optimize vibration actuator placement for active control of harmonic interior noise in a cylinder with floor structure*, Noise Control Engineering Journal, Vol. 44, 169–184, 1996.
- [98] Stangroom J. E., *Electrorheological fluids*, Journal of Physics Technology, Vol. 14, 290–296, 1983.
- [99] Stender J., Hillebrand E., Kingdon J., *Genetic Algorithms in optimization, simulation and modelling*, IOS Press, Washington, 1994.
- [100] Structural Dynamics Research Corp. (SDRC), *I-DEAS System Dynamics Analysis — User's Guide*, Structural Dynamics Research Corp., Milford, 1990.
- [101] Sung C.-C., Chiu C.-Y., *Sound Transmission Control of Clamped Plate by using Piezoelectric Ceramics as Control Moment*, Active 95, 291–298, 1995.
- [102] Szilard R., *Theory and Analysis of Plates*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [103] The MathWorks, *MATLAB User's Guide*, The MathWorks, Natick, 1993.
- [104] Uchino K., *Ferroelectric Ceramics*, Materials Science and Technology, Eds. Cahn R. W., Haasen P. A., Kramer E. J., VCH Publishers Inc., New York, 1994.
- [105] Vemuri V., Karplus W. J., *Digital Computer Treatment of Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [106] Wallace C. E., *Radiation Resistance of a Rectangular Panel*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 51, 946–952, 1972.
- [107] Waanders J. W., *Piezoelectric Ceramics – Properties and Applications*, Philips Components – Marketing Communications, Eindhoven, 1992.
- [108] Wang B. T., Fuller C. R., *Near-field pressure, intensity, and wave-number distributions for active structural acoustic control of plate radiation*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 92, 1489–1498, 1992.

- [109] Widrow B., Shur D., Shaffer S., *On adaptive inverse control*, Proceedings of the 15th ASILOMAR conference on Circuits, Systems and Computers, 185–195, 1981.
- [110] Widrow B., Stearns S. D., *Adaptive signal processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [111] Zurmühl R., Falk S., *Matrizen und ihre Anwendungen*, 5., überarbeitete und erweiterte Auflage, Teil 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.