

Dipl.-Ing. Ralf Rothfuß, Zell

**Anwendung der  
flachheitsbasierten  
Analyse und Regelung  
nichtlinearer  
Mehrgrößensysteme**

Reihe **8**: Meß-, Steuerungs-  
und Regelungstechnik

Nr. **664**

Rothfuß, Ralf

## **Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme**

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 664. Düsseldorf: VDI Verlag 1997.  
192 Seiten, 34 Bilder, 2 Tabellen.

**Für die Dokumentation:** Nichtlineare Systeme – Flachheit – Entwurf von Steuerungen und Regelungen – Nichtlineare Trajektorienfolge – Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung – Symbolsprache Mathematica

Das 1992 von Fliess, Lévine, Martin und Rouchon eingeführte Konzept der Flachheit eröffnet einen neuen Zugang zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme. Flache nichtlineare Systeme sind eine Verallgemeinerung der linearen steuerbaren Systeme und ermöglichen einen systematischen Entwurf von Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge. Zur Realisierung der flachheitsbasierten Folgeregelung können nichtlineare Beobachter mit zeitvarianter Verstärkung verwendet werden. Die Eigenschaft der Flachheit und die daraus resultierende Lösung des Trajektorienfolgeproblems werden zusammenfassend dargestellt. Darüber hinaus werden Untersuchungen zur Flachheitsanalyse und zum systematischen Entwurf einer Zustandsschätzung für flache Systeme angestellt. Die flachheitsbasierte Planung geeigneter Solltrajektorien und der Entwurf von Steuerungen und Regelungen mit Zustandsschätzung zur Trajektorienfolge werden beispielhaft für einen Fedbatch-Bioreaktor und einen chemischen Rührkesselreaktor untersucht. Für die rechnerunterstützte Durchführung des flachheitsbasierten Entwurfs wird eine Funktionsbibliothek für das Computer-Algebra-System MATHEMATICA entwickelt.

### **Die Reihen der FORTSCHRITT-BERICHT E VDI:**

- |  |   |
|--|---|
| 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente | 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik                                      |
| 2 Fertigungstechnik                      | 13 Fördertechnik/Logistik   |
| 3 Verfahrenstechnik                      | 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik                                      |
| 4 Bauingenieurwesen                      | 15 Umwelttechnik  |
| 5 Grund- und Werkstoffe                  | 16 Technik und Wirtschaft   |
| 6 Energieerzeugung                       | 17 Biotechnik/Medizintechnik  |
| 7 Strömungstechnik                       | 18 Mechanik/Bruchmechanik   |
| 8 Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik | 19 Wärmetechnik/Kältetechnik  |
| 9 Elektronik                             | 20 Rechnerunterstützte Verfahren<br>(CAD, CAM, CAE, CAP, CAQ, CIM, ...) |
| 10 Informatik/Kommunikationstechnik      | 21 Elektrotechnik   |
| 11 Schwingungstechnik                    |   |

Copyright: Verfasser (2006) - Nachdruck der 1997 erschienenen, beim Verlag inzwischen vergriffenen Arbeit. Wiedergabe von Umschlag und Titelblatt mit freundlicher Genehmigung des VDI-Verlages, Düsseldorf.

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 1997

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9546

ISBN 3-18-366408-9

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart. Die durchgeführten Untersuchungen wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen zweier Projekte über „Rechnerunterstützte Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme“ und „Flache Systeme“ gefördert.

Ich möchte mich zunächst bei Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Zeitz für die Anregung und Förderung dieser Arbeit sowie für die Gewährung des hierfür erforderlichen Umfelds bedanken. Er hat mir viele wertvolle Hinweise gegeben, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Besonders gefreut habe ich mich darüber, daß Herr Professor Dr. M. Fliess, Direktor des Laboratoire des Signaux et Systèmes, C. N. R. S.-Gif-sur-Yvette, als einer der Begründer der Theorie der flachen Systeme den Mitbericht übernommen hat. Deshalb bedanke ich mich für sein Interesse und vor allem für die sehr schnelle Durchsicht des Manuskripts.

Mein ganz besonderer Dank gebührt Herrn Dr. J. Rudolph, der mein Interesse an den „flachen Systemen“ geweckt hat und mir in vielen Diskussionen unterschiedliche Wege zu dieser interessanten Theorie aufgezeigt hat. Darüber hinaus danke ich ihm für die zahlreichen fachlichen (und nicht-fachlichen) Diskussionen und wertvollen Hinweise während der Entstehung dieses Manuskripts.

Außerdem bedanke ich mich beim Institutsleiter, Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. mult. E. D. Gilles, für die günstigen Rahmenbedingungen in seinem Institut, durch die meine Arbeit wesentlich erleichtert wurde. Den Kolleginnen und Kollegen am Institut gilt mein Dank für das gute Arbeitsklima und die immer vorhandene Diskussions- und Hilfsbereitschaft. Besonders erwähnen möchte ich die enge Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Ing. A. Riek vom Institut für Bioverfahrenstechnik der Universität Stuttgart, ohne den die experimentellen Untersuchungen zur Regelung des Bioreaktors nicht möglich gewesen wären.

Schließlich gilt mein Dank meinen Eltern und meiner Frau, die durch ihre Unterstützung und ihr Verständnis diese Arbeit ermöglicht haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	1
1.2 Flache Systeme . . . . .	3
1.3 Einordnung der flachheitsbasierten Methode . . . . .	9
1.4 Ziele . . . . .	11
1.5 Gliederung . . . . .	13
<b>2 Flachheitsbasierte Analyse und Synthese</b>	<b>15</b>
2.1 Flachheit nichtlinearer Systeme . . . . .	17
2.1.1 Definition der Flachheit . . . . .	17
2.1.2 Weitere Eigenschaften und Bemerkungen zur Flachheit . . . . .	22
2.1.3 Flachheitsanalyse eines Zwei-Gelenk-Roboters . . . . .	26
2.2 Flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems . . . . .	30
2.2.1 Entwurf von Solltrajektorien und Trajektorienfolge im offenen Kreis . . . . .	30
2.2.2 Flachheit und Inversion nichtlinearer Systeme . . . . .	35
2.2.3 Flachheit und Steuerbarkeit . . . . .	36
2.2.4 Trajektorienfolge im geschlossenen Kreis . . . . .	39
2.3 Exakte Zustandslinearisierung nichtlinearer Systeme . . . . .	44
2.3.1 Äquivalenz durch endogene Zustandsrückführung . . . . .	45
2.3.2 Flachheit und exakte Zustandslinearisierung . . . . .	48
2.4 Zusammenfassung . . . . .	51
<b>3 Existenz und Bestimmung eines flachen Ausgangs</b>	<b>52</b>
3.1 Strukturell flache Systemdarstellungen . . . . .	53
3.1.1 Lineare zeitvariante Regelungsnormalform . . . . .	54
3.1.2 Nichtlineare Regelungsnormalform . . . . .	56
3.1.3 Verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform . . . . .	59

3.2	Transformation in strukturell flache Systemdarstellungen . . . . .	65
3.2.1	Transformation in eine lineare zeitvariante Regelungsform . . . . .	65
3.2.2	Transformation in eine nichtlineare Regelungsform . . . . .	71
3.2.3	Transformation in eine verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform . . . . .	78
3.2.4	Weitere Existenzbedingungen eines flachen Ausgangs . . . . .	84
3.3	Zusammenfassung . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Entwurfsmethodik flachheitsbasierter Steuerungen und Regelungen</b>	<b>89</b>
4.1	Entwurfsschritte für das Trajektorienfolgeproblem . . . . .	89
4.2	Zustandsschätzung für flache Systeme . . . . .	95
4.2.1	Nichtlinearer Beobachter mit zeitvarianter Verstärkung . . . . .	97
4.2.2	Nichtlineares Filter mit zeitvarianter Verstärkung . . . . .	102
4.3	Rechnerunterstützte Durchführung mittels eines Computer-Algebra-Systems	103
4.3.1	Funktionen eines Computer-Algebra-Systems für die flachheitsbasierten Entwurfsschritte . . . . .	104
4.3.2	Funktionsbibliothek zur flachheitsbasierten Analyse und Synthese . . . . .	108
4.4	Zusammenfassung . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Anwendungsbeispiele für die flachheitsbasierte Trajektorienfolge</b>	<b>111</b>
5.1	Fedbatch-Bioreaktor . . . . .	111
5.1.1	Das Trajektorienfolgeproblem für den Bioreaktor . . . . .	112
5.1.2	Bestimmung eines flachen Ausgangs für den Bioreaktor . . . . .	116
5.1.3	Entwurf von Solltrajektorien . . . . .	118
5.1.4	Statische Zustandsrückführung zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers . . . . .	120
5.1.5	Nichtlineares Folgefilter mit zeitvarianter Verstärkung . . . . .	121
5.1.6	Simulationsergebnisse . . . . .	124
5.1.7	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	126
5.2	Chemischer Rührkesselreaktor . . . . .	130
5.2.1	Das Trajektorienfolgeproblem für den Rührkesselreaktor . . . . .	131
5.2.2	Heuristische Bestimmung eines flachen Ausgangs . . . . .	133
5.2.3	Systematische Bestimmung eines flachen Ausgangs . . . . .	136
5.2.4	Stationäre Analyse und Entwurf von Solltrajektorien . . . . .	138
5.2.5	Quasi-statische Zustandsrückführung zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers . . . . .	142
5.2.6	Nichtlinearer Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung . . . . .	143
5.2.7	Simulationsergebnisse . . . . .	146
5.3	Zusammenfassung . . . . .	147

---

<b>6 Zusammenfassung</b>	<b>150</b>
<b>A Ergänzungen zu den Transformationen in verschiedene Regelungsformen</b>	<b>153</b>
A.1 Herleitung der Transformation in die lineare zeitvariante Regelungsform . . .	153
A.2 Herleitung der Transformation in die nichtlineare Regelungsform . . . . .	155
A.3 Integrierbarkeit partieller Differentialgleichungen . . . . .	157
<b>B Ergänzungen zu strukturell flachen Systemen</b>	<b>160</b>
B.1 Algorithmus zur Bestimmung eines flachen Ausgangs . . . . .	160
B.2 Vergleich von Satz 3.7 und Satz 3.4 . . . . .	165
<b>C Systemgrößen und Parameterwerte für die Simulation</b>	<b>168</b>
C.1 Systemgrößen und Parameterwerte für den Bioreaktor . . . . .	168
C.1.1 Systemgrößen und Parameterwerte für die Trophophase . . . . .	168
C.1.2 Systemgrößen und Parameterwerte für die Idiophase . . . . .	169
C.2 Systemgrößen und Parameterwerte für den Rührkesselreaktor . . . . .	172
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>173</b>

# Symbolverzeichnis

Das nachfolgende Verzeichnis enthält nur die Symbole, die durchgängig in der Arbeit verwendet werden. Die nur lokal benutzten Symbole werden nicht aufgeführt.

## Allgemeine Systemgrößen

$x$	$n$ -Vektor der Zustandsgrößen
$x_0$	Anfangszustand
$u$	$m$ -Vektor der Eingangsgrößen
$y$	$m$ -Vektor des flachen Ausgangs
$w$	$m$ -Vektor der Regelgrößen
$\eta$	$q$ -Vektor der Meßgrößen
$z$	$\tilde{n}$ -Vektor der Zustandsgrößen der Regelungsnormalform ( $\tilde{n} \geq n$ )
$\xi$	$q$ -Vektor der dynamischen Erweiterung
$\chi$	$n'$ -Vektor der Zustandsgrößen (Originalzustand und dynamische Erweiterung)
$v$	$m$ -Vektor der Eingangsgrößen des linearisierten Systems
$f$	Vektorfeld der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, u)$
$x_d$	$n$ -Vektor der Solltrajektorien des Zustands
$u_d$	$m$ -Vektor der Solltrajektorien des Eingangs (Steuerung)
$y_d$	$m$ -Vektor der Solltrajektorien des flachen Ausgangs
$w_d$	$m$ -Vektor der Solltrajektorien der Regelgrößen
$e = y - y_d$	$m$ -Vektor des Trajektorienfolgefehlers des flachen Ausgangs
$\hat{x}$	$n$ -Vektor der geschätzten Beobachterzustandsgrößen
$\hat{x}_0$	Anfangszustand des Beobachters
$\tilde{x} = \hat{x} - x$	$n$ -Vektor des Schätzfehlers



**Skalare Größen**

$n, n'$	Dimensionen des Zustandsvektors
$m$	Dimension des Eingangsvektors
$q$	Dimension des Meßvektors
$q_j^i$	Parameter der Dynamik des Trajektorienfolgefehlers
$\gamma_j^i$	Parameter der Dynamik des Schätzfehlers
$\rho_i$	Teilsystemlänge bzw. Steuerbarkeitsindex
$\kappa_i, \kappa_i'$	Teilsystemlänge bzw. verallgemeinerter Steuerbarkeitsindex
$\mu_i$	Teilsystemlänge bzw. Beobachtbarkeitsindex

**Vektoren, Matrizen, Distributionen**

$\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}$	Basis-Vektorfelder
$\mathcal{F}$	Verlängertes Vektorfeld der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

$$\mathcal{F} = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_k^{(j)}}$$

$\Delta(\mathbf{x}), D(\mathbf{x})$	Distributionen
$Q(t)$	Beobachtbarkeitsmatrix

**Ableitungen und Operatoren**

$u_i^{(r)}$	$r$ -te Zeitableitung der Eingangsgröße $u_i$
$\mathbf{u}^{(r)}$	Vektor der Eingangsableitungen $\left(u_i, \dot{u}_i, \dots, u_i^{(r)}\right)$
$\langle \mathbf{u}^{(r)} \rangle$	Vektor der Eingänge mit Zeitableitungen $\left(u_1^{(r_1)}, \dots, u_m^{(r_m)}\right)$
$L_f \lambda(\mathbf{x})$	Lie-Ableitung der Funktion $\lambda(\mathbf{x})$ entlang des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ :

$$L_f \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$L_f^{k+1} \lambda(\mathbf{x}) = L_f^k \lambda(\mathbf{x}), \quad k \geq 0$$

$$L_f^0 \lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$$

$[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})]$	Lie-Klammer der Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ :
--	--

$$[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$\text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x})$  Differentialoperator für die Lie-Klammer der Vektorfelder  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}\text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})] \\ \text{ad}_f^{k+1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \text{ad}_f (\text{ad}_f^k \mathbf{g}(\mathbf{x})), \quad k \geq 0 \\ \text{ad}_f^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$M_A \mathbf{c}^T$  zeitvarianter Differentialoperator für den Zeilenvektor  $\mathbf{c}^T(t)$ :

$$\begin{aligned}M_A \mathbf{c}^T &= \mathbf{c}^T A(t) + \dot{\mathbf{c}}^T \\ M_A^{k+1} \mathbf{c}^T &= M_A (M_A^k \mathbf{c}^T), \quad k \geq 0 \\ M_A^0 \mathbf{c}^T &= \mathbf{c}^T\end{aligned}$$

$N_A \mathbf{b}$  zeitvarianter Differentialoperator für den Vektor  $\mathbf{b}(t)$ :

$$\begin{aligned}N_A \mathbf{b} &= A(t)\mathbf{b} - \dot{\mathbf{b}} \\ N_A^{k+1} \mathbf{b} &= N_A (N_A^k \mathbf{b}), \quad k \geq 0 \\ N_A^0 \mathbf{b} &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

# Kapitel 1

## Einleitung

Modellgestützte Verfahren werden in zunehmendem Maße zur Prozeßführung eingesetzt (Gilles 1987). Häufig kommen dabei lineare Prozeßmodelle zum Einsatz, die durch eine *Taylor-Linearisierung* eines nichtlinearen Modells um einen festen Arbeitspunkt gewonnen werden. *Nichtlineare* Modelle müssen berücksichtigt werden, wenn die Systemgrößen während des Prozesses einen großen Wertebereich durchlaufen. Dies ist zum einen bei allen instationären Prozessen, wie z. B. bei Anfahrvorgängen chemischer Reaktoren, bei Fedbatch-Bioprozessen, bei großen und schnellen Bewegungen von Robotern oder bei elektrischen Antrieben mit variabler Drehzahl der Fall. Zum anderen gilt dies für den Übergang eines Prozesses zwischen zwei weit entfernten stationären Zuständen. Bei den genannten Beispielen ist die Gültigkeit linearer Modelle stark eingeschränkt. In diesem Fall müssen nichtlineare Modelle zur Beschreibung der Prozesse und zum modellgestützten Entwurf einer Prozeßführung herangezogen werden.

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die speziellen Problemstellungen bei der Analyse und beim Reglerentwurf instationärer nichtlinearer Prozesse erläutert. Daran schließt sich eine anschauliche Einführung der *Flachheit* nichtlinearer Systeme an. Diese Systemeigenschaft, welche für die Analyse und den Entwurf von instationären Prozeßführungen eine wesentliche Bedeutung besitzt, steht im Mittelpunkt dieser Arbeit. Eine Übersicht über theoretische und anwendungsorientierte Arbeiten zu flachheitsbasierten Analyse- und Entwurfsmethoden sowie die Gliederung der Arbeit bilden den Abschluß dieses einleitenden Kapitels.

### 1.1 Problemstellung

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß das mathematische Modell des betrachteten Prozesses durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben wird. Dabei wird angenommen, daß die Funktionen in den Differentialgleichungen – zumindest abschnittsweise –

hinreichend oft stetig differenzierbar sind. Außerdem wird anstelle eines detaillierten Simulationsmodells mit vielen Zustandsvariablen ein möglichst einfaches „regelungstechnisches Entwurfsmodell“ verwendet, das nur die für die Regelung wesentlichen dynamischen Vorgänge mit Hilfe weniger Zustandsvariablen beschreibt. Fehler, die durch die Verwendung des „einfachen“ Modells entstehen, sollen durch den Einsatz eines Reglers ausgeglichen werden.

Die in dieser Arbeit betrachtete regelungstechnische *Entwurfsaufgabe* für einen instationären nichtlinearen Prozeß besteht darin, auf der Basis des Entwurfsmodells zunächst einen geeigneten Sollverlauf der zu regelnden Größen unter Berücksichtigung der vorhandenen Beschränkungen für die Eingangsgrößen und Zustände zu entwerfen. Anschließend müssen die Eingangsgrößen so gewählt werden, daß das System dem gewählten Sollverlauf folgt. Dieses Problem der *Trajektorienfolge* schließt das *Stabilisierungsproblem* eines festen Arbeitspunktes als Spezialfall ein, bei dem die Solltrajektorie auf einen zu stabilisierenden Arbeitspunkt reduziert ist. Bei der Bestimmung des Verlaufs der Eingangsgrößen sind zwei Fälle zu unterscheiden: ist das System stabil und wird es hinreichend genau durch das Modell beschrieben, so kann die Trajektorienfolge durch eine *Steuerung* erreicht werden. Darüber hinaus kann durch eine *Trajektorienfolgeregelung* auf der Basis einer Zustandsrückführung ein bestimmtes Einschwingverhalten vorgegeben bzw. die Folgebewegung gegen Anfangsfehler und Störungen stabilisiert werden.

Bei der *Systemanalyse* wird zunächst untersucht, ob die gestellte Entwurfsaufgabe überhaupt eine Lösung besitzt, d. h. ob für das Modell eine Steuerung bzw. Regelung entworfen werden kann, die das Trajektorienfolgeproblem löst. Im Fall linearer Systeme ist dies gleichbedeutend mit der Frage nach der *Zustands- bzw. Ausgangssteuerbarkeit* des Systems, zu deren Überprüfung notwendige und hinreichende Kriterien existieren (Ackermann 1983, Föllinger 1985). Die Analyse der *Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme* ist ein schwieriges Problem, zu dessen Untersuchung im Gegensatz zu linearen Systemen keine allgemein gültigen Kriterien existieren (Sussmann und Jurdjevic 1972, Piechotka 1989, Fliess *et al.* 1995b). Neben der Feststellung, ob prinzipiell eine Lösung der Entwurfsaufgabe existiert, gehört zur Systemanalyse auch die Frage, ob durch zusätzliche Eingangsgrößen die Lösung vereinfacht bzw. die Ergebnisse verbessert werden können. Da in den meisten Fällen nicht alle Zustände des Systems gemessen werden, ist für die über eine Zustandsrückführung realisierte Trajektorienfolgeregelung die Schätzung nicht gemessener Zustände erforderlich. Deshalb muß die *Beobachtbarkeit* des Systems analysiert werden, wofür notwendige und hinreichende Kriterien – auch für nichtlineare Systeme – zur Verfügung stehen (Birk 1992).

Beim *Entwurf* einer Steuerung bzw. Regelung für die Trajektorienfolge stellt sich zunächst die Frage, ob lineare oder nichtlineare Entwurfsverfahren zum Einsatz kommen. Der Einsatz linearer Entwurfsverfahren wird durch den Gültigkeitsbereich der linearisierten Systemgleichungen eingeschränkt. Aus diesem Grund wird das System mitunter um mehrere

Arbeitspunkte linearisiert, zwischen denen in Abhängigkeit von Prozeßgrößen (Zustände, Eingänge) nach bestimmten, oft heuristischen, Regeln umgeschaltet wird (Baumann und Rugh 1986, Baumann 1988, Klatt und Engell 1995). Alternativ können Steuerung bzw. Regelung auf der Basis der um die Solltrajektorien linearisierten Modellgleichungen entworfen werden. Ebenso wie bei der Linearisierung um mehrere Arbeitspunkte wird bei diesem Verfahren die Reglerverstärkung in Abhängigkeit von Prozeßgrößen angepaßt (sog. *gain scheduling*) (Fliess 1991). Im Unterschied hierzu wird in dieser Arbeit der *nichtlineare* Entwurf einer Steuerung und Regelung für das Trajektorienfolgeproblem betrachtet.

## 1.2 Flache Systeme

Eine zur Lösung der genannten nichtlinearen Analyse- und Entwurfsaufgaben hilfreiche und häufig anzutreffende Eigenschaft ist die von Fliess, Lévine, Martin und Rouchon für nichtlineare Systeme definierte *Flachheit* (Fliess *et al.* 1992*a*, Fliess *et al.* 1995*b*). Flachheit kann als eine mögliche Erweiterung der Steuerbarkeit linearer Systeme interpretiert werden. Flache Systeme sind durch eine spezielle Art einer dynamischen Zustandsrückführung, die endogen genannt wird, exakt zustandslinearisierbar. Die Zustandslinearisierbarkeit erklärt auch den Begriff „flach“: Bei einem linearen System kann der Zustandsraum durch ein Koordinatensystem ohne Krümmung, d. h. ein „flaches“ Koordinatensystem, beschrieben werden.

Für flache Systeme können in einfacher Weise Solltrajektorien entworfen sowie die zugehörigen Steuerungen bestimmt werden. Weiterhin kann eine nichtlineare Zustandsrückführung angegeben werden, die die Folgebewegung gegen Störungen und Modellfehler stabilisiert. Beim flachheitsbasierten Entwurf wird nicht dem nichtlinearen System ein lineares dynamisches Verhalten aufgeprägt, vielmehr wird nur die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers exakt linearisiert. Mittels dieser linearisierenden Zustandsrückführung folgt das System den vorgegebenen Solltrajektorien, die der nichtlinearen Dynamik Rechnung tragen. Diese Vorgehensweise hat ein sehr „natürliches“ Regelverhalten und einen geringen Stellaufwand zur Folge.

Die Bedeutung der Flachheit für die Lösung regelungstechnischer Probleme soll am Beispiel eines einfachen Modells eines im Fedbatch-Verfahren betriebenen Bioreaktors veranschaulicht werden. Bei diesem Beispiel werden die wesentlichen Zusammenhänge für das Systemverhalten qualitativ beschrieben. Eine Erläuterung des dargestellten Sachverhalts mit Hilfe der Systemgleichungen findet sich in Kapitel 2.

**Beispiel 1.1** *Der in Bild 1.1 (a) dargestellte und im Fedbatch-Verfahren betriebene Bioreaktor dient zur Herstellung von Penicillin. Dazu wird dem Reaktor über die Eingangsgröße  $u$  (Eingangstrom) die Masse  $S$  an Substrat (Glucose) zugeführt, das die Ausgangsstoffe und die Energie für das Wachstum der Biomasse  $X$  bereitstellt (Frese 1992). Für die Produktion*

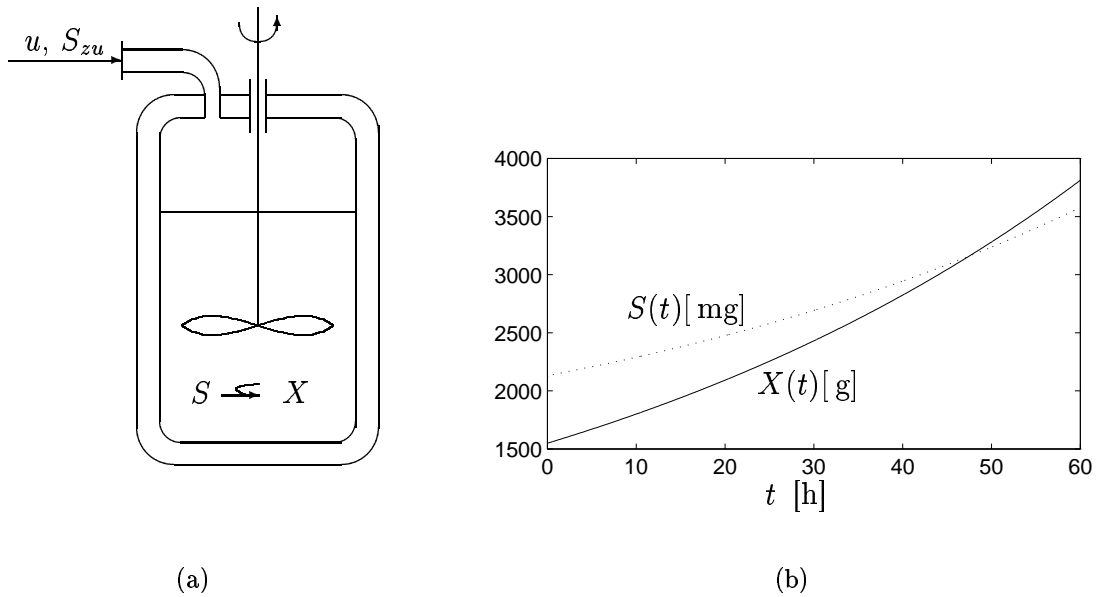


Bild 1.1: Schematische Darstellung eines Bioreaktors und gewünschter zeitlicher Verlauf  $X(t)$  und  $S(t)$  von Biomasse und Substratmasse. Dabei wird durch das Symbol  $\leftarrow$  ausgedrückt, daß aus dem zugeführten Substrat  $S$  und der bereits vorhandenen Biomasse  $X$  neue Biomasse entsteht.

von Penicillin ist es vorteilhaft, wenn die Biomasse einen in Bild 1.1 (b) dargestellten exponentiellen Zeitverlauf  $X(t)$  aufweist. Die Regelungsaufgabe besteht darin, einen Eingangsgrößenverlauf  $u(t)$  zu bestimmen, der die Biomasse dem gewünschten Verlauf nachführt. Dies bedeutet, daß ein Trajektorienfolgeproblem zu lösen ist. Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie dies allein aus der Kenntnis des Zeitverlaufs  $X(t)$  möglich ist.

Die zeitliche Änderung  $\dot{X}(t)$  kann in Bild 1.1 (b) aus der Tangentensteigung bestimmt werden. Kennt man  $X(t)$  und  $\dot{X}(t)$ , so kann daraus die zugehörige Wachstumsrate

$$\mu(t) = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} \quad (1.1)$$

berechnet werden, die im Falle des gewünschten exponentiellen Wachstums  $\mu = \mu^* = \text{konstant}$  ist. Aus der Wachstumsrate  $\mu^*$  kann man den erforderlichen Substratverlauf  $S(t)$  im Reaktor bestimmen, da die Wachstumsrate vom vorhandenen Substrat  $S$  und der (bekannten) Biomasse  $X$  abhängt:

$$\mu^* = \varphi_1(X, S) \Rightarrow S = \bar{\psi}_1(X, \mu^*). \quad (1.2)$$

Mit Hilfe von (1.1) läßt sich  $S(t)$  in Abhängigkeit von  $X(t)$  und  $\dot{X}(t)$  ausdrücken:

$$S = \psi_1(X, \dot{X}). \quad (1.3)$$

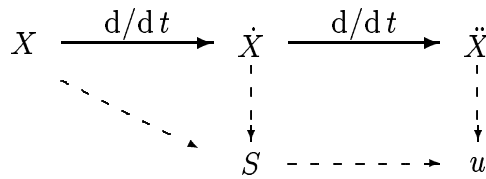


Bild 1.2: Schema zur Bestimmung  $(- - \rightarrow)$  der Größen  $S$  und  $u$  aus  $X$ ,  $\dot{X}$  und  $\ddot{X}$ .

Wie in Bild 1.1 (b) dargestellt, handelt es sich bei  $S(t)$  ebenfalls um einen exponentiellen Verlauf. Aus Bild 1.1 (b) kann durch Tangentenbildung der Verlauf von  $\dot{S}(t)$  bestimmt werden. Die zeitliche Änderung  $\dot{S}$  des Substrats  $S$  hängt nur von der vorhandenen Biomasse  $X$  und von der Substratzufuhr durch die Eingangsgröße  $u$  ab:

$$\dot{S} = \varphi_2(X, u) \Rightarrow u = \bar{\psi}_2(X, \dot{S}). \quad (1.4)$$

Daraus kann man die Abhängigkeit der Eingangsgröße  $u$  von  $X$ ,  $\dot{X}$  und  $\ddot{X}$  bestimmen:

$$u = \bar{\psi}_2(X, \dot{S}) = \psi_2(X, \dot{X}, \ddot{X}). \quad (1.5)$$

Aus diesen Überlegungen erkennt man, daß der Biomasse  $X(t)$  besondere Bedeutung zukommt. In Bild 1.2 sind die Abhängigkeiten graphisch veranschaulicht: aus dem Verlauf  $X(t)$  der Biomasse kann durch Zeitableitungen (dicke Pfeile) und algebraische Umformungen<sup>1</sup> (gestrichelte Pfeile) der zeitliche Verlauf aller anderen Systemgrößen ( $S$  und  $u$ ) bestimmt werden, d. h.  $X(t)$  enthält die gesamte Information über das dynamische Verhalten des Bioreaktors.

Dies kann auch folgendermaßen interpretiert werden: das über die Eingangsgröße  $u$  zugeführte Substrat wird durch das System gewissermaßen zweimal „integriert“: zunächst als Substratmasse  $S$ , aus der im zweiten Schritt die Biomasse entsteht. Umgekehrt können aus dem zeitlichen Verlauf der Biomasse durch Differentiation die Verläufe für Substrat und Eingangsgröße berechnet werden. Diese Eigenschaft läßt sich für die Analyse und den Reglerentwurf für den Bioreaktor ausnützen, wie im folgenden skizziert wird.

- Soll die Biomasse  $X$  einer gegebenen Solltrajektorie<sup>2</sup>  $X_d(t)$  nachgeführt werden, so kann man die zugehörige Substrattrajektorie  $S_d(t)$  sowie den für die Realisierung erforderlichen Eingangsgrößenverlauf  $u_d(t)$  berechnen, indem man in (1.3) bzw. (1.5) die Größe

<sup>1</sup>In diesem und den folgenden Berechnungsschemata wird der Einfachheit halber folgende Annahme getroffen: wird eine Größe (hier:  $u$ ) mittels algebraischer Umformungen (gestrichelter Pfeil) aus einer anderen Größe (hier:  $S$ ) berechnet, so können zur Berechnung auch Zeitableitungen der letztgenannten Größe (hier:  $\dot{S}$ ) zur Berechnung herangezogen werden.

<sup>2</sup>Im folgenden werden die Sollverläufe durch ein tiefgestelltes kleines „d“ (desired) gekennzeichnet.

$X$  und ihre Zeitableitungen durch die entsprechenden Ausdrücke in  $X_d(t)$  ersetzt:

$$S_d(t) = \psi_1 \left( X_d(t), \dot{X}_d(t) \right) \quad (1.6a)$$

$$u_d(t) = \psi_2 \left( X_d(t), \dot{X}_d(t), \ddot{X}_d(t) \right). \quad (1.6b)$$

Wendet man die Steuerung  $u_d(t)$  auf das System an, so folgt das System bei einem exakten Modell und bei genauer Kenntnis der Anfangsbedingungen dem Sollverlauf  $X_d(t)$ . Der zugehörige Verlauf  $S_d(t)$  des Substrats ergibt sich aus (1.6a).

Der Entwurf der Steuerung (1.6b) basiert gewissermaßen auf der Inversion des Systems, da (1.5) die Steuerfunktion  $u(t)$  darstellt, die zur Trajektorie  $X(t)$  gehört. Ist das System stabil, so lassen sich durch die Steuerung auch bei hinreichend kleinen Modellungenauigkeiten, Störungen oder unzulänglich bekannten Anfangsbedingungen zufriedenstellende Ergebnisse erzielen.

- Ist das System dagegen instabil oder treten Störungen auf, so kann der Trajektorienfolgefehler

$$e(t) = X(t) - X_d(t) \quad (1.7)$$

mittels einer Zustandsrückführung stabilisiert werden. Diese Zustandsrückführung kann auf der Basis von (1.5) entworfen werden, indem man mit

$$z_1 = X, \quad z_2 = \dot{X} \quad (1.8)$$

zwei neue Zustandsgrößen und für die zweite Ableitung  $\ddot{X}$  einen neuen Eingang  $v_1$  einführt und in (1.5) ersetzt

$$u = \psi_2(z_1, z_2, v_1). \quad (1.9)$$

Im Unterschied zur Steuerung (1.6b), die man durch Ersetzen von  $X$  und seinen Zeitableitungen in (1.5) durch die entsprechenden Ausdrücke in der Solltrajektorie  $X_d(t)$  erhält, handelt es sich bei (1.9) in der Tat um eine Rückführung des (neuen) Zustands (1.8). Wendet man diese Zustandsrückführung auf den Bioreaktor an, so erhält man in den neuen Koordinaten ein steuerbares lineares System:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v_1. \quad (1.10)$$

Durch eine weitere Zustandsrückführung

$$v_1 = \ddot{X}_d - q_1 \left( z_2 - \dot{X}_d \right) - q_0 \left( z_1 - X_d \right), \quad (1.11)$$



in die die Solltrajektorie eingeht, erhält man aus (1.7) die exakt lineare Dynamik des Trajektorienfolgefehlers  $e(t)$

$$\ddot{e} + q_1 \dot{e} + q_0 e = 0, \quad (1.12)$$

die bei geeigneter Wahl der Koeffizienten  $q_1 > 0$  und  $q_0 > 0$  stabil ist.

Die Tatsache, daß sich alle Zustände und der Eingang als Funktion der Biomasse und ihrer Zeitableitungen darstellen lassen, ist – bis zu einem gewissen Grad – unabhängig von dem speziellen Ansatz für die Wachstumskinetik  $\mu = \varphi_1(X, S)$ . Es muß lediglich gewährleistet sein, daß sich aus der Beziehung (1.2) die Substratkonzentration  $S$  in eindeutiger Weise bestimmen läßt. Dies bedeutet, daß das algebraische Gleichungssystem aus  $X$ ,  $\dot{X}$  und  $\ddot{X}$  nach den Systemvariablen  $X$ ,  $S$  und  $u$  aufgelöst werden kann. Damit können die Steuerung (1.6b) bzw. die Regelung (1.9), (1.11) unabhängig von der speziellen Struktur der Wachstumskinetik  $\varphi_1(X, S)$  bestimmt werden, und das Trajektorienfolgeproblem kann für den Bioreaktor gelöst werden. Lediglich die spezielle Form der Steuerungs- bzw. Reglergleichungen ist für verschiedene Modelle von  $\mu$  unterschiedlich.

Hängt hingegen (hypothetisch) die Wachstumskinetik  $\mu$  auch direkt von der Eingangsgröße  $u$  ab, so läßt sich  $S$  nicht mehr durch  $X$  und dessen Zeitableitungen allein ausdrücken.

In der Theorie der flachen Systeme stellt die Biomasse  $X$  einen sog. *flachen Ausgang* für den Bioreaktor dar. Die gezeigten Überlegungen lassen sich auf allgemeine *flache* nichtlineare Systeme, insbesondere mit mehreren Eingangsgrößen, erweitern. Für *flache Systeme* existiert ein endlicher Satz von frei vorgebbaren Systemgrößen, der sog. *flache Ausgang*, die das dynamische Verhalten des Systems vollständig beschreiben. Sobald ein flacher Ausgang existiert, heißt das System flach und die am Beispiel des Bioreaktors gezeigten Entwurfsmethoden für eine Steuerung bzw. Regelung können angewendet werden.

Die Anzahl der Komponenten des flachen Ausgangs ist gleich der Zahl der (unabhängigen) Eingangsgrößen. Alle übrigen Systemgrößen lassen sich durch den flachen Ausgang und eine endliche Zahl seiner Zeitableitungen mittels algebraischer Beziehungen, d. h. ohne Integration von Differentialgleichungen, ausdrücken. Wie man am Beispiel des Bioreaktors erkennt, handelt es sich dabei nicht einfach um irgendwelche „Rechengrößen“. Vielmehr besitzt ein flacher Ausgang häufig eine physikalische Bedeutung (Rouchon *et al.* 1993, Rouchon 1994, Rothfuß *et al.* 1996b). Dies unterstreicht gleichzeitig die Wichtigkeit des flachen Ausgangs für das dynamische Verhalten des Systems. Daraus resultiert außerdem eine gewisse Robustheit der Flachheit. So sind die Komponenten des flachen Ausgangs häufig von der Wahl von Parametern oder – wie beim Beispiel des Bioreaktors – von der speziellen Struktur der Nichtlinearitäten unabhängig.

Im Fall eines nichtlinearen Systems mit mehreren Eingangsgrößen ( $m > 1$ ) umfaßt auch der flache Ausgang mehrere Komponenten. Auf diese Weise ergeben sich bei der flachheits-

basierten Lösung des Trajektorienfolgeproblems im Fall mehrerer Eingangsgrößen durch die größere Zahl von Komponenten des flachen Ausgangs Freiheitsgrade, die die Lösung des Problems erleichtern.

Wie am Beispiel des Bioreaktors gezeigt, erweist sich die Eigenschaft der Flachheit als wichtig bei den folgenden Aufgabenstellungen:

- Die Systemgleichungen können analysiert und Trajektorien für den flachen Ausgang entworfen werden. Die Trajektorien der anderen Systemgrößen sowie der zugehörigen Steuerungen ergeben sich aus denen des flachen Ausgangs. Dabei können gegebenenfalls Zustands- und Eingangsgrößenbeschränkungen vorab berücksichtigt werden.
- Die zu den Trajektorien gehörenden Eingangsgrößenverläufe können leicht angegeben und zur Steuerung des Systems im offenen Kreis verwendet werden.
- Darüber hinaus können leicht eine Regelung des Systems unter Berücksichtigung seiner nichtlinearen Dynamik und eine Stabilisierung gegen Störungen und Modellfehler entworfen werden.

Diese Stabilisierung wird für flache Systeme dadurch einfach, daß diese zustandslinearisierbar sind, so daß die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers exakt linearisiert werden kann. Für den Entwurf der linearen Fehlerdynamik können die bekannten linearen Methoden angewendet werden.

- Weiterhin ermöglichen beobachtbare flache Systeme einen einfachen und systematischen Beobachterentwurf zur Realisierung der Zustandsrückführung (Rothfuß *et al.* 1996b, Fliess und Rudolph 1996). Damit werden zur Regelung lediglich die gemessenen Größen herangezogen, d. h. es handelt sich um eine dynamische Ausgangsregelung. Wird der flache Ausgang gemessen, so ist das System stets beobachtbar.

Eine Vielzahl nichtlinearer Systemmodelle sind flach, wie die weiter unten aufgeführte Tabelle 1.1 von Anwendungsbeispielen sowie (Martin *et al.* 1997) zeigt. Stellt sich bei der Flachheitsanalyse heraus, daß ein System nicht flach ist, so ergeben sich häufig aus der Analyse Hinweise, durch welche zusätzlichen Stellglieder das System flach wird bzw. welche Anteile in dem mathematischen Systemmodell für die Nicht-Flachheit verantwortlich sind und wie diese gegebenenfalls approximiert werden können (Martin 1992, van Nieuwstadt und Murray 1996). Die flachheitsbasierte Analyse kann schon im Stadium des *Prozeßentwurfs* wertvolle Hinweise für eine geeignete Wahl der Eingangsgrößen und des Prozeßmodells geben. Ebenso ermöglicht diese Eigenschaft einen eleganten Entwurf einer *Prozeßsteuerung* bzw. *-regelung*.

Aus diesen Gründen geht die Bedeutung der Flachheit über die der exakten Zustandslinearisierung des Systems hinaus: die Eigenschaft der Flachheit erlaubt nicht nur den Entwurf

einer exakt linearisierenden Zustandsrückführung, sondern kann vielmehr vom Entwurf der Solltrajektorien über die Bestimmung der Eingangsgrößenverläufe (sowohl Steuerung als auch Regelung) bis hin zum Entwurf einer Zustandsschätzung verwendet werden.

Wichtigster Schritt bei der Anwendung der flachheitsbasierten Analyse- und Entwurfsmethoden ist die Bestimmung eines flachen Ausgangs. Aufgrund seiner physikalischen Bedeutung kann ein flacher Ausgang häufig aus dem Verständnis des zu untersuchenden Systems bestimmt werden. Darüber hinaus gibt es notwendige oder hinreichende Bedingungen für die Existenz eines flachen Ausgangs (Sommer 1981, Jacubczyk und Respondek 1980, Hunt *et al.* 1983, Martin 1992, Martin und Rouchon 1993, Charlet *et al.* 1989, Shadwick 1990, Charlet *et al.* 1991, Pomet 1997, Sluis 1992, Aranda-Bricaire und Pomet 1995, Rudolph *et al.* 1995). Aus den hinreichenden Bedingungen lassen sich Bestimmungsgleichungen für flache Ausgänge herleiten.

Das Aufstellen der Bestimmungsgleichungen sowie die für die flachheitsbasierte Analyse und Synthese erforderlichen Berechnungen sind zwar teilweise sehr umfangreich, können jedoch mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems rechnerunterstützt durchgeführt werden.

## 1.3 Einordnung der flachheitsbasierten Methode

In diesem Abschnitt soll eine Übersicht über einige in engem Zusammenhang mit der Flachheit stehende Reglerentwurfsmethoden gegeben werden. Dabei werden sowohl theoretische als auch auf der Flachheit basierende anwendungsorientierte Arbeiten betrachtet.

### Theoretische Arbeiten

Da die flachheitsbasierte Regelung mit den *exakt linearisierenden Verfahren* in engem Zusammenhang steht, soll auf diese im folgenden ausführlicher eingegangen werden.

Bei den exakt linearisierenden Reglerentwurfverfahren werden eine Zustandstransformation und Zustandsrückführung gesucht, die das System in ein lineares überführen. Für das derart exakt linearisierte System kann anschließend ein linearer Regler mit den bekannten und leistungsfähigen Methoden der linearen Regelungstheorie entworfen werden. Man unterscheidet dabei im wesentlichen die *exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung* sowie die *exakte Eingangs-Zustandslinearisierung* bzw. kürzer *Zustandslinearisierung* (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990). Bei der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung wird durch Kompensation der nichtlinearen Dynamik mittels Zustandsrückführung ein lineares Führungsverhalten durch Aufschalten neuer Eingänge erreicht. Wird die Zustandsrückführung darüber hinaus so gewählt, daß jede Regelgröße von genau einem neuen Eingang beeinflusst wird, so spricht man von *exakter Eingangs-Ausgangsentkopplung* (Isidori 1995, Nijmeijer und

van der Schaft 1990). Durch Schließen des Regelkreises über diese neuen Eingänge läßt sich ein gewünschtes dynamisches Verhalten erzielen.

Bei der exakten Zustandslinearisierung ist man bestrebt, ein lineares dynamisches Verhalten zu erreichen (Sommer 1981, Jacubczyk und Respondek 1980, Hunt *et al.* 1983, Shadwick 1990, Charlet *et al.* 1991). Die zahlreichen Arbeiten auf dem Gebiet der exakten Zustandslinearisierung basieren vor allem auf der *differentialgeometrischen Regelungstheorie*, die z. B. in (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990) umfassend dargestellt ist, sowie auf der *differentialalgebraischen* Betrachtung (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b). Neuere Arbeiten auf dem Gebiet der Differentialgeometrie verwenden *äußere Differentialformen* (engl. *Exterior Differentials*) (Murray 1992, Aranda-Bricaire und Pomet 1995, Gardner und Shadwick 1992). Für eine Literaturübersicht zur exakten Zustandslinearisierung sei auf die Lehrbücher von Isidori (1995) und Nijmeijer und van der Schaft (1990) sowie auf (Charlet *et al.* 1989, Charlet *et al.* 1991) verwiesen.

Kriterien zur *partiellen* Zustandslinearisierung (Isidori 1982, Krener *et al.* 1983, Marino *et al.* 1985, Marino 1986) sowie Bedingungen zur *näherungsweise* Zustandslinearisierung (Krener 1990, Baumann und Rugh 1986, Baumann 1988, Wang und Rugh 1989, Reboulet und Champetier 1984, Hauser 1991, Hauser 1992, Hunt und Turi 1993) sind ebenfalls untersucht worden.

Eine neue Sichtweise auch für die Zustandslinearisierung ergab sich durch die Charakterisierung der *flachen Systeme* von Fliess, Lévine, Rouchon und Martin: Jedes flache System kann mittels *endogener* Zustandsrückführung, die einen Spezialfall der *dynamischen* Zustandsrückführung darstellt, exakt linearisiert werden (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1992b, Martin 1992, Fliess *et al.* 1993a, Fliess *et al.* 1995b). Im Fall mehrerer Eingangsgrößen wird durch die Verwendung von dynamischen Zustandsrückführungen die Klasse der exakt zustandslinearisierbaren Systeme im Vergleich zur *statischen* Zustandsrückführung wesentlich erweitert (Charlet *et al.* 1991). Außerdem können flache Systeme auch durch sog. *quasi-statische* Zustandsrückführungen (Delaleau und Fliess 1992) exakt linearisiert werden (Delaleau und Rudolph 1995), bei denen im Gegensatz zur dynamischen Zustandsrückführung im Regler keine Differentialgleichungen realisiert werden müssen, indem Zeitableitungen der Referenzeingänge des linearisierten Systems verwendet werden (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b).

## Anwendungsorientierte Arbeiten

Da die Theorie der flachheitsbasierten Analyse- und Entwurfsmethoden noch relativ jung ist, gibt es erst in letzter Zeit einige Arbeiten, die diese Methoden auf reale Problemstellungen anwenden. Der überwiegende Teil der Arbeiten bezieht sich derzeit auf Simulationsuntersuchungen. Einige der anwendungsorientierten, flachheitsbasierten Arbeiten sind in der

Tabelle 1.1: Verschiedene flachheitsbasierte Anwendungsbeispiele.

<b>Mechanische Systeme:</b>	
Kran	Fliess <i>et al.</i> (1993b)
Fahrzeug mit mehreren Anhängern	Rouchon <i>et al.</i> (1993)
Flugzeug	Martin <i>et al.</i> (1995)
Flugzeug	van Nieuwstadt und Murray (1996)
Hubschrauber	Mullhaupt <i>et al.</i> (1997)
Kfz-Scheibenwischer	Bitauld <i>et al.</i> (1997)
<b>Elektromagnetische Systeme:</b>	
DC-to-DC Konverter	Sira-Ramírez <i>et al.</i> (1996)
Magnetlager	Lévine <i>et al.</i> (1996)
Asynchronmotor	Martin und Rouchon (1996)
Asynchronmotor	Chelouah <i>et al.</i> (1996)
<b>Verfahrenstechnische Systeme:</b>	
Polymerisationsreaktor	Rouchon (1994)
Chemischer Rührkessel	Rudolph (1993), Rothfuß <i>et al.</i> (1995b), Rothfuß <i>et al.</i> (1996a), Rothfuß <i>et al.</i> (1996b)
Kaskade zweier Rührkessel	Rudolph (1996b)

tabellarischen Übersicht 1.1 aufgeführt. In der vorliegenden Arbeit werden ebenfalls anwendungsorientierte Beispiele untersucht und in Kapitel 5 dargestellt.

## 1.4 Ziele

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen die der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Systeme (2.1) zugrundeliegenden differentialalgebraischen und -geometrischen Methoden im Hinblick auf eine praktische Anwendung untersucht und aufgearbeitet werden. Im Mittelpunkt stehen dabei die Eigenschaft der Flachheit von nichtlinearen Mehrgrößensystemen und die sich daraus ableitenden Analyse- und Entwurfsverfahren. Besonderes Interesse gilt den folgenden Fragestellungen:

- Wie läßt sich für ein gegebenes nichtlineares System feststellen, ob es flach ist, und wie kann gegebenenfalls ein flacher Ausgang bestimmt werden? In diesem Zusammenhang ergeben sich folgende Fragestellungen:

- Lassen sich Algorithmen angeben, mit deren Hilfe Bestimmungsgleichungen für flache Ausgänge (rechnerunterstützt) hergeleitet werden können? Welche Systemdarstellungen sind strukturell flach?
- In welchem Zusammenhang steht die Flachheit mit der Steuerbarkeit bei linearen bzw. der Erreichbarkeit bei nichtlinearen Systemen?
- Wird durch alternative oder zusätzliche Stellglieder die Flachheit des Systems erreicht?
- Wie kann die Eigenschaft der Flachheit ausgenutzt werden, um das Trajektorienfolgeproblem mittels einer Steuerung bzw. Regelung zu lösen? Dazu gehören unter anderen die folgenden Fragen:
  - Für wieviele und welche Systemgrößen lassen sich Solltrajektorien unabhängig voneinander vorgeben?
  - Wie lassen sich gegebenenfalls Beschränkungen in den Zuständen bzw. Eingangsgrößen beim Entwurf der Solltrajektorien berücksichtigen? Wie verhalten sich die Systemgrößen, für die keine Solltrajektorien entworfen werden?
  - Wie kann der Eingangsgrößenverlauf (Steuerung) berechnet werden, der das gewünschte Folgeverhalten erzielt?
  - Wie kann eine gegen Störungen und Modellfehler stabilisierende Folgeregelung entworfen werden?
  - In welcher Weise läßt sich die Flachheit für die Realisierung einer Zustandsrückführung mit Hilfe eines Beobachters ausnutzen?
  - Welchen Einfluß haben Modell- und Parameterunsicherheiten sowie Störungen auf die Steuerung bzw. Regelung?
- Welcher Rechenaufwand ist bei bekanntem flachen Ausgang für die Anwendung der flachheitsbasierten Analyse- und Entwurfsverfahren auf praktisch relevante Beispiele erforderlich, und wie lassen sich die erforderlichen Berechnungen mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems rechnerunterstützt durchführen?

Ziel dieser Arbeit ist, diese Fragestellungen zunächst theoretisch aufzuarbeiten, in einer verständlichen Weise darzustellen und anhand einfacher Beispiele zu erklären. Weiterhin soll die Anwendbarkeit der flachheitsbasierten Analyse und Regelung auf verschiedene praktische Beispiele aus der (Bio-)Verfahrenstechnik untersucht werden. Dabei soll auch auf Möglichkeiten einer rechnerunterstützten Durchführung der flachheitsbasierten Analyse und Synthese eingegangen werden.

## 1.5 Gliederung

Die Gliederung der Arbeit orientiert sich weitgehend an den im letzten Abschnitt dargestellten Zielsetzungen.

In *Kapitel 2* wird die flachheitsbasierte Analyse und Regelung eingeführt und anhand verschiedener Beispiele erläutert. Weiterhin werden einige Eigenschaften flacher Systeme diskutiert. Außerdem wird die flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems durch eine Steuerung und eine Regelung vorgestellt. Die Lösung mittels einer Steuerung führt auf die Betrachtung eines inversen dynamischen Modells, für das geeignete Solltrajektorien entworfen werden müssen. Die Betrachtung der Regelung führt auf den Zusammenhang zwischen der Flachheit und der Zustandslinearisierbarkeit durch Zustandsrückführung.

Da ein System flach ist, wenn es durch eine dynamische Zustandsrückführung exakt linearisiert werden kann, können die Bedingungen für die Linearisierbarkeit durch dynamische Zustandsrückführung zur rechnerunterstützten Analyse der Flachheit herangezogen werden. In *Kapitel 3* wird eine zusammenfassende Darstellung von bekannten strukturell flachen Systemdarstellungen für lineare zeitvariante und nichtlineare Systeme sowie deren Verallgemeinerung auf Systemdarstellungen, die auch von Zeitableitungen der Eingangsgrößen abhängen, gegeben. Hierfür werden die aus der Literatur bekannten Existenzbedingungen für die Transformation eines linearen zeitvarianten bzw. nichtlinearen Systems in die entsprechende Regelungsnormalform wiederholt und um neue hinreichende Bedingungen zur Transformation in eine verallgemeinerte Regelungsform erweitert.

*Kapitel 4* faßt die in den Kapiteln 2 und 3 beschriebene Methode in einem Entwurfsschema für flachheitsbasierte Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge zusammen. Da den flachheitsbasierten Regelungen Zustandsrückführungen zugrunde liegen, wird ein nichtlinearer Beobachter mit zeitvarianter Verstärkung für flache Systeme vorgestellt, der zur Realisierung der linearisierenden Zustandsrückführungen benutzt werden kann. Der Entwurf der flachheitsbasierten Steuerung, Regelung und Zustandsschätzung erfordert umfangreiche symbolische Berechnungen. Aus diesem Grund wird die rechnerunterstützte Anwendung der flachheitsbasierten Methode mit dem Computer-Algebra-System MATHEMATICA erörtert.

Die flachheitsbasierte Analyse und Synthese werden in *Kapitel 5* an folgenden Anwendungsbeispielen ausführlich dargestellt: ein im Fedbatch-Verfahren betriebener Bioreaktor zur Herstellung von Penicillin, für den die Ergebnisse auch im Experiment bestätigt wurden, und ein kontinuierlich betriebener chemischer Rührkesselreaktor mit Neben- und Folgereaktion.

Am Ende der einzelnen Kapitel wird jeweils eine Zusammenfassung der Ergebnisse gegeben. Außerdem sind die Ergebnisse der gesamten Arbeit in *Kapitel 6* zusammengefaßt.

In *Anhang A* finden sich einige Ergänzungen zu den in Kapitel 3 dargestellten Bedingungen. Im *Anhang B* werden die in Kapitel 3 neu vorgestellten Bedingungen für die Flachheit in

Form eines Algorithmus aufgearbeitet, der eine rechnerunterstützte Auswertung mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems erlaubt. In *Anhang C* sind die Systemgrößen und Parameter der beiden Anwendungsbeispiele aus Kapitel 5 zusammenfassend dargestellt.



## Kapitel 2

# Flachheitsbasierte Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme

Für die Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme ist die von Fliess, Lévine, Martin und Rouchon (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b) definierte Eigenschaft der *Flachheit* (engl. *flatness*, franz. *platitude*) besonders nützlich. Flache Systeme zeichnen sich dadurch aus, daß unabhängige fiktive Ausgangsgrößen, die sog. *flachen Ausgänge*, existieren, die das System in gewissem Sinn vollständig beschreiben: die wesentliche Eigenschaft flacher Systeme ist, daß alle Zustands- und Eingangsvariablen als Funktionen des flachen Ausgangs und einer endlichen Zahl seiner Zeitableitungen ausgedrückt werden können, ohne Differentialgleichungen integrieren zu müssen. Diese Eigenschaft flacher Systeme ist hilfreich bei der Trajektorienplanung sowie der Steuerung und asymptotischen Folgeregelung nichtlinearer Systeme.

Der Begriff der *Flachheit* kann im Rahmen der Differentialalgebra (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b) bzw. der Differentialgeometrie der unendlichen Strahlen und Prolongationen (Fliess *et al.* 1993a) präzise definiert werden. Im folgenden wird jedoch anstelle der theoretischen Definition einer anschaulichen Einführung des Begriffs der Vorzug gegeben. Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist ein nichtlineares dynamisches Mehrgrößen-System in Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in M_n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{Rang} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = m, \quad (2.1)$$

mit dem  $n$ -dimensionalen Zustand  $\mathbf{x}$  und dem  $m$ -dimensionalen Eingang  $\mathbf{u}$ . Der Zustand  $\mathbf{x}$  ist dabei auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M_n$  definiert, die in der Umgebung des Koordinatenursprungs isomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist (Isidori 1995, Olver 1993). In der vorliegenden Arbeit spielt die Unterscheidung zwischen  $M_n$  und  $\mathbb{R}^n$  keine Rolle.

Häufig führt die Modellierung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung in impliziter Systemdarstellung

$$\mathbf{F} \left( \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \overset{(s)}{\mathbf{u}} \right) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

mit den allgemeinen Systemgrößen  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{\tilde{n}})$  und  $\dim \mathbf{F} = \tilde{n}$ . Diese Form schließt insbesondere mechanische Systeme ein, die durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung modelliert werden. Die nachfolgend vorgestellten Ergebnisse für Systeme der Form (2.1) lassen sich leicht auf solche der Form (2.2) erweitern (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b).

Die Komponenten der Vektorfunktionen  $\mathbf{f}$  bzw.  $\mathbf{F}$  werden als hinreichend oft differenzierbar (glatt) bzw. analytisch angenommen. Diese Annahme schließt auch ein, daß die Eingangsfunktionen  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , analytisch sind. Außerdem wird meist  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  vorausgesetzt bzw. durch eine Koordinatenverschiebung realisiert. Alle Ergebnisse sind lokaler Natur, d. h. sie gelten in einer offenen Umgebung des Koordinatenursprungs.

**Problem 2.1** *Das Trajektorienfolgeproblem für ein nichtlineares System (2.1) besteht darin, die sog. Regelgrößen, die i. a. nichtlineare Funktionen des Systemzustands  $\mathbf{x}$  darstellen,*

$$\mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w} \in M_m, \quad (2.3a)$$

*einer gewünschten (hinreichend oft differenzierbaren) Solltrajektorie*

$$\mathbf{w}_d(t) : \mathbf{w}(0) \rightarrow \mathbf{w}(T), \quad t \in [0, T], \quad (2.3b)$$

*nachzuführen, die einen vorgegebenen Anfangspunkt  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{q}(\mathbf{x}_0)$  mit einem vorgegebenen Endpunkt  $\mathbf{w}(T) = \mathbf{q}(\mathbf{x}(T))$  verbindet. Hierzu sind die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  zu bestimmen, die das System (2.1) unter Berücksichtigung von Stellgrößen- und Zustandsbeschränkungen*

$$u_{i,\min} \leq u_i \leq u_{i,\max}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{bzw.} \quad (2.4a)$$

$$x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4b)$$

*der Solltrajektorie  $\mathbf{w}_d(t)$  in einer gewünschten Weise nachführen.*

Dieses Problem schließt für  $\mathbf{w}_d(t) = \text{konstant}$  das Stabilisierungsproblem (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990, Slotine und Li 1991) ein. Die Regelgrößen  $\mathbf{w}$  sind von den Meßgrößen, wie sie beim Entwurf eines Beobachters verwendet werden, zu unterscheiden. Da das System (2.1)  $m$  unabhängige Eingangsgrößen  $u_i$  hat, ist die Zahl der unabhängig voneinander vorgebbaren Regelgrößen  $w_i$  ebenfalls auf  $m$  beschränkt. Für die Lösung des Trajektorienfolgeproblems 2.1 sind die folgenden zwei Fälle zu unterscheiden:

- Ist das Modell (2.1) stabil und beschreibt es das Systemverhalten hinreichend genau, so kann die Trajektorienfolge  $\mathbf{w}(t) \rightarrow \mathbf{w}_d(t)$  durch eine zeitabhängige *Steuerung*  $\mathbf{u}_d(t)$  erreicht werden. Außerdem müssen die Anfangsbedingungen des Systems hinreichend genau bekannt sein, und es dürfen nur kleine Störungen auf das System einwirken.
- Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, so muß eine Trajektorienfolgeregelung auf der Basis einer *Zustandsrückführung* entworfen werden, die die Folgebewegung stabilisiert und die Vorgabe eines bestimmten Einschwingverhaltens ermöglicht.

**Beispiel 2.1** *Das Trajektorienfolgeproblem für den Fedbatchreaktor aus Beispiel 1.1 (mit einer Eingangsgröße) besteht darin, die Wachstumsrate  $w = \mu$  der Biomasse über die Substratzufuhr  $u(t)$  auf einen konstanten Wert  $\mu^*$  einzustellen.*

Das im folgenden Abschnitt dargestellte Konzept der Flachheit erlaubt eine einfache Lösung des Trajektorienfolgeproblems.

## 2.1 Flachheit nichtlinearer Systeme

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Flachheit für nichtlineare Systeme (2.1) definiert und anschaulich eingeführt werden, ohne auf differentialalgebraische oder -geometrische Begriffe Bezug zu nehmen. Für eine formale mathematische Definition sei auf (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1993a, Fliess *et al.* 1995b) verwiesen, die den folgenden Abschnitten zugrunde liegen. Anschließend wird diese Flachheitseigenschaft am Beispiel des Bioreaktors aus Beispiel 1.1 erläutert.

### 2.1.1 Definition der Flachheit

**Definition 2.2** *Ein nichtlineares dynamisches System (2.1) heißt (differenziell<sup>1</sup>) flach, wenn es einen fiktiven Ausgang<sup>2</sup>  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  mit  $m = \dim \mathbf{u}$  gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt.*

- (i) *Die Größen  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , lassen sich als Funktionen der Systemvariablen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen  $u_i^{(k)}$ ,*

<sup>1</sup>Der Begriff *differenziell* wird verwendet, da aus den Komponenten von  $\mathbf{y}$  durch Differentiation alle Zustände und Eingänge sowie deren Zeitableitungen bestimmt werden können.

<sup>2</sup>In dieser Arbeit wird der Vektor  $\mathbf{y}$  von Funktionen  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , als *flacher Ausgang* (engl. flat output) bezeichnet, die Funktionen  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , als dessen *Komponenten*. Der Plural *flache Ausgänge* wird zur Unterscheidung für zwei verschiedene Vektoren  $\mathbf{y}$  und  $\bar{\mathbf{y}}$  verwendet.

$k = 1, \dots, \alpha_i$ , ausdrücken. Für das nichtlineare System (2.1) bedeutet dies, daß sich der fiktive Ausgang  $\mathbf{y}$  in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \phi \left( \mathbf{x}, u_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\alpha_m)} \right) \\ &= \phi \left( \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

darstellen läßt.

(ii) Die Systemvariablen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bzw.  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , lassen sich als Funktion der  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und einer endlichen Anzahl von deren Zeitableitungen  $y_i^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \beta_i + 1$ , darstellen, d. h.

$$\mathbf{x} = \psi_1 \left( y_1, \dots, y_1^{(\beta_1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\beta_m)} \right) = \psi_1 \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta)} \right) \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{u} = \psi_2 \left( y_1, \dots, y_1^{(\beta_1+1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\beta_m+1)} \right) = \psi_2 \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta+1)} \right). \quad (2.6b)$$

(iii) Die Komponenten von  $\mathbf{y}$  sind differentiell unabhängig, d. h. sie erfüllen keine Differentialgleichungen der Form

$$\varphi \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\gamma)} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Sind diese Bedingungen zumindest lokal erfüllt, so heißt der fiktive Ausgang (2.5) flacher Ausgang, und das System (2.1) heißt flach.

**Bemerkung 2.1** Aufgrund der Eigenschaft (ii) kann auch jede Funktion  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(s)})$  in der Form  $\psi(\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta+s+1)})$  dargestellt werden.

**Bemerkung 2.2** In der differentialalgebraischen Definition der Flachheit sind die Gleichungen (2.5) und (2.6) implizit und werden durch gebrochen-rationale Funktionen beschrieben. Die aufgrund einer derartigen Definition erhaltenen Ergebnisse lassen sich direkt auf die in dieser Arbeit betrachteten expliziten Gleichungen mit allgemeinen, einmal stetig differenzierbaren Funktionen  $\phi$ ,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  übertragen. Hierfür wird im folgenden angenommen, daß keine Singularitäten bezüglich des Implizite-Funktionen-Theorems in  $\phi$ ,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  auftreten.

**Bemerkung 2.3** Die Funktion  $\psi_2$  in (2.6b) hängt von Zeitableitungen des flachen Ausgangs bis zur Ordnung  $\beta + 1$  ab, da aufgrund von (2.6a) mit (2.1) gilt:  $\dot{\psi}_1 = \mathbf{f}(\psi_1, \psi_2)$ .

Ist Bedingung (ii) erfüllt, d. h. gilt insbesondere (2.6b), so sind die Komponenten von  $\mathbf{y}$  genau dann differentiell unabhängig, wenn die Anzahl der Komponenten des flachen Ausgangs gleich der Anzahl der (differentiell unabhängigen) Eingangsgrößen ist, d. h.

$$\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

In diesem Fall erfüllen die Komponenten von  $\mathbf{y}$  genau  $m$  Differentialgleichungen (2.6b) in Abhängigkeit von  $\mathbf{u}$  und somit keine homogenen Differentialgleichungen der Form (2.7). Ist Bedingung (ii) erfüllt, so ist Bedingung (iii) äquivalent zu (2.8).

Da gemäß Bedingung (ii) die Systemgrößen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  durch den flachen Ausgang  $\mathbf{y}$  ausgedrückt werden können, ergibt sich mit (2.1), daß auch  $\dot{\mathbf{x}}$  als Funktion von  $\mathbf{y}$  dargestellt werden kann. Dies bedeutet, daß alle Systemgrößen als Funktion von  $\mathbf{y}$  dargestellt werden können, ohne die Systemdifferentialgleichungen integrieren zu müssen. Daraus folgt, daß alle dynamischen Eigenschaften des Systems (2.1) durch den flachen Ausgang und eine endliche Zahl von dessen Zeitableitungen beschrieben werden können. Deshalb spricht man auch von einer (endlichen) *Parametrierung* des Systems durch einen flachen Ausgang.

Diese Parametrierung erlaubt eine einfache Bestimmung und Analyse der Ruhelagen  $(\mathbf{x}_S, \mathbf{u}_S)$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_S, \mathbf{u}_S) = \mathbf{0}$  des Systems (2.1). Hierzu betrachtet man die Gleichungen (2.6) für  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S$  mit  $\mathbf{y}_S^{(k)} = \mathbf{0}$ ,  $k \geq 1$ :

$$\mathbf{x}_S = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{y}_S, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\psi}}_1(\mathbf{y}_S) \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{u}_S = \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{y}_S, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\psi}}_2(\mathbf{y}_S). \quad (2.9b)$$

Mit diesen Beziehungen werden die Ruhelagen  $(\mathbf{x}_S, \mathbf{u}_S)$  durch den flachen Ausgang  $\mathbf{y}_S$  vollständig parametrisiert. Im Unterschied hierzu ist eine explizite Darstellung des Zusammenhangs  $\mathbf{x}_S(\mathbf{u}_S)$  häufig nicht möglich. Mit Hilfe der parametrisierten Darstellung (2.9) von Zustand und Eingang lassen sich die Ruhelagen des flachen Systems in Abhängigkeit von  $\mathbf{y}_S$  einfach berechnen, graphisch veranschaulichen und evtl. auch optimieren. Dies wird in (Rothfuß *et al.* 1995b, Rothfuß *et al.* 1996b) und in Abschnitt 5.2 für das Beispiel eines chemischen Reaktormodells gezeigt.

Die Flachheitsdefinition 2.2 soll an folgendem Beispiel erläutert werden.

**Beispiel 2.3 (Fortsetzung von Beispiel 1.1)** Die Biomasse  $x_1 = X$  und die Substratmasse  $x_2 = S$  in dem betrachteten Fedbatchreaktor werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben (Frese 1992):

$$\dot{x}_1 = \mu(x_2)x_1 \quad (2.10a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a_1}\mu(x_2)x_1 - a_2x_1 + a_3u_1. \quad (2.10b)$$

Dabei wird angenommen, daß die Biomasse  $x_1$  gemäß einer zunächst nicht näher spezifizierten Wachstumskinetik  $\mu(x_2)$  wächst, die nur von der Substratmasse  $x_2$  abhängt. Anhand des Modells (2.10) können nun die Überlegungen aus Beispiel 1.1 mathematisch formuliert werden. Da das System (2.10) einen Eingang hat, besitzt der in Beispiel 1.1 heuristisch eingeführte flache Ausgang

$$y = x_1 \quad (2.11)$$

auch nur eine Komponente. Im folgenden wird gezeigt, daß (2.11) die Bedingungen der Definition 2.2 erfüllt. Wie man leicht sieht, ist (2.11) von der Form (2.5). Für die Überprüfung von Bedingung (ii) müssen Substratmasse  $x_2$  und Eingangsgröße  $u_1$  gemäß dem Schema in Bild 1.2 aus  $y$  und dessen Zeitableitungen

$$\dot{y} = \mu(x_2)x_1 \quad (2.12a)$$

$$\ddot{y} = \varphi(x_1, x_2, u_1) \quad (2.12b)$$

berechnet werden:

$$x_2 = \mu^{-1}(y, \dot{y}) \quad (2.13a)$$

$$u_1 = \varphi^{-1}(y, \dot{y}, \ddot{y}). \quad (2.13b)$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Funktionen  $\mu$  und  $\varphi$  (zumindest lokal) invertierbar sind. Die Beziehungen (2.13) zeigen, daß Bedingung (ii) gilt. Bedingung (iii) ist ebenfalls gültig, da  $y$  der Differentialgleichung (2.13b) genügt und nicht gleichzeitig eine von  $u_1$  unabhängige Differentialgleichung der Form (2.7) erfüllen kann. Damit ist gezeigt, daß (2.11) ein flacher Ausgang für das Bioreaktormodell ist.

**Bemerkung 2.4** Für die Berechnung von  $x_2$  nach (2.13a) muß vorausgesetzt werden, daß der Ausdruck für die Wachstumsrate  $\mu(x_2)$  (zumindest lokal) nach  $x_2$  aufgelöst werden kann. Diese Voraussetzung ist beispielsweise erfüllt, wenn man dem Wachstum der Biomasse die Monod-Kinetik

$$\mu(x_2) = \frac{\mu_{\max}x_2}{K_S V + x_2} \quad (2.14)$$

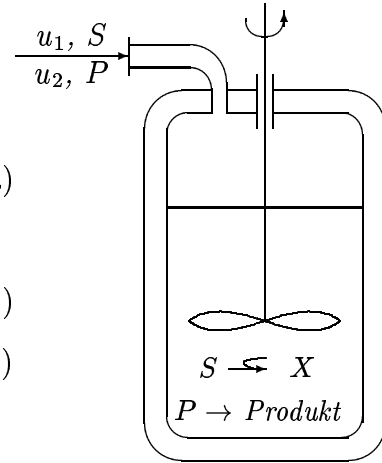
mit der Affinitätskonstanten  $K_S$  und dem Volumen  $S$  zugrundelegt. Dies gilt jedoch auch für andere Ansätze für die Wachstumsrate der Form  $\mu(x_1, x_2)$ , die nach  $x_2$  aufgelöst werden können. Damit ist die Flachheitseigenschaft für eine ganze Klasse von Wachstumskinetiken gegeben.

**Beispiel 2.4 (Erweiterung von Beispiel 2.3)** Wird dem betrachteten Bioreaktor über eine weitere Eingangsgröße  $u_2$  ein sog. Precursor  $P$  zugeführt, so entsteht aus diesem und dem von der Biomasse erzeugten Isopenicillin das erwünschte Produkt Penicillin G. Die Systemgleichungen für den Bioreaktor mit zwei Eingangsgrößen lauten (Frese 1992):

$$\dot{x}_1 = \mu(x_2)x_1 \quad (2.15a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a_1}\mu(x_2)x_1 - \frac{1}{a_4}\mu_{Pen}(x_2, x_3)x_1 - a_2x_1 + a_3u_1 \quad (2.15b)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{a_5}\mu_{Pen}(x_2, x_3)x_1 + a_6u_2. \quad (2.15c)$$



Dabei wird über die zweite Eingangsgröße  $u_2$  ein zweites Substrat, der sog. Precursor  $x_3 = P$ , zudosiert. Da das System zwei Eingangsgrößen  $u_1$  und  $u_2$  besitzt, hat auch der flache Ausgang zwei Komponenten. Mit den Überlegungen aus Beispiel 2.3 sieht man, daß aus der Zeitableitung von  $y_1 = x_1$  die Substratmasse  $x_2$  analog zu (2.13a) berechnet werden kann:

$$x_2 = \mu^{-1}(y_1, \dot{y}_1). \quad (2.16)$$

Die zweite Zeitableitung

$$\ddot{y}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, u_1) \quad (2.17)$$

hängt im Unterschied zu (2.12b) auch von  $x_3$  ab. Wählt man  $y_2 = x_3$  als zweite Komponente des flachen Ausgangs, so lassen sich die verbleibenden Systemgrößen  $u_1$  und  $u_2$  aus  $\dot{y}_1$  und

$$\dot{y}_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, u_2) \quad (2.18)$$

als Funktion von  $\mathbf{y}$  und dessen Zeitableitungen ausdrücken:

$$u_1 = \psi_1(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \quad (2.19a)$$

$$u_2 = \psi_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2). \quad (2.19b)$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die auftretenden Funktionen  $\mu(\cdot)$  und  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$ , (zumindest lokal) invertierbar sind. Das Schema zur Bestimmung der Größen  $S$ ,  $u_1$  und  $u_2$  aus dem flachen Ausgang  $(X, P)$  und dessen Zeitableitungen  $(\dot{X}, \ddot{X}, \dot{P})$  ist in Bild 2.1 graphisch dargestellt: dicke Pfeile repräsentieren die Zeitableitungen des flachen Ausgangs. Die gestrichelten Pfeile geben an, wie aus den Zeitableitungen des flachen Ausgangs die verbleibenden Zustände und Eingänge durch algebraische Umformungen berechnet werden, ohne Differentialgleichungen zu integrieren.

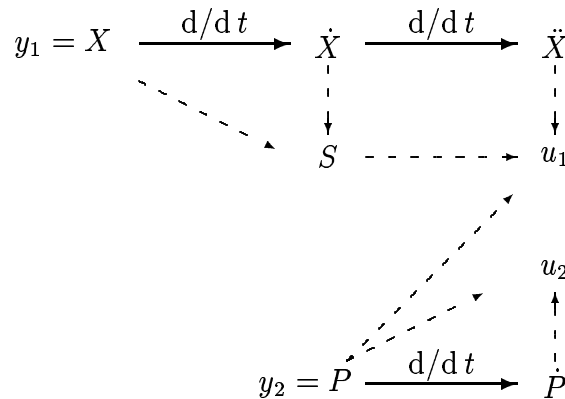


Bild 2.1: Schema zur Bestimmung (- -  $\rightarrow$ ) der Größen  $S$ ,  $u_1$  und  $u_2$  aus  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$ ,  $P$  und  $\dot{P}$ .

### 2.1.2 Weitere Eigenschaften und Bemerkungen zur Flachheit

Im folgenden werden einige Eigenschaften flacher Systeme vorgestellt (Fliess *et al.* 1995b), die im Hinblick auf die in dieser Arbeit vorgestellten Anwendungsbeispiele wichtig sind.

**Bemerkung 2.5 (Nicht-Eindeutigkeit eines flachen Ausgangs)** *Ein flacher Ausgang ist nicht eindeutig. Vielmehr können für ein flaches System beliebig viele flache Ausgänge existieren, die die Bedingungen von Definition 2.2 erfüllen und ineinander umgerechnet werden können. Sind  $\mathbf{y}$  und  $\bar{\mathbf{y}}$  flache Ausgänge für (2.1), so gibt es aufgrund der Bemerkung 2.1 Beziehungen der Form*

$$\mathbf{y} = \theta \left( \bar{\mathbf{y}}, \dot{\bar{\mathbf{y}}}, \dots, \overset{(s)}{\bar{\mathbf{y}}} \right) \iff \bar{\mathbf{y}} = \bar{\theta} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(s)}{\mathbf{y}} \right). \quad (2.20)$$

Für Systeme mit einer Eingangsgröße enthält diese Beziehung keine Ableitungen.

**Beispiel 2.5 (Fortsetzung von Beispiel 2.3)** *Neben  $y = x_1$  ist jede Funktion von  $x_1$ , wie z. B.  $\bar{y} = x_1^3$ , ebenfalls ein flacher Ausgang des Reaktors (2.10). Die Beziehung (2.20) lautet in diesem Fall*

$$\bar{y} = y^3 \iff y = \sqrt[3]{\bar{y}}. \quad (2.21)$$

Da ein flaches System keinen eindeutigen flachen Ausgang besitzt, kann aus den möglichen flachen Ausgängen ein zur Lösung der Regelungsaufgabe besonders geeigneter gewählt werden. Für das Beispiel des Bioreaktors ist  $y = x_1$  gegenüber  $\bar{y} = x_1^3$  aufgrund seiner physikalischen Bedeutung der anschaulichere flache Ausgang. Die Wahl wird i. a. davon abhängen, welche Systemgrößen geregelt und gemessen werden bzw. für welchen flachen Ausgang der Nachweis der Flachheit anhand der Definition 2.2 einfacher ist. Letzteres wird in Abschnitt 5.2 am Beispiel eines chemischen Reaktors näher erläutert.



**Bemerkung 2.6 (Ungesteuerte Systeme)** Die Bedingung (iii) aus Definition 2.2 soll am Beispiel eines ungesteuerten Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$  verdeutlicht werden. Man nimmt zunächst an, es gibt einen flachen Ausgang  $\mathbf{y}$ . Dann kann man den Zustand  $\mathbf{x}$  als Funktion  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}} \right)$  darstellen. Setzt man diese Beziehung in  $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$  ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \ddot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}} \overset{(\beta+1)}{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\theta} \left( \boldsymbol{\psi} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}} \right) \right).$$

Dies stellt eine differentielle Beziehung in  $\mathbf{y}$  dar (vgl. (2.7)). Aus diesem Grund kann ein ungesteuertes System nicht flach sein.

Die Bedingung (iii) schließt triviale Fälle aus: jedes System (2.1) würde mit dem fiktiven Ausgang

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (2.22)$$

die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen und wäre somit flach. Mit dem fiktiven Ausgang  $\mathbf{y}$  in (2.22) kann man jedoch die Differentialgleichung (2.1) mit  $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  in der Form (2.7) darstellen, weshalb (2.22) keinen flachen Ausgang darstellt.

**Bemerkung 2.7 (Flachheit linearer Systeme)** Ein lineares zeitinvariantes System

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (2.23)$$

ist steuerbar, wenn die Kalman'sche Steuerbarkeitsmatrix  $Q_S$  den Rang

$$\text{Rang } Q_S = \text{Rang } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (2.24)$$

besitzt (Kailath 1980). In diesem Fall existiert eine lineare Transformation  $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$ , die das System (2.23) in die Regelungsnormalform<sup>3</sup>

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, \kappa_i - 1, \quad (2.25a)$$

$$\dot{z}_{\kappa_i}^i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\kappa_i} a_{jk}^i z_k^j + \sum_{j=1}^m b_j^i u_j, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = n, \quad (2.25b)$$

$$\text{Rang} \left( \begin{array}{c} \{b_j^i\} \\ i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, \kappa_i \end{array} \right) = m \quad (2.25c)$$

überführt. Wie man aus (2.25) leicht sieht, ist  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_1^m)$  ein flacher Ausgang, da man durch sukzessives Differenzieren die Zustandsgrößen  $z_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, \kappa_i - 1$ ,

<sup>3</sup>Bei den Größen  $z_k^i$  bezeichnet der Index  $i$  das Teilsystem, zu dem dieser Zustand gehört; mit dem Index  $k$  werden die Zustände innerhalb der Teilsysteme unterschieden.

aus (2.25a) und durch nochmaliges Ableiten – aufgrund der Rangbedingung (2.25c) – die Eingangsgrößen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , aus (2.25b) als Funktion von  $\mathbf{y}$  und seinen Zeitableitungen erhält.

Neben dem speziellen flachen Ausgang  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_1^m)$  gibt es nach Bemerkung 2.5 weitere flache Ausgänge, aus denen man durch fortgesetzte Differentiation allgemeinere Regelungsformen erhält. Dies wird in Kapitel 3.2.3 näher erläutert.

Ist  $\text{Rang } Q_S < n$ , so hat dies die Existenz eines nicht steuerbaren Unterraums zur Folge, d. h. es existiert ein nicht steuerbares Teilsystem von (2.23). Mit den Überlegungen aus Bemerkung 2.6 erhält man den

**Satz 2.1** Ein lineares System (2.23) ist genau dann flach, wenn es steuerbar ist.

Dies bedeutet, daß für lineare Systeme Flachheit und Steuerbarkeit äquivalent sind (Fliess et al. 1995b). Diese Aussage läßt sich – wie in Kapitel 3 gezeigt wird – auch auf den Fall linearer zeitvarianter Systeme erweitern.

**Bemerkung 2.8 (Defekt nicht flacher Systeme)** Für ein nicht flaches System lassen sich keine Funktionen  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  gemäß (2.5) angeben, für die Gleichungen der Form (2.6) existieren. Zur Darstellung der Zustände und Eingänge des Systems in der Form (2.6) werden dann, nach (Fliess et al. 1992a, Fliess et al. 1995b),  $M > m$  Funktionen  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)$  benötigt, wie an folgendem (linearen) Beispiel gezeigt wird.

**Beispiel 2.6** Das lineare System

$$\dot{x}_1 = -x_1 \tag{2.26a}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u \tag{2.26b}$$

ist nicht steuerbar und damit nach Satz 2.1 nicht flach. Betrachtet man z. B.  $y = x_2$ , so läßt sich zwar  $u = \dot{y} - y$  gemäß (2.6) ausdrücken, nicht jedoch der (nicht steuerbare) Zustand  $x_1$ . Für  $\bar{y} = x_1$  kann weder  $x_2$  noch  $u$  als Funktion von  $\bar{y}$  und seinen Zeitableitungen ausgedrückt werden. Wie man leicht erkennen kann, verbleibt für jede beliebige Funktion  $y^*$  nach (2.5) mindestens eine Systemgröße, die sich nicht gemäß (2.6) ausdrücken läßt.

Diese Überlegungen lassen sich auf nichtlineare Systeme (2.1) verallgemeinern: bezeichnet  $M$  die minimale Anzahl von Funktionen  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)$ , die zur Darstellung der Systemgrößen (Zustände und Eingänge) in der Form (2.6) erforderlich sind, so kann der Defekt  $\delta$  eines nichtlinearen Systems (2.1) als die Differenz aus  $M$  und der Zahl der unabhängigen Eingänge definiert werden:  $\delta = M - m$  (Fliess et al. 1992a, Fliess et al. 1995b). Im Fall linearer Systeme ist der Defekt  $\delta$  gleich der Dimension des nicht steuerbaren Unterraums (Kailath 1980, Fliess et al. 1995b).

**Bemerkung 2.9 (Expliziter Nachweis der Flachheit)** Zur Überprüfung, ob ein gegebener Vektor  $\mathbf{y}$  ein flacher Ausgang des Systems (2.1) ist, wird zunächst Bedingung (i) von Definition 2.2 anhand der Definition von  $\mathbf{y}$  überprüft. Die Überprüfung der Bedingung (ii) erfordert die Berechnung der Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{y}}_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k \geq 0$ , anhand der Funktionen  $\phi_i$  in (2.5). Diese Zeitableitungen können mit Hilfe des erweiterten Vektorfelds der Differentialgleichung (2.1)

$$\mathcal{F} = \frac{d}{dt} = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_k^{(j)}} \quad (2.27)$$

und der zugehörigen Lie-Ableitung  $L_{\mathcal{F}}$  der Funktionen  $\phi_i$

$$\dot{\mathbf{y}}_i = L_{\mathcal{F}}\phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial \phi_i}{\partial u_k^{(j)}} \quad (2.28a)$$

ausgedrückt werden. Mehrfachen Zeitableitungen entsprechen Potenzen der Lie-Ableitung

$$\dot{\mathbf{y}}_i^{(k)} = L_{\mathcal{F}}^k \phi_i = L_{\mathcal{F}}(L_{\mathcal{F}}^{k-1} \phi_i), \quad k \geq 1, \quad L_{\mathcal{F}}^0 \phi_i = \phi_i. \quad (2.28b)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Konstante  $\alpha$  in (2.27) groß genug gewählt werden muß, damit  $\mathcal{F}$  als Zeitableitung für Funktionen der Form (2.5) wirkt<sup>4</sup>.

Der Grad  $\beta_i$  der Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{y}}_i^{(\beta_i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in (2.6) steht in keiner direkten Beziehung zu den Größen  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in (2.5) und ist daher a priori nicht bekannt. Vielmehr muß so oft abgeleitet werden, bis alle Zustandsvariablen und Eingangsgrößen aus den resultierenden Gleichungen bestimmt werden können.

Die Gleichungen (2.5) bilden zusammen mit den Zeitableitungen (2.28) ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Systemvariablen  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  und der Zeitableitungen von  $\mathbf{u}$ . Beim Auflösen dieses Gleichungssystems kann zur Bestimmung einer Eingangsvariable  $u_k$  die Kenntnis von Zeitableitungen  $u_{j \neq k}^{(l)}$ ,  $l \geq 1$ , anderer Eingangsvariablen erforderlich sein. Dies führt zur Betrachtung einer gewissen Dreiecksstruktur in Kapitel 3.

Die für den Flachheits-Nachweis notwendigen symbolischen Rechnungen können schon für einfache Systeme den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems erforderlich machen (Rothfuß und Zeitz 1996). Ist Bedingung (ii) der Definition 2.2 erfüllt, so kann Bedingung (iii) nach (2.8) sehr leicht überprüft werden.

---

<sup>4</sup>Die Beschränkung auf einen endlichen Wert für  $\alpha$  vermeidet die Differentialgeometrie unendlicher Prologationen (Olver 1993, Fliess et al. 1993a, Pomet 1995).

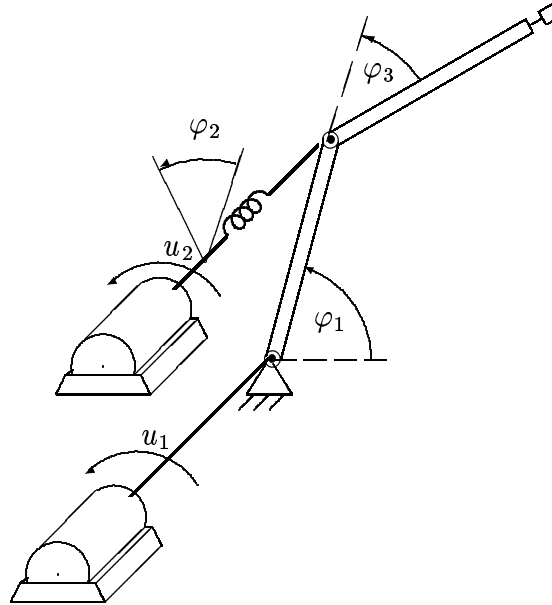


Bild 2.2: Ersatzbild eines Zwei-Gelenk-Roboters (De Luca 1988, Isidori 1995).

### 2.1.3 Flachheitsanalyse eines Zwei-Gelenk-Roboters

Der Nachweis der Flachheit soll nachfolgend an zwei stark vereinfachten Modellen des in Bild 2.2 dargestellten Zwei-Gelenk-Roboters erläutert werden, die durch

$$M(\varphi)\ddot{\varphi} + C(\varphi, \dot{\varphi}) + g(\varphi) = Q\mathbf{u}, \quad \varphi \in M_3, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.29)$$

beschrieben werden können. Dabei ist  $M(\varphi)$  die symmetrische, positiv definite Trägheitsmatrix,  $C(\varphi, \dot{\varphi})$  beschreibt die Zentripetal- und Coriolismomente und  $g(\varphi)$  die Gravitationsmomente. Die Motormomente  $\mathbf{u}$  in den Gelenken dienen als Eingangsgrößen. Die Darstellung (2.29) ist von der Form (2.2). Die folgenden Überlegungen gelten aber auch für eine Zustandsdarstellung von (2.29) mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_3]^T. \quad (2.30)$$

Die Zustandsdarstellung hat für die Flachheitsanalyse gegenüber der allgemeineren Form (2.29) keine Vorteile. Der Nachweis der Flachheit für ein allgemeines System (2.2) erfolgt analog zur Definition 2.2, indem die Systemgrößen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\mathbf{u}$  als Funktion des flachen Ausgangs und einer endlichen Zahl seiner Zeitableitungen dargestellt werden. Dies soll im folgenden für den Fall eines Roboters mit zwei starren bzw. einem starren und einem elastischen Antrieb erläutert werden.

## Starrer Zwei-Gelenk-Roboter

Betrachtet man beide Antriebe zunächst als starr, d. h.  $\varphi_2 \equiv \varphi_3$  und  $Q = I$ , so gilt  $\dim \mathbf{u} = \dim \boldsymbol{\varphi}$  mit  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ . In diesem Fall sieht man leicht, daß

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ein flacher Ausgang ist, da Bedingung (i) der Definition 2.2 erfüllt ist und Bedingung (ii) durch

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{y} \quad (2.32a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\mathbf{y}} \quad (2.32b)$$

$$\mathbf{u} = Q^{-1} \left( M(\mathbf{y})\ddot{\mathbf{y}} + C(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \right) \quad (2.32c)$$

überprüft werden kann. Der Bedingung (iii) entspricht  $\dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y}$ . Diese Überlegungen gelten für alle Systeme der Form (2.29), bei denen die Zahl der Freiheitsgrade  $\dim \boldsymbol{\varphi}$  gleich der Zahl  $m$  der Eingangsgrößen ist. In der Robotik wird (2.32c) auch als *inverse Kinematik* bzw. *computed torque* bezeichnet (Slotine und Li 1991).

## Elastischer Zwei-Gelenk-Roboter

Nimmt man hingegen an, daß der zweite Antrieb des Roboters aus Bild 2.2 elastisch ( $\varphi_2 \neq \varphi_3$ ) ist, so ist der Nachweis der Flachheit nicht mehr ganz so leicht möglich. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Coriolis- und Gravitationskräfte zum Vektor  $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi})$  zusammengefaßt. Die Massenmatrix  $M(\boldsymbol{\varphi})$  und der Vektor  $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})$  besitzen die folgende Gestalt<sup>5</sup> (De Luca 1988, Isidori 1995)

$$M(\boldsymbol{\varphi})\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = Q\mathbf{u} \quad (2.33a)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1(\varphi_3) & m_2 & m_3(\varphi_3) \\ m_2 & m_2 & 0 \\ m_3(\varphi_3) & 0 & m_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1(\varphi_3, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_3) \\ \eta_2(\varphi_2, \varphi_3) \\ \eta_3(\varphi_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_1) \end{bmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33b)$$

Die Eingangsgrößen werden im Vektor  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ , die Winkel in  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$  zusammengefaßt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Größen

$$y_1 = \varphi_1, \quad y_2 = \varphi_3 \quad (2.34)$$

<sup>5</sup>Für die folgenden Überlegungen werden die Terme nur durch ihre funktionale Abhängigkeit charakterisiert, um die Darstellung zu vereinfachen.

die Definition 2.2 erfüllen und ein flacher Ausgang für das Robotermodell sind. Bedingung (i) ist erfüllt. Für die Überprüfung von Bedingung (ii) müssen die Zustandsgrößen (2.30) sowie die Eingangsgrößen  $u_1$  und  $u_2$  als Funktion von (2.34) und einer endlichen Anzahl von dessen Zeitableitungen ausgedrückt werden: Aus (2.34) und den ersten Zeitableitungen erhält man

$$\varphi_1 = y_1 = \psi_{11}(y_1), \quad \varphi_3 = y_2 = \psi_{12}(y_2) \quad (2.35a)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{y}_1 = \psi_{13}(\dot{y}_1), \quad \dot{\varphi}_3 = \dot{y}_2 = \psi_{14}(\dot{y}_2). \quad (2.35b)$$

Die zweiten Zeitableitungen von (2.34) liefern mit (2.35)

$$\ddot{y}_1 = a_{11}(\varphi_2, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) + a_{12} \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \end{pmatrix} \quad (2.36a)$$

$$\ddot{y}_2 = a_{21}(\varphi_2, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) + a_{22}(y_2) \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \end{pmatrix}. \quad (2.36b)$$

Aus diesen Gleichungen können  $\varphi_2$  und die Differenz  $\Delta u = u_1 - u_2$  berechnet werden:

$$\varphi_2 = \psi_{15}(y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \quad (2.37a)$$

$$\Delta u = \tilde{\psi}_{21}(y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2). \quad (2.37b)$$

Durch nochmaliges Differenzieren erhält man unter Verwendung von (2.35) und (2.37)

$$\overset{(3)}{y}_1 = b_{11}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dot{\varphi}_2) + b_{12}(y_2)\Delta\dot{u} \quad (2.38a)$$

$$\overset{(3)}{y}_2 = b_{21}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dot{\varphi}_2) + b_{22}(y_2)\Delta\dot{u}, \quad (2.38b)$$

woraus sich

$$\dot{\varphi}_2 = \psi_{16} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}} \right) \quad (2.39a)$$

$$\Delta\dot{u} = \tilde{\psi}_{22} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}} \right) \quad (2.39b)$$

ergibt. Damit sind alle Zustandsgrößen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  gemäß (2.6a) bestimmt. Zur Berechnung von (2.6b) muß noch einmal abgeleitet werden:

$$\overset{(4)}{y}_1 = c_{11} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}} \right) + c_{12}(y_2)\Delta\ddot{u} + c_{13} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}} \right) \begin{pmatrix} g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \end{pmatrix} \quad (2.40a)$$

$$\overset{(4)}{y}_2 = c_{21} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}} \right) + c_{22}(y_2)\Delta\ddot{u} + c_{23} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}} \right) \begin{pmatrix} g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{pmatrix}. \quad (2.40b)$$

Daraus kann man unter Verwendung von (2.37b)

$$u_1 = \psi_{21} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}}, \overset{(4)}{\mathbf{y}} \right) \quad (2.41a)$$

$$u_2 = \psi_{22} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}}, \overset{(4)}{\mathbf{y}} \right) \quad (2.41b)$$

$$\Delta\ddot{u} = \psi_{23} \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \overset{(3)}{\mathbf{y}}, \overset{(4)}{\mathbf{y}} \right) \quad (2.41c)$$

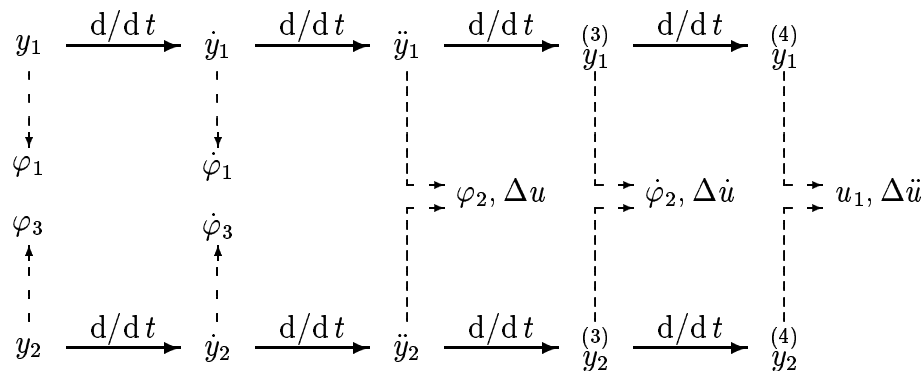


Bild 2.3: Schema der Flachheitsanalyse für das elastische Zwei-Gelenk-Robotermodell (2.33).

Dabei gilt  $\Delta \mathbf{u} = u_1 - u_2$ , und  $- - \rightarrow$  steht für die Bestimmung der Systemgrößen aus  $y_{1,2}^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, 4$ .

bestimmen. Damit ist die Bedingung (ii) nachgewiesen: den Beziehungen (2.6a) entsprechen die Gleichungen (2.35), (2.37a) und (2.39a). Die Beziehungen (2.6b) werden durch (2.41a) und (2.41b) repräsentiert (mit  $\beta_1 = \beta_2 = 3$ ). Obwohl die Gleichungen zur Berechnung der Beziehungen (2.6) z. T. umfangreiche Ausdrücke enthalten, ist das Auflösen aufgrund der eingangsaffinen Struktur der Systemgleichungen bezüglich  $\mathbf{u}$  symbolisch möglich, da die jeweils höchste Ableitung von  $\mathbf{u}$  bzw.  $\Delta \mathbf{u}$  auch affin in die Zeitableitungen von  $\mathbf{y}$  eingeht.

Der Nachweis der Flachheit macht sich die Tatsache zunutze, daß die Massenmatrix in (2.33b) ein Nullelement besitzt. Dadurch hängen die zweiten Zeitableitungen  $\ddot{\varphi}_{1,3}$  nur von der Differenz  $u_1 - u_2$  der beiden Eingangsgrößen ab. Im Fall einer vollbesetzten Massenmatrix ist der Nachweis der Flachheit nicht mehr so leicht möglich, und der flache Ausgang, sofern er existiert, ist eine Funktion aller Winkel.

Die gezeigten Berechnungen werden in Bild 2.3 graphisch veranschaulicht: dicke Pfeile repräsentieren die Zeitableitungen des flachen Ausgangs; wird das Modell (2.33) in Zustandsdarstellung (2.1) angegeben, so können die Zeitableitungen mit Hilfe der Lie-Ableitung (2.28a) berechnet werden. Die gestrichelten Pfeile geben an, wie aus den Zeitableitungen des flachen Ausgangs die Größen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\mathbf{u}$  durch algebraische Umformungen berechnet werden, ohne Differentialgleichungen zu integrieren.

Anschaulich läßt sich die Flachheit am Beispiel des Zwei-Gelenk-Roboters wie folgt interpretieren: der flache Ausgang (2.34) ist der minimale Satz von Systemgrößen, aus denen sich Informationen über alle anderen Systemgrößen (Zustände und Eingänge) ermitteln lassen. Sind die Trajektorien für  $y_1 = \varphi_1$  und  $y_2 = \varphi_3$  bekannt, so können die Trajektorien der anderen Zustände durch sukzessive Differentiation gemäß (2.6a) berechnet werden. Die zu den Trajektorien von  $\mathbf{y}$  gehörenden Eingangsgrößenverläufe  $\mathbf{u}$  ergeben sich ebenfalls gemäß (2.6b) aus Zeitableitungen von  $\mathbf{y}$ . Dies kann auch folgendermaßen interpretiert werden:

der Roboter „integriert“ die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  zu den Winkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_3$ . Kehrt man diese „Integration“ um, so können aus dem zeitlichen Verlauf der beiden Winkel die Verläufe der anderen Zustände und Eingänge bestimmt werden.

Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um die zu vorgegebenen Solltrajektorien  $\mathbf{w}_d(t)$  gehörenden Eingangsgrößenverläufe  $\mathbf{u}_d(t)$  zu bestimmen und so das Trajektorienfolgeproblem 2.1 zu lösen (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b). Dies wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

## 2.2 Flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems

Beim Trajektorienfolgeproblem 2.1 sollen die Regelgrößen  $\mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$  von einem Anfangspunkt  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{q}(\mathbf{x}_0)$  in endlicher Zeit  $T$  entlang einer Trajektorie  $\mathbf{w}_d(t)$  in einen vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{w}(T) = \mathbf{q}(\mathbf{x}(T))$  gebracht werden. Dies entspricht – wie in Bild 2.4 dargestellt – der Aufgabe, den Zustand  $\mathbf{x}$  entlang einer Solltrajektorie  $\mathbf{x}_d(t)$  zu führen, die einen Anfangszustand  $\mathbf{x}(0)$  mit einem vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{x}(T)$  verbindet. Da i. a. die Dimension von  $\mathbf{w}$  kleiner als die von  $\mathbf{x}$  ist, muß zusätzlich zu jedem Zeitpunkt  $0 < t < T$  die Systemdifferentialgleichung (2.1) erfüllt sein. Im  $\mathbf{x}$ -Koordinatensystem ist es daher a priori nicht klar, für welche Größen unabhängig voneinander Solltrajektorien vorgegeben werden können.

Die Lösung des Trajektorienfolgeproblems 2.1 ist hingegen für flache Systeme sehr elegant möglich (Fliess *et al.* 1992a, Rouchon *et al.* 1993, Fliess *et al.* 1995b). Im folgenden wird eine Lösung in zwei Schritten vorgestellt: in einem ersten Schritt werden aus den Solltrajektorien  $\mathbf{w}_d(t)$  geeignete Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  für die Komponenten des flachen Ausgangs entworfen. Dies ist Gegenstand von Abschnitt 2.2.1. In einem zweiten Schritt kann, wie in Abschnitt 2.2.2 dargestellt wird, diese Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  mit Hilfe einer Steuerung (open-loop) realisiert werden. Alternativ kann die Fehlerdynamik des Trajektorienfolgefehlers mit Hilfe einer Zustandsrückführung (closed-loop) stabilisiert werden. Dies wird in Abschnitt 2.2.4 betrachtet.

### 2.2.1 Entwurf von Solltrajektorien und Trajektorienfolge im offenen Kreis

Der Entwurf der Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  im Koordinatensystem des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  ist einfacher als für den Zustand  $\mathbf{x}$ , da für die Komponenten des flachen Ausgangs unabhängig voneinander Sollverläufe vorgegeben werden können. Die Werte der Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  und ihrer Ableitungen zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = T$  können aus den Anfangs- und Endbedingungen  $\mathbf{x}(0)$  und  $\mathbf{x}(T)$  für die Zustände berechnet werden (vgl. die dicken



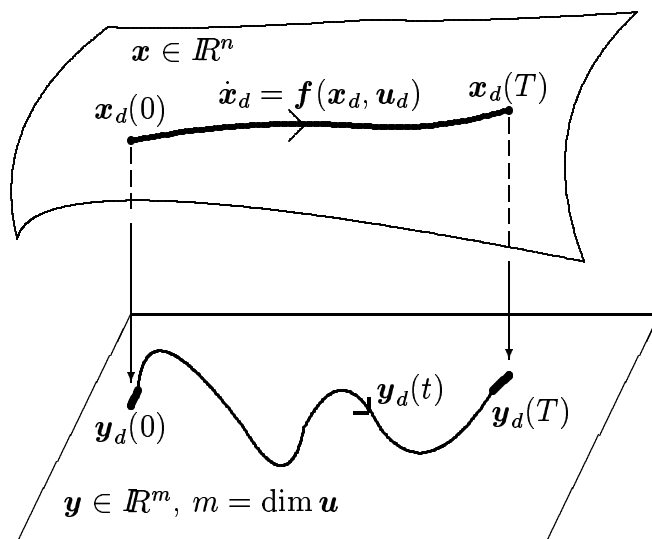


Bild 2.4: Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{y}_d(t)$  in den ursprünglichen und den flachen Koordinaten. Die dicken Linien bei  $\mathbf{y}(0)$  und  $\mathbf{y}(T)$  deuten an, daß auch die Werte der Zeitableitungen  $\mathbf{y}^{(k)}(t)$ ,  $k \geq 1$ , für  $t = 0$  bzw.  $t = T$  festgelegt sind.

Linien bei  $\mathbf{y}(0)$  bzw.  $\mathbf{y}(T)$  in Bild 2.4). In diesem Zusammenhang sei hervorgehoben, daß die Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  im Intervall  $0 < t < T$  nur hinreichend oft differenzierbar sein müssen und sonst keinen weiteren Beschränkungen unterliegen. Sie können mit Hilfe geeigneter, hinreichend oft differenzierbarer Kurven (Splines, Polynome, etc.) realisiert werden, d. h. aus dem (dynamischen) Problem der Trajektorienplanung für den Originalzustand  $\mathbf{x}$  wird aufgrund der Flachheit ein rein algebraisches Interpolationsproblem für den flachen Ausgang. Aufgrund der Flachheitseigenschaft lassen sich die zugehörigen Verläufe der verbleibenden Zustandsgrößen in eindeutiger Weise bestimmen.

Im folgenden sind zwei Fälle für die Lösung des Trajektorienfolgeproblems im offenen Kreis zu unterscheiden:

- Der flache Ausgang  $\mathbf{y}$  stimmt mit den Regelgrößen  $\mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$  nach (2.3a) überein.
- Mindestens eine Regelgröße  $w_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  ist nicht Komponente des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$ .

**Bemerkung 2.10** Das Trajektorienfolgeproblem 2.1 für die Regelgrößen  $\mathbf{w}$  kann für flache Systeme in ein Trajektorienfolgeproblem für den flachen Ausgang  $\mathbf{y}$  überführt werden. Aus diesem Grund wird im folgenden meist das Trajektorienfolgeproblem für den flachen Ausgang  $\mathbf{y}$  betrachtet.

## Flacher Ausgang identisch mit den Regelgrößen $\mathbf{w} = \mathbf{y}$

Stimmen die Regelgrößen  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit den Komponenten  $y_i$  des flachen Ausgangs überein, so sind – bedingt durch die Eigenschaft der Flachheit – durch die Wahl der Solltrajektorien für den flachen Ausgang  $\mathbf{y}$  auch die Trajektorien für die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}$  und die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  nach (2.6a) eindeutig bestimmt. Die zugehörigen Zustands- und Eingangsgrößenverläufe  $\mathbf{x}_d(t)$  bzw.  $\mathbf{u}_d(t)$  ergeben sich, indem man in (2.6) die Größen  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{y}^{(\beta+1)}$  durch die entsprechenden Ausdrücke in den Sollgrößen  $\mathbf{y}_d(t)$  ersetzt:

$$\mathbf{x}_d(t) = \psi_1 \left( \mathbf{y}_d(t), \dot{\mathbf{y}}_d(t), \dots, \mathbf{y}_d^{(\beta)}(t) \right) \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{u}_d(t) = \psi_2 \left( \mathbf{y}_d(t), \dot{\mathbf{y}}_d(t), \dots, \mathbf{y}_d^{(\beta+1)}(t) \right). \quad (2.42b)$$

Dies kann dazu benutzt werden, vorab Zustands- und Eingangsgrößenbeschränkungen (2.4) für die Trajektorienfolge im offenen Kreis zu überprüfen, indem man die Verläufe der Solltrajektorien und ihrer Zeitableitungen in (2.42) einsetzt.

**Bemerkung 2.11** Die Überprüfung der Beschränkungen (2.4) mittels (2.42) ist auch für die Trajektorienfolge im geschlossenen Kreis (vgl. Abschnitt 2.2.4) von Nutzen. Es reicht aus, in (2.42) die Schranken  $u_{i,\min}$ ,  $x_{i,\min}$  bzw.  $u_{i,\max}$ ,  $x_{i,\max}$  um eine gewisse „Reserve“ zu modifizieren.

**Bemerkung 2.12** Die Berücksichtigung von „Hindernissen“ führt im allgemeinen auf komplizierte Entwurfsaufgaben bei der Trajektorienplanung, da neben Beschränkungen der Stellgrößen auch solche der Zustände berücksichtigt werden müssen. Durch die Flachheitseigenschaft wird aufgrund von (2.42) die Berücksichtigung derartiger Beschränkungen vereinfacht, da die Zustands- und Stellgrößenverläufe explizit bekannt sind.

**Bemerkung 2.13** Die Steuerfunktion (2.42b) existiert bei flachen Systemen immer mit Ausnahme der Singularitäten der Funktionen  $\psi_2$ . Für die Realisierung der Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$  benötigt man nur die Zeitableitungen von  $\mathbf{y}_d(t)$ , und man muß hierfür keine Differentialgleichungen integrieren. Treten Singularitäten auf, so können die Solltrajektorien gegebenenfalls so gewählt werden, daß die Singularitäten vermieden werden.

**Beispiel 2.7** Gibt man für das Robotermodell (2.29) mit zwei starren Antrieben aus Abschnitt 2.1.3 zweimal stetig differenzierbare und für das elastische Modell (2.33) aus Abschnitt 2.1.3 viermal stetig differenzierbare Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  für die entsprechenden Komponenten des flachen Ausgangs (2.31) bzw. (2.34) vor, so kann die Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$  zur Trajektorienfolge aus (2.32c) bzw. (2.41a) und (2.41b) berechnet werden, indem das Argument  $\mathbf{y}$  und seine Zeitableitungen durch die entsprechenden Ausdrücke in  $\mathbf{y}_d$  ersetzt werden.

*Diese Steuerung führt zu zufriedenstellenden Ergebnissen, falls das Modell das Systemverhalten hinreichend genau beschreibt, die Anfangsbedingungen des Systems hinreichend genau bekannt sind und nur kleine Störungen auf den Roboter einwirken.*

### Flacher Ausgang nicht identisch mit den Regelgrößen $\mathbf{w} \neq \mathbf{y}$

Sind Regelgrößen  $\mathbf{w}$  und flacher Ausgang  $\mathbf{y}$  nicht identisch, so kann man in (2.3a) den Zustand  $\mathbf{x}$  mit Hilfe von (2.6a) durch  $\mathbf{y}$  und seine Zeitableitungen ersetzen:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} \left( \psi_1 \left( \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}} \right) \right). \quad (2.43)$$

Ersetzt man in dieser Beziehung  $\mathbf{y}$  und seine Zeitableitungen durch die entsprechenden Ausdrücke in  $\mathbf{y}_d$ , so erhält man für die Solltrajektorie der Regelgrößen

$$\mathbf{w}_d = \mathbf{q}_d \left( \mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}_d \right). \quad (2.44)$$

Diese Beziehung stellt eine (implizite) Differentialgleichung für die Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  dar. Ihre Lösung soll an den beiden folgenden Beispielen verdeutlicht werden.

**Beispiel 2.8 (Fortsetzung von Beispiel 1.1 und 2.1)** *Die Wachstumsrate der Biomasse  $x_1$  soll auf einem konstanten Wert  $\mu_d(x_2) = \mu_{opt}$  gehalten werden. Man erhält aus (2.12a) mit  $y = x_1$  für die Sollgröße  $y_d(t)$  eine homogene Differentialgleichung:*

$$\dot{y}_d = \mu_{opt} \cdot y_d. \quad (2.45)$$

*Für dieses einfache Beispiel kann diese Differentialgleichung analytisch gelöst werden:*

$$y_d(t) = y_d(0) \exp(\mu_{opt} t). \quad (2.46)$$

*Mit Hilfe von (2.13) kann man damit die Sollverläufe  $x_{2,d}(t)$  und  $u_d(t)$  angeben. Damit kann off-line überprüft werden, ob evtl. vorhandene Zustands- oder Eingangsgrößenbeschränkungen eingehalten werden. Ist dies nicht der Fall, so kann dies u. U. durch Wahl einer anderen Solltrajektorie  $\mu_d(x_2)$  erreicht werden.*

Die Differentialgleichung (2.44) kann durchaus instabil sein, wie dies in (2.45) für  $\mu_{opt} > 0$  der Fall ist. In einem solchen Fall ist darauf zu achten, daß die Zeit  $T$  für das Durchlaufen der Solltrajektorie endlich ist und so gewählt wird, daß bei der Berechnung der Sollverläufe die Beträge der Zustände bzw. Eingänge beschränkt und in einem sinnvollen Wertebereich bleiben.

Abhängig von  $\mathbf{q}_d \left( \mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}_d \right)$  kann die Lösung  $\mathbf{y}_d(t)$  der Differentialgleichung (2.44) manchmal nur numerisch bestimmt werden, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 2.9** In einem kontinuierlich betriebenen isothermen Rührkesselreaktor finden die Reaktionen  $2A \xrightarrow{k_1} B$ ,  $2B \xrightarrow{k_2} C$  statt. Die Reaktionsgeschwindigkeiten sind  $r_1 = k_1 c_A^2$ ,  $r_2 = k_2 c_B^2$  mit  $k_1, k_2 = \text{konstant}$ . Die Zulaufkonzentration des Stoffes A in den Reaktor ist die Eingangsgröße  $u$ , der Durchfluß wird mit  $q$  bezeichnet. Die Differentialgleichungen für die Konzentrationen der Stoffe A und B lauten somit

$$\dot{c}_A = -2k_1 c_A^2 + (u - c_A)q \quad (2.47a)$$

$$\dot{c}_B = k_1 c_A^2 - 2k_2 c_B^2 - c_B q. \quad (2.47b)$$

Ein flacher Ausgang des Systems (2.47) ist

$$y = c_B. \quad (2.48)$$

Hiermit ergibt sich  $c_A$  aus der Zeitableitung von (2.48) in Abhängigkeit des flachen Ausgangs zu

$$c_A = \sqrt{\frac{2k_2 y^2 + yq + \dot{y}}{k_1}}. \quad (2.49)$$

Wenn man hier  $c_A$  durch  $c_{A_d}(t)$ ,  $y$  durch  $y_d(t)$  und  $\dot{y}$  durch  $\dot{y}_d(t)$  ersetzt und nach  $\dot{y}_d(t)$  auflöst, erhält man eine nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{y}_d + 2k_2 y_d^2 + y_d q = k_1 c_{A_d}^2. \quad (2.50)$$

Die Bestimmung von  $y_d(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , mit welchem sich das gewünschte  $c_{A_d}(t)$  realisieren läßt, ist praktisch nur numerisch möglich.

Ist die Differentialgleichung (2.50) nur numerisch lösbar, so ist dabei – wie oben bereits erwähnt – darauf zu achten, daß die Zeit  $T$  für das Durchlaufen der Trajektorie so klein gewählt wird, daß der Betrag von  $y_d(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , bei der numerischen Integration von (2.50) beschränkt bleibt.

**Bemerkung 2.14** Entwirft man für die Regelgrößen  $\mathbf{w}$  mit Hilfe der Eingangs-Ausgangslinearisierung einen Regler, so erhält man eine interne Dynamik (Isidori 1995). Der Existenz einer internen Dynamik bei der Eingangs-Ausgangslinearisierung entspricht beim flachheitsbasierten Entwurf die Existenz der Differentialgleichung (2.44) zur Bestimmung des Sollverlaufs für den flachen Ausgang. Hier sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß ein wesentliches Merkmal der flachheitsbasierten Regelung ist, daß es keine interne Dynamik gibt, wie im folgenden Abschnitt allgemein erläutert wird.

### 2.2.2 Flachheit und Inversion nichtlinearer Systeme

Das flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems 2.1 ist in Bild 2.5 als Blockschaltbild dargestellt. Die zu seiner Lösung erforderliche Steuerung wird durch eine Inversion der Systemgleichungen bestimmt. Hierfür wird die Steuerfunktion  $\mathbf{u}_d(t)$  nach (2.42b) berechnet, die zu einer Trajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  bzw.  $\mathbf{w}_d(t)$  gehört. Systemtheoretisch ist die Be-

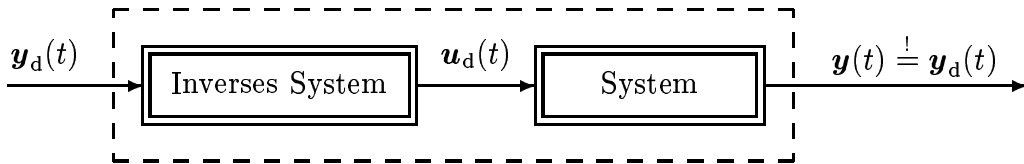


Bild 2.5: Trajektorienfolgeproblem im offenen Kreis.

stimmung der Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$  äquivalent zur *Inversion* eines nichtlinearen Ein-/Ausgangssystems (Respondek 1990, Fliess und Glad 1993)

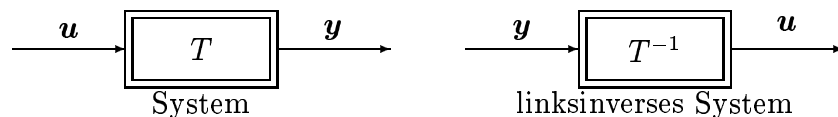
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m. \tag{2.51}$$

Die Inversion ist vor allem für die Entkopplung und die Trajektorienfolge von Bedeutung. Im Fall linearer Ein-/Ausgangssysteme

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{y} = T \left( \frac{d}{dt} \right) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \tag{2.52}$$

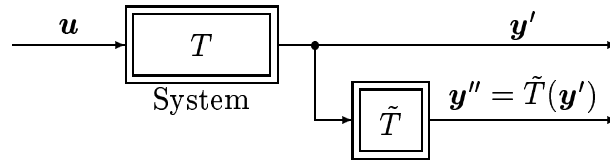
ist die Invertierbarkeit äquivalent zur Invertierbarkeit der zugehörigen Übertragungsmatrix  $T$ . Man unterscheidet (Fliess 1989, Rudolph 1994)

- *Linksinversion*: Ein System ist genau dann linksinvertierbar, wenn es einen Eingang  $\mathbf{u}$  gibt, der einen vorgegebenen Ausgang  $\mathbf{y}$  erzeugt. Bei linearen Systemen (2.52) existiert für ein linksinvertierbares System die Linksinverse  $L$  der Übertragungsmatrix, d. h.  $L \cdot T = I$ .



- *Rechtsinversion*: Ein System ist rechtsinvertierbar, wenn seine Ausgänge  $\mathbf{y}$  nicht verkoppelt sind, d. h. die Ausgänge sind nur eine Funktion der Eingänge  $\mathbf{u}$ . Bei einem rechtsinvertierbaren System läßt sich der Ausgang  $\mathbf{y}$  nicht in zwei Teile  $\mathbf{y}'$  und  $\mathbf{y}''$  aufspalten, wobei  $\mathbf{y}''$  eine Gleichung  $\mathbf{y}'' = \tilde{T}(\mathbf{y}')$  unabhängig vom Eingang  $\mathbf{u}$  erfüllt. Die

Rechtsinvertierbarkeit bedeutet, daß es keine Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}''$  gibt. Die Übertragungsmatrix  $T$  eines linearen rechtsinvertierbaren Systems besitzt eine Rechtsinverse  $T \cdot R = I$ .



Ein rechtsinvertierbares System wird auch *ausgangssteuerbar* genannt, d. h. es können Trajektorien für den Ausgang frei vorgegeben werden. Dies ist nur möglich, wenn es keine Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}''$  gibt.

Da sich nach Definition 2.2 aufgrund der Bedingung (ii) die Eingänge  $\mathbf{u}$  als Funktion des (fiktiven) flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  und seiner Zeitableitungen darstellen lassen, ist ein flaches System linksinvertierbar bezüglich seines flachen Ausgangs. Die Gleichung (2.6b) beschreibt das linksinverse System  $T^{-1}$ . An dieser Beziehung kann man ein weiteres wesentliches Merkmal eines flachen Systems erkennen: das linksinverse System (2.6b) hat keine Dynamik, da man den Eingang  $\mathbf{u}$  als Funktion des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  und einer endlichen Zahl seiner Zeitableitungen bestimmen kann, ohne Differentialgleichungen zu integrieren.

**Beispiel 2.10** *Im Beispiel des Zwei-Gelenk-Roboters mit starren Antrieben ist das linksinverse System durch (2.32c) definiert und besitzt keine Dynamik. Im Fall des Roboters mit einem elastischem Antrieb wird das linksinverse System durch (2.41a) und (2.41b) beschrieben.*

Die differentielle Unabhängigkeit des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  aufgrund von Bedingung (iii) zeigt, daß ein flaches System rechtsinvertierbar bezüglich des (fiktiven) flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  ist. Dies bedeutet, daß ein flaches System stets rechts- und linksinvertierbar ist, wobei das linksinverse System keine Dynamik besitzt.

### 2.2.3 Flachheit und Steuerbarkeit

Ein nichtlineares System (2.1) heißt *steuerbar*, wenn es eine Eingangsfunktion  $\mathbf{u}$  gibt, die das System (2.1) in endlicher Zeit von einem beliebigen Anfangspunkt  $\mathbf{x}(0)$  in einem beliebigen Endpunkt  $\mathbf{x}(T)$  überführt. Für flache Systeme läßt sich die Frage nach der Steuerbarkeit leicht beantworten. Aus den Punkten  $\mathbf{x}(0)$  und  $\mathbf{x}(T)$  können – wie in Abschnitt 2.2.1 gezeigt – (hinreichend glatte) Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  bestimmt werden. Aufgrund der Beziehung (2.42b) kann direkt die zur Realisierung der Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  erforderliche Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$  angegeben werden. Das System ist damit in einem anschaulichen Sinne steuerbar. Flachheit

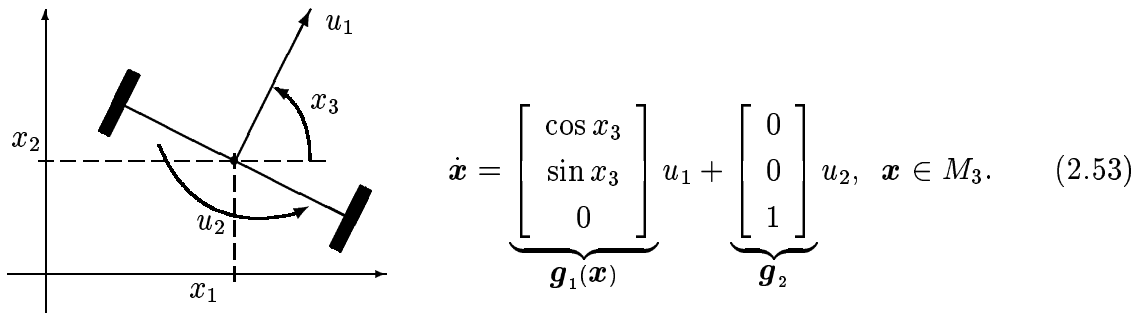


Bild 2.6: Kinematisches Ersatzbild und Modell einer Fahrzeug-Vorderachse.

kann somit als eine mögliche Verallgemeinerung der Steuerbarkeit aufgefaßt werden (Fliess *et al.* 1992a, Fliess *et al.* 1995b).

Die Flachheit ist hinreichend für die Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme (Fliess *et al.* 1995b). Dies soll am Beispiel eines *nicht-holonomen* kinematischen Fahrzeugmodells gezeigt werden.

**Beispiel 2.11 (Kinematisches Fahrzeug)** Das in Bild 2.6 graphisch dargestellte kinematische Modell (2.53) einer Fahrzeug-Vorderachse mit den Eingängen Fahr- und Lenkgeschwindigkeit  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  gehört zur Klasse der *nicht-holonomen Systeme*

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in M_n. \quad (2.54)$$

Das Fahrzeug kann in der  $u_1$ -Richtung fahren und gedreht werden, aber nicht in Richtung der Achse bewegt werden (Rollen ohne Gleiten). Wenn man Flachheit als eine mögliche Form der Steuerbarkeit betrachtet, so muß das kinematische Fahrzeugmodell (2.53) flach sein. Die kartesischen Koordinaten des Achsmittelpunktes

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \quad (2.55)$$

sind tatsächlich ein flacher Ausgang für (2.53). Wie in Bild 2.7 dargestellt liefert die Überprüfung der Bedingung (ii)

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dot{y}_1 = u_1 \cos x_3 \\ \dot{y}_2 = u_1 \sin x_3 \\ \ddot{y}_1 = \dot{u}_1 \cos x_3 - u_1 u_2 \sin x_3 \\ \ddot{y}_2 = \dot{u}_1 \sin x_3 + u_1 u_2 \cos x_3 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \arctan(\dot{y}_2/\dot{y}_1) \\ u_1 = \frac{\dot{y}_1}{\cos(\arctan(\dot{y}_2/\dot{y}_1))} \\ u_2 = \psi_1(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \\ \dot{u}_1 = \psi_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2). \end{array} \right. \quad (2.56a)$$

$$(2.56b)$$

$$(2.56c)$$

$$(2.56d)$$

$$(2.56e)$$

$$(2.56f)$$

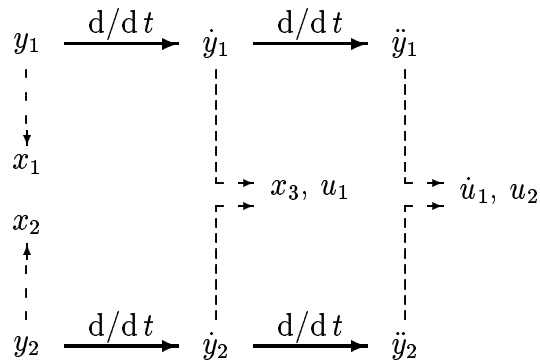


Bild 2.7: Schema der Flachheitsanalyse für das kinematische Fahrzeug (2.53). Dabei steht  $- - \rightarrow$  für die Bestimmung der Systemgrößen  $x_1, x_2, x_3, u_1, \dot{u}_1$  und  $u_2$  aus  $y_{1,2}^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, 2$ .

Da das Fahrzeugmodell (2.53) flach ist, kann man eine Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  für den flachen Ausgang frei vorgeben. Die für die Realisierung der Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  erforderliche Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$  erhält man aus (2.56d), (2.56e), indem man  $\mathbf{y}$  und seine Zeitableitungen durch die entsprechenden Ausdrücke in  $\mathbf{y}_d(t)$  ersetzt.

Aufgrund der Flachheit können die Trajektorien der Systemvariablen (Zustände und Eingänge) durch die Trajektorien des flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl seiner Zeitableitungen ausgedrückt werden. Damit erhält man eine direkte Aussage darüber, ob ein System in einen beliebigen Zustand überführt werden kann. Insbesondere erhält man aus der Flachheitsanalyse direkt die zur Realisierung der Trajektorie erforderliche Steuerung gemäß (2.42b). Deshalb kann – wie bereits erwähnt – Flachheit als eine mögliche Verallgemeinerung der Steuerbarkeit betrachtet werden.

**Bemerkung 2.15** Die für die Realisierung der flachheitsbasierten Lösung des Trajektorienfolgeproblems erforderliche Steuerung für das kinematische Fahrzeug weist Singularitäten auf, wenn die Geschwindigkeit des Fahrzeugs Null wird, d. h.  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$  ist, da in (2.56c) bzw. (2.56d), (2.56e) unbestimmte Ausdrücke auftreten. Aus der Anschauung weiß man jedoch, daß das Fahrzeug in jedem Punkt angehalten werden kann, d. h. die genannten Singularitäten stellen in der Praxis keine Einschränkung dar. In (Fließ et al. 1995a) werden am Beispiel des kinematischen Fahrzeugs mit zwei Achsen diese Singularitäten nicht-holonomen Systeme mit Hilfe einer Zeittransformation eliminiert, die einer Parametrierung der Trajektorien durch die Bogenlänge

$$s = \sigma(t) \quad (2.57)$$

entspricht. Dazu führt man neue Eingänge

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\dot{\sigma}(t)} u_i, \quad i = 1, 2, \quad \dot{\sigma}(t) \neq 0, \quad (2.58)$$



ein und setzt diese zusammen mit (2.57) in die Systemgleichung (2.54) ein:

$$\dot{\sigma} \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \dot{\sigma} \bar{u}_i. \quad (2.59)$$

Diese wird durch die Zeittransformation (2.57) nicht verändert. Führt man für das System (2.59) die Flachheitsanalyse durch, so erkennt man, daß sich die Gleichung (2.6a), aus der der Zustand  $\mathbf{x}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{y}$  und dessen Zeitableitungen berechnet wird, ebenfalls nicht verändert. Die Gleichung (2.6b) wird hingegen mit  $\dot{\sigma}(t)$  multipliziert. Dadurch werden für das kinematische Fahrzeug die Singularitäten in  $\mathbf{u}$  für  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$  umgangen (Fliess et al. 1995a). Die Verwendung von Zeittransformationen findet man auch in (Sampei et al. 1995).

**Bemerkung 2.16** Für das entsprechende kinematische Fahrzeugmodell mit zwei Achsen findet man in (Rouchon et al. 1993) grundsätzliche Überlegungen zur flachheitsbasierten Trajektorienfolge. Die dargestellte Vorgehensweise läßt sich auch auf die Bewegung einer ganzen Klasse zweiachsiger Fahrzeuge mit einem oder mehreren Anhängern anwenden, die ebenfalls flach sind; ein für Anwendungen sehr nützlicher flacher Ausgang wird durch die kartesischen Koordinaten des letzten Anhängers repräsentiert. Damit ist es auch für diese Modelle möglich, die Fahr- und Lenkmanöver mit Hilfe der flachheitsbasierten Methoden zu planen und zu realisieren. Der Nachweis der Flachheit und die Berechnung der Steuerung zur Trajektorienfolge werden durch die Verwendung der Frénet-Formel, die einer Parametrierung der Trajektorien durch deren Bogenlänge entspricht, wesentlich erleichtert (Rouchon et al. 1993, Fliess et al. 1995b).

## 2.2.4 Trajektorienfolge im geschlossenen Kreis

Durch eine Zustandsrückführung läßt sich ein besseres Folgeverhalten des Systems als bei Verwendung einer Steuerung erreichen, da auf diese Weise der Trajektorienfolgefehler gegen Störungen und Modellfehler stabilisiert wird. Der Entwurf einer solchen Zustandsrückführung mit Eigenwertvorgabe ist für flache Systeme leicht möglich, da sie – wie im folgenden gezeigt wird – exakt zustandslinearisierbar sind. Die Vorgehensweise soll am Beispiel des Robotermodells aus Abschnitt 2.1.3 erläutert werden. Der Zusammenhang der Flachheit mit der exakten Zustandslinearisierbarkeit wird in Abschnitt 2.3 diskutiert.

### Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers

Beim Entwurf einer Steuerung (2.42b) zur Trajektorienfolge werden in den Gleichungen (2.6b) der flache Ausgang  $\mathbf{y}$  und seine Zeitableitungen durch die entsprechenden Ausdrücke

in der Solltrajektorie  $\mathbf{y}_d(t)$  ersetzt. Ausgehend von (2.6b) kann aber auch eine Zustandsrückführung zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \quad (2.60)$$

entworfen werden: dazu werden in (2.6b) neue Eingänge

$$v_i \stackrel{!}{=} y_i^{(\kappa_i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = \kappa \geq n, \quad (2.61)$$

eingeführt. Die ganzen Zahlen  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sind charakteristische Größen des Systems (2.1), und ihre Bestimmung wird in Kapitel 3 ausführlich diskutiert. Durch die Festlegung der  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  werden in (2.6b) alle höheren Zeitableitungen (2.28) von  $\mathbf{y}$  durch die entsprechenden Zeitableitungen von (2.61)

$$v_i^{(k_i)} = y_i^{(\kappa_i + k_i)}, \quad k_i = 0, \dots, \beta_i - \kappa_i + 1, \quad (2.62)$$

ersetzt, und man erhält

$$\mathbf{u} = \psi_2 \left( y_1, \dots, y_1^{(\kappa_1-1)}, v_1, \dots, v_1^{(\beta_1-\kappa_1+1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\kappa_m-1)}, v_m, \dots, v_m^{(\beta_m-\kappa_m+1)} \right). \quad (2.63a)$$

Setzt man (2.62) in (2.6a) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{x} = \psi_1 \left( y_1, \dots, y_1^{(\kappa_1-1)}, v_1, \dots, v_1^{(\beta_1-\kappa_1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\kappa_m-1)}, v_m, \dots, v_m^{(\beta_m-\kappa_m)} \right). \quad (2.63b)$$

Dies kann als verallgemeinerte Zustandstransformation interpretiert werden, die den ursprünglichen Zustand  $\mathbf{x}$  mit einem neuen Zustand

$$\mathbf{z} = [z_1^1, \dots, z_{\kappa_1}^1, \dots, z_1^m, \dots, z_{\kappa_m}^m]^T \quad (2.64a)$$

mit den Komponenten

$$z_k^i = y_i^{(k-1)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, \kappa_i, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i \geq n \quad (2.64b)$$

verknüpft. Wendet man diese Zustandstransformation und Zustandsrückführung auf das nichtlineare System (2.1) an, so erhält man in den Koordinaten (2.64b) die *Brunovský-Normalform* (Kailath 1980) des geschlossenen Kreises

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, \kappa_i - 1, \quad (2.65a)$$

$$\dot{z}_{\kappa_i}^i = v_i. \quad (2.65b)$$

Diese Form besteht aus  $m$  entkoppelten Teilsystemen, die als Integratorketten vorliegen. In der Form (2.65) kann leicht eine Eigenwertvorgabe für die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers (2.60) vorgenommen werden, indem für die neuen Eingänge

$$v_i = y_{i,d}^{(\kappa_i)}(t) - \sum_{j=0}^{\kappa_i-1} q_j^i \left( y_i^{(j)} - y_{i,d}^{(j)}(t) \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.66a)$$

$$= z_{\kappa_i,d}^i(t) - \sum_{j=0}^{\kappa_i-1} q_j^i (z_j^i - z_{j,d}^i(t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.66b)$$

die Parameter  $q_j^i$  so gewählt werden, daß sich eine asymptotisch stabile Dynamik des Trajektorienfolgefehlers  $e_i(t) = y_i(t) - y_{id}(t) = z_j^i(t) - z_{j,d}^i(t)$  ergibt

$$e_i^{(\kappa_i)} + \sum_{j=0}^{\kappa_i-1} q_j^i e_i^{(j)} = 0, \quad e_i^{(j)}(0) = y_i^{(j)}(0) - y_{i,d}^{(j)}(0), \quad j = 0, \dots, \kappa_i - 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.67)$$

Die Dynamikparameter  $q_j^i$  können durch Vorgabe von Eigenwerten  $\lambda_j^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, \kappa_i$ , und einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden:

$$\prod_{i=1}^m (\lambda^{\kappa_i} + q_{\kappa_i-1}^i \lambda^{\kappa_i-1} + \dots + q_1^i \lambda + q_0^i) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{\kappa_i} (\lambda - \lambda_j^i). \quad (2.68)$$

Das Blockschaltbild des flachheitsbasierten Trajektorienfolgereglers ist in Bild 2.8 dargestellt. Es umfaßt die Berechnung der Solltrajektorien ① und des neuen Zustands ② sowie die asymptotische Folgeregelung ③ und die Zustandsrückführung ④.

**Bemerkung 2.17** *Im Block ① werden aus der vorgegebenen Solltrajektorie  $w_d(t)$  gemäß (2.44) die Solltrajektorien  $z_{1,d}^i(t)$  für die Komponenten  $y_i = z_1^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , des flachen Ausgangs berechnet. Aus diesen Größen können durch Zeitableitungen die weiteren Sollverläufe  $z_{k,d}^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 2, \dots, \kappa_i - 1$ , bestimmt werden.*

*Im Block ② wird gemäß (2.5) der flache Ausgang  $\mathbf{y}$  mit seinen Zeitableitungen und damit der neue Zustand  $\mathbf{z}$  mittels (2.64) berechnet. Hierfür werden neben dem Zustand  $\mathbf{x}$  die Zeitableitungen des Eingangs  $\mathbf{u}$  benötigt. In gleicher Weise erfolgt in Block ④ die Berechnung der Ableitungen des neuen Eingangs  $\mathbf{v}$  gemäß (2.62).*

**Bemerkung 2.18** *Die in Bild 2.8 aus den Blöcken ②, ③ und ④ gebildete Schleife stellt keine algebraische Schleife dar, da einerseits aufgrund der Flachheit die Existenz der Gleichungen (2.63) gesichert ist, andererseits der flache Ausgang  $\mathbf{y}$  nach (2.5) aus dem Zustand  $\mathbf{x}$ , dem Eingang  $\mathbf{u}$  und dessen Zeitableitungen berechnet werden kann.*

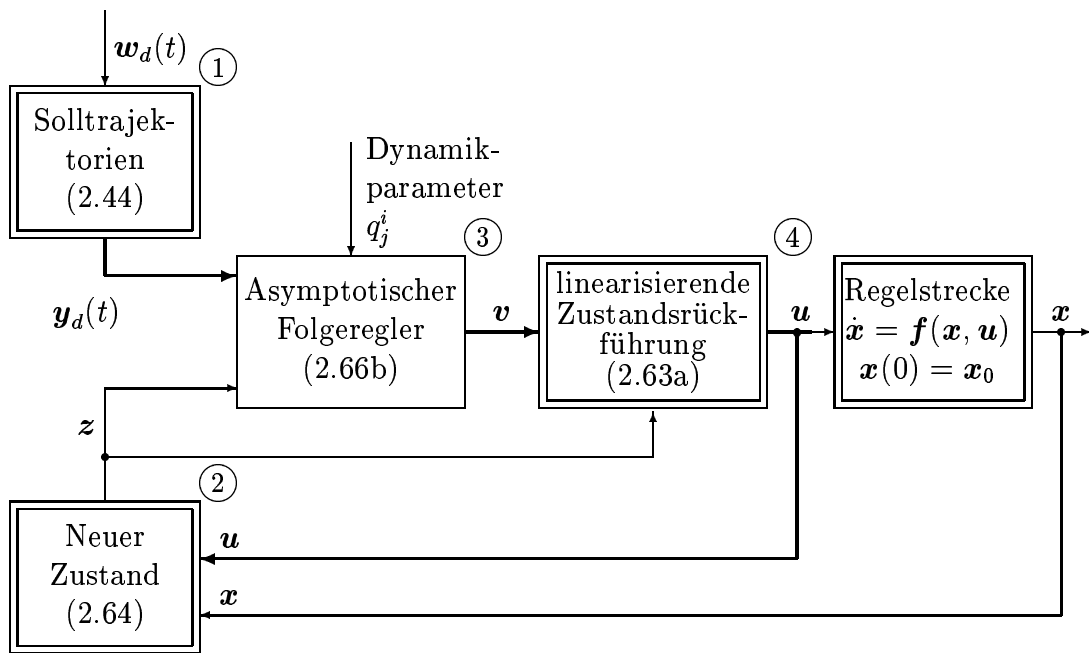


Bild 2.8: Blockschaltbild der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung. Dicke Pfeile bedeuten, daß neben der angezeigten Größe (z. B.  $\mathbf{u}$ ) auch alle für die weiteren Berechnungen erforderlichen Zeitableitungen dieser Größe eingeschlossen sind.

## Trajektorienfolgeregelung eines Zwei-Gelenk-Roboters

Die Stabilisierung der Trajektorienfolgefehler soll am Beispiel des zweiarmigen Roboters aus Abschnitt 2.1.3 erläutert werden.

### Starrer Zwei-Gelenk-Roboter

Für das Robotermodell aus Abschnitt 2.1.3 kann auf der Basis der bei der Flachheitsanalyse ermittelten Beziehungen (2.32) eine Zustandsrückführung bestimmt werden, die den Trajektorienfolgefehler (2.60) stabilisiert. Ausgangspunkt ist die Gleichung (2.32c)

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1} \left( \mathbf{M}(\mathbf{y})\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \right), \quad (2.69)$$

in der die Größen  $\mathbf{y}$  und  $\dot{\mathbf{y}}$  die Zustände des Systems darstellen. Die in (2.69) auftretende Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{y}}$  ist nicht Teil des Zustands und kann dem System über die Eingangsgröße eingeprägt werden, d. h. sie ist frei wählbar. Ersetzt man nun in (2.69) die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{y}}$  durch einen neuen Eingang  $\mathbf{v}$  und behält die Zustände  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$  unverändert bei, so führt dies zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1} \left( \mathbf{M}(\mathbf{y})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \right). \quad (2.70)$$

Setzt man dies in (2.29) ein, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Trajektorienfolgefehler (2.60) in *Brunovský-Normalform*

$$\ddot{y}_i = v_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.71)$$

Durch eine Rückführung des Zustands und einer Aufschaltung der Sollbewegung kann mit Hilfe des neuen Eingangs

$$v_i = \ddot{y}_{i,d} - q_1^i (\dot{y}_i - \dot{y}_{i,d}) - q_0^i (y_i - y_{i,d}), \quad i = 1, 2, \quad (2.72)$$

dem Trajektorienfolgefehler (2.60) eine stabile Dynamik

$$\ddot{e}_i + q_1^i \dot{e}_i + q_0^i e_i = 0, \quad e_i^{(k)}(0) = \dot{y}_i^{(k)}(0) - \dot{y}_{i,d}^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2. \quad (2.73)$$

aufgeprägt werden, indem man die Parameter  $q_j^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ , geeignet wählt. Damit hat man durch die Rückführung (2.70), (2.72) des Zustands  $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$  eine lineare stabile Dynamik für den Trajektorienfolgefehler  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$  erreicht. Zur Realisierung der Zustandsrückführung (2.70), (2.72) sind neben der Kenntnis des Modells und des gesamten Zustands nur die (hinreichend oft differenzierbaren) Solltrajektorien und ihre Ableitungen sowie die Dynamikparameter  $q_j^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ , vorzugeben.

### Elastischer Zwei-Gelenk-Roboter

Für den Roboter mit einem elastischen Antrieb kann die Zustandsrückführung durch ähnliche Überlegungen wie im vorhergehenden Abschnitt bestimmt werden. Setzt man

$$\ddot{y}_1 = v_1 \quad (2.74a)$$

$$y_2^{(4)} = v_2, \quad (2.74b)$$

so können die zugehörigen Eingangsgrößen  $u_{1,2}$  aus (2.41a) und (2.41b) bestimmt werden, indem die in diesen Ausdrücken auftretenden höheren Ableitungen von  $y_1$  nach (2.74a) durch Zeitableitungen von  $v_1$  ersetzt werden. Man erhält mit (2.41a) und (2.41b)

$$u_1 = \psi_{21}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, v_1) \quad (2.75a)$$

$$u_2 = \psi_{22}\left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, v_1, \dot{v}_1, \ddot{v}_1, v_2\right). \quad (2.75b)$$

Bei (2.75) handelt es sich um eine Zustandsrückführung, die zu einem linearen Systemverhalten (2.74) führt. Die neuen Eingänge  $\mathbf{v}$  in (2.74) können wie in (2.72) dazu verwendet werden, die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers (2.60) zu stabilisieren

$$v_1 = \ddot{y}_{1,d} - q_1^1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_{1,d}) - q_0^1 (y_1 - y_{1,d}) \quad (2.76a)$$

$$v_2 = y_{2,d}^{(4)} - \sum_{j=0}^3 q_j^2 \left( y_2^{(j)} - y_{2,d}^{(j)} \right), \quad (2.76b)$$

wobei die Konstanten  $q_j^i$  so zu wählen sind, daß sich eine asymptotisch stabile Dynamik für den Trajektorienfolgefehler (2.60) ergibt. Die in (2.75) auftretenden zeitlichen Ableitungen von  $v_1$  können mit (2.76a) ausgedrückt werden

$$\dot{v}_1 = \overset{(3)}{y}_{1,d} - q_1^1 (v_1 - \overset{(3)}{y}_{1,d}) - q_0^1 (\dot{y}_1 - \overset{(3)}{y}_{1,d}) \quad (2.76c)$$

$$\ddot{v}_1 = \overset{(4)}{y}_{1,d} - q_1^1 \left( \dot{v}_1 - \overset{(3)}{y}_{1,d} \right) - q_0^1 (v_1 - \overset{(3)}{y}_{1,d}). \quad (2.76d)$$

Dabei wird im letzten Summanden von  $\ddot{v}_1$  die Zeitableitung  $\dot{y}_1$  mittels (2.74a) durch  $v_1$  ersetzt. Im Gegensatz zur *statischen* Zustandsrückführung (2.70) hängt die Zustandsrückführung (2.75) von Zeitableitungen des neuen Eingangs  $\mathbf{v}$  ab. Diese Zustandsrückführung wird nach Delaleau und Fliess (1992) als *quasi-statisch* bezeichnet und im nächsten Abschnitt ausführlich erörtert.

Anstelle der quasi-statischen Zustandsrückführung (2.75) mit (2.76) kann auch eine dynamische Zustandsrückführung angegeben werden. Hierzu führt man mit  $z_1 = \dot{y}_1$ ,  $z_2 = \overset{(3)}{y}_1$  neue Zustände und mit  $\overset{(4)}{y}_1 = \bar{v}_1$  und  $\overset{(4)}{y}_2 = \bar{v}_2$  neue Eingänge ein. Daraus erhält man eine dynamische Zustandsrückführung der Form

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (2.77a)$$

$$\dot{z}_2 = \bar{v}_1 \quad (2.77b)$$

$$u_1 = \psi_{21}(\varphi, \dot{\varphi}, z_1) \quad (2.77c)$$

$$u_2 = \psi_{22}(\varphi, \dot{\varphi}, z_1, z_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2). \quad (2.77d)$$

In diesem Fall hat der Zustand des geschlossenen Kreises die Dimension acht.

**Bemerkung 2.19** *Wie man am Beispiel des Robotermodells sehen kann, spielen die bei der Flachheitsanalyse gemäß (2.6) bestimmten Beziehungen für  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  sowohl beim Entwurf der quasi-statischen als auch der dynamischen Zustandsrückführung zur Folgeregelung eine große Rolle.*

## 2.3 Exakte Zustandslinearisierung nichtlinearer Systeme

In diesem Abschnitt soll die Verbindung zwischen der Flachheit und der exakten Zustandslinearisierbarkeit nichtlinearer Systeme erörtert werden. Dabei wird teilweise auf Ergebnisse aus Abschnitt 2.2.4 zurückgegriffen, da die Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers in enger Verbindung mit der exakten Zustandslinearisierung steht.

### 2.3.1 Äquivalenz durch endogene Zustandsrückführung

Mathematisch streng läßt sich die Zustandslinearisierung durch Zustandsrückführung mittels sog. *Äquivalenzen* darstellen (Fliess *et al.* 1995b, Rudolph 1995). In diesem Zusammenhang können die Beziehungen (2.63), (2.64b) als eine *Äquivalenzrelation* zwischen dem nichtlinearen System (2.1) und dem linearen steuerbaren System (2.65)

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad z \in \mathbb{R}^\kappa, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = \kappa \geq n, \quad (2.78)$$

betrachtet werden. Wegen  $\kappa \geq n$  ist diese Art der Äquivalenz allgemeiner als die bei der exakten Zustandslinearisierung durch statische Zustandsrückführung verwendete Äquivalenz mittels Zustandstransformation und statischer Zustandsrückführung, für die  $\kappa = n$  gilt (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990). Die Äquivalenz mittels (2.6) wird im Rahmen der Differentialalgebra als *Äquivalenz durch endogene Zustandsrückführung* bezeichnet (Fliess *et al.* 1995b), im Rahmen der Differentialgeometrie der unendlichen Strahlen und Prolongationen heißt sie *Lie-Bäcklund-Äquivalenz* (Fliess *et al.* 1993a).

Durch (2.64b) wird eine nichtlineare Transformation des Zustands  $x$  in den neuen Zustand  $z$  definiert:

$$z = \tilde{\alpha} \left( x, u, \dots, \overset{(\kappa-1)}{u} \right), \quad \dim z \geq \dim x. \quad (2.79a)$$

Der neue Zustand  $z$  kann von den Zeitableitungen des Eingangs  $u$  bis zur Ordnung  $\kappa - 1$  abhängen. In diesem Fall spricht man von einem *verallgemeinerten Zustand* (Fliess 1990). Neben der Zustandstransformation (2.79a) umfaßt die Äquivalenz (2.6) auch eine *endogene Zustandsrückführung* gemäß (2.63a)

$$u = \beta \left( z, v, \dot{v}, \dots, \overset{(\beta-\kappa+1)}{v} \right), \quad (2.79b)$$

wobei mit Hilfe von (2.62) die höheren Zeitableitungen von  $y$  durch Zeitableitungen des neuen Eingangs  $v$  ersetzt werden.

Da es sich bei (2.79a) und (2.79b) um Äquivalenzen handelt, müssen beide Gleichungen nach  $x$  bzw.  $v$  auflösbar sein:

$$x = \alpha \left( z, v, \dots, \overset{(\gamma)}{v} \right) \quad (2.79c)$$

$$v = \tilde{\beta} \left( x, u, \dots, \overset{(\delta)}{u} \right). \quad (2.79d)$$

Durch (2.79) wird die *endogene Zustandsrückführung* definiert. Die Zustände  $x$  bzw.  $z$  der beiden äquivalenten Systeme (2.1) bzw. (2.78) sind durch eine verallgemeinerte Zustandstransformation (2.79a), (2.79c) miteinander verknüpft. Die Zahl der Eingänge  $u$  stimmt mit

der Zahl der Eingänge  $\mathbf{v}$  überein. Die Dimensionen der beiden Zustände  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  sind nicht notwendig gleich, d. h. die Äquivalenz durch endogene Zustandsrückführung (2.79) kann neue Zustände einführen. Sie stellt daher eine spezielle Form der Äquivalenz durch dynamische Zustandsrückführung dar, wie sie z. B. in (Charlet *et al.* 1989, Isidori 1995) betrachtet wird. Bei der allgemeinen dynamischen Äquivalenz können auch externe Variable als Zustandsvariablen eingeführt werden, die durch Integration zu berechnen sind. Im Unterschied dazu werden bei der Äquivalenz durch endogene Zustandsrückführung nur solche Zustandsvariablen eingeführt, die ohne Integration, d. h. allein durch Differentiation und algebraische Umformungen aus den Systemvariablen (Zustands- und Eingangsgrößen) berechnet werden können. Daher stammt auch der Name *endogen*, d. h. aus endogenen Variablen berechenbar. Diese Art der Äquivalenz geht auf die *integrallosen Transformationen* zurück (Fliess *et al.* 1995b), die von Hilbert (1912) im Rahmen der Transformationen von Systemen unterbestimmter Differentialgleichungen untersucht wurden.

Neben der endogenen Zustandsrückführung (2.79) werden in der Literatur folgende Arten von Zustandsrückführungen zur exakten Zustandslinearisierung verwendet:

- Statische Zustandsrückführung (unter gewissen Voraussetzungen, die in Kapitel 3 erläutert werden)
- Quasi-statische Zustandsrückführung
- Dynamische Zustandsrückführung

Die Äquivalenz durch dynamische Zustandsrückführung schließt die Äquivalenz durch endogene, quasi-statische und statische Zustandsrückführung ein. Dabei sind die beiden letztgenannten Äquivalenzen Spezialfälle der Äquivalenz durch endogene Zustandsrückführung. Im folgenden werden die drei genannten Formen von Zustandsrückführungen aufgeführt und am Beispiel der Zustandslinearisierung des Robotermodells aus Abschnitt 2.1.3 erläutert.

- (i) *Statische Zustandsrückführung* (Jacubczyk und Respondek 1980, Sommer 1981, Hunt *et al.* 1983, Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990): Durch die statische Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{Rang} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = m, \quad (2.80)$$

und die Zustandstransformation

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.81)$$

kann das System (2.1) unter bestimmten Bedingungen, die in Kapitel 3 aufgeführt sind, exakt zustandslinearisiert werden. Der geschlossene Kreis ist ein lineares und



steuerbares System (2.78) mit dem neuen Eingang  $\mathbf{v}$ . Notwendige und hinreichende Bedingungen für diese Art der Zustandslinearisierung sind seit langem bekannt, jedoch sehr restriktiv. Durch Verwendung der beiden folgenden Zustandsrückführungen kann die Klasse der exakt zustandslinearisierbaren Systeme wesentlich vergrößert werden, da deren Existenzbedingungen weniger restriktiv sind. Dies gilt jedoch nicht für Eingrößensysteme ( $m = 1$ ): alle zustandslinearisierbaren Eingrößensysteme lassen sich durch eine statische Zustandsrückführung (2.80) exakt linearisieren (Charlet *et al.* 1991).

**Beispiel 2.12** Für das Robotermodell mit zwei starren Antrieben aus Abschnitt 2.1.3 wird die Zustandstransformation (2.81) durch den flachen Ausgang (2.31) und dessen erste Zeitableitung definiert

$$[z_1, z_2, z_3, z_4]^T = [y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2]^T = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2]^T. \quad (2.82)$$

Die linearisierende Zustandsrückführung (2.70) ist statisch.

- (ii) *Dynamische Zustandsrückführung* (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990): In einer dynamischen Rückführung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \boldsymbol{\xi} \in M_q, \quad (2.83a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (2.83b)$$

werden die Eingänge  $\mathbf{u}$  aus den Systemzuständen  $\mathbf{x}$ , den Reglerzuständen  $\boldsymbol{\xi}$  und den neuen Eingängen  $\mathbf{v}$  berechnet. Die zugehörige Zustandstransformation ist von der Form

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{z} \in M_{n+q}. \quad (2.84)$$

**Beispiel 2.13** Die Zustandstransformation (2.84) für das Robotermodell mit einem elastischen Antrieb aus Abschnitt 2.1.3 wird durch (2.35), (2.36b) und (2.38b) sowie  $\xi_1 = \ddot{y}_1$  und  $\xi_2 = \overset{(3)}{\ddot{y}_1}$  nach (2.36a) und (2.38a) definiert

$$[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8]^T = \left[ y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, \overset{(3)}{\ddot{y}_2}, \xi_1, \xi_2 \right]^T. \quad (2.85)$$

Die dynamische Zustandsrückführung wird durch (2.77) beschrieben.

- (iii) *Quasi-statische Zustandsrückführung* (Delaleau und Fliess 1992): Bei einer quasi-statischen Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \dots, \mathbf{v}^{(s)}) \quad (2.86a)$$

werden die Eingänge  $\mathbf{u}$  aus den Zuständen  $\mathbf{x}$  und den Zeitableitungen der neuen Eingänge  $\mathbf{v}$  bis zu einer endlichen Ordnung  $s$  bestimmt. Die neuen Eingänge müssen selbst einer Gleichung

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(s)}) \quad (2.86b)$$

genügen, die von den neuen Systemzuständen  $\mathbf{z}$  und den Zeitableitungen des Eingangs  $\mathbf{u}$  bis zur Ordnung  $s$  abhängt. Die zugehörige Zustandstransformation ist von der Form

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.87)$$

d. h. bei einer quasi-statischen<sup>6</sup> Zustandsrückführung stimmen die Dimensionen der Zustände  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  im Unterschied zur dynamischen Zustandsrückführung (2.83) überein.

Bei allen flachen Systemen kann die Zustandslinearisierung auch durch eine quasi-statische Zustandsrückführung (2.86) erreicht werden (Delaleau und Rudolph 1995). In diesem Fall muß aber die Rückführung *verallgemeinerter* Zustände zugelassen werden.

**Beispiel 2.14** Die Zustandstransformation (2.87) für das Robotermodell mit einem elastischen Antrieb lautet

$$[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T = \left[ y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, \overset{(3)}{y_2} \right]^T. \quad (2.88)$$

Da  $\ddot{y}_2$  und  $\overset{(3)}{y_2}$  nach (2.36b) und (2.38b) von  $\mathbf{u}$  bzw.  $\dot{\mathbf{u}}$  abhängen, handelt es sich bei (2.88) um eine sog. verallgemeinerte Zustandstransformation. Die quasi-statische Zustandsrückführung wird durch (2.75) beschrieben, bei der der verallgemeinerte Zustand aus (2.88) zurückgeführt wird, der von den Eingängen und ihren Zeitableitungen abhängt.

Die in diesem Abschnitt behandelten Formen von Zustandsrückführungen sind mit den zugehörigen Zustandstransformationen in Tabelle 2.1 auf der nächsten Seite dargestellt.

### 2.3.2 Flachheit und exakte Zustandslinearisierung

Um den Zusammenhang zwischen Flachheit und Zustandslinearisierung herzustellen, wird angenommen, das System sei dynamisch zustandslinearisierbar, d. h. man betrachtet das erweiterte System (2.1) mit der dynamischen Erweiterung (2.83a)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{\chi}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \\ \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v})}, \quad \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{n'}, \quad n' = \dim \mathbf{x} + \dim \boldsymbol{\xi} = n + q. \quad (2.89)$$

<sup>6</sup>Die Bezeichnung *quasi-statisch* erklärt sich aus der Tatsache, daß bei der Zustandsrückführung (2.86) die Dimension des Zustands wie bei der statischen Zustandsrückführung (2.80) unverändert bleibt.

Tabelle 2.1: Vergleich verschiedener Zustandsrückführungen und der zugehörigen Zustands-  
transformationen zur exakten Zustandslinearisierung.

Typ der Äquivalenz	Zustandsrückführung	Zustandstransformation
dynamisch	$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v})$ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v})$	$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ $\dim \boldsymbol{z} = \dim \boldsymbol{\xi} + \dim \boldsymbol{x}$
endogen	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\beta} \left( \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}, \dots, \overset{(\delta)}{\boldsymbol{v}} \right)$ $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \left( \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dots, \overset{(\delta)}{\boldsymbol{u}} \right)$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \left( \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}, \dots, \overset{(\gamma)}{\boldsymbol{v}} \right)$ $\boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \left( \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dots, \overset{(\gamma)}{\boldsymbol{u}} \right)$ $\dim \boldsymbol{z} \geq \dim \boldsymbol{x}$
quasi-statisch	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\beta} \left( \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}}, \dots, \overset{(\delta)}{\boldsymbol{v}} \right)$ $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \left( \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \dots, \overset{(\delta)}{\boldsymbol{u}} \right)$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{z})$ $\boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})$ $\dim \boldsymbol{x} = \dim \boldsymbol{z}$
statisch	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u})$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})$ $\boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x})$ $\dim \boldsymbol{x} = \dim \boldsymbol{z}$

Da dieses System exakt linearisierbar ist, kann man es in ein lineares System (2.78) überführen. Da dieses linearisierte System steuerbar ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es liege in Brunovský-Normalform (2.65) vor (Kailath 1980). Dies bedeutet, daß das System – wie in Bild 2.9 auf der nächsten Seite dargestellt – aus  $m$  Integratorketten besteht. Die Längen  $\rho'_1, \dots, \rho'_m$  der Teilsysteme in Bild 2.9 stellen die *Steuerbarkeitsindizes* des Systems (2.78) dar. Dabei gilt für den Zustand  $\boldsymbol{z}$  des linearisierten Systems (2.78)

$$\boldsymbol{z} = \left[ z_1^1, \dots, z_{\rho'_1}^1, \dots, z_1^m, \dots, z_{\rho'_m}^m \right]^T \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^m \rho'_i = n' = n + q. \quad (2.90)$$

Die Größen  $y_i = z_1^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sind nach Abschnitt 2.7 die Komponenten des flachen Ausgangs des erweiterten Systems (2.89). Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich aus der Kenntnis von  $\boldsymbol{y}$  die Zustände  $\boldsymbol{x}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  sowie die Eingänge  $\boldsymbol{u}$  gemäß der Definition 2.2 bestimmen lassen.

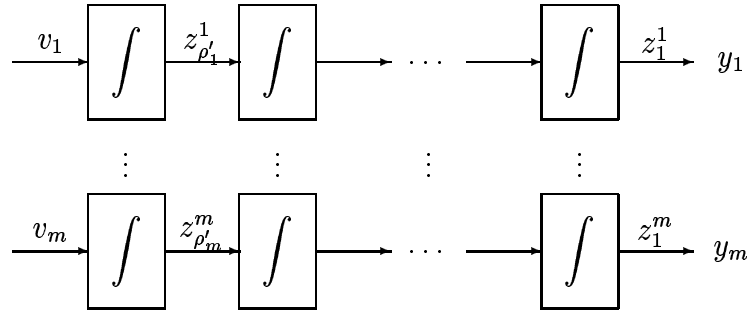


Bild 2.9: Blockschaltbild der Brunovský-Normalform (2.65).

- Die Komponenten des flachen Ausgangs definieren zusammen mit ihren Zeitableitungen bis zur Ordnung<sup>7</sup>  $\rho'_i - 1$  den Zustand (2.90)

$$\mathbf{z} = \left[ y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(\rho'_1-1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(\rho'_m-1)} \right]^T. \quad (2.91)$$

Die umkehrbar eindeutige Zustandstransformation (2.84) ergibt sich aus (2.90) und (2.91) mit Hilfe der Lie-Ableitung längs des Vektorfelds  $\bar{\mathbf{f}}$  in (2.89) zu

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left[ y_1, L_{\bar{\mathbf{f}}} y_1, \dots, L_{\bar{\mathbf{f}}}^{\rho'_1-1} y_1, \dots, y_m, L_{\bar{\mathbf{f}}} y_m, \dots, L_{\bar{\mathbf{f}}}^{\rho'_m-1} y_m \right]^T. \quad (2.92)$$

Damit lassen sich der Systemzustand  $\mathbf{x}$  und der Zustand  $\boldsymbol{\xi}$  der dynamischen Zustandsrückführung (2.83) als Funktion des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  und einer endlichen Anzahl seiner Zeitableitungen darstellen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \left( y_1, L_{\bar{\mathbf{f}}} y_1, \dots, L_{\bar{\mathbf{f}}}^{\rho'_1-1} y_1, \dots, y_m, L_{\bar{\mathbf{f}}} y_m, \dots, L_{\bar{\mathbf{f}}}^{\rho'_m-1} y_m \right). \quad (2.93)$$

- Die Zustandsrückführung (2.83) erhält man als Funktion des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  und seiner Zeitableitungen, wenn man mit  $y_i^{(\rho'_i)!} = \bar{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , neue Eingänge  $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^m$  einführt und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho'_1)} &= L_{\bar{\mathbf{f}}}^{\rho'_1} y_1 \stackrel{!}{=} \bar{v}_1 \\ &\vdots \\ y_m^{(\rho'_m)} &= L_{\bar{\mathbf{f}}}^{\rho'_m} y_m \stackrel{!}{=} \bar{v}_m \end{aligned} \quad (2.94)$$

nach den Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  auflöst. Dabei werden die Zustände  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\xi}$  mit Hilfe von (2.93) ersetzt:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta} \left( y_1, \dots, y_1^{(\rho'_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\rho'_m-1)}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \right). \quad (2.95)$$

<sup>7</sup>Im folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbart, daß Ableitungen  $y_i^{(k)}$ ,  $k < 0$  in den entsprechenden Ausdrücken *nicht* erscheinen.

Mit  $\overset{(\rho'_i)}{y}_i = \bar{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , läßt sich der Eingang  $\mathbf{u}$  als Funktion des flachen Ausgangs und einer endlichen Anzahl von deren Zeitableitungen darstellen

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta} \left( y_1, \dots, \overset{(\rho'_1)}{y}_1, \dots, y_m, \dots, \overset{(\rho'_m)}{y}_m \right). \quad (2.96)$$

Aus (2.93) und (2.96) erkennt man unmittelbar, daß bei einer dynamischen Zustandsrückführung (2.83) und einer Zustandstransformation (2.84) die Bedingung (ii) in Definition 2.2 erfüllt ist, d. h. die Systemgrößen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  können als Funktionen der Komponenten des flachen Ausgangs  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und einer endlichen Zahl von deren Zeitableitungen dargestellt werden.

Gilt bei einer dynamischen Zustandsrückführung (2.83) auch Bedingung (i) in Definition 2.2, so läßt sich umgekehrt  $\mathbf{y}$  als Funktion des ursprünglichen Systemzustands  $\mathbf{x}$  und des Eingangs  $\mathbf{u}$  sowie dessen Zeitableitungen darstellen. Dies bedeutet, daß man den Reglerzustand  $\boldsymbol{\xi}$  eliminieren kann oder anders ausgedrückt, daß man  $\boldsymbol{\xi}$  in (2.93) als Funktion der ursprünglichen Systemgrößen  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen  $\overset{(i)}{\mathbf{u}}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , darstellen kann.

## 2.4 Zusammenfassung

Flache Systeme lassen sich durch den sog. flachen Ausgang charakterisieren, der das dynamische Verhalten des Systems eindeutig beschreibt. Mit Hilfe des Konzepts der Flachheit eröffnen sich für die Analyse und den Entwurf nichtlinearer Regelungen neue Möglichkeiten. Dies gilt u. a. für die Steuerbarkeitsanalyse und die Lösung des Trajektorienfolgeproblems. Für die Steuerbarkeitsanalyse kann man mit Hilfe der Äquivalenz durch Zustandsrückführung zu linearen steuerbaren Systemen eine praktikable und systematische Klassifizierung nichtlinearer Systeme erreichen. Für den Entwurf nichtlinearer Zustandsrückführungen zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems erweist sich die Verwendung von dynamischen oder quasi-statischen Zustandsrückführungen als natürliche Verallgemeinerung der statischen Zustandsrückführung zur exakten Zustandslinearisierung. Dabei zeigt sich, daß flache Systeme durch zwei spezielle Klassen dynamischer Zustandsrückführungen, den endogenen bzw. quasi-statischen Zustandsrückführungen, exakt zustandslinearisierbar sind. Dies führt bei der Lösung des Trajektorienfolgeproblems zu einer exakt linearen Fehlerdynamik.

## Kapitel 3

# Existenz und Bestimmung eines flachen Ausgangs

Ein flacher Ausgang beschreibt das dynamische Verhalten eines flachen nichtlinearen Systems vollständig und hat meist eine anschauliche Bedeutung. Oft kann ein Kandidat für einen flachen Ausgang aus dem physikalischen Verständnis des zu untersuchenden Systems bestimmt werden. Auf diese Weise wurden flache Ausgänge für die Beispiele im vorhergehenden Kapitel bestimmt.

Eine systematische Vorgehensweise nutzt die Eigenschaft flacher Systeme, daß sie durch eine endogene (dynamische) Zustandsrückführung exakt zustandslinearisierbar sind. Damit lassen sich die hierfür aus der Literatur bekannten Bedingungen zur Bestimmung eines flachen Ausgangs verwenden<sup>1</sup>. Diese Bedingungen werden meist in der Sprache der Differentialgeometrie formuliert (Sommer 1980, Sommer 1981, Jacubczyk und Respondek 1980, Hunt *et al.* 1983, Martin 1992, Martin und Rouchon 1993, Charlet *et al.* 1989, Shadwick 1990, Charlet *et al.* 1991, Pomet 1997, Sluis 1992, Aranda-Bricaire und Pomet 1995). Die Auswertung dieser Bedingungen führt auf Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten, deren Lösungen flache Ausgänge darstellen.

In (Sommer 1980, Sommer 1981) wird die Zustandslinearisierung in zwei Schritten durchgeführt: in einem ersten Schritt wird das System in die Regelungsnormalform transformiert. Diese Form stellt eine Verallgemeinerung der linearen Regelungsnormalform dar und besteht aus Integratorketten, an deren Anfang nichtlineare Funktionen stehen. Für diese Systemdarstellung kann in einem zweiten Schritt eine *statische* Zustandsrückführung entworfen werden, die die Nichtlinearitäten kompensiert und so das System in Brunovský-Normalform überführt. Da die Komponenten des flachen Ausgangs die Ausgänge der Integratorketten darstellen, stellen die Existenzbedingungen für die Transformation in die Regelungsnormal-

---

<sup>1</sup>In den Literaturstellen ist nur von der Zustandslinearisierbarkeit die Rede. Der Begriff der Flachheit wird erst in den neueren Arbeiten verwendet.

form Bestimmungsgleichungen für den flachen Ausgang dar. In (Krener 1987) findet man differentialgeometrische Bedingungen für die Existenz der nichtlinearen Normalformen für Systeme mit mehreren Eingangs- und Meßgrößen. Neben der Regelungsnormalform werden in dieser Übersicht auch die Steuerbarkeits-, Beobachtbarkeits- und Beobachternormalform für nichtlineare Mehrgrößensysteme betrachtet.

In diesem Kapitel werden zunächst die bekannten linearen und nichtlinearen Regelungsnormalformen zusammenfassend dargestellt. Da die in (Krener 1987) betrachtete Regelungsnormalform eine Zustandslinearisierung nur durch statische Zustandsrückführung erlaubt, wird im weiteren eine Verallgemeinerung der nichtlinearen Regelungsnormalform vorgestellt, bei der das System durch eine quasi-statische bzw. dynamische Zustandsrückführung linearisiert werden kann (Rudolph *et al.* 1995). Sowohl die klassischen Normalformen als auch die Verallgemeinerung sind strukturell flache Systemdarstellungen. Der flache Ausgang setzt sich aus den Ausgängen der Integratorketten zusammen, aus denen sich durch Ableiten die Systemzustände und Eingangsgrößen bestimmen lassen.

Im allgemeinen wird ein System jedoch nicht in einer dieser Formen vorliegen. Findet man eine Transformation in eine dieser strukturell flachen Formen, so ist auch das ursprüngliche System flach. Die Existenzbedingungen für eine derartige Transformation werden zunächst für lineare zeitvariante und nichtlineare Systeme wiederholt und auf die verallgemeinerte Regelungsnormalform erweitert (Rothfuß *et al.* 1995a, Rudolph *et al.* 1995). Diese Bedingungen sind gleichzeitig hinreichend für die Flachheit des Systems. Bei den folgenden Betrachtungen liegt der Schwerpunkt auf einer anschaulichen Darstellung der Bedingungen im Hinblick auf deren Anwendung. Aus diesem Grund werden zunächst die Ergebnisse für lineare zeitvariante Systeme wiederholt und in einer Form dargestellt, die auf anschauliche Weise eine Erweiterung auf den nichtlinearen Fall erlaubt.

Der Abschnitt 3.2 beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen eine Transformation in eine derartige Form existiert bzw. das betrachtete System flach ist.

Das Aufstellen und die Überprüfung der genannten Existenzbedingungen erfordert umfangreiche symbolische Berechnungen, die schon für einfache nichtlineare Systeme nur schwer von Hand auszuführen sind. Aus diesem Grund wird in Anhang B.1 aus den Existenzbedingungen ein Algorithmus abgeleitet, mit dessen Hilfe eine rechnerunterstützte Überprüfung mittels eines Computer-Algebra-Systems möglich ist.

### 3.1 Strukturell flache Systemdarstellungen

Die bekannten linearen und nichtlinearen Regelungsnormalformen sind Beispiele strukturell flacher Systemdarstellungen, da die Ausgänge der Integratorketten die Komponenten des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  darstellen. In Abschnitt 3.1.1 wird die nichtlineare zeitvariante Regelungsnormalform

normalform (Föllinger 1978, Kailath 1980) vorgestellt. Daran schließt sich eine Diskussion der nichtlinearen Regelungsnormform (Sommer 1980, Sommer 1981, Krener 1987, Zeitz 1990) in Abschnitt 3.1.2 an. Diese wird in Abschnitt 3.1.3 zur verallgemeinerten nichtlinearen Regelungsnormform erweitert, indem Zeitableitungen der Eingangsvariablen in einer speziellen Art zugelassen werden (Rudolph *et al.* 1995). Liegt ein nichtlineares System (2.1) in einer der beiden letztgenannten Formen vor, so kann leicht ein flacher Ausgang angegeben und eine exakt linearisierende Zustandsrückführung entworfen werden.

### 3.1.1 Lineare zeitvariante Regelungsnormform

Die Regelungsnormform eines linearen zeitvarianten Systems mit mehreren Eingangsgrößen

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} \quad t > t_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (3.1)$$

wird von Freund (1971) folgendermaßen definiert:

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \rho_i - 1, \quad (3.2a)$$

$$\dot{z}_{\rho_i}^i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\rho_j} a_{jk}^i(t) z_k^j + \sum_{j=i}^m b_j^i(t) u_j, \quad b_i^i(t) = 1, \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.2b)$$

Dabei wird angenommen, die Elemente der Matrizen  $A(t)$  und  $B(t)$  seien absolut beschränkt (Freund 1971) bzw. exponentiell beschränkt (Fliess 1991). Die Regelungsnormform (3.2) besteht aus  $m$  Teilsystemen der Länge  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , die über die Zustände  $z_k^i$  allgemein und die Eingänge  $u_j$  dreiecksförmig miteinander verkoppelt sind. Die Größen  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sind die *Steuerbarkeitsindizes* des Systems (3.2) und stellen die Längen der Teilsysteme dar. Durch die dreiecksförmige Abhängigkeit der rechten Seiten von (3.2b) ( $b_{j < i}^i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) und die Normierung der Koeffizienten  $b_i^i(t) = 1$  ist die Regelungsnormform bis auf eine Umnummerierung der Eingänge eindeutig. Die Zeitvarianz von (3.2) kann durch eine Zustandsrückführung kompensiert werden, indem neue Eingänge

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \cdots & a_{m\rho_m}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}^m & \cdots & a_{m\rho_m}^m \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 1 & b_2^1(t) & \cdots & b_m^1(t) \\ 0 & 1 & \cdots & b_m^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (3.3)$$

eingeführt werden. Diese Beziehung kann sukzessive nach den ursprünglichen Eingangsgrößen aufgelöst werden:

$$u_m = v_m - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\rho_j} a_{jk}^m(t) z_k^j \quad (3.4a)$$

$$u_i = v_i - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\rho_j} a_{jk}^i(t) z_k^j - \sum_{j=i+1}^m b_j^i(t) u_j, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (3.4b)$$



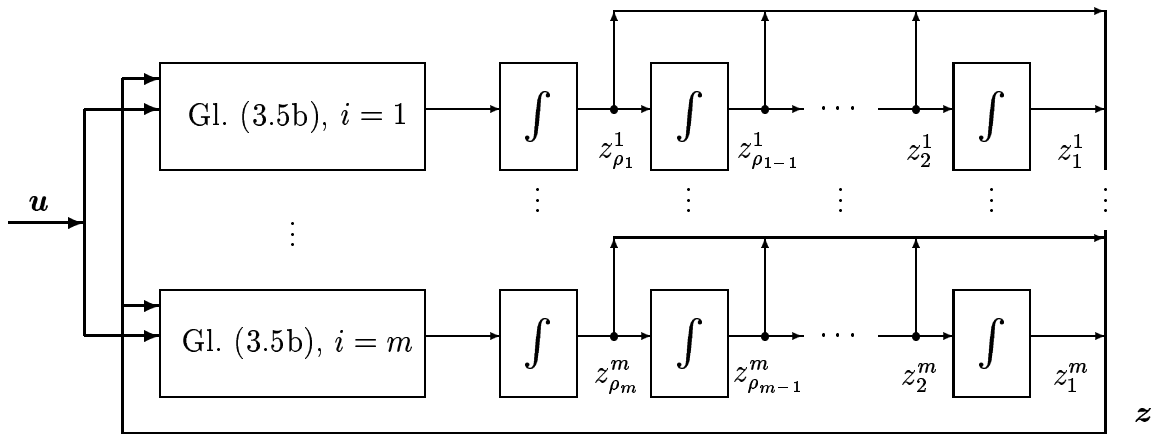


Bild 3.1: Blockschaltbild der linearen Regelungsform (3.5).

Die Auflösbarkeit nach den Eingangsgrößen als charakteristische Eigenschaft der Regelungsnormalform (3.2) bleibt erhalten, wenn in (3.2b) eine allgemeine Abhängigkeit von den Eingängen zugelassen wird

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \rho_i - 1, \quad (3.5a)$$

$$\dot{z}_{\rho_i}^i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\rho_i} a_{jk}^i(t) z_k^j + \sum_{j=1}^m b_j^i(t) u_j, \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.5b)$$

$$\text{Rang } \bar{B}(t) = \text{Rang} \begin{pmatrix} b_1^1(t) & \dots & b_m^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m(t) & \dots & b_m^m(t) \end{pmatrix} = m \quad \forall t > t_0. \quad (3.5c)$$

Das Signalflußbild dieser Form, die in Bild 3.1 dargestellt ist, wird in dieser Arbeit als *zeitvariante Regelungsform* bezeichnet. Diese Regelungsform kann durch eine lineare Eingangstransformation  $\bar{u} = \bar{U}(t)u$  in die Regelungsnormalform (3.2) überführt werden. Dabei stellt die Rangbedingung (3.5c) die Existenz der Eingangstransformation sicher. Die im Vergleich zu (3.2) zusätzlichen zeitabhängigen Koeffizienten  $b_j^i(t)$ ,  $j = 1, \dots, i-1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , stellen Freiheitsgrade dar, die die Bestimmung der Transformation in die Regelungsnormalform (3.2) erleichtern können.

**Bemerkung 3.1** Für lineare zeitvariante Systeme (3.1) mit einer Eingangsgröße ( $m = 1$ ) hat die Regelungsform (3.5) die Form

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (3.6a)$$

$$\dot{z}_n = \sum_{k=1}^n a_k(t) z_k + b_n(t) u, \quad b_n(t) \neq 0. \quad (3.6b)$$

In (Freund 1971) bzw. (Föllinger 1978) wird wie im zeitinvarianten Fall  $b_n(t) \equiv 1$  angesetzt und damit die Regelungsnormalform definiert. Dies entspricht einer Eingangstransformation  $\bar{u} = b_n(t)u$ .

Durch Einführen neuer Eingänge  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , für die Teilsysteme der Regelungsform (3.5)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^1 & \dots & a_{m\rho_m}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}^m & \dots & a_{m\rho_m}^m \end{pmatrix}}_{\bar{A}(t)} \mathbf{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^1(t) & \dots & b_m^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m(t) & \dots & b_m^m(t) \end{pmatrix}}_{\bar{B}(t)} \mathbf{u} \quad (3.7)$$

kann aufgrund der Rangbedingung (3.5c) eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \bar{B}^{-1}(t) \{ \mathbf{v} - \bar{A}(t) \mathbf{z} \} \quad (3.8)$$

bestimmt werden, die die Zeitvarianz exakt kompensiert, die Teilsysteme entkoppelt und die Regelungsform in die Brunovský-Normalform überführt:

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \rho_i - 1, \quad (3.9a)$$

$$\dot{z}_{\rho_i}^i = v_i, \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.9b)$$

Wie man leicht sieht, stellt  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_1^m)$  einen flachen Ausgang der Brunovský-Normalform (3.9) dar, da alle Zustände  $z_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, \rho_i$ , und die Eingänge  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , aus den Komponenten von  $\mathbf{y}$  durch fortgesetzte Differentiation bestimmt werden können. Dies gilt auch für die lineare Regelungsform (3.5), bei der analog zur Brunovský-Normalform die Zustände  $z_k^i$  durch sukzessive Zeitableitungen von  $\mathbf{y}$  bestimmt werden können. Die Möglichkeit zur Berechnung der Eingangsgrößen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , aus  $\mathbf{y}$  und dessen Zeitableitungen wird durch die Rangbedingung (3.5c) gewährleistet. Wie in Bild 3.1 zu sehen, sind die Komponenten des flachen Ausgangs die Ausgänge der Integratorketten. Sowohl die Brunovský-Normalform als auch die lineare Regelungsnormalform (3.2) bzw. Regelungsform (3.5) sind *strukturell* flach, d. h. liegt ein System in einer dieser Formen vor oder kann es in eine solche transformiert werden, so ist es flach.

### 3.1.2 Nichtlineare Regelungsnormalform

Die lineare Regelungsnormalform (3.2) läßt sich auf nichtlineare Systeme (2.1) erweitern, indem man in (3.2b) anstelle der Linearkombination der Zustände eine nichtlineare Funktion

zuläßt (Sommer 1981, Krener 1987):

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \rho_i - 1, \quad (3.10a)$$

$$\dot{z}_{\rho_i}^i = a_i(\mathbf{z}) + \sum_{j=i}^m b_j^i(\mathbf{z})u_j, \quad b_i^i(\mathbf{z}) = 1, \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.10b)$$

Diese Form heißt *nichtlineare Regelungsnormalform* und umfaßt  $m$  Teilsysteme, die über die Zustände  $z_k^i$  allgemein und die Eingänge  $u_j$  dreiecksförmig miteinander verkoppelt sind. Die Längen der Teilsysteme  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , werden in Analogie zum Fall linearer Systeme *Steuerbarkeitsindizes* des Systems (3.10) genannt.

Statt der affinen Struktur der Nichtlinearitäten mit einer dreiecksförmigen Abhängigkeit von den Eingangsgrößen in (3.10b) können auch allgemeine nichtlineare Funktionen  $\phi^i(\mathbf{z}, \mathbf{u})$  zugelassen werden, die außerdem eine vollständige Abhängigkeit von den Eingängen aufweisen (Zeit 1990)

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \rho_i - 1, \quad (3.11a)$$

$$\dot{z}_{\rho_i}^i = \phi^i(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.11b)$$

$$\text{Rang } \bar{B}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial u_1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) & \dots & \frac{\partial \phi^1}{\partial u_m}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial u_1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) & \dots & \frac{\partial \phi^m}{\partial u_m}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} = m. \quad (3.11c)$$

Diese Form wird in Analogie zu (3.5) als *nichtlineare Regelungsform* bezeichnet und ist in Bild 3.2 dargestellt. Sind die Funktionen  $\phi^i$  affin in  $\mathbf{u}$ , so hat die Matrix  $\bar{B}$  Elemente der Form  $\partial \phi^i / \partial u_j = b_j^i(\mathbf{z})$  und die nichtlineare Regelungsform kann durch eine Eingangstransformation  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{U}(\mathbf{z})\mathbf{u}$ , deren Existenz die Rangbedingung (3.11c) sicherstellt, in die nichtlineare Regelungsnormalform (3.10) überführt werden. Sind die Komponenten der Matrix  $\bar{B}$  allgemeine nichtlineare Funktionen, so können sie aufgrund der Rangbedingung (3.11c) zumindest lokal in die affine nichtlineare Regelungsnormalform (3.10) überführt werden.

Die charakteristische Eigenschaft der nichtlinearen Regelungsform (3.11) ist, daß durch eine Zustandsrückführung die Verkopplung der Teilsysteme aufgehoben und die Nichtlinearitäten exakt kompensiert werden können. Dies ist zumindest lokal möglich, wenn die Rangbedingung (3.11c) erfüllt ist, so daß aus

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \phi^1(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ \phi^m(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

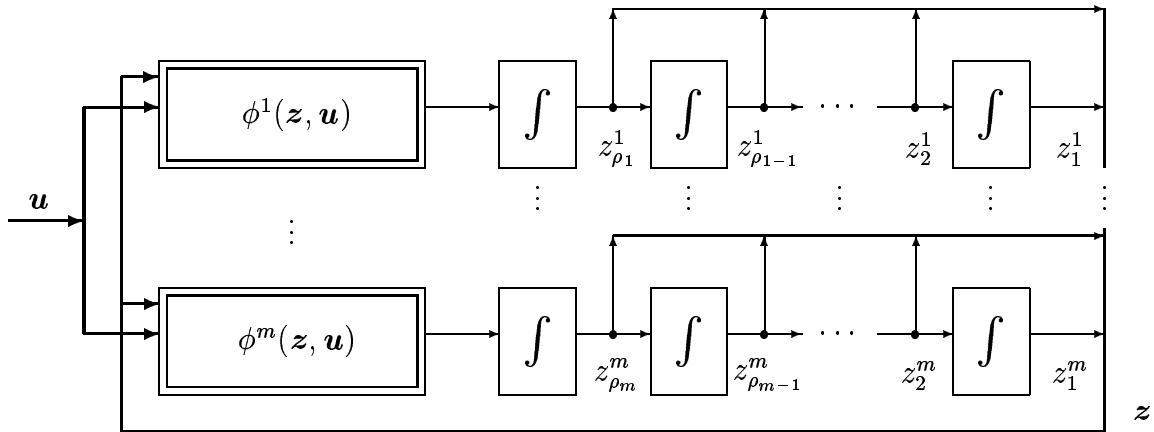


Bild 3.2: Blockschaltbild der nichtlinearen Regelungsform (3.11).

die Eingangsgrößen als Funktion des Zustands  $\mathbf{z}$  und des neuen Referenzeingangs  $\mathbf{v}$  bestimmt werden können:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}). \quad (3.13)$$

Diese Zustandsrückführung überführt die Regelungsform (3.11) in Brunovský-Normalform (3.9).

**Beispiel 3.1** Die Zustandsdarstellung des starren Robotermodells aus Abschnitt 2.1.3 mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2]^T$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.14a)$$

$$\dot{x}_2 = \phi^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.14b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.14c)$$

$$\dot{x}_4 = \phi^2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.14d)$$

liegt bereits in der Regelungsform (3.11) vor, wobei die Funktionen  $\phi^{1,2}$  affine Struktur haben. Die Berechnung der Zustandsrückführung (3.13) ergibt sich analog zu (2.32c) durch Einführen des neuen Eingangs

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \phi^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \phi^2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \implies \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (3.15)$$

Ein flacher Ausgang für die nichtlineare Regelungsnormalform (3.10) bzw. die nichtlineare Regelungsform (3.11) ist  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_1^m)$ . Daraus lassen sich durch fortgesetzte Differentiation alle anderen Zustände und die Eingangsgrößen nach (3.13) bestimmen. Die Möglichkeit zur Bestimmung der Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  als Funktion von  $\mathbf{y}$  und dessen Zeitableitungen wird durch die Rangbedingung (3.11c) sichergestellt. Die Komponenten des flachen

Ausgangs stellen die Ausgänge der Integratorketten in Bild 3.2 dar. Sowohl die nichtlineare Regelungsnormalform (3.10) als auch die nichtlineare Regelungsform (3.11) sind strukturell flache Systemdarstellungen.

### 3.1.3 Verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform

Systeme, die in der nichtlinearen Regelungsform (3.11) vorliegen oder in diese transformiert werden können, lassen sich durch eine statische Zustandsrückführung (3.13) exakt linearisieren und sind somit flach. Systeme, die durch eine quasi-statische oder dynamische Zustandsrückführung exakt linearisierbar sind, lassen sich jedoch nicht immer in die nichtlineare Regelungsform (3.11) transformieren. Eine Regelungsform, in die diese Systeme transformiert werden können, kann auch von Ableitungen der Eingangsgrößen abhängen. Deshalb wird anhand von Bild 3.3 eine Verallgemeinerung der nichtlinearen Regelungsform (3.11) vorgestellt (Rudolph *et al.* 1995). Anstelle der in Bild 3.2 dargestellten vollständigen Verkopplung der Teilsysteme über die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  liegt der verallgemeinerten Form eine dreiecksförmige Verkopplung über die Eingangsgrößen und eine endliche Anzahl von deren Zeitableitungen zugrunde. Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man die folgenden Vektoren ein

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \langle r_j \rangle \\ \mathbf{u}_j \end{matrix} &= \begin{cases} (u_j, \dots, u_j^{(r_j)}) & \text{für } r_j \geq 0 \\ () & \text{für } r_j < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\begin{matrix} \langle \langle r \rangle \rangle \\ \mathbf{u} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \langle r_1 \rangle \\ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \end{pmatrix}. \quad (3.16b)$$

Hierbei umfaßt der Vektor  $\begin{matrix} \langle r_j \rangle \\ \mathbf{u}_j \end{matrix}$  den Eingang  $u_j$  und dessen Zeitableitungen bis zur Ordnung  $r_j$ . Ist  $r_j = 0$ , so wird  $\begin{matrix} \langle r_j \rangle \\ \mathbf{u}_j \end{matrix} = (u_j)$ . Entsprechend ist  $\begin{matrix} \langle \langle r \rangle \rangle \\ \mathbf{u} \end{matrix}$  ein Vektor, der alle Eingänge  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , und deren Zeitableitungen bis zur zugehörigen Ordnung  $r_j$  enthält.

Die wesentlichen Unterschiede zwischen der nichtlinearen Regelungsform (3.11) und ihrer Verallgemeinerung sollen anhand der Blockschaltbilder 3.2 und 3.3 diskutiert werden:

- Die Teilsysteme in Bild 3.3 sind – von oben nach unten – nach aufsteigender Länge  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , geordnet: für die Länge  $\kappa_i$  eines Teilsystems gilt  $\kappa_i \leq \kappa_j$  für  $i < j$ . Die Teilsystemlängen  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{i=1}^m \kappa_i = n$ , heißen *verallgemeinerte Steuerbarkeitsindizes* und sind i. a. von den Steuerbarkeitsindizes  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in (3.10) verschieden.
- In Bild 3.3 erkennt man, daß im Unterschied zur nichtlinearen Regelungsform (3.11) die nichtlinearen Funktionen

$$\varphi^j \left( \mathbf{z}, \begin{matrix} \langle r_1 \rangle \\ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j \end{matrix} \right), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.17)$$

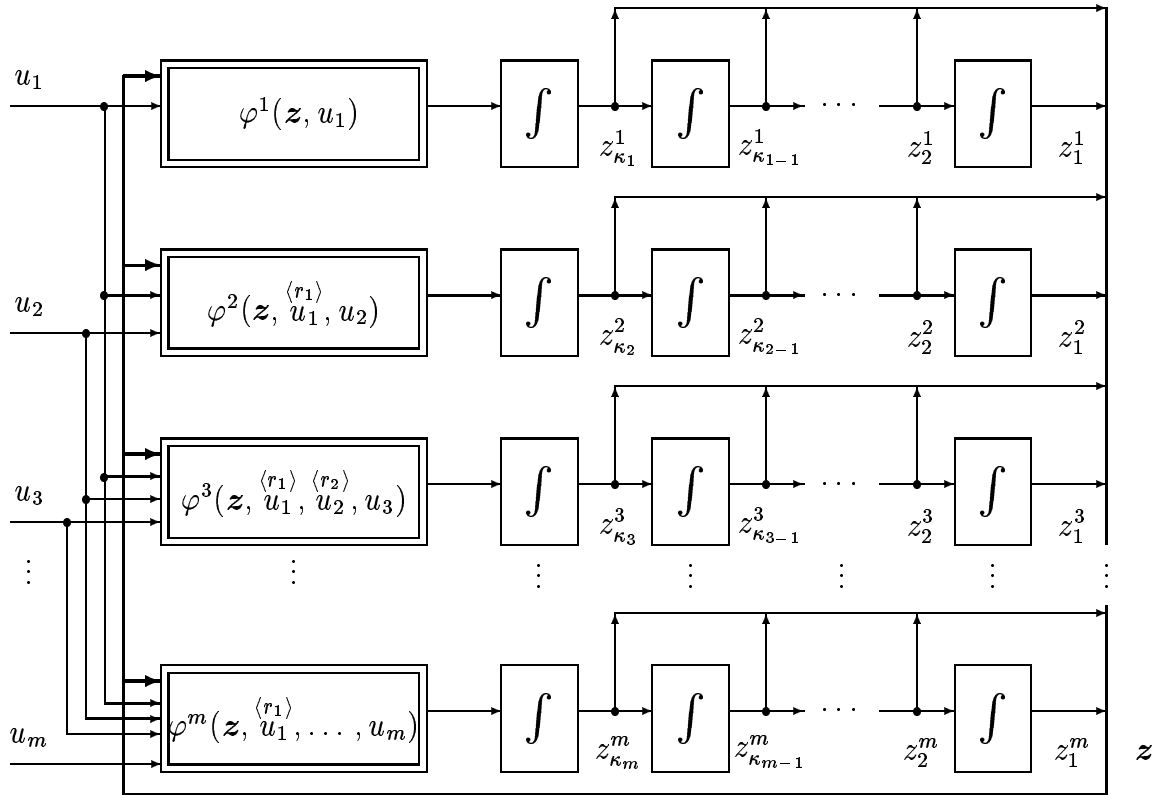


Bild 3.3: Blockschaltbild der verallgemeinerten nichtlinearen Regelungsform (3.21) für verschiedene Teilsystemlängen  $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_m$ .

in den einzelnen Teilsystemen auch von *Zeitableitungen* von Eingängen anderer Teilsysteme abhängen. Diese Abhängigkeit weist eine sog. *Dreiecksstruktur* auf, d. h. jede Integratorkette kann von einem eigenen Eingang sowie von den Eingängen der *kürzeren* Teilsysteme und deren Zeitableitungen abhängen. Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der dreiecksförmigen Abhängigkeit die Ableitung der Eingangsgröße  $u_m$  nicht vorkommt.

- Sind die  $r_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , so erhält man

$$\varphi^i = \varphi^i(\mathbf{z}, \mathbf{u}). \quad (3.18)$$

In diesem Fall stimmen die nichtlineare Regelungsform (3.11) und die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform überein.

- Haben mehrere Teilsysteme die gleiche Länge  $\kappa_i = \kappa_j$ , so wird zur Vereinfachung ein Index

$$\nu_i = \min \left\{ j \in \{1, \dots, m\} \mid \kappa_j = \kappa_i \right\} \quad (3.19)$$

eingeführt, der das erste Teilsystem der Länge  $\kappa_i$  bezeichnet. Haben  $\lambda_i$  Teilsysteme die Länge  $\kappa_i$ , so lassen sich die entsprechenden Funktionen  $\varphi^i$  darstellen als

$$\varphi^i \left( \mathbf{z}, u_1, \dots, u_{\nu_i-1}, u_{\nu_i}, \dots, u_{\nu_i+\lambda_i} \right), \quad i = \nu_i, \dots, \nu_i + \lambda_i - 1. \quad (3.20)$$

Dies bedeutet, daß die Funktion  $\varphi^i$  vom Zustand  $\mathbf{z}$ , von den Eingängen der kürzeren Teilsysteme  $u_1, \dots, u_{\nu_i-1}$  und deren Zeitableitungen sowie von den Eingängen  $u_{\nu_i}, \dots, u_{\nu_i+\lambda_i}$  aller gleich langen Teilsysteme abhängt. Die nicht-negativen ganzen Zahlen  $r_i$  geben die höchste auftretende Ordnung der Zeitableitungen des Eingangs  $u_i$  an.

- Haben alle Teilsysteme die gleiche Länge  $\kappa_i = \kappa$ ,  $i = 1, \dots, m$ , so stimmen die Regelungsform (3.11) und die verallgemeinerte Regelungsform (3.21) überein. Dies gilt ebenso für Systeme mit einer Eingangsgröße ( $m = 1$ ).

Mit diesen Überlegungen läßt sich die in Bild 3.3 dargestellte verallgemeinerte Regelungsform folgendermaßen definieren (Rudolph *et al.* 1995).

**Definition 3.2** Gegeben sei ein geordnetes Tupel positiver ganzer Zahlen  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ , für die gilt  $\sum_{i=1}^m \kappa_i = n$ , sowie die Zahlen  $\nu_i$  nach (3.19). Eine verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform ist eine verallgemeinerte Zustandsdarstellung der Form

$$\dot{z}_k^i = z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \kappa_i - 1, \quad (3.21a)$$

$$\dot{z}_{\kappa_i}^i = \varphi^i \left( \mathbf{z}, u_1, \dots, u_{\nu_i-1}, u_{\nu_i}, \dots, u_{\nu_i+\lambda_i} \right), \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = n, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.21b)$$

$$\text{Rang } \bar{B} \left( \mathbf{z}, \langle \mathbf{u} \rangle \right) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial u_m} \end{pmatrix} = m. \quad (3.21c)$$

Die Matrix  $\bar{B}$  weist Block-Dreiecksstruktur auf, d. h. die zu Teilsystemen gleicher Länge gehörenden Elemente in  $\bar{B}$  lassen sich in reguläre Blockmatrizen zusammenfassen. Haben alle Teilsysteme paarweise verschiedene Längen, so reduziert sich die Rangbedingung (3.21c) auf

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial u_i} \neq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.22)$$

Im Fall gleicher Teilsystemlängen vereinfacht sich die Rangbedingung (3.21c)

$$\text{Rang} \left( \left\{ \frac{\partial \varphi^i}{\partial u_i} \right\}_{i=\nu_k, \dots, \nu_k+\lambda_k-1} \right) = \lambda_k, \quad k \in \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m\}. \quad (3.23)$$

Die verallgemeinerte Regelungsform (3.21) hat die charakteristische Eigenschaft, daß durch Einführen neuer Eingangsgrößen

$$v_i \stackrel{!}{=} \varphi^i \left( \mathbf{z}, \overset{\langle r_1 \rangle}{u_1}, \dots, \overset{\langle r_{\nu_i-1} \rangle}{u_{\nu_i-1}}, u_{\nu_i}, \dots, u_{\nu_i+\lambda_i} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.24)$$

die Teilsysteme entkoppelt, alle Nichtlinearitäten  $\varphi^i$  kompensiert und in Brunovský-Normalform

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_k^i &= z_{k+1}^i, \quad k = 1, \dots, \kappa_i \\ \dot{z}_{\kappa_i}^i &= v_i, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = n, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \iff \dot{\mathbf{z}} = A^* \mathbf{z} + B^* \mathbf{v} \quad (3.25)$$

überführt werden. Daraus sieht man leicht, daß  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_m^1)$  ein flacher Ausgang für die verallgemeinerte Regelungsform (3.21) ist. Aus dessen Komponenten lassen sich durch sukzessive Differentiation alle Zustände berechnen. Auch die Eingangsgrößen lassen sich als Funktion von  $\mathbf{y}$  und einer endlichen Zahl von Zeitableitungen ausdrücken, wenn man in (3.27) den neuen Eingang  $\mathbf{v}$  und seine Zeitableitungen ersetzt

$$v_i^{(k)} = y_i^{(\kappa_i+k)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r_i. \quad (3.26)$$

Die neuen Eingänge  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , hängen von den Systemzuständen, den Systemeingängen und deren Zeitableitungen ab.

Der Gleichung (3.24) entspricht die Beziehung (2.86b) in der Definition der quasi-statischen Zustandsrückführung. Um auch die Gültigkeit von (2.86a) zu zeigen, wird im folgenden durch vollständige Induktion gezeigt, daß die Gleichungen (3.24) sukzessive nach den Eingangsgrößen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , aufgelöst und diese in der Form

$$u_i = \psi_i \left( \mathbf{z}, \overset{\langle r_1 \rangle}{v_1}, \dots, \overset{\langle r_m \rangle}{v_m} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.27)$$

dargestellt werden können. Dies ist aufgrund der dreiecksförmigen Abhängigkeit der Eingangsableitungen und der Rangbedingung (3.23) möglich:

- Betrachtet man die kürzesten Teilsysteme der Länge  $\kappa_1 = \dots = \kappa_{\lambda_1}$ , so ist aufgrund der Rangbedingung (3.23) auch die Rangbedingung

$$\text{Rang} \left( \left\{ \frac{\partial \varphi^i}{\partial u_j} \right\}_{i,j=1,\dots,\lambda_1} \right) = \lambda_1 \quad (3.28)$$

erfüllt, so daß sich aus

$$v_i = \varphi^i (\mathbf{z}, u_1, \dots, u_{\lambda_i}), \quad i = 1, \dots, \lambda_1, \quad (3.29)$$

die Eingänge

$$u_i = \psi_i (\mathbf{z}, v_1, \dots, v_{\lambda_1}), \quad i = 1, \dots, \lambda_1, \quad (3.30)$$

berechnen lassen. Diese Gleichung ist in (3.27) enthalten.



- Nimmt man für einen allgemeinen Teilsystemindex  $k$  an, daß die Eingänge  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu_k - 1$ , in der Form (3.27) ausgedrückt werden können, so lautet (3.24)

$$v_i = \varphi^i \left( \mathbf{z}, \overset{\langle r_1 \rangle}{u_1}, \dots, \overset{\langle r_{\nu_k-1} \rangle}{u_{\nu_k-1}}, u_{\nu_k}, \dots, u_{\nu_k+\lambda_k-1} \right), \quad i = \nu_k, \dots, \nu_k + \lambda_k - 1. \quad (3.31)$$

Aufgrund der Rangbedingung (3.23) lassen sich daraus die Eingänge

$$u_i = \bar{\psi}_i \left( \mathbf{z}, \overset{\langle r_1 \rangle}{u_1}, \dots, \overset{\langle r_{\nu_k-1} \rangle}{u_{\nu_k-1}}, v_{\nu_k}, \dots, v_{\nu_k+\lambda_k-1} \right), \quad i = \nu_k, \dots, \nu_k + \lambda_k - 1, \quad (3.32)$$

berechnen. Die Ableitungen der Eingänge  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu_k - 1$ , in (3.32) können durch Differentiation von (3.27) als Funktion des Systemzustands und des neuen Eingangs sowie dessen Zeitableitungen bestimmt werden

$$\overset{(l)}{u}_i = \frac{d^l}{dt^l} \bar{\psi}_i \left( \mathbf{z}, \overset{\langle r_1 \rangle}{v_1}, \dots, \overset{\langle r_m \rangle}{v_m} \right), \quad i = 1, \dots, \nu_k - 1, \quad l = 1, \dots, r_i. \quad (3.33)$$

Bei der Berechnung dieser Zeitableitungen ersetzt man die Ableitung  $\dot{\mathbf{z}}$  durch (3.25) und erhält aus (3.33)

$$\overset{(l)}{u}_i = \psi_i^* \left( \mathbf{z}, \overset{\langle r_1+l \rangle}{v_1}, \dots, \overset{\langle r_m+l \rangle}{v_m} \right), \quad i = 1, \dots, \nu_k - 1, \quad l = 1, \dots, r_i. \quad (3.34)$$

Setzt man diese Beziehung in (3.32) ein, so erhält man

$$u_i = \psi_i \left( \mathbf{z}, \overset{\langle \bar{r}_1 \rangle}{v_1}, \dots, \overset{\langle \bar{r}_m \rangle}{v_m} \right), \quad i = \nu_k, \dots, \nu_k + \lambda_k - 1. \quad (3.35)$$

Diese Beziehung ist von der Form (3.27).

Durch die Berechnung der Zeitableitungen des Eingangs nach (3.34) erhöhen sich die Ordnungen  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in (3.27). Die Bestimmung der  $r_i$  kann daher nicht direkt aus (3.21) erfolgen. Vielmehr müssen die  $r_i$  durch die oben beschriebene Vorgehensweise berechnet werden, die an folgendem Beispiel erläutert werden soll.

### Beispiel 3.3 Das nichtlineare System

$$\dot{z}_1^1 = \varphi^1(\mathbf{z}, u_1) = (1 + z_1^1)u_1 \quad (3.36a)$$

$$\dot{z}_1^2 = z_2^2 \quad (3.36b)$$

$$\dot{z}_2^2 = \varphi^2(\mathbf{z}, u_1, \dot{u}_1, u_2) = -(z_2^2)^2 + (1 + z_1^1)(\dot{u}_1 + (u_1)^2) + u_2. \quad (3.36c)$$

mit drei Zuständen und zwei Eingängen liegt in der verallgemeinerten nichtlinearen Regelform (3.21) vor. Die Länge der Teilsysteme ist  $\kappa_1 = 1$  bzw.  $\kappa_2 = 2$ , die Ordnung der auftretenden Eingangsableitungen  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ . Durch Einführen der neuen Eingänge

$$v_1 \stackrel{!}{=} \varphi^1(\mathbf{z}, u_1) \quad (3.37a)$$

$$v_2 \stackrel{!}{=} \varphi^2 \left( \mathbf{z}, \overset{\langle 1 \rangle}{u_1}, u_2 \right) \quad (3.37b)$$

läßt sich (3.36) in Brunovský-Normalform überführen. Zur Berechnung der linearisierenden Zustandsrückführung bestimmt man zunächst

$$u_1 = \frac{v_1}{1 + z_1^1} = \psi_1(\mathbf{z}, v_1), \quad z_1^1 \neq -1. \quad (3.38)$$

Aus der Gleichung (3.37b) für das zweite Teilsystem erhält man

$$u_2 = v_2 + (z_2^2)^2 - (1 + z_1^1) (\dot{u}_1 + (u_1)^2) = \bar{\psi}_2 \left( \mathbf{z}, \overset{(1)}{u}_1, v_2 \right). \quad (3.39)$$

Die Zeitableitung von  $u_1$  kann aus (3.38) bestimmt werden, wenn  $\dot{z}_1^1 = v_1$  gesetzt wird:

$$\dot{u}_1 = \frac{\dot{v}_1(1 + z_1^1) - v_1 \dot{z}_1^1}{(1 + z_1^1)^2} = \frac{\dot{v}_1(1 + z_1^1) - v_1^2}{(1 + z_1^1)^2}. \quad (3.40)$$

Setzt man diese Beziehung und (3.38) in (3.39) ein, so erhält man

$$u_2 = v_2 + (z_2^2)^2 - \dot{v}_1 = \psi_2 \left( \mathbf{z}, \overset{(1)}{v}_1, v_2 \right). \quad (3.41)$$

Die quasi-statische Zustandsrückführung wird durch (3.37), (3.38) und (3.41) definiert. Ein flacher Ausgang für das System (3.36) ist  $\mathbf{y} = (z_1^1, z_1^2)$ , da daraus alle Zustände und Eingänge gemäß (3.36b), (3.38) und (3.41) berechnet werden können.

In diesem Beispiel haben sich – im Unterschied zur Herleitung der allgemeinen Beziehungen – die Ordnungen  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , der Zeitableitungen nicht verändert.

Anstelle der quasi-statischen Zustandsrückführung (3.24), (3.27) kann zur Zustandslinearisierung auch eine dynamische Zustandsrückführung verwendet werden. Hierzu führt man die folgenden neuen Zustandsvariablen und Eingänge ein:

$$\xi_j^i = \overset{(j)}{u}_i, \quad j = 0, \dots, r_i - 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.42a)$$

$$\bar{v}_i = \overset{(r_i)}{u}_i \quad (3.42b)$$

Damit kann (3.24), (3.27) als dynamische Zustandsrückführung angegeben werden

$$\dot{\xi}_j^i = \xi_{j+1}^i, \quad j = 0, \dots, r_i - 1, \quad (3.43a)$$

$$\dot{\xi}_{r_i}^i = \bar{v}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.43b)$$

$$u_i = \psi_i(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}, \bar{\mathbf{v}}). \quad (3.43c)$$

Die dynamische Zustandsrückführung hängt damit vom Systemzustand  $\mathbf{z}$ , den Reglerzuständen  $\boldsymbol{\xi}$  und den Eingängen  $\bar{\mathbf{v}}$  ab.

**Beispiel 3.4 (Fortsetzung von Beispiel 3.3)** Mit Hilfe des neuen Zustands  $\xi = u_1$  und der neuen Eingänge  $\bar{v}_1 = \dot{u}_1$ ,  $\bar{v}_2 = v_2$  kann anstelle der quasi-statischen Zustandsrückführung (3.37), (3.38) und (3.41) auch eine dynamische Zustandsrückführung angegeben werden

$$\dot{\xi} = \bar{v}_2 \quad (3.44a)$$

$$u_1 = \psi_1(\mathbf{z}, \bar{v}_1) \quad (3.44b)$$

$$u_2 = \psi_2(\mathbf{z}, \xi, \bar{v}_1, \bar{v}_2). \quad (3.44c)$$

## 3.2 Transformation in strukturell flache Systemdarstellungen

Da in der Regel ein nichtlineares System (2.1) nicht in einer der vorgestellten Regelungs(normal)formen vorliegt, stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen eine Zustandstransformation existiert, die das System in die gewünschte Form überführt. Bei zeitvarianten linearen Systemen (3.1) existiert eine solche Zustandstransformation genau dann, wenn das System (3.1) steuerbar ist (Freund 1971, Föllinger 1978). Im Fall nichtlinearer Systeme (2.1) ist es schwierig, die Frage nach der Existenz einer (nichtlinearen) Zustandstransformation zu beantworten, da die entsprechende nichtlineare Steuerbarkeitsbedingung nur noch notwendigen Charakter hat (Isidori 1995).

Im folgenden Abschnitt werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lineare zeitvariante Systeme zur Bestimmung der Zustandstransformation auf Regelungsform wiederholt und so dargestellt, daß eine Erweiterung auf nichtlineare Systeme leicht möglich ist. Für nichtlineare Systeme werden in den darauf folgenden Abschnitten differentialgeometrische Bedingungen angegeben, aus denen sich Bestimmungsgleichungen für die Transformation bzw. den flachen Ausgang herleiten lassen.

### 3.2.1 Transformation in eine lineare zeitvariante Regelungsform

Für die Transformation eines linearen zeitvarianten Systems in die Regelungsform ist die Steuerbarkeit ein notwendiges und hinreichendes Kriterium (Freund 1971, Föllinger 1978), wie im folgenden kurz dargestellt wird. Dabei werden die erforderlichen Überlegungen zur Bestimmung der Transformation zunächst für Systeme mit einer Eingangsgröße erläutert und anschließend auf Systeme mit mehreren Eingangsgrößen erweitert.

#### Transformation linearer Eingrößensysteme

Zur Bestimmung der linearen zeitvarianten Zustandstransformation

$$\mathbf{z} = T(t)\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad T = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n]^T, \quad (3.45)$$

die das lineare System (3.1) für  $m = 1$  in die Regelungsnormform (3.6) überführt, macht man sich die Tatsache zunutze, daß alle Zustände und der Eingang in (3.6) durch Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $y = z_1$  berechnet werden können. Die Zeitableitungen des flachen Ausgangs müssen in  $\mathbf{x}$ - bzw.  $\mathbf{z}$ -Koordinaten übereinstimmen. In  $\mathbf{x}$ -Koordinaten lassen sich die Zeitableitungen mit Hilfe der Lie-Ableitung für zustands- und zeitabhängige

$$\begin{array}{ccccccc}
y = \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \dot{y} = L_{A\mathbf{x}+\mathbf{b}u} \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} & \rightarrow \cdots \rightarrow & \overset{(k)}{y} = L_{A\mathbf{x}+\mathbf{b}u}^k \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \cdots \\
\updownarrow \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} & & \updownarrow \mathbf{t}_2^T \mathbf{x} & \Rightarrow \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = 0 & \updownarrow \mathbf{t}_{k+1}^T \mathbf{x} & \Rightarrow \mathbf{t}_1^T N_A^{k-1} \mathbf{b} = 0 & \\
y = z_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \dot{y} = \dot{z}_1 = z_2 & \rightarrow \cdots \rightarrow & \overset{(k)}{y} = \dot{z}_k = z_{k+1} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \cdots
\end{array}$$

Bild 3.4: Zeitableitungen des flachen Ausgangs des zeitvarianten linearen Eingrößensystems (3.1) in den Originalkoordinaten und den Koordinaten  $\mathbf{z}$  der Regulationsnormalform.

Funktionen  $\lambda(\mathbf{x}, t)$

$$L_{A\mathbf{x}+\mathbf{b}u}\lambda(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u) + \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (3.46)$$

entlang des Vektorfelds der Differentialgleichung (3.1) darstellen. In Bild 3.4 ist der Zusammenhang zwischen den Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $y = \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} = z_1$  in den Originalkoordinaten  $\mathbf{x}$  (obere Zeile) bzw. den Koordinaten  $\mathbf{z}$  der Regulationsnormalform (untere Zeile) dargestellt: für die  $k$ -te Ableitung  $\overset{(k)}{y}$  gilt aufgrund der besonderen Struktur von (3.6) mit  $z_k = \mathbf{t}_k^T \mathbf{x}$  (senkrechte Doppelpfeile)

$$\overset{(k)}{y} = \dot{z}_k = z_{k+1} \iff \overset{(k)}{y} = L_{A\mathbf{x}+\mathbf{b}u}^k \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} \stackrel{!}{=} \mathbf{t}_{k+1}^T \mathbf{x}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.47)$$

Wie im Anhang A.1 gezeigt wird, erhält man daraus die folgende Transformationsmatrix (3.45) (Föllinger 1978):

$$T = \left( M_A^0, \dots, M_A^{n-1} \right)^T \mathbf{t}_1^T \quad \text{mit} \quad M_A \mathbf{t}_1^T = \mathbf{t}_1^T A + \dot{\mathbf{t}}_1^T. \quad (3.48a)$$

Die Transformationsmatrix  $T$  kann durch wiederholte Anwendung des Differentialoperators  $M_A$  auf den Vektor  $\mathbf{t}_1^T$  gebildet werden. Der Vektor  $\mathbf{t}_1^T$  hat die folgende Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{t}_1^T \underbrace{(N_A^0 \mathbf{b}, \dots, N_A^{n-1} \mathbf{b})}_{P(t)} = \underbrace{(0, \dots, 0, b_n(t))}_{\mathbf{b}^{*T}(t)} \quad \text{mit} \quad N_A \mathbf{b} = A\mathbf{b} - \dot{\mathbf{b}}. \quad (3.48b)$$

Ist die Steuerbarkeitsmatrix  $P(t)$  regulär, so ist das lineare System steuerbar, und der Vektor  $\mathbf{t}_1^T(t)$  kann berechnet werden

$$\mathbf{t}_1^T(t) = \mathbf{b}^{*T}(t) P^{-1}(t). \quad (3.49)$$

**Bemerkung 3.2** Aus der Struktur von (3.48a) erkennt man, daß alle Zeilen der Transformationsmatrix aus  $\mathbf{t}_1^T$  bestimmt werden können. Dem entspricht die Eigenschaft der zeitvarianten Regelungsform, daß sich alle Zustandsgrößen  $z_k$ ,  $k = 2, \dots, n$ , aus Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $y = z_1$  berechnen lassen.

Betrachtet man den Zeilenvektor  $\mathbf{t}_1^T$  als Gradienten

$$\mathbf{t}_1^T = dy = \left[ \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right] \quad (3.50)$$

des flachen Ausgangs  $y = \mathbf{t}_1^T \mathbf{x}$ , so kann man Gleichung (3.48b) folgendermaßen interpretieren: das Skalarprodukt zwischen dem Gradienten  $dy$  des flachen Ausgangs und den Spaltenvektoren  $N_A^k \mathbf{b}$ ,  $k = 0, \dots, n - 2$ , muß Null sein

$$\langle dy, N_A^k \mathbf{b} \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n - 2. \quad (3.51a)$$

Diese Beziehung besagt, daß die Ableitungen  $y^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, n - 2$ , nicht von der Eingangsgröße  $u$  abhängen. Nur die höchste Ableitung  $y^{(n)}$  muß von  $u$  abhängig sein

$$\langle dy, N_A^{n-1} \mathbf{b} \rangle = b_n \neq 0. \quad (3.51b)$$

Diese Interpretation wird sich später im Fall nichtlinearer Systeme als nützlich erweisen.

**Bemerkung 3.3** Sind die Bedingungen (3.51) erfüllt, so hat das System (3.1) ( $m = 1$ ) den relativen Grad  $n$  bezüglich  $y$  (Freund 1971).

Damit läßt sich (3.48b) bzw. (3.51) als System linearer partieller Differentialgleichungen für den flachen Ausgang  $y$  interpretieren. Da es sich um ein System von  $n$  linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zeitvarianten Koeffizienten und inhomogener rechter Seite handelt, existiert eine Lösung  $y$  genau dann, wenn die Koeffizientenmatrix  $P(t)$  vollen Rang hat. Damit läßt sich Satz 2.1 auf Seite 24 über die Flachheit und Steuerbarkeit linearer Systeme auf den zeitvarianten Fall ( $m = 1$ ) erweitern (Fliess 1991, Rudolph 1996a).

Da die Bestimmung des flachen Ausgangs durch Integration eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen erfolgt, gibt es für den flachen Ausgang mehr als eine Lösung. Dies entspricht der Bemerkung 2.5 über die Nicht-Eindeutigkeit des flachen Ausgangs.

**Beispiel 3.5** Für das lineare zeitvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.52)$$

lautet die Steuerbarkeitsmatrix

$$P(t) = (\mathbf{b}, N_A \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\alpha(t) \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Für  $\alpha(t) \neq -1$  hat sie den Rang zwei, und das System ist steuerbar. Damit lauten die Transformationsgleichungen (3.48)

$$T = \begin{pmatrix} M_A^0 & M_A^1 \end{pmatrix}^T \mathbf{t}_1^T, \quad \mathbf{t}_1^T = \frac{1}{\alpha(t) + 1} [0, b_2(t)] \begin{pmatrix} \alpha(t) & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Durch die Wahl des Freiheitsgrads  $b_2(t) = \alpha(t) + 1 \neq 0$  vereinfacht sich der Vektor

$$\mathbf{t}_1^T = [1, -1]. \quad (3.55)$$

Damit bekommt man die zweite Zeile der Transformationsmatrix  $T(t)$

$$\mathbf{t}_2^T = M_A \mathbf{t}_1^T = A \mathbf{t}_1^T + \dot{\mathbf{t}}_1^T = [\alpha(t), 1], \quad (3.56)$$

und das System kann mit Hilfe der Transformation

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha(t) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (3.57)$$

in die Regelungsnormalform (3.2) transformiert werden

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\dot{\alpha}(t) - \alpha(t) - \alpha^2(t)}{1 + \alpha(t)} & \frac{\dot{\alpha}(t)}{1 + \alpha(t)} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \alpha(t) \end{bmatrix} u \quad (3.58)$$

Der flache Ausgang kann aus  $dy = \mathbf{t}_1^T dx$  formal durch Integration bestimmt werden:

$$y = \int \mathbf{t}_1^T dx = \int 1 \cdot dx_1 + \int (-1) \cdot dx_2 = x_1 - x_2. \quad (3.59)$$

Dabei wird die bei der Integration auftretende Konstante o. B. d. A. zu Null gesetzt. Bei (3.59) handelt es sich um eine spezielle Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (3.54), deren allgemeine Lösung von der Form  $y = \varphi(x_1 - x_2)$  ist. Die Regelungsnormalform (3.58) kann auch aus (3.59) durch Differentiation bestimmt werden.

## Transformation linearer Mehrgrößensysteme

Nachfolgend werden die Transformationsgleichungen für Eingrößensysteme auf lineare zeitvariante Mehrgrößensysteme (3.1) übertragen (Freund 1971). Da die Anzahl der Komponenten des flachen Ausgangs gleich der Anzahl  $m$  der unabhängigen Eingangsgrößen ist, ergeben

sich hier im Vergleich zu Eingrößensystemen zusätzliche Freiheitsgrade, die zur Bestimmung der Transformation ausgenutzt werden können.

Die Bestimmungsgleichungen lassen sich wie im Fall des Eingrößensystems durch Vergleich der Zeitableitungen der Komponenten des flachen Ausgangs  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_m^1)$  in den  $\mathbf{x}$ - und  $\mathbf{z}$ -Koordinaten herleiten. Dabei ist zu beachten, daß bei Mehrgrößensystemen für jede Komponente des flachen Ausgangs  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_m^1)$  ein Gradient  $\mathbf{t}_i^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ , bestimmt werden muß, aus dem durch Anwendung des Differentialoperators  $M_A$  in (3.48a) weitere Gradienten  $\mathbf{t}_{k+1}^T = M_A^k \mathbf{t}_1^T$ ,  $k \geq 0$ , von Ableitungen von  $y_i$  berechnet werden können. Zur Bildung der zugehörigen *Steuerbarkeitsmatrix*  $P(t)$  werden  $n$  linear unabhängige Vektoren aus

$$\bar{P} = \left( N_A^0 \mathbf{b}_1, \dots, N_A^0 \mathbf{b}_m, \dots, N_A^1 \mathbf{b}_1, \dots, N_A^1 \mathbf{b}_m, \dots \right), \quad B = \left( \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \right) \quad (3.60)$$

ausgewählt (Freund 1971). Hat die Matrix  $\bar{P}$  den Rang  $n$ , so lassen sich in  $\bar{P}$   $n$  linear unabhängige Vektoren finden, aus denen eine Basis für den Zustandsraum von  $\mathbf{z}$  gebildet und die Transformationsmatrix  $T$  bestimmt werden kann. Anders als im Eingrößenfall ist die Auswahl der linear unabhängigen Vektoren nicht eindeutig (Freund 1971), d. h. es existieren u. U. mehrere Auswahlmöglichkeiten für eine Basis, die zu unterschiedlichen Teilsystemaufteilungen der Regelungsform (3.5) bzw. Regelungsnormalform (3.2) führen. In dieser Arbeit wird nur die folgende Auswahl betrachtet

$$P = \left( N_A^0 \mathbf{b}_1, \dots, N_A^{\rho_1-1} \mathbf{b}_1, \dots, N_A^0 \mathbf{b}_m, \dots, N_A^{\rho_m-1} \mathbf{b}_m \right), \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad (3.61)$$

bei der die höchsten Potenzen des Differentialoperators  $N_A$  gleich den um eins verminderten Steuerbarkeitsindizes des Systems sind. Der Auswahl der Basisvektoren entspricht eine Aufteilung der Transformationsmatrix

$$T = \left( \mathbf{t}_1^1, \dots, \mathbf{t}_{\rho_1-1}^1, \dots, \mathbf{t}_1^m, \dots, \mathbf{t}_{\rho_m-1}^m \right)^T, \quad (3.62a)$$

wobei diese Transformationsmatrix aus den Gradienten  $d y_i = \mathbf{t}_1^{iT}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , durch wiederholte Anwendung des Differentialoperators  $M_A$  in (3.48a)

$$\mathbf{t}_{k+1}^{iT} = M_A^k \mathbf{t}_1^{iT}, \quad k = 0, \dots, \rho_i - 2, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.62b)$$

bestimmt werden kann. Die Bestimmungsgleichungen für die Gradienten  $d y_i = \mathbf{t}_1^{iT}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , lauten (Freund 1971)

$$\langle d y_i, N_A^k \mathbf{b}_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, \rho_i - 2, \quad (3.63a)$$

$$\langle d y_i, N_A^{\rho_i-1} \mathbf{b}_j \rangle = b_j^i, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3.63b)$$

Aufgrund der Rangbedingung (3.5c) muß außerdem gelten

$$\text{Rang } \bar{B} = \text{Rang} \begin{pmatrix} \langle d y_1, N_A^{\rho_1-1} \mathbf{b}_1 \rangle & \dots & \langle d y_1, N_A^{\rho_1-1} \mathbf{b}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle d y_m, N_A^{\rho_m-1} \mathbf{b}_1 \rangle & \dots & \langle d y_m, N_A^{\rho_m-1} \mathbf{b}_m \rangle \end{pmatrix} = m \quad \forall t > t_0. \quad (3.63c)$$

Die Gleichungen (3.63) sind Bestimmungsgleichungen für die Gradienten  $d y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Komponenten des flachen Ausgangs

$$\begin{aligned} & d y_i \left( N_A^0 \mathbf{b}_1, \dots, N_A^{\rho_i-1} \mathbf{b}_1, \dots, N_A^0 \mathbf{b}_m, \dots, N_A^{\rho_i-1} \mathbf{b}_m \right) \\ &= \left( 0, \dots, 0, b_1^i, \dots, 0, \dots, 0, b_m^i \right), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sie können als  $m$  Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit inhomogener rechter Seite interpretiert werden. Jedes System besteht aus  $m\rho_i$  Gleichungen für die  $n$  Komponenten des Gradienten  $d y_i$ . Da im allgemeinen  $m\rho_i \leq n$  gilt, sind diese Systeme meist unterbestimmt, so daß bei der Lösung – im Unterschied zum Eingrößenfall – zusätzliche Freiheitsgrade existieren. Darüber hinaus kann durch geschickte Wahl der Komponenten  $b_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , in Analogie zum Eingrößenfall die Lösung der Bestimmungsgleichungen unter Berücksichtigung von (3.63c) vereinfacht werden.

**Bemerkung 3.4** Die Beziehung (3.63a) besagt, daß die Ableitungen  $y_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, \dots, \rho_i - 2$ , nicht von den Eingangsgrößen  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , abhängen. Nur die höchsten Ableitungen  $y_i^{(n)}$  müssen gemäß (3.63b) so von den Eingängen  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , abhängig sein, daß die Rangbedingung (3.63c) erfüllt ist.

Das partielle Differentialgleichungssystem (3.64) mit der Rangbedingung (3.63c) ist genau dann lösbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix  $P$  vollen Rang hat. Damit läßt sich Satz 2.1 über die Flachheit linearer Systeme auf den zeitvarianten Fall erweitern.

**Satz 3.1** Ein lineares zeitvariantes System (3.1) ist genau dann flach, wenn es steuerbar ist, d. h. wenn für die Steuerbarkeitsmatrix  $P(t)$  gilt

$$\text{Rang } P(t) = n \quad \forall t. \quad (3.65)$$

Da die Bestimmung des flachen Ausgangs durch Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen erfolgt, gibt es für den flachen Ausgang mehr als eine Lösung. Im Unterschied zum Eingrößenfall sind die Systeme partieller Differentialgleichungen zusätzlich teilweise unterbestimmt, was die Zahl der Freiheitsgrade für die Transformation erhöht.



### 3.2.2 Transformation in eine nichtlineare Regelungsform

Bei der Einführung der nichtlinearen Regelungsform wurden in der Systemgleichung (3.11b) allgemeine Nichtlinearitäten  $\phi^i(\mathbf{z}, \mathbf{u})$  zugelassen. Bei konkreten Prozeßmodellen handelt es sich meist um eingangsaffine nichtlineare Systeme, so daß im folgenden für die Bestimmung der Transformation in die nichtlineare Regelungsform anstelle von (2.1) Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \quad (3.66)$$

betrachtet werden. Für diese Systeme ist eine Zustandstransformation<sup>2</sup>

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = [\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})]^T, \quad (3.67)$$

gesucht, die (3.66) in die affine Darstellung der nichtlinearen Regelungsform (3.11) mit den Nichtlinearitäten

$$\phi^i(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = a_i(\mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m b_j^i(\mathbf{z})u_j \quad (3.68)$$

überführt. Bei der Zustandstransformation (3.67) muß es sich um einen *Diffeomorphismus* (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990) handeln, d. h. die Transformation muß eineindeutig (*bijektiv*) und stetig differenzierbar sein.

Die im folgenden für die Herleitung der Zustandstransformation (3.67) gewählte Vorgehensweise lehnt sich dabei eng an den Fall linearer zeitvarianter Systeme an. Sie macht sich die Eigenschaft des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  zunutze, daß alle Zustände und der Eingang aus  $\mathbf{y}$  und dessen Zeitableitungen berechnet werden können und außerdem die Zeitableitungen in den  $\mathbf{x}$ - bzw.  $\mathbf{z}$ -Koordinaten übereinstimmen müssen.

Die Bestimmungsgleichungen für die Transformation sind Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit inhomogener rechter Seite, deren Koeffizienten – im Unterschied zu linearen Systemen – zustandsabhängig sind. Aus diesem Grund sind für die Lösbarkeit – und damit die Existenz eines flachen Ausgangs – dieser partiellen Differentialgleichungen zusätzliche Integrierbarkeitsbedingungen erforderlich. Diese Bedingungen lassen sich im Rahmen der Differentialgeometrie mit Hilfe der Begriffe *Distribution* und *Involutivität* angeben (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990). Diese Begriffe werden, soweit für das Verständnis der vorliegenden Betrachtungen erforderlich, im Anhang A.3 anschaulich eingeführt.

---

<sup>2</sup>Alle Ergebnisse sind im Unterschied zu linearen Systemen lokaler Natur und gelten in einer offenen Umgebung von  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

### Transformation nichtlinearer Eingrößensysteme

Zur Bestimmung der Zustandstransformation (3.67) für ein nichtlineares Eingrößensystem (3.66) ( $m = 1$ ) betrachtet man die Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $y = z_1$  in den  $\mathbf{x}$ - bzw.  $\mathbf{z}$ -Koordinaten. In  $\mathbf{x}$ -Koordinaten lassen sich die Zeitableitungen von  $y$  mit Hilfe der Lie-Ableitung für zustandsabhängige Funktionen  $\lambda(\mathbf{x})$

$$L_f \lambda(\mathbf{x}) = L_{g_0 + g_1 u} \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u) \quad (3.69)$$

längs des Vektorfelds  $\mathbf{f} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 u$  der Differentialgleichung (3.66) darstellen. Wie im Anhang A.2 gezeigt wird, erhält man daraus die folgende Transformation (Isidori 1995)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left[ L_{g_0}^0 \Phi_1(\mathbf{x}), L_{g_0}^1 \Phi_1(\mathbf{x}), \dots, L_{g_0}^{n-1} \Phi_1(\mathbf{x}) \right]^T. \quad (3.70)$$

Aus der Funktion  $\Phi_1(\mathbf{x})$  können durch wiederholte Anwendung der Lie-Ableitung alle anderen Komponenten der Transformation (3.67) gebildet werden. Die Bestimmungsgleichungen für den Gradienten  $d y$  der Funktion  $\Phi_1(\mathbf{x})$  lauten

$$\langle d y, \text{ad}_{g_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n-2, \quad (3.71a)$$

$$\langle d y, \text{ad}_{g_0}^{n-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = b_n(\Phi(\mathbf{x})) \neq 0. \quad (3.71b)$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen ein System linearer partieller Differentialgleichungen mit inhomogener rechter Seite für den flachen Ausgang dar. Formal können diese beiden Gleichungen in Matrixform geschrieben werden

$$d y \underbrace{\left( \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{n-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right)}_{P_{n-1}(\mathbf{x})} = \underbrace{\left[ 0, \dots, 0, b_n(\Phi(\mathbf{x})) \right]}_{\mathbf{b}^{*T}(\mathbf{x})}. \quad (3.72)$$

Analog zu (3.49) kann daraus der Gradient  $d y$  berechnet werden, wenn die Matrix  $P_{n-1}(\mathbf{x})$  den Rang  $n$  hat

$$d y = \mathbf{b}^{*T}(\mathbf{x}) P_{n-1}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (3.73)$$

**Bemerkung 3.5** Die Vektorfelder  $\text{ad}_{g_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = (-1)^{k+1} \text{ad}_{-g_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  der Matrix in  $P_{n-1}(\mathbf{x})$  stimmen bis auf die negativen Vorzeichen mit denen der Erreichbarkeitsmatrix

$$P(\mathbf{x}) = \left( \text{ad}_{-g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{-g_0}^{n-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right) \quad (3.74)$$

überein (Nijmeijer und van der Schaft 1990). Da im folgenden nur die Regularität der Erreichbarkeitsmatrix von Interesse ist, kann o. B. d. A. die Erreichbarkeit des Systems durch die Ranguntersuchung von  $P_{n-1}(\mathbf{x})$  anstelle von  $P(\mathbf{x})$  untersucht werden. Diese Rangbedingung läßt sich auch mit Hilfe der Distribution

$$G_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{n-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \} \Rightarrow \dim G_{n-1}(\mathbf{x}) = n \quad (3.75)$$

formulieren.

**Bemerkung 3.6** Die Beziehung (3.71a) besagt, daß die Ableitungen  $y^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , nicht von der Eingangsgröße  $u$  abhängen. Die höchste Ableitung  $y^{(n)}$  muß gemäß (3.71b) von  $u$  abhängig sein.

Im Unterschied zu linearen zeitvarianten Systemen existiert eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.71) nur dann, wenn zusätzlich zur Dimensionsbedingung (3.75) Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.6** Das nichtlineare System mit drei Zuständen und einer Eingangsgröße

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} u \quad (3.76)$$

soll durch eine nichtlineare Zustandstransformation  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$  auf die nichtlineare Regelungsgleichung gebracht werden. Zur Auswertung der Bestimmungsgleichungen (3.71) benötigt man die Distribution

$$G_2(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x_2 \\ 0 & x_2 & -2x_3 \\ x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

die für  $x_2^3 + x_3^2 \neq 0$  die Dimension  $n = 3$  hat. Die Bestimmungsgleichungen (3.71) für den Gradienten des flachen Ausgangs  $y = \Phi_1(\mathbf{x})$  lauten

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (3.78a)$$

$$x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (3.78b)$$

$$2x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = b_3(\Phi(\mathbf{x})). \quad (3.78c)$$

Die dritte Gleichung stellt eine Bestimmungsgleichung für die Funktion  $b_3(\Phi(\mathbf{x})) \neq 0$  dar. Existiert eine Lösung des Gleichungssystems (3.78), so kann man o. B. d. A.  $b_3(\Phi(\mathbf{x})) = 1$  wählen. Löst man dieses Gleichungssystem nach den Komponenten des Gradienten  $dy$  auf, so erhält man

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \frac{x_2^2}{2(x_2^3 + x_3^2)} \quad (3.79a)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = \frac{-x_3}{2(x_2^3 + x_3^2)} \quad (3.79b)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = \frac{-x_2}{2(x_2^3 + x_3^2)}. \quad (3.79c)$$

Für die Existenz der Lösung  $\Phi_1(\mathbf{x})$  muß für die gemischten zweiten Ableitungen gelten (Kamke 1965, Sommer 1980)

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.80)$$

Da (3.79) nicht von  $x_1$  abhängt, gilt (3.80) nicht für  $i = 1, j = 2, 3$ . Damit existiert keine Lösung von (3.79) und das System (3.76) ist nicht flach. Die Dimensionsbedingung für die Distribution  $G_2(\mathbf{x})$  ist damit nur notwendig für die Existenz eines flachen Ausgangs.

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen auf der Basis der Bestimmungsgleichungen (3.71) für die Existenz einer Zustandstransformation (3.67) in die nichtlineare Regelungsform lassen sich mit den in Anhang A.3 dargestellten differentialgeometrischen Begriffen, insbesondere der Involutivität, und dem Frobenius-Theorem A.1 auf Seite 159 formulieren.

**Satz 3.2 (Isidori (1995), Nijmeijer und van der Schaft (1990))** Für das nichtlineare System (3.66) mit einer Eingangsgröße existiert eine Zustandstransformation (3.67) in die affine nichtlineare Regelungsform ( $m = 1$ ) (3.11), (3.68) genau dann, wenn lokal um  $\mathbf{x}^0$  die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Distribution

$$G_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{n-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \} \quad (3.81)$$

hat die Dimension  $n$ .

(ii) Die Distributionen  $G_i(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^i \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ , sind von konstanter Dimension und involutiv.

**Bemerkung 3.7** Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Existenz einer Transformation in die affine nichtlineare Regelungsform (3.11), (3.68). Sie sind außerdem notwendig und hinreichend für die Flachheit des Systems (2.1) ( $m = 1$ ), da nach (Charlet et al. 1991) für nichtlineare Eingrößensysteme die Zustandslinearisierbarkeit durch statische Zustandsrückführung und dynamische Zustandsrückführung äquivalent sind.

**Beispiel 3.7 (Fortsetzung von Beispiel 3.6)** Bei der Überprüfung der Bedingung (ii) stellt man fest, daß  $G_0$  eine eindimensionale Distribution ist, die involutiv ist. Die Distribution

$$G_1(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

ist jedoch wegen  $[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x})] \notin G_1(\mathbf{x})$  nicht involutiv. Damit kann das System (3.76) nach Satz 3.2 nicht in die nichtlineare Regelungsform (3.11) transformiert werden.

**Bemerkung 3.8**

- Die Bedingung (i) entspricht im Fall linearer Systeme der Regularität der Steuerbarkeitsmatrix.
- Aufgrund von Bedingung (i) hat die Distribution  $G_{n-2}(\mathbf{x})$  die Dimension  $n - 1$ . Nach dem Frobenius-Theorem (siehe Satz A.1 auf Seite 159) ist die Dimension der Kodistribution gleich  $n - (n - 1) = 1$  und damit die Anzahl der Komponenten des flachen Ausgangs ebenfalls gleich eins.
- Für  $n = 2$  ist Bedingung (ii) automatisch erfüllt, da jede eindimensionale Distribution involutiv ist.

**Transformation nichtlinearer Mehrgrößensysteme**

Die Bestimmung der Transformation (3.67) eines nichtlinearen Mehrgrößensystems (3.66) in die nichtlineare Regelungsform (3.11) kann in Analogie zu linearen Mehrgrößensystemen (3.1) auf die Bestimmung der Komponenten des flachen Ausgangs  $\mathbf{y} = (z_1^1, \dots, z_m^1)$  zurückgeführt werden. Im Vergleich zum Eingrößenfall entstehen durch die größere Zahl an Komponenten von  $\mathbf{y}$  Freiheitsgrade, die zur einfacheren Bestimmung der Transformation ausgenutzt werden können.

Zur Bildung der Erreichbarkeitsdistribution  $G_{n-1}(\mathbf{x})$  werden  $n$  linear unabhängige Vektorfelder aus

$$\bar{G}_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_m(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0}^1 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^1 \mathbf{g}_m(\mathbf{x}), \dots \} \quad (3.83)$$

ausgewählt. Hat die Distribution  $\bar{G}_{n-1}(\mathbf{x})$  die Dimension  $n$ , so kann eine Basis von  $n$  linear unabhängigen Vektorfeldern für den Tangentialraum des Systems gefunden und die Zustands- transformation (3.67) bestimmt werden. Wie im Fall linearer zeitvarianter Mehrgrößensysteme ist die Auswahl der linear unabhängigen Vektorfelder nicht eindeutig. Es existieren u. U. mehrere Auswahlmöglichkeiten für eine Basis, die zu unterschiedlichen Teilsystemaufteilungen der Regelungsform (3.11) führen. Wie im linearen Fall wird nur die folgende Auswahl betrachtet

$$G_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{\rho_1-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_m(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{\rho_m-1} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \},$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad (3.84)$$

bei der die höchsten Potenzen des ad-Operators gleich den um eins verminderten Steuerbarkeitsindizes des Systems sind. Der Auswahl der Basisvektoren entspricht eine Aufteilung der Transformation

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left[ L_{g_0}^0 \Phi_1^1(\mathbf{x}), \dots, L_{g_0}^{\rho_1-1} \Phi_1^1(\mathbf{x}), \dots, L_{g_0}^0 \Phi_1^m(\mathbf{x}), \dots, L_{g_0}^{\rho_m-1} \Phi_1^m(\mathbf{x}) \right]^T. \quad (3.85)$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Gradienten  $dy_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Komponenten des flachen Ausgangs lauten (Isidori 1995)

$$\langle dy_i, \text{ad}_{g_0}^k g_j(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, \rho_i - 2, \quad (3.86a)$$

$$\langle dy_i, \text{ad}_{g_0}^{\rho_i-1} g_j(\mathbf{x}) \rangle = b_j^i(\Phi(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3.86b)$$

Aufgrund der Rangbedingung (3.11c) muß außerdem gelten

$$\text{Rang } \bar{B} = \text{Rang} \begin{pmatrix} \langle dy_1, \text{ad}_{g_0}^{\rho_1-1} g_1 \rangle & \dots & \langle dy_1, \text{ad}_{g_0}^{\rho_1-1} g_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle dy_m, \text{ad}_{g_0}^{\rho_m-1} g_1 \rangle & \dots & \langle dy_m, \text{ad}_{g_0}^{\rho_m-1} g_m \rangle \end{pmatrix} = m. \quad (3.86c)$$

Die Gleichungen (3.86) sind Bestimmungsgleichungen für die Gradienten  $dy_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Komponenten des flachen Ausgangs

$$\begin{aligned} & dy_i \left( \text{ad}_{g_0}^0 g_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{\rho_i-1} g_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^0 g_m(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{\rho_i-1} g_m(\mathbf{x}) \right) \\ &= \left( 0, \dots, 0, b_1^i(\mathbf{x}), \dots, 0, \dots, 0, b_m^i(\mathbf{x}) \right), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Sie können als  $m$  Systeme inhomogener linearer partieller Differentialgleichungen interpretiert werden. Jedes System besteht aus  $m\rho_i$  Gleichungen für die jeweils  $n$  Komponenten der Gradienten  $dy_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Da im allgemeinen  $m\rho_i \leq n$  gilt, sind diese Systeme meist unterbestimmt, so daß bei der Lösung – im Unterschied zum Eingrößenfall – zusätzliche Freiheitsgrade existieren. Darüber hinaus kann durch geschickte Wahl der Komponenten  $b_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , in Analogie zum Eingrößenfall die Lösung der Bestimmungsgleichungen unter Berücksichtigung von (3.86c) vereinfacht werden.

**Bemerkung 3.9** Die Beziehung (3.86a) besagt, daß die Ableitungen  $y_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, \rho_i - 1$ , nicht von den Eingangsgrößen  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , abhängen. Nur die höchsten Ableitungen  $y_i^{(n)}$  müssen gemäß (3.86b) so von den Eingängen  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , abhängig sein, daß die Rangbedingung (3.86c) erfüllt ist.

Analog zu Satz 3.2 kann man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Zustandstransformation (3.67) in die nichtlineare Regelungsform (3.11) mit Hilfe der Involutivität von Distributionen formulieren (Jacubczyk und Respondek 1980, Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990).

**Satz 3.3** Für das nichtlineare System (3.66) mit  $m$  Eingangsgrößen existiert eine Zustandstransformation (3.67) in die affine nichtlineare Regelungsform (3.11), (3.68) genau dann, wenn lokal um  $\mathbf{x}_0$  die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Die Distribution*

$$G_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span} \left\{ \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{\rho_1-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_m(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{\rho_m-1} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right\},$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad (3.88)$$

hat die Dimension  $n$ .

(ii) *Die Distributionen*

$$G_0(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \} \quad (3.89a)$$

$$G_k(\mathbf{x}) = G_{k-1} + \text{span} \{ \text{ad}_{g_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^k \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \}, \quad (3.89b)$$

$$k = 1, \dots, n-2,$$

sind von konstanter Dimension und involutiv.

**Bemerkung 3.10** Die Bedingungen dieses Satzes sind notwendig und hinreichend für die Existenz einer Zustandstransformation (3.67) in die nichtlineare Regelungsform (3.11). Darüber hinaus sind sie im Fall von Systemen mit mehreren Eingangsgrößen nur hinreichend für die Existenz eines flachen Ausgangs.

**Beispiel 3.8** Die Bedingungen aus Satz 3.3 sind für das Modell (2.15) des Bioreaktors ( $n = 3$ ,  $m = 2$ ) aus Beispiel 2.4 mit  $\rho_1 = 2$ ,  $\rho_2 = 1$  erfüllt. Mit den Vektorfeldern

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mu(x_2)x_1 \\ -\frac{1}{a_1}\mu(x_2)x_1 - \frac{1}{a_4}\mu_{Pen}(x_2, x_3)x_1 - a_2x_1 \\ -\frac{1}{a_5}\mu_{Pen}(x_2, x_3)x_1 \end{bmatrix} \quad (3.90a)$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_6 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -a_3x_1\mu'(x_2) \\ a_3/a_1x_1\mu'(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.90b)$$

erhält man

$$G_0(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \} \quad (3.91a)$$

$$G_1(\mathbf{x}) = G_2(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \}. \quad (3.91b)$$

Für diese Distributionen findet man

(i)  $\dim G_{n-1}(\mathbf{x}) = \dim G_2 = 3 = n$

(ii) Die Distributionen  $G_k$ ,  $k = 0, 1$ , sind involutiv.

Damit lauten die Bestimmungsgleichungen (3.86a) für die erste Komponente des flachen Ausgangs

$$\langle dy_1, \mathbf{g}_{1,2} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 0. \quad (3.92a)$$

Diese partiellen Differentialgleichungen schränken die funktionale Abhängigkeit von  $y_1$  ein:  $y_1 = \phi_1(x_1)$ . Darüber hinaus muß die Rangbedingung (3.86c)

$$\begin{aligned} & \text{Rang} \begin{pmatrix} \langle dy_1, \text{ad}_{g_0}^1 \mathbf{g}_1 \rangle & \langle dy_1, \text{ad}_{g_0}^1 \mathbf{g}_2 \rangle \\ \langle dy_2, \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_1 \rangle & \langle dy_2, \text{ad}_{g_0}^0 \mathbf{g}_2 \rangle \end{pmatrix} = 2 \\ \Rightarrow & \text{Rang} \begin{pmatrix} -a_3 x_1 \mu'(x_2) \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & * \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 2 \end{aligned} \quad (3.92b)$$

erfüllt sein. Diese Bedingungen werden durch den bereits in Beispiel 2.4 angegebenen flachen Ausgang  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_3$  erfüllt.

### 3.2.3 Transformation in eine verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform

Bei der verallgemeinerten nichtlinearen Regelungsform (3.21) hängen die Nichtlinearitäten  $\varphi^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der einzelnen Teilsysteme von Eingangsableitungen kürzerer und gleich langer Teilsysteme ab. Dies äußert sich auch in der Struktur der Transformation

$$\mathbf{z} = \tau \left( \mathbf{x}, \langle \langle r-1 \rangle \rangle \mathbf{u} \right) \quad (3.93)$$

in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform. Bei (3.93) handelt es sich aufgrund der Abhängigkeit von den Eingangsgrößen und deren Zeitableitungen um eine sog. *verallgemeinerte Zustandstransformation* (Fliess 1990, Rudolph et al. 1995). Die Zustandstransformation (3.93) läßt sich aus den Komponenten

$$y_i = \tau_1^i \left( \mathbf{z}, \langle \langle r-1 \rangle \rangle \mathbf{u} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.94)$$

des flachen Ausgangs mit Hilfe von Zeitableitungen berechnen. Da die Funktionen  $\tau_1^i$  auch von den Eingangsgrößen und deren Zeitableitungen abhängen, muß zur Bildung der Zeitableitung von (3.94) anstelle des Vektorfelds der Differentialgleichung (3.66) das entsprechende verlängerte Vektorfeld

$$\mathcal{F} = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_k^{(j)}} \quad (3.95)$$



herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, daß die Konstante  $\alpha$  groß genug gewählt werden muß<sup>3</sup>, um bei der Bildung der Ableitung alle auftretenden Abhängigkeiten von  $u_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, \dots, \alpha - 1$ , zu berücksichtigen. Damit erhält man aus (3.93)

$$\tau \left( \mathbf{x}, \langle\langle r^{-1} \rangle\rangle \mathbf{u} \right) = \left[ L_{\mathcal{F}}^0 \tau_1^1, \dots, L_{\mathcal{F}}^{\kappa_1 - 1} \tau_1^1, \dots, L_{\mathcal{F}}^0 \tau_1^m, \dots, L_{\mathcal{F}}^{\kappa_m - 1} \tau_1^m \right]^T \left( \mathbf{x}, \langle\langle r^{-1} \rangle\rangle \mathbf{u} \right). \quad (3.96)$$

Für die Formulierung von Existenzbedingungen einer Transformation (3.96) in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform werden die Tupel  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$  und  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$  als fest vorausgesetzt. In diesem Abschnitt werden die Existenzbedingungen unter der Annahme, daß  $\boldsymbol{\kappa}$  und  $\mathbf{r}$  festgelegt sind, angegeben. In Anhang B.1 wird ein Algorithmus zur Bestimmung dieser beiden Tupel beschrieben.

Zur Bestimmung der Transformation (3.96) werden im folgenden analog zu (3.3) Bedingungen auf der Basis der folgenden Distributionen angegeben.

**Definition 3.9** Gegeben seien die ganzen Zahlen  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m = 0$ . Man definiert die folgenden Distributionen  $\Delta_{-1} \subseteq \Delta_0 \subseteq \dots \subseteq \Delta_j \subseteq \dots$

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i^{(r_i+k)}}, i = 1, \dots, m \right\}, k \geq 0, \quad (3.97a)$$

$$\Delta_j = \Delta_{j-1} + \text{span} \{ [\mathcal{F}, \mathbf{Z}], \forall \mathbf{Z} \in \Delta_{j-1} \}. \quad (3.97b)$$

Diese Distributionen werden aus Zeitableitungen der Vektorfelder

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial}{\partial u_i}, \mathcal{F} \right], i = 1, \dots, m, \text{ und } \frac{\partial}{\partial u_i^{(s)}}, i = 1, \dots, m, s = 1, \dots, \alpha - 1, \quad (3.98)$$

entlang des verlängerten Vektorfelds (3.95) gebildet. Dabei gelten die folgenden Zusammenhänge

$$\left[ \mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial u_i^{(r_i+k)}} \right] = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_i^{(r_i+k)}} = -\frac{\partial}{\partial u_i^{(r_i+k-1)}}, k = 0, \dots, r_i - 1, r_i > 0, \quad (3.99a)$$

$$\left[ \mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right] = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_i} = -\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, m, \quad (3.99b)$$

$$[\mathcal{F}, \text{ad}_{\mathcal{F}}^k \mathbf{g}_i] = \text{ad}_{\mathcal{F}}^{k+1} \mathbf{g}_i, i = 1, \dots, m, k \geq 0. \quad (3.99c)$$

Die sukzessive Anwendung der Lie-Klammer bei der Bildung von (3.97) führt so lange zu einer Reduktion der Ableitungsordnung in (3.99a), bis das Vektorfeld von  $u_i$  erscheint. Weitere Anwendungen der Lie-Klammer ergeben dann nacheinander Ableitungen der Vektorfelder  $\mathbf{g}_i$ .

<sup>3</sup>Die Beschränkung auf einen endlichen Wert für  $\alpha$  vermeidet die Differentialgeometrie unendlicher Prologationen (Olver 1993, Fliess *et al.* 1993a, Pomet 1995).

**Satz 3.4** *Ein nichtlineares System (2.1) kann durch eine verallgemeinerte Zustandstransformation (3.96) in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform (3.21) mit positiven verallgemeinerten Steuerbarkeitsindizes  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  transformiert werden, wenn es ganze Zahlen  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m = 0$  gibt, so daß in der Umgebung von  $(\mathbf{x}, \langle \mathbf{u} \rangle^{(r)}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Für eine hinreichend große Zahl  $j^*$  gilt:  $\dim \Delta_{j^*} \cap T\mathcal{X} = n$ .*

(ii) *Die Distributionen  $\Delta_j$ ,  $j = -1, \dots, n-2$ , haben konstante Dimension und sind involutiv.*

Die erste Bedingung entspricht der Bedingung (i) in Satz 3.3. Die Dimension der Distribution  $\Delta_{j^*}$  wird nur im Tangentialraum  $T\mathcal{X}$  betrachtet. Dies bedeutet, daß die Vektorfelder, die  $\Delta_{j^*}$  aufspannen, linear unabhängig sind, wenn man nur die Koordinaten betrachtet, die zu den Vektorfeldern  $\partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gehören.

**Bemerkung 3.11** *Die Bedingungen dieses Satzes sind hinreichend für die Existenz einer verallgemeinerten Zustandstransformation (3.96) in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform (3.21). Darüber hinaus sind sie auch hinreichend für die Existenz eines flachen Ausgangs.*

**Bemerkung 3.12** *Es genügt, in den Distributionen (3.97) Eingangsableitungen nur bis zu einer endlichen Ordnung  $s$  zu betrachten. Diese Ordnung hängt von der Ordnung  $k^*$  der höchsten Ableitung  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^{k^*} \mathbf{g}_i$  in (3.97) ab, da die Koeffizienten in den Vektorfeldern  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^k \mathbf{g}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, \dots, k^*$  nur von Zeitableitungen kleiner oder gleich  $k^*$  abhängen. Dies gilt wiederum, da die Komponenten von  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  in (2.1) nicht von Eingangsableitungen abhängen.*

*Aus diesem Grund genügt es auch, in (3.95) nur Ableitungen bis zu einer maximalen Ordnung  $\alpha$  zu betrachten. Für  $\alpha \geq k^*$  wirkt  $\mathcal{F}$  als Zeitableitung der Vektorfelder  $\mathbf{g}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

Aus den Distributionen in Satz 3.4 lassen sich analog zu (3.86) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Komponenten des flachen Ausgangs bilden

$$\langle d y_i, \mathbf{Z} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{Z} \in \Delta_{r_i + \kappa_i - 2}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.100a)$$

$$\langle d y_i, \text{ad}_{\mathcal{F}}^{\kappa_i - 1} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \rangle = b_j^i(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \langle \mathbf{u} \rangle^{(r-1)})), \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3.100b)$$

Aufgrund der Rangbedingung (3.21c) muß außerdem gelten

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \langle d y_1, \text{ad}_{\mathcal{F}}^{\kappa_1 - 1} \mathbf{g}_1 \rangle & \dots & \langle d y_1, \text{ad}_{\mathcal{F}}^{\kappa_1 - 1} \mathbf{g}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle d y_m, \text{ad}_{\mathcal{F}}^{\kappa_m - 1} \mathbf{g}_1 \rangle & \dots & \langle d y_m, \text{ad}_{\mathcal{F}}^{\kappa_m - 1} \mathbf{g}_m \rangle \end{pmatrix} = m. \quad (3.100c)$$

**Bemerkung 3.13** Die Bedingungen (3.100a) drücken analog zu (3.86a) aus, daß die Ableitungen der Ordnung  $k = 0, \dots, \kappa_i - 2$ , einer Komponente  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , des flachen Ausgangs von allen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  unabhängig sind. Da die  $\kappa_i$ -te Ableitung von  $y_i$  von den Ableitungen der Eingangsgrößen kürzerer Teilsysteme abhängen darf, sind die zugehörigen Vektorfelder  $\partial/\partial u_j^{(k)}$ ,  $j \in \{i \mid i = 1, \dots, m, \kappa_i = \kappa_j\}$ , nicht in den Distributionen  $\Delta_j$  enthalten. Dies reduziert im Vergleich zu (3.86a) die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen (3.100a). Die Integrierbarkeit des partiellen Differentialgleichungssystems (3.100) wird gemäß dem Frobenius-Theorem A.1 durch die Involutivität der Distributionen (3.97) sichergestellt.

Die Bestimmung der Distributionen (3.97) und das Überprüfen der Bedingungen (3.100) soll an dem folgenden Beispiel erläutert werden.

**Beispiel 3.10** Das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3 u_1 \quad (3.101a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + x_1 u_1 \quad (3.101b)$$

$$\dot{x}_3 = x_2 u_1 + u_2 \quad (3.101c)$$

$$\dot{x}_4 = u_1 \quad (3.101d)$$

mit vier Zuständen und zwei Eingängen ist aus (Charlet et al. 1991) entnommen, wobei zur Vereinfachung der Darstellung die Eingänge in ihrer Reihenfolge vertauscht wurden. Man erhält daraus die Vektorfelder

$$\mathbf{g}_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \quad (3.102a)$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (3.102b)$$

Nach Wahl der Ordnungen der Eingangsableitungen  $r_1 = 3$  und  $r_2 \equiv 0$  können die folgenden Distributionen gebildet werden

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(3+k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, k \geq 0 \right\} \quad (3.103a)$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(2+k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, \mathbf{g}_2, k \geq 0 \right\} \quad (3.103b)$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(1+k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2, k \geq 0 \right\} \quad (3.103c)$$

$$\Delta_2 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_2, k \geq 0 \right\} \quad (3.103d)$$

$$\Delta_3 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_2, k \geq 0 \right\}. \quad (3.103e)$$

Da  $\dim \Delta_3 \cap T\mathcal{X} = 4$  gilt, ist Bedingung (i) erfüllt, und man erhält die verallgemeinerten Steuerbarkeitsindizes  $\kappa_1 = 1$  und  $\kappa_2 = 3$  mit  $\kappa_1 + \kappa_2 = n = 4$ .

Zur Überprüfung von Bedingung (ii) müssen die Distributionen  $\Delta_j$ ,  $j = -1, \dots, n-2$ , auf Involutivität untersucht werden. Die Distributionen  $\Delta_{-1}$  und  $\Delta_0$  werden durch konstante Vektorfelder aufgespannt und sind somit involutiv. Die Überprüfung von

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(1+k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial x_3}, -u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}, k \geq 0 \right\} \quad (3.104a)$$

$$(3.104b)$$

$$\Delta_2 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(k)}}, \frac{\partial}{\partial x_3}, -u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}, (1 - \dot{u}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + u_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, k \geq 0 \right\}$$

zeigt, daß auch diese Distributionen involutiv sind und damit Bedingung (ii) erfüllt ist.

Aus den Distributionen  $\Delta_{r_1+\kappa_1-2} = \Delta_2$  und  $\Delta_{r_2+\kappa_2-1} = \Delta_1$  lassen sich gemäß (3.100) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Komponenten des flachen Ausgangs angeben

$$\langle dy_1, \mathbf{Z} \rangle = 0, \quad \mathbf{Z} \in \Delta_2 \quad (3.105a)$$

$$\langle dy_2, \mathbf{Z} \rangle = 0, \quad \mathbf{Z} \in \Delta_1 \quad (3.105b)$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \langle dy_1, \text{ad}_{\mathcal{F}}^0 \mathbf{g}_1 \rangle & \langle dy_1, \text{ad}_{\mathcal{F}}^0 \mathbf{g}_2 \rangle \\ \langle dy_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_1 \rangle & \langle dy_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_2 \rangle \end{pmatrix} = 2. \quad (3.105c)$$

Den Gleichungen (3.105a) entspricht folgendes System linearer partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial u_1^{(k)}} = \frac{\partial y_1}{\partial u_2^{(k)}} = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} &= 0, \quad k \geq 0 \\ -u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= 0 \\ (1 - \dot{u}_1) \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + u_1^2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.106a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_2}{\partial u_1^{(k+1)}} = \frac{\partial y_2}{\partial u_2^{(k)}} = \frac{\partial y_2}{\partial x_3} &= 0, \quad k \geq 0 \\ -u_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.106b)$$

Die jeweils ersten Gleichungen in (3.106a) und (3.106b) schränken nur die funktionale Abhängigkeit der Komponenten des flachen Ausgangs ein

$$y_1 = \tau_1^1(x_1, x_2, x_4), \quad y_2 = \tau_1^2(x_1, x_2, x_4, u_1). \quad (3.106c)$$

Setzt man dies in die Rangbedingung (3.105c) ein, so erhält man

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} x_3 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_4} & 0 \\ -(x_2 - 2x_3 u_1 + \dot{u}_2) \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - (x_3 + u_1(u_2 - x_1)) \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & (1 - \dot{u}_1) \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + u_1^2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 2. \quad (3.106d)$$

Man sieht, daß sowohl die Rangbedingung als auch die partiellen Differentialgleichungen (3.106a) und (3.106b) durch den flachen Ausgang

$$y_1 = z_1^1 = x_4 \quad \text{und} \quad y_2 = z_1^2 = x_1 - x_2 u_1 \quad (3.107)$$

erfüllt werden. Dies führt gemäß (3.96) auf die verallgemeinerte Zustandstransformation

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\tau} \left( \mathbf{x}, \overset{\langle 2 \rangle}{u_1} \right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 - x_2 u_1 \\ \tau_2^2(x_1, x_3, \overset{\langle 1 \rangle}{u_1}) \\ \tau_3^2(x_1, x_2, x_3, \overset{\langle 2 \rangle}{u_1}) \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

mit deren Hilfe sich das System (3.101) in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform (3.21) transformieren läßt

$$\dot{z}_1^1 = u_1 \quad (3.109a)$$

$$\dot{z}_1^2 = z_2^2 \quad (3.109b)$$

$$\dot{z}_2^2 = z_3^2 \quad (3.109c)$$

$$\dot{z}_3^2 = \varphi^2 \left( \mathbf{z}, \overset{\langle 3 \rangle}{u_1}, u_2 \right). \quad (3.109d)$$

Die Funktionen  $\tau_2^2, \tau_3^2$  in (3.108) sowie  $\varphi^2$  in (3.109) enthalten eine große Anzahl von Termen und werden deshalb nur durch ihre funktionale Abhängigkeit charakterisiert.

**Bemerkung 3.14** Betrachtet man das Beispiel 3.10, so erkennt man, daß die Bedingungen aus Satz 3.3 für die Existenz einer Zustandstransformation in die nichtlineare Regelungsform (3.11) nicht erfüllt sind, da die Distribution

$$G_0 = \text{span} \{ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \} \quad \text{wegen} \quad [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (3.110)$$

nicht involutiv ist.

Wegen  $r_1 = 3$  wird im Beispiel das Auftreten der Vektorfelder  $\partial/\partial u_1$  in den Distributionen  $\Delta_{-1}, \Delta_0$  sowie  $\Delta_1$  in (3.103) vermieden. Wäre  $\partial/\partial u_1 \in \Delta_1$ , so wäre diese nicht involutiv und die Bedingungen aus Satz 3.4 nicht erfüllt.

Allgemein gilt, daß durch die Größen  $r_i$  in (3.97) das Auftreten der Vektorfelder  $\partial/\partial u_i$  in den Distributionen  $\Delta_j, j \geq 0$ , verzögert wird. Im Fall  $r_i = 0, i = 1, \dots, m$ , sind die Existenzbedingungen von Satz 3.4 mit denen aus Satz 3.3 identisch (Rudolph et al. 1995).

Verwendet man anstelle der rekursiven Definition (3.97) die folgende Formulierung, so ist das verzögerte Auftreten der Vektorfelder  $\partial/\partial u_i$  leicht zu erkennen

$$\Delta_j = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i^{(s_i)}}, s_i \geq \max(0, r_i - (j + 1)) \right\} + \text{span} \left\{ \text{ad}_{\mathcal{F}}^{k_i} \mathbf{g}_i, k_i = 0, \dots, \min(j - r_i, \kappa_i - 1) \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j \geq -1. \quad (3.111)$$

Ist  $r_i > j + 1$ , so erscheinen nur die Ableitungen des Vektorfelds  $\partial/\partial u_i$  ab der Ordnung  $r_i - (j + 1)$  im ersten Summanden. In diesem Fall taucht im zweiten Summanden keines der Vektorfelder  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^{k_i} \mathbf{g}_i$ ,  $k_i \geq 0$  auf.

Ist hingegen  $r_i \leq j + 1$ , so erscheinen sowohl im ersten Summanden das Vektorfeld  $\partial/\partial u_i$  mit allen Ableitungen als auch die Vektorfelder  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^k \mathbf{g}_i$ ,  $k = 0, \dots, \min(j - r_i, \kappa_i - 1)$ , im zweiten Summanden.

Für  $r_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ist die erste Distribution in (3.111) leer, und die zweite Distribution wird gleich  $G_k$  in (3.89). Daraus folgt, daß für diesen Fall die Bedingungen aus Satz 3.3 und Satz 3.4 übereinstimmen.

**Bemerkung 3.15** *Diese Übereinstimmung der Existenzbedingungen spiegelt auch folgende Tatsache wider: Führt man für die Eingangsableitungen gemäß (3.42) neue Zustände ein, so sind die Existenzbedingungen nach Satz 3.4 für eine Transformation des derart erweiterten Systems in die verallgemeinerte Regelungsform (3.21) gleich denen für die Existenz einer Transformation in die nichtlineare Regelungsform (3.11). Dies ergibt sich aus der Eigenschaft der Transformation (3.96), die Eingänge und ihre Zeitableitungen nicht zu verändern.*

**Bemerkung 3.16** *Ein nichtlineares System (2.1) kann u. U. sowohl in die nichtlineare als auch in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform transformiert werden. Dies entspricht nach Bemerkung 2.5 der Nicht-Eindeutigkeit des flachen Ausgangs. Existieren Transformationen in beide Regelungsformen, so können diese aus verschiedenen flachen Ausgängen berechnet werden. Für eine konkrete Problemstellung kann der aus praktischer Sicht geeignetere flache Ausgang ausgewählt werden. Dies wird in Abschnitt 5.2 am Beispiel eines chemischen Reaktormodells näher erläutert.*

### 3.2.4 Weitere Existenzbedingungen eines flachen Ausgangs

Für Systeme mit einer Eingangsgröße sind die Bedingungen aus Satz 3.2 notwendig und hinreichend für die Existenz eines flachen Ausgangs. Für Systeme mit mehr als einer Eingangsgröße ist derzeit kein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Flachheit bekannt. So

sind z. B. die Bedingungen aus Satz 3.3 bzw. aus Satz 3.4 nur hinreichend für die Existenz eines flachen Ausgangs.

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über verschiedene notwendige oder hinreichende Bedingungen für die Existenz eines flachen Ausgangs gegeben, die aus der Literatur bekannt sind.

### Zwei notwendige Kriterien für die Existenz eines flachen Ausgangs

In folgenden werden zwei notwendige Kriterien für die Existenz eines flachen Ausgangs im Fall von Systemen mit mehr als einem Eingang angegeben.

**Satz 3.5 (ruler condition (Fliess et al. 1995b))** *Wenn das System (2.1) flach ist, dann besitzt das unterbestimmte System*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \dim \mathbf{F} = n - m, \quad (3.112)$$

das durch Elimination von  $\mathbf{u}$  aus (2.1) entsteht, die folgende Eigenschaft: für vorgegebene Werte  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  mit  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ , gibt es ein  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , so daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p} + \lambda \mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (3.113)$$

Dieser Satz soll an einem Beispiel erläutert werden.

**Beispiel 3.11** *Eliminiert man den Eingang  $u$  aus den Systemgleichungen*

$$\dot{x}_1 = u \quad (3.114a)$$

$$\dot{x}_2 = u^3, \quad \dim \mathbf{f} = n = 2, \quad (3.114b)$$

so erhält man

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \dot{x}_2 - \dot{x}_1^3, \quad \text{mit } \dim F = n - m = 1. \quad (3.115)$$

Für vorgegebene Werte  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ ,  $\mathbf{p} = [p_1, p_2]^T$  muß es ein  $\mathbf{a} = [a_1, a_2]^T \neq [0, 0]^T$  geben, so daß (3.113) gilt

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad (p_2 + \lambda a_2) - (p_1 + \lambda a_1)^3 = 0 \quad (3.116a)$$

$$a_1^3 \lambda^3 + 3p_1 a_1^2 \lambda^2 + (3p_1^2 a_1 - a_2) \lambda + p_1^3 - p_2 = 0. \quad (3.116b)$$

Diese Gleichung gilt nur für  $a_1 = a_2 = 0$ , und damit ist das System (3.114) nicht flach.

Das zweite notwendige Kriterium wird auf der Basis des um den Koordinatenursprung linearisierten Systems formuliert.

**Satz 3.6 (Charlet et al. (1991))** Wenn das System (2.1) flach ist, dann ist das um den Koordinatenursprung  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  linearisierte System

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0}} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0}} \delta \mathbf{u} \quad (3.117)$$

steuerbar.

Dieses Kriterium ist nicht hinreichend. In (Charlet et al. 1991) wird hierfür folgendes Beispiel angegeben.

**Beispiel 3.12** Das nichtlineare System mit einer Eingangsgröße

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3^2 \quad (3.118a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.118b)$$

$$\dot{x}_3 = u \quad (3.118c)$$

ist nicht flach, da es die Bedingungen von Satz 3.2 nicht erfüllt, die nach Bemerkung 3.7 für Eingrößensysteme notwendig und hinreichend sind. Das linearisierte System ist steuerbar

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u. \quad (3.119)$$

### Hinreichende Bedingungen

In diesem Abschnitt werden die Bedingungen aus Satz 3.4 mit den Bedingungen von Charlet et al. (1991) verglichen, die vor der Veröffentlichung der hier dargestellten Bedingungen in (Rudolph et al. 1995) als die allgemeinsten hinreichenden Bedingungen für die Flachheit nichtlinearer Systeme betrachtet wurden. Sie sind für eingangsaffine Systeme formuliert.

**Satz 3.7 (Charlet et al. (1991))** Ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}) u_i \quad (3.120)$$

ist flach, wenn es eine Menge von ganzen Zahlen  $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$  mit  $0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_m$  und  $\sum_{i=1}^m \mu_i = \mu$  und Distributionen

$$D_0 = \text{span} \{ \bar{\mathbf{g}}_i, i = 1, \dots, m, \text{ für die gilt: } \mu_i = 0 \} \quad (3.121a)$$

$$D_j = D_{j-1} + \text{span} \{ \text{ad}_{\bar{\mathbf{g}}_0} \bar{\mathbf{g}}_j, \bar{\mathbf{g}}_j \in D_{j-1} \} + \text{span} \{ \bar{\mathbf{g}}_i, i = 1, \dots, m, \text{ für die gilt: } \mu_i = j \}, j \geq 1, \quad (3.121b)$$

gibt, für die gilt:



- (i) Die Distribution  $D_{n+\mu_m-1}$  hat den Rang  $D_{n+\mu_m-1} = n$ .
- (ii) Die Distributionen  $D_i$ ,  $i = 0, \dots, n + \mu_m - 1$ , haben konstante Dimension und sind involutiv.
- (iii)  $[\bar{g}_j, \mathbf{v}_i] \in D_{i+1}$  für alle  $\mathbf{v}_i \in D_i$  mit  $j = 1, \dots, m$ , mit  $\mu_j \geq 1$  und alle  $i = 0, \dots, n + \mu_m - 1$ .

Im Anhang B.2 wird gezeigt, daß diese Bedingungen in den Bedingungen von Satz 3.4 enthalten sind. Satz 3.4 ist jedoch allgemeiner, wie das Beispiel 3.10 zeigt, das die Bedingungen von Satz 3.4 erfüllt und somit flach ist:

**Beispiel 3.13** Das System (3.101) erfüllt die Bedingungen von Satz 3.7 nicht, da  $\text{ad}_{g_1} g_2 \notin \Delta_1$  und damit Bedingung (iii) in Satz 3.4 verletzt ist.

### 3.3 Zusammenfassung

Liegt ein nichtlineares System in einer strukturell flachen Systemdarstellung vor, die als Verallgemeinerung der linearen Regelungsnormalform aufgefaßt werden kann, so sind die Ausgänge der Integratorketten ein möglicher flacher Ausgang. Liegt das System nicht in einer derartigen Form vor, so kann dies eventuell durch eine verallgemeinerte Zustandstransformation erreicht werden. Für die Existenz einer solchen Zustandstransformation gibt es differentialgeometrische Bedingungen, mit deren Hilfe Systeme linearer partieller Differentialgleichungen für den flachen Ausgang aufgestellt werden können. Die in Satz 3.4 vorgestellten Bedingungen stellen eine Erweiterung derer von Charlet *et al.* (1991) dar, die bisher als die allgemeinsten hinreichenden Bedingungen für die Flachheit nichtlinearer Systeme galten.

Die derzeit aus der Literatur bekannten Bedingungen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: die Bedingungen der ersten Gruppe sind notwendig *oder* hinreichend für die Flachheit und lassen sich auf allgemeine nichtlineare Systeme (2.1) anwenden. Dazu zählen die hinreichenden Bedingungen aus Satz 3.3, Satz 3.4 sowie aus Satz 3.7. Die beiden notwendigen Bedingungen 3.5 und 3.6 gelten ebenfalls für den allgemeinen Fall. In (Shadwick 1990, Sluis 1992, van Nieuwstadt *et al.* 1993) finden sich weitere allgemeine Überlegungen zur Charakterisierung der Flachheit bzw. Zustandslinearisierbarkeit nichtlinearer Systeme mit Hilfe von Differentialformen.

Die zweite Gruppe umfaßt notwendige und hinreichende Bedingungen, deren Gültigkeit jedoch auf spezielle Systemklassen eingeschränkt ist: für nichtlineare Systeme mit einer Eingangsgröße gibt Satz 3.2 notwendige und hinreichende Bedingungen an. Von Pomet (1997) werden flache Systeme mit  $n = 4$  Zustandsvariablen und  $m = 2$  Eingangsgrößen charakterisiert. In (Martin und Rouchon 1993, Aranda-Bricaire und Pomet 1995) werden notwendige

und hinreichende Bedingungen für bestimmte nicht-holonome Systeme angegeben. Martin (1992) gibt Bedingungen für die Flachheit von Systemen an, deren Zustandsdimension um eins größer als die Zahl der Eingangsvariablen ist.

Da es derzeit noch keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines flachen Ausgangs für allgemeine nichtlineare Systeme gibt, führt der Versuch einer systematischen Bestimmung eines flachen Ausgangs für ein konkretes Modell nicht immer zum Ziel.

Die praktische Anwendung der vorgestellten Bedingungen zur systematischen Flachheitsanalyse erfordert die Verwendung regelungstechnischer Entwurfsmodelle mit wenigen Zustandsvariablen. Letztlich hängt die Flachheit eines Systems von Anzahl und Art der Stellglieder des betrachteten Prozesses ab. Dabei werden die vorgestellten Bedingungen mit zunehmender Zahl von Eingangsgrößen immer weniger restriktiv. Andererseits kann die Flachheitsanalyse auch dazu verwendet werden, die Möglichkeit zur Steuerung eines Prozesses durch geeignete Wahl von Stellgliedern zu verbessern.

## Kapitel 4

# Entwurfsmethodik flachheitsbasierter Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge

Für flache Systeme können in einfacher Weise Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge entworfen werden. In Abschnitt 4.1 werden die in den Kapiteln 2 und 3 dargestellten Eigenschaften flacher Systeme zu einer allgemeinen Vorgehensweise beim Entwurf flachheitsbasierter Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge zusammengefaßt.

Die flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregler basieren auf Zustandsrückführungen. Aus diesem Grund müssen zur Realisierung der Regelung die nicht gemessenen Zustände des Systems geschätzt werden. Hierzu wird in Abschnitt 4.2 ein nichtlinearer Zustandsschätzer mit zeitvarianter Verstärkung für flache (beobachtbare) Systeme vorgestellt, dessen Fehlerdynamik auf der Basis der um die Solltrajektorien linearisierten Systemgleichungen entworfen wird.

Da für die flachheitsbasierte Analyse und Regelung umfangreiche symbolische Berechnungen erforderlich sind, wird in Abschnitt 4.3 die Frage behandelt, wie diese Berechnungen mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems rechnerunterstützt durchgeführt werden können und welche speziellen Rechenfunktionen benötigt werden.

### 4.1 Entwurfsschritte für das Trajektorienfolgeproblem

Da für die Lösung des Trajektorienfolgeproblems bei einem konkreten nichtlinearen System meist nicht der gesamte Zustand bekannt ist, wird die Problemstellung 2.1 um die Gleichung für die Meßgrößen  $\eta$  erweitert.

**Problem 4.1** Das Trajektorienfolgeproblem mit Zustandsschätzung für ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in M_n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^q. \quad (4.1b)$$

besteht darin, den Verlauf der Regelgrößen, die i. a. nichtlineare Funktionen des Systemzustands sind,

$$\mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w} \in M_m, \quad (4.2a)$$

einer gewünschten (hinreichend oft differenzierbaren) Solltrajektorie

$$\mathbf{w}_d(t) : \mathbf{w}(0) \rightarrow \mathbf{w}(T), \quad t \in [0, T], \quad (4.2b)$$

nachzuführen, die einen vorgegebenen Anfangspunkt  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{q}(\mathbf{x}_0)$  mit einem vorgegebenen Endpunkt  $\mathbf{w}(T) = \mathbf{q}(\mathbf{x}(T))$  verbindet. Hierzu sind Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  zu bestimmen, die das System unter Berücksichtigung von Stellgrößen- und Zustandsbegrenzungen

$$u_{i,\min} \leq u_i \leq u_{i,\max}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{bzw.} \quad (4.3a)$$

$$x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3b)$$

der Solltrajektorie  $\mathbf{w}_d(t)$  in einer gewünschten Weise nachführen. Wird für die Lösung des Folgeproblems eine Zustandsrückführung nach Tabelle 2.1 auf Seite 49 eingesetzt, so müssen die nicht gemessenen Zustandsvariablen mit Hilfe einer Zustandsschätzung rekonstruiert werden.

Die Struktur des Regelkreises zur flachheitsbasierten Trajektorienfolge mit Zustandsschätzung ist in Bild 4.1 dargestellt, das eine Erweiterung von Bild 2.8 auf Seite 42 um die Meßgleichung und die Zustandsschätzung ist. Dabei besteht wegen der Verwendung der Zustandsschätzung in Bild 4.1 zusätzlich folgender Unterschied zu Bild 2.8:

**Bemerkung 4.1** Beim Trajektorienfolgeproblem 4.1 mit Zustandsschätzung wird im Unterschied zu Problem 2.1 der Systemzustand  $\mathbf{x}$  für die endogene Zustandsrückführung (2.79b) und die asymptotische Folgeregung (2.66) mit Hilfe des Beobachterzustands  $\hat{\mathbf{x}}$  realisiert. Hierzu wird in (2.79a) der Zustand  $\mathbf{x}$  durch die Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$  sowie  $\mathbf{u}$  durch  $\hat{\mathbf{u}}$  ersetzt:

$$\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \left( \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, \dots, \hat{\mathbf{u}}^{(\kappa-1)} \right). \quad (4.4)$$

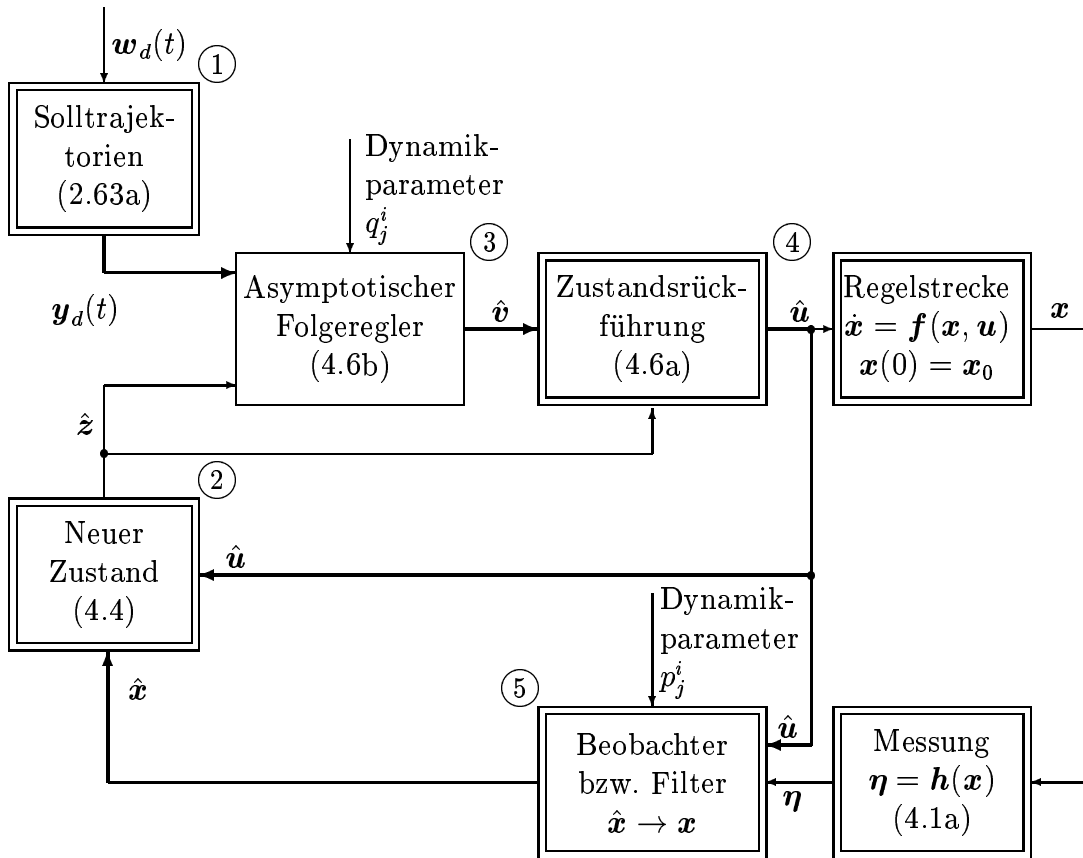


Bild 4.1: Blockschaltbild zur Realisierung der flachheitsbasierten asymptotischen Folgeregelung mit Zustandsschätzung  $\hat{x}$  zur Bildung des Zustands  $\hat{z}$ . Dicke Pfeile bedeuten, daß neben der angezeigten Größe (z. B.  $\hat{u}$ ) auch alle für die weiteren Berechnungen erforderlichen Zeitableitungen dieser Größe eingeschlossen sind.

Im folgenden wird der Einfachheit halber angenommen, daß der Zustand  $\hat{z}$  des geschlossenen Kreises folgendermaßen aufgeteilt werden kann

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \tilde{\alpha}_\xi \left( \hat{x}, \hat{u}, \dots, \hat{u}^{(\kappa-1)} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Hierbei kann  $\xi$  als Reglerzustand aufgefaßt werden. Dieser Zustand wird durch Integration berechnet und muß deshalb nicht geschätzt werden (vgl. Tabelle 2.1 auf Seite 49).

Verwendet man (4.5) in der endogenen Zustandsrückführung (2.79b) für den Zustand  $z$ , so erhält man für die Zustandsrückführung in Block (4)

$$\hat{u} = \beta \left( \hat{x}, \xi, \hat{v}, \dot{\hat{v}}, \dots, \hat{v}^{(\beta-\kappa+1)} \right). \quad (4.6a)$$

Für die asymptotische Folgeregelung in Block ③ ergibt sich aus (2.66) mit (4.4)

$$\hat{\mathbf{v}} = \tilde{\beta} \left( \hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}_d(t), \dots, \mathbf{y}_d^{(\kappa)}(t) \right). \quad (4.6b)$$

Der Entwurf des Beobachters bzw. Filters in Block ⑤ zur Bestimmung der Schätzwerte  $\hat{\mathbf{x}}$  wird in Abschnitt 4.2 erläutert.

**Bemerkung 4.2** Für das Trajektorienfolgeproblem 4.1 mit Zustandsschätzung gilt Bemerkung 2.17 sinngemäß für die Berechnung der Zeitableitungen von  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $\hat{\mathbf{v}}$ . Ebenso gilt Bemerkung 2.18 für die Auflösbarkeit der Schleife ②, ③ und ④.

**Bemerkung 4.3** Für die Inbetriebnahme der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung in Bild 4.1 müssen die Anfangswerte für den Trajektorienfolgefehler und den Schätzfehler des Beobachters hinreichend klein sein. In Anwendungen läßt sich dies folgendermaßen erreichen:

- Ist der Anfangspunkt ein stationärer Punkt, so kann häufig mit dem Übergang entlang der Solltrajektorie erst nach dem Einschwingen des Schätzfehlers begonnen werden.
- Bei instationären Prozessen wird das System zunächst mit Hilfe einer flachheitsbasierten Steuerung gemäß (2.42b) angefahren, bis der Schätzfehler eingeschwungen ist.

Ist der Schätzfehler hinreichend klein, wird die Zustandsrückführung (4.6) zugeschaltet.

Im folgenden sind die einzelnen Schritte für den Entwurf flachheitsbasierter Steuerungen und Regelungen zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems 4.1 zusammengefaßt.

(i) *Bestimmen eines flachen Ausgangs*

Dies ist der wichtigste und zugleich schwierigste Schritt der flachheitsbasierten Entwurfsmethode. Prinzipiell gibt es folgende Möglichkeiten, einen flachen Ausgang zu bestimmen:

(i.a) Aufgrund heuristischer Überlegungen kann mit Hilfe des physikalischen Verständnisses des Systems häufig ein Kandidat für einen flachen Ausgang bestimmt werden, der Gleichung (2.5) erfüllt. Der Nachweis, daß es sich tatsächlich um einen flachen Ausgang handelt, muß dann durch Bestimmen der Gleichungen (2.6) aus Definition 2.2 erbracht werden.

Sind die Bedingungen der Definition 2.2 nicht erfüllt, so kann evtl. durch Ändern von einer oder mehreren Komponenten des flachen Ausgangs ein neuer Kandidat bestimmt und die Überprüfung erneut vorgenommen werden.

Diese Art der Bestimmung eines flachen Ausgangs wird meist nur iterativ zum Erfolg führen.

- (i.b) Für eine gegebene Systemdarstellung kann man – u. U. durch Umsortieren der Gleichungen und durch Umnummerieren der Zustandsvariablen – eine der in Kapitel 3 vorgestellten Regelungsformen erkennen, woraus sich in einfacher Weise die Komponenten des flachen Ausgangs angeben lassen.
- (i.c) Die systematische Bestimmung ist auf der Basis der in Kapitel 3.2 angegebenen hinreichenden Bedingungen möglich.

Da die in Kapitel 3 vorgestellten Bedingungen nur hinreichend für die Flachheit eines Systems (2.1) sind, führt dieser Weg zur Bestimmung eines flachen Ausgangs nicht für jedes System zum Ziel. Außerdem ist die Lösung der resultierenden linearen partiellen Differentialgleichungen oft kompliziert bzw. nicht möglich.

Die durch physikalische Überlegungen motivierte Bestimmung eines flachen Ausgangs erfordert eine gewisse Erfahrung mit der flachheitsbasierten Methode. Sie kann jedoch häufig erfolgreich angewendet werden und führt oft zu einem flachen Ausgang, der eine anschauliche Bedeutung hat. Außerdem stimmen häufig zumindest einige der Komponenten mit den Regelgrößen überein. Die physikalisch motivierte Bestimmung des flachen Ausgangs hat bei allen Beispielen in Kapitel 2 und Kapitel 5 zum Erfolg geführt.

Wird der flache Ausgang als Lösung eines partiellen Differentialgleichungssystems bestimmt, so kann oft aufgrund der Nicht-Eindeutigkeit gemäß Bemerkung 2.5 die Lösung so gewählt werden, daß sie eine anschauliche Bedeutung besitzt.

(ii) *Analyse der Flachheitseigenschaften*

Durch Überprüfen der Definition 2.2 erhält man die für den Entwurf einer Steuerung oder Regelung wichtigen Beziehungen (2.6). Diese Beziehungen müssen auch für die nach Schritt (i.b) und (i.c) ermittelten flachen Ausgänge bestimmt werden.

(ii.a) *Stationäre Analyse*

Für Systeme mit Gleichgewichtslagen können die stationären Gleichungen (2.9) für  $\mathbf{x}_S$  und  $\mathbf{u}_S$  ausgewertet werden. Dies kann dazu genutzt werden, Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen (4.3) stationär zu überprüfen. Außerdem ergeben sich aus der stationären Betrachtung u. U. Hinweise für die Wahl der Solltrajektorien, wie dies in Abschnitt 5.2 für das Beispiel eines chemischen Reaktors gezeigt wird.

(ii.b) *Planung von Solltrajektorien und Entwurf einer Steuerung*

Auf der Basis der durch das Trajektorienfolgeproblem 4.1 vorgegebenen Solltrajektorien  $\mathbf{w}_d(t)$  können gemäß Abschnitt 2.2.1 hinreichend glatte Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  für den flachen Ausgang bestimmt werden, aus denen sich wiederum Solltrajektorien für alle Zustands- und Eingangsvariablen ergeben.

Sind die Solltrajektorien für die Regelgrößen abschnittsweise definiert, so ist bei der Bestimmung der Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  darauf zu achten, daß die Übergänge zwischen den einzelnen Abschnitten ebenfalls hinreichend glatt sind, was durch einen einfachen Algorithmus, der in (Lévine *et al.* 1996) beschrieben ist, erreicht werden kann.

Bei der Wahl der Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{u}_d(t)$  können mit Hilfe der entsprechenden Beziehungen (2.42) Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen im offenen Kreis berücksichtigt werden. Dies kann insbesondere auch dazu benutzt werden, das Zeitintervall  $\Delta t$  für das Durchlaufen der Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  festzulegen: falls für ein gegebenes Zeitintervall die Beschränkungen nicht eingehalten werden, so kann dieses Intervall vergrößert werden, bis die Beschränkungen erfüllt sind. Ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend, so kann das Verfahren mit einem anderen Ansatz für  $\mathbf{y}_d(t)$  wiederholt werden.

(iii) *Entwurf einer Regelung zur Trajektorienfolge*

Der Entwurf einer Regelung zur Stabilisierung der Dynamik des Trajektorienfolgefehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t)$  wird gemäß Abschnitt 2.2.4 durch Einführen neuer Eingänge vorgenommen.

Die Frage, für welche Ableitungen der Komponenten des flachen Ausgangs neue Eingangsvariablen eingeführt werden, läßt sich leicht beantworten, wenn man den flachen Ausgang anhand der Bedingungen aus Abschnitt 3.2 bestimmt. In diesem Fall erhält man direkt die Längen der Teilsysteme. Wird der flache Ausgang wie in Abschnitt 5.1.2 mittels heuristischer Überlegungen ermittelt, so sind die Teilsystemlängen a priori nicht bekannt. Die neuen Eingänge  $\mathbf{v}$  werden so eingeführt, daß die Summe der resultierenden Teilsystemlängen größer oder gleich der Zustandsdimension ist und daß die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  gemäß (2.63a) aus den neuen Eingängen und einer endlichen Zahl ihrer Zeitableitungen bestimmt werden können.

Die Eigenwerte der Differentialgleichung (2.67) des Trajektorienfolgefehlers werden so gewählt, daß das Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises den gestellten Anforderungen genügt. Hierfür können alle Verfahren aus der Theorie linearer Systeme herangezogen werden.

(iv) *Entwurf einer Zustandsschätzung*

Da die flachheitsbasierte Trajektorienfolgegeregelung die Kenntnis aller Zustandsvariablen benötigt, müssen die nicht gemessenen Zustandsvariablen durch einen Beobachter bzw. ein Filter geschätzt werden. Für beobachtbare flache Systeme kann eine nichtli-



neare Zustandsschätzung auf der Basis der um die Solltrajektorien linearisierten Gleichungen entworfen werden, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

Die für die einzelnen Entwurfsschritte erforderlichen Rechenoperationen sind teilweise sehr umfangreich. In Abschnitt 4.3 wird deren rechnerunterstützte Durchführung diskutiert.

## 4.2 Zustandsschätzung für flache Systeme

Die *Beobachtungs-* bzw. *Filteraufgabe* für die flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems besteht in der Schätzung des gesamten Zustands  $\hat{\mathbf{x}}$  aus den gemessenen Größen  $\boldsymbol{\eta}$  unter der Voraussetzung, daß die Zustands- und Eingangsvariablen des zu beobachtenden Systems sich in der Nähe der Sollwerte (2.42) befinden.

Im folgenden wird angenommen, daß gemäß Bemerkung 4.1 der ursprüngliche Zustand  $\mathbf{x}$  zurückgeführt werden kann, wie dies auch für die beiden Anwendungsbeispiele in Kapitel 5 möglich ist. Damit kann die Beobachtungsaufgabe in den  $\mathbf{x}$ -Koordinaten formuliert und gelöst werden, und die endogene Zustandsrückführung (4.6a) und die asymptotische Folgeregelung (4.6b) können in den ursprünglichen  $\hat{\mathbf{x}}$ -Koordinaten angegeben werden.

Für den flachheitsbasierten Regelkreis in Bild 4.1 können zur Lösung der Beobachtungsaufgabe folgende Eigenschaften der flachheitsbasierten Trajektorienfolge ausgenutzt werden:

- (a) Aufgrund der Flachheitseigenschaft (2.42) können aus der Kenntnis des Solltrajektorienverlaufs  $\mathbf{y}_d(t)$  die Sollverläufe  $\mathbf{x}_d(t)$  für die Zustände sowie die Stellgrößen  $\mathbf{u}_d(t)$  berechnet werden.
- (b) Aufgrund der Folgeregelung kommt es gemäß der Fehlerdynamik (2.67) zu einem asymptotischen Einschwingen des Trajektorienfolgefehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$  bezüglich der Anfangsbedingungen und Störungen, d. h. die Abweichungen zwischen den Sollwerten  $\mathbf{y}_d(t)$  und den tatsächlichen Werten  $\mathbf{y}(t)$  sind hinreichend klein<sup>1</sup>. Dadurch sind auch die Abweichungen

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d, \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \quad (4.7)$$

zwischen dem Sollverlauf  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  und dem tatsächlichen Verlauf  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  klein.

Aufgrund der Eigenschaft (b) kann das mit der Zustandsrückführung  $\hat{\mathbf{u}}$  nach (4.6a) rückgekoppelte System (4.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in M_n. \quad (4.8)$$

---

<sup>1</sup>Dies setzt wiederum hinreichend gute Schätzergebnisse voraus (vgl. Bemerkung 4.8).

zusammen mit der Meßgleichung (4.1b) um die Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  linearisiert werden

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = A(t)\delta \mathbf{x} + B(t)\delta \mathbf{u}, \quad \delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_d(0) \quad (4.9a)$$

$$\delta \boldsymbol{\eta} = C(t)\delta \mathbf{x} \quad (4.9b)$$

mit den Matrizen

$$A(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_d(t), \mathbf{u}_d(t)}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}})}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \right|_{\mathbf{x}_d(t), \mathbf{u}_d(t)}, \quad C(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_d(t)}. \quad (4.9c)$$

Wegen der Eigenschaft (a) sind die Verläufe von  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{u}_d(t)$  bekannt, und die Matrizen (4.9c) können explizit angegeben werden.

**Bemerkung 4.4** *Dabei wird angenommen, die Elemente der Matrizen  $A(t)$ ,  $B(t)$  und  $C(t)$  in (4.9c) seien absolut beschränkt (Freund 1971) bzw. exponentiell beschränkt (Fliess und Rudolph 1996). In (Fliess und Rudolph 1996) wird die Bedeutung dieser Beschränkung sowohl allgemein als auch an einem einfachen Beispiel erläutert. Da die Elemente von (4.9c) aus der Linearisierung der Systemgleichungen (4.1) um die Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  gebildet werden, kann die Beschränktheit durch eine entsprechende Wahl der Sollverläufe  $\mathbf{w}_d(t)$  bzw.  $\mathbf{y}_d(t)$  sichergestellt werden.*

**Bemerkung 4.5** *Da die Matrizen  $A(t)$  und  $C(t)$  nach (4.9c) durch Linearisierung der Gleichungen des geschlossenen Kreises um die Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  berechnet werden, ist es möglich, die Zeitverläufe von  $A(t)$  und  $C(t)$  off-line zu bestimmen. Dies verkürzt die Rechenzeit bei einer Implementierung des zu entwerfenden Beobachters.*

Die linearisierten Systemgleichungen (4.9) sind genau dann beobachtbar, wenn mit dem Differentialoperator  $M_A$  nach (A.4) für die zeitvariante Beobachtbarkeitsmatrix gilt (Freund 1971)

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\mu_1-1} \mathbf{c}_1^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\mu_p-1} \mathbf{c}_p^T(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } Q(t) = n \quad \forall t \geq 0. \quad (4.10)$$

Dabei stellen die Vektoren  $\mathbf{c}_i^T(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , die Zeilen der Matrix  $C(t)$  dar. Der Struktur der Beobachtbarkeitsmatrix  $Q(t)$  entspricht die Zerlegung des Systems (4.9) in  $p$  Teilsysteme der Länge  $\mu_i$ . In dieser Arbeit wird nur die Teilsystemaufteilung betrachtet, bei der die Längen  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , der Teilsysteme gleich den Beobachtbarkeitsindizes sind, d. h. es gelten  $\sum_{i=1}^p \mu_i = n$  und  $\max_{i=1, \dots, p} \mu_i \stackrel{!}{=} \text{minimal}$  (Freund 1971).

**Bemerkung 4.6** Wird die Zustandsschätzung zur Schätzung unbekannter oder zeitlichen Schwankungen unterworfenen Systemparameter  $\mathbf{p}$  verwendet, so kann bei langsamen Veränderungen von  $\mathbf{p}$  das zugehörige Modell als  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$  angesetzt werden. In diesem Fall umfaßt der Vektor  $\mathbf{x}$  in (4.1) sowohl die Zustandsvariablen des Systems als auch evtl. zu schätzende Parameter. Das derart erweiterte System muß beobachtbar sein. Weiterhin wird für den Entwurf eines Beobachters oder Filters vorausgesetzt, daß die tatsächlichen Parameterwerte  $\mathbf{p}$  nahe den nominellen Werten  $\mathbf{p}_d$  liegen. Diese Voraussetzung ist in der Praxis meist hinreichend genau erfüllt, da die Parameter sich nur langsam im Vergleich zur Dynamik des Systems verändern und die nominellen Werte  $\mathbf{p}_d$  durch Identifikation gewonnen werden können.

### 4.2.1 Nichtlinearer Beobachter mit zeitvarianter Verstärkung

Ist das System (4.9) beobachtbar, so kann zur Zustandsschätzung ein nichtlinearer Beobachter mit der zeitvarianten  $(n \times p)$ -Verstärkungsmatrix  $L(t)$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) + L(t)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\mathbf{x}} \in M_n. \quad (4.11)$$

für den geschlossenen Kreis (4.8) entworfen werden.

**Bemerkung 4.7** Die Anfangsbedingungen  $\hat{\mathbf{x}}_0$  können aus der Beziehung  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_0) = \boldsymbol{\eta}(0)$  in Verbindung mit  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_d(0)$  bestimmt werden. Die Verwendung einer zeitvarianten Verstärkung  $L(t)$  ist gerechtfertigt, wenn durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen  $\hat{\mathbf{x}}_0$  des Beobachters gewährleistet wird, daß die Abweichungen  $\delta\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  zwischen der Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$  und dem tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$  klein sind. Damit sind aufgrund der Eigenschaft (b) (Seite 95) auch die Abweichungen  $\delta\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d$  zwischen Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}$  und Sollwert  $\mathbf{x}_d$  klein.

Die Dynamik des Schätzfehlers  $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  erhält man mit Hilfe von (4.11) und (4.8)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) + L(t) \left( \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \right), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0. \quad (4.12)$$

Die Schätzfehlerdynamik kann aufgrund von Eigenschaft (b) und Bemerkung 4.7 ebenfalls um die Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  linearisiert werden. Hierfür ergibt sich aus der Linearisierung des Beobachters (4.11) um  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  und der linearisierten Systemgleichung (4.9) mit den Matrizen (4.9c)

$$\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\left[ A(t)\delta\hat{\mathbf{x}} + B(t)\delta\mathbf{u} - L(t) \left( C(t)\delta\mathbf{x} - C(t)\delta\hat{\mathbf{x}} \right) \right]}_{\text{Beobachter}} - \underbrace{\left[ A(t)\delta\mathbf{x} + B(t)\delta\mathbf{u} \right]}_{\text{System}}. \quad (4.13)$$

Daraus erhält man die linearisierte zeitvariante Differentialgleichung für den Schätzfehler

$$\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\left( A(t) - L(t)C(t) \right)}_{\tilde{A}(t)} \delta\tilde{\mathbf{x}}, \quad \delta\tilde{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_d(0) - (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_d(0)) = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0. \quad (4.14)$$

Dabei wird im Unterschied zum erweiterten Luenberger-Beobachter (Zeitz 1987, Birk und Zeitz 1988) die Schätzfehlerdynamik nicht um die Schätztrajektorie  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  sondern um die Solltrajektorie  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{u}_d(t)$  linearisiert.

**Bemerkung 4.8** Die Linearisierung (4.14) ist nur dann gültig, wenn gemäß Bemerkung 4.7 die Anfangsfehler  $\delta\mathbf{x}_0$  und  $\delta\hat{\mathbf{x}}_0$  sowie die auf das System wirkenden Störungen hinreichend klein sind. Für die lineare zeitvariante Betrachtung des flachheitsbasierten Folgeregelkreises mit Zustandsschätzung gilt das Separationstheorem, d. h. die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers (2.60) kann unabhängig von der Dynamik des Schätzfehlers (4.14) entworfen werden.

Dieser Beobachter wird somit direkt für den geschlossenen Kreis entworfen. Dabei wird insbesondere berücksichtigt, daß beim Reglerentwurf die flachheitsbasierte Methode verwendet wird. Dieses Entwurfsprinzip unterscheidet den „Folgebeobachter“ von dem „klassischen“ Beobachterentwurf, der auf dem Modell des offenen Kreises basiert. Eine wertvolle Konsequenz des Ansatzes ist, daß aufgrund der Linearität, infolge der kleinen Abweichungen, das aus der linearen Theorie bekannte Separationsprinzip gilt.

Die Dimensionierung der zeitvarianten Beobacherverstärkung  $L(t)$  ist ein klassisches zeitvariantes Problem und kann mit Hilfe der zeitvarianten Beobachternormalform durchgeführt werden (Freund 1971). Eine einfache Dimensionierung von  $L(t)$  erlaubt die sog. Ackermann-Formel (Ackermann 1983), wenn man diese auf zeitvariante Systeme überträgt. Diese Formel ist in der Literatur nur für zeitvariante Systeme mit *einer* Meßgröße (Föllinger 1978) zu finden. Deshalb wird die Ackermann-Formel für lineare zeitvariante Systeme mit *mehreren* Meßgrößen nachfolgend kurz hergeleitet.

Hierzu wird das zeitvariante System (4.9) in der *zeitvarianten Beobachterform* betrachtet, in der die Zeitvarianz des Schätzfehlers (4.13) kompensiert und anschließend eine stabile Schätzfehlerdynamik aufgeprägt werden kann:

$$\left. \begin{array}{l} \delta\dot{\zeta} = A^*(t)\delta\zeta + B^*(t)\delta\mathbf{u} \\ \delta\boldsymbol{\eta} = C^*(t)\delta\zeta \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \delta\zeta_1^i = - \sum_{j=1}^p a_{1j}^{i*}(t)\delta\zeta_{\mu_j}^j + \sum_{j=1}^m b_j^{i*}(t)\delta u_j \quad (4.15a) \\ \delta\zeta_k^i = \zeta_{k-1}^i - \sum_{j=1}^p a_{kj}^{i*}(t)\delta\zeta_{\mu_j}^j + \sum_{j=1}^m b_j^{i*}(t)\delta u_j \\ \quad k = 2, \dots, \mu_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (4.15b) \\ \delta\eta_i = \sum_{j=1}^p c_j^{i*}(t)\delta\zeta_{\mu_j}^j. \quad (4.15c) \end{array} \right.$$

Dabei ist die folgende Rangbedingung erfüllt

$$C^*(t) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & c_1^{1*}(t) & \dots & 0 & \dots & c_1^{p*}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_p^{1*}(t) & \dots & 0 & \dots & c_p^{p*}(t) \end{array} \right) \Rightarrow \text{Rang } C^*(t) = p \quad \forall t \geq 0. \quad (4.15d)$$

**Bemerkung 4.9** Für die spezielle Wahl

$$a_{k,j < i}^{i*}(t) = 0, \quad c_i^{i*} = 1, \quad c_{j \neq i}^{i*} = 0, \quad i, j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, \mu_i, \quad (4.16)$$

der Koeffizienten ist die zeitvariante Beobachterform (4.15) mit der zeitvarianten Beobachternormalform identisch (Freund 1971).

In den Koordinaten der Beobachterform (4.15) lautet die Schätzfehlerdynamik (4.14)

$$\delta \dot{\zeta} = \underbrace{\left( A^*(t) - L^*(t)C^*(t) \right)}_{\tilde{A}^*(t)} \delta \tilde{\zeta} \quad \left\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{\zeta}_1^i = - \sum_{j=1}^p \left( a_{1j}^{i*}(t) + l_{1j}^{i*}(t)c_j^{i*}(t) \right) \delta \tilde{\zeta}_{\mu_j}^j \\ \delta \dot{\zeta}_k^i = \tilde{\zeta}_{k-1}^i - \sum_{j=1}^p \left( a_{kj}^{i*}(t) + l_{kj}^{i*}(t)c_j^{i*}(t) \right) \delta \tilde{\zeta}_{\mu_j}^j \\ k = 2, \dots, \mu_i, \quad i = 1, \dots, p. \end{array} \right. \quad (4.17a)$$

$$(4.17b)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Koeffizienten  $a_{kj}^{i*}(t)$  und  $c_j^{i*}(t)$  in den folgenden Matrizen zusammengefaßt

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^{1*}(t) & \dots & a_{1p}^{1*}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu_1 1}^{1*}(t) & \dots & a_{\mu_1 p}^{1*}(t) \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}^{p*}(t) & \dots & a_{1p}^{p*}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu_p 1}^{p*}(t) & \dots & a_{\mu_p p}^{p*}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{C}(t) = \begin{pmatrix} c_1^{1*}(t) & \dots & c_p^{1*}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{p*}(t) & \dots & c_p^{p*}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Aufgrund der Rangbedingung (4.15d) kann durch geeignete Wahl der Elemente  $l_{kj}^{i*}(t)$  der Beobacherverstärkung

$$L^*(t) = - \underbrace{\bar{A}(t)\bar{C}^{-1}(t)}_{\text{Kompensation}} - \underbrace{\Gamma\bar{C}^{-1}(t)}_{\text{Eigenwertvorgabe}} = - (\bar{A}(t) + \Gamma) \bar{C}^{-1}(t). \quad (4.19)$$

in (4.17) die Zeitvarianz kompensiert und eine stabile Schätzfehlerdynamik aufgeprägt werden. Die Elemente der konstanten Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^1 & \cdots & \gamma_{1p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\mu_1 1}^1 & \cdots & \gamma_{\mu_1 p}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \gamma_{11}^p & \cdots & \gamma_{1p}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\mu_p 1}^p & \cdots & \gamma_{\mu_p p}^p \end{pmatrix} \quad (4.20a)$$

können durch Vorgabe von Eigenwerten  $\bar{\lambda}_j^i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, \mu_i$ , und einen Koeffizientenvergleich folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \det \left[ \bar{\lambda} I - \left( A^*(t) - L^*(t)C^*(t) \right) \right] &= \prod_{i=1}^p (\bar{\lambda}^{\mu_i} + p_{\mu_i-1}^i \bar{\lambda}^{\mu_i-1} + \dots + p_1^i \bar{\lambda} + p_0^i) \\ &\stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{\mu_i} (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_j^i). \end{aligned} \quad (4.20b)$$

Da bei der Eigenwertvorgabe nur  $n$  Größen unabhängig voneinander vorgegebbar sind, können die Elemente  $\gamma_{jk}^i$  der Matrix  $\Gamma$  o. B. d. A. folgendermaßen gewählt werden

$$\gamma_{jk}^i = 0, \quad k < i, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, \mu_i, \quad (4.20c)$$

$$\gamma_{jk}^i = \gamma_{ji}^i, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.20d)$$

In diesem Fall sind in (4.20b) die Koeffizienten  $p_j^i = \gamma_{ji}^i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

**Bemerkung 4.10** Für  $\Gamma = 0$  wird durch (4.19) nur die Zeitvarianz von (4.17) kompensiert. Gelten für die Beobachterform (4.15) die Bedingungen (4.16), so erhält man durch die Kompensation der Zeitvarianz die duale Brunovský-Normalform (Kailath 1980).

**Bemerkung 4.11** Die Kompensation der Zeitvarianz ist möglich, wenn die Elemente der Matrix  $\bar{A}(t)$  beschränkt sind, was durch die in Bemerkung 4.4 geforderte Beschränktheit der Elemente der Matrizen  $A(t)$  und  $C(t)$  nach (4.9c) sichergestellt wird.

### Transformation in eine lineare zeitvariante Beobachterform

Meist liegt das lineare zeitvariante System (4.9) nicht in der Beobachterform (4.15) vor. Ist das Paar  $A(t)$ ,  $C(t)$  beobachtbar, so kann das System in die Beobachterform transformiert werden. Für die lineare zeitvariante Transformation

$$\delta \zeta = \Theta(t) \delta x \quad (4.21)$$

erhält man mit dem Differentialoperator  $N_A$  gemäß (3.48b) die folgende Struktur (Freund 1971):

$$\Theta^{-1} = \left( N_A^0 \boldsymbol{\theta}^1, \dots, N_A^{\mu_1-1} \boldsymbol{\theta}^1, \dots, N_A^0 \boldsymbol{\theta}^p, \dots, N_A^{\mu_p-1} \boldsymbol{\theta}^p \right). \quad (4.22a)$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Vektoren  $\boldsymbol{\theta}^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , lauten

$$\left( \boldsymbol{\theta}^1(t), \dots, \boldsymbol{\theta}^p(t) \right) = Q^{-1}(t) C^{*T}(t), \quad (4.22b)$$

d. h. die Vektoren  $\boldsymbol{\theta}^i(t)$  werden aus einzelnen Spalten der inversen Beobachtbarkeitsmatrix  $Q^{-1}(t)$  berechnet. Die Matrixelemente  $c_j^{i*}(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ , stellen Freiheitsgrade dar und können unter Berücksichtigung der Rangbedingung (4.15d) so gewählt werden, daß die Vektoren  $\boldsymbol{\theta}^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , eine für die Anwendung des Differentialoperators  $N_A$  in (4.22a) möglichst einfache Form erhalten.

Aus den Vektoren (4.22b) können durch sukzessive Anwendung des Differentialoperators  $N_A$  alle Spalten der inversen Transformationsmatrix (4.22a) und die zeitvarianten Koeffizienten der Differentialgleichung (4.15) berechnet werden:

$$\bar{A}(t) = -\Theta(t) \left( N_A^{\mu_1} \boldsymbol{\theta}^1(t), \dots, N_A^{\mu_p} \boldsymbol{\theta}^p(t) \right). \quad (4.23)$$

Mit Hilfe von (4.22) werden das lineare zeitvariante System (4.9) in die Beobachterform (4.15) transformiert und die Verstärkung  $L^*(t)$  nach (4.19) bestimmt.

### Ackermann-Formel

In den Originalkoordinaten ergibt sich aus (4.19) für den Beobachter (4.11) die Verstärkung

$$L(t) = \Theta^{-1}(t) L^*(t). \quad (4.24)$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse (4.19) und (4.22) bekommt man daraus die sog. *Ackermann-Formel*

$$L(t) = \left( N_A^0 \boldsymbol{\theta}^1(t), \dots, N_A^{\mu_1-1} \boldsymbol{\theta}^1(t), \dots, N_A^0 \boldsymbol{\theta}^p(t), \dots, N_A^{\mu_p-1} \boldsymbol{\theta}^p(t) \right) \left( \Gamma + \bar{A}(t) \right) \bar{C}^{-1}(t). \quad (4.25)$$

Mit (4.20) und (4.23) ergibt sich daraus

$$L(t) = \left( \sum_{j=0}^{\mu_1-1} \gamma_j^1 N_A^j \boldsymbol{\theta}^1(t) + N_A^{\mu_1} \boldsymbol{\theta}^1(t), \dots, \sum_{j=0}^{\mu_p-1} \gamma_j^p N_A^j \boldsymbol{\theta}^p(t) + N_A^{\mu_p} \boldsymbol{\theta}^p(t) \right) \bar{C}^{-1}(t). \quad (4.26)$$

Die Koeffizienten  $\gamma_j^i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, \mu_i$ , können gemäß (4.20b) durch Vorgabe von Eigenwerten  $\bar{\lambda}_j^i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, \mu_i$ , für die Dynamikmatrix  $\tilde{A}$  des Schätzfehlers bestimmt werden.

Zum Entwurf des erweiterten Luenberger-Beobachters wird in (Birk und Zeitz 1988, Birk 1992) die Ackermann-Formel für die nichtlinearen Modellgleichungen (4.1) mit Hilfe des ad-Operators anstelle des linearen  $N_A$ -Operators angegeben.

In beiden Fällen kann die Ackermann-Formel (4.26) leicht mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems implementiert werden. Ihre rechentechnische Auswertung wird im Abschnitt 4.3 diskutiert.

## 4.2.2 Nichtlineares Filter mit zeitvarianter Verstärkung

Der Einsatz eines Filters ist erforderlich, wenn das System und die Messung (4.1b) stochastisch gestört sind:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{r}_1(t), \quad \mathbf{x} \in M_n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0], \quad \mathbf{r}_1(t) \sim N(\mathbf{0}, R_1(t)) \quad (4.27a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_2(t), \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^q, \quad \mathbf{r}_2(t) \sim N(\mathbf{0}, R_2(t)). \quad (4.27b)$$

Die Funktionen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$  beschreiben das System- bzw. Meßrauschen, die als normalverteiltes weißes Rauschen mit Mittelwert  $\mathbf{0}$  und den Kovarianzmatrizen  $R_1(t)$  bzw.  $R_2(t)$  angesetzt werden. Dabei gilt für die Kovarianzmatrizen

$$E \left[ (\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}_0) (\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \right] = P_0 \quad (4.28a)$$

$$E \left[ \mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2^T(t) \right] = 0. \quad (4.28b)$$

Für das System (4.27), (4.28) kann analog zum nichtlinearen Beobachter (4.11) mit der zeitvarianten Verstärkung ein *erweitertes Kalman-Filter* (Gelb 1976, S. 188) mit zeitvarianter Verstärkung  $K(t)$  entworfen werden:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) + K(t) \left( \boldsymbol{\eta} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \right), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (4.29a)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + R_1(t) - P(t)C^T(t)R_2^{-1}(t)C(t)P(t), \\ P(0) &= P_0 \end{aligned} \quad (4.29b)$$

$$K(t) = P(t)C^T(t)R_2^{-1}(t). \quad (4.29c)$$

Dabei werden die Matrizen  $A(t)$  und  $C(t)$  durch Linearisierung um  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{u}_d(t)$  gemäß (4.9c) und Bemerkung 4.5 off-line bestimmt.

**Bemerkung 4.12** Die Struktur des Filters (4.29) entspricht der Struktur des erweiterten Kalman-Filters. Darüber hinaus wird die zeitvariante Verstärkung als Lösung einer Matrix-Riccati-Gleichung wie beim erweiterten Kalman-Filter bestimmt. Im Unterschied zu diesem wird jedoch die Linearisierung der Systemgleichungen um die Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{u}_d(t)$  anstatt um  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  berechnet. Analog zu Bemerkung 4.8 wird bei dieser Methode des Filterentwurfs die Tatsache direkt berücksichtigt, daß beim Reglerentwurf die flachheitsbasierte Methode verwendet wird. Aus diesem Grund wird das Filter (4.29) als Folgefilter bezeichnet.



Die Lösung  $P(t)$  der Matrix-Riccati-Differentialgleichung (4.29b) kann durch Vorgabe von  $P_0$ ,  $R_1(t)$  und  $R_2(t)$  – entsprechend der Bemerkung 4.5 – ebenfalls off-line berechnet werden. Dies führt zu einer deutlichen Reduktion des Rechenaufwands bei einer Implementierung des Filters (4.29) im Vergleich zum erweiterten Kalman-Filter mit einer Linearisierung um die Schätzwerte  $\hat{\mathbf{x}}$ . Werden die Elemente der Matrizen  $A(t)$  und  $C(t)$  aus den (vorab bekannten) Solltrajektorien  $\mathbf{x}_d(t)$  und  $\mathbf{u}_d(t)$  berechnet, so kann sichergestellt werden, daß diese Elemente gemäß Bemerkung 4.4 beschränkt sind und die Existenz der Lösung  $P(t)$  für das Folgefilter gesichert ist.

Liegen die Messungen  $\boldsymbol{\eta}_k$  nur zu diskreten Zeitpunkten  $t_k = k\Delta t$ ,  $k \geq 0$  vor, so lautet die Meßgleichung (4.1b)

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_{k,2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^q, \quad \mathbf{r}_{k,2} \sim N(\mathbf{0}, R_{k,2}) \quad (4.30a)$$

$$C_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_{k,d}}. \quad (4.30b)$$

In diesem Fall entsprechen die Gleichungen des nichtlinearen Folgefilters mit zeitvarianter Verstärkung denen des erweiterten Kalman-Filters mit zeitdiskreten Messungen (Gelb 1976, S. 188)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (4.31a)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + R_1(t) - P(t)C^T(t)R_2^{-1}C(t)P(t), \\ P(0) &= P_0 \end{aligned} \quad (4.31b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \hat{\mathbf{x}}_k(-) + K_k \left( \boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) \right) \quad (4.31c)$$

$$P_k(+) = \left( I - K_k C_k \right) P_k(-) \quad (4.31d)$$

$$K_k = P_k(-)C_k^T \left( C_k P_k(-)C_k^T + R_2 \right)^{-1}. \quad (4.31e)$$

Dabei stellen die ersten beiden Beziehungen die Prädiktion für den Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  und die Matrix  $P$  zwischen den Abtastzeitpunkten dar. Die verbleibenden Gleichungen definieren die Aktualisierung zu den Abtastzeitpunkten. Die Größen  $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$  bzw.  $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$  bezeichnen die Schätzwerte unmittelbar nach bzw. vor der Aktualisierung.

### 4.3 Rechnerunterstützte Durchführung der flachheitsbasierten Lösung des Trajektorienfolgeproblems mittels eines Computer-Algebra-Systems

Die flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems 4.1 mittels Steuerung bzw. Regelung mit Zustandsschätzung erfordert umfangreiche symbolische Berechnungen. Bereits

für Systeme geringer Ordnung sind die Berechnungen nur schwer ohne Unterstützung eines Computer-Algebra-Systems praktisch durchführbar.

Der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen wie MATHEMATICA, MACSYMA oder MAPLE zur Analyse nichtlinearer Systeme und zum Entwurf nichtlinearer Regler und Beobachter werden in vielen Arbeiten untersucht. Der Schwerpunkt liegt dabei einerseits auf dem Entwurf statischer Zustandsrückführungen zur exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung bzw. Zustandslinearisierung (Kasinski und Lévine 1983, D'Andrea und Lévine 1986, Akhrif und Blankenship 1988, Besançon und Bornard 1995, de Jager 1995). Andererseits wird die rechnerunterstützte Analyse der Beobachtbarkeit und der Entwurf nichtlinearer Beobachter in (Phelps und Krener 1988, Birk und Zeitz 1991, Birk 1992) untersucht.

In diesem Abschnitt sollen die Möglichkeiten der rechnerunterstützten Flachheitsanalyse und des Entwurfs von Steuerungen und Regelungen zur flachheitsbasierten Trajektorienfolge dargestellt werden. Die Reihenfolge der Darstellung orientiert sich an den in Abschnitt 4.1 vorgestellten Entwurfsschritten. Hierfür wird das Konzept einer Funktionsbibliothek auf der Basis des Computer-Algebra-Systems MATHEMATICA (Wolfram 1991) vorgestellt, mit deren Funktionen einzelne Schritte des flachheitsbasierten Entwurfs nach Abschnitt 4.1 rechnerunterstützt durchgeführt werden können (Rothfuß und Zeitz 1996).

### 4.3.1 Funktionen eines Computer-Algebra-Systems für die flachheitsbasierten Entwurfsschritte

Computer-Algebra-Systeme wie MATHEMATICA, MACSYMA oder MAPLE verfügen über umfangreiche Funktionsbibliotheken zur allgemeinen Symbolmanipulation sowie zur Lösung spezieller symbolischer Problemstellungen. Allerdings gibt es in fast keinem dieser Systeme nennenswerte Unterstützung für die Lösung regelungstechnischer Aufgabenstellungen. Aus diesem Grund muß für die rechnerunterstützte Durchführung der flachheitsbasierten Methode eine speziell angepaßte Funktionsbibliothek entwickelt und implementiert werden. Für eine solche Bibliothek muß zwischen zwei Arten von Berechnungen unterschieden werden:

- (a) *Direkt ausführbare Berechnungen:* Dabei handelt es sich um Rechenoperationen, die nach einem Algorithmus ohne Eingreifen des Benutzers durchgeführt werden können, d. h. durch den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems können diese Berechnungen gewissermaßen „auf Knopfdruck“ ausgeführt werden. Ein Beispiel für eine direkt ausführbare Berechnung ist die Bildung der Lie-Ableitung (2.28) einer Funktion mehrerer Variablen.
- (b) *Nicht direkt ausführbare Berechnungen:* Diese Rechenoperationen erfordern das Eingreifen des Benutzers, der zusätzliche für die Berechnung benötigte Informationen zur

Verfügung stellt. Der Benutzer muß aufgrund von meist heuristischen Überlegungen eine Lösung suchen. Das Computer-Algebra-System unterstützt in diesem Fall nur einzelne Teilberechnungen. Wichtige Beispiele für nicht direkt ausführbare Berechnungen sind die Inversion nichtlinearer algebraischer Gleichungen sowie die Integration von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen, für die es keinen allgemein anwendbaren Algorithmen gibt.

- (c) *Bedingt direkt ausführbare Berechnungen:* Die Zuordnung einer Rechenoperation zu einer der beiden erstgenannten Gruppen ist nicht immer eindeutig. Auch bei direkt ausführbaren Berechnungen wie der Berechnung der Lie-Klammer kann ein Eingreifen des Benutzers das Resultat stark vereinfachen, was u. U. dazu führt, daß bei den weiteren und darauf aufbauenden Berechnungen eine Lösung gefunden werden kann.

Im folgenden wird gemäß den in Abschnitt 4.1 dargestellten Entwurfsschritten erläutert, wie die beim flachheitsbasierten Entwurf erforderlichen Berechnungen mit einem Computer-Algebra-System durchgeführt werden können. Im Anschluß daran wird der Aufbau einer Funktionsbibliothek zur flachheitsbasierten Analyse und Entwurf vorgestellt. Dabei wird versucht, die Zugehörigkeit der erforderlichen Berechnungen zu den drei genannten Arten anzugeben.

- zu (i.) *Bestimmen eines flachen Ausgangs* (bedingt oder nicht direkt ausführbar)

Die in Schritt (i.b) beschriebene Erkennung von strukturell flachen Systemdarstellungen durch Umsortieren der Gleichungen und Umnummerieren der Zustandsvariablen kann durch graphentheoretische Algorithmen rechnerunterstützt durchgeführt werden, wie diese z. B. in (Birk 1992, Schaffner 1997) für die Erkennung strukturell beobachtbarer Systemdarstellungen benutzt werden.

Die in Schritt (i.c) dargestellte Auswertung der Bedingungen aus Satz 3.4<sup>2</sup> ist besonders für den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen geeignet. Zur Bestimmung der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (3.100) mit Hilfe des in Anhang B.1 beschriebenen Algorithmus sind Funktionen zur Berechnung des ad-Operators sowie zur Überprüfung der Dimension und Involutivität der Distributionen (3.97) erforderlich.

Außerdem gibt es bei der Auswahl der Vektorfelder in den Distributionen (3.97) Freiheitsgrade, die zur einfacheren Bestimmung eines flachen Ausgangs genutzt werden können. Dies führt zu einer *rekursiven* Auswertung der Bedingungen aus Satz 3.4. Dieser rekursive Charakter ist besonders für den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen geeignet. Die für das Aufstellen der Bestimmungsgleichungen

---

<sup>2</sup>Da die in Kapitel 3 vorgestellten Bedingungen alle in den Bedingungen von Satz 3.4 eingeschlossen sind, werden im folgenden nur die Bedingungen dieses Satzes betrachtet.

(3.100) erforderlichen Berechnungen sind direkt mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems implementierbar (Rothfuß *et al.* 1995a).

Im Unterschied dazu stellt die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (3.100) ein wesentliches Problem bei der rechnerunterstützten Bestimmung eines flachen Ausgangs dar. Da es in den meisten Computer-Algebra-Systemen nur wenige direkt einsetzbare Funktionen zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen gibt, müssen geeignete Erweiterungen implementiert werden, die meist auf ein interaktives Eingreifen des Benutzers angewiesen sind. Derartige Erweiterungen machen sich die spezielle Struktur der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zunutze und basieren auf dem Frobenius-Theorem A.1 (de Jager 1995), der Charakteristiken-Methode oder der regelbasierten Auswahl eines integrierenden Faktors (Birk 1992). Für konkrete Beispiele ist jedoch meist das Eingreifen des Benutzers erforderlich.

zu (ii.) *Nachweis der Flachheit anhand der Definition 2.2* (bedingt direkt ausführbar)

Ist der flache Ausgang  $\mathbf{y}$  bekannt, so müssen die Beziehungen (2.6) durch sukzessive Berechnung der Lie-Ableitungen (2.28a) der Komponenten  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , überprüft werden. Die Programmierung einer Funktion zur Bildung der Lie-Ableitung (2.28a) entlang des erweiterten Vektorfelds (2.27) ist direkt möglich (Rothfuß und Zeitz 1995). Die benötigte Auflösung der resultierenden nichtlinearen Gleichungen nach dem Zustand  $\mathbf{x}$  bzw. dem Eingang  $\mathbf{u}$  erfordert allerdings meist das Eingreifen des Benutzers.

Die Überprüfung eines heuristisch bestimmten Kandidaten  $\mathbf{y}$  führt häufig auf eine *iterative* Vorgehensweise, bei der der Einsatz eines Computer-Algebra-System äußerst hilfreich ist. In diesem Zusammenhang kann zunächst eine *strukturelle Analyse* für einen Kandidaten  $\mathbf{y}$  durchgeführt werden: dies bedeutet, daß nur die funktionalen Abhängigkeiten der Zeitableitungen von  $\mathbf{y}$  betrachtet werden, um zu klären, aus welchen Gleichungen welche Zustands- bzw. EingangsvARIABLEN prinzipiell berechnet werden können, ohne die eigentliche Auflösung der Gleichungen vorzunehmen.

zu (ii.a) *Stationäre Betrachtung* (bedingt direkt ausführbar)

Das Nullsetzen der Zeitableitungen  $\dot{y}_i^{(k)}$ ,  $k > 0$ , in (2.6) zur Bestimmung der stationären Beziehungen (2.9) kann direkt vorgenommen werden. Die entstehenden Ausdrücke für  $\mathbf{x}_S$  und  $\mathbf{u}_S$  können z. B. graphisch dargestellt werden, wie in Abschnitt 5.2 gezeigt wird.

zu (ii.b) *Planung und Entwurf von Solltrajektorien* (bedingt direkt ausführbar)

Der Entwurf von Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  für den flachen Ausgang erfolgt wie in Abschnitt 2.2 dargestellt auf der Basis der Solltrajektorien  $\mathbf{w}_d(t)$ . Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Sind für die Regelgrößen  $\mathbf{w}$  explizit Zeitverläufe  $\mathbf{w}_d(t)$  vorgegeben, so kann der Sollverlauf  $\mathbf{y}_d(t)$  als Lösung der Differentialgleichung (2.43) bestimmt werden. Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung kann mit Eingreifen des Benutzers rechnerunterstützt erfolgen. Die numerische Lösung ist ohne Eingriff durch den Aufruf des entsprechenden Integrationsverfahrens möglich.
- Sind lediglich einzelne Werte – z. B. Anfangs- und Endwerte – der Regelgrößen vorgegeben, so können daraus mit Hilfe von (2.43) die zugehörigen Werte  $\mathbf{y}_d(0)$  und  $\mathbf{y}_d(T)$  berechnet werden. Anschließend müssen die Werte  $\mathbf{y}_d(0)$  und  $\mathbf{y}_d(T)$  durch hinreichend oft differenzierbare Kurven (Splines, Polynome, etc.) verbunden werden.

Sind neben den Anfangs- und Endpunkten Zwischenpunkte  $\mathbf{w}(t_k)$  für die Regelgrößen vorgegeben, so können die zugehörigen Werte  $\mathbf{y}_d(t_k)$  gemäß (2.43) bestimmt werden. Die Interpolationskurven zwischen zwei derartigen Werten von  $\mathbf{y}_d$  werden so bestimmt, daß sie an den Umschaltpunkten nicht nur in den Funktionswerten, sondern auch in einer genügend großen Anzahl von Zeitableitungen übereinstimmen. Dies kann leicht direkt rechnerunterstützt erfolgen. Ein entsprechender Algorithmus ist z. B. in (Lévine *et al.* 1996) zu finden.

Sind die Gleichungen für die Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  bestimmt, so können die Beziehungen (2.42) für  $\mathbf{x}_d$  und  $\mathbf{u}_d$  direkt durch Ersetzen der Argumente von (2.42b) durch die zugehörigen Ausdrücke in  $\mathbf{y}_d(t)$  ermittelt werden. Daraus erhält man einerseits die flachheitsbasierte Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$ , andererseits können mit Hilfe von (2.42) Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen (4.3) off-line mit dem Computer-Algebra-System überprüft werden, d. h. ohne Integration der Systemdifferentialgleichung (4.1).

zu (iii.) *Entwurf einer Regelung zur Trajektorienfolge* (direkt ausführbar)

Ist der flache Ausgang bekannt, so gilt dies auch für die Ableitungsordnungen  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in (2.6). Damit kann die asymptotische Folgeregelung (2.66), (4.6b) direkt rechnerunterstützt bestimmt werden.

Die Koeffizienten  $q_j^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, \kappa_i$ , in (2.66) können mit Hilfe von Simulationen ausgelegt werden. Dies wird erleichtert, wenn das Computer-Algebra-System die Möglichkeit zur rechnerunterstützten Erzeugung von Simulationscode bietet.

zu (iv.) *Entwurf einer Zustandsschätzung* (bedingt direkt ausführbar)

Der Entwurf eines nichtlinearen Folgebeobachters bzw. Folgefilters (4.11) mit zeitvarianter Verstärkung zur flachheitsbasierten Trajektorienfolge umfaßt die Bestimmung der Matrizen  $A(t)$ ,  $C(t)$ , die Analyse der Beobachtbarkeit des zeitvarianten Systems (4.9) und die Dimensionierung der Beobacherverstärkung  $L(t)$ .

Für die Beobachtbarkeitsanalyse ist die Beobachtbarkeitsmatrix  $Q(t)$  nach (4.10) mit Hilfe des Differentialoperators  $M_A$  zu berechnen. Bei der Bestimmung der Beobachtbarkeitsindizes  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , gibt es häufig mehrere Möglichkeiten zur Auswahl linear unabhängiger Zeilen der zeitvarianten Beobachtbarkeitsmatrix  $Q(t)$  gemäß (4.10). Diese Freiheitsgrade führen meist zu einer rekursiven Bestimmung von  $Q(t)$ . Diese Analyse ist für den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems besonders geeignet. Sie kann meist jedoch nur mit Hilfe des Benutzers durchgeführt werden.

Die Dimensionierung der Beobacherverstärkung  $L(t)$  erfolgt mit Hilfe der Ackermann-Formel (4.26). Für die Auswertung von (4.26) muß nicht die gesamte inverse Beobachtkeitsmatrix  $Q^{-1}(t)$  berechnet werden. Vielmehr genügt die Bestimmung der Vektoren  $\theta^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , die nach (4.22b) bestimmten Spalten der inversen Beobachtbarkeitsmatrix entsprechen. Da die Bestimmung der Inversen einer symbolischen Matrix eine sehr speicher- und rechenzeitintensive Rechenoperation darstellt, vereinfacht die Ackermann-Formel die Berechnungen signifikant. Darüber hinaus können mit Hilfe der Elemente der Matrix  $\bar{C}(t)$  die Vektoren  $\theta^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , in (4.22b) häufig wesentlich vereinfacht werden. Dies vereinfacht insbesondere auch die Anwendung des Differentialoperators  $N_A$  in (4.26). Dies gilt besonders dann, wenn die Vektoren  $\theta^i$  konstant sind. Die Festlegung der Freiheitsgrade kann nur mit Hilfe des Benutzers erfolgen. Gleiches gilt für die Festlegung der Eigenwerte  $\bar{\lambda}_j^i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, \mu_i$ , in (4.20b).

Für die Dimensionierung der Filterverstärkung  $K(t)$  in (4.29) bzw.  $K_k$  in (4.31) ist die Vorgabe der Anfangswerte  $P_0$  der Kovarianzmatrix  $P(t)$  sowie der Matrizen  $R_1(t)$  und  $R_2(t)$  erforderlich. Dies kann meist nur iterativ mit Hilfe von Simulationsstudien erfolgen, für die entsprechende Funktionen in der Bibliothek vorhanden sein sollten.

### 4.3.2 Funktionsbibliothek zur flachheitsbasierten Analyse und Synthese

Aus den genannten Berechnungen für die flachheitsbasierte Analyse und Lösung des Trajektorienfolgeproblems können Anforderungen an eine Funktionsbibliothek eines Computer-

Algebra-Systems abgeleitet werden. Da die in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Berechnungen häufig nicht oder nur bedingt direkt ausführbar sind, sollte eine solche Funktionsbibliothek in modularer Form aufgebaut sein. Die Module der Funktionsbibliothek bestehen aus verschiedenen sog. *Basisfunktionen*, die hinsichtlich Speicher- und Rechenzeitbedarf sowie Benutzerinteraktionsmöglichkeiten optimiert sind und zu komplexeren Funktionen kombiniert werden können. Dabei sollte die Funktionsbibliothek folgende Eigenschaften aufweisen:

- In einer *Datenbasis* werden Systemdefinitionen, Parameter und Zwischenergebnisse abgespeichert, so daß sich nichtlineare Systeme geeignet repräsentieren lassen.
- Die von einem Computer-Algebra-System zur Verfügung gestellten Funktionen zur allgemeinen Symbolmanipulation werden um die Möglichkeit der Benutzerinteraktion, z. B. zur interaktiven Vereinfachung symbolischer Ausdrücke, erweitert. Darauf aufbauend sind an spezielle regelungstechnische Problemstellungen angepasste Funktionen implementiert. Die *regelungstechnischen Basisfunktionen* dienen beispielsweise der Berechnung der Jacobimatrix, der Taylorlinearisierung sowie der Berechnung von Lie-Ableitungen und Lie-Klammern. Mit Hilfe dieser Basisfunktionen werden komplexere *regelungstechnische Funktionen* implementiert, wie sie z. B. zur Überprüfung der Involutivität einer Distribution, zur interaktiven Lösung eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen oder zur Bestimmung eines flachen Ausgangs verwendet werden können.

Allgemein gilt, daß bei Basisfunktionen der Benutzer häufig eingreifen kann, um die resultierenden Ausdrücke geeignet zu vereinfachen. Bei den komplexeren regelungstechnischen Funktionen dient die Benutzerinteraktion neben der Vereinfachung von Ausdrücken zur Festlegung von Freiheitsgraden.

- Zur Auswertung numerischer Ausdrücke oder zur Simulation sind Schnittstellen zu geeigneten Programmsystemen wie MATLAB oder ACSL vorhanden.
- Der Benutzer hat die volle Kontrolle über jede Funktion in der Bibliothek. Dies erfordert einerseits umfangreiche Kenntnisse über die verwendeten Analyse- und Entwurfsmethoden, andererseits sind ebenso Kenntnisse über das Zusammenspiel der einzelnen Funktionen notwendig. Dadurch unterscheidet sich diese Art der *Benutzerschnittstelle* von der von Birk und Zeitz (1991) im Programmsystem MACNON implementierten Menüstruktur, die dem Benutzer einen Großteil der Kenntnisse über die Programmstruktur und die verwendeten Methoden abnimmt.

Da die in Abschnitt 4.1 gezeigten Entwurfsschritte zur flachheitsbasierten Lösung des Trajektorienfolgeproblems häufig iterativ wiederholt werden müssen, bietet die Struktur der vorgestellten Funktionsbibliothek für den flachheitsbasierten Ansatz gegenüber

der menügeführten Benutzerschnittstelle aufgrund der höheren Flexibilität Vorteile. Dies gilt insbesondere für komplexe Problemstellungen, bei denen der Benutzer sehr viel an Information bereitstellen muß, um eine rechnerunterstützte Lösung überhaupt zu ermöglichen.

Mit dem Computer-Algebra-System MATHEMATICA wurde eine Funktionsbibliothek implementiert, die die o. g. Anforderungen erfüllt (Rothfuß und Zeitz 1996). Auch mit Hilfe dieser Funktionsbibliothek können die grundlegenden Probleme von Computer-Algebra-Systemen hinsichtlich der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, der Integration von (partiellen) Differentialgleichungen, der Vereinfachung von komplizierten Ausdrücken, etc. nur bedingt umgangen werden. Allerdings ist es durch den gezeigten Aufbau der Funktionsbibliothek möglich, diese Beschränkungen wenigstens teilweise aufzuheben und die flachheitsbasierte Methode auf praktische Beispiele anzuwenden, die mit einem herkömmlichen Computer-Algebra-System gar nicht oder nur sehr eingeschränkt handhabbar sind. Dies wird auch im folgenden Kapitel 5 gezeigt.

## 4.4 Zusammenfassung

Flache Systeme erlauben eine systematische Lösung des nichtlinearen Trajektorienfolgeproblems. Die Eigenschaft der Flachheit erweist sich dabei als hilfreich bei der Trajektorienplanung und dem Entwurf einer Steuerung bzw. einer asymptotischen Folgeregelung zur Trajektorienfolge. Darüber hinaus ermöglicht die Flachheit bei beobachtbaren Systemen den Entwurf eines nichtlinearen Beobachters bzw. Filters mit zeitvarianter Verstärkung zur Rekonstruktion nicht gemessener Zustandsvariablen. Zur Dimensionierung der Verstärkung wird die Schätzfehlerdynamik um die Solltrajektorie linearisiert. Aufgrund dieser linearisierten zeitvarianten Betrachtung gilt das Separationstheorem, d. h. die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers kann unabhängig von der des Schätzfehlers vorgegeben werden. Dies erlaubt einen einfachen Entwurf einer Zustandsschätzung für den flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelkreis. Für allgemeine nichtlineare Systeme gibt es hingegen keinen systematischen Entwurf einer Zustandsschätzung. Demgegenüber ermöglicht die Flachheit eine systematische Vorgehensweise.

Die Analyse- und Entwurfsschritte für eine flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems erfordern teilweise recht umfangreiche symbolische Berechnungen. Diese Berechnungen können mit Hilfe des Computer-Algebra-Systems MATHEMATICA durchgeführt werden, wenn eine Funktionsbibliothek zur Verfügung steht, die auf die regelungstechnischen Problemstellungen zugeschnittene Funktionen umfaßt. Mit Hilfe dieser Bibliothek kann eine flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems nicht nur für einfache akademische Beispiele, sondern auch für konkrete Anwendungsbeispiele rechnerunterstützt bestimmt werden.



## Kapitel 5

# Anwendungsbeispiele für die flachheitsbasierte Trajektorienfolge

Im folgenden wird die flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems für einen im Fedbatch-Verfahren betriebenen Bioreaktor und einen kontinuierlich betriebenen chemischen Rührkesselreaktor mit Neben- und Folgereaktionen gezeigt. Die Regelungsaufgabe für den Bioreaktor ist ein Beispiel für die Trajektorienfolge bei einem instationären Prozeß. Das Folgeproblem für den chemischen Rührkesselreaktor besteht im Anfahren eines stationären Arbeitspunkts sowie dem Wechsel zwischen zwei weit voneinander entfernten Arbeitspunkten.

Anhand der beiden Anwendungsbeispiele werden unterschiedliche Aspekte und Schwierigkeiten bei der flachheitsbasierten Lösung des Trajektorienfolgeproblems untersucht. Beiden Beispielen liegen praktische Problemstellungen zugrunde, wobei die Ergebnisse für den Bioreaktor auch im Experiment am realen Prozeß verifiziert worden sind.

Für beide Reaktorbeispiele gilt, daß die erforderlichen Berechnungen teilweise sehr umfangreich sind und deshalb sämtliche Rechenschritte mit Hilfe der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Funktionsbibliothek auf der Basis des Computer-Algebra-Systems MATHEMATICA (Wolfram 1991) durchgeführt wurden. Im folgenden werden deshalb häufig nur die Endergebnisse dargestellt. Die gezeigten Simulationsstudien wurden mit Hilfe des Simulationsprogramms ACSL (Gauthier 1991) vorgenommen, die zugehörigen Graphiken wurden mit dem numerischen Programmsystem MATLAB (The Mathworks Inc. 1995) erstellt.

### 5.1 Fedbatch-Bioreaktor

Als erstes Anwendungsbeispiel dient der in der Einleitung und im zweiten Kapitel vorgestellte und im Fedbatch-Verfahren betriebene Bioreaktor zur Herstellung von Penicillin. Mit



Bild 5.1: Bioverfahrenstechnischer Reaktor zur Penicillinherstellung am Institut für Bioverfahrenstechnik der Universität Stuttgart.

dem betrachteten Bioreaktor werden am Institut für Bioverfahrenstechnik der Universität Stuttgart Fermentationsprozesse untersucht<sup>1</sup>. In dem betrachteten Prozeß wird mit Hilfe eines Zufütterungsverfahrens mit Hilfe von *Penicillium chrysogenum* Ps (ATCC 48271) das Antibiotikum Penicillin G produziert (Frese 1992). Die gesamte Anlage ist in Bild 5.1 dargestellt und besteht im wesentlichen aus dem Reaktor mit einem Volumen von 300 Litern, einem Prozeßleitsystem FIX-DMACS zur Visualisierung, Archivierung und Ansteuerung der Aktoren und Sensoren sowie einem SUN-Computer zur Auswertung der Messungen und zur Berechnung der Stellsignale.

### 5.1.1 Das Trajektorienfolgeproblem für den Bioreaktor

Der Prozeßverlauf gliedert sich nach Frese (1992) in zwei Phasen:

- In der ersten Phase, der sog. *Trophophase*, findet reines Zellwachstum statt, d. h. die Zellkultur wächst exponentiell auf der Basis eines von außen zugeführten Substrats (Glucose) mit einer hohen spezifischen Wachstumsrate. Das Ziel ist dabei, eine hohe

<sup>1</sup>Die Aufbereitung der für den Reglerentwurf verwendeten Modelle und die Durchführung der experimentellen Untersuchungen erfolgten in Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Ing. A. Riek, wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Reuß.

Biomassekonzentration für die folgende Produktionsphase zu erreichen. Dies entspricht der im einleitenden Beispiel 1.1 beschriebenen Situation.

- Nach einer kurzen Übergangsphase, in der die hohe spezifische Wachstumsrate durch Verringerung der Glucosezufuhr abgesenkt wird, schließt sich die sog. *Idiophase* an. In ihr wird durch die Zugabe eines zweiten Substrats, des sog. *Precursors* (Phenylsigsäure), die Produktion von Penicillin G ermöglicht. Die Idiophase wird durch das Modell in Beispiel 2.4 beschrieben.

Die Organismen produzieren nur während des exponentiellen Wachstums in der Idiophase das gewünschte Penicillin. Deshalb handelt es sich bei dem betrachteten Bioreaktor um einen *instationären* Prozeß. Das Trajektorienfolgeproblem für den Bioreaktor gliedert sich aufgrund der unterschiedlichen Phasen in die zwei Teilprobleme für die Trophophase und für die Idiophase, die in den folgenden Abschnitten beschrieben werden.

**Bemerkung 5.1** *Für die Modellierung des Systemverhaltens gibt es die Möglichkeit, Bilanzgleichungen für zellinterne Größen (Proteine, Nukleotide) aufzustellen. Dies führt zu sog. strukturierten Modellen (King 1992) mit einer großen Anzahl von Zustandsvariablen, für die die experimentelle Bestimmung vieler Parameter erforderlich ist. Für den hier betrachteten Prozeß wird alternativ ein sog. unstrukturiertes Modell verwendet, das auf Bilanzgleichungen makroskopischer Größen (Biomasse, Substratmasse) aufgebaut ist. Dieses einfache Regelungsmodell erleichtert die Lösung des Trajektorienfolgeproblems wesentlich und erweist sich als hinreichend genau, wie die in Abschnitt 5.1.7 dargestellten Experimente zeigen.*

### Das Trajektorienfolgeproblem für die Trophophase

Für die Modellierung des Systems während der *Trophophase* werden die in Anhang C.1.1 aufgeführten Bezeichnungen verwendet. In der Trophophase kann das System nur über die Substratzufuhr  $u_1$  beeinflusst werden. Die Bilanzen für die Biomasse  $x_1$  und die Substratmasse  $x_2$  lauten analog zu Beispiel 2.3

$$\dot{x}_1 = \mu(x_2)x_1 \quad (5.1a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{p_1}\mu(x_2)x_1 - m_S x_1 + p_2 u_1 \quad (5.1b)$$

mit der Wachstumskinetik nach Monod (Frese 1992)

$$\mu(x_2) = \frac{\mu_{\max} x_2}{K_S V + x_2} \quad (5.1c)$$

Neben der Biomasse  $x_1$  wird als zweite Größe  $\eta_2$  der  $CO_2$ -Gehalt des aus dem Bioreaktor austretenden Abgases gemessen

$$\eta_1 = x_1 \quad (5.2a)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{p_3} \mu(x_2) x_1 + p_4 m_S x_1. \quad (5.2b)$$

Als Regelgröße wird die Wachstumsrate verwendet

$$w = \mu(x_2), \quad (5.3)$$

die konstant gehalten werden soll

$$w_d = \mu(x_{2,d}) = \mu_d = \text{konstant}. \quad (5.4)$$

Für die Eingangsgröße ist folgende Beschränkung einzuhalten

$$0 \leq u_1(t) \leq u_{1,\max}. \quad (5.5)$$

Außerdem ist zu beachten, daß der Koeffizient  $m_S$  für den Erhaltungsstoffwechsel sowie das Reaktorvolumen  $V$  zeitlich veränderlich sind. Das Volumen  $V$  kann direkt gemessen werden, während der Koeffizient  $m_S$  nicht direkt meßbar ist.

### Das Trajektorienfolgeproblem für die Idiophase

Nach der Übergangsphase wird über eine zweite Eingangsgröße  $u_2$  der Precursor zugeführt, und die Organismen beginnen mit der Produktion von Penicillin. Für die Idiophase muß das Modell entsprechend erweitert werden; die verwendeten Symbole und Parameter finden sich in Anhang C.1.2.

**Bemerkung 5.2** *Im folgenden werden die Systemgleichungen für die Idiophase zur Vereinfachung der Schreibweise für  $t \geq 0$  angegeben. Beim Übergang von der Trophophase zur Idiophase ist aus diesem Grund zu beachten, daß die Anfangsbedingungen  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  für Biomasse und Substrat in der Idiophase gleich den Werten  $x_1(T)$ ,  $x_2(T)$  zum Zeitpunkt  $t = T$  des Übergangs bzw. der Trophophase sind.*

Im Unterschied zu Beispiel 2.4 soll im Modell neben der Precursormasse  $x_3$  auch die Masse des produzierten Penicillins  $x_4$  berücksichtigt werden:

$$\dot{x}_1 = \mu(x_2) x_1 \quad (5.6a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{p_1} \mu(x_2) x_1 - \frac{1}{p_5} \mu_{Pen} x_1 - m_S x_1 + p_2 u_1 \quad (5.6b)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{y_{PP}} \mu_{Pen} x_1 + p_6 u_2 \quad (5.6c)$$

$$\dot{x}_4 = \mu_{Pen} x_1 - p_7 x_4. \quad (5.6d)$$

Für die Wachstumsrate  $\mu(x_2)$  wird wieder der Ansatz (5.1c) nach Monod verwendet.

**Bemerkung 5.3** Im Unterschied zu den Systemgleichungen (2.15) aus Beispiel 2.4 wird in (5.6) die Produktbildungsrate  $\mu_{Pen}$  als Konstante, d. h. unabhängig von der Substrat- und Precursormasse  $x_2$  bzw.  $x_3$ , angesetzt. Betrachtet man explizit die Abhängigkeit von  $x_2$  und  $x_3$ , so müsste analog zur Monod-Kinetik (5.1c) ein Ansatz für die Produktbildungsrate  $\mu_{Pen}$  gemacht werden. Ein derartiger Ansatz enthält verschiedene Parameter, die im Experiment identifiziert werden müssen. Um diesen Aufwand zu umgehen, wird im folgenden die Produktbildungsrate als konstant angenommen und durch ein nichtlineares Filter geschätzt, das in Abschnitt 5.1.5 vorgestellt wird.

Neben der Biomasse und dem  $CO_2$ -Gehalt des aus dem Bioreaktor austretenden Abgases (5.2) werden Precursor und Penicillin gemessen:

$$\eta_3 = x_3 \quad (5.7a)$$

$$\eta_4 = x_4. \quad (5.7b)$$

Da der Precursor einerseits in einer bestimmten Mindestkonzentration  $c_{3,d}$  benötigt wird, andererseits bei zu hohen Konzentrationen auf die Organismen toxisch wirkt, stellt die Konzentration  $c_3 = x_3/V$  des Precursors neben der Wachstumsrate  $\mu(x_2)$  eine weitere Regelgröße dar:

$$w_1 = \mu(x_2) \quad (5.8a)$$

$$w_2 = c_3 = \frac{x_3}{V}. \quad (5.8b)$$

Für die Sollverläufe der Regelgrößen wird gefordert:

$$w_{1,d} = \mu(x_{2,d}) = \mu_d = \text{konstant} \quad (5.9a)$$

$$w_{2,d} = c_{3,d} = \frac{x_{3,d}}{V} = \text{konstant}. \quad (5.9b)$$

Anstelle des konstanten Sollwerts  $c_{3,d}$  für die zweite Regelgröße kann auch ein abschnittsweise definierter Zeitverlauf  $w_{2,d}(t)$  verwendet werden. Durch diesen Verlauf wird die Precursor-konzentration vom (gemessenen) Anfangswert  $c_3(0) = x_{30}/V_0$  in der Zeit  $t_1$  zum gewünschten Sollwert  $c_{3,d}$  entlang einer einmal stetig differenzierbaren Trajektorie geführt

$$w_{2,d}(t) = \begin{cases} r_3 t^3 + r_2 t^2 + r_1 t + r_0 & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{x_{3,d}}{V} = c_{3,d} = \text{konstant} & \text{für } t \geq t_1. \end{cases} \quad (5.10a)$$

Um den Übergang der Trajektorie  $w_{2,d}(t)$  zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = t_1$  zwischen den Teilbewegungen einmal stetig differenzierbar zu machen, wird für den Verlauf von  $w_{2,d}(t)$  ein Polynom dritter Ordnung angesetzt. Dabei werden die Koeffizienten  $r_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , aus den Gleichungen

$$w_{2,d}(0) = x_{30}/V(0), \quad \dot{w}_{2,d}(0) = 0, \quad w_{2,d}(t_1) = c_{3,d}, \quad \dot{w}_{2,d}(t_1) = 0 \quad (5.10b)$$

bestimmt. Durch die Solltrajektorie (5.10) wird der Precursor im Unterschied zu (5.9b) langsam auf den gewünschten Wert gebracht. Dies ist aufgrund der toxischen Wirkung des Precursors wünschenswert. Für die Eingangsgrößen sind folgende Beschränkungen einzuhalten

$$0 \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, \quad i = 1, 2. \quad (5.11)$$

Außerdem ist zu beachten, daß neben dem Koeffizienten  $m_S$  für den Erhaltungsstoffwechsel auch der Ausbeutekoeffizient  $y_{PP}$  sowie die Produktbildungsrate  $\mu_{Pen}$  Schwankungen unterworfen und nicht direkt meßbar sind.

**Bemerkung 5.4** *Das Volumen  $V$  wächst unter Vernachlässigung der Probenahme durch die Zufuhr von Substrat und Precursor mit der Zeit. Dies wird im Modell nicht durch eine Differentialgleichung beschrieben, da der Wert von  $V(t)$  direkt gemessen werden kann.*

**Bemerkung 5.5** *Bei der Lösung des Trajektorienfolgeproblems mit Hilfe einer Ausgangsregelung stellt sich das Problem, daß die zu regelnden Größen (5.3) bzw. (5.8) nicht mit den gemessenen Größen (5.2) bzw. (5.7) übereinstimmen. Die Umrechnung der Solltrajektorie (5.4) in einen Sollverlauf für die (gemessene) Biomasse ist mit Hilfe der Flachheitsbeziehungen in Definition 2.2 einfach möglich.*

### 5.1.2 Bestimmung eines flachen Ausgangs für den Bioreaktor

Die Bestimmung eines flachen Ausgangs für den Bioreaktor kann aufgrund physikalischer Überlegungen wie in den Beispielen 1.1 bzw. 2.4 auf den Seiten 3 bzw. 20 erfolgen. Alternativ kann der flache Ausgang auch durch Überprüfen der Bedingungen aus Kapitel 3.2 analog zu Beispiel 3.8 auf Seite 77 bestimmt werden.

Die Struktur der Modellgleichungen (5.1) der *Trophophase* stimmt mit der aus Beispiel 2.3 überein. Der flache Ausgang lautet in diesem Fall

$$y_1 = x_1. \quad (5.12)$$

Die Gleichungen für die Substratmasse und -zufuhr ergeben sich gemäß (2.13) zu

$$x_2 = \mu^{-1}(y_1, \dot{y}_1) \quad (5.13a)$$

$$u_1 = \varphi^{-1}(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1). \quad (5.13b)$$

Für das Modell (5.6) der *Idiophase* kann der flache Ausgang anhand heuristischer Überlegungen ermittelt werden: betrachtet man in dem Modell (5.6) nur die funktionale Abhän-

gigkeiten, so erhält man

$$\dot{x}_1 = \phi_1(x_1, x_2) \quad (5.14a)$$

$$\dot{x}_2 = \phi_2(x_1, x_2, u_1) \quad (5.14b)$$

$$\dot{x}_3 = \phi_3(x_1, u_2) \quad (5.14c)$$

$$\dot{x}_4 = \phi_4(x_1, x_4). \quad (5.14d)$$

Aus der zeitlichen Veränderung des Penicillins  $x_4$  kann gemäß (5.14d) der zeitliche Verlauf der Biomasse  $x_1$  bestimmt werden. Aus deren Zeitableitung ergibt sich der zugehörige Verlauf des Substrats  $x_2$ . Der Penicillinmasse  $x_4$  kommt damit besondere Bedeutung zu, und sie wird als eine Komponente  $y_1 = x_4$  des flachen Ausgangs gewählt. Nimmt man als zweite Komponente die Precursormasse  $x_3 = y_2$ , so kann man leicht erkennen, daß aus  $\overset{(3)}{y}_1$  und  $\dot{y}_2$  die Eingangsgrößen  $u_1$  und  $u_2$  bestimmt werden können. Anschaulich läßt sich die Komponente  $y_1 = x_4$  folgendermaßen deuten: das über die Eingangsgröße  $u_1$  zugeführte Substrat wird durch das System dreifach „integriert“: zunächst wird es als Substrat  $x_2$  im Reaktor gespeichert; das Substrat  $x_2$  wird weiter zu Biomasse  $x_1$  umgesetzt, mit deren Hilfe Penicillin  $x_4$  gebildet wird. Aus diesem Grund lassen sich die Größen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $u_1$  aus den Zeitableitungen von  $x_4$  bestimmen.

Für den expliziten Nachweis der Flachheit gemäß Bemerkung 2.9 müssen aus

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (x_4, x_3) \quad (5.15)$$

die Zustands- und Eingangsvariablen gemäß Schema 5.2 bestimmt werden

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_4 \\ y_2 = x_3 \\ \dot{y}_1 = \mu_{Pen}x_1 - p_7x_4 \\ \dot{y}_2 = -\frac{1}{y_{PP}}\mu_{Pen}x_1 + p_6u_2 \\ \ddot{y}_1 = \varphi_1^2(x_1, \mu(x_2), x_4) \\ \overset{(3)}{y}_1 = \varphi_2^3(x_1, x_2, x_4, u_1) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_4 = y_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_1 = \frac{\dot{y}_1 + p_7y_1}{\mu_{Pen}} = \psi_{11}(y_1, \dot{y}_1) \\ u_2 = \frac{y_{PP}\dot{y}_2 + \mu_{Pen}x_1}{y_{PP}p_6} = \psi_{21}(y_1, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \\ x_2 = \psi_{12}(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1) \\ u_1 = \psi_{22}(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, \overset{(3)}{y}_1). \end{array} \right. \quad (5.16a)$$

$$(5.16b)$$

$$(5.16c)$$

$$(5.16d)$$

$$(5.16e)$$

$$(5.16f)$$

**Bemerkung 5.6** Bei den Gleichungen (5.16a) bis (5.16d) handelt es sich um lineare Gleichungen, aus denen die Größen  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  und  $u_1$  einfach berechnet werden können. Für die Berechnung von  $x_2$  aus  $\ddot{y}_1$  muß vorausgesetzt werden, daß die Wachstumsrate  $\mu(x_2)$  (zumindest lokal) nach  $x_2$  auflösbar ist. Die Auflösbarkeit ist nicht auf die Monod-Kinetik (5.1c)

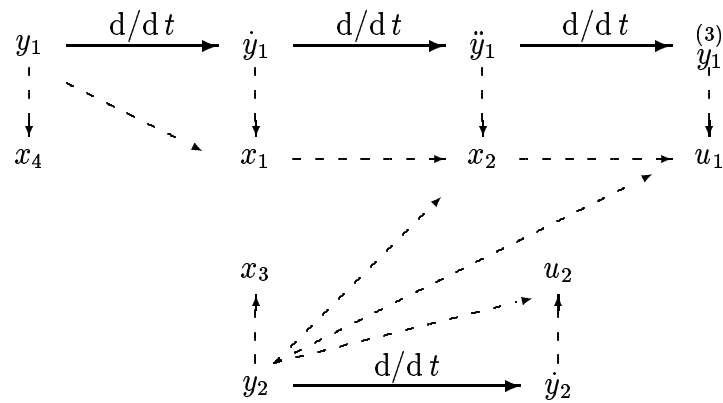


Bild 5.2: Schema zur Bestimmung (--- $\rightarrow$ ) der Größen  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_1$  und  $u_2$  aus  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_1$ ,  $\overset{(3)}{y_1}$ ,  $y_2$  und  $\dot{y}_2$ .

beschränkt, sie gilt vielmehr für alle Kinetiken der Form

$$\mu = \phi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_2} \neq 0. \quad (5.17)$$

Diese Bedingung definiert eine ganze Klasse von Reaktionskinetiken, für die die Prozeßmodelle (5.1) bzw. (5.6) flach sind. Dies bedeutet, daß die Flachheit der Modelle (5.1) bzw. (5.6) von dem speziellen Ansatz für die Wachstumsrate und den darin enthaltenen Parametern unabhängig ist.

**Bemerkung 5.7** Die Beziehung (5.17) stellt eine Bedingung für die Steuerbarkeit des Bioreaktors dar: wenn die Wachstumsrate  $\mu$  nicht von der Substratmasse  $x_2$  abhängt, dann kann die Biomasse  $x_1$  nicht durch die Substratzufuhr  $u_1$  gesteuert werden (vgl. hierzu Abschnitt 2.2.3).

**Bemerkung 5.8** Die systematische Bestimmung des flachen Ausgangs für die Modellgleichungen (5.1) bzw. (5.6) kann auch mit Hilfe der in Abschnitt 3.2 angegebenen Bedingungen erfolgen. Beide Modelle erfüllen die in Satz 3.2 bzw. Satz 3.3 angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die als Spezialfall in Satz 3.4 enthalten sind. Die Teilsystemlängen ergeben sich für das Modell (5.1) zu  $\kappa_1 = n = 2$  und für (5.6) zu  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 1$ .

### 5.1.3 Entwurf von Solltrajektorien

Im folgenden werden aus den Sollverläufen für die Regelgrößen in der Tropho- bzw. Idiophase die jeweiligen Solltrajektorien für den zugehörigen flachen Ausgang bestimmt.

#### Solltrajektorien für die Trophophase

Mit Hilfe der Regelgröße (5.3) läßt sich aufgrund der Beziehungen (5.13) gemäß (2.42) eine Bestimmungsgleichung für die Solltrajektorie des flachen Ausgangs  $y_1 = x_1$  angeben. Die



Wachstumsrate  $\mu(x_2)$  kann mittels (5.1a) als Funktion von  $y_1$  und  $\dot{y}_1$  dargestellt werden:

$$\mu(x_2) = \frac{\dot{y}_1}{y_1}. \quad (5.18)$$

Daraus ergibt sich für die konstante Wachstumsrate  $\mu_d$  eine (instabile) Differentialgleichung erster Ordnung für die Solltrajektorie  $y_{1,d}(t)$

$$\dot{y}_{1,d} - \mu_d y_{1,d} = 0, \quad y_{1,d}(0) = x_{10}, \quad (5.19)$$

deren Lösung analytisch bestimmt werden kann:

$$y_{1,d}(t) = x_{10} \exp(\mu_d t). \quad (5.20)$$

Diese Solltrajektorie wird in (5.13b) eingesetzt, um die flachheitsbasierte Steuerung

$$u_{1,d}(t) = \varphi^{-1}(y_{1,d}(t), \dot{y}_{1,d}(t), \ddot{y}_{1,d}(t)) \quad (5.21)$$

zu bestimmen, die das System der Solltrajektorie (5.4) bzw. (5.20) nachführt. Weiterhin lassen sich damit die Beschränkungen (5.5) überprüfen.

### Solltrajektorien für die Idiophase

In der Idiophase werden aus den Sollverläufen der Regelgrößen  $\mu(x_2)$  und  $c_3$  gemäß (5.9a) und (5.10) unabhängige Solltrajektorien für die Komponenten  $y_1 = x_4$ ,  $y_2 = x_3$  des flachen Ausgangs (5.15) vorgegeben. Aus der Differentialgleichung (5.1a) erhält man mit (5.16c)

$$\mu(x_2) = \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\ddot{y}_1 + p_7 \dot{y}_1}{\dot{y}_1 + p_7 y_1}. \quad (5.22)$$

Daraus ergibt sich mit  $\mu(x_2) = \mu_d$  eine (instabile) Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Solltrajektorie  $y_{1,d}(t)$

$$\ddot{y}_{1,d} + (p_7 - \mu_d)\dot{y}_{1,d} - p_7 \mu_d y_{1,d} = 0, \quad y_{1,d}(0) = x_{40}, \quad \dot{y}_{1,d}(0) = \mu_{Pen} x_{10} - p_7 x_{40}, \quad (5.23)$$

deren Lösung analytisch bestimmt werden kann:

$$y_{1,d}(t) = x_{40} \exp(-p_7 t) + \frac{\mu_{Pen} x_{10}}{p_7 + \mu_d} \left[ \exp(\mu_d t) - \exp(-p_7 t) \right]. \quad (5.24a)$$

Die Solltrajektorie  $y_{2,d}(t)$  für die zweite Komponente  $x_3$  des flachen Ausgangs (5.15) wird mit Hilfe von  $w_{2,d} = x_{3,d}/V$  bestimmt:

$$y_{2,d}(t) = V(t)w_{2,d}(t). \quad (5.24b)$$

Die zur Realisierung der Trajektorien (5.24) erforderliche Steuerung  $\mathbf{u}_d(t)$  ergibt sich durch Einsetzen von  $\mathbf{y}_d(t)$  und dessen Zeitableitungen in (5.16)

$$u_{1,d}(t) = \psi_{22} \left( y_{1,d}, \dot{y}_{1,d}, \ddot{y}_{1,d}, \overset{(3)}{y}_{1,d} \right) \quad (5.25a)$$

$$u_{2,d}(t) = \psi_{21} (y_{1,d}, \dot{y}_{1,d}, \dot{y}_{2,d}). \quad (5.25b)$$

Damit lassen sich auch die Beschränkungen (5.11) off-line überprüfen. Für die aus (5.25) resultierenden Verläufe  $\mathbf{x}_d(t)$  erhält man aus (5.16)

$$x_{1,d}(t) = \psi_{11} (y_{1,d}, \dot{y}_{1,d}) \quad (5.26a)$$

$$x_{2,d}(t) = \psi_{12} (y_{1,d}, \dot{y}_{1,d}, \ddot{y}_{1,d}). \quad (5.26b)$$

### 5.1.4 Statische Zustandsrückführung zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers

Durch Einführen neuer Eingänge gemäß Schritt (iii.) aus Abschnitt 4.1 kann für den Bioreaktor eine asymptotische Folgeregelung entworfen werden, die den Trajektorienfolgefehler  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t)$  gegen Anfangsfehler und Störungen stabilisiert. Da für die Berechnung der Flachheitsbeziehungen (5.13) bzw. (5.16) keine Zeitableitungen des Eingangs  $\mathbf{u}$  benötigt werden, kann eine statische Zustandsrückführung für die Trajektorienfolgeregelung entworfen werden.

#### Zustandsrückführung für die Trophophase

Für das System (5.1) mit einer Eingangsgröße wird der neue Eingang  $v_1$  folgendermaßen eingeführt:

$$v_1 \stackrel{!}{=} \ddot{y}_1. \quad (5.27)$$

Daraus erhält man mit (5.13b) die statische Zustandsrückführung

$$u_1 = \varphi^{-1} (y_1, \dot{y}_1, v_1). \quad (5.28a)$$

Nach (2.66a) kann mit  $\kappa_1 = n = 2$  unter Verwendung von (5.20) eine asymptotische Folgeregelung entworfen werden

$$v_1 = \ddot{y}_{1,d}(t) - q_1^1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_{1,d}(t)) - q_0^1 (y_1 - y_{1,d}(t)), \quad (5.28b)$$

die bei geeigneter Wahl von  $q_1^1$  und  $q_0^1$  den Trajektorienfolgefehler  $e_1(t) = y_1(t) - y_{1,d}(t)$  stabilisiert.

### Zustandsrückführung für die Idiophase

Bestimmt man den flachen Ausgang mit Hilfe der Bedingungen aus Abschnitt 3.2, so erhält man nach Bemerkung 5.8 die Teilsystemlängen  $\kappa_1 = 3$  und  $\kappa_2 = 1$ . Aus diesem Grund werden die neuen Eingangsgrößen folgendermaßen eingeführt:

$$v_1 \stackrel{!}{=} \overset{(3)}{y_1} \quad (5.29a)$$

$$v_2 \stackrel{!}{=} \dot{y}_2. \quad (5.29b)$$

Aus (5.16f), (5.16d) erhält man damit die (statische) Zustandsrückführung zur asymptotischen Folgeregelung

$$u_1 = \psi_{22}(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, v_1) \quad (5.30a)$$

$$u_2 = \psi_{21}(y_1, \dot{y}_1, v_2) \quad (5.30b)$$

$$v_1 = \overset{(3)}{y_{1,d}}(t) - q_2^1 (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_{1,d}(t)) - q_1^1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_{1,d}(t)) - q_0^1 (y_1 - y_{1,d}(t)) \quad (5.30c)$$

$$v_2 = \dot{y}_{2,d}(t) - q_0^2 (y_2 - y_{2,d}(t)). \quad (5.30d)$$

Dabei werden die Sollverläufe (5.24) verwendet, wobei die Parameter  $q_j^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, \kappa_i - 1$ , so gewählt werden, daß die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers stabil ist.

#### 5.1.5 Nichtlineares Folgefilter mit zeitvarianter Verstärkung

Bei dem untersuchten Bioreaktor können nicht alle Zustandsgrößen gemessen werden. Weiterhin kann das Rauschen in den gemessenen Größen (5.2) und (5.7) nicht vernachlässigt werden. Für dieses Rauschen ist aus experimentellen Untersuchungen ein hinreichend genaues stochastisches Modell vorhanden. Darüber hinaus sind die folgenden Parameter zeitlichen Schwankungen unterworfen bzw. nur unzureichend genau bekannt: während beider Phasen das Volumen  $V$ , der Koeffizient  $m_S$  des Erhaltungsstoffwechsels und der Ausbeutekoeffizient  $p_4$ ; für die Idiophase ist zusätzlich der Ausbeutekoeffizient  $p_5$  und die Produktbildungsrate  $\mu_{Pen}$  zeitlich veränderlich. Der zeitliche Verlauf  $V(t)$  kann direkt gemessen werden, während eine direkte Messung der anderen Parameter nicht möglich ist.

Im folgenden wird, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, ein nichtlineares Folgefilter mit zeitvarianter Verstärkung zur Realisierung der Zustandsrückführung (5.30) und zur Rekonstruktion der unbekannt bzw. zeitlich veränderlichen Parameter des Reaktormodells (5.6)

für die Idiophase entworfen:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \\ \dot{\hat{m}}_S \\ \dot{\hat{y}}_{PP} \\ \dot{\hat{\mu}}_{Pen} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{p_1}\mu(\hat{x}_2)\hat{x}_1 - \frac{1}{p_5}\hat{\mu}_{Pen}\hat{x}_1 - \hat{m}_S\hat{x}_1 + p_2\hat{u}_1 \\ -\frac{1}{\hat{y}_{PP}}\hat{\mu}_{Pen}\hat{x}_1 + p_6\hat{u}_2 \\ \hat{\mu}_{Pen}\hat{x}_1 - p_7\hat{x}_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K(t) \begin{bmatrix} \eta_1 - \hat{x}_1 \\ \eta_2 - \frac{1}{p_3}\mu(\hat{x}_2) + p_4\hat{m}_S\hat{x}_1 \\ \eta_3 - \hat{x}_3 \\ \eta_4 - \hat{x}_4 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Auf die Darstellung des Folgefilters für die Trophophase wird aus Platzgründen verzichtet, da es analog zum Filter für die Idiophase entworfen werden kann. In (5.31) wird angenommen, daß zusätzlich zu den Messungen (5.2), (5.7) das Volumen gemessen wird. Außerdem wird in (5.31) für die Größen  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  die flachheitsbasierte Zustandsrückführung (5.30)

$$\hat{u}_1 = \psi_5 \left( \hat{y}_1, \dot{\hat{y}}_1, \ddot{\hat{y}}_1, \hat{v}_1 \right) = \bar{\psi}_5 \left( \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_4, \hat{v}_1 \right) \quad (5.32a)$$

$$\hat{u}_2 = \psi_5 \left( \hat{y}_1, \dot{\hat{y}}_1, \hat{v}_2 \right) = \bar{\psi}_6 \left( \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_4, \hat{v}_2 \right) \quad (5.32b)$$

$$\hat{v}_1 = \varphi_1 \left( \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_4, y_{1,d}, \dot{y}_{1,d}, \dots, y_{1,d}^{(3)} \right) \quad (5.32c)$$

$$\hat{v}_2 = \varphi_2 \left( \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_4, y_{2,d}, \dot{y}_{2,d} \right) \quad (5.32d)$$

gemäß (4.6) eingesetzt. Zusätzlich werden in (5.32) die Parameter  $m_S$ ,  $y_{PP}$  und  $\mu_{Pen}$  durch die entsprechenden geschätzten Werte bzw.  $\hat{V}$  durch den gemessenen Wert ersetzt.

Für den Filterentwurf werden die Systemgleichungen (5.6) und die Meßgleichungen (5.2), (5.7) für die Idiophase gemäß (4.27) additiv um die normalverteilten Größen  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2(t)$  erweitert. Für die Terme  $\mathbf{r}_{1,2}(t)$  wird ein stochastisches Modell mit den Matrizen

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} r_{1,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,22} & 0 & r_{1,24} & r_{1,25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,33} & 0 & 0 & r_{1,36} & 0 \\ 0 & r_{1,24} & 0 & r_{1,44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,25} & 0 & 0 & r_{1,55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,36} & 0 & 0 & r_{1,66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{1,77} \end{pmatrix}, \quad R_2(t) = \begin{pmatrix} r_{2,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{2,44} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

angesetzt. Die Elemente  $r_{1,24}$  und  $r_{1,25}$  beschreiben den Einfluß von Änderungen der Penicillinmasse  $x_4$  bzw. des Koeffizienten  $m_S$  des Erhaltungsstoffwechsels auf die Substratände-

zung  $\dot{x}_2$ . Das Element  $r_{1,36}$  gibt den Einfluß von Änderungen des Ausbeutekoeffizienten  $y_{PP}$  auf die Änderung von  $x_3$  an.

Für die Dimensionierung des Filters (4.29b), (4.29c) müssen die Matrizen  $A(t)$  und  $C(t)$  gemäß (4.9c) durch Linearisierung des Systems um die Solltrajektorien (5.24) berechnet werden. Mit Hilfe von  $A(t)$  und  $C(t)$  kann die Matrix-Riccati-Differentialgleichung (4.29b) für die Matrix  $P(t)$  aufgestellt werden. Die Anfangswerte dieser Differentialgleichung lauten

$$P(0) = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{24} & 0 & p_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{77} \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Die zeitvariante Verstärkung  $K(t)$  des Folgefilters wird aus der Lösung der Differentialgleichung (4.29b) mit der Anfangsbedingung (5.34) berechnet.

Die Struktur des geschlossenen Regelkreises für den Bioreaktor ist in Bild 4.1 auf Seite 91 dargestellt. Dem Block ① entsprechen die Sollverläufe (5.9a) und (5.10). Der neue Zustand in Block ② wird gemäß den Größen auf der linken Seite von (5.16) berechnet. Die asymptotische Folgeregelung und die Zustandsrückführung in den Blöcken ③ und ④ wird durch (5.30) beschrieben. Die Gleichungen des nichtlinearen Filters in Block ⑤ entsprechen (5.31), (5.32).

**Bemerkung 5.9** *Die Inbetriebnahme der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung mit Zustandsschätzung wird gemäß Bemerkung 4.3 folgendermaßen vorgenommen: zu Beginn wird das System mit Hilfe der flachheitsbasierten Steuerung (5.25) entlang der Solltrajektorie (5.4), (5.24b) geführt. Währenddessen kann das Filter (4.29) einschwingen. Ist die Schätzung hinreichend genau, so wird die Zustandsrückführung (5.32) zugeschaltet.*

**Bemerkung 5.10** *Da zu Beginn der Tropho- bzw. Idiophase das jeweilige Modell den zugehörigen Prozeß hinreichend genau beschreibt, kann zunächst auf den Einsatz einer Regelung verzichtet werden und der Prozeß mit Hilfe einer Steuerung angefahren werden.*

*Bei zunehmender Biomasse ist der Bioreaktor nicht mehr ideal durchmischt. Dadurch und aufgrund der Alterung der Organismen ändern sich Wachstum und Produktbildung im Laufe der Zeit. Aus diesem Grund ist es erforderlich, bei einer längeren Prozeßzeit den daraus resultierenden Modellfehlern mittels einer asymptotischen Folgeregelung Rechnung zu tragen.*

### 5.1.6 Simulationsergebnisse

Den folgenden Simulationen liegt das Modell aus Abschnitt 5.1.1 für die Idiophase zugrunde. Für die Simulation wurde die flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung (5.30) zusammen mit dem Folgefilter aus Abschnitt 5.1.5 eingesetzt. Die Solltrajektorien des flachen Ausgangs wurden nach (5.24) bestimmt. Die Anfangsbedingungen für die Zustandsvariablen und die Filterzustände sowie die Dynamikparameter aus (5.30) sind im Anhang C.1.2 zusammengefaßt. Die fehlerhaften Anfangsbedingungen in den gemessenen Größen wurden gewählt, weil im realen Prozeß die Messungen teilweise zeitlich verzögert und durch Rauschanteile verfälscht zur Verfügung stehen.

**Bemerkung 5.11** *Der Einfachheit halber wird für die folgende Simulation angenommen, daß der Prozeß direkt in der Idiophase gestartet wird, d. h. die Trophophase wird nicht durchlaufen. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, daß der Prozeß in der Idiophase bereits kurze Zeit durch eine Steuerung angefahren wurde, so daß insbesondere die Anfangsbedingungen für Precursor  $x_{30}$  und Penicillin  $x_{40}$  von Null verschieden sind.*

*Weiterhin werden die asymptotische Folgeregelung (5.30) und das Folgefilter aus Abschnitt 5.1.5 gleichzeitig gestartet. Für den Einsatz der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung im realen Prozeß ist jedoch die Vorgehensweise nach Bemerkung 5.9 vorzuziehen.*

Im realen Prozeß sind die Parameter  $m_S$ ,  $y_{PP}$  und  $\mu_{Pen}$  zeitlichen Schwankungen unterworfen. Aus diesem Grund werden für diese in der Simulation folgende Verläufe angesetzt, die den Gegebenheiten im realen Prozeß nachgebildet sind:

$$m_S(t) = \left(20 - 0.2 \frac{t}{h}\right) \frac{\text{mg S}}{\text{g TS} \cdot \text{h}} \quad (5.35a)$$

$$y_{PP}(t) = \left(2000 - 5 \frac{t}{h}\right) \frac{\text{mg Pen}}{\text{g Paa}} \quad (5.35b)$$

$$\mu_{Pen}(t) = \left(3 - 0.005 \frac{t}{h}\right) \frac{\text{mg Pen}}{\text{g TS} \cdot \text{h}}. \quad (5.35c)$$

Die Solltrajektorien der Regelgrößen (5.8) und deren tatsächlicher Verlauf sind in Bild 5.3 auf der nächsten Seite dargestellt. Die bleibende Abweichung zwischen  $\mu$  und  $\mu_d$  ist vernachlässigbar klein. Sie geht auf die Vernachlässigung der zeitlichen Veränderung des Volumens  $V$  gemäß Bemerkung 5.4 zurück. Der Verlauf der Komponenten des flachen Ausgangs (5.15) ist in Bild 5.4 auf der nächsten Seite dargestellt. In beiden Bildern ist zu erkennen, daß die Größen den entsprechenden Sollverläufen nachgeführt werden. Der Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  gemäß (5.30) ist in Bild 5.5 auf Seite 126 zu sehen. Während des gesamten Prozesses werden die Stellgrößenbeschränkungen (5.5) mit  $u_{i,\max} = 11/h$ ,  $i = 1, 2$ , eingehalten. Die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung (4.29b) für die Kovarianzmatrix  $P(t)$  wird

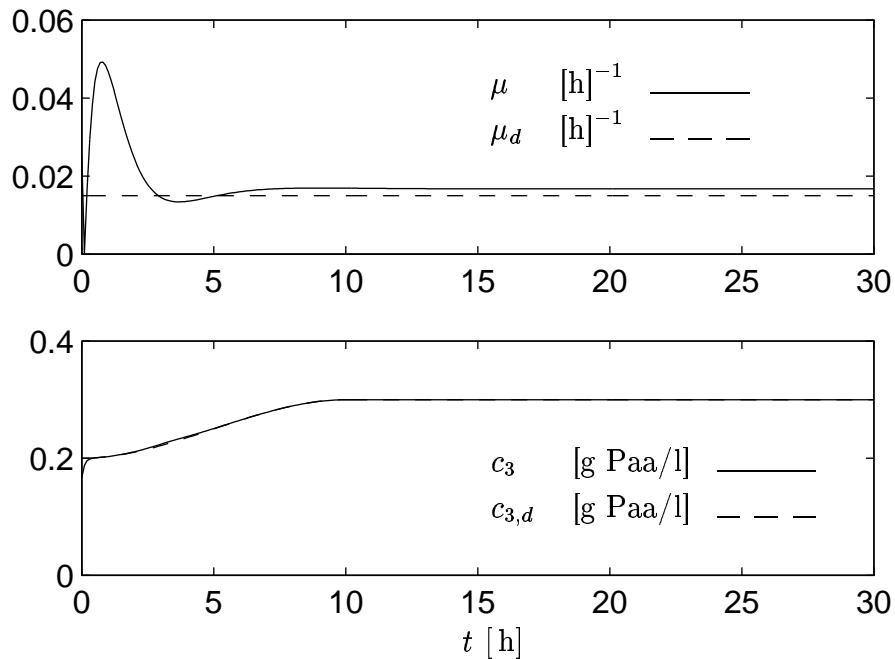


Bild 5.3: Simulierter Verlauf der Regelgrößen  $\mu(t)$ ,  $c_3(t)$  und der zugehörigen Sollverläufe  $\mu_d(t)$ ,  $c_{3,d}(t)$ .

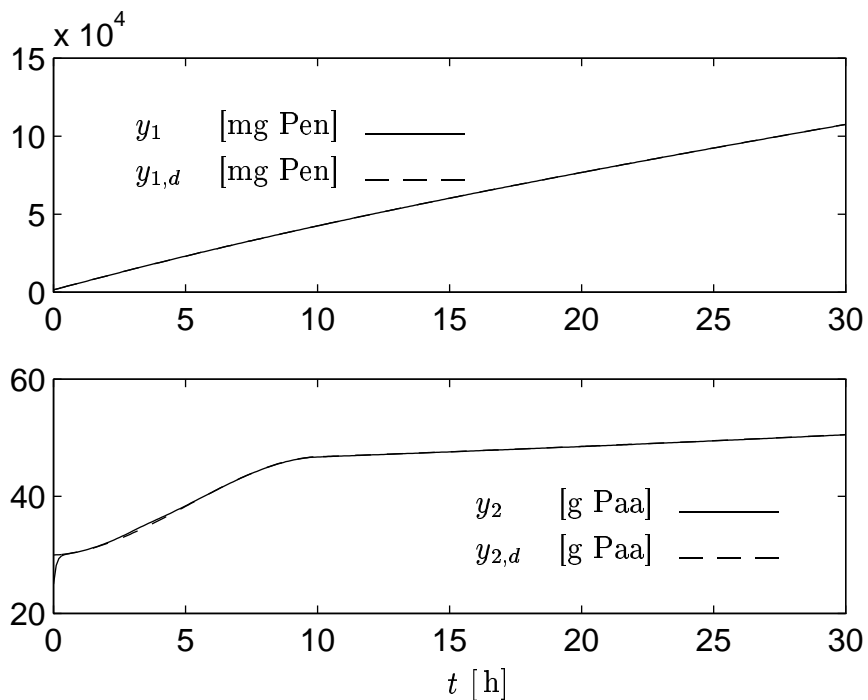


Bild 5.4: Simulierter Verlauf der Komponenten des flachen Ausgangs  $y_1(t) = x_4(t)$ ,  $y_2(t) = x_3(t)$  und der zugehörigen Sollverläufe  $y_{1,d}(t)$ ,  $y_{2,d}(t)$ .

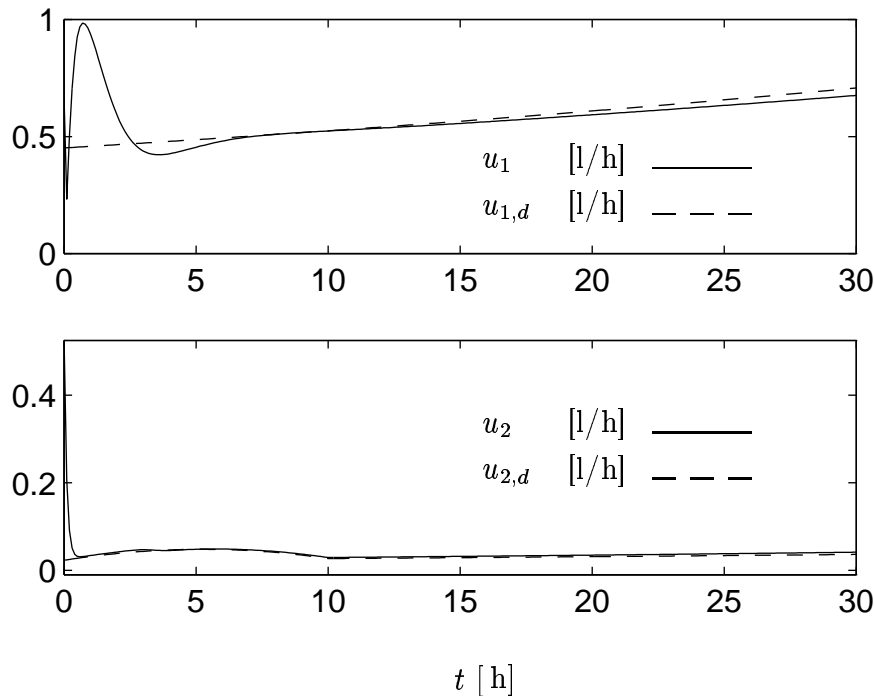


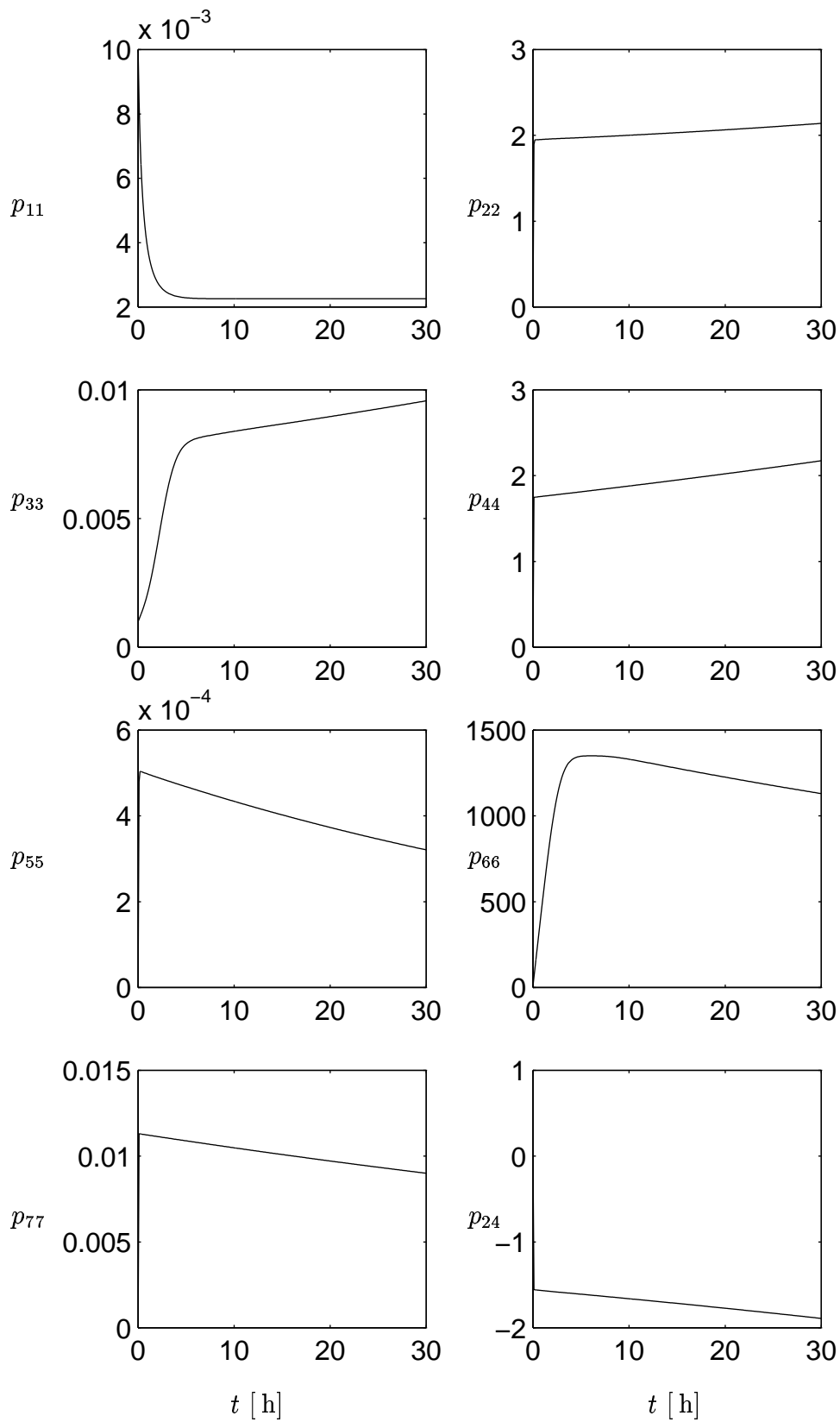
Bild 5.5: Simulierter Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  und der zugehörigen Steuerung  $u_{1,d}(t)$ ,  $u_{2,d}(t)$  zur Trajektorienfolge.

off-line bestimmt. Der zeitliche Verlauf ausgewählter Elemente von  $P(t)$  ist in Bild 5.6 dargestellt. Mit Hilfe der Kovarianzmatrix  $P(t)$  wird die Filterverstärkung  $K(t)$  gemäß (4.29c) gebildet. In Bild 5.7 auf Seite 128 sind einige ausgewählte Elemente von  $K(t)$  zu sehen. Man erkennt, daß alle dargestellten Elemente beschränkt sind. Die gute Konvergenz des Folgefilters kann man in Bild 5.8 auf Seite 129 erkennen. Sowohl die Fehler in den Zustandsgrößen des Bioreaktors als auch in den zeitvarianten Parametern (5.35) klingen schnell ab.

### 5.1.7 Experimentelle Ergebnisse

Für den betrachteten Bioreaktor wurden in Zusammenarbeit mit dem Institut für Bioverfahrenstechnik der Universität Stuttgart experimentelle Untersuchungen vorgenommen. Während der Trophophase wurde das System mit Hilfe der flachheitsbasierten Folgeregelung (5.28) geregelt. Zur Rekonstruktion der nicht gemessenen Zustandsgrößen und des Koeffizienten  $m_S$  des Erhaltungsstoffwechsels wurde ein erweitertes Kalman-Filter eingesetzt. Der Verlauf der Biomasse  $x_1$ , die gleich dem flachen Ausgang ist, ist in Bild 5.9 auf Seite 130 dargestellt. Wie anhand der logarithmischen Darstellung zu erkennen ist, liegen die Meßwerte (Kreise) ziemlich genau auf einer Geraden mit der Steigung  $\mu_d = 0.015 \text{ h}^{-1}$ , was dem von Frese (1992) vorgeschlagenen Wert entspricht. Die Steigung der Geraden entspricht dabei der Wachstumsrate  $\mu$  des exponentiellen Wachstums gemäß (5.20). Dies bedeutet, daß



Bild 5.6: Simulierter Verlauf der Elemente  $p_{ij}(t)$  der Kovarianzmatrix  $P(t)$ .

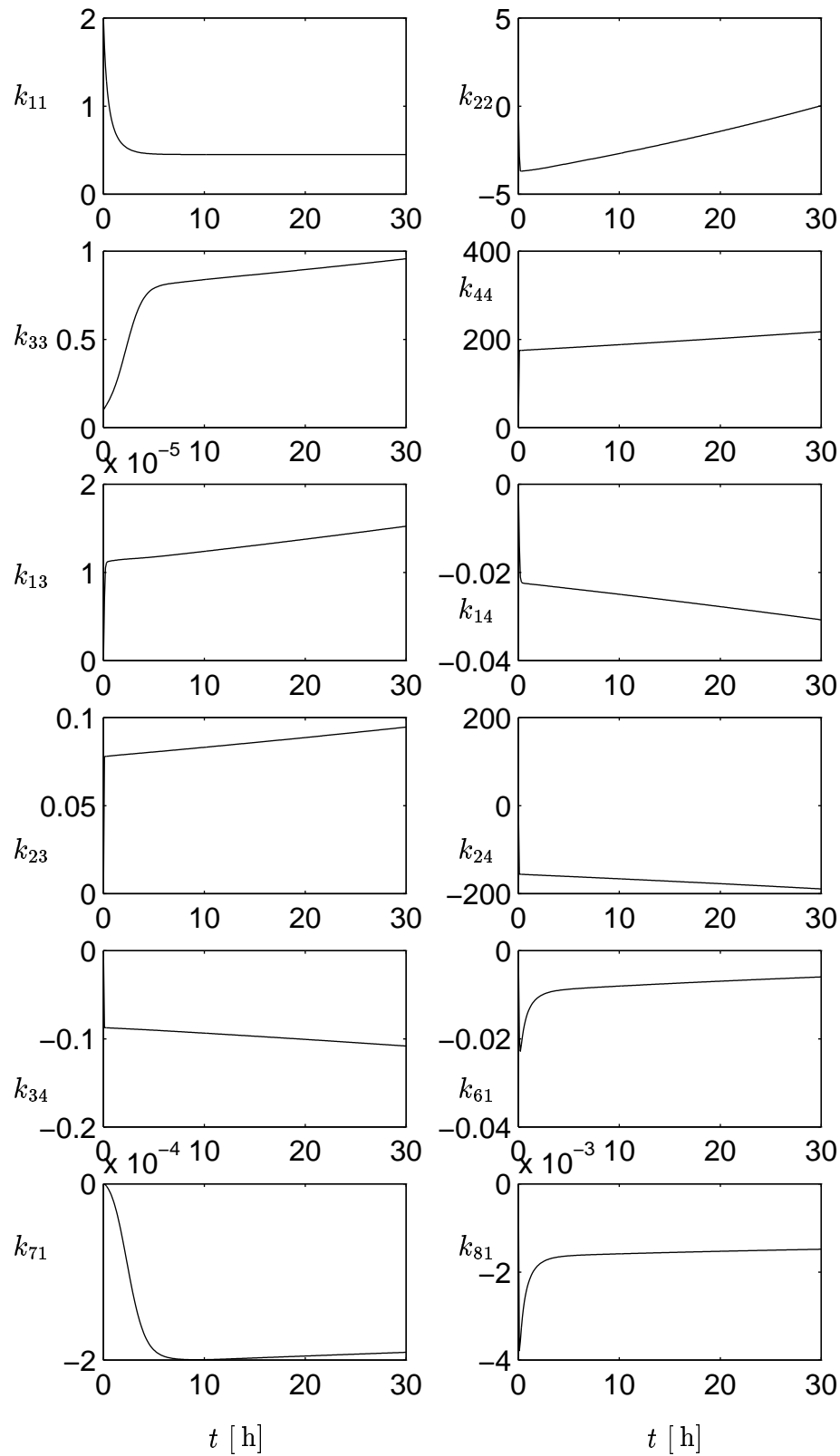


Bild 5.7: Simulierter Verlauf ausgewählter Elemente  $k_{ij}(t)$  der Filterverstärkung  $K(t)$ .

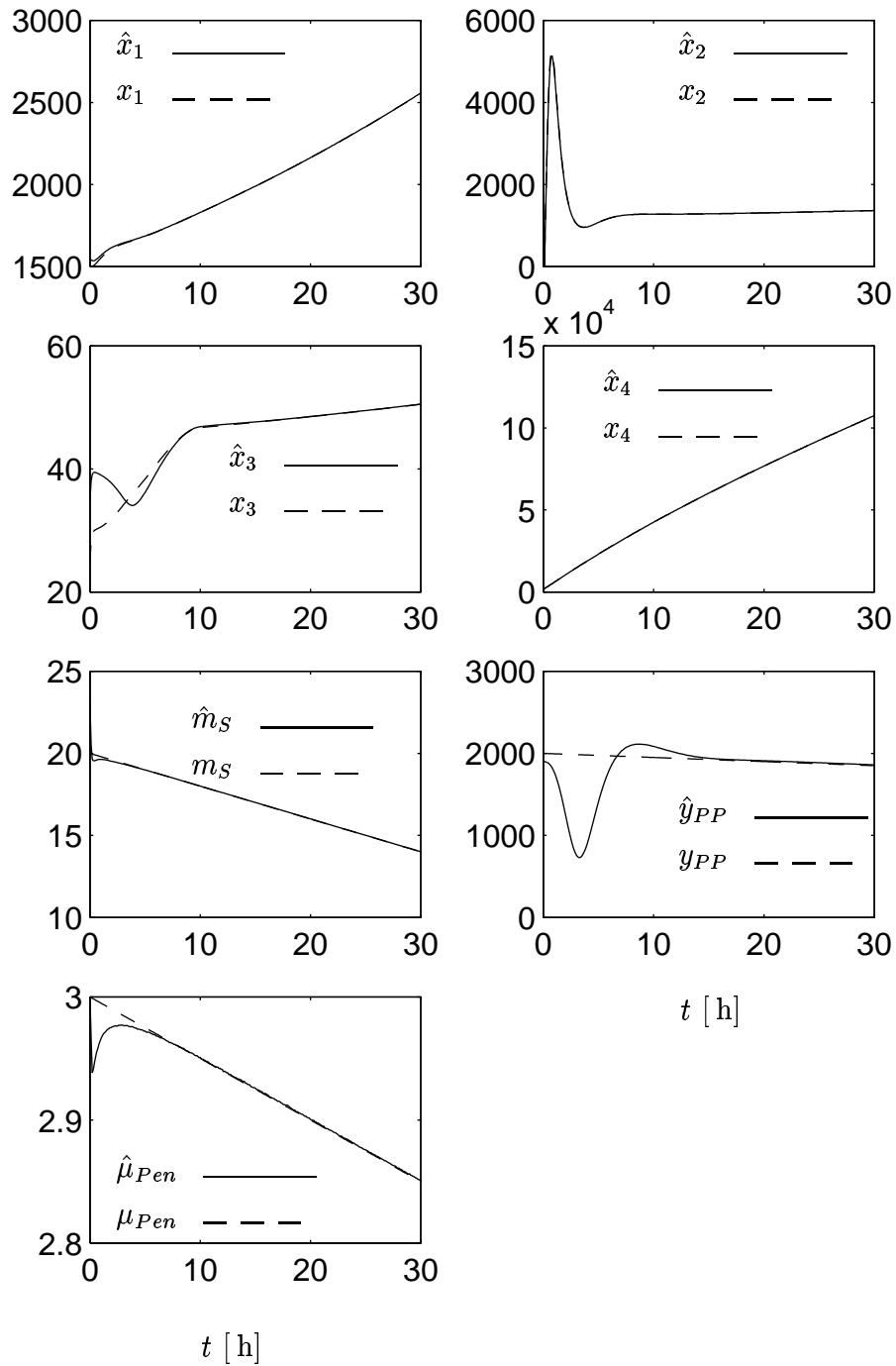


Bild 5.8: Simulierter Verlauf der Originalzustände  $x_i(t)$  und der zeitlich veränderlichen Parameter  $m_S(t)$ ,  $y_{PP}(t)$  und  $\mu_{Pen}(t)$  sowie der zugehörigen Schätzwerte.

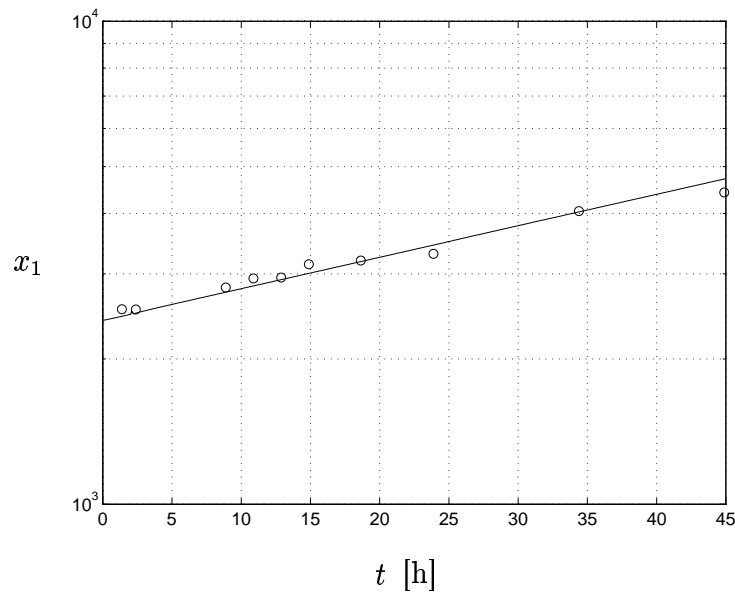


Bild 5.9: Soll- und Meßwerte der Biomasse  $x_1(t)$  des mit der asymptotischen Folgeregelung (5.28) geregelten Bioreaktors während der Trophophase. Die durchgezogene Linie entspricht dem Sollverlauf  $x_{1,d}(t)$ , die Kreise kennzeichnen Meßwerte  $x_1(t_k)$ . Aufgrund der logarithmischen Darstellung stellt die Steigung der Geraden  $x_{1,d}(t)$  den Sollwert  $\mu_d$  der Wachstumsrate dar.

– trotz Modell- und Parameterunsicherheiten – die asymptotische Folgeregelung (5.28) die Regelgröße (5.3) sehr gut auf dem Sollwert (5.4) hält.

Experimentelle Ergebnisse für die Regelung des Bioreaktors in der Idiophase waren zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit noch nicht verfügbar.

## 5.2 Chemischer Rührkesselreaktor

Als Beispiel für das Anfahren eines stationären Arbeitspunkts wird ein nichtlineares Modell eines kontinuierlich betriebenen Rührkesselreaktors mit Neben- und Folgereaktion betrachtet. Dieses Reaktormodell basiert auf einem realistischen Prozeßentwurf und wurde von Klatt und Engell (1993) als Testbeispiel für nichtlineare Reglerentwurfsverfahren vorgestellt und in (Klatt *et al.* 1995, Chen *et al.* 1995) erweitert. Im folgenden wird zunächst das Trajektorienfolgeproblem definiert. Danach wird der flachheitsbasierte Entwurf vorgestellt.

Die flachheitsbasierte Regelung des betrachteten Reaktors ist Gegenstand von verschiedenen Veröffentlichungen: in (Rothfuß *et al.* 1995b) wird die flachheitsbasierte Regelung mit Hilfe eines Arbeitspunktbeobachters realisiert; in (Rothfuß *et al.* 1996a, Rothfuß *et al.* 1996b) wird zur Zustandsschätzung der in Abschnitt 4.2 vorgestellte Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung auf der Basis von Temperatur- und Konzentrationsmessungen verwendet.

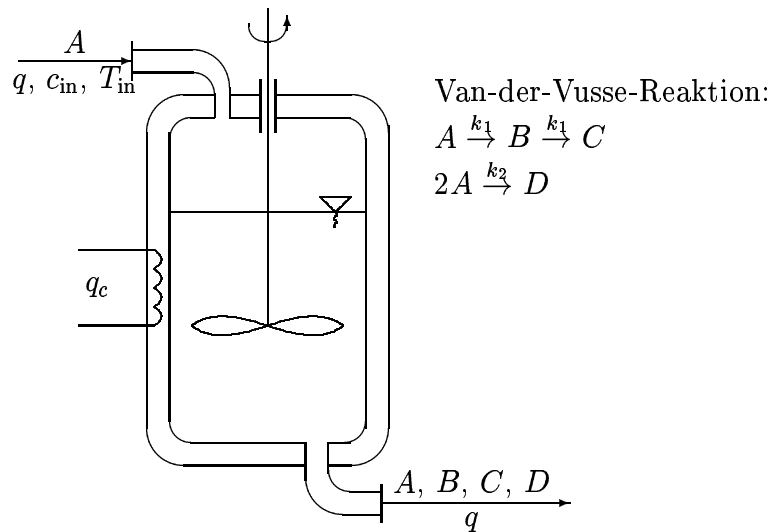


Bild 5.10: Apparate- und Reaktionsschema des kontinuierlich betriebenen Rührkesselreaktors (Klatt und Engell 1993).

Im Unterschied dazu wird im folgenden der Folgebeobachter allein auf der Basis von Temperaturmessungen entworfen.

### 5.2.1 Das Trajektorienfolgeproblem für den Rührkesselreaktor

In dem Rührkessel in Bild 5.10 wird von außen über den Volumestrom  $q$  ein Edukt  $A$  mit der Zulaufkonzentration  $c_{\text{in}}$  und der Zulauftemperatur  $T_{\text{in}}$  zugeführt. Als Stellgrößen dienen der auf das Reaktorvolumen bezogene Volumenstrom  $u_1 = q/V_R$  und die Kühlleistung  $u_2 = q_c$ , mit der dem Reaktor über einen Wärmetauscher Energie entzogen werden kann. Die flüssige Phase im Innern des Reaktors wird als ideal durchmischt und von konstantem Volumen angenommen. Das Edukt  $A$  (Cyclopentadien) reagiert nach einer sog. *Van-der-Vusse-Reaktion*  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $2A \rightarrow D$  zu einem erwünschten Produkt  $B$  (Cyclopentenol). Außerdem entstehen in einer Folge- bzw. Parallelreaktion noch die unerwünschten Nebenprodukte  $C$  (Cyclopentandiol) und  $D$  (Dicyclopentadien).

Das Modell für den Rührkesselreaktor kann mit Hilfe von Material- und Enthalpiebilanzen aufgestellt werden:

$$\dot{c}_A = r_A(c_A, T) + [c_{\text{in}} - c_A]u_1 \quad (5.36a)$$

$$\dot{c}_B = r_B(c_A, c_B, T) - c_B u_1 \quad (5.36b)$$

$$\dot{T} = h(c_A, c_B, T) + \alpha[T_c - T] + [T_{\text{in}} - T]u_1 \quad (5.36c)$$

$$\dot{T}_c = \beta[T - T_c] + \gamma u_2. \quad (5.36d)$$

Dabei beschreiben  $c_A(t)$  und  $c_B(t)$  die Konzentrationen des Edukts  $A$  und des erwünschten Produkts  $B$ . Die Größen  $T(t)$  und  $T_c(t)$  sind die Temperaturen im Innern des Reaktors bzw. im Kühlmantel. Im Modell (5.36) werden keine Bilanzgleichungen für die Konzentrationen der Nebenprodukte  $C$  und  $D$  betrachtet, da diese die interessierenden Modellgleichungen (5.36) nicht beeinflussen. Für die Reaktionsraten  $r_A$ ,  $r_B$  und den Beitrag  $h$  der Reaktion zur Änderung von  $T$  werden die folgenden Ansätze<sup>2</sup> gemacht:

$$r_A(c_A, T) = -k_1(T)c_A - k_2(T)c_A^2 \quad (5.37a)$$

$$r_B(c_A, c_B, T) = k_1(T)[c_A - c_B] \quad (5.37b)$$

$$h(c_A, c_B, T) = -\delta [k_1(T)[c_A\Delta H_{AB} + c_B\Delta H_{BC}] + k_2(T)c_A^2\Delta H_{AD}]. \quad (5.37c)$$

Dabei sind die Geschwindigkeitskonstanten  $k_1(T)$  and  $k_2(T)$  Arrhenius-Funktionen der Temperatur

$$k_i(T) = k_{i0} \exp\left(\frac{-E_i}{T/^\circ\text{C} + 273.15}\right), \quad i = 1, 2. \quad (5.38)$$

Die in Anhang C.2 zusammengefaßten konstanten Parameter sind aus den in (Chen *et al.* 1995) angegebenen nominellen Werten berechnet. Als Meßgrößen stehen die beiden Temperaturen zur Verfügung:

$$\eta_1 = T \quad (5.39a)$$

$$\eta_2 = T_c. \quad (5.39b)$$

Als Regelgrößen werden die Reaktortemperatur  $T$  und die Konzentration des erwünschten Produkts  $c_B$  verwendet:

$$w_1 = T \quad (5.40a)$$

$$w_2 = c_B. \quad (5.40b)$$

**Bemerkung 5.12** *Der betrachtete Reaktor soll an einem Arbeitspunkt betrieben werden, an dem die stationäre Konzentration  $c_{B,s}$  des Produkts  $B$  möglichst groß ist. Das Trajektorienfolgeproblem für den chemischen Rührkesselreaktor besteht darin, für den Anfahrvorgang, der auch als Wechsel zwischen zwei Arbeitspunkten mit unterschiedlichen Produktkonzentrationen interpretiert werden kann, die Sollverläufe für die Regelgrößen (5.40) zu entwerfen. Dabei soll gewährleistet werden, daß die Reaktortemperatur  $T$  in einem bestimmten Intervall gehalten und die Produktkonzentration  $c_B$  stationär auf einen festen Wert in einem vorgegebenen Intervall eingestellt werden können.*

<sup>2</sup>Aufgrund der Parallelreaktion  $2A \rightarrow D$  müßte in (5.37a) der letzte Summand den Faktor  $2k_2(T)$  enthalten. Der fehlende Faktor  $2$  wird in (Klatt und Engell 1993) durch den Stofffaktor  $k_{20}$  (vgl. (5.38)) berücksichtigt. Diese Formulierung wird auch in dieser Arbeit beibehalten, um Vergleiche mit anderen Ergebnissen zu diesem nichtlinearen Testbeispiel zu erleichtern.

Daraus erhält man die folgenden Anforderungen für die Sollverläufe:

$$w_{1,d} = T_d \in [T_{\min}, T_{\max}] \quad (5.41a)$$

$$w_{2,d}(t \rightarrow \infty) = c_{B,S} \in [c_{B,\min}, c_{B,\max}]. \quad (5.41b)$$

Für die Stellgrößen gelten die folgenden Beschränkungen:

$$3 \text{ h}^{-1} < u_1 < 35 \text{ h}^{-1} \quad (5.42a)$$

$$-9000 \text{ kJ h}^{-1} < u_2 < 0. \quad (5.42b)$$

In der Zulaufkonzentration  $c_{\text{in}}$  treten nicht meßbare Schwankungen auf:

$$4.5 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \leq c_{\text{in}} \leq 5.7 \frac{\text{mol}}{\text{l}}. \quad (5.43)$$

Außerdem wird der Parameter  $\gamma$  in (5.36d), der den Wärmedurchgang vom Reaktor zum Kühlmantel beschreibt, im Laufe der Zeit aufgrund von Verschmutzungen kleiner.

**Bemerkung 5.13** *In dem von Klatt und Engell (1993) beschriebenen Problem laufen die beiden Schritte der Folgereaktion  $A \rightarrow B \rightarrow C$  mit der gleichen Geschwindigkeitskonstanten  $k_1(T)$  ab. Die Gültigkeit der nachfolgenden Ausführungen hängt jedoch nicht von dieser speziellen Annahme ab.*

### 5.2.2 Heuristische Bestimmung eines flachen Ausgangs

Zunächst soll ein flacher Ausgang für das Reaktormodell heuristisch nach Schritt (i.a) in Abschnitt 4.1 bestimmt werden. Auf die systematische Bestimmung eines flachen Ausgangs wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Der flache Ausgang hat zwei Komponenten. Die ersten beiden Gleichungen in (5.36) werden auf der Basis von Materialbilanzen aufgestellt, die beiden letzten Gleichungen erhält man aus Enthalpiebilanzen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, den flachen Ausgang so zu wählen, daß jeweils eine Komponente eines der „Teilsysteme“ charakterisiert. Hierfür eignen sich die beiden folgenden Größen als Komponenten des flachen Ausgangs:

$$y_1 = T \quad (5.44a)$$

$$y_2 = \frac{c_{\text{in}} - c_A}{c_B}. \quad (5.44b)$$

Beide Komponenten haben eine unmittelbare anschauliche Bedeutung: neben der Reaktortemperatur  $y_1 = T$  ist dies die inverse Selektivität  $y_2 = (c_{\text{in}} - c_A)/c_B$ , die die „Produktivität“ des Reaktors charakterisiert.

Im folgenden wird anhand der Definition gemäß Schritt (ii.) in Abschnitt 4.1 gezeigt, daß (5.44) einen flachen Ausgang für den Rührkesselreaktor darstellt. Die Ergebnisse der

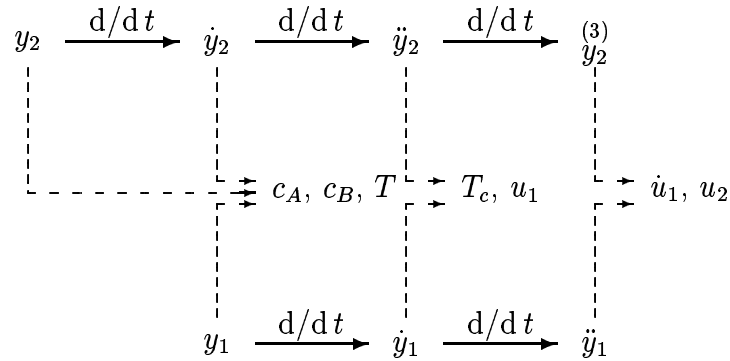


Bild 5.11: Schema der Flachheitsanalyse für den Rührkesselreaktor (5.36) bis (5.38). Ein  $\dashrightarrow$  steht für die Bestimmung der Systemgrößen aus  $y_1, \dot{y}_1$  und  $y_2^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, 3$ .

folgenden Berechnungen sind teilweise recht umfangreich und werden aus diesem Grund nur durch ihre funktionalen Abhängigkeiten beschrieben. Zum leichteren Verständnis der folgenden Ausführungen dient das in Bild 5.11 dargestellte Schema, das einen Überblick über die erforderlichen Berechnungen für den Flachheitsnachweis gibt. Dabei repräsentieren dicke Pfeile die Zeitableitungen des flachen Ausgangs. Die gestrichelten Pfeile geben an, wie aus den Zeitableitungen des flachen Ausgangs die Größen  $c_A, c_B, T, T_c, u_1, u_2$  und  $\dot{u}_1$  durch algebraische Umformungen berechnet werden, ohne dabei Differentialgleichungen zu integrieren.

Der Zustand  $T$  kann direkt mit (5.44a) durch den flachen Ausgang ausgedrückt werden. Für die Darstellung der weiteren Zustands- und Eingangsgrößen bildet man zunächst die erste Zeitableitung des flachen Ausgangs

$$\dot{y}_1 = d_1(c_A, c_B, T, T_c) + d_2(T)u_1 = h(c_A, c_B, T) + \alpha[T_c - T] + [T_{in} - T]u_1 \quad (5.45a)$$

$$c_B^2 \dot{y}_2 = -c_B r_A(c_A, T) - [c_{in} - c_A] r_B(c_A, c_B, T). \quad (5.45b)$$

Man beachte, daß  $\dot{y}_2$  nicht von den Eingangsgrößen abhängt. Löst man (5.44b) nach  $c_A$  auf und setzt dies und (5.37) in (5.45b) ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für  $c_B$ . Unter der Voraussetzung  $c_B > 0$  kann diese eindeutig aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} c_B &= \psi_1(y_1, y_2, \dot{y}_2) \\ &= \frac{c_{in}}{y_2} - \frac{k_1(y_1)}{2k_2(y_1)} + \frac{\dot{y}_2 + \sqrt{\epsilon(y_1, y_2, \dot{y}_2)}}{2y_2^2 k_2(y_1)}, \quad y_2 \neq 0 \text{ mit} \\ \epsilon(y_1, y_2, \dot{y}_2) &= \left[ \dot{y}_2 - k_1(y_1)y_2^2 \right]^2 + 4c_{in}y_2k_2(y_1) \left[ \dot{y}_2 - k_1(y_1)y_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.46a)$$

Setzt man diese Beziehung in (5.44b) ein, so erhält man

$$c_A = \psi_2(y_1, y_2, \dot{y}_2) = c_{in} - y_2 \psi_1(y_1, y_2, \dot{y}_2). \quad (5.46b)$$



Im folgenden wird gezeigt, daß auch die Zustandsvariablen  $T_c$ ,  $u_1$  und  $u_2$  in Abhängigkeit von  $y_1$ ,  $y_2$  und deren Zeitableitungen ausgedrückt werden können. Hierfür bildet man die zweite Zeitableitung des flachen Ausgangs

$$\dot{y}_1 = e_1(c_A, c_B, T, T_c, u_1) + e_2(T)\dot{u}_1 + e_3u_2 \quad (5.47a)$$

$$\ddot{y}_2 = e_4(c_A, c_B, T, T_c) + e_5(c_A, c_B, T)u_1. \quad (5.47b)$$

Ersetzt man in (5.45a) und (5.47b) die Zustandsvariablen  $c_A$ ,  $c_B$  und  $T$  mit Hilfe von (5.44a) und (5.46) durch  $y_1$ ,  $y_2$  und  $\dot{y}_2$ , so erhält man

$$\dot{y}_1 = \bar{h}(y_1, y_2, \dot{y}_2) + \alpha[T_c - y_1] + [T_{\text{in}} - y_1]u_1 \quad (5.48a)$$

$$\ddot{y}_2 = \bar{e}_4(y, \dot{y}) + \bar{e}_5(y, \dot{y})u_1, \quad \bar{e}_5 \neq 0. \quad (5.48b)$$

Die Beziehungen (5.45a) und (5.48b) sind linear bezüglich  $T_c$  und  $u_1$ . Daraus können  $T_c$  und  $u_1$  mit Hilfe von (5.44a) und (5.46) berechnet werden:

$$T_c = \psi_4(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2) \quad (5.49a)$$

$$u_1 = \psi_5(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2). \quad (5.49b)$$

Zuletzt kann die zweite Eingangsgröße  $u_2$  zusammen mit  $\dot{u}_1$  aus (5.47a) und

$$\begin{aligned} \overset{(3)}{y}_2 &= q_1(c_A, c_B, T, T_c, u_1, \dot{u}_1) + \\ & q_2(c_A, c_B, T, T_c, u_1, \dot{u}_1)u_2, \quad q_2(\cdot) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.50)$$

berechnet werden:

$$u_2 = \psi_6(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \overset{(3)}{y}_2) \quad (5.51a)$$

$$\dot{u}_1 = \psi_7(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \overset{(3)}{y}_2). \quad (5.51b)$$

Die Beziehungen (5.44a), (5.46), (5.49) und (5.51a) entsprechen der Gleichung (2.6). Da der flache Ausgang (5.44) von der Form (2.5) ist und  $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}$  gilt, ist die Flachheit des Reaktormodells (5.36)-(5.38) gezeigt.

**Bemerkung 5.14** Für den Flachheitsnachweis beim Reaktormodell ist für die Berechnung von  $u_2$  die Kenntnis von  $u_1$  und  $\dot{u}_1$  erforderlich. Dies entspricht der in Bemerkung 2.9 auf Seite 25 erwähnten Dreiecksstruktur. Diese Dreiecksstruktur bezüglich der Eingangsableitungen findet sich auch bei der verallgemeinerten nichtlinearen Regelungsform (3.21).

**Bemerkung 5.15** Die gezeigte Berechnung der Zustands- und Eingangsvariablen aus  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_1$ ,  $y_2$ ,  $\dot{y}_2$ ,  $\ddot{y}_2$  und  $\overset{(3)}{y}_2$  führt auf die verallgemeinerten Steuerbarkeitsindizes  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 3$  der zugehörigen verallgemeinerten Regelungsform. Daneben gibt es noch eine weitere Möglichkeit: mit  $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_2 = 2$  können die Zustands- und Eingangsvariablen aus  $y_i, \dots, \ddot{y}_i, i = 1, 2$ , berechnet werden.

**Bemerkung 5.16** Die Auflösbarkeit der Gleichungen (5.44b) und (5.45a) nach  $c_A$  und  $c_B$  hängt von der Struktur der Reaktionsraten (5.37) ab. Die Berechnung der Systemgrößen  $T_c$ ,  $u_1$  und  $u_2$  ist auch für allgemeinere Funktionen  $r_A(c_A, c_B, T)$  und  $r_B(c_A, c_B, T)$  möglich, wenn aus  $y_2$  und  $\dot{y}_2$  die Zustandsvariablen  $c_A$  und  $c_B$  eindeutig bestimmt werden können. Alle Modelle (5.36) mit derartigen Reaktionsraten definieren eine Klasse flacher Rührkesselreaktoren.

Die Beziehungen (5.44a), (5.46), (5.49) und (5.51a) werden im folgenden für die stationäre Analyse sowie für den Entwurf der Solltrajektorien, der Steuerung und der asymptotischen Folgeregelung mit Zustandsschätzung verwendet.

### 5.2.3 Systematische Bestimmung eines flachen Ausgangs

Zur systematischen Bestimmung eines flachen Ausgangs kann Satz 3.4 herangezogen werden. Der Rührkesselreaktor ist flach, und das Modell (5.36)-(5.38) erfüllt mit  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 3$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$  die in Satz 3.4 auf Seite 80 angegebenen hinreichenden Bedingungen. Mit den Vektorfeldern (3.98)

$$\mathbf{g}_1 = (c_{\text{in}} - c_A) \frac{\partial}{\partial c_A} - c_B \frac{\partial}{\partial c_B} + (T_{\text{in}} - T) \frac{\partial}{\partial T} \quad (5.52a)$$

$$\mathbf{g}_2 = \gamma \frac{\partial}{\partial T_c} \quad (5.52b)$$

$$\text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2 = -\alpha \gamma \frac{\partial}{\partial T} + \beta \gamma \frac{\partial}{\partial T_c} \quad (5.52c)$$

erhält man die partiellen Differentialgleichungen (3.100) zur Bestimmung des flachen Ausgangs. Betrachtet man (3.100a), so erhält man

$$\frac{\partial y_1}{\partial T_c} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u_i^{(k)}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad k \geq 0, \quad (5.53a)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial T_c} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial u_i^{(k)}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad k \geq 0, \quad -\alpha \frac{\partial y_2}{\partial T} + \beta \frac{\partial y_2}{\partial T_c} = 0, \quad (5.53b)$$

$$(c_{\text{in}} - c_A) \frac{\partial y_2}{\partial c_A} - c_B \frac{\partial y_2}{\partial c_B} + (T_{\text{in}} - T) \frac{\partial y_2}{\partial T} = 0. \quad (5.53c)$$

Die Beziehungen (5.53a), (5.53b) schränken die funktionalen Abhängigkeiten der Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  der partiellen Differentialgleichungen (3.100) ein

$$y_1 = \phi_1(c_A, c_B, T), \quad y_2 = \phi_2(c_A, c_B), \quad (5.54)$$

wobei  $y_2$  zusätzlich noch (5.53c) erfüllen muß:

$$(c_{\text{in}} - c_A) \frac{\partial y_2}{\partial c_A} - c_B \frac{\partial y_2}{\partial c_B} = 0. \quad (5.55)$$

Aus (3.100b) ergibt sich unter Berücksichtigung von (5.54) die Rangbedingung

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{pmatrix} \langle d y_1, \mathbf{g}_1 \rangle & \langle d y_1, \mathbf{g}_2 \rangle \\ \langle d y_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_1 \rangle & \langle d y_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_2 \rangle \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} 2 \\ \Rightarrow \left( (c_{\text{in}} - c_A) \frac{\partial y_1}{\partial c_A} - c_B \frac{\partial y_1}{\partial c_B} + (T_{\text{in}} - T) \frac{\partial y_1}{\partial T} \right) &\left( \frac{\partial r_A}{\partial T} \frac{\partial y_2}{\partial c_A} + \frac{\partial r_B}{\partial T} \frac{\partial y_2}{\partial c_B} \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Eine mögliche Lösung der partiellen Differentialgleichungen (5.53), (5.56) ist der flache Ausgang  $y_1 = T$ ,  $y_2 = (c_{\text{in}} - c_A)/c_B$  nach (5.44).

**Bemerkung 5.17** Die Rangbedingung (5.56) kann dann nicht erfüllt werden, wenn die partiellen Ableitungen der Reaktionsraten  $r_A$ ,  $r_B$  nach der Temperatur  $T$  gleichzeitig gleich Null sind. Die Rangbedingung (5.56) kann auch für allgemeinere Reaktionsraten  $r_A(c_A, c_B, T)$ ,  $r_B(c_A, c_B, T)$  erfüllt werden. Die Beziehung

$$\left( \frac{\partial r_A}{\partial T} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_B}{\partial T} \right)^2 \neq 0 \quad (5.57)$$

stellt eine Bedingung für die Steuerbarkeit des Rührkesselreaktors dar (vgl. Abschnitt 2.2.3). Sie definiert analog zu Bemerkung 5.16 eine Klasse flacher Rührkesselreaktoren.

Gemäß Bemerkung 2.5 auf Seite 22 ist ein flacher Ausgang nicht eindeutig. Neben dem flachen Ausgang (5.44) ist auch

$$\bar{y}_1 = c_A, \quad \bar{y}_2 = c_B. \quad (5.58)$$

ein flacher Ausgang. Dies kann am einfachsten gemäß Bemerkung 2.5 gezeigt werden: Mit Hilfe von (5.46) kann  $\bar{\mathbf{y}}$  als Funktion von  $y_1$ ,  $y_2$  und  $\dot{y}_2$  ausgedrückt werden. Umgekehrt kann auch der flache Ausgang (5.44) durch

$$y_1 = \theta_1(\bar{\mathbf{y}}, \dot{\bar{\mathbf{y}}}), \quad y_2 = (c_{\text{in}} - \bar{y}_1)/\bar{y}_2 \quad (5.59)$$

als Funktion von  $\bar{\mathbf{y}}$  und  $\dot{\bar{\mathbf{y}}}$  angegeben werden. Die Beziehungen (5.46) und (5.59) definieren nach Bemerkung 2.5 einen sog. *Lie-Bäcklund-Isomorphismus* (Fliess et al. 1993a).

Der flache Ausgang (5.44) ist für die Lösung des Trajektorienfolgeproblems besser geeignet, da die Temperatur gleichzeitig auch eine der Regelgrößen ist. Darüber hinaus können die im vorhergehenden Abschnitt vorgenommenen Berechnungen aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeiten (5.38) nicht mehr explizit durchgeführt werden, wenn als flacher Ausgang (5.58) verwendet wird. Dies ist der entscheidende Vorteil, den die Verwendung des flachen Ausgangs (5.44) gegenüber (5.58) aufweist. Die Berechnungen im vorhergehenden Abschnitt sind auch für den nachfolgend vorgestellten flachen Ausgang nicht mehr explizit durchführbar.

**Bemerkung 5.18** *Verwendet man anstelle der Bedingungen von Satz 3.4 die restriktiveren Bedingungen aus Satz 3.3, so erhält man mit den Steuerbarkeitsindizes  $\rho_1 = \rho_2 = 2$  die partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung des entsprechenden flachen Ausgangs aus (3.86). Aus (3.86a) ergibt sich*

$$\frac{\partial y_i}{\partial T_c} = 0, \quad (c_{\text{in}} - c_A) \frac{\partial y_i}{\partial c_A} - c_B \frac{\partial y_i}{\partial c_B} + (T_{\text{in}} - T) \frac{\partial y_i}{\partial T} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.60a)$$

*Eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen ist*

$$\tilde{y}_1 = \frac{T_{\text{in}} - T}{c_B}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{c_{\text{in}} - c_A}{c_B}. \quad (5.60b)$$

*Da damit gemäß (3.86c) auch die Rangbedingung*

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \langle d\tilde{y}_1, \text{ad}_f \mathbf{g}_1 \rangle & \langle d\tilde{y}_1, \text{ad}_f \mathbf{g}_2 \rangle \\ \langle d\tilde{y}_2, \text{ad}_f \mathbf{g}_1 \rangle & \langle d\tilde{y}_2, \text{ad}_f \mathbf{g}_2 \rangle \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 2 \quad (5.60c)$$

*erfüllt ist, ist (5.60b) ein weiterer flacher Ausgang für den Rührkesselreaktor.*

Der Vergleich der angegebenen flachen Ausgänge für den Rührkesselreaktor zeigt, daß eine dem Trajektorienfolgeproblem angepaßte Wahl des flachen Ausgangs die flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems wesentlich vereinfacht. Darüber hinaus zeigt sich am Beispiel des Rührkesselreaktors ein Vorteil der verallgemeinerten nichtlinearen Regelungsform (3.21) gegenüber der nichtlinearen Regelungsform (3.11): durch die Verwendung der Existenzbedingungen für die verallgemeinerte Regelungsform kann nicht nur eine größere Klasse von Systemen auf Flachheit untersucht werden. Die Existenzbedingungen für eine Transformation in diese Regelungsform können unter Umständen zu flachen Ausgängen führen, die die konkrete Lösung des Trajektorienfolgeproblems wesentlich erleichtern bzw. überhaupt erst ermöglichen.

## 5.2.4 Stationäre Analyse und Entwurf von Solltrajektorien

Zum Entwurf geeigneter Solltrajektorien für den Rührkesselreaktor wird das Reaktormodell im stationären Zustand untersucht. Auf der Basis der stationären Beziehungen (2.9) werden geeignete Solltrajektorien entworfen.

**Bemerkung 5.19** *Die Gleichungen (2.9) stellen die mit  $\mathbf{y}_S$  parametrisierte Darstellung der stationären Lösung  $(\mathbf{x}_S, \mathbf{u}_S)$  des Systems dar. Die Berechnung des stationären Zustands  $\mathbf{x}_S$  als Funktion der stationären Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_S$  ist wegen der Arrheniusfunktionen in (5.38) nicht geschlossen möglich. Die Bestimmung der parametrisierten Beziehungen (2.9) ist somit nur aufgrund der Flachheit möglich.*

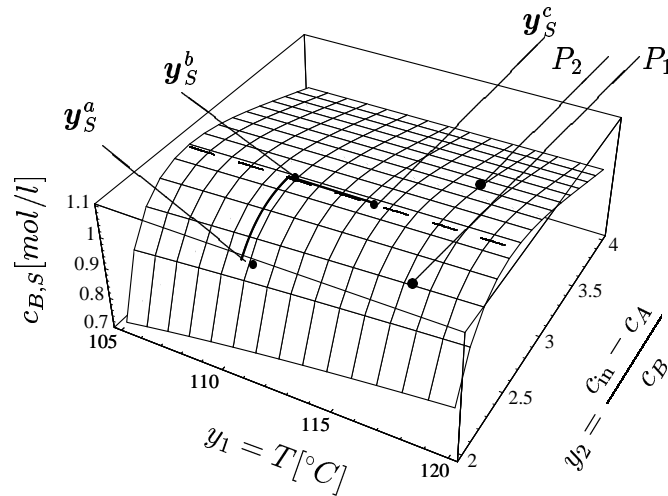


Bild 5.12: Stationäre Konzentration  $c_{B,S}$  als Funktion der Komponenten  $y_1$ ,  $y_2$  des flachen Ausgangs ( $c_{in} = 5.1 \text{ mol/l}$ ). Die Solltrajektorie (5.64) geht durch die Punkte, die durch  $\mathbf{y}_S^a = (110^\circ \text{C}, 2.2)$ ,  $\mathbf{y}_S^b = (110^\circ \text{C}, 2.69)$  und  $\mathbf{y}_S^c = (114.21^\circ \text{C}, 2.68)$  auf der stationären Fläche  $c_{B,S}$  definiert sind. Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind sog. mehrfach stationäre Punkte.

Für die stationäre Produktkonzentration<sup>3</sup>  $c_{B,S}$  erhält man damit aus (5.46a)

$$c_{B,S} = \bar{\psi}_{1,S}(y_1, y_2) = \frac{c_{in}}{y_2} - \frac{k_1(y_1)}{2k_2(y_1)} + \frac{\sqrt{k_1^2(y_1)y_2^2 - 4c_{in}k_1(y_1)k_2(y_1)}}{2y_2k_2(y_1)}, \quad y_2 \neq 0. \quad (5.61)$$

Dieser stationäre Zusammenhang hängt von dem veränderlichen Parameter  $c_{in}$  ab und ist in Bild 5.12 als gekrümmte Fläche über der  $y_1$ - $y_2$ -Ebene dargestellt.

**Bemerkung 5.20** Für eine vorgegebene Temperatur  $y_1 = T$  gibt es zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf der Fläche in Bild 5.12, die den gleichen stationären Wert  $c_{B,S}$  aufweisen. Dabei handelt es sich um sog. mehrfach stationäre Punkte für die gegebene Temperatur  $y_1 = T$ . Aufgrund der Flachheit ist es möglich, diese Punkte zu unterscheiden, da zu ihnen verschiedene Werte von  $y_2$  gehören. Aus diesem Grund bereiten sie beim Entwurf einer Steuerung oder asymptotischen Folgeregelung keine Schwierigkeiten.

Die explizite Darstellung (5.61) kann noch weiter analysiert werden. Für jede Temperatur  $y_{1,S} = T_S$  gibt es eine maximale Produktkonzentration  $c_{B,S}^*$ , wie dies in Bild 5.13 gestrichelt eingezeichnet ist. Um die zugehörigen Punkte in der  $y_1$ - $y_2$ -Ebene zu berechnen, setzt man die

<sup>3</sup>Hier und im folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise auf den Index  $S$  zur Kennzeichnung stationärer Größen verzichtet.

partielle Ableitung von  $c_{B,S}$  nach  $y_2$  gleich Null. Daraus erhält man eine explizite Beziehung

$$\frac{\partial \bar{\psi}_{1,S}}{\partial y_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_2 = \Gamma(y_1) = 2\sqrt{\frac{k_1(y_1) + c_m k_2(y_1)}{k_1(y_1)}} \quad (5.62)$$

Die Gleichung der maximalen stationären Produktkonzentration

$$c_{B,S}^* = \bar{\psi}_{1,S}(y_1, \Gamma(y_1)) \quad (5.63)$$

ergibt sich durch Einsetzen von (5.62) in (5.61) und ist in Bild 5.12 ebenfalls gestrichelt eingezeichnet. Der Wert  $c_{B,S}^*$  ist die maximale stationäre Produktkonzentration in Abhängigkeit von der Temperatur  $y_1 = T$ .

Die stationäre Analyse kann auch für die anderen Systemgrößen (2.9) durchgeführt werden. So kann mit Hilfe von (2.9b) überprüft werden, ob die Stellgrößenbeschränkungen (5.42) für gegebene Werte von  $y_1$  und  $y_2$  stationär eingehalten werden können. Der Bereich in der  $y_1$ - $y_2$ -Ebene, für den Stellgrößenbeschränkungen stationär nicht erfüllt sind, ist in Bild 5.13 als schwarze Fläche dargestellt.

Im Unterschied zum Bioreaktor aus Abschnitt 5.1 ist beim Trajektorienfolgeproblem für den Rührkesselreaktor kein Zeitverlauf für die Regelgrößen vorgegeben. Für den Wechsel vom Arbeitspunkt  $\mathbf{y}_S^a$  zum Arbeitspunkt  $\mathbf{y}_S^c$  können mit Hilfe der stationären Analyse jedoch aus Bild 5.12 und den Beziehungen (5.41) und (5.62) geeignete Zeitverläufe der Solltrajektorien für die Komponenten des flachen Ausgangs vorgegeben werden. Hierfür wird der Sollverlauf  $\mathbf{y}_d(t)$  in zwei Abschnitte unterteilt, wie in Bild 5.12 dargestellt ist:

- Während eines ersten Zeitintervalls  $t \in I_1 = [0, t_1]$  wird das System ausgehend von einem stationären Punkt  $\mathbf{y}_S^a$  bei konstanter Temperatur  $y_1 = y_{1,S}^a$  zu einem zweiten stationären Punkt  $\mathbf{y}_S^b$  gebracht, der auf der Linie (5.63) liegt.
- Während eines zweiten Zeitintervalls  $t \in I_2 = [t_1, t_2]$  wird die Temperatur langsam erhöht und gleichzeitig die inverse Selektivität  $y_2$  so verändert, daß eine Bewegung entlang der Linie (5.63) entsteht, bis zum Zeitpunkt  $t = t_2$  die maximale Konzentration im Punkt  $\mathbf{y}_S^c$  erreicht wird.

Die Solltrajektorie  $c_{B,d}(t)$  verbindet – wie in Bild 5.12 gezeigt – die drei stationären Punkte, die durch  $\mathbf{y}_S^a$ ,  $\mathbf{y}_S^b$  und  $\mathbf{y}_S^c$  gekennzeichnet sind. Zwischen  $\mathbf{y}_S^a$  und  $\mathbf{y}_S^b$  bzw.  $\mathbf{y}_S^b$  und  $\mathbf{y}_S^c$  verläuft die Solltrajektorie  $c_{B,d}(t)$  außerhalb der stationären Fläche  $c_{B,S}$ , d. h. in Bild 5.12 ist die Projektion der Solltrajektorie auf die stationäre Fläche zu sehen.

Aus der Projektion der Solltrajektorie  $c_{B,d}(t)$  auf die  $y_1$ - $y_2$ -Ebene in Bild 5.13 erhält man die zugehörigen Sollverläufe für die Komponenten des flachen Ausgangs (vgl. hierzu auch

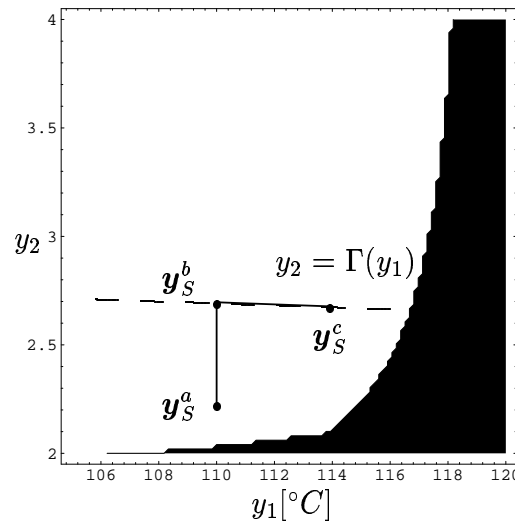


Bild 5.13: Projektion der Solltrajektorie (5.64) auf die  $y_1$ - $y_2$ -Ebene. Der Bereich, in dem die Stellgrößenbeschränkung (5.42) stationär nicht eingehalten werden kann, ist schwarz markiert.

Bild 2.4). Diese können folgendermaßen angesetzt werden:

$$y_{1,d}(t) = \begin{cases} y_{S,1}^a & \text{für } 0 \leq t < t_1 \\ y_{S,1}^a + 3(y_{S,1}^c - y_{S,1}^b) \left[ \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right]^2 - 2(y_{S,1}^c - y_{S,1}^b) \left[ \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right]^3 & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ y_{S,1}^c & \text{für } t > t_2 \end{cases} \quad (5.64a)$$

$$y_{2,d}(t) = \begin{cases} y_{S,2}^a + 3(y_{S,2}^b - y_{S,2}^a) \left[ \frac{t}{t_1} \right]^2 - 2(y_{S,2}^b - y_{S,2}^a) \left[ \frac{t}{t_1} \right]^3 & \text{für } 0 \leq t < t_1 \\ \Gamma(y_{1,d}(t)) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ y_{S,2}^c & \text{für } t > t_2 \end{cases} \quad (5.64b)$$

Um den Übergang zwischen den beiden Trajektorien zu den Zeitpunkten  $t = 0$  bzw.  $t = t_1$  hinreichend glatt zu machen, werden für den Verlauf von  $y_{1,d}(t)$  und  $y_{2,d}(t)$  im Intervall  $I_1 = [0, t_1]$  bzw.  $I_2 = [t_1, t_2]$  Polynome der Ordnung drei angesetzt, deren Koeffizienten so berechnet werden, daß für  $t = t_1$  die Funktionswerte  $y_{i,d}(t_1)$  und deren Ableitungen  $\dot{y}_{i,d}(t_1)$ ,  $i = 1, 2$ , übereinstimmen.

Setzt man die Gleichung der Solltrajektorien (5.64) in (5.49b) und (5.51a) ein, so erhält man die zugehörige flachheitsbasierte Steuerung

$$u_{1,d} = \psi_5(y_{1,d}, y_{2,d}, \dot{y}_{1,d}, \dot{y}_{2,d}, \ddot{y}_{2,d}) \quad (5.65a)$$

$$u_{2,d} = \psi_6(y_{1,d}, y_{2,d}, \dot{y}_{1,d}, \dot{y}_{2,d}, \ddot{y}_{1,d}, \ddot{y}_{2,d}, y_{2,d}^{(3)}) \quad (5.65b)$$

Der entsprechende Verlauf der Zustandsvariablen ergibt sich durch Einsetzen von (5.64) in (5.46) und (5.49a). Damit lassen sich die Beschränkungen (5.42) off-line überprüfen, ohne Differentialgleichungen z. B. in der Simulation zu integrieren. Dies soll am Beispiel der Stellgrößenbeschränkungen erläutert werden.

**Bemerkung 5.21** *Legt man zunächst die Zeitintervalle  $I_1$  bzw.  $I_2$  fest, so können die Stellgrößenbeschränkungen (5.42) überprüft werden. Werden sie nicht eingehalten, so kann man versuchen, dies z. B. durch Vergrößern der Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  zu erreichen. Werden die Beschränkungen eingehalten, so kann man die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  so lange verkleinern, bis eine möglichst schnelle Bewegung erreicht ist. Lassen sich die Beschränkungen nur für zu große Intervalle  $I_1$  bzw.  $I_2$  einhalten, so können diese Intervalle u. U. durch eine andere Wahl der Solltrajektorien  $\mathbf{y}_d(t)$  verkürzt werden.*

**Bemerkung 5.22** *Da der Rührkesselreaktor stabil ist, kann eine langsame Bewegung entlang der Solltrajektorie (5.64) auch mit der Steuerung (5.65) erreicht werden. Die Folgebewegung kann mit Hilfe einer Stabilisierung durch Zustandsrückführung schneller durchgeführt werden. Dies wird im folgenden Abschnitt diskutiert.*

### 5.2.5 Quasi-statische Zustandsrückführung zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers

Zur Stabilisierung der Folgebewegung gegen Anfangsfehler und Störungen wird auf der Basis von (5.49b), (5.51a) eine quasi-statische Zustandsrückführung entworfen. Hierzu führt man neue Eingangsvariablen

$$v_1 \stackrel{!}{=} \dot{y}_1 \quad (5.66a)$$

$$v_2 \stackrel{!}{=} \overset{(3)}{y}_2 \quad (5.66b)$$

ein. Aus (5.66a) erhält man die Zeitableitung

$$\ddot{y}_1 = \dot{v}_1. \quad (5.66c)$$

Setzt man die Beziehungen (5.66) in (5.49b), (5.51a) ein, so ergibt sich

$$u_1 = \psi_5(y_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, v_1) \quad (5.67a)$$

$$u_2 = \psi_6(y_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, v_1, \dot{v}_1, v_2). \quad (5.67b)$$

Die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t)$  wird durch die asymptotische Folgeregelung

$$v_1 = \dot{y}_{1,d} - q_0^1(y_{1,d} - y_1) \quad (5.68a)$$

$$v_2 = \overset{(3)}{y}_{2,d} - q_2^2(\ddot{y}_{2,d} - \ddot{y}_2) - q_1^2(\dot{y}_{2,d} - \dot{y}_2) - q_0^2(y_{2,d} - y_2), \quad (5.68b)$$



mit den Solltrajektorien aus (5.64) und geeignet gewählten Koeffizienten  $q_j^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, \kappa_i - 1$ , stabilisiert.

**Bemerkung 5.23** Bei (5.67) handelt es sich um die quasi-statische Rückführung des verallgemeinerten Zustands

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ \frac{c_{\text{in}} - c_A}{c_B} \\ \phi_3(c_A, c_B, T) \\ \phi_4(c_A, c_B, T, T_c, u_1) \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

die von  $u_1$  abhängig ist. Die Ableitung  $\dot{v}_1$  in (5.67b) wird mit Hilfe der Zeitableitung des neuen Eingangs (5.68a) gebildet:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \ddot{y}_{1,d} - q_0^1(\dot{y}_{1,d} - \dot{y}_1) \\ &= \ddot{y}_{1,d} - q_0^1(\dot{y}_{1,d} - v_1). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Im Vergleich zu einer statischen Zustandsrückführung, die nicht von Zeitableitungen des neuen Eingangs abhängt, müssen die Solltrajektorien für eine quasi-statische Zustandsrückführung entsprechend häufiger differenzierbar, d. h. „glatter“, sein. Diese Anforderung stellt auch im allgemeinen keine Einschränkung dar.

### 5.2.6 Nichtlinearer Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung

Gemäß Abschnitt 5.2.1 können die beiden Temperaturen  $T$  und  $T_c$  gemessen werden. Die Konzentrationen  $c_A$  und  $c_B$  sowie die zeitlichen Schwankungen unterworfenen Parameter  $c_{\text{in}}$  und  $\gamma$  sind nicht meßbar. Aus diesem Grund muß für eine Realisierung der Zustandsrückführung (5.67), (5.68) und (5.70) eine Zustandsschätzung entworfen werden. Im folgenden wird – wie in Abschnitt 4.2 gezeigt – ein nichtlinearer Beobachter mit der zeitvarianten  $(6 \times 2)$  Verstärkungsmatrix  $L(t)$  zur Schätzung der nicht gemessenen Zustandsvariablen und der zeitlich veränderlichen Parameter für die flachheitsbasierte Zustandsrückführung (4.6) entworfen

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{c}}_A \\ \dot{\hat{c}}_B \\ \dot{\hat{T}} \\ \dot{\hat{T}}_c \\ \dot{\hat{c}}_{\text{in}} \\ \dot{\hat{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_A(\hat{c}_A, \hat{T}) + [\hat{c}_{\text{in}} - \hat{c}_A]\hat{u}_1 \\ r_B(\hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}) - \hat{c}_B\hat{u}_1 \\ h(\hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}) + \alpha[\hat{T}_c - \hat{T}] + [T_{\text{in}} - \hat{T}]\hat{u}_1 \\ \beta[\hat{T} - \hat{T}_c] + \hat{\gamma}\hat{u}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L(t) \begin{bmatrix} T - \hat{T} \\ T_c - \hat{T}_c \end{bmatrix}, \quad (5.71a)$$

wobei für die Größen  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  die flachheitsbasierte Zustandsrückführung

$$\hat{u}_1 = \psi_5 \left( \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{v}_1, \dot{\hat{y}}_2, \ddot{\hat{y}}_2 \right) = \bar{\psi}_5 \left( \hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}, \hat{T}_c, \hat{v}_1 \right) \quad (5.71b)$$

$$\hat{u}_2 = \psi_6 \left( \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{v}_1, \dot{\hat{y}}_2, \dot{\hat{v}}_1, \ddot{\hat{y}}_2, \hat{v}_2 \right) = \bar{\psi}_6 \left( \hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}, \hat{T}_c, \hat{v}_1, \dot{\hat{v}}_1, \hat{v}_2 \right) \quad (5.71c)$$

$$\hat{v}_1 = \varphi_1 \left( \hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}, \hat{T}_c, y_{1,d}, \dot{y}_{1,d} \right) \quad (5.71d)$$

$$\dot{\hat{v}}_1 = \varphi_2 \left( \hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}, \hat{T}_c, y_{1,d}, \dot{y}_{1,d}, \ddot{y}_{1,d} \right) \quad (5.71e)$$

$$\hat{v}_2 = \varphi_3 \left( \hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{T}, \hat{T}_c, y_{2,d}, \dot{y}_{2,d}, \dots, y_{2,d}^{(3)} \right) \quad (5.71f)$$

eingesetzt wird. Zusätzlich werden in (5.71b) die Parameter  $c_{in}$  und  $\gamma$  durch die entsprechenden Schätzwerte ersetzt. Sinnvolle Anfangsbedingungen für den Beobachter können aus den stationären Werten der Konzentrationen, den Meßwerten zum Zeitpunkt  $t = 0$  der beiden Temperaturen und den nominellen Werten der beiden Parameter bestimmt werden

$$\hat{c}_A(0) = c_{A,S}, \quad \hat{c}_B(0) = c_{B,S}, \quad \hat{T}(0) = \eta_1(0), \quad \hat{T}_c(0) = \eta_2(0), \quad \hat{c}_{in}(0) = c_{in}^{nom}, \quad \hat{\gamma}(0) = \gamma^{nom}. \quad (5.71g)$$

Die Anfangswerte für die Konzentrationen entsprechen den Konzentrationen, die zum Punkt  $\mathbf{y}_S^a$  in Bild 5.12 gehören.

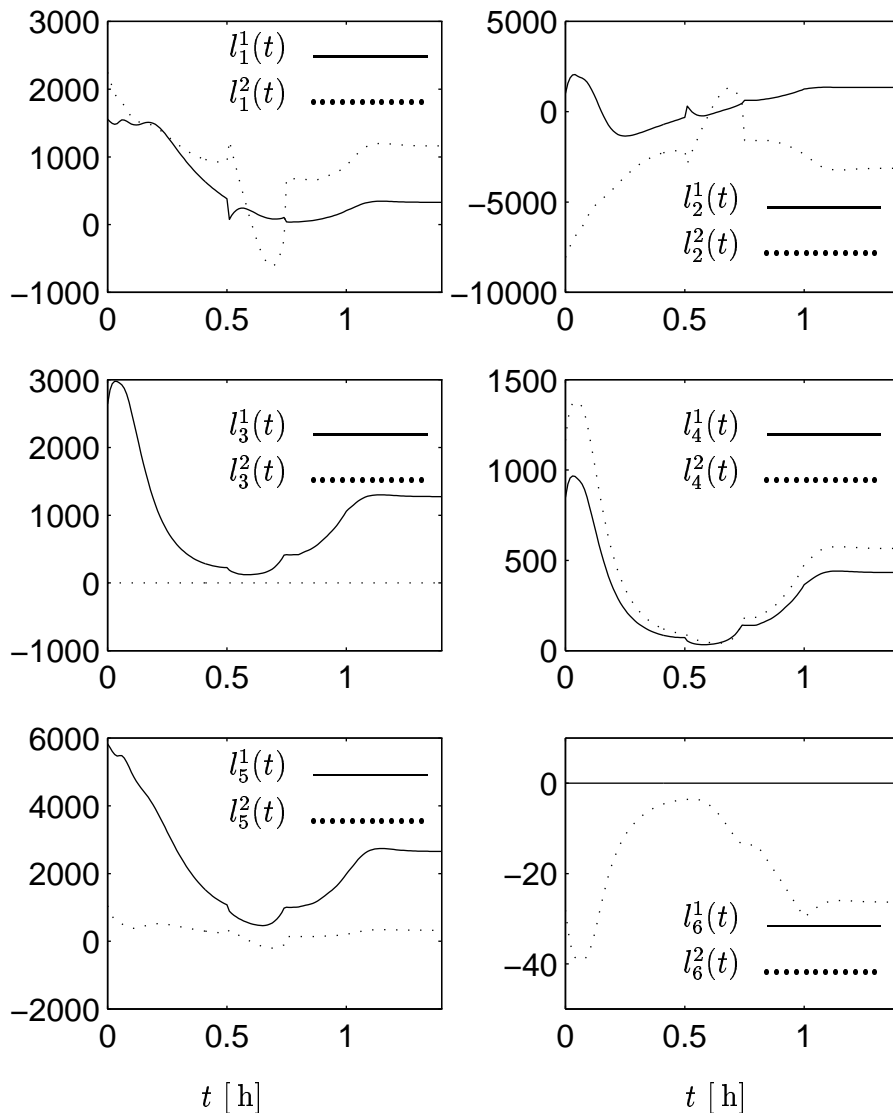
Für den Entwurf eines Folgebeobachters wird das System (5.71a) um die Solltrajektorien  $c_{A,d}(t)$ ,  $c_{B,d}(t)$ ,  $y_{1,d}(t)$ ,  $T_{c,d}(t)$  der Zustandsvariablen, die Sollwerte (5.65) der Eingangsvariablen und die nominellen Werte der beiden Parameter  $c_{in}$ ,  $\gamma$  linearisiert. Die Beobachtbarkeitsanalyse ergibt die Beobachtbarkeitsindizes  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 2$  und die Beobachtbarkeitsmatrix nach (4.10)

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T(t) \\ \vdots \\ \frac{M_A^3 \mathbf{c}_1^T(t)}{\mathbf{c}_2^T(t)} \\ M_A^1 \mathbf{c}_2^T(t) \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

Die zeitvariante Verstärkungsmatrix  $L(t)$  wird mit Hilfe der Ackermann-Formel (4.26) dimensioniert. Zur Auswertung von (4.26) müssen die Vektoren  $\boldsymbol{\theta}^i(t)$  aus der inversen Beobachtbarkeitsmatrix gemäß (4.22b) bestimmt werden:

$$\boldsymbol{\theta}^1(t) = c_1^{1*}(t) [\theta_1^1(t), \theta_2^1(t), 0, 0, \theta_5^1(t), \theta_6^1(t)]^T \quad (5.73a)$$

$$\boldsymbol{\theta}^2(t) = c_2^{2*}(t) [\theta_1^2(t), \theta_2^2(t), 0, 0, \theta_5^2(t), 0]^T, \quad (5.73b)$$

Bild 5.14: Simulierter Verlauf der Elemente  $l_j^i(t)$  der Verstärkungsmatrix  $L(t)$ .

die mit Hilfe der Freiheitsgrade  $c_i^{i*}(t) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , noch vereinfacht werden können. Die Matrix  $L(t)$  berechnet sich folgendermaßen

$$L(t) = \left( \gamma_0^1 N_A^0 \boldsymbol{\theta}^1(t) + \dots + \gamma_4^1 N_A^4 \boldsymbol{\theta}^1(t), \gamma_0^2 N_A^0 \boldsymbol{\theta}^2(t) + \gamma_1^1 N_A^1 \boldsymbol{\theta}^2(t) \right) \begin{pmatrix} c_1^{1*}(t) & 0 \\ 0 & c_2^{2*}(t) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.74)$$

Die Elemente der Verstärkungsmatrix  $L(t)$  sind – wie in Bild 5.14 auf dieser Seite dargestellt – zeitvariant und beschränkt. Aufgrund des großen Wertebereichs dieser zeitvarianten Elemente ist zu erwarten, daß ein Arbeitspunktbeobachter mit konstanter Verstärkung schlechtere Ergebnisse liefert.

Die Struktur des geschlossenen Regelkreises für den Rührkesselreaktor ist in Bild 4.1 auf Seite 91 dargestellt. Dem Block ① entsprechen die Sollverläufe (5.64). Der neue Zustand in Block ② wird aus den Beziehungen (5.44a), (5.46), (5.49) und (5.51a) berechnet. Die asymptotische Folgeregelung und die Zustandsrückführung in den Blöcken ③ und ④ wird durch (5.67), (5.68) und (5.70) beschrieben. Die Gleichungen des nichtlinearen Beobachters in Block ⑤ entsprechen (5.71).

### 5.2.7 Simulationsergebnisse

Die verschiedenen Simulationsuntersuchungen zeigen, daß sich mit Hilfe der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung mit dem Folgebeobachter das gewünschte Regelverhalten des Rührkesselreaktors in der Gegenwart von Störungen erzielen läßt.

Die Parameter  $c_{\text{in}}$  und  $\gamma$  wurden wie in Bild 5.15 auf der nächsten Seite als zeitlich veränderlich angesetzt, um typische Schwankungen dieser Größen nachzubilden:

$$\gamma(t) = \left(0.1 - 10^{-4} \frac{t}{\text{h}}\right) \text{ K/kJ} \quad (5.75\text{a})$$

$$c_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 5.1 \text{ mol/l} & 0.0 \leq t \leq 0.8 \text{ h} \\ \left(5.1 + 2.0\left(\frac{t}{\text{h}} - 0.8\right)\right) \text{ mol/l} & 0.8 \text{ h} < t < 1. \text{ h} \\ 5.5 \text{ mol/l} & t > 1 \text{ h} \end{cases} \quad (5.75\text{b})$$

**Bemerkung 5.24** *Schwankungen der Zulaufkonzentration  $c_{\text{in}}$  verschieben die Linie (5.62) und damit die Lage des gewünschten Arbeitspunkts  $\mathbf{y}_s^*$  in Bild 5.12 auf Seite 139, der durch die Trajektorienfolgeregelung erreicht werden soll. Durch die Schätzung der Zulaufkonzentration  $c_{\text{in}}$  im Folgebeobachter (5.71) ist es möglich, die Solltrajektorien (5.64) an den jeweiligen Wert von  $\hat{c}_{\text{in}}$  anzupassen.*

Die in der Simulation verwendeten Anfangsbedingungen und Dynamikparameter für die Trajektorienfolge- und Schätzfehlerdynamik sind in Anhang C.2 zusammengefaßt. Die Zeitverläufe der Komponenten des flachen Ausgangs (5.44) und der Solltrajektorien (5.64) sind in Bild 5.16 auf der nächsten Seite dargestellt. Der zugehörige Verlauf der Regelgröße  $c_B$ , die nicht Komponente des flachen Ausgangs (5.44) ist, ist in Bild 5.17 auf Seite 148 zu sehen. Sowohl bei den Komponenten des flachen Ausgangs als auch bei der Regelgröße  $c_B$  klingen die recht großen Anfangsfehler schnell ab. Gleiches gilt für die in Bild 5.18 auf Seite 149 zu sehenden Verläufe der Schätzfehler. Der Beobachter (5.71) mit der zeitvarianten Verstärkungsmatrix  $L(t)$  nach (5.74) schwingt schnell ein und kann auch der Störung in der Zulaufkonzentration sowie beim Wärmedurchgang sehr gut folgen. Das Verhalten des flachheitsbasierten Folgeregelkreises mit Zustandsschätzung gegenüber Anfangsfehlern und Störungen ist insgesamt sehr gut.

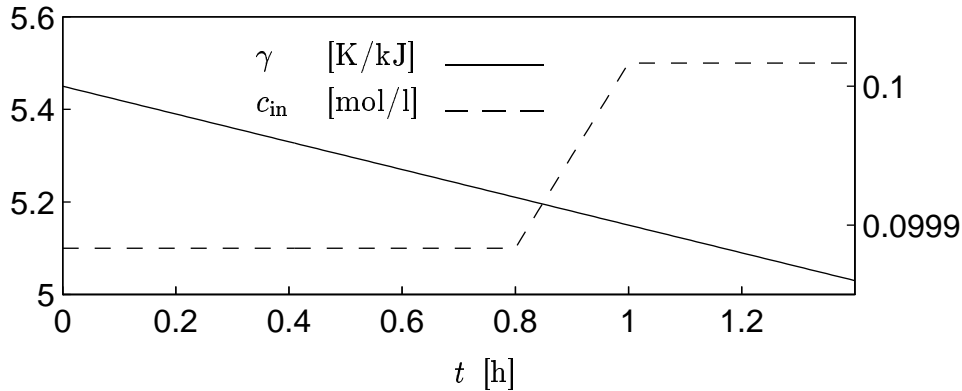


Bild 5.15: Zeitlicher Verlauf der Zulaufkonzentration  $c_{in}$  und des Wärmedurchgangskoeffizienten  $\gamma$ .

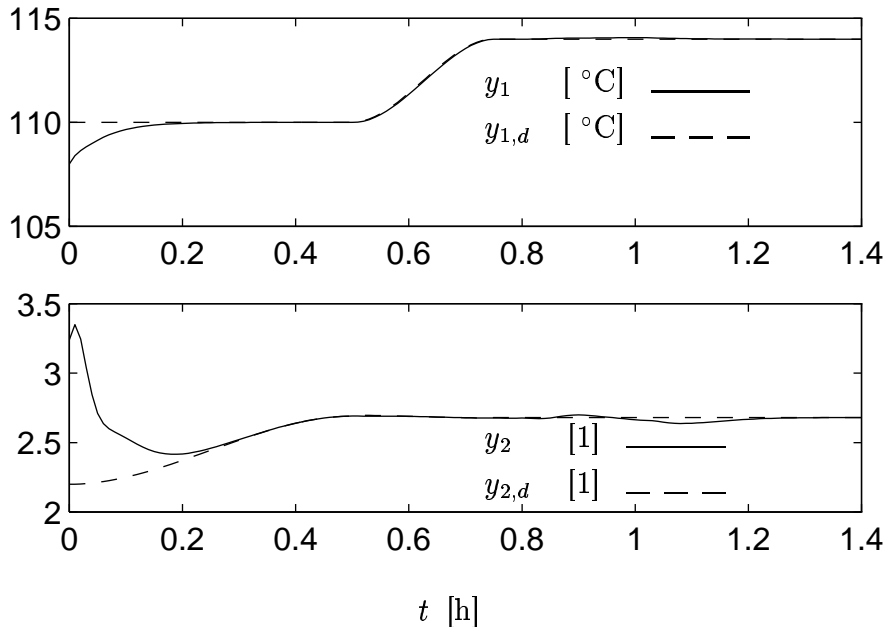


Bild 5.16: Zeitlicher Verlauf der Komponenten des flachen Ausgangs  $y_1(t) = T(t)$ ,  $y_2(t) = (c_{in} - c_A)/c_B$ , und deren Sollverläufen (5.64).

### 5.3 Zusammenfassung

Der flachheitsbasierte Entwurf für den Bioreaktor ist ein Beispiel für das Anfahren und den Betrieb eines instationären Prozesses. Dabei werden entsprechend dem Prozessverlauf zwei unterschiedliche Modelle für die einzelnen Prozessphasen verwendet, die aus Bilanzgleichungen makroskopischer Größen abgeleitet sind. Diese einfachen regelungstechnischen Entwurfsmodelle erleichtern die Lösung des Trajektorienfolgeproblems wesentlich und beschreiben das Systemverhalten hinreichend genau.

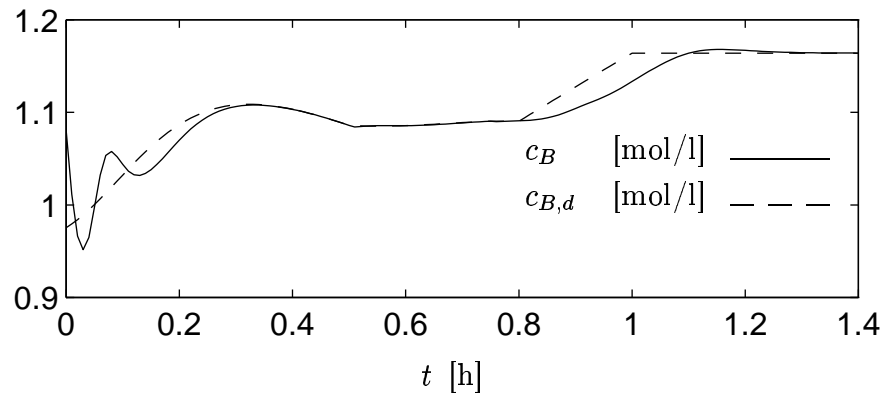


Bild 5.17: Zeitlicher Verlauf der Regelgröße  $c_B(t)$  und des zugehörigen Sollverlaufs  $c_{B,d}(t)$ .

Die flachheitsbasierte Analyse zeigt, daß das Produkt Penicillin und ein auf die Organismen in zu hoher Konzentration toxisch wirkender Precursor ein flacher Ausgang für den Bioreaktor sind. Weiterhin können aus den Sollverläufen für die Regelgrößen Wachstumsrate und Precursorkonzentration Solltrajektorien für den flachen Ausgang bestimmt und mit Hilfe einer Steuerung bzw. asymptotischen Folgeregelung realisiert werden. Für die Schätzung der nicht gemessenen Zustandsgrößen und einiger für das Systemverhalten entscheidender zeitvarianter Parameter wird ein nichtlineares Folgefilter entworfen. Die asymptotische Folgeregelung mit Zustandsschätzung zeigt sowohl in Simulationsstudien als auch in ersten experimentellen Untersuchungen ein sehr gutes Führungs- und Störverhalten, das mit linearen Regelungsmethoden nicht erreicht werden kann.

Bei der flachheitsbasierten Regelung eines chemischen Rührkesselreaktors besteht das Trajektorienfolgeproblem in einem Wechsel von einem Arbeitspunkt zu einem anderen Arbeitspunkt. Ein möglicher und für die praktische Anwendung sehr nützlicher flacher Ausgang hat als Komponenten die Reaktortemperatur und die inverse Selektivität. Mit Hilfe dieses sehr aussagekräftigen flachen Ausgangs kann das stationäre Verhalten des Rührkesselreaktors analysiert und zur Planung physikalisch sinnvoller Trajektorien für einen Arbeitspunktwechsel herangezogen werden.

Die Folgebewegung des Rührkesselreaktors wird mit Hilfe einer quasi-statischen Zustandsrückführung stabilisiert, die von Zeitableitungen des neuen Eingangs abhängt. Diese Zeitableitungen können mit Hilfe von Zeitableitungen der Solltrajektorien des flachen Ausgangs realisiert werden. Für die Rekonstruktion der nicht gemessenen Zustandsvariablen und von zwei zeitlich veränderlichen Parametern wird ein nichtlinearer Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung entworfen, der sich nur auf Temperaturmessungen stützt. Die flachheitsbasierte asymptotische Folgeregelung erreicht ein sehr gutes Folgeverhalten. Durch zwei zeitlichen Veränderungen unterworfenen Parameter wird der Arbeitspunkt des Systems ver-

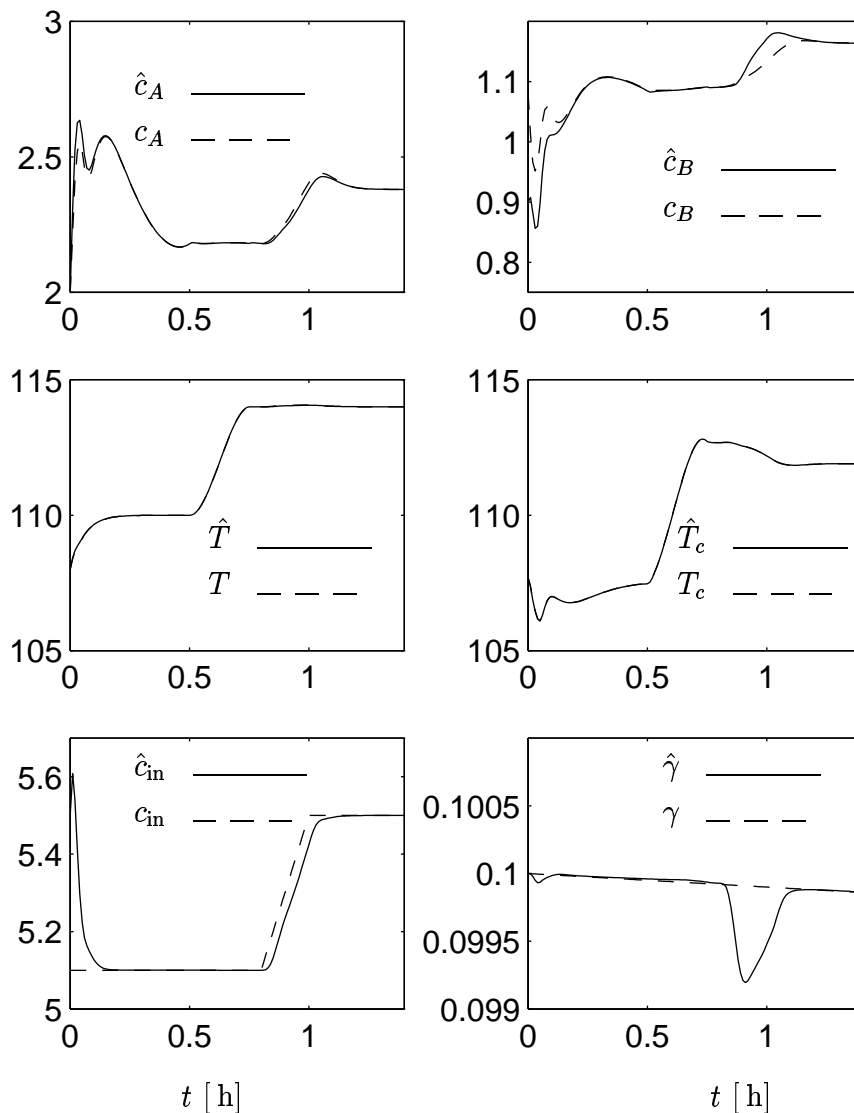


Bild 5.18: Simulierter Verlauf der Originalzustände und der zeitlich veränderlichen Parameter sowie der zugehörigen Schätzwerte.

ändert. Durch die Schätzung der beiden Parameter kann diese Verschiebung on-line in der Trajektorienplanung und -folgeregung berücksichtigt werden.

Das vorgestellte Regelungskonzept erlaubt den Entwurf einer Trajektorienfolgeregung mit Zustandsschätzung, die ein sehr gutes Führungs- und Störverhalten aufweist. Durch die Schätzung von zeitlich veränderlichen Parametern arbeitet die Regelung adaptiv, was die Robustheit wesentlich erhöht.

Neben den beiden vorgestellten Anwendungsbeispielen wurden im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten (vgl. die Übersicht auf Seite 181) flachheitsbasierte Trajektorienregelungen für weitere Anwendungsbeispiele untersucht (hydraulischer Zylinderantrieb, Kaskade zweier in Reihe geschalteter chemischer Rührkesselreaktoren, biologische Abwasserbehandlungsanlage).

## Kapitel 6

# Zusammenfassung

Trajektorienfolgeprobleme, wie z. B. Anfahrvorgänge oder der Wechsel von Arbeitspunkten bei chemischen Reaktoren, sind regelungstechnisch interessante Aufgabenstellungen. Zu ihrer Lösung müssen geeignete Solltrajektorien entworfen und Stellsignale bestimmt werden. Da sich das Systemverhalten entlang der Solltrajektorien oft signifikant ändert, kann es meist nur durch ein nichtlineares Modell hinreichend genau beschrieben werden. Die *flachen* Systeme, wie sie 1992 von Fliess, Lévine, Martin und Rouchon charakterisiert wurden, stellen eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme dar, für die das Trajektorienfolgeproblem einfach lösbar ist.

In dieser Arbeit wird die flachheitsbasierte Lösung des Trajektorienfolgeproblems dargestellt. Darüber hinaus werden Untersuchungen zur Flachheitsanalyse und zum systematischen Entwurf einer Zustandsschätzung für flache Systeme angestellt. Die flachheitsbasierte Planung geeigneter Solltrajektorien und der Entwurf von Steuerungen bzw. Regelungen mit Zustandsschätzung zur Trajektorienfolge werden beispielhaft für einen Fedbatch-Bioreaktor und einen chemischen Rührkesselreaktor im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit untersucht. Für die rechnerunterstützte Durchführung des flachheitsbasierten Entwurfs hat sich die Verwendung eines Computer-Algebra-Systems als sehr hilfreich erwiesen.

Flache Systeme lassen sich durch einen sog. flachen Ausgang charakterisieren. Ein solcher parametrisiert das System vollständig, d. h. er besitzt die kleinste Anzahl von Komponenten, die zur Beschreibung des gesamten dynamischen Verhaltens des Systems erforderlich sind. Er hat die gleiche Anzahl von Komponenten wie der Eingang, und seine Komponenten sind nicht unmittelbar durch Differentialgleichungen miteinander verkoppelt. Dadurch können für die Komponenten des flachen Ausgangs unabhängig voneinander Solltrajektorien vorgegeben werden. Ein flacher Ausgang, der eine physikalische Deutung zulässt – was häufig möglich ist –, ist dafür besonders geeignet. Durch einen flachen Ausgang und seine Zeitableitungen lassen sich darüber hinaus alle Zustands- und Eingangsvariablen, ohne Integration von Differentialgleichungen, ausdrücken.



---

Die Darstellung der Eingangsgrößen als Funktion eines flachen Ausgangs und seiner Zeitableitungen kann als Systeminversion interpretiert werden. Damit lassen sich in einfacher Weise Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge ableiten, die die nichtlineare Dynamik des Systems berücksichtigen und deshalb zu einem sehr natürlichen Regelverhalten und geringem Stellaufwand führen. Dabei wird die Folgebewegung durch statische, quasi-statische oder dynamische Zustandsrückführung gegen Störungen und Anfangsfehler stabilisiert. Da flache Systeme exakt zustandslinearisierbar sind, ist diese Stabilisierung auf der Basis einer exakten Linearisierung der Dynamik des Trajektorienfolgefehlers einfach zu entwerfen.

Eine wesentliche Schwierigkeit bei der Anwendung der flachheitsbasierten Methode ist die Bestimmung eines flachen Ausgangs. Da ein flacher Ausgang das dynamische Verhalten des Systems vollständig beschreibt, kann das Prozeßverständnis hilfreich sein, einen flachen Ausgang mit physikalischer Bedeutung zu bestimmen. Eine systematische Bestimmung basiert auf der exakten Linearisierbarkeit flacher Systeme durch dynamische Zustandsrückführungen bzw. der Betrachtung von strukturell flachen Systemdarstellungen. Die entsprechenden Bedingungen führen auf lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten, deren Lösungen flache Ausgänge darstellen. Daraus kann eine Zustandstransformation berechnet werden, die das System in eine der nichtlinearen Regelungsnormform verwandte, strukturell flache Systemdarstellung überführt. Diese kann durch eine Zustandsrückführung exakt linearisiert werden. Neben der nichtlinearen Regelungsnormform, die eine exakte Linearisierung des Systems durch eine statische Zustandsrückführung ermöglicht, werden allgemeinere Systemdarstellungen eingeführt, die von Zeitableitungen der Eingangsgrößen abhängen und eine Linearisierung durch quasi-statische oder dynamische Zustandsrückführung erlauben.

Der Einsatz von Zustandsrückführungen zur flachheitsbasierten Trajektorienfolge erfordert die Schätzung der nicht gemessenen Zustände aus den zur Verfügung stehenden Messungen. Für flache Systeme kann ein nichtlinearer Folgebeobachter bzw. Folgefilter mit zeitvarianter Verstärkung für den geschlossenen Kreis entworfen werden. Die zeitvariante Verstärkung wird dabei auf der Basis der um die Solltrajektorien linearisierten Gleichungen des geschlossenen Kreises dimensioniert. Die Flachheit ermöglicht so einen einfachen und systematischen Entwurf einer asymptotischen Folgeregelung mit Zustandsschätzung zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems für nichtlineare Systeme.

Die Bestimmung eines flachen Ausgangs und einer asymptotischen Folgeregelung mit Zustandsschätzung erfordert umfangreiche symbolische Berechnungen. Sie können mit Hilfe einer Funktionsbibliothek für das Computer-Algebra-System MATHEMATICA rechnerunterstützt durchgeführt werden. Damit wird die Anwendung der flachheitsbasierten Methode zur Lösung praktisch relevanter Regelaufgaben wesentlich erleichtert.

Die Anwendung der flachheitsbasierten Methode wird an einem chemischen Rührkesselreaktor und einem Fedbatch-Bioreaktor zur Penicillinherstellung erläutert. Für beide Reaktormodelle werden zunächst geeignete Solltrajektorien für den flachen Ausgang entworfen. Anschließend werden flachheitsbasierte Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge bestimmt. Darüber hinaus werden mittels eines Folgebeobachters bzw. -filters nicht gemessene Zustände sowie unbekannte Systemparameter geschätzt. In beiden Fällen weist die flachheitsbasierte Trajektorienfolge mit Zustandsschätzung in der Simulation ein sehr gutes Führungs- und Störverhalten auf. Diese Ergebnisse konnten für den Bioreaktor auch experimentell bestätigt werden.

Die in den beiden Anwendungsbeispielen gemachten Erfahrungen zeigen, daß die flachheitsbasierte Methode ein großes Potential für die Lösung regelungstechnischer Probleme aufweist, was auch durch die in Tabelle 1.1 auf Seite 11 aufgeführten Beispiele unterstrichen wird. Durch die Flachheitsanalyse erhält man wertvolle Informationen über das dynamische Verhalten des Systems. Dies kann auch dazu verwendet werden, die Möglichkeiten zur Steuerung eines Prozesses durch geeignete Wahl der Stelleingriffe zu verbessern. Aus den Analyseergebnissen erhält man in einfacher Weise Steuerungen und Regelungen, mit denen ein vorgegebenes Sollverhalten des Systems erreicht werden kann. Die praktische Durchführung der erforderlichen Berechnungen und deren Implementierung kann in einfacher Weise rechnerunterstützt mit Computer-Algebra-Systemen durchgeführt werden. Da die flachheitsbasierte Methode aufgrund der häufig vorhandenen physikalischen Bedeutung eines flachen Ausgangs einfach zu durchschauen ist, kann auch mit einer großen Akzeptanz bei den Anwendern gerechnet werden.

## Anhang A

# Mathematische Ergänzungen zu den Transformationen in verschiedene Regelungsformen

In folgenden werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Transformation in die lineare zeitvariante bzw. nichtlineare Regelungsform, wie sie in (Freund 1971, Föllinger 1978) bzw. (Isidori 1995, Nijmeijer und van der Schaft 1990) betrachtet werden, für Systeme mit einer Eingangsgröße zusammenfassend dargestellt. Dabei wird zur Vereinheitlichung der Darstellung teilweise eine andere Notation als in den genannten Arbeiten verwendet. Außerdem werden die in Kapitel 3 verwendeten differentialgeometrischen Begriffe in Abschnitt A.3 in knapper Form zusammengefaßt.

### A.1 Herleitung der Transformation in die lineare zeitvariante Regelungsform

Die Bestimmungsgleichungen für die lineare zeitvariante Transformation (3.45) linearer Eingrößensysteme (3.1) ( $m = 1$ ) können rekursiv durch Vergleich der Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $y = \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} = z_1$  in den  $\mathbf{x}$ - und  $\mathbf{z}$ -Koordinaten hergeleitet werden. Dabei nützt man die spezielle Struktur der Regelungsform (3.5) aus

$$\overset{(k)}{y} = \dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.1a})$$

$$\overset{(n)}{y} = \dot{z}_n = \sum_{k=1}^n a_k(t) z_k + b_n(t) u. \quad (\text{A.1b})$$

- Die erste Zeitableitung des flachen Ausgangs in den ursprünglichen Koordinaten lautet

$$\dot{y} = L_{A\mathbf{x}+b\mathbf{u}} \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} = L_{A\mathbf{x}} \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} u. \quad (\text{A.2})$$

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit  $\dot{y} = z_2$  erhält man mit  $z_2 = \mathbf{t}_2^T \mathbf{x}$

$$\mathbf{t}_2^T \mathbf{x} = L_{Ax} \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{t}_2^T = \dot{\mathbf{t}}_1^T + \mathbf{t}_1^T A \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = 0. \quad (\text{A.3b})$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwendet man den Differentialoperator  $M_A$

$$M_A \mathbf{t}_1^T = \mathbf{t}_1^T A + \dot{\mathbf{t}}_1^T, \quad M_A^{k+1} \mathbf{t}_1^T = M_A (M_A^k \mathbf{t}_1^T), \quad k \geq 0, \quad M_A^0 \mathbf{t}_1^T = \mathbf{t}_1^T. \quad (\text{A.4})$$

- Leitet man (A.2) unter Berücksichtigung von (A.3b) nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\ddot{y} = L_{Ax+bu}^2 \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} = L_{Ax}^2 \mathbf{t}_1^T \mathbf{x} + M_A \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} u. \quad (\text{A.5})$$

Mittels (A.1a) und  $z_3 = \mathbf{t}_3^T \mathbf{x}$  erhält man

$$\mathbf{t}_3^T = M_A^2 \mathbf{t}_1^T \quad (\text{A.6a})$$

$$M_A \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = 0. \quad (\text{A.6b})$$

Die gezeigten Überlegungen lassen sich sukzessive auf alle Ableitungen  $\overset{(k)}{y}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , anwenden und man erhält die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Zeilen der Transformationsmatrix  $T(t)$

$$\mathbf{t}_k^T = M_A^{k-1} \mathbf{t}_1^T, \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{A.7a})$$

$$M_A^k \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (\text{A.7b})$$

Die Bedingungen (A.7b) bedeuten, daß die  $k$ -te Zeitableitung von  $y$  nicht von der Eingangsgröße  $u$  abhängt. Durch die mehrfache Anwendung des Differentialoperators  $M_A$  hängen diese Bedingungen von Zeitableitungen des (unbekannten) Vektors  $\mathbf{t}_1^T$  bis zur Ordnung  $k$  ab. Diese Zeitableitungen können durch Zeitableitungen des bekannten Vektors  $\mathbf{b}$  ersetzt werden.

**Lemma A.1** *Die beiden folgenden Mengen von Bedingungen sind äquivalent*

$$M_A^0 \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = M_A^1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = \dots = M_A^k \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{t}_1^T N_A^0 \mathbf{b} = \mathbf{t}_1^T N_A^1 \mathbf{b} = \dots = \mathbf{t}_1^T N_A^k \mathbf{b} = 0.$$

Für die beiden Differentialoperatoren  $M_A$  und  $N_A$  gelten die Definitionen (A.4) und

$$N_A \mathbf{b} = A \mathbf{b} - \dot{\mathbf{b}}, \quad N_A^{k+1} \mathbf{b} = N_A (N_A^k \mathbf{b}), \quad k \geq 0, \quad N_A^0 \mathbf{b} = \mathbf{b}. \quad (\text{A.9})$$

Der Beweis von Lemma (A.1) kann durch vollständige Induktion erfolgen und soll im folgenden nur kurz skizziert werden.

Für  $k = 0$  ist (A.8) offensichtlich erfüllt. Man nimmt an, Gleichung (A.8) sei für  $i = 0, \dots, k$ , erfüllt. Für den Differentialoperator  $M_A$  gilt

$$M_A^k \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} = \frac{d}{dt} (M_A^{k-1} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b}) + (M_A^{k-1} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b}) A \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{A.10})$$

Dabei ist der zweite Summand gleich Null. Im ersten Summanden tauchen Zeitableitungen des unbekanntes Vektors  $\mathbf{t}_1^T$  auf. Die Zeitableitungen von  $\mathbf{t}_1^T$  können mit Hilfe der Zeitableitungen von  $M_A^j \mathbf{t}_1^T \mathbf{b}$ ,  $j = 0, \dots, k-1$ , durch Zeitableitungen von  $\mathbf{b}$  ausgedrückt werden. Setzt man dieses Ergebnis in den ersten Summanden ein, so ergibt sich daraus  $\mathbf{t}_1^T N_A^{k+1} \mathbf{b}$ .

Mittels (A.1a) und  $z_k = \mathbf{t}_k^T \mathbf{x}$  erhält man für die Transformationsmatrix

$$T = \left( M_A^0, \dots, M_A^{n-1} \right)^T \mathbf{t}_1^T \quad (\text{A.11})$$

die folgenden Bestimmungsgleichungen

$$\mathbf{t}_1^T N_A^{k-1} \mathbf{b} = 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.12a})$$

$$\mathbf{t}_1^T N_A^{n-1} \mathbf{b} = b_n. \quad (\text{A.12b})$$

Die letzten beiden Gleichungen können auch als Zeilenvektor zusammengefaßt werden

$$\mathbf{t}_1^T (N_A^0 \mathbf{b}, \dots, N_A^{n-1} \mathbf{b}) = (0, \dots, 0, b_n). \quad (\text{A.13})$$

## A.2 Herleitung der Transformation in die nichtlineare Regelungsform

Die Bestimmungsgleichungen für die nichtlineare Transformation  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$  nichtlinearer Eingrößensysteme (3.66) ( $m = 1$ ) in die nichtlineare Regelungsform können in Analogie zu linearen Systemen rekursiv durch Vergleich der Zeitableitungen des flachen Ausgangs  $y = \Phi_1(\mathbf{x})$  in den  $\mathbf{x}$ - und  $\mathbf{z}$ -Koordinaten hergeleitet werden. Dabei nützt man die spezielle Struktur der nichtlinearen Regelungsform (3.11) mit affinen Nichtlinearitäten (3.68) aus

$$\overset{(k)}{y} = \dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.14a})$$

$$\overset{(n)}{y} = \dot{z}_n = a(\mathbf{z}) + b_n(\mathbf{z})u. \quad (\text{A.14b})$$

- Die erste Zeitableitung des flachen Ausgangs in den ursprünglichen Koordinaten lautet

$$\dot{y} = L_{g_0 + g_1 u} \Phi_1(\mathbf{x}) = L_{g_0} \Phi_1(\mathbf{x}) + L_{g_1} \Phi_1(\mathbf{x})u. \quad (\text{A.15})$$

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit  $\dot{y} = z_2$  erhält man mit  $z_2 = \Phi_2(\mathbf{x})$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = L_{g_0}\Phi_1(\mathbf{x}) \quad (\text{A.16a})$$

$$L_{g_1}\Phi_1(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A.16b})$$

- Leitet man (A.15) unter Berücksichtigung von (A.16b) nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\ddot{y} = L_{g_0+g_1}^2\Phi_1(\mathbf{x}) = L_{g_0}^2\Phi_1(\mathbf{x}) + L_{g_1}L_{g_0}\Phi_1(\mathbf{x})u. \quad (\text{A.17})$$

Mittels (A.14a) und  $z_3 = \Phi_3(\mathbf{x})$  erhält man

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = L_{g_0}^2\Phi_1(\mathbf{x}) \quad (\text{A.18a})$$

$$L_{g_1}L_{g_0}\Phi_1(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A.18b})$$

- Die gezeigten Überlegungen lassen sich sukzessive auf alle Ableitungen  ${}^{(k)}y$ ,  $k = 1, \dots, n$ , anwenden, und man erhält

$${}^{(k)}y = L_{g_0+g_1}^k\Phi_1 = L_{g_0}^k\Phi_1 + L_{g_0}L_{g_1}^{k-1}\Phi_1u \quad (\text{A.19})$$

Im zweiten Summanden tauchen Zeitableitungen der unbekannteten Funktion  $\Phi_1(\mathbf{x})$  auf. Diese können analog zum Fall linearer zeitvarianter Systeme mit Hilfe des Lemmas 4.1.2 aus (Isidori 1995, Seite 140) durch Ableitungen des Vektorfelds  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  ersetzt werden. Nach diesem Lemma sind die beiden Mengen von Bedingungen für den Gradienten  $d y = d \Phi_1$  des flachen Ausgangs

$$L_{g_1}\Phi_1(\mathbf{x}) = L_{g_1}L_f\Phi_1(\mathbf{x}) = \dots = L_{g_1}L_f^k\Phi_1(\mathbf{x}) = 0$$

$$L_{g_1}\Phi_1(\mathbf{x}) = \langle d\Phi_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0}^0\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = \dots = \langle d\Phi_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0}^k\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = 0$$

äquivalent. Mit Hilfe dieser Äquivalenz lauten die Bestimmungsgleichungen für den flachen Ausgang  $y$

$$\langle d y, \text{ad}_{g_0}^k\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n-2, \quad (\text{A.20a})$$

$$\langle d y, \text{ad}_{g_0}^{n-1}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = b_n(\Phi(\mathbf{x})). \quad (\text{A.20b})$$

Wegen der Zustandsabhängigkeit des Koeffizienten  $b_n(\mathbf{z})$  ist es notwendig, die Transformation  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$  in die letzte Gleichung einzusetzen. Die Gleichungen (A.20) stellen ein System linearer partieller Differentialgleichungen dar:

$$d y \left( \text{ad}_{g_0}^0\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{n-1}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right) = \left[ 0, \dots, 0, b_n(\Phi(\mathbf{x})) \right]. \quad (\text{A.21})$$

## A.3 Integrierbarkeit partieller Differentialgleichungen

Für die Existenz einer Lösung eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen, wie sie im Zusammenhang mit der Transformation auf die nichtlineare oder verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform auftritt, müssen neben der Rangbedingung der Erreichbarkeitsmatrix noch sog. *Integrierbarkeitsbedingungen* erfüllt sein. Zur Formulierung dieser Bedingungen und zur Charakterisierung der Lösbarkeit werden im folgenden einige Begriffe aus der Differentialgeometrie wiederholt<sup>1</sup>.

Eine Menge von  $d$  linear unabhängigen Vektorfeldern

$$F_d(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\}, \quad \text{Rang } F_d(\mathbf{x}) = d, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.22})$$

spannt eine *Distribution*  $\Delta_d(\mathbf{x})$  der Dimension  $d$  auf,

$$\Delta_d(\mathbf{x}) = \text{span} \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\}, \quad \dim \Delta_d(\mathbf{x}) = d, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.23})$$

durch die ein Vektorraum definiert wird. Die *Dimension* der Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x})$  ist als Rang der zugehörigen Matrix  $F_d(\mathbf{x})$  definiert:  $\dim \Delta_d(\mathbf{x}) = \text{Rang } F_d(\mathbf{x})$ . Die Distribution ist von *konstanter Dimension* in der Umgebung  $U(\mathbf{x}_0)$  von  $\mathbf{x}_0$ , wenn  $\text{Rang } \Delta_d(\mathbf{x}) = d = \text{konstant}$   $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$  gilt.

**Beispiel A.2** Aus der Erreichbarkeitsmatrix  $P(\mathbf{x})$  in (3.74) kann man die folgende Distribution bilden

$$G_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span} \{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^{n-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\}. \quad (\text{A.24})$$

Dabei macht man sich  $\text{ad}_{-\mathbf{g}_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = (-1)^k \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ ,  $k \geq 0$  zunutze. Da es sich bei der Distribution um einen Vektorraum handelt, hat der in der Matrix vorkommende Faktor  $(-1)^k$  keinen Einfluß.

Neben den Distributionen, die durch Vektorfelder aufgespannt werden, gibt es in der Differentialgeometrie dazu duale Objekte, die *Kodistribution*. Diese bildet den zur Distribution dualen Vektorraum. Ihre Basis bilden die 1-Formen

$$\omega_i(\mathbf{x}) = d \lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad i = 1, \dots, n - d. \quad (\text{A.25})$$

In dieser Arbeit werden lediglich spezielle Kodistributionen  $\Delta_d^\perp(\mathbf{x})$  betrachtet, deren Basis aus Kovektoren gebildet wird, deren Skalarprodukt mit den Vektorfeldern  $\mathbf{Z}$  einer Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x})$  konstanter Dimension  $d$  Null ergibt

$$\langle \omega_i(\mathbf{x}), \mathbf{Z} \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n - d, \quad \forall \mathbf{Z} \in \Delta_d(\mathbf{x}). \quad (\text{A.26})$$

Diese Beziehungen werden auch als *Orthogonalität* bezeichnet.

<sup>1</sup>In dieser Arbeit werden alle Definitionen in *lokalen Koordinaten* angegeben. Für eine mathematische Darstellung sei auf die Lehrbücher von Isidori (1995) bzw. Nijmeijer und van der Schaft (1990) verwiesen. Die allgemeine koordinatenunabhängige Definition ist z. B. in (Isidori 1995) zu finden.

**Beispiel A.3** *Die zur Distribution*

$$G_{n-2}(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{g_0}^{n-2} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \}. \quad (\text{A.27})$$

*gehörende Kodistribution*

$$G_k^\perp(\mathbf{x}) = \text{span} \{ d\lambda(\mathbf{x}) \} \quad (\text{A.28})$$

*hat die Dimension  $\dim G_k^\perp(\mathbf{x}) = 1$ , und die Form  $d\lambda(\mathbf{x})$  wird durch die folgenden Gleichungen definiert*

$$\langle d\lambda(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (\text{A.29})$$

*Dies entspricht der Beziehung (A.20a).*

Die Bedingungen zur Existenz einer Zustandstransformation in die nichtlineare Regelungsform lassen sich mit Hilfe der Distribution (A.27) formulieren. Die Integrierbarkeit eines Systems partieller Differentialgleichungen kann mit Hilfe der folgenden Definition charakterisiert werden.

**Definition A.4** *Eine Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) \mid j = 1, \dots, d \}$  konstanter Dimension  $d$  heißt vollständig integrierbar, wenn es  $n-d$  skalare Funktionen  $\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \dots, \lambda_{n-d}(\mathbf{x})$  ( $\neq$  konstant) gibt, die die  $d$  partiellen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial \lambda_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, d, \quad i = 1, \dots, n-d, \quad (\text{A.30})$$

*erfüllen und deren Gradienten  $d\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $i = 1, \dots, n-d$ , linear unabhängig sind:*

$$\dim \text{span} \{ d\lambda_1(\mathbf{x}), d\lambda_2(\mathbf{x}), \dots, d\lambda_{n-d}(\mathbf{x}) \} = n-d. \quad (\text{A.31})$$

*Die Gradienten  $d\lambda_i(\mathbf{x})$  heißen exakte 1-Formen.*

Das Integral einer exakten 1-Form  $d\lambda$  ist eine glatte Funktion  $\lambda(\mathbf{x})$ , die der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.32})$$

genügen muß. Die Charakterisierung der vollständigen Integrierbarkeit erfolgt in der Differentialgeometrie mit Hilfe der Involutivität von Distributionen.

**Definition A.5** *Eine Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x})$  konstanter Dimension  $d$  heißt involutiv, wenn die Lie-Klammer von je zwei Vektorfeldern als Linearkombination aller Vektorfelder dargestellt werden kann:*

$$[\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_j(\mathbf{x})] = \sum_{k=1}^d \alpha_k(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (\text{A.33})$$



Die Involutivität der aus  $F_d(\mathbf{x})$  gebildeten Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x})$  kann mit Hilfe der folgenden Bedingung überprüft werden:

$$\text{Rang } \{F_d(\mathbf{x}), [\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_j(\mathbf{x})]\} = \text{Rang } F_d(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (\text{A.34})$$

**Beispiel A.6 (Fortsetzung von Beispiel 3.6 auf S. 73)** *Die zu Beispiel 3.6 gehörende Distribution*

$$G_{n-1}(\mathbf{x}) = G_2(\mathbf{x}) = \text{span } \{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\} \quad (\text{A.35})$$

ist nach (A.34) für  $x_2 \neq 0$  wegen

$$\dim \text{span } \{G_2(\mathbf{x}), [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x})]\} = \dim \text{span } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 \\ x_2 & x_3 & 2x_2 \end{pmatrix} \right\} = 3 \neq \dim G_2(\mathbf{x}) \quad (\text{A.36})$$

nicht involutiv. Das zugehörige partielle Differentialgleichungssystem (3.79) ist damit nicht vollständig integrierbar.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit einer Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x})$  stellt das sog. *Frobenius-Theorem* dar (Olver 1993, Isidori 1995):

**Satz A.1** *Eine Distribution  $\Delta_d(\mathbf{x})$  konstanter Dimension ist genau dann vollständig integrierbar, wenn sie involutiv ist.*

## Anhang B

# Ergänzungen zu strukturell flachen Systemen

Im folgenden Abschnitt wird ein Algorithmus zur Bestimmung eines flachen Ausgangs und der Transformation in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform (3.21) vorgestellt. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, daß die Bedingungen aus Satz 3.7 einen Spezialfall der Bedingungen von Satz 3.4 darstellen.

### B.1 Algorithmus zur Bestimmung eines flachen Ausgangs

Bei der Formulierung der Existenzbedingungen in Abschnitt 3.2.3 für die Transformation eines nichtlinearen Systems (2.1) in die verallgemeinerte nichtlineare Regelungsform (3.21) wird die Kenntnis der Tupel  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$  und  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$  vorausgesetzt. Bei der Überprüfung der Bedingungen für ein konkretes Beispiel sind diese Tupel in der Regel nicht bekannt. Man könnte prinzipiell die Bedingungen aus Abschnitt 3.2.3 anhand aller möglichen Kombinationen der Tupel  $\mathbf{r}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  überprüfen. Aufgrund der Vielzahl an Möglichkeiten und des dafür erforderlichen großen Rechenaufwands ist dieser Weg im allgemeinen wenig praktikabel bzw. u. U. gar unmöglich. Aus diesem Grund wird im folgenden ein auf den Bedingungen aus Satz 3.4 basierender Algorithmus beschrieben, der den erforderlichen Rechenaufwand zur Bestimmung der Distributionen (3.111) verringert.

Nachfolgend werden die zwei wesentlichen Schritte eines rekursiven Algorithmus vorgestellt, der die Bedingungen aus Satz 3.4 verwendet, um die Tupel  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$  und  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$  zu bestimmen. Diese Schritte werden anschließend näher erläutert. Die

rekursive Darstellung des Algorithmus eignet sich besonders für eine Implementierung mit einem Computer-Algebra-System (Rothfuß *et al.* 1995a)<sup>1</sup>.

**Algorithmus B.1** *Beginnend mit  $\kappa = \mathbf{r} = (0, \dots, 0)$  werden in jedem Schritt  $j \geq 0$  Indizes aus einer Indexmenge  $I_j \subseteq I_0 = (1, \dots, m)$  sukzessive eliminiert, wenn eine der folgenden Bedingungen verletzt wird*

(i) *Die Größen  $\kappa_i$ ,  $i \in I_j$  werden um eins erhöht, so daß*

$$\dim \Delta_{j+1} \cap T\mathcal{X} \text{ maximal wird.} \quad (\text{B.1})$$

*Die Indizes, deren zugehörige Vektorfelder  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^l \mathbf{g}_i$  keinen Dimensionszuwachs hervorrufen, werden aus  $I_l$  gestrichen und die zugehörigen verallgemeinerten Steuerbarkeitsindizes werden zu  $\kappa_i = l - 1$  gesetzt.*

(ii) *Ist die Distribution (3.111) involutiv, so wird mit dem nächsten Schritt  $j + 1$  fortgefahren. Ist sie nicht involutiv, so werden sukzessive – beginnend mit den kleinsten Werten – die  $r_i$  erhöht. Im Gegensatz zur Erhöhung der  $\kappa_i$ , die parallel um jeweils eins erhöht werden, wird ein  $r_i$  solange erhöht, bis entweder die resultierende Distribution involutiv ist oder  $r_i = \sum_{i=1}^m \kappa_i$ . Im letzteren Fall wird der zugehörige Index  $i$  aus  $I_j$  entfernt und der nächstkleinere Index  $r_j \geq r_i$  erhöht.*

*Dieser Schritt wird solange wiederholt, bis entweder die Indexmenge  $I_j = \{\}$  oder  $\sum_{i=1}^m \kappa_i = n$  ist.*

Dieser Algorithmus bestimmt neben den Tupeln  $\kappa$  und  $\mathbf{r}$  auch die Distributionen (3.111), aus denen die partiellen Differentialgleichungen (3.100) für die Komponenten des flachen Ausgangs gebildet werden.

Der rekursive Charakter des Algorithmus B.1 wird deutlich, wenn die beiden wesentlichen Schritte detailliert werden:

### Algorithmus B.2

- **Initialisierung:**

*Man definiert eine Indexmenge  $I_{-1} = \{1, \dots, m\}$ , die die Eingangsgrößen repräsentiert. Aus dieser Menge wählt man diejenigen Indizes aus und speichert sie in einer Untermenge  $I_0 \subseteq I_{-1}$ , für die die Dimension von  $\text{span} \{\mathbf{g}_i, i \in I_0\}$  maximal wird. Man setzt  $l = 0$ ,  $\kappa = \mathbf{r} = \mathbf{0}$  und  $\Delta_{-1}$  wie in (3.97a).*

---

<sup>1</sup>Die in (Rothfuß *et al.* 1995a) verwendete Formulierung der Distributionen (3.111) unterscheidet sich von der Darstellung in dieser Arbeit. Die prinzipiellen Überlegungen zur Formulierung des Algorithmus sind jedoch in beiden Darstellungen gleich.

• **Schritt j.1,  $0 \leq j \leq n - 1$ :**

Bestimme eine Indexmenge  $I_j \subseteq I_{j-1}$ , für die

$$(\Delta_{j-1} + \text{span} \{\text{ad}_{\mathcal{F}}^j \mathbf{g}_i\}) \cap T\mathcal{X}, \quad i \in I_j \quad \text{und} \quad j - r_i \geq 0, \quad (\text{B.2})$$

maximale Dimension hat. Die Vektorfelder  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^j \mathbf{g}_i$ , für die  $j - r_i < 0$  gilt, werden in dieser Dimensionsbedingung nicht berücksichtigt.

Die Indexmenge  $I_j$  ist nicht immer eindeutig bestimmt. Aus diesem Grunde verzweigt sich der Algorithmus in eine Baumstruktur, wenn es mehr als eine Möglichkeit gibt, ein  $I_j$  zu bilden, das (B.2) erfüllt.

Ist  $I_j$  bestimmt, so wird (3.111) mit den aktuellen Werten für  $\boldsymbol{\kappa}$  und  $\mathbf{r}$  bestimmt.

• **Schritt j.2,  $0 \leq j \leq n - 1$ :**

Ist die Distribution  $\Delta_j$  involutiv, so wird  $j = j+1$  gesetzt und mit Schritt j+1 fortgefahren. Andernfalls werden die Paare von Vektorfeldern  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Delta_j$  bestimmt, für deren Lie-Klammer  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \notin \Delta_j$  gilt. Ihre Indizes werden in einer Menge  $T_j$  gespeichert.

Ist  $T_j \neq \{\}$ , so werden alle möglichen Teilmengen  $S_k \subseteq T_j$  gebildet. Für jede dieser Teilmengen werden die folgenden Teilschritte ausgeführt:

- Streiche die in  $S_k$  vorkommenden Indizes in  $I_j$ :  $I^* = I_j \setminus S_k$ .
- Bilde die Menge der Indizes  $R^* = \{i \in I_0 \text{ mit } \kappa_i - 1 < l\}$ .
- Die Werte  $r_i$ ,  $i \in R^*$  werden folgendermaßen erhöht: man nimmt das kleinste  $r_i$ ,  $i \in R^*$  und erhöht es solange bis entweder die Distribution  $\Delta_j$  involutiv oder  $r_i = 2j$  ist. Im letzteren Fall wird das nächstgrößere  $r_i$  in  $R^*$  entsprechend erhöht. Sind alle  $r_i = 2j$ ,  $i \in R^*$ , so wird die nächste Teilmenge  $S_k$  untersucht.

Sind alle Teilmengen  $S_k$  untersucht und keine der resultierenden Distributionen  $\Delta_j$  involutiv, so bricht der Algorithmus ab.

Bedingt durch die Baumstruktur liefert dieser Algorithmus u. U. mehrere Paare von Tupeln  $(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r})$ . Gilt für mindestens eines dieser Tupel  $\sum_{i=1}^m \kappa_i = n$ , so ist das System flach. Gilt hingegen für alle möglichen Tupel  $\sum_{i=1}^m \kappa_i < n$ , so kann keine Aussage über die Flachheit des Systems gemacht werden, da die zugrundeliegenden Bedingungen lediglich hinreichenden Charakter haben.

**Bemerkung B.1** Durch die Erhöhung der kleinsten  $r_i$  in Schritt 1.2 werden die kürzeren Integratorketten der verallgemeinerten Regelungsform (3.21) verlängert. Dies führt bei dynamischer Realisierung der exakt linearisierenden Zustandsrückführung zu etwa gleich langen Teilsystemen.

**Bemerkung B.2** Bei jeder Erhöhung von  $\kappa_i$  bzw.  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in Schritt  $l$ , müssen die Distributionen  $\Delta_j$ ,  $j = -1, \dots, l$ , neu berechnet werden.

**Bemerkung B.3** Existiert für ein System eine Zustandstransformation in die nichtlineare Regelungsform (3.11), so liefert der Algorithmus B.2 die Steuerbarkeitsindizes  $\rho_i = \kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sowie  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

Die einzelnen Schritte des Algorithmus B.2 sollen nachfolgend anhand des Beispiels 3.10 erläutert werden.

**Beispiel B.1** Wendet man den Algorithmus B.2 auf (3.101) an, so erhält man nach der Initialisierung von  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  und  $\Delta_{-1}$  nach (3.97a) im Schritt 0.1 die Distribution

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Der Rang von  $\Delta_0$  in  $T\mathcal{X}$  ist gleich zwei. Da jedoch  $\Delta_0$  wegen  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \notin \Delta_0$  nicht involutiv ist, kann nach Schritt 0.2 entweder  $r_1$  oder  $r_2$  auf eins erhöht werden, d. h. der Algorithmus verzweigt sich in zwei Äste. Dabei ist zu beachten, daß wegen  $r_m \equiv 0$  in (3.21) und  $m = 2$  für dieses Beispiel nicht  $r_1$  und  $r_2$  gleichzeitig erhöht werden dürfen. In beiden Ästen wird zu Schritt 0 zurückverzweigt.

(i)  $r_1 = 1$ ,  $r_2 \equiv 0$ : In diesem Fall erhält man die Distributionen

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(1+s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.4a})$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.4b})$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.4c})$$

Die Distribution  $\Delta_1$  besitzt in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 2, ist jedoch wegen  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \notin \Delta_1$  nicht involutiv. Da die Involutivitätsbedingung verletzt ist und  $r_2 \equiv 0$ , kann nur der Wert von  $r_1$  erhöht werden.

Daraus erhält man mit  $r_1 = 2$ :

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(2+s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.5a})$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(1+s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.5b})$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.5c})$$

Die Distribution  $\Delta_1$  besitzt in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 2, ist aber wegen  $[\partial/\partial u_1, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2] \notin \Delta_1$  nicht involutiv.

Setzt man  $r_1 = 3$ , so ergibt sich:

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(3+s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.6a})$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(2+s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.6b})$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(1+s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.6c})$$

$$\Delta_2 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.6d})$$

Die Distribution  $\Delta_2$  besitzt in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 3 und ist involutiv. Die Distribution

$$\Delta_3 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{g}_2; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.6e})$$

hat in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 4. Damit erhält man

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 0, \quad \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 3, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 4 = n. \quad (\text{B.7})$$

(ii)  $r_2 = 1, r_1 \equiv 0$ : In diesem Fall erhält man die Distributionen

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s+1)}}; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.8a})$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_1; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.8b})$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_1; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.8c})$$

Die Distribution  $\Delta_1$  besitzt in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 3, ist jedoch wegen  $[\mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_1] \notin \Delta_1$  nicht involutiv. Da die Involutivitätsbedingung verletzt ist und  $r_1 \equiv 0$ , kann nur der Wert von  $r_2$  erhöht werden.

Daraus erhält man mit  $r_2 = 2$ :

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s+2)}}; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.9a})$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s+1)}}, \mathbf{g}_1; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.9b})$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s)}}, \mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_1; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.9c})$$

Die Distribution  $\Delta_1$  besitzt in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 2, ist aber wegen  $[\partial/\partial u_2, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_1] \notin \Delta_1$  nicht involutiv.

Setzt man  $r_2 = 3$ , so ergibt sich:

$$\Delta_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s+3)}}; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.10a})$$

$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s+2)}}, \mathbf{g}_1; s \geq 0 \right\} \quad (\text{B.10b})$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1^{(s)}}, \frac{\partial}{\partial u_2^{(s+1)}}, \mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_1; s \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.10c})$$

Die Distribution  $\Delta_1$  besitzt in  $T\mathcal{X}$  die Dimension 2 und ist wegen  $[\mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{g}_1] \notin \Delta_1$  nicht involutiv. Da  $r_2 = n$ , ist eine weitere Erhöhung von  $r_2$  nicht mehr möglich. Somit führt dieser Ast der Rekursion zu keiner Lösung für  $\mathbf{r}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$ , mit denen die Bedingungen (3.100) erfüllt sind.

Damit liefert der Algorithmus B.2 die bereits in Beispiel 3.10 verwendeten Werte (B.7).

## B.2 Vergleich von Satz 3.7 und Satz 3.4

Im folgenden wird gezeigt, daß Satz 3.4 den Satz 3.7 als Spezialfall enthält, d. h. es gilt der folgende

**Satz B.1** *Wenn die hinreichenden Bedingungen aus Satz 3.7 erfüllt sind, dann gilt dies auch für die hinreichenden Bedingungen aus Satz 3.4.*

Die Umkehrung gilt nicht, wie man an Beispiel 3.10 in Abschnitt 3.2.3 sehen kann. Zum Beweis von Satz B.1 werden zunächst die beiden folgenden Behauptungen bewiesen

**Lemma B.2** *Ist Bedingung (iii) aus Satz 3.7 erfüllt, so gilt*

$$\text{ad}_{\mathcal{F}}^k \mathbf{g}_i = \text{ad}_{g_0}^k \mathbf{g}_i + \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \sum_l \alpha \left( \begin{matrix} \langle \langle \mathbf{r} \rangle \rangle \\ \mathbf{u} \end{matrix} \right) \mathbf{v}_l, \quad \mathbf{v}_l \in D_{k+\mu_i}. \quad (\text{B.11})$$

**Beweis B.1** Für  $k = 0$  gilt,  $\text{ad}_{\mathcal{F}}^0 \mathbf{g}_i = \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^0 \mathbf{g}_i$ , d. h. die Behauptung (B.11) ist für  $k = 0$  erfüllt. Unter der Annahme, die Behauptung (B.11) gelte für ein gewisses  $k \geq 0$ , erhält man

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathcal{F}}^{k+1} \mathbf{g}_i &= \left[ \mathbf{g}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i u_i + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_k^{(j)}}, \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^k \mathbf{g}_i + \mathbf{X} \right] \\ &= [\mathbf{g}_0, \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^k \mathbf{g}_i] + [\mathbf{g}_0, \mathbf{X}] + \sum_{i=1}^m u_i [\mathbf{g}_i, \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^k \mathbf{g}_i] + \sum_{i=1}^m u_i [\mathbf{g}_i, \mathbf{X}] + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_k^{(j)}} \\ &= \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^{k+1} \mathbf{g}_i + [\mathbf{g}_0, \mathbf{X}] + \sum_{i=1}^m u_i [\mathbf{g}_i, \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^k \mathbf{g}_i + \mathbf{X}] + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha} u_k^{(j+1)} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_k^{(j)}}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Der zweite Summand ist Element von  $D_{k+\mu_i+1}$ , weil  $\mathbf{X} \in D_{k+\mu_i}$ . Der dritte Summand ist Element von  $D_{k+\mu_i+1}$  wegen Bedingung (iii) aus Satz 3.7. Der vierte Summand ist Element von  $D_{k+\mu_i}$ , da nach (B.11) nur die Koeffizienten  $\alpha$  vom Eingang und dessen Zeitableitungen abhängen. Daher ist der vierte Summand auch Element von  $D_{k+\mu_i+1}$ . Damit ist die Gültigkeit von (B.11) durch Induktion gezeigt.

**Lemma B.3** Für die Distributionen  $\Delta_j$  und  $D_j$  gilt

$$\Delta_j = \Delta_{j-1} + D_j, \quad j \geq 0, \quad (\text{B.13a})$$

$$= \Delta_{-1} + D_0 + \dots + D_j. \quad (\text{B.13b})$$

**Beweis B.2** Für  $j = 0$  erhält man

$$D_0 = \text{span} \{ \mathbf{g}_k, \mu_k = 0 \} \quad (\text{B.14a})$$

$$\Delta_0 = \Delta_{-1} + \text{span} \left\{ \left[ \mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial u_i^{(r_i+l)}} \right], l \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.14b})$$

Mit  $\left[ \mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right] = -\mathbf{g}_i$  erhält man mit  $r_i = \mu_i$  aus der letzten Beziehung

$$\Delta_0 = \Delta_{-1} + \text{span} \{ \mathbf{g}_k, r_k = 0 \} \quad (\text{B.14c})$$

$$= \Delta_{-1} + D_0. \quad (\text{B.14d})$$

Damit ist die Behauptung (B.13) für  $j = 0$  wahr. Unter der Annahme, die Behauptung (B.13) gelte für ein gewisses  $j \geq 0$ , erhält man:

$$D_{j+1} = D_j + \text{span} \{ [\mathbf{g}_0, \mathbf{Z}], \forall \mathbf{Z} \in D_j \} + \text{span} \{ \mathbf{g}_k, \mu_k = j + 1 \} \quad (\text{B.15a})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{j+1} &= \Delta_j + \text{span} \{ [\mathcal{F}, \mathbf{Z}], \forall \mathbf{Z} \in \Delta_j \} \\ &= \Delta_j + \text{span} \{ \mathbf{g}_k, r_k = j + 1 \} + \text{span} \left\{ \text{ad}_{\mathcal{F}}^{l_k} \mathbf{g}_k, l_k = 1, \dots, j + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.15b})$$



Mit (B.11) erhält man aus der letzten Beziehung

$$\Delta_{j+1} = \Delta_j + \text{span} \{ \mathbf{g}_k, r_k = j+1 \} + \text{span} \{ \text{ad}_{g_0}^{l_k} \mathbf{g}_k, l_k = 1, \dots, j+1 \} + D_{j+1} \quad (\text{B.15c})$$

$$= \Delta_j + D_{j+1}. \quad (\text{B.15d})$$

Damit ist die Gültigkeit von Behauptung (B.13) für  $j \geq 0$  durch Induktion gezeigt.

Mit diesen beiden Lemmata kann Satz B.1 bewiesen werden.

**Beweis B.3** (i) *Dimensionsbedingung:* Mit B.13 ist Bedingung (i) erfüllt, wenn Bedingung (i) und (iii) aus Satz 3.7 erfüllt sind.

(ii) *Involutivität:* Die Distributionen  $D_j$ ,  $j \geq 0$  sind nach Bedingung (i) aus Satz 3.7 involutiv. Die Distribution  $\Delta_{-1}$  ist involutiv, da sie nur aus konstanten Vektorfeldern gebildet wird. Die Distribution  $\Delta_0$  nach (B.13) ist wegen der Involutivität von  $\Delta_{-1}$  und  $D_0$  ebenfalls involutiv, da darüber hinaus die Basisvektoren von  $D_0$  nicht von  $\mathbf{u}$  oder dessen Zeitableitungen abhängen.

Sind die Distributionen  $\Delta_0, \dots, \Delta_j$  sowie  $D_{j+1}$  involutiv, so ist mit denselben Überlegungen auch  $\Delta_{j+1}$  involutiv. Damit ist Bedingung (ii) erfüllt, wenn die Bedingungen aus Satz 3.7 erfüllt sind.

## Anhang C

# Systemgrößen und Parameterwerte für die Simulation

Im folgenden sind die für die Beschreibung des Bioreaktors aus Abschnitt 5.1 und des chemischen Rührkesselreaktors aus Abschnitt 5.2 verwendeten Systemgrößen und Parameterwerte zusammengestellt. Diese Werte wurden für die Simulationen in den Abschnitten 5.1.6 und 5.2.7 verwendet.

### C.1 Systemgrößen und Parameterwerte für den Bioreaktor

#### C.1.1 Systemgrößen und Parameterwerte für die Trophophase

In den folgenden beiden Tabellen sind die zur Beschreibung der Trophophase benötigten Systemgrößen und Parameterwerte zusammengefasst. Dabei stehen die Abkürzungen TS und S für Trockensubstanz bzw. Substrat.

Systemgröße:	Größe:	Einheit:
Biomasse	$x_1$	g TS
Substratmasse	$x_2$	mg S
Zulaufstrom Substratzufuhr	$u_1$	$\frac{1}{h}$
Wachstumsrate	$\mu(x_2)$	$\frac{1}{h}$

Parameter:	Größe:	Wert:	Einheit:
max. Wachstumsrate	$\mu_{\max}$	0.12	$\frac{1}{\text{h}}$
Affinitätskonstante	$K_S$	50.0	$\frac{\text{mg S}}{\text{l}}$
Erhaltungsstoffwechselkoeffizient	$m_S$	23.0	$\frac{\text{mg S}}{\text{g TS h}}$
Ausbeutekoeffizient Substrat	$p_1$	0.00047	$\frac{\text{g TS}}{\text{mg S}}$
Zulaufkonzentration Substrat	$p_2$	200000.0	$\frac{\text{mg S}}{\text{l}}$
Ausbeutekoeffizient Stoffwechsel	$p_3$	0.069	$\frac{\text{g TS}}{\text{mmol } CO_2}$
Erhaltungsstoffwechselkoeffizient	$p_4$	$\frac{6}{180}$	$\frac{\text{mmol } CO_2}{\text{mg S}}$
Anfangswert des Volumens	$V(0)$	150	l

### C.1.2 Systemgrößen und Parameterwerte für die Idiophase

Zusätzlich zu den Symbolen aus dem vorhergehenden Abschnitt werden zur Beschreibung des Modells der Idiophase folgende Systemgrößen und Parameter benötigt. Dabei stehen die Abkürzungen Pen und Paa für Penicillin und Precursor (*Phenyl Acetic Acid*).

Systemgröße:	Größe:	Einheit:
Precursormasse	$x_3$	g Paa
Penicillinmasse	$x_4$	mg Pen
Zulaufstrom Precursor	$u_2$	$\frac{1}{\text{h}}$

Die zusätzlichen Parameter für die Idiophase lauten:

Parameter:	Größe:	Wert:	Einheit:
Produktbildungsrate	$\mu_{Pen}$	3	$\frac{\text{mg Pen}}{\text{g TS h}}$
Ausbeutekoeffizient Precursor	$y_{PP}$	2000.0	$\frac{\text{mg Pen}}{\text{g Paa}}$
Ausbeutekoeffizient Penicillin	$p_5$	0.9	$\frac{\text{g TS}}{\text{mg S}}$
Zulaufkonzentration Precursor	$p_6$	100.0	$\frac{\text{g Paa}}{\text{l}}$
Hydrolyserate	$p_7$	0.04	$\frac{1}{\text{h}}$

Für die Elemente der Kovarianzmatrizen  $R_{1,2}$  in (5.33) wurden folgende Werte gewählt:

$r_{1,11} = 0.0001 \left( \frac{\text{g TS}}{\text{h}} \right)^2$	$r_{1,22} = 0.001 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{h}} \right)^2$
$r_{1,33} = 0.001 \left( \frac{\text{g Paa}}{\text{h}} \right)^2$	$r_{1,44} = 0.005 \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{h}} \right)^2$
$r_{1,55} = 0.01 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{g TS h}} \right)^2$	$r_{1,66} = 500 \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{g Paa h}} \right)^2$
$r_{1,77} = 1.0 \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{g TS h}} \right)^2$	$r_{1,24} = 0.0001 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{h}} \right) \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{h}} \right)$
$r_{1,25} = 1.0 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{h}} \right) \left( \frac{\text{mg S}}{\text{g TS h}} \right)$	$r_{1,36} = 0.01 \left( \frac{\text{g Paa}}{\text{h}} \right) \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{g Paa h}} \right)$
$r_{2,11} = 0.005 (\text{g TS})^2$	$r_{2,22} = 0.05 \left( \frac{\text{mmol CO}_2}{\text{h}} \right)^2$
$r_{2,33} = 0.01 (\text{g Paa})^2$	$r_{2,44} = 0.01 (\text{mg Pen})^2$

Für die Anfangswerte der Zustände des Bioreaktors und des Folgefilters mit den Dynamikparametern aus (5.30) des geschlossenen Kreises wurden folgende Werte angenommen:

$x_{10} = 1500 \text{ g TS}$	$\hat{x}_{10} = 1550 \text{ g TS}$	$\hat{m}_S(0) = 23 \frac{\text{mg S}}{\text{g TS h}}$
$x_{20} = 2000 \text{ mg S}$	$\hat{x}_{20} = 2100 \text{ mg S}$	$\hat{y}_{PP}(0) = 1900 \frac{\text{mg Pen}}{\text{g Paa}}$
$x_{30} = 25 \text{ g Paa}$	$\hat{x}_{30} = 35 \text{ g Paa}$	$\hat{\mu}_{Pen}(0) = 3 \frac{\text{mg Pen}}{\text{g TS h}}$
$x_{40} = 1600 \text{ mg Pen}$	$\hat{x}_{40} = 1500 \text{ mg Pen}$	$q_0^1 = -1 \text{ h}^{-3}$
$q_1^1 = -3 \text{ h}^{-2}$	$q_2^1 = -3 \text{ h}^{-1}$	$q_0^2 = -10 \text{ h}^{-1}$

Die Anfangswerte  $P(0)$  für die Kovarianzmatrix wurden folgendermaßen angesetzt:

$p_{11}(0) = 0.01 \left( \frac{\text{g TS}}{\text{h}} \right)^2 \text{ h}$	$p_{22}(0) = 0.01 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{h}} \right)^2 \text{ h}$
$p_{33}(0) = 0.001 \left( \frac{\text{g Paa}}{\text{h}} \right)^2 \text{ h}$	$p_{44}(0) = 0.001 \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{h}} \right)^2 \text{ h}$
$p_{55}(0) = 10.0 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{g TS h}} \right)^2 \text{ h}$	$p_{66}(0) = 1.0 \cdot 10^{-6} \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{g Paa h}} \right)^2 \text{ h}$
$p_{77}(0) = 1.0 \cdot 10^{-6} \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{g TS h}} \right)^2 \text{ h}$	$p_{24}(0) = 0.0001 \left( \frac{\text{mg S}}{\text{h}} \right) \left( \frac{\text{mg Pen}}{\text{h}} \right) \text{ h}$

## C.2 Systemgrößen und Parameterwerte für den Rührkesselreaktor

Die Parameter des kontinuierlich betriebenen Rührkesselreaktors wurden aus den in (Chen *et al.* 1995) angegebenen Parametern bestimmt:

$\alpha = 30.828 \text{ h}^{-1}$	$\delta = 3.522 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ K/kJ}$	$\Delta H_{AB} = 4.2 \text{ kJ/mol}$
$\beta = 86.688 \text{ h}^{-1}$	$\gamma = 0.1 \text{ K/kJ}$	$\Delta H_{BC} = -11.0 \text{ kJ/mol}$
$c_{\text{in}} = 5.1 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$T_{\text{in}} = 104.9 \text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta H_{AD} = -41.85 \text{ kJ/mol}$
$k_{10} = 1.287 \cdot 10^{12} \text{ h}^{-1}$	$k_{20} = 9.043 \cdot 10^6 \text{ m}^3/(\text{mol}\cdot\text{h})$	
$E_1 = 9758.3$	$E_2 = 8560.0$	

Die Anfangswerte der Zustände des Rührkesselreaktors und des Folgebeobachters mit den Dynamikparametern aus (5.68) des geschlossenen Kreises und des Schätzfehlersystems aus (5.74) lauten:

$c_A(0) = 2.0 \text{ mol/l}$	$c_B(0) = 1.08 \text{ mol/l}$	$T(0) = 108.0 \text{ }^\circ\text{C}$	$c_{\text{in}} = 5.1 \text{ mol/l}$
$\hat{c}_A(0) = 2.18 \text{ mol/l}$	$T_c(0) = 107.7 \text{ }^\circ\text{C}$	$\hat{T}(0) = 108.0 \text{ }^\circ\text{C}$	$\hat{c}_{\text{in}}(0) = 6.0 \text{ mol/l}$
$\hat{\gamma} = 0.1 \text{ K/kJ}$	$t_1 = 0.5 \text{ h}$	$t_2 = 0.75 \text{ h}$	
$q_0^1 = -20 \text{ h}^{-1}$	$q_0^2 = -64000 \text{ h}^{-3}$	$q_1^2 = -4800 \text{ h}^{-2}$	$q_2^2 = -64000 \text{ h}^{-1}$
$\gamma_0^1 = 3.96 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$	$\gamma_1^1 = 2.41 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-2}$	$\gamma_2^1 = 4.61 \cdot 10^{-8} \text{ h}^{-3}$	$\gamma_3^1 = 3.60 \cdot 10^{-10} \text{ h}^{-4}$
$\gamma_4^1 = 10^{-13} \text{ h}^{-5}$	$\gamma_0^2 = 9.60 \cdot 10^{-9} \text{ h}^{-1}$	$\gamma_1^2 = 2.00 \cdot 10^{-10} \text{ h}^{-2}$	$\gamma_2^2 = 10^{-13} \text{ h}^{-3}$

---

# Literaturverzeichnis

- Ackermann, J. (1983). *Abtastregelung*. Springer-Verlag.
- Akhrif, O. und G. L. Blankenship (1988). Computer algebra algorithms for nonlinear control. In: *Advanced Computing Concepts and Techniques in Control Engineering* (M.J. Denham and A.J. Laub, Eds.). Springer-Verlag. pp. 53–80.
- Aranda-Bricaire, E. und J.-B. Pomet (1995). Some explicit conditions for a control system to be feedback equivalent to extended Goursat normal form. In: *Proc. 3rd IFAC-Symposium NOLCOS '95, Lake Tahoe/USA*. pp. 535–540.
- Baumann, W. T. (1988). Feedback control of multiinput nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Trans. Automat. Control* **33**, 193–197.
- Baumann, W. T. und W. J. Rugh (1986). Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Trans. Automat. Control* **31**, 40–46.
- Besançon, G. und G. Bornard (1995). Performance and limitations of symbolic computation in nonlinear analysis and control: An example using Mathematica. In: *Proc. IFAC Conference System Structure and Control, Nantes/France*. pp. 617–622.
- Birk, J. (1992). Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben. Dissertation. VDI-Fortschritt-Berichte Nr.8/294, VDI-Verlag.
- Birk, J. und M. Zeitz (1988). Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems. *Int. J. Control* **47**, 1823–1836.
- Birk, J. und M. Zeitz (1991). Program for symbolic and rule-based analysis and design of nonlinear systems. In: *Algebraic Computing in Control. Proc. of the first European Conference. Lectures Notes in Control and Information Sciences 165* (G. Jacob and F. Lamnabhi-Lagarrigue, Eds.). Springer-Verlag. pp. 115–119.
- Bitauld, L., M. Fliess und J. Lévine (1997). A flatness based control synthesis of linear systems and application to windshield wipers. In: *Proc. 4th European Control Conference ECC '97, Brussels/Belgium*. TH-A-I 3.
- Charlet, B., J. Lévine und R. Marino (1989). On dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters* **13**, 143–151.

- Charlet, B., J. Lévine und R. Marino (1991). Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control and Optim.* **29**, 38–57.
- Chelouah, A., E. Delaleau, P. Martin und P. Rouchon (1996). Differential flatness and control of induction motors. In: *Proc. Symposium on Control, Optimization and Supervision "Computational Engineering in Systems Applications" IMACS Multiconference, Lille/France, July 9-12, 1996*. pp. 80–85.
- Chen, H., A. Kremling und F. Allgöwer (1995). Nonlinear predictive control of a CSTR benchmark problem. In: *Proc. 3rd European Control Conference ECC '95, Roma/Italy* (Isidori, A. et al., Ed.). pp. 3247–3252.
- D'Andrea, B. und J. Lévine (1986). C. a. d. for nonlinear systems decoupling, perturbations rejection and feedback linearization with applications to the dynamic control of a robot arm. In: *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory* (M. Fliess and M. Hazewinkel, Eds.). Reidel. pp. 545–572.
- de Jager, B. (1995). The use of symbolic computation in nonlinear control: Is it viable?. *IEEE Trans. Automat. Control* **40**, 84–89.
- De Luca, A. (1988). Dynamic control of robots with joint elasticity. In: *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Philadelphia, Pennsylvania/USA*. pp. 152–158.
- Delaleau, E. und J. Rudolph (1995). Decoupling and linearization by quasi-static feedback of generalized states. In: *Proc. 3rd European Control Conference ECC '95, Roma/Italy* (Isidori, A. et al., Ed.). pp. 1069–1074.
- Delaleau, E. und M. Fliess (1992). Algorithme de structure, filtrations et découplage. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **315**, 101–106.
- Fliess, M. (1989). Généralisations non linéaires de la forme canonique de commande et linéarisation par bouclage. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **308**, 377–379.
- Fliess, M. (1990). Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Automat. Control* **35**, 994–1001.
- Fliess, M. (1991). Some remarks on gain scheduling. In: *Proc. 1st European Control Conference ECC '91, Grenoble/France*. pp. 177–181.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon (1992a). On differentially flat nonlinear systems. In: *Nonlinear Control Systems Design* (M. Fliess, Ed.). Pergamon Press. pp. 408–412.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon (1992b). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **315**, 619–624.



- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon (1993a). Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **317**, 981–986.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon (1995a). Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. In: *Proc. 3rd European Control Conference ECC '95, Roma/Italy* (Isidori, A. et al., Ed.). pp. 1882–1887.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon (1995b). Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *Int. J. Control* **61**, 1327–1361.
- Fliess, M., J. Lévine und P. Rouchon (1993b). Generalized state variable representation for a simplified crane description. *Int. J. Control* **58**, 277–283.
- Fliess, M. und J. Rudolph (1996). Local “tracking observers” for flat systems. In: *Proc. Symposium on Control, Optimization and Supervision “Computational Engineering in Systems Applications” IMACS Multiconference, Lille/France, July 9-12, 1996*. pp. 213–217.
- Fliess, M. und T. Glad (1993). *An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control*. pp. 223–268. In: Trentelman, H. L. and Willems, J. C. (Eds.): *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, Birkhäuser.
- Föllinger, O. (1978). Entwurf zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. *Regelungstechnik* **6**, 189–196.
- Föllinger, O. (1985). *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig-Verlag.
- Frese, F. (1992). Untersuchungen zum Einfluß der Substrat- und Precursorkonzentrationen auf die Penicillinbildung mit Hilfe eines modellgestützten Meßverfahrens. Dissertation. Technische Universität Berlin.
- Freund, E. (1971). *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Springer-Verlag.
- Gardner, R. B. und W.F. Shadwick (1992). The GS algorithm for exact linearization to Brunovský canonical form. *IEEE Trans. Automat. Control* **37**, 224–230.
- Gauthier, Mitchell & (1991). *Advanced Continuous Simulation Language – Reference Manual*. MGA Inc.
- Gelb, A. (1976). *Applied Optimal Control*. M.I.T. Press.
- Gilles, E. D. (1987). Modellgestützte Prozeßleittechnik in der verfahrenstechnischen Produktion. *Chem.-Ing.-Techn.* **59**, 715–726.
- Hauser, J. (1991). Nonlinear control via uniform system approximation. *Systems Control Letters* **17**, 154–154.

- Hauser, J. (1992). Higher order approximate feedback linearization. In: *Proc. 2nd IFAC-Symposium NOLCOS '92, Bordeaux/France* (M. Fliess, Ed.). Bordeaux/France. pp. 37–42.
- Hilbert, D. (1912). Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **73**, 95–108.
- Hunt, L. R., R. Su und G. Meyer (1983). Design for multi-input nonlinear systems. In: *Differential Geometric Control Theory* (R.W. Brockett, Ed.). Birkhäuser. pp. 258–298.
- Hunt, L. R. und J. Turi (1993). A new algorithm for constructing approximate transformations for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control* **38**(10), 1553–1556.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. 3rd ed. Springer-Verlag.
- Isidori, A. Krener, A. J. (1982). On feedback equivalence of nonlinear systems. *Systems Control Letters* **2**, 118–121.
- Jacubczyk, B. und W. Respondek (1980). On linearization of control systems. *Bull. Acad. Polonaise Sci. Ser. Sci. Math.* **28**, 517–522.
- Kailath, Th. (1980). *Linear Systems*. Prentice-Hall.
- Kamke, E. (1965). *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen – Band 2: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig.
- Kasinski, A. und J. Lévine (1983). A fast graph theoretic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems. In: *Lect. Notes in Contr. Inform. Sci., Vol. 63, Part II* (Fuhrmann, Ed.). Springer-Verlag. pp. 550–563.
- King, R. (1992). *Mathematische Modelle myzelförmig wachsender Mikroorganismen* VDI-Fortschritt-Berichte Nr.17/103. VDI-Verlag.
- Klatt, K.-U., S. Engell, A. Kremling und F. Allgöwer (1995). Testbeispiel: Rührkesselreaktor mit Parallel- und Folgereaktion. In: *Entwurf nichtlinearer Regelungen* (S. Engell, Ed.). Oldenbourg-Verlag. pp. 425–432.
- Klatt, K.-U. und S. Engell (1993). Kontinuierlicher Rührkesselreaktor mit Neben- und Folgereaktion, VDI-Berichte, Nr. 1026. In: *Nichtlineare Regelung – Methoden, Werkzeuge, Anwendungen*. VDI-Verlag. pp. 101–108.
- Klatt, K.-U. und S. Engell (1995). Nichtlinearer Reglerentwurf mit Gain-Scheduling Techniken. In: *Entwurf nichtlinearer Regelungen* (S. Engell, Ed.). Oldenbourg-Verlag. pp. 93–121.
- Krener, A. (1987). Normal forms for linear and nonlinear systems. *Cont. Math.* **68**, 157–189.
- Krener, A.J. (1990). Nonlinear controller design via approximate normal forms. In: *Signal Processing* (F.A. Grünbaum, Ed.). Springer-Verlag. pp. 139–154.

- Krener, A.J., A. Isidori und W. Respondek (1983). Partial and robust linearization by feedback. In: *Proc. 22nd IEEE CDC, San Antonio, Texas*. pp. 126–130.
- Lévine, J., J. Lottin und J.-C Ponsart (1996). A nonlinear approach to the control of magnetic bearings. *IEEE Trans. Control Systems Technology* **4**, 524–544.
- Marino, R. (1986). On the largest feedback linearizable subsystem. *Systems Control Letters* **6**, 345–351.
- Marino, R., W. M. Boothby und D. L. Elliott (1985). Geometric properties of linearizable control systems. *Math. Systems Theory* **18**, 97–123.
- Martin, P. (1992). *Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats*. École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Thèse de Doctorat.
- Martin, P., S. Devasia und B. Paden (1995). A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft. *Automatica* **32**, 101–107.
- Martin, P. und P. Rouchon (1993). Systems without drift and flatness. In: *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications* (Helmke, U. et al., Ed.). Vol. 2. Akademie Verlag. New York. pp. 347–348.
- Martin, P. und P. Rouchon (1996). Flatness and sampling control of induction motors. In: *Proc. 13th IFAC World Congress '96, San Francisco, USA*. pp. 389–394.
- Martin, Ph., R. M. Murray und P. Rouchon (1997). *Flat Systems*. pp. 211–264. In: Bastin, G. and Gevers, M. (Eds.): Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference ECC '97, Brussels/Belgium.
- Mullhaupt, P., B. Srinivasan, J. Lévine und D. Bonvin (1997). A toy more difficult to control than the real thing. In: *Proc. 4th European Control Conference ECC '97, Brussels/Belgium*. FR-M-A 6.
- Murray, R. M. (1992). Applications and extensions of Goursat normal form to control of nonlinear systems. In: *Proc. 32nd IEEE CDC, San Antonio, Texas*.
- Nijmeijer, H. und A. J. van der Schaft (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.
- Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. 2nd ed. Springer-Verlag.
- Phelps, A. R. und A. J. Krener (1988). Computation of observer normal form using MACSYMA. In: *Analysis and Control of Nonlinear Systems* (C. Byrnes, C. Martin and R. Seaks, Eds.). North-Holland. pp. 475–482.
- Piechottka, U. (1989). Über die Steuerbarkeit bilinearer Systeme. Dissertation. VDI-Fortschritt-Berichte Nr.8/197, VDI-Verlag.

- Pomet, J.-B. (1995). A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. In: *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions, Banach Center Publications, Inst. of Mathematics, Polish Academy of Sciences*. Vol. 32. pp. 319–339.
- Pomet, J.-B. (1997). On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs. *ESAIM : Contrôle, Optimisation et Calcul des Variations*. To appear.
- Reboulet, C. und C. Champetier (1984). A new method for linearizing non-linear systems: The pseudolinearization. *Int. J. Control* **40**, 631–638.
- Respondek, W. (1990). *Right and left invertibility of nonlinear control systems*. pp. 133–176. In: Sussmann, H. J. (Editor): *Nonlinear Control Theory*, Marcel Dekker.
- Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz (1995a). A procedure towards linearizing dynamic feedback. In: *Proc. 3rd IFAC-Symposium NOLCOS '95, Lake Tahoe/USA*. pp. 303–308.
- Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz (1995b). Flatness based control of a chemical reactor model. In: *Proc. 3rd European Control Conference ECC '95, Roma/Italy* (Isidori, A. et al., Ed.). pp. 637–642.
- Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz (1996a). Controlling a chemical reactor model using its flatness. In: *Proc. 13th IFAC World Congress '96, San Francisco, USA*. pp. 383–388.
- Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz (1996b). Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model. *Automatica* **32**, 1433–1439.
- Rothfuß, R. und M. Zeitz (1995). *Analyse nichtlinearer Systeme*. pp. 3–22. In: Engell, S. (Editor): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. Oldenbourg-Verlag.
- Rothfuß, R. und M. Zeitz (1996). A toolbox for symbolic nonlinear feedback design. In: *Proc. 13th IFAC World Congress '96, San Francisco, USA*. pp. 283–288.
- Rouchon, P. (1994). Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* **4**, 1–14.
- Rouchon, P., M. Fliess, J. Lévine und P. Martin (1993). Flatness and motion planning: the car with  $n$  trailers. In: *Proc. 2nd European Control Conference ECC '93, Groningen/The Netherlands* (J.W. Nieuwenhuis, C. Praagman and H.L. Trentelman, Eds.). pp. 1518–1522.
- Rudolph, J. (1993). A canonical form under quasi-static feedback. In: *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications* (Helmke, U. et al., Ed.). Vol. 2. Akademie-Verlag. New York. pp. 445–448.

- Rudolph, J. (1994). Viewing input-output system equivalence from differential algebra. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* **4**, 353–383.
- Rudolph, J. (1995). Well formed dynamics under quasi-static state feedback. In: *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions, Banach Center Publications, Inst. of Mathematics, Polish Academy of Sciences*. Vol. 32. pp. 349–359.
- Rudolph, J. (1996a). Duality in time-varying linear systems: A module theoretic approach. *Linear Algebra and its Applications* **245**, 83–106.
- Rudolph, J. (1996b). Flatness of some examples of coupled chemical reactors. In: *Proc. Symposium on Control, Optimization and Supervision "Computational Engineering in Systems Applications" IMACS Multiconference, Lille/France, July 9-12, 1996*. pp. 206–210.
- Rudolph, J., R. Rothfuß und J.-B. Pomet (1995). A generalized controller form for linearization by quasi-static state feedback. In: *Proc. IFAC Conference System Structure and Control, Nantes (France)*. pp. 143–148.
- Sampei, M., H. Kiyota und M. Ishikawa (1995). Time-state control form and its application to a non-holonomic space robot. In: *Proc. 3rd IFAC-Symposium NOLCOS '95, Lake Tahoe/USA*. pp. 759–764.
- Schaffner, J. (1997). Zum Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme mit mehreren Meßgrößen. Dissertation. VDI-Fortschritt-Berichte Nr.8/620, VDI-Verlag.
- Shadwick, W. (1990). Absolute equivalence and dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters* **15**, 35–39.
- Sira-Ramírez, H., R. Ortega, P. Martin, P. Rouchon und R. Márquez (1996). Regulation of DC-to-DC power converters: A differential flatness approach. In: *Proc. 13th IFAC World Congress '96, San Francisco, USA*. pp. 43–48.
- Slotine, J. J. und W. Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall.
- Sluis, W. M. (1992). Absolute Equivalence and its Applications to Control Theory. Dissertation. University of Waterloo, Ontario, Canada.
- Sommer, R. (1980). Control design for multivariable non-linear time-varying systems. *Int. J. Control* **31**, 883–891.
- Sommer, R. (1981). Synthese nichtlinearer, zeitvarianter Systeme mit Hilfe einer kanonischen Form. Dissertation. VDI-Fortschritt-Berichte Nr.8/36, VDI-Verlag.
- Sussmann, H. J. und V. Jurdjevic (1972). Controllability of nonlinear systems. *Journal of Differential Equations* **12**, 95–116.
- The Mathworks Inc. (1995). *MATLAB user's guide*.

- van Nieuwstadt, M. J., M. Ratinam und R. M. Murray (1993). Differential flatness and absolute equivalence. In: *Proc. 33rd IEEE CDC, Lake Buena Vista, Florida*. pp. 326–332.
- van Nieuwstadt, M. J. und R. M. Murray (1996). Fast mode switching for a thrust vectored aircraft. In: *Proc. Symposium on Control, Optimization and Supervision "Computational Engineering in Systems Applications" IMACS Multiconference, Lille/France, July 9-12, 1996*. pp. 86–91.
- Wang, J. und W. J. Rugh (1989). On the pseudo-linearization problem for nonlinear systems. *Systems Control Letters* **12**, 161–167.
- Wolfram, S. (1991). *Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison Wesley.
- Zeitz, M. (1987). The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems Control Letters* **19**, 149–156.
- Zeitz, M. (1990). Canonical forms for nonlinear systems. In: *Nonlinear Control Systems Design* (A. Isidori, Ed.). Pergamon Press. pp. 33–38.

## Vom Autor betreute Studien- und Diplomarbeiten

- R. Häußler: Entkopplung und Inversion linearer Systeme: Untersuchung algebraischer Ansätze bezüglich Rechnerimplementierung, 1993.
- J. Löffler: Rechnergestützter Entwurf linearer  $H_\infty$ -Regler, 1994.
- A. Banerjee: Entwurf schaltender Regler für ein Rührkesselreaktormodell, 1994.
- A. Braun: Numerische Lösung von Differential-Algebra-Systemen mit der Simulationssprache ACSL, 1994.
- Chr. Zimmermann: Entwurf nichtlinearer Regler und Beobachter mit näherungsweise Normalformen, 1994.
- A. Fritz: Nichtlineare Regelung einer biologischen Abwasserbehandlungsanlage, 1995.
- R. Nitsche: Entwurf nichtlinearer Regler für einen hydraulischen Antrieb, 1995.
- R. Schäffler: Reduktion der Ordnung von Eingangsableitungen bei nichtlinearen Zustandsdarstellungen, 1995.
- R. Kübler: Index-Reduktion bei Differential-Algebra-Modellgleichungen mit dem Computer-Algebra-System Mathematica, 1995
- V. Hagenmeyer: Nichtlineare Regelung und Beobachtung eines Fedbatch-Bioreaktors, 1996.
- U. Vollmer: Flachheitsbasierte Regelung eines Bioreaktors, 1996.
- P. Menold: Flachheitsbasierte Regelung einer Rührkesselkaskade, 1996.
- X. Yan: Rechnergestützter Entwurf exakt linearisierender Zustandsrückführungen, 1996.





# Bereits veröffentlicht wurden in der Reihe 8 „Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik“ u. a.

		DM
Nr. 640	A. HARDER: Hochgeschwindigkeits-Gaschromatograph-Massenspektrometer zur Vor-Ort-Analyse von organischen Schadstoffen. 1997. ISBN 3-18-364008-2	85,00
Nr. 639	R. KUTZNER: Integrierte Regelung eines Gasturbosatzes unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten und veränderlichen Netzparametern. 1997. ISBN 3-18-363908-4	110,00
Nr. 638	T. EDLINGER: Hierarchische Steuerung für einen mobilen Roboter zur autonomen Erkundung seiner Einsatzumgebung. 1997. ISBN 3-18-363808-8	105,00
Nr. 637	H. BOCHE: Analyse von Verfahren zur Abstratenreduktion und ihre Anwendbarkeit in der Nachrichten- und Meßtechnik. 1997. ISBN 3-18-363708-1	64,00
Nr. 636	M. JELALI: Über die nichtlineare Approximation und Zustandsschätzung zeitkontinuierlicher dynamischer Prozesse. 1997. ISBN 3-18-363608-5	85,00
Nr. 635	R. LIU: Verarbeitung von unregelmäßig verteilten Meßwerten thermodynamischer Zustandsgrößen. 1997. ISBN 3-18-363508-9	54,00
Nr. 634	T. LAUX: Piezo-Aktuatoren mit großem Stellweg in aktiven Lagerungen. 1997. ISBN 3-18-363408-2	81,00
Nr. 633	M. KLUWE: Ereignisdiskrete Beobachter zur modellbasierten Prozeßführung. 1997. ISBN 3-18-363308-6	103,00
Nr. 632	B. KÖPPEN-SELIGER: Fehlerdiagnose mit künstlichen neuronalen Netzen. 1997. ISBN 3-18-363208-X	82,00
Nr. 631	K. REIF: Steuerung von nichtlinearen Systemen mit Homotopie-Verfahren. 1997. ISBN 3-18-363108-3	66,00
Nr. 630	N. FABRITZ: Ein offenes Automatisierungssystem für einen mehrgliedrigen elastischen Manipulator. 1997. ISBN 3-18-363008-7	104,00
Nr. 629	F. WIEGAND: Robuste Regelung nichtlinearer Prozesse nach der $\mu$ -Analyse und -Synthese. 1997. ISBN 3-18-362908-9	111,00
Nr. 628	W. SUN: Optimale Steuerung verteilter, ereignisdiskreter Systeme. 1997. ISBN 3-18-362808-2	93,00
Nr. 627	N. KIUPEL: Fuzzy-Logik-basierte Fehlerdiagnose am Beispiel eines anaeroben Abwasserreinigungsprozesses. 1997. ISBN 3-18-362708-6	93,00
Nr. 626	M. RIEDMILLER: Selbständig lernende neuronale Steuerungen. 1997. ISBN 3-18-362608-X	117,00
Nr. 625	F. KRATZ: Orts- und Frequenzraumverfahren zur quantitativen Analyse optischer Oberflächen. 1997. ISBN 3-18-362508-3	88,00
Nr. 624	B. GEYER: Dezentrale prädiktive Regelung von Handhabungsgeräten. 1997. ISBN 3-18-362408-7	88,00
Nr. 623	H. NOLZEN: Parameteradaptive Regelung von Fräsprozessen. 1997. ISBN 3-18-362308-0	98,00
Nr. 622	D. SCHOLZ: Mikromechanische Vibrationssensoren mit Faserauskopplung. 1997. ISBN 3-18-362208-4	92,00